

PGS. TS. NGUYỄN QUỐC TRUNG

XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ

Tập 2

CHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP
VÀ THIẾT KẾ CÁC BỘ LỌC SỐ



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

PGS. TS. NGUYỄN QUỐC TRUNG

XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ

TẬP 2

(CHƯƠNG TRÌNH TỔNG HỢP VÀ THIẾT KẾ CÁC BỘ LỌC SỐ)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản: TS. PHẠM VĂN DIỄN
Biên tập: NGUYỄN THỊ NGỌC KHUÊ
Thiết kế bìa: ĐẶNG NGỌC QUANG

In 500 cuốn, khổ 19 x 27 cm, tại Xưởng in NXB Văn hóa dân tộc.

Số đăng ký KHXB: 82-2008/CXB/282.2-02/KHKT, cấp ngày 14-1-2008.

Quyết định xuất bản số: 290/QĐXB-NXB KHKT, cấp ngày 20-10-2008

In xong và nộp lưu chiểu tháng 11/2008.

LỜI GIỚI THIỆU

Cuộc cách mạng khoa học và công nghệ đang diễn ra một cách sôi động chưa từng thấy như hiện nay trên toàn thế giới thúc đẩy loài người nhanh chóng bước sang một kỷ nguyên mới. Đó là kỷ nguyên của nền văn minh dựa trên cơ sở công nghiệp trí tuệ. Mở đầu cho cuộc cách mạng khoa học và công nghệ lần này có thể được đánh dấu bằng sự ra đời và phát triển ồ ạt của máy tính cũng như các phương tiện xử lý thông tin khác, đặc biệt là các hệ thống xử lý song song với tốc độ ngày càng cao. Cùng với sự phát triển nhanh chóng các công cụ xử lý tín hiệu số cũng như các nhu cầu ứng dụng các công cụ này vào mọi lĩnh vực hoạt động của xã hội loài người đòi hỏi sự phát triển đồng bộ các phương pháp xử lý tín hiệu hiện đại. Đặc biệt phương pháp xử lý số này phải áp dụng có hiệu quả trong các lĩnh vực thông tin liên lạc, phát thanh truyền hình, tự động điều khiển và các ngành công nghệ khác.

Để giúp tìm hiểu một cách cơ bản vấn đề này, chúng tôi xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc cuốn sách **“Xử lý tín hiệu và lọc số”** của PGS.TS. Nguyễn Quốc Trung. Cuốn sách đã được trình bày một cách hệ thống từ những kiến thức cơ bản về tín hiệu và các phương pháp tổng hợp phân tích các hệ thống rời rạc đến những phương pháp xử lý số tín hiệu dựa trên các công cụ toán học và vật lý hiện đại. Đặc biệt cuốn sách dành phần lớn cho việc phân tích và tổng hợp các bộ lọc số làm cơ sở cho việc ứng dụng trong các ngành công nghệ khác nhau.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách **“Xử lý tín hiệu và lọc số”** không những giúp ích tốt cho sinh viên các ngành công nghệ mà cũng là tài liệu tham khảo tốt cho NCS cũng như các chuyên gia đang hoạt động trong các lĩnh vực có liên quan.

GS. TS. Nguyễn Xuân Quỳnh

Viện trưởng Viện Điện tử - Tin học và Tự động hóa.

LỜI NÓI ĐẦU

Ngay sau khi xuất bản cuốn “Vi điện tử số” tập 1, Trung tâm nghiên cứu phát triển Điện tử - Tin học - Viễn thông - hợp tác giữa trường Đại học Bách khoa Hà Nội và Tổng công ty Điện tử - Tin học Việt Nam đã nhận được lời mời cùng xây dựng chương trình hiện đại hóa giáo trình và giáo cụ ngành Điện tử - Tin học - Viễn thông của Trung tâm Đào tạo Bưu chính Viễn thông I thuộc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông và khoa Thông tin Tin học trường Đại học dân lập Đông Đô. Chúng tôi đã tổ chức Hội thảo khoa học về chương trình số hóa kỹ thuật Điện tử - Viễn thông, trước hết trong lĩnh vực giảng dạy của trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông... và khoa Thông tin Tin học trường Đại học dân lập Đông Đô. Trong buổi hội thảo chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của các giảng viên và các nhà khoa học giàu kinh nghiệm. Hội thảo đã khẳng định việc hiện đại hóa trong lĩnh vực giảng dạy là cần thiết và rất cấp bách.

Ba cuốn sách: “Vi điện tử số” và “Xử lý tín hiệu và lọc số” tập 1 và tập 2 nằm trong bộ sách “Xử lý thông tin” nhằm mục đích này.

Chúng ta đều biết rằng việc số hóa các thiết bị Điện tử - Viễn thông đã và đang được thực hiện rất mạnh mẽ trên toàn thế giới cũng như ở Việt Nam. Chính vì vậy mà xử lý tín hiệu và lọc số đã trở thành một ngành khoa học và kỹ thuật. Sự phát triển rất nhanh chóng này khởi đầu từ sự ra đời của các mạch vi điện tử cỡ lớn VLSI (Very - Large - Scale Integration) là nền tảng cho sự phát triển đến chóng mặt của các phần cứng số (Digital hardware) chuyên dụng cũng như máy tính số (Digital Computer) với giá thành rẻ hơn, kích thước nhỏ hơn, tốc độ cao hơn.

Để tiếp cận với ngành khoa học hiện đại này chúng ta cần phải được trang bị những kiến thức cơ bản không thể thiếu được của xử lý tín hiệu và lọc số.

Giáo trình (XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ) này đã được dùng để giảng dạy nhiều năm cho học sinh chính khóa, cao học, nghiên cứu sinh của trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Học viện Viễn thông ORAN (Institut des Télécommunication d'ORAN), Đại học Tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Bách khoa Đà Nẵng, Trung tâm đào tạo Bưu chính Viễn thông I và II, Viện Khoa học kỹ thuật Bưu điện thuộc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, Cục tác chiến Điện tử Bộ Quốc phòng, Đại học dân lập Đông Đô, Đại học dân lập Phương Đông...

Cuốn sách (XỬ LÝ TÍN HIỆU VÀ LỌC SỐ) chia thành 4 tập.

Tập 1: đề cập những vấn đề cơ bản của xử lý tín hiệu bao gồm biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền biến số n , trong miền z , trong miền tần số liên tục ω , trong miền tần số rời rạc ω ($\omega = 2\pi f$) và trong miền tần số rời rạc ω_k (hoặc miền k).

Tập 2: gồm các vấn đề về tổng hợp và thiết kế các loại bộ lọc số đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR) và đáp ứng xung chiều dài vô hạn (IIR).

Tập 3: bao gồm các kiến thức về cấu trúc và độ nhạy của các hệ thống số, biểu diễn hệ thống rời rạc trong không gian trạng thái lọc số nhiều nhịp, biến đổi Fourier nhanh và

cuối cùng là biến đổi Hilbert và hệ thống pha tối thiểu.

Tập 4: gồm các vấn đề về biểu diễn tín hiệu và hệ thống trong miền sóng con (Wavelet), hiệu ứng lượng tử hóa trong xử lý tín hiệu và lọc số, các phương pháp đánh giá phổ, các bộ lọc số thích nghi, tiên đoán tuyến tính và cuối cùng là xử lý đồng cấu.

Địa chỉ liên hệ:

Cơ quan: PGS. TS. Nguyễn Quốc Trung, Trưởng khoa Điện tử Viễn thông.

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, 1 Đại Cồ Việt, Hà Nội.

Tel: 04 8692242, 04 8694957, 04 6623166, 04 6623266.

Nhà riêng: Nhà A2 - 109B Trung Tự, Đống Đa, Hà Nội.

Tel: 04 8528934; DĐ: 0913231914.

E-mail: nqtrung@fpt.vn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn những lời chỉ giáo quý giá của GS. TS. Nguyễn Xuân Quỳnh, Viện trưởng Viện Điện tử, Tin học và Tự động hóa và GS. TS. Phan Anh, Giám đốc Trung tâm nghiên cứu và phát triển Điện tử - Tin học - Viễn thông, để cuốn sách được hoàn thành với chất lượng cao hơn.

Tác giả

Nguyễn Quốc Trung

Chương 5. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI HỮU HẠN

5.1. MỞ ĐẦU

5.1.1. LỜI NÓI ĐẦU

Chúng ta đã nghiên cứu các phương pháp chính được sử dụng trong xử lý số tín hiệu. Nhưng các phương pháp đã được nghiên cứu chỉ qua các ví dụ đơn giản và đôi khi quá lý thuyết.

Trong chương này chúng ta sẽ sử dụng các công cụ chính đã được nghiên cứu ở trên trong các trường hợp thực tế của kỹ thuật xử lý số tín hiệu. Nhưng để đơn giản hoá các phương pháp tổng hợp chúng ta chỉ giới hạn nghiên cứu các trường hợp của hệ thống tuyến tính bất biến.

Về mặt lịch sử các bộ lọc số đã tạo ra một ngành được nghiên cứu nhiều nhất trong xử lý số tín hiệu. Chúng đã được phát triển và nghiên cứu với mục đích có thể mô phỏng các bộ lọc tương tự trên máy tính điện tử. Chúng cho phép tạo ra các hiệu quả lớn và tối ưu hoá các tham số của bộ lọc trước các sự thực hiện lớn lao của chúng.

Các tiến bộ hiện nay của công nghệ mạch vi điện tử số đã làm tăng hiệu quả kinh tế của các bộ lọc số, các hệ thống số. Vì vậy việc hoàn thiện, bổ sung các kết quả đã có là rất cần thiết đối việc mô phỏng các bộ lọc số cũng như các phương pháp tổng hợp các bộ lọc số ngày càng được phát triển.

Trước khi đi vào chi tiết nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc số, chúng ta hãy định nghĩa lại thế nào là lọc số và bộ lọc số.

- Định nghĩa bộ lọc số

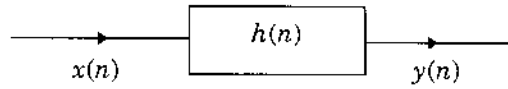
Một hệ thống dùng để làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho được gọi là bộ lọc số.

- Định nghĩa việc lọc số

Các thao tác của xử lý dùng để làm biến dạng sự phân bố tần số của các thành phần của một tín hiệu theo các chỉ tiêu đã cho nhờ một hệ thống số được gọi là sự lọc số.

5.1.2. ÔN TẬP

Một bộ lọc số là một hệ thống tuyến tính bất biến trong miền biến số n , sơ đồ khối cho trên hình 5.1.2.1.



Hình 5.1.2.1.

ở đây:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

$h(n)$: đáp ứng xung của hệ thống.

và ta đã biết rằng đáp ứng xung là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền n .

Ngoài ra hệ thống còn được biểu diễn bởi phương trình sai phân tuyến tính sau đây:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Tổng hợp tất cả các hệ số a_k và b_r sẽ biểu diễn một hệ thống tuyến tính bất biến. Tức là các hệ số a_k và b_r là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống.

Trong miền Z hệ thống được đặc trưng bởi hàm truyền đạt $H(Z)$

$$H(Z) = ZT[h(n)] = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k Z^{-k}}$$

Nếu hàm truyền đạt $H(Z)$ được đánh giá trên vòng tròn đơn vị đối với $|Z|=1$, thì chúng ta có đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$:

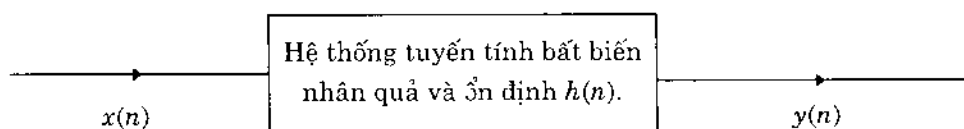
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r e^{-j\omega r}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

Quan hệ trên cho thấy rằng việc phân bố tần số của biên độ và pha của tín hiệu vào $x(n)$ được biến dạng bởi hệ thống tùy thuộc vào dạng của $H(e^{j\omega})$. Chính dạng của $H(e^{j\omega})$ đã xác định việc suy giảm hoặc khuếch đại các thành phần tần số khác nhau. Hệ thống tương ứng với $H(e^{j\omega})$ này được gọi là bộ lọc.

Vấn đề tổng quát trong lọc số là việc tạo ra một hệ thống tuyến tính bất biến. Hệ thống này có đáp ứng tần số mong muốn và có thể thực hiện được về mặt vật lý.

Để cho một hệ thống thực hiện được về mặt vật lý thì nó phải là nhân quả và ổn định. Hình 5.1.2.2 cho ta sơ đồ khối của hệ thống có thể thực hiện được về vật lý.



Hình 5.1.2.2.

Quan hệ giữa đầu vào, đầu ra và đáp ứng xung của hệ thống này phải thoả mãn điều kiện sau đây:

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$L[h(n)] = [0, \infty]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Các quan hệ này nói rằng chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ là rất quan trọng, các hệ số $h(n)$ là đặc trưng cho hệ thống.

Vì thế chúng ta có thể phân loại các hệ thống thành hai loại lớn tùy theo chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$. Hai loại này như sau:

Loại thứ nhất : Hệ thống được đặc trưng bởi đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn. Nó được gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (*FIR*), tức là $h(n)$ chỉ khác không trong một khoảng có chiều dài hữu hạn N (từ 0 đến $N-1$).

Loại thứ hai : Hệ thống được đặc trưng bởi đáp ứng xung có chiều dài vô hạn. Hệ thống được gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn, tức là $h(n)$ khác không trong một khoảng vô hạn từ 0 đến ∞ .

5.2. TỔNG QUAN

5.2.1. CÁC TÍNH CHẤT TỔNG QUÁT CỦA BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG

CHIỀU DÀI HỮU HẠN (*FIR*)

Các bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn được đặc trưng bởi hàm truyền đạt sau đây:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} \quad (5.2.1.1)$$

Tức là:

$$L[h(n)] = [0, N-1] = N$$

Như vậy điều kiện ổn định luôn luôn thoả mãn theo (5.2.1.2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |h(n)| < \infty \quad (5.2.1.2)$$

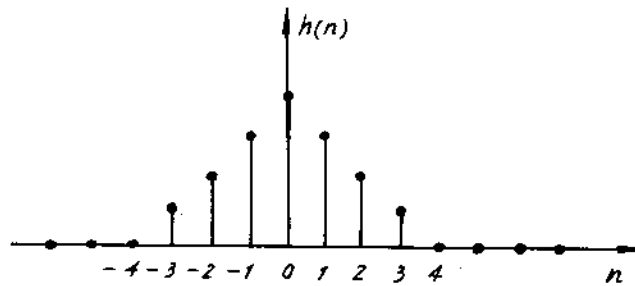
Tương tự, ta thấy rằng $H(Z)$ chỉ có các điểm cực tại gốc tọa độ của mặt phẳng Z , vậy các điểm cực này luôn nằm trong vòng tròn đơn vị cho nên hệ thống luôn ổn định. Mặt khác $H(Z)$ ở dạng một đa thức bậc $N - 1$ của Z hoặc Z^{-1} , mà các hệ số chính là các giá trị của đáp ứng xung $h(n)$.

Một thuận lợi khác đối với bộ lọc *FIR* là do chiều dài của $h(n)$ là hữu hạn nên nếu $h(n)$ là không nhân quả:

$$h(n) \neq 0 \quad \text{với } n < 0$$

thì ta có thể đưa nó về nhân quả bằng cách chuyển về gốc tọa độ (trong miền n) giá trị đầu tiên khác không của $h(n)$ mà vẫn đảm bảo $|H(e^{j\omega})|$ không thay đổi. Ví dụ 5.2.1.1 sẽ cho ta thấy rõ.

Ví dụ 5.2.1.1 : Cho $h(n)$ không nhân quả như trên hình 5.2.1.1.

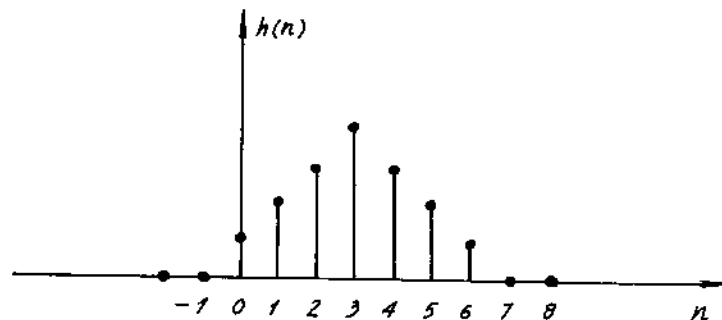


Hình 5.2.1.1.

Hãy chuyển $h(n)$ về nhân quả.

Giải :

Giá trị đầu tiên khác không của $h(n)$ là tại mẫu -3, ta sẽ dịch mẫu -3 này về gốc tọa độ, chúng ta sẽ thu được $h(n)$ nhân quả, kết quả $h(n)$ nhân quả cho trên hình 5.2.1.2.



Hình 5.2.1.2.

5.2.2. CÁC GIAI ĐOẠN TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ FIR

Về nguyên tắc tổng quát chúng ta có 4 giai đoạn.

1. Giải quyết vấn đề gần đúng để xác định các hệ số của bộ lọc thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho, cụ thể là δ_1 , δ_2 , ω_p và ω_s .
2. Chọn cấu trúc lượng tử hoá các hệ số của bộ lọc theo số bit hữu hạn cho phép.
3. Lượng tử hoá các biến của bộ lọc, tức là chọn chiều dài của từ đối với:
 - Đầu vào ;
 - Đầu ra ;
 - Các bộ nhớ trung gian.

4. Kiểm tra bằng cách mô phỏng trên máy tính xem bộ lọc cuối cùng có thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho hay không.

Trong chương này ta sẽ xét chi tiết giai đoạn một, tức là giai đoạn xác định $h(n)$ sao cho thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật.

Đối với bộ lọc số FIR chúng ta thấy có những thuận lợi là có khả năng thực hiện các bộ lọc pha tuyến tính, có khả năng nhận được nhiều tính toán khá nhỏ, nhưng lại có điều bất lợi là bậc của bộ lọc khá cao để nhận được bộ lọc có cùng chỉ tiêu kỹ thuật so với các bộ lọc loại khác.

5.3. CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH

5.3.1. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA PHA (ĐÁP ỨNG PHA)

Cái lợi cơ bản nhất của bộ lọc FIR là khi tính toán $h(n)$ là khả năng tính toán theo bộ lọc pha tuyến tính. Tức là chúng ta có thể gia công bộ lọc FIR bằng cách coi đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của nó có pha tuyến tính. Cũng vậy, tín hiệu qua dải thông của bộ lọc sẽ xuất hiện chính xác ở đầu ra với độ trễ đã cho, bởi vì chúng ta đã biết chính xác đáp ứng pha của nó.

Giả sử $h(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc FIR xác định với các mẫu $n = 0, 1, \dots, N - 1$, tức là:

$$L[h(n)] = [0, N - 1] = N$$

Hàm truyền đạt của nó như sau:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} = h(0) + h(1)Z^{-1} + \dots + h(N-1)Z^{-(N-1)}$$

Đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos \omega n + j \left[- \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin \omega n \right]$$

hoặc là:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg [H(e^{j\omega})]$$

Ta thấy rằng $H(e^{j\omega})$ là tuần hoàn với chu kỳ 2π , tức là:

$$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega + 2\pi m)})$$

Nếu $h(n)$ là thực thì theo tính chất của biến đổi Fourier đối với tín hiệu rời rạc ta có:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |H(e^{-j\omega})| \\ \arg [H(e^{j\omega})] &= -\arg [H(e^{j\omega})] \end{aligned}$$

hoặc:

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

Vậy ta có thể nói :

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &: \text{ là hàm chẵn (đối xứng).} \\ \varphi(\omega) &: \text{ là hàm lẻ (phản đối xứng).} \end{aligned}$$

Do $H(e^{j\omega})$ là tuần hoàn với chu kỳ 2π vậy chúng ta chỉ nghiên cứu $|H(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$, trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ (hoặc là $-\pi \leq \omega \leq \pi$) và trong trường hợp đặc biệt nếu $h(n)$ là thực thì $|H(e^{j\omega})|$ là hàm chẵn và $\varphi(\omega)$ là hàm lẻ trong khoảng một chu kỳ, vì vậy ta chỉ cần nghiên cứu $H(e^{j\omega})$ trong khoảng $0 \leq \omega \leq \pi$.

Nhưng ở chương 3 ta đã thấy rằng khi cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc thực tế ($\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$) thì cho theo $|H(e^{j\omega})|$, nhưng cách biểu diễn pha $\varphi(\omega)$ lại bất tiện vì $H(e^{j\omega})$ có thể lấy giá trị âm hoặc dương nhưng $|H(e^{j\omega})|$ bao giờ cũng lấy giá trị dương. Vì vậy để đảm bảo thuận lợi cho việc thiết kế bộ lọc FIR pha tuyến tính chúng ta sẽ dùng cách biểu diễn dưới dạng độ lớn $A(e^{j\omega})$ và pha $\theta(\omega)$.

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}$$

Cách biểu diễn pha $\theta(\omega)$ sẽ cho ta đơn giản hoá phương pháp nghiên cứu pha.

Dưới đây chúng ta sẽ xét chi tiết các đặc điểm của bộ lọc FIR pha $\theta(\omega)$ tuyến tính.

5.3.2. BỘ LỌC SỐ FIR PHA TUYẾN TÍNH

a) Điều kiện pha tuyến tính

Chúng ta đã nghiên cứu hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả và ổn định, bây giờ chúng ta sẽ có thêm một điều kiện ràng buộc nữa về pha, đấy là điều kiện pha tuyến tính. Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ sẽ được biểu diễn ở dạng sau:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \\ \theta(\omega) &= \beta - \alpha\omega \quad \quad \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned}$$

Ta biết rằng thời gian lan truyền tín hiệu τ được tính như sau:

$$\tau = \frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (5.3.2.1)$$

Vậy trong trường hợp này

$$\tau = -\alpha$$

Vậy hằng số α sẽ biểu diễn thời gian truyền tín hiệu.

Chúng ta sẽ nghiên cứu hai trường hợp

$$\begin{aligned} 1- \quad \quad \quad \beta &= 0 \Rightarrow \theta(\omega) = -\alpha\omega \quad \quad \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \\ 2- \quad \quad \quad \beta &\neq 0 \Rightarrow \theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad \quad \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \end{aligned} \quad (5.3.2.2)$$

b) Trường hợp 1

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega}) e^{-j\alpha\omega} = A(e^{j\omega}) [\cos \alpha\omega - j \sin \alpha\omega]$$

Ngoài ra $H(e^{j\omega})$ có thể tính theo $FT[h(n)]$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos \omega n - j \sin \omega n]$$

Vậy ta có:

$$A(e^{j\omega}) \cos \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n$$

$$A(e^{j\omega}) \sin \alpha\omega = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg} \alpha\omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n} \quad (5.3.2.3)$$

Vì $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$, ta có:

$$\text{tg} \alpha\omega = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega n} \quad (5.3.2.4)$$

Đến đây chúng ta lại có hai trường hợp $\alpha = 0$ và $\alpha \neq 0$

Nếu $\alpha = 0$

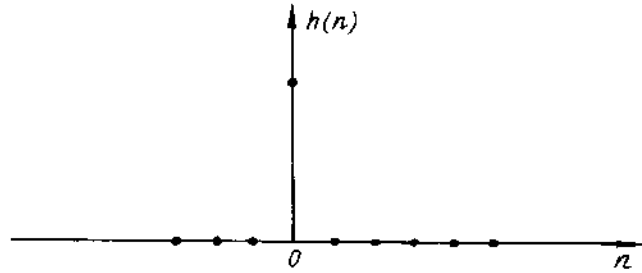
$$\text{tg} 0 = 0 = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos \omega n}$$

$$\Rightarrow \quad h(n) = 0 \text{ với } n \neq 0 \text{ và giá trị } h(0) \neq 0$$

chọn tùy ý

$$h(n) \begin{cases} \neq 0 & n = 0 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.3.2.5)$$

Hình 5.3.2.1 sẽ cho ta một ví dụ về cách chọn $h(n)$.



Hình 5.3.2.1.

Đây là trường hợp $h(n)$ tầm thường, không cho chúng ta hiệu quả gì cả, vậy ta bỏ qua không xét nữa.

Nếu $\alpha \neq 0$

$$\frac{\sin \alpha \omega}{\cos \alpha \omega} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}$$

$$\sin \alpha \omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n = \cos \alpha \omega \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n$$

Chúng ta có thể viết lại quan hệ này dưới dạng sau:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) [\cos \omega n \sin \alpha \omega - \sin \omega n \cos \alpha \omega] = 0$$

Vậy ta có.

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\alpha - n)\omega] = 0 \quad (5.3.2.6)$$

Phương trình (5.3.2.6) có dạng của một chuỗi Fourier, chúng ta có thể tìm thấy một nghiệm của nó và ta có thể đảm bảo nghiệm này là duy nhất. Nghiệm có dạng như sau:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (5.3.2.7)$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Chúng ta sẽ dễ dàng kiểm tra họ nghiệm cho bởi (5.3.2.7) bằng cách thay α và $h(n)$ vào phương trình (5.3.2.6).

Ví dụ 5.3.2.1 :

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\zeta(\omega) = -\alpha\omega$ có $N = 7$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$, $h(3) = 4$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

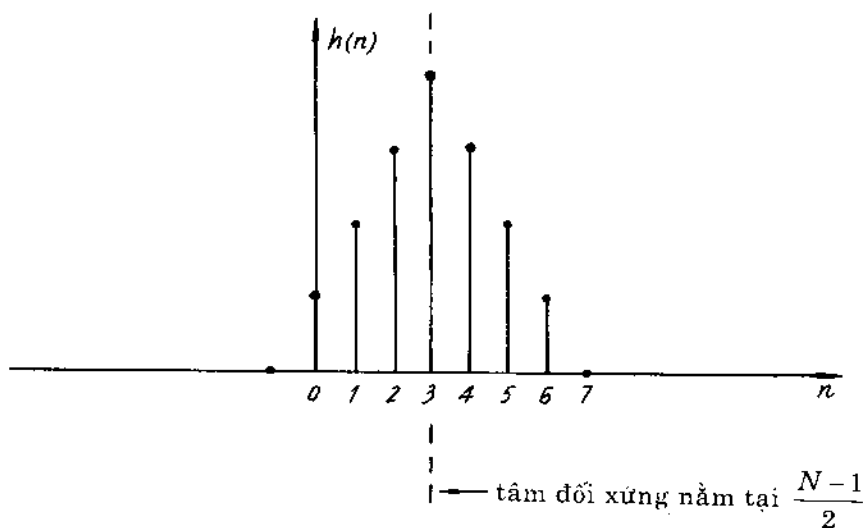
Giải :

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3$$

$$h(n) = h(6-n)$$

Vậy

$$h(0) = h(6), h(1) = h(5), h(2) = h(4) \text{ và } h(3).$$



Hình 5.3.2.2.

Ví dụ 5.3.2.2 :

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\alpha(\omega)$ có $N = 6$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$.
 Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

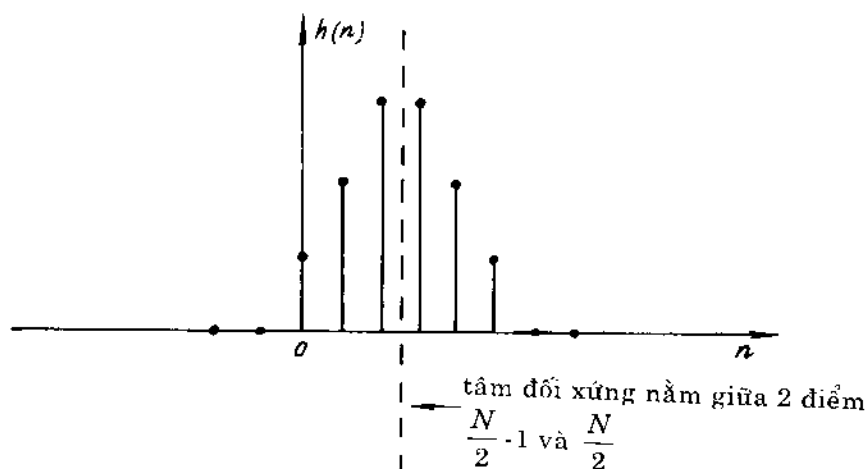
Giải:

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 2,5$$

$$h(n) = h(5-n)$$

Vậy

$$h(0) = h(5), h(1) = h(4), h(2) = h(3).$$



Hình 5.3.2.3.

Nhận xét :

- Đối với một giá trị của N , chỉ có một giá trị α đảm bảo pha tuyến tính.

- Đối với giá trị α này, đáp ứng xung $h(n)$ là đối xứng.

- Nếu N lẻ thì α là một số nguyên và tâm đối xứng của đáp ứng xung trùng với mẫu $\frac{N-1}{2}$.

- Nếu N chẵn thì α là một số không nguyên và tâm đối xứng của đáp ứng xung nằm giữa hai mẫu $\frac{N}{2} - 1$ và $\frac{N}{2}$.

Đặc điểm quan trọng nhất đối với bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính này là tính đối xứng của đáp ứng xung $h(n)$ mà sau này chúng ta sẽ có rất nhiều ứng dụng quan trọng.

c) Trường hợp 2

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$$

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} = A(e^{j\omega}) e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Chứng minh tương tự như trường hợp 1 ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\beta + (n - \alpha)\omega] = 0 \quad (5.3.2.8)$$

và nghiệm duy nhất của (5.3.2.8) như sau:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

Ví dụ 5.3.2.3 :

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$, có $N = 7$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

Giải :

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 3$$

$$h(n) = -h(6-n)$$

Vậy $h(0) = -h(6)$, $h(1) = -h(5)$, $h(2) = -h(4)$ và $h(3) = -h(3) = 0$

Đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 5.3.2.4.

Ví dụ 5.3.2.4 :

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega$ có $N = 6$, $h(0) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 3$. Hãy tìm α và vẽ $h(n)$.

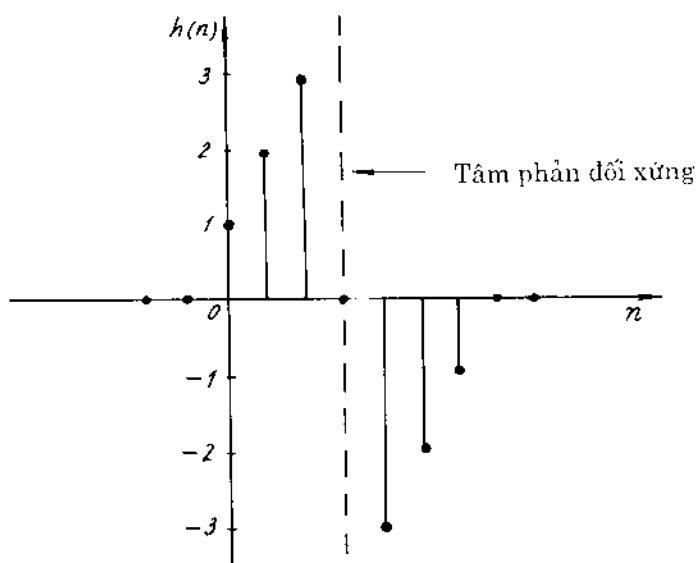
Giải :

$$\alpha = \frac{N-1}{2} = 2,5$$

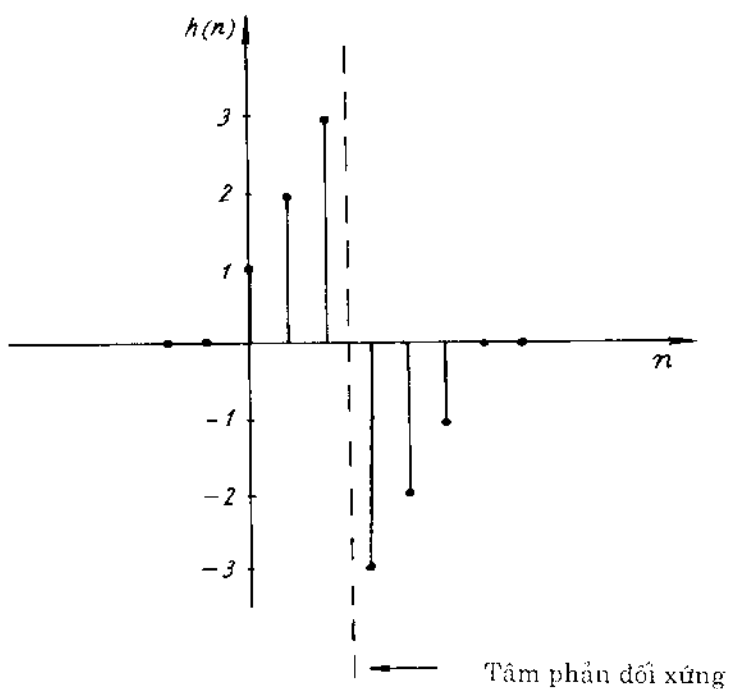
$$h(n) = -h(5-n)$$

Vậy $h(0) = -h(5)$, $h(1) = -h(4)$, $h(2) = -h(3)$

Đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 5.3.2.5.



Hình 5.3.2.4.



Hình 5.3.2.5.

Nhận xét:

- Đối với một giá trị của N , chỉ có một giá trị α đảm bảo pha tuyến tính.
- Đối với giá trị α này, đáp ứng xung $h(n)$ là phản đối xứng.

- Nếu N lẻ thì α là số nguyên và tâm phản đối xứng của $h(n)$ trùng với mẫu $\frac{N-1}{2}$, và

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0.$$

- Nếu N chẵn thì α là một số không nguyên và tâm phản đối xứng nằm giữa hai mẫu $\frac{N}{2} - 1$ và $\frac{N}{2}$.

Đặc điểm quan trọng nhất ở đây đối với bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha \omega$ là $h(n)$ phản đối xứng.

d) Tổng kết

Từ các kết quả ở trên đối với bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = \beta - \alpha \omega$ chúng ta chia nó ra làm 4 loại bộ lọc.

Bộ lọc loại 1: $h(n)$ đối xứng, N lẻ.

Bộ lọc loại 2: $h(n)$ đối xứng, N chẵn.

Bộ lọc loại 3: $h(n)$ phản đối xứng, N lẻ.

Bộ lọc loại 4: $h(n)$ phản đối xứng, N chẵn.

Cả 4 loại bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính ở trên cho phép xác định đáp ứng tần số sao cho thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc.

Dưới đây chúng ta sẽ xét chi tiết đáp ứng tần số của các loại bộ lọc này.

5.4. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA CÁC BỘ LỌC *FIR* PHA TUYẾN TÍNH

5.4.1. TRƯỜNG HỢP ĐÁP ỨNG XUNG ĐỐI XỨNG, N LẺ (BỘ LỌC *FIR* LOẠI 1)

Chúng ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}$$

Áp dụng tính đối xứng của $h(n)$ chúng ta chia tổng này ra làm 3 phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số ở thành phần thứ 3: $n = N - 1 - m$

ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{m=\frac{N-1}{2}+1}^0 h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)}$$

Sau đó áp dụng $h(n) = h(N-1-n)$ và biến đổi tiếp ta thu được kết quả:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos \omega n \right] \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (5.4.1.1)$$

ở đây:

$$\begin{aligned} a(0) &= h\left(\frac{N-1}{2} - 0\right) \\ a(n) &= 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \end{aligned}$$

So sánh với biểu thức:

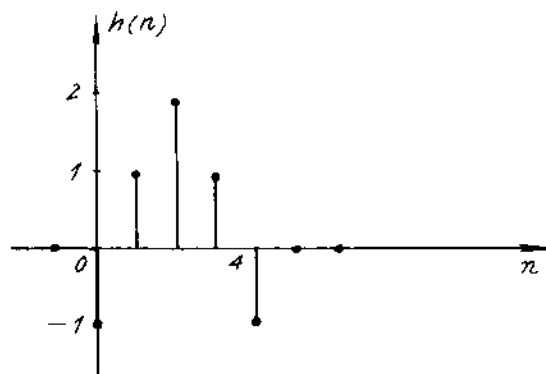
$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega \alpha}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos \omega n \\ \alpha &= \frac{N-1}{2} \end{aligned} \quad (5.4.1.2)$$

Ví dụ 5.4.1.1 :

Cho đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính như trên hình 5.4.1.1.



Hình 5.4.1.1.

Hãy tìm $a(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$.

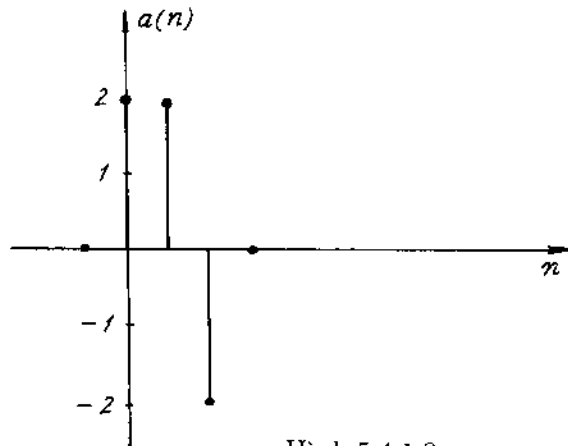
Giải:

$$N = 5, N - 1 = 4$$

Vậy:

$$\begin{aligned} a(0) &= h(2 - 0) = h(2) = 2 \\ a(1) &= 2h(2 - 1) = 2h(1) = 2 \\ a(2) &= 2h(2 - 2) = 2h(0) = -2 \end{aligned}$$

Đồ thị của $a(n)$ cho trên hình 5.4.1.2.

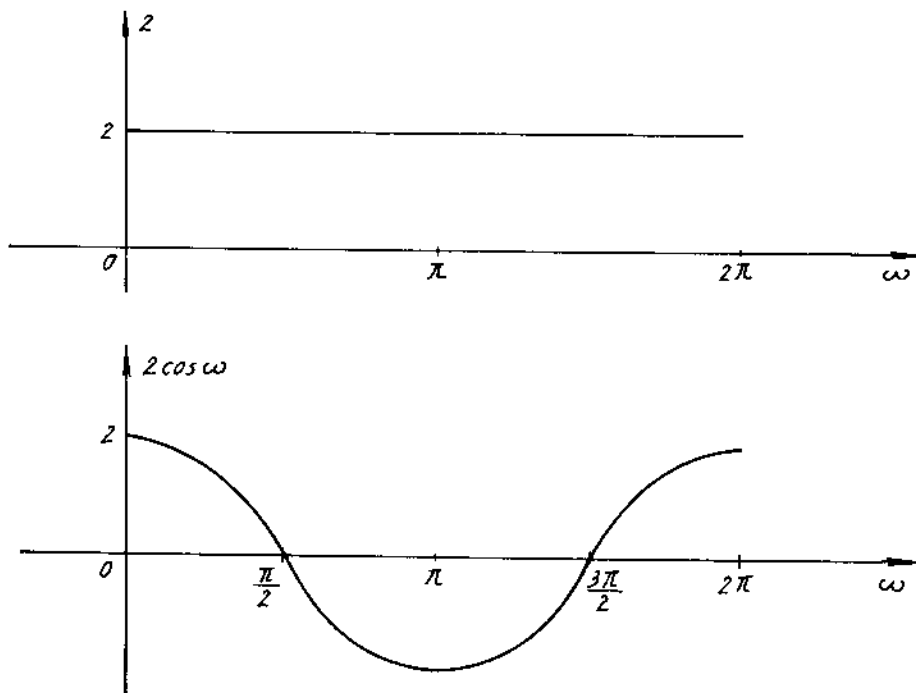


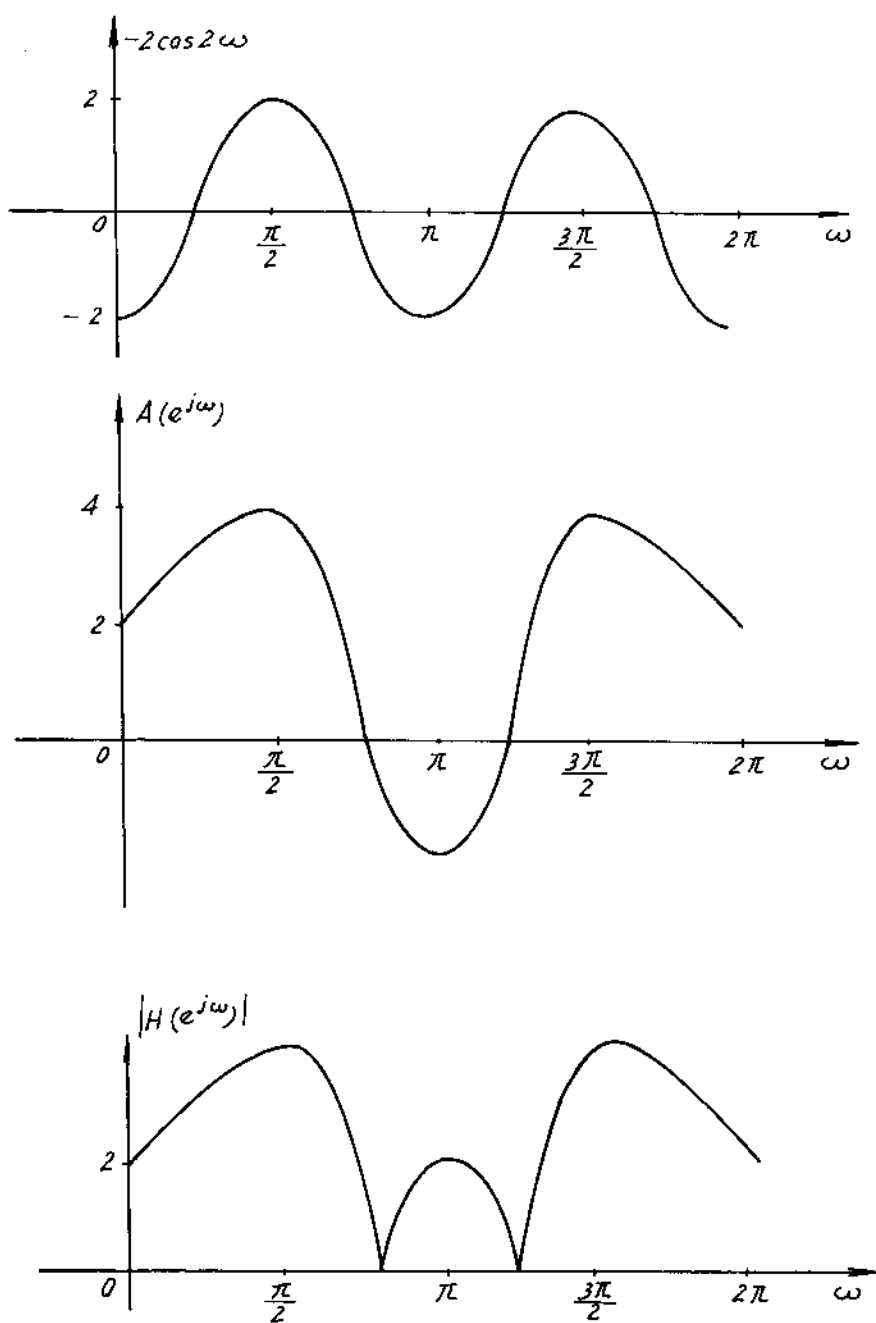
Hình 5.4.1.2.

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^2 a(n) \cos \omega n = a(0) \cos 0 + a(1) \cos \omega + a(2) \cos 2\omega = 2 + 2\cos\omega - 2\cos 2\omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ cho trên hình 5.4.1.3 và ta thấy rằng nếu $h(n)$ đối xứng và N lẻ thì $A(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$.





Hình 5.4.1.3.

5.4.2. TRƯỜNG HỢP ĐÁP ỨNG XUNG ĐỐI XỨNG N CHẴN (BỘ LỌC FIR LOẠI 2)

Ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

N chẵn ta có thể chia tổng này thành hai phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số ở thành phần thứ hai ta có:

$$n = N - 1 - m, \quad m = N - 1 - n$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Đổi về cùng ký hiệu n và áp dụng tính đối xứng của $h(n)$ là:

$$h(n) = h(N-1-n)$$

ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} e^{j\omega \frac{N-1}{2}} \quad (5.4.2.1)$$

ở đây:

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$$

So sánh với biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-j\omega \alpha}$$

Ta có:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad (5.4.2.2)$$

Chú ý rằng với $\omega = \pi$ thì:

$$\cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \cos \left[\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \right]$$

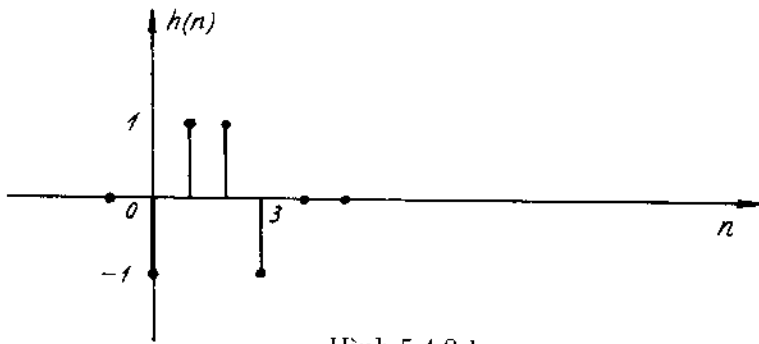
$(2n-1)$ là lẻ với mọi n , vậy:

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} (2n-1) \right] = 0 \quad \text{với mọi } n$$

Như vậy ta có thể nói rằng tại $\omega = \pi$ thì $A(e^{j\omega}) = 0$ với bất kỳ $b(n)$ nào (hoặc là với bất kỳ $h(n)$ nào), và từ đây ta rút ra kết luận là : các bộ lọc loại này không thể sử dụng để tổng hợp các bộ lọc có đáp ứng tần số khác không tại $\omega = \pi$ (ví dụ như bộ lọc thông cao).

Ví dụ 5.4.2.1 :

Cho đáp ứng xung của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính như trên hình 5.4.2.1.



Hình 5.4.2.1.

Hãy tìm $b(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$

Giải :

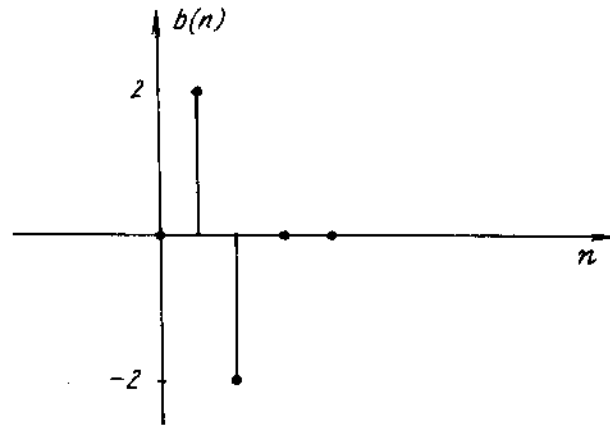
$$N = 4, \quad \frac{N}{2} = 2$$

Vậy:

$$b(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = 2$$

$$b(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = -2$$

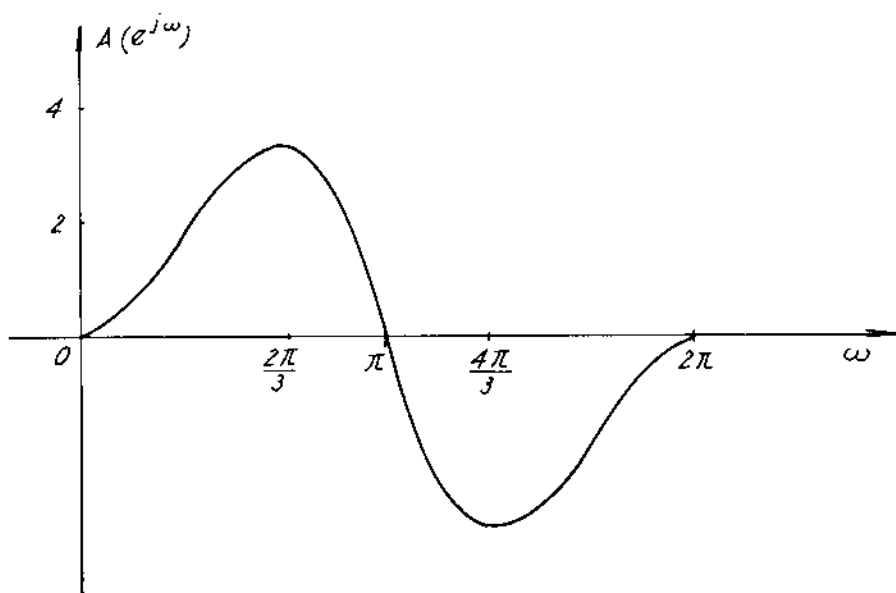
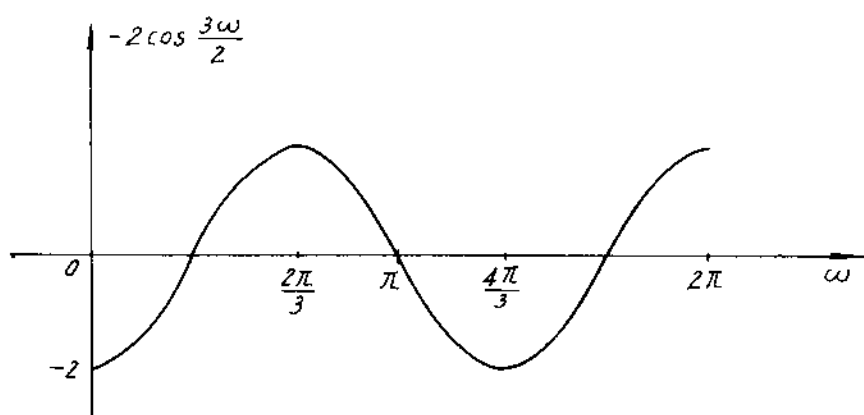
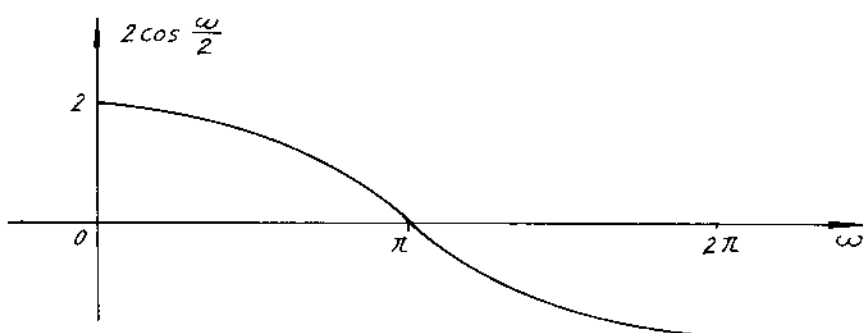
Đồ thị của $b(n)$ cho trên hình 5.4.2.2.

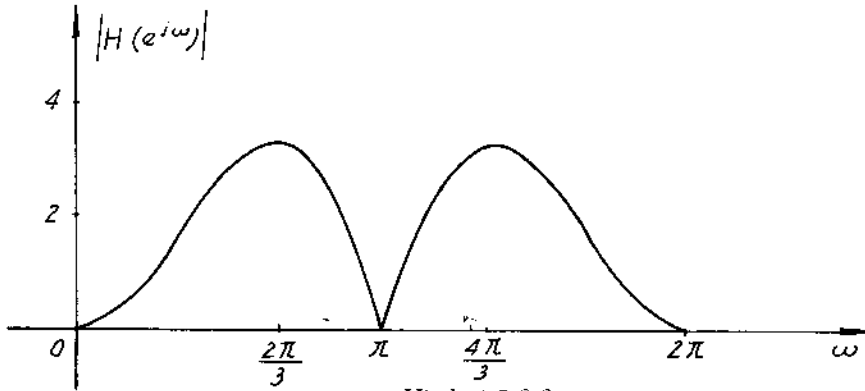


Hình 5.4.2.2.

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega}) &= \sum_{n=1}^2 b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = b(1) \cos \left[\omega \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] + b(2) \cos \left[\omega \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= 2 \cos \frac{\omega}{2} - 2 \cos 3 \frac{\omega}{2} \\ |H(e^{j\omega})| &= |A(e^{j\omega})| \end{aligned}$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ cho trên hình 5.4.2.3, và ta thấy rằng nếu N chẵn và $h(n)$ đối xứng thì $A(e^{j\omega})$ là phản đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$.





Hình 4.5.2.3.

5.4.3. TRƯỜNG HỢP ĐÁP ỨNG XUNG PHẢN ĐỐI XỨNG, N LẺ (BỘ LỌC FIR LOẠI 3)

Chúng ta đã có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

N lẻ, ta phân tổng này thành 3 phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Trong trường hợp này $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$, vậy:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số ở thành phần thứ hai ta có:

$$n = N-1-m, m = N-1-n$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Đổi về cùng ký hiệu n và áp dụng tính phản đối xứng của $h(n)$ là:

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n \right] e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \quad (5.4.3.1)$$

ở đây:

$$c(n) = 2h \left(\frac{N-1}{2} - n \right) \quad 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$$

So sánh với biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j(\beta - \alpha)\omega}$$

ta có:

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega}) &= \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n \\ \alpha &= \frac{N-1}{2} \\ \beta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.4.3.2)$$

Nhận xét :

- Với $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ thì

$$\sin \omega n = \sin 0n = 0 \quad \text{với mọi } n$$

$$\sin \omega n = \sin \pi n = 0 \quad \text{với mọi } n$$

Như vậy ta có thể nói rằng $A(e^{j\omega}) = 0$ tại $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ với bất kỳ $c(n)$ nào (hoặc bất kỳ $h(n)$ nào), và từ đây ta thấy rằng các bộ lọc loại này không thể dùng để tổng hợp các loại bộ lọc có đáp ứng tần số khác không tại $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ (ví dụ như bộ lọc thông thấp và thông cao).

- $e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega\right)}$, từ đây ta thấy rằng $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ vậy đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ có dạng sau:

$$H(e^{j\omega}) = j A(e^{j\omega}) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega\right)} = B(e^{j\omega}) e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega\right)}$$

$$B(e^{j\omega}) = j A(e^{j\omega})$$

Như thế ta có thể nói rằng với pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\alpha\omega = -\frac{N-1}{2}\omega$ thì độ lớn $B(e^{j\omega})$ là ảo.

- Các bộ lọc loại này có thể dùng làm bộ tích phân (hoặc vi phân) hoặc dùng làm bộ biến đổi Hilbert.

- Nếu $\beta = -\frac{\pi}{2}$ chúng ta cũng thu được kết quả tương tự.

Ví dụ 5.4.3.1 :

Cho đáp ứng xung của bộ lọc số FIR pha tuyến tính như trên hình 5.4.3.1.

Hãy tìm $c(n)$, $A(e^{j\omega})$, $|H(e^{j\omega})|$

Giải :

$$N = 5$$

$$\frac{N-1}{2} = \alpha = 2$$

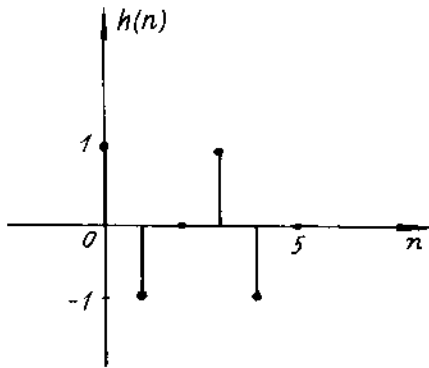
$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$c(n) = 2h(2 - n) \quad 1 \leq n \leq 2$$

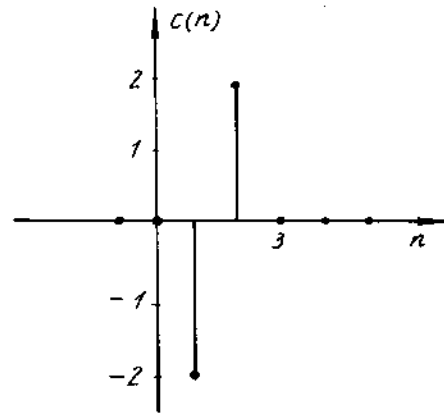
$$c(1) = 2h(2 - 1) = 2h(1) = -2$$

$$c(2) = 2h(2 - 2) = 2h(0) = 2$$

Đồ thị của $c(n)$ cho trên hình 5.4.3.2.



Hình 5.4.3.1.

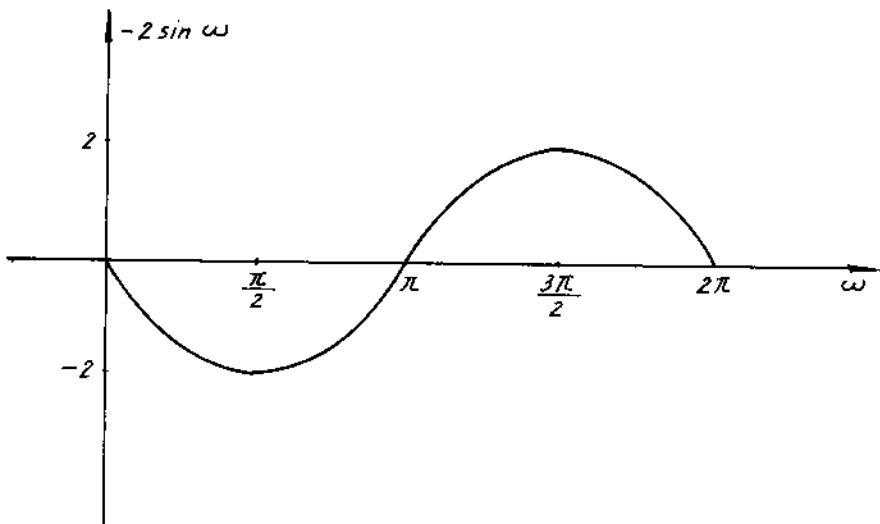


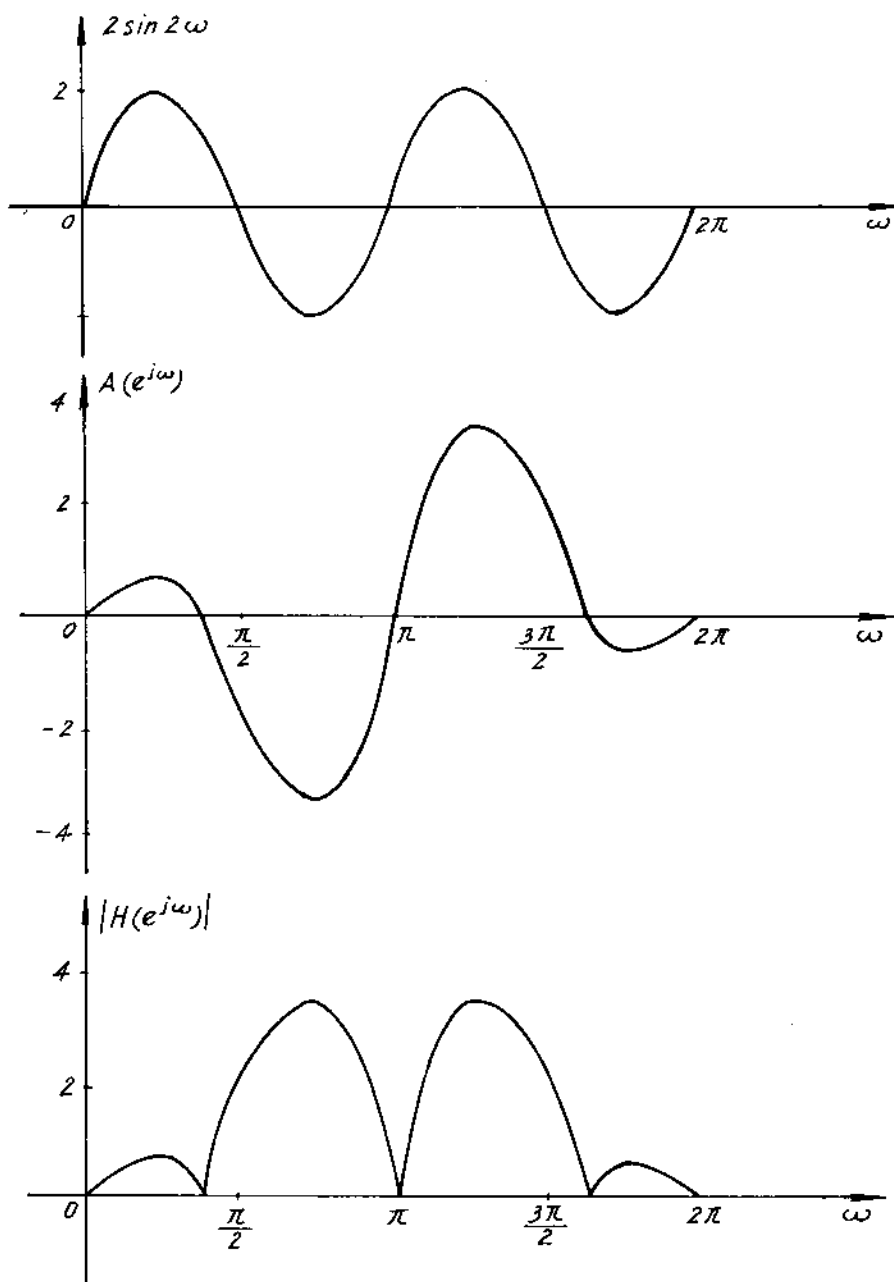
Hình 5.4.3.2.

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^2 c(n) \sin \omega n = c(1) \sin \omega + c(2) \sin 2\omega = -2 \sin \omega + 2 \sin 2\omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ cho trên hình 5.4.3.3, và ta thấy rằng nếu $h(n)$ phản đối xứng và N lẻ thì $A(e^{j\omega})$ là phản đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$.





Hình 5.4.3.3.

5.4.4. TRƯỜNG HỢP ĐÁP ỨNG XUNG PHẢN ĐỐI XỨNG, N CHẴN (BỘ LỌC *FIR* LOẠI 4)

Ta đã có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

N chẵn, ta phân tổng này thành 2 phần như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

Đổi biến số ở thành phần thứ hai:

$$n = N - 1 - m$$

$$m = N - 1 - n$$

Ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^0 h(N-1-m)e^{-j\omega(N-1-m)}$$

Đổi chiều của tổng và đổi ký hiệu về n ở thành phần thứ hai ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{m=\frac{N}{2}-1}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)}$$

Áp dụng tính chất phản đối xứng của $h(n)$ là

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

ta có:

$$H(e^{j\omega}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \omega \right)} \quad (5.4.4.1)$$

ở đây:

$$d(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$$

So sánh với biểu thức:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

ta có:

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega}) &= \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \\ \alpha &= \frac{N-1}{2} \\ \beta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.4.4.2)$$

Nhận xét :

- Với $\omega = 0$ thì:

$$\sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = 0 \quad \text{với mọi } n$$

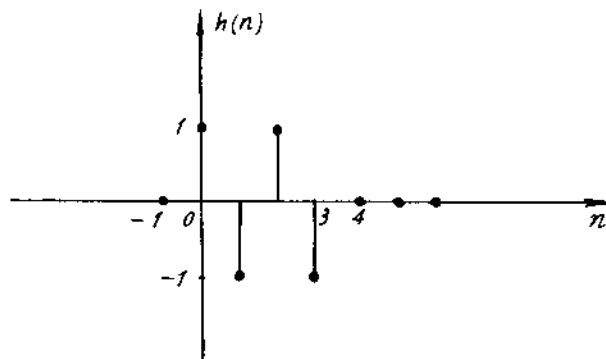
Vậy ta có thể nói rằng $A(e^{j\omega}) = 0$ tại $\omega = 0$ với bất kỳ $d(n)$ nào (hoặc bất kỳ $h(n)$ nào) và từ đây ta thấy rằng bộ lọc loại này không thể dùng để tổng hợp các loại bộ lọc có đáp ứng tần số khác không tại $\omega = 0$ (ví dụ như bộ lọc thông thấp).

- Các loại bộ lọc này có thể dùng để tổng hợp các bộ tích phân và các bộ biến đổi Hilbert.

- Nếu $\beta = -\frac{\pi}{2}$, ta cũng có kết quả tương tự.

Ví dụ 5.4.4.1 :

Cho đáp ứng xung của bộ lọc số FIR pha tuyến tính như trên hình 5.4.4.1.



Hình 5.4.4.1.

Hãy tìm $d(n)$, $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$

Giải :

$$N = 4$$

$$\frac{N-1}{2} = \alpha = 2,5$$

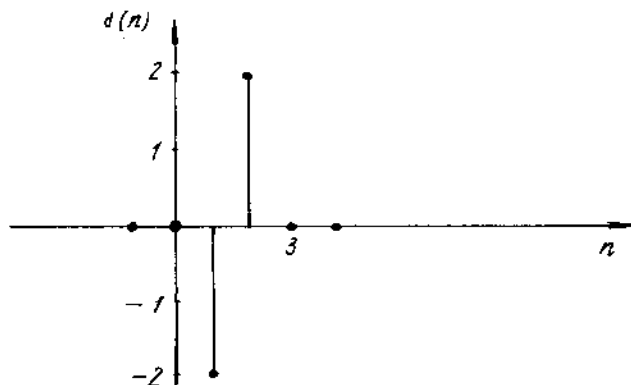
$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$d(n) = 2h(2-n) \quad 1 \leq n \leq 2$$

$$d(1) = 2h(2-1) = 2h(1) = -2$$

$$d(2) = 2h(2-2) = 2h(0) = 2$$

Đồ thị của $d(n)$ cho trên hình 5.4.4.2.

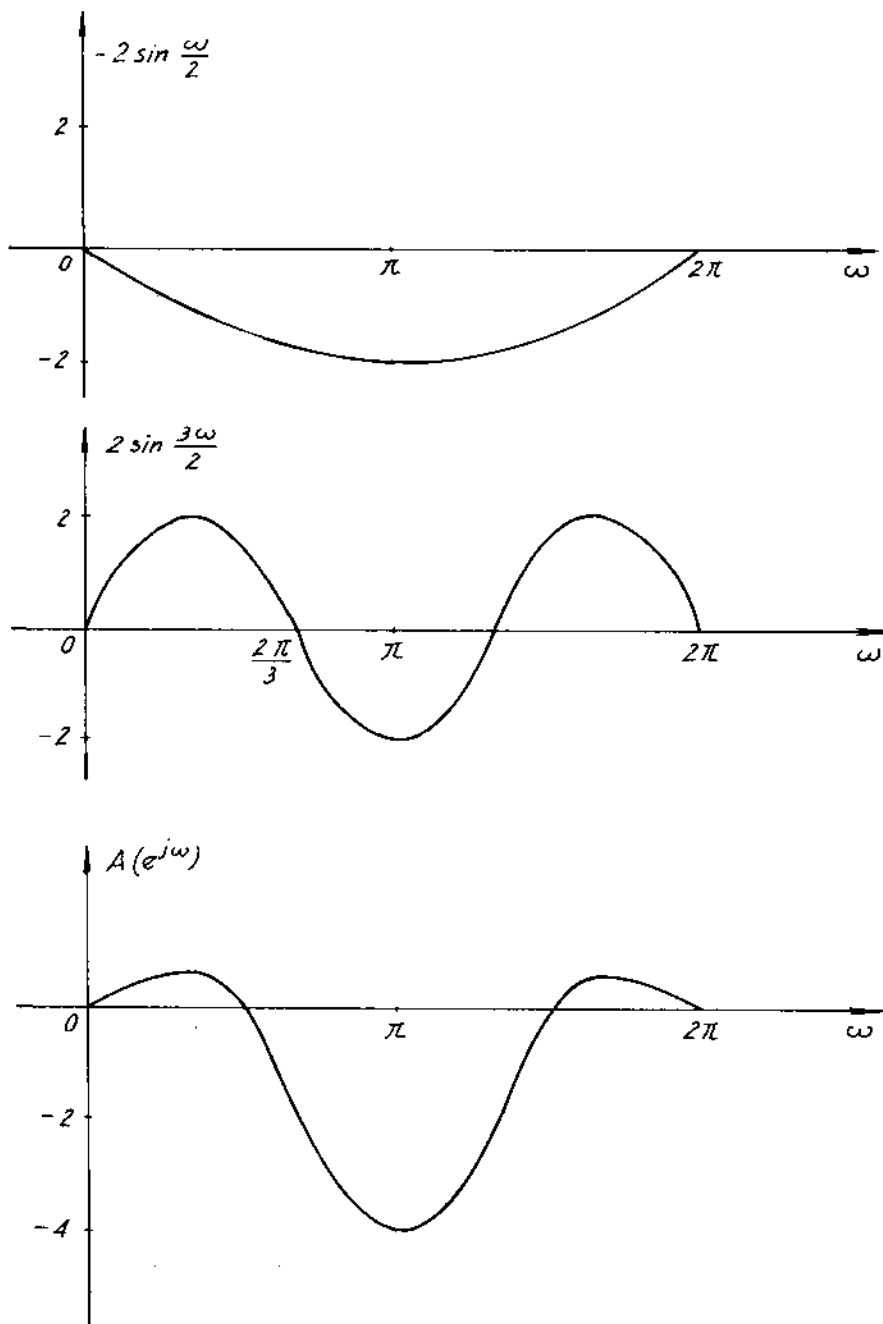


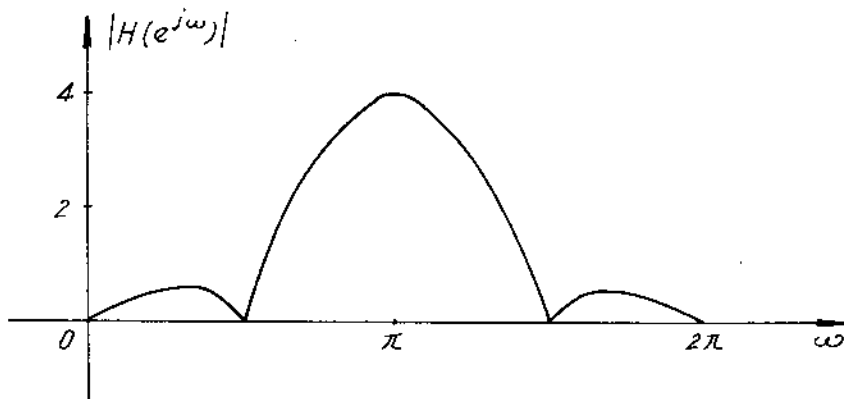
Hình 5.4.4.2.

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^2 d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = d(1) \sin \frac{\omega}{2} + d(2) \sin \frac{3\omega}{2} = -2 \sin \frac{\omega}{2} + 2 \sin \frac{3\omega}{2}$$

$$|H(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ và $|H(e^{j\omega})|$ cho trên hình 5.4.4.3, và ta thấy rằng nếu $h(n)$ phản đối xứng và N chẵn thì $A(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$.





Hình 5.4.4.3.

5.4.5. TỔNG KẾT

Chúng ta đã xét xong một cách khá chi tiết đáp ứng tần số của 4 loại bộ lọc *FIR* pha tuyến tính. Chúng ta có thể tổng kết một cách ngắn gọn các tính chất cơ bản của chúng như ở bảng 5.4.5.1.

Bảng 5.4.5.1.

	$h(n)$ đối xứng $h(n) = h(N-1-n)$	$h(n)$ phản đối xứng $h(n) = -h(N-1-n)$
N lẻ	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos \omega n$ $a(n) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$ $a(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) & 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ (Bộ lọc <i>FIR</i> loại 1)	$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n$ $c(n) = \begin{cases} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) & 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ phản đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $A(e^{j\omega}) = 0$ ở $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ (Bộ lọc <i>FIR</i> loại 3)

N chẵn	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^N b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$ $b(n) = \begin{cases} 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ phản đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $A(e^{j\omega}) = 0$ ở $\omega = \pi$ (Bộ lọc <i>FIR</i> loại 2)	$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2} \right)} A(e^{j\omega})$ $A(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^N d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$ $d(n) = \begin{cases} 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) & 1 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$ $A(e^{j\omega})$ đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ $A(e^{j\omega}) = 0$ ở $\omega = \pi$ (Bộ lọc <i>FIR</i> loại 4)
-------------	--	--

5.5. VỊ TRÍ CỦA CÁC ĐIỂM KHÔNG CỦA BỘ LỌC SỐ FIR PHA TUYẾN TÍNH

5.5.1. TỔNG QUAN

Xuất phát từ các điều kiện đối xứng của đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính, chúng ta có thể xác định vị trí các điểm không của hàm truyền đạt $H(Z)$.

Trước hết chúng ta tìm quan hệ giữa $H(Z^{-1})$ và $H(Z)$.

Chúng ta biết rằng hàm truyền đạt $H(Z)$ có dạng tổng quát như sau:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} = h(0) + h(1)Z^{-1} + h(2)Z^{-2} + \dots + h(N-1-2)Z^{-(N-1-2)} + \\ + h(N-1-1)Z^{-(N-1-1)} + h(N-1)Z^{-(N-1)}$$

Nhưng nếu $h(n)$ đối xứng hoặc phản đối xứng, tức là

$$h(n) = h(N-1-n)$$

hoặc

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

thì chúng ta có thể lợi dụng các tính chất này để viết lại dạng của $H(Z)$.

Trước hết chúng ta xét nếu $h(n)$ đối xứng thì ta có thể viết $H(Z)$ ở dạng sau đây :

$$H(Z) = h(0) + h(1)Z^{-1} + h(2)Z^{-2} + \dots + h(2)Z^{-(N-3)} + h(1)Z^{-(N-2)} + h(0)Z^{-(N-1)}$$

Tiếp tục biến đổi chúng ta thu được kết quả sau:

$$H(Z^{-1}) = Z^{N-1} H(Z) \quad \text{với } h(n) \text{ đối xứng} \quad (5.5.1.1)$$

Trường hợp nếu $h(n)$ phản đối xứng, bằng cách tương tự ta dễ dàng thu được kết quả sau:

$$H(Z^{-1}) = -Z^{N-1} H(Z) \quad \text{với } h(n) \text{ phản đối xứng} \quad (5.5.1.2)$$

và từ đây ta có thể viết tính chất của hàm truyền đạt cho cả hai trường hợp $h(n)$ đối xứng và phản đối xứng:

$$H(Z^{-1}) = \pm Z^{N-1} H(Z) \quad (5.5.1.3)$$

Từ biểu thức (5.5.1.3) ta có thể nói rằng $H(Z)$ và $H(Z^{-1})$ là đồng nhất khi trễ đi $(N-1)$ mẫu và với hệ số nhân là ± 1 , và ta có thể nói rằng các điểm không của $H(Z)$ cũng là các điểm không của $H(Z^{-1})$, bởi vì khi $H(Z^{-1}) = 0$ thì $H(Z) = 0$ (với $Z \neq 0$).

Bây giờ chúng ta xét từng trường hợp cụ thể của vị trí các điểm không. Có 4 trường hợp:

- Điểm không phức không nằm trên vòng tròn đơn vị.
- Điểm không thực không nằm trên vòng tròn đơn vị.
- Điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị.
- Điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị.

5.5.2. ĐIỂM KHÔNG PHỨC KHÔNG NẸM TRÊN VÒNG TRÒN ĐƠN VỊ

Giả sử ta có một điểm không phức của $H(Z)$ như sau:

$$Z_{oi} = r_i e^{j\theta_i}$$

ở đây $r_i \neq 1$ và $\theta_i \neq 0; \theta_i \neq \pi$

Như vậy Z_{oi} này là điểm không phức không nằm trên vòng tròn đơn vị.

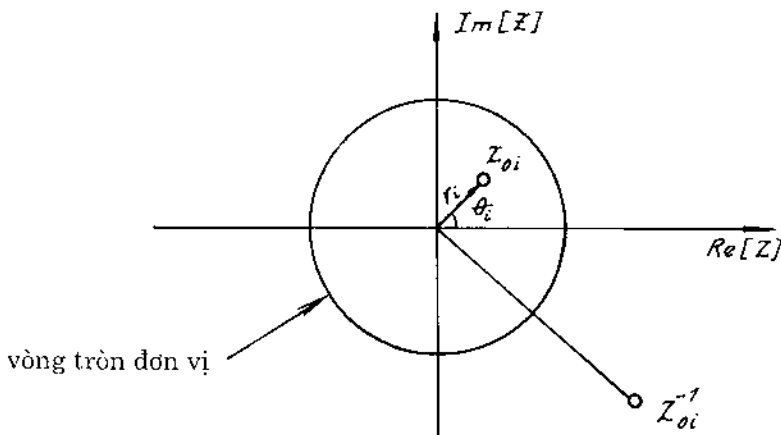
Nếu $H(Z)$ là hàm truyền đạt của bộ lọc số FIR pha tuyến tính ($h(n)$ là đối xứng hoặc phản đối xứng) theo biểu thức (5.5.1.3) thì

$$Z_{oi}^{-1} = \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}$$

cũng là một điểm không của $H(Z)$. Vậy nếu $h(n)$ là đối xứng hoặc phản đối xứng thì $H(Z)$ có 2 điểm không là:

$$Z_{oi} = r_i e^{j\theta_i} \quad \text{và} \quad Z_{oi}^{-1} = \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}$$

vị trí của Z_{oi} và Z_{oi}^{-1} được minh họa trên hình (5.5.2.1).



Hình 5.5.2.1.

Nếu chúng ta có thêm một điều kiện là trong thực tế thường ta dùng $h(n)$ là thực, vì đây là một điều kiện dễ bộ lọc thực hiện được về mặt vật lý.

Nếu $h(n)$ là thực thì $h(n) = h^*(n)$ và trong miền Z ta sẽ có:

$$H^*(Z) = H(Z^*) \quad (5.5.2.1)$$

và từ đây ta thấy rằng nếu Z_{oi} là không của $H(Z)$ thì liên hợp phức của Z_{oi} là Z_{oi}^* cũng là không của $H(Z)$.

Vậy đối với bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính $h(n)$ là thực thì đối với mỗi một điểm không của $H(Z)$ là Z_{oi} ta sẽ có bốn điểm không tương ứng như sau:

$$\left. \begin{aligned} Z_{oi} &= r_i e^{j\theta_i} = Z_{oi1} \\ Z_{oi}^{-1} &= \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i} = Z_{oi2} \\ Z_{oi}^* &= r_i e^{j\theta_i} = Z_{oi3} \\ (Z_{oi}^{-1})^* &= \frac{1}{r_i} e^{j\theta_i} = Z_{oi4} \end{aligned} \right\} \quad (5.5.2.2)$$

Ví dụ 5.5.2.1 :

Giả sử ta có bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính mà hàm truyền đạt $H(Z)$ có ít nhất một điểm không phức không nằm trên vòng tròn đơn vị như sau:

$$Z_{oi1} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad , \quad r_i = \frac{1}{2} \quad ; \quad \theta_i = \frac{\pi}{4}$$

Hãy tìm $H(Z)$ và $h(n)$.

Giải :

Vì đây là bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính nên theo (5.5.2.2) thì đối với một điểm không Z_{oi1} này ta sẽ có 4 điểm không tương ứng là $Z_{oi2}, Z_{oi3}, Z_{oi4}$ như sau:

$$Z_{oi1} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad , \quad Z_{oi2} = 2 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_{oi3} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad , \quad Z_{oi4} = 2 e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Vậy ta có thể biểu diễn vị trí các điểm không trong mặt phẳng Z như trên hình 5.5.2.2.

Ta có thể tìm $H(Z)$ dưới dạng sau:

$$H(Z) = \prod_{i=1}^4 (1 - Z_{oi} Z^{-1}) = (1 - Z_{oi1} Z^{-1}) (1 - Z_{oi2} Z^{-1}) (1 - Z_{oi3} Z^{-1}) (1 - Z_{oi4} Z^{-1})$$

Thay

$$Z_{01} = re^{j\theta}, Z_{02} = \frac{1}{r}e^{-j\theta}, Z_{03} = re^{-j\theta}, Z_{04} = \frac{1}{r}e^{j\theta}$$

ta có:

$$H(Z) = 1 - 2\left(\frac{1}{r} + r\right)\cos\theta Z^{-1} + \left(r^2 + \frac{1}{r} + 4\cos^2\theta\right)Z^{-2} - 2\left(\frac{1}{r} + r\right)\cos\theta Z^{-3} + Z^{-4}$$

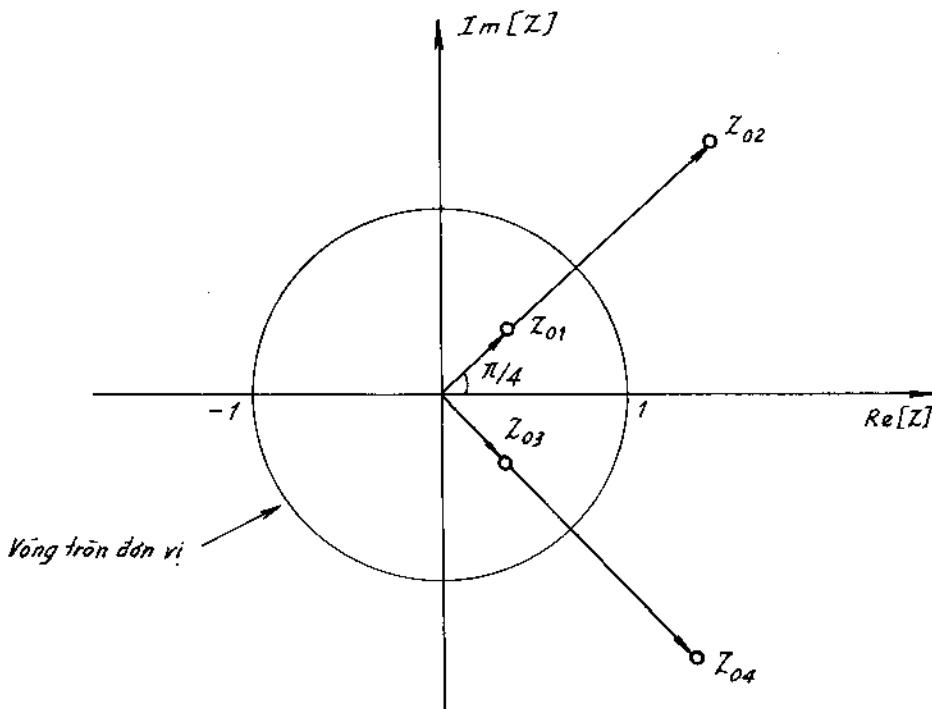
Từ đây ta suy ra $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -2\left(\frac{1}{r} + r\right)\cos\theta & n = 1 \\ r^2 + \frac{1}{r} + 4\cos^2\theta & n = 2 \\ -2\left(\frac{1}{r} + r\right)\cos\theta & n = 3 \\ 1 & n = 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

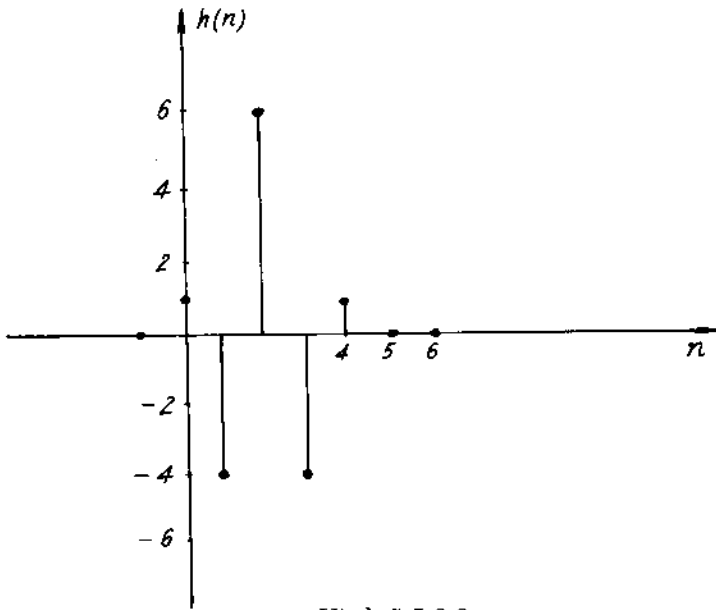
Thay $r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$ ta có:

$$h(0) = h(4) = 1, h(1) = h(3) = -\frac{5}{\sqrt{2}}, h(2) = \frac{25}{4}$$

Từ đây ta thấy rằng $h(n)$ là đối xứng, đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 5.5.2.3.



Hình 5.5.2.2.



Hình 5.5.2.3.

5.5.3. ĐIỂM KHÔNG PHỨC NẪM TRÊN VÒNG TRÒN ĐƠN VỊ

Nếu ta có một điểm không phức của $H(Z)$ như sau:

$$Z_{oi} = r_i e^{j\theta_i}$$

mà $r_i = 1$ và $\theta_i \neq 0$ và π

Vậy Z_{oi} này là điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị, và điểm không này được viết dưới dạng sau:

$$Z_{oi} = e^{j\theta_i}$$

Nếu $H(Z)$ là hàm truyền đạt của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính (tức là $h(n)$ đối xứng hoặc phản đối xứng) thì Z_{oi}^{-1} cũng là điểm không của $H(Z)$.

$$Z_{oi}^{-1} = e^{-j\theta_i}$$

Nếu $h(n)$ là thực thì Z_{oi}^* và $(Z_{oi}^{-1})^*$ cũng là điểm không của $H(Z)$.

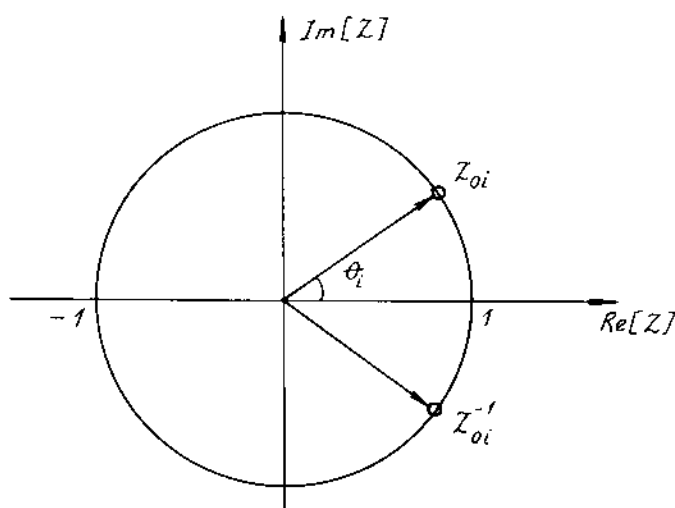
$$Z_{oi}^* = e^{-j\theta_i} = Z_{oi}^{-1}$$

$$(Z_{oi}^{-1})^* = e^{j\theta_i} = Z_{oi}$$

Vậy đối với mỗi điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị $Z_{oi} = e^{j\theta_i}$ của $H(Z)$, chúng ta sẽ có tương ứng hai điểm không là:

$$Z_{oi} = e^{j\theta_i} \text{ và } Z_{oi}^{-1} = e^{-j\theta_i}$$

vị trí của các điểm không này được minh hoạ trên hình 5.5.3.1.



Hình 5.5.3.1.

Ví dụ 5.5.3.1: Giả sử ta có bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính mà hàm truyền đạt $H(Z)$ của nó có ít nhất một điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị như sau:

$$Z_{0i} = e^{j\theta_1} \quad ; \quad \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Hãy tìm $H(Z)$ và $h(n)$.

Giải :

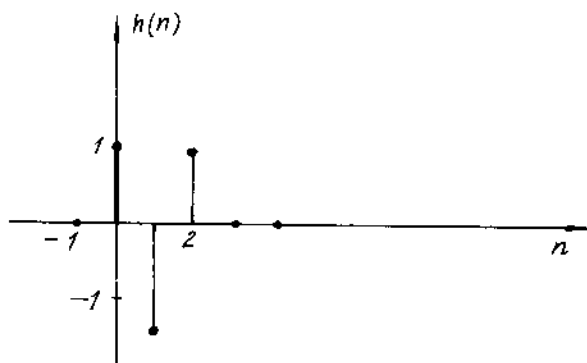
Ta có thể viết:

$$H(Z) = (1 - Z_{01}Z^{-1})(1 - Z_{01}^{-1}Z^{-1}) = (1 - e^{j\theta_1}Z^{-1})(1 - e^{-j\theta_1}Z^{-1}) = 1 - 2\cos\theta_1 Z^{-1} + Z^{-2}$$

Vậy ta có $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -2\cos\theta_1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$$

Ta thấy rằng $h(n)$ là đối xứng, đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 5.5.3.2 với $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.



Hình 5.5.3.2.

5.5.4. ĐIỂM KHÔNG THỰC KHÔNG NẸM TRÊN VÒNG TRÒN ĐƠN VỊ

Giả sử $H(Z)$ có điểm không như sau:

$$Z_{oi} = r_i e^{j\theta_i}$$

mà $r_i \neq 1$ và $\theta_i = 0$ hoặc $\theta_i = \pi$

Vậy điểm không này là thực không nằm trên vòng tròn đơn vị và có dạng sau:

$$Z_{oi} = r_i \quad \text{nếu } \theta_i = 0$$

$$Z_{oi} = -r_i \quad \text{nếu } \theta_i = \pi$$

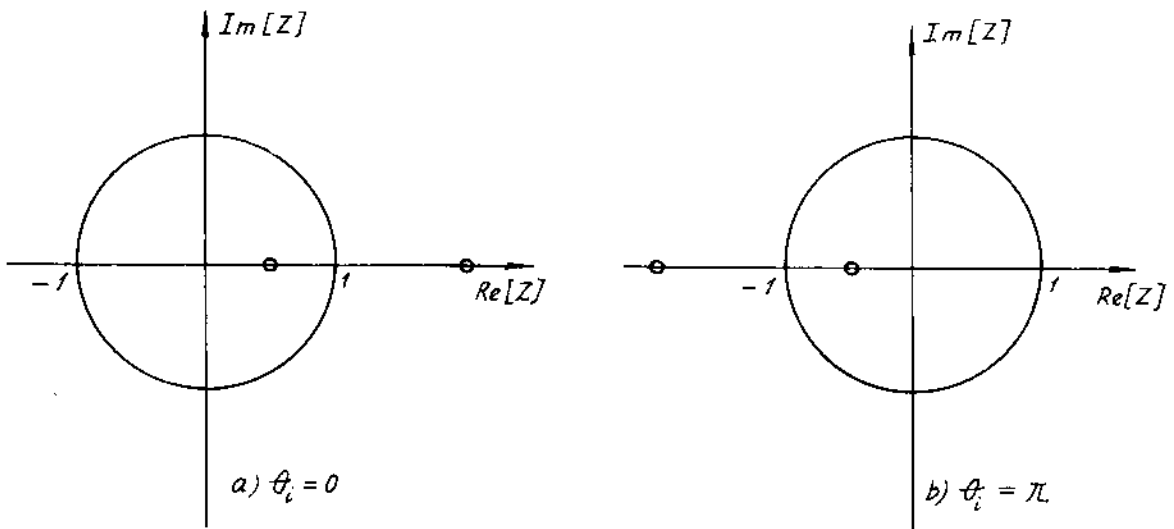
Nếu $H(Z)$ là hàm truyền đạt của bộ lọc *FIR* pha tuyến tính thì Z_{oi}^* cũng là điểm không của $H(Z)$, và nếu $h(n)$ là thực thì Z_{oi}^* cũng là điểm không của $H(Z)$. Vậy trong trường hợp này đối với mỗi điểm không của $H(Z)$ là $Z_{oi} = r_i$ (với $\theta_i = 0$) ta có hai điểm không tương ứng là:

$$Z_{oi1} = r_i \quad \text{và} \quad Z_{oi2} = \frac{1}{r_i}$$

Còn với $\theta_i = \pi$, $Z_{oi} = -r_i$ ta có hai điểm không tương ứng là:

$$Z_{oi1} = -r_i \quad \text{và} \quad Z_{oi2} = -\frac{1}{r_i}$$

Vị trí của các điểm không trong trường hợp này được minh họa trên hình 5.5.4.1 khi $r_i = \frac{1}{2}$.



Hình 5.5.4.1.

Ví dụ 5.5.4.1 :

Giả sử ta có bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính mà hàm truyền đạt $H(Z)$ của nó có ít nhất một điểm không thực không nằm trên vòng tròn đơn vị như sau:

$$Z_{oi} = \pm r_i$$

dấu + ứng với $\theta_i = 0$

dấu - ứng với $\theta_i = \pi$

Hãy tìm $H(Z)$ và $h(n)$.

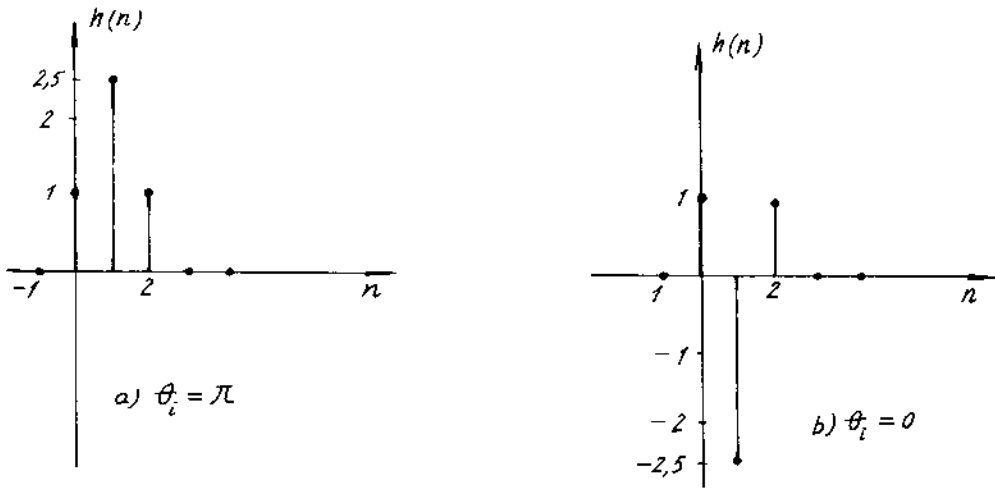
Giải : Ta có thể viết:

$$H(Z) = \left(1 \pm r_1 Z^{-1}\right) \left(1 \pm \frac{1}{r_1} Z^{-1}\right) = 1 \pm \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right) Z^{-1} + Z^{-2}$$

Vậy ta có $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \pm \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right) & n = 1 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$$

Ta thấy rằng $h(n)$ là đối xứng, đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 5.5.4.2 ứng với $r_1 = \frac{1}{2}$.



Hình 5.5.4.2.

5.5.5. ĐIỂM KHÔNG THỰC NẪM TRÊN VÒNG TRÒN ĐƠN VỊ

Giả sử $H(Z)$ có điểm không như sau:

$$Z_{oi} = r_i e^{j\theta_i}$$

mà $r_i = 1$ và $\theta_i = 0$ hoặc $\theta_i = \pi$

Vậy đây là điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị và có dạng như sau:

$$Z_{oi} = 1 \quad \text{nếu} \quad \theta_i = 0$$

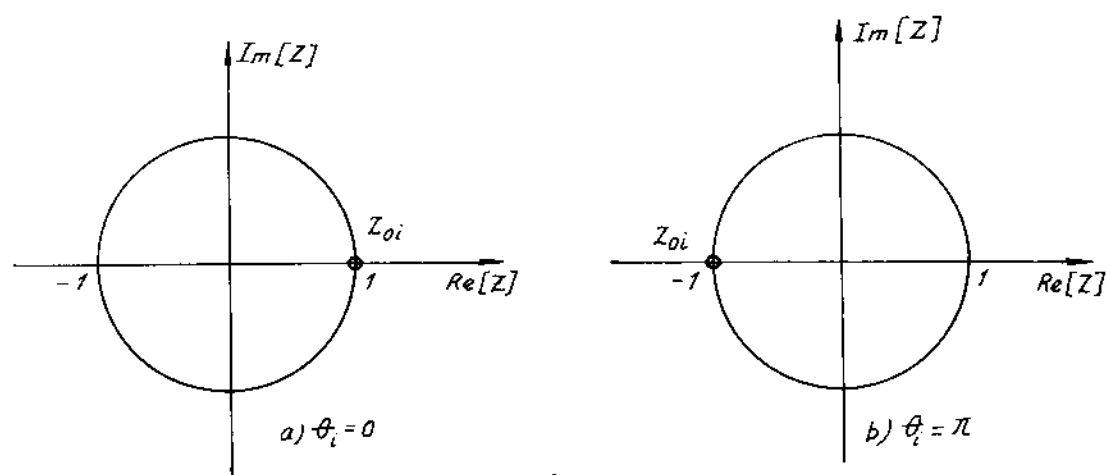
$$Z_{oi} = -1 \quad \text{nếu} \quad \theta_i = \pi$$

và ta cũng có:

$$Z_{oi}^{-1} = Z_{oi}^* = Z_{oi}$$

Như thế trong trường hợp này đối với mỗi điểm không của $H(Z)$ là Z_{oi} ta chỉ có một điểm không duy nhất là $Z_{oi} = \pm 1$

Vị trí của điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị được cho trên hình 5.5.5.1.



Hình 5.5.5.1.

Ví dụ 5.5.5.1 :

Cho bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính mà hàm truyền đạt $H(Z)$ của nó có một điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị như sau:

$$Z_{0i} = \pm 1$$

dấu + ứng với $\theta_1 = \pi$

dấu - ứng với $\theta_1 = 0$

Hãy tìm $H(Z)$ và $h(n)$.

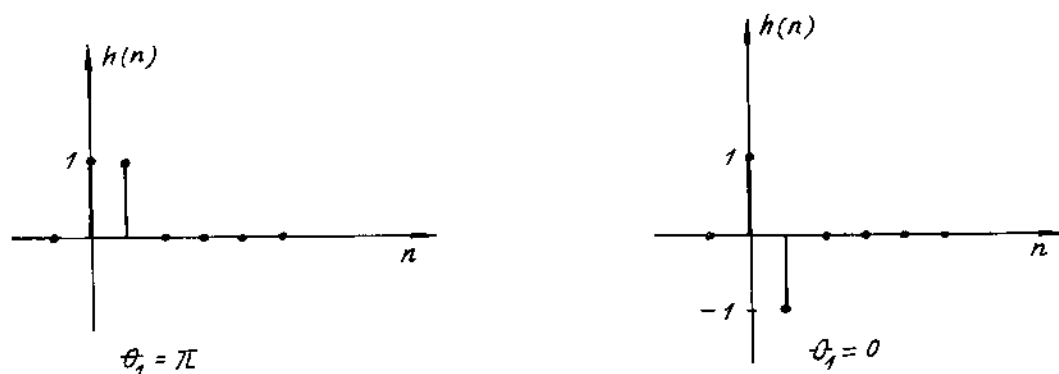
Giải : Ta có thể viết:

$$H(Z) = 1 \pm 1 \cdot Z^{-1}$$

Vậy $h(n)$ như sau:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \pm 1 & n = 1 \end{cases}$$

Ta thấy rằng ứng với $\theta_1 = \pi$ thì $h(n)$ là đối xứng, còn ứng với $\theta_1 = 0$ thì $h(n)$ là phản đối xứng. Đồ thị của $h(n)$ cho trên hình 5.5.5.2.



Hình 5.5.5.2.

5.6. CÁC PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI HỮU HẠN (FIR)

5.6.1. TỔNG QUAN

Việc nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR ở phần này tức là nghiên cứu các phương pháp tính toán các hệ số của bộ lọc, các hệ số sau khi tính toán này ta gọi là các hệ số có giá trị liên tục, tức là chưa được lượng tử hoá và mã hoá ra mã nhị phân. Việc lượng tử hoá và mã hoá sẽ được nghiên cứu ở một chương khác sau này.

Trong phần này chúng ta chỉ nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính, bởi vì pha tuyến tính có rất nhiều ưu điểm và vì vậy được ứng dụng rộng rãi.

Các hệ số $h(n)$ của bộ lọc phải được tính toán sao cho bộ lọc thoả mãn được các chỉ tiêu kỹ thuật đã đề ra theo yêu cầu của các nhiệm vụ kỹ thuật cụ thể. Các chỉ tiêu kỹ thuật này thông thường được cho trong miền tần số, tức là cho theo đáp ứng tần số.

Đáp ứng tần số này phải gần đúng một hàm đã cho, và phải nằm trong một giới hạn được xây dựng bởi các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số.

Chẳng hạn như đối với bộ lọc số thông thấp, đáp ứng tần số của biên độ $|H(e^{j\omega})|$ phải gần đúng giá trị 1 với dung sai là $\pm \delta_1$ trong dải thông, tức là :

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1 \quad |\omega| \leq \omega_p$$

và phải gần đúng giá trị 0 với dung sai δ_2 trong dải chắn, tức là :

$$|H(e^{j\omega})| < \delta_2 \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

Chúng ta đều biết rằng để thực hiện bộ lọc dễ dàng hơn, với giá thành rẻ hơn thì số phân tử của bộ lọc phải là ít nhất, và để giảm thời gian tính toán trong quá trình lọc thì một bộ lọc tốt nhất sẽ là bộ lọc có bậc nhỏ nhất.

5.6.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP

Chúng ta có 3 phương pháp chính để tổng hợp bộ lọc số như sau :

- Phương pháp cửa sổ.
- Phương pháp lấy mẫu tần số.
- Phương pháp lặp.

5.7. PHƯƠNG PHÁP CỬA SỔ

5.7.1. MỞ ĐẦU

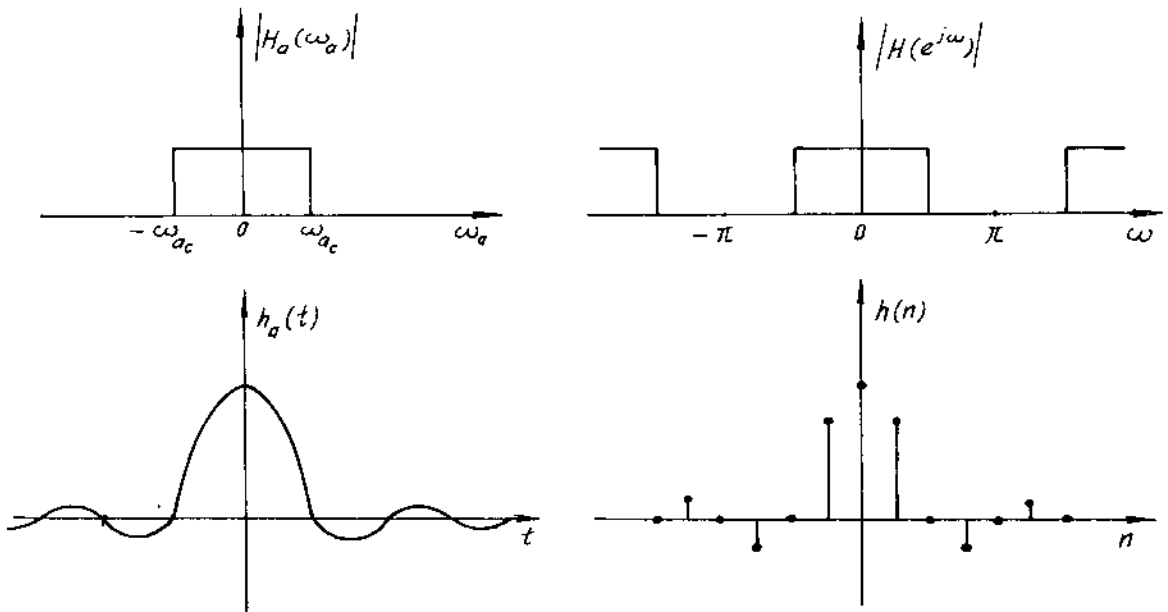
a) Chúng ta biết rằng đáp ứng tần số của một bộ lọc số $H(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π , thế thì một bộ lọc tương tự được đặc trưng trong miền tần số tương tự ω_a bằng đáp ứng tần số của nó $H_a(\omega_a)$, để thực hiện phép lọc bằng con đường số, đáp ứng tần số $H_a(\omega_a)$ này phải được coi như là tuần hoàn (chu kỳ 2π) như sau :

$$H_a(\omega) \rightarrow H(e^{j\omega})$$

và

$$h_a(t) \rightarrow h(n)$$

Hình 5.7.1.1 so sánh hai trường hợp tương tự và số của bộ lọc thông thấp lý tưởng pha không.



$$H_a(\omega_a) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j\omega_a t} dt$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_a(\omega_a) e^{j\omega_a t} d\omega$$

a) Tương tự

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

b) Số

Hình 5.7.1.1.

Nhận xét :

- Các giá trị của $h(n)$ là các hệ số của khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π $H(e^{j\omega})$, vì vậy phương pháp của số còn gọi là phương pháp tổng hợp bộ lọc **FIR** nhờ khai triển Fourier.

- $h(n)$ là đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng, vì vậy $h(n)$ có chiều dài vô hạn nên không thể thực hiện được.

$$L[h(n)] = [-\infty, +\infty]$$

- $h(n)$ là không nhân quả, như vậy sẽ không thực hiện được về vật lý.

- Để cho đáp ứng xung $h(n)$ trở thành đáp ứng xung của bộ lọc **FIR**, chúng ta phải đưa $h(n)$ trở thành nhân quả và phải hạn chế chiều dài của nó.

- Để hạn chế chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ chúng ta sử dụng các hàm cửa sổ (hoặc gọi là cửa sổ). Cửa sổ được ký hiệu như sau (trong miền n):

$$w(n)_N \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq N-1 \\ = 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.1.1)$$

cửa sổ loại này là cửa sổ nhân quả.

b) Các bước chính của phương pháp của cửa sổ

Phương pháp của cửa sổ được thực hiện với bộ lọc số FIR loại 1. Gồm các bước chính sau đây:

- Cho 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số: $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$.
- Chọn dạng của cửa sổ và chiều dài N của cửa sổ, trong miền n của cửa sổ có tâm đối xứng tại $n = \frac{N-1}{2}$, vậy trong miền tần số của cửa sổ có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$.
- Chọn loại bộ lọc số lý tưởng có đáp ứng xung là $h(n)$, $h(n)$ có tâm đối xứng tại $\frac{N-1}{2}$ trong miền n , vậy trong miền ω $h(n)$ sẽ có pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$.
- Nhân cửa sổ $w(n)_N$ với $h(n)$ lý tưởng để được $h_d(n)$ của bộ lọc thực tế.

$$h_d(n) = w(n)_N \cdot h(n) \quad (5.7.2.2)$$

$$L[w(n)_N] = N$$

$$L[h(n)] = \infty$$

$$L[h_d(n)] = N$$

- Sau khi có $h_d(n)$ chúng ta thử lại trong miền tần số xem có thoả mãn 4 chỉ tiêu kỹ thuật đã đặt ra hay không. Nếu không thoả mãn chúng ta tăng N rồi lại lặp lại các bước trên cho đến khi nào thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật thì dừng lại. Việc thử lại trong miền tần số sẽ được thực hiện bằng tích chập trong miền tần số như sau:

$$H_d(e^{j\omega}) = W_R(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_R(e^{j\omega'}) \cdot H(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \quad (5.7.1.3)$$

Tích chập này gây ra hiện tượng Gibbs, sẽ được xét kỹ ở phần sau.

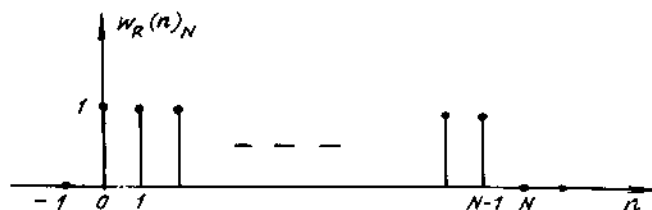
5.7.2. CỬA SỔ CHỮ NHẬT

a) Định nghĩa của cửa sổ chữ nhật

Trong miền n của cửa sổ chữ nhật được định nghĩa như sau:

$$w_R(n)_N = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.2.1)$$

Hình 5.7.2.1 cho ta đồ thị của cửa sổ chữ nhật.



Hình 5.7.2.1.

Như vậy ta thấy rằng của số chữ nhật $w_R(n)_N$ chính là dãy chữ nhật $\text{rect}_N(n)$.

Cửa sổ này sẽ dùng để hạn chế chiều dài của $h(n)$ lý tưởng có pha tuyến tính. Cửa sổ $w_R(n)_N$ là đối xứng, tâm đối xứng nằm tại $n = \frac{N-1}{2}$ (N lẻ) vậy trong miền tần số $W_R(e^{j\omega})$ sẽ có pha tuyến tính là $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$. Khi $H(e^{j\omega})$ và $W_R(e^{j\omega})$ đều có cùng pha tuyến tính là $\theta(\omega) = \frac{N-1}{2}\omega$ (FIR loại 1) thì trong miền n $h(n)$ và $w_R(n)_N$ sẽ có cùng tâm đối xứng tại $n = \frac{N-1}{2}$ (N lẻ). Như vậy phiên bản (version) chiều dài hữu hạn của $h(n)$ chiều dài vô hạn sẽ cho bởi biểu thức (5.7.2.2) sau đây:

$$h_d(n) = h(n) w_R(n)_N \quad (5.7.2.2)$$

Tức là:

$$h_d(n) = \begin{cases} h(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nghiên cứu trong miền tần số:

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= FT[w_R(n)_N] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)_N e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \end{aligned}$$

Vậy:

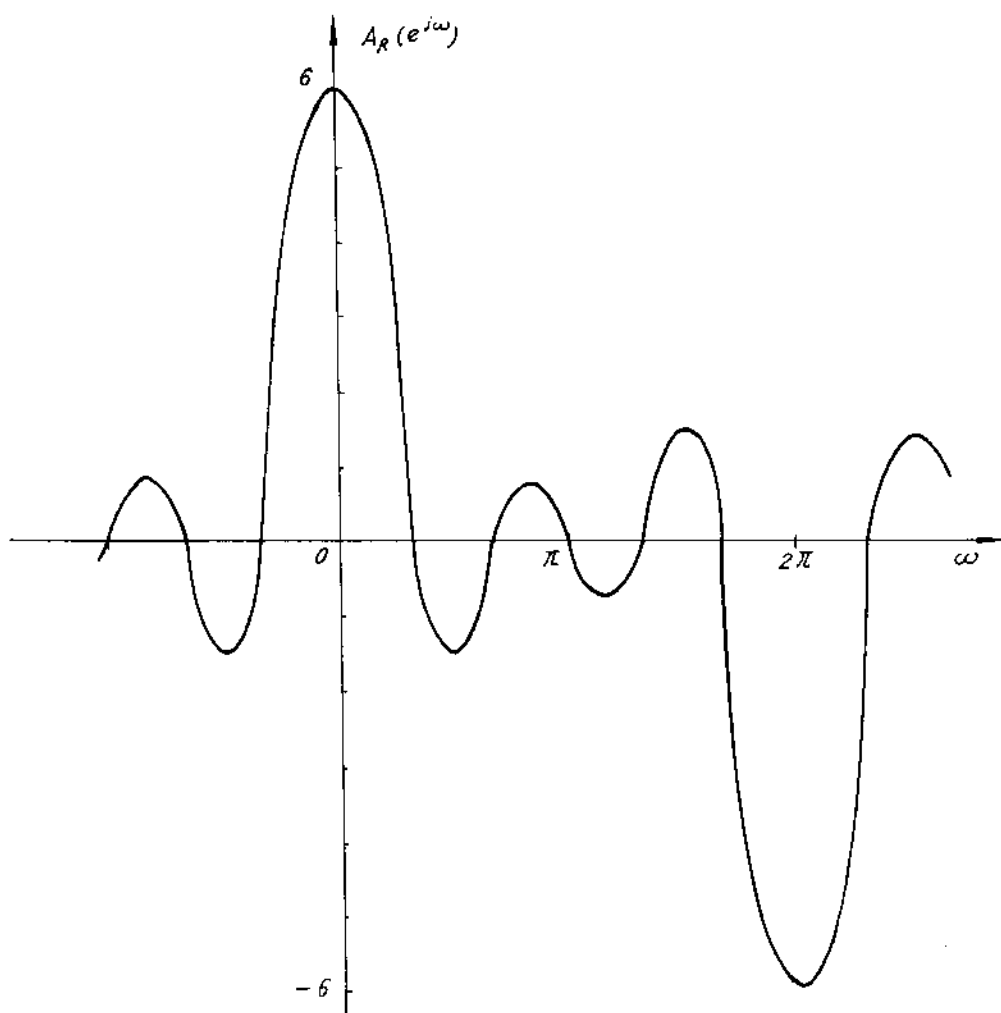
$$\begin{aligned} A_R(e^{j\omega}) &= \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (5.7.2.3a) \\ \theta(\omega) &= -\frac{N-1}{2}\omega = -\alpha\omega \end{aligned}$$

và $W_R(e^{j\omega}) = A_R(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}$

Viết lại biểu thức của $A(e^{j\omega})$:

$$A_R(e^{j\omega}) = N \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (5.7.2.3b)$$

$A_R(e^{j\omega})$ được biểu diễn trên hình 5.7.2.2 với $N = 6$.



Hình 5.7.2.2.

$|W_R(e^{j\omega})|$ được biểu diễn trên hình 5.7.2.3 với $N = 6$.

Nhận xét :

- $W_R(e^{j\omega})$ gọi là cửa sổ phổ.

- Bề rộng của đỉnh trung tâm là $\frac{4\pi}{N}$, ký hiệu là $\Delta\Omega_R$, vậy đối với cửa sổ chữ nhật

$$\Delta\Omega_R = \frac{4\pi}{N}.$$

- Tỷ số giữa biên độ của đỉnh trung tâm và đỉnh thứ cấp đầu tiên được đo như sau:

$$\eta = \frac{|W_R(e^{j\omega})|}{|W_R(e^{j\frac{3\pi}{N}})|} = \frac{|A_R(e^{j\omega})|}{|A_R(e^{j\frac{3\pi}{N}})|} = \frac{N}{\left| \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{N} \cdot \frac{1}{2}\right)} \right|} \quad (5.7.2.4)$$

$$N = 6 : \quad \eta = \left| \frac{6}{-\sqrt{2}} \right| \approx 4,285$$

$$N = 9 : \quad \eta = \left| \frac{9}{-2} \right| = 4,5$$

$$N = 50 : \quad \eta \approx 4,705$$

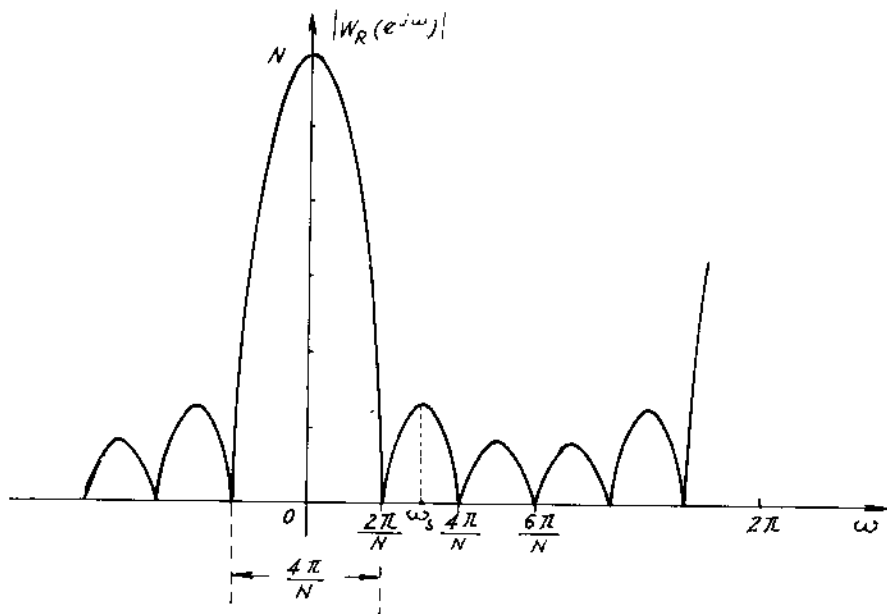
$$N = 100 : \quad \eta \approx 4,711$$

.

.

.

$$N = \infty : \quad \eta = \frac{3\pi}{2} \approx 4,712$$



Hình 5.7.2.3.

b) Các tham số của cửa sổ phổ

Vậy ta thấy rằng η thay đổi rất ít theo N , vì vậy thường lấy η là tham số đặc trưng cho cửa sổ.

Trong thực tế để đặc trưng cho các cửa sổ ta dùng hai tham số như sau:

1- Bề rộng của đỉnh trung tâm $\Delta \Omega$.

2- Tỷ số của biên độ của đỉnh thứ cấp đầu tiên và biên độ của đỉnh trung tâm.

Trong thực tế tỷ số này thường được đánh giá theo dB bằng cách như sau:

$$\lambda = 20 \log_{10} \eta^{-1} = 20 \log_{10} \left| \frac{W(e^{j\omega_s})}{W(e^{j\omega_0})} \right| [dB] \quad (5.7.2.5)$$

ở đây ω_s là tần số ở giữa đỉnh thứ cấp đầu tiên của cửa sổ phổ $W(e^{j\omega})$.

Vậy đối với cửa sổ chữ nhật $W_R(e^{j\omega})$ thì $\omega_s = \frac{3\pi}{N}$ và ta tính λ_R trong trường hợp $N \gg 1$:

$$\lambda_R = 20 \log_{10} \eta_R^{-1} = 20 \log_{10} \frac{1}{4.712} \approx -13dB$$

Như thế đối với cửa sổ chữ nhật, hai tham số đặc trưng cho cửa sổ có giá trị như sau:

$$\Delta \Omega_R = \frac{4\pi}{N}$$

$$\lambda_R = -13dB$$

Người ta cũng thường hay đánh giá cửa sổ phổ $W(e^{j\omega})$ bằng dB như sau:

$$G(e^{j\omega}) = 20 \log_{10} \left| \frac{W(e^{j\omega})}{W(e^{j\omega_0})} \right| \quad (5.7.2.6)$$

Khi cần nhấn mạnh chiều dài của cửa sổ trong miền n thì ta thêm N vào:

$$G(e^{j\omega})_N = 20 \log_{10} \left| \frac{W(e^{j\omega})_N}{W(e^{j\omega_0})_N} \right| \quad (5.7.2.7)$$

Ví dụ 5.7.2.1 :

Hãy nghiên cứu các tham số của cửa sổ chữ nhật trong miền tần số ω (cửa sổ phổ) với chiều dài của cửa sổ $N = 9$.

Giải :

$$W_R(e^{j\omega})_9 = A_R(e^{j\omega})_9 e^{j\theta(\omega)}$$

$$\left| W_R(e^{j\omega})_9 \right| = \left| A_R(e^{j\omega})_9 \right|$$

$$A_R(e^{j\omega})_9 = 9 \cdot \frac{\sin 9 \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \bigg/ \frac{9\omega}{2} \bigg/ \frac{\omega}{2}$$

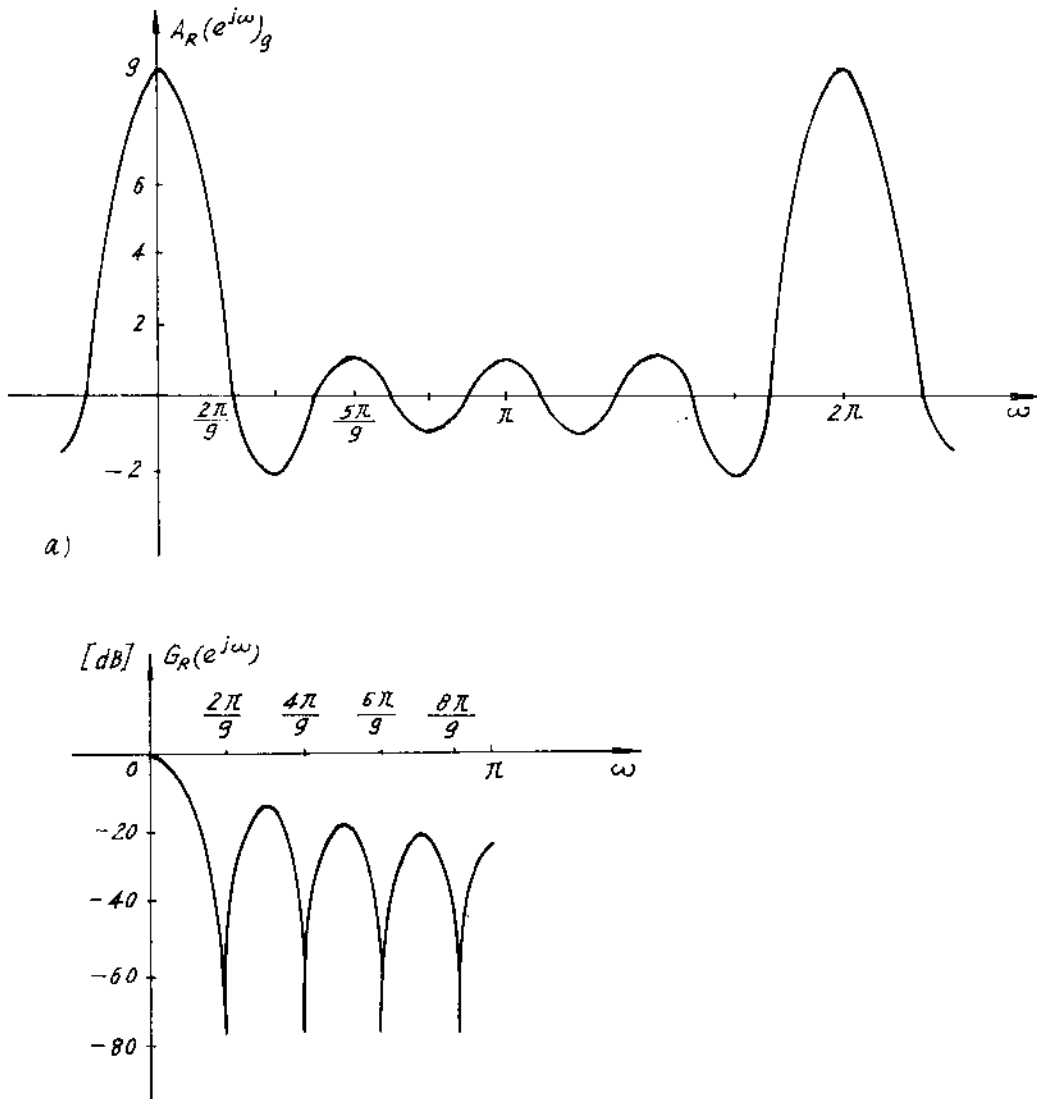
$$G_R(e^{j\omega})_9 = 20 \log_{10} \left| \frac{W_R(e^{j\omega})_9}{W_R(e^{j\omega})_9} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{A_R(e^{j\omega})_9}{A_R(e^{j\omega})_9} \right| \text{ dB}$$

$$\Delta\Omega_R = \frac{4\pi}{N} = \frac{4\pi}{9}$$

$$\eta_R \approx 4,712$$

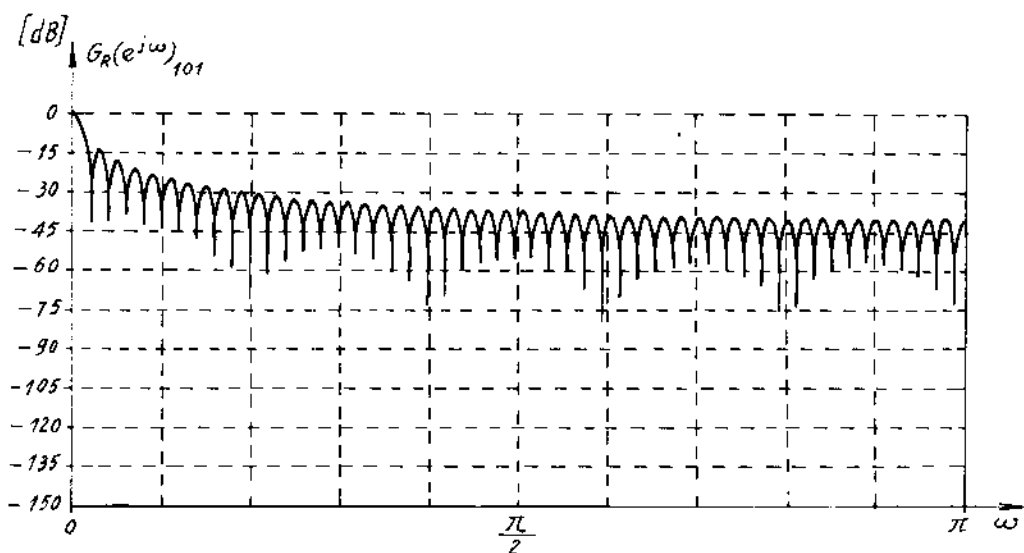
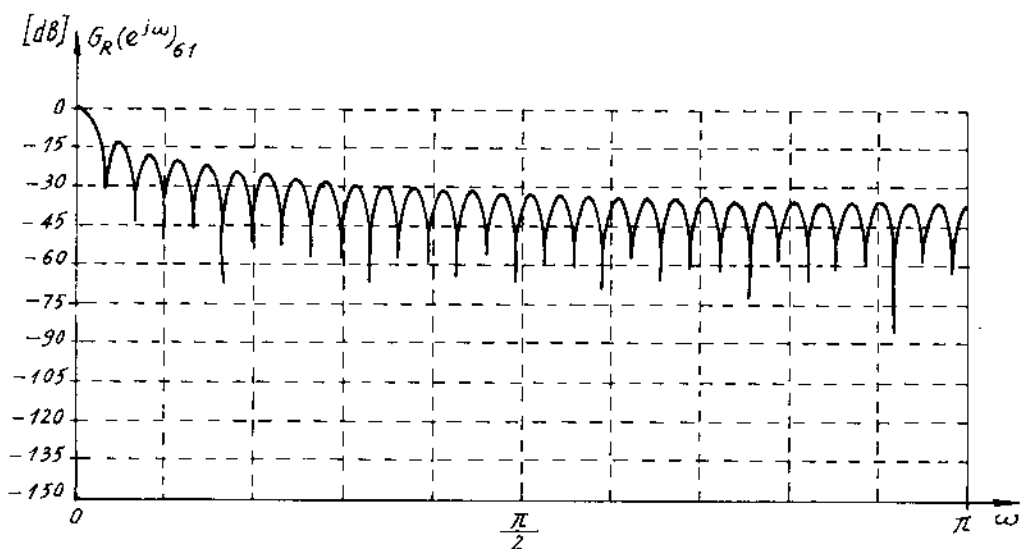
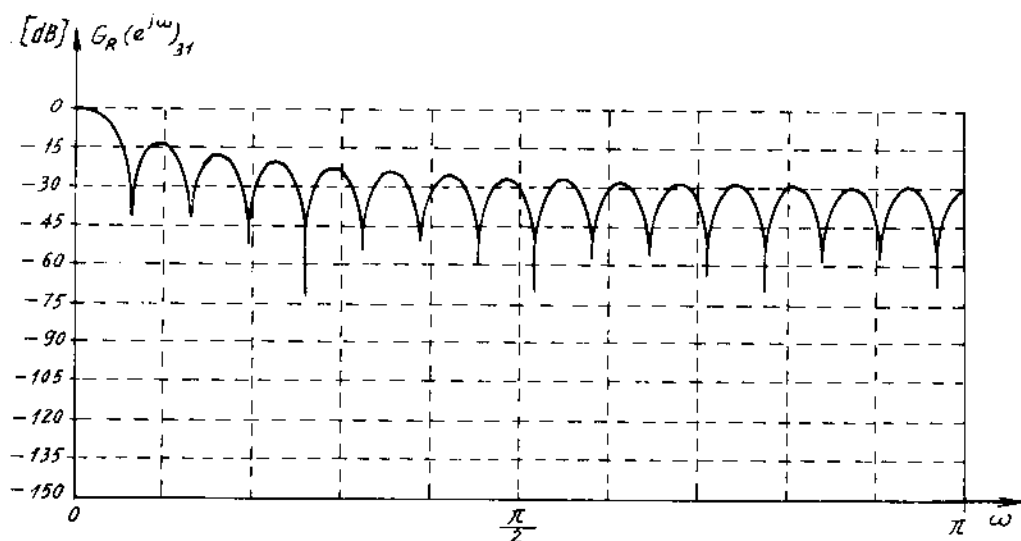
$$\lambda_R \approx -13 \text{ dB}$$

Đồ thị của $A_R(e^{j\omega})_9$ và $G_R(e^{j\omega})_9$ cho trên hình 5.7.2.4 a và b.



Hình 5.7.2.4.

Hình 5.7.2.5 sẽ cho ta đồ thị của $G_R(e^{j\omega})_{31}$, $G_R(e^{j\omega})_{61}$ và $G_R(e^{j\omega})_{101}$



Hình 5.7.2.5.

c) Hiện tượng Gibbs

Chúng ta biết rằng để hạn chế chiều dài của $h(n)$ của bộ lọc lý tưởng, chúng ta sử dụng của số $w(n)_N$.

Trong miền biến số n :

$$h_d(n) = h(n) \cdot w(n)_N = w(n)_N \cdot h(n)$$

Trong miền tần số ω :

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega'}) \cdot W(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \\ &= W(e^{j\omega})_N * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\omega'}) \cdot H(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \end{aligned}$$

mà ta biết rằng:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega}) e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \\ W(e^{j\omega})_N &= A_w(e^{j\omega}) e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega'}) e^{-j\omega' \frac{N-1}{2}} A_w(e^{j(\omega-\omega')}) e^{-j(\omega-\omega') \frac{N-1}{2}} d\omega' \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega'}) \cdot A_w(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \\ H_d(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot A_d(e^{j\omega}) = e^{j\theta(\omega)} A_d(e^{j\omega}) \\ A_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega'}) A_w(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \end{aligned} \quad (5.7.2.8)$$

Đối với các bộ lọc số lý tưởng, trong dải thông $A(e^{j\omega}) = 1$, trong dải chắn $A(e^{j\omega}) = 0$, và tại tần số cắt ω_c thì $A(e^{j\omega})$ chuyển đột ngột từ 1 về 0 hoặc từ 0 về 1. Nhưng do tích chập trong miền tần số sẽ gây dao động ở dải thông và dải chắn xung quanh ω_c , từ đây ta dẫn đến định nghĩa hiện tượng Gibbs.

Định nghĩa hiện tượng Gibbs

Các dao động ở dải thông và dải chắn xung quanh trục chuyển biến đột ngột ω_c do việc hạn chế chiều dài của đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc số lý tưởng bằng của số sinh ra được gọi là hiện tượng Gibbs.

Trong thực tế $H_d(e^{j\omega})$ cũng thường được đánh giá theo thang lôgarit của các biên độ theo đơn vị dB như sau:

$$\begin{aligned} G_d(e^{j\omega}) &= 20 \log_{10} \left| \frac{H_d(e^{j\omega})}{H_d(e^{j0})} \right| \quad [dB] \\ &= 20 \log_{10} \left| \frac{A_d(e^{j\omega})}{A_d(e^{j0})} \right| \quad [dB] \end{aligned} \quad (5.7.2.9)$$

Ví dụ 5.7.2.2 :

Hãy tổng hợp bộ lọc thông thấp **FIR** pha tuyến tính $\alpha(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ với các chỉ tiêu

kỹ thuật sau đây : $\delta_1 = \delta_{10}$, $\delta_2 = \delta_{20}$, $\omega_p = \omega_{p0}$, $\omega_s = \omega_{s0}$.

Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Giải :

Chúng ta tiến hành các bước như sau :

- Cho các chỉ tiêu kỹ thuật

$$\delta_1 = \delta_{10}$$

$$\omega_p = \omega_{p0}$$

$$\delta_2 = \delta_{20}$$

$$\omega_s = \omega_{s0}$$

Giả sử

$$\frac{\omega_{p0} + \omega_{s0}}{2} = \frac{\pi}{2} = \omega_c$$

- Chọn cửa sổ chữ nhật $w_R(n)_N$ là cửa sổ nhân quả, tâm đối xứng tại $\frac{N-1}{2}$, chọn $N = 9$.

- Chọn bộ lọc số lý tưởng thông thấp cũng có tâm đối xứng tại $\frac{N-1}{2}$ và tần số cắt là

$$\omega_c = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy:

$$h(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}{\omega_c \left(n - \frac{N-1}{2} \right)}$$

$$\omega_c = \frac{\pi}{2}, N = 9$$

$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} (n-4)}{\frac{\pi}{2} (n-4)}$$

- Nhân cửa sổ $w_R(n)_9$ với $h(n)$ lý tưởng

$$h_d(n) = w_R(n)_9 \cdot h(n)$$

Minh họa bằng đồ thị trên hình 5.7.2.6.

Chúng ta thu được kết quả như sau:

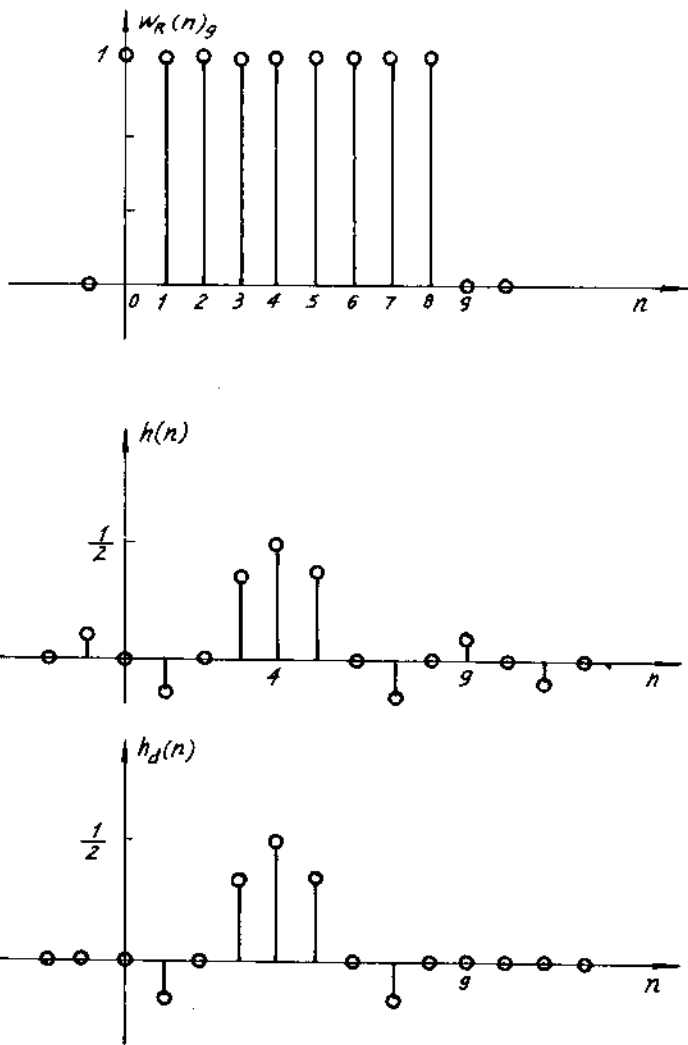
$$h_d(0) = 0 = h_d(8)$$

$$h_d(1) = -\frac{1}{3\pi} = h_d(7)$$

$$h_d(2) = 0 = h_d(6)$$

$$h_d(3) = \frac{1}{\pi} = h_d(5)$$

$$h_d(4) = \frac{1}{2}$$



Hình 5.7.2.6.

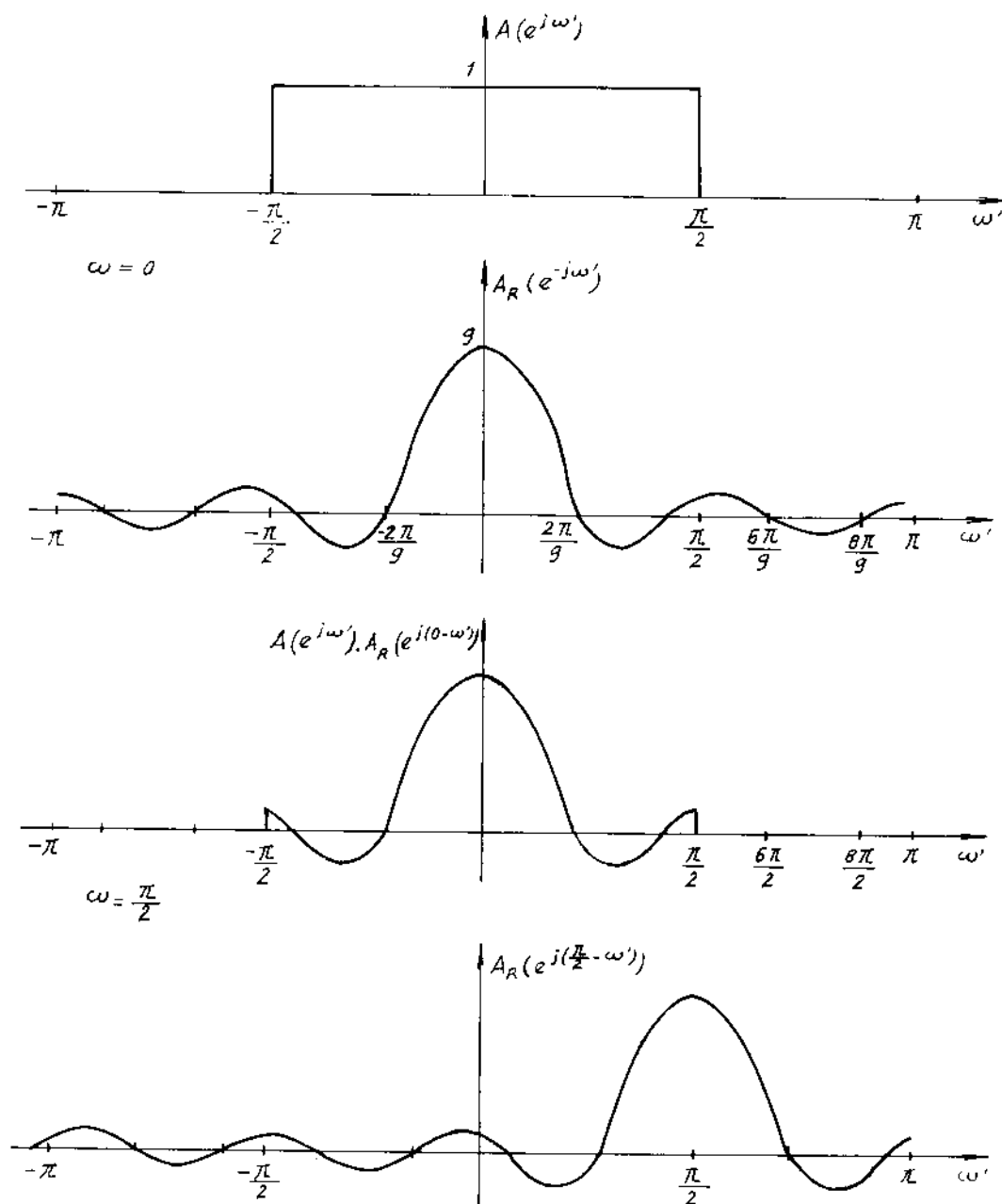
Sau đây chúng ta thử lại các hệ số $h_d(n)$ này trong miền tần số xem có thoả mãn 4 chỉ tiêu kỹ thuật hay không. Ta phải xét hiện tượng Gibbs như sau:

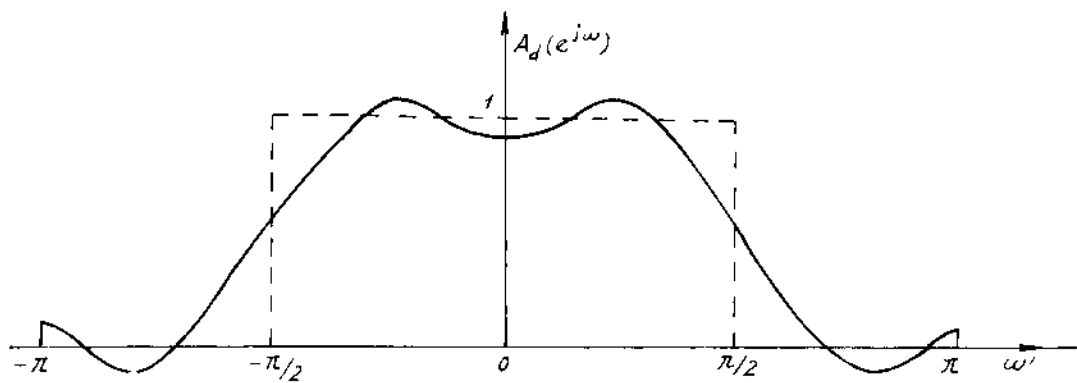
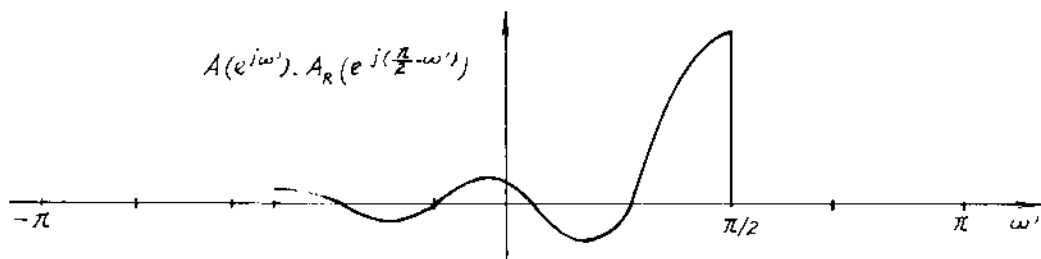
$$\begin{aligned}
 H_d(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega'}) W_R(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega' \frac{N-1}{2}} e^{-j(\omega-\omega') \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega-\omega') \frac{N}{2}}{\sin \frac{(\omega-\omega')}{2}} d\omega' = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin(\omega-\omega') \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega-\omega'}{2}} d\omega \\
 &= A_d(e^{j\omega}) e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \\
 A_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin(\omega-\omega') \frac{N}{2}}{\sin \frac{\omega-\omega'}{2}} d\omega
 \end{aligned}$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ và $N = 9$ ta có:

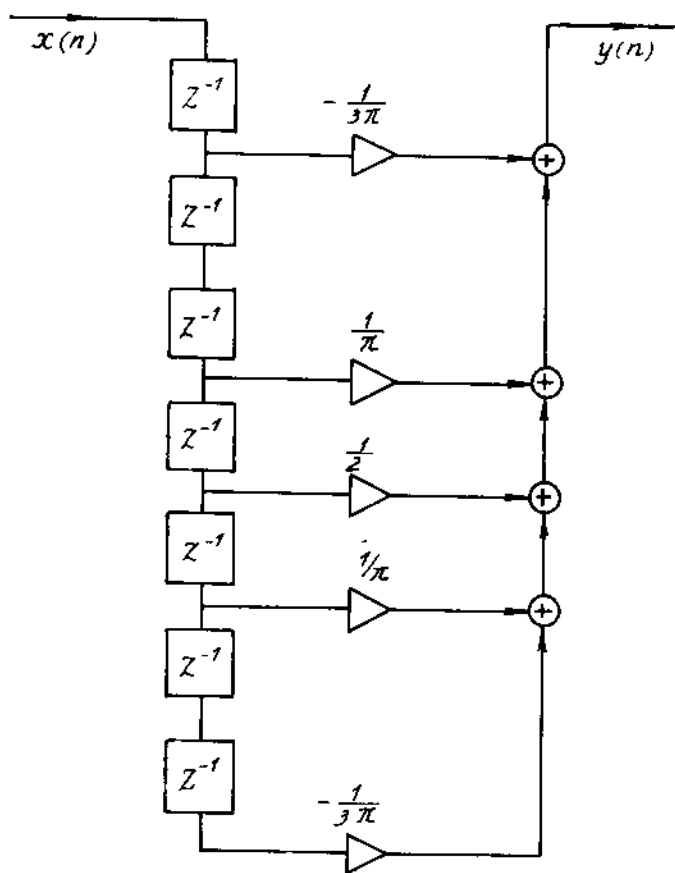
$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\omega - \omega')^{\frac{9}{2}}}{\sin \frac{\omega - \omega'}{2}} d\omega'$$

Hình 5.7.2.7 minh họa hiện tượng Gibbs trong trường hợp này.





Hình 5.7.2.7.



Hình 5.7.2.8.

Sau khi thử lại trong miền tần số bằng cách xét hiện tượng Gibbs, nếu không thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật chúng ta phải tăng N lên, rồi lại tiếp tục thực hiện làm các bước, cho đến khi nào thoả mãn thì dừng lại.

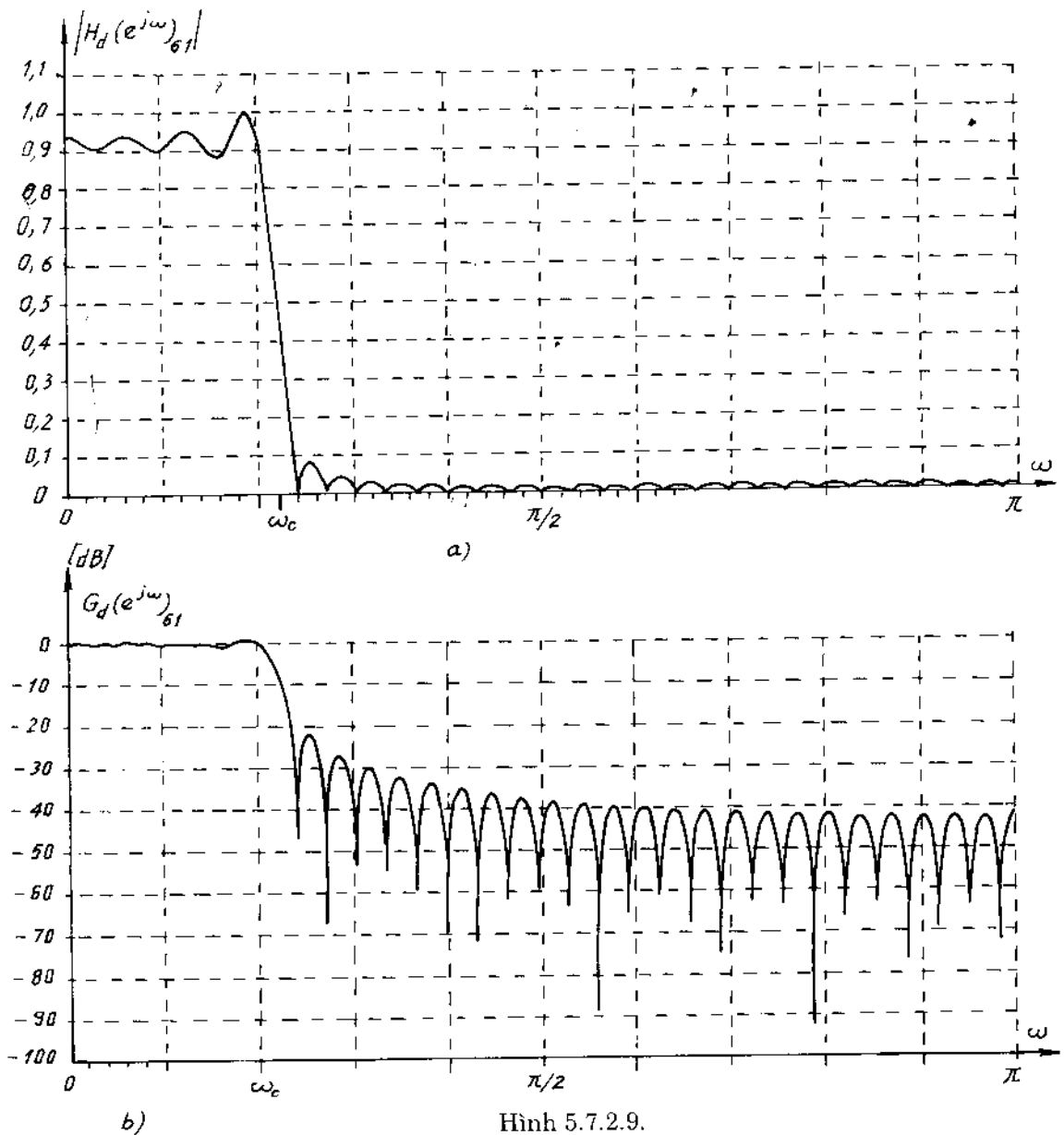
Giả sử với $N = 9$ ta đã thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật rồi, chúng ta dừng ở đây. Hàm truyền đạt $H_d(Z)$ và phương trình sai phân để biểu diễn bộ lọc có dạng như sau:

$$H_d(Z) = \sum_{n=0}^8 h_d(n)Z^{-n} = -\frac{1}{3\pi}Z^{-1} + \frac{1}{\pi}Z^{-3} + \frac{1}{2}Z^{-4} + \frac{1}{\pi}Z^{-5} - \frac{1}{3\pi}Z^{-7}$$

$$y(n) = -\frac{1}{3\pi}x(n-1) + \frac{1}{\pi}x(n-3) + \frac{1}{2}x(n-4) + \frac{1}{\pi}x(n-5) - \frac{1}{3\pi}x(n-7)$$

Từ đây ta có sơ đồ kết cấu của bộ lọc như trên hình 5.7.2.8.

Ta thấy rằng khi các chỉ tiêu kỹ thuật càng chặt chẽ thì N càng phải lớn mới thoả mãn. Hình 5.7.2.9 cho ta đồ thị của $|H_d(e^{j\omega})|$ và $G_d(e^{j\omega})$ với $N = 61$.



Hình 5.7.2.9.

Nhận xét:

Thông thường trong thực tế các chuyên gia chuyên thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính, do làm nhiều nên có kinh nghiệm, vì vậy dựa vào các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho trước họ thường đưa ra các công thức, kinh nghiệm hoặc các bảng kinh nghiệm để tính trước được chiều dài bộ lọc số FIR N . Chiều dài N này của bộ lọc chỉ gần đúng (có tính chất tương đối) bởi vì sau khi tìm được các giá trị của $h_d(n)$ chúng ta phải mã hoá ra mã nhị phân với số bit hữu hạn, dẫn đến có khả năng giá trị của $h_d(n)$ sau khi đã mã hoá sẽ lệch với giá trị ban đầu (trước khi mã hoá), vì vậy ở bước 5 người ta sẽ thử lại với giá trị của $h_d(n)$ sau khi đã mã hoá.

Vậy trong ví dụ 5.7.2.3 sau đây chúng ta sẽ cho trước chiều dài bộ lọc N và tần số cắt ω_c , tức là thay bằng việc cho các chỉ tiêu kỹ thuật thì chúng ta cho N và ω_c .

Ví dụ 5.7.2.3 :

Hãy tổng hợp (thiết kế) bộ lọc số thông cao FIR pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ với

$N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp của số chữ nhật.

Sau đó vẽ lại sơ đồ bộ lọc số này.

Giải :

Chúng ta tiến hành các bước như sau :

Bước 1 :

Không cho các chỉ tiêu kỹ thuật nhưng cho trước $N = 9$.

Bước 2 :

Chọn cửa sổ chữ nhật có pha $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$, tức là trục đối xứng tại $n = \frac{N-1}{2}$.

- Chọn $N = 9$, tức là bộ lọc số có pha $\theta(\omega) = -4\omega$ và trục đối xứng tại mẫu $n = 4$.

Bước 3 :

Chọn bộ lọc số thông cao lý tưởng có pha trùng với pha của cửa sổ $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$,

tức là trục đối xứng tại $n = \frac{N-1}{2}$, tức là ta có :

$$h(n) = \delta\left(n - \frac{N-1}{2}\right) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, $N = 9$, ta có :

$$h(n) = \delta(n-4) - \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n-4)}{\frac{\pi}{2}(n-4)}$$

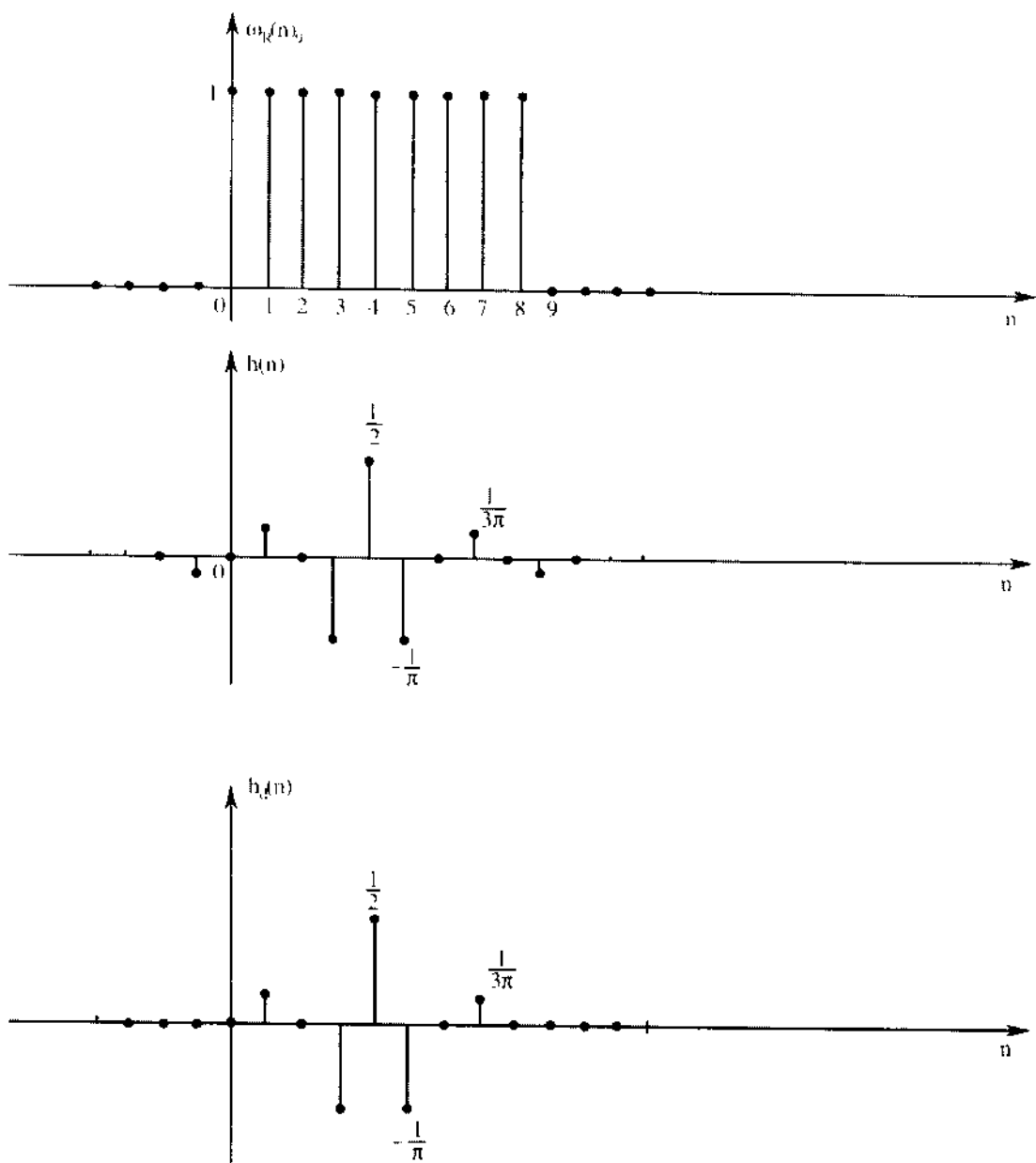
Thay các giá trị n vào ta tính được $h(n)$.

Bước 4 :

Nhân cửa sổ $\omega_R(n)_9$ với $h(n)$ ta có :

$$h_d(n) = \omega_R(n)_9 \cdot h(n)$$

Minh hoạ bằng đồ thị trên hình 5.7.2.10.



Hình 5.7.2.10

Chúng ta thu được kết quả như sau :

$$h_d(0) = 0 = h_d(8)$$

$$h_d(1) = \frac{1}{3\pi} = h_d(7)$$

$$h_d(2) = 0 = h_d(6)$$

$$h_d(3) = \frac{1}{\pi} = h_d(5)$$

$$h_d(3) = \frac{1}{2}$$

Bước 5 :

Chúng ta coi $N = 9$ là đã thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật nên chúng ta không thử lại nữa.

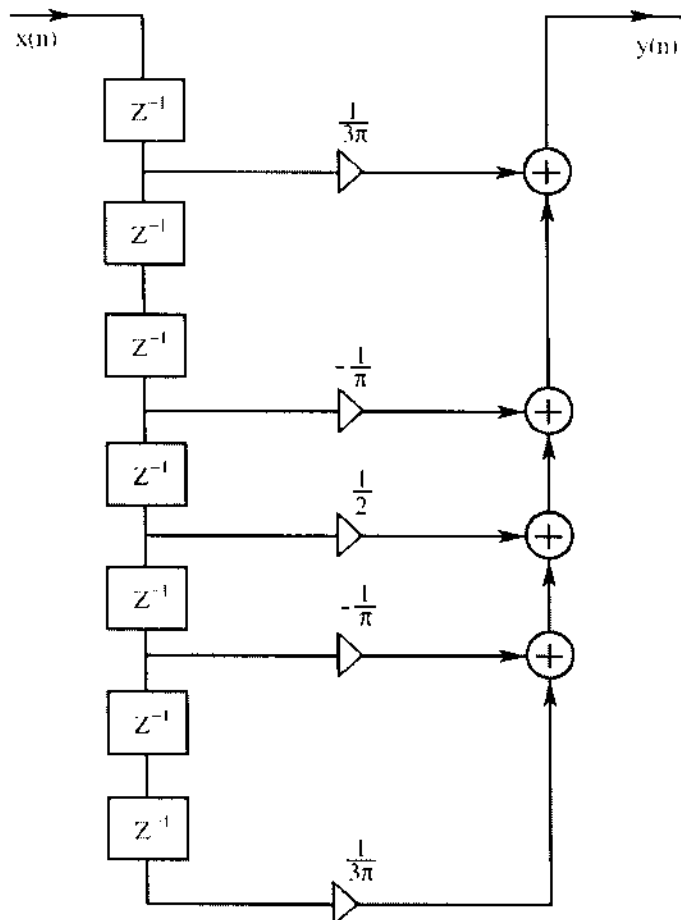
Để vẽ được sơ đồ chúng ta phải viết được phương trình vi phân như sau :

$$y(n) = \sum_{r=0}^{N-1} h_d(r)x(n-r)$$

Thay $N = 9$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(n) &= \sum_{r=0}^8 h_d(r)x(n-r) = \\ &= h_d(0)x(n) + h_d(1)x(n-1) + \dots + h_d(8)x(n-8) = \\ &= \frac{1}{3\pi}x(n-1) - \frac{1}{\pi}x(n-3) + \frac{1}{2}x(n-4) - \frac{1}{\pi}x(n-5) + \frac{1}{3\pi}x(n-7) \end{aligned}$$

Từ đây ta có sơ đồ của bộ lọc số như trên hình 5.7.2.11.



Hình 5.7.2.11

Nhận xét :

Chúng ta thấy sơ đồ bộ lọc số thông thấp (trên hình 5.7.2.8) và bộ lọc số thông cao (trên hình 5.7.2.11) là giống nhau, chỉ khác nhau giá trị các hệ số $h_d(n)$.

5.7.3. CỬA SỐ TAM GIÁC (HAY CỬA SỐ BARTLETT)

Với mục đích giảm biên độ của các đỉnh thứ cấp của cửa sổ chữ nhật $W_R(e^{j\omega})$, chúng ta chọn một cửa sổ khác có dạng tam giác cân, gọi là cửa sổ tam giác (hay cửa sổ Bartlett)

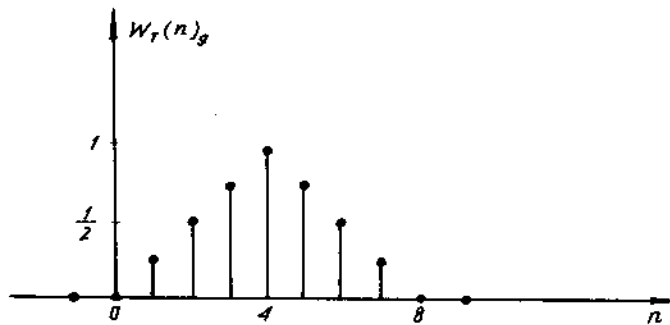
- Định nghĩa cửa sổ tam giác

Trong miền n cửa sổ tam giác được định nghĩa như sau:

$$w_T(n)_N = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.3.1)$$

Đồ thị của cửa sổ tam giác với $N = 9$ được cho trên hình 5.7.3.1.

$$w_T(n)_9 = \begin{cases} \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 2 - \frac{n}{4} & 4 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$



Hình 5.7.3.1.

Nghiên cứu cửa sổ phổ trong miền ω ta thấy rằng:

$$w_T(n)_N = \frac{2}{N-1} \cdot \text{rect}_{\frac{N-1}{2}}(n) * \text{rect}_{\frac{N-1}{2}}(n-1) = \frac{2}{N-1} w_R(n)_{\frac{N-1}{2}} * w_R(n-1)_{\frac{N-1}{2}}$$

Vậy trong miền ω ta có:

$$W_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}} \cdot e^{-j\omega} W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}}$$

mà:

$$W_R(e^{j\omega})_{\frac{N-1}{2}} = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot \frac{N-1}{2}}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
 W_T(e^{j\omega})_N &= \frac{2}{N-1} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{j\omega} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}} \\
 &= \frac{2}{N-1} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[\frac{\sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2
 \end{aligned} \tag{5.7.3.2}$$

$$W_T(e^{j\omega})_N = A_T(e^{j\omega})_N e^{j\theta(\omega)}$$

Vậy:

$$A_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin\left(\omega \frac{N-1}{2}\right)}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 \tag{5.7.3.3}$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega$$

Chú ý rằng trong trường hợp cửa sổ tam giác này do ở hai đầu mút của cửa sổ bằng không nên chiều dài hiệu quả chỉ từ 1 đến $N-2$, tức là ta có thể viết:

$$L[w_T(n)_N] = [1, N-2]$$

ta cũng thấy rằng $A_T(e^{j\omega})_N$ luôn luôn dương.

Ví dụ 5.7.3.1 :

Hãy nghiên cứu cửa sổ chữ nhật trong miền tần số ω (cửa sổ phổ) với chiều dài của cửa sổ $N = 9$.

Giải :

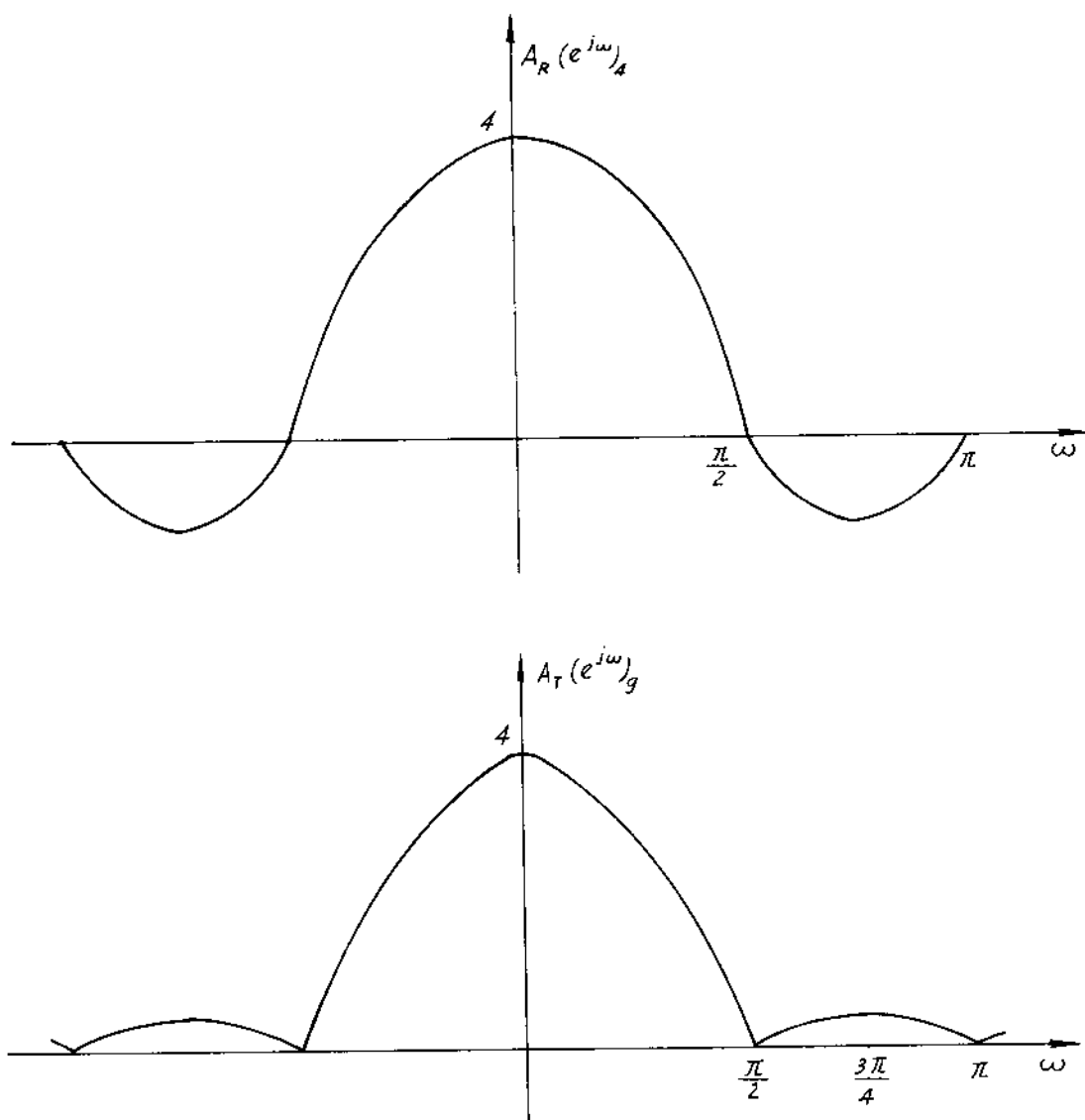
$$W_T(e^{j\omega})_9 = A_T(e^{j\omega})_9 e^{j\theta(\omega)}$$

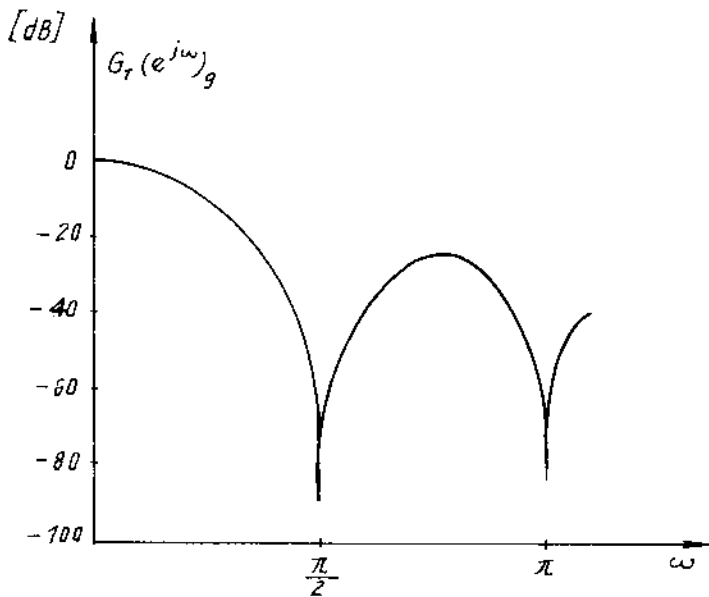
$$|W_T(e^{j\omega})_9| = |A_T(e^{j\omega})_9|$$

$$A_T(e^{j\omega})_9 = \begin{cases} \frac{2}{N-1} \left(\frac{N-1}{2} \right)^2 = \frac{N-1}{2} = 4 & \omega = 0 \\ \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin \left(\frac{N-1}{2} \omega \right)}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 = \frac{1}{4} \frac{\sin 2\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$G_T(e^{j\omega})_9 = 20 \log_{10} \left| \frac{A_T(e^{j\omega})_9}{A_T(e^{j\omega})_9} \right| \quad dB$$

Đồ thị của $A_T(e^{j\omega})_9$ và $G_T(e^{j\omega})_9$ cho trên hình 5.7.3.2.





Hình 5.7.3.2.

Từ ví dụ 5.7.3.1 ta thấy rằng bề rộng của đỉnh trung tâm của cửa sổ phổ $W_T(e^{j\omega})_N$ được tính như sau:

$$\Delta\Omega_T = \frac{8\pi}{N-1}$$

Khi N lớn thì $\Delta\Omega_T$ được tính gần đúng như sau :

$$\Delta\Omega_T \approx \frac{8\pi}{N}$$

Bây giờ ta tính tỷ số giữa biên độ của đỉnh trung tâm và đỉnh thứ cấp đầu tiên.

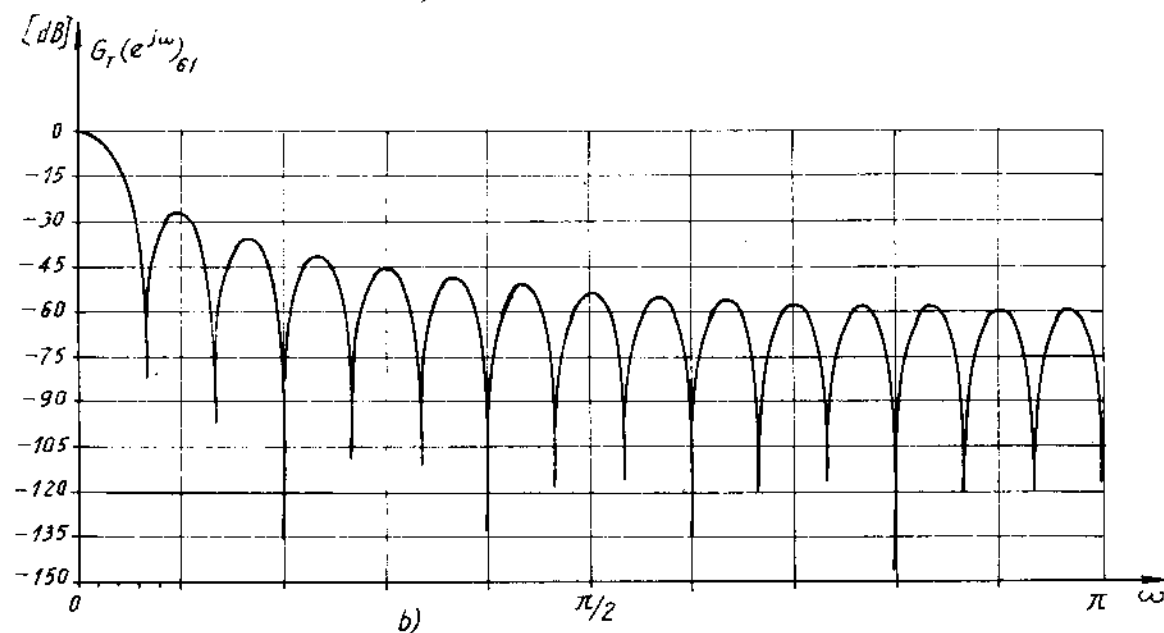
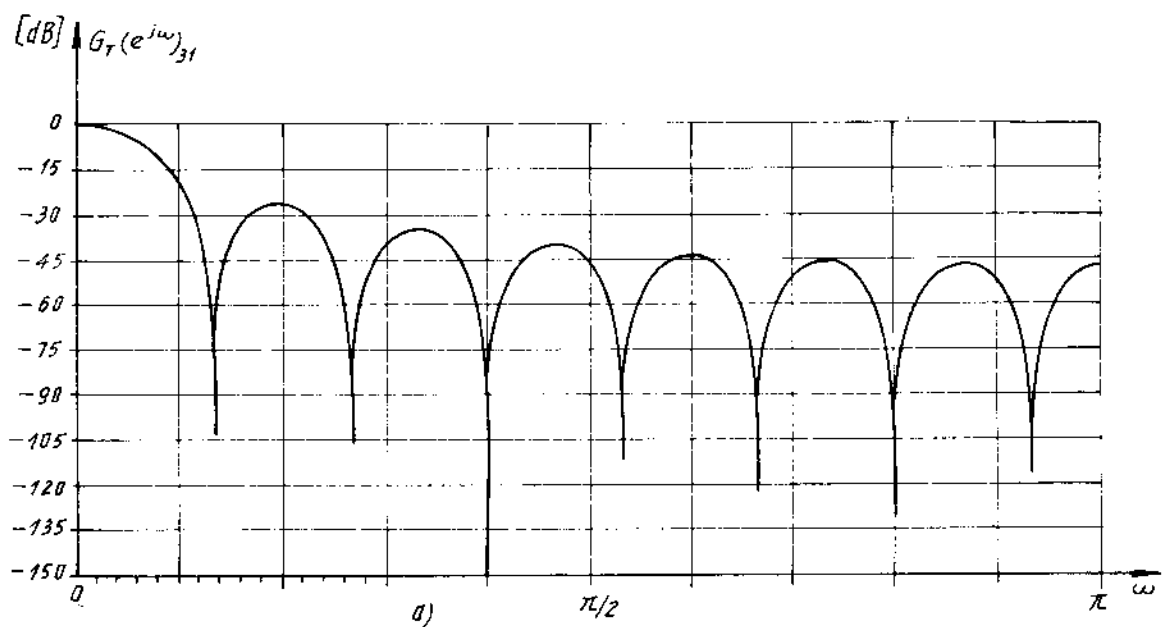
$$\eta_T = \frac{|W_T(e^{j0})|}{|W_T(e^{j\frac{3\pi}{N-1/2}})|}$$

$$|W_T(e^{j0})| = \frac{N-1}{2}$$

$$\left| W_T \left(e^{j\frac{3\pi}{N-1/2}} \right) \right| = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin \left(\frac{3\pi}{N-1/2} \cdot \frac{N-1/2}{2} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{N-1/2} \cdot \frac{1}{2} \right)} \right]^2$$

Vậy:

$$\eta_T = \frac{\frac{N-1}{2}}{\frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{N-1}} \right]^2} = \left(\frac{N-1}{2} \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{3\pi}{N-1}}{\sin \frac{3\pi}{2}} \right)^2$$



Hình 5.7.3.3.

Khi $N \gg 1$ thì :

$$\eta_T \approx \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 \quad (5.7.3.4)$$

và như vậy ta có λ_T như sau:

$$\lambda_T = 20 \log_{10} \eta_T^{-1} \approx -26 \text{dB}$$

Vậy đối với cửa sổ tam giác, hai tham số chính đặc trưng cho cửa sổ trong miền tần số ω có giá trị như sau:

$$\Delta\Omega_T = \frac{8\pi}{N}$$

$$\lambda_T = -26 \text{dB}$$

* So sánh với cửa sổ chữ nhật

- $\Delta\Omega_T > \Delta\Omega_R$ vậy bề rộng của dải quá độ khi thiết kế bộ lọc số dùng cửa sổ tam giác sẽ lớn hơn dùng cửa sổ chữ nhật.

- $\lambda_T > \lambda_R$ vậy biên độ của độ gợn sóng ở cả dải thông và dải chắn sẽ nhỏ hơn khi dùng cửa sổ chữ nhật.

Hình 5.7.3.3 cho ta đồ thị của $G_T(e^{j\omega})_{31}$ và $G_T(e^{j\omega})_{61}$.

Ví dụ 5.7.3.2 :

Hãy tổng hợp bộ lọc thông thấp *FIR* pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ dùng cửa sổ tam giác với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Giải :

Các bước tiến hành giống như tổng hợp bằng cửa sổ chữ nhật, trong miền n ta có:

$$h_d(n) = w_T(n)_9 \cdot h(n)$$

Minh họa bằng đồ thị trên hình 5.7.3.4.

Chúng ta thu được kết quả như sau:

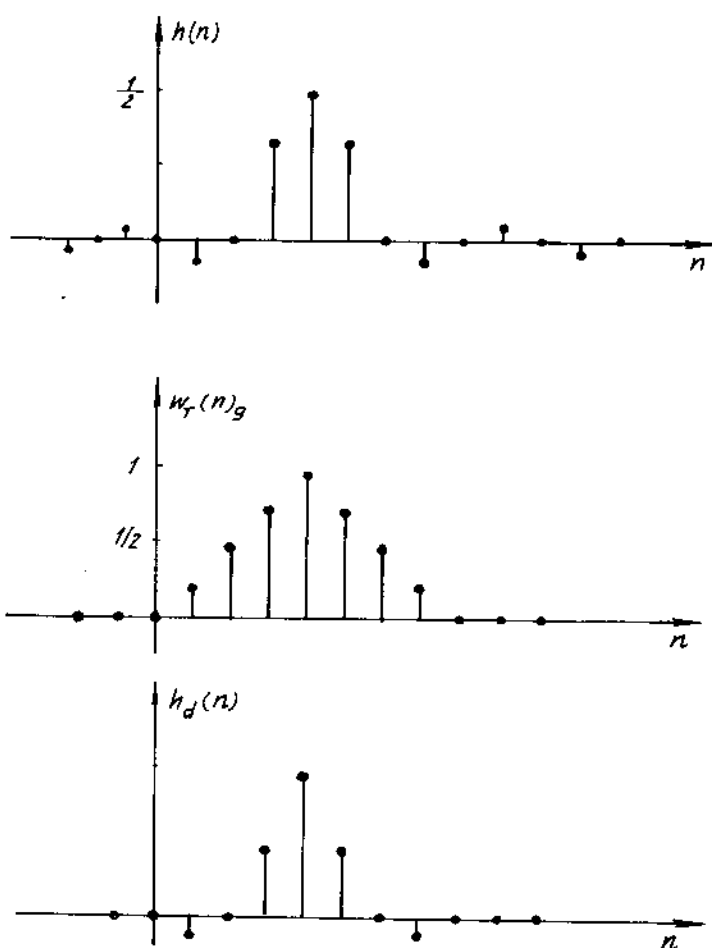
$$h_d(0) = h_d(8) = 0$$

$$h_d(1) = h_d(7) = -\frac{1}{12\pi}$$

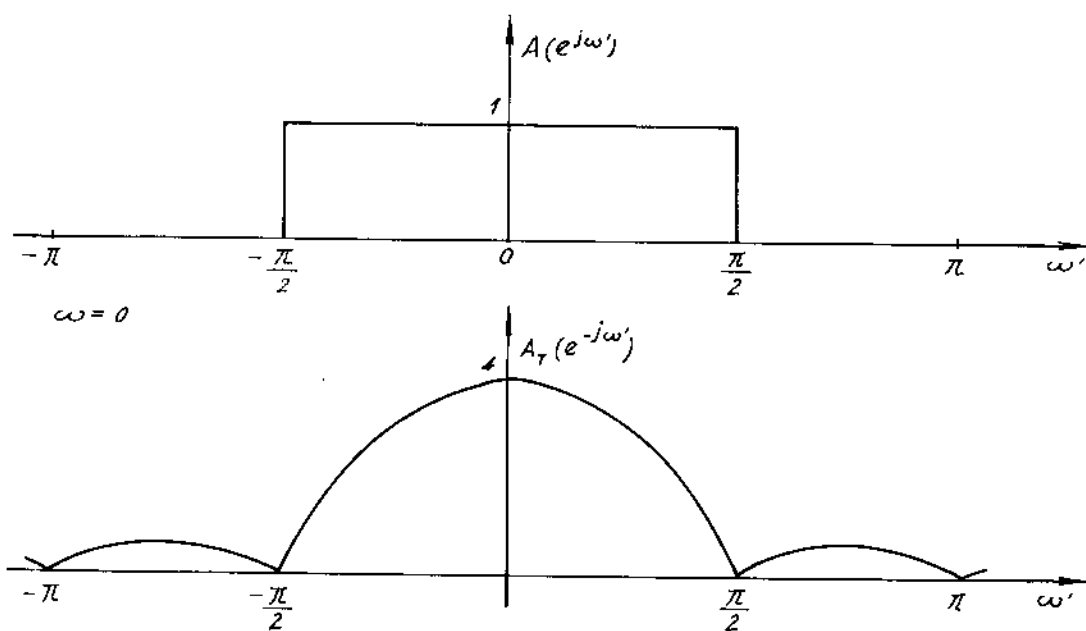
$$h_d(2) = h_d(6) = 0$$

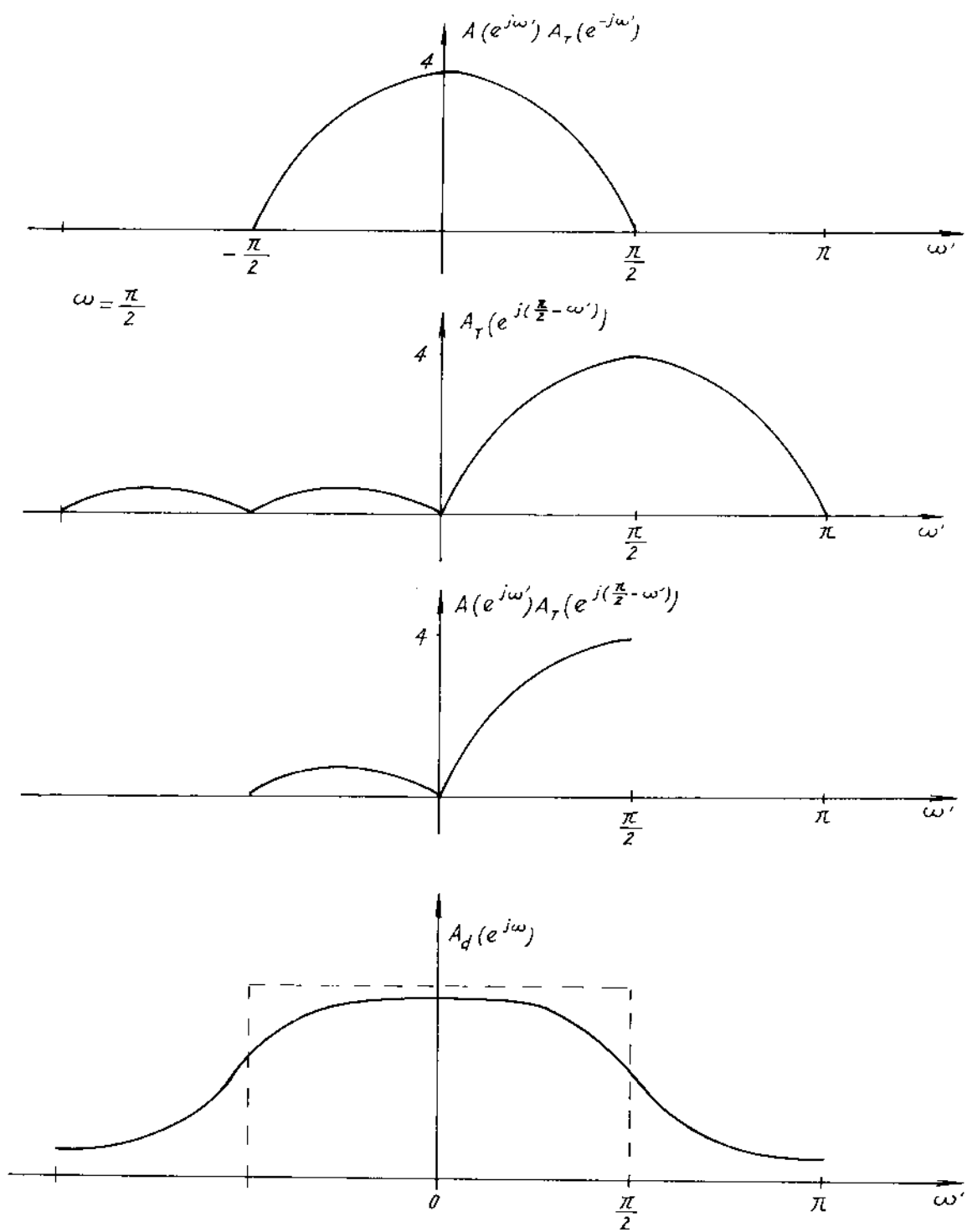
$$h_d(3) = h_d(5) = \frac{3}{4\pi}$$

$$h_d(4) = \frac{1}{2}$$



Hình 5.7.3.4.





Hình 5.7.3.5.

Đánh giá hiện tượng Gibbs như sau:

$$H_d(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) * W_T(e^{j\omega})_N$$

Theo biểu thức (5.7.2.8) ta có:

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega'}) A_T(e^{j(\omega-\omega')})_N d\omega'$$

mà:

$$A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$A_T(e^{j\omega})_N = \frac{2}{N-1} \left[\frac{\sin \omega \frac{N-1}{4}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2$$

Vậy:

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi(N-1)} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\frac{\sin(\omega-\omega') \frac{N-1}{4}}{\sin \frac{\omega-\omega'}{2}} \right]^2 d\omega'$$

Thay $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ và $N = 9$ ta có:

$$A_T(e^{j\omega})_9 = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2$$

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin 2(\omega-\omega')}{\sin \frac{\omega-\omega'}{2}} \right]^2 d\omega'$$

Đồ thị minh họa hiện tượng Gibbs trong trường hợp này trên hình 5.7.3.5.

Nếu đánh giá hiện tượng Gibbs theo dB ta có $G_d(e^{j\omega})_9$, đồ thị minh họa cho trên hình 5.7.3.6.

Nhận xét :

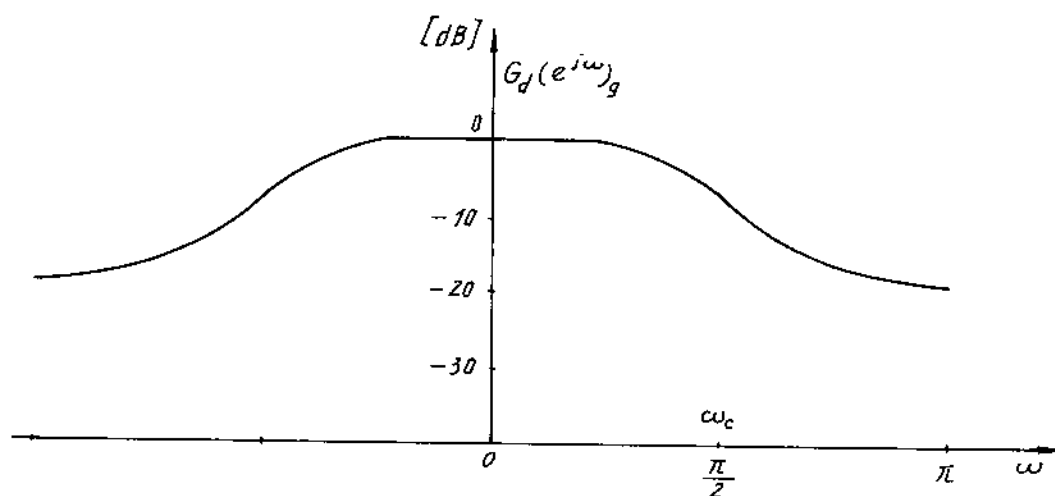
So sánh các kết quả của cửa sổ tam giác với kết quả của cửa sổ chữ nhật chúng ta thấy rằng:

- Các gợn sóng ở dải thông và dải chặn giảm đi.
- Bề rộng của dải quá độ tăng lên.

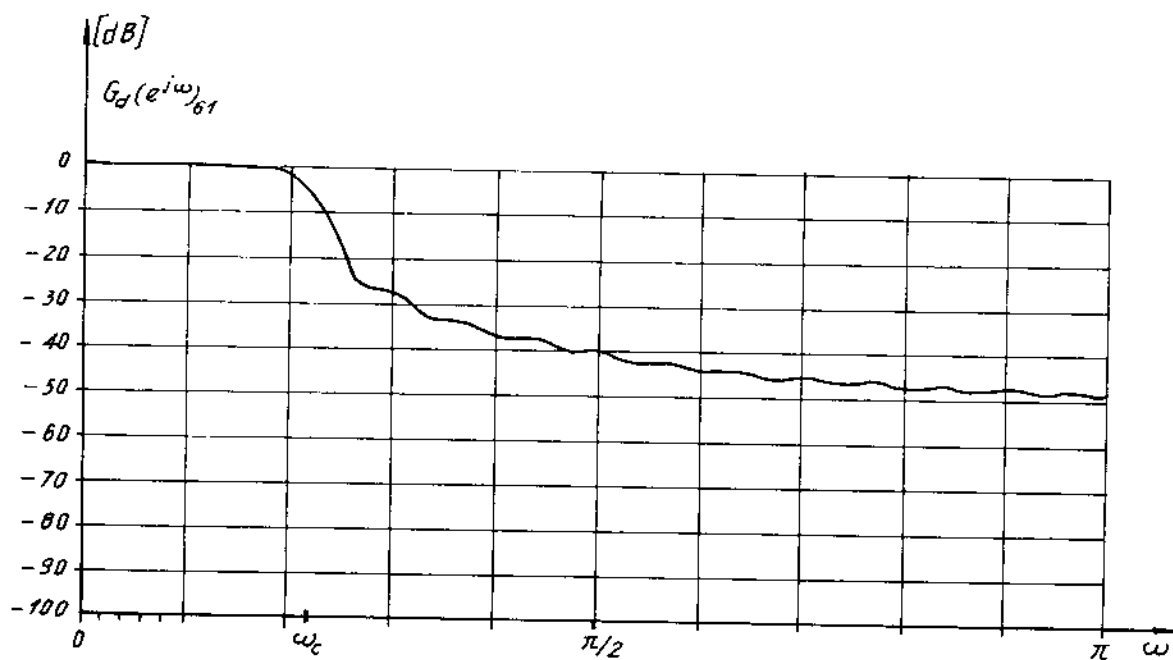
Như vậy khi chỉ tiêu kỹ thuật về bề rộng của dải quá độ không yêu cầu cao thì ta dùng cửa sổ tam giác sẽ tốt hơn nhiều.

Cũng giống như cửa sổ chữ nhật, khi cần nâng cao chất lượng của bộ lọc số chúng ta phải tăng chiều dài của bộ lọc N .

Hình 5.7.3.7 cho ta một ví dụ về đánh giá hiện tượng Gibbs của việc thiết kế bộ lọc FIR thông thấp dùng cửa sổ tam giác với $N = 61$.



Hình 5.7.3.6.



Hình 5.7.3.7.

5.7.4. CỬA SỐ HANNING VÀ HAMMING

(Cửa sổ Hann thường được gọi là cửa sổ Hanning một cách không chính xác)

- Định nghĩa cửa sổ Hanning và Hamming:

Trong miền n cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n)_N = \begin{cases} \alpha - (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.4.1)$$

Nếu $\alpha = 0,5$, ta có cửa sổ Hanning như sau:

$$w_{Ham}(n)_N = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.4.2)$$

Nếu $\alpha = 0,54$, ta có cửa sổ Hamming như sau:

$$w_{Ham}(n)_N = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi}{N-1} n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.4.3)$$

Ví dụ 5.7.4.1 :

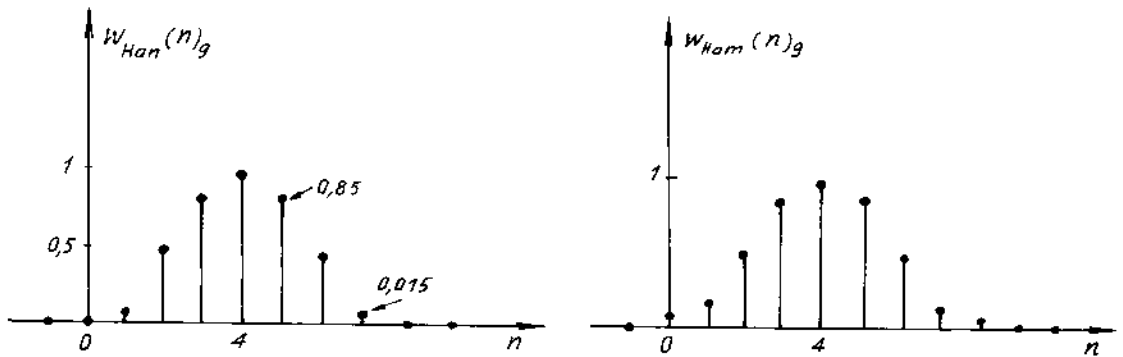
Hãy tìm cửa sổ Hanning và Hamming với $N = 9$, sau đó vẽ đồ thị của cửa sổ:

Giải :

$$w_{Ham}(n)_9 = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos \frac{\pi}{4} n & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$w_{Ham}(n)_9 = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{\pi}{4} n & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Đồ thị của các cửa sổ này được cho trên hình 5.7.4.1.



Hình 5.7.4.1.

Nghiên cứu cửa sổ phổ trong miền ω ta thấy rằng:

Do chiều dài của $w_H(n)_N$ là N nên ta có thể viết:

$$w_H(n)_N = \left[\alpha - (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi}{N-1} n \right] w_R(n)_N$$

Vậy nếu $\alpha = 1$ ta có:

$$w_H(n)_N = w_R(n)_N$$

Biến đổi tiếp ta có:

$$\begin{aligned}
w_H(n)_N &= \alpha w_R(n)_N - (1-\alpha)w_R(n)_N \cos \frac{2\pi}{N-1}n \\
&= \alpha w_R(n)_N - \frac{1}{2}(1-\alpha)w_R(n)_N e^{j\frac{2\pi}{N-1}n} - \frac{1}{2}(1-\alpha)w_R(n)_N e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n}
\end{aligned}$$

Lấy biến đổi Fourier hai vế:

$$\begin{aligned}
FT[w_H(n)_N] &= \alpha FT[w_R(n)_N] - \frac{1}{2}(1-\alpha)FT\left[w_R(n)_N e^{j\frac{2\pi}{N-1}n}\right] - \frac{1}{2}(1-\alpha)FT\left[w_R(n)_N e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n}\right] \\
FT[w_H(n)_N] &= W_H(e^{j\omega})_N
\end{aligned}$$

Ta có:

$$W_H(e^{j\omega})_N = \alpha W_R(e^{j\omega})_N - \frac{1}{2}(1-\alpha)W_R\left[e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right]_N - \frac{1}{2}(1-\alpha)W_R\left[e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right]_N \quad (5.7.4.4)$$

Ta biết rằng:

$$W_R(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

Vậy:

$$W_H(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \alpha \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} - e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}} \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]} - \frac{1-\alpha}{2} e^{-j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{1}{2}\right]}$$

mà:

$$\begin{aligned}
e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}} &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{j\pi} = -e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \\
e^{-j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\frac{N-1}{2}} &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} e^{-j\pi} = -e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}
\end{aligned}$$

Cuối cùng ta có:

$$W_H(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left[\alpha \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left(\omega \frac{\pi}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left(\omega \frac{\pi}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} \right] \quad (4.7.4.5)$$

Từ biểu thức (5.7.4.5) ta có:

$$W_H(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A_H(e^{j\omega})_N$$

Vậy:

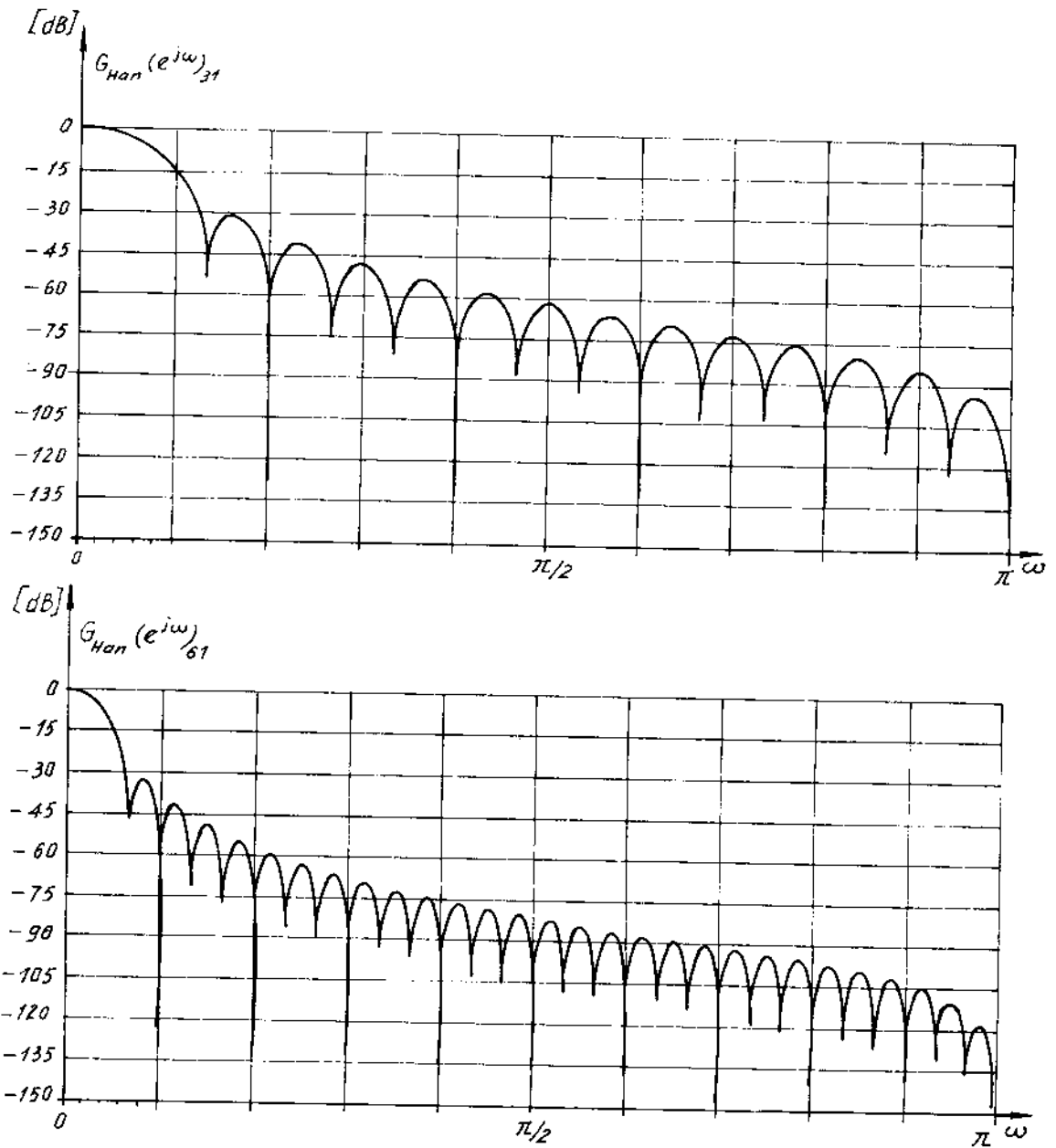
$$A_H(e^{j\omega})_N = \alpha \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left(\omega \frac{N}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left(\omega \frac{N}{2} + \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1}\right)} \quad (5.7.4.6)$$

Với $\alpha = 0,5$ ta có cửa sổ phổ Hanning:

$$W_{Han}(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} A_{Han}(e^{j\omega})_N$$

$$A_{Han}(e^{j\omega})_N = 0,5 \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + 0,25 \frac{\sin \left(\omega \frac{N}{2} - \frac{N\pi}{N-1} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1} \right)} + 0,25 \frac{\sin \left(\omega \frac{N}{2} + \frac{N\pi}{N-1} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1} \right)} \quad (5.7.4.7)$$

Đồ thị của cửa sổ phổ Hanning với $N = 31$ và $N = 61$ được cho trên hình 5.7.4.2.



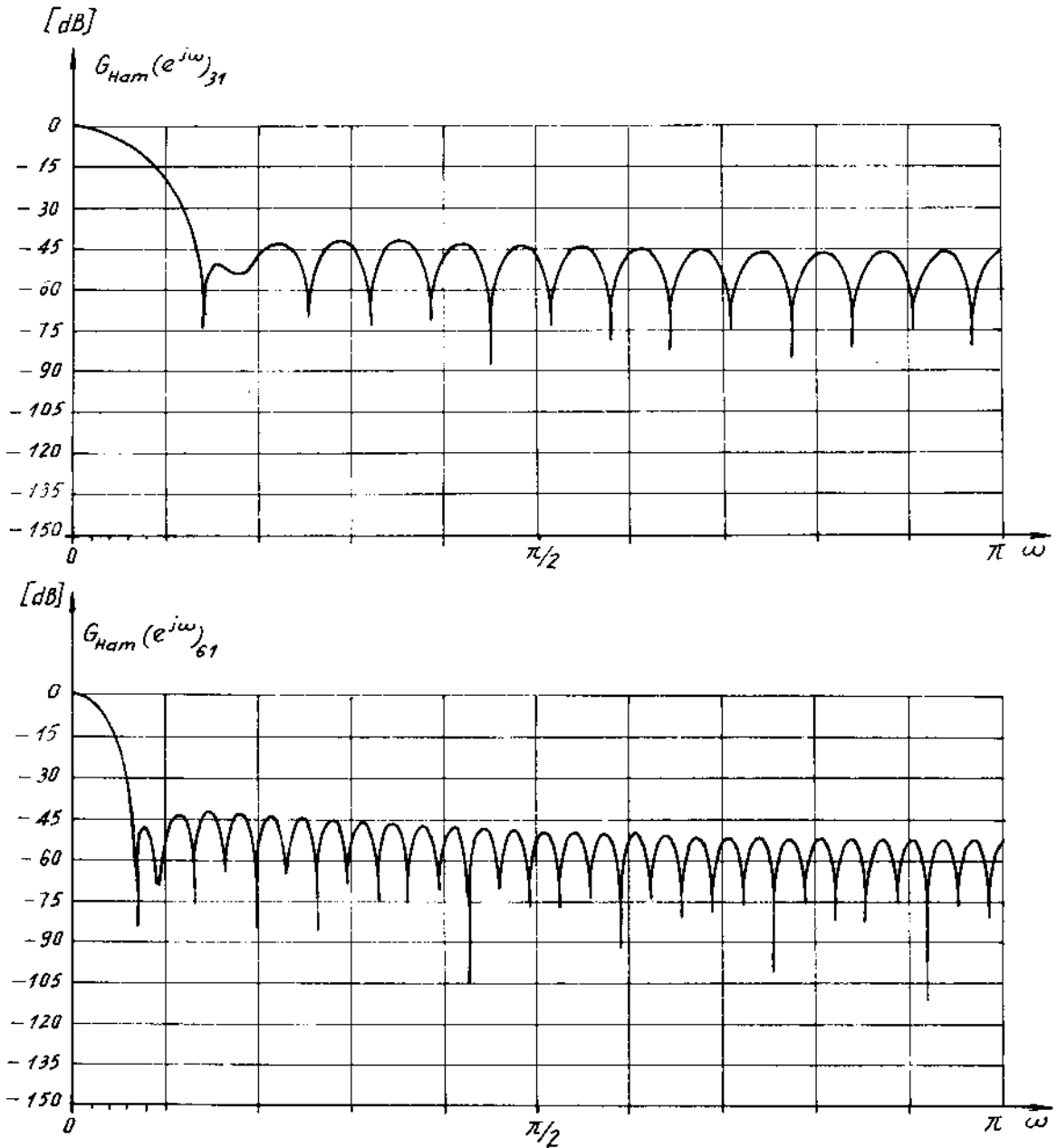
Hình 5.7.4.2.

Với $\alpha = 0,54$ ta có cửa sổ phổ Hamming:

$$W_{Ham}(e^{j\omega})_N = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} A_{Ham}(e^{j\omega})_N$$

$$A_{Ham}(e^{j\omega})_N = 0,54 \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + 0,23 \frac{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{N\pi}{N-1} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1} \right)} + 0,23 \frac{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{N\pi}{N-1} \right)}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1} \right)} \quad (5.7.4.8)$$

Đồ thị của cửa sổ phổ Hamming với $N = 31$ và $N = 61$ được cho trên hình 5.7.4.3.



Hình 5.7.4.3.

Từ đây ta thấy đối với cửa sổ Hanning, hai tham số chính đặc trưng cho cửa sổ trong miền tần số có giá trị như sau:

$$\Delta\Omega_{Han} = \frac{8\pi}{N}$$

$$\lambda_{Han} = -32\text{dB}$$

Còn đối với cửa sổ Hamming ta có:

$$\Delta\Omega_{Ham} = \frac{8\pi}{N}$$

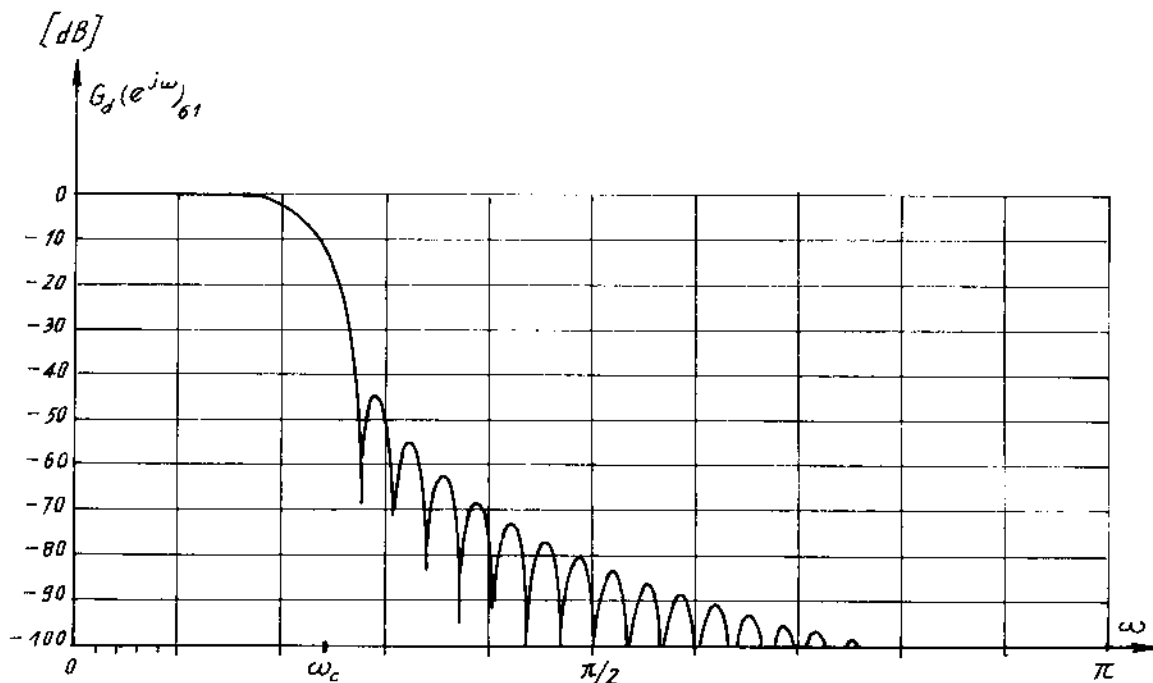
$$\lambda_{Ham} = -43\text{dB}$$

So sánh với cửa sổ tam giác ta thấy rằng:

- $\Delta\Omega_T = \Delta\Omega_{Han} = \Delta\Omega_{Ham}$, vậy bề rộng của dải quá độ khi thiết kế bộ lọc số dùng cửa sổ tam giác, cửa sổ Hanning và cửa sổ Hamming là như nhau.

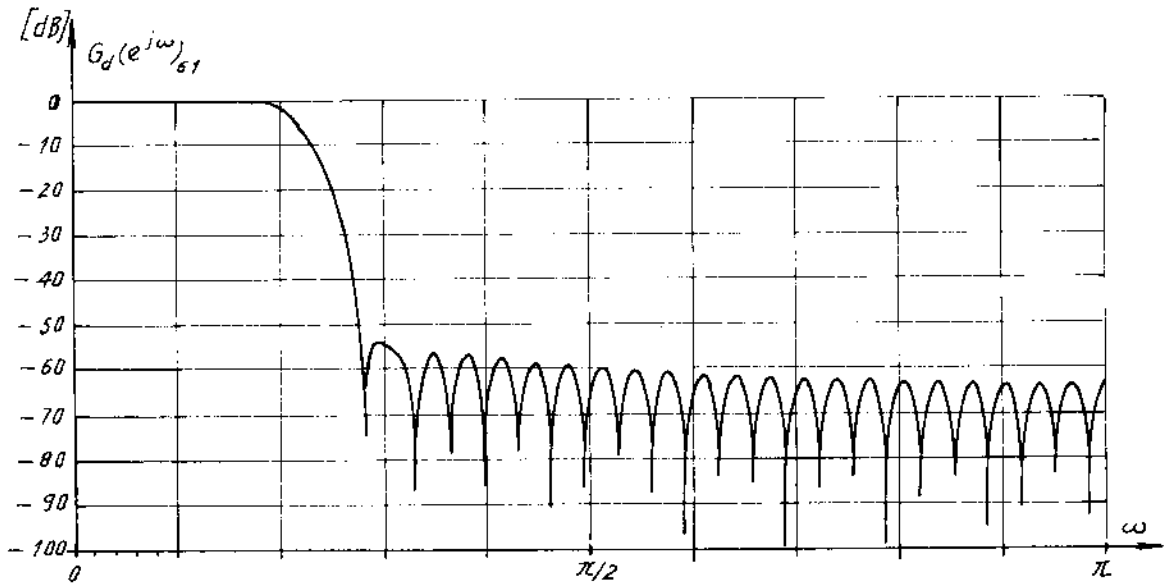
- $\lambda_T > \lambda_{Han} > \lambda_{Ham}$ vậy biên độ của độ gợn sóng ở cả dải thông và dải chắn sẽ nhỏ nhất khi thiết kế bằng cửa sổ Hamming.

Hình 5.7.4.4 cho ta đánh giá hiện tượng Gibbs tính theo dB khi thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính dùng cửa sổ Hanning với $N = 61$: $G_d(e^{j\omega})_{61}$



Hình 5.7.4.4.

Việc đánh giá hiện tượng Gibbs tính theo dB khi thiết kế bộ lọc số FIR pha tuyến tính dùng cửa sổ Hamming với $N = 61$, $G_d(e^{j\omega})_{61}$, cho trên hình 5.7.4.5.



Hình 5.7.4.5.

5.7.5. CỬA SỐ BLACKMAN

Định nghĩa cửa sổ Blackman

Trong miền n cửa sổ Blackman được định nghĩa như sau:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \cdot a_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} n \cdot m\right) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.5.1)$$

Với điều kiện buộc:

$$\sum_{m=0}^{N-1} a_m = 1$$

Cửa sổ $w_B(n)_N$ có dạng trong biểu thức (5.7.5.1) gọi là cửa sổ Blackman tổng quát hoá.

Ta thấy rằng các cửa sổ Hanning và Hamming chính là cửa sổ Blackman với hai hệ số a_0 và a_1 khác không.

$$a_0 = \alpha$$

$$a_1 = 1 - \alpha$$

$$a_m = 0 \quad \text{với } 2 \leq m \leq \frac{N-1}{2}$$

Trong thực tế Blackman thường dùng ba hệ số khác không là a_0 , a_1 và a_2 . Việc xác định các hệ số này với mục đích làm giảm bề rộng của đỉnh trung tâm ta tìm được:

$$a_0 = 0,4266 \quad , \quad \text{làm gần đúng ta có} \quad a_0 = 0,42$$

$$a_1 = 0,4965 \quad a_1 = 0,5$$

$$a_2 = 0,076 \quad a_2 = 0,08$$

Xuất phát từ các giá trị này, Blackman đã định nghĩa một cửa sổ, sau này gọi là cửa sổ Blackman như sau:

$$w_B(n)_N = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1}n + 0,08 \cos \frac{4\pi}{N-1}n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.5.2)$$

Ví dụ 5.7.5.1 :

Hãy viết biểu thức và vẽ cửa sổ Blackman với $N = 9$.

Giải :

$$w_B(n)_9 = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{\pi}{4}n + 0,08 \cos \frac{\pi}{2}n & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$w_B(0)_9 = w_B(8)_9 = 0$$

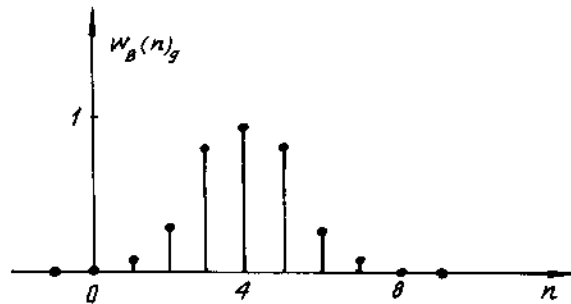
$$w_B(1)_9 = w_B(7)_9 \approx 0,07$$

$$w_B(2)_9 = w_B(6)_9 \approx 0,34$$

$$w_B(3)_9 = w_B(5)_9 \approx 0,77$$

$$w_B(4)_9 = 1$$

Đồ thị của $w_B(n)_9$ cho trên hình 5.7.5.1.



Hình 5.7.5.1.

Nghiên cứu của sổ phổ Blackman trong miền tần số ω .

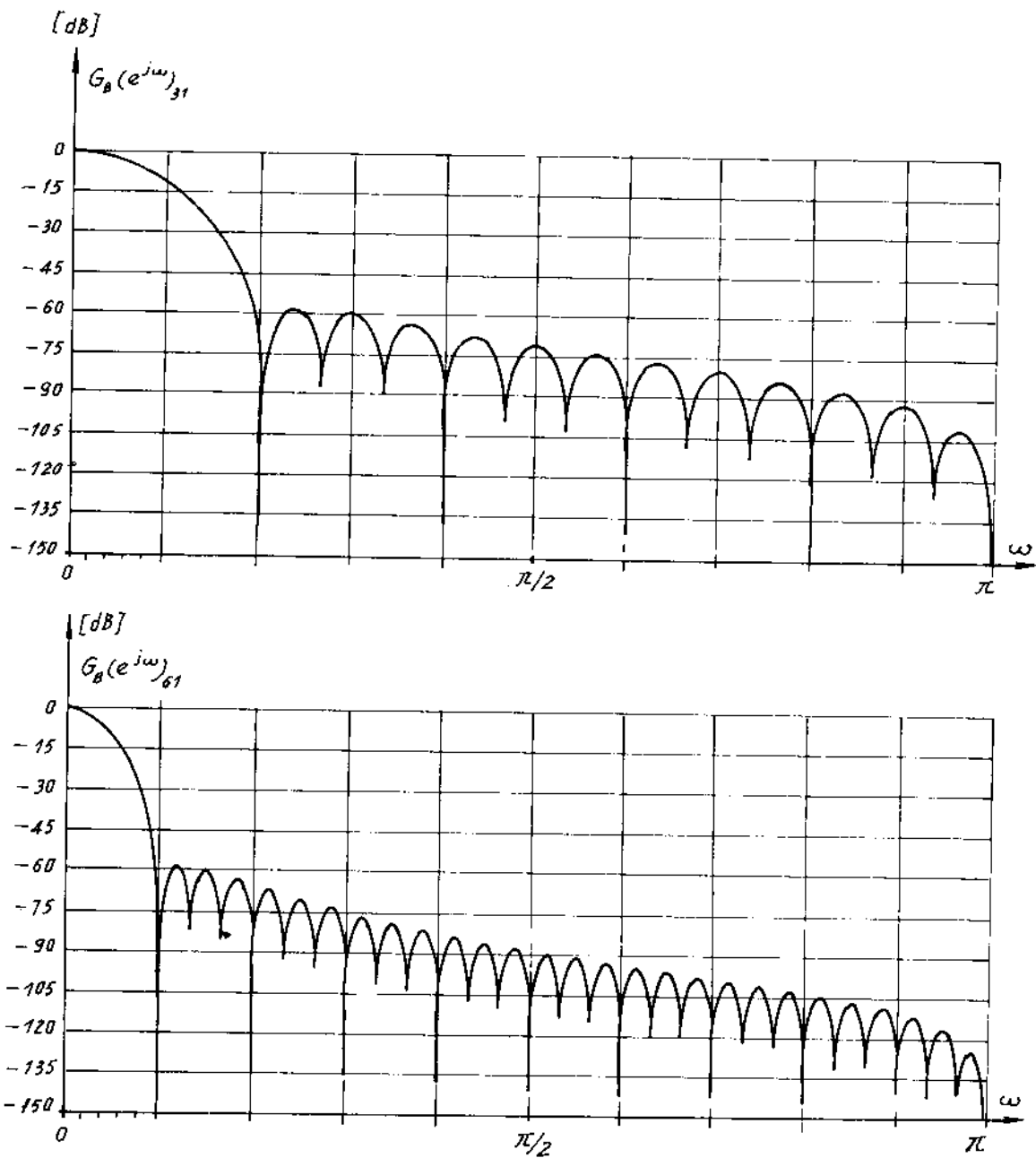
Ta thấy rằng chiều dài của $w_B(n)_N$ là N , vậy ta có thể viết:

$$\begin{aligned} w_B(n)_N &= \left[0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi}{N-1}n + 0,08 \cos \frac{4\pi}{N-1}n \right] w_R(n)_N = \\ &= 0,42 w_R(n)_N - 0,5 w_R(n)_N \cos \frac{2\pi}{N-1}n + 0,08 w_R(n)_N \cos \frac{4\pi}{N-1}n = \\ &= 0,42 w_R(n)_N - 0,25 w_R(n)_N e^{j \frac{2\pi}{N-1}n} - 0,25 w_R(n)_N e^{-j \frac{2\pi}{N-1}n} + 0,04 w_R(n)_N e^{j \frac{4\pi}{N-1}n} + 0,04 w_R(n)_N e^{-j \frac{4\pi}{N-1}n} \end{aligned}$$

Vậy trong miền ω ta có:

$$W_B(e^{j\omega})_N = 0,42W_R(e^{j\omega}) - 0,25W_R\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right)_N - 0,25W_R\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)}\right)_N +$$

$$+ 0,04W\left(e^{j\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right)_N + 0,04W\left(e^{j\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)}\right)_N$$



Hình 5.7.5.2.

Cuối cùng ta có:

$$W_B(e^{j\omega})_N = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} A_B(e^{j\omega})$$

$$A_B(e^{j\omega}) = 0,42 \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + 0,25 \frac{\sin \left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) \frac{N}{2} \right]}{\sin \left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) \frac{1}{2} \right]} + 0,25 \frac{\sin \left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) \frac{N}{2} \right]}{\sin \left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) \frac{1}{2} \right]} +$$

$$+ 0,04 \frac{\sin \left[\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1} \right) \frac{N}{2} \right]}{\sin \left[\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1} \right) \frac{1}{2} \right]} + 0,04 \frac{\sin \left[\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1} \right) \frac{N}{2} \right]}{\sin \left[\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1} \right) \frac{1}{2} \right]} \quad (5.7.5.3)$$

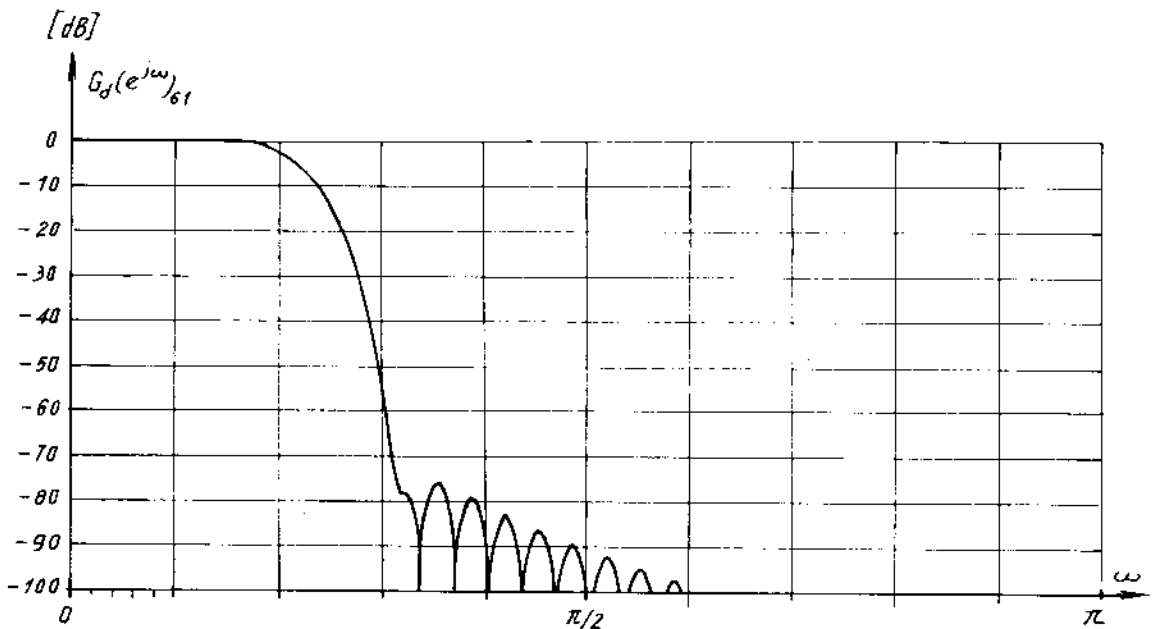
Từ đây ta tính được hai tham số chính đặc trưng cho cửa sổ Blackman trong miền tần số ω như sau:

$$\Delta\Omega_B \approx \frac{12\pi}{N}$$

$$\lambda_B = -57\text{dB}$$

Đồ thị của cửa sổ phổ Blackman với $N = 31$ và $N = 61$ được cho trên hình 5.7.5.2.

Thủ tục thiết kế bộ lọc *FIR* dùng cửa sổ Blackman cũng giống như các cửa sổ đã xét trước đây. Hình (5.7.5.3) cho ta một ví dụ về thiết kế bộ lọc số thông thấp *FIR* dùng cửa sổ Blackman với $N = 61$.



Hình 5.7.5.3.

5.7.6. CỬA SỔ KAISER

Kaiser đã đưa ra một họ các hàm cửa sổ. Trong miền tần số nó cho phép chúng ta định rõ mâu thuẫn giữa bề rộng của đỉnh trung tâm và biên độ của các đỉnh thứ cấp, mà

chủ yếu là của đỉnh thứ cấp thứ nhất để xác định λ_k bằng cách thay đổi giá trị của tham số β .

Một đặc trưng rất quan trọng của họ cửa sổ này là tạo ra khả năng giảm mạnh biên độ của các đỉnh thứ cấp mà vẫn đảm bảo bề rộng tối thiểu của đỉnh trung tâm.

Định nghĩa cửa sổ Kaiser

Trong miền n dạng tổng quát của cửa sổ Kaiser được định nghĩa như sau:

$$w_k(n)_N = \begin{cases} I_0 \left[\beta \cdot \frac{N-1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ I_0 \left[\beta \cdot \frac{N-1}{2} \right] & \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.7.6.1)$$

Nếu $\beta \cdot \left(\frac{N-1}{2} \right)$ càng lớn thì bề rộng của đỉnh trung tâm sẽ càng lớn.

Ở đây $I_0(x)$ là hàm Bessel biến dạng loại một bậc không.

$I_0(x)$ có thể được tính qua chuỗi hội tụ nhanh sau đây:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2 \quad (5.7.6.2)$$

Bởi vì hàm Bessel $I_0(x)$ rất phức tạp, vì vậy việc tính biểu thức giải tích của biến đổi Fourier $W_k(e^{j\omega})_N$ là rất phức tạp và người ta không thể tìm một cách chính xác dưới dạng giải tích, nhưng người ta có thể tìm $W_k(e^{j\omega})_N$ một cách gần đúng.

Trong công thức định nghĩa của cửa sổ Kaiser (5.7.6.1), tham số β đặc trưng cho việc trao đổi năng lượng giữa đỉnh trung tâm và các đỉnh (cánh) thứ cấp. Để đạt được hiệu quả cao nhất khi thiết kế bộ lọc *FIR* pha tuyến tính, giá trị β phải chọn trong khoảng từ 4 đến 9.

$$4 \leq \beta \leq 9$$

Bề rộng của đỉnh trung tâm $\Delta \Omega_k$ của cửa sổ phổ $W_k(e^{j\omega})_N$ sẽ tăng theo β (nếu $\frac{N-1}{2}$ giữ nguyên không đổi).

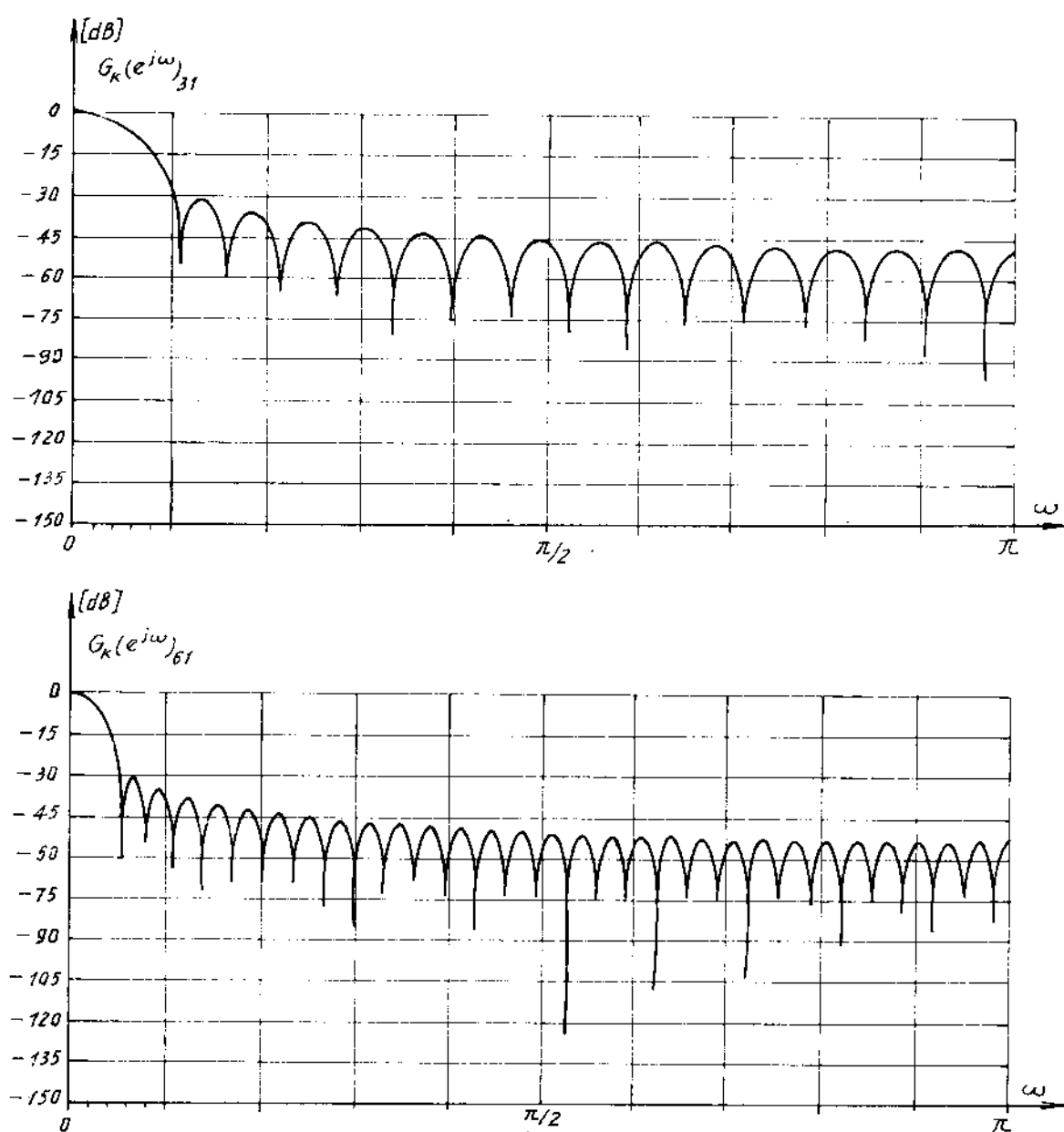
Điều thú vị nhất của cửa sổ Kaiser là ta có thể thay đổi tham số β để thay đổi tỷ lệ giữa $\Delta \Omega_k$ và λ_k .

Bảng 5.7.6.1 cho ta sự thay đổi λ_k theo β .

Bảng 5.7.6.1

β	λ_k
4,538	- 50
5,658	- 60
6,764	- 70
7,865	- 80
8,960	- 90

Đồ thị của cửa sổ phổ Kaiser với $N = 31$ và $N = 61$ được cho trên hình 5.7.6.1.



Hình 5.7.6.1.

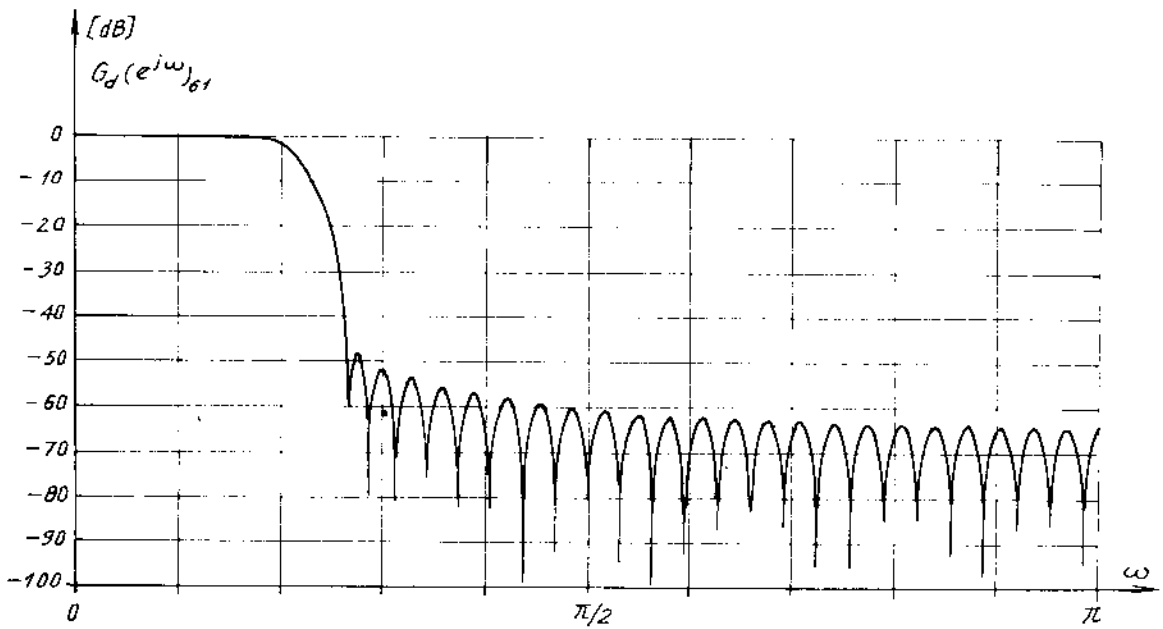
Một ví dụ về thiết kế bộ lọc số thông thấp *FIR* pha tuyến tính dùng của số Kaiser với $N = 61$, $\beta = 4$ được cho trên hình 5.7.6.2.

5.8. PHƯƠNG PHÁP LẤY MẪU TẦN SỐ

5.8.1. TỔNG QUAN

Trong phương pháp của số mà chúng ta đã xét ở trên có hạn chế là với cùng một chỉ tiêu kỹ thuật thì thường chiều dài của bộ lọc N lớn hơn là chiều dài cần thiết để thỏa mãn chỉ tiêu đã cho.

Việc tìm ra cửa sổ để giảm hiện tượng Gibbs cũng không phải là đơn giản. Và khi dạng cửa sổ trong miền n rất phức tạp, thì việc khảo sát trong miền tần số sẽ gặp nhiều khó khăn.



Hình 5.7.6.2.

5.8.2. CÁC ĐẶC TRƯNG CƠ BẢN

Bây giờ chúng ta nghiên cứu những đặc trưng cơ bản của phương pháp lấy mẫu tần số.

Chúng ta biết rằng đáp ứng xung $h_d(n)$ của bộ lọc số thực tế *FIR* có chiều dài hữu hạn N :

$$h_d(n)_N \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Vậy ta có thể tìm biến đổi Fourier rời rạc với N điểm như sau:

$$\begin{aligned} H_d(k)_N &= DFT[h_d(n)_N] \\ &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n)W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.8.2.1)$$

và biến đổi Fourier rời rạc ngược như sau:

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k)W_N^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.8.2.2)$$

Chúng ta có thể tìm $H_d(Z)$ theo hàm của $H_d(k)$ như sau:

$$H_d(Z) = \frac{1-Z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{1-W_N^{-k}Z^{-1}} \quad (5.8.2.3)$$

ở đây: $W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

$H_d(k)$ chính là $H_d(Z)$ được đánh giá trên vòng tròn đơn vị tại những điểm rời rạc: $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$.

$$H_d(k) = H_d(Z) \Big|_{e^{j\omega_k}}$$

Đối với đáp ứng tần số ta có:

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right)} e^{-j \left[\omega \frac{N-1}{2} + \frac{\pi}{N}k \right]} \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{-j\frac{\pi}{N}k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right)} \end{aligned} \quad (5.8.2.4)$$

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{j0(\omega)} A_d(e^{j\omega})$$

ở đây:

$$0(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$$

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{-j\frac{\pi}{N}k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right)} \quad (5.8.2.5)$$

Biểu thức (5.8.2.4) và (5.8.2.5) chỉ đúng với dãy có chiều dài hữu hạn N . Còn đối với bộ lọc số lý tưởng thì đáp ứng xung $h(n)$ có chiều dài vô hạn.

$$L[h(n)] = \infty$$

Khi đó hàm truyền đạt $H(Z)$ và đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của bộ lọc số lý tưởng được tính như sau:

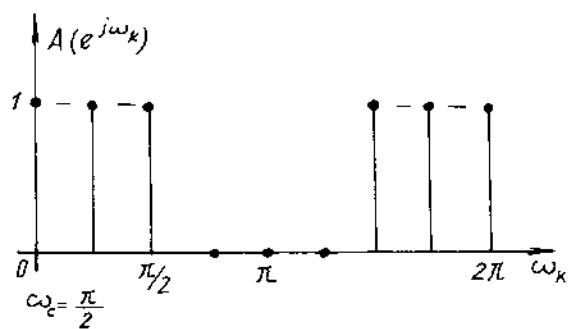
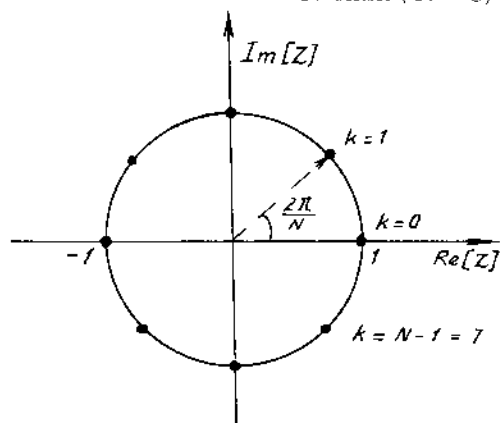
$$\begin{aligned} H(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n} \\ H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

Trong phương pháp lấy mẫu tần số, chúng ta sẽ làm gần đúng $H(e^{j\omega})$ bằng một hàm $H_d(e^{j\omega})$ của bộ lọc thực tế. $H_d(e^{j\omega})$ nhận được qua việc nội suy (interpolation) giữa các mẫu $H(k)$ lấy trên $H(e^{j\omega})$ tại các tần số $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$

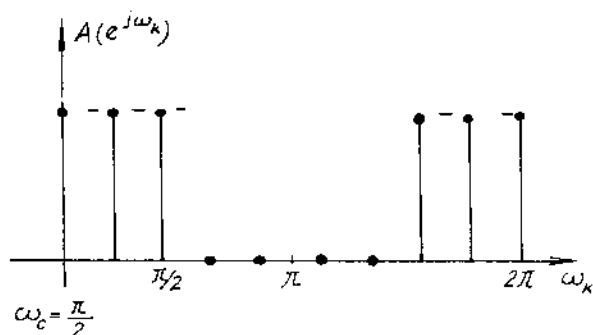
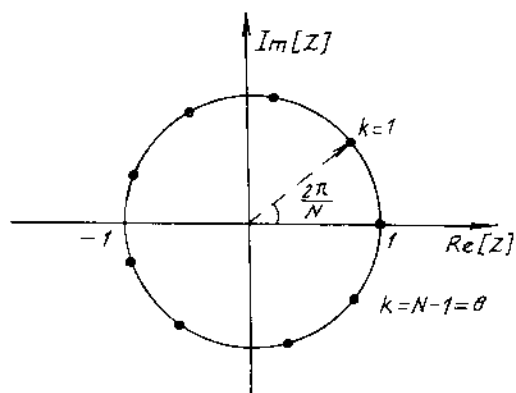
Sai số của phép gần đúng này bằng không tại tần số ω_k và sẽ là hữu hạn đối với các tần số khác.

- Loại 1 :

N chẵn ($N = 8$)

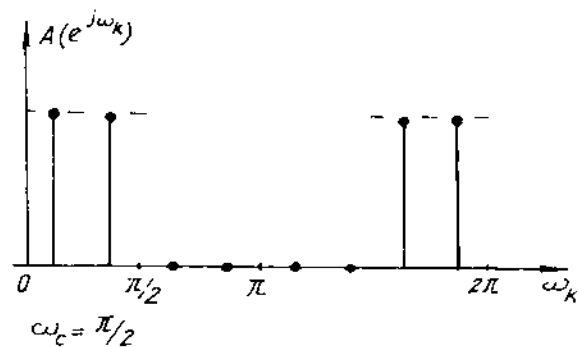
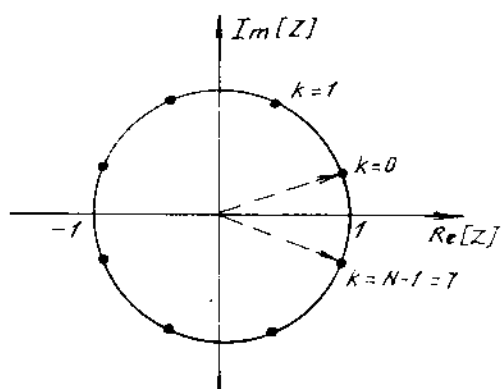


N lẻ ($N = 9$)

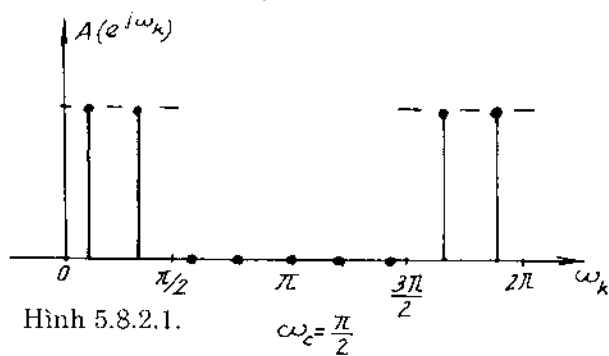
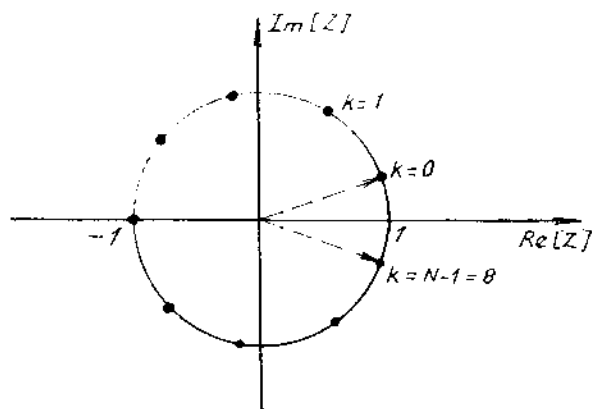


- Loại 2 :

N chẵn ($N = 8$)



N lẻ ($N = 9$)



Hình 5.8.2.1.

Tức là:

$$\left. H(e^{j\omega}) \right|_{\omega = \omega_k} = \left. H_d(e^{j\omega}) \right|_{\omega = \omega_k}$$

hay ta có thể viết :

$$H(e^{j\omega_k}) = H_d(e^{j\omega_k}) \quad (5.8.2.6)$$

Hoặc viết theo k (biểu diễn trong miền k) ta có:

$$H(k) = H_d(k) \quad (5.8.2.7)$$

Như vậy qua phép gần đúng này bộ lọc số lý tưởng

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \begin{cases} 1 & \text{ở dải thông} \\ 0 & \text{ở dải chắn} \end{cases}$$

sẽ trở thành không lý tưởng bởi công thức nội suy sau đây:

$$H(e^{j\omega}) \approx H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{-j \frac{\pi}{N} k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} \quad (5.8.2.8)$$

ở đây:

$$e^{-j \frac{\pi}{N} k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} \quad \text{gọi là hàm nội suy}$$

Như thế chúng ta có thể lấy từ N mẫu của đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của bộ lọc số lý tưởng đã cho (thông thấp, thông cao,...) để thu được đáp ứng tần số của bộ lọc số thực tế $H_d(e^{j\omega})$.

Chú ý rằng đối với lấy mẫu tần số chúng ta có hai loại:

$$\begin{aligned} \text{loại 1 :} \quad \omega_k &= \frac{2\pi}{N} k \\ \text{loại 2 :} \quad \omega_k &= \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.8.2.9)$$

Hình 5.8.2.1 sẽ minh họa hai loại lấy mẫu tần số này.

Sau đây chúng ta sẽ xét chi tiết từng loại.

Ví dụ 5.8.2.1 :

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông cao lý tưởng pha tuyến tính $\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$ như sau :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq \omega \leq -\frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3} \leq \omega \leq \pi \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $H(k)$, và $h(n)$ theo :

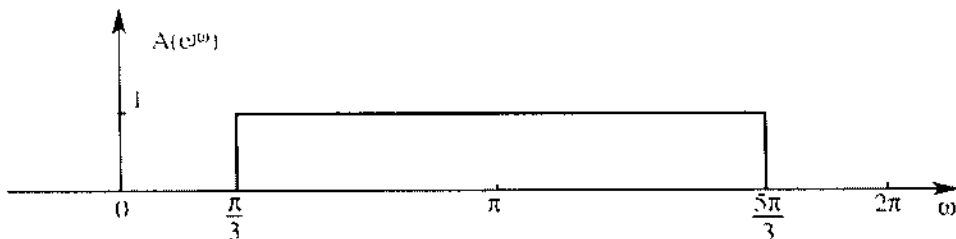
- Phương pháp lấy mẫu tần số loại 1
- Phương pháp lấy mẫu tần số loại 2

Giải :

Chúng ta biểu diễn $H(e^{j\omega})$ dưới dạng độ lớn và pha như sau :

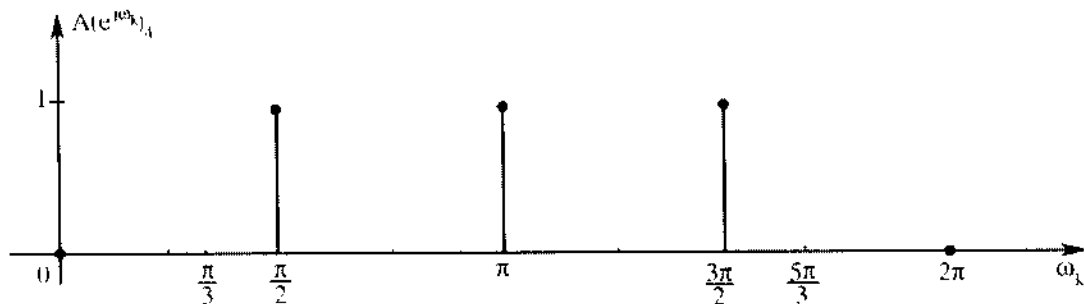
$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)}$$

Đồ thị của $A(e^{j\omega})$ được biểu diễn trên hình 5.8.2.2 sau đây :



Hình 5.8.2.2

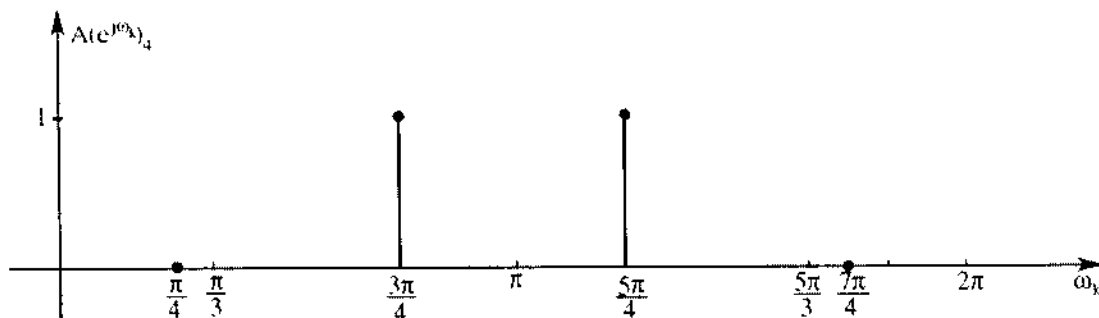
Theo phương pháp lấy mẫu tần số loại 1 ta có $A^{(j\omega_k)}$ như trên hình 5.8.2.3 với $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$.



Hình 5.8.2.3

Từ đây ta có $A(k)_4$: $A(0)_4 = 0$; $A(1)_4 = 1$; $A(2)_4 = 1$; $A(3)_4 = 1$

Theo phương pháp lấy mẫu tần số loại 2 ta có $A^{(j\omega_k)}$ như trên hình 5.8.2.4 với $\omega_k = \frac{2\pi}{N}(k + \frac{1}{2})$.



Hình 5.8.2.4

Từ đây ta có $A(k)_4$: $A(0)_4 = 0$; $A(1)_4 = 1$; $A(2)_4 = 1$; $A(3)_4 = 0$

Bây giờ chúng ta tính $h(n)_4$ theo phương pháp lấy mẫu tần số loại 1.

Theo công thức *IDFT* ta có :

$$h(n)_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-kn} ; W_4^{-kn} = e^{j \frac{2\pi}{4} kn} = e^{j \frac{\pi}{2} kn}$$

$$\begin{aligned} n = 0 \Rightarrow h(0)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k \cdot 0} = \\ &= \frac{1}{4} [H(0)_4 W_4^{-0 \cdot 0} + H(1)_4 W_4^{-1 \cdot 0} + H(2)_4 W_4^{-2 \cdot 0} + H(3)_4 W_4^{-3 \cdot 0}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 1 + 1 + 1] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow h(1)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k \cdot 1} = \\ &= \frac{1}{4} [H(0)_4 W_4^{-0 \cdot 1} + H(1)_4 W_4^{-1 \cdot 1} + H(2)_4 W_4^{-2 \cdot 1} + H(3)_4 W_4^{-3 \cdot 1}] \\ &= \frac{1}{4} [1 + j + 1 - j] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow h(2)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k \cdot 2} = \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \Rightarrow h(3)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k \cdot 3} = \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Chúng ta cũng tính được $h(n)_4$ theo phương pháp lấy mẫu tần số loại 2 như sau :

Theo công thức *IDFT* ta có :

$$h(n)_4 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-kn} ; W_4^{-kn} = e^{j \frac{2\pi}{4} (k+\frac{1}{2})n} = e^{j \frac{\pi}{2} (k+\frac{1}{2})n}$$

$$\begin{aligned} n = 0 \Rightarrow h(0)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k \cdot 0} = \\ &= \frac{1}{4} [H(0)_4 W_4^{-0 \cdot 0} + H(1)_4 W_4^{-1 \cdot 0} + H(2)_4 W_4^{-2 \cdot 0} + H(3)_4 W_4^{-3 \cdot 0}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} [0 + 1 + 1 + 0] = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} n = 1 \Rightarrow h(1)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k.1} = \\ &= \frac{1}{4} [H(0)_4 W_4^{-0.1} + H(1)_4 W_4^{-1.1} + H(2)_4 W_4^{-2.1} + H(3)_4 W_4^{-3.1}] \\ &= \frac{1}{4} \left[0 + 1.(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1.(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) + 0 \right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 \Rightarrow h(2)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k.2} = \\ &= \frac{1}{4} [H(0)_4 W_4^{-0.2} + H(1)_4 W_4^{-1.2} + H(2)_4 W_4^{-2.2} + H(3)_4 W_4^{-3.2}] \\ &= \frac{1}{4} [0 + 1.(-j) + 1.(j) + 0] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \Rightarrow h(3)_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 H(k)_4 W_4^{-k.3} = \\ &= \frac{1}{4} [H(0)_4 W_4^{-0.3} + H(1)_4 W_4^{-1.3} + H(2)_4 W_4^{-2.3} + H(3)_4 W_4^{-3.3}] \\ &= \frac{1}{4} \left[0 + 1.(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1.(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}) + 0 \right] = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

5.8.3. TỔNG HỢP BỘ LỌC FIR PHA TUYẾN TÍNH VỚI LẤY MẪU TẦN SỐ LOẠI 1

Trước hết chúng ta tìm $A_d(e^{j\omega})$ theo hàm của $A_d(k)$, ta biết rằng trong trường hợp này $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, và ta có thể viết :

$$\begin{aligned} H_d(k) &= H_d(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega_k}} \\ H_d(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{-j\frac{\pi}{N}k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k \right)} \end{aligned} \quad (5.8.3.1)$$

$$H_d(e^{j\omega}) = A_d(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}$$

$$H_d(k) = A_d(k) e^{j\theta(k)}$$

Đối với bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính thì:

$$\theta(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$$

Vậy:

$$\theta(k) = -\omega_k \frac{N-1}{2} = -\frac{2\pi}{N} k \cdot \frac{N-1}{2}$$

Bây giờ chúng ta tiến hành xét các loại bộ lọc cụ thể.

a) Trường hợp *N* lẻ, *h(n)* đối xứng (*FIR* loại 1)

Trong trường hợp này $A_d(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Vậy đối với ω_k ta có thể viết:

$$0 \leq \omega_k \leq 2\pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{2\pi}{N} k \leq 2\pi \quad \Rightarrow \quad 0 \leq k \leq N$$

Thế thì $A_d(k)$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq k \leq N$, tức là:

$$\begin{aligned} A_d(0) &= A_d(N) \quad , \quad A_d(1) = A_d(N-1) \quad , \quad A_d(2) = A_d(N-2) \quad , \dots \\ &\dots, A_d\left(\frac{N-1}{2}-1\right) = A_d\left(\frac{N-1}{2}+1\right) \quad , \quad A_d\left(\frac{N-1}{2}\right) \end{aligned}$$

Nhưng trong định nghĩa của biến đổi Fourier rời rạc thì chiều dài của $H_d(k)$ (hoặc $A_d(k)$) là $0 \leq k \leq N-1$. Như thế ta nói rằng $A_d(k)$ là đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq N-1$ và ta có thể viết:

$$A_d(k) = A_d(N-k)$$

Ta đã có:

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_d(k) e^{j\theta(k)} e^{-j\frac{\pi}{N} k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_d(k) e^{j\theta(k)} e^{-j\frac{\pi}{N} k}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} \end{aligned} \quad (5.8.3.2)$$

Theo (5.8.2.7) ta có:

$$H(k) = H_d(k) \Rightarrow A(k) = A_d(k)$$

Sau đó chúng ta chia tổng trên thành 3 phần như sau:

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N} \left[\frac{A_d(0)}{\sin \frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2}} e^{-j\frac{\pi}{N} k}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} + \sum_{k=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} \frac{A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k \frac{N-1}{2}} e^{-j\frac{\pi}{N} k}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} \right]$$

Đổi biến số ở thành phần cuối cùng:

$$k = N-l \Rightarrow A_d(k) = A_d(N-l) = A_d(l)$$

$$\sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{N-1} \Rightarrow \sum_{l=\frac{N-1}{2}}^1 \Rightarrow \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}}$$

Ta biết rằng:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{N}k} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$$

Vậy ta có:

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{N} \left[\frac{A_d(0)}{\sin\frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{A_d(k)(-1)^k}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{A_d(l)e^{j\frac{2\pi}{N}(N-l)\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\frac{\pi}{N}(N-l)}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}(N-l)\right]} \right]$$

mà:

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-l)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{\pi}{N}(N-l)} = e^{-j\pi(N-l)} = e^{-j\pi N} e^{j\pi l}$$

Nếu N lẻ ta có:

$$e^{-j\pi N} = -1 \quad ; \quad e^{j\pi l} = (-1)^l$$

$$\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}(N-l)\right] = \sin\left[\frac{\omega}{2} - \pi + \frac{\pi}{N}l\right] = -\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}l\right)$$

bởi vì $\sin(x - \pi) = -\sin x$

Vậy thành phần thứ 3 có thể viết như sau:

$$\sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{A_d(l)(-1)^l}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}l\right)}$$

Đổi ký hiệu l thành k rồi thay vào biểu thức của $H(e^{j\omega})$ ta có:

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{N} \left\{ \frac{A_d(0)}{\sin\frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A_d(k)(-1)^k \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}k\right)} \right] \right\}$$

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ \frac{A_d(0)}{N} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{A_d(k)}{N} (-1)^k \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}k\right)} \right] \right\}$$

mà:

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} A_d(e^{j\omega})$$

Vậy:

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{A_d(0)}{N} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{A_d(k)}{N} (-1)^k \sin\frac{\omega N}{2} \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}k\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}k\right)} \right]$$

Ta biết rằng:

$$(-1)^k \sin \frac{\omega N}{2} = \begin{cases} \sin \frac{\omega N}{2} & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\sin \frac{\omega N}{2} & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

Nếu k chẵn ta có thể viết:

$$\sin \frac{\omega N}{2} = \sin \left(\frac{\omega N}{2} \pm \pi k \right)$$

Nếu k lẻ ta có thể viết:

$$-\sin \frac{\omega N}{2} = \sin \left(\frac{\omega N}{2} \pm \pi k \right)$$

Với mọi giá trị của k ta có thể viết như sau:

$$(-1)^k \sin \frac{\omega N}{2} = \sin \left(\frac{\omega N}{2} \pm \pi k \right) = \sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\pi}{N} k \right) \right]$$

Từ đây ta có:

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{A_d(0)}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_d(k)}{N} \left[\frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} + \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right)} \right] \quad (5.8.3.3)$$

Biểu thức (5.8.3.3) chỉ đúng với các dãy có chiều dài hữu hạn N . Còn đối với bộ lọc số lý tưởng thì chiều dài của đáp ứng xung là vô hạn, và đây chính là biểu thức gần đúng đối với đáp ứng tần số của bộ lọc số lý tưởng $H(e^{j\omega})$, nhưng tại các điểm $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ thì sai số giữa $H_d(e^{j\omega})$ và $H(e^{j\omega})$ bằng không.

Vậy từ biểu thức (5.8.2.8) ta có thể viết:

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\frac{\pi}{N}k} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} \quad (5.8.3.4)$$

bởi vì : $H(k) = H_d(k)$,

và từ đây ta có : $A(k) = A_d(k)$.

Vậy từ biểu thức (5.8.3.3) ta có thể viết:

$$A(e^{j\omega}) \approx A_d(e^{j\omega}) = \frac{A(0)}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A(k)}{N} \left[\frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} + \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right)} \right] \quad (5.8.3.5)$$

Độ lệch giữa $H(e^{j\omega})$ và $H_d(e^{j\omega})$ được đánh giá bằng sai số $E(e^{j\omega})$ sau đây:

$$E(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})$$

Trong thực tế người ta thường đánh giá bằng trị tuyệt đối của sai số $E(e^{j\omega})$ là $|E(e^{j\omega})|$

$$|E(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega})|$$

Chú ý rằng:

- Ở trong dải thông $A(e^{j\omega}) = 1 \Rightarrow A(k) = 1$.

- Ở trong dải chắn $A(e^{j\omega}) = 0 \Rightarrow A(k) = 0$.

- Đối với bộ lọc số lý tưởng bề rộng của dải quá độ bằng không: $\Delta\omega = 0$.

Như vậy muốn tìm tối ưu khi thiết kế bằng phương pháp này chúng ta phải tối thiểu hoá giá trị cực đại của $|E(e^{j\omega})|$ và chúng ta đánh giá hiệu quả của việc thiết kế theo $A_d(e^{j\omega})$ hay $|A_d(e^{j\omega})|$ xem có thoả mãn chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số hay không, khi thoả mãn rồi thì chúng ta dừng lại và tính $h_d(n)$ của bộ lọc thực tế.

Nếu chưa thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật thì ta phải tăng N để giảm sai số $|E(e^{j\omega})|$ và có thể điều chỉnh $A(k)$ ở quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$, ở quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$, $A(k)$ có thể thay đổi từ 0 đến 1.

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm công thức để tính $h_d(n)$.

$$\begin{aligned} h_d(n) &= IDFT[H_d(k)] = IDFT[H(k)] \\ &= IDFT[A_d(k) e^{j0(k)}] = IDFT[A(k) e^{j0(k)}] \end{aligned}$$

Đối với bộ lọc số FIR pha tuyến tính ta có:

$$\phi(k) = -\frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h_d(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-kn} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) e^{j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

$A_d(k) = A(k)$ là đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq N-1$, tức là $A_d(k) = A_d(N-k)$ và $A(k) = A(N-k)$

Chúng ta chia $h(n)$ thành 3 phần như sau:

$$h_d(n) = \frac{A(0)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} + \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} A(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Đổi biến số ở thành phần thứ 3:

$$k = N-l \Rightarrow l = N-k$$

và ta biết rằng:

$$e^{-j \frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = e^{-j \frac{\pi}{N} k(N-1-2n)} = e^{-j \frac{\pi}{N} kN} e^{j \frac{\pi}{N} k(1+2n)} = (-1)^k e^{j \frac{\pi}{N} k(1+2n)}$$

$\Rightarrow$

$$h_d(n) = \frac{A(0)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(k) (-1)^k e^{j \frac{\pi}{N} k(2n+1)} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A(N-l) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-l) \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} (N-l)n}$$

mà:

$$\begin{aligned} e^{-j \frac{2\pi}{N} (N-l) \left(\frac{N-1}{2} \right)} e^{j \frac{2\pi}{N} (N-l)n} &= e^{-j \frac{\pi}{N} [(N-l)(N-1) - (N-l)2n]} \\ &= e^{-j \frac{\pi}{N} (N-l)(N-1-2n)} = e^{-j \frac{\pi}{N} N(N-1-2n)} e^{-j \frac{\pi}{N} (-l)(N-1-2n)} \end{aligned}$$

$$e^{-j\frac{\pi}{N}(N-l)(N+1-2n)} = e^{-j\frac{\pi}{N}N(N-l)} e^{-j\frac{\pi}{N}N(1-2n)} = e^{-j\pi N} e^{j\pi(2n+1)} = 1$$

Vì N là lẻ nên ta có:

$$e^{-j\pi N} = -1$$

và $(2n+1)$ cũng là lẻ nên ta có:

$$e^{j\pi(2n+1)} = -1$$

$$e^{-j\frac{\pi}{N}(N-l)(N+1-2n)} = e^{j\frac{\pi}{N}N(N-l)} e^{-j\frac{\pi}{N}N(2n+1)} = (-1)^l e^{-j\frac{\pi}{N}N(2n+1)}$$

Áp dụng:

$A(n-l) = A(l)$ và biến đổi l thành k ta thu được:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{A(0)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} A(k)(-1)^k e^{j\frac{\pi}{N}k(2n+1)} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} A(k)(-1)^k e^{-j\frac{\pi}{N}k(2n+1)} \\ \Rightarrow h_d(n) &= \frac{A(0)}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k A(k) \left[e^{j\frac{\pi}{N}k(2n+1)} + e^{-j\frac{\pi}{N}k(2n+1)} \right] \\ h_d(n) &= \begin{cases} \frac{A(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k A(k) \cos\left[\frac{\pi}{N}k(2n+1)\right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.8.3.6) \end{aligned}$$

Ví dụ 5.8.3.1 :

Hãy tổng hợp một bộ lọc số thông thấp *FIR* pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1.

Giải :

Ta có bộ lọc số thông thấp lý tưởng pha tuyến tính như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

Thay $N = 9$ và $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ta có:

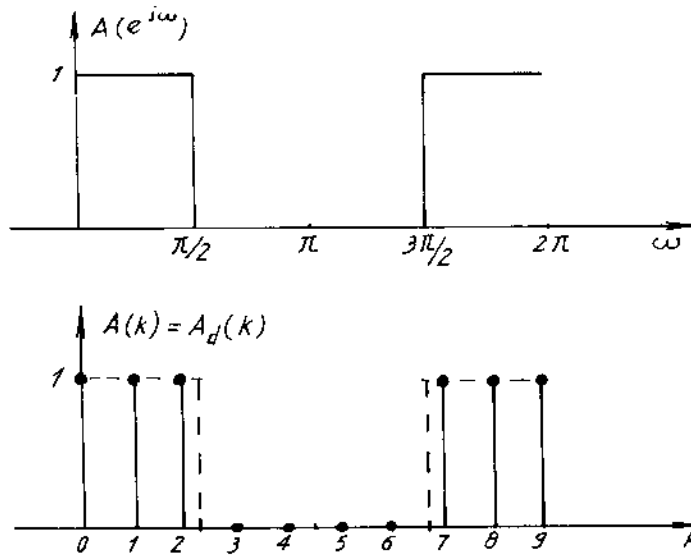
$$A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \leq \omega \leq \pi)$

$\theta(\omega) = -4\omega$

Chúng ta xét $A(e^{j\omega})$ trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$ sau đó lấy mẫu $A(e^{j\omega})$ để được $A(k) = A_d(k)$ trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ với $N = 9$.

Hình 5.8.3.1 sẽ minh họa $A(e^{j\omega})$ và $A(k)$ với $N = 9$.



Hình 5.8.3.1.

Để thử xem có thoả mãn chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số hay không, chúng ta thay $N = 9$ vào biểu thức (5.8.3.5), ta có: $A(0) = A(1) = A(2) = 1, A(3) = A(4) = 0$

Vậy:

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{9} \frac{\sin \frac{9\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{9} \right)} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{9} \right)} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{9} \right)} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi}{9} \right)}$$

Hình 5.8.3.2 sẽ minh họa bằng đồ thị dạng của $A_d(e^{j\omega})$ gồm 5 thành phần cộng lại:

$$A_d(e^{j\omega}) = (1) + (2) + (3) + (4) + (5)$$

Sau khi thử trong miền tần số, nếu đã thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số rồi thì ta tiến hành tìm các giá trị của đáp ứng xung $h_d(n)$ với $N = 9$.

Theo biểu thức (5.8.3.6) ta có:

$$h_d(n) = \frac{A(0)}{9} + \frac{2}{9} \sum_{k=1}^4 (-1)^k A(k) \cos \left[\frac{\pi}{N} k(2n+1) \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{9} - \frac{2}{9} \cos \left[\frac{\pi}{9} (2n+1) \right] + \frac{2}{9} \cos \left[\frac{2\pi}{9} (2n+1) \right] & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Thay các giá trị của n vào ta có:

$$h_d(0) = h_d(8) \approx 0,072$$

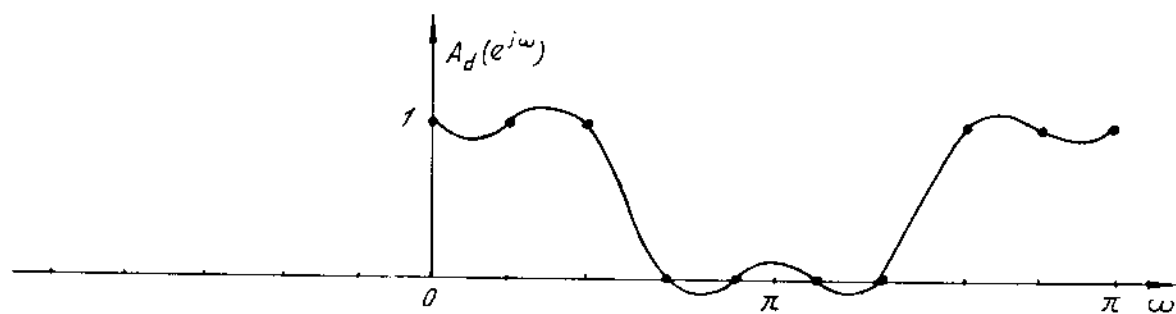
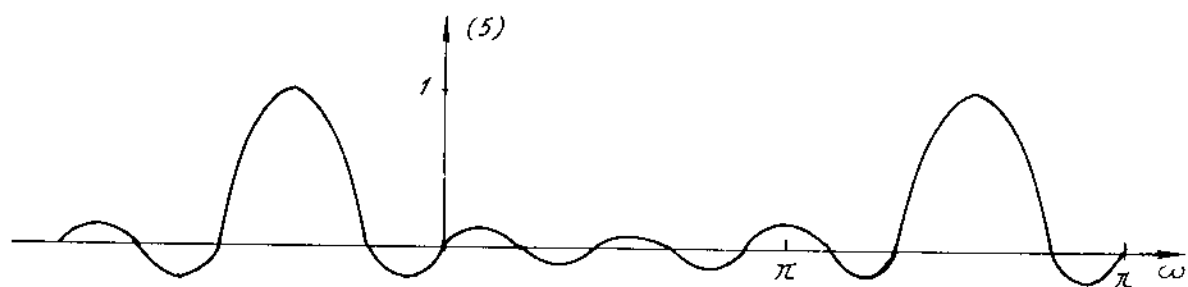
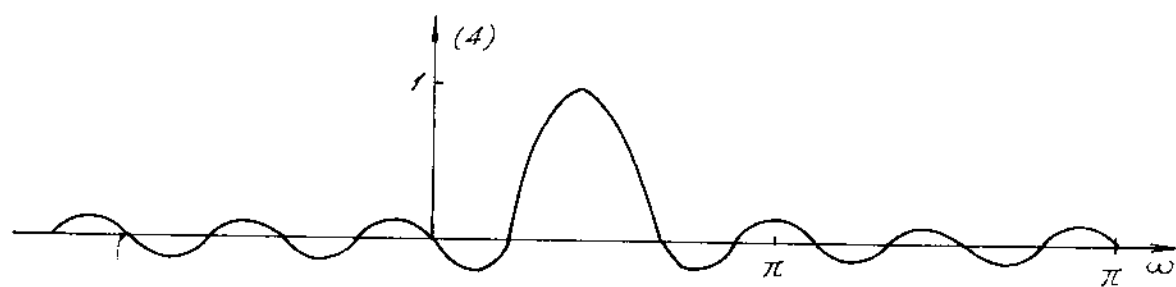
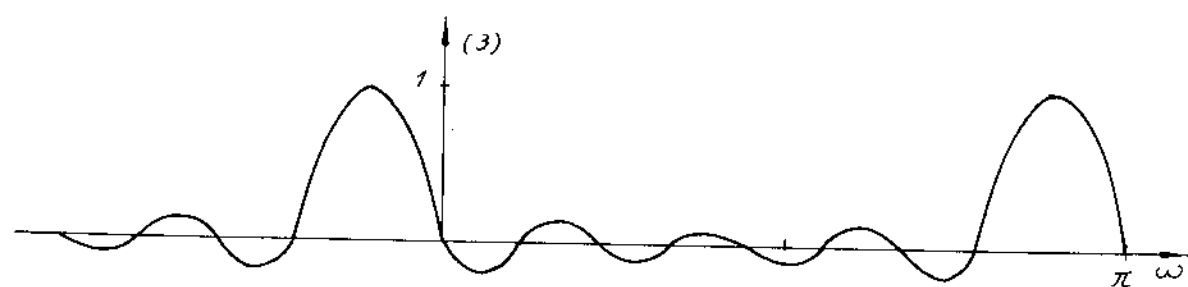
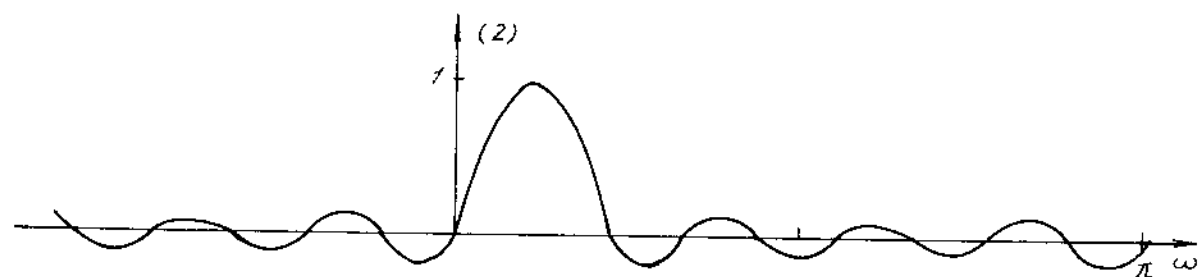
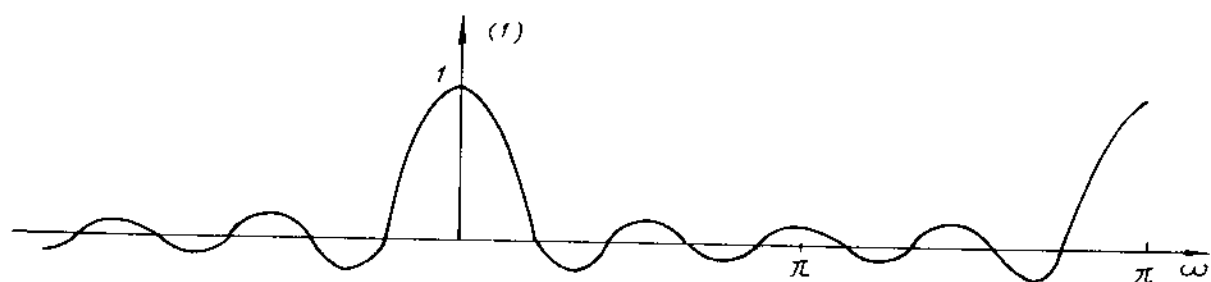
$$h_d(1) = h_d(7) = -\frac{1}{9} \approx -0,111$$

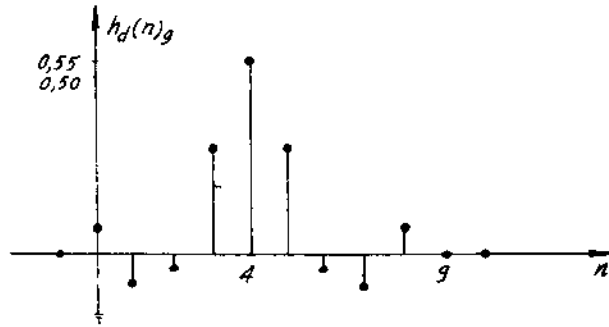
$$h_d(2) = h_d(6) \approx -0,059$$

$$h_d(3) = h_d(5) \approx 0,3199$$

$$h_d(4) = \frac{5}{9} \approx 0,555$$

Đồ thị của $h_d(n)_9$ cho trên hình 5.8.3.3.





Hình 5.8.3.3.

Nhận xét :

Kỹ thuật áp dụng trực tiếp này thường không cho chúng ta kết quả tốt, tức là hiện tượng gợn sóng ở dải thông và dải chắn tương đối lớn (hiện tượng Gibbs tương đối lớn). Để thu được kết quả tối ưu theo phương pháp này chúng ta sẽ thay đổi giá trị của $A(k)$ ở quanh trục bất liên tục của $H(e^{j\omega})$, $A(k)$ sẽ lấy giá trị trung gian trong khoảng từ 0 đến 1, chứ không lấy giá trị 0 hoặc 1. Hay nói cách khác: ở dải quá độ của $H_d(e^{j\omega})$ chúng ta sẽ điều chỉnh giá trị của $A_d(k) = A(k)$ trong khoảng từ 0 đến 1.

Ví dụ 5.8.3.2 :

Hãy tổng hợp một bộ lọc số thông thấp **FIR** pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1 có sự điều chỉnh giá trị của $A(k)$ ở quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$ (lấy $A(k) = 0,5$).

Giải : Tương tự như ví dụ 5.8.3.1, chúng ta lấy mẫu $A(e^{j\omega})$ với $N = 9$ để được các giá trị $A(k) = A_d(k)$ bằng 1 ở dải thông và bằng 0 ở dải chắn, nhưng trong trường hợp này ở quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$ chúng ta lấy giá trị của $A(3) = A(6) = 0,5$. Hình 5.8.3.4 sẽ minh họa việc điều chỉnh giá trị của $A(k)$ này.

Thay các giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.3.5) với các giá trị của $A(k)$ như sau:

$$A(0) = A(1) = A(2) = 1 \quad \text{ở dải thông}$$

$$A(3) = 0,5 \quad \text{ở dải quá độ}$$

$$A(4) = 0 \quad \text{ở dải chắn}$$

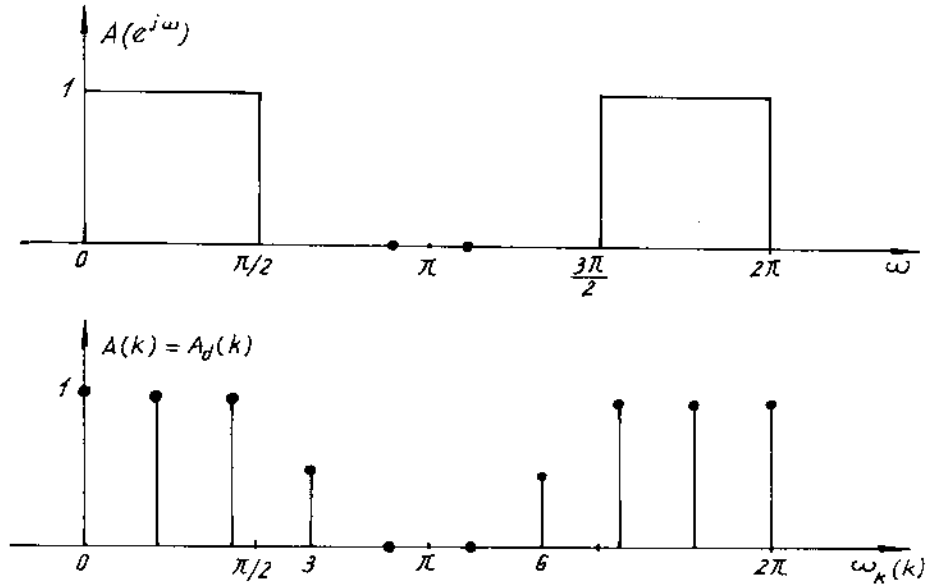
ta thu được biểu thức $A_d(e^{j\omega})$ như sau:

$$\begin{aligned} A_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{9} \frac{\sin \frac{9\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{9} \right)} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{9} \right)} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{9} \right)} + \frac{1}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi}{9} \right)} \\ &= \frac{0,5}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{3\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{3\pi}{9} \right)} + \frac{0,5}{9} \frac{\sin \left[9 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{3\pi}{9} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{3\pi}{9} \right)} \end{aligned}$$

Vậy ở ví dụ 5.8.3.1 $A_d(e^{j\omega})$ gồm 5 thành phần thì ở ví dụ 5.8.3.2 này $A_d(e^{j\omega})$ gồm 7 thành phần :

$$A_d(e^{j\omega}) = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7)$$

Hình 5.8.3.5 sẽ minh họa dạng của $A_d(e^{j\omega})$.



Hình 5.8.3.4.

Sau khi thử trong miền ω , nếu đã thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thì ta dừng lại và tìm các giá trị của $h_d(n)$ với $N = 9$.

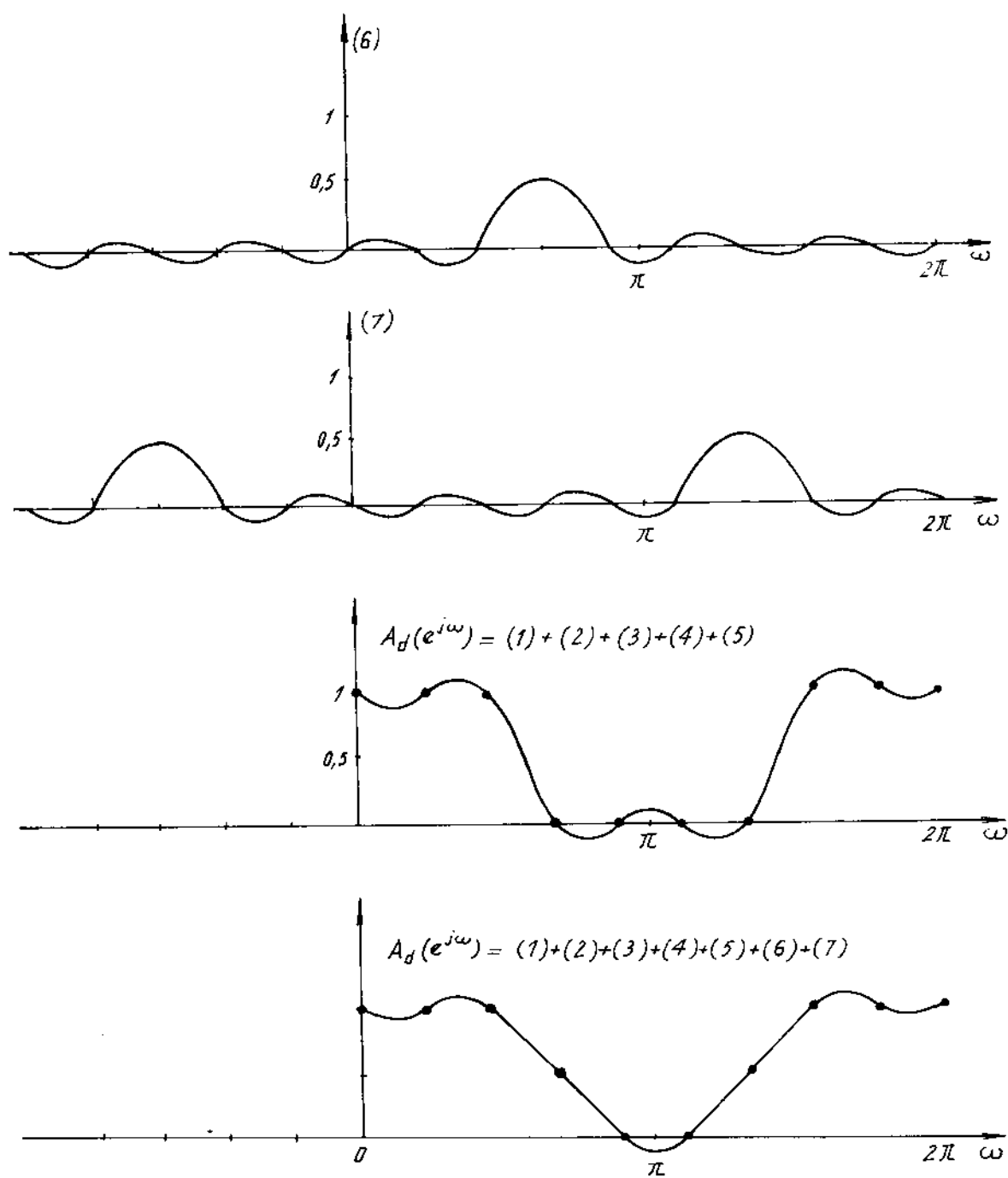
Theo biểu thức (5.8.3.5) ta có :

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{9} - \frac{2}{9} \cos\left[\frac{\pi}{9}(2n+1)\right] + \frac{2}{9} \cos\left[\frac{2\pi}{9}(2n+1)\right] - \frac{2}{9} \cos\left[\frac{\pi}{9}(2n+1)\right] & 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Nhận xét : Muốn có bộ lọc số tối ưu theo các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho, chúng ta phải chọn các giá trị trung gian của $A(k)$ trong dải quá độ. Thực chất hàm gần đúng $A_d(e^{j\omega})$ là một hàm tuyến tính của các hệ số $A(k)$. Vậy ta có thể sử dụng các phương pháp tối ưu hóa tuyến tính để thêm vào các giá trị trung gian của $A(k)$ trong dải quá độ có được phép gần đúng tốt nhất đối với đáp ứng tần số mong muốn $H_d(e^{j\omega})$. Các phương pháp tối ưu này thông thường rất phức tạp khi tính toán giải tích, vậy phải có sự tham gia của máy tính.

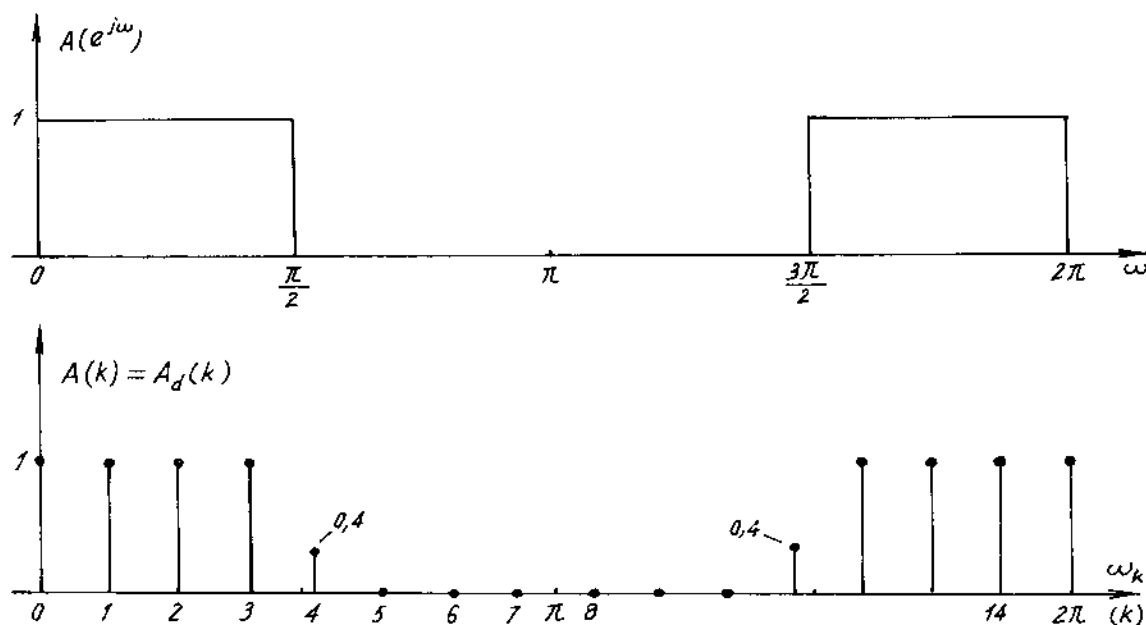
Trong trường hợp này, chúng ta cố định các giá trị của $A(k)$ trong dải thông và dải chắn, chúng ta thay đổi giá trị của các hệ số $A(k)$ trong dải quá độ, nhưng phải thay đổi thế nào để giảm được sai số của phép gần đúng. Kỹ thuật này là một trường hợp của phương pháp tối ưu tổng quát hơn, phương pháp này có tên gọi là quy hoạch tuyến tính.

Ví dụ 5.8.3.3 : Hãy tổng hợp một bộ lọc số thông thấp FIR loại 1 pha tuyến tính với $N = 15$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1 có sự điều chỉnh giá trị của $A(k)$ ở quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$ (lấy $A(k) = 0,4$).



Hình 5.8.3.5.

Giải : Tương tự ví dụ 5.8.3.2, chúng ta lấy mẫu $A(e^{j\omega})$ với $N = 15$ để được giá trị $A(k) = A_d(k)$ bằng 1 ở dải thông và bằng 0 ở dải chắn, sau đó chúng ta điều chỉnh giá trị của $A(k)$ ở dải quá độ, ta lấy giá trị $A(4) = 0,4$. Hình 5.8.3.6 sẽ minh họa việc lấy mẫu tần số này.



Hình 5.8.3.6.

Sau khi lấy mẫu $A(e^{j\omega})$ ta có giá trị của $A(k)$ như sau :

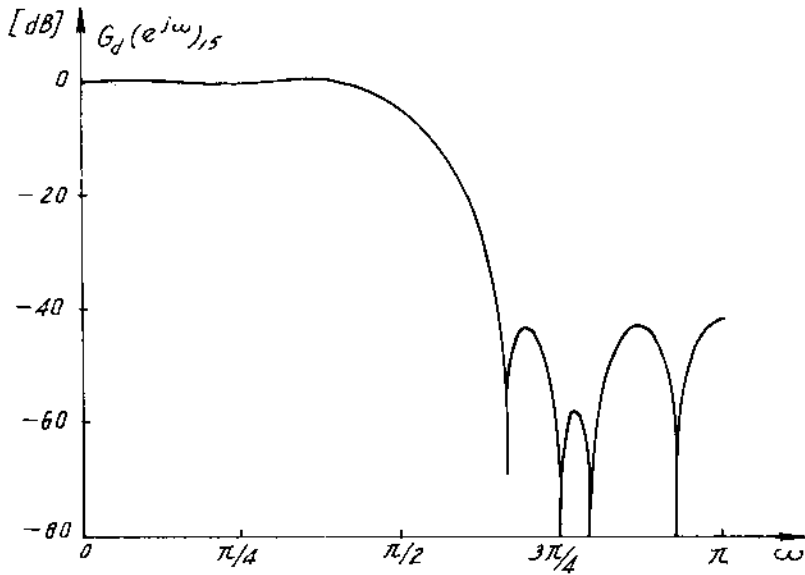
$$\begin{aligned} A(0) = A(1) = A(2) = A(3) &= 1 && \text{ở dải thông.} \\ A(4) &= 0,4 && \text{ở dải quá độ.} \\ A(5) = A(6) = A(7) &= 0 && \text{ở dải chắn.} \end{aligned}$$

Thay giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.3.5) ta thu được $A_d(e^{j\omega})$. Hình 5.8.3.7 cho ta đồ thị của $A_d(e^{j\omega})$ biểu diễn theo dB tức là :

$$G_d(e^{j\omega}) = 20 \log_{10} \frac{|A_d(e^{j\omega})|}{|A_d(e^{j0})|}$$

Sau khi thử trong miền ω , nếu đã thỏa mãn chỉ tiêu kỹ thuật thì dừng lại và tìm các giá trị của $h_d(n)$ với $N = 15$. Thay các giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.3.6) ta có các giá trị của $h_d(n)$ như sau :

$$\begin{aligned} h_d(0) &= h_d(14) = -0,014112893 \\ h_d(1) &= h_d(13) = -0,001945309 \\ h_d(2) &= h_d(12) = 0,040000004 \\ h_d(3) &= h_d(11) = 0,01223454 \\ h_d(4) &= h_d(10) = -0,09138802 \\ h_d(5) &= h_d(9) = -0,01808986 \\ h_d(6) &= h_d(8) = 0,3133176 \\ h_d(7) &= 0,52 \end{aligned}$$



Hình 5.8.3.7.

b) Trường hợp N chẵn, $h_d(n)$ đối xứng

Trong trường hợp này $A_d(e^{j\omega})$ là phản đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Vậy đối với ω_k ta có thể viết :

$$0 \leq \omega_k \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{N} k \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq k \leq N$$

Như thế ta có thể nói rằng $A_d(k)$ là phản đối xứng trong khoảng $0 \leq k \leq N$, tức là :

$$\begin{aligned} A_d(k) &= -A_d(N-k) \\ \Rightarrow A_d(0) &= -A_d(N), A_d(1) = -A_d(N-1), \dots, \\ A_d\left(\frac{N}{2}-1\right) &= -A_d\left(\frac{N}{2}+1\right), A_d\left(\frac{N}{2}\right) = -A_d\left(\frac{N}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Nhưng sau khi lấy mẫu tần số, theo định nghĩa của biến đổi Fourier rời rạc thì chiều dài của $H_d(k)$ (hoặc $A_d(k)$) là $0 \leq k \leq N-1$. Như thế

$A_d(k)$ là đối xứng trong khoảng $1 \leq k \leq N-1$

$$A_d(k) = -A_d(N-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Ta đã có :

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A_d(k) e^{j\theta(k)} e^{-j\frac{\pi}{N} k}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)}$$

Bây giờ chúng ta chia tổng trên thành 2 thành phần (bởi vì $A_d\left(\frac{N}{2}\right) = 0$) ta có :

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\frac{\pi}{N} k}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^N \frac{A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{-j\frac{\pi}{N} k}}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k\right)} \right]$$

Biến đổi tiếp tục ta thu được kết quả sau:

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{A_d(0)}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_d(k)}{N} \left[\frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} + \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right)} \right] \quad (5.8.3.7)$$

Biểu thức (5.8.3.7) chỉ đúng với dãy có chiều dài hữu hạn, còn đối với dãy có chiều dài vô hạn thì ta có thể làm gần đúng $H(e^{j\omega})$ bằng $H_d(e^{j\omega})$, kết quả thu được là do việc nội suy từ các điểm $H(k)$ hoặc $A(k)$ lấy mẫu trên $H(e^{j\omega})$ tại các tần số ω_k .

$$H_d(k) = H(k) \Rightarrow A_d(k) = A(k)$$

Vậy từ biểu thức (5.8.3.7) ta có:

$$A(e^{j\omega}) \approx A_d(e^{j\omega}) = \frac{A(0)}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A(k)}{N} \left[\frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} + \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right)} \right] \quad (5.8.3.8)$$

Cũng giống như trường hợp trên, ở dải thông $A(k)=1$, ở dải chắn $A(k)=0$ và để thu được kết quả tối ưu chúng ta sẽ điều chỉnh giá trị của $A(k)$ ở trong dải quá độ.

Chúng ta tiến hành tìm $h_d(n)$ trong trường hợp này.

$$\begin{aligned} h_d(n) &= IDFT[H_d(k)] = IDFT[H(k)] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) W_N^{kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) e^{j \frac{2\pi k(N-1)}{N}} e^{j \frac{2\pi kn}{N}} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \end{aligned}$$

Trong trường hợp này $A\left(\frac{N}{2}\right)=0$ và $A(k) = -A(N-k)$, chúng ta chia tổng trên thành 3 thành phần như sau:

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} A(0) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) e^{j \frac{2\pi k(N-1)}{N}} e^{j \frac{2\pi kn}{N}} + \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} A(k) e^{j \frac{2\pi k(N-1)}{N}} e^{j \frac{2\pi kn}{N}} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

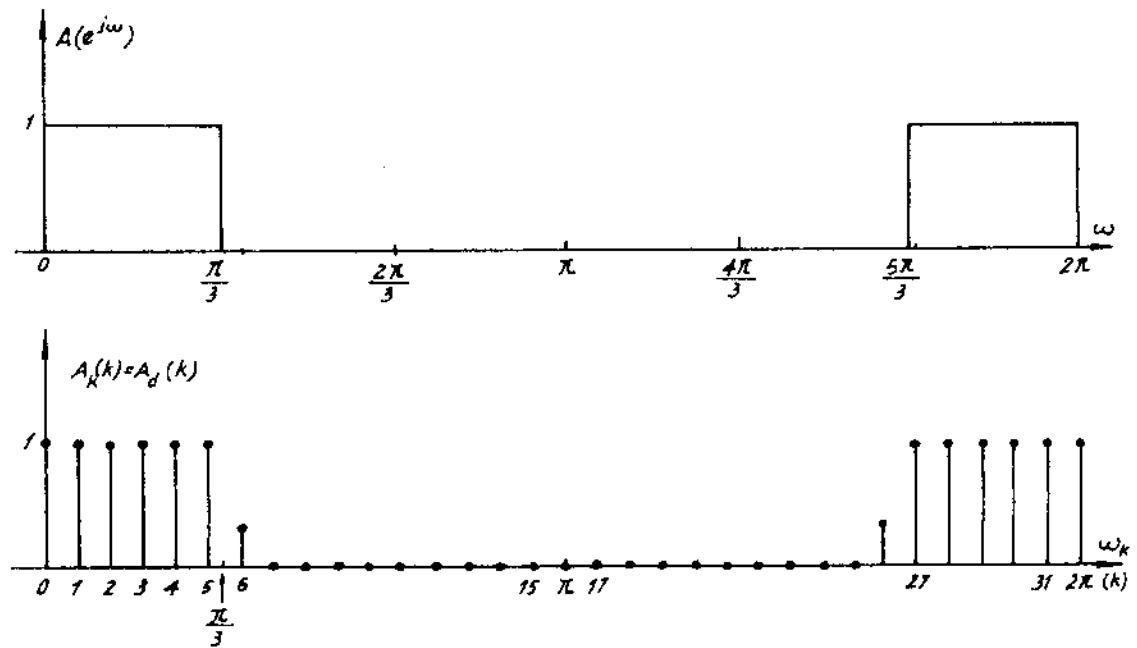
Tiếp tục biến đổi chúng ta thu được:

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{A(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k A(k) \cos \left[\frac{\pi}{N} k(2n+1) \right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad (5.8.3.9)$$

Ví dụ 5.8.3.4 : Hãy tổng hợp một bộ lọc số thông thấp *FIR* loại 2 pha tuyến tính với $N = 32$ (N chẵn), $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1, có sự điều chỉnh giá trị của $A(k)$ quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$ (lấy $A(k) = 0,3789795$).

Giải : Quá trình tổng hợp tương tự như các ví dụ ở trên, nhưng trong trường hợp này chiều dài của bộ lọc N là số chẵn.

Trước hết chúng ta tiến hành lấy mẫu loại 1 $A(e^{j\omega})$ của bộ lọc lý tưởng với $N = 82$, sau khi lấy mẫu chúng ta sẽ thu được các giá trị $A(k) = A_d(k)$ bằng 1 ở dải thông và bằng 0 ở dải chắn. Trong trường hợp này, theo đầu bài ta sẽ lấy $A(6) = 0,3789795$ thì kết quả sẽ tốt hơn. Hình 5.8.3.8 sẽ cho ta quá trình lấy mẫu tần số.

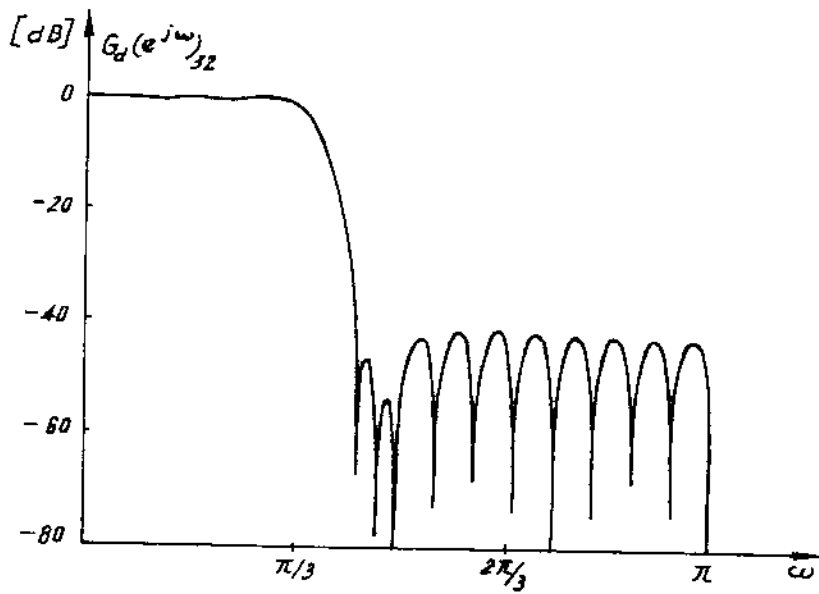


Hình 5.8.3.8.

Sau khi lấy mẫu xong ta thu được các giá trị của $A(k) = A_d(k)$ như sau :

$$\begin{aligned} A(0) = A(1) = A(2) = A(3) = A(4) = A(5) &= 1 && \text{ở dải thông.} \\ A(6) &= 0,3789795 && \text{ở dải quá độ.} \\ A(7) &= A(15) = 0 && \text{ở dải chắn.} \end{aligned}$$

Thay các giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.38) ta thu được biểu thức của $A_d(e^{j\omega})$. Đồ thị của $A_d(e^{j\omega})$ tính theo thang dB là $G_d(e^{j\omega})_{32}$ được cho trên hình 5.8.3.9.



Hình 5.8.3.9.

Sau khi thử lại trong miền ω qua đồ thị của $G_d(e^{j\omega})_{32}$, nếu đã thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thì ta dừng lại, nếu chưa thoả mãn thì tăng N lên và điều chỉnh lại các giá trị $A(k)$ trong dải quá độ. Giả sử các chỉ tiêu kỹ thuật đã được thoả mãn với $N = 82$ và $A(6) = 0,3789795$, ta tiến hành tìm $h_d(n)$. Thay các giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.3.9) ta có các giá trị của $h_d(n)$ như sau:

$$h_d(0) = -0,7141978E - 02 = h_d(31)$$

$$(1) = -0,3070801E - 02$$

$$(2) = 0,5891327E - 02$$

$$(3) = 0,1349923E - 01$$

$$(4) = 0,8087038E - 02$$

$$(5) = -0,1107258E - 01$$

$$(6) = -0,2420687E - 01$$

$$(7) = -0,9446550E - 02$$

$$(8) = 0,2544464E - 01$$

$$(9) = 0,3985050E - 01$$

$$(10) = 0,2753036E - 02$$

$$(11) = -0,5913959E - 01$$

$$(12) = -0,6841660E - 01$$

$$(13) = 0,3175741E - 01$$

$$(14) = 0,2080981E + 00$$

$$h_d(15) = 0,3471138E + 00 = h_d(16)$$

5.8.4. TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ FIR PHA TUYẾN TÍNH VỚI LẤY MẪU TẦN SỐ

LOẠI 2

Chúng ta tìm $H_d(Z)$ và $H_d(e^{j\omega})$ theo hàm của $H_d(k)$ trong trường hợp $\omega_k = \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)$

$$H_d(k) = H_d(Z) \Big|_{Z = e^{j\omega_k}}$$

$$H_d(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) Z^{-n}$$

$$\Rightarrow H_d(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n} = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) e^{-j \frac{\pi}{N} n} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

gọi $g_d(n) = h_d(n) e^{-j \frac{\pi}{N} n}$

Vậy :

$$H_d(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g_d(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Bây giờ ta tìm biến đổi Fourier rời rạc ngược của $H_d(k)$

$$g_d(n) = IDFT[H_d(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = h_d(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} n}$$

thế thì ta có :

$$h_d(n) = e^{j \frac{\pi}{N} n} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n}$$

Cuối cùng ta có cặp biến đổi Fourier rời rạc loại 2 với $\omega_k = \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)$ như sau :

$$H_d(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại.} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại.} \end{cases}$$

(5.8.4.1)

Biến đổi Fourier rời rạc loại 2 này được gọi là biến đổi Fourier rời rạc biến dạng và ký hiệu là **MDFT**.

Chúng ta có thể tìm $H_d(Z)$ theo hàm của $H_d(k)$ như sau :

$$\begin{aligned}
H_d(Z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\omega_k n} \right] Z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_k n} Z^{-n} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\omega_k} Z^{-1})^n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1 - (e^{j\omega_k} Z^{-1})^N}{1 - e^{j\omega_k} Z^{-1}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) N} Z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} Z^{-1}}
\end{aligned}$$

mà

$$e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) N} = 2^{j2\pi k} \cdot e^{j\pi} = -1$$

Vậy :

$$H_d(Z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \cdot \frac{1 + Z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} Z^{-1}}$$

Cuối cùng ta thu được $H_d(Z)$ như sau :

$$H_d(Z) = \frac{1 + Z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} Z^{-1}} \quad (5.8.4.2)$$

Và từ đây ta thu được $H_d(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned}
H_d(e^{j\omega}) &= H_d(Z) \Big|_{Z=e^{j\omega}} \\
&= \frac{1 + e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} e^{-j\omega}}
\end{aligned} \quad (5.8.4.3)$$

Ta biết rằng:

$$\begin{aligned}
1 + e^{-j\omega N} &= 2e^{-j\frac{\omega N}{2}} \cos \frac{\omega N}{2} \\
1 - e^{j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) N} e^{-j\omega} &= 1 - e^{-j\left[\omega - \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} = 2je^{-j\left[\omega - \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= 2je^{-j\frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

Từ đây ta có:

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{2e^{-j\frac{\omega N}{2}} \cos \frac{\omega N}{2}}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{2je^{-j\frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}}}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{\cos \frac{\omega N}{2} e^{-j\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]} \right\} \\
H_d(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{e^{-j\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \cos \frac{\omega N}{2}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]} \right\} \quad (5.8.4.4)
\end{aligned}$$

Ta đã biết :

$$\begin{aligned}
H_d(e^{j\omega}) &= A_d(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \Rightarrow H_d(k) = A_d(k) e^{j\theta(k)} \\
\theta(\omega) &= -\omega \frac{N-1}{2} \quad , \\
\theta(k) &= -\omega_k \frac{N-1}{2} = -\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right) \\
\Rightarrow H_d(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \cos \frac{\omega N}{2}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]} \right\} \quad (5.8.4.5)
\end{aligned}$$

Vậy :

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right)} \cos \frac{\omega N}{2}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \right]} \quad (5.8.4.6)$$

Dưới đây chúng ta tiến hành tính toán các loại bộ lọc số cụ thể.

a) Trường hợp N lẻ, $h_d(n)$ đối xứng (FIR loại 1)

Trong trường hợp này, $A_d(e^{j\omega})$ là đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$, tức là đối với ω_k thì trong khoảng $0 \leq \omega_k \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq 2\pi$.

Vậy $A_d(k)$ là đối xứng trong khoảng $0 \leq k \leq N-1$, tức là:

$$\begin{aligned}
A_d(k) &= A_d(N-1-k) & 0 \leq k \leq N-1 \\
A_d(0) &= A_d(N-1) \\
A_d(1) &= A_d(N-2) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$A_d\left(\frac{N-1}{2} - 1\right) = A_d\left(\frac{N-1}{2} + 1\right)$$

$$A_d\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

Từ biểu thức (5.8.4.5) chúng ta chia $H_d(e^{j\omega})$ thành 3 thành phần như sau :

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{j\omega \frac{N-1}{2}} \cdot \frac{1}{N} \cos \frac{\omega N}{2} \left\{ A_d\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)}}{j \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)}}{j \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \sum_{k=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)}}{j \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right\}$$

Sau khi biến đổi tiếp theo chúng ta thu được :

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left\{ \frac{A_d\left(\frac{N-1}{2}\right) \sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{N \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A_d(k)}{N} \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A_d(k)}{N} \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right\}$$

Từ đây ta có :

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{A_d\left(\frac{N-1}{2}\right) \sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{N \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]} + \\ + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A_d(k)}{N} \left\{ \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right\} \quad (5.8.4.7)$$

Khi lấy mẫu tần số, tại tần số ω_k thì $A_d(k) = A(k)$, vậy ta có

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{A\left(\frac{N-1}{2}\right) \sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{N \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]} + \\ + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A(k)}{N} \left\{ \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right\} \quad (5.8.4.8)$$

Chúng ta tiến hành tìm hiểu tính $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n}$$

Vì $A_d(k)$ đối xứng trong khoảng $0 \leq k \leq N-1$ ($A_d(k) = A_d(N-1-k)$). Vậy ta sẽ chia tổng trên thành 3 thành phần như sau:

$$\begin{aligned} h_d(n) = & \frac{1}{N} A_d\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j \frac{2\pi}{N} \left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right) n} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} A_d(k) e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n} + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} A_d(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) n} \end{aligned}$$

Từ đây biến đổi tiếp ta có :

$$h_d(n) = \frac{A_d\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N} (-1)^{\left(\frac{N-1}{2} + n\right)} + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} (-1)^k A_d(k) \sin\left[\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) (2n+1)\right] \quad (5.8.4.9)$$

Thay $A_d(k) = A(k)$ ta có:

$$h_d(n) = (-1)^{\left(\frac{N-1}{2} + n\right)} \frac{A\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} (-1)^k A(k) \sin\left[\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) (2n+1)\right] \quad (5.8.4.10)$$

b. Trường hợp N chẵn, h_d đối xứng (FIR loại 2)

Trong trường hợp này $A_d(e^{j\omega})$ là phản đối xứng trong khoảng tần số $0 \leq \omega \leq 2\pi$, tức là đối với tần số rời rạc ω_k ta cũng có khoảng tần số như thế.

$$0 \leq \omega \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2}\right) \leq 2\pi.$$

Dẫn đến $A_d(k)$ là phản đối xứng trong khoảng $0 \leq k \leq N-1$, vậy ta có quan hệ sau:

$$\begin{aligned} & A_d(k) = -A_d(N-1-k) \\ \Rightarrow & A_d(0) = -A_d(N-1) \\ & A_d(1) = -A_d(N-2) \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & A\left(\frac{N}{2}-1\right) = -A\left(\frac{N}{2}\right) \end{aligned}$$

Từ hình (5.8.2.1) ta thấy rằng trong phương pháp lấy mẫu tần số loại 2, nếu N chẵn thì khi ta lấy mẫu, điểm $k = \frac{N}{2}$ sẽ không trùng với điểm $\omega = \pi$, mặc dù rằng tại điểm $\omega = \pi$ thì $A_d(e^{j\omega}) = 0$ (vì rằng $A_d(e^{j\omega})$ phản đối xứng trong khoảng $0 \leq \omega \leq 2\pi$ nhưng $A_d\left(\frac{N}{2}\right)$ sẽ khác không.

Ta đã có :

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\cos \frac{\omega N}{2}}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} \right\}$$

Chia $H_d(e^{j\omega})$ thành 2 thành phần như sau :

$$H_d(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\cos \frac{\omega N}{2}}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} \right\} +$$

$$+ \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]}$$

Đổi biến số ở thành phần thứ 2 : $k = N - 1 - l$, và chú ý rằng $A_d(N - 1 - l) = -A_d(l)$, chúng ta thu được kết quả sau đây :

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A_d(k)}{N} \left\{ \frac{\sin \left\{ N \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}}{\sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} + \frac{\sin \left\{ N \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}}{\sin \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} \right\} \quad (5.8.4.11)$$

Thay $A_d(k) = A(k)$ ta có :

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A(k)}{N} \left\{ \frac{\sin \left\{ N \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}}{\sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} + \frac{\sin \left\{ N \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}}{\sin \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} \right\} \quad (5.8.4.12)$$

Chúng ta tiến hành tìm công thức tính $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)n}$$

Lợi dụng tính chất phản đối xứng của $A_d(k)$ trong khoảng $0 \leq k \leq N - 1$:

$A_d(k) = -A_d(N - 1 - k)$, chúng ta chia $h_d(n)$ ra làm 2 thành phần như sau :

$$h_d(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)n} + \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N}{2}}^{N-1} A_d(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} e^{j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)n}$$

Từ đây biến đổi tiếp ta thu được kết quả như sau :

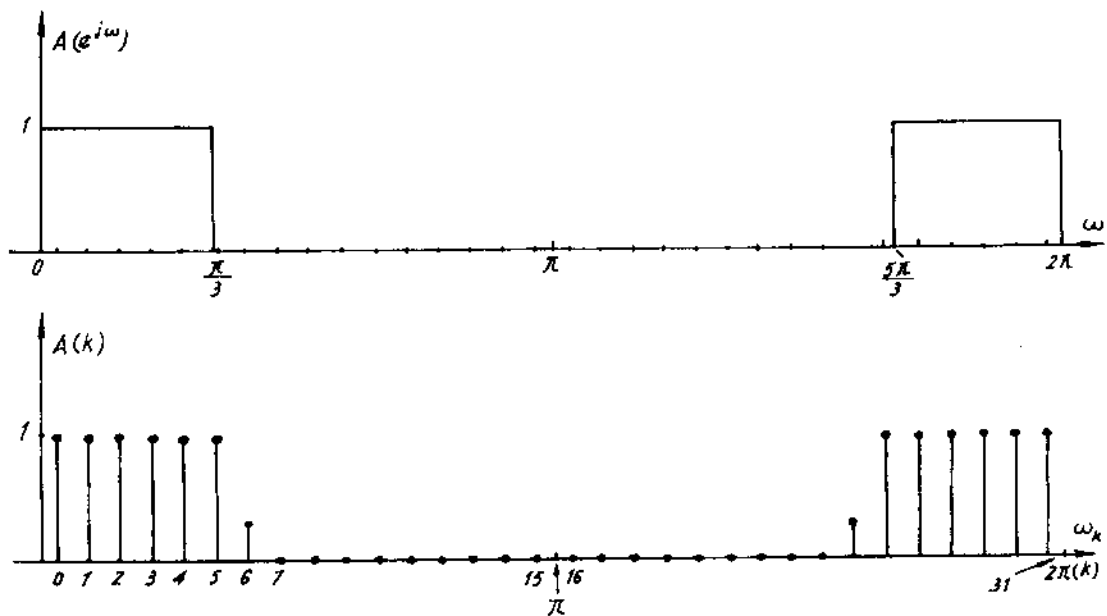
$$h_d(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} (-1)^k A_d(k) \sin \left[\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) (2n + 1) \right] \quad (5.8.4.13)$$

Thay $A_d(k) = A(k)$, ta có :

$$h_d(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k A(k) \sin \left[\frac{\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) (2n+1) \right] \quad (5.8.4.14)$$

Ví dụ 5.8.4.1 : Hãy tổng hợp một bộ lọc số thông thấp *FIR* loại 2 pha tuyến tính với $N = 32$ (N chẵn), $\omega_c = \pi$. dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 2, có sự điều chỉnh giá trị của $A(k)$ quanh trục bất liên tục của $A(e^{j\omega})$ (lấy $A(k) = 0,3570496$).

Giải : Bước đầu tiên chúng ta tiến hành lấy mẫu tần số loại 2 đáp ứng $A(e^{j\omega})$ của bộ lọc số lý tưởng ứng với $N = 32$. Sau khi lấy mẫu ta thu được các giá trị $A(k) = A_d(k)$ bằng 1 trong dải thông và bằng 0 trong dải chắn. Nhưng theo đầu bài toán ta phải điều chỉnh giá trị của $A(k)$ trong dải quá độ, ở đây ta lấy $A(6) = 0,3570496$. Hình 5.8.4.1 mô tả quá trình lấy mẫu tần số đáp ứng tần số của độ lớn $A(e^{j\omega})$.

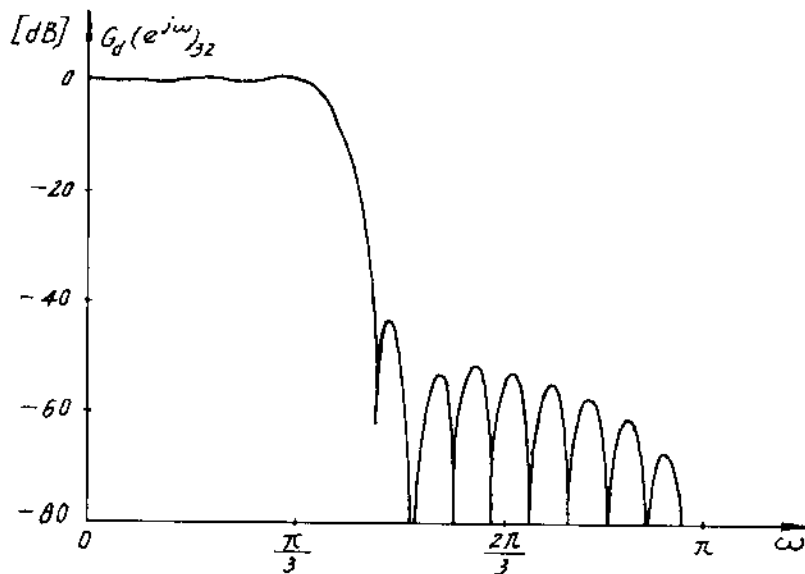


Hình 5.8.4.1.

Sau khi lấy mẫu tần số có sự điều chỉnh $A(k)$ ở trong dải quá độ như sau : với $\omega_c = \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{33}$ thì tại mẫu $k = 5$ ta có $A(5) = \frac{2\pi}{32} \left(5 + \frac{1}{2} \right) = \frac{11\pi}{33}$ mà $\frac{11\pi}{33} < \frac{11\pi}{32}$. Vậy mẫu $A(5)$ nằm ở dải chắn, đáng lý ra $A(5)$ phải lấy bằng 0 nhưng vì mẫu thứ $k = 5$ nằm rất sát $\omega_c \left(\frac{11\pi}{33} \approx \frac{11\pi}{32} \right)$ nên ta điều chỉnh $A(5)$ bằng 1, như vậy sai số sẽ ít hơn. Ngoài ra để giảm độ gợn sóng ở cả dải thông và dải chắn ta điều chỉnh thêm giá trị $A(6)$: $A(6) = 0,3570496$. Vậy kết quả sau khi lấy mẫu $A(e^{j\omega})$, có điều chỉnh $A(k)$ ở dải quá độ ta có kết quả sau đây:

$A(0) = A(1) = A(2) = A(3) = A(4) = A(5) = 1$ ở dải thông.
 $A(6) = \dots = 0,3570496$ ở dải quá độ.
 $A(7) = \dots = A(7) = 0$ ở dải chặn.

Thay các giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.4.12) ta được biểu thức của $A_d(e^{j\omega})$. Đồ thị của $A_d(e^{j\omega})$ tính theo dB là $G_d(e^{j\omega})_{32}$ được cho trên hình 5.8.4.2.



Hình 5.8.4.2.

Giả sử với $N = 32$ và với sự điều chỉnh $A(k)$ ở trong dải quá độ ở trên đã thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thì ta dừng lại và tiến hành tính $h_d(n)$. Thay các giá trị của $A(k)$ vào biểu thức (5.8.4.4) và tính toán ta có các giá trị của $h_d(n)$ như sau :

$$\begin{aligned}
 h_d(0) &= -0,4089120E-02 = h_d(31) \\
 (1) &= -0,9973779E-02 \\
 (2) &= -0,7379891E-02 \\
 (3) &= 0,5949799E-02 \\
 (4) &= 0,1727056E-01 \\
 (5) &= 0,7878412E-02 \\
 (6) &= -0,1798590E-01 \\
 (7) &= -0,2670584E-01 \\
 (8) &= 0,8778549E-02 \\
 (9) &= 0,4191022E-01 \\
 (10) &= 0,2839344E-01 \\
 (11) &= -0,4163144E-01 \\
 (12) &= -0,8254962E-01 \\
 (13) &= 0,2802212E-01 \\
 (14) &= 0,2013655E+00 \\
 h_d(15) &= 0,3717532E+00 = h_d(16)
 \end{aligned}$$

5.9. PHƯƠNG PHÁP LẬP

5.9.1 TỔNG QUAN

Để tổng hợp được một bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính tối ưu (tức là bộ lọc số có bậc tối thiểu) chúng ta có thể dùng phương pháp lập.

Để có kết quả tối ưu chúng ta dùng phương pháp tính toán các hệ số của đáp ứng xung kiểu tối ưu hoá, tất nhiên là phải có sự tham gia của máy tính.

Ở đây chúng ta sẽ coi việc tổng hợp một bộ lọc số như là một bài toán gần đúng theo nghĩa chebyshev.

Kết quả sẽ là tối ưu, nhưng chúng ta phải trả giá là việc tính toán sẽ khá phức tạp.

Trong bảng 5.4.5.1 chúng ta đã tổng kết có 4 loại bộ lọc số đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (*FIR*) pha tuyến tính.

Dưới đây chúng ta sẽ xét cách biểu diễn $A_d(e^{j\omega})$ của cả 4 loại lọc số *FIR*. Chúng ta sẽ đưa cách biểu diễn $A_d(e^{j\omega})$ của cả 4 loại về cùng một dạng sau đây:

$$A_d(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega}) \cdot P(e^{j\omega}) \quad (5.9.1.1)$$

Trong biểu thức 5.9.1.1, $P(e^{j\omega})$ được biểu diễn ở cùng một dạng đối với tất cả 4 loại bộ lọc số *FIR*. Còn $Q(e^{j\omega})$ là một hàm cố định.

Dưới đây chúng ta tiến hành nghiên cứu các dạng hiệu quả của $P(e^{j\omega})$ và $Q(e^{j\omega})$ đối với từng bộ lọc số *FIR*.

- Bộ lọc số *FIR* loại 1

Theo bảng 5.4.5.1 ta có:

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos \omega n = 1 \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a'(n) \cos \omega n$$

So sánh với biểu thức 5.9.1.1 ta có:

$$\begin{aligned} Q(e^{j\omega}) &= 1 \\ P(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} a'(n) \cos \omega n \\ a'(n) &\equiv a(n) \end{aligned} \quad (5.9.1.2)$$

- Bộ lọc số *FIR* loại 2

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^N b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \cos \frac{\omega}{2} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} b'(n) \cos \omega n$$

Vậy:

$$\begin{aligned} Q(e^{j\omega}) &= \cos \frac{\omega}{2} \\ P(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} b'(n) \cos \omega n \end{aligned}$$

Quan hệ giữa hai hệ số $b'(n)$ và $b(n)$ được cho bởi các biểu thức dưới đây:

$$\begin{aligned}
b(1) &= b'(0) + \frac{1}{2} b'(1) \\
b(i) &= \frac{1}{2} [b'(i-1) + b'(i)] \quad \text{với } i = 2, 3, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \\
b\left(\frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{2} b'\left(\frac{N}{2}-1\right)
\end{aligned} \tag{5.9.1.3}$$

- Bộ lọc số FIR loại 3

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N-1} c(n) \sin \omega n = \sin \omega \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} c'(n) \cos \omega n$$

Vậy :

$$\begin{aligned}
Q(e^{j\omega}) &= \sin \omega \\
P(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} c'(n) \cos \omega n
\end{aligned}$$

Trong trường hợp này chú ý đặc điểm của $Q(e^{j\omega})$ như sau :

$$Q(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{với } \omega = 0 \text{ và } \omega = \pi$$

Quan hệ giữa hai hệ số $c'(n)$ và $c(n)$ được cho bởi các biểu thức dưới đây :

$$\begin{aligned}
c(1) &= c'(0) - \frac{1}{2} c'(2) \\
c(i) &= \frac{1}{2} [c'(i-1) - c'(i+1)] \quad \text{với } i = 2, 3, 4, \dots, \left(\frac{N-1}{2}-2\right) \\
c\left(\frac{N-1}{2}-1\right) &= \frac{1}{2} c'\left(\frac{N-1}{2}-2\right) \\
c\left(\frac{N-1}{2}\right) &= \frac{1}{2} c'\left(\frac{N-1}{2}-1\right)
\end{aligned} \tag{5.9.1.4}$$

- Bộ lọc số FIR loại 4

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \sin \frac{\omega}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} d'(n) \cos \omega n$$

Vậy :

$$\begin{aligned}
Q(e^{j\omega}) &= \sin \frac{\omega}{2} \\
P(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} d'(n) \cos \omega n
\end{aligned}$$

Trong trường hợp này chú ý đặc điểm của $Q(e^{j\omega})$ như sau :

$$Q(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{với } \omega = 0.$$

Quan hệ giữa hai hệ số $d'(n)$ và $d(n)$ được cho bởi các biểu thức sau đây :

$$\begin{aligned}
d(1) &= d'(0) - \frac{1}{2} d'(1) \\
d(i) &= \frac{1}{2} [d'(i-1) - d'(i)] \quad \text{với } i = 2, 3, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right)
\end{aligned}$$

$$d\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2} d'\left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad (5.9.1.5)$$

Bảng 5.9.1.1 cho chúng ta tổng kết 4 loại bộ lọc số vừa mới xét ở trên :

Bảng 5.9.1.1.

$A_d(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega}) \cdot P(e^{j\omega})$		
Loại bộ lọc	$Q(e^{j\omega})$	$P(e^{j\omega})$
1	1	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a'(n) \cos \omega n$
2	$\cos \frac{\omega}{2}$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} b'(n) \cos \omega n$
3	$\sin \omega$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} c'(n) \cos \omega n$
4	$\sin \frac{\omega}{2}$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} d'(n) \cos \omega n$

Theo bảng 5.9.1.1 ta thấy rằng $Q(e^{j\omega})$ là khác nhau đối với 4 loại bộ lọc số, nhưng là một hàm cố định ta biết trước được. Còn $P(e^{j\omega})$ đối với cả 4 loại bộ lọc số đều có chung một dạng sau đây :

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^R \alpha(n) \cos \omega n \quad (5.9.1.6)$$

Ở đây $\alpha(n)$ biểu diễn tham số của bộ lọc, nó quan hệ một cách tuyến tính với đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc. Còn giá trị trên của tổng là R , so sánh với bảng 5.9.1.1 sẽ có giá trị sau đây :

$$R = \frac{N-1}{2} \quad \text{đối với bộ lọc FIR loại 1}$$

$$R = \frac{N}{2} - 1 \quad \text{đối với bộ lọc FIR loại 2}$$

$$R = \frac{N-1}{2} - 1 \quad \text{đối với bộ lọc FIR loại 3}$$

$$R = \frac{N}{2} - 1 \quad \text{đối với bộ lọc FIR loại 4}$$

5.9.2. GẮN ĐÚNG THEO NGHĨA CHEBYSHEV

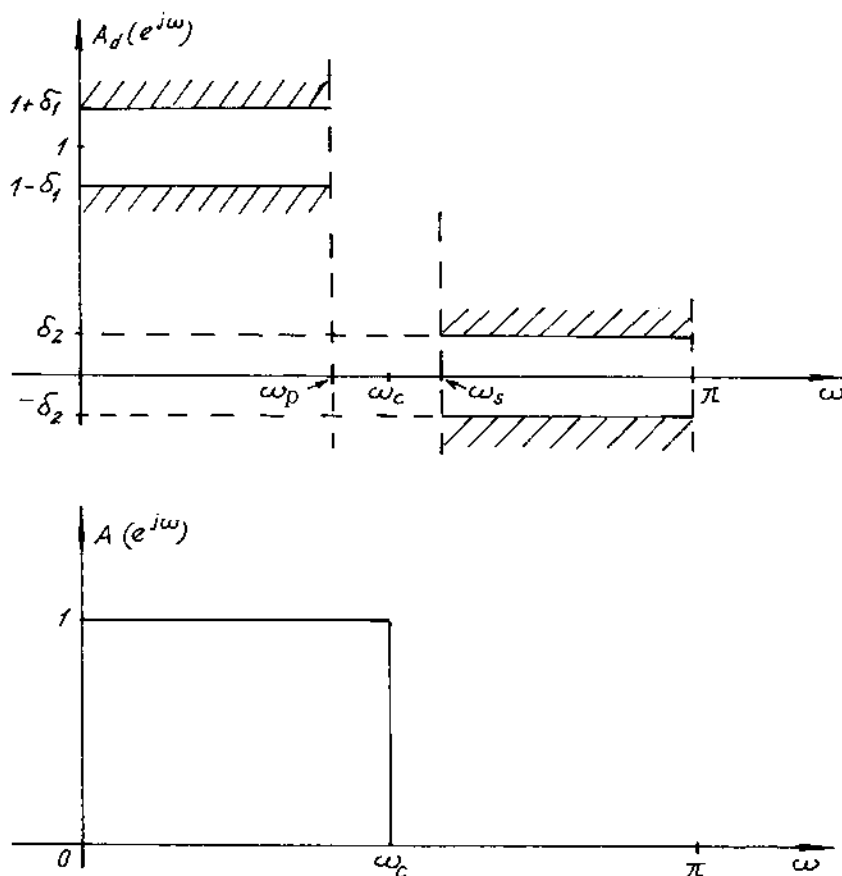
a) Đặt bài toán

Mục tiêu của chúng ta là nhận được một bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính mà đáp ứng tần số của nó có độ gợn sóng của biên độ là hằng số.

Ta biết rằng đối với một bộ lọc số *FIR* thực tế, các độ gợn sóng không được vượt quá biên độ δ_1 ở trong dải thông và δ_2 ở trong dải chắn. Vấn đề đặt ra ở đây là xấp xỉ một hàm bằng một đa thức theo nghĩa Chebyshev.

Vấn đề của chúng ta ở đây là phải hình thành bài toán gần đúng theo nghĩa Chebyshev, mà ta đã biết rằng theo bảng 5.9.1.1 thì $Q(e^{j\omega})$ là một hàm cố định đã biết, còn $P(e^{j\omega})$ là đa thức theo coson, vậy bài toán ở đây là ta phải tìm các hệ số $\alpha(n)$ của $P(e^{j\omega})$ sao cho sai số giữa đáp ứng tần số của bộ lọc số thực tế và bộ lọc số lý tưởng là nhỏ nhất.

Hình 5.9.2.1 cho ta một ví dụ minh họa về sai số giữa bộ lọc số thông thấp thực tế và lý tưởng.



Hình 5.9.2.1.

Như vậy sai số giữa bộ lọc số thực tế và bộ lọc số lý tưởng được đánh giá như sau :

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega})] \quad (5.9.2.1)$$

Ở đây :

$E(e^{j\omega})$: sai số.

$A(e^{j\omega})$: đáp ứng tần số của độ lớn của bộ lọc số lý tưởng.

$A_d(e^{j\omega})$: đáp ứng tần số của độ lớn của bộ lọc số thực tế.

$W(e^{j\omega})$: hàm trọng số trên sai số gần đúng.

Tiếp tục biến đổi ta có :

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [A(e^{j\omega}) - Q(e^{j\omega}) P(e^{j\omega})] = W(e^{j\omega}) \cdot Q(e^{j\omega}) \left[\frac{A(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} - P(e^{j\omega}) \right]$$

Về mặt quy ước toán học, chúng ta có thể định nghĩa một hàm trọng số biến dạng là $\hat{W}(e^{j\omega})$:

$$\hat{W}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) \cdot Q(e^{j\omega}) \quad (5.9.2.2)$$

và đáp ứng tần số của độ lớn biến dạng là $\hat{A}(e^{j\omega})$:

$$\hat{A}(e^{j\omega}) = \frac{A(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} \quad (5.9.2.3)$$

Vậy ta có thể viết sai số như sau :

$$E(e^{j\omega}) = \hat{W}(e^{j\omega}) [\hat{A}(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})] \quad (5.9.2.4)$$

Giải bài toán gần đúng ở đây là ở chỗ chúng ta phải tìm thấy một tập hợp các hệ số $\alpha(n)$ sao cho nó tối thiểu hóa được giá trị tuyệt đối của sai số $E(e^{j\omega})$ trong miền tần số Ω , mà trong miền này chúng ta đang thực hiện phép tính gần đúng.

Nếu ta có các ký hiệu sau đây :

$|E(e^{j\omega})|$ là sai số tuyệt đối.

$\|E(e^{j\omega})\|$ là giá trị tối thiểu của sai số tuyệt đối cực đại.

thì bài toán gần đúng được viết như sau :

$$\|E(e^{j\omega})\| = \min_{\alpha(n)} [\max_{\omega \in \Omega} |E(e^{j\omega})|] \quad (5.9.2.5)$$

ở đây :

$[\alpha(n)]$ có nghĩa là tập hợp hệ số $\alpha(n)$.

$\omega \in \Omega$ có nghĩa là tần số ω phải nằm trong miền Ω và Ω sẽ chứa cả dải thông và dải chắn của bộ lọc.

Để giải bài toán xấp xỉ này, Parks và McClellan đã ứng dụng một định lý trong lý thuyết gần đúng Chebyshev, định lý này gọi là “định lý xoay chiều”. Mục tối đây chúng ta sẽ trình bày định lý này.

Xét hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ ta thấy rằng, theo hình 5.9.2.1, so sánh sai số giữa bộ lọc số thực tế và bộ lọc số lý tưởng, ta có thể xác định được hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ trên sai số gần đúng. Ta thấy rằng sai số ở dải thông và dải chắn của các loại bộ lọc số nói chung là khác nhau :

$$|A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega})| = \delta_1 \quad \text{ở dải thông.}$$

$$|A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega})| = \delta_2 \quad \text{ở dải chắn.}$$

Vì vậy hàm trọng số cũng được chọn khác nhau ở dải thông và dải chắn. Vấn đề chọn $W(e^{j\omega})$ cũng còn phụ thuộc vào giá trị tương đối của δ_1 và δ_2 xem giá trị nào lớn hơn.

Giả sử ta gọi :

$$\max |E(e^{j\omega})| = \delta \quad (5.9.2.5)$$

thì :

$$\delta = \max [\delta_1, \delta_2] \quad (5.9.2.6)$$

Giả sử $\delta_2 > \delta_1$ thì ta có :

$$\delta = \delta_2$$

và hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ sẽ được chuẩn hoá bằng 1 ở dải chắn, và bằng δ_2 / δ_1 ở dải thông, tức là :

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & \text{ở dải thông} \\ 1 & \text{ở dải chắn} \end{cases} \quad (5.9.2.7)$$

Ví dụ 5.9.2.1 :

Hãy xác định hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ đối với các bộ lọc số FIR thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải nếu ta có :

$$\begin{aligned} |E(e^{j\omega})| &= \delta_1 && \text{ở dải thông.} \\ |E(e^{j\omega})| &= \delta_2 && \text{ở dải chắn.} \\ \delta_2 &> \delta_1 \end{aligned}$$

Giải :

- Bộ lọc số FIR thông thấp

$$\begin{aligned} |E(e^{j\omega})| &= \begin{cases} \delta_1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \delta_2 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ W(e^{j\omega}) &= \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

- Bộ lọc số FIR thông cao

$$\begin{aligned} |E(e^{j\omega})| &= \begin{cases} \delta_2 & 0 \leq \omega \leq \omega_s \\ \delta_1 & \omega_p \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ W(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_s \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} & \omega_p \leq \omega \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

- Bộ lọc số FIR thông dải

$$\begin{aligned} |E(e^{j\omega})| &= \begin{cases} \delta_2 & 0 \leq \omega \leq \omega_{s1} \\ \delta_1 & \omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2} \\ \delta_2 & \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} \\ W(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_{s1} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} & \omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2} \\ 1 & \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

- Bộ lọc số FIR chắn dải

$$|E(e^{j\omega})| = \begin{cases} \delta_1 & 0 \leq \omega \leq \omega_{p1} \\ \delta_2 & \omega_{s1} \leq \omega \leq \omega_{s2} \\ \delta_1 & \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} & 0 \leq \omega \leq \omega_{p1} \\ 1 & \omega_{s1} \leq \omega \leq \omega_{s2} \\ \frac{\delta_2}{\delta_1} & \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

b) Định lý xoay chiều

Để xác định tham số bộ lọc $\alpha(n)$ trong việc giải quyết bài toán gần đúng cho bởi (5.9.2.5) chúng ta sẽ sử dụng định lý xoay chiều sau đây :

Định lý xoay chiều

Nếu $P(e^{j\omega})$ là một tổ hợp tuyến tính của $R + 1$ hàm cosin sau đây :

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^R \alpha(n) \cos \omega n$$

thì một điều kiện cần và đủ để cho $P(e^{j\omega})$ là gần đúng duy nhất và tốt nhất theo nghĩa Chebyshev của một hàm liên tục $A(e^{j\omega})$ trên một tập con Ω của khoảng tần số $[0, \pi]$ là hàm sai số $E(e^{j\omega})$ phải có tối thiểu $R + 2$ tần số cực trị trong tập tần số Ω , tức là phải tồn tại tối thiểu $R + 2$ tần số $\{\omega_i\}$ trong tập Ω mà :

$$\begin{aligned} &+ \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{R+1} \\ &+ E(e^{j\omega_i}) = -E(e^{j\omega_{i+1}}) \quad i = 0, 1, \dots, R \\ &+ \left| E(e^{j\omega_i}) \right| = \max_{\omega \in \Omega} \left| E(e^{j\omega}) \right| \quad \text{với } \forall i \end{aligned}$$

Nhận xét :

+ Sở dĩ ta gọi định lý này là định lý xoay chiều bởi vì hàm sai số $E(e^{j\omega})$ đổi dấu giữa hai tần số cực trị kế nhau ω_i và ω_{i+1} .

+ Định lý này không những chỉ đảm bảo sự tồn tại và duy nhất của lời giải mà còn cho ta thuật toán để tính ra lời giải này.

+ Nhận xét thêm về định lý xoay chiều này ta lấy ví dụ về bộ lọc số thông thấp. Đối với bộ lọc số thông thấp có 2 dải :

$$\text{dải thông : } 0 \leq \omega \leq \omega_p$$

$$\text{dải chắn : } \omega_s \leq \omega \leq \pi$$

Từ đây ta thấy rằng : đáp ứng tần số của độ lớn $A(e^{j\omega})$ của bộ lọc số lý tưởng và hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ là hằng số trong từng dải tần số, ta có :

$$\frac{dE(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left\{ W(e^{j\omega}) \left[A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega}) \right] \right\} = - \frac{dA_d(e^{j\omega})}{d\omega} = 0$$

Chúng ta cho đạo hàm bằng không để tìm cực trị, kết quả ở các tần số $\{\omega_i\}$ sẽ là các đỉnh của $E(e^{j\omega})$ và cũng là các đỉnh mà ở đó $A_d(e^{j\omega})$ có sai số lớn nhất.

Ví dụ đối với bộ lọc FIR loại 1 :

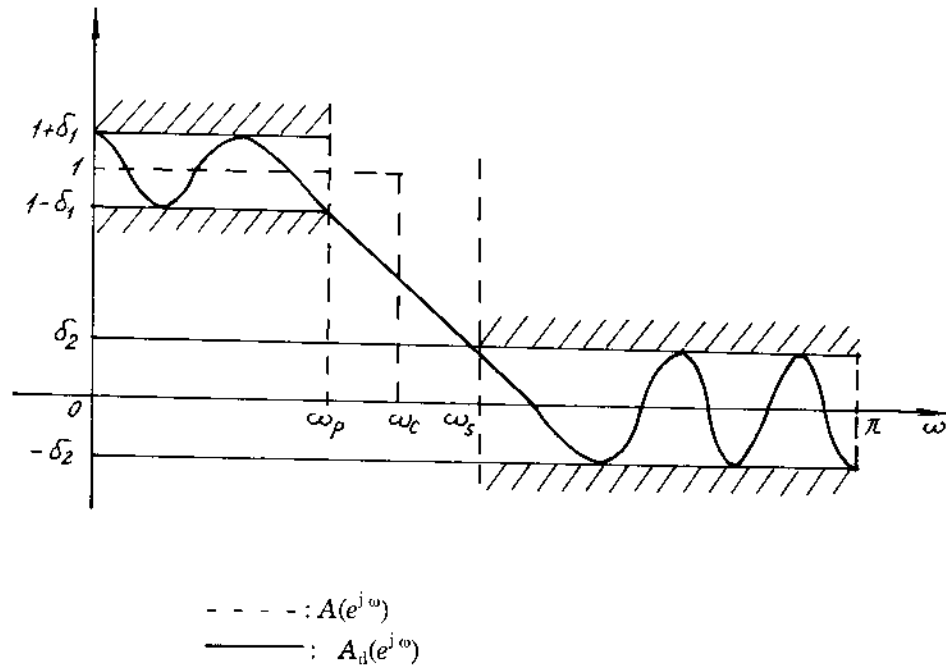
$$A_d(e^{j\omega}) = P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^R \alpha(n) \cos \omega n$$

Từ đây ta thấy rằng $A_d(e^{j\omega})$ có thể có nhiều nhất $R - 1$ cực đại và cực tiểu trong khoảng mở của tần số $(0, \pi)$. Nếu tính thêm tại $\omega = 0$ và $\omega = \pi$ thì $A_d(e^{j\omega})$ cũng như sai số $E(e^{j\omega})$ sẽ có $R + 1$ tần số cực trị, tức là trong khoảng đóng của tần số $[0, \pi]$. Ngoài ra nếu

tính cả ở tần số giới hạn dải thông ω_p và dải chặn ω_s , thì ta phải thêm hai tần số cực trị nữa, như vậy tổng cộng ta có $R + 1 + 2 = R + 3$ tần số cực trị của $E(e^{j\omega})$ dành cho bài toán gần đúng duy nhất và tốt nhất của bộ lọc số thông thấp lý tưởng.

Theo định lý xoay chiều là ta phải có ít nhất $R + 2$ tần số cực trị của $E(e^{j\omega})$. Như vậy, để thiết kế bộ lọc số thông thấp ta có thể dùng $R + 2$ hoặc $R + 3$ tần số cực trị.

Ví dụ 5.9.2.2 : Cho $A_d(e^{j\omega})$ và $A(e^{j\omega})$ của bộ lọc số thông thấp như trên hình 5.9.2.2 sau đây :



Hình 5.9.2.2.

Hãy xác định R và các tần số cực trị.

Hãy xác định hàm trọng số $W(e^{j\omega})$.

Hãy xác định $\max |E(e^{j\omega})|$.

Giải :

- Trong khoảng mở của tần số $(0, \pi)$ có 3 tần số cực đại và 3 tần số cực tiểu, vậy $R - 1 = 6$.

- Trong khoảng đóng của tần số $[0, \pi]$ ta tính thêm tần số cực đại tại $\omega = 0$ và tần số cực tiểu tại $\omega = \pi$ thì sẽ có 4 tần số cực đại và 4 tần số cực tiểu, vậy $R + 1 = 8$.

- Trong khoảng đóng của tần số $[0, \pi]$, nếu tính cả ở tần số giới hạn dải thông ω_p và tần số giới hạn dải chặn ω_s , thì sẽ có 5 tần số cực đại và 5 tần số cực tiểu. Vậy $R + 3 = 10$.

- Cuối cùng ta có $R = 7$, vậy theo định lý xoay chiều, bộ lọc số thông thấp này sẽ được gần đúng với $R + 2 = 9$ hoặc $R + 3 = 10$ tần số cực trị.

- Xác định hàm trọng số $W(e^{j\omega})$:

$\delta = \max[\delta_1, \delta_2]$, ở đây $\delta_2 > \delta_1$ vậy $\delta = \delta_2$

Ta có :

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\delta}{\delta_1} & \text{ở dải thông} \\ 1 & \text{ở dải chắn} \end{cases}$$

- Xác định $\max |E(e^{j\omega})| = |E(e^{j\omega_i})|$

$$[A(e^{j\omega_i}) - A_d(e^{j\omega_i})] = \pm \delta_1 \quad \text{ở dải thông}$$

$$[A(e^{j\omega_i}) - A_d(e^{j\omega_i})] = \pm \delta_2 \quad \text{ở dải chắn.}$$

ω_i : là tần số cực trị.

mà :

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [A(e^{j\omega}) - A_d(e^{j\omega})]$$

Vậy :

$$E(e^{j\omega_i}) = W(e^{j\omega_i}) [A(e^{j\omega_i}) - A_d(e^{j\omega_i})] = \pm \delta$$

Vậy :

$$\max |E(e^{j\omega})| = |E(e^{j\omega_i})| = \delta$$

5.9.3. THUẬT TOÁN THAY ĐỔI REMEZ

Bài toán gần đúng của bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính tối ưu đã được hình thành như một phép gần đúng theo nghĩa Chebyshev, và chúng ta đã có một định lý, đó là định lý trao đổi, nó sẽ cho chúng ta điều kiện cần và đủ của sự tồn tại và duy nhất của cách giải bài toán gần đúng theo nghĩa Chebyshev này.

Dựa trên cơ sở bài toán gần đúng theo nghĩa Chebyshev này, Parks và McClellan đã sử dụng định lý xoay chiều để đưa ra một phương pháp tính toán bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính. Nguyên tắc chung của phương pháp này gồm những bước sau đây :

1. Chọn loại bộ lọc số lý tưởng, tức là chọn đáp ứng tần số của độ lớn $A(e^{j\omega})$, sau đó chọn hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ (dựa theo các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thực tế), cuối cùng sẽ chọn bậc của bộ lọc số N .
2. Xác định bài toán gần đúng, tức là tìm $\hat{W}(e^{j\omega})$, $\hat{A}(e^{j\omega})$ và $P(e^{j\omega})$.
3. Giải bài toán gần đúng bằng cách sử dụng thuật toán thay đổi Remez.
4. Tính toán các hệ số của bộ lọc.

Giải thích các bước như sau :

+ **Bước một** : Giả sử ta cần thiết kế 1 bộ lọc số thông thấp với $\delta_2 > \delta_1$ ta sẽ chọn $A(e^{j\omega})$ và $W(e^{j\omega})$ như sau :

$$A(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{ở dải thông} \\ 0 & \text{ở dải chắn} \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\delta}{\delta_1} & \text{ở dải thông} \\ 1 & \text{ở dải chắn} \end{cases}$$

Chúng ta cho N một giá trị nào đấy, việc cho này phụ thuộc vào kinh nghiệm, nếu ta cho N gần sát với giá trị tối ưu thì quá trình lặp sẽ ngắn hơn, ví dụ cho $N = 15$. Nếu ta chọn bộ lọc số *FIR* loại 1 để thiết kế thì $R = \frac{N-1}{2} = 7$.

+ **Bước hai** : Xác định bài toán gần đúng.

$$E(e^{j\omega}) = \hat{W}(e^{j\omega})[\hat{A}(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})]$$

Nếu chọn *FIR* loại 1 ta có :

$$\hat{W}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}), Q(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})$$

Vì trường hợp *FIR* loại 1 : $Q(e^{j\omega}) = 1$

$$\hat{A}(e^{j\omega}) = \frac{A(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} = A(e^{j\omega})$$

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} a'(n) \cos \omega n$$

$$a'(n) = \alpha(n) \quad , \quad R = \frac{N-1}{2}$$

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^R \alpha(n) \cos \omega n$$

+ **Bước ba** : Sử dụng thuật toán thay đổi Remez để giải bài toán gần đúng này.

Theo định lý xoay chiều, trong miền tần số ta phải chọn ra $R + 2$ điểm tần số rời rạc, trong tập hợp $R + 2$ tần số chọn ban đầu này là $\{\omega_i\}$, thì tại các tần số ω_i này sai số $E(e^{j\omega})$ phải đạt giá trị cực trị $\pm \delta$, và dấu của δ phải xen kẽ (xoay chiều).

Tức là ta phải giải hệ phương trình sau :

$$E(e^{j\omega_i}) = \hat{W}(e^{j\omega_i})[\hat{A}(e^{j\omega_i}) - P(e^{j\omega_i})] = (-1)^i \delta \quad i = 0, 1, \dots, R + 1 \quad (5.9.3.1)$$

và

$$P(e^{j\omega_i}) = \sum_{n=0}^R \alpha(n) \cos \omega_i n \quad (5.9.3.2)$$

$$\hat{A}(e^{j\omega_i}) - P(e^{j\omega_i}) = \frac{(-1)^i}{\hat{W}(e^{j\omega_i})} \delta$$

$$\Rightarrow P(e^{j\omega_i}) + \frac{(-1)^i}{\hat{W}(e^{j\omega_i})} \delta = \hat{A}(e^{j\omega_i}) \quad (5.9.3.3)$$

Hệ phương trình 5.9.3.3 có thể viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos R\omega_0 & \frac{1}{\hat{W}(e^{j\omega_0})} \\ 1 & \cos \omega_1 & \cos 2\omega_1 & \dots & \cos R\omega_1 & \frac{-1}{\hat{W}(e^{j\omega_1})} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega_R & \cos 2\omega_R & \dots & \cos R\omega_R & \frac{(-1)^R}{\hat{W}(e^{j\omega_R})} \\ 1 & \cos \omega_{R+1} & \cos 2\omega_{R+1} & \dots & \cos R\omega_{R+1} & \frac{(-1)^{R+1}}{\hat{W}(e^{j\omega_{R+1}})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(R) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}(e^{j\omega_0}) \\ \hat{A}(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ \hat{A}(e^{j\omega_R}) \\ \hat{A}(e^{j\omega_{R+1}}) \end{bmatrix} \quad (5.9.3.4)$$

Từ tập tần số cực trị $\{\omega_i\}$ chúng ta xác định $P(e^{j\omega})$ và δ , sau đó tính sai số $E(e^{j\omega})$.

Để tính $P(e^{j\omega})$ và δ một cách hiệu quả hơn chúng ta áp dụng cách tính sau đây :

- Tính δ : áp dụng cách tính định thức của Vandermonde ta có :

$$\delta = \frac{a_0 \hat{A}(e^{j\omega_0}) + a_1 \hat{A}(e^{j\omega_1}) + \dots + a_{R+1} \hat{A}(e^{j\omega_{R+1}})}{\frac{a_0}{\hat{W}(e^{j\omega_0})} - \frac{a_1}{\hat{W}(e^{j\omega_1})} + \dots + \frac{(-1)^{R+1} a_{R+1}}{\hat{W}(e^{j\omega_{R+1}})}} \quad (5.9.3.5)$$

ở đây :

$$a_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{R+1} \frac{1}{(x_i - x_k)} \quad (5.9.3.6)$$

$$x_i = \cos \omega_i$$

- Tính $P(e^{j\omega})$: áp dụng công thức nội suy của Lagrange trên $R + 1$ điểm tần số $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_R$.

$$P(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{i=0}^R \left(\frac{\beta_i}{x - x_i} \right) c_i}{\sum_{i=0}^R \left(\frac{\beta_i}{x - x_i} \right)} \quad (5.9.3.7)$$

ở đây :

$$\beta_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^R \frac{1}{x_i - x_k} \quad (5.9.3.8)$$

$$x = \cos \omega$$

$$c_i = \hat{A}(e^{j\omega_i}) - \frac{(-1)^i}{\hat{W}(e^{j\omega_i})} \delta$$

Sau khi tính các cực trị của $E(e^{j\omega})$ trên tập hợp tần số $\{\omega_i\}$, nếu $|E(e^{j\omega})| \leq \delta$ với mọi ω , tức là tìm thấy lời giải tối ưu. Còn nếu $|E(e^{j\omega})| > \delta$ đối với một vài tần số nào đó, thì ta phải chọn một tập hợp $R+2$ tần số cực trị mới mà ở đó $E(e^{j\omega})$ đạt cực trị và tính giá trị mới của δ theo tập hợp tần số mới này, sau đó lại tính $P(e^{j\omega})$ và đánh giá $|E(e^{j\omega})|$. Chúng ta cứ lặp đi lặp lại quá trình này, như vậy sau mỗi lần lặp giá trị của δ tăng lên và theo cách đó thì chắc chắn quá trình lặp sẽ hội tụ về giới hạn trên tương ứng với lời giải của bài toán gần đúng, tức là lúc đó $|E(e^{j\omega})| \leq \delta$ đối với mọi tần số trong tập tần số đã được chọn, và lời giải đó sẽ là lời giải tối ưu.

Nếu khi đánh giá sai số $E(e^{j\omega})$ mà có nhiều hơn $R + 2$ điểm tần số cực trị thì ta sẽ chọn ra chỉ $R + 2$ điểm tần số mà ở đó sai số $E(e^{j\omega})$ lớn hơn ở các điểm tần số khác.

Lưu đồ thuật toán của thuật toán thay đổi Remez được cho trên hình 5.9.3.1.

+ Bước Bốn : Bước cuối cùng này chúng ta phải xác định đáp ứng xung $h_d(n)$ của bộ lọc số thực tế.

Việc xác định $h_d(n)$ có thể tiến hành bằng 2 cách sau đây :

- Biết được $P(e^{j\omega})$ (theo lời giải tối ưu), ta sẽ lấy mẫu $P(e^{j\omega})$ theo N điểm, sau đó xác định các hệ số $\alpha(n)$ nhờ *IDFT* rồi từ đó xác định $h_d(n)$ của bộ lọc số.

- Biết được $P(e^{j\omega})$ (theo lời giải tối ưu), ta sẽ tính trực tiếp $h_d(n)$ mà không cần tính qua bước trung gian là $\alpha(n)$ bởi vì ta đã có :

$$H_d(e^{j\omega}) = A_d(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

$$A_d(e^{j\omega}) = Q(e^{j\omega}) \cdot P(e^{j\omega})$$

Từ đây ta tiến hành lấy mẫu tần số ω liên tục theo lấy mẫu tần số loại 1 hoặc loại 2, rồi sau đó áp dụng công thức tìm $h_d(n)$ của phương pháp lấy mẫu tần số theo từng loại bộ lọc mà ta cần thiết kế.

Năm 1972 Parks và McClellan đã viết chương trình máy tính thiết kế bộ lọc số *FIR* pha tuyến tính trên cơ sở tiêu chuẩn gần đúng Chebyshev thực hiện theo thuật toán thay đổi Remez. Chương trình này có thể dùng để thiết kế các bộ lọc số thông thấp, thông cao, thông dải, chặn dải, các bộ lọc số nhiều dải (nhiều nhất là 10 dải), các bộ vi phân và các bộ biến đổi Hilbert.

Sau đây là các tham số đầu vào của chương trình, các tham số này do các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số cần thiết kế quyết định.

Dòng 1

NFILT : Chiều dài của bộ lọc, ký hiệu là N .

JTYPE : loại bộ lọc

JTYPE = 1 Bộ lọc số nhiều dải

JTYPE = 2 Bộ vi phân.

JTYPE = 3 Bộ biến đổi Hilbert.

NBANDS : Số lượng dải tần từ 2 đến 10 (với bộ lọc thông thấp và thông cao số lượng dải tần là 2)

LGRID : Mật độ lưới để nội suy hàm sai số $E(e^{j\omega})$

Dòng 2

EDGE : Biên tần dưới và biên tần trên của các dải tần số, số lượng dải tần nhiều nhất là 10, như vậy số lượng biên tần dưới và trên nhiều nhất là 20. Tần số

chuẩn hoá được viết theo $f \left(f = \frac{\omega}{2\pi} \right)$. Vậy trong khoảng tần số hữu ích (còn

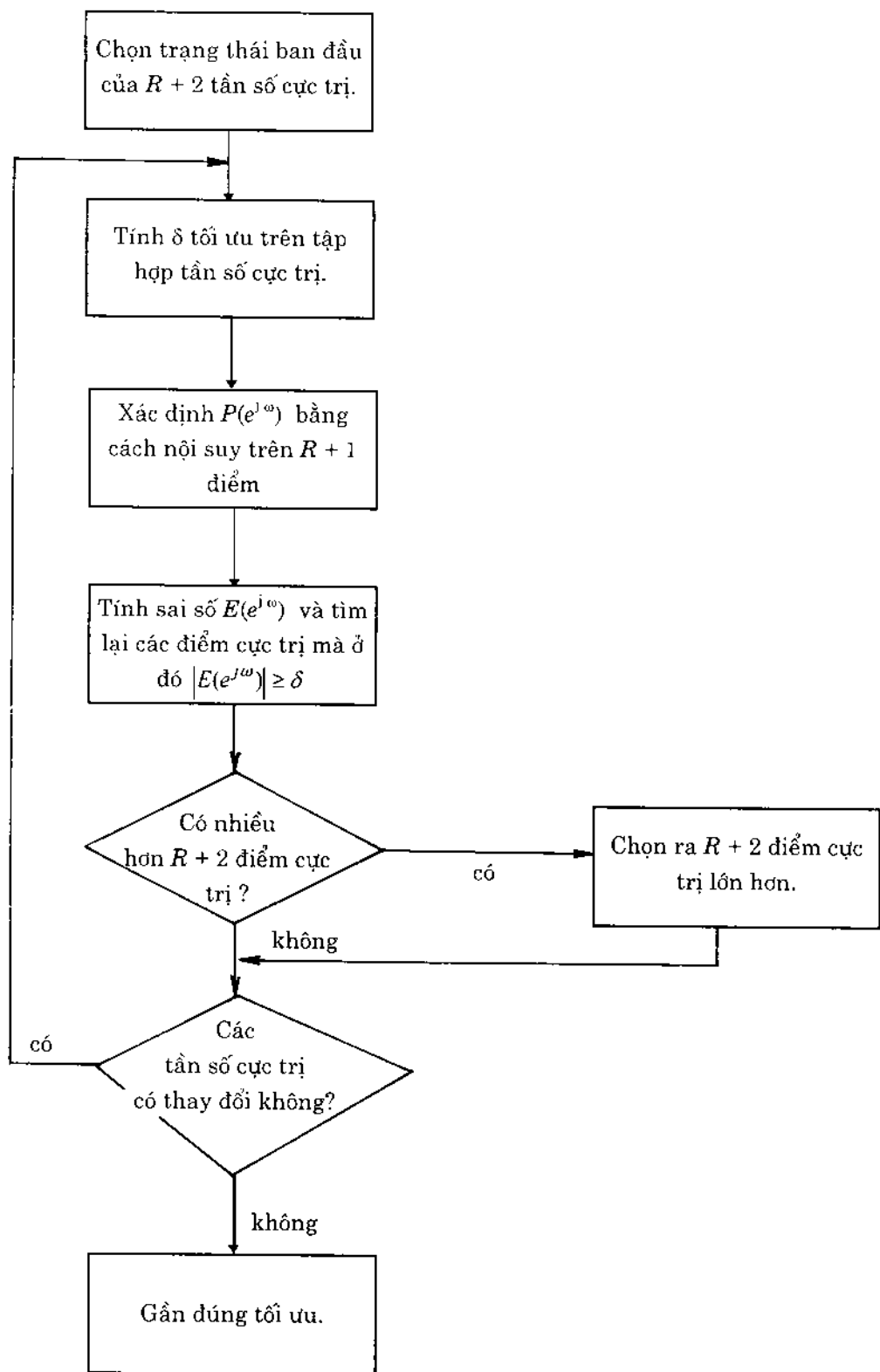
gọi là khoảng Nyquist) viết theo f là từ 0 đến 0,5 (viết theo ω là từ 0 đến π) có nhiều nhất là 10 dải tần.

Dòng 3

FX : Giá trị của đáp ứng tần số của bộ lọc lý tưởng $A(e^{j\omega})$ trong từng dải tần số, trong dải thông là 1, trong dải chặn là 0. Đối với bộ vi phân thì cần cho độ dốc.

Dòng 4

WTX : Giá trị của hàm trọng số trong từng dải (nhiều nhất là 10 dải).



Hình 5.9.3.1.

Ví dụ 5.9.3.1 : Hãy thiết kế một bộ lọc thông thấp có các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho như sau : $\omega_p = \frac{2\pi}{10}$; $\omega_s = \frac{3\pi}{10}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0,0015537$.

Giải : Bộ lọc thông thấp sẽ có 2 dải gọi là bộ lọc 2 dải : dải thông theo ω là từ 0 đến $\frac{2\pi}{10}$, dải chắn là từ $\frac{3\pi}{10}$ đến π , vậy viết theo f chuẩn hoá sẽ là : các biên tần của dải thông là $(0 ; 0,1)$; các biên tần của dải chắn là $(0,15 ; 0,5)$. Bộ lọc thông thấp lý tưởng ở dải thông $A(e^{j\omega}) = 1$; ở dải chắn $A(e^{j\omega}) = 0$. Hàm trọng số được chọn ở dải thông là 1 và ở dải chắn là 1 vì $\delta_1 = \delta_2$.

Chiều dài của bộ lọc giả sử chọn $N = 61$. Vậy tham số đầu vào của chương trình thiết kế được viết như sau (viết theo tiếng Anh)

61 , 1 , 2

0.0 , 0.1 , 0.15 , 0.5

1.0 , 0.0

1.0 , 1.0

Kết quả thiết kế được cho trên bảng 5.9.3.1, trong đó có các hệ số của bộ lọc.

Đáp ứng tần số tính theo dB được minh họa trên hình 5.9.3.2.

Bảng 5.9.3.1. Thiết kế bộ lọc số pha tuyến tính có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR). Thuật toán thay đổi Remez chiều dài bộ lọc = 61.

***** Đáp ứng xung *****

$$h_d(1) = -0,12109351E-02 = (61)$$

$$(2) = -0,67270687E-03 = (60)$$

$$(3) = 0,98090240E-04 = (59)$$

$$(4) = 0,13536664E-02 = (58)$$

$$(5) = 0,22969784E-02 = (57)$$

$$(6) = 0,19963495E-02 = (56)$$

$$(7) = 0,97026095E-04 = (55)$$

$$(8) = -0,26466695E-02 = (54)$$

$$(9) = -0,45133503E-02 = (53)$$

$$(10) = -0,37704944E-02 = (52)$$

$$(11) = 0,13079655E-04 = (51)$$

$$(12) = 0,51791356E-02 = (50)$$

$$(13) = 0,84883478E-02 = (49)$$

$$(14) = 0,69532110E-02 = (48)$$

$$(15) = 0,71037059E-04 = (47)$$

$$(16) = -0,90407897E-02 = (46)$$

$$(17) = -0,14723047E-01 = (45)$$

$$(18) = -0,11958945E-01 = (44)$$

$$(19) = -0,29799214E-04 = (43)$$

$$(20) = 0,15713422E-01 = (42)$$

$$(21) = 0,25657151E-01 = (41)$$

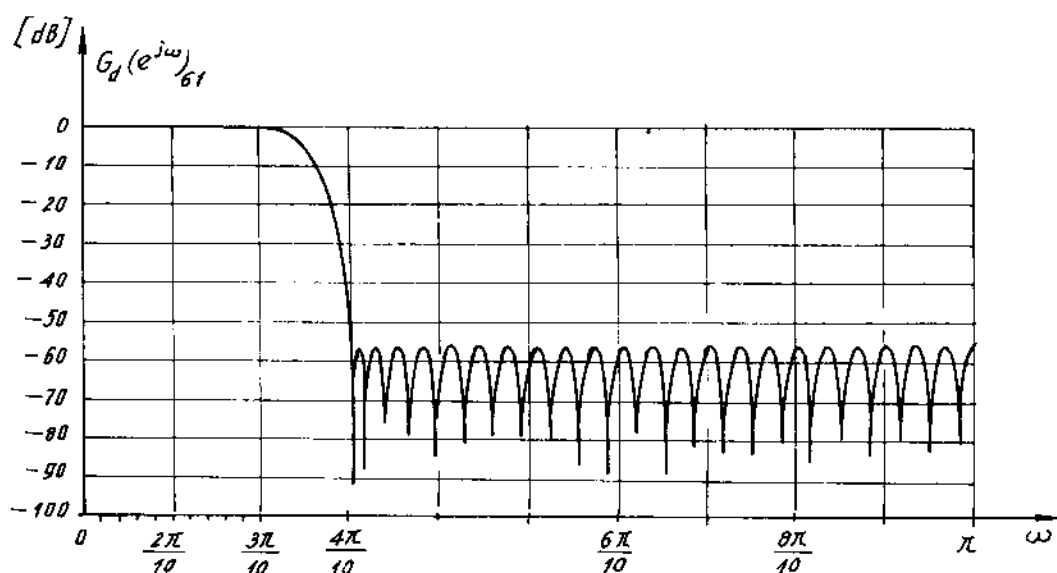
$$(22) = 0,21057373E-01 = (40)$$

(23) = 0,68637768 E - 04 = (39)
 (24) = - 0,28902054 E - 01 = (38)
 (25) = - 0,49118541 E - 01 = (37)
 (26) = - 0,42713970 E - 01 = (36)
 (27) = - 0,50114304 E - 04 = (35)
 (28) = 0,73574215 E - 01 = (34)
 (29) = 0,15782040 E - 00 = (33)
 (30) = 0,22465512 E - 00 = (32)
 (31) = 0,25007001 E - 00 = (31)

	dải 1	dải 2
Biên tần dưới	0,0000000	0,1500000
Biên tần trên	0,1000000	0,5000000
Giá trị lý tưởng	1,0000000	0,0000000
Trọng số	1,0000000	1,0000000
Độ gợn sóng	0,0015537	0,0015537
Độ gợn sóng theo dB	0,0134854	- 56,1724014

Các tần số cực trị của đường cong sai số.

0,0000000	0,0252016	0,0423387	0,0584677	0,0735887
0,0866935	0,0957661	0,1000000	0,1500000	0,1540323
0,1631048	0,1762097	0,1903225	0,2054435	0,2215725
0,2377015	0,2538306	0,2699596	0,2860886	0,3022176
0,3183466	0,3354837	0,3516127	0,3677417	0,3848788
0,4010078	0,4171368	0,4342739	0,4504029	0,4665320
0,4836690	0,5000000			



Hình 5.9.3.2.

Ví dụ 5.9.3.2: Hãy thiết kế một bộ lọc số thông dải có các chỉ tiêu kỹ thuật như sau:

$$\omega_{s1} = \frac{2\pi}{10}, \quad \omega_{p1} = \frac{4\pi}{10}, \quad \omega_{p2} = \frac{7\pi}{10}, \quad \omega_{s2} = 8,5 \frac{\pi}{10}$$

$$\delta_2 = 0.0015131 \quad \text{ở cả hai dải chắn}$$

$$\delta_1 = 0.151312 \quad \text{ở dải thông}$$

Giải : Bộ lọc thông dải có 3 dải:

Dải chắn thứ nhất ký hiệu là dải 1, theo ω chuẩn hoá là $(0; \frac{2\pi}{10})$, theo f chuẩn hoá là $(0; 0.1)$.

- Dải thông ký hiệu là dải 2, theo ω chuẩn hoá là $(\frac{4\pi}{10}; \frac{7\pi}{10})$, theo f chuẩn hoá là $(0.2; 0.35)$

- Dải chắn thứ hai ký hiệu là dải 3, theo ω chuẩn hoá là $(8.5 \frac{\pi}{10}; \pi)$, theo f chuẩn hoá là $(0.425; 0.5)$.

Bộ lọc thông dải lý tưởng, ở dải thông $A(e^{j\omega}) = 1$, ở dải chắn $A(e^{j\omega}) = 0$.

Hàm trọng số được chọn như sau: vì $\delta_1 > \delta_2$ nên ta có:

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{ở dải thông} \\ \frac{\delta_1}{\delta_2} = 10 & \text{ở dải chắn} \end{cases}$$

Chiều dài của bộ lọc giả sử chọn bằng $N = 32$. Vậy các tham số đầu vào của chương trình máy tính để thiết kế bộ lọc số được viết như sau (viết theo tiếng Anh).

32, 1, 3
0.0, 0.1, 0.2, 0.35, 0.425, 0.5
0.0, 1.0, 0.0
10.0, 1.0, 10.0

Kết quả thiết kế được đo trên bảng 5.9.3.2. Trong đó có hệ số của đáp ứng xung của bộ lọc

Đáp ứng tần số tính theo dB được minh hoạ trên hình 5.9.3.3.

Bảng 5.9.3.2. Thiết kế bộ lọc số pha tuyến tính có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR). Thuật toán thay đổi Remez. Bộ lọc số thông dải. Chiều dài bộ lọc = 32.

*****Đáp ứng xung*****

hd(1) = -0,57534026E - 02 = (32)
(2) = 0,99026691E - 03 = (31)
(3) = 0,75733471E - 02 = (30)
(4) = -0,65141204E - 02 = (29)
(5) = 0,13960509E - 01 = (28)
(6) = 0,22951644E - 02 = (27)
(7) = 0,19994041E - 01 = (26)
(8) = 0,71369656E - 02 = (25)
(9) = -0,39657373E - 01 = (24)
(10) = 0,11260066E - 01 = (23)
(11) = 0,66233635E - 01 = (22)

$$(12) = -0,10497202E - 01 = (21)$$

$$(13) = 0,85136160E - 01 = (20)$$

$$(14) = -0,12024988E + 00 = (19)$$

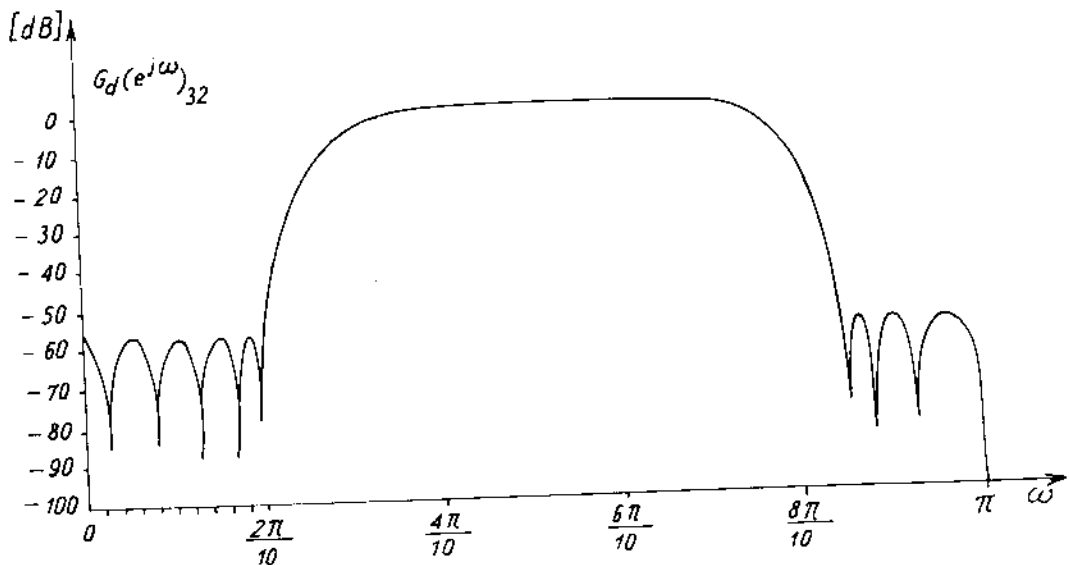
$$(15) = -0,29678580E + 00 = (18)$$

$$(16) = 0,30410913E + 00 = (17)$$

	dải 1	dải 2	dải 3
Biên tần dưới	0,0000000	0,2000000	0,4250000
Biên tần trên	0,1000000	0,3500000	0,5000000
Giá trị lý tưởng	0,0000000	1,0000000	0,0000000
Trọng số	10,0000000	1,0000000	10,0000000
Độ gọn sóng	0,0015131	0,0151312	0,0015131
Độ gọn sóng theo dB	-56,4025536	0,1304428	-56,4025536

Các tần số cực trị của đường cong sai số

0,0000000	0,0273438	0,0527344	0,0761719	0,0937500
0,1000000	0,2000000	0,2195313	0,2527344	0,2839844
0,3132813	0,3386719	0,3500000	0,4250000	0,4328125
0,4503906	0,4796875			



Hình 5.9.3.3

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

Bài tập 5.1

Hãy kiểm tra họ nghiệm α và $h(n)$ của phương trình 5.3.2.6 và 5.3.2.7 sau

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\alpha - n)\omega]$$

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

$$h(n) = h(N-1-n)$$

Bài tập 5-2

Hãy chứng minh phương trình 5.3.2.8

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\beta + (n - \alpha)\omega] = 0$$

Bài tập 5-3

Hãy chứng minh biểu thức (5.4.1.1) sau

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos \omega n \right] e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

Trường hợp *FIR* loại 1.

Bài tập 5-4

Hãy chứng minh biểu thức (5.4.2.1)

$$H(e^{j\omega}) = \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

Trường hợp *FIR* loại 2.

Bài tập 5-5

Hãy chứng minh biểu thức (5.4.3.1)

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin \omega n \right] e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \right) \omega}$$

Trường hợp *FIR* loại 3.

Bài tập 5-6

Hãy chứng minh biểu thức (5.4.4.1)

$$H(e^{j\omega}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\} e^{j \left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \right) \omega}$$

Trường hợp *FIR* loại 4.

Bài tập 5-7

Cho $h(n)$ đối xứng $N = 7$.

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, 0, 1, 5, 1, 0, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ 0 \end{matrix}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài tập 5-8

Cho $h(n)$ đối xứng, $N = 6$

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, 1, 3, 3, 1, -\frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{matrix} \mapsto \\ 0 \end{matrix}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài tập 5-9

Cho $h(n)$ phản đối xứng, $N = 7$.

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, -1, -2, 0, 2, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{matrix} \mapsto \\ 0 \end{matrix}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài tập 5-10

Cho $h(n)$ phản đối xứng, $N = 6$.

$$h(n) = \left\{ -\frac{1}{2}, -1, -2, 2, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{matrix} \mapsto \\ 0 \end{matrix}$$

Hãy biểu diễn $h(n)$ bằng đồ thị và tìm $A(e^{j\omega})$.

Bài tập 5-11

Hãy chứng minh biểu thức 5.5.1.1.

$$H(Z^{-1}) = Z^{N-1} H(Z)$$

với $h(n)$ đối xứng.

Bài tập 5-12

Hãy chứng minh rằng nếu $h(n)$ là thực thì

$$H^*(Z) = H(Z^*) \quad (\text{biểu thức 5.5.2.1})$$

và sau đó chứng minh rằng nếu $h(n)$ thực thì Z_{01}^* cũng là điểm không của $H(Z)$.

Bài tập 5-13

Cho bộ lọc số FIR pha tuyến tính có hàm truyền đạt $H(Z)$, $H(Z)$ có ít nhất hai điểm không là :

$$Z_{01} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \text{và} \quad Z_{02} = 1$$

Hãy tìm các điểm không còn lại và $h(n)$.

Bài tập 5-14

Hãy định vị các điểm không có thể có của $H(Z)$, nếu $h(n)$ có tính chất sau đây :

- $h(n)$ đối xứng, $N = 7$.
- $h(n)$ đối xứng, $N = 8$.
- $h(n)$ phản đối xứng, $N = 7$.
- $h(n)$ phản đối xứng, $N = 8$.

Bài tập 5-15

Hãy chứng minh rằng trong hệ thức (5.6.2.4)

$$\eta_R = \frac{N}{\left| \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{N} \cdot \frac{1}{2}\right)} \right|}$$

thì $\lim_{N \rightarrow \infty} \eta_R = \frac{3\pi}{2}$

Bài tập 5-16

Hãy tính tích phân xác định sau đây :

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_R(e^{j\omega}) d\omega$$

Cho nhận xét về kết quả thu được.

Bài tập 5-17

Chứng minh rằng:

$$1 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} 2 \cos(\omega n) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (n \text{ lẻ})$$

Bài tập 5-18

Chứng minh rằng:

$$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} 2 \cos \omega \left(n - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (n \text{ chẵn})$$

Bài tập 5-19

Chứng minh rằng :

$$w_T(n)_N = \frac{2}{N-1} w_R(n)_{\frac{N-1}{2}} * w_R(n-1)_{\frac{N-1}{2}}$$

Bài tập 5-20

Hãy tính tích phân xác định sau đây :

$$\int_{-\pi}^{\pi} A_T(e^{j\omega})_N d\omega$$

Cho nhận xét kết quả thu được.

Bài tập 5-21

Hãy chứng minh hệ thức (5.7.3.4)

$$\eta_T = \left(\frac{N-1}{2} \right)^2 \left(\frac{\sin^3 \frac{3\pi}{N-1}}{\sin \frac{3\pi}{2}} \right)^2$$

Khi $N \gg$ thì :

$$\eta_T \approx \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2$$

Bài tập 5-22

Hãy xác định biểu thức của cửa sổ Hanning và Hamming với $N = 5$, sau đó vẽ đồ thị của cửa sổ trong miền n .

Bài tập 5-23

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp *FIR* pha tuyến tính, với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{4}$ bằng phương pháp cửa sổ chữ nhật. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Bài tập 5-24

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao *FIR* pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp cửa sổ tam giác. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Bài tập 5-25

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông dải *FIR* pha tuyến tính với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp cửa sổ Hanning. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Bài tập 5-26

Hãy tổng hợp bộ lọc số chắn dải *FIR* pha tuyến tính với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$ bằng phương pháp cửa sổ Hamming. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Bài tập 5-27 :

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao *FIR* pha tuyến tính với $N = 7$, $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ bằng phương pháp cửa sổ Blackman. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc.

Bài tập 5-28

Hãy chứng minh biểu thức (5.8.3.7) sau đây :

$$A_d(e^{j\omega}) = \frac{A_d(0)}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_d(k)}{N} \left[\frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N} k \right)} + \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N} k \right)} \right]$$

(trường hợp lấy mẫu tần số loại 1, N chẵn, $h(n)$ đối xứng).

Bài tập 5-29

Hãy chứng minh biểu thức (5.8.3.9) sau đây :

$$h_d(n) = \begin{cases} \frac{A(0)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k A(k) \cos \left[\frac{\pi}{N} k(2n+1) \right] & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại.} \end{cases}$$

(trường hợp lấy mẫu tần số loại 1, N chẵn, $h(n)$ đối xứng).

Bài tập 5-30

Hãy tìm công thức tính $A_d(e^{j\omega})$ và $h_d(n)$ trong trường hợp lấy mẫu tần số loại 1 :

- N lẻ, $h_d(n)$ phản đối xứng (*FIR* loại 3).
- N chẵn, $h_d(n)$ phản đối xứng (*FIR* loại 4).

Bài tập 5-31

Hãy chứng minh biểu thức (5.8.4.7) sau đây :

$$A_d(e^{j\omega}) = A_d\left(\frac{N-1}{2}\right) \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]} + \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A_d(k)}{N} \left\{ \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right\}$$

(trường hợp lấy mẫu tần số loại 2, N lẻ, $h(n)$ đối xứng).

Bài tập 5-32

Hãy chứng minh biểu thức (5.8.4.9) sau đây :

$$h_d(n) = (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}+n\right)} \cdot \frac{A\left(\frac{N-1}{2}\right)}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} (-1)^k A(k) \sin\left[\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)(2n+1)\right]$$

(trường hợp lấy mẫu tần số loại 2, N lẻ, $h(n)$ đối xứng).

Bài tập 5-33

Hãy chứng minh biểu thức (5.8.4.11) sau đây :

$$A_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{A_d(k)}{N} \left\{ \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right\}$$

(trường hợp lấy mẫu tần số loại 2, N chẵn, $h(n)$ đối xứng).

Bài tập 5-34

Hãy chứng minh biểu thức (5.8.4.14) sau đây :

$$h_d(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (-1)^k A(k) \sin\left[\frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)(2n+1)\right]$$

(trường hợp lấy mẫu tần số loại 2, N chẵn, $h(n)$ đối xứng).

Bài tập 5-35

Hãy tìm công thức tính $A_d(e^{j\omega})$ và $h_d(n)$ trong trường hợp lấy mẫu tần số loại 2 :

- N lẻ, $h_d(n)$ phản đối xứng (**FIR** loại 3).
- N chẵn, $h_d(n)$ phản đối xứng (**FIR** loại 4).

Bài tập 5-36

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao **FIR** pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1.

Bài tập 5-37

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao *FIR* pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1 với sự điều chỉnh một giá trị của $A(k)$ trong dải quá độ bằng 0,5.

Bài tập 5-38

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông dải *FIR* pha tuyến tính với $N = 10$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$; $\omega_{c2} = \frac{3\pi}{4}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1.

Bài tập 5-39

Hãy tổng hợp bộ lọc số chắn dải *FIR* pha tuyến tính với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 1.

Bài tập 5-40

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp *FIR* pha tuyến tính với $N = 7$, $\omega_c = \frac{\pi}{3}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 2.

Bài tập 5-41

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông cao *FIR* pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_c = \frac{\pi}{4}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 2.

Bài tập 5-42

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông dải *FIR* pha tuyến tính với $N = 9$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 2.

Bài tập 5-43

Hãy tổng hợp bộ lọc số chắn dải *FIR* pha tuyến tính với $N = 7$, $\omega_{c1} = \frac{\pi}{4}$; $\omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$, dùng phương pháp lấy mẫu tần số loại 2.

Bài tập 5-44

Hãy chứng minh quan hệ giữa các hệ số $b'(n)$ và $b(n)$ trong biểu thức (5.9.1.3) như sau :

$$\begin{aligned} b(1) &= b'(0) + \frac{1}{2} b'(1) \\ b(i) &= \frac{1}{2} [b'(i-1) + b'(i)] && \text{với } i = 2, 3, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \\ b\left(\frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{2} b'\left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

Bài tập 5-45

Hãy chứng minh quan hệ giữa các hệ số $c'(n)$ và $c(n)$ trong biểu thức (5.9.1.4) như sau:

$$c(1) = c'(0) - \frac{1}{2} c'(2)$$

$$\begin{aligned}
 c(i) &= \frac{1}{2} [c'(i-1) - c'(i+1)] && \text{với } i = 2, 3, \dots, \left(\frac{N-1}{2} - 2\right) \\
 c\left(\frac{N-1}{2} - 1\right) &= \frac{1}{2} c' \left(\frac{N-1}{2} - 2\right) \\
 c\left(\frac{N-1}{2}\right) &= \frac{1}{2} c' \left(\frac{N-1}{2} - 1\right)
 \end{aligned}$$

Bài tập 5-46

Hãy chứng minh quan hệ giữa các hệ số $d'(n)$ và $d(n)$ trong biểu thức (5.9.1.5) như sau :

$$\begin{aligned}
 d(1) &= d'(0) - \frac{1}{2} d'(1) \\
 d(i) &= \frac{1}{2} [d'(i-1) - d'(i)] && \text{với } i = 2, 3, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \\
 d\left(\frac{N}{2}\right) &= \frac{1}{2} d' \left(\frac{N}{2} - 1\right)
 \end{aligned}$$

Bài tập 5-47

Hãy xác định hàm trọng số $W(e^{j\omega})$ đối với các bộ lọc số *FIR*, thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải nếu ta có :

$$\begin{aligned}
 |E(e^{j\omega})| &= \delta_1 && \text{ở dải thông} \\
 |E(e^{j\omega})| &= \delta_2 && \text{ở dải chắn} \\
 \delta_1 &> \delta_2 .
 \end{aligned}$$

Chương 6

TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN (BỘ LỌC SỐ IIR)

6.1. MỞ ĐẦU

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc số, tức là tìm ra các hệ số của bộ lọc số IIR sao cho thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc là $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$ trong miền tần số liên tục ω đối với $|H(e^{j\omega})|$.

Các phương pháp tổng hợp bộ lọc loại này có thể chia ra làm hai loại chính:

- Loại thứ nhất là chuyển từ việc thiết kế các bộ lọc tương tự sang bộ lọc số, tức là chúng ta phải thiết kế các bộ lọc tương tự trước sau đó dùng các phương pháp chuyển đổi tương đương một cách gần đúng giữa miền tương tự và miền số để thu được bộ lọc số. Phương pháp thứ nhất này được sử dụng rộng rãi nhất.

- Loại thứ hai là các phương pháp tìm ra các thủ tục tối ưu hoá nhờ sự tham gia của máy tính điện tử. Các phương pháp này là tìm kiếm các cách tối thiểu hoá sai số của việc xấp xỉ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc cần thiết kế bằng một bộ lọc khác có thể thực hiện được các tiêu chuẩn gần đúng. Loại thứ hai này ít được dùng.

Trong chương này chúng ta sẽ đi sâu nghiên cứu các phương pháp loại thứ nhất vì nó đơn giản và độ chính xác là chấp nhận được.

6.2. CÁC TÍNH CHẤT TỔNG QUÁT CỦA BỘ LỌC

6.2.1. BỘ LỌC SỐ IIR THỰC HIỆN ĐƯỢC

Ở đây chúng ta sẽ nghiên cứu các bộ lọc số IIR thực hiện được về mặt vật lý, tức là các bộ lọc số là ổn định và nhân quả.

Tính nhân quả được đảm bảo nếu đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc thoả mãn điều kiện sau đây:

$$h(n) = 0 \quad \text{với } n < 0$$

Tính ổn định được đảm bảo bởi đáp ứng xung $h(n)$ thoả mãn điều kiện ổn định sau:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (6.2.1.1)$$

6.2.2. HÀM TRUYỀN ĐẠT

Hàm truyền đạt của một bộ lọc số IIR có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$a_0 = 1$$

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Tổng quát $H(z)$ là một hàm phức. Nếu các hệ số a_k và b_r là các số thực, thì ta có:

$$[H(z)]^* = \left[\frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \right]^* = \frac{\sum_{r=0}^M [b_r z^{-r}]^*}{\sum_{k=0}^N [a_k z^{-k}]^*}$$

Nhưng a_k và b_r là thực, ta có:

$$\begin{aligned} H^*(z) &= \frac{\sum_{r=0}^M b_r (z^{-r})^*}{\sum_{k=0}^N a_k (z^{-k})^*} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r (z^*)^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k (z^*)^{-k}} \\ &= H(z^*) \end{aligned}$$

Vậy nếu a_k và b_r là thực ta có quan hệ sau:

$$H^*(z) = H(z^*) \quad (6.2.2.1)$$

hoặc:

$$H(z) = H^*(z^*)$$

6.2.3. ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA BỘ LỌC SỐ IIR

Ta biết rằng:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\text{và} \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg H(e^{j\omega})}$$

Nếu a_k và b_i là thực ta có:

$$H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$$

Vậy:

$$\begin{aligned} [H(e^{j\omega})] e^{j\phi(\omega)}]^* &= [H(e^{j\omega})]^* e^{-j\phi(\omega)} \\ &= H(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} &= \frac{e^{j\phi(\omega)}}{e^{-j\phi(\omega)}} \\ &= e^{j2\phi(\omega)} \end{aligned}$$

Lấy lôgarit cơ số e ta có:

$$\ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] = 2j\phi(\omega)$$

Vậy:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] = F(e^{j\omega}) = \arctg \frac{Im[H(e^{j\omega})]}{Re[H(e^{j\omega})]}$$

6.2.4. THỜI GIAN TRUYỀN NHÓM

Thời gian truyền nhóm được định nghĩa như sau:

$$\tau(\omega) = - \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (6.2.4.1)$$

Bây giờ ta tìm $\tau(\omega)$.

Ta biết rằng:

$$\phi(\omega) = F(e^{j\omega})$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\omega)}{d\omega} &= \frac{dF(e^{j\omega})}{d(e^{j\omega})} \frac{d(e^{j\omega})}{d\omega} \\ &= je^{j\omega} \frac{dF(e^{j\omega})}{d(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

thì

$$\tau(\omega) = -j e^{j\omega} \frac{dF(e^{j\omega})}{d(e^{j\omega})}$$

Thay $F(e^{j\omega})$ vào ta có:

$$\begin{aligned}\tau(\omega) &= -je^{j\omega} \frac{1}{2j} \frac{d}{d(e^{j\omega})} \left\{ \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} e^{j\omega} \left\{ \frac{d}{d(e^{j\omega})} \ln H(e^{j\omega}) - \frac{d}{d(e^{j\omega})} \ln H(e^{-j\omega}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} e^{j\omega} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} + \frac{1}{(e^{j\omega})^2} \frac{H'(e^{-j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right\}\end{aligned}$$

ở đây:

$$H'(e^{j\omega}) = \frac{d}{d(e^{j\omega})} [H(e^{j\omega})]$$

Vậy:

$$\tau(\omega) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + e^{-j\omega} \frac{H'(e^{-j\omega})}{H(e^{-j\omega})} \right\}$$

Nếu a_k và b_r là các hệ số thực, theo (6.2.2.1) ta có thể viết:

$$H(e^{j\omega}) = [H(e^{j\omega})]^*$$

$$H'(e^{j\omega}) = [H'(e^{j\omega})]^*$$

Ở đây dấu * là dấu liên hợp phức.

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned}\tau(\omega) &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + e^{-j\omega} \frac{[H'(e^{j\omega})]^*}{[H(e^{j\omega})]^*} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + (e^{j\omega})^* \frac{[H'(e^{j\omega})]^*}{[H(e^{j\omega})]^*} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} e^{j\omega} + \left[\frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega} \right]^* \right\}\end{aligned}$$

Chúng ta biết rằng:

$$A + A^* = \text{Re}[A] + j\text{Im}[A] + \text{Re}[A] - j\text{Im}[A] = 2\text{Re}[A]$$

Vậy cuối cùng ta thu được công thức tính $\tau(\omega)$ như sau:

$$\tau(\omega) = -\text{Re} \left[e^{j\omega} \cdot \frac{H'(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \right] \quad (6.2.4.2)$$

$$H'(e^{j\omega}) = \frac{d}{d(e^{j\omega})} |H(e^{j\omega})|$$

Ví dụ 6.2.4.1

Hãy tính thời gian truyền nhóm của một bộ lọc số IIR nếu ta biết hàm truyền đạt $H(z)$ của nó có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}}$$

Giải

Đặt: $H(z) = \frac{1}{D(z)} = \frac{1}{1 - z^{-2}}$

Vậy: $D(z) = 1 - z^{-2}$

$$H'(z) = \left[\frac{1}{D(z)} \right]' = - \frac{D'(z)}{D^2(z)}$$

$$H'(z) = \frac{dH(z)}{dz}$$

Thay giá trị của z trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z ta có:

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= - \operatorname{Re} \left[z \frac{H'(z)}{H(z)} \right] \Bigg|_{z=e^{j\omega}} \\ &= - \operatorname{Re} \left[z \left(- \frac{D'(z)}{D^2(z)} \cdot D(z) \right) \right] \Bigg|_{z=e^{j\omega}} \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{j\omega} \frac{D'(e^{j\omega})}{D^2(e^{j\omega})} \right] \end{aligned}$$

$$D'(e^{j\omega}) = 2z^{-3} \Big|_{z=e^{j\omega}} = 2e^{-j3\omega}$$

$$D'(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - z^{-2}} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - e^{-j2\omega}}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \operatorname{Re} \left[e^{j\omega} \frac{2e^{-j3\omega}}{1 - e^{-j2\omega}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2e^{-j2\omega}}{1 - e^{-j2\omega}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{2}{e^{j2\omega} - 1} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{\cos 2\omega - 1 + j \sin 2\omega} \right] \end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \left[2 \frac{\cos 2\omega - 1 - j \sin 2\omega}{(\cos 2\omega - 1)^2 + \sin^2 \omega} \right]$$

$$= \operatorname{Re} \left[2 \frac{\cos 2\omega - 1 - j \sin 2\omega}{2(1 - \cos 2\omega)} \right] = -1$$

6.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TỔNG HỢP BỘ LỌC SỐ IIR TỪ BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

6.3.1. MỞ ĐẦU

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp chuyển đổi hàm truyền đạt của một hệ thống tương tự $H_a(s)$ sang hàm truyền đạt của hệ thống số $H(z)$. Như vậy việc đầu tiên là chúng ta phải tổng hợp được hàm truyền đạt của hệ thống tương tự $H_a(s)$, việc này đã được nghiên cứu phát triển từ lâu và đã thu được các kết quả tốt đẹp, chúng ta sẽ trình bày kỹ ở phần sau.

Có bốn phương pháp chuyển đổi từ hệ thống tương tự sang hệ thống số như sau:

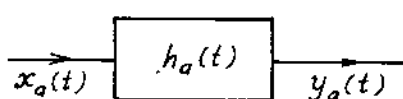
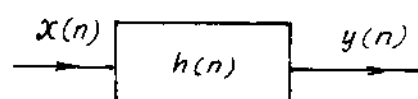
- phương pháp 1: phương pháp bất biến xung
- phương pháp 2: phương pháp biến đổi song tuyến
- phương pháp 3: phương pháp tương đương vi phân
- phương pháp 4: phương pháp biến đổi z tương ứng.

Để thấy rõ bản chất của các phương pháp này, chúng ta tiến hành so sánh hệ thống tương tự và hệ thống số.

6.3.2. SO SÁNH HỆ THỐNG TƯƠNG TỰ VÀ HỆ THỐNG SỐ

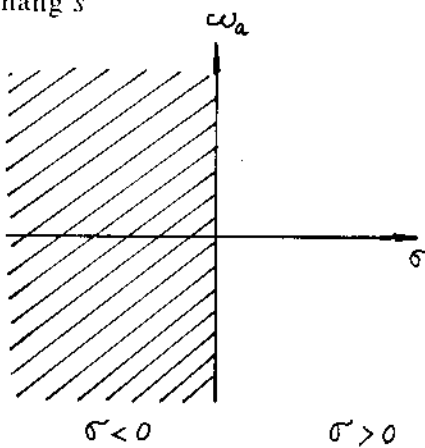
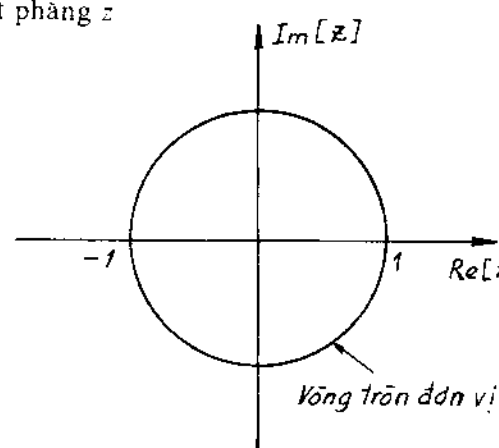
Bảng 6.3.2.1 sau đây sẽ giúp chúng ta ôn lại một vài đặc trưng chính của bộ lọc tương tự và bộ lọc số, từ đây chúng ta có thể rút ra được sự giống nhau và khác nhau giữa hai loại bộ lọc này.

Bảng 6.3.2.1

Miền tương tự		Miền số	
Hệ thống			
Tương tự		Số	
			

Hàm truyền đạt	
$H_a(s) = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$ $H_a(s) = A \frac{\prod_{r=1}^M (s - s_{or})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})}$ $H_a(s) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - s_{or} s^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - s_{pk} s^{-1})}$ s_{or}: các điểm không của $H_a(s)$ s_{pk}: các điểm cực của $H_a(s)$ A: hệ số	$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$ $H(z) = B \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_{or})}{\prod_{k=1}^N (z - z_{pk})}$ $H(z) = B \frac{\prod_{r=1}^M (1 - z_{or} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - z_{pk} z^{-1})}$ z_{or}: các điểm không của $H(z)$ z_{pk}: các điểm cực của $H(z)$ B: hệ số
Tích chập	
$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) d\tau$ $= x_a(t) * h_a(t)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} h_a(\tau) x_a(t - \tau) d\tau$ $= h_a(t) * x_a(t)$	$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n - m)$ $= x(n) * h(n)$ $= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n - m)$ $= h(n) * x(n)$
Phương trình biểu diễn hệ thống	
Vi phân $\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M d_r \frac{d^r x_a(t)}{dt^r}$	Sai phân $\sum_{k=0}^N a_k y(n - k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n - r)$
Biến đổi	
Laplace LT: Laplace Transform	Z ZT: Z - Transform

Tiếp bảng 6.3.2.1

$LT[h_a(t)] = H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)e^{-st} dt$ $s = \sigma + j\omega_a$ Fourier FT: Fourier transform $FT[h_a(t)] = H_a(j\omega_a) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)e^{-j\omega_a t} dt$	$ZT[h(n)] = H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ $z = re^{j\omega}$ Fourier FT: Fourier transform $FT[h(n)] = H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$
Mặt phẳng	
Mặt phẳng s 	Mặt phẳng z 
Sự ổn định	
Nếu tất cả các điểm cực của $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s thì hệ thống ổn định.	Nếu tất cả các điểm cực của $H(z)$ nằm bên trong vòng tròn đơn vị thì hệ thống ổn định.

6.3.3. PHƯƠNG PHÁP 1: PHƯƠNG PHÁP BẤT BIẾN XUNG

Giống như tên của nó đã chỉ rõ, phương pháp này có bản chất như sau: đáp ứng xung của bộ lọc số $h(n)$ nhận được bằng cách lấy mẫu đáp ứng xung của bộ lọc tương tự $h_a(t)$, như vậy dạng của $h_a(t)$ và $h(n)$ là như nhau, chỉ khác ở chỗ $h_a(t)$ là liên tục, còn $h(n)$ là rời rạc.

Ôn lại quá trình lấy mẫu ta thấy rằng:

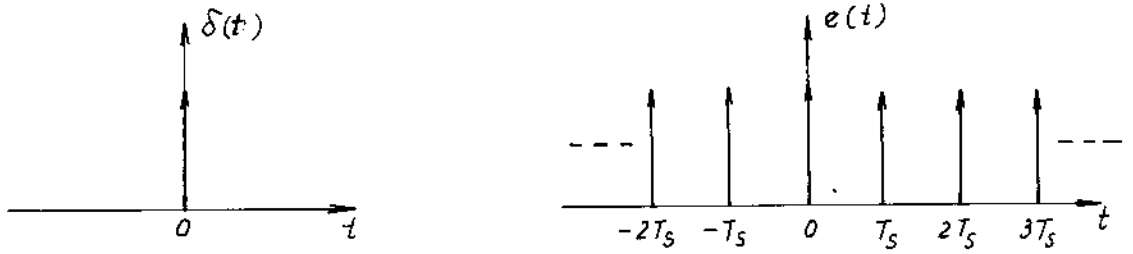
a) Trong miền thời gian

$$\begin{aligned}
 h(nT_s) &= h_a(t) \Big|_{t=nT_s} \\
 &= h_a(t) \cdot e(t)
 \end{aligned} \tag{6.3.3.1}$$

ở đây $e(t)$ là dãy tuần hoàn các xung Dirac có chu kỳ là T_s như sau:

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (6.3.3.2)$$

Hình 6.3.3.1 sẽ cho ta đồ thị của $\delta(t)$ và $e(t)$:



Hình 6.3.3.1.

Nhớ lại chương 1, sau khi chuẩn hoá $h(nT_s)$ bởi T_s ta sẽ thu được $h(n)$:

$$h(nT_s) \xrightarrow[\text{bởi } T_s]{\text{chuẩn hoá}} h(n)$$

b) Trong miền tần số

$$\text{FT}[h_a(t)] = H_a(\omega_a)$$

$$\text{FT}[e(t)] = E(\omega_a) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right)$$

$$\text{FT}[h(n)] = H(e^{j\omega})$$

ở đây FT là toán tử biến đổi Fourier.

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_a(\omega_a) * E(\omega_a) = H_a(\omega_a) * \left[\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \left[H_a(\omega_a) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H_a(\omega_a) * \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \right] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) \end{aligned} \quad (6.3.3.3)$$

ở đây:

$$H_a\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right) = H_a(\omega_a) * \delta\left(\omega_a - \frac{2\pi n}{T_s}\right)$$

T_s : chu kỳ lấy mẫu.

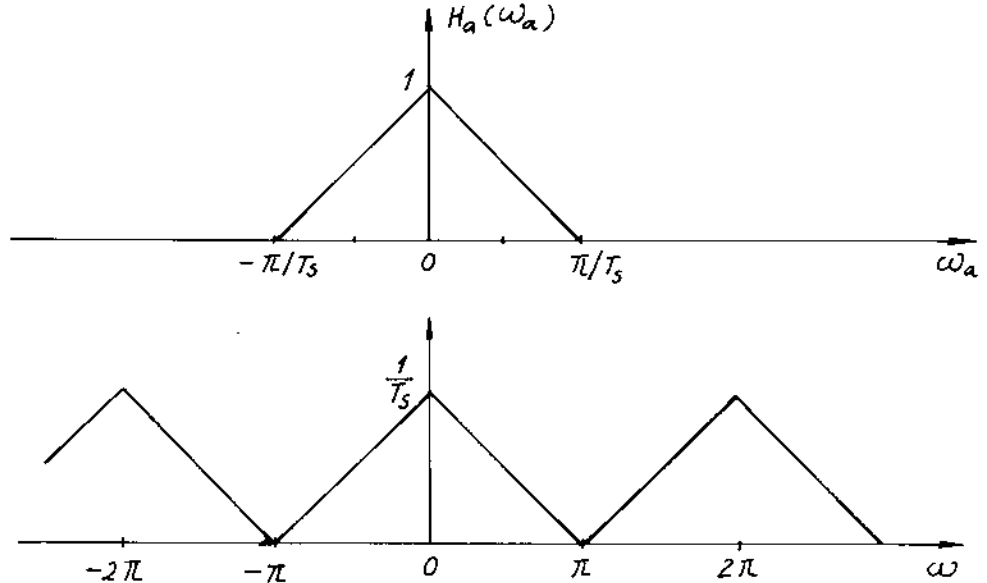
Nếu định lý lấy mẫu được thoả mãn, tức là:

$$H_a(\omega_a) = 0 \quad \text{với} \quad |\omega_a| < \frac{\pi}{T_s}$$

điều này cho phép tránh được hiện tượng chồng phổ khi lấy mẫu, tức là:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} H_a(\omega_a) \quad \text{với} \quad |\omega_a| \leq \frac{\pi}{T_s}$$

Hình 6.3.3.2 cho ta một ví dụ về việc lấy mẫu khi định lý lấy mẫu được thoả mãn.



Hình 6.3.3.2.

c) Mặt phẳng s và mặt phẳng z

Trong mặt phẳng s ta thấy rằng trục tung (trục tần số tương tự ω_a), do hạn chế của định lý lấy mẫu nên tín hiệu có bề rộng phổ hữu hạn chỉ tồn tại trong khoảng $\left[-\frac{\pi}{T_s}; \frac{\pi}{T_s}\right]$.

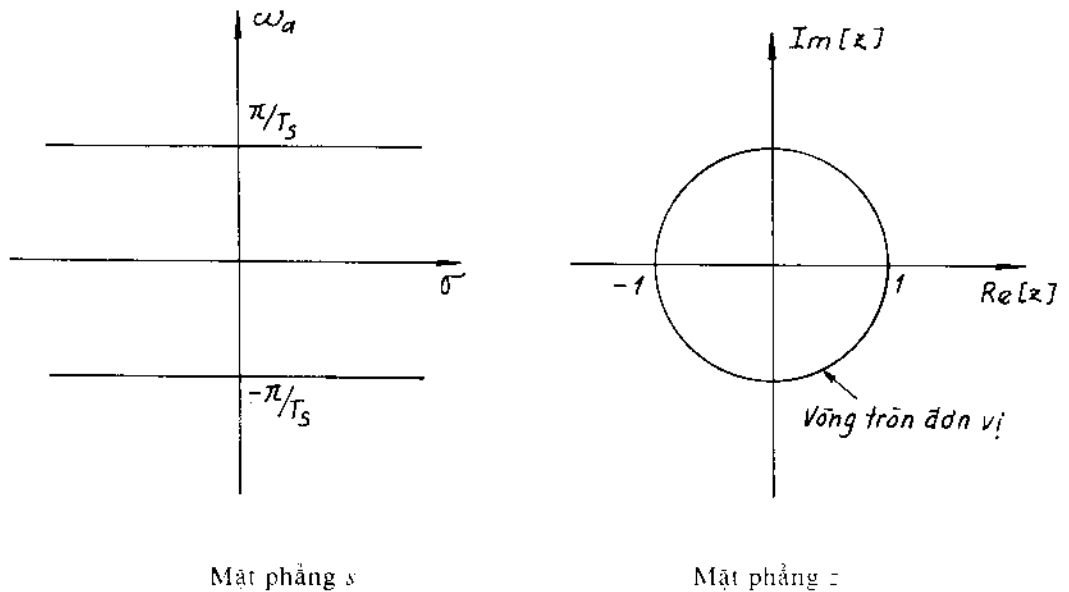
Từ đây chúng ta cũng có sự tương ứng giữa mặt phẳng s và mặt phẳng z , hình 6.3.3.3 sẽ minh hoạ điều này.

Chúng ta biết rằng hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc tương tự có thể được biểu diễn dưới dạng khai triển thành các phân thức tối giản như sau:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \quad (6.3.3.4)$$

ở đây: s_{pk} là các điểm cực đơn của $H_a(s)$

$$A_k = (s - s_{pk}) H_u(s) \Big|_{s=s_{pk}} \quad (6.3.3.5)$$



Hình 6.3.3.3.

Theo lý thuyết của biến đổi Laplace ta có:

$$\text{LT} [e^{\lambda_{pk} t} u(t)] = \frac{1}{s - s_{pk}}$$

hoặc

$$\text{LT} [A_k e^{\lambda_{pk} t} u(t)] = \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

Vậy:

$$\text{ILT} \left[\frac{A_k}{s - s_{pk}} \right] = A_k e^{\lambda_{pk} t} u(t) \quad (6.3.3.6)$$

ở đây:

LT: biến đổi Laplace (Laplace Transform)

ILT: biến đổi Laplace ngược (Inverse Laplace Transform)

$u(t)$: hàm nhảy đơn vị tương tự

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Từ đây ta có:

$$\text{ILT}[H_u(s)] = h_u(t) = \text{ILT} \left[\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_{pk}} \right] = \sum_{k=1}^N \left\{ \text{ILT} \left[\frac{A_k}{s - s_{pk}} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} u(t) \quad (6.3.3.7)$$

Lấy mẫu $h_a(t)$ sẽ cho ta:

$$h(nT_s) = h_a(t)|_{t=nT_s} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}t} u(t) \Big|_{t=nT_s} = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) \quad (6.3.3.8)$$

Bây giờ chúng ta hãy tìm biến đổi z của $h(nT_s)$:

$$\begin{aligned} ZT[h(nT_s)] &= ZT \left[\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) \right] = H(z) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^N A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) \right] z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_k e^{s_{pk}nT_s} u(nT_s) z^{-n} \end{aligned}$$

nhưng $u(nT_s) = \begin{cases} 0 & \text{với } n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$, vậy ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_k e^{s_{pk}nT_s} z^{-n} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} A_k \left(e^{s_{pk}nT_s} z^{-1} \right)^n \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{s_{pk}nT_s} z^{-1} \right)^n \end{aligned}$$

Áp dụng công thức tính chuỗi, ta có:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk}T_s} z^{-1}} \quad (6.3.3.9)$$

ở đây:

s_{pk} - các cực đơn của $H_a(s)$;

T_s - chu kỳ lấy mẫu;

A_k - hệ số tính theo công thức (6.3.3.5).

Công thức (6.3.3.9) chính là nội dung của phương pháp bất biến xung. Dưới đây chúng ta xét sự ổn định tương ứng giữa $H_a(s)$ và $H(z)$.

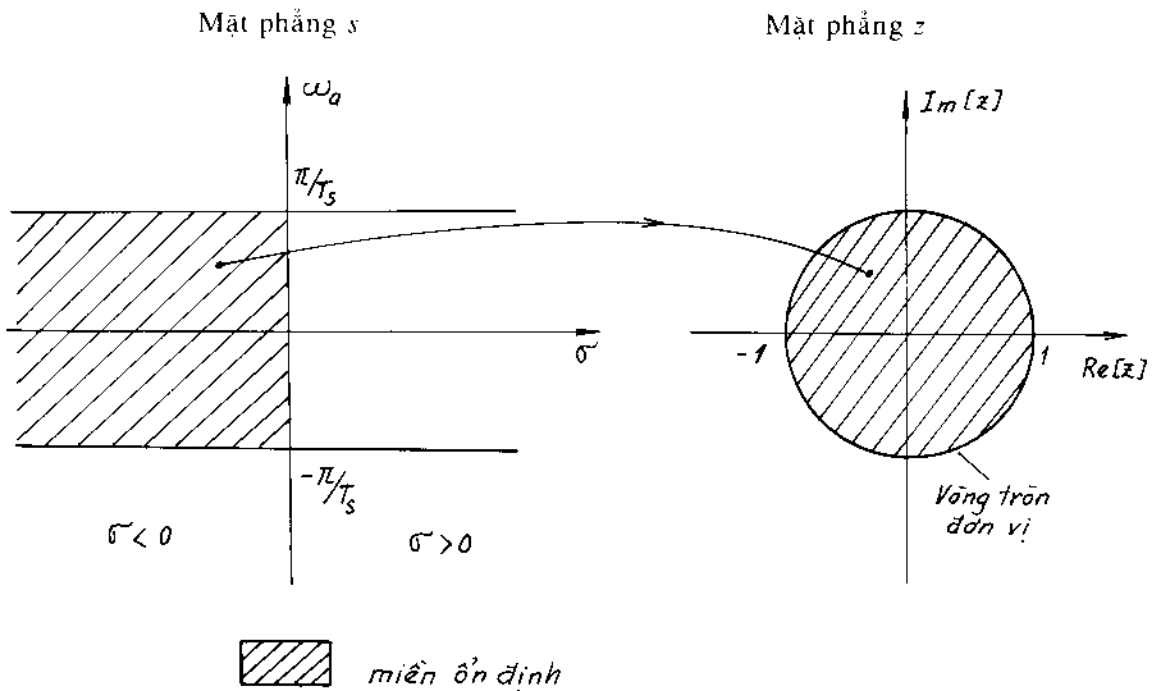
d) Độ ổn định

Từ công thức (6.3.3.9) ta có thể thấy rằng nếu $z = e^{s_{pk}T_s}$ thì $H(z) \rightarrow \infty$, vậy rõ ràng là $z_{pk} = e^{s_{pk}T_s}$ chính là điểm cực của $H(z)$, mà s_{pk} là điểm cực của $H_a(s)$. Như thế có thể nói rằng các điểm cực $s_{pk} = \sigma_{pk} + j\omega_{pk}$ của $H_a(s)$ được biến đổi một cách trực tiếp thành các điểm cực $z_{pk} = e^{s_{pk}T_s}$ của $H(z)$, thay s_{pk} vào z_{pk} ta có thể viết:

$$\begin{aligned}
z_{pk} &= e^{(\sigma_k + j\omega_{pk})T_s} \\
&= e^{\sigma_k T_s} \cdot e^{j\omega_{pk} T_s} = r_k \cdot e^{j\omega_k} \\
\Rightarrow r_k &= e^{\sigma_k T_s} \\
\omega_k &= \omega_{pk} T_s
\end{aligned}$$

So sánh điều kiện ổn định của $H_u(s)$ và $H(z)$ ta thấy rằng nếu $\sigma_k < 0$ tức là các điểm cực s_{pk} tương ứng sẽ nằm ở bên trái mặt phẳng s , dẫn đến $|z_{pk}| = r_k = e^{\sigma_k T_s} < 1$ tức là các điểm cực z_{pk} tương ứng sẽ nằm trong vòng tròn đơn vị. Như vậy điều kiện ổn định vẫn được đảm bảo khi ta chuyển $H_u(s)$ thành $H(z)$ theo phương pháp bất biến xung.

Hình 6.3.3.4 sẽ minh họa sự tương ứng giữa hai miền ổn định trong mặt phẳng s và mặt phẳng z .



Hình 6.3.3.4.

Ví dụ 6.3.3.1

Cho hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H_u(s)$ như sau:

$$H_u(s) = \frac{4}{(s+3)(s+5)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp bất biến xung.
- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số.

Giải

- $H_o(s)$ có hai điểm cực: $s_{p1} = -3$; $s_{p2} = -5$, vậy:

$$H_o(s) = \frac{A_1}{s - s_{p1}} + \frac{A_2}{s - s_{p2}}$$

Tìm A_k theo công thức (6.3.3.5):

$$A_1 = (s + 3) \left. \frac{4}{(s + 3)(s + 5)} \right|_{s = -3} = 2$$

$$A_2 = (s + 5) \left. \frac{4}{(s + 3)(s + 5)} \right|_{s = -5} = -2$$

$$\Rightarrow H_o(s) = \frac{2}{s + 3} + \frac{-2}{s + 5}$$

Áp dụng công thức (6.3.3.9) ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-3T_s} z^{-1}} + \frac{-2}{1 - e^{-5T_s} z^{-1}}$$

- Để vẽ được sơ đồ thực hiện bộ lọc số, chúng ta chuyển $H(z)$ về dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

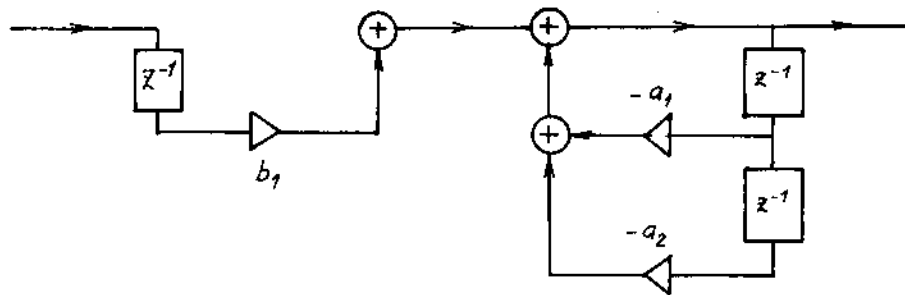
hoặc viết phương trình sai phân dưới dạng sau:

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N (-a_k) y(n-k)$$

Sau khi biến đổi ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{2(e^{-3T_s} - e^{-5T_s})z^{-1}}{1 - (e^{-3T_s} + e^{-5T_s})z^{-1} + e^{-8T_s}z^{-2}}$$

Sơ đồ thực hiện bộ lọc cho trên hình 6.3.3.5.



$$b_1 = 2(e^{-5T_s} - e^{-3T_s}); a_1 = -(e^{-3T_s} + e^{-5T_s}); a_2 = e^{-8T_s}$$

Hình 6.3.3.5.

6.3.4. PHƯƠNG PHÁP 2: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI SONG TUYẾN

a) Định nghĩa biến đổi

Giả sử $y_a(t)$ là một tín hiệu tương tự, vậy đạo hàm bậc nhất của $y_a(t)$ là:

$$y'_a(t) = \frac{dy_a(t)}{dt}$$

và ta có thể viết $y_a(t)$ dưới dạng tích phân của $y'_a(t)$:

$$y_a(t) = \int_{t_0}^t y'_a(\tau) d\tau + y_a(t_0)$$

Nếu $t = nT_s$, và $t_0 = (n-1)T_s$ thì ta thu được:

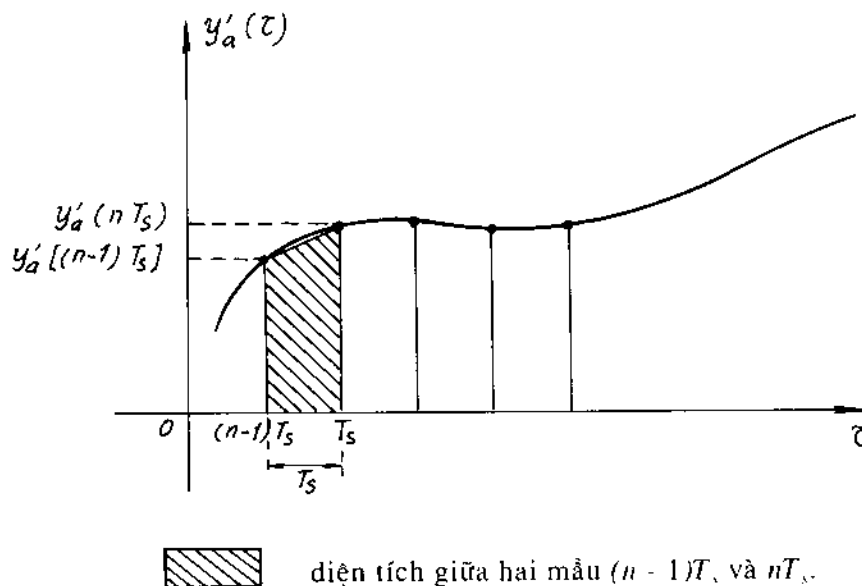
$$y_a(nT_s) = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} y'_a(\tau) d\tau + y_a[(n-1)T_s]$$

Vậy:

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} y'_a(\tau) d\tau = y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s]$$

Bây giờ chúng ta tiến hành tính tích phân trên nhờ quy tắc hình thang.

Quy tắc này được sử dụng rộng rãi trong trường hợp tích phân không thể tính được bằng giải tích. Nội dung của quy tắc này như sau: tính tổng tích diện tích của các hình thang nhận được bằng phép nội suy tuyến tính giữa các mẫu của tín hiệu rời rạc. Hình 6.3.4.1 sẽ minh họa cách tính này.



Hình 6.3.4.1.

Theo hình 6.3.4.1, diện tích giữa hai mẫu được tính như sau:

$$T_s \cdot \frac{y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s]}{2}$$

Diện tích này chính là giá trị gần đúng của tích phân:

$$\int_{(n-1)T_s}^{nT_s} y'_a(\tau) d\tau \approx T_s \cdot \frac{y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s]}{2}$$

Vậy ta có:

$$y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s] = T_s \cdot \frac{y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s]}{2} \quad (6.3.4.1)$$

Giả sử ta có ví dụ bộ lọc tương tự được xác định bằng phương trình vi phân sau đây:

$$y'_a(t) + c_0 y_a(t) = x_a(t) \quad (6.3.4.2)$$

Trong trường hợp tổng quát một hệ thống tương tự được xác định bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M d_r \frac{d^r x_a(t)}{dt^r}$$

thì hàm truyền đạt $H_a(s)$ có dạng:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$$

Vậy trong trường hợp này:

$$c_0 = c_0 \neq 0; c_1 = 1, c_2 = c_3 = \dots = c_N = 0$$

$$d_0 = 1; d_1 = d_2 = \dots = d_M = 0$$

Ta có:

$$H_a(s) = \frac{1}{c_0 + c_1 s} = \frac{1}{s + c_0}$$

Nếu đặt $t = nT_s$ thì phương trình (6.3.4.2) trở thành:

$$y'_a(nT_s) + c_0 y_a(nT_s) = x_a(nT_s) \quad (6.3.4.3)$$

thì:

$$y'_a(nT_s) = -c_0 y_a(nT_s) + x_a(nT_s)$$

và tại điểm $(n-1)T_s$ ta có:

$$y'_a[(n-1)T_s] = -c_0 y_a[(n-1)T_s] + x_a[(n-1)T_s]$$

dẫn đến:

$$y'_a(nT_s) + y'_a[(n-1)T_s] = -c_0\{y_a(nT_s) + y_a[(n-1)T_s]\} + \{x_a(nT_s) + x_a[(n-1)T_s]\}$$

Thay vào phương trình (6.3.4.1):

$$y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s] = \frac{T_s}{2} \cdot \{-c_0\{y_a(nT_s) + y_a[(n-1)T_s]\} + \{x_a(nT_s) + x_a[(n-1)T_s]\}$$

Sau khi chuẩn hoá bởi T_s ta có thể viết:

$$y(n) - y(n-1) = \frac{T_s}{2} \cdot \{-c_0[y(n) + y(n-1)] + [x(n) + x(n-1)]\} \quad (6.3.4.4)$$

Lấy biến đổi z hai vế của phương trình (6.3.4.4) ở trên ta có:

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T_s}{2} \{-c_0Y(z)(1 + z^{-1}) + X(z)(1 + z^{-1})\}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) + \frac{T_s}{2} c_0 Y(z)(1 + z^{-1}) = \frac{T_s}{2} X(z)(1 + z^{-1})$$

Vậy:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + c_0}$$

So sánh với biểu thức của $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{1}{s + c_0}$$

Ta có thể viết quan hệ giữa $H(z)$ và $H_a(s)$ như sau:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Tức là chúng ta có thể nhận được hàm truyền đạt của bộ lọc số từ bộ lọc tương tự nếu ta có biến đổi sau đây:

$$s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (6.3.4.5)$$

Biến đổi này được gọi là biến đổi song tuyến.

b) Ảnh của trục ảo

Từ quan hệ giữa z và s trong biểu thức (6.3.4.5) ta rút ra:

$$z = \frac{\frac{2}{T_s} + s}{\frac{2}{T_s} - s} \quad (6.3.4.6)$$

Trục ảo của mặt phẳng s ứng với $\sigma = 0$ tức là:

$$s = j\omega_a$$

vậy:

$$z = \frac{\frac{2}{T_s} + j\omega_a}{\frac{2}{T_s} - j\omega_a} = \frac{1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a}{1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a}$$

Biểu thức trên chính là thương số của hai số liên hợp phức, vậy:

$$\begin{aligned} \left| 1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| &= \left| 1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{T_s}{2}\omega_a\right)^2} \\ \arg \left[1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right] &= \arctg \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right) \\ \arg \left[1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right] &= \arctg \left(-\frac{T_s}{2}\omega_a \right) = -\arctg \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right) \end{aligned}$$

Dẫn đến:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\left| 1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| e^{j\arg \left[1 + j\frac{T_s}{2}\omega_a \right]}}{\left| 1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right| e^{j\arg \left[1 - j\frac{T_s}{2}\omega_a \right]}} \\ z &= e^{j2\arctg \left(\frac{T_s}{2}\omega_a \right)} \end{aligned} \quad (6.3.4.7)$$

Biểu thức (6.3.4.7) ở trên chính là ảnh z của trục ảo.

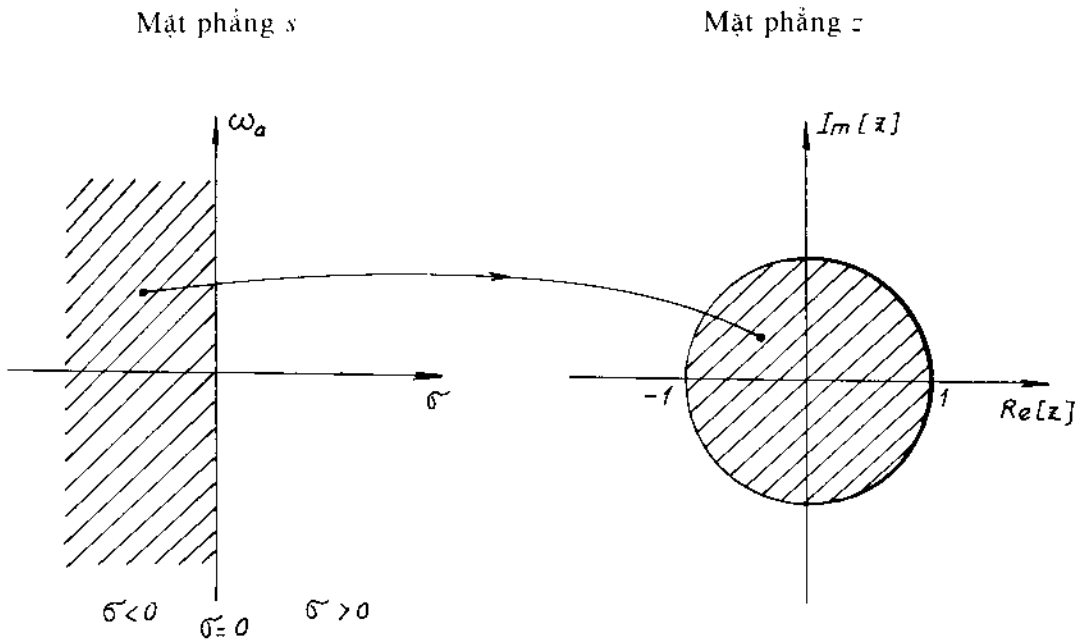
c) Sự ổn định

Theo biểu thức (6.3.4.7) ta thấy rằng $|z| = 1$. Vậy quan hệ này chứng tỏ rằng khi các giá trị của s nằm trên trục ảo sẽ tương ứng với giá trị của z trên vòng tròn đơn vị.

Thế thì nếu phần thực của s (σ) là âm sẽ dẫn đến môđul của z nhỏ hơn đơn vị. Như thế, nửa mặt phẳng bên trái của mặt phẳng s được ánh xạ vào trong vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z qua phép biến đổi song tuyến.

Từ đây ta có thể nói rằng phép biến đổi song tuyến thoả mãn điều kiện chuyển một bộ lọc tương tự ổn định sang một bộ lọc số ổn định.

Hình 6.3.4.2 sẽ minh hoạ phép ánh xạ nói trên.



Hình 6.3.4.2.

d) Sự tương ứng tần số

Phép biến đổi song tuyến đã dẫn đến một quan hệ phi tuyến đối với sự tương ứng tần số giữa mặt phẳng s và mặt phẳng z .

Từ biểu thức (6.3.4.7) ta thấy rằng:

$$z = e^{j2\arctg\left(\frac{T_s}{2}\omega_a\right)} = e^{j\omega}$$

Vậy:

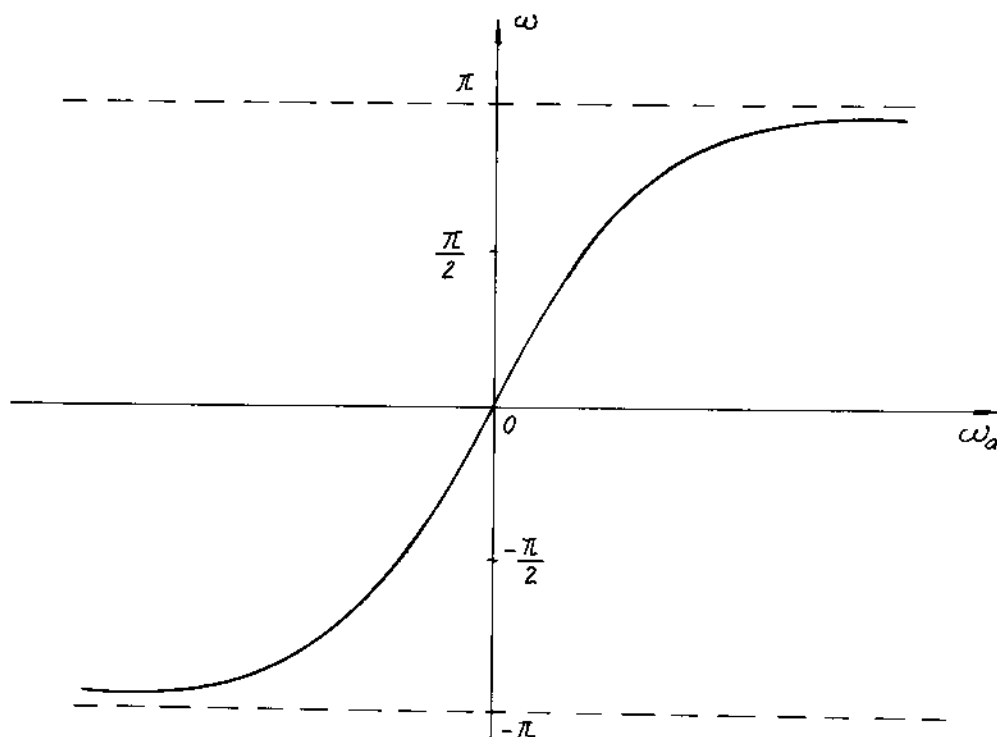
$$\omega = 2\arctg\left(\frac{T_s}{2}\omega_a\right) \quad (6.3.4.8)$$

hoặc:

$$\omega_a = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (6.3.4.9)$$

Các quan hệ trên giữa các tần số ω và tần số ω_a là các quan hệ phi tuyến.

Hình 6.3.4.3 sẽ minh hoạ quan hệ phi tuyến (6.3.4.8).

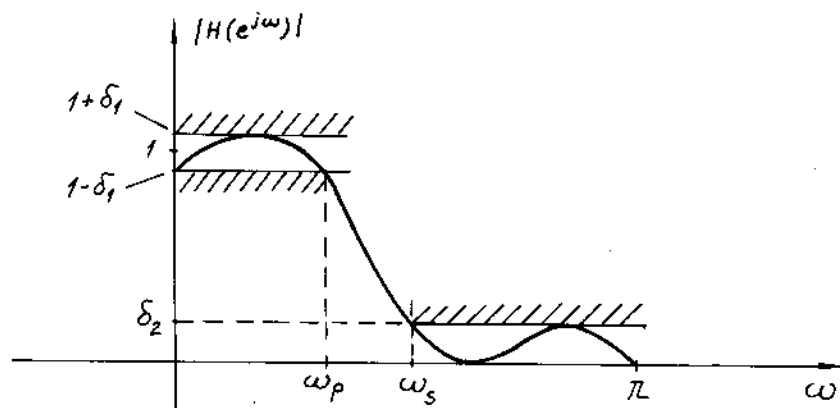


Hình 6.3.4.3.

Ví dụ 6.3.4.1

Chúng ta cần tổng hợp một bộ lọc số IIR có đáp ứng tần số cho trên hình 6.3.4.4 sau đây nhờ phương pháp biến đổi song tuyến.

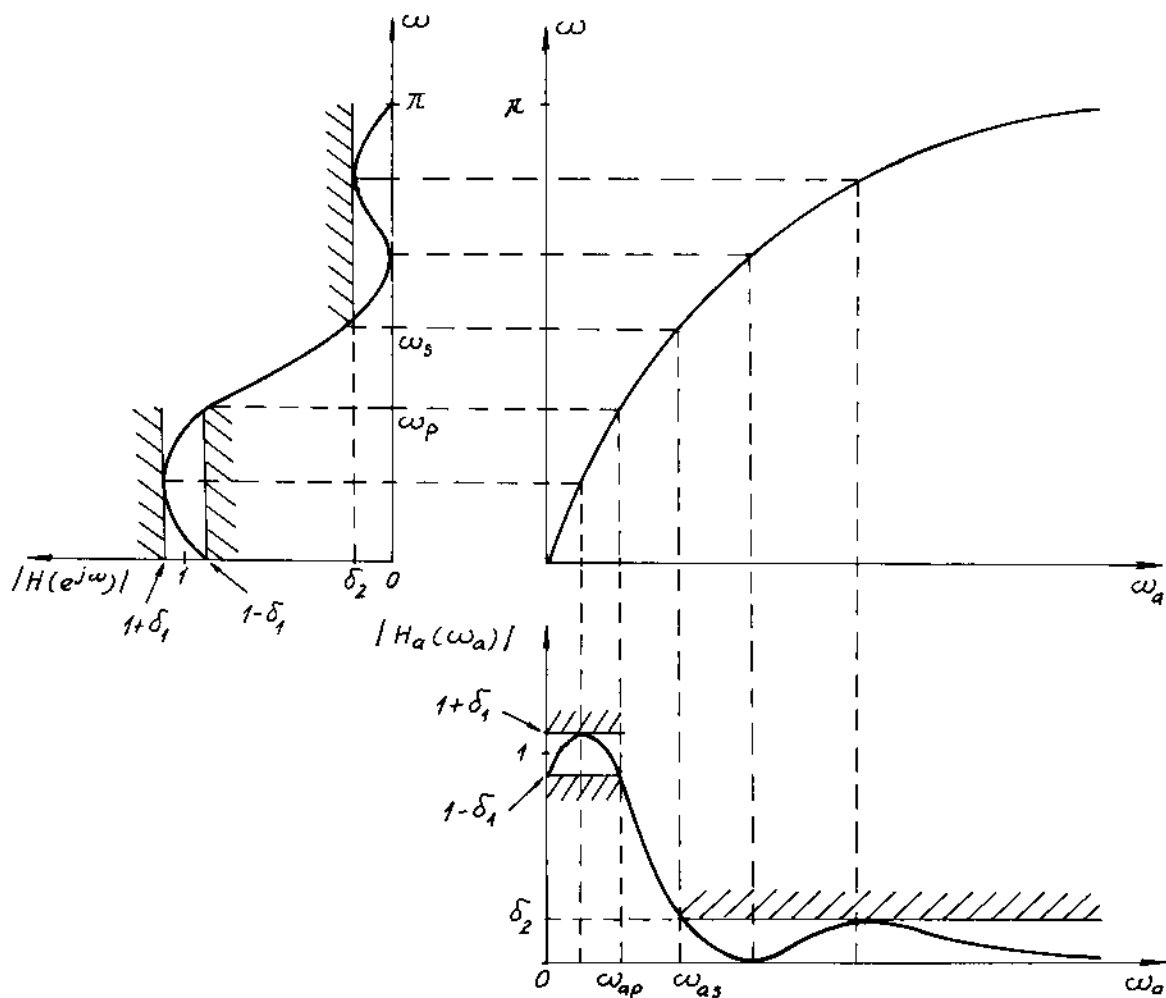
Hãy tìm đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng.



Hình 6.3.4.4.

Giải

Xét quan hệ giữa ω và ω_a trong biểu thức (6.3.4.8), cách tìm đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng được giải thích trên hình 6.3.4.5.



Hình 6.3.4.5.

Ví dụ 6.3.4.2

Cho hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{4}{(s-3)(s-5)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp biến đổi song tuyến
- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc

Giải

Áp dụng biểu thức (6.3.4.5) ta có $H(z)$ như sau:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{4}{\begin{pmatrix} 2 & 1-z^{-1} \\ T_s & 1+z^{-1} \end{pmatrix} - 3} \begin{pmatrix} 2 & 1-z^{-1} \\ T_s & 1+z^{-1} \end{pmatrix} - 5 \\
 &= \frac{4T_s^2(1+z^{-1})^2}{[2(1-z^{-1})-3T_s(1+z^{-1})]/[2(1-z^{-1})-5T_s(1+z^{-1})]} \\
 &= \frac{4T_s^2 + 8T_s^2 z^{-1} + 4T_s^2 z^{-2}}{(2-3T_s)(2-5T_s) - [(2+3T_s)(2-5T_s) + (2-3T_s)(2+5T_s)]z^{-1} - (2+3T_s)(2+5T_s)z^{-2}}
 \end{aligned}$$

Đặt: $A = (2-3T_s)(2-5T_s)$

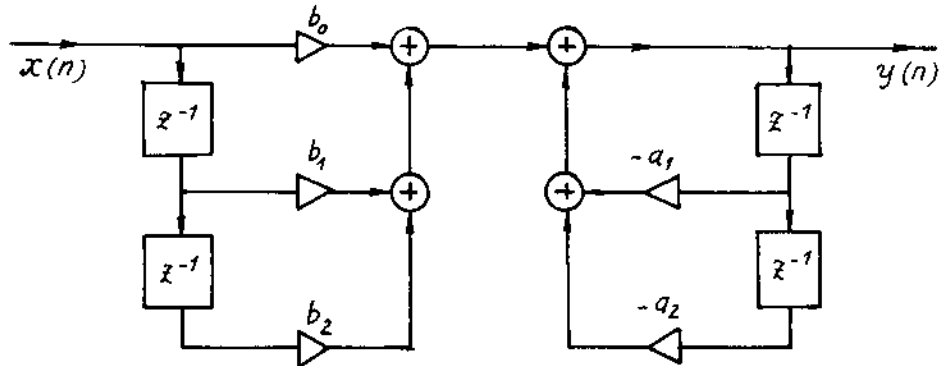
$$H(z) = \frac{\frac{4T_s^2}{A} + \frac{8T_s^2}{A}z^{-1} + \frac{4T_s^2}{A}z^{-2}}{1 - \frac{(2+3T_s)(2-5T_s) + (2-3T_s)(2+5T_s)}{A}z^{-1} - \frac{(2+3T_s)(2+5T_s)}{A}z^{-2}}$$

Đặt: $b_0 = \frac{4T_s^2}{A}; b_1 = \frac{8T_s^2}{A}; b_2 = \frac{4T_s^2}{A}; a_0 = 1$

$$a_1 = -\frac{(2+3T_s)(2-5T_s) + (2-3T_s)(2+5T_s)}{A}$$

$$a_2 = -\frac{(2+3T_s)(2+5T_s)}{A}$$

Sơ đồ của bộ lọc được cho trên hình 6.3.4.6.

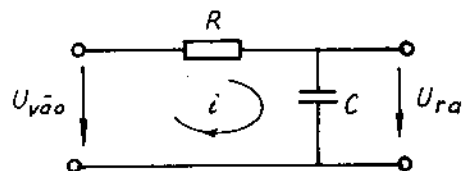


Hình 6.3.4.6.

Ví dụ 6.3.4.8

Cho mạch điện tương tự như trên hình 6.3.4.7 sau đây:

Hình 6.3.4.7.



Mạch điện trên hình 6.3.4.8 là mạch điều khiển bằng điện áp.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Trước tiên phải tính hàm truyền đạt điện áp $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \frac{U_{ra}}{U_{vào}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

Áp dụng biểu thức 6.3.4.5 ta có:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{RC \left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) + 1} = \frac{T_s(1 + z^{-1})}{2RC(1 - z^{-1}) + T_s(1 + z^{-1})} \\ &= \frac{T_s + T_s z^{-1}}{(2RC + T_s) + (T_s - 2RC)z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{T_s}{2RC + T_s} + \frac{T_s}{2RC + T_s} z^{-1}}{1 + \frac{T_s - 2RC}{2RC + T_s} z^{-1}} \end{aligned}$$

Đặt: $b_0 = \frac{T_s}{2RC + T_s} = b_1$

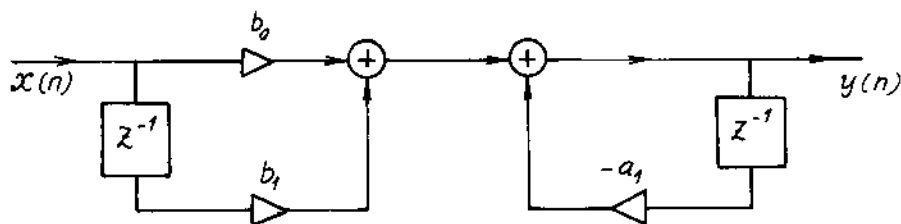
$$a_0 = 1; a_1 = \frac{T_s - 2RC}{2RC + T_s}$$

Ta có:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1] + (-a_1)y(n-1)$$

Từ đây ta có sơ đồ mạch số cho trên hình 6.3.4.9:



Hình 6.3.4.9.

6.3.5. PHƯƠNG PHÁP 3: PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG ĐƯƠNG VI PHÂN

a) Xác định sự tương đương

Chúng ta biết rằng một bộ lọc tương tự (hoặc một hệ thống tuyến tính bất biến nói chung) được đặc trưng bởi một phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng, còn một bộ lọc số IIR được đặc trưng bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Chính vì vậy chúng ta có thể thiết lập một sự tương ứng giữa vi phân và sai phân.

Sau đây chúng ta tiến hành xét chi tiết từ định nghĩa của vi phân và sai phân.

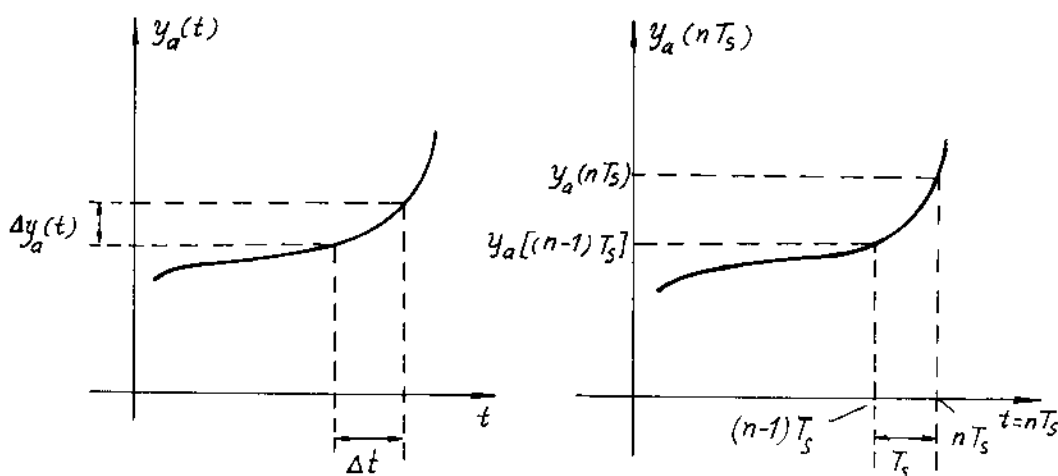
Đối với đạo hàm bậc nhất ta có:

$$\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt^{(1)}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y_a(t)}{\Delta t} \quad (6.3.5.1)$$

Nhưng ta cũng có:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow T_s} \frac{\Delta y_a(t)}{\Delta t} = \frac{y_a(nT_s) - y_a[(n-1)T_s]}{T_s} \quad (6.3.5.2)$$

Hình 6.3.5.1 sẽ minh họa bản chất của biểu thức (6.3.5.1) và (6.3.5.2).



Hình 6.3.5.1.

Để phân biệt rõ trường hợp tương tự và số ta ký hiệu hiện tại như sau:

$$y_a(nT_s) \rightarrow y(n)$$

$$y_a[(n-1)T_s] \rightarrow y(n-1)$$

Vậy chúng ta có thể thiết lập sự tương ứng trong hai trường hợp số và tương tự như trên bảng 6.3.5.1.

Phát triển đối với đạo hàm bậc k chúng ta cũng thiết lập được sự tương ứng cho trên bảng 6.3.5.2.

Bảng 6.3.5.1.

Tương tự	Số
$\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt}$	$\frac{y_a(nT_s) - y_a[(n-1)]}{T_s}$
$\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt} = D_a^{(1)}[y_a(t)]$	$\frac{y(n) - y(n-1)}{T_s} = D^{(1)}[y(n)]$
$LT\left[\frac{d^{(1)}y_a(t)}{dt}\right] = LT\{D_a^{(1)}[y_a(t)]\}$	$ZT\left[\frac{y(n) - y(n-1)}{T_s}\right] = ZT\{D^{(1)}[y(n)]\}$
$s.Y_a(s) = LT\{D_a^{(1)}[Y_a(s)]\}$	$\frac{1-z^{-1}}{T_s}.Y(z) = ZT\{D^{(1)}[Y(z)]\}$
$s = LT\{D_a^{(1)}\} = D_a^{(1)}(s)$	$\frac{1-z^{-1}}{T_s} = ZT\{D^{(1)}\} = D^{(1)}(z)$
$D_a^{(1)}$: toán tử đạo hàm	$D^{(1)}$: toán tử số vi sai

Bảng 6.3.5.2

Tương tự	Số
$D_a^{(k)}[y_a(t)] = D_a^{(1)}\{D_a^{(k-1)}[y_a(t)]\}$	$D^{(k)}[y(n)] = D^{(1)}\{D^{(k-1)}[y(n)]\}$
$s^k.Y_a(s) = LT\{D_a^{(k)}[y_a(t)]\}$	$\left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^k.Y(z) = ZT\{D^k[y(n)]\}$
$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M d_r \frac{dx_a(t)}{dt^r}$	$\sum_{k=0}^N c_k D^k[y(n)] = \sum_{r=0}^M d_r D^r[x(n)]$
$\sum_{k=0}^N c_k D_a^k[y_a(t)] = \sum_{r=0}^M d_r D_a^r[x_a(t)]$	
$LT\left\{\sum_{k=0}^N c_k D_a^k[y_a(t)]\right\} = LT\left\{\sum_{r=0}^M d_r D_a^r[x_a(t)]\right\}$	$ZT\left\{\sum_{k=0}^N c_k D^k[y(n)]\right\} = ZT\left\{\sum_{r=0}^M d_r D^r[x(n)]\right\}$
$\sum_{k=0}^N c_k s^k Y_a(s) = \sum_{r=0}^M d_r s^r X_a(s)$	$\sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^k.Y(z) = \sum_{r=0}^M d_r \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^r.X(z)$
$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = \frac{\sum_{r=0}^M d_r s^r}{\sum_{k=0}^N c_k s^k}$	$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M d_r \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^r}{\sum_{k=0}^N c_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T_s}\right)^k}$

Từ bảng 6.3.5.1 và 6.3.5.2 ta có thể rút ra kết luận một cách rõ ràng rằng hàm truyền đạt của bộ lọc số IIR có thể nhận được trực tiếp từ hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự bằng cách đổi biến số theo công thức sau đây:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s} \quad (6.3.5.3)$$

Chúng ta cũng nhận thấy rằng quan hệ (6.3.5.3) ở trên chính là ánh xạ của mặt phẳng s vào mặt phẳng z .

b) Ánh của trục ảo

Bây giờ chúng ta tìm z theo hàm của s :

$$z = \frac{1}{1 - sT_s} \quad (6.3.5.4)$$

mà $s = \sigma + j\omega_a$, vậy $s = j\omega_a$ ($\sigma = 0$) sẽ tương ứng với trục ảo, thay vào (6.3.5.4) ta có:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - j\omega_a T_s} = \frac{1 + j\omega_a T_s}{1 + \omega_a^2 T_s^2} \\ &= \frac{1}{1 + \omega_a^2 T_s^2} + j \frac{\omega_a T_s}{1 + \omega_a^2 T_s^2} \\ &= Re[z] + jIm[z] \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{Re^2[z] + Im^2[z]} = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega_a^2 T_s^2}} \\ arg[z] &= arctg \frac{Im[z]}{Re[z]} = arctg(\omega_a T_s) \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$Re[z] = \frac{1}{1 + \omega_a^2 T_s^2} = |z|^2$$

mà $|z|^2 = Re^2[z] + Im^2[z]$

Thế thì:

$$Re^2[z] + Im^2[z] - Re[z] = 0$$

Chú ý rằng:

ω_a^2 luôn luôn dương,

T_s^2 luôn luôn dương,

đẫn đến $Re[z]$ luôn luôn dương.

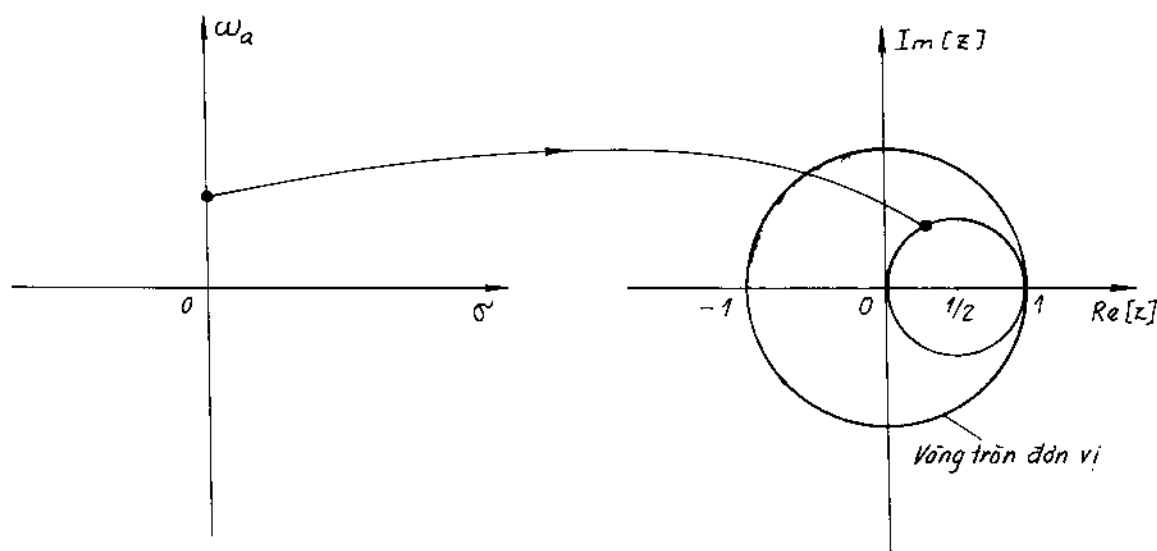
Biến đổi tiếp ta có:

$$Re^2[z] - Re[z] + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (Im)^2[z] = 0$$

$$\left(Re[z] - \frac{1}{2}\right)^2 + (Im)^2[z] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (6.3.5.5)$$

Rõ ràng là phương trình (6.3.5.5) là phương trình của một đường tròn có bán kính bằng $\frac{1}{2}$, tâm nằm ở điểm thực $\frac{1}{2}$ trong mặt phẳng z . Đường tròn này chính là ảnh của trục ảo ($s = j\omega_a$) trong mặt phẳng z . Như vậy ảnh của trục ảo ($s = j\omega_a$) không phải là vòng tròn đơn vị $|z| = 1$ như trong trường hợp của phương pháp biến đổi song tuyến.

Hình 6.3.5.2 sẽ minh họa trục ảo trong mặt phẳng s ($s = j\omega_a$) và ảnh của nó trong mặt phẳng z .



Hình 6.3.5.2.

c) Độ ổn định

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm điều kiện ổn định đối với phương pháp tương đương vì phân này.

Theo biểu thức 6.3.5.4 ta có:

$$z = \frac{1}{1 - sT_s}$$

thay $s = \sigma + j\omega_a$, vào ta có:

$$z = \frac{1}{1 - \sigma T_s - j\omega_a T_s}$$

$$\Rightarrow z = Re[z] + jIm[z]$$

$$Re[z] = \frac{1 - \sigma T_s}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}$$

$$Im[z] = \frac{\omega_a T_s}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}}$$

Nếu bộ lọc tương tự là ổn định thì $\sigma < 0$ (các điểm cực $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s), dẫn đến $\sigma T_s < 0$ và $(1 - \sigma T_s)^2 > 1$ vậy thì với bất kỳ giá trị nào của $(\omega_a T_s)^2$ ta luôn luôn có:

$$(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2 > 1$$

dẫn đến:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}} < 1$$

Từ đây ta có thể nói rằng nếu các điểm cực của $H_a(s)$ nằm bên trái mặt phẳng s thì ảnh xạ của nó vào mặt phẳng z sẽ nằm bên trong vòng tròn đơn vị. Như vậy từ một bộ lọc tương tự ổn định sẽ biến đổi thành một bộ lọc số ổn định tương ứng bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bây giờ chúng ta xét chi tiết hơn nửa bên trái mặt phẳng s sẽ ánh xạ vào đâu trên vòng tròn đơn vị trong mặt phẳng z .

Ta có thể viết:

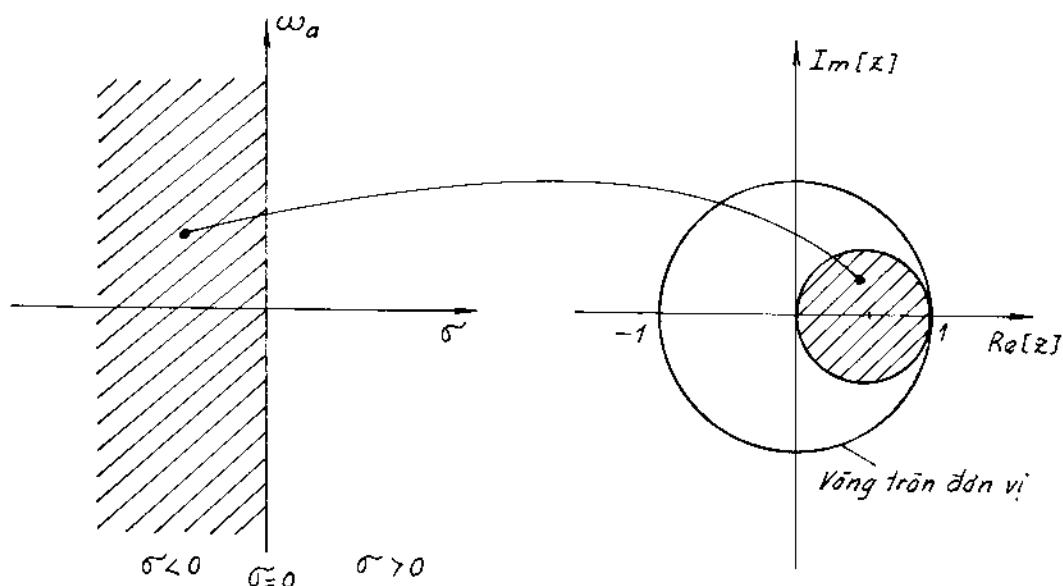
$$|z|_{\sigma < 0} = \sqrt{\frac{1}{(1 - \sigma T_s)^2 + (\omega_a T_s)^2}}; \quad |z|_{\sigma < 0} < 1$$

$$|z|_{\sigma = 0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_a T_s)^2}}; \quad |z|_{\sigma = 0} < 1$$

nhưng $\sigma T_s < 0$ nếu bộ lọc tương tự là ổn định.

Vậy: $|z|_{\sigma = 0} > |z|_{\sigma < 0}$ bởi vì $(1 - \sigma T_s)^2 > 1$.

Vậy ta có thể nói rằng nửa bên trái mặt phẳng s được ánh xạ vào bên trong vòng tròn bán kính $\frac{1}{2}$, tâm nằm ở điểm thực $z = \frac{1}{2}$ trong mặt phẳng z . Sự tương ứng này được minh họa trên hình 6.3.5.3.



Hình 6.3.5.3.

Ví dụ 6.3.5.1

Giả sử có một bộ lọc tương tự, hàm truyền đạt của nó có dạng sau đây:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số tương ứng bằng phương pháp tương đương vi sai.
- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc.

Giải

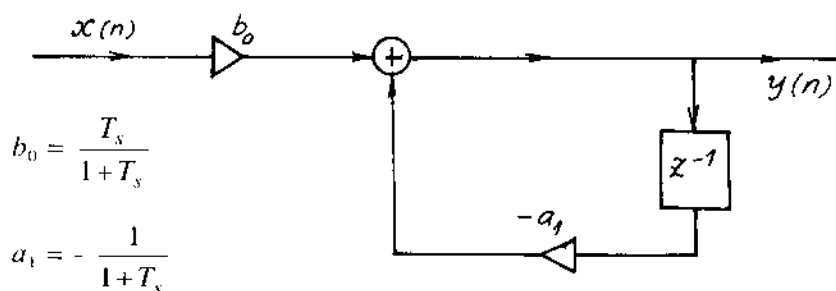
Áp dụng biểu thức (6.3.5.3) ta có $H(z)$ như sau:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T_s}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1-z^{-1}}{T_s} + 1} = \frac{T_s}{(1+T_s) - z^{-1}} = \frac{T_s z}{(1+T_s)z - 1} \end{aligned}$$

Vậy:

$$H(z) \text{ có một điểm cực tại } \frac{1}{1+T_s}.$$

Sơ đồ của bộ lọc IIR này có dạng như trên hình vẽ 6.3.5.4.



Hình 6.3.5.4.

6.3.6. PHƯƠNG PHÁP 4: PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI Z THÍCH ỨNG

Phương pháp này được sao chụp lại nội dung của phương pháp 1 (phương pháp bất biến xung), tức là chuyển đổi trực tiếp các điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự $H_a(s)$ trong mặt phẳng s thành các điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt của bộ lọc số $H(z)$ trong mặt phẳng z .

Giả sử rằng hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự có dạng sau đây:

$$H_a(s) = C \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (s - s_{or})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})} \quad (6.3.6.1)$$

ở đây:

s_{or} là các điểm không của bộ lọc tương tự.

s_{pk} là các điểm cực của bộ lọc tương tự.

Thì chúng ta thu được hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số dưới dạng sau đây:

$$H(z) = C \cdot \frac{\prod_{r=1}^M (1 - e^{s_{or} T_s} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{s_{pk} T_s} z^{-1})} \quad (6.3.6.2)$$

ở đây T_s là chu kỳ lấy mẫu.

Theo (6.3.6.1) và (6.3.6.2) ta thấy rằng mỗi phần tử $(s - a)$ trong $H_a(s)$ được ánh xạ thành phần tử $(1 - e^{s T_s} z^{-1})$. Đó là nội dung của phương pháp biến đổi z thích ứng.

Qua phương pháp này ta thấy rằng việc ánh xạ các điểm cực giống như trong phương pháp bất biến xung. Còn sự khác nhau giữa phương pháp biến đổi z thích ứng và phương pháp bất biến xung là việc ánh xạ các điểm không.

Để đảm bảo đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự không bị biến dạng thì chu kỳ lấy mẫu T_s phải được chọn sao cho có thể nhận được vị trí các điểm cực và điểm không tương đương trong mặt phẳng z . Sự sai lệch này có thể được giảm đi khi ta chọn chu kỳ lấy mẫu T_s đủ nhỏ.

Ví dụ 6.3.6.1

Cho hàm truyền đạt của một hệ thống tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt của hệ thống số tương ứng bằng phương pháp biến đổi z thích ứng.

- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống số này.

Giải

Áp dụng biểu thức (6.3.6.2) ta có biểu thức của hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1-z^{-1})(1-e^{-1T_s}z^{-1})}{(1-e^{-2T_s}z^{-1})(1-e^{-3T_s}z^{-1})} \\ &= \frac{1-e^{-T_s}z^{-1}-z^{-1}+e^{-T_s}z^{-2}}{1-e^{-3T_s}z^{-1}-e^{-2T_s}z^{-1}+e^{-5T_s}z^{-2}} \\ &= \frac{1-(e^{-T_s}+1)z^{-1}+e^{-T_s}z^{-2}}{1-(e^{-3T_s}+e^{-2T_s})z^{-1}+e^{-5T_s}z^{-2}} \end{aligned}$$

Đặt:

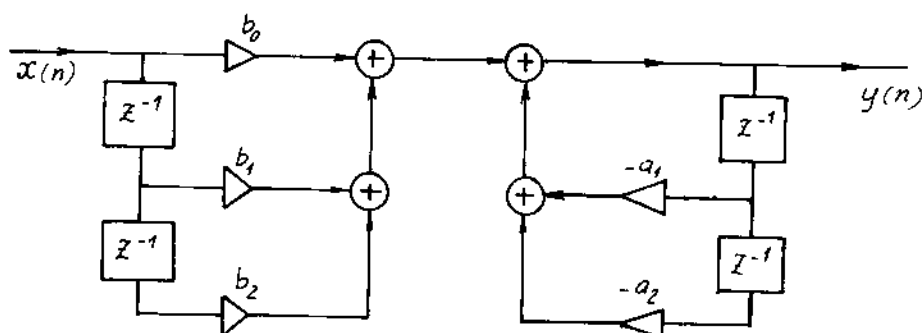
$$\begin{aligned} b_0 &= 1 & a_1 &= -e^{-3T_s} + e^{-2T_s} \\ b_1 &= -e^{-T_s} + 1 & a_2 &= -e^{-5T_s} \\ b_2 &= e^{-T_s} \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + (-a_1)y(n-1) + (-a_2)y(n-2)$$

Từ đây có thể vẽ được sơ đồ hệ thống số IIR như trên hình 6.3.6.1.



Hình 6.3.6.1.

6.4. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

6.4.1. TỔNG QUAN VỀ CÁC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ

Chúng ta biết rằng một bộ lọc tương tự được xác định bởi hàm truyền đạt của chúng như sau:

$$H_a(s) = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)}$$

6.4.2. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ BUTTERWORTH

a) Định nghĩa

Bộ lọc tương tự Butterworth có đặc điểm là ở gốc tọa độ ($\omega_a = 0$) độ bằng phẳng đạt cực đại, tức là:

$$L(\omega_a^2) = B_0 + B_1\omega_a^2 + B_2\omega_a^4 + \dots + B_n\omega_a^{2n} \quad (6.4.2.1)$$

và:

$$\lim_{\omega_a^2 \rightarrow 0} L(\omega_a^2) = 1$$

Bây giờ chúng ta xác định biểu thức của $L(\omega_a^2)$ theo nghĩa độ bằng phẳng cực đại tại $\omega_a = 0$.

Cơ sở toán học như sau:

Chúng ta biết rằng chuỗi Taylor của hàm $L(x + x_0)$ như sau:

$$L(x + x_0) = L(x_0) + \frac{x}{1!}L'(x_0) + \frac{x^2}{2!}L''(x_0) + \dots + \frac{x^k}{k!}L^{(k)}(x_0) + \dots + \frac{x^n}{n!}L^{(n)}(x_0)$$

ở đây:

$$L'(x_0) = \left. \frac{dL(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \quad \text{và} \quad L^k(x_0) = \left. \frac{d^k L(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0}$$

Nếu $x_0 = 0$ chúng ta có chuỗi Maclaurin:

$$L(x) = L(0) + \frac{x}{1!} L'(0) + \frac{x^2}{2!} L''(0) + \dots + \frac{x^k}{k!} L^k(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} L^n(0)$$

Có khả năng là tại điểm $x_0 = 0$, chúng ta có thể có:

$$L(0) = 1$$

$$\text{và} \quad L^k(0) = 0 \quad \text{với} \quad k \leq n-1$$

So sánh $L(\omega_a^2)$ và $L(x)$ ta có:

$$x = \omega_a^2$$

$$B_0 = L(0); B_1 = \frac{L'(0)}{1!}; \dots; B_n = \frac{L^n(0)}{n!}$$

$$\text{Nếu} \quad L(0) = 1$$

$$\text{và} \quad L^k(0) = 0 \quad \text{với} \quad k \leq n-1$$

$$\text{thì:} \quad B_0 = 1 \text{ và } B_1 = B_2 = \dots = B_{n-1} = 0.$$

Từ đây ta có:

$$L(\omega_a^2) = 1 + B_n \omega_a^{2n}$$

Thường chúng ta chuẩn hoá theo tần số cắt ω_a , lúc đó chúng ta có:

$$L(1) = 2 \text{ tại tần số cắt chuẩn hoá } (\omega_a = 1)$$

như vậy thì:

$$B_n = 1$$

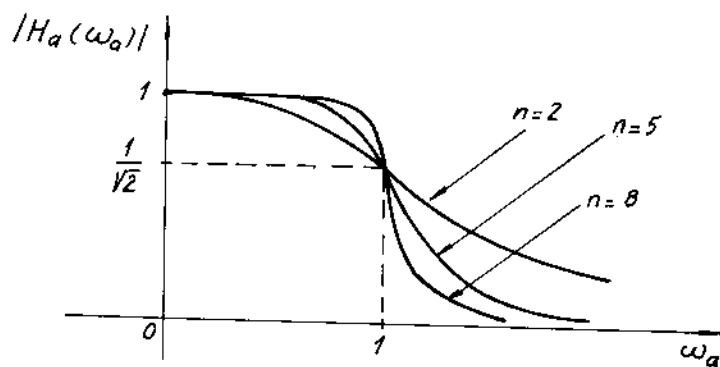
$$\text{và} \quad L(\omega_a^2) = 1 + \omega_a^{2n} = \frac{1}{|H_a(\omega_a)|^2}$$

Từ đây chúng ta có được đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp Butterworth chuẩn hoá như sau:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_a^{2n}}} \quad (6.4.2.2)$$

ở đây n gọi là bậc của bộ lọc.

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ cho trên hình 6.4.2.1.



Hình 6.4.2.1.

Nhận xét

- Bậc của bộ lọc n càng tăng thì bộ lọc càng gần với bộ lọc lý tưởng.
- Đáp ứng biên độ luôn bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ở tần số cắt với mọi giá trị của n .

b) Vị trí của các điểm cực

Chúng ta biết rằng với $s = j\omega_a$ thì $\omega_a = \frac{s}{j}$; như thế $\omega_a^2 = -s^2$, vậy ta có thể viết:

$$L(-s^2) = 1 + (-s^2)^n = \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)}$$

Tức là:

$$L(\omega_a^2) = L(-s^2) \Big|_{s=j\omega_a}$$

Từ đây ta có:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \quad (6.4.2.4)$$

Biểu diễn $H_a(s).H_a(-s)$ dưới dạng các điểm cực ta có:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{A}{\prod_{k=1}^{2n} (s - s_{pk})} \quad (6.4.2.5)$$

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm các điểm cực s_{pk} của hàm $H_a(s).H_a(-s)$:

Từ biểu thức (6.4.2.4) ta có:

$$1 + (-s_{pk}^2)^n = 0$$

$$1 + (-1)^n s_{pk}^{2n} = 0$$

Vậy:

$$n \text{ chẵn ta có: } 1 + s_{pk}^{2n} = 0 \Rightarrow s_{pk}^{2n} = -1 = e^{j(2k-1)\pi}$$

$$n \text{ lẻ ta có: } 1 - s_{pk}^{2n} = 0 \Rightarrow s_{pk}^{2n} = 1 = e^{j2(k-1)\pi}$$

Cuối cùng ta có các nghiệm với n chẵn và lẻ như sau:

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ chẵn: } s_{pk} = e^{j \frac{(2k-1)\pi}{2n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n \\ n \text{ lẻ: } s_{pk} = e^{j \frac{(k-1)\pi}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n \end{array} \right\} \quad (6.4.2.6)$$

Ví dụ 6.4.2.1

Hãy xác định vị trí các điểm cực trên mặt phẳng s ứng với bậc của bộ lọc $n = 3$ và $n = 4$.

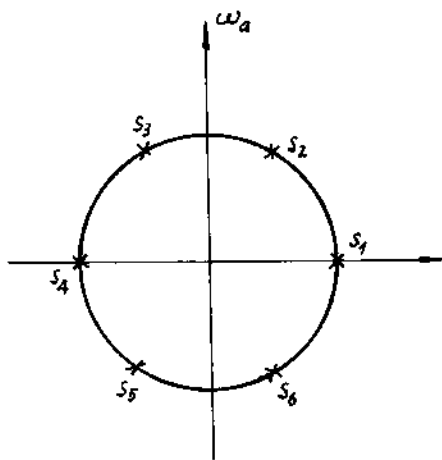
Giải

Theo các biểu thức (6.4.2.6) ta thấy rằng:

$$|s_{pk}| = 1$$

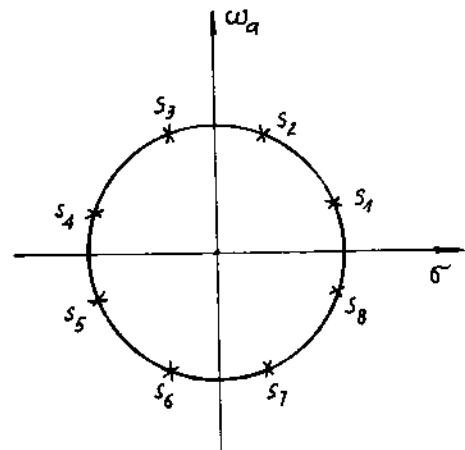
Vậy các điểm cực của $H_a(s)$, $H_a(-s)$ sẽ nằm trên một vòng tròn trong mặt phẳng s . Vòng tròn này được gọi là vòng tròn Butterworth.

Phân bố vị trí các điểm cực trên vòng tròn Butterworth được cho trên hình 6.4.2.2.



s_{p3}, s_{p4}, s_{p5} là các điểm cực của $H_a(s)$

s_{p6}, s_{p1}, s_{p2} là các điểm cực của $H_a(-s)$



$s_{p3}, s_{p4}, s_{p5}, s_{p6}$ là các điểm cực của $H_a(s)$

$s_{p7}, s_{p8}, s_{p1}, s_{p2}$ là các điểm cực của $H_a(-s)$

Hình 6.4.2.2.

Để đảm bảo hệ thống là ổn định thì các điểm cực của $H_a(s)$ phải nằm bên trái trục ảo. Vậy trong các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ chúng ta chọn ra các điểm cực nằm bên trái trục ảo (xem hình 6.4.2.2) để làm các điểm cực của $H_a(s)$ đối với bộ lọc ổn định. Tức là các điểm cực của hàm truyền đạt của bộ lọc ổn định phải nằm bên trái trục ảo trong mặt phẳng s .

Vì thế chúng ta có thể viết:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} \quad (6.4.2.7)$$

ở đây:

+ Theo tần số chuẩn hoá $\frac{\omega_a}{\omega_{ac}}$

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 1: \text{hằng số} \\ s_{pk} &= e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n} \right)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2.8a)$$

+ Theo tần số không chuẩn hoá

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= \omega_{ac}^2 \\ s_{pk} &= \omega_{ac} e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n} \right)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2.8b)$$

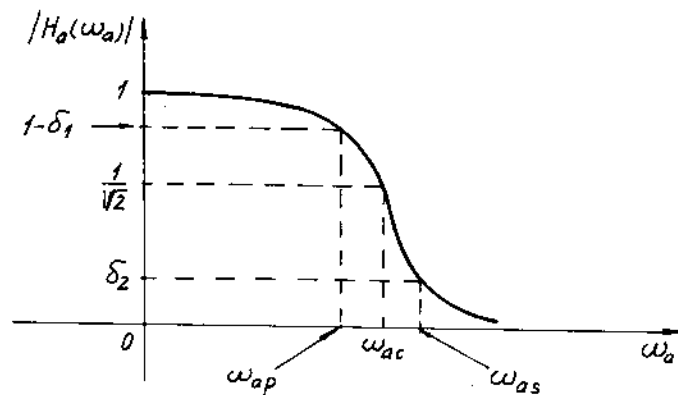
Nhận xét:

- ở tần số chuẩn hoá, các điểm cực s_{pk} sẽ nằm trên vòng tròn có bán kính $r = 1$ (tức là $|s_{pk}| = 1$).
- ở tần số không chuẩn hoá, các điểm cực s_{pk} sẽ nằm trên vòng tròn có bán kính $r = \omega_{ac}$ (ω_{ac} là tần số cắt không chuẩn hoá).

c) Tính toán bậc của bộ lọc

Chúng ta có thể tính toán bậc của bộ lọc sao cho bộ lọc thoả mãn các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho.

Dựa vào hình 6.4.2.3 chúng ta thiết lập trình tự tính toán bậc n của



Hình 6.4.2.3.

bộ lọc.

Theo hình 6.4.2.3 ta thấy rằng ở dải thông thì:

$$|H_a(\omega_a)| \geq 1 - \delta_1$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n}} &\geq (1 - \delta_1)^2 \\ \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\leq \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} \\ \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\leq \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \\ \Rightarrow \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\leq \lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right] \\ 2n \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right) &\leq \lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

Vậy ở dải thông ta có quan hệ sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)} \quad (6.4.2.9)$$

Tương tự theo hình 6.4.2.3 ở dải chặn ta có:

$$|H_a(\omega_a)| \leq \delta_2$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2n}} &\leq \delta_2^2 \\ \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\geq \frac{1}{\delta_2^2} \\ \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &\geq \frac{1}{\delta_2^2} - 1 \end{aligned}$$

$$2n \lg \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right) \geq \lg \left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right]$$

Vậy ở dải chặn ta có quan hệ sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)} \quad (6.4.2.10)$$

Kết hợp hai quan hệ (6.4.2.9) và (6.4.2.10) ta rút ra được biểu thức tính bậc n của bộ lọc Butterworth như sau:

$$n \geq \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \omega_{as} - \lg \omega_{ap}} \quad (6.4.2.11)$$

Chú ý rằng n chỉ lấy giá trị nguyên.

Ví dụ 6.4.2.2

Hãy tìm hàm truyền đạt $H_a(s)$ và vị trí các điểm cực của $H_a(s)$ đối với bộ lọc tương tự Butterworth chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$), biết rằng bộ lọc tương tự này có bậc $n = 2$.

Giải

Ở đây $n = 2$; n là số chẵn.

Theo biểu thức (6.4.2.8) ta có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} s_{pk} &= e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2.2} \right)} = e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{4} \right)} \\ &= e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\pi \frac{2k-1}{4}}, \quad k = 1, 2 \\ \Rightarrow \quad s_{p1} &= e^{j\frac{3\pi}{4}}, \quad k = 1 \\ s_{p2} &= e^{j\frac{5\pi}{4}}, \quad k = 2 \end{aligned}$$

Theo biểu thức (6.4.2.7) ta có:

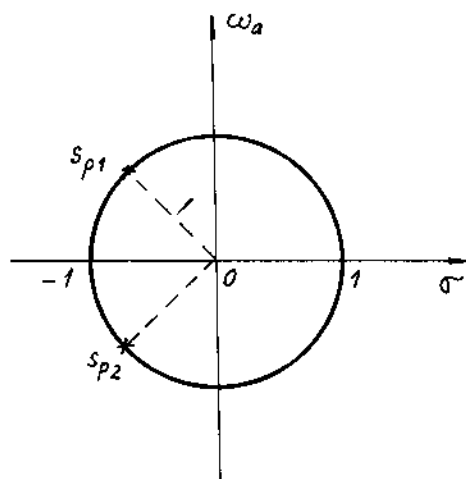
$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

ở đây $H_0 = 1$; $n = 2$ vậy ta có:

$$H_u(s) = \frac{1}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})} = \frac{1}{\left(s - e^{j\frac{3\pi}{4}}\right)\left(s - e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)}$$

$$= \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

Xét vị trí các điểm cực: ở đây chúng ta có hai điểm cực s_{p1} và s_{p2} , hai điểm cực này nằm bên trái trục ảo của mặt phẳng s để đảm bảo cho hệ thống là ổn định. Hình 6.4.2.4 sẽ minh họa vị trí của s_{p1} và s_{p2} .



Hình 6.4.2.4.

* Nhận xét về các điểm cực

Đối với n chẵn:

$$s_{p1} = s_{pn}^*, s_{p2} = s_{p(n-1)}^*, \dots,$$

$$s_{p\frac{n}{2}} = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}^*$$

hoặc là:

$$s_{p1}^* = s_{p,n}, s_{p2}^* = s_{p,(n-1)}, \dots, s_{p\frac{n}{2}}^* = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Đối với n lẻ:

$$s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2\frac{n+1}{2}-1}{2n}\right)} = e^{j\pi}$$

$$\Rightarrow s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = -1$$

Với tần số không chuẩn hóa ta có:

$$s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \omega_{ac} e^{j\pi} = -\omega_{ac}$$

và ta có:

$$s_{p1} = s_{pn}^*, s_{p2} = s_{p(n-1)}^*, \dots, s_{p\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}^*$$

hoặc là:

$$s_{p1}^* = s_{p,n}, s_{p2}^* = s_{p,n-1}, \dots, s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}^* = s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

* Nhận xét về giá trị của H_0

Đối với n chẵn:

$$\begin{aligned} H_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (s_{pk}) = \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |s_{pk}|^2 \end{aligned}$$

Ở tần số chuẩn hoá ta có $|s_k| = 1$ vậy ta có giá trị của H_0 như sau:

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |1|^2 = 1 \quad (6.4.2.12)$$

Ở tần số không chuẩn hoá ta có $|s_k| = \omega_{ac}$, vậy ta có giá trị của H_0 như sau:

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (\omega_{ac})^2 = \omega_{ac}^n \quad (6.4.2.13)$$

Với n lẻ ta có:

$$\begin{aligned} H_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (s_{pk}) = - \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ &= - s_{p, \frac{n+1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |s_{pk}|^2 \end{aligned}$$

Ở tần số chuẩn hoá ta có $|s_k| = 1$ và $s_{p, \frac{n+1}{2}} = -1$, vậy ta có giá trị của H_0 như sau:

$$H_0 = - s_{p, \frac{n+1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |s_{pk}|^2 = - (-1) \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |1|^2 = 1 \quad (6.4.2.14)$$

Ở tần số không chuẩn hoá ta có $|s_{pk}| = \omega_{ac}$, $s_{p, \frac{n+1}{2}} = -\omega_{ac}$ vậy ta có giá trị của H_0 như sau:

$$H_0 = - s_{p, \frac{n+1}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |s_{pk}|^2 = - (-\omega_{ac}) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} |\omega_{ac}|^2 = \omega_{ac}^n \quad (6.4.2.15)$$

d) Tính tần số cắt ω_{ac}

Phần trên ta đã có:

$$1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} \leq (1 - \delta_1)^{-2}$$

Ta sử dụng dấu bằng để tính ω_{ac} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} \right)^{2n} &= (1 - \delta_1)^{-2} - 1 \\ \frac{\omega_{ap}}{\omega_{ac}} &= \left[(1 - \delta_1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}} \\ \Rightarrow \quad \omega_{ac} &= \frac{\omega_{ap}}{\left[(1 - \delta_1)^{-2} - 1 \right]^{\frac{1}{2n}}} \end{aligned} \quad (6.4.2.16)$$

* Nhận xét về hàm truyền đạt $H_a(s)$

Với n chẵn:

ở tần số chuẩn hoá:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ \Rightarrow \quad H_a(s) &= \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left[s^2 + 2 \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + 1 \right]} \end{aligned} \quad (6.4.2.17)$$

ở tần số không chuẩn hoá:

$$\begin{aligned} H_0 &= \omega_{ac}^n \\ \Rightarrow \quad H_a(s) &= \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^n \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \end{aligned} \quad (6.4.2.18)$$

Với n lẻ:

ở tần số chuẩn hoá:

$$H_0 = 1; \quad s_{p, \frac{n+1}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2 \sin\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right) s + 1 \right]} \quad (6.4.2.19)$$

ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_0 = \omega_{ac}^n; s_{p, \frac{n+1}{2}} = -\omega_{ac}$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{(s + \omega_{ac})} \cdot \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.20)$$

Ví dụ 6.4.2.3.

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \quad \text{ở dải thông}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ở dải chắn}$$

$$\omega_p = 0,1\pi; \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Chúng ta có bốn bước chính để tổng hợp bộ lọc số từ bộ lọc tương tự.

Bước 1. Như đầu bài đã cho ta có 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \quad \text{ở dải thông}$$

$$\Rightarrow (1 - \delta_1) = \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}}$$

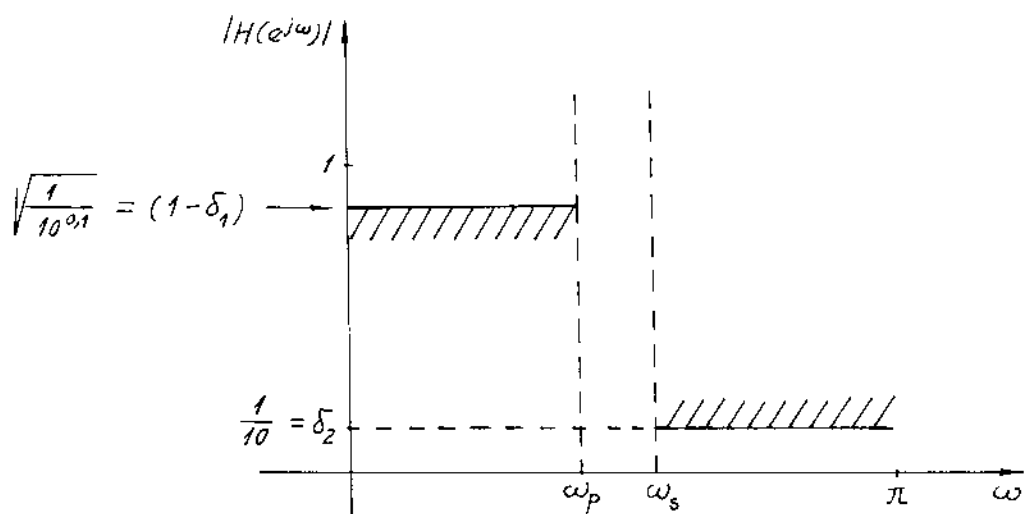
$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ở dải chắn}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{1}{10}$$

$$\omega_p = 0,1\pi \approx 0,3141593$$

$$\omega_s = 0,2\pi \approx 0,6283185$$

Minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc số trên hình 6.4.2.5.



Hình 6.4.2.5.

Bước 2.

Xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số tương ứng theo phương pháp biến đổi song tuyến.

$$|H_a(\omega_a)| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0.1}}} \quad \text{ở dải thông}$$

$$|H_a(\omega_a)| \leq \frac{1}{10} \quad \text{ở dải chắn}$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

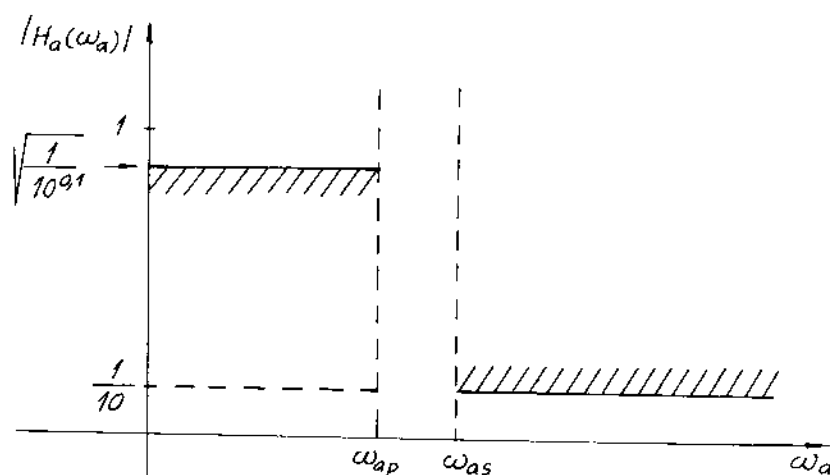
$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

Nếu chúng ta chuẩn hoá ω_{ap} và ω_{as} bằng tần số lấy mẫu F_s thì các giá trị của ω_{ap} và ω_{as} sẽ được tính như sau:

$$\omega_{ap} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0.1\pi}{2}\right) \approx 0.3167689$$

$$\omega_{as} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) \approx 0.3167689$$

Minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự trên hình 6.4.2.6.



Hình 6.4.2.6.

Bước 3

Tổng hợp bộ lọc tương tự Butterworth.

Trước hết tìm bậc của bộ lọc n , áp dụng công thức sau:

$$n = \frac{\lg \left(\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right)}{2 \lg \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}} \approx \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}}$$

$$n = \frac{\lg \frac{10^2 - 1}{10^{0.1} - 1}}{2 \lg \left(\frac{0.6498394}{0.3167689} \right)} \approx 4.1377164$$

Vậy ta chọn $n = 5$.

* Tính toán tần số

Để tính toán tần số cắt với $n = 5$, chúng ta có thể chọn sao cho tôn trọng một cách chính xác các chỉ tiêu kỹ thuật đặt ra trong dải thông ở tần số cắt ω_{at} , cụ thể như sau:

$$\text{với } n = 5 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} \right)^{2n} = 10^{0.1}$$

$$\text{mà} \quad \omega_{ap} = 2tg\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) \approx 0,3167689$$

$$\text{Vậy } \omega_{ac} = \frac{1}{(10^{0,1} - 1)^{\frac{1}{10}}} \cdot 0,3167689 \approx 0,3626207$$

* *Tính toán các cực của $H_0(s)$ và $H_n(s)$*

$$H_0 = (\omega_{ac})^n = (0,3626207)^5 = 0,0062699$$

$$\begin{aligned} s_{pk} &= \omega_{ac} \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)} \\ &= 0,3626207 \cdot e^{j\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=1 \quad \Rightarrow \quad s_{p1} &= 0,3626207 \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right)} \\ &= 0,3626207 \cdot e^{j\frac{3\pi}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=2 \quad \Rightarrow \quad s_{p2} &= 0,3626207 \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right)} \\ &= 0,3626207 \cdot e^{j\frac{4\pi}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=3 \quad \Rightarrow \quad s_{p3} &= 0,3626207 \cdot e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{10}\right)} \\ &= -0,3626207 \end{aligned}$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad s_{p4} = s_{p2}^*$$

$$k=5 \quad \Rightarrow \quad s_{p5} = s_{p1}^*$$

Ở đây $n = 5$ là số lẻ, ở tần số không chuẩn hoá (bởi ω_{ac}) ta áp dụng công thức (6.4.2.19):

$$\begin{aligned} H_n(s) &= \frac{1}{(s + \omega_{ac})^n} \cdot \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^n \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)s + \omega_{ac}^2 \right]} \\ &= \frac{1}{s + 0,3626207} \cdot \frac{0,0062699}{(s^2 + 0,2241119s + 0,1314938)(s^2 + 0,5867326s + 0,1314938)} \end{aligned}$$

Bước 4

Chuyển $H_n(s)$ thành $H(z)$ bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Cần chú ý rằng các tần số tương tự của bộ lọc tương tự đã được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s , vậy trong phương pháp biến đổi song tuyến ta cũng chuẩn hoá biến s bởi tần số lấy mẫu F_s như sau:

- không chuẩn hoá bởi F_s : $s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

- chuẩn hoá bởi F_s : $s = 2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

Vậy ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,3626207\right)} \cdot \frac{0,0062699}{\left[\left(2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,224119 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,1314938\right]} \cdot \frac{1}{\left[\left(2 \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,586326 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,1314938\right]}$$

Sau khi tính toán ta có $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 0,6930352z^{-1})} \cdot \frac{0,0001092 \cdot (1+z^{-1})^5}{(1 - 1,6894082z^{-1} + 0,8042417z^{-2})(1 - 1,4584491z^{-1} + 0,557569z^{-2})}$$

6.4.3. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ CHEBYSHEV

a) Mở đầu

Chúng ta đã biết rằng, đối với bộ lọc tương tự Butterworth, đáp ứng biên độ giảm đơn điệu cả ở dải thông và dải chắn. Chính vì vậy gần đúng Butterworth không cho ta kết quả tốt, tức là với cùng một chỉ tiêu kỹ thuật đã cho thì bậc của bộ lọc tương tự Butterworth sẽ lớn.

Để giảm bậc của bộ lọc tương tự, chúng ta sẽ sử dụng một gần đúng khác, đó là gần đúng Chebyshev, gần đúng này sẽ cho ta kết quả tốt hơn. Gần đúng Chebyshev có hai loại: loại 1 và loại 2.

Gần đúng Chebyshev loại 1: Đáp ứng biên độ gợn sóng ở dải thông và dải chắn (tương ứng ta gọi là bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1).

Gần đúng Chebyshev loại 2: Đáp ứng biên độ giảm đơn điệu ở dải thông và gợn sóng ở dải chắn (tương ứng ta gọi là bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2).

Để đặt cơ sở toán học cho gần đúng Chebyshev, chúng ta phải nghiên cứu đa thức Chebyshev.

b) Đa thức Chebyshev

Các đa thức Chebyshev được định nghĩa như sau:

$$\begin{cases} T_n(x) = \cos n\theta \\ x = \cos \theta \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (|x| \leq 1) \quad (6.4.3.1)$$

Xuất phát từ công thức lượng giác sau đây:

$$\underbrace{\cos[(n+1)\theta]}_{T_{n+1}(x)} + \underbrace{\cos[(n-1)\theta]}_{T_{n-1}(x)} = \underbrace{2\cos\theta}_x \underbrace{\cos n\theta}_{T_n(x)}$$

Ta có quan hệ:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

hoặc quan hệ:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (6.4.3.2)$$

Quan hệ (6.4.3.2) ở trên cho phép chúng ta biểu diễn đa thức Chebyshev $T_n(x)$ theo x bắt đầu từ hai đa thức đầu tiên $T_0(x)$ và $T_1(x)$ như sau:

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow T_0(x) = \cos(0, \theta) = \cos 0 = 1 \Rightarrow T_0(x) = 1 \\ n=1 &\Rightarrow T_1(x) = \cos(1, \theta) = \cos \theta = x \Rightarrow T_1(x) = x \\ n=2 &\Rightarrow T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) \Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1 = 2^1x^2 - x^0 \\ n=3 &\Rightarrow T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x \\ &= 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x = 2^2x^3 - 3x^1 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$T_n(x) = 2^{n-1} \left[x^n - \frac{n}{1!2^2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!2^4} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!2^6} x^{n-6} + \dots \right] \quad (6.4.3.3)$$

Ngược lại chúng ta cũng có thể biến x có số mũ bất kỳ dưới dạng đa thức Chebyshev như sau:

$$\begin{aligned} 1 &= T_0(x) \\ x &= T_1(x) \\ x^2 &= \frac{1}{2} [1 + T_2(x)] = \frac{1}{2} [T_0(x) + T_2(x)] \\ x^3 &= \frac{1}{4} [3x + T_3(x)] = \frac{1}{4} [3T_1(x) + T_3(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^4 &= \frac{1}{8} [3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)] \\
x^5 &= \frac{1}{16} [10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)] \\
&\dots\dots\dots \\
x^n &= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{k} T_{n-2k}(x)
\end{aligned} \tag{6.4.3.4}$$

ở đây:

$\left[\frac{n}{2}\right]$: phần nguyên của $\frac{n}{2}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Σ' : nghĩa là nếu tồn tại từ $T_0(x)$ thì từ này sẽ được chia hai (có nghĩa là $\frac{T_0(x)}{2}$).

Ví dụ 6.4.3.1

Hãy viết biểu thức của $T_3(x)$ và $T_4(x)$, sau đó vẽ đồ thị $T_3(x)$ và $T_4(x)$.

Giải

Theo biểu thức (6.4.3.3) ta có:

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\
T_4(x) &= 2^{4-1} \left[x^4 - \frac{4}{1!2^2} x^{4-2} + \frac{4(4-3)}{2!2^4} x^{4-4} \right] = 2^3 \left[x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \right] \\
&= 8x^4 - 8x^2 + 1
\end{aligned}$$

Đồ thị của $T_3(x)$ và $T_4(x)$ được vẽ trên hình 6.4.3.1.

Nhận xét

$$+) x = \cos \theta \Rightarrow |x| \leq 1$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos x \Rightarrow T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) \quad |x| \leq 1$$

+) Nếu x nằm ngoài khoảng $(-1, +1)$: $|x| > 1$ thì θ sẽ là số phức: $\theta \rightarrow j\theta$

$$\Rightarrow \arccos x = j\theta$$

$$\text{hoặc là : } x = \cos j\theta = \frac{1}{2}(e^{j(j\theta)} + e^{-j(j\theta)}) = \frac{1}{2}(e^{-\theta} + e^{\theta}) = \cosh \theta$$

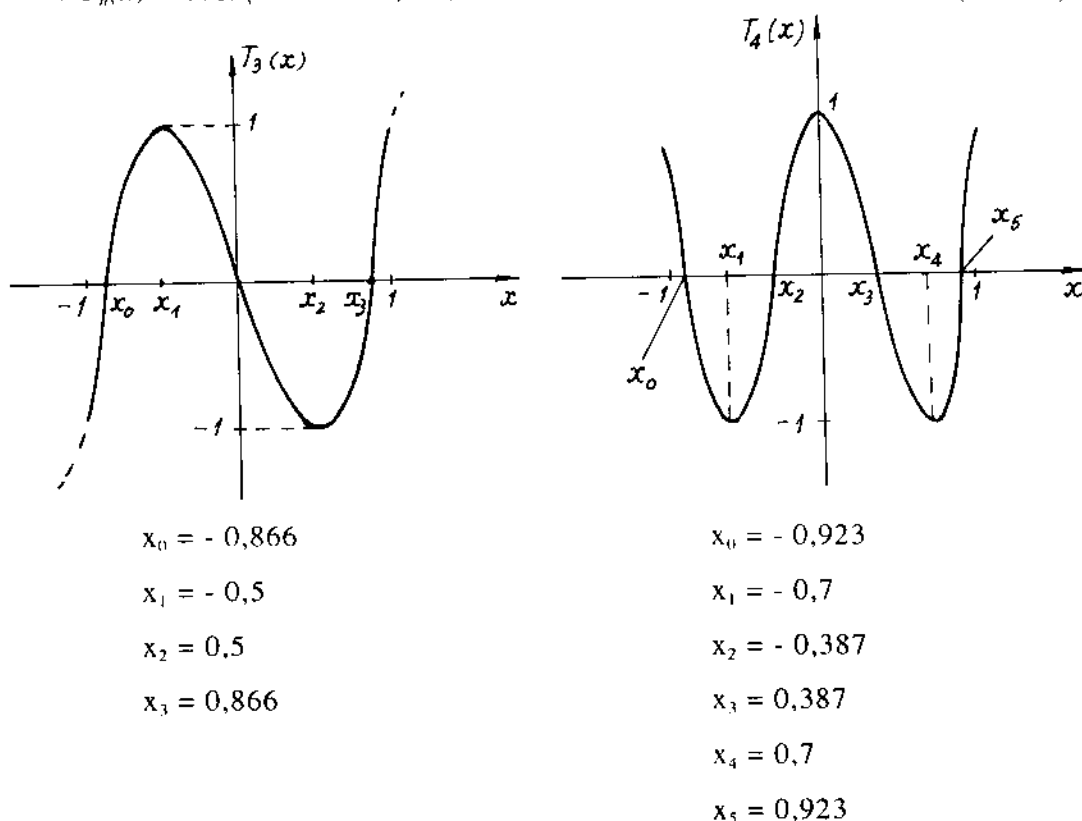
⇒ Vậy nếu $|x| > 1$ ta có:

$$x = \cosh \theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arccosh} x$$

$$\arccos x = j\theta = j \operatorname{arccosh} x$$

$$\Rightarrow T_n(x) = \cos(nj\theta) = \frac{1}{2}(e^{j(nj\theta)} + e^{-j(nj\theta)}) = \frac{1}{2}(e^{-n\theta} + e^{n\theta}) = \cosh(n\theta)$$

$$\Rightarrow T_n(x) = \cosh(n \operatorname{arccosh} \theta) \quad |x| > 1 \quad (6.4.3.5)$$



Hình 6.4.3.1.

c) Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1

Định nghĩa

Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 là bộ lọc có đáp ứng biên độ gợn sóng ở dải thông và giảm đơn điệu ở dải chắn.

Tức là về toán học ta có:

$$L(\omega_a^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_a) \quad (6.4.3.6)$$

ở đây:

ε là một tham số,

ω_a là tần số chuẩn hoá.

Vậy chúng ta có bình phương của đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 chuẩn hoá như sau:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_a)} \quad (6.4.3.7)$$

ở đây: n là bậc của bộ lọc (hoặc bậc của đa thức Chebyshev):

$$\Rightarrow I_n(\omega_a) = \begin{cases} \cos(n \arccos \omega_a) & \text{với } |\omega_a| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} \omega_a) & \text{với } |\omega_a| > 1 \end{cases}$$

ε là một tham số xác định biên độ của gợn sóng ở dải thông.

Ta biết rằng $T_n^2(\omega_a)$ dao động giữa không và một đối với $|\omega_a| \leq 1$ và tăng một cách đơn điệu đối với $|\omega_a| > 1$ điều này dẫn đến $|H_a(\omega_a)|^2$ sẽ gợn sóng giữa 1 và $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$ đối với $|\omega_a| \leq 1$ và giảm một cách đơn điệu đối với $|\omega_a| > 1$.

Ví dụ 6.4.3.2.

Hãy vẽ đồ thị đáp ứng biên độ $|H_a(\omega_a)|$ đối với $n = 3$ và $n = 4$.

Giải

Xem các ví dụ 6.4.3.1 ta thấy rằng:

Với $n = 3$:

$$\begin{aligned} \omega_a = 0 &\Rightarrow T_3(\omega_a) = 0 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)|^2 = 1 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1 \\ \omega_a = 0,5 &\Rightarrow T_3(\omega_a) = -1 \Rightarrow T_3^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \\ \omega_a = 1 &\Rightarrow T_3(\omega_a) = 1 \Rightarrow T_3^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_3^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

Với $n = 4$:

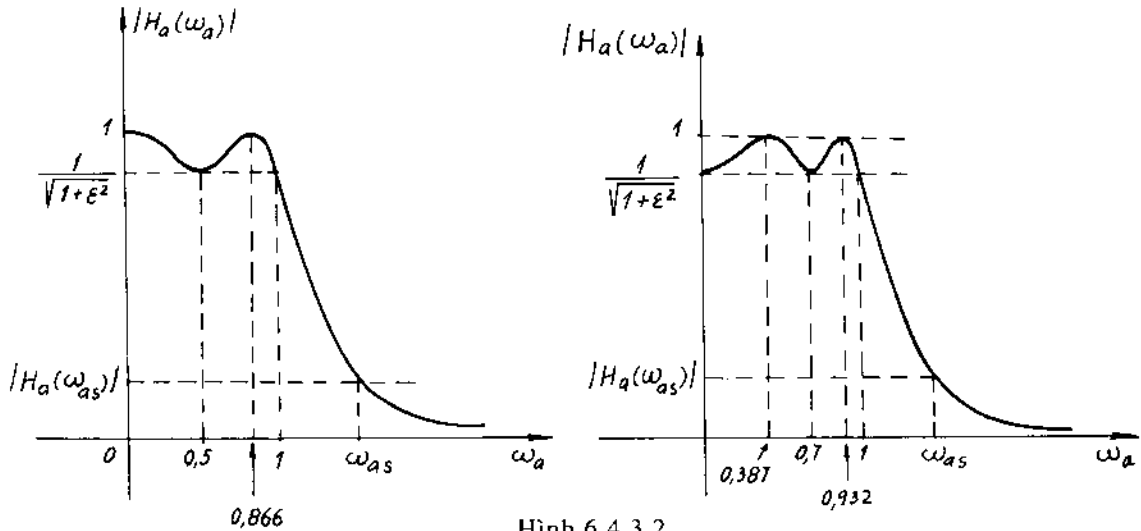
$$\begin{aligned} \omega_a = 0 &\Rightarrow T_4(\omega_a) = 1 \Rightarrow T_4^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_4^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \end{aligned}$$

$$\omega_a = 0,7 \Rightarrow T_4(\omega_a) = -1 \Rightarrow T_4^2(\omega_a) = 1 \Rightarrow 1 + \varepsilon^2 T_4^2(\omega_a) = 1 + \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\omega_a = 1 \Rightarrow T_4(\omega_a) = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

Hình 6.4.3.2 sẽ minh họa đáp ứng biên độ $|H_a(\omega_a)|$ trong hai trường hợp $n = 3$ và $n = 4$.



Hình 6.4.3.2.

*** Vị trí các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ của bộ lọc Chebyshev loại I**

Ta biết rằng với $s = j\omega_a$ thì $\omega_a = \frac{s}{j}$, vậy ta có $\omega_a^2 = -s^2$ và chúng ta có thể viết như sau:

$$\begin{aligned} L(\omega_a^2) &= L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) \\ &= 1 + \varepsilon^2 \left[\cosh\left(\operatorname{narccosh} \frac{s}{j}\right) \right]^2 = \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)} \text{ với } \omega_a > 1 \end{aligned}$$

và với khoảng $0 \leq \omega_a \leq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} L(\omega_a^2) &= L(-s^2) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 1 + \varepsilon^2 \left[\cos\left(\operatorname{narccos} \frac{s}{j}\right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{H_a(s).H_a(-s)} \text{ với } 0 \leq \omega_a \leq 1 \end{aligned} \quad (6.4.3.8)$$

Tức là:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{1}{L(-s^2)} \quad (6.4.3.9)$$

Vậy các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ chính là nghiệm của đa thức $L(-s^2) = 0$.

Giả sử gọi các nghiệm của $L(-s^2) = 0$ là s_{pk} , ta có:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$$

Chúng ta sẽ tính toán các điểm cực s_{pk} trong khoảng $0 \leq \omega_a \leq 1$ như sau:

$$\begin{aligned} L(-s_{pk}^2) &= 1 + \varepsilon^2 \left[\cos \left(n \arccos \frac{s_{pk}}{j} \right) \right]^2 = 0 \\ \Rightarrow \left[\cos \left(n \arccos \frac{s}{j} \right) \right]^2 &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \\ \Rightarrow \cos \left(n \arccos \frac{s}{j} \right) &= \pm \sqrt{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \pm \frac{j}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Thực hiện đổi biến số:

$$\begin{aligned} u_k + jv_k &= \arccos \frac{s_{pk}}{j} \\ \Rightarrow \cos(u_k + jv_k) &= \frac{s_{pk}}{j} = \frac{1}{j} (\sigma_k + j\omega_{ak}) \\ \Rightarrow \sigma_k + j\omega_{ak} &= j \cos(u_k + jv_k) \end{aligned}$$

Từ đây ta có:

$$\begin{aligned} n \arccos \frac{s_{pk}}{j} &= n(u_k + jv_k) \\ \Rightarrow \cos \left(n \arccos \frac{s_{pk}}{j} \right) &= \cos[n(u_k + jv_k)] = \pm \frac{j}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Vậy chúng ta chứng tỏ rằng $\cos[n(u_k + jv_k)]$ là số ảo.

Áp dụng công thức lượng giác:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ta có:

$$\cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \cos jnv_k - \sin nu_k \sin jnv_k = \frac{j}{\varepsilon}$$

$$\cos jnv_k = \frac{e^{j(jnv_k)} + e^{-j(jnv_k)}}{2} = \cosh nv_k$$

$$\sin jnv_k = \frac{e^{j(jnv_k)} - e^{-j(jnv_k)}}{2j} = j \sinh nv_k$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned} \cos(nu_k + jnv_k) &= \underbrace{\cos nu_k \cosh nv_k}_{=0} - \underbrace{j \sin nu_k \sinh nv_k}_{\pm \frac{j}{\varepsilon}} \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad \pm \frac{j}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Cuối cùng từ phương trình phức ta thu được hệ hai phương trình thực như sau:

$$\cos nu_k \cosh nv_k = 0 \quad (6.4.3.10)$$

$$\sin nu_k \sinh nv_k = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.4.3.11)$$

Từ phương trình (6.4.3.10) ta thấy rằng:

$$\text{Nếu: } \cos nu_k = 0 \Rightarrow nu_k = \frac{\pi}{2}(2k - 1)$$

$$\text{Vậy: } u_k = \frac{\pi}{2n}(2k - 1) \quad (6.4.3.12)$$

Từ phương trình (6.4.3.11) ta có:

$$\text{khi } \sin nu_k = \pm 1 \text{ thì } \sinh nv_k = \pm \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow nv_k = \operatorname{arcsinh}\left(\pm \frac{1}{\varepsilon}\right) = \pm \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{Vậy } v_k = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \quad (6.4.3.13)$$

Vậy với n và ε cố định thì v_k là cố định với mọi giá trị của k .

Từ:

$$\begin{aligned} s_{pk} &= \sigma_k + j\omega_{pk} = j\cos(u_k + jv_k) = j[\cos u_k \cos jv_k - \sin u_k \sin jv_k] \\ &= j[\cos u_k \cosh v_k - j \sin u_k \sinh v_k] \\ &= j\cos u_k \cosh v_k + \sin u_k \sinh v_k \end{aligned}$$

từ đây ta có:

$$\sigma_k = \sin u_k \sinh v_k \quad (6.4.3.14)$$

$$\omega_{pk} = \cos u_k \cosh v_k \quad (6.4.3.15)$$

Thay giá trị của u_k và v_k trong biểu thức (6.4.3.12) và (6.4.3.13) vào (6.4.3.14) và (6.4.3.15) ta có:

$$\sigma_k = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cdot \left[\pm \sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \right]$$

$$\omega_{ak} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cdot \cosh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Và cũng từ các biểu thức (6.4.3.14) và (6.4.3.15) ta có:

$$\sinh u_k = \frac{\sigma_k}{\sinh v_k}$$

$$\cosh u_k = \frac{\omega_{ak}}{\cosh v_k} \quad \text{với } k = 1, 2, \dots, 2n$$

Cuối cùng ta thu được phương trình sau đây:

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2 v_k} + \frac{\omega_{ak}^2}{\cosh^2 v_k} = 1 \quad (6.4.3.16)$$

Phương trình (6.4.3.16) là phương trình của hình ellipse có dạng sau đây:

$$\frac{\sigma^2}{R_a^2} + \frac{\omega_a^2}{R_b^2} = 1 \quad (6.4.3.17)$$

ở đây:

$$R_a = \sinh v_k$$

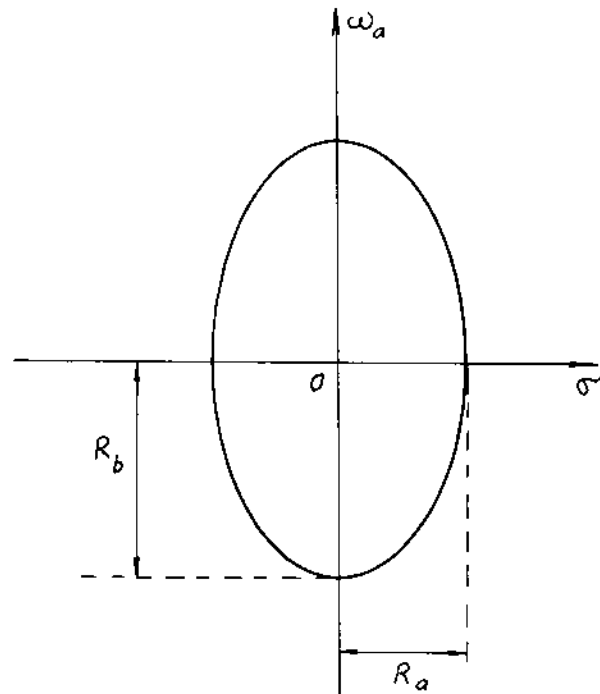
$$R_b = \cosh v_k$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}$$

(R_a và R_b là số dương nên chúng ta lấy giá trị dương của v_k).

Đồ thị mô tả đường ellipse của phương trình 6.4.3.17 được cho trên hình 6.4.3.3.

Từ đây ta thấy rằng các cặp (σ_k, ω_{ak}) sẽ nằm trên đường ellipse trên hình 6.4.3.3, tức là các điểm cực s_{pk} sẽ nằm trên đường



Hình 6.4.3.3.

ellipse có các bán kính là R_a và R_b , cụ thể ta có thể viết như sau:

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \sin u_k \sinh v_k = \sin u_k \cdot R_a \\ \omega_{ak} &= \cos u_k \cosh v_k = \cos u_k \cdot R_b \\ u_k &= \frac{\pi}{2n}(2k-1) \\ s_{rk} &= \sigma_k + j\omega_{ak}\end{aligned}\quad (6.4.3.18)$$

Nhận xét:

Chúng ta có thể viết R_a và R_b dưới một dạng khác như sau:

$$\begin{aligned}R_a &= \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2} \\ v_k &= \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \sinh n v_k = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{e^{nv_k} - e^{-nv_k}}{2}\end{aligned}$$

Ngoài ra chúng ta biết rằng:

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \\ \Rightarrow \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} &= \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) \\ \Rightarrow v_k &= \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right) = \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow e^{v_k} &= e^{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } e^{v_k} = \gamma \Rightarrow \ln e^{v_k} = \ln \gamma \Rightarrow \ln \gamma = v_k$$

$$\Rightarrow \ln \gamma = \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \gamma = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Vậy cuối cùng ta có:

$$\begin{aligned}R_a &= \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \\ R_b &= \cosh v_k = \frac{e^{v_k} + e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}\end{aligned}$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.4.3.19)$$

Ví dụ 6.4.3.3

Hãy tìm các điểm cực s_{pk} của $H_a(s).H_a(-s)$ đối với $n = 3$ và giả sử ε đã cho trước. Sau đó vẽ vị trí các điểm cực này trên đường ellipse.

Giải

Áp dụng biểu thức 6.4.3.18 ta thấy rằng đối với n và ε đã cho trước thì các bán kính R_a và R_b là hằng số.

Bây giờ chúng ta tiến hành tìm u_k :

Với $n = 3$ ta có u_k như sau:

$$u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \Big|_{n=3} = \frac{2k-1}{6} \pi$$

$$k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a1} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_2 = R_a; \quad \omega_{a2} = 0$$

$$k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \sigma_3 = \frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$k = 4 \Rightarrow u_4 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \sigma_4 = -\frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$k = 5 \Rightarrow u_5 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma_5 = -R_a; \quad \omega_{a5} = 0$$

$$k = 6 \Rightarrow u_6 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \sigma_6 = -\frac{1}{2} R_a; \quad \omega_{a6} = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

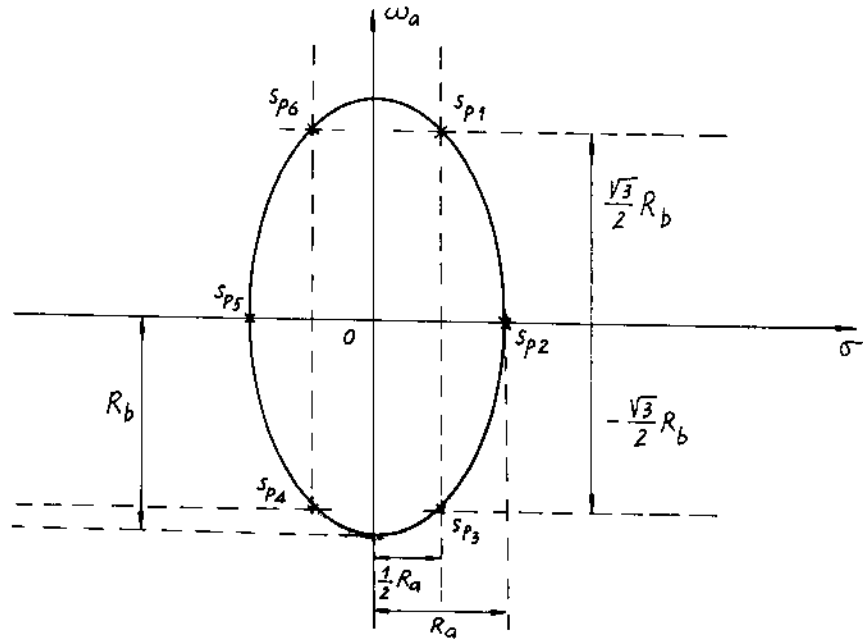
Vị trí của 6 điểm cực này được minh hoạ trên hình 6.4.3.4 .

Nhận xét:

Đối với các bộ lọc ổn định, các điểm cực của $H_a(s)$ phải nằm bên trái trục ảo (trong mặt phẳng s), vậy thì các điểm cực của $H_a(-s)$ sẽ nằm ở bên phải trục ảo. Chúng ta có thể thấy trong ví dụ 6.4.3.3 thì:

$s_{p,4}, s_{p,5}, s_{p,6}$ là các điểm cực của $H_a(s)$

$s_{p,1}, s_{p,2}, s_{p,3}$ là các điểm cực của $H_a(-s)$.



Hình 6.4.3.4.

* Xác định $H_a(s)$ và vị trí các điểm cực của $H_a(s)$

Để tìm hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc ổn định chúng ta có thể viết như sau:

$$H_a(s).H_a(-s) = \frac{B}{\prod_{k=1}^{2n} (s - s_{pk})}; \quad B \text{ là hằng số}$$

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak} = R_a \sin u_k + jR_b \cos u_k$$

Tương tự như ví dụ 6.4.3.3 ta thấy rằng:

Nếu $k = (n + 1) + 2n$ thì $\sigma_k < 0 \Rightarrow s_{pk}$ sẽ nằm bên trái trục ảo $\Rightarrow$ bộ lọc là ổn định.

Vậy đối với bộ lọc ổn định ta có hàm truyền đạt $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=n+1}^{2n} (s - s_{pk})}; \quad H_0 \text{ là hằng số}$$

$$\text{với } u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

Chúng ta có thể viết lại u_k và $H_a(s)$ bằng cách đổi biến số như sau:

$$e = k - n \Rightarrow k = e + n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_e &= \frac{2(e+n)-1}{2n} \pi = \left(\frac{2e-1}{2n} + 1 \right) \pi \\
\Rightarrow H_a(s) &= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})} \\
u_k &= \left(\frac{2k-1}{2n} + 1 \right) \pi
\end{aligned} \tag{6.4.3.20}$$

Vị trí các điểm cực của bộ lọc ổn định vẫn được xác định theo hai hệ biểu thức (6.4.3.18) và (6.4.3.19).

Hằng số H_0 có thể được chọn bằng cách sau đây:

Chúng ta có thể viết:

$$H_a(\omega_a) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (j\omega_a - s_{pk})}$$

Với n lẻ $\Rightarrow$ ở gốc tọa độ $|H_a(\omega_a)| = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left. \frac{|H_0|}{\left| \prod_{k=1}^n (j\omega_a - s_{pk}) \right|} \right|_{\omega_a=0} &= \frac{|H_0|}{\left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right|} = 1 \\
\Rightarrow |H_0| &= \left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right| \\
\Rightarrow H_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk})
\end{aligned} \tag{6.4.3.21}$$

Với n chẵn $\Rightarrow$ ở gốc tọa độ $H_a(\omega_a) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{|H_0|}{\left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right|} &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \\
\Rightarrow |H_0| &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \left| \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) \right| \\
\Rightarrow H_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \cdot \prod_{k=1}^n (-s_{pk})
\end{aligned} \tag{6.4.3.22}$$

Ví dụ 6.4.3.4.

Hãy tìm $H_a(s)$ của bộ lọc Chebyshev loại I tương ứng với $n = 3$. Hãy xác định vị trí các điểm cực của $H_a(s)$ trên mặt phẳng s .

Giải

Trước hết ta tìm các điểm cực s_{pk} ứng với $n = 3$ như sau:

Áp dụng biểu thức (6.4.3.20) ta có:

$$\begin{aligned} k=1 \Rightarrow u_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \sigma_1 &= \sin \frac{7\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a \\ &\Rightarrow \omega_{a1} = \cos \frac{7\pi}{6} \cdot R_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b \\ k=2 \Rightarrow u_2 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sigma_2 &= \sin \frac{3\pi}{2} \cdot R_a = -R_a \\ &\Rightarrow \omega_{a2} = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot R_b = 0 \\ k=3 \Rightarrow u_3 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \sigma_3 &= \sin \frac{11\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a \\ &\Rightarrow \omega_{a3} = \cos \frac{11\pi}{6} \cdot R_b = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \end{aligned}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} s_{p1} &= -\frac{1}{2} R_a - j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b; \quad s_{p2} = -R_a; \quad s_{p3} = -\frac{1}{2} R_a + j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \\ \Rightarrow s_{p1} &= s_{p3}^* \text{ hoặc } s_{p1}^* = s_{p3} \end{aligned}$$

Từ đây ta tìm được $H_a(s)$ như sau:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^3 (s - s_{pk})} = \frac{H_0}{(s + R_a) \left(s + \frac{1}{2} R_a + j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \right) \left(s + \frac{1}{2} R_a - j \frac{\sqrt{3}}{2} R_b \right)} \\ &= \frac{H_0}{(s + R_a) \left(s^2 + R_a s + \frac{1}{4} R_a^2 + \frac{3}{4} R_b^2 \right)} \end{aligned}$$

ở đây:

$$H_0 = \prod_{k=1}^3 (-s_{pk}) = R_a \left(\frac{1}{4} R_a^2 + \frac{3}{4} R_b^2 \right)$$

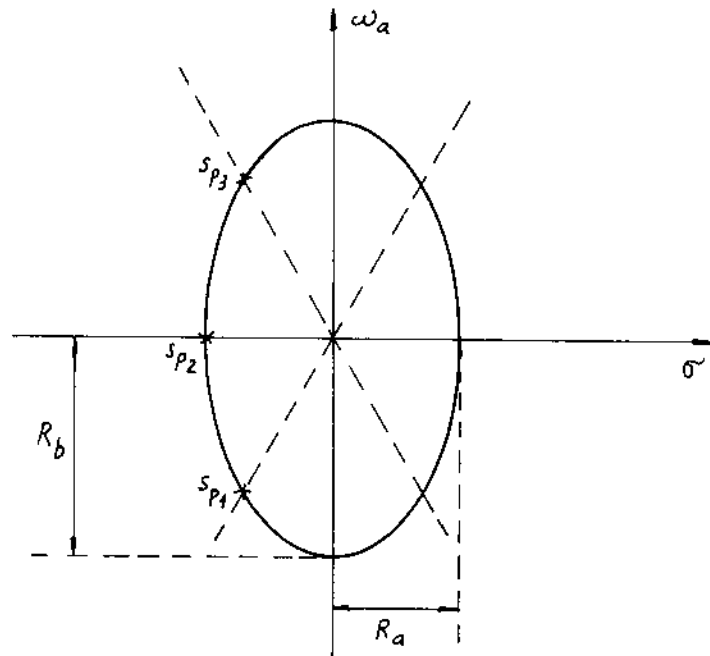
$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}} = (1 + \sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$$

Tất cả các điểm cực đều có: $\sigma_k < 0$, vậy tất cả các điểm cực này đều nằm bên trái trục ảo, dẫn đến bộ lọc Chebyshev loại I này là bộ lọc ổn định.

Vị trí các điểm cực s_{p1} , s_{p2} và s_{p3} của hàm truyền đạt $H_a(s)$ đối với bộ lọc này được minh hoạ trên hình 6.4.3.5.



Hình 6.4.3.5.

Nhận xét về H_0

+ Với n lẻ, ta có các điểm cực s_{pk} như sau:

$$s_{pk}; s_{p1}; \dots; s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}; \dots; s_{pn}$$

$$k = \frac{n+1}{2} \Rightarrow u_{\frac{n+1}{2}} = \left[\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right) - 1}{2n} + 1 \right] \cdot \pi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{n+1} = \sin \frac{3\pi}{2} . R_a = - R_a$$

$$\omega_{a, \frac{n+1}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} . R_b = 0$$

$$\Rightarrow \quad s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} = - R_a: \text{ thực và âm}$$

Tương tự ta thấy rằng:

$$s_{p1} = s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}^*$$

Theo biểu thức (6.4.3.21) ta có thể viết:

$$\begin{aligned} \dot{H}_0 &= \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = (-1)^n \prod_{k=1}^n s_{pk} = - \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ &= (-1) s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pk}|^2 \\ &= R_a \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pk}|^2 \end{aligned} \quad (6.4.3.23)$$

+ Với n chẵn ta có các điểm cực s_{pk} như sau:

$$s_{pk}; s_{p1}; \dots; s_{p\left(\frac{n}{2}-1\right)}; s_{p\frac{n}{2}}; s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}; \dots; s_{pn}$$

mà ta thấy rằng:

$$s_{p1} = s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\frac{n}{2}} = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}^*$$

Theo biểu thức (6.4.3.22) ta có thể viết:

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \prod_{k=1}^n (-s_{pk}) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} (-1)^n \prod_{k=1}^n s_{pk} \\ \Rightarrow \quad H_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |s_{pk}|^2 \end{aligned} \quad (6.4.3.24)$$

Nhận xét về $H_a(s)$

Theo biểu thức (6.4.3.20) ta có $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

Từ đây ta phân tích $H_a(s)$ với n lẻ và n chẵn như sau:

Với n lẻ ta có:

$$\begin{aligned} s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)} &= -R_0 = -\sinh v_k = -\frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \\ s_{p1} &= s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} = s_{p\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}^* \\ \Rightarrow H_a(s) &= \frac{H_0}{\left(s - s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{\frac{n+1}{2}-1} \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}) \cdot \prod_{k=\frac{n+1}{2}+1}^n (s - s_{pk})} \\ &= \frac{H_0}{\left(s - s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{\frac{n+1}{2}-1} \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}^*)} \\ &= \frac{H_0}{\left(s - s_{p\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)^{\frac{n+1}{2}-1} \prod_{k=1}^{\frac{n+1}{2}-1} (s - s_{pk}) \cdot (s - s_{pk}^*)} \end{aligned}$$

mà: $s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$, vậy ta có:

$$\begin{aligned} (s - s_{pk}) \cdot (s - s_{pk}^*) &= s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2) \\ \Rightarrow H_a(s) &= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2) \right]} \quad (6.4.3.25) \end{aligned}$$

Với n chẵn ta có:

$$\begin{aligned} s_{p1} &= s_{pn}^*; s_{p2} = s_{p(n-1)}^*; \dots; s_{p\frac{n}{2}} = s_{p\left(\frac{n}{2}+1\right)}^* \\ \Rightarrow H_a(s) &= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (s - s_{pk}) \cdot \prod_{k=\frac{n}{2}+1}^n (s - s_{pk})} \end{aligned}$$

$$= \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})(s - s_{pk}^*)}$$

$$\Rightarrow H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^n \left[s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2) \right]} \quad (6.4.3.26)$$

*** Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 ở tần số không chuẩn hoá**

Chúng ta biết rằng ở tần số ω_a chuẩn hoá bởi ω_{ap} theo biểu thức (6.4.3.7) ta có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_a)}$$

Vậy trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá ta có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega_{ap}}\right)} \quad (6.4.3.27)$$

ở đây:

$$T_n\left(\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right) = \begin{cases} \cos\left(\arccos\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right) & \text{với } \left|\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right| \leq 1 \\ \cosh\left(\operatorname{arccosh}\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right) & \text{với } \left|\frac{\omega}{\omega_{ap}}\right| > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 6.4.3.5

Hãy vẽ đồ thị đáp ứng biên độ $|H_a(\omega_a)|$ với $n = 3$ trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá.

Giải

Tương tự ví dụ 6.4.3.2 ta thấy rằng:

Với $n = 3$ ta có:

$$\omega_a = 0 \Rightarrow T_3\left(\frac{\omega_a}{\omega_{ap}}\right) = T_3(0) = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1$$

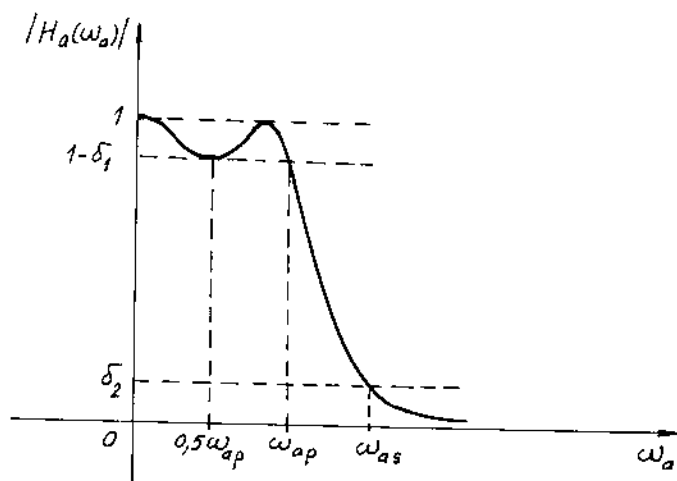
$$\omega_a = \frac{\omega_{ap}}{2} \Rightarrow T_3\left(\frac{\omega_{ap}}{2\omega_{ap}}\right) = T_3\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow T_3^2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$$

$$\omega = \omega_{ap} \Rightarrow T_3\left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ap}}\right) = T_3(1) = 1 \Rightarrow T_3^2(1) = 1$$

$$\Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

Hình 6.4.3.6 sẽ minh hoạ đáp ứng tần số $|H_a(\omega_a)|$ với $n = 3$ trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá.



Hình 6.4.3.6.

Nhận xét về $H_a(s)$ và H_a trong trường hợp tần số ω_a không chuẩn hoá

Chúng ta biết rằng ở tần số chuẩn hoá ta có:

$$\omega_a \rightarrow \frac{s}{j} \Rightarrow L(\omega_a^2) \rightarrow L(-s^2) = 1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right)$$

Vậy ở tần số không chuẩn hoá ta có:

$$\frac{\omega_a}{\omega_{ap}} \rightarrow \frac{s}{j\omega_{ap}} \Rightarrow L(\omega_a^2) \rightarrow L(-s^2) = 1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j\omega_{ap}}\right) = \frac{1}{H_a(s) \cdot H_a(-s)}$$

Dẫn đến các điểm cực của $H_a(s) \cdot H_a(-s)$ chính là nghiệm của $L(-s^2)$:

$$\Rightarrow L(-s_{pk}^2) = 1 + \epsilon^2 \left[\cos\left(\arccos \frac{s_{pk}}{j\omega_{ap}}\right) \right]^2$$

$$\text{và } u_k + jv_k = \arccos \frac{s_{pk}}{j\omega_{ap}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k}{\omega_{ap}} + j \frac{\omega_{ak}}{\omega_{ap}} = j \cos(u_k + jv_k)$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k}{\omega_{ap}} = \sin u_k \cdot \sinh v_k \Rightarrow \sigma_k = \omega_{ap} \sin u_k \sinh v_k$$

$$\frac{\omega_{ak}}{\omega_{ap}} = \cos u_k \cdot \cosh v_k \Rightarrow \omega_{ak} = \omega_{ap} \cos u_k \cosh v_k$$

$$\Rightarrow \sin u_k = \frac{\sigma_k}{\omega_{ap} \sinh v_k}$$

$$\cos u_k = \frac{\omega_{ak}}{\omega_{ap} \cosh v_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k^2}{(\omega_{ap} \sinh v_k)^2} + \frac{\omega_{ak}^2}{(\omega_{ap} \cosh v_k)^2} = 1$$

Vậy phương trình hình ellipse có dạng sau đây:

$$\frac{\sigma^2}{R_a'^2} + \frac{\omega_a^2}{R_b'^2} = 1 \quad (6.4.3.28)$$

ở đây:

$$R_a' = \omega_{ap} \sinh v_k = \omega_{ap} R_a$$

$$R_b' = \omega_{ap} \cosh v_k = \omega_{ap} R_b$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \frac{1}{\varepsilon}$$

Đồ thị hình ellipse này được cho trên hình 6.4.3.7.

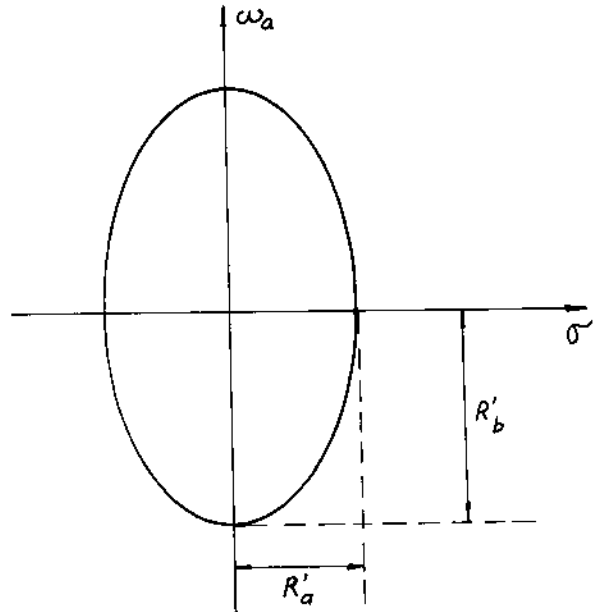
Cuối cùng ta có:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$$

$$\sigma_k = \sin u_k \cdot R_a'$$

$$\omega_{ak} = \cos u_k \cdot R_b'$$

$$R_a' = \omega_{ap} \cdot R_a = \omega_{ap} \cdot \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$



Hình 6.4.3.7.

$$R'_h = \omega_{ap} R_h = \omega_{ap} \cdot \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^n$$

Với n lẻ:

$$H_0 = R'_a \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pk}|^2$$

$$H_a(s) = \frac{H_0}{(s + R'_a) \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} [s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2)]} \quad (6.4.3.29)$$

Với n chẵn:

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} |s_{pk}|^2$$

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} [s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_{ak}^2)]} \quad (6.4.3.30)$$

* Tính toán bậc n của bộ lọc

Theo biểu thức (6.4.3.27), ở tần số không chuẩn hoá chúng ta đã có:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega_a}{\omega_{ap}} \right)}}$$

Ở dải thông ta có:

$$\omega_a = \omega_{ap} \Rightarrow T_n^2 \left(\frac{\omega_{ap}}{\omega_{ap}} \right) = T_n^2(1) = 1 \text{ với mọi } n.$$

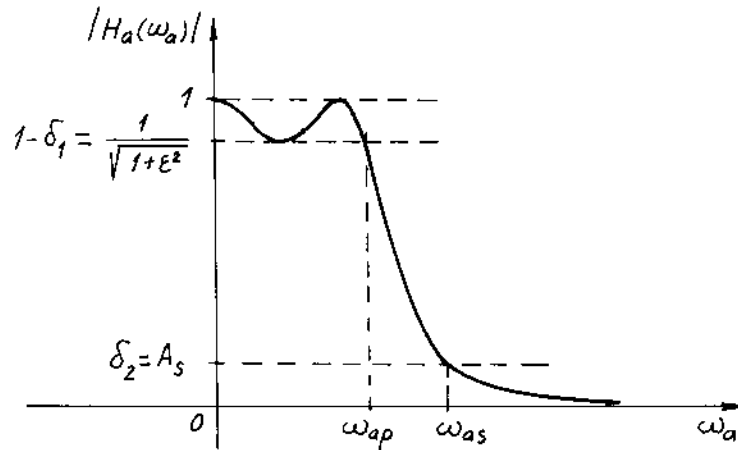
$$\Rightarrow |H_a(\omega_{ap})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{1}{1 - \delta_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Ở dải chặn ta có:

$$\begin{aligned}\omega_a = \omega_{as} &\Rightarrow |H_a(\omega_{as})| = A_s = \delta_2 \\ \Rightarrow |H_a(\omega_{as})| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)}} = A_s = \delta_2\end{aligned}$$

Đồ thị minh hoạ $|H_a(\omega_a)|$ cho trên hình 6.4.3.8.



Hình 6.4.3.8.

Từ đây tính toán tiếp tục ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)} &= \frac{1}{A_s} = \frac{1}{\delta_2} \\ \Rightarrow T_n \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right) &= \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\varepsilon}\end{aligned}$$

mà chúng ta biết rằng ở dải chặn $\omega_{as} > \omega_{ap} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} > 1$

$$\Rightarrow T_n \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right) = \cosh \left(\operatorname{narccos} \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \operatorname{narccosh} \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} = \operatorname{arccossh} \frac{\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}}{\frac{\operatorname{arccos} \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}}}{\omega_{ap}}}$$

mà ta có: $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln \left[\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \right]}{\ln \left[\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)^2 - 1} \right]} \quad (6.4.3.31)$$

Chú ý: Chúng ta chọn n là số nguyên.

Ví dụ 6.4.3.6

Hãy tìm bậc n của bộ lọc Chebyshev loại I với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\varepsilon = 0,5088471$$

$$A_s = \delta_2 = \frac{1}{10}$$

$$\omega_{ap} = 0,1\pi$$

$$\omega_{as} = 0,2\pi$$

Giải

$$\frac{1}{A_s^2} = 100; \quad \frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} = \frac{0,2\pi}{0,1\pi} = 2$$

Áp dụng biểu thức (6.4.3.31) ta có:

$$n = \frac{\ln \left[\frac{\sqrt{100-1}}{0,5088471} + \sqrt{\frac{100-1}{(0,5088471)^2} - 1} \right]}{\ln \left[2 + \sqrt{2^2 - 1} \right]} = 2,7834301$$

Chọn n là số nguyên, vậy $n = 3$.

d) Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2

*** Định nghĩa**

Bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 là bộ lọc có đáp ứng biên độ gợn sóng ở dải chặn và giảm đơn điệu ở dải thông (tức là ngược với bộ lọc loại 1).

Về mặt toán học ta có $L(\omega_a^2)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$L(\omega_a^2) = 1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)} \right]^2 \quad (6.4.3.32)$$

ở đây:

ω_{as} là tần số giới hạn dải chặn;

ε là tham số;

ω_a là tần số chuẩn hoá.

Từ đây ta có đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 như sau:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{L(\omega_a^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)} \right]^2} \quad (6.4.3.33)$$

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh} x) & |x| > 1 \end{cases}$$

Mà ε và ω_{as} là hằng số, vậy:

+) $T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)$ sẽ dao động giữa 0 và 1 với $\left|\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right| \leq 1$.

Tức là với $\left|\frac{\omega_a}{\omega_{as}}\right| \geq 1$ hoặc $|\omega_a| \geq |\omega_{as}|$.

$\Rightarrow T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)$ dao động giữa 0 và 1 trong dải chặn. Ngoài ra ta có thể viết:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)}{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} \quad (6.4.3.34)$$

$\Rightarrow$ ở dải chắn $|H_u(\omega_s)|^2$ sẽ dao động giữa 2 giá trị 0 và $\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})}$.

Chúng ta thường gọi độ gợn sóng ở dải chắn là δ_2 (hoặc A_s). Vậy:

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} = \delta_2^2 = A_s^2 \quad (6.4.3.35)$$

Chú ý rằng tại $\omega_u = \omega_{as}$ thì $T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right) = T_n^2(1) = 1$.

Vậy:

$$|H_u(\omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})}} = \delta_2$$

+) $T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right)$ sẽ tăng đơn điệu với $\left|\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right| > 1$, tức là với $\left|\frac{\omega_u}{\omega_{as}}\right| < 1$ hoặc $|\omega_u| < |\omega_{as}|$.

Vậy tại gốc tọa độ $\omega_u = 0$ ta có:

$$T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right)\bigg|_{\omega_u=0} = T_n(\infty) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega_u \rightarrow 0} |H_u(\omega_s)|^2 = \lim_{\omega_u \rightarrow \infty} \frac{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right)}{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} = 1$$

Tức là tại gốc tọa độ $\omega_u = 0$ thì:

$$|H_u(\omega_s)|\big|_{\omega_u=0} = 1$$

Tại $\omega_u = 1$ ta có:

$$|H_u(\omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_u)}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_u}\right)} \right]^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow |H_u(\omega_s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

Ví dụ 6.4.3.7

Hãy vẽ đồ thị $|H_u(\omega_s)|$ ứng với bậc của bộ lọc $n = 3$.

Giải

Ở dải thông:

$$\omega_a = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1$$

$$\omega_a = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

Ở dải chắn:

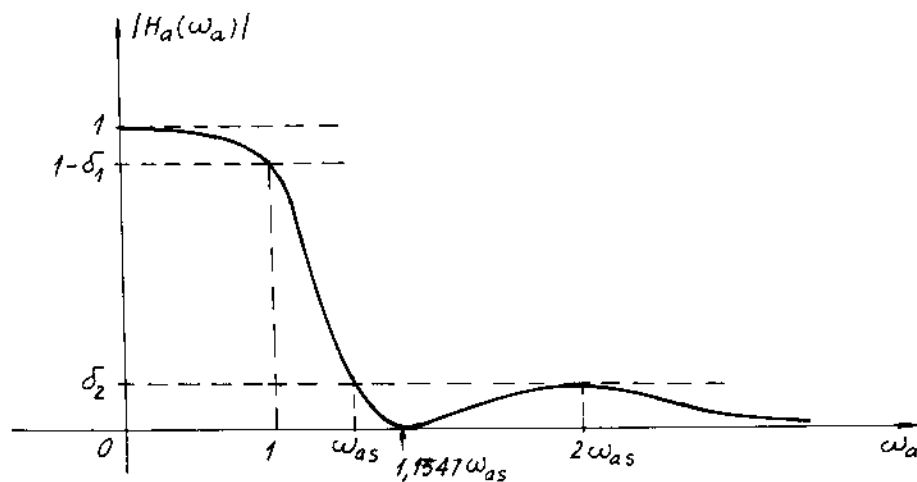
$$\omega_a = \omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,866} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,866 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

$$\omega_a = 2\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,5 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

$$\omega_a = \infty \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ cho trên hình 6.4.3.9.



Hình 6.4.3.9.

Ví dụ 6.4.3.8

Hãy vẽ đồ thị $|H_a(\omega_a)|$ ứng với bậc của bộ lọc $n = 4$.

Giải

Ở dải thông:

$$\omega_a = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 1$$

$$\omega_a = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 - \delta_1$$

Ở dải chặn:

Ta biết rằng $T_4^2(x) = 1$ nếu $x = 1$; $x = 0,707$ và $x = 0$.

Vậy:

$$\omega_a = \omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 1 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,707} = 1,414\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,707 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

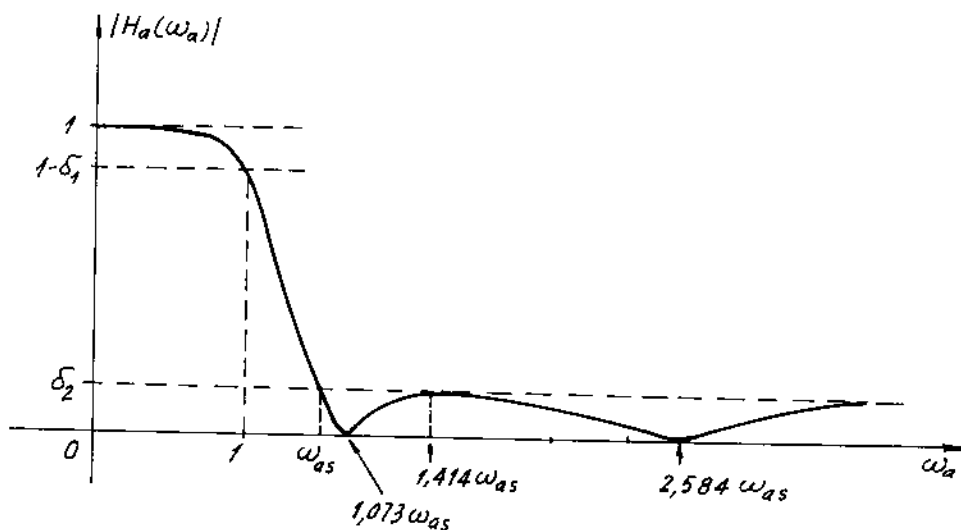
$$\omega_a = \infty \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = \delta_2$$

và $T_4^2(x) = 0$ nếu $x = 0,387$ và $x = 0,932$.

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,387} = 2,584\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,387 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

$$\omega_a = \frac{\omega_{as}}{0,932} = 1,073\omega_{as} \Rightarrow \frac{\omega_{as}}{\omega_a} = 0,932 \Rightarrow |H_a(\omega_a)| = 0$$

Hình 6.4.3.10 sẽ minh hoạ đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$.



Hình 6.4.3.10.

* Các điểm cực và các điểm không

Chúng ta đã có:

$$|H_a(\omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)} \right]^2} = \frac{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right)}{T_n^2\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_a}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} = \frac{1}{L(\omega_a^2)}$$

thay: $\omega_a \rightarrow \frac{s}{j}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_a(s).H_a(-s) &= \frac{1}{L(-s^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_n(\omega_{as})}{T_n\left(\frac{\omega_{as}}{\frac{s}{j}}\right)} \right]^2} \\ &= \frac{T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right)}{T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})} \end{aligned} \quad (6.4.3.36)$$

Vậy ta thấy rằng $H_a(s).H_a(-s)$ của bộ lọc Chebyshev loại 2 chứa tất cả các điểm không và điểm cực.

Các điểm không là các nghiệm của phương trình sau:

$$T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) = 0$$

Các điểm cực là các nghiệm của phương trình sau:

$$T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) = 0$$

+ Xét các điểm không:

Chúng ta phải giải phương trình sau đây:

$$T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) = 0$$

Theo định nghĩa của đa thức Chebyshev ta có:

$$T_n(x) = \cos n\theta$$

$$x = \cos\theta \quad -1 \leq x \leq 1$$

và:

$$T_n(x) = \cosh n\theta$$

$$x = \cosh\theta \quad x < -1 \text{ và } x > 1$$

Chúng ta có thể tính trong khoảng $-1 \leq x \leq 1$ hoặc trong khoảng $x < -1$ và $x > 1$, ta sẽ thu được kết quả như nhau. Giả sử ta tính trong khoảng $-1 \leq x \leq 1$:

$$T_n(x) = \cos n\theta = 0 \Rightarrow n\theta = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\cos\theta = x \Rightarrow x = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$$

mà $x = j \frac{\omega_{as}}{s}$.

Gọi các điểm không là s_{or}

$$\Rightarrow j \frac{\omega_{as}}{s_{or}} = \cos \frac{2r-1}{2n}\pi$$

$$\Rightarrow s_{or} = j \frac{\omega_{as}}{\cos \frac{2r-1}{2n}\pi}, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (6.4.3.37)$$

Vậy các điểm không s_{or} sẽ nằm trên trục ảo.

+ Xét các điểm cực:

Chúng ta phải giải phương trình sau đây:

$$T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s}\right) + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) = 0$$

Từ đây có thể viết:

$$T_n^2\left(\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right) = -\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right) = \pm j\varepsilon T_n(\omega_{as}) = \cos\left(\arccos \frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right)$$

mà:

$$s_{pk} = \sigma_k + j\omega_{ak}$$

Vậy để lợi dụng kết quả của bộ lọc Chebyshev loại 1, chúng ta đặt:

$$\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}} = j \frac{\omega_{as}}{\sigma_k + j\omega_{ak}} = \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}$$

Từ đây có thể viết:

$$j^2 \frac{\omega_{as}}{\sigma_k + j\omega_{ak}} = \alpha_k + j\beta_k$$

$$\Rightarrow \sigma_k + j\omega_{ak} = - \frac{\omega_{as}}{\alpha_k + j\beta_k} = - \frac{\omega_{as}(\alpha_k - j\beta_k)}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

Vậy quan hệ giữa σ_k và ω_{ak} với α_k và β_k như sau:

$$\sigma_k = - \frac{\omega_{as}\alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

$$\omega_{ak} = \frac{\omega_{as}\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (6.4.3.38)$$

Vậy ta có:

$$T_n\left(\frac{j\omega_{as}}{s_{pk}}\right) = \cos\left(n \arccos \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}\right) = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

Đổi biến số:

$$u_k + jv_k = \arccos \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}$$

$$\Rightarrow \cos(u_k + jv_k) = \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}$$

$$\Rightarrow \alpha_k + j\beta_k = j\cos(u_k + jv_k)$$

$$\Rightarrow \cos\left(n \arccos \frac{\alpha_k + j\beta_k}{j}\right) = \cos[n(u_k + jv_k)] = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$\varepsilon T_n(\omega_{as})$ là thực $\Rightarrow \cos[n(u_k + jv_k)]$ là ảo.

Cũng giống trường hợp của bộ lọc Chebyshev loại 1 ta có:

$$\cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \cos jnv_k - \sin nu_k \sin jnv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

mà:

$$\cos jnv_k = \cosh nv_k$$

$$\sin jnv_k = j \sinh nv_k$$

$$\Rightarrow \cos(nu_k + jnv_k) = \cos nu_k \cosh nv_k - j \sin nu_k \sinh nv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

Từ đây ta có:

$$\cos nu_k \cosh nv_k = 0$$

$$\sin nu_k \sinh nv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow \text{ khi } \cos nu_k = 0 \Rightarrow nu_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \Rightarrow u_k = \frac{\pi}{2n}(2k-1)$$

$$\sin nu_k = \pm 1 \Rightarrow \sinh nv_k = \pm \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow nv_k = \operatorname{arsinh}[\pm \varepsilon T_n(\omega_{as})] = \pm \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\Rightarrow v_k = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as})$$

mà:

$$\begin{aligned} \alpha_k + j\beta_k &= j \cos(u_k + jv_k) = j[\cos u_k \cosh v_k - \sin u_k \sinh v_k] \\ &= j \cos u_k \cosh v_k + \sin u_k \sinh v_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \sin u_k \sinh v_k$$

$$\beta_k = \cos u_k \cosh v_k$$

mà:

$$\alpha_k = \sin \frac{2k-1}{2n} \pi \left[\sinh \left(\pm \frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \right) \right]$$

$$= \sin \frac{2k-1}{2n} \pi \left[\pm \sinh \left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \right) \right]$$

$$\beta_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \cos \left(\frac{1}{n} \operatorname{arsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \right)$$

$$\Rightarrow \sin u_k = \frac{\alpha_k}{\sinh v_k}; \quad \cos u_k = \frac{\beta_k}{\cosh v_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_k^2}{\sinh^2 v_k} + \frac{\beta_k^2}{\cosh^2 v_k} = 1$$

Vậy cặp (α_k, β_k) sẽ nằm trên đường ellipse có dạng sau đây:

$$\frac{\alpha^2}{R_a} + \frac{\beta^2}{R_b} = 1 \quad (6.4.3.39)$$

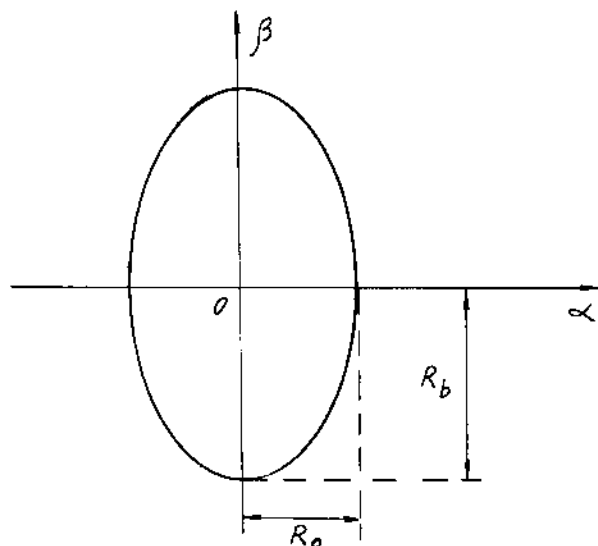
ở đây:

$$R_a = \sinh v_k$$

$$R_b = \cosh v_k$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \epsilon T_n(\omega_{as})$$

Dạng của hình ellipse này cho trên hình 6.4.3.11.



Hình 6.4.3.11.

Nhận xét

Ta có thể viết R_a và R_b dưới dạng sau đây:

$$R_a = \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2}$$

$$R_b = \cosh v_k = \frac{e^{v_k} + e^{-v_k}}{2}$$

mà:

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \epsilon T_n(\omega_{as})$$

$$\operatorname{arcsinh} \epsilon T_n(\omega_{as}) = \ln \left[\epsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]$$

$$\Rightarrow v_k = \frac{1}{n} \ln \left[\epsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]$$

$$v_k = \ln \left[\epsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\epsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Đặt:

$$\ln \gamma = v_k = \ln \left[\varepsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \gamma = e^{v_k} = \left[\varepsilon T_n(\omega_{as}) + \sqrt{\varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) + 1} \right]^{\frac{1}{n}}$$

Vậy ta có:

$$R_a = \sinh v_k = \frac{e^{v_k} - e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \cosh v_k = \frac{e^{v_k} + e^{-v_k}}{2} = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

mà ta biết rằng:

$$\delta_2^2 = A_s^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as})}$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{A_s^2} - 1 \Rightarrow \varepsilon T_n(\omega_{as}) = \sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1}$$

$$\Rightarrow \gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{A_s^2} - 1} + \frac{1}{A_s} \right)^{\frac{1}{n}}$$

hoặc:

$$\gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1} + \frac{1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Tổng kết lại ta có: cặp (α_k, β_k) nằm trên đường ellipse có bán kính là R_a và R_b như sau:

$$R_a = \sinh v_k$$

$$R_b = \cosh v_k$$

$$v_k = \frac{1}{n} \operatorname{arcsinh} \varepsilon T_n(\omega_{as}) \quad (6.4.3.40)$$

hoặc là:

$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}$$

$$R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1} + \frac{1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6.4.3.41)$$

Ví dụ 6.4.3.9

Hãy tìm các điểm cực của $H_a(s).H_a(-s)$ của bộ lọc tương tự Chebyshev loại 2 khi biết bậc của bộ lọc $n = 3$.

Giải

$$\alpha_k = \sin u_k \sinh v_k = \sin u_k . R_a$$

$$\beta_k = \cos u_k \cosh v_k = \cos u_k . R_b$$

$$\sigma_k = - \frac{\omega_{as} \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}; \quad \omega_{ak} = \frac{\omega_{as} \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$$

Ta thấy rằng với n, ε và $T_n(\omega_{as})$ cố định ta cũng sẽ có R_a và R_b là cố định.

$$u_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \Big|_{n=3} = \frac{2k-1}{6} \pi$$

$$k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha_1 = \sin \frac{\pi}{6} . R_a = \frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_1 = \cos \frac{\pi}{6} . R_b = \frac{\sqrt{3}}{2} . R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = - \frac{\omega_{as} \cdot \frac{1}{2} R_a}{\left(\frac{1}{2} R_a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b \right)^2} = - \frac{2\omega_{as} . R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{a1} = \frac{\omega_{as} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R_b}{\left(\frac{1}{2} R_a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b \right)^2} = \frac{2\sqrt{3}\omega_{as} . R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_2 = \sin \frac{\pi}{2} . R_a = R_a$$

$$\beta_2 = \cos \frac{\pi}{2} . R_b = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = - \frac{\omega_{as} . R_a}{R_a^2 + 0} = - \frac{\omega_{as}}{R_a}$$

$$\omega_{a2} = \frac{\omega_{as} \cdot 0}{R_a^2 + 0} = 0$$

$$k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha_3 = \sin \frac{5\pi}{6} \cdot R_a = \frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_3 = \cos \frac{5\pi}{6} \cdot R_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_3 = -\frac{\omega_{as} \cdot \frac{1}{2} R_a}{\left(\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{as} = \frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)}{\left(\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\sqrt{3}\omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$k = 4 \Rightarrow u_4 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \alpha_4 = \sin \frac{7\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_4 = \cos \frac{7\pi}{6} \cdot R_b = -\frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_4 = -\frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) R_a}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{a4} = \frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) R_b}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = -\frac{2\sqrt{3}\omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$k = 5 \Rightarrow u_5 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha_5 = \sin \frac{3\pi}{2} \cdot R_a = -R_a$$

$$\beta_5 = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot R_b = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_5 = -\frac{\omega_{as} \cdot (-R_a)}{(-R_a)^2 + 0} = \frac{\omega_{as}}{R_a}$$

$$\omega_{a5} = 0$$

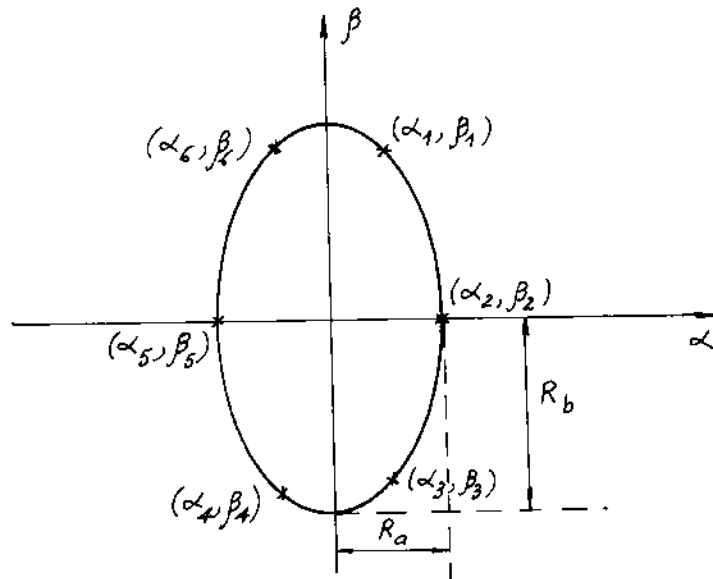
$$k = 6 \Rightarrow u_6 = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \alpha_6 = \sin \frac{11\pi}{6} \cdot R_a = -\frac{1}{2} R_a$$

$$\beta_6 = \cos \frac{11\pi}{6} \cdot R_b = \frac{\sqrt{3}}{2} R_b$$

$$\Rightarrow \sigma_6 = -\frac{\omega_{as} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) R_a}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\omega_{as} \cdot R_a}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

$$\omega_{a6} = \frac{\omega_{as} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} R_b}{\left(-\frac{1}{2} R_a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_b\right)^2} = \frac{2\sqrt{3} \omega_{as} \cdot R_b}{R_a^2 + 3R_b^2}$$

Vị trí của các điểm cực này được minh hoạ trên hình 6.4.3.12.



Hình 6.4.3.12.

Ví dụ 6.4.3.10

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số như sau:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \frac{1}{\sqrt{10^{0,1}}} \text{ ở dải thông}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \text{ ở dải chắn}$$

$$\omega_p = 0,1\pi; \quad \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số từ bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Chúng ta có 4 bước chính để tổng hợp bộ lọc số từ bộ lọc tương tự như sau:

Bước 1. Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật

Chúng ta có 4 chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số như đầu bài đã cho như sau:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0.1}}} \text{ ở dải thông}$$

$$\Rightarrow (1 - \delta_1) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{10^{0.1}}}$$

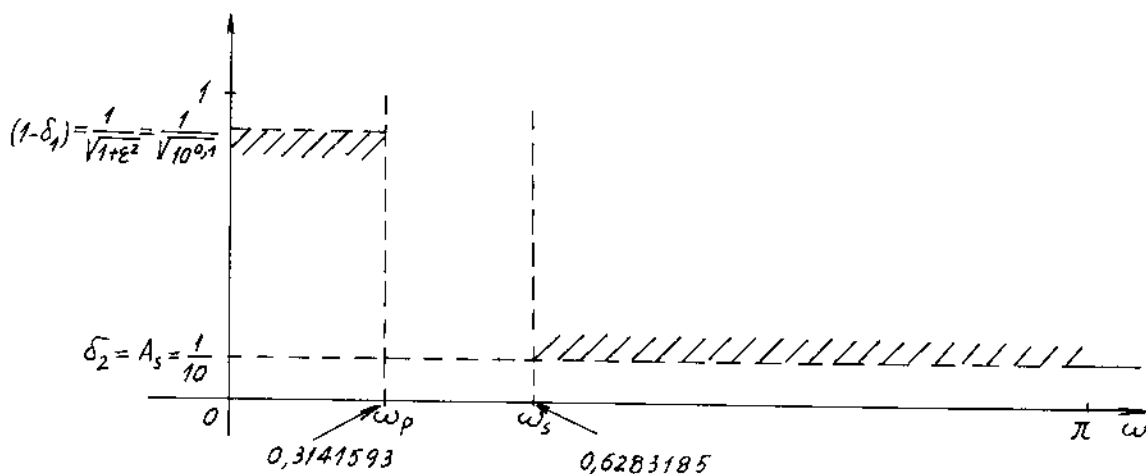
$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10} \text{ ở dải chắn}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = A_s = \frac{1}{10}$$

$$\omega_p = 0,1\pi \approx 0,3141593$$

$$\omega_s = 0,2\pi \approx 0,6283285$$

Minh hoạ đáp ứng biên độ của bộ lọc số trên hình 6.4.3.13.



Hình 6.4.3.13.

Bước 2. Xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự

Theo phương pháp biến đổi song tuyến thì từ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số chuyển sang các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự, về độ gợn sóng ở dải thông và dải chắn không có gì thay đổi, nhưng về tần số giới hạn dải thông và dải chắn thì có sự thay đổi, cụ thể như sau:

$$|H_a(\omega_a)| \geq \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \text{ ở dải thông}$$

$$|H_a(\omega_a)| \leq \frac{1}{10} \text{ ở dải chắn}$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

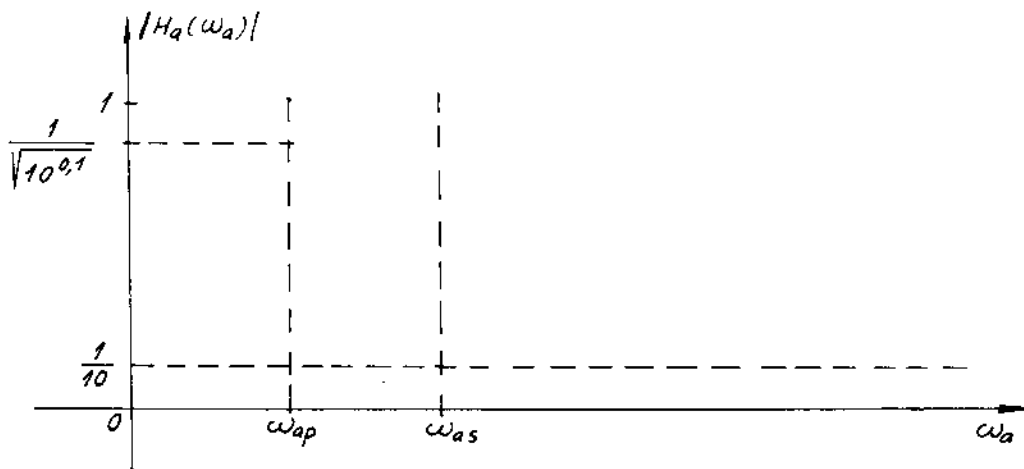
$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

Từ các giá trị của $\omega_p = 0,1\pi$ và $\omega_s = 0,2\pi$, tính theo thang chuẩn hoá ta có các giá trị của ω_{ap} và ω_{as} như sau:

$$\omega_{ap} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,1\pi}{2}\right) \approx 0,3167689$$

$$\omega_{as} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,2\pi}{2}\right) \approx 0,6498394$$

Đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự được minh hoạ trên hình 6.4.3.14.



Hình 6.4.3.14.

Bước 3

Tổng hợp bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1.

- Tính giá trị ε :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{1}{10^{0,1}}} \Rightarrow \varepsilon = 0,5088471$$

- Tính bậc của bộ lọc n :

$$n = \frac{\ln \left[\frac{\sqrt{\frac{1}{\delta_2^2} - 1}}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \right]}{\ln \left[\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ap}} \right)^2 - 1} \right]}$$

Thay các giá trị của ε , δ_2 , ω_{ap} và ω_{as} ở trên vào biểu thức tính n , ta tính được:

$$n \approx 2,5006328$$

Vậy ta chọn: $n = 3$

- Tìm các điểm cực của $H_a(s)$

Trong trường hợp $n = 3 \Rightarrow n$ là số lẻ.

Trước hết chúng ta tìm R_a và R_b .

$$R_a = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \quad \text{và} \quad R_b = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$$

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{10^{0,1}}}{0,5088471} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 1,6096098$$

$$\Rightarrow \gamma^{-1} = 0,6212685$$

$$\Rightarrow R_a = 0,4941707$$

$$R_b = 1,1154392$$

Từ đây ta tìm R'_a và R'_b :

$$R'_a = \omega_{ap} \cdot R_a = 0,1565379 \cdot 0,4941707 = 0,0782689$$

$$R'_b = \omega_{ap} \cdot R_b = 0,1565379 \cdot 1,1154392 = 0,3533364$$

$$n = 3 \Rightarrow k = 1 \div 3$$

$$k = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = -\frac{1}{2} \cdot R'_a = -0,078269$$

$$\omega_{a1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} R'_b = -0,3059983$$

$$s_{p1} = -0,078269 - j0,3059983$$

$$k = 2 \Rightarrow u_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = -R'_a = -0,1565379$$

$$\omega_{a2} = 0$$

$$s_{p2} = -0,1565379$$

$$k = 3 \Rightarrow u_3 = \frac{11\pi}{6}$$

$$s_{p3} = s_{p1}^* = -0,078269 + j0,3059983$$

* Tìm hệ số H_0

$n = 3$: là số lẻ, vậy H_0 được tính như sau:

$$\begin{aligned} H_0 &= R'_a \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} |s_{pl}|^2 \\ &= R'_a |s_{p1}|^2 = 0,1565379 |s_{p1}|^2 \\ &\approx 0,01562 \end{aligned}$$

Cuối cùng ta có $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{k=1}^3 (s - s_{pk})}$$

$n = 3$ là số lẻ, vậy theo biểu thức (6.4.3.25) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{H_0}{(s + R'_a) \cdot [s^2 - 2\sigma_1 s + (\sigma_1^2 + \omega_{a1}^2)]} \\ &= \frac{0,01562}{(s + 0,1565379) \cdot [s^2 + 0,156538s + 0,006126 + 0,093635]} \\ &= \frac{0,01562}{(s + 0,1565379) \cdot (s^2 + 0,156538s + 0,09961)} \end{aligned}$$

Bước 4.

Thực hiện biến đổi song tuyến để tìm $H(z)$.

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Chuẩn hoá biến s bởi tần số lấy mẫu F_s ta có:

$$s = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Vậy ta có hàm truyền đạt $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{0,1562}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0,1565379\right) \left[\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 0,156538 \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + 0,09961\right]}$$

Sau khi tính toán ta có kết quả sau đây:

$$H(z) = 0,0030012 \cdot \frac{(1+z^{-1})^3}{(1-0,8548248z^{-1})(1-1,5751076z^{-1}+0,7104914z^{-2})}$$

6.4.4. BỘ LỌC TƯƠNG TỰ CAUER (HOẶC BỘ LỌC TƯƠNG TỰ ELLIPTIQUE)

a) Định nghĩa

Bộ lọc Cauer là bộ lọc có đáp ứng biên độ gợn sóng ở cả dải thông và ở cả dải chắn.

Về mặt toán học, hàm $L(\omega_a^2)$ có dạng sau đây:

$$L(\omega_a^2) = 1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a) \quad (6.4.4.1)$$

mà:

$$\begin{aligned} |H_a(\omega_a)|^2 &= \frac{1}{L(\omega_a^2)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a)} \\ |H_a(\omega_a)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a)}} \end{aligned} \quad (6.4.4.2)$$

ε là tham số liên quan đến δ_1 .

Nếu tính theo dB ta có:

$$\begin{aligned} LO(\omega_a) &= 20 \lg \frac{1}{|H_a(\omega_a)|} = 10 \lg \left[\frac{1}{|H_a(\omega_a)|} \right]^2 \\ &= 10 \lg L(\omega_a^2) \end{aligned}$$

Bây giờ chúng ta đặt:

$$LO_p = LO(\omega_{ap}) = 10 \lg L(\omega_{ap}^2)$$

Điều kiện của hàm $F_n(\omega_a)$ tại tần số $\omega_a = \omega_{ap}$ là:

$$F_n(\omega_a) \Big|_{\omega=\omega_{ap}} = 1$$

$$\Rightarrow L(\omega_{ap}^2) = 1 + \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \left| H_a(\omega_{ap}) \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$\Rightarrow LO_p = 10 \lg(1 + \varepsilon^2) \text{ hay } (1 + \varepsilon^2)^{10} = 10^{LO_p}$$

$$\Rightarrow 1 + \varepsilon^2 = 10^{0,1 LO_p} \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{0,1 LO_p} - 1$$

Ở tần số $\omega_a = \omega_{as}$:

$$\left| H_a(\omega_a) \right| = A_s \equiv \delta_2$$

Đặt:

$$LO_s = LO(\omega_{as}) = 10 \lg L(\omega_{as}^2) = 10 \lg \left[\frac{1}{\left| H_a(\omega_a) \right|} \right]^2$$

$$= 10 \lg \frac{1}{A_s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_s^2} = 10^{0,1 LO_s}$$

$$L(\omega_{as}^2) = 1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_{as})$$

$$10 \lg L(\omega_{as}^2) = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_{as})]$$

$$= 10 \lg \frac{1}{A_s^2}$$

hoặc là:

$$1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{A_s^2}$$

$$\Rightarrow F_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{A_s^2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow F_n^2(\omega_{as}) = \frac{1}{10^{0,1 LO_p} - 1} (10^{0,1 LO_s} - 1) \equiv L^2$$

Nếu chúng ta đặt:

ở tần số:

$$\omega_a = \omega_{a0i} : F_n(\omega_a) = 0$$

$$\omega_a = \omega_{a\infty i} : F_n(\omega_a) = \infty$$

với n lẻ: $i = 1 + \frac{n-1}{2}$

với n chẵn: $i = 1 + \frac{n}{2}$

với n lẻ ở gốc tọa độ ($\omega_a = 0$): $F_n(\omega_a) = 0$

với n chẵn ở gốc tọa độ ($\omega_a = 0$): $F_n(\omega_a) = 1$.

Ví dụ 6.4.4.1

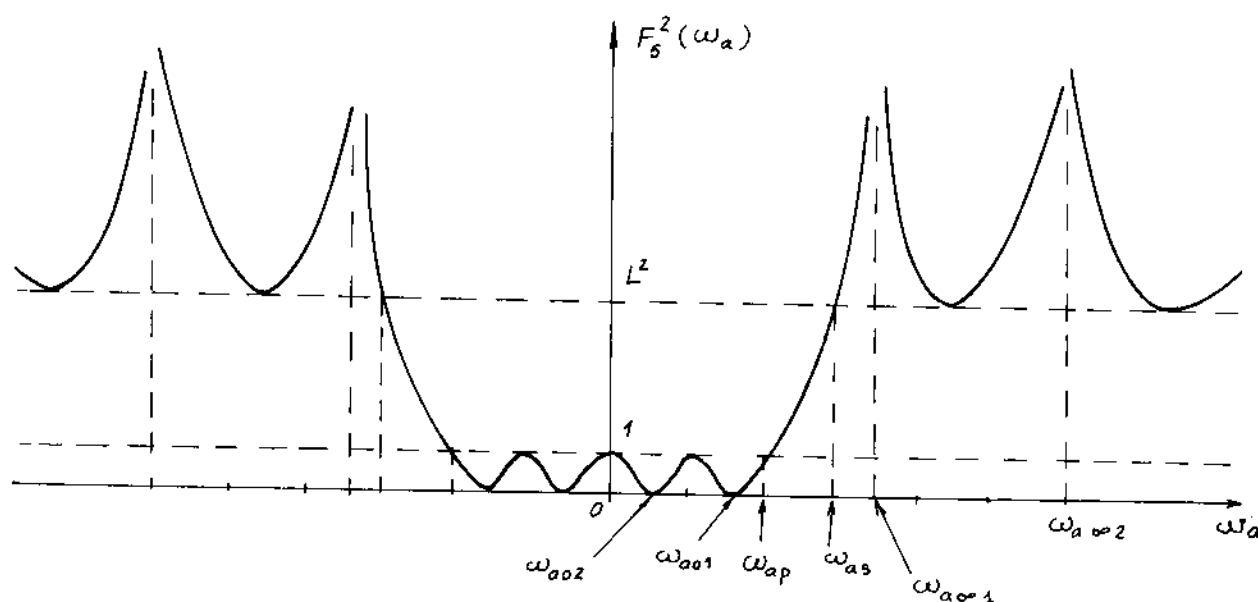
Giả sử cho $n = 5$.

Hãy xác định ω_{a0i} , $\omega_{a\infty i}$ và dạng của $F_n(\omega_a)$ và $|H_a(\omega_a)|$.

Giải

+ Nếu $n = 5$, ta có hai giá trị của ω_{a0i} là ω_{a01} và ω_{a02} và hai giá trị của $\omega_{a\infty i}$ là $\omega_{a\infty 1}$ và $\omega_{a\infty 2}$.

Để thỏa mãn các điều kiện của $F_n(\omega_a)$, chúng ta có dạng của $F_n^2(\omega_a)$ cho trên hình 6.4.4.1.



Hình 6.4.4.1.

$F_n(\omega_a)$ là một hàm hữu tỷ Chebyshev.

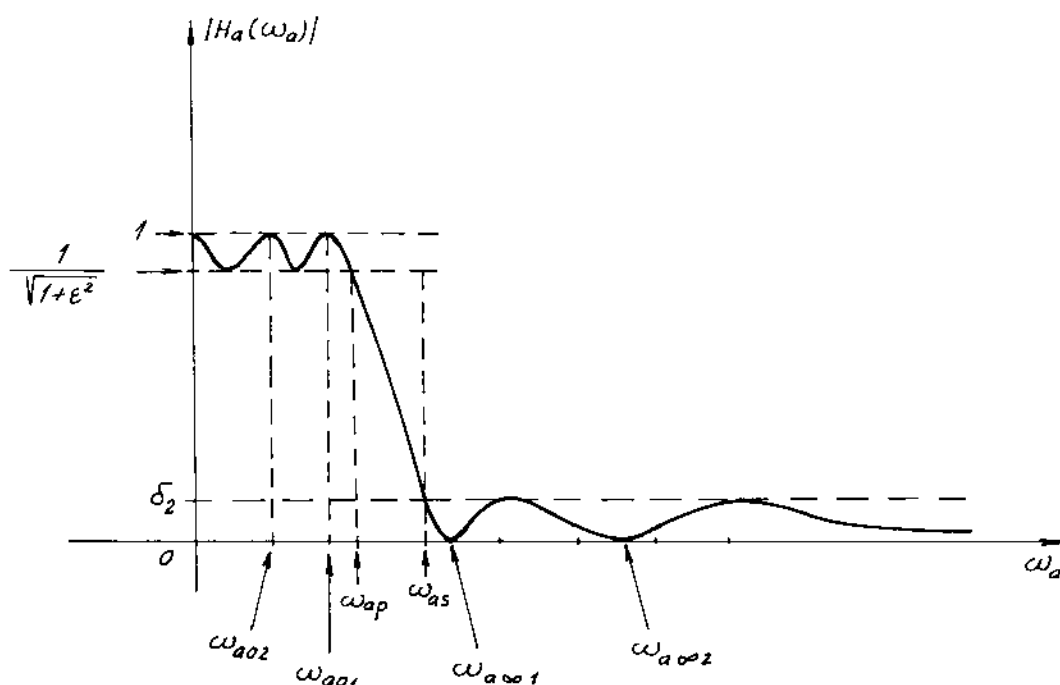
$F_n^2(\omega_a)$ dao động trong khoảng 0 và 1 đối với $|\omega_a| < \omega_{ap}$.

$F_n^2(\omega_a)$ dao động trong khoảng L^2 và vô cùng đối với $|\omega_a| > \omega_{as}$.

Từ đây chúng ta nhận được đáp ứng tần số của bộ lọc Cauer với $n = 5$ như sau:

$$|H_a(\omega_a)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 F_n^2(\omega_a)}}$$

Đồ thị của $|H_a(\omega_a)|$ được cho trên hình 6.4.4.2.



Hình 6.4.4.2.

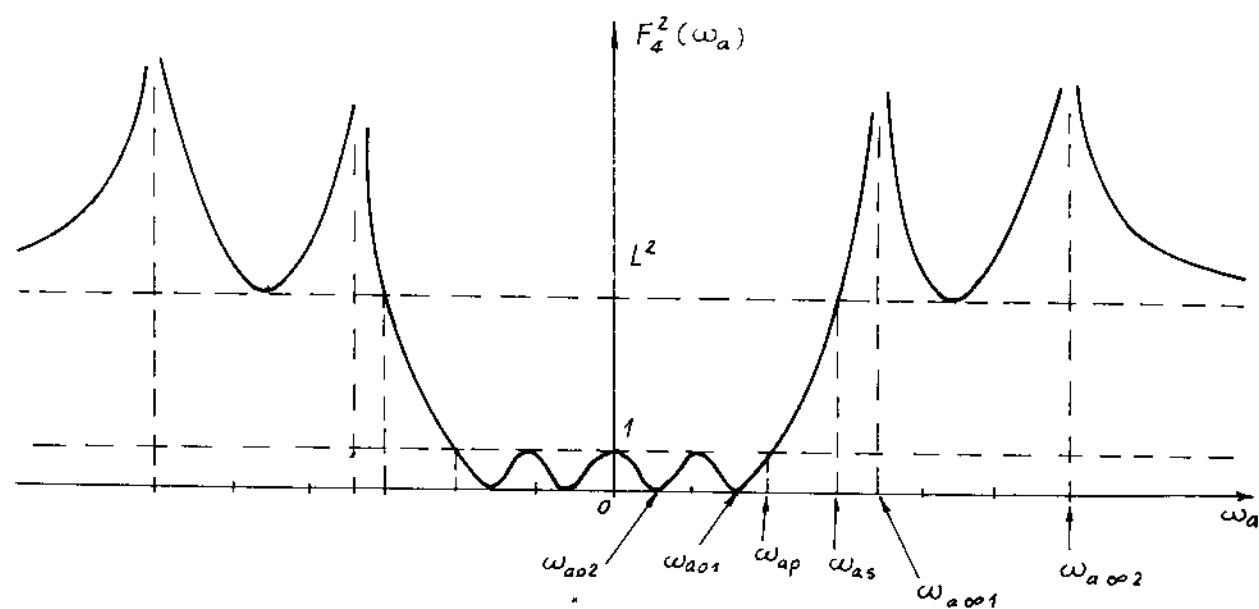
Ví dụ 6.4.4.2

Giả sử cho $n = 4$.

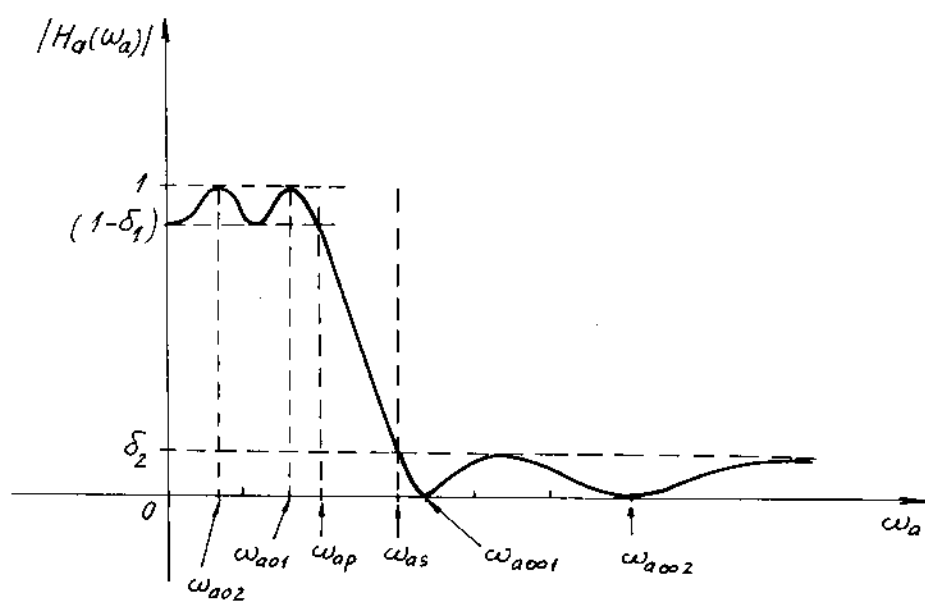
- Hãy xác định ω_{a0i} , $\omega_{a\infty i}$.
- Hãy vẽ dạng của $F_n(\omega_a)$ và $|H_a(\omega_a)|$.

Giải

Các giá trị của ω_{a0i} , $\omega_{a\infty i}$ và dạng của $F_n(\omega_a)$ và $|H_a(\omega_a)|$ được cho trên hình 6.4.4.3 và 6.4.4.4.



Hình 6.4.4.3.



Hình 6.4.4.4.

Ở tần số chuẩn hoá theo kiểu sau đây:

$$\omega_{ar} = \sqrt{\omega_{ap} \cdot \omega_{as}} = 1$$

$$\omega_{ap} = \sqrt{k}$$

$$\omega_{as} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Vậy:

$$k = \frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}}$$

Ở đây k được gọi là hệ số lọc.

Theo kiểu chuẩn hoá ở trên chúng ta có:

$$\omega_{aai} = \frac{1}{\omega_{as} \omega_i} \quad \text{hoặc} \quad \omega_{as} \omega_i = \frac{1}{\omega_{aai}}$$

Tức là: $\omega_{aai} \cdot \omega_{as} \omega_i = 1$

Như thế chúng ta nhận được biểu thức của $F_n(\omega_a)$ như sau:

+ Với n lẻ:

$$F_n(\omega_a) = \frac{(-1)^r \cdot \omega_a}{\sqrt{\frac{1}{L}}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{\omega_a^2 - \omega_{aai}^2}{1 - \omega_a^2 \cdot \omega_{aai}^2} \quad (6.4.4.4)$$

$$r = \frac{n-1}{2}$$

$$\omega_{aai} = \sqrt{k} \cdot \text{Sn}\left(\frac{2iK}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

+ Với n chẵn:

$$F_n(\omega_a) = \frac{(-1)^r}{\sqrt{\frac{1}{L}}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{\omega_a^2 - \omega_{aai}^2}{1 - \omega_a^2 \cdot \omega_{aai}^2} \quad (6.4.4.5)$$

$$r = \frac{n}{2}$$

$$\omega_{aai} = \sqrt{k} \cdot \text{Sn}\left(\frac{(2i-1)K}{n}, k\right) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ở đây:

$\text{Sn}(x, k)$ là hàm sin elliptique không đầy đủ loại 1 như sau:

$$\text{Sn}(x, k) = \sin \Phi$$

$$x = \int_0^{\Phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (6.4.4.6)$$

K được định nghĩa bởi tích phân elliptique đầy đủ loại một:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \quad (6.4.4.7)$$

Như vậy $K(k)$ chính là hàm Jacobi.

b) Các điểm cực và các điểm không của $H_a(s)$

Người ta đã tìm được các điểm cực của $H_a(s)$, $H_a(-s)$ (tức là các điểm không của $L_a(-s^2)$) như sau:

+ Với n lẻ:

$$s_{pi} = \sigma_i + j\omega_{ai} \\ = \frac{(-1)^i \sigma_0 V_i \pm j\omega_{ai} W}{1 + \sigma_0^2 \omega_{ai}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \quad (6.4.4.8)$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\omega_{ai}^2) \left(1 - \frac{\omega_{ai}^2}{k}\right)}$$

$$\omega_{ai} = \sqrt{k} \operatorname{Sn}\left(\frac{2Ki}{n}, k\right)$$

$$\sigma_0 = \frac{-2q^{\frac{3}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cosh 2m\Lambda}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{0,05 \cdot LO_p} + 1}{10^{0,05 \cdot LO_p} - 1}$$

Ngoài ra chúng ta có thể tính ω_{ai} không thông qua hàm sin elliptique theo công thức sau đây:

$$\omega_{ai} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sinh \frac{(2m+1)\pi i}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cosh \frac{2m\pi i}{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \quad (6.4.4.9)$$

$$q \approx q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$n \geq \frac{\log 16D}{\log \frac{1}{q}} \quad (6.4.4.10)$$

$$D = \frac{10^{0,1LO_s} - 1}{10^{0,1LO_p} - 1}$$

Các điểm không (các điểm cực của $L_u(-s^2)$) như sau:

$$s_{oi} = \pm \frac{j}{\omega_{aoi}}$$

+ Với n chẵn:

$$\begin{aligned} s_{pi} &= \sigma_i + j\omega_{oi} \\ &= \frac{\pm [\sigma_0 V_i + j(-1)^i \omega_{aoi} \cdot W]}{1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \end{aligned} \quad (6.4.4.11)$$

Các tham số W , V_i và σ_i được tính như trong trường hợp n lẻ, nhưng ω_{aoi} lại được tính như sau:

$$\omega_{aoi} = \sqrt{k} \cdot \text{Sn} \left[\frac{(2i-1)K}{n}, k \right] \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$$

hoặc:

$$\omega_{aoi} = \frac{2q^4 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi \left(i - \frac{1}{2}\right)}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cos \frac{2m\pi \left(i - \frac{1}{2}\right)}{n}}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \quad (6.4.4.12)$$

Từ đây chúng ta nhận được hàm truyền đạt $H_u(s)$ của bộ lọc tương tự thông thấp elliptique ở tần số chuẩn hoá như sau:

$$H_u(s) = \frac{H_0}{D_0(s)} \prod_{i=1}^r \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{li}s + B_{oi}} \quad (6.4.4.13)$$

ở đây:

$$r = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{với } n \text{ lẻ} \\ \frac{n}{2} & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$D_0(s) = \begin{cases} s + \sigma_0 & \text{với } n \text{ lẻ} \\ 1 & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

A_{oi} , B_{ii} , B_{0i} và H_0 được tính bằng các công thức sau:

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$q \approx q_0 + 2\,q_0^5 + 15\,q_0^9 + 150\,q_0^{13}$$

$$D = \frac{10^{0.1LO_s} - 1}{10^{0.1LO_p} - 1}$$

$$n \geq \frac{\log 16 D}{\log \frac{1}{q}}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2n} \ln \frac{10^{0.05.LO_p} + 1}{10^{0.05.LO_p} - 1}$$

$$\sigma_0 = \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sinh[(2m+1)\Lambda]}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cosh 2m\Lambda}$$

$$W = \sqrt{(1 + k\sigma_0^2) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_0^2}{k}\right)}$$

$$\omega_{aoi} = \frac{2q^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot q^{m(m+1)} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi\mu}{n}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cdot \cos \frac{2m\pi\mu}{n}}$$

$$\mu = \begin{cases} i & \text{với } n \text{ lẻ} \\ i - \frac{1}{2} & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$V_i = \sqrt{(1 - k\omega_{aoi}^2) \left(1 - \frac{\omega_{aoi}^2}{k} \right)}$$

$$A_{oi} = \frac{1}{\omega_{aoi}^2}$$

$$B_{oi} = \frac{(\sigma_0 V_i)^2 + (\omega_{aoi} W)^2}{(1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2)^2}$$

$$B_{ir} = \frac{2\sigma_0 V_i}{1 + \sigma_0^2 \omega_{aoi}^2}$$

$$H_0 = \begin{cases} \sigma_0 \cdot \prod_{i=1}^r \frac{B_{oi}}{A_{oi}} & \text{với } n \text{ lẻ} \\ 10^{-0,05 LO_p} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{B_{oi}}{A_{oi}} & \text{với } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Ví dụ 6.4.4.1

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự thông thấp elliptique như sau:

$$LO_p = 0,1 \text{ dB}$$

$$LO_s = 50 \text{ dB}$$

$$\omega_{ap} = 0,9486833 \approx \sqrt{0,9}$$

$$\omega_{as} = 1,0540926 \approx \frac{1}{\sqrt{0,9}}$$

Hãy tìm $H_u(s)$?

Giải

$$k = \frac{\omega_{ap}}{\omega_{as}} = \frac{\sqrt{0,9}}{\frac{1}{\sqrt{0,9}}} = 0,9$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - (0,9)^2} = 0,435890$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = 0,102330$$

$$\Rightarrow q = 0,102352$$

$$D = 4.293.090$$

$$\Rightarrow n \geq 7,92$$

Vậy ta chọn $n = 8$ là số chẵn.

$$H_0 = 2.876332.10^{-3}$$

$$n = 8 \Rightarrow r = \frac{n}{2} = 4 \quad \text{và} \quad D_n(s) = 1$$

n chẵn nên hàm truyền đạt $H_o(s)$ có dạng sau:

$$H_o(s) = H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{1i}s + B_{oi}}$$

Các hệ số A_{oi} , B_{1i} , và B_{oi} được cho trên bảng 6.4.4.1.

Ví dụ 6.4.4.2

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$LO_p = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_p})|} = 0,1 \text{ dB}$$

$$LO_s = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_s})|} = 50 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 0,2819526\pi$$

$$\omega_s = 0,3087732\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Cauer bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Giải

Cũng giống như các ví dụ về tổng hợp bộ lọc số mà chúng ta đã trình bày ở trên, ở đây chúng ta cũng có 4 bước sau đây:

Bước 1. Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật

Chúng ta có 4 chỉ tiêu kỹ thuật như đầu bài đã cho như sau:

+ Ở dải thông:

$$20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega})|} \leq 0,1 \text{ dB}$$

Tức là:

$$|H(e^{j\omega})| \geq \frac{1}{10^{0,005}} = \frac{1}{\sqrt{10^{0,01}}} \approx 0,988553$$

+ Ở dải chắn:

$$20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega})|} \geq 50 \text{ dB}$$

Tức là:

$$|H(e^{j\omega})| \leq \frac{1}{10^{2.5}} = \frac{1}{\sqrt{10^5}} \approx 0,0031623$$

+ Tần số giới hạn dải thông và dải chặn:

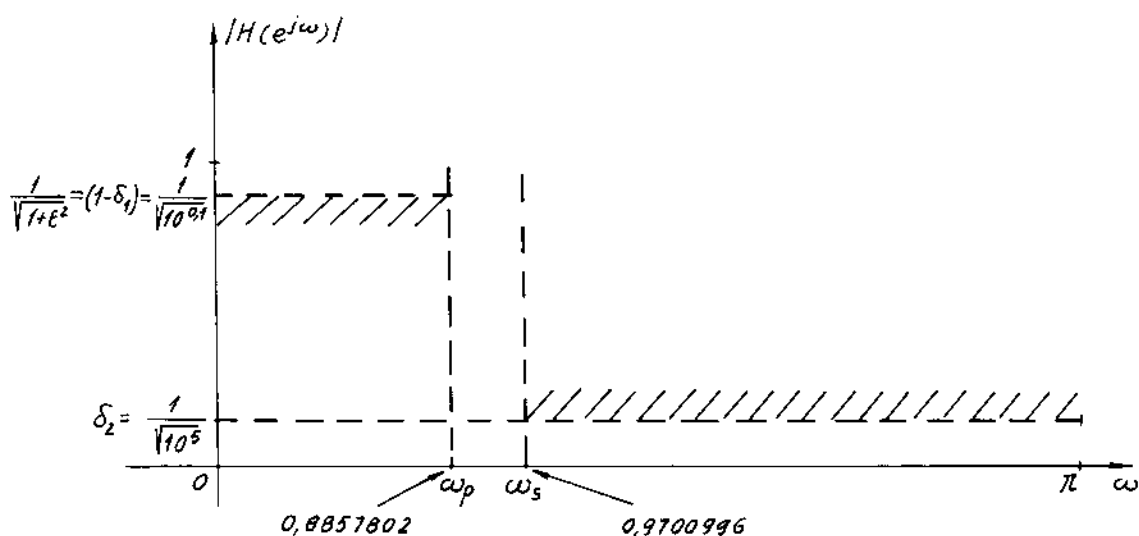
$$\omega_p = 0,2819526\pi$$

$$\approx 0,8857802$$

$$\omega_s = 0,3087932\pi$$

$$\approx 0,9700996$$

Vậy đáp ứng biên độ của bộ lọc số $|H(e^{j\omega})|$ với các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho ở trên sẽ được minh hoạ trên hình 6.4.4.5.



Hình 6.4.4.5.

Bước 2. Xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự.

Chúng ta đã biết rằng khi dùng phương pháp biến đổi song tuyến để chuyển từ bộ lọc tương tự sang bộ lọc số thì ta phải xác định lại các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc tương tự từ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số. Về độ gợn sóng ở dải thông và dải chặn thì không có gì thay đổi nhưng về độ gợn sóng ở dải thông và dải chặn thì có sự sửa đổi như sau:

Ở dải thông:

$$|H_a(\omega_a)| \geq \frac{1}{\sqrt{10^{0,01}}} = 1 - \delta_1$$

$$\omega_{ap} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{0,2819526\pi}{2}\right)$$

Ở dải chắn:

$$|H_a(\omega_a)| \leq \frac{1}{\sqrt{10^5}} = \delta_2$$

$$\omega_{as} = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \frac{2}{T_s} \operatorname{tg}\left(\frac{0,3087932\pi}{2}\right)$$

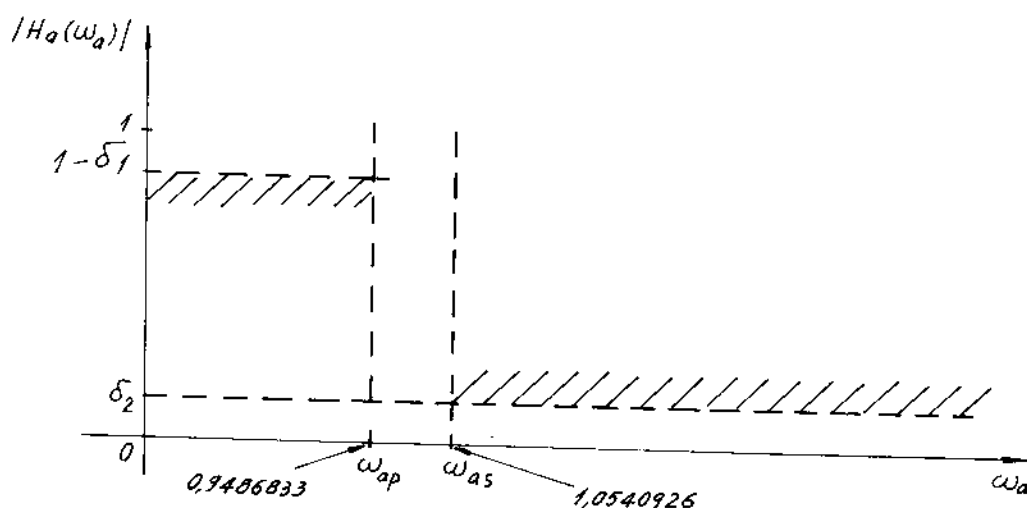
Tính ω_{ap} và ω_{as} theo thang tần số chuẩn hoá ta thu được kết quả sau:

$$\omega_{ap} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,2819526\pi}{2}\right) \approx 0,9486833 \approx \sqrt{0,9}$$

$$\omega_{as} = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{0,3087932\pi}{2}\right) \approx 1,0540926 \approx \frac{1}{\sqrt{0,9}}$$

Vậy $\omega_{ap}, \omega_{as} = 1$.

Đáp ứng biên độ của bộ lọc tương tự Cauer với các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho ở trên được minh hoạ trên hình 6.4.4.6.



Hình 6.4.4.6.

Bước 3. Tổng hợp bộ lọc tương tự elliptique

Theo các chỉ tiêu kỹ thuật đã cho là:

$$LO_p = 0,1 \text{ dB}; \quad \omega_{ap} = 0,9486833$$

$$LO_s = 50 \text{ dB}; \quad \omega_{as} = 1,0540926$$

Chúng ta thu được các kết quả sau đây:

+ Bậc của bộ lọc: $n = 8$.

+ Hàm truyền đạt $H_a(s)$ của bộ lọc:

$$H_a(s) = H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{s^2 + A_{oi}}{s^2 + B_{1i}s + B_{oi}}$$

$$H_0 = 2,876332 \cdot 10^{-3}$$

Các hệ số A_{oi} , B_{1i} , B_{oi} được cho trên bảng 6.4.4.1 sau đây:

Bảng 6.4.4.1

i	A_{oi}	B_{oi}	B_{1i}
1	14,34825	0,2914919	0,8711547
2	2,231643	0,6123726	0,4729136
3	1,320447	0,8397386	0,1825141
4	1,128832	0,9264592	0,4471442

Bước 4. Thực hiện biến đổi song tuyến

Trong trường hợp tần số chuẩn hoá ta có:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + A_{oi}}{\left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + B_{1i} \left(2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + B_{oi}} \\
 &= H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{4(1-2z^{-1}+z^{-2}) + A_{oi}(1+2z^{-1}+z^{-2})}{4(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 2B_{1i}(1-z^{-2}) + B_{oi}(1+2z^{-1}+z^{-2})}
 \end{aligned}$$

Rút gọn lại ta thu được hàm truyền đạt của bộ lọc số như sau:

$$H(z) = H_0 \prod_{i=1}^4 \frac{(4 + A_{oi})z^{-2} + (2A_{oi} - 8)z^{-1} + (4 + A_{oi})}{(4 - 2B_{1i} + B_{oi})z^{-2} + (2B_{oi} - 8)z^{-1} + (4 + 2B_{1i} + B_{oi})}$$

6.5. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ

Ở các phần trên chúng ta đã nghiên cứu xong phương pháp tổng hợp các bộ lọc tương tự và các bộ lọc số thông thấp, mà chúng ta chưa nghiên cứu các phương pháp tổng hợp các bộ lọc thông cao, thông dải và chắn dải. Trong thực tế chúng ta không cần phải có phương pháp riêng để tổng hợp các bộ lọc này, mà chúng ta chỉ cần sử dụng một phương pháp gần đúng, đó là phương pháp biến đổi tần số. Tức là bằng cách biến đổi tần số chúng ta sẽ chuyển từ bộ lọc thông thấp cơ bản ban đầu thành các bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải và chắn dải với các chỉ tiêu kỹ thuật mong muốn.

Sau đây chúng ta sẽ lần lượt xét các biến đổi tần số trong miền tương tự và trong miền số.

6.5.1. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ TRONG MIỀN TƯƠNG TỰ

Để có được các dạng khác của bộ lọc tương tự xuất phát từ một bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu chúng ta sẽ sử dụng phép biến đổi từ biến s của hàm truyền đạt $H_u(s)$ thành biến s' của hàm truyền đạt $H_u(s')$ là hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự mong muốn.

Chúng ta có thể viết biến đổi này như sau:

$$s = f(s') \quad (6.5.1.1)$$

a) Biến đổi thông thấp - thông thấp (Lowpass to Lowpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc thông thấp cơ bản ban đầu có tần số cắt là ω_c và hàm truyền đạt là $H_u(s)$, bây giờ chúng ta muốn chuyển nó sang một bộ lọc thông thấp khác có tần số cắt là ω'_c và hàm truyền đạt tương ứng là $H_u(s')$. Khi đó chúng ta sẽ dùng biến đổi tần số tương tự sau đây:

$$s = \lambda s' \quad (6.5.1.2)$$

ở đây: λ là hằng số.

Tức là:

$$H_u(s') = H_u(s) \Big|_{s=\lambda s'} \quad (6.5.1.3)$$

Trong biểu thức (6.5.1.2) ta thấy rằng trong mặt phẳng s , nếu $\sigma = 0$ thì $s = j\omega_c$ và $s' = j\omega'_c$, khi đó ta có thể viết như sau:

$$\lambda = \frac{s}{s'} = \frac{\omega_c}{\omega'_c} \Rightarrow \omega'_c = \frac{\omega_c}{\lambda}$$

tức là tần số được biến đổi theo hệ số λ .

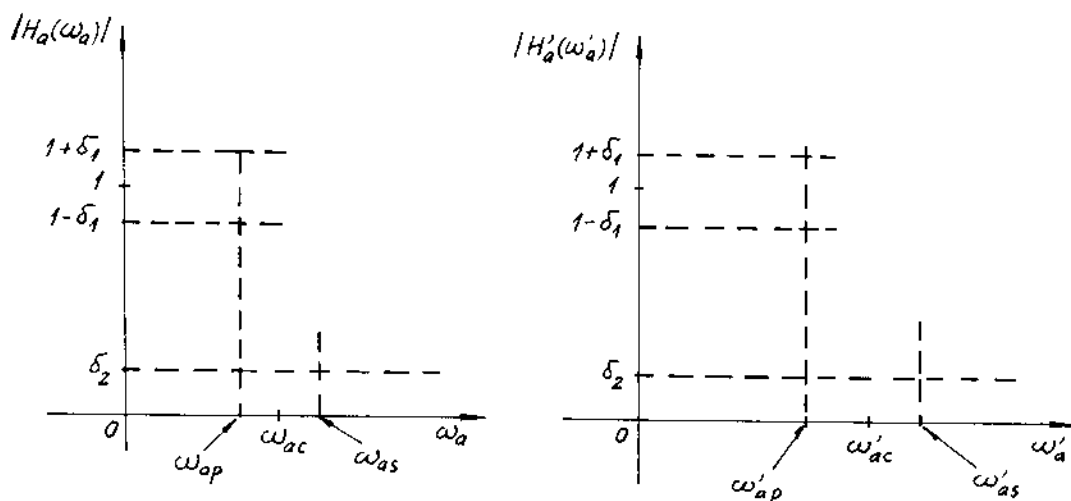
Như vậy chỉ có tần số được biến đổi, còn độ gợn sóng ở dải thông δ_1 và độ gợn sóng ở dải chắn δ_2 sẽ giữ nguyên không đổi. Nếu chúng ta lấy tần số chuẩn là tần số cắt ω_c thì giá trị của λ được tính như sau:

$$\lambda = \frac{\omega_{ac}}{\omega'_{ac}} \quad (6.5.1.4)$$

Vậy nếu bộ lọc thông thấp ban đầu khi chúng ta đã thiết kế ra được chuẩn hoá theo tần số cắt ω_{ac} , tức là $\omega_{ac} = 1$ thì λ sẽ có giá trị sau:

$$\lambda = \frac{1}{\omega'_{ac}} \quad (6.5.1.5)$$

Đồ thị minh hoạ biến đổi tần số tương tự thông thấp - thông thấp với hệ số $\lambda < 1$ được cho trên hình 6.5.1.1.



Hình 6.5.1.1.

Ví dụ 6.5.1.1

Giả sử sau khi tổng hợp chúng ta thu được một bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth ở tần số chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự thông thấp tương ứng với hệ số biến đổi tần số $\lambda = \frac{2}{3}$.

Giải Theo biểu thức (6.5.1.3) ta có:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{3}s'} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}s' - \frac{2}{3}s'_{pk} \right)} = \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^n}{\prod_{k=1}^n (s' - s'_{pk})}$$

b) Biến đổi thông thấp - thông cao (Lowpass to Highpass Transformation)

Từ một bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ với tần số cắt là ω_{ac} , chúng ta có thể biến đổi thành bộ lọc tương tự thông cao có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ và với tần số cắt là ω'_{ac} nhờ phép biến đổi sau đây:

$$s = \frac{\lambda}{s'} \quad (6.5.1.6)$$

ở đây λ là hằng số.

Tức là:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=\frac{\lambda}{s'}} \quad (6.5.1.7)$$

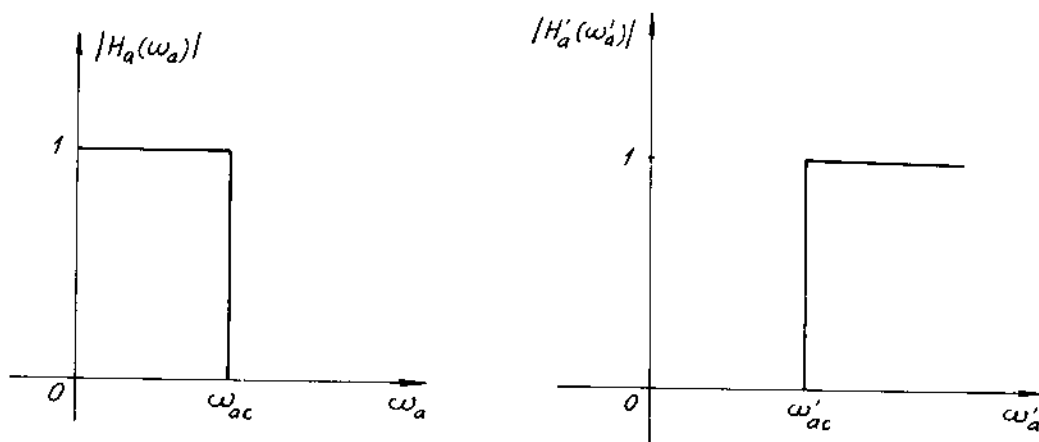
Trong trường hợp này λ được tính như sau:

$$\lambda = \omega_{ac} \omega'_{ac} \quad (6.5.1.8)$$

Nếu bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu đã được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hoá tức là $\omega_{ac} = 1$ thì λ sẽ có giá trị như sau:

$$\lambda = \omega'_{ac} \quad (6.5.1.9)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông cao trong trường hợp bộ lọc lý tưởng được cho trên hình 6.5.1.2.



Hình 6.5.1.2

Ví dụ 6.5.1.2

Giả sử sau khi tổng hợp chúng ta thu được một bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth ban đầu ở tần số chuẩn hoá bởi tần số cắt ω_{ac} ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_{pk})}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự thông cao tương ứng với hệ số biến đổi tần số là λ .

Giải

Áp dụng biểu thức (6.5.1.6) và (6.5.1.7) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s') &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{\lambda}{s'}} \\ &= \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{\lambda}{s'} - \frac{\lambda}{s'_{pk}} \right)} \end{aligned}$$

c) Biến đổi thông thấp - thông dải (Lowpass to Bandpass Transformation)

Giả sử từ bộ lọc thông thấp tương tự cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ và với tần số cắt là ω_{ac} , chúng ta cần biến đổi thành bộ lọc thông dải tương tự có hàm truyền đạt là $H_a(s')$ với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} . Chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số sau đây:

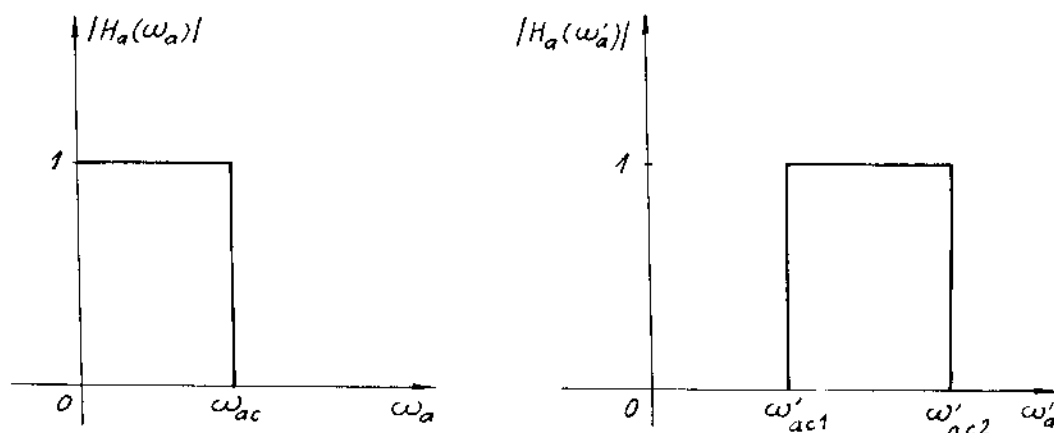
$$s = f(s') = \omega_{ac} \frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \omega'_{ac2}}{s' (\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})} \quad (6.5.1.10)$$

Nếu bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) thì phép biến đổi tần số được thực hiện như sau:

$$s = f(s') = \frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \omega'_{ac2}}{s' (\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})} \quad (6.5.1.11)$$

$$\text{và ta có:} \quad H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=f(s')} \quad (6.5.1.12)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông dải trong trường hợp bộ lọc lý tưởng được cho trên hình 6.5.1.3.



Hình 6.5.1.3.

Ví dụ 6.5.1.3

Hãy biến đổi bộ lọc tương tự thông thấp đơn giản với tần số cắt chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

thành bộ lọc tương tự thông dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .

Giải

Theo các biểu thức (6.5.1.11) và (6.5.1.12) ta có:

$$\begin{aligned} H_a(s') &= \frac{1}{\frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}}{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})} + 1} \\ &= \frac{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})}{s'^2 + s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1}) + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \end{aligned}$$

d) Biến đổi thông thấp - chặn dải (Lowpass to Bandstop Transformation)

Giả sử từ bộ lọc thông thấp tương tự cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H_a(s)$ với tần số cắt là ω_{ac} , chúng ta cần biến đổi thành bộ lọc tương tự chặn dải có hàm truyền đạt là $H_a(s')$ với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} . Chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số sau đây:

$$s = f(s') = \omega_{ac} \frac{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})}{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \quad (6.5.1.13)$$

Nếu bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu được thiết kế theo tần số cắt chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) thì phép biến đổi tần số sẽ được thực hiện theo biểu thức sau đây:

$$s = f(s') = \frac{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1})}{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \quad (6.5.1.14)$$

và ta có:

$$H_a(s') = H_a(s) \Big|_{s=f(s')} \quad (6.5.1.15)$$

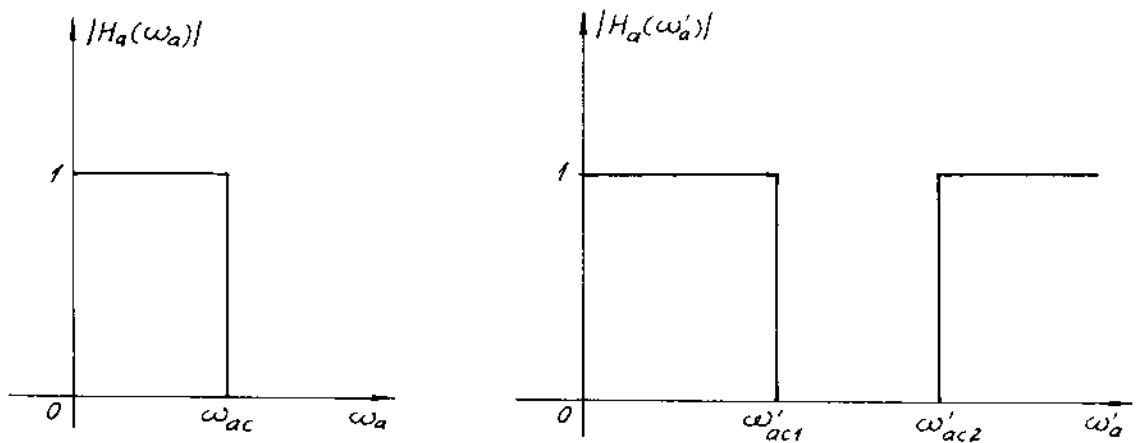
Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - chặn dải trong trường hợp bộ lọc lý tưởng được cho trên hình 6.5.1.4.

Ví dụ 6.5.1.4

Hãy biến đổi bộ lọc tương tự thông thấp đơn giản với tần số chuẩn hoá ($\omega_{ac} = 1$) có hàm truyền đạt $H_a(s)$ như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

thành bộ lọc tương tự chặn dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .



Hình 6.5.1.4.

Giải

Theo các biểu thức (6.5.1.14) và (6.5.1.15) ta có:

$$\begin{aligned} H_o(s') &= \frac{1}{s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1}) + 1} \\ &= \frac{s'^2 + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}}{s'^2 + s'(\omega'_{ac2} - \omega'_{ac1}) + \omega'_{ac1} \cdot \omega'_{ac2}} \end{aligned}$$

6.5.2. BIẾN ĐỔI TẦN SỐ TRONG MIỀN SỐ

Cũng giống như trong miền tương tự, trong miền số chúng ta cũng có thể thực hiện phép biến đổi tần số để biến đổi bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu thành bộ lọc số thông thấp, thông cao, thông dải hoặc chặn dải. Phép biến đổi tần số trong miền số là thay thế biến z^{-1} bởi hàm $f(z'^{-1})$ và phải đảm bảo tính ổn định của hệ thống mới.

Phép biến đổi tổng quát được cho bởi công thức sau đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^K \frac{z'^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z'^{-1}} \quad (6.5.2.1)$$

ở đây $|\alpha_k| < 1$ để đảm bảo tính ổn định.

a) Biến đổi thông thấp - thông thấp (Lowpass to Lowpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , bây giờ chúng ta muốn chuyển nó thành một bộ lọc số thông thấp khác với tần số cắt là ω'_c và có hàm truyền đạt là $H(z')$. Khi đó phép biến đổi tần số được cho bởi biểu thức sau đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = \frac{z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z'^{-1}} \quad (6.5.2.2)$$

với

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2} T_s\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.3)$$

T_s là chu kỳ lấy mẫu.

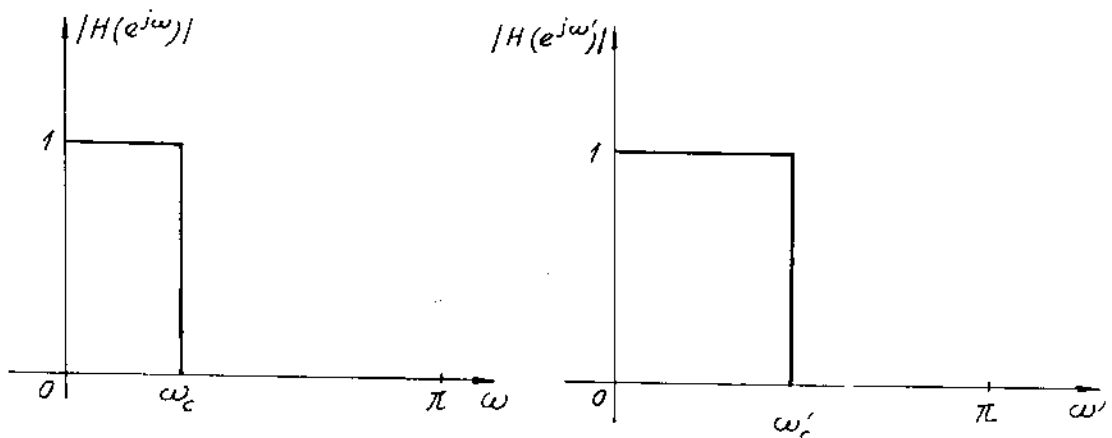
Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của hệ số α được tính như sau:

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2}\right)} \quad (6.5.2.4)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1}=f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.5)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông thấp đối với bộ lọc số lý tưởng được cho trên hình 6.5.2.1 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu.



Hình 6.5.2.1.

Ví dụ 6.5.2.1

Cho bộ lọc số thông thấp với tần số cắt $\omega_c = 0,1\pi$ và hàm truyền đạt $H(z)$ của nó có dạng sau đây:

$$H(z) = \frac{0,0030012 \cdot (1+z^{-1})^3}{(1-0,8548248 \cdot z^{-1}) \cdot (1-1,5751076 \cdot z^{-1} + 0,7404914 \cdot z^{-2})}$$

Hãy biến đổi bộ lọc số này thành bộ lọc số thông thấp với tần số cắt $\omega'_c = 0,3\pi$.

Giải

Áp dụng biểu thức (6.5.2.4) để tính α trong trường hợp tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s :

$$\alpha = \frac{\sin \frac{0,1\pi - 0,3\pi}{2}}{\sin \frac{0,1\pi + 0,3\pi}{2}} = \frac{-0,309017}{0,5877853} = -0,5257311$$

Áp dụng biểu thức (6.5.2.2) ta có:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = \frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 \cdot z'^{-1}}$$

Áp dụng biểu thức (6.5.2.5) ta có:

$$H(z') = \frac{0,0030012 \left(1 + \frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right)}{\left[1 - 0,8548248 \left(\frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right) \right] \cdot \frac{1}{\left[1 - 1,5751076 \left(\frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right) + 0,7404914 \left(\frac{z'^{-1} + 0,5257311}{1 + 0,5257311 z'^{-1}} \right)^2 \right]}}$$

Sau khi tính toán ta thu được kết quả cuối cùng sau đây:

$$H(z') = \frac{0,0514122 (1+z'^{-1})^3}{(1-0,5977088 z'^{-1})(1-0,479047 z'^{-1} + 0,5013543 \cdot z'^{-2})}$$

b) Biến đổi thông thấp - thông cao (Lowpass to highpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , bây giờ chúng ta cần chuyển thành bộ lọc số thông cao có hàm truyền đạt là $H(z')$ với tần số cắt là ω'_c . Khi đó phép biến đổi tần số sẽ được thực hiện bởi biểu thức sau đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = - \frac{z'^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z'^{-1}} \quad (6.5.2.6)$$

với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2} T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.7)$$

T_s là chu kỳ lấy mẫu.

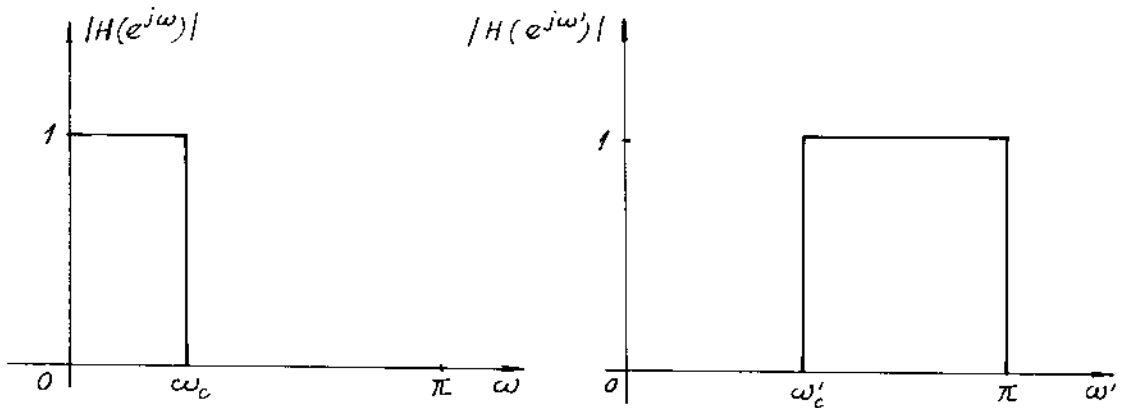
Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của hệ số α được tính như sau:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_c - \omega'_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_c + \omega'_c}{2}\right)} \quad (6.5.2.8)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1}=f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.9)$$

Đồ thị minh hoạ phép biến đổi tần số thông thấp - thông cao đối với bộ lọc số lý tưởng được trình bày trên hình 6.5.2.2 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu.



Hình 6.5.2.2.

c) Biến đổi thông thấp - thông dải (Lowpass to Bandpass Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , bây giờ chúng ta cần chuyển thành bộ lọc số thông dải có hàm truyền đạt là $H(z')$ với tần số cắt dưới là ω'_{c1} và tần số cắt

trên là ω'_{c2} . Khi đó chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số được cho bởi biểu thức dưới đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = - \frac{z'^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1} z'^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{2\alpha k}{k+1} z'^{-1} + \frac{k-1}{k+1} z'^{-2}} \quad (6.5.2.10)$$

với

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2} T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.11)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} T_s\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right) \quad (6.5.2.12)$$

Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của α và k được tính như sau:

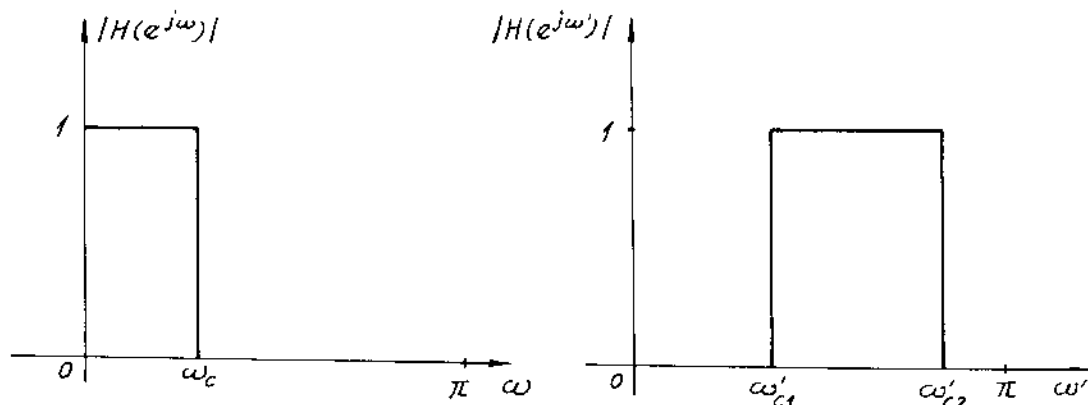
$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right)} \quad (6.5.2.13)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right) \quad (6.5.2.14)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1}=f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.15)$$

Phép biến đổi tần số thông thấp - thông dải đối với bộ lọc số lý tưởng được minh hoạ trên hình 6.5.2.3 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s .



Hình 6.5.2.3.

d) Biến đổi thông thấp - chặn dải (Lowpass to Bandstop Transformation)

Giả sử chúng ta đã thiết kế được một bộ lọc số thông thấp cơ bản ban đầu có hàm truyền đạt là $H(z)$ với tần số cắt là ω_c , chúng ta cần chuyển thành bộ lọc số chặn dải có hàm truyền đạt là $H(z')$ với tần số cắt dưới là ω'_{c1} và tần số cắt trên là ω'_{c2} . Khi đó chúng ta sẽ dùng phép biến đổi tần số được cho bởi biểu thức dưới đây:

$$z^{-1} = f(z'^{-1}) = - \frac{z'^{-2} - \frac{2\alpha}{k+1} z'^{-1} + \frac{1-k}{1+k}}{1 - \frac{2\alpha}{k+1} z'^{-1} + \frac{1-k}{1+k} z'^{-2}} \quad (6.5.2.16)$$

$$\text{với} \quad \alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2} T_s\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right)} \quad (6.5.2.17)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2} T_s\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2} T_s\right) \quad (6.5.2.18)$$

Nếu tần số được chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s thì giá trị của α và k được tính như sau:

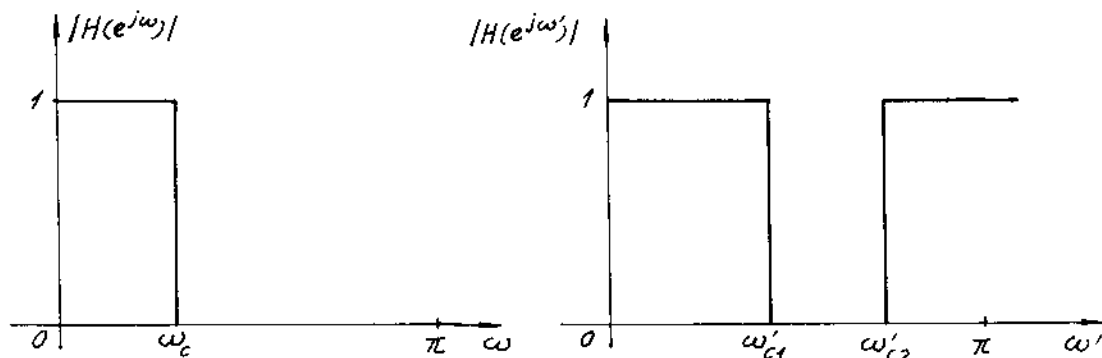
$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} + \omega'_{c1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right)} \quad (6.5.2.19)$$

$$k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega'_{c2} - \omega'_{c1}}{2}\right) \quad (6.5.2.20)$$

và ta có:

$$H(z') = H(z) \Big|_{z^{-1}=f(z'^{-1})} \quad (6.5.2.21)$$

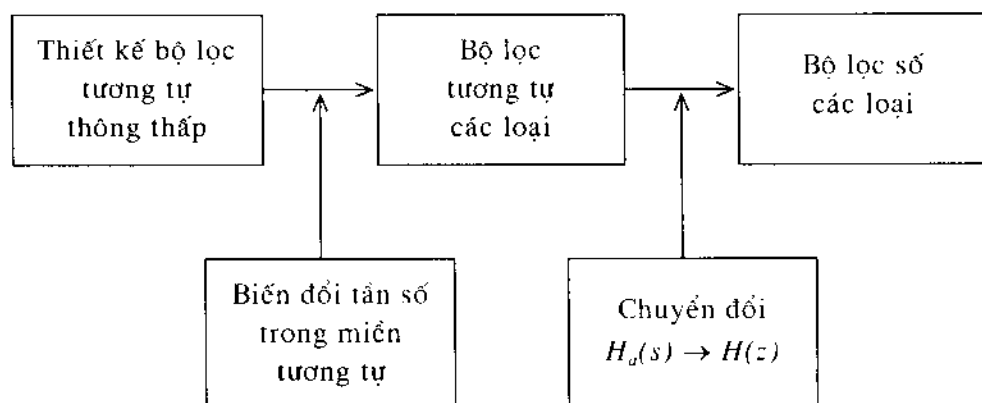
Phép biến đổi tần số thông thấp - chặn dải với bộ lọc số lý tưởng được minh hoạ trên hình 6.5.2.4 ứng với tần số chuẩn hoá bởi tần số lấy mẫu F_s .



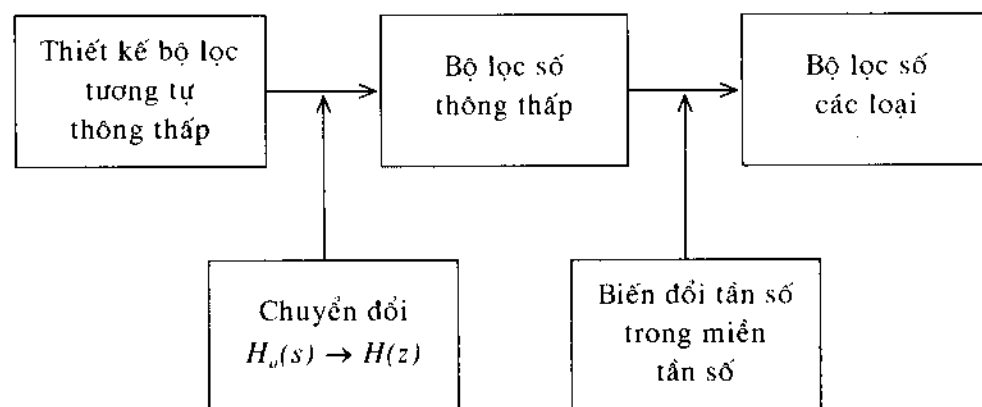
Hình 6.5.2.4.

6.5.3. KẾT LUẬN

Qua các phép biến đổi tần số trong miền tương tự và miền số, chúng ta thấy rằng có hai phương pháp thiết kế bộ lọc số các loại, xuất phát từ việc thiết kế bộ lọc tương tự thông thấp. Hai phương pháp này được minh hoạ trên hình 6.5.3.1 a và b.



(a)



(b)

Hình 6.5.3.1.

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài tập 6.1

Hãy tính toán thời gian truyền nhóm của một bộ lọc số IIR có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Bài tập 6.2

Hãy tính toán biên độ $|H(e^{j\omega})|$ và pha $\varphi(\omega)$ của bộ lọc số IIR được cho bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y(n) = x(n) + b_1x(n-1) - a_1y(n-1)$$

Bài tập 6.3

Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp bất biến xung. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.4

Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp bất biến xung. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.5

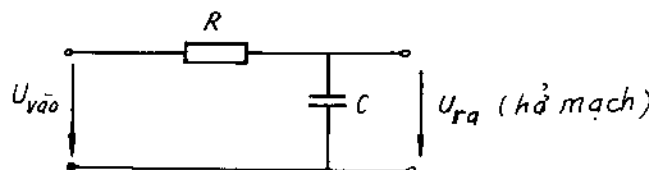
Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_a(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp bất biến xung. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.6

Cho mạch lọc thông thấp tương tự sau đây:



Hình BT 6.6.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp bất biến xung.

Bài tập 6.7

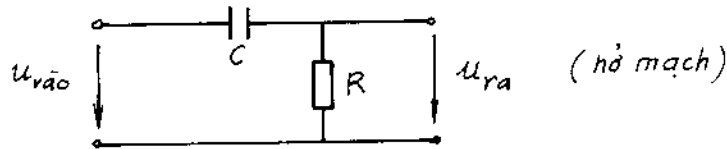
Cho hàm truyền đạt $H_a(s)$ của một bộ lọc tương tự như sau:

$$H_u(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}$$

Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của bộ lọc số IIR tương ứng bằng phương pháp biến đổi song tuyến. Sau đó vẽ sơ đồ bộ lọc số.

Bài tập 6.8

Cho mạch điện tương tự sau đây:

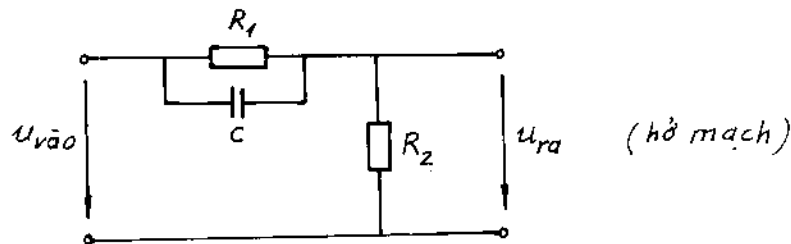


Hình BT 6.8.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.9

Cho mạch điện tương tự sau đây:

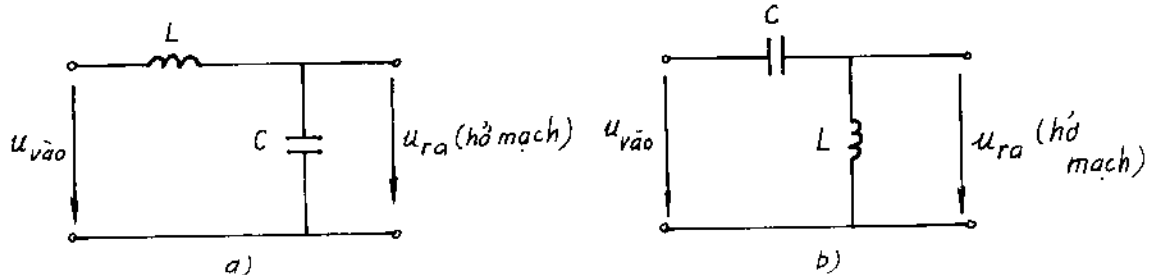


Hình BT 6.9.

Hãy chuyển mạch điện này thành mạch số bằng phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.10

Cho các mạch điện tương tự sau đây:



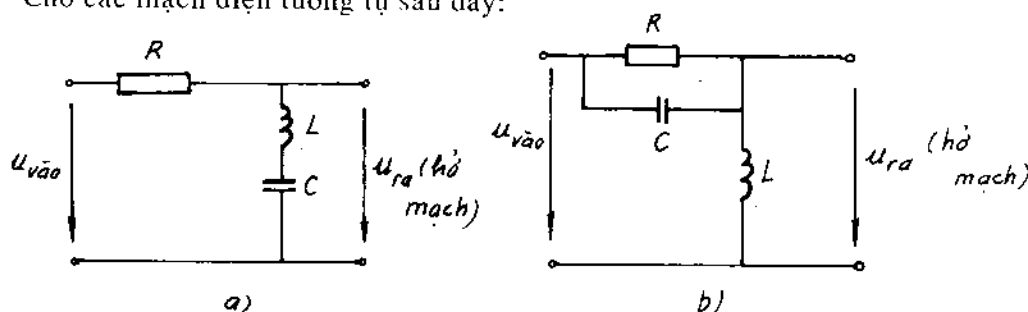
Hình BT 6.10.

Hãy chuyển các mạch này thành mạch số bằng phương pháp:

- Phương pháp biến đổi song tuyến;
- Phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.11

Cho các mạch điện tương tự sau đây:



Hình BT 6.11.

Hãy chuyển các mạch này thành mạch số bằng phương pháp:

- Phương pháp biến đổi song tuyến;
- Phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.12

Cho hàm truyền đạt của hệ thống tương tự như sau:

$$H_u(s) = \frac{s^2 + 7s + 10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)(s^2 + 4s + 3)}$$

- Hãy tìm hàm truyền đạt $H(z)$ của hệ thống số tương ứng bằng phương pháp biến đổi z thích ứng.
- Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống số.

Bài tập 6.13

Hãy chứng minh rằng trong biểu thức (6.4.2.7) đối với cả n chẵn và n lẻ thì các điểm cực của bộ lọc tương tự Butterworth được tính bằng công thức sau đây:

$$s_{pk} = e^{j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2n}\right)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Bài tập 6.14

Từ biểu thức (6.4.2.9) và (6.4.2.10) sau đây:

$$n \geq \frac{\lg\left[\frac{1}{(1-\delta_1)^2} - 1\right]}{2\lg\left(\frac{\omega_{up}}{\omega_{ac}}\right)} \quad \text{ở dải thông}$$

$$n \geq \frac{\lg \left[\frac{1}{\delta_2^2} - 1 \right]}{2 \lg \left(\frac{\omega_{as}}{\omega_{ac}} \right)} \quad \text{ở dải chắn}$$

Hãy chứng minh công thức tính bậc của bộ lọc n trong biểu thức (6.4.2.11) sau đây:

$$n \geq \frac{\lg \frac{1}{\delta_2 \sqrt{2\delta_1}}}{\lg \omega_{as} - \lg \omega_{ap}}$$

Bài tập 6.15

Hãy chứng minh các công thức tìm $H_a(s)$ đối với bộ lọc tương tự Butterworth trong trường hợp bậc của bộ lọc n là số chẵn và n là số lẻ như sau:

Với n là số chẵn:

- ở tần số chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[s^2 + 2 \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + 1 \right]} \quad (6.4.2.16)$$

- ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.17)$$

Với n là số lẻ:

- ở tần số chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2 \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.18)$$

- ở tần số không chuẩn hoá:

$$H_a(s) = \frac{1}{s + \omega_{ac}} \cdot \frac{\omega_{ac}^n}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[s^2 + 2\omega_{ac} \sin \left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right) s + \omega_{ac}^2 \right]} \quad (6.4.2.19)$$

Bài tập 6.16

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \quad \omega_p = 0,1\pi; \quad \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng các phương pháp:

- + phương pháp tương đương vi phân;
- + phương pháp bất biến xung.

Bài tập 6.17

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,05; \quad \omega_p = 0,2\pi; \quad \omega_s = 0,3\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.18

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \quad \omega_p = 0,1\pi; \quad \omega_s = 0,2\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev loại 1 bằng các phương pháp:

- + phương pháp tương đương vi phân;
- + phương pháp bất biến xung.

Bài tập 6.19

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = 0,05; \quad \delta_2 = 0,08; \quad \omega_p = 0,3\pi; \quad \omega_s = 0,4\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.20

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = 0,03; \quad \delta_2 = 0,09; \quad \omega_p = 0,4\pi; \quad \omega_s = 0,6\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp trên từ bộ lọc tương tự Chebyshev loại 1 bằng phương pháp biến đổi song tuyến.

Bài tập 6.21

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$LO_p = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_p})|} = 0,1 \text{ dB}$$

$$LO_s = 20 \lg \frac{1}{|H(e^{j\omega_s})|} = 50 \text{ dB}$$

$$\omega_p = 0,2\pi; \quad \omega_s = 0,3\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Cauer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.22

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$LO_p = 10 \text{ dB}; \quad LO_s = 30 \text{ dB}; \quad \omega_p = 0,3\pi; \quad \omega_s = 0,5\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Cauer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.23

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \quad \omega_p = 0,4\pi; \quad \omega_s = 0,6\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Cauer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.24

Cho các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số thông thấp như sau:

$$\delta_1 = 0,07; \quad \delta_2 = 0,09; \quad \omega_p = 0,5\pi; \quad \omega_s = 0,6\pi$$

Hãy tổng hợp bộ lọc số thông thấp này từ bộ lọc tương tự Cauer bằng các phương pháp:

- + phương pháp bất biến xung;
- + phương pháp biến đổi song tuyến;
- + phương pháp tương đương vi phân.

Bài tập 6.25

Giả sử chúng ta có bộ lọc tương tự thông thấp cơ bản ban đầu (dạng của bộ lọc tương tự Butterworth) với hàm truyền đạt như sau:

$$H_u(s) = \frac{\omega_{ac}}{s + \omega_{ac}}$$

Hãy biến đổi bộ lọc tương tự thông thấp với tần số cắt là ω_{ac} này thành:

- Bộ lọc tương tự thông thấp khác với tần số cắt $\omega'_{ac} = 1,5\omega_{ac}$.
- Bộ lọc tương tự thông cao với tần số cắt $\omega'_{ac} = 2\omega_{ac}$.
- Bộ lọc tương tự thông dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .
- Bộ lọc tương tự chắn dải với tần số cắt dưới là ω'_{ac1} và tần số cắt trên là ω'_{ac2} .

Bài tập 6.26

Cho bộ lọc số thông thấp Butterworth có hàm truyền đạt $H(z)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(z) = \frac{0,25(1+z^{-1})}{1-0,51z^{-1}}$$

Bộ lọc số này có tần số cắt $\omega_c = 0,2\pi$.

Hãy biến đổi bộ lọc số này thành:

- Bộ lọc số thông thấp khác với tần số cắt $\omega'_c = 0,1\pi$.
- Bộ lọc số thông cao với tần số cắt $\omega'_c = 0,3\pi$.
- Bộ lọc số thông dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/3$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/2$.
- Bộ lọc số chắn dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/4$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/3$.

Bài tập 6.27

Cho bộ lọc số thông thấp có hàm truyền đạt $H(z)$ được cho bởi biểu thức sau đây:

$$H(z) = \frac{0,003(1+z^{-1})^3}{(1-0,855z^{-1})(1-0,575z^{-1}+0,740z^{-2})}$$

Bộ lọc số này có tần số cắt $\omega_c = 0,1\pi$.

Hãy biến đổi bộ lọc số này thành:

- Bộ lọc số thông thấp khác với tần số cắt $\omega'_c = 0,2\pi$.

b) Bộ lọc số thông cao với tần số cắt $\omega'_c = \pi/4$.

c) Bộ lọc số thông dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/4$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/2$.

d) Bộ lọc số chắn dải với tần số cắt dưới là $\omega'_{c1} = \pi/5$ và tần số cắt trên là $\omega'_{c2} = \pi/3$.

Bài tập 6.28

Hãy thiết kế bộ lọc số thông cao Butterworth với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,08; \omega_p = \pi/3; \omega_s = \pi/2$$

Dùng hai phương pháp đi từ bộ lọc thông thấp tương tự được minh hoạ trên hình 6.5.3.1 a và b.

Bài tập 6.29

Hãy thiết kế bộ lọc số thông dải Butterworth với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\delta_1 = 0,07; \delta_2 = 0,1;$$

$$\omega_{p1} = 0,2\pi; \omega_{s1} = 0,3\pi$$

$$\omega_{p2} = 0,5\pi; \omega_{s2} = 0,6\pi$$

Dùng hai phương pháp đi từ bộ lọc thông thấp tương tự được minh hoạ trên hình 6.5.3.1 a và b.

Bài tập 6.30

Hãy thiết kế bộ lọc số thông cao Chebyshev loại 1 với các chỉ tiêu kỹ thuật sau đây:

$$\delta_1 = 0,05; \delta_2 = 0,1; \omega_p = \pi/4; \omega_s = \pi/3.$$

PHỤ LỤC

$$S = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

$$S = \sum_{k=0}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$$

$$S = \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} k = \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} 1 = n_2 - n_1 + 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow x > 0 \quad S \text{ hội tụ nếu } x < 1$$

S phân kỳ nếu $x \geq 1$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{nếu } x < 1$$

$$S = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \text{nếu } x < 1$$

$$S = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{nếu } x \neq 1$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} x^k = \frac{x^{n_1} - x^{n_2+1}}{1-x} \quad \text{nếu } n_2 > n_1$$

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \sum_{k=n_1}^{n_2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2+1}$$

Chuỗi Riman:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{hội tụ nếu } \alpha > 1$$

phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$

Nghiệm của phương trình : $x^N - a^N = 0$

Phương trình có N nghiệm là :

$$x_k = ae^{\frac{j2\pi}{N}(k-1)} \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$

$$\text{và : } x^N - a^N = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N)$$

Hàm dấu Sgn :

$$\text{Sgn}(a) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} +1 & \text{nếu } a > 0 \\ -1 & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

hoặc :

$$\text{Sgn}(a) = \begin{cases} e^{j0} & \text{nếu } a > 0 \\ e^{j\pi} & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Sgn}(a) = \begin{cases} e^{j0} & \text{nếu } \frac{a}{|a|} = 1 \\ e^{j\pi} & \text{nếu } \frac{a}{|a|} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Sgn}(a) = e^{j \left(1 - \frac{a}{|a|} \right) \frac{\pi}{2}}$$

Một vài công thức lượng giác :

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + jsin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

$$\cosh\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

$$\sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Nguyễn Xuân Quỳnh* "Lý thuyết mạch logic và kỹ thuật số", Nhà xuất bản Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà Nội 1991.
2. *Nguyễn Xuân Quỳnh* "Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng", Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội 1995.
3. *Nguyễn Quốc Trung* "Vi điện tử số", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội 1997.
4. *M. Kunt* "Traitement numérique des signaux" TE XX, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1980.
5. *R. Boite et H. Leich* "Les filtres numérique" Masson, Paris 1982.
6. *P. G. Fontolliet* "Systèmes de télécommunications" TE. XVIII., Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1983.
7. *M. Hassler, J. Neiryneck* "Filtres électriques" TE. XIX Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1982.
8. *René Boite et Murat Kunt* "Traitement de la Parole" Complément au Traité d'électricité, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1987.
9. *Alexandru Spataru* "Fondements de la théorie de la Transmission de l'informatinon complément au Traité d'électricité, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1987.
10. *Hansruedi Buhler* "Réglages échantillonnés"
Vol. 1 (1982, 1986). Traitement par la transformation en Z.
Vol. 2 (1983), Traitement dans l'espace d'état.
Complément au traité d'électricité, presses Polytechniques romandes, Lausanne.
11. *M. G. Bellanger* "Tratement numérique du signal" Masson, Paris 1988.
12. *Jean - Pirre Vidal* "Tratement numérique du Signal", Paris 1987.
13. *Jean - Claude Lafont et Jean - Paul Vabre* "Cours et Prolèmes d'électronique numérique" Ellipses, Paris 1988.
14. *F. de Coulon* "Théorie et traitement des Signaux" TE. VI, Presses Polytechniques romandes, Lausanne 1984.
15. *Leland B. Jackson* "Signals, Systems and Transforms" Addison - Wesley Publishing Company, printed in The United States of America 1991.
16. *Peter Kraniuskas* "Transforms in Signals and Systems" Addison - Wesley Publishing Company, printed in Great Britain by William Clowes Ltd. 1993.

17. INMOS Limited "Digital Signal Processing" Prentice Hall International (UK) Ltd. Printed and bound in Great Britain at the University Press, Cambridge, 1989.
18. *John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis* "Introduction to Digital Signal Processing" Maxwell Macmillan International Editions, New York 1989.
19. *John G. Proakis* " Digital Communication" McGraw - Hill International Editions Printed in Singapore 1995.
20. *A. Antoniou* "Digital filter: Analysis and Design" McGraw Hill, New York 1979.
21. *Richard G. Lyons* "Understanding Digital Signal Processing" Addison - Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1997.
22. *Gordon E. Pelton* "Voice Processing" McGraw - Hill International Editions 1993.
23. *John G. Proakis and Dimitris G. Manolakis* "Digital Signal Processing: Principles Algorithms, and Applications" Macmilan Publishing Company, printed the republic of Singapore, 1992.
24. *David J. Defatta, Joseph G. Lucas and William S. Hodgkiss* "Digital Signal Processing: A System Design Approach" John Wiley & Sons. Inc, printed ub Singapore 1988.
25. *Athanasios Papoulis* "Signal Analysis" McGraw - Hill Book Company, New York 1977.
26. *Sophoclis J. Orfanidis* "Optimum Signal processing: A Introduction" McGraw - Hill Book Company New York 1988.
27. *James V. Candy* " Signal Processing: The Modern approach" McGraw - Hill Book Company New York 1988.
28. *Stephen P. Banks* " Signal Processing, Image processing and Pattern Recognition" Prentice Hall International (UK) Ltd. 1991.
29. *Richard J. Vaccaro* "Digital Control: "A State - Space Approach" McGraw - Hill, Inc, New York 1995.
30. *Charles W. Therrien* "Discrete Random Signal and Statistical Signal processing" Prentice Hall International, Inc, Printed in the United States of America, 1992.
31. *C J. Savant, Jr., Martin S. Roden, and Gordon L. Carpenter* "Electronic design: Circuits and Systems" The Benjamin/ Cummings Publishing company, Inc, California 1991.
32. *R. E. Crochiere and L. R. Rabiner* "Multirate Digital Signal Processing" Englewood cliffs, NJ: Prentice, 1983.

33. *L. R. Rabiner and B. Gold* "Theory and Application of Digital Signal Processing" Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1975.
34. *A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer* "Digital Signal Processing" Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1975.
35. *Martin Vetterli* "A Theory of Multirate Filter Banks" IEEE Transaction on acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol ASSP - 35, No - 3, March 1987.
36. *P. P Vaidyanathan* "Multirate Digital filter, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications" A Tutorial Proceedings of IEEE, Vol78, No 1 January 1990.
37. *Ali N. Akansu* "The Binomial QMF - Wavelet Transform for Multiresolution Signal Decomposition" IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 1 January 1993 P. P 13 - 14.
38. *R. D Koilipillai and P. P Vaidyanathan* "A Spectial factorization Approach to Pseudo - QMF Design" Transactions on Signal Processing, Vol 41 No 1 January 1993, P. P 82 - 92.
39. *A. S. Alkairy* "Design and characterization of optimal FIR filer with arbitrary phase". IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 41 No February 1993 P. P 559 - 637.
40. *G. Li* "Optimal FWL (finite word length) Design of State - Space Digital Systems With Weighted Sensitivity Minimization and Sparseness Consideration", IEEE Transaction on circuits and Systems, Vol 39 No May 1992 P. P 365 - 376.
41. *P. P Vaidyanathan and T. Q. Nguyen* "ATrick for the design of FIR half - band filters". IEEE Transaction on circuits and Systems, Vol 34 Mar 1987 P. P 397 - 300.
42. *P. P Vaidyanathan and T. Q. Nguyen* "Eigenfilter: A new approach to least - square FIR filter design and applications icluding Nyquist filter", IEEE Transaction on circuita and systems, Vol 34 Jan 1997 P. P 11 - 23.
43. *P. P Vaidyanathan, Z. Dognata, T. Q. Nguyen, and T. Saramaki* "Improved approach for De of perfect rescontruction FIR QMF banks with lossless polyphase structures", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 37 July 1989.
44. *P. P Vaidyanathan, Z. Dognata, and T. Q. Nguyen* " General Synthesis Procedures for Lossless transfer matrices, for perfect rescontruction multirate filter bank applications" IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 36 P. P 1561 - 1574 Oct 1988.
45. *P. Q. Hoang and P. P Vaidyanathan* "Latice Structures for optimal design and robust implementation of two - channel rescontruction QMF banks", IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc. Vol 36 P. P 81 - 94 Jan 1988.

MỤC LỤC

Chương 5. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI HỮU HẠN

5.1. Mở đầu	7
5.1.1. Lời nói đầu	7
5.1.2. Ôn tập	7
5.2. Tổng quan	9
5.2.1. Các tính chất tổng quát của bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR)	9
5.2.2. Các giai đoạn tổng hợp bộ lọc số FIR	11
5.3. Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính	11
5.3.1. Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha)	11
5.3.2. Bộ lọc số FIR pha tuyến tính	12
5.4. Đáp ứng tần số của các bộ lọc FIR pha tuyến tính	18
5.4.1. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N lẻ (FIR loại 1)	18
5.4.2. Trường hợp đáp ứng xung đối xứng, N chẵn (FIR loại 2)	21
5.4.3. Trường hợp đáp ứng xung phản đối xứng, N lẻ (FIR loại 3)	25
5.4.4. Trường hợp đáp ứng xung phản đối xứng, N chẵn (FIR loại 4)	28
5.4.5. Tổng kết	32
5.5. Vị trí điểm không của bộ lọc FIR pha tuyến tính	33
5.5.1. Tổng quan	33
5.5.2. Điểm không phức không nằm trên vòng tròn đơn vị	34
5.5.3. Điểm không phức nằm trên vòng tròn đơn vị	37
5.5.4. Điểm không thực không nằm trên vòng tròn đơn vị	39
5.5.5. Điểm không thực nằm trên vòng tròn đơn vị	40
5.6. Các phương pháp tổng hợp bộ lọc số có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn	42
5.6.1. Tổng quan	42
5.6.2. Các phương pháp	42
5.7. Phương pháp cửa sổ	42
5.7.1. Mở đầu	42
5.7.2. Cửa sổ chữ nhật	43
5.7.3. Cửa sổ tam giác	60
5.7.4. Cửa sổ Hanning và Hamming	69
5.7.5. Cửa sổ Blackman	75
5.7.6. Cửa sổ Kaiser	78

5.8. Phương pháp lấy mẫu tần số	80
5.8.1. Tổng quan	80
5.8.2. Các đặc trưng cơ bản	81
5.8.3. Tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính với lấy mẫu tần số loại 1	87
5.8.4. Tổng hợp bộ lọc số FIR pha tuyến tính với lấy mẫu tần số loại 2	103
5.9. Phương pháp lặp	111
5.9.1 Tổng quan	111
5.9.2. Gần đúng theo nghĩa Chebyshev	113
5.9.3. Thuật toán thay đổi Remez	119
Bài tập chương 5	127
 Chương 6. TỔNG HỢP CÁC BỘ LỌC SỐ CÓ ĐÁP ỨNG XUNG CHIỀU DÀI VÔ HẠN (BỘ LỌC SỐ IIR)	
6.1. Mở đầu	135
6.2. Các tính chất tổng quát của bộ lọc	135
6.2.1. Bộ lọc số IIR thực hiện được	135
6.2.2. Hàm truyền đạt	136
6.2.3. Đáp ứng tần số của bộ lọc số IIR	136
6.2.4. Thời gian truyền nhóm	137
6.3. Các phương pháp tổng hợp bộ lọc số IIR từ bộ lọc tương tự	140
6.3.1. Mở đầu	140
6.3.2. So sánh hệ thống tương tự và hệ thống số	140
6.3.3. Phương pháp 1: phương pháp bất biến xung	142
6.3.4. Phương pháp 2: phương pháp biến đổi song tuyến	149
6.3.5. Phương pháp 3: phương pháp tương đương vi phân	158
6.3.6. Phương pháp 2: phương pháp biến đổi z thích ứng	164
6.4. Tổng hợp các bộ lọc tương tự	166
6.4.1. Tổng quan về các bộ lọc tương tự	166
6.4.2. Bộ lọc tương tự Butterworth	166
6.4.3. Bộ lọc tương tự Chebyshev	180
6.4.4. Bộ lọc tương tự Cauer (hoặc bộ lọc tương tự elliptique)	220
6.5. Biến đổi tần số	234
6.5.1. Biến đổi tần số trong miền tương tự	234
6.5.2. Biến đổi tần số trong miền số	239
6.5.3. Kết luận	245
Bài tập chương 6	245
Phụ lục	
Tài liệu tham khảo	

208290 B00

Xử lý tín hiệu và lọc số t2



0807090000076

73,000

Giá: 73.000đ