

NGUYỄN HỮU MINH (chủ biên) - TẠ DUY LỢI
ĐỖ ĐÌNH THANH - LÊ TRỌNG TƯỜNG

BÀI TẬP VẬT LÝ LÍ THUYẾT

TẬP MỘT

(CƠ HỌC LÍ THUYẾT - ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC
VÀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



NGUYỄN HỮU MINH (Chủ biên)
TẠ DUY LỢI - ĐỖ ĐÌNH THANH – LÊ TRỌNG TƯỜNG

Bài tập **VẬT LÝ LÝ THUYẾT**

TẬP MỘT

(Cơ học lý thuyết - Điện động lực học
và Thuyết tương đối)

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục

11-2007/CXB/285-2119/GD

Mã số: 7K535T7 - DAI

Lời nói đầu

Tuyển tập các bài tập Vật lí lí thuyết nhằm phục vụ cho việc giảng dạy và học tập bộ môn Vật lí lí thuyết ở các trường Đại học Sư phạm. Khác với các tuyển tập các bài tập vật lí lí thuyết đã xuất bản, tuyển tập này có lời giải sẵn từ dễ đến khó nhằm một mặt giúp sinh viên làm quen với các phương pháp giải bài tập vật lí lí thuyết để tự mình có thể giải được những bài tập vật lí lí thuyết phức tạp hơn, mặt khác giúp sinh viên tự học tập nghiên cứu để hiểu sâu những vấn đề cơ bản được trình bày trong các giáo trình vật lí lí thuyết đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo cho xuất bản.

Tuyển tập các bài tập Vật lí lí thuyết được biên soạn phù hợp với chương trình vật lí của Bộ Giáo dục và Đào tạo, chia làm hai tập. Tập I gồm phần I : Cơ học lí thuyết, phần II : Điện động lực học và Thuyết tương đối. Tập II gồm phần III : Cơ học lượng tử và phần IV : Vật lí thống kê. Mỗi phần đều có đề bài và lời giải, phân công biên soạn như sau :

Phần I : Tạ Duy Lợi,

Phần II : Lê Trọng Tường,

Phần III : Nguyễn Hữu Minh,

Phần IV : Đỗ Đình Thanh.

Khi biên soạn sách Bài tập Vật lí lí thuyết này chúng tôi đã dựa vào các bài tập đã được chọn lọc để giảng trong những năm gần đây và đã sử dụng nhiều bài tập trong Tuyển tập bài tập Vật lí lí thuyết đã xuất bản năm 1983 của NXBGD, chọn nhiều bài tập trong các sách bài tập và sách lí thuyết của các tác giả trong và ngoài nước.

Sách Bài tập Vật lý lý thuyết này chủ yếu dùng cho sinh viên khoa vật lý các trường Đại học Sư phạm nhưng có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các trường đại học khác có học bộ môn Vật lý lý thuyết.

Vì kinh nghiệm của chúng tôi còn ít nên chắc chắn tuyển tập các bài tập Vật lý lý thuyết này còn nhiều thiếu sót, chúng tôi mong các bạn đồng nghiệp, các anh, chị sinh viên góp ý xây dựng.

Tập thể tác giả

Phần I

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

A. ĐỀ BÀI

§ 1. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

I. Động học chất điểm

1. Xác định quỹ đạo của chất điểm, biết phương trình chuyển động của chúng có các dạng sau đây :

$$\text{a) } x = 2\sin \frac{\pi t}{3}, \quad y = 3\cos \frac{\pi t}{3}$$

$$\text{b) } x = a(\sin kt + \cos kt), \quad y = b(\sin kt - \cos kt)$$

$$\text{c) } x = \sqrt{t}, \quad y = e^{-t}$$

$$\text{d) } \vec{r} = (3t + 2)\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j} + (2 + t)\vec{k}$$

với $\vec{r}$ là bán kính vectơ xác định vị trí chất điểm; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị.

$$\text{e) } \vec{r} = 6\cos 2t.\vec{j} + t.\vec{k}$$

2. Xác định phương trình chuyển động theo quỹ đạo $s = s(t)$ và bán kính cong của quỹ đạo, biết phương trình chuyển động của chất điểm có các dạng sau :

$$a) x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

$$b) x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = ut + \frac{at^2}{2}$$

(R, ω, a, u là các hằng số)

$$c) x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}$$

$$d) x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

3. Xác định vận tốc và gia tốc của chất điểm tại vị trí bất kì của quỹ đạo, biết phương trình chuyển động của chúng có dạng :

$$a) x = t^2, \quad y = \frac{1}{3} t^3$$

$$b) x = a(\sin kt + \cos kt), \quad y = a(\sin kt - \cos kt)$$

$$c) x = a \cos \omega t + b \sin \frac{\omega t}{2}, \quad y = a \sin \omega t - b \cos \frac{\omega t}{2}$$

$$d) x = R \cos \omega t + \omega R t \sin \omega t, \quad y = R \sin \omega t - \omega R t \cos \omega t$$

$$e) x = 6 + 4t^2, \quad y = 3t^2 - 1$$

$$g) r = a(1 + t^2), \quad \varphi = \arctg t$$

$$h) r = e^t, \quad \varphi = 2t, \quad \theta = t$$

với a, ω, k, R, b là các hằng số.

4. Xác định phương trình chuyển động theo quỹ đạo $S = S(t)$, biết phương trình chuyển động của chất điểm có dạng :

$$a) x = 3t^2 + 5, \quad y = 4t^2 + 3$$

$$b) x = 1 - t, \quad y = t - 1$$

$$c) x = 2\sin 2t, \quad y = 2\cos 2t$$

$$d) x = a + R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t$$

$$e) x = 3\cos t^2, \quad y = 3\sin t^2$$

$$g) x = 4a\cos^2\omega t, \quad y = 3a\sin^2\omega t$$

$$h) x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$

$$i) x = a(1 - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

$$k) x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

$$l) x = a(2\cos t + \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

với a, b, ω, R là các hằng số.

5. Thanh AB có khối lượng không đáng kể, độ dài l , dao động quanh điểm B trong mặt phẳng thẳng đứng với góc lệch $\varphi = \omega t$; điểm B trong khi đó dao động trên mặt phẳng nằm ngang theo phương trình $x = a + b\sin\omega t$. Xác định vận tốc, gia tốc tiếp tuyến và gia tốc toàn phần của điểm A.

6. Hai tàu biển A, B cùng xuất phát từ các vị trí A_0 và B_0 với vận tốc không đổi v_A, v_B theo hai phương vuông góc với nhau về phía cắt nhau của hai phương đó. Xác định thời điểm khi khoảng cách giữa A và B nhỏ nhất.

7. Một người muốn từ vị trí A trên bờ biển đến đảo B trên biển cách bờ 18km. Khoảng cách AB = 80km. Ở vị trí nào trên bờ biển người đó phải đi bằng xuồng máy, nếu tốc độ của nó là 36km/h và tốc độ ô tô dọc theo đoạn thẳng trên bờ biển là 72km/h, để có thể đến đảo B nhanh nhất?

8. Tại điểm giữa C của thanh AB ta nối đoạn thẳng CD vuông góc với AB. Khi các điểm A và B trượt trên hai phương vuông góc Ox và Oy, hãy tìm quỹ đạo điểm D nếu $CD = \frac{1}{2} AB$ và $CD \neq \frac{1}{2} AB$.

9. Bánh xe tâm A, bán kính R, lăn không trượt trên vành bánh xe cố định tâm O bán kính R nhờ tay quay OA quay đều quanh O với vận tốc góc không đổi ω trong mặt phẳng thẳng đứng ngược chiều kim đồng hồ. Xác định phương trình chuyển động của điểm M trên vành bánh xe tâm A, biết rằng ở điểm đầu của chuyển động, M trùng với tiếp điểm của hai bánh xe và nằm trên phương ngang Ox.

10. Tàu biển đi theo phương hợp với kinh tuyến góc α không đổi với vận tốc đều v. Xác định gia tốc của tàu.

11. Một chất điểm chuyển động nhanh dần đều theo đường tròn từ trạng thái đứng yên. Xác định tỉ số giữa gia tốc toàn phần của điểm đó sau n vòng và sau một vòng.

12. Chất điểm chuyển động với vận tốc đầu v_0 theo đường tròn bán kính R. Gia tốc tiếp tuyến tỉ lệ với căn bậc hai của gia tốc pháp tuyến. Xác định vận tốc và phương trình chuyển động $s = s(t)$ của chất điểm.

13. Chất điểm bắt đầu chuyển động từ A theo đoạn thẳng AB với vận tốc bất kì. Lấy một điểm O ngoài AB làm cực và OA làm trục cực. Tìm phương trình chuyển động của chất điểm dưới dạng toạ độ cực.

14. Chất điểm chuyển động theo đường parabol $y = kx^2$ sao cho gia tốc của nó song song với trục Oy và bằng a (a và k là hằng số). Xác định gia tốc pháp tuyến và gia tốc tiếp tuyến của chất điểm.

15. Chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng. Gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến của nó lần lượt bằng các hằng số a và b. Hãy tìm quỹ đạo của chất điểm trong các toạ độ cực.

16. Chất điểm chuyển động theo quỹ đạo phẳng với vận tốc diện tích σ_0 không đổi, còn giá trị vận tốc dài của chất điểm tỉ lệ nghịch với khoảng cách ρ từ gốc toạ độ tới chất điểm (hệ số tỉ lệ a). Tìm phương trình chuyển động, phương trình quỹ đạo và gia tốc của chất điểm như các hàm của ρ , biết rằng khi $t = 0$, $\vec{r}_{(0)} = \vec{r}_0$, $\vec{v}_{(0)} = \vec{v}_0$.

II. Động lực học chất điểm

17. Khẩu súng được đặt trên mặt đất có độ cao h so với phương nằm ngang trên mặt đất Ox . Vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ của viên đạn hợp với phương Ox góc α . Bỏ qua sức cản của không khí, xác định xem với giá trị nào của α tầm xa của viên đạn trên Ox là cực đại.

18. Khẩu súng đặt tại điểm O trên phương nằm ngang Ox và bắn một viên đạn với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ hợp với Ox góc α trong mặt phẳng thẳng đứng. Đồng thời một khẩu súng khác đặt tại điểm A trên Ox và cách O một đoạn bằng l , bắn đạn thẳng đứng lên trên trong mặt phẳng chứa $\vec{v}_0$ và Ox . Vận tốc ban đầu $\vec{v}_A$ của viên đạn bắn ở A phải bằng bao nhiêu để nó chạm với viên đạn bắn ở O . Bỏ qua sức cản của không khí.

19. Chứng minh rằng nếu quỹ đạo của chất điểm là đường tròn và vận tốc góc quay của bán kính vector $\vec{r}$ của chất điểm không đổi thì lực gây ra chuyển động của chất điểm hướng về tâm của đường tròn.

20. Xác định lực tổng hợp tác dụng lên chất điểm và gây ra chuyển động của nó với các phương trình chuyển động có dạng :

$$a) r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \omega t$$

$$b) x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = vt + \frac{at^2}{2}$$

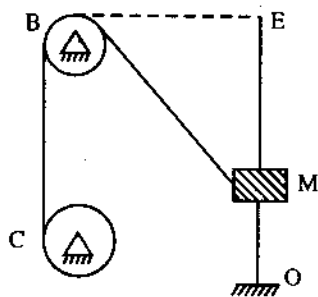
$$c) x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = e^t$$

$R, \omega, \alpha, r_0, v$ là các hằng số.

21. Điểm M trọng lượng P nằm yên trên mặt phẳng nghiêng AB hợp với phương ngang góc α . Nếu AB chuyển động song song với chính nó theo phương ngang về phía ngược với $\vec{Bx}$ ($\vec{x}$ hướng theo phương nằm ngang) với gia tốc là W_{AB} thì M có thể chuyển động lên theo BA. Với giá trị nào của W_{AB} thì M bắt đầu chuyển động lên theo BA ? Hệ số ma sát giữa M và mặt phẳng nghiêng là f.

22. Vệ tinh địa tĩnh là vệ tinh đứng yên so với người quan sát trên mặt Trái Đất. Xác định mối liên hệ giữa vận tốc v của vệ tinh và khoảng cách h từ vệ tinh tới mặt đất nếu quỹ đạo vệ tinh là đường tròn thuộc mặt phẳng chứa đường xích đạo.

23. Trong mặt phẳng thẳng đứng (h.1.1) sợi dây không giãn, không khối lượng CBM, được cuộn vào bánh xe C có tâm cố định, bán kính r, sau đó vắt qua ròng rọc cố định B rồi buộc vào vật M khối lượng m. Khi bánh xe C quay, nó kéo vật M lên theo thanh OE trùng với phương thẳng đứng (E ở cùng độ cao với B), $BE = l$, O là vị trí đầu của M. Bỏ qua các lực ma sát, xác định



Hình 1.1

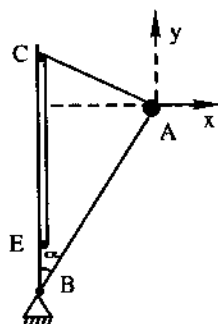
sức căng của sợi dây dưới dạng hàm của $x = EM$ trong hai trường hợp:

a) $\omega = \text{const}$, (ω là vận tốc góc của bánh xe C).

b) $\dot{\omega} = \text{const}$.

24. Xe chạy trên đoạn đường cong có bán kính cong là R và mặt đường nghiêng góc α so với mặt phẳng ngang. Xác định khoảng vận tốc cho phép để xe không bị đổ nếu hệ số ma sát giữa lốp xe và mặt đường là f.

25. Quả cầu khối lượng m được buộc vào đầu A của thanh AB độ dài l , khối lượng không đáng kể, bằng sợi dây không khối lượng, nhưng có thể đàn hồi, hệ số đàn hồi là k . Sợi dây được luồn qua ống thẳng đứng CE rồi buộc cố định đầu dây ở E (h.1.2), ở thời điểm đầu $t = 0$, A trùng với C. Khi AB quay quanh phương CE, với B là cố định, đã kéo sợi dây căng thêm đoạn CA và góc ABC bằng α . Xác định áp lực của quả cầu lên AB và vận tốc góc của A dưới dạng hàm của góc α .



Hình 1.2

26. Chất điểm khối lượng m chuyển động bắt đầu từ điểm M với vận tốc $\vec{v}_0$ hướng theo phương nằm ngang. Xác định phương trình chuyển động của chất điểm trong các trường hợp bỏ qua lực cản của môi trường và khi lực cản đó tỉ lệ với vận tốc.

27. Tên lửa bay lên theo phương thẳng đứng với vận tốc đầu $v_0 = (2gR)^{1/2}$ (tốc độ vũ trụ cấp hai), với R là bán kính Trái Đất. Viết phương trình chuyển động của tên lửa, bỏ qua sức cản của không khí.

28. Vật khối lượng m rơi trong chất lỏng mà lực cản tỉ lệ với bình phương vận tốc rơi của vật. Xác định vận tốc và quãng đường của vật, khi $t = 0$, $v_0 = 0$.

29. Vật khối lượng m chuyển động từ dưới lên theo phương thẳng đứng Ox với vận tốc đầu v_0 . Lực cản của không khí tỉ lệ với bình phương vận tốc. Xác định độ cao cực đại mà vật lên được và thời gian vật lên đến độ cao đó.

30. Một hạt khối lượng m , điện tích q bay vào trong hai điện trường đồng nhất vuông góc với nhau có các cường độ thay đổi $\vec{E}_1 \cos \omega t$ và $\vec{E}_2 \cos \omega t$. Hãy xác định xem với các điều kiện ban đầu

và các giá trị biên độ E_1, E_2 như thế nào thì quỹ đạo của hạt là đường xicloid (E_1, E_2, ω là các hằng số).

31. Một hạt với khối lượng m , điện tích q chuyển động trong điện trường có cường độ $\vec{E} = E_0 \sin \frac{z}{a} \vec{i}$ (E_0, a là các hằng số, $\vec{i}$ là vectơ đơn vị trên trục Ox). Tìm phương trình chuyển động của hạt biết rằng tại thời điểm đầu của chuyển động $r_{(0)} = 0, \vec{v}_{(0)} = v_0 \cdot \vec{k}$, $\vec{k}$ là vectơ đơn vị trên trục Oz .

32. Các chất điểm, không phụ thuộc khối lượng của chúng, cùng được ném lên từ một điểm với cùng vận tốc đầu v_0 theo tất cả các phương trong mặt phẳng thẳng đứng. Tìm quỹ tích các vị trí của các chất điểm tại thời điểm bất kì trong hai trường hợp : bỏ qua sức cản của không khí và cho rằng sức cản của không khí tỉ lệ với vận tốc.

33. Electron khối lượng m , điện tích e với vận tốc đầu v_0 bay vào khoảng không gian giữa hai bản cực của một tụ điện phẳng, theo phương vuông góc với mặt các bản cực. Cường độ điện trường giữa hai bản cực của tụ điện $E = E_0 \sin \omega t$; (E_0, ω là các hằng số). Xác định độ lớn của E_0 để sau khoảng thời gian $t = \pi/\omega$, electron lại trở về tới vị trí đầu của chuyển động. Khoảng cách tối đa giữa hai bản cực phải bằng bao nhiêu để electron đến được bản cực thứ hai ? Bỏ qua trọng lượng của electron.

34. Hạt có khối lượng m , điện tích q chuyển động trong điện trường tắt dần có cường độ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-kt} \sin \omega t$ (k, ω là các hằng số). Bỏ qua trọng lượng của hạt, viết phương trình chuyển động của hạt nếu nó bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên.

35. Vật khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của lực $F = F_0(1 - v/v_k)$, (F_0, v_k là các hằng số, v là vận tốc của hạt). Lực cản của môi trường tỉ lệ với bình phương vận tốc. Xác định vận tốc của vật tại thời điểm t bất kì, biết vận tốc đầu của vật là v_0 .

36. Vật khối lượng m trượt trên mặt phẳng ngang theo đường thẳng Ox dưới tác dụng của lực $F_x = k^2mx$ và lực ma sát (hệ số ma sát là f , k là hằng số tỉ lệ). Ở thời điểm ban đầu $t = 0$, $v_0 = 0$ và $x_0 = a$. Tìm phương trình chuyển động của vật.

37. Buộc vật khối lượng m vào đầu một lò xo, đầu còn lại của lò xo chốt cố định. Khi truyền cho vật vận tốc đầu v_0 hướng theo phương ngang Ox (vật nằm trên mặt phẳng ngang), vật sẽ dao động dưới tác dụng của lực đàn hồi của lò xo $F_x = -\alpha x - \beta x^3$; ($\alpha, \beta = \text{const}$; x là độ giãn của lò xo). Xác định độ dịch chuyển cực đại của vật nếu nó chuyển động từ trạng thái không giãn của lò xo. Bỏ qua ma sát.

38. Chất điểm khối lượng m chuyển động với vận tốc đầu v_0 theo đường thẳng nằm ngang Ox dưới tác dụng của lực $F_x = -\alpha x - \beta x^3$, ($\alpha, \beta = \text{const}$). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu vận tốc của chất điểm giảm đi n lần. Tìm quãng đường đi được trong khoảng thời gian đó.

39. Giả sử xuống máy chuyển động dưới tác dụng của lực kéo $\vec{F} = \overline{\text{const}}$ và lực ma sát trượt trên mặt nước với hệ số ma sát trượt $f = a - bv$; (v là vận tốc của xuống; a, b là các hằng số). Xác định khoảng thời gian cần thiết để xuống máy tăng được tốc độ từ 0 đến giá trị v_1 và quãng đường xuống đi được trong khoảng thời gian đó.

40. Chất điểm M chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng từ điểm A dưới tác dụng của trọng lực và lực $\vec{F} = -k \cdot \overline{OM}$; (k là hệ số tỉ lệ; O là một điểm trong mặt phẳng thẳng đứng qua điểm A). Ở thời điểm đầu $t = 0$, $x_{(0)} = 0$, $y_{(0)} = b$ và $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang góc α . Xác định phương trình chuyển động của chất điểm.

41. Chất điểm chuyển động không ma sát theo đường cong $y = f(x)$ trong mặt phẳng thẳng đứng. Lập phương trình vi phân mô tả chuyển động của chất điểm.

42. Electron chuyển động trong điện trường có cường độ $\vec{E} = \text{const}$ với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ vuông góc với $\vec{E}$. Môi trường tác dụng lên electron lực cản $\vec{F} = -k\vec{v}$; (k là hệ số tỉ lệ). Xác định phương trình chuyển động của electron. Nếu có thể bỏ qua $\vec{F}$ khi nó nhỏ thì dạng của phương trình chuyển động thay đổi thế nào? Bỏ qua trọng lượng của electron.

43. Chất điểm M có khối lượng m, chuyển động với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ từ điểm A theo phương vuông góc với $\overline{OA} = \vec{r}_0$ (O là điểm cố định chọn làm gốc toạ độ) dưới tác dụng của hai lực $\vec{F}_1 = -mC_1\vec{r}$ và $\vec{F}_2 = mC_2\vec{r}_0$ (C_1, C_2 là các hằng số; $\vec{r} = \overline{OM}$). Tìm phương trình chuyển động và quỹ đạo của chất điểm. Tỉ số C_1/C_2 bằng bao nhiêu để chất điểm M đi qua O.

44. Chất điểm M có khối lượng m, chuyển động với vận tốc đầu v_0 từ điểm O theo phương vuông góc với đường thẳng OO_1 dưới tác dụng của hai lực $\vec{F}_1 = -C \cdot \overline{O_1M}$ và $\vec{F}_2 = -C \cdot \overline{O_2M}$; (O, O_1, O_2 là ba điểm cố định trên đường thẳng nằm ngang, $OO_1 = a$, $O_1O_2 = 2a$; C, a là các hằng số). Xác định phương trình chuyển động của chất điểm M và thời gian M thực hiện một chu kỳ của chuyển động.

45. Vật có khối lượng m trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng góc α_1 so với mặt phẳng ngang, sau đó lại trượt lên theo mặt phẳng nghiêng góc α_2 . Tính thời gian vật trượt lên cho tới khi dừng hẳn. Vận tốc ban đầu của vật bằng không, thời gian trượt xuống là t_1 , hệ số ma sát trượt bằng f .

46. Tìm sự thay đổi xung lượng của chất điểm M , khối lượng m , chuyển động đều theo đường tròn trên quỹ đạo bằng $1/4$ đường tròn.

47. Chất điểm có khối lượng m chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm theo đường cong $r = a/\varphi$, $a = \text{const}$. Khi $r = a$, vận tốc của chất điểm là v_0 . Xác định vận tốc và lực gây ra chuyển động của chất điểm dưới dạng hàm của r .

48. Chất điểm có khối lượng m chuyển động theo elíp có các bán trục là a và b dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ luôn hướng về tâm elíp. Khi chất điểm xa tâm elíp nhất, vận tốc của chất điểm là v_0 . Xác định lực $\vec{F}$ khi $y = 0$, $x = a$.

49. Chất điểm có khối lượng m chuyển động theo cong $r^2 = a \cos 2\varphi$ dưới tác dụng của lực hút xuyên tâm $\vec{F}$. Khi $t = 0$, $r = r_0$, $v_{(0)} = v_0$ và góc $(\vec{v}_0, \vec{r}_0) = \alpha$. Xác định lực $\vec{F}$ nói trên.

50. Chất điểm có khối lượng m chuyển động với vận tốc đầu v_0 hướng theo phương thẳng đứng dưới tác dụng của trọng lực và lực hút xuyên tâm $\vec{F} = -k^2 m \vec{r}$, (k là hệ số tỉ lệ, $\vec{r}$ là vectơ từ tâm lực tới chất điểm). Tìm phương trình chuyển động của chất điểm, biết rằng khi $t = 0$, $x_{(0)} = a$, $y_{(0)} = -gk^2$.

51. Xác định độ cao cực đại mà quả đạn đại bác có thể lên được nếu nó được bắn lên từ mặt đất với vận tốc $\vec{v}_0$ hợp với phương ngang

góc α . Quả đạn chuyển động dưới tác dụng của lực hấp dẫn. Bỏ qua lực cản của không khí.

52. Xác định quỹ đạo của hạt khối lượng m , chuyển động trong trường thế với thế năng $U = -\frac{\alpha}{r}$ biết rằng vector $\left[\vec{v}, \vec{L} \right] - \frac{\alpha}{r} \cdot \vec{r} = \vec{A}$ là vector hằng số; $\vec{v}$ là vận tốc, $\vec{r}$ là bán kính vector; $\vec{L}$ là mômen xung lượng của hạt ($\vec{A}$ là tích phân chuyển động).

53. Xác định quỹ đạo của hạt có khối lượng m , chuyển động trong trường thế với thế năng $U = (\alpha/r) + (\beta/r^2)$; (α, β là các hằng số). Ở thời điểm $t = 0$, $\vec{r}_{(0)} = \vec{r}_0$ và $\vec{v}_{(0)} = \vec{v}_0$.

54. Xác định quỹ đạo của hạt có khối lượng m , chuyển động trong trường thế với thế năng $U = -(\alpha/r) + (\beta/r^2)$ với vị trí và vận tốc ban đầu là $\vec{r}_0$ và $\vec{v}_0$.

55. Tìm quỹ đạo chuyển động của hạt có khối lượng m , năng lượng E (cơ năng) trong trường thế $U = (\alpha/r^2)$, $\alpha > 0$.

56. Chất điểm có khối lượng m chuyển động trong trường lực thế $U(r) = (\lambda/3) \cdot r^3$ (λ là hằng số) từ điểm A cách tâm O của trường lực $U(r)$ một khoảng $\overline{OA} = \vec{r}_0$ với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ vuông góc với $\overline{OA}$. Với giá trị nào của $\vec{v}_0$, thì quỹ đạo sẽ là đường tròn?

57. Chất điểm khối lượng m , có cơ năng bằng E chuyển động trong trường có thế năng $U = U(x)$. Xác định chu kì chuyển động của chất điểm.

58. Chất điểm có khối lượng m , cơ năng E chuyển động trong trường thế năng $U = U(x) + \delta U(x)$; ($\delta U(x) \ll U(x)$). Xác định phương trình chuyển động của chất điểm.

59. Xác định phương trình chuyển động của dao động tử một chiều với thế năng $U = (1/2)m\omega^2 x^2 + (1/3)m\alpha x^3$, với $(1/3)m\alpha x^3 \ll (1/2)m\omega^2 x^2$; α là hằng số, ω là tần số của dao động tử.

60. Xác định chu kì chuyển động một chiều của chất điểm có khối lượng m , cơ năng E trong trường thế $U(x) = U_0 \lg^2 \alpha x$ (U_0 và α là các hằng số).

61. Hai lò xo có hệ số cứng là C_1 và C_2 , lò xo thứ nhất được treo theo phương thẳng đứng, một đầu chốt cố định, đầu còn lại buộc vật A trọng lượng P . Trên đường rơi của vật A ta đặt lò xo có hệ số cứng C_2 với một đầu được chốt cố định. Khoảng cách giữa các đầu tự do của các lò xo khi chúng không giãn là h , khối lượng của chúng không đáng kể. Xác định độ nén tối đa của lò xo thứ hai nếu ta cho vật A rơi không có vận tốc ban đầu từ vị trí không giãn của lò xo thứ nhất.

62. Chất điểm A có khối lượng m chuyển động với vận tốc đầu v_0 từ điểm M theo đoạn thẳng MO (O là điểm cố định) dưới tác dụng của lực $\vec{F} = (k/r^4) \vec{r}$; ($\vec{r} = \vec{OA}$; $\vec{r}_0 = \vec{OM}$). Xác định khoảng cách ngắn nhất giữa điểm A và tâm O của trường.

63. Chất điểm có khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng xy theo các định luật $x = a \cdot \text{ch}(kt)$, $y = b \cdot \text{sh}(kt)$, (a, b, k là các hằng số). Xác định lực tác dụng lên chất điểm như hàm của vị trí; đồng thời chứng tỏ rằng mômen xung lượng và năng lượng của chất điểm là những đại lượng bảo toàn.

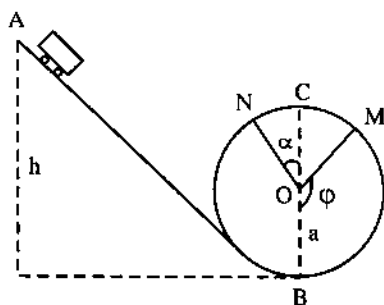
64. Chất điểm M có khối lượng m chuyển động theo đường tròn bán kính a dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ hướng về điểm cố định A. Chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí B cách A một khoảng $AB = 2a$ với vận tốc đầu $\vec{v}_0$ vuông góc với AB. Xác định vận tốc và lực F như hàm của bán kính vectơ $\vec{r}$ của chất điểm.

65. Xác định quy luật và chu kỳ dao động của con lắc toán học có độ dài l , biết rằng tại thời điểm đầu $t = 0$, $\varphi_{(0)} = 0$ và $\dot{\varphi}_{(0)} = \dot{\varphi}_0$ (φ là góc lệch khỏi phương thẳng đứng).

66. Một hạt có điện tích e chuyển động trong từ trường với cảm ứng từ $\vec{B} = (k/r^3) \vec{r}$, (k là hệ số tỉ lệ). Tìm tích phân chuyển động của hạt.

67. Chất điểm chuyển động trong trường đối xứng xuyên tâm và ngoài ra còn chịu tác dụng của lực ma sát $\vec{F} = -k\vec{v}$, (k là hằng số, $\vec{v}$ là vận tốc). Chất điểm có chuyển động trong mặt phẳng đi qua tâm lực hay không ?

68. Xe goòng có khối lượng m lăn theo đường ray AB, sau đó lộn lại theo vòng tròn BC bán kính a (hình 1.3). Độ cao h bằng bao nhiêu để xe goòng đi được hết vòng tròn mà không tách khỏi nó nếu vận tốc của xe ở A bằng không ? Bỏ qua ma sát, xác định áp lực của xe lên đường ray ở điểm M với góc $\angle MOB = \varphi$.



Hình 1.3

69. Giả sử cung MCN trên đường tròn nêu trong bài 68 bị cắt bỏ đi, góc $\angle NOC = \angle COM = \alpha$. Xác định độ cao h mà từ đó xe chuyển động không có vận tốc ban đầu có thể đi hết đường tròn mà không tách khỏi nó. Góc α bằng bao nhiêu để h nhỏ nhất. Bỏ qua các lực ma sát.

70. Con lắc toán học được buộc cố định một đầu dây ở

điểm O, lấy O làm gốc toạ độ, trục Oz hướng theo phương thẳng đứng xuống phía dưới, các trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng ngang. Con lắc bắt đầu chuyển động từ điểm $A(x_0, 0, z_0)$ với vận tốc đầu $\dot{x}_{(0)} = 0, \dot{y}_{(0)} = v_0, \dot{z}_{(0)} = 0$. Tìm điều kiện để con lắc chuyển động được hết đường tròn trong mặt phẳng ngang. Tìm chu kì chuyển động của con lắc.

71. Chất điểm có khối lượng m chuyển động không ma sát trên nửa mặt cầu bán kính a với vận tốc đầu v_0 từ điểm A cách đáy một đoạn bằng h_0 (đáy nằm trong mặt phẳng nằm ngang). Xác định áp lực của chất điểm lên mặt cầu khi có cách đáy một đoạn bằng h .

72. Vật A trọng lượng P được treo tại điểm cố định O bằng sợi dây mảnh không giãn OA có độ dài l . Vật A chuyển động không vận tốc ban đầu từ vị trí OA hợp với phương thẳng đứng góc α . Trong khi chuyển động tiếp theo, dây OA gặp phải chiếc đinh mảnh trong mặt phẳng chuyển động của nó (mặt phẳng thẳng đứng) tại O_1 . Góc giữa OO_1 và phương thẳng đứng là β ; $OO_1 = h$. Xác định giá trị nhỏ nhất của α để sau khi gặp đinh, OA cuốn vào nó; đồng thời tìm sự thay đổi của sức căng sợi dây khi nó gặp đinh. Bỏ qua độ dày của đinh và khối lượng dây buộc vật.

73. Chất điểm khối lượng m được buộc ở đầu sợi dây độ dài l , đầu còn lại của dây buộc cố định ở O. Chất điểm chuyển động từ A với vận tốc đầu bằng $\bar{v}_0$ vuông góc với OA; OA hợp với phương thẳng đứng góc 60° .

Xác định vị trí tại đó sức căng sợi dây bằng không và vận tốc tại vị trí đó. Tìm quỹ đạo của chất điểm trong chuyển động tiếp theo và thời gian chuyển động của nó trong suốt quá trình sức căng sợi dây bằng không.

III. Chuyển động tương đối của chất điểm

74. Bánh xe bán kính R lăn không trượt trên mặt phẳng ngang theo đường thẳng Ox . Vận tốc của tâm bánh xe không đổi. Xác định vận tốc và phương trình chuyển động của điểm M bất kì trên vành bánh xe. Cho biết khi $t = 0$, M là tiếp điểm của bánh xe với mặt ngang.

75. Xác định sự phụ thuộc của gia tốc rơi tự do vào vĩ độ trên mặt đất (sự phụ thuộc này xuất hiện do Trái Đất quay quanh trục của nó).

76. Dòng sông có chiều rộng l chảy theo kinh tuyến từ bắc xuống nam với vận tốc v . Xác định độ lệch của mức nước giữa hai bờ ở vĩ độ φ do sự quay quanh trục của Trái Đất gây nên.

77. Chất điểm M chuyển động theo dây cung của một đĩa tròn với vận tốc tương đối $v = \text{const}$. Đĩa tròn quay quanh tâm với gia tốc không đổi ε . Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của chất điểm M khi nó ở giữa dây cung.

78. Chất điểm M chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng Q theo đường cong $y = f(x)$ với vận tốc v_t . Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của chất điểm M dưới dạng hàm của v_t và $\overline{OM}$ nếu mặt phẳng Q quay quanh trục qua O và vuông góc với Q với vận tốc góc không đổi ω .

79. Chất điểm M chuyển động theo đường tròn bán kính R với vận tốc tương đối v_t . Tâm đường tròn chuyển động theo đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định chứa đường tròn với gia tốc không đổi W . Xác định gia tốc tuyệt đối của chất điểm M .

80. Hòn bi có trọng lượng P có thể trượt không ma sát theo ống thẳng và nhỏ AB hợp với phương thẳng đứng góc α . Khi AB quay đều quanh đường thẳng đứng qua điểm cố định A với vận tốc góc ω , hãy

tìm phương trình chuyển động của hòn bi biết rằng nó chuyển động với vận tốc đầu bằng không từ vị trí cách A một đoạn bằng a .

81. Hòn bi có trọng lượng P được gắn vào đầu lò xo AB tại điểm B ; đầu A của lò xo buộc cố định. Lò xo và hòn bi được đặt trong ống nhỏ nằm trên mặt phẳng ngang. Khi ống quay đều quanh điểm cố định A với vận tốc góc ω trong mặt phẳng ngang, xác định phương trình chuyển động của hòn bi theo ống nhỏ, biết rằng độ dài không giãn của lò xo là l , hệ số cứng C . Hòn bi chuyển động với vận tốc đầu bằng không từ điểm M trong ống cách B một đoạn $BM = a$.

82. Ống nhỏ CD quay đều trong mặt phẳng ngang quanh điểm cố định C với vận tốc góc ω . Xác định vận tốc của hòn bi lúc nó ra khỏi ống CD . Biết rằng hòn bi chuyển động không có vận tốc đầu từ điểm M , cách C một khoảng bằng x_0 .

83. Tàu sân bay chuyển động trên đại dương về hướng đông với vận tốc $\vec{v}_1$. Gió thổi về hướng bắc với vận tốc $\vec{v}_2$. Khi hạ cánh, máy bay tiến dần đến con tàu với vận tốc $\vec{v}_3$ theo phương thẳng đứng. Xác định giá trị vận tốc của máy bay đối với không khí.

84. Tìm phương trình chuyển động của con lắc toán học có độ dài l nếu điểm buộc nó chuyển động theo phương ngang với gia tốc không đổi $\ddot{a}$ ($\ddot{a}$ nằm trong mặt phẳng dao động của con lắc).

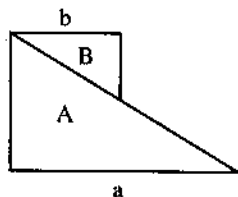
§ 2. CHUYỂN ĐỘNG CỦA HỆ CHẤT ĐIỂM

85. Hãy chứng minh rằng đối với những vật có tâm đối xứng, mặt đối xứng hoặc trục đối xứng, khối tâm của vật trùng với tam nằm trên mặt hoặc trục đối xứng đó.

86. Hòn bi có trọng lượng P được đặt trong một hình trụ rỗng có

bán kính R , khối lượng M . Hình trụ có thể lăn không trượt theo mặt phẳng ngang, nhẵn. Bỏ qua kích thước của hòn bi, xác định phương trình chuyển động của tâm hình trụ, biết rằng ở thời điểm đầu hình trụ đứng yên và vận tốc của hòn bi là $\vec{v}_0$.

87. Các lăng trụ đồng chất A, B có tiết diện ngang là các tam giác vuông được đặt lên nhau như trên hình 1.4. Độ dài các cạnh lăng trụ là a và b . Khối lượng lăng trụ A gấp n lần khối lượng lăng trụ B. Giả sử mặt phẳng ngang và các lăng trụ nhẵn tuyệt đối, xác định độ dịch chuyển của lăng trụ A trên mặt ngang khi B trượt trên A tới mặt ngang.



Hình 1.4

88. Con lắc toán học có khối lượng m , độ dài l được treo ở tâm của vật A khối lượng M nằm trên mặt phẳng ngang, nhẵn. Khi con lắc dao động nó kéo A chuyển động quanh vị trí cân bằng trên mặt phẳng ngang. Xác định phương trình chuyển động của vật A nếu phương trình dao động của con lắc là $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$.

89. Thuyền có khối lượng M đang chạy trên sông với vận tốc $\vec{v}_0$ thì một người ở trên thuyền có khối lượng m đi ngược với chiều chuyển động của thuyền với vận tốc $\vec{u}$ đối với thuyền. Bỏ qua vận tốc dòng nước, xác định độ dịch chuyển thêm của thuyền sau khoảng thời gian t .

90. Sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được vắt qua ròng rọc cố định 2 và ròng rọc động 1. Một đầu của dây buộc vào tâm ròng rọc 2, đầu còn lại buộc vào trọng vật B có trọng lượng P_2 . Trọng vật A có trọng lượng P_1 được treo vào tâm ròng rọc động 1. Xác định phản lực của trục ròng rọc 2 khi vật B chuyển động xuống với gia tốc không đổi W . Bỏ qua khối lượng của các ròng rọc.

91. Hai vật A, B có khối lượng m_1 , m_2 được buộc ở hai đầu sợi dây không giãn vắt qua ròng rọc C được gắn liền với đỉnh chiếc nêm (vuông góc ở đỉnh C) có khối lượng m và có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng ngang. Tìm độ dịch chuyển của chiếc nêm trên mặt phẳng ngang khi vật A trượt trên cạnh của nêm nghiêng góc α so với phương ngang xuống được độ cao bằng h . Ở thời điểm đầu, hệ các vật đứng yên. Bỏ qua các lực ma sát.

92. Chứng minh rằng mômen xung lượng và mômen lực của hệ n hạt không phụ thuộc vào vị trí điểm chọn làm gốc để tính chúng nếu vectơ xung lượng hoặc vectơ tổng các lực tác dụng lên hệ bằng không.

93. Sợi dây không giãn vắt qua ròng rọc cố định có khối lượng không đáng kể. Một đầu dây treo vật nặng, đầu còn lại có một người bám vào và leo lên theo dây với vận tốc tương đối đối với dây là a . Khối lượng của người và vật bằng nhau. Vật sẽ chuyển động như thế nào? Ở thời điểm đầu $t = 0$ cả hệ đứng yên.

94. Người ta buộc hai trọng vật có trọng lượng là P và P_1 vào đầu một sợi dây không giãn rồi vắt qua ròng rọc cố định B; đầu còn lại của dây buộc vật A nằm trên mặt phẳng ngang. A và B nằm trên cùng mặt phẳng. Khi các vật chuyển động với vận tốc ban đầu bằng không theo phương thẳng đứng qua đoạn đường bằng S_1 thì tới chiếc vòng C. Tại C trọng vật P_1 bị giữ lại, còn trọng vật P tiếp tục chuyển động thêm một đoạn bằng S_2 thì dừng hẳn. Xác định hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng ngang. Bỏ qua khối lượng ròng rọc và sợi dây.

95. Hai vật có trọng lượng P_1 và P_2 được buộc ở hai đầu một sợi dây không giãn vắt qua ròng rọc cố định A. Khi trọng vật P_1 trượt

không ma sát theo một rãnh nhỏ CD từ điểm C ở cùng độ cao với A theo phương thẳng đứng đã kéo trọng vật P_2 chuyển động lên. Tìm vận tốc của trọng vật P_1 khi nó xuống được độ cao h. Vận tốc của các trọng vật khi $t = 0$ đều bằng không; $CA = a$; bỏ qua khối lượng, kích thước của ròng rọc và sợi dây.

96. Những thành phần nào của xung lượng và mômen xung lượng của hệ bảo toàn khi hệ chuyển động trong các trường thế sau :

- Trường có dạng mặt phẳng vô tận.
- Trường có dạng nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng Oy.
- Trường có dạng hình trụ đồng chất dài tới vô cực.
- Trường tương tác giữa hai hạt.

97. Hai hạt có khối lượng m_1, m_2 , điện tích q_1, q_2 chuyển động trong điện trường có cường độ không đổi E. Tìm phương trình chuyển động của khối tâm của hệ và của các hạt.

98. Xác định phương trình chuyển động của hai hạt có khối lượng m_1, m_2 khi thế tương tác giữa chúng là $U(r) = \alpha > 0$, (r là khoảng cách giữa các hạt).

99. Xác định tiết diện tán xạ hiệu dụng của chùm hạt trên một quả cầu cứng tuyệt đối có bán kính R. Quy luật tương tác : $U = \infty$ khi $r < R$; $U = 0$ khi $r > R$ (r là khoảng cách từ hạt tới tâm cầu).

100. Xác định tiết diện hiệu dụng của sự rơi các hạt vào tâm trường lực $U = -\alpha/r^n$, (n - nguyên, dương).

101. Xác định tiết diện hiệu dụng của sự rơi của hạt có khối lượng m_1 lên mặt của quả cầu khối lượng m_2 , bán kính R mà chúng bị hút tới theo định luật vạn vật hấp dẫn của Niuton.

102. Xác định góc tán xạ và tiết diện tán xạ hiệu dụng của hạt có

năng lượng E trong trường thế $U = \alpha/r^2$, ($\alpha > 0$), biết khoảng cách tán xạ là ρ .

103. Một electron có khối lượng m , vận tốc ở vô cùng là v bay về phía một electron khác đang nằm yên tại gốc tọa độ, khoảng cách va chạm là ρ . Xác định vận tốc các electron sau va chạm.

104. Xác định khoảng cách gần nhất mà hạt có khối lượng m_1 , vận tốc ở vô cực là v_∞ có thể đến được cách vị trí của hạt có khối lượng m_2 , đứng yên tại gốc tọa độ. Biết rằng thế tương tác của các hạt $U = -\alpha/r$, $\alpha > 0$, r là khoảng cách giữa các hạt, ρ là khoảng cách va chạm.

105. Hạt có khối lượng m_1 chuyển động từ vô cùng với vận tốc v_∞ tới hạt khối lượng m_2 , đứng yên tại gốc tọa độ. Khoảng cách va chạm $\rho = 0$, thế tương tác của các hạt $U = \alpha/r^n$, ($\alpha > 0$). Xác định vị trí gần nhất giữa hai hạt.

106. Hạt có khối lượng m_1 bay với vận tốc v_{10} tới hạt đứng yên có khối lượng $m_2 = 3m_1$. Sau khi va chạm đàn hồi, hạt thứ hai bay đi với vận tốc v_2 theo phương hợp với vectơ $\vec{v}_{10}$ một góc 45° . Xác định góc giữa các phương chuyển động trước và sau va chạm của hạt thứ nhất.

107. Máy bay chuyển động theo đường thẳng nằm ngang Ox với vận tốc không đổi v . Từ điểm A cách Ox một đoạn bằng h đèn chiếu phải quay với vận tốc góc bằng bao nhiêu để chùm sáng của đèn luôn chiếu rõ máy bay?

108. Thanh OA có độ dài r được nối với thanh AB bằng ổ bi ở A , độ dài $AB = l$. Khi OA quay quanh trục cố định qua O và vuông góc với mặt phẳng thẳng đứng cố định chứa O và AB đã kéo AB chuyển động sao cho B chuyển động theo rãnh nhỏ Ox hướng theo phương

thẳng đứng. Lập công thức liên hệ giữa góc quay của OA và độ dịch chuyển của B và các vận tốc của chúng. Xét trường hợp riêng $r \ll l$.

109. Thanh AB có độ dài l rơi không vận tốc ban đầu từ vị trí nằm ngang cách mặt đất một khoảng bằng h . Khi rơi AB quay đều quanh điểm giữa của nó với vận tốc góc không đổi ω . Xác định phương trình chuyển động của AB nếu $CE = l/8$; C là điểm giữa của AB.

110. Bánh xe tâm O_1 , bán kính r lăn không trượt trong vành bánh xe tâm cố định O, bán kính R nhờ tay quay OO_1 quay đều trong mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc góc ω (hai bánh xe nằm trong cùng một mặt phẳng thẳng đứng, cố định). Khi $t = 0$, OO_1 hướng theo phương ngang Ox. Xác định phương trình chuyển động của bánh xe tâm O_1 .

111. Bánh xe tâm O có bán kính R được nối với thanh OA bằng ổ bi ở O. Khi thanh OA thực hiện các dao động nhỏ quanh tâm O trong mặt phẳng của bánh xe (thuộc mặt phẳng thẳng đứng) theo phương trình $\varphi = \varphi(t)$ thì bánh xe lăn không trượt quanh vị trí cân bằng với vận tốc của tâm O bằng v . Tìm phương trình chuyển động của hệ vật; vận tốc của các điểm A và B (B là điểm cao nhất trên vành bánh xe).

112. Hai bánh xe răng cưa hình elíp có các bán trục lớn và nhỏ bằng nhau và bằng a, b được móc tiếp xúc với nhau. Các tiêu điểm O_1 và O_2 của các bánh xe chốt cố định. Khi bánh xe thứ nhất quay đều quanh O_1 với vận tốc góc ω_1 thì nó kéo bánh xe thứ hai quay quanh O_2 với vận tốc góc ω_2 . Giả sử độ dài $O_1O_2 = 2a$. Tìm sự liên hệ giữa ω_1 và ω_2 . Bỏ qua các lực ma sát.

113. Hai bánh xe bằng nhau có bán kính r cùng nằm trong một

mặt phẳng thẳng đứng và được nối với nhau bằng ổ bi ở điểm A trên vành các bánh xe. Bánh xe tâm cố định O quay quanh O theo phương trình $\varphi = \varphi(t)$, bánh xe thứ hai tâm O_1 quay quanh A theo phương trình $\Psi = \Psi(t)$. Các trục quay qua O và A vuông góc với mặt phẳng các bánh xe, các góc φ và Ψ tính từ đường thẳng đứng. Xác định vận tốc điểm O_1 và điểm B trên vành bánh xe tâm O_1 . Góc $AO_1B = 90^\circ$. Xác định phương trình chuyển động của bánh xe tâm O_1 .

114. Thanh AB có độ dài l trượt hai đầu trên các cạnh của góc vuông xOy trong mặt phẳng thẳng đứng theo phương trình $x_A = a \sin \omega t$, (a, ω là hằng số, $a < l$). Xác định vận tốc điểm C trên AB biết rằng $CA = l_1$.

115. Chuyển động quay của vật rắn quanh một điểm cố định được mô tả bởi các phương trình

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot t; \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot t; \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Tìm vận tốc của điểm M bất kì thuộc vật rắn ở thời điểm t nếu ở thời điểm đó tọa độ của M trong hệ tọa độ cố định là $(0, 0, 32\text{cm})$.

116. Hai hình nón I và II bằng nhau có bán kính đáy là r , góc mở ở đỉnh bằng 90° . Hình nón I lăn không trượt theo mặt bên của hình nón II cố định. Tìm gia tốc điểm C (điểm cao nhất trên vành nón I) nếu vận tốc tâm A của đáy hình nón I bằng v_A ($v_A = \text{const}$).

117. Tìm mômen quán tính của các vật sau:

a) Nửa đĩa tròn đồng chất bán kính R , khối lượng m đối với trục trùng với đường kính giới hạn nửa đĩa tròn đó và đối với trục đi qua khối tâm, vuông góc với đĩa.

b) Đĩa tròn đồng chất có bán kính R với khối lượng m bị khoét

một lỗ tròn đồng tâm, bán kính r đối với trục qua tâm O và vuông góc với đĩa.

118. Tìm mômen quán tính của các vật sau:

a) Đĩa tròn đồng chất bán kính R , khối lượng m đối với trục qua tâm O , vuông góc với đĩa và đối với trục qua điểm A trên vành đĩa vuông góc với đĩa.

b) Thanh AB đồng chất có độ dài l , khối lượng m đối với các trục đi qua điểm A và điểm giữa của AB . Cả hai trục đều vuông góc với AB .

119. Tìm mômen quán tính của :

a) Hình phẳng đồng chất khối lượng m , giới hạn bởi đường elíp

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

đối với các trục Ox , Oy , Oz .

b) Hình trụ đồng chất có khối lượng m , bán kính R chiều cao h đối với các trục quán tính chính của trụ và đối với trục trùng với đường kính đáy của trụ.

c) Quả cầu đặc đồng chất có bán kính R đối với các trục quán tính của cầu.

120. Tìm mômen quán tính của :

a) Nửa quả cầu đồng chất có khối lượng m , bán kính R đối với trục qua tâm, vuông góc với mặt đáy và đối với trục trùng với đường kính của mặt đáy.

b) Elipxôit tròn xoay, đồng chất có khối lượng m được cho bởi phương trình:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

đối với các trục quán tính chính.

121. Ba thanh AB, BC và CD nối với nhau bằng ổ bi ở B và C. Các điểm A và D chốt cố định sao cho AB và CD có thể quay quanh A và D. Các thanh này là đồng chất có độ dài $AB = CD = l$; $BC = AD = 2l$. Khi AB quay đều quanh A với vận tốc góc ω kéo BC và CD cùng chuyển động theo với AB trong mặt phẳng thẳng đứng. Tìm tọa độ khối tâm của hệ ba thanh và quỹ đạo của khối tâm.

122. Bánh xe tâm O có bán kính r , khối lượng m lăn không trượt trên vành bánh xe cố định tâm O' có bán kính R nhờ tay quay O'O với khối lượng M , nối hai tâm các bánh xe và quay đều quanh O' với vận tốc góc ω . Các bánh xe nằm trong cùng một mặt phẳng thẳng đứng cố định. Tìm mômen xung lượng của hệ vật.

123. Đĩa tròn đồng chất, khối lượng m , bán kính R được treo ở điểm cố định O_1 cách tâm O của đĩa một đoạn $OO_1 = S$. Khi $t = 0$, OO_1 hợp với phương thẳng đứng góc φ_0 và đĩa chuyển động không vận tốc ban đầu.

a) Tìm phương trình dao động nhỏ của đĩa quanh trục qua O_1 , vuông góc với mặt đĩa.

b) Xác định phản lực N của điểm O_1 lên đĩa.

124. Vật rắn có mômen quán tính là J đối với trục z đi qua điểm O thuộc vật. Dưới tác dụng của mômen ngoại lực M_z không đổi và mômen cản M_z^c , xác định vận tốc góc quay của vật nếu $M_z = k\omega$, và $M_z^c = k\omega^2$; (k là hệ số tỉ lệ) khi $t = 0$, $\omega = 0$.

125. Bánh xe đồng chất có khối lượng m , bán kính r lăn không trượt lên theo mặt phẳng nghiêng góc α so với phương ngang dưới tác dụng của mômen lực quay không đổi M và lực chủ động F đặt vào

tâm bánh xe. Tìm phương trình chuyển động của tâm bánh xe và biện luận các kết quả. Vận tốc đầu của tâm bánh xe bằng không.

126. Có thể kéo nước từ giếng lên nhờ khúc gỗ hình trụ có khối lượng m , bán kính R với tay quay độ dài l (khoảng cách từ tay nắm tới trục trụ) bằng cách cuốn dây gầu nước vào khúc gỗ. Thiết lập sự phụ thuộc giữa lực quay khúc gỗ và vận tốc gầu nước, bỏ qua trọng lượng dây, gầu và các lực ma sát.

127. Thanh AB có độ dài l , trọng lượng P trượt trên hai cạnh của góc vuông xOy (đầu A trên Oy , đầu B trên Ox). Xác định các phản lực của Oy và Ox lên thanh AB và vị trí mà tại đó AB tách đầu A ra khỏi Oy . Khi $t = 0$, AB hợp với Oy góc φ_0 , $v_A(0) = v_B(0) = 0$. Bỏ qua các lực ma sát.

128. Hình trụ đồng chất có khối lượng M , bán kính R quay quanh trục cố định nằm ngang của nó dưới tác dụng của vật A , khối lượng m buộc vào đầu sợi dây không giãn, đầu còn lại của dây cuốn vào trụ. Ngoài ra trụ còn chịu tác dụng của mômen cản sinh ra do ma sát ở trục quay của trụ $M^c = k\omega$, (k là hệ số tỉ lệ, ω là vận tốc góc quay của trụ). Hệ vật chuyển động từ trạng thái đứng yên, bỏ qua khối lượng của dây, tìm quãng đường đi của vật A .

129. Muốn tìm mômen quán tính của vật rắn J đối với một trục qua điểm E nào đó thuộc vật và cách khối tâm C của vật một đoạn $EC = l$, để tránh các tính toán phức tạp người ta làm một thí nghiệm như sau :

Gắn cố định với vật rắn thanh AB và chốt bằng ổ bi ở A và B để cho AB có thể quay quanh chính nó. Gắn vào điểm O của AB đĩa tròn đồng chất có khối lượng m , bán kính r sao cho đĩa không thể quay khi AB không quay (AB qua tâm đĩa và vuông góc với đĩa). Vết trên vành đĩa sợi dây mảnh, không giãn, ở hai đầu dây buộc các vật trọng lượng P_1, P_2 ($P_1 > P_2$).

Lập các công thức mà dựa vào đó và bằng các số liệu đo có thể tìm được J . Xét bài toán trong các trường hợp có ma sát và không có ma sát.

130. Đĩa tròn đồng chất có khối lượng m , bán kính R quay đều quanh trục thẳng đứng qua tâm và vuông góc với mặt đĩa với vận tốc góc ω_0 . Điểm M có khối lượng m_1 chuyển động từ tâm theo bán kính của đĩa với vận tốc tương đối $v = \text{const}$. Chuyển động của điểm M đã làm thay đổi vận tốc góc quay của đĩa. Tìm các vận tốc $\omega_{(t)}$ và $\omega_{(t_1)}$; t_1 là thời điểm lúc M tới vành đĩa.

131. Hình trụ đồng chất có khối lượng m , bán kính r lăn không trượt trên mặt hình trụ cố định có bán kính R , nằm trên mặt phẳng ngang, từ vị trí cao nhất với vận tốc đầu bằng không, trục của các hình trụ luôn luôn song song với nhau; $R > r$.

Xác định vận tốc tâm hình trụ nhỏ như hàm của góc φ (là góc giữa đường nối tâm hai trụ và phương thẳng đứng). Xác định vị trí hình trụ nhỏ, hình trụ lớn. Bỏ qua ma sát lăn.

132. Hai hình trụ đồng chất có các khối lượng m_1, m_2 được cuốn vào hai đầu một sợi dây không giãn, không khối lượng, vắt qua điểm cắt A của hai mặt phẳng nghiêng nhẵn AB và AC hợp với mặt phẳng ngang BC các góc α và β . Khi thả cho lăn theo mặt nghiêng, các hình trụ chuyển động xuống. Xác định sức căng sợi dây và gia tốc của dây đối với mặt nghiêng.

133. Tìm động năng của các hệ vật sau:

a) Hai thanh OA và AB có cùng độ dài và khối lượng là l và m . OA nối với AB bằng ổ bi ở A , đầu O chốt cố định, đầu B trượt tự do trên mặt phẳng ngang, nhẵn. Khi OA quay đều quanh O trong mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc góc ω thì kéo AB chuyển động theo.

b) Hệ gồm hai vật A và B với khối lượng m_A , m_B . Vật A được buộc vào tâm ròng rọc động có khối lượng m_1 , bán kính r_1 còn vật B buộc vào sợi dây không giãn, không khối lượng vắt qua ròng rọc cố định có khối lượng m_2 , bán kính r_2 và cuộn vào vành ròng rọc động rồi buộc đầu còn lại cố định để có thể treo ròng rọc động 1 và các vật A và B. Gia tốc của vật B là W .

134. Thanh đồng chất AB có độ dài $2a$ đang đứng yên, tựa đầu A trên mặt phẳng ngang nhẵn Ox thì bị đổ, đầu A trượt theo Ox. Xác định vận tốc điểm giữa AB như là hàm của độ cao h của nó trên mặt ngang.

135. Một quả cầu và một hình trụ đều được thả cho lăn không trượt không vận tốc đầu theo mặt phẳng nghiêng từ cùng độ cao như nhau (trục của hình trụ luôn hướng theo phương ngang ; tâm của quả cầu chuyển động theo đường thẳng). So sánh quãng đường mà hình trụ và quả cầu đi được sau khoảng thời gian t .

136. Vật A có khối lượng m_1 , nằm trên mặt phẳng nghiêng OC, được buộc vào đầu sợi dây không giãn, đầu còn lại của dây cuộn vào ròng rọc cố định có khối lượng m_2 , bán kính r đặt ở điểm C, CO hợp với phương ngang Ox góc α . Khi tác dụng vào ròng rọc một mômen quay M không đổi ròng rọc quay và kéo vật A trượt lên theo mặt phẳng nghiêng, hệ số ma sát trượt là f . Vận tốc đầu của vật A và ròng rọc C bằng không.

a) Xác định vận tốc góc quay ω của ròng rọc dưới dạng hàm của S là quãng đường đi của vật A. Bỏ qua khối lượng dây.

b) Cũng hỏi như câu a) nếu biết khối lượng một đơn vị độ dài của sợi dây là ρ . Độ dài ban đầu của dây là l_0 . Bỏ qua sự thay đổi thế năng của phần dây cuộn vào ròng rọc.

137. Hình trụ đồng chất có bán kính r , khối lượng m lăn không trượt theo mặt trong của hình trụ rỗng cố định. Bán kính mặt trong của hình trụ rỗng là R , $R > r$. Trục của các hình trụ luôn vuông góc với mặt phẳng thẳng đứng, cố định. Bỏ qua ma sát lăn, xác định vận tốc góc ω của tâm C trụ nhỏ và áp lực N của nó lên mặt trụ lớn như là hàm của góc φ , góc giữa phương thẳng đứng và đường nối tâm các hình trụ. Khi $t = 0$, $\varphi_{(0)} = \varphi_0$ và $\omega_{(0)} = \omega_0$.

138. Một sợi dây mảnh không giãn, không khối lượng cuốn một đầu vào quả cầu đồng chất có khối lượng m_1 , bán kính r_1 theo đường tròn lớn của nó ; đầu còn lại của dây cuốn vào rỗng rọc cố định có khối lượng m_2 , bán kính r_2 . Thả cho quả cầu rơi không có vận tốc ban đầu. Bỏ qua ma sát, xác định vận tốc góc của quả cầu và rỗng rọc, sức căng sợi dây và quãng đường đi của tâm quả cầu.

139. Vật A có khối lượng M treo vào đầu sợi dây không giãn, đầu còn lại của dây cuốn vào rỗng rọc cố định có khối lượng m , bán kính r . Trọng lượng một đơn vị độ dài của dây là p . Khi $t = 0$, $v_A = 0$ và độ dài sợi dây từ tiếp điểm với rỗng rọc tới vật A là l_0 . Bỏ qua sự thay đổi thế năng của phần dây cuốn vào rỗng rọc và ma sát. Tìm vận tốc v_A của vật A như hàm của x - quãng đường đi của A .

140. Sợi dây không giãn buộc ở đầu vật D có trọng lượng P_2 rồi vắt qua rỗng rọc cố định C , đầu còn lại buộc vào điểm cố định A , (A , C ở cùng độ cao). Ở điểm B của dây (nằm giữa A và C) buộc vật có trọng lượng P_2 . Các đoạn dây AB và BC hợp với phương thẳng đứng các góc α và β . Hệ vật đứng yên, bỏ qua ma sát và khối lượng sợi dây, xác định sức căng sợi dây ở đoạn AB như hàm của P_2 và α , β .

141. Chất điểm có trọng lượng P được giữ đứng yên trên đường cong $y = f(x)$ trong mặt phẳng thẳng đứng bởi lực Q hướng theo phương tiếp tuyến với đường cong. Tìm độ lớn của Q . Hệ số ma sát với đường cong là k .

142. Thanh đồng chất AB có trọng lượng P , độ dài l đứng yên tựa đầu B trên mặt phẳng ngang không nhẵn và tựa điểm C vào đầu bức tường cụt có độ cao bằng h . Góc giữa AB và bức tường thẳng đứng là α . Xác định phản lực của bức tường và mặt ngang lên AB .

143. Hai thanh AB và BC có trọng lượng P_1, P_2 , độ dài bằng nhau và bằng l , đứng yên, nối với nhau bằng ổ bi ở B và tựa các đầu A, C lên mặt phẳng ngang không nhẵn. AB và BC thuộc mặt phẳng thẳng đứng. Xác định các phản lực của mặt ngang lên thanh AB và của AB tác dụng lên BC ở C , góc giữa AB và mặt phẳng ngang là α .

144. Thanh AB có trọng lượng P , tựa hai đầu A và B trên các mặt phẳng nhẵn thẳng đứng và nằm ngang, được giữ ở vị trí đó bởi hai sợi chỉ nằm ngang AD và BC . Sợi chỉ BC nằm trong cùng một mặt phẳng thẳng đứng với AB . Xác định các phản lực lên AB ở A, B và sức căng các sợi dây biết rằng sợi chỉ CB hợp với AB góc α và với đường cắt của hai mặt phẳng nằm ngang và thẳng đứng góc β .

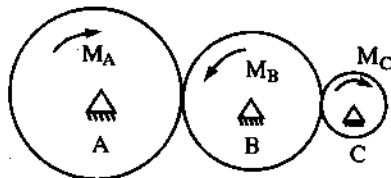
145. Quả cầu trọng lượng P được giữ nằm yên trên mặt phẳng nghiêng góc β so với mặt phẳng ngang bằng sợi dây buộc ở một điểm cố định trên bức tường thẳng đứng. Tìm áp lực của quả cầu lên mặt phẳng nghiêng và sức căng sợi dây (sợi dây hợp với phương bức tường góc α).

§ 3. CƠ HỌC GIẢI TÍCH

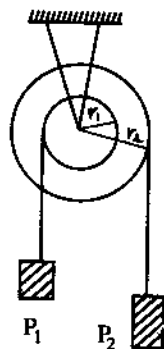
146. Xác định số bậc tự do của một chất điểm :

- Chuyển động theo một đường thẳng.
- Chuyển động theo một đường cong phẳng.
- Chuyển động trên mặt cầu.
- Chuyển động theo một đường cong trong không gian.
- Chuyển động theo đường tròn và đường tròn đó quay quanh đường kính của nó với vận tốc góc tùy ý.

147. Ba bánh xe A, B, C, tiếp xúc với nhau trong mặt phẳng thẳng đứng như trong hình 1.5. Bánh xe A quay quanh tâm của nó dưới tác dụng của mômen quay M_A và kéo các bánh xe B, C chuyển động theo. Các mômen cản tác dụng lên các bánh xe B và C là M_B và M_C . Các bánh xe có dạng đĩa tròn đồng chất, khối lượng là m_A, m_B, m_C và bán kính r_A, r_B, r_C . Tìm hàm Lagrănggiơ của hệ và gia tốc quay của bánh xe A.



Hình 1.5

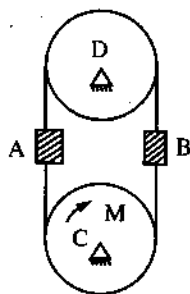


Hình 1.6

148. Hai trọng vật có trọng lượng P_1, P_2 được treo bằng sợi dây mảnh không giãn và cuốn vào hai ròng rọc đồng tâm, gắn liền nhau có bán kính r_1, r_2 (hình 1.6), các vật chuyển động dưới tác dụng của trọng

lực của chúng. Xác định hàm Lagrănggiơ và gia tốc các ròng rọc. Bỏ qua khối lượng của các ròng rọc và dây buộc.

149. Hai vật A, B có khối lượng m_A, m_B chuyển động lên xuống theo phương thẳng đứng như trên hình 1.7. Sợi dây buộc các vật được vắt qua các ròng rọc bằng nhau. Mỗi ròng rọc có khối lượng m , bán kính r . Ròng rọc C chuyển động quanh trục cố định qua tâm của nó dưới tác dụng của mômen quay M . Bỏ qua khối lượng dây kéo, xác định gia tốc trọng vật A.



Hình 1.7

150. Một người kéo chiếc xe với lực $\vec{F}$ hướng theo phương ngang. Khối lượng thùng xe là m_1 . Các bánh xe bằng nhau, có dạng đĩa tròn đồng chất, có khối lượng m_2 , bán kính r , lăn không trượt trên mặt phẳng ngang với hệ số ma sát lăn là f . Tìm hàm Lagrănggiơ của hệ và gia tốc thùng xe.

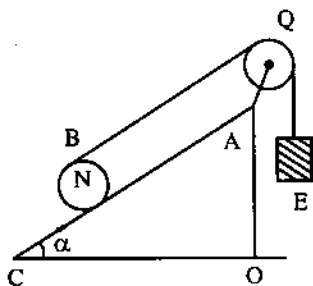
151. Tìm hàm Lagrănggiơ của các hệ :

a) Hệ hai hạt có điện tích q_1, q_2 tương tác theo định luật Culông. Biểu thị kết quả qua bán kính vectơ khối tâm của hệ và khoảng cách giữa các hạt.

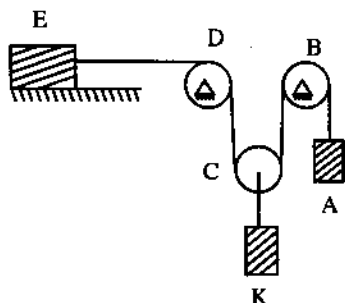
b) Nguyên tử gồm hạt nhân và z electron.

152. Hình trụ đồng chất khối lượng m , bán kính r lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng AC của chiếc nêm ABC (trục của hình trụ luôn hướng theo phương ngang) có hình tam giác vuông, khối lượng M và đã làm chiếc nêm trượt trên mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát trượt là f , góc $ACB = \alpha$. Bỏ qua ma sát lăn trên AC, xác định hàm Lagrănggiơ của hệ và gia tốc của nêm.

153. Vật E có khối lượng m_1 nối với ròng rọc B có khối lượng m_2 , bán kính r bằng sợi dây không giãn, không khối lượng; một đầu dây buộc vật E, đầu còn lại cuốn vào ròng rọc B và vắt qua ròng rọc cố định Q gắn trên góc A của chiếc nêm AOC nằm trên mặt phẳng ngang. Khi vật E chuyển động kéo ròng rọc B lăn trên mặt nghiêng AC của chiếc nêm (hình 1.8). Khối lượng của nêm là m_3 , của ròng rọc Q không đáng kể, góc $ACO = \alpha$. Hãy tìm hàm Lagrănggiơ của hệ vật và quỹ đạo đi của vật E trong hai trường hợp chiếc nêm đứng yên và trượt không ma sát trên mặt phẳng ngang.



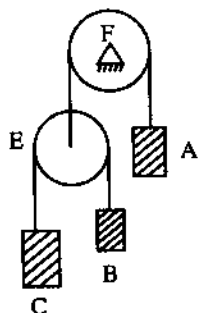
Hình 1.8



Hình 1.9

154. Sợi dây không giãn, một đầu buộc vật A có trọng lượng P , sau đó vắt qua ròng rọc cố định B, rồi cuốn vào ròng rọc động C và vắt qua ròng rọc cố định D, đầu còn lại của dây buộc vào vật E có trọng lượng P . Vật K với trọng lượng Q được buộc vào tâm ròng rọc C (hình 1.9). Hệ số ma sát trượt của vật E trên mặt phẳng ngang là f . Tìm hàm Lagrănggiơ của hệ vật và gia tốc của vật K, bỏ qua khối lượng các ròng rọc và sợi dây. Hệ vật chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng.

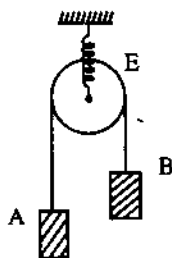
155. Các vật A, B, C và ròng rọc động E, ròng rọc cố định F liên kết với nhau bằng các sợi dây không giãn không khối lượng như trên hình 1.10. Khối lượng các vật là m_A , m_B , m_C ($m_A < m_B + m_C$). Vận tốc đầu của các vật bằng không. Tìm hàm Lagrănggiơ của hệ và điều kiện để vật A chuyển động xuống phía dưới. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc.



Hình 1.10

156. Con lắc gồm một chất điểm khối lượng m được treo trên đầu sợi dây có độ dài thay đổi theo thời gian theo định luật $l = l(t)$. Xác định hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân diễn tả chuyển động của con lắc.

157. Hai vật A, B có khối lượng m_A , m_B được nối với nhau bằng sợi dây không giãn, không khối lượng và vắt qua ròng rọc E, khối lượng m , bán kính r . Hệ các vật A, B, E được buộc vào đầu một lò xo có hệ số cứng là C , đầu còn lại của lò xo buộc cố định, (hình 1.11). Giả sử $m_B > m_A$ và ở thời điểm đầu hệ đứng yên ở trạng thái không giãn của lò xo.



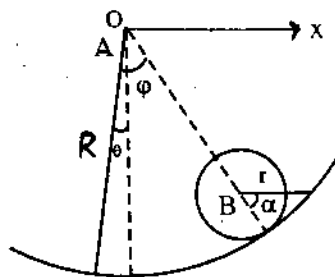
Hình 1.11

Xác định hàm Lagrănggiơ của hệ và gia tốc của các vật A, B.

158. Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân mô tả chuyển động của con lắc toán học có khối lượng m , độ dài dây l , nếu điểm buộc của dây chuyển động với vận tốc góc không đổi ω theo đường elíp có các bán trục là a và b trong mặt phẳng thẳng đứng (con lắc dao động trong mặt phẳng elíp).

159. Hình trụ đồng chất có trọng lượng P , bán kính R có thể lăn không trượt trên mặt phẳng ngang Ox . Thanh AB có độ dài l , trọng

lượng p được nối với tâm trụ bằng ổ bi (hình 1.12). Khi AB dao động quanh tâm A của hình trụ với các góc nhỏ φ trong mặt phẳng thẳng đứng, cố định xOy , làm cho hình trụ lăn quanh vị trí cân bằng O. Bỏ qua các lực ma sát, tìm hàm Lagrănggiơ của hệ và các tọa độ $\varphi(t)$ và $x(t)$.



Hình 1.12

160. Một hình trụ khối lượng m , bán kính r lăn không trượt theo mặt trong hình trụ rỗng khối lượng M , bán kính khối rỗng là R và cũng có dạng hình trụ. Hình trụ rỗng này có thể quay quanh trục cố định của nó nằm theo phương ngang. Các trục của hai hình trụ song song với nhau. Mômen quán tính của các hình trụ đối với trục của chúng là MR^2 và $\frac{1}{2}mr^2$. Bỏ qua ma sát, hãy lập hàm Lagrănggiơ của hệ.

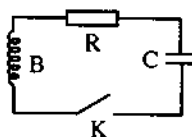
161. Chất điểm M có khối lượng m chuyển động theo vòng khuyên tròn bán kính r trong khi vòng khuyên tròn quay đều quanh đường kính thẳng đứng AB của nó với vận tốc góc ω . Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân mô tả chuyển động của điểm M . Tìm mômen lực cần thiết giữ cho vận tốc góc không đổi.

162. Vật A có khối lượng m_1 có thể trượt trên mặt phẳng ngang, hệ số ma sát trượt là f . Chất điểm B khối lượng m_2 được nối với tâm vật A bằng thanh AB không có khối lượng. AB có thể dao động tự do quanh A trong mặt phẳng thẳng đứng. Khi B dao động đã làm cho A trượt trên mặt phẳng ngang. Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ. Độ dài của AB là l .

163. Vật rắn có khối lượng M có thể quay quanh trục cố định

nằm ngang đi qua điểm O thuộc vật; mômen quán tính của vật đối với trục quay đó bằng J. Ở điểm A cách O một đoạn bằng a ta nối với vật điểm B có khối lượng m bằng thanh AB không khối lượng, có độ dài l và quay tự do quanh A trong mặt phẳng quay của vật rắn. Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ.

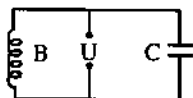
164. Mạch điện gồm : Cuộn cảm với hệ số tự cảm B, tụ điện với điện dung C và điện trở R mắc như trên hình 1.13. Khi khoá K đóng, trong mạch có dòng điện. Xem giá trị điện tích q chạy qua tiết diện dây dẫn như một toạ độ suy rộng, hãy lập phương trình vi phân mô tả sự biến thiên của q và từ phương trình đó đoán nhận hàm Lagrănggiơ của hệ.



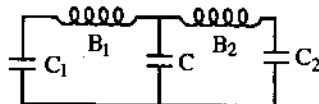
Hình 1.13

165. a) Có thể xem hàm Lagrănggiơ của hệ bằng tổng các hàm Lagrănggiơ của các thành phần của hệ được không?

b) Tìm hàm Lagrănggiơ của các hệ trên hình 1.14, 1.15.



Hình 1.14



Hình 1.15

166. Chứng minh rằng dạng phương trình Lagrănggiơ không thay đổi nếu ta thay đổi biến số q_i (các toạ độ suy rộng của hệ) :

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t); i = 1, \dots, s.$$

167. Xác định biểu thức của tác dụng của hạt có khối lượng m, chuyển động tự do.

168. Xác định biểu thức của tác dụng của dao động tử điều hoà một chiều có khối lượng m .

169. Trong chuyển động một chiều của hạt tự do, xung lượng $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, chứng minh rằng ở điểm bất kì x_1 trên quỹ đạo, xung lượng có dạng $p = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)$.

170. Biểu thức năng lượng của chất điểm có dạng

$$E = L + xp.$$

Chứng minh rằng ở điểm bất kì x_2 trên quỹ đạo, năng lượng có dạng $E = \left(\frac{\partial S}{\partial t_2} \right)$; t_2 là thời điểm ứng với toạ độ x_2 .

171. Mạng tinh thể một chiều là mạng tạo bởi các nguyên tử được xếp cách đều nhau theo một đường thẳng, coi lực tương tác giữa các nguyên tử lân cận là lực đàn hồi, bỏ qua tương tác giữa các nguyên tử không lân cận. Xác định hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân mô tả dao động mạng tinh thể một chiều đó.

172. Lập hàm Haminton của hệ hạt mang điện tương tác theo định luật Culông và ở trong điện từ trường.

173. Dựa vào kết quả bài 26 và nguyên lí tác dụng tối thiểu, hãy tìm phương trình vi phân mô tả dao động của sợi dây đàn hồi (sợi dây đàn) có khối lượng riêng là ρ và sức căng sợi dây là T nếu hai đầu dây buộc cố định.

§ 4. DAO ĐỘNG NHỎ

174. Vật A có trọng lượng P được giữ bằng một lò xo có hệ số cứng là C trên mặt phẳng nghiêng nhẵn hợp với phương ngang góc α , đầu còn lại của lò xo buộc cố định trên mặt nghiêng nói trên. Vật A bắt đầu chuyển động từ vị trí không giãn của lò xo với vận tốc đầu là v_0 .

a) Tìm phương trình và chu kỳ dao động của vật A.

b) Giả sử hệ số ma sát giữa vật A và mặt phẳng nghiêng là f ; nêu ảnh hưởng của ma sát tới đặc tính chuyển động của vật A.

175. Xác định chu kỳ dao động của vật A có khối lượng m trên mặt phẳng ngang nhẵn (không ma sát) dưới tác dụng của lò xo buộc một đầu vào A và đầu còn lại ở điểm cố định O (O nằm cách trục - đường dao động của A - một đoạn là l). Khi A qua O_1 ($OO_1 = l$), lực kéo của lò xo lên A là F_0 (OO_1 lớn hơn độ dài không giãn của lò xo).

176. Vật A có khối lượng m được buộc giữa hai lò xo với hệ số cứng là C_1 và C_2 . Các đầu còn lại của các lò xo chốt cố định, các lò xo nằm theo phương thẳng đứng. Xác định chu kỳ và phương trình chuyển động của vật A, biết rằng nó bắt đầu chuyển động từ vị trí cân bằng với vận tốc v_0 .

177. Hai lò xo với hệ số cứng là C_1 và C_2 được nối với nhau, sau đó buộc vật A vào một đầu tự do, đầu còn lại treo cố định sao cho vật A có thể dao động tự do theo phương thẳng đứng dưới tác dụng của lò xo.

a) Xác định hệ số cứng của lò xo thứ ba tương đương hai lò xo đã cho.

b) Giả sử vật A bắt đầu chuyển động từ vị trí cách điểm cân bằng

(trên cùng phương thẳng đứng) một đoạn bằng x_0 với vận tốc v_0 hướng lên phía trên. Xác định phương trình dao động của vật.

c) Nếu nối n lò xo có hệ số cứng $C_1, \dots, C_n$ như trên, tìm hệ số cứng của một lò xo tương đương với n lò xo nối trên.

178. Giả sử ta có một rãnh nhỏ xuyên qua Trái Đất theo đường kính của nó. Thả một vật khối lượng m vào rãnh đó và cho rằng lực hút của Trái Đất gây ra chuyển động của vật tỉ lệ thuận với khoảng cách từ vật tới tâm Trái Đất. Tìm phương trình chuyển động và thời gian mà vật đi hết đường kính Trái Đất nếu nó được thả không vận tốc đầu từ mặt đất.

179. Vật rắn có khối lượng m , mômen quán tính J đối với trục OO' đi qua khối tâm O của vật và hướng theo phương ngang. Nếu cho vật dao động xung quanh trục đi qua điểm A của vật và song song với trục OO' , $OA = l$ ta được hệ gọi là con lắc vật lí (bỏ qua các lực ma sát).

a) Tìm phương trình dao động của vật.

b) Chứng minh rằng, đối với một giá trị của tần số dao động sẽ có hai vị trí A và A' ($OA \neq OA'$). Tìm sự phụ thuộc của tần số dao động vào khoảng cách OA và vị trí ứng với tần số nhỏ nhất.

180. Một nửa quả cầu có khối lượng là m , bán kính r có thể lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Thả cho nó dao động với các góc lệch nhỏ. Bỏ qua ma sát.

a) Tìm chu kỳ của dao động.

b) Tìm phương trình dao động của nửa quả cầu đó.

181. Tìm phương trình dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng của chất điểm có khối lượng m dưới tác dụng của lực có dạng :

a) $F = a = \text{const.}$ b) $F = at$; $a = \text{const.}$

c) $F = ae^{-\alpha t}$; a, $\alpha = \text{const.}$

182. Tìm phương trình và biên độ dao động của chất điểm dưới tác dụng của lực cưỡng bức :

a) $F = 0$ khi $t < 0$; $F = at$ khi $0 < t < T$;

$F = a = \text{const}$ khi $t > T$.

b) $F = 0$ khi $t < 0$; $F = a$ khi $0 < t < T$ và $F = 0$ khi $t > T$.

Khi $t = 0$, chất điểm đứng yên tại vị trí cân bằng.

183. Tìm phương trình dao động nhỏ của con lắc toán học có khối lượng m độ dài l nếu điểm buộc của nó chuyển động :

a) Theo phương ngang $x = asinkt$; $a, k = \text{const}$.

b) Theo đường tròn trong mặt phẳng thẳng đứng với vận tốc $v_0 = \text{const}$.

184. Vật A có khối lượng m_1 được treo vào đầu lò xo có hệ số cứng là C theo phương thẳng đứng (đầu còn lại của lò xo buộc cố định). Khi vật A đang đứng yên tại vị trí cân bằng thì vật B khối lượng m_2 được thả rơi không vận tốc đầu từ điểm cách vật A một khoảng là h . Khi rơi tới vật A thì hai vật gắn vào nhau và thực hiện các dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng. Tìm phương trình dao động của hệ hai vật nếu bỏ qua lực cản của không khí và tính đến lực cản này với giả thiết rằng lực cản tỉ lệ với vận tốc của các vật.

185. n lò xo có độ dài mỗi cái khi không giãn bằng nhau và bằng a . Hệ số cứng của các lò xo là $C_1, \dots, C_n$. Các lò xo này một đầu được nối với chất điểm có khối lượng m ; đầu còn lại của chúng nối với các đỉnh của đa giác đều n cạnh nằm trong mặt phẳng ngang mà đường tròn ngoại tiếp nó có bán kính r .

a) Tìm hàm Lagrănggiơ của chất điểm nếu nó chỉ thực hiện các dao động ngang.

b) Giả sử $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$; bỏ qua các lực cản, tìm tần số dao động ngang của chất điểm.

186. Phân tử gồm hai nguyên tử có mômen xung lượng L khác không và mômen này đã gây ra sự thay đổi một phần tần số dao động của phân tử. Tìm sự thay đổi đó.

187. Chất điểm M chuyển động theo đường cong $y = f(x)$. Giả sử O là vị trí cân bằng của chất điểm. Lập phương trình vi phân mô tả dao động của chất điểm M quanh vị trí cân bằng O và tìm chu kỳ của dao động ; xét trường hợp $y = ax^2 + b$; $a, b = \text{const}$.

188. Một cuộn cảm có hệ số tự cảm L và tụ điện có điện dung C được mắc nối tiếp nhau trong một mạch điện kín với thế của nguồn điện $U = U_0 \cos \omega t$; U_0, ω là các hằng số. Tìm dao động của thế giữa hai bản của tụ điện và dòng trong mạch điện đó.

189. Cũng hỏi như bài 188 nếu trong mạch có mắc nối tiếp với tụ điện thêm một điện trở R .

190. Tìm phương trình dao động theo phương thẳng đứng của chất điểm nêu trong bài 185 trong hai trường hợp:

a) Bỏ qua sức cản của không khí.

b) Sức cản của không khí tỉ lệ với vận tốc.

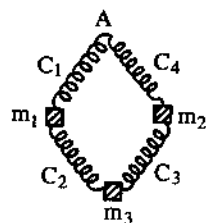
191. Hòn bi khối lượng m chuyển động bắt đầu từ vị trí cân bằng của nó với vận tốc đầu v_0 hướng theo phương ngang trong một ống nhỏ hình tròn bán kính r nằm trong mặt phẳng thẳng đứng ; hòn bi chịu tác dụng của lực cản tỉ lệ với vận tốc. Tìm phương trình dao động nhỏ của hòn bi.

192. Dao động tử một chiều chịu tác dụng của lực $F(t)$ với $F_{(t=-\infty)} = 0$; $F_{(t=+\infty)} = F_0 = \text{const}$. Ở thời điểm $t = -\infty$ vận tốc của dao động tử bằng không. Xác định năng lượng riêng của dao động tử khi $t = +\infty$.

193. Hai vật có khối lượng m_1 và m_2 được buộc vào hai đầu của một lò xo có hệ số cứng là C_2 rồi buộc vật có khối lượng m_1 vào đầu lò xo thứ hai có hệ số cứng C_1 ; đầu còn lại của lò xo này buộc cố định, treo các vật lên theo phương thẳng đứng. Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình dao động của các vật.

194. Ba lò xo có hệ số cứng C_1, C_2, C_3 nối tiếp với nhau và với các vật khối lượng m_1, m_2 ; hai đầu còn lại của lò xo có hệ số cứng C_1 và C_3 buộc vào các điểm cố định A, B. Hệ vật và ba lò xo cùng nằm trên phương ngang AB. Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình dao động của hệ.

195. Hệ ba vật có khối lượng m_1, m_2, m_3 nối với nhau bằng bốn lò xo trong mặt phẳng thẳng đứng như trên hình 1.16. Các lò xo 1 và 4 chốt một đầu cố định tại A. Kí hiệu độ dịch chuyển của các vật trong mặt phẳng thẳng đứng khỏi vị trí cân bằng là x_1, x_2, x_3 .



Hình 1.16

a) Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình vi phân mô tả dao động của hệ ba vật.

b) Xác định phương trình dao động tự do và dao động chuẩn của các vật nếu $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$.

196. Cho mạch điện như trong bài 165, khi đóng mạch, các tụ điện C_1 và C_2 phóng điện, còn tụ C thì chưa được nạp nên lúc này bắt đầu nạp điện. Giả sử q_1 và q_2 là các giá trị tại thời điểm t trong các đoạn mạch có các cuộn cảm B_1 và B_2 . Tìm hàm Lagrănggiơ của hệ và $q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t)$.

197. Tìm hàm Lagrănggiơ và phương trình dao động của con lắc toán học kép có khối lượng m_1, m_2 , độ dài l_1, l_2 ; dao động trong mặt phẳng thẳng đứng.

198. Vật A có khối lượng M nối với vật B khối lượng m bằng thanh AB có khối lượng không đáng kể. Vật A nằm trên mặt phẳng ngang nhẵn và buộc với đầu một lò xo có hệ số cứng là C , đầu còn lại của lò xo chốt cố định ở điểm O trên mặt ngang. Khi vật B dao động trong mặt phẳng thẳng đứng đã kéo vật A dao động theo đường thẳng nằm ngang Ox. Tìm hàm Lagrănggiơ của hệ và các phương trình dao động của các vật A và B. Khi $t = 0$, vật B ở vị trí lệch góc φ_0 so với trục Oy và $v_B(0) = v_0$; v_0 hướng vuông góc với AB.

B. BÀI GIẢI

1. Khử t trong các phương trình, ta có :

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$: đường elíp.

b) $\frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$: đường elíp.

c) $y = e^{-x^2}$

d) $\frac{1}{3}(x - 2) = \frac{1}{2}(1 - y) = z - 2$

e) $y = 6\cos 2z$.

$$2. a) s = \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2} dt = \frac{3}{2} a \sin 2t + s_0;$$

$$\rho = \frac{3a}{2} |\sin 2t|$$

b) Bán kính cong ρ bằng :

$$\rho = \frac{1}{W_n} v^2 = v^2 (W^2 - W_r^2)^{-1/2}; v \text{ là vận tốc}$$

W_n là gia tốc pháp tuyến, W là gia tốc toàn phần. Lấy đạo hàm theo thời gian các phương trình đã cho và thay vào các công thức tính ρ và S ta có :

$$\rho = \frac{v^3}{\omega R} (\omega^2 R^2 + a^2)^{-1/2};$$

$$s = \int v dt + s_0 = \int [\omega^2 R^2 + (u + at)^2]^{1/2} dt + s_0$$

$$c) \rho = 4 \left(1 + \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d) \rho = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right) e^t; s = \sqrt{3} e^t + s_0$$

3. Lấy đạo hàm theo thời gian các phương trình đã cho và thế vào biểu thức của v , W , ta được :

$$a) v = t(4 + t^2)^{1/2}; W = 2(1 + t^2)^{1/2}$$

$$b) v = ak\sqrt{2}, W = ak^2\sqrt{2}$$

$$c) v = \omega(a^2 + \frac{b^2}{4} - ab \sin \frac{\omega t}{2})^{1/2}$$

$$W = \omega^2 \left(a^2 + \frac{b^2}{16} - \frac{ab}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \right)^{1/2}$$

$$d) v = \omega^2 R t, W = \omega^2 R (1 + \omega^2 t^2)^{1/2}$$

$$e) v = 10t, W = 10$$

$$g) v = a(1 + 4t^2)^{1/2}; W = a(1 + t^2)^{-1} \cdot (4t^4 + 8t^2 + 1)^{1/2}$$

$$h) v = e^t (4 \sin^2 t + 2)^{1/2}; W = 2e^t (5 + 4 \sin t \cos t + 4 \sin^2 t)^{1/2}$$

$$4. \text{ Lấy tích phân } s = \int v \cdot dt = \int (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{1/2} dt$$

$$a) s = 5t^2; b) s = \sqrt{2}t; c) s = 4t$$

$$d) s = \omega R \cdot t; e) s = 3t^2; g) s = 5a \sin^2 \omega t$$

$$h) s = \frac{3a}{2} \sin^2 t; i) s = 4a (1 - \cos \frac{t}{2}), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$k) s = t(a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$l) s = \begin{cases} \frac{16a}{3} \sin^2 \frac{3t}{4}, 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{16a}{3} (1 - \cos^2 \frac{3t}{4}), 0 \leq t \leq \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

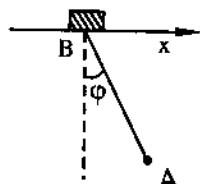
$$5. \text{ Từ hình 1.17 có: } x_A = x_B + AB \sin \varphi,$$

$$y_A = AB \cos \varphi$$

$$\frac{(x_A - a)^2}{(l + b)^2} + \frac{y_A^2}{l^2} = 1 : \text{đường elíp}$$

$$v_A = \omega (l^2 + b^2 \cos^2 \omega t + 2bl \cos^2 \omega t)^{1/2}$$

$$W_A = \omega^2 (l^2 + b^2 \sin^2 \omega t + 2bl \sin^2 \omega t)^{1/2}$$



Hình 1.17

6. Từ hình 1.18 có :

$$\begin{aligned} AB^2 = S^2 &= (A_oC - v_A \cdot t)^2 + \\ &+ (B_oC - v_B \cdot t)^2 = S_o^2 + t^2(v_A^2 + v_B^2) - \\ &- 2t(v_B B_oC + v_A \cdot A_oC) \end{aligned}$$

Vậy : $t_{\min}(\alpha) =$

$$= (v_A \cdot S_o \sin \alpha + v_B S_o \cos \alpha) (v_A^2 + v_B^2)^{-1}.$$

Nếu $0 < \alpha < 90^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_A}{v_B}$

$$t_{\min} = \begin{cases} s_o v_A (v_A^2 + v_B^2)^{-1}, \alpha = \frac{\pi}{2} \\ s_o v_B (v_A^2 + v_B^2)^{-1}, \alpha = 0. \end{cases}$$

7. Giả sử xuống máy khởi hành tại C (hình 1.19) ; thời gian và vận tốc trên AC và CB kí hiệu là $t_1, t_2; v_1, v_2$. Ta có :

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{1}{v_{CB}} [(v_{AC} \cdot t_1 - c)^2 + a^2]^{1/2} = t(t_1) \quad (1)$$

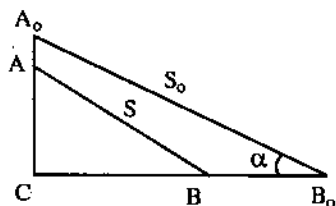
Từ điều kiện $\frac{dt}{dt_1} = 0$ và (1)

$$\Rightarrow t_1 = \frac{c}{v_{AC}} \pm \frac{av_2(v_1^2 - v_2^2)^{1/2}}{v_1(v_2^2 - v_1^2)}$$

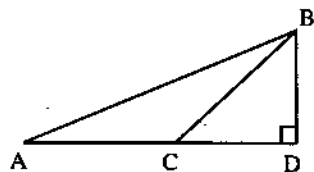
$$a = BD, c = (AB^2 - BD^2)^{1/2}.$$

Do đó :

$$AC = t_1, v_1 = c - av_2(v_1^2 - v_2^2).$$



Hình 1.18



Hình 1.19

8. Từ hình 1.20 có :

$$x_D = \frac{AB}{2} \cos \alpha + CD \sin \alpha$$

$$y_D = \frac{AB}{2} \sin \alpha + CD \cos \alpha$$

Nếu $CD = \frac{AB}{2}$ thì $x_D = y_D$ quỹ

đạo điểm D là đoạn thẳng Oy' chia góc vuông yOx. Khi $CD \neq AB/2$, chiếu OD lên các trục hệ tọa độ x'Oy' ta có :

$$x'_D = CD \cos \alpha + OC \cos \alpha = (CD + OC) \cos \alpha,$$

$$y'_D = (CD + OC) \sin \alpha ;$$

quỹ đạo của D là đường tròn đường kính trùng với Oy.

9. Kí hiệu O' là tiếp điểm của hai đường tròn ở thời điểm $t = 0$, góc $\widehat{AOx} = \varphi = \omega.t$; góc $\widehat{MO'E} = \alpha$; $\widehat{OAE} = \alpha'$.

Trong hệ tọa độ cực :

$$\begin{cases} r = O'M = r(t) \\ \alpha = \widehat{MO'E} = \alpha(t) \end{cases} \quad (1)$$

Để tính (1), từ hình 1.21 :

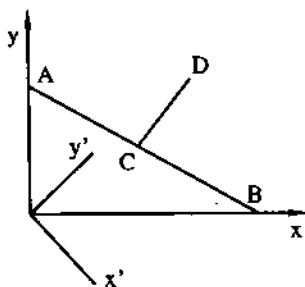
$$OE \sin \varphi = EA \sin \alpha'$$

$$OE \cos \varphi + EA \cos \alpha' = R + R'$$

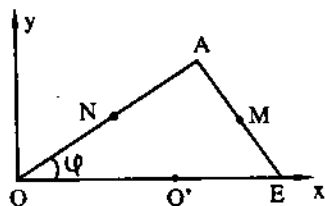
Do vậy :

$$OE = (R + R') (\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cot \alpha')^{-1}$$

vì bánh xe tâm A lăn không trượt nên cung O'N bằng cung NM ta có :



Hình 1.20



Hình 1.21

$$\alpha'R' = R\varphi = R\omega t; \alpha' = \frac{R\omega}{R'}t$$

$$EM = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha'} \left[\frac{(R + R')}{\cos \varphi + \sin \varphi} - \frac{R'}{\cot \alpha'} \right]$$

Kí hiệu :

$$f(\alpha') = [(OE - R)^2 + EM^2 - 2ME.(OE - R)\cos(\alpha' - \varphi)]^{1/2} \quad (2)$$

Từ O' kẻ đường vuông góc xuống EA ta có :

$$r\sin\beta = O'E\sin(\alpha' + \varphi) \quad (3)$$

$$\alpha = \alpha' + \varphi - \beta, \beta \text{ là góc } \widehat{O'ME} \quad (4)$$

Đặt (2), (3), (4) vào (1) ta được phương trình chuyển động của M trong hệ tọa độ cực : (Nếu $R = R'$).

$$r = 4R \sin^2 \frac{\omega t}{2}, \alpha = \omega t.$$

10. Dùng hệ trục tọa độ cầu, bỏ qua vận tốc góc quay quanh trục của Trái Đất, chiếu vectơ vận tốc $\vec{v} = \text{const}$ lên phương tiếp tuyến với kinh tuyến tại vĩ độ φ là vị trí của tàu, ta có :

$$v_r = 0; v_\varphi = v\sin\alpha; v_\theta = v\cos\alpha$$

$$v_r = \dot{r} = 0, v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta = v\sin\alpha;$$

$$v_\theta = R\dot{\theta} = v\cos\alpha,$$

thay vào biểu thức của gia tốc W trong tọa độ cầu :

$$W = \frac{v^2}{R}(1 + \cot^2\theta\sin^2\alpha)^{1/2}.$$

11. Gia tốc W của chất điểm bằng :

$$W^2 = W_n^2 + W_\tau^2 = \frac{v^4}{R^2} + \dot{v}^2, \text{ với } v = \omega R.$$

$W^2 = \varepsilon^2 R^2 (1 + \varepsilon^2 t^4)$ là gia tốc ở thời điểm t ;

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}.$$

Mặt khác $S = R \int \omega dt = \frac{1}{2} R \varepsilon t^2$, vậy sau n vòng

$$S_n = 2\pi R n = (1/2) R \varepsilon t_n^2. \text{ Do đó}$$

$$(W^{(n)}/W^{(1)}) = \frac{(1+16\pi^2 n^2)^{1/2}}{(1+16\pi^2)^{1/2}}.$$

12. Ta có $W_t = k \sqrt{W_n} = \frac{k \cdot v}{\sqrt{R}}$; R là bán kính đường tròn, k là hệ

số tỉ lệ. Do vậy :

$$W_t = \frac{dv}{dt} = \frac{kv}{\sqrt{R}} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{k}{\sqrt{R}} dt$$

$$\Rightarrow v = v_0 e^{\lambda t},$$

$$\lambda = \frac{k}{\sqrt{R}}; S = \int v dt = \frac{v_0}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1).$$

13. Từ hình 1.22 có phương trình chuyển động của chất điểm dạng tọa độ cực $r = r(t)$; $\varphi = \varphi(t)$.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_0; \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

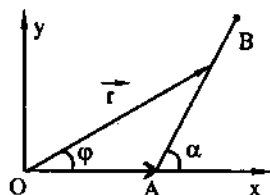
Từ (1):

$$dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi;$$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$$

và

$$dy = \tan \alpha \cdot dx, \text{ ta có :}$$



Hình 1.22

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} &= \ln \frac{r}{r_0} = \int_0^\varphi \left[\frac{d\varphi}{\cotg\varphi - \cotg\alpha} + \frac{d\varphi}{\tg\alpha - \tg\varphi} \right] = \\ &= -\varphi \cos 2\alpha + \frac{2}{1 + \cotg^2 \alpha} \ln(\sin \varphi - \cos \varphi \cotg \alpha) \\ r &= r_0^{-\varphi \cos 2\alpha} [\sin \varphi - \cos \varphi \cotg \alpha] \frac{2}{1 + \cotg^2 \alpha}.\end{aligned}$$

14. Trong toạ độ Đề các phương trình chuyển động của chất điểm có dạng đơn giản :

$$y = kx^2$$

vì $\ddot{x} = 0$ nên $\ddot{y} = 2k\dot{x}^2 = a$.

$$\text{Do đó : } \dot{x} = \left(\frac{a}{2k} \right)^{1/2}, \quad \dot{y} = 2kx\dot{x} = at.$$

$$\dot{s} = v = \left(\frac{a}{2k} \right)^{1/2} (1 + 2kat^2)^{1/2}$$

Sau đó tìm bán kính cong ρ theo công thức :

$$\rho = \frac{\dot{s}^3}{\ddot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\ddot{y}} (1/2k)(1 + 2kat^2)^{3/2};$$

$$\text{Như vậy : } \ddot{s} = W_\tau = t \left(\frac{2ka^3}{1 + 2kat^2} \right)^2$$

$$W_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = a(1 + 2kat^2)^{1/2}.$$

15. Trong các toạ độ tự nhiên :

$$\ddot{s} = a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} v, \quad (1)$$

$$\frac{\dot{s}^2}{\rho} = b, \quad \rho \text{ là bán kính cong} \quad (2)$$

Nhưng $v^2 = \dot{s}^2 = v_o^2 + 2a(s - s_o)$; v_o, s_o là vận tốc và tọa độ đầu ($t = 0$), $\rho = ds/d\alpha$; α là góc giữa tiếp tuyến với quỹ đạo và trục tọa độ Ox. Ta có :

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{b} [v_o^2 + 2a(s - s_o)] \quad (3)$$

Lấy tích phân phương trình (3), ta được :

$$2a(s - s_o) + v_o^2 = A.e^{(2a/b)\alpha} \quad A = v_o^2 e^{-(2a/b)\alpha_o}$$

Vì $dx = \cos\alpha.ds = (A/b)e^{(2a/b)\alpha}\cos\alpha d\alpha$; $dy = ds.\sin\alpha$

$$\text{nên } y = \frac{A}{b\lambda^2} e^{(2a/b)\alpha} \left(\frac{2a}{b} \sin\alpha - \cos\alpha \right);$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{2a}{b} \right)^2 + 1 \quad (4)$$

$$x = \frac{A}{b\lambda^2} e^{(2a/b)\alpha} \left(\frac{2a}{b} \cos\alpha + \sin\alpha \right) \quad (5)$$

($y_o = x_o = 0$). Đặt $\operatorname{tg}\psi = \frac{2a}{b}$, ta có

$$x = (b\lambda^2)^{-1} v_o^2 e^{(2a/b)(\alpha - \alpha_o)} \cos(\alpha + \psi) \quad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra rằng trong các tọa độ cực r và φ

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$$

$$\begin{cases} r = (b\lambda^2)^{-1} v_o^2 e^{(2a/b)(\alpha - \alpha_o)} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = -\operatorname{cotg}(\alpha + \psi); \quad \varphi = \alpha + \psi \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Cuối cùng, nếu kí hiệu lại các hệ số trong (8) và (9) ta thấy rằng chất điểm chuyển động theo đường xoắn ốc lôga

$$\rho = \rho_0 e^{(2a/b)(\varphi - \varphi_0)}$$

16. Theo điều kiện bài toán, trong hệ tọa độ cực ta có :

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \sigma_0 \quad (1)$$

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{a^2}{\rho^2} \quad (2)$$

Các hằng số σ_0 và a được xác định từ điều kiện đầu :

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 \sin \alpha ; a = \rho_0 v_0$$

α là góc giữa vận tốc và bán kính vectơ ở điểm $t = 0$, từ (1) và (2)

$$\dot{\rho}^2 + \left(\frac{2\sigma_0}{\rho} \right)^2 = \left(\frac{a}{\rho} \right)^2$$

$$\text{Nghiem của nó : } \rho^2 = \rho_0^2 + 2(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2} \cdot t \quad (3)$$

Từ (2) và (3) :

$$\dot{\varphi} = \frac{2\sigma_0}{\rho_0^2 + 2(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2} t}$$

$$\varphi = \frac{\sigma_0}{(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2}} \ln \left[\frac{\rho_0 + 2(a^2 - 4\sigma_0^2)^{\frac{1}{2}} t}{\rho_0^2} \right] + \varphi_0 \quad (4)$$

Khử t trong (3) và (4) tìm được phương trình quỹ đạo :

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{(a^2 - 4\sigma_0^2)^{1/2}}{2\sigma_0} (\varphi - \varphi_0) \right]$$

Vì vận tốc diện tích không đổi nên $W_\varphi = 0$ và W_ρ được xác định bằng công thức Biné (Binet) :

$$W_\rho = -\frac{4\sigma_0^2}{\rho^2} \left[\frac{1}{\rho} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]$$

Do đó

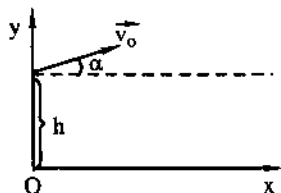
$$W = W_\rho = -\frac{a^2}{\rho^3}.$$

17. Phương trình chuyển động của viên đạn :

$$m \ddot{x} = P_x = mg_x$$

$$m \ddot{y} = P_y = mg_y$$

hay từ hình 1.23 :



Hình 1.23

$$x_{(t)} = v_0 t \cos \alpha$$

$$y_{(t)} = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Do đó tầm bay xa L bằng :

$$L = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} \left[v_0 \sin \alpha + (v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh)^{1/2} \right]$$

Từ điều kiện $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$, ta có độ xa cực đại ứng với α_1 :

$$\sin \alpha_1 = \left[2 \left(1 + \frac{hg}{v_0^2} \right) \right]^{-1/2}.$$

18. Giải tương tự như bài tập 17 ta thu được $v_l = v_o \sin \alpha$, không phụ thuộc vào khoảng cách l .

19. Lấy tâm đường tròn làm gốc tọa độ, ta có :

$$x = r \cos \varphi, \varphi = \omega t$$

$$y = r \sin \varphi,$$

Vì $F_x = m \ddot{x}$, $F_y = m \ddot{y}$ nên $F_x/F_y = x/y$, do đó phương của lực và bán kính vectơ $\vec{r}$ trùng nhau.

20. Lấy đạo hàm theo thời gian các phương trình chuyển động, ta có :

$$a) F = r(m^2 \alpha^2 + m^2 \omega^4 - 2m\alpha^2 \omega^2 + 4m^2 \alpha^2 \omega^4)^{1/2}$$

$$b) F = m(a^2 + R^2 \omega^4)^{1/2}$$

$$c) F = m \sqrt{5} . e^t$$

m là khối lượng của chất điểm.

21. Trên hình 1.24,

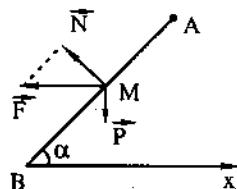
$$F \cdot \cos \alpha - P \sin \alpha = F_{ms},$$

$$\text{ở đây } \vec{F} = m \cdot \overline{W_{AB}};$$

$\overline{W_{AB}}$ là gia tốc của AB ;

F_{ms} là lực ma sát tĩnh cực đại,

$$F_{ms} = f(P \cdot \sin \alpha + P \cos \alpha)$$



Hình 1.24

$$\text{Vậy với } W_{AB} = \frac{fg \cos \alpha + g \sin \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

thì chất điểm M chuyển động lên theo BA ; $\cos \alpha > f \sin \alpha$; $f < \cot \alpha$.

22. Lực hấp dẫn giữa vệ tinh và Trái Đất là :

$$F = k \frac{m.M}{(R + h)^2}$$

k là hệ số tỉ lệ ; m và M là khối lượng vệ tinh và Trái Đất ; R là bán kính Trái Đất. Khi $h = 0$, $F = mg$, thì $k.M = gR^2$. Quỹ đạo của vệ tinh là đường tròn, do đó nếu chiếu F lên phương về tâm quỹ đạo ta có :

$$m.W_n = \frac{mv^2}{R + h} = F_n = mgR^2(R + h)^{-2} \rightarrow v = [R^2g/(R + h)]^{1/2}$$

$$\text{ở xích đạo} \quad v = \omega(R + h) \rightarrow h = \left(\frac{R^2g}{\omega^2} \right)^{1/3} - R \approx 36800\text{km.}$$

23. Từ hình vẽ của đầu bài, phương trình định luật 2 Niuton :

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{W}$$

$\vec{N}$ là phản lực của OE ; $\vec{N}$ vuông góc với OE, $\vec{T}$ là sức căng sợi dây, do đó, chiếu lên phương OE (trục x hướng theo OE)

$$T\cos\alpha - P = m\ddot{x} \quad (1)$$

a) Khi $\omega = \text{const}$; $dl = v_0 dt = \omega r dt$; mặt khác

$$dl = dx.\cos\alpha \rightarrow \dot{x} = \frac{v_0}{\cos\alpha} \text{ và } \ddot{x} = \frac{v_0 \sin\alpha}{\cos^2\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2)$$

Từ đẳng thức :

$$x = l\cot\alpha \rightarrow \dot{\alpha} = \frac{v_0}{l\cos\alpha} \sin^2\alpha \quad (3)$$

Vậy :

$$T = \frac{P_s}{x} \left(1 + \frac{v_0^2 l^2}{gx^3} \right) ; s^2 = l^2 + x^2 ; v_0 = \omega r.$$

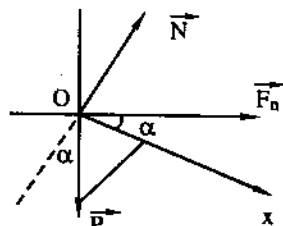
b) Khi $\varepsilon = \dot{\omega} = \text{const}$, từ (2) :

$$\ddot{x} = \frac{\dot{v}_0}{\cos \alpha} + \frac{v_0}{\cos^2 \alpha} \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}, \quad \dot{v}_0 = \varepsilon r \quad (4)$$

thay α từ (3) vào (4) sau đó thế (4) vào (1) ta được :

$$T = \frac{Ps}{x} \left(1 + \frac{\varepsilon rs}{gx} + \frac{\varepsilon^2 r^2 t^2 l^2}{gx^3} \right); \quad \varepsilon^2 r^2 t^2 = v_0^2.$$

24. Trên hình 1.25 : $\vec{P}$ là trọng lượng, $\vec{N}$ là phản lực vuông góc với mặt đường, $\vec{F}_n$ là lực hướng tâm. Trục Ox hướng theo mặt đường (tiếp tuyến). Phương trình định luật 2 Newton.



Hình 1.25

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ms} = m(\vec{W}_t + \vec{W}_n)$$

Chiếu lên trục Ox :

$$P \sin \alpha + f(P \cos \alpha + \frac{mv^2}{R} \sin \alpha) = \frac{mv^2}{R} \cos \alpha$$

Vậy

$$v_{\max}^2 = gR \left(\frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \right)$$

Khi v nhỏ dần thì F_{ms} cũng nhỏ dần và đổi chiều nếu v tiếp tục giảm. Vậy :

$$P \sin \alpha - f P \cos \alpha - f \sin \alpha \left(\frac{mv_{\min}^2}{R} \right) = \frac{mv_{\min}^2}{R} \cos \alpha$$

$$\text{Suy ra :} \quad v_{\min}^2 = gR \left(\frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \right)$$

$$\text{Do đó : } \Delta v = \left[\frac{gR(\sin \alpha + f \cos \alpha)}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \right]^{1/2} - \left[\frac{gR(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \right]^{1/2}.$$

25. Ở điểm A quả cầu chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$, sức căng sợi dây $\vec{T}$ và phản lực $\vec{N}$ của AB (hướng theo BA). Ta có phương trình :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m(\vec{W}_n + \vec{W}_\tau).$$

Chiếu lên các trục của hệ tự nhiên :

$$T \cos \frac{\alpha}{2} - N \sin \alpha = \frac{mv^2}{l \sin \alpha}$$

$$T = k \cdot CA = 2kl \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\dot{v} = 0, v = \omega l \sin \alpha$$

$$N = kl - m\omega^2 l$$

Chiếu lên phương thẳng đứng :

$$-P + T \sin \frac{\alpha}{2} + N \cos \alpha = 0 \rightarrow N = \frac{P - kl}{\cos \alpha} + kl$$

Vậy :

$$\omega^2 = -\frac{g}{l \cos \alpha} + \frac{k}{m \cos \alpha}.$$

26. a) Nếu lực cản bằng không, hướng Ox theo phương ngang là :

$$m \vec{W} = \vec{P} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

b) Nếu lực cản bằng $-kv_x$

$$m \vec{W} = \vec{P} + \vec{R} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 - k\dot{x} \\ m\ddot{y} = P - k\dot{y} \end{cases}$$

(gốc tọa độ chọn ở điểm đầu của chuyển động)

$$\frac{m d(\dot{x})}{\dot{x}} = -kt; \quad x = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-kt/m})$$

$$\frac{m}{P - k\dot{y}} d(\dot{y}) = dt \rightarrow y = \frac{P}{k} \left[t - \frac{m}{k} (1 - e^{-kt/m}) \right]$$

Nếu khai triển $e^{-kt/m} \approx 1 - \frac{kt}{m} + \frac{1}{2!} \left(\frac{kt}{m} \right)^2 + \dots$ và bỏ qua các số hạng tỉ lệ với k^2 và $k^3 \dots$ khi $k \rightarrow 0$ ta trở về kết quả của trường hợp a).

27. Chọn gốc tọa độ ở tâm Trái Đất, trục Ox hướng theo phương thẳng đứng ta có :

$$\frac{kmM}{x^2} = \frac{mgR^2}{x^2} = m\ddot{x}; \quad M, R \text{ là khối lượng và bán kính Trái Đất.}$$

$$\text{Vậy :} \quad x^2 \cdot \ddot{x} = gR^2; \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{gR^2}{x^2}$$

$$dx \cdot \frac{d\dot{x}}{dt} = gR^2 \frac{dx}{x^2} = \dot{x} d\dot{x} = \frac{dv^2}{2},$$

do đó :

$$x = \left(R^{3/2} + \frac{3Rt}{\sqrt{2}} \sqrt{gR^2} \right)^{2/3}$$

28. Chọn gốc tọa độ ở điểm đầu chuyển động, Ox hướng theo chiều chuyển động. Phương trình định luật 2 Niuton :

$$m \ddot{x} = -R_x + mg = -k \dot{x}^2 + mg; \quad k \text{ là hệ số tỉ lệ}$$

Do đó :

$$\left(\frac{P}{k} - v^2\right)^{-1} dv = \frac{k}{m} dt \rightarrow v = \sqrt{\frac{mg}{k} \frac{e^{2\lambda t} - 1}{e^{2\lambda t} + 1}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{gk}{m}}. \text{ Vì } x = \int_0^t v dt \text{ nên}$$

$$x = \frac{m}{k} \ln \left(\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \right). \text{ Khi } t \rightarrow \infty, v \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

29. Giải tương tự như bài 28, phương trình định luật 2 Niuton :

$$-mg - kv^2 = m\ddot{v}; \quad \frac{dv}{v^2 + \beta} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\beta = \frac{P}{k},$$

Lấy tích phân từ v_0 đến v ta được :

$$v = \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{\beta}} - \sqrt{\beta} \frac{k}{m} t \right).$$

Khi vật lên tới độ cao cực đại, vận tốc bằng không.

Vậy :

$$T. \sqrt{\beta} \frac{k}{m} = \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{\beta}} \Rightarrow T = \frac{m}{k\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{\beta}} \text{ là thời gian vật lên độ}$$

cao cực đại h.

$$h = \int_0^T v dt = -\frac{m}{k} \ln \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{\beta}} \right) = \frac{m}{2k} \ln \left(1 + \frac{kv_0^2}{mg} \right).$$

30. Lấy tích phân phương trình chuyển động

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}_1 \cos \omega t + e \vec{E}_2 \sin \omega t$$

Ta được :

$$\vec{r} = -e \frac{\vec{E}_1}{m\omega^2} \cos \omega t - \frac{e\vec{E}_2}{m\omega^2} \sin \omega t + \vec{A}t + \vec{B}$$

Trong đó $\vec{A}, \vec{B}$ là các hằng số tích phân. Chọn Ox dọc theo $\vec{E}_1$,
Oy theo $\vec{E}_2$ ta tìm được

$$x = \frac{eE_1}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_{ox}t + x_0,$$

$$y = \frac{eE_2}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t) + v_{oy}t + y_0,$$

$$z = v_{oz}t + z_0.$$

31. Phương trình chuyển động của hạt :

$$\ddot{x} = \frac{eE_0}{m} \sin \frac{z}{a}, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0,$$

Do đó

$$y = 0, \quad z = v_0 t, \quad \ddot{x} = \frac{eE_0}{m} \sin \frac{v_0 t}{a}$$

Lấy tích phân : $x = \frac{-eE_0 a}{mv_0} \left(\frac{a}{v_0} \sin \frac{v_0 t}{a} - t \right).$

32. Phương trình định luật 2 Newton viết cho một chất điểm bất kì :

$$m \ddot{\vec{r}} = -mk \dot{\vec{r}} - P \cdot \vec{j} \quad (1)$$

$\vec{j}$ là vectơ đơn vị hướng theo phương thẳng đứng. Lực cản $\vec{R} = -mk\dot{\vec{r}}$, k là hệ số tỉ lệ, (1) có thể viết dưới dạng :

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} e^{kt}) = -ge^{kt} \vec{j}$$

Do đó $\vec{r}e^{kt} = -\frac{g}{k}e^{kt}\vec{j} + \vec{v}_0 + \frac{g}{k}\vec{j}$

Chọn gốc tọa độ tại điểm ném, nên khi $t = 0$, $\vec{r}(0) = 0$

$$\vec{r} = \frac{\vec{v}_0}{k}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}\vec{j} + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt})\vec{j}$$

Vì $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$; $\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha \vec{i} + v_0 \sin\alpha \vec{j}$;

$$\Rightarrow \quad x = \frac{v_0 \cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$y = \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} + \frac{v_0 \sin\alpha}{k}(1 - e^{-kt})$$

Từ đây ta thấy rằng quỹ tích vị trí các điểm ở thời điểm t là đường tròn bán kính $(v_0/k)(1 - e^{-kt})$, tâm đường tròn nằm trên Oy, cách O đoạn $OA = (g/k^2) \cdot (1 - e^{-kt}) - (gt/k)$, nếu lực cản rất nhỏ, tức k nhỏ, khai triển $e^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$

Ta được

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t$$

33. Hướng trục x theo phương chuyển động của electron ta có :

$$\vec{F} = e \vec{E}_0 \sin\omega t = m \ddot{x} \vec{i}$$

Do đó

$$\dot{x} = \int_0^t \frac{eE_0}{m\omega} d(\cos\omega t) + v_0 = \frac{\lambda}{\omega}(\cos\omega t - 1) + v_0, \quad (1)$$

Đặt : $\lambda = (eE_0/m)$

$$x = \int \dot{x} dt = \frac{\lambda}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{\lambda}{\omega} t + v_0 t \quad (2)$$

Nếu sau khoảng thời gian T electron trở lại tới bản cực thứ nhất thì sau khoảng thời gian $T/2$ vận tốc của nó bằng không. Thay $\dot{x} = 0$ trong (1) ta tính được E_0 và $T/2$. Từ (2) ta có : $x = (v_0/\omega)$.

34. Lực tác dụng lên hạt $F_x = qE_0 \sin \omega t \cdot e^{-kt}$ (trục x hướng theo vectơ $\vec{E}_0$), do đó :

$$\dot{x} = \lambda \int e^{-kt} \sin \omega t \cdot dt ; \lambda = \frac{qE_0}{m}$$

Thực hiện các phép lấy tích phân từng phần ta được :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(\omega - k e^{-kt} \sin \omega t - \omega e^{-kt} \cos \omega t)(k^2 + \omega^2)^{-1} \\ x &= \frac{qE_0}{m} \left\{ \frac{\omega t}{k^2 + \omega^2} - \frac{2k\omega}{(k^2 + \omega^2)^2} + \frac{e^{-kt}}{(k^2 + \omega^2)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \left[(k^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\omega k \cos \omega t \right] \right\}. \end{aligned}$$

35. Lực tác dụng lên vật $F = F_0 [1 - (v/v_k)] - \lambda v^2$; λ là hệ số tỉ lệ, do đó : $dv = (F/m)dt$:

$$\begin{aligned} t &= - \int_{v_0}^v \left(\frac{\lambda}{m} v^2 + \frac{F_0 v}{m v_k} - \frac{F_0}{m} \right)^{-1} dv = \\ &= (b^2 - 4ac)^{-1/2} \left\{ \ln \left| \frac{2av + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2av + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| - \ln \left| \frac{2av_0 + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2av_0 + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \right\}; \end{aligned}$$

với $a = (\lambda/m)$, $b = (F_0/mv_k)$

$$c = -(F_0/m).$$

36. Phương trình chuyển động của vật.

$$F_x + F_{ms} = k^2 mx - f.P = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} - k^2 x = -fg \quad (1)$$

Nghiệm tổng quát của (1) : $x = x_0 + x_1$;

với $x_0 = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$; $x_1 = A = \text{const} = (fg/k)$.

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta tìm được C_1 và C_2 là các hằng số tích phân.

$$x = \frac{afg}{2k^2} (e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{fg}{k}$$

37. Phương trình chuyển động của vật có dạng

$$m \ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3 \quad (1)$$

Do vậy

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = -\frac{\alpha}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{\beta}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{x^4}{4} \right)$$

Khi $\dot{x}$ biến đổi từ v_0 đến 0 thì x biến đổi từ 0 đến $x_{\max}$, do đó

$$m v_0^2 = \alpha x_{\max}^2 + \beta x_{\max}^4$$

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{2\beta m v_0^2}{\beta^2}} - \frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left(\sqrt{\alpha^2 + 2m v_0^2} - \alpha \right)^{1/2} \end{aligned}$$

38. Phương trình chuyển động của chất điểm :

$$m \ddot{x} = -\alpha \dot{x} - \beta \dot{x}^3, \quad \dot{x} = v, \quad dt = \frac{dx}{v} \quad (1)$$

Sau khoảng thời gian T bằng

$$T = \int_0^T dt = \int_{v_0}^{v_0/n} dv \left(\frac{-\alpha}{m} v - \frac{\beta}{m} v^2 \right)^{-1} \quad (2)$$

Vận tốc của chất điểm giảm đi n lần. Lấy tích phân (2) có :

$$T = -\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{-1} \ln \left| \frac{v_0 \beta + \alpha}{v_0 \beta + n\alpha} \right| \quad (3)$$

Để tìm quãng đường, ta tìm vận tốc ở thời điểm bất kì t, từ (2)

$$t = -\frac{m}{\alpha} \ln \left| \frac{v}{v_0 + \frac{\alpha}{\beta}} \right|$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\left(v_0 + \frac{\alpha}{\beta} \right) e^{(\alpha/m)t}}{v_0 + \frac{\alpha}{\beta} - v_0 e^{-(\alpha/m)t}}$$

Lấy tích phân từ 0 đến T :

$$x = \int_0^T v dt = \frac{m}{\beta} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z} dz = \frac{m}{\beta} \ln \frac{z_2}{z_1} = \frac{m}{\beta} \ln \frac{n(\alpha + \beta v_0)}{\beta v_0 + n\alpha}$$

$$z = \frac{\alpha}{\beta v_0} + 1 - e^{-(\alpha/m)t} : z_1(t=0) = \frac{\alpha}{\beta v_0}$$

$$z_2(t=T) = \frac{\alpha}{\beta v_0} + 1 - e^{\left(-\frac{\alpha}{m}\right)T}$$

39. Hướng trục Ox theo phương lực $\vec{F}$, ta có phương trình chuyển động của xuống :

$$F - fP = m\ddot{x} ; \frac{F}{m} - g.a + gbv = \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

g là gia tốc trọng trường. Từ (1) :

$$dt = \frac{dv}{gb(\alpha + v)} ; \alpha = \frac{(F/m) - g.a}{g.b} \quad (2)$$

Do đó, thời gian T cần thiết để xuống đạt được vận tốc v_1 là

$$T = \int_0^{v_1} \frac{dv}{gb(\alpha + v)} = \frac{1}{g.b} \ln \left(1 + \frac{mbg.v_1}{F - m.g.a} \right)$$

Từ (2) ta có $v = dx/dt = \alpha(e^{gbt} - 1)$, vậy

$$x(v_1) = \int_0^T v dt = \frac{v_1}{bg} - \frac{F - m.g.a}{mb^2g^2} \ln \left(1 + \frac{mbg.v_1}{F - m.g.a} \right)$$

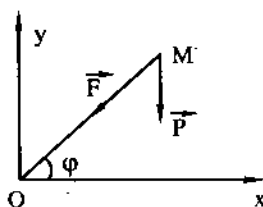
40. Trên hình 1.26 lấy điểm cố định O làm gốc tọa độ, Ox hướng theo phương ngang, phương trình chuyển động của chất điểm :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{W} \quad \begin{cases} F_x = m\ddot{x} \\ -P + F_y = m\ddot{y} \end{cases}$$

$$F_x = -k.OM \cos \varphi = -kx ;$$

$$F_y = -k.y, \text{ vậy : } \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y + g = 0, \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (1)$$



Hình 1.26

Nghiệm của phương trình đầu trong (1) :

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

còn nghiệm của phương trình thứ hai

$$y = y_0 + y_1 = C'_1 \cos \omega t + C'_2 \sin \omega t + A.$$

Từ các điều kiện đầu tính các hằng số tích phân ta có :

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\omega} \sin \omega t$$

$$y = \frac{v_0 \sin \alpha}{\omega} \sin \omega t + \left(b + \frac{g}{\omega^2}\right) \cos \omega t$$

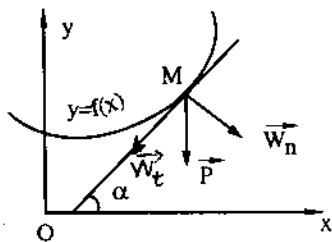
Phương trình quỹ đạo :

$$\left(\frac{y - x \operatorname{tg} \alpha}{b + \frac{g}{\omega^2}} \right)^2 + \left(\frac{\omega x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = 1.$$

41. Hướng trục Ox theo phương ngang, phương trình chuyển động của điểm M:

$$\vec{P} = m\vec{W} = m\vec{W}_t + m\vec{W}_n$$

$$\begin{cases} -P = \frac{mv^2}{\rho} \cos \alpha + m\dot{v} \sin \alpha \\ 0 = \frac{-mv^2}{\rho} \sin \alpha + m\dot{v} \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$



Hình 1.27

α là góc giữa Ox và tiếp tuyến với đường cong tại M,

ρ là bán kính cong tại M. Kí hiệu $f' = \frac{dy}{dx}$, từ (1) ta có

$$\rho = \frac{mv^2 \sin \alpha}{m\dot{v} \cos \alpha} = \frac{v^2}{\dot{v}} \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{\dot{v}} f'$$

$$gf' + \dot{v}(\cos\alpha + y'\sin\alpha) = 0 \quad (2)$$

Biểu thị $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ qua f' , ($f' = \tan\alpha$) ; rồi thay vào (2) :

$$\dot{v} + gf'(1 + f'^2)^{-1/2} = 0 \quad (3)$$

Từ hình 1.27 : $ds = dy/\sin\alpha$; $ds/dt = v = \dot{y}/\sin\alpha$. Vậy

$$\dot{v} = (\ddot{y}\sin\alpha - \dot{y}\cos\alpha \cdot \dot{\alpha})(\sin\alpha)^2 \quad (4)$$

Ngoài ra :

$$\begin{aligned} \frac{df'}{dt} &= \frac{d}{dt}(\tan\alpha) = \frac{\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} ; \\ \dot{\alpha} &= \cos^2\alpha \frac{d}{dt}(f') = \frac{df'}{dx} \frac{dx}{dt} \cos^2\alpha ; \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{x}f''}{1+f'^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) và $\dot{v}$ từ (3) vào (4) ta thu được

$$\ddot{x}(1 + f'^2) = \dot{x}^2 f' f'' + gf' = 0. \quad (6)$$

42. Bỏ qua trọng lượng của êlectron, chọn gốc tọa độ ở điểm đầu của chuyển động, hướng trục Ox theo phương điện trường $\vec{E}$, phương trình chuyển động của êlectron :

$$m\ddot{x} = -eE - k\dot{x}, \quad \ddot{x} + \omega^2\dot{x} = \frac{-eE}{m} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = 0 - k\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega^2\dot{y} = 0 \quad (2)$$

$\omega^2 = k/m$. Khi $t = 0$, $v(0) = 0$, từ (2) có :

$$\frac{d\dot{y}}{\dot{y}} = -\omega^2 dt ; \quad \dot{y} = v_0 e^{-\omega^2 t} ; \quad y = \frac{-v_0}{\omega^2} e^{-\omega^2 t} + \frac{v_0}{\omega^2} \quad (3)$$

Nghiệm tổng quát của (1) : $x = x_0 + x_1$, x_0 là nghiệm chung của

(1) khi vế phải bằng 0 ; x_0 có dạng tương tự (3) ; x_1 là nghiệm riêng của (1) khi vế phải khác 0 :

$$x_0 = C e^{-\omega^2 t} + C_1$$

$$x_1 = \lambda \frac{eE}{m} t$$

Thay x và x_1 vào (1), ta tìm được C , C_1 và λ (chú ý đến các điều kiện ban đầu của bài toán), cuối cùng :

$$x = \frac{-eE}{m\omega^4} e^{-\omega^2 t} - \frac{eE}{m\omega^2} t + \frac{eE}{m\omega^4} \quad (4)$$

Khi lực cản rất nhỏ, tức $k = m\omega^2$ rất nhỏ, $\omega^2 \ll 1$

$$e^{-\omega^2 t} \approx 1 - \omega^2 t + \frac{\omega^4}{2} t^2$$

Thay vào (4) ta được $x = -(eE/2m).t^2$, $y = v_0 t$ - quỹ đạo trở thành đường parabol.

43. Phương trình chuyển động của chất điểm :

$$-mC_1 \vec{r} + mC_2 \vec{r}_0 = m\vec{W}$$

$$\ddot{x} + C_1 x - C_2 r_0 = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{y} + C_1 y = 0 \quad (2)$$

Tương tự như bài 40, nghiệm của (1) và (2)

$$x = a \cos \sqrt{C_1} . t + b \sin \sqrt{C_1} . t + A$$

$$y = a' \cos \sqrt{C_1} . t + b' \sin \sqrt{C_1} . t$$

Từ điều kiện ban đầu của bài toán ta tính được các hằng số tích phân

$$a = r_0 \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right), b = 0, a' = 0$$

$$b' = \frac{v_o}{\sqrt{C_1}} ; A = \frac{r_o C_2}{C_1}$$

Do đó
$$x = a \cos \sqrt{C_1} \cdot t + \frac{C_2}{C_1} r_o$$

$$y = \left(\frac{v_o}{\sqrt{C_1}} \right) \sin \sqrt{C_1} \cdot t,$$

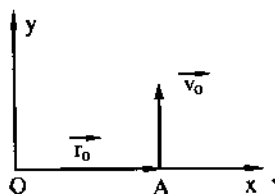
suy ra:
$$\left(\frac{x - \frac{C_2}{C_1} r_o}{a} \right)^2 + \left(\frac{y \sqrt{C_1}}{v_o} \right)^2 = 1$$

quỹ đạo là đường elíp có tâm ở điểm

$\left(\frac{C_2}{C_1} r_o, 0 \right)$, do đó để chất điểm M qua O,

tâm elíp phải nằm ở giữa OA tức $\frac{C_2 r_o}{C_1} = \frac{1}{2} r_o$,

hay $\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2}$ (hình 1.28).



Hình 1.28

44. Lấy O_1 làm gốc tọa độ và trục x hướng theo $\overline{O_1 O_2}$ (hình 1.29) : phương trình chuyển động của chất điểm :

$$m \overline{W} = \overline{F_1} + \overline{F_2} = -C \cdot \overline{O_1 M} - C \cdot \overline{O_2 M}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{2aC}{m} \cdot k^2 = 2 \frac{2C}{m} \quad (1)$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \quad (2)$$

Nghiệm của (1) và (2)

$$x = A \cos kt + B \sin kt + a$$

$$y = A' \cos kt + B' \sin kt$$

Từ điều kiện ban đầu : Khi $t = 0$;

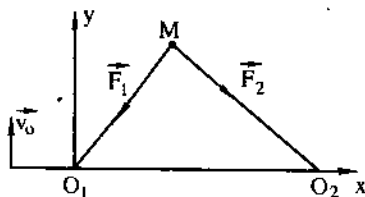
$$x(0) = -a ; y(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = 0 ; \dot{y}(0) = v_0$$

Ta tìm được :

$$A = -2a ; B = 0 ;$$

$$A' = 0, B' = \frac{v_0}{k}$$



Hình 1.29

Vậy : $x = -2a \cos kt + a$

$$y = \frac{v_0}{k} \sin kt, \left(\frac{x-a}{2a} \right)^2 + \left(\frac{y.k}{v_0} \right)^2 = 1$$

Sau khoảng thời gian $kT_1 = \pi$, tức $T_1 = \frac{\pi}{k}$, chất điểm M cắt OO_1 , và khi $T_2 = 2\pi/k$, M lại trở về điểm đầu O, thực hiện một chu kì chuyển động.

45. Phương trình chuyển động của vật :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ms} = m\vec{W} \quad (1)$$

Trên mặt phẳng nghiêng góc α_1 và mặt phẳng nghiêng góc α_2 (1) có dạng :

$$-fP \cos \alpha_1 + P \sin \alpha_1 = m \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

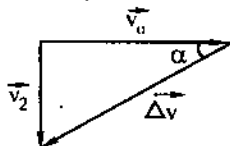
$$P \sin \alpha_2 + fP \cos \alpha_2 = -m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta tính v_s là vận tốc của vật khi nó tới mặt ngang.
Từ hai biểu thức đó của v_s ta tìm được :

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\sin \alpha_1 - f \cos \alpha_1}{\sin \alpha_2 + f \cos \alpha_2}.$$

46. Sau khi chất điểm M đi được $\frac{1}{4}$ đường tròn, vận tốc $\vec{v}_2$ của nó vuông góc với vận tốc đầu $\vec{v}_0$. Từ hình 1.30 :

$$v_0 = \Delta v \cdot \cos \alpha = \Delta v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Hình 1.30

Do đó : $\Delta P = m \cdot \Delta v = P\sqrt{2}$

P là xung lượng của chất điểm ;

ΔP là sự thay đổi xung lượng sau $\frac{1}{4}$ đường tròn.

47. Từ công thức Binê :

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2}{4mc^2} F_r, \quad c = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \quad (1)$$

(c là vận tốc diện tích, r, φ là các tọa độ cực, F_r là hình chiếu của lực trên phương của vectơ $\vec{r}$) ta dễ dàng tính được :

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{2}r} \sqrt{a^2 + r^2} ; \quad \vec{F} = \frac{-ma^2 v_0^2}{2r^4} \cdot \vec{r}$$

48. Lấy tâm O của elíp làm gốc tọa độ, phương trình quỹ đạo của elíp trong các tọa độ cực r và φ :

$$r = \frac{b}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}, \quad e = \frac{1}{a} (a^2 - b^2)^{1/2} ; \quad (1)$$

e là tâm sai của elíp. Đặt (1) vào công thức Binê (xem công thức (1) bài 47), tính được lực gây ra chuyển động :

$$\vec{F} = \frac{-ma^2 v_o^2 (1 - e^2)}{b^4} \vec{r}.$$

(Công thức (1) nhận được từ phương trình $(x/b)^2 + (y/a)^2 = 1$ nếu thay $x = r \cos \varphi$ và $y = r \sin \varphi$).

49. Áp dụng công thức Binê (xem bài 47), ta dễ dàng tìm được lực xuyên tâm khi biết phương trình quỹ đạo :

$$\vec{F} = \frac{-3ma^2}{r^8} r_o^2 v_o^2 \sin^2 \alpha \vec{r}.$$

50. Chọn gốc tọa độ ở tâm O của trường lực, trục Oy hướng theo phương thẳng đứng, phương trình định luật 2 Newton.

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{g} - k^2 m \vec{r} = m \vec{W}$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g \quad (1)$$

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \quad (2)$$

Nghiệm của các phương trình (1) và (2)

$$y = y_o + y_1 = A' \cos kt + B' \sin kt + C \quad (3)$$

$$x = A \cos kt + B \sin kt \quad (4)$$

Thay (3) vào (1), sử dụng các điều kiện ban đầu của bài toán ta có $B = 0$, $A = a$, $B' = v_o/k$; $A' = 0$, và

$$x = a \cos kt ; y = (v_o/k) \sin kt - g/k^2.$$

Quỹ đạo là đường elíp có các bán trục là a và v_o/k .

51. Ở bề mặt Trái Đất, lực hấp dẫn F bằng

$$F = \frac{\gamma m.M}{R^2} = mg ; \gamma M = gR^2; R \text{ là bán kính Trái Đất.}$$

Thế của lực $F(r)$ bằng :

$$U(r) = \int F dr = mgR^2 \int r^{-2} dr = -\frac{\alpha}{r}; \alpha = mgR^2$$

Chọn tâm Trái Đất là gốc tọa độ, trục cực hướng từ tâm tới nơi bắn. Khi $t = 0$, $\varphi(0) = 0$, $r(0) = R$, $v(0) = v_0$. Trong các tọa độ cực φ và $r(\varphi)$ ta có phương trình quỹ đạo của chất điểm chuyển động trong trường thế xuyên tâm $U(r)$:

$$\varphi = \frac{L_0}{\sqrt{2m}} \int r^{-2} (E_0 + \frac{\alpha}{r} - \frac{L_0^2}{2mr^2})^{-1/2} dr \quad (1)$$

$$\text{Với } L_0 = [\vec{r}_0 m \vec{v}_0] = mr_0 v_0 \cos \alpha, E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{\alpha}{R}$$

$$\text{Nếu đặt } q = \frac{1}{r}, A^2 = \frac{2mE_0}{L_0^2} + B^2; B = \frac{\alpha m}{L_0^2}$$

(1) trở thành :

$$\varphi = \int \frac{d(q-B)}{[A^2 - (q-B)^2]^{1/2}} = \arccos\left(\frac{q-B}{A}\right).$$

$$\text{Vậy : } r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}, P = \frac{L_0^2}{m\alpha}; e = \left(1 + \frac{2E_0 L_0^2}{m\alpha^2}\right)^{1/2}$$

Độ cao cực đại mà quả đạn lên được :

$$h = r_{\max} - R;$$

$$r_{\max} = \frac{P}{1-e} = \frac{R v_0^2 \cos^2 \alpha}{gR - [g^2 R^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha (v_0^2 - 2gR)]^{1/2}}.$$

52. Nhân vectơ $\vec{A}$ với $\vec{r}$ (nhân vô hướng)

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \vec{r}[\vec{v} \cdot \vec{L}] - \frac{\alpha \vec{r} \cdot \vec{r}}{r}, \quad \text{Arcos} \varphi = \frac{1}{m} L^2 - \alpha r$$

Do đó :

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{với } P = \frac{L^2}{\alpha m}; \quad e = \left| \frac{A}{\alpha} \right|$$

Quỹ đạo là đường cong bậc hai với tâm sai e.

53. Chuyển động của hạt xảy ra dưới tác dụng của lực xuyên tâm, chọn gốc tọa độ ở tâm trường lực, trục cực hướng từ tâm trường tới điểm đầu chuyển động, các tọa độ cực r, φ ; phương trình quỹ đạo có dạng :

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L_0 dr}{r^2 [2m(E_0 - U_{ef})]^{1/2}} \quad (1)$$

Với $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(r_0)$; $L_0 = m[\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0]$; $U(r_0)$ và M_0 là thế và mômen xung lượng ở điểm đầu $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$.

$$U_{ef} = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2}; \quad \varphi_0 = \varphi \quad (t = 0)$$

Thay $U(r) = (\alpha/r) + \beta/r^2$ vào (1) và lấy tích phân, tương tự như bài 51, ta thu được :

$$r = P[\text{ecos} \gamma(\varphi - \varphi_0) - 1]^{-1}$$

$$P = \frac{2}{\alpha} \left(\beta + \frac{L_0^2}{2m} \right); \quad \gamma = \left(1 + \frac{2m\beta}{L_0^2} \right)^{1/2}$$

$$e = \left[1 + \frac{4E_0}{\alpha^2} \left(\beta + \frac{L_0^2}{2m} \right) \right]^{1/2}$$

54. Giải tương tự như bài 53 ta được phương trình quỹ đạo :

$$r = P[\text{ecos}\gamma(\varphi - \varphi_0) + 1]^{-1},$$

với các giá trị P , γ và e như trong bài 53.

55. Giải tương tự bài 53, gốc tọa độ ở tâm trường lực ; trục cực hướng tới điểm gần nhất của quỹ đạo, ta thu được :

$$r^{-1} = \left(\frac{2mE}{L_o^2 + 2m\alpha} \right)^{1/2} \cos \sigma\varphi$$

$$\sigma = \left(1 + \frac{\alpha}{\rho^2 E} \right)^{1/2} ; \rho = L_o(2mE)^{1/2}.$$

56. Chọn gốc tọa độ cực ở tâm trường lực, hướng trục cực tới điểm gần nhất của quỹ đạo, dùng công thức (1) bài 53 với

$$U_{ef} = (1/3)\lambda r^3 + L_o^2/2mr^2, \text{ ta thu được}$$

$$r = P(1 + \text{ecos}\varphi)^{-1} \quad (1)$$

(1) là phương trình đường con bậc hai, P và e là các hằng số. Với mọi đường con bậc hai, nếu cơ năng E bằng giá trị nhỏ nhất của U_{ef} thì tâm sai e bằng không và khi đó $r = P = \text{const}$. Quỹ đạo của điểm sẽ là đường tròn.

57. Định luật bảo toàn cơ năng của chất điểm :

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E \quad (1)$$

Vì $\dot{x}^2 > 0$ nên chuyển động chỉ có thể xảy ra trong miền biến thiên của x sao cho $E > U(x)$. Các điểm x_1 và x_2 thỏa mãn phương trình $E - U(x) = 0$ là các điểm dừng của chuyển động, tại đó vận tốc bằng không. Chu kì của chuyển động là thời gian điểm chuyển động

từ x_1 đến x_2 và ngược lại. Từ (1) ta có :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \left[\frac{2}{m}(E - U) \right]^{1/2}$$

Cho nên chu kì của chuyển động T bằng

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} [E - U(x)]^{-1/2} dx. \quad (2)$$

58. Định luật bảo toàn cơ năng của chất điểm

$$E = U(x) + \delta U(x) + \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

$$\text{Do đó : } \frac{dx}{dt} = \left[\frac{2}{m}(E - U - \delta U) \right]^{1/2}$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x [E - U - \delta(U)]^{-1/2} dz \quad (1)$$

với $x(0) = x_0 = a$.

Khai triển biểu thức dưới dấu tích phân theo lũy thừa của $\delta U(x)$ ta có từ (1) :

$$t(x) = t_1(x) + \delta t(x) \quad (2)$$

$$\text{với } t_1(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dz}{\sqrt{E - U(z)}} \quad (3)$$

$$\delta t(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dz \cdot \delta U(z)}{[E - \delta U(z)]^{3/2}} \quad (4)$$

Giả sử phương trình chuyển động của chất điểm khi không có phần thêm $\delta U(x)$ có dạng $x_1 = x_1(t)$, khi đó từ (2), phương trình chuyển động của điểm trong trường với thế năng $U + \delta U(x)$ có dạng :

$$x = x_1(t - \delta t) \quad (5)$$

Khai triển (5) theo lũy thừa của δt , ta được :

$$x = x_1(t) - \dot{x}_1(t) \cdot \delta t(x_1) \quad (6)$$

Ở gần điểm dừng x_a ($\dot{x}_a = 0$) có thể thay $\delta U(x) = \delta U(x_a)$ và $U(x) \approx U(0) + (x - x_a) \frac{dU}{dx_a}$; $U(0) = 0$ (chọn). Thay biểu thức này vào (1) ta tìm được $E - \delta U(x)$, sau đó từ (4) ta có :

$$\delta t(x) = \int \frac{\sqrt{m} \cdot \delta U(z) dz}{[2(z - z_1)(dU/dz_1)]^{3/2}} \quad (7)$$

Thay (7) vào (6) ta tìm được phương trình chuyển động của chất điểm $x = x(t)$.

59. Thay $U = (1/2)m\omega^2 x^2$ và $\delta U(x) = (1/3)\alpha m x^3$ vào (7) bài 58 và lấy tích phân ta tìm được $\delta t(x)$. Thay δt vào (6) bài 58 ta tìm được $x(t)$. Kết quả tính toán :

$$x = a \sin \omega t - \frac{\alpha a^3}{3\omega^3} \cos \omega t \left(\cos \omega t + \frac{1}{\cos \omega t} - 2 \right).$$

60. Đặt biểu thức $U(x)$ vào công thức (2) bài 57 ta có :

$$T = \frac{\pi \sqrt{2m}}{\alpha \sqrt{E + U_0}}$$

61. Xem hình 1.31, áp dụng định lí biến thiên động năng ta tìm được vận tốc v_1 của vật A lúc chạm vào đầu lò xo có hệ số cứng C_2 .

$$\frac{1}{2}(mv_1^2 - mv_0^2) = \int_0^h (P - C_1 x) dx$$

$$= Ph - \frac{C_1}{2} h^2; v_0 = 0;$$

Độ nén tối đa S của lò xo thứ hai :

$$\frac{1}{2}(mv_2^2 - mv_1^2) = \int_0^s (\bar{P} + C_1 \bar{x} + C_2 \bar{x}) d\bar{x} =$$

$$= PS - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)S^2$$

với $v_2 = 0$ ta có $S^2(C_1 + C_2) - 2PS - mv_1^2 = 0$

$$S = \frac{P}{C_1 + C_2} + \left[\frac{P^2}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{2}{C_1 + C_2} \left(Ph - \frac{C_1}{2} h^2 \right) \right]^{1/2}$$

62. Áp dụng định lý biến thiên động năng ta có

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{r_0}^{r_{\min}} \frac{k}{r^3} dr = -\frac{k}{2} \left(\frac{1}{r_{\min}^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)$$

Vậy $r_{\min} = r_0 [k/(k + mv_0^2)]^{1/2}$.

63. Từ phương trình chuyển động của chất điểm ta tính $\ddot{x}$ và $\ddot{y}$:

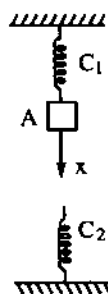
$$F_x = m\ddot{x} = mk^2x$$

$$\vec{F} = mk^2\vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$F_y = m\ddot{y} = mk^2y,$$

Mômen xung lượng :

$$\vec{L} = m[\vec{r} \cdot \vec{v}] = 2m\vec{\sigma} \quad \text{với} \quad \vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r} \cdot \vec{v}]$$



Hình 1.31

Do vậy thay $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ vào biểu thức của $\vec{L}$ ta được :

$$\vec{L} = 2ma.b.k.\vec{n}_z = \text{const}$$

($\vec{n}_z$ là vectơ đơn vị trên trục z).

Thế năng U :

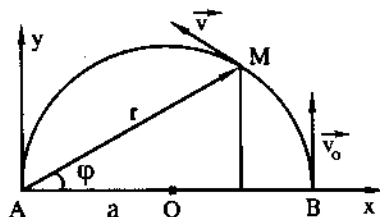
$$U(r) = - \int \vec{F} d\vec{r} = -mk^2 \frac{r^2}{2}$$

Vậy :

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{mk^2}{2}(b^2 - a^2) = \text{const.}$$

64. Chọn gốc toạ độ ở A, trục x hướng theo AB. Từ hình 1.32 ta xác định phương trình quỹ đạo của chất điểm :

$$\begin{aligned} (2a)^2 &= AB^2 = \\ &= r^2 + y^2 + (2a - x)^2 \end{aligned}$$



Hình 1.32

với $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$

$$\text{Vậy : } r = 2a \cos \varphi \quad (1)$$

Định lí biến thiên mômen xung lượng :

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = 0 ; [\vec{r} \cdot m \vec{v}] = [\vec{r}_0 \cdot m \vec{v}_0] \quad (2)$$

Áp dụng công thức Binê

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = - \frac{r^2}{4mC^2} F ; \quad \vec{C} = \frac{1}{2} [\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0] \quad (3)$$

C là vận tốc diện tích : $C = av_0$

Thay (1) vào (3) ta được

$$F = \frac{1}{5} 32ma^4 v_o^2.$$

65. Trên hình 1.33 phương trình chuyển động của con lắc :

$$\vec{P} + \vec{T} = \frac{mv^2}{l} \vec{n} + m\vec{v}\vec{\tau} \quad (1)$$

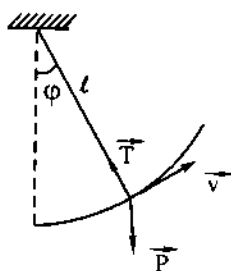
$$v = l \dot{\varphi}$$

Chiếu (1) lên phương $\vec{v}$, vì φ nhỏ có thể coi $\sin\varphi \approx \varphi$ nên :

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 ; k^2 = \frac{g}{l}$$

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán, nghiệm của (2) :

$$\varphi = \frac{1}{k} \dot{\varphi}_0 \sin kt$$



Hình 1.33

Chu kì của chuyển động $T = \frac{2\pi}{k}$.

66. Lực tác dụng lên hạt có dạng :

$$\vec{F} = \{\vec{v}, \vec{B}\}, \quad \vec{v}: \text{ vận tốc.}$$

Từ định luật biến thiên mômen xung lượng :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \{\vec{r}, \vec{F}\} = \frac{eg}{r^3} (r^2 \vec{v} - v r \vec{r}) = eg \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\text{Vậy } \vec{L} - eg \frac{\vec{r}}{r} = \vec{C}$$

$\vec{C}$ là vectơ hằng số, là đại lượng bảo toàn trong chuyển động của hạt.

Thay (1) vào (3) ta được

$$F = \frac{1}{r^5} 32ma^4 v_o^2.$$

65. Trên hình 1.33 phương trình chuyển động của con lắc :

$$\vec{P} + \vec{T} = \frac{mv^2}{l} \vec{n} + m\vec{v}\vec{\tau} \quad (1)$$

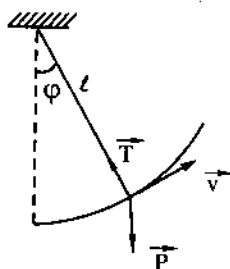
$$v = l \dot{\varphi}$$

Chiếu (1) lên phương $\vec{v}$, vì φ nhỏ có thể coi $\sin\varphi \approx \varphi$ nên :

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0 ; k^2 = \frac{g}{l}$$

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán, nghiệm của (2) :

$$\varphi = \frac{1}{k} \dot{\varphi}_0 \sin k.t$$



Hình 1.33

Chu kì của chuyển động $T = \frac{2\pi}{k}$.

66. Lực tác dụng lên hạt có dạng :

$$\vec{F} = [\vec{v}, \vec{B}], \quad \vec{v} : \text{vận tốc.}$$

Từ định luật biến thiên mômen xung lượng :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = \frac{eg}{r^3} (r^2 \vec{v} - v r \vec{r}) = eg \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\text{Vậy } \vec{L} - eg \frac{\vec{r}}{r} = \vec{C}$$

$\vec{C}$ là vectơ hằng số, là đại lượng bảo toàn trong chuyển động của hạt.

67. Lực tác dụng lên chất điểm có dạng :

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r} - k\vec{v} \quad (1)$$

Do đó :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = -\frac{k}{m} \vec{L} ; \vec{L} = \vec{L}_0 e^{-(k/m)t} \quad (2)$$

$\vec{L}$ là mômen xung lượng. Nhân vô hướng hai vế (2) với $\vec{r}$:

$$\vec{r} \cdot [\vec{r}, m\vec{v}] = \vec{L}_0 \cdot \vec{r} \cdot e^{-(k/m)t} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{L}_0 = 0 ; \vec{L}_0 = \vec{L} \quad (t=0).$$

$\vec{r}$ luôn vuông góc với vectơ $\vec{L}_0 = [\vec{r}_0, m\vec{v}_0]$, do vậy quỹ đạo của chất điểm nằm trong mặt phẳng cố định đi qua tâm lực (1).

68. Phương trình chuyển động của chất điểm :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{W}, P \sin(\varphi - 90^\circ) + N = \frac{mv^2}{a} ; \quad (1)$$

Vì chuyển động không có ma sát, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng

$$Ph = \frac{mv_B^2}{2} = \frac{m}{2} v_M^2 + mga(1 + \cos \varphi) \quad (2)$$

Thay v_M^2 từ (2) vào (1) ; v_M là vận tốc của chất điểm tại điểm M

$$N = P \left(\frac{1}{a} 2h - 2 - 3 \cos \varphi \right) \quad (3)$$

Để cho xe có thể trượt hết cả đường tròn mà không tách khỏi nó, ở điểm cao nhất của đường tròn ($\varphi = 0, \cos \varphi = 1$), áp lực N lên đường tròn bằng không. Từ (3) ta tìm được $h = 2,5a$.

69. Ra khỏi điểm M (xem hình bài 68), xe chuyển động dưới tác dụng của trọng lực. Chọn gốc tọa độ ở M, trục x hướng theo phương ngang :

$$m \vec{W} = \vec{P}, \quad \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = mg \end{cases}$$

$$x = v_M \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_M \sin \alpha \cdot t$$

Khi xe tới N, $y_N = 0$, vậy

$$MN = x_N = \frac{1}{g} v_M^2 \sin 2\alpha.$$

Từ công thức (2) bài 68 ta tìm v_M rồi thay vào ta được

$$x_N = 2 \sin 2\alpha \cdot (h - R - R \cos \alpha)$$

Mặt khác $MN = 2a \sin \alpha$, cho nên

$$h = a \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} + 1 + \cos \alpha \right), \quad h_{\min} = h(\alpha = 45^\circ) = (\sqrt{2} + 1)a.$$

70. Trên hình 1.34 phương trình chuyển động của con lắc :

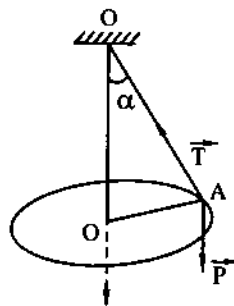
$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{W}$$

$$T \sin \alpha = \frac{mv^2}{a} = \frac{m}{a} \omega^2 a^2$$

$$T \cos \alpha - mg = 0 \quad (1)$$

ω là vận tốc góc, $\omega = \text{const} = \frac{v_o}{x_o}$.

Từ (1) ta có :



Hình 1.34

$$\left. \begin{aligned} v_o &= x_o \left(\frac{T}{mI} \right)^{1/2} \\ \frac{g}{z_o} &= \frac{T}{mI} \end{aligned} \right\} \rightarrow v_o = x_o \left(\frac{g}{z_o} \right)^{1/2} \quad (2)$$

(2) là điều kiện để con lắc chuyển động hết được đường tròn tâm O. Chu kì chuyển động của con lắc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{z_o}{g} \right)^{1/2}$$

71. Giả sử tại B, chất điểm cách đáy mặt cầu một đoạn bằng h.

Phương trình chuyển động :

$$\vec{R} + \vec{P} = m\vec{W} \quad (1)$$

$\vec{R}$ là phản lực. Chiếu (1) lên phương bán kính :

$$-R + P \cos \alpha = \frac{m}{a} v_B^2 \quad (2)$$

Theo định lí bảo toàn cơ năng :

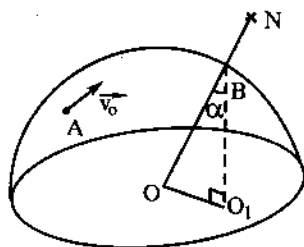
$$P \cdot h_o + \frac{1}{2} m v_A^2 = Ph + \frac{1}{2} m v_B^2 \quad (3)$$

Trong tam giác vuông OO_1B , (hình 1.35) ta có :

$$\cos \alpha = \frac{BO_1}{BO} = \frac{h}{a} \quad (4)$$

Thay (3) và (4) vào (2) ta có :

$$R = \frac{1}{a} (3Ph - 2Ph_o - m v_o^2), \text{ với } P = mg.$$



Hình 1.35

72. Trên hình 1.36, phương trình chuyển động của vật A :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{W} \quad (1)$$

$\vec{T}$ là sức căng sợi dây. Chiều (1) lên phương bán kính :

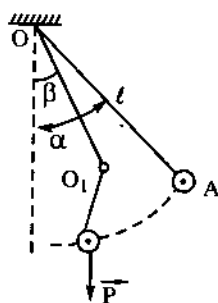
$$-P\cos\beta + T_1 = \frac{mv_1^2}{l} \quad (2)$$

$\vec{T}_1$ và $\vec{v}_1$ là sức căng sợi dây và vận tốc của vật A khi sợi dây bắt đầu gặp chiếc đinh ở O_1 . Kí hiệu $\vec{T}_2$ là sức căng sợi dây sau khi gặp đinh và cuốn vào nó

$$-P\cos\beta + T_2 = \frac{mv_1^2}{l-h} \quad (3)$$

Do đó :

$$\Delta T = T_2 - T_1 = m v_1^2 \frac{h}{l(l-h)} \quad (4)$$



Hình 1.36

Áp dụng định lí biến thiên động năng cho chuyển động của A từ đầu tới khi gặp đinh, ta tính được v_1 :

$$m v_1^2 = 2/P(\cos\beta - \cos\alpha) \quad (5)$$

Áp dụng định lí biến thiên động năng cho chuyển động từ khi gặp chiếc đinh tới điểm cao nhất, lúc vận tốc của A là v_2 .

$$\frac{1}{2}(mv_2^2 - mv_1^2) = -P[l-h + \cos\beta(l-h)] \quad (6)$$

Khi vật ở điểm cao nhất (3) có dạng

$$P - T_2 = \frac{mv_2^2}{l-h}$$

Ở điểm cao nhất, $T_2 = 0$ là điều kiện cần để vật A tiếp tục chuyển động quanh O_1 , tức là có thể cuốn vào chiếc đinh. Do đó ta có :

$$mv_2^2 = P(l - h) \quad (7)$$

Đặt (7) vào (6) ta tìm được mv_1^2 , sau đó đặt vào (5) ta có :

$$\cos\alpha = \frac{h}{l} \left(\frac{3}{2} + \cos\beta \right) - \frac{3}{2} \quad (8)$$

Đây là giá trị α nhỏ nhất (vì $T_2 = 0$) để OA có thể cuốn vào chiếc đinh. Đặt giá trị của mv_1^2 vào (4) ta tìm được :

$$\Delta T = 2P \frac{h}{l} \left(\frac{3}{2} + \cos\beta \right).$$

73. Phương trình chuyển động của chất điểm

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{W} \quad (1)$$

$\vec{T}$ là sức căng sợi dây. Giả sử tại B ở độ cao h so với O (hình 1.37), sức căng $T = 0$; chiếu (1) lên BO :

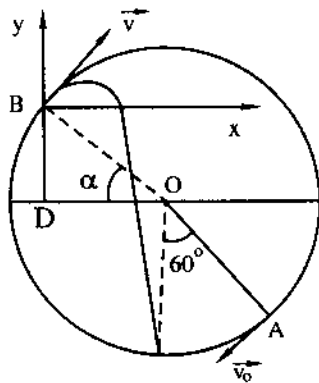
$$P \sin\alpha + T = \frac{mv_B^2}{l},$$

$$T = 0. \quad (2)$$

Nhưng $h = l \sin\alpha$, do vậy $h = v_B^2/g$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{mv_o^2}{2} + P \left(l - \frac{l}{2} \right) = \frac{mv_B^2}{2} + P(l + h) \quad (3)$$



Hình 1.37

Từ (3) ta tính được v_B^2 . Thay v_B vào biểu thức của h ta được :

$$h = (1/3g)(v_0^2 - gl)$$

$$v_B^2 = (1/3)(v_0^2 - gl)$$

Ra khỏi B, chất điểm chuyển động dưới tác dụng của trọng lực, chọn B làm gốc tọa độ, từ (1) :

$$x = v_B \cdot \frac{h}{l} \cdot t \quad (4)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_B \cos \alpha \cdot t$$

Từ (4) :

$$y = -\frac{P^2}{2h^3} x^2 + \frac{1}{h}(l^2 - h^2)^{1/2} x \quad (5)$$

Điểm C là giao điểm giữa parabol (5) và đường tròn tâm O ; $y_C = -h - l$. Trên đoạn BC, sức căng dây $T = 0$. Ra khỏi C, $T \neq 0$. Thay $y = -(h + l)$ vào (4) ta tìm được thời gian chuyển động của chất điểm theo quỹ đạo (5) từ B đến C.

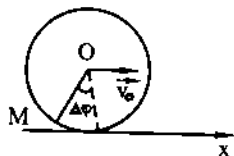
74. Giả sử bánh xe tâm O lăn theo chiều

Ox với $v_0 = \text{const}$, xem hình 1.38. Nếu ta gắn với bánh xe hệ quy chiếu K' gốc ở O, vận tốc tuyệt đối của điểm M :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \cdot \vec{R}] \quad (1)$$

$\vec{v}_O$ là vận tốc của điểm O.

Vì bánh xe lăn không trượt nên $v_0 \Delta t = R \Delta \varphi$, ngoài ra $\cos(\vec{v}_O, \vec{v}) = \cos(\Delta \varphi)$, do đó



Hình 1.38

$$v_M^2 = 2 v_O^2 \left(1 - \sin \frac{v_O}{R} t\right)$$

$$x_M = x_o + R \cos(\Delta\varphi) = v_o t + R \cos\left(\frac{v_o}{R} t\right)$$

$$y_M = R - R \sin\left(\frac{v_o}{R} t\right)$$

75. Trái Đất quay quanh trục của nó với vận tốc góc ω . Gắn với mặt đất hệ trục tọa độ di động K' ta có :

$$\overline{W}_t = \overline{W} - \overline{W}_c - \overline{W}_k, \quad \overline{g}' = \overline{g} - 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}] - [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$$

$\overline{W}_t$ là gia tốc tương đối so với hệ K' . $\overline{W}$ là gia tốc tuyệt đối so với hệ cố định K ; $\overline{W}_c$ là gia tốc côriôlit; $\overline{W}_k$ là gia tốc kéo theo, $\vec{r}$ là bán kính vectơ của điểm trong hệ K' . Gia tốc $\overline{W}_c$ chiếu lên phương $\vec{r}$ bằng không, vậy :

$$g' = g - \omega^2 r \cos\varphi,$$

(φ — vĩ độ nơi cần xác định gia tốc rơi tự do, g' , g là gia tốc rơi tự do trong các hệ K' và K).

$$g' = g \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g} \cos^2 \varphi\right)$$

Nếu thay $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$, $R = 6730 \text{ km}$; $\omega = 2\pi/3600.24$ ta có :

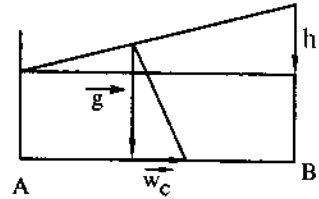
$$g' = g \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi\right).$$

76. Do Trái Đất quay quanh trục nên đã xuất hiện hai thành phần gia tốc côriôlit và li tâm

$$\overline{W}_c = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}];$$

$$\overline{W_k} = [\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})]$$

$\vec{r}$ hướng theo phương tiếp tuyến với kinh tuyến, $\overline{W_k}$ nằm trong mặt phẳng chứa $\vec{\omega}$ và $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ là vận tốc quay quanh trục Trái Đất. $\overline{W_k}$ không gây nên độ lệch mức nước hai bờ sông. $\overline{W_c}$ hướng theo vĩ tuyến từ Tây sang Đông



Hình 1.39

nếu $\vec{v}$ hướng từ Bắc đến Nam. $\overline{W_c}$ đã làm mức nước ở bờ Đông cao hơn bờ Tây trong các sông chảy Bắc – Nam. Từ hình 1.39 :

$$\frac{W_c}{h} = \frac{g}{AB} ; h = \frac{l}{g} \cdot 2\omega v \cdot l \cdot \cos \varphi ,$$

(φ – vĩ độ nơi quan sát ; $AB = l$: chiều rộng của sông; h – độ chênh lệch mức nước giữa hai bờ sông, v – vận tốc dòng sông).

77. Chọn gốc hệ tọa độ di động K' và hệ cố định K trùng với tâm đĩa tròn ta có vận tốc tuyệt đối của điểm M bằng :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_t + \vec{v}_{kt} = \vec{v}_t + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] , \quad \vec{r} = \overline{OM}$$

$\vec{v}_t$ là vận tốc tương đối của M , $\omega = \varepsilon \cdot t$

Từ đây :

$$v_M = v_t + \varepsilon t \cdot l$$

l là khoảng cách từ tâm đĩa tới dây cung. Mặt khác

$$\overline{W} = \overline{W}_t + \overline{W}_c + \overline{W}_{kt} = \overline{W}_c + \overline{W}_{kt} + [\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}]$$

$$\overline{W}_c = 2[\vec{\varepsilon} \cdot t \cdot \vec{v}_t] ; \quad \overline{W}_{kt} = [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$$

cho nên :

$$W^2 = 4 v_t^2 \cdot \varepsilon^2 \cdot t^2 + \varepsilon^2 l^2 + (\varepsilon t)^4 l^2 + 4(\varepsilon t)^3 \cdot v_t l$$

78. Gia tốc và vận tốc tuyệt đối của M :

$$\vec{v}_M = \vec{v}_t + [\vec{\omega} \cdot \vec{OM}],$$

$$\vec{W}_M = \vec{W}_t + \vec{W}_c + \vec{W}_k \quad (1)$$

ở đây $\vec{v}_t$ và $\vec{W}_t$ là vận tốc và gia tốc tương đối của M.

$$W_t^2 = \dot{v}_t^2 + \frac{v_t^4}{\rho^2};$$

ρ là bán kính độ cong. Từ hình 1.40 ;

$$\vec{W}_c = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_t],$$

$$W_c^2 = 4\omega^2 v_t^2;$$

$$\vec{W}_k = [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{OM}]]$$

$$W_k^2 = \omega^4 \cdot OM^2,$$

($\vec{W}_k$ hướng theo $\vec{OM}$).

$$\vec{W}_t \cdot \vec{W}_c = \vec{W}_c \cdot \vec{W}_m = 2\omega \cdot v_t \frac{v_t^2}{\rho}$$

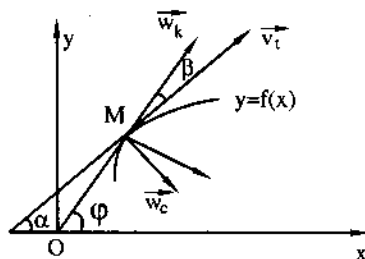
$$\vec{W}_t \cdot \vec{W}_k = \omega^2 \cdot OM \cdot \dot{v}_t \cdot \cos\beta - \omega^2 OM \frac{v_t^2}{\rho} \sin\beta$$

$$\vec{W}_k \cdot \vec{W}_c = -2\omega \cdot v_t \cdot \omega^2 \cdot OM \cdot \sin\beta;$$

$$\vec{v}_t [\vec{\omega} \cdot \vec{OM}] = v_t \cdot \omega \cdot OM \sin\beta;$$

$$\rho = \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^{-1} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad (\alpha \text{ là góc giữa tiếp}$$

tuyến với đường cong và trục Ox);



Hình 1.40

$\beta = \varphi - \alpha = \omega t - \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right)$, thay các đại lượng trên vào (1) ta

được v_M^2 và W_M^2 .

79. Nếu kí hiệu O là tâm đường tròn ; φ là góc quay của M quanh O, tọa độ của điểm M trong hệ cố định K có dạng :

$$\begin{aligned}x_M &= x_o + \int v_t \cdot \sin \varphi \, dt \\y_M &= y_o + \int v_t \cdot \cos \varphi \, dt\end{aligned}\quad (1)$$

Lấy đạo hàm (1) hai lần theo thời gian :

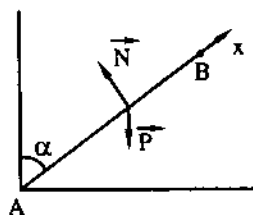
$$W_M^2 = W_o^2 + \dot{v}_t^2 + v_t^2 \dot{\varphi} + 2W_o(\dot{v}_t \sin \varphi + v_o \dot{\varphi} \cos \varphi)$$

$$\varphi = \int \frac{v_t}{R} \, dt$$

W_o , v_o là gia tốc và vận tốc điểm

O.

80. Xem hòn bi như một điểm, các lực tác dụng lên hòn bi là $\vec{P}$ và $\vec{N}$ (phản lực của AB). Chọn A làm gốc hệ tọa độ cố định K và hệ di động K'. Trục x hướng theo AB (hình 1.41).



Hình 1.41

Phương trình chuyển động của hòn

bi

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{W} = m(\vec{W}_c + \vec{W}_k + \vec{W}_t) \quad (1)$$

$\vec{W}_c$, $\vec{W}_k$, $\vec{W}_t$ là các gia tốc côriôlit, kéo theo và tương đối,

$$\vec{W}_c = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_t], \quad \vec{W}_k = [\vec{\omega} \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]]$$

Chiếu (1) lên AB ta được :

$$\ddot{x} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x + g \cdot \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Nghiệm của (2) :

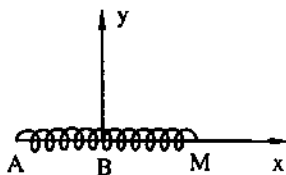
$$x = A \cdot e^{kt} + B \cdot e^{-kt} + g \cos \alpha / k^2, \quad k^2 = \omega^2 \sin^2 \alpha.$$

Từ điều kiện ban đầu của bài toán ta tìm A và B, cuối cùng

$$x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \left(e^{-\omega t \sin \alpha} + e^{\omega t \sin \alpha} \right) + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

81. Trên hình 1.42, chọn gốc tọa độ ở B cách A một khoảng $AB = l$, $MB = a$. Khi $t = 0$, $v(0) = 0$, $x(0) = a$.

Phương trình chuyển động của hòn bi :



Hình 1.42

$$\begin{aligned} m \overline{W}_t &= \overline{F} + \overline{F}_c + \overline{F}_k = \\ &= \overline{P} + \overline{N} + C \cdot \overline{x} - 2[\overline{\omega} \cdot \overline{v}_t] - m[\overline{\omega} \cdot (\overline{\omega} \cdot \overline{x})] + m \overline{W}_o \end{aligned} \quad (1)$$

$W_t = \ddot{x}$ là gia tốc tương đối, $\overline{W}_o$ là gia tốc của điểm O ; $v_t = \dot{x}$, $\overline{N}$ là phản lực của AB lên hòn bi. Chiếu (1) lên phương AB ta được :

$$\ddot{x} + \left(\frac{C}{m} - \omega^2 \right) x - l\omega^2 = 0 \quad (2)$$

Nếu $\frac{C}{m} > \omega^2$ nghiệm của (2) có dạng :

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{l\omega^2}{k^2}, \quad k^2 = \frac{C}{m} - \omega^2 \quad (3)$$

$$\text{Nếu } \frac{C}{m} < \omega^2 \quad x = A' e^{kt} + B' e^{-kt} + \frac{l\omega^2}{k^2} \quad (4)$$

$$\text{Nếu } \frac{C}{m} = \omega^2 \quad x = \frac{1}{2} l \omega^2 t^2 + a \quad (5)$$

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta tính được :

$$A = a - \frac{l\omega^2}{k^2} ; B = 0 ; A' = B' = \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{l\omega^2}{k^2} \right).$$

82. Chọn gốc hệ tọa độ ở điểm C, trục x hướng theo CD, tương tự như phương trình (2) bài 81 với $C = 0$, phương trình chuyển động của hòn bi có dạng :

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

Nghiệm của (1) :

$$x = \frac{x_0}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \quad (2)$$

Cho nên

$$\dot{x} = x_0 \frac{\omega}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

Nếu kí hiệu t_1 là thời điểm lúc hòn bi ở điểm D, ta có

$$\omega x(t_1) + \dot{x}(t_1) = x_0 \omega \cdot e^{\omega t_1} \quad (3)$$

Tính $\exp(\omega t_1)$ với $x(t_1) = L$ từ (2), sau đó ta thay kết quả vào (3) ta thu được

$$\dot{x}(t_1) = v_D = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2} ; L = CD.$$

83. Đối với hai người quan sát đứng ở trong hai hệ K và K' chuyển động tịnh tiến đối với nhau, vận tốc của một điểm P có thể viết dưới dạng :

$$\vec{v}_{pk} = \vec{v}_{pk'} + \vec{v}_{kk'},$$

ở đây $\vec{v}_{pk}$ là vận tốc của điểm P so với hệ K ; $\vec{v}_{kk'}$ là vận tốc của hệ K' đối với hệ K. Nếu kí hiệu các chữ D, T, K, M tương ứng là đại dương, tàu sân bay, không khí, máy bay, ta sẽ có :

$$\vec{v}_{MT} = \vec{v}_{MK} + \vec{v}_{KT}; \vec{v}_{KD} = \vec{v}_{KT} + \vec{v}_{TD};$$

Do đó :

$$\vec{v}_{MK} = \vec{v}_{MT} - \vec{v}_{KT} = \vec{v}_{MT} - \vec{v}_{KD} + \vec{v}_{TD}$$

Hướng các trục x và y về hướng Đông và Bắc, ta có

$$(v_{MK})_x = v_1; (v_{MK})_y = -v_2, (v_{MK})_z = -v_3$$

Vậy giá trị vận tốc cần tìm :

$$v_{MK} = \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \right)^{1/2}.$$

84. Trong hệ quy chiếu có gốc ở điểm buộc con lắc phương trình chuyển động của con lắc có dạng

$$m \ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}, \quad (1)$$

($\vec{T}$ – sức căng sợi dây, $\vec{r}$ – bán kính vectơ). Chiếu (1) lên phương tiếp tuyến với đường tròn quỹ đạo của con lắc :

$$m l \ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi - m a \cos \varphi \quad (2)$$

Nếu đặt $k = (a^2 + g^2)^{1/2} \cos \varphi_0$; $\lambda = -(a^2 + g^2)^{1/2} \sin \varphi_0$, (2) sẽ có dạng

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l} (k^2 + \lambda^2)^{1/2} \sin(\varphi - \varphi_0) = 0$$

Nếu $\varphi - \varphi_0 \ll 1$; kí hiệu $\omega^2 = \frac{1}{l} (k^2 + \lambda^2)^{1/2}$,

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0.$$

85. Bán kính vectơ khối tâm của hệ $\vec{r}_c$ bằng

$$\vec{r}_c = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{r}_i \quad (1)$$

m_i và $\vec{r}_i$ là khối lượng và bán kính vectơ của chất điểm thứ i của hệ. Chọn gốc tọa độ ở tâm đối xứng của hệ, khi đó tổng (1) sẽ bằng không vì các vectơ $\vec{r}_i$ từng đôi một cùng phương, ngược chiều.

86. Giả sử O là tâm trụ và C là khối tâm của hệ gồm trụ và hòn bi. Hướng trục x theo phương ngang. Ta có :

$$x_c = \frac{Mx_o + mx_1}{M + m} \quad (1)$$

Ở đây x_o là tọa độ điểm O ; $x_1 = R\sin\varphi$ là tọa độ hòn bi ; φ là góc giữa OM và trục Oy . Từ (1)

$$\dot{x}_c = \frac{M}{M+m} \dot{x}_o + \frac{m}{M+m} \dot{x}_1 = K \quad (2)$$

Vì tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không nên $\ddot{x}_c = 0$, do đó $K = \text{const}$. Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta tìm được $K = mv_o (M + m)^{-1}$. Đặt K vào (2) lấy tích phân ta được :

$$x_o = \frac{m}{M} (v_o t - R\sin\varphi).$$

87. Tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ các lăng trụ bằng không; chọn gốc tọa độ ở khối tâm C của hệ ta có :

$$\vec{r}_c = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B}{m_A + m_B} = 0 \quad (1)$$

Chiếu (1) lên phương ngang x ta được $m_A x_A - m_B x_B = 0$; mặt khác, khi B trượt trên A cho tới mặt phẳng ngang thì lăng trụ A di chuyển được một đoạn là x_A , vậy : $a - b = x_A + x_B$.

Từ đó ta có :

$$x_A = \frac{a - b}{n + 1}.$$

88. Tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ : con lắc và vật A bằng không nên nếu chọn gốc tọa độ ở khối tâm của hệ, ta có

$$M \cdot x_A + m \cdot x = 0; \quad x = x_A + l \sin \varphi$$

x là toạ độ của con lắc trên mặt phẳng ngang. Do đó :

$$x_A = -\frac{m}{M + m} l \sin \varphi = -\frac{m}{M + m} l \sin[\varphi_0 \cos \omega t].$$

89. Tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không, do vậy xung lượng của hệ bảo toàn. Chọn gốc tọa độ ở khối tâm của hệ :

$$M\vec{V} + m(\vec{u} + \vec{V}) = (M + m)\vec{v}_0$$

$\vec{v}_0 + \vec{V}$ bằng vận tốc của thuyền khi người đi với vận tốc tương đối $\vec{u}$ so với thuyền. Trên phương ngang :

$$V = \frac{mu - (M + m)v_0}{m + M} = \frac{ds}{dt}$$

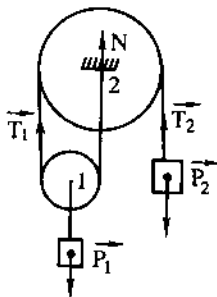
Do đó độ dịch chuyển thêm của thuyền sau khoảng thời gian t bằng :

$$s = \frac{1}{M + m} (mu - Mv_0 - mv_0) \cdot t.$$

90. Từ hình 1.43, phương trình chuyển động của các vật :

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 \vec{W},$$

$$\vec{T}_1 + \vec{P}_1 + \vec{N} = m_1 \frac{\vec{W}}{2}$$



Hình 1.43

$\vec{N}$ là phản lực của trục ròng rọc 2.

Chiếu lên phương của $\vec{W}$ ta được

$$-T_2 + P_2 = m_2 W$$

$$-N - P_1 + T_1 = m_1 \frac{W}{2}$$

Vì $T_1 = T_2$ nên :

$$N = P_1 + P_2 - W(m_2 - \frac{1}{2} m_1).$$

91. Tổng các ngoại lực tác dụng lên hệ bằng không, áp dụng định luật bảo toàn xung lượng :

$$m\dot{\vec{r}} + m_1(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}) + m_2(\dot{\vec{r}}_2 + \dot{\vec{r}}) = 0 \quad (1)$$

Chiếu (1) lên phương ngang x và chú ý rằng vật A và nêm chuyển động ngược chiều nhau :

$$m\dot{x} + m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}) + m_2(\dot{x} - \dot{x}_2) = 0$$

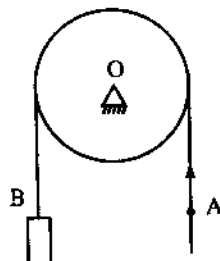
$x_1 = l \cos \alpha$; $x_2 = h = l \sin \alpha$, l là độ dịch chuyển của A trên mặt nêm,

$$x = h(m_1 \tan \alpha + m_2)(m_1 + m_2 + m)^{-1}.$$

92. Lấy hai điểm bất kì và tính mômen xung lượng hoặc mômen lực đối với từng điểm, sau đó tìm hiệu của các mômen tương ứng với từng điểm.

93. Trên hình 1.44, chọn gốc toạ độ ở tâm ròng rọc, áp dụng định lí biến thiên mômen xung lượng cho hệ người và vật :

$$\frac{d}{dt} \{ [\vec{r}_A \cdot m(\vec{v}_A + \vec{a})] + [\vec{r}_B \cdot m \cdot \vec{v}_B] \}$$



Hình 1.44

$$= [\vec{r}_A \cdot \vec{P}] + [\vec{r}_B \cdot \vec{P}] = 0 \quad (1)$$

$P = mg$; m là khối lượng của người.

Từ (1) :

$$[\vec{r}_A \cdot m(\vec{v}_A + \vec{a})] + [\vec{r}_B \cdot m \cdot \vec{v}_B] = 0 \quad (2)$$

Chiếu (2) lên phương thẳng đứng :

$$r \cdot m(v_A - a) - r \cdot m(-v_B) = 0 \quad (3)$$

Nhưng $v_A = v_B$ nên từ (3) : $v_B = \frac{a}{2}$.

94. Áp dụng định lí biến thiên động năng, xem hình 1.45

$T - T_0 =$ Tổng công các ngoại lực,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = (P + P_1)S_1 - S_1 \cdot P_2 \cdot f \\ 0 - \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_1^2 = PS_2 - P_2S_2 \cdot f \end{cases} \quad (1)$$

Giải hệ phương trình (1) ta thu được :

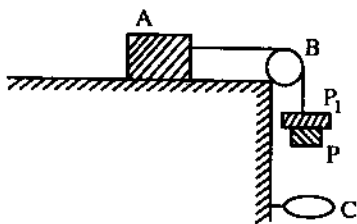
$$f = \frac{S_1(P_1 + P)(P_2 + P) + S_2P(P_1 + P + P_2)}{P_2[S_1(P_1 + P_2) + S_2(P_1 + P + P_2)]}$$

95. Phản lực của rãnh CD lên trọng vật P_1 không sinh công vì nó vuông góc với CD. Áp dụng định lí biến thiên động năng cho hệ :

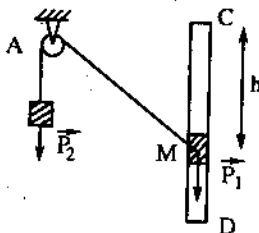
$T_1 + T - T_0 =$ Tổng công các ngoại lực

$$\frac{1}{2}(P_1/g)v_1^2 + (P_2/2g)v^2 = P_1 \cdot h - P_2(l - a) ; l^2 = a^2 + h^2 \quad (1)$$

Sau khoảng thời gian cực nhỏ dt , trọng vật P_1 di chuyển một đoạn dh theo CD, còn trọng vật P_2 di chuyển một đoạn dl theo phương thẳng đứng.



Hình 1.45



Hình 1.46

Từ hình 1.46 ta có $dl = dh \cdot \cos \alpha$, α là góc giữa MA và MC. Mặt khác $dh = v_1 dt$; $dl = v dt$; $v_1 = v / \cos \alpha$; $v(AM/h) = v(l/h)$. Do đó :

$$v^2 = 2g(a^2 + h^2) \frac{P_1 h - P_2 \left(\sqrt{a^2 + h^2} - a \right)}{P_2 h^2 + P_1 (a^2 + h^2)}$$

96. Trả lời :

a) P_x, P_y, L_z ;

b) P_y ;

c) P_z và L_z , z là trục của trục;

d) L_z , trục z hướng theo trục nối hai hạt.

97. Kí hiệu $\vec{r}_1$ và $\vec{r}_2$ là các bán kính vectơ của các hạt, $\vec{r}_c$ là bán kính vectơ khối tâm của hệ ; $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_c = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) M^{-1}$; $M = m_1 + m_2$; phương trình chuyển động :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = q_1 \vec{E} + q_1 q_2 (\vec{r} / r^3) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = q_2 \vec{E} - q_1 q_2 (\vec{r} / r^3) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_c - \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_c + \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases} \quad (2)$$

Lấy đạo hàm hai lần (2) và thay vào (1)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_c - \mu \ddot{\vec{r}} = q_1 \vec{E} + q_1 q_2 (\vec{r}/r^3) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_2 \ddot{\vec{r}}_c + \mu \ddot{\vec{r}} = q_2 \vec{E} - q_1 q_2 (\vec{r}/r^3) \end{cases} \quad (3)$$

với $\mu = m_1 m_2 / M$, thay $\vec{r}_c$ từ phương trình đầu vào phương trình thứ 2 trong (3) ta có :

$$\mu \ddot{\vec{r}} + q_1 q_2 (\vec{r}/r^3) = (q_2 m_1 - q_1 m_2) \frac{\vec{E}}{M} \quad (4)$$

(4) là phương trình chuyển động tương đối của hạt : Khi $q_2 m_1 = q_1 m_2$ thì điện trường không có ảnh hưởng gì tới chuyển động tương đối. Thay (4) vào phương trình đầu của (3) ta được :

$$\ddot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m_1} (\mu \ddot{\vec{r}} + q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{r^3} + q_1 \vec{E}) = (q_1 + q_2) \frac{\vec{E}}{M} \quad (5)$$

Do vậy :

$$\dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{2} \bar{k} . t^2 + \ddot{\vec{r}}_{c0} t + \dot{\vec{r}}_{c0}, \quad \bar{k} = q_1 q_2 \frac{\vec{E}}{M}$$

Thay (4) và (5) vào (3) ta được các phương trình vi phân mô tả chuyển động của các hạt.

98. Kí hiệu $\vec{r}_{1c}$ và $\vec{r}_{2c}$ là bán kính vectơ các chất điểm trong hệ quy chiếu khối tâm ; $\vec{R}$ là bán kính vectơ khối tâm, $\vec{r}_1$ và $\vec{r}_2$ là bán kính vectơ của các hạt trong hệ quán tính S.

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_{1c}, \quad \vec{r} = \vec{r}_{2c} - \vec{r}_{1c} \quad (1)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}_{2c}, \quad \vec{r}_{1c} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad \vec{r}_{2c} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2)$$

Do đó phương trình chuyển động của các chất điểm có dạng

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{n}; \vec{n} // \vec{r} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \vec{n} \end{cases} \quad (3)$$

Tức là nếu biết $\vec{r}$, ta tìm được $\vec{r}_1$ và $\vec{r}_2$; $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ bài toán chuyển về dạng : chất điểm khối lượng μ chuyển động trong trường lực $U(r)$. Chọn gốc tọa độ cực tại tâm lực, nghiệm của (3), xem bài 51, 53, có dạng :

$$r = P(e \cos \varphi - 1)^{-1} \quad (4)$$

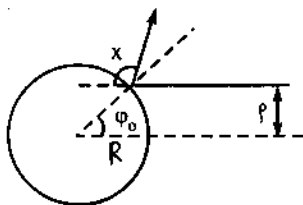
với $P = L^2 / \mu \alpha$; $e = [1 + 2EL^2 / \alpha^2 \mu]^{1/2}$, ở đây E là cơ năng của hạt có khối lượng μ , mômen xung lượng L với

$$E = (\mu/2)r^2 + \alpha/r + L^2/2\mu r^2; \quad L = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

Nếu $E = 0$, (4) là phương trình đường parabol ; nếu $E \neq 0$ (4) sẽ là đường hyperbol, $r_{\min} = P(e - 1)$.

Nếu chọn hệ quy chiếu S' sao cho với S' , $\vec{R} = 0$ thì S' vẫn là hệ quy chiếu quán tính tương đương hệ S vì khối tâm đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều (hệ hai hạt là hệ kín).

99. Trong trường hợp tổng quát, quỹ đạo là đường cong đối xứng (trục đối xứng hợp với phương đầu của chuyển động góc φ_0). Trường hợp quả cầu, quỹ đạo là hai nửa đường thẳng cắt nhau trên mặt cầu và nhận bán kính kể từ tâm cầu tới điểm cắt này làm trục đối xứng. Từ hình 1.47 :



Hình 1.47

$$\rho = R \sin \varphi_0 = R \sin \frac{\pi - x}{2}$$

Tiết diện tán xạ hiệu dụng :

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho(\beta) \left| \frac{d\rho}{d\beta} \right| d\beta \quad (1)$$

β là góc giữa các phương trước và sau khi tán xạ của các hạt trong hệ quy chiếu khối tâm,

$$\beta = \pi - 2\varphi_0 \quad (2)$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho(1/r^2)dr}{[1 - (\rho^2/r^2) - 2U/mv_{\infty}^2]^{1/2}} \quad (3)$$

$U(r)$ là thế năng tương tác, ρ là khoảng cách va chạm, $r_{\min}$ là nghiệm của phương trình $U_{\text{ef}} - E = 0$, $U_{\text{ef}} = U + \frac{L_o^2}{2mr^2}$, L_o là mômen xung lượng.

Thay $\rho = R \sin \varphi_0$ vào (1) ta được :

$$d\sigma = \frac{\pi R^2}{2} \sin x dx ; \sigma = \pi R^2.$$

100. Trong hệ toạ độ cực, cơ năng E :

$$E = U(r) + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

L là mômen xung lượng. Số hạng $L^2/2mr^2$ là năng lượng li tâm, nó là nguyên nhân cản trở các hạt chuyển động tới tâm trường lực $U(r)$, ngay cả trong trường hợp trường lực hút. Sự "rơi vào tâm" chỉ có thể xảy ra nếu thế năng tiến tới không đủ nhanh khi $r \rightarrow 0$. Từ bất đẳng thức :

$$\frac{mr^2}{2} = E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2} > 0$$

hay
$$r^2 U(r) + \frac{L^2}{2m} < Er^2$$

Suy ra rằng
$$r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} < \frac{-L^2}{2m}$$

Tức là $U(r)$ cần phải tiến tới " $-\infty$ " như là $-\frac{\alpha}{r^2}$, $\alpha > 0$, với

$\alpha > \frac{L^2}{2m}$, hoặc như là $(-1/r^n)$ với $n > 2$.

Do đó khi $n = 2$ ta cần có :

$$2\alpha > \frac{L^2}{m} = mp^2 v_\infty^2 \quad (1)$$

Các hạt chuyển động thỏa mãn điều kiện (1) sẽ rơi vào tâm.

Do đó :
$$\sigma = \int \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot d(\rho^2) = \pi \rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}$$

Khi $n > 2$, thế năng hiệu dụng bằng :

$$U_{ef} = \frac{mp^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n} \quad (2)$$

$$U_{ef\max} = U_0 = \alpha \frac{n-2}{2} \left(\frac{mp^2 v_\infty^2}{\alpha n} \right)^{n/(n-2)}$$

Những hạt chuyển động thỏa mãn điều kiện $U_0 < E$ sẽ rơi vào

tâm. Xác định $\rho_{\max}$ từ điều kiện $U_0 = E = \frac{mv_\infty^2}{2}$, ta có

$$\sigma = \pi \rho_{\max}^2 = \pi n(n-2)^{(2-n)/n} \left(\frac{\alpha}{m v_{\infty}^2} \right)^{2/n}$$

101. Chùm hạt khối lượng m_1 chỉ đến được tới mặt cầu khi $r_{\min} < R$; giá trị ρ lớn nhất được xác định từ điều kiện $r_{\min} = R$, tức là cần giải phương trình

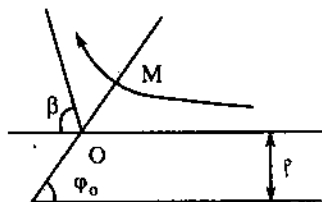
$$U_{\text{ef}} = E \text{ với } E = \frac{m_1}{2} v_{\infty}^2 \text{ (vì } m_2 \gg m_1 \text{):}$$

$$\frac{m_1 v_{\infty}^2}{2} = \frac{m_1^2 v_{\infty}^2 \rho_{\max}}{2 R^2 m_1} = -\frac{\alpha}{R}$$

$$\sigma = \pi \rho_{\max}^2 = \pi R^2 \left(1 + \frac{2 \gamma m_2}{R v_{\infty}^2} \right)$$

Ta thay $\alpha = \gamma m_1 m_2$, γ là hằng số hấp dẫn. Khi $v_{\infty} \rightarrow 0$;
 $\sigma \rightarrow \pi R^2$.

102. Trên hình 1.48, xét chuyển động trong hệ quy chiếu khối tâm; giả sử tâm của trường lực là O; OM là trục đối xứng của quỹ đạo (xem bài 98); góc tán xạ $\beta = \pi - 2\varphi_0$ với φ_0 xác định trong (1) bài 99:



Hình 1.48

$$\beta = \pi - 2\varphi_0;$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} r^{-1} [r^2 - \rho^2 (\alpha/E)]^{-1/2} dr$$

$$\beta = \pi - \pi \rho (\rho^2 + \alpha/E)^{-1/2}$$

Tiết diện tán xạ hiệu dụng :

$$d\sigma = 2\pi p dp = \frac{-2\alpha\pi^3(\pi-\beta)}{E(2\pi\beta-\beta^2)^2} d\beta \quad 0 < \alpha < \pi.$$

103. Sau khi va chạm, vận tốc các electron

$$v_1 = \frac{2v_{20}m_2}{m} \sin \frac{\beta}{2}; \theta_1 = \frac{\pi-\beta}{2}$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{1}{m} v_{20} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \beta)^{1/2} \quad (2)$$

$$\theta_2 = \arctg(\sin \beta / [m_2/m_1 + \cos \beta]) \quad (3)$$

$v_{10} = 0$; v_{10} , v_{20} ; v_1 , v_2 là vận tốc các hạt lần lượt trước và sau va chạm ; β là góc lệch của vận tốc sau va chạm trong hệ quy chiếu khối tâm ; θ_1 , θ_2 là góc lệch trong hệ quy chiếu thực nghiệm.

Trong bài toán $v_{20} = v$; $m_1 = m_2$, $\tg \theta_2 = \cotg \theta_1$, θ_1 tính như φ_0 trong bài 99 với $r_{\min}$ là nghiệm của phương trình $\frac{\alpha}{r} + \frac{m\rho^2 v^2}{4r^2} - \frac{E}{2} = 0$

Sau khi lấy tích phân : $\tg \theta_1 = \alpha/E\rho$, do vậy :

$$v_1 = \frac{2\alpha \cdot v E \rho}{\alpha^2 + \rho^2 E^2} ; v_2 = v \cos \frac{\beta}{2} = v(\alpha^2 + \rho^2 E^2)^{-1/2}.$$

104. Giả sử hạt khối lượng m_2 đứng yên tại gốc toạ độ còn hạt khối lượng m_1 bay từ vô cùng tới theo đường thẳng song song với Ox và cách Ox một đoạn bằng ρ . Chuyển động tương đối của các hạt tương đương chuyển động của hạt có khối lượng $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ trong

$$\text{trường có tâm ở gốc tọa độ. Cơ năng } E = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r} = E_0 \\ = (m/2)v_\infty^2$$

Ở điểm $r = r_{\min}$ hạt thay đổi phương chuyển động

$$\frac{m}{2}(r_{\min}^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_\infty^2,$$

$$\frac{m}{2}r_{\min}^2\dot{\phi}^2 = \frac{m^2v_\infty^2\rho^2}{2mr_{\min}^2}, \text{ do đó}$$

$$r_{\min} = \frac{-\alpha}{mv_\infty^2} + \frac{1}{mv_\infty^2}(\alpha^2 + \rho^2m^2v_\infty^4)^{1/2}.$$

105. Tương tự bài 104, $r_{\min}$ được xác định từ phương trình

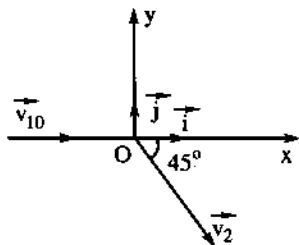
$$\frac{\alpha}{r_{\min}^n} = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2; \mu = \frac{m_1^2}{2m} = \frac{m}{2}$$

Vậy :

$$r_{\min} = \left(\frac{4\alpha}{mv_\infty^2} \right)^{1/n}.$$

106. Kí hiệu v_{10}, v_{20}, v_1, v_2 là vận tốc các hạt trước và sau va chạm ; $v'_{10}, v'_{20}, v'_1, v'_2$ - trong hệ khối tâm, v_c là vận tốc khối tâm C ; các véc tơ đơn vị : $\vec{i}, \vec{j}$. Từ hình 1.49 :

$$\vec{v}_{10} = v_{10}\vec{i},$$



Hình 1.49

$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_{10}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4} v_{10} \vec{i} ;$$

$$m_2 = 3m_1$$

Vậy :

$$\vec{v}'_{10} = \vec{v}_{10} - \vec{v}_c = \frac{3}{4} v_{10} \vec{i} \quad (1)$$

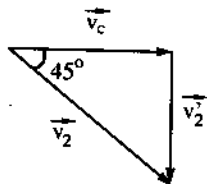
$$\vec{v}'_{20} = -\frac{1}{4} v_{10} \vec{i} ; (\text{vì } \vec{r}'_c = 0) \quad (2)$$

Theo định luật bảo toàn xung lượng các vectơ $\vec{v}'_{10}$ và $\vec{v}'_1$ có độ lớn như nhau nhưng khác phương, do đó :

$$v'_{10} = v'_1 ; v'_{20} = v'_2 \quad (3)$$

Theo cách chọn hệ trục toạ độ (hình 1.50)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_c ; \vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_c \quad (4)$$



Hình 1.50

góc $(\vec{v}_2, \vec{v}_c) = 45^\circ$ do đó $v_2 = v_c$; góc $(\vec{v}_2, \vec{v}'_2) = 45^\circ$, tức là $\vec{v}'_2$ vuông góc với Ox.

$$\vec{v}'_2 = -\frac{1}{4} v_{10} \vec{j} \quad (5)$$

$$\vec{v}'_1 = \frac{3}{4} v_{10} \vec{j} \quad (6)$$

Thay (6) vào (4) :

$$\vec{v}_1 = \frac{3}{4} v_{10} \vec{j} + \frac{1}{4} v_{10} \vec{i} = v_{1x} \vec{i} + v_{1y} \vec{j}$$

Vì vậy :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = 3.$$

107. Nếu O là gốc tọa độ, vận tốc điểm M bất kì là :

$$\vec{v}_M = [\vec{\omega}, \vec{OM}] ; \quad v_M = \frac{\omega h}{\cos \varphi}$$

φ là góc giữa OM và phương thẳng đứng. Để có thể quan sát được máy bay liên tục nhờ đèn chiếu, hình chiếu của vận tốc máy bay lên phương $\vec{v}_M$ phải bằng v_M

$$v \cos \varphi = v_M = \frac{\omega h}{\cos \varphi}$$

$$\text{Vậy } \omega = \frac{v \cos^2 \varphi}{h}.$$

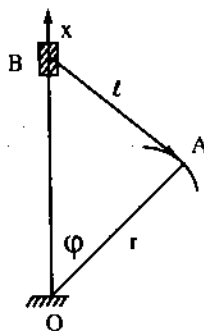
108. Từ hình 1.51

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + AB_x = \\ &= r \cos \varphi + (l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \end{aligned} \quad (1)$$

Khi $r \ll l$, khai triển số hạng thứ hai trong (1) theo lũy thừa của λ ($\lambda = r^2 \sin^2 \varphi / l^2 \ll 1$), ta được :

$$x_B = r \cos \varphi + l - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{2l}$$

$$\dot{x}_B = -r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - \frac{r^2 \dot{\varphi}}{2l} \sin 2\varphi.$$

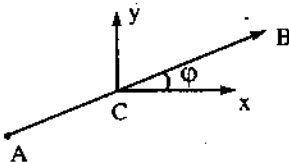


Hình 1.51

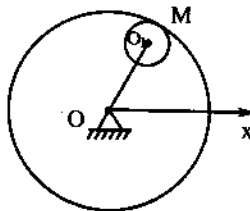
109. Chuyển động của AB là song phẳng, xem hình 1.52, chọn gốc hệ tọa độ di động ở điểm giữa C của AB, trục Cx' hướng theo CB, phương trình chuyển động của AB :

$$x_c = \text{hằng số} = 0$$

$$y_c = \int v_y dt = -\frac{gt^2}{2} + h$$



Hình 1.52



Hình 1.53

$$\varphi = \int \omega dt; v_E^2 = \frac{(l\dot{\varphi})^2}{64} + g^2 t^2 - \frac{gt}{2} l \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

110. Từ hình 1.53 phương trình chuyển động của bánh xe tâm O_1 ;

$$x_{01} = (R - r) \cos \omega t$$

$$y_{01} = (R - r) \sin \omega t$$

Vì bánh xe tâm O_1 lăn không trượt nên $r\varphi = R.\omega t$, vì vậy

$$\varphi = \frac{R}{n} \cos \omega t$$

φ là góc quay của bánh xe tâm O_1 quanh trục qua O_1 và vuông góc với mặt phẳng bánh xe.

111. Phương trình chuyển động song phẳng của OA và của bánh xe :

$$\begin{cases} x_o = x_o(t) \\ y_o = y_o(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_o = x_o(t) \\ y_o = y_o(t) \\ \psi = \psi(t) \end{cases}$$

Do đó chuyển động của hệ vật được xác định bởi : $x_o(t)$, $y_o(t)$, $\varphi(t)$ và $\Psi(t)$ là góc quay của các điểm bánh xe quanh O.

Từ hình 1.54

$$y_o = R, \quad dx_o = v dt$$

Vì bánh xe lăn không trượt cho nên

$$R d\psi = v dt; \quad \Psi = \int \frac{v}{R} dt = \frac{x_o}{y_o}.$$

112. Sau khoảng thời gian di động tiếp xúc giữa các bánh xe di động trên vành các bánh xe được các quãng đường như nhau, từ hình 1.55 ta có :

$$r\omega_1 dt = -2ar\omega_2 dt \quad (1)$$

r là khoảng cách từ điểm tiếp xúc giữa hai bánh xe tới tâm O_1 ở thời điểm t .

Phương trình quỹ đạo của elíp :

$$r = P(1 + e \cos \varphi)^{-1}$$

với $a = P(1 - e^2)^{-1};$

$$b = P(1 - e^2)^{-1/2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :

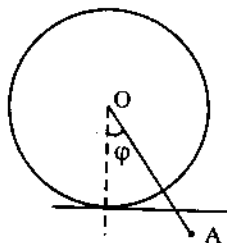
$$P = b^2/a; \quad \omega_2/\omega_1 = b^2(b^2 - 2a^2 - 2ae \cos \varphi)^{-1}.$$

113. Từ hình 1.56, vận tốc điểm O_1 :

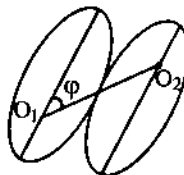
$$\vec{v}_{O_1} = \vec{v}_A + [\dot{\Psi} \cdot \overrightarrow{AO_1}]$$

$$\vec{v}_A = [\dot{\Phi} \cdot \overrightarrow{OA}]$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\dot{\Psi} \cdot \overrightarrow{AB}],$$



Hình 1.54



Hình 1.55

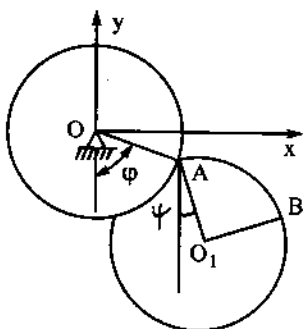
vậy :

$$v_B^2 = r^2[\dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}^2 + 2\sqrt{2}\dot{\phi}\dot{\psi}\cos(45^\circ - \phi + \psi)]$$

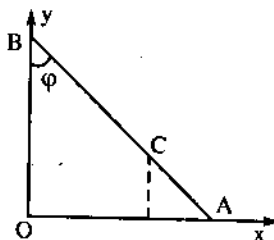
$$v_{O_1}^2 = r^2[\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} + \cos(\psi - \phi)].$$

Phương trình chuyển động của bánh xe tâm O_1 :

$$x_A = r\sin\phi; \quad y_A = r\cos\phi; \quad \Psi = \phi(t)$$



Hình 1.56



Hình 1.57

114. Từ hình 1.57 ta có :

$$\begin{aligned} x_C &= x_A - CA\sin\phi = \\ &= a\sin\omega t - l_1\sin\phi \end{aligned}$$

$$y_C = l_1\cos\phi$$

$$x_A = l\sin\phi;$$

$$\cos\phi \cdot \dot{\phi} = \frac{a\omega}{l}\cos\omega t$$

$$\text{Vì} \quad l^2 - x_A^2 = l^2\cos^2\phi$$

$$\sin\phi \cdot \dot{\phi} = \frac{a^2\omega\sin\omega t\cos\omega t}{l(l^2 - a^2\sin^2\omega t)^{1/2}}$$

Vậy :

$$v_C = \left(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 \right)^{1/2} = \frac{a\omega}{l} \cos \omega t \cdot \left[l_2^2 + \frac{l_1^2 a^2 \sin^2 \omega t}{l^2 - a^2 \sin^2 \omega t} \right]^{1/2}$$

$$l_2 = l - l_1.$$

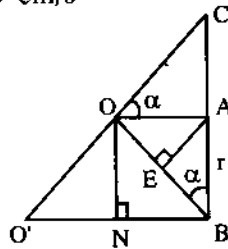
115. Vận tốc điểm M bất kì thuộc vật $\vec{v}_M = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ cho nên :

$$(\vec{v}_M)_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x = 0;$$

$$v_{Mx} = \omega_y z; v_{My} = -z\omega_x$$

$$v_M^2 = z^2(\omega_x^2 + \omega_y^2); v_M = 4\pi\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

116. Trên hình 1.58 : OB là đường sinh chung của hai hình nón, các đường kính đáy là O'B và CB. Vận tốc các điểm trên OB bằng không ; OB là trục quay tức thời của hình nón I. Vận tốc góc $\vec{\omega}$ hướng theo OB : góc OBA = COA = OBO' = 45°



Hình 1.58

$$\omega = v_A/EA = \sqrt{2} v_A/r$$

Gia tốc quay tức thời ε :

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \vec{\omega}_0) = \dot{\omega} \vec{\omega}_0 + \omega \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$$

$$\frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = [\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_0] : \vec{\omega} \text{ là vận tốc góc quay của vectơ } \vec{\omega},$$

$\omega_1 = v_A/OA$; $\vec{\omega}_1$ hướng theo $\overrightarrow{ON}$ – trục hình nón II.

$$|\varepsilon_1| = \frac{d\omega}{dt} = (\sqrt{2}/r) \dot{v}_A = 0 ; |\varepsilon_2| = \omega \omega_1 \sin \alpha = v_A^2/r^2,$$

véc tơ $\vec{e}_2$ hướng vuông góc với OB và ON, vì $\vec{v}_C = [\vec{\omega}, \vec{OC}]$:

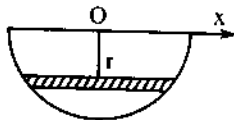
$$\vec{W}_C = [\vec{e}_2, \vec{OC}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}, \vec{OC}]]$$

vì $\vec{\omega}$ vuông góc với $\vec{OC}$ nên

$$W_C^2 = 10 v_A^4 / r^2.$$

117. a) Chọn phần tử có diện tích dS là hình chữ nhật cách Ox một đoạn bằng r , xem hình 1.59, độ dài $2\sqrt{R^2 - r^2}$. Khi đó mômen quán tính :

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{m}{S} \int r^2 dS = \\ &= \frac{m}{S} \int r^2 dr \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{mR^2}{4}. \end{aligned}$$



Hình 1.59

Gọi C là khối tâm của nửa đĩa tròn ; khi đó

$$\vec{r}_C = \vec{OC} = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{\rho}{m} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\varphi = \frac{R}{3}$$

($m_i = \rho \cdot r \cdot d\varphi dr$; ρ là khối lượng riêng).

Từ đó mômen quán tính J_C bằng :

$$\begin{aligned} J_C &= \sum m_i h_i^2 = \frac{m}{S} \int h^2 dS \\ dS &= dx \cdot dy ; \quad h^2 = x^2 + (y - R/3)^2. \\ J_C &= \frac{m}{3} \iint dx \cdot dy \cdot \left[x^2 + \left(y - \frac{R}{3} \right)^2 \right] \\ &= 2mR^2 \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{18} + \frac{4}{9\pi} \right). \end{aligned}$$

(Tích phân theo x lấy từ x_1 đến x_2 ; x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = R^2$; tích phân theo y lấy từ 0 đến R).

$$b) J_O = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$$

118. a) Coi phần tử có khối lượng dM_i là phần diện tích giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính là r và $r + dr$:

$$J_O = \frac{m}{\rho} \int_0^R r^2 dr = \frac{m}{2} R^2.$$

$$J_A = \frac{3}{2} m R^2.$$

b) Điểm giữa của AB là C

$$J_C = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dl = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_A = \frac{m l^2}{12} + \frac{m l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2$$

119. a) Đặt $x_1 = \frac{x}{a}$; $x_2 = \frac{y}{b}$. Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$$J_x = \frac{m}{S} \int y^2 . dS = \frac{m}{S} \int a b^3 . x_2^2 dx_1 dx_2 .$$

Nếu đặt $x_1 = r \cos \varphi$; $x_2 = r \sin \varphi$; φ biến đổi từ 0 đến 2π ; r biến đổi từ 0 đến 1. Khi đó

$$J_x = \frac{m b^2}{4} .$$

Tương tự :

$$J_y = \frac{ma^2}{4} ; J_z = \frac{m}{4}(a^2 + b^2)$$

b) Mômen quán tính đối với trục z của trụ :

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_x = J_y = \frac{m}{V} \int h^2 dV, \quad h^2 = z^2 + r^2$$

z là khoảng cách từ phần tử thể tích dV tới mặt phẳng Oxy ; r là khoảng cách từ "dV" tới trục hình trụ.

$$dV = dz.dr.2\sqrt{R^2 - r^2}$$

Vậy :

$$\begin{aligned} J_x = J_y &= \frac{m}{\pi R^2 l} \int_{-R}^R \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (z^2 + r^2) dz dr \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \\ &= \frac{mR^2}{4} + \frac{1}{12}ml^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Nếu x' là trục trùng với đường kính đáy của hình trụ, thì O'x' song song với trục Ox (O là tâm hình trụ) do đó biểu thức tính $J_{x'}$, như trong (1) nhưng tích phân theo dz lấy từ 0 đến l. Sau khi tính toán,:

$$J_{x'} = J_{y'} = \frac{mR^2}{4} + \frac{1}{3}ml^2$$

$$c) J_z = \frac{m}{V} \int h^2 dV$$

h là khoảng cách từ phần tử có thể tích dV tới trục z qua tâm

cầu. $V = (4/3)\pi R^3$. Trong hệ tọa độ cầu : $dV = dr.dS$;

$$dV = dr.r.\sin\theta d\varphi.r d\theta.$$

vậy :

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2.$$

120. Đối với trục z qua tâm và vuông góc với mặt đáy, mômen quán tính J tính như trường hợp 3) bài 119, tức là

$$J_z = \frac{2}{5} mR^2.$$

Đối với trục x trùng với đường kính đáy, mômen quán tính có biểu thức

$$J_x = \frac{m}{V} \int h^2 . r^2 dr . \sin\theta . d\theta . d\varphi$$

với θ thay đổi từ 0 đến π ; φ biến đổi từ 0 đến π ; r biến đổi từ 0 đến R.

$$J_x = \frac{2}{5} mR^2.$$

121. Nếu O là khối tâm của hệ ;

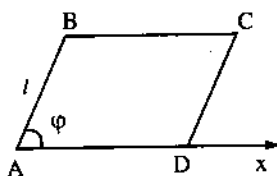
$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ là bán kính vectơ khối tâm của AB, BC, CD :

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Từ hình 1.60 nếu chiếu lên trục Ax :

$$x_1 = \frac{l}{2} \cos\varphi ; x_2 = l(1 + \cos\varphi) ;$$

$$x_3 = l(2 + \frac{1}{2} \cos\varphi)$$



Hình 1.60

$$y_1 = \frac{l}{2} \sin \varphi; \quad y_2 = l \sin \varphi;$$

$$y_3 = \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$\varphi = \omega t$$

Vậy :

$$x_o = l + \frac{3}{4} l \cos \omega t$$

$$y_o = \frac{3}{4} l \sin \varphi$$

Quỹ đạo của điểm O là đường tròn tâm ở điểm (l, O) , bán kính $\frac{3}{4}l$.

122. Từ hình 1.61 mômen xung lượng của hệ:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z}$$

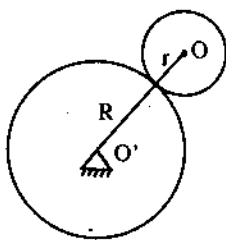
Trục z qua O' và vuông góc với mặt bánh xe:

$$L_{1z} = \omega J_z = \frac{1}{3} M(r + R)^2 \omega$$

$$\bar{L}_2 = \sum m_i [\bar{r}_i \cdot \bar{v}_i]$$

$$= \sum m_i [(\bar{r}_o + \bar{r}_i') \cdot (\bar{v}_o + \bar{v}_i')]$$

$\bar{r}_i'$, $\bar{v}_i'$ là bán kính vectơ và vận tốc điểm i đối với hệ toạ độ di động gốc ở O và gắn liền với bánh xe bán kính r.



Hình 1.61

Vì :

$$\sum m_i [\vec{r}_i \cdot \vec{v}_i] = \vec{L}' = J_o \vec{\omega}' ; \omega' = \frac{v_o}{r}$$

$$\sum m_i [\vec{r}_o \cdot \vec{v}_o] = M \cdot (R+r)^2 \vec{\omega} ;$$

$$\sum m_i [\vec{r}_o \cdot \vec{v}_i'] = [\vec{r}_o \cdot \sum m_i \vec{v}_i'] = 0 \text{ vì } \vec{r}_o' = 0$$

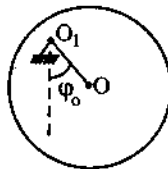
Do đó

$$L_{2z} = J_o \frac{v_o}{r} + m\omega(R+r)^2$$

$$L_z = m\omega(R+r)(R+1,5r) + \frac{M\omega}{3}(R+r)^2.$$

123. Phương trình của định luật biến thiên xung lượng và mômen xung lượng của đĩa :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{O_1O} \cdot m\vec{g}] \\ \frac{d\vec{P}}{dt} = [m\vec{g} + \vec{N}] \end{cases} \quad (1)$$



Hình 1.62

$\vec{L}$ – mômen xung lượng ;

$\vec{P}$ – xung lượng ;

$\vec{N}$ – phản lực của điểm O_1 lên đĩa ;

$\vec{g}$ – gia tốc trọng trường).

Chọn gốc tọa độ tại O_1 (hình 1.62) trục x hướng theo O_1O ; trục z vuông góc với đĩa. Chiều phương trình thứ hai trong (1) lên các trục x, y, phương trình đầu lên O_1z và chú ý rằng

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2 + mS^2 \text{ (bài 118) :}$$

$$\frac{d\vec{v}_O}{dt} = [\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{r}_O] + [\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}}_O]$$

ta có :

$$J_z \ddot{\varphi} + \frac{S m g}{J_z} \varphi = 0 \quad (2)$$

$$m \ddot{\varphi} S = - m g \sin \varphi + N_1, \quad (3)$$

$$m \omega^2 S = - m g \cos \varphi + N_2, \quad (4)$$

Khi $t = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ và $\dot{\varphi}(0) = 0$, do đó nghiệm của (2)

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt; \quad k = \frac{2gS}{r^2 + 2S^2}$$

Từ (3) và (4) :

$$N_y = m g \sin \varphi + m S \varphi_0 k^2 \cos kt.$$

$$N_x = m g \cos \varphi + m S \varphi_0^2 k^2 \sin^2 kt.$$

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2.$$

124. Vật quay quanh trục cố định z qua O, do đó phương trình chuyển động có dạng :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \text{Tổng mômen các ngoại lực} = M - k\omega$$

$$\text{Vây} \quad \frac{J d\omega}{M_z - k\omega} = dt; \quad e^{(-kt/J)} = \left(1 - \frac{k\omega}{M_z}\right)$$

$$\omega = \frac{M_z}{k} (1 - e^{-kt/J})$$

2) Tương tự như trên

$$\omega = \left(\frac{M_z}{k}\right)^{1/2} (e^{\lambda t} - 1)(e^{\lambda t} + 1)^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2}{J} \sqrt{M_z k}$$

Lấy tích phân $\varphi = \int \omega dt$ ta được góc dao động φ của vật.

125. Trục x hướng theo mặt phẳng nghiêng trục z vuông góc với mặt bánh xe (hình 1.63) ta có các phương trình :

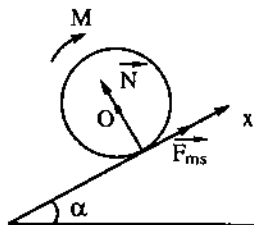
$$m \ddot{x}_C = F_m - P \sin \alpha - F$$

$$m \ddot{y}_C = -N + P \cos \alpha$$

$$J_C \ddot{\varphi} = M - F_m r,$$

(C – khối tâm ; F_m – lực ma sát ;

P – trọng lực).



Hình 1.63

$$y_C = r, \quad \ddot{y}_C = 0$$

$$\dot{x}_C = r\dot{\varphi}, \quad J_C = \frac{1}{2}mr^2. \text{ Do vậy}$$

$$N = P \cos \alpha$$

$$x_C = \frac{2}{3mr} [M - r(P \sin \alpha + F)] = k; \quad x_C = \frac{1}{2}kt^2$$

Điều kiện để bánh xe lăn không trượt là

$F_m \ll f.N = f P \cos \alpha$. Do đó ta cần có điều kiện để bánh xe lăn không trượt lên trên :

$$r(P \sin \alpha + F) < M < rfP \cos \alpha + \frac{1}{2}mr.k.$$

126. Hệ gồm : hình trụ và gầu nước, phương trình

$$J \frac{d\omega}{dt} = \text{tổng mômen các ngoại lực}$$

$$= [\vec{l} \cdot \vec{F}] + [\vec{R} \cdot \vec{T}]$$

Chiếu lên phương ngang (phương trục của trụ) bằng

$$J \ddot{\varphi} = Fl - R.T, \quad (1)$$

T là sức căng dây gầu, $\omega R = v$; v là vận tốc gầu nước.

Phương trình chuyển động của gầu nước:

$$m \dot{v} = T - Q \quad (2)$$

Q là trọng lượng nước trong gầu.

Từ (1) và (2) ta có

$$v = \frac{R.F.l - mgR^2}{J + mR^2} \quad (3)$$

Nếu vận tốc gầu nước là không đổi: $F = mgR/l$, tức là l càng lớn thì F càng nhỏ.

127. Áp dụng định lý biến thiên mômen xung lượng và phương trình chuyển động của khối tâm C chiếu lên các trục tọa độ (hình 1.64) ta được:

$$J_C \ddot{\varphi} = \frac{l}{2} (N_B \sin \varphi - N_A \cos \varphi)$$

$$m \ddot{x}_C = N_A \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_C = N_B - P$$

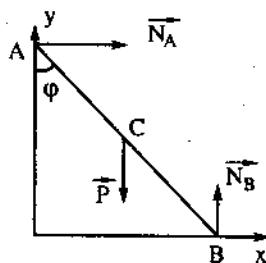
C là khối tâm của thanh AB (điểm giữa)

$$x_C = \frac{l}{2} \sin \varphi$$

$$y_C = \frac{l}{2} \cos \varphi \quad (2)$$

Lấy đạo hàm hai lần (2) theo thời gian sau đó thay vào (1) và giải hệ (1) ta thu được:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2l} \sin \varphi$$



Hình 1.64

$$N_A = \frac{ml}{2}(\cos\varphi.\ddot{\varphi} - \sin\varphi.\dot{\varphi}^2)$$

$$N_B = P - \frac{ml}{2}(\cos\varphi.\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi.\ddot{\varphi})$$

Áp dụng định lí biến thiên động năng, ta tìm được $\dot{\varphi}^2$

$$\begin{aligned}\text{Động năng} &= \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \bar{P}d\bar{S} \\ &= P.y \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \frac{Pl}{2}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)\end{aligned}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$$

Thay $\dot{\varphi}^2$ vào (3) ta tìm được N_A và N_B

$$N_A = \frac{3}{4}P\sin\varphi(2\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

$$N_B = \frac{1}{4}P(1 - 3\cos^2\varphi + 6\cos\varphi.\cos\varphi_0)$$

Đầu A của thanh AB tách rời khỏi Oy khi $N_A = 0$, tức là ứng với góc $\varphi_1 = \arccos(2\cos\varphi_0)$.

128. Giải tương tự như bài 126, hướng trục z theo phương trục của hình trụ ta có

$$J_z\dot{\omega} = TR - k\omega \quad (1)$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2; T \text{ là sức căng sợi dây.}$$

Phương trình chuyển động của vật A có dạng

$$P - T = m\ddot{\omega}R \quad (2)$$

Từ (1) và (2) :

$$\omega = \frac{PR}{k}(1 - e^{-kt/\alpha}) \quad (3)$$

$$\alpha = j + mR^2; P = mg$$

Từ (3) với $ds = vdt = \omega R \cdot dt$ ta có :

$$s = \frac{mgR^2}{k} \cdot t + mgR^2 \frac{\alpha}{k^2} (e^{-(k/\alpha)t} - 1).$$

129. Áp dụng định lí biến thiên mômen xung lượng, hướng trục z theo AB (hình 1.65) ta có :

$$\frac{dL_z}{dt} = (J + J_o)\dot{\omega} + r(m_1 + m_2)W$$

$$= L_z^e$$

= Tổng mômen các ngoại lực

$$L_z^e = r(P_1 - P_2) - r(m_1 + m_2) \cdot W + p/\sin\varphi$$

Do đó ta có :

$$J = 2(m_1 + m_2)r^2 - \frac{1}{2}mr^2 + \frac{lrpt}{2x} \sin\varphi + \frac{t^2 r^2}{2x} (P_1 - P_2) \quad (1)$$

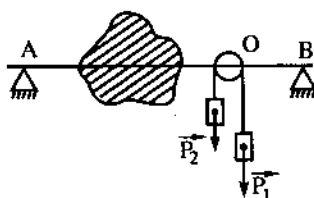
(Ta thay $W = \dot{\omega} r = \frac{2x}{t^2}$) ; x là quãng đường của các trọng vật đi

được sau khoảng thời gian t .

$$\dot{\varphi} = \int \frac{W}{r} dt ; \varphi = \frac{W}{2r} \cdot t^2 \quad (2)$$

Do các đại lượng t và x , ta tìm được φ rồi thay φ và x , t vào (1) ta tìm được J .

Nếu ở A và B có ma sát, biểu thức (1) sẽ được cộng thêm số hạng $-(r/W) \cdot M^e$; M^e là mômen cản sinh ra do ma sát, khi đó (1) trở thành



Hình 1.65

$$J = 2r^2(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}mr^2 + lrp\sin\phi.W^{-1} \\ + r^2(P_1 - P_2).W^{-1} - \frac{r}{W}M^c$$

$$W^{-1} = \frac{t^2}{2x} \text{ là gia tốc trọng vật}$$

Đo các quãng đường vật A đi được x_1 và x_2 sau các khoảng thời gian tương ứng là t_1 và t_2 , thay vào (3) rồi trừ cho nhau ta tìm được M^c :

$$M^c = [lp(-\sin\phi_2.W_2^{-1} + \sin\phi_1.W_1^{-1}) + \\ + r(P_1 - P_2).(W_1^{-1} - W_2^{-1})].(W_1^{-1} - W_2^{-1})^{-1}$$

$$W_i^{-1} = \frac{t^2}{2x_i}. \text{ Biết } M^c, \text{ thay vào (3) ta tính được } J.$$

130. Hướng trục z theo phương thẳng đứng qua tâm đĩa. Mômen xung lượng của hệ là đại lượng bảo toàn.

$$\vec{L} = [m_1\vec{r}_1.\vec{v}_1] + J\vec{\omega} \quad (1)$$

$\vec{v}_1 = [\vec{\omega}.\vec{r}_1] + \vec{v}$; $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của đĩa; $\vec{r}_1$ là bán kính vectơ của chất điểm M.

Trên phương trục z , (1) có dạng

$$L_z = m_1(vt)^2.\omega + mR^2\omega = mR^2.\frac{\omega_0}{2}$$

Do vậy :

$$\omega(t) = mR^2\omega_0(2m_1v^2t^2 + mR^2)^{-1}$$

Khi $v^2t^2 = R^2$, lúc M tới vành đĩa, $\omega(t_1) = m\omega_0/(2m_1 + m)$.

131. Trụ con chịu tác dụng của trọng lực P và phản lực N của mặt trụ lớn (hình 1.66). Áp dụng các định lí biến thiên động năng và chuyển động của khối tâm cho trụ nhỏ :

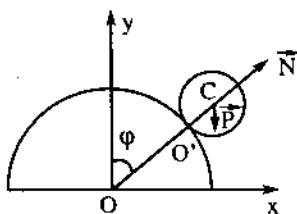
$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{P} + \vec{N} \quad (1)$$

$$T - T_0 = \text{Tổng công các ngoại lực} = \sum_i A_i^e \quad (2)$$

T là động năng của hệ. $T_0 = T(t=0)$, v_C là vận tốc khối tâm. Nếu lấy O' là tiếp điểm của hai trụ làm gốc hệ tọa độ di động :

$$T = \frac{1}{2} v_{O'}^2 + \frac{1}{2} J_{O'} \omega^2 \quad (3)$$

Vì trụ nhỏ lăn không trượt nên $v_{O'} = 0$, $v_C = \omega r$, ω là vận tốc góc quay của C quanh trục z qua O' . Mặt khác ta lại có :



Hình 1.66

$$v_C = \dot{\phi}(R+r), \text{ vậy}$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 + m R^2 \right) \frac{(R+r)^2 \dot{\phi}^2}{r^2} \quad (4)$$

Từ (2)

$$\sum_i A_i^e = \int_0^\phi \vec{P} \cdot d\vec{s} = P(R+r)(1 - \cos\phi) \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5): } \dot{\phi} = \frac{4P}{3m} (1 - \cos\phi)(R+r)^{-1}$$

$$\text{Vậy } v_C^2 = \frac{4g}{3} (R+r)(1 - \cos\phi)$$

Chiếu (1) lên phương $\overrightarrow{OC}$:

$$\frac{m v_C^2}{R+r} = -N + P \cos\phi$$

Vậy :

$$N = P \cos \varphi - m \dot{\varphi}^2 (R + r)$$

Khi $N = 0$, trụ con rời trụ lớn. Từ đẳng thức $N = 0$ ta có :

$$\cos \varphi = \frac{4}{7} ; \varphi = \arccos \frac{4}{7}$$

132. Áp dụng định lí chuyển động của khối tâm trụ :

$$\frac{m d\vec{v}_C}{dt} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} \quad (1)$$

$\vec{T}$ là sức căng dây, $\vec{N}$ là phản lực mặt nghiêng (hình 1.67).

$$\dot{\vec{v}}_C = \dot{\vec{v}}_C(0) + \vec{W} ;$$

$v_C(0)$ là vận tốc của C khi dây không chuyển động so với mặt nghiêng ;
 W là gia tốc của dây. Chiếu (1) lên phương mặt phẳng nghiêng :

$$m_1(\ddot{x}_{1C}(0) - W) = P_1 \sin \alpha - T$$

$$m_1(\ddot{x}_{2C}(0) + W) = P_2 \sin \beta - T \quad (2)$$

$P_1 = m_1 g$; $P_2 = m_2 g$. Áp dụng định lí biến thiên mômen xung lượng :

$$J_C \ddot{\varphi} = r.T$$

Vậy $r\ddot{\varphi} = \frac{2T}{m}$, mặt khác $\dot{v}_C(0) = r\ddot{\varphi}$ (vận tốc tiếp điểm bằng

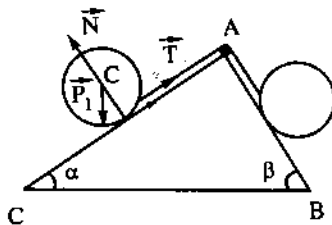
không), nên (2) trở thành

$$2T - m_1 W = m_1 g \sin \alpha - T$$

$$2T + m_2 W = m_2 g \sin \beta - T$$

với nghiệm bằng

$$W = (m_2 g \sin \beta - m_1 g \sin \alpha)(m_1 + m_2)^{-1} ;$$



Hình 1.67

$$T = \frac{m_1 m_2 g (\sin \alpha + \sin \beta)}{3(m_1 + m_2)}$$

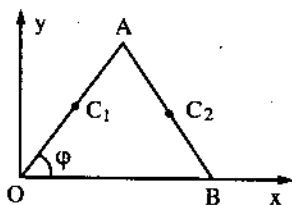
133. a) Vì $OA = AB$ nên vận tốc góc quay của chúng quanh C_1 và C_2 (các khối tâm), là như nhau (hình 1.68a). Động năng T_1 của OA bằng:

$$T_1 = \frac{ml^2}{8} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right); \quad \omega = \dot{\varphi}$$

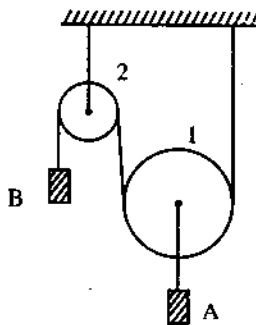
$$v_{C1} = \frac{l\dot{\varphi}}{2} \quad \text{toạ độ của } C_2 \text{ là } x_{C2} = \frac{3}{2} l \cos \varphi;$$

$$y_{C2} = \frac{l}{2} \sin \varphi, \text{ vậy động năng } T_2 \text{ của AB:}$$

$$T_2 = m l^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right); \quad T = T_1 + T_2$$



Hình 1.68a



Hình 1.68b

b) Động năng của hệ bằng $T = T_A + T_B + T_1 + T_2$ (hình 1.68b)

$$T_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2; \quad T_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2;$$

$$v_B = W.t; \quad v_A = \frac{1}{2} v_B$$

$$T_1 = \frac{1}{8} m_l v_B^2 + \frac{1}{16} m_l v_B^2$$

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 v_B^2$$

$$T = (W.t^2) \left(\frac{1}{2} m_B + \frac{1}{8} m_A + \frac{1}{4} m_2 + \frac{3}{16} m_1 \right).$$

134. Hướng trục x theo mặt phẳng ngang, phương trình chuyển động của C (khối tâm của AB) là :

$$\frac{m d\vec{v}_C}{dt} = \vec{P} + \vec{N} \quad (1)$$

$\vec{N}$ là phản lực của mặt ngang. $\vec{N}$ vuông góc với mặt phẳng ngang. Chiếu (1) lên các trục x và y :

$$m \ddot{y}_C = P - N$$

$$m \ddot{x}_C = 0$$

Từ hình 1.69

$$y_C = a \sin \varphi ;$$

$$\dot{y}_C = a \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Định lí biến thiên động năng có dạng :

$$T - T_0 = - \int_a^h P dy = P(a - h)$$

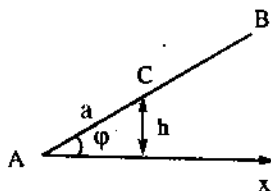
$$T = \frac{m}{2} v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m \cdot 4a^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_0 = 0$$

Từ hình 1.69 : $a^2 \cos^2 \varphi = a^2 - h^2$, do đó

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{6g(a - h)}{4a^2 - 3h^2}$$

Thay $\dot{\varphi}^2$ vào biểu thức của $v_C = \dot{y}_C$ ($\dot{x}_C = \dot{x}_0(0) = 0$), ta có :



Hình 1.69

$$v_C = (a - h) \left[\frac{6g(a + h)}{4a^2 - 3h^2} \right]^{1/2}$$

135. Định lí biến thiên động năng áp dụng cho cầu và trụ

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \int N d\vec{s} + \int P d\vec{s} = P s \sin\alpha \quad (1)$$

s là quãng đường đi của tâm cầu hay trụ, với hình cầu $J_C = (2/5)mr^2$; hình trụ $J_C = mr^2/2$. Do vậy từ (1):

$$\lambda_1 = \frac{s_1}{v_1^2}; \quad \lambda_2 = \frac{s_2}{v_2^2} \quad (2)$$

$$\lambda_1 = 0,75/g\sin\alpha; \quad \lambda_2 = 0,7/g\sin\alpha.$$

s_1, v_1 và s_2, v_2 là quãng đường và vận tốc của tâm trụ và cầu sau khoảng thời gian t. Vì $ds = v dt$ nên $1 - 2\lambda \dot{v} = 0$. Áp dụng cho (2) ta được:

$$\dot{v}_{C2} > \dot{v}_{C1}.$$

Tức là gia tốc tâm của cầu lớn hơn gia tốc tâm trụ, không phụ thuộc kích thước, khối lượng, hình cầu lăn nhanh hơn hình trụ.

136. Từ hình 1.70:

a) Các ngoại lực tác dụng lên hệ:

$\vec{P}_1, \vec{P}_2$ là trọng lượng của A và B;

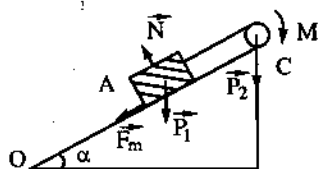
$\vec{N}$ là phản lực vuông góc với mặt
ngang;

$\vec{F}_m$ là lực ma sát;

M/r là lực quay tròn rọc.

Áp dụng định lí biến thiên động năng ta có:

$$\frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}m_1v_A^2 = M\varphi - P_1 r \varphi (\sin\alpha + f \cos\alpha) \quad (1)$$



Hình 1.70

vậy :

$$\omega = \frac{2}{r} \left[\frac{M\phi P_1 \phi r (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{2m_1 + m_2} \right]^{1/2}$$

b) Nếu mỗi đơn vị độ dài của sợi dây có khối lượng là m các biểu thức của công và động năng sẽ có dạng :

$$A^e = -F_m \cdot s - P_1 s \sin \alpha - mg(l_0 - s) s \sin \alpha + \frac{M}{r} s$$

$$T = \frac{1}{4} \omega^2 r^2 m_2 + sm + \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m(l_0 - s) r^2 \omega^2$$

Thay vào (1) ta có :

$$\omega^2 = \frac{4s}{r^3} [M - r/P_1(\sin \alpha + f \cos \alpha) - rm.g(l - s) \sin \alpha] \times \\ \times [2m_1 + m_2 + m(2l_0 - s)]^{-1}$$

$s = r\phi$ là quãng đường đi được của vật A sau khoảng thời gian t .

137. Chọn hệ trục tọa độ như trên hình 1.71 ; áp dụng định lí biến thiên động năng và chuyển động của khối tâm C (đối với trụ) :

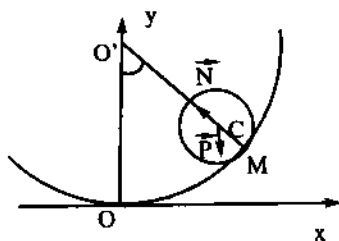
$$m \dot{\vec{v}}_C = \vec{P} + \vec{N} \quad (1)$$

$$T - T_0 = \sum A^e \quad (2)$$

$$T_0 = 0 ;$$

$$T = \frac{1}{2} m v_M^2 + \frac{1}{2} J_M \omega_M^2 \quad (3)$$

J_M là mômen quán tính của trụ đối với điểm M ; $v_M = 0$ (lăn không trượt) ; ω_M là vận tốc góc quay quanh trục qua M.



Hình 1.71

$$\sum A^e = \int \bar{P} d\bar{s} = Pl(\cos\varphi - \cos\varphi_0); l = R - r$$

$$v_C = \omega_M \cdot r = (R - r) \dot{\varphi} = l\dot{\omega}$$

Do đó từ (2) ta thu được

$$\omega^2 = \frac{4g}{3l} (\cos\varphi - \cos\varphi_0) \quad (4)$$

Chiếu (1) lên phương O'C ta có

$$\frac{mv_C^2}{l} = -P\cos\varphi + N \quad (5)$$

Thay (4) vào (5):

$$N = \frac{7}{3} P\cos\varphi - \frac{4}{3} P\cos\varphi_0$$

138. Từ hình 1.72. Áp dụng định lí biến thiên động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_C^2$$

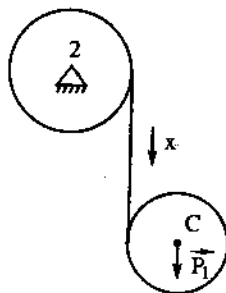
$$v_C = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2; A = P_1 \cdot x \quad (1)$$

Áp dụng định lí biến thiên mômen xung lượng:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = Qr_1 \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = Qr_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\omega_1 = k\omega_2$$

$$k = \frac{5}{4} \frac{m_2}{m_1} \frac{r_2}{r_1};$$



Hình 1.72

Q là sức căng sợi dây.

Thay $\omega_1 = k\omega_2$ vào phương trình $T = A$ ta tìm được

$$\omega_2 = \frac{2m_1}{r_2} [32m_2^2 + 16m_1^2 + 48m_1m_2]^{-1/2} \sqrt{8gx}$$

Vì $v_C = dx/dt$, cho nên $dx = (r_1\omega_1 + \omega_2 r_2)dt$, vậy

$$x = \frac{(m_1 + 1,25m_2)^2 g}{8m_2^2 + 4m_1^2 + 12m_1m_2} \cdot t^2$$

Từ (2) :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} m_2 r_2 \dot{\omega}_2 \\ &= gm_1 m_2 (2m_1 + \frac{5}{2} m_2) \cdot (8m_2^2 + 4m_1^2 + 12m_1m_2)^{-1} \end{aligned}$$

139. Từ hình 1.73. Áp dụng định lý biến thiên động năng :

$$T - T_o = A^e \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} v^2 (M + \frac{p}{g} x)$$

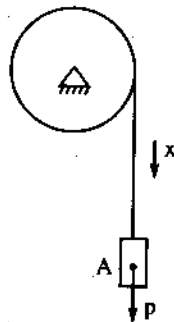
$$A^e = mg \cdot x + px(l_o + x)$$

x là quãng đường đi được của vật A.

Thay A^e và T vào (1) ta có :

$$v^2 = \frac{2R^2(M \cdot g \cdot x + l_o x p + p x^2)}{J + R^2 \left(M + \frac{p}{g} x \right)} ;$$

$$J = \frac{1}{2} m r^2.$$



Hình 1.73

140. Gọi T_1, T_2, T_3 lần lượt là sức căng các đoạn dây AB, BC và CD (hình 1.74).

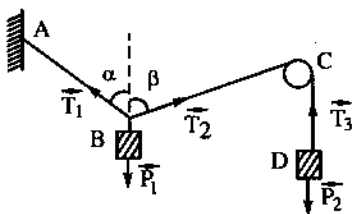
Khi các vật đứng yên :

$$\overline{T_1} + \overline{T_2} + \overline{P_1} = 0$$

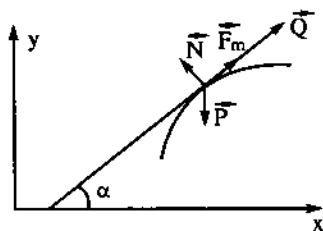
$$\vec{P}_2 + \vec{T}_3 = 0 \quad (1)$$

Chiếu (1) lên phương nằm ngang và thẳng đứng ta được $T_3 = P_2$;

$$T_1 = T_2 \sin \beta / \sin \alpha ; P_1 = T_2 (\cot \alpha \sin \beta + \cos \beta).$$



Hình 1.74



Hình 1.75

141. Từ hình 1.75 :

Khi chất điểm đứng yên :

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} + \vec{F}_m = 0$$

Chiếu lên trục x :

$-N \sin \alpha + Q \cos \alpha + F_m \cos \alpha = 0$, với $N = P \cos \alpha$ là phản lực của đường cong, $F_m = kN$ là lực ma sát (hướng theo tiếp tuyến với đường cong) ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Do đó :

$$Q = P \sin \alpha - k P \cos \alpha.$$

142. Khi AB đứng yên, ta có :

$$\begin{cases} \vec{N}_C + \vec{N}_B + \vec{P} + \vec{F}_m = 0 \\ \left[\frac{\vec{l}}{2} \cdot \vec{P} \right] + [\vec{BC} \cdot \vec{N}_C] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\vec{N}_B$ là phản lực vuông góc ở B ;

$\vec{F}_m$ là lực ma sát ; $\vec{N}_C$ phản lực ở C, vuông góc với AB. Chiều (1) lên các phương x và y (hình 1.76) ta có :

$$N_C \cos \alpha - F_m = 0$$

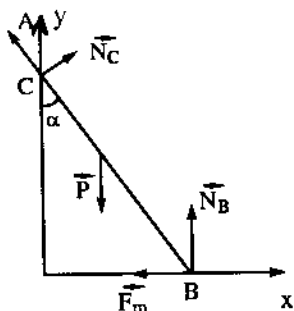
$$N_C \sin \alpha - P + N_B = 0$$

$$\frac{Pl}{2} \sin \alpha - h \frac{N_C}{\cos \alpha} = 0$$

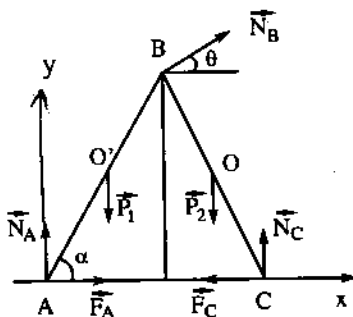
Do đó :

$$N_C = \frac{lP}{4h} \sin 2\alpha$$

$$N_B = P - N_C \sin \alpha.$$



Hình 1.76



Hình 1.77

143. F_A, N_A, F_C, N_C là các phản lực lên AB và BC trong đó F_A, F_C là các lực ma sát (hình 1.77) ở B, N_B là phản lực do BC tác dụng lên AB, kí hiệu γ là góc giữa $\vec{N}_B$ và CB. Khi các thanh AB và BC đứng yên :

$$\vec{N}_B + \vec{P}_2 + \vec{N}_C + \vec{F}_C = 0 \quad (1)$$

$$\vec{N}_A + \vec{F}_A + \vec{P}_1 - \vec{N}_B = 0 \quad (3)$$

$$[\vec{CO}, \vec{P}_2] + [\vec{CB}, \vec{N}_B] = 0 \quad (2)$$

$$[\vec{AO'}, \vec{P}_1] + [\vec{AB}, (-\vec{N}_B)] = 0 \quad (4)$$

Chiếu các phương trình (1) và (3) lên A_x và A_y , chiếu (2) và (4) lên A_z , ta được

$$\begin{cases} F_A + N_B \cos(\gamma + \alpha) = F_A - N_x = 0 \\ N_A - P_1 - N_B \sin(\gamma + \alpha) = N_A - P_1 - N_y = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} F_C + N_B \cos(\gamma + \alpha) = F_C - N_x = 0 \\ N_B \sin(\gamma + \alpha) + N_C - P_2 = N_y + N_C - P_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{P_1}{2} \cos \alpha = N_B / \sin(\gamma + 2\alpha) \\ \frac{P_2}{2} \cos \alpha = N_B \sin \gamma \end{cases} \quad (7)$$

Trong các công thức trên ta thay

$$\cos(\gamma + \alpha) = -\cos \sigma ;$$

$$\sin(\gamma + \alpha) = \sin \sigma$$

với σ là góc giữa $\vec{N}_B$ và phương ngang; $\sigma = 180^\circ - \gamma - \alpha$. Từ (5) và (6) ta có :

$$N_x = F_A = F_C ; N_y = N_A - P_1 = P_2 - N_C$$

Từ (7) tính $N_B \sin \gamma$ và $N_B \cos \gamma$ rồi thay vào (6)

$$F_C = \frac{1}{4} (P_1 + P_2) \cdot \cot \alpha = F_A = N_x,$$

$$N_C = \frac{3}{4} P_2 + \frac{1}{4} P_1 ; N_y = \frac{1}{4} (P_2 - P_1)$$

$$N_A = \frac{3}{4} P_1 + \frac{1}{4} P_2$$

$$\tan \sigma = \frac{N_y}{N_x} = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \tan \alpha ; N_B^2 = N_y^2 + N_x^2$$

Khi $P_1 \gg P_2$, $\tan \sigma = -\tan \alpha$; $\sigma = -\alpha$, tức là vectơ $\vec{N}_B$ hướng theo CB.

144. Trên hình 1.78 N_A và N_B là các phản lực của các mặt phẳng thẳng đứng và nằm ngang lên AB, chúng vuông góc với các mặt đó. Khi AB đứng yên :

$$\vec{P} + \vec{T}_B + \vec{N}_B + \vec{N}_A + \vec{T}_A = 0 \quad (1)$$

$$[\vec{AO}.\vec{P}] + [\vec{AB}.\vec{T}_B] + [\vec{AB}.\vec{N}_B] = 0$$

T_A và T_B là sức căng các sợi dây AD và BC.

Hướng trục x song song với đường cắt của hai mặt phẳng, A làm gốc hệ toạ độ. Trục Ay theo phương thẳng đứng, chiếu (1) lên các trục x, y, z ta được :

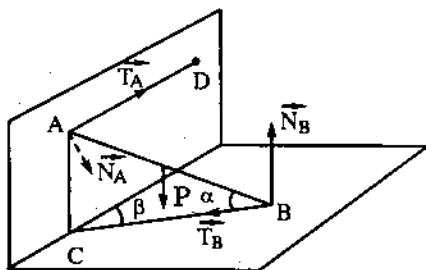
$$-T_B \cos \beta + T_A = 0,$$

$$-P + N_B = 0$$

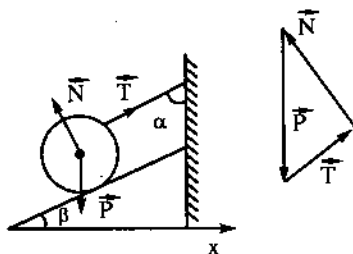
$$N_A - T_B \sin \beta = 0; \quad \frac{AB}{2} P \cos \alpha + AB.T_B \sin \alpha - AB.N_B \cos \alpha = 0$$

Do đó :

$$T_A = T_B \cos \beta; \quad N_B = P; \quad N_A = T_B \sin \beta; \quad T_B = \frac{1}{2} P \cot \alpha.$$



Hình 1.78



Hình 1.79

145. Trên hình 1.79 quả cầu đứng yên nên ta có tam giác lực :

$$\vec{P} = \vec{N} + \vec{T}, \quad (\vec{T} - \text{sức căng dây}, \quad \vec{N} - \text{áp lực})$$

$$\vec{T} = \vec{P} - \vec{N}$$

$$T^2 = N^2 + P^2 - 2NP\cos\beta$$

$$T\sin\alpha - N\sin\beta = \left(\bar{P}\right)_x = 0$$

$$T = N\sin\beta/\sin\alpha$$

$$N = P\cos\beta + (P^2\cos^2\beta - P^2 - T^2)^{1/2}.$$

147. Chuyển động của các bánh xe phụ thuộc trực tiếp với nhau nên hệ chỉ có một bậc tự do. Chọn x là quãng đường đi của một điểm nào đó trên vành bánh xe làm tọa độ suy rộng, khi đó động năng T và thế năng U của hệ :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} J_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2 \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{r_A} M_A x - \frac{1}{r_B} M_B x - \frac{1}{r_C} M_C x \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta dễ dàng lập được phương trình Lagrănggiơ :

$$\frac{1}{2} M \ddot{x} = \frac{1}{r_A} (M_A - \frac{1}{r_B} M_B r_A - \frac{1}{r_C} M_C r_A)$$

$$M = m_A + m_B + m_C$$

Do đó gia tốc ε của bánh xe A bằng

$$\varepsilon = \frac{1}{r_A} \ddot{x} = \frac{2}{M} \left(\frac{M_A}{r_A^2} - \frac{M_B}{r_A r_B} - \frac{M_C}{r_A r_C} \right)$$

148. Hệ chỉ có một tọa độ suy rộng x là quãng đường đi của trọng vật P_1 . Hàm Lagrănggiơ của hệ $L = T - U$ với động năng T và thế năng U có dạng :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$$

$$U = P_1 x - \frac{r_2}{r_1} P_2 x$$

Đặt T và U vào phương trình Lagrănggiơ ta có

$$m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 = P_1 - P_2 \frac{r_2}{r_1}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r_1} \ddot{x} = (r_1 P_1 - r_2 P_2) (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)^{-1}.$$

149. Hệ có một bậc tự do. Chọn x là quãng đường đi của trọng vật A làm tọa độ suy rộng ta có hàm Lagrănggiơ

$L = T - U$ với :

$$T = \frac{1}{2} m_A \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{x}^2 + J_C \omega_C^2 ; J_C = \frac{1}{2} m r^2.$$

$$U = (P_A - P_B) \cdot x + \frac{M}{r} x ; P_A = m_A g ; P_B = m_B g.$$

Thế T và U vào phương trình Lagrănggiơ ta thu được

$$\ddot{x} = (P_A - P_B + \frac{M}{r}) (m + m_A + m_B)^{-1}.$$

150. Hệ có một bậc tự do, chọn x là quãng đường đi được của xe làm tọa độ suy rộng, ta có hàm Lagrănggiơ $L = T - U$ với

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + 4 \left(\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 \right) \quad (1)$$

$$-U = Fx - 4F_{ms} x \quad (2)$$

Bánh xe lăn và chịu tác dụng của mômen cản M của lực ma sát lăn :

$$M = F_{ms} r = f \cdot N = f \cdot (P_2 + \frac{1}{4} P_1), P_1 = m_1 g$$

$P_2 = m_2 g$; N là giá trị áp lực của xe.

Thay (1) và (2) vào biểu thức của L, ta có

$$L = T - U = \left(\frac{1}{2} m_1 + 3m_2 \right) \dot{x}^2 - Fx + \frac{1}{r} f(4P_2 + P_1)$$

Thay L vào phương trình Lagrănggiơ ta có

$$\ddot{x} = \left[F - \frac{f}{r} (P_1 + 4P_2) \right] (6m_2 + m_1)^{-1}.$$

151. a) Thế năng tương tác và động năng của các điện tích

$$U = \frac{1}{r} \alpha q_1 q_2; \quad T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

Nếu thực hiện phép đổi biến số

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1; \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R},$$

$\vec{r}$, $\vec{R}$ là các bán kính vectơ khối tâm và khoảng cách giữa hai hạt,

$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ là bán kính vectơ của các hạt.

Biểu thị $\vec{r}_1$ và $\vec{r}_2$ qua $\vec{r}$ và $\vec{R}$ ta được hàm Lagrănggiơ :

$$L = T - U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\alpha}{r}$$

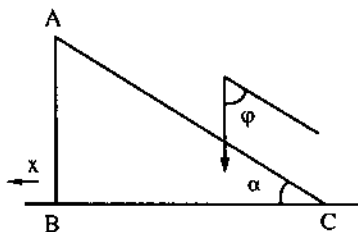
b) Nếu hệ gồm hạt nhân và z êlectrôn:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

$$U = \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^Z \frac{Z_e e_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|}$$

$$U = \frac{e_i e_j}{r_{ij}} + \frac{Z_e e_i}{R - r_i}.$$

152. Chuyển động lăn của trụ trên nêm và trượt trên mặt phẳng ngang của nêm không phụ thuộc trực tiếp nhau nên hệ có hai bậc tự do. Chọn x và φ làm các tọa độ suy rộng (hình 1.80), ta có hàm Lagrănggiơ



Hình 1.80

$L = T - U$ với

$$T = \frac{1}{2}m(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$v_{\perp} = v_o \sin \alpha; v_{\parallel} = v_o \cos \alpha - \dot{x}; v_o = r\dot{\varphi} = r\omega$$

$$-U = mgsin\alpha \cdot r\varphi - gf(m+M) \cdot x$$

Thay T và U vào phương trình Lagrănggiơ ta có

$$\ddot{x} = \frac{mgsin2\alpha - 3f(m+M)g}{3(m+M) - 2m\cos^2\alpha}$$

153. 1) Khi chiếc nêm đứng yên hệ chỉ có một bậc tự do. Kí hiệu x là quãng đường đi của vật E , hàm Lagrănggiơ của hệ $L = T - U$ với động năng T và thế năng U bằng

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2v_N^2 + \frac{1}{2}J_N\omega^2 \quad (1)$$

$$-U = m_1gx - m_2gsin\alpha \cdot x \quad (2)$$

N là tâm ròng rọc B , $\dot{x} = 2v_N = 2r\omega$

Thay L vào phương trình Lagrănggiơ ta được

$$2M\ddot{x} - F = 0; M = \frac{1}{2}m_1 + \frac{3}{16}m_2;$$

$$F = m_1 g - m_2 g \sin \alpha$$

Do đó :

$$x = \frac{1}{4M} F.t^2 + \dot{x}_0 t + x_0$$

x_0 và $\dot{x}_0$ là vị trí và vận tốc đầu của vật E.

2) Khi ném chuyển động hệ sẽ có hai bậc tự do, gọi s là quãng đường đi của ném, trong trường hợp này (1) có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_3 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{s}^2) + \frac{1}{2} m_2 v_N^2 + \frac{1}{2} J_N \omega^2 \quad (3)$$

$$\vec{v}_N = \vec{v}_{N1} + \vec{v}_{N2} ; v_{N1} = \frac{\dot{x}}{2}, \text{ hướng theo AC ; } v_{N2} = \dot{s}.$$

Thay (2) và (3) vào phương trình Lagrănggiơ và giải tương tự như trường hợp 1) ta có

$$x = \frac{1}{2} k t^2 + \dot{x}_0 . t + x_0$$

với
$$k = (m_1 g + m_2 g \sin \alpha) \left[m_1 + \frac{3}{8} m_2 - \frac{m_2^2 \cos^2 \alpha}{4m_1 + 4m_2 + 4m_3} \right]^{-1}.$$

154. Chuyển động của các vật A và E không phụ thuộc trực tiếp với nhau nên hệ có hai bậc tự do. Chọn x và y là đường đi của các vật A và E làm tọa độ suy rộng, ta có hàm Lagrănggiơ $L = T - U$ với động năng T và thế năng U :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_K \left(\frac{\dot{x} + \dot{y}}{2} \right)^2 ; m_K = \frac{Q}{g}$$

$$-U = -f.P.x - P.y + Q. \frac{x+y}{2}, m = \frac{P}{g}.$$

Khi vật K chuyển động xuống, thay L vào phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x và y ta thu được gia tốc W của vật K :

$$W = g \frac{Q - P(f + \sin \alpha)}{Q + 2p}$$

155. Hệ có hai bậc tự do. Chọn x, y là quãng đường đi của các trọng vật A, B làm tọa độ suy rộng, khi đó hàm $L = T - U$ với động năng và thế năng :

$$T = \frac{1}{2} m_A \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_B (\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} m_C (\dot{y} + \dot{x})^2$$

$$-U = P_A \cdot x + P_B(y - x) - P_C(y + x)$$

Lập các phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x và y và giải các phương trình đó ta thu được

$$\ddot{x} = g \frac{m_A m_C + m_A m_B - 4m_B m_C}{4m_B m_C + m_A m_C + m_A m_B}$$

Khi $\ddot{x} > 0$, vật A sẽ chuyển động xuống.

156. Chuyển động của con lắc được mô tả bởi hai tọa độ suy rộng là độ dài sợi dây l và góc lệch φ (hình 1.81). Hàm Lagrănggiơ $L = T - U$ với động năng T bằng

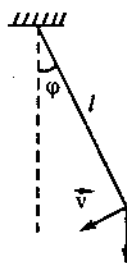
$$T = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2)$$

Thế năng U :

$$-dU = \vec{P} \cdot d\vec{s} = -P dy$$

$$= -P(\cos \varphi \cdot dl - l \sin \varphi d\varphi).$$

Lập các phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ l và φ ta thu được :



Hình 1.81

$$\ddot{\phi} + \frac{2\dot{\phi} \dot{l}}{l} - \frac{g}{l} \sin \phi = 0$$

157. Hệ có hai bậc tự do. Chọn x và y là quãng đường đi của các vật và độ giãn của lò xo làm tọa độ suy rộng ta có :

$$L = T - U = \frac{m_A}{2}(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{m_B}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \\ + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + (P_A - P_B)x = \frac{1}{2}Cy^2 ;$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{r}$$

Thay L vào phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x và y :

$$-m_A(\ddot{y} - \ddot{x}) + m_B(\ddot{x} + \ddot{y}) + \frac{1}{2}m_B\ddot{x} = P_A - P_B$$

$$m_A(\ddot{y} - \ddot{x}) + m_B(\ddot{x} + \ddot{y}) + m\ddot{y} = C.y$$

Giải hệ phương trình này ta có

$$\ddot{y} + k^2 y = a ; k = \frac{CM'}{MM' - (m_2 - m_1)^2}$$

$$M = m + m_A + m_B ; M' = m_A + 1,5m_B$$

Nếu ở thời điểm $t = 0$, $x_0 = 0$ và $\dot{x}_0 = 0$, nghiệm y là :

$$y = \frac{a}{k^2} (1 - \cos kt) ;$$

$$\ddot{x} = [(P_A - P_B) - (m_B - m_A).a \cos kt](m_A + 1,5m_B)^{-1}.$$

$$a = g[MM'(m_A - m_B)^{-2} - 1]^{-1}.$$

158. Chuyển động của điểm buộc con lắc có thể mô tả bởi hai phương trình $x = a \cos \omega t$ và $y = b \sin \omega t$; chuyển động của chất điểm quanh điểm buộc biểu thị bằng góc lệch φ . Do vậy động năng T và thế năng U bằng :

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left[\frac{d}{dt} (l \sin \varphi + a \cos \omega t) \right]^2 + \frac{m}{2} \left[\frac{d}{dt} (l \cos \varphi + b \sin \omega t) \right]^2 \\ &= \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 + a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + b^2 \omega^2 \cos^2 \omega t - \\ &\quad - 2a l \omega \cos \varphi \sin \omega t - 2b l \sin \varphi \cos \omega t) \\ -U &= mg(l \cos \varphi - b \sin \omega t) \end{aligned}$$

Từ biểu thức của T và U ta dễ dàng lập phương trình vi phân cho tọa độ φ khi các góc lệch φ là nhỏ :

$$\ddot{\varphi} + \frac{\varphi}{l} (b \omega^2 \sin \omega t + g) - \frac{a \omega^2}{l} \cos \omega t = 0$$

159. Giả sử ở điểm đầu của chuyển động $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$; $x_A = 0$, hệ có hai bậc tự do; chọn x và φ làm các tọa độ suy rộng. Hàm Lagrangian $L = T - U$ với động năng và thế năng :

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_1^2 + \frac{1}{2g} P v_C^2 + \frac{1}{24g} p l^2 \omega_2^2$$

$$v_A = \dot{x}; \quad \omega_1 = \frac{\dot{x}}{R}; \quad v_C = \dot{x} + \left[\frac{l}{2} \cdot \dot{\varphi} \right].$$

$$T = \frac{3}{4g} P \dot{x}^2 + \frac{1}{2g} P (\dot{x}^2 + l \dot{\varphi} \dot{x} \cos \varphi + \frac{1}{3} l^2 \dot{\varphi}^2)$$

$$-U = \frac{1}{2} p l (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Khi các góc lệch φ là nhỏ, $\sin\varphi \approx \varphi$; $\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \approx 0$, dựa vào biểu thức của L, lập các phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x và φ ta thu được

$$(3P + 2p)\ddot{x} + p/l\varphi\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2}{3}l\ddot{\varphi} + g.\varphi = 0$$

Giải hệ phương trình này ta thu được :

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt, \quad k = \frac{3(3P + 2p)g}{l(6P + p)}$$

$$x = \frac{P}{3P + 2p} l\varphi_0(l - \cos kt).$$

160. Hệ có hai bậc tự do. Kí hiệu θ là góc quay của hình trụ rỗng quanh tâm O của nó ; φ là góc quay của tâm C trụ con quanh trục qua O. Động năng của hệ :

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m[(R-r)\dot{\varphi}]^2$$

ψ là góc trụ con lăn theo trụ lớn, $J_1 = MR^2$; $J_2 = \frac{1}{2}mr^2$.

Công của ngoại lực mg :

$$A = \int m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int m\vec{g}(R-r)\sin\varphi d\varphi = -mg(R-r)\cos\varphi$$

Do vậy

$$\begin{aligned} L = T + A = & \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr[\dot{\theta}R - (R-r)\dot{\varphi}]^2 + \\ & + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)\cos\varphi. \end{aligned}$$

161. Chuyển động của điểm M có thể mô tả bằng một tọa độ suy rộng, góc quay φ của điểm theo vòng khuyên tròn (hình 1.82). Động năng của M :

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} v_1^2 + \frac{m}{2} v_2^2 \\ &= \frac{m}{2} (r\dot{\varphi})^2 + \frac{m}{2} (\omega r \sin \varphi)^2 \end{aligned}$$

Thế năng U :

$$U = (r - r \cos \varphi) mg$$

Hàm Lagrănggiơ $L = T - U$. Dựa vào L, lập phương trình Lagrănggiơ cho tọa độ φ ta có :

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{r} - \omega^2 \cos \varphi \right) \sin \varphi = 0$$

Chuyển động của M so với vòng khuyên là chuyển động tương đối ; gia tốc Côriôlít $\overline{W}_c = 2[\vec{\omega} \cdot \vec{v}_t]$; $W_c = 2\omega r \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$. Chính gia tốc $\overline{W}_c$ đã cho lực $m \overline{W}_c$; do vậy để cho $\omega = \text{const}$, cần có mômen giữ M bằng $m W_c r \sin \varphi = r^2 \omega m \dot{\varphi} \cdot \sin 2\varphi$.

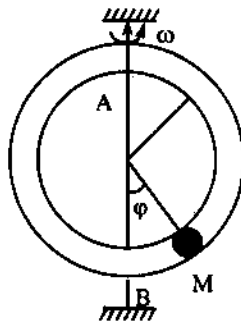
162. Hệ có hai bậc tự do x và φ (hình 1.83). Động năng T bằng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{d}{dt} (x + l \sin \varphi) \right]^2 + \frac{m_2}{2} \left[\frac{d}{dt} (l \cos \varphi) \right]^2$$

Công của các lực chủ động và ma sát :

$$\begin{aligned} A &= -(l - l \cos \varphi) m_2 g + f \cdot g (m_1 + m_2) x + \\ &\quad + m_2 f \cdot l x \left(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

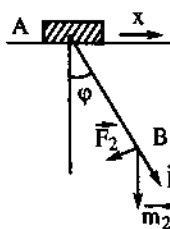
(các lực $F_1 = m_2 l \dot{\varphi}^2$; $F_2 = m_2 l \ddot{\varphi}$).



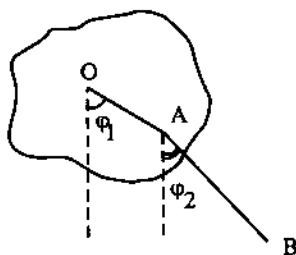
Hình 1.82

Thế $L = T + A$ vào phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x và φ ta thu được phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ :

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi = \\ = -f[(m_1 + m_2)g + m_2l(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi)] \\ l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0.\end{aligned}$$



Hình 1.83



Hình 1.84

163. Hệ có hai bậc tự do, đó là các góc quay φ_1 và φ_2 như trên hình 1.84. Động năng T và thế năng U :

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$U = -mg.y$$

$$x = a\sin\varphi_1 + l\sin\varphi_2$$

$$y = a\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2$$

Do đó hàm Lagrănggiơ $L = T - U$

$$\begin{aligned}L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2(J + ma^2) + \frac{m}{2}[l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2al\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] + \\ + mg(a\cos\varphi_1 + l\cos\varphi_2).\end{aligned}$$

Lập phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ φ_1 và φ_2 ta có :

$$\begin{aligned}
 (ma^2 + J) \ddot{\varphi}_1 + ma/\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + \\
 + ma/\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + mgsin\varphi_1 = 0 \\
 ma/\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + m l^2 \ddot{\varphi}_2 - ma/\sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \\
 + mgsin\varphi_2 = 0.
 \end{aligned}$$

164. Thế giữa hai đầu cuộn cảm là $U = B \frac{dI}{dt}$; I là dòng điện qua cuộn cảm. Thế giữa hai bản cực của tụ là $\frac{q}{C}$. Khi không có nguồn, tổng thế trong mạch bằng không, tức là

$$\begin{aligned}
 B \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0; I = \frac{dq}{dt}, \text{ do đó:} \\
 B \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Đây là phương trình vi phân mô tả sự biến thiên của q . Hàm Lagrănggiơ dẫn đến phương trình (1) có dạng

$$L = \frac{1}{2} B \dot{q}^2 - \frac{q^2}{2C} + R \dot{q} \cdot q.$$

165. a) Nếu các tọa độ mô tả chuyển động của các phần của hệ không phụ thuộc trực tiếp với nhau thì có thể coi hàm Lagrănggiơ của hệ bằng tổng các hàm Larănggiơ của các phần.

b) Dựa vào kết quả bài 164 suy ra :

$$H.1.14 : L = \frac{1}{2} B \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2C} q_2^2 - U(q_1 - q_2)$$

$$H.1.15 : L = \frac{1}{2} B_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} B_2 \dot{q}_2^2 - \frac{1}{2C_1} q_1^2 - \frac{1}{2C_2} q_2^2 - \frac{1}{2C} (q_1 + q_2)^2.$$

166. Khi thực hiện phép đổi biến số

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t), i = 1, \dots, s \quad (1)$$

$$\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L[q, \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t] = L(q, \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}, t)$$

Do đó :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} \text{ và } \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}$$

Do vậy :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right)$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

$$167. \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt$$

Từ phương trình Lagrănggiơ cho tọa độ x có $m \ddot{x} = 0$, do đó

$$\dot{x} = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v; x = vt$$

$$S = \frac{m (x_2 - x_1)^2}{2 (t_2 - t_1)}$$

168. Hàm Lagrănggiơ của dao động tử một chiều

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2; \omega = \text{const.}$$

Phương trình Lagrănggiơ cho toạ độ x :

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0, x = a\sin(\omega t + \alpha).$$

Đặt x và $\dot{x}$ vào biểu thức của tác dụng S , ta tính được :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{m\omega}{2\sin\omega T} [(x_1^2 + x_2^2) \cos\omega T - 2x_1 x_2]$$

$$T = t_2 - t_1.$$

169. Ta có công thức: $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, do đó

$$\delta S = \delta x \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta x \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] dt \quad (1)$$

$$\forall \dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{const}, \delta S = \frac{\partial S}{\partial x} \delta x, \text{ lấy giới hạn } t_2 \rightarrow t_1 \text{ tích phân trong}$$

(1) tiến tới không. Do đó:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{x=x_1} = P.$$

170. Ta có tác dụng S :

$$S = \int_0^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt = S(t_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = \int_0^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t_2} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial L}{\partial t_2} \right) dt_2 = \dot{x}(t_2) \int_0^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt_2 + L \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt_2 \quad (2)$$

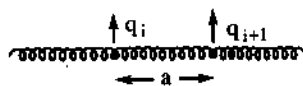
(vì $\delta t_a = \delta t_b = 0$ ở các điểm đầu của quỹ đạo a và b).

Đặt (2) vào (1) :

$$\frac{\partial S}{\partial t_2} = \dot{x}_{(t=t_2)} \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_2} + L(x_2)$$

($\frac{\delta \dot{x}}{\delta t_2} = 0$ vì nguyên lí tác dụng tối thiểu chỉ áp dụng cho hệ kín).

171.a) Khoảng cách giữa 2 nguyên tử (hình 1.85) lân cận ở trạng thái cân bằng là a. Gọi q_i và q_{i+1} là độ lệch khỏi vị trí cân bằng của các nguyên tử thứ i và i + 1 ; $q_{i+1} - q_i = m\Delta q_{i+1,i}$



Hình 1.85

Hàm Lagrănggiơ :

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{C}{2} (\Delta q_{i+1,i})^2 ;$$

Vậy :

$$\ddot{q}_i = - C[(q_{i+1} - q_i) - (q_i - q_{i-1})]$$

$$i = 1, \dots, N - 1.$$

172. Thế tương tác giữa các điện tích trong điện từ trường

$$U = \sum_{i,j} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} \frac{1}{8\pi\epsilon_0} + \sum_{i=1} e_i \phi(\vec{r}_i, t).$$

r_{ij} là khoảng cách giữa hai điện tích e_i và e_j .

Trong điện từ trường xung lượng $\vec{p}$ trở thành $\vec{p} - e \vec{A}$,

$\vec{A}$ là thế vectơ, ϕ là thế vô hướng của điện từ trường.

Do đó

$$H = T + U = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left[\vec{p}_i - e_i \vec{A}(\vec{r}_i, t) \right]^2 + \\ + \sum_i e_i \phi(\vec{r}_i, t) + \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{r_{ij} \cdot 8\pi\epsilon_0}.$$

173. Nếu trong bài 171 tiến $a \rightarrow 0$ ta có :

$$L = \int \mathcal{L} dx dt \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

ψ là độ lệch khỏi vị trí cân bằng ; x là tọa độ của điểm mà độ lệch là ψ . Lấy biến phân (1) :

$$\delta L = 0 \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dx \cdot dt = 0$$

với $\delta \psi(x, t_1) = \delta \psi(x, t_2) = 0$.

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\delta \dot{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta \psi ; ; \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \delta \psi.$$

Khi đó :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial}{\partial t} \delta \psi dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \delta \psi dt = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \delta \psi dt.$$

Tiếp theo :

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) dx = - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} \delta \psi dx$$

Vậy điều kiện cực trị cho ta

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)} = 0 \quad (3)$$

Đặt $\mathcal{L}$ từ (2) vào (3) ta có

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

Đây chính là phương trình dao động của sợi dây liên tục và đàn hồi (sợi dây đàn).

174. Từ hình 1.86

a) Hàm Lagrănggiơ của vật A :

$$L = T - U \text{ với } T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

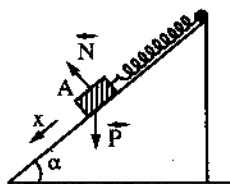
$$-U = P \sin \alpha \cdot x - C \int_0^x \Delta l dz, \Delta l \text{ là độ}$$

giãn lớn nhất của lò xo

$$\Delta l = \Delta l_0 + x; \Delta l_0 = l - l_0.$$

l_0 là độ dài không giãn của lò xo, l là độ dài của lò xo ở vị trí cân bằng, x là độ giãn của lò xo tính từ vị trí cân bằng.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + P \sin \alpha \cdot x - \frac{C}{2} x^2 - C \Delta l_0 \cdot x$$



Hình 1.86

Do đó :

$$m \ddot{x} - P \sin \alpha + Cx + C \Delta l_0 = 0 \quad (1)$$

ở vị trí cân bằng $x = 0$ và $\ddot{x} = 0$ do vậy $m \ddot{x} + Cx = 0$

$$\Delta l_0 = \frac{P \sin \alpha}{C}$$

Vậy : $x = a \sin(\omega t + \beta)$

$$\omega = (C/m)^{1/2}$$

Với a và β là biên độ và pha ban đầu ; $a \sin \beta = P \sin \alpha / C$

$$a \cos \beta = \frac{\dot{x}_0}{\omega}, \quad a^2 = \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{P \sin \alpha}{C} \right)^2 ;$$

$$\tan \beta = (\omega P \sin \alpha / C \cdot v_0).$$

Chu kì của dao động :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}.$$

b) Nếu có ma sát, phương trình (1) sẽ có dạng

$$m \ddot{x} = P \sin \alpha + f P \cos \alpha + Cx + C \Delta l_0 = 0$$

Vậy $x = a' \sin(\omega t + \beta')$

$$a'^2 = \frac{m v_0^2}{C} + \frac{1}{C^2} (P \sin \alpha - f P \cos \alpha)$$

Tức là đặc tính của chuyển động không thay đổi mà chỉ khác đi pha và biên độ dao động.

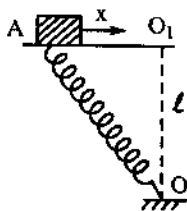
175. Trên hình 1.87 thế năng của vật A :

$$U = F_o \cdot \Delta l = F_o (\sqrt{l^2 + x^2} - l) \\ \approx F_o \cdot \frac{x^2}{2l}.$$

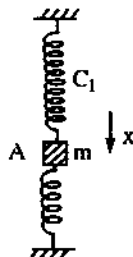
Vậy

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - F_o \frac{x^2}{2l} \text{ và } m\ddot{x} + \frac{F_o x}{l} = 0,$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F_o}} \text{ là chu kì dao động.}$$



Hình 1.87



Hình 1.88

176. Trên hình 1.88 kí hiệu x là độ lệch khỏi vị trí cân bằng, ta có:

$$m\ddot{x} = -xC_1 - x.C_2 = -(C_1 + C_2).x$$

Do vậy chu kì dao động T bằng

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m}}$$

$$x = v_o \left(\frac{C_1 + C_2}{m} \right)^{1/2} \sin \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{m}}.t.$$

177. a) Vật A tác dụng lên các lò xo lực P (hình 1.89).

$$P = -C.x = -C(x_1 + x_2)$$

x_1, x_2 là độ giãn của các lò xo 1 và 2.

C là hệ số cứng của lò xo tương đương với hai lò xo 1 và 2.

Các lò xo tác dụng lên vật A lực F_1 và F_2 ;

$$F_1 = -C_1 x_1 ; F_2 = -C_2 x_2.$$

Vậy :

$$x = x_1 + x_2 = \frac{-F_1}{C_1} - \frac{F_2}{C_2} = \frac{-P}{C}.$$

$$\text{Vì } F_1 = F_2 = P, \text{ do đó : } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

$$\text{Rút ra : } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Nếu có n lò xo :

$$C^{-1} = \sum_{i=1}^n C_i^{-1}.$$

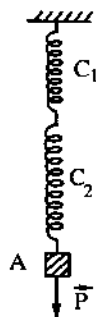
b) Phương trình dao động có dạng :

$$m \ddot{x} + Cx = 0, x = a \sin(\omega t + \beta)$$

$$\omega = \left(\frac{C}{m} \right)^{1/2} ; \quad x_0 = a \sin \beta ; \quad v_0 = a \omega \cos \beta.$$

Do đó

$$a^2 = \omega^{-2} (v_0^2 + \omega^2 x_0^2)^{1/2} ; \quad \tan \beta = \frac{x_0}{\omega v_0}.$$



Hình 1.89

178. Nếu r là khoảng cách từ tâm Trái Đất tới vật; ta có phương trình dao động :

$$m \ddot{r} = -kr ;$$

k là hệ số tỉ lệ, $k > 0$.

Nghiệm $r = a \sin(\omega t + \alpha)$.

$$\omega = (k/m)^{1/2} ; \quad P = mg = kR ; \quad k/m = g/R ;$$

R là bán kính Trái Đất.

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán :

$$a = R ; \quad \alpha = 90^\circ, \text{ chu kì dao động } T :$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{R}{g} \right)^{1/2}$$

Thời gian cần cho vật đi hết đường kính Trái Đất $t = \frac{T}{2}$.

179. Áp dụng định lí biến thiên mômen xung lượng :

$$a) \quad J_A \dot{\omega} = M = mg.l \sin \varphi \approx mgl.\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J_A} \varphi = 0 ; \quad \varphi = a \sin(kt + \alpha)$$

$$k = \left(\frac{mgl}{J_A} \right)^{1/2}.$$

Từ điều kiện ban đầu của bài toán ta tìm được $a = \varphi_0$ và $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$J_A = J + ml^2.$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

b) Tần số dao động $\omega = k ; \omega^2 m l^2 - mg l + \omega^2 J = 0$.

Đây là phương trình bậc hai đối với l ; với mỗi giá trị xác định của ω , sẽ có hai giá trị của l nếu thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{g^2}{\omega^4} > \frac{4J}{m}.$$

Tìm giá trị của l để cho biểu thức $mg/(J + m^2 l)$ nhỏ nhất, ta có vị trí B mà tại đó tần số dao động nhỏ nhất :

$$OB = (J/m)^{1/2}.$$

180. Giả sử C là khối tâm của nửa cầu ; O là tâm của nó ; M là tiếp điểm với mặt ngang (hình 1.90). Áp dụng định lí biến thiên mômen xung lượng :

$$J_M \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = [\overline{MC.P}]_z ;$$

z là trục quay.

$$P = mg.$$

Vì $OC \cdot \sin \varphi = CM \cdot \sin \alpha$; do vậy :

$$J_M \ddot{\varphi} + OC \cdot P \sin \varphi = 0$$

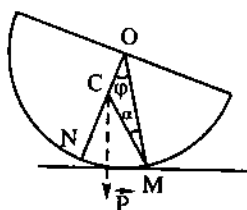
$$\varphi = a \sin(\omega t + \alpha)$$

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta có $a = \varphi_0$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Vậy $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$;

$$\omega = \sqrt{OC.P [J_O - m \cdot OC^2 + m(r - OC)^2]^{1/2}}.$$

Theo kết quả bài 117 : $OC = \frac{1}{3} r$ và bài 120, $J_O = \frac{2}{5} m r^2$,



Hình 1.90

$$\omega = (5g/33r)^{1/2}.$$

181. Nếu chất điểm chịu tác dụng của lực cưỡng bức $F(t)$, phương trình dao động của chất điểm sẽ có dạng :

$$\ddot{x} - i\omega x = e^{-i\omega t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m} F(t) e^{i\omega t} dt + \varepsilon_0 \right\}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_0 = (\dot{x} - i\omega x) \text{ tại } t = 0$$

a) Nếu $F = a = \text{const}$; độ dịch khỏi vị trí cân bằng :

$$x = \frac{a}{m\omega^2} (1 - \cos\omega t)$$

b) Nếu $F = at$, từ (1)

$$x = \frac{a}{m\omega^3} (\omega t - \sin\omega t)$$

c) $F = ae^{-\alpha t}$; a, α là hằng số

$$x = \frac{a}{m(\omega^2 + \alpha^2)} (e^{-\alpha t} - \cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin\omega t)$$

182. a) Trong đoạn $0 < t < T$, áp dụng (1) bài 181 :

$$x = \frac{a}{m\omega^3} (\omega t - \sin\omega t)$$

Trong đoạn $t > T$, lấy tích phân trong (1) từ T đến ∞ và sử dụng điều kiện liên tục của x và $\dot{x}$ khi $t = T$ ta thu được

$$x = C_1 \cos\omega(t - T) + C_2 \sin\omega(t - T) + \frac{a}{m\omega^2}$$

$$C_1 = \left(-\frac{a}{mT\omega^2} \right) \sin\omega T; \quad C_2 = \left(-\frac{a}{m\omega^2 T} \right) (1 - \cos\omega T).$$

b) Đối với đoạn $[0, T]$; (1) bài 181 có dạng :

$$-i\omega t \dot{x} - i\omega x = e \int_0^T \frac{a}{m} e^{i\omega t} dt = \frac{ia}{m\omega} (1 - e^{i\omega T}) e^{-i\omega t}.$$

Do đó : $x = \frac{a}{m\omega^2} [\cos(\omega t - \omega T) - \cos \omega t].$

183. a) Chọn hệ tọa độ như trên hình 1.91:

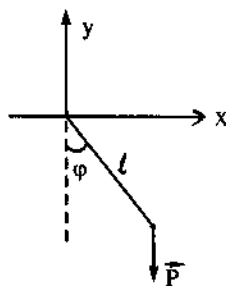
$$x = l \sin \varphi + a \sin kt$$

$$y = l \cos \varphi$$

Hàm Lagrănggiơ của con lắc có dạng

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + m l a k \cdot \varphi \cos \varphi \cos kt + m g l \cos \varphi.$$

Vậy: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{ak^2}{l} \sin kt;$ (1)



Hình 1.91

φ coi là nhỏ.

Nghiệm sẽ có dạng :

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{ak^2}{l(\omega^2 - k^2)} \cos kt$$

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta tìm được A và α ,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

b) Nếu điểm buộc của con lắc chuyển động theo đường tròn bán kính R, tọa độ của nó :

$$x = l \sin \varphi + R \sin kt; \quad k = \frac{v_0}{R}$$

$$y = l \cos \varphi + R \cos kt$$

Hàm Lagrănggiơ : $L = T - U$

với $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$; $-U = Pl \cos \varphi + PR \cos kt$

$$L = \frac{m}{2}(l^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 k^2) + m/R.k^2(\sin \varphi \sin kt - \cos \varphi \cos kt) + Pl \cos \varphi$$

Vậy phương trình Lagrănggiơ sẽ có dạng :

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{Rk^2}{l} \cos kt \right) \varphi = \frac{Rk^2}{l} \sin kt \quad (2)$$

Nếu $R \ll l$ ta có thể bỏ qua số hạng $(Rk^2/l) \cos kt$ so với g/l , như vậy (2) sẽ trùng với (1) ; khi đó chuyển động của con lắc là dao động. Khi R không nhỏ hơn nhiều so với l thì nghiệm của (2) sẽ không còn mô tả dao động nữa. Chuyển động của con lắc sẽ không còn là dao động nữa.

184. Trên hình 1.92

a) Khi lực cản của không khí $N = 0$. Hàm Lagrănggiơ L của hệ bằng :

$$L = T - U = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - Px + \frac{Cx^2}{2} + Cl_0 \cdot x$$

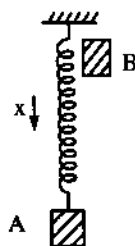
l_0 là độ giãn tĩnh của lò xo;

$$m = m_1 + m_2$$

Phương trình dao động :

$$m \ddot{x} + Cx = 0 ; \quad (1)$$

$$l_0 = \frac{P}{C}, \quad x = A \sin(\omega t + \alpha)$$



Hình 1.92

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta có

$$\alpha = 0 ; A = v_0/\omega$$

Mặt khác, vì xung lượng bảo toàn nên $m_2 v_B + 0 = m v_0$

$$v_B = \sqrt{2gh} ; \text{ do đó } v_0 = (m_2/m) \sqrt{2gh} .$$

$$x = m_2 \sqrt{\frac{2gh}{C.m}} \sin \omega t ; \omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$$

b) Khi tính đến lực cản, phương trình chuyển động khác (1) bởi số hạng $k \dot{x}$; k là hệ số tỉ lệ :

$$m \ddot{x} + C.x + k \dot{x} = 0$$

Nghiệm :

$$x = e^{-\lambda t} a \sin(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} . t) ; \lambda = \frac{k}{2m} < \omega$$

$$x = e^{-\lambda t} \left(e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} . t} - e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} . t} \right) \frac{v_0}{2C} \quad k > 2\sqrt{C.m} .$$

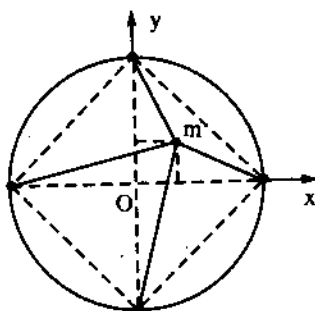
$$x = v_0 . t e^{-\lambda t} \text{ nếu } k = 2\sqrt{C.m} .$$

185. Xét 4 lò xo nằm theo các trục Ox và Oy (Oxy là mặt phẳng ngang ; O là tâm của đa giác đều) hình 1.93, hàm Lagrănggiơ sẽ có dạng :

$$\begin{aligned} L = & \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{C_1}{2} \left[\sqrt{(r+x)^2 + y^2} - a \right]^2 - \\ & - \frac{C_2}{2} \left[\sqrt{(r+y)^2 + x^2} - a \right]^2 - \frac{C_3}{2} \left[\sqrt{(r-x)^2 + y^2} - a \right]^2 - \\ & - \frac{C_4}{2} \left[\sqrt{(r-y)^2 + x^2} - a \right]^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự, nếu có n lò xo, biểu thức của thế năng tương tự như (1), nhưng sẽ là n số hạng. Thế năng của các chất điểm là hàm đối xứng chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ chất điểm tới gốc tọa độ ở tâm đa giác đều. Lập phương trình Lagrănggiơ, sử dụng (1) ta được cho tọa độ x :

$$m\ddot{x} + C\left(4x - 2x\frac{a}{r}\right) = 0, \quad (2)$$



Hình 1.93

khí $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$. Với n lò xo; $C_1 = C_2 = \dots = C_n = C$ ta có phương trình dao động :

$$m\ddot{x} + C\left(nx - \frac{n}{2}\frac{a}{r}\right) \quad (3)$$

Từ (3) ta thu được tần số dao động ngang của chất điểm :

$$\omega^2 = \frac{n.C}{2m} \cdot \frac{2r - a}{r}.$$

186. Trong các tọa độ cực, cơ năng của hạt khối lượng m bằng

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$U_{(r)}$ là thế tương tác của các nguyên tử trong phân tử.

Thế năng hiệu dụng $U_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} + U(r)$. Khi nguyên tử dao động,

khoảng cách r giữa chúng trở thành

$$r = r_0 + \delta r$$

Do đó

$$\frac{L^2}{2mr^2} \approx \frac{L^2}{2m} \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{3}{r_0^4} (\delta r)^2 \right),$$

tức là do dao động đã xuất hiện bổ chính vào thế năng :

$$\delta U_{ef} = \frac{3L^2}{2mr_0^4} (\delta r)^2.$$

Do vậy bổ chính mômen xuất hiện do dao động đã tạo ra bổ chính tần số $\delta\omega^2$:

$$\delta\omega^2 = \frac{3L^2}{2m^2 r_0^4 \omega_0^2},$$

(vì mômen của phân tử

$$Lz = \sum_{i=1}^2 m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = m_1 r_1^2 \omega_1 + m_2 r_2^2 \omega_2^2 ;$$

ω_0 là tần số dao động nếu không tính đến phần bổ chính mômen gây nên).

187. Phương trình vi phân mô tả chuyển động của chất điểm khối lượng m theo đường cong $y = f(x)$ (xem bài 41) có dạng :

$$\ddot{x} \left\{ 1 + [f'(x)]^2 \right\} + f'(x) f''(x) \dot{x}^2 + g f'(x) = 0$$

Giả sử x_0 là tọa độ điểm O , là điểm ứng với y cực tiểu

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \delta x + \frac{1}{2} f''(x_0) (\delta x)^2 + \\ &\quad + \dots f''(x) = f''(x_0 + \delta x) \\ &= f''(x_0) + f'''(x_0) \delta x + \frac{1}{2} f^{(IV)}(x_0) (\delta x)^2 + \dots \end{aligned}$$

Bỏ các số hạng bậc $(\delta x)^2$ và cao hơn ta có

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta x) + gf''(x_0).\delta x = 0$$

Vậy chu kì dao động của điểm quanh O :

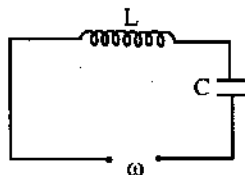
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi(gf''(x_0))^{-1/2}$$

Đối với trường hợp $y = ax^2 + b$; $T = 2\pi\sqrt{1/2ag}$.

188. Trên hình 1.94, theo định nghĩa, ta có :

$$u_C = \frac{q}{C} ; u_L = \frac{dI}{dt} ,$$

I, q là dòng điện và điện tích trong mạch :



Hình 1.94

$$u = u_C + u_L ;$$

$$u_0 \cos \omega t = L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} ,$$

hay
$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = \frac{du}{dt} \text{ vì } I = \frac{dq}{dt} .$$

Để tiện tính toán ta đặt $u_0 \cos \omega t = \text{Re}(u_0 e^{i\omega t})$, u_0 là số thực và $I = \text{Re}(I_0 e^{i\omega t})$, I_0 là số thực, vậy :

$$L \text{Re}(-I_0 \omega^2 e^{i\omega t}) + \frac{I_0}{C} \text{Re}.e^{i\omega t} = \text{Re}(i\omega u_0 e^{i\omega t})$$

và
$$I = \frac{u_0 \sin \omega t}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} .$$

$$\text{Vì } u_C = \frac{q}{C} ; \dot{u}_C = \frac{I}{C} = \frac{u_0}{C} \frac{\sin \omega t}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$$

$$u_C = \frac{u_0}{1 - CL\omega^2} \cos \omega t .$$

189. Nếu có thêm điện trở R mắc nối tiếp vào mạch như trong bài 188, phương trình dao động của dòng là :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = -u_0 \omega \sin \omega t \quad (1)$$

Đây là dạng phương trình dao động cưỡng bức có ma sát, nghiệm chung của (1) khi không có vế phải :

$$I = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow 0 \text{ khi } t \rightarrow \infty, \left(\lambda = \frac{R}{2L} \right)$$

tức là nghiệm tắt dần. Để tìm nghiệm riêng của (1) ta đặt :

$$I = I_0 e^{i\omega t} ; I_0 = i_0 e^{-i\delta} ; i_0 \text{ và } \delta \text{ là các số thực. Giải ra ta thu được :}$$

$$I_0 = \frac{-u_0 \omega / L}{\left(\frac{1}{CL} - \omega^2 \right) - 2i \frac{R}{2L} \omega} = i_0 \cos \delta - i_0 i \sin \delta$$

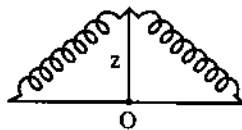
Do đó :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{C\omega}} ; i_0 = -u_0 \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - L\omega \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\operatorname{Re} I = i_0 \cos(\omega t - \delta) ; u_C = \frac{q}{C} ; du_C = \frac{I}{C} dt$$

$$u_C = \frac{i_0}{C\omega} \sin(\omega t - \delta) + \text{const} .$$

190. a) Giả sử z là độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng O (tâm đa giác) (hình 1.95) theo phương thẳng đứng của chất điểm, các lò xo có hệ số cứng bằng nhau và bằng C . Khi đó hàm Lagrănggiơ



Hình 1.95

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{C}{2} n (\Delta l)^2 \quad (1)$$

$$\Delta l = \sqrt{r^2 + z^2} - a \approx r \sqrt{1 + \frac{z^2}{r^2}} - a \approx r + \frac{z^2}{2r} - a$$

Bỏ số hạng $\frac{z^2}{2r}$ so với r ; thay Δl vào (1) ta có

$$m \ddot{z} + nC \frac{r-a}{r} z = 0 \quad (2)$$

Vậy tần số dao động :

$$\omega^2 = \frac{nC}{m} \cdot \frac{r-a}{r} \quad (3)$$

b) Khi lực cản của không khí bằng $-\alpha \dot{z}$; (2) có dạng mới

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{nC}{m} \cdot \frac{r-a}{r} z = 0 \quad (4)$$

Tìm nghiệm của (4) dưới dạng :

$$z = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

ở đây λ_1 và λ_2 là nghiệm của (4) khi ta thế vào nó $z = e^{\lambda_1 t}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \left(\frac{\alpha^2}{4m^2} - \omega_0^2 \right)^{1/2} ; \quad \omega_0^2 = \frac{nC}{m} \cdot \frac{r-a}{r}$$

Từ các điều kiện ban đầu của bài toán ta tính C_1 và C_2 . Cuối cùng

$$z = \begin{cases} ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \beta) & \text{nếu } \gamma = \frac{\alpha}{2m} < \omega_0 \\ C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} & \text{nếu } \gamma > \omega_0 \\ (C_1 + C_2)e^{-\gamma t} & \text{nếu } \gamma = \omega_0 \end{cases} \quad (5)$$

a và β cũng được xác định từ các điều kiện ban đầu của bài toán.

191. Giả sử tâm của ống chứa hòn bi ở O (hình 1.96). Hòn bi chịu các lực $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}_C$. Phương trình chuyển động là:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_C = m\vec{W}.$$

$$\vec{W} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\varphi} \vec{r};$$

$$\vec{F}_C = \alpha \vec{v} = \alpha r \dot{\varphi}$$

$$P = mg; \alpha \text{ là hệ số tỉ lệ.}$$

Chiếu lên phương tiếp tuyến ta được :

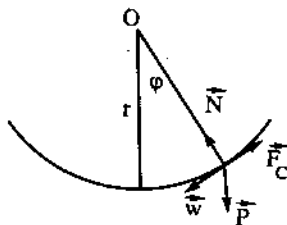
$$\ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m} \dot{\varphi} + \frac{g}{r} \varphi = 0 \quad (1)$$

với các góc φ nhỏ.

Phương trình (1) hoàn toàn giống như phương trình (4) bài 190. Do vậy nghiệm hoàn toàn giống như (5) bài 190 với

$$\omega_0^2 = \frac{g}{r}; \gamma = \frac{\alpha}{2m}.$$

192. Hàm Lagrănggiơ L_0 của dao động tử một chiều, tự do có dạng $L_0 = m \frac{\dot{x}^2}{2} - (\frac{m}{2}) \omega^2 x^2$. Khi có ngoại lực $F(t)$ tác dụng, hàm



Hình 1.96

Lagrănggiơ có dạng :

$$L = L_0 + xF(t) \quad (1)$$

Do đó năng lượng của dao động tử :

$$E(t) = T + U = L + 2U = L - 2xF(t) \quad (2)$$

Áp dụng các công thức cho dao động cưỡng bức :

$$\xi(t) = \dot{x} - i\omega x = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t \frac{1}{m} e^{-i\omega t'} F(t') dt'$$

$$\eta(t) = \frac{iF(t)}{m\omega} - \frac{ie^{i\omega t}}{m\omega} \int_{-\infty}^t \frac{dF(t')}{dt'} e^{-i\omega t'} dt'$$

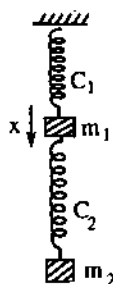
Ta tìm được :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{m}{2} (\text{Re} \xi)^2 + \frac{m}{2} (\text{Im} \eta)^2 - \frac{F(t)}{i\omega} \text{Im} \xi = \\ &= \frac{-F_0^2}{2m\omega^2} + \frac{1}{2m\omega^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF(t)}{t} e^{-i\omega t} dt \right|^2 \end{aligned}$$

193. Xem hình 1.97. Giả sử x_1 và x_2 là độ dãn khỏi vị trí cân bằng của các lò xo. Khi vật thứ nhất ở vị trí x_1 thì vật thứ hai ở vị trí x_2 , vậy độ dãn của lò xo thứ hai do buộc vào vật khối lượng m_1 là $x_1 - x_2$. Vậy hàm Lagrănggiơ cho vật khối lượng m_1 có dạng :

$$L_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 - \frac{C_1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} C_2 (x_1 - x_2)^2 \quad (1)$$

cho vật khối lượng m_2 có dạng :



Hình 1.97

$$L_2 = \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{C_2}{m_1} x_2^2 \quad (2)$$

Các phương trình Lagrănggiơ cho các vật :

$$\ddot{x}_1 + \frac{x_1}{m_1}(C_1 + C_2) + \frac{C_2}{m_1} x_2 = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{C_2}{m_2} x_2 = 0 \quad (4)$$

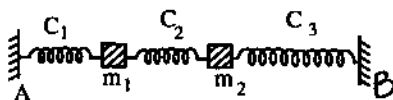
Tìm x_2 từ (4) rồi đặt vào (3) ta được :

$$x_2 = a \cos(\omega_2 t + \varphi_2) ; \omega_2 = (C_2/m_2)^{1/2}$$

$$x_1 = b \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{a C_2}{m} (\omega_2^2 - \omega_1^2)^{-1} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$\omega_1^2 = (\frac{1}{m})(C_1 + C_2)$; $a, b, \varphi_1, \varphi_2$ là các hằng số tích phân xác định từ các điều kiện ban đầu của bài toán.

194. Trên hình 1.98 tương tự như bài 193 hàm Lagrănggiơ của hệ



Hình 1.98

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{C_1}{2} x_1^2 - \frac{C_2}{2} (x_1 - x_2)^2 - \frac{C_3}{2} x_2^2$$

x_1 và x_2 là độ dãn của các lò xo có hệ số cứng là C_1, C_3 khỏi vị trí cân bằng. Đặt $x_1 \sqrt{m_1} = x$; $x_2 \sqrt{m_2} = y$ ta có :

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) + \alpha xy \quad (1)$$

với

$$\alpha = C_2(m_1 m_2)^{-1/2}; \quad \omega_1^2 = \frac{C_1 + C_2}{m_1}; \quad \omega_2^2 = \frac{C_2 + C_3}{m_2}.$$

Từ (1), lập phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x và y

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \alpha y; \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = \alpha x \quad (2)$$

Đặt

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta được phương trình cho phép ta tìm được A_1 và A_2 :

$$A_1 = \frac{\alpha}{\omega_1^2 - \omega_a^2} \cdot A_2 = \lambda_1 \cdot A_2$$

$$A_2 = \frac{\alpha A_1}{\omega_1^2 - \omega_b^2} = \lambda_2 A_1$$

$$\omega_{a,b}^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \frac{1}{2} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(\omega_1^2 \omega_2^2 - \alpha^2) \right]^{1/2}$$

Vậy nghiệm của (3) có dạng:

$$x = A \cos(\omega_a t + \varphi_a) + B \cos(\omega_b t + \varphi_b)$$

$$y = (A/\lambda_1) \cos(\omega_a t + \varphi_a) + (B/\lambda_2) \cos(\omega_b t + \varphi_b).$$

$A, B, \varphi_a, \varphi_b$ là các hằng số tích phân xác định từ điều kiện ban đầu của bài toán.

195. a) Tương tự như bài 194, hàm Lagrănggiơ của hệ:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 - \frac{C_1}{2} \dot{x}_1^2 - \frac{C_4}{2} \dot{x}_3^2 - \\ - \frac{C_2}{2} (x_1 - x_2)^2 - \frac{C_3}{2} (x_2 - x_3)^2.$$

Lập các phương trình Lagrănggiơ cho các tọa độ x_1, x_2, x_3 ta được :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C_1 x_1 + C_2 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_2 (x_2 - x_1) + C_3 (x_2 - x_3) = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + C_4 x_3 + C_3 (x_3 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Lấy tích phân các phương trình này ta được các tọa độ x_1, x_2, x_3 là độ dịch chuyển khỏi vị trí cân bằng của các chất điểm khối lượng m_1, m_2, m_3 . Trọng lực $P_1 = m_1 g, P_2 = m_2 g$ và $P_3 = m_3 g$, chỉ có tác dụng làm thay đổi vị trí cân bằng, không ảnh hưởng đến các đặc tính của dao động (xem bài 174).

b) Nếu $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$, hệ (1) trở thành ($m_1 = m_2 = m_3$)

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + C(2x_1 - x_2) = 0 \\ m \ddot{x}_2 + C(2x_2 - x_1 - x_3) = 0 \\ m \ddot{x}_3 + C(2x_3 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt nghiệm $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$; $i = 1, 2, 3$; thay x_i vào (2), ta được hệ phương trình mà các ẩn số sẽ là A_1, A_2, A_3 . Để hệ có nghiệm, định thức phải bằng không. Cho định thức bằng không và giải ra ta tìm được các giá trị $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\begin{cases} \omega_{1,3}^2 = (2 \mp \sqrt{2}) \frac{C}{m} \\ \omega_2^2 = \frac{2C}{m} \end{cases} \quad (3)$$

Thay ω_1 vào phương trình định thức bằng không ta có :

$$\text{Khi } \omega = \omega_1, A_1 = A_3 = \frac{A_2}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Khi } \omega = \omega_2, A_1 = -A_3 ; A_2 = 0.$$

$$\text{Khi } \omega = \omega_3, A_1 = A_3 = -\frac{A_2}{\sqrt{2}}.$$

Vì A_i là các hằng số tùy ý cho nên ta đặt $A_1 = A_3 = A$ (do đó $A_2 = A\sqrt{2}$) nếu $\omega = \omega_1$ và $A_1 = B$ (do đó $A_3 = -B$) nếu $\omega = \omega_2$; cuối cùng $A_1 = A_3 = C$ (do đó $A_2 = -\sqrt{2}C$) nếu $\omega = \omega_3$. Do vậy nghiệm của (3) có dạng :

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + C\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

$$x_2 = \sqrt{2} A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \sqrt{2} C\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

$$x_3 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + C\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

Các hằng số tích phân A, B, C, φ_i xác định từ điều kiện ban đầu của bài toán. Các tọa độ x_i hoàn toàn mô tả dao động của hệ. Nếu đặt :

$$q_{1,3} = \frac{1}{2}(x_1 \pm x_2 + x_3); \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3)$$

(q_i là các tọa độ chuẩn), ta có :

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 - \omega_1^2 q_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2 - \omega_3^2 q_3^2)$$

$$\text{Vậy } \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0; i = 1, 2, 3.$$

196. Từ hình 1.15 bài 165, vì trong mạch không có nguồn điện nên tổng hiệu điện thế các đoạn mạch bằng không :

$$u_{C1} + u_{B2} + u_C + u_{C2} + u_{B2} = 0 \quad (1)$$

$$u_B = B \frac{dl}{dt}; u_C = \frac{q}{C}, \text{ rõ ràng rằng } q = q_1 + q_2, \text{ vậy :}$$

$$\left(B_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C_1} \right) + \left(B_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C_2} \right) + \frac{q}{C} = 0 \quad (2)$$

với $q = q_1 + q_2$. Phương trình (2) là phương trình Lagrănggiơ mà hàm Lagrănggiơ dẫn tới nó có dạng :

$$L = \frac{B_1}{2} \dot{q}_1^2 - \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{B_2}{2} \dot{q}_2^2 - \frac{q_2^2}{2C_2} - \frac{(q_1 + q_2)^2}{2C}$$

Đặt $\sqrt{B_1} q_1 = x$; $\sqrt{B_2} q_2 = y$ ta được :

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\omega_1 x^2 + \omega_2 y^2) + \alpha xy \quad (4)$$

với
$$\omega_1^2 = \frac{1}{B_1} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right); \quad \omega_2^2 = \frac{1}{B_2} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{C\sqrt{B_1 B_2}}$$

Phương trình (4) giải hoàn toàn tương tự như phương trình (1) bài 194, tìm được x và y ta tìm được $q_1(t)$ và $q_2(t)$.

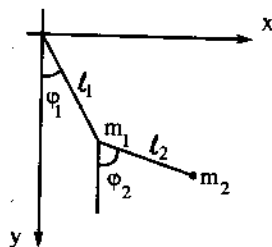
197. Xem hình 1.99. Hàm Lagrănggiơ của con lắc l :

$$L_1 = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_1}{2} \dot{y}_1^2 - m_1 g l_1 \cos \varphi_1$$

$$L_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2)$$

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$$



Hình 1.99

Do đó $L = L_1 + L_2$ là hàm Lagrănggiơ của hệ con lắc toán học kép

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + g m_2 l_2 \cos \varphi_2 \quad (1)$$

Do vậy phương trình chuyển động cho các tọa độ φ_1 và φ_2 :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2\ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)g\varphi_1 = 0 \\ l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 + g\varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt $\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}$, $\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}$ ta được :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)(g - l_1\omega^2) A_1 - \omega^2 m_2 l_2 A_2 = 0 \\ -l_1\omega^2 A_1 + (g - l_2\omega^2) A_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Hệ (3) có nghiệm khác không nếu định thức của nó bằng không. Giải phương trình định thức bằng không ta được :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} \left\{ (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm [(m_1 + m_2)^2 (l_1 + l_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2)l_1 l_2]^{1/2} \right\} = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2} B(\pm) \quad (4)$$

Thay $\omega = \omega_1$ vào (3) ta được $A_1 = \gamma_{(+)} A_2$ và khi $\omega = \omega_2$ ta có $A_1 = \gamma_{(-)} A_2$ với

$$\gamma(\pm) = \frac{m_2 \frac{B(\pm)}{2m_1 l_1}}{(m_1 + m_2) \left[1 - \frac{B(\pm)}{2m_1 l_2} \right]}$$

$B(\pm)$ có biểu thức trong (4).

Cuối cùng đặt $A_1 = A$ khi $\omega = \omega_1$

và

$A_1 = B$ khi $\omega = \omega_2$

$$\varphi_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\varphi_2 = \frac{A}{\gamma_{(+)}} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{B}{\gamma_{(-)}} \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Phần II

ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC VÀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

A. ĐỀ BÀI

§ 1. GIẢI TÍCH VÉCTƠ

1. Biểu diễn div , grad , rot trong hệ tọa độ vuông góc. Chứng minh rằng :

$$\text{div rot } \vec{A} = 0$$

$$\text{rot grad } \varphi = 0$$

với $\vec{A}$, φ là những hàm tùy ý của tọa độ.

2. Dùng tọa độ Đécac, tính :

$$\text{div } \vec{r}, \text{rot } \vec{r}, \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}), (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r},$$

trong đó $\vec{r}$ là bán kính véctor, $\vec{a}$ là véctor không đổi.

3. Tính $\text{grad}\varphi(r)$, $\text{div}\varphi(r) \cdot \vec{r}$, $\text{rot}\varphi(r) \cdot \vec{r}$, $(\vec{a} \cdot \nabla)\varphi(r) \cdot \vec{r}$ với $\vec{a}$ là véctor không đổi.

4. Chứng minh các hệ thức sau đây :

a) $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi$

b) $\text{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi\text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad}\varphi$

c) $\text{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi\text{rot} \vec{A} - [\vec{A}, \text{grad}\varphi]$

d) $\text{div} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{B}$

e) $\text{rot}[\vec{A}, \vec{B}] = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \nabla) \vec{B}$

g) $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = [\vec{A}, \text{rot} \vec{B}] + [\vec{B}, \text{rot} \vec{A}] + (\vec{B} \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \nabla) \vec{B}$

5. Chứng minh các đồng nhất thức sau đây :

a) $\vec{C} \cdot \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} (\vec{C} \nabla) \vec{B} + \vec{B} (\vec{C} \nabla) \vec{A}$

b) $(\vec{C} \nabla) [\vec{A}, \vec{B}] = [\vec{A}, (\vec{C} \nabla) \vec{B}] - [\vec{B}, (\vec{C} \nabla) \vec{A}]$

c) $[\vec{A}, \vec{B}] \cdot \text{rot} \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \nabla) \vec{C} - \vec{A} \cdot (\vec{B} \nabla) \vec{C}$

d) $[(\vec{A} \nabla), \vec{B}] = (\vec{A} \nabla) \vec{B} - [\vec{A}, \text{rot} \vec{B}] - \vec{A} \text{div} \vec{B}$

e) $[(\nabla \cdot \vec{A}), \vec{B}] = \vec{A} \text{div} \vec{B} - (\vec{A} \nabla) \vec{B} - [\vec{A}, \text{rot} \vec{B}] - [\vec{B}, \text{rot} \vec{A}]$

6. Tính $\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r})$, $\text{div}[\vec{p}, \vec{r}]$, $\text{rot}[\vec{p}, \vec{r}]$, $\text{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$ với $\vec{p}$ là véctơ

không đổi.

7. Viết hình chiếu của véctơ $\Delta \vec{A}$ lên các trục của hệ tọa độ cầu và hệ tọa độ trụ.

8. Tính lưu số của véctơ $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ theo vòng tròn bán kính r_0 nằm trong mặt phẳng vuông góc với véctơ $\vec{\omega}$ không đổi. Biết tâm vòng tròn trùng với gốc tọa độ.

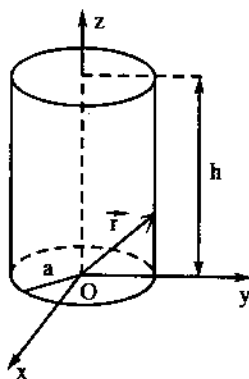
9. Tính thông lượng của bán kính véctơ $\vec{r}$ qua mặt hình trụ trên hình 2.1.

10. Chứng minh các tích phân sau đây bằng nhau :

$$\oint \vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{n}).dS$$

$$\oint (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{n}.dS$$

trong đó $\vec{a}$ là vectơ không đổi và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt tích phân.



Hình 2.1

§ 2. TRƯỜNG ĐIỆN KHÔNG ĐỔI

11. Dùng định luật Culông (Coulomb), tính điện trường tạo bởi :

- Sợi dây thẳng dài vô hạn, tích điện đều với mật độ dài χ .
- Mặt phẳng vô hạn, tích điện đều với mật độ điện mặt σ .
- Mặt trụ tròn dài vô hạn, bán kính a , mật độ điện dài χ .
- Mặt cầu tích điện đều, bán kính a , điện tích q .
- Quả cầu tích điện đều, bán kính a , mật độ điện khối ρ .

12. Điện tích $+q$ phân bố đều trên một vành tròn bán kính a . Tâm của vành tròn trùng với gốc toạ độ O , còn mặt vành trùng với mặt Oyz . Tại gốc toạ độ O có đặt một điện tích $-q$.

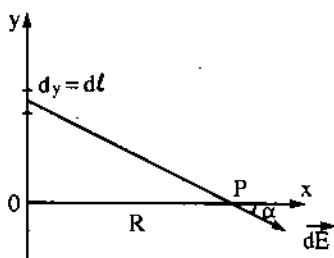
- Tìm thế φ tại điểm P nằm trên trục Ox cách gốc toạ độ O một đoạn bằng x .
- Điện trường tại điểm đó bằng bao nhiêu?
- Điện trường phụ thuộc x như thế nào nếu $x \gg a$. Nó có giảm nhanh hơn điện trường tạo bởi lưỡng cực điện tại các khoảng cách xa không?

13. Tính cường độ điện trường tại một điểm trên trục của một đĩa tròn bán kính a , tích điện đều với điện tích q . Ở khoảng cách nào thì điện trường bằng $\sigma/4\epsilon_0$, trong đó σ là mật độ điện tích mặt của đĩa.

14. Tìm thế φ tại điểm P nằm ở khoảng cách R đến một sợi dây dài $l_1 + l_2$, mật độ dài của dây là χ (hình 2.2).

a) So sánh kết quả thu được với trường hợp $R \gg l_1 + l_2$.

b) Xét trường hợp $R \ll l_1 + l_2$.



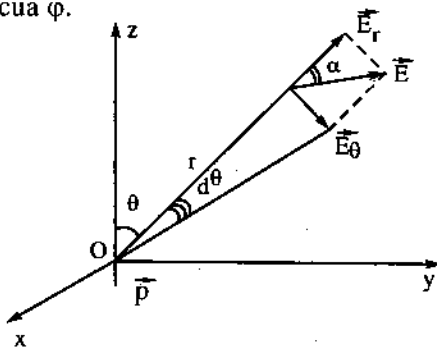
Hình 2.2

So sánh điện trường tìm được nhờ định lí Ôxtogradski-Gaoxơ với điện trường tính được từ kết quả của φ .

15. Thế vô hướng tạo bởi lưỡng cực điện $\vec{p}$ tại một điểm cách lưỡng cực điện một đoạn r có dạng :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

(hệ toạ độ chọn như hình 2.3).



Hình 2.3

a) Tìm thành phần E_r dọc theo bán kính $\vec{r}$ và E_θ vuông góc với bán kính $\vec{r}$ của điện trường tại điểm $M(r, \theta, \psi)$.

b) Chứng minh rằng điện trường tạo bởi lưỡng cực điện ở mọi điểm trên đường thẳng đi qua tâm O của lưỡng cực có cùng phương.

c) Tìm cường độ điện trường E tại điểm cách lưỡng cực một đoạn tùy ý xác định bởi các góc $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$.

16. Cường độ điện trường của một điện tích điểm đặt tại gốc tọa độ có dạng :

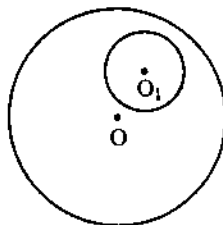
$$\vec{E} = \frac{k}{r^3} \vec{r}$$

trong đó k là một hằng số.

a) Tính thông lượng của véc tơ $\vec{E}$ qua một mặt cầu bán kính a có tâm trùng với gốc tọa độ.

b) Có thể dùng định lí Gauss biến đổi thông lượng E qua mặt cầu sang tích phân theo thể tích của div $\vec{E}$ được không?

17. Điện tích q phân bố đều theo thể tích ($\rho = \text{const}$) giữa hai quả cầu lệch tâm sao cho quả cầu nhỏ nằm hoàn toàn trong quả cầu lớn. Cho rằng hằng số điện môi ở trong hốc cũng bằng ở phần giữa hai quả cầu. Xác định điện trường trong hốc (hình 2.4).



Hình 2.4

18. Ở trạng thái cơ bản của nguyên tử hiđrô, điện tích của electron ($-e$) được phân bố đối xứng cầu với mật độ thể tích là

$$\rho = -\frac{e}{a^3} e^{-r/a}$$

trong đó a là bán kính Bo (Bohr), r là khoảng cách tính từ tâm quả cầu. Hãy tính cường độ điện trường bên trong nguyên tử tạo bởi electron ở điểm cách tâm khoảng r.

19. Một sợi dây thẳng dài vô hạn tích điện đều với mật độ dài χ . Bao quanh sợi dây là một lớp điện môi hình trụ có bán kính R_1 , hằng số điện môi là ϵ_1 . Bên ngoài lớp đó là điện môi vô hạn đồng chất với hằng số điện môi là ϵ_2 .

a) Xác định cường độ điện trường tạo bởi sợi dây đó.

b) Xác định mật độ điện tích liên kết ở mặt tiếp xúc của các lớp điện môi ($R = R_1$).

20. Điện tích được phân bố đối xứng cầu $\rho = \rho(r)$. Bằng cách chia không gian thành những lớp cầu, biểu diễn thế φ và cường độ điện trường qua $\rho(r)$ (viết φ và $\vec{E}$ dưới dạng tích phân một lớp theo r).

21. Xác định điện trường của một tụ điện phẳng có các bản tích điện đều với mật độ điện $+\sigma$ và $-\sigma$. Không gian giữa các bản chứa đầy một lớp điện môi có hằng số điện môi $\epsilon = \epsilon(x)$. Bỏ qua hiệu ứng bờ ; trục x hướng vuông góc với các bản, từ bản có điện tích dương sang bản có điện tích âm.

22. Xác định điện trường tạo bởi mặt cầu tích điện đều có bán kính a . Hằng số điện môi của môi trường $\epsilon = \epsilon(r)$, trong đó r là khoảng cách kể từ tâm hình cầu.

23. Bản trong của một tụ điện cầu tích điện q , bản kia nối đất. Xác định điện tích cảm ứng trên bản nối đất.

24. Cũng bài trên nhưng giữa hai bản là điện môi có hằng số điện môi $\epsilon = \epsilon(r)$. Biết bán kính của các bản là r_1, r_2 ($r_2 > r_1$). Tính điện trường bên trong và bên ngoài tụ điện.

25. Một quả cầu điện môi đồng chất bán kính a , tích điện đều mật độ ρ , hằng số điện môi ϵ_0 . Môi trường xung quanh có hằng số điện môi $\epsilon = \epsilon(r)$.

a) Xác định cường độ điện trường của quả cầu.

b) Xác định mật độ điện tích liên kết ở mặt quả cầu.

26. Thế của trường tĩnh điện trong chân không là :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{-ax}{\epsilon_0} & (x > 0) \\ \frac{ax}{\epsilon_0} & (x < 0) \end{cases}$$

Xác định sự phân bố điện tích tạo ra trường.

27. Thế của trường tĩnh điện trong chân không là :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > a) \\ \frac{-qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 a} & (r < a) \end{cases}$$

trong đó r là khoảng cách kể từ gốc tọa độ, a và q là những hằng số. Xác định sự phân bố điện tích tương ứng.

28. Xác định sự phân bố điện tích tạo ra thế Iukaoa trong chân không :

$$\varphi = q \frac{e^{-r/a}}{\epsilon_0 r}.$$

29. Một bản hình vuông cạnh $2a$ phân bố điện đều, điện tích q . Xác định điện trường trên đường Oz vuông góc với bản và đi qua tâm của bản. Viết giá trị gần đúng của trường tại điểm gần bản với độ chính xác bậc $(z/a)^4$ ($z \ll a$) và tại điểm xa bản ($z \gg a$) với độ chính xác bậc $(a/z)^4$.

30. Bên trong một thể tích V' nào đó có phân bố điện tích e liên tục, mật độ thể tích $\rho = \rho(r')$. Chứng minh rằng nếu chọn gốc tọa độ tại một điểm nào đó bên trong V' , trục Oz đi qua điểm quan sát P thì thế của điện trường trên trục Oz với độ chính xác bậc $(1/z)^3$ có thể viết :

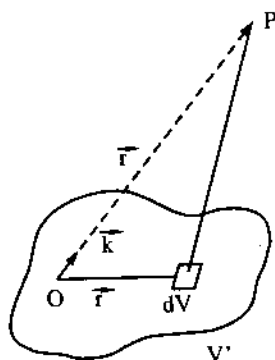
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \chi} \left(a_0 + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_3}{Z^2} \right)$$

trong đó :

$$a_0 = \int_{V'} \rho(r') dV' = e$$

$$a_1 = \int_{V'} z'_i \rho(r'_i) dV' = p$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \int_{V'} (3z_i'^2 - r_i'^2) \rho(r'_i) dV' = Q.$$



Hình 2.5

p và Q là mômen lưỡng cực và mômen tứ cực của điện tích phân bố trong thể tích V' (hình 2.5).

31. Quả cầu dẫn điện bán kính a , nằm trong một quả cầu điện môi đồng tâm bán kính b , có hằng số điện môi ϵ . Tìm điện dung của quả cầu a .

32. Một mặt phẳng vô hạn chia không gian thành hai nửa. Hằng số điện môi ở hai nửa là ϵ_1 và ϵ_2 . Một quả cầu dẫn điện bán kính a có tâm nằm trên mặt phân cách của hai môi trường. Tìm điện dung của quả cầu.

33. Tìm điện dung của các tụ điện sau đây :

a) Hình trụ chiều dài b , bán kính các bản R_1 và R_2 , giữa các bản là hai lớp điện môi đồng trục có hằng số điện môi ϵ_1, ϵ_2 và mặt phân chia có bán kính R_0 . Bỏ qua hiệu ứng bờ.

b) Hình phẳng, diện tích S , giữa hai bản có hai lớp điện môi phẳng song song với S , bề dày d_1, d_2 , hằng số điện môi ϵ_1, ϵ_2 . Bỏ qua hiệu ứng bờ.

34. Một điện tích điểm q nằm trong chân không, cách tâm quả cầu dẫn nối đất một đoạn l ; bán kính của quả cầu là a ($a < l$).

- a) Xác định điện tích cảm ứng trên quả cầu.
- b) Tính lực tương tác giữa điện tích q và quả cầu.
- c) Xét trường hợp quả cầu được giữ ở một điện thế không đổi bằng φ_0 .

35. Một điện tích điểm q nằm cách tâm một mặt cầu một đoạn l . Mặt cầu có bán kính a và tích điện Q ($a < l$). Tìm lực tương tác giữa điện tích và quả cầu.

36. Tính gần đúng năng lượng của hai quả cầu kim loại bán kính a, b tích điện q_1, q_2 nằm cách nhau một quãng r xa so với bán kính ($r \gg a; r \gg b$). Điện tích của chúng là q_1 và q_2 .

37. Tính năng lượng của một quả cầu điện môi bán kính a , tích điện đều theo thể tích. Hằng số điện môi của quả cầu là ϵ , của môi trường xung quanh là ϵ_0 , điện tích của quả cầu là q .

38. Nguyên tử hiđrô ở trạng thái cơ bản. Tính năng lượng tương tác giữa hạt nhân và đám mây electron có mật độ là

$$\rho = \frac{e^{-2r/a}}{\pi a^2}$$

với a là bán kính B_0 , r là khoảng cách tính từ hạt nhân.

39. Tính năng lượng của các tụ điện trong bài 33 nếu điện tích là q .

40. Khoảng cách giữa hai bản của một tụ điện phẳng là d , còn diện tích là S . Giữa hai bản là một lớp điện môi dày đặc. Tụ điện được mắc vào một nguồn để có hiệu điện thế là $\Delta\varphi$, sau đó được ngắt đi. Hỏi công cần thiết để kéo lớp điện môi ra khỏi tụ điện.

41. Hai bản kim loại được đặt thẳng đứng và song song trong một bình chứa điện môi lỏng. Khoảng cách giữa các bản là d và hiệu điện thế giữa chúng là $\Delta\varphi$. Hỏi điện môi lỏng ở giữa hai bản được nâng lên

độ cao bằng bao nhiêu? Cho biết trọng lượng riêng của điện môi lỏng là δ .

42. Một tụ điện trụ được đặt đứng trong một điện môi lỏng. Lớp điện môi giữa hai bản được nâng lên độ cao h . Biết bán kính của tụ điện là R_1 và R_2 , hiệu điện thế giữa hai bản là $\Delta\varphi$. Tính hằng số điện môi của chất lỏng nếu trọng lượng riêng của nó là δ .

43. Điện dung lớn nhất của một tụ điện xoay trong máy thu là 100pF . Khi điều chỉnh máy, các bản của tụ điện dịch chuyển sao cho điện dung có thể giảm tối đa còn lại 10pF . Giả thiết rằng khi tụ điện tích điện đến hiệu điện thế 300V thì điện dung cực đại. Sau đó xoay núm điều chỉnh để tụ điện có điện dung cực tiểu. Tính công thực hiện khi xoay núm điều chỉnh đó.

44. Điện tích trên các bản của hai tụ điện có điện dung C_1 và C_2 là q_1 và q_2 .

a) Chứng minh rằng trong trường hợp không có gì đặc biệt, khi chúng được mắc song song thì năng lượng của hệ giảm.

b) Tìm điều kiện để khi mắc chúng thì năng lượng không bị hao hụt.

45. a) Chứng minh rằng trong điện trường $\vec{E}$, năng lượng tĩnh điện của một lưỡng cực điện có mômen lưỡng cực $\vec{p}$ bằng :

$$W = - \vec{p} \cdot \vec{E}$$

b) Hãy tính mômen lực tác dụng lên lưỡng cực điện đặt trong điện trường $\vec{E}$ (tính trực tiếp và tính nhờ biểu thức năng lượng ở trên).

c) Năng lượng của lưỡng cực có đúng bằng năng lượng tạo bởi hai điện tích của nó đặt liên tiếp trong điện trường không? Nếu không, hãy tính hiệu năng lượng. Nếu có, hãy viết tính toán cụ thể để chứng minh luận điểm của mình.

46. Một tụ điện phẳng được mắc vào một nguồn để giữ cho hiệu điện thế các bản luôn luôn là U_0 . Đưa vào khoảng giữa hai bản đó một bản điện môi có hằng số điện môi là ϵ để lấp đầy.

a) Chứng minh rằng khi đó nguồn điện thực hiện một công bằng $q_0 U_0 (\epsilon - \epsilon_0) / \epsilon_0$ trong đó q_0 là điện tích trên các bản tụ điện ban đầu (khi tụ điện chưa lấp đầy điện môi).

b) Tính công thực hiện bởi lực cơ khi lấp đầy điện môi. Công đó thực hiện do lực đặt lên điện môi hay bởi điện môi?

§ 3. TRƯỜNG ĐIỆN TỬ DÙNG

47. Giữa các bản của một tụ điện hình cầu bán kính r_1, r_2 có một hiệu điện thế U . Không gian giữa các bản là môi trường đồng chất với độ dẫn điện là λ . Tính điện trở giữa các bản, cường độ dòng điện và công suất nhiệt tỏa ra.

48. Giữa các bản của một tụ điện hình trụ chiều dài l bán kính R_1, R_2 có một hiệu điện thế U . Tìm cường độ dòng điện, công suất tỏa nhiệt trên một đơn vị chiều dài hình trụ trong các trường hợp sau đây :

a) Giữa các bản là một môi trường đồng chất có độ dẫn điện là λ .

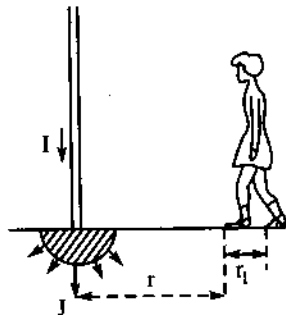
b) Giữa các bản là hai môi trường đồng chất hình trụ đồng trục với độ dẫn điện là λ_1 và λ_2 , bán kính của mặt phân giới là R_0 .

49. Trong môi trường đồng chất có độ dẫn điện $\lambda = \lambda(x, y, z)$ và hằng số điện môi là $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$, có phân bố dòng điện dùng $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z)$. Tìm sự phân bố điện tích theo thể tích trong môi trường này.

50. Tính điện trở nối đất khi có một cực là quả cầu nối đất bán kính r chôn sâu dưới đất (độ dẫn điện của đất là λ).

Cũng như vậy với những cực nối đất chôn một nửa dưới đất.

51. Tính hiệu điện thế giữa các bước chân của một người gần một điện cực nối đất nửa hình cầu (hình 2.6). Hiệu điện thế bước chân là hiệu điện thế giữa hai điểm trên mặt đất cách nhau một khoảng r_1 (bằng một bước chân) trên cùng một đường bán kính kẻ từ tâm điện cực nối đất. Biết cường độ dòng điện của dây dẫn với điện cực là I và độ dẫn điện của đất là λ .



Hình 2.6

52. Trong không gian giữa hai bản của một tụ điện phẳng ta đưa vào hai tấm phẳng song song dẫn điện dính sát nhau và dính sát các bản tụ điện. Các tấm phẳng có bề dày là h_1, h_2 độ dẫn điện λ_1, λ_2 và hằng số điện môi ϵ_1, ϵ_2 . Các bản của tụ điện làm bằng vật liệu có độ dẫn điện lớn hơn λ_1, λ_2 rất nhiều. Đặt hiệu điện thế U vào các bản tụ điện. Xác định cường độ điện trường E , cảm ứng điện D và mật độ dòng j trong các tấm phẳng cũng như mật độ điện tích tự do σ và liên kết σ_{jk} trên tất cả ba mặt phân cách.

53. Dùng một quả cầu dẫn điện lí tưởng bán kính a chôn một nửa vào trong đất để nối đất (độ dẫn điện của đất là λ_1). Lớp đất bán kính b cùng tâm với quả cầu và dính sát nó có độ dẫn điện đã được tăng lên một cách nhân tạo bằng λ_2 . Tìm điện trở của vật nối đất đó.

54. Các dây dẫn được nối với nhau sao cho tạo thành một hình hộp vuông, các cạnh có điện trở như nhau và bằng 1Ω . Hãy tìm điện trở giữa một cặp đỉnh của hình hộp.

Ghi chú : Phải xét tất cả những cặp đỉnh khả dĩ.

55. Tính cường độ từ trường tạo bởi một cặp dây dẫn điện thẳng dài $2L$, có cường độ dòng điện I chạy qua. Xét trường hợp giới hạn khi $L \rightarrow \infty$.

56. Xác định từ trường H và cảm ứng từ B tạo bởi dòng điện một chiều I chạy theo một dây dẫn dài vô hạn, hình trụ tròn bán kính a . Hệ số từ thẩm là μ_0 , của môi trường xung quanh là μ .

57. Một vật hình trụ rỗng, bán kính trong bằng a , bán kính ngoài bằng b . Có một dòng điện cường độ I không đổi chạy trong vật. Xác định từ trường tạo bởi vật dẫn đó.

58. Một dây cáp đồng trục dùng để truyền dòng điện một chiều gồm có một lõi hình trụ, bán kính R_1 và một vỏ hình trụ rỗng có bán kính R_2 và R_3 . Dòng điện có cường độ I chạy đi trong lõi và chạy về trong vỏ. Giữa lõi và vỏ là chất điện môi. Tìm từ trường tạo bởi dây cáp.

59. Một vật dẫn hình trụ tròn dài vô hạn, có một lỗ hổng cũng hình trụ dài vô hạn (tiết diện tròn của lỗ hổng hoàn toàn nằm trong vật dẫn). Một dòng điện không đổi, mật độ $\vec{j}$ chạy dọc theo vật dẫn. Tìm cường độ từ trường bên trong lỗ hổng.

60. Một dây dẫn chữ nhật cạnh $2a$ và $2b$. Có một dòng điện cường độ I chạy trong đó. Xác định từ trường tạo ra trong chân không trên trục đi qua tâm của dây dẫn.

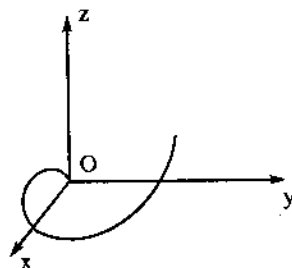
61. Một dây dẫn có dạng một đa giác đều n cạnh, chiều dài mỗi cạnh $2a$. Có một dòng điện cường độ I chạy trong đó. Tìm từ trường trên trục vuông góc và đi qua tâm của đa giác.

62. Theo một công tua tròn bán kính r_0 có một dòng điện I chạy. Tìm từ trường tạo ra trên trục của công tua.

63. Một dây dẫn có hình xoắn ốc phẳng (hình 2.7). Phương trình trong hệ tọa độ cực có dạng :

$$r = \frac{L\varphi}{2\pi N},$$

trong đó N là số vòng; L là chiều dài của bán kính vectơ kẻ từ tâm xoắn đến đầu ngoài cùng của dây dẫn. Có một dòng điện cường độ I chạy trong dây dẫn. Tính thành phần cảm ứng từ B trên trục của dây dẫn cách mặt phẳng một đoạn Z .



Hình 2.7

64. Tính từ trường bên trong một dây xolênôit dài vô tận có các vòng quấn sát nhau, cho biết cường độ của dòng điện là I , và số vòng quấn trên đơn vị chiều dài của xolênôit là N .

65. Trên một hình nhẫn bán kính R (tiết diện tròn bán kính a) quấn N vòng dây dẫn có dòng điện I chạy. Coi dây dẫn đủ mảnh, xác định cường độ từ trường bên trong và bên ngoài xolênôit nói trên.

66. Tính thế vectơ $\vec{A}$ và cảm ứng từ $\vec{B}$ tạo bởi một dây dẫn điện tròn, có dòng điện I chạy tại một điểm ở cách xa vòng tròn. Bán kính vòng tròn là a . Khoảng cách từ tâm vòng tròn đến điểm xác định trường là R ($R \gg a$).

Từ kết quả suy ra rằng trường đó giống như trường tạo bởi mômen lưỡng cực điện có mômen từ bằng :

$$\mu = I\pi a^2.$$

67. Nghiệm lại rằng thế vectơ $\vec{A}$ ứng với trường đồng nhất $\vec{B} = \text{const}$ có thể viết dưới dạng :

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B} \cdot \vec{r}].$$

Tìm một vài dạng đơn giản khác của thế vectơ ứng với từ trường đó, nghiệm lại rằng các thế vectơ ấy sai khác nhau grad của một hàm vô hướng.

68. Giải bài toán 56 bằng cách đưa vào thế vectơ $\vec{A}$ và phương trình Poatxông (Poisson) đối với thế $\vec{A}$.

69. Giải bài 57 bằng cách đưa vào thế vectơ $\vec{A}$ và phương trình Poatxông đối với thế $\vec{A}$.

70. Tìm thế vectơ $\vec{A}$ và từ trường $\vec{H}$ tạo bởi hai dòng điện I thẳng song song và ngược chiều nhau. Khoảng cách giữa hai dòng là a .

71. Một quả cầu bán kính a , mang điện tích e phân bố đều trên mặt của nó và quay xung quanh một đường kính với vận tốc góc $\vec{\omega}$. Tính từ trường bên trong và bên ngoài quả cầu. Biểu diễn từ trường $\vec{H}$ bên ngoài quả cầu qua mômen từ $\vec{\mu}$ của quả cầu.

72. Một quả cầu bán kính R , nhiễm từ đều với mômen từ của một đơn vị thể tích là $\vec{M}$. Tìm từ trường $\vec{H}$ và cảm ứng từ $\vec{B}$ tạo bởi quả cầu đó.

73. Tìm lực tương tác của hai dây dẫn song song vô hạn nằm cách nhau một khoảng d có các dòng điện I_1 và I_2 chạy qua. Độ từ thẩm của môi trường là μ .

74. Một dây dẫn bằng đồng ABCD có bán kính a , được uốn thành 3 cạnh một hình vuông (xem hình vẽ ở phần giải). Hai đầu AD gắn với trục nằm ngang OO' sao cho dây ABCD có thể tự do quay xung quanh trục OO' . Đặt dây trong từ trường H đều thẳng đứng. Trên dây dẫn có một dòng điện I chạy. Hỏi dây dẫn bị lệch đi một góc α bằng bao nhiêu. Trọng lượng riêng của đồng là δ .

75. Một dòng điện dài vô hạn I_1 , và một dòng điện tròn I_2 bán

kính a nằm trong cùng một mặt phẳng. Khoảng cách từ tâm vòng tròn đến dây điện dài bằng $b > a$. Tìm lực tác dụng lên dòng điện tròn.

76. Chứng minh rằng lực tương tác giữa hai dòng điện dài kín trong môi trường đồng chất thỏa mãn định luật về sự cân bằng giữa lực và phản lực.

77. Tính độ tự cảm L của một đơn vị chiều dài của một dây gồm hai trụ mỏng đồng trục, bán kính a và b ($a < b$), không gian giữa chúng chứa đầy một chất có hệ số từ thẩm là μ .

§ 4. TRƯỜNG ĐIỆN TỪ CHUẨN DÙNG

78. Một khung dây phẳng quay với vận tốc góc không đổi trong một từ trường đều, trục quay vuông góc với trường. Cảm ứng từ của từ trường là B , diện tích của công tua là S . Tính :

- a) Suất điện động cảm ứng của khung dây.
- b) Cường độ dòng điện, biết rằng điện trở của khung dây là R và độ tự cảm là L .

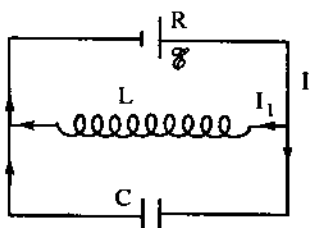
79. Một vòng dây tròn bán kính a , nằm trong từ trường không đổi có cảm ứng từ $\vec{B}$, quay với vận tốc góc ω xung quanh đường kính vuông góc với $\vec{B}$. Tính :

- a) Cường độ dòng điện chạy trong dây, cho rằng lúc đầu mặt phẳng của vòng dây song song với từ trường. Biết vòng dây có điện trở R và độ tự cảm là L .
- b) Tính mômen lực hãm N .

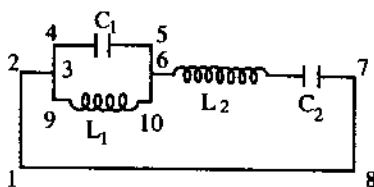
80. Một tụ điện C được tích điện với điện tích q_0 . Mắc tụ điện vào một mạch kín có điện trở R và độ tự cảm L . Xác định điện tích trên các bản của tụ điện là hàm của thời gian.

81. Một bộ acquy có suất điện động $\mathcal{E}$ và điện trở trong R , một tụ điện C và một cuộn tự cảm L được mắc song song (hình 2.8). Bỏ qua điện trở của cuộn tự cảm và dây dẫn.

- Tính cường độ dòng điện I đi qua acquy sau khi đã mắc mạch.
- Sau khi chế độ dừng đã được thiết lập, tháo bộ acquy ra. Điện tích q trên tụ điện sẽ biến đổi như thế nào ?



Hình 2.8



Hình 2.9

82. Một tụ điện C_1 và một cuộn tự cảm L_1 được mắc song song. Người ta mắc nối tiếp với mạch đó một cuộn tự cảm L_2 , một tụ điện C_2 . Tích điện cho tụ C_1 , không tích điện cho C_2 . Đóng mạch để hệ thành một mạch kín. Hãy lập phương trình vi phân xác định điện tích q của tụ điện C_2 . Bỏ qua điện trở của các cuộn tự cảm và dây dẫn (hình 2.9).

83. Một mạch gồm điện trở R và tụ điện có điện dung C_1 mắc song song. Hệ được mắc nối tiếp với tụ điện C_2 vào một bộ acquy có suất điện động không đổi bằng $\mathcal{E}$. Bỏ qua điện trở nội của acquy, cảm ứng và điện trở của dây. Xác định điện tích của tụ điện C_2 .

84. Một mạch dao động gồm một cuộn tự cảm L , hai tụ điện C_1 và C_2 mắc nối tiếp. Lúc đóng kín mạch, điện tích ở C_1 là Q , còn trên C_2 bằng không. Tính cường độ dòng điện trên mạch.

85. Một mạch gồm một tụ điện có điện dung C và một cuộn tự cảm L mắc song song (bỏ qua điện trở của mạch). Mắc nối tiếp mạch trên vào một mạch có một nguồn biến thiên tần số ω . Hỏi với điều kiện nào của tần số ω thì cường độ dòng điện trong mạch bằng không?

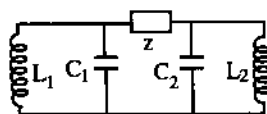
86. Một mạch dao động gồm một điện dung C và một cuộn tự cảm L . Ở một thời điểm nào đó người ta mắc vào các bản của tụ điện một bộ pin có suất điện động không đổi $\mathcal{E}$ và có điện trở trong R . Biết rằng tần số dao động riêng của mạch $\omega_0 = 1/2RC$. Tìm cường độ dòng điện chạy qua cuộn tự cảm L .

87. Người ta đặt vào trong một mạch nối tiếp của điện trở R và cuộn tự cảm L một điện thế xung hình chữ nhật : $V_1(t) = V_0$ khi $0 \leq t \leq T$ và $V_1(t) = 0$ khi $t < 0$ và $t > T$. Tìm điện thế $V_2(t)$ trên cuộn tự cảm L .

88. Một mạch nối tiếp gồm một điện trở R , một cuộn tự cảm L . Người ta mắc vào đó một suất điện động $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ lúc $t = 0$. Xác định cường độ dòng điện $I(t)$ trong mạch. Với giá trị nào của φ_0 các hiện tượng chuyển trong mạch không xuất hiện?

89. Tìm các tần số dao động trong hai mạch liên kết cảm ứng có các điện dung C_1, C_2 và độ tự cảm L_1, L_2 tương ứng. Hệ số hồ cảm là L_{12} .

90. Hai mạch C_1, L_1 và C_2, L_2 liên kết với nhau qua trở kháng Z (hình 2.10). Xác định các tần số của dao động điện trong các mạch ở các trường hợp sau :



Hình 2.10

a) Sự liên kết thực hiện qua điện dung ($Z = i/\omega C$).

b) Sự liên kết thực hiện qua cảm ứng ($Z = i\omega L$).

c) Sự liên kết thực hiện qua điện trở thuần ($Z = R$).

§ 5. SÓNG ĐIỆN TỪ

91. a) Chứng minh rằng nếu điện trường phụ thuộc thời gian t và tọa độ x (không phụ thuộc y và z) dưới dạng :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad (1)$$

thì mỗi thành phần (trên các trục tọa độ x, y, z) của vectơ cường độ điện trường thỏa mãn phương trình sóng.

b) Phần thực của E trong (1) biểu diễn một sóng phẳng lan truyền theo trục x . Sóng đó lan truyền theo hướng nào của trục x ?

c) Chứng minh rằng nếu toán tử ∇ tác dụng lên hàm có dạng như (1) ở phần a) thì toán tử ∇ có dạng sau

$$\nabla = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \vec{i}(-ik)$$

trong đó $\vec{i}$ là vectơ đơn vị hướng theo trục Ox . Điều đó có nghĩa là tác dụng của toán tử ∇ lúc này chỉ là nhân hàm đó với một số. Có thể khẳng định một cách tương tự đối với toán tử lấy đạo hàm riêng theo thời gian được không?

d) Dùng kết quả của câu a), chứng minh rằng phương trình Macxoen (Maxwell) đúng với một trường phụ thuộc x và t theo hàm sin. Tìm biểu thức liên hệ giữa E và k .

e) Các kết quả này thay đổi như thế nào nếu như điện trường có dạng $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i(\omega t + kx)}$.

92. Chứng minh rằng trong môi trường đồng chất, đẳng hướng, không có điện tích tự do, thế của trường điện từ thỏa mãn các phương trình sau đây :

$$\nabla^2 \varphi = \sigma\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \bar{A} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2}$$

nếu như hệ thức định cỡ được chọn là

$$\operatorname{div} \bar{A} + \sigma\mu\varphi + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

93. Người ta định nghĩa thế phân cực hay là vectơ Hec (Hertz) $\bar{\Pi}$ là :

$$\bar{\Pi} = \frac{\bar{P}}{r} = \frac{1}{r} \bar{p}_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

thỏa mãn phương trình D'Alembert)

$$\nabla^2 \bar{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} = 0$$

Chúng minh rằng các thế vô hướng φ và thế vectơ $\bar{A}$ có thể biểu diễn qua vectơ Hec nhờ các hệ thức :

$$\varphi = -\operatorname{div} \bar{\Pi} ; \bar{A} = \sigma\mu \bar{\Pi} + \varepsilon\mu \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t}$$

đòi hỏi để cho

$$\nabla^2 \bar{\Pi} = \sigma\mu \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2}$$

Hãy biểu diễn $\bar{E}$ và $\bar{H}$ qua $\bar{\Pi}$.

94. Chứng minh rằng khi từ trường đối xứng trục ($H_x = H_y = 0$; $H_z = H(r, t)$) biến đổi theo thời gian thì xuất hiện điện trường xoáy mà

đường sức là những vòng tròn đồng tâm có tâm nằm trên trục của từ trường. Ta cũng biết rằng betatron hoạt động trên cơ sở của hiện tượng này (lấy $\epsilon' = \mu = 1$, chân không).

95. Chứng minh rằng trong môi trường không dẫn, sóng phẳng đơn sắc là phân cực elíp.

96. Xác định tần số và trạng thái phân cực của sóng điện từ tạo bởi hai sóng cùng biên độ, có tần số rất gần nhau, phân cực tròn theo các hướng ngược nhau và lan truyền theo cùng một hướng.

97. Trong một môi trường không dẫn có một sóng điện từ phẳng đơn sắc truyền đi. Tính thế vectơ của trường này nếu như :

a) Sóng là phân cực thẳng.

b) Sóng là phân cực tròn.

98. Trong chân không, một sóng điện từ phẳng tới đập vào một mặt phẳng vô hạn của một chất điện môi đồng chất, không nhiễm từ ($\epsilon', \mu' = 1$). Góc giữa phương truyền sóng và mặt phẳng là α . Hướng phân cực của sóng điện từ làm với mặt phẳng tới một góc θ . Tính hệ số phản xạ và truyền qua.

99. Chứng minh rằng trong trường hợp bài toán trên có phản xạ và khúc xạ của sóng điện từ, định luật bảo toàn năng lượng vẫn thỏa mãn.

100. Xét sự phản xạ sóng phẳng đơn sắc trên mặt giới hạn của hai môi trường đồng chất, không dẫn điện và không nhiễm từ ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$;

$\mu'_1 = \mu'_2 = 1$) trường hợp khi $\epsilon_2 < \epsilon_1$ và $\sin \alpha > \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$. Chứng minh rằng hệ số phản xạ bằng đơn vị (phản xạ toàn phần).

§ 6. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

101. Thành lập công thức biến đổi Loren (Lorentz) cho trường hợp vận tốc tương đối của hai hệ có hướng tùy ý.

102. Viết công thức biến đổi Loren cho trường hợp gốc toạ độ và gốc thời gian chọn tùy ý.

103. Tìm lại luật hợp các vận tốc song song bằng hai phép biến đổi Loren đặc biệt.

104. Chứng minh hệ thức :

$$u = \frac{\sqrt{(\bar{u}' + \bar{v})^2 - [\bar{u}' \cdot \bar{v}]^2 / c^2}}{1 + \frac{1}{c^2} (\bar{u}' \bar{v})}$$

trong đó $\bar{u}$ và $\bar{u}'$ là vận tốc của một hạt trong các hệ K và K', $\bar{v}$ là vận tốc tương đối của hệ K' đối với hệ K.

105. Vận tốc của một hạt đối với hệ quy chiếu K' là u' nằm trong mặt phẳng x'O'y' hợp với trục O'x' một góc θ' . Hệ K' chuyển động dọc theo trục Ox của hệ K. Hãy xác định phương của vận tốc u của hạt trong hệ K.

106. Một giọt mưa rơi do trọng lượng của nó để lại vết trên cửa kính một ô tô chạy với vận tốc V. Xác định góc lệch của vết giọt mưa so với phương thẳng đứng theo quan điểm cổ điển và quan điểm tương đối. Coi giọt mưa rơi đều với vận tốc v.

107. Hai tên lửa được phóng đi từ Trái Đất trên cùng một phương theo hai hướng ngược nhau với vận tốc bằng 0,8c đối với Trái Đất. Hỏi :

a) Hai tên lửa tách xa nhau với vận tốc bằng bao nhiêu theo quan điểm của người đứng trên Trái Đất.

b) Vận tốc của một tên lửa đối với hệ quy chiếu gắn với tên lửa kia.

108. a) Tìm thời gian sống trung bình của một dòng mêzôn π^+ chuyển động với vận tốc $\beta = 0,73$ (thời gian sống riêng trung bình của mêzôn π^+ là $\tau = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$).

b) Quãng đường mêzôn π^+ đi được là bao nhiêu?

c) Quãng đường mêzôn π^+ đi được là bao nhiêu nếu không kể đến hiệu ứng tương đối?

109. Thời gian sống riêng trung bình của mêzôn μ khoảng $2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Giả sử có một dòng mêzôn μ từ một độ cao nào đó trong khí quyển chuyển động xuống dưới với vận tốc $V = 0,99c$. Số va chạm trong khí quyển trên đường đi của chúng xuống dưới là không lớn. Nếu như tại mặt đất chỉ còn lại 1% số mêzôn của dòng ban đầu, hãy xác định độ cao ban đầu (trong hệ quy chiếu của dòng mêzôn, số hạt còn lại sau thời gian t được xác định bằng công thức $N(t) = N(0) \cdot e^{-t/T}$).

110. Theo quan điểm của một quan sát viên trên một xe chuyển động thì hai sét đánh tại hai điểm A (trước xe) và B (sau xe) xảy ra đồng thời. Hỏi theo quan điểm của người đứng trên mặt đất thì sét nào trước, sét nào sau?

111. Trong hệ K, một hình vuông ABCD có tọa độ các đỉnh bằng :

$$A(x_A = 1 ; y_A = 4)$$

$$B(x_B = 3 ; y_B = 4)$$

$$D(x_D = 3 ; y_D = 2)$$

a) Khi đồng hồ trong hệ K chỉ thời điểm $t = \frac{2\sqrt{3}}{c}$ thì tọa độ các đỉnh A, B, D trong hệ K' là bao nhiêu? Đồng hồ tại các đỉnh đó chỉ thời điểm nào.

b) Khi đồng hồ trong hệ K' chỉ thời điểm $t' = \frac{2\sqrt{3}}{c}$ thì tọa độ các đỉnh A, B, D trong hệ K' là bao nhiêu?

c) Tính kích thước của hình vuông trong hệ K' và so sánh với kích thước của nó trong hệ K .

Cho biết vận tốc của hệ K' là $v = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

112. Một “đoàn tàu Anhxtanh” (Einstein) $A'B'$ có chiều dài riêng $l_0 = 8,64 \cdot 10^8 \text{ km}$ và vận tốc $v = 2,4 \cdot 10^5 \text{ km/s}$, chuyển động ngang qua một “sân ga” AB có chiều dài riêng cũng bằng l_0 , ở đầu B' và cuối A' đoàn tàu có những đồng hồ chạy đồng bộ với nhau. Ở đầu A và cuối B sân ga cũng có những đồng hồ chạy đồng bộ với nhau. Lúc đầu tàu đi ngang qua sân ga, đồng hồ ở A và B' cùng chỉ 0h. Hỏi :

a) Có thể khẳng định là khi đó mọi đồng hồ trong các hệ quy chiếu gắn với sân ga và đoàn tàu đều chỉ 0h được không?

b) Khi đuôi tàu đi ngang qua đầu sân ga thì các đồng hồ ở A, B, A', B' chỉ mấy giờ?

c) Khi đầu tàu ngang qua cuối sân ga thì các đồng hồ đó chỉ mấy giờ?

113. Tìm quy luật biến đổi của các thành phần của gia tốc khi chuyển từ một hệ quy chiếu quán tính này sang hệ quy chiếu quán tính khác.

114. Một tên lửa được phóng từ Trái Đất vào khoảng không giữa các vì sao, tên lửa hướng tới một ngôi sao có khoảng cách là l và chuyển động thẳng tăng dần. Gia tốc của tên lửa trong hệ quy chiếu riêng luôn luôn giữ không đổi và bằng a' .

Hỏi theo đồng hồ của các nhà du hành trên con tàu thời gian T' để con tàu tới được ngôi sao đó là bao nhiêu?

115. Khối lượng nghỉ của hạt là m . Hãy biểu diễn vận tốc của nó theo :

- a) Năng lượng toàn phần E .
- b) Động năng T .
- c) Xung lượng p .

116. Mêzôn π đứng yên tự phân hủy thành mêzôn μ và neutrino ($m_\nu = 0$). Biết khối lượng của mêzôn π và mêzôn μ , tính động năng của mêzôn μ .

117. Chứng minh rằng khi không có trường ngoài, photon không thể biến thành cặp electron-pôzitron.

118. Một hạt m có năng lượng W bay tới đập vào một hạt khác đứng yên khối lượng M . Xác định năng lượng W_1 của hạt này sau khi va chạm (phụ thuộc vào góc tán xạ θ). Va chạm coi là đàn hồi.

Xét trường hợp $m = 0$ (hiệu ứng Compton (Compton)).

119. Chứng minh rằng vectơ phân cực $\vec{P}$ và vectơ từ hóa $\vec{I}$ lập thành một tenxơ hạng hai 4 chiều.

120. Trong chân không đối với một hệ quy chiếu K nào đó có một trường điện và một trường từ đều ($\vec{E} = \text{const}$; $\vec{H} = \text{const}$) vuông góc với nhau. Hơn nữa $E < H$. Chứng minh rằng, có một hệ quy chiếu K' sao cho trong đó trường là thuần từ và tính cường độ của nó.

121. Gọi $\vec{E}$ và $\vec{B}$ là điện trường và cảm ứng từ của một điểm nào đó trong không gian đối với một hệ quy chiếu K nào đó. Hãy xác định

vận tốc của một hệ quy chiếu khác sao cho trong hệ này điện trường và từ trường song song với nhau. Bài toán có phải chỉ có một lời giải duy nhất không?

122. Hãy tìm một vectơ 4 chiều sao cho các thành phần không gian của nó trùng với các thành phần của vectơ :

$$[\vec{J} \cdot \vec{B}] + \rho \vec{E}$$

Cho biết ý nghĩa vật lý của các thành phần không gian và thành phần thời gian của vectơ đó.

123. Gọi f_μ là vectơ lực 4 chiều tác dụng lên hạt. u_μ là vectơ vận tốc 4 chiều của hạt. Chứng minh rằng :

$$f_\mu u_\mu = 0.$$

124. Tìm điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{B}$ tạo bởi điện tích điểm trong hệ quy chiếu chuyển động so với điện tích điểm.

125. Theo một dây thẳng dài vô hạn (điện trở không đáng kể) có một dòng điện I chạy. Dòng I do các electron chạy với vận tốc $\vec{v}$. Mật độ điện tích ở mỗi điểm của dây dẫn bằng không nhờ đó các điện tích dương đứng yên (các ion dương).

a) Tìm trường bên ngoài dây dẫn trong hệ tọa độ mà dây dẫn đứng yên.

b) Tìm trường đó trong hệ tọa độ gắn với điện tích chuyển động.

B. BÀI GIẢI

1. Biểu diễn các phép tính grad, div, rot qua toán tử ∇ . Sử dụng tính chất véctơ của toán tử ∇ ta có ngay :

$$\text{div. rot } \vec{A} = \nabla[\nabla \cdot \vec{A}] = [\nabla \cdot \nabla] \cdot \vec{A} = 0$$

$$\text{rot. grad } \varphi = [\nabla \cdot \nabla] \cdot \varphi = 0.$$

$$2. \quad \text{div } \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\text{rot } \vec{r} = \vec{i} \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right)$$

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x}(\vec{a} \cdot \vec{r}) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}(\vec{a} \cdot \vec{r}) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}(\vec{a} \cdot \vec{r})$$

$$= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \vec{a}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{r}) = a_x x + a_y y + a_z z$$

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{r} = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{a}.$$

$$3. \quad \text{rot}(\varphi(r) \cdot \vec{r}) = \vec{i} \left[\frac{\partial \varphi(r)z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi(r)y}{\partial z} \right] + \vec{j} \left[\frac{\partial \varphi(r)x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi(r)z}{\partial x} \right] \\ + \vec{k} \left[\frac{\partial \varphi(r)y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(r)x}{\partial y} \right]$$

$$\forall i \quad \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(r)y) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} \cdot y$$

và tương tự $\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(r)x) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} \cdot x ; \dots$

suy ra từng số hạng trong vế phải bằng không, do đó :

$$\text{rot}[\varphi(r) \cdot \vec{r}] = 0$$

$$\text{grad}\varphi(r) = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r}$$

$$\begin{aligned} \text{div}\varphi(\vec{r}) \cdot \vec{r} &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi(r)z) \\ &= 3\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial x}x + \frac{\partial r}{\partial y}y + \frac{\partial r}{\partial z}z \right) = 3\varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \nabla)\varphi(r) \vec{r} &= \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [\varphi(r)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(a_x \frac{\partial r}{\partial x} + a_y \frac{\partial r}{\partial y} + a_z \frac{\partial r}{\partial z} \right) \vec{r} + \varphi(r)(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \\ &= \vec{a} \cdot \varphi + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned}$$

4. Chú ý tới tác dụng đạo hàm của toán tử ∇ . Thí dụ :

$$\text{rot}[\vec{A} \cdot \vec{B}] = [\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}]] = [\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}]] + [\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}]]$$

(mũi tên chỉ tác dụng của phép lấy đạo hàm).

Áp dụng tính chất tích kép của ba vectơ, ta có :

$$[\nabla[\vec{A} \cdot \vec{B}]] = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - \vec{B} \text{div} \vec{A}$$

$$[\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B})] = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} = \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}.$$

5. Sử dụng công thức của bài trên và các công thức về tích hỗn hợp và tích kép của ba vectơ. Chú ý tới tác dụng đạo hàm của toán tử.

6. Áp dụng các công thức đã cho của bài 4 ta có ngay :

$$\operatorname{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p} ; \quad \operatorname{div} [\vec{p} \cdot \vec{r}] = 0 ; \quad \operatorname{rot} [\vec{p} \cdot \vec{r}] = 2\vec{p}.$$

$$\operatorname{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \cdot \vec{r}$$

$$7. a) (\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$(\Delta \vec{A})_\theta = \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$(\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}$$

$$b) (\Delta \vec{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$(\Delta \vec{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}$$

$$(\Delta \vec{A})_z = \Delta A_z$$

8. Theo định lí Xtốc (Stokes) :

$$\int_S [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] d\vec{S}$$

vì $\vec{\omega} = \text{const}$, theo bài 6 $\operatorname{rot} [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = 2\vec{\omega}$,

nên tích phân trên bằng

$$\int_S 2\omega d\vec{S} = 2\pi\omega r^2.$$

Có thể tính trực tiếp. Vectơ $[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ tại mỗi điểm trên vòng tròn có phương tiếp tuyến với vòng tròn tại điểm đó, nên ta có :

$$\oint_S [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] d\vec{l} = \omega r \oint dl = 2\pi\omega r^2.$$

9. Chọn gốc toạ độ trùng với tâm của đáy hình trụ, trục Oz có hướng dọc theo trục của hình trụ (hình 2.1). Ở đây :

$$\oint_S \vec{r} d\vec{S} = \int_{S_I} \vec{r} d\vec{S} + \int_{S_{II}} \vec{r} d\vec{S} + \int_{S_b} \vec{r} d\vec{S}$$

trong đó S_I và S_{II} là mặt trên và đáy của hình trụ, còn S_b là mặt bên của hình trụ. Ta có :

$$\int_{S_I} \vec{r} d\vec{S} = 0; \quad \int_{S_{II}} \vec{r} d\vec{S} = \pi h a^2.$$

vì rằng

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = r \cdot dS \cdot \cos(\vec{r} \cdot d\vec{S}) = 0 \text{ đối với các điểm ở đáy dưới.}$$

$\vec{r} \cdot d\vec{S} = r \cdot dS \cdot \cos(\vec{r} \cdot d\vec{S}) = h dS$ đối với các điểm ở mặt trên. Cuối cùng tích phân theo mặt bên bằng :

$$\int_{S_b} \vec{r} \cdot d\vec{S} = 2\pi h a^2 \text{ vì } \vec{r} \cdot d\vec{S} = a dS.$$

$$\text{Kết quả là : } \oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = 3\pi h a^2$$

Có thể dùng định lí Gauss. Ta có :

$$\oint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{r} dV = 3\pi h a^2$$

ở đây $\text{div } \vec{r} = 3$ (bài 2), $V = \pi a^2$.

10. Nhân tích phân đó với vectơ không đổi bất kì :

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \vec{I} &= \vec{p} \oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \oint (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{a}_n dS = \\ &= \int_V \text{div} \{ (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{a} \} dV = \vec{a} \cdot \vec{p} \cdot V, \quad \text{từ đó có } \vec{I} = \vec{a} V.\end{aligned}$$

Tương tự nhân $\vec{p}$ với tích phân kia, ta có

$$\oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} \cdot d\vec{S} = \vec{a} V$$

Như thế hai tích phân bằng nhau.

11. Do tính chất đối xứng của điện tích, có thể thấy ngay phương của điện trường ; chỉ cần tính giá trị của điện trường. Muốn vậy ta chia vật thành những phần nhỏ có hình dạng thích hợp sao cho có thể áp dụng được định luật Culông, sau đó lấy tích phân theo toàn bộ thể tích.

a) Điện trường tại P có phương vuông góc với sợi dây (hình 2.11a).

Giá trị của cường độ điện trường tạo bởi phần tử $d\vec{l}$ của sợi dây :

$$dE = \frac{\chi d\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Cường độ điện trường tại P là :

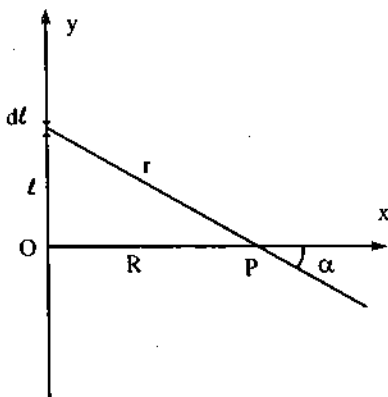
$$\begin{aligned}E &= \int dE \cdot \cos \alpha = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha dl}{r^2} \\ &= \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 R}.\end{aligned}$$

b) Điện trường tạo ở P có phương vuông góc với mặt phẳng (hình 2.11b), tức là $E \equiv E_x$.

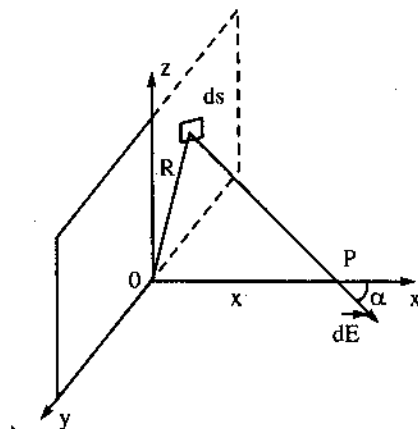
Giá trị của điện trường tạo bởi yếu tố mặt dS của mặt phẳng là :

$dE = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Điện trường tạo bởi mặt phẳng là :

$$E = E_x = \int dE \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\chi R dR d\theta}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{|x|}$$



Hình 2.11a

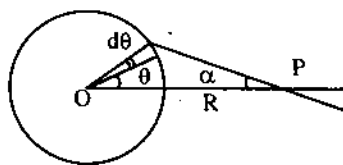


Hình 2.11b

c) Điện trường tạo ở P có phương vuông góc với mặt trụ (hình 2.11c).

Chia mặt trụ thành những dải nhỏ đều vô hạn chắn bởi góc $d\theta$. Sử dụng kết quả câu a), nhớ rằng mật độ điện dài của dải đó là $\chi d\theta/2\pi$. Như thế ta có :

$$dE = \frac{\chi d\theta}{4\pi^2\epsilon_0 r}$$



Hình 2.11c

Cường độ điện trường tạo bởi cả mặt trụ :

$$E = \frac{\chi}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{r} d\theta$$

$$\text{Thay } \cos \alpha = \frac{R - a \cos \theta}{r}, r = \sqrt{R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta}$$

vào công thức trên, ta có :

$$E = \frac{\chi}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R - a \cos \theta}{R^2 + a^2 - 2aR \cos \theta} d\theta = \frac{\chi}{4\pi^2 \epsilon_0 R} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{|R^2 - a^2|} \right)$$

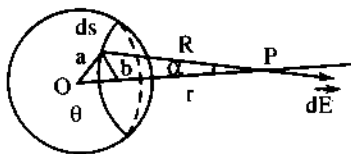
$$\text{Bên ngoài hình trụ } R > a \quad E = \frac{\chi}{2\pi \epsilon_0 R}$$

$$\text{Bên trong hình trụ } R < a \quad E = 0.$$

d) Điện trường có phương dọc theo bán kính mặt cầu và đi qua điểm đang xét (hình 2.11d).

Cường độ điện trường tạo bởi yếu tố mặt cầu dS :

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\sigma dS}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{q}{(4\pi)^2 a^2 \epsilon_0} \frac{dS}{R^2} = \\ &= \frac{q}{(4\pi)^2 \epsilon_0 R^2} \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$



Hình 2.11d

Điện trường tạo bởi cả mặt cầu

$$E = \int dE \cdot \cos \alpha,$$

$$\text{thay } \cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{R}; b = a \sin \theta;$$

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \text{ vào công thức trên ta có :}$$

$$E = \frac{q}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{1}{|r-a|} - \frac{1}{r+a} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{|r-a|} + \frac{1}{r+a} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{ar^2} (r+a-|r-a|) \right\}.$$

Bên ngoài quả cầu $r > a$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Bên trong quả cầu $r < a$ $E = 0$.

e) Tương tự câu d). Chia quả cầu thành những lớp cầu mỏng có bề dày dr_1 , bán kính r_1 . Điện trường tạo bởi lớp cầu đó tại một điểm cách tâm một đoạn r bằng

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r_1^2}{\epsilon_0 r^2} dr_1.$$

Bên ngoài quả cầu $r > a$ $E = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \int_0^a r_1^2 dr_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$

Bên trong quả cầu $r < a$ $E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}.$

12. a) Do tính chồng chất của thế vô hướng :

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right)$$

b) $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \right)$

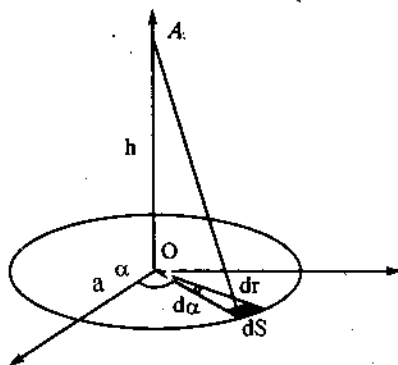
c) Giả sử $x \gg a$, với độ chính xác bậc a^2/x^2 , ta có :

$$E_x = \frac{3qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}$$

Như thế điện trường của vành tròn tích điện giảm nhanh hơn lưỡng cực điện ở những nơi xa.

13. a) Thế φ tại điểm A cách tâm O của đĩa một đoạn h (hình 2.12) là :

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left(\sqrt{a^2 + h^2} - h \right).\end{aligned}$$



Hình 2.12

(Ở đây dùng hệ tọa độ cực, gốc O tại tâm đĩa. Khi đó mặt đĩa được chia thành những yếu tố dS , có diện tích là $dq = \sigma r dr d\alpha$).

Do tính chất đối xứng trục của đĩa tích điện, vectơ điện trường hướng dọc theo trục đĩa và bằng :

$$E_h = -\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right).$$

Ta cũng có thể tính trực tiếp điện trường theo định lí Culông như bài 11.

b) Thay $E_h = \sigma/4\epsilon_0$ ta thu được

$$|h| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

14. Lấy trục Oy dọc theo sợi dây. Chia dây thành những mẩu nhỏ có điện tích χdy và cách P một đoạn $\sqrt{y^2 + r^2}$. Thế vô hướng tạo bởi cả sợi dây ở điểm P là :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\chi dy}{\sqrt{y^2 + r^2}} = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{l_2^2 + r^2} + l_2}{\sqrt{l_1^2 + r^2} - l_1}$$

a) Giả sử $r \gg l_1, l_2$. Khi đó với độ chính xác bậc l^2/r^2 , ta có

$$\varphi = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{l_1 + l_2}{r}$$

b) Giả sử $r \ll l_1, l_2$. Khi đó với độ chính xác bậc r^2/l^2 , ta có

$$\varphi = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4l_1 l_2}{r^2}$$

Có thể áp dụng định lí Gauss, khi đó ở một khoảng cách rất bé đến sợi dây, cả sợi dây coi như vô hạn vì phần đầu sợi dây ít có tác dụng tới miền lân cận sợi dây. Bao quanh sợi dây một mặt trụ có chiều dài đơn vị, bán kính r tùy ý (nhưng đủ nhỏ !) và nhớ rằng ở lân cận sợi dây điện trường hướng theo đường kính. Khi đó có :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \cdot l \cdot 2\pi r = \frac{\chi l}{\epsilon_0}$$

$$\text{Từ đó suy ra } E_r = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Kết quả này trùng với kết quả tính E_r theo φ ở trên :

$$E_r = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

Đúng vậy,
$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \frac{4l_1 l_2}{r^2} \right) = -\frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{du}{dr}$$

với
$$u = \frac{4l_1 l_2}{r^2}$$

Kết quả là
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2}{r}.$$

15. a)
$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cdot \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{p \cdot \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{p \cdot \sin \theta}{r^3}$$

(thành phần $E_\psi = 0$, vì không phụ thuộc vào ψ).

b) Góc α giữa E và r được xác định nhờ (hình 2.3)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta$$

nghĩa là không phụ thuộc khoảng cách từ M đến lưỡng cực. Vậy hướng của điện trường của tất cả các điểm trên bán kính r là như nhau.

c) Từ các công thức trên ta có :

Khi $\theta = 0$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^2}$$

Khi $\theta = \frac{\pi}{4}$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \vec{e}_r - \frac{\vec{p}}{p} \right)$$

Khi $\theta = \frac{\pi}{2}$
$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^2}.$$

16. a)
$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = E_a \cdot S = \frac{k}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi k,$$

S là diện tích mặt cầu có bán kính a ; E_a là cường độ điện trường tại điểm trên mặt S.

b) Nếu áp dụng định lí Gaoxơ để biến đổi tích phân diện tích sang tích phân thể tích, ta có :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad (1)$$

và vì $\text{div} \vec{E} = \text{div}(k \vec{r}/r^3) = 0$ (bài 3), ta có kết quả mâu thuẫn với câu a). Thực ra, để áp dụng được định lí Gaoxơ, ta không thể lấy tích phân theo thể tích V giới hạn bởi mặt cầu bán kính r được vì hàm $\vec{E} = k \vec{r}/r^3$ không liên tục tại điểm $r = 0$. Muốn thế, ta phải lấy V là thể tích giữa hai mặt cầu đồng tâm. Một mặt cầu có bán kính vô cùng bé, tùy ý, mặt kia có bán kính r. Khi đó biểu thức (1) sẽ là :

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad (2)$$

trong đó S_1 là mặt cầu trong, S_2 là mặt cầu ngoài. Nhớ rằng $d\vec{S}_1$ hướng ngược với $\vec{E}$ còn $d\vec{S}_2$ cùng chiều với $\vec{E}$, do đó hai tích phân trên cùng giá trị (bằng $4\pi k$) nhưng ngược dấu. Tổng của chúng bằng không, đúng bằng vế phải (do $\text{div} \vec{E} = 0$).

17. Theo nguyên lí chồng chất, trường phải tìm bằng hiệu của hai trường tạo bởi hai quả cầu tích điện đều có tâm O và O_1 . Trường bên trong quả cầu tích điện đều đã biết (ở bài 13). Vì vậy ta có :

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO_1}$$

Điện trường trong hốc là đều và song song với $\overrightarrow{OO_1}$.

18. Cường độ điện trường tạo bởi đám mây electron (xem bài 11a) :

$$E = E_r = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r_1) r_1^2 dr_1$$

Thay $\rho(r_1)$ bằng biểu thức của nó, lấy tích phân theo r_1 , cuối cùng ta được :

$$E_r = \frac{-e}{\epsilon_0 a^3 r^2} \int_0^r r_1^2 \cdot e^{-r_1/a} dr_1 = \frac{e}{\epsilon_0 a^2} \left(1 + 2\frac{a}{r} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) e^{-r/a}$$

trong đó ta đã áp dụng công thức tích phân sau :

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right).$$

19. a) Bao quanh sợi dây bằng một mặt trụ đồng trục với sợi dây, bán kính R, chiều cao h. Áp dụng định lí Gauss, ta có :

$$2\pi DRh = \chi h, \quad \text{từ đó : } D = \frac{\chi}{2\pi R};$$

$$\text{Khi } R < R_1, E = \frac{\chi}{2\pi R \epsilon_1};$$

$$\text{Khi } R > R_1, E = \frac{\chi}{2\pi R \epsilon_2}.$$

$$\begin{aligned} b) \delta_{fk} = P_{1n} - P_{2n} &= (\epsilon_1 - \epsilon_0)E_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_0)E_2 = \\ &= \frac{\epsilon_0 \chi}{2\pi R} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right). \end{aligned}$$

20. Chọn hệ tọa độ cầu, gốc tại điểm có $\rho = 0$. Thế $\varphi(r)$ tại điểm r bằng :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho r_1^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot dr_1}{(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos\theta)^{1/2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\epsilon} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho r_1^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot dr_1}{(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \theta)^{1/2}} = \\
&= \frac{1}{2r\epsilon} \int_0^{\infty} \rho r_1 dr_1 \int_0^{\pi} \frac{d(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \theta)}{(r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos \theta)^{1/2}} \cdot \\
&= \frac{1}{2r\epsilon} \int_0^{\infty} \rho(r_1) \cdot r_1 [(r_1 + r) - |r_1 - r|] dr_1 = \\
&= \frac{1}{r\epsilon} \int_0^r \rho(r_1) \cdot r_1^2 dr_1 + \frac{1}{\epsilon} \int_r^{\infty} \rho(r_1) r_1 dr_1. \\
\bar{E} = \bar{E}(r) &= -\text{grad} \varphi = \frac{\bar{r}}{\epsilon r^3} \int_0^r \rho(r_1) r_1^2 dr_1.
\end{aligned}$$

21. $\bar{D} = 2\sigma \bar{n}$, $\bar{n}$ hướng từ bản âm sang bản dương.

$$\bar{E} = \frac{2\sigma \bar{n}}{\epsilon}.$$

22. Dùng định lí Gaoxơ (xem bài 16).

Bên trong hình cầu : $\bar{D} = 0$; $\bar{E} = 0$

Bên ngoài hình cầu : $\bar{D} = \frac{q}{4\pi r^3} \bar{r}$; $\bar{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon r^3} \bar{r}$.

23. Dùng định lí Gaoxơ, mặt bao là mặt cầu đồng tâm với tụ điện có bán kính lớn hơn bán kính bán ngoài của tụ điện ; vì điện trường bên ngoài bằng không, cho nên thông lượng qua mặt bao bằng không. Điều đó có nghĩa là tổng điện tích bên trong mặt bao cũng bằng không. Từ đó, ta có :

$$q + q_{cứ} = 0 \qquad q_{cứ} = -q.$$

24. Tương tự bài trên, dùng định lí Gaoxơ, mặt bao là mặt cầu đồng tâm, lần lượt có bán kính nhỏ hơn bán kính bên trong r_1 , giữa hai bản và lớn hơn bán kính bên ngoài. Kết quả thu được như sau :

$$E = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} & r_1 < r < r_2 \\ 0 & r > r_2 \end{cases}$$

25. a) Dùng định lí Gaoxơ.

Bên trong quả cầu, bán kính mặt bao $r < a$, ta có :

$4\pi Dr^2 = (4/3) \pi \rho r^3$; từ đó có :

$$\bar{D} = \frac{\rho}{3} \bar{r} ; \bar{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \bar{r} .$$

Bên ngoài quả cầu, bán kính mặt bao $r > a$, ta có :

$4\pi Dr^2 = (4/3) \pi \rho r^3$; từ đó có :

$$\bar{D} = \frac{\rho a^3}{3r^3} \bar{r} ; \bar{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^3} \bar{r} .$$

b) Mật độ điện mặt bằng :

$$\sigma = D_{2n} - D_{1n} = \frac{\rho a}{3\epsilon_0} (\epsilon - \epsilon_0) .$$

26. Phương trình Poatxông trong hệ tọa độ Đêcac vuông góc

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} .$$

Vì φ chỉ phụ thuộc bậc nhất vào tọa độ x , vế trái của phương trình trên bằng không, dẫn đến mật độ điện khối $\rho = 0$.

Điện trường $\vec{E}$ dễ dàng tính được là :

$$E_y = E_z = 0 ; E_x = \begin{cases} a/\epsilon_0 & x > 0 \\ -a/\epsilon_0 & x < 0 \end{cases}$$

Tại mặt phân giới $x = 0$; mật độ điện mặt bằng :

$$\sigma_m = D_{1n} - D_{2n} = 2a.$$

27. Phương trình Poisson trong hệ tọa độ cầu là :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$$

Ở đây thế φ chỉ phụ thuộc bán kính vectơ r , do đó ta có :

$$\rho = -\epsilon_0 \Delta \varphi = -\frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \begin{cases} 0 & r > a \\ \frac{3q}{4\pi a^2} & r < a \end{cases}$$

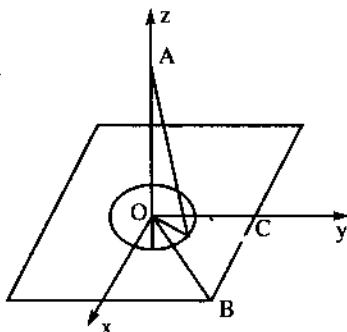
28. Cũng như bài trên, dùng phương trình Poisson trong hệ tọa độ cầu, và do thế vô hướng chỉ phụ thuộc bán kính r , ta có

$$\rho = -\epsilon_0 \Delta \varphi = -\frac{\epsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{q}{a^2 r} e^{-r/a}.$$

29. Chọn hệ tọa độ trụ có gốc tại tâm hình vuông, trục Oz là trục đối xứng (hình 2.13).

Thế vô hướng tạo bởi hình tam giác vuông cân OBC , tức là $1/8$ bản, tại điểm A là :

$$\varphi_1 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/4} d\alpha \int_0^{\frac{a}{\cos \alpha}} \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$



Hình 2.13

Thế φ của cả hình vuông là :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{2\alpha}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/4} d\alpha \int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} \frac{rdr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \\ &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/4} \sqrt{z^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha}} d\alpha \quad (1)\end{aligned}$$

(nhớ rằng trong hệ toạ độ cực, phương trình của đường BC là :

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}).$$

Thế chỉ phụ thuộc z , do đó điện trường là :

$$E = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma z}{\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/4} \left(z^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha} \right)^{-1/2} d\alpha \quad (2)$$

Khi $z \ll a$, ta có :

$$\begin{aligned}\left(z^2 + \frac{a^2}{\cos^2\alpha} \right)^{-1/2} &= \frac{\cos\alpha}{a} \left(1 + \frac{z^2 \cos^2\alpha}{a^2} \right)^{-1/2} \approx \\ &\approx \frac{\cos\alpha}{a} \left(1 - \frac{z^2 \cos^2\alpha}{2a^2} \right)\end{aligned} \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), sau khi lấy tích phân theo α , ta có :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi a} z + \frac{5\sqrt{2}}{6\pi a^2} z^3 \right) \quad (4)$$

Khi $z \gg a$, tương tự ta có :

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 z} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \quad (5)$$

(có thể so sánh (4) với trường hợp bản vô hạn, (5) với trường hợp điện tích điểm).

30. Thế của P là :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') dV'}{R} \quad (1)$$

$$\vec{R}_i = z\vec{k} - \vec{r}'_i; R_i^2 = z^2 + (r'_i)^2 - 2z(\vec{k} \cdot \vec{r}'_i)$$

$$\text{Từ đó} \quad \frac{1}{R_i} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2\vec{k} \cdot \vec{r}'_i}{z} + \frac{(r'_i)^2}{z^2} \right)^{-1/2} \quad (2)$$

Phân tích (2) theo cấp số bậc (r'_i/z) và giới hạn ở số hạng bậc $(r'_i/z)^3$ ta có :

$$\frac{1}{R_i} \approx \frac{1}{z} \left\{ 1 + \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}'_i}{z} + \frac{1}{2} \left[\frac{3(\vec{k} \cdot \vec{r}'_i)^2}{z^2} - \frac{(r'_i)^2}{z^2} \right] \right\}$$

Thay $\vec{r}'_i = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ vào, ta có :

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{z} + \frac{z'_i}{z^2} + \frac{1}{2z^3} (3z_i'^2 - r_i'^2) \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta có :

$$4\pi\epsilon_0\varphi = \frac{1}{z} \int_V \rho(r') dV' + \frac{1}{z^2} \int_V \rho(r') z' dV' + \frac{1}{z^2} \frac{1}{2} \int_V \rho(r') (3z'^2 - r'^2) dV'$$

$$\text{hay} \quad 4\pi\epsilon_0\varphi \approx \frac{e}{z} + \frac{p}{z^2} + \frac{Q}{z^3}$$

với $e = \int \rho(r') dV'$ là điện tích của thể tích V' .

$p = \int \rho(r') z' dV'$ là mômen lưỡng cực điện của V' .

$Q = \frac{1}{2} \int p(r')(3z'^2 - r'^2) dV'$ là mômen tứ cực điện của V' .

31. Điện dung của một vật cô lập là $C = \frac{q}{\varphi}$, q là điện tích, φ là điện thế tương ứng.

Giả sử quả cầu tích điện q . Hãy tìm điện thế φ tương ứng. Trước hết tính điện trường bằng định lí Gauss, ta có :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{khi } r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r} & \text{khi } a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} & \text{khi } r > b \end{cases}$$

Từ $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, ta tính được φ (nhớ rằng ở đây hệ đối xứng cầu do đó dùng biểu thức grad trong hệ tọa độ cầu), ta có :

$$\varphi(r) = \begin{cases} C_1 & r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon r} + C_1 & a < r < b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1 & r > b \end{cases}$$

Xác định các hằng số nhờ điều kiện liên tục của φ ở các mặt $r = a$, $r = b$ và điều kiện $\varphi(\infty) = 0$. Từ đó có :

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{q}{C_1} = \epsilon - \frac{4\pi a}{1 + \frac{a}{b} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)}.$$

32. Cách giải như bài 31. Tính điện trường $\vec{E}$ nhờ định lí Gaoxơ. Nhớ rằng khi đi qua mặt phân cách hai môi trường, thành phần tiếp tuyến của điện trường không đổi, nghĩa là cảm ứng điện $\vec{D}$ ở hai môi trường sẽ là $\epsilon_1 \vec{E}$ và $\epsilon_2 \vec{E}$, ta có :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{q}{2\pi r^3(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

Từ đó có

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)r} + C_2 & r > a \\ C_1 & r < a \end{cases}$$

Tính C_1, C_2 nhờ điều kiện liên tục của φ ở mặt $r = a$ và $\varphi(\infty) = 0$. Kết quả có :

$$C = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a.$$

33. Cách giải như hai bài trên. Tính điện trường $\vec{E}$ nhờ định lí Gaoxơ.

a) Đối với trường hợp tụ điện trụ ta có :

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \frac{q}{r} & R_1 < r < R_o \\ \frac{1}{2\pi\epsilon_2} \frac{q}{r} & R_o < r < R_2 \\ 0 & R_2 < r < \infty \text{ và } 0 < r < R_o \end{cases}$$

Hiệu điện thế giữa hai bản của tụ điện là :

$$\begin{aligned}\varphi_2 - \varphi_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \frac{q}{r} dr + \int_{R_0}^{R_2} \frac{1}{2\pi\epsilon_2} \frac{q}{r} dr = \\ &= \frac{q}{2\pi l} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right)\end{aligned}$$

Từ đó ta có :

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0}}$$

b) Trường hợp tụ điện phẳng, tính tương tự, kết quả là :

$$C = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}$$

34. a) Áp dụng định lí Grin (Green) :

$$\sum_{k=1}^n q_k \varphi'_k = \sum_{k=1}^n q'_k \varphi_k \quad (1)$$

trong đó φ_k là thế của các vật dẫn khi chúng tích điện q_k ; φ'_k là thế của các vật dẫn khi chúng tích điện q'_k .

Khi tại P có điện tích và quả cầu nối đất, tích điện q' , ta có :

$$q_1 = q, \quad \varphi_1 = 0; \quad q_2 = q, \quad \varphi_2 = 0.$$

Khi tại P không có điện tích và quả cầu không nối đất, tích điện q' , ta có :

$$q'_1 = 0, \quad \varphi'_1 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 l}; \quad q'_2 = q', \quad \varphi'_2 = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Theo (1) ta có :

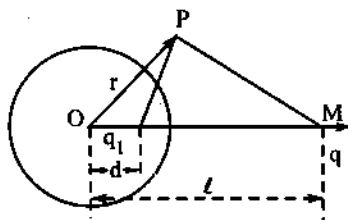
$$\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q^+q'}{4\pi\epsilon_0 a} = 0$$

từ đó : $q^+ = -q \frac{a}{l}$.

Cách khác : Có thể dùng phương pháp ảnh điện.

Thay hệ trên bằng hệ hai điện tích điểm q và q_1 với giá trị và vị trí của q_1 cần tìm sao cho trường được tạo ra giống hệt trường tạo bởi hệ quả cầu – điện tích điểm q , nghĩa là thế trên quả cầu bằng không (quả cầu nối đất).

Chọn hệ tọa độ cực có gốc trùng với tâm O của quả cầu, trục Oz đi qua điện tích q và ảnh q_1 của nó (hình 2.14). Ta có tọa độ của q và q_1 như sau :



Hình 2.14

$$q \ (\theta = 0, r = l)$$

$$q_1 \ (\theta = 0, r = d).$$

Điểm $P(r, \theta)$ có thế $\varphi(r, \theta)$ bằng :

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} + \frac{q}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta}} \right)$$

Biết rằng quả cầu nối đất, như vậy $\varphi(a, \theta) = 0$, từ biểu thức trên ta thấy khi đó $d = a^2/l$ ($a < l$) và $q_1 = -aq/l$.

$$b) F = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0(l-d)^2} = -\frac{adq^2}{4\pi\epsilon_0(l^2 - a^2)^2}$$

c) Hệ điện tích q và ảnh của nó q_1 tạo thế trên mặt quả cầu bằng không. Muốn cho trên mặt quả cầu có thế bằng φ_0 , cần phải thêm một

diện tích Q tại tâm của quả cầu ($Q = 4\pi\epsilon_0 a\phi_0$). Khi đó lực tương tác giữa q và quả cầu sẽ là lực tương tác giữa q và hai điện tích "ảnh" q_1 và Q . Ta có :

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{l^2} - \frac{aq}{l(l-d)^2} \right).$$

35. Tương tự câu c) bài trên. Chú ý rằng ở đây điện tích của quả cầu là Q . Như thế, ngoài điện tích ảnh q_1 đặt ở d , còn phải thêm một điện tích ảnh nữa tại tâm O để trên mặt cầu điện thế không đổi. Điện tích đó là $Q - q_1$ (như thế cuối cùng điện tích tổng cộng của các ảnh vẫn bằng Q như giả thiết). Lực tương tác bây giờ là

$$\begin{aligned} F &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q - q_1}{l^2} - \frac{aq}{l(l-d)^2} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q + aq/l}{l^2} - \frac{aq}{l(l-d)^2} \right]. \end{aligned}$$

36. Thế của các quả cầu tính gần đúng là

$$\phi_1 = \frac{q_1}{4\pi a\epsilon_0} + \frac{q_2}{4\pi r\epsilon_0}; \quad \phi_2 = \frac{q_1}{4\pi r\epsilon_0} + \frac{q_2}{4\pi b\epsilon_0}$$

Năng lượng tương tác giữa chúng

$$W = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{a} + \frac{2q_1q_2}{r} + \frac{q_2^2}{b} \right).$$

$$\begin{aligned} 37. \quad W &= \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_0^a \epsilon E^2 dV + \frac{1}{2} \int_a^\infty \epsilon_0 E^2 dV = \\ &= 2\pi\epsilon \int_0^a E_{lg}^2 r^2 dr + 2\pi\epsilon_0 \int_a^\infty E_{ng}^2 r^2 dr \end{aligned}$$

Thay E_{tg} và E_{ng} ở bài 11 vào, ta có :

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon a^6} \int_0^a r^4 dr + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2}$$

Cuối cùng ta có $W = \frac{q^2}{8\pi a} \left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{5\epsilon} \right)$.

38. $W = e_{hn} \varphi_{dt}(0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$.

e_{hn} là điện tích của hạt nhân : $\varphi_{dt}(0)$ là thế của mây electron tại tâm (xem bài 18).

39. $W = \frac{q^2}{2C}$.

Áp dụng kết quả bài 33 ta có :

a) $W = \frac{q^2}{4\pi l} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right)$

b) $W = \frac{q^2}{2S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$.

Có thể tính trực tiếp theo công thức $W = \frac{1}{2} \int E \bar{D} dV$.

Thí dụ đối với tụ điện trụ, điện trường có tính chất đối xứng trụ chỉ có thành phần E_r là khác không và bằng :

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{2\pi l \epsilon_1} \frac{q}{r} & \text{với } R_1 < r < R_0 \\ \frac{1}{2\pi l \epsilon_2} \frac{q}{r} & \text{với } R_0 < r < R_2 \\ 0 & \text{với } R_2 < r < \infty \text{ và } 0 < r < R_1. \end{cases}$$

Thay vào biểu thức W ở trên ta có :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_0^l dl \int_{R_1}^{R_0} \left(\frac{q}{2\pi l} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_1} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr + \frac{1}{2} \int_0^l dl \int_{R_0}^{R_2} \left(\frac{q}{2\pi l} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r dr = \\
 &= \frac{q^2}{4\pi l} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right).
 \end{aligned}$$

40. Năng lượng của tụ điện là :

$$W_1 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \frac{q^2}{C^2} = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2.$$

Khi có điện môi ϵ , điện dung là $C = \frac{\epsilon S}{d}$.

Khi tách điện môi ra nhưng giữ cho tụ điện cô lập tức là điện tích q của các bản không thay đổi, điện dung $C_2 = \frac{\epsilon S}{d}$, như thế từ biểu thức

$W = \frac{q^2}{2C}$ năng lượng sẽ là :

$$W_2 = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} W_1.$$

Công phải tìm là :

$$\begin{aligned}
 Q = W_2 - W_1 &= \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) W_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) C (\Delta\phi)^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \frac{\epsilon S}{d} (\Delta\phi)^2.
 \end{aligned}$$

41. Khi chứa một phần điện môi, điện dung của tụ điện tăng một lượng bằng :

$$\Delta C = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)ax}{d}$$

Khi đó năng lượng tăng lên một lượng bằng :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta C.(\Delta\phi)^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)(\Delta\phi)^2 ax}{2d}$$

(nhớ rằng điện thế không đổi). Lực tác dụng lên điện môi là :

$$F = \left(\frac{\partial(\Delta W)}{\partial x} \right) \bigg|_{\Delta\phi=\text{const}} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)a}{2d} (\Delta\phi)^2$$

Lực này cân bằng với trọng lượng của phần điện môi đó :

$$F = \delta.a.d.h$$

Từ đó thay biểu thức của F đã tính ở trên ta được :

$$h = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0 (\Delta\phi)^2}{2d^2 \delta}.$$

42. Hoàn toàn tương tự bài trên, nhớ rằng đối với tụ điện trụ, điện dung là $C = 2\pi\varepsilon_0 l / \ln(R_2/R_1)$, l là chiều cao của hình trụ, R_1 , R_2 là bán kính của hai bản tụ điện. Kết quả là :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{(\Delta\phi)^2} \frac{\delta}{h} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

43. Công thức hiện bằng biến đổi năng lượng của tụ điện, ta có :

$$\Delta W = \frac{C_1 - C_2}{2} V^2, \quad C_1 \text{ và } C_2 \text{ là điện dung của tụ điện lúc đầu và}$$

sau khi công đã thực hiện. Thay số vào, ta có :

$$W = \frac{(100 - 10) \cdot 10^{-9} \text{ F}}{2} (300 \text{ V})^2 = 4,05 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

Nhớ rằng trong quá trình thực hiện, hiệu điện thế luôn luôn giữ bằng V.

44. a) Tổng năng lượng của hai tụ điện khi đặt riêng rẽ :

$$W_o = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Năng lượng của hệ tụ điện khi mắc song song :

$$W_1 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$$

Hiệu hai năng lượng đó :

$$W_1 - W_o = -\frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)} < 0$$

b) $W = 0$ khi $q_1 C_2 = q_2 C_1$.

45. a), b) Trong giáo trình.

c) Nếu lưỡng cực được tạo thành bởi đặt liên tiếp hai điện tích (từ xa vô cực) trong điện trường thì năng lượng điện của nó khác. Thực vậy, nếu điện tích $+q$ đặt tại điểm $\vec{R} + \vec{r}_1$ thì nó có năng lượng $q\varphi(\vec{R} + \vec{r}_1)$.

Khi đó đặt điện tích $-q$ tại điểm $\vec{R} + \vec{r}_2$ sẽ tốn một công :

$$-q\varphi(\vec{R} + \vec{r}_2) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Thành ra năng lượng điện của lưỡng cực điện trong trường hợp này bằng :

$$U = q\varphi(\vec{R} + \vec{r}_1) - q\varphi(\vec{R} + \vec{r}_2) - \frac{q^3}{4\pi\epsilon_o |\vec{p}|} = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) - \frac{q^3}{4\pi\epsilon_o |\vec{p}|}.$$

Do đó hiệu các năng lượng bằng $\frac{q^3}{4\pi\epsilon_o |\vec{p}|}$, đây chính là năng lượng tương tác tạo thành lưỡng cực điện.

46. Năng lượng của tụ điện : $W = Q^2/2C$.

Trong quá trình điện môi dịch chuyển vào tụ điện, cả điện tích trên các bản lẫn điện dung C của tụ điện đều thay đổi, vì vậy :

$$dW = \frac{Q}{C}dQ - \frac{Q^2}{2C^2}dC.$$

Vì hiệu điện thế không đổi $U_0 = Q/C$, do đó ta có :

$$dW = U_0dQ - \frac{U_0^2}{2}dC.$$

Số hạng thứ nhất ở vế phải chính là công của nguồn điện làm thay đổi điện tích trên các bản tụ điện. Số hạng thứ hai là công của lực cơ cần thiết đặt lên điện môi.

a) Công của nguồn điện. Nhớ rằng điện tích lúc đầu của tụ là q_0 , sau khi đã dịch chuyển miếng điện môi vào trong tụ điện, điện tích của bản tụ điện là $\epsilon q_0/\epsilon_0$. Do đó công của nguồn điện là :

$$\int_{q_0}^{\epsilon q_0/\epsilon_0} U_0 dQ = U_0 \int_{q_0}^{\epsilon q_0/\epsilon_0} dQ = q_0 U_0 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right).$$

b) Điện dung của tụ điện lúc đầu là q_0/U_0 và lúc sau $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{q_0}{U_0}$. Do đó công của lực cơ là :

$$\int_{q_0/U_0}^{\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{q_0}{U_0}} \frac{U_0^2}{2} dC = \frac{U_0 q_0}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right)$$

công này do lực tác dụng lên điện môi gây ra.

47. Cách làm thứ nhất : tính trực tiếp điện trở R .

Chia môi trường giữa hai bản tụ điện thành từng lớp hình cầu đồng tâm với các bản, có bán kính r và bề dày dr . Điện trở của lớp đó tỉ lệ nghịch với diện tích và tỉ lệ thuận với dr :

$$dR = \frac{dr}{4\pi r^2 \lambda}$$

Vậy điện trở R là

$$R = \int dR = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi r^2 \lambda} dr = \frac{1}{4\pi \lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Cường độ dòng I giữa hai bản là :

$$I = \frac{U}{R} = 4\pi \lambda \frac{U}{r_2 - r_1} r_1 r_2$$

Công suất tỏa nhiệt :

$$Q = IU = \frac{4\pi \lambda U^2}{r_2 - r_1} r_1 r_2$$

Cách làm thứ hai :

Ta có :

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \lambda \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (\vec{j} = \lambda \vec{E}) \quad (1)$$

Mặt S bao quanh bản tụ điện trong. Theo định lí Gauss, ta có :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

với Q là điện tích bản tụ điện trong .

$$\text{Mặt khác } Q = CU \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$I = \lambda Q / \epsilon_0 = \lambda CU / \epsilon_0 \quad (4)$$

và
$$R = \frac{U}{I} = \frac{\epsilon_0}{\lambda C} \quad (5)$$

Biết điện dung của tụ điện, ta tính được I và R . Với tụ điện cầu, điện dung C là :

$$C = 4\pi \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{r_2 - r_1};$$

r_1, r_2 là bán kính của tụ điện, thay vào (4), (5) ta được các kết quả đã tính ở trên.

48. Cách giải như bài trên. Dùng các công thức (4), (5) ta có ngay kết quả :

$$a) \quad I = \frac{2\pi\lambda/U}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$Q = IU = \frac{2\pi\lambda/U^2}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$b) \quad I = \frac{2\pi U}{\frac{1}{\lambda_1} \ln(R_0/R_1) + \frac{1}{\lambda_2} \ln(R_2/R_0)}$$

$$Q = \frac{2\pi U^2}{\frac{1}{\lambda_1} \ln(R_0/R_1) + \frac{1}{\lambda_2} \ln(R_2/R_0)}.$$

49. Sử dụng các công thức $\vec{j} = \lambda \vec{E}$; $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\text{div } \vec{D} = \rho$.

Vì các đại lượng $\vec{j}$, λ , ϵ chỉ phụ thuộc tọa độ, nên ρ không phụ thuộc t , tức là $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Nhờ đó dễ dàng tìm được :

$$\rho = \frac{\vec{j}}{\lambda^2} (\lambda \operatorname{grad} \varepsilon - \varepsilon \operatorname{grad} \lambda).$$

50. Xem bài 47. Khi đó $r_2 = \infty$. Vậy

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon\lambda}$$

Khi chôn nửa quả cầu, điện trở lớn gấp đôi :

$$R = \frac{1}{2\pi\epsilon\lambda}.$$

$$51. \quad U = \int_r^{r+r_1} E_r dr$$

$$E_r = \frac{J}{\lambda} = \frac{I}{2\pi r^2 \lambda}$$

từ đó
$$U = \frac{I}{2\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+r_1} \right)$$

$$52. a) \quad E_1 = \frac{\lambda_2 U}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}; \quad D_1 = \frac{\epsilon_1 \lambda_2 U}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}$$

$$E_2 = \frac{\lambda_1 U}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}; \quad D_2 = \frac{\epsilon_2 \lambda_1 U}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}$$

$$j_1 = j_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 U}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1}.$$

b) Trên mặt phân chia giữa các tấm phẳng :

$$\begin{aligned} \sigma &= P_2 - P_1 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_0 - (\epsilon_1 - \epsilon_0) E_1 = \\ &= \frac{\lambda_1 (\epsilon_2 - \epsilon_0) - \lambda_2 (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1} U. \end{aligned}$$

Nếu tấm phẳng thứ nhất đặt sát bản dương thì U lấy giá trị âm. Ở mặt phân chia giữa bản tụ điện và tấm thứ nhất :

- Trên bản tụ điện : $\sigma = \epsilon_1 E_1$.
- Ở mặt tấm thứ nhất : $\sigma_{fk} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_1$.

Ở mặt phân chia giữa bản tụ điện và tấm thứ hai :

- Trên bản tụ điện : $\sigma = -\epsilon_2 E_2$.
- Ở mặt tấm thứ hai : $\sigma_{fk} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E_2$.

ϵ_0 là hằng số điện môi của chân không.

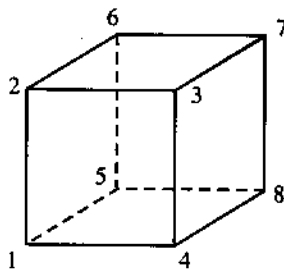
53. Xem bài 51.

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda_2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{2\pi\lambda_1} \frac{1}{b}.$$

54. Hình hộp được tạo thành như hình 2.15a.

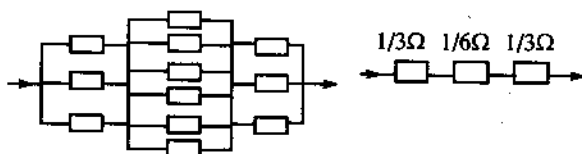
a) Giả sử dòng điện vào góc 1 và ra góc 7.

Điện thế các điểm 6, 3, 8 bằng nhau, điện thế các điểm 2, 4, 5 bằng nhau. Do đó có thể chuyển thành sơ đồ lần lượt theo các hình 2.15b.



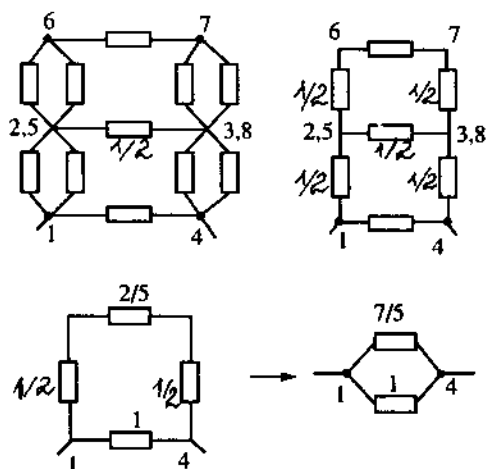
Hình 2.15a

Điện trở tổng cộng là $\frac{5}{6} \Omega$.



Hình 2.15b

b) Giả sử dòng điện vào góc 1 và ra góc 4.



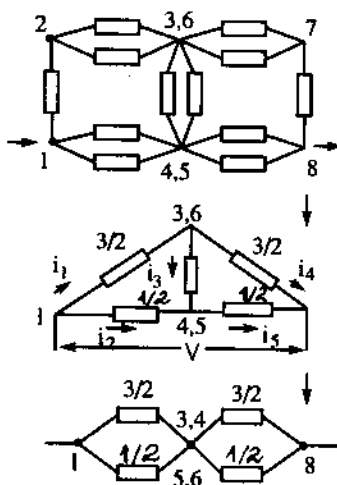
Hình 2.15c

Điện thế tại các điểm 2 và 5 bằng nhau. Nối hai điểm đó lại. Tiếp theo, thế các điểm 3, 8 bằng nhau, nối chúng lại. Như thế có thể chuyển thành các sơ đồ như hình 2.15c.

Điện trở tổng cộng là $\frac{7}{12} \Omega$.

c) Giả sử dòng điện vào góc 1 ra góc 8. Cũng tương tự như trên, các sơ đồ tiếp theo lần lượt là hình 2.15d.

Chú ý rằng do sự đồng nhất của phần trái và phải của mạch cầu, cho nên thế ở các điểm 3, 4 và 5, 6 là



Hình 2.15d

bằng nhau và ta chuyển được sang mạch nối tiếp của hai phần đầu song song. Điện trở tổng cộng là $3/4\Omega$.

55. Chọn hệ tọa độ trụ (R, φ, z) trục Oz dọc theo dây dẫn, gốc tọa độ nằm giữa dây dẫn. Kí hiệu R là khoảng cách từ điểm tính trường đến dây dẫn. Ta có :

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{d\vec{r}}{r^3}$$

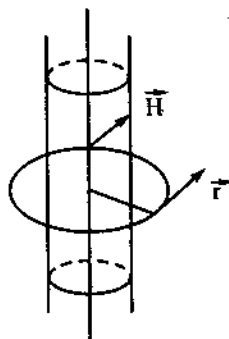
Từ trường hướng vuông góc với mặt phẳng chứa $d\vec{r}$ và $\vec{r}$. Giá trị của nó bằng :

$$H = H_\varphi = \frac{I}{4\pi R} \left\{ \frac{L-Z}{\sqrt{R^2 - (L+Z)^2}} + \frac{L+Z}{\sqrt{R^2 + (L+Z)^2}} \right\}$$

$$\text{Khi } L \rightarrow \infty, \text{ thì } H = \frac{2I}{4\pi R} = \frac{I}{2\pi R}.$$

56. Do tính chất đối xứng trụ, từ trường $\vec{H}$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với dây dẫn và đi qua điểm quan sát (hình 2.16). Hơn nữa, cũng vì vậy $\vec{H}$ phải vuông góc với đoạn thẳng kẻ từ trục đến điểm quan sát (và nằm trên mặt phẳng vuông góc đó). Dùng định luật dòng toàn phần (định lí Ampe) :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I (= j\pi a^2) \quad (1)$$



Hình 2.16

a) Bên trong hình trụ, đường cong tích phân là vòng tròn có tâm trên trục hình trụ và nằm trên mặt phẳng vuông góc với hình trụ. Chọn chiều dương trên đường tròn là chiều hợp với chiều của $\vec{j}$ một đinh ốc thuận và theo định luật dòng toàn phần,

đó cũng là chiều của $\vec{H}$. (1) cho kết quả sau :

$$H_{tr} = \frac{j\vec{r}}{2}$$

trong đó r là khoảng cách từ trục đến điểm tính trường. Có thể viết như sau :

$$\vec{H} = \frac{1}{2}[\vec{j} \cdot \vec{r}].$$

Cảm ứng từ B bằng : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

b) Bên ngoài hình trụ. Tương tự trên, ta có

$$H_{ng} = \frac{1}{2} \frac{j a^2}{r}$$

hay
$$\vec{H} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{j} \cdot \vec{r}| a^2}{r^2}$$

Cảm ứng từ B bằng : $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

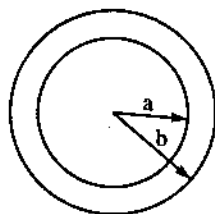
57. Hoàn toàn như bài trên, áp dụng định lí dòng toàn phần, ta thu được kết quả sau :

$$r < a ; H = 0$$

$$a < r < b ;$$

$$H = \frac{I}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \text{ (hình 2.17).}$$

$$r > b ; H = \frac{I}{2\pi r}$$



Hình 2.17

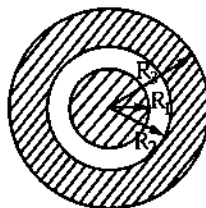
Chú ý là ở đây ta cũng phải sử dụng tính chất đối xứng trụ như bài trên để xác định phương chiều của từ trường $\vec{H}$. Cảm ứng từ B bằng :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}.$$

58. Do tính chất đối xứng trụ của từ trường, từ định lí Ampe, ta có :

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_r}{r}$$

trong đó I_r là dòng điện bị bao bọc bởi đường tròn bán kính r (hình 2.18).



Hình 2.18

Khi $0 < r < R_1$, mật độ dòng trong lõi bằng

$$j_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

Do vậy, ta có $I_r = j_1 \pi r^2 = \frac{I r^2}{R_1^2}$ và cảm ứng từ là :

$$B = \frac{\mu I_r}{2\pi r}$$

Khi $R_1 < r < R_2$, ta có $I_r = I = \text{const}$, vì thế cảm ứng từ là:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

Khi $R_2 < r < R_3$, công tua bao bọc dòng điện ngược chiều có mật độ bằng :

$$j_2 = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)},$$

Vậy dòng điện bị bao bọc bởi công tua trên là :

$$I_r = I - I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

còn cảm ứng từ là :

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

Bên ngoài cáp, cảm ứng từ bằng không.

Chú thích : Có thể tính thế vectơ $\vec{A}$ nhờ phương trình đối với thế, rồi từ đó tính $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Ở đây phải dùng toạ độ trụ, cách tính dài và thường được dùng trong các giáo trình.

59. Dùng nguyên lí chồng chất trường. Trường ở M là chồng chất của hai trường, một tạo bởi dây hình trụ đặc với dòng $\vec{j}$, một tạo bởi dây hình trụ lấp đầy lỗ hổng có dòng $-\vec{j}$ chảy.

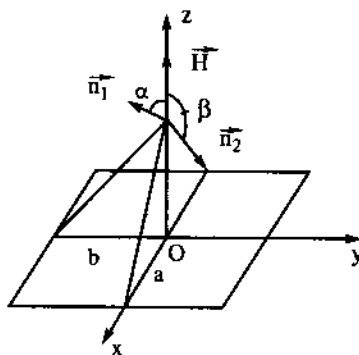
Dùng kết quả câu a) bài 56, ta có :

$$H = \frac{1}{2} [\vec{j} \cdot \overrightarrow{OM}] + \frac{1}{2} [-\vec{j} \cdot \overrightarrow{O'M}] =$$

$$\frac{1}{2} [\vec{j} \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'M})] = \frac{1}{2} [\vec{j} \cdot \overrightarrow{OO'}]$$

Từ trường trong lỗ song song không đổi.

60. Từ trường tạo bởi một cạnh dài $2b$ có thể tính được theo bài 55. Nhớ rằng khi đó khoảng cách từ trung điểm của cạnh $2b$ đến điểm tính trường là $\sqrt{Z^2 + a^2}$, trong đó Z là khoảng cách từ tâm hình chữ nhật đến điểm tính trường. Từ trường đó làm với trục Oz một góc α xác định được bằng:



Hình 2.19

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{Z^2 + a^2}}$$

Cũng như vậy tính được từ trường tạo bởi cạnh $2a$ (hình 2.19).

Từ trường tổng cộng có hướng dọc theo trục Oz và có giá trị bằng :

$$H = \frac{abI}{\pi\sqrt{a^2 + b^2 + Z^2}} \times \left(\frac{I}{a^2 + Z^2} + \frac{I}{b^2 + Z^2} \right)$$

61. Cường độ từ trường H_1 tạo bởi một cạnh của đa giác có thể suy được từ kết quả bài 55 (hình 2.20).

$$H_1 = \frac{I}{2\pi l} \sin \alpha ; \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + l^2}}$$

H_1 làm với trục z một góc β ,

$$\cos \beta = \frac{h}{l} ; h = a \cotg \frac{\pi}{n}$$

$$l = \sqrt{Z^2 + h^2}$$

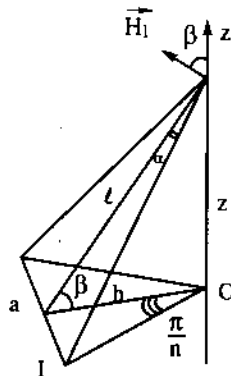
Từ trường tổng hợp :

$$H = H_z = nH_1 \cos \beta = \frac{nI}{2\pi l} \sin \alpha \cos \beta$$

$$H = n \frac{I}{2\pi} \frac{a^2 \cotg \frac{\pi}{n}}{\left(a^2 \cotg^2 \frac{\pi}{n} + Z^2 \right) \sqrt{a^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n} + Z^2}}$$

62. Áp dụng định lí Bio – Xava

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}$$



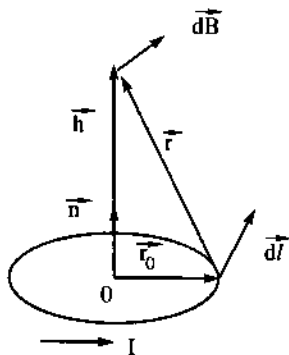
Hình 2.20

trong đó $d\vec{l}$ có độ dài bằng vi phân cung của vòng tròn ; phương và chiều của các vectơ như trên hình 2.21. Tích phân lấy theo các công tuya điện, ta có :

$$\vec{r} = \vec{h} - \vec{r}_0 ;$$

$$[d\vec{l} \cdot \vec{r}] = -[d\vec{l} \cdot \vec{r}_0] + [d\vec{l} \cdot \vec{h}]$$

Độ dài của $\vec{r}_0$ là không đổi trong quá trình lấy tích phân, còn $\vec{h} = \text{const}$, do đó :



Hình 2.21

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \left(-\oint_L [d\vec{l} \cdot \vec{r}_0] + \oint_L [d\vec{l} \cdot \vec{h}] \right)$$

Tích phân thứ hai bằng không vì :

$$\oint_L [d\vec{l} \cdot \vec{h}] = \left[\left(\oint_L d\vec{l} \right) \cdot \vec{h} \right] = [0 \cdot \vec{h}] = 0$$

Tích phân thứ nhất bằng :

$$-\oint_L [d\vec{l} \cdot \vec{r}_0] = \oint_L [\vec{r}_0 \cdot d\vec{l}] = \oint_L \vec{n} \cdot \vec{r}_0 \cdot dl = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 \oint_L dl =$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_0 \cdot 2\pi r_0 = 2\pi r_0^2 \vec{n} \cdot \vec{r}_0.$$

$\vec{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với mặt công tuya. Cuối cùng ta có :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_0^2 \cdot \vec{n}}{(r_0^2 + h^2)^{3/2}}$$

63. Chia dây dẫn thành những mẩu nhỏ $d\vec{l}$. Cảm ứng từ $d\vec{B}$ tạo bởi mẩu đó ở điểm P trong chân không là :

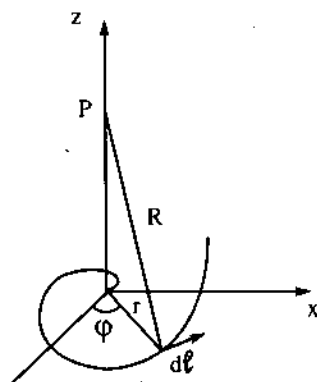


$$\overline{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} [\overline{dl} \cdot \overline{R}]$$

Chọn hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc (hình 2.22), có :

$$[\overline{dl} \cdot \overline{R}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ -r \cos \varphi & -r \sin \varphi & z \end{vmatrix}$$

$$[\overline{dl} \cdot \overline{R}] = z dy \cdot \vec{i} - z dx \cdot \vec{j} + (r \cos \varphi dy - r \sin \varphi dx) \vec{k},$$



Hình 2.22

từ đó thành phần trên trục Oz của $\overline{dB}$ là :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} (r \cos \varphi dy - r \sin \varphi dx) \quad (1)$$

dx, dy có thể tính được nhờ $x = r \cos \varphi$ và $y = r \sin \varphi$, (1) có dạng sau :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^2 d\varphi}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Theo đầu bài:

$$\varphi = \frac{2\pi N r}{L}; \quad d\varphi = \frac{2\pi N dr}{L}.$$

Thay vào (2) và lấy tích phân, ta có :

$$B_z = \frac{\mu_0 NI}{2L} \left[\ln \frac{L + \sqrt{L^2 + z^2}}{z} - \frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}} \right].$$

64. Do tính chất đối xứng, từ trường H chỉ phụ thuộc r :

$$H = H(r)$$

a) Trường bên ngoài ống. Áp dụng định luật dòng toàn phần đối với công tua ABCD (hình 2.23).

Ta có :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I = 0 \quad (1)$$

$\sum_i I = 0$ vì mỗi vòng có hai lần dòng điện đi qua tiết diện ABCD theo hai hướng ngược nhau.

Lấy CB = 1. Từ (1) ta có :

$2H(r) = 0$, từ đó $H(r) = 0$, tức là từ trường ngoài ống bằng không.

b) Trường bên trong ống.

Xét công tua CNMB

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot NM = H$$

$$\text{CNMB} \sum_i I = nI$$

Từ đó có $H = nI$.

65. Dùng hệ tọa độ trụ, ta có :

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum_i I_i$$

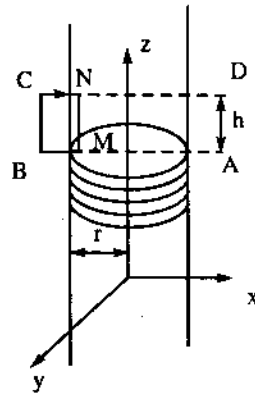
trong đó $d\vec{l} = dl \vec{e}_\varphi$.

$$\vec{H} = H_r \vec{e}_r + H_\varphi \vec{e}_\varphi + H_z \vec{e}_z$$

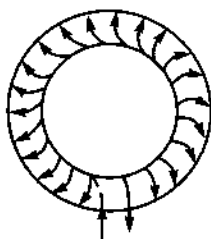
a) Bên trong xôlênôit ($R + a > r > R - a$).

$$\int_L \vec{H}^{(i)} d\vec{l} = 2\pi r \cdot H_\varphi^{(i)} = NI : (H^{(i)} = H_{\text{trong}})$$

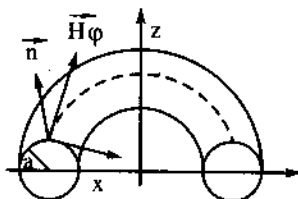
hay
$$H_\varphi^{(i)} = \frac{NI}{2\pi r}$$



Hình 2.23



Hình 2.24a



Hình 2.24b

b) Bên ngoài xôlênôit ($r > R + a$; $r < R - a$)

$$\int_L \vec{H}^{(e)} d\vec{l} = 2\pi r \cdot H_\phi^{(e)} = 0 \quad (H^{(e)} = H_{\text{ngoài}})$$

từ đó $H_\phi^{(e)} = 0$

Bây giờ cần chứng minh :

$$H_r^{(i)} = H_z^{(i)} = H_r^{(e)} = H_z^{(e)} = 0 \quad (a)$$

Coi xôlênôit như một mặt nhẵn, có một dòng điện mặt, mật độ $i = NI/2\pi r$ chạy qua.

Từ trường sinh bởi dòng điện mặt đó phải thỏa mãn các điều kiện sau đây :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1)$$

$$(\mu_0 \text{ div } \vec{H} = 0)$$

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad (2)$$

$$\left[\vec{n} \cdot (\vec{H}^{(e)} - \vec{H}^{(i)}) \right] = i \cdot \vec{\tau} \quad (3)$$

$\vec{n}$, $\vec{\tau}$ là vectơ đơn vị pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt xôlênôit (hình 2.24b). Có thể thử lại rằng giả thiết (a) thỏa mãn cả ba điều kiện trên.

Do đó :

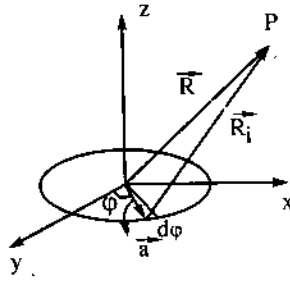
$$\vec{H}^{(i)} = H_{\varphi}^{(i)} \cdot \vec{e}_{\varphi} = \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_{\varphi}$$

$$\vec{H}^{(e)} = 0$$

Chú ý : a) Kết quả trên đúng đối với tiết diện của xônônôit hình nhẵn có dạng tùy ý.

b) Nếu $a \ll R$, (hình 2.24c), từ trường trong xônônôit coi là đều và bằng :

$$H^{(i)} = \frac{NI}{2\pi R}$$



Hình 2.24c

$$66. \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}}{R_i} \quad (1)$$

L là vòng tròn O có dòng I chạy

$$\vec{R}_i = \vec{R} - \vec{a}$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{a^2}{R^2} - \frac{2\vec{a}\vec{R}}{R^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{\vec{a}\vec{R}}{R^2} \right)$$

Thay vào (1) ta được :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(1 - \frac{a^2}{2R^2} \right) \oint_L d\vec{l} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint_L (\vec{a} \cdot \vec{R}) d\vec{l} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^3} \oint_L (\vec{R} \cdot \vec{a}) d\vec{l} \end{aligned} \quad (2)$$

(vì $\oint_L d\vec{l} = 0$).

$$\text{Thay } d\vec{l} = -d/\sin\varphi \vec{i} + d/\cos\varphi \vec{j} =$$

$$= (-\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}) a d\varphi$$

$$\vec{a} = a(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j})$$

$$\vec{R} = x. \vec{i} + y. \vec{j} + z. \vec{k}$$

vào (2), ta có :

$$A_x = -\frac{\mu_0 a^2 I}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} (x. \cos\varphi \sin\varphi + y. \sin^2\varphi) d\varphi = -\frac{\mu_0 a^2 I}{4R^3} y$$

$$A_y = \frac{\mu_0 a^2 I}{4\pi R^3} \int_0^{2\pi} (x. \cos^2\varphi + y. \sin\varphi \cos\varphi) d\varphi = \frac{\mu_0 a^2 I}{4R^3} x$$

$$A_z = 0$$

Hay $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} [\vec{S} \cdot \vec{R}]$ trong đó :

$$\vec{S} = \pi a^2 \vec{k}; \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 [\vec{\mu} \cdot \vec{R}]}{4\pi R^3}, \quad (3)$$

Với $\vec{\mu} = I\vec{S}$ là mômen từ của dây dẫn tròn.

Tính $\vec{B}$: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\text{grad} \frac{1}{R^3} \cdot [\vec{\mu} \cdot \vec{R}] \right] + \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \text{rot}[\vec{\mu} \cdot \vec{R}],$$

ta có :

$$\left[\text{grad} \frac{1}{R^3} \cdot [\vec{\mu} \cdot \vec{R}] \right] = \frac{(3\vec{\mu} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{3\vec{\mu}}{R^3}$$

$$\text{rot}[\vec{\mu} \cdot \vec{R}] = 2\vec{\mu}$$

Khi tính $\text{rot}[\vec{\mu} \cdot \vec{R}]$, nhớ rằng $\vec{\mu}$ không phụ thuộc tọa độ của điểm quan sát, do đó các đạo hàm riêng theo tọa độ của điểm quan sát của $\vec{\mu}$ đều bằng không.

$$\text{Từ đó : } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \left\{ \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^2} - \vec{\mu} \right\} \quad (4)$$

(3) và (4) chứng tỏ trường ở xa dòng điện tròn giống như trường của một lưỡng cực điện có mômen $\mu = \pi I a^2$.

67. Chọn $\vec{B}$ có hướng theo trục Oz : $\vec{B} (0,0,B)$.

Thế vectơ $\vec{A}$ phải thỏa mãn $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. (1)

Ta thấy là $\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B} \cdot \vec{r}]$ thỏa mãn (1) vì :

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yB & xB & 0 \end{vmatrix} = B \cdot \vec{k} \quad (2)$$

Các dạng khác của thế vectơ $\vec{A}$ có thể chọn được là :

$$\vec{A}_1 = xB\vec{j} \quad (3)$$

$$\vec{A}_2 = -yB\vec{i} \quad (4)$$

Có thể nghiệm lại rằng $\vec{A}$ khác $\vec{A}_1$ và $\vec{A}_2$ một lượng bằng $\text{grad}\varphi$, φ là một hàm vô hướng nào đó, có thể xác định được. Thực vậy :

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \text{grad}\varphi$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}yB\vec{i} + \frac{1}{2}xB\vec{j} &= xB\vec{j} + \text{grad}\varphi \\ &= xB\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\frac{1}{2}xB = xB + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ hay } -\frac{1}{2}xB = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$-\frac{1}{2}yB = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Từ đó ta có :

$$\varphi = -\frac{1}{2}xyB + C$$

Tương tự, $\vec{A}_2$ khác $\vec{A}$ một lượng $\text{grad}\varphi_1$ với

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}xyB + C$$

Chú ý : 1) Trong hệ toạ độ trụ, $\vec{A}$ có thể lấy các giá trị :

$$A_\theta = \frac{1}{2}BR ; \quad A_z = 0 ; \quad A_R = 0$$

2) Trong hệ toạ độ cầu, $\vec{A}$ có thể lấy các giá trị :

$$A_\psi = \frac{1}{2}Br\sin\theta ; \quad A_r = 0 ; \quad A_\theta = 0.$$

Đĩ nhiên tất cả các biểu thức của $\vec{A}$ sai khác nhau một gradien của một hàm vô hướng và ta có thể tính được hàm đó.

68. Chọn hệ toạ độ trụ và trục O trùng với trục của hình trụ. Do tính chất đối xứng trụ của dòng điện I, thế vectơ $\vec{A}$ chỉ có thể là hàm của r (r là khoảng cách từ điểm xác định trường đến trục của hình trụ).

Ta có :

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (1)$$

tức là

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{A}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial z^2} = -\mu \bar{j} \quad (2)$$

Chiếu trên các trục tọa độ ta được :

$$\Delta A_z = -\mu j; \quad \Delta A_\theta = 0; \quad \Delta A_r = 0$$

Các thành phần A_θ , A_r có thể lấy bằng không.

Ta cần tính $A_z = A_z(r)$.

Lấy tích phân (2) đối với A_z (khi $r < a$ và $r > a$), dùng điều kiện liên tục của A_z và H trên mặt phân cách $r = a$ và tính giới nội của H khi $r = 0$, ta được :

$$r < a \quad A_z = C - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{r}{a} \right)^2; \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r$$

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi a^2} r.$$

$$r > a \quad A_z = C - \frac{I}{4\pi} \left(\mu_0 + 2 \ln \frac{r}{a} \right)$$

$$B_\theta = \frac{\mu I}{2\pi r}; \quad H_\theta = \frac{I}{2\pi r}.$$

C là hằng số tùy ý chọn.

69. Tương tự bài 68, chỉ khác là miền $\bar{j} \neq 0$ là $a \leq r \leq b$. Do đó khi lấy tích phân tương tự như bài trước, ta được kết quả sau đây :

$$r < a \quad A_z = C_1; \quad \bar{B} = 0$$

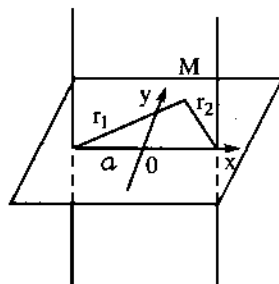
$$a \leq r \leq b \quad A_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(b^2 - a^2)} \left(\ln \frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2} \right) + C_2$$

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$$

$$r > b \quad A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{r} + C \quad B_{\theta} = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

Các thành phần khác của $\vec{A}$ và $\vec{B}$ đều bằng không. Có thể biểu diễn hai hằng số bất kỳ qua hằng số thứ ba nhờ điều kiện liên tục của thế ở mặt biên phân cách các miền.

70. Cũng dùng phương pháp trên, chọn hệ toạ độ như trên hình 2.25. Trường tạo ở M là tổng hợp của hai trường tạo bởi hai dòng ngược chiều nhau có cùng mật độ $\vec{j}$ (cùng cường độ I). Sử dụng kết quả của bài trên cho trường ở ngoài dây dẫn. Cuối cùng ta được :



Hình 2.25

$$A_z = \frac{I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} =$$

$$= \frac{I}{2\pi} \ln \frac{[(a+x)^2 + y^2]^{1/2}}{[(a-x)^2 + y^2]^{1/2}}$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{2I}{\pi} \frac{axy}{r_1^2 \cdot r_2^2}$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{a-x}{r_1^2} - \frac{a+x}{r_2^2} \right)$$

71. Mật độ điện tích mặt của quả cầu :

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}$$

Khi quay, trên quả cầu xuất hiện dòng điện mặt, mật độ i_m . Thế vectơ tạo bởi dòng điện đó là :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{i} \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

dS là diện tích nguyên tố của quả cầu ; $\vec{r}$ là tọa độ của điểm tính trường; $\vec{r}'$ là tọa độ của mẫu dS ; tích phân lấy theo toàn bộ diện tích mặt cầu.

Có thể thấy được là : $\vec{i} \cdot d\vec{S} = \sigma a [\vec{\omega} \cdot d\vec{S}]$

$$\text{Vậy } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma a \left[\vec{\omega} \int_S \frac{d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

Nhờ công thức : $\oint_S \vec{n} \cdot \vec{\phi} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{\phi} \cdot dV$, ta có :

$$\oint_S \frac{d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla \int_V \frac{dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(Lưu ý dấu trừ (-) vì tích phân lấy theo tọa độ của dS).

$$\text{Hơn nữa : } -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V \frac{dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{E}_0$$

là điện trường tạo trong chân không bởi quả cầu tích điện đều, mật độ điện khối là 1. Đã biết :

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{r} & r < a \\ \frac{a^3}{3\epsilon_0 r^3} \vec{r} & r > a \end{cases}$$

Từ đó ta có : $\vec{A} = \epsilon_0 \mu_0 \sigma a [\vec{\omega} \cdot \vec{E}_0]$

$$\text{hay : } \vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 \sigma a}{3} [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] & r < a \\ \frac{\mu_0 \sigma a^4}{3r^3} [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] & r > a \end{cases}$$

Tiếp theo, do $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, ta có :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3} \mu_0 \sigma a \vec{\omega} = \frac{\mu_0 e \vec{\omega}}{6\pi a} & r < a \\ \frac{3\mu_0 (\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{4\pi r^5} - \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{4\pi r^3} & r > a \end{cases}$$

trong đó $e = 4\pi\sigma a^2$ và $\vec{\mu} = \frac{ea^2}{3} \vec{\omega}$ là mômen từ của quả cầu.

Chú thích : a) Có thể giải bằng phương trình Poisson đối với thế vectơ $\vec{A}$. Khi đó phải chú ý rằng do tính chất đối xứng của dòng, thế vectơ chỉ có thành phần A_α khác không, và hơn nữa A_α chỉ là hàm của r và của θ , nghĩa là ta có thể tìm nghiệm dạng :

$$A_\alpha(r, \theta) = F(r)\sin\theta.$$

Dùng điều kiện định cỡ Loren và điều kiện biên, ta có kết quả như trên.

b) Có thể tính theo cách khác :

Bên trong và ngoài quả cầu, từ trường (hay cảm ứng từ $\vec{B}$) thỏa mãn hệ phương trình Macxoen :

$$\text{rot } \vec{H} = 0, \text{div } \vec{H} = 0$$

Do đó $\vec{H}$ có thể biểu diễn qua gradien của một hàm vô hướng φ_m .

$\vec{H} = -\nabla\varphi_m$ sao cho hàm đó thỏa mãn phương trình Laplace $\nabla^2\varphi_m = 0$.

Ta có : $r < a$ $\vec{H} = -\nabla\varphi_1$ và $\Delta\varphi_1 = 0$

$r > a$ $\vec{H} = -\nabla\varphi_2$ và $\Delta\varphi_2 = 0$

Các nghiệm φ_1, φ_2 của bài toán, do tính chất đối xứng có thể chọn dạng sau :

$$\varphi_1 = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\varphi_2 = \sum_l B_l r^{l+1} P_l(\cos\theta)$$

Với $P_l(x)$ là đa thức Logiăngdơ (Legendre). Các điều kiện biên của bài toán sẽ là :

$$\left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} ; \quad \left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} \right|_{r=a} = i_\varphi$$

trong đó i_φ là mật độ dòng điện mặt :

$$i_\varphi = \sigma a \omega \sin\theta.$$

Từ đó tính được A_l và B_l . Kết quả là :

$$A_1 = -\frac{2}{3}\sigma\omega a ; B_1 = \frac{2}{3}\sigma\omega a^4$$

$$A_l = B_l = 0 \quad \text{Khi } l \neq 1$$

và ta có lời giải như trên.

72. Dùng một trong các phương pháp đã nói ở bài trên. Kết quả là :

$$\vec{H} = \frac{R^3}{3} \left[\frac{3\vec{r}(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right]$$

Như vậy từ trường bên ngoài quả cầu bằng trường của lưỡng cực điện có mômen từ bằng :

$$\bar{\mu} = \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{M}.$$

73. Lực tương tác của các dòng trên một đơn vị độ dài dây dẫn bằng :

$$F = \pm \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}$$

dấu + nếu các dòng điện cùng chiều, dấu – nếu ngược chiều.

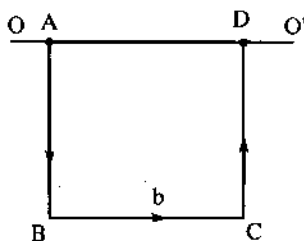
74. Lực tác dụng lên đoạn BC bằng

$$F = \mu b I H$$

b là cạnh của hình vuông (hình 2.26).

Lực này nằm trong mặt phẳng nằm ngang chứa đoạn BC và vuông góc với BC. Nó sinh ra một mômen lực bằng :

$$F.b.\cos\alpha = \mu b^2 I H \cos\alpha$$



Hình 2.26

Các lực tác dụng lên AB và CD bằng và ngược chiều nhau, không gây được mômen lực làm nâng khung lên.

Trong lượng P của khung dây gây ra một mômen lực ngược chiều với mômen lực nói trên, về giá trị bằng :

$$P.OG.\sin\alpha = 2b^2.\pi a^2 \delta \sin\alpha$$

OG là khoảng cách từ trọng tâm G của khung đến trục quay. Ở vị trí cân bằng tổng các mômen lực bằng không, do đó ta có :

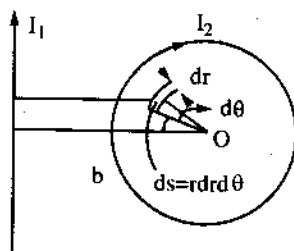
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu I H}{2\pi a^2 \delta}$$

75. Năng lượng của dây điện tròn I_2 đặt trong từ trường của dây điện dài I_1 (hình 2.27) bằng :

$$W = \frac{1}{2} I_2 \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\theta}{b - r \cos \theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \left(b - \sqrt{b^2 - a^2} \right)$$



Lực tác dụng lên dây điện tròn :

Hình 2.27

$$F = -\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} - 1 \right)$$

76. Yếu tố lực tác dụng lên yếu tố chiều dài $d\vec{l}$ của dòng thứ nhất do dòng thứ hai gây nên :

$$d\vec{F}_{12} = \mu I_1 I_2 \left[d\vec{l}_1 \oint_{L_2} \frac{|\vec{dl}_2 \cdot \vec{r}_{21}|}{r_{21}^3} \right]$$

Từ đó có được lực do dòng thứ hai tác dụng lên dòng thứ nhất

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \mu I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{1}{r_{21}^3} \left\{ d\vec{l}_2 (\vec{r}_{21} \cdot d\vec{l}_1) - \vec{r}_{21} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \right\} = \\ &= \mu I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \left\{ d\vec{l}_2 \left(d\vec{l}_1 \text{grad}_1 \frac{1}{r_{21}} \right) + \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \right\} \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\oint_{L_1} \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \left(d\vec{l}_1 \text{grad}_1 \frac{1}{r_{21}} \right) = \oint_{L_2} d\vec{l}_2 \oint_{L_1} d \left(\frac{1}{r_{21}} \right) = 0$$

ta có :

$$\vec{F}_{21} = -\mu I_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}^3}$$

(nhớ rằng $\vec{r}_{21} = -\vec{r}_{12}$ và $r_{21} = r_{12}$) vì thế có $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

77. Từ trường giữa các hình trụ khi có dòng điện I chạy qua bằng :

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Năng lượng của từ trường bằng :

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dV = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

ở đây $dV = 2\pi r dr$ là một lớp trụ bán kính r , bề dày dr , và chiều cao bằng đơn vị.

Mặt khác có :
$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

từ đó suy ra
$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

78. (Hình 2.28) a) Tại thời điểm t , góc hợp bởi pháp tuyến của khung dây và phương của trường là :

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

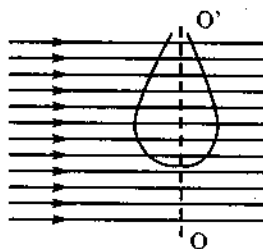
(φ_0 là góc tương ứng lúc $t = 0$)

Ta có :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c\dot{u}} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[SB \cos(\omega t + \varphi_0)] \\ &= SB\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

b) Cường độ dòng điện trong khung dây thỏa mãn phương trình :

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_{c\dot{u}}$$



Hình 2.28

$$L \frac{dI}{dt} + RI = SB\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Giải phương trình vi phân này ta được :

$$I = Ae^{\frac{R}{L}t} + I_0$$

A là hằng số tích phân ; I_0 là nghiệm riêng của phương trình vi phân có vế phải. Có thể tìm được là :

$$I_0 = \frac{\omega SB}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi_0 - \alpha)$$

với $\text{tg} \alpha = \frac{\omega L}{R}$

Tuỳ theo điều kiện ban đầu của bài toán ta tìm được giá trị của A.

79. a) Lập lại lập luận của bài trên. Ở đây, lúc đầu vòng dây song song với từ trường, do đó có $\varphi = \omega t$; tiếp thêm, diện tích của vòng dây là $S = \pi a^2$.

Sau khi giải phương trình vi phân như bài trên, ta được kết quả sau :

$$I = Ae^{\frac{R}{L}t} + I_0$$

với $I_0 = \frac{\omega \pi a^2 B}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \alpha), \text{tg} \alpha = \frac{\omega L}{R}$

Số hạng thứ nhất tiến tới 0 khi t tăng đến vô cùng. Do đó có thể lấy $I = I_0$.

b) Mômen lưỡng cực điện của vòng dây : $M = IS$. Mômen lực tác dụng lên vòng dây bằng :

$$\vec{N} = [\vec{M} \cdot \vec{B}] = I[\vec{S} \cdot \vec{B}]$$

Về giá trị bằng :

$$N = N(t) = \frac{\omega(\pi a^2 B)^2}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

80. Hiệu điện thế giữa hai bản của tụ điện là $\frac{q}{C}$. Ta có phương trình :

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \frac{q}{C}$$

nhưng $I = -\frac{dq}{dt}$, do đó có : $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

Giải phương trình trên, ta được :

$$q = C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}$$

với $r_{1,2}$ là nghiệm của phương trình đặc tính, tức là :

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Từ điều kiện ban đầu khi $t = 0, q = q_0$

$$I = -\frac{dq}{dt} = 0, \text{ ta có :}$$

$$C_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} q_0; C_2 = \frac{r_1}{r_2 - r_1} q_0.$$

81. a) Gọi q là điện tích trên bản của tụ điện nối với cực dương của acquy. Ứng với hai mạch ta có :

$$L \frac{dI_1}{dt} + IR = \mathcal{E} \quad (1)$$

$$IR = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \quad (2)$$

trong đó $\frac{dq}{dt} = I - I_1$ (3)

I là dòng điện qua acquy, I_1 là dòng qua L

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{CL} = \frac{1}{LCR} \mathcal{E}$$

Nghiệm của phương trình này viết được dưới dạng :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \frac{\sin \omega t}{\omega RC} e^{-\frac{1}{2RC} t} \right)$$

trong đó $\omega^2 = \frac{1}{CL} - \frac{1}{4R^2 C^2}$

b) Khi tháo bỏ acquy ra, suất điện động bằng không, ta có :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

đặt $\omega_0^2 = \frac{1}{CL}$, ta có : $q = -\frac{\mathcal{E}}{\omega_0 R} \sin \omega_0 t$.

82. Kí hiệu cường độ dòng điện qua C_2 là I , cường độ dòng điện qua C_1 là I' , và điện tích ở một bản tụ điện C_1 là q' . Như thế ta có :

$$I = \frac{dq}{dt}; I' = \frac{dq'}{dt} \quad (1)$$

Phương trình vi phân ứng với mạch 1 2 3 4 5 6 7 8 1 (h.2.29) là :

$$L_2 \frac{dI}{dt} = \frac{q'}{C_1} + \frac{q}{C_2} \quad (2)$$

Phương trình vi phân ứng với mạch 1 2 3 9 10 6 7 8 1 (h.2.29) là :

$$L_1 \frac{d(I - I')}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C_2} \quad (3)$$

thay (1) vào (2), (3) và khử q' trong các phương trình đã thu được, ta có kết quả sau đây :

$$\frac{d^4 q}{dt^4} + A \frac{d^2 q}{dt^2} + Bq = 0$$

$$A = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2}{L_1 L_2 C_1 C_2}; B = \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2}.$$

83. Cũng như bài trên, ta xét hai mạch 1 2 3 4 5 6 7 8 1 và mạch 1 2 3 9 10 6 7 8 1, xem hình 2.29. Lưu ý rằng dòng điện qua R bằng :

$$I_1 = \frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt}$$

Ta có :

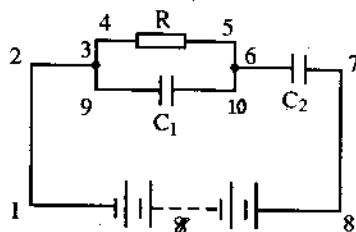
$$R \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt} \right) = \mathcal{E} - \frac{q_2}{C_2} \quad (1)$$

$$\mathcal{E} - \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta có :

$$\frac{dq_1}{dt} = - \frac{C_1}{C_2} \frac{dq_2}{dt} \quad (3)$$

Thay (3) vào (1), ta được phương trình sau đây đối với q_2 :



Hình 2.29

$$\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{R(C_1 + C_2)} = R \mathcal{E} \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2} \right).$$

Giải ra ta được kết quả sau đây :

$$q_2 = C_2 \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}} \right)$$

từ đó suy ra q_1 nhờ (2).

84. Phương trình cho mạch trên là :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) I = 0$$

Đây là phương trình vi phân hạng hai hệ số là hằng số, nghiệm là hàm sin. Hai hằng số tích phân được xác định theo các điều kiện ban đầu sau đây :

$$\text{Khi } t = 0 ; I_0 = 0 \text{ và } \left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = \frac{Q}{LC_1}.$$

Kết quả ta thu được :

$$I = Q \sqrt{\frac{C_2}{LC_1(C_1 + C_2)}} \sin \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}} t.$$

85. Điện trở phức của tụ điện và của cuộn tự cảm là :

$$Z_1 = -\frac{i}{\omega C} ; Z_2 = i\omega L$$

Hai điện trở này được mắc song song với nguồn có suất điện động là $\mathcal{E}$. Vậy cường độ trong mạch là :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \mathcal{E} \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) = i \frac{\mathcal{E}}{\omega L} (\omega^2 LC - 1)$$

Điều kiện để cho I bằng không là $1 - \omega^2 LC = 0$ hay là :

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

86. Ký hiệu dòng điện qua cuộn tự cảm, tụ điện và bộ pin là I_1 , I_2 và I_3 . Hệ thống được mắc như hình 2.30. Ta có :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

Phương trình cho mạch có L và C :

$$L \frac{d^2 I_1}{dt^2} - \frac{I_2}{C} = 0 \quad (2)$$

Phương trình cho mạch có R và L :

$$L \frac{dI_1}{dt} = \mathcal{E} - RI_3 \quad (3)$$

Khử I_2 và I_3 từ 3 phương trình (1), (2), (3), ta có :

$$L \frac{d^2 I_1}{dt^2} - \frac{L}{RC} \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C} = \frac{\mathcal{E}}{RC} \quad (4)$$

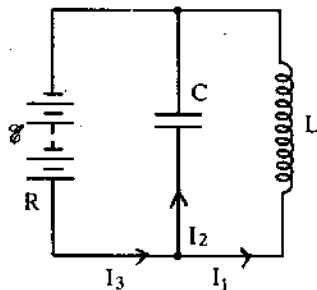
Phương trình đặc trưng tương ứng có các nghiệm là :

$$r = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \omega_0^2}$$

với $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ là tần số dao động riêng. Theo dữ kiện của đầu bài, ta

có $\omega_0 = \frac{1}{2RC}$, do đó $r = -\frac{1}{2RC}$ và biết rằng :

$$\mathcal{E} = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \mathcal{E} & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$



Hình 2.30

từ đó ta có :

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{2RC} \right) \exp \left[-\frac{1}{2RC} \right] \right\}$$

Chú thích: Có thể mở rộng bài toán cho trường hợp $\omega_0 \neq \frac{1}{2RC}$, khi đó lần lượt xét hai trường hợp

$$\omega_0 < \frac{1}{2RC} \quad \text{và} \quad \omega_0 > \frac{1}{2RC}.$$

87. Phương trình đối với cường độ dòng điện trong mạch :

$$(1) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = V_0, \quad 0 < t \leq T \quad \text{với} \quad I(0) = 0$$

$$(2) \quad L \frac{dI}{dt} + RI = 0, \quad t > T \quad \text{với} \quad I(T) \text{ là giá trị của } I \text{ nhận được ở (1) khi } t = T.$$

$$\text{Từ (1) có : } I = \frac{V_0}{R} \left[1 - \exp \left(-\frac{R}{L} t \right) \right]$$

Điện thế của L bằng $V_2 = V_1 - RI = V_0 - RI$ ($V_1 = V_0$ là điện thế toàn mạch, RI là điện thế của điện trở). Từ đó :

$$V_2(t) = V_0 \exp \left(-\frac{R}{L} t \right)$$

$$\text{Từ (2), ta có : } I' = -\frac{LA}{R} \exp \left(-\frac{R}{L} t \right)$$

Khi $t = T$, ta có : $I'(t) = I(t)$

$$-\frac{LA}{R} \exp \left(-\frac{R}{L} T \right) = \frac{V_0}{R} \left[1 - \exp \left(-\frac{R}{L} t \right) \right]$$

$$A = \frac{V_o}{L} \left[1 - \exp\left(\frac{R}{L}t\right) \right]$$

$$I' = \frac{V_o}{R} \left[e^{\frac{R}{L}(t-T)} - e^{\frac{R}{L}t} \right]$$

$$\text{Từ đó tính được } V_2(t) = V_o \left[e^{\frac{R}{L}t} - e^{\frac{R}{L}(t-T)} \right]$$

Kết quả là :

$$V_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ V_o e^{\frac{R}{L}t} & \text{khi } 0 < t \leq T \\ V_o \left[e^{\frac{R}{L}t} - e^{\frac{R}{L}(t-T)} \right] & \text{khi } t \geq T \end{cases}$$

88. Lập phương trình vi phân đối với I tương tự các bài trên, ta có :

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \xi_o \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Giải phương trình trên với điều kiện ban đầu như đầu bài, ta được :

$$I(t) = \frac{\xi_o}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left\{ \cos(\omega t + \varphi_o - \varphi) - e^{\frac{R}{L}t} \cos(\varphi_o - \varphi) \right\}$$

trong đó : $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}$.

Quá trình chuyển tiếp mất đi khi $\operatorname{tg} \varphi_o = -\frac{R}{L}$

Thực vậy khi đó $\varphi \neq \varphi_0$ một lượng $\pi/2$ và trong biểu thức của $I(t)$ chỉ còn số hạng thứ nhất có dạng $A.\sin\omega t$ và khi $t = 0$ thì $I(t) = 0$.

89. Các phương trình đối với dòng điện của hai mạch

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_1}{C_1} = 0 \quad (1)$$

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + L_{12} \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_2}{C_2} = 0 \quad (2)$$

I_1, I_2 được xác định dưới dạng : $I_1 = I_{10}.e^{-i\omega t}$

$I_2 = I_{20}.e^{-i\omega t}$. Nhờ vậy, hai phương trình (1), (2) dẫn tới hai phương trình đại số :

$$\left(\frac{1}{C_1} - \omega^2 L_1 \right) I_{10} - L_{12} \omega^2 I_{20} = 0 \quad (1')$$

$$-L_{12} \omega^2 I_{10} + \left(\frac{1}{C_2} - \omega^2 L_2 \right) I_{20} = 0 \quad (2')$$

Hệ phương trình có nghiệm khi định thức của chúng bằng không, tức là có :

$$\left(\frac{1}{C_1} - \omega^2 L_1 \right) \left(\frac{1}{C_2} - \omega^2 L_2 \right) - L_{12}^2 \omega^2 = 0 \quad (3)$$

Phương trình (3) được thỏa mãn với các giá trị của ω là :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm [(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2]^{1/2}}{2 C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}$$

90. a) Gọi cường độ dòng điện qua L_1 là I_1 , qua L_2 là I_2 , qua Z là I_3 . Ta có các phương trình sau đây đối với các mạch gồm L_1 và C_1, L_2

và C_2 , Z và C_1 , C_2 :

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{I_1 + I_2}{C_1} = 0 \quad (1)$$

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_2 + I_3}{C_2} = 0 \quad (2)$$

$$Z \frac{dI_3}{dt} + \frac{I_1 + I_2}{C_1} + \frac{I_2 + I_3}{C_2} = 0 \quad (3)$$

Cũng như trên, đặt $I_1 = I_{10} \cdot e^{-i\omega t}$; $I_2 = I_{20} \cdot e^{-i\omega t}$; $I_3 = I_{30} \cdot e^{-i\omega t}$; ba phương trình trên dẫn về ba phương trình đại số :

$$\left(-L_1 \omega^2 + \frac{1}{C_1} \right) I_{10} + 0 \cdot I_{20} + \frac{1}{C_1} I_{30} = 0 \quad (1')$$

$$0 \cdot I_{10} + \left(-L_2 \omega^2 + \frac{1}{C_2} \right) I_{20} + \frac{1}{C_2} I_{30} = 0 \quad (2')$$

$$\frac{1}{C_1} I_{10} + \frac{1}{C_2} I_{20} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) I_{30} = 0 \quad (3')$$

Hệ các phương trình trên có nghiệm khi định thức của nó bằng không, tức là ta có phương trình sau đây đối với ω .

$$L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2) \omega^2 - [L_1 (C + C_1) + L_2 (C + C_2)] \omega + 1 = 0$$

Giải ra ta được :

$$\omega_{1,2}^{(1)} = \frac{[(L_1 + L_2)C + L_1 C_1 + L_2 C_2]}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)} \pm \frac{\left\{ [(L_2 (C + C_1) - L_2 (C + C_2))^2 + 4L_1 L_2 C^2] \right\}^{1/2}}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)}$$

b) và c). Làm như câu a). Kết quả :

+ Hai mạch có liên kết qua cảm ứng ($Z = i\omega L$) :

$$\omega_{1,2}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_2} \right) \right]^2 + \frac{4}{L^2 C_1 C_2} \right\}^{1/2}$$

+ Hai mạch có liên kết qua điện trở thuần : phương trình đối với tần số là :

$$\omega^{(4)} + i\omega^{(3)} \left(\frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2} \right) - \omega^2 \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) - i\omega \left(\frac{1}{L_1 RC_1^2} + \frac{1}{L_2 RC_2^2} \right) + \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2} = 0.$$

91. a) Phương trình sóng mà $\bar{E}$ thỏa mãn có dạng :

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Đối với các thành phần α ($\alpha = x, y, z$) phương trình này có dạng

$$\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Thực vậy, thay $E_\alpha = E_{0\alpha} \exp[i(\omega t - kx)]$ vào (2), ta thấy (2) được thỏa mãn với $k = \omega/C$.

b) Theo hướng dương của trục x.

c) Tác dụng trực tiếp $V(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x}, \bar{y} \frac{\partial}{\partial y}, \bar{k} \frac{\partial}{\partial z})$ lên $\bar{E}$, ta được :

$$\nabla \vec{E} = \nabla (\vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}) = -i_k \vec{i} \cdot \vec{E} \quad (3)$$

Tác dụng $\partial/\partial t$ dẫn đến nhân hàm như thế với $i\omega$.

d) Giả sử cường độ từ trường và điện trường phụ thuộc x và t theo hàm sin, dạng phức của hàm đó có thể viết là :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kx)]; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(\omega t - kx)] \quad (4)$$

Trong chân không phương trình Macxoen có dạng :

$$[\nabla \cdot \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad [\nabla \cdot \vec{B}] = \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \vec{E} = 0; \quad \nabla \vec{B} = 0$$

Thay (4) vào (5) ta có :

$$k[\vec{i} \cdot \vec{E}] = \omega \vec{B}; \quad k[\vec{i} \cdot \vec{B}] = -\frac{\omega}{C^2} \vec{E} \quad (6)$$

$$[\vec{i} \cdot \vec{E}] = 0; \quad (\vec{i} \cdot \vec{B} = 0)$$

Từ hai phương trình đầu của (6) ta có

$$-k^2[\vec{i} \cdot [\vec{i} \cdot \vec{B}]] = \frac{\omega^2}{C^2} \vec{B} \quad (7)$$

$$-k^2[\vec{i}(\vec{i} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{i} \cdot \vec{i})] = \frac{\omega^2}{C^2} \vec{B} \quad (8)$$

$$\text{hay :} \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \right) \vec{B} = 0 \quad (9)$$

nghĩa là có : $k = \frac{\omega}{C}$

e) Câu a. Điện trường $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[\pm i(\omega t + kx)]$ thỏa mãn phương trình sóng như trên.

Câu b. Sóng truyền theo hướng âm của trục x.

Câu c. Tác dụng của toán tử ∇ là nhân với $\pm i\vec{k}$, tác dụng của $\partial/\partial t$ là nhân với $\pm i\omega$.

Câu d. Không có gì thay đổi.

92. Trong môi trường đồng nhất, đẳng hướng và không có điện tích tự do, phương trình Macxoen có dạng sau :

$$[\nabla \cdot \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad (1)$$

$$[\nabla \cdot \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} ; \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 ; \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4)$$

ở đây $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ là dòng điện mật.

Biểu thức liên hệ giữa $\vec{E}, \vec{B}$ với các thế vectơ và thế vô hướng là :

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} ; \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

Thay biểu thức của $\vec{E}$ và $\vec{B}$ vào công thức (2) ta được :

$$\frac{1}{\mu} [\nabla (\nabla \cdot \vec{A})] = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + \sigma (-\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

Với điều kiện định cỡ đã cho trong đầu bài, ta có phương trình đối với A :

$$\nabla^2 \vec{A} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Lại thay biểu thức của $\vec{E}$ và $\vec{B}$ vào công thức (3) ta có :

$$\nabla \bar{E} = -\nabla^2 \varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bar{A}) = 0 \text{ hay } \nabla^2 \varphi = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \bar{A})$$

lại thay $\text{div } \bar{A}$ từ biểu thức định cỡ đã cho, ta thu được phương trình đối với φ :

$$\nabla^2 \varphi = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

93. Thay φ và $\bar{A}$ vào các phương trình của chúng ở bài trên, ta có :

$$\text{đối với } \varphi : \nabla(\nabla^2 \bar{\Pi}) = \nabla \left(\sigma \mu \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} \right) + \nabla \left(\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{đối với } \bar{A} : \sigma \mu \nabla^2 \bar{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mu \nabla^2 \bar{\Pi}) \\ = \sigma \mu \left(\sigma \mu \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} \right) + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mu \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{\Pi}}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

như vậy, nếu $\bar{\Pi}$ thoả mãn hệ thức đã cho của đầu bài thì các phương trình đối với φ và $\bar{A}$ được thoả mãn.

Tiếp theo, thay trong các công thức của $\bar{E}$ và $\bar{H}$ các biểu thức của φ và $\bar{A}$ theo $\bar{\Pi}$, ta có được kết quả sau :

$$\bar{E} = \text{grad}(\text{div } \bar{\Pi}) - (\nabla^2 \bar{\Pi}) = \text{rot rot } \bar{\Pi}$$

$$\bar{H} = \sigma \text{rot } \bar{\Pi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \bar{H}.$$

$$94. \text{ Dùng phương trình Macxoen, } \text{rot } \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (1)$$

Chọn hệ toạ độ trụ, trục Oz trùng với $\bar{H}$. Khi đó (1) thành :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_{(r,t)}}{\partial t}$$

Hệ phương trình trên thoả mãn với $E_r = E_z = 0$, và $E_\varphi = E_\varphi(r, t)$.
Từ phương trình cuối, ta có :

$$E_\varphi = \frac{1}{r} \left\{ -\mu_0 \int \frac{\partial H_{(r,t)}}{\partial t} r dr + f(t) \right\}$$

trong đó $f(t)$ là một hàm tùy ý của thời gian t . Do đó trong mặt phẳng vuông góc với trục của từ trường đường sức của điện trường là một hệ các vòng tròn đồng tâm nằm trên trục của từ trường.

95. Chọn phương truyền sóng là trục Ox , khi đó có $E_x = A \cos(kz - \omega t)$; $E_y = B \cos(kz - \omega t + \alpha)$; $E_z = 0$, A, B, α là hằng số.

Từ đó ta có :

$$\frac{E_x^2}{A^2} - 2 \frac{E_x}{A} \cdot \frac{E_y}{B} \cos \alpha + \frac{E_y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha$$

đó là phương trình elip trong mặt phẳng (E_x, E_y) .

96. Chọn phương truyền sóng là Oz , tần số của các sóng là ω_1 và ω_2 , ta có :

$$E_x^{(1)} = A \cos(kz - \omega_1 t); \quad E_y^{(1)} = A \sin(kz - \omega_1 t)$$

$$E_x^{(2)} = A \cos(kz - \omega_2 t); \quad E_y^{(2)} = -A \sin(kz - \omega_2 t)$$

Từ đó có sóng tổng hợp :

$$E_x = E_x^{(1)} + E_x^{(2)} = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left(kz - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right)$$

$$E_y = E_y^{(1)} + E_y^{(2)} = 2A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left(kz - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right)$$

Vì $\omega_1 \neq \omega_2$ cho nên sóng tổng hợp gần như phân cực thẳng với tần số $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$, hướng của phân cực quay chậm với vận tốc góc $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$. Đối với $\vec{H}$ ta có kết quả tương tự.

97. a) Trường có thể đặc trưng bằng các vector sau đây:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad ; \quad \vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{E} \right]$$

trong đó các thông số là thực.

Với $\rho = 0$ và trong môi trường không dẫn, ta có thể chọn $\varphi = 0$. Khi đó có :

$$\vec{E} = + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Từ biểu thức của $\vec{E}$ ở trên ta có thể tính được :

$$\vec{A} = -i \frac{\vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{E}_0}{c} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \frac{\pi}{2})}$$

b) Trường có thể viết được là :

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t) \quad ; \quad H_x = - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y = E_0 \sin(kz - \omega t) \quad ; \quad H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_z = H_z = 0$$

Ở đây sóng lan truyền theo Oz.

Ta cũng có tương tự như trên :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

từ đó suy ra:

$$\vec{A} = -\int \vec{E} dt$$

tức là :
$$\vec{A} = -\frac{\mu}{k} \vec{H}$$

98. Hệ số phản xạ :

$$\rho = \frac{R_{//}^2 + R_{\perp}^2}{A_{//}^2 + A_{\perp}^2}$$

Hệ số khúc xạ :

$$\delta = n \frac{D_{//}^2 + D_{\perp}^2}{A_{//}^2 + A_{\perp}^2}$$

Ở đây A, R, D chỉ biên độ của sóng tới, sóng phản xạ và sóng khúc xạ, kí hiệu // chỉ thành phần song song với mặt phẳng tới, $\perp$ chỉ thành phần vuông góc với mặt phẳng tới. Hơn nữa ta có :

$$A_{//} = A \cos \theta ; A_{\perp} = A \sin \theta$$

Gọi α là góc tới, β là góc khúc xạ, tức là $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Từ các công thức Fresnen (Fresnel), ta có :

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)} \cos^2 \theta + \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \sin^2 \theta$$

$$\delta = \frac{4 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2(\alpha - \beta)} \sin \theta \right\} n$$

99. Định luật bảo toàn năng lượng thoả mãn nếu hệ thức sau đây được thoả mãn :

$$J_a \cos \alpha = J_r \cos \alpha + J_d \cos \beta \quad (1)$$

tức là năng lượng của sóng tới (trong một đơn vị thời gian, trên một đơn vị bề mặt) bằng tổng năng lượng sóng phản xạ và năng lượng sóng khúc xạ (trong một đơn vị thời gian, trên một đơn vị bề mặt. Từ (1) ta có :

$$\cos \alpha = \frac{J_r}{J_d} \cos \alpha + \frac{J_d}{J_a} \cos \beta \quad (2)$$

$\frac{J_r}{J_a} = \rho$; $\frac{J_d}{J_a} = \delta$, J là cường độ sóng. Thay các giá trị đã cho của ρ và

δ vào (2), ta thấy thoả mãn. Do đó định luật bảo toàn năng lượng được thoả mãn.

100. Dùng công thức Fresnen

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \alpha ; \quad \cos \beta = i\lambda$$

với $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \alpha - 1}$. Ta chứng minh được :

$$R_{//}^2 = R_{\perp}^2 = 0$$

Từ đó theo công thức tính hệ số phản xạ của bài 98, ta có giá trị của hệ số đó bằng một.

101. Phân tích bán kính vectơ thành hai thành phần, một theo phương chuyển động, một vuông góc với phương chuyển động. Công

thức biến đổi tọa độ trong trường hợp chuyển động tương đối đã biết, cụ thể : thành phần vectơ bán kính song song với phương chuyển động tương đối là $\bar{r} \cdot \frac{\bar{v}}{v}$, thành phần vectơ bán kính vuông góc với phương đó

là $\bar{r} - \left(\bar{r} \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right) \frac{\bar{v}}{v}$ (ở đây $\frac{\bar{v}}{v}$ là vectơ đơn vị trùng hướng với vận tốc $\bar{v}$).

Đã biết công thức biến đổi của thành phần song song với phương chuyển động là :

$$\bar{r} \cdot \frac{\bar{v}}{v} = \frac{\bar{r}' \cdot \frac{\bar{v}}{v} + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad (1)$$

$$t = \frac{t' + \frac{1}{c^2}(\bar{r}' \cdot \bar{v})}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (2)$$

Thành phần vuông góc với phương chuyển động không thay đổi, nghĩa là có :

$$\bar{r} - \left(\bar{r} \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right) \frac{\bar{v}}{v} = \bar{r}' - \left(\bar{r}' \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right) \frac{\bar{v}}{v} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta có :

$$\bar{r} = \bar{r}' - \left(\bar{r}' \cdot \frac{\bar{v}}{v} \right) \frac{\bar{v}}{c} + \frac{\frac{1}{v^2}(\bar{r}' \cdot \bar{v}')\bar{v} - \bar{v}t'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

102. Giả sử gốc tọa độ của hai hệ quy chiếu được chọn tùy ý. Gọi x_0, y_0, z_0, t_0 và x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 là các tọa độ không thời gian của cùng một điểm vũ trụ tương ứng với hai hệ trên. Chọn điểm đó làm gốc tọa độ chung. Như thế trong các công thức biến đổi Loren đã biết, ta phải

thay các tọa độ x bằng $x - x_0$ (và x' bằng $x' - x'_0$), y bằng $y - y_0$
 Như thế công thức phải tìm là :

$$x' - x'_0 = \frac{(x - x_0) - v(t - t_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' - y'_0 = y - y_0 ; z' - z'_0 = z - z_0$$

$$t' - t'_0 = \frac{(t - t_0) - \frac{v}{c^2}(x - x_0)}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

103. Xét ba hệ quy chiếu K, K', K'' có các trục tương ứng song song với nhau. Tại thời điểm $t_0 = 0, t'_0 = 0, t''_0 = 0$ các gốc tọa độ trùng nhau. Gọi $\bar{v}$ là vận tốc của hệ K đối với hệ K' , $\bar{u}'$ là vận tốc của hệ K'' đối với hệ K' . Hơn nữa $\bar{v}$ và $\bar{u}'$ có phương dọc theo trục x . Áp dụng công thức biến đổi Loren cho các cặp K, K' và K', K'' , ta có :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$x'' = \frac{x' - u't'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} ; t'' = \frac{t' - \frac{u'}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \quad (2)$$

Thay x' và t' từ (1) vào (2), ta có :

$$x'' = \frac{x - \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}t}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \right)^2}} ;$$

$$t'' = \frac{t - \frac{x}{c^2} \cdot \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \right)^2}} \quad (3)$$

Mặt khác, nếu gọi u là vận tốc tương đối của hệ K'' đối với hệ K , ta có :

$$x'' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; t'' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (4)$$

So sánh (3) và (4) ta có công thức biến đổi vận tốc sau đây :

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (5)$$

đó chính là công thức hợp vận tốc phải tìm

104. Gọi $\vec{r}$ và $\vec{r}'$ là bán kính vectơ của hạt trong các hệ tọa độ K và K' . Vì đầu bài không cho cụ thể hướng của $\vec{v}$ là vận tốc tương đối của hai hệ, do đó ta phải áp dụng công thức biến đổi tọa độ ở bài 101.

Từ các công thức đó ta có :

$$d\vec{r} = d\vec{r}' - \frac{1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot d\vec{r}') - \frac{\frac{1}{v^2} \vec{v}(\vec{v} \cdot d\vec{r}') + \vec{v} dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{1}{c^2} (\vec{r} \cdot d\vec{r}')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

Từ đó ta có :

$$\vec{u} = \left\{ \vec{v} + \vec{u}' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{u}') \vec{v} (1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) \right\} \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}'}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (3)$$

trong đó $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ là vận tốc của hạt đối với hệ K,

$\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$ là vận tốc của hạt đối với hệ K'.

Bình phương cả hai vế của (3) rồi lấy căn bậc hai, ta có được công thức đối với giá trị tuyệt đối của u phải tìm.

105. Theo đầu bài ta có :

$$v_x = v; \quad v_y = v_z = 0;$$

$$u'_x = u' \cos \theta'; \quad u'_y = u' \sin \theta', \quad u'_z = 0$$

Thay các giá trị này vào biểu thức vận tốc u đã tìm được ở bài trên, ta có :

$$u_x = u \cos \theta = (v + u' \cos \theta') \left(1 + \frac{1}{c^2} v u' \cos \theta'\right)^{-1}$$

$$u_y = u \sin \theta = u' \sin \theta' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \left(1 + \frac{1}{c^2} v u' \cos \theta'\right)^{-1}$$

$$u_z = 0; \quad \beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

Từ đó suy ra :

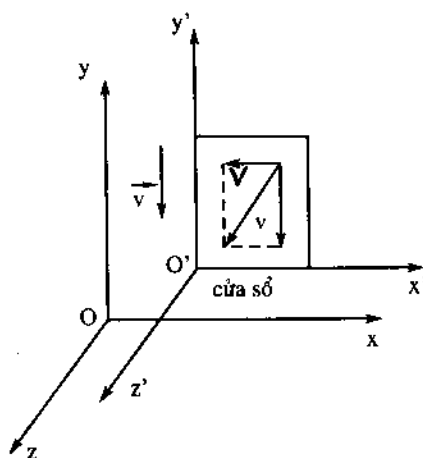
$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{u' \sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{v + u' \cos \theta'}$$

là góc hợp bởi u và trục Ox .

106. Trên hình 2.31, đối với hệ K gắn với Trái Đất, ta có :

$$v_x = 0, \quad v_y = -v; \quad v_z = 0 \quad (1)$$

Đối với hệ K' gắn với ôtô, theo quan điểm tương đối, vận tốc của giọt mưa là (theo kết quả của bài trước) :



Hình 2.31

$$v'_x = -V, v'_y = -v \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}};$$

$$v'_z = 0 \quad (2)$$

Từ đó có được :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = -\frac{V}{v \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = -\frac{V}{v} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

Theo quan điểm cổ điển, vận tốc của giọt mưa trong hệ K' là :

$$v'_x = -V; v'_y = -v; v'_z = 0, \text{ từ đó ta có :}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{v} \quad (4)$$

Ta thấy là với $V \ll c$, hiệu ứng tương đối tính không đáng kể.

107. a) Sau mỗi giây, hai tên lửa tách xa nhau một quãng đường

bằng 480000km. Lưu ý rằng ở đây không nói về vận tốc của một vật, do đó không mâu thuẫn gì với tiên đề giá trị giới hạn của vận tốc bằng vận tốc ánh sáng (300000km/s).

$$b) \quad v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = \frac{0,8c + 0,8c}{1 + \frac{0,64c^2}{c^2}} = 0,976c = 2,93 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

V : vận tốc của Trái Đất đối với một tên lửa.

v' : vận tốc của tên lửa kia đối với Trái Đất.

v : vận tốc của tên lửa thứ hai đối với tên lửa đầu.

108. Sử dụng công thức $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$ để tính thời gian trong hệ phòng thí nghiệm. Thay số vào, ta có kết quả :

$$\Delta t = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ s.}$$

Biết vận tốc tương đối $\beta = \frac{v}{c}$, tính được giá trị của v .

Từ đó tính được quãng đường đi được. Kết quả :

a) 800cm.

b) 500cm.

109. Tính thời gian để dòng hạt còn lại 1% trong hệ quy chiếu riêng của mezôn μ (dùng công thức của $N(t)$ cho trong đầu bài). Từ đó tính được thời gian để dòng hạt đi xuống đến mặt đất (đối với hệ quy chiếu Trái Đất). Biết được vận tốc của mezôn μ và $V = 0,99c$ ta tìm dễ dàng được độ cao đó. Đáp số : $2 \cdot 10^6 \text{ cm}$.

110. Trên hình 2.32 kí hiệu tọa độ và thời gian của hai sét đó là $A(x_1, t_1; x'_1, t'_1)$, $B(x_2, t_2; x'_2, t'_2)$, với $x_1 > x_2$. V là vận tốc của xe. Áp dụng công thức biến đổi tọa độ, ta có :

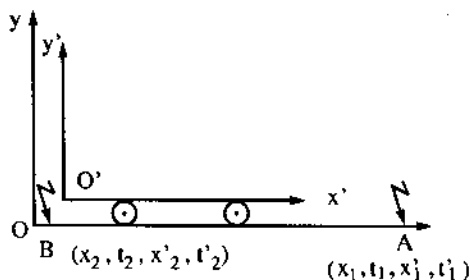
$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0$$

từ đó suy ra :

$$t_2 - t_1 = \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)$$

Vì $\frac{V}{c^2} > 0$, $x_2 - x_1 < 0$ cho nên $t_1 > t_2$

như vậy sét đánh ở B trước (phía sau xe) ở A sau (trước xe).



Hình 2.32

111. Áp dụng các công thức biến đổi tọa độ :

a) $x_A = -4$; $t'_A = \frac{3\sqrt{3}}{c} \text{ m}$; $c = 2,998.10^8 \text{ m/s}$

$$x'_B = x'_D = 0$$
 ; $t'_B = t'_D = \frac{\sqrt{3}}{c} \text{ m}$

b) $x'_A = -2,5$

$$x'_B = x'_D = -1,5.$$

c) $\frac{S'}{S} = \frac{1}{2}$. S là diện tích của hình vuông trong hệ K.

S' là diện tích của hình đó trong hệ K' .

112. a) Không thể được. $0h$ là số chỉ của hai đồng hồ trong một hệ quy chiếu và là số chỉ của chỉ một đồng hồ trong hệ kia. Nếu ta đứng ở điểm A trên "sân ga" chẳng hạn, ta sẽ thấy mọi đồng hồ đặt tại các điểm của sân ga đều cùng chỉ $0h$ và thấy chỉ một đồng hồ đặt tại điểm B' của "đoàn tàu" trùng với điểm A chỉ $0h$ mà thôi. Các số chỉ của các đồng hồ khác đặt tại các điểm khác trên tàu (thí dụ điểm A'), ta không thấy được.

b) Theo quan điểm của người đứng ở "sân ga". Đoàn tàu có chiều dài $l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Khi "đuôi tàu" đi ngang qua "đầu ga" thì "đoàn tàu" đi được một đoạn đường $l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Như vậy thời gian trôi đi là :

$$t_A = \frac{l}{v} = l_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{v} = 36 \text{ phút.}$$

Theo câu a) đối với người đứng ở đầu "sân ga", tất cả các đồng hồ đặt trên "sân ga" đều chỉ như đồng hồ ở A, tức là đều chỉ 36 phút, ta có :

$$t_A = t_B = \dots = 36 \text{ phút}$$

Toạ độ của "đuôi tàu" là $x_{A'} = 0$ và của "đầu tàu" là $x_{B'} = l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Gọi $t_{A'}$ và $t_{B'}$ là thời điểm tương ứng của "đuôi tàu" và "đầu tàu" theo đồng hồ gắn với "sân ga". Rõ ràng là $t_{A'}$ và $t_{B'}$ cũng bằng t_A và t_B ..., nghĩa là 36 phút. Khi đó quan sát viên đứng ở sân ga sẽ biết được thời điểm $t'_{A'}$ và $t'_{B'}$ tương ứng trong hệ gắn với con tàu nhờ phép biến đổi Lorentz.

$$t'_{A'} = \frac{t_{A'} - \frac{v}{c^2} x_{A'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_{A'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 60 \text{ phút}$$

$$t'_{B'} = \frac{t_{B'} - \frac{v}{c^2} x_{B'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_{B'} - \frac{v}{c^2} l\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = 21,6 \text{ phút}$$

(trong tính toán, ta có :

$$\frac{v}{c} = \frac{2,4 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5} = 0,8$$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = 0,64 ; \sqrt{1-\beta^2} = 0,6).$$

Theo quan điểm của người đứng ở "đầu tàu" (điểm B') khi "đuôi tàu" đi ngang qua "đầu ga", "đoàn tàu" đã đi được một đoạn đường dài bằng l_0 . Như vậy thời gian trôi đi phải bằng :

$$t'_{B'} = \frac{l_0}{v} = 60 \text{ phút}$$

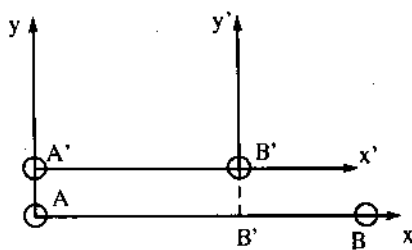
Cũng như quan sát viên đứng ở trên ga, người đó phải thấy mọi đồng hồ trên "đoàn tàu" cũng chỉ một giá trị, nghĩa là :

$$t'_{A'} = t'_{B'} = \dots = 60 \text{ phút}$$

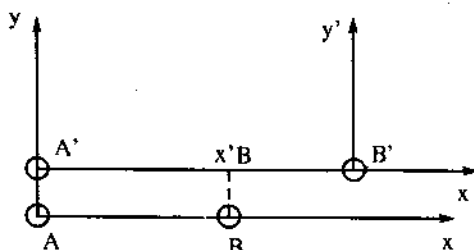
Đối với người này, sân ga chuyển động với vận tốc v theo chiều ngược lại và do đó chiều dài của nó cũng bằng $l_0 \sqrt{1-\beta^2}$. Hình 2.33b chỉ tọa độ của "đầu ga" $x'_{A'} = -l_0$, và tọa độ của "cuối ga", $x'_{B'} = -l_0 \sqrt{1-\beta^2}$.

Công thức biến đổi Lorent bây giờ là :

$$t_A = \frac{t'_{A'} + \frac{v}{c^2} x'_{A'}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; t_B = \frac{t'_{B'} + \frac{v}{c^2} x'_{B'}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



Hình 2.33a

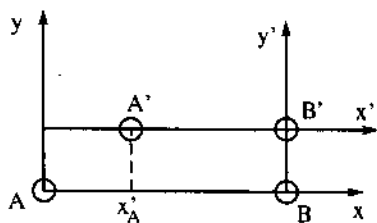


Hình 2.33b

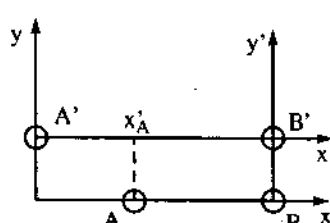
Thay các giá trị đã biết vào hai biểu thức trên, ta có được t_A và t_B (nhớ rằng $t'_A = t'_B = t'_A = t'_B = 60$ phút).

Kết quả : $t_A = 36$ phút; $t_B = 74,4$ phút = 1h14,4 phút.

Hình 2.33 câu b khi "đầu tàu" đi ngang qua "đầu ga" theo quan điểm của người trên "sân ga" (a), của người trên đoàn tàu (b).



Hình 2.33c



Hình 2.33d

c) Khi "đầu tàu" ngang qua cuối "sân ga", tức là hai điểm B và B' trùng nhau (hình 2.33). Vị trí của các điểm A, A', B, B' theo quan điểm của người ở "sân ga" biểu thị trên hình c, còn của người ở trên "đoàn tàu" biểu thị trên hình d. Từ đó theo cách tính của câu b) ta tìm được kết quả sau :

Theo quan điểm của người đứng ở sân ga :

$$t_A = t_B = 1\text{h} ; t_{A'} = 74,4\text{ phút} ; t_{B'} = 36\text{ phút}.$$

Theo quan điểm của người đứng ở đoàn tàu :

$$t_A = 21,6 \text{ phút} ; t_B = 1 \text{ h} ; t_{A'} = t_{B'} = 36 \text{ phút}.$$

113. Gọi $\vec{v}$ và $\vec{v}'$ là vận tốc của hạt đối với hai hệ K và K' ta có công thức biến đổi Lorent dạng vi phân :

$$dx = \gamma(dx' + Vdt') ; dy = dy' ; dz = dz' ; dt = \gamma(dt' + Vdx'/c^2)$$

với
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
 và từ đó :

$$v_x = \delta^{-1}(v'_x + V) ; v_y = (\gamma\delta)^{-1}v'_y ; v_z = (\gamma\delta)^{-1}v'_z ; \quad (1)$$

$$\delta = 1 + Vv'_x/c^2.$$

Các thành phần gia tốc của hạt trong hai hệ là đạo hàm theo thời gian (tính trong các hệ) của các thành phần vận tốc (trong các hệ), tức là có :

$$a_K = dv_K/dt ; \quad a_{K'} = dv_{K'}/dt \quad (2)$$

Vi

$$a_K = \frac{dv_K}{dt} = \left(\frac{dv_K}{dt'} \right) \left(\frac{dt'}{dt} \right) = \frac{dv_K}{dt'} \frac{1}{\gamma(1 + Vv'_x/c^2)}$$

$$= (\gamma\delta)^{-1} \left(\frac{dv_K}{dt'} \right)$$

Viết cụ thể từng thành phần :

$$a_x = (\gamma\delta)^{-3} a'_x ; a_y = \gamma^{-2} \delta^{-3} \left[a'_y + \left(\frac{V}{c^2} \right) (v'_x \cdot a'_z - v'_y \cdot a'_x) \right]$$

$$a_z = \gamma^{-2} \delta^{-3} \left[a'_z + \left(\frac{V}{c^2} \right) (v'_x \cdot a'_z - v'_z \cdot a'_x) \right]$$

Trong hệ quy chiếu riêng của hạt, tại thời điểm bất kì đều có $v_{K'} = 0$ và $V = v$. Do đó :

$$a_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a'_x ; a_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a'_y ; a_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a'_z.$$

114. Đối với hệ quy chiếu riêng gắn với tên lửa S' vận tốc của nó bằng không còn gia tốc bằng $-a'$. Trong một khoảng thời gian vô cùng bé, hệ quy chiếu S' này coi như là quán tính. Khi đó, theo bài trên, gia tốc của tên lửa đối với hệ riêng S' và đối với hệ quán tính S gắn với ngôi sao liên hệ với nhau theo công thức :

$$a = (1 - v^2/c^2) a'. \text{ Vì } dt = dt' \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

($dt = d\tau$) và $dv = a dt = a(1 - v^2/c^2)^{3/2} dt$, cho nên $dt' = \frac{dv}{a'} (1 - v^2/c^2)$, trong đó v là vận tốc tức thời của tên lửa S' đối với hệ S . Vậy ta có:

$$T' = (a')^{-1} \int_0^{v_\infty} dv (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1} = \frac{c}{2a'} \ln \left[\left(1 + \frac{v_\infty}{c} \right) / \left(1 - \frac{v_\infty}{c} \right) \right]$$

trong đó v_∞ là vận tốc cuối cùng của tên lửa đối với S .

Để tìm được v_∞ ta có :

$$\begin{aligned} l &= \int v dt = \int \frac{v dv}{a} = \int_0^{v_\infty} \frac{v dv}{a' (1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \\ &= \frac{c^2}{a'} \left[\left(1 - \frac{v_\infty^2}{c^2} \right)^{1/2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Từ đó rút ra biểu thức của v_∞ và thay vào công thức tính T' . Cuối cùng ta được :

$$T' = \frac{c}{2a} \ln \left[\left(la' + c^2 + \sqrt{la'(la' + 2c^2)} \right) / \left(la' + c^2 - \sqrt{la'(la' + 2c^2)} \right) \right].$$

115. Tìm được ngay kết quả sau :

$$a) v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m^2}{E} \right)^2}$$

$$b) v = c \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + T} \right)^2}$$

$$c) v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

116. Định luật bảo toàn năng lượng cho :

$$m_{\pi} c^2 = \frac{m_{\mu} c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + W_{\nu} \quad (1)$$

Định luật bảo toàn xung lượng cho :

$$\frac{m_{\mu} v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W_{\nu}}{c} \quad (2) \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

Khi W_{ν} (năng lượng của notrinô) trong (1) và (2), ta có :

$$\frac{v}{c} = \beta = \frac{m_{\pi}^2 - m_{\mu}^2}{m_{\pi}^2 + m_{\mu}^2} \quad (3)$$

Động năng của mezôn μ bằng :

$$T = W - W_0 = m_{\mu} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (4)$$

Thay (3) vào (4), ta được :

$$T = \frac{(m_{\pi} - m_{\mu})^2}{2m_{\pi}} c^2.$$

117. Kí hiệu véctơ năng - xung lượng 4 chiều của êlectron, pôzitrôn và photon lần lượt là p^- ; p^+ và k . Nếu có sự biến đổi photon thành cặp êlectron - pôzitrôn, định luật bảo toàn năng xung lượng viết được :

$$k = p_- + p_+ \quad (1)$$

hay bình phương hai vế :

$$k^2 = p_-^2 + p_+^2 + 2p_-p_+ \quad (2)$$

Mặt khác vì $p_{\pm} = (p_{\pm}; \frac{i}{c} W^{\pm})$ mà $W^{\pm 2} = c^2 (p_{\pm}^2 + m_{\pm}^2 c^2)$, cho nên ta

có :

$$p_-^2 = p_+^2 = -m^2 c^2 \quad (m_+ = m_- = m)$$

$k^2 = 0$, khối lượng nghỉ của photon bằng không, thay vào (2) ta được :

$$p_-p_+ = m^2 c^2 \quad (3)$$

Mặt khác

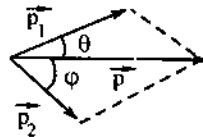
$$p_-p_+ = \vec{p}_- \vec{p}_+ - \frac{W^- W^+}{c^2}$$

$$\text{do đó} \quad \vec{p}_- \vec{p}_+ - \frac{W^- W^+}{c^2} = m^2 c^2 \quad (4)$$

Nhưng ta có $\frac{W^{\pm}}{c} \gg |\vec{p}_{\pm}|$ do đó (4) không thể thỏa mãn được. Như

vậy khi không có trường ngoài, photon không tự phân huỷ thành cặp electron - pozitron được.

118. Kí hiệu W_2 , p_2 là năng lượng và xung lượng của hạt M sau va chạm, p và p_1 là xung lượng của hạt m trước và sau va chạm, W , W_1 là năng lượng của hạt m trước và sau va chạm.



Hình 2.34

Định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng cho :

$$W + Mc^2 = W_1 + W_2 \quad (1)$$

$p = p_1 \cos \theta + p_2 \cos \varphi$; $p_1 \sin \theta = p_2 \sin \varphi$, θ, φ được xác định trên hình 2.34.

Thay các giá trị xung lượng bằng năng lượng nhờ công thức

$$W = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} \quad (2)$$

(1) và (2) sẽ bằng :

$$W + Mc^2 = W_1 + W_2 \quad (1')$$

$$\sqrt{\frac{W^2}{c^2} - m^2 c^2} = \sqrt{\frac{W_1^2}{c^2} - m^2 c^2} \cos \theta + \sqrt{\frac{W_2^2}{c^2} - m^2 c^2} \cos \varphi \quad (2')$$

$$\sqrt{\frac{W_1^2}{c^2} - m^2 c^2} \sin \theta = \sqrt{\frac{W_2^2}{c^2} - m^2 c^2} \sin \varphi \quad (3')$$

Khử φ và W_2 trong ba công thức trên, ta được :

$$(W - W_1)Mc^2 - WW_1 + \sqrt{(W^2 - m^2 c^4)(W_1^2 - m^2 c^4)} \cos \theta + m^2 c^4 = 0$$

Trường hợp tán xạ photon ($m = 0$; $W = h\nu$) lên electron tự do đúng yền, ta có công thức Comton

$$\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{Mc^2} (1 - \cos \theta).$$

119. Tenxơ trường điện từ có dạng

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, biết rằng : } \vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \quad (2)$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad (3)$$

$$(2) \text{ viết được : } \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad (2')$$

$$(3) \text{ viết được : } \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{I} \quad (3')$$

như thế (1) viết lại được :

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & c\mu_0(H_z + I_z) & c\mu_0(H_y + I_y) & -\frac{i}{\epsilon_0}(D_x - P_x) \\ -c\mu_0(H_z + I_z) & 0 & c\mu_0(H_x + I_x) & -\frac{i}{\epsilon_0}(D_y - P_y) \\ c\mu_0(H_y + I_y) & -c\mu_0(H_x + I_x) & 0 & -\frac{i}{\epsilon_0}(D_z - P_z) \\ \frac{i}{\epsilon_0}(D_x - P_x) & \frac{i}{\epsilon_0}(D_y - P_y) & \frac{i}{\epsilon_0}(D_z - P_z) & 0 \end{bmatrix}$$

Hay tách ra :

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & c\mu_0 H_z & -c\mu_0 H_y & -\frac{i}{\epsilon_0} D_x \\ -c\mu_0 H_z & 0 & c\mu_0 H_x & -\frac{i}{\epsilon_0} D_y \\ c\mu_0 H_y & -c\mu_0 H_x & 0 & -\frac{i}{\epsilon_0} D_z \\ \frac{i}{\epsilon_0} D_x & \frac{i}{\epsilon_0} D_y & \frac{i}{\epsilon_0} D_z & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & c\mu_0 I_z & -c\mu_0 I_y & -\frac{i}{\epsilon_0} P_x \\ -c\mu_0 I_z & 0 & c\mu_0 I_x & -\frac{i}{\epsilon_0} P_y \\ c\mu_0 I_y & -c\mu_0 I_x & 0 & -\frac{i}{\epsilon_0} P_z \\ \frac{i}{\epsilon_0} P_x & \frac{i}{\epsilon_0} P_y & \frac{i}{\epsilon_0} P_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$= F_{ik}^{(1)} + F_{ik}^{(2)}$$

Vậy ta có thể biểu diễn các vectơ từ hóa $\vec{I}$ và phân cực $\vec{P}$ là các thành phần nằm trong tenxơ $F_{ik}^{(2)}$ mà được định nghĩa như sau:

$$F_{ik}^{(2)} = F_{ik} - F_{ik}^{(1)}$$

trong đó F_{ik} là tenxơ trường điện từ, còn $F_{ik}^{(1)}$ là tenxơ trường điện từ trong chân không (khi đó $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ và $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$).

120. Chọn hệ trục tọa độ sao cho trục Oy dọc theo điện trường, còn trục Oz dọc theo từ trường ($E_x = E_z = 0$; $H_x = H_y = 0$). Khi đó trong hệ K' chuyển động dọc theo chiều dương của trục Ox với vận tốc v cần xác định sao cho $E'_y = 0$. Theo công thức biến đổi Loren ta có :

$$E'_y = 0 = \frac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1); \quad H'_z = \frac{H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) có: } \frac{v}{c} = \frac{E_y}{H_z} = \frac{E}{H}$$

Ngoài ra từ bất biến $H'^2 - c^2 D'^2 = H^2 - c^2 D^2$ suy ra

$$H' = \sqrt{H^2 - c^2 D^2} = \sqrt{H^2 - \frac{\epsilon_0 E^2}{\mu_0}}$$

121. a) Bài toán có vô số lời giải. Thực vậy nếu đã tìm được một hệ K' có vận tốc xác định để cho trong đó $\vec{E}'$ và $\vec{B}'$ song song với nhau thì mọi hệ chuyển động đối với K' dọc theo phương vận tốc này đều có điện trường và từ trường song song với nhau.

b) Ta hãy chọn các trục tọa độ trong hệ K sao cho trục Ox vuông góc với $\vec{E}$ và $\vec{B}$. Hệ K' có các trục $Ox' // Ox$, $Oy' // Oy$, $Oz' // Oz$ chuyển động với vận tốc phải tìm v .

Trong hệ K' ta phải có $[\vec{E}' \cdot \vec{B}'] = 0$ vì $(\vec{E}' // \vec{B}')$ hay cụ thể là :

$$E'_y B'_z - E'_x B'_y = 0$$

$$E'_z B'_x - E'_x B'_z = 0$$

$$E'_x B'_y - E'_y B'_x = 0$$

Nhờ công thức biến đổi Lorentz đối với các thành phần của trường, ta biểu diễn các phương trình trên qua các thành phần của E và B . Sau những biến đổi không phức tạp, ta thu được :

$$(1 - v^2) (E_y B_z - B_y E_z) - v (B_z^2 + B_y^2 + E_z^2 + E_y^2) = 0$$

$$E_x (B_z + v E_y) - B_x (E_z - v B_y) = 0$$

$$E_x (B_y + v E_z) - B_x (E_y + v B_z) = 0$$

Nhưng ta đã chọn hệ K để cho $E_x = 0$ và $B_x = 0$. Hai phương trình sau tự động thỏa mãn. Phương trình đầu cho ta kết quả :

$$\frac{v}{1 - v^2} = \frac{[\vec{E} \cdot \vec{B}]_x}{E^2 + B^2}$$

122. Vectơ phải tìm là vectơ 4 chiều có các thành phần $f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu$ trong đó $F_{\mu\nu}$ là tenxơ trường điện từ, còn j_ν là vectơ mật độ dòng 4 chiều.

Thành phần thời gian của vectơ 4 chiều này là $f_4 = (\vec{j} \cdot \vec{E})$ bằng công suất của lực điện trường tác dụng lên một đơn vị thể tích vật chất tích điện.

Thành phần không gian của vectơ này là lực tổng hợp tác dụng lên điện tích nằm trong một đơn vị thể tích, hay là biến thiên của xung lượng của một đơn vị thể tích.

123. Ta có :

$$f_{\mu} u_{\mu} = u_{\mu} \frac{dp_{\mu}}{dt} = m_0 u_{\mu} \frac{du_{\mu}}{ds} = \frac{1}{2} m_0 \frac{du_{\mu}^2}{ds} = 0.$$

124. Gọi K' là hệ toạ độ trong đó điện tích đứng yên. Trường điện từ của điện tích điểm trong hệ này là :

$$\vec{B}' = 0; \vec{E}' = \frac{q\vec{R}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}$$

trong đó q là điện tích của điện tích điểm, R' là bán kính vectơ của điện tích điểm.

Trong hệ K chuyển động với vận tốc - v so với hệ K' điện trường E và từ trường B tính được nhờ công thức Loren :

$$E_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}$$

$$E_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 R'^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$E_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 R'^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{qvy'}{4\pi\epsilon_0 c^2 R'^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$B_z = \frac{qvz'}{4\pi\epsilon_0 c^2 R'^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Ở đây : } R'^2 = [(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \frac{v^2}{c^2})](1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; y' = y; z' = z$$

Đưa vào kí hiệu mới :

$$R^2 = (x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2)$$

$$\vec{r}_p = (x - vt; y; z)$$

Ta có : $\vec{E} = (1 - v^2) \frac{q\vec{r}_p}{4\pi\epsilon_0 R^3}$; $\vec{B} = [\vec{v}, \vec{E}]$

125. a) $\vec{E} = 0$; (mật độ điện theo thể tích bằng không)

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2[\vec{I}, \vec{e}_r]}{r}, \text{ trong đó } \vec{I} \text{ là vectơ cường độ dòng điện, } \vec{e}_r$$

là vectơ đơn vị của bán kính vectơ $\vec{r}$.

Trục Ox được chọn song song với $\vec{I}$, ta có :

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2e_z}{r}$$

$$B_z = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2e_y}{r}$$

b) Dùng công thức biến đổi Loren. Trong hệ tọa độ gắn với electron thì các ion dương chuyển động. Do đó ta có :

$$\vec{B}' = -\frac{\vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \vec{E}' = \frac{[\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Phần I

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

1. Olkhovski. I.I, Pavlenko. I.U.G, Kuzmenkoy. L.C. Zadacha po teoreticheskoi mekhanike dlia fizikov. Izdatelstyo MGU. Moskva 1977.
2. Grechko L.G, Sugakov. V.I.Tomasevich. O.P.H, Phedornenko. A.M. Sbornik zadach po teoreticheskoi fizike "Vusshaia shkola " Moskva 1972.
3. Landau. L.Đ, Liphshshits. E.M. Mekhanika. Izdatelstvo "Nauka". Glavnaia redaktsia "Fiziko – Matematicheskaiia literatura". Moskva 1965.
4. Meshsherski I.V.Sbornik zadach po teoreticheskoi mek – hanike "Fiziko – Matematicheskaiia literatura", Moskva 1962.
5. Brashnichenko N.A, Kan B.L Mintsberg B.L. Morozov V.I, Ushshacova G.I.Sbornik zadach po teoreticheskoi mekhanike "Vusshaia shkola", Moskva 1974.
6. Nguyễn Hữu Minh, Đỗ Khắc Hường, Nguyễn Khắc Nhạp, Đỗ Đình Thanh, Lê Trọng Tường.
Bài tập vật lý lý thuyết, tập I, NXBGD 1983.
7. Nguyễn Hữu Minh.
Cơ học lý thuyết, NXBGD 1986.

Phần II

DIỆN ĐỘNG LỰC HỌC VÀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

1. Baturin V.V. Tontugin I.N.
Sbornik zadach po elektrodinamike. "Nauka" Moskva 1970.
2. Bekshtein I.V.
Sbornik zadach po elektrodinamike.
"Vusshaia shkola" Moskva 1966.
3. Izmailov S.V
Kurs elektrodinamik "Uchnedgiz" Moskva 1962.
4. Zadachikiupraginenia s otvetami i resheniami (Pheimanovskie leksipophizike) perevod s angliskovo iazuka, "Mir" Moskva 1978.
5. Melodicheskie ukazania i upraginenia po kursu "Elektrodinamika" dlia studentov spetsialnosti, 2016 Minsk 1981.
6. Đào Văn Phúc, Điện động học, NXBGD 1976.
7. Nguyễn Văn Thỏa, Điện động lực học NXB ĐHTHCN 1978.
8. Nguyễn Hữu Minh, Đỗ Khắc Hương, Nguyễn Khắc Nhạp, Đỗ Đình Thanh, Lê Trọng Tường. Bài tập vật lý lý thuyết tập I, NXBGD 1983.

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời nói đầu	3

Phần I

CƠ HỌC LÍ THUYẾT

A. Đề bài	5
§ 1. Chuyển động của chất điểm	5
§ 2. Chuyển động của hệ chất điểm	21
§ 3. Cơ học giải tích	35
§ 4. Dao động nhỏ.....	42
B. Bài giải	47

Phần II

ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC VÀ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

A. Đề bài	179
§ 1. Giải tích vectơ.....	179
§ 2. Trường điện không đổi.....	181
§ 3. Trường điện từ dừng.....	189
§ 4. Trường điện từ chuẩn dừng.....	194
§ 5. Sóng điện từ	197
§ 6. Thuyết tương đối.....	200
B. Bài giải	205
Tài liệu tham khảo	297

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Biên tập nội dung :

VŨ THANH MAI

Biên tập bìa :

LƯU CHÍ ĐỒNG

Sửa bản in :

PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC)

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

BÀI TẬP VẬT LÝ LÝ THUYẾT – TẬP 1

Mã số: 7K535T7 - ĐAI

In 1.000 bản, khổ 14,5 x 20,5 cm, tại Công ty In - Thương mại TTXVN.

Số xuất bản: 11-2007/CXB/285-2119/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007.



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

**TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO ĐẠI HỌC MÔN VẬT LÍ
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

- | | |
|---|--|
| 1. Vật lí đại cương (3 tập) | Lương Duyên Bình (CB) |
| 2. Bài tập Vật lí đại cương (3 tập) | Lương Duyên Bình (CB) |
| 3. Cơ sở Vật lí (6 tập) | Đàm Trung Đôn
Ngô Quốc Quỳnh ... (dịch) |
| 4. Giải bài tập và bài toán Cơ sở Vật lí (3 tập) | Lương Duyên Bình
Nguyễn Quang Hậu |
| 5. Bài tập Vật lí lí thuyết (2 tập) | Nguyễn Hữu Minh, Tạ Duy Lợi
Đỗ Đình Thanh, Lê Trọng Tường |
| 6. Phương pháp toán lí | Đỗ Đình Thanh |
| 7. Vật lí hiện đại (Lí thuyết và bài tập) | Ngô Phú An, Lê Băng Dương (dịch) |

Bạn đọc có thể mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên; 187B Giảng Võ; 232 Tây Sơn; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh; Số 62 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1; Cửa hàng 451B - 453.

Hai Bà Trưng, Quận 3; 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.com.vn



Giá : 15.800 đ