L. Đ. LANĐAU
E. M. LIFSITX

THỦY ĐỘNG LỰC HỌC

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

L.Đ. LANĐAU và E.M. LIFSITX

THỦY ĐỘNG LỰC HỌC

Người dịch : ĐẶNG QUANG KHANG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT – 2001

Dịch từ nguyên bản Tiếng Nga

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ГИДРОДИНАМИКА

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

МОСКВА «НАУКА»
1988

MỤC LỤC*

trang

LỜI NÓI ĐẦU CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ BA

TRÍCH LỜI NÓI ĐẦU CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ HAI CỦA "CƠ HỌC MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC"

Chương I
CHẤT LỎNG LÝ TƯỞNG

§1. Phương trình liên tục 15
§2. Phương trình Euler 17
§3. Thủy tĩnh học 22
§4. Điều kiện để không có đối lưu 25
§5. Phương trình Bernoulli 27
§6. Năng thông 28
§7. Dòng xung lượng 31
§8. Sự bảo toàn của lưu số vận tốc 33
§9. Chuyển động thế 36
§10. Chất lỏng không nén được 41
§11. Lực cản trong dòng chảy thế quanh một vật 55
§12. Sóng hấp dẫn 63
§13. Sóng nội trong chất lỏng không nén được 71
§14. Sóng trong chất lỏng quay 75

Chương 2
CHẤT LỎNG NHỚT

§15. Phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt 81
§16. Sự tiêu tán năng lượng trong chất lỏng không nén được 89
§17. Dòng chảy trong ống 91
§18. Chuyển động của chất lỏng giữa các hình trụ quay 97
§19. Định luật đồng dạng 99

*Các thuật ngữ tiếng Anh trong dấu ngoặc của bản dịch này là của người dịch ghi thêm.

§20. Dòng chảy với các số Reynolds nhỏ 102
§21. Vết chảy tầng (*laminar wake*) 116
§22. Độ nhớt của các thể huyền phù 124
§23. Nghiệm chính xác của các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt 128
§24. Chuyển động dao động trong chất lỏng nhớt 140
§25. Sự tắt của các sóng hấp dẫn 154

Chương III
TÍNH CHẢY RỐI

§26. Tính ổn định của chuyển động dừng của chất lỏng 159
§27. Tính ổn định của chuyển động quay của chất lỏng 166
§28. Tính ổn định của chuyển động trong ống 171
§29. Tính không ổn định của các gián đoạn tiếp tuyến 177
§30. Chuyển động giả tuần hoàn và sự đồng bộ các tần số 181
§31. Tâm hút (*attractor*) lạ 189
§32. Sự chuyển sang tính chảy rối bằng cách tăng đôi chu kỳ 197
§33. Tính chảy rối đã phát triển 214
§34. Hàm tương quan của các vận tốc 225
§35. Miền chảy rối và hiện tượng tách 241
§36. Luồng chảy rối 244
§37. Vết chảy rối (*turbulent wake*) 251
§38. Định luật Gjukôvxki 254

Chương IV
LỚP BIÊN

§39. Lớp biên chảy tầng 259
§40. Chuyển động ở gần đường tách 268
§41. Tính ổn định của chuyển động trong lớp biên chảy tầng 276
§42. Prôfin vận tốc lôga 282
§43. Dòng chảy rối trong các ống 289
§44. Lớp biên chảy rối 292
§45. Sự khủng hoảng lực cản 295
§46. Các vật dạng thuôn (dạng khí động lực) 299
§47. Lực cản cảm ứng 303

§48. Lực nâng một cánh mỏng 309

Chương V
SỰ DẪN NHIỆT TRONG CHẤT LỎNG

§49. Phương trình tổng quát về sự truyền nhiệt 313
§50. Sự dẫn nhiệt trong chất lỏng không nén được 320
§51. Sự dẫn nhiệt trong môi trường vô hạn 326
§52. Sự dẫn nhiệt trong môi trường hữu hạn 331
§53. Định luật đồng dạng cho sự truyền nhiệt 339
§54. Sự truyền nhiệt trong lớp biên 343
§55. Sự nung nóng vật trong chất lỏng chuyển động 351
§56. Đối lưu tự do 355
§57. Tính không ổn định đối lưu của chất lỏng đứng yên 362

Chương VI
SỰ KHUẾCH TÁN

§58. Phương trình thủy động lực cho hỗn hợp lỏng 371
§59. Hệ số khuếch tán và hệ số khuếch tán nhiệt 376
§60. Sự khuếch tán của các hạt lơ lửng trong chất lỏng 384

Chương VII
HIỆN TƯỢNG MẶT NGOÀI

§61. Công thức Laplace 388
§62. Sóng mao dẫn 398
§63. Ảnh hưởng của màng mỏng hấp phụ lên chuyển động của chất lỏng 404

Chương VIII
ÂM

§64. Sóng âm 409
§65. Năng lượng và xung lượng của sóng âm 417
§66. Sự phản xạ và khúc xạ của sóng âm 424
§67. Âm hình 427
§68. Sự lan truyền của âm trong môi trường chuyển động 433

§69. Các dao động riêng 439
§70. Sóng cầu 443
§71. Sóng trụ 447
§72. Nghiệm tổng quát của phương trình sóng 450
§73. Sóng bên 454
§74. Sự phát âm 461
§75. Sự kích thích âm bởi tính chảy rối 475
§76. Nguyên lý tương hỗ 480
§77. Sự lan truyền âm trong ống 484
§78. Sự tán xạ âm 489
§79. Sự hấp thụ âm 494
§80. Dòng chảy âm 504
§81. Hệ số nhớt thứ hai 508

Chương IX
SÓNG VA CHẠM

§82. Sự lan truyền của các nhiễu động trong dòng khí nén được 516
§83. Dòng chảy dừng của khí nén được 521
§84. Các mặt gián đoạn 527
§85. Đường đoạn nhiệt va chạm 533
§86. Sóng va chạm cường độ nhỏ 538
§87. Chiều biến thiên của các đại lượng trong sóng va chạm 542
§88. Tính tiến triển của các sóng va chạm 546
§89. Sóng va chạm trong khí pôlitrôpic 549
§90. Tính không ổn định gợn sóng của các sóng va chạm 552
§91. Sự lan truyền của sóng va chạm trong ống 563
§92. Sóng va chạm nghiêng 566
§93. Bề rộng của các sóng va chạm 572
§94. Sóng va chạm trong môi trường hồi phục 580
§95. Bước nhảy đẳng nhiệt 582
§96. Các gián đoạn yếu 585

Chương X
CHUYỂN ĐỘNG MỘT CHIỀU CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC

§97. Sự thoát khí qua ống phun 589

§98. Chuyển động nhớt của khí nén được trong ống 593
§99. Chuyển động tự đồng dạng (*similarity flow*) một chiều 597
§100. Các gián đoạn trong những điều kiện ban đầu 608
§101. Các sóng chạy một chiều 616
§102. Sự tạo thành các gián đoạn trong sóng âm 627
§103. Các đặc truyến 637
§104. Các bất biến Riemann 642
§105. Chuyển động một chiều tùy ý của khí nén được 647
§106. Bài toán về sự nổ mạnh 657
§107. Sóng va chạm cầu hội tụ 662
§108. Lý thuyết "nước nông" 669

Chương XI
SỰ GIAO NHAU CỦA CÁC MẶT GIÁN ĐOẠN

§109. Sóng dãn 673
§110. Các loại giao tuyến của các mặt gián đoạn 681
§111. Sự giao nhau của các sóng va chạm với mặt rắn 688
§112. Dòng chảy vượt âm quanh một góc 691
§113. Dòng chảy quanh mũi nhọn hình nón 698

Chương XII
DÒNG CHẢY PHẲNG CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC

§114. Chuyển động thế của khí nén được 702
§115. Các sóng đơn giản dừng 707
§116. Phương trình Chaplyghin (bài toán tổng quát về chuyển động dừng hai chiều của khí nén được) 714
§117. Các đặc tuyến của dòng chảy dừng phẳng 719
§118. Phương trình Euler - Tricomi. Sự chuyển sang vận tốc âm 722
§119. Các nghiệm của phương trình Euler - Tricomi ở gần các điểm không kỳ dị của mặt âm 729
§120. Dòng bao quanh với vận tốc âm 735
§121. Sự phản xạ của gián đoạn yếu trên đường âm 742

Chương XIII
DÒNG BAO QUANH CÁC VẬT HỮU HẠN

§122. Sự tạo thành các sóng va chạm trong dòng chảy vượt âm (*supersonic*) quanh các vật 750
§123. Dòng chảy vượt âm quanh vật nhọn 755
§124. Dòng chảy dưới âm (*subsonic*) quanh cánh mỏng 761
§125. Dòng chảy vượt âm quanh một cánh 765
§126. Định luật đồng dạng gần âm (*transonic*) 769
§127. Định luật đồng dạng siêu âm (*hypersonic*) 773

Chương XIV
THỦY ĐỘNG LỰC HỌC VỀ SỰ CHÁY

§128. Sự cháy chậm 778
§129. Sự nổ 787
§130. Sự lan truyền của sóng nổ 796
§131. Hệ thức giữa các chế độ cháy khác nhau 805
§132. Các bước nhảy ngưng tụ 809

Chương XV
THỦY ĐỘNG LỰC HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

§133. Tenxơ năng - xung lượng của chất lỏng 813
§134. Phương trình thủy động lực tương đối tính 816
§135. Sóng va chạm trong thủy động lực tương đối tính 823
§136. Phương trình chuyển động tương đối tính của môi trường nhớt và môi trường truyền nhiệt 826

Chương XVI
THỦY ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT LỎNG SIÊU CHẢY

§137. Các tính chất cơ bản của chất lỏng siêu chảy 830
§138. Hiệu ứng cơ nhiệt 835
§139. Phương trình thủy động lực của chất lỏng siêu chảy 837
§140. Các quá trình tiêu tán trong chất lỏng siêu chảy 845
§141. Sự lan truyền âm trong chất lỏng siêu chảy 850

LỜI NÓI ĐẦU CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ BA

Trong hai lần xuất bản trước (1944 và 1953), Thủy động lực học là nội dung phần một của cuốn "Cơ học môi trường liên tục", trong lần xuất bản này, Thủy động lực học được tách thành một cuốn riêng.

Tính chất của nội dung và cách trình bày trong cuốn sách này được nói rõ trong lời nói đầu cho lần xuất bản thứ nhất, có in lại dưới đây. Khi chỉnh lý và bổ sung cho cuốn sách này, điều quan tâm chính của tôi là không thay đổi tính chất đó.

Mặc dù đã 30 năm trôi qua, nội dung cuốn sách thực tế không lỗi thời – chỉ trừ những thay đổi rất nhỏ không đáng kể. Nội dung đó được bổ sung và thay đổi đôi chút. Trong khi đó có bổ sung nhiều tiết mới – khoảng 15 tiết trong toàn cuốn sách.

Những thập kỷ gần đây, thủy động lực học phát triển cực kỳ mãnh liệt. Phù hợp với điều đó, tài liệu trong ngành khoa học này cũng mở rộng khác thường. Nhưng sự phát triển của nó hướng đáng kể vào các ngành ứng dụng, và cả theo hướng làm phức tạp cho các bài toán đã được phép tính lý thuyết chấp nhận (trong số đó có sử dụng máy tính điện tử). Thuộc về các bài toán này, đặc biệt có thể nêu bài toán đa dạng về các tính không ổn định và những sự phát triển của nó, kể cả trong chế độ phi tuyến. Tất cả các vấn đề này nằm ngoài khuôn khổ của cuốn sách; đặc biệt các vấn đề về tính ổn định, về cơ bản, được trình bày (cũng giống như trong các lần xuất bản trước) một cách có hiệu quả.

Không đưa vào cuốn sách cả lý thuyết các sóng phi tuyến trong những môi trường tán sắc. Lý thuyết này hiện nay là chương quan trọng của Vật lý toán. Đối tượng thuần thủy động lực của lý thuyết này là các sóng biên độ lớn ở trên mặt chất lỏng. Nhưng những ứng dụng vật lý cơ bản của nó lại có liên quan đến vật lý plasma, quang học phi tuyến, nhiều loại bài toán về điện động lực học v.v...; theo nghĩa đó lý thuyết các sóng phi tuyến nói trên thuộc về các cuốn sách khác.

Những thay đổi cơ bản đã xuất hiện trong cách hiểu về cơ chế xuất hiện tính chảy rối. Mặc dù một lý thuyết nhất quán về tính chảy rối còn

thuộc về tương lai, nhưng cũng có cơ sở để giả định rằng sự phát triển của nó, cuối cùng, đã đi đúng hướng. Những tư tưởng cơ bản tồn tại cho tới thời gian hiện tại và những kết quả trong ba tiết (§30-32) được tôi viết cùng với M.I. Rabinôvits; tôi cảm ơn sâu sắc ông đã có giúp đỡ to lớn. Những thập kỷ gần đây, trong cơ học môi trường liên tục đã xuất hiện một ngành mới – ngành cơ học các tinh thể lỏng. Nó mang trong mình đồng thời những nét đặc trưng riêng cho cơ học môi trường lỏng và đàn hồi. Những cơ sở của môn cơ học các tinh thể lỏng dự định sẽ được đưa vào lần xuất bản mới của cuốn " Lý thuyết đàn hồi ".

Trong số những cuốn sách tôi được viết cùng với Lev Đavidôvits Landau thì cuốn sách này giữ một vai trò đặc biệt. Ông đã để trong đó một phần linh hồn mình. Một lĩnh vực mới của vật lý lý thuyết đối với Lev Đavidôvits Landau thời kỳ đó đã lôi kéo ông, và như đã là một nét đặc trưng của ông – ông lại bắt đầu suy nghĩ kỹ lưỡng và rút ra cho mình những kết quả quan trọng từ lĩnh vực đó. Từ đây, đã xuất hiện một loạt các công trình nguyên gốc của ông. Các công trình này đã được in trong nhiều tạp chí. Nhưng một loạt các kết quả hay các quan điểm nguyên gốc thuộc Lev Đavidôvits Landau và đã in thành sách đều không được công bố riêng rẽ, mà trong một số trường hợp thậm chí cả quyền ưu tiên trong phát minh cũng mãi về sau mới được làm rõ ràng. Trong lần xuất bản mới của cuốn sách, trong tất cả các trường hợp tương tự mà tôi biết được, tôi đều nêu bổ sung quyền tác giả của ông.

Trong khi chỉnh lý cuốn sách, cũng như cả những cuốn sách khác của bộ " Vật lý lý thuyết ", tôi vẫn nhận được sự giúp đỡ và các lời khuyên của nhiều bạn hữu và các cộng sự trong công việc. Tôi muốn nhắc trước hết đến nhiều cuộc thảo luận với G.I.Barenblatt, Ia.B.Zeldôvits, L.P.Pitaievxki, Ia.G. Xina. Tôi đã nhận được nhiều chỉ dẫn bổ ích của A.A. Andrônôv, X.I. Aniximov, V.A. Belokonia, V.P. Krainôv, A.G.Kulikovxki, M.A.Liberman, P.V. Polovin, A.V. Timofeev, A.L. Fabrikant. Tôi muốn biểu lộ ở đây lời cảm ơn sâu sắc đối với tất cả các ông.

E.M. LIFSITX

VIỆN CÁC VẤN ĐỀ VẬT LÝ - AH . CCCP

Tháng 8, 1984

TRÍCH LỜI NÓI ĐẦU CHO LẦN XUẤT BẢN THỨ HAI CUỐN "CƠ HỌC CÁC MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC"

Nội dung cuốn sách này đề cập đến môn cơ học các môi trường liên tục, nghĩa là đến lý thuyết chuyển động của chất lỏng và chất khí (Thủy động lực học) và các vật rắn (Lý thuyết đàn hồi). Về thực chất các lý thuyết đó là những ngành vật lý, nhưng do một loạt các đặc điểm đặc thù, các lý thuyết đó đã chuyển thành những ngành khoa học độc lập.

Trong lý thuyết đàn hồi, việc giải các bài toán đặt ra một cách khúc chiết về mặt toán học, có liên quan đến các phương trình vi phân tuyến tính với các đạo hàm riêng, giữ một vai trò quan trọng. Do đó, lý thuyết đàn hồi chứa đựng trong nó nhiều yếu tố của vật lý toán.

Thủy động lực học có một đặc tính khác căn bản. Các phương trình của nó là phi tuyến, do đó việc nghiên cứu chúng trực tiếp và việc giải chúng chỉ có thể làm được trong những trường hợp tương đối hiếm. Vì vậy, sự phát triển của thủy động lực học hiện đại chỉ có thể thực hiện, nếu gắn chặt chẽ với thực nghiệm. Tình hình đó làm cho Thủy động lực học tiến sát lại với các ngành vật lý khác.

Mặc dù thực tế đã đứng tách khỏi các ngành vật lý khác, nhưng thủy động lực học và lý thuyết đàn hồi vẫn có một ý nghĩa lớn lao với tính cách là các phần của vật lý lý thuyết. Một mặt, chúng là những ngành ứng dụng các phương pháp tổng quát cũng như các định luật của vật lý lý thuyết, và để hiểu được chúng một cách tường tận, đòi hỏi phải có những hiểu biết về cơ sở của các phần khác trong vật lý lý thuyết. Mặt khác, bản thân môn cơ học môi trường liên tục lại cần thiết để giải các bài toán của những ngành hoàn toàn khác của vật lý lý thuyết.

Ở đây, chúng tôi chỉ muốn nêu một số nhận xét về tính chất cách trình bày nội dung môn thủy động lực học trong cuốn sách này. Cuốn sách trình bày thủy động lực học như một phần của vật lý lý thuyết, và điều này, trong một mức độ rộng lớn, xác định đặc tính nội dung của cuốn sách, một đặc tính khác căn bản so với các giáo trình thủy động lực

học khác. Chúng tôi có xu hướng nghiên cứu, ở mức độ đầy đủ nhất cho phép, tất cả các vấn đề có ý nghĩa quan trọng về mặt vật lý. Khi đó, chúng tôi đã cố gắng xây dựng cách trình bày sao cho có thể tạo ra một hình ảnh trong sáng nhất về các hiện tượng và các mối tương quan giữa chúng. Vì tính chất như thế của cuốn sách, chúng tôi không trình bày các phương pháp tính gần đúng trong thủy động lực học, cũng như một số lý thuyết thực nghiệm chưa có đủ cơ sở vật lý sâu sắc. Đồng thời ở đây cũng trình bày các vấn đề như lý thuyết truyền nhiệt, lý thuyết khuếch tán trong chất lỏng, âm học và lý thuyết về sự cháy, đó là những vấn đề thường không được trình bày trong các giáo trình thủy động lực học.

Trong lần xuất bản thứ hai này, cuốn sách đã được chỉnh lý nhiều. Nhiều nội dung mới được bổ sung, đặc biệt ở trong phần khí động lực học, phần này gần như được viết lại mới hoàn toàn. Đặc biệt có trình bày thêm lý thuyết chuyển động gần âm. Vấn đề này có một ý nghĩa quan trọng nhất về mặt nguyên tắc đối với toàn bộ khí động lực học, vì việc nghiên cứu các đặc điểm xuất hiện khi chuyển qua vận tốc âm sẽ cho phép làm sáng tỏ những tính chất định tính cơ bản của chuyển động dừng của khí nén bao quanh các vật rắn.

Cho tới nay lĩnh vực này vẫn còn được nghiên cứu tương đối ít; nhiều vấn đề quan trọng có thể mới chỉ được nêu ra. Vì sự cần thiết cho sự nghiên cứu tiếp các vấn đề đó, chúng tôi đã trình bày chi tiết công cụ toán ứng dụng ở đây.

Chúng tôi viết thêm hai chương mới về Thủy động lực học tương đối tính và Thủy động lực học về chất lỏng siêu chảy. Các phương trình thuỷ động lực học tương đối tính (chương XV) có thể được ứng dụng trong nhiều vấn đề khác nhau của vật lý thiên văn, chẳng hạn như nghiên cứu các đối tượng, trong đó bức xạ giữ một vai trò quan trọng; lĩnh vực ứng dụng độc đáo của các phương trình này cũng được mở ra cả trong một phạm vi hoàn toàn khác của vật lý, chẳng hạn như trong lý thuyết về sự tạo thành nhiều hạt trong quá trình va chạm. Thủy động lực học «hai vận tốc» trình bày trong chương XVI đem lại một sự mô tả vĩ mô về chuyển động của chất lỏng siêu chảy; chất hêli lỏng ở nhiệt độ gần không độ tuyệt đối là một chất như thế ...

Chúng tôi muốn biểu lộ sự cảm ơn sâu sắc đối với Ia.B. Zeldôvits và L.I Xêđôv đã có những ý kiến thảo luận quí báu với chúng tôi về một loạt các vấn đề Thủy động lực học. Chúng tôi cũng cảm ơn Đ.V. Xivukhin đã đọc bản thảo và nêu một số nhận xét được chúng tôi sử dụng khi chuẩn bị cho lần xuất bản thứ hai của cuốn sách.

L. LANĐAU, E. LIFSITX

MỘT SỐ KÝ HIỆU

Mật độ: ρ

Áp suất: p

Nhiệt độ: T

Entrôpi của một đơn vị khối lượng: s

Nội năng của một đơn vị khối lượng: ε

Hàm nhiệt: $w = \varepsilon + p/\rho$

Tỷ số giữa nhiệt dung đẳng tích và nhiệt dung đẳng áp: $\gamma = c_p/c_v$

Độ nhớt động lực học: η

Độ nhớt động học: $\nu = \eta/\rho$

Độ dẫn nhiệt: κ

Độ dẫn nhiệt độ: $\chi = \kappa/\rho c_p$

Số Reynolds: R

Vận tốc âm: c

Số Max: M

Các chỉ số vectơ và tenxơ (ba chiều) được ký hiệu bằng các chữ La tinh **i**, **k**, **l**,... Tại mọi nơi, các chỉ số lặp lại hai lần (chỉ số câm) được hiểu là phép lấy tổng. Tenxơ đơn vị δ_{ik}.

Tài liệu chỉ dẫn theo số tiết và công thức trong các cuốn khác của giáo trình này được ghi bằng các chữ Hy lạp: II – "Lý thuyết trường", 1973; V – "Vật lý thống kê, phần I", 1976; VIII – "Điện động lực các môi trường liên tục", 1982; IX – "Vật lý thống kê, phần II", 1978; X – "Động học vật lý", 1979.

Chương I
CHẤT LỎNG LÝ TƯỞNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH LIÊN TỤC

Thủy động lực học nghiên cứu chuyển động của các chất lỏng (và chất khí). Vì các hiện tượng xét trong thủy động lực học có tính chất vĩ mô, nên trong thủy động lực học chất lỏng [1] được coi như một môi trường liên tục. Điều đó có nghĩa là, bất cứ một phần tử thể tích nhỏ nào ở trong chất lỏng bao giờ cũng được giả thiết là rất lớn đến mức còn chứa một số rất lớn các phân tử. Phù hợp với điều đó, khi nói đến những phần tử thể tích vô cùng nhỏ, bao giờ ta cũng có ý nói những thể tích "vô cùng nhỏ về mặt vật lý", nghĩa là thể tích đủ nhỏ so với thể tích vật, nhưng lại lớn so với các khoảng cách giữa các phân tử. Các thuật ngữ "*hạt chất lỏng*", "*điểm chất lỏng*" cần được hiểu theo nghĩa như thế. Như vậy, chẳng hạn nếu nói đến sự dịch chuyển của một hạt chất lỏng nào đó, thì ta không có ý nói đến sự dịch chuyển của một phân tử riêng lẻ, mà nói đến sự dịch chuyển của một phần tử thể tích nguyên vẹn chứa một số lớn các phân tử, nhưng vẫn được coi như một chất điểm trong thủy động lực học.

Về mặt toán học, sự mô tả trạng thái của một chất lỏng chuyển động được thực hiện dựa vào các hàm xác định sự phân bố vận tốc chất lỏng $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z,t)$ và hai đại lượng nhiệt động lực nào đó của chất lỏng, chẳng hạn như áp suất $p(x,y,z,t)$ và mật độ $\rho(x,y,z,t)$. Như đã biết, tất cả các đại lượng nhiệt động lực đều được xác định theo các giá trị của hai đại lượng bất kỳ trong số các đại lượng nhiệt động lực dựa vào phương trình trạng thái của chất; như vậy nếu biết được năm đại lượng: ba thành phần của vận tốc $\mathbf{v}$, áp suất p và mật độ ρ, thì trạng thái của chất lỏng chuyển động hoàn toàn được xác định.

[1] Ở đây và dưới đây, để ngắn gọn chúng tôi chỉ nói đến chất lỏng, nhưng đồng thời có ý nói đến cả chất lỏng và chất khí.

Nói chung, tất cả các đại lượng đó đều là hàm của các tọa độ x, y, z và thời gian t. Chúng ta nhấn mạnh rằng, $\mathbf{v}(x,y,z,t)$ là vận tốc chất lỏng tại mỗi điểm đã cho x, y, z của không gian vào thời điểm t, nghĩa là nó thuộc về các điểm xác định trong không gian, mà không thuộc về các hạt chất lỏng xác định dịch chuyển theo thời gian ở trong không gian; cũng tương tự như vậy đối với ρ và p.

Ta bắt đầu tìm các phương trình thủy động lực cơ bản, xuất phát từ phương trình mô tả định luật bảo toàn chất trong thủy động lực học.

Chúng ta xét một thể tích V_o nào đó trong không gian. Lượng (khối lượng) chất lỏng ở trong thể tích đó bằng $\int \rho dV$; trong đó ρ là mật độ chất lỏng, còn tích phân được lấy trong thể tích V_o. Lượng chất lỏng trong một đơn vị thời gian đi qua phần tử $d\mathbf{f}$ của mặt bao thể tích đó bằng $\rho \mathbf{v} d\mathbf{f}$; vectơ $d\mathbf{f}$ có độ lớn bằng diện tích phần tử mặt và hướng theo pháp tuyến với mặt. Theo quy ước $d\mathbf{f}$ nằm dọc theo pháp tuyến ngoài. Như vậy, $\rho \mathbf{v} d\mathbf{f}$ sẽ dương nếu chất lỏng đi ra khỏi thể tích, và âm nếu nó đi vào thể tích. Lượng toàn phần chất lỏng trong một đơn vị thời gian đi ra khỏi thể tích V_o bằng

$$\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f}$$

trong đó tích phân được lấy trên toàn bộ mặt kín bao quanh thể tích đang xét.

Mặt khác, độ giảm của lượng chất lỏng ở trong thể tích V_o có thể được viết dưới dạng

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV$$

Cân bằng hai biểu thức đó, ta được:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = - \oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f}. \qquad (1\text{-}1)$$

Biến đổi tích phân mặt thành tích phân theo thể tích, ta được:

$$\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \, dV.$$

Từ đó, viết được:

$$\iiint \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 .$$

Vì đẳng thức này phải nghiệm đúng với mọi thể tích bất kỳ, do đó biểu thức dưới dạng tích phân phải bằng không, nghĩa là:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

Phương trình này được gọi là *phương trình liên tục*.

Khai triển biểu thức div ρv, ta có thể viết (1-2) dưới dạng

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{ div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ grad } \rho = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

Vectơ

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \qquad (1\text{-}4)$$

được gọi là *mật độ dòng chất lỏng*. Hướng của nó trùng với hướng chuyển động của chất lỏng, còn giá trị tuyệt đối của nó xác định lượng chất lỏng trong một đơn vị thời gian đi qua một đơn vị diện tích đặt vuông góc với vận tốc.

§2. PHƯƠNG TRÌNH EULER

Ta tách ra một thể tích nào đó trong chất lỏng. Lực toàn phần tác dụng lên thể tích này bằng tích phân

$$-\oint p \, d\mathbf{f}$$

lấy theo mặt của thể tích đang xét. Biến đổi tích phân này thành tích phân theo thể tích, ta có:

$$-\oint p \, d\mathbf{f} = -\int \text{grad } p \, dV.$$

Điều đó chứng tỏ rằng, mỗi phần tử thể tích dV của chất lỏng chịu tác dụng một lực bằng $-dV$ grad p do chất lỏng bao quanh tác dụng lên. Nói một cách khác, có thể nói rằng chất lỏng bao quanh tác dụng lên một đơn vị thể tích chất lỏng một lực bằng – grad p.

Bây giờ, ta có thể viết phương trình chuyển động của một phần tử thể tích chất lỏng sau khi cân bằng lực – grad p với tích khối lượng ρ của

một đơn vị thể tích chất lỏng và gia tốc $d\mathbf{v}/dt$ của nó:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p \tag{2-1}$$

Đạo hàm $d\mathbf{v}/dt$ ở đây không biểu diễn sự biến thiên của vận tốc chất lỏng tại một điểm cố định đang xét trong không gian, mà biểu diễn sự biến thiên vận tốc của một hạt chất lỏng xác định dịch chuyển trong không gian. Đạo hàm này cần được biểu diễn qua các đại lượng thuộc về các điểm cố định trong không gian. Muốn vậy, ta có nhận xét là, độ biến thiên vận tốc $d\mathbf{v}$ của hạt chất lỏng đã cho trong khoảng thời gian dt gồm hai phần: độ biến thiên của vận tốc tại một điểm đã cho của không gian trong khoảng thời gian dt và hiệu các vận tốc (tại cùng thời điểm) ở hai điểm cách nhau một khoảng $d\mathbf{r}$, mà hạt chất lỏng đang xét đã đi được trong thời gian dt. Phần thứ nhất bằng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt,$$

trong đó, đạo hàm $\partial\mathbf{v}/dt$ được lấy tại x, y, z không đổi, nghĩa là tại một điểm đã cho của không gian. Phần thứ hai của độ biến thiên vận tốc bằng

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}.$$

Như vậy

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}$$

hay chia cả hai vế của đẳng thức cho dt [1)]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \tag{2-2}$$

Thay hệ thức tìm được vào (2-1), ta có

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{2-3}$$

Đó chính là phương trình cần tìm của chuyển động chất lỏng, do

[1)] Người ta gọi d/dt, được định nghĩa như vậy, là đạo hàm thực chất (substantial) để nhấn mạnh mối liên hệ của nó với chất di chuyển.

L.Euler thiết lập được năm 1755. Nó được gọi là *phương trình Euler* và là một trong các phương trình cơ bản của thủy động lực học.

Nếu chất lỏng ở trong trọng trường, thì mỗi đơn vị thể tích của nó còn chịu thêm tác dụng của lực ρ**g**, **g** là gia tốc trọng trường. Lực này phải được thêm vào vế thứ hai của phương trình (2 - 1), do đó (2 - 3) trở thành

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} \qquad (2\text{-}4)$$

Khi rút ra phương trình chuyển động, ta đã hoàn toàn bỏ qua các quá trình tiêu tán năng lượng, các quá trình này có thể tồn tại trong một chất lỏng chuyển động do có ma sát nội (tính nhớt) trong chất lỏng và sự trao đổi nhiệt lượng giữa các phần khác nhau của nó. Do đó, tất cả những điều đã trình bày ở đây cũng như ở các tiết tiếp theo của chương này đều chỉ được xét cho những chuyển động của các chất lỏng và chất khí, trong đó bỏ qua các quá trình dẫn nhiệt và tính nhớt. Một chuyển động như thế được gọi là chuyển động của *chất lỏng lý tưởng*.

Sự bỏ qua quá trình trao đổi nhiệt lượng giữa các phần chất lỏng khác nhau (và dĩ nhiên cả giữa chất lỏng và các vật bao quanh tiếp xúc với nó) có nghĩa là, chuyển động xảy ra đoạn nhiệt, tính chất này được xét trong mọi phần của chất lỏng. Như vậy, chuyển động của chất lỏng lý tưởng phải được coi là chuyển động đoạn nhiệt.

Trong quá trình chuyển động đoạn nhiệt, entrôpi của mỗi phần chất lỏng không đổi khi phần này dịch chuyển trong không gian. Ký hiệu s là entrôpi xét cho một đơn vị khối lượng của chất lỏng, ta có thể biểu diễn tính đoạn nhiệt của chuyển động bằng phương trình

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

trong đó đạo hàm toàn phần theo thời gian, cũng như trong (2-1) biểu diễn độ biến thiên entrôpi của phần chất lỏng chuyển động đang xét. Đạo hàm này có thể được viết dưới dạng

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\ \mathrm{grad}\ s = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

Đó chính là phương trình tổng quát biểu diễn tính đoạn nhiệt của chuyển động chất lỏng lý tưởng. Dựa vào (1-2), có thể viết phương trình đó dưới dạng "phương trình liên tục" cho entrôpi

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \text{div}(\rho s\mathbf{v}) = 0 \qquad (2\text{-}7)$$

Tích $\rho s\mathbf{v}$ biểu diễn "*mật độ dòng entrôpi*".

Thông thường, phương trình đoạn nhiệt có dạng đơn giản hơn rất nhiều. Như thông thường vẫn xảy ra, nếu tại một thời điểm ban đầu nào đó entrôpi có giá trị như nhau tại mọi điểm của thể tích chất lỏng thì tại mọi nơi nó vẫn giữ giá trị như nhau và không đổi theo thời gian khi chất lỏng tiếp tục chuyển động. Do đó, trong các trường hợp này, người ta có thể viết phương trình đoạn nhiệt đơn giản

$$s = \text{const} \qquad (2\text{-}8)$$

Dưới đây, chúng ta sẽ thường làm như vậy. Một chuyển động như thế được gọi là *đẳng entrôpi*.

Người ta có thể dùng *tính đẳng entrôpi* của chuyển động để viết phương trình chuyển động (2-3) dưới dạng hơi khác. Muốn vậy, ta dùng hệ thức nhiệt động lực quen thuộc

$$dw = T\,ds + V\,dp$$

trong đó w là hàm nhiệt của một đơn vị khối lượng chất lỏng, $V = 1/\rho$ là thể tích riêng, còn T là nhiệt độ. Vì $s = \text{const}$, đơn giản chúng ta có

$$dw = Vdp = \frac{1}{\rho}dp$$

Như vậy

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla w$$

Do đó, phương trình (2- 3) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\,\text{grad}\, w \qquad (2\text{-}9)$$

Để tiện lợi, người ta còn ghi thêm một dạng nữa của phương trình Euler, trong đó chỉ có mặt của vận tốc. Dùng công thức đã biết của giải tích vectơ

$$\frac{1}{2}\text{grad}\,\mathbf{v}^2 = [\mathbf{v}\ \text{rot}\ \mathbf{v}] + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$$

ta có thể viết (2-9) dưới dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - [\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\mathbf{v}] = -\ \mathrm{grad}\ (w + \frac{v^2}{2}) \qquad (2\text{-}10)$$

Lấy rot cả hai vế của phương trình này, ta thu được phương trình chỉ chứa vận tốc

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \mathrm{rot}\ [\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\mathbf{v}] \qquad (2\text{-}11)$$

Các phương trình chuyển động cần được bổ sung thêm các điều kiện biên, các điều kiện này phải được thỏa mãn ở trên các thành bao chất lỏng. Đối với chất lỏng lý tưởng, điều kiện biên này có ý nghĩa đơn giản là chất lỏng không thể xuyên qua mặt rắn. Điều đó có nghĩa là, trên các thành cố định, thành phần của vận tốc chất lỏng vuông góc với mặt thành phải bằng không

$$v_n = 0 \qquad (2\text{-}12)$$

(còn trong trường hợp chung của mặt chuyển động, v_n phải bằng thành phần tương ứng của vận tốc của mặt).

Ở trên mặt ngăn cách hai chất lỏng không pha trộn được với nhau, phải có điều kiện sau: các áp suất và các thành phần vuông góc với mặt ngăn cách hai chất lỏng của vận tốc phải bằng nhau (và mỗi một trong các vận tốc đó phải bằng vận tốc dịch chuyển vuông góc của chính mặt ngăn cách).

Như đã nói ở đầu §1, trạng thái của chất lỏng chuyển động được xác định bởi năm đại lượng : ba thành phần vận tốc v, áp suất p và mật độ ρ. Như vậy, hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực học phải chứa năm phương trình. Đối với chất lỏng lý tưởng, đó là các phương trình Euler, phương trình liên tục và phương trình biểu diễn tính đoạn nhiệt của chuyển động.

BÀI TẬP

1. Viết các phương trình cho chuyển động một chiều của chất lỏng lý tưởng theo các biến a, t, trong đó a là tọa độ x của các hạt chất lỏng ở thời điểm $t = t_0$ (gọi là biến lagrangiên) [1].

[1] Mặc dù các biến đó được gọi là các biến lagrangiên, nhưng cần chú ý rằng, thực tế các phương trình chuyển động của chất lỏng trong các tọa độ đó lần đầu tiên đã được Euler tìm ra đồng thời với các phương trình cơ bản (2-3).

Giải. Trong các biến đã nêu, tọa độ x của mỗi hạt chất lỏng tại một thời điểm tùy ý được coi như một hàm của t và tọa độ a của nó tại thời điểm ban đầu $x = x(a,t)$. Điều kiện bảo toàn khối lượng của phần tử chất lỏng trong khi nó chuyển động (phương trình liên tục) được viết dưới dạng $\rho\, dx = \rho_0\, da$, hay

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0$$

trong đó $\rho_0(a)$ là mật độ phân bố ban đầu đã cho. Vận tốc của hạt chất lỏng, theo định nghĩa, bằng $v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$, còn đạo hàm $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a$ xác định tọa độ biến thiên theo thời gian của vận tốc hạt đã cho trong chuyển động của nó. Phương trình Euler được viết dưới dạng

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t$$

và phương trình đoạn nhiệt

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a = 0$$

§3. THỦY TĨNH HỌC

Đối với chất lỏng đứng yên trong trọng trường đều, phương trình Euler (2-4) có dạng

$$\text{grad}\, p = \rho \mathbf{g} \tag{3-1}$$

Phương trình này mô tả sự cân bằng cơ học của chất lỏng. (Khi không có các ngoại lực, phương trình cân bằng có dạng đơn giản $\nabla p = 0$, nghĩa là $p = \text{const}$, áp suất có giá trị như nhau tại mọi điểm của chất lỏng).

Phương trình (3-1) được lấy tích phân trực tiếp, nếu mật độ chất lỏng có thể được giả thiết là không đổi trong toàn bộ thể tích của nó, nghĩa là nếu dưới tác dụng của trường ngoài không có sự nén đáng kể của chất lỏng. Nếu lấy trục z thẳng đứng, hướng lên phía trên, ta có:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Từ đó

$$p = -\rho g z + \text{const.}$$

Nếu chất lỏng đứng yên có mặt ngoài tự do (ở độ cao h) chịu tác dụng của một áp suất ngoài p_o như nhau tại mọi điểm, thì mặt đó phải là một mặt phẳng nằm ngang $z = h$. Từ điều kiện $p = p_o$ với $z = h$, ta suy ra

$$\text{const} = p_o + \rho g h$$

do đó

$$p = p_o + \rho g(h - z) \tag{3-2}$$

Đối với một khối lượng lớn chất lỏng hay chất khí, mật độ ρ nói chung không thể được coi là không đổi; điều này đặc biệt được xét cho các chất khí (không khí chẳng hạn). Giả sử rằng, chất lỏng không những cân bằng cơ học, mà còn cân bằng nhiệt. Khi đó, nhiệt độ sẽ như nhau tại mọi điểm chất lỏng, và phương trình (3-1) có thể được lấy tích phân như sau. Ta dùng hệ thức nhiệt động lực đã biết

$$d\Phi = -s\,dT + V\,dp$$

trong đó Φ là thế nhiệt động lực tính cho một đơn vị khối lượng chất lỏng. Khi nhiệt độ không đổi

$$d\Phi = V\,dp = \frac{1}{\rho}dp$$

Từ đó thấy rằng, trong trường hợp đang xét, biểu thức $\frac{1}{\rho}\nabla p$ có thể được thay bằng $\nabla\Phi$, do đó phương trình cân bằng (3-1) có dạng

$$\nabla\Phi = \mathbf{g}$$

Với $\mathbf{g}$ không đổi và hướng dọc theo trục z (theo chiều âm), ta có đồng nhất thức

$$\mathbf{g} = -\nabla(gz)$$

Như vậy

$$\nabla(\Phi + gz) = 0$$

Từ đó, ta tìm được rằng, trong toàn bộ chất lỏng, tổng số sau phải không đổi

$$\Phi + gz = \text{const}; \tag{3-3}$$

gz là thế năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng ở trong trọng trường. Trong vật lý thống kê, điều kiện (3-3) đã được biết như là điều kiện cân bằng nhiệt động lực học của một hệ ở trong trường ngoài.

Ở đây, chúng ta còn nhận thấy thêm một hệ quả đơn giản sau đây từ phương trình (3-1). Nếu chất lỏng hay khí (không khí chẳng hạn) nằm cân bằng cơ học trong trọng trường, thì áp suất trong đó chỉ có thể là hàm của độ cao z (vì nếu tại độ cao đã cho, áp suất khác nhau tại các điểm khác nhau, thì sẽ xuất hiện chuyển động). Khi đó từ (3-1), ta suy ra mật độ

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3-4}$$

cũng chỉ là hàm của z. Nhưng áp suất và mật độ xác định đơn trị nhiệt độ tại một điểm đã cho của vật, nên nhiệt độ phải là hàm chỉ của z. Như vậy, nếu có sự cân bằng cơ học ở trong trọng trường, thì sự phân bố áp suất, mật độ và nhiệt độ chỉ phụ thuộc vào độ cao. Chẳng hạn, nếu nhiệt độ khác nhau tại các điểm khác nhau của chất lỏng ở cùng một độ cao, thì khi đó không thể có cân bằng cơ học ở trong chất lỏng được.

Sau cùng, chúng ta rút ra phương trình cân bằng của một khối lượng rất lớn chất lỏng, mà các phần của nó được cố kết với nhau nhờ lực hút hấp dẫn (ngôi sao). Gọi φ là thế hấp dẫn Newton của trường gây bởi chất lỏng. Nó thỏa mãn phương trình vi phân

$$\nabla\varphi = 4\pi G \rho \tag{3-5}$$

trong đó G là hằng số hấp dẫn Newton. Cường độ trường hấp dẫn là $-\operatorname{grad}\varphi$, do đó lực tác dụng lên khối lượng ρ là $-\rho \operatorname{grad}\varphi$. Như vậy, điều kiện cân bằng có dạng

$$\operatorname{grad} p = -\rho \operatorname{grad}\varphi$$

Chia đẳng thức trên cho ρ, lấy div hai vế của đẳng thức và dùng (3-5), cuối cùng ta thu được phương trình cân bằng dưới dạng

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right) = -4\pi G \rho \tag{3-6}$$

Cần nhấn mạnh rằng, ở đây chỉ nói đến cân bằng cơ học, còn phương trình (3-6) tuyệt nhiên không giả thiết có một sự cân bằng nhiệt toàn phần nào.

Nếu vật không quay, nó sẽ có dạng hình cầu trong trạng thái cân bằng, còn sự phân bố mật độ cũng như áp suất trong vật sẽ đối xứng xuyên tâm. Phương trình (3-6) viết trong các tọa độ cầu khi đó có dạng

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \qquad (3\text{-}7)$$

§4. ĐIỀU KIỆN ĐỂ KHÔNG CÓ ĐỐI LƯU

Một chất lỏng có thể ở trong trạng thái cân bằng cơ học (nghĩa là trong đó không thể có mặt chuyển động vĩ mô), mà không cân bằng nhiệt. Phương trình (3-1) là điều kiện cân bằng cơ học, nó cũng có thể được thỏa mãn cả khi nhiệt độ ở trong chất lỏng không phải là hằng số. Nhưng khi đó, có nảy ra vấn đề, một cân bằng như thế có ổn định không. Người ta nhận thấy rằng cân bằng sẽ chỉ ổn định khi có một điều kiện nào đó được thực hiện. Nếu điều kiện đó không được thực hiện, thì cân bằng sẽ không ổn định và trong chất lỏng sẽ xuất hiện những dòng chảy hỗn loạn có xu hướng khuấy trộn chất lỏng đến mức làm cho nhiệt độ trong chất lỏng trở nên không đổi. Một chuyển động như thế được gọi là *sự đối lưu*. Nói một cách khác, điều kiện để cân bằng cơ học được ổn định là không có mặt của đối lưu. Điều kiện này có thể được rút ra như sau.

Chúng ta xét một phần tử chất lỏng ở độ cao z và có thể tích riêng $V(p,s)$, trong đó p và s là áp suất và entrôpi cân bằng tại độ cao đó. Giả sử rằng, phần tử chất lỏng này chịu một dịch chuyển đoạn nhiệt nhỏ ξ lên phía trên; thể tích riêng của nó khi đó trở thành $V(p',s)$, trong đó p' là áp suất tại độ cao $z + \xi$. Để cho cân bằng ổn định, cần phải (mặc dù nói chung là không đủ) có một lực xuất hiện trên phần tử có xu hướng kéo nó về vị trí ban đầu. Điều đó có nghĩa là, phần tử đang xét phải nặng hơn phần tử mà nó "thay thế" ở vị trí mới của nó. Thể tích riêng của phần tử sau là $V(p', s')$, trong đó s' là entrôpi cân bằng của chất lỏng tại độ cao $z + \xi$. Như vậy, ta có điều kiện ổn định

$$V(p',s') - V(p',s) > 0$$

Khai triển hiệu này theo các luỹ thừa

$$s' - s = \frac{ds}{dz}\xi$$

ta thu được:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \qquad (4\text{-}1)$$

Dựa vào các công thức nhiệt động lực, ta có:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

trong đó c_p là nhiệt dung riêng đẳng áp. Nhiệt dung c_p cũng như nhiệt độ T luôn luôn dương, do đó ta có thể viết lại (4-1) dưới dạng

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0 \tag{4-2}$$

Phần lớn các chất đều dãn nở khi bị nung nóng, nghĩa là $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0$; khi đó điều kiện để không có đối lưu dẫn đến bất đẳng thức

$$\frac{ds}{dz} > 0 \tag{4-3}$$

nghĩa là entrôpi phải tăng theo độ cao.

Từ đó dễ dàng tìm được điều kiện mà gradiên nhiệt độ (dT/dz) phải thỏa mãn. Khai triển đạo hàm (ds/dz), ta có:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T}\frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0$$

Sau cùng dựa vào (3-4)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{V}$$

ta thu được

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g\beta T}{c_p} \tag{4-4}$$

trong đó $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ là hệ số dãn nở vì nhiệt độ.

Nếu xét sự cân bằng của một cột khí, mà ta có thể coi là lý tưởng (theo nghĩa nhiệt động lực học của từ), thì $\beta T = 1$ và điều kiện (4-4) có dạng

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p} \tag{4-5}$$

Sự đối lưu xảy ra khi các điều kiện này bị phá hủy, nghĩa là nếu nhiệt độ giảm theo hướng từ thấp đến cao và gradiên của nó về giá trị tuyệt đối vượt quá giá trị đã nêu trong (4.4-5) [1].

[1] Đối với nước ở 20°C giá trị vế phải của (4-4) vào khoảng 1° trên 6,7 km; đối với không khí giá trị ở vế phải của (4-5) vào khoảng 1° trên 100 m.

§5. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI

Các phương trình thủy động lực học sẽ đơn giản đáng kể trong trường hợp dòng chảy là *dừng* (hay *ổn định*). Dòng chảy dừng được hiểu là dòng chảy, sao cho tại mỗi điểm không gian chiếm bởi chất lỏng, vận tốc dòng chảy không đổi theo thời gian. Nói một cách khác, **v** chỉ là hàm của các tọa độ, do đó $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Phương trình (2-10) bây giờ dẫn tới đẳng thức

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - (\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -\operatorname{grad} w \qquad (5\text{-}1)$$

Ta đưa vào khái niệm *đường dòng*. Đó là những đường sao cho các tiếp tuyến với chúng tại tiếp điểm ở thời điểm đã cho có phương chiều trùng với phương chiều của vận tốc tại điểm ấy; chúng được xác định bởi hệ các phương trình vi phân

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \qquad (5\text{-}2)$$

Trong trường hợp chuyển động dừng của chất lỏng , các đường dòng không đổi theo thời gian và trùng với các quỹ đạo của các hạt chất lỏng. Nhưng nếu dòng chảy không dừng, thì tất nhiên một sự trùng như vậy sẽ không xảy ra: những tiếp tuyến với đường dòng cho những hướng vận tốc của các hạt chất lỏng khác nhau tại các điểm kế tiếp trong không gian ở một thời điểm đã cho, trong khi đó những tiếp tuyến với quỹ đạo cho ta những hướng vận tốc của các hạt xác định ở những thời điểm kế tiếp.

Ta nhân phương trình (5-1) với vectơ đơn vị tiếp tuyến với đường dòng tại mỗi điểm của nó; ký hiệu vectơ đơn vị đó là **l**. Như đã biết, hình chiếu của gradiên lên một phương nào đó bằng đạo hàm lấy theo phương đó. Do đó hình chiếu cần tìm của grad w là $\partial w/\partial l$. Vectơ [**v** rot **v**] vuông góc với **v**, vì thế hình chiếu của nó lên phương **l** bằng không.

Như vậy, từ (5-1) ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w\right) = 0$$

Từ đó suy ra rằng, đại lượng $\frac{v^2}{2} + w$ không đổi dọc theo đường dòng:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const} \tag{5-3}$$

Nói chung giá trị của const khác nhau đối với các đường dòng khác nhau. Phương trình (5-3) được gọi là *phương trình Bernoulli* [1].

Nếu chất lỏng chảy ở trong trọng trường, thì còn phải thêm vào vế trái của phương trình (5-1) gia tốc trọng trường **g**. Chúng ta lấy trục z theo phương của trọng trường, chiều dương hướng lên phía trên. Khi đó cosin của các góc giữa các hướng **g** và **l** bằng đạo hàm $-(dz/dl)$, do đó hình chiếu của **g** lên **l** bằng

$$-g\frac{dz}{dl}$$

Phù hợp với điều đó, bây giờ ta có

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + w + gz\right) = 0$$

Như vậy phương trình Bernoulli phát biểu rằng, dọc theo các đường dòng tổng sau vẫn không đổi

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{const} \tag{5-4}$$

§6. NĂNG THÔNG

Chúng ta xét một phần tử thể tích nào đó đứng yên trong không gian và tìm xem năng lượng của chất lỏng chứa trong thể tích đó thay đổi theo thời gian như thế nào. Năng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng bằng

$$\rho\frac{v^2}{2} + \rho\varepsilon$$

trong đó số hạng thứ nhất là động năng, còn số hạng thứ hai là nội năng (ε là nội năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng). Độ biến thiên của năng lượng này được cho bởi đạo hàm riêng

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)$$

[1] Phương trình đã được *D. Bernoulli* thiết lập cho chất lỏng không nén được (xem §10) vào năm 1738.

Để tính đại lượng này ta viết

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = \frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

hay dùng phương trình liên tục (1-2) và phương trình chuyển động (2-3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{grad}p - \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}.$$

Trong số hạng sau cùng, chúng ta thay $\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v}\nabla v^2$, và dựa vào hệ thức nhiệt động lực $dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp$, ta thay gradiên áp suất bằng $\rho\nabla w - \rho T\nabla s$, cuối cùng thu được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\frac{v^2}{2}\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}\nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right) + \rho T\mathbf{v}\nabla s.$$

Để biến đổi đạo hàm $\frac{\partial}{\partial t}\rho\varepsilon$, ta dùng hệ thức nhiệt động lực

$$d\varepsilon = Tds - \rho dV = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

Nếu chú ý rằng tổng $\varepsilon + p/\rho = \varepsilon + pV$ chính là hàm nhiệt w của một đơn vị khối lượng, ta có

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\, d\rho + \rho\, d\varepsilon = w\, d\rho + \rho T\, ds$$

và như vậy

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\ \operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho T\mathbf{v}\nabla s.$$

Ở đây cũng đã dùng phương trình đoạn nhiệt tổng quát (2-6).

Tập hợp các biểu thức đã thu được, ta có được độ biến thiên năng lượng cần tìm

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\left(w + \frac{v^2}{2}\right)\operatorname{div}\rho\mathbf{v} - \rho(\mathbf{v}\nabla)\left(w + \frac{v^2}{2}\right)$$

hay cuối cùng ta được

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right] \qquad (6\text{-}1)$$

Để làm rõ ý nghĩa của đẳng thức thu được, ta lấy tích phân nó theo một thể tích nào đó

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV = -\int \mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]dV$$

hay biến tích phân theo thể tích ở vế phải thành tích phân lấy theo mặt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dV = -\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\,d\mathbf{f} \qquad (6\text{-}2)$$

Vế trái của đẳng thức biểu diễn độ biến thiên của năng lượng chất lỏng sau một đơn vị thời gian ở trong một đơn vị thể tích đã cho nào đó của không gian. Do đó, tích phân lấy theo mặt ở vế phải biểu diễn lượng năng lượng "đi ra" khỏi thể tích đang xét trong một đơn vị thời gian. Từ đó, ta nhận thấy rằng, biểu thức :

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right) \qquad (6\text{-}3)$$

là vectơ "*mật độ năng thông*". Giá trị tuyệt đối của nó là lượng năng lượng đi qua một đơn vị mặt nằm vuông góc với phương vận tốc trong một đơn vị thời gian.

Biểu thức (6 -3) chứng tỏ rằng mỗi đơn vị khối lượng chất lỏng mang theo năng lượng $w + v^2/2$ trong chuyển động của nó. Vấn đề là hàm nhiệt w, chứ không phải nội năng giản đơn ε, xuất hiện ở đây có một ý nghĩa vật lý đơn giản. Sau khi thay $w = \varepsilon + p/\rho$, ta viết được năng thông toàn phần đi qua một mặt kín dưới dạng

$$-\oint\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon\right)d\mathbf{f} - \oint p\,\mathbf{v}\,d\mathbf{f}$$

Số hạng thứ nhất là năng lượng (động năng và nội năng) được mang trực tiếp (trong một đơn vị thời gian) bởi khối lượng chất lỏng đi qua mặt. Số hạng thứ hai biểu diễn công sinh ra bởi các áp lực trên chất lỏng chứa trong mặt đó.

§7. DÒNG XUNG LƯỢNG

Bây giờ, ta cũng nêu những lập luận tương tự cho xung lượng của chất lỏng. Xung lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng là ρv. Ta xác định tốc độ biến thiên của nó

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathbf{v}.$$

Thực hiện các phép tính trong ký hiệu tenxơ, ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i$$

Dùng phương trình liên tục (1-2), ta viết nó dưới dạng

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k}$$

và phương trình Euler (2-3) dưới dạng

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Khi đó, ta được

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k$$

Viết số hạng thứ nhất của vế phải dưới dạng

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

Cuối cùng, ta có

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{7-1}$$

trong đó tenxơ Π_{ik} được xác định như sau

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k \tag{7-2}$$

Tenxơ này rõ ràng là đối xứng.

Để làm sáng tỏ ý nghĩa của tenxơ Π_{ik}, ta lấy tích phân phương trình (7-1) theo một thể tích nào đó:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV$$

Biến đổi tích phân của số hạng ở vế phải thành tích phân mặt [1], ta được

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = -\oint \Pi_{ik} df_k \qquad (7\text{-}3)$$

Vế trái biểu diễn độ biến thiên của thành phần thứ i của xung lượng trong thể tích đã cho trong một đơn vị thời gian. Do đó, tích phân mặt của vế thứ hai biểu diễn lượng xung lượng đó đi khỏi mặt bao thể tích đó trong một đơn vị thời gian. Như vậy, $\Pi_{ik}df_k$ là thành phần thứ i của xung lượng đi qua phần tử df của mặt. Nếu viết df_k dưới dạng $n_k df$ (df là giá trị tuyệt đối của phần tử diện tích, **n** là vectơ đơn vị của pháp tuyến ngoài với mặt), thì ta nhận thấy rằng $\Pi_{ik}\, n_k$ là dòng thành phần thứ i của xung lượng tính cho một đơn vị diện tích của mặt. Dựa vào (7-2), ta nhận thấy rằng $\Pi_{ik}\, n_k = pn_i + \rho\, v_i v_k n_k$; biểu thức này có thể được viết dưới dạng vectơ

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\,\mathbf{n}) \qquad (7\text{-}4)$$

Như vậy, Π_{ik} là thành phần thứ i của xung lượng trong một đơn vị thời gian đi qua một đơn vị mặt đặt vuông góc với trục x_k. Tenxơ Π_{ik} được gọi là *tenxơ mật độ dòng xung lượng*. Năng lượng là một vô hướng, năng thông được xác định bằng một vectơ; nhưng bản thân xung lượng là một vectơ, nên dòng xung lượng được xác định bằng một tenxơ hạng hai.

Vectơ (7-4) xác định dòng của vectơ xung lượng theo hướng **n**, nghĩa là qua một mặt vuông góc với **n**. Đặc biệt, nếu chọn hướng của vectơ đơn vị **n** theo hướng của vận tốc chất lỏng, ta sẽ nhận thấy rằng chỉ riêng thành phần dọc của xung lượng nằm theo hướng đó, và mật độ của dòng thành phần đó bằng

---

[1] Quy tắc biến đổi một tích phân lấy trên mặt kín thành tích phân lấy theo thể tích bao bởi mặt đó có thể phát biểu như sau: phần tử mặt df_i được thay thế bởi toán tử $dV\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, toán tử này phải được áp dụng cho toàn bộ biểu thức dưới dấu tích phân: $df_i \to dV\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

$$p + \rho v^2$$

Nhưng chỉ có thành phần ngang (đối với **v**) của xung lượng chuyển theo hướng vuông góc với vận tốc, còn mật độ của dòng thành phần đó đơn giản bằng p.

§8. SỰ BẢO TOÀN LƯU SỐ VẬN TỐC

Tích phân

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l}$$

lấy dọc theo một công tua kín được gọi là *lưu số của vận tốc* dọc theo công tua kín đó.

Ta xét một công tua kín vạch trong chất lỏng tại một thời điểm nào đó. Ta sẽ coi nó là một "công tua lỏng", nghĩa là bản thân công tua kín này gồm bởi các hạt chất lỏng nằm trên nó. Với thời gian, các hạt này chuyển động và toàn bộ công tua kín cũng chuyển động cùng với chúng. Chúng ta tìm hiểu xem khi đó lưu số vận tốc dọc theo công tua kín sẽ trở nên như thế nào. Nói một cách khác, chúng ta tính đạo hàm theo thời gian

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l}$$

Ở đây ta viết đạo hàm toàn phần theo thời gian, vì chúng ta tìm sự biến thiên của lưu số dọc theo "công tua lỏng" chuyển động, chứ không phải dọc theo một công tua cố định trong không gian.

Để tránh nhầm lẫn, chúng ta tạm thời ký hiệu đạo hàm theo các tọa độ bằng δ, còn ký hiệu d dành cho đạo hàm theo thời gian. Ngoài ra, ta có nhận xét là, phần tử $d\mathbf{l}$ của độ dài công tua có thể được viết dưới dạng hiệu $\delta\mathbf{r}$ của các bán kính vectơ **r** của hai đầu phần tử đó. Như vậy, ta viết lưu số của vận tốc dưới dạng

$$\oint \mathbf{v}\, \delta\mathbf{r}$$

Khi lấy vi phân tích phân trên theo thời gian, cần nhớ rằng, không những vận tốc thay đổi, mà cả bản thân công tua (nghĩa là hình dạng của nó) cũng thay đổi. Như vậy, nếu đưa dấu đạo hàm theo thời gian vào dưới dấu tích phân, cần phải lấy đạo hàm không những **v**, mà còn cả $\delta\mathbf{r}$

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v}\,\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}$$

Vì vận tốc **v** chính là đạo hàm theo thời gian của bán kính vectơ **r**, nên

$$\mathbf{v}\frac{d\delta r}{dt} = \mathbf{v}\delta\frac{dr}{dt} = \mathbf{v}\delta\mathbf{v} = \delta\frac{v^2}{2}$$

Nhưng tích phân của một vi phân toàn phần lấy theo một công tua kín bằng không, do đó tích phân thứ hai của vế phải bằng không, và chỉ còn

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{r}$$

Bây giờ chỉ còn phải thay ở đây gia tốc $d\mathbf{v}/dt$ bằng biểu thức (2-9) của nó:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} w$$

Áp dụng công thức Stokes, khi đó ta được

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{r} = \int \operatorname{rot}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta\mathbf{f} = 0$$

(vì rot grad $w \equiv 0$).

Như vậy, nếu trở lại các ký hiệu cũ, cuối cùng ta thu được [1)]

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = 0$$

hay

$$\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \text{const} \qquad (8\text{-}1)$$

Như vậy ta đi tới kết luận là, trong chất lỏng lý tưởng, lưu số của vận tốc dọc theo một công tua kín "lỏng" vẫn không đổi theo thời gian. Điều khẳng định đó chính là *định lý Thomson* (hay *định luật bảo toàn lưu số của vận tốc*; *W. Thomson*, 1869).

Chúng ta nhấn mạnh rằng kết quả này đã thu được khi dùng phương trình Euler dưới dạng (2-9) và như vậy kết quả đó có liên quan đến giả thiết về tính đẳng entrôpi của chuyển động chất lỏng. Đối với một chuyển động không đẳng entrôpi, định lý đó không đúng [2)].

[1)] Kết quả này còn đúng cả ở trong trọng trường đều, vì rot $\mathbf{g} \equiv 0$.

[2)] Theo quan điểm toán học, giữa p và ρ phải có một quan hệ một đối một (đối với một chuyển động đẳng entrôpi, nó được xác định bởi phương trình $s(p, \rho) = \text{const}$) khi đó $-\nabla p/\rho$ có thể được viết dưới dạng gradiên của một hàm nào đó, đó chính là một điều kiện cần thiết để rút ra định lý Thomson.

Áp dụng định lý Thomson cho công tua kín vô cùng nhỏ δC và biến đổi tích phân theo định Stokes, ta thu được

$$\oint \mathbf{v}\,d\mathbf{l} = \int \mathrm{rot}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{f} \approx \delta\mathbf{f}\cdot\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = \mathrm{const} \qquad (8\text{-}2)$$

trong đó $d\mathbf{f}$ là phần tử mặt chất lỏng tựa trên công tua δC. Vectơ rot $\mathbf{v}$ thường được gọi là tính "xoáy" [1] của dòng chảy chất lỏng tại điểm đã cho của nó. Sự không đổi của tích (8-2) có thể được giải thích cụ thể, nếu nói rằng, tính xoáy được chuyển đi cùng với chất lỏng chuyển động.

BÀI TẬP

Chứng minh rằng trong dòng chảy không đẳng entrôpi đối với mỗi hạt chuyển động, giá trị của tích $(\nabla s.\mathrm{rot}\ \mathbf{v})/\rho$ gắn với hạt vẫn không đổi (*H.Ertel*, 1942).

Giải. Trong chuyển động không đẳng entrôpi vế phải của phương trình Euler (2-3) không thể thay thế được bằng $-\nabla w$ và thay cho phương trình (2-11) ta có

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\mathbf{v}\omega\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[\nabla\rho\cdot\nabla p\right]$$

(Để ngắn gọn, ta đưa vào ký hiệu $\omega = \mathrm{rot}\ \mathbf{v}$. Ta nhân đẳng thức này với ∇s; vì $s = s(p, \rho)$, nên ∇s được biểu diễn tuyến tính qua ∇p và $\nabla\rho$ và tích $\nabla s\ [\nabla\rho,\nabla p] = 0$. Sau đó biểu thức ở vế phải của phương trình được biến đổi như sau

$$\nabla s\,\frac{\partial\omega}{\partial t} = \nabla s\cdot\mathrm{rot}\left[\mathbf{v}\omega\right] = -\mathrm{div}\left[\nabla s\left[\mathbf{v}\omega\right]\right] = -\mathrm{div}\left(\mathbf{v}\left(\omega\nabla s\right)\right) + \mathrm{div}\left(\omega\left(\mathbf{v}\nabla s\right)\right) =$$
$$= -\left(\omega\nabla s\right)\mathrm{div}\ \mathbf{v} - \mathbf{v}\ \mathrm{grad}\left(\omega\nabla s\right) + \omega\ \mathrm{grad}\left(\mathbf{v}\nabla s\right).$$

Theo (2-6), ta thay thế $(\mathbf{v}\nabla s) = -\,\partial s/\partial t$ và thu được phương trình

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega\nabla s\right) + \mathbf{v}\ \mathrm{grad}\left(\omega\nabla s\right) + \left(\omega\nabla s\right)\mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0$$

Hai số hạng đầu tiên hợp nhất thành $d(\omega\nabla s)/dt$ (trong đó $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla$), còn trong số hạng sau cùng theo (1-3), ta thay $\rho\mathrm{div}\ \mathbf{v} = -\,d\rho/dt$. Kết quả ta thu được

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\omega\nabla s}{\rho} = 0$$

Chính kết quả này biểu diễn định luật bảo toàn cần tìm.

---

[1] Theo thuật ngữ tiếng Anh – vorticity.

§9. CHUYỂN ĐỘNG THẾ

Từ định luật bảo toàn lưu số của vận tốc, có thể rút ra được một hệ quả quan trọng. Trước hết giả thiết chuyển động của chất lỏng là dừng và ta xét một đường dòng, mà tại một điểm nào đó của nó đã biết rằng rot $\mathbf{v} = 0$. Ta vẽ một công tua tùy ý, vô cùng nhỏ bao đường dòng quanh điểm đó. Với thời gian công tua đó chuyển động cùng với chất lỏng, nhưng nó vẫn luôn luôn bao chính đường dòng đó. Vì tích (8-2) không đổi, do đó suy ra rằng rot $\mathbf{v}$ bằng không dọc theo cả đường dòng.

Như vậy chúng ta đi tới kết luận là, nếu tính xoáy không xuất hiện tại một điểm nào đó của đường dòng, thì nó cũng không xuất hiện tại tất cả các điểm khác của đường đó. Nếu chuyển động của chất lỏng là không dừng, thì kết quả đó vẫn còn hiệu lực, có một điều khác là, cần nói đến không phải đường dòng, mà đến quỹ đạo do một hạt chất lỏng xác định nào đó vạch ra theo thời gian (nhớ rằng trong chuyển động không dừng, các quỹ đạo đó nói chung không trùng với các đường dòng) [1)]

Mới thoạt nhìn, có thể dựa trên kết quả đó để kết luận như sau. Chúng ta xét dòng chảy dừng của chất lỏng quanh một vật nào đó. Tại vô cùng dòng tới là đều; vận tốc của nó $\mathbf{v} = \text{const}$, do đó rot $\mathbf{v} \equiv 0$ trên tất cả các đường dòng. Từ đó, có thể kết luận rằng, rot $\mathbf{v}$ bằng không dọc theo toàn bộ độ dài của tất cả các đường dòng, nghĩa là trong toàn không gian.

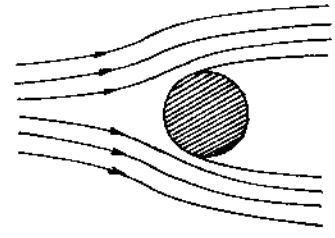
Chuyển động của chất lỏng, với rot $\mathbf{v} = 0$ trong toàn không gian, được gọi là chuyển *động thế* (hay *không xoáy*), khác với chuyển động xoáy, trong đó rot của vận tốc khác không. Như vậy, ta đi tới kết luận là, chuyển động dừng quanh một vật nào đó, tới từ dòng đều ở vô cùng, phải là một chuyển động thế.

Tương tự, nếu xuất phát từ định luật bảo toàn lưu số của vận tốc, có thể còn rút ra kết luận sau. Giả sử tại một thời điểm nào đó chuyển động của chất lỏng là chuyển động thế (trong toàn bộ thể tích của nó).

[1)] Để tránh sự hiểu lầm, cần nói ngay rằng kết quả này không có nghĩa trong chuyển động chảy rối. Ngoài ra, cũng lưu ý rằng, tính xoáy có thể xuất hiện trên đường dòng sau khi đường dòng giao nhau với một sóng va chạm. Ta nhận thấy rằng, đó là do dòng chảy không còn là đẳng entrôpi nữa §114.

Khi đó lưu số của vận tốc theo một công tua kín bất kỳ ở trong chất lỏng đều bằng không [1]. Theo định lý Thomson, có thể kết luận rằng, điều này vẫn còn đúng đối với tất cả các thời điểm tiếp sau, nghĩa là, nếu chuyển động của chất lỏng là chuyển động thế tại một thời điểm nào đó, nó sẽ là chuyển động thế tại mọi thời điểm tiếp sau (đặc biệt, mọi chuyển động của chất lỏng lúc đầu đứng yên đều phải là chuyển động thế). Điều đó phù hợp với sự kiện là, phương trình (2-11) được đồng nhất thoả mãn, với rot v = 0.

Tuy nhiên, thực tế tất cả những kết luận đó chỉ có ứng dụng rất hạn chế. Vấn đề là ở chỗ, phần chứng minh nêu trên về sự bảo toàn của đẳng thức rot v = 0 dọc theo đường dòng, nói một cách chặt chẽ, không thể áp dụng được cho một đường nằm trên mặt vật rắn có chất lỏng bao quanh, lý do đơn giản là vì sự có mặt của thành rắn không cho phép vẽ trong chất lỏng một công tua kín bao quanh một đường dòng như thế. Do đó, những phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng chấp nhận những nghiệm, trong đó có xuất hiện "sự tách của những luồng" trên mặt vật rắn bao bởi chất lỏng: những đường dòng chạy dọc theo mặt, tại một nơi nào đó "tách" khỏi mặt, rồi lại tiếp tục đi sâu vào trong chất lỏng. Kết quả, ta thu được hình ảnh dòng chảy, đặc trưng bởi sự có mặt của "mặt gián đoạn tiếp tuyến" xuất phát từ vật; trên mặt đó vận tốc chất lỏng (luôn luôn hướng theo tiếp tuyến với mặt tại mọi điểm) chịu một sự gián đoạn. Nói một cách khác, trên mặt đó có một lớp chất lỏng như thể trượt lên trên lớp chất lỏng kia (hình 1 biểu diễn dòng chảy bao quanh với mặt gián đoạn ngăn cách chất lỏng chuyển động với miền "tù đọng" chứa chất lỏng đứng yên được hình thành phía sau vật). Theo quan điểm thuần tuý toán học, bước nhảy của thành phần tiếp tuyến của vận



Hình-1

[1] Để đơn giản, ở đây ta giả thiết rằng chất lỏng chiếm đầy một miền đơn liên của không gian. Đối với một miền đa liên, người ta cũng thu được cùng một kết quả cuối cùng, nhưng trong lập luận cần phải đặt những điều kiện đặc biệt cho việc chọn các công tua.

tốc, như đã biết, biểu diễn rôta mặt của vận tốc.

Khi xét đến những dòng chảy gián đoạn như thế, nghiệm của các phương trình của chất lỏng lý tưởng sẽ không đơn trị: ngoài nghiệm liên tục, các phương trình đó còn có tập hợp vô số các nghiệm với các mặt gián đoạn tiếp tuyến, xuất phát từ một đường cho trước bất kỳ ở trên mặt vật có chất lỏng bao quanh. Tuy nhiên cần nhấn mạnh rằng tất cả các nghiệm gián đoạn đó đều không có ý nghĩa vật lý, vì những gián đoạn tiếp tuyến đều tuyệt đối không ổn định, do đó chuyển động của chất lỏng thực tế trở nên chảy rối (xem chương III).

Lẽ dĩ nhiên, bài toán vật lý thực về dòng chảy bao quanh một vật đã cho là đơn trị. Vấn đề là ở chỗ, thực tế không tồn tại những chất lỏng thực sự lý tưởng; mọi chất lỏng thực đều có độ nhớt nào đó, dù là rất nhỏ. Tính nhớt này thực tế có thể hoàn toàn không ảnh hưởng đến chuyển động của chất lỏng hầu như trong toàn bộ không gian, nhưng dù nhỏ thế nào, thì nó vẫn giữ một vai trò quan trọng trong một lớp chất lỏng kề sát mặt vật. Cụ thể là, chính các tính chất của chuyển động trong một *lớp mỏng* (gọi là lớp biên) thực tế xác định việc chọn một nghiệm trong tập hợp vô hạn các nghiệm của các phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng. Trong trường hợp tổng quát của dòng chảy bao quanh vật có dạng bất kỳ, người ta nhận thấy rằng các nghiệm được lọc ra là các nghiệm với sự tách các luồng (sự tách thực tế dẫn tới sự xuất hiện tính chảy rối).

Mặc dù tất cả những điều đã trình bày ở trên, việc nghiên cứu các nghiệm của phương trình chuyển động, tương ứng với dòng thế dừng liên tục bao quanh các vật, trong một số trường hợp vẫn có ý nghĩa. Tuy rằng trong trường hợp tổng quát của dòng bao quanh vật có hình dạng bất kỳ hình ảnh thực của dòng chảy thực tế không có gì giống với hình ảnh của dòng chảy thế, nhưng trong trường hợp vật có hình dạng đặc biệt nào đó ("dạng thuôn", xem §46) chuyển động của chất lỏng có thể khác rất ít so với chuyển động thế (nói chính xác hơn, chuyển động chỉ là chuyển động không thế trong một lớp chất lỏng rất mỏng ở gần mặt vật, và ở trong miền tương đối hẹp của "vết" sau vật).

Một trường hợp quan trọng khác của dòng chảy thế bao quanh xảy ra khi có những dao động nhỏ của vật nhúng chìm trong chất lỏng. Dễ dàng

chứng minh được rằng, nếu biên độ a của các dao động nhỏ so với các kích thước dài l của vật ($a << l$), thì chuyển động của chất lỏng ở chung quanh vật khi đó bao giờ cũng là chuyển động thế. Để chứng minh điều đó, ta ước lượng cấp độ lớn các số hạng khác nhau trong phương trình Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w$$

Vận tốc $\mathbf{v}$ thay đổi đáng kể (bậc vận tốc u của vật dao động) trên những khoảng cách có bậc kích thước l của vật. Do đó, các đạo hàm của $\mathbf{v}$ theo các tọa độ có bậc độ lớn u/l. Còn bậc độ lớn của chính vận tốc $\mathbf{v}$ được xác định (tại các khoảng cách không quá lớn tính từ vật) bởi vận tốc u. Như vậy, ta có $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim u^2/l$. Đạo hàm $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ có bậc độ lớn bằng ωu, trong đó ω là tần số dao động. Vì $\omega \sim \frac{u}{a}$, nên ta có $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \sim \frac{u^2}{a}$. Từ điều kiện $a << l$, bây giờ suy ra rằng, số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ nhỏ so với $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ và có thể được bỏ qua, do đó phương trình chuyển động của chất lỏng có dạng $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla w$. Lấy rot hai vế của phương trình này, ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{v} = 0$$

Từ đó rot $\mathbf{v}$ = const. Tuy nhiên trong chuyển động dao động giá trị trung bình (theo thời gian) của vận tốc bằng không; do đó từ rot $\mathbf{v}$ = const, ta suy ra rằng rot $\mathbf{v}$ = 0. Như vậy, chuyển động của một chất lỏng thực hiện những dao động nhỏ là chuyển động thế (trong sự gần đúng bậc nhất).

Bây giờ ta tìm hiểu một số tính chất tổng quát của chuyển động thế của chất lỏng. Trước hết nhớ lại rằng: việc rút ra định luật bảo toàn lưu số, và cùng với nó tất cả những hệ quả tiếp theo, đều dựa trên giả thiết về tính đẳng entrôpi của dòng chảy. Nhưng nếu chuyển động không phải là đẳng entrôpi, thì định luật đó không đúng; do đó ngay cả khi chuyển động là chuyển động thế tại một thời điểm nào đó, thì tại các thời điểm sau, nói chung, tính xoáy vẫn cứ xuất hiện. Như vậy, thực tế chỉ có chuyển động đẳng entrôpi là chuyển động thế.

Trong chuyển động thế của một chất lỏng lưu số vận tốc dọc theo một công tua kín bất kỳ bằng không

$$\oint \mathbf{v}\, d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{v}\; d\mathbf{f} = 0 \tag{9-1}$$

Từ đó suy ra rằng, đặc biệt trong trường hợp của một dòng chảy thế, không thể tồn tại những đường dòng kín[1]. Thực vậy, vì hướng của một đường dòng tại điểm trùng với hướng của vận tốc, nên lưu số của vận tốc dọc theo một đường như vậy trong mọi trường hợp sẽ khác không.

Với chuyển động xoáy, lưu số của vận tốc nói chung khác không. Trong trường hợp này các đường dòng kín có thể tồn tại; nhưng cần nhấn mạnh rằng sự tồn tại của các đường dòng kín tuyệt nhiên không phải là điều kiện cần của chuyển động xoáy.

Giống như bất kỳ một trường vectơ nào có rôta bằng không, vận tốc của một chất lỏng trong một chuyển động thế có thể được viết dưới dạng gradiên của một vô hướng nào đó. Vô hướng này được gọi là *thế vận tốc*. Thế vận tốc được ký hiệu là φ:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \tag{9-2}$$

Viết phương trình Euler dưới dạng (2-10)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] = -\nabla w$$

và thay vào đây $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, ta thu được:

$$\text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w\right) = 0$$

từ đó rút ra đẳng thức sau:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t) \tag{9-3}$$

---

[1] Kết quả này, cũng như công thức (9-1) có thể không đúng khi chất lỏng chuyển động trong một miền đa liên của không gian. Đối với một dòng chảy thế trong một miền như vậy, lưu số của vận tốc có thể khác không, nếu công tua kín, mà theo đó tính lưu số, không thể co về một điểm mà không cắt các biên giới của miền.

trong đó, $f(t)$ là một hàm tùy ý của thời gian. Đẳng thức trên là tích phân đầu của các phương trình mô tả chuyển động thế. Không làm mất tính chất tổng quát, hàm $f(t)$ trong đẳng thức (9-3) có thể đặt bằng không do tính không đơn trị của thế. Thực vậy, vì vận tốc được xác định bằng các đạo hàm của φ theo các toạ độ, nên ta có thể thêm vào φ một hàm bất kỳ của thời gian.

Với chuyển động dừng, ta có (chọn thế φ không phụ thuộc thời gian) $\partial\varphi/\partial t = 0$, $f(t) = \text{const}$, và (9-3) chuyển thành phương trình Bernoulli

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const} \tag{9-4}$$

Cần nhấn mạnh rằng, ở đây giữa các phương trình Bernoulli trong chuyển động thế và chuyển động không thế có một sự khác nhau quan trọng. Trong trường hợp tổng quát của một chuyển động tùy ý, const ở vế phải của phương trình đó giữ giá trị không đổi dọc theo mỗi đường dòng đã cho, nhưng nói chung nó thay đổi khi chuyển từ đường dòng này sang đường dòng khác. Tuy nhiên, trong trường hợp của chuyển động thế, const trong phương trình Bernoulli là một đại lượng không đổi trong toàn bộ thể tích chất lỏng. Đặc biệt điều đó làm tăng vai trò của phương trình Bernoulli trong việc nghiên cứu chuyển động thế.

§10. CHẤT LỎNG KHÔNG NÉN ĐƯỢC

Trong rất nhiều trường hợp của dòng chảy các chất lỏng (và chất khí), mật độ của chúng có thể được coi là không đổi, nghĩa là bằng một hằng số trong toàn bộ thể tích chất lỏng và trong suốt thời gian chuyển động. Nói một cách khác, trong các trường hợp này không có sự nén hay dãn đáng kể của chất lỏng. Một chuyển động như thế được gọi là chuyển động của *chất lỏng không nén được*.

Khi áp dụng cho một chất lỏng không nén được, các phương trình tổng quát của thủy động lực đơn giản đi rất nhiều. Thực vậy, phương trình Euler không đổi dạng nếu ta đặt trong phương trình đó $\rho = \text{const}$, chỉ trừ khi trong phương trình (2-4) ρ có thể được đưa vào dưới dấu gradiên

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + g \qquad (10\text{-}1)$$

Mặt khác, với ρ = const, phương trình liên tục có dạng đơn giản

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \qquad (10\text{-}2)$$

Bây giờ mật độ không còn là một hàm chưa biết như trong trường hợp tổng quát, nên ta có thể lấy các phương trình chỉ chứa vận tốc làm hệ các phương trình cơ bản của thủy động lực học cho chất lỏng không nén được. Những phương trình như thế là phương trình liên tục (10-2) và phương trình (2-11):

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}[\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] \qquad (10\text{-}3)$$

Phương trình Bernoulli cho chất lỏng không nén được cũng có thể được viết dưới dạng đơn giản hơn. Phương trình (10-1) khác phương trình tổng quát Euler(2-9) ở chỗ, nó chứa $\nabla\frac{p}{\rho}$ thay cho ∇w. Do đó, ta có thể viết ngay phương trình Bernoulli nếu thay đơn giản hàm nhiệt ở trong (5-4) bằng tỷ số p/ρ:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \qquad (10\text{-}4)$$

Đối với chất lỏng không nén được, cũng có thể viết p/ρ thay cho w ở trong biểu thức (6-3) của năng thông. Biểu thức này khi đó có dạng

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) \qquad (10\text{-}5)$$

Thực vậy, theo hệ thức nhiệt động lực học đã biết, độ biến thiên nội năng có dạng $d\varepsilon = Tds - pdV$; với s = const và $V = 1/\rho$ = const, ta có $d\varepsilon = 0$, nghĩa là ε = const. Nhưng vì các số hạng không thay đổi ở trong năng lượng đều không quan trọng, nên có thể bỏ qua ε cả ở trong $w = \varepsilon + p/\rho$.

Đặc biệt các phương trình của chuyển động thế sẽ đơn giản đối với chất lỏng không nén được. Phương trình (10-3) đồng nhất được thỏa mãn với rot $\mathbf{v}$ = 0. Còn phương trình (10-2) sau khi thay $\mathbf{v}$ = grad φ sẽ trở thành

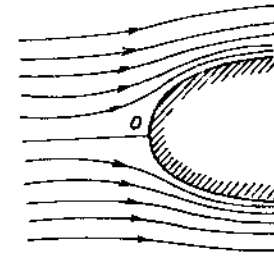
$$\Delta\varphi = 0 \qquad (10\text{-}6)$$

Đó là phương trình Laplace cho thế φ [1]. Phương trình này cần được bổ sung thêm các điều kiện biên ở trên các mặt tiếp xúc của chất lỏng với các vật rắn. Cụ thể là, trên các mặt rắn cố định thành phần pháp tuyến v_n của vận tốc chất lỏng với mặt phải bằng không, còn trong trường hợp tổng quát của các vật rắn chuyển động v_n phải bằng hình chiếu của vận tốc của vật chuyển động lên phương của cùng pháp tuyến đó (vận tốc này là một hàm đã cho của thời gian). Mặt khác, vận tốc v_n bằng đạo hàm của φ theo phương của pháp tuyến: $v_n = \partial\varphi/\partial n$. Như vậy, các điều kiện biên trong trường hợp tổng quát đòi hỏi $\partial\varphi/\partial n$ là một hàm đã cho của thời gian và các toạ độ ở trên các mặt phân giới.

Trong chuyển động thế, vận tốc liên hệ với áp suất bằng phương trình (9-3). Nếu chất lỏng không nén được, ta có thể viết p/ρ thay cho w ở trong phương trình đó:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t) \qquad (10\text{-}7)$$

Ta nhận thấy một tính chất quan trọng trong chuyển động thế của chất lỏng không nén được. Giả sử có một vật rắn nào đó chuyển động qua chất lỏng. Nếu dòng chảy của chất lỏng xuất hiện khi đó là chuyển động thế, thì tại mỗi thời điểm dòng chảy chỉ phụ thuộc vào vận tốc của vật chuyển động tại cùng thời điểm ấy, mà không phụ thuộc vào gia tốc của vật chẳng hạn. Thực vậy, bản thân phương trình (10-6) không chứa thời gian một cách tường minh; thời gian chỉ xuất hiện trong nghiệm thông qua các điều kiện biên, các điều kiện này chỉ chứa vận tốc của vật chuyển động trong chất lỏng.



Hình 2

Phương trình Bernoulli $v^2/2 + p/\rho = \text{const}$ chứng tỏ rằng, trong chuyển động dừng của chất lỏng không nén được (khi không có trọng trường) áp suất sẽ cực đại tại những điểm vận tốc bằng không. Thường thì điểm

[1] Thế của các vận tốc lần đầu tiên được Euler đưa vào. Ông cũng rút ra cho thế này một phương trình có dạng (10-6), về sau được gọi là phương trình Laplace.

này tìm được trên mặt của vật có chất lỏng bao quanh (điểm O trên hình 2). Một điểm như thế được gọi là *điểm tới hạn*. Nếu u là vận tốc của dòng chất lỏng tới vật (nghĩa là vận tốc của chất lỏng ở vô cùng) và p_o là áp suất ở vô cùng, thì áp suất ở điểm tới hạn bằng

$$p_{max} = p_0 + \frac{\rho u^2}{2} \tag{10-8}$$

Nếu sự phân bố các vận tốc trong chất lỏng chuyển động chỉ phụ thuộc vào hai tọa độ, giả sử là x và y, và vận tốc tại mọi nơi đều song song với mặt phẳng xy, thì một chuyển động như vậy được gọi là *chuyển động phẳng*, hay *chuyển động hai chiều*. Để giải các bài toán về chuyển động phẳng của chất lỏng không nén được, để tiện lợi đôi khi người ta biểu diễn vận tốc bằng một hàm gọi là hàm dòng. Từ phương trình liên tục

$$\text{div } \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

suy ra rằng, các thành phần của vận tốc có thể được viết dưới dạng các đạo hàm

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10-9}$$

của một hàm $\psi(x,y)$, gọi là *hàm dòng*. Khi đó, phương trình liên tục tự động được thỏa mãn. Còn phương trình, mà hàm dòng phải thỏa mãn, có thể thu được bằng cách thay (10-9) vào trong (10-3)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} = 0 \tag{10-10}$$

Biết hàm dòng, có thể trực tiếp xác định được dạng của các đường dòng đối với chuyển động dừng của chất lỏng. Thực vậy, phương trình vi phân của các đường dòng (trong chuyển động phẳng) có dạng:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

hay $v_y dx - v_x dy = 0$; nó chứng tỏ rằng, phương của tiếp tuyến với đường dòng tại mỗi điểm trùng với phương của vận tốc. Thay (10-9) vào đây, ta thu được:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = d\psi = 0$$

Từ đó ψ = const. Như vậy, các đường dòng lập thành một họ các đường cong, thu được bằng cách cho hàm dòng $\psi(x,y)$ bằng một hằng số tùy ý.

Nếu nối hai điểm *1* và *2* của mặt phẳng x,y bằng một đường cong, thì lưu lượng Q của chất lỏng qua đường cong này được xác định bởi hiệu các giá trị của hàm dòng tại các điểm đó, dù đường cong có dạng thế nào. Thực vậy, nếu v_n là hình chiếu của vận tốc xuống phương pháp tuyến với đường cong tại một điểm đã cho của nó, ta sẽ có

$$Q = \rho \int_1^2 v_n dl = \rho \int_1^2 \left(-v_y dx + v_x dy\right) = \rho \int_1^2 d\psi$$

hay

$$Q = \rho(\psi_2 - \psi_1) \tag{10-11}$$

Lý thuyết các hàm biến phức cho ta những phương pháp đắc lực để giải các bài toán về chuyển động phẳng thế của một chất lỏng không nén được bao quanh các vật có các prôfin khác nhau [1]. Cơ sở cho các ứng dụng này như sau: thế và hàm dòng có liên hệ với các thành phần của vận tốc bằng các hệ thức [2]

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Nhưng các hệ thức như thế giữa những đạo hàm của các hàm φ và ψ, theo quan điểm toán học, trùng với các điều kiện Cauchy - Riemann đã biết, theo điều kiện này biểu thức phức

$$w = \varphi + i\psi \tag{10-12}$$

phải là một hàm giải tích với acgumen phức $z = x + iy$. Điều đó có nghĩa là, hàm $w(z)$ tại mỗi điểm có đạo hàm xác định

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - iv_y \tag{10-13}$$

Hàm w được gọi là *thế phức*, còn dw/dz là *vận tốc phức*. Môđun và

[1] Nội dung chi tiết của các phương trình này và nhiều ứng dụng của chúng có thể tìm được trong nhiều giáo trình và chuyên khảo về thuỷ động lực học với xu hướng toán học nhiều hơn. Ở đây chỉ giới hạn giải thích tư tưởng cơ bản của phương pháp đó.

[2] Tuy nhiên, cần nhớ rằng, sự tồn tại của bản thân hàm dòng chỉ có liên quan đến dòng chảy hai chiều và tuyệt nhiên không đòi hỏi dòng chảy là thế.

acgumen của vận tốc phức xác định giá trị tuyệt đối của vận tốc v và góc nghiêng θ mà nó lập được với trục x:

$$\frac{dw}{dz} = ve^{-i\theta} \tag{10-14}$$

Trên mặt vật rắn có dòng chảy bao quanh công tua, vận tốc phải hướng theo tiếp tuyến của nó. Nói một cách khác, công tua phải trùng với một trong các đường dòng, nghĩa là, trên công tua phải có ψ = const; hằng số này có thể chọn bằng không, khi đó bài toán về dòng chất lỏng bao quanh một công tua đã cho đưa về việc tìm một hàm giải tích $w(z)$, lấy trên công tua đó những giá trị thực. Cách đặt bài toán sẽ phức tạp hơn trong trường hợp chất lỏng có mặt tự do (một thí dụ như thế có thể tìm thấy trong bài tập 9 ở cuối tiết này).

Như ta đã biết, tích phân của một hàm giải tích theo một công tua C nào đó bằng tích của $2\pi i$ nhân với tổng các thặng dư của hàm đó đối với các cực đơn của nó ở bên trong C; như vậy

$$\oint w'\,dz = 2\pi i \sum_k A_k$$

trong đó các A_k là các thặng dư của vận tốc phức. Mặt khác, ta có:

$$\oint w'dz = \oint (v_x - iv_y)(dx + idy) =$$
$$= \oint (v_x dx + v_y dy) + i\oint (v_x dy - v_y dx).$$

Phần thực của biểu thức này chính là lưu số Γ của vận tốc dọc theo công tua C. Còn phần ảo (nhân với ρ) đó chính là lưu lượng chất lỏng qua công tua đó; nếu không có các nguồn chất lỏng ở bên trong công tua thì lưu lượng này bằng không. Khi đó, ta có đơn giản

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k \tag{10-15}$$

(tất cả các thặng dư A_k khi đó đều là thuần ảo).

Cuối cùng, ta dừng lại ở các điều kiện cần để có thể coi một chất lỏng là không nén được. Khi áp suất biến đổi đoạn nhiệt một lượng Δp, thì mật độ chất lỏng biến đổi một lượng

$$\Delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \Delta p$$

Nhưng theo phương trình Bernoulli, các dao động của áp suất trong chất lỏng chuyển động dừng – bậc của $\Delta p \sim \rho v^2$. Ở §64, ta sẽ thấy rằng đạo hàm $(\partial p/\partial\rho)_s$ bằng bình phương của vận tốc âm c trong chất lỏng. Do đó ta ước lượng được

$$\Delta\rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2}$$

Chất lỏng có thể được coi là không nén được, khi $\Delta\rho/\rho << 1$. Ta nhận thấy rằng, điều kiện cần để có được bất đẳng thức đó là vận tốc của chất lỏng phải nhỏ so với vận tốc âm:

$$v << c \tag{10-16}$$

Tuy nhiên điều kiện này chỉ là đủ trong chuyển động dừng. Nếu chuyển động không dừng, thì cần phải thỏa mãn thêm một điều kiện khác nữa. Giả sử τ và l là các đại lượng có bậc là các khoảng thời gian và khoảng cách để vận tốc chất lỏng thay đổi đáng kể. So sánh các số hạng $\partial v/\partial t$ và $\Delta p/\rho$ trong phương trình Euler, nếu xét về bậc, ta thu được: $v/\tau \sim \Delta p/l\rho$ hay $\Delta p \sim l\rho v/\tau$, còn độ biến thiên tương ứng của ρ là $\Delta\rho \sim l\rho\, v/\tau c^2$. Bây giờ nếu so sánh các số hạng $\partial\rho/\partial t$ và ρ div $\mathbf{v}$ ở trong phương trình liên tục, ta sẽ nhận thấy rằng, đạo hàm $\partial\rho/\partial t$ có thể được bỏ qua (nghĩa là có thể coi ρ = const), nếu $\Delta\rho/\tau << \rho v/l$ hay

$$\tau >> \frac{l}{c} \tag{10-17}$$

Điều kiện (10-16) và (10-17) được coi là đủ để có thể coi chất lỏng là không nén được. Điều kiện (10-17) có một ý nghĩa cụ thể: thời gian l/c là cần thiết để một tín hiệu âm đi được một khoảng cách l nhỏ so với thời gian τ, trong đó chuyển động chất lỏng thay đổi một cách đáng kể, và như vậy điều kiện này cho phép coi quá trình lan truyền các tương tác trong chất lỏng là tức thời.

BÀI TẬP

1. Tìm dạng của mặt chất lỏng không nén được trong trọng trường ở trong một xylanh quay xung quanh trục của nó với vận tốc góc không đổi Ω.

Giải. Ta chọn trục z dọc theo trục của xylanh. Khi đó $v_x = -\Omega y$, $v_y = \Omega x$, $v_z = 0$. Phương trình liên tục tự động được thỏa mãn, còn phương trình Euler (10-1) cho ta:

$$x\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad y\Omega^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

Tích phân tổng quát các phương trình này bằng

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) - gz + \text{const}$$

Trên mặt tự do p = const, do đó mặt này là một paraboloit

$$z = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$$

(gốc tọa độ lấy ở điểm thấp nhất của mặt).

2. Một quả cầu (bán kính R) chuyển động trong chất lỏng lý tưởng không nén được. Xác định chuyển động thế của chất lỏng quanh quả cầu.

Giải. Tại vô cùng, vận tốc của chất lỏng phải bằng không. Như đã biết, các nghiệm của phương trình Laplace $\Delta\varphi = 0$ bằng không tại vô cùng là $1/r$ và các đạo hàm với các bậc khác nhau của $1/r$ theo các tọa độ (gốc được chọn tại tâm quả cầu). Do sự đối xứng toàn phần của quả cầu, nghiệm chỉ có thể chứa một vectơ không đổi – vận tốc $\mathbf{u}$, và vì phương trình Laplace là bậc nhất, nên điều kiện cho φ cũng phải chứa $\mathbf{u}$ ở bậc nhất. Vô hướng duy nhất có thể lập được từ $\mathbf{u}$ và các đạo hàm của $1/r$ là tích $\mathbf{u}\nabla\frac{1}{r}$. Do đó, ta tìm φ dưới dạng

$$\varphi = A\nabla\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{An}}{r^2}$$

trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo hướng bán kính vectơ. Hằng số $\mathbf{A}$ được xác định từ điều kiện là, các thành phần pháp tuyến với mặt hình cầu của các vận tốc $\mathbf{v}$ và $\mathbf{u}$ ở trên mặt cầu phải bằng nhau, nghĩa là $\mathbf{vn} = \mathbf{un}$ khi $r = R$. Điều kiện này cho ta $A = uR^3/2$, do đó

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2}\mathbf{un}, \quad \mathbf{v} = \frac{R^3}{2r^3}\left[3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}\right]$$

Sự phân bố áp suất được cho bởi công thức (10-7)

$$p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

trong đó p_∞ là áp suất tại vô cùng. Khi tính đạo hàm $\partial\varphi/\partial t$, cần nhớ rằng gốc tọa độ (chọn tại tâm quả cầu) dịch chuyển theo thời gian với vận tốc **u**. Do đó:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\nabla\varphi$$

Sự phân bố áp suất ở trên mặt cầu được cho bởi công thức

$$p = p_\infty + \frac{\rho u^2}{8}\left(9\cos^2\theta - 5\right) + \frac{\rho}{2}R\mathbf{n}\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

trong đó θ là góc giữa **n** và **u**.

3. Cũng bài toán đó, xét cho một hình trụ vô hạn dịch chuyển vuông góc với trục của nó [1].

Giải. Dòng chảy không phụ thuộc vào tọa độ dọc theo trục của hình trụ, do đó cần phải giải phương trình Laplace hai chiều. Các nghiệm triệt tiêu tại vô cùng là các đạo hàm cấp một và cấp cao hơn của $\ln r$ theo các tọa độ ($\mathbf{r}$ là bán kính vectơ vuông góc với trục của hình trụ). Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla \ln r = \frac{\mathbf{An}}{r}$$

và dựa vào các điều kiện biên, ta nhận được $\mathbf{A} = -R^2\mathbf{u}$; do đó

$$\varphi = -\frac{R^2}{r}\mathbf{un}, \quad v = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}]$$

Áp suất ở trên mặt hình trụ được biểu diễn bằng công thức

$$p = p_\infty + \frac{\rho u^2}{2}(4\cos^2\theta - 3) + \rho R\mathbf{n}\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

4. Tìm chuyển động thế của một chất lỏng không nén được lý tưởng ở trong một bình elipxôit quay xung quanh một trong các trục chính của nó với tốc độ góc Ω. Tìm mômen xung lượng toàn phần của chất lỏng trong bình.

Giải. Chúng ta lấy các toạ độ Đêcác x, y, z dọc theo các trục của êlipxôit tại thời điểm đã cho, trục z trùng với trục quay. Vận tốc của thành bình $\mathbf{u} = [\Omega\mathbf{r}]$, do đó điều kiện biên $v_n = \partial\varphi/\partial n = u_n$ là

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \Omega(xn_y - yn_x)$$

hay, nếu dùng phương trình của elipxôit là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$:

---

[1] Có thể tìm nghiệm của các bài toán tổng quát hơn về chuyển động thế quanh một elipxôit và một hình trụ tiết diện elip trong những cuốn sách sau: *N.E. Côtsin, I.A.Kibel, N.V. Rôzê.* Thủy động lực học lý thuyết, phần thứ nhất, xuất bản lần thứ sáu, 1963 (tiếng Nga); (*H. Lamb*, Hydrodynamics, §§103-116. Cambridge, 1932).

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=xy\Omega\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

Nghiệm của phương trình Laplace thỏa mãn điều kiện này có dạng

$$\varphi=\Omega\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy \qquad (1)$$

Momen xung lượng của chất lỏng ở trong bình là:

$$M=\rho\int\left(xv_y-yv_x\right)dV$$

lấy tích phân theo thể tích của êlipxôit, ta được

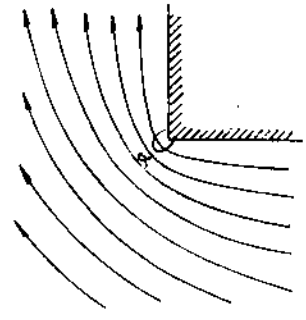
$$M=\frac{\Omega\rho V}{5}\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+b^2}$$

Công thức (1) xác định chuyển động tuyệt đối của chất lỏng, xét tại vị trí tức thời của các trục x, y, z gắn liền với bình quay. Còn chuyển động của chất lỏng đối với bình (nghĩa là đối với hệ tọa độ quay x, y, z) thu được bằng cách trừ vận tốc $[\Omega r]$ vào vận tốc tuyệt đối của chất lỏng; v' là vận tốc tương đối của chất lỏng, ta có:

$$v'_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\Omega y=\frac{2\Omega a^2}{a^2+b^2}y\ ,\quad v'_y=-\frac{2\Omega b^2}{a^2+b^2}x\ ,\quad v'_z=0$$

Các quỹ đạo của chuyển động tương đối thu được bằng cách lấy tích phân các phương trình $\dot{x}=v'_x$, $\dot{y}=v'_y$ và là những elíp $x^2/a^2+y^2/b^2=\text{const}$ đồng dạng với elip biên.

5. Xác định dòng chảy của chất lỏng tại gần điểm tới hạn của vật (hình 3).



Hình 3

Giải. Phần nhỏ của mặt vật ở gần điểm tới hạn có thể được coi là phẳng. Chọn phần đó làm mặt phẳng xy. Khai triển φ thành chuỗi theo các x,y,z nhỏ, và giới hạn ở các số hạng bậc hai, ta có

$$\varphi=ax+by+cz+Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+\\+Eyz+Fxz$$

(số hạng không đổi ở trong φ không quan trọng). Ta xác định các hệ số không đổi sao cho φ thỏa mãn phương trình $\Delta\varphi=0$ và các điều kiện biên $v_z=\partial\varphi/\partial z=0$ với $z=0$ và tất cả các x,y và $\partial\varphi/\partial x=\partial\varphi/\partial y=0$ với $x=y=z=0$ (tại điểm tới hạn). Kết quả ta có $a=b=c=0$; $C=-A-B$, $E=F=0$. Số hạng Dxy bao giờ cũng có thể được khử đi bằng một phép quay thích hợp các trục x và y. Cuối cùng, ta thu được:

$$\varphi=Ax^2+By^2-(A+B)z^2 \qquad (1)$$

Nếu dòng chảy đối xứng trục quanh trục z (dòng chảy đối xứng quanh một vật tròn xoay) thì phải có $A = B$, do đó

$$\varphi = A(x^2 + y^2 - 2z^2) \qquad (1)$$

Các thành phần của vận tốc bằng

$$v_x = 2Ax, \quad v_y = 2Ay, \quad v_z = -4Az$$

Các đường dòng được cho bởi các phương trình (5-2), từ đó $x^2z = c_1$, $y^2z = c_2$, nghĩa là các đường dòng là những hypecbôn bậc ba.

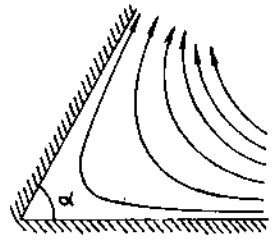
Nếu dòng chảy là đều dọc theo trục y chẳng hạn (dòng bao quanh theo chiều trục z quanh hình trụ có trục trùng với trục y), thì phải có $B = 0$ ở trong (1), do đó

$$\varphi = A(x^2 - z^2)$$

Các đường dòng là những hypecbôn xy = const.

6. Tìm chuyển động thế của một chất lỏng chảy quanh góc một nhị diện (ở gần đỉnh của góc).

Giải. Chọn các tọa độ cực r,θ ở trong mặt phẳng của tiết diện ngang vuông góc với cạnh của nhị diện với gốc ở đỉnh góc. Góc θ được tính từ một trong các đường thẳng tạo thành thiết diện của góc. Gọi α là giá trị của góc nhị diện, nếu $\alpha < \pi$ dòng chảy được thực hiện ở trong nhị diện; nếu $\alpha > \pi$ dòng chảy ở ngoài nhị diện. Điều kiện biên đòi hỏi thành phần pháp tuyến của vận tốc phải triệt tiêu có dạng $d\varphi/d\theta = 0$ với $\theta = 0$ và $\theta = \alpha$. Nghiệm của phương trình Laplace thỏa mãn điều kiện đó có dạng [1]



Hình 4

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad n = \pi/\alpha$$

do đó

$$v_r = nAr^{n-1}\cos n\theta, \quad v_\theta = -nAr^{n-1}\sin n\theta$$

Với $n < 1$ (dòng chảy quanh một góc lồi, hình 3), v trở nên lớn vô cùng như $r^{-(1-n)}$ tại gốc tọa độ. Với $n > 1$ (dòng chảy quanh một góc lõm, hình 4), v_r bằng không khi $r = 0$.

Hàm dòng xác định các đường dòng là

$$\psi = Ar^n \sin n\theta$$

Các biểu thức đã thu được cho φ và ψ là những phần thực và phần ảo của thế phức

$$w = Az^n$$ [2]

---

[1] Chúng ta chọn nghiệm tương ứng với số mũ dương nhỏ nhất của r (vì các r nhỏ.!).

[2] Nếu coi các mặt phẳng phân giới trong các bài toán 5 và 6 là vô hạn thì các bài toán đó sẽ suy biến theo nghĩa là, các giá trị của các hệ số không đổi A,B →

7. Từ một chất lỏng không nén được chiếm đầy không gian, đột ngột tách ra một thể tích hình cầu bán kính a. Xác định thời gian cần thiết để chất lỏng lấp đầy hốc cầu mới được tạo thành (*Besant*, 1859; *Rayleigh*, 1917).

Giải. Chuyển động của chất lỏng sau khi hốc được thành lập có tính đối xứng cầu với các vận tốc tại mỗi điểm hướng theo bán kính về tâm. Đối với vận tốc xuyên tâm

$$v_r = v < 0$$

ta có phương trình Euler (trong tọa độ cầu)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{1}$$

Phương trình liên tục có dạng

$$r^2 v = F(t) \tag{2}$$

trong đó $F(t)$ là một hàm tùy ý của thời gian; đẳng thức này chứng tỏ rằng, chất lỏng không nén được, nên thể tích chất lỏng đi qua một hình cầu có bán kính bất kỳ, không phụ thuộc vào bán kính này.

Lấy v từ (2) đưa vào (1), ta thu được:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Lấy tích phân phương trình này theo r từ vô cùng đến bán kính

$$R = R(t) \leq a$$

của hốc cầu được lấp đầy, ta có

$$-\frac{F'(t)}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_o}{\rho} \tag{3}$$

trong đó $V = dR(t)/dt$ là vận tốc biến thiên của bán kính hốc cầu, còn p_o là áp suất tại vô cùng; vận tốc của chất lỏng tại vô cùng, cũng như áp suất trên mặt hốc, đều bằng không. Viết hệ thức (2) cho các điểm của mặt hốc, ta thu được:

$$F(t) = R^2(t)V(t)$$

Thay biểu thức này của $F(t)$ vào (3), ta rút ra phương trình sau:

$$-\frac{3V^2}{2} - \frac{1}{2}R\frac{dV^2}{dR} = \frac{p_o}{\rho} \tag{4}$$

Các biến được phân ly trong phương trình này, và sau khi lấy tích phân với điều kiện ban đầu $V = 0$ với $R = a$ (chất lỏng đứng yên tại thời điểm ban đầu), ta được:

$$V = \frac{dR}{dt} = -\sqrt{\frac{2p_o}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)}$$

→ trong các nghiệm của chúng sẽ vẫn bất định. Trong các trường hợp thực của các dòng chảy bao quanh các vật hữu hạn, các giá trị này được xác định bởi các điều kiện của bài toán xét về toàn bộ.

Từ biểu thức này, ta rút ra được thời gian toàn phần cần tìm để chất lỏng lấp đầy hốc:

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_o}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{(a/R)^2 - 1}}$$

Tích phân này dẫn đến B - tích phân Euler, cuối cùng phép tính cho ta:

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2p_o}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = 0{,}915a\sqrt{\frac{\rho}{p_o}}$$

8. Một quả cầu nhúng trong chất lỏng không nén được dãn nở theo qui luật đã cho $R = R(t)$. Xác định áp suất chất lỏng trên mặt cầu.

Giải. Giả sử $P(t)$ là áp suất cần tìm. Những phép tính hoàn toàn tương tự với bài toán trước, chỉ có một điểm khác là, với $r = R$ thì áp suất không bằng không mà bằng $P(t)$. Thay cho (3), ta thu được phương trình

$$-\frac{F'(t)}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_o}{\rho} - \frac{P(t)}{\rho}$$

và một cách tương ứng thay cho (4), ta thu được phương trình

$$\frac{p_o - P(t)}{\rho} = -\frac{3V^2}{2} - RV\frac{dV}{dR}$$

Nếu nhớ rằng $V = \dfrac{dR}{dt}$, ta có thể đưa biểu thức $P(t)$ về dạng

$$P(t) = p_o + \frac{\rho}{2}\left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right]$$

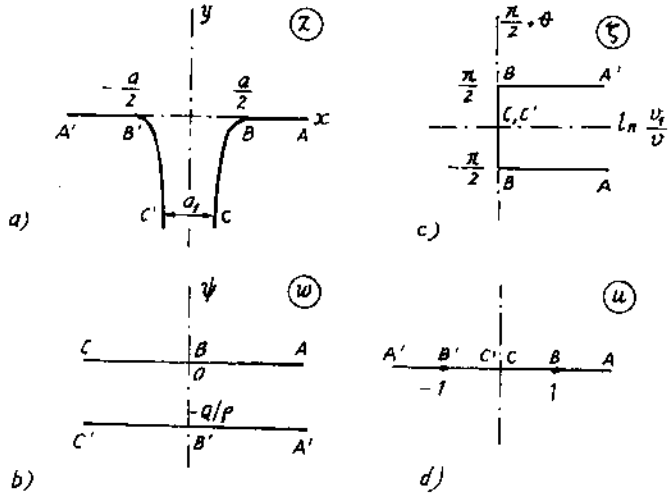
9. Xác định dạng của một luồng thoát ra từ một khe dài vô cùng ở trong thành phẳng.

Giải. Giả sử ở trong mặt phẳng x, y, thành trùng với trục x và miệng của nó là đoạn $-a/2 \le x \le a/2$ của trục đó, còn chất lỏng chiếm nửa mặt phẳng $y > 0$. Ở xa thành (khi $y \to \infty$) vận tốc của chất lỏng bằng không, còn áp suất là p_o.

Trên mặt tự do của luồng (BC và $B'C'$ trên hình 5a) ta có $p = 0$ và vận tốc theo phương trình Bernoulli là một hằng số: $v_1 = \sqrt{2p_o/\rho}$. Các đường của thành, kéo dài vào mặt biên tự do của luồng, là những đường dòng. Giả sử $\psi = 0$ ở trên đường ABC; khi đó trên đường $A'B'C'$ sẽ có $\psi = -Q/\rho$, trong đó $Q = \rho a_1 v_1$ là lưu lượng của chất lỏng trong luồng (a_1, v_1 là độ lớn của luồng và vận tốc của chất lỏng ở trong luồng tại vô cùng). Thế φ thay đổi trên những đường ABC và $A'B'C'$ từ $-\infty$ đến $+\infty$; giả sử $\varphi = 0$ ở B và B'. Khi đó trong mặt phẳng của biến phức w, miền chảy tương ứng với một dải dài vô cùng có bề rộng bằng Q/ρ (các điểm ở trên các hình 5b,c,d tương ứng với các điểm ở trên hình 5a trong mặt phẳng x, y).

Chúng ta đưa vào biến phức mới, đó là lôga của vận tốc phức:

$$\zeta = -\ln\left[\frac{1}{v_1 e^{i\pi/2}}\frac{dw}{dz}\right] = \ln\frac{v_1}{v} + i\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \qquad (1)$$



Hình 5

(trong đó $v_1 e^{i\pi/2}$ là vận tốc phức của luồng ở vô cùng). $\theta = 0$ trên $A'B'$; $\theta = -\pi$ trên AB; $v = v_1$ trên BC và $B'C'$, còn ở tại vô cùng của luồng $\theta = -\pi/2$. Do đó, trong mặt phẳng biến ζ miền chảy tương ứng với nửa dải có bề rộng π nằm trong nửa mặt phẳng bên phải (Hình 5b). Nếu bây giờ tìm được phép biến đổi bảo giác biến đổi dải của mặt phẳng w thành nửa dải của mặt phẳng ζ (với các điểm tương ứng nêu trên hình 5), thì như thế chúng ta xác định được w như là hàm của dw/dz; sau đó hàm w có thể tìm được bằng một phép cầu phương.

Để tìm phép biến đổi bảo giác, ta đưa vào một biến phức phụ u sao cho ở trong mặt phẳng u, miền chảy tương ứng với nửa mặt phẳng trên, các điểm B, B' tương ứng với các điểm $u = \pm 1$, các điểm C và C' tương ứng với điểm $u = 0$, còn các điểm A và A' ở xa vô cùng tương ứng với $u = \pm\infty$ (hình 5d). Sự phụ thuộc của w vào biến phụ đó được xác định bởi phép biến đổi bảo giác, biến nửa mặt phẳng trên của u thành một dải của mặt phẳng w. Nếu xét đến sự tương ứng của các điểm nêu trên, thì sự biến đổi sẽ có dạng

$$w = -\frac{Q}{\rho\pi}\ln u \qquad (2)$$

Để tìm được sự phụ thuộc của ζ vào u, cần phải tìm được phép biến đổi bảo giác biến nửa dải của mặt phẳng ζ thành nửa mặt phẳng trên của u. Nếu coi nửa dải này như một tam giác có một đỉnh ở xa vô cùng, ta có thể tìm được phép biến đổi đó dựa

vào công thức đã biết của Schwarz - Christoffel, đó là

$$\zeta = -i \arcsin u$$

Các công thức (2) và (3) cho ta nghiệm của bài toán, vì chúng xác định sự phụ thuộc của dw/dz vào w dưới dạng thông số.

Bây giờ ta xác định dạng luồng. Trên BC ta có $w = \varphi$, $\zeta = i(\pi/2 + \theta)$ và u biến thiên giữa 0 và 1. Từ (2) và (3), ta thu được:

$$\varphi = -\frac{Q}{\rho\pi} \ln(-\cos\theta) \tag{4}$$

còn từ (1), $d\varphi/dz = v_1 e^{-i\theta}$ hay

$$dz \equiv dx + idy = \frac{1}{v_1} e^{i\theta} d\varphi = \frac{a_1}{\pi} e^{i\theta} tg\theta d\theta$$

Từ đó, bằng phép lấy tích phân (với các điều kiện $y = 0$, $x = a/2$ với $\theta = -\pi$), ta tìm được dạng của luồng dưới dạng thông số. Đặc biệt, ta tìm được độ nén của luồng bằng $\frac{a_1}{a} = \frac{\pi}{2+\pi} = 0{,}61$.

§11. LỰC CẢN TRONG DÒNG CHẢY THẾ QUANH MỘT VẬT

Chúng ta xét bài toán về dòng chảy thế của chất lỏng lý tưởng không nén được bao quanh một vật rắn nào đó. Lẽ dĩ nhiên một bài toán như vậy hoàn toàn tương đương với bài toán về dòng chảy của chất lỏng khi có cùng vật nói trên chuyển động trong nó. Để thu được trường hợp thứ hai từ trường hợp thứ nhất, ta chỉ cần chuyển sang một hệ tọa độ, trong đó chất lỏng đứng yên tại vô cùng. Sau đây ta sẽ nói đúng trường hợp vật rắn chuyển dộng trong chất lỏng.

Ta xác định tính chất phân bố các vận tốc trong chất lỏng tại những khoảng cách lớn đối với vật rắn chuyển động. Chuyển động thế của chất lỏng không nén được được xác định bằng phương trình Laplace $\Delta\varphi = 0$. Ta cần xét các nghiệm nào của phương trình này triệt tiêu tại vô cùng, vì tại vô cùng chất lỏng đứng yên. Lấy gốc tọa độ tại một điểm nào đó bên trong vật chuyển động (hệ tọa độ này chuyển động cùng với vật; nhưng ta xét sự phân bố của các vận tốc trong chất lỏng tại một thời điểm đã cho nào đó). Như đã biết, phương trình Laplace có nghiệm $1/r$, trong đó r là khoảng cách tính từ gốc tọa độ. Gradiên $\nabla 1/r$ và các đạo hàm tiếp theo của $1/r$ theo các tọa độ cũng đều là các nghiệm. Tất cả các

nghiệm này (và các tổ hợp tuyến tính của chúng) đều triệt tiêu tại vô cùng. Do đó, nghiệm tổng quát cần tìm của phương trình Laplace tại các khoảng cách lớn đối với vật có dạng

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} + \cdots,$$

trong đó a và $\mathbf{A}$ không phụ thuộc vào các tọa độ; các số hạng bỏ đi chứa những đạo hàm bậc cao hơn của $1/r$. Dễ dàng thấy rằng, hằng số a phải bằng không. Thực vậy, thế $\varphi = -a/r$ cho ta vận tốc

$$\mathbf{v} = -\nabla\frac{a}{r} = \frac{a\mathbf{r}}{r^3}$$

Ta hãy tính lưu lượng chất lỏng tương ứng chảy qua một mặt kín nào đó, chẳng hạn qua một mặt cầu bán kính R. Trên mặt này vận tốc không đổi và bằng a/R^2, do đó lưu lượng toàn phần qua mặt cầu bằng

$$Q = \rho\frac{a}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi\rho a$$

Nhưng, lưu lượng của chất lỏng không nén được qua một mặt kín rõ ràng phải bằng không. Từ đó kết luận rằng, phải có $a = 0$.

Như vậy, φ chứa những số hạng bắt đầu từ các số hạng có bậc $1/r^2$. Vì chúng ta tìm vận tốc tại các khoảng cách lớn, nên có thể bỏ qua những số hạng có bậc cao hơn và thu được

$$\varphi = \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{An}}{r^2} \tag{11-1}$$

Còn đối với vận tốc $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}\nabla)\nabla\frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{An})\mathbf{n} - \mathbf{A}}{r^3} \tag{11-2}$$

($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo hướng $\mathbf{r}$). Ta nhận thấy rằng, tại các khoảng cách lớn vận tốc giảm, như $1/r^3$. Vectơ $\mathbf{A}$ phụ thuộc vào dạng cụ thể của vật và vận tốc của nó chỉ có thể được xác định bằng cách giải đầy đủ phương trình thủy động lực $\Delta\varphi = 0$ tại tất cả các khoảng cách, có xét đến các điều kiện biên ở trên mặt vật chuyển động.

Vectơ $\mathbf{A}$ xuất hiện trong (11-2) có liên hệ một cách xác định với xung lượng và năng lượng toàn phần của chất lỏng chảy bao quanh vật rắn chuyển động trong chất lỏng đó. Động năng toàn phần của chất lỏng

(nội năng của chất lỏng không nén được là một hằng số) có dạng

$$E = \frac{\rho}{2}\int v^2 dV$$

trong đó tích phân được lấy trong toàn không gian bên ngoài vật. Trong không gian, ta tách một miền V giới hạn bởi một hình cầu có bán kính R lớn, có tâm tại gốc tọa độ. Trước hết, ta chỉ lấy tích phân theo thể tích V, rồi sau đó cho R tiến đến vô cùng. Ta có đẳng thức

$$\int v^2 dV = \int u^2 dV + \int (\mathbf{v}+\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u}) dV$$

trong đó $\mathbf{u}$ là vận tốc của vật. Vì $\mathbf{u}$ không phụ thuộc vào các tọa độ, nên tích phân thứ nhất của vế phải giản đơn bằng $u^2(V - V_o)$, trong đó V_o là thể tích của vật. Còn trong tích phân thứ hai ta viết tổng $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ dưới dạng $\nabla(\varphi + \mathbf{ur})$; sử dụng cả div $\mathbf{v} = 0$ do phương trình liên tục và div $\mathbf{u} \equiv 0$, ta được

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_o) + \int \mathrm{div}\{(\varphi + \mathbf{ur})(\mathbf{v} - \mathbf{u})\} dV$$

Biến đổi tích phân thứ hai thành tích phân lấy trên mặt S của mặt cầu và mặt S_o của vật, ta có

$$\int v^2 dV = u^2(V - V_o) + \oint_{S+S_O} (\varphi + \mathbf{ur})(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{f}$$

Trên mặt của vật các thành phần pháp tuyến của $\mathbf{v}$ và $\mathbf{u}$ đều bằng nhau do các điều kiện biên; vì vectơ $d\mathbf{f}$ hướng đúng theo pháp tuyến với mặt, nên rõ ràng rằng tích phân trên S_o đồng nhất bằng không. Trên mặt S ở xa vô cùng, ta thay các biểu thức (11-1) và (11-2) cho φ và $\mathbf{v}$ và bỏ qua các số hạng triệt tiêu khi $R \to \infty$. Nếu viết phần tử mặt của hình cầu S dưới dạng $d\mathbf{f} = \mathbf{n}R^2\, do$, trong đó do là phần tử góc khối, ta có

$$\int v^2 dV = u^2\left(\frac{4\pi}{3}R^3 - V_o\right) + \int \left\{3(\mathbf{An})(\mathbf{un}) - (\mathbf{un})^2 R^3\right\} do$$

Cuối cùng, sau khi lấy tích phân [1] và nhân với $\rho/2$, ta thu được biểu

[1] Việc lấy tích phân theo do tương đương với việc lấy trung bình biểu thức dưới dấu tích phân theo tất cả hướng của $\mathbf{n}$, sau đó kết quả được nhân với 4π. Để lấy trung bình các biểu thức có dạng $(\mathbf{An})(\mathbf{Bn}) \equiv A_i n_i B_k n_k$, ($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ là những vectơ không đổi). Ta thu được

$$\overline{(\mathbf{An})(\mathbf{Bn})} = A_i B_k \overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik} A_i B_k = \frac{1}{3}\mathbf{AB}$$

thức sau cho năng lượng toàn phần của chất lỏng:

$$E = \frac{\rho}{2}\left(4\pi \mathbf{A}\mathbf{u} - V_o u^2\right) \qquad (11\text{-}3)$$

Như đã nói, phép tính chính xác vectơ **A** đòi hỏi phải giải đầy đủ phương trình $\Delta\varphi = 0$, có xét đến các điều kiện biên cụ thể ở trên mặt vật. Tuy nhiên, chúng ta có thể rút ra trực tiếp tính chất tổng quát của sự phụ thuộc của **A** vào vận tốc **u** của vật từ sự kiện là, phương trình là tuyến tính đối với φ và các điều kiện biên cho phương trình đó là tuyến tính đối với cả φ và **u**. Từ tính tuyến tính này, suy ra rằng **A** phải là một hàm bậc nhất của các thành phần của **u**. Còn năng lượng E xác định bởi công thức (11-3), thì do trên, nó là một hàm toàn phương của các thành phần của **u** và do đó có thể biểu diễn dưới dạng

$$E = \frac{m_{ik} u_i u_k}{2} \qquad (11\text{-}4)$$

trong đó m_{ik} là một tenxơ đối xứng không đổi nào đó, có các thành phần tính được dựa vào các thành phần của **A**, nó được gọi là tenxơ *khối lượng kết hợp*.

Nếu biết được năng lượng E, có thể tìm được biểu thức xung lượng toàn phần **P** của chất lỏng. Muốn vậy, ta có nhận xét rằng, những độ biến thiên vô cùng nhỏ của E và **P** liên hệ với nhau bởi hệ thức $dE = \mathbf{u}d\mathbf{P}$ [1]; từ đó suy ra rằng nếu E được viết dưới dạng (11-4), thì các thành phần của **P** phải có dạng:

[1] Thực vậy, giả sử vật được tăng tốc dưới tác dụng của một ngoại lực **F** nào đó. Kết quả là, xung lượng của chất lỏng sẽ tăng; gọi $d\mathbf{P}$ là độ tăng của nó trong thời gian dt. Chúng ta có $d\mathbf{P} = \mathbf{F}dt$. Sau khi nhân hai vế của đẳng thức đó với **u**, ta thu được $\mathbf{u}d\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{u}dt$, đó chính là công của lực **F** trên đoạn đường $\mathbf{u}dt$, chính công này bằng độ tăng năng lượng dE của chất lỏng.

Cần nhận thấy rằng, không thể tính xung lượng trực tiếp như tích phân $\int \rho \mathbf{v} dV$ ở trong toàn bộ thể tích của chất lỏng. Vấn đề ở chỗ, tích phân này (với **v** được phân bố theo (11-2)) phân kỳ theo nghĩa là, kết quả của phép lấy tích phân, mặc dù hữu hạn, nhưng nó phụ thuộc vào cách lấy tích phân: nếu tiến hành lấy tích phân theo một miền lớn mà kích thước của nó có xu hướng tiến đến vô cực, thì ta sẽ thu được một giá trị phụ thuộc vào dạng của miền (hình cầu, hình trụ v.v..). Nhưng cách tính xung lượng ở đây, xuất phát từ hệ thức $\mathbf{u}d\mathbf{P} = dE$, sẽ dẫn đến một giá trị hoàn toàn hữu hạn xác định (được cho bởi công thức (11-6)), giá trị này chắc chắn thỏa mãn điều kiện vật lý về mối liên hệ giữa độ biến thiên của xung lượng và các lực tác dụng lên vật.

$$P_i = m_{ik} u_k \qquad (11\text{-}5)$$

Cuối cùng, nếu so sánh các công thức (11-3-5), ta sẽ suy ra rằng, **P** được biểu diễn theo **A** dưới dạng

$$\mathbf{P} = 4\pi\rho\mathbf{A} - \rho V_o \mathbf{u} \qquad (11\text{-}6)$$

Cần chú ý rằng, xung lượng toàn phần của chất lỏng là một đại lượng hữu hạn hoàn toàn xác định.

Trong một đơn vị thời gian, xung lượng chuyển từ vật sang chất lỏng bằng $d\mathbf{P}/dt$. Đại lượng đó lấy ngược dấu rõ ràng cho ta phản lực **F** của chất lỏng, nghĩa là lực tác dụng lên vật:

$$\mathbf{F} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} \qquad (11\text{-}7)$$

Thành phần của **F** song song với vận tốc được gọi là *lực cản*, còn thành phần vuông góc được gọi là *lực nâng*.

Nếu chuyển động thế bao quanh một vật chuyển động đều trong chất lỏng lý tưởng, thì chúng ta sẽ có **P** = const (vì **u** = const) và **F** = 0. Nói một cách khác, không có cả lực cản lẫn lực nâng, nghĩa là các áp lực mà chất lỏng tác động lên mặt của vật sẽ bù trừ lẫn nhau (kết quả này được gọi là *nghịch lý D'Alembert*). Nguồn gốc của "nghịch lý " này thấy được đặc biệt rõ ràng cho lực cản. Thực vậy, sự có mặt của lực này trong quá trình chuyển động đều của vật có nghĩa là, để duy trì chuyển động cần phải có một nguồn ở bên ngoài thường xuyên thực hiện một công, công này hoặc tiêu tán trong chất lỏng hoặc biến thành động năng của chất lỏng, kết quả là có một năng thông liên tục đi ra vô cùng ở trong chất lỏng chuyển động. Nhưng theo định nghĩa, không có một sự tiêu tán năng lượng nào ở trong chất lỏng lý tưởng và vận tốc của chất lỏng do vật làm cho chuyển động sẽ giảm rất nhanh với sự tăng của khoảng cách tính từ vật, đến mức cũng không thể có một năng thông nào đi ra vô cùng.

Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng, tất cả những lập luận trên chỉ có thể được xét cho chuyển động của một vật ở trong chất lỏng vô hạn. Chẳng hạn, nếu chất lỏng có một mặt tự do, thì một vật chuyển động đều song song với mặt này sẽ chịu một lực cản. Sự xuất hiện của lực này gọi là *lực cản sóng*, đó là vì ở trên mặt tự do của chất lỏng có hình thành

một hệ các sóng lan truyền trên mặt và liên tục mang theo năng lượng ra xa vô cùng.

Giả sử có một vật nào đó chịu tác dụng của ngoại lực **f** thực hiện một chuyển động dao động. Khi những điều kiện đã xét ở tiết trước được thực hiện thì chất lỏng bao quanh vật sẽ thực hiện một chuyển động thế và người ta có thể dùng các hệ thức đã thu được ở trên để thiết lập các phương trình chuyển động của vật. Lực **f** phải bằng đạo hàm toàn phần theo thời gian của xung lượng toàn phần của hệ. Xung lượng toàn phần này bằng tổng các xung lượng $M\mathbf{u}$ của vật (M là khối lượng của vật) và xung lượng **P** của chất lỏng

$$M\frac{d\mathbf{u}}{dt}+\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\mathbf{f}$$

Dựa vào (11-5), ta viết được

$$M\frac{du_i}{dt}+m_{ik}\frac{du_k}{dt}=f_i$$

hay còn có thể viết dưới dạng

$$\frac{du_k}{dt}\left(M\delta_{ik}+m_{ik}\right)=f_i \qquad (11\text{-}8)$$

Đó chính là phương trình chuyển động của vật nhúng trong chất lỏng lý tưởng.

Bây giờ theo một nghĩa nào đó , ta xét bài toán ngược lại. Giả sử dưới tác dụng của những nguyên nhân bên ngoài (đối với vật), chất lỏng thực hiện một chuyển động dao động. Do ảnh hưởng của dao động này, vật nhúng chìm trong chất lỏng cũng bắt đầu chuyển động [1]. Chúng ta tìm phương trình cho chuyển động đó.

Giả sử rằng vận tốc của chuyển động chất lỏng thay đổi ít trên những khoảng cách có bậc độ lớn của các kích thước dài của vật. Gọi **v** là vận tốc của chất lỏng ở nơi do vật chiếm nếu như hoàn toàn không có vật; nói một cách khác, **v** là vận tốc chuyển động cơ bản của chất lỏng. Theo giả thiết đã nêu, **v** có thể coi như không đổi trong toàn bộ thể tích do vật chiếm. Cũng như trước, ta ký hiệu **u** là vận tốc của vật.

[1] Chẳng hạn ta có thể xét chuyển động của một vật trong chất lỏng, trong đó có sóng âm lan truyền, với bước sóng lớn so với các kích thước của vật.

Lực tác động và làm cho vật chuyển động có thể được xác định như sau. Nếu vật hoàn toàn bị chất lỏng kéo đi (nghĩa là nếu $\mathbf{v} = \mathbf{u}$), thì lực tác dụng lên vật cũng chính là lực tác dụng lên chất lỏng ở trong thể tích của vật, nếu vật hoàn toàn không có mặt. Xung lượng của thể tích chất lỏng này bằng $\rho V_o \mathbf{v}$, do đó lực tác dụng lên thể tích đó bằng $\rho V_o(d\mathbf{v}/dt)$. Nhưng thực tế vật không hoàn toàn bị chất lỏng kéo theo, có xuất hiện chuyển động của vật đối với chất lỏng, kết quả là bản thân chất lỏng nhận thêm được một chuyển động phụ nào đó. Xung lượng của chất lỏng do chuyển động phụ đó bằng $m_{ik}(u_k - v_k)$, (còn biểu thức (11-5) bây giờ cần phải thay **u** bằng vận tốc $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ của vật đối với chất lỏng). Sự biến thiên của xung lượng này theo thời gian làm xuất hiện một phản lực phụ tác động lên vật và bằng $-m_{ik}\dfrac{d}{dt}(u_k - v_k)$. Như vậy, lực toàn phần tác dụng lên vật bằng

$$\rho V_o \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k)$$

Lực này cần được cân bằng với đạo hàm của xung lượng của vật theo thời gian. Như vậy, ta đi tới phương trình chuyển động:

$$\frac{d}{dt}Mu_i = \rho V_o \frac{dv_i}{dt} - m_{ik}\frac{d}{dt}(u_k - v_k)$$

Lấy tích phân hai vế theo thời gian, ta được

$$(M\delta_{ik} + m_{ik})u_k = (m_{ik} + \rho V_o \delta_{ik})v_k \qquad (11\text{-}9)$$

Chúng ta đặt hằng số tích phân bằng không, vì vận tốc **u** của vật trong chuyển động gây bởi chất lỏng phải triệt tiêu cùng với vận tốc **v** của chất lỏng. Nếu mật độ của vật bằng mật độ của chất lỏng ($M = \rho V_o$), thì đúng như ta cần chờ đợi, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

BÀI TẬP

1. Tìm phương trình chuyển động của quả cầu chuyển động dao động trong một trong chất lỏng lý tưởng, và phương trình chuyển động của quả cầu khi chất lỏng dao động làm cho nó chuyển động.

Giải. So sánh (11-1) với biểu thức của φ tìm được trong bài toán 2, §10 cho dòng chảy quanh một quả cầu, ta nhận thấy rằng

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}\frac{R^3}{2}$$

(R là bán kính quả cầu). Xung lượng toàn phần do quả cầu truyền cho chất lỏng, theo (11-6), bằng $\mathbf{P} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\mathbf{u}$, do đó tenxơ m_{ik} có dạng

$$m_{ik} = \frac{2\pi}{3}\rho R^3\delta_{ik}$$

Lực cản tác dụng lên quả cầu chuyển động bằng

$$F = -\frac{2\pi}{3}\rho R^3\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

và phương trình chuyển động của quả cầu dao động trong chất lỏng có dạng:

$$\frac{4\pi R^3}{3}\left(\rho_o + \frac{\rho}{2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}$$

(ρ_o là mật độ của chất làm quả cầu). Hệ số của $\mathbf{u}$ có thể được coi như một "*khối lượng hiệu dụng*" nào đó của quả cầu; nó gồm có khối lượng của chính quả cầu và khối lượng kết hợp, trong trường hợp đã cho khối lượng này bằng một nửa khối lượng chất lỏng bị quả cầu chiếm chỗ.

Nếu quả cầu chuyển động do tác dụng của chất lỏng, thì từ (11-9), ta tìm được biểu thức sau cho vận tốc của nó

$$\mathbf{u} = \frac{3\rho}{\rho + 2\rho_o}\mathbf{v}$$

Nếu mật độ quả cầu lớn hơn mật độ chất lỏng ($\rho_o > \rho$), thì $u < v$, nghĩa là quả cầu "chậm" so với chất lỏng; nhưng nếu $\rho_o < \rho$, thì quả cầu "nhanh" so với chất lỏng.

2. Biểu diễn theo vectơ **A** mômen các lực tác dụng lên một vật chuyển động trong chất lỏng.

Giải. Như đã biết từ cơ học, mômen **M** của các lực tác dụng lên một vật được xác định theo hàm Lagrange (trong trường hợp đã cho, theo năng lượng E) bằng hệ thức $\delta E = \mathbf{M}\delta\theta$, trong đó $\delta\theta$ là vectơ quay vô cùng nhỏ của vật, còn δE là độ biến thiên của E trong phép quay này. Thay cho việc quay vật một góc $\delta\theta$ (và tương ứng, cho các thành phần m_{ik} biến thiên), có thể cho chất lỏng quay một góc $-\delta\theta$ đối với vật và tương ứng, cho vận tốc $\mathbf{u}$ biến thiên. Khi quay, ta có $\delta\mathbf{u} = -[\delta\theta\mathbf{u}]$, do đó

$$\delta E = \mathbf{P}\delta\mathbf{u} = -\delta\theta[\mathbf{uP}]$$

Dựa vào biểu thức (11 - 6) của **P**, ta có được công thức cần tìm

$$\boldsymbol{M} = -[\mathbf{uP}] = 4\pi\rho[\mathbf{Au}]$$

§12. CÁC SÓNG HẤP DẪN

Mặt tự do của chất lỏng nằm cân bằng trong trọng trường là một mặt phẳng. Nếu do tác động bên ngoài nào đó, mặt chất lỏng ra khỏi trạng thái cân bằng của nó tại một nơi nào đó, thì trong chất lỏng sẽ xuất hiện chuyển động. Chuyển động này lan truyền trên toàn bộ mặt chất lỏng dưới dạng các sóng, gọi là *sóng hấp dẫn*, vì chúng được sinh ra dưới tác dụng của trọng trường. Các sóng hấp dẫn xuất hiện chủ yếu ở trên mặt chất lỏng, chúng kích động các lớp bên trong, nhưng càng vào sâu thì kích động càng yếu.

Ở đây, ta xét các sóng hấp dẫn, trong đó vận tốc của các hạt chuyển động rất nhỏ đến mức số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ có thể được bỏ qua so với $\partial\mathbf{v}/\partial t$ trong phương trình Euler. Dễ dàng thấy rằng, đó là điều kiện có ý nghĩa vật lý. Trong khoảng thời gian có bậc chu kỳ dao động τ của các hạt chất lỏng trong sóng, các hạt này đi được một khoảng cách vào bậc biên độ a của sóng. Do đó, vận tốc chuyển động của chúng bằng $v \sim a/\tau$. Vận tốc v thay đổi đáng kể trong những khoảng thời gian vào cỡ τ và trên những khoảng cách bậc λ dọc theo phương lan truyền của sóng (λ là bước sóng). Do đó, đạo hàm của vận tốc theo thời gian có bậc v/τ và các đạo hàm theo không gian có bậc v/λ. Như vậy, điều kiện $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \partial\mathbf{v}/\partial t$ tương đương với điều kiện

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a}{\tau}\right)^2 \ll \frac{a}{\tau}\frac{1}{\tau}$$

hay

$$a \ll \lambda \tag{12-1}$$

nghĩa là biên độ các dao động ở trong sóng phải nhỏ so với bước sóng. Ở §9 ta đã nhận thấy rằng, nếu số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ có thể bỏ qua trong phương trình chuyển động, thì chuyển động của chất lỏng là chuyển động thế. Nếu giả thiết rằng chất lỏng không nén được, như vậy ta sẽ dùng được các phương trình (10-6) và (10-7). Trong phương trình (10-7), bây giờ có thể bỏ qua được số hạng $v^2/2$ chứa bình phương của vận tốc; nếu đặt $f(t) = 0$ và đưa vào trong trọng trường số hạng ρgz, ta sẽ thu được:

$$p = -\rho gz - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{12-2}$$

Như thông thường, chọn trục z theo phương thẳng đứng hướng lên trên và chọn mặt phẳng cân bằng của chất lỏng là mặt phẳng x, y.

Ký hiệu ζ là toạ độ z của các điểm của mặt chất lỏng; ζ là hàm của các tọa độ x,y và thời gian t. Ở cân bằng $\zeta = 0$, do đó ζ là độ dịch chuyển thẳng đứng của mặt chất lỏng trong quá trình dao động của nó. Gọi p_o là áp suất không đổi tác dụng lên mặt của chất lỏng. Theo (12- 2) khi đó ta có ở trên mặt

$$p_o = -\rho g\zeta - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Có thể khử áp suất p_o không đổi bằng cách định nghĩa lại thế φ (bằng cách thêm vào nó đại lượng $p_o t/\rho$ không phụ thuộc vào tọa độ). Khi đó điều kiện ở trên mặt chất lỏng có dạng

$$g\zeta + \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{z=\zeta} = 0 \qquad (12-3)$$

Nói biên độ của các dao động ở trong sóng nhỏ, có nghĩa là độ dịch chuyển ζ nhỏ. Từ đó ta có thể coi rằng, trong cùng phép gần đúng, thành phần thẳng đứng của vận tốc chuyển động của các điểm của mặt trùng với đạo hàm của ζ theo thời gian: $v_z = \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}$. Nhưng $v_z = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$, do đó ta có

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{z=\zeta}$$

Vì các dao động nhỏ, nên trong điều kiện này, có thể lấy các giá trị của những dạo hàm tại điểm $z = 0$ thay cho điểm $z = \zeta$. Như vậy, cuối cùng ta thu được hệ phương trình xác định sự chuyển động ở trong sóng hấp dẫn:

$$\Delta \varphi = 0 \qquad (12-4)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0} = 0 \qquad (12-5)$$

Ta sẽ xét các sóng ở trên mặt chất lỏng và coi rằng mặt này là vô hạn. Ta còn giả thiết thêm là bước sóng nhỏ so với độ sâu của chất lỏng; khi đó có thể coi chất lỏng sâu vô hạn. Do đó ta sẽ không viết các điều kiện biên trên các mặt giới hạn bên và ở đáy của chất lỏng.

Ta xét một sóng hấp dẫn lan truyền theo trục x và sóng là đều dọc theo trục y; trong một sóng như thế tất cả các đại lượng đều không phụ thuộc vào tọa độ y. Ta sẽ tìm nghiệm, là một hàm tuần hoàn đơn giản của thời gian và tọa độ x:

$$\varphi = \cos(kx - \omega t) f(z)$$

trong đó ω là tần số xyclic (sẽ gọi đơn giản là tần số) của sóng; k là vectơ sóng; $\lambda = 2\pi/k$ là bước sóng. Thay biểu thức này vào phương trình $\Delta\varphi = 0$, ta thu được phương trình sau cho hàm $f(z)$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

Nghiệm của nó tắt khi đi sâu vào trong chất lỏng (nghĩa là khi $z \to -\infty$):

$$\varphi = A\, e^{kz} \cos(kx - \omega t) \qquad (12\text{-}6)$$

Còn phải thỏa mãn điều kiện biên (12-5). Thay (12-6) vào trong đó, ta tìm được mối liên hệ giữa tần số sóng và vectơ sóng (hay thường gọi là *định luật tán sắc* các sóng):

$$\omega^2 = kg \qquad (12\text{-}7)$$

Sự phân bố các vận tốc trong chất lỏng thu được bằng cách lấy đạo hàm thế theo các tọa độ

$$v_x = -A\, k e^{kz} \sin(kx - \omega t), \quad v_z = A\, k e^{kz} \cos(kx - \omega t) \qquad (12\text{-}8)$$

Ta nhận thấy rằng, vận tốc giảm theo hướng vào sâu chất lỏng theo định luật hàm mũ. Tại mỗi điểm đã cho của không gian (nghĩa là với x, z đã cho) vectơ vận tốc quay đều trên mặt phẳng x, z, với độ lớn không đổi.

Ta còn phải xác định quỹ đạo của các hạt chất lỏng ở trong sóng. Tạm thời ký hiệu x, z là các tọa độ của hạt chuyển động của chất lỏng (không phải các tọa độ của một điểm trong không gian), và x_0, z_0 là các giá trị của x, z cho vị trí cân bằng của hạt. Khi đó, ta có $v_x = dx/dt$, $v_z = dz/dt$, và trong vế thứ hai của (12-8), có thể viết một cách gần đúng x_0, z_0 thay cho x, z vì các dao động đều nhỏ. Khi đó lấy tích phân theo thời gian, ta thu được:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \cos(kx_0 - \omega t) \\ z - z_0 &= -A \frac{k}{\omega} e^{kz_0} \sin(kx_0 - \omega t) \end{aligned} \qquad (12\text{-}9)$$

Như vậy, các hạt chất lỏng vạch những vòng tròn quanh các điểm với những bán kính giảm theo hàm mũ khi đi sâu vào trong chất lỏng. Như sẽ chỉ rõ ở §67, vận tốc truyền sóng bằng $U = \partial\omega/\partial k$. Thay $\omega = \sqrt{kg}$, ta được vận tốc truyền sóng của các sóng hấp dẫn ở trên mặt vô hạn của chất lỏng sâu vô hạn bằng:

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad (12\text{-}10)$$

Nó tăng khi bước sóng tăng.

Các sóng hấp dẫn dài

Sau khi xét các sóng hấp dẫn có bước sóng ngắn so với độ sâu của chất lỏng, bây giờ ta dừng lại ở trường hợp giới hạn ngược lại của các sóng có bước sóng dài so với độ sâu của chất lỏng. Các sóng như thế được gọi là *sóng dài.*

Trước hết ta xét sự lan truyền của các sóng dài ở trong một kênh. Ta sẽ coi độ dài của kênh là vô hạn (hướng theo trục x). Tiết diện của kênh có thể có dạng tùy ý và có thể thay đổi theo độ dài của nó. Ta sẽ ký hiệu $S = S(x,t)$ là diện tích của tiết diện ngang của chất lỏng ở trong kênh. Độ sâu và độ rộng của nó được giả thiết là nhỏ so với bước sóng.

Ở đây ta xét các sóng dọc dài, trong đó chất lỏng chuyển động dọc theo kênh. Trong những sóng như thế thành phần v_x của vận tốc theo chiều dài của kênh lớn so với các thành phần v_y, v_z.

Để đơn giản, ta viết v thay cho v_x và bỏ qua những số hạng nhỏ. Khi đó, có thể viết thành phần x của phương trình Euler dưới dạng

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

và thành phần z dưới dạng

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$$

(bỏ qua những số hạng toàn phương đối với vận tốc, vì cũng như trước, biên độ của sóng được giả thiết là nhỏ). Nếu để ý rằng, ở trên mặt tự do ($z = \zeta$) phải có $p = p_o$, thì từ phương trình thứ hai ta thu được:

$$p = p_o + g\rho(\zeta - z)$$

Thay biểu thức này vào phương trình thứ nhất, ta được

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (12\text{-}11)$$

Phương trình thứ hai để xác định hai ẩn v và ζ có thể tìm được bằng phương pháp tương tự với việc tìm ra phương trình liên tục. Thực tế, nó là phương trình liên tục ứng dụng cho trường hợp đang xét. Ta xét thể tích của chất lỏng chứa giữa hai mặt phẳng tiết diện ngang của kênh và cách nhau một khoảng dx. Trong một đơn vị thời gian, thể tích chất lỏng đi vào một trong hai mặt phẳng kia bằng $(Sv)_x$, còn thể tích của chất lỏng đi ra khỏi mặt phẳng kia bằng $(Sv)_{x+dx}$. Do đó, thể tích chất lỏng chứa giữa hai mặt phẳng thay đổi một lượng bằng

$$(Sv)_{x+dx} - (Sv)_x = \frac{\partial(Sv)}{\partial x}dx$$

Nhưng vì chất lỏng không nén được, nên độ biến thiên chỉ là do mức chất lỏng thay đổi. Độ biến thiên của thể tích chất lỏng chứa giữa các mặt phẳng đang xét trong một đơn vị thời gian bằng:

$$\frac{\partial S}{\partial t}dx$$

Do đó, ta có thể viết:

$$\frac{\partial S}{\partial t}dx = -\frac{\partial(Sv)}{\partial x}dx$$

hay

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv)}{\partial x} = 0 \qquad (12\text{-}12)$$

Đó chính là phương trình liên tục cần tìm.

Gọi S_0 là diện tích của tiết diện ngang của chất lỏng ở trong kênh khi cân bằng. Khi đó $S = S_0 + S'$, S' là độ biến thiên của diện tích này do sự có mặt của sóng. Vì sự thay đổi mức chất lỏng là nhỏ ở trong sóng, nên ta có thể viết S' dưới dạng $b\zeta$, trong đó b là độ rộng của tiết diện kênh ở trên chính mặt chất lỏng trong kênh. Khi đó phương trình (12-12) có dạng

$$b\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(S_0 v)}{\partial x} = 0 \qquad (12\text{-}13)$$

Lấy đạo hàm (12-13) theo t và thay $\frac{\partial v}{\partial t}$ rút từ (12-11), ta thu được:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left(S_o \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0 \qquad (12\text{-}14)$$

Nếu tiết diện của kênh không đổi dọc theo toàn bộ chiều dài của nó, thì S_o = const, và ta thu được

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{g S_o}{b}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \qquad (12\text{-}15)$$

Phương trình có dạng như thế được gọi là phương trình sóng; như sẽ thấy ở §64 phương trình này tương ứng với sự truyền sóng của các sóng với vận tốc U không phụ thuộc vào tần số, vận tốc này bằng căn bậc hai của hệ số của $\partial^2\zeta/\partial x^2$. Như vậy, vận tốc truyền của các sóng hấp dẫn dài trong các kênh bằng

$$U = \sqrt{\frac{gS_o}{b}} \qquad (12\text{-}16)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có thể xét các sóng dài trong một bình chứa lớn, mà ta coi là vô hạn theo hai chiều (theo mặt phẳng x, y). Gọi h là độ sâu của chất lỏng trong bình. Trong ba thành phần của vận tốc, bây giờ thành phần nhỏ là v_z. Các phương trình Euler có dạng tương tự như (12-11):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \qquad (12\text{-}17)$$

Phương trình liên tục được rút ra tương tự như (12-12) và có dạng

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h v_y)}{\partial y} = 0$$

Ta viết độ sâu h dưới dạng $h = h_o + \zeta$, trong đó h_o là độ sâu cân bằng. Khi đó

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (h_o v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h_o v_y)}{\partial y} = 0 \qquad (12\text{-}18)$$

Giả sử đáy bình phẳng và nằm ngang (h_o = const), lấy đạo hàm (12-18) theo t và thay (12-17) vào, ta thu được

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g h_o\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (12\text{-}19)$$

Đây lại là một phương trình thuộc loại phương trình sóng (hai chiều); nó tương ứng với các sóng truyền với vận tốc

$$U = \sqrt{g h_o} \tag{12-20}$$

BÀI TẬP

1. Xác định vận tốc truyền các sóng hấp dẫn ở trên mặt chất lỏng vô hạn có độ sâu h.

Giải. Ở đáy chất lỏng, thành phần pháp tuyến của vận tốc phải bằng không, nghĩa là

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ với } z = -h$$

Từ điều kiện này, ta tìm được mối liên hệ giữa các hằng số A và B trong nghiệm tổng quát

$$\varphi = \cos(kx - \omega t)\,(Ae^{kz} + Be^{-kz})$$

Cuối cùng ta thu được

$$\varphi = A\cos(kx - \omega t)\,\mathrm{ch}\,k(z + h)$$

Từ điều kiện giới hạn (12 - 5), ta tìm được hệ thức giữa k và ω dưới dạng

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kh$$

Vận tốc truyền sóng bằng

$$U = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{k\,\mathrm{th}\,kh}}\left\{\mathrm{th}\,kh + \frac{kh}{\mathrm{ch}^2 kh}\right\}$$

Với $kh \gg 1$, chúng ta thu được kết quả (12 - 10), và với $kh \ll 1$, ta thu được kết quả (12 - 20).

2. Xác định liên hệ giữa tần số và bước sóng của các sóng hấp dẫn ở trên mặt phân giới của hai chất lỏng, chất lỏng trên được giới hạn ở phía trên, chất lỏng dưới được giới hạn ở phía dưới bởi các mặt phẳng nằm ngang cố định. Mật độ và độ sâu là ρ và h đối với chất lỏng dưới và là ρ', h' đối với chất lỏng trên (với $\rho > \rho'$).

Giải. Ta chọn mặt phẳng x,y là mặt phẳng phân giới của hai chất lỏng cân bằng và tìm nghiệm ở trong hai chất lỏng lần lượt dưới dạng

$$\varphi = A\,\mathrm{ch}\,k(z + h')\cos(kx - \omega t)$$

$$\varphi' = B\,\mathrm{ch}\,k(z - h')\cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

(sao cho các điều kiện biên ở phía trên và phía dưới được thỏa mãn, xem bài tập 1). Ở trên mặt phân giới áp suất phải liên tục; theo (12-2), điều đó dẫn đến điều kiện

$$\rho g \zeta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho' g \zeta + \rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

với $z = 0$, hay

$$\zeta = \frac{1}{g(\rho - \rho')}\left(\rho' \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) . \qquad (2)$$

Ngoài ra, các vận tốc v_z của hai chất lỏng phải bằng nhau ở trên mặt phân giới. Điều đó dẫn đến điều kiện (với $z = 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \qquad (3)$$

Tiếp thêm $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$, và nếu thay (2) vào (3) ta thu được:

$$g(\rho - \rho')\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (4)$$

Thay (1) vào (3) và (4) ta thu được hai phương trình tuyến tính thuần nhất cho A và B, từ điều kiện tương thích của chúng, ta tìm được:

$$\omega^2 = -\frac{kg(\rho - \rho')}{\rho \operatorname{cth} kh + \rho' \operatorname{cth} kh'}$$

Với $kh >> 1$, $kh' >> 1$ (hai chất lỏng đều rất sâu):

$$\omega^2 = kg\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'}$$

Với $kh << 1$, $kh' << 1$ (các sóng dài)

$$\omega^2 = k^2 \frac{g(\rho - \rho')hh'}{\rho h' + \rho' h}$$

Cuối cùng nếu $kh \geq 1$, $kh' << 1$

$$\omega^2 = k^2 g h' \frac{(\rho - \rho')}{\rho}.$$

3. Tìm liên hệ giữa tần số và bước sóng dài cho các sóng hấp dẫn lan truyền đồng thời ở trên mặt phân giới và ở mặt trên của hai lớp chất lỏng, chất lỏng dưới (mật độ ρ) sâu vô hạn, còn chất lỏng trên (mật độ ρ') có độ sâu h' và mặt trên tự do.

Giải. Chọn mặt phẳng x,y là mặt phẳng phân giới của hai chất lỏng cân bằng. Ta tìm nghiệm ở trong các chất lỏng dưới và chất lỏng trên dưới dạng

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t)\ ;\ \varphi' = [Be^{-kz} + Ce^{kz}]\cos(kx - \omega t). \qquad (1)$$

Ở trên mặt phân cách của hai chất lỏng (nghĩa là với $z = 0$, xem bài tập 2) ta có các điều kiện

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}\ ;\quad g(\rho - \rho')\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \rho' \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (2)$$

và trên mặt biên tự do trên (nghĩa là với $z = h'$)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

Khi thay (1) vào thì phương trình thứ nhất trong các phương trình (2) cho ta $A = C - B$ và từ hai điều kiện còn lại, ta sẽ được hai phương trình cho B và C; từ điều kiện tương thích ta tìm được một phương trình bậc hai cho ω^2 với các nghiệm là:

$$\omega^2 = kg\frac{(\rho-\rho')\left(1-e^{2kh'}\right)}{\rho+\rho'+(\rho-\rho')e^{-2kh'}}, \quad \omega^2 = kg$$

Khi h' tiến tới vô cùng các nghiệm này tương ứng với các sóng lan truyền độc lập ở trên mặt phân giới và ở trên mặt trên của chất lỏng.

4. Xác định các tần số riêng của các dao động (xem §69) của chất lỏng có độ sâu h chứa trong một bình chứa hình chữ nhật có độ rộng a và độ dài b.

Giải. Ta chọn các trục x và y là các cạnh bên của bình. Tìm nghiệm dưới dạng sóng đứng:

$$\varphi = \cos \omega t \operatorname{ch} k(z+h) f(x,y)$$

Ta tìm được cho f phương trình

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0$$

và cũng như ở bài tập 1, điều kiện ở trên mặt tự do dẫn đến hệ thức

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh$$

Ta lấy nghiệm của phương trình cho f dưới dạng

$$f = \cos px \cos qy, \quad p^2 + q^2 = k^2$$

Trên các thành bên của bình, các điều kiện sau phải được thỏa mãn:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ với } x = 0, a;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ với } y = 0, b.$$

Từ đó tìm được:

$$p = \frac{m\pi}{a}, \quad q = \frac{n\pi}{b}$$

trong đó m và n là các số nguyên. Do đó, các giá trị khả dĩ của k bằng

$$k^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right).$$

§13. CÁC SÓNG NỘI TRONG CHẤT LỎNG KHÔNG NÉN ĐƯỢC

Có một loại sóng hấp dẫn đặc thù có thể lan truyền trong chất lỏng không nén được. Nguồn gốc của chúng là do có sự không đồng chất của

chất lỏng gây bởi trọng trường: áp suất của nó (và cùng với nó cả entrôpi s) nhất thiết phải thay đổi theo độ cao; do đó mọi sự di chuyển của một phần bất kỳ nào đó của chất lỏng theo độ cao đều phá hủy sự cân bằng cơ học, từ đó dẫn đến xuất hiện một chuyển động dao động. Thực vậy, vì chuyển động là đoạn nhiệt, nên phần đó mang theo giá trị entrôpi s của nó sang một vị trí mới, giá trị này khác với giá trị của entrôpi cân bằng tại vị trí này.

Sau đây ta giả sử rằng, bước sóng của sóng truyền trong chất lỏng là nhỏ so với các khoảng cách, trên đó trọng trường gây ra một sự biến đổi đáng kể của mật độ[1]. Khi đó, ta giả sử rằng bản thân chất lỏng không nén được. Điều đó có nghĩa là, có thể bỏ qua sự biến thiên của mật độ của nó gây bởi sự biến thiên của áp suất ở trong sóng. Nhưng tuyệt nhiên không thể bỏ qua được sự dãn nở nhiệt, vì đó chính là nguyên nhân gây ra toàn bộ hiện tượng.

Ta viết hệ phương trình thuỷ động lực cho chuyển động đang xét. Ta phân biệt giá trị của những đại lượng ở trạng thái cân bằng cơ học bằng chỉ số 0 và dùng dấu phẩy để chỉ những độ lệch nhỏ so với các giá trị đó ở trong sóng. Khi đó phương trình bảo toàn entrôpi $s = s_0 + s'$ được viết với độ chính xác đến các đại lượng có độ bé bậc nhất dưới dạng

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s_0 = 0 \tag{13-1}$$

trong đó s_0, cũng như giá trị cân bằng của các đại lượng khác, nó là một hàm đã cho của toạ độ thẳng đứng z.

Tiếp theo, trong phương trình Euler ta lại bỏ qua số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ (vì các dao động nhỏ); nếu cũng coi rằng sự phân bố áp suất cân bằng được xác định bởi phương trình $\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, ta sẽ tìm được với cùng độ chính xác

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nabla p_0}{\rho_0^2}\rho'$$

[1] Gradiên mật độ liên hệ với gradiên áp suất bằng đẳng thức

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla \rho = c^2 \nabla \rho$$

trong đó c là vận tốc âm trong chất lỏng. Do đó, từ phương trình thủy tĩnh học $\nabla p = \rho \mathbf{g}$ ta có $\nabla \rho = (\rho/c^2)\mathbf{g}$. Từ đó thấy rằng, sự biến thiên chủ yếu của mật độ trong trọng trường xảy ra tại những khoảng cách $l \approx c^2/g$. Đối với không khí $l \approx 10$ km, đối với nước $l \approx 200$km.

Nhưng, như đã nói ở trên, vì sự biến thiên mật độ chỉ gây bởi sự biến thiên của entrôpi, mà không phải của áp suất, nên có thể viết:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_o}{\partial s_o}\right)_p s'$$

và tìm được phương trình Euler dưới dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_o}\left(\frac{\partial \rho_o}{\partial s_o}\right)_p s' - \nabla \frac{p'}{\rho_o} \tag{13-2}$$

trong đó ρ_0 có thể đưa vào dưới dấu gradiên, vì như đã nói ở trên, bao giờ cũng có thể bỏ qua sự biến thiên của mật độ cân bằng trên các khoảng cách có bậc bước sóng. Cũng vì lý do đó, có thể coi mật độ là không đổi cả trong phương trình liên tục. Phương trình này bây giờ trở thành

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \tag{13-3}$$

Ta sẽ tìm nghiệm của hệ các phương trình (13-1), (13-3) dưới dạng sóng phẳng:

$$\mathbf{v} = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

Tương tự, đối với s' và p'. Thay $\mathbf{v}$ vào phương trình liên tục (13-3), ta được

$$\mathbf{vk} = 0 \tag{13-4}$$

nghĩa là vận tốc của chất lỏng ở mọi nơi đều vuông góc với vectơ sóng (sóng ngang). Các phương trình (13-1) và (13-2) cho ta

$$i\omega s' = \mathbf{v}\nabla s_o; \quad -i\omega \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_o}\left(\frac{\partial \rho_o}{\partial s_o}\right)_p s'\mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_o} p'$$

Ứng dụng điều kiện $\mathbf{vk} = 0$ vào đẳng thức thứ hai trong các đẳng thức trên, ta được hệ thức sau

$$ik^2 p' = \left(\frac{\partial \rho_o}{\partial s_o}\right)_p s'(\mathbf{gk})$$

Sau đó nếu khử $\mathbf{v}$ và s' khỏi hai phương trình, ta thu được định luật tán sắc cần tìm – hệ thức giữa vectơ sóng và tần số sóng:

$$\omega^2 = \omega_o^2 \sin^2 0 \tag{13-5}$$

trong đó đã ký hiệu

$$\omega_a^2 = -\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dz} \tag{13-6}$$

Ở đây và dưới đây ta bỏ chỉ số 0 ở các giá trị cân bằng của các đại lượng nhiệt động lực, trục z hướng thẳng lên phía trên, còn θ là góc giữa trục z và hướng của vectơ $\mathbf{k}$. Điều kiện ổn định của sự phân bố cân bằng $s(z)$ (điều kiện không có đối lưu, xem §4) bảo đảm cho biểu thức (13-6) là dương.

Ta nhận thấy rằng, tần số chỉ phụ thuộc vào hướng của vectơ sóng, mà không phụ thuộc vào độ lớn của nó. Với $\theta = 0, \pi$ ta được $\omega = 0$; điều này có nghĩa là, các sóng thuộc loại đang xét với vectơ sóng hướng thẳng đứng không thể tồn tại.

Nếu chất lỏng không những cân bằng cơ học, mà còn cân bằng nhiệt động lực hoàn toàn, thì nhiệt độ của nó không đổi và ta có thể viết:

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = -\rho g\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T$$

Cuối cùng, nếu dùng những hệ thức nhiệt động lực đã biết

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

(trong đó c_p là nhiệt dung riêng của một đơn vị khối lượng chất lỏng), ta thu được:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{T}{c_p}\frac{g}{\rho}\left|\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right|} \tag{13-7}$$

Đặc biệt, đối với chất khí lý tưởng về mặt nhiệt động lực, công thức trên cho ta

$$\omega_a = \frac{g}{\sqrt{c_p T}} \tag{13-8}$$

Sự phụ thuộc của tần số vào hướng của vectơ sóng dẫn tới kết quả là, vận tốc truyền sóng $\mathbf{U} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ không trùng về hướng với $\mathbf{k}$. Nếu biểu diễn sự phụ thuộc $\omega(\mathbf{k})$ dưới dạng

$$\omega = \omega_a \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{k}\nu}{k}\right)^2}$$

(trong đó v là vectơ đơn vị theo hướng thẳng đứng lên trên) và tiến hành lấy vi phân, ta sẽ thu được

$$\mathbf{U} = -\frac{\omega_0^2}{\omega k}(\mathbf{nv})\big(\mathbf{v} - (\mathbf{nv})\mathbf{n}\big) \tag{13-9}$$

trong đó $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Vận tốc này không vuông góc với vectơ sóng $\mathbf{k}$, về độ lớn bằng

$$U = \frac{\omega_0}{k}\cos\theta$$

Hình chiếu của nó lên phương thẳng đứng bằng

$$\mathbf{Uv} = -\frac{\omega_0}{k}\cos\theta\sin\theta.$$

§14. SÓNG TRONG CHẤT LỎNG QUAY

Có một loại các sóng nội đặc thù khác có thể lan truyền trong chất lỏng không nén được quay đều như một toàn bộ. Nguồn gốc của chúng liên quan đến các lực Coriolis xuất hiện trong khi quay.

Ta sẽ khảo sát chất lỏng ở trong hệ tọa độ quay cùng với chất lỏng. Như đã biết, với một sự mô tả như thế cần phải đưa thêm vào trong các phương trình chuyển động cơ học các lực bổ sung – đó là lực ly tâm và lực Coriolis. Phù hợp với điều đó còn cần phải bổ sung thêm cả các lực như thế (tính cho một đơn vị khối lượng) vào vế phải của phương trình Euler. Lực ly tâm có thể được biểu diễn dưới dạng gradiên của $\nabla[\Omega\mathbf{r}]^2/2$, trong đó Ω là vectơ vận tốc góc quay của chất lỏng. Số hạng này có thể được hợp nhất với lực $-\nabla p/\rho$ bằng cách đưa vào áp suất hiệu dụng

$$P = p - \frac{\rho}{2}[\Omega\mathbf{r}]^2 \tag{14-1}$$

Còn lực Coriolis bằng $2[\mathbf{v}\Omega]$, nó chỉ xuất hiện khi chất lỏng chuyển động đối với hệ tọa độ quay ($\mathbf{v}$ là vận tốc trong hệ này). Đưa số hạng này vào vế trái của phương trình Euler, ta viết được phương trình đó dưới dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + 2[\Omega\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{14-2}$$

Phương trình liên tục giữ nguyên dạng như trước, đối với chất lỏng không nén được nó rút về dẳng thức $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

Ta lại coi biên độ sóng là nhỏ và bỏ qua số hạng toàn phương theo vận tốc trong phương trình (14-2). Phương trình này bây giờ có dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\,[\Omega \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p' \tag{14-3}$$

trong đó p' là phần biến thiên của áp suất ở trong sóng, còn ρ = const. Ta khử ngay được áp suất khi lấy rot cả hai vế của phương trình (14-3). Vế phải của phương trình bằng không, còn trong vế trái, nếu xét tính không nén được của chất lỏng ta có

$$\text{rot}\,[\Omega \mathbf{v}] = \Omega\,\text{div}\,\mathbf{v} - (\Omega\nabla)\mathbf{v} = -(\Omega\nabla)\mathbf{v}$$

Chọn hướng của Ω làm trục z, ta viết được phương trình mới thu được dưới dạng:

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\mathbf{v} = 2\Omega\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \tag{14-4}$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng sóng phẳng

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \tag{14-5}$$

thỏa mãn (do phương trình div $\mathbf{v} = 0$) điều kiện về tính ngang

$$\mathbf{kA} = 0 \tag{14-6}$$

Thay (14-5) vào phương trình (14-4), ta được

$$\omega\,[\mathbf{kv}] = 2i\Omega k_z \mathbf{v} \tag{14-7}$$

Định luật tán sắc các sóng thu được bằng cách khử $\mathbf{v}$ khỏi đẳng thức vectơ trên. Nhân vectơ cả hai vế đẳng thức với $\mathbf{k}$, ta viết lại đẳng thức đó dưới dạng

$$-\omega k^2 \mathbf{v} = 2i\Omega k_z\,[\mathbf{kv}]$$

So sánh hai đẳng thức với nhau, ta thu được sự phụ thuộc cần tìm của ω vào $\mathbf{k}$:

$$\omega = 2\Omega\,\frac{k_z}{k} = 2\Omega\cos\theta \tag{14-8}$$

trong đó θ là góc giữa $\mathbf{k}$ và Ω.

Nếu xét đến (14-4) đẳng thức (14-7) sẽ có dạng

$$[\mathbf{nv}] = i\mathbf{v}$$

trong đó $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Nếu biểu diễn độ phức của sóng bằng $\mathbf{A} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ với

các vectơ thực **a** và **b**, thì từ đó suy ra rằng [**nb**] = **a**, – các vectơ **a** và **b** (cả hai đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với vectơ **k**) vuông góc với nhau và bằng nhau về độ lớn. Nếu chọn chúng làm các trục x và y và tách phần thực và ảo trong (14-5) ta sẽ tìm được

$$v_x = a\cos(\omega t - \mathbf{kr}), \quad v_y = -a\sin(\omega t - \mathbf{kr})$$

Như vậy, sóng có tính phân cực tròn: tại mỗi điểm của không gian vectơ **v** quay theo thời gian, giữ nguyên độ lớn không đổi [1].

Vận tốc truyền sóng

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{2\Omega}{k}\left(\mathbf{v} - \mathbf{n}(\mathbf{nv})\right) \tag{14-9}$$

trong đó **v** là vectơ đơn vị theo hướng Ω; cũng như trong các sóng nội hấp dẫn, vận tốc này vuông góc với vectơ sóng. Giá trị tuyệt đối và hình chiếu của nó lên phương của Ω:

$$U = \frac{2\Omega}{k}\sin\theta, \quad \mathbf{Uv} = \frac{2\Omega}{k}\sin^2\theta = U\sin\theta$$

Các sóng khảo sát trên được gọi là *sóng quán tính*. Vì các lực Coriolis không thực hiện công lên chất lỏng chuyển động, nên năng lượng chứa trong các sóng đó hoàn toàn là động năng.

Dạng khác thường của các sóng đối xứng trục (không phẳng) quán tính có thể truyền dọc theo trục quay của chất lỏng – xem bài tập.

Để kết luận, ta có một nhận xét thêm liên quan đến chuyển động dừng trong chất lỏng quay, mà không liên quan đến sự truyền của các sóng trong chất lỏng đó.

Gọi l là thông số độ dài đặc trưng của một chuyển động như thế, và u là vận tốc đặc trưng. Về bậc độ lớn số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ trong phương trình (14-2) bằng u^2/l, còn số hạng $2[\Omega\mathbf{v}] \sim \Omega u$. Nếu $u/l\Omega \ll 1$ thì số hạng thứ nhất có thể được bỏ qua trước số hạng thứ hai và khi đó phương trình chuyển động dừng rút về

$$2[\Omega\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla P \tag{14-10}$$

[1] Ta nhớ rằng, ở đây nói đến chuyển động đối với hệ tọa độ quay! Đối với hệ đứng yên thì còn phải thêm vào chuyển động này cả chuyển động quay của cả chất lỏng coi như một toàn bộ.

hay $$2\Omega v_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad 2\Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

trong đó x, y là các tọa độ đêcác trong mặt phẳng vuông góc với trục quay. Từ đó thấy rằng P, và do đó cả v_x, v_y đều không phụ thuộc vào tọa độ dọc z. Tiếp thêm, nếu khử P khỏi hai phương trình đầu tiên, ta thu được

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

sau đó từ phương trình liên tục div $\mathbf{v} = 0$, ta suy ra rằng $\partial v_z/\partial z = 0$. Như vậy, chuyển động dừng (đối với hệ toạ độ quay) trong chất lỏng quay nhanh là biểu diễn chồng chất của hai chuyển động độc lập: dòng chảy phẳng trong mặt phẳng ngang và chuyển động trục, không phụ thuộc vào tọa độ z (*J. Proudman*, 1916).

BÀI TẬP

1. Xác định chuyển động trong sóng đối xứng trục lan truyền dọc theo trục của chất lỏng không nén được quay như một toàn bộ (W. Thomson, 1880).

Giải. Ta đưa vào các tọa độ trục r, φ, z với trục z dọc theo vectơ Ω. Trong sóng đối xứng trục, tất cả các đại lượng đều không phụ thuộc vào biến góc φ. Còn sự phụ thuộc vào thời gian và tọa độ z được cho bởi nhân tử $\exp\{i(kz - \omega t)\}$. Khai triển phương trình (14-3) thành các thành phần, ta thu được

$$-i\omega v_r - 2\Omega v_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial r} \tag{1}$$

$$-i\omega v_\varphi - 2\Omega v_r = 0, \quad -i\omega v_z = -\frac{ik}{\rho}p' \tag{2}$$

Ở đây cần kết hợp với phương trình liên tục

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + ikv_z = 0 \tag{3}$$

Biểu diễn v_φ và p' theo v_r từ (2) và (3) và thay vào (1), ta thu được phương trình

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} + \left[\frac{4\Omega^2k^2}{\omega^2} - k^2 - \frac{1}{r^2}\right]F = 0 \tag{4}$$

cho hàm $F(r)$, xác định sự phụ thuộc xuyên tâm của vận tốc góc v_r:

$$v_r = F(r)e^{i(\omega t - kz)}$$

Nghiệm của phương trình này, bằng không với $r = 0$, có dạng

$$F = \text{const} J_1\left(kr\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1}\right) \tag{5}$$

trong đó J_1 là hàm Bessel bậc 1.

Toàn bộ bức tranh chuyển động trong sóng tách thành các miền giới hạn bởi các mặt trụ đồng trục với các bán kính được xác định bằng các đẳng thức

$$kr_n\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_n$$

trong đó x_1, x_2, ... là các điểm không liên tiếp của hàm $J_1(x)$. Trên các mặt này $v_r = 0$; nói một cách khác, chất lỏng không bao giờ cắt chúng.

Để ý rằng, đối với các sóng đang xét trong chất lỏng vô hạn, tần số ω không phụ thuộc vào k. Tuy nhiên, các giá trị khả dĩ của tần số bị giới hạn bởi điều kiện $\omega < 2\Omega$; trong trường hợp ngược lại phương trình (4) không có nghiệm thỏa mãn các điều kiện cần của tính hữu hạn.

Nhưng nếu chất lỏng quay giới hạn bởi thành trụ (bán kính R), thì phải xét đến điều kiện $v_r = 0$ ở trên thành. Từ đó xuất hiện hệ thức

$$ka\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1} = x_n.$$

thiết lập mối liên hệ giữa ω và k cho sóng với giá trị đã cho của n (nghĩa là với số các miền đồng trục trong nó).

2. Tìm phương trình mô tả nhiễu động nhỏ tùy ý của áp suất trong chất lỏng quay.

Giải. Phương trình (14-3) viết trong các thành phần có dạng

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\Omega v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + 2\Omega v_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} \tag{1}$$

Lấy vi phân ba phương trình này lần lượt theo x, y, z và cộng chúng lại, có xét đến phương trình div $\mathbf{v} = 0$, ta thu được:

$$\frac{1}{\rho}\Delta p' = 2\Omega\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Lấy vi phân phương trình trên theo t, có xét đến phương trình (1), ta được:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\Delta p' = 4\Omega^2\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Lấy tiếp vi phân một lần nữa theo t, ta được phương trình cuối cùng

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta p' + 4\Omega^2\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

Đối với các nhiễu động tuần hoàn với tần số ω, phương trình này dẫn tới

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right)\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} = 0 \qquad (3)$$

Dĩ nhiên, đối với sóng có dạng (14-5), từ đây thu được hệ số tán sắc đã biết (14-8); khi đó $\omega < 2\Omega$ và hệ số của $\partial^2 p'/\partial z^2$ trong phương trình (3) là âm. Các nhiễu động từ một nguồn điểm lan truyền dọc theo các đường sinh của mặt nón có trục dọc theo Ω và góc mở bằng 2θ, trong đó $\sin\theta = \omega/2\Omega$.

Với $\omega > 2\Omega$ hệ số của $\partial^2 p'/\partial z^2$ trong phương trình (3) là dương, và bằng cách biến thiên tỷ lệ xích dọc theo trục z nó dẫn tới phương trình Laplace. Ảnh hưởng của nguồn điểm các nhiễu động trong trường hợp này trải rộng trong toàn bộ thể tích chất lỏng, và giảm khi đi xa nguồn theo định luật luỹ thừa.

Chương II

CHẤT LỎNG NHỚT

§15. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG NHỚT

Bây giờ ta chuyển sang nghiên cứu ảnh hưởng của các quá trình tiêu tán năng lượng, xảy ra khi chất lỏng chuyển động, lên chính chuyển động của chất lỏng. Các quá trình này là kết quả của tính không thuận nghịch nhiệt động lực của chuyển động. Tính không thuận nghịch này luôn luôn xảy ra ở một mức độ nào đó và được gây bởi ma sát nội (tính nhớt) và tính dẫn nhiệt.

Để thu được những phương trình mô tả chuyển động của chất lỏng nhớt, cần phải đưa thêm vào các số hạng bổ sung ở trong phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng. Còn đối với phương trình liên tục, thì như đã thấy rõ từ khi thiết lập nó, phương trình này đúng ở mức độ như nhau đối với bất kỳ chất lỏng nào, nhớt hay không nhớt. Nhưng phương trình Euler đòi hỏi phải có sự thay đổi.

Ta đã thấy từ §7 rằng, phương trình Euler có thể được viết dưới dạng

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}.$$

Π_{ik} là tenxơ mật độ dòng xung lượng. Dòng xung lượng xác định bởi công thức (7-2) biểu diễn sự chuyển xung lượng hoàn toàn thuận nghịch, có liên hệ đơn giản với sự dịch chuyển cơ học của các phần khác nhau của chất lỏng từ nơi này sang nơi khác và có liên hệ với các áp lực tác dụng trong chất lỏng. Tính nhớt (ma sát nội) của chất lỏng còn được biểu hiện trong sự có mặt của quá trình chuyển phụ không thuận nghịch của xung lượng từ các vùng có vận tốc lớn hơn sang vùng có vận tốc nhỏ hơn.

Do đó, phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt có thể thu được

bằng cách thêm vào dòng xung lượng "lý tưởng" (7-2) số hạng phụ σ'_{ik} đặc trưng cho sự chuyển "nhớt" không thuận nghịch của xung lượng ở trong chất lỏng. Như vậy, ta viết được tenxơ mật độ dòng xung lượng trong chất lỏng nhớt dưới dạng

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k \qquad (15 - 1)$$

Tenxơ

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \qquad (15 - 2)$$

được gọi là *tenxơ ứng suất*, và σ'_{ik} là *tenxơ ứng suất "nhớt"*. σ_{ik} xác định phần của dòng xung lượng không liên quan đến sự chuyển trực tiếp xung lượng cùng với khối lượng chất lỏng chuyển động [1].

Có thể thiết lập được dạng tổng quát của σ'_{ik}, xuất phát từ những nhận định sau. Các quá trình ma sát nội trong chất lỏng chỉ xuất hiện trong những trường hợp khi các phần khác nhau của chất lỏng chuyển động với vận tốc khác nhau, do đó có chuyển động tương đối giữa các phần chất lỏng đối với nhau. Vì thế σ'_{ik} phải phụ thuộc vào các đạo hàm của vận tốc theo các tọa độ. Nếu các gradiên vận tốc không quá lớn, ta có thể coi rằng, sự chuyển xung lượng gây bởi độ nhớt chỉ phụ thuộc vào các đạo hàm cấp một của vận tốc. Trong cùng phép gần đúng này, chính sự phụ thuộc của σ'_{ik} vào các đạo hàm $\partial v_i/\partial x_k$ có thể được coi là tuyến tính. Các số hạng độc lập với $\partial v_i/\partial x_k$ phải không có mặt trong biểu thức của σ'_{ik}, vì các σ'_{ik} phải bằng không khi $\mathbf{v} = \text{const}$. Tiếp thêm, ta nhận thấy rằng các σ'_{ik} cũng phải bằng không cả khi chất lỏng coi như một toàn bộ thực hiện một chuyển động quay đều, vì rõ ràng rằng trong một chuyển động như thế không thể có ma sát nội trong chất lỏng. Trong chuyển động quay đều với vận tốc góc Ω, vận tốc $\mathbf{v}$ bằng tích vectơ $[\Omega\mathbf{r}]$. Các tổng

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$$

đều là những tổ hợp tuyến tính của các đạo hàm $\partial v_i/\partial x_k$, chúng bằng không khi $\mathbf{v} = [\Omega\mathbf{r}]$.

[1] Dưới đây ta sẽ thấy rằng, σ'_{ik} chứa số hạng tỷ lệ với σ_{ik}, nghĩa là một số hạng có cùng dạng với $p\delta_{ik}$. Do đó, nói một cách chặt chẽ, sau một sự thay đổi dạng của tenxơ dòng xung lượng như thế, ta cần xác định xem áp suất p được hiểu như thế nào. Xem vấn đề này ở cuối §49.

Vì thế, σ'_{ik} phải chứa đúng các tổ hợp đối xứng đó của đạo hàm $\partial v_l/\partial x_k$.

Dạng tổng quát nhất của tenxơ hạng hai thỏa mãn các điều kiện đó là

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \qquad (15\text{-}3)$$

với các hệ số η và ζ không phụ thuộc vào vận tốc; trong điều khẳng định này có sử dụng tính đẳng hướng của chất lỏng. Do tính đẳng hướng nên các tính chất của nó tự bản thân có thể được đặc trưng chỉ bằng những đại lượng vô hướng (trong trường hợp đang xét – là các đại lượng η và ζ).Các số hạng trong (15-3) được tập hợp sao cho biểu thức trong các móc đơn bằng không khi rút gọn (nghĩa là khi lấy tổng các thành phần với $i = k$). Các đại lượng η và ζ được gọi là *các hệ số nhớt*. Đại lượng ζ thường được gọi là *hệ số nhớt thứ hai*. Như sẽ thấy ở §16, 49, cả hai đại lượng đều dương:

$$\eta > 0, \zeta > 0 \qquad (15\text{-}4)$$

Bây giờ các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt có thể thu được bằng cách thêm trực tiếp biểu thức $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$ vào vế thứ hai của phương trình Euler

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Như vậy, ta thu được:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \qquad (15\text{-}5)$$

Đó là dạng tổng quát nhất của các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt. Các đại lượng η và ζ nói chung là các hàm của áp suất và nhiệt độ. Trong trường hợp tổng quát, p, T và do đó cả η, ζ đều không phải là những hằng số ở trong toàn bộ chất lỏng, do đó η và ζ không thể đưa được ra ngoài dấu đạo hàm.

Tuy nhiên, trong phần lớn các trường hợp, các hệ số nhớt không thay đổi đáng kể trong chất lỏng, do đó có thể được coi như không đổi. Khi đó, các phương trình (15 - 5) có thể được biểu diễn dưới dạng vectơ:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\text{grad}\, p + \eta\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\text{grad div}\,\mathbf{v} \qquad (15\text{-}6)$$

Phương trình này được gọi là phương trình Navier - Stokes.

Nếu chất lỏng được coi là không nén được, thì phương trình trên sẽ đơn giản đi nhiều. Khi đó, div $\mathbf{v} = 0$ và số hạng cuối ở trong vế phải của (15-6) bằng không. Khi khảo sát chất lỏng nhớt, thực tế bao giờ ta cũng có thể coi nó là không nén được và như vậy sẽ sử dụng phương trình chuyển động dưới dạng [1].

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta \mathbf{v} \qquad (15\text{-}7)$$

Tenxơ ứng suất ở trong chất lỏng không nén được có dạng đơn giản:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \qquad (15\text{-}8)$$

Ta nhận thấy rằng, trong chất lỏng không nén được tính nhớt được mô tả chỉ bởi một hệ số. Vì thực tế, chất lỏng thường có thể được coi là không nén được và chính hệ số nhớt η này thường giữ một vai trò quan trọng. Tỷ số

$$\nu = \eta / \rho \qquad (15\text{-}9)$$

được gọi là *độ nhớt động* (còn bản thân η được gọi là *độ nhớt động lực*). Dưới đây, ta nêu những giá trị của η và ν đối với một số chất lỏng và khí (ở 20°C) trong đơn vị tuyệt đối:

	η (*g/cm.s*)	ν (cm^2/s)
Nước	0,010	0,010
Không khí	$1{,}8.10^{-4}$	0,150
Rượu	0,018	0,022
Glyxêrin	8,5	6,8
Thủy ngân	0,0156	0,0012

Nhớ rằng, độ nhớt động lực của các chất khí tại một nhiệt độ đã cho nào đó không phụ thuộc vào áp suất. Nhưng độ nhớt động tỷ lệ nghịch với áp suất.

[1] Phương trình (15-7) lần đầu tiên được phát biểu trên cơ sở các quan niệm biểu tượng của Navier (*C.L. Navier*, 1827).Việc rút ra các phương trình (15- 6,7) (không có số hạng với ζ), gần với phương trình hiện đại được cho bởi *Stokes* (*G.G. Stokes*, 1845).

Áp suất có thể được khử khỏi phương trình (15-7), theo cách như đã làm trước đây đối với phương trình Euler. Lấy rot cả hai vế của phương trình (15-7), ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}[\mathbf{v}\ \text{rot}\ \mathbf{v}] + \nu\Delta\ \text{rot}\ \mathbf{v}$$

(so sánh với phương trình (2-11) cho chất lỏng lý tưởng). Vì ở đây nói đến chất lỏng không nén được, nên có thể cho phương trình này một dạng khác, bằng cách khai triển số hạng thứ nhất ở vế phải theo quy tắc giải tích vectơ, có xét đến đẳng thức div $\mathbf{v} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\text{rot } \mathbf{v} = (\mathbf{v}\nabla)\text{rot } \mathbf{v} - (\text{rot } \mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \nu\Delta\ \text{rot}\ \mathbf{v} \qquad (15\text{-}10)$$

Theo sự phân bố đã biết của vận tốc, sự phân bố của áp suất trong chất lỏng có thể tìm được bằng cách giải phương trình kiểu phương trình Poisson:

$$\Delta p = -\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\rho\frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_k \partial x_i} \qquad (15\text{-}11)$$

Phương trình trên thu được nếu lấy div phương trình (15-7).

Cũng nêu ở đây phương trình mà hàm dòng $\psi(x, y)$ thỏa mãn trong dòng chảy hai chiều của chất lỏng không nén được. Phương trình này thu được bằng cách thay (10-9) vào phương trình (15-10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \nu\Delta\Delta\psi = 0 \qquad (15\text{-}12)$$

Còn cần phải viết điều kiện biên cho các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt. Giữa mặt của vật rắn và mọi chất lỏng nhớt bao giờ cũng có những lực liên kết phân tử, dẫn đến kết quả là, lớp chất lỏng kề sát với mặt vật rắn hoàn toàn được giữ tại đó, như thể nó "dính" vào mặt. Do đó, điều kiện biên cho các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt đòi hỏi vận tốc chất lỏng ở trên các mặt vật rắn cố định phải bằng không:

$$\mathbf{v} = 0 \qquad (15\text{-}13)$$

Cần nhấn mạnh rằng, ở đây đòi hỏi cả thành phần pháp tuyến và thành phần tiếp tuyến của vận tốc phải bằng không, trong khi đó các điều kiện

biên cho các phương trình chất lỏng lý tưởng chỉ đòi hỏi v_n bằng không [1].

Trong trường hợp tổng quát của mặt chuyển động, vận tốc **v** phải bằng vận tốc của mặt này.

Dễ dàng viết được biểu thức cho lực tác dụng lên mặt vật rắn tiếp xúc với chất lỏng. Lực tác dụng lên một phần tử mặt nào đó chính là dòng xung lượng qua phần tử đó. Dòng xung lượng qua phần tử mặt $d\mathbf{f}$ bằng

$$\Pi_{ik}\, df_k = (\rho v_i v_k - \sigma_{ik})\, df_k$$

Nếu viết df_k dưới dạng $df_k = n_k\, df$, trong đó **n** là vectơ đơn vị của pháp tuyến với mặt và nhớ rằng **v** = 0 ở trên mặt vật rắn [2], thì ta sẽ tìm được lực **P** tác dụng lên một đơn vị diện tích của mặt có dạng sau

$$P_i = -\sigma_{ik} n_k = p n_i - \sigma'_{ik} n_k \qquad (15\text{-}14)$$

Số hạng thứ nhất là áp suất thông thường của chất lỏng, còn số hạng thứ hai biểu diễn lực ma sát gây bởi độ nhớt tác dụng lên mặt. Ta nhấn mạnh rằng ở trong (15-14), **n** là vectơ đơn vị pháp tuyến với mặt, ở phía ngoài đối với mặt chất lỏng, nghĩa là ở phía trong đối với mặt vật rắn.

Nếu có mặt phân giới ngăn hai chất lỏng (hay chất lỏng và khí) không trộn lẫn vào nhau được, thì các điều kiện trên mặt này đòi hỏi các vận tốc của cả hai chất lỏng phải bằng nhau và các lực, mà hai chất lỏng tác dụng lên nhau, phải có cùng độ lớn nhưng ngược chiều nhau. Điều kiện thứ hai trong các điều kiện đó đòi hỏi

$$n_k^{(1)} \sigma_{ik}^{(1)} + n_k^{(2)} \sigma_{ik}^{(2)} = 0$$

trong đó các chỉ số 1 và 2 ký hiệu cho hai chất lỏng. Các vectơ pháp tuyến $\mathbf{n}^{(1)}$ và $\mathbf{n}^{(2)}$ ngược chiều nhau, nghĩa là $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)} \equiv \mathbf{n}$, do đó, có thể viết:

$$n_i \sigma_{ik}^{(1)} = n_i \sigma_{ik}^{(2)} \qquad (15\text{-}15)$$

Trên mặt tự do của chất lỏng, điều kiện sau phải được thực hiện

[1] Ta nhận thấy rằng, các nghiệm của phương trình Euler không thể thỏa mãn điều kiên biên không cần thiết đòi hỏi vận tốc tiếp tuyến bằng không (so với trường hợp chất lỏng lý tưởng).Về mặt toán học, đó là do bậc của phương trình này (bậc một) theo các đạo hàm tọa độ thấp hơn phương trình Navier - Stokes (bậc hai).

[2] Để xác định các lực tác dụng lên mặt, cần phải xét phương trình đã cho ở trong hệ quy chiếu, trong đó phần tử đứng yên. Lực chỉ bằng dòng xung lượng khi mặt đứng yên.

$$\sigma_{ik}n_k \equiv \sigma'_{ik}n_k - pn_i = 0 \tag{15-16}$$

Các phương trình chuyển động trong tọa độ cong

Để tiện cho việc tra cứu, dưới đây, ta sẽ nêu những phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt không nén được thường dùng trong các tọa độ cong.

Trong tọa độ trụ r, φ, z, các thành phần của tenxơ ứng suất có dạng sau:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, && \sigma_{r\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right), && \sigma_{\varphi z} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right)\\
&\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}, && \sigma_{zr} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{15-17}$$

Ba thành phần của phương trình Navier - Stokes có dạng:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right)\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta v_z
\end{aligned} \tag{15-18}$$

trong đó các toán tử $(\mathbf{v}\nabla)$ và Δ được xác định bằng các công thức

$$(\mathbf{v}\nabla)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Phương trình liên tục:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{15-19}$$

Trong các tọa độ cầu r, φ, θ, tenxơ ứng suất có dạng

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{cotg}\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right), \qquad (15\text{-}20)$$

$$\sigma_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{v_\varphi \operatorname{cotg}\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi r} = \eta\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r}\right)$$

Các phương trình Navier - Stokes:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{cotg}\theta}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left[\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right], \qquad (15\text{-}21)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{cotg}\theta}{r} =$$

$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left[\Delta v_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right],$$

Thêm vào đó

$$(\mathbf{v}\nabla)f = v_r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\ \theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

Phương trình liên tục:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \qquad (15\text{-}22)$$

§16. SỰ TIÊU TÁN NĂNG LƯỢNG TRONG CHẤT LỎNG KHÔNG NÉN ĐƯỢC

Sự có mặt của tính nhớt gây ra sự tiêu tán năng lượng, năng lượng này cuối cùng chuyển thành nhiệt. Tính năng lượng tiêu tán đặc biệt đơn giản đối với chất lỏng không nén được.

Động năng toàn phần của chất lỏng không nén được bằng:

$$E_d = \frac{\rho}{2}\int v^2 dV$$

Ta tính đạo hàm của năng lượng theo thời gian. Muốn vậy, ta viết:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

và thay đạo hàm $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ bằng biểu thức của nó theo phương trình Navier - Stokes :

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$$

Kết quả ta dược:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla p + v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k} = -\rho(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) + \mathrm{div}(\mathbf{v}\sigma') - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$$

Ở đây $(\mathbf{v}\sigma')$ ký hiệu vectơ có các thành phần $v_i\sigma'_{ik}$. Vì trong chất lỏng không nén được, div $\mathbf{v} = 0$, nên chúng ta có thể viết số hạng thứ nhất của vế phải dưới dạng div:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho v^2}{2} = -\mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) - (\mathbf{v}\sigma')\right] - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \qquad (16\text{-}1)$$

Biểu thức dưới dấu div chính là mật độ của năng thông trong chất lỏng. Số hạng thứ nhất trong dấu ngoặc vuông là năng thông liên quan đến sự chuyển tải khối lượng chất lỏng khi chuyển động, nó trùng với năng

thông trong chất lỏng lý tưởng (xem 10-5). Còn số hạng thứ hai ($v\sigma'$) là năng thông liên quan đến các quá trình ma sát nội. Thực vậy, sự có mặt của tính nhớt gây ra dòng xung lượng σ'_{ik}; còn sự chuyển tải xung lượng bao giờ cũng liên quan đến sự chuyển năng lượng, và năng thông rõ ràng bằng tích của dòng xung lượng với vận tốc.

Nếu lấy tích phân (16 - 1) theo thể tích V nào đó, ta sẽ được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\rho v^2}{2}dV = \oint\left[\rho \mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)-(\mathbf{v}\sigma')\right]d\mathbf{f} - \int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV \qquad (16\text{-}2)$$

Số hạng thứ nhất của vế thứ hai xác định độ biến thiên động năng của chất lỏng trong thể tích V do có năng thông đi qua mặt của thể tích đó. Số hạng thứ hai (lấy ngược dấu) biểu diễn độ giảm động năng trong một đơn vị thời gian gây bởi sự tiêu tán.

Nếu mở rộng việc lấy tích phân ra toàn bộ thể tích chất lỏng, thì tích phân lấy theo mặt biến mất (vận tốc bằng không tại vô cùng [1]), và ta thu được năng lượng tiêu tán trong một đơn vị thời gian trong toàn bộ thể tích chất lỏng dưới dạng

$$\dot{E}_d = -\int\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}dV = -\frac{1}{2}\int\sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)dV$$

(đẳng thức trên được suy từ tính đối xứng của tenxơ σ'_{ik}). Trong chất lỏng không nén được, tenxơ σ'_{ik} được xác định bởi biểu thức (15-8). Như vậy, ta tìm được công thức cuối cùng sau đây cho sự tiêu tán năng lượng trong chất lỏng không nén được:

$$\dot{E}_d = -\frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV \qquad (16\text{-}3)$$

Sự tiêu tán dẫn đến sự giảm cơ năng, nghĩa là phải có $\dot{E}_d < 0$. Mặt

[1] Ta xét chuyển động của chất lỏng ở trong hệ tọa độ, trong đó chất lỏng đứng yên tại vô cùng.

Ở đây và trong những nơi tương tự, để xác định, ta sẽ nói đến thể tích vô hạn của chất lỏng, điều này tuyệt nhiên không làm hạn chế tính tổng quát. Như vậy, đối với chất lỏng chứa trong một thể tích giới hạn bởi thành rắn, tích phân lấy theo mặt của thể tích đó vẫn cứ bằng không do điều kiện đòi hỏi vận tốc bằng không ở trên thành.

khác, tích phân ở trong (16-3) luôn luôn dương. Do đó có thể kết luận rằng, hệ số nhớt η dương.

BÀI TẬP

Đối với chuyển động thế, hãy biến đổi tích phân (16-3) thành tích phân lấy theo mặt bao miền chuyển động.

Giải. Đặt $\partial v_i / \partial x_k = \partial v_k / \partial x_i$ và lấy tích phân một lần bằng phương pháp phân đoạn, ta thu được:

$$\dot{E}_d = -2\eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 dV = -2\eta \int v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} df_k$$

hay

$$\dot{E}_d = -\eta \int \nabla v^2 d\mathbf{f} .$$

§17. DÒNG CHẢY TRONG ỐNG

Ta xét một số trường hợp đơn giản nhất về chuyển động của chất lỏng nhớt không nén được.

Giả sử chất lỏng được chứa giữa hai mặt phẳng song song chuyển động đối với nhau với vận tốc không đổi u. Ta chọn một trong hai mặt phẳng làm mặt phẳng x, z và hướng trục x theo hướng vận tốc **u**. Rõ rằng, tất cả các đại lượng đều chỉ phụ thuộc vào tọa độ y, còn tại mọi nơi vận tốc chất lỏng đều dương theo trục x. Từ (15-7), ta rút ra được cho chuyển động dừng:

$$\frac{dp}{dy} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

(Phương trình liên tục được đồng nhất thỏa mãn). Từ đó p = const, $v = ay + b$. Với $y = 0$ và $y = h$ (y là khoảng cách giữa các mặt phẳng), lần lượt phải có $v = 0$ và $v = u$. Từ đó, ta được:

$$v = \frac{y}{h} u \tag{17-1}$$

Như vậy, sự phân bố vận tốc trong chất lỏng là bậc nhất. Vận tốc trung bình của chất lỏng được xác định bởi

$$\bar{v} = \frac{1}{h}\int_0^h v dy = \frac{u}{2} \qquad (17\text{-}2)$$

Từ (15-4), ta tìm được thành phần của lực tác dụng lên mặt phẳng, đúng như cần phải có, đơn giản bằng p, còn thành phần tiếp tuyến của lực ma sát (trên mặt phẳng $y = 0$) bằng

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{dv}{dy} = \frac{\eta u}{h} \qquad (17\text{-}3)$$

(trong mặt phẳng $y = h$, lực đó có dấu ngược lại).

Tiếp theo, ta xét dòng chảy dừng của chất lỏng giữa hai mặt phẳng song song cố định, khi có gradiên áp suất. Ta chọn các tọa độ như trong trường hợp trước; trục z hướng theo chiều chuyển động của chất lỏng. Các phương trình Navier - Stokes cho ta (hiển nhiên, vận tốc chỉ phụ thuộc tọa độ y) :

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Phương trình thứ hai chứng tỏ rằng áp suất không phụ thuộc vào y, nghĩa là nó không đổi theo bề dầy của lớp chất lỏng giữa các mặt phẳng. Khi đó, trong phương trình thứ nhất của vế phải hàm số chỉ phụ thuộc x, còn ở vế trái - chỉ phụ thuộc y. Một phương trình như thế chỉ có thể được thực hiện khi cả hai vế đều là những đại lượng không đổi. Như vậy

$$\frac{dp}{dx} = \text{const}$$

nghĩa là áp suất là một hàm bậc nhất của tọa độ x theo chiều dòng chảy. Bây giờ, đối với vận tốc ta có

$$v = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2 + ax + b$$

Các hằng số a và b được xác định từ các điều kiện biên $v = 0$ với $y = 0$ và $y = h$. Kết quả ta thu được:

$$v = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y(y - h) \qquad (17\text{-}4)$$

Như vậy, vận tốc thay đổi dọc theo bề dầy của lớp chất lỏng theo định luật parabôlic, đạt giá trị cực đại ở giữa lớp. Giá trị trung bình của vận tốc theo bề dày của lớp chất lỏng bằng

$$\bar{v} = -\frac{h^2}{12\eta}\frac{dp}{dx} \tag{17-5}$$

Lực ma sát tác dụng lên thành cố định:

$$\sigma_{xy} = \eta\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx} \tag{17-6}$$

Cuối cùng, ta xét dòng chảy dừng của chất lỏng trong ống có tiết diện tùy ý (tiết diện như nhau dọc theo toàn bộ chiều dài). Trục x hướng theo chiều dài của ống. Hiển nhiên, vận tốc v của chất lỏng tại mọi nơi đều hướng theo trục x và chỉ là hàm của y và z. Phương trình liên tục được đồng nhất thỏa mãn, còn những thành phần theo trục y và z của phương trình Navier - Stokes lại cho ta $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$, nghĩa là áp suất không đổi trên tiết diện của ống dẫn. Thành phần theo trục x của phương trình (15-7) cho ta:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} \tag{17-7}$$

Từ đó ta lại kết luận rằng dp/dx = const; do đó gradiên áp suất có thể được viết dưới dạng $\Delta p/l$, trong đó Δp là hiệu áp suất tại các đầu của ống, l là độ dài của nó.

Như vậy, sự phân bố vận tốc trong dòng chất lỏng ở trong ống được xác định bởi một phương trình hai chiều thuộc loại Δv = const. Phương trình này phải được giải với điều kiện biên $v = 0$ ở trên chu vi của tiết diện ống dẫn. Ta giải phương trình này cho một ống có tiết diện tròn. Chọn gốc tại tâm của vòng tròn và đưa vào các tọa độ cực. Vì lý do đối xứng, ta có: $v = v(r)$. Dùng biểu thức toán học Laplace trong các tọa độ cực, ta có:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l}$$

Lấy tích phân, ta được:

$$v = -\frac{\Delta p}{4\eta l}r^2 + a\ln r + b \tag{17-8}$$

Hằng số a cần được chọn bằng không, vì vận tốc phải hữu hạn trong toàn bộ tiết diện của ống, kể cả tâm. Hằng số b được xác định từ đòi hỏi $v = 0$ khi $r = R$ (R là bán kính của ống). Cuối cùng:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \tag{17-9}$$

Như vậy, vận tốc được phân bố theo tiết diện ống theo định luật parabôlic.

Ta dễ dàng tìm được lượng (khối lượng) chất lỏng Q đi qua tiết diện thẳng của ống trong một giây (thường gọi là lưu lượng chất lỏng trong ống). Lượng chất lỏng đi qua phần tử hình vành khuyên $2\pi r dr$ của tiết diện ống trong một giây bằng $\rho . 2\pi r v\, dr$. Do đó

$$Q = 2\pi\rho \int_0^R r v dr$$

Nếu xét đến (17-9), ta thu được:

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l} R^4 \tag{17-10}$$

Lượng chất lỏng chảy tỷ lệ với lũy thừa bậc bốn của bán kính ống [1].

BÀI TẬP

1. Xác định dòng chảy của chất lỏng trong ống dẫn có tiết diện hình khuyên (bán kính trong là R_1 và bán kính ngoài là R_2).

Giải. Sau khi đã xác định được các hằng số a và b ở trong nghiệm tổng quát (17-8), từ các điều kiện $v = 0$ với $r = R_1$ và $r = R_2$, ta tìm được:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2 / R_1)} \ln\frac{r}{R_2}\right]$$

Lưu lượng của chất lỏng bằng

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8\nu l}\left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}{\ln(R_2 / R_1)}\right]$$

2. Cũng bài toán đó cho ống có tiết diện elip.

Giải. Ta tìm nghiệm của phương trình (17-7) dưới dạng $v = Ay^2 + Bz^2 + C$. Các

[1] Sự phụ thuộc của Q vào Δp và R biểu diễn bởi công thức này đã được *Hagen* thiết lập bằng thực nghiệm (*G. Hagen*, 1839) và *Poiseuille* (*J.L.M. Poiseuille*, 1840) và được *Stokes* giải thích bằng lý thuyết (*G.G. Stokes*,1845).

Trong các tài liệu các dòng chảy song song của chất lỏng nhớt giữa các thành đứng yên thường được gọi là *các dòng chảy Poiseuille;* trong trường hợp (17-4) ta nói đến dòng chảy Poiseuille phẳng.

hằng số A, B, C được xác định từ điều kiện đòi hỏi biểu thức này phải thỏa mãn phương trình và điều kiện biên $v = 0$ ở trên chu vi của tiết diện (nghĩa là phương trình $Ay^2 + Bz^2 + C = 0$ phải trùng với phương trình của chu vi $y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$, trong đó a và b là những bán trục của elip). Cuối cùng ta thu được

$$v = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$$

Lưu lượng của chất lỏng bằng:

$$Q = \frac{\pi\Delta p}{8\nu l}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

3. Cũng bài toán đó cho ống có tiết diện là một tam giác đều (cạnh là a).

Giải. Nghiệm của phương trình (17-7) triệt tiêu ở trên chu vi tam giác là

$$v = \frac{\Delta p}{l}\frac{2}{\sqrt{3}a\eta}h_1h_2h_3$$

trong đó h_1, h_2, h_3 là độ dài của những đường cao hạ từ điểm đã cho của tam giác xuống ba cạnh của nó. Thực vậy, mỗi một trong các biểu thức Δh_1, Δh_2, Δh_3 (với $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$) đều bằng không; điều này đã được suy từ điều kiện là, mỗi độ cao h_1, h_2, h_3 đều có thể được dùng làm tọa độ y và z và việc tác dụng toán tử Laplace vào một tọa độ cho giá trị không. Do đó, ta có

$$\Delta h_1h_2h_3 = 2(h_1\nabla h_2\nabla h_3 + h_2\nabla h_1\nabla h_3 + h_3\nabla h_1\nabla h_2)$$

Nhưng $\nabla h_1 = \mathbf{n}_1$, $\nabla h_2 = \mathbf{n}_2$, $\nabla h_3 = \mathbf{n}_3$, trong đó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ là các vectơ đơn vị dọc theo các đường cao h_1, h_2, h_3. Các vectơ $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, từng cặp một lập với nhau một góc $2\pi/3$, do đó:

$$\nabla h_1\nabla h_2 = \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

và ta thu được hệ thức

$$\Delta h_1h_2h_3 = -(h_1+h_2+h_3) = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Dựa vào đẳng thức trên, ta nhận thấy phương trình (17-7) được thỏa mãn. Lưu lượng chất lỏng bằng

$$Q = \frac{\sqrt{3}a^4\Delta p}{320\nu l}.$$

4. Một hình trụ bán kính R_1 chuyển động song song với trục của nó với vận tốc u ở trong một hình trụ khác đồng trục có bán kính R_2; xác định chuyển động của chất lỏng lấp đầy không gian giữa hai hình trụ.

Giải. Lấy các tọa độ trụ có trục trùng với trục hình trụ. Tại mọi nơi vận tốc hướng theo trục z và chỉ phụ thuộc (cũng như áp suất) vào tọa độ r:

$$v_z = v(r)$$

Đối với v ta thu được phương trình

$$\Delta v = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = 0$$

(số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = v.\partial\mathbf{v}/\partial z$ đồng nhất bằng không). Dùng những điều kiện biên $v = u$ với $r = R_1$ và $v = 0$ với $r = R_2$, ta thu được

$$v = u\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}$$

Lực ma sát tác dụng lên một đơn vị độ dài của mỗi hình trụ bằng $2\pi\eta u/\ln(R_2/R_1)$.

5. Một lớp chất lỏng (bề dầy h) được giới hạn phía trên bởi mặt tự do và phía dưới bởi một mặt phẳng nghiêng cố định lập một góc α với mặt nằm ngang. Xác định chuyển động của chất lỏng xuất hiện dưới tác dụng của trọng trường.

Giải. Chọn mặt phẳng dưới cố định là mặt phẳng x, y, trục x hướng theo chiều chảy của chất lỏng, và trục z vuông góc với mặt phẳng x, y (hình 6). Ta tìm nghiệm chỉ phụ thuộc vào tọa độ z. Các phương trình Navier - Stokes với $v_x = v(z)$ ở trong trọng trường có dạng:

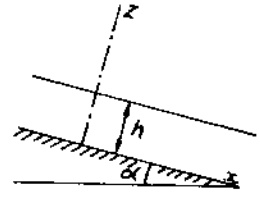
$$\eta\frac{d^2v}{dz^2} + \rho g\sin\alpha = 0,\quad \frac{dp}{dz} + \rho g\cos\alpha = 0$$

Trên mặt tự do ($z = h$) phải có các điều kiện

$$\sigma_{zz} = -p = -p_0,\quad \sigma_{xz} = \eta.(dv/dz) = 0$$

(p_0 là áp suất khí quyển). Với $z = 0$, phải có $v = 0$. Nghiệm thỏa mãn các điều kiện đó là

$$p = p_0 + \rho g\cos\alpha\,.\,(h - z)\,,\ v = \frac{\rho g\sin\alpha}{2\eta}z(2h - z)$$



Hình 6

Lưu lượng chất lỏng chảy trong một đơn vị thời gian qua tiết diện ngang của lớp (tính cho một đơn vị độ dài dọc theo trục y) có giá trị bằng

$$Q = \rho\int_0^h v dz = \frac{\rho g h^3\sin\alpha}{3\nu}.$$

6. Xác định quy luật giảm của áp suất dọc theo một ống có tiết diện tròn, trong đó có chuyển động đẳng nhiệt của một chất khí nhớt lý tưởng (nhớ rằng độ nhớt động lực η của khí lý tưởng không phụ thuộc vào áp suất của nó).

Giải. Trong mỗi phần nhỏ của ống, có thể coi khí là không nén được (miễn là gradiên áp suất không quá lớn), điều đó cho phép áp dụng công thức (17-10), theo công thức này

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{8\eta Q}{\pi\rho R^4}$$

Nhưng tại các khoảng cách lớn, ρ sẽ biến thiên và áp suất không phải là một hàm tuyến tính của x. Theo phương trình Clapeyron, mật độ của khí bằng $\rho = mp/T$ (m là khối lượng của phân tử), do đó

$$-\frac{dp}{dx} = \left(\frac{8\eta QT}{\pi m R^4}\right)\frac{1}{\rho}$$

(Lưu lượng Q của khí qua toàn bộ tiết diện của ống rõ ràng phải như nhau, dù khí là nén được hay không nén được). Từ đó, ta thu được:

$$p_2^2 - p_1^2 = \frac{16\eta QT}{\pi m R^4} l$$

(p_1, p_2 là áp suất tại các đầu của đoạn ống có độ dài l).

§18. CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG GIỮA CÁC HÌNH TRỤ QUAY

Ta xét chuyển động của chất lỏng ở giữa hai hình trụ dài vô hạn, đồng trục, quay quanh trục của chúng với các vận tốc góc Ω_1 và Ω_2; gọi R_1 và R_2 là các bán kính hình trụ, với $R_2 > R_1$[1]. Chọn các tọa độ trụ r, z, φ với trục z trùng với trục của các hình trụ. Vì lý do đối xứng, nên hiển nhiên rằng

$$v_z = v_r = 0 \quad , \quad v_\varphi = v(r) \quad , \quad p = p(r)$$

Phương trình Navier - Stokes trong tọa độ trụ trong trường hợp đang xét cho ta hai phương trình

$$\frac{dp}{dr} = \rho\frac{v^2}{r} \tag{18-1}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0 \tag{18-2}$$

Phương trình (18-2) có các nghiệm thuộc loại r^n. Việc thay nghiệm dưới dạng này cho ta $n = \pm 1$, do đó

$$v = ar + \frac{b}{r}$$

[1] Trong các tài liệu chuyển động giữa các hình trụ quay thường được gọi là *dòng chảy Couette* (*M. Couette*, 1890). Tại giới hạn $R_1 \to R_2$ dòng chảy chuyển thành dòng chảy (17-1) giữa hai mặt phẳng song song chuyển động; người ta gọi nó là dòng chảy phẳng *Couette*.

Các hằng số a và b tìm được từ các điều kiện giới hạn, theo các điều kiện này, vận tốc chất lỏng trên mặt hình trụ trong và mặt hình trụ ngoài phải bằng vận tốc của hình trụ tương ứng: $v = R_1\Omega_1$ với $r = R_1$ và $v = R_2\Omega_2$, với $r = R_2$. Kết quả ta thu được sự phân bố các vận tốc dưới dạng

$$v = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r} \tag{18-3}$$

Sự phân bố áp suất từ đó theo (18-1) bằng việc lấy tích phân trực tiếp.

Với $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, ta thu được đơn giản $v = \Omega r$; nghĩa là, chất lỏng coi như toàn bộ cùng quay với các hình trụ. Khi không có hình trụ ngoài ($\Omega_2 = 0$, $R_2 = \infty$), ta thu được

$$v = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$$

Ta còn xác định thêm mômen các lực ma sát tác dụng lên các hình trụ. Trên một đơn vị mặt hình trụ trong, lực ma sát tác dụng tiếp tuyến với mặt và theo (15-14) bằng thành phần $\sigma'_{r\varphi}$ của tenxơ ứng suất. Dựa vào các công thức (15-17), ta có

$$\sigma'_{r\varphi}\Big|_{r=R_1} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\Bigg|_{r=R_1} = -2\eta \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

Mômen của lực này thu được từ đây bằng cách nhân với R_1, còn mômen toàn phần M_1 tác dụng lên một đơn vị dài của hình trụ tìm được bằng cách nhân với $2\pi R_1$. Như vậy, ta tìm được:

$$M_1 = -\frac{4\pi\eta(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{18-4}$$

Mômen các lực tác dụng lên hình trụ ngoài $M_2 = -M_1$ Với $\Omega_2 = 0$ và với khe nhỏ giữa các hình trụ ($\delta \equiv R_2 - R_1 << R_2$) công thức (18-4) có dạng

$$M_2 = \frac{\eta R S u}{\delta} \tag{18-5}$$

trong đó $S \approx 2\pi R$ là diện tích mặt của một đơn vị hình trụ, còn $u = \Omega_1 R$ là diện tích bao quanh nó [1].

[1] Có thể tìm được nghiệm của bài toán phức tạp hơn về chuyển động của chất lỏng nhớt ở trong khe hẹp giữa hai hình trụ có các trục song song nhưng không trùng nhau trong cuốn sách: *N. Kôtsin, I. Kibel, N. Rôzé.* Thủy động lực học lý thuyết, phần hai. Maxcova, 1963 trang 534 (sách Nga).

Có thể có nhận xét tổng quát sau đây về các nghiệm của các phương trình chuyển động của các chất lỏng nhớt trong tiết này và các tiết trước. Trong mọi trường hợp đó số hạng phi tuyến $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ đồng nhất biến khỏi các phương trình xác định sự phân bố các vận tốc, do đó thực tế cần phải giải các phương trình tuyến tính, điều này làm cho việc giải bài toán cực kỳ đơn giản hơn. Chính vì lý do đó, tất cả các nghiệm này đều đồng nhất thỏa mãn cả các phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng không nén được, đã được viết dưới dạng (10-2), (10-3) chẳng hạn. Cũng chính vì thế mà các công thức (17-1) và (18-3) đều không chứa hệ số nhớt của chất lỏng. Hệ số nhớt chỉ được chứa trong các công thức như công thức (17-9), là công thức liên hệ vận tốc với gradiên áp suất trong chất lỏng, vì ngay bản thân sự có mặt của gradiên áp suất cũng liên quan đến độ nhớt của chất lỏng; chất lỏng lý tưởng có thể chảy trong ống ngay khi không có gradiên áp suất.

§19. ĐỊNH LUẬT ĐỒNG DẠNG

Khi nghiên cứu chuyển động của các chất lỏng nhớt, ta có thể thu được một số hệ quả quan trọng xuất phát từ những lập luận đơn giản có liên quan đến các thứ nguyên của các đại lượng vật lý khác nhau. Ta xét một loại chuyển động xác định nào đó. Chẳng hạn có thể là chuyển động của một vật có hình dạng xác định ở trong chất lỏng. Nếu vật không phải là một quả cầu, thì cần phải chỉ rõ vật chuyển động theo hướng nào; chẳng hạn, chuyển động của một elipxôit theo chiều trục nhỏ của nó hay theo chiều trục lớn của nó v.v... cũng có thể còn xét đến dòng chảy của chất lỏng ở trong một miền giới hạn bởi các thành có hình dạng xác định (trong một ống có tiết diện đã cho v.v...).

Ta gọi các vật có cùng dạng là các vật đồng dạng hình học, nghĩa là chúng được suy ra từ nhau bằng cách biến đổi tất cả các kích thước dài theo cùng một số lần như nhau. Do đó, nếu hình dạng của vật đã cho, thì để xác định hoàn toàn kích thước của vật, chỉ cần nêu ra một trong những kích thước dài nào đó của vật (bán kính của quả cầu hay bán kính của ống hình trụ, một trong các bán trục của elipxôit tròn xoay với tâm sai đã cho v. v...).

Bây giờ, ta khảo sát các chuyển động dừng. Chẳng hạn, nếu xét chuyển động của một chất lỏng chảy quanh một vật rắn (để xác định, dưới đây ta sẽ xét một trường hợp như thế), thì vận tốc của dòng tới phải không đổi. Giả thiết chất lỏng là không nén được.

Trong các thông số đặc trưng cho chính chất lỏng, chỉ có độ nhớt động học $\nu = \eta/\rho$ xuất hiện trong các phương trình thủy động lực học (phương trình Navier - Stokes); còn các hàm chưa biết, cần được xác định bằng cách giải các phương trình, là vận tốc $\mathbf{v}$ và tỷ số p/ρ giữa áp suất p và hằng số ρ. Ngoài ra, thông qua các điều kiện biên dòng chảy của chất lỏng còn phụ thuộc vào hình dạng và kích thước của vật chuyển động, cũng như vào vận tốc của nó trong chất lỏng. Vì hình dạng của vật được coi là đã cho, nên các tính chất hình học của nó chỉ được xác định bởi một kích thước dài nào đó, mà ta ký hiệu bằng l. Còn vận tốc của dòng tới sẽ là u.

Như vậy, mỗi loại chuyển động của một chất lỏng đều được xác định bởi ba thông số: ν, u, l. Các đại lượng này có các thứ nguyên:

$$[\nu] = \text{cm}^2/\text{s}\ ,\ [\,l\,] = \text{cm}\ ,\ [\,u\,] = \text{cm/s}$$

Dễ dàng thấy được rằng, từ các đại lượng đó chỉ có thể lập được một tổ hợp độc lập, không thứ nguyên, cụ thể là lu/ν. Tổ hợp này được gọi là *số Reynolds* và được ký hiệu bằng chữ R:

$$\mathrm{R} = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{u l}{\nu} \tag{19-1}$$

Mọi thông số không thứ nguyên khác đều có thể viết dưới dạng hàm của R.

Ta sẽ đo các độ dài theo đơn vị l, còn vận tốc theo đơn vị u, nghĩa là đưa vào các đơn vị không thứ nguyên $\mathbf{r}/l$, $\mathbf{v}/u$. Vì thông số không thứ nguyên duy nhất là số Reynolds, nên rõ ràng là, sự phân bố các vận tốc thu được bằng cách giải các phương trình thủy động lực học được xác định bằng các hàm có dạng

$$\mathbf{v} = u\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}\ ,\ \mathrm{R}\right) \tag{19-2}$$

Biểu thức này chứng tỏ rằng, trong hai dòng chảy khác nhau thuộc cùng một loại (chẳng hạn dòng chảy của các chất lỏng có độ nhớt khác nhau quanh các quả cầu bán kính khác nhau), các vận tốc $\mathbf{v}/u$ là những hàm

như nhau của tỷ số $\mathbf{r}/l$, miễn là các dòng chảy này có cùng số Reynolds. Các dòng chảy có thể thu được từ nhau, bằng một sự thay đổi đơn giản tỷ lệ xích các phép đo các tọa độ và vận tốc, được gọi là các dòng chảy đồng dạng. Như vậy, các dòng chảy cùng loại với cùng số Reynolds là những dòng chảy đồng dạng (*định luật đồng dạng*; *O. Reynolds*, 1883).

Công thức tương tự với (19-2) có thể được viết cho cả sự phân bố áp suất ở trong chất lỏng. Muốn vậy, từ các thông số ν, l, u cần thiết lập một đại lượng nào đó có thứ nguyên áp suất chia cho ρ; chẳng hạn, u^2 được chọn làm một đại lượng như thế. Khi đó có thể khẳng định rằng, $p/(\rho u^2)$ là hàm của biến không thứ nguyên $\mathbf{r}/l$ và thông số không thứ nguyên R. Như vậy,

$$p = \rho u^2 \mathrm{f}\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{R}\right) \tag{19-3}$$

Cuối cùng, các nhận định tương tự có thể được áp dụng cho các đại lượng đặc trưng cho dòng chảy của chất lỏng, nhưng chúng không còn là các hàm của tọa độ. Một đại lượng như thế là lực cản F tác dụng lên vật bao quanh bởi dòng chảy chẳng hạn. Ta có thể nói rằng tỷ số không thứ nguyên của F chia cho một đại lượng có thứ nguyên của một lực thiết lập bởi ν, u, l, ρ phải là một hàm chỉ của số Reynolds. Một tổ hợp đã nêu gồm ν, u, l, ρ có thể là tích $\rho u^2 l^2$ chẳng hạn. Khi đó

$$F = \rho u^2 l^2 f(\mathrm{R}) \tag{19-4}$$

Nếu ảnh hưởng của trọng lực lên chuyển động là quan trọng, thì chuyển động được xác định không phải bởi ba, mà bởi bốn thông số : u, l, ν và gia tốc trọng trường g. Từ các thông số đó, có thể thành lập được hai tổ hợp độc lập không thứ nguyên, chứ không phải một tổ hợp. Các tổ hợp đó có thể là số Reynolds và *số Froude*, có giá trị bằng

$$\mathrm{F} = \frac{u^2}{lg} \tag{19-5}$$

Trong các công thức (19-2) - (19-4) hàm f bây giờ phụ thuộc không phải vào một, mà vào hai thông số (R và F), và các dòng chảy chỉ đồng dạng khi hai số đó bằng nhau.

Cuối cùng, chúng ta nói một vài điều về chuyển động không dừng. Chuyển động không dừng thuộc loại xác định, ngoài các đại lượng u, l, ν,

còn được đặc trưng bởi giá trị của khoảng thời gian τ nào đó đặc trưng cho chuyển động đó, nó xác định sự biến thiên của chuyển động theo thời gian. Chẳng hạn, trong quá trình dao động của một vật rắn có dạng xác định nhúng trong chất lỏng, thời gian đó có thể là chu kỳ các dao động. Từ bốn đại lượng v, u, l, τ có thể lại thiết lập được không phải một, mà hai tổ hợp độc lập không thứ nguyên, đó là số Reynolds và số

$$S = \frac{u\tau}{l} \tag{19-6}$$

đôi khi được gọi là *số Strouhal*. Sự đồng dạng của các chuyển động xảy ra trong những trường hợp như thế, nếu hai số đó bằng nhau.

Nếu các dao động trong chất lỏng xuất hiện một cách tự phát (chứ không phải dưới tác dụng của một ngoại lực cưỡng bức đã cho), thì số S sẽ là một hàm xác định của R đối với chuyển động thuộc loại đã cho:

$$S = f(R).$$

§20. DÒNG CHẢY VỚI CÁC SỐ REYNOLDS NHỎ

Phương trình Navier - Stokes đơn giản đi một cách đáng kể đối với chuyển động có số Reynolds nhỏ. Đối với chuyển động dừng của chất lỏng không nén được, phương trình này có dạng

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v}$$

Số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, có bậc u^2/l, trong đó u và l có cùng ý nghĩa như ở §19. Còn biểu thức $\frac{\eta}{\rho}\Delta v \approx \frac{\eta u}{\rho l^2}$. Tỷ số giữa đại lượng thứ nhất và đại lượng thứ hai đúng là số Reynolds. Do đó, với R << 1, có thể bỏ qua số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, và phương trình chuyển động rút về phương trình tuyến tính

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \text{grad}\, p = 0. \tag{20-1}$$

Cùng với phương trình liên tục

$$\text{div}\, \mathbf{v} = 0 \tag{20-2}$$

nó xác định hoàn toàn chuyển động. Để tiện lợi, ta cũng có nhận xét là, phương trình

$$\Delta \text{ rot } \mathbf{v} = 0 \qquad (20\text{-}3)$$

thu được bằng cách lấy rot phương trình (20-1).

Ta xét một quả cầu chuyển động thẳng đều trong một chất lỏng nhớt (*G.G. Stokes*, 1851). Bài toán này hoàn toàn tương dương với bài toán về sự chảy bao quanh một quả cầu đứng yên của một chất lỏng có vận tốc **u** đã cho tại vô cùng. Sự phân bố các vận tốc trong bài toán thứ nhất suy được từ nghiệm của bài toán thứ hai bằng cách đơn giản là trừ đi vận tốc **u**; khi đó chất lỏng đứng yên tại vô cùng, và quả cầu dịch chuyển với vận tốc -**u**. Nếu ta coi chuyển động là dừng, thì tất nhiên cần phải nói về dòng chảy của chất lỏng quanh quả cầu đứng yên, vì nếu quả cầu chuyển động, vận tốc chất lỏng tại mọi điểm của kkông gian sẽ thay đổi theo thời gian.

Bởi vì div(**v** – **u**) = div **v** = 0 nên **v** – **u** có thể được biểu diễn dưới dạng rot của một vectơ **A** nào đó:

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{A}$$

với rot **A** bằng không tại vô cùng. Vectơ **A** phải là một vectơ trục để cho rot của nó là một vectơ cực như vận tốc. Trong bài toán về sự chảy bao quanh một vật hoàn toàn đối xứng – quả cầu – không có phương ưu tiên nào, trừ phương **u**. Thông số này phải xuất hiện trong **A** một cách tuyến tính – do các phương trình chuyển động và các điều kiện biên đối với nó là tuyến tính. Dạng tổng quát của hàm vectơ **A**(**r**) thỏa mãn tất cả các yêu cầu này là $\mathbf{A} = f'(r)[\mathbf{nu}]$, trong đó **n** là vectơ đơn vị theo hướng bán kính vectơ **r**, (gốc tọa độ lấy ở tâm quả cầu), còn $f'(r)$ là một hàm vô hướng của r. Tích $f'(r)\mathbf{n}$ có thể được biểu diễn dưới dạng gradiên của một hàm $f(r)$ khác nào đó. Như vậy ta sẽ tìm vận tốc dưới dạng

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \text{rot}[\nabla f \cdot \mathbf{u}] = \mathbf{u} + \text{rot rot } f\mathbf{u} \qquad (20\text{-}4)$$

(trong dẳng thức trên, để ý rằng **u** = const).

Để xác định hàm f, ta dùng phương trình (20-3). Ta có:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot rot rot } f\mathbf{u} = (\text{grad div} - \Delta) \text{ rot } f\mathbf{u} = -\Delta \text{ rot } f\mathbf{u}$$

Do đó, (20-3) có dạng

$$\Delta^2 \text{ rot } f\mathbf{u} = \Delta^2[\nabla f \cdot \mathbf{u}] = [\Delta^2 \text{grad } f \cdot \mathbf{u}] = 0$$

Từ đó suy ra rằng, phải có

$$\Delta^2 \text{grad}\, f = 0 \tag{20-5}$$

Lấy tích phân thứ nhất, ta được $\Delta^2 f = \text{const}$. Dễ dàng thấy rằng const phải cho bằng không. Thực vậy, hiệu $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ phải bằng không tại vô cùng; điều này lại càng đúng đối với các đạo hàm của nó. Biểu thức $\Delta^2 f$ chứa các đạo hàm bậc bốn của f, trong khi đó chính vận tốc được biểu diễn bằng các đạo hàm bậc hai của f.

Như vậy, ta có

$$\Delta^2 f \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Delta f}{dr}\right) = 0$$

Từ đó

$$\Delta f = \frac{2a}{r} + c$$

Hằng số phải đặt bằng không để cho vận tốc $v - u$ bằng không tại vô cùng. Lấy tích phân phương trình còn lại, ta được:

$$f = ar + \frac{b}{r} \tag{20-6}$$

(Hằng số cộng ở trong f được bỏ đi vì không cần thiết – vận tốc được xác định bởi các đạo hàm của f).

Sau một phép tính đơn giản, việc thay vào (20-4) cho ta

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - a\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} + b\frac{3\mathbf{n}(\mathbf{un}) - \mathbf{u}}{r^3} \tag{20-7}$$

Các hằng số a và b phải được xác định từ điều kiện biên: $\mathbf{v} = 0$ trên mặt quả cầu ($r = R$):

$$\mathbf{u}\left(1 - \frac{a}{R} - \frac{b}{R^3}\right) + \mathbf{n}(\mathbf{un})\left(-\frac{a}{R} + \frac{3b}{R^3}\right) = 0$$

Vì đẳng thức này phải xảy ra với $\mathbf{n}$ tùy ý, nên các hệ số của $\mathbf{u}$ và của $\mathbf{n}(\mathbf{un})$, mỗi hệ số đều phải bằng không. Từ đó ta tìm được $a = 3R/4$, $b = R^3/4$ và cuối cùng:

$$f = \frac{3}{4}Rr + \frac{R^3}{4r} \tag{20-8}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{3R}{4}\frac{\mathbf{u} + \mathbf{n}(\mathbf{un})}{r} - \frac{R^3}{4}\frac{\mathbf{u} - 3\mathbf{n}(\mathbf{un})}{r^3} + \mathbf{u} \tag{20-9}$$

Các thành phần của vận tốc trong tọa độ cầu với trục cực theo hướng **u**:

$$v_r = u\cos\theta\left[1-\frac{3R}{2r}+\frac{R^3}{2r^3}\right]$$

$$v_\theta = -u\sin\theta\left[1-\frac{3R}{4r}-\frac{R^3}{4r^3}\right] \qquad (20\text{-}10)$$

Kết quả này xác định sự phân bố vận tốc quanh quả cầu chuyển động.

Để tìm áp suất, ta thay (20-4) vào (20-1):

$$\text{grad}\, p = \eta\Delta\mathbf{v} = \eta\Delta\ \text{rot rot}\, f\mathbf{u} = \eta\Delta(\text{grad div}\, f\mathbf{u} - \mathbf{u}\Delta f)$$

Nhưng $\Delta^2 f = 0$ và do đó

$$\text{grad}\, p = \text{grad}\,(\eta\Delta\ \text{div}\, f\mathbf{u}) = \text{grad}\,(\eta\mathbf{u}\ \text{grad}\,\Delta f)$$

Từ đó

$$p = \eta\mathbf{u}\ \text{grad}\,\Delta f + p_0 \qquad (20\text{-}11)$$

(p_0 là áp suất của chất lỏng tại vô cùng). Thay f vào, ta tìm được biểu thức cuối cùng

$$p = p_0 - \frac{3}{2}\eta\frac{\mathbf{un}}{r^2}R \qquad (20\text{-}12)$$

Dựa vào công thức đã tìm được, có thể tính được áp lực **F** của chất lỏng chuyển động tác dụng lên quả cầu (hay lực cản tác dụng lên quả cầu chuyển động trong chất lỏng, cũng vậy). Muốn thế, ta đưa vào các tọa độ cầu với trục cực trùng với vận tốc **u**; vì lý do đối xứng, nên tất cả các đại lượng đều là các hàm chỉ phụ thuộc vào r và góc cực θ. Hiển nhiên là, lực **F** hướng theo vận tốc **u**. Giá trị tuyệt đối của lực này có thể được xác định dựa vào (15-14). Nếu xác định các thành phần (theo phương pháp tuyến và tiếp tuyến với mặt) của lực tác dụng vào phần tử mặt của quả cầu từ công thức này, và chiếu các thành phần đó lên phương **u**, ta được:

$$F = \int(-p\cos\theta + \sigma'_{rr}\cos\theta - \sigma'_{r\theta}\sin\theta)df \qquad (20\text{-}13)$$

trong đó tích phân được lấy trên toàn bộ mặt cầu.

Thay biểu thức (20-10) vào các công thức

$$\sigma'_{rr} = 2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma'_{r\theta} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)$$

So sánh với (15-20), ta nhận thấy rằng, ở trên mặt quả cầu

$$\sigma'_{rr} = 0, \quad \sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta}{2R} u \sin\theta$$

và áp suất (20-12)

$$p = p_o - \frac{3\eta u}{2R} \cos 0$$

Do đó, tích phân (20-13) dẫn đến biểu thức

$$F = \frac{3\eta u}{2R} \int df$$

Cuối cùng ta tìm được *công thức Stokes* dưới đây cho lực cản tác dụng lên quả cầu chuyển động chậm trong chất lỏng [1]:

$$F = 6\pi R \eta u \tag{20-14}$$

Nhận thấy rằng, lực cản tỷ lệ với bậc nhất của vận tốc và các kích thước dài của vật. Một sự phụ thuộc như thế có thể thấy trước được từ những nhận định về thứ nguyên. Vấn đề là ở chỗ trong các phương trình gần đúng (20-1,2) thông số ρ – mật độ chất lỏng – không có mặt. Do đó lực F được xác định dựa vào chúng có thể chỉ được biểu diễn qua các đại lượng η, u, R; từ các đại lượng này chỉ có thể thiết lập một tổ hợp với thứ nguyên của lực – đó là tích $\eta u R$.

Một sự phụ thuộc như thế còn xảy ra đối với vật có dạng khác chuyển động chậm. Hướng của lực cản trong trường hợp tổng quát của vật có dạng tùy ý, không trùng với phương của vận tốc; dưới dạng tổng quát, sự phụ thuộc của **F** vào **u** có thể được viết như

$$F_i = \eta a_{ik} u_k \tag{20-15}$$

[1] Để phục vụ cho một số ứng dụng sau này, ta nêu ra rằng, nếu tiến hành các phép tính bằng cách dùng biểu thức (20-7) của vận tốc với các hằng số a và b bất định, ta sẽ thu được

$$F = 8\pi a \eta u \tag{20-14a}$$

Lực cản có thể được tính cho cả elipxôit ba trục chuyển động chậm. Các công thức tương ứng có thể tìm được trong cuốn sách *H. Lamb.* Hydrodynamics, Cambridge, 1932, hoặc sách Nga, 1947. Ở đây ta nêu các biểu thức giới hạn cho một đĩa tròn phẳng (bán kính R) chuyển động theo phương vuông góc với mặt phẳng của nó:

$$F = 16\eta R u$$

và đối với một đĩa như thế chuyển động trong mặt phẳng của nó

$$F = \frac{32}{3} \eta R u.$$

trong đó a_{ik} là một tenxơ hạng hai, không phụ thuộc vào vận tốc. Điều quan trọng là, tenxơ này đối xứng ($a_{ik} = a_{ki}$); điều này (đúng trong phép gần đúng bậc nhất đối với vận tốc) là một trường hợp đặc biệt của định luật tổng quát, xảy ra với các chuyển động chậm, kéo theo các quá trình tiêu tán (xem chương V, §121).

Chính xác hóa công thức Stokes

Nghiệm đã thu được của bài toán về dòng chảy bao quanh không ứng dụng được cho các khoảng cách dù lớn tính từ quả cầu, mặc dù số Reynolds nhỏ. Để thấy được điều đó, ta ước lượng số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, là số hạng đã bỏ qua ở trong (20-1). Tại các khoảng cách lớn vận tốc $\mathbf{v} \approx \mathbf{u}$. Còn các đạo hàm của vận tốc tại các khoảng cách đó, thì như (20-9) đã chứng tỏ, chúng có bậc uR/r^2. Do đó $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim u^2R/r^2$. Các số hạng giữ lại ở trong (20-1) có bậc $(\eta Ru)/(\rho r^3)$, (như có thể thấy được từ chính các công thức (20-9) cho vận tốc hay công thức (20-12) cho áp suất). Điều kiện $(\eta Ru)/(\rho r^3) >> (u^2R)/(r^2)$ chỉ được thực hiện tại các khoảng cách

$$r << \nu/u \tag{20-16}$$

Tại các khoảng cách lớn, các điều bỏ qua không còn hợp lý nữa và sự phân bố vận tốc đã thu được sẽ không đúng.

Để thu được sự phân bố các vận tốc tại các khoảng cách lớn tính từ vật có dòng chảy bao quanh, cần phải xét đến số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ đã bỏ qua ở (20-1). Vì vận tốc $\mathbf{v}$ khác ít so với $\mathbf{u}$ tại các khoảng cách lớn đó, nên ta có thể viết gần đúng $(\mathbf{u}\nabla)$ thay cho $(\mathbf{v}\nabla)$. Khi đó, ta thu được cho vận tốc tại các khoảng cách lớn phương trình bậc nhất sau

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{20-17}$$

(*C.W. Oseen*, 1910).

Ta không dừng ở đây để trình bày nghiệm của phương trình này cho chất lỏng chảy quanh quả cầu [1]. Ta chỉ nêu ra rằng, dựa vào sự phân bố vận tốc đã thu được như vậy, ta có thể tìm được một công thức chính xác

[1] Nghiệm đó có thể tìm trong các sách: *N. Kotsin, I. Kibel, N. Rozee*. Thủy động lực học lý thuyết phần hai, chương II, §25, 26. Maxcơva, 1963 (tiếng Nga); *Lamb*, Thủy động lực học, 1947, §342, 343 (sách Nga).

hơn cho lực cản tác dụng lên quả cầu (số hạng khai triển tiếp theo của lực này theo số Reynolds R = uR/ν); công thức có dạng:

$$F = 6\pi\eta uR\left(1+\frac{3Ru}{8\nu}\right) \tag{20-18}$$

Ta cũng nói rằng, khi giải bài toán về dòng chảy quanh một hình trụ vô hạn của chất lỏng chuyển động theo phương vuông góc với hình trụ, thì ngay từ đầu cần giải phương trình Oseen (trong trường hợp này phương trình (20-1) không có nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên ở trên mặt vật và đồng thời bằng không tại vô cùng). Lực cản cho một đơn vị độ dài của hình trụ bằng

$$F = \frac{4\pi\eta u}{\frac{1}{2} - C - \ln\frac{Ru}{4\nu}} = \frac{4\pi\eta u}{\ln\frac{3{,}70\nu}{Ru}} \tag{20-19}$$

C = 0,577...là số Euler (*H. Lamb*, 1911)[1].

Trở lại bài toán về dòng chảy bao quanh quả cầu, cần có chú ý sau: sự thay **v** bằng **u** tiến hành trong phương trình (20-17) trong số hạng phi tuyến là đúng nếu ở xa quả cầu, tại các khoảng cách $r >> R$. Do đó, hiển nhiên là sau khi đưa ra hình ảnh đúng đắn cho chuyển động tại các khoảng cách lớn tính từ vật có dòng chảy bao quanh, phương trình Oseen không cho một sự chính xác hóa như thế tại các khoảng cách gần (điều này thể hiện ở chỗ nghiệm của phương trình (20-17), thỏa mãn điều kiện cần tại vô cùng, lại không thỏa mãn điều kiện chính xác là vận tốc phải bằng không trên mặt quả cầu; điều kiện này chỉ được thực hiện cho số hạng không của phép khai triển vận tốc theo các luỹ thừa của số Reynolds và đã không được thực hiện cho số hạng bậc một). Do đó, mới thoạt nhìn có thể cho rằng, nghiệm của phương trình Oseen không thể được dùng để tính đúng số hạng bổ chính ở trong lực ma sát.

[1] Việc không thể tính được lực cản trong bài toán về hình trụ dựa vào phương trình (20-1) là điều hiển nhiên. Điều này thấy được từ những nhận định về thứ nguyên. Như đã nhận thấy ở trên, kết quả chỉ được biểu diễn qua các thông số η, u, R. Nhưng trong trường hợp đang xét, ta nói đến lực tính cho một đơn vị dài hình trụ; đại lượng có thứ nguyên như thế chỉ có thể là tích ηu, không phụ thuộc vào các kích thước của vật (và như thế không thể bằng không khi $R \to 0$), điều này vô lý về mặt vật lý.

Tuy nhiên, điều đó không phải như vậy vì lý do sau. Phần đóng góp vào lực **F**, liên quan đến chuyển động của chất lỏng tại các khoảng cách gần (đối với các khoảng cách này $u << \nu/r$) cần được khai triển theo các bậc của vectơ **u**. Do đó, số hạng bổ chính khác không đầu tiên có nguồn gốc từ phần đóng góp đó vào đại lượng vectơ **F** sẽ tỷ lệ với $\mathbf{u}u^2$, nghĩa là đóng góp số bổ chính bậc hai theo số Reynolds và như vậy, không ảnh hưởng đến số bổ chính bậc một trong công thức (20-18).

Còn việc tính những số bổ chính tiếp theo cho công thức Stokes và sự chính xác hóa đúng đắn cho hình ảnh dòng chảy tại các khoảng cách gần dựa vào việc giải trực tiếp phương trình (20-17) là không thể được. Mặc dù bản thân vấn đề về các sự chính xác hóa đó không quan trọng lắm, nhưng việc làm sáng tỏ đặc tính đặc thù của một lý thuyết nhất quán về các nhiễu động cho việc giải các bài toán về dòng chảy nhớt bao quanh của chất lỏng với các số Reynolds nhỏ là một vấn đề rất đáng quan tâm về mặt phương pháp luận (*S. Kaplun, P.A. Lagerstrom*, 1957, *I. Proudman, J. R. Pearson*, 1957). Chúng ta miêu tả tình huống xảy ra ở đây, dẫn ra tất cả các công thức cần thiết để làm sáng tỏ nó, mà không tiến hành chi tiết các phép tính [1].

Để làm rõ ý nghĩa của thông số nhỏ R – số Reynolds – ta đưa vào vận tốc không thứ nguyên và bán kính vectơ $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/u$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/R$ và dưới đây trong tiết này ta sẽ ký hiệu chúng cũng bằng những chữ **v** và **r**, bỏ dấu phẩy. Khi đó phương trình chuyển động chính xác (lấy dưới dạng (15-19) đã khử áp suất) được viết dưới dạng

$$\mathrm{R}\ \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v}] + \Delta\ \mathrm{rot}\ \mathbf{v} = 0 \qquad (20\text{-}20)$$

---

[1] Có thể tìm vấn đề này trong cuốn sách của *Van Dyke M.* Các phương pháp nhiễu động trong cơ học chất lỏng (*Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid mechanics – Academic Press,1964). Bản dịch Nga văn. NXB Mir 1967. Chương III. Các phép tính tiến hành ở đây không trong thuật ngữ vận tốc $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, mà trong thuật ngữ kém cụ thể, nhưng cô đọng hơn của hàm dòng. Đối với các dòng chảy đối xứng trục (dòng chảy bao quanh quả cầu thuộc về các dòng chảy đó), hàm dòng $\psi(r,\theta)$ trong các tọa độ cầu được đưa vào theo định nghĩa

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v_\varphi = 0$$

Như thế phương trình liên tục (15 - 22) được đồng nhất thỏa mãn.

Trong không gian xung quanh quả cầu có dòng chảy, ta tách ra hai miền: miền gần và miền xa, được xác định lần lượt bằng các điều kiện $r << 1/R$ và $r >> 1$. Cả hai miền đó chiếm toàn bộ không gian, chúng phủ lên nhau một phần trong miền "trung gian"

$$1/R >> r >> 1 \tag{20-21}$$

Khi vận dụng lý thuyết nhiễu động nhất quán, thì sự gần đúng xuất phát ở trong miền gần nhất là sự gần đúng Stokes - nghiệm của phương trình $\Delta \text{ rot } \mathbf{v} = 0$ thu được từ (20-20) với sự bỏ qua số hạng có thừa số R. Nghiệm này được cho bởi các công thức (20-10); trong các biến không thứ nguyên, nó có dạng

$$v_r^{(1)} = \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2r} + \frac{1}{2r^3}\right), \quad v_\theta^{(1)} = -\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4r} - \frac{1}{4r^3}\right)$$

$$r << 1/R \tag{20-22}$$

(chỉ số (1) ký hiệu sự gần đúng bậc nhất).

Sự gần đúng bậc nhất trong miền xa hơn chỉ đơn giản là giá trị không đổi của $\mathbf{v}^{(1)} = \nu$, tương ứng với lưu lượng đều không nhiễu động xô đến (ν là vectơ đơn vị theo bao quanh của dòng chảy). Thay $\mathbf{v} = \nu + \mathbf{v}^{(2)}$ vào (20-20), ta đi tới phương trình Oseen cho $\mathbf{v}^{(2)}$

$$R \text{ rot } [\nu \text{ rot } \mathbf{v}^{(2)}] + \Delta \text{ rot } \mathbf{v}^{(2)} = 0 \tag{20-23}$$

Nghiệm của phương trình trên cần phải thỏa mãn điều kiện đòi hỏi vận tốc $\mathbf{v}^{(2)}$ phải bằng không tại vô cùng; và điều kiện nối với nghiệm (20-22) trong miền trung gian; điều kiện này, đặc biệt, khử các nghiệm tăng quá nhanh khi r giảm [1]. Một nghiệm như thế có dạng sau:

$$v_r^{(1)} + v_r^{(2)} = \cos\theta + \frac{3}{2Rr^2}\left\{1 - \left[1 + \frac{Rr}{2}(1+\cos\theta)\right]e^{-\frac{1}{2}rR(1-\cos\theta)}\right\},$$

$$v_\theta^{(1)} + v_\theta^{(2)} = -\sin\theta + \frac{3}{4r}\sin\theta e^{-\frac{1}{2}rR(1-\cos\theta)}, \quad r >> 1 \tag{20-24}$$

Để ý rằng, không phải chính tọa độ xuyên tâm r, mà tích $\rho = rR$ là biến tự nhiên đối với miền xa. Khi đưa vào biến này, số R biến mất khỏi

[1] Để xác định các hệ số hằng số ở trong nghiệm cũng cần xét đến điều kiện đòi hỏi lưu lượng chất lỏng qua toàn bộ mặt kín bao quanh quả cầu có dòng chảy quanh phải bằng không.

phương trình (20-20) – phù hợp với điều là, với $r \gtrsim 1/R$ các số hạng nhớt và số hạng quán tính trong phương trình bằng nhau về bậc độ lớn. Số R khi đó chỉ có mặt trong nghiệm thông qua điều kiện biên nối với nghiệm trong miền gần. Do đó, khai triển của hàm $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ở trong miền xa là khai triển theo các bậc của R với các giá trị đã cho của tích $\rho = rR$; thực vậy, các số hạng thứ hai trong (20-24), khi biểu diễn qua ρ, có chứa thừa số R.

Để kiểm nghiệm sự đúng dắn của việc nối các nghiệm (20-22) và (20-24) với nhau, ta nhận thấy rằng ở trong miền trung gian (20-21) $rR \ll 1$ và các biểu thức (20-24) có thể được khai triển theo biến đó. Với độ chính xác đến hai số hạng đầu (sau lưu lượng đều) của khai triển ta tìm được:

$$\begin{aligned} v_r &= \cos\theta\left(1 - \frac{3}{2r}\right) + \frac{3R}{16}(1-\cos\theta)(1+3\cos\theta) \\ v_\theta &= -\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4r}\right) - \frac{3R}{8}\sin\theta(1-\cos\theta) \end{aligned} \qquad (20\text{-}25)$$

Mặt khác, cũng trong miền này $r \gg 1$ và do đó trong (20-22) có thể bỏ đi các số hạng $\sim 1/r^3$; các biểu thức còn lại thực sự trùng với các số hạng thứ nhất trong (20-25) (các số hạng thứ hai trong (20-25) sẽ cần đến dưới đây).

Để chuyển sang phép gần đúng tiếp theo ở trong miền gần ta viết: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$ và thu được từ (20-20) phương trình cho số bổ chính phép gần đúng bậc hai:

$$\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(2)} = -R \operatorname{rot}[\mathbf{v}^{(1)} \operatorname{rot} \mathbf{v}^{(1)}] \qquad (20\text{-}26)$$

Nghiệm của phương trình này phải thỏa mãn điều kiện đòi hỏi bằng không trên mặt quả cầu và điều kiện nối với nghiệm ở trong miền xa; điều kiện sau này có nghĩa là, các số hạng chính trong hàm $\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r})$ với $r \gg 1$ phải trùng với các số hạng thứ hai trong (20-25). Một nghiệm như thế có dạng sau:

$$\begin{aligned} v_r^{(2)} &= \frac{3R}{8} v_r^{(1)} + \frac{3R}{32}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2\left(2 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\left(1 - 3\cos^2\theta\right) \\ v_\theta^{(2)} &= \frac{3R}{8} v_\theta^{(1)} + \frac{3R}{32}\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(4 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3}\right)\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$r << 1/R \qquad (20\text{-}27)$$

Miền trung gian trong các biểu thức này chỉ còn lại các số hạng không chứa thừa số $1/r$; các số hạng này thực sự trùng với số hạng thứ hai trong (20-25).

Dựa theo sự phân bố các vận tốc (20-27), có thể tính số bổ chính đối với công thức Stokes cho lực cản. Các số hạng thứ hai trong (20-27), do có phụ thuộc vào góc, nên không đóng góp vào lực, còn các số hạng thứ nhất cho đúng số hạng bổ chính 3R/8 đã được nêu trong (20-18). Phù hợp với lập luận đã trình bày ở trên, sự phân bố đúng đắn các vận tốc ở gần quả cầu dẫn đến (trong sự gần đúng đã xét) cùng kết quả cho lực giống như nghiệm của phương trình Oseen.

Sự gần đúng tiếp theo có thể thu được bằng cách tiếp tục quá trình mô tả. Trong phép gần đúng này có xuất hiện những số hạng lôga trong phân bố các vận tốc, còn trong biểu thức (20-18) các lực cản được thay thế bằng

$$\left(1 + \frac{3}{8}\mathrm{R} - \frac{9}{40}\mathrm{R}^2 \ln\frac{1}{\mathrm{R}}\right)$$

(với lôga $\ln(1/\mathrm{R})$ được giả thiết là lớn)[1].

BÀI TẬP

1. Xác định chuyển động của chất lỏng lấp đầy không gian giữa hai quả cầu đồng tâm (có các bán kính R_1 và R_2, với $R_2 > R_1$) quay đều quanh các đường kính khác nhau với các vận tốc góc Ω_1 và Ω_2 (các số Reynolds $\Omega_1 R_1^2/\nu$, $\Omega_2 R_2^2/\nu \ll 1$).

Giải. Do các phương trình là tuyến tính, nên có thể coi chuyển động của hai quả cầu quay như chồng chất của hai chuyển động, khi một trong hai quả cầu đứng yên, còn quả cầu kia quay. Trước hết ta đặt $\Omega_2 = 0$, nghĩa là chỉ có quả cầu trong quay. Lẽ dĩ nhiên, có thể giả thiết vận tốc của chất lỏng tại mỗi điểm đều hướng theo tiếp tuyến với đường tròn nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay và có tâm ở trên trục quay đó. Nhưng do tính đối xứng trục đối với trục quay, áp suất không thể có gradiên theo hướng này. Do đó phương trình chuyển động (20-1) có dạng

$$\Delta \mathbf{v} = 0$$

Vectơ vận tốc góc Ω_1 là một vectơ trục. Bằng cách lập luận tương tự như

[1] Xem *Proudman I. Pearson J.R. - J Fluid Mech,* 1957, V.2.p.257

trong bài giảng, ta có thể tìm được vận tốc góc dưới dạng

$$\mathbf{v} = \text{rot}\,\Omega_1 f(r) = [\nabla f \cdot \Omega_1]$$

Khi đó phương trình chuyển động cho ta [grad $\Delta f \cdot \Omega_1$] = 0; vì vectơ grad Δf hướng theo bán kính vectơ và tích [$\mathbf{r}\ \Omega_1$] không thể bằng 0 với Ω_1 đã cho và $\mathbf{r}$ tuỳ ý, nên phải có grad $\Delta f = 0$, do đó

$$\Delta f = \text{const}$$

Lấy tích phân, ta được

$$f = ar^2 + \frac{b}{r}, \mathbf{v} = \left(\frac{b}{r^3} - 2a\right)[\Omega_1 \mathbf{r}]$$

Các hằng số a và b đều được xác định từ các điều kiện $\mathbf{v} = 0$ khi $r = R_2$ và $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ khi $r = R_1$, ở đây $\mathbf{u} = [\Omega_1\ \mathbf{r}]$ là vận tốc của các điểm của quả cầu quay. Cuối cùng, ta thu được

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\Omega_1 \mathbf{r}]$$

Áp suất của chất lỏng vẫn không đổi ($p = p_0$). Bằng cách tương tự, đối với trường hợp quả cầu ngoài quay, còn quả cầu trong đứng yên ($\Omega_1 = 0$), ta thu được

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\Omega_2 \mathbf{r}]$$

Trong trường hợp tổng quát, cả hai quả cầu đều quay, ta có

$$\mathbf{v} = \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_2^3}\right)[\Omega_1 \mathbf{r}] + \left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\Omega_2 \mathbf{r}]\right]$$

Nếu không có quả cầu ngoài ($R_2 = \infty$, $\Omega_2 = 0$), nghĩa là nếu chỉ có một quả cầu bán kính R quay trong một chất lỏng vô hạn, thì

$$\mathbf{v} = \frac{R^3}{r^3}[\Omega\ \mathbf{r}]$$

Ta tính mômen các lực ma sát tác dụng lên quả cầu trong trường hợp này. Nếu chọn các tọa độ cầu có trục cực trùng với Ω, thì ta có

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_\varphi = v = \frac{R^3\Omega}{r^2}\sin\theta$$

Lực ma sát tác dụng lên một đơn vị mặt của quả cầu bằng

$$\sigma'_{r\varphi} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\Bigg|_{r=R} = -3\eta\Omega\sin\theta$$

Mômen toàn phần của các lực ma sát tác dụng lên quả cầu bằng

$$M = \int_0^{\pi} \sigma'_{r\varphi} R \sin\theta \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

Từ đó

$$M = -8\pi\eta R^3 \Omega$$

Khi không có quả cầu trong, thì $\mathbf{v} = [\Omega_2 \mathbf{r}]$, nghĩa là chất lỏng quay như một toàn bộ cùng với quả cầu chứa nó.

2. Xác định vận tốc của một giọt chất lỏng hình cầu (độ nhớt η) chuyển động dưới tác dụng của một trọng lực trong chất lỏng có độ nhớt η (*W.Rybczynski*, 1911).

Giải. Ta dùng hệ tọa độ, trong đó chất lỏng đứng yên. Đối với chất lỏng ở bên ngoài giọt, ta lại tìm nghiệm của phương trình (20-5) dưới dạng (20-6), do đó, vận tốc có dạng (20-7). Còn đối với chất lỏng ở bên trong giọt, ta phải tìm một nghiệm không có điểm kỳ dị tại $r = 0$ (ngoài ra, cả các đạo hàm cấp hai của f xác định vận tốc vẫn phải hữu hạn). Nghiệm tổng quát này là

$$f = \frac{A}{4} r^2 + \frac{B}{8} r^4$$

Vận tốc tương ứng có dạng

$$\mathbf{v} = -A\mathbf{u} + Br^2[\mathbf{u}(\mathbf{un}) - 2\mathbf{u}]$$

Trên mặt quả cầu[1] các điều kiện sau phải được nghiệm. Các thành phần pháp tuyến của vận tốc của chất lỏng ở bên ngoài $[\mathbf{v}^{(e)}]$ và ở bên trong giọt $[\mathbf{v}^{(i)}]$ phải bằng không.

$$v_r^{(i)} = v_r^{(e)} = 0$$

Thành phần tiếp tuyến của vận tốc phải liên tục:

$$v_\theta^{(i)} = v_\theta^{(e)}$$

Cũng vậy đối với thành phần $\sigma_{r\theta}$ của tenxơ ứng suất

$$\sigma_{r\theta}^{(i)} = \sigma_{r\theta}^{(e)}$$

(Có thể không cần viết điều kiện bằng nhau cho các thành phần σ_{rr} của tenxơ ứng suất, nó sẽ xác định được vận tốc cần tìm u, mà vận tốc này có thể tìm được dễ dàng hơn theo cách dưới đây). Từ bốn điều đã nêu, ta thu được phương trình cho các hằng số a, b, A, B. Các nghiệm của chúng cho:

[1] Chúng ta có thể bỏ qua sự biến thiên hình dạng của một giọt trong khi nó chuyển động. Vì sự biến thiên này là một hiệu ứng có cấp độ bé cao hơn. Tuy nhiên, cần phải nhớ rằng một giọt chuyển động thực tế chỉ có dạng hình cầu nếu sức căng bề mặt ở trên biên lớn hơn các lực gây bởi sự không đồng đều của áp suất, sự không đồng đều này có tác dụng làm thay đổi dạng hình cầu, điều đó có nghĩa là, chúng ta phải có $\eta u/R << \alpha/R$ (α là hệ số sức căng bề mặt) hay thay $u \sim R^2 g\rho/\eta$, ta thu được $R << \sqrt{\alpha/\rho g}$

$$a = R\frac{2\eta + 3\eta'}{4(\eta + \eta')}, \quad b = R^3\frac{\eta'}{4(\eta + \eta')} \cdot A = -BR^2 = \frac{\eta}{2(\eta + \eta')}$$

Đối với lực cản, dựa vào (20-14a) ta thu được

$$F = 2\pi u \eta R \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}$$

Khi $\eta' \to \infty$ (trường hợp của quả cầu rắn), công thức chuyển thành công thức Stokes.Còn trường hợp giới hạn khác, khi $\eta' \to 0$ (bọt khí), ta thu được $F = 4\pi u \eta R$, nghĩa là lực cản bằng hai phần ba lực cản trong trường hợp quả cầu rắn

Cân bằng lực F tác dụng lên giọt với lực trọng trường $\frac{4\pi}{3}R^2(\rho - \rho')g$, ta thu được

$$u = \frac{2R^2 g(\rho - \rho')(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')}.$$

3. Hai đĩa tròn phẳng (bán kính R) đặt song song đĩa nọ lên đĩa kia cách nhau một khoảng cách nhỏ: không gian giữa các đĩa được lấp đầy chất lỏng. Các đĩa dịch đến gần nhau với vận tốc u không đổi, đẩy chất lỏng đi. Tìm lực cản tác dụng lên các đĩa (*O. Reynolds*).

Giải. Ta chọn các tọa độ trụ có gốc tại tâm của đĩa dưới (giả sử đứng yên). Chuyển động của chất lỏng là đối xứng trục, và vì lớp chất lỏng mỏng, nên thực tế theo phương xuyên tâm ($v_z << v_r$) với $\partial v_r/\partial r << \partial v_r/\partial z$. Do đó, các phương trình chuyển động có dạng

$$\eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

với các điều kiện

với $z = 0$: $v_r = v_z = 0$,

với $z = h$: $v_r = 0$, $v_z = -u$,

với $r = R$: $p = p_a$

(h là khoảng cách giữa các đĩa, p_a là áp suất ngoài). Từ các phương trình (1), ta thu được:

$$v_r = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}z(z - h)$$

Lấy tích phân phương trình (2) theo z, ta có:

$$u = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^h rv_r\,dz = -\frac{h^3}{12\eta r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)$$

Từ đó

$$p = p_0 + \frac{3\eta u}{h^3}\left(R^2 - r^2\right)$$

Lực cản toàn phần lên đĩa chuyển động bằng

$$F = \frac{3\pi\eta u R^4}{2h^3}.$$

§21. VẾT CHẢY TẦNG

Khi chất lỏng nhớt chuyển động dừng quanh một vật rắn, thì tại các khoảng cách lớn ở phía sau vật, dòng chảy mang một đặc tính độc đáo có thể được nghiên cứu dưới dạng tổng quát không phụ thuộc vào hình dạng của vật.

U được ký hiệu là vận tốc không đổi của dòng chất lỏng tới vật (lấy trục x dọc theo hướng của **U**, với gốc nằm tại một điểm nào đó bên trong vật có dòng chảy bao quanh). Vận tốc thực của chất lỏng tại mỗi điểm sẽ được tìm dưới dạng **U** + **v**; tại vô cùng **v** bằng không.

Người ta nhận thấy rằng, tại các khoảng cách lớn ở phía sau vật, vận tốc **v** chỉ khác không trong một vùng tương đối hẹp chung quanh trục x. Những hạt chất lỏng chuyển động dọc theo các đường dòng bao khá gần vật tại những khoảng cách tương đối nhỏ, đổ vào miền tương đối hẹp nói trên, mà ta gọi là *vết chảy tầng* [1]. Do đó, chuyển động của chất lỏng ở trong vết thực sự xoáy. Vấn đề là ở chỗ, nguồn gốc của tính xoáy khi chất lỏng nhớt bao quanh vật rắn chính là mặt vật rắn [2]. Điều này dễ hiểu, nếu nhớ lại rằng, trong hình ảnh về dòng thế bao quanh ứng với chất lỏng lý tưởng, ở trên mặt vật chỉ vận tốc pháp tuyến, chứ không phải vận tốc tiếp tuyến $\mathbf{v}_t$ của chất lỏng, bằng không. Trong khi đó điều kiện biên dính bám của chất lỏng thực đòi hỏi cả $\mathbf{v}_t$ phải bằng không. Nếu giữ lại hình ảnh về dòng thế bao quanh, thì điều này sẽ dẫn đến bước nhảy hữu hạn của $\mathbf{v}_t$, nghĩa là dẫn đến sự xuất hiện rot mặt của vận tốc. Do ảnh hưởng của tính nhớt, bước nhảy bị xói lở và tính xoáy thâm nhập vào sâu trong chất lỏng, và từ đó chuyển sang miền vết bằng cách đối lưu.

[1] Khác với vết chảy rối; (xem §37).

[2] Ngay từ §9 ta đã nêu lên sự không đúng của điều khẳng định là, đẳng thức rot **v** = 0 bảo toàn dọc theo đường dòng trên mặt vật rắn.

Còn trên các đường dòng chuyển động ở đủ xa vật, ảnh hưởng của tính nhớt không đáng kể trên toàn bộ độ dài của chúng, do đó rot của vận tốc trên các đường dòng đó (bằng không ở trong dòng tới từ vô cùng) thực tế vẫn bằng không giống như trong chất lỏng lý tưởng. Như vậy, chuyển động của chất lỏng ở xa vật có thể được coi là chuyển động thế tại mọi nơi, chỉ trừ trong miền vết.

Ta rút ra các công thức liên hệ các tính chất của chuyển động chất lỏng ở trong vết với các lực tác dụng lên vật có dòng chảy bao quanh.

Dòng xung lượng toàn phần, do chất lỏng mang qua một mặt kín nào đó bao quanh vật, bằng tích phân của tenxơ dòng xung lượng lấy theo mặt đó:

$$\oint \Pi_{ik} df_k$$

Các thành phần của tenxơ Π_{ik} có dạng

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho(U_i + v_i)(U_k + v_k)$$

Ta viết áp suất dưới dạng $p = p_\infty + p'$, p_∞ là áp suất tại vô cùng. Lấy tích phân số hạng không đổi $p_\infty\delta_{ik} + \rho U_i U_k$, ta được giá trị không, vì đối với một mặt kín, tích phân vectơ $\oint d\mathbf{f} = 0$. Cả tích phân $\int \rho v_k df_k$ cũng bằng không: vì khối lượng toàn phần của chất lỏng ở trong thể tích đang xét không đổi, nên lưu lượng toàn phần của chất lỏng gửi qua mặt bao thể tích đó phải bằng không. Cuối cùng, ở xa vật vận tốc $\mathbf{v}$ nhỏ so với U. Do đó, nếu mặt đang xét ở cách vật đủ xa, thì trên mặt đó ta có thể bỏ qua số hạng $\rho v_i v_k$ so với $\rho U_k v_i$ ở trong Π_{ik}. Như vậy, dòng xung lượng toàn phần bằng tích phân

$$\oint (p'\delta_{ik} + \rho U_k v_i) df_k$$

Bây giờ giả sử thể tích chất lỏng đang xét là thể tích được chứa giữa hai mặt phẳng vô hạn x = const, hai mặt phẳng này ở đủ xa vật, một ở phía trước vật, còn một ở phía sau vật. Khi xác định dòng xung lượng toàn phần, tích phân lấy theo mặt "bên" tại vô cùng bằng không (vì tại vô cùng $p' = 0$, $\mathbf{v} = 0$), do đó chỉ cần lấy tích phân theo cả hai mặt phẳng ngang đã nêu ở trên. Dòng xung lượng thu được như vậy rõ ràng bằng hiệu giữa dòng xung lượng toàn phần đi "vào" qua tiết diện phía trước và dòng xung lượng toàn phần đi "ra" qua tiết diện phía sau. Nhưng

hiệu này cũng là lượng xung lượng đi từ chất lỏng vào trong vật trong một đơn vị thời gian, nghĩa là bằng lực **F** tác dụng lên vật có dòng chảy bao quanh.

Như vậy, các thành phần của lực **F** đều bằng các hiệu

$$F_x = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) (p' + \rho U v_x) dydz$$

$$F_y = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) \rho U v_y dydz, \quad F_z = \left(\int\limits_{x=x_2} - \int\limits_{x=x_1} \right) \rho U v_z dydz$$

trong đó tích phân được lấy trên các mặt phẳng vô hạn $x = x_1$ (ở xa về phía sau) và $x = x_2$ (ở xa về phía trước). Trước hết ta xét biểu thức của F_x.

Ở bên ngoài vết chuyển động là dòng thế, do đó phương trình Bernoulli được viết

$$p + \frac{\rho}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = \text{const} \equiv p_o + \frac{\rho}{2} U^2$$

hay bỏ qua số hạng $\rho v^2/2$ so với $\rho \mathbf{U}\mathbf{v}$.

$$p' = -\rho U v_x$$

Trong phép gần đúng này, ta nhận thấy biểu thức dưới dấu tích phân trong F_x bằng không ở trong toàn miền bên ngoài vết. Nói một cách khác, tích phân trên mặt phẳng $x = x_2$ (đi qua phía trước vật và hoàn toàn không cắt vết) hoàn toàn biến mất; còn trong tích phân lấy trên mặt phẳng sau $x = x_1$, ta chỉ cần lấy tích phân theo diện tích của tiết diện vết. Nhưng ở bên trong vết, độ biến thiên của áp suất p' có bậc của đại lượng ρv^2, nghĩa là nhỏ so với $\rho U v_x$. Như vậy, ta đi đến kết quả cuối cùng là, lực cản tác dụng lên vật theo chiều bao quanh bằng

$$F_x = -\rho U \int v_x \, dy \, dz, \tag{21-1}$$

trong đó tích phân được lấy theo diện tích tiết diện ngang của vết ở xa vật. Dĩ nhiên, vận tốc v_x ở trong vết có giá trị âm – chất lỏng ở đây chuyển động chậm hơn so với khi nó chuyển động không có vật. Cần chú

ý là, tích phân (21-1) xác định "độ thiếu hụt" của lưu lượng chất lỏng qua tiết diện của vết so với lưu lượng chất lỏng khi không có vật.

Bây giờ ta xét lực (với các thành phần F_y, F_z)có xu hướng đẩy vật theo phương ngang. Lực này được gọi là *lực nâng*. Ở bên ngoài vết, chuyển động là dòng thế, ta có thể viết $v_y = \partial\varphi/\partial y$, $v_z = \partial\varphi/\partial z$; tích phân lấy trên mặt phẳng $x = x_2$ tại mọi nơi ở bên ngoài vết đều bằng không:

$$\int v_y dydz = \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dydz = 0, \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} dydz = 0$$

vì ở vô cùng $\varphi = 0$. Như vậy, ta thu được cho lực nâng biểu thức

$$F_y = -\rho U \int v_y dydz, \quad F_z = -\rho U \int v_z dydz \tag{21-2}$$

Việc lấy tích phân trong các biểu thức này thực tế cũng chỉ tiến hành ở trên diện tích của tiết diện vết. Nếu vật bao quanh bởi dòng chảy có một trục đối xứng (không nhất thiết phải đối xứng trục hoàn toàn) và nếu dòng chảy xảy ra theo phương của trục đó, thì chuyển động của chất lỏng chung quanh vật cũng có một trục đối xứng. Trong trường hợp này lực nâng rõ ràng không có mặt.

Ta trở lại chuyển động của chất lỏng ở trong vết. Việc đánh giá các số hạng khác nhau ở trong phương trình Navier - Stokes chứng tỏ rằng, nói chung, có thể bỏ qua số hạng $\nu\Delta\mathbf{v}$ tại các khoảng cách r tính từ vật thỏa mãn điều kiện $rU/\nu >> 1$ (so sánh với việc rút ra điều kiện ngược lại (20-16)), đó chính là những khoảng cách mà tại đó chuyển động của chất lỏng (bên ngoài vết) có thể được coi là chuyển động thế. Tuy nhiên, một sự bỏ qua như vậy không thể chấp nhận được ngay tại những khoảng cách đó ở miền bên trong vết, vì ở đây các đạo hàm ngang $\partial^2 v/\partial y^2$, $\partial^2 v/\partial z^2$ đều lớn so với đạo hàm dọc $\partial^2 v/\partial x^2$

Giả sử Y là bậc độ lớn của độ rộng vết, nghĩa là của các khoảng cách từ trục x, tại đó vận tốc v giảm đáng kể. Khi đó bậc của các số hạng trong phương trình Navier - Stokes:

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \sim U\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{Uv}{x}, \quad \nu\Delta\mathbf{v} \sim \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{\nu v}{Y^2}$$

So sánh hai đại lượng đó, ta thu được:

$$Y = (\nu x / U)^{1/2} \tag{21-3}$$

Thực vậy, đại lượng này nhỏ so với x, vì theo điều kiện giả thiết $Ux/\nu >> 1$. Như vậy, độ rộng của vết chảy tầng (*laminar wake*. ND) giảm theo căn bậc hai của khoảng cách tính từ vật.

Để xác định quy luật giảm của vận tốc trong vết, ta trở lại công thức (21-1). Miền lấy tích phân trong công thức này ~ Y^2. Do đó việc ước lượng tích phân cho ta $F_x \sim \rho U v Y^2$, và nếu dùng hệ thức (21-3), ta sẽ thu được định luật cần tìm:

$$v \sim F_x/\rho\nu x \tag{21-4}$$

Chuyển động bên trong vết

Trong phương trình Navier - Stokes cho chuyển động dừng

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} \tag{21-5}$$

ở xa vật, ta dùng phép gần đúng Oseen – thay số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ bằng $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{v}$ (so sánh với (20-17)). Ngoài ra, ở trong miền bên trong vết có thể bỏ qua đạo hàm theo tọa độ dọc x so với các đạo hàm ngang ở trong $\Delta\mathbf{v}$. Như vậy, ta xuất phát từ phương trình

$$U\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial z^2}\right) \tag{21-6}$$

Ta tìm nghiệm của nó dưới dạng $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, trong đó $\mathbf{v}_1$ là nghiệm của phương trình

$$U\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{v}_1}{\partial z^2}\right) \tag{21-7}$$

Còn đại lượng $\mathbf{v}_2$ liên quan đến số hạng $-\nabla(p/\rho)$ trong phương trình xuất phát (21-6) có thể được tìm dưới dạng gradiên $\nabla\Phi$ của một vô hướng nào đó [1]. Vì ở xa vật, các đạo hàm đối với x đều nhỏ so với các đạo hàm theo y và z, nên trong phép gần đúng đang xét cần phải bỏ qua số hạng $\partial\Phi/\partial x$ ở trong v_x, nghĩa là ta coi $v_x = v_{1x}$.

Như vậy, phương trình cho v_x có dạng

[1] Tiếp theo trong tiết này thế vận tốc được ký hiệu bằng Φ, khác với góc phương vị φ của tọa độ cầu.

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \tag{21-8}$$

Phương trình này cùng dạng với phương trình truyền nhiệt hai chiều, x/U giữ vai trò của thời gian, còn độ nhớt ν giữ vai trò hệ số dẫn nhiệt độ. Nghiệm giảm khi y và z tăng (với x đã cho) và tại giới hạn $x \to 0$ nghiệm dẫn tới một bề rộng vô cùng nhỏ của vết (trong phép gần đúng đang xét, các khoảng cách có bậc các kích thước của vật đều được coi là nhỏ) có dạng (xem §51):

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu x}\exp\left\{-\frac{U\left(y^2+z^2\right)}{4\nu x}\right\} \tag{21-9}$$

Hệ số trong công thức này được biểu diễn qua lực cản dựa vào công thức (21-1), trong đó tích phân có thể lấy mở rộng theo toàn bộ mặt phẳng y z, do tích phân hội tụ nhanh. Nếu thay cho các tọa độ đêcác, ta đưa vào các tọa độ cầu r, θ, φ với trục cực trùng với trục x, thì các giá trị của góc cực $\theta << 1$ sẽ tương ứng với miền vết ($\sqrt{y^2+z^2} << x$). Công thức (21-9) trong các tọa độ này có dạng

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi\rho\nu r}\exp\left\{-\frac{Ur\theta^2}{4\nu}\right\} \tag{21-10}$$

Số hạng đã bỏ qua $\partial\Phi/\partial x$ (với Φ từ công thức (21-12) thu được dưới đây) sẽ cho ở trong v_x một số hạng chứa độ nhỏ bổ sung ~ 0 .

Cả v_{1y} và v_{1z} cũng phải có dạng như (21-9). Ta chọn chiều của lực nâng làm trục y (do đó $F_z = 0$). Theo (21-2) và chú ý rằng, tại vô cùng $\Phi = 0$, ta có

$$\int v_y dydz = \int\left(v_{1y} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dydz = \int v_{1y}dydz = -\frac{F_y}{\rho U}$$

$$\int v_{1z}dydz = 0$$

Do đó, rõ ràng là v_{1y} khác với (21-9) ở chỗ thay F_x bằng F_y, còn $v_{1z} = 0$. Như vậy, ta tìm được

$$v_y = -\frac{F_y}{4\pi\rho\nu x}\exp\left\{-\frac{U\left(y^2+z^2\right)}{4\nu x}\right\} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{21-11}$$

Để xác định hàm Φ ta sẽ tiến hành như sau: ta viết phương trình liên tục, trong đó bỏ qua đạo hàm dọc $\partial v_x/\partial x$:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \approx \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = 0$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này theo x và dùng phương trình (21-7) cho v_{1y}, ta thu được:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} \right) = -\frac{\nu}{U} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}$$

Từ đó

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}$$

Cuối cùng, nếu thay vào biểu thức cho v_{1y} số hạng thứ nhất trong (21-11) và lấy tích phân theo x, ta thu được:

$$\Phi = -\frac{F_y}{4\pi\rho U} \frac{y}{y^2 + z^2} \left\{ \exp\left[-\frac{U\left(y^2 + z^2\right)}{4\nu x} \right] - 1 \right\} \qquad (21\text{-}12)$$

(Hằng số tích phân được chọn sao cho Φ vẫn còn hữu hạn với $y = z = 0$). Trong các tọa độ cầu (với độ phương vị φ tính từ mặt phẳng x,y):

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\rho U} \frac{\cos\varphi}{r\theta} \left\{ \exp\left[-\frac{Ur\theta^2}{4\nu} \right] - 1 \right\}. \qquad (21\text{-}13)$$

Từ (21-11-13), ta thấy rằng v_y và v_z, khác với v_x, ngoài các đại lượng giảm theo hàm mũ khi θ tăng (với r đã cho) còn chứa cả các số hạng giảm kém nhanh hơn nhiều khi đi xa khỏi "trục" của vết (giảm như $1/\theta^2$).

Nếu không có lực nâng thì chuyển động của chất lỏng bên trong vết có tính đối xứng trục $\Phi \equiv 0$ [1].

[1] Đặc biệt, một chuyển động như thế có thể là vết ở sau quả cầu có dòng chảy bao quanh. Trong mối quan hệ này, ta nhận thấy các công thức đã thu được (như công thức (21-16) dưới đây) phù hợp với sự phân bố các vận tốc (20-24) với dòng chảy bao quanh có các số Reynolds nhỏ; trong trường hợp này toàn bộ hình ảnh đã mô tả dịch chuyển đi những khoảng cách rất lớn $r >> l$ (l là các kích thước của vật).

Chuyển động ở bên ngoài vết

Ở bên ngoài vết, dòng chảy có thể được coi là chuyển động thế. Vì chỉ xét những số hạng giảm kém nhanh nhất tại các khoảng cách lớn ở trong thế Φ, nên chúng ta tìm nghiệm của phương trình Laplace

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

dưới dạng tổng hai số hạng:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos\varphi}{r}f(\theta). \qquad (21\text{-}14)$$

trong đó, số hạng thứ nhất đối xứng cầu và có liên quan đến lực F_x, còn số hạng thứ hai đối xứng qua mặt phẳng x, y và có liên quan đến lực F_y.

Đối với hàm $f(\theta)$ ta thu được phương trình

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0.$$

Nghiệm của phương trình này hữu hạn khi $\theta \to \pi$, có dạng

$$f = b\,\mathrm{cotg}\frac{\theta}{2}. \qquad (21\text{-}15)$$

Hệ số b có thể được xác định từ điều kiện nối với nghiệm ở bên trong vết. Vấn đề là ở chỗ, công thức (21-13) thuộc về miền các góc $\theta << 1$, còn nghiệm (21-14) thuộc về miền $\theta >> (\nu/Ur)^{1/2}$. Các miền này phủ lên nhau khi $(\nu/Ur)^{1/2} << \theta << 1$, thêm vào đó ở đây (21-13) rút về

$$\Phi = \frac{F_y}{4\pi\rho U}\frac{\cos\varphi}{r\theta}$$

Còn số hạng thứ hai trong (21-14) rút về $2b\dfrac{\cos\varphi}{r\theta}$. So sánh cả hai biểu thức, ta nhận thấy rằng, cần phải đặt $b = F_y/4\pi\rho U$.

Để xác định hệ số a trong biểu thức (21-14), ta có nhận xét là, lưu lượng toàn phần của chất lỏng qua hình cầu S lớn bán kính r (cũng như qua mọi mặt kín) phải bằng không. Lượng chất lỏng đi qua phần S_o của hình cầu này, là diện tích của tiết diện vết, được xác định bằng:

$$-\int_{S_0} v_x dydz = \frac{F_x}{\rho U}$$

Do đó cũng lượng chất lỏng này phải đi ra khỏi toàn bộ diện tích còn lại của quả cầu, nghĩa là phải có

$$\int_{S} \mathbf{v}d\mathbf{f} = \frac{F_x}{\rho U}$$

Vì diện tích S_0 nhỏ so với toàn bộ diện tích S, nên có thể thay thế điều kiện này bằng yêu cầu sau

$$\int_{S} \mathbf{v}d\mathbf{f} = \int_{S} \nabla\Phi d\mathbf{f} = -4\pi a = \frac{F_x}{\rho U} \qquad (21\text{-}16)$$

Từ đó $a = -F_x/4\pi\rho U$

Như vậy, tập hợp tất cả các biểu thức đã thu được, ta tìm được công thức sau cho thế vận tốc:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\rho U r}\left(-F_x + F_y \cos\varphi \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}\right). \qquad (21\text{-}17)$$

Chính công thức này xác định chuyển động ở trong toàn bộ miền bên ngoài vết ở xa vật. Thế giảm với khoảng cách như $1/r$. Phù hợp với điều đó, vận tốc v giảm như $1/r^2$. Khi không có lực nâng, chuyển động ở bên ngoài vết có tính đối xứng trục.

§22. ĐỘ NHỚT CỦA CÁC THỂ HUYỀN PHÙ

Chất lỏng, trong đó có một số hạt rắn nhỏ lơ lửng (thể huyền phù), có thể được coi như một môi trường đồng chất, nếu ta quan tâm đến hiện tượng đặc trưng bởi các khoảng cách lớn so với kích thước của các hạt. Một môi trường như thế sẽ có độ nhớt hiệu dụng η khác với độ nhớt η_0 của chất lỏng gốc ban đầu. Độ nhớt này có thể tính được khi nồng độ của các hạt lơ lửng nhỏ (nghĩa là thể tích thành phần của tất cả các hạt được giả thiết là nhỏ so với thể tích của toàn bộ chất lỏng). Các phép tính sẽ tương đối đơn giản cho trường hợp các hạt hình cầu (*A. Einstein*, 1906).

Coi như một bài toán bổ trợ, trước hết cần khảo sát ảnh hưởng của một quả cầu rắn nhỏ, nhúng chìm trong chất lỏng, lên một dòng chảy có

gradiên vận tốc không đổi. Giả sử dòng chảy, không bị nhiễu động bởi quả cầu, được mô tả bởi sự phân bố bậc nhất của các vận tốc

$$v_i^{(o)} = \alpha_{ik} x_k, \tag{22-1}$$

trong đó α_{ik} là tenxơ đối xứng không đổi. Khi đó áp suất trong chất lỏng không đổi: $p^{(o)} = \text{const}$; dưới đây ta sẽ quy ước tính áp suất từ giá trị không đổi đó. Do chất lỏng là không nén được ($\text{div}\, \mathbf{v}^{(o)} = 0$), vết của α_{ik} phải bằng không:

$$\alpha_{ik} = 0 \tag{22-2}$$

Giả sử bây giờ có một quả cầu bán kính R đặt tại gốc tọa độ. Vận tốc chất lỏng đã bị thay đổi bởi quả cầu đó được ký hiệu bằng $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(o)} + \mathbf{v}^{(1)}$; tại vô cùng $\mathbf{v}^{(1)}$ phải bằng không, nhưng ở gần quả cầu, $\mathbf{v}^{(1)}$ tuyệt nhiên không thể nhỏ so với $\mathbf{v}^{(o)}$. Vì dòng là đối xứng, nên rõ ràng quả cầu vẫn đứng yên, do đó điều kiện biên là $\mathbf{v} = 0$ với $r = R$.

Nghiệm cần tìm của các phương trình chuyển động (20-1-3) có thể được suy ra trực tiếp từ nghiệm (20-4) đã tìm được ở §20 (với hàm f được xác định bởi (20-6)), nếu ta chú ý rằng các đạo hàm của (20-4) theo các tọa độ cũng là những nghiệm. Trong trường hợp đã cho, ta tìm nghiệm phụ thuộc vào các thành phần của tenxơ α_{ik} như các thông số (mà không phụ thuộc vào vectơ $\mathbf{u}$, như ở §20). Các đại lượng đó là

$$\mathbf{v}^{(1)} = \text{rot rot}\,(\alpha \nabla f) \qquad p = \eta_o \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial x_i \partial x_k}$$

trong đó $(\alpha \nabla f)$ ký hiệu vectơ có các thành phần $\alpha_{ik} \cdot \partial f / \partial x_k$. Khai triển các đẳng thức này và chọn các hằng số a và b ở trong hàm $f = ar + b/r$ sao cho thỏa mãn các điều kiện biên trên mặt quả cầu, kết quả ta sẽ thu được các công thức sau cho vận tốc và áp suất:

$$v_i^{(1)} = \frac{5}{2}\left(\frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2}\right)\alpha_{kl} n_i n_k n_l - \frac{R^5}{r^4}\alpha_{ik} n_k, \tag{22-3}$$

$$p = -5\eta_o \frac{R^3}{r^2}\alpha_{ik} n_i n_k, \tag{22-4}$$

($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương của bán kính vectơ).

Bây giờ trở lại chính vấn đề xác định độ nhớt hiệu dụng của huyền phù, ta tính giá trị trung bình (theo toàn bộ thể tích) và tenxơ mật độ

thông lượng xung lượng Π_{ik}. Trong phép gần đúng bậc nhất đối với vận tốc nó trùng với tenxơ ứng suất $-\sigma_{ik}$:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V}\int \sigma_{ik} dV.$$

Ở đây tích phân có thể được lấy theo toàn thể tích V của hình cầu có bán kính lớn, mà sau đó người ta cho tiến đến vô cùng.

Trước hết, ta viết đồng nhất thức:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_o\left(\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_i}\right) - \bar{p}\delta_{ik} + \\ + \frac{1}{V}\int\left\{\sigma_{ik} - \eta_o\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + p\delta_{ik}\right\}dV. \tag{22-5}$$

Trong tích phân trên, biểu thức dưới dấu tích phân chỉ khác không ở bên trong các quả cầu rắn; vì nồng độ của các hạt huyền phù được giả thiết là nhỏ, nên tích phân có thể được tính cho một quả cầu riêng lẻ, coi như các quả cầu khác hoàn toàn không có, sau đó nhân kết quả với nồng độ của n hạt huyền phù (số quả cầu trong một đơn vị thể tích). Phép tính trực tiếp cho một tích phân như thế đòi hỏi phải nghiên cứu các ứng suất nội ở trong các quả cầu. Tuy nhiên, ta có thể khắc phục khó khăn này bằng cách biến đổi tích phân lấy theo thể tích thành tích phân lấy theo mặt của quả cầu ở xa vô cùng, nằm hoàn toàn ở trong chất lỏng. Muốn vậy, ta có nhận xét là, do các phương trình chuyển động $\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} = 0$, nên có đồng nhất thức

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}(\sigma_{il} x_k);$$

do đó, sự biến đổi tích phân khối thành tích phân mặt cho

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_o\left(\frac{\overline{\partial v_i}}{\partial x_k} + \frac{\overline{\partial v_k}}{\partial x_i}\right) + n\oint\left\{\sigma_{il} x_k df_l - \eta_o(v_i df_k + v_k df_i)\right\}$$

Chúng ta đã bỏ qua số hạng chứa $\bar{p}$, vì áp suất trung bình nhất thiết phải bằng không; (thực vậy, $\bar{p}$ là một vô hướng, nó phải được xác định

bởi một tổ hợp tuyến tính của các thành phần của α_{ik}; nhưng vô hướng duy nhất thuộc loại đó là $\alpha_{ii} = 0$).

Khi tính tích phân theo hình cầu có bán kính rất lớn, trong biểu thức (22-3) cho vận tốc, tất nhiên cần giữ lại các số hạng $\sim 1/r^2$. Phép tính đơn giản cho ta giá trị của tích phân đó bằng

$$n\eta_o . 20\pi R^3 \left\{ 5\alpha_{lm} \overline{n_i n_k n_l n_m} - \alpha_{il} \overline{n_k n_l} \right\},$$

ở đây gạch ngang là ký hiệu việc lấy trung bình theo các hướng của vectơ đơn vị **n**. Tiến hành việc lấy trung bình [1], cuối cùng ta thu được:

$$\bar{\sigma}_{ik} = \eta_o \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v_k}{\partial x_i}} \right) + 5\eta_o \alpha_{ik} \frac{4\pi R^3}{3} n \qquad (22\text{-}6)$$

Sau khi thay $\mathbf{v}^{(0)}$ lấy từ (22-1) vào trong số hạng thứ nhất của (22-6), ta được $2\eta_o \alpha_{ik}$; còn số hạng có độ bé bậc một ở trong số hạng đó đồng nhất bằng không sau khi lấy trung bình theo các hướng của **n** (đúng phải như vậy, vì tất cả hiệu ứng được chứa trong tích phân đã tách ra trong (22-5)). Do đó số hiệu chính tỷ đối cần tìm trong độ nhớt hiệu dụng của thể huyền phù η được xác định bằng tỷ số giữa số hạng thứ hai trong (22-6) và số hạng thứ nhất. Như vậy, ta thu được

$$\eta = \eta_o \left(1 + \frac{5}{2} \varphi \right), \qquad \varphi = \frac{4\pi R^3}{3} n \qquad (22\text{-}7)$$

trong đó φ là tỷ số nhỏ giữa tổng thể tích của tất cả các quả cầu và thể tích toàn phần của thể huyền phù.

Ngay đối với thể huyền phù với các hạt dưới dạng elipxôit tròn xoay, các phép tính tương tự và các kết quả cuối cùng đã trở nên rất cồng kềnh [2]. Để minh họa, ta nêu ra các giá trị bằng số của hệ số bổ chính A

[1] Các giá trị trung bình cần tìm của các tích những thành phần của vectơ đơn vị là các tenxơ đối xứng, các tenxơ này có thể được thành lập chỉ từ các tenxơ đơn vị δ_{ik}. Do đó, ta dễ dàng tìm được

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik} \qquad \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right).$$

[2] Trong dòng chảy của thể huyền phù gồm các hạt có dạng không phải hình cầu, sự có mặt của gradiên tốc độ có tác động định hướng đến các hạt. Do ảnh hưởng của tác động đồng thời gây bởi các lực thủy động lực có định hướng và của chuyển động Brown quay không định hướng, một sự phân bố dị hướng các →

trong công thức

$$\eta = \eta_0(1 + A\varphi), \quad \varphi = \frac{4\pi a b^2}{3} n$$

cho một số các giá trị của tỷ số a/b (a và $b = c$ là các bán trục của các êlipxôit):

a/b = 0,1	0,2	0,5	1,0	2	5	10
A = 8,04	4,71	2,85	2,5	2,91	5,81	13,6

Số bổ chính tăng cả về hai phía của giá trị $a/b = 1$, ứng với các hạt hình cầu.

§23. NGHIỆM CHÍNH XÁC CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG NHỚT

Nếu các số hạng phi tuyến trong các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt không đồng nhất bằng không, thì việc giải các phương trình đó sẽ gặp những khó khăn lớn, và các nghiệm chính xác chỉ có thể thu được trong một số rất nhỏ trường hợp. Các nghiệm như thế rất đáng chú ý – nếu như không phải bao giờ cũng có ý nghĩa vật lý (do sự xuất hiện thực tế của tính chảy rối với các giá trị đủ lớn của số Reynolds), thì trong mọi trường hợp, các nghiệm như thế cũng có ý nghĩa về mặt phương pháp luận.

Dưới đây ta nêu ra những thí dụ về các nghiệm chính xác cho các phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt.

Sự kéo theo chất lỏng bởi đĩa quay

1) Một đĩa phẳng vô hạn nhúng trong một chất lỏng nhớt quay đều quanh trục của nó. Tìm chuyển động của chất lỏng gây bởi chuyển động đó của đĩa (*T. Von. Kármán*, 1921).

Chọn mặt phẳng của đĩa làm mặt phẳng $z = 0$ của hệ tọa độ trụ. Đĩa quay quanh trục z với vận tốc góc Ω. Chúng ta xét chất lỏng về phía trục

→ hạt theo sự định hướng của chúng trong không gian được hình thành. Tuy nhiên, hiệu ứng này phải không được xét đến để tính sự bổ chính cho độ nhớt η: sự dị hướng của sự phân bố định hướng bản thân nó phụ thuộc vào các gradiên vận tốc (trong phép gần đúng bậc nhất - tuyến tính) và việc xét đến sự dị hướng đó chỉ làm xuất hiện trong tenxơ ứng suất các số hạng phi tuyến theo các gradiên.

$z > 0$. Các điều kiện biên có dạng:

$$v_r = 0 \quad v_\varphi = \Omega r \quad v_z = 0 \quad \text{với} \quad z = 0$$

$$v_r = 0 \quad v_\varphi = 0 \qquad\qquad \text{với} \quad z = \infty$$

Vận tốc trục v_z không triệt tiêu khi $z \to \infty$, nhưng tiến đến một giới hạn âm không đổi, được xác định từ chính các phương trình chuyển động. Vấn đề là ở chỗ, chất lỏng chuyển động xuyên tâm theo hướng từ trục quay ra, đặc biệt ở gần đĩa, nên để thoả mãn tính liên tục trong chất lỏng, cần phải có một thông lượng thẳng đứng không đổi từ vô cùng tới đĩa. Nghiệm của các phương trình chuyển động được tìm dưới dạng

$$v_r = r\Omega F(z_1) ; \quad v_\varphi = r\Omega G(z_1) ; \quad v_z = \sqrt{\nu\Omega}\, H(z_1);$$

$$p = -\rho\nu\Omega P(z_1), \text{ trong đó } \quad z_1 = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\, z \tag{23-1}$$

Trong sự phân bố này, các vận tốc xuyên tâm và vận tốc tròn tỷ lệ với khoảng cách tính từ trục quay của đĩa, còn vận tốc thẳng đứng thì không đổi trên mỗi mặt phẳng nằm ngang.

Thay vào các phương trình Navier - Stokes và phương trình liên tục, ta thu được các phương trình sau cho các hàm F, G, H, P:

$$\begin{gathered} F^2 - G^2 + F'H = F'', \quad 2FG + G'H = G''' \\ HH' = P' + H'', \quad 2F + H' = 0 \end{gathered} \tag{23-2}$$

(Các dấu lấy đạo hàm được xét cho z_1) với các điều kiện giới hạn:

$$F = 0, \; G = 1, \; H = 0 \quad \text{với} \quad z_1 = 0$$

$$F = 0, \; G = 0 \qquad\qquad \text{với} \quad z_1 = \infty \tag{23-3}$$

Như vậy, ta đã đưa việc giải bài toán về việc lấy tích phân một hệ các phương trình vi phân thông thường một biến, việc lấy tích phân có thể được tiến hành bằng phương pháp số. Hình 7 biểu diễn những đồ thị đã thu được theo phương pháp đó cho các hàm F, G, $-H$. Giá trị giới hạn của hàm H khi $z_1 \to \infty$ bằng – 0,886 ; nói một cách khác, vận tốc của dòng chất lỏng đi từ vô cùng tới đĩa bằng

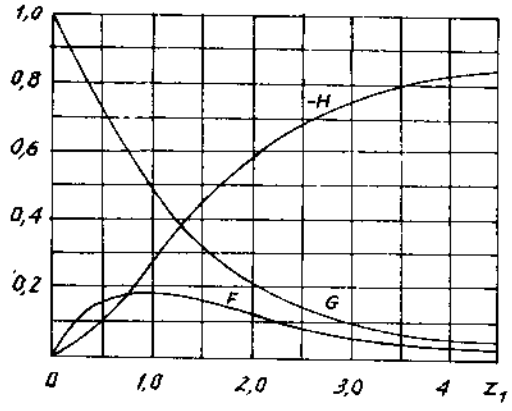
$$v_z(\infty) = -0{,}886\sqrt{\nu\Omega}$$

Lực ma sát tác dụng lên một đơn vị diện tích của đĩa theo phương vuông góc với bán kính của nó bằng $\sigma_{z\varphi} = \eta \left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}$. Nếu bỏ qua hiệu ứng gây bởi các bờ của đĩa, ta có thể viết được mômen các lực ma sát tác dụng lên một đĩa có bán kính R lớn nhưng hữu hạn dưới dạng

$$M = 2.\int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi} dr =$$

$$= \pi R^4 \rho\sqrt{\nu\Omega^3} G'(0)$$

(thừa số 2 đứng trước tích phân xuất hiện là do đĩa có hai mặt nhúng trong chất lỏng). Phép tính hằng số cho hàm G dẫn tới công thức

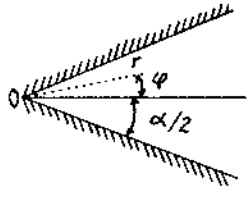


Hình 7

$$M = -1{,}94.R^4\rho\sqrt{\nu\Omega^3} \qquad (23\text{-}4)$$

Dòng chảy trong ống khuếch tán và ống thắt dần

Xác định chuyển động dừng của chất lỏng ở giữa hai thành phẳng lập với nhau thành một góc nào đó (hình 8 biểu diễn mặt cắt ngang của hai mặt phẳng); dòng chất lỏng chảy dọc theo giao tuyến của hai mặt phẳng (*G. Hamel*, 1917).



Hình 8

Chọn các tọa độ trụ r, z, φ với trục z trùng với giao tuyến hai mặt phẳng (điểm O ở trên hình 8) và góc φ được tính theo cách đã nêu trên hình 8. Chuyển động là đều dọc theo trục z, và một cách tự nhiên ta giả thiết rằng, chuyển động hoàn toàn xuyên tâm, nghĩa là $v_\varphi = v_z = 0$, $v_r = v(r, \varphi)$. Các phương trình (15-18) cho ta

$$v\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) \qquad (23\text{-}5)$$

$$-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}=0$$
$$\frac{\partial (rv)}{\partial r}=0 \qquad (23\text{-}6)$$

Từ phương trình cuối cùng, ta suy ra rằng rv chỉ là hàm của φ. Nếu đưa vào hàm

$$u(\varphi)=\frac{1}{6\nu}rv \qquad (23\text{-}7)$$

ta thu được từ (23-6):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=\frac{12\nu^2}{r^2}\frac{du}{d\varphi}$$

Từ đó

$$\frac{p}{\rho}=\frac{12\nu^2}{r^2}u(\varphi)+f(r)$$

Thay biểu thức này vào trong (23-5), ta thu được phương trình

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+4u+6u^2=\frac{1}{6\nu^2}r^3f'(r)$$

Vế thứ nhất của phương trình này chỉ phụ thuộc vào φ, còn vế thứ hai chỉ phụ thuộc vào r, do đó hai vế phải không đổi; mỗi vế xét riêng lẻ phải là một đại lượng không đổi mà ta ký hiệu bằng $2C_1$. Như vậy:

$$f'(r)=12\nu^2C_1\frac{1}{r^3}$$

từ đó

$$f(r)=-\frac{6\nu^2C_1}{r^2}+\text{const}$$

Và cuối cùng ta thu được cho áp suất

$$\frac{p}{\rho}=\frac{6\nu^2}{r^2}(2u-C_1)+\text{const} \qquad (23\text{-}8)$$

Đối với $u(\varphi)$, ta có phương trình

$$u''+4u+6u^2=2C_1$$

Sau khi nhân phương trình trên với u' và lấy tích phân lần một, ta được

$$\frac{u'^2}{2} + 2u^2 + 2u^3 - 2C_1u - 2C_2 = 0$$

Từ phương trình này, ta rút ra:

$$2\varphi = \pm \int \frac{du}{\sqrt{-u^3 - u^2 + C_1u + C_2}} + C_3 \qquad (23\text{-}9)$$

Kết quả này xác định sự phụ thuộc cần tìm của vận tốc vào φ; từ đây hàm $u(\varphi)$ có thể biểu diễn bằng các hàm eliptic. Ba hằng số C_1, C_2, C_3 được xác định từ các điều kiện biên trên các thành

$$u\left(\pm\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \qquad (23\text{-}10)$$

Và từ điều kiện lượng chất lỏng Q (trong 1 giây) đi qua mặt cắt bất kỳ r = const phải như nhau:

$$Q = \rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} vrd\varphi = 6\nu\rho \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} ud\varphi \qquad (23\text{-}11)$$

Q có thể dương hoặc âm. Nếu $Q > 0$, thì giao tuyến của hai mặt phẳng là nguồn, nghĩa là chất lỏng chảy từ đỉnh góc ra (dòng chảy trong một *ống khuếch tán*). Nếu $Q < 0$, thì giao tuyến đó là ống thắt dần và chất lỏng chảy vào (dòng chảy trong một *ống thắt dần*). Tỷ số $|Q|/\rho\nu$ không có thứ nguyên và giữ vai trò là số Reynolds đối với chuyển động đang xét.

Trước hết ta xét dòng chảy hội tụ ($Q < 0$). Để nghiên cứu các nghiệm từ (23-9-11) ta đưa ra giả thiết (sẽ được biện luận dưới đây) cho rằng chuyển động là đối xứng đối với mặt phẳng φ = 0 (nghĩa là $u(\varphi) = u(-\varphi)$ đồng thời hàm $u(\varphi)$ âm tại mọi nơi (vận tốc tại mọi nơi đều hướng về đỉnh góc) và thay đổi đơn điệu từ giá trị 0 với $\varphi = \pm\alpha/2$ đến giá trị $-u_o$ ($u_o > 0$) với φ = 0, do đó u_o là một cực đại của $|u|$. Khi đó với $u = -u_o$ phải có $du/d\varphi = 0$, từ đó kết luận rằng $u = -u_o$ là nghiệm của đa thức bậc ba ở dưới dấu căn trong biểu thức dưới dấu tích phân của (23-9), do đó ta có thể viết:

$$-u^3 - u^2 + C_1u + C_2 = (u + u_o)\left[-u^2 - (1 - u_o)u + q\right]$$

trong đó q là một hằng số mới. Như vậy, ta có:

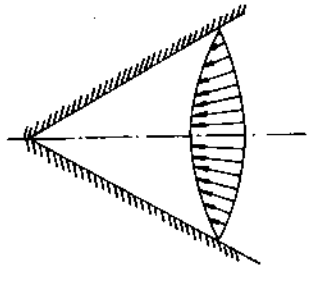
$$2\varphi = \pm \int_{-u_o}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u+u_o)\left[-u^2-(1-u_o)u+q\right]}} \qquad (23\text{-}12)$$

Các hằng số u_o và q được xác định từ các điều kiện

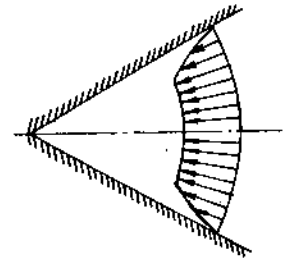
$$\alpha = \int_{-u_o}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u+u_o)\left[-u^2-(1-u_o)u+q\right]}}$$
$$\frac{R}{6} = \int_{-u_o}^{0} \frac{udu}{\sqrt{(u+u_o)\left[-u^2-(1-u_o)u+q\right]}} \qquad (23\text{-}13)$$

(trong đó $R = |Q|/\rho\nu$); hằng số q phải dương, nếu không các tích phân này sẽ trở nên phức. Có thể chứng minh hai phương trình này có các nghiệm cho u_o và q với R bất kỳ và $\alpha < \pi$. Nói một cách khác, dòng chảy (ống thắt dần) đối xứng hội tụ (hình 9) có thể xảy ra đối với mọi góc mở $\alpha < \pi$ và với mọi số Reynolds. Chúng ta xét chi tiết hơn chuyển động với các R rất lớn. Các R lớn cũng tương ứng với các giá trị lớn của u_o. Nếu viết (23-12) với ($\varphi > 0$) dưới dạng

$$2\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right) = \int_{u}^{0} \frac{du}{\sqrt{(u+u_o)\left[-u^2-(1-u_o)u+q\right]}},$$



Hình 9



Hình 10

ta nhận thấy rằng, biểu thức dưới dấu tích phân bây giờ nhỏ trong toàn bộ miền lấy tích phân, miền là $|u|$ không gần u_o. Điều đó có nghĩa là $|u|$ chỉ có thể khác u_o đáng kể đối với các φ gần với $\pm \alpha/2$, nghĩa là ở ngay

sát thành [1]. Nói một cách khác, hầu như trong toàn khoảng các góc φ, ta thu được $u \approx \text{const} = -u_o$ và như các đẳng thức (23-13) chứng tỏ, phải có $u_o = R/6\alpha$. Bản thân vận tốc v có giá trị bằng $v = |Q| / \rho\alpha r$, điều này tương ứng với dòng chảy thế, không nhớt với vận tốc không phụ thuộc vào góc và về độ lớn giảm tỷ lệ với r. Như vậy, với các số Reynolds lớn, dòng chảy ở trong ống thắt dần khác rất ít so với dòng chảy thế của chất lỏng lý tưởng. Ảnh hưởng của tính nhớt chỉ thể hiện ở trong một lớp rất mỏng gần thành. Tại đây vận tốc giảm rất nhanh từ giá trị tương ứng với dòng chảy thế đến giá trị không (hình 10).

Giả sử bây giờ $Q > 0$, nghĩa là ta xét dòng chảy khuếch tán. Trước hết, giả sử rằng: chuyển động là đối xứng đối với mặt phẳng $\varphi = 0$ và $u(\varphi)$ (bây giờ $u > 0$) biến thiên đơn điệu từ giá trị không với $\varphi = \pm \alpha/2$ đến $u = u_o > 0$ với $\varphi = 0$. Thay cho (23-13), bây giờ ta viết

$$\alpha = \int_0^{u_o} \frac{du}{\sqrt{(u_o - u)\left[u^2 + (1+u_o)u + q\right]}}$$
$$\frac{R}{6} = \int_0^{u_o} \frac{udu}{\sqrt{(u_o - u)\left[u^2 + (1+u_o)u + q\right]}} \qquad (23\text{-}14)$$

Nếu coi u_o là đã cho, thì α sẽ tăng đơn điệu khi q giảm và với $q = 0$ nó đạt giá trị khả dĩ lớn nhất:

$$\alpha_{max} = \int_0^{u_o} \frac{du}{\sqrt{u(u_o - u)(u + u_o + 1)}}$$

Mặt khác, dễ dàng thấy rằng, với q đã cho α là một hàm giảm đơn điệu của u_o. Từ đó suy ra rằng, u_o với tính cách là hàm của q với α đã cho, là một hàm giảm đơn điệu, do đó giá trị lớn nhất của nó tương ứng với $q = 0$ và được xác định bởi đẳng thức đã viết. Giá trị cực đại của u_o cũng tương ứng với giá trị cực đại của $R = R_{max}$. Bằng sự thay

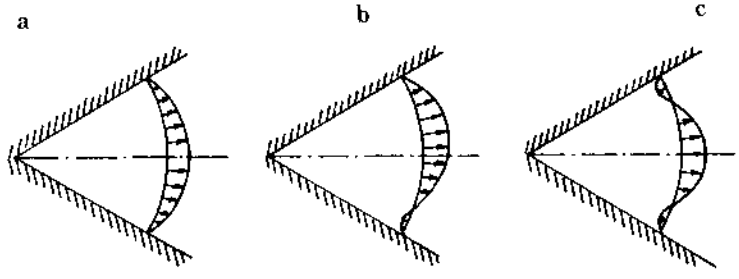
[1] Có thể xuất hiện câu hỏi, tích phân có thể trở nên không nhỏ như thế nào ngay đối với các $u \approx -u_o$. Thực tế, với các u_o rất lớn, một trong các nghiệm của tam thức $-u_2 - (1 - u_o)u + q$ cũng gần với $-u_o$, do đó, toàn bộ biểu thức dưới dấu căn có hai nghiệm gần trùng nhau, điều đó giải thích sự "gần như phân kỳ" của tích phân khi $u = -u_o$.

$$k^2 = \frac{u_o}{1+2u_o}, \quad u = u_o\cos^2 x,$$

có thể biểu diễn sự phụ thuộc của R_{max} vào α dưới dạng thông số:

$$\alpha = 2\sqrt{1-2k^2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-2k^2\sin^2 x}}$$
$$R_{max} = -6a\frac{1-k^2}{1-2k^2} + \frac{12}{\sqrt{1-2k^2}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx \qquad (23\text{-}15)$$

Như vậy, dòng chảy đối xứng phân kỳ tại mọi nơi ở trong ống khuếch tán (hình 11a) chỉ có thể xảy ra với một góc mở đã cho với các số Reynolds không vượt quá một giới hạn xác định. Với $\alpha \to \pi$ (tương ứng với $k \to 0$), $R_{max} \to 0$. Khi $\alpha \to 0$ (tương ứng với $k \to 1/\sqrt{2}$), R_{max} tiến đến vô cùng theo định luật $R_{max} = 18{,}8/\alpha$.



Hình 11

Với $R > R_{max}$, giả thiết về một dòng chảy đối xứng phân kỳ tại mọi nơi ở trong ống khuếch tán là không hợp lý, vì các điều kiện (23-14) không thể được thực hiện. Trong khoảng các góc $-\alpha/2 \le \varphi \le \alpha/2$ hàm $u(\varphi)$ phải có một số cực đại và cực tiểu. Cũng như trước các gía trị của $u(\varphi)$, tương ứng với các cực trị đó, phải là các nghiệm của đa thức dưới dấu căn. Do đó rõ ràng là, tam thức $u^3 + (1 + u_o)u + q$ (với $u_o > 0$, $q > 0$) phải có trong miền này hai nghiệm thực âm, vì thế, biểu thức dưới dấu căn có thể được viết dưới dạng

$$(u_o - u)(u + u_o')(u + u_o'')$$

trong đó $u_0 > 0$, $u_0' > 0$, $u_0'' > 0$; giả sử $u_0' < u_0''$. Rõ ràng là, hàm $u(\varphi)$ có thể biến thiên trong khoảng $u_0 \geq u \geq -u_0'$ và $u = u_0$ tương ứng với cực đại dương của $u(\varphi)$, còn $u = -u_0'$ tương ứng với cực tiểu âm. Không dừng lại để phân tích chi tiết những nghiệm đã thu được như vậy, ta có thể nói rằng, với $R > R_{max}$, trước hết có xuất hiện một nghiệm, mà đối với nghiệm này vận tốc có một cực đại và một cực tiểu, đồng thời chuyển động là không đối xứng đối với mặt phẳng $\varphi = 0$ (hình 11b). Khi R tiếp tục tăng, xuất hiện nghiệm đối xứng với một cực đại và hai cực tiểu của vận tốc (hình 11c) v.v... Như vậy, trong tất cả các nghiệm đó, ngoài những miền tại đó chất lỏng chảy ra, có những miền tại đó chất lỏng chảy vào (nhưng dĩ nhiên là sao cho lưu lượng toàn phần của chất lỏng $Q > 0$). Khi $R \to \infty$, số các cực tiểu và cực đại xen kẽ nhau tăng vô cùng, do đó không tồn tại một nghiệm giới hạn xác định nào. Cần nhấn mạnh rằng, như vậy, trong trường hợp ở trong dòng chảy khuếch tán, khi $R \to \infty$ nghiệm không tiến đến nghiệm của phương trình Euler như đã xảy ra trong dòng chảy hội tụ. Cuối cùng, ta có nhận xét là, khi R tăng thì chuyển động khuếch tán dừng thuộc loại đã mô tả ở trong dòng chảy khuếch tán, ngay sau khi đạt được $R = R_{max}$, sẽ trở nên không ổn định và xuất hiện tính chảy rối.

Luồng ngập chìm

Xác định chuyển động trong luồng chất lỏng thoát ra từ đầu một ống phun nhỏ vào trong một môi trường vô hạn chứa cùng chất lỏng đó. Đây là bài toán về luồng ngập chìm (*L. Landau*, 1943).

Chọn các tọa độ cầu r, θ, φ, với trục cực hướng theo phương vận tốc của luồng tại điểm, từ đó luồng chất lỏng được phun ra khỏi ống, điểm này được chọn làm gốc tọa độ. Chuyển động có tính đối xứng quanh trục cực, do đó $v_\varphi = 0$, còn v_r, v_θ là các hàm chỉ của r, θ. Qua mọi mặt kín bao quanh gốc (đặc biệt, mặt ở vô cùng) dòng xung lượng toàn phần "xung lượng của luồng" chảy qua đều phải như nhau. Muốn vậy, vận tốc phải giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách r tính từ gốc tọa độ, do đó

$$v_r = \frac{1}{r}F(\theta), \qquad v_\theta = \frac{1}{r}f(\theta) \tag{23-16}$$

trong đó F và f là các hàm nào đó chỉ phụ thuộc vào θ. Phương trình

liên tục có dạng:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 v_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot v_\theta\right)=0$$

Từ đó ta tìm được

$$F(\theta)=-\frac{df}{d\theta}-f\,\mathrm{ctg}\,\theta \qquad (23\text{-}17)$$

Các thành phần $\Pi_{r\varphi}$, $\Pi_{\theta\varphi}$ của tenxơ dòng xung lượng ở trong luồng đồng nhất bằng không, điều này đã thấy được từ lý do đối xứng. Ta giả thiết rằng, cả các thành phần $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\varphi\varphi}$ cũng bằng không (giả thiết này được biện hộ do ta thu được nghiệm thỏa mãn tất cả các điều kiện cần thiết). Dựa vào các biểu thức (15-20), cho các thành phần tenxơ σ_{ik} và các công thức (23-16-17), ta dễ dàng thấy được rằng, giữa các thành phần $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\varphi\varphi}$ và $\Pi_{r\theta}$ của tenxơ dòng xung lượng ở trong luồng có hệ thức sau:

$$\sin^2\theta\Pi_{r\theta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^2\theta(\Pi_{\varphi\varphi}-\Pi_{\theta\theta})\right]$$

Bởi vì các thành phần $\Pi_{\theta\theta}$, $\Pi_{\varphi\varphi}$ bằng không, nên ta suy ra cả $\Pi_{r\theta}$ cũng bằng không. Như vậy, trong tất cả các thành phần Π_{ik} khác không, chỉ có thành phần Π_{rr} phụ thuộc vào r như $1/r^{-2}$. Dễ dàng thấy rằng, khi đó các phương trình chuyển động $\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}=0$ tự động thỏa mãn.

Tiếp theo ta viết được:

$$\frac{1}{\rho}\left(\Pi_{\theta\theta}-\Pi_{\varphi\varphi}\right)=\frac{1}{r^2}(f^2+2\nu f\cot g\,\theta-2\nu f')=0$$

hay

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{f}\right)+\frac{\cot g\,\theta}{f}+\frac{1}{2\nu}=0$$

Nghiệm của phương trình có dạng

$$f=-\frac{2\nu\sin\theta}{A-\cos\theta} \qquad (23\text{-}18)$$

và dựa vào (23-17), bây giờ ta thu được cho F:

$$F = 2\nu\left\{\frac{A^2-1}{(A-\cos\theta)^2}-1\right\} \qquad (23\text{-}19)$$

Sự phân bố áp suất được xác định từ phương trình

$$\frac{1}{\rho}\Pi_{\theta\theta} = \frac{p}{\rho} + \frac{f}{r^2}(f + 2\nu f \cot g\,\theta) = 0$$

và ta thu được:

$$p - p_o \approx -\frac{4\rho\nu^2}{r^2}\frac{A\cos\theta - 1}{(A-\cos\theta)^2} \qquad (23\text{-}20)$$

(p_o là áp suất ở vô cực).

Hằng số A có thể có liên hệ với "xung lượng của luồng", nghĩa là với dòng xung lượng toàn phần ở trong luồng. Dòng xung lượng này bằng tích phân lấy trên mặt cầu:

$$P = \oint \Pi_{rr}\cos\theta\, df = 2\pi\int_0^{\pi} r^2\Pi_{rr}\cos\theta\,\sin\theta\, d\theta$$

Đại lượng Π_{rr} có giá trị bằng

$$\frac{1}{\rho}\Pi_{rr} = \frac{4\nu^2}{r^2}\left\{\frac{\left(A^2-1\right)^2}{(A-\cos\theta)^4} - \frac{A}{A-\cos\theta}\right\}$$

Phép tính tích phân cho ta kết quả

$$P = 16\pi\nu^2\rho A\left\{1 + \frac{4}{3\left(A^2-1\right)} - \frac{A}{2}\ln\frac{A+1}{A-1}\right\} \qquad (23\text{-}21)$$

Các công thức (23-16-21) giải bài toán đặt ra. Khi hằng số A thay đổi từ 1 đến ∞, xung lượng P của luồng lấy mọi giá trị từ $\infty \to 0$.

Các đường dòng được xác định bằng phương trình

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_0}$$

Lấy tích phân phương trình này ta được

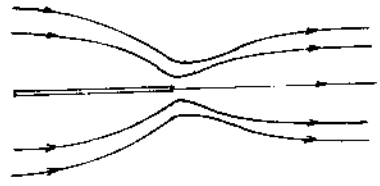
$$\frac{r\sin^2\theta}{A-\cos\theta} = \text{const} \qquad (23\text{-}22)$$

Hình 12 biểu diễn dạng đặc trưng của các đường dòng. Dòng chảy là luồng thoát ra từ gốc tọa độ và xả vào chất lỏng bao quanh. Nếu quy ước coi mặt với khoảng cách bé nhất ($r\sin\theta$) của các đường dòng tính từ trục là mặt phân giới của luồng, thì đó là mặt nón có góc mở $2\theta_o$, trong đó

$$\cos\theta_o = 1/A.$$

Trong trường hợp giới hạn của luồng yếu (xung lượng P nhỏ) ứng với A lớn, ta có từ (23-21)

$$P = 16\,\pi^2\rho/A$$



Hình 12

Ta thu được vận tốc trong trường hợp này là

$$v_\theta = -\frac{p}{8\pi\nu\rho}\frac{\sin\theta}{r}, \qquad v_r = \frac{p}{4\pi\nu\rho}\frac{\cos\theta}{r} \tag{23-23}$$

Trong trường hợp ngược lại của luồng mạnh (P lớn ứng $A \to 1$[1)]), ta có

$$A = 1 + \frac{\theta_o^2}{2}, \qquad \theta_o^2 = \frac{64\pi\nu^2\rho}{3P}$$

Đối với các góc lớn ($\theta \approx 1$), sự phân bố vận tốc được xác định bởi các công thức

$$v_\theta = -\frac{2\nu}{r}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}, \qquad v_r = -\frac{2\nu}{r} \tag{23-24}$$

còn đối với các góc bé ($\theta \approx \theta_o$), ta có:

$$v_\theta = -\frac{4\nu\theta}{\left(\theta_o^2 + \theta^2\right)r}, \qquad v_r = 8\nu\frac{\theta_o^2}{\left(\theta_o^2 + \theta^2\right)^2 r} \tag{23-25}$$

Nghiệm thu được ở đây là nghiệm chính xác đối với luồng được coi như thoát ra từ một nguồn điểm. Nếu xét đến các kích thước hữu hạn

[1)] Tuy nhiên dòng chảy trong một luồng đủ mạnh sẽ trở nên chảy rối (§36). Lưu ý rằng, thông số không thứ nguyên $(P/\rho\nu^2)^{1/2}$ giữ vai trò của số Reynolds cho luồng đang xét.

của miệng ống, thì nghiệm này là số hạng khai triển thứ nhất theo các luỹ thừa của tỷ số giữa các kích thước lỗ và khoảng cách r tính từ lỗ. Điều này có liên quan đến sự kiện là, nếu tính thông lượng toàn phần chất lỏng đi qua mặt kín bao quanh gốc tọa độ theo nghiệm đã thu được thì thông lượng đó bằng không. Nếu xét đến các số hạng khai triển tiếp sau dựa theo tỷ số đã nêu [1], thì ta sẽ thu được thông lượng khác không.

§24. CHUYỂN ĐỘNG DAO ĐỘNG TRONG CHẤT LỎNG NHỚT

Chuyển động xuất hiện trong chất lỏng nhớt, do dao động của các vật rắn nhúng trong nó gây ra, có một số đặc điểm. Để tiện cho việc nghiên cứu các đặc điểm này, ta bắt đầu xét một thí dụ đơn giản điển hình (*G.G. Stokes*, 1851). Giả sử có chất lỏng không nén được tiếp xúc với một mặt phẳng vô hạn, mặt này thực hiện ở trong mặt phẳng của mình một chuyển động dao động điều hòa đơn giản với tần số ω. Yêu cầu xác định chuyển động xuất hiện trong chất lỏng khi đó. Chọn mặt vật rắn làm mặt phẳng y, z; các miền chất lỏng tương ứng với $x > 0$. Trục y được lấy theo chiều của các dao động của mặt. Vận tốc u của mặt dao động là một hàm theo thời gian có dạng $A\cos(\omega t + \alpha)$. Để tiện lợi, nên viết một hàm như thế dưới dạng phần thực của một biểu thức phức: $u = \mathrm{Re}\{u_0 e^{-i\omega t}\}$ (nói chung hằng số u_0 là phức: $u_0 = Ae^{-i\alpha}$; bằng cách chọn gốc của thời gian một cách thích hợp, hằng số này bao giờ cũng có thể trở thành một số thực).

Chừng nào trong tính toán chỉ vận dụng các phép tính bậc nhất đối với u, thì ta có thể bỏ qua dấu Re và tiến hành tính toán như thể u là phức, sau đó có thể lấy phần thực trong kết quả cuối cùng. Như vậy, ta viết được:

$$u_y = u = u_0 e^{-i\omega t} \tag{24-1}$$

[1] Xem *Yu.B. Rumer*. Toán học và cơ học ứng dụng, 1952. T.16, tr. 155. Sách Nga. Luồng chảy tầng ngập chìm với mômen quay khác không quanh trục, do *L. Loitxianxki* khảo sát. Toán học và cơ học ứng dụng, 1953. T.17, tr. 3. Sách Nga.

Chúng ta nhớ lại rằng, các phương trình thủy động lực học của chất lỏng nhớt không nén được đối với một dòng chảy dừng đối xứng trục, trong đó vận tốc giảm theo khoảng cách như $1/r$, có thể được đưa về một phương trình vi phân tuyến tính thông thường bậc hai. Xem *Xlezkin N.A.* – Đại học Quốc Gia Maxcơva. Toán học và cơ học ứng dụng, 1954. T.18, tr. 764. Sách Nga.

Vận tốc của chất lỏng phải thỏa mãn điều kiện biên $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, nghĩa là

$$v_x = v_z = 0,\ v_y = u$$

với $x = 0$.

Vì lý do đối xứng, rõ ràng là, tất cả các đại lượng chỉ phụ thuộc vào x (và thời gian t). Do đó phương trình liên tục $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ cho ta

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

từ đó v_x = const, và theo các điều kiện biên, hằng số này phải bằng không, nghĩa là $v_x = 0$. Vì tất cả các đại lượng không phụ thuộc vào các toạ độ y, z và $v_x = 0$, nên chúng ta có một cách đồng nhất $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0$. Phương trình chuyển động (15-7) có dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \tag{24-2}$$

Phương trình này là tuyến tính. Thành phần theo trục x của nó cho ta $\partial p/\partial x = 0$, nghĩa là p = const. Tiếp thêm, do tính đối xứng, rõ ràng là vận tốc $\mathbf{v}$ tại mọi nơi đều hướng theo trục y. Với $v_y = v$, ta thu được

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{24-3}$$

(Phương trình này thuộc loại phương trình truyền nhiệt một chiều). Ta sẽ tìm nghiệm tuần hoàn theo x và t dưới dạng

$$v = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

thỏa mãn điều kiện $v = u$ với $x = 0$. Thay vào (24-3), ta được

$$i\omega = \nu k^2,\quad k = \frac{1+i}{\delta},\quad \delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \tag{24-4}$$

do đó vận tốc

$$v = u_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)} \tag{24-5}$$

(Việc chọn dấu của $\sqrt{i}$ trong (24-4) phải thỏa mãn đòi hỏi vận tốc sẽ tắt dần khi vào sâu trong chất lỏng).

Như vậy, trong chất lỏng nhớt có thể tồn tại các sóng ngang: vận tốc $v_y = v$ vuông góc với với phương truyền của sóng. Tuy nhiên, chúng có

thể giảm nhanh khi xa dần mặt vật rắn dao động đã tạo ra chúng. Các biên độ tắt dần theo quy luật hàm mũ với *độ xuyên sâu* δ [1]. Độ sâu này giảm khi tần số sóng tăng và tăng khi độ nhớt của chất lỏng tăng.

Lực ma sát tác động lên mặt vật rắn rõ ràng hướng theo trục y. Tính cho một đơn vị diện tích, lực đó bằng

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}}(i-1)u \qquad (24\text{-}6)$$

Giả thiết u_0 là thực và tách phần thực ở trong (24-6), ta thu được:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\omega\eta\rho}\, u_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Còn vận tốc của mặt dao động bằng $u = u_0 \cos\omega t$. Như vậy, giữa vận tốc và lực ma sát có độ dịch pha [2].

Cũng dễ dàng tính được cả giá trị trung bình (theo thời gian) của độ tiêu tán năng lượng trong chuyển động đang xét. Có thể tiến hành việc đó theo công thức tổng quát (16-3) ; tuy nhiên, trong trường hợp đã cho, để đơn giản hơn, ta tính độ tiêu tán cần tìm trực tiếp như công của các lực ma sát. Cụ thể là, độ tiêu tán năng lượng trong một đơn vị thời gian, tính cho một đơn vị diện tích của mặt phẳng dao động bằng giá trị trung bình của tích giữa lực σ_{xy} và vận tốc $u_y = u$:

$$-\overline{\sigma_{xy}u} = \frac{u_o^2}{2}\sqrt{\frac{\omega\eta\rho}{2}} \qquad (24\text{-}7)$$

Nó tỷ lệ với căn của tần số dao động và độ nhớt chất lỏng.

[1] Tại khoảng cách δ biên độ sóng giảm đi e lần, còn trên khoảng cách một chu kỳ không gian của sóng, nó giảm đi $e^{2\pi} \approx 540$ lần.

[2] Đối với những dao động của nửa mặt phẳng (song song với đường biên của nó) có xuất hiện một lực ma sát phụ gây bởi các hiệu ứng biên. Bài toán về chuyển động của một chất lỏng nhớt gây bởi các dao động của một nửa mặt phẳng (và cả bài toán tổng quát hơn về các dao động của một nêm có góc mở tùy ý) có thể giải được dựa vào một lớp các nghiệm của phương trình $\Delta f + k^2 f = 0$ đã được sử dụng trong lý thuyết về nhiễu xạ bởi một nêm. Ở đây, chúng tôi chỉ nêu kết quả: sự tăng của lực ma sát trên nửa mặt phẳng gây bởi hiệu ứng biên có thể được mô tả như kết quả tăng diện tích khi biên của nửa mặt phẳng dịch đi một nửa khoảng cách $\delta/2$ với δ lấy từ (24-4) (*L.Đ. Landau*, 1947).

Cũng có thể giải được dưới dạng kín cả bài toán tổng quát của một chất lỏng chuyển động do tác dụng của một mặt phẳng chuyển động (ở trong mặt phẳng của nó) theo một định luật tùy ý $u = u(t)$. Ở đây ta không tiến hành những phép tính tương ứng, vì nghiệm cần tìm của phương trình (24-3) về hình thức trùng với nghiệm của bài toán tương tự trong lý thuyết truyền nhiệt, bài toán này sẽ được xét ở §52. (và được cho bởi công thức (52-15)). Đặc biệt, lực ma sát tác dụng lên một đơn vị diện tích của mặt vật rắn được tính bởi công thức

$$\sigma_{xy} = -\sqrt{\frac{\eta\rho}{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{24-8}$$

(so sánh với (52-14)).

Bây giờ ta xét trường hợp chung của một vật dao động có hình dạng tùy ý. Trong trường hợp của mặt phẳng dao động đã nghiên cứu trước đây, số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ ở trong phương trình chuyển động của chất lỏng đồng nhất bằng không. Dĩ nhiên, đối với một mặt phẳng có hình dạng bất kỳ thì điều đó sẽ không xảy ra. Tuy nhiên, ta sẽ giả thiết số hạng này nhỏ so với các số hạng khác, do đó, vẫn có thể được bỏ qua. Các điều kiện cần thiết để có thể bỏ qua như thế sẽ được giải thích dưới đây.

Như vậy, cũng như trước, ta sẽ xuất phát từ phương trình tuyến tính (24-2). Lấy rot cả hai vế của phương trình này. Số hạng rot grad p đồng nhất bằng không, do đó ta được:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nu\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v} \tag{24-9}$$

nghĩa là rot $\mathbf{v}$ thỏa mãn một phương trình thuộc loại phương trình truyền nhiệt.

Nhưng, như trên ta đã thấy, một phương trình như thế sẽ dẫn đến sự tắt theo hàm số mũ của đại lượng mà nó mô tả. Do đó, có thể khẳng định rằng, tính xoáy tắt dần theo độ sâu trong chất lỏng. Nói một cách khác, chuyển động của chất lỏng gây bởi các dao động của vật là chuyển động xoáy ở trong một lớp nào đó bao quanh vật, nhưng nó chuyển thành chuyển động thế rất nhanh tại các khoảng cách lớn. Độ xuyên sâu của chuyển động xoáy ~ δ.

Do đó, có thể xảy ra hai trường hợp giới hạn quan trọng. Đó là δ có thể lớn hay nhỏ so với các kích thước của vật dao động trong chất lỏng. Gọi l là bậc của các kích thước này. Trước hết, ta giả sử $\delta >> l$, điều đó có nghĩa là, điều kiện $l^2\omega << \nu$ phải được thỏa mãn. Ngoài điều kiện này, ta còn giả sử số Reynolds nhỏ. Nếu a là biên độ của dao động của vật thì vận tốc của nó có bậc $a\omega$. Do đó đối với chuyển động đang xét thì số Reynolds sẽ bằng $\omega al/\nu$. Như vậy, ta giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn

$$l^2\omega << \nu, \quad \frac{\omega a l}{\nu} << 1 \tag{24-10}$$

Đó chính là trường hợp của các tần số dao động nhỏ. Nhưng nói tần số nhỏ có nghĩa là nói vận tốc thay đổi chậm theo thời gian và do đó trong phương trình chuyển động tổng quát

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}$$

có thể bỏ qua đạo hàm $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Còn số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ có thể được bỏ qua vì số Reynolds nhỏ.

Sự vắng mặt của số hạng $\partial\mathbf{v}/\partial t$ trong phương trình chuyển động có nghĩa chuyển động là dừng. Như vậy, với $\delta >> l$ thì chuyển động có thể được coi là dừng tại mỗi thời điểm đã cho. Điều đó có nghĩa là, chuyển động của chất lỏng tại mỗi thời điểm đã cho là một chuyển động (nếu như vật chuyển động đều) với vận tốc mà thực tế nó có tại thời điểm đó. Chẳng hạn, nếu nói đến những dao động của một quả cầu nhúng trong chất lỏng, với tần số thỏa mãn các bất đẳng thức (24-10) (l bây giờ là bán kính của quả cầu), thì do đó ta có thể khẳng định rằng, lực cản tác dụng lên quả cầu được xác định bởi công thức Stokes (24-14), là công thức thu được cho chuyển động đều của quả cầu với các số Reynolds nhỏ.

Bây giờ ta chuyển sang nghiên cứu trường hợp giới hạn ngược lại, khi $l >> \delta$. Để có thể lại bỏ qua số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, trong trường hợp này cần phải thực hiện đồng thời các điều kiện để biên độ các dao động của vật phải nhỏ so với các kích thước của nó

$$l^2\omega >> \nu, \quad a << l \tag{24-11}$$

(khi đó cần chú ý là số Reynolds tuyệt nhiên không được nhỏ). Thực vậy, ta đánh giá số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Toán tử $(\mathbf{v}\nabla)$ mô tả phép lấy đạo hàm theo hướng của vận tốc. Tuy nhiên, ở gần mặt của vật, vận tốc về cơ bản hướng theo phương tiếp tuyến. Theo hướng này, vận tốc chỉ thay đổi đáng kể trên những khoảng cách vào cỡ các kích thước của vật. Do đó, $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \approx v^2/l \approx a^2\omega^2/l$ (bản thân vận tốc có bậc $a\omega$) còn đạo hàm $\partial\mathbf{v}/\partial t \approx v\omega \approx a\omega^2$. So sánh hai biểu thức đó, ta nhận thấy rằng, với $a << l$, thực sự ta có $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} << \partial\mathbf{v}/\partial t$. Còn đối với các số hạng $\partial\mathbf{v}/\partial t$ và $\nu\Delta\mathbf{v}$, ta dễ dàng thấy rằng chúng có cùng bậc độ lớn.

Bây giờ ta khảo sát tính chất chuyển động của chất lỏng quanh một vật dao động khi các điều kiện (24-11) được thỏa mãn. Trong lớp mỏng ở gần mặt của vật, dòng chảy là chuyển động xoáy. Nhưng trong phần còn lại của chất lỏng, dòng chảy là chuyển động thế [1]. Do đó, tại mọi nơi, trừ lớp sát mặt vật, chuyển động của chất lỏng được mô tả bằng các phương trình

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = 0, \quad \text{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{24-12}$$

Từ đó suy ra rằng, cả $\Lambda\mathbf{v} = 0$; và do đó phương trình Navier - Stokes chuyển thành phương trình Euler. Như vậy, tại mọi nơi, trừ lớp sát mặt vật, chất lỏng chuyển động như một chất lỏng lý tưởng.

Vì lớp kề sát này mỏng, nên khi giải các phương trình (24-12) để xác định chuyển động ở trong phần còn lại của chất lỏng cần phải lấy các điều kiện biên là các điều kiện phải được thực hiện ở trên mặt của vật, nghĩa là điều kiện đòi hỏi vận tốc của chất lỏng phải bằng vận tốc của vật. Tuy nhiên, các nghiệm của các phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng không thể thỏa mãn các điều kiện đó. Chỉ có thể đòi hỏi điều kiện này cho thành phần pháp tuyến của vận tốc chất lỏng đối với mặt.

Mặc dù các phương trình (24-12) không áp dụng được cho lớp chất lỏng kề sát, nhưng vì sự phân bố các vận tốc thu được khi giải các phương

[1] Đối với các dao động của một mặt phẳng thì tại khoảng cách δ không những rot $\mathbf{v}$, mà cả bản thân vận tốc $\mathbf{v}$ đều tắt theo quy luật hàm mũ. Đó là do trong quá trình dao động, mặt phẳng không làm chất lỏng dịch chuyển; do đó, ở xa mặt phẳng chất lỏng vẫn đứng yên. Nhưng nếu các vật dao động có hình dạng khác nhau, chất lỏng sẽ bị đẩy đi, kết quả là nó sẽ thực hiện chuyển động và vận tốc của chuyển động này chỉ tắt một cách đáng kể tại những khoảng cách vào cỡ kích thước của vật.

trình đó đã thỏa mãn các điều kiện biên cần thiết cho thành phần pháp tuyến của vận tốc, do đó tiến trình thực sự của thành phần ở gần mặt không có ý nghĩa đặc biệt quan trọng. Còn đối với thành phần tiếp tuyến, khi giải các phương trình (24-12), ta sẽ thu được cho thành phần này một giá trị nào đó khác với thành phần tương ứng với vận tốc của vật, trong khi đó các vận tốc này cũng phải bằng nhau. Do đó, thành phần tiếp tuyến của vận tốc phải biến thiên nhanh ở trong lớp mỏng kề sát mặt.

Ta dễ dàng xác định được tiến trình của sự biến thiên này. Ta xét một phần nào đó của mặt vật, có các kích thước lớn so với δ, nhưng nhỏ so với kích thước của vật. Có thể coi gần đúng một phần như thế là phẳng, do đó có thể dùng các kết quả thu được ở trên đối với một mặt phẳng cho phần này. Giả sử trục x hướng theo phương pháp tuyến với phần đang xét, còn trục y theo phương tiếp tuyến với nó, trùng với hướng của thành phần tiếp tuyến của vận tốc phần tử mặt. Gọi v_y là thành phần tiếp tuyến của vận tốc chuyển động của chất lỏng đối với vật; ở trên bản thân mặt v_y phải bằng không. Cuối cùng, giả sử $v_0 e^{-i\omega t}$ là giá trị của v_y thu được khi giải phương trình (24-12). Dựa theo các kết quả thu được ở đầu tiết này, ta có thể khẳng định rằng, ở trong lớp kề sát mặt v_y giảm theo hướng đến mặt với định luật [1)]

$$v_y = v_0 e^{-i\omega t}\left[1 - e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\nu}}\right] \qquad (24\text{-}13)$$

Cuối cùng, năng lượng tiêu tán toàn phần trong một đơn vị thời gian bằng tích phân

$$\bar{E}_d = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{2}}\oint |v_0|^2\, df \qquad (24\text{-}14)$$

được lấy theo toàn bộ mặt dao động.

Trong các bài toán ở cuối tiết này, ta tính các lực cản tác dụng lên các vật khác nhau dao động trong chất lỏng nhớt. Ta có nhận xét chung sau đây về các lực đó. Nếu viết vận tốc chuyển động của vật dưới dạng phức

[1)] Sự phân bố các vận tốc (24-13) viết trong hệ quy chiếu, trong đó vật rắn đứng yên ($v_y = 0$ với $x = 0$). Do đó, cần lấy nghiệm của bài toán về dòng chảy thế bao quanh vật đứng yên làm v_n.

$u = u_o e^{-i\omega t}$, ta sẽ thu được lực cản F tỷ lệ với vận tốc u cũng dưới dạng phức $F = \beta u$, trong đó $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ là một hằng số phức; có thể đặt biểu thức này dưới dạng tổng của hai số hạng:

$$F = (\beta_1 + i\beta_2)u = \beta_1 u - \frac{\beta_2}{\omega}\dot{u} \tag{24-15}$$

tỷ lệ lần lượt với vận tốc u và gia tốc $\dot{u}$ với các hệ số thực.

Độ tiêu tán năng lượng trung bình (theo thời gian) được xác định bởi giá trị trung bình của tích giữa lực cản và vận tốc; khi đó, trước hết ta phải lấy các phần thực của các biểu thức đã viết ở trên, nghĩa là ta phải viết:

$$u = \frac{1}{2}\left(u_o e^{-i\omega t} + u_o^* e^{i\omega t}\right)$$

$$F = \frac{1}{2}\left(u_o \beta e^{-i\omega t} + u_o^* \beta^* e^{i\omega t}\right)$$

Nếu để ý rằng các giá trị trung bình của $e^{\pm 2i\omega t}$ bằng không, ta sẽ thu được

$$\overline{\dot{E}}_d = \overline{Fu} = \frac{1}{4}(\beta + \beta^*)|u_o|^2 = \frac{\beta_1}{2}|u_o|^2 \tag{24-16}$$

Như vậy, ta nhận thấy rằng, độ tiêu tán năng lượng chỉ liên quan đến với phần thực của đại lượng β; phần tương ứng (tỷ lệ với vận tốc) của lực cản (24-15) có thể được gọi là *phần tiêu tán*. Phần thứ hai của lực này, tỷ lệ với gia tốc (được xác định bằng phần ảo của β) và không có liên quan đến độ tiêu tán năng lượng, có thể được gọi là phần quán tính.

Các nhận định tương tự được xét cho mômen các lực tác dụng lên một vật thực hiện những dao động quay trong chất lỏng nhớt.

BÀI TẬP

1. Xác định lực ma sát tác dụng lên một trong hai mặt phẳng rắn song song, giữa chúng có một lớp chất lỏng nhớt, khi một trong hai mặt phẳng thực hiện chuyển động dao động ở trong mặt phẳng của nó.

Giải. Chúng ta tìm nghiệm của phương trình (24-3) dưới dạng [1)]

[1)] Trong tất cả các bài toán của tiết này, k và δ đều được xác định theo (24-4)

$$v = (A \sin kx + B \cos kx)\, e^{-i\omega t}$$

và chúng ta xác định A và B từ các điều kiện $v = u = u_0 e^{-i\omega t}$ với $x = 0$ và $v = 0$ khi $x = h$ (h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng). Kết quả ta thu được:

$$v = u \frac{\sin k(h - x)}{\sin kh}$$

Lực ma sát (trên một đơn vị diện tích) tác dụng lên mặt phẳng chuyển động bằng

$$P_{1y} = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = -ku\eta \operatorname{cotg} kh$$

và lên mặt phẳng cố định

$$P_{2y} = -\eta \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=h} = \frac{\eta k u}{\sin kh}$$

(tại mọi nơi ta hiểu ngầm là những phần thực của các biểu thức tương ứng).

2. Xác định lực ma sát tác dụng lên mặt phẳng dao động bao phủ bởi một lớp chất lỏng (bề dày h), mặt trên của lớp là tự do.

Giải. Các điều kiện biên trên mặt phẳng rắn: $v = u$ với $x = 0$, và trên mặt tự do: $\delta_{xy} = \eta\, \partial v/\partial x = 0$ với $x = h$. Vận tốc

$$v = u \frac{\cos k(h - x)}{\cos kh}$$

Lực ma sát

$$P_y = \eta \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \eta u k \operatorname{tg} kh\ .$$

3. Một đĩa phẳng bán kính R thực hiện những dao động quay quanh trục của nó và có biên độ nhỏ (góc quay của đĩa $\theta = \theta_0 \cos\omega t$, $\theta_0 << 1$). Hãy xác định mômen các lực ma sát tác dụng lên đĩa.

Giải. Đối với các dao động biên độ nhỏ, số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ ở trong phương trình chuyển động bao giờ cũng nhỏ so với $\partial \mathbf{v}/\partial t$, dù tần số ω như thế nào. Nếu $R >> \delta$, thì khi xác định sự phân bố các vận tốc, ta có thể coi mặt phẳng của đĩa là vô hạn. Chọn các tọa độ trụ có trục z trùng với trục quay và tìm nghiệm dưới dạng $v_r = v_z = 0$, $v_\varphi = v = r\Omega(z, t)$. Đối với vận tốc góc $\Omega(z,t)$ của chất lỏng, ta có phương trình

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$$

Nghiệm của các phương trình bằng $-\omega\, \theta_0 \sin \omega t$ khi $z = 0$ và triệt tiêu khi $z = \infty$, có dạng

$$\Omega = -\omega\theta_o e^{-z/\delta} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

Mômen các lực ma sát tác dụng lên hai mặt của đĩa có giá trị bằng

$$M = 2\int_0^R r 2\pi r \eta \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} dr = \omega\theta_o \pi \sqrt{\omega\rho\eta}\, R^4 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Xác định chuyển động của chất lỏng chuyển động giữa hai mặt phẳng song song, với gradiên của áp suất thay đổi theo thời gian theo quy luật điều hòa.

Giải. Chọn mặt phẳng x, z cách đều hai mặt phẳng; trục x hướng theo gradiên áp suất mà ta sẽ viết dưới dạng

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = a.e^{-i\omega t}$$

Tại mọi nơi vận tốc vẫn hướng theo trục x và được xác định bởi phương trình

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a.e^{-i\omega t} + \nu \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$$

Nghiệm của phương trình này thỏa mãn các điều kiện $v = 0$ với $y = \pm h/2$ có dạng

$$v = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}\left[1 - \frac{\cos ky}{\cos(kh/2)}\right]$$

Giá trị trung bình (theo tiết diện) của vận tốc bằng

$$\bar{v} = \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}\left[1 - \frac{2}{kh}\operatorname{tg}\frac{kh}{2}\right]$$

Với $h/\delta << 1$ thì biểu thức này trở thành

$$\bar{v} \approx a\, e^{-i\omega t}\, \frac{h^2}{12\nu}$$

kết quả này phù hợp với (17-5), còn khi $h/\delta >> 1$ thì ta sẽ nhận được

$$\bar{v} \approx \frac{ia}{\omega} e^{-i\omega t}$$

Trường hợp này phù hợp với nhận định là, vận tốc phải hầu như không đổi trên tiết diện, và chỉ thay đổi đáng kể trong một lớp mỏng kề sát mặt vật.

5. Xác định lực cản tác dụng lên một quả cầu (bán kính R) thực hiện chuyển động tịnh tiến dao động trong chất lỏng.

Giải. Ta viết vận tốc của quả cầu dưới dạng $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$. Tương tự như đã làm ở §20, ta tìm vận tốc của chất lỏng dưới dạng

$$\mathbf{v} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} f\mathbf{u}_0$$

trong đó f là hàm của r (gốc tọa độ được lấy tại tâm quả cầu ở thời điểm đã cho). Thay vào trong (24-9) và thực hiện những phép biến đổi tương tự như đã tiến hành ở §20, ta thu được phương trình

$$\Delta^2 f + \frac{i\omega}{\nu} \Delta f = 0$$

(thay cho phương trình $\Delta^2 f = 0$ của §20). Từ đó ta có:

$$\Delta f = \text{const} \frac{e^{ikr}}{r}$$

Nghiệm được chọn tắt theo hàm mũ chứ không tăng theo r. Lấy tích phân ta được:

$$\frac{df}{dt} = a \frac{e^{ikr}}{r^2} \left(r - \frac{1}{ik} \right) + \frac{b}{r^2} \tag{1}$$

(Vì chỉ có những đạo hàm f và f' xuất hiện trong vận tốc nên có thể không cần viết chính hàm f). Các hằng số a và b được xác định từ điều kiện $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ với $r = R$ và bằng

$$a = -\frac{3R}{2ik} e^{-ikR}, \qquad b = -\frac{R^3}{2} \left(1 - \frac{3}{ikR} - \frac{3}{k^2 R^2} \right) \tag{2}$$

Ta nhận thấy rằng, với các tần số lớn ($R >> \delta$) $a \to 0$, $b \to -R^3/2$, kết quả này tương ứng (phù hợp với những điều xác nhận ở §24) với chuyển động thế (thu được ở bài toán 2 của §10).

Lực cản được tính theo công thức (20-13), trong đó tích phân được lấy theo mặt quả cầu. Kết quả cho ta:

$$F = 6\pi\eta R \left(1 + \frac{R}{\delta} \right) u + 3\pi R^2 \sqrt{\frac{2\eta\rho}{\omega}} \left(1 + \frac{2R}{9\delta} \right) \frac{du}{dt} \tag{3}$$

Với $\omega = 0$, công thức này chuyển thành công thức Stokes. Nhưng với các tần số lớn, ta có:

$$F = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{du}{dt} + 3\pi R^2 \sqrt{2\eta\rho\omega}\, u$$

Số hạng thứ nhất trong biểu thức này tương ứng với lực quán tính trong chuyển động thế bao quanh quả cầu (xem bài tập 1, §11), còn số hạng thứ hai cho ta

biểu thức giới hạn của lực tiêu tán. Số hạng thứ hai này cũng có thể tìm được bằng cách tính năng lượng tiêu tán theo công thức (24-14) (xem bài tập sau).

6. Tìm biểu thức giới hạn (với các tần số lớn, $\delta << R$) của lực cản tiêu tán tác dụng lên một hình trụ vô hạn (bán kính R) thực hiện các dao động theo hướng vuông góc với trục của nó.

Giải. Sự phân bố các vận tốc quanh hình trụ đứng yên có dòng chảy bao quanh theo phương ngang được cho bởi công thức

$$\upsilon = \frac{R^2}{r^2}[2\mathbf{n}\,(\mathbf{un}) - \mathbf{u}] - \mathbf{u}$$

(xem bài tập 3 ở §10). Từ đó ta tìm được cho vận tốc tiếp tuyến ở trên mặt hình trụ:

$$\upsilon_0 = -2u\sin\varphi$$

(r, φ là các tọa độ cực trong mặt phẳng ngang; góc φ được tính từ phương $\mathbf{u}$). Theo (24-14), ta tìm được năng lượng tiêu tán (tính cho một đơn vị độ dài của hình trụ):

$$\bar{\dot{E}}_d = \pi u^2 R\sqrt{2\rho\eta\omega}$$

So sánh với các công thức (24-15-16), ta thu được cho lực cần tìm:

$$F_d = 2\pi R u\sqrt{2\rho\eta\omega}\ .$$

7. Xác định lực cản tác dụng lên một quả cầu chuyển động tùy ý (vận tốc của quả cầu là hàm đã cho của thời gian $u = u(t)$).

Giải. Ta khai triển $u(t)$ thành tích phân Fourier:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} u_\omega e^{-i\omega t}d\omega, \qquad u_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)e^{i\omega t}d\tau$$

Vì các phương trình là tuyến tính, nên lực cản toàn phần có thể viết dưới dạng tích phân của các lực cản thu được trong chuyển động với các vận tốc bằng các thành phần Fourier $u_\omega e^{-i\omega t}$ riêng lẻ, các lực này được xác định bằng biểu thức (3) của bài toán 5 và bằng

$$\pi\rho R^3 u_\omega e^{-i\omega t}\left\{\frac{6\nu}{R^2} - \frac{2i\omega}{3} + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(1-i)\sqrt{\omega}\right\}$$

Nếu chú ý rằng $\left(\dfrac{du}{dt}\right)_\omega = -i\omega u_\omega$, ta sẽ viết lại biểu thức trên dưới dạng

$$\pi\rho R^3 e^{-i\omega t}\left\{\frac{6\nu}{R^2}u_\omega + \frac{2}{3}(\dot{u})_\omega + \frac{3\sqrt{2\nu}}{R}(\dot{u})_\omega\frac{1+i}{\sqrt{\omega}}\right\}$$

Lấy tích phân số hạng thứ nhất và số hạng thứ hai theo $d\omega/2\pi$, ta được lần lượt $u(t)$ và $\dot{u}(t)$. Để lấy tích phân số hạng thứ 3, trước tiên ta có nhận xét là, đối với các ω âm, cần phải viết đại lượng liên hiệp phức của số hạng này, và trong đó viết $(1-i)/\sqrt{|\omega|}$ thay cho $(1+i)/\sqrt{\omega}$ (đó là do công thức (3) thu được trong bài toán 5 được rút ra cho vận tốc $u = u_0 e^{-i\omega t}$ với ω dương; còn đối với vận tốc $u_0 e^{i\omega t}$, ta sẽ được đại lượng liên hợp phức). Từ đó, thay cho tích phân lấy theo $d\omega$ từ $-\infty$ đến $+\infty$, ta có thể lấy hai lần phần thực của tích phân lấy từ 0 đến $+\infty$. Ta viết:

$$\frac{2}{2\pi}\operatorname{Re}\left\{(1+i)\int_0^\infty \frac{(\dot{u})_\omega e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega}}d\omega\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{(1+i)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \frac{\dot{u}(\tau)e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}d\omega\, d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{(1+i)\int_{-\infty}^{t}\int_0^\infty \frac{\dot{u}(\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{\omega}}d\omega\, d\tau + (1+i)\int_t^\infty\int_0^\infty \frac{\dot{u}(\tau)e^{i\omega(\tau-t)}}{\sqrt{\omega}}d\omega\, d\tau\right\} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + i\int_t^\infty \frac{\dot{u}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}}d\tau\right\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau$$

Như vậy ta thu được biểu thức cuối cùng cho lực cản:

$$F = 2\pi\rho R^3\left\{\frac{1}{3}\frac{du}{dt} + \frac{3\nu}{R^2}u + \frac{3}{R}\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{du}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right\} \tag{4}$$

8. Xác định lực cản tác dụng lên một quả cầu bắt đầu chuyển động thay đổi đều tại thời điểm $t = 0$ theo định luật $u = \alpha t$.

Giải. Trong công thức (4) của bài tập 7, nếu lấy $u = 0$ với $t < 0$ và $u = \alpha t$ với $t > 0$, ta sẽ thu được (với $t > 0$):

$$F = 2\pi\rho R^3\alpha\left\{\frac{1}{3} + \frac{3\nu}{R^2}t + \frac{6}{R}\left(\frac{\nu t}{\pi}\right)^{1/2}\right\}$$

9. Cũng bài toán đó xét cho một quả cầu được chuyển tức thời sang chuyển động đều.

Giải. Ta có $u = 0$ với $t < 0$ và $u = u_0$ với $t > 0$. Đạo hàm du/dt bao giờ cũng bằng không, trừ lúc t = 0, khi đó đạo hàm đó bằng vô cùng, nhưng sao cho đạo hàm du/dt theo thời gian phải hữu hạn và bằng u_0. Kết quả là, với mọi $t > 0$, ta thu được

$$F = 2\pi\rho\nu R u_o \left\{1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}}\right\} + \frac{2\eta\rho R^3}{3} u_o \delta(t) .$$

Ở đây $\delta(t)$ là hàm δ. Khi $t \to \infty$ thì biểu thức này tiến tiệm cận đến giá trị cho bởi công thức Stokes. Xung lượng lực cản tác dụng lên quả cầu trong một khoảng thời gian vô cùng nhỏ quanh $t = 0$ thu được bằng cách lấy tích phân theo thời gian số hạng cuối cùng trong F và bằng $2\pi\rho R^3 u_o/3$.

10. Xác định mômen các lực tác dụng lên quả cầu đang thực hiện một dao động quay quanh một trong các đường kính của nó ở trong chất lỏng .

Giải. Vì cùng những lý do đã nêu trong bài tập 1 của §20, trong phương trình chuyển động có thể không viết số hạng với gradiên áp suất, do đó ta có

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v} .$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\, f \Omega_o e^{-i\omega t},$$

trong đó $\Omega = \Omega_o e^{-i\omega t}$ là vận tốc góc quay của quả cầu. Thay cho phương trình $\Delta f = \mathrm{const}$, bây giờ ta thu được phương trình sau:

$$\Delta f + k^2 f = \mathrm{const}.$$

Nếu bỏ số hạng không quan trọng ở trong nghiệm của phương trình này, ta rút ra được $f = \frac{a}{r} e^{ikr}$ (ta chọn nghiệm triệt tiêu tại vô cùng). Hằng số a được xác định từ điều kiện giới hạn $\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}]$ ở trên quả cầu; kết quả ta thu được:

$$f = \frac{R^3}{r(1-ikR)} e^{ik(r-R)}, \quad \mathbf{v} = [\Omega\, \mathbf{r}] \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{1-ikr}{1-ikR} e^{ik(r-R)}$$

(R là bán kính quả cầu). Tiến hành các phép tính tương tự như trong bài tập 1 của §20, ta thu được biểu thức sau cho mômen các lực do chất lỏng tác dụng lên quả cầu:

$$M = -\frac{8\pi}{3} \eta R^3 \Omega \frac{3 + 6R/\delta + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1 + R/\delta)}{1 + 2R/\delta + 2(R/\delta)^2} .$$

Khi $\omega \to 0$ (nghĩa là khi $\delta \to \infty$), ta thu được biểu thức $M = -8\pi\eta R^3\Omega$ tương ứng với sự quay đều của quả cầu (Xem bài tập 1 §20). Trong trường hợp giới hạn ngược lại $R/\delta >> 1$, ta có:

$$M = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \pi R^4 \sqrt{\eta\rho\omega}\,(i-1)\Omega .$$

Biểu thức này có thể thu được trực tiếp: với $\delta << R$ mỗi phần tử của mặt cầu có thể được coi như phẳng, và lực ma sát tác dụng lên phần tử đó có thể được xác định theo công thức (24-6), trong đó ta thay vận tốc $u = \Omega R\sin\theta$.

11. Xác định mômen lực tác dụng lên quả cầu rỗng chứa đầy chất lỏng nhớt, quả cầu này thực hiện những dao động quay ở quanh đường kính của nó.

Giải. Ta tìm vận tốc dưới cùng một dạng như ở bài toán trước. Chọn cho f nghiệm hữu hạn trong toàn bộ thể tích bên trong quả cầu, kể cả tâm của nó: $f = a\dfrac{\sin kr}{r}$. Xác định a từ điều kiện biên, ta thu được:

$$\mathbf{v} = [\Omega\ \mathbf{r}]\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{rk\cos kr - \sin kr}{Rk\cos kR - \sin kR}.$$

Tính mômen các lực ma sát, ta thu được biểu thức:

$$M = \frac{8}{3}\pi\eta R^3\Omega\frac{k^2R^2\sin kR + 3kR\cos kR - 3\sin kR}{kR\cos kR - \sin kR}.$$

Lẽ dĩ nhiên, biểu thức giới hạn với $R/\delta >> 1$ trùng với biểu thức tương ứng của bài tập trước. Nhưng nếu $R/\delta << 1$, ta sẽ có:

$$M = \frac{8}{15}\pi\rho\omega R^5\Omega\left(i - \frac{R^2\omega}{35\nu}\right)$$

Số hạng thứ nhất trong công thức này tương ứng với các lực quán tính trong sự quay của toàn khối chất lỏng như một toàn bộ.

§25. SỰ TẮT DẦN CỦA CÁC SÓNG HẤP DẪN

Những lập luận tương tự như đã trình bày ở trên có thể được sử dụng để tìm sự phân bố các vận tốc ở gần mặt tự do của chất lỏng. Bây giờ ta xét chuyển động dao động xảy ra ở gần mặt của một chất lỏng (ví dụ các sóng hấp dẫn). Ta giả sử các điều kiện (24-11) được thỏa mãn, bước sóng λ bây giờ giữ vai trò của kích thước l:

$$\lambda^2\omega >> \nu, \quad a << \lambda \tag{25-1}$$

(a là biên độ sóng, ω là tần số của nó). Khi đó ta có thể khẳng định rằng, nghiệm chỉ là xoáy trong một lớp mỏng gần mặt chất lỏng, còn trong phần còn lại của chất lỏng dòng chảy là chuyển động thế, giống như đối

với một chất lỏng lý tưởng.

Chuyển động của chất lỏng nhớt phải thỏa mãn các điều kiện biên (15-16) ở trên mặt tự do, các điều kiện này đòi hỏi một số tổ hợp xác định của các đạo hàm vận tốc theo các tọa độ phải bằng không. Tuy nhiên, chuyển động thu được từ việc giải các phương trình thủy động lực học của chất lỏng lý tưởng không thỏa mãn điều kiện này. Tương tự như đã lập luận cho vận tốc v_y ở trong tiết trước, ta có thể kết luận rằng, trong một lớp mỏng ở gần mặt chất lỏng các đạo hàm tương ứng của vận tốc sẽ giảm nhanh. Cần chú ý rằng, gradiên vận tốc khi đó không lớn một cách dị thường như đã xảy ra khi ở gần mặt vật rắn.

Ta tính độ tiêu tán năng lượng trong sóng hấp dẫn. Ở đây, cần nói đến không phải độ tiêu tán của động năng, mà đến độ tiêu tán cơ năng $R_{cơ}$, bao gồm cả động năng và thế năng trong trọng trường. Nhưng rõ ràng là, trọng trường có mặt hay không có mặt, thì điều đó cũng không thể ảnh hưởng đến sự tiêu tán năng lượng gây bởi các quá trình ma sát nội trong chất lỏng. Do đó, $E_{cơ}$ được xác định bởi cùng công thức (16-3):

$$\dot{E}_{cơ} = -\frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 dV .$$

Khi tính tích phân này cho sóng hấp dẫn, cần để ý rằng, vì thể tích của lớp mặt chuyển động xoáy là nhỏ, còn gradiên vận tốc ở đó không lớn một cách dị thường, nên sự có mặt của lớp này có thể được bỏ qua, khác với kết quả mà ta thu được khi xét các dao động của mặt rắn. Nói một cách khác, việc lấy tích phân phải được tiến hành trong toàn bộ thể tích chất lỏng, trong đó, như ta đã thấy, chất lỏng chuyển động như chất lỏng lý tưởng.

Ở §12, ta đã xác định được chuyển động trong sóng hấp dẫn đối với chất lỏng lý tưởng. Chuyển động này là chuyển động thế, do đó

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

như vậy

$$\dot{E}_{cơ} = -2\eta\int\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right)^2 dV .$$

Thế φ có dạng

$$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha)\, e^{kz}.$$

Dĩ nhiên ta không quan tâm đến giá trị năng lượng tiêu tán tức thời, mà đến giá trị trung bình theo thời gian của năng lượng tiêu tán. Nếu chú ý rằng, các giá trị trung bình của các bình phương cos và sin bằng nhau, ta sẽ thu được

$$\overline{E}_{cơ} = 8\eta k^4 \int \overline{\varphi^2} dV \qquad (25\text{-}2)$$

Còn bản thân năng lượng của sóng hấp dẫn có thể được tính dựa vào định lý đã biết ở trong cơ học: đối với mọi hệ thực hiện những dao động nhỏ (dao động với biên độ nhỏ), thì động năng trung bình và thế năng trung bình sẽ bằng nhau. Trên cơ sở đó ta có thể viết $\overline{E}_{cơ}$ một cách đơn giản bằng hai lần động năng:

$$\overline{E}_{cơ} = \rho \int \overline{v^2} dV = \rho \int \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2} dV,$$

từ đó

$$\overline{E}_{cơ} = \overline{2\rho k^2} \int \overline{\varphi^2} dV \ . \qquad (25\text{-}3)$$

Để tiện lợi, có thể đặc trưng sự tắt của các sóng bằng *hệ số tắt* γ, hệ số này được xác định bởi tỷ số

$$\gamma = |\overline{E}_{cơ}| / 2\overline{E} \qquad (25\text{-}4)$$

Với thời gian năng lượng của sóng giảm theo định luật $\overline{E} = \text{const}\, e^{-2\gamma t}$; còn đối với biên độ sóng, thì vì năng lượng tỷ lệ với bình phương của biên độ sóng, nên định luật giảm theo thời gian được xác định bởi nhân tử $e^{-\gamma t}$.

Dựa vào (25-2-3), ta tìm được:

$$\gamma = 2\nu k^2 \qquad (25\text{-}5)$$

Thay (12-7) vào biểu thức này, ta thu được hệ số tắt của các sóng hấp dẫn dưới dạng

$$\gamma = \frac{2\nu\omega^4}{g^2}. \qquad (25\text{-}6)$$

BÀI TẬP

1. Xác định hệ số tắt của các sóng hấp dẫn dài lan truyền trong một kênh có tiết diện không đổi; tần số được giả thiết là rất lớn đến mức $\sqrt{\gamma / \omega}$ nhỏ so với độ sâu của chất lỏng ở trong kênh và độ rộng của nó.

Giải. Sự tiêu tán năng lượng chủ yếu xảy ra ở trong lớp chất lỏng kề sát thành, tại đó vận tốc thay đổi từ giá trị không ở trên thành đến giá trị $v = v_0 e^{-i\omega t}$ ở trong sóng. Độ tiêu tán trung bình của năng lượng (tính cho một đơn vị độ dài của kênh), theo (24-14), bằng

$$l \frac{|v_0|^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\eta \rho \omega} ;$$

trong đó l là độ dài của phần vòng bao tiết diện kênh nhúng trong chất lỏng. Còn đối với năng lượng trung bình của chất lỏng (cũng tính cho một đơn vị độ dài của kênh), nó có giá trị bằng $S\rho\overline{v^2} = S\rho\frac{|v_0|^2}{2}$ (S là diện tích của tiết diện chất lỏng ở trong kênh). Hệ số tắt bằng

$$\gamma = \frac{l}{2\sqrt{2}S} \sqrt{\nu\omega} .$$

Chẳng hạn đối với kênh có tiết diện hình chữ nhật (độ rộng là a, độ sâu là h) thì

$$\gamma = \frac{2h + a}{2\sqrt{2}ah} \sqrt{\nu\omega} .$$

2. Xác định chuyển động trong sóng hấp dẫn lan truyền trên mặt chất lỏng có độ nhớt lớn ($\nu \gtrsim \omega\lambda^2$).

Giải. Phép tính hệ số tắt nêu trong bài giảng chỉ áp dụng được trong những trường hợp khi hệ số này nhỏ ($\gamma << \omega$), do đó trong phép tính gần đúng bậc nhất chuyển động có thể được coi là chuyển động của chất lỏng lý tưởng. Với độ nhớt tùy ý, ta tìm nghiệm của các phương trình chuyển động

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

nghiệm này phụ thuộc vào t và x qua thừa số $e^{-i\omega t+ikx}$ và tắt dần với z theo chiều sâu trong chất lỏng ($z > 0$). Ta thu được:

$$v_x = e^{-i\omega t+ikx}\left(Ae^{kz} + Be^{mz}\right)$$

$$v_z = e^{-i\omega t+ikx}\left(-iAe^{kz} - i\frac{k}{m}Be^{mz}\right)$$

$$\frac{p}{\rho} = e^{-i\omega t+ikx}\frac{\omega}{k}Ae^{kz} - gz, \quad \text{ở đây} \quad m = \sqrt{k^2 - i\frac{\omega}{\nu}}$$

Các điều kiện biên trên bề mặt chất lỏng:

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{xz} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 0$$

(với $z = \zeta$). Trong điều kiện thứ hai của các điều kiện trên, ta có thể viết ngay $z = 0$ thay cho $z = \zeta$. Còn trước hết ta lấy đạo hàm điều kiện thứ nhất theo t và viết gv_z thay cho $g\frac{\partial\zeta}{\partial t}$, sau đó đặt $z = 0$. Từ điều kiện tương thích của hai phương trình thuần nhất thu được cho A và B, ta viết được:

$$\left(2 - i\frac{\omega}{\nu k^2}\right)^2 + \frac{g}{\nu^2 k^3} = 4\sqrt{1 - i\frac{\omega}{\nu k^2}} \tag{2}$$

Phương trình này xác định sự phụ thuộc của ω vào vectơ sóng k. Khi đó ω là phức; phần thực của nó xác định tần số của các dao động, còn phần ảo xác định hệ số tắt. Chỉ có các nghiệm của phương trình (2) có phần ảo âm (tương ứng với sự tắt của các sóng) là có ý nghĩa vật lý; chỉ có hai trong các nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn đòi hỏi đó. Nếu $\nu k^2 << \sqrt{gk}$ (điều kiện (25-1)) thì hệ số tắt nhỏ và (2) cho ta gần đúng $\omega = \pm\sqrt{gk} - i\cdot 2\nu k^2$, một kết quả mà ta đã biết. Trong trường hợp giới hạn ngược lại $\nu k^2 >> \sqrt{gk}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm thuần ảo tương ứng với chuyển động thuần túy không tuần hoàn tắt dần. Một trong các nghiệm đó là:

$$\omega = -\frac{ig}{2\nu k},$$

còn nghiệm khác lớn hơn nhiều (có bậc νk^2), do đó không có gì đáng chú ý (vì chuyển động tương ứng với nó tắt nhanh).

Chương III

TÍNH CHẢY RỐI

§26. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CHUYỂN ĐỘNG DỪNG CỦA CHẤT LỎNG

Đối với tất cả các bài toán về chuyển động của chất lỏng nhớt trong những điều kiện dừng đã cho, về nguyên tắc, phải tồn tại một nghiệm dừng chính xác của các phương trình thủy động lực học. Các nghiệm này tồn tại một cách hình thức với bất kỳ số Reynolds nào. Nhưng không phải tất cả các nghiệm của phương trình chuyển động, kể cả khi nghiệm đó là chính xác, đều có thể được thực hiện thực sự trong tự nhiên. Các chuyển động được thực hiện trong tự nhiên không những phải thỏa mãn các phương trình thủy động lực học, mà nó còn phải ổn định nữa: các nhiễu động nhỏ, một khi đã xuất hiện, đều phải tắt dần theo thời gian. Ngược lại, nếu các nhiễu động, dù nhỏ tùy ý, tất yếu xuất hiện trong dòng chất lỏng có xu hướng tăng theo thời gian, thì chuyển động là không ổn định, và thực tế không thể tồn tại [1].

Những nghiên cứu về mặt toán học cho tính không ổn định của một chuyển động đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ phải được tiến hành theo sơ đồ sau. Người ta chồng lên nghiệm dừng đang xét (sự phân bố vận tốc, giả sử là $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$) một nhiễu động nhỏ không dừng $\mathbf{v}_1(\mathbf{r},t)$, nhiễu động này phải được xác định sao cho chuyển động tổng hợp $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ thỏa mãn các phương trình chuyển động. Phương trình để xác định $\mathbf{v}_1$ thu được bằng cách thay vào phương trình

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{26-1}$$

vận tốc và áp suất dưới dạng

[1] Trong lần xuất bản trước của tập sách này, tính không ổn định đối với các nhiễu động nhỏ tùy ý được gọi là tính không ổn định tuyệt đối. Bây giờ dưới góc độ này, chúng tôi bỏ qua hình dung từ "tuyệt đối", khi giữ nó lại (phù hợp với thuật ngữ thường được dùng hơn trong tài liệu hiện đại) là để làm phản đề cho cách hiểu về tính không ổn định đối lưu (§28).

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1, \tag{26-2}$$

trong đó, các hàm $\mathbf{v}_0$ và p_0 đã biết thỏa mãn các phương trình

$$(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}_0, \quad \text{div } \mathbf{v}_0 = 0 \tag{26-3}$$

Nếu bỏ qua các số hạng có bậc cao hơn so với đại lượng nhỏ $\mathbf{v}_1$, ta thu được:

$$\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}_1, \quad \text{div } \mathbf{v}_1 = 0 \tag{26-4}$$

Điều kiện biên đòi hỏi $\mathbf{v}_1$ phải bằng không trên các mặt vật rắn cố định.

Do đó, $\mathbf{v}_1$ thỏa mãn một hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với các hệ số là các hàm chỉ của các tọa độ, mà không phải của thời gian. Nghiệm tổng quát của các phương trình như thế có thể được biểu diễn dưới dạng tổng các nghiệm riêng, trong đó $\mathbf{v}_1$ phụ thuộc vào thời gian qua một thừa số có dạng $e^{-i\omega t}$. Bản thân các tần số ω của các nhiễu động không phải là tùy ý, mà được xác định sau khi giải phương trình (26-4) với các điều kiện giới hạn tương ứng. Nói chung các tần số đó là phức. Nhưng nếu có các ω, mà phần ảo của chúng là dương, thì $e^{-i\omega t}$ sẽ tăng vô hạn theo thời gian. Nói một cách khác, những nhiễu động như thế, một khi xuất hiện, chúng sẽ tăng lên, nghĩa là chuyển động sẽ không ổn định đối với các nhiễu động đó. Để chuyển động ổn định thì tất cả các tần số ω khả dĩ phải có các phần ảo là âm. Như vậy, các nhiễu động xuất hiện sẽ tắt dần với thời gian theo định luật hàm mũ.

Tuy nhiên, việc nghiên cứu toán học như thế đối với tính ổn định của chuyển động sẽ cực kỳ phức tạp. Cho đến nay, vấn đề về tính ổn định của dòng chảy dừng quanh các vật có kích thước hữu hạn vẫn chưa được hoàn chỉnh về mặt lý thuyết. Không có nghi ngờ gì, đối với các số Reynolds đủ nhỏ, dòng chảy dừng quanh các vật là ổn định. Các số liệu thực nghiệm chứng tỏ rằng, khi R tăng, cuối cùng đạt tới một giá trị xác định của nó, gọi là R_c. Bắt đầu từ giá trị này, chuyển động sẽ trở nên không ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ, do đó đối với các số Reynolds đủ lớn $R > R_c$ dòng chảy dừng quanh các vật rắn không thể xảy ra được. Dĩ nhiên, giá trị tới hạn của số Reynolds không phải là phổ dụng; mỗi loại chuyển động có một R_c riêng của nó. Các giá trị này chắc có bậc khoảng vài chục; (chẳng hạn, trong dòng chảy ngang quanh một vật hình trụ, một chuyển động không dừng, không tắt dần đã được quan sát thấy với $R = ud/\nu \approx 30$, trong

đó d là đường kính hình trụ).

Bây giờ ta nghiên cứu tính chất của chế độ chảy không dừng được thiết lập do kết quả của tính không ổn định của chuyển động dừng đối với các số Reynolds lớn (*L. Đ. Landau*, 1944).

Ta bắt đầu từ việc nghiên cứu những tính chất của chuyển động đó, khi các số Reynolds lớn hơn R_c một chút. Với $R < R_c$, phần ảo của các tần số phức $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$ của tất cả những nhiễu động khả dĩ nhỏ đều âm ($\gamma_1 < 0$). Với $R = R_c$ có xuất hiện một tần số mà phần ảo của nó bằng không. Với $R > R_c$, tần số này có $\gamma_1 > 0$, và với các R gần R_c, thì $\gamma_1 << \omega_1$ [1]. Hàm $\mathbf{v}_1$ tương ứng với tần số này có dạng:

$$\mathbf{v}_1 = A(t)\, f(x, y, z), \tag{26-5}$$

trong đó, f là một hàm phức của các tọa độ, còn biên độ phức $A(t)$ có dạng [2]

$$A(t) = \text{const} \cdot e^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t} \tag{26-6}$$

Thực tế biểu thức này của $A(t)$ chỉ thích hợp với một khoảng thời gian ngắn, sau thời điểm mà chế độ dừng bị phá vỡ: thừa số $e^{\gamma_1 t}$ tăng nhanh theo thời gian, trong khi đó phương pháp xác định $\mathbf{v}_1$ miêu tả ở trên dẫn đến một biểu thức có dạng (26.5-6) chỉ được áp dụng với $\mathbf{v}_1$ đủ nhỏ. Dĩ nhiên, thực tế môđun $|A|$ của biên độ của chuyển động không dừng không tăng vô hạn, mà tiến đến một giới hạn hữu hạn nào đó. Đối với các R ở gần R_c, giới hạn hữu hạn này cũng vẫn còn nhỏ và có thể được xác định như sau.

Ta lấy đạo hàm theo thời gian của bình phương biên độ $|A|^2$. Đối với những thời gian rất nhỏ, khi công thức (26-6) còn ứng dụng được, ta có

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2$$

[1] Phổ của tất cả các tần số nhiễu động khả dĩ (đối với mỗi loại chuyển động đã cho) chứa các giá trị cô lập (phổ gián đoạn) cũng như các tần số lấp đầy liên tục toàn bộ khoảng các giá trị (phổ liên tục). Có thể nghĩ rằng, đối với dòng chảy bao quanh các vật hữu hạn, các tần số với $\gamma_1 > 0$ có thể chỉ có ở trong phổ gián đoạn. Vấn đề là ở chỗ, các nhiễu động ứng với các tần số của phổ liên tục, nói chung, không biến mất tại vô cực. Trong khi đó tại vô cực, chuyển động cơ bản hiển nhiên biểu diễn dòng chảy là đều song phẳng ổn định.

[2] Như thường lệ, hiểu ngầm là phần thực của biểu thức (26-6).

Biểu thức này thực chất chỉ là số hạng đầu tiên của khai triển thành chuỗi của các luỹ thừa của A và A^*. Khi môđun $|A|$ tăng (nhưng khi vẫn còn nhỏ), nên cần phải xét đến các số hạng tiếp theo của khai triển này. Các số hạng tiếp ngay sau là các số hạng bậc ba đối với A. Tuy nhiên, không phải ta quan tâm đến giá trị chính xác của đạo hàm, mà quan tâm đến giá trị trung bình của nó theo thời gian. Việc lấy trung bình được tiến hành trong những khoảng thời gian lớn so với chu kỳ $2\pi/\omega_1$ của thừa số tuần hoàn $e^{-i\omega_1 t}$ (nhớ lại rằng, vì bất đẳng thức $\omega_1 >> \gamma_1$, nên chu kỳ này nhỏ so với thời gian $1/\gamma_1$ để môđun của biên độ $|A|$ thay đổi đáng kể). Nhưng các số hạng bậc ba nhất thiết phải chứa thừa số tuần hoàn và triệt tiêu khi lấy trung bình [1]. Trong các số hạng bậc bốn có một số hạng tỷ lệ với $A^2A^{*2} = |A|^4$; số hạng này không bằng không khi lấy trung bình. Như vậy, với độ chính xác đến các số hạng bậc bốn, ta có

$$\overline{\frac{d|A|^2}{dt}} = 2\gamma_1|A|^2 - \alpha|A|^4, \qquad (26\text{-}7)$$

trong đó α là một hằng số dương hoặc âm (*hằng số Landau*).

Chúng ta quan tâm đến tình huống, khi $R > R_c$ thì các số hạng thứ nhất trở nên không ổn định (trên nền của chuyển động cơ bản) dù nhiễu động nhỏ tùy ý. Nó tương ứng với trường hợp $\alpha > 0$; bây giờ ta khảo sát trường hợp này.

Ta không viết dấu lấy trung bình lên trên $|A|^2$ và $|A|^4$ trong (26-7), vì phép lấy trung bình chỉ tiến hành trong những khoảng thời gian nhỏ so với $1/\gamma_1$. Cũng vì lý do đó, khi giải phương trình này ta cần tiến hành như thể là các gạch ngang trên đạo hàm ở vế trái phương trình cũng không có. Nghiệm của phương trình (26-7) có dạng:

$$|A|^{-2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + \text{const} \cdot e^{-2\gamma_1 t}.$$

Từ đó thấy rằng, $|A|^2$ tiến tiệm cận đến giới hạn hữu hạn

[1] Nói một cách chặt chẽ, các số hạng bậc ba không cho giá trị không khi lấy trung bình, mà là các đại lượng bậc bốn; các đại lượng này được giả thiết là đã gộp vào trong các số hạng bậc bốn của khai triển.

$$|A|^2_{max} = \frac{2\gamma_1}{\alpha}. \qquad (26\text{-}8)$$

Đại lượng γ_1 phụ thuộc vào R; ở gần R_c, hàm $\gamma_1(R)$ có thể được khai triển theo các luỹ thừa của $R - R_c$. Nhưng $\gamma_1(R_c) = 0$, do chính định nghĩa của số Reynolds tới hạn. Vì thế, một cách gần đúng, ta có

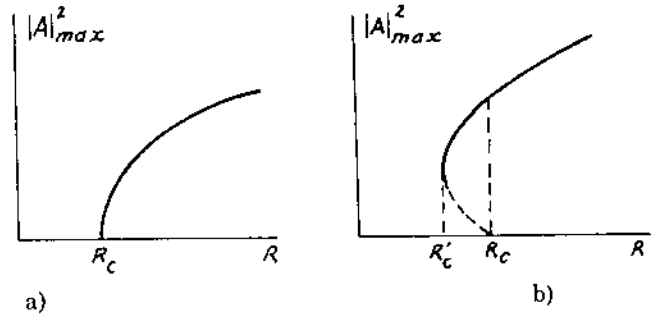
$$\gamma_1 = \text{const} \cdot (R - R_c). \qquad (26\text{-}9)$$

Thay biểu thức này vào (26-8), ta tìm được sự phụ thuộc sau đây của biên độ nhiễu động ổn định vào "luỹ thừa trên tới hạn":

$$|A|_{max} \sim (R - R_c)^{1/2}. \qquad (26\text{-}10)$$

Ta dừng lại ngắn gọn ở trường hợp khi trong phương trình (26-7) $\alpha < 0$. Để xác định biên độ giới hạn của nhiễu động hai số hạng khai triển (26-7) bây giờ là không đủ, mà cần phải xét đến số hạng âm bậc cao hơn; giả sử đó là số hạng $-\beta|A|^6$ với $\beta > 0$. Khi đó

$$|A|^2_{max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta}\gamma_1\right]^{1/2} \qquad (26\text{-}11)$$



Hình 13

với γ_1 lấy từ (26-9). Sự phụ thuộc này được biểu diễn trên hình 13.b (hình 13.b ứng với trường hợp $\alpha > 0$, công thức (26-10)). Với $R > R_c$ chuyển động dừng hoàn toàn không thể tồn tại; với $R = R_c$, nhiễu động tăng bằng bước nhảy đến biên độ hữu hạn (tất nhiên, biên độ này vẫn được giả thiết là nhỏ, đến mức khai triển theo các lũy thừa $|A|^2$ đã dùng

vẫn còn ứng dụng được) [1]. Trong khoảng $R'_c < R < R_c$ chuyển động cơ bản là *nửa bền* – ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ, nhưng không ổn định đối với các nhiễu động có biên độ hữu hạn (đường liền nét; đường cong chấm chấm là nhánh không ổn định).

Chúng ta trở lại chuyển động không dừng, xuất hiện khi $R > R_c$ do kết quả của tính không ổn định đối với các nhiễu động nhỏ. Với R gần với R_c, chuyển động này có thể được biểu diễn dưới dạng chồng chất chuyển động dừng $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ và chuyển động tuần hoàn $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ với biên độ nhỏ nhưng hữu hạn, tăng khi R tăng theo quy luật (26-10). Sự phân bố các vận tốc trong chuyển động này có dạng

$$\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{r})\, e^{-i(\omega_1 t+\beta_1)}, \tag{26-12}$$

trong đó **f** là một hàm phức của các tọa độ, còn β là pha ban đầu nào đó. Với các hiệu $R - R_c$ thì sự tách vận tốc thành hai phần $\mathbf{v}_0$ và $\mathbf{v}_1$ không còn ý nghĩa nữa. Khi đó ta đề cập đơn giản đến một chuyển động tuần hoàn nào đó với tần số ω_1. Nếu thay cho thời gian, ta dùng $\varphi_1 \equiv \omega_1 t + \beta_1$ làm biến pha độc lập, thì có thể nói rằng hàm $\mathbf{v}(\mathbf{r}, \varphi)$ là hàm tuần hoàn của φ với chu kỳ là 2π. Tuy nhiên, hàm này bây giờ không phải là một hàm lượng giác đơn giản. Trong khai triển của nó thành chuỗi Fourier

$$\mathbf{v} = \sum_p \mathbf{A}_p(\mathbf{r})\, e^{-ip\varphi_1} \tag{26-13}$$

(lấy tổng theo tất cả các số nguyên *p* dương và âm), có mặt không những các số hạng với tần số cơ bản ω_1, mà cả các số hạng với bội các tần số đó.

Phương trình (26-7) chỉ xác định giá trị tuyệt đối của thừa số phụ thuộc vào thời gian $A(t)$, mà không xác định pha φ_1 của nó. Đại lượng này thực ra vẫn còn bất định và phụ thuộc vào các điều kiện ngẫu nhiên ban đầu. Tùy theo các điều kiện đó, pha ban đầu β_1 có thể có giá trị bất kỳ. Như vậy, chuyển động tuần hoàn đã nghiên cứu không được xác định đơn trị bằng những điều kiện dừng bên ngoài đã cho mà trong đó chuyển động đã xảy ra. Một trong các đại lượng – pha ban đầu của vận

[1] Trong cơ học, các hệ như thế được gọi là các hệ với sự tự kích thích *cứng*, khác với các hệ với sự tự kích thích *mềm*, không ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ.

tốc – vẫn còn tùy ý. Có thể nói rằng, chuyển động này có một bậc tự do, trong khi mà chuyển động dừng hoàn toàn được xác định bằng các điều kiện bên ngoài, tuyệt nhiên không có bậc tự do nào.

BÀI TẬP

Tìm phương trình biểu diễn sự cân bằng năng lượng giữa dòng chảy cơ bản và nhiễu động chồng lên nó, nhiễu động này được giả thiết là yếu.

Giải. Thay (26-2) vào (26-1), nhưng không bỏ qua số hạng bậc hai theo $\mathbf{v}_1$ ở trong đó, ta được:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + \mathrm{R}^{-1}\Delta\mathbf{v}_1 \tag{1}$$

(giả thiết rằng, tất cả các đại lượng đều được đưa về dạng không thứ nguyên, như đã giải thích ở §19). Nhân phương trình này với $\mathbf{v}_1$ và sau khi biến đổi có xét đến các đẳng thức $\mathrm{div}\,\mathbf{v}_0 = \mathrm{div}\,\mathbf{v}_1 = 0$, ta được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{v_1^2}{2} = -v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \mathrm{R}^{-1}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{-\frac{1}{2}v_1^2(v_{0k}+v_{1k}) - p_1v_{1k} + \mathrm{R}^{-1}v_{1i}\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right\}$$

Số hạng sau cùng trong vế phải của phương trình biến mất sau khi lấy tích phân theo toàn miền chuyển động với các điều kiện $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = 0$ ở trên các thành giới hạn miền hay ở tại vô cực. Kết quả ta thu được:

$$\dot{E}_1 = T - \mathrm{R}^{-1}D. \tag{2}$$

trong đó

$$E_1 = \int\frac{v_1^2}{2}dV, \qquad T = -\int v_{1i}v_{1k}\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}dV, \qquad D = \int\left(\frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}\right)^2 dV. \tag{3}$$

Phiếm hàm T mô tả sự trao đổi năng lượng giữa chuyển động cơ bản và nhiễu động; nó có thể có hai dấu. Phiếm hàm D là độ hao tiêu tán năng lượng, luôn luôn $D > 0$. Ta chú ý rằng, số hạng phi tuyến $\mathbf{v}_1$ ở trong (1) không có đóng góp gì trong hệ thức (2).

Hệ thức (2) cho phép tìm được sự đánh giá về phía dưới cho số R_c (*O. Reynolds*, 1894, *W. Orr*, 1907): đạo hàm dE_1/dt rõ ràng là âm, nghĩa là nhiễu động tắt dần theo thời gian, nếu $\mathrm{R} < \mathrm{R}_E$, trong đó

$$\mathrm{R}_E = \min\,(D/T), \tag{4}$$

với cực tiểu của phiếm hàm được lấy đối với các hàm $\mathbf{v}_1(\mathbf{r})$ thỏa mãn các điều kiện biên và phương trình div $\mathbf{v}_1 = 0$. Sự tồn tại của cực tiểu hữu hạn về mặt toán học có liên quan đến luỹ thừa bậc như nhau (bậc hai) của tính thuần nhất các phiếm hàm T và D. Như thế đã chứng tỏ được sự tồn tại của giới hạn dưới (theo R) của tính nửa bền, dưới đó chuyển động cơ bản là ổn định đối với các nhiễu động bất kỳ. Tuy nhiên, sự đánh giá cho bởi biểu thức (4) (được gọi là sự đánh giá về mặt năng lượng), trong đa số các trường hợp bị hạ thấp rất nhiều.

§27. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA CHẤT LỎNG

Để nghiên cứu tính ổn định của chuyển động dừng của chất lỏng chứa trong khoảng không gian giữa hai hình trụ quay (§18), trong trường hợp giới hạn của các số Reynolds lớn tùy ý, ta có thể dùng một phương pháp đơn giản tương tự như phương pháp đã dùng ở §4 khi rút ra điều kiện ổn định cơ học của chất lỏng đứng yên trong trọng trường (*Rayleigh*, 1916). Ý tưởng của phương pháp đó như sau. Ta xét một phần chất lỏng nhỏ tùy ý nào đó và giả sử rằng, phần này dịch chuyển cùng với quỹ đạo của nó trong dòng chảy đang xét. Trong một sự dịch chuyển như thế có xuất hiện các lực tác dụng lên phần chất lỏng bị dịch chuyển. Để cho chuyển động cơ bản được ổn định, các lực đó phải có xu hướng kéo phần tử đã bị dịch chuyển về vị trí ban đầu.

Mỗi phần tử chất lỏng trong dòng chảy không nhiễu động chuyển động theo một đường tròn có bán kính r = const ở quanh trục các hình trụ. Gọi $\mu(r) = mr^2\dot{\varphi}$ là mômen xung lượng của phần tử có khối lượng m ($\dot{\varphi}$ là vận tốc góc). Lực ly tâm tác dụng lên phần tử này bằng μ^2/mr^3; lực này được cân bằng bởi gradiên áp suất xuyên tâm tương ứng sinh ra trong chất lỏng quay. Bây giờ ta giả sử rằng, phần tử chất lỏng nằm cách trục một khoảng cách r_0 bị dịch chuyển ra khỏi quỹ đạo của nó một chút, và bị đẩy ra xa trục một khoảng cách $r > r_o$. Mômen xung lượng bảo toàn của phần tử khi đó vẫn bằng giá trị ban đầu của nó $\mu_o = \mu(r_o)$. Một cách tương ứng, lực ly tâm tác dụng lên phần tử tại vị trí mới của nó bằng μ_o^2 / mr^3. Để cho phần tử có xu hướng trở lại vị trí ban đầu của nó, thì lực ly tâm này phải nhỏ hơn giá trị cân bằng μ^2 / mr^3 của nó, giá

trị này được cân bằng bởi gradiên áp suất tại khoảng cách r. Như vậy điều kiện ổn định cần thiết đòi hỏi $\mu^2 - \mu_o^2 > 0$. Khai triển $\mu(r)$ theo các luỹ thừa của hiệu dương $r - r_o$, ta viết được điều kiện này dưới dạng

$$\mu \frac{d\mu}{dt} > 0 \tag{27-1}$$

Theo công thức (18-3), vận tốc góc $\dot{\varphi}$ của các hạt chất lỏng chuyển động có dạng

$$\dot{\varphi} = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r^2}.$$

Tính μ như $mr^2\dot{\varphi}$ và bỏ qua tất cả các thừa số chắc chắn là dương, ta viết được điều kiện (27-1) dưới dạng

$$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)\dot{\varphi} > 0. \tag{27-2}$$

Vận tốc góc $\dot{\varphi}$ biến thiên đơn điệu với r từ giá trị Ω_1 ở trên hình trụ trong đến giá trị Ω_2 ở trên hình trụ ngoài. Nếu cả hai hình trụ quay ngược chiều nhau, nghĩa là nếu Ω_1 và Ω_2 ngược dấu nhau, thì hàm $\dot{\varphi}$ đổi dấu trong khoảng không gian giữa hai hình trụ và tích của nó với số không đổi $\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2$ không thể dương tại mọi nơi. Như vậy, trong trường hợp này, điều kiện (27-2) không được thực hiện trong toàn bộ thể tích chất lỏng, và chuyển động là không ổn định.

Bây giờ giả sử cả hai hình trụ quay cùng chiều; chọn chiều này là chiều dương, ta có $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$, khi đó đạo hàm $\dot{\varphi}$ dương tại mọi nơi, và để cho điều kiện (27-2) được thực hiện, cần phải có

$$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2. \tag{27-3}$$

Nhưng nếu $\Omega_2 R_2^2$ nhỏ hơn $\Omega_1 R_1^2$, thì chuyển động sẽ không ổn định. Chẳng hạn, nếu hình trụ ngoài đứng yên ($\Omega_2 = 0$) và chỉ có hình trụ trong quay, thì chuyển động sẽ không ổn định. Ngược lại, nếu hình trụ trong đứng yên ($\Omega_1 = 0$), chuyển động sẽ ổn định.

Cần nhấn mạnh rằng, trong các lập luận đã trình bày, ta hoàn toàn không để ý đến ảnh hưởng của các lực ma sát nhớt khi phần tử chất lỏng bị dịch ra xa. Do đó, phương pháp đã dùng chỉ áp dụng được nếu độ

nhớt đủ nhỏ, nghĩa là với các số R đủ lớn.

Cần phải nghiên cứu sự ổn định của chuyển động với các R tùy ý bằng phương pháp tổng quát dựa trên các phương trình (26-4); chuyển động giữa các hình trụ quay lần đầu tiên được *Taylor* giải quyết, (*G. I. Taylor*, 1924).

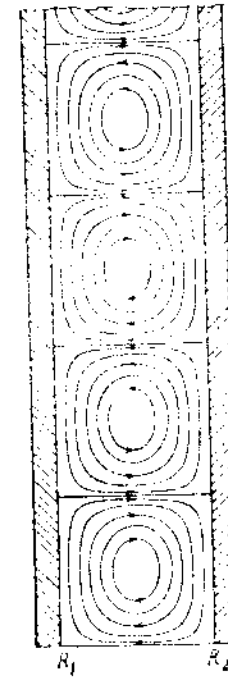
Trong trường hợp đã cho sự phân bố không nhiễu động của các vận tốc v_0 chỉ phụ thuộc vào tọa độ trụ r, và không phụ thuộc vào góc φ cũng như tọa độ z dọc theo trục các hình trụ. Do đó, có thể tìm hệ đầy đủ các nghiệm độc lập của các phương trình (26-4) dưới dạng

$$\mathbf{v}_1(r,\varphi,z) = e^{i(n\varphi+kz-\omega t)}\mathbf{f}(r) \qquad (27\text{-}4)$$

vectơ $\mathbf{f}(r)$ có phương tùy ý. Số sóng k, lấy một phổ liên tục các giá trị, xác định tính tuần hoàn của nhiễu động dọc theo trục z. Còn n chỉ lấy các giá trị nguyên 0, 1, 2,..., như được suy ra từ điều kiện về tính đơn trị của hàm theo biến φ ; giá trị $n = 0$ ứng với các nhiễu động đối xứng trục. Các giá trị khả dĩ của tần số ω thu được khi giải các phương trình với các điều kiện biên thích hợp ở trong mặt phẳng z = const ($\mathbf{v}_1 = 0$ với $r = R_1$ và $r = R_2$). Bài toán đặt ra như vậy nói chung xác định, với các giá trị n và k đã cho, một phổ gián đoạn các tần số riêng $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$, trong đó chỉ số j đánh số các nhánh khác nhau của hàm $\omega_n(k)$; các tần số này nói chung là phức.

Trong trường hợp đã cho, đại lượng $\Omega_1 R_1^2 / \nu$ hay $\Omega_2 R_2^2 / \nu$ – với các giá trị đã cho của các tỷ số R_1/R_2 và Ω_1/Ω_2 xác định "loại chuyển động", giữ vai trò số Reynolds. Ta sẽ theo dõi sự biến thiên của một tần số nào đó trong các tần số riêng $\omega = \omega_n^{(j)}(k)$ khi số Reynolds tăng dần dần. Thời điểm xuất hiện tính không ổn định (đối với dạng đã cho của các nhiễu động) được xác định bằng giá trị R nào, tại đó hàm $\gamma(k) = \mathrm{I_m}\omega$ lần đầu tiên bằng không với giá trị k nào đó. Với $R < R_c$ hàm $\gamma(k)$ âm tại mọi nơi, còn với $R > R_c$ hàm $\gamma(k)$ dương trong một khoảng các giá trị k nào đó. Gọi k_c là giá trị k mà tại đó (với $R = R_c$) hàm $\gamma(k)$ bằng không. Hàm tương ứng (27-4) xác định tính chất của chuyển động (chồng lên chuyển động cơ bản) xuất hiện trong chất lỏng vào thời điểm mất tính ổn định; nó tuần hoàn dọc theo trục của các hình trụ với chu kỳ $2\pi/k_c$. Tất nhiên,

khi đó giới hạn thực tế của tính ổn định được xác định bởi dạng nhiễu động nào (nghĩa là bởi hàm $\omega_n^{(j)}(k)$ nào), cho giá trị R_c nhỏ nhất; chính các nhiễu động "nguy hiểm nhất" này được chúng ta quan tâm ở đây. Như thường lệ, (xem dưới dây), chúng là các nhiễu động đối xứng trục. Vì vấn đề rất phức tạp, nên việc nghiên cứu tương đối đầy đủ các nhiễu động này mới chỉ được tiến hành cho trường hợp trong khe hẹp ở giữa các hình trụ ($h \equiv R_2 - R_1 << R \equiv (R_1 + R_2)/2$) và đã thu được những kết quả sau đây [1].



Hình 14

Người ta nhận thấy rằng, nghiệm dẫn tới giá trị R_c nhỏ nhất ứng với hàm ảo $\omega(k)$. Do đó, với $k = k_c$ không những $\mathrm{Im}\omega = 0$ mà cả $\omega = 0$. Điều đó có nghĩa là, sự mất tính ổn định đầu tiên gây bởi chuyển động quay dừng của chất lỏng dẫn đến sự xuất hiện một dòng chảy khác, cũng là dòng chảy dừng [2]. Nó tạo thành những xoáy hình phồng xuyến (được gọi là những xoáy *Taylor*) xếp đều đặn dọc theo độ dài của các hình trụ. Đối với những trường hợp cả hai hình trụ đều quay cùng chiều, hình vẽ 14 biểu diễn hình chiếu các đường dòng của những xoáy đó lên mặt phẳng tiết diện kinh tuyến của các hình trụ (vận tốc v_1 thực tế cũng có cả thành phần phương vị). Trên độ dài $2\pi/k_c$ của mỗi chu kỳ có sắp xếp hai xoáy với chiều quay ngược nhau.

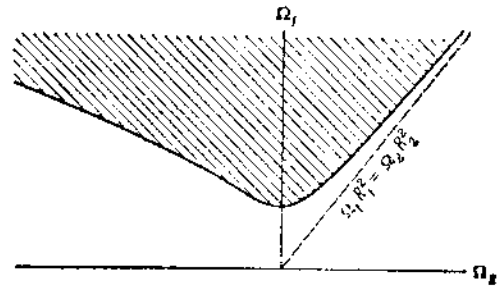
Với R lớn hơn R_c một chút, thì không còn có một, mà cả một khoảng nguyên vẹn các giá trị của k, đối với chúng $\mathrm{Im}\omega > 0$. Tuy nhiên, không

[1] Phần trình bày chi tiết có thể tìm trong sách: *Kotsin N.E., Kibel I.A., Roze N.V.* Thủy động lực học lý thuyết. Maxcơva. Sách Nga. 1963, phần 2; *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability – Oxford. 1961. *Drazin P.G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability – Cambridge. 1981.

[2] Những trường hợp như thế được gọi là *sự thay đổi các tính ổn định*. Các số liệu thực nghiệm và cả các kết quả bằng số cho một loạt các trường hợp riêng, cho ta cơ sở để coi rằng, đối với chuyển động đang xét, tính chất này mang một đặc tính tổng quát và không liên quan gì đến độ nhỏ bé của h.

được nghĩ rằng, chuyển động xuất hiện khi đó là chồng chất đồng thời các chuyển động với các tính tuần hoàn khác nhau. Thực tế với mỗi R có xuất hiện một chuyển động với tính tuần hoàn hoàn toàn xác định, làm ổn định tất cả dòng chảy về toàn bộ. Tuy nhiên, vẫn chưa thể xác định được tính tuần hoàn đó dựa vào phương trình đã tuyến tính hóa (26-4).

Hình 15 biểu diễn áng chừng dạng đường cong tách miền ổn định và miền không ổn định (miền này gạch gạch) với giá trị R_1/R_2 đã cho. Nhánh bên phải của đường cong, tương ứng với sự quay của các hình trụ về một phía, lấy đường thẳng $\Omega_2 R_2^2 = \Omega_1 R_1^2$ làm đường tiệm cận(tính chất này thực tế mang đặc tính tổng quát và không liên quan đến độ nhỏ bé của h). Đối với một loại chuyển động đã cho, sự tăng của số Reynolds tương ứng với sự dịch chuyển lên phía trên theo đường thẳng, xuất phát từ gốc tọa độ, và ứng với giá trị đã cho Ω_1/Ω_2. Ở phần bên phải của giản đồ , tất cả các đường thẳng, sao cho $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2 > 1$, đều không cắt giới hạn của miền không ổn định. Ngược lại, khi $\Omega_2 R_2^2 / \Omega_1 R_1^2 < 1$ và với sự tăng đủ lớn của số Reynolds bao giờ chúng ta cũng rơi vào miền không ổn định – phù hợp với điều kiện (27-3). Ở phần bên trái của giản đồ (Ω_1 và Ω_2 có dấu khác nhau) mọi đường thẳng vạch từ gốc tọa độ đều cắt giới hạn của miền gạch gạch, nghĩa là với số Reynolds tăng đủ lớn thì chuyển động dừng cuối cùng sẽ mất tính ổn định với mọi tỷ số $|\Omega_2 / \Omega_1|$ – lại phù hợp với các kết quả đã thu được ở trên. Với $\Omega_2 = 0$ (chỉ hình trụ trong quay) tính không ổn định bắt đầu với số Reynolds (được định nghĩa như $R = h\Omega_1 R_1/\nu$) bằng



Hình 15

$$R_c = 41{,}3\sqrt{\frac{R}{h}}. \qquad (27\text{-}5)$$

Có nhận xét là, trong chuyển động đang xét, tính nhớt có ảnh hưởng làm ổn định: chuyển động ổn định với $\nu = 0$ vẫn ổn định cả khi có xét đến tính nhớt; còn chuyển động không ổn định với $\nu = 0$, có thể ổn định đối với chất lỏng nhớt.

Các nhiễu động không đối xứng trục của chuyển động giữa các hình trụ quay không được nghiên cứu một cách có hệ thống. Các kết quả tính toán của các trường hợp riêng cho ta cơ sở để coi rằng ở bên phải của giản đồ hình 15 các nhiễu động đối xứng trục bao giờ cũng nguy hiểm nhất. Ngược lại, ở bên trái của giản đồ, với các giá trị $|\Omega_2 / \Omega_1|$ đủ lớn, việc xét đến các nhiễu động không đối xứng trục chắc là sẽ làm thay đổi đôi chút dạng của đường cong giới hạn. Khi đó phần thực của tần số nhiễu động sẽ không bằng không, do đó, chuyển động xuất hiện sẽ không dừng; điều này làm thay đổi căn bản tính chất của tính không ổn định.

Trường hợp giới hạn (với $h \to 0$) của chuyển động giữa các mặt trụ quay là chuyển động của chất lỏng giữa hai mặt phẳng song song chuyển động đối với nhau (xem §17). Chuyển động này là ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ với mọi giá trị tùy ý của số $R = hu/\nu$ (u là vận tốc tương đối của các mặt phẳng).

§28. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CHUYỂN ĐỘNG TRONG ỐNG

Dòng chất lỏng chảy dừng ở trong ống (đã khảo sát ở §17) mất tính ổn định theo một cách hoàn toàn đặc biệt.

Vì dòng chảy là đều dọc theo trục x (dọc theo độ dài của ống dẫn), nên sự phân bố không nhiễu động của các vận tốc $\mathbf{v}_0$ không phụ thuộc vào tọa độ x. Do đó, tương tự như đã trình bày ở trong tiết trước, ta có thể tìm nghiệm của các phương trình dưới dạng

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(kx-\omega t)}\mathbf{f}(y,z). \tag{28-1}$$

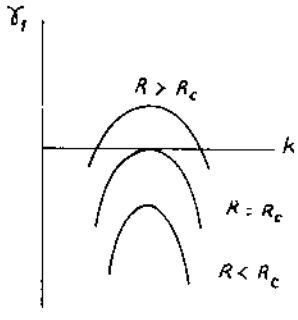
Cả ở đây cũng tồn tại một giá trị $R = R_c$, để cho $\gamma_1 = \mathrm{Im}\omega$ triệt tiêu lần thứ nhất với một giá trị nào đó của k. Tuy nhiên điều quan trọng là, phần thực của hàm $\omega(k)$ bây giờ tuyệt nhiên không còn bằng không.

Đối với các giá trị của R chỉ lớn hơn R_c một chút, khoảng các giá trị của k, trong đó $\gamma(k) > 0$, thì nhỏ và nằm quanh điểm tại đó $\gamma(k)$ có cực đại, nghĩa là $d\gamma/dk = 0$ (như thấy rõ từ hình 16). Giả sử có một nhiễu động nhỏ xuất hiện tại một phần nào đó của dòng; nó là một bó sóng thu được bằng cách chồng chất một loạt các thành phần có dạng (28-1). Với thời gian, các thành phần có $\gamma(k) > 0$ sẽ được tăng cường, còn các thành phần khác thì tắt dần. Bó sóng được tăng cường và xuất hiện như vậy sẽ đồng thời được "kéo" đi xuôi dòng với vận tốc bằng vận tốc nhóm $d\omega/dk$ (§67); vì bây giờ nói đến các sóng có các giá trị vectơ sóng trong khoảng nhỏ quanh điểm tại đó $d\omega/dk = 0$, nên đại lượng

$$\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{d}{dk} \operatorname{Re}\, \omega \tag{28-2}$$

là thực, và do đó thực tế nó biểu diễn vận tốc truyền sóng thực của bó sóng.

Sự cuốn trôi các nhiễu động xuôi theo dòng chảy rất quan trọng, và đem lại cho toàn bộ hiện tượng sự mất tính ổn định, một tính chất hoàn toàn khác với tính chất đã được mô tả ở §27.



Hình 16

Vì tính dương của Imω tự nó có nghĩa là, chỉ có sự tăng cường của các nhiễu động dịch chuyển xuôi theo dòng chảy, nên xuất hiện hai khả năng. Trong một trường hợp, mặc dù có sự dịch chuyển của bó sóng, nhiễu động tăng vô hạn theo thời gian tại một điểm cố định nào đó trong không gian của dòng; một tính không ổn định như thế đối với các nhiễu động nhỏ tùy ý được gọi là *tính không ổn định tuyệt đối*. Còn trong một trường hợp khác, bó sóng bị cuốn trôi nhanh đến mức tại mỗi điểm cố định của không gian, nhiễu động tiến đến không khi $t \to \infty$; một tính không ổn định như thế được gọi là *tính không ổn định cuốn trôi* hay *tính không ổn định đối lưu* [1]. Đối với dòng chảy Poiseuille, chắc là trường hợp thứ hai xảy ra (xem bị chú ở trang 175).

[1] Phương pháp tổng quát cho phép xác định tính chất của chuyển động không ổn định được mô tả trong một tập khác của giáo trình này (xem X, §62).

Cần nói rằng, sự khác nhau giữa hai trường hợp có tính chất tương đối, tùy thuộc vào việc chọn hệ quy chiếu trong đó khảo sát tính không ổn định: tính không ổn định đối lưu trong một hệ nào đó trở nên tính không ổn định tuyệt đối ở trong hệ chuyển động "cùng với bó sóng", tính không ổn định tuyệt đối trở nên tính không ổn định đối lưu ở trong hệ "đi khỏi" bó sóng đủ nhanh. Tuy nhiên, trong trường hợp đã cho, ý nghĩa vật lý của sự khác nhau này được xác định bởi sự tồn tại của một hệ quy chiếu ưu tiên, mà đối với hệ này tính không ổn định cần được khảo sát - hệ quy chiếu trong đó thành của ống đứng yên. Thêm nữa, vì các ống thực có độ dài dù lớn nhưng hữu hạn, nên về nguyên tắc, nhiễu động xuất hiện ở đâu đó có thể lại được đẩy ra khỏi ống trước khi nó dẫn tới phá vỡ thực sự dòng chảy tầng.

Vì các nhiễu động tăng với tọa độ x xuôi theo dòng chảy, mà không phải với thời gian tại một điểm đã cho của không gian, nên khi nghiên cứu loại không ổn định này, nên đặt vấn đề như sau. Giả sử rằng, tại một nơi đã cho của không gian có một nhiễu động liên tục tác động với tần số xác định ω chồng lên dòng chảy và khảo sát xem có gì sẽ xảy ra với nhiễu động này khi nó bị cuốn xuôi theo dòng chảy. Quay về hàm $\omega(k)$, ta sẽ tìm được vectơ sóng k nào tương ứng với tần số (thực) đã cho. Nếu Im $k < 0$ thì thừa số e^{ikx} tăng khi x tăng, nghĩa là nhiễu động được tăng cường. Đường cong trong mặt phẳng ω, R xác định bởi phương trình Im $k(\omega, R) = 0$, (được gọi là *đường cong ổn định trung hòa* hay đơn giản là *đường cong trung hòa*) cho ta biên giới ổn định, tách ra cho mỗi R miền các giá trị tần số nhiễu động, được tăng cường hay tắt dần xuôi theo dòng chảy.

Việc tính toán thực tế cực kỳ phức tạp. Sự nghiên cứu đầy đủ bằng các phương pháp giải tích chỉ mới được tiến hành cho dòng chảy Poiseuille – tức là dòng chảy giữa hai mặt phẳng song song (*C.C. Lin*, 1945). Ta nêu ở đây các kết quả nghiên cứu đó [1].

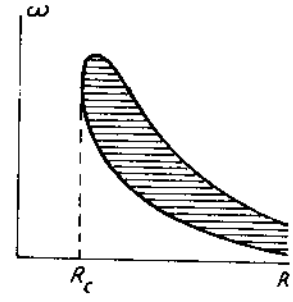
Dòng chảy (không nhiễu động) giữa các mặt phẳng là đều không

[1] Xem sách *C.C. Lin*. Lý thuyết về tính ổn định thuỷ động lực – NXB Ngoại văn Maxcơva 1958, [*Lin C.C* The theory of hydrodynamic stability-Cambridge, 1955]. Nội dung của các vấn đề này và cả những nghiên cứu về sau về vấn đề đó được cho ở phần bị chú trang 145 trong cuốn sách của *Đrazin* và *Rây đ*.

những dọc theo phương vận tốc (trục x), mà còn trên toàn bộ mặt phẳng xz (trục y vuông góc với các mặt phẳng). Do đó có thể tìm nghiệm của các phương trình (26-4) dưới dạng

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}\mathbf{f}(y) \qquad (28\text{-}3)$$

với vectơ sóng $\mathbf{k}$ theo phương tùy ý trong mặt phẳng xz. Tuy nhiên bây giờ chúng ta chỉ quan tâm những nhiễu động đang tăng xuất hiện (khi R tăng) đầu tiên: chính những nhiễu động này xác định biên giới ổn định. Có thể chứng minh rằng, với độ lớn đã cho của vectơ sóng nhiễu động không tắt với $\mathbf{k}$ dọc theo trục x với $f_z = = 0$ sẽ trở thành nhiễu động đầu tiên. Như vậy chỉ cần khảo sát các nhiễu động hai chiều (cũng như dòng chảy cơ bản) trong mặt phẳng xy không phụ thuộc vào tọa độ z [1] là đủ.



Hình 17

Đường cong trung hòa cho dòng chảy giữa các mặt phẳng được biểu diễn bằng sơ đồ ở hình 17. Miền gạch gạch bên trong đường cong là miền không ổn định [2]. Giá trị nhỏ nhất của R, tại đó xuất hiện các nhiễu động không tắt bằng $R_c = 5772$ (theo các tính toán về sau chính xác hơn, *S.A. Orszag*, 1971); số Reynolds được xác định ở đây như

$$R = \frac{U_{max} h}{2\nu}, \qquad (28\text{-}4)$$

trong đó U_{max} là vận tốc cực đại của dòng chảy, còn $h/2$ là nửa khoảng

[1] Phần chứng minh cho điều xác nhận này (*H.B. Squire*, 1933 bao gồm ở chỗ, hệ các phương trình (26-4) cho các nhiễu động có dạng (26-4) có thể đưa về dạng, trong đó hệ chỉ khác các phương trình cho các nhiễu động hai chiều ở sự thay thế R bằng R cos φ, trong đó φ là góc giữa $\mathbf{k}$ và $\mathbf{v}_0$ (trong mặt phẳng xz) do đó số tới hạn $\tilde{R}_c$ cho các nhiễu động ba chiều (với các k đã cho) $\tilde{R}_c = R_c/\cos\varphi > R_c$, trong đó R_c được tính cho các nhiễu động hai chiều.

[2] Đường cong trung hòa trong mặt phẳng k, R có dạng tương tự. Vì trên đường cong trung hòa cả ω và k đều là thực, nên các đường cong này trong cả hai mặt phẳng-đó là cùng một sự phụ thuộc biểu diễn trong các biến khác nhau.

cách giữa các mặt phẳng, nghĩa là khoảng cách tại đó vận tốc tăng từ giá trị không đến cực đại [1]. Giá trị $R = R_c$ ứng với vectơ nhiễu động $k_c = 2{,}04/h$. Với $R \to \infty$ cả hai nhánh của đường cong đều tiến tiệm cận đến trục hoành theo các định luật

$$\frac{\omega h}{U_{max}} \approx R^{-3/11} \quad \text{và} \quad \frac{\omega h}{U_{max}} \approx R^{-3/7}$$

lần lượt với các nhánh trên và nhánh dưới; khi đó trên cả hai nhánh ω và k liên hệ với nhau bằng các hệ thức có dạng $\omega h/U \approx (kh)^3$.

Như vậy, đối với mọi tần số ω khác không, không vượt quá một giá trị cực đại xác định ($\sim U/h$), có tồn tại một khoảng hữu hạn các giá trị của R, trong đó các nhiễu động được tăng cường [2]. Điều đáng quan tâm là, độ nhớt chất lỏng nhỏ, nhưng hữu hạn trong trường hợp đã cho, theo một nghĩa nào đó, vẫn có một ảnh hưởng phá tính ổn định nhiều hơn so với trường hợp xảy ra trong chất lỏng thực sự lý tưởng [3]. Thực vậy, khi $R \to \infty$ các nhiễu động với mọi tần số đều tắt dần; nhưng khi đưa vào một độ nhớt hữu hạn thì cuối cùng ta sẽ rơi vào miền không ổn định cho đến khi độ nhớt tiếp tục tăng (giảm R) lại đưa ta ra khỏi miền này.

Đối với dòng chảy trong ống tiết diện tròn tính ổn định vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ về mặt lý thuyết, nhưng các kết quả hiện có có thể cho ta cơ sở xác đáng để giả thiết rằng, chuyển động này là ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ (theo cả nghĩa nhiễu động tuyệt đối và nhiễu động đối lưu) với mọi số Reynolds bất kỳ. Do tính đối xứng trục của dòng chảy cơ bản ta có thể tìm các nhiễu động dưới dạng

$$\mathbf{v}_1 = e^{i(n\varphi + kz - \omega t)}\mathbf{f}(r) \qquad (28\text{-}5)$$

---

[1] Trong các tài liệu, người ta cũng dùng một định nghĩa khác của R cho dòng chảy Poiseuille phẳng – như tỷ số $h\overline{U}/\nu$, trong đó $\overline{U}$ là vận tốc trung bình (theo tiết diện) của chất lỏng. Do đẳng thức $\overline{U} = 2U_{max}/3$, ta có $h\overline{U}/\nu = 4R/3$ trong đó R được định nghĩa theo (28-4).

[2] Phần chứng minh đặc tính đối lưu của tính không ổn định của dòng chảy Poiseuille phẳng được trình bày trong bài báo Iordanxki. *X.V. Kulikovxki A. G – J.E.TΦ*, 1965, T.49 trang 1326. Tuy nhiên, phần chứng minh chỉ xét cho miền các giá trị rất lớn của R, trong đó cả hai nhánh của đường cong trung hòa đều gần trục hoành, nghĩa là trên cả hai nhánh $kh << 1$. Đối với các số R, tại đó trên đường cong trung hòa $kh \sim 1$, vấn đề còn bỏ ngỏ.

[3] Tính chất này lần đầu tiên được *Heisenberg* khám phá ra (*W. Heisenberg*, 1924).

(cũng giống như ở (27-4)). Có thể coi như đã chứng minh được rằng, các nhiễu động đối xứng trục ($n = 0$) bao giờ cũng tắt. Trong số những dao động không đối xứng trục đã nghiên cứu (với các giá trị xác định của n trong những khoảng xác định của số Reynolds), cũng không thấy những nhiễu động không tắt. Cả tình huống sau cũng chỉ ra tính ổn định của dòng chảy trong ống, đó là, với sự khắc phục cẩn thận những nhiễu động ở lối vào ống người ta đã duy trì được dòng chảy tầng đến các giá trị rất lớn của R (thực tế đã quan sát được dòng chảy này đến giá trị $R \approx 10^5$, trong đó

$$R = \frac{U_{max} d}{2\nu} = \frac{\bar{U} d}{\nu}, \qquad (28\text{-}6)$$

d là đường kính của ống, U_{max} là vận tốc của chất lỏng trên trục ống).

Dòng chảy giữa các mặt phẳng và dòng chảy trong ống tiết diện tròn có thể được coi như các trường hợp giới hạn của dòng chảy trong ống có tiết diện dạng vành khăn, nghĩa là giữa hai mặt trụ đồng trục (có các bán kính R_1 và R_2, $R_2 > R_1$). Với $R_1 = 0$ chúng ta trở lại ống có tiết diện tròn, còn giới hạn $R_1 \to R_2$ ứng với dòng chảy giữa các mặt phẳng. Có vẻ là số tới hạn R_c tồn tại với tất cả các giá trị khác không của tỷ số $R_1/R_2 < 1$, còn với $R_1/R_2 \to 0$ nó tiến đến vô cùng.

Đối với tất cả các dòng chảy Poiseuille này cũng có tồn tại số tới hạn R'_c xác định miền ổn định đối với các nhiễu động có cường độ hữu hạn. Với $R < R'_c$ trong ống không thể tồn tại chuyển động không dừng không tắt dần. Nếu trong một phần nào đó có xuất hiện tính chảy rối, thì với $R < R'_c$ miền chảy rối sẽ bị cuốn xuôi theo dòng chảy, đồng thời bị co thắt lại, cho tới khi biến mất hoàn toàn; ngược lại, với $R > R'_c$ miền chảy rối sẽ dãn nở theo thời gian; bao toàn bộ phần rộng lớn của dòng chảy. Nếu các nhiễu động của dòng chảy liên tục xuất hiện ở lối vào của ống, thì với $R < R'_c$ các nhiễu động tất yếu sẽ tắt tại một khoảng cách nào đó tính từ lối vào, dù chúng đã mạnh như thế nào. Ngược lại, với $R > R'_c$ chuyển động sẽ trở nên chảy rối trên toàn bộ độ dài của ống, và muốn vậy chỉ cần các nhiễu động này càng yếu nếu R càng lớn. Trong khoảng giữa R'_c và R_c chuyển động chảy tầng là nửa bền. Đối với ống có tiết diện tròn tính chảy rối không tắt đã được quan sát thấy với $R \approx 1800$, còn đối với dòng chảy giữa các mặt phẳng song song thì tính chảy rối được

quan sát bắt đầu từ $R \approx 1000$.

Do tính "cứng" của sự đứt dòng chảy tầng ở trong ống, nó kéo theo sự biến thiên bằng bước nhảy của lực cản. Khi chảy trong ống với $R > R'_c$, thực ra có hai định luật khác nhau về lực cản (định luật về sự phụ thuộc của lực cản vào R) – một định luật cho dòng chảy tầng và một định luật cho dòng chảy rối (xem §43 dưới đây). Với bất kể giá trị nào của R có xảy ra sự chuyển từ định luật này thành định luật kia, thì lực cản cũng chịu bước nhảy.

Để kết luận cho tiết này ta có thêm nhận xét sau. Ranh giới của tính ổn định (đường cong trung hòa), thu được cho dòng chảy trong một ống dài vô hạn còn có một ý nghĩa khác. Ta xét dòng chảy trong một ống có độ dài rất lớn (so với bề ngang của nó), nhưng hữu hạn. Giả sử tại mỗi điểm của nó có đặt những điều kiện biên xác định – cho trước prôfin vận tốc (chẳng hạn, có thể hình dung các đầu của ống được phủ những thành xốp, tạo thành prôfin đồng chất); tại mọi nơi, trừ những đoạn đầu ống, prôfin vận tốc (không nhiễu động), có thể được coi như prôfin vận tốc Poiseuille, không phụ thuộc vào x. Đối với một hệ hữu hạn được xác định như vậy, có thể đặt bài toán về tính ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ (phương pháp tổng quát thiết lập tiêu chuẩn một tính ổn định như vậy được gọi là phương pháp *tổng thể* được mô tả ở X, §65). Có thể chứng minh rằng đường cong trung hòa nêu ở trên cho ống vô hạn đồng thời cũng là ranh giới ổn định tổng thể trong ống hữu hạn, không phụ thuộc vào các điều kiện biên cụ thể tại các đầu của nó [1].

§29. TÍNH KHÔNG ỔN ĐỊNH CỦA CÁC GIÁN ĐOẠN TIẾP TUYẾN

Những dòng chảy, trong đó hai lớp chất lỏng không nén được chuyển động đối với nhau, lớp nọ "trượt" trên lớp kia, là không ổn định, nếu chất lỏng là lý tưởng; mặt ngăn cách giữa hai lớp đó là *mặt gián đoạn tiếp tuyến*, trên đó vận tốc của chất lỏng (nằm theo phương tiếp tuyến với mặt) nghiêng chịu bước nhảy (*H. Helmholtz*, 1868; *W. Kelvin*, 1871).

[1] Xem *Kulikovxki A. G.* Toán học và cơ học ứng dụng, 1968, tập 32, tr.112

Tiếp theo (§35) ta sẽ thấy sự không ổn định đó dẫn tới một hình ảnh nào của chuyển động thực tế thực hiện được, còn ở đây ta chứng minh điều khẳng định nêu trên.

Nếu chỉ xét một phần nhỏ của mặt gián đoạn và dòng chất lỏng ở gần nó, ta có thể coi phần tử đó là phẳng và các vận tốc $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ của chất lỏng lý tưởng ở hai phía của nó không đổi. Không làm mất tính chất tổng quát, có thể coi rằng một trong các vận tốc đó bằng không; điều này bao giờ cũng có thể thực hiện được, nếu chọn hệ toạ độ thích hợp. Giả sử $\mathbf{v}_2 = 0$ và ký hiệu đơn giản $\mathbf{v}_1$ bằng $\mathbf{v}$; ta chọn chiều của $\mathbf{v}$ làm trục x và chiều của trục z theo phương pháp tuyến với mặt.

Giả sử rằng mặt gián đoạn chịu một nhiễu động yếu ("gợn sóng"), trong đó tất cả các đại lượng – toạ độ các điểm của chính mặt, áp suất và vận tốc của chất lỏng – đều là các hàm tuần hoàn tỷ lệ với $e^{i(kx-\omega t)}$. Ta xét chất lỏng ở phía mặt gián đoạn, tại đó vận tốc của nó là $\mathbf{v}$ và gọi $\mathbf{v}'$ là độ biến thiên của vận tốc do có nhiễu động. Theo các phương trình (26-4) (trong đó hằng số $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ và $\nu = 0$), ta thu được hệ phương trình sau cho nhiễu động $\mathbf{v}'$:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{\nabla p'}{\rho}.$$

Vì $\mathbf{v}$ hướng theo trục x, nên có thể viết lại phương trình thứ hai dưới dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + v\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\nabla p'}{\rho}. \tag{29-1}$$

Nếu lấy div hai vế của phương trình, thì dựa vào phương trình thứ nhất, vế trái sẽ bằng không, do đó p' phải thỏa mãn phương trình Laplace

$$\Delta p' = 0. \tag{29-2}$$

Giả sử $\zeta = \zeta(x,t)$ là độ dịch chuyển theo trục z của các điểm ở trên mặt gián đoạn, gây bởi nhiễu động. Đạo hàm $\partial\zeta/\partial t$ là tốc độ biến thiên của toạ độ ζ của mặt của toạ độ x đã cho. Vì thành phần pháp tuyến của vận tốc chất lỏng đối với mặt gián đoạn bằng vận tốc dịch chuyển của chính mặt, nên trong phép gần đúng đòi hỏi, ta có

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_z - v\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{29-3}$$

(dĩ nhiên, cần lấy v'_z là giá trị của nó ở ngay trên mặt).

Ta tìm p' dưới dạng

$$p' = f(z)e^{i(kx-\omega t)}.$$

Thay vào (29-2), ta tìm được cho $f(z)$ phương trình

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0,$$

từ đó $f = \text{const}\, e^{\pm kz}$. Giả sử không gian về phía đang xét của mặt gián đoạn (phía 1) tương ứng với z dương. Khi đó ta phải lấy $f = \text{const}\, e^{-kz}$, do đó

$$p'_1 = \text{const}\, e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz} \tag{29-4}$$

Thay biểu thức này vào trong thành phần z của phương trình (29-1), ta tìm được [1]:

$$v'_z = \frac{kp'_1}{i\rho_1(kv-\omega)}. \tag{29-5}$$

Độ dịch chuyển ζ cũng có thể tìm được dưới dạng tỷ lệ với cùng thừa số mũ $e^{i(kx-\omega t)}$, và từ (29-3) ta suy ra:

$$v'_z = i\zeta(kv-\omega).$$

Cùng với (29-5) ta được:

$$p'_1 = -\zeta\frac{\rho_1(kv-\omega)^2}{k}. \tag{29-6}$$

Áp suất p'_z về phía bên kia mặt được biểu diễn bởi cùng công thức, trong đó bây giờ cần đặt $v = 0$ và ngoài ra phải đổi dấu (vì trong miền này $z < 0$ và tất cả các đại lượng đều phải tỷ lệ với e^{kz}, mà không phải với e^{-kz}). Như vậy

[1] Trường hợp $kv = \omega$ mặc dù về nguyên tắc có thể xảy được, nhưng ta không xét ở đây, vì sự không ổn định có thể chỉ liên quan đến những "tần số" phức ω, mà không liên quan đến những "tần số" thực ω.

$$p_2' = \zeta \frac{\rho_2 \omega^2}{k}. \qquad (29\text{-}7)$$

Ta viết các mật độ khác nhau ρ_1 và ρ_2, có ý nghĩa bao gồm cả trường hợp, trong đó ta nói đến mặt phân giới giữa hai chất lỏng khác nhau không trộn lẫn được.

Cuối cùng, từ điều kiện bằng nhau của các áp suất p_1 và p_2 ở trên mặt gián đoạn, ta thu được:

$$\rho_1 (kv - \omega)^2 = -\rho_2 \omega^2,$$

từ đó ta có được sự phụ thuộc phải tìm giữa ω và k:

$$\omega = kv \frac{\rho_1 \pm i\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}. \qquad (29\text{-}8)$$

Chúng ta thấy rằng ω là một đại lượng phức và bao giờ các ω cũng có phần ảo dương. Như vậy, các gián đoạn tiếp tuyến là không ổn định, không ổn định ngay đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ [1]. Dưới một dạng như thế, kết quả này đúng đối với mọi độ nhớt nhỏ tùy ý. Trong trường hợp này sự phân biệt tính không ổn định thuộc loại "cuốn trôi" với tính không ổn định tuyệt đối là vô nghĩa, vì khi k tăng thì phần ảo của ω tăng vô hạn, do đó hệ số tăng cường nhiễu động có thể sẽ lớn tùy ý khi nhiễu động bị cuốn trôi.

Nếu xét đến độ nhớt hữu hạn, thì gián đoạn tiếp tuyến sẽ không còn sắc nhọn nữa; sự biến thiên của vận tốc từ giá trị này đến giá trị khác xảy ra trong một lớp có bề dày hữu hạn. Về mặt toán học, vấn đề ổn định của một chuyển động như thế hoàn toàn tương tự với vấn đề ổn định của chuyển động trong lớp biên chảy tầng với điểm uốn ở trong prôfin vận tốc (§41). Các kết quả thực nghiệm và các tính toán bằng số đã chứng tỏ rằng, trong trường hợp đã cho sự không ổn định xuất hiện rất sớm và thậm chí điều này luôn luôn có thể xảy ra [2].

[1] Nếu hướng của vectơ sóng **k** (trong mặt phẳng xy) không trùng với hướng của **v**, mà lập với nó một góc φ, thì trong (29-8) v được thay bằng $v \cos\varphi$; đó là do vận tốc không nhiễu động chỉ xuất hiện trong phương trình Euler không tuyến tính hóa ở tổ hợp (**vV**). Hiển nhiên là, cả những nhiễu động như thế cũng sẽ không ổn định.

[2] Các phép tính bằng số đã được tiến hành cho các dòng chảy song phẳng với prôfin vận tốc thay đổi giữa hai giá trị $\pm v_0$ theo một định luật nào đó, →

§30. CHUYỂN ĐỘNG GIẢ TUẦN HOÀN VÀ SỰ ĐỒNG BỘ CÁC TẦN SỐ [1)]

Trong phần trình bày tiếp theo (§30-32), để tiện lợi ta dùng các mẫu hình học xác định. Muốn vậy, ta đưa vào phép biểu diễn toán học *về không gian các trạng thái* của chất lỏng, mỗi điểm của nó ứng với một sự phân bố (trường) xác định các vận tốc trong không gian. Các trạng thái tại các thời điểm gần nhau khi đó tương ứng với các điểm gần nhau [2)].

Điểm dùng cho mẫu chuyển động dừng, còn đường kín (quỹ đạo) dùng cho mẫu chuyển động tuần hoàn trong không gian các trạng thái; một cách tương ứng chúng được gọi là *điểm giới hạn* hay *chu trình tới hạn*. Nếu các chuyển động ổn định, thì điều đó có nghĩa là các quỹ đạo kế cận mô tả quá trình thiết lập chuyển động trên tiến đến (khi $t \to \infty$) điểm tới hạn hay chu trình tới hạn.

Chu trình tới hạn (hay điểm tới hạn) có trong không gian các trạng thái một *miền hút* xác định: các quỹ đạo bắt đầu trong miền này cuối cùng đi ra thành chu trình. Do đó người ta gọi chu trình tới hạn là tâm hút (attractor) [3)]. Cần nhấn mạnh rằng, đối với chuyển động của chất lỏng trong thể tích đã cho với các điều kiện biên xác định (và với các giá trị R đã cho) tâm hút có thể là không duy nhất. Có thể xảy ra các tình huống, trong không gian các trạng thái có tồn tại nhiều tâm hút và mỗi tâm hút lại có miền hút riêng. Nói một cách khác, với $R > R_c$ có thể có nhiều hơn một chế độ chuyển động ổn định và các chế độ khác nhau được thực hiện tùy thuộc vào cách thức đạt được giá trị R đã cho. Cần nhấn mạnh rằng các chế độ ổn định khác nhau này là các nghiệm của

---

$\to v = v_0 \text{th}(z/h)$ chẳng hạn (khi đó $R = v_0 h/\nu$ giữ vai trò của số Reynolds). Đường cong trung hòa trong mặt phẳng k, R đi ra từ gốc tọa độ, do đó đối với mỗi giá trị của R có một khoảng các giá trị của k (tăng khi R tăng), với các giá trị này dòng chảy là không ổn định.

[1)] §30-32 viết cùng với *M. I. Rabinôvits*.

[2)] Trong tài liệu toán học không gian hàm vô hạn này (hay các không gian hữu hạn chiều mà trong một số trường hợp dưới đây được thay thế) thường được gọi là không gian pha. Ở đây chúng tôi không dùng thuật ngữ này để tránh xáo trộn với ý nghĩa cụ thể hơn thường gặp trong vật lý.

[3)] Lấy từ tiếng Anh: attraction - sự hút.

hệ các phương trình chuyển động phi tuyến [1].

Ta trở lại nghiên cứu các hiện tượng xuất hiện khi tiếp tục tăng số Reynolds, sau khi nó đạt được giá trị tới hạn và thiết lập được dòng chảy tuần hoàn đã khảo sát ở §26. R tiếp tục tăng cuối cùng sẽ tới lúc cả chuyển động tuần hoàn này cũng trở nên không ổn định. Việc nghiên cứu tính không ổn định này, về nguyên tắc phải được tiến hành tương tự như phương pháp xác định tính không ổn định của chuyển động ban đầu đã được trình bày ở §26. Bây giờ chuyển động tuần hoàn $\mathbf{v}_0(r,t)$ (với tần số ω_1) giữ vai trò của chuyển động không nhiễu loạn, còn trong phương trình của chuyển động ta thay $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2$ trong đó $\mathbf{v}_2$ là số bổ chính nhỏ. Đối với $\mathbf{v}_2$ lại thu được phương trình tuyến tính, nhưng các hệ số của nó bây giờ là các hàm không những của tọa độ, mà còn cả thời gian nữa. Với thời gian các hệ số này là những hàm tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Nghiệm của các phương trình như thế phải được tìm dưới dạng

$$\mathbf{v}_2 = \Pi(\mathbf{r}, t)\, e^{-i\omega t}, \tag{30-1}$$

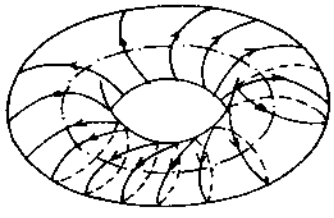
trong đó $\Pi(\mathbf{r},t)$ là một hàm tuần hoàn của thời gian (với cùng chu kỳ T_1). Tính không ổn định lại xảy ra khi xuất hiện tần số $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$, trong đó, phần ảo $\gamma_2 > 0$, còn phần thực ω_2 xác định tần số xuất hiện mới.

Trong khoảng chu kỳ T_1 nhiễu động (30-1) thay đổi $\mu \equiv e^{-i\omega T_1}$ lần. Thừa số này được gọi là *nhân tử* chuyển động tuần hoàn; nó là một đặc trưng tiện lợi cho sự tăng cường hay tắt dần của các nhiễu động của chuyển động đó. Chuyển động tuần hoàn của môi trường liên tục (chất lỏng) tương ứng với một tập hợp vô hạn các nhiễu động độc lập khả dĩ. Sự mất tính ổn định gây bởi chuyển động tuần hoàn với số R_{c2}, tại đó một hay nhiều nhân tử về môđun trở nên bằng 1, nghĩa là trong mặt phẳng phức các giá trị của μ cắt vòng tròn đơn vị. Do các phương trình là thực, nên các nhân tử chỉ có thể đi qua vòng tròn này thành từng cặp liên hợp phức, hay đơn lẻ, vẫn là thực, nghĩa là tại các điểm +1 hay –1. Sự mất tính ổn định do chuyển động tuần hoàn sẽ kéo theo sự sắp xếp

[1] Một tình trạng như thế chẳng hạn có thể là tình trạng mất tính ổn định bởi dòng chảy Kouette; chuyển động mới được thiết lập phụ thuộc vào lịch sử của quá trình đã đưa các mặt trụ vào chuyển động quay với các vận tốc xác định.

lại, về mặt định tính, động thái của các quỹ đạo trong không gian trạng thái tại lân cận chu trình giới hạn không ổn định đã thiết lập hay, như người ta thường nói, sẽ kéo theo *sự phân nhánh* cục bộ của chúng. Tính chất phân nhánh được xác định ở mức độ lớn bởi sự kiện là, các nhân tử cắt vòng tròn đơn vị tại các điểm nào [1].

Chúng ta khảo sát sự phân nhánh khi vòng tròn đơn vị bị cắt bởi cặp các nhân tử liên hợp phức có dạng $\mu = \exp(\mp 2\pi\alpha i)$, trong đó α là một số vô tỷ. Điều này dẫn tới việc xuất hiện dòng chảy thứ cấp với tần số độc lập mới $\omega_2 = \alpha\omega_1$, nghĩa là, kết quả có xuất hiện một chuyển động giả tuần hoàn nào đó, đặc trưng bởi hai tần số vô ước. Quỹ đạo dưới dạng cuộn dây hở quấn trên vòng xuyến hai chiều [2] được dùng làm mẫu hình học cho chuyển động đó trong không gian các trạng thái, đồng thời dùng chu trình giới hạn không ổn định đã thiết lập làm đường sinh của xuyến; tần số ω_1 tương ứng với sự quay theo đường sinh của xuyến, tần số ω_2 tương ứng với sự quay trên xuyến (hình 18). Tương tự như sau khi xuất hiện chuyển động tuần hoàn thứ nhất dòng chảy có một bậc tự do, bây giờ hai đại lượng (các pha) là tùy ý, nghĩa là chuyển động có hai bậc tự do. Sự mất tính ổn định bởi chuyển động tuần hoàn kéo theo "sự sinh" ra vòng xuyến hai chiều là điển hình của thủy động lực.



Hình 18

Ta phân tích bức tranh giả thiết làm phức tạp dòng chảy, xuất hiện do kết quả của một sự phân nhánh như thế, với sự tiếp tục tăng số Reynolds, $R > R_{c2}$. Một cách tự nhiên, ta giả sử rằng, khi tiếp tục tăng R sẽ lần lượt xuất hiện tất cả các chu kỳ mới. Theo ngôn ngữ của các mẫu hình học điều đó có nghĩa là sự mất tính ổn định bởi xuyến hai chiều với

---

[1] Có nhận xét là, nhân tử không thể bằng không: nhiễu động không thể bằng không trong một khoảng thời gian hữu hạn (một chu kỳ T_1).

[2] Ta lợi dụng thuật ngữ toán học, theo thuật ngữ này xuyến được gọi là mặt không có thể tích chứa trong nó. Chẳng hạn, xuyến hai chiều là một mặt hai chiều của "bánh mì vòng" ba chiều.

sự xuất hiện xuyến ba chiều tại lân cận của nó, sau đó do kết quả của sự phân nhánh tiếp sau đến lượt xuyến bốn chiều v.v... thay thế nó. Các khoảng cách giữa các số Reynolds, tương ứng với sự xuất hiện các tần số mới, sẽ giảm nhanh, còn các chuyển động xuất hiện có quy mô càng nhỏ hơn. Như vậy, chuyển động nhanh chóng có được tính chất phức tạp và rắc rối; nó được gọi là *chảy rối* khác với *chảy tầng*, chảy đều đặn, trong đó chất lỏng chuyển động như thể thành các lớp có các vận tốc khác nhau.

Bây giờ giả sử rằng một cách thức (hay như người ta nói, một *kịch bản*) xuất hiện như thế của tính chảy rối thực sự có thể xảy ra [1], ta viết dưới dạng tổng quát của hàm $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, mà sự phụ thuộc của nó vào thời gian được xác định bởi một số N nào đó các tần số ω khác nhau. Có thể coi nó như hàm của N pha $\varphi_i = \omega_i t + \beta_i$ khác nhau (và tọa độ); thêm vào đó cứ mỗi pha trong chúng hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π. Một hàm như thế có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{A}_{p_1 p_2 \ldots p_N}(\mathbf{r}) \exp\left\{-i \sum_{i=1}^{N} p_i \varphi_1\right\}. \qquad (30\text{-}2)$$

là sự mở rộng của (26-13) (lấy tổng theo tất cả các số nguyên $p_1, p_2, \ldots p_N$). Chuyển động mô tả bởi một công thức như thế có N bậc tự do – trong đó có N pha ban đầu tùy ý β_i [2].

Các trạng thái có pha chỉ khác nhau một bội nguyên của 2π đều đồng nhất với nhau về mặt vật lý. Nói một cách khác, tất cả các giá trị khác nhau một cách cơ bản của một trong các pha đều nằm trong khoảng $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$. Ta xét một cặp pha nào đó $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ và $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Giả sử tại một thời điểm nào đó pha φ_1 có giá trị α. Khi đó pha φ_1 sẽ có các giá trị "giống hệt" với α tại mọi thời điểm

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi s \frac{1}{\omega_1},$$

trong đó s là số nguyên nào đó. Pha φ_2 tại các thời điểm ấy có các giá trị

[1] Cách thức ngày được *L.Đ. Landau* đề xuất năm 1944 và sau đó được *E. Hopf* (1948) đề xuất độc lập với ông.

[2] Nếu chọn các pha φ_i làm các tọa độ mô tả các quỹ đạo trên xuyến N chiều, thì các vận tốc tương ứng sẽ là những đại lượng không đổi: $\dot{\varphi}_i = \omega_i$. Do đó chuyển động giả tuần hoàn được gọi là chuyển động trên xuyến với vận tốc không đổi.

$$\varphi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}(\alpha - \beta_1 + 2\pi s).$$

Nhưng các tần số khác nhau đều vô ước với nhau, do đó ω_2/ω_1 là một số vô tỉ. Cứ mỗi lần bằng việc trừ một bội nguyên thích đáng của 2π ta đưa được giá trị φ_2 về khoảng cách giữa 0 và 2π, do đó cho số s lấy các giá trị từ 0 đến ∞ ta thu được cho φ_2 các giá trị gần tùy ý một số đã cho trước ở trong khoảng này. Nói một cách khác trong khoảng thời gian đủ lớn φ_1 và φ_2 đồng thời đi sát gần tùy ý một cặp bất kỳ các giá trị đã cho trước. Cũng như vậy đối với tất cả các pha. Như vậy, trong mẫu đang xét của tính chảy rối, trong khoảng thời gian đủ lớn chất lỏng đi qua các trạng thái được xác định bởi một bộ khả dĩ bất kỳ các giá trị đồng thời của pha φ_i. Thời gian quay trở lại, tuy nhiên, tăng rất nhanh với sự tăng của N và trở nên lớn đến mức thực tế không còn lại một dấu vết nào của tính tuần hoàn cả.[1)]

Bây giờ cần nhấn mạnh rằng, cách thức xuất hiện tính chảy rối đã khảo sát, thực ra, dựa trên các phép biểu diễn tuyến tính. Thực vậy, thực tế đã giả thiết rằng, khi có xuất hiện các nghiệm không tuần hoàn mới, do kết quả phát triển của các tính không ổn định thứ cấp, thì các nghiệm tuần hoàn đã có sẵn không những không biến mất mà hầu như không thay đổi. Trong mẫu đã cho chuyển động chảy rối chỉ là sự chồng chất của một số lớn các nghiệm bất biến như thế. Còn trong trường hợp tổng quát khi tăng số Reynolds tính chất của các nghiệm và sự mất tính ổn định gây bởi chúng có thay đổi. Các nhiễu động tương tác với nhau và điều đó có thể làm cho chuyển động đơn giản đi hoặc phức tạp lên. Ta minh họa khả năng thứ nhất.

Giới hạn ở trường hợp đơn giản nhất : sẽ giả sử rằng nghiệm nhiễu động chỉ chứa tất cả có hai tần số độc lập. Như đã nói, mẫu hình học của một dòng chảy như thế là cuộn dây quấn hở trên xuyến hai chiều. Nhiễu động ở tần số ω_1 xuất hiện với $R = R_{c1}$ một cách tự nhiên được coi là có cường độ lớn hơn ở lân cận số $R = R_{c2}$ (tại đó có xuất hiện nhiễu động

[1)] Trong chế độ chảy rối được thiết lập thuộc loại đã mô tả, xác suất tìm thấy hệ (chất lỏng) trong thể tích nhỏ đã cho chung quanh điểm đã chọn của không gian các pha $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ được cho bởi tỷ số giữa thể tích $(\delta\varphi)^N$ và thể tích toàn phần $(2\pi)^N$. Do đó, có thể nói rằng sau một khoảng thời gian đủ lớn chỉ trong khoảng một phần e^{-xN} của khoảng (trong đó $x = \ln(2\pi/\delta\varphi)$) hệ ở lân cận điểm đã cho.

của tần số ω_2), do đó có thể giả thiết nó bất biến khi số R biến thiên tương đối không lớn tại lân cận này. Do đó, để mô tả sự tiến hóa của nhiễu động với tần số ω_2 trên nền của chuyển động tuần hoàn có tần số ω_1, ta đưa vào biến

$$a_2(t) = |a_2(t)|\, e^{-i\varphi_2(t)}; \tag{30-3}$$

môđun $|a_2|$ là khoảng cách ngắn nhất đến đường sinh của xuyến (của chu trình giới hạn có tần số ω_1 đã trở nên không ổn định), nghĩa là biên độ tương đối của dòng chảy tuần hoàn thứ cấp, còn φ_2 là pha của nó. Ta khảo sát động thái $a_2(t)$ tại những thời điểm gián đoạn, là các bội nguyên của chu kỳ $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Sau thời gian một chu kỳ nhiễu động với tần số ω_2 thay đổi μ lần, trong đó

$$\mu = |\mu| \exp\left(\frac{-2\pi i\omega_2}{\omega_1}\right),$$

là nhân tử của nó; trong khoảng một số nguyên τ các chu kỳ như thế, hàm a_2 được nhân với μ^τ. Chúng ta coi độ trên tới hạn R - R_c là nhỏ; khi đó gia số tăng của nhiễu động cũng nhỏ và một cách tương ứng, hiệu $|\mu|-1$ dù là dương, nhưng nhỏ, do đó sau chu kỳ T nhiễu động a_2 biến thiên về môđun không đáng kể; còn pha φ_2 biến thiên tỷ lệ đơn giản với τ. Nhớ tất cả điều đó, ta có thể chuyển sang khảo sát biến gián đoạn τ như biến liên tục và mô tả tiến trình biến thiên của hàm $a_2(\tau)$ bằng phương trình vi phân theo τ.

Khái niệm về nhân tử được xét cho các thời gian nhỏ nhất sau khi tính không ổn định bắt đầu xảy ra, khi mà nhiễu động còn được mô tả bằng các phương trình tuyến tính. Trong miền này hàm $a_2(\tau)$, theo điều đã nói, biến thiên như μ^τ, còn đạo hàm của nó

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln\mu \cdot a_2(\tau),$$

thêm vào đó, đối với các độ trên tới hạn nhỏ:

$$\ln\mu = \ln|\mu| - 2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1} \approx |\mu| - 1 - 2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}. \tag{30-4}$$

Biểu thức này là số hạng khai triển thứ nhất của $da_2/d\tau$ theo các lũy thừa của a_2 và a_2^* và khi môđun $|a_2|$ tăng (nhưng nó vẫn còn nhỏ) cần xét đến số hạng tiếp theo. Số hạng chứa đúng thừa số dao động $e^{-i\varphi_2}$ là số hạng bậc ba ~ $a_2|a_2|^2$. Như vậy, ta đi tới phương trình

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln\mu \cdot a_2 - \beta_2 a_2 |a_2|^2, \qquad (30\text{-}5)$$

trong đó β_2 (cũng như cả μ) là thông số phức phụ thuộc vào R và $\mathrm{Re}\,\beta_2 > 0$ (so sánh với những lập luận tương tự có liên quan đến phương trình (26-7)). Phần thực của phương trình này xác định ngay giá trị dừng của môđun:

$$\left|a_2^{(0)}\right|^2 = \frac{|\mu|-1}{\mathrm{Re}\ \beta_2}.$$

Còn phần ảo cho phương trình của pha $\varphi_2(\tau)$; sau khi thiết lập được giá trị dừng của môđun, phương trình có dạng

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1} + \mathrm{Im}\ \beta_2 \cdot \left|a_2^{(0)}\right|^2. \qquad (30\text{-}6)$$

Theo phương trình này pha φ_2 quay với vận tốc góc không đổi. Tuy nhiên tính chất này chỉ liên quan đến sự gần đúng đã xét; với sự tăng của độ trên tới hạn $R - R_{c2}$ tính đều bị phá hủy và vận tốc quay theo xuyến trở thành chính hàm φ_2. Để xét đến điều đó, ta thêm vào vế phải của phương trình (30-6) nhiễu động nhỏ $\Phi(\varphi_2)$; vì tất cả các giá trị khác nhau về mặt vật lý đều được chứa trong một khoảng từ 0 đến 2π, hàm $\Phi(\varphi_2)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π. Tiếp sau, ta làm xấp xỉ tỉ số vô tỉ hàm ω_2/ω_1 bằng phân số hữu tỉ (điều này có thể làm được với độ chính xác tùy ý) $\omega_2/\omega_1 = m_2/m_1 + \Delta$, trongđó m_1, m_2 là các số nguyên. Khi đó, phương trình có dạng

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi\frac{m_2}{m_1} + \Delta + \mathrm{Im}\ \beta_2 \cdot \left|a_2^{(0)}\right|^2 + \Phi(\varphi_2). \qquad (30\text{-}7)$$

Bây giờ, ta sẽ chỉ khảo sát các giá trị của pha vào những thời điểm là các bội m_1T_1, nghĩa là với các giá trị của biến $\tau = m_1\bar{\tau}$, trong đó $\bar{\tau}$ là số nguyên. Số hạng thứ nhất trong vế phải của (30-7) sau thời gian m_1T_1

dẫn tới tự sự biến thiên của pha một lượng bằng $2\pi m_2$, nghĩa là một bội nguyên của 2π, mà ta có thể bỏ qua. Sau đó tất cả vế phải của phương trình là một đại lượng nhỏ, và điều này cho phép mô tả sự biến thiên của hàm $\varphi_2(\bar{\tau})$ bằng phương trình vi phân theo biến liên tục $\bar{\tau}$:

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = \Delta + \mathrm{Im}\ \beta_2 \cdot \left|a_2^{(0)}\right|^2 + \Phi(\varphi_2) \qquad (30\text{-}8)$$

(ứng với một bước biến thiên của biến gián đoạn $\bar{\tau}$ hàm φ_2/m_1 thay đổi không đáng kể).

Trong trường hợp tổng quát, phương trình (30-8) có nghiệm dừng $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ được xác định bằng cách cho vế phải của phương trình bằng không. Nhưng tính bất biến của pha φ_2 vào những thời điểm, bội của m_1T_1 có nghĩa là, trên xuyến có tồn tại chu trình giới hạn – các quỹ đạo sẽ khép kín bằng m_1 vòng quay. Do tính tuần hoàn của hàm $\Phi(\varphi_2)$ các nghiệm như thế xuất hiện thành từng cặp (trong trường hợp đơn giản nhất – một cặp): một nghiệm trên phần tăng, còn nghiệm kia trên phần giảm của hàm $\Phi(\varphi_2)$. Trong hai nghiệm đó, chỉ có nghiệm sau là ổn định, đối với nghiệm này ở gần điểm $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$ phương trình (30-8) có dạng:

$$\frac{d\varphi_2}{d\bar{\tau}} = -\mathrm{const} \cdot (\varphi_2 - \varphi_2^{(0)})$$

(với hệ số const > 0) và thực sự có nghiệm tiến đến $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)}$; còn nghiệm thứ hai là không ổn định (đối với nghiệm này const < 0).

Sự sinh ra chu trình giới hạn ổn định ở trên xuyến có nghĩa là *sự đồng bộ* các dao động [1], đó là sự biến mất của chế độ giả tuần hoàn và sự thiết lập một chế độ mới. Hiện tượng này, có thể xảy ra bằng nhiều phương thức khác nhau ở trong hệ có nhiều bậc tự do, đã ngăn cản sự xuất hiện chế độ, là chồng chất các chuyển động với số lớn các tần số vô ước. Theo nghĩa đó, ta có thể nói rằng xác suất để thực hiện thực sự đúng kịch bản *Landau - Hopf* rất nhỏ (tất nhiên trong một số trường hợp riêng, điều này không loại trừ khả năng xuất hiện một số tần số vô ước trước khi xảy ra sự đồng bộ chúng).

[1] Theo thuật ngữ tiếng Anh – frequency locking.

§31. TÂM HÚT LẠ

Hiện tại vẫn chưa có một lý thuyết quán triệt về sự xuất hiện tính chảy rối trong các loại dòng chảy thủy động lực khác nhau. Tuy nhiên người ta cũng đã đề xuất được một loạt các kịch bản khả dĩ cho quá trình làm hỗn loạn chuyển động, chủ yếu dựa trên các công trình nghiên cứu bằng máy tính các hệ mô hình phương trình vi phân, và một phần được xác nhận bằng các công trình thực nghiệm thủy động lực thực. Nội dung tiếp theo trong tiết này và các tiết sau chỉ có mục đích cung cấp quan niệm của các ý tưởng đó, mà không đi vào thảo luận về các kết quả tương ứng cho bởi máy tính và thực nghiệm. Chỉ có nhận xét là, các số liệu thực nghiệm được xét cho các chuyển động thủy động lực trong các khối lượng hạn chế: dưới đây chúng tôi có ý nói đến đúng các chuyển động đó [1].

Trước hết, cần có nhận xét tổng quát quan trọng sau đây. Khi phân tích tính ổn định của chuyển động tuần hoàn ta mới chỉ quan tâm đến các nhân tử có môđun gần bằng 1 – chính chúng có thể cắt vòng tròn đơn vị với R biến thiên không lớn. Đối với dòng chảy của chất lỏng nhớt số các nhân tử "nguy hiểm" như thế bao giờ cũng là hữu hạn, vì nguyên nhân sau. Các kiểu (mốt) nhiễu động khác nhau được các phương trình chuyển động chấp nhận có cỡ không gian khác nhau (nghĩa là các độ dài khoảng cách trên đó vận tốc $\mathbf{v}_2$ thay đổi nhiều). Cỡ chuyển động càng nhỏ, các gradiên vận tốc trong đó càng lớn và chuyển động càng bị hãm mạnh bởi độ nhớt. Nếu sắp xếp các mốt đã được chấp nhận theo thứ tự giảm về cỡ, thì chỉ một số hữu hạn nào đó các mốt đầu tiên trong chúng là có thể nguy hiểm; trong dãy thứ tự đó các mốt đủ xa rõ ràng là tắt mạnh, nghĩa là chúng ứng với các nhân tử có môđun nhỏ. Tình huống đó cho phép ta coi rằng, sự giải thích các kiểu mất tính ổn định bởi chất lỏng nhớt thực ra có thể được tiến hành giống như sự phân tích tính ổn định của chuyển động tuần hoàn của hệ cơ gián đoạn tiêu tán, được mô

[1] Thực tế ở đây nói đến sự đổi lưu nhiệt trong các thể tích hữu hạn và đến chuyển động Kouette giữa hai mặt trụ đồng trục có độ dài hữu hạn. Các quan niệm lý thuyết về cơ chế sự chảy rối hóa lớp biên và vết sau vật hữu hạn có dòng chảy bao quanh hiện này vẫn còn ít được phát triển, mặc dù tài liệu thực nghiệm đã tích luỹ được đáng kể.

tả bởi một số hữu hạn các biến (về phương diện thủy động lực, chẳng hạn các biến đó có thể là các biên độ thành phần khai triển của trường các vận tốc thành chuỗi Fourier theo các tọa độ). Phù hợp với điều đó cả không gian trạng thái cũng trở thành hữu hạn chiều.

Theo quan điểm toán học, ở đây đề cập đến việc nghiên cứu sự tiến hóa của hệ mô tả bởi các phương trình có dạng

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{31-1}$$

trong đó $\mathbf{x}(t)$ là vectơ trong không gian n đại lượng $x^{(1)}, x^{(2)},..., x^{(n)}$ mô tả hệ; hàm $\mathbf{F}$ phụ thuộc vào thông số, mà sự biến thiên của nó có thể dẫn đến sự biến thiên của tính chất chuyển động [1]. Đối với hệ tiêu tán div của vectơ $\dot{\mathbf{x}}$ trong $\mathbf{x}$-không gian âm, điều này biểu diễn sự co ngắn các thể tích của $\mathbf{x}$-không gian khi chuyển động [2]:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(i)}} < 0. \tag{31-2}$$

Ta trở lại thảo luận các kết quả khả dĩ về tương tác giữa các chuyển động tuần hoàn khác nhau. Hiện tượng đồng bộ hóa làm cho chuyển động trở nên đơn giản. Nhưng tương tác có thể phá hủy tính giả tuần hoàn cả trong hướng làm cho bức tranh phức tạp lên nhiều. Cho đến nay, ta vẫn im lặng hiểu ngầm rằng, khi có sự mất ổn định do bởi chuyển động tuần hoàn thì có một chuyển động tuần hoàn khác xuất hiện bổ sung cho nó. Nhưng về mặt logic điều này hoàn toàn không nhất thiết. Tính bị chặn của các biên độ mạch động của vận tốc chỉ bảo đảm cho tính bị chặn của thể tích không gian các trạng thái, trong đó các quĩ đạo được sắp xếp tương ứng với chế độ dòng chảy thiết lập cho chất lỏng nhớt. Nhưng bức tranh các quĩ đạo trong thể tích này tỏ ra không nói được điều gì một cách tiên nghiệm (a priori, ND). Các quĩ đạo có thể tiến đến chu trình giới hạn hay đến quấn không kín trên xuyến (tương ứng với các mẫu chuyển động tuần hoàn và chuyển động

[1] Theo thuật ngữ toán học hàm $\mathbf{F}$ được gọi là trường vectơ của hệ. Nếu nó không phụ thuộc tường minh vào thời gian (như ở (31-1) thì hệ được gọi là ôtônôm.

[2] Nhớ lại rằng, đối với hamiltonian của hệ cơ thì div này bằng không theo định lý Liouville; các thành phần của vectơ $\mathbf{x}$ khi đó là các tọa độ suy rộng q và xung lượng suy rộng p của hệ.

giả tuần hoàn), nhưng có thể có động thái hoàn toàn khác – tức là phức tạp và rối loạn. Chính khả năng này là cực kỳ quan trọng cho việc hiểu bản chất toán học và giải thích cơ chế xuất hiện tính chảy rối.

Hãy hình dung động thái phức tạp và rối loạn của các quỹ đạo bên trong thể tích bị chặn, và các quỹ đạo chỉ về đây, nếu giả sử rằng, tất cả các quỹ đạo bên trong đó đều không ổn định. Trong số chúng có thể có không những các chu trình không ổn định, mà còn có cả các quỹ đạo kín phiêu bạt vô hạn ở bên trong miền bị chặn, mà không ra khỏi miền đó. Tính không ổn định có nghĩa là hai điểm rất gần nhau một cách tùy ý của không gian các trạng thái, chuyển động tiếp sau theo các quỹ đạo đi qua chúng, rồi tách xa nhau, các điểm thoạt đầu gần nhau có thể thuộc về cùng một quỹ đạo: do tính bị chặn của miền, quỹ đạo không kín có thể đến gần tùy ý chính bản thân mình. Chính động thái phức tạp, không đều như thế của các quỹ đạo có liên hệ với chuyển động chảy rối của chất lỏng.

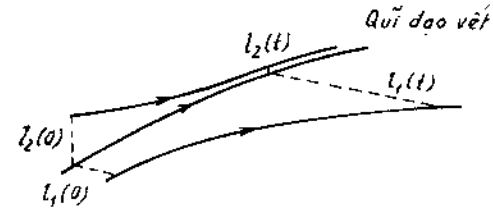
Hình ảnh này còn có một khía cạnh khác – sự phụ thuộc nhạy bén của dòng chảy vào sự biến thiên nhỏ của các điều kiện ban đầu. Nếu chuyển động là ổn định, thì độ không chính xác nhỏ trong việc cho các điều kiện ban đầu chỉ dẫn tới một độ không chính xác tương tự trong việc xác định trạng thái cuối. Nhưng nếu chuyển động là không ổn định thì độ không chính xác ban đầu sẽ tăng với thời gian và trạng thái tiếp sau của hệ sẽ không thể đoán trước được (*N. X. Krulov*, 1944; *M. Born*, 1952).

Tập hợp hút của các quỹ đạo không ổn định trong không gian các trạng thái của hệ tiêu tán thực sự có thể tồn tại (*E. Lorenz*, 1963); nó thường được gọi là *tâm hút lạ* [1] (hay tâm hút stochasis, tiếng Hy lạp cổ có nghĩa là phỏng đoán, ngẫu nhiên, xác xuất ...ND).

Mới thoạt nhìn, sự đòi hỏi về tính không ổn định của tất cả các quỹ

[1] Khác với các tâm hút (attractor, ND) thông thường (đó là các chu trình giới hạn, ổn định, các điểm tới hạn v.v...); tên gọi tâm hút "lạ" liên quan đến sự phức tạp trong cấu trúc của nó, mà ta sẽ nói đến dưới đây. Trong tài liệu vật lý thuật ngữ "tâm hút lạ" ký hiệu cho một tập hợp hút phức tạp hơn, nó chứa đựng không chỉ các quỹ đạo không ổn định, mà cả các quỹ đạo ổn định, nhưng với các miền hút rất nhỏ đến mức không thể phát hiện được chúng dù trong các thí nghiệm vật lý hay thí nghiệm số.

đạo thuộc về tâm hút và sự đòi hỏi tất cả các quỹ đạo kế cận khi $t \to \infty$ phải tiến gần đến tâm hút có vẻ là không tương thích, vì tính không ổn định, có nghĩa là tính tản xa của các quỹ đạo. Mâu thuẫn bề ngoài này được khắc phục nếu để ý rằng, các quỹ đạo có thể không ổn định theo một hướng này trong không gian các trạng thái và ổn định (nghĩa là hút) theo một hướng khác. Trong không gian n – chiều các trạng thái, các quỹ đạo thuộc về tâm hút lạ không thể không ổn định theo tất cả (n-1) hướng (một hướng với chuyển động dọc theo quỹ đạo), vì điều đó như thể có nghĩa là sự tăng liên tục của thể tích ban đầu trong không gian các trạng thái, điều này không thể có được đối với hệ tiêu tán. Do đó, theo những hướng này các quỹ đạo kế cận với các quỹ đạo của tâm hút sẽ tiến gần, còn theo những hướng khác – không ổn định – chúng lại đi ra xa các quỹ đạo tâm hút (hình 19). Các quỹ đạo như thế được gọi là các quỹ đạo *vết*, và chính tập hợp các quỹ đạo như thế tạo thành tâm hút lạ.



Hình 19

Tâm hút lạ có thể đã nảy sinh ngay sau một số phân nhánh xuất hiện các chu kỳ mới: thậm chí một sự phi tuyến rất nhỏ tùy ý cũng có thể phá hủy chế độ giả tuần hoàn (quấn không kín trên xuyến), và tạo trên xuyến một tâm hút lạ (*D. Ruelle, F. Takens*, 1971). Tuy nhiên điều đó không thể xảy ra trên sự phân nhánh thứ hai (bắt đầu từ sự phá hủy chế độ dừng). Với sự phân nhánh này có xuất hiện một sự quấn không kín trên xuyến hai chiều. Việc xét đến tính phi tuyến nhỏ không phá hủy xuyến. Nhưng trên mặt hai chiều không thể tồn tại tập hợp hút các quỹ đạo không ổn định. Vấn đề là ở chỗ, các quỹ đạo trong không gian các trạng thái không thể cắt nhau (hay tự cắt); điều này mâu thuẫn với tính nhân quả trong động thái các hệ cổ điển: trạng thái của hệ tại mọi thời điểm xác định đơn trị động thái của nó tại các thời điểm tiếp sau. Trên mặt hai chiều, không thể có các sự giao nhau, điều này tăng cường sự sắp xếp

trật tự dòng các quỹ đạo đến mức không thể xảy ra sự xáo trộn hỗn loạn các quỹ đạo.

Nhưng trên sự phân nhánh thứ ba, sự xuất hiện tâm hút lạ đã trở nên khả dĩ (mặc dù không nhất thiết!). Một tâm hút như vậy, thay thế cho chế độ giả tuần hoàn ba tần số, được sắp xếp trên xuyến ba chiều (*S. Newhouse, D. Ruelle, F. Takens,* 1978).

Những quỹ đạo phức tạp, rối loạn thuộc về tâm hút lạ được sắp xếp trong thể tích hạn chế của không gian các trạng thái. Việc phân loại các tâm hút lạ khả dĩ có thể gặp trong các bài toán thủy động lực thực, cho đến nay vẫn chưa có; thậm chí cũng chưa rõ cả các tiêu chuẩn để đặt cơ sở cho việc phân loại như thế. Những hiểu biết hiện có về cấu trúc của các tâm hút lạ chủ yếu chỉ dựa trên việc nghiên cứu các thí dụ xuất hiện khi giải bằng máy tính các hệ mô hình phương trình vi phân thông thường, khá xa với các phương trình thủy động lực thực. Tuy nhiên về cấu trúc của tâm hút lạ có thể phát biểu một số ý kiến chung đã được rút ra từ tính không ổn định của quỹ đạo (loại yên ngựa) và tính tiêu tán của hệ.

Để cụ thể ta sẽ nói đến không gian ba chiều các trạng thái và hình dung tâm hút được sắp xếp ở bên trong xuyến hai chiều. Ta khảo sát một chùm các quỹ đạo trên đường đi tới tâm hút (chúng mô tả các chế độ chuyển tiếp của chuyển động chất lỏng, dẫn đến sự thiết lập tính chảy rối "dừng"). Trong tiết diện ngang của chùm, các quỹ đạo (đúng hơn là các vết của chúng) lấp đầy diện tích xác định; chúng ta theo dõi sự biến thiên của độ lớn và hình dạng diện tích đó dọc theo chùm. Ta nhận thấy rằng phần tử thể tích tại lân cận quỹ đạo hình yên ngựa theo một trong các hướng (ngang) bị dãn ra, còn theo một hướng khác bị nén lại; do tính tiêu tán của hệ sự nén mạnh hơn sự dãn – các thể tích phải giảm đi. Theo dạng các quỹ đạo các hướng này phải thay đổi – trong trường hợp ngược lại các quỹ đạo sẽ phải đi ra quá xa (điều đó có nghĩa là sự biến thiên quá lớn của vận tốc chất lỏng). Tất cả các điều đó dẫn đến kết quả là, tiết diện chùm giảm về diện tích và lấy dạng dẹt, đồng thời bị uốn cong đi. Nhưng quá trình này phải diễn ra không những đối với tiết diện của chùm về toàn bộ, mà còn với mỗi phần tử tiết diện của nó. Kết quả là, tiết diện của chùm tách thành một hệ các dải lồng vào

nhau, ngăn cách với nhau bởi những khoảng trống. Với thời gian (nghĩa là dọc theo chùm các quỹ đạo) số các dải tăng nhanh, nhưng bề rộng của chúng giảm. Xuất hiện tại giới hạn $t \to \infty$, tâm hút là một tập hợp không đếm được của vô số các lớp không tiếp xúc với nhau – tức là các mặt, trên đó có sắp xếp các quỹ đạo hình yên ngựa (quay ra "phía ngoài" tâm hút do các hướng hút của chúng). Các lớp này nối với nhau một cách phức tạp bằng các cạnh bên và các đầu của mình; mỗi một trong các quỹ đạo thuộc tâm hút phiêu bạt theo tất cả các lớp và sau một khoảng thời gian đủ lớn nó đi khá gần một điểm bất kỳ của tâm hút (tính chất ecgôcđic). Thể tích chung của các lớp và diện tích chung các tiết diện của chúng bằng không.

Theo thuật ngữ toán học, các tập hợp như thế theo một trong các hướng thuộc về phạm trù Canto. Chính tính Canto của cấu trúc cần được coi như tính chất đặc trưng nhất của tâm hút cả trong trường hợp tổng quát hơn của không gian các trạng thái n chiều ($n > 3$).

Thể tích của tâm hút lạ trong không gian trạng thái của nó bao giờ cũng bằng không. Tuy nhiên nó có thể khác không trong một không gian khác có thứ nguyên nhỏ hơn. Không gian này được xác định như sau. Chia toàn bộ không gian n chiều thành các hình hộp lập phương nhỏ có độ dài mỗi cạnh là ε và thể tích bằng ε^n. Giả sử $N(\varepsilon)$ – số nhỏ nhất các hình hộp lập phương, mà tập hợp của chúng phủ hoàn toàn tâm hút. Ta định nghĩa thứ nguyên D của tâm hút là giới hạn [1].

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \tag{31-3}$$

Sự tồn tại của giới hạn này nói lên thể tích của tâm hút trong không gian D–chiều là hữu hạn: với ε nhỏ $N(\varepsilon) \approx Ve^{-D}$ (trong đó V không đổi), từ đó ta thấy rằng $N(\varepsilon)$ có thể được coi là số các hình hộp lập phương D-chiều bao phủ thể tích V trong không gian D–chiều. Rõ ràng là, thứ nguyên định nghĩa theo (31-3) không thể vượt quá thứ nguyên toàn phần của không gian n chiều các trạng thái, nhưng có thể nhỏ hơn không gian đó, và khác với thứ nguyên thường dùng, nó có thể là một

[1] Trong toán học, đại lượng này được viết như là dung lượng giới hạn của tập hợp. Định nghĩa của nó gần như với định nghĩa của thứ nguyên fractal.

phân số; chính nó là như thế đối với các tập hợp Canto [1].

Chúng ta chú ý đến tình huống quan trọng sau. Nếu chuyển động chảy rối đã được thiết lập (dòng "đã đi ra tâm hút lạ"), thì một chuyển động như thế của hệ tiêu tán (chất lỏng nhớt) về nguyên tắc không khác với chuyển động ngẫu nhiên (stochasio, ND) của hệ không tiêu tán với thứ nguyên nhỏ hơn của không gian các trạng thái. Đó là do, đối với chuyển động đã được thiết lập sự tiêu tán năng lượng do độ nhớt tính trung bình sau khoảng một thời gian lớn được bù trừ bằng năng lượng chuyển đến từ dòng chảy trung bình (hay từ một nguồn không cân bằng khác). Do đó, nếu theo dõi sự tiến hóa theo thời gian của phần tử "thể tích" thuộc về tâm hút (trong một không gian nào đó có thứ nguyên xác định bởi thứ nguyên của tâm hút), thì thể tích này tính trung bình sẽ được bảo toàn – sự nén của nó theo các phương này tính trung bình sẽ được bù trừ bởi sự dãn do có sự phân kỳ của các quỹ đạo gần nhau theo các phương khác. Có thể lợi dụng tính chất này để thu được một phương pháp khác đánh giá thứ nguyên của tâm hút.

Do tính écgôđic đã nói trong chuyển động của tâm hút lạ, các đặc trưng trung bình của nó có thể được thiết lập bằng cách phân tích chuyển động dọc theo một quỹ đạo không ổn định thuộc tâm hút trong không gian các trạng thái. Nói một cách khác, ta giả sử rằng quỹ đạo cá thể tái tạo ra các tính chất của tâm hút, nếu chuyển động theo nó trong một thời gian dài vô hạn

Giả sử $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$, phương trình của một quỹ đạo như thế, là một trong các nghiệm của những phương trình (31-1). Chúng ta khảo sát sự biến dạng của phần tử thể tích "cầu" khi nó chuyển dịch dọc theo quỹ đạo đó. Nó được xác định bởi các phương trình (31-1) đã tuyến tính hóa theo hiệu $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$, là độ lệch của các quỹ đạo sát cạnh với quỹ đạo đã cho. Các phương trình này, viết theo các thành phần có dạng

$$\xi^{(i)} = A_{ik}(t)\xi^{(k)}, \qquad A_{ik}(t) = \left.\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}}\right|_{x=x_0(t)}. \tag{31-4}$$

[1] Các hình hộp lập phương n chiều bao phủ tập hợp có thể "hầu như rỗng"; chính vì thế nên có thể $D < n$. Đối với các tập hợp thông thường định nghĩa (31-3) cho ta những kết quả hiển nhiên. Chẳng hạn như, đối với tập hợp N điểm cô lập ta có $N(\varepsilon) = N$ và $D = 0$; đối với đoạn L các đường $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$, $D = 1$; đối với diện tích S của mặt hai chiều: $N(\varepsilon) = S/\varepsilon^2$, $D = 2$ v.v...

Khi dịch chuyển dọc theo quỹ đạo phần tử thể tích bị nén theo những phương này, bị dãn theo những phương khác, và hình cầu chuyển thành hình elipxôit. Khi chuyển động dọc theo quỹ đạo thì các phương của những bán trục elipxôit cũng như độ dài của chúng đều thay đổi; ký hiệu các độ dài này là $l_s(t)$, trong đó s đánh số các hướng. Các giá trị tới hạn

$$L_s = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{l_s(t)}{l(0)}, \tag{31-5}$$

trong đó $l(0)$ là bán kính của hình cầu ban đầu (vào thời điểm quy ước chọn $t = 0$) được gọi là *các chỉ số đặc trưng Liapunovx*. Các đại lượng xác định như vậy là những số thực, số của chúng bằng số chiều n của không gian. Một trong các số này (ứng với phương dọc theo chính quỹ đạo) bằng không [1].

Tổng các chỉ số Liapunovx xác định độ biến thiên trung bình của thể tích sơ cấp dọc theo quỹ đạo trong không gian các trạng thái. Độ biến thiên tỷ đối địa phương của thể tích tại mỗi điểm của quỹ dạo được cho bởi div $\mathbf{x}$ = div $\xi = A_{ii}(t)$. Có thể chứng minh rằng giá trị trung bình dọc theo quỹ đạo div [2]:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{div}\xi \, dt = \sum_{s=1}^{n} L_s. \tag{31-6}$$

Đối với hệ tiêu tán tổng này âm - các thể tích trong không gian trạng thái n chiều bị nén lại. Nhưng thứ nguyên của tâm hút lạ được định nghĩa sao cho "trong không gian của nó" các thể tích trung bình được bảo toàn. Muốn vậy, ta sắp xếp các chỉ số Liapunovx theo thứ tự $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_n$ và cần xét các phương ổn định sao cho có thể bù trừ sự dãn bằng sự nén. Thứ nguyên xác định như vậy của tâm hút (được ký hiệu là D_L) sẽ nằm giữa m và $m + 1$, trong đó m là số các chỉ số trong thứ tự đã nêu, tổng của chúng vẫn còn dương, nhưng sau khi bổ sung

[1] Tất nhiên, nghiệm của các phương trình (31-4) (với các điều kiện ban đầu đã cho, tại $t = 0$) thực tế chỉ mô tả quỹ đạo sát cạnh, chừng nào tất cả các khoảng cách $l_s(t)$ còn nhỏ. Tuy nhiên, điều này không làm mất ý nghĩa của định nghĩa (31-5), trong đó có dùng những thời gian lớn tùy ý: đối với mọi t lớn có thể chọn $l(0)$ nhỏ đến mức các phương trình đã tuyến tính hóa vẫn còn đúng cho toàn bộ thời gian này.

[2] Xem *Oxêleđetx V. I.* – Các công trình toán. Maxcơva, 1968, tập 19, tr.179.

thêm L_{m+1} thì tổng đó sẽ âm[1]. Phần phân số của thứ nguyên $D_L = m + d$ ($d < 1$) tìm được từ đẳng thức

$$\sum_{s=1}^{m} L_s + L_{m+1} d = 0 \qquad (31\text{-}7)$$

(*F. Ledrappier*, 1981). Vì khi tính D ta chỉ xét những phương kém ổn định nhất (bỏ những chỉ số âm L_s lớn nhất về giá trị tuyệt đối ở cuối dãy của chúng), nên việc đánh giá thứ nguyên cho bởi đại lượng D_L nói chung chỉ là sự đánh giá từ trên xuống. Sự đánh giá này về nguyên tắc mở ra con đường cho việc xác định thứ nguyên của tâm hút dựa theo các phép đo bằng thực nghiệm tiến trình thời gian của các mạch động vận tốc trong dòng chảy rối.

§32. SỰ CHUYỂN SANG TÍNH CHẢY RỐI BẰNG CÁCH TĂNG ĐÔI CHU KỲ

Bây giờ ta xét sự mất tính ổn định do chuyển động tuần hoàn bằng cách cho nhân tử đi qua giá trị –1 hay +1.

Trong không gian n- chiều các trạng thái, n – 1 nhân tử xác định động thái các quỹ đạo trong n-1 phương khác nhau tại lân cận quỹ đạo tuần hoàn đã khảo sát (khác với các phương tiếp tuyến tại mỗi điểm của chính quỹ đạo đó). Giả sử nhân tử gần với ± 1 tương ứng với một phương thứ l nào đó, n-2 nhân tử còn lại nhỏ theo môđun; do đó theo n-2 phương tương ứng với chúng, tất cả các quỹ đạo với thời gian sẽ áp sát vào một mặt hai chiều nào đó (gọi là mặt Σ), phương thứ l và phương của các tiếp tuyến đã nêu thuộc về mặt này. Có thể nói rằng, tại lân cận của chu trình giới hạn không gian các trạng thái với $t \to \infty$ sẽ gần như hai chiều (nó không thể chặt chẽ hai chiều được – các quỹ đạo có thể nằm ở cả hai bên Σ và chuyển từ bên này của mặt sang phía bên kia). Chúng ta cắt dòng các quỹ đạo ở gần Σ bằng một mặt cát tuyến σ nào đó. Mỗi quỹ đạo, khi cắt σ lần hai, sẽ đặt $\mathbf{x}_{j+1}$ là giao điểm vào lúc trở lại tiếp sau phù hợp với giao điểm lần đầu là $\mathbf{x}_j$. Mối liên hệ $\mathbf{x}_{j+1} = f(\mathbf{x}_j; R)$

[1] Việc xét đến chỉ số Liapunovx bằng không sẽ đưa thêm vào thứ nguyên D_L phần đóng góp +1, tương ứng với thứ nguyên dọc theo chính quỹ đạo.

được gọi là *phép ánh xạ Poincaré* (hay *phép ánh xạ kế tiếp*); nó phụ thuộc vào thông số R (trong trường hợp đã cho – đó là số Reynolds [1]), giá trị của nó xác định bậc độ gần với sự phân nhánh – với sự mất tính ổn định bởi chuyển động tuần hoàn. Vì tất cả các quỹ đạo đều áp sát với mặt Σ, nên tập hợp tất cả các giao điểm của mặt σ với các quỹ đạo hầu như là một chiều và có thể coi làm xấp xỉ nó một cách gần đúng là một đường, phép ánh xạ Poincaré trở thành phép ánh xạ một chiều

$$x_{j+1} = f(x_j ; R) \qquad (32\text{-}1)$$

và x sẽ đơn giản là tọa độ trên đường đã nêu [2]. Biến gián đoạn f giữ vai trò thời gian, được đo trong các đơn vị chu kỳ của chuyển động.

Phép ánh xạ (32-1) cho phương pháp xác định luân phiên tính chất của dòng chảy ở gần nơi phân nhánh. Bản thân chuyển động tuần hoàn tương ứng với *điểm cố định* của phép biến đổi (32-1) – giá trị $x_j = x_*$ không thay đổi trong phép ánh xạ, nghĩa là đối với điểm này $x_{j+1} = x_j$. Giữ vai trò của nhân tử là đạo hàm $\mu = dx_{j+1}/dx_j$ lấy tại điểm $x_j = x_*$. Các điểm $x_j = x_* + \xi$ tại lân cận x_* do kết quả của phép ánh xạ sẽ chuyển thành $x_{j+1} \approx x_* + \mu\xi$. Điểm đứng yên là ổn định (và là tâm hút ánh xạ), nếu $|\mu|<1$: lặp lại (lat. *iteratio*, ND) ứng dụng phép ánh xạ và bắt đầu từ một điểm nào đó tại lân cận điểm x_*, ta sẽ tiến tiệm cận đến điểm sau cùng này (theo quy luật $|\mu|^r$, trong đó r là số lặp lại). Ngược lại với $|\mu|>1$ điểm đứng yên là không ổn định.

Ta khảo sát sự mất tính ổn định do chuyển động tuần hoàn khi nhân tử chuyển qua –1. Đẳng thức $\mu = -1$ có nghĩa là nhiễu động ban đầu sau khoảng thời gian T_0 sẽ đổi dấu, nhưng giá trị tuyệt đối không đổi: thêm một chu kỳ T_0 nữa nhiễu động chuyển thành chính mình. Như vậy, khi μ chuyển qua giá trị – 1 tại lân cận của chu trình giới hạn với chu kỳ T_0 có xuất hiện một chu trình giới hạn mới với chu kỳ $2T_0$ – *phân nhánh gấp đôi chu kỳ* [3]. Hình 20 biểu diễn qui ước những phân nhánh

[1] Hay số Rayleigh, nếu nói đến chuyển động nhiệt (§56).

[2] Ký hiệu x trong tiết này tất nhiên không có gì giống với tọa độ trong không gian vật lý!

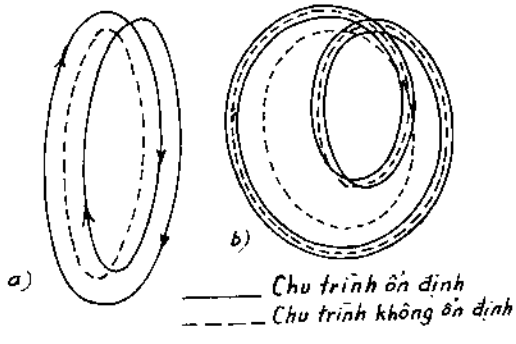
[3] Trong tiết này chu kỳ cơ bản, nghĩa là chu kỳ của chuyển động tuần hoàn đầu tiên, được ký hiệu là T_0 (mà không phải là T_1). Các giá trị tới hạn của số Reynolds, ứng với các phân nhánh kế tiếp gấp đôi chu kỳ sẽ được ký hiệu bằng R_1, R_2 ..., bỏ chỉ số "c" (số R_1 thay thế số R_{c2} trước).

kế tiếp như thế; trên hình vẽ *a*, *b*, các đường liền nét biểu thị các chu trình ổn định với các chu kỳ $2T_0$, $4T_0$, còn các đường đứt nét biểu thị các chu trình không ổn định cũ.

Nếu quy ước lấy điểm đứng yên của ánh xạ Poincaré là điểm $x = 0$, thì ánh xạ ở gần nó, mô tả sự phân nhánh gấp đôi chu kỳ, có thể được biểu diễn dưới dạng khai triển

$$x_{j+1} = -[1 + (R - R_1)]\, x_j + x_j^2 + \beta x_j^3, \qquad (32\text{-}2)$$

trong đó $\beta > 0$ [1]. Với $R < R_1$ điểm đứng yên $x_* = 0$ là ổn định, còn với $R > R_1$ điểm $x_* = 0$ là không ổn định. Để xem sự nhân đôi chu kỳ xảy ra như thế nào, cần lặp lại ánh xạ (32-2) hai lần, nghĩa là quan sát nó sau hai bước (hai đơn vị thời gian) và xác định các điểm đứng yên dọc theo các ánh xạ đã thu được; nếu chúng tồn tại và ổn định thì chính chúng tương ứng với một chu kỳ gấp đôi.



Hình 20

Việc lặp lại hai lần phép biến đổi (32-2) dẫn tới (với độ chính xác cần thiết theo các đại lượng nhỏ x_j và $R - R_1$) phép ánh xạ

$$x_{j+2} = x_j + 2(R - R_1)x_j - 2(1 + \beta)x_j^3. \qquad (32\text{-}3)$$

Bao giờ nó cũng có điểm cố định $x_* = 0$. Với $R < R_1$ điểm đó là duy nhất và ổn định (nhân tử $|dx_{j+2}/dx_j| < 1$); đối với chuyển động có chu kỳ 1 (trong các đơn vị T_0) khoảng thời gian 2 – cũng là chu kỳ. Với $R = R_1$ nhân tử bằng + 1 và với $R > R_1$ điểm $x_* = 0$ trở nên không ổn định. Tại thời điểm này có sinh ra một cặp các điểm đứng yên ổn định

$$x_*^{(1),(2)} = \pm\left[\frac{R - R_1}{1 + \beta}\right]^{1/2} \qquad (32\text{-}4)$$

[1] Hệ số của $R - R_1$ có thể biến thành đơn vị bằng một sự định nghĩa lại thích hợp cho R, còn hệ số của x_j^2 biến thành +1 bằng sự định nghĩa lại x_j (như đã giả thiết ở (32-2)).

Chính các điểm này tương ứng với chu trình giới hạn ổn định có chu kỳ gấp đôi [1]. Phép biến đổi (32-3) giữ mỗi một trong hai điểm đó tại chỗ, còn phép biến đổi (32-2) chuyển điểm nọ thành điểm kia. Cần nhấn mạnh rằng, chu trình có chu kỳ đơn vị, với sự phân nhánh đã mô tả, không biến mất – nó vẫn là nghiệm của phương trình chuyển động, nhưng không ổn định.

Ở gần phân nhánh chuyển động vẫn còn "gần như tuần hoàn" với chu kỳ 1: các điểm quay trở lại kế tiếp $x^{(1)}$ và $x^{(2)}$ của quĩ đạo gần nhau. Khoảng $x^{(1)} - x^{(2)}$ giữa chúng là số đo biên độ các dao động với chu kỳ 2; nó tăng với độ trên tới hạn như $(R - R_1)^{1/2}$ – tương tự như định luật (26-10) tăng biên độ của chuyển động tuần hoàn sau khi nó xuất hiện tại điểm mất tính ổn định do chuyển động dừng.

Sự lặp lại đa bội (nhiều lần) các phân nhánh có chu kỳ gấp đôi mở ra một trong các khả năng xuất hiện tính chảy rối. Trong kịch bản này, số các phân nhánh là vô hạn, và chúng tiếp sau nhau (với sự tăng của R) sau những khoảng giảm dần; dãy các giá trị tới hạn R_1, R_2... tiến đến giới hạn hữu hạn, sau đó tính tuần hoàn biến mất hoàn toàn và trong không gian xuất hiện tâm hút không tuần hoàn phức tạp, có liên quan đến sự xuất hiện tính chảy rối ở trong kịch bản này. Ta nhận thấy rằng, kịch bản này có tính phổ dụng đầy ấn tượng và tính bất biến về cỡ (*M.J. Feigenbaum*, 1978 [2]).

Lý thuyết định lượng trình bày dưới đây xuất phát từ điều kiện tiên quyết là, các phân nhánh tiếp sau (với sự tăng của R) nhanh đến mức, thậm chí trong các khoảng giữa chúng miền không gian các trạng thái chiếm bởi tập hợp các quĩ đạo vẫn còn gần như hai chiều, và toàn bộ dãy các phân nhánh có thể được mô tả bằng ánh xạ một chiều Poincaré, phụ thuộc vào một thông số.

---

[1] Hay, để ngắn gọn ta sẽ nói là 2 - *chu trình*. Các điểm cố định thuộc về chu trình đó sẽ được gọi là *các phần tử chu trình*.

[2] Tính kế tiếp của các phân nhánh nhân đôi chu kỳ (được đánh số tiếp sau bằng những số thứ tự 1, 2, ...) không nhất thiết phải bắt đầu từ chính phân nhánh đầu tiên của chuyển động tuần hoàn. Về nguyên tắc, nó có thể bắt đầu sau một số phân nhánh đầu tiên với sự xuất hiện các tần số vô ước, sau sự đồng bộ chúng do cơ chế đã khảo sát ở §30.

Việc chọn ánh xạ khảo sát dưới đây là tự nhiên vì những lý do sau. Trong phần lớn khoảng biến thiên của biến x phép ánh xạ phải "căng ra", $|df(x;\lambda)/dx| > 1$; điều này cho khả năng xuất hiện các tính không ổn định. Phép ánh xạ cũng phải hoàn trở lại các quĩ đạo, đã xuất phát ra ngoài giới hạn một khoảng nào đó, quay ngược lại nó; ngược lại có nghĩa là sự tăng vô hạn biên độ các mạch động vận tốc, điều này không thể được. Chỉ các hàm không đơn điệu $f(x;\lambda)$, nghĩa là các ánh xạ không đơn trị hai chiều (32-1) có thể thỏa mãn cả hai yêu cầu đó: giá trị x_j được xác định đơn trị bởi giá trị xảy ra trước, nhưng không ngược lại. Dạng đơn giản nhất của một hàm như thế là hàm có một cực đại; tại lân cận của cực đại ta đặt

$$x_{j+1} = f(x_j;\lambda) = 1 - \lambda x_j^2, \tag{32-5}$$

trong đó λ là một thông số dương mà ta cần coi (về phương diện thủy động lực học) như một hàm tăng của R [1]. Ta qui ước lấy đoạn $[-1, +1]$ là khoảng biến thiên của đại lượng x; với λ ở giữa 0 và 2 tất cả các sự lặp lại phép ánh xạ (32-5) đều giữ x ở trong khoảng đó.

Phép biến đổi (32-5) có điểm cố định – đó là nghiệm của phương trình $x_* = 1 - \lambda x_*^2$. Điểm này trở nên không ổn định với $\lambda > \Lambda_1$, trong đó Λ_1 là giá trị của λ, mà đối với nó nhân tử $\mu = -2\lambda x_* = -1$; từ hai phương trình đã viết ta tìm được $\Lambda_1 = 3/4$. Đó là giá trị tới hạn thứ nhất của thông số λ, nó xác định thời điểm phân nhánh gấp đôi chu kỳ: sự xuất hiện 2- chu trình. Ta theo dõi sự xuất hiện của các phân nhánh tiếp sau dựa vào biện pháp gần đúng, cho phép giải thích một số đặc điểm định tính của quá trình, mặc dù nó không cho những giá trị chính xác của các hằng số đặc trưng; sau đó sẽ phát biểu được những điều khẳng định chính xác.

[1] Cần nhấn mạnh rằng, tính chấp nhận được của các ánh xạ không đơn trị hai chiều có liên quan đến tính gần đúng của việc khảo sát một chiều. Nếu như tất cả các quĩ đạo đều được sắp xếp chặt trên một mặt Σ (do đó ánh xạ Poincaré sẽ là triệt để một chiều), thì tính đơn trị tương tự sẽ là không thể được: nó có nghĩa như thể là sự giao nhau của các quĩ đạo (hai quĩ đạo với các x_j khác nhau, giao nhau tại điểm x_{j+1}). Chính theo nghĩa đó hậu quả của tính gần đúng là khả năng bằng không của nhân tử – nếu điểm đứng yên của ánh xạ nằm tại cực trị của hàm ánh xạ (một điểm như thế có thể được gọi là "điểm siêu ổn định" – sự đến gần nó xảy ra theo định luật nhanh hơn định luật đã nêu ở trên).

Lặp lại phép biến đổi (32-5) hai lần, ta thu được

$$x_{j+1} = 1 - \lambda + 2\lambda^2 x_j^2 - \lambda^3 x_j^4. \qquad (32\text{-}6)$$

Ta bỏ qua ở đây số hạng sau cùng - lũy thừa bốn của x_j. Đẳng thức còn lại bằng phép biến đổi tỷ lệ xích [1)]

$$x_j \to \frac{x_j}{\alpha_o}, \qquad \alpha_o = \frac{1}{1-\lambda}$$

rút về dạng

$$x_{j+2} = 1 - \lambda x_j^2,$$

chỉ khác với (32-5) ở sự thay thế thông số λ bằng

$$\lambda_1 = \varphi(\lambda) \equiv 2\lambda^2(\lambda - 1). \qquad (32\text{-}7)$$

Lặp lại phép toán này với các nhân tử tỷ lệ xích $\alpha_1 = 1/(1 - \lambda_1)$, ..., ta thu được một dãy các ánh xạ kế tiếp có cùng dạng :

$$x_{j+2^m} = 1 - \lambda_m x_j^2, \quad \lambda_m = \varphi(\lambda_{m-1}). \qquad (32\text{-}8)$$

Các điểm ánh xạ cố định (32-8) ứng với 2^m - chu trình[2)]. Vì tất cả các ánh xạ này đều có cùng dạng với (32-5), nên có thể kết luận ngay rằng 2^m- chu trình ($m = 1, 2, 3, ...$) trở nên không ổn định với $\lambda_m = \Lambda_1 = 3/4$. Còn các giá trị tới hạn Λ_m tương ứng của thông số ban đầu λ sẽ thu được bằng cách giải chuỗi các phương trình

$$\Lambda_1 = \varphi(\Lambda_2), \ \Lambda_2 = \varphi(\Lambda_3), ..., \ \Lambda_{m-1} = \varphi(\Lambda_m);$$

Chúng được cho bằng đồ thị ở trên hình 21. Hiển nhiên là, với $m \to \infty$ dãy các số này hội tụ về giới hạn hữu hạn Λ_∞ - nghiệm của phương trình $\Lambda_\infty = \varphi(\Lambda_\infty)$; nó bằng $\Lambda_\infty = (1 + \sqrt{3})/2 = 1{,}37$. Cũng tiến tới giới hạn

[1)] Phép biến đổi này không thể xảy ra được với giá trị $\lambda = 1$ (khi đó điểm ánh xạ cố định (32-6) trùng với cực trị trung tâm: $x_* = 0$). Tuy nhiên, giá trị này rõ ràng không phải là giá trị tới hạn Λ_2 tiếp theo mà ta quan tâm.

[2)] Để tránh hiểu nhầm, cần nhấn mạnh rằng sau khi đã tiến hành các phép biến đổi tỷ lệ xích, các ánh xạ (32-8) bây giờ phải được xác định trong những khoảng bị căng ra $|x| \le |\alpha_o \alpha_1 ... \alpha_{m-1}|$ (mà không phải trong $|x| \le 1$, như ở (32.5-6). Tuy nhiên do đã có những sự bỏ qua, nên biểu thức (32-8) có thể thực tế chỉ mô tả miền ở gần những cực trị trung tâm của các hàm ánh xạ.

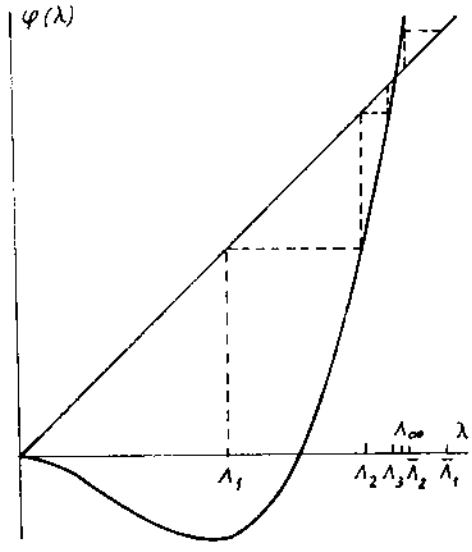
hữu hạn cả các thừa số tỷ lệ xích: $\alpha_m \to \alpha$, trong đó $\alpha = 1/(1 - \Lambda_\infty) = -2{,}8$.

Ta dễ dàng tìm được định luật để Λ_m tiến gần đến Λ_∞ với các m lớn. Từ phương trình $\Lambda_m = \varphi(\Lambda_{m+1})$ với các hiệu nhỏ $\Lambda_\infty - \Lambda_m$ ta tìm được

$$\Lambda_\infty - \Lambda_{m+1} = \frac{1}{\delta}(\Lambda_\infty - \Lambda_m), \qquad (32\text{-}9)$$

trong đó $\delta = \varphi'(\Lambda_\infty) = 4 + \sqrt{3} = 5{,}73$. Nói một cách khác, $\Lambda_\infty - \Lambda_m \sim \delta^m$, nghĩa là các giá trị Λ_m tiến gần đến giới hạn theo quy luật cấp số nhân. Các khoảng giữa các số hạng tới hạn liên tiếp cũng thay đổi theo cùng quy luật như thế: (32-9) có thể được viết lại dưới dạng tương đương

$$\Lambda_{m+2} - \Lambda_{m+1} = \frac{1}{\delta}(\Lambda_{m+1} - \Lambda_m). \qquad (32\text{-}10)$$



Hình 21

Như đã nói, về phương diện thủy động lực học, thông số λ cần được coi là hàm của số Reynolds, phù hợp với điều đó, có xuất hiện các giá trị tới hạn của số này, ứng với các phân nhánh kế tiếp gấp đôi chu kỳ và tiến đến giới hạn hữu hạn R_∞. Hiển nhiên là, đối với các giá trị này các định luật giới hạn (32-9-10) cũng đúng giống như đối các số Λ_m (với cùng hằng số δ).

Những lập luận đã trình bày minh họa nguồn gốc của các tính quy luật cơ bản của quá trình: tập hợp vô hạn các phân nhánh, mà các thời điểm xuất hiện của chúng hội tụ về giới hạn Λ_∞ theo quy luật (32-9-10); sự xuất hiện thừa số tỷ lệ xích α. Tuy nhiên, các giá trị thu được khi đó của các hằng số đặc trưng không chính xác. Các giá trị chính xác (thu được bằng cách lặp lại nhiều lần bằng máy tính các ánh xạ (32-5)) của các chỉ số hội tụ δ (số Feigenbaum) và thừa số tỷ lệ xích α:

$$\delta = 4{,}6692 \ldots, \quad \alpha = -2{,}5029 \ldots \qquad (32\text{-}11)$$

còn giá trị giới hạn $\Lambda_\infty = 1{,}401$[1]. Cần chú ý đến giá trị tương đối lớn δ; độ hội tụ nhánh dẫn đến kết quả là, các định luật giới hạn được thực hiện tốt ngay sau một số ít lần gấp đôi chu kỳ.

Sự thiếu sót của kết luận đã rút ra được là do, sau khi bỏ qua tất cả các luỹ thừa x^2_j, trừ luỹ thừa đầu tiên, phép ánh xạ (32-8) chỉ cho phép thiết lập được sự kiện xuất hiện phân nhánh tiếp theo, mà không cho khả năng xác định tất cả các phần tử mô tả bởi phép ánh xạ của 2^m - chu trình [2]. Thực vậy, các ánh xạ lặp lại (32-5) là các đa thức theo x^2_j, mà lũy thừa của chúng với mỗi lần lặp lại được tăng gấp đôi. Chúng là những hàm phức tạp của x_j với số tăng nhanh các cực trị nằm đối xứng với điểm $x_j = 0$ (điểm này bao giờ cũng vẫn là cực trị).

Một điều đáng chú ý là, không những các giá trị của δ và α, mà cả dạng giới hạn của bản thân ánh xạ lặp lại bội vô cùng, theo một nghĩa nhất định nào đó, đều không phụ thuộc vào dạng ánh xạ ban đầu $x_{j+1} = f(x_j; \lambda)$: chỉ cần hàm $f(x; \lambda)$ phụ thuộc vào một thông số là hàm nhẵn với một cực đại toàn phương (giả sử cực đại đó ở tại điểm $x = 0$); hàm này không bắt buộc phải đối xứng đối với điểm này ở xa nó. *Tính phổ biến* này tăng một cách cơ bản độ tổng quát của lý thuyết đã trình bày. Nội dung phát biểu chính xác đó như sau.

Ta xét một ánh xạ cho bởi hàm $f(x)$ (hàm $f(x; \lambda)$ với việc chọn xác định λ – xem dưới đây) được chuẩn hóa bởi điều kiện $f(0) = 1$. Áp dụng ánh xạ đó hai lần, ta thu được hàm $f(f(x))$. Thay đổi tỷ lệ xích của chính hàm đó cũng như biến x ở trong $\alpha_0 = 1/f(1)$ lần; như vậy, ta thu được hàm mới

---

[1] Giá trị Λ_∞ có một đặc tính phần nào quy ước, vì nó phụ thuộc vào cách đưa thông số vào ánh xạ ban đầu – vào hàm $f(x; \lambda)$ (còn các giá trị của δ và α hoàn toàn không phụ thuộc vào điều đó).

[2] Đó là tất cả 2^m điểm $x^{(1)}_*, x^{(2)}_*$..., đã chuyển lần lượt điểm nọ thành điểm kia (tuần hoàn) trong các phép lặp các ánh xạ (31-5) và các điểm cố định (và ổn định) theo các ánh xạ lặp lại bội 2^m. Để tránh những vấn đề có thể xảy ra, chú ý rằng các đạo hàm dx_{j+2^m}/dx_j tại tất cả các điểm $x^{(1)}_*$, $x^{(2)}_*$ đều tự động giống nhau (và do đó đồng thời đi qua – 1 vào thời điểm phân nhánh tiếp sau); ta không dẫn ra đây những lập luận đã dùng quy tắc lấy vi phân hàm theo hàm để chứng minh tính chất này (sự cần thiết của nó đã thấy hiển nhiên từ trước).

$$f_1(x) = \alpha_o f\left(f(\frac{x}{\alpha_o}) \right),$$

Đối với hàm này sẽ lại có $f_1(0) = 1$. Lặp lại phép toán này, ta thu được một chuỗi các hàm liên hệ với nhau bằng hệ thức truy chứng [1)]

$$f_{m+1}(x) = \alpha_m f_m(f_m(x/\alpha_m)) \equiv \hat{T} f_m, \quad \alpha_m = \frac{1}{f_m(1)}. \qquad (32\text{-}12)$$

Nếu khi $m \to \infty$, chuỗi này tiến đến một hàm giới hạn xác định nào đó $f_\infty(x) \equiv g(x)$, thì hàm này phải là "hàm cố định" được xác định trong (32-12) bởi toán tử $\hat{T}$, nghĩa là phải thỏa mãn phương trình phiếm hàm

$$g(x) = \hat{T}g \equiv \alpha g(g(x/\alpha)), \quad \alpha = \frac{1}{g(1)}, \quad g(0) = 1. \qquad (32\text{-}13)$$

Do các tính chất giả thiết của các hàm $f(x)$ đã được chấp nhận, hàm $g(x)$ phải nhẵn và có cực trị toàn phương tại điểm $x = 0$; không còn lại dấu vết nào khác từ dạng cụ thể $f(x)$ trong phương trình (32-13) hay trong các điều kiện đặt cho nghiệm của nó. Cần nhấn mạnh rằng, sau các phép biến đổi tỷ lệ xích với $|\alpha_m| > 1$ đã được thực hiện để rút ra kết quả, nghiệm của phương trình được xác định với tất cả các giá trị của biến từ $-\infty$ đến $+\infty$ xuất hiện trong phương trình (không chỉ trong khoảng $-1 \le x \le 1$). Hàm $g(x)$ tự động là chẵn theo x; nó phải là như vậy, vì trong số các hàm $f(x)$ được chấp nhận có các hàm chẵn, còn phép ánh xạ chẵn rõ ràng vẫn là chẵn sau số lần lặp lại tùy ý.

Một nghiệm như thế của phương trình (32-13) thực sự tồn tại và là duy nhất (mặc dù không thể được xây dựng dưới dạng giải tích); nó là hàm với số vô hạn các cực trị, vô hạn về độ lớn; hằng số α được xác định cùng với chính hàm $g(x)$. Thực tế chỉ cần xác định hàm đó trong khoảng $[-1, 1]$, sau đó nó có thể được kéo dài thêm ra ngoài giới hạn của nó bằng sự lặp lại toán tử $\hat{T}$. Cần chú ý đến sự kiện là, trên mỗi bước lặp lại toán tử $\hat{T}$ trong (32-12) các giá trị của hàm $f_{m+1}(x)$ trong khoảng [-1, 1] được xác định bằng các giá trị của hàm $f_m(x)$ trên phần rút gọn $|\alpha_m| \approx |\alpha|$ lần của đoạn này. Điều đó có nghĩa là, tại giới hạn của các phép lặp lại đa

[1)] Để ý đến sự tương tự hiển nhiên của qui trình này với qui trình đã dùng ở trên để rút ra (32-8).

bội để xác định hàm $g(x)$ trong khoảng $[-1, 1]$ (và như thế cả trên toàn bộ trục x) các phần mỗi lúc một nhỏ của hàm ban đầu ở gần cực đại của nó đều quan trọng; cuối cùng chính đó là nguồn gốc của tính phổ biến.[1)]

Hàm $g(x)$ xác định cấu trúc của tâm hút không tuần hoàn xuất hiện do kết quả của chuỗi vô hạn các sự nhân đôi chu kỳ. Nhưng điều này xảy ra với giá trị của thông số $\lambda = \Lambda_\infty$ hoàn toàn xác định đối với hàm $f(x; \lambda)$. Do đó, rõ ràng là các hàm tạo thành từ $f(x; \lambda)$ bằng sự lặp lại đa bội phép biến đổi (32-12) chỉ thực sự hội tụ về $g(x)$ với giá trị λ cô lập đó. Từ đó đến lượt mình suy ra rằng, hàm đứng yên của toán tử $\hat{T}$ không ổn định đối với các biến đổi nhỏ của nó, tương ứng với các độ lệch nhỏ của thông số λ đối với giá trị Λ_∞. Sự nghiên cứu tính không ổn định này cho khả năng xác định hằng số phổ biến δ – lại không có một liên hệ gì với dạng cụ thể của hàm $f(x)$ [2)].

Thừa số tỷ lệ xích α xác định sự biến thiên – sự giảm – của các đặc trưng hình học (trong không gian các trạng thái) trên mỗi bước các nhân đôi chu kỳ; các khoảng cách giữa các phần tử của các chu trình giới hạn trên trục x là các đặc trưng đó. Tuy nhiên, vì mỗi sự nhân đôi còn kéo theo cả sự tăng số các phần tử chu trình, nên điều khẳng định này cần được cụ thể hóa và chính xác hóa. Khi đó, đã thấy rõ từ trước rằng, định luật biến thiên tỷ lệ xích không thể như nhau đối với các khoảng cách giữa mọi cặp hai điểm [3)]. Thực vậy, nếu hai điểm gần nhau

[1)] Độ tin cậy vào sự tồn tại nghiệm duy nhất của phương trình (32-13) dựa trên sự mô hình hóa của máy tính. Nghiệm được tìm (trong khoảng $[-1, 1]$) dưới dạng đa thức bậc cao theo x^2; độ chính xác của việc mô hình hóa phải càng cao, nếu sau đó chúng ta muốn kéo dài hàm bằng sự lặp lại toán tử $\hat{T}$ đến miền các giá trị x càng rộng hơn (bên ngoài khoảng đã nêu),. Trong khoảng $[-1, 1]$ hàm $g(x)$ có một cực trị, gần cực trị này $g(x) = 1 - 1{,}528\, x^2$ (nếu coi cực trị là cực đại; việc chọn này mang tính chất quy ước do tính bất biến của phương trình (32-13) đối với sự biến thiên về dấu của g).

[2)] Xem các bài báo gốc: Feigenbaum M.J – J. Stat. Phys.1978. v.19, p.25; 1979, v.21, p.669.

[3)] Cần nhớ rằng các khoảng cách trên đoạn không bị căng $[-1, 1]$, được chọn một cách quy ước ngay từ đầu như khoảng biến thiên của x, trên đó có sắp xếp tất cả các phần tử của các chu trình. Tính âm của α có nghĩa là, tại các phân nhánh cũng xảy ra cả các nghịch đảo vị trí sắp xếp của các phần tử đối với điểm $x = 0$.

biến đổi qua một phần gần như tuyến tính của hàm ánh xạ, thì khoảng cách giữa chúng sẽ giảm $|\alpha|$ lần; nhưng nếu phép biến đổi xảy ra qua phần của hàm ánh xạ gần cực trị của nó – thì khoảng cách sẽ giảm đi α^2 lần.

Tại thời điểm phân nhánh (với $\lambda = \Lambda_m$) mỗi phần tử (điểm) của 2^m- chu trình tách thành một cặp – hai điểm gần nhau, khoảng cách giữa chúng tăng dần, nhưng các điểm vẫn gần nhau nhất trên toàn bộ khoảng biến thiên của λ cho đến phân nhánh tiếp theo. Nếu theo dõi các sự chuyển của các phần tử chu trình qua nhau theo thời gian (nghĩa là với các ánh xạ kế tiếp $x_{j+1} = f(x_j; \lambda)$, thì mỗi thành phần của cặp sẽ chuyển sang thành phần kia qua 2^m đơn vị thời gian. Điều đó có nghĩa là, khoảng cách giữa các điểm của cặp đo biên độ các dao động với chu kỳ gấp đôi mới xuất hiện, và theo nghĩa đó nó có một ý nghĩa vật lý đặc biệt.

Ta xếp tất cả các phần tử của 2^{m+1}- chu trình theo thứ tự sao cho chúng phù hợp với thời gian và ký hiệu chúng là $x_{m+1}(t)$, trong đó thời gian t (đo trong các đơn vị của chu kỳ cơ bản T_0) lấy các giá trị nguyên $t/T_0 = 1, 2, .., 2^{m+1}$. Các phần tử này xuất hiện từ các phần tử của 2^m- chu trình bằng sự tách các phần tử sau cùng thành các cặp. Các khoảng giữa các điểm của mỗi cặp được cho bởi các hiệu

$$\xi_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) - x_{m+1}(t + T_m), \tag{32-14}$$

trong đó $T_m = 2^m T_0 = T_{m+1}/2$ - là chu kỳ của 2^m- chu trình, nghĩa là một nửa chu kỳ của 2^{m+1}- chu trình. Ta đưa vào hàm $\sigma_m(t)$ là thừa số tỷ lệ xích, xác định sự biến thiên của các khoảng (32-14) khi chuyển từ một chu trình này sang một chu trình tiếp theo [1].

$$\frac{\xi_{m+1}(t)}{\xi_m(t)} = \sigma_m(t). \tag{32-15}$$

Hiển nhiên là

$$\xi_{m+1}(t + T_m) = -\xi_{m+1}(t), \tag{32-16}$$

[1] Vì cả hai chu trình tồn tại trong những khoảng khác nhau của các giá trị thông số λ (trong các khoảng $(\Lambda_{m-1}, \Lambda_m)$ và $(\Lambda_m, \Lambda_{m+1})$ và trên các khoảng này các đại lượng (32-14) thay đổi cơ bản, nên ý nghĩa của chúng trong định nghĩa (32-15) cần phải được chính xác hóa. Ta sẽ hiểu chúng với những giá trị của thông số λ sao cho các chu trình là "siêu ổn định" (xem bị chú ở trang 201); trong miền tồn tại của mỗi chu trình có một giá trị như thế.

do đó

$$\sigma_m(t+T_m) = -\sigma_m(t). \qquad (32\text{-}17)$$

Các hàm $\sigma_m(t)$ có các tính chất phức tạp, nhưng có thể chứng minh rằng dạng giới hạn của nó (khi các m lớn) với độ chính xác tốt được tính xấp xỉ một cách đơn giản:

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{với} \quad 0 < t < \dfrac{T_m}{2}, \\ -\dfrac{1}{\alpha^2} & \text{với} \quad \dfrac{T_m}{2} < t < T_m, \end{cases} \qquad (32\text{-}18)$$

(với việc chọn thích hợp gốc thời gian t)[1].

Các công thức này cho phép có một số kết luận về sự biến thiên của phổ (tần số) chuyển động của chất lỏng chịu sự nhân đôi chu kỳ. Về phương diện thủy động lực cần hiểu đại lượng $x_m(t)$ là đặc trưng của vận tốc chất lỏng. Đối với chuyển động có chu kỳ T_m phổ hàm $x_m(t)$ của thời gian liên tục t!) chứa các tần số $k\omega_m$ (k = 1, 2, 3...) – tần số cơ bản $\omega_m = 2\pi/T_m$ và các họa âm của nó. Sau khi nhân đôi chu kỳ dòng chảy được mô tả bởi hàm $x_{m+1}(t)$ với chu kỳ $T_{m+1} = 2T_m$. Khai triển phổ của nó, ngoài những tần số như nhau $k\omega_m$, còn chứa cả các phân sóng hài (subharmonic.ND) của tần số ω_m – các tần số $l\omega_m/2$, l = 1, 3, 5, ...

Biểu diễn $x_{m+1}(t)$ dưới dạng

$$x_{m+1}(t) = \frac{1}{2}\{\xi_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t)\},$$

trong đó ξ_{m+1} là hiệu (32-14), còn

$$\eta_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) + x_{m+1}(t+T_m).$$

Khai triển phổ $\eta_{m+1}(t)$ chỉ chứa các tần số $k\omega_m$; các thành phần Fourier cho các phân sóng hài,

$$\frac{1}{T_{m+1}} \int_0^{T_{m+1}} \eta_{m+1}(t)\, e^{i\pi lt/T_m}\, dt = \frac{1}{2T_m} \int_0^{T_m} \{\eta_{m+1}(t) - \eta_{m+1}(t+T_m)\}\, e^{i\pi lt/T_m}\, dt$$

[1] Chúng ta sẽ không nêu ở đây về nguyên tắc việc nghiên cứu đơn giản nhưng cồng kềnh các tính chất của hàm $\sigma_m(t)$. Xem *Feigenbaum*. M. – УФН, 1983. T.141, tr 343 [Los Alamos Science,1980, v.1, p.4].

bằng không do dẳng thức $\eta_{m+1}(t+T_m) = \eta_{m+1}(t)$. Mặt khác các đại lượng $\eta_m(t)$ trong phép gần đúng bậc nhất không thay đổi tại phân nhánh: $\eta_{m+1}(t) \approx \eta_m(t)$; điều đó có nghĩa là, cường độ các dao động với các tần số $k\omega_m$ cũng không đổi.

Nhưng ngược lại, khai triển phổ các đại lượng $\xi_{m+1}(t)$ chỉ chứa các phân sóng hài $l\omega_m/2$ – đó là các tần số mới xuất hiện tại bước nhân đôi thứ $(m+1)$. Cường độ toàn phần của các thành phần phổ này được xác định bằng tích phân

$$I_{m+1} = \frac{1}{T_{m+1}} \int_0^{T_{m+1}} \xi^2_{m+1}(t)\, dt. \qquad (32\text{-}19)$$

Biểu diễn $\xi_{m+1}(t)$ qua $\xi_m(t)$, ta viết được

$$I_{m+1} = \frac{1}{2T_m}\, 2 \int_0^{T_m} \sigma^2_m(t)\, \xi^2_m(t)\, dt.$$

Nếu xét đến (32.16-18), ta thu được

$$I_{m+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right)\frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} \xi^2_m(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right) I_m,$$

và cuối cùng

$$\frac{I_m}{I_{m+1}} = 10{,}8. \qquad (32\text{-}20)$$

Như vậy, đối với phân nhánh tiếp theo cường độ của các thành phần phổ mới, xuất hiện sau phân nhánh nhân đôi chu kỳ, vượt hơn một cường độ như thế một số lần xác định, không phụ thuộc vào số hiệu phân nhánh (*M.J.Feigenbaum*, 1979 [1]).

[1] Điều này không những được xét cho cường độ toàn phần của phân sóng hài xuất hiện, mà còn được xét cho cả cường độ của mỗi phân sóng hài đó. Cứ mỗi phân sóng hài xuất hiện sau phân nhánh thứ m lại ứng với hai (một bên phải và một bên trái) phân sóng hài sau phân nhánh thứ $(m+1)$. Do đó, tỷ số giữa các cường độ của các đỉnh phổ mới xuất hiện sau hai phân nhánh kế tiếp lớn gấp hai lần đại lượng (32-20). Giá trị chính xác hơn của đại lượng này 10,48. Nó thu được bằng cách phân tích trạng thái tại chính điểm $\lambda = \Lambda_\infty$ dựa vào hàm phổ biến $g(x)$; tại điểm này đã có mặt tất cả các tần số và vấn đề tương tự như điều đã nói ở bị chú trang 207 không xuất hiện. Xem *Nanenberg M. Rudnick J.* Phys. Rev. 1981, v. 24B. p. 493.

Ta trở lại nghiên cứu sự tiến hóa của các tính chất chuyển động khi tiếp tục tăng thông số λ sau giá trị Λ_∞ (số Reynolds $R > R_\infty$) – ở trong miền "chảy rối". Vì tại lúc sinh ra (với $\lambda = \Lambda_\infty$) tâm hút không tuần hoàn được mô tả bằng ánh xạ một chiều Poincaré, nên có thể coi rằng, cả với những giá trị λ lớn hơn Λ_∞ không đáng kể cũng được phép khảo sát các tính chất của tâm hút trong phạm vi của một ánh xạ như thế.

Tâm hút, xuất hiện do kết quả của một chuỗi vô hạn nhân đôi chu kỳ, vào thời điểm sinh của nó không phải là tâm hút lạ theo nghĩa được xác định ở §31: "2^∞-chu trình" xuất hiện như giới hạn của các 2^m-chu trình ổn định khi $m \to \infty$, cũng ổn định. Các điểm của tâm hút này tạo thành trong khoảng $[-1, 1]$ một tập hợp không đếm được kiểu Canto. Số đo của nó trong khoảng này (nghĩa là "độ dài" toàn phần của tập hợp các phần tử của nó) bằng không, thứ nguyên của nó nằm giữa 0 và 1 và bằng 0,54 [1].

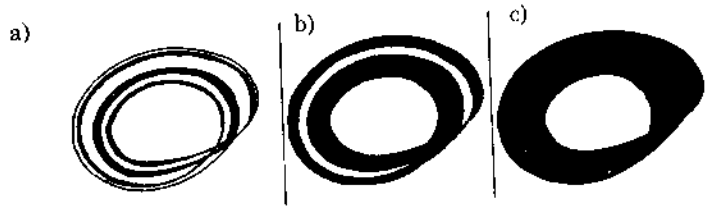
Với $\lambda > \Lambda_\infty$ tâm hút trở nên lạ, nó hút tập hợp các quỹ đạo không ổn định. Trên đoạn $[-1,1]$ các điểm thuộc về nó lấp đầy các khoảng, mà độ dài chung của chúng khác không. Các đoạn này, đó là các vết trên mặt cắt σ của dải hai chiều liên tục thực hiện một số lớn vòng và tự khép kín trên nó. Nhân đây, ta nhớ lại tính gần đúng của sự khảo sát một chiều. Thực tế dải này có độ dầy nhỏ nhưng hữu hạn. Do đó, cả những đoạn tạo thành tiết diện của nó thực tế cũng là những dải có độ rộng hữu hạn. Dọc theo bề rộng này tâm hút lạ có cấu trúc Canto đã mô tả trong tiết trước mang tính chất lớp [2]. Dưới đây ta sẽ không quan tâm đến cấu trúc này, mà trở lại khảo sát trong phạm vi ánh xạ một chiều Poincaré.

Sự tiến hoá của các tính chất tâm hút lạ khi tăng λ sau Λ_∞ bao gồm những nét chính sau. Với giá trị đã cho $\lambda > \Lambda_\infty$ tâm hút lấp đầy một dãy các khoảng trong đoạn $[-1, 1]$; các phần giữa các khoảng này – đó là các miền hút của tâm hút, nhưng trong chúng có những phần tử của các chu trình không ổn định với các chu kỳ bắt đầu từ chu kỳ 2^m nào đó hay nhỏ hơn. Khi tăng λ vận tốc tản xa của các quỹ đạo trong tâm hút lạ tăng lên, và nó "phình ra" lần lượt hấp thụ các chu trình có các chu

[1] Xem *Grassberger P.* – *J. Stat.* Phys. 1981. V. 26. P. 173.

[2] Thứ nguyên của tâm hút theo phương này nhỏ so với đơn vị. Tuy nhiên, nó không phổ biến và phụ thuộc vào dạng cụ thể của ánh xạ.

kỳ 2^m, 2^{m+1}, ...; đồng thời số các khoảng bị chiếm bởi tâm hút giảm đi, nhưng các độ dài của chúng tăng lên. Nói một cách khác, số các vòng của băng nói trên lần lượt giảm đi hai lần, còn độ rộng của chúng tăng lên. Như vậy, có thể có xuất hiện một thác ngược các đơn giản hóa liên tiếp tâm hút. Sự hấp thụ bởi tâm hút của 2^m-chu trình không ổn định được gọi là *sự phân nhánh ngược gấp đôi*. Hình 22 minh họa quá trình này cho hai phân nhánh ngược liên tiếp. Trên hình 22a băng thực hiện bốn vòng, sự phân nhánh ngược biến nó thành băng có hai vòng (hình 22b). Cuối cùng, phân nhánh sau cùng dẫn tới băng thực hiện tất cả chỉ có một vòng và khép kín trên nó, "xoắn lại" sơ bộ (hình 22c).



Hình 22

Ta ký hiệu các giá trị của thông số λ tương ứng với các phân nhánh gấp đôi ngược kế tiếp bằng $\bar{\Lambda}_{m+1}$ và chúng được sắp xếp theo trình tự kế tiếp $\bar{\Lambda}_m > \bar{\Lambda}_{m+1}$. Chúng ta chứng minh rằng, các số này thỏa mãn định luật cấp số nhân với cùng chỉ số phổ biến δ giống như đối với các phân nhánh thuận.

Trước phân nhánh ngược sau cùng (với sự tăng của λ) tâm hút chiếm hai khoảng ngăn cách nhau bằng khoảng trung gian, trong đó có điểm đứng yên x_* của ánh xạ (32-5), tương ứng với chu trình không ổn định của chu kỳ *1*:

$$x_* = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}.$$

Phân nhánh xảy ra với giá trị $\lambda = \bar{\Lambda}_1$, khi các biên giới của tâm hút dãn nở đạt tới điểm này. Từ hình vẽ 22b ta thấy rằng, biên giới ngoài

của tâm hút (băng) sau một vòng quay thì trở thành biên giới trong của nó, và thêm một vòng quay nữa sẽ trở thành biên giới của khoảng, ngăn cách các vòng quấn. Từ đó thấy rõ rằng, giá trị $\lambda = \Lambda_1$ được xác định bởi điều kiện $x_{j+2} = x_*$, trong đó

$$x_{j+2} = 1 - \lambda(1-\lambda)^2$$

là kết quả của sự lặp lại bội hai ánh xạ trên điểm $x_j = 1$ – biên giới của tâm hút (giá trị này là $\bar{\Lambda}_1 = 1{,}543$). Các thời điểm phân nhánh ngược lúc trước $\bar{\Lambda}_2$, $\bar{\Lambda}_3$,..., có thể được xác định gần đúng thời điểm nọ sau thời điểm kia dựa vào hệ thức truy chứng liên hệ $\bar{\Lambda}_{m+1}$ với $\bar{\Lambda}_m$. Hệ thức gần đúng này được rút ra bằng cùng phương pháp đã được sử dụng để khảo sát trình tự kế tiếp ở trên của các phân nhánh thuận gấp đôi và có dạng $\bar{\Lambda}_m = \varphi(\bar{\Lambda}_{m+1})$ với cùng hàm $\varphi(\Lambda)$ từ (32-7). Đồ thị tương ứng được trình bày ở phần trên của hình 21. Vì hàm $\varphi(\Lambda)$ cho các chuỗi kế tiếp của các phân nhánh thuận và nghịch vẫn chỉ là một, nên cả định luật, theo đó cả chuỗi số Λ_m và $\bar{\Lambda}_m$ hội tụ (tương ứng với phần dưới và phần trên) đến cùng giới hạn $\Lambda_\infty \equiv \bar{\Lambda}_\infty$ cũng như nhau:

$$\bar{\Lambda}_{m+1} - \Lambda_\infty = \frac{1}{\delta}\left(\bar{\Lambda}_m - \Lambda_\infty\right). \qquad (32\text{-}21)$$

Sự tiến hóa của các tính chất tâm hút lạ với $\lambda > \Lambda_\infty$ kéo theo các biến đổi tương ứng trong phổ tần số của cường độ. Tính hỗn loạn của chuyển động được biểu diễn trong phổ bởi sự xuất hiện của thành phần "ồn" trong phổ, cường độ thành phần này tăng cùng với bề rộng của tâm hút. Trên phông này có mặt của các đỉnh gián đoạn, tương ứng với tần số cơ bản của các chu trình không ổn định, với các sóng hài và phân nhánh hài; tại các phân nhánh ngược kế tiếp các phân sóng hài tương ứng biến mất – theo thứ tự ngược với thứ tự chúng xuất hiện trong chuỗi các phân nhánh thuận. Tính không ổn định của các chu trình tạo ra các tần số đó thể hiện trong sự nở rộng của các đỉnh phổ.

Sự chuyển sang tính chảy rối thông qua tính luân phiên

Cuối cùng ta khảo sát sự phá hủy chuyển động tuần hoàn khi nhân tử đi qua giá trị $\mu = +1$.

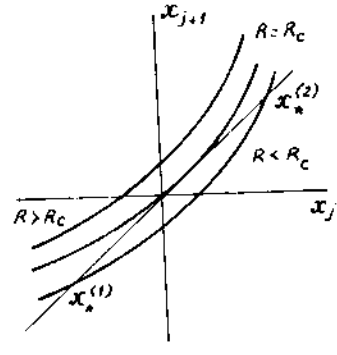
Loại phân nhánh này được mô tả (trong các khuôn khổ của ánh xạ một chiều Poincaré) bởi hàm $x_{j+1} = f(x_j; R)$, hàm này với giá trị xác định của thông số (số Reynolds), $R = R_c$, tiếp xúc với đường thẳng $x_{j+1} = x_j$. Lấy tiếp điểm làm điểm $x_j = 0$, ta viết ở gần nó khai triển của hàm ánh xạ dưới dạng [1)]

$$x_{j+1} = (R - R_c) + x_j + x_j^2. \qquad (32\text{-}22)$$

Với $R < R_c$ (xem hình 23) có tồn tại hai điểm cố định

$$x_*^{(1),(2)} = \mp (R_c - R)^{1/2},$$

trong đó điểm ($x^{(1)}$) ứng với chuyển động tuần hoàn ổn định, còn điểm kia ($x^{(2)}$) ứng với chuyển động tuần hoàn không ổn định. Với $R = R_c$ nhân tử tại cả hai điểm đều trở nên bằng +1, cả hai chuyển động tuần hoàn đều hòa trộn vào nhau và với $R > R_c$ hai chuyển động biến mất (các điểm cố định chuyển thành miền phức).



Hình 23

Với độ trên tới hạn nhỏ khoảng cách giữa các đường (32-22) và đường thẳng $x_{j+1} = x_j$ nhỏ (trong miền gần $x_j = 0$). Do đó, trong khoảng này của các giá trị x, mỗi sự lặp lại của ánh xạ (32-22) chỉ dịch chuyển không đáng kể vết của quỹ đạo và để nó đi qua toàn bộ khoảng đòi hỏi phải nhiều bước. Nói một cách khác, trong một khoảng thời gian tương đối lớn quỹ đạo trong không gian các trạng thái sẽ có tính chất đều đặn, gần như tuần hoàn. Trong không gian vật lý chuyển động đều đặn (chảy tầng) của chất lỏng tương ứng với một quỹ đạo như thế. Từ đó về nguyên tắc, còn xuất hiện một kịch bản khả dĩ của việc xuất hiện tính chảy rối ((*P. Manneville, Y. Pomeau*, 1980).

Có thể hình dung rằng, các phần dẫn đến tính hỗn loạn của các quỹ đạo kề sát với phần đã khảo sát của hàm ánh xạ. Tập hợp các quỹ đạo

[1)] Hệ số của $R - R_c$ và hệ số (dương) của x_j^2 có thể được chuyển thành đơn vị bằng cách định nghĩa phù hợp R và x_j như được đề xuất ở (32-22).

không ổn định cục bộ tương ứng với các quỹ đạo đó trong không gian trạng thái. Tuy nhiên, tự bản thân mình, tập hợp này không phải là tâm hút và với thời gian điểm biểu diễn hệ sẽ dời bỏ nó. Với $R < R_c$ quỹ đạo đi ra thành chu trình ổn định, nghĩa là ở trong không gian vật lý một chuyển động tuần hoàn chảy tầng được thiết lập. Với $R > R_c$ chu trình ổn định không có mặt và có xuất hiện một chuyển động trong đó các chu kỳ "chảy rối" luân phiên với các chu kỳ chảy tầng (từ đó có tên gọi của kịch bản – sự chuyển thông qua *tính luân phiên*).

Không thể có những kết luận tổng quát nào về trường tính của các chu kỳ chảy rối. Nhưng sự phụ thuộc của trường tính các chu kỳ chảy tầng vào độ trên tới hạn thì giải thích được dễ dàng. Muốn vậy, ta viết phương trình sai phân (32-22) dưới dạng phương trình vi phân. Nên nhớ rằng độ biến thiên của x_j là nhỏ trên một bước của ánh xạ, thì ta thay hiệu $x_{j+1} - x_j$ bằng đạo hàm dx/dt lấy theo biến liên tục t:

$$\frac{dx}{dt} = (R - R_c) + x^2. \qquad (32\text{-}23)$$

Ta tìm thời gian τ cần thiết để đi qua đoạn ở giữa các điểm x_1 và x_2, nằm về hai bên của $x = 0$ tại những khoảng cách lớn so với $(R - R_c)^{1/2}$, nhưng vẫn còn nằm trong miền ứng dụng được của khai triển (32-2). Ta có:

$$\tau = (R - R_c)^{-1/2} \operatorname{arctg}\left[x(R - R_c)^{-1/2}\right]_{x_1}^{x_2},$$

từ đó

$$\tau \sim (R - R_c)^{-1/2}, \qquad (32\text{-}24)$$

Chính dẳng thức này xác định sự phụ thuộc cần tìm; trường tính của các chu kỳ chảy tầng giảm khi độ trên tới hạn tăng.

Trong kịch bản này vẫn còn bỏ ngỏ vấn đề về cách tiếp cận với sự bắt đầu của kịch bản cũng như vấn đề bản chất của tính chảy rối xuất hiện.

§33. TÍNH CHẢY RỐI PHÁT TRIỂN

Chuyển động chảy rối của chất lỏng với các giá trị đủ lớn của số Reynolds được đặc trưng bởi sự biến thiên cực kỳ không đều đặn, hỗn

loạn của vận tốc theo thời gian tại mỗi miền của dòng *(tính chảy rối phát triển)*; vận tốc luôn luôn mạch động quanh một giá trị trung bình nào đó. Một sự biến thiên không đều như thế của vận tốc xảy ra từ điểm này đến điểm khác của dòng chảy, được khảo sát tại một thời điểm đã cho. Hiện tại vẫn chưa có một lý thuyết định lượng đầy đủ về tính chảy rối phát triển. Tuy nhiên người ta đã biết một loạt những kết quả định tính quan trọng, mà nội dung của chúng sẽ được dành cho tiết sau.

Chúng ta đưa vào khái niệm vận tốc trung bình của chuyển động, thu được do lấy trung bình vận tốc thực tại mỗi điểm không gian trong những khoảng thời gian lớn. Bằng cách lấy trung bình như thế, sự biến thiên không đều của vận tốc sẽ trở nên đồng đều, và vận tốc trung bình sẽ là một hàm biến thiên nhẵn dọc theo dòng. Dưới đây ta sẽ ký hiệu vận tốc trung bình là $\mathbf{u}$. Hiệu $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ giữa các vận tốc thực và vận tốc trung bình biểu thị sự biến thiên không đều, đặc trưng của tính chảy rối, nó được gọi là phần *mạch động* của vận tốc.

Ta nghiên cứu chi tiết hơn tính chất của chuyển động mạch động, không đều, đặt chồng lên dòng chảy trung bình. Chuyển động này, đến lượt nó, có thể được coi về mặt định tính như kết quả của sự chồng các chuyển động (*các mạch động rối*) có những "cỡ" khác nhau (ta hiểu cỡ của một chuyển động là bậc của các khoảng cách trên đó vận tốc thay đổi đáng kể). Khi số Reynolds tăng, trước hết ta thấy xuất hiện những mạch động cỡ lớn; những mạch động loại đó xuất hiện càng chậm, nếu cỡ của chuyển động càng nhỏ. Với các số Reynolds rất lớn, trong dòng chảy rối có xuất hiện những mạch động từ những cỡ lớn nhất đến những cỡ rất nhỏ. Những mạch động cỡ lớn giữ vai trò cơ bản trong mọi dòng rối, cỡ của những mạch động này có bậc những độ dài đặc trưng, xác định kích thước của miền, trong đó xuất hiện dòng chảy rối; dưới đây ký hiệu l là bậc của cỡ *cơ bản* (hay cỡ ngoài) của chuyển động rối. Những chuyển động cỡ lớn này có những biên độ lớn nhất. Các vận tốc của chúng có bậc vào cỡ những độ biến thiên Δu của vận tốc trung bình trên các khoảng cách l (ở đây chúng ta nói đến bậc độ lớn không phải của chính vận tốc, mà nói đến độ biến thiên của nó, vì chính độ biến thiên này đặc trưng cho vận tốc chuyển động rối; nhưng giá trị tuyệt đối của vận tốc trung bình có thể là tùy ý, tùy thuộc vào chỗ chuyển động được

xét trong hệ quy chiếu nào [1]. Còn đối với các tần số của các mạch động cỡ lớn này, thì chúng có bậc của tỷ số u/l giữa vận tốc trung bình u (không phải độ biến thiên Δu của nó) và các kích thước l. Thực vậy, tần số lặp lại chu kỳ hình ảnh của chuyển động quan sát được từ một hệ quy chiếu đứng yên nào đó. Nhưng đối với một hệ như thế, toàn bộ bức tranh này chuyển động cùng với toàn bộ chất lỏng với vận tốc có bậc u.

Những mạch động cỡ nhỏ tương ứng với những tần số lớn tham gia vào trong dòng rối với những biên độ nhỏ hơn nhiều. Có thể coi chúng như một cấu trúc có chi tiết rất nhỏ đặt chồng lên những chuyển động rối cơ bản cỡ lớn. Những mạch động cỡ nhỏ chỉ chứa một phần tương đối nhỏ của toàn bộ động năng của chất lỏng.

Từ hình ảnh mô tả chuyển động rối, ta có thể có được kết luận về tính chất biến thiên của vận tốc mạch động dọc theo dòng chảy (xét tại một thời điểm đã cho). Trên những khoảng lớn (so sánh được với l) sự biến thiên của vận tốc mạch động được xác định bởi sự biến thiên của vận tốc các mạch động cỡ lớn, và do đó, về độ lớn có thể so sánh với Δu. Nhưng tại những khoảng cách nhỏ (so với l), nó được xác định bởi những mạch động cỡ nhỏ và do đó, là nhỏ so với Δu (nhưng lớn so với độ biến thiên của vận tốc trung bình trên cùng khoảng cách nhỏ đó). Người ta lại tìm thấy một hình ảnh tương tự, nếu quan sát sự biến thiên của vận tốc theo thời gian tại một điểm đã cho của không gian. Trong những khoảng thời gian ngắn (so với thời gian đặc trưng $T \sim l/u$) vận tốc biến thiên không đáng kể; nhưng nếu trong những khoảng thời gian lớn, thì vận tốc biến thiên những lượng $\sim \Delta u$.

Số Reynolds xác định những tính chất của chuyển động đã cho của toàn bộ chất lỏng chứa độ dài l như các kích thước đặc trưng. Ngoài số Reynolds đó, có thể đưa vào khái niệm định tính về các số Reynolds của các mạch động rối có cỡ khác nhau. Nếu λ là bậc của các mạch động, còn v_λ là bậc của vận tốc của chúng thì $R_\lambda \sim v_\lambda \lambda/\nu$. Số này càng nhỏ, cỡ chuyển động càng nhỏ.

Với các số Reynolds R lớn, thì cả các số Reynolds R_λ của các mạch động cỡ lớn cũng lớn. Nhưng các số Reynolds lớn tương đương với các độ

[1] Thực tế, có thể là, các cỡ của những mạch động cơ bản nhỏ hơn nhiều lần so với các kích thước l, còn các vận tốc của chúng thì lại nhỏ hơn nhiều lần so với Δu.

nhớt nhỏ. Từ đó có thể kết luận là, đối với chuyển động cỡ lớn, chính là chuyển động cơ bản trong mọi dòng rối, thì độ nhớt của chất lỏng không giữ vai trò gì. Do đó trong các mạch động cỡ lớn không có sự tiêu tán năng lượng đáng kể.

Độ nhớt của chất lỏng chỉ trở nên quan trọng đối với những mạch động cỡ nhỏ nhất, đối với các mạch động này, $R_\lambda \sim 1$ (cỡ λ_0 của các mạch động đó sẽ được định nghĩa trong tiết này). Chính ở trong những mạch động cỡ nhỏ này, là không quan trọng theo quan điểm của hình ảnh chung của chuyển động chất lỏng trong dòng rối, sẽ xảy ra sự tiêu tán năng lượng.

Như vậy, ta đi tới quan niệm sau về sự tiêu tán năng lượng trong chuyển động rối (*L. Richardson*, 1922). Năng lượng chuyển từ những mạch động cỡ lớn hơn sang những mạch động cỡ nhỏ hơn thực tế không bị tiêu tán. Có thể nói rằng, như thể có một "năng thông" liên tục từ các mạch động cỡ lớn sang các mạch động cỡ nhỏ, nghĩa là từ các tần số nhỏ sang các tần số lớn. Năng thông này bị tiêu tán, nghĩa là động năng được biến thành nhiệt, ở trong những mạch động có cỡ nhỏ nhất. Để duy trì trạng thái "dừng" cho dòng, dĩ nhiên cần phải có những nguồn năng lượng bên ngoài liên tục cung cấp cho chuyển động cơ bản cỡ lớn.

Vì độ nhớt của chất lỏng chỉ quan trọng đối với những mạch động cỡ nhỏ nhất, nên có thể khẳng định rằng, tất cả các đại lượng thuộc về chuyển động rối cỡ $\lambda >> \lambda_0$ không thể phụ thuộc vào ν (chính xác hơn, các đại lượng này phải không biến đổi khi ν biến đổi, nhưng các điều kiện chuyển động khác không biến đổi). Tình hình đó giảm bớt số các đại lượng xác định các tính chất của chuyển động rối và kết quả là những lý do về sự đồng dạng, có liên quan đến thứ nguyên của các đại lượng có sẵn, mang một ý nghĩa lớn đối với việc nghiên cứu dòng rối.

Chúng ta ứng dụng các lập luận như thế để xác định bậc của độ tiêu tán năng lượng trong chuyển động rối. Giả sử ε là lượng năng lượng trung bình tiêu tán trong một đơn vị khối lượng chất lỏng sau mỗi đơn vị thời gian [1]. Chúng ta đã nhận thấy rằng, năng lượng này được lấy từ chuyển động cỡ lớn, từ đó nó truyền dần sang các cỡ càng nhỏ hơn, cho

[1] Trong chương này, chữ ε ký hiệu cho độ tiêu tán trung bình của năng lượng, mà không phải nội năng của chất lỏng!

đến khi năng lượng được tiêu tán trong những mạch động cỡ ~ λ_0. Do đó, mặc dù sự tiêu tán cuối cùng là do độ nhớt, nhưng bậc của ε có thể được xác định, chỉ dựa vào những đại lượng đặc trưng cho các chuyển động cỡ lớn. Những đại lượng đó là mật độ chất lỏng ρ, các kích thước l và vận tốc Δu. Từ ba đại lượng này, người ta chỉ có thể tạo nên một tổ hợp có cùng thứ nguyên với ε, cụ thể là $\frac{e'c}{g.s} = \frac{cm^2}{s^3}$. Như vậy, ta thu được:

$$\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{l}, \tag{33-1}$$

chính đại lượng này xác định bậc của độ tiêu tán năng lượng trong một dòng chảy rối.

Xét về một số mặt nào đó, chất lỏng chuyển động rối có thể được mô tả định tính như chất lỏng có một *độ nhớt rối* ν_r nào đó, khác với độ nhớt động học thực ν. Vì ν_r đặc trưng cho các tính chất của chuyển động rối, nên về bậc của nó phải được xác định bởi các đại lượng ρ, Δu, l. Đại lượng duy nhất có thể được lập thành từ các đại lượng đó và có thứ nguyên của độ nhớt động học là $\Delta u \cdot l$, do đó ta có

$$\nu_r \sim \Delta u \cdot l. \tag{33-2}$$

Tỷ số giữa độ nhớt rối và độ nhớt thông thường có bậc

$$\frac{\nu_r}{\nu} \sim R, \tag{33-3}$$

nghĩa là nó tăng với số Reynolds [1].

Độ tiêu tán năng lượng ε được biểu diễn qua ν_r theo công thức

$$\varepsilon \sim \nu_r \left(\frac{\Delta u}{l}\right)^2, \tag{33-4}$$

phù hợp với định nghĩa thông thường của độ nhớt. Trong khi đó ν xác định độ tiêu tán năng lượng theo các dạo hàm của vận tốc thực đối với

[1] Nhưng thực tế trong tỷ số này còn phải có một hệ số bằng số khá quan trọng. Như đã nói ở trên, đó là do, l và Δu có thể khác một cách đáng kể so với những kích thước thực và vận tốc của chuyển động rối. Tỷ số ν_r / ν có thể được viết chính xác hơn dưới dạng $\nu_r / \nu \sim R / R_c$ trong đó cần chú ý rằng ν_r và ν thực tế phải bằng nhau, không phải với R ~ 1, mà với R ~ R_c.

các tọa độ, độ nhớt rối liên hệ độ tiêu tán với gradiên ($\sim \Delta u/l$) của vận tốc trung bình của chuyển động.

Cuối cùng cần nói rằng, bậc của độ biến thiên áp suất Δp trên kích thước của miền chuyển động rối cũng có thể được xác định từ những lý do đồng dạng:

$$\Delta p \sim \rho (\Delta u)^2 \qquad (33\text{-}5)$$

Biểu thức ở bên phải là đại lượng duy nhất có thứ nguyên áp suất, mà ta có thể lập được từ ρ, l và Δu.

Bây giờ, ta nghiên cứu những tính chất của tính chảy rối phát triển trong cỡ λ nhỏ so với cỡ cơ bản l. Những tính chất đó được gọi là những tính chất rối cục bộ. Khi đó, ta sẽ khảo sát chất lỏng ở xa các thành rắn, chính xác hơn là ở những khoảng cách lớn so với λ tính từ các thành đó.

Một cách tự nhiên có thể giả thiết rằng, tính rối cỡ nhỏ như thế ở xa các vật rắn có tính đồng chất và đẳng hướng. Điều đó có nghĩa là, trong các miền có kích thước nhỏ so với l, những tính chất của chuyển động rối đều như nhau theo mọi hướng; đặc biệt chúng không phụ thuộc vào hướng của vận tốc trong chuyển động lấy trung bình. Cần nhấn mạnh rằng, ở đây cũng như mọi nơi dưới đây trong tiết này, khi nói đến những tính chất của chuyển động trong một phần nhỏ của chất lỏng, ta hiểu ngầm là nói đến chuyển động tương đối của các hạt chất lỏng ở trong phần đó, mà không phải chuyển động tuyệt đối của tất cả các phần xét về toàn bộ, chuyển động đó liên quan đến chuyển động của các cỡ lớn hơn.

Người ta nhận thấy rằng, có thể rút ra được một loạt những kết luận quan trọng về những tính chất cục bộ của tính chảy rối trực tiếp từ những nhận định đồng dạng (*A.N. Kolmogorov*, 1941; *A.M. Obukhov*, 1941).

Để thu được những kết quả đó, trước hết chúng ta xác định xem những thông số nào đó có thể xác định được những tính chất của chuyển động rối trong những phần nhỏ so với l, nhưng lớn so với các khoảng cách λ_0, tại đó độ nhớt của chất lỏng bắt đầu trở nên quan trọng; đó là những khoảng cách mà ta sẽ xét dưới đây. Các thông số đó là mật độ ρ của chất lỏng, ngoài ra còn một đại lượng khác nữa đặc trưng cho mọi dòng chảy rối, đó là năng lượng tiêu tán ε, trong mỗi đơn vị khối lượng của chất lỏng và sau mỗi đơn vị thời gian. Chúng ta đã nhận thấy rằng,

ε là năng thông chuyển không ngừng từ những mạch động cỡ lớn hơn sang những mạch động cỡ nhỏ hơn. Do đó, mặc dù sự tiêu tán năng lượng, xét cho cùng là do độ nhớt của chất lỏng và xảy ra ở trong những mạch động cỡ nhỏ nhất, tuy nhiên đại lượng ε vẫn xác định những tính chất của chuyển động cả với các cỡ lớn. Đối với các cỡ l và Δu của các kích thước và vận tốc của chuyển động về toàn bộ, một cách tự nhiên có thể coi rằng (với ρ và ε đã cho) những tính chất chảy rối cục bộ không phụ thuộc vào đại lượng đó. Độ nhớt ν cũng không có mặt trong bất kỳ một đại lượng nào mà đến nay ta quan tâm (nhớ rằng, ở đây xét đến những khoảng cách $\lambda >> \lambda_0$).

Ta xác định bậc v_λ của độ biến thiên vận tốc của chuyển động rối trên các khoảng cách có bậc λ. Độ biến thiên này chỉ được xác định bởi đại lượng ε, và lẽ dĩ nhiên, bởi chính khoảng cách [1] λ. Từ hai đại lượng đó, ta chỉ có thể lập được một tổ hợp duy nhất có thứ nguyên vận tốc; tổ hợp đó là đại lượng $(\varepsilon\lambda)^{1/3}$. Từ đó ta có thể khẳng định rằng, cần phải có

$$v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3} \tag{33-6}$$

Như vậy, độ biến thiên của vận tốc trên một khoảng cách nhỏ tỷ lệ với căn bậc ba của khoảng cách đó (định luật *Kolmôgôrov - Obukhôv*). Đại lượng v_λ cũng có thể được coi như vận tốc của các chuyển động rối cỡ λ : độ biến thiên của vận tốc trung bình trên những khoảng cách nhỏ là nhỏ so với độ biến thiên của vận tốc mạch động trên cùng những khoảng cách đó và ta có thể bỏ qua nó.

Có thể đi tới hệ thức (33-6) theo một đường lối khác, bằng cách biểu diễn đại lượng không đổi – đại lượng tiêu tán ε – theo các đại lượng đặc trưng cho các mạch động cỡ λ. Khi đó ε phải tỷ lệ với bình phương của gradiên vận tốc v_λ và hệ số tương ứng của độ nhớt rối $\nu_r \sim \lambda v_\lambda$:

$$\varepsilon \sim \nu_r \left(\frac{v_\lambda}{\lambda}\right)^2 \sim \frac{v_\lambda^3}{\lambda},$$

từ đây, ta thu được (33-6).

[1] Đại lượng ε có thứ nguyên *erc/g.s* = cm^2/s^3, không chứa thứ nguyên khối lượng; đại lượng duy nhất chứa thứ nguyên khối lượng là mật độ ρ. Do đó, đại lượng này hoàn toàn không tham gia vào sự tạo thành các đại lượng có thứ nguyên không chứa thứ nguyên của khối lượng.

Bây giờ ta đặt vấn đề theo một cách hơi khác đôi chút. Ta xác định bậc độ lớn v_τ của độ biến thiên vận tốc tại một điểm đã cho của không gian trong một khoảng thời gian τ, nhỏ so với thời gian đặc trưng $T \sim l/u$ của chuyển động xét về toàn bộ. Muốn vậy, ta có nhận xét là, do có mặt của dòng chảy chung, nên mỗi phần đã cho của chất lỏng ở trong không gian sau một khoảng thời gian τ đều dịch chuyển được một khoảng cách có bậc bằng tích τu của vận tốc trung bình u với thời gian τ. Do đó, phần chất lỏng sau khoảng thời gian τ cũng ở cách vị trí của nó tại thời điểm ban đầu một khoảng cách bằng $u\tau$. Như vậy, chúng ta có thể thu được đại lượng v_τ cần tìm bằng cách thay v_τ cho λ ở trong (33-6):

$$v_\tau \sim (\varepsilon u \tau)^{1/3}. \tag{33-7}$$

Cần phân biệt đại lượng v_τ với độ biến thiên v'_τ của vận tốc phần chất lỏng đã cho khi dịch chuyển trong không gian. Rõ ràng, độ biến thiên này chỉ có thể phụ thuộc vào đại lượng ε, là đại lượng xác định các tính chất cục bộ của tính chảy rối, và lẽ dĩ nhiên, nó phụ thuộc vào chính khoảng thời gian τ. Nếu từ ε, τ thành lập một tổ hợp duy nhất có thứ nguyên vận tốc, ta sẽ thu được độ biến thiên cần tìm

$$v'_\tau \sim (\varepsilon\tau)^{1/2}. \tag{33-8}$$

Khác với độ biến thiên vận tốc tại một điểm đã cho của không gian, nó tỷ lệ với căn bậc hai, mà không phải căn bậc ba của τ. Dễ dàng thấy rằng, với $\tau << T$, độ biến thiên v'_τ luôn luôn nhỏ hơn v_τ [1].

Dựa vào biểu thức (33-1) cho ε, có thể viết lại (33.6-7) dưới dạng

$$\frac{v_\lambda}{\Delta u} \sim \left(\frac{\lambda}{l}\right)^{1/3}, \quad \frac{v_\tau}{\Delta u} \sim \left(\frac{\tau}{T}\right)^{1/3}. \tag{33-9}$$

Dưới dạng viết như thế, ta thấy rõ tính chất đồng dạng của tính chảy rối cục bộ : các đặc trưng cỡ nhỏ của các dòng chảy rối khác nhau chỉ ở các cỡ đo độ dài và vận tốc (hay độ dài và thời gian cũng thế [2]).

Bây giờ ta tìm hiểu xem tại các khoảng cách nào độ nhớt của chất

---

[1] Bất đẳng thức $v'_\tau << v_\tau$ thực ra đã được hiểu ngầm khi rút ra (32-7).

[2] Trong các tài liệu hiện nay, người ta dùng rộng rãi thuật ngữ chuyển động tự đồng dạng (theo thuật ngữ tiếng Anh: self – similarity).

lỏng bắt đầu trở nên quan trọng. Các khoảng cách λ_o này đồng thời cũng xác định bậc kích thước của các mạch động có cỡ nhỏ nhất trong dòng rối (đại lượng này được gọi là "cỡ trong" của tính chảy rối, khác với "cỡ ngoài " l). Muốn vậy, ta thiết lập "số Reynolds cục bộ":

$$R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu} \sim \frac{\Delta u . \lambda^{4/3}}{\nu l^{1/3}} \sim R\left(\frac{\lambda}{l}\right)^{4/3}.$$

trong đó $R \sim \Delta u \, . \, l/\nu$ là số Reynolds của chuyển động xét về toàn bộ.

Bậc của đại lượng λ_o được xác định sao cho phải có $R_{\lambda_o} \sim 1$. Từ đó, tìm được

$$\lambda_o \sim \frac{l}{R^{3/4}}. \qquad (33\text{-}10)$$

Có thể đi tới biểu thức này bằng cách thành lập tổ hợp có thứ nguyên độ dài, xuất phát từ ε, ν:

$$\lambda_o \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}. \qquad (33\text{-}11)$$

Như vậy, cỡ trong của tính chảy rối giảm nhanh khi số Reynolds tăng. Ta tìm được vận tốc tương ứng

$$v_{\lambda_o} \sim \frac{\Delta u}{R^{1/4}}. \qquad (33\text{-}12)$$

Vận tốc này cũng giảm khi R tăng [1].

Miền các cỡ $\lambda \sim l$ được gọi là *miền năng lượng*; trong miền này tập trung phần cơ bản của động năng chất lỏng. Các giá trị $\lambda \lesssim \lambda_o$ lập thành *miền tiêu tán* – trong miền này có xảy ra sự tiêu tán động năng. Với các giá trị rất lớn của R cả hai miền này tách nhau đủ xa và giữa chúng là *khoảng quán tính*, trong đó

$$\lambda_o << \lambda << l;$$

Các kết quả đã trình bày trong tiết này thuộc về khoảng đó.

[1] Các công thức (33.10-12) xác định các định luật chuyển động của các đại lượng tương ứng với R. Còn về mặt định lượng của vấn đề, thì đúng hơn là trong chúng viết tỷ số R/R_c thay cho R.

Định luật Kolmogorôv - Obykhov có thể được biểu diễn dưới dạng phổ tương đương (theo không gian). Thay cho các cỡ λ ta đưa vào "các số sóng" tương ứng của các mạch động $k \sim 1/\lambda$ và gọi $E(k)\,dk$ là động năng (đơn vị khối lượng chất lỏng) chứa trong các mạch động với các giá trị k trong khoảng đã cho dk. Hàm $E(k)$ có thứ nguyên cm^3/s^2; nếu thành lập tổ hợp có thứ nguyên này từ ε và k, ta thu được

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \tag{33-13}$$

Dễ dàng thấy được sự tương đương của công thức này với định luật (33-6), nếu để ý rằng, bình phương của v_λ xác định bậc của năng lượng toàn phần chứa trong các mạch động với tất cả các cỡ bậc, kể cả nhỏ hơn giá trị λ đã cho. Lấy tích phân biểu thức (33-13) ta đi tới cùng kết quả

$$\int_k^\infty E(k)\,dk \sim \frac{\varepsilon^{2/3}}{k^{2/3}} \sim (\varepsilon\lambda)^{2/3} \sim v_\lambda^2.$$

Ngoài các cỡ không gian của các mạch động rối, cũng có thể khảo sát cả các đặc trưng thời gian của chúng – tức là các tần số. Đầu dưới phổ tần số của chuyển động chảy rối nằm tại các tần số ~ u/l. Còn đầu trên của nó được xác định bởi các tần số

$$\omega_o \sim \frac{u}{\lambda_o} \sim \frac{u}{l}\mathrm{R}^{3/4}, \tag{33-14}$$

tương ứng với cỡ trong của tính chảy rối. Miền quán tính ứng với các tần số trong khoảng

$$\frac{u}{l} << \omega << \frac{u}{l}\mathrm{R}^{3/4}.$$

Bất đẳng thức $\omega >> u/l$ có nghĩa là, đối với các tính chất cục bộ của tính chảy rối, có thể coi chuyển động cơ bản là dừng. Sự phân bố năng lượng theo phổ tần số trong miền quán tính thu được từ (33-13) bằng sự thay thế $k \sim \omega/u$:

$$E(\omega) \sim (u\varepsilon)^{2/3}\omega^{-5/3}, \tag{33-15}$$

Đồng thời $E(\omega)d\omega$ là năng lượng chứa trong khoảng tần số $d\omega$.

Tần số ω xác định chu kỳ lặp lại trong thời gian chuyển động tại phần không gian đã cho, được quan sát từ hệ qui chiếu đứng yên. Cần

phải phân biệt tần số ω với tần số (ký hiệu ω′) xác định chu kỳ lập lại chuyển động trong phần chất lỏng đã cho chuyển động trong không gian. Sự phân bố năng lượng theo phổ của các tần số này không thể phụ thuộc vào u và chỉ được xác định bởi thông số ε và chính tần số ω′. Lại từ những lý do thứ nguyên, ta tìm được

$$E(\omega') \sim \frac{\varepsilon}{\omega'^2}. \tag{33-16}$$

Công thức này có cùng quan hệ với định luật (33-15), giống như (33-8) với (33-7).

Sự dịch chuyển rối dẫn tới sự phân kỳ dần dần của các hạt chất lỏng lúc đầu ở gần nhau. Ta khảo sát hai hạt chất lỏng ở cách nhau một khoảng nhỏ λ (trong miền quán tính). Lại vận dụng các lý do về thứ nguyên, có thể kết luận rằng vận tốc biến thiên của khoảng cách này theo thời gian

$$\frac{d\lambda}{dt} \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}. \tag{33-17}$$

Lấy tích phân hệ thức này, ta tìm được rằng, thời gian τ để hai hạt lúc đầu ở cách nhau một khoảng λ_1, sau đó tách ra xa nhau một khoảng $\lambda_2 >> \lambda_1$, về bậc độ lớn bằng

$$\tau \sim \frac{\lambda_2^{4/3}}{\varepsilon^{1/3}}. \tag{33-18}$$

Ta chú ý đến đặc tính tự gia tốc của quá trình: vận tốc tách xa tăng khi λ tăng. Nguyên nhân của tính chất này là do, chỉ có các mạch động có cỡ $\lesssim \lambda$ dẫn đến sự tách các hạt ở cách nhau một khoảng λ; các mạch động cỡ lớn hơn đưa cả hai hạt lại gần nhau và không dẫn đến sự tách chúng ra xa nhau [1].

Cuối cùng, chúng ta dừng lại ở các tính chất của chuyển động trong các phần có kích thước $\lambda << \lambda_0$. Trong các phần như thế, chuyển động có tính chất đều và vận tốc của nó biến thiên đều. Do đó có thể khai triển ở đây v_λ theo các lũy thừa của λ và chỉ giữ lại số hạng đầu tiên, ta thu được $v_\lambda = \text{const}\cdot\lambda$. Hệ số được xác định bởi đòi hỏi sao cho $\lambda \sim \lambda_0$ thì $v_\lambda \sim v_{\lambda_0}$. Như vậy, ta tìm được

[1] Các kết quả này có thể được ứng dụng cho các hạt huyền phù lơ lửng trong chất lỏng, được thụ động mang đi cùng với chất lỏng chuyển động.

$$v_\lambda \sim \frac{v_{\lambda_o}}{\lambda_o}\lambda \sim \frac{\Delta u}{l}\lambda R^{1/2}. \qquad (33\text{-}19)$$

Kết quả này cũng có thể thu được bằng cách cho bằng nhau hai biểu thức của độ tiêu tán năng lượng ε: các biểu thức $(\Delta u)^3/l$ (33-1) xác định ε qua các đặc trưng của các mạch động cỡ lớn và biểu thức $\nu(v_\lambda/\lambda)^2$ xác định cùng đại lượng đó thông qua gradiên vận tốc của những mạch động, trong đó thực tế có xảy ra sự tiêu tán.

§34. CÁC HÀM TƯƠNG QUAN VẬN TỐC

Công thức (33-6) xác định một cách định tính sự tương quan giữa các vận tốc trong tính chảy rối cục bộ, nghĩa là xác định mối liên hệ giữa các vận tốc tại hai điểm gần nhau của dòng. Bây giờ ta đưa vào các hàm có thể dùng làm đặc trưng định lượng cho mối tương quan đó [1].

Đặc trưng thứ nhất trong các đặc trưng đó là tenxơ tương quan hạng hai

$$B_{ik} = \langle (v_{2i} - v_{1i})\ (v_{2k} - v_{1k}) \rangle, \qquad (34\text{-}4)$$

trong đó $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$ là các vận tốc chất lỏng tại hai điểm gần nhau, còn các dấu móc ký hiệu cho phép lấy trung bình theo thời gian. Bán kính vectơ giữa hai điểm *1* và *2* (hướng từ *1* sang *2*) được ký hiệu bằng $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Khi khảo sát tính chảy rối cục bộ, ta coi khoảng cách là nhỏ so với cỡ cơ bản l, nhưng không nhất thiết là lớn so với cỡ trong của tính chảy rối λ_o.

Sự biến thiên của vận tốc tại các khoảng cách nhỏ được quyết định bởi các mạch động cỡ nhỏ. Mặt khác, các tính chất của tính chảy rối cục bộ không phụ thuộc vào chuyển động lấy trung bình. Do đó có thể đơn giản hóa việc nghiên cứu các hàm tương quan của tính chảy rối cục bộ, nếu thay cho việc đó, ta khảo sát trường hợp lý tưởng hóa của chuyển động rối, trong đó tính đẳng hướng và tính đồng chất xảy ra không những trên các cỡ bé (cũng như trong tính chảy rối cục bộ), mà còn trên tất cả các cỡ; vận tốc trung bình khi đó bằng không. Một tính chảy rối hoàn toàn đẳng hướng và đồng chất như vậy [2] có thể được hình dung

[1] Các hàm tương quan được *L.V. Keller* và *A.A. Fridman* đưa vào thủy động lực học chảy rối (1924).

[2] Khái niệm này do *Taylor* đưa vào (*G. I. Taylor*, 1935).

như chuyển động trong chất lỏng, bị "khuấy lên" mạnh, sau đó để đứng yên. Một chuyển động như thế, dĩ nhiên, là tắt dần theo thời gian, do đó cả các thành phần của tenxơ tương quan [1] cũng trở thành các hàm của thời gian. Các hệ thức rút ra dưới đây giữa các hàm tương quan khác nhau được xét cho tính chảy rối đồng chất và đẳng hướng tại mọi cỡ của nó, còn đối với tính chảy rối cục bộ thì được xét tại các khoảng cách $r << l$.

Do tính đẳng hướng, tenxơ B_{ik} không thể phụ thuộc vào bất kỳ một hướng ưu tiên nào trong không gian. Vectơ duy nhất có thể xuất hiện trong biểu thức của B_{ik} là bán kính vectơ $\mathbf{r}$. Dạng tổng quát nhất của một tenxơ đối xứng hạng hai như thế là

$$B_{ik} = A(r)\delta_{ik} + B(r)n_i n_k, \tag{34-2}$$

trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo hướng $\mathbf{r}$.

Để giải thích ý nghĩa của các hàm A và B, ta chọn các trục tọa độ sao cho chiều của một trong các trục trùng với chiều của $\mathbf{n}$; ta ký hiệu thành phần vận tốc trên trục này bằng v_r còn thành phần vuông góc của nó đối với $\mathbf{n}$ bằng v_t. Thành phần B_{rr} khi đó là giá trị trung bình của bình phương vận tốc tương đối của hai hạt chất lỏng khi chúng chuyển động đến gặp nhau. Thành phần B_{tt} là trung bình của bình phương của vận tốc của chuyển động quay của một hạt đối với hạt kia. Vì $n_r = 1$, $\mathbf{n}_t = 0$ nên từ (34-2), ta rút ra

$$B_{rr} = A + B, \quad B_{tt} = A, \quad B_{tr} = 0.$$

Biểu thức (34-2) bây giờ có thể được biểu diễn dưới dạng

$$B_{ik} = B_{tt}(r)\,(\delta_{ik} - n_i n_k) + B_{rr}(r)\,n_i n_k. \tag{34-3}$$

Khai triển các móc trong định nghĩa (34-1), ta viết được

$$B_{ik} = \langle v_{1i} v_{1k} \rangle + \langle v_{2i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1i} v_{2k} \rangle - \langle v_{1k} v_{2i} \rangle$$

Do tính đồng chất, các giá trị trung bình của tích $v_i v_k$ tại các điểm *1* và *2* đều như nhau, còn do tính đẳng hướng giá trị trung bình $\langle v_i v_k \rangle$ không

[1] Nói một cách chặt chẽ, cần hiểu việc lấy trung bình trong định nghĩa (34-1) không phải lấy trung bình theo thời gian, mà lấy trung bình theo tất cả các vị trí khả dĩ của các điểm *1* và *2* (với khoảng cách đã cho giữa chúng) vào cùng một thời điểm.

thay đổi khi hoán vị các điểm *1* và *2* (nghĩa là khi đổi dấu của hiệu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$); như vậy

$$\langle v_{1i}v_{1k}\rangle = \langle v_{2i}v_{2k}\rangle = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle\delta_{ik}, \quad \langle v_{1i}v_{2k}\rangle = \langle v_{2i}v_{ik}\rangle.$$

Do đó

$$B_{ik} = \frac{2}{3}\langle v^2\rangle\delta_{ik} - 2b_{ik}, \quad b_{ik} = \langle v_{1i}v_{2k}\rangle. \tag{34-4}$$

Tenxơ đối xứng bổ trợ B_{ik} bằng không khi $r \to \infty$; thực vậy, các vận tốc của chuyển động rối tại các điểm ở xa vô cùng có thể được coi như độc lập thống kê, do đó giá trị trung bình các tích của chúng rút về tích các giá trị trung bình của mỗi thừa số riêng lẻ, bằng không theo quy ước.

Lấy vi phân biểu thức (34-4) theo các tọa độ của điểm 2:

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_{2k}} = -2\left\langle v_{1i}\frac{\partial v_{2k}}{\partial x_{2k}}\right\rangle.$$

Nhưng do phương trình liên tục ta có $\partial v_{2k}/\partial x_{2k} = 0$, do đó

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_{2k}} = 0.$$

Vì B_{ik} là các hàm chỉ của hiệu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, nên việc lấy vi phân theo x_{2k} tương đương với việc lấy vi phân theo x_k. Thay biểu thức (34-3) cho B_{ik}, ta thu được sau một phép tính đơn giản

$$B'_{rr} + \frac{2}{r}(B_{rr} - B_{tt}) = 0$$

(Dấu ′ ký hiệu lấy vi phân theo r). Như vậy các hàm tương quan dọc và ngang liên hệ với nhau bằng hệ thức:

$$B_{tt} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}(r^2 B_{rr}). \tag{34-5}$$

Theo (33-6), hiệu các vận tốc tại khoảng cách r trong miền quán tính tỷ lệ với $r^{1/3}$. Do đó các hàm tương quan B_{rr} và B_{tt} trong miền này tỷ lệ với $r^{2/3}$. Khi đó từ (34-5) ta thu được hệ thức đơn giản sau:

$$B_{tt} = \frac{3}{4}B_{rr} \qquad (\lambda_o << r << l). \tag{34-6}$$

Còn đối với khoảng cách $r << \lambda_o$ thì hiệu các vận tốc tỷ lệ với r, và do đó B_{rr} và B_{tt} tỷ lệ với r^2. Công thức (34-5) bây giờ dẫn tới hệ thức

$$B_{tt} = 2B_{rr} \quad (r << \lambda_o), \tag{34-7}$$

Đối với các khoảng cách này B_{tt} và B_{rr} vẫn còn có thể được biểu diễn qua độ tiêu tán trung bình của năng lượng ε. Ta viết $B_{rr} = ar^2$ (trong đó a là hằng số) và sau khi tổ hợp (34.3-4) với (34-7) ta được

$$b_{ik} = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle\delta_{ik} - ar^2\delta_{ik} + \frac{a}{2}x_i x_k.$$

Lấy vi phân hệ thức này ta được:

$$\left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2i}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 15a\,, \qquad \left\langle \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_{1l}} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2i}} \right\rangle = 0$$

Vì các đẳng thức này đúng với các r nhỏ tùy ý, nên có thể đặt trong chúng $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, sau đó ta được:

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right)^2 \right\rangle = 15a\,, \qquad \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right\rangle = 0$$

Mặt khác, theo (16-3) độ tiêu tán trung bình của năng lượng bằng

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \nu\left\{ \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle \right\} = 15a\nu,$$

Từ đó $a = \varepsilon/15\nu$ [1]. Kết quả sau cùng ta thu được công thức xác định các hàm tương quan thông qua độ tiêu tán năng lượng:

$$B_{tt} = \frac{2\varepsilon}{15\nu} r^2, \qquad B_{rr} = \frac{\varepsilon}{15\nu} r^2 \tag{34-8}$$

(*A. N. Kolmogorov*, 1941).

[1] Ta nhận thấy rằng, đối với tính chảy rối đẳng hướng độ tiêu tán trung bình liên hệ với trung bình của bình phương độ xoáy bằng hệ thức đơn giản:

$$\left\langle (\mathrm{rot}\mathbf{v})^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = \frac{\varepsilon}{\nu}$$

Tiếp theo, ta đưa vào tenxơ tương quan hạng ba

$$B_{ikl} = \left\langle (v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})(v_{2l} - v_{1l}) \right\rangle \tag{34-9}$$

và tenxơ bổ trợ

$$B_{ik,l} = \left\langle v_{1i} v_{1k} v_{2l} \right\rangle = -\left\langle v_{2i} v_{2k} v_{1l} \right\rangle \tag{34-10}$$

Tenxơ này đối xứng với cặp chỉ số thứ nhất (đẳng thức thứ 2 trong định nghĩa (34-10) có liên quan đến điều là, sự hoán vị các điểm *1* và *2* tương đương với sự đổi dấu của **r**, nghĩa là sự nghịch đảo của các tọa độ và do đó đổi dấu của tenxơ hạng ba). Với $r = 0$, nghĩa là khi các điểm *1* và *2* trùng nhau, tenxơ $B_{ik,l}(0) = 0$ – giá trị trung bình của tích một số lẻ các thành phần vận tốc mạch động bằng không. Khai triển các móc trong định nghĩa (34-9), ta biểu diễn tenxơ B_{ikl} qua $b_{ik,l}$:

$$B_{ikl} = 2(b_{ik,l} + b_{il,k} + b_{lk,i}) \tag{34-11}$$

Với $r \to \infty$ tenxơ $b_{ik,l}$ và cùng với nó cả B_{ikl} đều tiến đến không.

Do tính đẳng hướng tenxơ $b_{ik,l}$ phải được biểu diễn qua tenxơ đơn vị δ_{ik} và các thành phần của vectơ đơn vị **n**. Dạng tổng quát của một tenxơ như thế, đối xứng đối với cặp chỉ số thứ nhất, là

$$b_{ik,l} = C(r)\delta_{ik}n_l + D(r)(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + F(r)n_i n_k n_l \tag{34-12}$$

Lấy vi phân tenxơ trên theo các tọa độ của điểm 2, ta thu được do phương trình liên tục

$$\frac{\partial}{\partial x_{2l}} b_{ik,l} = \left\langle v_{1i} v_{1k} \frac{\partial v_{2l}}{\partial x_{2l}} \right\rangle = 0$$

Thay vào đây biểu thức (34-12), sau một phép tính đơn giản, ta đi tới hai phương trình:

$$[r^2(3C + 2D + F)]' = 0, \qquad C' + \frac{2}{r}(C + D) = 0$$

Lấy tích phân phương trình thứ nhất ta được

$$3C + 2D + F = \frac{\text{const}}{r^2}$$

Nhưng với $r = 0$, các hàm C, D, F phải bằng không, do đó cần đặt const = 0, vì thế $3C + 2D + F = 0$. Từ cả hai phương trình thu được như vậy, ta tìm được:

$$D = -C + \frac{1}{2}rC', \qquad F = rC' - C \tag{34-13}$$

Thay (34-13) vào (34-12), rồi sau đó vào (34-11), ta đi tới biểu thức

$$B_{ikl} = -2(rC' + C)(\delta_{ik}n_l + \delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) + 6(rC' - C)n_in_kn_l$$

Nếu lại hướng một trong các trục tọa độ theo hướng của vectơ **n**, ta thu được cho các thành phần của tenxơ B_{ikl}

$$B_{rrr} = -12C, \quad B_{rtt} = -2(C + rC'), \quad B_{rrt} = B_{ttt} = 0 \tag{34-14}$$

Từ đó ta thấy rằng giữa các hàm tương quan khác không B_{rtt} và B_{rrr} có hệ thức

$$B_{rtt} = \frac{1}{6}\frac{d}{dr}(rB_{rrr}). \tag{34-15}$$

Dưới đây ta cũng cần cả biểu thức của tenxơ $b_{ik,l}$ thông qua các thành phần của tenxơ B_{ikl}. Dựa vào (34.12-14), ta tìm được

$$b_{ik,l} = -\frac{1}{12}B_{rrr}\delta_{ik}n_l + \frac{1}{24}(rB'_{rrr} + 2B_{rrr})(\delta_{il}n_k + \delta_{kl}n_i) - \\ - \frac{1}{12}(rB'_{rrr} - B_{rrr})n_in_kn_l. \tag{34-16}$$

Các hệ thức (34-5) và (34-15) là những hệ quả của riêng phương trình liên tục. Nhưng sự hấp dẫn của phương trình chuyển động động lực học – phương trình Navier - Stokes – cho phép thiết lập được phương trình liên hệ các tenxơ tương quan B_{ik} và B_{ikl} lại với nhau (*Th. Karmán, L. Howarth*, 1938; *A.N. Kolmogorov*, 1941).

Muốn vậy, ta tính đạo hàm $\partial b_{ik}/\partial t$ (nhớ rằng chuyển động chảy rối hoàn toàn đồng chất và đẳng hướng tất yếu tắt dần theo thời gian). Nếu biểu diễn các đạo hàm $\partial v_{1i}/\partial t$ và $\partial v_{2k}/\partial t$ dựa vào phương trình Navier - Stokes, ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle v_{1i}v_{2k}\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_{1l}}\langle v_{1i}v_{1l}v_{2k}\rangle - \frac{\partial}{\partial x_{2l}}\langle v_{1i}v_{2k}v_{2l}\rangle - \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{1i}}\langle p_1v_{2k}\rangle - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\langle p_2v_{1i}\rangle + \nu\Delta_1\langle v_{1i}v_{2k}\rangle + \nu\Delta_2\langle v_{1i}v_{2k}\rangle \tag{34-17}$$

Các hàm tương quan của áp suất và vận tốc bằng không:

$$\langle p_1\mathbf{v}_2\rangle = 0 \tag{34-18}$$

Thực vậy, do tính đẳng hướng hàm này phải có dạng $f(r)\mathbf{n}$. Mặt khác, do phương trình liên tục

$$\mathrm{div}_2 \langle p_1 \mathbf{v}_2 \rangle = \langle p_1 \mathrm{div}_2 \mathbf{v}_2 \rangle = 0$$

Nhưng vectơ duy nhất có dạng $f(\mathrm{r})\mathbf{n}$ với div bằng không là vectơ $\mathrm{const}\cdot\mathbf{n}/r^2$; một vectơ như thế không thỏa mãn điều kiện hữu hạn với $r = 0$, do đó phải có const = 0.

Bây giờ trong (34-17) nếu thay các đạo hàm theo x_{1i} và x_{2i} bằng các đạo hàm theo - x_i và x_i ta thu được phương trình

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(b_{il,k} + b_{kl,i}\right) + 2\nu\Delta b_{ik} \qquad (34\text{-}19)$$

Ở đây cần thay b_{ik} và $b_{ik,l}$ lấy từ (34-4) và (34-16). Đạo hàm theo thời gian của động năng một đơn vị khối lượng chất lỏng, $\langle v^2\rangle/2$, chính là độ tiêu tán năng lượng ε. Do đó

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\langle v^2\rangle}{3} = -\frac{2}{3}\varepsilon$$

Phép tính đơn giản, nhưng khá dài dẫn tới biểu thức sau [1]:

$$-\frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{2}\frac{\partial B_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{6r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 B_{rrr}\right) - \frac{\nu}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\frac{\partial B_{rr}}{\partial r}\right) \qquad (34\text{-}20)$$

Đại lượng B_{rr} với tính cách là hàm của thời gian chỉ thay đổi một cách chủ yếu sau thời gian ứng với cỡ cơ bản của tính chảy rối ($\sim l/u$). Đối với tính rối cục bộ chuyển động cơ bản có thể được coi như chuyển động dừng (như đã nhận xét ở §33). Điều này có nghĩa là khi ứng dụng cho tính rối cục bộ, ở vế trái của phương trình (34-20) với độ chính xác vừa đủ có thể bỏ qua đạo hàm $\partial B_{rr}/\partial t$ so với ε. Nếu nhân phương trình còn lại với r^4 và lấy tích phân nó theo r (có xét đến các hàm tương quan bằng không khi $r = 0$). Ta thu được hệ thức sau giữa B_{rr} và B_{rrr}:

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r + 6\nu\frac{dB_{rr}}{dr} \qquad (34\text{-}21)$$

---

[1] Do kết quả tính toán, người ta thu được phương trình này, cả hai vế nhân với toán tử $(1 + \frac{1}{2}r\frac{\partial}{\partial r})$. Nhưng vì nghiệm duy nhất của phương trình $f + \frac{1}{2}r\frac{\partial f}{\partial r} = 0$, hữu hạn với $r = 0$ là $f = 0$, nên toán tử này có thể bỏ đi.

(*A.N. Kolmogorov*, 1941). Hệ thức này đúng với các r lớn hơn hoặc nhỏ hơn λ_0. Với $r >> \lambda_0$, số hạng chứa độ nhớt nhỏ và ta có đơn giản

$$B_{rrr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r \tag{34-22}$$

Nhưng nếu thay biểu thức (34-8) cho B_{rr} vào (34-21) với $r << \lambda_0$, ta sẽ thu được giá trị không; đó là do trong trường hợp này phải có $B_{rrr} \sim r^3$, do đó các số hạng cấp một phải được giản ước.

Một phương trình (34-20) liên kết hai hàm độc lập B_{rr} và B_{rrr} và do đó, tự bản thân nó, không cho khả năng tìm được các hàm này. Sự xuất hiện ở trong nó các hàm tương quan này tức thời hai bậc có liên quan với tính phi tuyến của phương trình Navier - Stokes. Chính vì nguyên nhân đó việc tính đạo hàm theo thời gian tenxơ tương quan hạng ba như thể đã dẫn tới phương trình chứa cả hàm tương quan bậc bốn v.v... Như vậy, xuất hiện một chuỗi vô hạn các phương trình. Không thể thu được bằng phương pháp như vậy một hệ kín với số hữu hạn các phương trình, mà không có những giả thiết phụ nào.

Còn có một nhận xét nữa [1]. Có thể nghĩ rằng, về nguyên tắc có tồn tại khả năng thu được một công thức phổ dụng (ứng dụng được cho bất kỳ chuyển động rối nào) xác định các đại lượng B_{rr}, B_{tt} cho tất cả các khoảng cách r nhỏ so với l. Tuy nhiên, thực tế một công thức như thế hoàn toàn không thể tồn tại, như thấy rõ từ những lý do sau. Giá trị tức thời của đại lượng $(v_{2i} - v_{1i})(v_{2k} - v_{1k})$ về nguyên tắc có thể biểu diễn một cách phổ dụng qua sự tiêu tán năng lượng ε vào cùng thời điểm đó. Tuy nhiên, khi lấy trung bình các biểu thức này sẽ quan trọng là định luật biến thiên của ε trong những chu kỳ chuyển động cỡ lớn (cỡ $\sim l$), định luật này khác nhau đối với các trường hợp chuyển động cụ thể khác nhau. Do đó, cả kết quả của việc lấy trung bình cũng không thể là phổ dụng [2].

[1] Nhận xét này là do *L. Đ. Landau* đề xuất (1944)

[2] Vấn đề các thăng giáng của ε liệu phải có ảnh hưởng hay không thậm chí lên dạng của các hàm tương quan ở trong miền quán tính, chưa chắc đã được giải quyết một cách chắc chắn trước khi xác định được một lý thuyết nhất quán về tính chảy rối [vấn đề này đã được đặt ra bởi *Kolmogôrôv A. N.* – J. Fluid Mech. 1962, v.13, p. 77) và *Obukhov A. M.* (Cũng nơi trích dẫn trên, p.82)]. →

Tích phân Loitxianxki

Ta viết lại phương trình (34-20), trong đó có đưa các hàm b_{rr}, $b_{rr,r}$ thay cho các hàm B_{rr}, B_{rrr}:

$$\frac{\partial b_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[2\nu r^4 \frac{\partial b_{rr}}{\partial r} + r^4 b_{rr,r}\right]. \tag{34-23}$$

Nhân phương trình này với r^4, rồi lấy tích phân nó theo r từ 0 đến ∞. Biểu thức trong dấu móc vuông bằng không với $r = 0$. Nếu giả thiết rằng, nó bằng không cả khi $r \to \infty$, ta sẽ tìm được

$$\Lambda \equiv \int_0^\infty r^4 b_{rr} dr = 0 \tag{34-24}$$

(*L. G. Loitxianxki* 1939). Tích phân này hội tụ, nếu hàm b_{rr} tại vô cùng giảm nhanh hơn r^{-5}, nhưng để nó thực sự được bảo toàn, thì hàm $b_{rr,r}$ phải giảm nhanh hơn r^{-4}.

Các hàm b_{rr} và b_{tt} liên hệ với nhau bởi cùng hệ thức (34-5), như B_{rr} và B_{tt}. Do đó ta có (với cùng những điều kiện)

$$\int_0^\infty b_{rr} r^4 dr = -\frac{3}{2}\int_0^\infty b_{rr} r^4 dr$$

Vì $b_{rr} + 2\,b_{tt} = \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \rangle$, nên tích phân (34-24) có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi}\int r^2 \langle \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \rangle dV \tag{34-25}$$

trong đó $dV = d^3(x_1 - x_2)$. Tích phân này liên hệ chặt chẽ với mômen xung lượng của chất lỏng, ở trong trạng thái chảy rối đồng chất và đẳng hướng. Có thể chứng minh rằng (ta sẽ không dừng lại ở đây), bình phương mômen toàn phần xung lượng $\mathbf{M}$ của chất lỏng chứa trong một thể tích V lớn nào đó (tách trong chất lỏng vô hạn) bằng $M^2 = 4\pi\rho^2 \Lambda V$; $\mathbf{M}$ tăng tỷ lệ với $V^{1/2}$, mà không với V, sở dĩ như vậy là vì, $\mathbf{M}$ là tổng một số

→ Những cố gắng hiện có nhằm đưa những hiệu chính có liên quan đến nhân tố nào đó vào định luật *Kolmogôrôv - Obukhov* được dựa trên những giả thiết về các tính chất thống kê của sự tiêu tán, mà mức độ hợp lý của chúng cũng khó có thể đánh giá.

lớn các số hạng độc lập thống kê (các mômen xung lượng của các phần nhỏ riêng lẻ của chất lỏng) với các giá trị trung bình bằng không.

Giá trị M^2 trong thể tích V đã cho có thể thay đổi do có tương tác với các miền bao quanh chất lỏng. Nếu như tương tác đó giảm đủ nhanh với khoảng cách, thì nó sẽ là một hiệu ứng mặt đối với phần chất lỏng đang xét. Khi đó các khoảng thời gian, mà M^2 có thể thay đổi đáng kể, sẽ tăng cùng với các kích thước của thể tích V; các thời gian và kích thước này phải được coi như lớn tùy ý, và theo nghĩa đó, M_2 sẽ như thể là bảo toàn.

Điều kiện đã nêu có liên quan chặt chẽ với các điều kiện giảm nhanh của các hàm tương quan đã phát biểu khi rút ra (34-24) từ (34-23). Nhưng trong khuôn khổ của lý thuyết chất lỏng không nén được, có cơ sở để nghi ngờ về sự thực hiện được các điều kiện đó. Cơ sở vật lý là ở chỗ, vận tốc lan truyền các nhiễu động trong chất lỏng không nén được là vô hạn. Về mặt toán học, tính chất này thể hiện trong tính chất tổng cộng của sự phụ thuộc phân bố áp suất chất lỏng vào sự phân bố vận tốc: nếu coi vế phải của phương trình (15-11) như đã cho, thì nghiệm của phương trình này là:

$$p(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{\partial^2 v_i(\mathbf{r}') v_k(\mathbf{r}')}{\partial x_i' \, \partial x_k'} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Kết quả là, một nhiễu động cục bộ bất kỳ của vận tốc cũng được phản ánh tức thời lên áp suất trong toàn không gian, nhưng áp suất lại ảnh hưởng đến gia tốc của chất lỏng và như thế ảnh hưởng đến sự biến thiên tiếp theo của vận tốc.

Cách đặt vấn đề tự nhiên để giải thích bài toán này như sau: giả sử tại thời điểm ban đầu ($t = 0$) có một chuyển động rối đẳng hướng được tạo ra, trong đó các hàm $b_{ik}(r,t)$ và $b_{ik,l}(r,t)$ giảm theo quy luật hàm mũ với khoảng cách. Nếu biểu diễn áp suất qua vận tốc theo công thức đã viết, thì sau đó có thể dựa vào các phương trình chuyển động của chất lỏng để xác định tính chất phụ thuộc của các đạo hàm theo thời gian vào các hàm tương quan (tại thời điểm $t = 0$) vào khoảng cách với $r \to \infty$. Như thế xác định được cả tính chất phụ thuộc vào r của chính các hàm

tương quan với $t > 0$. Một sự nghiên cứu như thế dẫn tới các kết luận sau đây [1].

Hàm $b_{rr}(r,t)$ với $t > 0$ giảm tại vô cùng không chậm hơn r^{-6} (nhưng cũng có thể theo hàm mũ). Do đó tích phân Loitxianxki hội tụ. Nhưng hàm $b_{rr,r}$ chỉ giảm như r^{-4}. Điều đó có nghĩa là, Λ không bảo toàn. Đạo hàm của nó theo thời gian là một hàm âm khác không nào đó của thời gian (như kết quả của sự kiện thực nghiệm về tính âm của $b_{rr,r}$). Hàm này có liên hệ hoàn toàn với các lực quán tính. Một cách tự nhiên có thể nghĩ rằng, với sự tắt dần của tính chảy rối, thì vai trò của các lực này giảm, và trong giai đoạn kết thúc, có thể bỏ qua chúng so với các lực nhớt. Như vậy, Λ giảm (mômen xung lượng "chảy loang ra" đều trong không gian vô hạn), tiến đến một giá trị không đổi, mà nó có được trong giai đoạn kết thúc của tính chảy rối.

Từ đó xuất hiện khả năng xác định định luật biến thiên theo thời gian của cỡ cơ bản l của tính rối và vận tốc đặc trưng v của nó đối với giai đoạn này. Việc ước lượng tích phân (34-25) cho ta, $\Lambda \sim v^2 l^5 = \text{const}$. Còn một hệ thức nữa thu được từ việc ước lượng vận tốc giảm năng lượng do sự tiêu tán nhớt. Độ tiêu tán ε tỷ lệ với bình phương các gradiên vận tốc; sau khi ước lượng các gradiên này như v/l, ta có $\varepsilon \sim \nu(v/l)^2$. Cân bằng đạo hàm của nó $\partial(v^2)/\partial t \sim v^2/t$ (t được tính từ đầu giai đoạn kết thúc tắt dần), ta thu được $l \sim (\nu t)^{1/2}$ và sau đó

$$v = \text{const} \cdot t^{-5/4} \qquad (34\text{-}26)$$

(*M. Đ. Millionsikôv*, 1939).

Biểu diễn phổ của các hàm tương quan

Cùng với việc biểu diễn tọa độ cho các hàm tương quan đã khảo sát trong tiết trước, về mặt phương pháp luận và vật lý, người ta cũng quan tâm đến việc biểu diễn phổ các hàm tương quan đó (theo các vectơ sóng). Phép biểu diễn này thu được bằng cách khai triển thành tích phân không gian Fourier:

[1] Xem *Proudman I., Reid W. H.* - Phil. Trans. Roy. Soc., 1954, v A247, p. 163; *Batchelor G. K., Proudman I.*, cũng nơi trích dẫn trên, 1956, v. A248, p. 360. Nội dung các công trình này cũng được trình bày trong cuốn sách: *Monin A. C., Iaglom A. M.* Thuỷ cơ học thống kê. M., Hayka. 1967, T.2, §15.5-6.

$$B_{ik}(\mathbf{r}) = \int B_{ik}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad B_{ik}(\mathbf{k}) = \int B_{ik}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3x$$

(ta ký hiệu hàm tương quan phổ $B_{ik}(\mathbf{k})$ bằng cùng ký hiệu B_{ik} với biến độc lập khác – vectơ sóng $\mathbf{k}$). Vì trong tính rối đẳng hướng $B_{ik}(-\mathbf{r}) = B_{ik}(\mathbf{r})$, nên $B_{ik}(\mathbf{k}) = B_{ik}(-\mathbf{k}) = B^*_{ik}(\mathbf{k})$, nghĩa là các hàm phổ $B_{ik}(\mathbf{k})$ đều là thực.

Với $r \to \infty$ các hàm $B_{ik}(\mathbf{r})$ tiến đến một giá trị hữu hạn, cho bởi số hạng đầu tiên trong (34-4). Phù hợp với điều đó, các thành phần Fourier chứa số hạng δ-hàm:

$$B_{ik}(\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \langle v^2 \rangle - 2b_{ik}(\mathbf{k}) \tag{34-27}$$

Còn các thành phần với $\mathbf{k} \neq 0$ cho các hàm b_{ik} và $-2\, b_{ik}$ trùng nhau.

Việc lấy vi phân theo các tọa độ x_l trong biểu diễn tọa độ tương đương sự nhân với ik_l trong biểu diễn phổ. Do đó phương trình liên tục $\partial b_{ik}(\mathbf{r})/\, \partial x_i = 0$ trong biểu diễn phổ rút về điều kiện cho tính ngang của tenxơ $b_{ik}(\mathbf{k})$ đối với vectơ sóng:

$$k_i b_{ik}(\mathbf{k}) = 0 \tag{34-28}$$

Do tính đẳng hướng, tenxơ $b_{ik}(\mathbf{k})$ chỉ được biểu diễn qua vectơ $\mathbf{k}$ và tenxơ đơn vị δ_{ik}. Dạng tổng quát của một tenxơ đối xứng như thế thỏa mãn điều kiện (34-28) là

$$b_{ik}(\mathbf{k}) = F^{(2)}(k)\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right) \tag{34-29}$$

trong đó $F^{(2)}(k)$ là hàm thực của đại lượng tuyệt đối của vectơ sóng.

Phép biểu diễn phổ của tenxơ tương quan hạng ba cũng được xác định một cách tương tự, và tenxơ $B_{ikl}(\mathbf{k})$ được biểu diễn qua $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ bằng công thức (34-11); tenxơ này không chứa số hạng δ-hàm. Phương trình liên tục $\partial b_{ik,l}(\mathbf{r})/\, \partial x_l = 0$ dẫn tới điều kiện về tính ngang của tenxơ phổ $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ theo chỉ số thứ ba của nó:

$$k_l b_{ik,l}(\mathbf{k}) = 0 \tag{34-30}$$

Dạng tổng quát của tenxơ như thế:

$$b_{ik,l}(\mathbf{k}) = iF^{(3)}(k)\left\{\delta_{il}\frac{k_k}{k} + \delta_{kl}\frac{k_i}{k} - 2\frac{k_i k_k k_l}{k^3}\right\} \tag{34-31}$$

Vì $b_{ik,l}(-\mathbf{r}) = -b_{ik,l}(\mathbf{r})$, nên các hàm phổ $b_{ik,l}(\mathbf{k})$ đều là ảo; trong (34-31) đã đưa vào thừa số i, do đó hàm $F^{(3)}(k)$ là thực.

Phương trình (34-19) trong biểu diễn phổ có dạng

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{ik}(\mathbf{k}) = ik_l\left[b_{il,k}(\mathbf{k}) + b_{kl,i}(\mathbf{k})\right] - 2\nu k^2 b_{ik}(\mathbf{k}).$$

Thay vào đây (34-29) và (34-31), ta thu được

$$\frac{\partial F^{(2)}(k,t)}{\partial t} = -2kF^{(3)}(k,t) - 2\nu k^2 F^{(2)}(k,t). \qquad (34\text{-}32)$$

Hàm $F^{(2)}(\mathbf{k})$ có ý nghĩa vật lý quan trọng. Để làm sáng tỏ ý nghĩa đó, ta tiếp cận với định nghĩa của hàm tương quan phổ trong giai đoạn sớm hơn một chút [1].

Ta dùng khai triển phổ của chính vận tốc mạch động $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ theo các công thức khai triển thông thường Fourier:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{v}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad \mathbf{v}_\mathbf{k} = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{kr}} d^3x.$$

Tích phân sau cùng thực tế phân kỳ, vì $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ không tiến đến không tại vô cùng. Tuy nhiên, điều đó không quan trọng cho những dẫn giải hình thức sau này, nhằm tính những bình phương trung bình biết rõ là hữu hạn.

Tenxơ tương quan $b_{ik}(\mathbf{r})$ được biểu diễn qua các thành phần Fourier của vận tốc bằng tích phân

$$b_{il}(\mathbf{r}) = \iint \left\langle v_{i\mathbf{k}} v_{l\mathbf{k}'} \right\rangle e^{i(\mathbf{kr}_2 + \mathbf{k}'\mathbf{r}_1)} \frac{d^3k\, d^3k'}{(2\pi)^6}. \qquad (34\text{-}33)$$

Để tích phân này chỉ là hàm của hiệu $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, thì biểu thức dưới dấu tích phân trong nó phải chứa δ - hàm của tổng $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$, nghĩa là phải có

$$\left\langle v_{i\mathbf{k}} v_{l\mathbf{k}'} \right\rangle = (2\pi)^3 (v_i v_l)_\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \qquad (34\text{-}34)$$

Biểu thức này cần được coi như định nghĩa của đại lượng, mà ta ký hiệu tượng trưng bằng $(v_i v_k)_\mathbf{k}$. Thay (34-34) vào (34-33) và khử δ-hàm bằng cách lấy tích phân theo d^3k', ta tìm được

[1] Những lập luận nêu dưới dây phỏng theo kết luận đã cho ở V. §122.

$$b_{il}(\mathbf{r}) = \int \langle v_i v_l \rangle_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

nghĩa là các đại lượng $(v_i v_k)_{\mathbf{k}}$ trùng với các thành phần Fourier của hàm tương quan $b_{il}(\mathbf{r})$; như thế chúng đối xứng theo các chỉ số i, l và là thực. Đặc biệt, $b_{ii}(\mathbf{k}) = (\mathbf{v}^2)_{\mathbf{k}}$, và bây giờ ta có thể khẳng định rằng, đại lượng này dương, như thấy rõ từ mối liên hệ của nó theo (34-34) với đại lượng dương $\langle \mathbf{v_k v_{k'}} \rangle = \langle |\mathbf{v_k}|^2 \rangle$ - tức là bình phương trung bình môđun thành phần -Fourier của vận tốc mạch động.

Giá trị của hàm tương quan $b_{ii}(\mathbf{r})$ với $\mathbf{r} = 0$ xác định bình phương trung bình của vận tốc chất lỏng tại một điểm nào đó (bất kỳ) của không gian. Nó được biểu diễn qua hàm phổ bằng công thức

$$\langle \mathbf{v}^2 \rangle = b_{ii}(\mathbf{r} = 0) = \int b_{ii}(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

hay thay vào đây $b_{ii}(\mathbf{k})$ lấy từ (34-29)

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \int F^{(2)}(k) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty F^{(2)}(k) \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}. \qquad (34\text{-}35)$$

Sau tất cả những điều đã nói ở trên, ý nghĩa của công thức này là hiển nhiên:đại lượng dương $F^{(2)}(k)/(2\pi)^3$ là mật độ phổ của động năng chất lỏng (tính cho một đơn vị khối lượng) trong k-không gian. Còn năng lượng chứa trong các mạch động với đại lượng vectơ sóng trong khoảng dk bằng $E(k)\,dk$, trong đó

$$E(k) = \frac{k^2}{2\pi^2} F^{(2)}(k). \qquad (34\text{-}36)$$

Số hạng thứ nhất trong vế phải của phương trình (34-32) xuất hiện như thành phần -Fourier của số hạng thứ nhất trong vế phải của phương trình (34-19). Với $r \to 0$, phương trình này rút về đạo hàm

$$\left\langle v_{1k} \frac{\partial}{\partial x_{1k}} v_{1i} v_{1l} \right\rangle + \left\langle v_{1i} \frac{\partial}{\partial x_{1i}} v_{1k} v_{1l} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_{1l}} \langle v_{i1} v_{1k} v_{1l} \rangle$$

và bằng không do tính đồng chất. Trong biểu diễn phổ, điều đó có nghĩa là

$$\int kF^{(3)}(k)d^3k = 0, \tag{34-37}$$

do đó hàm $F^{(3)}(k)$ là hàm đan dấu.

Phương trình (34-32) có ý nghĩa đơn giản : nó là sự cân bằng năng lượng của các thành phần phổ khác nhau của chuyển động chảy rối. Số hạng thứ hai trong vế phải là âm; nó xác định độ giảm năng lượng, liên quan đến sự tiêu tán. Còn số hạng thứ nhất (liên quan đến số hạng phi tuyến trong phương trình Navier - Stokes) mô tả sự phân bố lại năng lượng theo phổ – tức là sự chuyển năng lượng từ các thành phần phổ có các giá trị k nhỏ sang các thành phần có giá trị k lớn. Mật độ phổ năng lượng(theo k) $E(k)$ có cực đại với $k \sim 1/l$; trong miền gần cực đại (miền năng lượng – xem §33) có tập trung một phần lớn năng lượng toàn phần của chuyển động rối. Còn mật độ năng lượng tiêu tán $2\nu k^2E(k)$ cực đại với $k \sim 1/\lambda_0$; trong miền tiêu tán có tập trung một phần lớn năng lượng tiêu tán toàn phần. Với các số Reynolds rất lớn thì cả hai miền đều dịch ra xa nhau và giữa chúng có miền quán tính.

Lấy tích phân phương trình (34-32) theo $d^3k/(2\pi)^3$, ta thu được trong vế trái của nó đạo hàm theo thời gian của động năng toàn phần chất lỏng; đạo hàm này trùng với năng lượng tiêu tán toàn phần $-\varepsilon$. Như vậy, ta tìm được "điều kiện chuẩn hóa" sau cho hàm $E(k)$:

$$2\nu\int_0^\infty k^2E(k,t)dk = \varepsilon. \tag{34-38}$$

Trong khoảng quán tính của các số sóng ($1/l << k << 1/\lambda_0$) các hàm phổ (cũng như các hàm tương quan trong biểu diễn tọa độ) có thể được coi như không phụ thuộc vào thời gian. Theo (33-13) ở trong miền này

$$E(k) = C_1\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \tag{34-39}$$

trong đó C_1 là hệ số không đổi. Hệ số này liên quan với hệ số C trong hàm tương quan

$$B_{rr}(r) = C\,(\varepsilon r)^{2/3} \tag{34-40}$$

bằng đẳng thức $C_1 = 0{,}76\,C$ (xem bài tập). Các giá trị thực nghiệm của chúng: $C \approx 2$, $C_1 \approx 1{,}5$ [1]. Khi đó tỷ số

[1] Phần lớn các thực nghiệm được xét cho tính chảy rối khí quyển và đại dương. Số Reynolds trong các phép đo này đạt tới 3.10^8.

$$\frac{|B_{rrr}|}{B_{rr}^{3/2}} = \frac{4}{5} C^{3/2} \approx 0{,}3.$$

BÀI TẬP

Tìm mối liên hệ giữa các hệ số C và C_1 trong các công thức (34.39-40) cho hàm tương quan và mật độ phổ năng lượng trong miền quán tính.

Giải. Các hàm

$$B_{ii}(r) = 2\, B_{tt}(r) + B_{rr}(r) = \frac{11}{3} B_{rr}(r)$$

(có sử dụng (34-6)) và

$$B_{ii}(k) = -\,2\, b_{ii}(k) = -\,4\, F^{(2)}(k) = \frac{8\pi^2}{k^2} E(k)$$

($k \neq 0$) có liên hệ với nhau bằng tích phân Fourier

$$B_{ii}(k) = \int B_{ii}(r)\, e^{-i\mathbf{kr}} d^3x.$$

Nếu vectơ sóng nằm trong miền quán tính ($1/l << k << 1/\lambda_0$), thì sự có mặt của thừa số dao động sẽ cắt tích phân từ trên thành những khoảng cách $r \sim 1/k << l$. Nhưng nếu trên những khoảng cách nhỏ như thế thì tích phân hội tụ, vì $B_{ii}(r) \to 0$ khi $r \to 0$. Do đó thực tế tích phân được xác định bởi miền các khoảng cách nằm trong miền quán tính ($\lambda_0 << r << l$), do đó có thể đặt vào đó $B_{rr}(r)$ lấy từ (34-40), đồng thời mở rộng việc lấy tích phân ra toàn bộ không gian. Trong tích phân

$$I = \int r^{3/2}\, e^{-i\mathbf{kr}} d^3x$$

thoạt đầu lấy tích phân theo các hướng của r ta được

$$I = \frac{4\pi}{k} \mathrm{Im} \int_0^\infty r^{5/3} e^{i\mathbf{kr}} dr = \frac{4\pi}{k^{11/3}} \int_0^\infty \xi^{5/3} e^{i\xi} d\xi.$$

Tích phân còn lại được lấy bằng cách quay đường lấy tích phân trong mặt phẳng biến phức ξ từ bán trục thực bên phải thành bán trục ảo phía trên. Kết quả ta thu được

$$I = -\frac{4\pi}{k^{11/3}} \frac{10\pi}{9\Gamma(1/3)}.$$

Tập hợp các biểu thức thu được, cuối cùng ta có

$$C_1 = \frac{55}{27\Gamma(1/3)} C = 0{,}76C.$$

§35. MIỀN CHẢY RỐI VÀ HIỆN TƯỢNG TÁCH

Chuyển động rối nói chung có tính xoáy. Tuy nhiên sự phân bố tính xoáy theo thể tích chất lỏng trong chuyển động rối (với các R rất lớn) có những đặc điểm quan trọng. Cụ thể là trong chuyển động rối "dừng" bao quanh các vật, thể tích của toàn bộ chất lỏng thường có thể tách thành hai miền riêng biệt nhau. Trong một miền, chuyển động có tính xoáy, còn trong miền kia không có tính xoáy và chuyển động có thế. Như vậy tính xoáy được phân bố không phải trong toàn bộ thể tích chất lỏng, mà chỉ trong một phần (nói chung, phần này cũng có thể vô hạn).

Khả năng tồn tại một miền xoáy hữu hạn như thế là do chuyển động rối có thể được coi như chuyển động của chất lỏng lý tưởng được mô tả bởi các phương trình Euler [1]. Ta đã biết rằng (§8) định luật bảo toàn lưu số của vận tốc đúng với chuyển động của chất lỏng lý tưởng. Đặc biệt, nếu rôta của vận tốc bằng không tại một điểm nào đó của đường dòng, thì nó cũng sẽ bằng không tại mọi điểm của đường dòng đó. Ngược lại, nếu rot $\mathbf{v} \neq 0$ tại một điểm nào đó của đường dòng, thì nó sẽ khác không trên toàn bộ đường dòng. Từ đó, rõ ràng là, sự có mặt của các miền tách biệt của chuyển động xoáy và chuyển động không xoáy sẽ tương thích với các phương trình chuyển động, nếu miền chuyển động xoáy là một miền, mà các đường dòng ở trong nó không vượt qua biên giới của miền. Một sự phân bố như thế của tính xoáy là ổn định, và tính xoáy không thể "xuyên" qua mặt ngăn cách.

Một trong các tính chất của miền chuyển động rối là, sự trao đổi chất lỏng giữa miền này và không gian bao quanh chỉ có thể là sự trao đổi một chiều. Chất lỏng có thể đi từ miền chuyển động có thế đến miền đó, nhưng không bao giờ ra khỏi miền này.

Cần nhấn mạnh rằng, những lập luận đã nêu không thể được coi là một sự chứng minh ít nhiều chính xác cho những điều khẳng định đã

[1] Việc áp dụng phương trình này cho chuyển động rối bị giới hạn tại các khoảng cách có bậc λ_0. Do đó, người ta chỉ có thể nói về biên giới chính xác giữa các miền của chuyển động xoáy và chuyển động không xoáy với độ chính xác đến các khoảng cách đó.

nêu ở trên. Tuy nhiên, sự có mặt của các miền tách biệt của chuyển động rối xoáy có vẻ được thực nghiệm xác nhận.

Chuyển động là rối cả ở trong miền xoáy cũng như ở trong miền không xoáy. Tuy nhiên, tính chất của dòng rối này hoàn toàn khác nhau ở trong cả hai miền. Để làm sáng tỏ sự khác nhau đó là do đâu, cần chú ý đến tính chất tổng quát sau đây của chuyển động thế được mô tả bởi phương trình Laplace $\Delta\varphi = 0$. Giả sử rằng, chuyển động là tuần hoàn trong mặt phẳng x, y, do đó φ phụ thuộc vào x và y qua thừa số có dạng $\exp\{i(k_1x + k_2y)\}$; khi đó

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\left(k_1^2 + k_2^2\right)\varphi = -k^2\varphi,$$

và vì tổng các đạo hàm cấp hai phải bằng không, nên rõ ràng là đạo hàm cấp hai theo tọa độ z phải bằng φ nhân với một hệ số dương: $\partial^2\varphi/\partial z^2 = k^2\varphi$. Nhưng khi đó sự phụ thuộc của φ vào z sẽ được xác định bởi một thừa số tắt dần có dạng e^{-kz} với $z > 0$ (sự tăng vô hạn như e^{kz} rõ ràng là không thể có được). Như vậy, nếu chuyển động thế là tuần hoàn trong một mặt phẳng nào đó, thì nó phải tắt theo phương vuông góc với mặt phẳng đó. Khi đó k_1 và k_2 càng lớn, nghĩa là chu kỳ lặp lại của chuyển động ở trong mặt phẳng x, y càng nhỏ, thì chuyển động dọc theo trục z tắt càng nhanh. Tất cả những lập luận đó vẫn còn đúng về mặt định tính cả trong những trường hợp, khi chuyển động không còn triệt để tuần hoàn, mà chỉ có một sự lặp lại định tính nào đó.

Từ đó suy ngay được kết quả sau. Những mạch động chảy rối phải tắt dần ở bên ngoài miền chuyển động xoáy và tắt càng nhanh nếu cỡ của chúng càng nhỏ. Nói một cách khác, những mạch động cỡ nhỏ không xuyên sâu vào trong miền chuyển động thế. Do đó, ở trong miền này chỉ có những mạch động cỡ lớn nhất mới giữ một vai trò đáng kể; các mạch động này tắt tại những khoảng cách có bậc của những kích thước (ngang) của miền xoáy, chính những kích thước này giữ vai trò của cỡ cơ bản của chuyển động rối. Tại những khoảng cách lớn hơn các kích thước đó, tính chảy rối thực tế không tồn tại và chuyển động có thể được coi là chuyển động chảy tầng.

Chúng ta đã nhận thấy rằng sự tiêu tán năng lượng trong quá trình của chuyển động rối có liên quan đến những mạch động cỡ nhỏ nhất; những chuyển động cỡ lớn không gây ra sự tiêu tán đáng kể, do đó có thể áp dụng cho chúng phương trình Euler. Do những điều đã nói ở trên, ta đi tới kết luận quan trọng là, sự tiêu tán năng lượng chủ yếu xảy ra ở trong miền của chuyển động rối xoáy và thực tế nó không xảy ra ở bên ngoài miền này.

Nếu nhớ tất cả những đặc điểm đó của chuyển động rối xoáy và không xoáy, thì sau đây, để ngắn gọn, ta sẽ gọi miền của chuyển động rối xoáy đơn giản là *miền chuyển động rối* hay *miền rối*. Các tiết sau ta sẽ khảo sát dạng của miền này trong những trường hợp khác nhau.

Miền rối phải được giới hạn ở một phía nào đó bởi một phần mặt của vật có chất lỏng chảy bao quanh. Đường, giới hạn phần mặt này của vật, được gọi là *đường rời*. Mặt ngăn cách miền rối với miền còn lại của khối chất lỏng tách rời từ đường đó. Chính bản thân sự tạo thành miền rối trong dòng chảy bao quanh vật được gọi là *hiện tượng tách*.

Dạng của miền rối được xác định bởi những tính chất của chuyển động ở trong thể tích cơ bản của chất lỏng (nghĩa là không ở sát mặt vật). Một lý thuyết đầy đủ (cho đến nay chưa tồn tại) về dòng chảy rối phải cho phép về nguyên tắc xác định được dạng đó dựa vào các phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng, nếu vị trí của đường tách trên mặt vật đã được cho trước. Vị trí thực của đường tách rời được xác định bởi những tính chất của chuyển động ngay sát mặt vật (ở trong lớp biên giới), tại đây độ nhớt của chất lỏng giữ một vai trò quan trọng (xem §40).

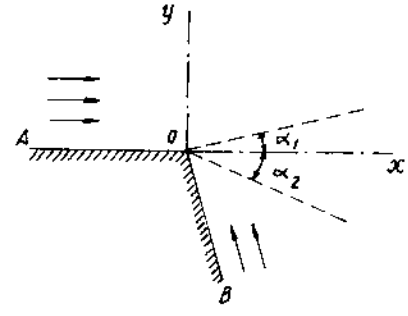
Khi nói đến (trong những tiết tiếp theo) biên giới tự do của miền rối, lẽ dĩ nhiên ta phải hiểu ngầm đó là vị trí lấy trung bình theo thời gian của nó. Còn vị trí tức thời của biên giới là một mặt rất không đều; các biến dạng không đều này và sự biến thiên của chúng theo thời gian chủ yếu có liên quan đến các mạch động cỡ lớn và một cách tương ứng chúng trải ra đến độ sâu tại những khoảng cách so sánh được với cỡ cơ bản của tính chảy rối. Chuyển động không đều của mặt biên giới dẫn đến kết quả là, một điểm cố định của dòng trong không gian (không quá xa vị trí trung bình của mặt) sẽ luân phiên nhau ở bên này hay bên kia của mặt

biên giới. Khi quan sát hình ảnh chuyển động tại điểm này ta sẽ phát hiện được các chu kỳ xuất hiện và biến mất luân phiên nhau của chuyển động chảy rối cỡ nhỏ [1].

§36. LUỒNG CHẢY RỐI

Dạng và cả một số tính chất cơ bản khác của miền chảy rối trong nhiều trường hợp có thể thiết lập được dựa vào những lý do đồng dạng đơn giản. Ở đây, trước tiên phải kể đến nhiều loại luồng rối tự do khác nhau lan truyền trong một không gian chứa đầy chất lỏng (*L. Prandtl*, 1925).

Để làm thí dụ đầu tiên, ta xét miền chảy rối xuất hiện do sự tách dòng chảy từ bờ của góc lập bởi hai mặt phẳng vô hạn cắt nhau (hình 24 biểu diễn hai mặt cắt ngang của chúng). Đối với dòng chảy tầng (hình 3), chất lỏng chảy dọc theo một trong các cạnh của góc (theo chiều từ A về O) quay đều và chuyển vào dòng chảy dọc theo mặt phẳng thứ hai theo hướng từ bờ góc (từ O đến B). Nhưng đối với dòng chảy rối hình ảnh chuyển động hoàn toàn khác.



Hình 24

Dòng chất lỏng chảy dọc theo một trong các cạnh của góc bây giờ không quay nữa, khi tới bờ của góc, mà tiếp tục lan truyền theo cùng chiều cũ. Còn dọc theo cạnh khác có xuất hiện một dòng chất lỏng chảy về phía bờ góc (từ B đến O). Hai dòng "trộn" vào nhau ở trong miền chảy rối [2] (các biên giới mặt cắt của miền này được nêu trên hình 24 bằng

[1] Người ta gọi tính chất này là tính chảy rối *luân phiên*. Cần phân biệt tính chảy rối luân phiên này với tính chất tương tự của cấu trúc chuyển động tại độ sâu miền chảy rối, tính chất này cũng được gọi là tính chảy rối luân phiên. Trong cuốn sách này ta không xét những quan niệm mô hình hiện có về các hiện tượng này.

[2] Ta nhớ lại rằng, ở bên ngoài miền chảy rối, có xảy ra chuyển động rối không xoáy, chuyển động này dần dần chuyển thành dòng chảy tầng khi đi xa dần khỏi biên giới của miền này.

những chấm chấm). Nguồn gốc của một miền như thế có thể được mô tả cụ thể như sau. Ta hình dung có một dòng chất lỏng, sao cho dòng chảy đều đi từ A về O tiếp tục chuyển động theo cùng chiều cũ, lấp đầy toàn bộ không gian ở trên mặt phẳng AO và tiếp tục chuyển động sang bên phải vào sâu trong chất lỏng, trong khi đó chất lỏng đứng yên trong không gian phía dưới mặt phẳng đó. Nói một cách khác, khi đó ta có một mặt gián đoạn (kéo dài mặt phẳng AO) giữa chất lỏng chuyển động với vận tốc không đổi và chất lỏng đứng yên. Nhưng một mặt gián đoạn như thế là không ổn định, và thực tế không thể tồn tại (xem §29). Sự không ổn định này dẫn đến "sự khuấy trộn" và tạo thành một miền chuyển động rối. Dòng chảy dọc từ B đến O xuất hiện khi đó là do chất lỏng phải từ ngoài đi vào miền chảy rối.

Ta xác định dạng của miền chuyển động rối. Chọn trục x như đã được nêu trên hình 24, gốc tọa độ tại O. Ký hiệu Y_1 và Y_2 là các khoảng cách tính từ mặt phẳng xz đến các biên giới trên và dưới của miền chảy rối; cần tìm sự phụ thuộc của Y_1 và Y_2 vào x. Ta dễ dàng xác định được sự phụ thuộc đó trực tiếp từ những lý do đồng dạng. Vì tất cả những kích thước của các mặt phẳng đều vô hạn, nên ta không có trong tầm tay bất kỳ một thông số không đổi nào, đặc trưng cho chuyển động đang xét, có thứ nguyên độ dài. Từ đó suy ra rằng, sự phụ thuộc khả dĩ duy nhất của các đại lượng Y_1, Y_2 vào khoảng cách x là sự tỷ lệ thuận của chúng:

$$Y_1 = \mathrm{tg}\alpha_1 \cdot x, \qquad Y_2 = \mathrm{tg}\alpha_2 \cdot x. \tag{36-1}$$

Các hệ số tỷ lệ đều đơn giản là những hằng số, ta viết chúng dưới dạng $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$, do đó α_1 và α_2 là các góc lập bởi hai biên giới của miền chảy rối với trục x. Như vậy miền chảy rối bị giới hạn bởi hai mặt phẳng cắt nhau theo các đường bờ của góc có dòng chảy bao quanh.

Giá trị của các góc α_1 và α_2 chỉ phụ thuộc vào độ lớn của góc nhị diện và không phụ thuộc vào vận tốc của dòng chất lỏng tới chẳng hạn. Chúng không thể tính được về mặt lý thuyết; đối với dòng chảy quanh một góc vuông, các số liệu thực nghiệm cho các giá trị $\alpha_1 = 5^\circ$, $\alpha_2 = 10^\circ$ [1].

[1] Ở đây và trong những trường hợp sẽ xét dưới đây, ta nói đến những số liệu thực nghiệm về sự phân bố vận tốc trong tiết diện ngang của luồng chảy rối, các số liệu đó được phân tích dựa vào các kết quả tính toán theo các lý thuyết bán thực nghiệm của tính chảy rối (xem bị chú ở trang 249).

Vận tốc các dòng chảy ở hai phía của góc không bằng nhau. Tỷ số của chúng là một số xác định, số này lại chỉ phụ thuộc vào độ lớn của góc. Khi các góc nhị diện không quá nhỏ thì một vận tốc sẽ lớn hơn vận tốc kia một cách đáng kể – cụ thể là lớn hơn vận tốc của dòng chảy "cơ bản", chảy cùng chiều với miền chảy rối (dòng từ A về O). Chẳng hạn, khi dòng chảy quanh một góc vuông, vận tốc của dòng dọc theo mặt phẳng AO lớn gấp 30 lần vận tốc của dòng đi từ B về O.

Ta cũng nhận xét thêm rằng, hiệu các áp suất chất lỏng ở hai bên của miền chảy rối rất nhỏ. Chẳng hạn, khi dòng chảy quanh một góc vuông, hiệu đó bằng

$$p_1 - p_2 = 0{,}003\ \rho\ U_1^2$$

trong đó U_1 là vận tốc của dòng tới (hướng từ A về O), p_1 là áp suất ở trong dòng trên (dọc theo AO), p_2 là áp suất ở trong dòng dưới (dọc theo BO).

Trong trường hợp giới hạn khi góc nhị diện bằng không, vấn đề đặt ra đơn giản với bờ của một bản có chất lỏng chảy dọc theo hai bên mặt. Góc mở $\alpha_1 + \alpha_2$ của miền chảy rối khi đó cũng bằng không, nghĩa là miền chảy rối biến mất; vận tốc các dòng ở hai bên mặt trở nên bằng nhau. Khi tăng góc AOB, sẽ tới lúc mặt phẳng BO tiếp xúc với biên giới dưới của miền chảy rối, khi đó góc AOB sẽ là góc tù. Nếu góc AOB tiếp tục tăng nữa, miền chảy rối vẫn bị giới hạn một phía bởi thành rắn BO. Thực ra, khi đó sẽ có hiện tượng tách, đường tách chạy dọc theo bờ của góc. Góc mở của miền chảy rối vẫn luôn luôn hữu hạn.

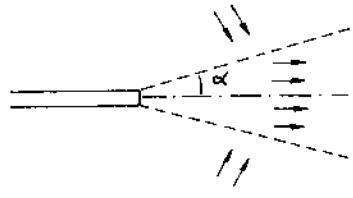
Để làm thí dụ tiếp theo, ta xét bài toán về luồng chảy rối thoát ra từ miệng một ống nhỏ và lan truyền trong không gian vô hạn chứa đầy cùng chất lỏng đó (bài toàn về chuyển động chảy tầng trong một luồng "bị chìm ngập" như thế đã được giải ở §23). Tại các khoảng cách lớn so với các kích thước của miệng ống (ta chỉ xét những khoảng cách này) luồng là đối xứng trục, dù dạng cụ thể của miệng ống là như thế nào.

Ta xác định dạng của miền chuyển động chảy rối ở trong luồng. Chọn trục của luồng làm trục x, và ký hiệu bán kính của miền chảy rối bằng R; ta xác định sự phụ thuộc của R vào x (x được tính từ điểm thoát của luồng). Cũng giống như trong thí dụ trước, sự phụ thuộc này có thể được suy ra dễ dàng trực tiếp từ những lý do thứ nguyên. Tại các khoảng

cách lớn so với các kích thước của miệng ống, dạng cụ thể và các kích thước của miệng ống không thể giữ vai trò gì đối với dạng của luồng. Do đó chúng ta không có sẵn một thông số đặc trưng nào có thứ nguyên của độ dài. Từ đó, lại suy ra rằng R phải tỷ lệ với x:

$$R = \text{tg}\alpha \cdot x, \tag{36-2}$$

trong đó hằng số tgα đều như nhau đối với tất cả các luồng. Như vậy, miền chảy rối là một mặt nón; góc 2α ở đỉnh mặt nón cho bởi thực nghiệm có giá trị khoảng 25° (hình 25) [1].



Hình 25

Chuyển động trong luồng xảy ra chủ yếu dọc theo trục của nó. Vì không có các thông số nào có thứ nguyên độ dài hay vận tốc để có thể đặc trưng cho chuyển động trong luồng [2], nên sự phân bố vận tốc dọc u_x (trung bình theo thời gian) trong luồng phải có dạng

$$u_x(r, x) = u_0(x)\text{f}\left(\frac{r}{R(x)}\right), \tag{36-3}$$

trong đó r là khoảng cách tính từ trục luồng, còn u_0 là vận tốc ở trên trục. Nói một cách khác, các prôfin vận tốc tại các tiết diện khác nhau của luồng chỉ khác nhau ở các cỡ đo khoảng cách và vận tốc (vì thế, người ta gọi đó là *tính tự đồng dạng* của cấu trúc luồng). Hàm $f(\xi)$ (bằng 1 với $\xi = 0$) giảm nhanh khi đối số của nó tăng. Khi $\xi = 0{,}4$ thì hàm đã bằng 1/2, còn tại biên giới của miền rối thì nó đạt giá trị ~ 0,01. Đối với vận tốc ngang thì nó giữ nguyên bậc độ lớn gần như nhau trên tiết diện của miền rối và tại biên giới của miền vận tốc vào khoảng 0,025 u_0, ở đây

[1] Công thức (36-2) cho $R = 0$ với $x = 0$, nghĩa là tọa độ x được tính từ điểm thoát của luồng do nguồn điểm phun ra. Điểm này có thể không trùng với vị trí thực của miệng thoát, miệng này ở xa nó (về phía sau) một khoảng có cùng bậc với độ lớn đòi hỏi để thiết lập định luật (36-2). Nếu quan tâm đến định luật tiệm cận với các x lớn thì, sự khác nhau này có thể bỏ qua.

[2] Nhắc lại một lần nữa là, ở đây đề cập đến tính chảy rối phát triển trong luồng, do đó độ nhớt không thể có mặt trong các công thức đã khảo sát.

vận tốc hướng vào bên trong luồng. Do vận tốc ngang này mà sự chảy của chất lỏng vào miền rối được thực hiện. Chuyển động ở bên ngoài miền rối có thể được xác định về mặt lý thuyết (xem bài tập1).

Xuất phát từ những nhận định đơn giản sau đây, có thể xác định được sự phụ thuộc của vận tốc ở trong luồng vào khoảng cách x. Dòng xung lượng toàn phần trong luồng qua mặt cầu (có tâm nằm tại điểm thoát ra của luồng) vẫn phải không đổi khi bán kính của mặt cầu thay đổi. Mật độ dòng xung lượng trong luồng $\sim \rho u^2$, trong đó u có bậc độ lớn của vận tốc trung bình nào đó trong luồng. Diện tích phần tiết diện ngang của luồng, mà trên đó vận tốc khác không đáng kể, có bậc độ lớn R^2. Do đó, dòng xung lượng toàn phần $P \sim \rho u^2 R^2$. Thay vào đây (36-2), ta được

$$u \sim \sqrt{\frac{P}{\rho}} \frac{1}{x}. \tag{36-4}$$

nghĩa là vận tốc giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách tính từ điểm thoát ra của luồng.

Lượng (khối lượng) chất lỏng Q qua tiết diện ngang của miền chảy rối của nguồn sau một giây có bậc độ lớn của tích $\rho u R^2$. Thay vào đây (36-2) và (36-4), ta tìm được $Q = \text{const}.x$ (nếu hai đại lượng biến thiên thay đổi trong những giới hạn rộng bao giờ cũng có cùng bậc độ lớn, thì chúng tỷ lệ với nhau; do đó chúng ta viết công thức với dấu =). Để tiện lợi, ở đây không biểu diễn hệ số tỷ lệ qua dòng xung lượng P, mà qua lượng chất lỏng Q_0 được thoát ra khỏi miệng ống sau một đơn vị thời gian. Tại những khoảng cách có bậc độ lớn của các kích thước dài a của miệng ống phải có $Q \sim Q_0$. Từ đó suy ra rằng, $\text{const} \sim Q_0/a$, do đó có thể viết

$$Q = \beta Q_0 \frac{x}{a}, \tag{36-5}$$

trong đó β là hệ số bằng số chỉ phụ thuộc vào kích thước miệng lỗ. Chẳng hạn, đối với miệng lỗ tròn bán kính a, giá trị thực nghiệm $\beta \approx 1{,}5$. Như vậy, lưu lượng chất lỏng qua tiết diện của miền rối tăng với khoảng cách x – chất lỏng bị kéo vào trong miền rối [1].

Chuyển động trong mỗi phần độ dài của luồng được đặc trưng bởi số

[1] Những dòng toàn phần của chất lỏng qua toàn bộ mặt phẳng vô hạn, cắt ngang luồng, là vô hạn – luồng đổ vào không gian vô hạn, kéo theo một lượng chất lỏng vô hạn.

Reynolds cho mỗi phần đó, xác định bằng uR/ν. Nhưng do (36-2) và (36-4) tích uR giữ nguyên không đổi dọc theo luồng, do đó số Reynolds như nhau đối với mọi phần của luồng. Có thể lấy tỷ số $Q_0/\rho a\nu$ làm số đó. Hằng số Q_0/a có mặt ở đây là thông số duy nhất để xác định toàn bộ chuyển động trong luồng. Khi "công suất" Q_0 của luồng tăng (với đại lượng a đã cho của miệng lỗ) cuối cùng số Reynolds đạt tới một giá trị tới hạn nào đó, sau giá trị này chuyển động trở nên chảy rối đồng thời trên toàn bộ độ dài của luồng [1].

BÀI TẬP

1. Xác định chuyển động trung bình của chất lỏng ở trong luồng nằm ngoài miền rối.

Giải. Chọn hệ tọa độ cầu r, θ, φ, trục cực hướng theo trục của luồng và gốc tọa độ được lấy tại điểm thoát của nó. Do tính đối xứng trục của luồng, thành phần u_φ của vận tốc trung bình bằng không và u_0, u_r chỉ là các hàm của r và θ. Cũng những lập luận như đã nêu ở bài tập về luồng chảy tầng của §23 chứng tỏ rằng u_r, u_θ phải có dạng

$$u_\theta = \frac{f(\theta)}{r}, \qquad u_r = \frac{F(\theta)}{r},$$

[1] Để tính toán chi tiết hơn cho một số trường hợp của chuyển động rối, thường người ta dùng những lý thuyết "bán thực nghiệm" khác nhau dựa trên một số giả thuyết về sự phụ thuộc của hệ số nhớt rối vào gradiên của vận tốc trung bình. Chẳng hạn, trong lý thuyết của Prandtl, người ta đặt (đối với một dòng chảy phẳng)

$$\nu_r = l^2\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|,$$

trong đó sự phụ thuộc của l (được gọi là "độ dài trộn") vào các tọa độ được chọn phù hợp với những lý do đồng dạng; chẳng hạn đối với những luồng rối tự do, người ta đặt $l = cx$, trong đó c là một hằng số thực nghiệm. Các lý thuyết như thế thường thường phù hợp tốt với thực nghiệm, do đó chúng có ý nghĩa thực tiễn như các sơ đồ tính toán nội suy tốt. Tuy nhiên, khi đó không được gán những giá trị phổ biến cho các hằng số thực nghiệm, các hằng số này đặc trưng cho mỗi lý thuyết; chẳng hạn giá trị của tỷ số độ dài trộn l và các kích thước ngang của miền chảy rối phải được chọn khác nhau trong những trường hợp cụ thể khác nhau. Cũng cần nhận thấy rằng, người ta thu được một sự phù hợp tốt với các kết quả thực nghiệm, xuất phát từ những biểu thức khác nhau của độ nhớt rối.

Ở bên ngoài miền chảy rối, chuyển động của chất lỏng là chuyển động thế, nghĩa là rot $\mathbf{u} = 0$, từ đó

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) = 0.$$

Nhưng ru_θ không phụ thuộc vào r, do đó $\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{dF}{d\theta} = 0$, từ đó $F = \text{const} \equiv -b$, nghĩa là

$$u_r = -\frac{b}{r}. \tag{1}$$

Từ phương trình liên tục

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, u_\theta) = 0$$

bây giờ ta rút ra:

$$f = \frac{\text{const} - b\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Hằng số tích phân phải lấy bằng $-b$ để vận tốc không trở nên vô hạn khi $\theta = \pi$ (sự kiện f trở nên vô hạn khi $\theta = 0$ không quan trọng, vì nghiệm xét đến đây chỉ thuộc về không gian ở bên ngoài miền chảy rối còn hướng $\theta = 0$ nằm trong nó). Như vậy

$$u_\theta = -\frac{b}{r}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{b}{r}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}. \tag{2}$$

Hình chiếu của vận tốc lên phương của luồng (u_x) và giá trị tuyệt đối của vận tốc bằng

$$u_x = \frac{b}{r} = -\frac{b\cos\theta}{x}, \qquad u = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sin(\theta/2)}. \tag{3}$$

Hằng số b có thể liên hệ với hằng số $B = \beta Q_0/\alpha$ ở trong công thức (36-5). Ta xét đoạn hình nón của miền chảy rối ở giữa hai tiết diện ngang vô cùng gần nhau. Lượng chất lỏng từ ngoài đi vào trong phần này của miền chảy rối sau một giây bằng:

$$dQ = -2\pi r\rho\, \sin\alpha u_0 dr = 2\pi b\rho(1+\cos\alpha)dr.$$

và công thức (36-5) cho ta $dQ = B\,dx = B\cos\alpha\, dr$. So sánh hai biểu thức, ta thu được

$$b = \frac{B}{2\pi\rho}\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{4}$$

Tại biên giới của miền chảy rối vận tốc u hướng vào phía trong của miền này và tạo một góc $(\pi - \alpha)/2$ với chiều dương của trục x.

So sánh vận tốc trung bình ở trong miền chảy rối, được định nghĩa như

$$u_x = \frac{Q}{\pi R^2 \rho} = \frac{B}{\pi \rho x \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

với vận tốc $(u_x)_{thế}$ tại biên giới của miền đó. Lấy biểu thức thứ nhất từ các công thức (3) với $\theta = \alpha$, ta được

$$\frac{(u_x)_{thế}}{\bar{u}_x} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}.$$

Với $\alpha = 12^\circ$, ta thu được cho tỷ số này giá trị 0,011, nghĩa là tại biên giới của miền chảy rối vận tốc nhỏ so với vận tốc trung bình ở trong miền.

2. Xác định định luật biến thiên của các kích thước trong luồng chảy rối ngầm thoát ra từ một khe hẹp dài vô hạn.

Giải. Với cùng lý do như đối với luồng trục, ta kết luận rằng miền chảy rối bị giới hạn bởi hai mặt phẳng cắt nhau dọc theo khe, nghĩa là nửa độ rộng của luồng bằng:

$$Y = x \operatorname{tg} \alpha$$

Dòng xung lượng ở trong luồng (xét cho một đơn vị độ dài của khe) có bậc của $\rho u^2 Y$. Do đó sự phụ thuộc của vận tốc trung bình u vào x được cho bởi

$$u \sim \frac{\text{const}}{\sqrt{x}}.$$

Lượng chất lỏng đi qua tiết diện của miền chảy rối của luồng bằng $Q \sim \rho u Y$, từ đó

$$Q = \text{const} \cdot \sqrt{x}.$$

Số Reynolds cục bộ $R = uY/\nu$ tăng với x theo cùng định luật như thế.

Các giá trị thực nghiệm thu được cho góc mở của luồng phẳng cũng gần như cho luồng tròn ($2\alpha \approx 25^\circ$).

§37. VẾT CHẢY RỐI

Khi các số Reynolds lớn hơn nhiều so với giá trị tới hạn thì ở trong dòng chất lỏng chảy quanh vật rắn có hình thành một miền dài chảy rối ở phía sau vật. Miền đó được gọi là *vết chảy rối*. Tại các khoảng cách lớn (so với kích thước của vật) những lập luận đơn giản cho phép ta xác định dạng của vết và định luật giảm của vận tốc chất lỏng ở trong vết (*Prandtl*, 1925).

Cũng như trong việc nghiên cứu vết chảy tầng ở §21, chúng ta ký hiệu **U** là vận tốc của dòng tới vật và chọn chiều của nó là chiều x. Còn

vận tốc trung bình của chất lỏng tại mỗi điểm đối với các mạch động rối được ký hiệu bằng $\mathbf{U} + \mathbf{u}$. Nếu ký hiệu a là một độ rộng ngang nào đó của vết, ta sẽ xác định được sự phụ thuộc của a vào x. Nếu trong dòng chảy bao quanh vật không có lực nâng, thì tại các khoảng cách xa đối với vật, vết có tính đối xứng trục và có tiết diện tròn; đại lượng a khi đó có thể là bán kính của vết. Nhưng nếu có lực nâng, thì một phương ưu tiên nào đó sẽ xuất hiện trong mặt phẳng y, z và vết không còn đối xứng trục nữa dù khoảng cách đến vật bằng bao nhiêu.

Thành phần dọc của vận tốc ở trong vết ~ U, còn thành phần ngang có bậc của một giá trị trung bình u nào đó của vận tốc chảy rối. Do đó góc giữa các đường dòng và trục x có bậc độ lớn của tỷ số u/U. Mặt khác, như ta đã biết, biên giới của vết là biên giới mà những đường dòng của chuyển động chảy rối có tính xoáy không thể vượt ra ngoài được. Từ đó suy ra rằng, góc nghiêng mà đường vòng kín của tiết diện dọc của vết lập với trục x cũng có bậc u/U. Điều đó có nghĩa là, có thể viết được:

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{u}{U}. \tag{37-1}$$

Tiếp theo, ta dùng các công thức (21.1-2) để xác định các lực tác dụng lên vật thông qua những tích phân của vận tốc chất lỏng trong vết (vận tốc bây giờ được hiểu là giá trị trung bình của nó). Trong các tích phân này, miền lấy tích phân ~ a^2. Vì thế sau khi ước lượng tích phân, ta đi tới hệ thức $F \sim \rho U u a^2$, trong đó F có bậc độ lớn của lực cản hay lực nâng. Như vậy:

$$u \sim \frac{F}{\rho U a^2}. \tag{37-2}$$

Thay biểu thức này vào trong (37-1), ta tìm được

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{F}{\rho U^2 a^2},$$

từ đó bằng phép lấy tích phân

$$a \sim \left(\frac{Fx}{\rho U^2}\right)^{1/3}. \tag{37-3}$$

Như vậy, bề rộng của vết tăng theo căn bậc ba của khoảng cách tính từ vật. Từ (37-2) và (37-3), ta rút ra được vận tốc u:

$$u \sim \left(\frac{FU}{\rho x^2}\right)^{1/3}, \qquad (37\text{-}4)$$

nghĩa là vận tốc trung bình của chuyển động chất lỏng ở trong vết giảm tỷ lệ nghịch với $x^{2/3}$.

Chuyển động của chất lỏng tại mỗi phần độ dài của vết được đặc trưng bởi số Reynolds $R \sim au/\nu$. Thay vào (36-3) và (36-4), ta thu được:

$$R \sim \frac{F}{\nu\rho Ua} \sim \frac{1}{\nu}\left(\frac{F^2}{\rho^2 Ux}\right)^{1/3}.$$

Ta nhận thấy rằng, số này không giữ nguyên không đổi dọc theo độ dài của vết, trái với điều đã xảy ra trong trường hợp của luồng chảy rối. Tại những khoảng cách đủ lớn tính từ vật, R trở nên nhỏ đến mức chuyển động ở trong vết không còn là chảy rối nữa. Tiếp theo là miền vết chảy tầng, mà các tính chất của nó đã được nghiên cứu ở §21.

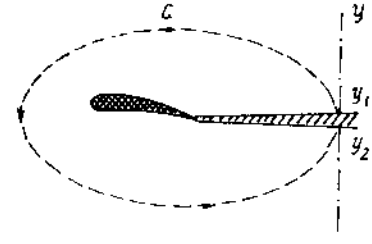
Ở §21, ta đã rút ra được những công thức mô tả chuyển động của chất lỏng bên ngoài vết ở xa vật. Các công thức này được áp dụng cho chuyển động ở bên ngoài vết chảy rối cũng như ở bên ngoài vết chảy tầng.

Ở đây ta có thể nêu một tính chất tổng quát của sự phân bố các vận tốc chung quanh vật. Trong vết chảy rối cũng như ngoài vết này, vận tốc (tại mọi nơi, ta đều nói đến vận tốc u) giảm khi khoảng cách tính từ vật tăng. Nhưng khi đó vận tốc dọc u_x giảm ở bên ngoài vết nhanh hơn (như $1/x^2$) so với ở bên trong vết. Do đó có thể coi rằng, ở xa vật vận tốc u_x chỉ tồn tại ở trong vết, còn bên ngoài vết $u_x = 0$. Có thể nói rằng, u_x giảm từ một giá trị cực đại nào đó ở trên "trục" của vết đến giá trị không ở trên biên giới của nó. Còn các vận tốc ngang u_y, u_z tại biên giới của vết có cùng bậc như ở bên trong vết và giảm nhanh (với khoảng cách tính từ vật không đổi) khi đi ra xa vết.

§38. ĐỊNH LÝ GIUKOVXKI

Tính chất của sự phân bố các vận tốc quanh một vật đã mô tả trong tiết trước không được xét cho những trường hợp đặc biệt, khi bề dầy của vết được tạo thành ở phía sau một vật nhỏ so với bề rộng của nó. Một vết như thế được tạo thành khi chất lỏng chảy quanh các vật có bề dầy (theo chiều của trục y) nhỏ so với bề rộng của chúng theo chiều z (còn độ dài theo chiều chảy bao quanh – trục x – có thể là tùy ý); nói một cách khác, vấn đề đặt ra cho sự chảy chung quanh các vật, mà tiết diện ngang của chúng (đối với chiều chuyển động) có dạng bị kéo mạnh dài theo một chiều. Đặc biệt ở đây xét đến sự chảy ở quanh các "*cánh*", đó là các vật có "*sải*" lớn so với tất cả các kích thước khác của chúng.

Rõ ràng là, trong một trường hợp như thế, không có lý do gì để vận tốc u_y vuông góc với mặt phẳng của vết chảy rồi, giảm đáng kể ngay tại các khoảng cách có bậc bề dầy của vết. Ngược lại, vận tốc này sẽ có cùng bậc ở trong vết cũng như tại những khoảng cách đáng kể (có bậc của "sải" cánh) tính từ vết. Dĩ nhiên, khi đó ta giả thiết rằng, lực nâng khác không; vì nếu lực nâng bằng không thì vận tốc ngang thực tế bằng không.



Hình 26

Bây giờ ta xét lực nâng thẳng đứng F_y xuất hiện trong một dòng chảy như thế. Theo công thức (21-2), lực đó được tính bởi tích phân

$$F_y = -\rho U \iint u_y dydz, \tag{38-1}$$

trong đó, do tính chất phân bố của vận tốc u_y, tích phân trong trường hợp đã cho phải được lấy theo toàn bộ mặt phẳng ngang. Thêm nữa, vì bề dầy của vết (theo trục y) nhỏ, và vận tốc u_y ở bên trong vết tuyệt nhiên không lớn so với cùng vận tốc đó ở bên ngoài vết, nên trong trường hợp đang xét, với một độ chính xác vừa đủ, khi lấy tích phân

theo dy, ta chỉ giới hạn lấy tích phân ở miền ngoài vết, nghĩa là có thể viết:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_y dy \approx \int_{y_1}^{\infty} u_y dy + \int_{-\infty}^{y_2} u_y dy,$$

trong đó y_1 và y_2 là những tọa độ các biên giới của vết (hình 26).

Tuy nhiên, ở bên ngoài vết chuyển động có tính chất thế và $u_y = \partial\varphi/\partial y$; nếu nhớ rằng, tại vô cùng $\varphi = 0$, ta thu được

$$\int u_y dy = \varphi_2 - \varphi_1,$$

trong đó φ_2 và φ_1 là những giá trị của thế ở hai phía của vết; có thể nói rằng $\varphi_2 - \varphi_1$ là bước nhảy của thế ở trên mặt gián đoạn, mặt này có thể thay cho vết mảnh. Còn đối với các đạo hàm của φ, thì đạo hàm $u_y = \partial\varphi/\partial y$ vẫn phải liên tục. Một bước nhảy của thành phần vận tốc vuông góc với mặt vết, có nghĩa là, một lượng chất lỏng nào đó "đi vào" trong vết; tuy nhiên, trong phép gần đúng mà bề dầy của vết có thể được bỏ qua, thì hiệu ứng đó phải không có. Như vậy, chúng ta thay thế vết bằng một mặt gián đoạn tiếp tuyến. Thêm nữa, trong cùng phép gần đúng đó cả áp suất cũng phải liên tục trong vết. Vì trong phép gần đúng cấp một, theo công thức Bernoulli, độ biến thiên của áp suất được xác định bởi đại lượng $\rho U u_x = \rho U \partial\varphi/\partial x$, nên từ đó suy ra rằng, cả đạo hàm $\partial\varphi/\partial x$ cũng phải liên tục. Còn đối với đạo hàm $\partial\varphi/\partial z$, là vận tốc theo phương sải của cánh, nói chung có bước nhảy.

Vì đạo hàm $\partial\varphi/\partial x$ liên tục, nên bước nhảy $\varphi_2 - \varphi_1$ là một đại lượng chỉ phụ thuộc vào z, nhưng không phụ thuộc vào tọa độ x dọc theo chiều dài của vết. Như vậy, chúng ta tìm được công thức sau cho lực nâng:

$$F_y = -\rho U \int (\varphi_2 - \varphi_1) dz. \qquad (38\text{-}2)$$

Tích phân theo z thực tế chỉ lấy đến bề rộng của vết (bên ngoài vết, dĩ nhiên, $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0$).

Công thức này có thể được biểu diễn dưới dạng hơi khác một chút. Muốn vậy, ta có nhận xét là, dựa theo những tính chất đã biết của tích phân của gradiên một vô hướng, ta có thể viết hiệu $\varphi_2 - \varphi_1$ dưới dạng

tích phân theo đường cong:

$$\int \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = \int (u_y dy + u_x dx),$$

lấy trên công tua xuất phát từ điểm y_1 và đi tới điểm y_2 sau khi đã bao quanh vật, như vậy đi qua khắp nơi trong miền chuyển động thế. Vì vết mảnh nên ta có thể bổ sung công tua dài này bằng một đoạn nhỏ nối từ y_1 đến y_2, mà không làm thay đổi tích phân với độ chính xác đến những vô cùng bé cấp cao, như vậy có thể biến nó thành tích phân lấy theo công tua kín. Ký hiệu Γ là lưu số của vận tốc dọc theo công tua kín C bao quanh vật (hình 26), ta có:

$$\Gamma = \oint \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1, \tag{38-3}$$

và thu được công thức cho lực nâng

$$F_y = -\rho U \int \Gamma dz. \tag{38-4}$$

Dấu của lưu số của vận tốc bao giờ cũng được chọn để công tua bao theo chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ. Dấu ở trong công thức (38-3) cũng phụ thuộc và việc chọn chiều chảy bao quanh: bao giờ ta cũng giả thiết rằng, tại mọi nơi dòng chảy theo chiều dương của trục x (dòng chảy từ trái sang phải).

Mối liên hệ giữa lực nâng và lưu số của vận tốc cho bởi công thức (38-4) chính là nội dung của *định lý N. E. Giukovxki* (1906). Việc áp dụng định lý này cho các cánh khí động lực xem ở §46.

BÀI TẬP

1. Xác định định luật dãn nở của vết chảy rối được hình thành trong dòng chảy ngang quanh một hình trụ dài vô hạn.

Giải. Lực cản f_x trên một đơn vị độ dài của hình trụ có bậc độ lớn $f_x \sim \rho U u Y$. Phối hợp điều này với hệ thức (37-1), ta thu được bề rộng Y của vết:

$$Y = A \sqrt{\frac{x f_x}{\rho U^2}}, \tag{1}$$

trong đó A là một hằng số. Vận tốc trung bình u ở trong vết giảm theo định luật

$$u \sim \sqrt{\frac{f_x}{\rho x}}.$$

Số Reynolds $R \sim Yu/\nu \sim f_x/\nu\rho U$ không phụ thuộc vào x, do đó vết không có phần chảy tầng.

Theo các kết quả thực nghiệm, có thể nói rằng hệ số không đổi ở trong (1) có giá trị bằng $A = 0{,}9$ (Y là nửa độ rộng của vết); nếu Y được hiểu là khoảng cách mà tại đó vận tốc u_x giảm đi một nửa giá trị cực đại ở giữa vết, thì ta có $A = 0{,}4$.

2. Xác định chuyển động ở bên ngoài vết được hình thành trong dòng chảy ngang quanh một vật dài vô hạn.

Giải. Ở bên ngoài vết chuyển động có tính thế (thế ta ký hiệu bằng Φ để phân biệt với góc φ của hệ tọa độ trụ r, z, φ với trục z hướng theo độ dài của vật). Tương tự như đã tiến hành ở (21-16), ta kết luận rằng, cần phải có

$$\int \mathbf{u}\, d\mathbf{l} = \int \nabla\Phi\, d\mathbf{f} = \frac{f_x}{\rho U},$$

trong đó tích phân bây giờ được lấy theo một mặt trụ có bán kính lớn, với trục hướng dọc theo trục x và độ dài bằng đơn vị, còn f_x là lực cản tính cho một đơn vị độ dài của vật. Nghiệm thỏa mãn điều kiện này của phương trình Laplace hai chiều $\Delta\Phi = 0$ có dạng

$$\Phi = \frac{f_x}{2\pi\rho U} \ln r.$$

Tiếp theo, dựa vào công thức (38-2), ta tìm được lực nâng dưới dạng

$$f_y = \rho U(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Nghiệm của phương trình Laplace giảm kém nhanh nhất với khoảng cách và có bước nhảy trên mặt phẳng $\varphi = 0$ là

$$\Phi = \text{const}\ \varphi = -\frac{f_y}{2\pi\rho U}\varphi$$

(việc chọn const được xác định từ $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$). Chuyển động của chất lỏng được xác định bởi tổng cả hai nghiệm đã tìm được, nghĩa là:

$$\Phi = \frac{f_x}{2\pi\rho U}(f_x \ln r - f_y\varphi). \tag{2}$$

Các thành phần trụ của vận tốc $\mathbf{u}$ có dạng

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{f_x}{2\pi\rho U r}, \qquad u_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U r}. \tag{3}$$

Vận tốc **u** lập với bán kính vectơ trụ một góc không đổi, có tg bằng $\frac{f_y}{f_x}$.

3. Tìm định luật uốn cong của vết ở phía sau một vật vô cùng dài, khi có lực nâng.

Giải. Khi có lực nâng, vết (được coi như một mặt gián đoạn) uốn cong trong mặt phẳng $x\ y$. Định luật $y = y(x)$ của sự uốn cong này được xác định bởi phương trình

$$\frac{dx}{u_x + U} = \frac{dy}{u_y}.$$

Theo (3), thay vào đây $u_y \approx -f_y / 2\pi\rho U x$ và bỏ qua u_x so với U, ta thu được:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_y}{2\pi\rho U^2 x},$$

từ đó suy ra

$$y = \text{const} - \frac{f_y}{2\pi\rho U^2} \ln x.$$

Chương IV

LỚP BIÊN

§39. LỚP BIÊN CHẢY TẦNG

Ta đã nhiều lần nêu lên trường hợp các số Reynolds rất lớn tương đương với độ nhớt rất nhỏ, kết quả là chất lỏng được coi là lý tưởng với các R đó. Tuy nhiên một sự gần đúng như thế trong mọi trường hợp là không thích ứng đối với chuyển động của một chất lỏng ở gần các thành rắn. Các điều kiện biên đối với chất lỏng lý tưởng chỉ đòi hỏi thành phần pháp tuyến của vận tốc phải bằng không; còn đối với thành phần tiếp tuyến của vận tốc với mặt của vật có chất lỏng chạy quanh, thì nói chung thành phần đó hữu hạn. Tuy nhiên, đối với chất lỏng nhớt thực, vận tốc ở trên các thành rắn phải bằng không.

Từ đó có thể kết luận rằng, với các số Reynolds lớn, sự giảm của vận tốc đến giá trị không chỉ xảy ra hầu như hoàn toàn trong một lớp mỏng chất lỏng kề sát thành. Lớp này được gọi là lớp biên và được đặc trưng bởi sự có mặt của các gradiên khá lớn của vận tốc ở trong đó. Chuyển động ở trong lớp biên có thể là chảy tầng hoặc chảy rối. Ở đây ta khảo sát những tính chất của lớp biên chảy tầng. Dĩ nhiên, biên giới của lớp này là không rõ nét và sự chuyển tiếp từ dòng chảy tầng ở trong đó sang dòng chảy cơ bản của chất lỏng xảy ra một cách liên tục.

Sự giảm của vận tốc trong lớp biên xét cho cùng là do độ nhớt của chất lỏng, độ nhớt không thể bỏ qua ở đây được mặc dù R có những giá trị lớn. Về mặt toán học, điều đó thể hiện ở chỗ, các gradiên vận tốc ở trong lớp biên đều lớn, nên các số hạng nhớt ở trong các phương trình chuyển động, có chứa các đạo hàm của vận tốc theo các tọa độ, đều lớn, mặc dù độ nhớt ν nhỏ [1].

[1] Tư tưởng và những phương trình cơ bản của lý thuyết lớp biên chảy tầng đã được Prandtl phát biểu (*Prandtl*, 1904).

Ta tìm phương trình chuyển động của chất lỏng trong lớp biên chảy tầng. Để đơn giản, ta xét dòng chảy hai chiều của chất lỏng bao quanh một phần tử phẳng của mặt vật. Chọn mặt phẳng đó làm mặt phẳng x, z và hướng trục x theo chiều của dòng chảy. Sự phân bố vận tốc không phụ thuộc vào tọa độ z: vận tốc không có thành phần theo hướng z.

Các phương trình thủy động lực chính xác Navier - Stokes và phương trình liên tục, viết dưới dạng các thành phần, có dạng:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right). \tag{39-1}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right). \tag{39-2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39-3}$$

Vì chuyển động được giả thiết là dừng, nên ta không viết các đạo hàm theo thời gian.

Do lớp biên mỏng, nên rõ ràng là, chuyển động ở đó chủ yếu sẽ song song với mặt có dòng chảy bao quanh, nghĩa là vận tốc v_y sẽ nhỏ so với v_x (điều này đã thấy được trực tiếp từ phương trình liên tục).

Vận tốc thay đổi nhanh theo phương của trục y – độ biến thiên đáng kể của nó xảy ra trên những khoảng cách có bậc độ dầy δ của lớp biên. Nhưng theo chiều của trục x, vận tốc thay đổi chậm; độ biến thiên của nó trở nên đáng kể trên những khoảng cách có bậc của độ dài đặc trưng l của bài toán (cụ thể là các kích thước của vật). Do đó các đạo hàm của nó theo phương y đều lớn so với các đạo hàm theo x. Từ đó ta suy ra rằng, trong phương trình (39-1) có thể bỏ qua đạo hàm $\partial^2 v_x/\partial x^2$ đối với $\partial^2 v_x/\partial y^2$, và nếu so sánh phương trình (39-1) với (39-2), ta sẽ thấy rằng, đạo hàm $\partial p/\partial y$ nhỏ so với $\partial p/\partial x$ (tỷ số của nó cùng cấp độ lớn với v_y/v_x). Trong phép gần đúng đang xét, có thể đặt đơn giản:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{39-4}$$

nghĩa là có thể coi rằng gradiên ngang của áp suất bằng không ở trong lớp biên. Nói một cách khác, áp suất ở trong lớp biên bằng áp suất $p(x)$ ở

trong dòng chất lỏng cơ bản, áp suất này là một hàm đã cho của x trong việc giải bài toán về lớp biên. Trong phương trình (39-1) bây giờ ta có thể viết đạo hàm toàn phần $dp(x)/dx$ thay cho $\partial p/\partial x$; đạo hàm này có thể được biểu diễn dựa vào vận tốc $U(x)$ của dòng cơ bản. Vì chuyển động có tính chất thế ở bên ngoài lớp biên, nên ta có phương trình Bernoulli $p + \rho U^2/2 = \text{const}$, từ đó

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}.$$

Như vậy, ta thu được hệ phương trình chuyển động ở trong lớp biên chảy tầng – *phương trình Prandtl* – dưới dạng

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = U\frac{dU}{dx}, \tag{39-5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39-6}$$

Các điều kiện biên của phương trình này đòi hỏi vận tốc trên thành bằng không:

$$v_x = v_y = 0 \qquad \text{với} \qquad y = 0. \tag{39-7}$$

Khi ra xa thành, vận tốc dọc đó phải tiệm cận đến gần vận tốc của dòng cơ bản:

$$v_x = U(x) \quad \text{với} \quad y \to \infty \tag{39-8}$$

(không yêu cầu phải đặt điều kiện riêng lẻ cho v_y tại vô cùng).

Có thể chứng minh dễ dàng rằng, các phương trình (39.5-6) (rút ra cho dòng chảy quanh một thành phẳng) vẫn đúng cả trong trường hợp tổng quát hơn của dòng chảy hai chiều tùy ý quanh một vật (dòng chảy ngang quanh một hình trụ dài vô hạn có tiết diện tùy ý). Ở đây x được tính theo độ dài công tua tiết diện ngang của vật tính từ một điểm nào đó của công tua đó, và y là khoảng cách tính từ mặt của vật (theo phương pháp tuyến với mặt).

Gọi U_0 là vận tốc đặc trưng của bài toán đã cho (chẳng hạn, vận tốc tại vô hạn của dòng chất lỏng tới vật). Thay cho các tọa độ x, y và các vận tốc v_x, v_y ta đưa vào các biến không thứ nguyên x', y', v'_x, v'_y, được xác định như sau:

$$x = lx', \quad y = \frac{ly'}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \quad v_x = U_0 v_x', \quad v_y = \frac{U_0 v_y'}{\sqrt{\mathrm{R}}} \tag{39-9}$$

(một cách tương ứng, ta đặt $U = U_0 U'$), trong đó $\mathrm{R} = U_0 l/\nu$, các phương trình (39.5-6) có dạng

$$v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial v_y'}{\partial y'} - \frac{\partial^2 v_x'}{\partial y'^2} = U' \frac{dU'}{dx'}, \qquad \frac{\partial v_x'}{\partial x'} + \frac{\partial v_y'}{\partial y'} = 0, \tag{39-10}$$

Các phương trình này (và cả các điều kiện biên cho chúng) không chứa độ nhớt. Điều đó có nghĩa là, các nghiệm của chúng không phụ thuộc vào số Reynolds. Như vậy, ta đi đến kết luận quan trọng: khi số Reynolds thay đổi, mọi hình ảnh chuyển động trong lớp biên chỉ chịu một phép biến đổi đồng dạng, khi đó các khoảng cách và những vận tốc dọc vẫn không đổi, còn các vận tốc và những khoảng cách ngang thay đổi tỷ lệ nghịch với căn của R.

Tiếp theo, ta có thể khẳng định rằng, các vận tốc không thứ nguyên v_x', v_y' thu được khi giải các phương trình (39-10), với tính cách không phụ thuộc vào R, phải có bậc độ lớn bằng đơn vị. Do đó từ công thức (39-9) có thể kết luận rằng:

$$v_y \sim \frac{U_0}{\sqrt{\mathrm{R}}}, \tag{39-11}$$

nghĩa là tỷ số giữa vận tốc ngang và vận tốc dọc tỷ lệ nghịch với $\sqrt{\mathrm{R}}$. Cũng như vậy đối với *bề dầy của lớp biên* δ: trong các tọa độ không thứ nguyên x', y' bề dầy $\delta' \approx 1$, còn trong các tọa độ thực x, y:

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{\mathrm{R}}}. \tag{39-12}$$

Chúng ta áp dụng các phương trình của lớp biên cho dòng chảy song phẳng bao quanh bản phẳng nửa vô hạn (*H. Blasius*, 1908). Giả sử bản phẳng trùng với nửa mặt phẳng xz tương ứng với $x > 0$ (do đó mặt trước của bản là đường $x = 0$). Vận tốc của dòng cơ bản trong trường hợp này không đổi: $U = \text{const}$. Các phương trình (39.5-6) khi đó có dạng

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \tag{39-13}$$

Trong các nghiệm của phương trình Prandtl các đại lượng v_x/U và $v_y(l/U\nu)^{1/2}$, như đã thấy, có thể là các hàm chỉ của $x' = x/l$ và $y' = y\,(U/l\nu)^{1/2}$. Nhưng trong bài toán về bản nửa vô hạn không có các thông số đặc trưng nào của độ dài l. Do đó v_x/U có thể chỉ phụ thuộc vào một tổ hợp nào của x' và y' không chứa l; một tổ hợp như thế là

$$\frac{y'}{\sqrt{x'}} = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}.$$

Còn đối với v_y, thì ở đây hàm của $y'/\sqrt{x'}$ phải là tích $v_y'\sqrt{x'}$.

Để xét ngay mối liên hệ giữa v_x và v_y biểu diễn bởi phương trình liên tục, ta đưa vào hàm dòng Ψ theo định nghĩa (10-9):

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{39-14}$$

Các tính chất đã nêu ở trên của các hàm $v_x(x,y)$ và $v_y(x,y)$ đáp ứng hàm dòng có dạng

$$\Psi = \sqrt{x\nu U}\, f(\xi), \qquad \xi = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}. \tag{39-15}$$

Khi đó

$$v_x = U f'(\xi), \qquad v_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\,(\xi f' - f). \tag{39-16}$$

Ngay khi chưa xác định định lượng hàm $f(\xi)$, ta cũng có thể có kết luận quan trọng sau. Đặc trưng cơ bản của chuyển động trong lớp biên là sự phân bố ở trong nó vận tốc dọc v_x (vì v_y nhỏ). Vận tốc này tăng từ không ở trên mặt bản đến một phần xác định của U với giá trị xác định ξ. Do đó có thể kết luận rằng, bề dầy của lớp biên ở trên bản có dòng chảy bao quanh (được định nghĩa như giá trị y, mà tại đó v_x/U đạt giá trị xác định ~ 1) – bậc của đại lượng

$$\delta \sim \sqrt{\frac{x\nu}{U}}. \tag{39-17}$$

Như vậy, bề dầy của lớp biên tăng tỷ lệ với căn của khoảng cách tính từ mép bản.

Thay (39-16) vào phương trình thứ nhất trong các phương trình (39-13), ta thu được phương trình cho hàm $f(\xi)$:

$$ff'' + 2f''' = 0. \tag{39-18}$$

Còn các điều kiện biên (39.7-8) được viết dưới dạng

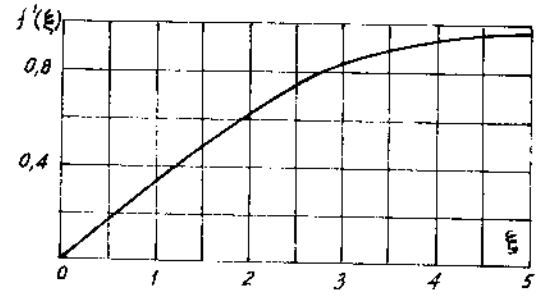
$$f(0) = f'(0) = 0, \qquad f'(\infty) = 1 \tag{39-19}$$

(sự phân bố các vận tốc rõ ràng là đối xứng đối với mặt phẳng $y = 0$; do đó chỉ cần khảo sát $y > 0$). Phương trình (39-18) phải được giải bằng các phương pháp số. Đồ thị của hàm $f(\xi)$ thu được như vậy được biểu diễn trên hình 27. Ta nhận thấy rằng $f'(\xi)$ tiến rất nhanh đến giá trị giới hạn của nó – đến đơn vị. Dạng giới hạn của bản thân hàm $f(\xi)$ với các ξ nhỏ:

$$f(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2 + O(\xi^5), \quad \alpha = 0{,}332; \tag{39-20}$$

trong khai triển này không thể có các số hạng ξ^3 và ξ^4, điều đó thấy được dễ dàng từ phương trình (39-18). Còn dạng giới hạn của hàm $f(\xi)$ với các ξ lớn:

$$f(\xi) = \xi - \beta, \quad \beta = 1{,}72 \tag{39-21}$$



Hình 27

Thêm vào đó sai số của biểu thức, như có thể chứng minh, là nhỏ về số mũ.

Lực ma sát tác dụng lên một đơn vị diện tích mặt bản bằng:

$$\sigma_{xy} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \eta\left(\frac{U^3}{x\nu}\right)^{1/2} f''(0)$$

hay

$$\sigma_{xy} = 0{,}332\sqrt{\frac{\eta\rho U^3}{x}}. \tag{39-22}$$

Nếu bản có độ dầy l (dọc theo trục x), thì lực ma sát thành phần tác dụng lên bản (tính theo một đơn vị độ dài dọc theo mép bản) bằng

$$F = 2\int_0^l \sigma_{xy}\,dx = 1{,}328\sqrt{\eta\rho l U^3} \tag{39-23}$$

(thừa số 2 xét đến sự có mặt của hai mặt bản)[1]. Có nhận xét là, lực ma sát tỷ lệ với lũy thừa một rưỡi của vận tốc dòng chảy tới. Công thức (39-23) tất nhiên chỉ được ứng dụng cho các bản dài, đối với chúng số $R = Ul/\nu$ đủ lớn. Thay cho lực, thường người ta đưa vào hệ số cản như một tỷ số không thứ nguyên.

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot 2l}. \tag{39-24}$$

Theo (39-23), đối với bản có dòng chảy tầng bao quanh, đại lượng này tỷ lệ nghịch với căn của số Reynolds:

$$C = 1{,}328\, R^{-1/2}. \tag{39-25}$$

Để làm đặc trưng xác định chính xác cho bề dầy lớp biên có thể đưa vào *bề dày chiếm chỗ* δ^* theo định nghĩa

$$U\delta^* = \int_0^\infty (U - u_x)dy. \tag{39-26}$$

Thay vào đây v_x lấy từ (39-16), ta viết được:

$$\delta^* = \sqrt{\frac{x\nu}{U}} \int_0^\infty (1 - f')\, d\xi = \sqrt{\frac{x\nu}{U}} \left[\xi - f(\xi)\right]_{\xi\to\infty}$$

Nếu xét đến biểu thức giới hạn (39-21)

$$\delta^* = \beta \sqrt{\frac{x\nu}{U}} = 1{,}72 \sqrt{\frac{x\nu}{U}}. \tag{39-27}$$

Biểu thức ở vế phải của định nghĩa (39-26) là "độ thiếu hụt" của lưu lượng chất lỏng trong lớp biên so với lưu lượng chất lỏng trong dòng chảy đều với vận tốc U. Do đó có thể nói rằng, δ^* là khoảng cách, tới đó dòng chảy bao quanh bị đẩy ra khỏi bản do sự giảm vận tốc chất lỏng trong lớp biên. Sự đẩy này là do vận tốc ngang v_y trong lớp biên không tiến đến không, mà đến một giá trị hữu hạn khi $y \to \infty$.

$$v_y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left[\xi f' - f\right]_{\xi\to\infty} = \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} = 0{,}86 \sqrt{\frac{\nu U}{x}}. \tag{39-28}$$

[1] Sự gần đúng của lớp biên không ứng dụng được ở mép trước của bản, tại đây $\delta \gtrsim x$. Tuy nhiên, tình huống này không quan trọng khi tính lực toàn phần F vì tích phân hội tụ nhanh ở giới hạn dưới.

Tất nhiên các công thức định lượng đã thu được ở trên chỉ được xét cho dòng chảy bao quanh bản. Còn các kết quả định tính (như (39.11-12)) thì đúng cho cả dòng chảy bao quanh vật có hình dạng tùy ý; khi đó l cần được hiểu là các kích thước của vật theo hướng bao quanh.

Chúng ta có một nhận xét đặc biệt về hai trường hợp sau đây của lớp biên. Nếu có một đĩa phẳng (bán kính lớn) quay quanh trục vuông góc với mặt phẳng của nó, thì để ước tính bề dầy của lớp biên, cần phải thay U bằng Ωx (Ω là vận tốc quay) trong (39-17). Khi đó ta tìm được:

$$\delta \sim \left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/2}. \qquad (39\text{-}29)$$

Ta nhận thấy rằng, bề dày của lớp biên có thể được coi là không đổi theo mặt đĩa (phù hợp với nghiệm chính xác đã thu được ở §23 của bài tập này). Đối với mômen các lực cản tác dụng lên đĩa, thì dựa vào các phương trình của lớp biên việc tính toán tất nhiên dẫn đến (23-4), vì công thức này là chính xác và do đó nó đúng cho dòng chảy tầng với mọi giá trị của R.

Cuối cùng, ta xét lớp biên chảy tầng được hình thành ở trên các thành của một ống dẫn ở gần lối vào ống dẫn của chất lỏng. Thường thì chất lỏng đi vào ống dẫn với một sự phân bố vận tốc gần như không đổi trên toàn bộ diện tích ngang, và vận tốc chỉ giảm ở trong lớp biên. Càng ra xa lối vào của ống dẫn, các lớp chất lỏng càng ở gần trục ống sẽ bắt đầu bị hãm lại. Vì lượng chất lỏng đi qua phải vẫn không đổi, nên khi đường kính phần trong của dòng chảy giảm (prôfin của vận tốc gần như không đổi) thì có xảy sự tăng tốc đồng thời. Quá trình tiếp tục cho đến khi một sự phân bố vận tốc Poiseuille được thiết lập một cách tiệm cận; như vậy sự phân bố này chỉ được thực hiện tại những khoảng cách đủ lớn tính từ lối vào của ống dẫn. Dễ dàng xác định được bậc của độ dài l của đoạn đầu dòng chảy trong ống. Nó được xác định bởi lý do là, tại khoảng cách l tính từ lối vào, độ dầy của lớp biên có bậc của bán kính ống dẫn a, do đó lớp biên như thể lấp đầy toàn bộ tiết diện của ống. Trong (39-17) nếu đặt $x \sim l$ và $\delta \sim a$, ta thu được

$$l \sim \frac{a^2 U}{\nu} \sim a\mathrm{R}. \qquad (39\text{-}30)$$

Như vậy, độ dài l của đoạn đầu vào dòng chảy tỷ lệ với số Reynolds [1].

BÀI TẬP

1. Xác định bề dày của lớp biên ở gần điểm tới hạn (xem §10) ở trên vật có dòng chất lỏng bao quanh.

Giải. Ở gần điểm dừng, vận tốc của chất lỏng (bên ngoài lớp biên) là một hàm của khoảng cách x tính từ điểm đó, do đó ta có thể viết $U = \text{const}\cdot x$. Sự ước lượng các số hạng của các phương trình (39.5-6) dẫn tới biểu thức $\delta \sim (\nu/\text{const})^{1/2}$. Như vậy ở gần điểm tới hạn, độ dầy của lớp biên vẫn hữu hạn.

2. Xác định chuyển động ở trong lớp biên khi dòng chảy hội tụ (xem §23) ở giữa hai mặt phẳng giao nhau (*Pohlhausen*, 1921).

Giải. Nếu xét lớp biên được hình thành dọc theo một cạnh của góc, tính tọa độ x dọc theo cạnh đó tính từ đỉnh góc O (xem hình 8). Đối với dòng chảy của chất lỏng lý tưởng, ta tìm được cho vận tốc công thức: $U = Q/\alpha x\rho$, biểu thức này biểu diễn đơn giản sự bảo toàn lưu lượng chất lỏng Q trong dòng (α là góc giữa các mặt phẳng cắt nhau). Như vậy, trong vế phải của phương trình (39-5) sẽ có $UdU/dx = -\ Q^2/\alpha^2x^3\rho^2$. Ta dễ dàng thấy rằng, sau đó các phương trình (39.5-6) sẽ trở nên bất biến đối với phép biến đổi $x \to ax$, $y \to ay$, $v_x \to v_x/a$, $v_y \to v_y/a$ với hằng số a tùy ý. Điều đó có nghĩa là, có thể tìm v_x và v_y dưới dạng

$$v_x = -\frac{Q}{\alpha\rho x} f(\xi), \qquad v_y = -\frac{Q}{\alpha\rho x} f_1(\xi), \qquad \xi = \frac{y}{x},$$

cũng bất biến đối với phép biến đổi nói trên. Từ phương trình liên tục (39-6), ta suy ra $f_1 = \xi f$, sau đó từ (39-5) ta thu được cho hàm $f(\xi)$ phương trình sau:

$$\frac{\rho\nu\alpha}{Q} f''' = 1 - f^2. \tag{1}$$

Các điều kiện biên (39-8) có nghĩa là phải có $f(0) = 0$, $f(\infty) = 1$. Tích phân đầu của phương trình (1) là:

$$\frac{\rho\nu\alpha}{2Q} f'^2 = f - \frac{f^3}{3} + \text{const}.$$

[1] Trong cuốn sách này không trình bày một lý thuyết phức tạp và kém cụ thể hơn về lớp biên trong chất lỏng nén được. Tính nén được phải được xét đến với các vận tốc vào cỡ vận tốc âm (hay vượt âm). Do có xuất hiện sự nung nóng mạnh chất khí và vật có dòng chảy qua, nên khi đó cần phải khảo sát phương trình chuyển động cùng với phương trình truyền nhiệt trong lớp biên. Có thể cũng cần phải xét đến sự phụ thuộc vào nhiệt độ của các hệ số nhớt và độ dẫn nhiệt của khí.

Vì f tiến đến đơn vị khi $\xi \to \infty$, nên ta nhận thấy rằng f' cũng tiến đến một giới hạn xác định, và rõ ràng là giới hạn này chỉ có thể bằng không. Sau khi xác định được const ở đây, ta tìm được

$$\frac{\rho\nu\alpha}{2Q} f'^2 = -\frac{1}{3}(f-1)^2(f+2). \tag{2}$$

Vì vế phải âm ở trong khoảng $0 \le f \le 1$, nên nhất thiết phải có $Q < 0$: lớp biên thuộc loại đang xét chỉ được tạo thành đối với dòng chảy hội tụ (với các số Reynolds lớn $R = |Q|/\rho\alpha\nu$), mà không được tạo thành đối với dòng chảy phân kỳ – phù hợp với các kết quả của §23. Lấy tích phân một lần nữa, cuối cùng ta thu được:

$$f = 3\,\mathrm{th}^2\left[\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{R}{2}\right)^{1/2}\xi\right]. \tag{3}$$

Bề dầy lớp biên $\delta \sim x/R^{1/2}$. Giá trị của đạo hàm $f'(0) = 2(R/3)^{1/2}$, như thấy được từ (2). Do đó, lực ma sát tác dụng lên một đơn vị diện tích của thành là:

$$\sigma_{xy} = \eta\,\frac{U}{x} f'(0) = \left(\frac{4U^3\eta\rho}{3x}\right)^{1/2} = \frac{2}{x^2}\left(\frac{\eta\,|Q|^3}{3\alpha^3\rho^2}\right)^{1/2}.$$

§40. CHUYỂN ĐỘNG Ở GẦN ĐƯỜNG TÁCH

Khi mô tả hiện tượng tách (§34), ta đã nói rằng, vị trí thực của đường tách ở trên mặt vật có dòng chảy bao quanh được xác định bởi những tính chất của chuyển động ở trong lớp biên. Dưới đây ta sẽ thấy rằng, theo quan điểm toán học, đường tách là một đường gồm những điểm kỳ dị của các nghiệm của những phương trình chuyển động trong lớp biên (các phương trình *Prandtl*). Bài toán đòi hỏi xác định những tính chất của các nghiệm đó ở gần một đường kỳ dị như vậy [1].

Đã biết rằng, từ đường tách xuất hiện một mặt đi sâu vào trong chất lỏng, giới hạn miền chuyển động rối. Chuyển động có tính xoáy trong toàn bộ miền chảy rối, còn khi không có hiện tượng tách thì chuyển động chỉ là xoáy trong lớp biên, tại đây độ nhớt giữ vai trò quan trọng và rot của vận tốc sẽ bằng không ở trong dòng chảy cơ bản. Do đó có thể nói rằng, hiện tượng tách làm cho rot của vận tốc từ lớp biên đi vào sâu

[1] Cách lý giải vấn đề nêu ở đây, hơi khác với cách trình bày thông thường do *L. Đ Landau* (1944) tìm ra.

trong chất lỏng. Nhưng, do định luật bảo toàn lưu số của vận tốc, một sự xuyên như thế chỉ có thể xảy ra bằng sự dịch chuyển trực tiếp của chất lỏng chảy ở gần mặt vật (trong lớp biên) vào sâu trong của dòng cơ bản. Nói một cách khác, dòng chảy ở trong lớp biên như thể bị "tách" khỏi mặt của vật và kết quả là các đường dòng rời khỏi lớp kề sát mặt và vào sâu bên trong chất lỏng (bởi vậy, hiện tượng này được gọi là hiện tượng "tách" hay là "sự tách của lớp biên").

Như đã thấy,các phương trình chuyển động ở trong lớp biên dẫn tới kết luận là, ở trong lớp biên thành phần tiếp tuyến của vận tốc (v_x) lớn so với thành phần pháp tuyến với mặt của vật (v_y). Một hệ thức như thế giữa v_x và v_y có liên hệ hữu cơ với các giả định cơ bản về tính chất của chuyển động ở trong lớp biên và nhất thiết phải được nghiệm đúng ở mọi nơi mà các phương trình Prandtl có những nghiệm mang ý nghĩa vật lý. Về mặt toán học, hệ thức đó đúng tại mọi điểm không nằm sát các điểm kỳ dị. Nhưng nếu $v_y << v_x$, thì điều kiện đó có nghĩa là chất lỏng chuyển động dọc theo mặt vật thực tế không đi xa khỏi vật, do đó ở đây không thể xảy ra "sự tách của dòng". Như vậy, ta đi tới kết luận là, sự tách dòng chỉ có thể xảy ra trên một đường mà các điểm của nó là những điểm kỳ dị đối với nghiệm của các phương trình Prandtl.

Tính chất của các điểm kỳ dị này cũng được suy trực tiếp từ những điều vừa nói. Thực vậy, khi đi tới đường tách rời, dòng chảy tách ra, chuyển từ lớp biên vào sâu trong chất lỏng. Nói một cách khác, thành phần pháp tuyến của vận tốc không còn nhỏ so với thành phần tiếp tuyến và ít nhất có cùng bậc độ lớn với nó. Ta nhận thấy rằng, (xem (39-11) tỷ số $v_y/v_x \sim R^{-1/2}$, do đó sự tăng của v_y đến $v_y \sim v_x$ có nghĩa là sự tăng lên $\sqrt{R}$ lần. Do đó, đối với các số Reynolds đủ lớn (dĩ nhiên chúng ta chỉ nói đến các số này), có thể nói rằng, v_y tăng lên vô hạn lần. Nếu trong những phương trình Prandtl ta chuyển sang những đại lượng không thứ nguyên (xem (39-10)), thì tình hình vừa mô tả về mặt hình thức có nghĩa là, vận tốc không thứ nguyên v'_y ở trong nghiệm các phương trình trở nên vô hạn ở trên đường tách.

Để đơn giản đôi chút phần nghiên cứu tiếp theo, ta khảo sát bài toán "hai chiều" về dòng chảy ngang quanh một vật dài vô hạn. Thông thường, x là tọa độ dọc theo mặt của vật theo chiều dòng chảy, còn tọa

độ y là khoảng cách tính từ mặt vật. Thay cho đường tách rời, bây giờ ta có thể nói đến "điểm tách rời", hiểu ngầm là giao điểm của đường tách với mặt phẳng x, y; trong những tọa độ đã chọn, đó là điểm $x = \text{const} \equiv x_0$, $y = 0$. Giả sử miền ở trước điểm tách tương ứng với $x < x_0$.

Theo các kết quả đã tìm được với $x = x_0$, ta có đối với mọi y [1]

$$v_y(x_0, y) = \infty \tag{40-1}$$

Nhưng, trong các phương trình Prandtl, vận tốc v_y là một đại lượng bổ trợ mà chúng ta không quan tâm khi nghiên cứu chuyển động ở trong lớp biên (vì đại lượng đó nhỏ). Do đó, cần phải phải tìm hiểu xem ở gần đường tách hàm v_x có những tính chất gì.

Từ (40-1), ta thấy rõ rằng, với $x = x_0$ cả đạo hàm $\partial v_y / \partial y$ cũng trở nên vô hạn. Từ phương trình liên tục

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{40-2}$$

khi đó suy ra rằng, cả đạo hàm $\partial v_x / \partial x$ cũng bằng vô hạn khi $x = x_0$, hay

$$\left.\frac{\partial x}{\partial v_x}\right|_{v_x = v_0} = 0, \tag{40-3}$$

trong đó x được coi là hàm của v_x và y, còn $v_0(y) = v_x(x_0, y)$. Ở gần điểm tách các hiệu $v_x - v_0$ và $x_0 - x$ đều nhỏ, và có thể khai triển $x_0 - x$ thành chuỗi theo các lũy thừa của $v_x - v_0$ (với y đã cho). Do điều kiện (40-3) số hạng bậc nhất trong khai triển này đồng nhất biến mất và với độ chính xác đến số hạng bậc hai, ta có:

$$x_0 - x = f(y)\,(v_x - v_0)^2$$

hay

$$v_x = v_0(y) + \alpha(y)\sqrt{x_0 - x}\,, \tag{40-4}$$

trong đó $\alpha = f^{-1/2}$ là một hàm nào đó chỉ của y. Bây giờ nếu viết

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\alpha(y)}{2\sqrt{x_0 - x}}$$

Và lấy tích phân, ta sẽ thu được cho v_y:

[1] Chỉ trừ điểm $y = 0$, tại đây bao giờ cũng phải có $v_y = 0$ theo các điều kiện biên ở trên mặt vật.

$$v_y = \frac{\beta(y)}{2\sqrt{x_o - x}}, \tag{40-5}$$

trong đó $\beta(y)$ lại là một hàm của y.

Tiếp theo, ta dùng phương trình (39-5):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}. \tag{40-6}$$

Đạo hàm $\partial^2 v_x / \partial y^2$ không trở nên vô hạn tại $x = x_o$, như đã thấy được từ (40-2). Cũng như vậy đối với cả đại lượng dp/dx, được xác định bởi chuyển động ở bên ngoài lớp biên. Cả hai số hạng của vế thứ nhất của (40-6), mỗi số hạng xét riêng lẻ, đều trở nên vô hạn. Do đó, trong phép gần đúng bậc nhất, ta có thể viết cho miền gần điểm tách

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Nếu xét đến phương trình liên tục (40-2), ta viết lại được phương trình này dưới dạng

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_x^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{v_y}{v_x} = 0.$$

Vì khi $x = x_o$ vận tốc v_x nói chung khác không, nên từ đó suy ra tỷ số v_y/v_x không phụ thuộc vào y. Mặt khác, từ (40-4) và (40-5), với độ chính xác đến các số hạng bậc cao, ta thu được

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\beta(y)}{v_o(y)\sqrt{x_o - x}}.$$

Để cho biểu thức này chỉ là hàm của x, cần phải có $\beta(y) = \frac{1}{2} A v_o(y)$, trong đó A là một hằng số. Như vậy,

$$v_y = \frac{A v_o(y)}{2\sqrt{x_o - x}}. \tag{40-7}$$

Cuối cùng, nếu chú ý rằng các hàm α và β ở trong (40-4) và (40-5) có liên hệ với nhau bằng phương trình $\alpha = 2\beta'$, ta sẽ thu được $\alpha = A dv_o/dy$, do đó

$$v_x = v_o(y) + A\frac{dv_o}{dy}\sqrt{x_o - x}. \qquad (40\text{-}8)$$

Các công thức (40.7-8) xác định tính chất phụ thuộc của các hàm v_x và v_y vào x ở gần điểm tách. Ta nhận thấy rằng, cả hai hàm đều có thể được khai triển ở trong miền này theo các lũy thừa của căn $(x_o - x)^{1/2}$ và khai triển của v_y bắt đầu từ số hạng có lũy thừa (–1), do đó v_y sẽ tiến đến vô hạn khi $x \to x_o$ như $(x_o - x)^{-1/2}$. Với $x > x_o$, nghĩa là ở sau điểm tách, các khai triển (40.7-8) không có ý nghĩa vật lý, vì các nghiệm đều là ảo; điều đó chứng tỏ rằng, các nghiệm của những phương trình Prandtl, là những phương trình mô tả chuyển động ở trước điểm tách, không thể có ý nghĩa vật lý nếu ở sau điểm tách đó.

Do các điều kiện biên, ở trên chính mặt của vật, bao giờ cũng phải có $v_x = v_y = 0$ với $y = 0$. Do đó, từ (40-7) và (40-8) ta suy ra được

$$v_o(0) = 0, \qquad \left.\frac{dv_o}{dy}\right|_{y=0} = 0. \qquad (40\text{-}9)$$

Như vậy, ta đi tới kết luận quan trọng là, tại chính điểm tách ($x = x_o$, $y = 0$), không những vận tốc v_x, mà cả đạo hàm của bậc nhất của nó theo y đều bằng không (kết quả này do Prandtl tìm được).

Cần nhấn mạnh rằng, đẳng thức $\partial v_x / \partial y = 0$ ở trên đường tách chỉ đúng chừng nào v_y trở nên vô hạn với cùng x đó. Nếu như hằng số A ở trong (40-7) ngẫu nhiên bằng không (và do đó không có cả $v_y(x_o, y) = \infty$), thì điểm $x = x_o$, $y = 0$, tại đó đạo hàm $\partial v_x / \partial y$ bằng không, sẽ không có gì đáng chú ý và trong mọi trường hợp đều không phải là điểm tách. Tuy nhiên, A có thể bằng không chỉ do hoàn toàn ngẫu nhiên, và do đó, sẽ là không chắc chắn. Như vậy, thực tế một điểm ở trên mặt vật, tại đó $\partial v_x / \partial y = 0$, bao giờ cũng đồng thời là một điểm tách.

Nếu không có sự tách dòng tại điểm $x = x_o$ (nghĩa là nếu $A = 0$), thì với $x > x_o$ ta sẽ có $\partial v_x / \partial y|_{y=0} < 0$, nghĩa là v_x sẽ trở nên âm và tăng về giá trị tuyệt đối khi đi xa khỏi mặt thành (với các y đủ nhỏ). Nói một cách khác, ở sau điểm $x = x_o$ chất lỏng chuyển động trong những lớp bên dưới lớp biên theo chiều ngược với dòng cơ bản; có xuất hiện một sự "chảy rò" về điểm đó. Cần nhấn mạnh rằng, từ những lập luận như thế, tuyệt

nhiên không thể kết luận rằng, nhất thiết phải có điểm tách tại điểm $\partial v_x/\partial y = 0$; toàn bộ hình ảnh chảy với "sự chảy rò" đều có thể (như xảy ra nếu $A = 0$) hoàn toàn nằm trong miền của lớp biên, không đổ vào miền dòng cơ bản, trong khi đó sự tách dòng được đặc trưng bởi chính lưu lượng dòng chảy đổ vào thể tích cơ bản của chất lỏng.

Trong tiết trước, ta đã chứng minh được rằng, hình ảnh của chuyển động trong lớp biên vẫn đồng dạng với chính nó khi số Reynolds thay đổi, và đặc biệt là các cỡ theo tọa độ x vẫn không đổi. Từ đó suy ra rằng, giá trị x_0 của tọa độ x, tại đó đạo hàm $\partial v_x/\partial y|_{y=0}$ bằng không, không thay đổi khi R thay đổi. Như vậy ta đi tới một kết luận quan trọng là, vị trí của điểm tách ở trên mặt của vật, bao bởi dòng chảy, không phụ thuộc vào số Reynolds (dĩ nhiên, chừng nào lớp biên vẫn còn là chảy tầng; xem vấn đề này ở §45).

Còn bây giờ cần phải làm sáng tỏ những tính chất của sự phân bố áp suất $p(x)$ ở gần điểm tách. Với $y = 0$, vế thứ nhất của (40-6) triệt tiêu cùng với v_x và v_y, còn lại

$$\nu \left.\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}. \tag{40-10}$$

Từ đó ta thấy rằng, dấu của dp/dx trùng với dấu của $\partial^2 v_x/\partial y^2|_{y=0}$. Chừng nào $\partial v_x/\partial y|_{y=0} > 0$ thì người ta không thể nói gì về dấu của đạo hàm cấp hai. Nhưng vì v_x dương và tăng khi đi xa khỏi thành (ở trong miền trước điểm tách), nên bao giờ cũng có $\partial^2 v_x/\partial y^2|_{y=0} > 0$ tại chính điểm $x = x_0$; tại đây $\partial v_x/\partial y = 0$. Từ đó ta kết luận rằng

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{x=x_0} > 0, \tag{40-11}$$

nghĩa là ở gần điểm tách, chất lỏng chuyển động từ áp suất thấp hơn đến áp suất cao hơn. Gradiên áp suất liên hệ với gradiên vận tốc $U(x)$ ở bên ngoài lớp biên bởi hệ thức

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx}.$$

Vì chiều dương của trục x trùng với chiều của dòng cơ bản, nên $U > 0$ và ta kết luận rằng

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_0} < 0, \qquad (40\text{-}12)$$

nghĩa là ở gần điểm tách, vận tốc U giảm theo chiều dòng chảy.

Các kết quả đã thu được cho phép ta kết luận rằng, trong dòng chảy quanh vật, phải có hiện tượng tách xảy ra tại một nơi nào đó ở trên mặt vật. Thực vậy, ở phía sau cũng như ở phía trước của vật có một điểm mà tại đó vận tốc dòng chảy thế của chất lỏng lý tưởng bao quanh vật phải bằng không (điểm tới hạn). Do đó, bắt đầu từ một giá trị x nào đó vận tốc $U(x)$ phải bắt đầu giảm và cuối cùng bằng không. Mặt khác, rõ ràng là, chất lỏng chảy ở trên mặt vật càng bị hãm mạnh, nếu lớp chất lỏng này càng ở gần thành (nghĩa là y càng nhỏ). Do đó, trước khi vận tốc $U(x)$ bằng không ở trên mặt biên giới ngoài của lớp biên, vận tốc phải bằng không ở ngay sát thành. Về mặt toán học, điều đó rõ ràng có nghĩa là, đạo hàm $\partial v_x/\partial y$ trong mọi trường hợp đều phải bằng không (do đó không thể không xuất hiện sự tách dòng) với một x nào đó nhỏ hơn giá trị x mà tại đó $U(x) = 0$.

Trong trường hợp dòng chảy quanh vật có dạng tùy ý, tất cả các phép tính đều có thể được tiến hành theo cách hoàn toàn tương tự và dẫn đến kết quả là, ở trên đường tách, các đạo hàm $\partial v_x/\partial y$ và $\partial v_z/\partial y$ của hai thành phần vận tốc v_x và v_z tiếp tuyến với mặt của vật phải bằng không (trục y, cũng như trước, hướng theo pháp tuyến với phần tử đang xét của mặt vật).

Ta dẫn ra một lập luận đơn giản chứng tỏ sự cần thiết phải xuất hiện sự tách dòng ở trong dòng chất lỏng chảy quanh vật, thì áp suất sẽ tăng đủ nhanh (và do đó vận tốc sẽ giảm đủ nhanh) theo chiều dòng chảy. Giả sử rằng, trên một khoảng cách nhỏ $\Delta x = x_2 - x_1$ áp suất p tăng đủ nhanh từ giá trị p_1 đến giá trị p_2 ($p_2 >> p_1$). Trên cùng khoảng cách Δx này vận tốc U của chất lỏng ở bên ngoài lớp biên giảm từ giá trị ban đầu U_1 đến giá trị U_2 nhỏ hơn rất nhiều, xác định bởi phương trình Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\left(U_1^2 - U_2^2\right) = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1).$$

Vì p không phụ thuộc vào y, nên độ tăng áp suất $p_2 - p_1$ sẽ như nhau tại mọi khoảng cách tính từ thành. Nếu gradiên áp suất $dp/dx \sim (p_2 - p_1)/\Delta x$

đủ lớn, ta có thể bỏ qua số hạng $\nu(\partial^2 v_x/\partial y^2)$ chứa độ nhớt (dĩ nhiên, miễn là y không quá nhỏ) ở trong phương trình chuyển động (40-6). Để ước lượng độ biến thiên của vận tốc v trong lớp biên, khi đó ta cũng có thể dùng phương trình Bernoulli và viết

$$\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = -\frac{1}{\rho}(p_2 - p_1)$$

hay, so sánh với đẳng thức thu được ở trên, ta có

$$v_2^2 = v_1^2 - \left(U_1^2 - U_2^2\right).$$

Nhưng vận tốc v_1 ở trong lớp biên nhỏ hơn vận tốc của dòng cơ bản; có thể chọn y để cho $v_1^2 < U_1^2 - U_2^2$. Như vậy vận tốc v_2 khi đó là ảo, điều đó chứng tỏ rằng, các phương trình của Prandtl không có những nghiệm có ý nghĩa vật lý. Thực tế trong khoảng Δx phải xuất hiện sự tách dòng, kết quả là, gradiên quá lớn của áp suất sẽ giảm.

Sự chảy quanh một góc lập bởi hai mặt rắn cắt nhau là một trường hợp đáng chú ý về sự tách dòng. Trong dòng chảy tầng có thế quanh một góc lồi (hình 3), vận tốc của chất lỏng phải bằng vô hạn tại bờ của góc (xem bài tập 6, §10), nó tăng dọc theo dòng chảy hướng về bờ góc và giảm trong dòng chảy đi xa khỏi bờ góc. Thực tế, sự giảm nhanh của vận tốc (và tương ứng, sự tăng của áp suất) ở bên ngoài bờ góc dẫn đến việc xuất hiện sự tách dòng, đường tách là đường bờ của góc. Kết quả là có xuất hiện hình ảnh chuyển động, đã được khảo sát ở §35.

Đối với dòng chảy tầng trong một góc lõm (hình 4), vận tốc của chất lỏng bằng không trên bờ của góc. Sự giảm của vận tốc (và sự tăng của áp suất) xảy ra ở đây trong dòng chảy hướng về bờ góc. Nói chung, nó dẫn tới sự tách dòng, và đường tách nằm ngược dòng tính từ bờ của góc.

BÀI TẬP

Xác định bậc tăng nhỏ nhất của áp suất Δp có thể xảy ra (trong dòng cơ bản) trên khoảng cách Δx để gây ra sự tách dòng.

Giải. Giả sử y là một khoảng cách như thế tính từ vật, tại đó, một mặt ta có thể áp dụng được phương trình Bernoulli, và mặt khác, bình phương $v^2(y)$ của vận

tốc v ở trong lớp biên nhỏ hơn độ biến thiên $|\Delta U^2|$ của bình phương vận tốc U ở bên ngoài lớp này. Về bậc độ lớn ta có thể viết

$$v(y) \approx \frac{dv}{dy} y \approx \frac{U}{\delta} y$$

($\delta \sim (\nu l/U)^{1/2}$ là bề dầy của lớp biên, l là kích thước của vật). Cân bằng các bậc độ lớn của cả hai số hạng trong vế phải của phương trình (40-6), ta thu được:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{\Delta x} \sim \nu \frac{v(y)}{y^2} \sim \frac{\nu U}{\delta y}.$$

Từ điều kiện

$$v^2 = \left|\Delta U^2\right| = \frac{2\Delta p}{\rho}$$

ta rút ra $U^2y^2/\delta^2 \sim \Delta p/\rho$. Khử y khỏi hai hệ thức trên, cuối cùng ta thu được:

$$\Delta p \sim \rho U^2 \left(\frac{\Delta x}{l}\right)^{2/3}.$$

§41. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CHUYỂN ĐỘNG TRONG LỚP BIÊN CHẢY TẦNG

Dòng chảy tầng ở trong lớp biên cũng như mọi dòng chảy tầng khác trở nên không ổn định ở một mức độ nào đó với các số Reynolds đủ lớn. Tính chất của sự mất ổn định trong lớp biên tương tự như sự mất ổn định đối với dòng chảy trong một ống (§28).

Số Reynolds cho dòng chảy ở trong lớp biên thay đổi dọc theo mặt của vật. Chẳng hạn, đối với dòng chảy quanh một bản, ta có thể định nghĩa số Reynolds như $R_x = Ux/\nu$, trong đó x là khoảng cách tính từ bờ trước của bản, U là vận tốc của chất lỏng ở bên ngoài lớp biên. Tuy nhiên, đặc trưng hơn cho lớp biên là định nghĩa sao cho độ dài nào đó đặc trưng trực tiếp cho bề dầy của lớp giữ vai trò các kích thước; để làm một đại lượng như thế, có thể lấy "bề dầy chiếm chỗ " đã được định nghĩa theo (39-26):

$$R_\delta = \frac{U\delta^*}{\nu} 1{,}72\sqrt{R_x} \qquad (41\text{-}1)$$

(Hệ số bằng số được xét cho lớp biên trên mặt phẳng).

Vì sự biến thiên tương đối chậm của độ dầy lớp theo khoảng cách và vận tốc ngang của chất lỏng trong lớp nhỏ, do đó khi nghiên cứu sự ổn định của dòng chảy ở trong một phần nhỏ của lớp biên ta có thể xét một dòng chảy song phẳng với prôfin không đổi dọc theo trục x [1]. Khi đó, theo quan điểm toán học, bài toán sẽ tương tự với bài toán về sự ổn định của dòng chảy ở giữa hai mặt phẳng song song (đã xét ở §29). Chỉ có một sự khác nhau ở dạng prôfin của các vận tốc: thay cho prôfin đối xứng với $v = 0$ ở trên cả hai biên giới, ở đây có một prôfin không đối xứng, trong đó vận tốc thay đổi từ giá trị không ở trên mặt của vật đến một giá trị đã cho nào đó của U, đó là vận tốc dòng chảy ở bên ngoài lớp biên. Một sự nghiên cứu như thế dẫn đến các kết quả sau đây (*W. Tollmien*, 1929; *H. Schlichting*, 1933; *C. C. Lin*, 1945).

Dạng đường cong trung hòa trên giản đồ ω, R (xem §28) phụ thuộc vào dạng của prôfin vận tốc ở trong lớp biên. Nếu prôfin vận tốc không có điểm uốn (vận tốc v_x tăng đơn điệu và đường cong $v_x = v_x(y)$ lồi tại mọi nơi; hình 28 a), thì biên giới ổn định sẽ có dạng hoàn toàn tương tự như dạng đặc trưng cho sự ổn định của dòng chảy trong ống dẫn: có tồn tại một giá trị cực tiểu $R = R_c$, tại đó có xuất hiện những nhiễu động được tăng cường, và đối với $R \to \infty$ cả hai nhánh của đường cong đều tiến đến tiệm cận với trục hoành (hình 29 a). Đối với prôfin các vận tốc ở trong lớp biên trên mặt một bản phẳng, phép tính cho ta giá trị tới hạn của số Reynolds [2] $R_{\delta c} \approx 420$.

[1] Tất nhiên, với một sự khảo sát như vậy, ta đã để sang một bên vấn đề ảnh hưởng của độ cong của mặt vật có dòng chảy bao quanh lên sự ổn định của lớp biên. Những sự bỏ qua như vậy cũng đem lại một sự không nhất quán nào đấy. Vấn đề là ở chỗ, các dòng chảy song phẳng duy nhất (với prôfin vận tốc chỉ phụ thuộc vào một tọa độ), thỏa mãn phương trình Navier - Stokes, là các dòng chảy với các prôfin tuyến tính (17-1) và parabolic (17-4) (trong khi mà phương trình Euler được thỏa mãn bởi dòng chảy song phẳng với prôfin tùy ý). Do đó, dòng chảy cơ bản được khảo sát trong lý thuyết ổn định của lớp biên, nói một cách chặt chẽ, không phải là nghiệm của các phương trình chuyển động.

[2] Khi $R_\delta \to \infty$, trên các nhánh I và II của đường cong trung hòa ω bằng không lần lượt như $R_\delta^{-1/2}$ và $R_\delta^{-1/5}$. Điểm $R = R_c$ đáp ứng tần số $\omega_c = 0{,}15.U/\delta^*$ và số sóng $k_c = 0{,}36/\delta^*$.

Không thể xảy ra prôfin các vận tốc thuộc loại đã trình bày ở hình 28a, nếu vận tốc chất lỏng ở bên ngoài lớp biên giảm xuôi dòng; trong trường hợp này prôfin các vận tốc nhất thiết phải có một điểm uốn. Thực vậy, ta xét một phần nhỏ của mặt thành, có thể coi là phẳng, và giả sử x là tọa độ dọc theo chiều dòng chảy và y là khoảng cách tính từ thành. Từ hệ thức (40-10)

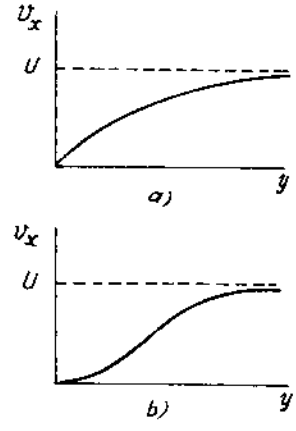
$$\nu \left.\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -U\frac{dU}{dx},$$

chứng tỏ rằng, nếu U giảm xuôi dòng ($\partial U/\partial x < 0$), thì ở gần mặt ta có

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} > 0,$$

nghĩa là đường cong $v_x = v_x(y)$ là đường cong lõm. Khi y tăng thì vận tốc v_x phải tiến tiệm cận đến giá trị hữu hạn U. Ngay từ những lý do hình học cũng suy ra được rằng, muốn thế đường cong phải là lồi, và do đó phải có một điểm uốn (hình 28 b) tại nơi nào đó.

Khi có mặt của điểm uốn ở trong prôfin vận tốc, dạng của đường cong biên giới ổn định thay đổi đôi chút. Cụ thể là, khi $R \to \infty$ cả hai nhánh của đường cong có các đường tiệm cận khác nhau: một nhánh tiến tiệm cận với trục hoành như trước, còn trên nhánh kia ω tiến đến một giá trị giới hạn hữu hạn khác không (hình 29 b). Ngoài ra, sự có mặt của điểm uốn hạ thấp mạnh giá trị của R_c.

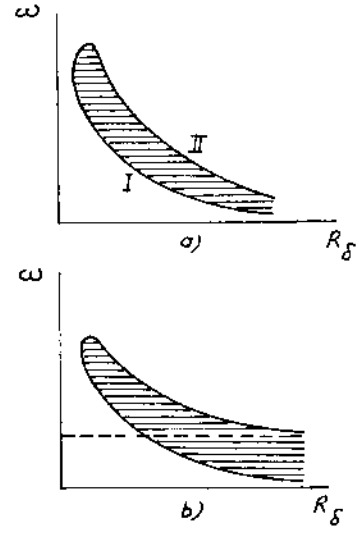


Hình 28

Số Reynolds tăng dọc theo lớp biên, điều này đem lại một đặc tính độc đáo cho động thái của các nhiễu động khi bị trôi giạt xuôi dòng. Ta khảo sát sự chảy quanh một bản phẳng và giả sử rằng tại một nơi nào đó của lớp biên có xuất hiện một nhiễu động với tần số ω đã cho. Sự lan truyền xuôi dòng của nó tương ứng với sự dịch chuyển sang bên phải theo đường thẳng nằm ngang $\omega = \text{const}$ ở trên

giản đồ của hình 29 a. Nhiễu động lúc đầu bị tắt, sau đó khi đạt tới nhánh *I* của biên giới ổn định, nó bắt đầu được tăng cường. Sự tăng cường kéo dài cho tới khi đạt tới nhánh *II*, sau đó nhiễu động lại tắt. Hệ số tăng cường toàn phần của nhiễu động trong thời gian đi qua miền không ổn định tăng lên rất nhanh, trong khi miền này dịch chuyển về phía các R lớn (nghĩa là khi đoạn nằm ngang tương ứng giữa các nhánh *I* và *II* của biên giới ổn định nằm thấp hơn ở trên hình 29 a).

Vấn đề về đặc tính không ổn định của lớp biên đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ (tuyệt đối hay đối lưu) vẫn chưa có lời giải đầy đủ. Đối với prôfin vận tốc không có điểm uốn sự không ổn định là đối lưu ở trong miền các giá trị R, tại đó cả hai nhánh của đường cong trung hòa (hình 29 a) đều gần trục hoành (phần chứng minh ở đây cũng giống như phần chứng minh cho dòng chảy Poiseuille phẳng – xem bị chú trang 175. Đối với các giá trị R nhỏ, và cả đối với các prôfin vận tốc có điểm uốn, vấn đề vẫn còn chưa được giải quyết.



Hình 29

Do có sự biến thiên của số Reynolds dọc theo lớp biên, nên toàn bộ lớp không chảy rối ngay tức khắc, mà chỉ một phần của lớp có R_δ không vượt quá một giá trị xác định là có tính chảy rối. Với vận tốc chảy quanh đã cho, điều đó có nghĩa là, sự chảy rối hóa xuất hiện tại một khoảng cách xác định tính từ mép trước của lớp; khi vận tốc tăng sự chảy rối hóa tiến gần đến mép trước của lớp. Các số liệu thực nghiệm chứng tỏ rằng, nơi xuất hiện sự chảy rối trong lớp biên cũng phụ thuộc mạnh vào cường độ nhiễu động trong dòng tới. Mức độ nhiễu động càng giảm thì sự xuất hiện tính chảy rối càng được đẩy tới về các giá trị R_δ cao hơn.

Sự khác nhau giữa các đường cong trung hòa trên hình 29 a và 29 b có tính chất nguyên tắc. Sự kiện tại nhánh trên tần số tiến đến giới hạn khác không khi $R_\delta \to \infty$ có nghĩa là, chuyển động vẫn không ổn định với

độ nhớt nhỏ tùy ý, vậy mà trong trường hợp đường cong loại hình 23 a khi $\nu \to 0$ các nhiễu động với tần số hữu hạn bất kỳ lại tắt dần. Sự khác nhau đó chính là do sự có mặt hay không có mặt của điểm uốn trong prôfin vận tốc $v_x = v(y)$. Theo quan điểm toán học, có thể theo dõi nguyên nhân đó bằng cách khảo sát bài toán về tính ổn định trong khuôn khổ thủy động lực học chất lỏng lý tưởng (*Rayleigh*, 1880).

Trong phương trình chuyển động phẳng của chất lỏng lý tưởng (10-10), ta thay vào hàm dòng dưới dạng

$$\Psi = \Psi_o(y) + \Psi_1(x,y,t),$$

trong đó Ψ_0 là hàm dòng của dòng chảy không nhiễu động (do đó $\Psi'_0 = v(y)$), còn Ψ_1 là nhiễu động nhỏ. Nhiễu động này được tìm dưới dạng

$$\Psi_1 = \varphi(y)\, e^{i(kx-\omega t)}.$$

Việc thay vào (10-10) dẫn đến phương trình tuyến tính hóa sau cho hàm Ψ_1 [1)]

$$\left(v - \frac{\omega}{k}\right)(\varphi'' - k^2\varphi) - v''\varphi = 0. \qquad (41\text{-}2)$$

Nếu biên giới chuyển động (theo trục y) là một thành rắn, thì trên đó $\varphi = 0$ (như hệ quả của điều kiện $v_y = 0$); nhưng nếu bề rộng của dòng không bị giới hạn (ở trong một hay cả hai phía), thì một điều kiện như thế phải được đặt tại vô cực, tại đó dòng là đều. Ta sẽ coi k là một đại lượng thực đã cho; nhưng khi đó tần số được xác định theo các trị riêng của bài toán biên cho phương trình (41-2).

Ta chia phương trình (42-1) cho $(v - \omega/k)$ rồi nhân với φ^* và lấy tích phân theo y của hai biên giới chuyển động y_1 và y_2. Lấy tích phân $\varphi^*\varphi''$ bằng phương pháp phân đoạn, ta được

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2\right)dy + \int_{y_1}^{y_2}\frac{v''|\varphi|^2}{v - \omega/k}\,dy = 0. \qquad (41\text{-}3)$$

Số hạng thứ nhất trong mọi trường hợp đều là thực. Giả thiết tần số là phức và tách riêng phần ảo của đẳng thức, ta được

[1)] Hàm bất kỳ $\Psi_0(y)$ thỏa mãn phương trình (10-10) một cách đồng nhất; so sánh với điều đã nói ở bị chú trang 277.

$$\mathrm{Im}\,\omega \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{v''|\varphi|^2}{|v-\omega/k|^2}\,dy = 0. \qquad (41\text{-}4)$$

Để cho $\mathrm{Im}\omega \neq 0$, tích phân phải bằng không, muốn vậy, trong mọi trường hợp đòi hỏi v'' phải đi qua giá trị không tại một nơi nào đó trong miền lấy tích phân. Như vậy, tính không ổn định chỉ có thể xuất hiện (với $\nu = 0$) đối với các prôfin vận tốc có điểm uốn [1].

Theo quan điểm vật lý, nguồn gốc của tính không ổn định này có liên quan đến tương tác "cộng hưởng" giữa các dao động của môi trường và dòng chảy của các hạt của nó trong dòng chảy cơ bản, và theo nghĩa này nó tương đương với nguồn gốc của sự tắt dần đã biết từ thuyết động học (hay của sự tăng cường trong trường hợp không ổn định) của các dao động Landau trong plasma không va chạm (xem X, §30 [2]).

Theo phương trình (41-2), các dao động riêng của dòng chảy (nếu chúng tồn tại) có liên quan đến phần của phương trình trong đó $v''(y) \neq 0$ [3]. Để tiện lợi nên theo dõi cơ chế tăng cường các dao động trong thí dụ của prôfin vận tốc, trong đó "nguồn" các dao động định xứ trong một lớp dòng chảy: ta khảo sát prôfin $v(y)$ có độ cong nhỏ khắp nơi, chỉ trừ tại lân cận một điểm $y = y_0$ nào đó; thay điểm này đơn giản bằng điểm gãy của prôfin, ta sẽ có ở trong $v''(y)$ số hạng có dạng $A\delta(y - y_0)$; chính nó sẽ có phần đóng góp cơ bản vào trong tích phân trong phương trình (41-3). Ta sẽ mô tả dòng chảy trong hệ tọa độ, trong đó "nguồn" đứng yên, nghĩa là $v(y_0) = 0$ (như được biểu diễn trên hình 30). Tách riêng phần thực trong phương trình (41-3), ta thu được

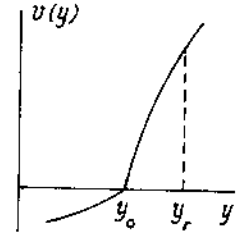
[1] Cần chú ý rằng, việc đặt vấn đề về tính ổn định với đẳng thức chính xác $\nu = 0$ về mặt vật lý không hoàn toàn đúng. Nó không xét đến sự kiện là, chất lỏng thực phải có độ nhớt dù là rất nhỏ, nhưng khác không. Điều này dẫn tới một loạt khó khăn về mặt toán học: sự biến mất một số nghiệm (do hạ bậc của phương trình vi phân đối với hàm φ) và sự xuất hiện những nghiệm mới, là những nghiệm không có mặt với $\nu \neq 0$. Tình huống sau này có liên quan đến tính kỳ dị của phương trình (41-2) (không có mặt với $\nu \neq 0$): tại điểm mà $v(y) = \omega/k$ thì hệ số của đạo hàm cao nhất trong phương trình bằng không.

[2] Sự tương tự này đã được chỉ ra bởi *A. V. Timofiev* (1979); *A. A. Andronov* và *A. L. Fabricant* (1979). Dưới đây chúng tôi theo nội dung của *A. V. Timofiev*.

[3] Với $v''(y) \equiv 0$ phương trình (41-2) hoàn toàn không có các nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên cần thiết.

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2\right)dy - \frac{A|\varphi(y_0)|^2\,\mathrm{Re}\;\omega/k}{|\omega/k|^2} = 0.$$

Giả sử $A > 0$ (như ở trên hình 30); vì số hạng thứ nhất trong đẳng thức này rõ ràng là dương, nên khi đó phải có $\mathrm{Re}\omega/k > 0$ – vận tốc pha của sóng hướng sang bên phải. Khi đó điểm cộng hưởng y_r, tại đó vận tốc pha của sóng trùng với vận tốc cục bộ của sóng, $v(y_r) = \mathrm{Re}\omega/k$, nằm ở bên phải của điểm y_0. Các hạt lỏng chuyển động tại lân cận điểm cộng hưởng và vượt sóng, trao năng lượng cho sóng; còn các hạt chậm so với sóng, lấy năng lượng của sóng; sóng sẽ được tăng cường (không ổn định), nếu các hạt thứ nhất lớn hơn các hạt thứ hai [1]. Nhưng do tính không nén được đã giả thiết của chất lỏng, số các hạt ứng với phần tử dy của bề rộng dòng chảy tỷ lệ đơn giản với dy; như thế số các hạt có các vận tốc trong khoảng dv tỷ lệ với $dy = (dy/dv)dv = dv/v'(y)$, nghĩa là $1/v'(y)$ giữ vai trò của hàm phân bố theo các vận tốc. Do đó, để làm xuất hiện tính không ổn định, khi điểm y_r cắt từ trái sang phải hàm $1/v'(y)$ phải tăng, nghĩa là $v'(y)$ phải giảm. Nói một cách khác, phải có $v''(y_r) < 0$, nhưng vì tại điểm y_0 đạo hàm v'' dương, nên tại một nơi nào đó giữa các điểm y_0 và y_r phải có điểm uốn của prôfin.



Hình 30

Một cách tương tự, ta khảo sát (và đi tới cùng một kết quả) trường hợp khi $A < 0$; khi đó vận tốc pha của sóng và vận tốc của các hạt chất lỏng cộng hưởng hướng sang bên trái.

§42. PRÔFIN VẬN TỐC LÔGA

Ta khảo sát dòng chất lỏng rối song - phẳng dọc theo một mặt phẳng vô hạn (khi nói đến một dòng chảy rối song phẳng, tất nhiên, ta phải

[1] Đối với các hạt cộng hưởng chuyển động trong sóng là dừng; do đó sự trao đổi năng lượng giữa chúng và sóng không bằng không khi lấy trung bình theo thời gian (như xảy ra đối với các hạt khác, mà đối với các hạt này chuyển động dao động trong sóng). Cũng nhận thấy rằng, hướng trao đổi năng lượng đã nêu tương ứng với xu hướng giảm gradiên vận tốc của dòng chảy, và theo nghĩa này tương ứng với việc xét đến độ nhớt nhỏ tùy ý.

hiểu ngầm là chuyển động lấy trung bình theo thời gian ở trong dòng chảy đó) [1]. Chọn chiều x là chiều của dòng chảy, mặt phẳng x, z là mặt phẳng của thành, do đó y sẽ là khoảng cách tính từ thành. Các thành phần của vận tốc trung bình theo các trục y và x đều bằng không: $u_x = u$, $u_y = u_z = 0$. Không có độ chênh áp suất; tất cả các đại lượng đều phụ thuộc vào y.

Ta ký hiệu σ là lực ma sát tác động lên một đơn vị diện tích của thành (rõ ràng lực này hướng theo trục x). Đại lượng σ chính là xung lượng do chất lỏng truyền cho thành rắn; nó đồng thời là dòng của xung lượng không đổi (chính xác hơn, là dòng thành phần xung lượng theo trục x), dòng này hướng theo chiều âm của trục y, và xác định lượng xung lượng do các lớp chất lỏng ở xa thành truyền liên tục cho các lớp ở gần thành hơn.

Sự có mặt của dòng xung lượng này rõ ràng có liên quan đến sự có mặt của gradiên vận tốc trung bình u dọc theo trục y. Nếu chất lỏng chuyển động với vận tốc như nhau tại mọi nơi, thì sẽ không có một dòng xung lượng nào ở trong chất lỏng đó. Có thể đặt vấn đề ngược lại: cụ thể là, cho σ một giá trị nào đó và xem chuyển động trong chất lỏng có mật độ ρ dẫn đến một dòng xung lượng σ phải như thế nào. Nên nhớ rằng, để thu được những định luật tiệm cận xét cho các số Reynolds rất lớn, ta lại xuất phát từ những giả định rằng, trong các định luật này không thể có mặt độ nhớt ν dưới dạng hiện (tuy nhiên độ nhớt trở nên quan trọng tại những khoảng cách y rất nhỏ – xem dưới đây).

Như vậy giá trị của gradiên vận tốc du/dy tại mỗi khoảng cách tính từ thành phải được xác định bởi những thông số không đổi ρ, σ và dĩ nhiên, bởi chính khoảng cách y. Tổ hợp duy nhất có thứ nguyên đòi hỏi, mà ta có thể lập từ ρ, σ và y, là $(\sigma/\rho)^{1/2}/y$. Do đó, phải có

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{\kappa y}, \tag{42-1}$$

Ở đây, để tiện lợi cho sau này, ta đưa vào đại lượng v_* (có thứ nguyên vận tốc) theo định nghĩa

$$\sigma = \rho v_*^2, \tag{42-2}$$

[1] Các kết quả trình bày ở §42, 43, 44 do *T. Karman* (1930) và *L. Prandtl* (1932) tìm ra.

còn κ là một hằng số bằng số (hằng số *Karman*). Giá trị của κ không thể tính được bằng lý thuyết, mà phải được xác định từ thực nghiệm. Giá trị đó bằng [1]

$$\kappa = 0{,}4. \tag{42-3}$$

Lấy tích phân hệ thức (42-1), ta thu được:

$$u = \frac{v_*}{\kappa}(\ln y + c), \tag{42-4}$$

trong đó c là một hằng số tích phân. Để xác định hằng số này, không thể dùng những điều kiện biên thông thường ở trên mặt thành: vì khi $y = 0$, số hạng thứ nhất ở trong (42-4) trở nên vô hạn. Nguyên nhân là do, biểu thức đã viết thực tế không còn áp dụng được tại những khoảng cách rất nhỏ tính từ thành, vì với các y rất nhỏ, ảnh hưởng của độ nhớt trở nên quan trọng và không thể bỏ qua được. Các điều kiện tại vô cùng cũng không có: với $y = \infty$ biểu thức (42-4) cũng trở nên vô hạn. Đó là do trong các điều kiện lý tưởng hóa do ta đặt ra cho bài toán có mặt của thành vô hạn, vì thế ảnh hưởng của nó trải rộng đến những khoảng cách lớn vô hạn.

Trước khi xác định hằng số c, ta nêu ra đặc điểm quan trọng sau đây của chuyển động đã khảo sát: nó không có những thông số không đổi đặc trưng nào để có thể xác định cỡ của chuyển động chảy rối, như vẫn xảy ra trong các trường hợp thông thường. Do đó, cỡ cơ bản của tính rối được xác định bằng chính khoảng cách y: chuyển động rối tại khoảng cách y tính từ thành có cỡ cơ bản vào bậc độ lớn y. Còn đối với vận tốc mạch động chảy rối thì nó có bậc của đại lượng v_*. Điều này cũng được suy trực tiếp từ những lý do thứ nguyên, vì v_* là đại lượng duy nhất có thứ nguyên vận tốc, mà ta có thể lập được từ những đại lượng sẵn có σ, ρ, y. Cần nhấn mạnh rằng, trong khi vận tốc trung bình giảm khi y giảm, bậc của vận tốc mạch động như nhau tại mọi khoảng cách so với thành. Kết quả này phù hợp với quy tắc tổng quát phát biểu rằng, bậc của vận tốc mạch động được xác định bởi độ biến thiên Δu của vận tốc

[1] Giá trị của hằng số này (và giá trị của cả một hằng số nữa trong công thức (42-8) dưới đây) đã thu được từ những kết quả của các phép đo prôfin vận tốc ở gần thành ống và các kênh vuông góc cả trong lớp biên trên các thành phẳng.

trung bình (§33). Trong trường hợp đang xét, không có các độ dài đặc trưng l để trên đó có thể lấy độ biến thiên của vận tốc trung bình; Δu bây giờ phải được xác định một cách hợp lý như độ biến thiên của u khi khoảng cách y thay đổi một lượng có cùng bậc với chính bản thân y. Theo (42-4), với một sự biến thiên như thế của y, vận tốc u thay đổi đúng một lượng có bậc của v_*.

Độ nhớt của chất lỏng trở nên quan trọng tại những khoảng cách đủ nhỏ tính từ thành; ký hiệu y_0 là bậc độ lớn của các khoảng cách đó. Có thể xác định y_0 như sau. Cỡ của chuyển động rối tại những khoảng cách đó có bậc của y_0, còn vận tốc có bậc của v_*. Do đó số Reynolds, đặc trưng cho chuyển động tại những khoảng cách $\sim y_0$ là $R \sim y_0 v_*/\nu$. Độ nhớt bắt đầu đóng vai trò quan trọng tại $R \sim 1$. Từ đó ta tìm được

$$y_0 \sim \frac{\nu}{v_*}, \tag{42-5}$$

chính biểu thức này xác định khoảng cách cần tìm.

Tại các khoảng cách $y \ll y_0$, chuyển động của chất lỏng được xác định bởi lực ma sát nhớt thông thường. Sự phân bố vận tốc ở đây có thể được rút trực tiếp từ công thức thông thường cho lực ma sát nhớt:

$$\sigma = \rho\nu \frac{du}{dy},$$

từ đó

$$u = \frac{\sigma}{\rho\nu} y = \frac{v_*^2}{\nu} y. \tag{42-6}$$

Như vậy, ở ngay sát thành có một lớp mỏng chất lỏng, trong đó vận tốc trung bình thay đổi theo định luật bậc nhất; vận tốc nhỏ trong toàn bộ lớp này: nó thay đổi từ giá trị không ở ngay trên thành cho đến giá trị $\sim v_*$ với $y \sim y_0$. Ta gọi lớp này là *"lớp nhớt lót"* (viscous sublayer, ND). Không có một ranh giới rõ nét nào giữa lớp nhớt lót và dòng cơ bản, tất nhiên, không có; theo nghĩa này khái niệm về lớp nhớt lót có tính chất định tính. Ở đây cần nhấn mạnh thêm rằng, chuyển động của chất lỏng là rối [1].

[1] Theo nghĩa này tên đôi khi vẫn còn được dùng "lớp lót chảy tầng" là không thích hợp. Sự giống với dòng chảy tầng chỉ dựa trên sự kiện là, vận tốc trung bình được phân bố theo cùng quy luật như vận tốc thực được phân bố của dòng chảy tầng trong cùng những điều kiện. →

Sau này ta sẽ hoàn toàn không quan tâm đến chuyển động trong lớp nhớt lót. Sự có mặt của nó cần được xét đến bằng một sự lựa chọn thích hợp hằng số tích phân ở trong (42-4): hằng số này phải được chọn sao cho $u \sim v_*$ tại những khoảng cách $y \sim y_0$. Muốn vậy cần phải đặt $c = -\ln y_0$, do đó

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y v_*}{\nu}. \qquad (42\text{-}7)$$

Công thức này xác định (với các y giới hạn) sự phân bố các vận tốc ở trong dòng rối, chạy dọc theo thành rắn. Một sự phân bố như thế được gọi là *prôfin vận tốc lôga* [1].

Trong công thức (42-7), thực ra còn phải có một hệ số bằng số ở dưới dấu lôga. Dưới dạng đã viết, như người ta nói, nó chỉ *có độ chính xác lôga*. Điều đó có nghĩa là, đối số của lôga được giả thiết là lớn đến mức chính bản thân lôga là lớn. Việc đưa một hệ số nhỏ bằng số vào dưới dấu lôga ở (42-7) tương đương với việc thêm vào biểu thức đã viết một số hạng bổ sung, có dạng const v_*, trong đó const là một số có bậc bằng đơn vị; trong phép gần đúng lôga một số hạng như thế được bỏ qua so với số hạng có chứa lôga lớn. Tuy nhiên, thực tế trong những công thức xét ở đây, và dưới đây đối số của lôga vẫn không rất lớn, do đó độ chính xác của phép gần đúng lôga không cao. Có thể nâng độ chính xác của các công thức này bằng cách đưa vào trong đối số của lôga một thừa số thực nghiệm bằng số hoặc thêm một hằng số thực nghiệm vào trong lôga cũng thế. Chẳng hạn một công thức chính xác hơn cho prôfin vận tốc có dạng:

$$u = v_* \left(2{,}5 \ln \frac{y v_*}{\nu} + 5{,}1 \right) = 2{,}5 v_* \ln \frac{y v_*}{0{,}13\nu}. \qquad (42\text{-}8)$$

Có nhận xét là, cả hai công thức (42-6) và (42-8) có dạng:

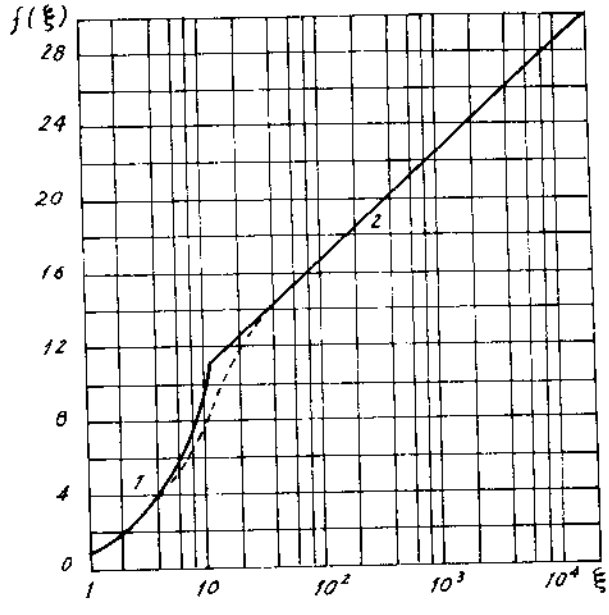
$$u = v_* f(\xi), \qquad \xi = \frac{y v_*}{\nu}, \qquad (42\text{-}9)$$

trong đó $f(\xi)$ là hàm phổ biến. Đó là hệ quả trực tiếp của sự kiện là, ξ là

→ Chuyển động mạch động trong lớp nhớt lót có những đặc điểm độc đáo, vẫn chưa được giải thích một cách thỏa đáng về mặt lý thuyết.

[1] Việc rút ra prôfin loga một cách đơn giản đã được trình bày ở trên là của *L. Đ. Landau*.

tổ hợp không thứ nguyên duy nhất có thể được thiết lập từ các thông số có sẵn ρ, σ, ν và y. Vì lý do đó, sự phụ thuộc phải xảy ra tại mọi khoảng cách tính từ thành, kể cả trong miền nằm trung gian giữa các miền áp dụng được các công thức (42-6) và (42-8). Trên hình 31 có nêu đồ thị của hàm $f(\xi)$ trong thang nửa loga (thập phân). Các đường liền nét 1 và 2 đáp ứng các công thức (42-6) và (42-8), đường cong nét đứt – là sự phụ thuộc thực nghiệm trong miền trung gian (nó trải rộng vào khoảng $\xi \approx 5$ đến $\xi \approx 30$).



Hình 31

Dễ dàng xác định được độ tiêu tán năng lượng ε trong dòng chảy rối đang xét. Đại lượng σ là giá trị trung bình của thành phần Π_{xy} của tenxơ mật độ dòng xung lượng. Ở bên ngoài lớp nhớt lót có thể bỏ qua số hạng với độ nhớt trong Π_{xy}, do đó $\Pi_{xy} = \rho v_x v_y$. Nếu đưa vào vận tốc mạch động $\mathbf{v}'$, và nhớ rằng vận tốc trung bình hướng theo trục x ta có, $v_x = u + v'_x$, $v_y = v'_y$. Khi đó [1]

$$\sigma = \rho\langle v_x v_y\rangle = \rho\langle v'_x v'_y\rangle + \rho u\langle v'_y\rangle = \rho\langle v'_x v'_y\rangle. \qquad (42\text{-}10)$$

Tiếp theo, mật độ dòng năng lượng theo chiều y bằng

$$\left(p + \frac{\rho v^2}{2}\right) v_y,$$

[1] Tenxơ dòng xung lượng mang bởi các mạch động rối được gọi là *tenxơ ứng suất* Reynolds; khái niệm này do Reynolds đưa vào (*O. Reynolds*, 1895).

(ở đây số hạng nhớt cũng được bỏ qua). Nếu trong số hạng thứ hai ta viết

$$v^2 = \left(u + v'_x\right)^2 + v'^2_y + v'^2_z$$

và lấy trung bình ta sẽ có

$$\left\langle p' v'_y \right\rangle + \frac{\rho}{2}\left\langle v'^2_x v'_y + v'^3_y + v'^2_z v'_y \right\rangle + \rho u \left\langle v'_x v'_y \right\rangle.$$

Ở đây, chỉ cần giữ lại số hạng cuối. Vấn đề là ở chỗ, vận tốc mạch động có bậc của v_*, và do đó, (với độ chính xác lôga) nó sẽ nhỏ so với u. Còn đối với áp suất, các mạch động chảy rối của nó $p' \sim \rho v_*^2$ và vì thế, với cùng độ chính xác, số hạng thứ nhất trong biểu thức đã viết cũng có thể được bỏ qua. Như vậy, mật độ năng thông trung bình bằng:

$$\langle q \rangle = \rho u \left\langle v'_x v'_y \right\rangle = u\sigma. \tag{42-11}$$

Càng tới gần mặt thành, thông lượng này giảm đi, đó chính là do năng lượng bị tiêu tán. Đạo hàm $d\langle q \rangle/dy$ cho ta độ tiêu tán trong một đơn vị thể tích chất lỏng. Nếu chia nó cho ρ, ta thu được độ tiêu tán trong một đơn vị khối lượng:

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa y} = \frac{1}{\kappa y}\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^{3/2}. \tag{42-12}$$

Cho đến đây, ta đã giả sử rằng, mặt thành là đủ nhẵn. Nhưng nếu mặt gồ ghề, thì các công thức đã tìm được có thể sẽ thay đổi đôi chút. Để làm số đo cho độ gồ ghề của thành, có thể lấy bậc độ lớn các chỗ lồi gồ ghề, mà ta ký hiệu là d. Đại lượng d tương đối quan trọng chính là độ dầy của lớp nhớt lót y_0. Nếu độ dầy y_0 lớn so với d, thì độ gồ ghề hoàn toàn không quan trọng; chính điều này được hiểu ngầm là độ nhẵn vừa đủ của thành. Nếu y_0 và d có cùng bậc độ lớn thì không thể viết được một công thức tổng quát nào.

Trong trường hợp giới hạn ngược lại, nếu mặt rất gồ ghề ($d \gg y_0$), ta lại có thể thiết lập một số hệ thức tổng quát. Hiển nhiên là không thể nói được gì về lớp nhớt lót trong trường hợp này. Chung quanh các chỗ lồi gồ ghề, sẽ xảy ra các chuyển động chảy rối, đặc trưng bởi các đại lượng ρ, σ, d; độ nhớt ν, như thường lệ sẽ không được tham gia dưới dạng tường minh. Vận tốc của chuyển động này – có bậc độ lớn của v_*

– là đại lượng duy nhất có sẵn có thứ nguyên vận tốc. Như vậy, ta nhận thấy rằng, trong dòng chảy trên mặt gồ ghề, vận tốc trở nên nhỏ ($\sim v_*$) tại các khoảng cách $y \sim d$ thay cho $y \sim y_0$ như đã xảy ra trong dòng chảy trên mặt nhẵn. Từ đó, thấy rõ rằng sự phân bố các vận tốc sẽ được xác định bằng công thức thu được từ (42-7) nếu thay ν/v_* bằng d

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{y}{d}. \tag{42-13}$$

§43. DÒNG CHẢY RỐI TRONG CÁC ỐNG

Bây giờ ta áp dụng các kết quả thu được cho dòng chảy rối của chất lỏng ở trong ống. Ở gần các thành của ống (tại những khoảng cách nhỏ so với bán kính a của nó), mặt của nó có thể được coi là phẳng và sự phân bố các vận tốc phải được mô tả bằng công thức (42-7) hay (42-8). Tuy nhiên vì hàm ln y biến thiên chậm, nên trong phép gần đúng lôga, có thể áp dụng công thức (42-7) cả cho vận tốc trung bình U của dòng chảy chất lỏng trong ống, nếu trong công thức đó ta viết bán kính a của ống thay cho y:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{av_*}{\nu}. \tag{43-1}$$

Vận tốc U được hiểu là tỷ số giữa lượng (thể tích) chất lỏng đi qua tiết diện của ống trong một giây và diện tích của tiết diện đó: $U = Q/\rho\pi a^2$.

Để liên hệ vận tốc U với độ chênh áp suất $\Delta p/l$ đã duy trì dòng chảy (Δp là hiệu áp suất tại các đầu của ống dẫn có độ dài l), ta có nhận xét sau. Lực tác dụng lên toàn bộ tiết diện dòng chảy chất lỏng trong ống dẫn bằng $\pi a^2 \Delta p$. Lực này dùng để thắng lực ma sát của chất lỏng lên thành. Vì lực ma sát tính cho một đơn vị diện tích của thành bằng $\sigma = \rho v_*^2$ nên lực ma sát toàn phần bằng $2al\rho v_*^2$. Cân bằng hai biểu thức này, ta tìm được

$$\frac{\Delta p}{l} = \rho v_*^2 \frac{2}{a}. \tag{43-2}$$

Các phương trình (43-1) và (43-2) xác định mối liên hệ giữa vận tốc của chất lỏng trong ống dẫn và độ chênh áp suất ở trong đó dưới dạng thông số (v_* là thông số). Mối liên hệ này thường được gọi là "*định luật cản*" của ống dẫn. Biểu diễn v_* theo $\Delta p/l$ ở trong (43-2) và thay vào (43-1), ta sẽ thu được định luật cản dưới dạng phương trình

$$U = \sqrt{\frac{a\,\Delta p}{2\kappa^2 \rho l}}\,\ln\left(\frac{a}{\nu}\sqrt{\frac{a\,\Delta p}{2\rho l}}\right). \tag{43-3}$$

Trong công thức này, người ta thường đưa vào một đại lượng gọi là hệ số cản của ống, đó là một đại lượng không thứ nguyên được xác định bởi tỷ số

$$\lambda = \frac{2a\,\Delta p / l}{\rho U^2 / 2}. \tag{43-4}$$

Sự phụ thuộc của λ vào số Reynolds không thứ nguyên $R = 2aU/\nu$ được xác định dưới dạng ẩn bởi phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0{,}88\ln\left(R\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}85. \tag{43-5}$$

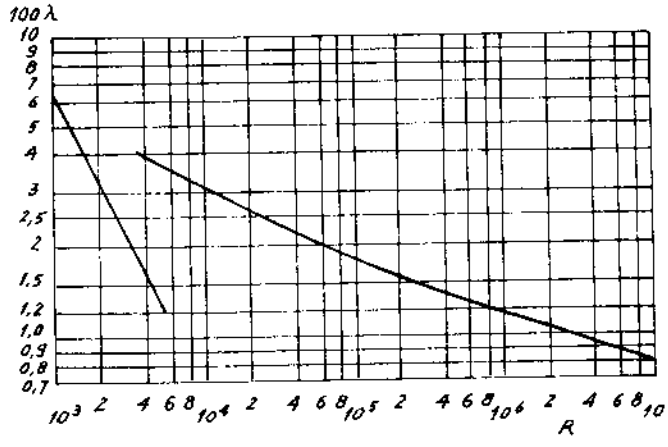
Ở đây ta đã thay κ bởi giá trị (42-3) của nó và thêm vào lôga một hằng số thực nghiệm [1]. Hệ số cản xác định bằng công thức này là một hàm giảm chậm của số Reynolds. Để so sánh, ta nêu ra định luật cản khi chất lỏng chảy tầng trong ống. Nếu đưa hệ số cản vào trong (17-10), ta sẽ thu được

$$\lambda = \frac{64}{R}. \tag{43-6}$$

Trong dòng chảy tầng hệ số cản giảm nhanh hơn trong chuyển động chảy rối, khi số Reynolds tăng.

[1] Hệ số đứng trước lôga trong công thức này đã được lấy phù hợp với hệ số ở trong công thức (42-8) của prôfin vận tốc lôga. Chỉ trong một điều kiện như thế, công thức này mới có ý nghĩa lý thuyết, là công thức giới hạn cho sự chảy rối đối với các giá trị đủ lớn của số Reynolds. Nhưng nếu trong công thức (43-5) ta chọn tùy ý các giá trị của hai hằng số xuất hiện trong công thức đó, thì nó chỉ giữ vai trò của một công thức thuần túy thực nghiệm cho sự phụ thuộc của λ vào R. Tuy nhiên, trong một trường hợp như thế, ta không có một cơ sở nào để ưa thích công thức đó hơn tất cả mọi công thức thực nghiệm khác đơn giản hơn, có thể mô tả khá tốt các kết quả thực nghiệm.

Đồ thị trên hình 32 (trong thang chia lôga) biểu diễn sự phụ thuộc của λ vào R. Đường thẳng với độ dốc dựng đứng tương ứng với chế độ chảy tầng [công thức (43-6)], còn đường cong với độ dốc thoải hơn (thực tế cũng gần như đường thẳng) – tương ứng với dòng chảy rối. Sự chuyển từ đường thẳng thứ nhất sang đường thẳng thứ hai xảy ra khi số Reynolds tăng dần cho tới thời điểm rối hóa dòng chảy, thời điểm đó có thể xuất hiện với các giá trị khác nhau của R, tùy thuộc vào các điều kiện cụ thể của dòng chảy (tùy thuộc mức độ "nhiễu động" của dòng); tại thời điểm chuyển, hệ số cản tăng đột ngột.



Hình 32

Các công thức đã tìm thấy ở trên được xét cho các ống với các thành nhẵn. Các công thức tương tự cho các ống có thành gồ ghề nhiều sẽ thu được nếu thay thế v/v_* bằng d (xem (42-13)). Đối với định luật cản, bây giờ thay cho (43-3) ta thu được công thức sau

$$U = \sqrt{\frac{a\,\Delta p}{2\kappa^2 \rho l}}\,\ln\frac{a}{d}. \qquad (43\text{-}7)$$

Đối số lôga bây giờ là một đại lượng không đổi, không chứa độ chênh áp suất như trong (43-3). Chúng ta nhận thấy rằng vận tốc trung bình của dòng chảy bây giờ tỷ lệ đơn giản với căn bậc hai của gradiên áp suất ở trong ống. Nếu đưa vào hệ số cản, thì công thức (43-7) sẽ có dạng

$$\lambda = \frac{8\kappa^2}{\ln^2(a/d)} = \frac{1{,}3}{\ln^2(a/d)}. \qquad (43\text{-}8)$$

nghĩa là λ là một đại lượng không đổi không phụ thuộc vào số Reynolds.

§44. LỚP BIÊN CHẢY RỐI

Ta đã thu được cho dòng chảy rối song phẳng định luật lôga về sự phân bố vận tốc, một định luật đúng trong toàn bộ không gian, đó là do ta đã xét dòng chảy dọc theo thành có diện tích vô hạn. Nhưng khi chất lỏng chảy dọc theo mặt của các vật thực hữu hạn, thì chỉ chuyển động ở cách mặt những khoảng cách nhỏ – trong lớp biên – mới có prôfin lôga.

Bề dầy của lớp biên tăng xuôi dòng chảy dọc theo mặt của vật (định luật về sự tăng này sẽ tìm được dưới đây). Điều đó giải thích tại sao đối với dòng chảy ở trong ống prôfin lôga xuất hiện dọc theo toàn bộ tiết diện của ống. Chiều dầy của lớp biên ở trên thành ống tăng bắt đầu từ miệng ống. Tại một khoảng cách hữu hạn nào đó tính từ miệng vào, lớp biên như thể lấp đầy toàn bộ tiết diện của ống. Do đó, nếu coi ống đủ dài, và không xét đoạn đầu ống thì dòng chảy trong toàn bộ thể tích của nó sẽ cùng loại như ở trong lớp biên chảy rối. Ta nhớ lại rằng, một tình trạng tương tự cũng xảy ra đối với dòng chảy tầng ở trong ống. Bao giờ dòng chảy cũng được mô tả bằng công thức (17-9); vai trò của độ nhớt trong nó thể hiện tại mọi khoảng cách so với thành và không bao giờ bị hạn chế bởi lớp chất lỏng mỏng kề sát thành.

Sự giảm của vận tốc trung bình trong lớp biên chảy rối cũng như trong lớp biên chảy tầng, cuối cùng cũng là do độ nhớt của chất lỏng gây nên. Tuy nhiên, ảnh hưởng độ nhớt được biểu hiện trong lớp biên chảy rối rất độc đáo. Chính tiến trình biến thiên của vận tốc trung bình ở trong lớp không phụ thuộc trực tiếp vào độ nhớt; độ nhớt chỉ xuất hiện trong biểu thức của gradiên vận tốc ở trong lớp nhớt lót. Còn bề dầy của lớp biên thì được xác định bởi độ nhớt và triệt tiêu cùng với độ nhớt (xem dưới đây). Nếu độ nhớt chính xác bằng không, thì hoàn toàn không có một lớp biên nào.

Ta áp dụng những kết quả thu được trong tiết trước cho lớp biên chảy rối, được tạo thành khi chất lỏng chảy quanh một bản phẳng mỏng (như

trong chuyển động chảy tầng đã nghiên cứu ở §39). Tại biên giới của lớp chảy rối, vận tốc chất lỏng gần như bằng vận tốc U của dòng cơ bản. Mặt khác để xác định vận tốc này tại biên giới, ta có thể (với độ chính xác lôga) dùng công thức (42-7) và ở trong đó thay y bằng độ dầy δ [1] của lớp biên. Cân bằng hai biểu thức, ta thu được:

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_* \delta}{\nu}. \tag{44-1}$$

Ở đây U giữ vai trò thông số không đổi; còn bề dầy δ thay đổi dọc theo bản, và do đó, cùng với nó, cả v_* là hàm biến thiên chậm của x. Công thức (44-1) không đủ để xác định các hàm đó; còn cần phải tìm một hệ thức nào đó nữa để liên hệ v_* và δ với x.

Muốn vậy, ta sử dụng những lập luận đã dùng để rút ra công thức (37-3) của độ rộng vết chảy rối. Cũng như ở đó, đạo hàm $d\delta/dx$ phải có bậc của tỷ số giữa vận tốc dọc theo trục y ở trên biên giới của lớp và vận tốc dọc theo trục x trên cùng biên giới đó. Vận tốc thứ hai có bậc của U, còn vận tốc ngang, do có liên quan đến chuyển động mạch động, nên có bậc của v_*. Như vậy

$$\frac{d\delta}{dx} \sim \frac{v_*}{U}.$$

Từ đó

$$\delta \sim \frac{v_* x}{U}. \tag{44-2}$$

Các công thức (44-1) và (44-2) đồng thời xác định sự phụ thuộc của v_* và δ vào khoảng cách x [2]. Tuy nhiên, sự phụ thuộc này không thể viết được dưới dạng tường minh. Dưới đây ta biểu diễn δ qua một đại lượng hỗ trợ nào đó. Nhưng vì v_* là một hàm biến thiên chậm của x, nên ngay từ (44-2) ta đã thấy rằng bề dầy của lớp thay đổi về cơ bản tỷ lệ với x.

[1] Thực tế prôfin lôga được quan sát thấy không phải trên toàn bộ bề dầy của lớp biên. 20-25% lượng vận tốc sau cùng ở phía ngoài lớp biên xảy ra nhanh hơn theo định luật lôga. Các sự sai lệch này chắc là có liên quan đến các dao động không đều của lớp biên (so sánh với điều đã nói ở cuối §35 về các lớp biên của những miền chảy rối).

[2] Nói một cách chặt chẽ, khoảng cách x phải được tính gần đúng từ nơi chuyển tiếp của lớp chảy tầng sang lớp chảy rối.

Nhắc lại rằng, bề dầy của lớp biên chảy tầng tăng tỷ lệ với $x^{1/2}$, nghĩa là chậm hơn ở trong lớp chảy rối.

Ta xác định sự phụ thuộc theo x của lực ma sát σ tác dụng lên một đơn vị diện tích của mặt bản. Sự phụ thuộc này được xác định bởi hai công thức

$$\sigma = \rho v_*^2 , \qquad U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{v_*^2 x}{U\nu}$$

Công thức thứ hai thu được bằng cách thay (44-2) vào (44-1) và có độ chính xác lôga. Ta đưa vào hệ số cản c (tính cho một đơn vị diện tích mặt bản) xác định bởi tỷ số không thứ nguyên

$$c = \frac{2\sigma}{\rho U^2} = 2\left(\frac{v_*}{U}\right)^2 . \tag{44-3}$$

Khi đó, nếu khử v_* khỏi hai phương trình đã viết, ta sẽ thu được phương trình xác định sự phụ thuộc của x (trong phép gần đúng lôga) vào c dưới dạng ẩn sau đây:

$$\sqrt{\frac{2\kappa^2}{c}} = \ln c R_x , \qquad R_x = \frac{Ux}{\nu} \tag{44-4}$$

Hệ số cản c xác định bởi công thức này là một hàm giảm đơn điệu của khoảng cách x.

Có thể biểu diễn độ dầy của lớp biên qua hàm đó:

$$v_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = U\sqrt{\frac{c}{2}}.$$

Thay biểu thức này vào (44-2), ta được

$$\delta = \text{const} \cdot x\sqrt{c}. \tag{44-5}$$

Giá trị thực nghiệm của hệ số trong công thức này vào khoảng 0,3.

Một cách tương tự có thể thu được các công thức cho lớp biên chảy rối trên mặt gồ ghề. Theo công thức (42-13), bây giờ thay cho (44-1) ta có

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\delta}{d},$$

ở đây d là kích thước của các chỗ lồi gồ ghề. Thay δ lấy từ (44-2) vào đây, ta được

$$U = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{x v_*}{U d},$$

hay đưa vào đây hệ số cản (44-3):

$$\sqrt{\frac{2\kappa^2}{c}} = \ln \frac{x\sqrt{c}}{d}. \qquad (44\text{-}6)$$

§45. SỰ KHỦNG HOẢNG LỰC CẢN

Những kết quả thu được trong các tiết trước cho phép rút ra những kết luận quan trọng về định luật lực cản với các số Reynolds lớn, nghĩa là về sự phụ thuộc vào R của lực tác dụng lên vật có dòng chảy bao quanh với các giá trị R lớn.

Hình ảnh dòng chảy bao quanh với các R lớn (sau đây ta chỉ xét trường hợp này), như đã nói, thể hiện như sau. Trong toàn bộ thể tích cơ bản của chất lỏng (nghĩa là tại mọi nơi, trừ lớp biên, mà ta không xét đến) chất lỏng có thể được coi là lý tưởng và chuyển động của nó có thế tại mọi nơi, trừ trong miền vết chảy rối. Những kích thước – độ rộng – của vết phụ thuộc vào vị trí của đường tách ở trên mặt của vật có dòng chảy bao quanh. Điều quan trọng khi đó là: mặc dù vị trí này được xác định bởi những tính chất của lớp biên nhưng kết quả là, như đã nhận xét ở §40, nó không phụ thuộc vào số Reynolds. Như vậy, ta có thể nói rằng toàn bộ hình ảnh của dòng chảy bao quanh với các số Reynolds lớn thực tế không phụ thuộc vào độ nhớt, nghĩa là, nói một cách khác, không phụ thuộc vào R (chừng nào lớp biên còn là chảy tầng; xem dưới đây).

Từ đó suy ra rằng, cả lực cản cũng không thể phụ thuộc vào độ nhớt. Chỉ còn ba đại lượng có sẵn: vận tốc U của dòng tới, mật độ chất lỏng ρ và các kích thước l của vật. Từ ba đại lượng này, chỉ có thể thành lập được một đại lượng có thứ nguyên lực, cụ thể $\rho U^2 l^2$. Thay cho bình phương các kích thước dài của vật, như thường vẫn làm, ta đưa vào diện tích S của tiết diện ngang của vật (đối với chiều của dòng chảy), tỷ lệ với diện tích S của nó, và viết được

$$F = \text{const} \cdot \rho U^2 S, \tag{45-1}$$

trong đó const là một số không đổi, chỉ phụ thuộc vào các kích thước của vật. Như vậy, lực cản (với các R lớn) phải tỷ lệ với diện tích của tiết diện của vật và bình phương của vận tốc dòng chảy bao quanh. Để so sánh, ta nhắc lại rằng, với các R rất nhỏ ($R \ll 1$) lực cản tỷ lệ với lũy thừa bậc nhất của các kích thước dài của vật và luỹ thừa bậc nhất của vận tốc ($F \sim \nu\rho lU$; xem §20) [1].

Như đã nói, thường thay cho lực cản F, người ta xét hệ số cản C được định nghĩa như sau

$$C = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}.$$

trong đó C là một đại lượng không thứ nguyên và chỉ phụ thuộc vào R. Công thức (45-1) được viết dưới dạng

$$C = \text{const} \tag{45-2}$$

nghĩa là hệ số cản chỉ phụ thuộc vào hình dạng của vật.

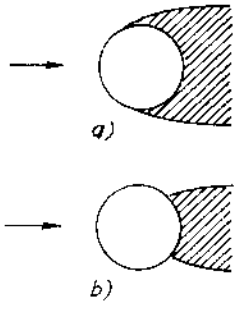
Tuy nhiên một tiến trình như thế của lực cản rõ ràng không thể tiếp tục đối với các số Reynolds lớn tùy ý. Vấn đề là ở chỗ, với các R đủ lớn lớp biên chảy tầng (ở trên mặt của vật cho đến đường tách) trở nên không ổn định và chảy rối. Khi đó không phải toàn bộ lớp biên, mà chỉ một phần của lớp biên, trở nên chảy rối. Như vậy, toàn bộ mặt của vật có thể được chia thành ba phần: ở phần phía trước có lớp biên chảy tầng, rồi đến miền của lớp chảy rối và cuối cùng là miền ở sau đường tách.

Sự chảy rối hóa lớp biên có ảnh hưởng chủ yếu trên toàn bộ hình ảnh dòng chảy ở trong dòng cơ bản: nó làm dịch chuyển rõ rệt đường tách về phía xuôi dòng chảy, do đó vết chảy rối ở phía sau vật thu nhỏ lại (như đã được trình bày ở sơ đồ trên hình 33, miền vết được gạch chéo) [2]. Sự

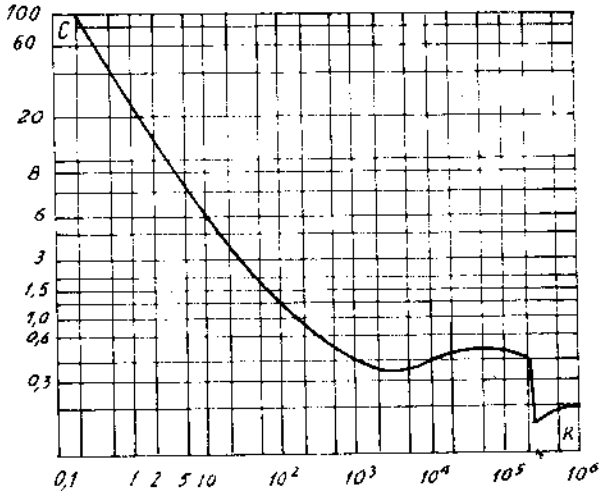
[1] Một trường hợp đặc biệt, trong đó lực cản tỷ lệ với luỹ thừa bậc nhất của vận tốc khi các R lớn, là trường hợp chất lỏng chảy quanh một bọt khí; xem bài tập của tiết này.

[2]. Chẳng hạn, trong dòng chảy ngang quanh một ống hình trụ dài, sự chảy rối hóa lớp biên chuyển dịch vị trí của điểm tách từ 95° đến 60° (góc trên chu vi của tiết diện hình trụ tính từ chiều của dòng chảy).

thu nhỏ của vết chảy rối dẫn đến sự giảm lực cản. Như vậy, sự chảy rối hóa lớp biên với các số Reynolds lớn sẽ làm giảm hệ số cản. Hệ số cản giảm nhiều lần trong một khoảng tương đối hẹp các số Reynolds (trong miền các R cỡ khoảng 10^5). Hiện tượng này được gọi là *sự khủng hoảng lực cản*. Sự giảm của hệ số cản lớn đến mức chính lực cản, khi C không đổi, phải tăng tỷ lệ với bình phương vận tốc, trong miền này các số Reynolds thậm chí còn giảm khi vận tốc tăng [1].



Hình 33



Hình 34

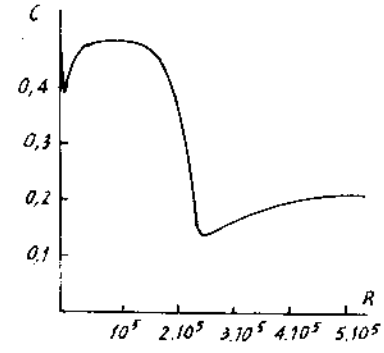
Có thể nhận xét rằng, mức độ rối của dòng chảy tới vật có ảnh hưởng đến hiện tượng khủng hoảng. Độ rối của dòng tới càng lớn, sự chảy rối hóa lớp biên xuất hiện càng sớm (với các R càng nhỏ hơn). Do đó sự giảm của hệ số cản bắt đầu tại các số Reynolds nhỏ hơn (và trải ra trong một khoảng lớn hơn các giá trị R).

Các hình 34 và 35 biểu diễn đồ thị tìm được bằng thực nghiệm cho sự phụ thuộc của hệ số cản vào số Reynolds $R = Ud/\nu$ đối với quả cầu

[1] Ta nhận thấy rằng, sự xuất hiện đầu tiên của tính không dừng trong dòng chảy bao quanh quả cầu (với R khoảng vài chục) không kéo theo sự biến thiên dạng bước nhảy của lực cản. Điều này có liên quan đến tính liên tục của sự chuyển với sự tự kích mềm. Sự biến thiên của tính chất dòng chảy có thể chỉ thể hiện ở sự xuất hiện chỗ gẫy trên đường cong $C(R)$.

đường kính d (trong thang chia lôga ở trên hình 34 và thang chia thông thường ở trên hình 35). Với các R nhỏ nhất ($R \ll 1$), hệ số cản giảm theo định luật $C = 24/R$ (công thức Stokes). Sau đó sự giảm của C tiếp tục chậm hơn cho tới giá trị $R \approx 5.10^3$, tại đây đạt giá trị cực tiểu, tiếp theo tăng đôi chút. Định luật (45-2) đúng trong miền các số Reynolds nằm giữa 2.10^4 và 2.10^5, nghĩa là C hầu như không đổi. Với $R \approx 2 \div 3.10^5$ sự khủng hoảng hệ số cản xuất hiện và hệ số cản giảm khoảng từ 4 đến 5 lần.

Để so sánh, ta nêu thí dụ về chất lỏng bao quanh khi không xảy ra sự khủng hoảng. Ta xét sự chảy quanh một đĩa phẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng của nó. Nơi tách trong trường hợp này thấy được hiển nhiên từ trước, dựa vào những lý luận thuần túy hình học, – rõ ràng là, sự tách xảy ra ở trên bờ của đĩa và sau đó không dịch chuyển khỏi đó. Do đó khi R tăng hệ số cản của đĩa không đổi và không xuất hiện sự khủng hoảng.



Hình 35

Cần nhớ rằng, với các vận tốc lớn, khi có xuất hiện sự khủng hoảng lực cản, ảnh hưởng của tính nén được của chất lỏng có thể trở nên đáng kể. Thông số đặc trưng cho mức độ ảnh hưởng này là số $M = U/c$, trong đó c là vận tốc âm; chất lỏng có thể được coi như không nén được nếu $M \ll 1$ (§10). Vì trong hai số M và R chỉ có một số chứa kích thước của vật, nên các số này có thể biến đổi độc lập với nhau.

Các kết quả thực nghiệm chứng tỏ rằng, tính nén được nói chung có một ảnh hưởng làm ổn định chuyển động ở trong lớp biên chảy tầng. Khi M tăng, giá trị tới hạn của R tăng, tại đó lớp biên trở nên chảy rối. Vì vậy sự xuất hiện hiện tượng khủng hoảng cũng sẽ dịch đi. Chẳng hạn, đối với hình cầu, khi M thay đổi từ 0,3 đến 0,7, thì sự khủng hoảng sức cản dịch trong khoảng từ $R \approx 4.10^5$ đến 8.10^5.

Ta cũng nêu lên rằng, khi M tăng, vị trí của điểm tách ở trong lớp biên chảy tầng dịch chuyển ngược dòng – về phía đầu trước của vật và

như vậy phải dẫn đến một sự tăng nào đó của lực cản.

BÀI TẬP

Tìm lực cản tác dụng lên một bọt khí chuyển động trong một chất lỏng với các số Reynolds lớn.

Giải. Tại biên giới giữa chất lỏng và chất khí, không phải chính thành phần tiếp tuyến của vận tốc bằng không mà chỉ đạo hàm theo phương pháp tuyến của nó bằng không (bỏ qua độ nhớt của chất khí). Do đó gradiên vận tốc ở gần mặt sẽ không lớn một cách dị thường và lớp biên (dưới dạng mà ta đã nói ở §39) sẽ không có, do đó cũng không có cả hiện tượng tách (hầu như trên toàn bộ mặt của bọt). Vì thế, khi tính độ tiêu tán của năng lượng theo tích phân khối (16-3), trong toàn bộ không gian có thể dùng sự phân bố các vận tốc tương ứng với dòng chảy quanh một quả cầu (bài tập 2, §10), bỏ qua vai trò của lớp mặt chất lỏng và vết chảy rối rất hẹp. Dùng công thức của bài tập thu được ở §16, ta tính được

$$\dot{E}_d = -\eta \int \frac{\partial v^2}{\partial r}\bigg|_{r=R} 2\pi R^2 \sin\theta \, d\theta = -12\pi\eta R U^2.$$

từ đó thấy rằng lực cản tiêu tán cần tìm bằng

$$F = 12\pi\eta R U.$$

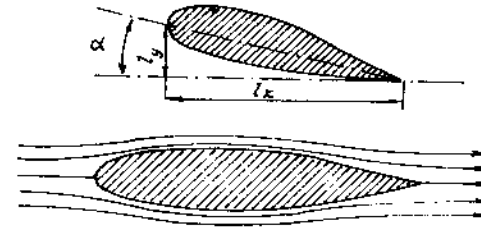
Phạm vi ứng dụng được công thức này không lớn, vì khi vận tốc tăng đủ lớn, bọt khí sẽ không còn dạng hình cầu.

§46. CÁC VẬT DẠNG THUÔN (DẠNG KHÍ ĐỘNG LỰC)

Có thể đặt câu hỏi, hình dạng của một vật như thế nào (chẳng hạn như đối với một diện tích đã cho của tiết diện của nó) để nó chịu một sức cản khả dĩ nhỏ nhất khi chuyển động trong chất lỏng. Từ những điều đã nói ở trên, ta thấy rõ rằng, muốn vậy, trong mọi trường hợp, sự tách cần phải xảy ra hết sức muộn nhất; sự tách phải xảy ra ở sát phía sau vật sao cho vết chảy rối phải hẹp nhất đến mức có thể. Ta đã biết rằng, sự tách sẽ dễ dàng xuất hiện hơn, nếu có sự tăng nhanh của áp suất xuôi dòng theo vật. Do đó, vật phải có dạng để áp suất biến thiên dọc theo vật sao cho nơi mà áp suất tăng, sự biến thiên phải xảy ra chậm và nhẵn (smoothly, ND) đến mức có thể. Điều này có thể thực hiện được,

nếu vật có dạng thuôn dài (theo chiều dòng chảy) thêm vào đó, vật được vót nhọn trơn tru theo chiều dòng chảy, sao cho các dòng ở hai phía mặt của vật như thể chập lại với nhau trơn tru không phải quay quanh một góc nào hoặc phải lái ngoặt so với chiều của dòng tới. Ở đầu phía trước, vật phải thuôn tròn; nếu ở đây có một góc nào đó, vận tốc của chất lỏng phải trở nên vô hạn ở bờ của góc (xem bài toán 6 §10), và do đó áp suất sẽ tăng nhanh xuôi dòng và sự tách tất yếu sẽ xảy ra.

Tất cả những yêu cầu đó đều được thỏa mãn ở mức cao bởi các hình dạng thuộc loại trình bày trên hình 36. Chẳng hạn như prôfin trình bày ở hình dưới có thể là tiết diện của một vật tròn xoay kéo dài, hoặc là tiết diện của một vật có "sải cánh" rộng (ta quy ước gọi một vật như thế là "*cánh*"). Prôfin tiết diện của cánh có thể không đối xứng, chẳng hạn như prôfin ở phía trên hình 36. Khi chất lỏng chảy quanh một vật có dạng đó thì sự tách chỉ xảy ra ở ngay sát đầu thon, và do đó, hệ số cản đạt tới những giá trị tương đối nhỏ. Các vật như thế được gọi là các vật *có dạng thuôn* (hay *dạng khí động lực*, ND).



Hình 36

Hiệu ứng ma sát trực tiếp của chất lỏng lên mặt ở trong lớp biên giữ vai trò đáng kể trong lực cản trên các vật có dạng thuôn. Hiệu ứng này tương đối rất nhỏ, và do đó, thực tế hoàn toàn không có ý nghĩa gì đối với các vật không có dạng thuôn (mà ta đã nói trong tiết trước). Trong trường hợp giới hạn ngược lại với sự chảy quanh một bản phẳng (dòng chảy song song với bản phẳng), hiệu ứng trên trở thành nguồn lực cản duy nhất (§39).

Trong dòng chảy quanh một cánh dạng thuôn nằm nghiêng một góc nhỏ so với chiều dòng chảy (góc α trên hình 36 được gọi là "góc tới" (angle of attack, ND)), lực nâng lớn F_y phát triển, khi đó lực cản F_x còn nhỏ và kết quả là tỷ số F_y/F_x có thể đạt tới các giá trị lớn (bậc từ 10 đến

100). Tuy nhiên điều đó còn tiếp tục như vậy cho đến khi góc tới không quá lớn (thông thường ~ 10^0). Sau đó lực cản bắt đầu tăng rất nhanh, còn lực nâng giảm. Hiện tượng xảy ra là do, đối với các góc tới lớn, vật không còn thỏa mãn các điều kiện của dạng thuôn: nơi tách dịch chuyển mạnh trên mặt vật về phía bờ trước, kết quả là vết trở nên rộng hơn nhiều. Cần nhớ rằng, trong trường hợp giới hạn của một vật có bề dầy rất nhỏ, nghĩa là trường hợp của bản phẳng, nó chỉ có dạng thuôn nếu góc tới rất nhỏ; sự tách xảy ra ở bờ trước của bản ngay với các góc nghiêng của nó nhỏ so với chiều của dòng chảy.

Theo định nghĩa, góc tới được đo từ vị trí của cánh, mà tại đó lực nâng bằng không. Đối với các góc tới nhỏ, ta có thể khai triển lực nâng thành chuỗi lũy thừa của α. Nếu giới hạn ở số hạng khai triển thứ nhất, ta có thể coi lực F_y tỷ lệ với α. Tiếp thêm, dựa vào cùng những lý do thứ nguyên như đối với lực cản, lực nâng phải tỷ lệ với ρU^2. Nếu cũng đưa vào độ dài sải cánh l_z thì có thể viết

$$F_y = \text{const} \cdot \rho U^2 \alpha l_x l_z, \tag{46-1}$$

trong đó const là một số không đổi, chỉ phụ thuộc vào dạng của cánh và nói riêng không phụ thuộc vào góc tới. Đối với các cánh có sải rất rộng, có thể coi lực nâng tỷ lệ với độ sải cánh; khi đó hằng số chỉ phụ thuộc vào dạng của prôfin tiết diện ngang của cánh.

Thay cho lực nâng của cánh, thường người ta dùng *hệ số nâng*, được xác định như sau

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z}. \tag{46-2}$$

Đối với các cánh có sải rất lớn, theo điều đã nói ở trên, hệ số nâng tỷ lệ với góc tới và không phụ thuộc vào vận tốc của chuyển động cũng như sải cánh:

$$C_y = \text{const} \cdot \alpha. \tag{46-3}$$

Để tính lực nâng của cánh dạng thuôn dựa vào công thức Giukovxki, cần phải xác định lưu số của vận tốc Γ. Người ta tiến hành như sau. Trừ ở trong miền của vết, chuyển động có tính chất thế tại mọi nơi. Trong

trường hợp đang xét, vết rất mỏng và chỉ chiếm trên mặt cánh một miền nhỏ ở gần bờ đuôi nhọn phía sau. Do đó, để xác định sự phân bố các vận tốc (và cùng với nó, cả lưu số Γ), ta có thể giải bài toán về dòng chảy có thế của chất lỏng lý tưởng quanh cánh. Khi đó sự xuất hiện của vết là do, từ bờ đuôi nhọn phía sau của cánh có xuất phát một mặt gián đoạn tiếp tuyến, trên đó thế có bước nhảy $\varphi_2 - \varphi_1 = \Gamma$. Như đã chứng tỏ ở §38, cả đạo hàm $\partial\varphi/\partial z$ cũng có bước nhảy trên mặt đó, còn các đạo hàm $\partial\varphi/\partial x$ và $\partial\varphi/\partial y$ liên tục. Đối với cánh có sải hữu hạn, bài toán đặt ra như vậy có một nghiệm đơn trị. Nhưng việc tìm nghiệm chính xác rất phức tạp.

Nếu cánh có sải rất rộng (và tiết diện không đổi dọc theo sải) thì khi giả thiết nó dài vô hạn theo trục z, ta có thể coi chuyển động của chất lỏng là phẳng (trong mặt phẳng x, y). Vì lý do đối xứng, rõ ràng là khi đó vận tốc $v_z = \partial\varphi/\partial z$ theo chiều của sải bằng không. Do đó trong trường hợp này, ta phải tìm nghiệm, trong đó chỉ bản thân thế có bước nhảy, với các đạo hàm của nó liên tục; nói một cách khác, mặt gián đoạn tiếp tuyến không tồn tại và ta chỉ có đơn giản một hàm không đơn trị $\varphi(x,y)$, hàm này tăng một lượng hữu hạn Γ khi đi một vòng kín bao quanh prôfin của cánh. Nhưng dưới dạng này, bài toán về dòng phẳng không đơn trị, vì nó chấp nhận một nghiệm với bước nhảy tùy ý cho trước của thế. Để thu được lời giải đơn trị, cần phải thực hiện một điều kiện phụ nữa (*X. A. Tsaplyghin*, 1909).

Điều kiện này đòi hỏi vận tốc của chất lỏng không bằng vô hạn ở trên bờ đuôi nhọn phía sau của cánh; về vấn đề này, ta nhắc lại rằng, khi chất lỏng lý tưởng chảy quanh một góc, vận tốc tại đỉnh góc của nó nói chung trở nên vô hạn theo định luật luỹ thừa (§10, bài tập 6). Có thể nói rằng, điều kiện đặt ra đòi hỏi các luồng chất lỏng ở hai phía của sải cánh phải hòa nhập với nhau trơn tru, không phải quay quanh một góc nhọn. Lẽ dĩ nhiên, khi điều kiện này được thỏa mãn, nghiệm của bài toán về dòng chảy thế sẽ dẫn tới một hình ảnh gần thực tế nhất, trong đó vận tốc hữu hạn khắp nơi và sự tách chỉ xảy ra ở chính trên bờ đuôi. Sau đó nghiệm trở nên hoàn toàn đơn trị và đặc biệt là lưu số Γ, cần thiết cho việc tính toán lực nâng, cũng được xác định.

§47. LỰC CẢN CẢM ỨNG

Một phần quan trọng của lực cản tác dụng lên một cánh dạng thuôn (có sải hữu hạn) gồm lực cản gây bởi sự tiêu tán năng lượng trong vết chảy rối mảnh. Lực cản này được gọi là *lực cản cảm ứng*.

Ở §21 đã chứng tỏ rằng lực cản, liên quan đến vết khi xét chuyển động của chất lỏng ở xa vật, có thể được tính bằng cách nào. Tuy nhiên, công thức (21-1) tìm được ở đó không áp dụng được trong trường hợp này. Theo công thức này, lực cản được xác định bởi tích phân của v_x lấy theo diện tích của tiết diện vết, nghĩa là bởi lượng chất lỏng thoát qua tiết diện vết. Tuy nhiên, vì vết mảnh ở phía sau một cánh có dạng thuôn, nên lượng chất lỏng thoát ra trong trường hợp này nhỏ và trong phép gần đúng dưới đây, có thể hoàn toàn được bỏ qua.

Cũng như đã tiến hành ở §21, ta viết lực F_x dưới dạng hiệu của các dòng thành phần của xung lượng theo phương x gửi qua các mặt phẳng $x = x_1$ và $x = x_2$ lần lượt đi qua khá xa ở phía sau và phía trước vật. Nếu viết ba thành phần của vận tốc dưới dạng $U + v_x$, v_y, v_z chúng ta sẽ tìm được cho thành phần Π_{xx} của mật độ dòng xung lượng biểu thức sau

$$\Pi_{xx} = p + \rho(U + v_x)^2$$

do đó lực cản bằng

$$F_x = \left(\iint\limits_{x=x_2} - \iint\limits_{x=x_1} \right) \left[p + \rho(U + v_x)^2 \right] dydz. \tag{47-1}$$

Vì vết mảnh, nên có thể bỏ qua (trong tích phân lấy trên mặt phẳng $x = x_1$) tích phân lấy theo tiết diện của dòng chảy, và như vậy, tại mọi nơi chỉ giới hạn ở việc lấy tích phân theo miền ngoài vết, nhưng ở ngoài miền đó chuyển động có thế và ta có phương trình Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{v})^2 = p_o + \frac{\rho U^2}{2},$$

từ đó

$$p = p_o - \rho U v_x - \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \tag{47-2}$$

Ở đây không được bỏ qua các số hạng toàn phương (như đã làm ở §21), vì chính những số hạng này xác định lực cản cần tìm trong trường hợp đã cho. Thay (47-2) vào (47-1), ta có

$$F_x = \left(\iint_{x=x_2} - \iint_{x=x_1} \right) \left[p_o + \rho U^2 + \rho U v_x + \frac{\rho}{2}(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2 \right] dydz.$$

Hiệu các tích phân của đại lượng không đổi $p_o + \rho U^2$ bằng không; hiệu các tích phân của $\rho U v_x$ cũng bằng không, vì lượng chất lỏng $\int\int \rho v_x dydz$ đi qua các mặt phẳng phía trước và phía sau phải bằng nhau (trong phép gần đúng đang xét, ta bỏ qua lượng chất lỏng đi qua tiết diện của vết). Tiếp thêm, nếu dịch mặt phẳng $x = x_2$ đi đủ xa về phía trước vật, thì trên mặt phẳng đó vận tốc v có những giá trị đủ nhỏ, do đó ta có thể bỏ qua tích phân $[\rho(v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)]/2$ lấy theo mặt phẳng này. Cuối cùng, chất lỏng chảy quanh một cánh dạng thuôn, vận tốc v_x ở bên ngoài vết nhỏ so với v_y và v_z. Do đó, trong tích phân lấy theo mặt phẳng $x = x_1$, có thể bỏ qua v_x^2 so với $v_y^2 + v_z^2$. Như vậy, ta thu được:

$$F_x = \frac{\rho}{2} \iint (v_y^2 + v_z^2)\, dydz, \qquad (47\text{-}3)$$

ở đây tích phân được lấy trên mặt phẳng $x = \text{const}$ nằm rất xa ở phía sau vật và tiết diện của vết được loại khỏi miền lấy tích phân [1].

Lực cản trên một cánh có dạng thuôn tính được như vậy có thể được biểu diễn qua lưu số của vận tốc Γ, lưu số này cũng xác định lực nâng. Muốn vậy, trước hết ta có nhận xét là, tại khoảng cách đủ lớn đối với vật, vận tốc phụ thuộc yếu vào tọa độ x, điều đó cho phép coi $v_y(y,z)$, $v_z(y, z)$ như vận tốc của một chuyển động hai chiều nào đó, coi rằng vận tốc này hoàn toàn không phụ thuộc vào x. Để tiện, ta đưa vào hàm dòng (§10) làm một đại lượng bổ trợ, do đó $v_z = \partial\psi/\partial y$, $v_y = -\partial\psi/\partial z$. Như vậy

[1] Công thức (47-3) có thể gây ấn tượng là, bậc của các vận tốc v_y, v_z hoàn toàn không giảm với khoảng cách x. Thực vậy, điều đó cứ như thế chừng nào bề dầy của vết còn nhỏ so với bề rộng của nó, giả thiết này đã được đặt ra khi rút ra công thức (47-3). Tại những khoảng cách rất lớn ở phía sau cánh, vết cuối cùng nở rộng đến mức tiết diện của nó trở nên gần tròn. Công thức (47-3) không áp dụng được ở đây, và v_y, v_z sẽ giảm nhanh khi khoảng cách tăng.

$$F_x = \frac{\rho}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right]dydz,$$

trong đó việc lấy tích phân theo tọa độ thẳng đứng y được tiến hành từ $+\infty$ đến y_1 và từ y_2 đến $-\infty$ (y_1, y_2 là những tọa độ của các biên giới phía trên và phía dưới của vết, xem hình 26). Vì chuyển động có thế ở bên ngoài vết (rot $\mathbf{v} = 0$), nên ta có

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0.$$

Áp dụng công thức Green hai chiều cho tích phân trên, ta thu được:

$$F_x = -\frac{\rho}{2}\oint\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial n}dl,$$

ở đây tích phân được lấy trên công tua bao miền lấy tích phân trong tích phân ban đầu ($\partial/\partial n$ là đạo hàm lấy theo pháp tuyến ngoài với công tua). Tại vô cùng, $\Psi = 0$, và như vậy cần lấy tích phân trên công tua của tiết diện ngang của vết (của tiết diện cắt bởi mặt phẳng y, z). Kết quả ta có:

$$F_x = \frac{\rho}{2}\int\Psi\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_1\right]dz.$$

Ở đây cần lấy tích phân theo bề rộng dz của vết, và hiệu giữa hai móc vuông là bước nhảy của đạo hàm $\partial\Psi/\partial y$ khi đi qua vết. Vì $\partial\Psi/\partial y = v_z = -\partial\varphi/\partial z$, nên ta có:

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_1 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_1 = \frac{d\Gamma}{dz},$$

do đó

$$F_x = \frac{\rho}{2}\int\Psi\frac{d\Gamma}{dz}dz.$$

Cuối cùng nếu dùng công thức đã biết từ lý thuyết về thế

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)_1\right]\ln r\,dl,$$

trong đó tích phân được lấy trên một công tua phẳng nào đó, r là khoảng

cách từ dl đến điểm tại đó ta tìm giá trị của Ψ, còn ở trong dấu ngoặc vuông là bước nhảy đã cho của đạo hàm của Ψ theo phương pháp tuyến với công tua [1]. Trong trường hợp của chúng ta, công tua lấy tích phân là một đoạn của trục z, do đó ta có thể viết cho các giá trị của hàm $\Psi(y, z)$ ở trên trục z:

$$\Psi(0,z) = \frac{1}{2\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_2\right]\ln|z-z'|\,dz' =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\ln|z-z'|\,dz'.$$

Cuối cùng, nếu thay hệ thức này vào trong F_x, ta sẽ thu được cho lực cản cảm ứng công thức sau:

$$F_x = -\frac{\rho}{2\pi}\int_0^l\int_0^l\frac{d\Gamma(z)}{dz}\frac{d\Gamma(z')}{dz'}\ln|z-z'|\,dzdz' \qquad (47\text{-}4)$$

(*L. Prandtl*, 1918). Độ dài của sải cánh được ký hiệu ở đây là $l_x = l$, và gốc của z được chọn tại một đầu cánh.

Nếu nhân tất cả các kích thước theo trục z với cùng một số lần (giữ các Γ không đổi), thì tích phân (47-4) sẽ không thay đổi [2]. Điều đó chứng tỏ rằng, lực cản cảm ứng toàn phần của cánh không thay đổi, xét về bậc độ lớn, khi sải cánh tăng. Nói một cách khác, lực cản cảm ứng tính cho một đơn vị độ dài của cánh giảm khi độ dài này tăng [3]. Khác với lực cản, lực nâng toàn phần

[1] Công thức này xác định thế gây bởi một công tua phẳng có mật độ tính bằng

$$\frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_1\right]$$

ở trong lý thuyết về thế hai chiều.

[2] Để tránh hiểu nhầm, ta có một nhận xét là, khi đơn vị đo độ dài thay đổi, lôga ở dưới dấu tích phân tăng một hằng số, điều đó không quan trọng. Thực vậy, tích phân, khác với tích phân đã viết ở chỗ $\ln|z-z'|$ đã được thay bằng const, vẫn bằng không, vì $\int\frac{d\Gamma}{dz}\cdot dz = \Gamma| = 0$ (trên các bờ vết $\Gamma = 0$).

[3] Tại giới hạn, khi sải cánh tiến đến vô cùng, lực cản cảm ứng tính cho một đơn vị độ dài bằng không. Thực tế, khi đó còn lại lực cản không lớn, xác định bởi lưu lượng chất lỏng trong vết (nghĩa là bởi tích phân $\iint v_x dydz$), mà chúng ta →

$$F_y = -\rho U \int \Gamma \, dz \tag{47-5}$$

tăng gần như tỷ lệ với sải cánh, và nó không đổi nếu xét cho một đơn vị độ dài.

Phương pháp sau đây tiện lợi cho việc tính toán thực tế các tích phân (47-4) và (47-5). Thay cho tọa độ z, ta đưa vào biến mới θ xác định bởi

$$z = \frac{l}{2}(1 - \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{47-6}$$

Sự phân bố của lưu số vận tốc được cho dưới dạng chuỗi lượng giác:

$$\Gamma = -2Ul\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta. \tag{47-7}$$

Ở đây, điều kiện $\Gamma = 0$ được thỏa mãn tại các đầu cánh, nghĩa là với $z = 0, l$ hay $\theta = 0, \pi$.

Thay biểu thức này vào trong công thức (47-5) và lấy tích phân (khi đó có xét đến tính trực giao tương hỗ của các hàm $\sin\theta$ và $\sin n\theta$ với $n \neq 1$), ta sẽ thu được:

$$F_y = \frac{\rho U^2}{2} \pi l^2 A_1.$$

Như vậy, lực nâng chỉ phụ thuộc vào số hạng thứ nhất ở trong khai triển (47-7). Đối với hệ số nâng (47-2), ta có:

$$C_y = \pi\lambda A_1 \tag{47-8}$$

trong đó ta đã đưa vào tỷ số $\lambda = l/l_x$ giữa sải cánh và bề rộng của nó.

Để tính lực cản, ta viết lại công thức (47-4) và tích phân một lần bằng phương pháp phân đoạn:

$$F_x = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^l \int_0^l \Gamma(z) \frac{d\Gamma(z')}{dz'} \frac{dz dz'}{z - z'}. \tag{47-9}$$

Như thấy được dễ dàng, tích phân ở trên dz' ở đây phải được tính theo

→ đã bỏ qua khi rút ra công thức (47-3); lực cản này bao gồm cả lực ma sát, cũng như phần còn lại của lực cản liên quan đến sự tiêu tán ở trong vết.

nghĩa giá trị chính của nó. Phép tính sơ cấp với sự thay (47-7) [1] dẫn đến công thức sau cho hệ số cản cảm ứng:

$$C_x = \pi\lambda \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2. \tag{47-10}$$

Ta định nghĩa, hệ số cản của cánh là

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 l_x l_z}. \tag{47-11}$$

Cũng giống như hệ số nâng, hệ số cản được tính cho diện tích của cánh trong mặt phẳng.

BÀI TẬP

Xác định giá trị cực tiểu của lực cản cảm ứng, lực này có thể đạt được khi đã cho lực nâng và độ sải cánh $l_z = l$.

Giải. Từ các công thức (47-8) và (47-10), ta thấy rõ rằng, giá trị cực tiểu C_x và C_y đã cho (nghĩa là với A_1 đã cho) đạt được nếu, tất cả các A_n bằng không với $n \neq 1$. Khi đó

$$C_{x\min} = \frac{1}{\pi\lambda} C_y^2. \tag{1}$$

Còn sự phân bố lưu số theo sải cánh được cho bởi công thức

$$\Gamma = -\frac{4}{\pi l} U l_x C_y \sqrt{z(l-z)}. \tag{2}$$

Nếu độ dài sải cánh đủ lớn, thì chuyển động của chất lỏng ở quanh mỗi tiết diện của cánh tương ứng gần đúng với dòng chảy phẳng quanh một cánh dài vô hạn với cùng prôfin tiết diện đó. Khi đó, ta có thể khẳng định rằng, sự phân bố (2) của lưu số được thực hiện với một dạng elíp của cánh trong mặt phẳng (x,y) với các bán trục $l_x/2$ và $l/2$.

[1] Lấy tích phân theo dz', ta phải tính tích phân (giá trị chính)

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \frac{\pi \sin n\theta}{\sin\theta}.$$

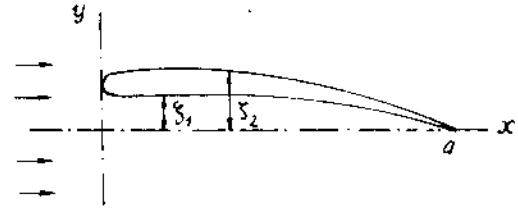
Đối với việc lấy tích phân theo dz, ta dùng kết quả:

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{với} \quad n=m \\ 0 & \text{với} \quad n \neq m. \end{cases}$$

§48. LỰC NÂNG MỘT CÁNH MỎNG

Theo định lý Giukôvxki, bài toán tính lực nâng một cánh rút về bài toán tính lưu số Γ. Bài toán này có thể được giải dưới dạng tổng quát đối với một cánh mỏng có dạng thuôn và sải cánh vô hạn với prôfin tiết diện không đổi dọc theo sải cánh. Phương pháp trình bầy dưới đây là của *M. V. Keldits* và *L. I. Xêđôv* (1939).

Giả sử $y = \zeta_1(x)$ và $y = \zeta_2(x)$ là những phương trình của các phần dưới và phần trên của công tua bao tiết diện (hình 37). Giả thiết rằng prôfin đó mảnh, hơi uốn cong và nghiêng một góc tới so với phương của dòng chảy (so với trục x); nói một cách khác, chính các đại lượng ζ_1 và ζ_2, cũng như các đạo hàm ζ_1' và ζ_2' đều nhỏ, nghĩa là pháp tuyến với công tua tại mọi nơi đều hướng gần như song song với trục y. Trong những điều kiện đó, có thể coi rằng nhiễu động v của vận tốc chất lỏng gây bởi sự có mặt của cánh, khắp nơi (chỉ trừ miền nhỏ ở gần bờ lượn tròn phía trước của cánh) đều nhỏ so với vận tốc tới U. Điều kiện biên ở trên mặt cánh đòi hỏi $v_y/U = \zeta'$ với $y = \zeta$. Dựa vào những giả thiết đã phát biểu, có thể đòi hỏi những điều kiện đó phải được thỏa mãn không phải với $y = \zeta$ mà với $y = 0$. Khi đó trên đoạn trục hoành giữa $x = 0$ và $x = l_x \equiv a$ phải có:



Hình 37

$$v_y = U\zeta'_2(x) \quad \text{với} \quad y \to +0\,, \quad v_y = U\zeta'_1(x) \quad \text{với} \quad y \to -0 \qquad (48\text{-}1)$$

Để áp dụng các phương pháp lý thuyết các hàm biến phức, ta đưa vào vận tốc phức $dw/dz = v_x - iv_y$ (xem §10), đó là một hàm giải tích của biến $z = x + iy$. Trong trường hợp đang xét, hàm này phải thỏa mãn trên đoạn $(0, a)$ của trục hoành điều kiện sau

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\frac{dw}{dz} &= -U\zeta_2'(x) \quad \text{với} \quad y \to +0 \\ \operatorname{Im}\frac{dw}{dz} &= -U\zeta_1'(x) \quad \text{với} \quad y \to -0 \end{aligned} \tag{48-2}$$

Để giải bài toán đặt ra, trước hết ta biểu diễn trường các vận tốc $v(x,y)$ cần tìm dưới dạng tổng $\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-$ của hai phân bố có các tính chất đối xứng sau

$$\begin{aligned} v_x^-(x, -y) &= v_x^-(x, y), \qquad v_y^-(x, -y) = -v_y^-(x, y), \\ v_x^+(x, -y) &= -v_x^+(x, y), \qquad v_y^+(x, -y) = v_y^+(x, y). \end{aligned} \tag{48-3}$$

Các tính chất này (đối với mỗi phân bố $\mathbf{v}^+$ và $\mathbf{v}^-$ xét riêng lẻ) không mâu thuẫn với các phương trình liên tục và phương trình của dòng thế, và do bài toán là tuyến tính nên có thể tìm các phân bố này độc lập với nhau.

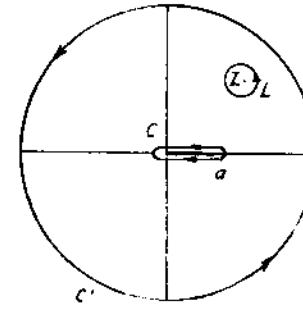
Ta cũng lần lượt biểu diễn vận tốc phức dưới dạng tổng $w' = w'_+ + w'_-$ và các điều kiện biên ở trên đoạn $(0, a)$ cho cả hai số hạng dưới dạng:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\, w'_+\big|_{y\to+0} &= \operatorname{Im}\, w'_+\big|_{y\to-0} = -\frac{U}{2}(\zeta_1' + \zeta_2'), \\ \operatorname{Im}\, w'_-\big|_{y\to+0} &= \operatorname{Im}\, w'_-\big|_{y\to-0} = \frac{U}{2}(\zeta_1' - \zeta_2'), \end{aligned} \tag{48-4}$$

Hàm w'_- có thể được xác định dựa vào công thức Cauchy:

$$w'_-(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{w'_-(\xi)}{\xi - z}\,d\xi,$$

trong đó tích phân được lấy trong mặt phẳng biến phức ξ theo đường tròn L có bán kính nhỏ với tâm tại điểm $\xi = z$ (hình 38). Công tua L có thể được thay thế bởi một vòng tròn C' có bán kính vô cùng lớn và một công tua C quay theo chiều kim đồng hồ; công tua này có thể được biến dạng thành đoạn (O, a) đi lại hai lần. Tích phân lấy theo C' bằng không, vì $w'(z)$ bằng



Hình 38

không tại vô cùng. Còn tích phân lấy trên C cho ta biểu thức sau:

$$w'_- = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi)-\zeta'_1(\xi)}{\xi - z}d\xi. \qquad (48\text{-}5)$$

Khi đó ta đã dùng hai giá trị giới hạn (48-4) của phần ảo w'_- ở trên đoạn $(0, a)$ và theo các điều kiện đối xứng (48-3) phần thực của w'_- ở trên đoạn này không có bước nhảy.

Để tìm w'_+, cần áp dụng công thức Cauchy không phải cho chính hàm đó, mà cho tích phân $w'_+(z)\, g(z)$, với

$$g(z) = \sqrt{\frac{z}{z-a}}.$$

Căn bậc hai lấy với dấu + khi $z = x > a$. Trên đoạn $(0, a)$ của trục thực, hàm $g(z)$ là thuần ảo và bị gián đoạn:

$$g(x + i0) = -\,g(x - i0) = -i\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Do các tính chất đó của $g(z)$, nên rõ ràng là phần ảo của tích gw'_+ có gián đoạn ở trên đoạn (O, a), còn phần thực thì liên tục, tương tự như đã xảy ra với hàm w'_-. Do đó, hoàn toàn giống như khi rút ra công thức (48-5), ta thu được:

$$w'_+(z)\, g(z) = -\frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta'_1(\xi)+\zeta'_2(\xi)}{\xi - z}\, g(\xi + i0)\, d\xi.$$

Kết hợp các biểu thức đã thu được, cuối cùng chúng ta tìm được công thức xác định sự phân bố vận tốc ở quanh một cánh mỏng:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{U}{2\pi}\sqrt{\frac{z-a}{z}}\int_0^a \frac{\zeta'_1(\xi)+\zeta'_2(\xi)}{\xi - z}\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}\, d\xi - \frac{U}{2\pi}\int_0^a \frac{\zeta'_2(\xi)-\zeta'_1(\xi)}{\xi - z}d\xi. \qquad (48\text{-}6)$$

Ở gần bờ phía trước lượn tròn (nghĩa là với $z \to 0$), nói chung biểu thức này trở nên vô hạn, vì sự gần đúng đã xét không thích hợp trong miền này. Còn ở gần bờ đuôi nhọn phía sau (nghĩa là với $z \to a$), số hạng

thứ nhất trong (48-6) là hữu hạn; còn số hạng thứ hai, nói chung, trở nên vô hạn, nhưng chỉ là vô hạn lôga [1]. Sự kỳ dị lôga này là do tính chất của phép gần đúng đã dùng và biến mất khi nghiên cứu chính xác hơn; theo điều kiện Tsaplyghin không có sự phân kỳ thuộc loại lũy thừa ở bờ đuôi. Điều kiện này được thực hiện bằng một phép chọn thích hợp hàm $g(z)$ đã dùng trước đây.

Công thức (48-6) cho phép xác định trực tiếp lưu số vận tốc Γ ở quanh prôfin của cánh. Theo quy tắc chung (xem §10), Γ được xác định bằng thặng dư của hàm $w'(z)$ đối với điểm $z = 0$, đó là một cực đơn. Dễ dàng tìm được thặng dư đó như hệ số của $1/z$ trong khai triển của $w'(z)$ theo các lũy thừa của $1/z$ ở gần điểm xa vô hạn:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \cdots,$$

và thu được cho Γ công thức đơn giản

$$\Gamma = U\int_0^a (\zeta_1' + \zeta_2')\sqrt{\frac{\xi}{a-\xi}}\,d\xi. \tag{48-7}$$

Có nhận xét là, ở đây chỉ xuất hiện tổng các hàm ζ_1 và ζ_2. Có thể nói rằng, lực nâng không thay đổi, nếu ta thay cánh mỏng bằng một bản uốn cong, có dạng cho bởi hàm $(\zeta_1 + \zeta_2)/2$.

Chẳng hạn, đối với một cánh có dạng một bản phẳng, với sải vô hạn nằm nghiêng dưới một góc tới nhỏ α, ta có: $\zeta_1 = \zeta_2 = \alpha(a - x)$, và công thức (48-7) cho ta $\Gamma = -\pi\alpha a U$. Hệ số lực nâng của một cánh như thế bằng

$$C_y = \frac{-\rho U\Gamma}{\frac{1}{2}\rho U^2 a} = 2\pi a.$$

---

[1] Sự phân kỳ này không xảy ra nếu ở gần bờ đuôi, ξ_1 và ξ_2 bằng không như $(a - x)^k$, $k > 1$, nghĩa là nếu điểm góc của công tua ở bờ đuôi là một điểm lùi.

Chương V

SỰ DẪN NHIỆT TRONG CHẤT LỎNG

§49. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VỀ SỰ TRUYỀN NHIỆT

Ở cuối §2, ta đã nói rằng, một hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực phải chứa năm phương trình. Đối với chất lỏng, trong đó có các quá trình dẫn nhiệt và ma sát nội xảy ra, một trong các phương trình đó, cũng như trước, là phương trình liên tục; các phương trình Euler được thay bằng các phương trình Navier - Stokes. Còn đối với phương trình thứ năm, trong trường hợp của chất lỏng lý tưởng thì đó là phương trình bảo toàn entrôpi (2-6). Trong chất lỏng nhớt, phương trình này dĩ nhiên không còn đúng nữa, vì trong đó có xảy ra những quá trình tiêu tán năng lượng không thuận nghịch.

Trong chất lỏng lý tưởng, định luật bảo toàn năng lượng được biểu diễn bởi phương trình (6-1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right].$$

Vế trái biểu diễn vận tốc biến thiên năng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng, còn vế phải là div của mật độ năng thông. Trong chất lỏng nhớt, định luật bảo toàn năng lượng, dĩ nhiên, vẫn đúng: độ biến thiên năng lượng toàn phần của chất lỏng ở trong một thể tích nào đó (trong một giây), cũng như trước, phải bằng năng thông toàn phần gửi qua biên của thể tích đó. Tuy nhiên, mật độ năng thông bây giờ có một dạng khác. Trước hết, ngoài thông lượng $\rho\mathbf{v}(v^2/2 + w)$ có liên quan đến sự

truyền đơn giản của khối lượng chất lỏng khi dịch chuyển, còn có một thông lượng liên quan đến ma sát nội. Thông lượng thứ hai này được biểu diễn bằng vectơ ($\mathbf{v}\sigma'$) có các thành phần $v_i\sigma'_{ik}$ (xem §16). Tuy nhiên, thông lượng này không tận dụng hết tất cả các số hạng phụ trong năng thông.

Nếu nhiệt độ của chất lỏng không phải là không thay đổi trong thể tích của nó, thì ngoài hai cơ chế truyền năng lượng đã kể, còn có sự truyền nhiệt lượng bằng *sự dẫn nhiệt*. Ta hiểu sự dẫn nhiệt là sự truyền năng lượng trực tiếp từ các miền có nhiệt độ cao hơn đến miền có nhiệt độ thấp hơn. Sự truyền này không liên quan đến chuyển động vĩ mô và xảy ra cả trong chất lỏng đứng yên.

Ta ký hiệu $\mathbf{q}$ là mật độ thông lượng nhiệt được truyền đi do sự dẫn nhiệt. Thông lượng $\mathbf{q}$ có liên quan một cách xác định đến sự biến thiên của nhiệt độ ở trong chất lỏng. Sự phụ thuộc này có thể được viết ngay trong những trường hợp gradiên khi nhiệt độ ở trong chất lỏng không quá lớn; thực tế, trong những hiện tượng dẫn nhiệt hầu như bao giờ ta cũng gặp những trường hợp như thế. Khi đó ta có thể khai triển $\mathbf{q}$ thành chuỗi theo các lũy thừa gradiên nhiệt độ, và giới hạn ở các số hạng khai triển bậc nhất. Số hạng không đổi trong phép khai triển này rõ ràng bằng không, vì $\mathbf{q}$ phải bằng không cùng với ∇T. Như vậy, ta thu được:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \tag{49-1}$$

Hằng số κ được gọi là *độ dẫn nhiệt*. Độ dẫn này bao giờ cũng dương, như có thể thấy ngay được từ sự kiện là, năng thông phải hướng từ những miền có nhiệt độ cao tới những miền có nhiệt độ thấp hơn, nghĩa là $\mathbf{q}$ và ∇T phải có hướng ngược chiều nhau. Hệ số κ nói chung là hàm của nhiệt độ và áp suất.

Như vậy, mật độ năng thông toàn phần trong chất lỏng khi có độ nhớt và hiện tượng dẫn nhiệt sẽ bằng tổng:

$$\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\sigma')-\kappa\nabla T.$$

Phù hợp với điều đó, định luật bảo toàn năng lượng được biểu diễn bởi phương trình

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\sigma')-\kappa\nabla T\right]. \qquad (49\text{-}2)$$

Phương trình này có thể được chọn là phương trình cuối cùng của hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực học cho chất lỏng nhớt. Tuy nhiên, để tiện lợi, có thể viết phương trình đó dưới một dạng khác, bằng cách biến đổi nó dựa vào các phương trình chuyển động. Muốn vậy, ta tính đạo hàm theo thời gian của năng lượng trong một đơn vị thể tích chất lỏng, xuất phát từ các phương trình chuyển động. Ta có:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=\frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{v}\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Thay vào đây đạo hàm $\partial\rho/\partial t$ lấy từ phương trình liên tục và $\partial\mathbf{v}/\partial t$ lấy từ phương trình Navier - Stokes, ta có:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{v^2}{2}\,\mathrm{div}\,\rho\mathbf{v}-\rho(\mathbf{v}\nabla)\frac{v^2}{2}-\mathbf{v}\nabla p+v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}+\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon\,\mathrm{div}\,\rho\mathbf{v}.$$

Bây giờ ta dùng hệ thức nhiệt động lực học

$$d\varepsilon=Tds-pdV=Tds+\frac{p}{\rho^2}d\rho,$$

từ đó

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=T\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{p}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}=T\frac{\partial s}{\partial t}-\frac{p}{\rho^2}\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}).$$

Thay biểu thức này và đưa vào hàm nhiệt $w=\varepsilon+p/\rho$, ta rút ra:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\left(w+\frac{v^2}{2}\right)\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})-\rho(\mathbf{v}\nabla)\frac{v^2}{2}-\mathbf{v}\nabla p+\rho T\frac{\partial s}{\partial t}+v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}.$$

Tiếp theo, từ hệ thức nhiệt động lực học $dw=Tds+dp/\rho$, ta rút ra

$$\nabla p=\rho\nabla w-\rho T\nabla s.$$

Số hạng cuối ở vế phải của đẳng thức có thể được viết dưới dạng

$$v_i\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}(v_i\sigma'_{ik})-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\equiv\mathrm{div}(\mathbf{v}\sigma')-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Thay các biểu thức này, đồng thời thêm và bớt div $(\kappa\nabla T)$, ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{v}\left(w+\frac{v^2}{2}\right)-(\mathbf{v}\sigma')-\kappa\nabla T\right]+$$
$$+\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)-\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\operatorname{div}(\kappa\nabla T). \qquad (49\text{-}3)$$

So sánh biểu thức này của đạo hàm năng lượng trong một đơn vị thể tích với biểu thức (49-2), ta tìm được phương trình sau:

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\operatorname{div}(\kappa\nabla T). \qquad (49\text{-}4)$$

Phương trình này được gọi là *phương trình tổng quát về sự truyền nhiệt*. Khi không có độ nhớt và sự dẫn nhiệt, vế phải của nó bằng không và ta tìm được phương trình bảo toàn entrôpi (2-6) cho chất lỏng lý tưởng.

Cần chú ý đến sự giải thích sau đây cho phương trình (49-4). Biểu thức của vế trái chính là đạo hàm toàn phần *ds/dt* của entrôpi đối với thời gian, nhân với ρT: Đại lượng *ds/dt* xác định sự biến thiên của entrôpi của một đơn vị khối lượng dịch chuyển trong không gian; do đó *T.ds/dt* là nhiệt lượng mà đơn vị khối lượng đó nhận được trong một đơn vị thời gian, còn ρT. *ds/dt* là nhiệt lượng nhận dược tính cho đơn vị thể tích. Vì thế, (49-4) chứng tỏ rằng nhiệt lượng do một đơn vị thể tích chất lỏng nhận dược bằng

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\operatorname{div}(\kappa\nabla T).$$

Số hạng thứ nhất biểu diễn năng lượng tiêu tán dưới dạng nhiệt do có độ nhớt, còn số hạng thứ hai là nhiệt lượng mang bởi thể tích dang xét do sự dẫn nhiệt.

Ta khai triển số hạng thứ nhất ở trong vế phải của (49-4) bằng cách thay vào trong đó biểu thức (15-3) của σ'_{ik}. Ta có:

$$\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\eta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}.$$

Dễ dàng thấy dược rằng, số hạng thứ nhất có thể viết dưới dạng

$$\frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2.$$

Còn trong số hạng thứ hai thì:

$$\xi \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} = \zeta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \equiv \zeta (\text{div } \mathbf{v})^2.$$

Như vậy, phương trình (49-4) có dạng

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \text{div}(\kappa \nabla T) + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta (\text{div } \mathbf{v})^2. \quad (49\text{-}5)$$

Do các quá trình dẫn nhiệt và quá trình ma sát nội là không thuận nghịch, nên entrôpi của chất lỏng tăng. Dĩ nhiên, ở đây không xét đến entrôpi của mỗi phần tử thể tích chất lỏng, mà xét entrôpi toàn phần của toàn bộ chất lỏng, nó bằng tích phân $\int \rho s \, dV$. Sự biến thiên của entrôpi trong một đơn vị thời gian được cho bởi đạo hàm

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho s \, dV = \int \frac{\partial (\rho s)}{\partial t} dV.$$

Nếu dựa vào phương trình liên tục và phương trình (49-5), ta có:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} = \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -s \text{div } \rho \mathbf{v} - \rho \mathbf{v} \nabla s + \frac{1}{T} \text{div}(\kappa \nabla T) +$$

$$+ \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\zeta}{T} (\text{div } \mathbf{v})^2.$$

Tổng của hai số hạng đều bằng – div(sρv). Tích phân lấy theo thể tích của số hạng này được biến thành tích phân lấy theo mặt của thông lượng entrôpi sρv. Nếu xét một thể tích vô hạn của chất lỏng đứng yên tại vô cùng, ta có thể mở rộng mặt biên giới tới vô cùng; khi đó biểu thức ở dưới dấu tích phân ở trong tích phân mặt bằng không và tích phân biến mất. Tích phân của số hạng thứ ba được biến đổi như sau:

$$\int \frac{1}{T} \text{div}(\kappa \nabla T) dV = \int \text{div} \left(\frac{\kappa \nabla T}{T} \right) dV = \int \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T^2} dV.$$

Nếu coi rằng nhiệt độ chất lỏng ở vô cùng tiến đủ nhanh đến một giới hạn không đổi, ta sẽ biến đổi tích phân thứ nhất thành tích phân lấy theo mặt ở xa vô cùng, trên mặt đó $\nabla T = 0$, do đó tích phân bằng không.

Kết quả ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s\, dV = \int \frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2}\, dV + \int \frac{\eta}{2T}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV + \\ + \int \frac{\zeta}{T}(\operatorname{div} \mathbf{v})^2 dV. \tag{49-6}$$

Số hạng thứ nhất biểu diễn độ tăng của entrôpi do sự dẫn nhiệt, hai số hạng còn lại biểu diễn độ tăng của nó do ma sát nội.

Entrôpi chỉ có thể tăng, nghĩa là tổng (49-6) phải dương. Mặt khác, trong mỗi số hạng của tổng này, biểu thức dưới dấu tích phân có thể khác không cả khi hai tích phân khác bằng không. Do đó, mỗi tích phân đó bao giờ cũng phải dương. Từ đó suy ra rằng, ngoài κ và η dương như ta đã biết, cả hệ số thứ hai ζ của độ nhớt cũng dương.

Khi rút ra công thức (49-1), ta đã hiểu ngầm rằng, thông lượng nhiệt chỉ phụ thuộc vào gradiên của nhiệt độ và không phụ thuộc vào gradiên của áp suất. Giả thiết này, không hiển nhiên (a priori [1]), bây giờ có thể được biện hộ như sau. Nếu $\mathbf{q}$ chứa một số hạng tỷ lệ với ∇p, thì trong biểu thức (49-6) của độ biến thiên entrôpi còn có thêm một số hạng chứa tích $\nabla p \nabla T$ dưới dấu tích phân. Vì tích này có thể dương hoặc âm, nên đạo hàm của entrôpi theo thời gian sẽ không cốt yếu dương, điều đó không thể được.

Cuối cùng, cần phải chính xác hóa thêm những lập luận đã trình bày ở trên dưới một khía cạnh sau. Nói một cách chặt chẽ, trong một hệ không cân bằng nhiệt động lực, chẳng hạn như một khối chất lỏng có gradiên vận tốc và nhiệt độ, các định nghĩa thông thường của các đại lượng nhiệt động lực học mất ý nghĩa và cần được chính xác hóa thêm. Trước hết, các định nghĩa đã hiểu ngầm ở đây bao gồm ở chỗ, các đại lượng ρ, ε, $\mathbf{v}$ được định nghĩa như trước: ρ và $\rho\varepsilon$ là khối lượng và nội năng chứa trong một đơn vị thể tích, còn $\mathbf{v}$ là xung lượng của một đơn vị khối lượng chất lỏng. Các đại lượng nhiệt động lực học khác khi đó được định nghĩa như các hàm của ρ và ε ở trạng thái cân bằng nhiệt. Tuy nhiên, khi đó entrôpi $s = s(\varepsilon, \rho)$ không còn là entrôpi nhiệt động lực thực nữa: tích phân $\int \rho s\, dV$, nói một cách chặt chẽ, sẽ không là một đại lượng

[1] A priori: một cách tiên nghiệm (ND).

phải tăng theo thời gian. Tuy nhiên, ta dễ dàng thấy rằng, với các gradiên nhỏ của vận tốc và nhiệt độ, trong phép gần đúng đang xét ở đây, s trùng với entrôpi thực.

Thực vậy, khi có mặt các gradiên, thì nói chung, trong entrôpi có xuất hiện các số hạng phụ (đối với $s(\rho,\varepsilon)$) có liên quan đến các gradiên đó. Tuy nhiên, chỉ các số hạng tuyến tính đối với các gradiên mới có thể ảnh hưởng đến các kết quả đã trình bày ở trên (chẳng hạn, số hạng tỷ lệ với vô hướng div v). Các số hạng như thế, tất nhiên, có thể lấy những giá trị dương cũng như âm. Nhưng chúng phải cốt yếu âm, vì giá trị cân bằng $s = s(\rho,\varepsilon)$ là giá trị cực đại khả dĩ. Do đó, khai triển của entrôpi theo lũy thừa của những gradiên nhỏ chỉ có thể chứa (ngoài số hạng bậc không) những số hạng bắt đầu từ bậc hai.

Những nhận xét tương tự thực ra cũng đã được tiến hành từ §15, vì sự có mặt của gradiên vận tốc cũng đã là sự không cân bằng nhiệt động lực. Cụ thể là, áp suất p ở trong biểu thức của tenxơ mật độ dòng xung lượng trong chất lỏng nhớt cần được hiểu là hàm $p = p(\varepsilon,\rho)$ ở trong trạng thái cân bằng nhiệt. Khi đó, nói một cách chặt chẽ, p không còn là áp suất theo nghĩa thông thường của thuật ngữ đó, nghĩa là nó không trùng với lực vuông góc tác dụng lên phần tử diện tích. Khác với điều đã nói ở trên về entrôpi, ở đây sự khác nhau đã thể hiện ngay trong các đại lượng bậc một đối với gradiên nhỏ: ta đã nhận thấy rằng, trong thành phần vuông góc của lực, ngoài p ra, còn xuất hiện một số hạng tỷ lệ với div v (trong chất lỏng không nén được, số hạng này không có, và ở đó sự khác nhau chỉ xuất hiện ở những số hạng có bậc cao hơn).

Như vậy, ba hệ số ζ, η, κ có mặt trong hệ phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt dẫn nhiệt xác định hoàn toàn những tính chất thủy động lực của chất lỏng trong phép gần đúng đang xét, bao giờ cũng áp dụng được (nghĩa là phép gần đúng bỏ qua những đạo hàm bậc cao hơn của vận tốc, nhiệt độ, v. v...) theo các tọa độ. Việc đưa vào trong những phương trình các số hạng bổ sung nào đó (chẳng hạn đưa vào trong mật độ dòng khối lượng các số hạng tỷ lệ với gradiên mật độ hay nhiệt độ) là không có ý nghĩa vật lý và trong trường hợp tốt nhất cũng chỉ có nghĩa là một sự thay đổi định nghĩa của các đại lượng cơ bản; đặc biệt, vận tốc

không trùng với xung lượng của một đơn vị khối lượng chất lỏng [1].

§50. SỰ DẪN NHIỆT TRONG CHẤT LỎNG KHÔNG NÉN ĐƯỢC

Phương trình tổng quát về sự truyền nhiệt dưới dạng (49-4) hay (49-5) có thể được đơn giản đi đáng kể trong các trường hợp khác nhau.

Nếu vận tốc chuyển động của chất lỏng nhỏ so với vận tốc âm, thì những độ biến thiên của áp suất gây bởi chuyển động sẽ rất nhỏ đến mức ta có thể bỏ qua sự biến thiên của mật độ (và các đại lượng nhiệt động khác) do chúng gây ra. Tuy nhiên chất lỏng nung nóng không đều khi đó sẽ không còn là hoàn toàn "không nén được" theo nghĩa đã hiểu ở trên. Vấn đề là ở chỗ, mật độ còn thay đổi do ảnh hưởng của sự biến thiên nhiệt độ; nói chung, người ta không thể bỏ qua sự biến thiên của nhiệt độ, do đó cả khi vận tốc đủ nhỏ, thì mật độ của một chất lỏng nung nóng không đều cũng vẫn không được coi là không thay đổi. Như vậy, khi tính đạo hàm của các đại lượng nhiệt động học trong trường hợp này, cần phải coi áp suất không đổi, nhưng không được coi mật độ là không đổi. Chẳng hạn ta có:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \nabla T,$$

và vì $T(\partial s/\partial T)_p$ là nhiệt dung riêng đẳng áp c_p, nên

[1] Trong trường hợp xấu nhất, việc đưa vào những số hạng như thế cũng có thể phá hủy các định luật bảo toàn cần thiết. Cần nhớ rằng, dù định nghĩa của các đại lượng như thế nào đi nữa thì trong mọi trường hợp, mật độ dòng khối lượng $\mathbf{j}$ phải trùng với xung lượng của một đơn vị khối lượng chất lỏng. Thực vậy, mật độ dòng $\mathbf{j}$ được xác định bởi phương trình liên tục

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0;$$

nếu nhân phương trình trên với $\mathbf{r}$ và lấy tích phân trong toàn bộ thể tích chiếm bởi chất lỏng, ta thu được:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathbf{r}\, dV = \int \mathbf{j}\, dV.$$

và vì tích phân $\int \rho \mathbf{r}\, dV$ xác định vị trí tâm quán tính của khối lượng chất lỏng đã cho, nên rõ ràng là $\int \mathbf{j}\, dV$ là xung lượng của nó.

$$T\frac{\partial s}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad T\nabla s = c_p \nabla T.$$

Phương trình (49-4) có dạng

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T \right) = \operatorname{div}(\kappa \Delta T) + \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \tag{50-1}$$

Để có thể coi mật độ là không đổi trong các phương trình chuyển động của chất lỏng nung nóng không đều thì ngoài điều kiện tỷ số giữa vận tốc của chất lỏng và vận tốc của âm phải nhỏ, còn phải đòi hỏi các hiệu của nhiệt độ trong chất lỏng phải đủ nhỏ. Cần nhấn mạnh rằng, ở đây nói đến chính các giá trị tuyệt đối của các hiệu nhiệt độ, mà không phải của gradiên nhiệt độ. Khi đó ta có thể coi chất lỏng là "không nén được" theo nghĩa hiểu ở trên; đặc biệt phương trình liên tục được viết đơn giản div $\mathbf{v} = 0$. Nếu giả thiết rằng các hiệu nhiệt độ đều nhỏ, ta cũng sẽ bỏ qua cả sự biến thiên của các đại lượng η, κ, c_p do nhiệt độ gây ra, nghĩa là coi chúng không đổi. Viết số hạng $\sigma'_{ik}(\partial v_i/\partial x_k)$ dưới cùng dạng giống như trong (49-5), kết quả ta tìm được phương trình truyền nhiệt trong một chất lỏng không nén được dưới dạng tương đối đơn giản sau:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \tag{50-2}$$

trong đó $\nu = \eta/\rho$ là độ nhớt động và thay cho κ, ta đã đưa vào *độ dẫn* vì nhiệt độ

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_p} \tag{50-3}$$

Phương trình truyền nhiệt có một dạng đặc biệt đơn giản trong chất lỏng đứng yên; trong đó sự truyền năng lượng hoàn toàn do sự dẫn nhiệt. Nếu trong (50-2) bỏ qua những số hạng chứa vận tốc, ta sẽ thu được đơn giản

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \tag{50-4}$$

Trong vật lý toán, phương trình này được gọi là *phương trình truyền nhiệt* hay *phương trình Fourier*. Dĩ nhiên, phương trình này có thể thu được đơn giản hơn rất nhiều, không cần phải dựa vào phương trình

truyền nhiệt tổng quát trong chất lỏng chuyển động. Theo định luật bảo toàn năng lượng, nhiệt lượng hấp thụ trong một thể tích nào đó trong một đơn vị thời gian phải bằng thông lượng toàn phần của nhiệt lượng "đi vào" thể tích đó qua mặt bao nó. Như đã biết, một định luật bảo toàn như thế có thể được biểu diễn dưới dạng "phương trình liên tục" cho nhiệt lượng. Phương trình thu được bằng cách cho nhiệt lượng hấp thụ trong một đơn vị thể tích chất lỏng trong một đơn vị thời gian bằng div của mật độ thông lượng nhiệt lấy dấu ngược lại. Đại lượng thứ nhất bằng $\rho\, c_p(\partial T/\partial t)$; trong biểu thức này phải lấy nhiệt dung riêng c_p, vì dĩ nhiên áp suất phải không đổi trong chất lỏng đứng yên. Cho biểu thức này bằng $-\mathrm{div}\,\mathbf{q} = \kappa\Delta T$, ta thu được đúng phương trình (50-4).

Cần phải chú ý rằng, việc áp dụng được phương trình truyền nhiệt (50-4) cho các chất lỏng thực tế rất hạn chế. Vấn đề là ở chỗ, trong các chất lỏng tồn tại thực trong trọng trường, ngay một gradiên nhiệt độ dù nhỏ thế nào trong một số lớn các trường hợp cũng gây ra một chuyển động đáng kể (gọi là đối lưu, xem §56). Từ đó, thực tế chỉ có thể có một sự phân bố không đều của nhiệt độ trong chất lỏng đứng yên, có chăng, nếu gradiên nhiệt độ hướng ngược chiều với lực trọng trường, hay nếu chất lỏng rất nhớt. Tuy nhiên, việc nghiên cứu phương trình truyền nhiệt dưới dạng (50-4) rất quan trọng, vì một phương trình thuộc loại như thế sẽ mô tả các quá trình dẫn nhiệt trong các vật rắn. Do đó ở đây và ở các tiết §51, §52 ta sẽ nghiên cứu chi tiết hơn phương trình này.

Nếu sự phân bố nhiệt độ trong một môi trường đứng yên nung nóng không đều được giữ không đổi theo thời gian (nhờ các nguồn nhiệt bên ngoài), thì phương trình dẫn nhiệt sẽ có dạng

$$\Delta T = 0. \tag{50-5}$$

Như vậy, sự phân bố dừng nhiệt độ trong môi trường đứng yên được mô tả bởi phương trình Laplace. Trong trường hợp tổng quát hơn, trong đó κ không được coi là không đổi, thì thay cho (50-5), ta có phương trình

$$\mathrm{div}\,(\kappa\nabla T) = 0 \tag{50-6}$$

Nếu trong chất lỏng có các nguồn nhiệt lạ, ta phải thêm vào phương trình truyền nhiệt một số hạng bổ sung thích hợp (chẳng hạn, một nguồn nhiệt như thế có thể là một dòng điện nung nóng). Gọi Q là nhiệt

lượng do các nguồn đó nhả ra trong một đơn vị thể tích và sau một đơn vị thời gian; nói chung Q là hàm của các tọa độ và thời gian. Khi đó điều kiện cân bằng nhiệt lượng, nghĩa là phương trình dẫn nhiệt được viết dưới dạng

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla T + Q \tag{50-7}$$

Ta viết các điều kiện biên cho phương trình dẫn nhiệt, các điều kiện này phải xảy ra tại biên giới của hai môi trường. Trước hết, các nhiệt độ của hai môi trường tại biên giới phải bằng nhau:

$$T_1 = T_2 \tag{50-8}$$

Ngoài ra, thông lượng nhiệt thoát ra từ môi trường thứ nhất phải bằng thông lượng nhiệt đi vào môi trường thứ hai. Nếu chọn hệ tọa độ, tại đó phần biên giới đã cho đứng yên, ta có thể viết điều kiện này dưới dạng

$$\kappa_1 \nabla T_1 \, d\mathbf{f} = \kappa_2 \nabla T_2 \, d\mathbf{f}$$

cho mỗi phần tử $d\mathbf{f}$ của mặt phân giới. Nếu viết

$$\nabla T \, d\mathbf{f} = \frac{\partial T}{\partial n} df,$$

trong đó $\partial T/\partial n$ là đạo hàm của T theo phương pháp tuyến với mặt, ta sẽ thu được điều kiện biên dưới dạng

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \tag{50-9}$$

Nếu trên mặt phân giới có các nguồn nhiệt lạ tỏa ra trong một đơn vị thời gian trên một đơn vị diện tích một nhiệt lượng là $Q^{(s)}$, thì thay cho điều kiện (50-9), ta cần phải viết

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = Q^{(s)}. \tag{50-10}$$

Trong các bài toán vật lý về sự phân bố nhiệt độ với sự có mặt của các nguồn nhiệt, cường độ của các nguồn này thường được cho dưới dạng hàm của nhiệt độ. Nếu hàm $Q(T)$ tăng đủ nhanh khi T tăng, thì sự thiết lập một sự phân bố dừng của nhiệt độ ở trong vật, mà các biên giới của nó được giữ trong những điều kiện đã cho (chẳng hạn ở nhiệt độ đã cho)

không thể xảy ra được. Sự thoát của nhiệt lượng qua mặt ngoài của vật tỷ lệ với một giá trị trung bình nào đó của hiệu nhiệt độ $T - T_o$ giữa vật và môi trường bên ngoài, không phụ thuộc vào quy luật tỏa nhiệt ở bên trong vật. Rõ ràng là, nếu sự tỏa nhiệt tăng đủ nhanh với nhiệt độ, thì sự thoát nhiệt không đủ để thực hiện trạng thái cân bằng.

Trong các điều kiện này có thể xuất hiện *sự nổ do nhiệt*: nếu các tốc độ của phản ứng cháy tỏa nhiệt tăng đủ nhanh với nhiệt độ, và nếu không thể có sự phân bố dừng thì sẽ xuất hiện một sự nung nóng nhanh không dừng của chất và sự tăng tốc phản ứng (*N. N. Xemenov*, 1923). Vận tốc (và cùng với nó là cả cường độ tỏa nhiệt) của các phản ứng cháy nổ phụ thuộc vào nhiệt độ chủ yếu tỷ lệ theo thừa số $\exp(-U/T)$ với năng lượng kích hoạt U lớn. Để nghiên cứu các điều kiện xuất hiện nổ do nhiệt cần khảo sát tiến trình phản ứng khi sự nung nóng chất tương đối nhỏ và, phù hợp với điều đó, người ta khai triển

$$\frac{1}{T} \approx \frac{1}{T_o} - \frac{T - T_o}{T_o^2}.$$

trong đó T_o là nhiệt độ bên ngoài. Như vậy bài toán quy về việc nghiên cứu phương trình dẫn nhiệt với cường độ khối của các nguồn nhiệt có dạng

$$Q = Q_o \exp\{\alpha(T - T_o)\} \qquad (50\text{-}11)$$

(*Đ. A. Frank - Kamenetxki*, 1939) – xem bài tập 1.

BÀI TẬP

1. Các nguồn nhiệt có cường độ khối $Q = Q_o \exp\{\alpha(T - T_o)\}$ được phân bố trong một lớp chất giới hạn bởi hai mặt phẳng song song; các mặt phẳng biên giới được giữ nhiệt độ không đổi. Tìm điều kiện xác định khả năng có thể thiết lập được một sự phân bố dừng của nhiệt độ (*Đ. A. Frank – Kamenetxki*, 1939)[1].

Giải. Phương trình cho sự dẫn nhiệt dừng trong trường hợp đã cho có dạng

$$\kappa \frac{d^2T}{dx^2} = -Q_o\, e^{\alpha(T-T_o)}$$

[1] Chi tiết hơn về vấn đề này có thể xem *Đ. A. Frank – Kamenetxki*. Sự khuếch tán và truyền nhiệt trong động học hóa, *M. Hayka*, 1967.

với các điều kiện biên $T = T_o$ khi $x = 0$ và $x = 2l$ ($2l$ là bề rộng của lớp). Ta đưa vào các biến không thứ nguyên $\tau = \alpha (T - T_o)$ và $\xi = x/l$; khi đó

$$\tau'' + \lambda e^{\tau} = 0, \quad \lambda = \frac{Q_o \alpha l^2}{\kappa}.$$

Lấy tích phân phương trình này một lần (sau khi nhân với $2\tau'$), ta được:

$$\tau'^2 = 2\lambda (e^{\tau_o} - e^{\tau}),$$

trong đó τ_o là một hằng số. Hằng số này rõ ràng là giá trị cực đại của τ. Do sự đối xứng của bài toán, giá trị này phải đạt được ở chính giữa lớp, nghĩa là với $\xi = 1$. Do đó lấy tích phân lần thứ hai, có xét đến điều kiện $\tau = 0$ với $\xi = 0$, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{\tau_o} \frac{d\tau}{\sqrt{e^{\tau_o} - e^{\tau}}} = \int_0^1 d\xi = 1.$$

Lấy tích phân ta được

$$e^{-\tau_o/2} \operatorname{Arch} e^{\tau_o/2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \qquad (1)$$

Hàm $\lambda(\tau_o)$ xác định bởi công thức này có một cực đại $\lambda = \lambda_c$ với giá trị xác định $\tau_o = \tau_{oc}$; nếu $\lambda > \lambda_c$ thì sẽ không tồn tại nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên[1]. Các giá trị hằng số $\lambda_c = 0{,}88$, $\tau_{oc} = 1{,}2$ [2].

2. Một quả cầu được nhúng trong một chất lỏng đứng yên, trong đó có duy trì một gradiên nhiệt độ không đổi. Xác định sự phân bố dừng của nhiệt độ được thiết lập trong chất lỏng và trong quả cầu.

Giải. Sự phân bố nhiệt độ được xác định trong toàn không gian bởi phương trình $\Delta T = 0$ với các điều kiện biên

$$T_1 = T_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$$

với $r = R$ (R là bán kính của quả cầu; các đại lượng với các chỉ số *1* và *2* tương ứng lần lượt với quả cầu và chất lỏng) và với điều kiện $\Delta T = \mathbf{A}$ tại vô cùng ($\mathbf{A}$ là gradiên đã cho của nhiệt độ). Do sự đối xứng của các điều kiện của bài toán, nên $\mathbf{A}$ là vectơ duy nhất có thể xác định được nghiệm cần tìm. Các nghiệm như thế

[1] Với $\lambda < \lambda_c$, trong hai nghiệm của phương trình (1) chỉ có nghiệm nhỏ hơn tương ứng với sự ổn định của nhiệt độ.

[2] Các giá trị tương tự cho một miền cầu (bán kính của nó được lấy làm độ dài l) bằng: $\lambda_c = 3{,}32$, $\tau_{oc} = 1{,}47$. Đối với một bình trụ vô hạn, ta có: $\lambda_c = 2{,}00$, $\tau_{oc} = 1{,}36$.

của phương trình Laplace là const·**Ar** và const·A$\nabla(1/r)$. Ngoài ra nếu chú ý rằng, nghiệm vẫn phải liên tục tại tâm hình cầu, thì ta sẽ tìm được T_1 và T_2 dưới dạng

$$T_1 = c_1 \mathbf{Ar}, \qquad T_2 = c_2 \mathbf{A}\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{Ar}.$$

Các hằng số c_1 và c_2 được xác định từ các điều kiện với $r = R$. Kết quả ta tìm được:

$$T_1 = \frac{3\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\mathbf{Ar}, \qquad T_2 = \left[1 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1 + 2\kappa_2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\mathbf{Ar}.$$

§51. SỰ DẪN NHIỆT TRONG MÔI TRƯỜNG VÔ HẠN

Ta xét sự truyền nhiệt trong một môi trường đứng yên vô hạn. Cách đặt vấn đề tổng quát nhất cho bài toán như sau. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ sự phân bố nhiệt độ đã cho trong toàn bộ không gian:

$$T = T_0(\mathbf{r}) \qquad \text{với} \qquad t = 0,$$

trong đó $T_0(\mathbf{r})$ là một hàm đã cho của các tọa độ. Đòi hỏi phải xác định sự phân bố nhiệt độ tại mọi thời điểm t tiếp sau.

Ta khai triển hàm đã cho $T(\mathbf{r}, t)$ thành một tích phân Fourier theo các tọa độ:

$$T(\mathbf{r},t) = \int T_k(t) e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \qquad T_k(t) = \int T(\mathbf{r},t) e^{-i\mathbf{kr}} d^3x. \tag{51-1}$$

Đối với mỗi thành phần Fourier của nhiệt độ, $T_k\, e^{ikr}$, phương trình (50-4) cho ta:

$$\frac{dT_k}{dt} + k^2 \chi T_k = 0,$$

từ đó ta tìm được sự phụ thuộc của T_k vào thời gian:

$$T_{\mathbf{k}} = T_{0k} e^{-k^2 \chi t}.$$

Vì tại $t = 0$ phải có $T = T_0(\mathbf{r})$, nên rõ ràng là, $T_{0\mathbf{k}}$ là những hệ số khai triển Fourier của hàm T_0:

$$T_{0k} = \int T_o(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}d^3x'.$$

Như vậy, ta tìm được:

$$T = \int T_o(\mathbf{r}')\, e^{-k^2\chi t}e^{i\,\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3x'\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Tích phân theo d^3k được tách thành tích của ba tích phân giống nhau có dạng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\xi^2}\cos\,\beta\xi\,d\xi = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-\beta^2/4\alpha},$$

trong đó ξ là một trong các thành phần của vectơ **k** (tích phân tương tự với sin thay cho cos không có mặt, vì hàm sin là hàm lẻ). Cuối cùng ta thu được biểu thức sau:

$$T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}\int T_o(\mathbf{r}')\exp\left\{-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4\chi t}\right\}d^3x'. \qquad (51\text{-}2)$$

Công thức này giải hoàn toàn bài toán đặt ra: nó xác định sự phân bố nhiệt độ tại một thời điểm bất kỳ theo sự phân bố nhiệt độ đã cho tại thời điểm ban đầu.

Nếu sự phân bố ban đầu của nhiệt độ chỉ phụ thuộc vào một tọa độ x, thì khi lấy tích phân theo $dy'\,dz'$ ở trong (51-2), ta thu được:

$$T(x,t) = \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} T_o(x')\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\}dx'. \qquad (51\text{-}3)$$

Giả sử tại $t = 0$, nhiệt độ bằng không trong toàn không gian trừ một điểm (gốc tọa độ), tại đó nhiệt độ có giá trị lớn vô hạn, nhưng sao cho nhiệt lượng toàn phần, là đại lượng tỷ lệ với $\int T_o(\mathbf{r})\,d^3x$, vẫn hữu hạn. Một sự phân bố như thế có thể được biểu diễn bằng hàm δ:

$$T_o(\mathbf{r}) = \text{const}\,.\,\delta(\mathbf{r}). \qquad (51\text{-}4)$$

Việc lấy tích phân trong (51-4) đơn giản rút về việc thay $\mathbf{r}'$ bằng số không, kết quả ta được:

$$T(\mathbf{r},\,t) = \text{const}\,\frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}}e^{-r^2/4\chi t}. \qquad (51\text{-}5)$$

Với thời gian, nhiệt độ tại điểm $r = 0$ giảm như $t^{-3/2}$. Đồng thời nhiệt độ tăng trong không gian xung quanh, và miền nhiệt độ khác không đáng kể nở rộng dần dần (hình 39). Tiến trình nở rộng này được xác định cơ bản do bởi thừa số mũ trong (51-5): bậc đại lượng l của các kích thước miền được cho bởi biểu thức

$$l \sim \sqrt{\chi t}, \tag{51-6}$$

nghĩa là tăng tỷ lệ với thời gian.

Tương tự, nếu tại thời điểm ban đầu một lượng hữu hạn nào đó của nhiệt lượng được tập trung trong mặt phẳng $x = 0$, thì tại các thời điểm sau sự phân bố nhiệt độ được xác định bởi công thức

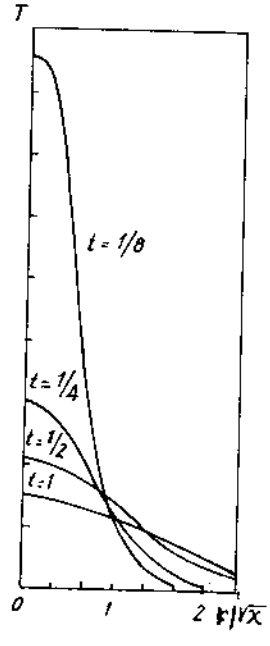
$$T(x, t) = \text{const}\ \frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}} e^{-x^2/4\chi t}. \tag{51-7}$$

Công thức (51-6) có thể được giải thích theo một quan điểm hơi khác đôi chút. Gọi l là bậc độ lớn của các kích thước của vật. Khi đó có thể khẳng định rằng, nếu vật này được nung nóng không đều, thì bậc độ lớn của thời gian τ, trong khoảng đó nhiệt độ tại các điểm khác nhau của vật được đồng đều một cách rõ rệt, sẽ bằng

$$\tau \sim \frac{l^2}{\chi}. \tag{51-8}$$

Thời gian τ, mà ta có thể gọi là "thời gian hồi phục" đối với quá trình dẫn nhiệt, tỷ lệ với bình phương các kích thước của vật và tỷ lệ nghịch với hệ số dẫn nhiệt.

Quá trình dẫn nhiệt mô tả bởi các công thức đã rút ra được, có tính chất sau: ảnh hưởng của mọi nhiễu động nhiệt lan truyền tức thời trong toàn bộ không gian. Chẳng hạn, công thức (51-5) chứng tỏ rằng, nhiệt từ nguồn điểm lan truyền sao cho ngay thời điểm tiếp sau nhiệt độ của môi trường chỉ



Hình 39

tiệm cận bằng không tại vô cùng. Tính chất này còn đúng đối với cả môi trường, trong đó độ dẫn nhiệt độ χ phụ thuộc vào nhiệt độ, miễn là sự phụ thuộc này không làm triệt tiêu χ trong một miền nào đó của không gian. Nhưng nếu χ là một hàm của nhiệt độ, nó giảm và bằng không cùng với nhiệt độ, thì sẽ dẫn tới làm chậm quá trình truyền nhiệt, do đó ảnh hưởng của mọi nhiễu động nhiệt tại mỗi thời điểm sẽ chỉ lan truyền tới một miền hữu hạn nào đó của không gian; ta nói đến sự lan truyền của nhiệt độ trong một môi trường mà nhiệt độ của nó (ở bên ngoài miền ảnh hưởng) có thể được coi bằng không (*Ia. B. Zeldôvits, A. X. Kompanetx,* 1950. Nghiệm của các bài tập dưới dây cũng do hai ông tìm ra).

BÀI TẬP

1. Nhiệt dung riêng và độ dẫn nhiệt của môi trường thay đổi như các hàm lũy thừa của nhiệt độ, còn mật độ của nó không đổi. Xác định qui luật của nhiệt độ bằng không ở gần biên giới của miền, biên giới này tại một thời điểm đã cho đã nhận được nhiệt lượng từ một nguồn tùy ý gửi tới; bên ngoài miền này nhiệt độ bằng không.

Giải. Nếu κ và c_p là các hàm lũy thừa của nhiệt độ, thì cả hệ số dẫn nhiệt độ χ và hàm nhiệt $w = \int c_p dT$ (số hạng không đổi ở trong w bỏ đi) cũng vậy. Do đó, có thể viết $\chi = aW^n$, trong đó, ký hiệu $W = \rho w$ là hàm nhiệt của một đơn vị thể tích của môi trường. Khi đó phương trình dẫn nhiệt

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\kappa \nabla T)$$

có dạng

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a \operatorname{div}(W^n \nabla W). \tag{1}$$

Trong một khoảng thời gian không lớn có thể coi một phần nhỏ của biên giới là phẳng và vận tốc dịch chuyển v của nó trong không gian là không đổi. Do đó, ta có thể tìm nghiệm của phương trình (1) dưới dạng $W = W(x - vt)$, trong đó x là tọa độ theo phương vuông góc với biên giới. Ta có:

$$-v\frac{\partial W}{\partial x} = a\frac{d}{dx}\left(W^n \frac{dW}{dx}\right), \tag{2}$$

Từ đó, sau khi lấy tích phân bội hai, ta tìm được quy luật triệt tiêu sau đây của W:

$$W \sim |x|^{1/n} \tag{3}$$

trong đó $|x|$ là khoảng cách tính từ biên giới của miền được nung nóng. Đồng thời biểu thức đó cũng xác nhận kết luận về sự có mặt của biên giới miền được nung nóng (ngoài miền đó, W và cùng cả T nữa đều bằng không), nếu số mũ $n > 0$. Nếu $n \leq 0$ thì phương trình (2) không có các nghiệm triệt tiêu tại khoảng cách hữu hạn, nghĩa là tại mọi thời điểm, nhiệt lượng được phân bố trong toàn không gian.

2. Trong cùng môi trường như trong bài tập 1, tại thời điểm ban đầu một nhiệt lượng Q (tính cho một đơn vị diện tích) tập trung trong mặt phẳng $x = 0$ và $T = 0$ ở trong phần không gian còn lại. Xác định sự phân bố nhiệt độ tại những thời điểm sau.

Giải. Trong trường hợp một chiều, phương trình (1) được viết thành:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(W^n \frac{dW}{dx}\right). \tag{4}$$

Một tổ hợp không thứ nguyên có thể được thiết lập từ các thông số Q và a và các biến x, t sẵn có là:

$$\xi = \frac{x}{(Q^n at)^{1/(2+n)}} \tag{5}$$

(Q và a lần lượt có các thứ nguyên e'c/cm^2 và cm^2/s (cm^3/e'c)^n). Do đó, hàm cần tìm $W(x,t)$ phải có dạng

$$W = \left(\frac{Q^2}{at}\right)^{1/(2+n)} f(\xi), \tag{6}$$

trong đó hàm không thứ nguyên $f(\xi)$ đã được nhân với một đại lượng có thứ nguyên e'c/cm^3. Sau phép thay thế này, phương trình (4) cho ta

$$(2+n)\frac{d}{d\xi}\left(f^n \frac{df}{d\xi}\right) + \xi\frac{df}{d\xi} + f = 0$$

Phương trình này với các đạo hàm toàn phần có một nghiệm đơn giản thỏa mãn các điều kiện của bài toán:

$$f(\xi) = \left[\frac{n}{2(2+n)}\left(\xi_o^2 - \xi^2\right)\right]^{1/n}, \tag{7}$$

trong đó ξ_o là hằng số lấy tích phân.

Với $n > 0$ công thức này cho sự phân bố nhiệt độ ở trong miền nằm giữa các biên giới $x = \pm x_o$, xác định bởi đẳng thức $\xi = \pm \xi_o$; bên ngoài các biên giới đó $W = 0$. Từ đó suy ra rằng, các biên giới của miền nung nóng nở rộng với thời

gian theo quy luật

$$x_o = \text{const}\, t^{1/(2+n)}.$$

Hằng số ξ_o được xác định bởi điều kiện đòi hỏi nhiệt lượng toàn phần phải không đổi:

$$Q = \int_{-x_o}^{x_o} W dx = Q \int_{-\xi_o}^{\xi_o} f(\xi) d\xi, \tag{8}$$

Từ đó ta thu được

$$\xi_o^{2+n} = \frac{(2+n)^{1+n}\, 2^{1-n}}{n\pi^{n/2}} \frac{\Gamma^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma^n(1/n)}. \tag{9}$$

Khi $n = -\nu < 0$, ta viết nghiệm dưới dạng

$$f(\xi) = \left[\frac{\nu}{2(2-\nu)}\left(\xi_o^2 + \xi^2\right)\right]^{-1/\nu}. \tag{10}$$

Ở đây nhiệt lượng được phân bố trong toàn không gian, và tại các khoảng cách lớn, W giảm theo định luật luỹ thừa: $W \sim x^{-2/\nu}$. Nghiệm này chỉ được áp dụng với $\nu < 2$; với $\nu \geq 2$ tích phân chuẩn hóa (8) (bây giờ được lấy trong giới hạn $\pm\infty$) sẽ phân kỳ, về mặt vật lý điều đó có nghĩa là nhiệt lượng đi ra xa vô hạn ngay tức thời. Khi $\nu < 2$ hằng số ξ_o ở trong (10) sẽ bằng

$$\xi_o^{2-\nu} = \frac{2(2-\nu)\pi^{\nu/2}}{\nu} \frac{\Gamma^\nu\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^\nu(1/\nu)}. \tag{11}$$

Cuối cùng, khi $n \to 0$, ta có $\xi_o \to 2/\sqrt{n}$ và nghiệm xác định bởi những công thức (5-7) cho ta

$$W = \lim_{n\to 0}\left\{\frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}}\left(1 - n\frac{x^2}{4at}\right)^{1/n}\right\} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a t}} e^{-x^2/4at}$$

Điều này phù với (51-7).

§52. SỰ DẪN NHIỆT TRONG MÔI TRƯỜNG HỮU HẠN

Trong các bài toán về sự dẫn nhiệt ở trong môi trường giới hạn, việc cho trước sự phân bố ban đầu của nhiệt độ không đủ để cho nghiệm của bài toán là đơn trị, còn phải cho thêm các điều kiện biên trên mặt giới hạn môi trường.

Ta khảo sát sự truyền nhiệt trong nửa không gian ($x > 0$) và bắt đầu từ trường hợp, trong đó nhiệt độ đã cho được giữ không đổi trên mặt biên giới $x = 0$. Ta có thể lấy quy ước nhiệt độ này bằng không, nghĩa là tính nhiệt độ tại các điểm khác của môi trường so với nhiệt độ đó.

Tại thời điểm ban đầu, cũng như trước, người ta cho trước sự phân bố nhiệt độ trong toàn bộ môi trường. Do đó các điều kiện biên và điều kiện ban đầu được viết:

$$T = 0 \text{ với } x = 0; \quad T = T_o(x,y,z) \text{ với } t = 0, x > 0. \tag{52-1}$$

Việc giải phương trình truyền nhiệt với các điều kiện đó có thể quy về việc giải cũng phương trình đó cho môi trường không bị hạn chế về hai chiều của trục x bằng cách dựa vào thủ thuật sau. Hãy tưởng tượng rằng, môi trường lan cả sang bên trái của mặt phẳng $x = 0$ và tại thời điểm ban đầu, sự phân bố nhiệt độ trong miền này được mô tả bởi cùng hàm T_o, nhưng lấy dấu trừ. Nói một cách khác, tại thời điểm ban đầu sự phân bố nhiệt độ được mô tả trong toàn bộ không gian bởi một hàm lẻ nào đó của biến x, nghĩa là sao cho

$$T_o(-x,y,z) = -T_o(x,y,z) \tag{52-2}$$

Từ đẳng thức (52-2) suy ra rằng, $T_o(0,y,z) = -T_o(0,y,z) = 0$, nghĩa là điều kiện biên (52-1) đòi hỏi đã tự động được thỏa mãn tại thời điểm ban đầu, và từ sự đối xứng của các điều kiện bài toán, ta thấy hiển nhiên rằng, điều kiện biên đó sẽ được thực hiện tại mọi thời điểm khác.

Như vậy, bài toán rút về việc giải phương trình (50-4) trong môi trường vô hạn với hàm ban đầu $T_o(x,y,z)$ thỏa mãn (52-2) và không có một điều kiện biên nào khác. Do đó có thể dùng công thức tổng quát (51-2).

Trong (51-2), ta tách miền lấy tích phân theo dx' thành hai phần: từ $-\infty$ đến 0 và từ 0 đến $+\infty$ và ta dùng hệ thức (52-2). Khi đó ta thu được:

$$T(\mathbf{r},t) = \frac{1}{8(\pi\chi t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int T_o(\mathbf{r}') \exp\left\{-\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{4\chi t}\right\} \times$$
$$\times \left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}\right\}\right] dx'dy'dz'. \tag{52-3}$$

Công thức này giải hoàn toàn bài toán đặt ra, vì nó xác định nhiệt độ trong toàn bộ môi trường.

Nếu sự phân bố ban đầu của nhiệt độ chỉ phụ thuộc vào x, thì (52-3) sẽ có dạng

$$T(x,t)=\frac{1}{2(\pi\chi t)^{1/2}}\int_0^{\infty}T_0(x')\left[\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\chi t}\right\}-\exp\left\{-\frac{(x+x')^2}{4\chi t}\right\}\right]dx' \qquad (52\text{-}4)$$

Để làm thí dụ, ta khảo sát trường hợp tại thời điểm ban đầu và tại mọi nơi, trừ $x = 0$, nhiệt độ đều bằng một hằng số đã cho. Hằng số này có thể chọn bằng -1, mà không hạn chế tính chất tổng quát; còn trong mặt phẳng $x = 0$, nhiệt độ bao giờ cũng bằng không. Nghiệm thích hợp thu được trực tiếp bằng cách thay $T_0(x) = -1$ vào (52-4). Tách tích phân (52-4) thành hai tích phân và trong mỗi tích phân đó ta đổi các biến thuộc loại

$$\frac{x'-x}{2\sqrt{\chi t}}=\xi.$$

Khi đó ta thu được cho $T(x,t)$ biểu thức sau:

$$T(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{erf}\left(-\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right)\right\},$$

với hàm erf x được xác định như sau

$$\operatorname{erf}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-\xi^2}d\xi \qquad (52\text{-}5)$$

và gọi là *tích phân sai số* (chú ý rằng $\operatorname{erf}(\infty) = 1$). Bởi vì

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

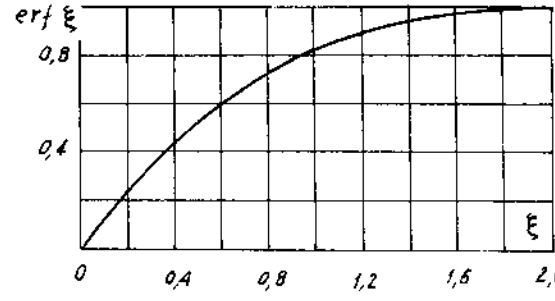
nên cuối cùng ta thu được

$$T(x,t)=-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\chi t}}\right). \qquad (52\text{-}6)$$

Hình 40 biểu diễn đồ thị của hàm erf ξ. Với thời gian, sự phân bố nhiệt độ trong không gian tiến dần đến đồng đều. Sự đồng đều này được tiến

hành sao cho mỗi giá trị đã cho của nhiệt độ dịch chuyển sang phải tỷ lệ với $\sqrt{t}$. Vả lại kết quả cuối cùng hiển nhiên thấy được từ trước. Thực vậy, bài toán đang xét được xác định chỉ bởi một thông số, đó là hiệu ban đầu của các nhiệt độ T_0 của mặt phẳng biên và phần không gian còn lại (mà ta đã quy ước chọn hiệu đó bằng 1). Từ các thông số có sẵn T_0 và χ và các biến x và t, ta chỉ có thể lập được một tổ hợp không thứ nguyên: $x/\sqrt{\chi t}$; do đó, rõ ràng là, sự phân bố nhiệt độ cần tìm phải được xác định bởi một hàm có dạng $T = T_0 f(x/\sqrt{\chi t})$.

Bây giờ ta khảo sát trường hợp, trong đó mặt biên của môi trường là cách nhiệt. Nói một cách khác, trên mặt phẳng $x = 0$, thông lượng nhiệt phải bằng không, nghĩa là phải có $\partial T/\partial x = 0$. Như vậy, các điều kiện biên và điều kiện ban đầu bây giờ như sau:



Hình 40

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \text{ với } x = 0; \qquad T = T_0(x,y,z) \quad \text{với } t = 0,\ x > 0. \tag{52-7}$$

Để tìm được nghiệm, ta tiến hành tương tự như trong trường hợp trước. Cụ thể là, ta sẽ lại hình dung môi trường vô hạn về hai phía của mặt phẳng $x = 0$. Còn sự phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu bây giờ được coi là đối xứng đối với mặt phẳng $x = 0$. Nói một cách khác, hàm $T_0(x,y,z)$ bây giờ sẽ được giả thiết là chẵn đối với biến x:

$$T_0(-x,y,z) = T_0(x,y,z) \tag{52-8}$$

Khi đó

$$\frac{\partial T_0(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{\partial T_0(-x,y,z)}{\partial x}$$

và khi $x = 0$ sẽ có $\partial T_0/\partial x = 0$. Từ lý do đối xứng, điều kiện này sẽ được tự động thỏa mãn tại mọi thời điểm sau. Lặp lại tất cả các phép tính đã

làm ở trên, nhưng khi đó dùng (52-8) thay cho (52-2), ta tìm được nghiệm tổng quát của bài toán đặt ra được cho bởi các công thức khác với (52-3) hay (52-4) ở chỗ, thay cho các số hạng trong các dấu ngoặc vuông bây giờ là tổng của chúng.

Ta chuyển sang các bài toán với các điều kiện biên thuộc loại khác. Chúng cũng chấp nhận nghiệm của phương trình truyền nhiệt dưới dạng tổng quát. Ta xét một môi trường giới hạn bởi mặt phẳng $x = 0$, qua đó môi trường nhận được từ ngoài một thông lượng nhiệt, là hàm đã cho của thời gian. Nói một cách khác, ta có các điều kiện biên và điều kiện ban đầu.

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = q(t) \text{ với } x = 0; \qquad T = 0 \text{ với } t = -\infty,\ x > 0. \tag{52-9}$$

trong đó, $q(t)$ là một hàm đã cho.

Trước hết, ta giải sơ bộ một bài toán bổ trợ, trong đó $q(t) = \delta(t)$. Dễ dàng quan niệm rằng, bài toán về mặt vật lý tương đương với bài toán về sự truyền nhiệt lượng trong môi trường vô hạn từ một nguồn điểm chứa một nhiệt lượng toàn phần đã cho. Thực vậy, điều kiện biên $-\kappa\, \partial T/\partial x = \delta(t)$ với $x = 0$ về mặt vật lý có nghĩa là, một nhiệt lượng bằng đơn vị tức thời đi qua mỗi đơn vị diện tích của mặt phẳng $x = 0$. Còn đối với bài toán với điều kiện $T = 2\delta(x)/\rho c_p$ tại $t = 0$, trên cùng diện tích vào thời điểm ban đầu có tập trung một nhiệt lượng $\int \rho c_p T dx = 2$, trong đó một nửa lan truyền theo chiều $x > 0$ (còn nửa kia lan truyền về phía $x < 0$). Từ đó thấy rõ ràng là, các nghiệm của hai bài toán đều đồng nhất, và theo (51-7), ta tìm được

$$\kappa T(x,t) = \sqrt{\frac{\chi}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4\chi t}}.$$

Vì các phương trình là tuyến tính, nên các hiệu ứng của nhiệt lượng đi tới vào những thời điểm khác nhau được cộng đơn giản lại với nhau, nên nghiệm tổng quát cần tìm của phương trình dẫn nhiệt với các điều kiện (52-9) có dạng

$$\kappa T(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}}\, q(\tau)\, \exp\left\{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right\} d\tau. \tag{52-10}$$

Đặc biệt, trong chính mặt phẳng $x = 0$, nhiệt độ thay đổi theo quy luật

$$\kappa T(0,t) = \int_{-\infty}^{t} \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}}\, q(\tau)\, d\tau. \tag{52-11}$$

Dựa vào các kết quả này, ta có thể thu được ngay nghiệm của một bài toán khác, trong đó hàm đã cho của thời gian là chính nhiệt độ T trên mặt phẳng $x = 0$:

$$T = T_0(t) \text{ với } x = 0;\ T = 0 \text{ với } t = -\infty,\ x > 0 \tag{52-12}$$

Muốn vậy, ta có nhận xét là, nếu một hàm $T(x,t)$ nào đó thỏa mãn phương trình dẫn nhiệt, thì cả đạo hàm $\partial T/\partial x$ cũng thỏa mãn phương trình đó. Mặt khác, lấy đạo hàm biểu thức (52-10) theo x, ta thu được:

$$-\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{t} -\frac{x q(\tau)}{2(\pi\chi)^{1/2}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right\} d\tau.$$

Đó là một hàm thỏa mãn phương trình dẫn nhiệt, và theo (52-9), $q(t)$ là giá trị của hàm này tại $x = 0$; hiển nhiên là, nó cho nghiệm cần tìm với các điều kiện (52-12). Viết $T(x,t)$ thay cho $-\kappa(\partial T/\partial x)$ và $T_0(t)$ thay cho $q(t)$, như vậy ta thu được:

$$T(x,t) = \frac{x}{2(\pi\chi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_0(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\chi(t-\tau)}\right\} d\tau. \tag{52-13}$$

Đối với thông lượng nhiệt $q = -\kappa(\partial T/\partial x)$ đi qua mặt biên giới $x = 0$, sau một phép biến đổi ngắn, ta được:

$$q(t) = -\frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{52-14}$$

Công thức này là đảo của hệ thức tích phân (52-11).

Rất đơn giản là việc giải một bài toán quan trọng, trong đó trên mặt biên $x = 0$ nhiệt độ trong suốt thời gian được cho dưới dạng một hàm tuần hoàn

$$T = T_0\, e^{-i\omega t} \quad \text{với} \quad x = 0.$$

Rõ ràng là sự phân bố nhiệt độ trong toàn không gian phụ thuộc vào thời gian qua cùng thừa số $e^{-i\omega t}$. Vì phương trình dẫn nhiệt một chiều về

hình thức trùng với phương trình chuyển động (24-3) của chất lỏng nhớt trên mặt phẳng dao động, nên tương tự với công thức (24-5), ta có thể viết ngay sự phân bố nhiệt độ cần tìm dưới dạng

$$T = T_0 \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right)\exp\left(ix\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} - i\omega t\right). \qquad (52\text{-}15)$$

Ta nhận thấy rằng, các dao động của nhiệt độ trên mặt biên giới lan truyền từ mặt đó dưới dạng "các sóng nhiệt lượng" tắt nhanh vào trong môi trường.

Một loại bài toán khác về lý thuyết dẫn nhiệt là các bài toán về vận tốc san bằng nhiệt độ trong các vật hữu hạn nung nóng không đều, mà mặt của chúng được giữ trong các điều kiện đã cho. Theo các phương pháp tổng quát, ta tìm các nghiệm của phương trình dẫn nhiệt dưới dạng

$$T = T_n(\mathbf{r})\, e^{-\lambda_n t}$$

với các λ_n không đổi. Đối với hàm T_n, ta nhận được phương trình sau

$$\chi \Delta T_n = -\lambda_n T_n \qquad (52\text{-}16)$$

Với các điều kiện biên đã cho, phương trình này chỉ có các nghiệm khác không với các λ_n xác định, các λ_n này thành lập phổ "các giá trị riêng" của nó. Tất cả các giá trị này đều là thực và dương, còn các hàm $T_n(x,y,z)$ tương ứng sẽ lập thành một hệ đầy đủ các hàm trực giao với nhau. Giả sử $T_0(x,y,z)$ là hàm phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu. Khi khai triển hàm đó theo hệ các hàm T_n:

$$T_0(\mathbf{r}) = \sum_n c_n T_n(\mathbf{r}),$$

ta thu được nghiệm cần tìm của bài toán đặt ra dưới dạng

$$T(\mathbf{r},t) = \sum_n c_n T_n(\mathbf{r}) e^{-\lambda_n t}, \qquad (52\text{-}17)$$

Vận tốc san bằng nhiệt độ hiển nhiên được xác định chủ yếu bởi số hạng của tổng này, tương ứng với giá trị nhỏ nhất trong các λ_n; giả sử λ_1 là số hạng đó. Thời gian san bằng nhiệt độ có thể được xác định bởi biểu thức $\tau = 1/\lambda_1$.

BÀI TẬP

1. Tìm sự phân bố nhiệt độ quanh một mặt cầu (bán kính R), mà nhiệt độ là một hàm đã cho của thời gian $T_o(t)$.

Giải. Phương trình truyền nhiệt đối với sự phân bố đối xứng xuyên tâm của nhiệt độ trong tọa độ cầu có dạng

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi}{r}\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2}.$$

Thay $T(r,t) = F(r,t)/r$ vào phương trình trên ta thu được

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

Phương trình này thuộc loại phương trình truyền nhiệt một chiều. Do đó có thể viết nghiệm cần tìm, dựa vào (52-13), dưới dạng

$$T(r,t) = \frac{R(r-R)}{2r(\pi\chi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{T_o(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(r-R)^2}{4\chi(t-\tau)}\right\} d\tau$$

2. Cũng bài toán trên, khi nhiệt độ của mặt cầu là $T_o e^{-i\omega t}$.

Giải. Tương tự như (52-15), ta thu được:

$$T = T_o e^{-i\omega t} \frac{R}{r} \exp\left(-(1-i)\,(r-R)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right).$$

3. Tìm thời gian san bằng nhiệt độ đối với một hình lập phương (có cạnh là 2a), mà mặt của nó: a) được giữ tại một nhiệt độ đã cho $T = 0$; b) là một mặt cách nhiệt.

Giải. Trong trường hợp a) giá trị nhỏ nhất của λ tương ứng với nghiệm sau đây của phương trình (52-16):

$$T_1 = \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi z}{a}$$

(gốc tại tâm của hình lập phương), với

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{a^2}{3\pi^2\chi}.$$

Trong trường hợp b), ta có $T_1 = \cos(\pi x/a)$ (hay một hàm như thế của y hay của z), với $\tau = a^2/\pi^2\chi$.

4. Cũng bài toán đó cho một hình cầu bán kính R.

Giải. Giá trị nhỏ nhất của λ tương ứng với nghiệm đối xứng xuyên tâm của phương trình (52-16):

$$T_1 = \frac{\sin kr}{r}.$$

với $k = \pi/R$ (trong trường hợp a), do đó

$$\tau = \frac{1}{\chi k^2} = \frac{R^2}{\chi \pi^2}.$$

Trong trường hợp b, k được xác định như nghiệm nhỏ nhất của phương trình tg $kR = kR$, trong đó $kR = 4{,}493$, do đó $\tau = 0{,}050\, R^2/\chi$.

§53. ĐỊNH LUẬT ĐỒNG DẠNG CHO SỰ TRUYỀN NHIỆT

Các quá trình truyền nhiệt ở trong chất lỏng phức tạp hơn các quá trình truyền nhiệt ở trong các vật rắn, vì chất lỏng có thể chuyển động. Một vật nung nóng nhúng vào trong một chất lỏng chuyển động sẽ lạnh đi nhanh hơn rất nhiều so với trong chất lỏng đứng yên, mà tại đó sự truyền nhiệt chỉ được thực hiện bởi sự dẫn nhiệt. Chuyển động của một chất lỏng nung nóng không đều được gọi là *sự đối lưu*.

Ta giả thiết rằng, các hiệu nhiệt độ có trong chất lỏng đủ nhỏ để có thể coi các tính chất vật lý của nó là độc lập với nhiệt độ. Mặt khác, các hiệu này được giả thiết đủ lớn để có thể bỏ qua những biến thiên của nhiệt độ gây bởi sự tỏa nhiệt do có sự tiêu tán nhiệt vì ma sát nội (xem §55). Khi đó có thể bỏ qua số hạng chứa độ nhớt ở trong phương trình (50-2), và do đó còn lại

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \chi \Delta T, \tag{53-1}$$

trong đó $\chi = \kappa/\rho c_p$ là độ dẫn nhiệt độ. Cùng với phương trình Navier - Stokes và phương trình liên tục, phương trình này mô tả hoàn toàn sự đối lưu trong các điều kiện đang xét. Sau đây ta chỉ quan tâm đến chuyển động đối lưu dừng [1]. Khi đó tất cả các đạo hàm theo thời gian

[1] Để cho sự đối lưu có thể là dừng, nói một cách chặt chẽ, các vật rắn tiếp xúc với chất lỏng cần phải chứa các nguồn nhiệt để duy trì các vật đó ở nhiệt độ không đổi.

đều biến mất, và ta thu được hệ các phương trình sau:

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T, \tag{53-2}$$

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad \text{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{53-3}$$

Hệ phương trình này , trong đó các hàm chưa biết là **v**, T và p/ρ, chỉ chứa hai thông số không đổi: ν và χ. Ngoài ra, nghiệm của các phương trình đó còn phụ thuộc, thông qua các điều kiện biên, vào một thông số nào đó đặc trưng cho độ dài l, vận tốc U và hiệu đặc trưng của nhiệt độ $T_1 - T_0$. Hai thông số đầu tiên, cũng như trong mọi trường hợp, xác định những kích thước của vật rắn có mặt trong bài toán và vận tốc dòng cơ bản của chất lỏng, còn thông số thứ ba xác định hiệu nhiệt độ giữa chất lỏng và các vật rắn.

Khi thành lập các đại lượng không thứ nguyên xuất phát từ các thông số có sẵn, một vấn đề được đặt ra là, lấy thứ nguyên nào cho nhiệt độ. Muốn vậy có nhận xét là, nhiệt độ được xác định bởi phương trình (53-2), là tuyến tính và thuần nhất của T. Do đó, nhiệt độ có thể được nhân với một thừa số không đổi tùy ý, mà không làm thay đổi các phương trình. Nói một cách khác, điều này có nghĩa là, các đơn vị dùng để đo nhiệt độ có thể được chọn tùy ý. Khả năng của một sự biến đổi như thế đối với nhiệt độ có thể được xét đến một cách hình thức bằng cách gán cho nhiệt độ một thứ nguyên đặc biệt, thứ nguyên này không có mặt trong các thứ nguyên của những đại lượng khác. Đó chính là thứ nguyên của độ – là đơn vị thường được dùng để đo nhiệt độ.

Như vậy, sự đối lưu trong những điều kiện đang xét được đặc trưng bởi năm thông số có các thứ nguyên:

$$[\nu] = [\chi] = \text{cm}^2/s\ ,\ [U] = \text{cm}/s\ ,\ [l] = \text{cm}\ ,\ [T_1 - T_0] = \textit{độ}$$

Từ các thứ nguyên đó, có thể thiết lập được hai tổ hợp độc lập, không có thứ nguyên. Đó là số Reynolds $\text{R} = Ul/\nu$ và *số Prandtl* được xác định bằng tỷ số

$$\text{P} = \frac{\nu}{\chi}. \tag{53-4}$$

Mọi đại lượng không thứ nguyên khác đều có thể được biểu diễn qua R và P [1].

Số Prandtl, đó chỉ là một hằng số vật chất nào đó của chất, nó không phụ thuộc vào các tính chất của chính dòng chảy. Đối với các chất khí, số đó bao giờ cũng có bậc đơn vị. Đối với các chất lỏng khác, các giá trị của P nằm trong một khoảng lớn hơn. Đối với các chất lỏng rất nhớt, P bao giờ cũng đạt được những giá trị rất lớn. Để làm thí dụ, ta nêu ra các giá trị của P ở 20°C cho một loạt các chất như sau:

Không khí.....	0,733
Nước.....	6,75
Rượu.....	16,6
Glyxêrin.....	7250
Thuỷ ngân.....	0,044

Tương tự như đã làm ở §19, bây giờ ta có thể kết luận, trong đối lưu dừng (thuộc loại đã cho) các phân bố nhiệt độ và vận tốc có dạng

$$\frac{T-T_o}{T_1-T_o}=f\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\mathrm{R},\mathrm{P}\right),\qquad \frac{\mathbf{v}}{U}=f\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\mathrm{R}\right). \tag{53-5}$$

Hàm không thứ nguyên, xác định sự phân bố của nhiệt độ, phụ thuộc vào cả hai số R và P như vào các thông số, còn sự phân bố các vận tốc chỉ phụ thuộc vào R, vì nó được xác định bởi các phương trình (53-3), các phương trình này hoàn toàn không chứa độ dẫn nhiệt. Hai dòng đối lưu sẽ đồng dạng với nhau, nếu các số Reynolds và Prandtl của chúng như nhau.

Sự truyền nhiệt giữa các vật rắn và chất lỏng thường được đặc trưng bởi *hệ số truyền* α và được định nghĩa như tỷ số:

$$\alpha=\frac{q}{T_1-T_o}, \tag{53-6}$$

trong đó q là mật độ dòng nhiệt lượng qua mặt của vật, còn $T_1 - T_0$ là hiệu đặc trưng các nhiệt độ giữa vật rắn và chất lỏng. Nếu biết được sự

[1] Đôi khi người ta dùng số Peclet định nghĩa bằng Ul/χ. Nó dẫn tới tích RP.

phân bố nhiệt độ trong chất lỏng, thì hệ số truyền nhiệt có thể được xác định dễ dàng bằng cách tính mật độ dòng nhiệt lượng $q = -\kappa(\partial T/\partial n)$ ở biên giới chất lỏng (đạo hàm được lấy theo pháp tuyến với mặt của vật).

Hệ số truyền nhiệt là một đại lượng có thứ nguyên. Ta chọn *số Nusselt*

$$N = \frac{\alpha l}{\kappa} \tag{53-7}$$

làm đại lượng không thứ nguyên đặc trưng cho sự truyền nhiệt.

Từ những lý do đồng dạng, ta suy ra rằng, với mỗi loại chuyển động đối lưu đã cho, số Nusselt là một hàm xác định chỉ của các số Reynolds và Prandtl:

$$N = f(R, P). \tag{53-8}$$

Hàm này có một dạng đơn giản đối với một dòng đối lưu có các số Reynolds đủ nhỏ. Các vận tốc nhỏ của chuyển động tương ứng với các R nhỏ. Do đó trong phép gần đúng cấp một có thể bỏ qua số hạng chứa vận tốc ở trong (53-2), bởi vậy, sự phân bố nhiệt độ được xác định bởi phương trình $\Delta T = 0$, nghĩa là bởi phương trình thông thường của sự dẫn nhiệt dừng trong một môi trường đứng yên. Hiển nhiên là, hệ số truyền nhiệt bây giờ không thể phụ thuộc vào vận tốc và độ nhớt của chất lỏng và như vậy phải có đơn giản

$$N = \text{const}, \tag{53-9}$$

Khi tính hằng số này, ta có thể coi chất lỏng là đứng yên.

BÀI TẬP

Xác định sự phân bố nhiệt độ trong chất lỏng thực hiện dòng chảy Poiseuille dọc theo một ống dẫn có tiết diện tròn, nhiệt độ của thành ống thay đổi dọc theo độ dài của ống theo định luật tuyến tính.

Giải. Các điều kiện của dòng chảy đều như nhau trong tất cả các tiết diện của ống, và sự phân bố nhiệt độ có thể được tìm dưới dạng $T = Az + f(r)$, trong đó Az là nhiệt độ của thành (chọn các tọa độ trụ, có trục z dọc theo trục của ống). Theo (17-9) thì vận tốc bằng

$$v_z = v = 2\bar{v}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

trong đó $\bar{v}$ là vận tốc trung bình. Thay biểu thức này vào trong (53-2), ta tìm được phương trình

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right)=\frac{2\bar{v}A}{\chi}\left[1-\frac{r^2}{R^2}\right].$$

Nghiệm của phương trình này không có điểm kỳ dị tại $r = 0$ và thỏa mãn điều kiện $f = 0$ với $r = R$ có dạng

$$f(r)=-\frac{\bar{v}AR^2}{2\chi}\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{r}{R}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

Mật độ dòng nhiệt lượng bằng

$$q=\kappa\frac{\partial T}{\partial t}\bigg|_{r=R}=\frac{1}{2}\rho c_p\bar{v}AR.$$

Nó không phụ thuộc vào độ dẫn nhiệt.

§54. SỰ TRUYỀN NHIỆT TRONG LỚP BIÊN

Sự phân bố nhiệt độ trong chất lỏng với các số Reynolds rất lớn có những đặc điểm tương tự với những đặc điểm của chính sự phân bố vận tốc. Những giá trị R rất lớn tương đương với một độ nhớt rất nhỏ. Nhưng vì $P = \nu/\chi$ không rất nhỏ, nên cùng với ν cả hệ số dẫn nhiệt độ χ cũng phải coi là nhỏ. Điều này phù hợp với sự kiện là, đối với những vận tốc đủ lớn, chất lỏng có thể được coi gần đúng là lý tưởng, và trong chất lỏng lý tưởng thì cả hai quá trình ma sát nội và quá trình dẫn nhiệt đều phải không có.

Tuy nhiên, một sự khảo sát như thế sẽ lại không ứng dụng được ở trong lớp biên sát thành, vì khi đó ở trên mặt của vật cả điều kiện biên dính và điều kiện đòi hỏi các nhiệt độ của chất lỏng và vật phải như nhau đều sẽ không được thực hiện. Do đó ở trong lớp biên, cùng với sự giảm nhanh của vận tốc, có sự giảm nhanh của nhiệt độ chất lỏng đến giá trị của nhiệt độ của mặt vật rắn. Lớp biên được đặc trưng bởi sự có mặt của những gradiên lớn của vận tốc cũng như của nhiệt độ trong lớp biên đó.

Đối với sự phân bố nhiệt độ ở trong thể tích cơ bản của chất lỏng, dễ dàng nhận thấy rằng, khi chất lỏng chảy quanh một vật nung nóng (với các R lớn), sự nung nóng chất lỏng thực tế chỉ xảy ra ở trong miền vết, còn ở bên ngoài vết nhiệt độ chất lỏng không thay đổi. Thực vậy, với các R rất lớn, các quá trình dẫn nhiệt ở trong dòng cơ bản thực tế không giữ một vai trò gì. Do đó, nhiệt độ chỉ thay đổi tại những nơi của không gian có chất lỏng bị nung nóng trong lớp biên chảy qua. Nhưng ta đã biết rằng (xem §35), các đường dòng chỉ đi từ lớp biên vào miền của dòng cơ bản ở bên ngoài đường tách, ở đây chúng đi vào miền vết chảy rối. Nhưng từ miền vết các đường dòng không còn đi vào trong không gian chung quanh nữa. Như vậy, chất lỏng chảy cạnh mặt của vật nung nóng ở trong lớp biên đổ hoàn toàn vào trong miền vết, và ở lại đó. Ta nhận thấy rằng, nhiệt lượng được phân bố ở trong các miền có độ xoáy khác không.

Ở trong chính miền chảy rối có xảy ra một sự trao đổi nhiệt lượng rất mạnh, gây bởi sự khuấy trộn mạnh chất lỏng, nó đặc trưng cho toàn bộ chuyển động rối. Một cơ chế truyền nhiệt như thế có thể được gọi là sự dẫn nhiệt độ rối và được đặc trưng bởi hệ số χ_r tương ứng, tương tự chúng ta đã đưa vào khái niệm hệ số nhớt η_r (§33). Về bậc độ lớn, "*hệ số dẫn nhiệt độ rối*" được xác định bởi một công thức tương tự với công thức của ν_r (33-2)

$$\chi_r \sim l\Delta u.$$

Như vậy quá trình truyền nhiệt trong các dòng chảy tầng và chảy rối khác nhau một cách cơ bản. Trong trường hợp giới hạn, khi độ nhớt và độ dẫn nhiệt nhỏ tùy ý, các quá trình truyền nhiệt đều không có ở trong dòng chảy tầng và nhiệt độ của chất lỏng không đổi tại mọi nơi của không gian. Ngược lại, trong chất lỏng chuyển động rối, trong cùng trường hợp giới hạn đó, sự truyền nhiệt xảy ra và dẫn tới sự san bằng nhanh nhiệt độ tại các phần khác nhau của dòng.

Trước tiên ta xét sự truyền nhiệt ở trong lớp biên chảy tầng. Các phương trình chuyển động (39-13) giữ nguyên dạng. Bây giờ cần tiến hành một sự đơn giản hóa tương tự đối với phương trình (53-2). Dưới dạng khai triển, phương trình này có dạng (tất cả các đại lượng đều không phụ thuộc vào tọa độ z):

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right).$$

Trong vế phải, có thể bỏ qua đạo hàm $\partial^2 T/\partial x^2$ so với $\partial^2 T/\partial y^2$, do đó còn lại:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \qquad (54\text{-}1)$$

So sánh phương trình này với phương trình thứ nhất của phương trình (39-13) thì rõ ràng là, nếu số Prandtl có bậc đơn vị, thì bậc δ của bề dầy lớp, trong đó có xảy ra sự giảm vận tốc v_x và sự biến thiên của nhiệt độ T, cũng như trước, sẽ được xác định bởi các công thức đã tìm ra ở §39, nghĩa là nó tỷ lệ nghịch với $\sqrt{\mathrm{R}}$. Dòng nhiệt lượng

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n} \sim \kappa \frac{T_1 - T_0}{\delta}$$

Do đó, ta đi tới kết quả là: q và cùng với nó là cả số Nusselt, đều tỷ lệ với $\sqrt{\mathrm{R}}$. Còn sự phụ thuộc của N vào P vẫn bất định. Vì vậy, ta thu được:

$$\mathrm{N} = \sqrt{\mathrm{R}}\, f(\mathrm{P}) \qquad (54\text{-}2)$$

Đặc biệt, từ đó suy ra rằng, hệ số truyền nhiệt α tỷ lệ nghịch với căn bậc hai các kích thước l của vật.

Bây giờ ta chuyển sang sự truyền nhiệt trong lớp biên rối. Để tiện lợi, như ở §42, ta xét một dòng rối song phẳng vô hạn chảy trên một mặt phẳng vô hạn. Gradiên ngang của nhiệt độ dT/dy trong một dòng chảy như thế có thể được xác định từ cùng những lý do về thứ nguyên, như ta đã dùng để tìm gradiên của vận tốc du/dy. Gọi q là mật độ của dòng nhiệt dọc theo trục y, do sự có mặt của gradiên nhiệt độ. Dòng này là một đại lượng không đổi (không phụ thuộc vào y) giống như dòng xung lượng σ, và cùng với nó, có thể được coi như một thông số đã cho xác định những tính chất của dòng. Ngoài ra, bây giờ ta chọn mật độ ρ và nhiệt dung riêng c_p của một đơn vị khối lượng chất lỏng làm các thông số. Thay cho σ, ta đưa vào đại lượng v_* như một thông số; q và c_p lần lượt có các thứ nguyên e'c/s.cm^2 = g/s^3 và e'c/g.*độ* = cm^2/s^2.*độ*. Đối với các hệ số nhớt và độ dẫn nhiệt, thì với các R đủ lớn, chúng không thể xuất hiện ở trong dT/dy một cách tường minh.

Do tính thuần nhất của các phương trình đối với nhiệt độ, đã nêu ở §53, có thể nhân nhiệt độ với một số lần tùy ý, mà không làm thay đổi các phương trình. Nhưng khi nhiệt độ thay đổi, thì cả thông lượng nhiệt cũng phải thay đổi theo cùng một số lần. Do đó q và T phải tỷ lệ với nhau. Nhưng chỉ có thể thành lập từ q, v_*, ρ, c_p và y một đại lượng có thứ nguyên *độ*/cm, đồng thời tỷ lệ với q. Đó là đại lượng $q/(\rho c_p v_* y)$. Do đó phải có

$$\frac{dT}{dy} = \beta \frac{q}{\rho c_p \kappa v_* y},$$

trong đó β là một hằng số phải được xác định bằng thực nghiệm [1]. Từ đó ta suy ra:

$$T = \beta \frac{q}{\kappa \rho c_p v_*} (\ln y + c). \tag{54-3}$$

Như vậy, nhiệt độ cũng như vận tốc, được phân bố theo định luật lôga. Hằng số tích phân c xuất hiện ở đây, cũng như khi rút ra (42-7), phải được xác định từ các điều kiện ở trong lớp nhớt lót. Hiệu toàn phần giữa nhiệt độ chất lỏng tại một điểm đã cho và nhiệt độ thành (mà ta quy ước chọn bằng không) gồm độ giảm nhiệt độ ở trong lớp chảy rối và độ giảm nhiệt độ ở trong lớp nhớt lót. Chỉ riêng độ giảm nhiệt độ thứ nhất được xác định bởi định luật lôga (54-3). Do đó nếu ta viết (54-3) dưới dạng

$$T = \beta \frac{q}{\kappa \rho c_p v_*} (\ln \frac{y v_*}{\nu} + \text{const}),$$

đưa vào trong đối số của lôga độ dầy y_0, thì const (nhân với thừa số đứng trước dấu móc) phải biểu diễn sự biến thiên của nhiệt độ ở trong lớp nhớt lót. Dĩ nhiên, sự biến thiên này cũng phụ thuộc vào ν và χ. Vì const là đại lượng không thứ nguyên, nên nó phải xuất hiện dưới dạng một hàm nào đó của số P, đó là tổ hợp duy nhất không có thứ nguyên có thể

[1] Ở đây κ là hằng số Karman xuất hiện trong prôfin các vận tốc lôga (42-4). Với định nghĩa như thế, β là tỷ số $\beta = \nu_r / \chi_r$, trong đó ν_r và χ_r là các hệ số trong các hệ thức

$$q = \rho c_p \chi_r \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \sigma = \rho \nu_r \frac{\partial u}{\partial y}.$$

thành lập được từ các đại lượng sẵn có ν, χ, ρ, v_*, c_p (còn thông lượng nhiệt q, thì không thể xuất hiện trong const, vì T phải tỷ lệ với q và q đã xuất hiện trong thừa số ở trước dấu móc). Như vậy ta thu được định luật phân bố nhiệt độ dưới dạng

$$T = \beta \frac{q}{\kappa \rho c_p v_*} \left[\ln \frac{y v_*}{\nu} + f(\mathrm{P}) \right]. \qquad (54\text{-}4)$$

(*L. Đ.Landau*, 1944). Giá trị thực nghiệm của hằng số β trong biểu thức này là: $\beta \approx 0{,}9$. Giá trị của hàm f cho không khí $f(0{,}7) \approx 1{,}5$.

Dựa vào công thức (54-4) có thể tính được sự truyền nhiệt đối với dòng chảy rối trong ống, quanh một bản phẳng v.v... Ta không dừng lại ở đây.

Các mạch động rối của nhiệt độ

Ở trên, khi nói về nhiệt độ của chất lỏng chảy rối, tất nhiên ta hiểu ngầm là nói về giá trị trung bình của nó theo thời gian. Còn giá trị thực của nhiệt độ tại mỗi điểm của không gian đều chịu một sự biến thiên cực kỳ không đều theo thời gian, tương tự như các mạch động vận tốc.

Ta sẽ coi rằng, sự biến thiên quan trọng của nhiệt độ trung bình xảy ra tại những khoảng cách l (cỡ cơ bản của chảy rối) mà tại đó vận tốc trung bình của chuyển động thay đổi. Có thể áp dụng cho những mạch động cỡ nhỏ (cỡ $\lambda << l$) của nhiệt độ cùng những quan niệm tổng quát và những lý do đồng dạng đã được ứng dụng để khảo sát những tính chất cục bộ của chảy rối ở §33. Đồng thời, sẽ coi rằng $\mathrm{P} \sim 1$ (trong trường hợp ngược lại có thể cần phải đưa vào hai cỡ nội được xác định theo ν và theo χ). Khi đó, khoảng quán tính của các cỡ đồng thời cũng là khoảng *đối lưu* – sự san bằng nhiệt độ trong khoảng đó xảy ra bằng cách khuấy trộn cơ học "các hạt chất lỏng" được nung nóng khác nhau mà không có sự tham gia của sự dẫn nhiệt thực; các tính chất của các mạch động nhiệt độ trong khoảng này không phụ thuộc cả vào chuyển động cỡ lớn. Ta xác định sự phụ thuộc của các hiệu nhiệt độ T_λ vào các khoảng cách λ trong khoảng quán tính (*A. M. Obukhôv*, 1949).

Sự tiêu tán năng lượng do sự dẫn nhiệt (trong một đơn vị khối lượng) được cho bởi biểu thức $\kappa(\nabla T^2)/T$ (so sánh với (49-6) hay (79-1) dưới đây).

Chia biểu thức đó cho ρc_p, ta thu được $\chi(\nabla T)^2/T \equiv \varphi/T$, là đại lượng xác định vận tốc hạ thấp nhiệt độ do tiêu tán; nếu giả thiết các dao động rối của nhiệt độ là tương đối nhỏ, ta có thể thay T ở trong mẫu số bằng nhiệt độ trung bình không đổi. Đại lượng φ đưa vào như vậy biểu diễn thêm một thông số (cùng với ε) để xác định các tính chất cục bộ của tính rối trong chất lỏng nung nóng không đều.

Theo phương pháp đã trình bày ở §33 (xem bài giảng sau (33-1)), ta biểu diễn φ qua các đại lượng đặc trưng cho các mạch động cỡ λ:

$$\varphi \sim \chi_{r\lambda}\left(\frac{T_\lambda}{\lambda}\right)^2.$$

Thay vào đây

$$\chi_{r\lambda} \sim \nu_{r\lambda} \sim \lambda v_\lambda, \quad v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$$

(theo (33-2) và (33-6)), ta thu được kết quả cần tìm:

$$T_\lambda^2 \sim \varphi\varepsilon^{-1/3}\lambda^{2/3}. \tag{54-5}$$

Như vậy, đối với $\lambda >> \lambda_o$, các mạch động nhiệt độ, cũng như các mạch động vận tốc, đều tỷ lệ với $\lambda^{1/3}$.

Còn tại các khoảng cách $\lambda \lesssim \lambda_o$, nhiệt độ hòa đồng bằng quá trình dẫn nhiệt thực. Tại các cỡ $\lambda << \lambda_o$, nhiệt độ biến thiên nhịp nhàng. Với cùng những lý do giống như đối với vận tốc (xem (33-19)), các hiệu T_λ ở đây tỷ lệ với λ.

BÀI TẬP

1. Tìm định luật giới hạn cho sự phụ thuộc của số Nusselt vào số Prandtl ở trong lớp biên chảy tầng đối với các giá trị lớn của P và của R.

Giải. Với các P lớn, khoảng cách δ', tại đó có sự biến thiên nhiệt độ, là nhỏ so với bề dầy δ của lớp, trong đó có sự giảm của vận tốc v_x (δ' có thể được gọi là bề dầy lớp biên nhiệt độ). Có thể tìm được bậc của δ' bằng cách ước lượng các số hạng của phương trình (54-1). Tại khoảng cách từ $y = 0$ đến $y \sim \delta'$ nhiệt độ thay đổi một lượng có bậc của hiệu toàn phần $T_1 - T_0$ giữa nhiệt độ chất lỏng và nhiệt độ của vật rắn, còn vận tốc v_x trên cùng khoảng cách đó chịu một biến đổi có bậc của $U\delta'/\delta$ (vận tốc chịu một sự biến đổi toàn phần có bậc U trên khoảng cách δ). Do đó với $y \sim \delta'$ các số hạng của phương trình (54-1) có bậcđộ lớn

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \chi \frac{T_1 - T_o}{\delta'^2}, \qquad v_x \frac{\partial T}{\partial x} \sim U \frac{\delta'}{\delta} \frac{T_1 - T_o}{l}.$$

So sánh cả hai biểu thức đó ta được $\delta'^3 \sim \chi\delta l / U$. Thay $\delta \sim l/\sqrt{\mathrm{R}}$, ta có:

$$\delta' \sim \frac{l}{\mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3}} \sim \frac{\delta}{\mathrm{P}^{1/3}}.$$

Như vậy với các P lớn, độ dầy của lớp biên nhiệt độ giảm tỷ lệ nghịch với căn bậc ba của P so với bề dầy của lớp biên vận tốc. Thông lượng nhiệt bằng

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \sim \kappa \frac{T_1 - T_o}{\delta'}.$$

và cuối cùng ta thu được định luật giới hạn cho sự truyền nhiệt [1]:

$$\mathrm{N} = \text{const}\ \mathrm{R}^{1/2}\mathrm{P}^{1/3}$$

2. Tìm dạng giới hạn cho hàm $f(\mathrm{P})$ trong định luật lôga về sự phân bố nhiệt độ (54-4) với các giá trị lớn của P.

Giải. Theo điều đã nói ở §42, vận tốc ngang ở trong lớp nhớt lót có bậc $v_*(y/y_o)^2$ và cỡ của chuyển động rối có bậc độ lớn y^2/y_o. "Độ dẫn nhiệt rối" do đó bằng:

$$\chi_r \sim v_* y_o \left(\frac{y}{y_o}\right)^4 \sim \nu \left(\frac{y}{y_o}\right)^4$$

(ta đã dùng ở đây hệ thức (42-5)); về bậc χ_r có thể so sánh với hệ số thông thường χ tại các khoảng cách $y_1 \sim y_o \mathrm{P}^{-1/4}$. Vì χ_r tăng rất nhanh với y, nên rõ ràng là sự biến thiên chủ yếu của nhiệt độ ở trong lớp nhớt lót xảy ra tại những khoảng cách so với tường, có bậc của y_1. Và người ta có thể giả thiết nó tỷ lệ với y_1, nghĩa là nó có bậc

$$\frac{qy_1}{\kappa} \sim \frac{qy_o}{\kappa \mathrm{P}^{1/4}} \sim \frac{q}{\rho c_p v_*} \mathrm{P}^{3/4}.$$

So sánh với công thức (54-4), ta tìm được rằng $f(\mathrm{P})$ sẽ có dạng

$$f(\mathrm{P}) = \text{const}\ \mathrm{P}^{3/4}$$

---

[1] Đối với các giá trị thực của hệ số dẫn nhiệt của các chất khác nhau, số Prandtl không đạt được những giá trị lớn, để định luật giới hạn đó có thể đúng. Tuy nhiên, các định luật như thế có thể áp dụng được cho sự khuếch tán đối lưu, được mô tả bởi cùng những phương trình như sự truyền nhiệt đối lưu, khi đó nhiệt độ được thay bằng nồng độ của các chất hòa tan và thông lượng nhiệt được thay thế bằng thông lượng của chất đó, còn "*số khuếch tán Prandtl*" được xác định như $\mathrm{P}_D = \nu/D$, trong đó D là hệ số khuếch tán. Chẳng hạn, đối với các dung dịch trong nước hay các chất lỏng tương tự, số P_D đạt tới những giá trị vào bậc 10^3, còn đối với những dung dịch trong những dung môi rất nhớt thì P_D đạt tới 10^6 hay lớn hơn nữa.

trong đó const là một hằng số.

3. Tìm hệ thức liên hệ các hàm tương quan cục bộ

$$B_{TT} = \left\langle (T_2 - T_1)^2 \right\rangle, \qquad B_{iTT} = \left\langle (v_{2i} - v_{1i})\,(T_2 - T_1)^2 \right\rangle$$

trong một dòng chảy rối nung nóng không đều. (*A. M. Yaglom*, 1949).

Giải. Tất cả các phép tính tương tự như các phép tính đã sử dụng ở §34. Ngoài các hàm B_{TT} và B_{iTT}, ta đưa thêm các hàm bổ trợ:

$$b_{TT} = \langle T_1\, T_2 \rangle\,, \quad b_{iTT} = \langle v_{1i}\, T_1\, T_2 \rangle$$

và để lập luận cho dễ dàng, ta coi tính chảy rối như tính đẳng hướng và đồng chất hoàn toàn. Khi đó ta có:

$$B_{TT} = 2\,\langle T^2 \rangle - 2b_{TT}\,, \quad B_{iTT} = 4b_{iTT} \tag{1}$$

(các giá trị trung bình

$$\langle v_{1i}\, T_1\, T_2 \rangle = -\langle v_{2i}\, T_1\, T_2 \rangle$$

còn các giá trị trung bình dạng $\langle v_{1i} T_2^2 \rangle$ bằng không do tính không nén được của chất lỏng - so sánh với việc rút ra (34-18)). Dựa vào phương trình

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

ta tính được đạo hàm

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{TT} = -2\frac{\partial}{\partial x_{1i}} b_{iTT} + 2\chi \Delta_1 b_{TT}. \tag{2}$$

Nhưng do chính sự đẳng hướng và đồng chất đó mà các hàm b_{iTT} có dạng

$$b_{iTT} = n_i\, b_{rTT} \tag{3}$$

(trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$). Còn hàm b_{rTT} và b_{TT} chỉ phụ thuộc vào r. Nếu xét đến (1) và (3), phương trình (2) có dạng

$$-2\varphi - \frac{\partial B_{TT}}{\partial t} = \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{n}\, B_{rTT}) - \chi \Delta B_{TT} =$$

$$= \frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 B_{rTT} \right) - \frac{\chi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial B_{TT}}{\partial r} \right),$$

Ở đây đã đưa vào đại lượng

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left\langle T^2 \right\rangle$$

(trùng với đại lượng đã nêu ở trong bài giảng). Vì tính chảy rối cục bộ được coi là dừng, nên có thể bỏ qua đạo hàm $\partial B_{TT}/\partial t$. Lấy tích phân đẳng thức còn lại theo r, ta thu được hệ thức cần tìm (tương tự (34-21)):

$$B_{rTT} - 2\chi \frac{dB_{TT}}{dr} = -\frac{4}{3} r\varphi. \qquad (4)$$

Với $r >> \lambda_o$ số hạng chứa χ là nhỏ, và theo (54-5) hàm $B_{TT} \sim r^{2/3}$. Khi đó từ (4) ta có

$$B_{rTT} \approx -\frac{4}{3} r\varphi.$$

Tại các khoảng cách $r << \lambda_o$, ta có $B_{TT} \sim r^2$ và có thể bỏ qua số hạng B_{rTT}. Khi đó

$$B_{rr} \approx \frac{1}{3\chi} r^2\varphi.$$

§55. SỰ NUNG NÓNG VẬT TRONG CHẤT LỎNG CHUYỂN ĐỘNG

Một nhiệt biểu nhúng trong chất lỏng đứng yên chỉ một nhiệt độ bằng nhiệt độ của chất lỏng. Nếu chất lỏng chuyển động, nhiệt biểu chỉ một nhiệt độ hơi cao hơn. Đó là vì có sự nung nóng do ma sát nội của chất lỏng bị hãm ở gần mặt nhiệt biểu.

Bài toán tổng quát có thể được phát biểu như sau. Một vật có hình dạng bất kỳ được nhúng trong một chất lỏng chuyển động; sau một khoảng thời gian vừa đủ, một sự cân bằng nhiệt nào đó sẽ được thiết lập. Cần xác định hiệu nhiệt độ $T_1 - T_o$ giữa vật và chất lỏng xuất hiện khi đó.

Nghiệm của bài toán này được xác định bởi phương trình (50-2), tuy nhiên bây giờ ở trong đó, không được bỏ qua số hạng không đổi chứa độ nhớt, như đã làm ở (53-1); chính số hạng này xác định hiệu ứng mà ta cần quan tâm. Do đó, đối với trạng thái được thiết lập, ta có phương trình:

$$\mathbf{v}\nabla T = \chi\Delta T + \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \qquad (55\text{-}1)$$

Cần phải bổ sung thêm vào phương trình trên các phương trình chuyển động (53-3) của chính chất lỏng, và nói một cách chặt chẽ, còn phải bổ sung thêm cả phương trình dẫn nhiệt ở trong vật rắn. Trong trường hợp giới hạn, khi độ dẫn nhiệt của vật đủ nhỏ, có thể hoàn toàn bỏ qua nó và

coi rằng nhiệt độ tại mỗi điểm ở trên mặt vật được coi đơn giản bằng nhiệt độ của chất lỏng tại cùng điểm đó, nhiệt độ này thu được do việc giải phương trình (55-1) với điều kiện biên $\partial T/\partial n = 0$. Điều kiện này đòi hỏi thông lượng nhiệt qua mặt vật phải bằng không. Trong trường hợp giới hạn ngược lại, khi độ dẫn nhiệt của vật đủ lớn, ta có thể đòi hỏi một cách gần đúng rằng, nhiệt độ phải như nhau tại mọi điểm ở trên mặt vật; đạo hàm $\partial T/\partial n$ khi đó, nói chung, khác không trên toàn bộ mặt vật, và chỉ cần đòi hỏi rằng thông lượng nhiệt toàn phần qua toàn bộ mặt vật (nghĩa là tích phân của $\partial T/\partial n$ theo mặt đó) phải bằng không. Trong cả hai trường hợp giới hạn này, hệ số dẫn nhiệt của vật không xuất hiện tường minh ở trong nghiệm của bài toán; dưới đây ta sẽ giả thiết xét một trong hai trường hợp đó.

Các phương trình (55-1) và (55-3) chứa các thông số không đổi χ, ν và c_p, ngoài ra, các nghiệm của chúng chứa các kích thước l của vật và vận tốc U của dòng tới. (Hiệu nhiệt độ $T_1 - T_0$ bây giờ không phải là một thông số tùy ý, mà bản thân nó phải được xác định do việc giải các phương trình). Từ các thông số đó, ta có thể thiết lập được hai tổ hợp độc lập không thứ nguyên; các tổ hợp đó được chọn là R và P. Khi đó có thể khẳng định rằng, hiệu nhiệt độ $T_1 - T_0$ cần tìm bằng một đại lượng nào đó có thứ nguyên nhiệt độ (đại lượng đó được chọn là U^2/c_p) nhân với một hàm của R và P:

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(\mathrm{R}, \mathrm{P}). \tag{55-2}$$

Ta dễ dàng tìm được dạng của hàm này trong trường hợp của các số Reynolds rất nhỏ, nghĩa là các vận tốc U đủ nhỏ. Khi đó số hạng $\nu\nabla T$ trong (55-1) nhỏ so với $\chi\Delta T$, do đó phương trình (55-1) sẽ đơn giản đi

$$\chi\Delta T = -\frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2. \tag{55-3}$$

Nhiệt độ và vận tốc biến thiên đáng kể trên các khoảng cách có bậc các kích thước l của vật. Do đó việc ước lượng cả hai vế của phương trình (55-3) cho ta

$$\frac{\chi(T_1 - T_0)}{l^2} \sim \frac{\nu U^2}{c_p l^2}.$$

Như vậy ta đi tới kết quả là, với các R nhỏ

$$T_1 - T_0 = \text{const P}\frac{U^2}{c_p} \tag{55-4}$$

trong đó const là một hằng số bằng số phụ thuộc vào hình dạng của vật. Ta nhận thấy rằng, hiệu nhiệt độ tỷ lệ với bình phương của vận tốc U.

Một số kết luận tổng quát về dạng của hàm f(P,R) trong (55-2) cũng có thể được rút ra cả trong trường hợp ngược lại của các R lớn, khi vận tốc và nhiệt độ chỉ biến thiên trong một lớp biên hẹp. Giả sử δ và δ′ là các khoảng cách, mà tại đó vận tốc và nhiệt độ lần lượt biến thiên; δ và δ′ khác nhau một thừa số phụ thuộc vào P. Do độ nhớt của chất lỏng, nên sau mỗi giây ở trong lớp biên có tỏa ra một nhiệt lượng được tính bằng tích phân (16-3). Xét cho một đơn vị diện tích mặt vật, nhiệt lượng về bậc độ lớn bằng $\nu\rho(U/\delta)^2.\delta = \nu\rho U^2/\delta$. Mặt khác, nhiệt lượng này phải bằng nhiệt lượng của vật bị mất đi, và bằng thông lượng

$$q = -\kappa\frac{\partial T}{\partial n} \sim \chi c_p \rho \frac{T_1 - T_0}{\delta'}.$$

So sánh hai biểu thức này ta đi tới kết quả

$$T_1 - T_0 = \frac{U^2}{c_p} f(\text{P}). \tag{55-5}$$

Như vậy, cả trong trường hợp này hàm f cũng không phụ thuộc vào R; còn sự phụ thuộc của nó vào P vẫn bất định.

BÀI TẬP

1. Tìm sự phân bố nhiệt độ trong chất lỏng thực hiện dòng chảy Poiseuille dọc theo một ống có tiết diện tròn, các thành của ống được giữ ở nhiệt độ không đổi T_0.
Giải. Trong tọa độ trụ có trục z trùng với trục của ống

$$v_z = v = 2\bar{v}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$$

trong đó $\bar{v}$ là vận tốc trung bình của dòng chảy. Thay biểu thức đó vào (55-3), ta được phương trình

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{16\bar{v}^2}{R^4}\frac{\nu}{\chi c_p}r^2.$$

Nghiệm của phương trình này hữu hạn tại $r = 0$ và thỏa mãn điều kiện $T = T_0$ với $r = R$ có dạng

$$T - T_0 = \bar{v}^2\,\frac{\mathrm{P}}{c_p}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right].$$

2. Tìm hiệu nhiệt độ giữa quả cầu rắn và chất lỏng chảy bao quanh với các số Reynolds nhỏ. Độ dẫn nhiệt của quả cầu được giả thiết là lớn.

Giải. Ta chọn các tọa độ cầu r, θ, φ có gốc tại tâm quả cầu và trục cực hướng dọc theo chiều của vận tốc và dòng tới. Nếu tính các thành phần của tenxơ $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$ theo các công thức (15-20) và công thức (20-9) cho vận tốc của chất lỏng chảy quanh quả cầu, ta thu được phương trình (55-3) dưới dạng

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) = -A\frac{R^4}{r^4}\left[\cos^2\theta\left(3 - \frac{6R^2}{r^2} + \frac{2R^4}{r^4}\right) + \frac{R^4}{r^4}\right],$$

trong đó

$$A = \frac{9}{4}u^2\frac{\mathrm{P}}{c_p}.$$

Ta tìm $T(r, \theta)$ dưới dạng

$$T = f(r)\cos^2\theta + g(r)$$

Sau khi tách các phần phụ thuộc và không phụ thuộc vào θ, ta tìm được hai phương trình cho f và g:

$$r^2f'' + 2rf' - 6f = -A\left(\frac{3R^2}{r^2} - \frac{6R^4}{r^4} + \frac{2R^6}{r^6}\right),$$

$$r^2g'' + 2rg' + 2f = -A\frac{R^6}{r^6}.$$

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra

$$f = A\left(\frac{3R^2}{4r^2} + \frac{R^4}{r^4} - \frac{1}{12}\frac{R^6}{r^6}\right) + \frac{c_1R^3}{r^3}$$

(bỏ qua số hạng có dạng const·r^2, vì số hạng này không triệt tiêu tại vô cùng), sau đó phương trình thứ hai cho ta nghiệm:

$$g = -\frac{A}{2}\left(\frac{3R^2}{2r^2} + \frac{R^4}{3r^4} + \frac{R^6}{18r^6}\right) - \frac{c_1 R^3}{3r^3} + \frac{c_2 R}{r} + c_3.$$

Các hằng số c_1, c_2, c_3 được xác định từ các điều kiện

$$T = \text{const} \quad \text{và} \quad \int \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \sin\theta \, d\theta \qquad \text{với} \quad r = R$$

Điều này tương đương với đòi hỏi

$$f(R) = 0, \quad g'(R) + \frac{1}{3} f'(R) = 0;$$

tại vô cùng phải có $T = T_0$. Ta tìm được:

$$c_1 = -\frac{5}{3}A, \qquad c_2 = \frac{2}{3}A, \qquad c_3 = T_0.$$

Hiệu nhiệt độ giữa quả cầu ($T_1 = T(R)$) và chất lỏng (T_0) bằng:

$$T_1 - T_0 = \frac{5}{8} \mathrm{P} \frac{u^2}{c_p}.$$

Ta nhận thấy rằng, sự phân bố nhiệt độ cần tìm cũng thỏa mãn điều kiện $\partial T/\partial r = 0$ với $r = R$, nghĩa là $f'(R) = g'(R) = 0$. Do đó nó cũng đồng thời là nghiệm của cùng bài toán trong trường hợp độ dẫn nhiệt của quả cầu là nhỏ.

§56. ĐỐI LƯU TỰ DO

Ở §3 ta đã nhận thấy rằng, nếu trong chất lỏng đặt trong trọng trường có sự cân bằng cơ học, thì sự phân bố nhiệt độ trong chất lỏng chỉ phụ thuộc vào độ cao z: $T = T(z)$. Nhưng nếu sự phân bố nhiệt độ không thỏa mãn điều kiện đó, mà trong trường hợp tổng quát sự phân bố là hàm của cả ba tọa độ, thì cân bằng cơ học ở trong chất lỏng không thể có được. Hơn nữa, ngay cả khi $T = T(z)$, thì cân bằng cơ học vẫn cứ có thể không xảy ra, nếu gradiên nhiệt độ hướng thẳng đứng từ trên xuống dưới và về giá trị tuyệt đối, nó lớn hơn một giá trị giới hạn nào đó (§4).

Sự không có mặt của cân bằng cơ học sẽ dẫn tới sự xuất hiện trong

chất lỏng những dòng chảy nội tại có xu hướng pha trộn chất lỏng sao cho trong chất lỏng có một nhiệt độ không đổi được thiết lập. Một chuyển động như thế xuất hiện trong trọng trường được gọi là *sự đối lưu tự do*.

Chúng ta hãy rút ra các phương trình mô tả sự đối lưu. Giả thiết chất lỏng là không nén được. Điều này có nghĩa là, áp suất được giả thiết biến thiên đủ nhỏ trong chất lỏng, do đó có thể bỏ qua sự biến thiên của mật độ gây bởi sự biến thiên của áp suất. Chẳng hạn, trong khí quyển, tại đây áp suất biến thiên theo độ cao, có nghĩa là ta sẽ không xét các cột khí quá cao, trong đó sự biến thiên mật độ theo độ cao trở nên quan trọng. Dĩ nhiên, không được bỏ qua sự biến thiên của mật độ gây bởi sự nung nóng không đều chất lỏng. Chính sự biến thiên này dẫn đến sự xuất hiện các lực gây ra chuyển động đối lưu.

Ta viết nhiệt độ biến thiên dưới dạng $T = T' + T_0$, trong đó T_0 là một giá trị trung bình không đổi nào đó; sự không đều của nhiệt độ T' được tính từ giá trị này. Nhiệt độ T' được giả thiết là nhỏ so với T_0.

Ta cũng viết mật độ chất lỏng dưới dạng $\rho = \rho_0 + \rho'$ với ρ_0 không đổi. Vì sự biến thiên của nhiệt độ T' cũng nhỏ, nên cả sự biến thiên của mật độ ρ', do nó gây ra cũng nhỏ, do đó ta có thể viết:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T}\right)_p T' = -\rho_0 \beta T', \tag{56-1}$$

trong đó $\beta = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial T)$ là *hệ số dãn nở vì nhiệt độ* của chất lỏng [1].

Nhưng trong áp suất $p = p_0 + p'$, đại lượng p_0 không phải là không đổi. Đó là áp suất tương ứng với cân bằng cơ học ở nhiệt độ và mật độ không đổi (bằng T_0 và ρ_0). Nó thay đổi với độ cao theo phương trình thủy tĩnh học

$$p_0 = \rho_0 \mathbf{gr} + \text{const} = -\rho_0 g z + \text{const} \tag{56-2}$$

trong đó độ cao z được tính theo hướng thẳng đứng.

Trong cột chất lỏng với độ cao h, độ chênh áp suất thủy tĩnh bằng $\rho_0 g h$. Độ chênh này dẫn đến sự biến thiên mật độ một lượng $\sim \rho g h/c^2$, trong đó c là vận tốc âm (xem dưới đây (64-4)). Theo điều kiện, sự biến

[1] Sẽ giả thiết rằng $\beta > 0$

thiên này phải được bỏ qua, không những so với bản thân mật độ, mà còn so với sự biến thiên nhiệt lượng của nó (56-1). Nói một cách khác, bất đẳng thức sau phải được thỏa mãn

$$\frac{gh}{c^2} << \beta\Theta, \tag{56-3}$$

trong đó Θ là hiệu nhiệt độ đặc trưng.

Ta bắt đầu bằng sự biến đổi phương trình Navier - Stokes, phương trình này khi có mặt của trọng trường sẽ có dạng:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{g},$$

phương trình trên được thu bằng cách thêm vào vế phải của (15-7) lực trọng trường $\mathbf{g}$ tác dụng lên một đơn vị khối lượng. Ta thay vào đây $p = p_o + p'$, $\rho = \rho_o + \rho'$ với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất, ta có:

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\nabla p_o}{\rho_o} + \frac{\nabla p'}{\rho_o} - \frac{\nabla p_o}{\rho_o^2}\rho'$$

hay thay (56-1) và (56-2):

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g} + \frac{\nabla p'}{\rho_o} + \mathbf{g}T'\beta.$$

Nếu thay biểu thức này vào phương trình Navier - Stokes và bỏ chỉ số ở trong ρ_o, cuối cùng ta thu được:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T'. \tag{56-4}$$

Trong phương trình dẫn nhiệt (50-2) số hạng chứa độ nhớt, trong đối lưu tự do, như có thể chứng minh, bao giờ cũng nhỏ so với các số hạng khác của phương trình, do đó có thể được bỏ đi. Như vậy, ta thu được:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T'. \tag{56-5}$$

Các phương trình (56-3) và (56-4) cùng với phương trình liên tục $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, lập thành một hệ đầy đủ các phương trình mô tả đối lưu tự do (*A. Oberbeck*, 1879; *J. Boussinesq*, 1903).

Đối với chuyển động dừng, các phương trình của chuyển động đối lưu có dạng

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla\frac{p'}{\rho} - \mathbf{g}T'\beta + \nu\Delta\mathbf{v}, \tag{56-6}$$

$$\mathbf{v}\nabla T' = \chi\Delta T', \tag{56-7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{56-8}$$

Hệ năm phương trình này xác định các hàm chưa biết $\mathbf{v}$, p'/ρ, T', và chứa ba thông số ν, χ, và $g\beta$. Ngoài ra nghiệm của chúng chứa độ dài đặc trưng h và hiệu đặc trưng nhiệt độ Θ. Vận tốc đặc trưng bây giờ không có mặt, vì không có nguyên nhân cưỡng bức bên ngoài nào và toàn bộ chuyển động của chất lỏng đều gây bởi chất lỏng bị nung nóng không đều. Có thể thành lập từ các đại lượng này hai tổ hợp không thứ nguyên độc lập (nhớ rằng, khi đó cần gán cho nhiệt độ một thứ nguyên đặc biệt, xem §53). Thường người ta chọn hai tổ hợp đó là số Prandtl $\mathrm{P} = \nu/\chi$ và *số Rayleigh* [1]:

$$\mathfrak{R} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu\chi}. \tag{56-9}$$

Số Prandtl chỉ phụ thuộc vào các tính chất của chính chất lỏng; còn đặc trưng cơ bản của đối lưu là số Rayleigh.

Định luật đồng dạng cho đối lưu tự do có dạng

$$\mathbf{v} = \frac{\nu}{h} f(\mathbf{r}/h, \mathfrak{R}, \mathrm{P}), \quad T = \Theta f(\mathbf{r}/h, \mathfrak{R}, \mathrm{P}). \tag{56-10}$$

Hai dòng chảy sẽ đồng dạng, nếu các số $\mathfrak{R}$ và P như nhau. Sự truyền nhiệt do đối lưu ở trong trọng trường được đặc trưng bởi số Nusselt, cũng như trước được xác định theo (53-7). Số này bây giờ chỉ là hàm của $\mathfrak{R}$ và P.

Chuyển động đối lưu có thể là chảy tầng hoặc chảy rối. Sự xuất hiện tính chảy rối được xác định bởi số Rayleigh – đối lưu trở nên chảy rối với những giá trị rất lớn của $\mathfrak{R}$.

[1] Trong các tài liệu cũng dùng cả *số Grashof*:

$$G = g\beta\Theta h^3/\nu^2 = \mathfrak{R}/\mathrm{P}.$$

BÀI TẬP

1. Đưa bài toán xác định số Nusselt trong đối lưu tự do trên một thành phẳng thẳng đứng về việc giải các phương trình vi phân thông thường. Giả thiết rằng, vận tốc và hiệu nhiệt độ chỉ khác không rõ rệt trong một lớp biên mỏng trên mặt của thành (*E. Pohthausen*, 1921).

Giải. Chọn gốc tọa độ ở bờ dưới của thành, trục x hướng thẳng đứng trong mặt phẳng của nó, còn trục y vuông góc với thành. Trong lớp biên, áp suất không thay đổi dọc theo trục y (xem § 39), do đó tại mọi nơi, nó bằng áp suất thủy tĩnh $p_0(x)$, do đó $p' = 0$. Trong phép gần đúng thông thường đối với lớp biên, các phương trình (56.6-8) có dạng:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0).$$
$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

với các điều kiện biên

$$v_x = v_y = 0, \quad T = T_1 \quad \text{với} \quad y = 0; \quad v_x = 0, \quad T = T_0 \quad \text{với} \quad y = \infty$$

(T_1 là nhiệt độ của thành, T_0 là nhiệt độ chất lỏng ở xa thành). Các phương trình này có thể được biến đổi thành các phương trình vi phân thông thường bằng cách đưa các đại lượng sau làm biến độc lập

$$\xi = G^{1/4} \frac{y}{(4xh^3)^{1/4}}, \qquad G = \frac{g\beta(T_1 - T_0)h^3}{\nu^2} \tag{2}$$

(h là độ cao của bản). Ta đặt:

$$v_x = \frac{2\nu}{h^{3/2}} G^{1/2} \sqrt{x}\, \varphi'(\xi), \qquad T - T_0 = (T_1 - T_0)\, \theta(\xi). \tag{3}$$

Khi đó phương trình sau cùng trong các phương trình (1) cho:

$$v_y = \frac{\nu G^{1/4}}{(4xh^3)^{1/4}} (\xi\varphi' - 3\varphi),$$

còn hai phương trình đầu cho ta các phương trình của các hàm $\varphi(\xi)$ và $\theta(\xi)$:

$$\varphi''' + 3\varphi\varphi'' - 2\varphi'^2 + \theta = 0, \qquad \theta'' + 3P\varphi\theta' = 0 \tag{4}$$

Từ (3-4), ta suy ra rằng, bề dầy của lớp biên $\delta \sim (xh^3/G)^{1/4}$. Điều kiện ứng dụng được nghiệm, $\delta << h$, được thực hiện với các giá trị G đủ lớn.

Thông lượng nhiệt toàn phần (tính cho một đơn vị diện tích của thành)

$$q = -\frac{1}{h}\int_0^h \kappa \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} dx = -\frac{4\kappa}{3}\theta'(0;\mathrm{P})\,(T_1 - T_o)\left(\frac{\mathrm{G}}{4h}\right)^{1/4}.$$

Số Nusselt

$$\mathrm{N} = f(\mathrm{P})\,\mathrm{G}^{1/4}.$$

trong đó hàm $f(\mathrm{P})$ được xác định bởi nghiệm của phương trình (4).

2. Một luồng hơi nóng chảy rối nhúng chìm bị uốn cong dưới ảnh hưởng của trọng trường. Xác định dạng của luồng hơi nóng đó (*G. N. Abramovitch*, 1938).

Giải. Giả sử T' là một giá trị trung bình nào đó (theo tiết diện luồng) của hiệu nhiệt độ ở trong luồng và trong khí ở xung quanh, u là giá trị trung bình nào đó của vận tốc khí ở trong luồng, còn l là khoảng cách dọc theo luồng tính từ nơi thoát của nó (l được giả thiết là lớn so với các kích thước của miệng thoát). Điều kiện thông lượng nhiệt Q phải không đổi dọc theo luồng đòi hỏi:

$$Q \sim \rho c_p T' u R^2 = \text{const},$$

và vì bán kính của luồng chảy rối tỷ lệ với l (xem §36), nên

$$T' u l^2 = \text{const} \sim \frac{Q}{\rho c_p} \tag{1}$$

(ta nhận xét rằng, nếu không xét trọng trường $u \sim 1/l$ – xem (36-3) và từ (1) suy ra rằng $T' \sim 1/l$).

Vectơ dòng xung lượng qua tiết diện ngang của luồng tỷ lệ với $\rho u^2 R^2 \mathbf{n} \sim \rho u^2 l^2 \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị dọc theo luồng). Thành phần nằm ngang của nó không đổi dọc theo luồng:

$$u^2 l^2 \cos\theta = \text{const} \tag{2}$$

(θ là góc giữa $\mathbf{n}$ và phương nằm ngang), và sự biến thiên của thành phần thẳng đứng được xác định bởi lực nâng tác dụng lên luồng. Lực này tỷ lệ với

$$\rho\beta T' R^2 g \sim \rho\beta T' l^2 g \sim \frac{\beta g Q}{c_p}\frac{1}{u}.$$

Do đó ta có:

$$\frac{d}{dl}\left(l^2 u^2 \sin\theta\right) \sim \frac{\beta g Q}{\rho c_p u}. \tag{3}$$

Từ (2), ta suy ra

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\theta}{dl} = \text{const}\, l\sqrt{\cos\theta}.$$

Cuối cùng ta thu được

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(\cos\theta)^{5/2}} = \text{const}.l^2 \tag{4}$$

(θ_0 xác định phương của luồng khi thoát ra).

Đặc biệt, nếu θ thay đổi rất ít trên toàn bộ độ dài của luồng, thì (4) cho ta

$$\theta - \theta_0 = \text{const} \cdot l^2$$

Điều đó có nghĩa là, luồng có dạng một parabôn bậc ba; độ lệch d so với quỹ đạo thẳng là $d = \text{const}.l^3$.

3. Một luồng hơi nóng chảy rối (số Reynolds lớn) bốc lên từ một vật nóng đứng yên. Tìm quy luật biến thiên của vận tốc và nhiệt độ của luồng theo độ cao (*Ia. B. Zelđôvits*,1937).

Giải. Cũng như trong trường hợp trước, bán kính của luồng tỷ lệ với khoảng cách tính từ nguồn, và tương tự như (1), ta có:

$$T'uz^2 = \text{const},$$

và thay cho (3),

$$\frac{d}{dz}(z^2u^2) = \frac{\text{const}}{u}$$

(z là độ cao ở phía trên vật, được giả thiết là lớn so với các kích thước của nó). Lấy tích phân phương trình cuối, ta được:

$$u \sim z^{-1/3}$$

một cách tương ứng cho nhiệt độ:

$$T' \sim z^{-5/3}.$$

4. Cũng bài toán đó cho một luồng đối lưu chảy tầng bốc lên tự do (*Ia. B. Zelđôvits*,1937).

Giải. Cùng với hệ thức

$$T'uR^2 = \text{const},$$

biểu diễn sự không đổi của thông lượng nhiệt, ta có hệ thức

$$\frac{u^2}{z} \sim \frac{\nu u}{R^2} \sim g\beta T'$$

được suy ra từ phương trình (56-6). Từ các hệ thức này, ta rút ra được các định luật biến thiên sau đây của bán kính, vận tốc và nhiệt độ của luồng theo độ cao:

$$R \sim \sqrt{z}, \qquad u = \text{const}, \qquad T \sim \frac{1}{z}.$$

Ta nhận thấy rằng số

$$\mathfrak{R} \sim T'R^3 \sim \sqrt{z}$$

tăng theo độ cao; do đó, luồng trở nên chảy rối tại một độ cao nào đó.

§57. TÍNH KHÔNG ỔN ĐỊNH ĐỐI LƯU CỦA CHẤT LỎNG ĐỨNG YÊN

Nếu trong một cấu hình đã cho của chất lỏng và các thành rắn số Rayleigh tăng dần lên, thì sẽ tới một lúc trạng thái đứng yên của chất lỏng trở nên không ổn định đối với các nhiễu động nhỏ tùy ý [1]. Kết quả là có xuất hiện đối lưu, và sự chuyển từ chế độ dẫn nhiệt thuần túy trong chất lỏng đứng yên sang chế độ đối lưu được hoàn thành một cách liên tục. Do đó sự phụ thuộc của số Nusselt vào $\mathcal{R}$ trong dời chuyển này không có bước nhảy, mà chỉ là một vết gẫy.

Việc xác định về mặt lý thuyết giá trị tới hạn $\mathcal{R}_c$ phải được tiến hành theo sơ đồ đã được giải thích ở §26. Ta lặp lại ở đây sơ đồ ứng dụng cho trường hợp đã cho.

Ta biểu diễn T' và p' dưới dạng

$$T' = T'_0 + \tau, \quad p' = p'_0 + \rho w \tag{57-1}$$

trong đó T_0' và p_0' được xét cho chất lỏng đứng yên, còn τ và w được xét cho nhiễu động, T_0' và p_0' thỏa mãn các phương trình:

$$\Delta T'_0 = \frac{d^2 T'_0}{dz^2} = 0, \qquad \frac{dp'_0}{dz} = \rho g \beta T'_0.$$

Từ phương trình thứ nhất ta có $T'_0 = -Az$, trong đó A là một đại lượng không đổi; trong trường hợp nung nóng chất lỏng ở phía dưới mà ta quan tâm, thì hằng số $A > 0$.

Trong các phương trình (56.4-5) $\mathbf{v}$ (vận tốc nhiễu động không có), τ và w là những đại lượng bé. Nếu bỏ các số hạng toàn phương và xét các nhiễu động phụ thuộc vào thời gian, như $e^{-i\omega t}$, ta sẽ thu được các phương trình:

$$-i\omega \mathbf{v} = -\nabla w + \nu \Delta \mathbf{v} - \beta \tau g,$$
$$-i\omega \tau - A v_z = \chi \Delta \tau, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Một cách hợp lý, ta viết các phương trình này dưới dạng không thứ

[1] Không lẫn sự không ổn định này và sự không ổn định đối lưu, mà ta đã nói đến ở §28 !

nguyên bằng cách đưa vào các đơn vị đo sau đây cho tất cả các đại lượng có mặt trong các phương trình: đơn vị đo độ dài, tần số, vận tốc, áp suất, và nhiệt độ lần lượt là: h, ν/h^2, ν/h, $\rho\nu^2/h^2$ và $Ah\nu/\chi$. Dưới đây trong tiết này (và cả trong các bài tập của tiết này) tất cả các chữ đều được ký hiệu bằng các đại lượng không thứ nguyên. Các phương trình có dạng:

$$-i\omega\mathbf{v} = -\nabla w + \Delta\mathbf{v} + \Re\tau\mathbf{n}, \tag{57-2}$$

$$-i\omega\tau P = \Delta\tau + v_z, \tag{57-3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{57-4}$$

($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương trục z – thẳng đứng lên trên). Ở đây rõ ràng có các thông số $\Re$ và P tham gia. Nếu các mặt rắn tiếp giáp với chất lỏng được giữ tại các nhiệt độ không đổi, thì trên chúng các điều kiện sau phải được thực hiện [1)]

$$\mathbf{v} = 0, \tau = 0. \tag{57-5}$$

Các phương trình (57.2-4) với các điều kiện biên (57-5) xác định phổ các tần số riêng ω. Với $\Re < \Re_c$ các phần ảo của chúng $\gamma \equiv \operatorname{Im}\omega < 0$ và các nhiễu động tắt dần. Giá trị $\Re_c$ được xác định vào lúc khi mà ($\Re$ tăng dần) lần đầu tiên xuất hiện giá trị riêng có $\gamma > 0$; với $\Re = \Re_c$ giá trị γ chuyển qua giá trị không.

Bài toán về sự không ổn định đối lưu của chất lỏng đứng yên có một nét đặc thù là, tất cả các giá trị riêng $i\omega$ đều là thực, do đó các nhiễu động tắt dần hay được tăng cường đơn điệu, không dao động. Một cách tương ứng cả chuyển động ổn định, xuất hiện do kết quả của tính không ổn định của chất lỏng đứng yên, cũng là chuyển động dừng. Chúng ta chứng minh điều này cho chất lỏng lấp đầy một hốc kín với các điều kiện biên (57-5) trên các thành của nó [2)].

Ta nhân các phương trình (57 - 2) và (57 -3) lần lượt với v^* và τ^*, rồi

[1)] Ta xét các điều kiện biên đơn giản nhất, tương ứng với các thành dẫn nhiệt lý tưởng. Với độ dẫn nhiệt hữu hạn của các thành, thì còn phải bổ sung vào hệ phương trình các phương trình lan truyền nhiệt ở trong thành. Ta cũng không xét các trường hợp khi chất lỏng có mặt tự do. Trong các trường hợp như thế, nói một cách chặt chẽ, phải xét cả sự biến dạng của mặt do kết quả của nhiễu động và của lực căng bề mặt xuất hiện khi đó.

[2)] Trong phần chứng minh này và phát biểu tiếp sau của nguyên lý biến phân, chúng tôi theo *V. X. Xôrôkin*, 1953.

lấy tích phân chúng theo thể tích của hốc. Lấy tích phân từng phần của các số hạng $\mathbf{v}^*\Delta\mathbf{v}$ và $\tau^*\Delta\tau$ [1] và để ý rằng các tích phân theo mặt hốc bằng không do các điều kiện biên, ta thu được:

$$\begin{aligned} -i\omega\int|\mathbf{v}|^2dV &= \int\left(-|\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|^2 + \Re\tau v_z^*\right)dV, \\ -i\omega\mathrm{P}\int|\tau|^2dV &= \int\left(-|\nabla\tau|^2 + \tau^* v_z\right)dV \end{aligned} \qquad (57\text{-}6)$$

Trừ vào hai đẳng thức này các liên hợp phức của chúng, ta tìm được

$$\begin{aligned} -i(\omega+\omega^*)\int|\mathbf{v}|^2dV &= \Re\int(\tau v_z^* - \tau^* v_z)dV, \\ -i(\omega+\omega^*)\mathrm{P}\int|\tau|^2dV &= -\int(\tau v_z^* - \tau^* v_z)dV. \end{aligned}$$

Cuối cùng nếu nhân đẳng thức thứ hai với $\Re$ và cộng với đẳng thức thứ nhất, ta sẽ thu được:

$$\mathrm{Re}\,\omega\int\left(|\mathbf{v}|^2 + \Re\mathrm{P}|\tau|^2\right)dV = 0.$$

Do tính dương cốt yếu của tích phân, từ đó suy ra kết quả cần tìm $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ [2]. Để ý rằng với $A < 0$ (chất lỏng được nung nóng ở phía trên), về mặt hình thức tương ứng với $\mathrm{R} < 0$, tích phân có thể bằng không và $i\omega$ có thể là phức.

---

[1] Với việc dùng các đẳng thức

$$\mathbf{v}^*\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{v}^*\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{v} = \mathrm{div}\left[\mathbf{v}^*\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\right] - |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|^2,$$

$$\tau^*\Delta\tau = \mathrm{div}(\tau^*\nabla\tau) - |\nabla\tau|^2, \quad \mathbf{v}\Delta w = \mathrm{div}(w\mathbf{v}).$$

[2] Theo quan điểm toán học, việc chứng minh đã trình bày dẫn tới việc chứng minh tính tự liên hợp của hệ phương trình (57.2-4). Theo quan điểm vật lý, có thể giải thích nguồn gốc của kết quả này bằng những lý do sau đây: Giả sử khi có nhiễu động, phần tử chất lỏng dịch chuyển lên phía trên chẳng hạn. Khi rơi vào trong chất lỏng chung quanh kém nóng hơn, phần tử này sẽ lạnh đi do có sự dẫn nhiệt, nhưng vẫn còn nóng hơn môi trường bao quanh. Do đó, lực trôi nổi tác dụng lên nó sẽ hướng lên trên và phần tử sẽ tiếp tục chuyển động theo cùng hướng – tắt dần hay tăng tốc là tùy thuộc vào hệ thức giữa gradiên nhiệt độ và các hệ số tiêu tán. Trong cả hai trường hợp, do không có "lực kéo về", cho nên các dao động không xuất hiện. Ta nhận thấy rằng, khi có mặt tự do lực kéo về xuất hiện do tác dụng của lực căng bề mặt có xu hướng san bằng sự biến dạng của mặt; nếu xét đến lực này thì những điều khẳng định đã rút ra sẽ không còn đúng nữa.

Ta trở lại các đẳng thức (57-6). Bây giờ nếu nhân đẳng thức thứ hai với $\Re$ và cộng với đẳng thức thứ nhất, ta thu được cho gia số $\gamma = -i\omega$ biểu thức sau

$$-\gamma = \frac{J}{N}, \tag{57-7}$$

trong đó J và N là ký hiệu của các tích phân.

$$J = \int\left[(\text{rot } \mathbf{v})^2 + \Re(\nabla\tau)^2 - 2\Re\tau v_z\right] dV, \quad N = \int(\mathbf{v}^2 + \Re \text{P}\tau^2)dV \tag{57-8}$$

(các hàm $\mathbf{v}$ và τ được giả thiết là thực). Như đã biết, bài toán về các trị riêng của các toán tử vi phân tuyến tính tự liên hiệp cho phép phát biểu biến phân dựa trên đúng biểu thức có dạng (57.7-8). Nếu coi J và N như các phiếm hàm đối với các hàm $\mathbf{v}$ và τ, thì ta đòi hỏi J phải có cực trị với các điều kiện bổ sung $\text{div } \mathbf{v} = 0$ và $N = 1$; điều kiện sau cùng giữ vai trò "điều kiện chuẩn". Theo các quy tắc tổng quát của phép tính biến phân, ta thiết lập phương trình biến phân

$$\delta J + \gamma\delta N - \int 2w\delta\,(\text{div } \mathbf{v})\, dV = 0, \tag{57-9}$$

trong đó hằng số γ và hàm $w(r)$ giữ vai trò của thừa số bất định Lagrange. Sau khi tính các biến phân xuất hiện ở đây (khi đó tiến hành lấy tích phân từng phần có xét đến các điều kiện biên (57-5)) và cho bằng không các biểu thức với các biến phân độc lập $\delta\mathbf{v}$ và $\delta\tau$, ta thực sự thu được các phương trình (57.2-3). Giá trị J, tính được theo bài toán biến phân đặt ra như vậy, theo (57-7), xác định giá trị nhỏ nhất $-\gamma = -\gamma_1$, nghĩa là gia lượng của các nhiễu động tăng cường nhanh nhất (hay giảm lượng của các nhiễu động giảm nhanh nhất – tuỳ thuộc vào dấu của γ).

Theo ý nghĩa của việc rút ra nó, giá trị tới hạn $\Re_c$ xác định biên giới ổn định đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ. Nhưng đối với bài toán về tính ổn định đối lưu của chất lỏng đứng yên thì người ta nhận thấy rằng, số này đồng thời cũng là biên giới ổn định đối với mọi nhiễu động hữu hạn bất kỳ [1]. Nói một cách khác, với $\Re < \Re_c$ không tồn tại những

[1] Khi nói về các nhiễu động có cường độ hữu hạn, ở đây ta có ý nói đến các nhiễu động, mà đối với chúng, trong các phương trình (56.4-5) không được bỏ qua các số hạng phi tuyến, nhưng đồng thời, cũng như trước, phải thỏa mãn các điều kiện đặt ra khi rút ra các phương trình này.

nghiệm không tắt theo thời gian của phương trình chuyển động, trừ trạng thái nghỉ. Ta chứng minh điều đó (*V. X. Xorokin*, 1954).

Đối với các nhiễu động hữu hạn các phương trình chuyển động phải được viết dưới dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla w + \Delta \mathbf{v} + \Re \tau \mathbf{n} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}, \qquad \mathrm{P}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \Delta \tau + v_z - \mathrm{P}\mathbf{v}\nabla\tau. \tag{57-10}$$

khác với (57.2-3) ở các số hạng phi tuyến. Với các phương trình này ta tiến hành các phép tính hoàn toàn giống như đã tiến hành ở trên với các phương trình (57.2-3) khi rút ra các hệ thức (57-6) và (57-7). Do đẳng thức div $\mathbf{v} = 0$, các số hạng phi tuyến rút về div toàn phần:

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \mathrm{div}\left(\frac{v^2}{2}\mathbf{v}\right), \qquad \tau(\mathbf{v}\nabla)\tau = \mathrm{div}\left(\frac{\tau^2}{2}\mathbf{v}\right)$$

và biến mất khi lấy tích phân, do đó kết quả ta thu được hệ thức

$$\frac{1}{2}\frac{dN}{dt} = -J,$$

chỉ khác với đẳng thức $\gamma N = -J$ (57-7) ở chỗ thay cho tích phân γN bây giờ là đạo hàm theo thời gian. Do nguyên lý biến phân đã nêu ở trên, đối với các hàm bất kỳ $\mathbf{v}$ và τ, ta sẽ có: $-J \leq \gamma_1 N$. Do đó

$$\frac{dN(t)}{dt} \leq 2\gamma_1 N(t)$$

từ đó

$$N(t) \leq N(0)e^{2\gamma_1 t}. \tag{57-11}$$

Nhưng trong miền giới hạn ($\Re < \Re_c$) tất cả những gia lượng đã thu được theo lý thuyết tuyến tính, trong số đó các γ_1 lớn nhất trong chúng, đều âm. Do đó từ (57-11), ta suy ra rằng $N(t) \to 0$ khi $t \to \infty$, nhưng do tính dương cốt yếu của biểu thức dưới dấu tích phân trong N, nên cả chính các hàm $\mathbf{v}$ và τ cũng tiến đến không.

Ta nhớ lại vấn đề tính $\Re_c$. Vì tất cả các trị riêng $i\omega$ đều thực, nên đẳng thức $\gamma = 0$ với $\Re = \Re_c$ có nghĩa là cả $\omega = 0$. Giá trị $\Re_c$ được xác định khi đó như giá trị nhỏ nhất trong các trị riêng của thông số $\Re$ trong hệ phương trình

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla w + \Re \tau \mathbf{n} = 0,$$
$$\Delta \tau = -v_z, \ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad (57\text{-}12)$$

(bài toán này cũng chấp nhận phát biểu biến phân – xem bài tập 2). Cần chú ý rằng, bản thân các phương trình (57-12), và cả các điều kiện biên cho chúng cũng đều không chứa số P. Do đó cả số tới hạn Rayleigh, xác định bởi chúng đối với cấu hình đã cho của chất lỏng và các thành rắn đều không phụ thuộc chất của chất lỏng.

Đơn giản nhất và đồng thời quan trọng nhất về mặt lý thuyết là bài toán [1] về tính ổn định của lớp chất lỏng giữa hai mặt phẳng nằm ngang vô hạn, trong đó mặt trên được giữ ở nhiệt độ thấp hơn mặt dưới.

Đối với bài toán này, tiện lợi là nên đưa hệ (57-12) về một phương trình [2]. Áp dụng phép toán rot rot = ∇ div $-\Delta$ cho phương trình thứ nhất, sau đó lấy thành phần z của nó và dùng hai phương trình khác, ta thu được

$$\Delta^3 \tau = \Re \Delta_2 \tau, \qquad (57\text{-}13)$$

(trong đó $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ là laplatxiên hai chiều). Các điều kiện biên ở cả hai mặt phẳng:

$$\tau = 0, \ v_z = 0, \ \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{với} \ z = 0, 1$$

(do phương trình liên tục, điều kiện sau cùng tương đương với các điều kiện $v_x = v_y = 0$ với mọi x, y). Do phương trình thứ hai trong phương trình (57-12), có thể thay thế các điều kiện cho v_z bằng các điều kiện cho các đạo hàm cấp cao của τ:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 \tau}{\partial z^3} - k^2 \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0.$$

Ta tìm τ dưới dạng

$$\tau = f(z)\, \varphi(x,y), \quad \varphi = e^{i\mathbf{kr}}, \qquad (57\text{-}14)$$

---

[1] Lần đầu tiên được *H. Bénar* (1900) đưa ra về mặt thực nghiệm và được khảo sát về mặt lý thuyết (*Rayleigh,* 1916).

[2] Tính thực của $i\omega$ đối với bài toán này đã được *Pellew* và *Southwell* chứng minh (*A. Pellew, R. V. Southwell,* 1940).

(trong đó k là vectơ trong mặt phẳng x, y) và thu được cho $f(z)$ phương trình

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 f + \Re k^2 f = 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là một tổ hợp tuyến tính của các hàm ch μz và sh μz, trong đó

$$\mu^2 = k^2 - \Re^{1/3} k^{2/3} \sqrt[3]{1}$$

với ba giá trị khác nhau của nghiệm. Các hệ số của tổ hợp này được xác định bằng những điều kiện biên, đưa tới hệ các phương trình đại số, mà điều kiện tương thích của chúng cho ta phương trình siêu việt. Chính các nghiệm của phương trình này xác định sự phụ thuộc của $k = k_n(\Re)$, $n = 1, 2, \ldots$ Các hàm ngược $\Re = \Re_n(k)$ có cực tiểu với các giá trị xác định của k; cực tiểu nhỏ nhất trong các cực tiểu đó cho giá trị của $\Re_c$ [1]. Nó bằng 1708, đồng thời giá trị tương ứng của số sóng $k_c = 3{,}12$ trong các đơn vị $1/h$ (*H. Jeffreys*, 1908).

Như vậy, lớp chất lỏng nằm ngang bề dầy h với gradiên nhiệt độ A hướng xuống dưới trở nên không ổn định với [2]

$$\frac{g\beta A h^3}{\nu\chi} > 1708. \qquad (57\text{-}15)$$

Với $\Re > \Re_c$ trong chất lỏng có xuất hiện chuyển động đối lưu dừng, tuần hoàn trong mặt phẳng $x\,y$. Toàn bộ không gian giữa các mặt phẳng được chia thành các ô giống nhau kề sát nhau, trong mỗi ô chất lỏng chuyển động theo các quỹ đạo kín, không chuyển từ ô này sang ô khác.

[1] Có thể tìm được các chi tiết tính toán trong cuốn sách: *G. Z. Gersuni, E. M. Jukhovixki*. Tính ổn định đối lưu của chất lỏng không nén được, "Hayka", 1972. Và cả trong cuốn sách đã nêu ở trang 169, *X. Tsandraxekxar* và *Drazin* và *Reid*.

[2] Với giá trị đã cho của A, điều kiện này trong mọi trường hợp được thực hiện với h đủ lớn. Để tránh hiểu nhầm, cần nhớ rằng, ở đây chỉ nói đến các độ cao h sao cho sự biến thiên của mật độ chất lỏng dưới ảnh hưởng của trọng trường là không quan trọng. Do đó, tiêu chuẩn này không ứng dụng được cho các cột chất lỏng cao. Trong trường hợp như thế cần phải ứng dụng tiêu chuẩn đã thu được ở §4, từ đó ta thấy rằng, sự đối lưu có thể không xuất hiện với độ cao bất kỳ của cột, nếu gradiên nhiệt độ không quá lớn.

Vòng bao các ô này trên các mặt phẳng biên giới tạo thành một mạng nào đó ở trong chúng. Giá trị k_c xác định tính tuần hoàn, nhưng không phải tính đối xứng của mạng đó; các phương trình chuyển động đã tuyến tính hóa chấp nhận trong (57-14) một hàm $\varphi(x,y)$ nào đó thỏa mãn phương trình $(\Delta_2 - k^2)\varphi = 0$. Không thể khắc phục được tính không đơn trị này trong phạm vi lý thuyết tuyến tính. Có thể là, một cấu trúc "hai chiều" chuyển động phải được thực hiện, trong đó chỉ có tính tuần hoàn một chiều – đó là hệ các dải song song [1] ở trên mặt phẳng $x\,y$.

BÀI TẬP

1. Hãy tìm số tới hạn Reyleigh để có xuất hiện đối lưu trong chất lỏng ở trong ống trụ thẳng đứng; dọc theo ống gradiên nhiệt độ được giữ không đổi; các thành ống: a) dẫn nhiệt lý tưởng; b) cách nhiệt (*G. A. Oxtroumov*, 1946).

Giải. Ta tìm nghiệm của các phương trình (57.2-4), trong đó vận tốc đối lưu **v** tại mọi nơi đều hướng theo trục của ống (trục z), và toàn bộ hình ảnh chuyển động không đổi dọc theo trục, nghĩa là các đại lượng $v_z = v$, τ, $\partial w/\partial z$ chỉ phụ thuộc vào các tọa độ trong mặt phẳng tiết diện của ống[2]. Các phương trình có dạng

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_2 v = -\Re\tau + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \Delta_2 \tau = v$$

(số $\Re = g\beta AR^4/\chi\nu$, R là bán kính ống). Từ hai phương trình đầu, ta suy ra rằng $\partial w/\partial z = \text{const}$, khử τ khỏi các phương trình còn lại, ta thu được

[1] Những chỉ dẫn lý thuyết bao hàm ở chỗ, trong miền trên tới hạn gần $\Re_c$ chỉ cấu trúc này là ổn định đối với các nhiễu động nhỏ; còn các cấu trúc lăng trụ "ba chiều" là không ổn định. Các kết quả thực nghiệm phụ thuộc mạnh vào các điều kiện thực nghiệm (kể cả vào dạng và kích thước của các thành bên của bình) và không đơn trị. Cấu trúc tứ diện ba chiều được quan sát thấy trong một loạt trường hợp có vẻ có liên quan đến ảnh hưởng của sức căng mặt ngoài lên mặt tự do phía trên và đến sự phụ thuộc vào nhiệt độ của độ nhớt chất lỏng (trong lý thuyết đã trình bày, độ nhớt ν tất nhiên được coi như không đổi).

[2] Các phương trình cũng có nghiệm tuần hoàn dọc theo trục z, chứa thừa số $\exp(ikz)$. Tuy nhiên tất cả các nghiệm đó dẫn tới các giá trị cao hơn của $\Re_c$. Cần chú ý rằng, nghiệm đang xét với $k = 0$ cũng thỏa mãn cả các phương trình chính xác (không tuyến tính hóa) (57-10), do các số hạng phi tuyến $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ và $\mathbf{v}\nabla\tau$ đồng nhất bằng không.

$$\Delta_2^2 v = \Re v.$$

Trên các thành ống ($r = 1$) phải thỏa mãn các điều kiện $v = 0$ và điều kiện $\tau = 0$ (trong trường hợp a) hay $\partial \tau/\partial r = 0$ (trong trường hợp b). Ngoài ra, thông lượng của chất lỏng qua tiết diện ngang của ống phải bằng không.

Nghiệm của phương trình có dạng

$$\cos n\varphi . J_n(kr), \quad \cos n\varphi . I_n(kr),$$

trong đó J_n và I_n là các hàm Bessel có đối số thực và ảo, còn $k^4 = \Re$; r, φ là các tọa độ cực trong mặt phẳng tiết diện ống. Thời điểm xuất hiện đối lưu đáp ứng nghiệm nào tương ứng với giá trị $\Re$ nhỏ nhất. Một nghiệm như thế sẽ là nghiệm có $n = 1$.

$$v = v_o \cos\varphi\left[J_1(kr)\, I_1(k) - I_1(kr)\, J_1(k)\right],$$

$$\tau = \frac{v_o}{\Re^{1/2}} \cos\varphi\left[J_1(kr)\, I_1(k) + I_1(kr)\, J_1(k)\right]$$

(thêm vào đó gradiên $\partial w/\partial z = 0$). Chuyển động mô tả bởi các công thức này đó là phản đối xứng đối với mặt phẳng thẳng đứng, đi qua trục của ống và chia hốc thành hai phần; trong một phần chất lỏng hạ xuống, còn trong phần kia chất lỏng dâng lên. Nghiệm đã viết thỏa mãn điều kiện $v = 0$ khi $r = 1$. Trong trường hợp a, điều kiện $\tau = 0$ dẫn tới phương trình $J_1(k) = 0$; nghiệm nhỏ nhất của nó cho số tới hạn $\Re_c = k^4 = 216$. Trong trường hợp b, điều kiện $\partial\tau/\partial r = 0$ dẫn tới phương trình

$$\frac{J_o(k)}{J_1(k)} + \frac{I_o(k)}{I_1(k)} = \frac{2}{k}.$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình này cho $\Re_c = 68$.

2. Phát biểu nguyên lý biến phân cho bài toán về các trị riêng $\Re$ xác định bởi phương trình (57-12).

Giải. Cho các phương trình (57-12) một dạng đối xứng hơn bằng cách đưa vào hàm mới $\tilde{\tau} = \sqrt{\Re}.\tau$, thay cho τ, nghĩa là lại thay đổi đơn vị đo nhiệt độ. Khi đó:

$$\sqrt{\Re}.\tilde{\tau} n = \nabla w - \nabla \mathbf{v}, \qquad \sqrt{\Re}\, v_z = -\Delta\tilde{\tau}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Tiến hành như khi rút ra (57-7), ta tìm được $\sqrt{\Re} = J/N$, trong đó

$$J = \frac{1}{2}\int\left[(\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 + (\nabla\tilde{\tau})^2\right] dV, \qquad N = \int v_z \tilde{\tau}\, dV$$

(tích phân N là dương, điều này thấy được dễ dàng nếu đưa tích phân về dạng $\Re^{-1/2}\int(\nabla\tilde{\tau})^2 dV$). Nguyên lý biến phân được phát biểu như là đòi hỏi J phải có cực trị với các điều kiện phụ $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ và $N = 1$. Giá trị cực trị của J xác định trị riêng nhỏ nhất của $\sqrt{\Re}$.

Chương VI

SỰ KHUẾCH TÁN

§58. PHƯƠNG TRÌNH THỦY ĐỘNG LỰC CHO HỖN HỢP LỎNG

Trong toàn bộ phần trình bày trước đây, chất lỏng được giả thiết là được cấu tạo hoàn toàn đồng chất. Nhưng nếu ta xét một hỗn hợp các chất lỏng hay khí, mà thành phần của chúng thay đổi trong thể tích chứa, thì các phương trình thủy động lực sẽ thay đổi một cách cơ bản.

Ta giới hạn khảo sát các hỗn hợp chỉ có hai thành phần. Thành phần của hỗn hợp được mô tả bằng nồng độ c, xác định bởi tỷ số giữa khối lượng của một trong các chất tham gia tạo thành hỗn hợp và khối lượng toàn phần của chất lỏng ở trong phần tử thể tích đang xét.

Với thời gian, nói chung sự phân bố của nồng độ trong chất lỏng thay đổi. Sự biến thiên của nồng độ xảy ra theo hai cách. Trước hết, trong chuyển động vĩ mô của chất lỏng, mỗi phần đã cho dịch chuyển như một toàn bộ có thành phần không thay đổi. Sự khuấy trộn thuần tuý cơ học của chất lỏng được thực hiện bằng cách đó; mặc dù thành phần của mỗi phần chất lỏng di động không thay đổi, nhưng tại mỗi điểm cố định đã cho của không gian nồng độ chất lỏng chiếm vị trí đó thay đổi theo thời gian. Nếu bỏ qua quá các trình dẫn nhiệt và ma sát nội có thể đồng thời xảy ra, thì một sự biến thiên như thế của nồng độ là một quá trình nhiệt động lực thuận nghịch và không dẫn tới sự tiêu tán năng lượng.

Thứ hai, sự biến thiên của thành phần có thể xảy ra do có sự chuyển vận các chất của hỗn hợp từ một phần chất lỏng này đến một phần khác. Sự san bằng nồng độ bằng sự biến thiên trực tiếp thành phần của mỗi phần chất lỏng được gọi là sự *khuếch tán*. Sự khuếch tán là quá trình không thuận nghịch, và cùng với sự dẫn nhiệt và tính nhớt, nó là

một trong các nguồn tiêu tán năng lượng trong hỗn hợp lỏng.

Ta ký hiệu ρ là mật độ toàn phần của chất lỏng. Phương trình liên tục cho khối lượng toàn phần chất lỏng giữ nguyên dạng ban đầu của nó

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{58-1}$$

Điều đó đó nghĩa là, khối lượng toàn phần của chất lỏng trong một thể tích nào đó có thể chỉ thay đổi, nếu chất lỏng chỉ đi vào hay đi ra khỏi thể tích đó. Cần nhấn mạnh rằng, nói một cách chặt chẽ, khái niệm vận tốc đòi hỏi cũng phải định nghĩa lại đối với hỗn hợp lỏng. Nếu viết phương trình liên tục dưới dạng (58-1), thì như thế ta đã định nghĩa vận tốc giống như trước là xung lượng toàn phần của một đơn vị khối lượng chất lỏng.

Cả phương trình Navier - Stokes (15-5) cũng thay đổi. Bây giờ ta đưa vào các phương trình thủy động lực còn lại cho các hỗn hợp.

Khi không có sự khuếch tán, thành phần của mỗi phần tử đã cho của chất lỏng vẫn không đổi khi chất lỏng dịch chuyển. Điều đó có nghĩa là, đạo hàm toàn phần dc/dt bằng không, nghĩa là ta có phương trình

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c = 0.$$

Dựa vào (58-1), phương trình này có thể được viết

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\rho c) = 0$$

nghĩa là dưới dạng phương trình liên tục cho một trong các chất của hỗn hợp (ρc là khối lượng của một trong các chất của hỗn hợp trong một đơn vị thể tích). Viết dưới dạng tích phân

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho c \, dV = -\oint \rho c \mathbf{v} \, d\mathbf{f}$$

Phương trình đó có nghĩa là, độ biến thiên của lượng chất đã cho trong một thể tích nào đó bằng lượng của chất đó được chất lỏng chuyển động chuyển vận qua mặt của thể tích.

Khi có sự khuếch tán, ngoài dòng $\mathbf{v}\rho c$ của chất đã cho cùng với toàn

bộ chất lỏng, còn một dòng nữa dẫn tới sự chuyển vận các chất trong hỗn hợp, cả khi không có sự dịch chuyển của chất lỏng xét về toàn bộ. Gọi **i** là mật độ dòng khuếch tán, nghĩa là lượng chất đang xét được chuyển vận bằng khuếch tán qua một đơn vị diện tích [1] trong một đơn vị thời gian. Khi đó đối với sự biến thiên của lượng chất đó trong một thể tích nào đó, ta có

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho c\, dV = -\oint \rho c\mathbf{v}\, d\mathbf{f} - \oint \mathbf{i}\, d\mathbf{f},$$

hay dưới dạng vi phân

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho c\mathbf{v}) - \operatorname{div}\mathbf{i}. \tag{58-2}$$

Dựa vào (58-1), phương trình liên tục này cho một trong các chất của hỗn hợp có thể được viết dưới dạng

$$\rho\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c\right) = -\operatorname{div}\mathbf{i}. \tag{58-3}$$

Để rút ra một phương trình nữa, ta lặp lại cách rút ra đã tiến hành ở §49, và chú ý rằng, các đại lượng nhiệt động lực học của chất lỏng bây giờ là các hàm của nồng độ. Khi tính đạo hàm (ở §49)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)$$

dựa vào các phương trình chuyển động, đặc biệt, ta buộc phải biến đổi các số hạng $\rho(\partial\varepsilon/\partial t)$ và $-\mathbf{v}\nabla p$. Sự biến đổi này bây giờ phải thay đổi, vì các đẳng thức nhiệt động lực cho năng lượng và hàm nhiệt chứa một số hạng bổ sung với vi phân của nồng độ:

$$d\varepsilon = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho + \mu\, dc,$$

$$dw = Tds + \frac{1}{\rho}dp + \mu\, dc,$$

[1] Tổng các mật độ dòng của cả hai chất phải bằng $\rho\mathbf{v}$. Do đó nếu mật độ dòng của một trong hai chất là $\rho\mathbf{v}c + \mathbf{i}$, thì đối với chất kia, mật độ dòng sẽ bằng $\rho\mathbf{v}(1-c) - \mathbf{i}$.

trong đó μ là thế hóa của hỗn hợp đã được định nghĩa một cách thích hợp [1]. Phù hợp với điều đó, đạo hàm $\rho(\partial\varepsilon/\partial t)$ bây giờ chứa một số hạng bổ sung $\rho\mu(\partial c/\partial t)$. Nếu viết đẳng thức thứ hai lấy từ các đẳng thức nhiệt động lực dưới dạng

$$dp = \rho\, dw - \rho\, T\, ds - \rho\, \mu\, dc,$$

thì ta sẽ thấy rằng, trong số hạng $-\mathbf{v}\nabla p$ bây giờ có xuất hiện số hạng bổ sung $\rho\mu\mathbf{v}\nabla c$. Do đó, cần thêm vào biểu thức (49-3)

$$\rho\mu\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla c\right) = -\mu \operatorname{div} \mathbf{i}.$$

Kết quả ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\operatorname{div}\left[\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2} + w\right) - (\mathbf{v}\sigma') + \mathbf{q}\right] + \\ + \rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) - \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}\mathbf{q} - \mu \operatorname{div}\mathbf{i} \tag{58-4}$$

Thay cho $-\kappa\Delta T$, bây giờ ta viết một dòng nhiệt $\mathbf{q}$ nào đó, dòng này có thể phụ thuộc không những vào gradiên nhiệt độ, mà còn phụ thuộc cả gradiên nồng độ (xem tiết tiếp theo). Ta viết tổng của hai số hạng sau cùng trong vế thứ hai của đẳng thức dưới dạng

$$\operatorname{div}\mathbf{q} - \mu \operatorname{div}\mathbf{i} = \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}) + \mathbf{i}\nabla\mu.$$

---

[1] Từ nhiệt động lực học, ta đã biết rằng, đối với một hỗn hợp gồm hai chất

$$d\varepsilon = Tds - pdV + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2.$$

trong đó n_1 và n_2 là số hạt của hai chất ở trong 1 gam hỗn hợp, μ_1 và μ_2 là các thế hóa của hai chất này. Các n_1 và n_2 thỏa mãn hệ thức $n_1m_1 + n_2m_2 = 1$, trong đó m_1 và m_2 là các khối lượng các hạt thuộc cả hai loại. Nếu đưa nồng độ biến thiên $c = n_1m_1$ vào làm biến số, ta sẽ thu được

$$d\varepsilon = Tds - pdV + \left(\frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2}\right)dc.$$

So sánh biểu thức này với hệ thức đã dẫn trong bài giảng, ta nhận thấy rằng, "thế hóa" μ, mà ta dùng, liên hệ với các thế thông thường μ_1 và μ_2 bằng hệ thức

$$\mu = \frac{\mu_1}{m_1} - \frac{\mu_2}{m_2}.$$

Biểu thức

$$\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\sigma')+\mathbf{q}$$

dưới dấu div trong (58-4), theo định nghĩa của **q**, là dòng toàn phần của năng lượng trong chất lỏng. Số hạng thứ nhất là dòng thuận nghịch của năng lượng, có liên quan đơn giản đến sự dịch chuyển của chất lỏng coi như một toàn bộ, còn tổng $-(\mathbf{v}\sigma')+\mathbf{q}$ là dòng không thuận nghịch. Khi không có chuyển động vĩ mô, dòng nhớt $(\mathbf{v}\sigma')$ biến mất và dòng nhiệt đơn giản bằng **q**.

Phương trình của định luật bảo toàn năng lượng có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\mathrm{div}\left[\mathbf{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\sigma')+\mathbf{q}\right] \qquad (58\text{-}5)$$

Trừ thành phần này vào từng vế của (58-4), ta thu được phương trình cần tìm

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}-\mathrm{div}(\mathbf{q}-\mu\mathbf{i})-\mathbf{i}\nabla\mu, \qquad (58\text{-}6)$$

Phương trình này tổng quát hóa phương trình (49-4) đã tìm được trước đây.

Như vậy, ta đã thu được một hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực cho các hỗn hợp lỏng. Số các phương trình ở trong hệ này lớn hơn một đơn vị so với trong trường hợp của chất lỏng thuần tuý, vì chúng ta còn một hàm nữa chưa biết, đó là nồng độ. Các phương trình trên là: các phương trình liên tục (58-1), các phương trình Navier - Stokes, phương trình liên tục cho một trong các thành phần của hỗn hợp (58-2) và phương trình (58-6) xác định sự biến thiên entrôpi. Cần chú ý rằng, các phương trình (58-2) và (58-6) thực tế chỉ xác định được dạng của các phương trình thủy động lực tương ứng, vì chúng chứa các đại lượng không xác định: các dòng **i** và **q**. Các phương trình này chỉ trở nên xác định nếu ta thay **i** và **q** được biểu diễn qua các gradiên nhiệt độ và nồng độ; các biểu thức tương ứng sẽ thu được ở §59.

Đối với sự biến thiên của entrôpi toàn phần của chất lỏng, phép tính hoàn toàn tương tự với phép tính đã tiến hành ở §49, (nhưng dùng (58-6) thay cho (49-4)), dẫn đến kết quả:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV = -\int \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{i}\mu)\nabla T}{T^2}\, dV = -\int \frac{\mathbf{i}\nabla\mu}{T} dV + \ldots \qquad (58\text{-}7)$$

(để cho ngắn gọn, ta không ghi các số hạng gây bởi độ nhớt).

§59. HỆ SỐ KHUẾCH TÁN VÀ HỆ SỐ KHUẾCH TÁN NHIỆT

Dòng khuếch tán **i** của chất và dòng nhiệt **q** xuất hiện do có mặt các gradiên nồng độ và gradiên nhiệt độ ở trong chất lỏng. Nhưng khi đó không được nghĩ rằng, **i** chỉ phụ thuộc vào gradiên của nồng độ và **q** chỉ phụ thuộc vào gradiên nhiệt độ. Trái lại, mỗi dòng đó nói chung, phụ thuộc vào cả hai gradiên đã nêu.

Nếu gradiên nhiệt độ và nồng độ không lớn, thì ta có thể giả thiết rằng, **i** và **q** đều là các hàm bậc nhất của $\nabla\mu$ và của ∇T. Các dòng **q** và **i** không phụ thuộc vào gradiên của áp suất (với $\nabla\mu$ và ∇T đã cho) vì cũng lý do như đã nêu cho **q** ở §49. Phù hợp với điều đó, ta viết **q** và **i** dưới dạng hàm bậc nhất của các gradiên của μ và T:

$$\mathbf{i} = -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla T$$

$$\mathbf{q} = -\delta\nabla\mu - \gamma\nabla T + \mu\mathbf{i}.$$

Giữa các hệ số β và δ có một hệ thức đơn giản, nó là hệ quả của nguyên lý đối xứng các hệ số động học. Nội dung của nguyên lý tổng quát này như sau (xem V §120). Ta xét một hệ kín nào đó, và gọi x_1, x_2 ... là một số đại lượng đặc trưng cho trạng thái của hệ. Các giá trị cân bằng của chúng được xác định bởi sự kiện là, ở cân bằng thống kê entrôpi S của toàn bộ hệ phải cực đại, nghĩa là, phải có $X_\alpha = 0$, trong đó các X_α là ký hiệu những đạo hàm:

$$X_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}. \qquad (59\text{-}1)$$

Giả sử rằng, hệ ở trong một trạng thái gần trạng thái cân bằng. Điều đó có nghĩa là, tất cả các x_α khác ít so với các giá trị cân bằng của chúng, và các X_α đều nhỏ. Các quá trình xảy ra trong hệ có xu hướng đưa hệ về trạng thái cân bằng. Các đại lượng x_α khi đó là các hàm của thời gian,

còn vận tốc biến thiên của chúng được xác định bởi các đạo hàm đối với thời gian $\dot{x}_a$; ta viết các đạo hàm này dưới dạng các hàm của X_a và khai triển các hàm đó thành chuỗi. Với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất, ta có:

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b . \tag{59-2}$$

Nguyên lý đối xứng các hệ số động học Onsager phát biểu rằng, các γ_{ab} (*các hệ số động học*) đều đối xứng đối với các chỉ số a và b:

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{59-3}$$

Vận tốc biến thiên của entrôpi S bằng:

$$\dot{S} = -\sum_a X_a \dot{x}_a .$$

Bây giờ ta giả thiết rằng các x_a khác nhau tại các điểm khác nhau của vật, nghĩa là mỗi phần tử thể tích của vật đều phải được đặc trưng bằng các giá trị x_a của chúng. Nói một cách khác, ta sẽ coi các x_a như các hàm của tọa độ. Khi đó, trong biểu thức của $\dot{S}$, ngoài sự lấy tổng theo a, còn cần phải lấy tích phân theo toàn bộ thể tích của hệ, nghĩa là:

$$\dot{S} = -\int \sum_a X_a \dot{x}_a dV . \tag{59-4}$$

Đối với sự phụ thuộc giữa các X_a và các $\dot{x}_a$, thì thường ta có thể khẳng định rằng, các giá trị $\dot{x}_a$ tại mỗi điểm của hệ chỉ phụ thuộc vào các X_a tại cùng điểm đó. Nếu điều kiện này được thực hiện, ta có thể viết được mối liên hệ giữa các $\dot{x}_a$ và các X_a tại mỗi điểm của hệ và ta trở lại các hệ thức đã tìm được.

Trong trường hợp đang xét, ta chọn các thành phần của các vectơ $\mathbf{i}$ và $\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}$ làm các đại lượng $\dot{x}_a$. Khi đó, nếu so sánh (58-7) với (59-4), ta sẽ nhận thấy rằng, các X_a lần lượt giữ các vai trò các thành phần của các vectơ $(1/T).\nabla\mu$ và $(1/T^2).\nabla T$. Còn các hệ số động học γ_{ab}, là các hệ số của những vectơ đó trong các đẳng thức

$$\mathbf{i} = -\alpha T\left(\frac{\nabla\mu}{T}\right) - \beta T^2\left(\frac{\nabla T}{T^2}\right), \qquad \mathbf{q} - \mu\mathbf{i} = -\delta T\left(\frac{\nabla\mu}{T}\right) - \gamma T^2\left(\frac{\nabla T}{T^2}\right).$$

Do sự đối xứng của các hệ số động học, cần phải có $\beta T^2 = \delta T$, nghĩa là:

$$\delta = \beta T$$

Đó chính là hệ thức cần tìm. Do đó có thể viết các thông lượng **q** và **i** dưới dạng

$$\mathbf{i} = -\alpha\nabla\mu - \nabla T, \quad \mathbf{q} = -\beta T\nabla\mu - \gamma\nabla T + \mu\mathbf{i} \tag{59-5}$$

chỉ với ba hệ số độc lập: α, β, γ. Để tiện lợi, ta khử gradiên $\nabla\mu$ trong biểu thức dòng nhiệt bằng cách biểu diễn nó qua **i** và ∇T. Sau đó ta thu được:

$$\mathbf{i} = -\alpha\nabla\mu - \beta\nabla T, \tag{59-6}$$

$$\mathbf{q} = \left(\mu + \frac{\beta T}{\alpha}\right)\mathbf{i} - \kappa\nabla T,$$

trong đó ta đã đưa vào ký hiệu

$$\kappa = \gamma - \frac{\beta^2 T}{\alpha}. \tag{59-7}$$

Nếu dòng **i** của chất không có, thì người ta nói rằng, có *sự dẫn nhiệt thuần túy*. Để cho **i** = 0, thì T và μ phải thỏa mãn phương trình $\alpha\nabla\mu + \beta\nabla T = 0$, hay

$$\alpha\, d\mu - \beta\, dT = 0$$

Việc lấy tích phân phương trình này dẫn đến một hệ thức có dạng $f(c,T) = 0$, không chứa tường minh các tọa độ (thế hóa không những là hàm của c và T, mà còn là hàm của áp suất; tuy nhiên, ở trạng thái cân bằng, áp suất trong vật không đổi, do đó ta đặt p = const). Hệ thức này xác định mối liên hệ giữa nồng độ và nhiệt độ cần tồn tại để không có thông lượng của chất. Thêm nữa, với **i** = 0, từ (59-7), ta rút ra $\mathbf{q} = -\kappa\nabla T$; như vậy κ chính là độ dẫn nhiệt.

Bây giờ ta chuyển sang các biến thông thường p, T và c. Ta có:

$$\nabla\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}\nabla c + \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{c,p}\nabla T + \left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{c,T}\nabla p.$$

Có thể biến đổi số hạng cuối bằng cách dùng hệ thức nhiệt động lực

$$d\varphi = -sdT + Vdp + \mu dc \tag{59-8}$$

trong đó φ là thế nhiệt động lực của một đơn vị khối lượng, V là thể tích riêng. Ta có:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{c,T} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial c} = \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{p,T}.$$

Thay $\nabla\mu$ vào (59-6) và đưa vào những ký hiệu

$$D = \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{p,T}, \qquad \frac{\rho k_T D}{T} = \alpha\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{c,p} + \beta, \tag{59-9}$$

$$k_p = p\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{p,T} \Big/ \left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T}, \tag{59-10}$$

ta thu được các biểu thức sau:

$$\mathbf{i} = -\rho D\left(\nabla c + \frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right), \tag{59-11}$$

$$\mathbf{q} = \left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c} + \mu\right]\mathbf{i} - \kappa\nabla T. \tag{59-12}$$

D được gọi là *hệ số khuếch tán*; nó xác định dòng khuếch tán khi chỉ có gradiên nồng độ. Còn đối với dòng khuếch tán gây bởi gradiên nhiệt độ, thì nó được xác định bởi hệ số khuếch tán nhiệt $k_T D$ (đại lượng không thứ nguyên k_T được gọi là *tỷ số khuếch tán nhiệt*). Số hạng cuối trong (59-11) chỉ cần xét đến khi trong chất lỏng có một gradiên lớn áp suất, gây bởi một trường ngoài chẳng hạn. Đại lượng $k_T D$ có thể được gọi là *hệ số khuếch tán khí áp*. Ta sẽ còn trở lại đại lượng này ở cuối tiết.

Trong một chất lỏng thuần túy, dĩ nhiên không có dòng khuếch tán. Do đó rõ ràng là, các hệ số k_T và k_p phải triệt tiêu tại cả hai biên giới $c = 0$ và $c = 1$.

Điều kiện tăng của entrôpi đặt những hạn chế xác định cho các hệ số ở trong công thức (59-6). Thay công thức này vào trong biểu thức (58-7) cho vận tốc biến thiên của entrôpi, ta tìm được:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho s dV = \int \frac{\kappa(\nabla T)^2}{T^2} dV + \int \frac{\mathbf{i}^2}{\alpha T} dV + \ldots \tag{59-13}$$

Từ đó thấy được rằng, cùng với điều kiện đã biết $\kappa > 0$, cả điều kiện $\alpha > 0$ cũng phải được thực hiện. Nếu nhớ rằng, theo một bất đẳng thức nhiệt động lực bao giờ cũng có

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T} > 0$$

(xem V, §96), thì ta sẽ tìm được hệ số khuếch tán phải dương: $D > 0$. Còn các đại lượng k_T và k_p có thể âm hoặc dương.

Ta sẽ không viết ra những phương trình tổng quát phức tạp thu được bằng cách thay những biểu thức của $\mathbf{i}$ và $\mathbf{q}$ tìm được ở đây vào những phương trình (58-3) và (58-6). Ta chỉ giới hạn ở trường hợp khi không có gradiên lớn của áp suất, còn nồng độ và nhiệt độ thay đổi rất nhỏ trong chất lỏng đến mức có thể coi các hệ số ở trong các biểu thức (59-11) và (59-12) trong trường hợp tổng quát là những hàm của c và T là không đổi. Ngoài ra, ta còn coi rằng, không có một chuyển động vĩ mô nào ở trong chất lỏng, ngoài chuyển động vĩ mô được gây bởi chính sự có mặt của gradiên nhiệt độ và gradiên nồng độ. Vận tốc của một chuyển động như thế tỷ lệ với các gradiên đó, và do vậy, các số hạng ở trong các phương trình (58-3) và (58-6) chứa vận tốc đều là các đại lượng nhỏ bậc hai và có thể được bỏ đi. Cả số hạng $i\nabla\mu$ ở trong (58-6) cũng là bậc hai. Do đó còn lại

$$\rho\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{i} = 0, \quad \rho T\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q} - \mu\mathbf{i}) = 0.$$

Ở đây ta thay $\mathbf{i}$ và $\mathbf{q}$ bằng các biểu thức (59-11) và (59-12) của chúng (không có số hạng chứa ∇p), và biến đổi đạo hàm $\partial s/\partial t$ như sau:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{c,p}\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,p}\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{c_p}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c}\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Để ý rằng, theo (59-8):

$$\left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{p,T} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial c\,\partial T} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,c}.$$

Kết quả sau một phép biến đổi đơn giản, ta thu được các phương trình:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\left(\Delta c + \frac{k_T}{T}\Delta T\right), \tag{59-14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,T}\frac{\partial c}{\partial t} = \chi \Delta T. \qquad (59\text{-}15)$$

Hệ phương trình tuyến tính này xác định sự phân bố nhiệt độ và nồng độ trong chất lỏng.

Trường hợp đặc biệt quan trọng là khi nồng độ của hỗn hợp nhỏ. Khi nồng độ tiến đến giá trị không, thì hệ số khuếch tán tiến đến một hằng số hữu hạn nào đó, còn hệ số khuếch tán nhiệt tiến đến không. Do đó, k_T sẽ nhỏ đối với các nồng độ nhỏ, và có thể bỏ qua số hạng $k_T \nabla T$ trong phương trình (59-14). Khi đó, phương trình này rút về phương trình khuếch tán

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c. \qquad (59\text{-}16)$$

Các điều kiện biên cho phương trình (59-16) khác nhau đối các trường hợp khác nhau. Ở trên biên giới với mặt vật không hòa tan trong chất lỏng, thành phần của dòng khuếch tán $\mathbf{i} = -\rho D \nabla c$ vuông góc với mặt phải triệt tiêu; nói một cách khác, phải có $\partial c/\partial n = 0$. Nhưng nếu có sự khuếch tán từ một vật hòa tan được trong chất lỏng, thì ở gần mặt của nó sẽ có một sự cân bằng được thiết lập, khi đó nồng độ trong chất lỏng kề sát mặt vật bằng nồng độ của dung dịch bão hòa c_0; sự khuếch tán của chất từ lớp này xảy ra chậm hơn quá trình hòa tan. Do đó điều kiện biên ở trên một mặt như thế đòi hỏi $c = c_0$. Cuối cùng, nếu một mặt rắn "hấp thụ" chất khuếch tán đập lên mặt nó, thì điều kiện biên sẽ là $c = 0$ (trường hợp này xảy ra, chẳng hạn như khi nghiên cứu các phản ứng hóa học xảy ra ở trên mặt vật rắn).

Vì các phương trình khuếch tán thuần túy (59-16) và dẫn nhiệt có dạng như nhau, nên tất cả các công thức đã rút ra được ở §51 và §52 có thể trực tiếp chuyển cho trường hợp khuếch tán, chỉ cần thay T bằng c và χ bằng D. Trong trường hợp khuếch tán, điều kiện ở trên mặt vật rắn không hòa tan tương ứng với điều kiện biên của một mặt cách nhiệt; còn mặt được giữ tại nhiệt độ không đổi tương ứng với sự khuếch tán từ mặt của một vật hòa tan trong chất lỏng.

Đặc biệt, tương tự với công thức (51-5), ta có thể viết được nghiệm sau đây cho phương trình khuếch tán

$$c(\gamma,t)=\frac{M}{8\rho(\pi Dt)^{3/2}}e^{-r^2/4Dt}. \qquad (59\text{-}17)$$

Nó xác định sự phân bố của chất hòa tan tại một thời điểm tùy ý, nếu tại thời điểm ban đầu $t = 0$, tất cả chất đều tập trung trong một phần tử thể tích vô cùng nhỏ tại gốc tọa độ (M là lượng toàn phần của chất hòa tan).

Cần có nhận xét quan trọng cho những điều đã nói trong tiết này. Các biểu thức (59-5) hay (59.11-12) là những số hạng khai triển bậc nhất không triệt tiêu của các dòng theo các đạo hàm của các đại lượng nhiệt động lực. Như đã biết từ lý thuyết động học (xem X, §§5, 6, 14) một sự khai triển như thế, theo quan điểm vi mô, là khai triển (cho các chất khí) theo các lũy thừa (l/L) của tỷ số giữa độ dài đoạn đường tự do phân tử khí l và độ dài L không gian đặc trưng của bài toán. Việc xét đến các số hạng với các đạo hàm bậc cao có nghĩa là xét đến các đại lượng có bậc cao hơn theo tỷ số đã nêu. Các số hạng với các đạo hàm cấp ba: grad $\Delta\mu$ và grad ΔT là các số hạng tiếp sau các số hạng đã viết trong (59-5), mà ta có thể lập được từ các đạo hàm của các đại lượng vô hướng μ và T; các số hạng này rõ ràng là nhỏ so với các số hạng đã được xét trong tỷ số $(l/L)^2$.

Nhưng các biểu thức cho các dòng có thể chứa đựng cả các số hạng với các đạo hàm vận tốc. Dựa vào các đạo hàm cấp một, $\partial v_i/\partial x_k$ có thể chỉ lập được các đại lượng tenxơ; đó là tenxơ căng độ nhớt, nằm trong thành phần của tenxơ mật độ dòng xung lượng. Còn các đại lượng có đặc tính vectơ có thể được lập thành từ các đạo hàm cấp hai. Chẳng hạn như trong vectơ mật độ dòng khuếch tán có xuất hiện các số hạng

$$\mathbf{i}' = \rho\lambda_1\Delta\mathbf{v} + \rho\lambda_2\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v}. \qquad (59\text{-}18)$$

Sự đòi hỏi các số hạng này phải nhỏ so với các đại lượng đã xuất hiện trong các công thức (59.11-12) dẫn tới các điều kiện bổ sung để ứng dụng được các số hạng này. Chẳng hạn, để cho việc giữ lại số hạng với ∇p trong (59-11) và đồng thời bỏ qua các số hạng (59-18) là có nghĩa, thì điều kiện sau phải được thực hiện

$$\frac{D}{p}\frac{p_2-p_1}{L} \gg \lambda\frac{U}{L^2},$$

trong đó $p_2 - p_1$ là độ chênh đặc trưng của các áp suất trên độ dài L, còn U là độ chênh đặc trưng của vận tốc (trong ước lượng này ta đặt $k_p \sim 1$ – xem bài tập). Theo lý thuyết động học, D và λ được biểu diễn qua các đặc trưng của chuyển động nhiệt phân tử khí. Ngay từ những lý do thứ nguyên, đã thấy hiển nhiên là, $\lambda/D \sim l/v_T$, trong đó v_T là vận tốc nhiệt trung bình của các phân tử. Nếu cũng nhận thấy rằng, áp suất khí $p \sim \rho v^2_T$, ta sẽ đi tới điều kiện

$$p_2 - p_1 >> \rho v_T U \frac{l}{L}. \tag{59-19}$$

Điều kiện này tuyệt nhiên không được tự động thực hiện. Ngược lại, trong trường hợp quan trọng của các dòng chảy dừng với các số Reynolds nhỏ trong dòng khuếch tán các số hạng với ∇p và với ∇v đều có cùng bậc độ lớn (*Iu. M. Kagan*, 1962). Thực vậy, đối với một chuyển động như thế gradiên áp suất có liên hệ với các đạo hàm của vận tốc bằng phương trình (20-1)

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \mathbf{v} \tag{59-20}$$

(ta thừa nhận rằng, trong chuyển động chất khí có thể coi là không nén được). Độ nhớt động học được ước lượng như $\nu \sim v_T l$, và do đó từ phương trình này ta tìm được:

$$p_2 - p_1 \sim \frac{\rho \nu U}{L} \sim \rho v_T U \frac{l}{L}$$

thay cho bất dẳng thức ở (59-19). Vì $\Delta \mathbf{v}$ được biểu diễn trực tiếp qua ∇p theo (20-1), nên sự cần thiết phải xét đến các số hạng có ∇p và $\Delta \mathbf{v}$, có nghĩa là hệ số khuếch tán khí áp k_p được thay thế bằng hệ số "hiệu dụng"

$$(k_p)_{hd} = k_p - \frac{p\lambda_1}{\rho \nu D}. \tag{59-21}$$

Chú ý rằng, kết quả là hệ số này là một đại lượng động học, mà không phải là đại lượng thuần túy nhiệt động lực học, như hệ số k_p theo (59-10).

BÀI TẬP

Xác định hệ số khuếch tán khí áp đối với hỗn hợp của hai chất khí lý tưởng.

Giải. Đối với thể tích riêng ta có:

$$V = \frac{kT}{p}(n_1 + n_2)$$

(các ký hiệu xem ở phần ghi chú trang 374.) và các thế hóa có dạng (xem V, §93)

$$\mu_1 = f_1(p,T) + T\ln\frac{n_1}{n_1+n_2}, \quad \mu_2 = f_2(p,T) + T\ln\frac{n_2}{n_1+n_2}$$

Các số n_1 và n_2 được biểu diễn qua nồng độ của khí 1 theo $n_1 m_1 = c$, $n_2 m_2 = 1 - c$. Theo công thức (59-10), phép tính cho ta

$$k_p = (m_2 - m_1)\, c\,(1-c)\left[\frac{1-c}{m_2} + \frac{c}{m_1}\right].$$

§60. SỰ KHUẾCH TÁN CỦA CÁC HẠT LƠ LỬNG TRONG CHẤT LỎNG

Do ảnh hưởng của chuyển động phân tử trong chất lỏng, các hạt lơ lửng trong chất lỏng đó thực hiện *chuyển động Brown* hỗn loạn. Giả sử tại một thời điểm ban đầu có một hạt như thế tại một điểm nào đó (gốc tọa độ). Có thể coi chuyển động tiếp sau của nó như một "sự khuếch tán", và xác suất tìm thấy hạt ở trong một phần tử thể tích nào của khối chất lỏng giữ vai trò nồng độ. Do đó để tìm được xác suất này, ta có thể dùng nghiệm (59-17) của phương trình khuếch tán. Sở dĩ có thể tiến hành khảo sát được như vậy là vì, đối với sự khuếch tán trong các dung dịch yếu (nghĩa là với $c \ll 1$, chỉ trường hợp này mới áp dụng được phương trình khuếch tán dưới dạng (59-16)), các hạt của chất hòa tan thực tế không tương tác với nhau và do đó có thể xét chuyển động của mỗi hạt độc lập với các hạt khác.

Gọi $w(r, t)\, dr$ là xác suất để tìm thấy hạt tại thời điểm t, ở cách điểm ban đầu một khoảng nằm giữa r và $r + dr$. Trong (59-17) nếu đặt $M/\rho = 1$ và nhân với phần tử thể tích $4\pi r^2\, dr$ của lớp cầu, ta thu được:

$$w(r,t)dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}} e^{-r^2/4Dt} r^2 dr. \qquad (60\text{-}1)$$

Ta xác định trung bình của bình phương khoảng cách mà hạt đi được từ điểm ban đầu trong khoảng thời gian t. Ta có:

$$\overline{r^2} = \int_0^\infty r^2 w(r,t)dr. \qquad (60\text{-}2)$$

Phép tính dựa vào (60-1) cho ta

$$\overline{r^2} = 6Dt \qquad (60\text{-}3)$$

Như vậy, khoảng cách trung bình mà hạt đã vượt qua trong một khoảng thời gian nào đó tỷ lệ với căn bậc hai của thời gian này.

Hệ số khuếch tán của các hạt lơ lửng trong chất lỏng có thể tính được dựa theo cái gọi là *độ linh động* của chúng.

Giả sử các hạt này chịu tác dụng của một ngoại lực không đổi **f** (lực trọng trường chẳng hạn). Trong trạng thái dừng, lực tác dụng lên mỗi hạt phải được cân bằng bởi lực cản do chất lỏng tác dụng lên hạt chuyển động. Khi các vận tốc không quá lớn, lực cản tỷ lệ với lũy thừa bậc nhất của vận tốc. Nếu viết lực đó dưới dạng $\mathbf{v}/b$, b là một hằng số, rồi cân bằng nó với ngoại lực **f**, ta thu được:

$$\mathbf{v} = b\mathbf{f} \qquad (60\text{-}4)$$

nghĩa là vận tốc của hạt thu được dưới tác dụng của ngoại lực tỷ lệ với lực đó. Hằng số b được gọi là độ linh động và về nguyên tắc, có thể được tính dựa vào các phương trình thủy động lực. Chẳng hạn, đối với các hạt có dạng hình cầu (bán kính R) thì lực cản bằng $6\pi\eta Rv$ (xem (20-14)), do đó, độ linh động bằng

$$b = \frac{1}{6\pi\eta R}. \qquad (60\text{-}5)$$

Đối với các hạt không có dạng hình cầu, lực cản phụ thuộc vào phương chuyển động; nó có thể được viết dưới dạng $a_{ik}v_k$, trong đó a_{ik} là một tenxơ đối xứng (xem (20-15)). Khi tính độ linh động, cần phải lấy trung bình theo tất cả các hướng của hạt; nếu a_1, a_2, a_3 là các giá trị chính của tenxơ đối xứng a_{ik}, thì ta thu được:

$$b = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right). \tag{60-6}$$

Độ linh động liên hệ với hệ số khuếch tán D bằng một hệ thức đơn giản. Để tìm hệ thức này, ta viết dòng khuếch tán $\mathbf{i}$, dòng này, ngoài số hạng thông thường $-\rho D\nabla c$ có liên quan đến gradiên của nồng độ (nhiệt độ được giả thiết không đổi), còn chứa một số hạng nữa có liên quan đến vận tốc của hạt thu được dưới tác dụng của các ngoại lực. Số hạng sau cùng này bằng $\rho c\mathbf{v} = \rho\, cb\mathbf{f}$. Như vậy [1]:

$$\mathbf{i} = -\rho\, D\nabla c + \rho\, cb\mathbf{f} \tag{60-7}$$

Ta viết lại biểu thức dưới dạng

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial\mu / \partial c)_{T,p}}\nabla\mu + \rho cb\mathbf{f},$$

trong đó μ bây giờ là thế hóa của các hạt lơ lửng (giữ vai trò của chất hòa tan). Sự phụ thuộc của thế này vào nồng độ (trong dung dịch yếu) được cho bởi biểu thức :

$$\mu = T\ln c + \psi(p,T)$$

(xem V, §87), do đó

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho Dc}{T}\nabla\mu + \rho cb\mathbf{f}.$$

Trong trạng thái cân bằng nhiệt động lực, không có sự khuếch tán và dòng $\mathbf{i}$ phải bằng không. Mặt khác, khi có trường ngoài, điều kiện cân bằng đòi hỏi tổng $\mu + U$ phải không đổi trong dung dịch, trong đó U là thế năng của hạt lơ lửng trong trường này. Khi đó $\nabla\mu = -\nabla U = -\mathbf{f}$ và từ đẳng thức $\mathbf{i} = 0$, ta thu được

$$D = Tb \tag{60-8}$$

Đó chính là hệ thức cần tìm giữa hệ số khuếch tán và độ linh động (*hệ thức Einstein*).

Thay (60-5) vào (60-8), ta thu được biểu thức sau cho hệ số khuếch tán của các hạt có dạng cầu:

---

[1] Ở đây c có thể được định nghĩa như số các hạt lơ lửng trong một đơn vị khối lượng chất lỏng, còn $\mathbf{i}$ – như mật độ dòng của số các hạt này.

$$D = \frac{T}{6\pi\eta R}. \qquad (60\text{-}9)$$

Ngoài chuyển động Brown tịnh tiến và sự khuếch tán tịnh tiến của các hạt lơ lửng, có thể khảo sát chuyển động Brown quay và sự khuếch tán quay của chúng. Tương tự như hệ số khuếch tán tịnh tiến được tính dựa vào lực cản, hệ số khuếch tán quay có thể được biểu diễn qua mômen các lực tác dụng lên hạt quay trong chất lỏng.

BÀI TẬP

1. Các hạt thực hiện chuyển động Brown trong chất lỏng bị giới hạn một phía bởi thành phẳng; khi rơi vào thành, các hạt "dính" vào đó. Tìm xác suất để một hạt tại thời điểm ban đầu ở cách thành một khoảng x_o đến "dính" vào đó trong khoảng thời gian t.

Giải. Sự phân bố các xác suất $w(x,t)$ (x là khoảng cách tính từ thành) được xác định bởi phương trình khuếch tán với điều kiện biên $w = 0$ khi $x = 0$ và điều kiện ban đầu $w = \delta(x - x_o)$ khi $t = 0$. Một nghiệm như thế được xác định bởi công thức (52-4), trong đó bây giờ cần viết w thay cho T, D thay cho χ và trong đó dưới dấu tích phân ta đặt $w_o(x') = \delta(x' - x_o)$. Khi đó ta có:

$$w(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-x_o)^2}{4Dt}\right) - \exp\left(-\frac{(x+x_o)^2}{4Dt}\right)\right\}.$$

Xác suất để "dính" vào thành trong một đơn vị thời gian được xác định bởi giá trị của dòng khuếch tán $D(\partial w/\partial x)$ với $x = 0$; còn xác suất "dính" $W(t)$ trong thời gian t bằng:

$$W(t) = D\int_0^t \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} dt.$$

Thay w vào, ta thu được:

$$W(t) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x_o}{2\sqrt{Dt}}\right).$$

2. Xác định bậc của khoảng thời gian τ trong đó một hạt lơ lửng trong chất lỏng quay chung quanh trục của nó được một góc lớn.

Giải. Thời gian τ cần tìm được định nghĩa là thời gian cần thiết để trong chuyển động Brown, hạt đi được một khoảng cách có bậc của các kích thước dài a. Theo (60-3), ta có $\tau \sim a^2/D$, còn theo (60-9) $D \sim T/\eta a$. Như vậy

$$\tau \sim \frac{\eta a^3}{T}.$$

Chương VII

HIỆN TƯỢNG MẶT NGOÀI

§61. CÔNG THỨC LAPLACE

Trong chương này ta nghiên cứu các hiện tượng xảy ra ở gần mặt ngăn cách giữa hai môi trường liên tục (dĩ nhiên, thực tế các vật tiếp xúc nhau được ngăn cách bởi một lớp chuyển tiếp mỏng, lớp này, vì bề dầy rất nhỏ, nên có thể được coi như một mặt).

Nếu mặt ngăn cách hai môi trường có dạng cong, thì ở gần mặt đó các áp suất trong hai môi trường sẽ khác nhau. Để xác định hiệu áp suất này (gọi là *áp suất mặt ngoài*) ta viết điều kiện cân bằng nhiệt động lực của cả hai vật đối với nhau, có xét đến tính chất của mặt ngăn cách chúng.

Giả sử rằng mặt ngăn cách chịu một sự dịch chuyển vô cùng nhỏ. Tại mỗi điểm của mặt không dịch chuyển, ta vẽ pháp tuyến với mặt này. Ký hiệu $\delta\zeta$ là đoạn pháp tuyến bị cắt bởi mặt dịch chuyển và mặt không dịch chuyển. Khi đó thể tích của mỗi phần tử không gian chứa giữa các mặt là $\delta\zeta df$, trong đó df là phần tử diện tích. Gọi p_1 và p_2 là áp suất ở trong môi trường thứ nhất và trong môi trường thứ hai, và quy ước sẽ dương nếu sự dịch chuyển của mặt ngăn cách về phía môi trường thứ hai chẳng hạn. Khi đó công cần thiết để thực hiện sự biến thiên thể tích trên bằng:

$$\int(-p_1 + p_2)\delta\zeta\, df.$$

Công phần δR để dịch chuyển mặt thu được bằng cách thêm vào biểu thức này công gây bởi sự biến thiên diện tích của chính bản thân mặt. Như đã biết, phần công này tỷ lệ với độ biến thiên δf của diện tích mặt

và bằng $\alpha\delta f$, trong đó α là *sức căng bề mặt*. Do đó công toàn phần bằng

$$\delta R = -\int (p_1 - p_2)\delta\zeta\, df + \alpha\delta f. \tag{61-1}$$

Điều kiện cân bằng nhiệt động lực thu được, như đã biết, bằng cách cho triệt tiêu δR.

Tiếp theo, giả sử R_1 và R_2 là các bán kính cong chính tại điểm đã cho của mặt, R_1 và R_2 được coi là dương, nếu chúng hướng vào trong môi trường thứ nhất. Khi đó các phần tử độ dài dl_1 và dl_2 trên mặt vạch trong các mặt phẳng của các tiết diện chính của nó thu được trong sự dịch chuyển vô cùng nhỏ của mặt những gia lượng lần lượt $(\delta\zeta/R_1)/dl_1$ và $(\delta\zeta/R_2)/dl_2$ (dl_1 và dl_2 được coi là các phần tử cung các vòng tròn bán kính R_1 và R_2). Do đó phần tử mặt $df = dl_1 dl_2$ sau dịch chuyển bằng

$$dl_1\left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1}\right)dl_2\left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right) \approx dl_1 dl_2\left(1 + \frac{\delta\zeta}{R_1} + \frac{\delta\zeta}{R_2}\right),$$

có nghĩa là nó thay đổi một lượng

$$\delta\zeta\, df\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Từ đó thấy rằng, độ biến thiên toàn phần của diện tích mặt ngăn cách bằng

$$\delta f = \int \delta\zeta\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)df. \tag{61-2}$$

Thay các biểu thức thu được vào trong (61-1) và cho triệt tiêu, ta thu được điều kiện cân bằng dưới dạng

$$\int \delta\zeta\left\{(p_1 - p_2) - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}df = 0.$$

Điều kiện này phải được thực hiện đối với mọi dịch chuyển tùy ý vô cùng nhỏ của mặt, nghĩa là với $\delta\zeta$ tùy ý. Do đó biểu thức dưới dấu tích phân trong dấu ôm phải đồng nhất bằng không, nghĩa là

$$p_1 - p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \tag{61-3}$$

Đó chính là công thức cần tìm (*công thức Laplace*), nó xác định áp suất mặt ngoài [1]. Ta nhận thấy rằng, nếu R_1 và R_2 dương, thì $p_1 - p_2 > 0$, điều đó có nghĩa là, trong hai vật áp suất sẽ lớn hơn ở trong vật nào mà mặt của nó lồi. Nếu $R_1 = R_2 = \infty$, nghĩa là mặt ngăn cách phẳng, thì áp suất ở trong hai vật đều bằng nhau, đúng phải như vậy.

Ta áp dụng công thức (61-3) để nghiên cứu sự cân bằng cơ học của các vật tiếp xúc nhau. Giả sử rằng mặt ngăn cách, cũng như chính bản thân của vật, không chịu tác dụng của bất kỳ ngoại lực nào. Khi đó áp suất không đổi dọc theo mỗi vật. Dựa vào công thức (61-3), khi đó có thể viết điều kiện cân bằng dưới dạng

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \text{const} \tag{61-4}$$

Như vậy, tổng các nghịch đảo bán kính cong phải không đổi trên toàn bộ mặt ngăn cách tự do. Nếu toàn bộ mặt tự do, thì điều kiện (61-4) có nghĩa là, mặt phải có dạng hình cầu (chẳng hạn mặt của một giọt nhỏ, khi có thể bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực lên nó). Nhưng nếu mặt được giữ dọc theo một đường cong nào đó (chẳng hạn như, màng mỏng chất lỏng được căng trên một khung cứng), thì dạng của nó sẽ phức tạp hơn.

Khi áp dụng cho sự cân bằng của các màng mỏng của chất lỏng được giữ trên một khung cứng. điều kiện (61-4) phải có vế phải bằng không. Thực vậy, tổng $1/R_1 + 1/R_2$ phải có cùng giá trị trên toàn bộ mặt tự do của màng mỏng, đồng thời nó phải có dấu ngược nhau trên hai mặt, vì một mặt là lồi thì mặt kia phải lõm và có cùng các bán kính cong, nhưng các bán kính này bây giờ phải được coi là âm. Từ đó suy ra rằng, điều kiện cân bằng của một màng mỏng có dạng

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0, \tag{61-5}$$

Bây giờ ta xét điều kiện cân bằng ở trên mặt một vật đặt trong trọng trường. Để đơn giản, ta giả sử rằng môi trường thứ hai là khí quyển, mà áp suất của nó có thể được giả thiết là không đổi trên toàn bộ mặt vật. Ta sẽ coi bản thân vật như một chất lỏng không nén được. Khi đó $p_2 = \text{const}$

[1] Phần vừa trình bày chỉ khác với phần trình bày ở V, §156, về thực chất, ở chỗ là ở đây xét mặt ngăn cách của các vật có dạng tùy ý, mà không phải chỉ có mặt cầu.

và dựa vào (3 - 2), áp suất p_1 ở chất lỏng sẽ bằng: $p_1 = \text{const} - \rho z g$ (tọa độ z được tính theo phương thẳng đứng hướng lên trên), do đó điều kiện cân bằng có dạng

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{g\rho}{\alpha} z = \text{const} \tag{61-6}$$

Cần phải nói rằng, để xác định dạng cân bằng của mặt chất lỏng ở trong các điều kiện cụ thể, thường để tiện lợi người ta dùng điều kiện cân bằng không phải dưới dạng (61-6), mà trực tiếp bằng cách giải bài toán biến phân về cực tiểu năng lượng toàn phần tự do. Nội năng tự do của chất lỏng chỉ phụ thuộc vào thể tích, mà không phụ thuộc vào hình dạng của mặt. Hình dạng của mặt có ảnh hưởng trước hết đến năng lượng mặt ngoài tự do

$$\int \alpha \, df$$

và sau đó đến năng lượng ở trong trường ngoài (trọng trường) bằng

$$g\rho \int z \, dV.$$

Như vậy, điều kiện cân bằng có thể viết dưới dạng

$$\alpha \int df + g\rho \int z \, dV = \min \tag{61-7}$$

Cực tiểu phải được xác định với sự thực hiện điều kiện phụ

$$\int dV = \text{const}, \tag{61-8}$$

là điều kiện biểu diễn sự bất biến của thể tích toàn phần chất lỏng.

Các hằng số α, ρ, g chỉ xuất hiện trong những điều kiện cân bằng (61.6-7) dưới dạng tỷ số $\alpha/g\rho$. Tỷ số này có thứ nguyên bình phương độ dài. Độ dài

$$a = \sqrt{\frac{2\alpha}{g\rho}} \tag{61-9}$$

được gọi là *hằng số mao dẫn* [1]. Hình dạng của mặt chất lỏng chỉ được xác định bởi đại lượng này. Nếu hằng số mao dẫn lớn (so với các kích thước của vật) thì khi xác định hình dạng của mặt ta có thể bỏ qua trọng trường.

[1] Đối với nước chẳng hạn, $\alpha = 0{,}39$ cm (ở 20°C).

Để xác định hình dạng của mặt từ điều kiện (61-4) hay (61-6), cần phải có công thức xác định bán kính cong theo hình dạng của mặt. Các công thức này đã biết trong hình học vi phân, nhưng trong trường hợp tổng quát có dạng khá phức tạp. Các công thức đó được đơn giản đi đáng kể, khi dạng của mặt sai lệch ít so với mặt phẳng. Ta sẽ rút ra trực tiếp ở đây một công thức gần đúng thích hợp, mà không cần dùng công thức tổng quát của hình học vi phân.

Giả sử $z = \zeta(x,y)$ là phương trình của mặt; giả thiết ζ nhỏ tại mọi nơi, nghĩa là mặt sai lệch ít so với mặt phẳng $z = 0$. Như đã biết, diện tích f của mặt được cho bởi tích phân

$$f = \int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

hay một cách gần đúng với các ζ nhỏ

$$f = \int\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy. \qquad (61\text{-}10)$$

Ta xác định độ biến thiên δf:

$$\delta f = \int\left\{\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right\} dx\, dy.$$

Lấy tích phân từng phần ta được:

$$\delta f = -\int\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\delta\zeta\, dx\, dy.$$

So sánh biểu thức này với (61-2) ta thu được:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right). \qquad (61\text{-}11)$$

Đó chính là công thức cần tìm cho ta các tổng của nghịch đảo các bán kính cong của một mặt cong ít.

Khi có sự cân bằng của ba pha tiếp xúc nhau, các mặt ngăn cách của chúng được thiết lập sao cho tổng của ba lực căng mặt tác dụng lên đường tiếp xúc chung của ba môi trường bằng không. Điều kiện này dẫn tới kết quả là, các mặt ngăn cách phải cắt nhau dưới những góc (gọi là

các góc bờ), xác định bởi giá trị của các sức căng mặt ngoài.

Cuối cùng, ta dừng lại ở vấn đề các điều kiện biên, các điều kiện này phải được thỏa mãn tại biên giới của hai chất lỏng chuyển động khi có xét đến lực căng mặt ngoài. Nếu không xét đến lực căng mặt ngoài, thì tại biên giới của hai chất lỏng, ta có:

$$n_k(\sigma_{ik}^{(2)} - \sigma_{ik}^{(1)}) = 0,$$

nó biểu diễn đẳng thức giữa các lực ma sát tác dụng lên mặt của hai chất lỏng. Khi xét đến sức căng mặt ngoài, phải viết ở vế phải của điều kiện này một lực bổ sung có độ lớn xác định bởi công thức Laplace và hướng vuông góc với mặt:

$$n_k\sigma_{ik}^{(2)} - n_k\sigma_{ik}^{(1)} = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n_i, \qquad (61\text{-}12)$$

Phương trình này có thể được viết dưới một dạng khác

$$(p_1 - p_2)n_i = (\sigma_{ik}'^{(1)} - \sigma_{ik}'^{(2)})n_k + \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)n_i, \qquad (61\text{-}13)$$

Nếu cả hai mặt của chất lỏng có thể được coi là lý tưởng, thì các ứng suất nhớt σ'_{ik} sẽ không có và ta tìm lại được phương trình đơn giản (61-3).

Tuy nhiên, điều kiện (61-13) chưa phải là điều kiện tổng quát duy nhất. Vấn đề ở chỗ, hệ số sức căng mặt ngoài α có thể là không phải là không đổi ở trên mặt (chẳng hạn do sự biến thiên của nhiệt độ). Khi đó ngoài lực pháp tuyến (lực này bằng không trong trường hợp của mặt phẳng), còn xuất hiện một lực bổ sung hướng tiếp tuyến với mặt. Cũng tương tự như trong trường hợp áp suất không đều, có xuất hiện một lực khối bằng (tính cho một đơn vị thể tích) $-\nabla p$, ở đây ta có lực tiếp tuyến $\mathbf{f}_t$ tác dụng lên một đơn vị diện tích của mặt ngăn cách, $\mathbf{f}_t = \text{grad } \alpha$. Gradiên ở đây được lấy với dấu cộng, không phải lấy dấu trừ như ở trong lực $-\nabla p$, vì các lực căng mặt ngoài có xu hướng làm giảm diện tích của mặt, trong khi đó các áp lực có xu hướng làm tăng thể tích của vật. Thêm lực này vào vế phải của (61-13), ta thu được điều kiện biên

$$\left[p_1 - p_2 - \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] n_i = (\sigma'^{(1)}_{ik} - \sigma'^{(2)}_{ik}) n_k + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \qquad (61\text{-}14)$$

(vectơ đơn vị của pháp tuyến **n** hướng về phía trong chất lỏng thứ nhất). Ta có nhận xét là, điều kiện này chỉ có thể được thực hiện ở trong chất lỏng nhớt. Thực vậy, đối với chất lỏng lý tưởng $\sigma'_{ik} = 0$, khi đó vế trái của đẳng thức (61-14) là một vectơ hướng theo pháp tuyến, còn vế phải là một vectơ hướng theo tiếp tuyến với mặt. Nhưng một đẳng thức như thế là không thể có được (dĩ nhiên, trừ trường hợp tầm thường trong đó tất cả các đại lượng này xét riêng lẻ đều bằng không).

BÀI TẬP

1. Xác định dạng của màng mỏng chất lỏng có biên được kẹp trên hai khung dạng hình tròn. Tâm của các hình tròn này nằm trên đường thẳng chung vuông góc với các mặt phẳng của chúng (mặt cắt màng mỏng được biểu diễn trên hình 41).

Giải. Bài tập dẫn tới việc tìm mặt có diện tích cực tiểu thu được khi quay đường cong $z = z(r)$ có các đầu ở hai điểm đã cho A và B quanh đường thẳng $r = 0$. Diện tích của mặt quay bằng

$$f = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} F(r, r')dz, \qquad F = r(1 + r'^2)^{1/2},$$

trong đó $r' \equiv dr/dz$. Tích phân thứ nhất của phương trình Euler cho bài toán về một cực tiểu của một tích phân như thế (với biểu thức của F không chứa z) có dạng

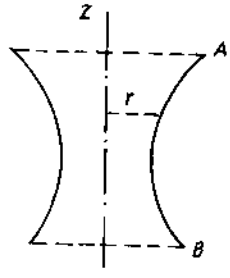
$$F - r' \frac{\partial F}{\partial r'} = \text{const}$$

Trong trường hợp đã cho, ta có:

$$r = c_1 (1 + r'^2)^{1/2}$$

Sau khi lấy tích phân ta được

$$r = c_1 \operatorname{ch} \frac{z - c_1}{c_1};$$



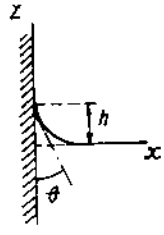
Hình 41

Như vậy, mặt cần tìm là mặt thu được khi quay một dây xích (gọi là mặt catênoit). Các hằng số c_1 và c_2 phải được xác định sao cho đường cong $r(z)$ đi qua các điểm A và B đã cho. Khi đó c_2 chỉ phụ thuộc vào việc chọn gốc tọa độ ở trên

trục z. Còn c_1, ta thu được hai giá trị, mà ta phải giữ lại giá trị lớn hơn (giá trị nhỏ hơn không tương ứng với cực tiểu của tích phân).

Khi tăng khoảng cách h giữa các khung, thì sẽ tới thời điểm mà tại đó đối với một giá trị xác định nào đó của khoảng cách này, phương trình xác định hằng số c_1 không còn có những nghiệm thực nữa. Tại khoảng cách lớn hơn, chỉ có dạng tương ứng với hai màng cong riêng lẻ, mỗi màng căng trên mỗi vòng, là ổn định. Chẳng hạn, trong trường hợp của hai vòng có cùng bán kính R, dạng catênoit trở nên không thể được với $h = 1{,}33R$ giữa các khung.

2. Xác định dạng của mặt chất lỏng nằm trong trọng trường có một phía tiếp xúc với thành phẳng thẳng đứng. Góc bờ (góc làm ướt, ND) tạo bởi chất lỏng tiếp xúc với chất của thành bằng θ (hình 42).



Hình 42

Giải. Chọn các trục tọa độ như được nêu ở hình 42. Mặt phẳng $x = 0$ là mặt phẳng của thành. Còn $z = 0$ là mặt phẳng của chất lỏng ở xa thành. Các bán kính cong của mặt $z = z(x)$ là:

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = -\frac{\left(1+z'^2\right)^{3/2}}{z''},$$

do đó, phương trình (61-6) có dạng

$$\frac{2z}{a^2} - \frac{z''}{\left(1+z'^2\right)^{3/2}} = \text{const} \tag{1}$$

(trong đó a là hằng số mao dẫn) Với $x = \infty$ phải có $z = 0$, $1/R_2 = 0$; do đó const = 0. Tích phân thứ nhất của phương trình trên bằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = A - \frac{z^2}{a^2}. \tag{2}$$

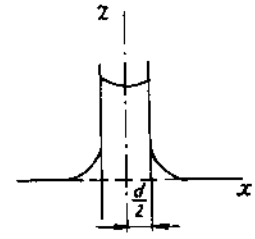
Điều kiện tại vô cùng ($z = 0$, $z' = 0$ với $x = \infty$) cho ta $A = 1$. Lấy tích phân lần hai, ta được

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{Arch}\frac{a\sqrt{2}}{z} + a\sqrt{2-\frac{z^2}{a^2}} + x_0.$$

Hằng số x_0 phải được xác định sao cho ở trên mặt thành ($x = 0$) $z' = -\operatorname{cotg}\theta$ hay theo (2), $z = h$, trong đó $h = a\sqrt{1-\sin\theta}$ là độ cao mà tại đó chất lỏng dâng lên ở chính mặt thành.

3. Xác định dạng của mặt chất lỏng dâng lên ở giữa hai bản phẳng thẳng đứng song song (hình 43).

Giải. Lấy mặt phẳng y,z ở cách đều hai bản, còn mặt phẳng x,y trùng với mặt của chất lỏng ở bên ngoài, không gian giữa hai bản cách xa hai bản. Trong phương trình (1) của bài tập 2, là phương trình biểu diễn điều kiện cân bằng và như vậy đúng trên toàn bộ mặt chất lỏng (ở giữa cũng như ở bên ngoài các bản), các điều kiện với $x = \infty$ lại cho const = 0. Còn trong tích phân (2) của phương trình (1), hằng số A khác nhau đối với $|x| > d/2$ và $|x| < d/2$ (với $|x| = d/2$ hàm $z(x)$ có gián đoạn). Đối với không gian giữa các bản ta có các điều kiện sau: với $x = 0$ phải có $z' = 0$, với $x = d/2$ phải có $z' = \operatorname{cotg}\theta$, trong đó θ là góc bờ. Theo (2) ta có, đối với các độ cao $z_o = z(0)$ và $z_1 = z(d/2)$:



Hình 43

$$z_o = a\sqrt{A-1}, \quad z_1 = a\sqrt{A-\sin\theta}.$$

Lấy tích phân (2), ta được:

$$x = \int_{z_o}^{z} \frac{\left(A - \frac{z^2}{a^2}\right)dz}{\sqrt{1-\left(A-\frac{z^2}{a^2}\right)^2}} = \frac{a}{2}\int_0^{a\sqrt{A-\cos\xi}} \frac{\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{A-\cos\xi}},$$

trong đó ξ là biến mới có liên hệ với z bằng hệ thức $z = a\sqrt{A-\cos\xi}$. Tích phân này là tích phân eliptic, nó không thể biểu diễn bằng các hàm sơ cấp. Hằng số A được xác định từ điều kiện $z = z_1$ với $x = d/2$; do đó

$$d = a\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta} \frac{\cos\xi\, d\xi}{\sqrt{A-\cos\xi}}.$$

Các công thức thu được xác định dạng của mặt chất lỏng ở trong không gian giữa các bản. Khi $d \to 0$, A tiến đến vô cùng. Do đó với $d << a$, ta có:

$$d \approx \frac{a}{\sqrt{A}}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\cos\xi\, d\xi = \frac{a}{\sqrt{A}}\cos\theta,$$

từ đó $A = (a^2/d^2).\cos^2\theta$. Độ dâng cao của chất lỏng bằng

$$z_o \approx z_1 \approx \frac{a^2}{d}\cos\theta;$$

Dĩ nhiên công thức này cũng có thể thu được bằng phương pháp sơ cấp.

4. Một lớp chất lỏng mỏng nung nóng không đều nằm trên một mặt phẳng của một mặt rắn nằm ngang (trong trọng trường); nhiệt độ của nó là một hàm đã cho của tọa độ x trên mặt lớp, và vì lớp chất lỏng mỏng nên có thể giả thiết nó không phụ thuộc vào tọa độ z theo bề dầy của lớp. Sự nung nóng không đều làm xuất hiện chuyển động dừng của chất lỏng ở trong màng. Kết quả là bề dầy ζ của nó biến thiên theo lớp. Hãy xác định hàm $\zeta = \zeta(x)$.

Giải. Cùng với nhiệt độ, mật độ ρ và sức căng mặt ngoài α cũng là những hàm đã cho của x. Áp suất ở trong chất lỏng bằng $p = p_0 + \rho g(\zeta - z)$, trong đó p_0 là áp suất khí quyển (áp suất ở trên mặt tự do của lớp); có thể bỏ qua sự biến thiên của áp suất gây bởi độ cong của mặt. Vận tốc của chất lỏng ở trong lớp mỏng có thể được giả thiết là, tại mọi nơi nó đều hướng theo trục x. Phương trình chuyển động có dạng

$$\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = g\left[\frac{d(\rho\zeta)}{dx} - z\frac{d\rho}{dx}\right]. \tag{1}$$

Ở trên mặt rắn ($z = 0$), ta có $v = 0$, còn trên mặt tự do ($z = \zeta$) điều kiện biên (61-14) phải được thỏa mãn, trong trường hợp này điều kiện đó cho ta

$$\eta \left.\frac{dv}{dz}\right|_{z=\zeta} = \frac{d\alpha}{dx}.$$

Lấy tích phân phương trình (1) với điều kiện đó, ta thu được:

$$\eta v = gz\left(\zeta - \frac{z}{2}\right)\frac{d(\rho\zeta)}{dx} - \frac{gz}{6}(3\zeta^2 - z^2)\frac{d\rho}{dx} - z\frac{d\alpha}{dx}. \tag{2}$$

Vì chuyển động là dừng, nên thông lượng toàn phần của chất lỏng qua tiết diện của lớp phải bằng không: $\int_0^s v\,dz = 0$. Thay vào biểu thức (2) này, ta thu được phương trình sau đây:

$$\frac{\rho}{3}\frac{d\zeta^2}{dx} + \frac{1}{4}\frac{d\rho}{dx}\zeta^2 = \frac{1}{g}\frac{d\alpha}{dx},$$

là phương trình xác định $\zeta(x)$. Lấy tích phân phương trình đó, ta thu được:

$$g\zeta^2 = 3\rho^{-3/4}\left[\int \rho^{-1/4} d\alpha + \text{const}\right]. \tag{3}$$

Nếu nhiệt độ (và cùng với nó là cả ρ và α) thay đổi ít dọc theo lớp chất lỏng, thì (3) có thể được viết dưới dạng

$$\zeta^2 = \zeta_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{3/4} + \frac{3}{\rho g}(\alpha - \alpha_0),$$

trong đó ζ_o là giá trị của ζ tại điểm, mà ở đó $\zeta = \zeta_o$, $\alpha = \alpha_o$.

§62. SÓNG MAO DẪN

Mặt của chất lỏng có xu hướng lấy dạng cân bằng do tác dụng của trọng trường cũng như do tác dụng của các sức căng mặt ngoài lên chất lỏng. Ở §12, khi nghiên cứu các sóng ở trên mặt chất lỏng, ta đã không xét đến các sức căng này. Dưới đây ta sẽ thấy rằng, ảnh hưởng của tính mao dẫn lên các sóng hấp dẫn là quan trọng đối với các bước sóng nhỏ.

Như ở §12, ta giả thiết biên độ của các dao động nhỏ so với bước sóng. Đối với thế vận tốc, cũng như trước, ta có phương trình

$$\Delta\varphi = 0.$$

Riêng điều kiện ở trên mặt chất lỏng bây giờ khác. Cụ thể là, hiệu các áp suất ở hai phía của mặt này không thể bằng không như đã giả thiết ở §12, mà phải được xác định bằng công thức Laplace (61-3).

Ký hiệu tọa độ z của các điểm trên mặt bằng ζ, vì ζ nhỏ nên có thể dùng biểu thức (61-11) và viết công thức Laplace dưới dạng

$$p - p_o = -\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Ở đây p là áp suất ở trong chất lỏng gần mặt, p_o là áp suất bên ngoài không đổi. Thay p bằng biểu thức (12-2) của nó

$$p = -\rho g\zeta - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Ta tìm được:

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) = 0$$

(với cùng những lý do như ở §12, ta có thể bỏ hằng số p_o, khi xác định φ một cách thích hợp). Lấy đạo hàm hệ thức này theo t và thay $\partial\zeta/\partial t$ bằng $\partial\varphi/\partial z$ ta sẽ thu được điều kiện biên cho thế φ dưới dạng

$$\left\{\rho g\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\right\}_{z=0} = 0. \qquad (62\text{-}1)$$

Ta xét một song phẳng lan truyền dọc theo trục x. Như ở §12, ta thu được nghiệm dưới dạng

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t).$$

Mối liên hệ giữa k và ω bây giờ được cho bởi điều kiện biên (62-1) và có dạng

$$\omega^2 = gk + \frac{\alpha}{\rho}k^3 \tag{62-2}$$

(*W. Thompson*, 1871).

Ta nhận thấy rằng, trong trường hợp của các bước sóng lớn thỏa mãn điều kiện $k << \sqrt{g\rho/\alpha}$ hay

$$k << \frac{1}{a}$$

(a là hằng số mao dẫn), thì có thể bỏ qua ảnh hưởng của tính mao dẫn và sóng là thuần túy hấp dẫn. Trong trường hợp ngược lại của các bước sóng ngắn, có thể bỏ qua ảnh hưởng của trọng trường. Khi đó

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho}k^3. \tag{62-3}$$

Các sóng như thế được gọi là *các sóng mao dẫn*; trong trường hợp trung gian, ta có các *sóng mao dẫn – hấp dẫn*.

Ta còn xác định các dao động riêng của một giọt chất lỏng không nén được hình cầu dưới tác dụng của các lực mao dẫn. Do có các dao động, nên mặt của giọt có dạng sai lệch với dạng hình cầu. Như thông thường, ta giả thiết biên độ các dao động nhỏ.

Ta bắt đầu bằng việc xác định tổng $1/R_1 + 1/R_2$ cho một mặt khác ít so với mặt cầu. Muốn vậy, ta tiến hành giống như khi rút ra công thức (61-11). Diện tích của một mặt mô tả trong các tọa độ cầu r, θ, φ [1] bằng hàm $r = r(\theta, \varphi)$, như đã biết, được cho bởi tích phân

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2}\, r\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{62-4}$$

[1] Trong phần tiếp theo của tiết này φ ký hiệu góc phương vị của các tọa độ cầu, còn thế vận tốc được ký hiệu bằng ψ.

Mặt cầu có phương trình $r = \text{const} \equiv R$ (R là bán kính hình cầu), và mặt gần với mặt cầu có phương trình $r = R + \zeta$, với ζ nhỏ. Thay biểu thức này vào trong (62-4), ta thu được một cách gần đúng

$$f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{(R+\zeta)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Ta xác định độ biến thiên δf của mặt khi cho ζ biến thiên. Ta có:

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta)\delta\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial\varphi}\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Lấy tích phân từng phần số hạng thứ hai theo góc θ, và số hạng thứ ba theo φ, ta thu được:

$$\delta f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{2(R+\zeta) - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right\}\delta\zeta\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Nếu chia biểu thức giữa các dấu ôm cho $R(R + 2\zeta)$, thì biểu thức có mặt dưới dấu tích phân là thừa số của

$$\delta\zeta\, df \approx \delta\zeta\, R(R + 2\zeta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

theo công thức (61-2) sẽ biểu diễn đúng tổng cần tìm của các nghịch đảo bán kính cong được tính với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất theo ζ. Như vậy, ta thu được:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\right]. \qquad (62\text{-}5)$$

Số hạng thứ nhất tương ứng với mặt cầu, đối với mặt này $R_1 = R_2 = R$.

Thế vận tốc ψ thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta\psi = 0$, với điều kiện biên tại $r = R$, (tương tự như khi ta xét một mặt phẳng) có dạng

$$\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\left\{\frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\varphi^2}\right]\right\} + p_0 = 0.$$

Hằng số $2\alpha/R + p_0$ trong điều kiện này lại có thể được bỏ đi; lấy vi phân theo thời gian và thay

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

cuối cùng ta tìm được điều kiện biên cho ψ dưới dạng

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\bigg|_{r=R} - \frac{\alpha}{R^2}\left\{2\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}\right]\right\}_{r=R} = 0. \quad (62\text{-}6)$$

Ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng sóng dừng

$$\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \varphi),$$

trong đó f thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta f = 0$. Như đã biết, mọi nghiệm của phương trình Laplace đều có thể được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của các hàm cầu thể tích có dạng

$$r^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

trong đó các $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ là các hàm cầu Laplace bằng

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$

Ở đây

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$$

là hàm Legendre liên kết ($P_l(\cos\theta)$ – đa thức Legendre cấp l). Như đã biết, l lấy mọi giá trị nguyên dương, kể cả giá trị không, còn m lấy các giá trị $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$ với l đã cho.

Phù hợp với điều đó, ta tìm nghiệm riêng của bài toán đặt ra dưới dạng

$$\psi = Ae^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}. \quad (62\text{-}7)$$

Tần số ω được xác định sao cho thỏa mãn điều kiện biên (62-6). Thay biểu thức (62-7) vào phương trình này và chú ý rằng, các hàm cầu Y_{lm} thỏa mãn phương trình

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y_{lm} = 0,$$

ta sẽ tìm được (rút gọn thừa số chung ψ):

$$\rho\omega^2 + \frac{l\alpha}{R^3}\left[2 - l(l+1)\right] = 0,$$

từ đó

$$\omega^2 = \frac{\alpha}{\rho R^3} l(l-1)(l+2). \tag{62-8}$$

(*Rayleigh*, 1879).

Công thức này xác định các tần số dao động mao dẫn riêng của giọt hình cầu. Ta nhận thấy rằng, chúng chỉ phụ thuộc vào l, mà không phụ thuộc vào m. Trong khi đó với l đã cho tương ứng $2l + 1$ hàm (62-7) khác nhau. Như vậy mỗi tần số của (62-8) tương ứng với $2l + 1$ dao động riêng khác nhau. Các dao động riêng độc lập có cùng tần số được gọi là các *dao động suy biến*; trong trường hợp đang xét, ta có độ suy biến bội $2l + 1$.

Biểu thức (62-8) bị triệt tiêu khi $l = 0$ và $l = 1$. Giá trị $l = 0$ tương ứng với các dao động xuyên tâm, nghĩa là tương ứng với các mạch động đối xứng cầu của giọt; trong chất lỏng không nén được, các dao động như thế rõ ràng là không thể có được. Với $l = 1$, chuyển động sẽ đơn giản là một sự dịch chuyển tịnh tiến của giọt coi như một toàn bộ. Tần số nhỏ nhất khả dĩ của các dao động của giọt tương ứng với $l = 2$ và có giá trị bằng

$$\omega^2_{\min} = \frac{8\alpha}{\rho R^3}. \tag{62-9}$$

BÀI TẬP

1. Xác định sự phụ thuộc của tần số vào vectơ sóng đối với các sóng mao dẫn - hấp dẫn ở trên một chất lỏng có độ sâu h.

Giải. Thay vào điều kiện (62-1)

$$\varphi = A\cos(kx - \omega t)\operatorname{ch} k(z + h)$$

(xem bài tập 1, §12), ta thu được:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho}\right) \operatorname{th} kh.$$

Với $kh >> 1$, ta trở về công thức (62-2) và với các sóng dài ($kh << 1$), ta có:

$$\omega^2 = ghk^2 + \frac{\alpha h k^4}{\rho}.$$

2. Xác định hệ số tắt của các sóng hấp dẫn.

Giải. Thay (62-3) vào trong (25-5), ta thu được

$$\gamma = \frac{2\pi k^2}{\rho} = \frac{2\eta\omega^{4/3}}{\rho^{1/3}\alpha^{2/3}}.$$

3. Tìm điều kiện ổn định của gián đoạn tiếp tuyến ở trong trọng trường, có xét đến sức căng mặt ngoài (các chất lỏng ở hai phía của mặt gián đoạn được giả thiết là khác nhau) (*Kelvin*, 1871).

Giải. Gọi U là vận tốc lớp trên của chất lỏng đối với lớp dưới. Đặt một nhiễu động tuần hoàn dọc theo trục nằm ngang lên chuyển động cơ bản và tìm thế của vận tốc dưới dạng:

ở trong chất lỏng phía dưới

$$\varphi = Ae^{kz}\cos(kx - \omega t)$$

ở trong chất lỏng phía trên

$$\varphi' = A'e^{-kz}\cos(kx - \omega t) + Ux$$

Đối với chất lỏng dưới, ta có ở trên mặt gián đoạn

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}$$

(ζ là tọa độ thẳng đứng của mặt ngăn cách), còn ở trong chất lỏng trên

$$v'_z = \frac{\partial\varphi'}{\partial z} = U\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$

Điều kiện để áp suất ở trong cả hai chất lỏng ở trên mặt gián đoạn bằng nhau có dạng

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho g\zeta - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \rho'\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \rho' g\zeta + \frac{\rho'}{2}(v'^2 - U^2)$$

(khi khai triển biểu thức $v'^2 - U^2$, chỉ cần giữ lại các số hạng bậc nhất theo A'). Độ dịch chuyển ζ được tìm dưới dạng $\zeta = a\sin(kx - \omega t)$. Thay φ, φ', ζ vào trong ba điều kiện đã viết với $z = 0$, ta thu được ba phương trình, từ đó sau khi khử a, A, A', ta được:

$$\omega = k\frac{\rho' U}{\rho + \rho'} \pm \left[\frac{kg(\rho - \rho')}{\rho + \rho'} - \frac{k^2\rho\rho' U^2}{(\rho + \rho')^2} + \frac{\alpha k^3}{\rho + \rho'}\right]^{1/2}.$$

Để cho biểu thức là thực với mọi k, thì điều kiện sau phải được thỏa mãn

$$U^4 \leq \frac{4\alpha g(\rho-\rho')\,(\rho+\rho')^2}{\rho^2\rho'^2}.$$

Nếu không, sẽ có những ω phức với phần ảo dương, và chuyển động sẽ không ổn định.

§63. ẢNH HƯỞNG CỦA MÀNG HẤP PHỤ LÊN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG

Sự có mặt một màng mỏng chất hấp phụ ở trên mặt chất lỏng có thể làm thay đổi đáng kể các tính chất thủy động lực của mặt tự do của chất lỏng. Vấn đề là ở chỗ, khi dạng của mặt biến thiên theo chuyển động của chất lỏng, thì màng mỏng sẽ bị kéo dãn hay co lại, nghĩa là nồng độ của chất hấp phụ sẽ thay đổi. Các sự biến thiên này làm xuất hiện các lực bổ sung, cần được xét đến trong các điều kiện biên ở trên mặt tự do của chất lỏng.

Ở đây chỉ giới hạn xét các màng hấp phụ tạo bởi các chất có thể được coi là không hòa tan vào trong chính chất lỏng. Điều đó có nghĩa là, chất chỉ ở trên mặt và không đi sâu vào bên trong chất lỏng. Nhưng nếu chất hoạt động bề mặt cũng có một độ hòa tan đáng kể nào đó, thì cần phải chú ý đến các quá trình khuếch tán của chất đó giữa màng mặt và thể tích chất lỏng, xuất hiện do sự biến thiên của nồng độ màng.

Khi có chất hấp phụ, sức căng mặt ngoài α sẽ là hàm của nồng độ mặt của chất đó (lượng của chất tính theo một đơn vị diện tích của mặt), mà ta ký hiệu là γ. Nếu γ thay đổi ở trên mặt, thì cùng với nó, cả hệ số α cũng là hàm các tọa độ của điểm ở trên mặt. Do đó, trong điều kiện biên ở trên mặt chất lỏng ta sẽ thêm vào lực tiếp tuyến đã nói đến ở cuối §61 (điều kiện (61-14)). Trong trường hợp đã cho, gradiên của sức căng α được biểu diễn theo gradiên của nồng độ mặt, do đó lực tiếp tuyến tác dụng lên mặt sẽ bằng

$$\mathbf{f}_t = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \nabla \gamma. \qquad (63\text{-}1)$$

Ở §61 đã nói rằng, điều kiện biên (61-14), có xét đến lực trên, chỉ có thể được thỏa mãn đối với một chất lỏng nhớt. Từ đó suy ra rằng, khi độ nhớt nhỏ và không quan trọng đối với hiện tượng dang xét, thì cũng không cần xét đến sự có mặt của màng.

Để xác định chuyển động của chất lỏng bị phủ bởi màng mỏng, cần phải thêm vào các phương trình chuyển động của chất lỏng với điều kiện biên (61-14) một phương trình nữa, tương ứng với một đại lượng nữa chưa biết (nồng độ mặt γ). Phương trình mới thêm này là phương trình liên tục, nó biểu diễn sự không đổi của lượng chất toàn phần bị hấp phụ ở trong màng. Dạng cụ thể của phương trình này phụ thuộc vào dạng của mặt. Nếu mặt là phẳng thì phương trình đó hiển nhiên có dạng:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x \gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \gamma) = 0, \qquad (63\text{-}2)$$

trong đó tất cả các đại lượng được lấy ở trên mặt chất lỏng (mặt phẳng x, y được chọn là mặt phẳng của mặt này).

Việc giải các bài toán chuyển động của chất lỏng có phủ một màng hấp phụ sẽ đơn giản đi đáng kể, nếu màng có thể được coi là không nén được, nghĩa là diện tích của mỗi phần tử mặt của màng được coi là không đổi trong khi chuyển động.

Một thí dụ quan trọng về mặt thủy động lực của màng hấp phụ là chuyển động của một bọt khí ở trong chất lỏng nhớt. Nếu không có một màng nào ở trên mặt của bọt, thì khí chứa đầy bọt cũng chuyển động và lực cản do chất lỏng tác dụng lên bọt sẽ khác với lực cản tác dụng lên một quả cầu rắn có cùng bán kính (xem bài tập 2, §20). Nhưng nếu bọt có phủ một màng mỏng hấp phụ, thì trước hết rõ ràng là, từ ngay lý do đối xứng, màng sẽ đứng yên khi bọt chuyển động. Thực vậy, chuyển động trong màng chỉ có thể xảy ra ở trên mặt bọt theo các đường kinh tuyến; kết quả là sẽ có một sự tích tụ liên tục chất của màng ở một trong các cực của bọt (vì chất hấp phụ không xuyên vào trong chất khí

hay chất lỏng), điều đó không thể xảy ra được. Vận tốc của khí ở trên mặt bọt phải bằng không đồng thời với vận tốc của màng, nhưng với những điều kiện biên như vậy thì toàn bộ chất khí ở trong bọt sẽ đứng yên. Như vậy, bọt có phủ một màng mỏng sẽ chuyển động giống như một quả cầu rắn, và đặc biệt, lực cản tác dụng lên nó (với các số Reynolds nhỏ) được xác định bởi công thức Stokes.

BÀI TẬP

1. Hai bình nối với nhau bằng một kênh sâu và dài có các thành song phẳng (chiều rộng kênh là a, chiều dài là l). Mặt chất lỏng ở trong bình và ở trong kênh có phủ một màng hấp phụ; các nồng độ mặt γ_1 và γ_2 của màng khác nhau ở trong hai bình, điều đó gây ra một chuyển động ở gần mặt chất lỏng trong kênh. Xác định lượng chất của màng được chuyển trong chuyển động đó.

Giải. Chọn mặt phẳng của một trong các thành của kênh làm mặt phẳng x, z, còn mặt chất lỏng làm mặt phẳng x, y, sao cho trục x hướng dọc theo độ dài của kênh; miền chất lỏng tương ứng với các $z < 0$. Vì gradiên của áp suất không có, nên phương trình của chuyển động dừng của chất lỏng (xem §17) có dạng

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

trong đó v là vận tốc của chất lỏng, rõ ràng là hướng theo trục x. Dọc theo độ dài kênh, có một gradiên nồng độ $d\gamma/dx$. Ở trên mặt chất lỏng ở trong kênh, điều kiện biên đòi hỏi:

$$\eta \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{d\alpha}{dx} \quad \text{với } z = 0. \tag{2}$$

Ở trên thành của kênh, chất lỏng phải đứng yên:

$$v = 0 \text{ với } y = 0, a. \tag{3}$$

Kênh được coi là vô cùng sâu, do đó

$$v = 0 \quad \text{với} \quad z \to -\infty \tag{4}$$

Các nghiệm riêng của phương trình (1) thỏa mãn các điều kiện (3) và (4) là

$$\text{const} \sin(2n+1)\frac{\pi y}{a} . \exp\left(\frac{(2n+1)\pi}{a} z\right)$$

với các n nguyên. Điều kiện (2) được thỏa mãn bởi tổng

$$v = \frac{4a}{\eta\pi^2}\frac{d\alpha}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi y}{a}\exp\frac{(2n+1)\pi z}{a}}{(2n+1)^2}$$

Lượng chất của màng được chuyển (trong một đơn vị thời gian) bằng:

$$Q = \int_0^a \gamma v|_{z=0}\,dy = \frac{8a^2}{\eta\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\frac{d\alpha}{dx}\gamma$$

(chuyển động xảy ra theo chiều tăng của α). Rõ ràng đại lượng Q phải không đổi dọc theo kênh. Do đó có thể viết:

$$\gamma\frac{d\alpha}{dx} = \text{const} \equiv \frac{1}{l}\int_0^l \frac{d\alpha}{dx}\gamma dx = \frac{1}{l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma d\alpha,$$

trong đó, $\alpha_1 = \alpha(\gamma_1)$, $\alpha_2 = \alpha(\gamma_2)$ và ta giả sử rằng $\alpha_1 > \alpha_2$. Như vậy, cuối cùng ta có

$$Q = \frac{8a^2}{\eta l\pi^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\right)\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma d\alpha = 0{,}27\ \frac{a^2}{\eta l}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\gamma\,d\alpha.$$

2. Xác định hệ số tắt của các sóng mao dẫn trên mặt chất lỏng có phủ một màng hấp phụ.

Giải. Nếu độ nhớt của chất lỏng không lớn quá, thì các lực kéo dãn (tiếp tuyến), do chất lỏng tác dụng lên màng, đều nhỏ, do đó ta có thể coi màng này là không nén được.

Vì thế có thể tính được độ tiêu tán năng lượng như độ tiêu tán xảy ra ở gần một thành rắn, nghĩa là theo công thức (24-14). Nếu viết thế của vận tốc dưới dạng

$$\varphi = \varphi_0 e^{ikx-\omega t}\,e^{-kz},$$

ta sẽ thu được độ tiêu tán tính cho một đơn vị diện tích mặt:

$$\overline{\dot{E}}_d = -\sqrt{\frac{\rho\eta\omega}{8}}|k\varphi_0|^2.$$

Còn năng lượng toàn phần (tính cho một đơn vị diện tích) bằng:

$$\overline{E} = \rho\int\overline{v^2}dz = \frac{\rho}{2k}|k\varphi_0|^2.$$

Hệ số tắt có giá trị bằng (dùng hệ thức (62-3)):

$$\gamma = \frac{\omega^{7/6}\eta^{1/2}}{2\sqrt{2}\,\alpha^{1/3}\rho^{1/6}} = \frac{k^{7/4}\eta^{1/2}\alpha^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\rho^{3/4}}.$$

Tỷ số giữa đại lượng này và hệ số tắt của các sóng mao dẫn ở trên mặt tinh khiết của chất lỏng (bài tập 2, §62) bằng:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha\rho}{k\eta^2}\right)^{1/4}$$

và nó lớn hơn so với đơn vị, miễn là bước sóng không quá nhỏ. Như vậy, sự có mặt của màng hấp phụ ở trên mặt chất lỏng có tác dụng làm tăng đáng kể hệ số tắt của các sóng.

Chương VIII
ÂM

§64. SÓNG ÂM

Ta chuyển sang nghiên cứu chuyển động của chất lỏng (hay khí) nén được và bắt đầu từ việc nghiên cứu những dao động nhỏ ở trong chất lỏng đó; chuyển động dao động với các biên độ nhỏ trong một chất lỏng nén được, được gọi là *các sóng âm*. Tại mỗi nơi trong chất lỏng, các sự nén và dãn xảy ra xen kẽ nhau ở trong sóng âm.

Vì các dao động ở trong sóng âm nhỏ, nên vận tốc $\mathbf{v}$ ở đó nhỏ, do đó có thể bỏ qua số hạng $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ ở trong phương trình Euler. Cũng vì lý do đó, các biến thiên tương đối của nhiệt độ và áp suất ở trong chất lỏng cũng nhỏ. Ta sẽ viết các biến p và ρ dưới dạng

$$p = p_o + p', \ \rho = \rho_o + \rho', \tag{64-1}$$

trong đó ρ_o và p_o là mật độ và áp suất cân bằng không đổi, ρ' và p' là các độ biến thiên của chúng ở trong sóng âm ($\rho' \ll \rho_o$, $p' \ll p_o$).

Phương trình liên tục

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0,$$

khi thay (64-1) vào đó và bỏ qua các đại lượng nhỏ bậc hai (ρ', p', $\mathbf{v}$ khi đó cần được coi là những đại lượng nhỏ bậc một), ta thu được

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_o \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{64-2}$$

Phương trình Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

trong cùng phép gần đúng đó dẫn tới phương trình

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_o} = 0 . \qquad (64\text{-}3)$$

Điều kiện để phương trình chuyển động đã tuyến tính hóa (64-2) và (64-3) áp dụng được cho sự lan truyền các sóng âm là, vận tốc chuyển động của các hạt chất lỏng trong sóng phải nhỏ so với vận tốc của âm: $v \ll c$. Chẳng hạn điều kiện này có thể rút ra từ điều kiện $\rho' \ll \rho_o$ (xem công thức (64-12) dưới đây).

Các phương trình (64-2) và (64-3) chứa các hàm chưa biết $\mathbf{v}$, p', ρ'. Để khử một trong các hàm đó, ta có nhận xét là, sóng âm trong chất lỏng lý tưởng, cũng như mọi chuyển động khác ở trong một chất lỏng như thế, đều là đoạn nhiệt. Do đó, sự biến thiên nhỏ p' của áp suất cũng có liên hệ với sự biến thiên nhỏ ρ' của mật độ bằng phương trình

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_o}\right)_s \rho' . \qquad (64\text{-}4)$$

Dựa vào phương trình này, ta thay ρ' bằng p' vào trong (64-2) và thu được:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_o \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_o}\right)_s \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 . \qquad (64\text{-}5)$$

Hai phương trình (64-3) và (64-5) với các ẩn $\mathbf{v}$ và p' mô tả hoàn toàn sóng âm.

Để biểu diễn tất cả các đại lượng chưa biết qua một trong các đại lượng đó một cách tiện lợi, người ta đưa vào thế vận tốc theo biểu thức $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Từ phương trình (64-3), ta thu được đẳng thức

$$p' = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} . \qquad (64\text{-}6)$$

Liên hệ p' với φ (để ngắn gọn, ở đây và tiếp theo, ta bỏ chỉ số không ở p_o và ρ_o). Sau đó từ (64-5) ta rút ra phương trình

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0 \qquad (64\text{-}7)$$

mà thế φ phải thỏa mãn; ở đây ta đã đưa vào ký hiệu

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}\,. \tag{64-8}$$

Phương trình dạng (64-7) là *phương trình sóng*. Tác dụng toán tử grad vào (64-7) ta nhận thấy rằng: mỗi thành phần vận tốc **v** cũng đều thỏa mãn phương trình như thế, nếu lấy đạo hàm theo thời gian phương trình (64-7), ta tìm được cả áp suất p' (và do đó cả ρ') cũng thỏa mãn phương trình sóng.

Ta xét sóng âm, trong đó tất cả các đại lượng chỉ phụ thuộc một tọa độ, tọa độ x chẳng hạn. Nói một cách khác, chuyển động hoàn toàn là đồng tính trong mặt phẳng y, z; một sóng như thế được gọi là sóng phẳng. Phương trình sóng (64-7) có dạng

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{64-9}$$

Để giải phương trình này, thay cho x, t, ta đưa vào các biến mới

$$\xi = x - ct\,, \quad \eta = x + ct.$$

Dễ dàng thấy được rằng, trong các biến này phương trình (64-9) có dạng

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta\, \partial \xi} = 0\,.$$

Lấy tích phân phương trình này theo ξ, ta thu được:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = F(\eta),$$

trong đó $F(\eta)$ là một hàm tùy ý. Lấy tích phân một lần nữa, ta thu được: $\varphi_1 = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, trong đó f_1 và f_2 là các hàm tùy ý. Như vậy

$$\varphi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct). \tag{64-10}$$

Sự phân bố các đại lượng khác (p', ρ', **v**) ở trong sóng phẳng cũng được mô tả bằng các hàm có dạng tương tự.

Để xác định, ta nói đến mật độ. Giả sử $f_2 = 0$ chẳng hạn, do đó $\rho' = f_1(x - ct)$. Ta giải thích ý nghĩa cụ thể của nghiệm này. Trong mỗi mặt phẳng x = const mật độ thay đổi theo thời gian; tại mỗi thời điểm

đã cho, mật độ khác nhau đối với các x khác nhau. Hiển nhiên là, mật độ như nhau đối với các tọa độ x và các thời điểm t thỏa mãn hệ thức $x - ct = \text{const}$, hay

$$x = \text{const} + ct$$

Điều đó có nghĩa là, nếu tại một thời điểm $t = 0$ nào đó tại một điểm của chất lỏng mật độ có một giá trị xác định nào đó, thì mật độ sẽ lại lấy cùng giá trị đó sau khoảng thời gian t tại khoảng ct so với điểm ban đầu dọc theo trục x (đối với tất cả các đại lượng khác ở trong sóng cũng vậy). Có thể nói rằng, hình ảnh chuyển động lan truyền trong môi trường dọc theo trục x với vận tốc c, gọi là vận tốc âm.

Như vậy, ta nói $f_1(x - ct)$ biểu diễn một sóng gọi là *sóng phẳng chạy*, sóng này lan truyền theo chiều dương của trục x. Hiển nhiên là, $f_2(x + ct)$ biểu diễn một sóng chạy theo chiều âm ngược lại của trục x.

Trong ba thành phần của vận tốc $\mathbf{v} = \text{grad}\,\varphi$ ở trong sóng phẳng, chỉ có thành phần $v_x = \partial\varphi/\partial x$ khác không. Do đó, vận tốc của chất lỏng ở trong sóng âm hướng dọc theo phương truyền sóng. Vì thế, người ta nói rằng, các sóng âm trong chất lỏng là các sóng dọc.

Trong sóng phẳng chạy, vận tốc $v_x = v$ có liên hệ với áp suất p' và mật độ ρ' bằng các hệ thức đơn giản. Nếu viết $\varphi = f(x - ct)$ thì ta có

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = f'(x - ct), \qquad p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho c f'(x - ct).$$

So sánh các biểu thức đó, ta tìm được

$$v = \frac{p'}{\rho c}. \tag{64-11}$$

Theo (64-4), thay vào đây $p' = c^2\rho'$, ta tìm được hệ thức giữa vận tốc và độ biến thiên mật độ:

$$v = \frac{c\rho'}{\rho}. \tag{64-12}$$

Ta cũng nêu ra đây mối liên hệ giữa vận tốc và các dao động nhiệt độ trong sóng âm. Ta có $T' = (\partial T/\partial p)_s p'$ và nếu dùng công thức nhiệt động lực học đã biết

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

và công thức (64-11), ta thu được:

$$T' = \frac{c\beta T}{c_p} v, \tag{64-13}$$

trong đó $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ là hệ số dãn nở do nhiệt độ.

Công thức (64-8) xác định vận tốc của âm theo độ nén đoạn nhiệt của chất. Độ nén này liên hệ với độ nén đẳng nhiệt bởi công thức nhiệt động lực đã biết:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{64-14}$$

Ta tính vận tốc âm trong chất khí lý tưởng (theo nghĩa nhiệt động lực của từ). Phương trình trạng thái của chất khí lý tưởng có dạng

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu},$$

trong đó R là hằng số khí, còn μ là trọng lượng phân tử. Ta được biểu thức vận tốc âm:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \tag{64-15}$$

trong đó γ ký hiệu tỷ số $\gamma = c_p/c_v$. Vì thông thường γ phụ thuộc yếu vào nhiệt độ, nên có thể coi rằng, vận tốc âm trong chất khí tỷ lệ với căn bậc hai của nhiệt độ [1)]. Với một nhiệt độ đã cho, nó không phụ thuộc vào áp suất của khí [2)].

Một trường hợp rất quan trọng của các sóng là trường hợp các *sóng đơn sắc*, trong đó tất cả các đại lượng đều là các hàm tuần hoàn

[1)] Cũng nên chú ý rằng vận tốc âm trong chất khí có bậc của vận tốc nhiệt trung bình của các phân tử.

[2)] Biểu thức cho vận tốc âm trong chất khí dưới dạng $c^2 = p/\rho$ lần đầu tiên được Newton tìm ra năm 1687. Sự cần thiết phải đưa thừa số γ vào trong biểu thức này đã được Laplace chứng minh.

đơn giản (điều hòa) của thời gian. Thường thường, để tiện lợi, ta viết các hàm này dưới dạng phần thực của một biểu thức phức (xem phần mở đầu của §24). Chẳng hạn, cho thế vận tốc ta viết

$$\varphi = \mathrm{Re}\{\varphi_0(x, y, z)\, e^{-i\omega t}\}, \tag{64-16}$$

trong đó ω là tần số sóng. Hàm φ_0 thỏa mãn phương trình

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0, \tag{64-17}$$

là phương trình thu được khi thay (64-16) vào (64-7).

Ta xét một sóng chạy đơn sắc phẳng lan truyền theo chiều của trục x dương. Trong một sóng như thế, tất cả các đại lượng chỉ là các hàm của $x - ct$, và do đó, thế chẳng hạn, được viết dưới dạng

$$\varphi = \mathrm{Re}\left\{Ae^{-i\omega(t - x/c)}\right\}, \tag{64-18}$$

trong đó A là một hằng số được gọi là *biên độ phức*. Nếu viết biên độ đó dưới dạng $A = a\, e^{i\alpha}$ với các hằng số a và α thực, ta sẽ có:

$$\varphi = a\cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha\right). \tag{64-19}$$

Hằng số a là biên độ, còn đối số trong dấu cos là pha của sóng. Ta ký hiệu $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo chiều lan truyền của sóng. Vectơ

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} \tag{64-20}$$

được gọi là *vectơ sóng*. (Còn giá trị tuyệt đối của nó thường được gọi là *số sóng*). Với ký hiệu đó, (64-18) có thể được viết dưới dạng

$$\varphi = \mathrm{Re}\left\{Ae^{i(kr - \omega t)}\right\}. \tag{64-21}$$

Các sóng đơn sắc giữ một vai trò rất quan trọng, vì bất kỳ một sóng nào cũng có thể được biểu diễn dưới dạng một tập hợp các sóng phẳng đơn sắc với các vectơ sóng và tần số khác nhau. Sự phân tích một sóng thành các sóng đơn sắc như thế chính là sự khai triển thành chuỗi hay tích phân Fourier (thường gọi là *phân tích phổ*). Các thành phần riêng

lẻ của khai triển này được gọi là các thành phần đơn sắc của sóng hay các thành phần Fourier của sóng.

BÀI TẬP

1. Xác định vận tốc âm trong một hệ hai pha tán sắc yếu: hơi có chứa các giọt nhỏ chất lỏng lơ lửng ("hơi ẩm") hay chất lỏng với các bọt hơi nhỏ phân bố trong đó. Bước sóng của âm được giả thiết là lớn so với các kích thước của các chỗ không đồng chất của hệ.

Giải. Trong một hệ hai pha, p và T không phải là các biến độc lập, mà liên hệ với nhau bởi phương trình cân bằng pha. Sự nén hay sự dãn của hệ sẽ dẫn tới sự chuyển vận chất từ một pha này sang một pha khác. Gọi x là phần (theo khối lượng) của pha *2* ở trong hệ, ta có:

$$\begin{aligned} s &= (1-x)s_1 + xs_2 \\ V &= (1-x)V_1 + xV_2, \end{aligned} \tag{1}$$

trong đó các chỉ số *1* và *2* phân biệt các đại lượng có liên quan đến các pha thuần khiết *1* và *2*. Để tính đạo hàm $(\partial V/\partial p)_s$, ta biến đổi đạo hàm đó theo p và s về các biến p, x; ta được:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x - \frac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_p \left(\dfrac{\partial s}{\partial p}\right)_x}{\left(\dfrac{\partial s}{\partial x}\right)_p}$$

sau đó ta thay (1) vào và ta được

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = x\left[\frac{dV_2}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1}\frac{ds_2}{dp}\right] + (1-x)\left[\frac{dV_1}{dp} - \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1}\frac{ds_1}{dp}\right] \tag{2}$$

Vận tốc âm được xác định dựa vào (1) và (2) theo công thức (64-8).

Nếu khai triển các đạo hàm toàn phần theo áp suất, đưa vào ẩn nhiệt chuyển pha từ pha *1* sang pha *2*: $q = T(s_2 - s_1)$ và dùng công thức Clapeyron - Clausius cho đạo hàm dp/dT dọc theo đường cong cân bằng pha (xem V, §82)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q}{T(V_2 - V_1)}$$

ta sẽ thu được biểu thức trong dấu móc vuông thứ nhất ở trong (2) dưới dạng

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T + \frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p (V_2 - V_1) - \frac{Tc_{p2}}{q^2}(V_2 - V_1)^2.$$

Biểu thức trong móc vuông thứ hai cũng được biến đổi theo cách tương tự.

Giả sử pha *1* là lỏng, pha 2 là hơi; ta coi hơi là một chất khí lý tưởng và bỏ qua thể tích riêng V_1 so với V_2. Nếu $x_2 << 1$ (chất lỏng với một lượng nhỏ hơi dưới dạng các bọt), thì ta thu được cho vận tốc âm

$$c = \frac{q\mu p V_1}{RT\sqrt{c_{p1}T}} \tag{3}$$

(trong đó R là hằng số khí, μ là trọng lượng phân tử). Nói chung vận tốc này rất nhỏ; như vậy khi các bọt hơi được hình thành trong chất lỏng (sự sinh lỗ hổng), vận tốc âm ở trong chất lỏng giảm xuống đột ngột bằng bước nhảy.

Nhưng nếu $x - 1 << 1$ (hơi với một lượng rất nhỏ chất lỏng dưới dạng giọt), ta sẽ thu được:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{RT} - \frac{2}{q} + \frac{c_{p2}T}{q^2}.$$

So sánh với vận tốc âm trong chất khí thuần khiết (64-15) ta nhận thấy rằng, cả ở đây sự thêm pha *2* vào cũng làm giảm vận tốc âm, mặc dù hoàn toàn không ở mức độ mạnh như thế.

Trong khoảng x tăng từ giá trị không đến đơn vị, vận tốc của âm tăng đơn điệu từ giá trị (3) đến giá trị (4).

Ta nhận thấy rằng, với $x = 0$ và $x = 1$ vận tốc của âm chịu một bước nhảy khi chuyển từ hệ một pha sang hệ hai pha. Tình trạng này dẫn đến kết quả là, với các giá trị của x rất gần số không hay đơn vị, lý thuyết thông thường của âm không còn áp dụng được tại những biên độ nhỏ của sóng âm: các sự nén và dãn gây bởi sóng trong những điều kiện đã cho sẽ kéo theo hệ quả là, có sự chuyển hệ hai pha thành hệ một pha (và ngược lại), kết quả là, điều giả định quan trọng cho lý thuyết về sự không đổi của sóng âm, bị vi phạm hoàn toàn.

2. Xác định vận tốc âm trong chất khí được nung nóng tới nhiệt độ rất cao, đến mức áp suất của bức xạ đen cân bằng trong đó có thể so sánh được với áp suất của chính bản thân khí.

Giải. Áp suất của chất bằng:

$$p = nT + \frac{a}{4}T^4,$$

và entrôpi

$$s = \frac{1}{m}\ln\frac{T^{3/2}}{n} + \frac{aT^3}{n}.$$

Trong các biểu thức này, các số hạng đầu có được xét cho các hạt, còn các số hạng thứ hai được xét cho bức xạ; n là mật độ số hạt, m là khối lượng của chúng, còn k là hằng số Boltzmann, $a = 4\pi^2/45\hbar^3c^3$ (xem V §63 [1]). Bức xạ đen không giữ vai trò gì trong mật độ của chất, do đó $\rho = nm$. Ở đây vận tốc của âm được ký hiệu bằng u để phân biệt với vận tốc của ánh sáng. Nếu viết các đạo hàm dưới dạng các jacôbiên, ta có

$$u^2 = \frac{\partial(p,s)}{\partial(\rho,s)} = \frac{\partial(p,s)}{\partial(n,T)} \Big/ \frac{\partial(\rho,s)}{\partial(n,T)}.$$

Tính các jacôbiên này, ta thu được:

$$u^2 = \frac{5T}{3m}\left[1+\frac{2a^2T^6}{5n\left(n+2aT^3\right)}\right].$$

§65. NĂNG LƯỢNG VÀ XUNG LƯỢNG CỦA SÓNG ÂM

Ta tìm biểu thức năng lượng của sóng âm. Theo công thức tổng quát, năng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng bằng $\rho\varepsilon + \rho v^2/2$. Thay vào đây $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$, trong đó các chữ có dấu phẩy ký hiệu các độ lệch của các đại lượng tương ứng so với các giá trị của chúng trong chất lỏng đứng yên. Số hạng $\rho' v^2/2$ là một đại lượng nhỏ bậc ba. Do đó, nếu chỉ giới hạn độ chính xác đến các số hạng bậc hai, thì ta có:

$$\rho_0\varepsilon_0 + \rho'\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2}\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho_0^2} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

Các đạo hàm được lấy với entrôpi không đổi, vì sóng âm là đoạn nhiệt. Dựa vào hệ thức nhiệt động lực

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

ta có:

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right)_s = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

[1] Tại mọi nơi trong sách này, nhiệt độ được đo trong đơn vị năng lượng.

và đạo hàm cấp hai bằng:

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s = \frac{c^2}{\rho}.$$

Như vậy, năng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng bằng:

$$\rho_o\varepsilon_o + w_o\rho' + \frac{c^2}{2\rho_o}\rho'^2 + \rho_o\frac{v^2}{2}.$$

Số hạng thứ nhất trong biểu thức này ($\varepsilon_o\rho_o$) biểu diễn năng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng đứng yên và không có liên quan đến sóng âm. Còn đối với số hạng thứ hai ($\omega_o\rho'$) thì đó là độ biến thiên năng lượng có liên hệ đơn giản với độ biến thiên của lượng chất (khối lượng của chất lỏng) ở trong mỗi đơn vị thể tích đã cho. Số hạng này biến mất trong năng lượng toàn phần, là năng lượng thu được bằng cách lấy tích phân năng lượng của một đơn vị thể tích trong toàn bộ thể tích chất lỏng: vì lượng chất lỏng toàn phần không thay đổi, nên $\int \rho' dV = 0$. Như vậy, độ biến thiên toàn phần của năng lượng chất lỏng có liên hệ với sự có mặt của sóng âm và bằng tích phân

$$\int\left(\frac{\rho_o v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_o}\right)dV.$$

Biểu thức dưới dấu tích phân có thể được coi như mật độ E của năng lượng âm:

$$E = \frac{\rho_o v^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho_o} \qquad (65\text{-}1)$$

Biểu thức này sẽ đơn giản đi trong trường hợp của một sóng chạy phẳng. Trong một sóng như thế $\rho' = \rho_o v/c$ và cả hai số hạng ở trong (65-1) đều bằng nhau, do đó

$$E = \rho_o v^2. \qquad (65\text{-}2)$$

Trong trường hợp tổng quát của sóng bất kỳ ta không có một hệ thức như vậy. Chỉ có thể viết một công thức tương tự trong trường hợp tổng quát đối với giá trị trung bình (theo thời gian) của năng lượng âm toàn phần. Nó được suy trực tiếp từ định lý tổng quát đã biết trong cơ học.

Theo định lý này, trong bất kỳ một hệ nào thực hiện các dao động nhỏ thì giá trị trung bình của của thế năng toàn phần bằng giá trị trung bình của động năng toàn phần. Vì đại lượng này trong trường hợp đang xét bằng $\frac{1}{2}\int \rho_o \bar{v}^2\, dV$, nên ta tìm được năng lượng âm trung bình toàn phần bằng

$$\int \bar{E}\, dV = \int \rho_o \overline{v^2} dV. \qquad (65\text{-}3)$$

Tiếp theo, ta xét một thể tích chất lỏng nào đó, trong đó có âm lan truyền và xác định năng thông qua mặt kín bao thể tích đó. Mật độ năng thông ở trong chất lỏng, (theo (6-3), bằng $\rho \mathbf{v}(w + v^2/2)$. Trong trường hợp đang xét, có thể bỏ qua số hạng chứa v^2 như một số hạng nhỏ bậc ba. Do đó mật độ năng thông trong sóng âm bằng $\rho \mathbf{v} w$. Thay vào đây $w = w_o + w'$, ta thu được

$$\rho w \mathbf{v} = w_o \rho \mathbf{v} + \rho w' \mathbf{v}$$

Đối với độ biến thiên nhỏ w' của hàm nhiệt, ta có

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p' = \frac{p'}{\rho}$$

và tiếp theo $\rho \mathbf{v} w = \rho w_o \mathbf{v} + p' \mathbf{v}$. Thông lượng toàn phần của năng lượng qua mặt đang xét bằng tích phân

$$\oint (w_o \rho \mathbf{v} + p' \mathbf{v})\, d\mathbf{f}.$$

Số hạng thứ nhất trong công thức này bằng năng thông, chỉ liên quan đến sự biến thiên của khối lượng chất lỏng trong thể tích đã cho. Nhưng ta đã bỏ đi số hạng tương ứng (bằng không khi lấy tích phân theo thể tích vô hạn) $w_o \rho'$ trong mật độ năng lượng. Do đó, để thu được năng thông có mật độ được xác định theo (65-1), cần phải bỏ đi số hạng này, và năng thông sẽ chỉ bằng

$$\oint p' \mathbf{v}\, d\mathbf{f}$$

Ta nhận thấy rằng, giữ vai trò mật độ năng thông âm là vectơ

$$\mathbf{q} = p' \mathbf{v} \qquad (65\text{-}4)$$

Dễ dàng nhận thấy rằng phải có hệ thức

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} p'\mathbf{v} = 0, \tag{65-5}$$

để biểu diễn định luật bảo toàn năng lượng, với chính vectơ $\mathbf{q} = p'\mathbf{v}$ giữ vai trò của mật độ năng thông.

Đối với một sóng phẳng chạy (trái sang phải), sự biến thiên của áp suất có liên hệ với vận tốc bằng hệ thức $p' = c\rho_o v$, trong đó vận tốc $v \equiv v_x$ được hiểu cùng với dấu của nó. Nếu đưa vào vectơ đơn vị $\mathbf{n}$ theo phương truyền của sóng, thì ta sẽ thu được

$$\mathbf{q} = c\rho_o v^2 \mathbf{n} = cE\mathbf{n} \tag{65-6}$$

Do đó, trong một sóng âm phẳng mật độ năng thông bằng tích của mật độ năng lượng nhân với vận tốc âm, đó là kết quả mà ta chờ đợi.

Bây giờ ta xét một sóng âm tại mỗi thời điểm đã cho chiếm một miền hữu hạn nào đó (không bị giới hạn bởi các thành rắn tại mọi nơi) – đó là *bó sóng*. Ta xác định xung lượng toàn phần của chất lỏng trong một sóng như thế. Xung lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng trùng với mật độ dòng khối lượng $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$. Thay $\rho = \rho_o + \rho'$, ta có: $\mathbf{j} = \rho_o\mathbf{v} + \rho'\mathbf{v}$. Sự biến thiên của mật độ có liên quan đến sự biến thiên của áp suất bằng hệ thức $\rho' = p'/c^2$. Do đó, dựa vào (65-4), ta thu được

$$\mathbf{j} = \rho_o\mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{c^2} \tag{65-7}$$

Nếu trong các hiện tượng đang xét, độ nhớt chất lỏng rất nhỏ, thì chuyển động trong sóng âm có thể được coi là chuyển động thế và ta viết $\mathbf{v} = \Delta\varphi$ (cần nhấn mạnh rằng, điều khẳng định này không liên quan đến những sự gần đúng đã bỏ qua khi rút ra các phương trình chuyển động tuyến tính ở §64, – nghiệm với rot $\mathbf{v} = 0$ là nghiệm chính xác của phương trình Euler). Do đó ta có:

$$\mathbf{j} = \rho_o\Delta\varphi + \frac{\mathbf{q}}{c^2}.$$

Xung lượng toàn phần của sóng bằng tích phân $\int \mathbf{j}dV$ lấy theo toàn bộ thể tích do sóng chiếm. Nhưng tích phân của $\nabla\varphi$ có thể được biến đổi

thành tích phân mặt:

$$\int \nabla\varphi \, dV = \oint \varphi \, d\mathbf{f}$$

và nó bằng không, vì ở bên ngoài thể tích do sóng chiếm $\varphi = 0$. Như vậy, xung lượng toàn phần bó sóng bằng:

$$\int \mathbf{j} \, dV = \frac{1}{c^2} \int \mathbf{q} \, dV. \tag{65-8}$$

Đại lượng này nói chung tuyệt nhiên không bằng không. Nhưng sự có mặt của một xung lượng toàn phần khác không có nghĩa là, có sự chuyển vận chất. Ta đi tới kết quả là, sự lan truyền của một bó sóng âm kéo theo sự chuyển vận chất của chất lỏng. Đó là một hiệu ứng nhỏ bậc hai, vì $\mathbf{q}$ là một đại lượng bậc hai.

Cuối cùng ta xét trường âm trong miền không gian, vô hạn theo chiều dài và hữu hạn theo tiết diện ngang (*các sóng nối đuôi nhau* có khẩu độ hữu hạn); ta tính giá trị trung bình của phần biến thiên p' của áp suất trong sóng âm. Trong phép gần đúng bậc nhất tương ứng với các phương trình chuyển động tuyến tính thông thường, p' là một hàm tuần hoàn đan dấu, và giá trị trung bình của p' bằng không. Nhưng kết quả này không còn đúng, nếu xét đến các phép gần đúng cao hơn. Nếu chỉ giới hạn ở các số hạng nhỏ bậc hai, thì ta có thể biểu diễn $\overline{p}'$ qua các đại lượng đã được tính theo các phương trình tuyến tính của âm, do đó không cần phải giải trực tiếp các phương trình chuyển động phi tuyến đã thu được khi xét các đại lượng có bậc cao hơn.

Tính chất đặc trưng của trường âm đang xét là ở chỗ, các hiệu những giá trị của thế vận tốc φ tại các điểm khác nhau của nó vẫn hữu hạn khi khoảng cách giữa chúng tăng vô hạn (cũng như thế đối với các hiệu các giá trị của φ tại một điểm đã cho của không gian tại những thời điểm khác nhau). Thực vậy, độ biến thiên này được cho bởi tích phân

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \mathbf{v} \, d\mathbf{l}.$$

tích phân này có thể lấy theo một đường tùy ý giữa các điểm *1* và *2*; tính chất của thế đã nêu trở nên hiển nhiên; nếu để ý rằng, trong trường hợp

đã cho, ta có thể chọn con đường đi dọc theo độ dài của chuỗi nối đuôi các sóng âm ở bên ngoài nó [1].

Lưu ý tính chất đó, ta bắt đầu từ phương trình Bernoulli

$$w + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const.}$$

Lấy trung bình theo thời gian đẳng thức trên. Giá trị trung bình của đạo hàm theo thời gian $\partial\varphi/\partial T$ bằng không [2]. Nếu cũng viết $w = w_0 + w'$ và gộp w_0 vào trong const, ta sẽ thu được $\overline{w'} + \overline{v^2}/2 = \text{const}$. Vì const là như nhau trong toàn không gian, nhưng ở bên ngoài xa chuỗi sóng nối đuôi w' và v bằng không, nên rõ ràng là hằng số này phải bằng không, do đó

$$\overline{w'} + \frac{\overline{v^2}}{2} = 0 \qquad (65\text{-}9)$$

Tiếp theo, ta khai triển w' thành chuỗi lũy thừa của p'; với độ chính xác đến số hạng bậc hai, ta có:

$$w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_s p'^2,$$

và vì $(\partial w / \partial p)_s = 1/\rho$, nên

$$w' = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s = \frac{p'}{\rho_0} - \frac{p'^2}{2\rho_0^2 c^2}.$$

Thay biểu thức này vào trong (65-9), ta thu được:

---

[1] Các nhận định tương tự, thực ra đã được sử dụng cả khi rút ra (65-8) dựa trên điều khẳng định là, $\varphi = 0$ tại mọi nơi chung quanh bó sóng ở xa nó.

[2] Theo định nghĩa tổng quát của các đại lượng trung bình, ta thu được cho giá trị trung bình của đạo hàm của một hàm $f(t)$ nào đó:

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{df}{dt}\,dt = \frac{1}{T}\left[f(T/2) - f(-T/2)\right].$$

Nếu hàm $f(t)$ vẫn hữu hạn với mọi t, thì khi tăng khoảng lấy trung bình T, đại lượng này tiến đến không.

$$\overline{p'} = -\frac{\rho_o \overline{v^2}}{2} + \frac{\overline{p'^2}}{2\rho_o c^2} = -\frac{\rho_o \overline{v^2}}{2} + \frac{c^2 \overline{\rho'^2}}{2\rho_o}, \qquad (65\text{-}10)$$

Hệ thức này xác định áp suất trung bình. Biểu thức ở vế phải là một đại lượng nhỏ bậc hai, và để tính đại lượng đó cần phải dùng p' và v, là các đại lượng thu được bằng cách giải các phương trình chuyển động tuyến tính. Đối với mật độ trung bình ta có:

$$\overline{\rho'} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \overline{p'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \overline{p'^2} \qquad (65\text{-}11)$$

Do diện tích tiết diện ngang của chuỗi sóng nối đuôi là hữu hạn, nên nó không thể biểu diễn một sóng phẳng triệt để. Nhưng nếu các kích thước dài của tiết diện đủ lớn so với bước sóng âm, thì trường sóng có thể gần với sóng phẳng với độ chính xác cao. Trong sóng phẳng chạy $v = c\rho'/\rho_o$, do đó $\overline{v^2} = c^2 \overline{\rho^2}/\rho_o^2$, và biểu thức (65-10) bằng không, nghĩa là độ biến thiên trung bình của áp suất là một hiệu ứng bậc cao hơn bậc hai. Còn độ biến thiên của mật độ

$$\overline{\rho'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s \overline{p'^2}$$

bằng không [1]. Trong phép gần đúng này, giá trị trung bình của tenxơ mật độ dòng xung lượng ở trong sóng phẳng chạy, theo nghĩa nêu ở trên, bằng:

$$\overline{p'} + \overline{\rho v_i v_k} = \overline{p'} + \rho_o \overline{v_i v_k}.$$

Số hạng thứ nhất bằng không, còn trong số hạng thứ hai, ta đưa vào vectơ đơn vị **n** theo phương lan truyền sóng (trùng với phương **v** sai khác về dấu). Nếu dùng hệ thức (65-2), ta sẽ tìm được mật độ dòng xung lượng:

$$\overline{\Pi}_{ik} = \overline{E} n_i n_k. \qquad (65\text{-}12)$$

[1] Để ý rằng đạo hàm $(\partial^2\rho/\partial p^2)_s$ thực tế bao giờ cũng âm, do đó trong sóng chạy $\overline{\rho'} < 0$.

Nếu sóng lan truyền dọc theo trục x, thì chỉ có thành phần $\overline{\Pi}_{xx} = \overline{E}$ là khác không. Như vậy, trong phép gần đúng đang xét chỉ có thành phần theo trục x của xung lượng có một thông lượng trung bình trong sóng âm phẳng, thông lượng đó được truyền đi theo phương trục x.

Nhân tất cả những điều đã nói, trong phần cuối của tiết này, ta nhấn mạnh một lần nữa rằng, ở đây nói đến chuỗi sóng nối tiếp nhau, bị giới hạn về tiết diện ngang của nó. Đối với sóng phẳng, theo nghĩa chặt chẽ của từ, các kết quả này là không đúng (đặc biệt $\overline{\rho'}$ có thể khác không trong phép gần đúng bậc hai – xem bài tập 4, §101). Về mặt hình thức, đó là do, đối với một sóng phẳng triệt để (mà ta không được lẳng tránh sang "bên cạnh") thì nói chung, sự khẳng định tính hữu hạn của thế φ trong toàn bộ không gian là không đúng (hay trong toàn bộ thời gian). Sự khác nhau về mặt vật lý (trong trường hợp của chuỗi sóng nối đuôi hữu hạn về tiết diện) có liên quan đến khả năng xuất hiện chuyển động ngang dẫn tới sự san bằng áp suất trung bình.

§66. SỰ PHẢN XẠ VÀ KHÚC XẠ CỦA SÓNG ÂM

Khi sóng âm đập lên mặt ngăn cách của hai môi trường khác nhau, nó sẽ phản xạ và khúc xạ. Chuyển động trong môi trường thứ nhất là sự chồng chất của hai sóng (sóng tới và sóng phản xạ); còn trong môi trường thứ hai chỉ có một sóng (đó là sóng khúc xạ). Mối liên hệ giữa ba sóng được xác định bởi các điều kiện biên ở trên mặt ngăn cách.

Ta khảo sát sự phản xạ và khúc xạ của một sóng dọc đơn sắc trong trường hợp mặt ngăn cách là phẳng. Mặt phẳng yz được chọn là mặt ngăn cách. Dễ dàng thấy rằng, tất cả ba sóng – sóng tới, sóng phản xạ, sóng khúc xạ, đều có cùng tần số ω và cùng các thành phần k_y, k_z của vectơ sóng (nhưng không cùng thành phần k_x theo phương pháp tuyến với mặt phẳng ngăn cách). Thực vậy, trong một môi trường vô hạn đồng tính, một sóng đơn sắc với $\mathbf{k}$ và ω không đổi sẽ là nghiệm của các phương trình chuyển động. Khi có mặt ngăn cách, chỉ phải thêm vào các điều kiện biên, các điều kiện này trong trường hợp đang xét, được áp

dụng cho $x = 0$, nghĩa là chúng không phụ thuộc vào thời gian, và không phụ thuộc vào các tọa độ y và z. Do đó sự phụ thuộc của nghiệm vào t và y, z vẫn không thay đổi trong toàn bộ không gian và thời gian, nghĩa là ω, k_y, k_z đều vẫn như trong sóng tới.

Từ kết quả này, có thể trực tiếp rút ra các hệ thức xác định chiều lan truyền của các sóng phản xạ và khúc xạ. Giả sử mặt phẳng x y là mặt phẳng tới của sóng. Khi đó $k_z = 0$ trong sóng tới; đối với các sóng phản xạ và khúc xạ cũng vậy. Như vậy các phương lan truyền của sóng tới, sóng phản xạ và khúc xạ đều nằm trong cùng một mặt phẳng.

Gọi θ là góc giữa phương của sóng và trục x. Khi đó từ đẳng thức giữa các đại lượng $k_y = (\omega/c)\sin\theta$ đối với các sóng tới và sóng phản xạ, ta suy ra rằng:

$$\theta_1 = \theta'_1 \tag{66-1}$$

nghĩa là góc tới θ_1 bằng góc phản xạ θ'_1. Từ hệ thức tương tự đối với các sóng tới và sóng phản xạ, ta suy ra hệ thức

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{66-2}$$

giữa góc tới θ_1 và góc khúc xạ θ_2 (c_1 và c_2 là các vận tốc âm ở trong hai môi trường).

Để thu được một hệ thức định lượng giữa các cường độ của sóng tới, sóng phản xạ và sóng khúc xạ, ta viết các thế vận tốc lần lượt trong các sóng đó dưới dạng

$$\varphi_1 = A_1 \exp\left\{i\omega\left(\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right\},$$

$$\varphi'_1 = A'_1 \exp\left\{i\omega\left(-\frac{x}{c_1}\cos\theta_1 + \frac{y}{c_1}\sin\theta_1 - t\right)\right\},$$

$$\varphi_2 = A_2 \exp\left\{i\omega\left(\frac{x}{c_2}\cos\theta_2 + \frac{y}{c_2}\sin\theta_2 - t\right)\right\}.$$

Ở trên mặt ngăn cách ($x = 0$) các áp suất ($p = -\rho\dot{\varphi}$) và các vận tốc pháp tuyến ($v_x = \partial\varphi/\partial x$) ở trong cả hai môi trường phải bằng nhau; các điều kiện này dẫn đến các đẳng thức

$$\rho_1(A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \qquad \frac{\cos\theta_1}{c_1}(A_1 - A_1') = \frac{\cos\theta_2}{c_2} A_2.$$

Hệ số phản xạ R được xác định bởi các tỷ số giữa các giá trị trung bình (theo thời gian) của các mật độ năng thông trong các sóng phản xạ và sóng tới. Vì mật độ năng thông ở trong sóng phẳng bằng $c\rho v^2$, nên ta có:

$$R = \frac{c_1\rho_1\overline{v_1'^2}}{c_1\rho_1\overline{v_1^2}} = \frac{|A_1'|^2}{|A_1|^2}.$$

Phép tính đơn giản cho ta kết quả

$$R = \left(\frac{\rho_2 \mathrm{tg}\theta_2 - \rho_1 \mathrm{tg}\theta_1}{\rho_2 \mathrm{tg}\theta_2 + \rho_1 \mathrm{tg}\theta_1}\right)^2. \tag{66-3}$$

Các góc θ_1 và θ_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức (66-2); nếu biểu diễn θ_2 qua θ_1, ta có thể biểu diễn hệ số phản xạ dưới dạng

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 - \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta_1}}{\rho_2 c_2 \cos\theta_1 + \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta_1}}\right]^2. \tag{66-4}$$

Đối với sóng tới vuông góc ($\theta_1 = 0$) công thức này cho ta đơn giản

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}\right)^2. \tag{66-5}$$

Đối với góc tới được xác định từ

$$\mathrm{tg}^2\theta_1 = \frac{\rho_2^2 c_2^2 - \rho_1^2 c_1^2}{\rho_1^2(c_1^2 - c_2^2)}, \tag{66-6}$$

thì hệ số phản xạ bằng không, nghĩa là sóng âm hoàn toàn khúc xạ; hoàn toàn không phản xạ; một trường hợp như thế có thể xảy ra nếu $c_1 > c_2$, nhưng $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ (hay ngược lại).

BÀI TẬP

Xác định áp suất do sóng âm tác dụng lên mặt ngăn cách giữa hai chất lỏng.

Giải. Tổng các năng thông toàn phần trong các sóng phản xạ và sóng khúc xạ

phải bằng năng thông trong sóng tới. Nếu tính năng thông cho một đơn vị diện tích của mặt ngăn cách, ta sẽ viết được điều kiện này dưới dạng

$$c_1 E_1 \cos\theta_1 = c_1 E'_1 \cos\theta_1 + c_2 E_2 \cos\theta_2$$

trong đó E_1, E'_1, E_2 là các mật độ năng lượng trong sóng tới, sóng phản xạ và sóng khúc xạ. Nếu đưa vào hệ số phản xạ $R = \overline{E}'_1 / \overline{E}_1$, ta rút ra được

$$\overline{E}_2 = \frac{c_1 \cos\theta_1}{c_2 \cos\theta_2}(1 - R)\overline{E}_1$$

Áp suất p cần tìm được xác định như thành phần x của xung lượng bị mất trong một đơn vị thời gian bởi sóng âm (thành phần này được tính cho một đơn vị diện tích của mặt ngăn cách). Dựa vào biểu thức (65-12) của tenxơ mật độ dòng xung lượng ở trong sóng âm, ta thu được:

$$p = \overline{E}_1 \cos^2\theta_1 + \overline{E}'_1 \cos^2\theta_1 - \overline{E}_2 \cos^2\theta_2.$$

Thay $\overline{E}_2$ bằng biểu thức của nó, đưa vào R và dùng (66-2), ta thu được:

$$p = \overline{E}_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1 \left[(1 + R)\cot g\theta_1 - (1 - R)\cot g\theta_2\right].$$

Nếu sóng tới đập vuông góc ($\theta_1 = 0$), dựa vào (65-5), ta thu được

$$p = 2\overline{E}_1 \left[\frac{\rho_1^2 c_1^2 + \rho_2^2 c_2^2 - 2\rho_1\rho_2 c_1^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}\right].$$

§67. ÂM HÌNH

Sóng phẳng có tính chất đặc biệt là, phương truyền và biên độ của nó đều như nhau trong toàn không gian. Các sóng âm tùy ý rõ ràng là không có tính chất đó. Nhưng có thể xảy ra những trường hợp, trong đó một sóng âm không phẳng có thể vẫn được coi là một sóng phẳng trong mỗi một miền không gian nhỏ. Muốn vậy, rõ ràng là biên độ và phương truyền sóng hầu như không đổi trên những khoảng cách có bậc bằng độ dài sóng.

Nếu điều kiện này được thực hiện, ta có thể đưa vào khái niệm *các tia*, đó là các đường mà những tiếp tuyến với chúng tại mỗi điểm đều trùng với phương truyền sóng, và ta có thể nói về sự truyền âm dọc theo

các tia, mà khi đó không xét đến bản chất sóng của nó. Nghiên cứu các định luật truyền âm trong những trường hợp như thế là đối tượng của âm hình. Có thể nói rằng, âm hình tương ứng với trường hợp giới hạn của các bước sóng nhỏ, $\lambda \to 0$.

Ta rút ra phương trình cơ bản của âm hình, đó là phương trình xác định phương của các tia. Ta viết thế vận tốc của các sóng dưới dạng

$$\varphi = a\, e^{i\psi} \tag{67-1}$$

Trong trường hợp sóng không phẳng, nhưng âm hình áp dụng được, thì biên độ a là một hàm biến thiên chậm của các tọa độ và thời gian, và pha ψ của sóng là một hàm "gần như tuyến tính", (nhắc lại rằng, trong sóng phẳng $\psi = \mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ với $\mathbf{k}$ và ω không đổi). Trong các miền không gian nhỏ và các khoảng thời gian nhỏ, pha ψ có thể được khai triển thành chuỗi; nếu giới hạn ở độ chính xác đến các số hạng bậc một, ta có:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,\psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} t.$$

Nếu coi rằng, trong mọi miền không gian nhỏ (và trong những khoảng thời gian nhỏ), sóng có thể được coi là phẳng, thì ta sẽ xác định được vectơ sóng và tần số tại mỗi điểm như sau:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \equiv \mathrm{grad}\,\psi, \qquad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{67-2}$$

Đại lượng ψ được gọi là *êcônan*.

Trong sóng âm ta có: $\omega^2/c^2 = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Thay (67-2) vào đây, ta thu được phương trình cơ bản của âm hình

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{67-3}$$

Nếu chất lỏng không đồng chất, hệ số c^2 sẽ là hàm của các tọa độ.

Như đã biết từ cơ học, chuyển động của các hạt vật chất có thể được xác định dựa vào phương trình Hamilton - Jacôbi. Cũng như phương trình (67-3), phương trình này là phương trình với các đạo hàm riêng phần cấp một. Đại lượng tương tự với ψ khi đó là tác dụng S của hạt, còn các đạo hàm của tác dụng xác định xung lượng $\mathbf{p}$ và hàm Hamilton

H (năng lượng) của hạt theo các công thức $\mathbf{p} = \partial S/\partial \mathbf{r}$, $H = -\partial S/\partial t$, tương tự với các công thức (67-2). Cũng đã biết rằng, phương trình Hamilton - Jacôbi tương đương với các phương trình Hamilton có dạng $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{r}$, $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \partial H/\partial \mathbf{p}$. Do sự tương tự nói trên giữa cơ học chất điểm và âm hình, ta có thể viết ngay được các phương trình tương tự cho các tia:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{67-4}$$

Trong một môi trường đẳng hướng đồng chất $\omega = ck$ với các c không đổi, do đó $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo hướng $\mathbf{k}$), nghĩa là các tia phải lan truyền theo các đường thẳng, giữ nguyên tần số không đổi.

Dĩ nhiên tần số bao giờ cũng không đổi dọc theo các tia, khi âm lan truyền trong các điều kiện dừng, nghĩa là các tính chất của môi trường tại mỗi điểm trong không gian thay đổi theo thời gian. Thực vậy, đạo hàm toàn phần của tần số theo thời gian, xác định sự biến thiên của nó dọc theo tia lan truyền, bằng:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\dot{\mathbf{k}}.$$

Khi thay (67-4) vào, hai số hạng cuối khử lẫn nhau; còn trong trường hợp dừng $\partial\omega/\partial t = 0$, do đó cả $d\omega/dt = 0$.

Trong sự lan truyền dừng của âm trong môi trường không đồng chất đứng yên $\omega = ck$, trong đó c là một hàm đã cho của tọa độ. Các phương trình (67-4) cho ta

$$\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{n}, \qquad \dot{\mathbf{k}} = -k\nabla c, \tag{67-5}$$

Giá trị tuyệt đối của $\mathbf{k}$ thay đổi dọc theo tia đơn giản theo định luật $k = \omega/c$ (với $\omega = \text{const}$). Nhưng để xác định sự biến thiên của hướng $\mathbf{n}$, trong phương trình thứ hai của (67-5), ta đặt $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$, và viết:

$$\frac{\omega}{c}\dot{\mathbf{n}} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{n}(\nabla c\dot{\mathbf{r}}) = -k\nabla c,$$

từ đó

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\nabla c + \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla c).$$

Nếu đưa vào phần tử độ dài $dl = c\,dt$ do tia vạch nên, ta viết lại phương trình đó dưới dạng

$$\frac{d\mathbf{n}}{dl} = -\frac{\nabla c}{c} + \frac{\mathbf{n}}{c}(\mathbf{n}\nabla c). \tag{67-6}$$

Phương trình này xác định dạng của các tia, **n** là vectơ đơn vị tiếp tuyến với tia [1].

Sau khi giải được phương trình (67-3) và biết được êcônan ψ như hàm của các tọa độ và thời gian, thì ta có thể tìm được cả sự phân bố cường độ âm trong không gian. Trong các điều kiện dừng, nó được xác định bởi phương trình div **q** = 0 (**q** là mật độ năng thông âm), phương trình này phải được thỏa mãn trong toàn bộ không gian ở bên ngoài các nguồn âm. Nếu viết **q** = $cE\mathbf{n}$, trong đó E là mật độ năng lượng âm (xem(65-6)) và nhớ rằng **n** là vectơ đơn vị theo chiều của $\mathbf{k} = \nabla\psi$, ta sẽ thu được phương trình:

$$\operatorname{div}\left(cE\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\right) = 0, \tag{67-7}$$

Phương trình này xác định sự phân bố của E trong không gian.

Công thức thứ hai của (67-4) xác định vận tốc truyền của các sóng, nếu biết được sự phụ thuộc của tần số vào các thành phần của vectơ sóng. Đó là một công thức quan trọng, không những được áp dụng cho các sóng âm, mà còn cho bất kỳ các sóng nào khác (ta đã dùng công thức này ở §12 khi ứng dụng cho các sóng hấp dẫn). Ở đây ta còn nêu cách rút ra công thức đó, rất tiện lợi để làm sáng tỏ ý nghĩa của vận tốc do nó xác định. Ta xét một sóng (như thường gọi, là *bó sóng*) chiếm một miền không gian hữu hạn nào đó. Giả sử rằng, sóng đó phải sao cho, khai triển phổ của nó chứa các thành phần đơn sắc với các tần số nằm

[1] Như đã biết từ hình học vi phân, đạo hàm $d\mathbf{n}/dl$ dọc theo tia bằng $\mathbf{N}/R$, trong đó **N** là vectơ đơn vị của pháp tuyến chính, còn R là bán kính cong của tia. Còn biểu thức trong vế thứ hai của (67-6) là đạo hàm của vận tốc âm theo hướng pháp tuyến chính, với độ chính xác đến thừa số $1/c$; do đó phương trình này có thể được viết dưới dạng

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{c}(\mathbf{N}\,\nabla c).$$

Tia bị uốn cong về phía mà tại đó vận tốc âm giảm.

trong khoảng nhỏ nào đó; tương tự xét cho các thành phần của các vectơ sóng của chúng. Giả sử ω là tần số sóng trung bình và **k** là vectơ sóng trung bình. Khi đó tại một thời điểm ban đầu xác định nào đó, sóng được mô tả bằng hàm có dạng

$$\varphi = e^{i\mathbf{kr}} f(\mathbf{r}). \tag{67-8}$$

Hàm $f(\mathbf{r})$ chỉ khác không rõ rệt trong một miền không gian nhỏ (nhưng lớn so với bước sóng $1/k$). Khai triển nó thành tích phân Fourier, theo các giả thiết đã nêu, có chứa các thành phần dạng $e^{i\mathbf{r}\Delta\mathbf{k}}$. Trong đó $\Delta\mathbf{k}$ là các đại lượng nhỏ.

Như vậy mỗi thành phần đơn sắc của sóng, tại thời điểm ban đầu, tỷ lệ với thừa số có dạng

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const}\, e^{i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\mathbf{r}}. \tag{67-9}$$

Tần số tương ứng với nó là $\omega(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$, (nhắc lại rằng, tần số là hàm của vectơ sóng). Do đó, tại thời điểm t chính thành phần đó có dạng

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const.}\exp\{\, i(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k})t\,\}.$$

Với điều kiện $\Delta\mathbf{k}$ nhỏ ta viết được:

$$\omega(\mathbf{k}+\Delta\mathbf{k}) \approx \omega(\mathbf{k}) + \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\Delta\mathbf{k}.$$

Khi đó $\varphi_{\mathbf{k}}$ có dạng

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \text{const}\, e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \exp\left\{ i\Delta\mathbf{k}\left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} t \right)\right\}, \tag{67-10}$$

Bây giờ nếu lấy tổng ngược của tất cả các thành phần đơn sắc của sóng với mọi $\Delta\mathbf{k}$ chứa trong bó sóng, thì từ việc so sánh (67-9) với (67-10), ta sẽ thu được:

$$\varphi = e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} f\left(\mathbf{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} t \right), \tag{67-11}$$

trong đó f là hàm giống như trong (67-8). So sánh với (67-8), ta thấy rằng, trong khoảng thời gian t toàn bộ hình ảnh phân bố biên độ ở trong sóng đã dịch chuyển ở trong không gian một khoảng $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} t$ (thừa số mũ ở trước f trong (67-11) chỉ ảnh hưởng đến pha của sóng). Do đó, vận tốc của nó bằng

$$\mathbf{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \qquad (67\text{-}12)$$

Đó chính là công thức xác định vận tốc truyền sóng với sự phụ thuộc tùy ý của ω vào **k**. Trong trường hợp $\omega = ck$ với c không đổi, dĩ nhiên, công thức đó dẫn tới kết quả thông thường $U = \omega/k = c$. Nhưng trong trường hợp tổng quát, khi sự phụ thuộc ω(**k**) là tùy ý, vận tốc truyền của sóng là hàm của tần số của nó, và hướng của nó có thể không trùng với hướng của vectơ sóng.

Vận tốc xác định bởi công thức (67-12) còn được gọi là *vận tốc nhóm* của sóng và tỷ số ω/k là *vận tốc pha* của sóng. Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng, vận tốc pha không tương ứng với bất kỳ một sự lan truyền vật lý thực nào.

Nhân việc rút ra các kết quả, cần nhấn mạnh rằng, sự dịch chuyển của bó sóng biểu diễn bởi công thức (67-11), không có sự thay đổi hình dạng của nó là gần đúng và là hệ quả của giả thiết cho rằng khoảng Δ**k** nhỏ. Nói chung khi U phụ thuộc vào ω, bó sóng "tản ra" trong khi lan truyền và không gian mà nó chiếm sẽ nở ra. Có thể chứng tỏ rằng "sự tản ra" đó tỷ lệ với bình phương độ lớn của khoảng Δ**k** của các vectơ sóng xuất hiện trong khi khai triển bó sóng.

BÀI TẬP

Xác định sự biến thiên của biên độ âm theo độ cao, khi âm lan truyền trong trọng trường ở trong khí quyển đẳng nhiệt.

Giải. Trong khí quyển đẳng nhiệt (được coi như khí lý tưởng) vận tốc của âm không đổi. Mật độ năng thông hiển nhiên giảm dọc theo tia, tỷ lệ nghịch với bình phương của khoảng cách **r** tính từ nguồn:

$$c\rho\overline{v^2} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Từ đó suy ra rằng biên độ các dao động của vận tốc trong sóng âm biến thiên dọc theo tia tỷ lệ nghịch với $r\sqrt{\rho}$. Theo công thức khí áp thì mật độ ρ biến thiên như

$$\rho \sim e^{-\mu g z/RT}$$

(z là độ cao, μ là trọng lượng phân tử của khí, R là hằng số khí).

§68. SỰ LAN TRUYỀN CỦA ÂM TRONG MÔI TRƯỜNG CHUYỂN ĐỘNG

Hệ thức $\omega = ck$ giữa tần số và vectơ sóng chỉ đúng với sóng âm đơn sắc lan truyền trong môi trường đứng yên. Ta dễ dàng rút được một hệ thức tương tự cho sóng lan truyền trong một môi trường chuyển động (được quan sát trong hệ tọa độ đứng yên).

Ta xét một dòng chất lỏng đồng chất với vận tốc $\mathbf{u}$. Gọi K là hệ tọa độ cố định x, y, z và cũng đưa vào hệ K' các tọa độ x', y', z' chuyển động đối với K với vận tốc $\mathbf{u}$. Trong hệ K' chất lỏng đứng yên, và sóng đơn sắc trong đó được viết dưới dạng thông thường

$$\varphi = \text{const}\, e^{i(\mathbf{kr}' - kct)}.$$

Bán kính vectơ $\mathbf{r}'$ ở trong K' có liên hệ với vectơ $\mathbf{r}$ trong hệ K bởi đẳng thức $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Do đó sóng trong tọa độ cố định có dạng

$$\varphi = \text{const}\, e^{i[\mathbf{kr} - (kc + \mathbf{kn})t]}.$$

Hệ số của t ở trong số mũ là tần số ω của sóng. Như vậy, trong môi trường chuyển động tần số có liên hệ với vectơ sóng $\mathbf{k}$ bằng hệ thức

$$\omega = ck + \mathbf{uk} \tag{68-1}$$

Vận tốc truyền của sóng bằng

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}; \tag{68-2}$$

Đó là tổng của vận tốc c theo hướng $\mathbf{k}$ và vận tốc "kéo" $\mathbf{u}$ của âm cùng với chất lỏng chuyển động.

Ta xác định mật độ năng lượng của sóng âm trong môi trường chuyển động. Mật độ năng lượng tức thời toàn phần được cho bởi biểu thức

$$\frac{1}{2}(\rho + \rho')(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho} = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho' u^2}{2} + \rho\mathbf{vu} + \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho'\mathbf{vu} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho}\right)$$

(so sánh với (65-1)); chỉ số 0 ở các giá trị không nhiễu động của các đại lượng được bỏ đi). Số hạng thứ nhất ở đây là năng lượng của dòng chảy

không nhiễu động. Hai số hạng tiếp theo – có độ nhỏ bậc nhất, nhưng khi lấy trung bình theo thời gian chúng cho các đại lượng bậc hai, có liên hệ với với năng lượng của dòng chảy trung bình kích động bởi sóng. Tất cả các số hạng này cần được bỏ đi, và như vậy, mật độ năng lượng sóng âm tự bản thân nó được cho bởi ba số hạng sau cùng chứa trong dấu ngoặc. Vận tốc và sự biến thiên của áp suất trong sóng phẳng trong môi trường liên tục liên hệ với với nhau bằng hệ thức

$$(\omega - \mathbf{ku})\mathbf{v} = \mathbf{k}c^2\rho'/\rho,$$

đẳng thức này suy được từ phương trình tuyến tính hóa Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Nếu xét đến cả (68-1), cuối cùng ta tìm được mật độ năng lượng âm trong môi trường chuyển động bằng:

$$E = E_0 \frac{\omega}{\omega - \mathbf{ku}}, \qquad (68\text{-}3)$$

trong đó $E_0 = c^2\,\rho'^2/\rho = p'^2/\rho c^2$, là mật độ năng lượng trong hệ quy chiếu chuyển động cùng với môi trường [1].

Dựa vào công thức (68-1), ta có thể khảo sát *hiệu ứng Doppler*, nội dung như sau: tần số của âm nhận được bởi người quan sát chuyển động đối với nguồn không trùng với tần số dao động của nguồn đó.

Giả sử rằng, âm do nguồn đứng yên (đối với môi trường) phát ra được người quan sát chuyển động với vận tốc **u** thu được. Trong hệ K' đứng yên so với môi trường ta có $k = \omega_0/c$, trong đó ω_0 là tần số dao động của nguồn. Trong hệ quy chiếu, K chuyển động cùng với người quan sát, môi trường chuyển động với vận tốc $-\mathbf{u}$, và theo (68-1) tần số của âm bằng $\omega = ck - \mathbf{uk}$. Nếu đưa vào góc θ giữa phương chuyển động của vận tốc **u** và vectơ sóng **k** và đặt $k = \omega_0/c$, ta tìm được tần số của âm do người quan sát chuyển động thu được bằng:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right). \qquad (68\text{-}4)$$

[1] Công thức này được giải thích cụ thể theo quan điểm lượng tử; số các lượng tử âm (các phônôn) $N = E/\hbar(\omega - \mathbf{ku})$ không phụ thuộc vào việc chọn hệ quy chiếu.

Theo một nghĩa nào đó, trường hợp ngược lại là khi có sự lan truyền của sóng âm do nguồn chuyển động phát ra trong một môi trường đứng yên. Giả sử bây giờ **u** là vận tốc chuyển động của nguồn. Ta chuyển từ hệ quy chiếu đứng yên sang hệ quy chiếu K' chuyển động cùng với nguồn; trong hệ K' chất lỏng chuyển động với vận tốc $-\mathbf{u}$. Trong hệ K', ở đây nguồn đứng yên, tần số của sóng âm do nguồn phát ra phải bằng tần số ω_0 của các dao động do nguồn thực hiện. Trong (68-1), nếu đổi dấu của **u** và đưa vào góc θ giữa các phương **u** và **k**, ta có:

$$\omega_0 = ck\left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right).$$

Mặt khác, trong hệ K đứng yên ban đầu tần số có liên hệ với vectơ sóng bằng hệ thức $\omega = ck$. Do đó ta đi tới hệ thức

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \dfrac{u}{c}\cos\theta}. \qquad (68\text{-}5)$$

Công thức này xác định mối liên hệ giữa tần số ω_0 của các dao động của nguồn âm chuyển động và tần số ω của âm do người quan sát đứng yên nhận được.

Nếu nguồn đi xa người quan sát, thì góc θ giữa vận tốc của nó và phương của sóng đi tới điểm quan sát sẽ nằm giữa các giới hạn $\pi/2 < \theta \leq \pi$, do đó $\cos\theta < 0$. Như vậy, từ (68-5) ta suy ra rằng, nếu nguồn chuyển động và đi xa người quan sát, thì tần số của âm mà người quan sát nhận được sẽ giảm (so với ω_0).

Ngược lại, nếu nguồn tiến lại gần người quan sát, $0 \leq \theta < \pi/2$, do đó $\cos\theta > 0$ và tần số $\omega > \omega_0$ tăng khi vận tốc u tăng. Khi $u\cos\theta > c$, theo (68-5) ω trở nên âm, điều đó nói lên rằng, âm được người quan sát thu nhận thực tế đi tới họ theo thứ tự ngược lại, nghĩa là, âm do nguồn phát ra tại những thời điểm muộn hơn, đi tới người quan sát sớm hơn âm được phát ra tại những thời điểm sớm hơn.

Như đã nêu ở đầu §67, sự gần đúng của âm hình tương ứng với trường hợp của các bước sóng đủ nhỏ, nghĩa là của các giá trị lớn của vectơ sóng. Muốn thế, tần số của âm nói chung phải đủ lớn. Tuy nhiên, trong âm học các môi trường chuyển động, điều kiện sau cùng này

không còn là bắt buộc nữa, nếu vận tốc chuyển động của môi trường lớn hơn vận tốc âm. Thực vậy, trong trường hợp k có thể lớn ngay khi tần số bằng không: từ (68-1), ta có phương trình sau đối với $\omega = 0$

$$\mathbf{ck} = -\mathbf{uk} \tag{68-6}$$

Phương trình này có các nghiệm nếu $u > c$. Như vậy trong môi trường chuyển động với các vận tốc vượt âm có thể tồn tại những nhiễu động dừng, nhỏ được mô tả (với các k đủ lớn) bởi âm hình. Điều đó có nghĩa là, các nhiễu động như thế sẽ lan truyền dọc theo các đường xác định - các tia.

Chẳng hạn ta xét một dòng vượt âm đồng chất chuyển động với vận tốc không đổi **u**, mà phương của nó được chọn là trục x. Các thành phần của vectơ **k** nằm trong mặt phẳng x,y liên hệ với nhau bằng hệ thức:

$$\left(u^2 - c^2\right)k_x^2 = c^2 k_y^2, \tag{68-7}$$

là hệ thức thu được khi lấy bình phương cả hai vế của đẳng thức (68-6). Để xác định dạng của tia, ta dùng các phương trình của âm hình (67-4), theo các phương trình này

$$\dot{x} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial\omega}{\partial k_y}.$$

Chia phương trình trên vế với vế, ta thu được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\omega \,/\, \partial k_y}{\partial\omega \,/\, \partial k_x}.$$

Nhưng theo quy tắc lấy đạo hàm của các hàm ẩn, thì tỷ số này chính là đạo hàm $-(\partial k_x / \partial k_y)$ (lấy tại tần số không đổi, trong trường hợp đang xét bằng không). Do đó, nếu biết được sự phụ thuộc giữa k_x và k_y thì phương trình xác định dạng của các tia có dạng

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial k_y}{\partial k_x}. \tag{68-8}$$

Thay (68-7) vào phương trình này, ta thu được:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

Khi vận tốc u không đổi, phương trình này xác định hai tia thẳng cắt trục x dưới các góc $\pm \alpha$ với $\sin \alpha = c/u$.

Ta sẽ trở lại nghiên cứu chi tiết hơn các tia này trong khí động lực học, ở đó các tia này giữ một vai trò quan trọng.

BÀI TẬP

1. Tìm phương trình xác định dạng của các tia âm lan truyền trong một môi trường chuyển động dừng với sự phân bố vận tốc $\mathbf{u}(x,y,z)$ và $u << c$ tại mọi nơi. Giả thiết rằng, vận tốc $\mathbf{u}$ chỉ biến thiên rõ rệt trên những khoảng cách lớn so với bước sóng của âm.

Giải. Thay (68-1) vào (67-4), ta tìm được các phương trình lan truyền các tia dưới dạng

$$\dot{\mathbf{k}} = -(k\nabla)\mathbf{u} - [\mathbf{k}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u}],$$

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} = c\frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u}.$$

Dựa vào các phương trình này, ta tính đạo hàm $\dfrac{d}{dt}(k\mathbf{v})$ với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất theo u, trong tính toán ta dùng đẳng thức

$$\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u} \approx \frac{c}{k}(\mathbf{k}\nabla)\mathbf{u}.$$

Ta thu được

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = -kv\,[\mathbf{n}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{u}],$$

trong đó $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương của $\mathbf{v}$. Mặt khác,

$$\frac{d}{dt}(k\mathbf{v}) = \mathbf{n}\frac{d}{dt}(kv) + kv\frac{d\mathbf{n}}{dt}.$$

Vì $\mathbf{n}$ và $d\mathbf{n}/dt$ trực giao với nhau (từ $\mathbf{n}^2 = 1$, suy ra $\mathbf{n}\dot{\mathbf{n}} = 0$), nên nếu so sánh hai biểu thức, ta sẽ thu được $\mathbf{n} = [\mathrm{rot}\ \mathbf{u}, \mathbf{n})$. Nếu đưa vào phần tử độ dài dọc theo tia $dl = c\,dt$, cuối cùng ta viết được:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{c}[\mathrm{rot}\ \mathbf{u}, \mathbf{n}]. \qquad (1)$$

Phương trình này xác định dạng các tia; $\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị của tiếp tuyến với tia (bây giờ tuyệt nhiên nó không trùng với phương của $\mathbf{k}$ nữa !).

2. Xác định dạng của các tia âm trong môi trường chuyển động với sự phân bố các vận tốc $u_x = u(z)$, $u_y = u_z = 0$.

Giải. Khai triển phương trình (1) ta tìm được:

$$\frac{dn_x}{dl} = \frac{n_z}{c}\frac{du}{dz}, \qquad \frac{dn_y}{dl} = 0$$

(có thể không cần viết phương trình cho n_z vì $\mathbf{n}^2 = 1$). Phương trình thứ hai cho ta

$$n_y = \text{const} \equiv n_{y0}$$

Trong phương trình đầu tiên ta viết $n_z = dz/dl$, sau đó lấy tích phân ta được

$$n_x = n_{x0} + \frac{u(z)}{c}.$$

Các công thức này giải bài toán đặt ra.

Giả sử vận tốc u bằng không với $z = 0$ và tăng theo hướng lên phía trên ($du/dz > 0$). Nếu âm lan truyền "ngược chiều gió" ($n_x < 0$) thì quỹ đạo của nó bị uốn cong, bị gập lên phía trên, khi âm lan truyền "theo chiều gió" ($n_x > 0$) thì quỹ đạo của nó bị uốn cong, bị gập xuống phía dưới; trong trường hợp này, tia xuất phát từ điểm $z = 0$ dưới một góc nghiêng nhỏ so với trục x (n_{x0} gần bằng đơn vị) chỉ được nâng lên đến một độ cao hữu hạn $z = z_{\max}$ mà ta có thể tính như sau. Tại độ cao $z_{\max}$, tia nằm ngang, nghĩa là $n_z = 0$. Do đó ta có:

$$n_x^2 + n_y^2 \approx n_{x0}^2 + n_{y0}^2 + 2n_{x0}\frac{u}{c} = 1,$$

Do đó

$$2n_{x0}\frac{u(z_{\max})}{c} = n_{z0}^2,$$

Từ đó có thể xác định được $z_{\max}$ theo hàm đã cho $u(z)$ và phương trình ban đầu của tia.

3. Tìm biểu thức của nguyên lý Fermat cho các tia âm trong môi trường chuyển động dừng.

Giải. Nguyên lý Fermat đòi hỏi tích phân $\int \mathbf{k}\,d\mathbf{l}$ lấy dọc theo một tia giữa hai điểm đã cho phải cực trị, trong đó $\mathbf{k}$ được giả thiết là hàm của tần số ω và phương của tia $\mathbf{n}$ (xem II, §53). Có thể tìm được hàm này bằng cách khử v và k khỏi các hệ thức $\omega = ck + \mathbf{uk}$ và $v\mathbf{n} = c\mathbf{k}/k + \mathbf{u}$. Kết quả là, nguyên lý Fermat có dạng

$$\delta\int \frac{1}{c^2 - u^2}\left(\sqrt{(c^2 - u^2)dl^2 + (\mathbf{u}\,d\mathbf{l})^2} - \mathbf{u}\,d\mathbf{l}\right) = 0.$$

Trong môi trường đứng yên, tích phân này rút về tích phân thông thường $\int dl/c$.

§69. CÁC DAO ĐỘNG RIÊNG

Cho đến đây ta mới chỉ xét chuyển động dao động ở trong các môi trường vô hạn. Đặc biệt ta đã nhận thấy rằng, trong các môi trường như thế có thể lan truyền các sóng với các tần số tùy ý.

Tình hình sẽ thay đổi cơ bản đối với chất lỏng chứa trong một bình có các kích thước hữu hạn. Bản thân các phương trình chuyển động (các phương trình sóng) tất nhiên khi đó không thay đổi, nhưng bây giờ chúng phải được bổ sung thêm các điều kiện biên, là các điều kiện cần được thực hiện ở trên mặt các thành rắn (hay trên mặt tự do của chất lỏng). Ở đây ta chỉ xét các *dao động tự do*, xuất hiện khi không có các ngoại lực biến thiên (các dao động được thực hiện dưới tác dụng của các ngoại lực được gọi là các dao động cưỡng bức).

Các phương trình chuyển động cho một chất lỏng hữu hạn tuyệt nhiên với mọi tần số không có những nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên thích hợp. Các nghiệm như thế chỉ tồn tại đối với một dãy những giá trị hoàn toàn xác định của ω. Nói một cách khác, trong môi trường có thể tích hữu hạn chỉ có thể tồn tại những dao động tự do với các tần số hoàn toàn xác định. Các tần số đó được gọi là *các tần số dao động riêng* hay *tần số riêng* của chất lỏng ở trong bình đã cho.

Các giá trị cụ thể của các tần số riêng phụ thuộc vào dạng và kích thước của bình. Trong mỗi trường hợp đã cho có tồn tại một dãy vô hạn các tần số riêng tăng. Để tìm chúng, cần phải nghiên cứu cụ thể các phương trình chuyển động với các điều kiện biên thích hợp.

Đối với tần số đầu tiên, nghĩa là tần số nhỏ nhất trong các tần số riêng, bậc của nó được suy ra ngay từ những lý do về thứ nguyên. Thông số duy nhất có thứ nguyên của độ dài xuất hiện trong bài toán là thông số biểu diễn các kích thước dài l của vật. Do đó rõ ràng là, bước sóng λ_1 tương ứng với tần số riêng đầu tiên phải có bậc của l; bậc của chính tần số ω_1 thu được bằng cách chia vận tốc âm cho λ_1. Như vậy,

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim \frac{c}{l}. \tag{69-1}$$

Ta tìm hiểu tính chất của chuyển động trong các dao động riêng. Nếu tìm một nghiệm tuần hoàn theo thời gian của phương trình sóng cho thế vận tốc dưới dạng $\varphi = \varphi_0(x,y,z)\, e^{-i\omega t}$, thì ta sẽ tìm được cho φ_0 phương trình

$$\Delta\varphi_o + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_o = 0. \tag{69-2}$$

Trong môi trường vô hạn, khi đó không cần xét các điều kiện biên, phương trình này có cả nghiệm thực và nghiệm phức. Đặc biệt nó có một nghiệm tỷ lệ với $e^{i\mathbf{kr}}$, nghiệm này dẫn đến một thế có dạng: $\varphi = \text{const}\cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$. Một nghiệm như thế biểu diễn một sóng lan truyền với vận tốc xác định, hay như người ta gọi là sóng chạy.

Nhưng đối với môi trường có thể tích hữu hạn, các nghiệm phức nói chung không thể tồn tại. Ta dễ dàng thấy được điều này bằng lập luận như sau. Phương trình, mà φ_0 thỏa mãn, là thực, và cả các điều kiện biên cũng là thực. Do đó, nếu $\varphi_0(x,y,z)$ là nghiệm của các phương trình chuyển động, thì cả hàm liên hợp phức φ^*_0 của nó cũng là nghiệm. Mặt khác, vì nghiệm của các phương trình đối với các điều kiện biên đã cho, nói chung, là đơn trị [1] (sai khác một thừa số không đổi), nên phải có $\varphi^*_0 = \text{const}\cdot\varphi_0$, trong đó const là một hằng số phức nào đó có môđun bằng đơn vị. Như vậy φ_0 phải có dạng

$$\varphi_0 = f(x, y, z)\, e^{-i\alpha}$$

với hàm f và hằng số α đều là thực. Thế φ như vậy có dạng (ta lấy phần thực của $\varphi_0 \cdot e^{-i\omega t}$):

$$\varphi_0 = f(x, y, z)\cos(\omega t + \alpha) \tag{69-3}$$

Nghĩa là, nó là tích của một hàm các tọa độ nào đó với một hàm tuần hoàn đơn giản của thời gian.

Một nghiệm như thế có tính chất hoàn toàn khác với nghiệm của sóng chạy. Trong sóng chạy, các pha $\mathbf{kr} - \omega t + \alpha$ của các dao động ở các điểm khác nhau trong không gian tại cùng một thời điểm đều khác nhau, chúng chỉ bằng nhau tại các điểm cách nhau một khoảng cách bằng bước sóng. Còn đối với sóng (69-3), tại mỗi thời điểm, tất cả các

[1] Điều đó có thể không xảy ra trong trường hợp bình có tính đối xứng cao, là một quả cầu chẳng hạn.

điểm của vật đều dao động với cùng một pha ($\omega t + \alpha$). Hiển nhiên là không thể nói đến sự lan truyền của một sóng như thế. Các sóng như thế được gọi là *các sóng đứng*. Như vậy các dao động riêng là những sóng đứng.

Ta khảo sát một sóng âm đứng phẳng, trong đó tất cả các đại lượng đều là các hàm chỉ của một tọa độ, x chẳng hạn (và của thời gian). Nếu viết nghiệm tổng quát của phương trình

$$\frac{d^2\varphi_o}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_o = 0$$

dưới dạng $\varphi_o = a\cos(\frac{\omega}{c}x + \beta)$, ta sẽ có:

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha)\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \beta\right).$$

Bằng cách chọn gốc tọa độ và thời gian thích hợp, có thể cho α và β bằng không, do đó ta sẽ có

$$\varphi = a\cos\omega t\cos\frac{\omega}{c}x. \qquad (69\text{-}4)$$

Đối với vận tốc và áp suất trong sóng ta có:

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -a\frac{\omega}{c}\cos\omega t\sin\frac{\omega}{c}x;$$

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho\omega\sin\omega t\cos\frac{\omega}{c}x$$

Tại các điểm $x = 0$, $\pi c/\omega$, $2\pi c/\omega$, ..., cách nhau một khoảng $\pi c/\omega = \lambda/2$, vận tốc v bao giờ cũng bằng không, các điểm đó là *các nút* của vận tốc. Ở chính giữa chúng (với $x = \pi c/2\omega$, $3\pi c/2\omega$, ...) có các điểm mà tại đó biên độ dao động của vận tốc theo thời gian là cực đại; các điểm này là *các bụng của sóng*. Còn đối với áp suất p' thì các điểm thứ nhất là các bụng, còn các điểm thứ hai là các nút. Như vậy, trong sóng âm phẳng đứng, các bụng của áp suất trùng với các nút của vận tốc, và ngược lại.

Một trường hợp lý thú của các dao động riêng là trường hợp các dao động của khí chứa trong một bình có một miệng nhỏ (một bình như thế được gọi là hốc cộng hưởng). Trong một bình kín, tần số nhỏ nhất trong

các tần số riêng, như ta đã biết, có bậc bằng c/l, trong đó l là kích thước dài của bình. Khi có miệng nhỏ, thì sẽ xuất hiện một loại dao động riêng mới có tần số nhỏ hơn rất nhiều. Các dao động có liên quan với sự kiện sau: nếu có một hiệu áp suất giữa chất khí ở trong bình và ngoài bình, thì hiệu này có thể được san bằng khi khí đi vào hay đi ra khỏi bình. Như vậy có xuất hiện các dao động và kéo theo sự trao đổi khí giữa hốc cộng hưởng với môi trường bên ngoài. Vì miệng nhỏ, nên sự trao đổi này xảy ra từ từ; do đó chu kỳ các dao động lớn và tần số tương ứng sẽ nhỏ (xem bài tập 2). Đối với các dao động thông thường xảy ra trong bình kín, thì do sự có mặt của lỗ nhỏ mà các tần số của chúng thực tế không thay đổi.

BÀI TẬP

1. Xác định các tần số riêng của các dao động âm của chất lỏng trong một bình kín có dạng hình hộp.

Giải. Ta tìm nghiệm của phương trình (69-2) dưới dạng:

$$\varphi_o = \text{const} \cos qx \cos ry \cos sz,$$

với $q^2 + r^2 + s^2 = \omega^2/c^2$. Các điều kiện trên thành bình có dạng

$$v_x = \partial\varphi/\partial x = 0 \quad \text{với} \quad x = 0,\ a$$

$$v_y = \partial\varphi/\partial y = 0 \quad \text{với} \quad y = 0,\ b$$

$$v_z = \partial\varphi/\partial z = 0 \quad \text{với} \quad z = 0,\ c$$

trong đó a, b, c là các cạnh của hình hộp. Từ đó suy ra $q = m\pi/a$, $r = n\pi/b$, $s = p\pi/c$, trong đó m, n, p là các số nguyên tùy ý. Như vậy các tần số riêng bằng

$$\omega^2 = c^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right).$$

2. Người ta nối vào miệng của hốc cộng hưởng một ống nhỏ (có tiết diện S và chiều dài l); xác định tần số riêng của các dao động.

Giải. Vì ống hẹp nên trong quá trình dao động, kèm theo chuyển động đi vào và đi ra của khí qua hốc cộng hưởng, do đó ta có thể cho rằng, chỉ khí ở trong ống có một vận tốc đáng kể, còn vận tốc của khí ở trong bình thực tế bằng không. Khối lượng khí ở trong ống là $S\rho l$ và lực tác dụng lên khí bằng $S(p_o - p)$, (p_o và p lần lượt là các áp suất của khí trong hốc cộng hưởng và trong môi trường bên ngoài); do đó ta phải có $S\rho l\dot{v} = S(p - p_o)$, ($v$ là vận tốc của khí ở trong ống). Mặt khác đạo hàm của áp suất theo thời gian $\dot{p} = c^2\dot{\rho}$ và độ giảm $-\dot{\rho}$ của mật độ khí ở trong hốc cộng hưởng sau một đơn vị thời gian có thể được coi là bằng tỷ số

giữa lượng khí đi ra sau một đơn vị thời gian $S\rho v$ và thể tích V của hốc cộng hưởng. Như vậy ta có: $\dot{p} = -c^2 S\rho v/V$, từ đó suy ra

$$\ddot{p} = -\frac{c^2 S\rho}{V}\dot{v} = -\frac{c^2 S}{lV}(p - p_0).$$

Phương trình này cho $p - p_0 = \text{const} \cdot \cos \omega_0 t$, trong đó tần số riêng ω_0 bằng:

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{lV}}.$$

tần số này nhỏ so với c/L (L là các kích thước dài của bình), và độ dài sóng như vậy là lớn so với L.

Khi giải bài toán này ta đã hiểu ngầm rằng, biên độ *dài* của các dao động của khí ở trong ống nhỏ so với độ dài l của nó. Nếu tình hình không như vậy, thì một phần đáng kể chất khí ở trong ống sẽ thoát ra khỏi ống theo sau các quá trình các dao động, và phương trình chuyển động bậc nhất của khí ở trong ống, đã dùng ở trên, không còn áp dụng được nữa.

§70. SÓNG CẦU

Ta xét một sóng âm, trong đó sự phân bố mật độ, vận tốc, v.v... chỉ phụ thuộc vào khoảng cách tính từ một tâm nào đó, nghĩa là sự phân bố có tính đối xứng cầu. Một sóng như thế được gọi là sóng cầu.

Ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình sóng mô tả sóng cầu. Chẳng hạn, ta viết phương trình sóng cho thế vận tốc:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Vì φ chỉ là hàm của khoảng cách r đến tâm (và của thời gian t), nên nếu dùng biểu thức của toán tử Laplace trong tọa độ cầu, ta sẽ thu được:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right). \tag{70-1}$$

Đặt $\varphi = f(r,t)/r$, ta thu được cho hàm $f(r,t)$ phương trình

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

nghĩa là phương trình sóng thông thường một chiều, trong đo bán kính r giữ vai trò tọa độ. Như đã biết, nghiệm của phương trình này được viết dưới dạng

$$f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r)$$

trong đó f_1, f_2 là các hàm tùy ý. Do đó nghiệm của phương trình (70-1) có dạng

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r)}{r} + \frac{f_2(ct + r)}{r}. \tag{70-2}$$

Số hạng thứ nhất biểu diễn sóng phân kỳ lan truyền từ gốc ra theo mọi phía. Số hạng thứ hai là sóng hội tụ về tâm. Khác với sóng phẳng, là sóng có biên độ không đổi, trong sóng cầu biên độ giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách đến tâm. Cường độ của sóng, được xác định bởi bình phương của biên độ, tỷ lệ nghịch với bình phương của khoảng cách, đúng thế, vì năng thông toàn phần ở trong sóng được phân bố trên một mặt, mà diện tích tăng theo r^2.

Các phần biến thiên của áp suất và mật độ có liên hệ với thế bằng

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \rho' = -\frac{\rho}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

và sự phân bố của chúng được xác định bởi các công thức có cùng dạng với (70-2). Còn sự phân bố vận tốc (xuyên tâm), được xác định bởi gradiên của thế, có dạng:

$$v = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{f_1(ct - r) + f_2(ct + r)}{r}\right\}. \tag{70-3}$$

Nếu không có nguồn âm ở gốc tọa độ, thì thế (70-2) phải hữu hạn khi $r = 0$. Muốn vậy, cần phải có $f_1(ct) = -f_2(ct)$, có nghĩa là

$$\varphi = \frac{f_1(ct - r) - f_2(ct + r)}{r} \tag{70-4}$$

(*sóng cầu đứng*). Nhưng nếu tại gốc có nguồn, thì thế của sóng phân kỳ mà nó phát ra có dạng $\varphi = f(ct - r)/r$ và nó không cần hữu hạn khi $r = 0$, vì nghiệm này chỉ được xét đối với miền ở bên ngoài vật.

Sóng cầu đứng đơn sắc có dạng:

$$\varphi = Ae^{-i\omega t}\frac{\sin kr}{r}, \tag{70-5}$$

với $k = \omega/c$. Còn Sóng cầu đơn sắc phân kỳ có dạng

$$\varphi = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}, \tag{70-6}$$

nên chú ý rằng, biểu thức này thỏa mãn phương trình vi phân

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi A e^{-i\omega t}\delta(\mathbf{r}), \qquad (70\text{-}7)$$

trong đó vế thứ hai chứa hàm δ của các tọa độ $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$. Thực vậy, tại khắp nơi, trừ gốc, $\delta(\mathbf{r}) = 0$, và ta trở lại phương trình thuần nhất (70-1). Lấy tích phân theo thể tích của hình cầu nhỏ, bao quanh gốc tọa độ (trong miền này biểu thức (70-6) rút về $(A/r).e^{-i\omega t}$), ta thu được từ cả hai vế $-4\pi A.\, e^{-i\omega t}$.

Ta xét một sóng cầu phân kỳ chiếm trong không gian một miền có dạng lớp cầu, bên ngoài lớp này hoặc không có chuyển động hoặc tắt rất nhanh; một sóng như thế có thể xuất phát từ một nguồn đã phát sóng ra trong một khoảng thời gian hữu hạn, hoặc từ một miền ban đầu có nhiễu động âm (xem phần cuối của §72 và bài toán 4, §74). Trước khi sóng tới một điểm đã cho của không gian, thế tại đó $\varphi \equiv 0$. Nhưng khi sóng đã đi qua, chuyển động lại phải tắt dần; điều đó có nghĩa là, trong mọi trường hợp đều phải có $\varphi = \text{const}$. Tuy nhiên, trong sóng âm phân kỳ, thế là hàm có dạng $\varphi = f(ct - r)/r$; một hàm như thế có thể là không đổi chỉ khi hàm f triệt tiêu. Như vậy, thế phải bằng không trước hoặc sau khi sóng đi qua [1]. Từ đó ta có thể rút ra một kết luận quan trọng đối với sự phân bố các chỗ nén và chỗ dãn ở trong sóng cầu.

Sự biến thiên của áp suất ở trong sóng có liên hệ với thế bằng bằng hệ thức $p' = -\rho d\varphi/dt$. Từ những điều đã nói ở trên, ta thấy rõ là, nếu lấy tích phân p' theo toàn bộ thời gian với r đã cho, thì kết quả ta thu được số không:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p'dt = 0. \qquad (70\text{-}8)$$

Điều đó có nghĩa là, trong khi sóng cầu đi qua điểm đã cho của không gian, thì tại đó ta sẽ quan sát được các chỗ nén ($p' > 0$) cũng như các chỗ dãn ($p' < 0$). Về phương diện này, sóng cầu khác căn bản với sóng phẳng, là sóng có thể được cấu tạo hoặc chỉ bởi các chỗ nén hoặc chỉ bởi các chỗ dãn.

Hình ảnh tương tự cũng được quan sát thấy khi ta xét tiến trình biến

[1] Khác với sóng phẳng, sau khi sóng phẳng đi qua ta có thể có $\varphi = \text{const} \neq 0$.

thiên của p' theo khoảng cách tại một thời điểm đã cho; thay cho (70-8), bây giờ ta có một tích phân bằng không

$$\int_0^\infty rp'dr = 0. \qquad (70\text{-}9)$$

BÀI TẬP

1. Tại thời điểm ban đầu, khí chứa trong một thể tích hình cầu (bán kính a) được nén sao cho $\rho' = \text{const} \equiv \Delta$; bên ngoài thể tích này $\rho' = 0$. Vận tốc ban đầu bằng không trong toàn không gian. Xác định chuyển động tiếp sau của khí.

Giải. Các điều kiện ban đầu cho thế $\varphi(r,t)$ phát biểu:

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \dot{\varphi}(r, 0) = F(r),$$

trong đó

$$F(r) = 0 \text{ với } r > a, \quad F(r) = -\Delta c^2/\rho \text{ với } r < a.$$

Ta tìm φ dưới dạng (70-4) và từ các điều kiện ban đầu ta được:

$$f(-r) - f(r) = 0, \quad f'(-r) - f'(r) = (r/c).F(r).$$

Từ đó

$$f'(r) = -f'(-r) = -(r/2c)\cdot F(r).$$

Cuối cùng nếu thay giá trị của $F(r)$, ta tìm được cho đạo hàm $f'(\xi)$ và cho chính hàm $f(\xi)$ kết quả sau đây:

$$\text{với } |\xi| > a: \quad f'(\xi) = 0, \qquad f(\xi) = 0;$$

$$\text{với } |\xi| < a: \quad f'(\xi) = \frac{c\Delta}{2\rho}\xi, \quad f(\xi) = \frac{c\Delta}{4\rho}(\xi^2 - a^2),$$

Chính kết quả này xác định nghiệm của bài toán. Ta xét một điểm với $r > a$, nghĩa là điểm nằm ngoài miền nén ban đầu; ta sẽ tìm được cho mật độ ρ':

$$\text{với } t < \frac{r-a}{c} \qquad \rho' = 0;$$

$$\text{với } \frac{r-a}{c} < t < \frac{r+a}{c} \qquad \rho' = \frac{\Delta}{2}\frac{r-ct}{r};$$

$$\text{với } t > \frac{r-a}{c} \qquad \rho' = 0$$

Sóng đi qua điểm đã cho trong khoảng thời gian bằng $2a/c$; nói một cách khác, sóng có dạng của một lớp cầu bề dầy là $2a$, tại thời điểm t nằm giữa các hình cầu có các bán kính là $ct - a$ và $ct + a$. Ở bên trong lớp này, mật độ thay đổi theo

định luật tuyến tính; trong phần ngoài ($r > ct$) khí bị nén ($\rho' > 0$), còn ở phần trong ($r < ct$) khí bị dãn ($\rho' < 0$).

2. Xác định các tần số riêng của các dao động âm đối xứng xuyên tâm trong một bình hình cầu.

Giải. Từ điều kiện biên $\partial\varphi/\partial r = 0$ với $r = a$ (a là bán kính của bình, φ được xác định bởi (70-5)), ta thu được phương trình

$$\operatorname{tg} ka = ka,$$

xác định các tần số riêng. Tần số đầu tiên (nhỏ nhất) có giá trị bằng $\omega_1 = 4{,}49\, c/a$.

§71. SÓNG TRỤ

Bây giờ ta xét một sóng mà trong đó sự phân bố của tất cả các đại lượng đều là đồng tính theo một hướng (được chọn làm trục z) và có tính đối xứng trục toàn phần quanh trục đó. Sóng này được gọi là *sóng trụ*. Đối với sóng này ta có $\varphi = \varphi(R, t)$, trong đó R ký hiệu cho khoảng cách tính đến trục z. Ta tìm dạng tổng quát của một nghiệm đối xứng trục như thế cho phương trình sóng. Muốn vậy, có thể xuất phát từ dạng tổng quát của nghiệm đối xứng cầu (70-2), R liên hệ với r bằng hệ thức $r^2 = R^2 + z^2$, do đó, φ xác định bởi công thức (70-2), cũng phụ thuộc vào cả z, với t và R đã cho. Một hàm chỉ phụ thuộc vào R và t, đồng thời thỏa mãn phương trình sóng, có thể thu được bằng cách lấy tích phân biểu thức (70-2) theo tất cả các giá trị của z từ $-\infty$ đến $+\infty$, hoặc từ 0 đến ∞ cũng vậy. Ta chuyển từ việc lấy tích phân theo z sang việc lấy tích phân theo r. Ta có:

$$z = \sqrt{r^2 - R^2}, \qquad dz = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - R^2}};$$

Khi z biến thiên từ 0 đến ∞, r biến thiên trong các giới hạn giữa R và ∞. Cuối cùng, ta tìm được dạng tổng quát của nghiệm đối xứng trục

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{f_1(ct - r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\,dr + \int_R^\infty \frac{f_2(ct + r)}{\sqrt{r^2 - R^2}}\,dr \qquad (71\text{-}1)$$

tong đó f_1 và f_2 là các hàm tùy ý. Số hạng thứ nhất biểu diễn một sóng trụ phân kỳ, số hạng thứ hai biểu diễn một sóng trụ hội tụ.

Trong các tích phân đó, ta đổi các biến $ct \pm r = \xi$ và viết lại công thức (71-1) dưới dạng

$$\varphi = \int_{-\infty}^{ct-R} \frac{f_1(\xi)d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2 - R^2}} + \int_{ct+R}^{\infty} \frac{f_2(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi-ct)^2 - R^2}}. \qquad (71\text{-}2)$$

Ta nhận thấy rằng, giá trị của thế tại thời điểm t (tại điểm R) trong sóng trụ phân kỳ được xác định bởi các giá trị của hàm $f_1(t)$ trong suốt khoảng thời gian từ $-\infty$ đến $t - R/c$; tương tự, trong sóng hội tụ các giá trị của $f_2(t)$ là quan trọng trong suốt khoảng thời gian từ $t + R/c$ đến ∞.

Cũng như trong trường hợp sóng cầu, các sóng trụ đứng thu được đối với $f_1(\xi) = -f_2(\xi)$. Ta có thể chứng minh rằng, một sóng trụ đứng cũng có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\varphi = \int_{ct-R}^{ct+R} \frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{R^2 - (\xi-ct)^2}}, \qquad (71\text{-}3)$$

trong đó $F(\xi)$ lại là một hàm tùy ý. Ta rút ra biểu thức cho thế của một sóng trụ đơn sắc. Phương trình sóng đối với thế $\varphi(R,t)$ trong tọa độ trụ có dạng

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Trong một sóng đơn sắc, $\varphi = e^{-i\omega t} f(R)$ và ta tìm được cho $f(R)$ phương trình

$$f'' + \frac{1}{R}f' + k^2 f = 0.$$

Đó là phương trình các hàm Bessel cấp không. Trong sóng trụ đứng φ phải hữu hạn với $R = 0$; nghiệm tương ứng là $J_0(kR)$, trong đó J_0 là hàm Bessel loại một. Như vậy, trong một sóng trụ đứng

$$\varphi = A\, e^{-i\omega t} J_0(kR) \qquad (71\text{-}4)$$

Khi $R = 0$, hàm J_0 bằng đơn vị, do đó biên độ của sóng tiến đến một đại lượng hữu hạn A. Tại các khoảng cách lớn R, hàm J_0 có thể thay bằng biểu thức tiệm cận đã biết của nó, kết quả là sóng có dạng

$$\varphi = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(kR - \pi/4)}{\sqrt{kR}} e^{-i\omega t}. \qquad (71\text{-}5)$$

Nghiệm tương ứng với sóng chạy đơn sắc phân kỳ là

$$\varphi = Ae^{-i\omega t}H_o^{(1)}(kR), \tag{71-6}$$

trong đó $H_o^{(1)}$ là *hàm Hankel*. Khi $R \to \infty$, biểu thức này có một điểm kỳ dị lôga:

$$\varphi \approx A\frac{2i}{\pi}\ln kR.e^{-i\omega t}. \tag{71-7}$$

Tại các khoảng cách lớn, ta có công thức tiệm cận

$$\varphi = A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{i(kR-\omega t-\pi/4)}}{\sqrt{kR}}. \tag{71-8}$$

Ta nhận thấy rằng, biên độ của sóng trụ giảm (tại các khoảng cách lớn) tỷ lệ nghịch với căn bậc hai của khoảng cách đến trục, do đó cường độ giảm tỷ lệ với $1/R$. Kết quả đó là tự nhiên, vì trong khi sóng lan truyền, năng thông toàn phần trong sóng được phân bố trên mặt trụ có diện tích tăng tỷ lệ với R.

Sóng trụ phân kỳ khác căn bản với sóng cầu hay sóng phẳng về phương diện là, nó có thể có mặt đầu sóng trước (*forward front*, ND), nhưng không thể có mặt đầu sóng sau (*backward front*, ND): sau khi nhiễu động, âm đạt tới một điểm đã cho của không gian, nó không dừng lại, mà chỉ tắt tiệm cận tương đối chậm khi $t \to \infty$. Giả sử hàm $f_1(\xi)$ trong số hạng thứ nhất của (71-2) chỉ khác không trong một khoảng hữu hạn các giá trị nào đó $\xi_1 \le \xi \le \xi_2$. Khi đó tại các thời điểm sao cho $ct > R + \xi_2$, ta sẽ có:

$$\varphi = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2 - R^2}}.$$

Khi $t \to \infty$, biểu thức này tiến đến giá trị không theo định luật

$$\varphi = \frac{1}{ct}\int_{\xi_1}^{\xi_2} f_1(\xi)d\xi,$$

nghĩa là tỷ lệ nghịch với thời gian.

Như vậy, thế của một sóng trụ phân kỳ, xuất phát từ một nguồn tác động trong một khoảng thời gian hữu hạn, sẽ tiến đến giá trị không, mặc dù chậm, khi t $\to \infty$. Cũng như trong sóng cầu, tình trạng này dẫn

đến tích phân sau bằng không

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p' dt = 0. \tag{71-9}$$

Do đó, cũng giống như sóng cầu, sóng trụ tất yếu cũng phải chứa những chỗ nén và dãn.

§72. NGHIỆM TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG TRÌNH SÓNG

Bây giờ ta rút ra công thức tổng quát để xác định nghiệm của phương trình sóng ở trong một chất lỏng vô hạn theo các điều kiện ban đầu đã cho, nghĩa là để xác định sự phân bố vận tốc và áp suất trong chất lỏng vào một thời điểm tùy ý nào đó theo sự phân bố của chúng tại thời điểm ban đầu.

Sơ bộ, ta thu được một số công thức phụ. Giả sử $\varphi(x, y, z, t)$ và $\psi(x, y, z, t)$ là hai nghiệm nào đó của phương trình sóng, triệt tiêu tại vô cực. Ta xét tích phân

$$I = \int (\varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi) dV,$$

lấy trong toàn không gian và tính đạo hàm của nó theo thời gian. Vì φ và ψ thỏa mãn các phương trình

$$\Delta\varphi - c^{-2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \Delta\psi - c^{-2}\ddot{\psi} = 0,$$

nên ta có

$$\frac{dI}{dt} = \int (\varphi\ddot{\psi} - \ddot{\varphi}\psi) dV = c^2 \int (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV = c^2 \int \operatorname{div}(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV.$$

Tích phân sau cùng có thể được biến đổi thành tích phân lấy theo mặt ở xa vô cùng, do đó bằng không. Như vậy, ta đi tới kết quả là $dI/dt = 0$, nghĩa là I là một hằng số không phụ thuộc vào thời gian:

$$I \equiv \int (\varphi\dot{\psi} - \dot{\varphi}\psi) dV = \text{const}. \tag{72-1}$$

Tiếp theo ta xét nghiệm riêng của phương trình sóng:

$$\psi = \frac{\delta[r - c(t_o - t)]}{r}, \tag{72-2}$$

trong đó r là khoảng cách tính từ một điểm O đã cho của không gian, t_o là một thời điểm xác định nào đó, còn δ ký hiệu hàm δ. Ta tính tích phân của hàm ψ theo không gian. Ta có:

$$\int \psi dV = \int_0^\infty 4\pi\psi r^2 dr = 4\pi \int_0^\infty r\delta[r - c(t_o - t)]dr.$$

Đối số của hàm δ bằng không với $r = c(t_o - t)$ (giả sử $t_o > t$). Do đó, dựa vào những tính chất của hàm δ, ta có:

$$\int \psi dV = 4\pi c(t_o - t). \tag{72-3}$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này theo t, ta được:

$$\int \dot{\psi} dV = 4\pi c. \tag{72-4}$$

Bây giờ ta thay hàm ψ (72-2) vào (72-1) và coi φ là nghiệm tổng quát cần tìm của phương trình sóng. Theo (72-1), I là một đại lượng không đổi; trên cơ sở này, ta viết biểu thức cho I tại những thời điểm $t = 0$ và $t = t_o$ và cho chúng bằng nhau. Với $t = t_o$ cả hai hàm ψ và $\dot{\psi}$ chỉ khác không khi $r = 0$. Vì thế, khi lấy tích phân ta có thể đặt $r = 0$ ở trong φ và $\dot{\varphi}$ (nghĩa là có thể lấy các giá trị tại điểm O) và đưa φ và $\dot{\varphi}$ ra khỏi dấu tích phân

$$I = \varphi(x, y, z, t_o) \int \dot{\psi} dV - \dot{\varphi}(x, y, z, t_o) \int \psi dV$$

(x, y, z là các tọa độ của O). Theo (72-3) và (72-4) số hạng thứ hai dưới đây bằng không khi $t = t_o$, còn số hạng thứ nhất cho

$$I = -4\pi c\varphi(x, y, z, t_o).$$

Bây giờ ta tính I khi $t = 0$. Nếu viết $\dot{\psi} = \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial t_o}$ và ký hiệu φ_o là giá trị của hàm φ tại $t = 0$, ta được:

$$I = -\int \left(\varphi_o \frac{\partial \psi}{\partial t_o} - \dot{\varphi}_o \psi \right) dV = -\frac{\partial}{\partial t_o} \int \varphi_o \psi|_{t=0} dV - \int \dot{\varphi}_o \psi|_{t=0} dV.$$

Ta viết phần tử thể tích dưới dạng $dV = r^2 dr do$, trong đó do là phần tử góc đặc; do các tính chất của hàm δ, ta thu được:

$$\int \varphi_o \psi|_{t=0} dV = \int \varphi_o r\delta(r - ct_o) dr do = ct_o \int \varphi_o|_{r=ct_o} do.$$

và tương tự đối với tích phân của $\dot{\varphi}_o \psi$. Như vậy

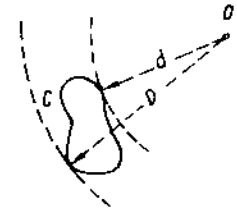
$$I = -\frac{\partial}{\partial t_o}\left(ct_o \int \varphi_o|_{r=ct_o} do\right) - ct_o \int \dot{\varphi}_o|_{r=ct_o} do.$$

Cuối cùng, nếu cho hai biểu thức của I bằng nhau và bỏ chỉ số 0 ở trong t_o, ta thu được

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t \int \varphi_o|_{r=ct} do\right) + t \int \dot{\varphi}_o|_{r=ct} do\right\}. \qquad (72\text{-}5)$$

Đó là *công thức Poisson* xác định sự phân bố của thế trong không gian tại một thời điểm bất kỳ, nếu cho trước sự phân bố của thế và đạo hàm của nó theo thời gian (điều này tương ứng với việc cho trước sự phân bố của vận tốc và áp suất) tại một thời điểm ban đầu nào đó. Ta nhận thấy rằng, giá trị của thế tại thời điểm t được xác định bởi các giá trị mà các hàm φ và $\dot{\varphi}$ có tại thời điểm $t = 0$ ở trên mặt cầu có bán kính $r = ct$ và tâm tại O.

Ta giả thiết rằng, tại thời điểm ban đầu φ và $\dot{\varphi}_o$ chỉ khác không trong một miền không gian hữu hạn nào đó, giới hạn bởi mặt kín C (hình 44). Ta xét các giá trị của φ ở các thời điểm sau tại một điểm O nào đó. Các giá trị này được xác định bởi các giá trị của φ và $\dot{\varphi}$ tại khoảng cách $r = ct$ tính từ điểm O. Nhưng các hình cầu có bán kính ct chỉ đi qua miền ở trong mặt với $d/c \le t \le D/c$, trong đó d, D là khoảng cách nhỏ nhất và khoảng cách lớn nhất tính từ điểm O đến mặt C. Tại các thời điểm khác, các biểu thức dưới dấu tích phân của (72-5) đều bằng không. Như vậy, chuyển động tại O bắt đầu ở thời điểm $t = d/c$ và kết thúc tại điểm $t = D/c$. Sóng lan truyền từ miền C có hai mặt đầu sóng: mặt đầu sóng trước và mặt đầu sóng sau. Chuyển động ở trong chất lỏng bắt đầu khi mặt đầu sóng trước đạt tới điểm đã cho, còn tại mặt đầu sóng sau các điểm dao động sớm hơn chuyển sang trạng thái tĩnh.



Hình 44

BÀI TẬP

Rút ra công thức xác định thế theo những điều kiện ban đầu đối với sóng chỉ phụ thuộc hai tọa độ: x và y.

Giải. Phần tử mặt của hình cầu bán kính $r = ct$, một mặt, có thể được viết dưới dạng $df = c^2t^2do$, trong đó do là phần tử góc đặc. Mặt khác, hình chiếu của df trên mặt phẳng $x\,y$ bằng

$$dx\,dy = df\,\frac{\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}{ct},$$

trong đó ρ là khoảng cách từ tâm cầu đến điểm x, y. So sánh hai biểu thức, ta có thể viết được

$$do = \frac{dx\,dy}{ct\sqrt{(ct)^2 - \rho^2}}.$$

ký hiệu các tọa độ điểm quan sát là x, y và các tọa độ của điểm biến thiên trong miền lấy tích phân là ξ, η, do đó trong trường hợp đang xét, ta có thể thay do trong công thức tổng quát (72-5) bằng

$$\frac{d\xi\,d\eta}{ct\sqrt{(ct)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

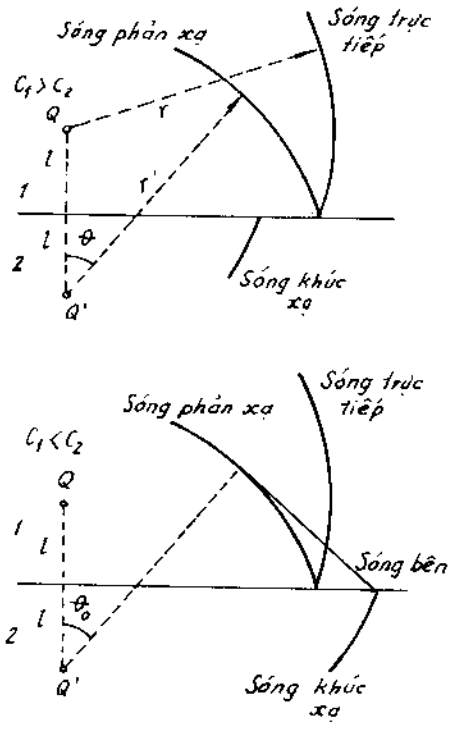
lấy gấp đôi biểu thức thu được, vì $dx\,dy$ biểu diễn hình chiếu của hai phần tử mặt hình cầu nằm ở hai phía của mặt phẳng x, y. Như vậy, cuối cùng ta thu được:

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \frac{\varphi_0(\xi,\eta)d\xi\,d\eta}{ct\sqrt{(ct)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi c}\iint \frac{\dot{\varphi}_0(\xi,\eta)d\xi\,d\eta}{ct\sqrt{(ct)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

ở đây tích phân được lấy theo mặt của một vòng tròn có tâm tại O và bán kính $r = ct$. Nếu tại thời điểm ban đầu φ và $\dot{\varphi}$ chỉ khác không trong một miền hữu hạn C của mặt phẳng x, y (đúng hơn, trong một miền trụ nào đó của không gian với các đường sinh song song với trục z), thì các dao động tại điểm O (hình 44) bắt đầu tại thời điểm $t = d/c$, trong đó d là khoảng cách ngắn nhất từ O đến miền đó. Nhưng sau đó các vòng tròn với bán kính $ct > d$ và tâm tại O bao giờ cũng chứa một phần hay toàn bộ diện tích của miền C, và φ chỉ tiến tiệm cận đến không. Như vậy, khác với các sóng "ba chiều", các sóng hai chiều đang xét ở đây có mặt đầu sóng trước, nhưng không có mặt đầu sóng sau (xem §71).

§73. SÓNG BÊN

Sự phản xạ của một sóng cầu bởi mặt phân giới giữa hai môi trường có một tầm quan trọng đặc biệt, do nó có thể gây ra một hiện tượng độc đáo, đó là sự xuất hiện của *sóng bên*.



Hình 45

Giả sử Q (hình 45) là một nguồn sóng âm cầu nằm (trong môi trường thứ nhất) cách mặt phân giới vô hạn phẳng của hai môi trường *1* và *2* một khoảng cách l. Khoảng cách này là tùy ý và tuyệt nhiên không được lớn so với bước sóng λ. Giả sử ρ_1, ρ_2 và c_1, c_2 là các mật độ và vận tốc âm ở trong hai môi trường.

Trước hết giả sử $c_1 > c_2$. Khi đó tại các khoảng cách lớn (so với λ) tính từ nguồn, chuyển động ở trong môi trường thứ nhất gồm tập hợp hai sóng phân kỳ. Một trong các sóng đó là sóng cầu trực tiếp do nguồn phát ra (*sóng trực tiếp*); thế của nó bằng

$$\varphi_1^{(0)} = \frac{e^{ikr}}{r}, \qquad (73\text{-}1)$$

trong đó r là khoảng cách tính từ nguồn, còn biên độ được quy ước đặt bằng đơn vị; để ngắn gọn, trong tiết này ta bỏ các thừa số $e^{-i\omega t}$.

Sóng thứ hai – sóng phản xạ – có các mặt sóng là các mặt cầu với tâm tại điểm Q' (Q' là "ảnh gương" của Q qua mặt phẳng phân cách); đó là quỹ tích của các điểm P, mà tại đó các tia xuất phát đồng thời từ Q và phản xạ theo các định luật của âm hình trên mặt phân giới đạt tới sau

cùng khoảng thời gian (trên hình 46, tia QAP với các góc tới và góc phản xạ θ). Biên độ của sóng phản xạ giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách r' tính từ điểm Q' (điểm này đôi khi được gọi là nguồn ảo), nhưng ngoài ra còn phụ thuộc vào góc θ – như thể mỗi tia phản xạ với một hệ số tương ứng với sự phản xạ của một sóng phẳng dưới một góc tới θ đã cho. Nói một cách khác, tại các khoảng cách lớn sóng phản xạ được mô tả bởi công thức

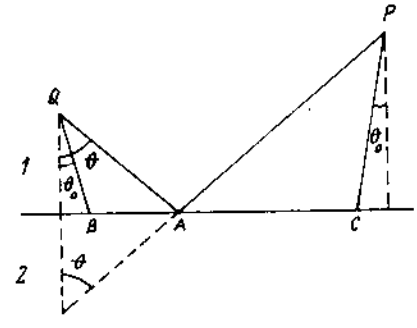
$$\varphi_1' = \frac{e^{ikr'}}{r'}\left[\frac{c_2\rho_2\cos\theta - \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta}}{c_2\rho_2\cos\theta + \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2\sin^2\theta}}\right], \qquad (73\text{-}2)$$

(xem công thức (66-4) cho hệ số phản xạ của sóng phẳng). Công thức này, mà sự đúng đắn của nó là hiển nhiên (đối với các r lớn), có thể được rút ra một cách chặt chẽ bằng phương pháp nêu dưới đây.

Đáng chú ý nhất là trường hợp khi

$$c_1 < c_2$$

Ở đây trong môi trường thứ nhất, ngoài sóng phản xạ thông thường, còn xuất hiện một sóng nữa có các tính chất cơ bản được suy ra từ những nhận định đơn giản dưới đây.



Hình 46

Tia phản xạ thông thường QAP (hình 46) thỏa mãn nguyên lý Fermat theo nghĩa là, đó là con đường nhanh nhất trong các con đường từ Q đến P, hoàn toàn nằm trong môi trường *1* và chỉ phản xạ một lần. Nhưng nguyên lý Fermat còn thỏa mãn một con đường khác (với $c_1 < c_2$): một tia tới biên giới dưới góc phản xạ trong toàn phần θ_0 ($\sin\theta_0 = c_1/c_2$), sau đó lan truyền trong môi trường dọc theo biên ngăn cách, và cuối cùng trở lại môi trường 1 dưới góc θ_0 (đường $QBCP$ ở trên hình 46); hiển nhiên là phải có $\theta > \theta_0$. Dễ dàng thấy rằng, con đường này cũng có tính cực trị: thời gian để đi qua con đường này nhỏ hơn thời gian đi

qua mọi con đường khác từ Q đến P, một phần nằm trong môi trường thứ hai.

Quỹ tích của tất cả các điểm P, nơi đạt tới của các tia đồng thời xuất phát từ Q và đi dọc theo đường QB rồi sau đó trở lại môi trường 1 tại các điểm C khác nhau vào cùng một thời điểm, rõ ràng là một mặt cônic có các đường sinh vuông góc với các đường thẳng vạch từ "nguồn ảo" Q' dưới góc θ_0.

Như vậy, nếu $c_1 < c_2$, thì ngoài sóng phản xạ thông thường với mặt đầu sóng cầu trong môi trường thứ nhất sẽ còn lan truyền một sóng có mặt đầu sóng cônic, mặt đầu sóng này trải từ mặt phẳng ngăn cách (tại đó nó nối tiếp với mặt đầu sóng khúc xạ ở trong môi trường thứ hai) đến điểm tiếp xúc với mặt đầu sóng cầu phản xạ (sự tiếp xúc được thực hiện theo giao tuyến với mặt nón có góc mở θ_0 và có trục dọc theo đường QQ', xem hình 45). Sóng cônic này được gọi là *sóng bên*.

Bằng phép tính đơn giản ta dễ dàng thấy được là thời gian đi theo đường $QBCP$ (hình 46) nhỏ hơn thời gian đi theo đường QAP dẫn tới cùng điểm quan sát P. Điều đó có nghĩa là tín hiệu âm do nguồn Q phát ra đi tới điểm P lúc đầu dưới dạng sóng bên, và chỉ sau đó sóng phản xạ thông thường mới tới điểm này.

Cần nhớ rằng, sóng bên là một hiệu ứng âm học sóng, mặc dù nó chấp nhận sự giải thích cụ thể đã trình bày dựa vào quan niệm của âm hình. Dưới đây ta sẽ thấy rằng, biên độ của sóng bên bằng không tại giới hạn $\lambda \to 0$.

Bây giờ ta chuyển sang tính toán định lượng. Sự lan truyền của một sóng âm đơn sắc tạo bởi một nguồn điểm được mô tả bởi phương trình (70-7):

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{l}), \tag{73-3}$$

với $k = \omega/c$ và $\mathbf{l}$ là bán kính vectơ của nguồn. Hệ số của hàm δ được chọn sao cho sóng trực tiếp có dạng (73-1). Dưới đây ta sẽ chọn hệ tọa độ với mặt phẳng x, y là mặt phẳng ngăn cách và trục z trùng với QQ': môi trường thứ nhất tương ứng với $z > 0$. Tại biên giới ngăn cách, áp suất và thành phần theo trục z của vận tốc phải liên tục, hay $\rho\varphi$ và $\partial\varphi/\partial z$ phải liên tục cũng vậy.

Theo phương trình tổng quát Fourier, ta có nghiệm dưới dạng

$$\varphi = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi_\kappa(z)e^{-i(\kappa_x x+\kappa_y y)}d\kappa_x d\kappa_y, \tag{73-4}$$

$$\varphi_\kappa(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \varphi e^{-i(\kappa_x x+\kappa_y y)}dxdy. \tag{73-5}$$

Từ lý do đối xứng ở trong mặt phẳng x, y, hiển nhiên ta thấy trước rằng, φ_κ chỉ có thể phụ thuộc vào giá trị tuyệt đối của $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$. Dùng công thức đã biết

$$J_o(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(u\sin\varphi)d\varphi,$$

do đó ta có thể viết (73-4) dưới dạng

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\varphi_\kappa(z)J_o(\kappa R)\kappa d\kappa, \tag{73-6}$$

trong đó $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$ là tọa độ trụ (khoảng cách tính từ trục z). Đối với các phép tính tiếp theo, để tiện lợi ta nên biến đổi công thức này về dạng, trong đó tích phân được lấy giữa các giới hạn từ $-\infty \to +\infty$ bằng cách biểu diễn biểu thức dưới dấu tích phân qua hàm Hankel $H_o^{(1)}(u)$. Hàm này như đã biết, có một điểm kỳ dị lôga tại điểm $u = 0$; nếu quy ước chuyển từ các giá trị thực dương sang các giá trị thực âm u, bằng cách đi vòng qua phía trên điểm $u = 0$ (trong mặt phẳng biến phức u) thì hệ thức sau được nghiệm đúng:

$$H_o^{(1)}(-u) = H_o^{(1)}(ue^{i\pi}) = H_o^{(1)}(u) - 2J_o(u).$$

Dựa vào hệ thức này, có thể viết lại được (73-6) dưới dạng

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\kappa(z)H_o^{(1)}(\kappa R)\kappa d\kappa. \tag{73-7}$$

Từ phương trình (73-3) ta tìm được cho φ_κ phương trình

$$\frac{d^2\varphi_\kappa}{dz^2} - \left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi_\kappa = -4\pi\delta(z-l). \tag{73-8}$$

Có thể khử hàm δ ở trong vế phải sau khi đặt cho hàm $\varphi_\kappa(z)$ (thỏa mãn phương trình thuần nhất) các điều kiện biên với $z = l$:

$$\varphi_\kappa(z)\Big|_{l-0}^{l+0} = 0, \qquad \left.\frac{d\varphi_\kappa}{dz}\right|_{l-0}^{l+0} = -4\pi. \tag{73-9}$$

Các điều kiện biên với $z = 0$ có dạng:

$$\rho\varphi_\kappa\Big|_{-0}^{+0} = 0, \qquad \left.\frac{d\varphi_\kappa}{dz}\right|_{-0}^{+0} = 0. \tag{73-10}$$

Ta tìm nghiệm dưới dạng

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa &= Ae^{-\mu_1 z} && \text{với} \quad z > l, \\ \varphi_\kappa &= Be^{-\mu_1 z} + Ce^{\mu_1 z} && \text{với} \quad l > z > 0, \\ \varphi_\kappa &= De^{\mu_2 z} && \text{với} \quad z < 0. \end{aligned} \tag{73-11}$$

Ở đây

$$\mu_1^2 = \kappa^2 - k_1^2, \qquad \mu_2^2 = \kappa^2 - k_2^2$$

($k_1 = \omega/c_1$, $k_2 = \omega/c_2$), và đặt:

$$\begin{aligned} \mu &= +\sqrt{\kappa^2 - k^2}, \quad \text{với } \kappa > k \\ \mu &= -i\sqrt{k^2 - \kappa^2} \quad \text{với } \kappa < k \end{aligned} \tag{73-12}$$

Đẳng thức thứ nhất là cần thiết để nghiệm φ cần tìm không tăng đến vô hạn, còn đẳng thức thứ hai, để φ phải là một sóng phân kỳ. Các điều kiện (73-9) và (73-10) cho ta bốn phương trình xác định hệ số A, B, C, D. Phép tính đơn giản dẫn đến biểu thức sau:

$$\begin{aligned} B &= C\frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1}, & C &= \frac{2\pi}{\mu_1}e^{-\mu_1 l}, \\ D &= C\frac{2\mu_1\rho_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1}, & A &= B + Ce^{2\mu_1 l}. \end{aligned} \tag{73-13}$$

Khi $\rho_1 = \rho_2$, $c_1 = c_2$ (nghĩa là toàn không gian được lấp đầy bởi một môi trường) thì B bằng không và $A = C\ e^{2\mu_1 l}$; số hạng tương ứng trong φ

rõ ràng biểu diễn sóng trực tiếp (73-1); do đó sóng phản xạ mà ta quan tâm có dạng

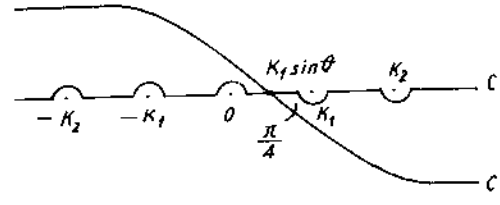
$$\varphi_1' = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} B(\kappa)\, e^{-\mu_1 z} H_0^{(1)}(\kappa R)\kappa\, d\kappa. \qquad (73\text{-}14)$$

Trong biểu thức này còn cần phải xác định đường lấy tích phân. Điểm kỳ dị $\kappa = 0$ sẽ được bao quanh (trong mặt phẳng biến phức κ), như đã nói, lên phía trên. Ngoài ra, biểu thức dưới dấu tích phân có các điểm kỳ dị (các điểm rẽ nhánh) $\kappa = \pm k_1, \pm k_2$ tại đó μ_1 và μ_2 triệt tiêu. Do các điều kiện (73-10) các điểm $+k_1$, $+k_2$ phải được bao quanh xuống phía dưới, còn các điểm $-k_1$, $-k_2$ lên phía trên.

Ta tiến hành nghiên cứu biểu thức đã thu được tại các khoảng cách lớn từ nguồn. Nếu thay hàm Hankel bằng biểu thức tiệm cận đã biết của nó, ta sẽ thu được

$$\varphi_1' = \int_C \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1(\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1)}\left(\frac{\kappa}{2i\pi R}\right)^{1/2} e^{-\mu_1(z+l)+i\kappa R} d\kappa. \qquad (73\text{-}15)$$

Hình 47 biểu diễn đường lấy tích phân C cho trường hợp $c_1 > c_2$. Tích phân có thể được tính bằng phương pháp điểm yên ngựa (*saddle - point method*, ND) đã biết. Số mũ



Hình 47

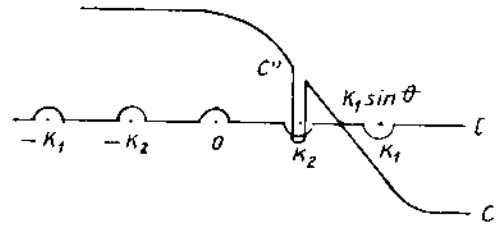
$$i\left[(z-l)\sqrt{k_1^2 - \kappa^2} + \kappa R\right]$$

có cực trị tại điểm, mà ở đó

$$\frac{\kappa}{\sqrt{k_1^2 - \kappa^2}} = \frac{R}{z+l} = \frac{r'\sin\theta}{r'\cos\theta} = \text{tg}\,\theta,$$

nghĩa là $\kappa = k_1\sin\theta$, θ là góc tới (xem hình 45). Nếu chuyển sang đường lấy tích phân C, là đường đi qua điểm đó dưới góc $\pi/4$ lập với trục hoành, ta tìm được công thức (73-2).

Còn đối với trường hợp $c_1 < c_2$ (nghĩa là $k_1 > k_2$), điểm $\kappa = k_1 \sin\theta$ nằm giữa các điểm k_2 và k_1, nếu $\sin\theta > k_2/k_1 = c_1/c_2 = \sin\theta_o$, nghĩa là nếu, $\theta > \theta_o$ (hình 45). Trong trường hợp này công tua C' còn phải chứa một vòng quanh điểm k_2, và ta còn phải thêm vào sóng phản xạ thông thường sóng φ_1'', xác định bởi tích phân (73-15) lấy trên vòng đó, (mà ta gọi là C'', hình 48). Đó chính là sóng bên. Tích phân này dễ dàng tính được, nếu điểm $k_1 \sin\theta$ không quá gần điểm k_2, nghĩa là nếu góc θ không quá gần góc phản xạ trong toàn phần θ_o [1].



Hình 48

Ở gần điểm $\kappa = k_2$ đại lượng μ_2 nhỏ; ta khai triển thừa số trước số mũ trong biểu thức dưới dấu tích phân của (73-15) theo các lũy thừa μ_2. Số hạng khai triển cấp không không có điểm kỳ dị với $\kappa = k_2$ và tích phân theo C'' bằng không. Do đó ta có

$$\varphi_1'' = -\int_{C''} \frac{2\mu_2\rho_1}{\mu_1^2\rho_2}\left(\frac{\kappa}{2i\pi r}\right)^{1/2} e^{-\mu_1(z+\zeta)+i\kappa R}\,d\kappa. \qquad (73\text{-}16)$$

Khai triển số mũ theo các lũy thừa của $\kappa - k_2$ và lấy tích phân theo vòng thẳng đứng C'' thì sau một phép tính đơn giản, ta thu được biểu thức sau cho thế của sóng bên

$$\varphi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp\{ik_1 r' \cos(\theta_o - \theta)\}}{r'^2 \rho_2 k_1^2 \left[\cos\theta_o \sin\theta \sin^3(\theta_o - \theta)\right]^{1/2}}. \qquad (73\text{-}17)$$

[1] Để nghiên cứu sóng bên trong toàn miền các góc θ, xem *L. Breskhovxki*. Tạp chí vật lý kỹ thuật, 1948, t. 18, tr. 455. Ở đó người ta cho cả số hạng khai triển tiếp theo của sóng phản xạ thông thường theo các lũy thừa của λ/R; ở đây ta có nhận xét là, với các góc θ gần θ_o (trong trường hợp $c_1 < c_2$), tỷ số giữa số hạng hiệu chính và số hạng cơ bản giảm theo khoảng cách như $(\lambda/R)^{1/4}$, mà không phải như λ/R.

Phù hợp với điều đã nói ở trên, các mặt sóng là các mặt nón

$$r' \cos(\theta - \theta_0) = R \sin\theta_0 + (z + l)\cos\theta_0 = \text{const.}$$

Dọc theo một hướng đã cho, biên độ của sóng giảm tỷ lệ nghịch với bình phương của khoảng cách r'. Ta cũng nhận thấy rằng, sóng này tắt trong trường hợp giới hạn $\lambda \to \infty$. Với $\theta \to \theta_0$ biểu thức (73-17) không còn áp dụng được nữa; thực tế, trong miền này biên độ đặc biệt giảm với khoảng cách như $r'^{-5/4}$.

§74. SỰ PHÁT ÂM

Một vật dao động trong chất lỏng gây ra một sự nén và dãn chất lỏng tuần hoàn quanh nó, và như vậy phát ra các sóng âm. Nguồn năng lượng mang bởi các sóng đó là động năng của vật chuyển động. Như vậy, có thể nói đến sự phát âm của các vật dao động.

Dưới đây, tại mọi nơi ta sẽ giả thiết rằng, vận tốc u của vật dao động nhỏ so với vận tốc âm. Vì $u \sim a\omega$ (a là biên độ dài của các dao động của vật), nên điều đó có nghĩa là $a << \lambda$ [1].

Trong trường hợp tổng quát của vật dao động tùy ý có hình dạng tùy ý, bài toán về sự phát sóng âm phải được giải như sau. Chọn thế vận tốc φ làm đại lượng cơ bản. Nó thỏa mãn phương trình sóng

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{74-1}$$

Trên mặt của vật, thành phần pháp tuyến của vận tốc chất lỏng phải bằng thành phần tương ứng của vận tốc **u** của vật:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n. \tag{74-2}$$

Tại các khoảng cách lớn đối với vật, sóng phải chuyển thành sóng cầu

[1] Biên độ của các dao động nói chung cũng được giả thiết là nhỏ so với các kích thước của vật, nếu không thế, chuyển động ở gần vật sẽ không phải là chuyển động thế (xem §9). Điều kiện này không là điều kiện bắt buộc, riêng đối với các dao động mạch động thuần túy, đối với các dao động này, nghiệm (74-7) dùng dưới đây thực tế là một hệ quả trực tiếp của phương trình liên tục.

phân kỳ. Nghiệm của phương trình (74-1), thỏa mãn các điều kiện biên đó và điều kiện tại vô cùng, xác định sóng âm do vật phát ra.

Ta khảo sát chi tiết hơn hai trường hợp giới hạn. Trước hết, giả thiết là, tần số của các dao động của vật rất lớn đến mức bước sóng phát ra rất nhỏ so với các kích thước l của vật:

$$\lambda << l \tag{74-3}$$

Khi đó, một mặt, có thể chia mặt của vật thành các phần có kích thước khá nhỏ để có thể được coi là phẳng, nhưng mặt khác, các đại lượng đó lại đủ lớn so với bước sóng. Khi đó ta có thể coi rằng, mỗi phần tử trong khi chuyển động phát ra một sóng phẳng, trong đó vận tốc chất lỏng đơn giản bằng thành phần pháp tuyến u_n của vận tốc phần tử mặt đã cho. Nhưng năng thông trung bình trong sóng phẳng bằng (xem §65) $c\rho\overline{v^2}$, trong đó v là vận tốc của chất lỏng ở trong sóng. Thay $v = u_n$ và lấy tích phân theo toàn bộ mặt của vật, ta đi tới kết quả là, năng lượng trung bình do vật phát ra trong một đơn vị thời gian dưới dạng các sóng âm, nghĩa là cường độ toàn phần của âm phát ra, bằng

$$I = c\rho\int\overline{u_n^2}df. \tag{74-4}$$

Nó không phụ thuộc vào tần số các dao động (với biên độ đã cho của vận tốc).

Bây giờ ta xét trường hợp giới hạn ngược lại, trong đó bước sóng phát ra lớn so với các kích thước của vật:

$$\lambda >> l \tag{74-5}$$

Khi đó, ở gần vật (tại các khoảng cách nhỏ so với bước sóng) ta có thể bỏ qua số hạng $c^{-2}(\partial^2\varphi/\partial t^2)$ ở trong phương trình tổng quát (74-1). Thực vậy, số hạng này có bậc của $\omega^2\varphi/c^2 \sim \varphi/\lambda^2$, trong khi đó các đạo hàm cấp hai đối với các tọa độ trong miền đang xét $\sim \varphi/l^2$.

Như vậy, ở gần vật chuyển động được xác định bởi phương trình Laplace $\Delta\varphi = 0$. Nhưng đó chính là phương trình xác định chuyển động thế của chất lỏng không nén được. Do đó, trong trường hợp đang xét ở gần vật chất lỏng chuyển động như một chất lỏng không nén được. Các sóng âm thực sự, nghĩa là các sóng nén và sóng dãn, chỉ xuất hiện tại các khoảng cách lớn đối với vật.

Tại các khoảng cách có bậc các kích thước của vật và nhỏ hơn, nghiệm cần tìm của phương trình $\Delta\varphi = 0$ không thể viết dưới dạng tổng quát và nó phụ thuộc vào dạng cụ thể của vật dao động. Còn đối với các khoảng cách lớn so với l, nhưng nhỏ so với λ (do đó phương trình $\Delta\varphi = 0$ còn áp dụng được) có thể tìm được dạng tổng quát của nghiệm, nếu chú ý rằng φ phải giảm với sự tăng của khoảng cách. Ta đã phân tích các nghiệm như thế của phương trình Laplace ở §11. Cũng như ở đấy, ta viết nghiệm dưới dạng tổng quát:

$$\varphi = -\frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\frac{1}{r} \tag{74-6}$$

(trong đó r là khoảng cách đến gốc tọa độ, được chọn tại một nơi nào đó trong vật). Khi đó điều quan trọng là các khoảng cách đang xét vẫn phải lớn so với các kích thước của vật. Chỉ vì lý do đó mà trong φ ta chỉ giới hạn ở các số hạng giảm kém nhanh nhất khi r tăng. Trong (74-6) ta đã giữ lại cả hai số hạng đã viết, nhớ rằng, số hạng thứ nhất không phải trong mọi trường hợp đều có mặt (xem dưới đây).

Ta xét xem trong những trường hợp nào thì số hạng này, $-a/r$, khác không. Ở §11, ta đã thấy rõ rằng, thế $-a/r$ dẫn tới sự có mặt của một dòng chất lỏng khác không qua một mặt bao quanh vật; dòng này bằng $4\pi\rho a$. Nhưng trong chất lỏng không nén được, một thông lượng như thế chỉ có thể tồn tại tùy thuộc vào sự biến thiên của thể tích toàn phần của chất lỏng chứa trong một mặt kín. Nói một cách khác, phải có sự biến thiên thể tích của vật, do đó chất lỏng có thể thoát ra ngoài thể tích đang xét của không gian, hay ngược lại bị "cuốn" vào thể tích đó. Như vậy, số hạng thứ nhất trong (74-6) có mặt trong những trường hợp khi vật phát sóng thực hiện những mạch động, làm cho thể tích của vật thay đổi.

Ta giả sử tình hình xảy ra như vậy, và xác định cường độ toàn phần của âm phát ra. Thể tích $4\pi a$ của chất lỏng đi qua một mặt kín, theo những lập luận đã nêu, phải bằng độ biến thiên của thể tích V của vật sau mỗi đơn vị thời gian, nghĩa là bằng đạo hàm dV/dt (thể tích V là hàm đã cho của thời gian):

$$4\pi a = V$$

Như vậy, tại các khoảng cách r thỏa mãn điều kiện $l << r << \lambda$, chuyển động chất lỏng được mô tả bởi hàm

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t)}{4\pi r}.$$

Mặt khác, tại các khoảng cách $r >> \lambda$ (ở trong vùng sóng) φ phải là một sóng cầu phân kỳ, nghĩa là phải có dạng

$$\varphi = -\frac{f(t - r/c)}{r}. \tag{74-7}$$

Do đó, ta đi tới kết quả là, sóng được phát ra tại mọi khoảng cách (lớn so với l) có dạng

$$\varphi = -\frac{\dot{V}(t - r/c)}{4\pi r}. \tag{74-8}$$

thu được với đối số t ở trong $\dot{V}(t)$ được thay bằng $t - r/c$.

Vận tốc $\mathbf{v} = \text{grad}\,\varphi$ tại mỗi điểm đều hướng theo bán kính vectơ và độ lớn của nó bằng $v = \partial\varphi/\partial r$. Khi lấy vi phân (74-8), ta chỉ cần lấy (với các $r >> \lambda$) đạo hàm của tử số; việc lấy vi phân mẫu số cho ta một số hạng có bậc cao hơn $1/r$, mà ta phải bỏ qua. Vì

$$\frac{\partial}{\partial r}\dot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{c}\ddot{V}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

nên ta thu được ($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{v} = \frac{\ddot{V}(t - r/c)}{4\pi c r}\mathbf{n}. \tag{74-9}$$

Cường độ âm phát ra, xác định bởi phương trình của vận tốc, ở đây không phụ thuộc vào phương phát âm, nghĩa là sự phát âm là đối xứng theo mọi phương. Giá trị trung bình của năng lượng toàn phần phát ra trong một đơn vị thời gian bằng

$$I = \rho c \oint \overline{v^2} df = \frac{\rho}{16 c \pi^2} \oint \frac{\overline{\ddot{V}^2}}{r^2} df.$$

trong đó, tích phân được lấy trên một mặt kín bao quanh gốc tọa độ. Chọn mặt đó là mặt cầu bán kính r và chú ý rằng, biểu thức dưới dấu tích phân chỉ phụ thuộc vào khoảng cách đến tâm, cuối cùng ta thu được:

$$I = \frac{\rho \overline{\ddot{V}^2}}{4\pi c}. \tag{74-10}$$

Đó là cường độ toàn phần của âm được phát ra. Ta nhận thấy rằng, nó được xác định bằng bình phương của đạo hàm cấp hai của thể tích vật theo thời gian.

Nếu vật thực hiện những dao động mạch động theo định luật điều hòa với tần số ω, thì đạo hàm cấp hai của thể tích theo thời gian tỷ lệ với tần số và biên độ vận tốc các dao động; còn trung bình của bình phương của nó thì tỷ lệ với bình phương tần số. Như vậy, cường độ của âm phát ra tỷ lệ với bình phương của tần số với một giá trị đã cho của biên độ vận tốc của các điểm trên mặt vật. Nếu cho trước biên độ của chính các dao động, thì biên độ vận tốc, đến lượt nó, sẽ tỷ lệ với tần số, do đó cường độ của âm phát ra sẽ tỷ lệ với ω^4.

Bây giờ ta xét sự phát âm của một vật dao động có thể tích không biến thiên. Ở trong (74-6), khi đó chỉ còn số hạng thứ hai mà ta sẽ viết dưới dạng

$$\varphi = \operatorname{div}\left(\mathbf{A}(t)\frac{1}{r}\right).$$

Cũng như trong trường hợp trước, ta kết luận rằng, dạng tổng quát của nghiệm tại mọi khoảng cách $r >> l$ là

$$\varphi = \operatorname{div}\frac{\mathbf{A}(t - r/c)}{r}.$$

Biểu thức này thực sự là nghiệm của phương trình sóng, điều này có thể thấy ngay được, vì hàm $\mathbf{A}(t - r/c)/r$ thỏa mãn phương trình sóng đó, và như vậy cả các đạo hàm của hàm này lấy theo tọa độ cũng thỏa mãn phương trình đó. Lấy đạo hàm riêng tử số một lần nữa, ta sẽ thu được (với các $r >> \lambda$):

$$\varphi = -\frac{\dot{\mathbf{A}}(t - r/c)\mathbf{n}}{cr}. \tag{74-11}$$

Để tính vận tốc $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, chỉ cần lấy vi phân $\mathbf{A}$ một lần nữa. Do đó, theo các quy tắc đã biết trong giải tích vectơ về phép lấy vi phân các hàm có đối số vô hướng, ta được:

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{A}(t - r/c)\mathbf{n}}{c^2 r}\nabla\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

và nếu thay $\nabla(t - r/c) = -\nabla r/c = -\mathbf{n}/c$, cuối cùng ta thu được:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{c^2 r}\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}}). \tag{74-12}$$

Cường độ của âm phát ra bây giờ tỷ lệ với bình phương của cosin góc giữa phương phát âm (phương của $\mathbf{n}$) và vectơ $\ddot{\mathbf{A}}$ (một sự phát âm như vậy gọi là *sự phát lưỡng cực*). Năng lượng toàn phần của âm phát ra được cho bởi tích phân

$$I = \frac{\rho}{c^3}\int\overline{\frac{(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}})^2}{r^2}}\,df.$$

Ta lại chọn mặt lấy tích phân là mặt cầu có bán kính r với các tọa độ cầu và trục cực hướng theo $\ddot{\mathbf{A}}$. Phép lấy tích phân đơn giản cho ta công thức cuối cùng để tính năng lượng phát ra toàn phần trong một đơn vị thời gian:

$$I = \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \tag{74-13}$$

Các thành phần của $\mathbf{A}$ là những hàm tuyến tính của các thành phần vận tốc $\mathbf{u}$ của vật (xem §11). Như vậy, cường độ âm phát ra ở đây là một hàm toàn phương của các đạo hàm cấp hai của các thành phần của vận tốc của vật theo thời gian.

Nếu vật thực hiện một dao động điều hòa với tần số ω thì giống như trường hợp trước, ta kết luận rằng, cường độ âm phát ra tỷ lệ với ω^4 đối với một giá trị đã cho của biên độ vận tốc. Nhưng nếu đã cho biên độ dài của các dao động của vật, thì biên độ của chính vận tốc tỷ lệ với tần số, do đó cường độ âm phát ra tỷ lệ với ω^6.

Bài toán về sự phát các sóng âm "trụ" bởi một hình trụ có tiết diện tùy ý, thực hiện các mạch động hay các dao động vuông góc với trục của

nó cũng được giải theo cách làm hoàn toàn tương tự. Ta viết ở đây các công thức tương ứng để áp dụng sau này.

Trước hết ta xét các dao động nhỏ mạch động của hình trụ, và giả sử $S = S(t)$ là diện tích biến thiên của tiết diện của nó. Tại các khoảng r đối với trục hình trụ sao cho $l << r << \lambda$ (l là các kích thước ngang của hình trụ), ta thu được tương tự (74-8)

$$\varphi = \frac{\dot{S}(t)}{2\pi} \ln fr, \tag{74-14}$$

trong đó $f(t)$ là một hàm của thời gian (hệ số của ln rf được chọn sao cho thu được giá trị đúng của dòng chất lỏng qua một mặt trụ đồng trục). Phù hợp với công thức cho thế của sóng trụ phân kỳ (số hạng thứ nhất của công thức (71-2)) bây giờ ta kết luận rằng, tại mọi khoảng cách $r >> l$ thế được xác định bởi biểu thức

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}}. \tag{74-15}$$

Khi $r \to 0$, số hạng chính của biểu thức này trùng với (74-14), và hàm $f(t)$ tự động được xác định (ta giả sử rằng, khi $t \to -\infty$ đạo hàm $\dot{S}(t)$ triệt tiêu đủ nhanh). Đối với các giá trị rất lớn của r (trong vùng sóng), miền các giá trị của $t - t' \sim r/c$ giữ vai trò cơ bản trong tích phân (74-15); do đó có thể đặt trong mẫu số của biểu thức dưới dấu tích phân:

$$(t-t')^2 - \frac{r^2}{c^2} \approx 2\frac{r}{c}\left(t - t' - \frac{r}{c}\right),$$

và thu được

$$\varphi = -\frac{c}{2\pi\sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t')dt'}{\sqrt{c(t-t') - r}}. \tag{74-16}$$

Cuối cùng, vận tốc bằng $v = \partial\varphi/\partial r$; để tiện cho việc lấy đạo hàm, trong tích phân ta thay $t - t' - r/c = \xi$:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{2r}} \int_0^{\infty} \frac{\dot{S}(t - r/c - \xi)d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

sau đó các giới hạn lấy tích phân không còn chứa r nữa. Ta không lấy đạo hàm thừa số $r^{-1/2}$ ở trước dấu tích phân, vì nó sẽ cho một số hạng có bậc cao hơn theo $1/r$. Lấy đạo hàm dưới dấu tích phân và trở lại biến t', ta thu được:

$$v = \frac{1}{2\pi\sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\ddot{S}(t')dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \qquad (74\text{-}17)$$

Cường độ âm phát ra được cho bởi tích $2\pi\, r\rho c\overline{v^2}$. Khác với trường hợp cầu, cần chú ý là, ở đây cường độ âm phát ra tại mỗi thời điểm đều được xác định bởi tiến trình của $S(t)$ trong khoảng thời gian từ $-\infty$ đến $t - r/c$.

Cuối cùng, đối với các dao động tịnh tiến của hình trụ vô hạn theo phương vuông góc với trục của nó, tại các khoảng cách $l << r << \lambda$ thế có dạng:

$$\varphi = \text{div}\,(\mathbf{A} \ln fr), \qquad (74\text{-}18)$$

trong đó $\mathbf{A}(t)$ được xác định bằng cách giải phương trình Laplace cho dòng chảy của chất lỏng không nén được bao quanh hình trụ. Từ đó ta lại kết luận rằng, tại mọi khoảng cách $r >> l$

$$\varphi = -\text{div} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\mathbf{A}(t')\,dt'}{\left[(t-t')^2 - r^2/c^2\right]^{1/2}}. \qquad (74\text{-}19)$$

Để kết luận, cần có nhận xét sau. Ở đây ta đã bỏ qua hoàn toàn ảnh hưởng của độ nhớt chất lỏng, và do đó ta đã coi chuyển động trong sóng phát ra là chuyển động thế. Nhưng thực tế chuyển động trong một lớp có bề dầy $(\nu/\omega)^{1/2}$ quanh một vật dao động (xem §24) không phải là chuyển động thế. Do đó, để có thể ứng dụng được tất cả các công thức đã thu được thì bề dầy của lớp đó phải nhỏ so với các kích thước l của vật:

$$(\nu/\omega)^{1/2} << l\,. \qquad (74\text{-}20)$$

Điều kiện này có thể không thực hiện được với các tần số hay các kích thước của vật quá bé.

BÀI TẬP

1. Xác định cường độ toàn phần của âm được phát ra bởi một quả cầu thực hiện những dao động tịnh tiến nhỏ (điều hòa) với tần số ω, và bước sóng, về độ lớn, so sánh được với bán kính R của quả cầu.

Giải. Ta viết vận tốc của quả cầu dưới dạng $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$; khi đó φ cũng phụ thuộc vào thời gian qua thừa số $e^{-i\omega t}$ và thỏa mãn phương trình $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, với $k = \omega/c$. Ta tìm nghiệm dưới dạng $\varphi = \mathbf{u}\nabla f(r)$ (gốc tọa độ được chọn là tâm của quả cầu vào thời điểm đã cho). Ta thu được cho f phương trình $(\mathbf{u}\nabla)(\Delta f + k^2 f) = 0$, từ đó $\Delta f + k^2 f = \text{const}$. Từ đó ta được: $f = A.\ e^{-i\omega t}/r$, với độ chính xác đến một hằng số cộng không quan trọng. Hằng số A được xác định từ điều kiện $\partial\varphi/\partial r = u_r$ với $r = R$, và cuối cùng ta được

$$\varphi = \mathbf{u}re^{ik(r-R)}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{ikr - 1}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Sự phát sóng ở đây có đặc tính lưỡng cực. Tại các khoảng cách đủ lớn đối với quả cầu, ta có thể bỏ qua đơn vị so với ikr và φ có dạng (74-11) với vectơ $\dot{\mathbf{A}}$ bằng

$$\dot{\mathbf{A}} = -ue^{ik(r-R)}R^3 \frac{i\omega}{2 - 2ikR - k^2R^2}.$$

Nếu chú ý rằng $\overline{(\mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{A}})^2} = \overline{|\dot{\mathbf{A}}|^2}/2$ ta thu được cho cường độ phát xạ toàn phần theo (74-13):

$$I = \frac{2\pi\rho}{3c^3}|\mathbf{u}_0|^2 \frac{R^6\omega^4}{4 + \omega^4R^4/c^4},$$

với $\omega R/c << 1$, biểu thức đó chuyển thành

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^3}|\mathbf{u}_0|^2\omega^4,$$

(kết quả này còn có thể thu được bằng cách thay trực tiếp vào trong (74-13) biểu thức $\mathbf{A} = R^3\mathbf{u}/2$ rút ra từ bài tập 1, §11). Với $\omega R/c >> 1$, ta có:

$$I = \frac{2\pi\rho c}{3}R^2|\mathbf{u}_0|^2$$

phù hợp với công thức (74-4).

Lực cản do chất lỏng tác dụng lên quả cầu thu được bằng cách lấy tích phân hình chiếu các áp lực ($p' = -\rho\dot{\varphi}'|_{r=R}$) lên phương $\mathbf{u}$ trên toàn mặt cầu và bằng

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3}\rho\omega R^3\mathbf{u}\frac{-k^3R^3 - i(2 + k^2R^2)}{4 + k^4R^4}$$

(về ý nghĩa của lực cản phức, xem ở cuối §24).

2. Cũng bài tập trên nếu bán kính R của quả cầu có bậc của $(\nu/\omega)^{1/2}$,(nhưng đồng thời $\lambda >> R$).

Giải. Nếu các kích thước của vật không lớn quá so với $(\nu/\omega)^{1/2}$, thì để xác định sóng phát ra, người ta cần xuất phát không phải từ phương trình $\Delta\varphi = 0$, mà từ phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt không nén được. Nghiệm tương ứng cho một quả cầu được xác định bởi các công thức (1) và (2) của bài tập 5, §24. Khi chuyển sang các khoảng cách lớn, số hạng thứ nhất ở trong (1), là số hạng tắt theo hàm số mũ với r, có thể được bỏ đi. Còn số hạng thứ hai dẫn đến vận tốc

$$\mathbf{v} = -b(\mathbf{u}\nabla)\nabla\frac{1}{r}.$$

So sánh với (74-6), ta nhận được

$$\mathbf{A} = -b\mathbf{u} = \frac{R^3}{2}\left[1 - \frac{3}{(i-1)\kappa} - \frac{3}{2i\kappa^2}\right]\mathbf{u},$$

trong đó $\kappa = R(\omega/2\nu)^{1/2}$ nghĩa là $\mathbf{A}$ khác với biểu thức tương ứng cho một chất lỏng lý tưởng ở thừa số giữa các dấu ngoặc. Cuối cùng ta thu được

$$I = \frac{\pi\rho R^6}{6c^2}\omega^4\left(1 + \frac{3}{\kappa} + \frac{9}{2\kappa^2} + \frac{9}{2\kappa^3} + \frac{9}{2\kappa^4}\right)|\mathbf{u}_0|^2.$$

Với $\kappa >> 1$, biểu thức này chuyển thành công thức đã nêu ở bài tập 1, và với $\kappa << 1$, ta thu được

$$I = \frac{3\pi\rho R^6\nu^2}{2c^3}\omega^2|\mathbf{u}_0|^2,$$

nghĩa là cường độ phát không tỷ lệ với lũy thừa bốn, mà tỷ lệ với lũy thừa bậc hai của tần số.

3. Xác định cường độ phát âm bởi quả cầu thực hiện những dao động mạch động nhỏ (điều hòa), có tần số tùy ý.

Giải. Ta tìm sóng âm dưới dạng

$$\varphi = \frac{au}{r}e^{ik(r-R)}$$

(R là bán kính của quả cầu ở cân bằng) và xác định hằng số a từ điều kiện

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = u = u_0 e^{-i\omega t},$$

trong đó u là vận tốc xuyên tâm của các điểm trên mặt cầu:

$$a = \frac{R^2}{ikR - 1}.$$

Cường độ phát âm

$$I = 2\pi\rho c|u_o|^2 \frac{k^2R^4}{1+k^2R^2},$$

Với $kR << 1$

$$I = \frac{2\pi\rho}{c}\omega^2R^4|u_o|^2,$$

phù hợp với (74-10), và với $kR >> 1$

$$I = 2\pi\rho cR^2|u_o|^2,$$

phù hợp với (74-14).

4. Xác định sóng phát ra bởi quả cầu (bán kính R) thực hiện những dao động mạch động nhỏ; vận tốc xuyên tâm của các điểm trên mặt nó là một hàm tùy ý của thời gian $u(t)$.

Giải. Nghiệm được tìm dưới dạng $\varphi = f(t')/r$, trong đó $t' = t - (r - R)/c$, và f được xác định từ điều kiện biên $\partial\varphi/\partial r\big|_{r=R} = u(t)$, điều kiện này đưa đến phương trình

$$\frac{df}{dt} + \frac{cf(t)}{R} = -R\,c\,u(t).$$

Nếu giải phương trình bậc nhất này và trong nghiệm thay t bằng t', ta sẽ thu được

$$\varphi(r,t) = -\frac{cR}{r}e^{-ct'/R}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)\,e^{c\tau/R}d\tau. \qquad (1)$$

Nếu các dao động của quả cầu ngừng, chẳng hạn, ở thời điểm $t = 0$ (nghĩa là $u(\tau) = 0$ với $\tau > 0$), thì khi đó tại khoảng cách r so với tâm, bắt đầu từ thời điểm $t = (r - R)/c$ thế với tính cách là hàm của thời gian sẽ có dạng $\varphi = \text{const}\cdot e^{-ct/R}$, nghĩa là chuyển động tắt theo hàm mũ.

Gọi T là khoảng thời gian, mà trong đó vận tốc $u(t)$ thay đổi đáng kể. Nếu $T >> R/c$ (nghĩa là nếu bước sóng âm phát ra $\lambda \sim cT >> R$), thì trong (1) có thể đưa ra ngoài dấu tích phân thừa số biến thiên chậm $u(\tau)$ và thay nó bằng $u(t')$. Khi đó tại các khoảng cách $r >> R$, ta thu được:

$$\varphi = -\frac{R^2}{r}u\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

Kết quả này trùng với công thức (74-8). Còn nếu $T << R/c$, thì bằng cách tương tự, ta thu được:

$$\varphi = -\frac{cR}{t}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)\,d\tau, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{R}{r}u(t'),$$

phù hợp với công thức (74-4).

5. Xác định chuyển động xuất hiện trong một chất lỏng lý tưởng nén được khi một quả cầu bán kính R thực hiện một chuyển động tịnh tiến tùy ý ở trong chất lỏng đó (vận tốc của chuyển động nhỏ so với vận tốc âm).

Giải. Ta tìm nghiệm dưới dạng:

$$\varphi = \operatorname{div} \frac{\mathbf{f}(t')}{r} \tag{1}$$

(trong đó r là khoảng cách tính từ gốc tọa độ, được chọn trùng với tâm của quả cầu tại thời điểm $t' = t - (r - R)/c$; vì vận tốc $\mathbf{u}$ của quả cầu nhỏ so với vận tốc âm, nên có thể bỏ qua hiệu ứng của sự dịch chuyển gốc tọa độ).Vận tốc chất lỏng bằng:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi = \frac{3(\mathbf{fn})\mathbf{n} - \mathbf{f}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{f}'\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{f}'}{cr^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{nf}'')}{c^2 r}. \tag{2}$$

($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương $\mathbf{r}$; dấu phẩy ký hiệu cho việc lấy đạo hàm của $\mathbf{f}$ theo đối số của nó). Điều kiện biên có dạng $v_r = \mathbf{u}\,\mathbf{n}$ với $r = R$, từ đó

$$\mathbf{f}''(t) + \frac{2c}{R}\mathbf{f}'(t) + \frac{2c^2}{R^2}\mathbf{f}(t) = Rc^2\mathbf{u}(t).$$

Nếu giải phương trình này bằng phương pháp biến thiên các hằng số, ta thu được cho $\mathbf{f}(t)$ biểu thức tổng quát:

$$\mathbf{f}(t) = cR^2 e^{-ct/R} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau) \sin \frac{c(t-\tau)}{R} e^{\tau c/R} d\tau \tag{3}$$

Khi thay vào trong (1), cần viết t' thay cho t. Chọn giới hạn dưới là $-\infty$, để cho khi $t = -\infty$ thì $f = 0$.

6. Một quả cầu bán kính R bắt đầu chuyển động ở thời điểm $t = 0$ với vận tốc $\mathbf{u}_0$ không đổi. Xác định cường độ âm được phát ra tại thời điểm bắt đầu chuyển động.

Giải. Trong công thức (3) của bài tập 5, nếu đặt $\mathbf{u}(\tau) = 0$ với $\tau < 0$ và $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0$ với $\tau > 0$ và thay vào trong công thức (2) (trong công thức này chỉ giữ lại số hạng cuối, là số hạng giảm kém nhanh nhất với khoảng cách), ta tìm được vận tốc chuyển động của chất lỏng ở xa quả cầu:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{n}(\mathbf{nu}_0)\frac{R\sqrt{2}}{r} e^{-ct'/R} \sin\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(trong đó $t' > 0$). Cường độ toàn phần của âm phát ra giảm với thời gian theo định luật

$$I = \frac{8\pi}{3} c\rho R^2 u_0^2 e^{-2ct'/R} \sin^2\left(\frac{ct'}{R} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Năng lượng được phát ra trong toàn bộ thời gian sẽ bằng

$$\frac{\pi}{3}\rho R^3 u_o^2.$$

7. Xác định cường độ của âm phát ra bởi một hình trụ vô hạn (bán kính R) thực hiện những dao động mạch động điều hòa, bước sóng $\lambda >> R$.

Giải. Theo công thức (74-14), trước hết ta nhận thấy rằng, tại những khoảng cách $r << \lambda$ (trong các bài tập 7 và 8, r là ký hiệu khoảng cách tính từ trục của hình trụ), thế φ bằng

$$\varphi = Ru \ln kr$$

trong đó $u = u_o e^{-i\omega t}$ là vận tốc của các điểm ở trên mặt hình trụ. So sánh với các công thức (71-7) và (71-8), bây giờ ta nhận thấy rằng, tại các khoảng cách lớn thế sẽ có dạng

$$\varphi = -Ru\sqrt{\frac{i\pi}{2kr}}\, e^{ikr}.$$

Từ đó vận tốc bằng

$$\mathbf{v} = Ru\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}\, \mathbf{n} e^{ikr},$$

($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị vuông góc với trục của hình trụ) và cường độ của âm phát ra (trên đơn vị độ dài của hình trụ)

$$I = \frac{\pi^2}{2}\rho\omega R^2 |u_o|^2.$$

8. Xác định cường độ của âm phát ra bởi một hình trụ thực hiện những dao động điều hòa tịnh tiến vuông góc với trục của nó.

Giải. Tại các khoảng cách $r << \lambda$, ta có:

$$\varphi = -\text{div}\,(R^2 \mathbf{u} \ln kr)$$

(xem công thức (74-18) và bài tập 3, §10). Từ đó ta kết luận rằng, tại các khoảng cách lớn

$$\varphi = R^2\sqrt{\frac{i\pi}{2k}}\,\text{div}\frac{e^{ikr}\mathbf{u}}{\sqrt{r}} = -R^2(\mathbf{un})\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}\, e^{ikr},$$

từ đó vận tốc bằng

$$\mathbf{v} = -kR^2\sqrt{\frac{i\pi k}{2r}}\,\mathbf{n}(\mathbf{un})e^{ikr}.$$

Cường độ phát âm tỷ lệ với bình phương của cosin góc lập bởi các phương dao động với phương âm phát ra. Cường độ toàn phần bằng:

$$I = \frac{\pi^2}{4c^2}\rho\omega^3 R^4 |\mathbf{u}_o|^2.$$

9. Xác định cường độ của âm phát ra bởi một mặt phẳng có nhiệt độ dao động tuần hoàn; tần số dao động $\omega << c^2/\chi$, trong đó χ là độ dẫn nhiệt độ của chất lỏng.

Giải. Giả sử $T_0' e^{-i\omega t}$ là phần biến thiên của nhiệt độ ở trên mặt. Các dao động này của nhiệt độ tạo ra trong chất lỏng một sóng nhiệt tắt dần (52.15):

$$T' = T_0' e^{-i\omega t} e^{-(1-i)x\sqrt{\omega/2\chi}\,x},$$

và do đó làm cho mật độ chất lỏng cũng dao động:

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' = -\rho\beta T',$$

trong đó β là hệ số dãn nở vì nhiệt độ. Đến lượt mình, nó lại gây ra một chuyển động được xác định bởi phương trình liên tục:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -i\omega\rho\beta T'.$$

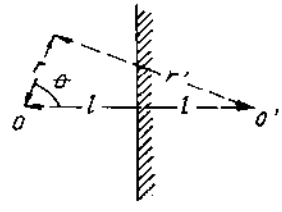
Trên mặt rắn, vận tốc $v_x = v = 0$ và khi đi ra xa mặt này thì nó tiến đến giới hạn:

$$v = -i\omega\beta \int_0^\infty T' dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \beta\sqrt{\omega\chi}\; T_0' e^{-i\omega t}.$$

Giá trị này đạt được tại các khoảng cách $\sim (\chi/\omega)^{1/2}$ nhỏ hơn so với c/ω và được dùng làm điều kiện biên cho sóng âm xuất hiện. Từ đó ta rút ra được cường độ của âm phát ra từ một cm^2 của mặt:

$$I = \frac{1}{2} c\rho\beta^2\omega\chi |T_0'|^2.$$

10. Một nguồn điểm, phát ra với một sóng cầu, đặt cách một thành rắn một khoảng cách l, thành này phản xạ âm hoàn toàn và bao một nửa không gian chứa đầy chất lỏng. Xác định tỷ số giữa cường độ toàn phần của âm do nguồn phát ra và cường độ âm sẽ thu được trong toàn bộ môi trường vô hạn, và xác định cả sự phụ thuộc của chuyển động vào phương tại các khoảng cách lớn tính từ nguồn.



Hình 49

Giải. Tập hợp các sóng phát ra và sóng phản xạ bởi thành rắn được mô tả bởi nghiệm của phương trình sóng, nghiệm này thỏa mãn điều kiện đòi hỏi vận tốc pháp tuyến $v_n = \partial\varphi/\partial n$ ở trên thành phải bằng không. Một nghiệm như thế có dạng

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) e^{-i\omega t} .$$

(để ngắn gọn, ta bỏ đi thừa số không đổi), trong đó r là khoảng cách tính từ nguồn âm O (hình 49), còn r' là khoảng cách tính từ điểm O' đối xứng với O qua mặt của thành. Tại các khoảng cách lớn tính từ nguồn, ta có: $r' \approx r - 2l\cos\theta$, do đó

$$\varphi = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \cdot \left(1 + e^{-2ilk\cos\theta} \right).$$

Sự phụ thuộc của cường độ âm phát ra vào phương được xác định ở đây bởi thừa số $\cos^2(kl\cos\theta)$.

Để xác định cường độ toàn phần của âm phát ra, ta lấy tích phân năng thông

$$\overline{\mathbf{q}} = \overline{p'\mathbf{v}} = -\overline{\rho\dot{\varphi}\nabla\varphi} .$$

[xem (65-4)] theo mặt cầu có bán kính nhỏ tùy ý, tâm đặt tại O. Ta thu được

$$2\pi\rho k\omega \left(1 + \frac{\sin 2kl}{2kl} \right) .$$

Trong trường hợp môi trường vô hạn, ta sẽ có một sóng cầu thuần túy $\varphi = e^{i(kr-\omega t)}/r$ với năng thông toàn phần là $2\pi\rho k\omega$. Như vậy, tỷ số cần tìm giữa các cường độ bằng

$$1 + \frac{\sin 2kl}{2kl} .$$

11. Cũng bài tập trên, nhưng trong chất lỏng giới hạn bởi mặt tự do.

Giải. Trên mặt tự do ta phải có điều kiện $p' = -\rho\dot{\varphi} = 0$; trong sóng đơn sắc, điều kiện đó tương đương với đòi hỏi $\varphi = 0$. Nghiệm tương ứng của phương trình sóng có dạng

$$\varphi = \left(\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \right) e^{-i\omega t} .$$

Tại các khoảng cách lớn tính từ nguồn, cường độ phát âm được xác định bởi thừa số $\sin^2(kl\cos\theta)$.

Tỷ số cần tìm giữa các cường độ bằng

$$1 - \frac{\sin 2kl}{2kl} .$$

§75. SỰ KÍCH THÍCH ÂM BỞI TÍNH CHẢY RỐI

Những mạch động chảy rối của vận tốc cũng là nguồn kích thích âm trong thể tích chất lỏng bao quanh. Trong tiết này sẽ trình bày lý thuyết

tổng quát về hiện tượng đó (*M.J. Lighthill,* 1952). Sẽ khảo sát tình huống khi tính chảy rối chiếm một thể tích hữu hạn V_0 bao bởi một thể tích vô hạn chất lỏng đứng yên. Khi đó bản thân tính chảy rối được khảo sát trong khuôn khổ của lý thuyết chất lỏng không nén được – ta bỏ qua sự biến thiên của mật độ gây bởi các mạch động; điều này có nghĩa là vận tốc chuyển động chảy rối được giả thiết là nhỏ so với vận tốc âm (như đã giả thiết trong toàn bộ chương III).

Ta bắt đầu từ việc rút ra phương trình tổng quát, phương trình này, ngoài việc xét đến chuyển động trong các sóng âm, cũng xét đến cả chuyển động của chất lỏng trong miền rối. Nét khác đặc biệt so với cách rút ra đã tiến hành ở §64 chỉ bao gồm ở chỗ, phải giữ lại số hạng phi tuyến $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ – mặc dù vận tốc v nhỏ so với c, nhưng lớn so với vận tốc chất lỏng trong sóng âm. Do đó thay cho (64-3) ta viết:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho_o}\nabla p' = 0.$$

Lấy div phương trình này và dùng phương trình (64-5)

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_o c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

ta thu được:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_o \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right).$$

Dựa vào phương trình liên tục div $\mathbf{v} = 0$ (tính chảy rối được coi như không nén được !) có thể biến đổi vế phải của phương trình này: có thể đưa dấu lấy đạo hàm theo x_k ra khỏi dấu móc. Cuối cùng, ta viết được:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \rho_o \frac{\partial^2 T_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad T_{ik} = v_i v_k \ , \tag{75-1}$$

(lại bỏ chỉ số ρ_o). Bên ngoài miền rối, biểu thức trong vế phải của phương trình này là đại lượng nhỏ bậc hai và có thể được bỏ đi, do đó ta trở lại phương trình lan truyền sóng âm. Còn vế phải, khác không trong thể tích V_o, giữ vai trò nguồn âm. Trong thể tích này $\mathbf{v}$ là vận tốc của chuyển động rối.

Phương trình (75-1) – loại phương trình các thế trễ. Nghiệm của phương trình này mô tả sự phát âm từ nguồn có dạng:

$$p'(\mathbf{r},t)=\frac{\rho}{4\pi}\int\left.\frac{\partial^2 T_{ik}(\mathbf{r}_1,t)}{\partial x_{1i}\partial x_{1k}}\right|_{t-R/c}\frac{dV_1}{R}, \qquad (75\text{-}2)$$

(xem II, §62). Ở đây $\mathbf{r}$ là bán kính vectơ của điểm quan sát, $\mathbf{r}_1$ là bán kính vectơ của điểm chạy trong miền lấy tích phân, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$; biểu thức dưới dấu tích phân được lấy tại thời điểm "trễ" $t - R/c$. Việc lấy tích phân (75-2) thực tế chỉ được tiến hành trong thể tích V_o, trong đó biểu thức dưới dấu tích phân khác không.

Phần năng lượng cơ bản của chuyển động rối được chứa trong các tần số $\sim u/l$ ứng với cỡ cơ bản l của tính chảy rối; u là vận tốc đặc trưng của chuyển động (xem §33). Hiển nhiên là cả các tần số cơ bản trong phổ các sóng âm phát ra cũng là các tần số như thế. Còn các bước sóng tương ứng $\lambda \sim cl/u >> l$.

Để xác định cường độ phát âm, chỉ cần khảo sát trường âm tại các khoảng cách lớn so với bước sóng λ (trong "vùng sóng"), các khoảng cách này đều lớn so với các kích thước dài của nguồn – của miền rối [1]. Thừa số $1/R$ trong biểu thức dưới dấu tích phân trong vùng này có thể được thay thế bằng $1/r$ và đưa ra khỏi dấu tích phân (r – khoảng cách của các điểm quan sát đến gốc tọa độ, được chọn tại một nơi nào đó ở bên trong nguồn); như thế chúng ta bỏ qua các số hạng giảm nhanh hơn $1/r$, và chúng vẫn không đóng góp gì vào cường độ của sóng chạy ra vô cùng. Như vậy

$$p'(\mathbf{r},t)=\frac{\rho}{4\pi r}\int\left.\frac{\partial^2 T_{ik}(\mathbf{r}_1,t)}{\partial x_{1i}\partial x_{1k}}\right|_{t-R/c}dV_1. \qquad (75\text{-}3)$$

Các đạo hàm trong biểu thức dưới dấu tích phân trước khi lấy giá trị tại $t - R/c$, nghĩa là chỉ theo đối số thứ nhất của các hàm $T_{ik}(\mathbf{r}_1, t)$. Có thể thay các đạo hàm này bằng các đạo hàm của các hàm $T_{ik}(\mathbf{r}_1, t - R/c)$ lấy theo hai đối số, mỗi lần trừ vào chúng các đạo hàm lấy theo đối số thứ

[1] Khi nói đến các bậc độ lớn, ta không phân biệt sự khác nhau giữa các cỡ cơ bản l và các kích thước của miền rối, mặc dù các kích thước của miền rối này có thể lớn hơn rõ rệt so với cỡ cơ bản.

hai. Các đạo hàm thứ nhất là các div toàn phần, và các tích phân của chúng, khi được biến đổi thành các tích phân lấy theo các mặt kín ở xa, sẽ bằng không, vì bên ngoài miền rối $T_{ik} = 0$. Còn các đạo hàm lấy theo các tọa độ "chạy" $\mathbf{r}_1$, là thành phần của đối số $t - R/c$, có thể được thay bằng các đạo hàm lấy theo các tọa độ của miền quan sát $\mathbf{r}$, vì $\mathbf{r}$ và $\mathbf{r}_1$ chỉ tham gia vào dưới dạng hiệu $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$. Như vậy ta đi tới biểu thức

$$p'(\mathbf{r},t) = \frac{\rho}{4\pi r}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\int T_{ik}\left(\mathbf{r}_1, t - \frac{R}{c}\right)dV_1. \qquad (75\text{-}4)$$

Thời gian $t - R/c$ khác với thời gian $t - r/c$ một khoảng $\sim l/c$. Nhưng một khoảng thời gian như thế là nhỏ so với các chu kỳ l/u của các mạch động rối cơ bản. Điều này cho phép thay đổi số $t - R/c$ trong biểu thức dưới dấu tích phân bằng $t - r/c \equiv \tau$ [1]. Sau đó tiến hành lấy vi phân dưới dấu tích phân và để ý rằng, $\partial r/\partial x_i = n_i$ ($\mathbf{n}$ là vectơ đơn vị theo phương $\mathbf{r}$), ta thu được:

$$p'(\mathbf{r},t) = \frac{\rho}{4\pi c^2 r} n_i n_k \int \ddot{T}_{ik}(\mathbf{r}_1, \tau)\, dV_1, \qquad (75\text{-}5)$$

ở đây dấu chấm có nghĩa là lấy vi phân theo τ.

Cũng như mọi tenxơ đối xứng có vết khác không, tenxơ $\ddot{T}_{ik}$ có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\ddot{T}_{ik} = \left(\ddot{T}_{ik} - \frac{1}{3}\ddot{T}_{ll}\delta_{ik}\right) + \frac{1}{3}\ddot{T}_{ll}\delta_{ik} \equiv Q_{ik} + Q\delta_{ik}, \qquad (75\text{-}6)$$

trong đó Q_{ik} là tenxơ "bất khả quy" với vết bằng không, còn Q là một vô hướng. Khi đó sóng cầu (75-5) tách thành tổng hai số hạng

$$p'(\mathbf{r},t) = \frac{\rho}{4\pi c^2 r}\left\{\int Q(\mathbf{r}_1, \tau)\, dV_1 + n_i n_k \int Q_{ik}(\mathbf{r}_1, \tau)\, dV_1\right\}, \qquad (75\text{-}7)$$

trong đó số hạng thứ nhất biểu diễn sự phát âm của nguồn đơn cực, còn số hạng thứ hai biểu diễn sự phát âm của nguồn tứ cực.

[1] Khi đó ta không xét thành phần phổ của âm phát ra, mà giới hạn ở các tần số cơ bản xác định cường độ toàn phần. Cũng cần để ý rằng, không tiến hành sự thay thế nói trên ở giai đoạn biến đổi sớm hơn, trong (75-3), vì tích phân sẽ bằng không.

Ta tính cường độ phát âm toàn phần. Mật độ năng thông âm trong vùng sóng tại mỗi điểm định hướng dọc theo phương **n**, về độ lớn bằng $q = p'^2/c\rho$. Cường độ toàn phần thu được bằng cách nhân q với $r^2 do$ và lấy tích phân theo tất cả các phương của **n** [1]. Nhưng thực tế ta không quan tâm đến giá trị mạch động tức thời của cường độ, mà đến giá trị trung bình của nó theo thời gian (khi đó tính chảy rối được giả thiết là "dừng"). Phép tính sau cùng này được thực hiện bằng cách viết bình phương các tích phân dưới dạng các tích phân hai lớp và tiến hành lấy trung bình (được ký hiệu bằng dấu ngoặc góc) dưới dấu các tích phân. Kết quả ta thu được:

$$I = \frac{\rho_o}{60\pi c^5} \iint \langle Q(\mathbf{r}_1, \tau)\, Q(\mathbf{r}_2, \tau) \rangle\, dV_1\, dV_2 + \\ + \frac{\rho_o}{30\pi c^5} \iint \langle Q_{ik}(\mathbf{r}_1, \tau)\, Q_{ik}(\mathbf{r}_2, \tau) \rangle\, dV_1 dV_2 \tag{75-8}$$

Các tích "chéo nhau" của hai số hạng trong (75-7) khi lấy tích phân theo các hướng biến mất, do đó cường độ toàn phần bằng tổng các cường độ phát âm đơn cực và phát âm tứ cực. Nói chung, cả hai phần này trong trường hợp đang xét đều có cùng bậc độ lớn.

Ta ước lượng bậc độ lớn này (nói đúng hơn là tìm hiểu sự phụ thuộc của l vào các thông số của chuyển động rối). Các thành phần của tenxơ $T_{ik} \sim u^2$, trong đó u là vận tốc đặc trưng của chuyển động chảy rối. Mỗi lần lấy vi phân theo thời gian đều nhân bậc độ lớn này với tần số đặc trưng u/l. Do đó $Q \sim u^4/l^2$. Sự tương quan (*correlation*, ND) giữa các vận tốc mạch động rối tại các điểm khác nhau trải rộng tới các khoảng cách $\sim l$. Do đó lượng năng lượng do một đơn vị khối lượng của môi trường rối phát ra dưới dạng âm trong một đơn vị thời gian bằng:

$$\varepsilon_{âm} \sim \frac{1}{c^5} \frac{u^8}{l^4} l^3 = \frac{u^8}{c^5 l} \tag{75-9}$$

---

[1] Việc lấy tích phân theo các phương của **n** được thực hiện bằng các biểu thức sau cho các giá trị trung bình của các tích hai hay bốn thành phần của vectơ **n**:

$$\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}, \quad \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}).$$

Như vậy, cường độ phát âm tỷ lệ với lũy thừa tám của vận tốc chuyển động rối.

Chuyển động rối được duy trì nhờ công suất cung cấp từ một nguồn bên ngoài nào đó. Trong trường hợp "dừng", công suất này trùng với năng lượng tiêu tán trong một đơn vị thời gian. Tính cho một đơn vị khối lượng, năng lượng này bằng: $\varepsilon_{tt} \sim u^3/l$ [1]. Hiệu suất âm học có thể được xác định như tỷ số giữa công suất phát âm và công suất tiêu tán.

$$\varepsilon_{âm}/\varepsilon_{tt} \sim \left(\frac{u}{c}\right)^5 \qquad (75\text{-}10)$$

Lũy thừa bậc cao của tỷ số u/c ở đây dẫn tới kết quả là, với $u/c \ll 1$, hiệu suất của tính chảy rối với tính cách là nguồn phát âm sẽ thấp.

§76. NGUYÊN LÝ TƯƠNG HỖ

Khi rút ra các phương trình sóng âm ở §64 ta đã giả thiết rằng, sóng lan truyền trong một môi trường đồng chất. Đặc biệt, mật độ ρ_0 của môi trường và vận tốc c của âm trong môi trường đó đều được coi là các đại lượng không đổi. Để thu được một số hệ thức tổng quát ứng dụng được cho môi trường không đồng chất bất kỳ, trước hết, ta rút ra phương trình lan truyền của âm trong một môi trường như thế.

Ta viết phương trình liên tục dưới dạng

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Vì sự lan truyền của âm là đoạn nhiệt, nên ta có

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla p\right).$$

và phương trình liên tục trở thành

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

[1] Xem (33-1). Ở đây ta không phân biệt u và Δu; việc chọn hệ quy chiếu để xét chuyển động được xác định bởi sự kiện là, bên ngoài miền rối chất lỏng được giả thiết là đứng yên.

Như thường lệ, ta đặt $\rho = \rho_0 + \rho'$, trong đó bây giờ ρ_0 là hàm đã cho của các tọa độ. Đối với áp suất, thì trong $p = p_0 + p'$ cũng như trước, ta phải có: $p_0 = \text{const}$, vì trong cân bằng, áp suất phải không đổi trong toàn bộ môi trường (dĩ nhiên, khi không có trường ngoài). Như vậy, với độ chính xác đến các đại lượng nhỏ bậc hai ta có:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Phương trình này có cùng dạng với (64-5), nhưng hệ số $\rho_0 c^2$ trong phương trình đó là hàm của tọa độ. Đối với phương trình Euler, cũng như ở §64, ta có:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0}.$$

Khử v khỏi hai phương trình đó (và bỏ chỉ số ở ρ_0), cuối cùng ta thu được phương trình cho sự truyền âm trong môi trường không đồng chất:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} - \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0. \tag{76-1}$$

Nếu sóng là đơn sắc với tần số ω, thì $\ddot{p}' = -\omega^2 p'$, do đó

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p' = 0. \tag{76-2}$$

Ta xét một sóng âm được phát ra bởi một nguồn có kích thước nhỏ, thực hiện những dao động mạch động (như đã thấy ở §74, một sự phát âm như thế là dẳng hướng). Gọi A là điểm đặt của nguồn, và $p_A(B)$ là áp suất p' tại điểm B [1] ở trong sóng do nguồn phát ra. Nếu chính nguồn này được đặt tại điểm B, thì áp suất gây tại A sẽ được ký hiệu tương ứng bằng $p_B(A)$. Ta rút ra hệ thức giữa $p_A(B)$ và $p_B(A)$.

Muốn vậy, ta dùng phương trình (76-2) và áp dụng nó một lần cho sự phát âm của nguồn đặt tại A, rồi lần khác áp dụng cho sự phát âm của nguồn đặt tại B:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla p'_A}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_A = 0, \qquad \operatorname{div} \frac{\nabla p'_B}{\rho} + \frac{\omega^2}{\rho c^2} p'_B = 0.$$

[1] Các kích thước của nguồn phải nhỏ so với khoảng cách giữa A và B, cũng như so với bước sóng.

Nhân phương trình thứ nhất với p'_B, phương trình thứ hai với p'_A rồi trừ phương trình thứ hai vào phương trình thứ nhất, ta thu được:

$$p'_B \operatorname{div}\frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \operatorname{div}\frac{\nabla p'_B}{\rho} = \operatorname{div}\left(\frac{p'_B \nabla p'_A}{\rho} - \frac{p'_A \nabla p'_B}{\rho}\right) = 0$$

Lấy tích phân phương trình này theo thể tích chứa giữa mặt kín C ở xa vô cùng và hai mặt cầu nhỏ C_A và C_B, bao lần lượt các điểm A và B. Tích phân khối biến thành tích phân mặt lấy trên ba mặt cầu đó, và tích phân lấy trên C bằng không, vì ở vô cùng, trường âm biến mất. Như vậy ta thu được:

$$\int_{C_A + C_B} \left(\frac{p'_B \nabla p'_A}{\rho} - \frac{p'_A \nabla p'_B}{\rho}\right) d\mathbf{f} = 0. \qquad (76\text{-}3)$$

Bên trong mặt cầu nhỏ C_A áp suất p'_A trong sóng gây bởi nguồn đặt tại A biến thiên nhanh với khoảng cách tính từ A, do đó gradiên $\nabla p'_A$ lớn. Còn áp suất p'_B gây bởi nguồn đặt tại B ở trong miền gần điểm A, khá xa nguồn B, là một hàm biến thiên chậm của các tọa độ, do đó gradiên của nó $\nabla p'_B$ tương đối nhỏ. Với bán kính của mặt cầu C_A đủ nhỏ, do đó ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai dưới dấu tích phân so với số hạng thứ nhất, còn trong số hạng thứ nhất có thể đưa đại lượng p'_B gần như không đổi ra ngoài dấu tích phân, và thay nó bằng giá trị của nó tại A. Vận dụng những lập luận tương tự cho tích phân lấy theo mặt cầu C_B, ta suy ra từ (76-3) hệ thức sau:

$$p'_B\ (A) \int_{C_A} \frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f} = p'_A\ (B) \int_{C_B} \frac{\nabla p'_B}{\rho} d\mathbf{f}.$$

Nhưng $\nabla p'/\rho = -\partial \mathbf{v}/\partial t$; do đó đẳng thức này có thể được viết lại dưới dạng

$$p'_B\ (A) \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_A} \mathbf{v}_A d\mathbf{f} = p'_A\ (B) \frac{\partial}{\partial t} \int_{C_B} \mathbf{v}_B d\mathbf{f}.$$

Tích phân $\int_{C_A} \mathbf{v}_A d\mathbf{f}$ biểu diễn lượng chất lỏng đi qua mặt cầu C_A trong một đơn vị thời gian, nghĩa là độ biến thiên (trong 1s) của thể tích của

nguồn âm mạch động. Vì các nguồn tại các điểm A và B đều như nhau, nên rõ ràng là

$$\int_{C_A} \mathbf{v}_A \, d\mathbf{f} = \int_{C_B} \mathbf{v}_B \, d\mathbf{f}.$$

và như vậy

$$p'_A(B) = p'_B(A). \tag{76-4}$$

Đẳng thức này nói lên nội dung của nguyên lý tương hỗ (*reciprocity principle*, ND): áp suất gây ra tại B bởi nguồn đặt tại A bằng áp suất do cùng nguồn như thế đặt tại B gây ra tại A. Cần nhấn mạnh rằng, kết quả này đặc biệt cũng đúng cho trường hợp, khi môi trường gồm bởi một số miền khác nhau, mỗi miền đều là đồng chất. Khi âm truyền trong một môi trường như thế, nó sẽ phản xạ và khúc xạ tại các mặt ngăn cách giữa các miền khác nhau. Như vậy, nguyên lý tương hỗ cũng áp dụng được cho cả những trường hợp sóng bị phản xạ và khúc xạ trên đường lan truyền từ A đến B và ngược lại.

BÀI TẬP

Rút ra nguyên lý tương hỗ cho sự phát âm lưỡng cực của một nguồn thực hiện những dao động, không có sự biến thiên thể tích của nó.

Giải. Trong trường hợp này tích phân

$$\int_{C_A} \mathbf{v}_A \, d\mathbf{f} = 0. \tag{1}$$

và khi tính những tích phân ở trong (76-3), cần phải xét đến sự gần đúng tiếp sau. Muốn vậy, với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất , ta viết:

$$p'_B = p'_B(A) + \mathbf{r}\nabla p'_B, \tag{2}$$

trong đó $\mathbf{r}$ là bán kính vectơ vạch từ A. Trong tích phân

$$\int_{C_A} \left(p'_B \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right) d\mathbf{f}, \tag{3}$$

bây giờ cả hai số hạng đều có cùng bậc độ lớn. Thay vào đây p'_B lấy từ (2) và xét đến (1) ta thu được:

$$\int_{C_A} \left\{ \left(\mathbf{r}\nabla p'_B \right) \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right\} d\mathbf{f}.$$

Tiếp theo, ta đưa ra ngoài dấu tích phân đại lượng hầu như không đổi $\nabla p'_B = -\rho \dot{\mathbf{v}}_B$ và thay thế bằng giá trị của nó tại A:

$$\rho_A \dot{\mathbf{v}}_B(A) \int_{C_A} \left\{ \frac{p'_A}{\rho} d\mathbf{f} - \mathbf{r}\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho} d\mathbf{f} \right) \right\}.$$

(ρ_A là mật độ của môi trường tại A). Để tính tích phân này, cần chú ý rằng, ở gần nguồn, chất lỏng có thể được coi như không nén được (xem §74), do đó dựa vào (11-1) ta có thể viết cho áp suất ở bên trong mặt cầu nhỏ C_A:

$$p'_A = -\rho\dot{\phi} = \rho \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{r^3}.$$

Trong sóng đơn sắc $\dot{\mathbf{v}} = -i\omega\mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{A}} = -i\omega\mathbf{A}$; nếu cũng đưa vào vectơ đơn vị $\mathbf{n}_A$ theo phương của vectơ $\mathbf{A}$ đối với nguồn đặt tại điểm A, ta sẽ thu được tích phân (3) tỷ lệ với đại lượng

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A.$$

Bằng cách tương tự, tích phân theo mặt cầu C_B tỷ lệ với

$$-\rho_B \mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B.$$

với cùng thừa số tỷ lệ. Cho tổng của chúng triệt tiêu, ta thu được hệ thức cần tìm:

$$\rho_A \mathbf{v}_B(A)\mathbf{n}_A = \rho_B \mathbf{v}_A(B)\mathbf{n}_B,$$

là hệ thức biểu diễn nguyên lý tương hỗ cho sự phát âm lưỡng cực.

§77. SỰ LAN TRUYỀN ÂM TRONG ỐNG

Ta xét sự truyền của sóng âm dọc theo một ống dài và hẹp. Hiểu ống "hẹp" là ống có bề rộng nhỏ so với bước sóng. Tiết diện của ống có thể thay đổi về hình dạng cũng như về diện tích dọc theo độ dài của ống. Chỉ có một điều quan trọng là, sự biến thiên này xảy ra đủ chậm – diện tích S của tiết diện phải biến đổi ít trên các khoảng cách có bậc độ rộng của ống.

Trong các điều kiện đó, ta có thể coi rằng, trên toàn bộ tiết diện ngang của ống, tất cả các đại lượng (vận tốc, mật độ, v.v...) đều không đổi. Đối với phương truyền của sóng, có thể coi rằng, tại mọi nơi phương truyền trùng với phương của trục ống. Phương trình xác định sự lan truyền của một sóng như vậy, một cách tiện lợi nhất, có thể được rút ra bằng phương pháp tương tự với phương pháp đã dùng ở §12 để rút ra

phương trình truyền sóng hấp dẫn trong các kênh.

Khối lượng chất lỏng trong một đơn vị thời gian đi qua tiết diện của ống bằng $S\rho v$. Do đó lượng (khối lượng) chất lỏng chứa giữa hai tiết diện ngang vô cùng gần nhau của ống sau một giây giảm đi

$$(Sv\rho)_{x+dx} - (Sv\rho)_x = \frac{\partial(Sv\rho)}{\partial x}dx$$

(tọa độ x được lấy dọc theo trục của ống). Vì chính thể tích giữa hai tiết diện không đổi, nên độ giảm này chỉ có thể xảy ra do sự thay đổi của mật độ chất lỏng. Độ biến thiên của mật độ trong một đơn vị thời gian bằng $\partial\rho/\partial t$, độ giảm tương ứng của khối lượng chất lỏng trong thể tích $S\,dx$ giữa hai tiết diện bằng

$$-S\frac{\partial\rho}{\partial t}dx.$$

Cho hai biểu thức bằng nhau, ta thu được phương trình

$$S\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial(S\rho v)}{\partial x}, \qquad (77\text{-}1)$$

đó là phương trình liên tục cho chất lỏng ở trong ống.

Tiếp theo, ta viết phương trình Euler, bỏ đi trong đó số hạng toàn phương đối với vận tốc:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (77\text{-}2)$$

Lấy đạo hàm (77-1) theo thời gian; khi lấy đạo hàm vế phải của phương trình này, cần phải coi ρ không phụ thuộc vào thời gian, vì số hạng thu được khi lấy đạo hàm ρ chứa $v(\partial\rho/\partial t) = v(\partial\rho'/\partial t)$ và như vậy là một số hạng nhỏ bậc hai. Như vậy,

$$S\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(S\rho\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Thay vào đây biểu thức (77-2) cho $(\partial v/\partial t)$ và biểu diễn đạo hàm của mật độ ở trong vế trái qua đạo hàm của áp suất theo $\ddot{\rho} = \ddot{p}/c^2$.

Kết quả ta thu được phương trình lan truyền âm ở trong ống:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \qquad (77\text{-}3)$$

Trong sóng đơn sắc, p [1] phụ thuộc vào thời gian qua thừa số $e^{-i\omega t}$,và (77-3) chuyển thành

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)+k^2p=0 \qquad (77\text{-}4)$$

($k = \omega/c$ là vectơ sóng).

Cuối cùng ta xét bài toán về sự phát âm từ đầu hở của ống. Hiệu các áp suất giữa khí ở đầu ống và khí ở trong không gian bao quanh ống là nhỏ so với các hiệu các áp suất ở trong ống. Do đó, để làm điều kiện biên ở đầu hở của ống, với một độ chính xác vừa đủ, chỉ cần đòi hỏi áp suất p phải bằng không. Còn vận tốc v của khí ở đầu ống khi đó khác không; giả sử v_0 là giá trị của nó tại nơi đó. Tích Sv_0 là lượng (thể tích) khí đi ra khỏi đầu ống trong một đơn vị thời gian.

Bây giờ ta có thể coi đầu hở của ống như một nguồn khí nào đó có năng suất Sv_0. Bài toán về sự phát âm từ một ống tương đương với bài toán về sự phát âm của một vật mạch động, được giải bởi công thức (74-10). Thay cho đạo hàm $\dot{V}$ của thể tích vật theo thời gian, bây giờ ta phải viết đại lượng Sv_0. Như vậy, cường độ toàn phần của âm phát ra bằng

$$I=\frac{\rho S^2\overline{\dot{v}_0^2}}{4\pi c}. \qquad (77\text{-}5)$$

BÀI TẬP

1. Xác định hệ số truyền qua của âm khi nó chuyển từ một ống có tiết diện S_1 sang một ống có tiết diện S_2.

Giải. Trong ống thứ nhất có hai sóng: sóng tới p_1 và sóng phản xạ p_1', còn trong ống thứ hai có một sóng truyền qua p_2:

$$p_1=a_1e^{i(kx-\omega t)},\quad p_1'=a_1'e^{-i(kx+\omega t)},\quad p_2=a_2e^{i(kx-\omega t)}.$$

Tại chỗ nối của các ống ($x = 0$), các áp suất cũng như các lượng khí Sv chuyển từ ống này sang ống kia phải bằng nhau. Các điều kiện đó cho

$$a_1+a_1'=a_2,\quad S_1(a_1-a_1')=S_2a_2,$$

[1] Ở đây cũng như trong các bài tập ở tiết này, tại mọi nơi p được hiểu là phần biến thiên của áp suất (trước đây được ký hiệu bằng p').

từ đó

$$a_2 = a_1 \frac{S_1}{S_1 + S_2}.$$

Tỷ số D giữa năng thông trong sóng truyền qua và năng thông trong sóng tới bằng:

$$D = \frac{S_2\overline{|v_2|^2}}{S_1\overline{|v_1|^2}} = \frac{4S_1S_2}{(S_1 + S_2)^2} = 1 - \left(\frac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}\right)^2$$

2. Xác định năng lượng phát ra bởi đầu hở của một ống hình trụ.

Giải. Trong điều kiện biên $p = 0$ ở đầu hở của ống, một cách gần đúng có thể bỏ qua sóng phản xạ (ta sẽ thấy rằng, cường độ sóng phát ra từ đầu ống là nhỏ). Khi đó ta có điều kiện $p_1 = -p_1'$, trong đó p_1 và p_1' là các áp suất ở trong sóng tới và sóng phản xạ trở lại trong ống; đối với các vận tốc, một cách tương ứng ta có: $v_1 = v_1'$, do đó vận tốc tổng hợp tại chỗ thoát ra khỏi ống bằng $v_o = v_1 + v_1' = 2v_1$. Năng thông trong sóng tới bằng $cS\rho\overline{v_1^2} = cS\rho\overline{v_o^2}/4$. Dựa vào (77-5) ta thu được tỷ số giữa năng lượng phát ra và năng thông trong sóng tới:

$$D = \frac{S\omega'}{\pi c^2}.$$

Đối với ống có tiết diện tròn (bán kính R), ta có $D = R^2\omega^2/c^2$. Vì theo giả thiết, $R << c/\omega$ nên $D << 1$.

3. Một trong các miệng của ống hình trụ được khép kín bằng một màng phát âm: màng này thực hiện dao động đã cho. Đầu kia của ống hở. Xác định sự phát âm bởi ống.

Giải. Trong phương trình tổng quát

$$p = \left(ae^{ikx} + be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t}$$

ta xác định được các hằng số a và b từ các điều kiện $v = u$ ($u = u_o e^{-i\omega t}$ là vận tốc đã cho của các dao động màng) ở đầu bịt kín của ống ($x = 0$) và từ điều kiện $p = 0$ ở đầu hở ($x = l$). Các điều kiện này cho

$$ae^{ikx} + be^{-ikx} = 0, \qquad a - b = c\rho u_o$$

Sau khi đã xác định được a và b, ta tìm được vận tốc khí ở đầu hở $v_o = u/\cos kl$. Khi không có ống, cường độ của âm do màng dao động phát ra được xác định bởi trung bình của bình phương $S^2\overline{|u|^2} = S^2\omega^2\overline{|u|^2}$ theo công thức (74-10) với Su thay cho $\dot{V}$; trong đó S là diện tích của màng. Còn cường độ âm phat bởi đầu ống tỷ lệ với $S^2\overline{|v_o|^2}\omega^2$. Hệ số khuếch đại âm bởi ống bằng tỷ số

$$A = \frac{S^2\overline{|v_o|^2}}{S^2\overline{|u|^2}} = \frac{1}{\cos^2 kl}.$$

Nó bằng vô hạn khi các tần số dao động của màng bằng các tần số riêng của ống (sự cộng hưởng); dĩ nhiên, thực tế nó vẫn hữu hạn do có những hiệu ứng mà ta đã bỏ qua (chẳng hạn như ma sát, ảnh hưởng của sự phát âm).

4. Cũng bài tập đó cho một ống côníc (màng bịt miệng ống nhỏ hơn).

Giải. Tiết diện ngang của ống bằng $S = S_o x^2$; gọi x_1 và x_2 là các giá trị của tọa độ x tương ứng với miệng nhỏ hơn và miệng lớn hơn của ống, do đó độ dài của ống bằng $l = x_2 - x_1$. Nghiệm tổng quát của phương trình (77-4) có dạng

$$p = \frac{1}{x}\left(ae^{ikx} + be^{-ikx}\right)e^{-i\omega t};$$

trong đó a và b được xác định từ các điều kiện $v = u$ với $x = x_1$ và $p = 0$ với $x = x_2$. Hệ số khuếch đại bằng:

$$A = \frac{S_o^2 x_2^4 \overline{|v_2|^2}}{S_o^2 x_1^4 \overline{|u|^2}} = \frac{k^2 x_2^2}{(\sin kl + kx_1 \cos kl)^2}.$$

5. Cũng bài toán đó cho một ống có tiết diện thay đổi dọc theo độ dài của nó theo định luật hàm mũ $S = S_o e^{x\alpha}$.

Giải. Phương trình (77-4) có dạng

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0,$$

từ đó

$$p = e^{-\alpha x/2}\left(ae^{imx} + be^{-imx}\right)e^{-i\omega t}, \quad m = \left(k^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)^{1/2}.$$

Nếu xác định a và b từ các điều kiện $v = u$ với $x = 0$ và $p = 0$ với $x = l$, ta sẽ thu được cho hệ số khuếch đại

$$A = \frac{S_o^2 e^{2\alpha l}\overline{|v_o|^2}}{S_o^2\overline{|u|^2}} = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\sin ml}{m} + \cos ml\right)^2}$$

với $k > \alpha/2$ và

$$A = \frac{e^{\alpha l}}{\left(\frac{\alpha}{2}\frac{\operatorname{sh} m'l}{m'} + \operatorname{ch} m'l\right)^2}, \qquad m' = \left(\frac{\alpha^2}{4} - k^2\right)^{1/2}$$

với $k < \alpha/2$.

§78. SỰ TÁN XẠ ÂM

Nếu trên đường lan truyền sóng âm có một vật nào đó, thì như người ta nói, sẽ có hiện tượng tán xạ âm xảy ra: ngoài sóng tới, còn xuất hiện các sóng khác nữa (sóng tán xạ), các sóng này lan truyền theo mọi hướng xuất phát từ vật tán xạ. Sự tán xạ của sóng âm xuất hiện chính là do sự có mặt của vật nằm trên dường đi của nó. Thêm vào đó, do ảnh hưởng của sóng tới, bản thân vật cũng sẽ bị kéo vào chuyển động; chuyển động này đến lượt nó lại gây ra một sự phát âm phụ, nghĩa là làm xuất hiện thêm một sự tán xạ phụ nào đó. Tuy nhiên, nếu mật độ của vật lớn so với mật độ của môi trường mà trong đó có xảy ra sự tán xạ âm và nếu hệ số nén của nó nhỏ, thì sự tán xạ gây bởi chuyển động của vật sẽ chỉ là một hiệu chính nhỏ cho sự tán xạ cơ bản gây ra bởi sự có mặt của vật. Sau đây ta sẽ bỏ qua sự hiệu chính này, và do đó coi vật tán xạ đứng yên.

Giả sử rằng bước sóng λ của âm lớn so với các kích thước l của vật; khi đó để tính sóng tán xạ, có thể dùng các công thức (74-8) và (74-11) [1]. Khi đó có thể coi rằng, sóng tán xạ do bản thân vật phát ra; chỉ có một điều khác là, thay cho chuyển động của vật trong chất lỏng, bây giờ ta xét chuyển động của chất lỏng đối với vật. Rõ ràng là cả hai bài toán đó tương đương nhau.

Ta đã thu được biểu thức sau cho thế của sóng phát ra:

$$\varphi = -\frac{\dot{V}}{4\pi r} - \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{cr^2}.$$

Trong công thức này V là thể tích của vật. Bây giờ thể tích của bản thân vật không thay đổi và $\dot{V}$ không được hiểu là vận tốc biến thiên của thể tích vật, mà là lượng (thể tích) chất lỏng sau một đơn vị thời gian đi vào trong thể tích chiếm bởi vật (ký hiệu thể tích đó bằng V_0), nếu như không có vật đó. Thực vậy, khi có mặt vật, lượng chất lỏng này không đi vào trong thể tích do vật chiếm, điều đó tương đương với sự đẩy cùng lượng chất lỏng đó ra khỏi thể tích V_0. Hệ số của $1/4\pi r$ trong

[1] Đồng thời đòi hỏi các kích thước của vật phải lớn so với biên độ dời chuyển của các hạt chất lỏng ở trong sóng; nếu không, chuyển động của chất lỏng nói chung sẽ không còn là chuyển động thế nữa.

số hạng thứ nhất ở trong φ, như đã thấy ở tiết trước, phải đúng bằng lượng chất lỏng "bị đẩy" ra từ gốc tọa độ sau mỗi giây. Lượng này tính được dễ dàng. Độ biến thiên của khối lượng chất lỏng trong mỗi đơn vị thời gian trong một thể tích bằng thể tích của vật có giá trị bằng $V_0\dot{\rho}$, trong đó hàm ρ xác định độ biến thiên theo thời gian của mật độ chất lỏng ở trong sóng âm tới (vì bước sóng lớn so với các kích thước vật, nên trên các khoảng cách có bậc của các kích thước này mật độ ρ có thể được coi là không đổi; do đó ta cũng có thể viết độ biến thiên của khối lượng chất lỏng trong thể tích V_0 đơn giản dưới dạng $V_0\dot{\rho}$, trong đó $\dot{\rho}$ là như nhau trong toàn bộ thể tích V_0). Độ biến thiên của thể tích chất lỏng, tương ứng với độ biến thiên của khối lượng $\dot{\rho}V_0$, rõ ràng bằng $V_0\dot{\rho}/\rho$. Như vậy, trong biểu thức cho φ ta phải thay $\dot{V}$ bằng $V_0\dot{\rho}/\rho$. Trong sóng phẳng tới phần biến thiên của mật độ ρ′ có liên hệ với vận tốc bằng hệ thức $\rho' = \rho v/c$; do đó $\dot{\rho} = \dot{\rho}' = \rho\dot{v}/c$, và thay cho $V_0\dot{\rho}/\rho$, ta có thể viết $V_0\dot{v}/c$.

Khi vật chuyển động trong chất lỏng, vectơ **A** được xác định bởi các công thức (11.5-6):

$$4\pi\rho A_i = m_{ik}u_k + \rho V_0 u_i.$$

Bây giờ phải thay thế vận tốc **u** của vật bằng vận tốc **v** (lấy ngược dấu) của chất lỏng ở trong sóng tới (vận tốc mà sóng sẽ có ở vị trí của vật, nếu như vật không có mặt). Như vậy

$$A_i = -\frac{1}{4\pi\rho}m_{ik}v_k - \frac{V_0}{4\pi}v_i. \qquad (78\text{-}1)$$

Cuối cùng, ta thu được cho thế của sóng tán xạ :

$$\varphi_p = -\frac{V_0\dot{v}}{4\pi cr} - \frac{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{r}}{cr^2}. \qquad (78\text{-}2)$$

trong đó vectơ **A** được cho bởi công thức (78-1). Từ đó ta thu được cho sự phân bố các vận tốc ở trong sóng tán xạ:

$$\mathbf{v}_p = \frac{V_0\ddot{v}\mathbf{n}}{4\pi rc^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{A}})}{rc^2} \qquad (78\text{-}3)$$

(xem §74; **n** là vectơ đơn vị theo phương tán xạ).

Năng lượng tán xạ trung bình (trong 1s) trong phần tử góc đặc do đã cho được xác định bởi năng thông $c\rho\overline{\mathbf{v}_p^2}\,do$. Cường độ tán xạ toàn phần I_{tx} thu được bằng cách lấy tích phân biểu thức đó theo tất cả mọi phương. Khi lấy tích phân này, tích kép hai số hạng trong (78-3) bằng không vì tích này tỷ lệ với lũy thừa bậc một của cos góc giữa phương tán xạ và phương truyền của sóng tới và chỉ còn lại (xem (74-10) và (74-13)):

$$I_{tx} = \frac{V_o^2\rho}{4\pi c^3}\overline{\ddot{v}^2} + \frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}. \tag{78-4}$$

Thông thường sự tán xạ được đặc trưng bởi *tiết diện hiệu dụng* (hay đơn giản là *tiết diện*) $d\sigma$ của nó. Đó là tỷ số giữa năng lượng tán xạ trung bình (theo thời gian) trong phần tử góc đặc đã cho và mật độ năng thông trung bình trong sóng tới. Tiết diện hiệu dụng toàn phần σ bằng tích phân của $d\sigma$ lấy theo tất cả các phương tán xạ, nghĩa là bằng tỷ số giữa cường độ tán xạ toàn phần và mật độ năng thông tới. Rõ ràng tiết diện hiệu dụng có thứ nguyên diện tích.

Mật độ năng thông trung bình trong sóng tới bằng $c\rho\overline{\mathbf{v}_p^2}$. Do đó tiết diện hiệu dụng vi phân có giá trị bằng

$$d\sigma = \frac{\overline{\mathbf{v}_p^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} r^2 do. \tag{78-5}$$

Tiết diện toàn phần bằng

$$\sigma = \frac{V_o^2}{4\pi c^4}\frac{\overline{\ddot{v}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}} + \frac{4\pi}{3c^4}\frac{\overline{\ddot{\mathbf{A}}^2}}{\overline{\mathbf{v}^2}}. \tag{78-6}$$

Đối với một sóng phẳng tới đơn sắc, giá trị trung bình của bình phương đạo hàm cấp hai của vận tốc theo thời gian tỷ lệ với lũy thừa bốn của tần số. Như vậy, tiết diện tán xạ của âm bởi vật, có các kích thước nhỏ so với bước sóng, tỷ lệ với luỹ thừa bốn của tần số.

Cuối cùng, ta dừng lại ngắn gọn về trường hợp giới hạn ngược lại, khi bước sóng của âm tán xạ nhỏ so với các kích thước của vật. Trong trường hợp này, tất cả tán xạ, trừ tán xạ tại các góc rất nhỏ, đều quy về một sự phản xạ đơn giản trên mặt vật. Phần tương ứng của tiết

diện tán xạ toàn phần rõ ràng đơn giản bằng diện tích S của tiết diện ngang của vật cắt bởi mặt phẳng vuông góc với phương của sóng tới. Còn sự tán xạ tại các góc nhỏ (các góc có bậc λ/l), đó chính là nhiễu xạ từ các bờ của vật. Ta không trình bày ở đây lý thuyết về hiện tượng đó, vì nó hoàn toàn tương tự với lý thuyết về sự nhiễu xạ ánh sáng (xem II, §60, 61). Ta chỉ nêu lên rằng, theo nguyên lý Babinet, cường độ toàn phần của âm nhiễu xạ bằng cường độ toàn phần của âm phản xạ. Do đó phần nhiễu xạ của tiết diện tán xạ cũng bằng diện tích S, vì thế tiết diện toàn phần bằng $2S$.

BÀI TẬP

1. Xác định tiết diện tán xạ của sóng âm phẳng bởi một quả cầu rắn có bán kính R nhỏ so với bước sóng.

Giải. Vận tốc trong một sóng phẳng (tại một điểm đã cho của không gian) bằng $v = a\cos\omega t$. Vectơ **A** trong trường hợp của một quả cầu (xem bài tập 1, §11) có giá trị bằng $\mathbf{A} = -\mathbf{v}R^3/2$. Ta thu được cho tiết diện hiệu dụng vi phân:

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^6}{9c^4}\left(1 - \frac{3\cos\theta}{2}\right)^2 do$$

(θ là góc của phương giữa sóng tới và phương tán xạ). Cường độ tán xạ cực đại theo phương $\theta = \pi$, ngược với phương tới. Tiết diện toàn phần bằng:

$$\sigma = \frac{7\pi}{9}\left(\frac{R^3\omega^2}{c^2}\right)^2. \qquad (1)$$

Ở đây (và cả trong các bài tập 3 và 4) đều giả thiết rằng, mật độ ρ_0 của quả cầu là lớn so với mật độ ρ của khí; nếu không như thế, cần phải xét đến sự kéo quả cầu gây bởi các áp lực tác dụng lên quả cầu từ phía khối khí dao động.

2. Xác định tiết diện tán xạ của âm bởi một giọt chất lỏng, có xét đến hệ số nén của chất lỏng và chuyển động của giọt do ảnh hưởng của sóng tới.

Giải. Khi áp suất của khí bao quanh giọt biến thiên đoạn nhiệt một lượng p', thì thể tích của giọt giảm đi

$$\frac{V_o}{\rho_o}\left(\frac{\partial\rho_o}{\partial p}\right)_s p' = \frac{V_o}{\rho_o c_o^2} c\rho v$$

(ρ là mật độ khí, ρ_0 là mật độ chất lỏng trong giọt, c_0 là vận tốc âm trong chất lỏng). Trong các biểu thức (78.2-3), thay cho $V_0\dot{v}/c$ bây giờ cần phải viết hiệu

$$V_o\left(\frac{\dot{v}}{c}-\frac{\dot{v}c\rho}{c_o^2\rho_o}\right).$$

Tiếp theo, trong biểu thức cho **A** bây giờ cần phải thay thế $-\mathbf{v}$ bằng $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, trong đó **u** là vận tốc của vật thu được do ảnh hưởng của sóng tới. Dựa vào các kết quả của bài toán 1 của §11, ta thu được cho quả cầu

$$\mathbf{A}=R^3\mathbf{v}\frac{\rho-\rho_o}{2\rho_o+\rho}.$$

Thay các biểu thức này vào, ta thu được tiết diện

$$d\sigma=\frac{\omega^4R^6}{9c^4}\left\{\left(1-\frac{c^2\rho}{c_o^2\rho_o}\right)-3\cos\theta\frac{\rho_o-\rho}{2\rho_o+\rho}\right\}^2do.$$

Tiết diện toàn phần bằng

$$\sigma=\frac{4\pi\omega^4R^6}{9c^4}\left\{\left(1-\frac{c^2\rho}{c_o^2\rho_o}\right)+3\frac{(\rho-\rho_o)^2}{(2\rho_o+\rho)^2}\right\}.$$

3. Xác định tiết diện tán xạ của âm bởi một quả cầu rắn có bán kính R nhỏ so với $(\nu/\omega)^{1/2}$. Nhiệt dung của quả cầu được giả thiết là lớn đến mức có thể coi nhiệt độ của nó không đổi.

Giải. Trong trường hợp này, cần phải xét đến ảnh hưởng của độ nhớt chất khí lên chuyển động của quả cầu và vectơ **A** phải được thay đổi theo cách như đã nêu ở bài tập 2 của §74; với $R(\nu/\omega)^{1/2}\ll 1$, ta có:

$$\mathbf{A}=-i\frac{3R\nu}{2\omega}\mathbf{v}.$$

Ngoài ra, sự dẫn nhiệt của khí cũng dẫn tới một sự tán xạ có cùng bậc độ lớn. Giả sử $T_o'e^{-i\omega t}$ là các dao động nhiệt độ tại điểm đã cho của sóng âm. Sự phân bố nhiệt độ ở gần quả cầu có dạng (xem bài tập 2 của §52):

$$T'=T_o'e^{-i\omega t}\left\{1-\frac{R}{r}\exp\left[-(1-i)(r-R)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}\right]\right\}$$

(với $r=R$ ta phải có $T'=0$). Nhiệt lượng do khối khí nhả ra cho quả cầu sau một đơn vị thời gian (với $R(\nu/\omega)^{1/2}\ll 1$) bằng:

$$q=4\pi R^2\kappa\left.\frac{dT'}{dr}\right|_{r=R}=4\pi R\kappa T_o'e^{-i\omega t}.$$

Sự truyền nhiệt lượng này dẫn đến sự biến thiên thể tích của khối khí, điều đó có thể được giải thích là ảnh hưởng của nó lên sự tán xạ như sự biến thiên hiệu dụng tương ứng của thể tích quả cầu, nghĩa là:

$$\dot{V} = -4\pi R\chi T'_0 e^{-i\omega t} = -\frac{4\pi R}{c}\chi(\gamma-1)v,$$

trong đó β là hệ số dãn nở vì nhiệt của khối khí và $\gamma = c_p/c_v$; ta cũng đã dùng các công thức (64-13) và (79-2).

Nếu xét đến cả hai hiệu ứng, ta sẽ thu được tiết diện tán xạ vi phân

$$d\sigma = \frac{\omega^4 R^2}{c^4}\left\{\chi(\gamma-1) - \frac{3}{2}\nu\cos\theta\right\}^2 do.$$

Tiết diện hiệu dụng toàn phần:

$$\sigma = \frac{4\pi\omega^4 R^2}{c^4}\left\{\chi^2(\gamma-1)^2 + \frac{3}{4}\nu^2\right\}.$$

Các công thức này chỉ áp dụng được chừng nào lực ma sát Stokes nhỏ so với lực quán tính, nghĩa là $\eta R << M\omega$, trong đó $M = 4\pi R^3\rho_0/3$ là khối lượng của quả cầu; nếu không, sự kéo quả cầu gây bởi các lực nhớt sẽ trở nên quan trọng.

4. Xác định lực trung bình tác dụng lên quả cầu rắn, quả cầu này tán xạ một sóng âm phẳng ($\lambda >> R$).

Giải. Xung lượng do sóng tới truyền cho một quả cầu sau một đơn vị thời gian, nghĩa là lực cần tìm, bằng hiệu của xung lượng mang bởi sóng tới tán xạ và dòng xung lượng toàn phần trong sóng bị tán xạ. Từ sóng tới năng thông bị tán xạ bằng $\sigma c\bar{E}_0$, trong đó $\bar{E}_0$ là mật độ năng lượng trong sóng tới; dòng xung lượng tương ứng thu được bằng cách chia biểu thức trên cho c, nghĩa là bằng: $\sigma\bar{E}_0$. Trong sóng bị tán xạ, dòng xung lượng trong góc đặc do có giá trị bằng $\bar{E}_{tx}\, r^2 do = \bar{E}_0\, d\sigma$; chiếu biểu thức này lên phương truyền của sóng tới (rõ ràng là lực cần tìm có phương này) và lấy tích phân theo tất cả các góc, ta thu được $\bar{E}_0\int\cos\theta\, d\sigma$. Như vậy, lực tác dụng lên quả cầu bằng:

$$F = \bar{E}_0\int(1-\cos\theta)\, d\sigma.$$

Thay vào đây bằng biểu thức của nó lấy từ bài tập 1, ta thu được

$$F = \bar{E}_0\frac{11\pi\omega^4 R^6}{9c^4}.$$

§79. SỰ HẤP THỤ ÂM

Sự có mặt của độ nhớt và sự dẫn nhiệt gây ra sự tiêu tán năng lượng của các sóng âm, do đó âm bị hấp thụ, nghĩa là cường độ của âm giảm dần. Để tính năng lượng $\dot{E}_{c\sigma}$ bị tiêu tán trong một đơn vị thời gian, ta dùng những lập luận tổng quát sau. Cơ năng chính là công cực đại có

thể thu được khi chuyển từ trạng thái không cân bằng đã cho sang trạng thái cân bằng nhiệt động lực. Như đã biết, trong nhiệt động lực học, công cực đại được thực hiện nếu sự chuyển là thuận nghịch, (nghĩa là công được thực hiện không có sự biến thiên của entrôpi), và như vậy ta có:

$$E_{cđ} = E_o - E(S)$$

trong đó E_o là giá trị năng lượng ban đầu đã cho của vật ở trong trạng thái ban đầu của nó, còn $E(S)$ là năng lượng của vật trong trạng thái cân bằng với cùng entrôpi S mà vật có trong trạng thái ban đầu. Lấy đạo hàm theo thời gian, ta được:

$$\dot{E}_{cđ} = -\dot{E}(S) = -\frac{\partial E}{\partial S}\dot{S}$$

đạo hàm của năng lượng theo entrôpi là nhiệt độ. Như vậy $\partial E/\partial S$ là nhiệt độ mà vật sẽ có, nếu nó ở trạng thái cân bằng nhiệt động lực (với giá trị đã cho của entrôpi). Ký hiệu nhiệt độ này bằng T_o, như vậy ta thu được:

$$\dot{E}_{cđ} = -T_o\dot{S}.$$

Ta dùng cho $\dot{S}$ biểu thức (49-6), là biểu thức biểu diễn sự tăng entrôpi gây bởi sự dẫn nhiệt, cũng như bởi độ nhớt. Vì nhiệt độ T biến thiên ít trong chất lỏng và khác ít so với T_o, nên có thể đưa T ra khỏi dấu tích phân và viết T thay cho T_o

$$\dot{E}_{cđ} = -\frac{\kappa}{T}\int(\nabla T)^2 dV - \frac{\eta}{2}\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV - \zeta\int(\mathrm{div}\,\mathbf{v})^2 dV. \tag{79-1}$$

Công thức này là sự mở rộng của công thức (16-3) sang trường hợp chất lỏng nén được và có tính dẫn nhiệt.

Giả sử trục x trùng với phương truyền sóng của âm. Khi đó

$$v_x = v_o\cos(kx - \omega t), \qquad v_y = v_z = 0.$$

Hai số hạng cuối của (79-1) cho ta

$$-\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\int\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV = -k^2\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v_o^2\int\sin^2(kx - \omega t)dV.$$

Dĩ nhiên, ta quan tâm đến giá trị trung bình theo thời gian của các đại lượng; phép lấy trung bình cho ta

$$-k^2\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\frac{1}{2}v_o^2V_o$$

(trong đó V_o là thể tích khối chất lỏng).

Tiếp theo, ta tính số hạng đầu tiên ở trong (79-1). Độ sai lệch của T' của nhiệt độ trong sóng âm so với giá trị cân bằng của nó có liên hệ với vận tốc bằng công thức (64-13), do đó gradiên của nhiệt độ bằng:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\beta\frac{cT}{c_p}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\beta c\,T}{c_p}v_o\,k\sin(kx-\omega t).$$

Ta thu được cho giá trị trung bình theo thời gian của số hạng đầu tiên trong (79-1):

$$-\frac{\kappa c^2T\beta^2}{2c_p^2}v_o^2k^2V_o.$$

Dựa theo các công thức nhiệt động lực đã biết:

$$c_p-c_v=T\beta^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T=T\beta^2\frac{c_v}{c_p}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s=T\beta^2\frac{c_v}{c_p} \tag{79-2}$$

Có thể viết lại biểu thức này dưới dạng

$$-\frac{\kappa}{2}\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)v_o^2k^2V_o.$$

Tập hợp các biểu thức đã thu được, ta tìm được giá trị trung bình của độ tiêu tán năng lượng dưới dạng:

$$\overline{\dot{E}}_{co}=-\frac{k^2v_o^2V_o}{2}\left[\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)+\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{79-3}$$

Năng lượng toàn phần của sóng âm bằng

$$\overline{E}=\frac{\rho v_o^2}{2}V_o \tag{79-4}$$

Hệ số tắt của sóng đã đưa vào trong §25 cho ta định luật giảm của cường độ theo thời gian. Tuy nhiên, trong trường hợp của âm, thường

phải đặt vấn đề hơi khác: sóng âm lan truyền trong chất lỏng và cường độ của nó giảm khi khoảng cách x đã đi được tăng. Hiển nhiên là sự giảm này được cho bởi định luật $e^{-2\gamma x}$, còn đối với biên độ thì được cho bởi định luật $e^{-\gamma x}$, trong đó hệ số hấp thụ γ được xác định bởi

$$\gamma = \frac{\overline{|\dot{E}_{co'}|}}{2c\overline{E}}. \tag{79-5}$$

Như vậy thay vào đây (79-3) và (79-4), ta sẽ thu được cho hệ số hấp thụ âm biểu thức sau:

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \equiv a\omega^2. \tag{79-6}$$

Ta nhận thấy rằng nó tỷ lệ với bình phương tần số âm [1].

Công thức này áp dụng được chừng nào hệ số hấp thụ, do nó xác định, còn nhỏ: độ giảm tỷ đối của biên độ phải nhỏ tại các khoảng cách có bậc bước sóng (nghĩa là phải có $\gamma c/\omega \ll 1$). Điều rút ra ở trên thực chất căn cứ trên giả thiết đó, vì độ tiêu tán năng lượng đã được tính dựa vào biểu thức không tắt cho sóng âm. Đối với các chất khí, điều kiện này thực tế bao giờ cũng được thỏa mãn. Chẳng hạn, ta xét số hạng thứ nhất ở trong (79-6). Điều kiện $\gamma c/\omega \ll 1$ có nghĩa là phải có $\nu\omega/c^2 \ll 1$. Nhưng, như đã biết trong lý thuyết động học các chất khí, hệ số nhớt ν của chất khí có bậc của tích giữa quãng đường tự do l với vận tốc nhiệt trung bình các phân tử; về bậc độ lớn, vận tốc này trùng với vận tốc của âm trong chất khí, do đó $\nu \sim lc$. Do đó ta có:

$$\frac{\nu\omega}{c^2} \sim \frac{l\omega}{c} \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1, \tag{79-7}$$

vì đã biết rõ là $l \ll \lambda$. Số hạng với độ dẫn nhiệt trong (79-6) cho cùng kết quả, vì $\chi \sim \nu$.

[1] Một cơ chế hấp thụ đặc thù phải xảy ra khi âm lan truyền trong một hệ hai pha - chất nhũ tương (*M. A. Ixakovits*, 1948). Do có sự khác nhau trong các tính chất nhiệt động lực của các thành phần nhũ tương, nên các sự biến thiên nhiệt độ của chúng khi sóng âm đi qua, nói chung, đều khác nhau. Sự trao đổi nhiệt lượng xuất hiện khi đó ở giữa các thành phần nhũ tương dẫn đến một sự hấp thụ phụ của âm. Do sự trao đổi nhiệt lượng này tương đối chậm, nên một sự tán sắc quan trọng của âm cũng đã xuất hiện tương đối sớm.

Còn đối với chất lỏng, thì cả ở đây bao giờ cũng đòi hỏi sự hấp thụ phải nhỏ, khi bài toán về sự hấp thụ âm có một ý nghĩa trong cách đặt vấn đề đang xét. Sự hấp thụ (trên bước sóng) chỉ có thể trở nên lớn, nếu các ứng suất nhớt so sánh được với áp lực xuất hiện khi chất bị nén. Nhưng trong các điều kiện như thế, chính phương trình Navier - Stokes (với các hệ số nhớt không phụ thuộc vào tần số) đã trở nên không áp dụng được và một sự tán sắc âm (*acoustic dispersion*, ND) quan trọng có liên quan đến các quá trình ma sát nội xuất hiện [1].

Đối với sự hấp thụ âm, rõ ràng hệ thức giữa vectơ sóng và tần số có thể được viết dưới dạng

$$k = \frac{\omega}{c} + ia\omega^2 \tag{79-8}$$

(trong đó a là hệ số trong (79-6)). Từ đó ta dễ dàng thấy rằng, cần phải thay đổi như thế nào phương trình của một sóng âm chạy để xét đến một hiệu ứng hấp thụ trong nó. Muốn thế, ta có nhận xét là, khi không có sự hấp thụ, phương trình vi phân cho áp suất $p' = (x - ct)$ chẳng hạn, có thể được viết dưới dạng

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t}.$$

Còn phương trình có nghiệm $e^{i(kx-\omega t)}$ với k lấy từ (79-8) rõ ràng phải được lấy dưới dạng

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t} + a\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \tag{79-9}$$

Nếu thay cho t, ta đưa vào biến $\tau = t - x/c$, thì phương trình này trở thành:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = a\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2}.$$

Đó là phương trình thuộc loại phương trình truyền nhiệt một chiều.

Nghiệm tổng quát của phương trình này có thể được viết dưới dạng (xem §51)

[1] Một trường hợp đặc biệt, trong đó có thể xảy ra sự hấp thụ mạnh âm, có thể được khảo sát bằng các phương pháp thông thường, là trường hợp của chất khí có độ dẫn nhiệt lớn dị thường (so với độ nhớt của nó), gây bởi các nguyên nhân lạ, chẳng hạn bởi sự dẫn nhiệt do bức xạ ở các nhiệt độ rất cao (xem bài tập 3 của tiết này).

$$p'(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}} \int p'_0(\tau') \exp\left\{-\frac{(\tau'-\tau)^2}{4ax}\right\} d\tau' \qquad (79\text{-}10)$$

với $p_0'(\tau) = p'(0,\tau)$. Nếu sóng được phát ra trong một khoảng thời gian hữu hạn, thì tại các khoảng cách đủ lớn tính từ nguồn, biểu thức đó chuyển thành

$$p'(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a x}} e^{-\tau^2/4ax} \int p'_0(\tau')\, d\tau'. \qquad (79\text{-}11)$$

Nói một cách khác, tại các khoảng cách lớn prôfin của sóng được xác định bằng đường cong Gauß. Độ rộng của nó ~ $(ax)^{1/2}$, nghĩa là tăng theo căn bậc hai của khoảng cách mà sóng đã đi qua, còn biên độ của sóng giảm như $x^{-1/2}$. Từ đó ta dễ dàng kết luận rằng, năng lượng toàn phần của sóng giảm theo cùng định luật $x^{-1/2}$.

Dễ dàng rút ra được công thức tương tự cho các sóng cầu; khi đó cần chú ý rằng, đối với một sóng như thế $\int p'dt = 0$ (xem (70-8)). Thay cho (79-11) bây giờ ta thu được

$$p'(r,\tau) = \text{const}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{e^{-\tau^2/4ar}}{\sqrt{r}}$$

hay

$$p'(r,\tau) = \text{const}\,\frac{\tau}{r^{5/2}} e^{-\tau^2/4ar}. \qquad (79\text{-}12)$$

Sự hấp thụ mạnh phải xảy ra khi sóng âm phản xạ trên một mặt thành rắn. Nguyên nhân của hiện tượng này như sau (*K.F. Herzfeld*, 1938; *B. P. Konxtantinov*, 1939).

Trong sóng âm, không những mật độ và áp suất, mà cả nhiệt độ cũng dao động tuần hoàn quanh giá trị trung bình của nó. Do đó có một hiệu nhiệt độ biến thiên tuần hoàn về độ lớn giữa chất lỏng và thành, ngay cả khi nhiệt độ trung bình của chất lỏng bằng nhiệt độ của thành. Nhưng ở ngay trên mặt, các nhiệt độ của chất lỏng tiếp xúc và của thành phải bằng nhau. Kết quả là, một gradiên lớn nhiệt độ xuất hiện trong một lớp mỏng chất lỏng kề sát; nhiệt độ biến thiên nhanh từ giá trị của nó trong sóng âm đến nhiệt độ của thành. Chính sự có mặt của các gradiên lớn nhiệt độ đó đã dẫn đến một sự tiêu tán năng lượng mạnh do sự truyền nhiệt. Cũng vì lý do tương tự, cả độ nhớt của chất

lỏng cũng dẫn đến một sự hấp thụ mạnh của âm khi sóng đập tới theo phương nghiêng. Trong trường hợp sóng đập tới nghiêng như thế, vận tốc của chất lỏng ở trong sóng (theo phương lan truyền sóng) có một thành phần tiếp tuyến với mặt thành khác không. Tuy nhiên, ở ngay trên mặt, chất lỏng phải hoàn toàn "dính" vào thành. Do đó, ở trong lớp chất lỏng kề sát có xuất hiện một gradiên lớn của thành phần tiếp tuyến của vận tốc [1], và như vậy dẫn đến một sự tiêu tán mạnh năng lượng do tính nhớt (xem bài tập 1).

BÀI TẬP

1. Xác định phần năng lượng bị hấp thụ khi một sóng âm phản xạ trên một thành rắn. Mật độ chất của thành được giả thiết là lớn đến mức âm hầu như không xuyên vào trong đó, còn nhiệt dung lớn đến mức nhiệt độ của thành được coi là không đổi.

Giải. Chọn mặt phẳng $x = 0$ là mặt phẳng của thành và mặt phẳng x, y là mặt phẳng tới. Góc tới (bằng góc phản xạ) là θ. Sự biến thiên của mật độ ở trong sóng tới tại một điểm nào đó ở trên mặt (giả sử là điểm $x = y = 0$) có dạng $\rho_1' = = A\,e^{-i\omega t}$, sóng phản xạ có cùng biên độ, do đó trong sóng này ở gần thành $\rho'_2 = \rho_1'$. Độ biến thiên thực của mật độ chất lỏng, trong đó cả hai sóng (sóng tới và sóng phản xạ) đều lan truyền đồng thời bằng: $\rho' = 2A\,e^{-i\omega t}$. Vận tốc chất lỏng ở trong sóng được cho bởi:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{c}{\rho}\rho_1'\mathbf{n}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{c}{\rho}\rho_2'\mathbf{n}_2.$$

Vận tốc toàn phần ở trên thành $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, do đó bằng

$$v = v_y = 2A\sin\theta\,\frac{c}{\rho}e^{-i\omega t}$$

(đúng hơn, đó là giá trị của vận tốc, nếu không xét đến điều kiện biên thực ở trên mặt thành khi có độ nhớt). Tiến trình biến thiên thực của vận tốc v_y ở gần thành được xác định bởi công thức (24-13), còn độ tiêu tán năng lượng do có độ nhớt được xác định bởi công thức (24-14), trong các công thức đó cần thay thế $v_0 e^{-i\omega t}$ bằng biểu thức đã rút ra được ở trên của v.

Độ lệch T' của nhiệt độ so với giá trị trung bình của nó (bằng nhiệt độ của thành, không xét đến các điều kiện biên đúng ở trên thành) có giá trị bằng (xem (64-13))

---

[1] Thành phần pháp tuyến của vận tốc bằng không ở trên thành, do các điều kiện biên đối với một chất lỏng lý tưởng.

$$T' = 2A\frac{c^2 T\beta}{c_p\rho}e^{-i\omega t}$$

Nhưng thực tế sự phân bố nhiệt độ được cho bởi phương trình truyền nhiệt, với điều kiện biên $T' = 0$ khi $x = 0$, do đó nó được biểu diễn bởi một công thức hoàn toàn tương tự với (24-13).

Nếu tính độ tiêu tán năng lượng gây bởi sự truyền nhiệt theo số hạng thứ nhất của (79-1), kết quả ta thu được cho độ tiêu tán toàn phần của năng lượng tính cho một đơn vị diện tích mặt của thành:

$$\bar{\dot{E}}_{cđ} = -\frac{A^2c^2\sqrt{2\omega}}{\rho}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)+\sin^2\theta\sqrt{\nu}\right].$$

Mật độ năng thông trung bình trong sóng tới trên một đơn vị diện tích mặt của thành từ sóng tới bằng

$$c\rho\overline{v_1^2}\cos\theta = \frac{c^3A^2}{2\rho}\cos\theta.$$

Do đó phần năng lượng bị hấp thụ khi phản xạ bằng

$$2\frac{\sqrt{2\omega}}{c\cos\theta}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)+\sin^2\theta\sqrt{\nu}\right].$$

Biểu thức này chỉ đúng, nếu giá trị của nó nhỏ (vì khi rút ra biểu thức đó, ta đã giả thiết rằng các biên độ của sóng tới và sóng phản xạ bằng nhau). Điều kiện này có nghĩa là, góc tới θ không được quá gần $\pi/2$.

2. Xác định hệ số hấp thụ âm lan truyền trong một ống hình trụ.

Giải. Phần đóng góp cơ bản vào độ hấp thụ được gây bởi hiệu ứng do sự có mặt của thành. Hệ số hấp thụ γ bằng năng lượng tiêu tán trong một đơn vị thời gian ở trên mặt thành ứng với một đơn vị độ dài của ống chia cho hai lần năng thông toàn phần đi qua tiết diện ngang của ống. Phép tính hoàn toàn tương tự như đã tiến hành trong bài tập 1 cho ta kết quả (R là bán kính của ống):

$$\gamma = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}Rc}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)+\sqrt{\nu}\right].$$

3. Tìm định luật tán sắc (*dispersion*, ND) cho một âm lan truyền trong môi trường có độ dẫn nhiệt rất cao.

Giải. Vì độ dẫn nhiệt rất cao, nên chuyển động trong sóng âm không phải là đoạn nhiệt. Do đó thay cho điều kiện entrôpi không đổi, bây giờ ta có phương trình

$$\dot{s}' = \frac{\kappa}{\rho T}\Delta T' \qquad (1)$$

(phương trình đã tuyến tính hóa (49-4) không có các số hạng nhớt). Để làm phương trình thứ hai, ta chọn:

$$\ddot{\rho}' = \Delta p', \tag{2}$$

phương trình này thu được bằng cách khử **v** khỏi các phương trình (64.2-3). Nếu chọn p' và T' làm các biến cơ bản, ta sẽ viết được ρ' và s' dưới dạng

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T p', \qquad s' = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p T' + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T p'.$$

Thay các biểu thức này vào (1) và (2), rồi tìm p' và T' dưới dạng tỷ lệ với $e^{i(kx - \omega t)}$. Điều kiện tương thích của hai phương trình thu được như vậy cho p' và T' có thể (bằng cách dùng một loạt các hệ thức đã biết giữa các đạo hàm của các đại lượng nhiệt động lực) đưa về dạng:

$$k^4 - k^2\left(\frac{\omega^2}{c_T^2} + \frac{i\omega}{\chi}\right) + \frac{i\omega^3}{\chi c_s^2} = 0, \tag{3}$$

phương trình trên xác định sự phụ thuộc cần tìm của k vào ω. Ở đây đã đưa vào các ký hiệu

$$c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s, \qquad c_T^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \frac{c_s^2}{\gamma}$$

(γ là tỷ số giữa các nhiệt dung c_p/c_v). Trong trường hợp giới hạn của các tần số nhỏ ($\omega << c^2/\chi$) phương trình (3) cho ta

$$k = \frac{\omega}{c_s} + i\frac{\omega^2\chi}{2c_s}\left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_s^2}\right),$$

phương trình này tương ứng với sự lan truyền của âm với vận tốc "đoạn nhiệt" thông thường c_s và hệ số hấp thụ nhỏ trùng với số hạng thứ hai ở trong (79-6). Điều đó đúng phải như vậy,vì điều kiện $\omega << c^2/\chi$ có nghĩa là, trong một chu kỳ, nhiệt lượng chỉ có thể kịp truyền được trên một khoảng cách $\sim (\chi/\omega)^{1/2}$ (xem (51-7)), khoảng này nhỏ so với bước sóng c/ω.

Trong trường hợp giới hạn ngược lại của các tần số lớn, ta rút ra được từ (3)

$$k = \frac{\omega}{c_T} + i\frac{c_T}{2\chi c_s^2}\left(c_s^2 - c_T^2\right).$$

Trong trường hợp này âm lan truyền với vận tốc "đẳng nhiệt" c_T (luôn luôn nhỏ hơn vận tốc c_s). Hệ số hấp thụ sẽ lại nhỏ (so với nghịch đảo của bước sóng), đồng thời nó không phụ thuộc vào tần số và tỷ lệ với nghịch với độ dẫn nhiệt [1].

[1] Nghiệm thứ hai của phương trình (3) là toàn phương theo k^2, tương ứng với các sóng nhiệt tắt nhanh theo x. Trong trường hợp giới hạn $\omega\chi << c^2$, nghiệm này cho ta →

4. Xác định sự hấp thụ phụ của âm lan truyền trong một hỗn hợp hai chất gây bởi sự khuếch tán (*diffusion*, ND). (*I. G. Sapôsnikôv* và *Z. A. Goldberg*, 1952).

Giải. Hỗn hợp có chứa một nguồn phụ hấp thụ âm, vì các gradiên nhiệt độ và áp suất xuất hiện trong sóng âm gây ra các quá trình khuếch tán nhiệt và khuếch tán khí áp không thuận nghịch (rõ ràng là, không xuất hiện gradiên nồng độ khối lượng và cùng với nó không xuất hiện sự khuếch tán thuần túy). Sự hấp thụ này được xác định bởi số hạng

$$\frac{1}{T\rho D}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,T}\int \mathrm{i}^2 dV$$

ở trong vận tốc biến thiên của entrôpi (59-13) (ở đây ta ký hiệu nồng độ bằng C để phân biệt với vận tốc c của âm). Dòng khuếch tán:

$$\mathrm{i} = -\rho D\left(\frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right)$$

trong đó k_p được xác định bởi (59-10). Một phép tính tương tự như phép tính đã làm trong bài giảng, có dùng một loạt các hệ thức giữa các đạo hàm của các đại lượng nhiệt động lực học, dẫn đến kết quả sau: biểu thức (79-6) của hệ số hấp thụ có thêm số hạng

$$\gamma_D = \frac{D\omega^2}{2c\rho^2\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,T}}\left\{\left(\frac{\partial\rho}{\partial C}\right)_{p,T} + \frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,c}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,T}\right\}^2.$$

5. Xác định tiết diện hấp thụ hiệu dụng của âm bởi quả cầu có bán kính nhỏ so với $(\nu/\omega)^{1/2}$.

Giải. Sự hấp thụ toàn phần gồm bởi các hiệu ứng nhớt và hiệu ứng dẫn nhiệt của khí. Hiệu ứng nhớt được xác định bởi công của lực ma sát Stokes khi chất khí chuyển động trong sóng âm bao quanh quả cầu (cũng giống như trong bài tập 3 §78, ta giả thiết rằng quả cầu không bị lực đó kéo đi). Hiệu ứng thứ hai được xác định bởi nhiệt lượng q mà khối khí nhả cho quả cầu sau một đơn vị thời gian (bài tập 3 §78); độ tiêu tán năng lượng trong quá trình nhả nhiệt lượng q ứng với một hiệu nhiệt độ T' giữa chất khí (ở xa quả cầu) và quả cầu bằng qT'/T. Ta thu được cho tiết diện hấp thụ hiệu dụng toàn phần biểu thức sau:

→ $$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\chi}} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}$$

phù hợp với (52-15). Nếu $\omega\chi >> c^2$, ta có:

$$k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega c_v}{2\chi c_p}}.$$

$$\sigma = \frac{2\pi R}{c}\left[3\nu + 2\chi\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\right].$$

§80. DÒNG CHẢY ÂM

Một trong những biểu hiện lý thú nhất của ảnh hưởng độ nhớt lên các sóng âm là sự xuất hiện các dòng chảy xoáy dừng trong trường âm đứng khi có mặt của các trở ngại rắn hay các thành rắn bao quanh no. Chuyển động này (được gọi là *dòng chảy âm*) xuất hiện trong phép tính gần đúng bậc hai theo biên độ sóng; đặc điểm đặc trưng của nó là ở chỗ, vận tốc chuyển động trong nó (trong không gian bên ngoài lớp mỏng kề sát) không phụ thuộc vào độ nhớt – mặc dù chính do độ nhớt mà có sự xuất hiện của nó (*Rayleigh*, 1883).

Các tính chất của dòng chảy âm thể hiện một cách điển hình nhất trong các điều kiện, khi độ dài đặc trưng của bài toán (kích thước của các trở ngại hay miền chuyển động) là nhỏ so với bước sóng âm, nhưng đồng thời lại lớn so với độ xuyên sâu của các sóng nhớt $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ đã đưa vào ở §24:

$$\lambda >> l >> \delta \tag{80-1}$$

Do điều kiện sau cùng này, trong miền chuyển động có thể tách ra *một lớp biên âm*, trong đó có xảy ra sự giảm vận tốc từ giá trị của nó trong sóng âm đến giá trị không trên mặt rắn. Vì vận tốc khí trong lớp này (cũng như trong chính sóng âm) nhỏ so với vận tốc âm, và kích thước đặc trưng của nó – độ dầy δ – nhỏ so với λ (so sánh với điều kiện (10-17)), nên chuyển dộng trong nó có thể được coi là không nén được.

Ta khảo sát lớp biên âm ở thành rắn phẳng (mặt phẳng *xz*), và chuyển động sẽ được coi là phẳng – trong mặt phẳng *xy* (*H. Schlichting*, 1932). Những sự gần đúng có liên quan đến độ dầy nhỏ của lớp biên, đã mô tả ở §39 vẫn được giữ nguyên hiệu lực đối với chuyển động không dừng đang xét. Tính không dừng chỉ dẫn đến sự xuất hiện trong phương trình Prandtl (39-5) các số hạng với các đạo hàm theo thời gian:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{80-2}$$

(đạo hàm dp/dx được biểu diễn qua vận tốc $U(x,t)$ của dòng chảy ở bên ngoài lớp biên dựa vào phương trình (9-3)). Trong trường hợp đã cho

$$U = v_0 \cos kx.\cos\omega t = v_0 \cos kx.\,\mathrm{Re}\,e^{-i\omega t} \tag{80-3}$$

($k = \omega/c$), điều này tương ứng với sóng âm phẳng đứng với tần số ω. Vận tốc cần tìm **v** trong lớp biên được biểu diễn qua hàm dòng $\psi(x,y,z)$ theo

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

phương trình này tự động được phương trình liên tục (39-6) thỏa mãn.

Ta sẽ giải phương trình (80-2) bằng phương pháp gần đúng liên tiếp theo đại lượng v_0 – là biên độ dao động của vận tốc khí trong sóng âm. Trong phép gần đúng thứ nhất, ta bỏ qua hoàn toàn các số hạng toàn phương. Nghiệm phương trình

$$\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial y^2} = -i\omega v_0 \cos\ kx.e^{-i\omega t},$$

thỏa mãn các điều kiện ứng với $y = 0$ và $y = \infty$ là

$$v_x^{(1)} = \mathrm{Re}\left\{v_0 \cos kx.e^{-i\omega t}(1 - e^{-\kappa y})\right\},$$

trong đó

$$\kappa = \sqrt{-\frac{i\omega}{\nu}} = \frac{1-i}{\delta}. \tag{80-4}$$

Hàm dòng tương ứng (thỏa mãn điều kiện $\psi^{(1)} = 0$ với $y = 0$ tương đương với điều kiện $v_y^{(1)} = 0$) có dạng:

$$\psi^{(1)} = \mathrm{Re}\left\{v_0 \cos\ kx.\zeta^{(1)}(y)e^{-i\omega t}\right\},$$
$$\zeta^{(1)}(y) = y + \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa y}. \tag{80-5}$$

Trong phép gần đúng tiếp theo, ta viết: $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)}$ và thu được từ (80-2) cho vận tốc $\mathbf{v}^{(2)}$ phương trình sau

$$\frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 v_x^{(2)}}{\partial y^2} = U\frac{\partial U}{\partial x} - v_x^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x} - v_y^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y}. \tag{80-6}$$

Trong vế phải có các số hạng với các tần số $\omega + \omega = 2\omega$ và $\omega - \omega = 0$. Các tần số sau cùng này làm xuất hiện ở trong $\mathbf{v}^{(2)}$ các số hạng không phụ

thuộc vào thời gian. Chính các số hạng này mô tả chuyển động dừng mà ta quan tâm; dưới đây ta chỉ hiểu $\mathbf{v}^{(2)}$ chỉ là phần vận tốc đó. Phần hàm dòng tương ứng được viết dưới dạng

$$\psi^{(2)} = \frac{v_o^2}{c} \sin 2kx\, \zeta^{(2)}(y) \tag{80-7}$$

và đối với hàm $\zeta^{(2)}(y)$ ta tìm được phương trình

$$\delta^2 \zeta^{(2)'''} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\zeta^{(1)'}\right|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\zeta^{(1)*}\zeta^{(1)''}\right), \tag{80-8}$$

ở đây các dấu phẩy là ký hiệu lấy đạo hàm theo y.

Nghiệm của các phương trình này phải thỏa mãn các điều kiện $\zeta^{(2)} = 0$, $\zeta^{(2)'} = 0$, tương đương với đòi hỏi $\mathbf{v}_x^{(2)} = \mathbf{v}_y^{(2)} = 0$ ở trên mặt rắn. Còn đối với các điều kiện ở xa thành, thì chỉ đòi hỏi vận tốc $\mathbf{v}_x^{(2)}$ tiến đến một giá trị hữu hạn (nhưng không tiến đến không). Thay (80-5) vào (80-8) và lấy tích phân hai lần, ta đi tới kết quả sau cho đạo hàm $\zeta^{(2)'}$:

$$\zeta^{(2)'}(y) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}e^{-2y/\delta} - e^{-y/\delta}\sin\frac{y}{\delta} - \\ - \frac{1}{4}e^{-y/\delta}\cos\frac{y}{\delta} + \frac{y}{4\delta}e^{-y/\delta}\left(\cos\frac{y}{\delta} - \sin\frac{y}{\delta}\right).$$

Với $y \to \infty$, nó tiến đến giá trị

$$\zeta^{(2)'}(\infty) = \frac{3}{8}, \tag{80-9}$$

tương ứng với vận tốc

$$v_x^{(2)}(\infty) = \frac{3v_o^2}{8c}\sin 2kx. \tag{80-10}$$

Kết quả này chứng minh hiện tượng đã nêu ở đầu tiết. Ta nhận thấy rằng, bên ngoài lớp biên xuất hiện (trong phép gần đúng bậc hai theo v_o) chuyển động dừng có vận tốc không phụ thuộc vào độ nhớt. Giá trị của nó (80-10) được dùng làm điều kiện biên để xác định dòng chảy âm trong miền cơ bản của chuyển động (xem bài tập [1]).

[1] Vận tốc ngang tương ứng với vận tốc dọc (80-9) có dạng

$$v_y^{(2)} = -\frac{3v_o^2 k}{4c} y\cos 2kx << v_x^{(2)}.$$

Khi giải bài toán về chuyển động ở bên ngoài lớp biên, vận tốc này tự động xuất hiện do phương trình liên tục, nếu ta đặt điều kiện biên $v_y^{(2)} = 0$ với $y = 0$.

BÀI TẬP

Xác định dòng chảy âm trong không gian giữa hai thành song phẳng (mặt phẳng $y = 0$ và $y = h$), trong đó có sóng âm đứng (80-3). Khoảng cách h (giữ vai trò độ dài đặc trưng l) thỏa mãn các điều kiện (80-1) (*Rayleigh*, 1883).

Giải. Do vận tốc $v^{(2)}$ của chuyển động dừng cần tìm là nhỏ so với vận tốc âm, nên có thể coi âm là không nén được. Thêm nữa, do vận tốc v_0 trong sóng âm được giả thiết là nhỏ tùy ý (và cùng với nó là cả vận tốc $v^{(2)} \sim v_0^2/c$), nên trong phương trình chuyển động có thể bỏ qua các số hạng toàn phương [1]. Khi đó phương trình (15-12) cho hàm dòng rút về phương trình

$$\Delta^2 \psi^{(2)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi^{(2)} = 0$$

(để ý rằng, nó xuất hiện từ số hạng có độ nhớt, nhưng bản thân độ nhớt lại biến mất khỏi nó). Ta tìm $\psi^{(2)}$ dưới dạng (80-7). Do điều kiện $h << \lambda$ nên các đạo hàm theo y đều lớn so với các đạo hàm theo x; nếu bỏ qua các đạo hàm này, ta sẽ thu được phương trình sau cho hàm $\zeta^{(2)}(y)$:

$$\zeta^{(2)\prime\prime\prime\prime} = 0. \tag{1}$$

Do sự đối xứng hiển nhiên của bài toán, dòng chảy là đối xứng với mặt phẳng $y = h/2$. Điều đó có nghĩa là

$$v_x^{(2)}(x, y) = v_x^{(2)}(x, h - y), \quad v_y^{(2)}(x, y) = -v_y^{(2)}(x, h - y),$$

đối với nó phải có

$$\zeta^{(2)}(y) = -\zeta^{(2)}(h - y).$$

Một nghiệm như thế của phương trình (1) có dạng

$$\zeta^{(2)}(y) = A\left(y - \frac{h}{2} \right) + B\left(y - \frac{h}{2} \right)^3.$$

Các hằng số A và B được xác định bằng các điều kiện biên

$$\zeta^{(2)}(0) = 0, \qquad \zeta^{(2)'}(0) = \frac{3}{8}.$$

Kết quả là, ta tìm được cho hàm dòng biểu thức

$$\psi^{(2)} = \frac{3v_0^2}{16c} \sin 2kx \left[-\left(y - \frac{h}{2} \right) + \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2} \right],$$

và từ biểu thức này, các công thức cuối cùng tìm được cho sự phân bố các vận tốc:

[1] Nói một cách khác, tỷ số v_0/c được giả thiết là nhỏ so với tất cả các thông số nhỏ khác của bài toán; đặc biệt $v_0/c << \delta/h$.

$$v_x^{(2)} = -\frac{3v_0^2}{16c}\sin 2kx\left[1 - \frac{3(y - h/2)^3}{(h/2)^2}\right],$$

$$v_y^{(2)} = \frac{3v_0^2 k}{8c}\cos 2kx\left[\left(y - \frac{h}{2}\right) - \frac{(y - h/2)^3}{(h/2)^2}\right].$$

Vận tốc $v_x^{(2)}$ đổi dấu tại khoảng cách $(h/2)(1 - 3^{-1/2}) = 0{,}423\, h/2$ tính từ thành.

Dòng chảy được mô tả bởi hai công thức này gồm hai dãy các xoáy nằm đối xứng với mặt phẳng chính giữa $y = h/2$ và tuần hoàn dọc theo trục x với chu kỳ $\lambda/2$.

§81. HỆ SỐ NHỚT THỨ HAI

Hệ số nhớt thứ hai ζ (mà ta gọi đơn giản là *độ nhớt thứ hai*) thường có cùng bậc với hệ số nhớt η. Tuy nhiên, có tồn tại những trường hợp khi ζ có thể đạt tới những giá trị lớn hơn η đáng kể. Như đã biết, độ nhớt thứ hai thể hiện trong các quá trình có gây ra sự biến thiên thể tích (nghĩa là mật độ) của chất lỏng. Trong quá trình nén hay quá trình dãn, cũng như trong mọi biến thiên nhanh của trạng thái, trong chất lỏng cân bằng nhiệt động lực bị phá vỡ, do đó trong chất lỏng bắt đầu xuất hiện các quá trình bên trong có xu hướng phục hồi lại cân bằng này. Thông thường các quá trình này nhanh (nghĩa là thời gian hồi phục nhỏ) đến mức sự thiết lập trạng thái cân bằng thực tế kịp thời theo sau quá trình biến thiên của thể tích, tất nhiên, miễn là vận tốc biến thiên này không quá lớn.

Có tồn tại những trường hợp, trong đó thời gian hồi phục của các quá trình thiết lập lại cân bằng trong vật lớn, nghĩa là các quá trình đó xảy ra tương đối chậm. Chẳng hạn, nếu ta xét một chất lỏng (hay khí) là một hỗn hợp các chất có thể tham gia vào phản ứng hóa học, thì với mỗi nhiệt độ và mật độ đã cho có tồn tại một trạng thái cân bằng hóa xác định đặc trưng bởi các nồng độ xác định của chất ở trong hỗn hợp. Chẳng hạn, nếu nén chất lỏng thì trạng thái cân bằng sẽ bị phá huỷ và bắt đầu xảy ra phản ứng, kết quả là, nồng độ của các chất có xu hướng lấy các giá trị cân bằng tương ứng với giá trị mới của mật độ (và nhiệt độ). Nếu vận tốc của phản ứng này không quá lớn, thì sự thiết lập trạng

thái cân bằng sẽ xảy ra tương đối chậm và không theo kịp sự biến thiên của sự nén. Quá trình nén khi đó sẽ kéo theo các quá trình bên trong tiến gần đến trạng thái cân bằng. Nhưng các quá trình thiết lập sự cân bằng đều là không thuận nghịch; chúng kéo theo sự tăng của entrôpi, và như vậy dẫn sự tiêu tán năng lượng. Do đó, nếu thời gian hồi phục của các quá trình đó lớn, thì khi nén hay dãn chất lỏng, sự tiêu tán năng lượng trở nên quan trọng, và vì sự tiêu tán này phải được xác định bởi độ nhớt thứ hai, nên người ta kết luận rằng ζ [1] sẽ lớn.

Cường độ của các quá trình tiêu tán, và cùng với chúng là cả đại lượng ζ, dĩ nhiên phụ thuộc vào hệ thức giữa vận tốc của các quá trình nén, quá trình dãn và thời gian hồi phục (*relaxation time*, ND). Chẳng hạn, nếu ta xét sự nén và dãn gây bởi sóng âm, thì độ nhớt thứ hai sẽ phụ thuộc vào tần số của sóng. Do đó, giá trị của độ nhớt thứ hai sẽ không đơn giản là một hằng số đặc trưng của chất đã cho, mà bản thân nó sẽ phụ thuộc vào tần số của chuyển động, trong đó nó xuất hiện. Sự phụ thuộc của đại lượng ζ vào tần số được gọi là sự tán sắc.

Phương pháp trình bày dưới dây để khảo sát tổng quát tất cả các hiện tượng đó của *L. I. Manđelstam* và *M. A. Leontovits* (1937). Giả sử ξ là một đại lượng vật lý nào đó đặc trưng cho trạng thái của vật và ξ_0 là giá trị của nó trong trạng thái cân bằng; ξ_0 là hàm của mật độ và nhiệt độ. Chẳng hạn, đối với các hỗn hợp chất lỏng (hay khí), đại lượng ξ có thể là nồng độ của một trong các chất trong hỗn hợp, và khi đó ξ_0 là giá trị của nồng độ trong cân bằng hóa học.

Nếu vật không ở trong trạng thái cân bằng, thì đại lượng ξ sẽ biến thiên theo thời gian và có xu hướng tiến đến giá trị ξ_0. Trong các trạng thái gần với trạng thái cân bằng, hiệu $\xi - \xi_0$ nhỏ, và ta có thể khai triển vận tốc $\dot{\xi}$ của sự biến thiên ξ thành chuỗi theo hiệu đó. Số hạng bậc không trong khai triển này không xuất hiện, vì ở trạng thái cân bằng $\dot{\xi}$ phải bằng không, nghĩa là $\xi = \xi_0$. Do đó, với độ chính xác đến các số hạng bậc một, ta có:

[1] Một quá trình chậm dẫn đến một giá trị lớn của ζ cũng thường là sự truyền năng lượng từ các bậc tự do tịnh tiến của các phần tử sang các bậc tự do dao động (nội phân tử).

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau}(\xi - \xi_o). \qquad (81\text{-}1)$$

Hệ số tỷ lệ giữa $\dot{\xi}$ và $\xi - \xi_o$ phải âm, vì nếu không, ξ sẽ không tiến tới giới hạn hữu hạn. Hằng số dương τ có thứ nguyên thời gian và có thể coi như thời gian hồi phục cho quá trình đang xét; τ càng lớn thì sự tiến đến cân bằng xảy ra càng chậm.

Sau đây ta xét các quá trình trong đó chất lỏng chịu sự nén và dãn đoạn nhiệt tuần hoàn[1], do đó phần biến thiên của nhiệt độ (và của các đại lượng nhiệt động lực khác) phụ thuộc vào thời gian qua thừa số $e^{-i\omega t}$; ta xét một sóng âm trong chất lỏng. Cùng với mật độ và các đại lượng khác, cả vị trí cân bằng cũng biến thiên, do đó ξ_o có thể viết dưới dạng $\xi_o = \xi_{oo} - \xi'_o$, trong đó ξ_{oo} là giá trị không đổi của ξ_o tương ứng với giá trị trung bình của nhiệt độ, còn ξ'_o là phần trăm tỷ lệ với $e^{-i\omega t}$. Nếu viết giá trị thực của ξ dưới dạng $\xi = \xi_{oo} - \xi'$, ta sẽ suy ra được từ (81-1) rằng, ξ' cũng là một hàm tuần hoàn của thời gian và có liên hệ với ξ'_obằng hệ thức:

$$\xi' = -\frac{\xi'_o}{1 - i\omega\tau}. \qquad (81\text{-}2)$$

Ta tính đạo hàm của áp suất theo mật độ trong quá trình đang xét. Bây giờ áp suất phải được coi là hàm của các giá trị mật độ và đại lượng ξ ở trong trạng thái đã cho, cũng như là hàm của entrôpi, đại lượng này được giả thiết là không đổi, mà ta sẽ bỏ đi để đơn giản cho cách viết. Ta có:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho \frac{\partial \xi}{\partial \rho}.$$

Theo (81-2), nếu thay vào đây

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{\partial \xi'}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\frac{\partial \xi'_o}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\frac{\partial \xi_o}{\partial \rho}$$

ta sẽ thu được:

[1] Độ biến thiên của entrôpi (trong các trạng thái gần trạng thái cân bằng) là một đại lượng nhỏ bậc hai. Do đó, với độ chính xác đến các đại lượng bậc một, ta có thể nói đến tính đoạn nhiệt của quá trình.

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho}\frac{\partial \xi_o}{\partial \rho} - i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi}\right\}.$$

Tổng

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_{\rho}\frac{\partial \xi_o}{\partial \rho}$$

chính là đạo hàm của p theo ρ trong một quá trình chậm đến mức chất lỏng luôn luôn ở trong trạng thái cân bằng; nếu ký hiệu hàm đó bằng $(\partial p/\partial \rho)_{c.b}$ cuối cùng ta có:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{1 - i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{c.b} - i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi}\right]. \qquad (81\text{-}3)$$

Tiếp theo, giả sử p_o là áp suất trong trạng thái cân bằng nhiệt động lực; p_o có liên hệ với các đại lượng nhiệt động lực khác bằng phương trình trạng thái của chất lỏng, và với mật độ và entrôpi đã cho nó là một đại lượng hoàn toàn xác định. Trong trạng thái không cân bằng áp suất p khác p_o và là hàm của cả ξ. Nếu mật độ tăng đoạn nhiệt một lượng δρ, thì áp suất cân bằng thay đổi một lượng:

$$\delta p_o = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{c.b}\delta\rho,$$

trong khi đó độ tăng toàn phần của áp suất là $(\partial p/\partial \rho)\delta\rho$, trong đó $\partial p/\partial \rho$ được xác định bởi (81-3). Do đó hiệu $p - p_o$ giữa các áp suất thực và áp suất cân bằng trong trạng thái có mật độ ρ + δρ bằng

$$p - p_o = \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{c.b}\right]\delta\rho = \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{c.b} - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi}\right\}\delta\rho.$$

Ở đây ta quan tâm đến độ biến thiên mật độ gây bởi chuyển động của chất lỏng. Khi đó δρ liên hệ với vận tốc bằng phương trình liên tục mà ta viết dưới dạng

$$\frac{d\delta\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

trong đó d/dt là ký hiệu đạo hàm toàn phần theo thời gian. Trong chuyển

động tuần hoàn, ta có $d\delta\rho/dt = -i\omega\delta\rho$, do đó

$$\delta\rho = \frac{\rho}{i\omega}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,.$$

Thay biểu thức này vào trong $p - p_o$, ta thu được:

$$p - p_o = -\frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}\left(c_o^2 - c_\infty^2\right)\mathrm{div}\,\mathbf{v}, \tag{81-4}$$

trong đó đã đưa vào các ký hiệu

$$c_o^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{c.b}, \qquad c_\infty^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\xi}. \tag{81-5}$$

ý nghĩa của chúng sẽ được giải thích dưới đây.

Để liên hệ các biểu thức đã tìm được với độ nhớt chất lỏng, ta viết tenxơ ứng suất σ_{ik}. Trong tenxơ này áp suất xuất hiện dưới dạng số hạng $-p\delta_{ik}$. Tách riêng ra p_o, là đại lượng xác định bởi phương trình trạng thái, ta tìm được rằng, trong trạng thái không cân bằng, σ_{ik} có chứa số hạng phụ

$$-(p - p_o)\delta_{ik} = -\frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}(c_\infty^2 - c_o^2)\delta_{ik}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}.$$

Mặt khác, nếu so sánh biểu thức này với biểu thức tổng quát (15.2-3) cho tenxơ ứng suất, trong đó div **v** xuất hiện dưới dạng ζ div **v**, ta sẽ đi tới kết quả là, sự có mặt của các quá trình thiết lập chậm sự cân bằng, về mặt vĩ mô, tương đương với sự có mặt của độ nhớt thứ hai bằng:

$$\zeta = \frac{\tau\rho}{1 - i\omega\tau}(c_\infty^2 - c_o^2). \tag{81-6}$$

Các quá trình này không ảnh hưởng đến độ nhớt thông thường η. Nếu với các quá trình chậm đến mức $\tau\omega << 1$, ζ sẽ có giá trị

$$\zeta_o = \tau\rho(c_\infty^2 - c_o^2). \tag{81-7}$$

ζ tăng với thời gian hồi phục τ, phù hợp với điều đã nói ở trên. Với các tần số lớn, ζ là hàm của tần số, nghĩa là nó thể hiện tính tán sắc.

Bây giờ, ta hãy xét xem các quá trình với thời gian hồi phục lớn (để xác định ta sẽ nói đến những phản ứng hóa học) có ảnh hưởng như thế nào đến sự truyền âm trong một chất lỏng. Muốn vậy, có thể xuất phát

từ phương trình chuyển động của một chất lỏng nhớt với ζ xác định bởi công thức (81-6). Tuy nhiên, để đơn giản hơn, ta nên coi chuyển động về mặt hình thức là không nhớt, nhưng với áp suất p không phải được xác định bởi phương trình trạng thái, mà bởi các công thức đã được rút ra ở đây. Khi đó, tất cả các hệ thức tổng quát đã tìm được ở §64, về mặt hình thức vẫn còn ứng dụng được. Đặc biệt, hệ thức giữa vectơ sóng và tần số vẫn còn được xác định như trước bởi công thức $k = \omega/c$, trong đó $c = (\partial p/\partial \rho)^{1/2}$, và đạo hàm $\partial p/\partial \rho$ được cho bởi biểu thức (81-3); (tuy nhiên đại lượng c bây giờ không còn ý nghĩa là vận tốc âm, vì c là một đại lượng phức). Như vậy ta thu được

$$k = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega t}{c_0^2 - c_\infty^2 i\omega\tau}} . \tag{81-8}$$

"Vectơ sóng" xác định bởi công thức này là một đại lượng phức. Ta dễ dàng giải thích được ý nghĩa đó. Trong sóng phẳng, tất cả các đại lượng đều phụ thuộc vào tọa độ x (theo phương lan truyền) qua thừa số e^{ikx}. Nếu viết k dưới dạng $k = k_1 + ik_2$ với k_1 và k_2 là thực, ta thu được $e^{ikx} = e^{ik_1x}e^{-k_2x}$, nghĩa là cùng với thừa số tuần hoàn e^{ik_1x}, cũng có cả thừa số tắt e^{-k_2x} (k_2 tất nhiên phải dương). Như vậy, tính phức của vectơ sóng là biểu thức chính thức nói lên sự kiện sóng tắt, nghĩa là xảy ra sự hấp thụ âm. Khi đó phần thực của "vectơ sóng" phức xác định sự biến thiên của pha sóng với khoảng cách, còn phần ảo của nó là hệ số hấp thụ.

Trong (81-8), dễ dàng tách ra các phần thực và phần ảo; trong trường hợp tổng quát với các tần số ω tùy ý, các biểu thức cho k_1 và k_2 khá cồng kềnh, và ta không nêu ra ở đây. Điều quan trọng là, k_1 (cũng như k_2) là hàm của tần số. Như vậy, nếu trong chất lỏng có thể xảy ra các phản ứng hóa học, thì sự lan truyền âm (trong trường hợp các tần số đủ lớn) sẽ kéo theo sự tán sắc.

Trong trường hợp giới hạn của các tần số nhỏ ($\omega\tau \ll 1$) công thức (81-8) trong phép gần đúng bậc nhất cho $k = \omega/c_0$, điều này tương ứng với sự lan truyền âm với vận tốc c_0. Dĩ nhiên điều đó đúng phải như vậy: điều kiện $\omega\tau \ll 1$ có nghĩa là, chu kỳ $1/\omega$ của sóng âm lớn so với thời gian hồi phục; nói một cách khác, sự thiết lập cân bằng hóa học thực tế

theo kịp các dao động của mật độ trong sóng âm, do đó vận tốc của âm phải được xác định bằng giá trị cân bằng của đạo hàm $(\partial p/\partial \rho)_{c.b}$. Trong phép gần đúng tiếp theo, ta có:

$$k = \frac{\omega}{c_o} + i\frac{\omega^2\tau}{2c_o^3}(c_\infty^2 - c_o^2), \tag{81-9}$$

nghĩa là có xuất hiện sự tắt với hệ số tỷ lệ với bình phương tần số. Nếu xét đến (81-7), phần ảo của k có thể được viết dưới dạng $k_2 = (\omega^2\zeta_\infty)/(2\rho c_\infty^3)$; điều này trùng với phần phụ thuộc vào ζ của hệ số hấp thụ γ (79-6), là biểu thức thu được không xét đến sự tán sắc.

Trong trường hợp giới hạn ngược lại của các tần số lớn ($\omega\tau >> 1$), trong phép gần đúng bậc nhất, $k = \omega/c_\infty$, nghĩa là sự lan truyền âm với vận tốc c_∞. Kết quả này hoàn toàn là tự nhiên, vì với $\omega\tau >> 1$, ta có thể coi rằng không có một phản ứng nào kịp xảy ra trong khoảng thời gian một chu kỳ; do đó vận tốc âm phải được xác định bởi đạo hàm $(\partial p/\partial \rho)_\xi$, lấy với các nồng độ không đổi. Phép gần đúng tiếp theo cho ta:

$$k = \frac{\omega}{c_\infty} + i\frac{c_\infty^2 - c_o^2}{2\tau c_\infty^3}. \tag{81-10}$$

Hệ số hấp thụ không phụ thuộc vào tần số. Khi chuyển từ $\omega << 1/\tau$ sang $\omega >> 1/\tau$, hệ số này tăng đơn điệu và tiến đến giá trị không đổi xác định bởi công thức (81-10). Chú ý rằng, đại lượng k_2/k_1 đặc trưng cho sự hấp thụ tại khoảng cách bằng bước sóng đều nhỏ trong cả hai trường hợp giới hạn ($k_2/k_1 << 1$); nó có một cực đại tại một tần số trung gian nào đó (có giá trị bằng $\omega\tau = (c_o/c_\infty)^{1/2}$.

Từ công thức (81-7) chẳng hạn, ta thấy rằng

$$c_\infty > c_o \tag{81-11}$$

(vì phải có $\zeta > 0$). Có thể thấy được đúng như vậy, nếu dựa vào những lập luận đơn giản dựa trên nguyên lý Le Chatelier.

Giả sử rằng, do ảnh hưởng của tác dụng bên ngoài, thể tích của hệ giảm (và mật độ tăng). Do đó hệ ra khỏi trạng thái cân bằng, và theo nguyên lý Le Chatelier, trong hệ phải bắt đầu các quá trình có xu hướng giảm áp suất. Điều này có nghĩa là, đại lượng $\partial p/\partial \rho$ sẽ giảm, và khi hệ

lại trở về trạng thái cân bằng, giá trị $\partial p/\partial \rho = c^2$ sẽ có giá trị nhỏ hơn so với giá trị của nó ở trong trạng thái không cân bằng.

Khi rút ra tất cả các công thức, ta đã giả thiết rằng, chỉ có một quá trình hồi phục chậm bên trong. Nhưng cũng có thể tồn tại những trường hợp có đồng thời một số quá trình khác nhau như thế. Tất cả các công thức đều có thể được mở rộng dễ dàng sang trường hợp như thế. Thay cho một đại lượng ξ, bây giờ ta có một loạt các đại lượng ξ_1, ξ_2..., đặc trưng cho trạng thái cân bằng của vật, và một cách tương ứng, có một loạt các thời gian hồi phục, τ_1, τ_2,...Ta chọn các ξ_n sao cho mỗi một trong các đạo hàm $\dot{\xi}_n$ chỉ phụ thuộc vào ξ_n tương ứng, nghĩa là sao cho

$$\dot{\xi}_n = \frac{1}{\tau_n}(\xi_n - \xi_{on}). \tag{81-12}$$

Các phép tính hoàn toàn tương tự như các phép tính trên, khi đó dẫn đến công thức

$$c^2 = c_\infty^2 + \sum_n \frac{a_n}{1 - i\omega\tau_n}, \tag{81-13}$$

trong đó $c^2_\infty = (\partial p/\partial \rho)_\xi$, còn các hằng số a_n bằng:

$$a_n = \frac{\partial p}{\partial \xi_n}\left(\frac{\partial \xi_n}{\partial \rho}\right)_{c.b}. \tag{81-14}$$

Trong trường hợp chỉ có một ξ, thì công thức này rút về công thức (81-3), đúng phải như vậy.

Chương IX

SÓNG VA CHẠM

§82. SỰ LAN TRUYỀN CỦA CÁC NHIỄU ĐỘNG TRONG MỘT DÒNG KHÍ NÉN ĐƯỢC

Khi vận tốc chuyển động của chất lỏng trở nên so sánh được với vận tốc âm hay vượt vận tốc âm, thì các hiệu ứng do tính nén được của chất lỏng trở nên quan trọng hàng đầu. Trong thực tế các chuyển động loại đó thường gặp trong các chất khí. Do đó thủy động lực học với các vận tốc lớn thường được gọi là *khí động lực học*.

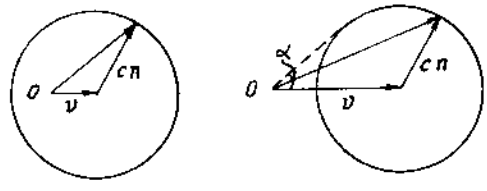
Trước hết cần chú ý là, trong khí động lực học, thực tế bao giờ cũng gặp các giá trị rất lớn của số Reynolds. Thực vậy, như đã biết từ lý thuyết động học các chất khí, độ nhớt động học của chất khí có bậc độ lớn của tích giữa quãng đường tự do l của các phân tử nhân với vận tốc trung bình chuyển động nhiệt của chúng; vận tốc này có bậc độ lớn của vận tốc âm, do đó $\nu \sim cl$. Nếu vận tốc đặc trưng của bài toán khí động lực học có bậc của vận tốc âm hay lớn hơn, thì số Reynolds $R \sim Lu/\nu \sim$ $\sim Lu/lc$, nghĩa là nó rõ ràng chứa một tỷ số rất lớn giữa các kích thước đặc trưng L và độ dài của đoạn đường tự do l [1]. Như thường vẫn xảy ra, với các giá trị rất lớn của R, độ nhớt trở nên không quan trọng đối với chuyển động của chất khí thực tế trong toàn không gian, và sau đây tại mọi nơi (chỉ trừ một số trường hợp đặc biệt có nói trước) ta sẽ coi chất khí như một chất lỏng lý tưởng (theo nghĩa thủy động lực học của từ).

Chuyển động của một chất khí về thực chất hoàn toàn khác nhau tùy theo chuyển động là "dưới âm" (*subsonic*, ND) hay "vượt âm" (*supersonic*,

[1] Ta không xét vấn đề về chuyển động của các vật trong các chất lỏng rất loãng, trong đó độ dài của quãng đường của các phần tử có thể so sánh được với các kích thước của vật. Vấn đề này thực ra không phải là bài toán thủy động lực học và phải được khảo sát dựa vào lý thuyết động học các chất khí.

ND), nghĩa là vận tốc của nó nhỏ hơn hay lớn hơn vận tốc âm. Một trong những nét khác biệt quan trọng có tính chất nguyên tắc nhất của một dòng chảy vượt âm là, trong đó có thể tồn tại *các sóng va chạm*. Tính chất của các sóng này sẽ được khảo sát chi tiết trong các tiết sau. Ở đây ta xét một đặc điểm đặc trưng khác của chuyển động vượt âm có liên quan đến các tính chất lan truyền các nhiễu động nhỏ trong chất khí.

Nếu một chất khí chuyển động dừng chịu một nhiễu động nhỏ tại một nơi nào đó thì ảnh hưởng của nhiễu động này sẽ lan truyền sau đó trong chất khí với một vận tốc (đối với chính chất khí) bằng vận tốc âm. Vận tốc lan truyền của nhiễu động đối với một hệ tọa độ đứng yên gồm hai phần: thứ nhất, nhiễu động được dòng chất khí "kéo" với vận tốc **v**; thứ hai, nhiễu động lan truyền đối với chất khí với vận tốc c theo một phương **n** nào đó. Để đơn giản, ta xét một dòng khí song phẳng đồng chất có vận tốc **v** không đổi. Giả sử rằng, tại một điểm O nào đó (cố định trong không gian) khí chịu một nhiễu động nhỏ. Vận tốc lan truyền **v** + c**n** của nhiễu động xuất phát từ O (đối với hệ tọa độ đứng yên) có giá trị khác nhau tùy theo phương của vectơ đơn vị **n**. Ta thu được tất cả các gía trị khả dĩ của vận tốc bằng cách vẽ từ O vectơ **n** và từ đầu mút của vectơ này chọn làm tâm vẽ mặt cầu có bán kính c; các vectơ vạch từ O đến các điểm của mặt cầu này xác định các gía trị và các hướng khả dĩ của vận tốc lan truyền nhiễu động. Trước hết ta giả sử $v < c$. Khi đó các vectơ **v** + c**n** có thể có mọi hướng bất kỳ trong không gian (hình 50a). Nói một cách khác, trong dòng dưới âm một nhiễu động xuất phát từ một điểm nào đó cuối cùng sẽ lan truyền trong toàn bộ chất khí. Ngược lại, trong một dòng vượt âm, $v > c$, các hướng của các vectơ **v** + c**n** (như thấy từ hình 50b) có thể chỉ nằm trong một mặt nón đỉnh O ngoại tiếp với hình cầu có tâm tại đầu của vectơ **v** (hình 50b).



a) *b)*

Hình 50

Góc mở 2α của mặt nón, như đã thấy được từ hình vẽ, được xác định bởi

$$\sin \alpha = c/v \tag{82-1}$$

Như vậy, trong dòng chảy vượt âm, nhiễu động xuất phát từ một điểm nào đó chỉ lan truyền xuôi dòng trong một mặt nón có góc mở càng nhỏ, nếu tỷ số v/c càng nhỏ. Toàn miền dòng chảy nằm ngoài mặt nón đó hoàn toàn không chịu ảnh hưởng của nhiễu động tại O.

Góc α xác định bởi đẳng thức (82-1) được gọi là *góc Mach*. Tỷ số v/c, thường gặp trong khí động lực học được gọi là *số Mach*:

$$M = v/c \tag{82-2}$$

Mặt bao miền, mà nhiễu động xuất phát từ điểm đã cho đạt tới được gọi là *mặt Mach* hay *mặt đặc trưng*.

Trong trường hợp tổng quát của một dòng chảy dừng tùy ý, mặt này không còn là mặt cônic trong toàn bộ thể tích dòng. Tuy nhiên có thể khẳng định rằng, mặt này cắt đường dòng tại mỗi điểm của nó dưới một góc bằng góc *Mach*. Giá trị của góc *Mach* thay đổi từ điểm này đến điểm khác tương ứng với sự biến thiên của các vận tốc v và c. Tiện đây cần nhấn mạnh rằng, trong chuyển động với các vận tốc lớn, vận tốc âm sẽ khác nhau tại các nơi khác nhau của khối khí: nó thay đổi cùng với các đại lượng nhiệt động lực (áp suất, mật độ, v.v...), nó là hàm [1] của chúng. Vận tốc âm, với tính cách là hàm các tọa độ của điểm được gọi là *vận tốc cục bộ* của âm.

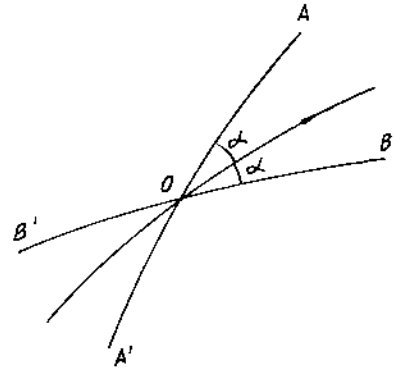
Các tính chất đã mô tả của dòng chảy vượt âm đem lại cho nó một đặc tính hoàn toàn khác với đặc tính của chuyển động dưới âm. Nếu một dòng chảy dưới âm của chất khí gặp trên đường đi một chướng ngại nào đó, nó bao quanh một vật nào đó chẳng hạn; thì sự có mặt của chướng ngại đó sẽ làm thay đổi chuyển động trong toàn bộ không gian ngược dòng hay xuôi dòng; ảnh hưởng của chướng ngại chỉ biến mất một cách tiệm cận khi đi xa khỏi vật. Tuy nhiên, một dòng chảy vượt âm lao tới vật chướng ngại "như mù"; ảnh hưởng của vật chướng ngại chỉ trải ra trong miền xuôi dòng [2], và trong toàn bộ phần còn lại của không gian ngược dòng,

[1] Khi nghiên cứu sóng âm ở chương VIII, ta đã có thể coi vận tốc của âm là không đổi.

[2] Để tránh mọi sự hiểu nhầm, ta nói rằng nếu một sóng va chạm xuất hiện ở trước vật thì miền này sẽ lớn lên đôi chút (xem §122).

khối khí chuyển động như thể hoàn toàn không có chướng ngại nào.

Trong trường hợp dòng chảy dừng phẳng của khối khí, ta có thể nói đến các *đường đặc trưng* (hay đơn giản là *các đặc trưng*) thay cho các mặt đặc trưng trong mặt phẳng chuyển động. Qua mỗi điểm O của mặt phẳng này có hai đặc trưng (AA' và BB' ở trên hình 51) cắt đường dòng đi qua điểm đó dưới các góc bằng góc Mach. Các nhánh OA và OB của các đặc trưng hướng xuôi dòng có thể được gọi là xuất phát từ điểm O; chúng bao miền dòng chảy AOB, là miền có thể chịu ảnh hưởng của các nhiễu động xuất phát từ O. Còn các nhánh $B'O$ và $A'O$, có thể nói là tận cùng tại điểm O; miền $A'OB'$ giữa chúng là miền dòng chảy có thể ảnh hưởng đến chuyển động tại O.



Hình 51

Khái niệm về các đặc trưng (trong trường hợp ba chiều – là mặt đặc trưng) cũng có một khía cạnh hơi khác. Đó là các tia, mà dọc theo chúng lan truyền các nhiễu động thỏa mãn các điều kiện của âm hình. Chẳng hạn, nếu một dòng khí dừng vượt âm chảy quanh một chướng ngại đủ nhỏ, thì dọc theo các đặc trưng xuất phát từ chướng ngại đó sẽ có nhiễu động dừng của chuyển động của chất khí. Chúng ta đã đi tới kết quả này ở §68 khi nghiên cứu âm hình học các môi trường chuyển động.

Ta hiểu nhiễu động của trạng thái khí là một sự biến thiên nhỏ của các đại lượng nào đó đặc trưng cho trạng thái đó: vận tốc, mật độ, áp suất, v.v... Về vấn đề này cần có điều nói trước như sau: các nhiễu động của các gía trị entrôpi của khối khí (với áp suất không đổi) và rot vận tốc của nó không lan truyền với vận tốc của âm. Một khi xuất hiện, các nhiễu động này hoàn toàn không dịch chuyển đối với chất khí, mà bị kéo đi cùng với chất khí đối với một hệ tọa độ cố định, với vận tốc bằng vận tốc của mỗi phần tử đã cho của khối khí. Đối với entrôpi, đó là một hệ quả trực tiếp của định luật bảo toàn entrôpi (trong chất lỏng lý

tưởng), chính điều đó có nghĩa là, entrôpi của mỗi phần tử thể tích khối khí không đổi khi nó chuyển động. Kết quả tương tự cho rot của vận tốc (tính xoáy) thu được từ định luật bảo toàn lưu số. Đối với các nhiễu động này, chính các đường dòng là những đặc trưng.

Cần nhấn mạnh rằng, tình huống sau cùng, dĩ nhiên, không làm thay đổi sự đúng đắn tổng quát của các điều khẳng định đã phát biểu ở trên về các miền ảnh hưởng, vì đối với chúng, điều quan trọng chỉ là sự kiện tồn tại của một vận tốc lan truyền cực đại khả dĩ (bằng vận tốc âm) của các nhiễu động đối với chính khối khí.

BÀI TẬP

Tìm các hệ thức giữa các độ biến thiên nhỏ của vận tốc và các đại lượng nhiệt động lực khi có nhiễu động nhỏ tùy ý trong dòng khí đồng chất.

Giải. Ký hiệu δ là các độ biến thiên nhỏ của các đại lượng khi có nhiễu động (thay cho dấu phẩy như ở §64). Trong phép gần đúng bậc nhất đối với các đại lượng đó, phương trình Euler có dạng

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\delta\rho = 0 \tag{1}$$

($\mathbf{v}$ là vận tốc không nhiễu động không đổi của dòng), phương trình bảo toàn entrôpi:

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\delta s = 0, \tag{2}$$

và phương trình liên tục:

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\delta p + \rho c^2 \operatorname{div}\delta\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

(ở đây đặt $\delta\rho = c^{-2}\delta p + (\partial\rho/\partial s)_p\,\delta s$; các số hạng có δs biến mất do (2)). Đối với nhiễu động dạng $\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}$ ta tìm được hệ phương trình đại số:

$$(\mathbf{vk} - \omega)\delta s = 0, \quad (\mathbf{vk} - \omega)\delta\mathbf{v} + \mathbf{k}\frac{\delta p}{\rho} = 0,$$

$$(\mathbf{vk} - \omega)\delta p + \rho c^2 \mathbf{k}\delta\mathbf{v} = 0.$$

Từ đó ta thấy rằng có thể có hai dạng nhiễu động.

Trong một dạng của chúng (sóng xoáy entrôpi)

$$\omega = \mathbf{vk}, \quad \delta s \neq 0, \quad \delta p = 0, \quad \delta\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p \delta s, \quad \mathbf{k}\delta\mathbf{v} = 0;$$

cả tính xoáy rot $\delta\mathbf{v} = i[\mathbf{k}\delta\mathbf{v}]$ cũng khác không. Các nhiễu động δs và $\delta\mathbf{v}$ trong sóng này độc lập với nhau. Đẳng thức $\omega = \mathbf{vk}$ có nghĩa là sự truyền nhiễu động bằng khí chuyển động.

Trong dạng các nhiễu động khác

$$(\omega - \mathbf{vk})^2 = c^2k^2, \quad \delta s = 0, \quad \delta p = c^2\delta\rho,$$
$$(\omega - \mathbf{vk})\delta p = \rho c^2\mathbf{k}\delta\mathbf{v}, \quad [\mathbf{k}\,\delta\mathbf{v}] = 0.$$

Đó là sóng âm với tần số bị dịch đi theo hiệu ứng Doppler. Việc cho trước nhiễu động của một trong các đại lượng trong sóng này xác định các nhiễu động của tất cả các đại lượng còn lại.

§83. DÒNG CHẢY DỪNG CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC

Ta có thể thu được ngay từ phương trình Bernoulli một số kết quả tổng quát có liên quan đến chuyển động dừng đoạn nhiệt tùy ý của một chất khí nén được. Phương trình Bernoulli cho chuyển động dừng có dạng

$$w + \frac{v^2}{2} = \text{const},$$

trong đó const là một đại lượng không đổi dọc theo một trong các đường dòng (nếu là chuyển động thế thì const có giá trị như nhau ở trên các đường dòng khác nhau, nghĩa là trong toàn bộ thể tích chất lỏng). Nếu trên một đường dòng có một điểm nào đó mà tại đó vận tốc khí bằng không, thì phương trình Bernoulli có thể viết dưới dạng:

$$w + \frac{v^2}{2} = w_0 \tag{83-1}$$

trong đó w_0 là giá trị của hàm nhiệt tại điểm có $v = 0$.

Phương trình bảo toàn entrôpi trong chuyển động dừng rút về $\mathbf{v}\nabla s = v\partial s/\partial t = 0$, nghĩa là $s = \text{const}$, trong đó const lại là một đại lượng không đổi dọc theo đường dòng. Ta viết phương trình này dưới dạng tương tự với (83-1):

$$s = s_0. \tag{83-2}$$

Phương trình (83-1) chứng tỏ rằng, vận tốc v lớn hơn tại những nơi, mà hàm nhiệt w nhỏ hơn. Vận tốc cực đại (dọc theo một đường dòng đã cho) tại điểm mà w cực tiểu. Nhưng đối với entrôpi không đổi ta có

$dw = dp/\rho$; vì $\rho > 0$, nên các vi phân dw và dp có cùng dấu, do đó w và p bao giờ cũng biến thiên theo cùng một chiều. Do đó có thể nói rằng dọc theo đường dòng vận tốc bao giờ cũng giảm khi áp suất tăng và ngược lại.

Áp suất và hàm nhiệt có giá trị cực tiểu khả dĩ (trong quá trình đoạn nhiệt) khi nhiệt độ tuyệt đối bằng không: $T = 0$. Giá trị tương ứng của áp suất bằng $p = 0$, và giá trị của w khi $T = 0$ được quy ước chọn làm giá trị không, năng lượng được tính từ giá trị này; như vậy ta cũng có $w = 0$ khi $T = 0$. Bây giờ từ (83-1) có thể kết luận rằng, giá trị cực đại khả dĩ của vận tốc (với các giá trị đã cho của các đại lượng nhiệt động lực tại điểm có $v = 0$) bằng:

$$v_{max} = (2w_0)^{1/2} \tag{80-3}$$

Vận tốc này có thể đạt được trong dòng chảy dừng của chất khí trong chân không [1].

Bây giờ ta xét đặc tính biến thiên của mật độ dòng chất lỏng $j = \rho v$ dọc theo một đường dòng. Từ phương trình Euler $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p/\rho$; ta nhận thấy rằng, dọc theo đường dòng có hệ thức

$$v\,dv + \frac{dp}{\rho} = 0$$

giữa các vi phân dv và dp. Nếu viết $dp = c^2 d\rho$, ta suy ra hệ thức

$$\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho v}{c^2} \tag{83-4}$$

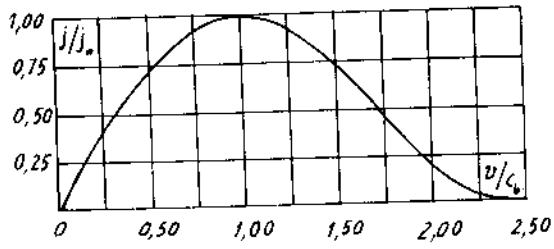
và sau đó

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{83-5}$$

Từ đó ta thấy rằng, khi vận tốc tăng dọc theo đường dòng, mật độ dòng sẽ tăng chừng nào vận tốc vẫn còn dưới âm. Còn trong miền chuyển động vượt âm, mật độ dòng giảm khi vận tốc tăng và triệt tiêu cùng với ρ khi $v = v_{max}$ (hình 52). Sự khác nhau cơ bản đó giữa các dòng dừng dưới âm và dòng dừng vượt âm có thể còn được giải thích cụ thể như

[1] Tất nhiên, thực tế khi nhiệt độ giảm nhanh sẽ phải xảy ra sự ngưng tụ của khí và sự tạo thành một hệ hai pha – "sương mù".

sau. Trong dòng dưới âm, các đường dòng xít lại gần nhau theo hướng tăng của vận tốc. Ngược lại trong chuyển động vượt âm, các đường dòng tách xa nhau khi vận tốc tăng.



Hình 52

Dòng j có giá trị cực đại j_* tại điểm mà ở đó vận tốc của khí bằng giá trị cục bộ của vận tốc âm:

$$j_* = \rho_* c_* \qquad (83\text{-}6)$$

các dấu sao chỉ các giá trị của các đại lượng tương ứng tại điểm đó. Vận tốc $v_* = c_*$ được gọi là vận tốc *tới hạn*. Trong trường hợp tổng quát của một chất khí tùy ý các giá trị *tới hạn* của các đại lượng có thể được biểu diễn qua các giá trị của các đại lượng tại điểm có $v = 0$, do kết quả giải đồng thời các phương trình

$$s_* = s_0, \quad w_* + \frac{c_*^2}{2} = w_0 \qquad (83\text{-}7)$$

Hiển nhiên rằng, mỗi khi $M = v/c < 1$, ta cũng có $v/c_* < 1$, và khi $M > 1$ thì $v/c_* > 1$. Do đó trong trường hợp đang xét tỷ số $M_* = v/c_*$ có thể được dùng làm tiêu chuẩn tương tự như số Mach và thậm chí còn tiện lợi hơn, vì c_* là một đại lượng không đổi, khác với vận tốc c là một đại lượng thay đổi dọc theo đường dòng.

Khi áp dụng các phương trình tổng quát của thủy động lực học, khí lý tưởng nhiệt động lực giữ một vị trí quan trọng đặc biệt. Khi nói về một chất khí như thế, bao giờ ta cũng sẽ coi (chỉ trừ những trường hợp đặc biệt có nói trước), nhiệt dung của nó là một đại lượng không đổi, không phụ thuộc vào nhiệt độ (trong miền nhiệt độ đang xét). Một chất khí như thế được gọi là khí *polytropic*; ta sẽ dùng thuật ngữ này, ngụ ý nhấn mạnh mỗi khi có giả định muốn đi xa hơn nhiều về tính lý tưởng nhiệt động lực. Đối với khí polytropic đã biết tất cả các hệ thức giữa các đại lượng nhiệt động lực được biểu diễn bằng những công thức rất đơn giản. Điều đó luôn cho ta khả năng giải được đến cùng các phương trình

thủy động lực học. Để tra cứu, ta viết ở đây các hệ thức đó sẽ được dùng đến luôn sau này.

Phương trình trạng thái của chất khí lý tưởng có dạng

$$pV = \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{\mu}, \tag{83-8}$$

trong đó $R = 8{,}314.10^7$ e'c/K.mol là hằng số khí, μ là trọng lượng phân tử khí. Vận tốc âm trong một khí như thế đã được tính ở §64 và được cho bởi công thức:

$$c^2 = \frac{\gamma RT}{\mu} = \frac{\gamma p}{\rho}, \tag{83-9}$$

trong đó ta đã đưa vào tỷ số không đổi của các nhiệt dung riêng

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Tỷ số này bao giờ cũng lớn hơn đơn vị; còn đối với khí polytropic nó không đổi. Đối với các khí đơn nguyên tử $\gamma = 5/3$; còn đối với các khí lưỡng nguyên tử $\gamma = 7/5$ (tại các nhiệt độ bình thường) [1].

Nội năng của khí polytropic, với độ chính xác đến một hằng số cộng không quan trọng, có dạng:

$$\varepsilon = c_v T = \frac{pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)}. \tag{83-10}$$

Đối với hàm nhiệt ta có các công thức tương tự

$$w = c_p T = \frac{\gamma pV}{\gamma - 1} = \frac{c^2}{\gamma - 1}. \tag{83-11}$$

Ở đây ta đã dùng hệ thức đã biết $c_p - c_v = R/\mu$. Cuối cùng entrôpi của khí bằng:

[1] Tên gọi khí "pôlytrôpic" có nguồn gốc từ thuật ngữ "quá trình polytropic" – đó là quá trình mà áp suất tỷ lệ nghịch với một lũy thừa nào đó của thể tích. Đối với chất khí có các nhiệt dung không đổi, các quá trình như thế không những là đẳng nhiệt mà còn là các quá trình đoạn nhiệt nữa, đối với quá trình này pV^γ = const (đoạn nhiệt Poisson). Tỷ số giữa các nhiệt dung γ được gọi là *chỉ số đoạn nhiệt*.

$$s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} = c_p \ln \frac{p^{1/\gamma}}{\rho}. \qquad (83\text{-}12)$$

Bây giờ ta trở lại nghiên cứu chuyển động dừng và áp dụng các hệ thức tổng quát đã tìm được ở trên cho khí polytropic. Thay (83-11) vào (83-3), ta tìm được vận tốc cực đại của dòng chảy dừng:

$$v_{\max} = c_o \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}. \qquad (83\text{-}13)$$

Đối với vận tốc tới hạn, từ phương trình thứ hai (83-7), ta rút ra được

$$\frac{c_*^2}{\gamma - 1} + \frac{c_*^2}{2} = w_o = \frac{c_o^2}{\gamma - 1},$$

Từ đó [1)]

$$c_* = c_o \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}. \qquad (83\text{-}14)$$

Phương trình Bernoulli (83-1), sau khi thay biểu thức (83-11) của hàm nhiệt, cho ta hệ thức giữa nhiệt độ và vận tốc tại một điểm tùy ý của đường dòng; các hệ thức tương tự cho áp suất và nhiệt độ có thể thu được trực tiếp dựa vào phương trình đoạn nhiệt Poisson:

$$\rho = \rho_o \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad p = p_o \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\gamma. \qquad (83\text{-}15)$$

Như vậy, ta thu được các công thức quan trọng sau:

$$T = T_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_o^2}\right) = T_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c_*^2}\right),$$

$$\rho = \rho_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_o^2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \rho_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \qquad (83\text{-}16)$$

$$p = p_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v^2}{c_o^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = p_o \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

[1)] Hình 52 biểu diễn đồ thị của j/j_* là hàm của v/c_* đối với không khí ($\gamma = 1{,}4$; $v_{\max} = 2{,}45\, c_*$).

Đôi khi để tiện lợi, ta dùng các hệ thức này dưới dạng, trong đó vận tốc được biểu diễn qua các đại lượng khác:

$$v^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_o}{\rho_o}\left[1-\left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_o}{\rho_o}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (83\text{-}17)$$

Ta cũng viết cả các hệ thức giữa vận tốc âm và vận tốc v:

$$c^2 = c_o^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2 = \frac{\gamma+1}{2}c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2. \qquad (83\text{-}18)$$

Từ đó ta tìm được các số M và M_*, chúng có liên hệ với với nhau bởi hệ thức:

$$M_*^2 = \frac{\gamma-1}{2/M^2+\gamma-1}. \qquad (83\text{-}19)$$

Khi M tăng từ 0 đến vô cùng, M_*^2 tăng từ 0 đến $(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

Sau cùng ta nêu ra các biểu thức cho các giá trị tới hạn của nhiệt độ, áp suất, và mật độ; chúng thu được với $v = c_*$ rút từ các công thức (83-16) [1]:

$$T_* = \frac{2T_o}{\gamma-1}, \quad p_* = p_o\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_* = \rho_o\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (83\text{-}20)$$

Để kết luận, cần nhấn mạnh rằng các kết quả thu được ở đây được xét cho chuyển động, trong đó không xuất hiện các sóng va chạm. Nếu có các sóng va chạm thì phương trình (83-2) không còn đúng nữa. Khi một đường dòng đi qua một sóng va chạm thì entrôpi của khí tăng.

Tuy nhiên, ta nhận thấy rằng phương trình Bernoulli (83-1) vẫn còn đúng cả khi có sóng va chạm, vì $w + v^2/2$ chính là một trong các đại lượng bảo toàn khi đi qua mặt gián đoạn (§85); cùng với phương trình này, cả công thức (83-14), chẳng hạn, cũng vẫn còn đúng.

BÀI TẬP

Biểu diễn nhiệt độ, áp suất và mật độ dọc theo một đường dòng đi qua số $M = v/c$.

[1] Chẳng hạn đối với không khí ($\gamma = 1{,}4$)

$$c_* = 0{,}913\,c_o, \quad p_* = 0{,}528\,p_o, \quad \rho_* = 0{,}634\,\rho_o, \quad T_* = 0{,}833\,T_o.$$

Giải. Dựa vào các công thức đã rút ra được trong bài giảng, ta thu được:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad \frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

§84. CÁC MẶT GIÁN ĐOẠN

Trong các chương trước ta chỉ khảo sát các dòng chảy, trong đó sự phân bố các đại lượng (vận tốc, áp suất, mật độ, v.v...) ở trong chất khí là liên tục. Tuy nhiên, cũng có thể có những dòng chảy, trong đó có xuất hiện các gián đoạn trong phân bố các đại lượng đó.

Sự gián đoạn tính liên tục trong chuyển động của chất khí xảy ra dọc theo một số mặt nào đó; khi đi qua một mặt như thế các đại lượng nói trên chịu bước nhảy. Các mặt này được gọi là *các mặt gián đoạn*. Trong chuyển động không dừng của một chất khí, các mặt gián đoạn nói chung, không đứng yên; tuy nhiên ở đây cần nhấn mạnh rằng, vận tốc chuyển động của một mặt gián đoạn không có gì giống với vận tốc chuyển động của bản thân chất khí. Khi chuyển động, các hạt chất khí có thể đi qua mặt đó, cắt mặt đó.

Những điều kiện biên xác định phải được thực hiện trên các mặt gián đoạn. Để phát biểu các điều kiện này, ta xét một phần tử nào đó của mặt gián đoạn và dùng một hệ tọa độ liên kết với phần tử đó, có trục x hướng theo phương pháp tuyến với phần tử [1].

Trước hết, trên mặt gián đoạn dòng chất phải liên tục: lượng chất khí đi vào từ một phía của mặt này phải bằng lượng chất khí đi ra khỏi mặt kia. Dòng chất khí đi qua phần tử mặt đang xét (tính cho một đơn vị diện tích) bằng ρv_x. Do đó điều kiện $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x}$ phải được thực hiện, các chỉ số *1* và *2* ký hiệu cho hai bên của mặt gián đoạn.

Dưới đây, hiệu các giá trị của một đại lượng nào đó ở hai bên của mặt gián đoạn sẽ được ký hiệu bằng các dấu ngoặc vuông; chẳng hạn,

[1] Nếu chuyển động là không dừng, ta xét phần tử mặt trong một khoảng thời gian nhỏ.

$$\left[\rho v_x\right] = \rho_1 v_{1x} - \rho_2 v_{2x},$$

và điều kiện thu được có dạng

$$\left[\rho v_x\right] = 0. \tag{84-1}$$

Tiếp thêm, năng thông phải liên tục. Năng thông được định nghĩa bằng biểu thức (6-3). Do đó ta thu được điều kiện

$$\left[\rho v_x\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right] = 0. \tag{84-2}$$

Cuối cùng, dòng xung lượng phải liên tục, nghĩa là các lực do các chất khí ở hai bên mặt gián đoạn tác dụng lên nhau phải bằng nhau. Dòng xung lượng qua một đơn vị diện tích bằng (xem §7)

$$pn_i + \rho v_i v_k v_k.$$

Vectơ pháp tuyến **n** hướng theo trục x. Do đó sự liên tục của x – thành phần của dòng xung lượng dẫn đến điều kiện

$$\left[p + \rho v_x^2\right] = 0, \tag{84-3}$$

và sự liên tục của các y - và z - thành phần cho ta

$$\left[\rho v_x v_y\right] = 0, \quad \left[\rho v_x v_z\right] = 0. \tag{84-4}$$

Các phương trình (84.1-4) lập thành một hệ đầy đủ các điều kiện biên ở trên mặt gián đoạn. Từ chúng có thể rút ra kết luận về khả năng tồn tại của hai loại mặt gián đoạn.

Trong trường hợp thứ nhất, không có dòng chất qua mặt gián đoạn. Điều đó có nghĩa là $\rho_1 v_{1x} = \rho_2 v_{2x} = 0$. Vì ρ_1 và ρ_2 khác không, nên phải có $v_{1x} = v_{2x} = 0$. Các điều kiện (84-2) và (84-4) trong trường hợp này tự động thỏa mãn, còn điều kiện (84-3) cho ta $p_1 = p_2$. Như vậy, trong trường hợp này, thành phần pháp tuyến của vận tốc và áp suất của chất khí đều liên tục trên mặt gián đoạn:

$$v_{1x} = v_{2x} = 0, \quad [p] = 0 \tag{84-5}$$

Còn các vận tốc tiếp tuyến v_y, v_z và mật độ (cũng như các đại lượng nhiệt động lực khác, trừ áp suất) đều chịu một bước nhảy tùy ý. Các gián đoạn thuộc loại này được gọi là *các gián đoạn tiếp tuyến.*

Trong trường hợp thứ hai, dòng chất khí và cùng với nó cả v_{1x} và v_{2x}, đều khác không. Khi đó từ (84-1) và (84-4), ta có:

$$[v_y] = 0, \qquad [v_z] = 0, \tag{84-6}$$

nghĩa là vận tốc tiếp tuyến liên tục trên mặt gián đoạn. Còn đối với mật độ, áp suất (và do đó cả các đại lượng nhiệt động lực khác) và vận tốc pháp tuyến, thì chúng chịu bước nhảy, thêm vào đó các bước nhảy của các đại lượng này có liên hệ với với nhau bằng các hệ thức (84.1-3). Theo (84-1), trong điều kiện (84-2) ta có thể giản ước ρv_x và thay v^2 bằng v_x^2 vì v_y và v_z liên tục. Như vậy, trong trường hợp đang xét phải có các điều kiện sau ở trên mặt gián đoạn:

$$[\rho v_y] = 0, \quad \left[\frac{v_x^2}{2} + w\right] = 0, \quad \left[p + \rho v_x^2\right] = 0. \tag{84-7}$$

Các gián đoạn thuộc loại này được gọi là *các sóng va chạm*.

Nếu bây giờ trở lại hệ tọa độ đứng yên, thì tại mọi nơi, thay cho v_x ta cần viết hiệu giữa các thành phần pháp tuyến v_n của vận tốc chất khí đối với mặt gián đoạn và vận tốc u của chính mặt, vận tốc này, theo định nghĩa, hướng vuông góc với mặt:

$$v_x = v_n - u. \tag{84-8}$$

Các vận tốc v_n và u được lấy đối với hệ quy chiếu cố định, v_x là vận tốc chuyển động của khí đối với mặt gián đoạn; một cách khác, có thể nói rằng, $-v_x = u - v_n$ là vận tốc lan truyền của chính mặt gián đoạn đối với chất khí. Cần chú ý rằng, vận tốc này khác nhau đối với chất khí ở cả hai bên mặt (nếu v_x chịu gián đoạn).

Các gián đoạn tiếp tuyến, trên đó các thành phần tiếp tuyến của vận tốc chịu bước nhảy đã được nghiên cứu ở §29. Ở đó đã chứng minh rằng, trong một chất lỏng không nén được, các gián đoạn như thế không ổn định và chúng phải xói lở thành miền rối. Một sự nghiên cứu tương tự đối với một chất lỏng nén được chứng tỏ rằng sự không ổn định như thế cũng xảy ra cả trong trường hợp tổng quát với các vận tốc tùy ý (xem bài tập 1).

Một trường hợp riêng của các gián đoạn tiếp tuyến là các gián đoạn, trong đó vận tốc liên tục, chỉ có mật độ chịu bước nhảy (và cùng với nó,

cả các đại lượng nhiệt động lực khác, trừ áp suất). Các gián đoạn như thế được gọi là *các gián đoạn tiếp xúc*. Điều nói ở trên về tính không ổn định không được xét cho các gián đoạn như thế.

BÀI TẬP

1. Nghiên cứu tính không ổn định (đối với các nhiễu động vô cùng nhỏ) của các gián đoạn tiếp tuyến trong môi trường đồng chất nén được (chất khí hay chất lỏng).

Giải. Các phép tính được tiến hành tương tự như ở §29 cho chất lỏng không nén được. Cũng giống như ở đó, hướng trục z theo phương pháp tuyến với mặt.

Trong môi trường 2 (với vận tốc $\mathbf{v}_2 = 0$, $z < 0$) áp suất thỏa mãn phương trình

$$\ddot{p}_2' - c^2 \Delta p_2' = 0$$

(thay cho phương trình Laplace (29-2) trong chất lỏng không nén được). Ta tìm p_2' dưới dạng

$$p_2' = \text{const} \cdot \exp(-i\omega t + iqx + i\kappa_2 z),$$

trong đó số "gợn sóng" trên mặt được ký hiệu là q (thay cho k trong §29); nếu κ_2 là phức, thì nó phải được chọn sao cho $\text{Im}\, \kappa_2 < 0$. Phương trình sóng dẫn tới hệ thức

$$\omega^2 = c^2(q^2 + \kappa_2^2). \tag{1}$$

Thay cho (29-7) cũng bằng cách đó bây giờ ta tìm được

$$p_2' = \frac{\zeta \rho \omega^2}{i\kappa_2}.$$

Trong khí 1, chuyển động với vận tốc $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ ($z > 0$), ta tìm được p' dưới dạng

$$p_1' = \text{const} \cdot \exp(-i\omega t + iqx - i\kappa_1 z),$$

Để đơn giản các cách rút ra, ta giả thiết từ đầu rằng, vận tốc $\mathbf{v}$ cũng hướng theo trục x. Hệ thức giữa ω, q, κ_1 được cho bởi công thức

$$(\omega - vq)^2 = c^2(q^2 + \kappa_1^2) \tag{2}$$

(so sánh với (68-1)). Thay cho (29-6), bây giờ ta thu được:

$$p_1' = -\frac{\zeta(\omega - qv)^2 \rho}{i\kappa_1},$$

và điều kiện $p_1' = p_2'$ dẫn tới phương trình

$$\frac{\kappa_1}{(\omega - qv)^2} + \frac{\kappa_2}{\omega^2} = 0. \tag{3}$$

Ta có thể tránh khỏi giả thiết đã nêu về hướng của vận tốc **v**, nếu để ý rằng, vận tốc không nhiễu động có mặt trong các phương trình liên tục và phương trình Euler đã tuyến tính hóa ban đầu chỉ trong tổ hợp $(\mathbf{v}\nabla)$ (lần lượt trong các số hạng $(\mathbf{v}\nabla)p'$ và $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}'$). Do đó, để chuyển sang hướng tùy ý của **v** (trong mặt phẳng xy) chỉ cần thay trong (1) - (3) v bằng $v\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa **v** và **q** (so sánh với bị chú trang 180).

Khử κ_1, κ_2 từ (1) - (3), ta thu được phương trình tán sắc sau để xác định tần số nhiễu động ω theo số sóng q:

$$\left[\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{(\omega-qv\cos\varphi)^2}\right]\left[\frac{1}{c^2q^2}-\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{(\omega-qv\cos\varphi)^2}\right]=0. \tag{4}$$

Nghiệm của thừa số thứ nhất

$$\omega=\frac{1}{2}qv\cos\varphi \tag{5}$$

bao giờ cũng thực. Các nghiệm của thừa số thứ hai:

$$\omega=\frac{1}{2}qv\cos\varphi\pm q\left[\frac{1}{4}v^2\cos^2\varphi+c^2\pm c(c^2+v^2\cos^2\varphi)^{1/2}\right]^{1/2}; \tag{6}$$

các nghiệm này chỉ là thực khi $v\cos\varphi > v_k$, trong đó

$$v_k=2^{3/2}c. \tag{7}$$

Như vậy, với $v\cos\varphi < v_k$, phương trình tán sắc có một cặp các nghiệm liên hợp phức, đối với một trong các nghiệm này $\mathrm{Im}\,\omega > 0$; các nhiễu động tương ứng dẫn đến tính không ổn định. Với $v < v_k$ các nhiễu động như thế với góc φ bất kỳ, còn đối với $v > v_k$ chỉ có các nhiễu động với $\cos\varphi < v_k/v$ là không ổn định. Kết quả là, gián đoạn tiếp tuyến bao giờ cũng không ổn định. Ta có nhận xét là, chính sự kiện không ổn định (nếu không quan tâm đến việc xét cụ thể các nhiễu động nào) là hiển nhiên ngay từ tính không ổn định trong trường hợp của chất lỏng không nén được kết hợp với tình huống là, trong phương trình tán sắc vận tốc v chỉ xuất hiện trong tổ hợp của $v\cos\varphi$: dù vận tốc v như thế nào, ta vẫn tìm được các góc φ sao cho $v\cos\varphi \ll c$, do đó đối với các nhiễu động như thế, môi trường có động thái như không nén được[1)].

2. Một sóng âm phẳng đập lên gián đoạn tiếp tuyến trong môi trường đồng chất nén được; xác định các cường độ của sóng phản xạ trên gián đoạn và sóng khúc xạ trong nó (*J.W. Miles*, 1957; *H.S. Ribner*, 1957).

Giải. Chọn các trục tọa độ như trong bài tập trước, vận tốc **v** (trong môi trường 1, $z > 0$) hướng theo trục x. Giả sử sóng âm đập từ môi trường đứng yên (môi trường 2, $z < 0$); hướng vectơ sóng **k** của nó được cho bởi các tọa độ cầu θ và φ;

[1)] Giá trị (7) do *L. Đ. Landau* thu được (1944). *X. I. Xurovatxki* (1954) đã nêu ra sự cần thiết phải xét đến tính không cộng tuyến của **q** và **v** trong bài toán này.

góc θ là góc giữa **k** và trục z, góc φ là góc giữa hình chiếu của **k** lên mặt phẳng xy (ký hiệu nó bằng **q**) và vận tốc **v**:

$$k_x = q\cos\varphi, \quad k_y = q\sin\varphi, \quad k_z = \frac{\omega}{c}\cos\theta, \quad q = \frac{\omega}{c}\sin\theta = k\sin\theta,$$

trong đó $0 < \theta < \pi/2$ (sóng đập theo chiều dương trục z). Trong môi trường 2 ta tìm áp suất dưới dạng

$$p_2' = e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}\left(e^{ik_z z} + Ae^{-ik_z z}\right),$$

trong đó A là biên độ của sóng phản xạ, còn biên độ sóng tới quy ước chọn bằng đơn vị. Trong môi trường 1 ta có một sóng khúc xạ:

$$p_1' = Be^{i(k_x x + k_y y + \kappa z - \omega t)},$$

trong đó κ thỏa mãn phương trình

$$(\omega - vk_x)^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + \kappa^2)$$

(so sánh với (2)). Các biên độ A và B được xác định từ các điều kiện liên tục của áp suất và độ dịch chuyển theo phương thẳng đứng của các hạt chất lỏng về hai phía của gián đoạn: $p'_1 = p'_2$ với $z = 0$, $\zeta_1 = \zeta_2 \equiv \zeta$. Từ đó ta thu được hai phương trình

$$1 + A = B, \quad \frac{\kappa}{(\omega - vk_x)^2}B = \frac{k_z}{\omega^2}(1 - A),$$

do đó

$$A = \frac{(\omega - vk_x)^2/\kappa - \omega^2/k_z}{(\omega - vk_x)^2/\kappa + \omega^2/k_z}, \quad B = \frac{2(\omega - vk_x)^2/\kappa}{(\omega - vk_x)^2/\kappa + \omega^2/k_z}, \tag{8}$$

chính phương trình này giải bài toán đặt ra. Dấu của đại lượng κ

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[(1 - \mathrm{M}\sin\theta\cos\varphi)^2 - \sin^2\theta\right], \quad \mathrm{M} = \frac{v}{c},$$

phải được chọn có xét đến các điều kiện giới hạn khi $z \to \infty$: vận tốc của sóng khúc xạ phải hướng từ gián đoạn, nghĩa là:

$$U_z = \frac{\partial\omega}{\partial\kappa} = \frac{c^2\kappa}{\omega - vk_x} > 0. \tag{9}$$

Từ các công thức thu được, ta nhận thấy rằng, có thể có ba chế độ phản xạ khác nhau:

1. Với $\mathrm{M}\cos\varphi < 1/\sin\theta - 1$, đại lượng κ là thực, và vì $\omega - vk_x > 0$, nên theo điều kiện (9) $\kappa > 0$. Từ (8), ta thấy rằng, khi đó $|A| < 1$ – sự phản xạ xảy ra với sự làm yếu sóng.

2. Với $1/\sin\theta - 1 < M\cos\varphi < 1/\sin\theta + 1$, đại lượng κ là ảo và $|A| = 1$, – có xảy ra sự phản xạ trong toàn phần của sóng âm.

3. Với $M\cos\varphi > 1 + 1/\sin\theta$ (trường hợp này chỉ có thể xảy ra với $M > 2$) đại lượng κ lại là thực, nhưng bây giờ cần lấy $\kappa < 0$. Theo (8) thì khi đó $|A| > 1$, nghĩa là sự phản xạ xảy ra cùng với sự tăng cường sóng. Thêm nữa, các mẫu số của các biểu thức (8) với $\kappa < 0$ có thể bằng không với các góc tới xác định của sóng, và khi đó hệ số phản xạ bằng vô cùng. Vì mẫu số này trùng (với sai khác ở các ký hiệu) với vế trái phương trình (3) của bài tập trước, nên có thể kết luận ngay rằng, các góc tới "cộng hưởng" được xác định bằng các đẳng thức (5) và (6) (đẳng thức sau cùng – với $M > 2^{3/2}$). Đến lượt mình, sự vô hạn của hệ số phản xạ (và truyền qua), nghĩa là sự hữu hạn của biên độ sóng phản xạ khi biên độ của sóng tới tiến đến không, có nghĩa là khả năng phát âm tự phát bởi mặt gián đoạn: nhiễu động (gợn sóng) một khi được tạo ra trên mặt gián đoạn tiếp tục phát các sóng âm vô hạn mãi không tắt mà cũng không được tăng cường khi đó; năng lượng mang đi theo âm được lấy trọn vẹn từ toàn bộ môi trường chuyển động.

Mật độ năng thông (lấy trung bình theo thời gian) trong sóng khúc xạ

$$\bar{q}_2 = U_z \bar{E}_2 = \frac{c^2\kappa}{\omega - vk_x}\,\frac{\omega}{\omega - vk_x}\,\frac{|B|^2}{2\rho c^2}$$

[E_2 từ (68-3)]. Trong trường hợp 3 ta có $\kappa < 0$, và do đó cả $\bar{q}_2 < 0$, năng lượng đi tới gián đoạn từ môi trường chuyển động, chính môi trường này được dùng làm nguồn tăng cường. Trong sự phát âm tự phát, năng lượng đi tới này trùng với năng lượng mang đi bởi sóng đi vào môi trường đứng yên.

Trong lời giải đã trình bày của bài toán, sự không ổn định của mặt gián đoạn không được xét đến. Sự đúng đắn về mặt hình thức của cách đặt vấn đề như thế cho bài toán có nguyên nhân là do, các sóng âm và các mặt không ổn định (tắt dần khi $z \to \pm\infty$) của sóng biểu diễn các kiểu dao động độc lập tuyến tính. Còn sự đúng đắn về mặt vật lý đòi hỏi phải thực hiện các điều kiện đặc biệt (các điều kiện ban đầu chẳng hạn), trong đó các sóng mặt còn đủ yếu.

§85. ĐƯỜNG ĐOẠN NHIỆT VA CHẠM

Bây giờ ta chuyển sang nghiên cứu chi tiết các sóng va chạm [1]. Ta đã nhận thấy rằng, thành phần tiếp tuyến của vận tốc chất khí liên tục trong các gián đoạn đó. Do đó có thể lấy một hệ tọa độ mà trong đó phần

[1] Có một sự lưu ý về thuật ngữ. Sóng va chạm chúng tôi hiểu là chính mặt gián đoạn. Tuy nhiên trong các tài liệu có thể gặp cả các thuật ngữ khác, trong đó mặt gián đoạn được hiểu là mặt đầu sóng va chạm, còn sóng va chạm được hiểu là mặt gián đoạn cùng với dòng chảy của khí theo sau nó.

tử mặt của gián đoạn đang xét đứng yên, còn thành phần tiếp tuyến của vận tốc chất khí ở cả hai phía của mặt đều bằng không [1]. Khi đó thay cho thành phần pháp tuyến v_x có thể viết đơn giản là v, và các điều kiện (84-7) có dạng:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \tag{85-1}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \tag{85-2}$$

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = w_2 + \frac{v_2^2}{2}. \tag{85-3}$$

trong đó j được ký hiệu là mật độ dòng của khí qua mặt gián đoạn. Do đó sau này bao giờ ta cũng quy ước coi rằng j dương và khí chuyển từ mặt *1* sang mặt *2*. Nói một cách khác, ta có thể gọi khí *1* là khí mà sóng va chạm chuyển động tới, còn khí *2* là khí ở lại đàng sau sóng va chạm. Ta sẽ gọi mặt của sóng va chạm hướng về khí *1* là mặt trước, còn mặt kia của sóng va chạm hướng về khí *2* là mặt sau.

Từ các điều kiện đã viết, ta sẽ rút ra được nhiều hệ thức. Ta đưa vào các thể tích riêng $V_1 = 1/\rho_1$, $V_2 = 1/\rho_2$ của khí. Từ (85-1), suy ra

$$v_1 = jV_1, \qquad v_2 = jV_2 \tag{85-4}$$

và sau khi thay vào (85-2), ta được

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2 \tag{85-5}$$

hay

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}. \tag{85-6}$$

Công thức này (cùng với (85-4) liên kết vận tốc lan truyền của sóng va chạm với các áp suất và mật độ ở cả hai phía của mặt.

Vì j^2 là một đại lượng dương, nên đồng thời phải có $p_2 > p_1$, $V_1 > V_2$ hay $p_2 < p_1$, $V_1 < V_2$; sau đây ta sẽ thấy rằng, thực tế chỉ trường hợp thứ

[1] Việc chọn hệ tọa độ như thế cũng được hiểu ngầm tại mọi nơi trong chương này, trừ §92.

Một sóng va chạm đứng yên thường được gọi là *bước nhảy nén*. Nếu sóng va chạm đứng yên vuông góc với phương của dòng, ta có một bước nhảy nén pháp tuyến; nếu nó nghiêng so với phương chuyển động, thì được gọi là *bước nhảy nén nghiêng*.

nhất là có thể xảy ra.

Ta còn ghi thêm một công thức hữu ích sau đây cho hiệu các vận tốc $v_1 - v_2$. Thay (85-6) vào $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$, ta có [1]:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \tag{85-7}$$

Tiếp theo, nếu viết (85-3) dưới dạng

$$w_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2} = w_2 + \frac{j^2 V_2^2}{2} \tag{85-8}$$

và thay j^2 từ (85-6), ta sẽ thu được:

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0. \tag{85-9}$$

Nếu thay cho hàm nhiệt, ta đưa vào nội năng $\varepsilon = w - pV$, thì hệ thức thu được có thể viết dưới dạng

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \tag{85-10}$$

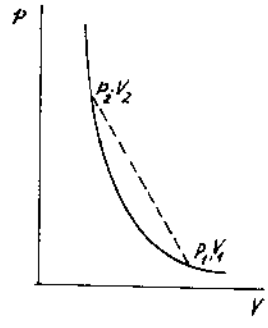
Các hệ thức này xác định mối liên hệ với giữa các đại lượng nhiệt động lực ở hai phía của mặt gián đoạn.

Với p_1, V_1 đã cho, phương trình (85-9) hay (85-10) xác định sự phụ thuộc giữa p_2 và V_2. Sự phụ thuộc đó được gọi là *đoạn nhiệt va chạm* hay *đoạn nhiệt Hugoniot* (W.J. *Rankine*, 1870; *H. Hugoniot*, 1885). Nó được biểu diễn bằng đồ thị (hình 53) trong mặt phẳng p, V bằng một đường cong đi qua điểm p_1, V_1 đã cho, tương ứng với trạng thái khí 1 trước sóng va chạm; điểm này của đường đoạn nhiệt va chạm được gọi là *điểm ban đầu của nó*. Ta có nhận xét là, đường đoạn nhiệt va chạm không thể cắt đường thẳng đứng $V = V_1$ ở đâu, chỉ trừ tại điểm ban đầu. Thực vậy, một sự cắt như thế có nghĩa là, hai áp suất khác nhau thỏa mãn phương trình (85-10) tương ứng với cùng một thể tích. Tuy nhiên, với $V_1 = V_2$ từ (85-10), ta cũng có $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, và khi các thể tích và năng lượng như nhau, thì cả các áp suất cũng phải như nhau. Như vậy, đường thẳng $V = V_1$ chia đường đoạn nhiệt va chạm thành hai phần, mỗi phần nằm hoàn toàn về một phía của đường thẳng đó. Cũng vì lý do tương tự, đường đoạn nhiệt va

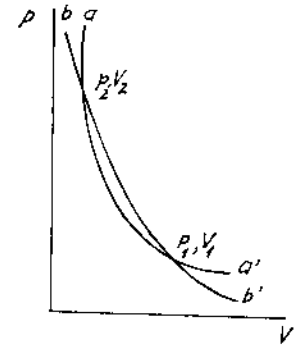
[1] Ta lấy căn bậc hai với dấu cộng, như đã thấy từ trước là phải có $v_1 - v_2 > 0$, điều này sẽ được giải tích ở dưới đây (§87).

chạm cũng chỉ cắt đường thẳng nằm ngang $p = p_1$ tại một điểm (p_1, V_1).

Giả sử aa' (hình 54) là đường đoạn nhiệt va chạm vạch qua điểm p_1, V_1 được lấy là trạng thái ban đầu. Trên đường cong này ta chọn một điểm p_2, V_2 nào đó và vạch qua điểm này một đường đoạn nhiệt khác (bb'), đối với đường này, điểm p_2, V_2 là điểm ban đầu. Hiển nhiên rằng, cặp các giá trị p_1, V_1 cũng thỏa mãn cả phương trình của đường đoạn nhiệt thứ hai. Như vậy, các đường đoạn nhiệt aa' và bb' cắt nhau tại hai điểm p_1, V_1 và p_2, V_2. Cần nhấn mạnh rằng, cả hai đường đoạn nhiệt này không trùng nhau hoàn toàn như đã xảy ra đối với các đường đoạn nhiệt Poisson được vạch qua một điểm đã cho.



Hình 53



Hình 54

Đó là một trong những hệ quả suy được từ sự kiện là, phương trình của đường đoạn nhiệt va chạm không thể được viết dưới dạng $f(p,V) = \text{const}$, trong đó f là một hàm nào đó của các đối số của nó, như đã xảy ra đối với đường đoạn nhiệt Poisson chẳng hạn (phương trình của nó là $s(p,V) = \text{const}$). Trong khi đó các đường đoạn nhiệt Poisson (đối với một chất khí đã cho) lập thành một họ các đường cong một thông số, nhưng đường đoạn nhiệt va chạm được xác định bởi việc cho trước hai thông số: đó là các giá trị ban đầu của p_1, V_1. Điều đó dẫn tới hệ quả quan trọng sau: nếu hai (hay nhiều hơn) sóng va chạm kế tiếp chuyển chất khí lần lượt từ trạng thái *1* sang trạng thái *2* và từ trạng thái *2* sang trạng thái *3*, thì sự chuyển từ trạng thái *1* sang trạng thái *3* chỉ bằng một sóng va chạm nào đó, nói chung không thể được.

Đối với trạng thái nhiệt động lực ban đầu đã cho của khí (nghĩa là p_1,

V_1 đã cho), sóng va chạm chỉ được xác định bởi một thông số nào đó: chẳng hạn, nếu cho áp suất p_2 ở sau sóng, thì đường đoạn nhiệt Hugoniot xác định V_2, sau đó các công thức (85-4) và (85-6) xác định mật độ dòng j và các vận tốc v_1 và v_2. Tuy nhiên, cần nhắc lại rằng, ở đây ta xét sóng va chạm trong một hệ tọa độ, trong đó khí chuyển động vuông góc với mặt của nó. Còn nếu xét đến khả năng sắp xếp sóng va chạm dưới một góc nghiêng so với phương của dòng, thì còn cần phải đưa thêm vào một thông số nữa, chẳng hạn giá trị của thành phần vận tốc tiếp tuyến với mặt của nó.

Ở đây ta nêu lên một sự giải thích tiện lợi bằng đồ thị cho công thức (85-6). Nếu nối điểm p_1, V_1 ở trên đường đoạn nhiệt va chạm (hình 53) với một điểm tùy ý p_2, V_2 của đường đoạn nhiệt đó bằng một dây cung, thì $(p_2 - p_1)/(V_2 - V_1) = -j^2$ chính là độ dốc của dây cung đó đối với trục hoành (theo chiều dương của nó). Như vậy, giá trị của j, và cùng với nó cả giá trị của vận tốc sóng va chạm, đều được xác định tại mỗi điểm của đường đoạn nhiệt va chạm bằng góc nghiêng của dây cung vạch từ điểm ban đầu đến điểm đó.

Cùng với các đại lượng nhiệt động lực khác, cả entrôpi cũng chịu sự gián đoạn trong sóng va chạm. Do định luật tăng entrôpi, entrôpi của khí chỉ có thể tăng trong khi nó chuyển động. Do đó entrôpi s_2 của khí sau khi đi qua sóng va chạm phải lớn hơn entrôpi s_1 ban đầu:

$$s_2 > s_1 \qquad (85\text{-}11)$$

Sau đây ta sẽ thấy rằng điều kiện này đặt những hạn chế quan trọng cho đặc trưng biến thiên của tất cả các đại lượng trong sóng va chạm.

Cần nhấn mạnh sự kiện sau đây. Sự có mặt của các sóng va chạm gây ra sự tăng của entrôpi trong các chuyển động nào mà có thể được coi là chuyển động trong toàn không gian của một chất lỏng lý tưởng, không có độ nhớt và tính dẫn nhiệt. Sự tăng của entrôpi có nghĩa là sự không thuận nghịch của chuyển động, nghĩa là có sự tiêu tán năng lượng. Như vậy các gián đoạn là một cơ chế dẫn đến sự tiêu tán năng lượng trong chuyển động của chất lỏng lý tưởng. Từ đó suy ra rằng, đối với chuyển động của các vật trong chất lỏng lý tưởng, kéo theo sự xuất hiện các sóng va chạm, thì không xảy ra nghịch lý *D'Alembert* (§11), – trong một chuyển động như thế vật sẽ chịu tác dụng của lực cản.

Dĩ nhiên cơ chế thực của sự tăng entrôpi trong các sóng va chạm nằm trong các quá trình tiêu tán xảy ra trong những lớp chất rất mỏng, những lớp này thực tế là các sóng va chạm vật lý (xem §93). Tuy nhiên, cần chú ý rằng, độ lớn của sự tiêu tán này hoàn toàn chỉ được xác định bằng các định luật bảo toàn khối lượng, năng lượng và xung lượng khi đem áp dụng cho cả hai phía của các lớp đó: bề rộng của các lớp này phải sao cho bảo đảm được sự tăng của entrôpi do các định luật bảo toàn đó đòi hỏi.

Sự tăng của entrôpi ở trong sóng va chạm còn gây một ảnh hưởng quan trọng khác lên chuyển động: nếu chuyển động của khí là chuyển động thế trước sóng va chạm, thì nói chung nó sẽ trở thành chuyển động xoáy ở sau sóng va chạm. Ta sẽ trở lại vấn đề này ở §114.

§86. SÓNG VA CHẠM CƯỜNG ĐỘ YẾU

Ta xét một sóng va chạm, trong đó tất cả các đại lượng đều chịu một bước nhảy nhỏ; các gián đoạn đó được gọi là *các sóng va chạm cường độ yếu*. Biến đổi hệ thức (85-9) bằng cách khai triển trong đó theo các luỹ thừa của các hiệu nhỏ $s_2 - s_1$ và $p_2 - p_1$. Ta nhận thấy rằng, trong một khai triển như thế, các số hạng bậc một và bậc hai theo $p_2 - p_1$ sẽ được giản ước đi ở trong (85-9); do đó cần phải khai triển theo $p_2 - p_1$ đến số hạng bậc ba. Đối với khai triển theo $s_2 - s_1$ chỉ cần dừng lại ở số hạng bậc một. Ta có:

$$w_2 - w_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial s_1}\right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial w}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3}\right)_s (p_2 - p_1)^3.$$

Nhưng theo hệ thức nhiệt động lực học $dw = Tds + Vdp$, ta có đối với các đạo hàm:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s = V.$$

Vì vậy

$$w_2 - w_1 = T_1(s_2 - s_1) + V_1(p_2 - p_1) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3.$$

Chỉ cần khai triển thể tích V_2 theo các lũy thừa của $p_2 - p_1$, vì số hạng thứ hai của (85-9) đã chứa đại lượng nhỏ $p_2 - p_1$, và sự khai triển theo $s_2 - s_1$ sẽ cho ta số hạng bậc $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$, là số hạng ta không quan tâm đến. Như vậy,

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2.$$

Thay các khai triển này vào trong (85-9), ta thu được hệ thức:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3. \qquad (86\text{-}1)$$

Như vậy, bước nhảy của entrôpi trong một sóng va chạm cường độ yếu là một đại lượng nhỏ bậc ba so với bước nhảy của áp suất.

Độ nén đoạn nhiệt $-(\partial V/\partial p)_s$ thực tế bao giờ cũng giảm khi áp suất tăng, nghĩa là đạo hàm bậc hai [1)]

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \qquad (86\text{-}2)$$

Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng, bất đẳng thức này không phải là một hệ thức nhiệt động lực và về nguyên tắc có thể hủy nó đi [2)]. Dưới đây ta sẽ nhiều lần thấy rằng, dấu của đạo hàm $(\partial^2 V/\partial p^2)$ rất quan trọng trong động lực học chất khí. Sau đây bao giờ ta cũng giả thiết rằng đạo hàm đó dương.

Qua điểm *1* (p_1, V_1) trên giản đồ p,V ta vẽ hai đường cong – đường đoạn nhiệt va chạm và đường đoạn nhiệt Poisson. Phương trình của

[1)] Đối với một khí polytropic

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma^2}\frac{V}{p^2}.$$

biểu thức này có thể thu được một cách đơn giản nhất bằng cách lấy đạo hàm phương trình đoạn nhiệt Poisson $pV^\gamma = \text{const}$.

[2)] Chẳng hạn điều này có thể xảy ra trong miền gần điểm tới hạn của chất lỏng – khí. Tình hình với sự phá hủy điều kiện (86-2) có thể cũng được phỏng theo trên đường đoạn nhiệt va chạm đối với môi trường chấp nhận sự chuyển pha (do đó trên đường đoạn nhiệt có xuất hiện vết gẫy). Điều này xem trong sách: *Zeldovits Ia. B; Raizer Iu. P.* Vật lý các sóng va chạm và nhiệt độ cao: các hiện tượng thủy động lực – xuất bản lần thứ 2 – MOCKBA. HAYKA, 1966, chương I, §19; chương XI, §20.

đường đoạn nhiệt Poisson có dạng $s_2 - s_1 = 0$. So sánh phương trình này với phương trình (86-1) của đường đoạn nhiệt va chạm ở gần điểm *1*, ta nhận thấy rằng, cả hai đường cong tiếp xúc với nhau tại điểm này, đó là sự tiếp xúc bậc hai – không những các đạo hàm bậc một, mà cả các đạo hàm bậc hai cũng trùng nhau. Để xem vị trí tương hỗ của cả hai đường cong đối với nhau như thế nào ở gần điểm *1*, ta có nhận xét là, theo (86-1) và (86-2) trên đường đoạn nhiệt va chạm phải có $s_2 > s_1$ khi $p_2 > p_1$ trong khi đó trên đường đoạn nhiệt Poisson vẫn có $s_2 = s_1$. Do đó, ứng với cùng một tung độ p_2, hoành độ của điểm trên đường đoạn nhiệt va chạm phải lớn hơn hoành độ của điểm nằm trên đường đoạn nhiệt Poisson. Đó là do, theo công thức nhiệt động lực đã biết

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

entrôpi tăng với sự tăng thể tích ở áp suất không đổi – đối với tất cả các vật dãn nở khi bị nung nóng, nghĩa là đối với chúng đạo hàm $(\partial V/\partial T)_p$ dương. Một cách tương tự cũng nhận thấy rằng, ở dưới điểm *1* (nghĩa là $p_2 < p_1$) các hoành độ của của những điểm trên đường đoạn nhiệt Poisson phải lớn hơn các hoành độ của các điểm của đường đoạn nhiệt va chạm. Như vậy, ở gần điểm tiếp xúc, cả hai đường cong có vị trí như đã được nêu ở trên hình 55 (*HH'* là đường đoạn nhiệt va chạm, còn *PP'* là đường đoạn nhiệt Poisson) [1] và theo (86-2) hai đường cong có bề lõm quay lên phía trên.

Với $p_2 - p_1$ và $V_2 - V_1$ nhỏ, công thức (85-6) có thể được viết trong phép gần đúng bậc nhất dưới dạng

$$j^2 = -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s$$

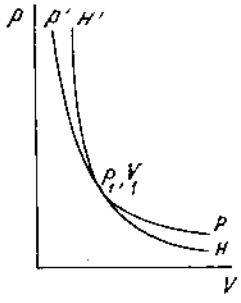
(ở đây ta viết đạo hàm với entrôpi không đổi, vì các đường đoạn nhiệt Poisson và đường đoạn nhiệt va chạm có cùng tiếp tuyến tại điểm *1)*. Tiếp thêm, các vận tốc v_1 và v_2 đều như nhau trong cùng phép gần đúng, và bằng

$$v = jV = \sqrt{-V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

[1] Với $(\partial V/\partial T)_p < 0$, sự sắp xếp hai đường cong sẽ ngược lại.

Nhưng đó chính là vận tốc âm c. Như vậy, vận tốc truyền của sóng va chạm cường độ yếu, trong phép gần đúng bậc nhất, bằng vận tốc âm:

$$v = c \qquad (86\text{-}3)$$



Hình 55

Một loạt các hệ quả quan trọng có thể được rút ra từ các tính chất đã thu được của đường đoạn nhiệt va chạm ở gần điểm *1*. Vì trong sóng va chạm điều kiện $s_2 > s_1$ phải được thỏa mãn, nên cũng phải có

$$p_2 > p_1$$

nghĩa là các điểm *2* (p_2, V_2) phải nằm cao hơn điểm *1*. Vì dây cung *1-2* dốc hơn tiếp tuyến với đường đoạn nhiệt ở *1* (hình 53) và tg của góc nghiêng của tiếp tuyến này được cho bởi đạo hàm $\left(\partial p_1 / \partial V_1\right)_{s_1}$, nên ta có:

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với V_1^2, ta được:

$$j^2 V_1^2 = v_1^2 > -V_1^2\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1}\right)_{s_1} = c_1^2,$$

trong đó c_1 là vận tốc âm tương ứng với điểm *1*. Như vậy,

$$v_1 > c_1.$$

Cuối cùng vì dây cung *1-2* ít dốc hơn tiếp tuyến ở điểm *2*, nên một cách tương tự, ta suy ra: $v_2 < c_2$ [1)].

Để kết luận, cần nhớ rằng, với $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$, từ điều kiện $s_2 > s_1$ cho các sóng va chạm cường độ yếu ta suy ra $p_2 < p_1$, còn đối với các vận tốc ta cũng thu được các bất đẳng thức $v_1 > c_1$ và $v_2 < c_2$.

[1)] Lập luận sau cùng trên đây chỉ áp dụng được ở gần điểm *1*, tại đó tg của góc nghiêng của tiếp tuyến với đường đoạn nhiệt va chạm tại điểm 2 chỉ khác với đạo hàm $\left(\partial p_2 / \partial V_2\right)_{s_2}$ một đại lượng có độ nhỏ bậc hai.

§87. CHIỀU BIẾN THIÊN CỦA CÁC ĐẠI LƯỢNG TRONG SÓNG VA CHẠM

Như vậy, nếu giả thiết đạo hàm (86-2) dương đối với các sóng va chạm cường độ yếu, thì có thể chứng minh rất đơn giản rằng điều kiện tăng entrôpi $s_2 > s_1$ nhất thiết dẫn đến các bất đẳng thức:

$$p_2 > p_1 \tag{87-1}$$

$$v_1 > c_1, \qquad v_2 < c_2. \tag{87-2}$$

Từ nhận xét đối với công thức (85-6), ta suy ra rằng $p_2 > p_1$, thì

$$V_2 < V_1, \tag{87-3}$$

và vì $j = v_1/V_1 = v_2/V_2$, nên cả [1]

$$v_1 > v_2. \tag{87-4}$$

Các bất đẳng thức (87-1) và (87-3) có nghĩa là, khi khí đi qua sóng va chạm thì khí bị nén – áp suất và mật độ của khí sẽ tăng lên. Bất đẳng thức $v_1 > c_1$ có nghĩa là, sóng va chạm chuyển động đối với khí ở phía trước nó với vận tốc vượt âm; do đó rõ ràng là, không một nhiễu động nào xuất phát từ sóng va chạm có thể xuyên vào trong khí này. Nói một cách khác, sự có mặt của sóng va chạm hoàn toàn không ảnh hưởng đến trạng thái khí ở phía trước nó.

Bây giờ ta sẽ chứng tỏ rằng, tất cả các bất đẳng thức (87.1-4) đúng đối với cả sóng va chạm có cường độ tùy ý – với cùng giả thiết về dấu của đạo hàm $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ [2].

Đại lượng j^2 xác định độ nghiêng của dây cung, vạch từ điểm ban đầu của sóng va chạm *1* đến một điểm tùy ý *2* ($-j^2$ là tang của góc nghiêng của dây cung này đối với trục V). Trước hết ta chứng minh rằng chiều biến thiên của đại lượng này khi dịch chuyển điểm *2* dọc theo đường

[1] Nếu chuyển sang hệ quy chiếu trong đó chất khí 1 ở trước sóng va chạm đứng yên, còn sóng chuyển động, thì bất đẳng thức $v_1 > v_2$ có nghĩa là, khí ở sau sóng va chạm sẽ dịch chuyển (với vận tốc $v_1 - v_2$) theo chiều dịch chuyển của bản thân sóng.

[2] Các bất đẳng thức (87.1-4) cho các sóng va chạm có cường độ tùy ý trong khí polytropic do *Jouguet* (*E. Jouguet*, 1904) và *Zemplen* (*Zemplen*, 1905) tìm ra. Phần chứng minh trình bày dưới đây cho môi trường tùy ý được cho bởi *L.Đ. Landau* 1944.

đoạn nhiệt có liên hệ đơn trị với chiều biến thiên của entrôpi s_2 trong cùng dịch chuyển đó.

Lấy vi phân các hệ thức (85-5) và (85-8) theo các đại lượng thuộc khí *2*, với trạng thái của khí *1* đã cho. Điều đó có nghĩa là, các đại lượng p_2, V_2, w_2 và j được lấy vi phân với các đại lượng p_1, V_1, w_1 đã cho. Từ (85-5) ta được:

$$dp_2 + j^2 dV_2 = (V_1 - V_2)\, d(j^2), \tag{87-5}$$

và từ (85-8)

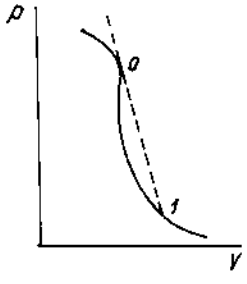
$$dw_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) d(j^2)$$

hay khai triển vi phân dw_2:

$$T_2 ds_2 + V_2(dp_2 + j^2 dV_2) = \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right)\, d(j^2).$$

Thay vào đây $dp_2 + j^2 dV_2$ từ (87-5), ta thu được hệ thức:

$$T_2\, ds_2 = \frac{1}{2}\left(V_1 - V_2\right)^2\, d(j^2). \tag{87-6}$$



Hình 56

Từ đó ta thấy rằng:

$$\frac{d(j^2)}{ds_2} > 0. \tag{87-7}$$

nghĩa là j^2 và s biến thiên theo cùng hướng như nhau.

Các lập luận tiếp sau có mục đích chứng tỏ rằng, ở trên đường đoạn nhiệt va chạm không thể tồn tại các điểm, mà tại đó nó tiếp tuyến với đường thẳng vạch từ điểm *1* (như đã xảy ra tại điểm *O* trên hình 56).

Tại một điểm như thế, góc nghiêng của dây cung (vạch từ điểm *1*) có giá trị cực tiểu, còn j^2 tương ứng với cực đại, do đó

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0.$$

Hệ thức (87-6) cho thấy rằng trong một trường hợp như thế:

$$\frac{ds_2}{dp_2} = 0.$$

Tiếp thêm, ta tính đạo hàm $d(j^2)/dp_2$ tại một điểm tùy ý của đường đoạn nhiệt va chạm. Thay vào hệ thức (87-5) vi phân dV_2 dưới dạng

$$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} dp_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} ds_2,$$

và thay ds_2 bằng biểu thức (87-6) rồi chia tất cả đẳng thức này cho dp_2, ta thu được

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = \frac{1 + j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}}{(V_1 - V_2)\left[1 - \frac{j^2(V_1 - V_2)}{2T_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2}\right]}. \qquad (87\text{-}8)$$

Từ đó ta thấy rằng, việc cho đạo hàm này bằng không sẽ dẫn tới kết quả là, cả đẳng thức

$$1 + j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = 1 - \frac{v_2^2}{c_2^2} = 0,$$

nghĩa là $v_2 = c_2$. Ngược lại từ $v_2 = c_2$ ta suy ra $d(j^2)/dp_2 = 0$, đạo hàm này có thể không bằng không, chỉ khi cùng với tử số trong (87-8) cả mẫu số cũng bằng không; nhưng các biểu thức trong tử số và mẫu số là hai hàm khác nhau của điểm 2 trên đường đoạn nhiệt va chạm, sự đồng thời bằng không của chúng xảy ra chỉ là thuần túy ngẫu nhiên và do đó là không chắc chắn [1)].

Như vậy, tất cả ba đẳng thức

$$\frac{d(j^2)}{dp_2} = 0, \quad \frac{ds_2}{dp_2} = 0, \quad v_2 = c_2 \qquad (87\text{-}9)$$

đều là các hệ quả của nhau và đều đồng thời xảy ra tại điểm O trên đường cong của hình 56 (nếu chú ý đến đẳng thức thứ ba, ta quy ước gọi điểm đó là *điểm âm*). Cuối cùng, đối với đạo hàm của $(v_2/c_2)^2$ tại điểm đó, ta có:

$$\frac{d}{dp_2}\left(\frac{v_2^2}{c_2^2}\right) = -\frac{d}{dp_2}\left[j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}\right] = -j^2\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2}\right)_{s_2}.$$

[1)] Để tránh những hiểu nhầm, cần nhấn mạnh rằng, bản thân đạo hàm $d(j^2)/dp_2$ chưa là một hàm độc lập của điểm 2, biểu thức (87-8) là định nghĩa của nó.

Vì đạo hàm $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ tại mọi nơi được giả thiết là dương, nên tại điểm âm ta có:

$$\frac{d}{dp_2}\frac{v_2}{c_2} < 0. \tag{87-10}$$

Bây giờ dễ dàng chứng tỏ rằng không thể tồn tại điểm âm trên đường đoạn nhiệt va chạm. Tại các điểm nằm gần điểm *1* ở phía trên nó, ta có $v_2/c_2 < 1$ (xem cuối tiết trước). Do đó, đẳng thức $v_2 = c_2$ chỉ có thể đạt được khi tăng; nói một cách khác, tại điểm O phải có $d(v_2/c_2)/dp_2 > 0$, trong khi đó theo (87-10), ta có bất đẳng thức ngược lại. Một cách tương tự, có thể tin được rằng, v_2/c_2 cũng không thể bằng đơn vị ở trong phần cuối của đường đoạn nhiệt va chạm, ở phía dưới điểm *1*.

Từ sự kiện không thể tồn tại các điểm âm đã được chứng minh như vậy, có thể kết luận trực tiếp từ đồ thị của đường đoạn nhiệt va chạm rằng, góc nghiêng của dây cung *1-2* giảm khi điểm *2* chuyển dịch theo đường cong lên phía trên, và một cách tương ứng, j^2 tăng đơn điệu. Từ bất đẳng thức (87-7), ta suy ra cả entrôpi s_2 cũng tăng đơn điệu. Như vậy, nếu điều kiện cần $s_2 > s_1$ được thỏa mãn, thì cũng có $p_2 > p_1$.

Tiếp theo, ta cũng dễ dàng tin rằng, ở phần trên của đường đoạn nhiệt va chạm cả các bất đẳng thức $v_2 < c_2$, $v_1 > c_1$ cũng được thỏa mãn. Bất đẳng thức đầu tiên được suy ngay từ điều kiện nó đúng ở gần điểm *1* và tỷ số v_2/c_2 không thể lấy giá trị bằng đơn vị. Bất đẳng thức thứ hai được suy ra từ điều kiện, vì không thể có sự uốn của đường đoạn nhiệt như đã được trình bày trên hình vẽ 56, nên mọi dây cung vạch từ điểm *1* sang điểm *2* ở cao hơn, đều dốc hơn đường tiếp tuyến với đường đoạn nhiệt ở điểm *1*.

Như vậy, điều kiện $s_2 > s_1$ và tất cả ba bất đẳng thức (87.1-2) đều được thỏa mãn ở phần trên của đường đoạn nhiệt va chạm. Ngược lại, ở phần dưới của đường đoạn nhiệt, tất cả ba điều kiện đó đều không được thực hiện. Do đó, tất cả ba điều kiện đó đều tương đương với nhau, và nếu một trong các điều kiện đó được thực hiện, thì các điều kiện còn lại cũng tự động được thực hiện.

Cần nhắc lại một lần nữa rằng, trong các lập luận trên, ta luôn giả thiết rằng đạo hàm $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ dương. Nếu đạo hàm này có thể đổi dấu, thì

từ bất đẳng thức nhiệt động lực cần thiết $s_2 > s_1$, ta không thể rút ra được một kết luận phổ biến nào về các bất đẳng thức cho các đại lượng còn lại.

§88. TÍNH TIẾN TRIỂN CỦA CÁC SÓNG VA CHẠM

Việc rút ra các bất đẳng thức (87.1-4) ở §86,87 có liên quan đến giả thiết xác định về các tính chất nhiệt động lực của môi trường – liên quan đến tính dương của đạo hàm $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$. Tuy nhiên, điều rất quan trọng là các bất đẳng thức

$$v_1 > c_1, \qquad v_2 < c_2 \tag{88-1}$$

cho các vận tốc có thể cũng được rút ra từ các lập luận hoàn toàn khác, là các lập luận chứng tỏ rằng, các sóng va chạm với các điều kiện (88-1) đã bị phá hủy vẫn cứ không thể tồn tại, ngay cả khi sự tồn tại của chúng không mâu thuẫn với các lập luận thuần túy nhiệt động lực đã trình bày ở trên [1].

Chính vì thế mà ta còn cần phải nghiên cứu vấn đề về tính ổn định của các sóng va chạm. Điều kiện cần thiết tổng quát nhất về tính ổn định đòi hỏi là, một nhiễu động vô cùng nhỏ bất kỳ của trạng thái ban đầu (tại một thời điểm $t = 0$ nào đó) chỉ dẫn đến những biến đổi vô cùng nhỏ hoàn toàn xác định của dòng chảy – ít nhất là trong khoảng thời gian t đủ nhỏ. Lời nói thêm sau cùng này có nghĩa là, điều kiện ban đầu là không đủ; chẳng hạn, nếu nhiễu động nhỏ ban đầu tăng thậm chí theo hàm số mũ (như $e^{\gamma t}$ với hằng số dương γ), thì trong khoảng thời gian $t \lesssim 1/\gamma$ nhiễu động vẫn còn nhỏ, mặc dù cuối cùng nó dẫn tới sự phá hoại chế độ chuyển động đã cho. Nhiễu động, không thỏa mãn điều kiện cần đã được đặt ra, là sự tách của sóng va chạm thành hai (hay nhiều hơn) các gián đoạn kế tiếp; hiển nhiên là sự biến thiên của chuyển động khi đó ngay tức khắc vẫn không nhỏ, mặc dù với các t nhỏ (khi cả hai gián đoạn còn chưa tách nhau một khoảng cách lớn), nó chỉ chiếm một khoảng nhỏ của các khoảng cách δx.

[1] Đồng thời nhắc lại rằng (ít nhất đối với các sóng va chạm cường độ yếu) các lý lẽ nhiệt động lực này dẫn đến các điều kiện (88-1) cả khi $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$, nếu sóng va chạm là sóng dãn (chứ không phải sóng nén); điều này đã được nhận thấy từ cuối §86.

Nhiễu động nhỏ ban đầu tùy ý được xác định bởi một số thông số độc lập nào đó. Chính sự tiến hóa tiếp theo của nhiễu động được xác định bởi hệ các điều kiện biên đã tuyến tính hóa, các điều kiện này phải được thỏa mãn ở trên mặt gián đoạn. Điều kiện cần đã đặt ra ở trên cho tính ổn định sẽ được thực hiện, nếu số các phương trình này trùng với số các thông số chưa biết chứa trong chúng - khi đó các điều kiện biên xác định sự phát triển về sau của nhiễu động, nhiễu động này vẫn còn nhỏ với các t nhỏ > 0. Nhưng nếu số các phương trình lớn hơn hay nhỏ hơn số các thông số độc lập, thì bài toán về nhiễu động nhỏ sẽ hoàn toàn không có nghiệm hay có một tập hợp vô hạn nghiệm. Cả hai trường hợp đã xác nhận sự không đúng của giả thiết xuất phát (độ nhỏ của nhiễu động với các t nhỏ), và như vậy là mâu thuẫn với đòi hỏi đặt ra. điều kiện đã phát biểu như vậy được gọi là *tính tiến triển* của dòng chảy.

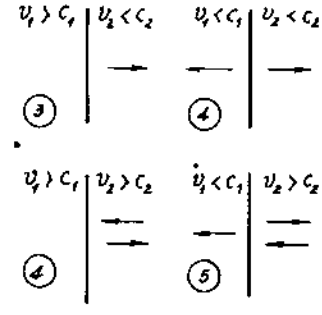
Ta khảo sát nhiễu động của sóng va chạm là độ dịch chuyển vô cùng nhỏ của nó theo phương vuông góc mặt phẳng của nó [1]. Nó kéo theo các nhiễu động vô cùng nhỏ của các đại lượng khác như áp suất, vận tốc, v.v... của khí ở cả hai phía của mặt gián đoạn. Các nhiễu động này, sau khi xuất hiện ở gần sóng, sẽ lan truyền ra xa sóng, được chuyển dời đi (đối với khí) với vận tốc âm; điều này chỉ không được xét cho nhiễu động entrôpi, nhiễu động này chỉ được truyền đi cùng với bản thân khối khí. Như vậy, một nhiễu động tùy ý thuộc loại đã cho có thể được coi như một tập hợp các nhiễu động âm lan truyền trong các khí *1* và *2* ở hai bên của sóng va chạm và nhiễu động của entrôpi; nhiễu động này chuyển động cùng với khí hiển nhiên là sẽ chỉ tồn tại trong khí *2* ở sau sóng va chạm. Trong mỗi nhiễu động âm, những sự biến thiên của tất cả các đại lượng đều liên hệ với với nhau bằng các hệ thức xác định được suy từ các phương trình chuyển động (như trong một sóng âm bất kỳ §64); do đó mỗi nhiễu động như thế chỉ được xác định bởi một thông số.

Bây giờ ta tính số các nhiễu động âm khả dĩ. Số này phụ thuộc vào độ lớn tỷ đối của các vận tốc khí v_1, v_2 và các vận tốc âm c_1, c_2. Ta chọn chiều chuyển động của khí (từ phía *1* sang phía *2*) làm chiều dương của

[1] Cơ sở trình bày dưới đây của các bất đẳng thức (88-1) thuộc về *L. Đ. Landau* (1944).

trục x. Vận tốc lan truyền của nhiễu động trong khí *1* đối với sóng va chạm đứng yên bằng $u_1 = v_1 \pm c_1$, và trong khí 2, $u_2 = v_2 \pm c_2$. Sự kiện, các nhiễu động đó phải lan truyền theo hướng ra xa sóng va chạm, có nghĩa là, phải có $u_1 < 0$, $u_2 > 0$.

Giả sử rằng $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$. Khi đó rõ ràng là, cả hai giá trị $u_1 = v_1 \pm c_1$ đều dương, nhưng từ hai giá trị của u_2 chỉ có $v_2 + c_2$ là dương. Điều đó có nghĩa là, trong khí *1* hoàn toàn không thể tồn tại các nhiễu động âm mà ta quan tâm, và trong sóng *2*, tất cả chỉ có một nhiễu động lan truyền đối với chính chất khí với vận tốc $+ c_2$. Việc tính các nhiễu động trong những trường hợp khác được tiến hành theo cách tương tự.



Hình 57

Kết quả đã được trình bày trên hình 57, trong đó mỗi mũi tên tương ứng với một nhiễu động âm lan truyền đối với khí theo chiều đã nêu bởi mũi tên. Mỗi nhiễu động âm, như đã nêu trên đây, đều được xác định bởi một thông số. Ngoài ra, trong tất cả bốn trường hợp còn có hai thông số nữa: một thông số xác định nhiễu động entrôpi lan truyền trong khí *2* và một thông số xác định chính sự chuyển dịch của sóng va chạm.

Trên hình 57, đối với mỗi trường hợp, số trong vòng tròn nêu lên tổng các thông số xác định nhiễu động tùy ý xuất hiện trong sự dịch chuyển của sóng va chạm.

Mặt khác, số các điều kiện biên cần thiết, mà một nhiễu động phải thỏa mãn ở trên mặt gián đoạn, bằng ba (điều kiện liên tục của các dòng khối lượng, dòng năng lượng, dòng xung lượng). Trong tất cả các trường hợp biểu diễn trên hình 57, chỉ trừ trường hợp thứ nhất, số các thông số độc lập sẵn có lớn hơn số các phương trình. Ta nhận thấy rằng, chỉ các sóng va chạm thỏa mãn các điều kiện (88-1) là tiến triển. Như vậy, các điều kiện này là cần thiết cho sự tồn tại của các sóng va chạm, không phụ thuộc vào các tính chất nhiệt động lực của môi trường. Gián đoạn tạo ra bằng phương pháp nhân tạo, không thỏa mãn các điều kiện đó,

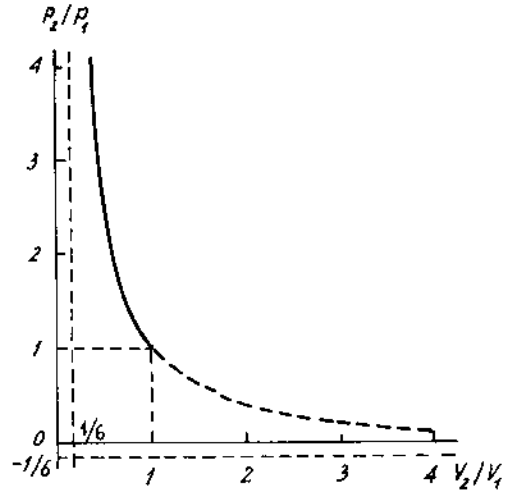
sẽ nhanh chóng rã thành những gián đoạn khác [1].

Sóng va chạm tiến hóa ổn định đối với loại nhiễu động đã khảo sát theo nghĩa thông thường của từ. Nếu tìm sự dịch chuyển của sóng va chạm (và cùng với nó cả nhiễu động của các đại lượng còn lại) dưới dạng tỷ lệ với $e^{-i\omega t}$, thì thấy rõ từ trước là, giá trị ω xác định đơn trị bởi các điều kiện biên chỉ có thể bằng không – thấy ngay từ những lý do là, trong bài toán không có những thông số có thứ nguyên nghịch đảo thời gian nào có thể xác định được giá trị ω khác không.

Chúng ta sẽ trở lại vấn đề tính ổn định của các sóng va chạm ở §90.

§89. SÓNG VA CHẠM TRONG KHÍ POLYTROPIC

Ta ứng dụng những hệ thức tổng quát đã thu được trong các tiết trước cho những sóng va chạm ở trong khí polytropic.



Hình 58

Hàm nhiệt của một khí như thế được cho bởi công thức đơn giản (83-11). Thay biểu thức này vào trong (85-9), sau một phép biến đổi đơn giản, ta được công thức

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}. \tag{89-1}$$

Công thức này cho phép ta xác định đại lượng thứ tư theo ba trong các đại lượng p_1, V_1, p_2, V_2. Tỷ số V_2/V_1 là một hàm giảm đơn điệu của tỷ số p_2/p_1 và tiến đến giới hạn hữu hạn $(\gamma-1)/(\gamma+1)$. Đường cong biểu

[1] Trong tất cả các trường hợp không tiến hóa đã nêu trên hình 57 nhiễu động không được xác định – số các thông số tùy ý vượt quá số các phương trình. Chúng ta nhớ rằng, trong thủy động lực trừ các sóng va chạm có thể là không tiến hóa do tính không được xác định, cũng như do tính xác định thừa của các nhiễu động (xem VIII, §73).

diễn sự phụ thuộc giữa p_2 và V_2 với p_1 và V_1 đã cho (đường đoạn nhiệt va chạm) được nêu trên hình 58. Đó là một hypebon đều với các tiệm cận

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \qquad \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

Như đã biết, chỉ phần trên của đường cong nằm ở trên điểm $V_2/V_1 = p_2/p_1 = 1$, biểu diễn ở trên hình 58 (với $\gamma = 1{,}4$) bằng đường liền nét là có ý nghĩa thực.

Đối với tỷ số các nhiệt độ ở hai bên của gián đoạn, theo phương trình trạng thái của khí lý tưởng nhiệt động lực học $T_2/T_1 = (p_2V_2)/(p_1V_1)$, do đó

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\left[\frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}\right]. \tag{89-2}$$

Đối với dòng j ta thu được từ (85-6) và (89-1):

$$j^2 = \frac{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}{2V_1} \tag{89-3}$$

và từ đó đối với vận tốc truyền của sóng va chạm xét cho các chất khí ở trước và sau sóng đó:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{V_1}{2}\left[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2\right] = \frac{c_1^2}{2\gamma}\left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_2}{p_1}\right], \\ v_2^2 &= \frac{V_1}{2}\left[\frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}\right]^2 = \frac{c_2^2}{2\gamma}\left[(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\frac{p_1}{p_2}\right], \end{aligned} \tag{89-4}$$

và đối với hiệu các vận tốc:

$$v_1 - v_2 = -\frac{\sqrt{2V_1}(p_2 - p_1)}{\left[(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2\right]^{1/2}}. \tag{89-5}$$

Trong ứng dụng các công thức biểu diễn các tỷ số giữa các mật độ, áp suất và nhiệt độ trong sóng va chạm qua số $M_1 = v_1/c_1$ rất tiện lợi; các công thức này dễ dàng rút ra được từ các hệ thức đã thu được ở trên. Chúng có dạng:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}, \tag{89-6}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{89-7}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)\right]\left[(\gamma-1)M_1^2 + 2\right]}{(\gamma+1)^2 M_1^2}. \tag{89-8}$$

Còn số $M_2 = v_2/c_2$ được biểu diễn qua số M_1 bằng

$$M_2^2 = \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}. \tag{89-9}$$

Các tỷ số này đối xứng với M_1 và M_2, như thấy được hiển nhiên, nếu viết nó dưới dạng phương trình

$$2\gamma M_1^2 M_2^2 - (\gamma-1)(M_1^2 + M_2^2) = 2.$$

Chúng ta viết các công thức giới hạn cho các sóng va chạm có cường độ rất lớn (đòi hỏi phải có $(\gamma-1)p_2 >> (\gamma+1)p_1$). Từ (89.1-2), ta có:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{p_2}{p_1}. \tag{89-10}$$

Tỷ số T_2/T_1 tăng vô hạn cùng với p_2/p_1, nghĩa là, giống như bước nhảy của áp suất, bước nhảy của nhiệt độ trong sóng va chạm có thể lớn tùy ý. Còn tỷ số giữa các mật độ tiến đến một giới hạn không đổi; chẳng hạn, đối với khí đơn nguyên tử giá trị giới hạn bằng $\rho_2 = 4\rho_1$, đối với khí lưỡng nguyên tử $\rho_2 = 6\rho_1$. Các vận tốc lan truyền của một sóng va chạm cường độ lớn có giá trị bằng:

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}p_2 V_1}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}p_2 V_1}. \tag{89-11}$$

Chúng tăng theo căn số của áp suất p_2.

Cuối cùng ta nêu các hệ thức cho các sóng va chạm cường độ yếu, chúng là các số hạng khai triển bậc nhất cho các lũy thừa của tỷ số nhỏ $z = (p_2 - p_1)/p_1$:

$$M_1 - 1 = 1 - M_2 = \frac{\gamma+1}{4\gamma}z,$$

$$\frac{c_2}{c_1} = 1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}z, \tag{89-12}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{z}{\gamma} - \frac{\gamma-1}{2\gamma^2}z^2.$$

Ở đây giữ nguyên các số hạng đóng góp số bổ chính bậc nhất cho các giá trị ứng với sự gần đúng âm.

BÀI TẬP

1. Thiết lập công thức:

$$v_1 v_2 = c_*^2,$$

trong đó c_* là vận tốc tới hạn (*L. Prandtl*).

Giải. Vì đại lượng $w + v^2/2$ liên tục trong sóng va chạm, ta có thể đưa vào vận tốc tới hạn, nó như nhau đối với khí *1* và *2* theo

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma - 1)\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma p_2}{(\gamma - 1)\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2$$

(xem (83-7)). Rút p_2/ρ_2 và p_1/ρ_1 từ các đẳng thức này và thay chúng vào các phương trình

$$v_1 - v_2 = \frac{p_2}{\rho_2 v_2} - \frac{p_1}{\rho_1 v_1}$$

(thu được bằng cách phối hợp (85-1) và (85-2)), ta có

$$\frac{\gamma + 1}{2\gamma}(v_1 - v_2)\left(1 - \frac{c_*^2}{v_1 v_2}\right) = 0.$$

Vì $v_2 \neq v_1$, từ đó ta thu được hệ thức cần tìm.

2. xác định tỷ số p_2/p_1 theo các nhiệt độ đã cho T_1, T_2 đối với sóng gián đoạn ở trong khí lý tưởng nhiệt động lực có nhiệt dung thay đổi.

Giải. Đối với một khí như thế chỉ có thể khẳng định rằng, w (cũng như ε) chỉ là hàm của nhiệt độ, và p, V, T có liên hệ với nhau bởi phương trình trạng thái $pV = RT/\mu$. Giải phương trình (85-9) đối với p_2/p_1, ta thu được:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\mu}{RT_1}(w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1} + \sqrt{\left[\frac{\mu}{RT_1}(w_2 - w_1) - \frac{T_2 - T_1}{2T_1}\right]^2 + \frac{T_2}{T_1}},$$

trong đó $w_1 = w(T_1)$, $w_2 = w(T_2)$.

§90. TÍNH KHÔNG ỔN ĐỊNH GỢN SÓNG CỦA SÓNG VA CHẠM

Sự thực hiện các điều kiện về tính tiến hóa tự nó là cần thiết, nhưng vẫn chưa đủ để đảm bảo cho tính ổn định của sóng va chạm. Sóng có thể

không ổn định đối với các nhiễu động đặc trưng bởi tính tuần hoàn trên mặt gián đoạn và như thể là các gợn sóng ở trên mặt này (một loại nhiễu động như thế đã được khảo sát ở §29 đối với các gián đoạn tiếp tuyến [1]). Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng, vấn đề này được nghiên cứu như thế nào đối với các sóng va chạm trong môi trường tùy ý (*X. P. Điakôv*, 1954).

Giả sử sóng va chạm đứng yên, chiếm mặt phẳng $x = 0$; chất lỏng chuyển động qua nó từ trái sang phải, theo chiều dương của trục x. Giả sử mặt gián đoạn chịu một nhiễu động, trong đó các điểm của nó dịch chuyển theo trục x được một đại lượng nhỏ

$$\zeta = \zeta_o e^{i(k_y y - \omega t)}. \tag{90-1}$$

trong đó k_y là vectơ sóng của "gợn". Gợn này gây ra nhiễu động dòng chảy ở sau sóng va chạm, trong miền $x > 0$ (còn dòng chảy ở trước gián đoạn $x < 0$, không chịu các nhiễu động do vận tốc vượt âm của nó).

Nhiễu động tùy ý của dòng chảy gồm sóng xoáy - entrôpi và sóng âm (xem bài tập ở §82). Trong cả hai sóng, sự phụ thuộc của các đại lượng vào thời gian và tọa độ được cho bởi thừa số có dạng $\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}$ với cùng tần số ω như trong (90-1). Từ những lý do đối xứng, ta thấy rõ ràng là, vectơ sóng $\mathbf{k}$ nằm trong mặt phẳng x, y; y-thành phần của nó trùng với k_y trong (90-1), còn x-thành phần thì khác nhau đối với các nhiễu động thuộc hai loại.

Trong sóng entrôpi - xoáy, $\mathbf{kv_2} = \omega$, nghĩa là $k_x = \omega/v_2$ (v_2 là vận tốc không nhiễu động của khí sau gián đoạn). Trong sóng này nhiễu động áp suất không có mặt, nhiễu động thể tích riêng có liên hệ với với nhiễu động entrôpi, $\delta V^{(ent)} = (\partial V/\partial s)_p \, \delta s$, còn nhiễu động vận tốc phụ thuộc vào điều kiện

$$\mathbf{k}\delta\mathbf{v}^{(ent)} = \frac{\omega}{v_2}\delta v_x^{(ent)} + k_y \delta v_y^{(ent)} = 0. \tag{90-2}$$

Trong sóng âm trong chất khí chuyển động, mối liên hệ giữa tần số và vectơ sóng được cho bởi đẳng thức $(\omega - \mathbf{kv})^2 = c^2 k^2$ (xem (68-1)); do đó k_x trong sóng này được xác định bởi phương trình

[1] Tính không ổn định đối với các nhiễu động như thế được gọi là không ổn định gợn sóng (theo thuật ngữ tiếng Anh là *corrugation instability*).

$$(\omega - k_x v_2)^2 = c_2^2(k_x^2 + k_y^2). \tag{90-3}$$

Các nhiễu động áp suất, thể tích riêng và vận tốc liên hệ với nhau bằng hệ thức:

$$\delta p^{(âm)} = -\left(\frac{c_2}{V_2}\right)^2 \delta V^{(âm)}. \tag{90-4}$$

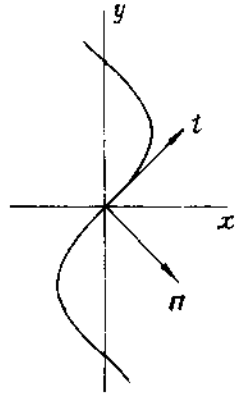
$$(\omega - k_x v_2)\delta V^{(âm)} = V_2 \mathbf{k} \delta p^{(âm)} \tag{90-5}$$

Nhiễu động về toàn bộ là một tổ hợp tuyến tính các nhiễu động thuộc hai loại:

$$\delta v = \delta v^{(ent)} + \delta v^{(âm)}, \quad \delta V = \delta V^{(ent)} + \delta V^{(âm)}, \quad \delta p = \delta p^{(âm)} \tag{90-6}$$

Nó phải thỏa mãn các điều kiện biên xác định trên mặt nhiễu động của gián đoạn.

Trước hết, trên mặt này, thành phần tiếp tuyến với mặt của vận tốc phải liên tục, còn bước nhảy của thành phần pháp tuyến phải được biểu diễn qua áp suất và mật độ nhiễu động bằng đẳng thức (85-7). Các điều kiện này được viết như



Hình 59

$$\mathbf{v}_1\mathbf{t} = (\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v})\mathbf{t},$$

$$\mathbf{v}_1\mathbf{n} - (\mathbf{v}_2 + \delta\mathbf{v})\mathbf{n} = \left[(p_2 - p_1 + \delta p)(V_1 - V_2 - \delta V)\right]^{1/2},$$

trong đó $\mathbf{t}$ và $\mathbf{n}$ là các vectơ đơn vị của tiếp tuyến và pháp tuyến với mặt gián đoạn (hình 59) với độ chính xác đến các đại lượng có độ nhỏ bậc nhất các thành phần của các vectơ này (trong mặt phẳng xy) bằng $\mathbf{t}(ik\zeta, 1)$ và $\mathbf{n}(1, -ik\zeta)$; biểu thức $ik\zeta$ xuất hiện như đạo hàm $\partial\zeta/\partial y$. Với cùng độ chính xác các điều kiện biên cho vận tốc có dạng

$$\delta v_y = ik\zeta(v_1 - v_2), \quad \delta v_x = \frac{v_2 - v_1}{2}\left[\frac{\delta p}{p_2 - p_1} - \frac{\delta V}{V_1 - V_2}\right]. \tag{90-7}$$

Tiếp theo, các giá trị nhiễu động $p_2 + \delta p$ và $V_2 + \delta V_2$ phải thỏa mãn cùng phương trình đoạn nhiệt Hugoniot như các p_2 và V_2 không nhiễu động. Từ đó thu được điều kiện liên hệ với δp và δV:

$$\delta p = \frac{dp_2}{dV_2}\delta V, \tag{90-8}$$

trong đó đạo hàm được lấy dọc theo đường đoạn nhiệt.

Cuối cùng còn một hệ thức nữa xuất hiện từ mối liên hệ với giữa dòng chất đi qua mặt gián đoạn và các bước nhảy áp suất và mật độ trên mặt đó. Đối với gián đoạn không nhiễu động, hệ thức này được biểu diễn qua công thức (85-6); còn đối với gián đoạn nhiễu động, hệ thức tương tự có dạng:

$$\frac{1}{V_1^2}(\mathbf{v}_1\mathbf{n} - \mathbf{un})^2 = \frac{p_2 - p_1 + \delta p}{V_1 - V_2 - \delta V},$$

trong đó **u** là vận tốc của các điểm mặt gián đoạn. Trong phép gần đúng bậc nhất theo các đại lượng nhỏ, ta có: $\mathbf{un} = -i\omega\zeta$; khai triển đẳng thức đã viết cũng theo các lũy thừa của δp và δV, ta được:

$$\frac{2i\omega}{v_1}\zeta = -\frac{\delta p}{p_2 - p_1} + \frac{\delta V}{V_1 - V_2}. \qquad (90\text{-}9)$$

Các đẳng thức (90-2), (90.4-5), (90.7-9) lập thành một hệ tám phương trình đại số tuyến tính cho tám đại lượng ζ, δp, $\delta V^{(ent)}$, $\delta V^{(âm)}$, $\delta v_{x,y}^{(ent)}$, $\delta v_{x,y}^{(âm)}$ [1]. Điều kiện tương thích của các phương trình này (được biểu diễn bằng cách cho định thức các hằng số của chúng bằng không) có dạng

$$\frac{2\omega v_2}{v_1}\left(k_y^2 + \frac{\omega^2}{v_2^2}\right) - \left(\frac{\omega^2}{v_1 v_2} + k_x^2\right)(\omega - v_2 k_y)(1 + h) = 0, \qquad (90\text{-}10)$$

trong đó, để ngắn gọn, ta ký hiệu $h = j^2(dV_2/dp_2)$, còn j có ý nghĩa thông thường: $j = v_1/V_1 = v_2/V_2$. Đại lượng k_x trong (90-10) cần được hiểu là k_y và ω, xác định bởi đẳng thức (90-3).

Điều kiện về tính không ổn định bao hàm ở sự tồn tại của các nhiễu động tăng theo hàm mũ với thời gian, và chúng phải giảm theo hàm mũ khi đi xa khỏi mặt gián đoạn (nghĩa là khi $x \to \infty$): điều kiện sau cùng có nghĩa là, nguồn nhiễu động chính là sóng va chạm, mà không phải là một nguồn nào khác ở bên ngoài sóng va chạm. Nói một cách khác, sóng là không ổn định, nếu phương trình (90-10) có các nghiệm, trong đó

[1] Tất cả các đẳng thức này đều được lấy ở $x = 0$ và các đại lượng đã nêu trong chúng đều có thể hiểu ngầm là các biên độ không đổi, không có các thừa số hàm mũ biến thiên.

$$\mathrm{Im}\,\omega > 0\,,\quad \mathrm{Im}\,k_x > 0 \tag{90-11}$$

Việc nghiên cứu phương trình (90-10) nhằm mục đích làm sáng tỏ các điều kiện tồn tại của các nghiệm như thế khá phức tạp. Ta sẽ không tiến hành việc nghiên cứu ở đây, mà chỉ giới hạn nêu ra kết quả cuối cùng [1]. Tính không ổn định gợn sóng của sóng va chạm xuất hiện nếu

$$j^2 \frac{dV_2}{dp_2} < -1, \tag{90-12}$$

hay

$$j^2 \frac{dV_2}{dp_2} > 1 + 2\frac{v_2}{c_2}; \tag{90-13}$$

nhắc lại rằng, đạo hàm được lấy dọc theo đường đoạn nhiệt (với p_1, V_1 đã cho [2]).

Các điều kiện (90.12-13) tương ứng với sự có mặt của các nghiệm phức thỏa mãn các điều kiện (90-11) ở trong phương trình (90-10). Nhưng trong các điều kiện xác định phương trình này có thể cũng có các nghiệm với ω và k_x thực, tương ứng với các sóng âm và sóng entrôpi thực không tắt "đi ra" từ gián đoạn, nghĩa là tương ứng với sự phát âm tự phát của mặt gián đoạn. Ta sẽ nói về tình hình như thế như nói về một dạng đặc biệt của tính không ổn định của sóng va chạm, mặc dù ở đây không có tính ổn định theo đúng nghĩa từng chữ, – nhiễu động (gợn sóng) một khi được tạo ra trên mặt gián đoạn tiếp tục phát sóng lâu vô hạn, không tắt và không tăng cường; năng lượng mà các sóng âm mang đi được lấy trọn vẹn từ toàn bộ môi trường chuyển động [3].

Để xác định các điều kiện xuất hiện hiện tượng này, ta biến đổi phương trình (90 - 10) bằng cách đưa vào góc θ giữa $\mathbf{k}$ và trục x; khi đó

[1] Công trình nghiên cứu này có thể tìm được trong bài báo gốc Điakov C. P. J.E.T.P. 1954. T.27. tr 288. Trong tiết sau sẽ nêu ra cơ sở còn kém chặt chẽ, nhưng cụ thể hơn cho các điều kiện (90.12-13).

[2] Lưu ý là, khi rút ra (90.12-13) ta chỉ dùng điều kiện bắt buộc (88-1), mà không dùng bất đẳng thức $p_2 > p_1$. Do đó các điều kiện này về tính không ổn định được xét cho cả sóng va chạm dãn, là các sóng có thể tồn tại với $(\partial^2 V/\partial p^2)_s < 0$.

[3] So sánh với tình hình tương tự cho các gián đoạn tiếp tuyến – bài tập 2, §84.

$$c_2 k_x = \omega_o \cos\theta, \qquad c_2 k_y = \omega_o \sin\theta,$$
$$\omega = \omega_o\left(1 + \frac{v_2}{c_2}\cos\theta\right), \quad \omega_o^2 = c_2^2(k_x^2 + k_y^2). \tag{90-14}$$

(ω_o là tần số âm trong hệ tọa độ chuyển động cùng với khí ở sau sóng va chạm), và thu được phương trình toàn phương đối với cos θ:

$$\frac{v_2^2}{c_2^2}\left[\frac{4}{1+h} + \frac{v_1}{v_2} - 1\right]\cos^2\theta + \frac{2v_2}{c_2}\left[\frac{3 + (v_2/c_2)^2}{1+h} - 1\right]\cos\theta + \frac{2\left[1 + (v_2/c_2)^2\right]}{1+h} - \left(1 + \frac{v_1 v_2}{c_2^2}\right) = 0. \tag{90-15}$$

Vận tốc lan truyền của sóng âm trong khí chuyển động với vận tốc v_2, đối với mặt gián đoạn đứng yên, bằng $v_2 + c_2\cos\theta$. Sóng âm sẽ là sóng đi ra, nếu tổng đó dương, nghĩa là nếu

$$-\frac{v_2}{c_2} < \cos\theta < 1 \tag{90-16}$$

(các giá trị $\cos\theta < 0$ tương ứng với các trường hợp khi vectơ **k** hướng về phía gián đoạn, nhưng sự cuốn sóng âm đi bởi khí chuyển động vẫn cứ làm cho sóng âm trở thành "sóng đi ra"). Sự phát sóng âm tự phát bởi sóng va chạm xuất hiện nếu phương trình (90-15) có nghiệm nằm trong các giới hạn đó. Sự nghiên cứu đơn giản dẫn đến các bất đẳng thức sau, xác định miền không ổn định này [1]:

$$\frac{1 - v_2^2/c_2^2 - v_1 v_2/c_2^2}{1 - v_2^2/c_2^2 + v_1 v_2/c_2^2} < j^2\frac{dV_2}{dp_2} < 1 + 2\frac{v_2}{c_2} \tag{90-17}$$

(các giới hạn trên và dưới ở đây thực tế ứng với các giới hạn trên và dưới trong các điều kiện (90-16)). Miền (90-17) kề sát với miền không ổn định (90-13) và dãn rộng miền đó.

Cũng có thể đi tới nguồn gốc của tính không ổn định của các sóng va chạm trong miền (90-17) theo một quan điểm hơi khác, nếu khảo sát sự phản xạ từ mặt gián đoạn của âm, đập lên nó từ phía khí nén. Vì sóng va chạm chuyển động đối với khí ở trước nó với vận tốc vượt âm, nên

[1] Sự không ổn định này cũng đã được *X. P. Điakôv* nêu ra (1954). Giá trị đúng đắn của giới hạn dưới trong (90-17) đã được *V. M. Kontorovits* tìm ra (1957).

âm không xuyên vào trong khí này. Còn trong khí ở sau sóng, thì cùng với sóng âm tới, còn có cả sóng âm phản xạ và sóng entrôpi - xoáy (và trên chính mặt gián đoạn có xuất hiện gợn sóng). Bài toán xác định hệ số phản xạ, xét về cách đặt vấn đề của nó, gần giống với bài toán nghiên cứu tính ổn định. Sự khác nhau là ở chỗ, cùng với các biên độ cần xác định của các sóng xuất phát từ gián đoạn (các sóng phản xạ) trong các điều kiện biên còn xuất hiện cả biên độ đã cho của sóng âm đi tới (sóng tới). Thay cho hệ phương trình đại số thuần nhất, bây giờ ta có hệ phương trình không thuần nhất, trong đó các số hạng có biên độ sóng tới giữ vai trò của tính không thuần nhất. Nghiệm của hệ này được cho bởi các biểu thức trong các mẫu của chúng có định thức của các phương trình thuần nhất – đúng là định thức mà khi cho bằng không nó sẽ cho phương trình tán sắc của các nhiễu động tự phát (90-10). Vì ở trong miền (90-17), phương trình này có các nghiệm thực cho cos θ, nên có tồn tại các giá trị xác định của góc phản xạ (và như thế, cả góc tới nữa), tại đó hệ số phản xạ trở nên vô hạn. Đó chính là cách phát biểu khác về khả năng phát âm tự phát, nghĩa là phát âm không cần có sóng âm tới từ bên ngoài.

Cũng như thế đối với cả hệ số truyền qua của âm đập tới mặt gián đoạn từ phía trước đến gặp mặt gián đoạn. Trong trường hợp này không tồn tại sóng phản xạ, còn ở phía sau mặt gián đoạn có xuất hiện các sóng âm đi qua và sóng entrôpi - xoáy. Trong miền (90-17) hệ số truyền qua có thể bằng vô cùng [1].

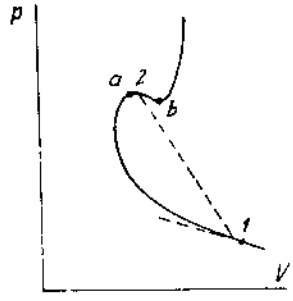
Chúng ta nói đôi điều về nguyên tắc, về một số loại đoạn nhiệt va chạm khả dĩ, chứa các miền không ổn định đã xét [2].

Điều kiện (90-12) đòi hỏi đạo hàm dp_2/dV_2 âm và đường đoạn nhiệt va chạm phải nghiêng (đối với trục hoành) tại điểm *2* kém dốc hơn so

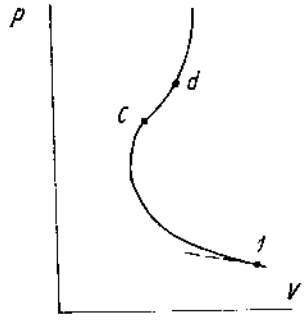
[1] Việc tính các hệ số phản xạ và truyền qua của âm ở trên sóng va chạm với các phương tới tùy ý trong các môi trường tùy ý - xem *X. P. Điakôv* - J.E.T.P., 1957, T33, tr. 948,962; *V. M. Kontorovits*, J.E.T.P., T33, tr.1527. Tạp chí "âm học" (tiếng Nga). 1959, T.5, tr.314.

[2] Trong khí polytropic $h = -(c_1/v_1)^2$, điều này dễ dàng thấy được, nếu dựa vào các công thức đã thu được ở §89. Rõ ràng không một điều kiện nào trong các điều kiện (90.12-13) và (90-17) khi đó không được thực hiện, do đó sóng va chạm là ổn định. Tất nhiên cũng ổn định cả các sóng va chạm cường độ yếu trong môi trường tùy ý.

với dây cung *1-2* vạch trong nó (nghĩa là ngược với tình hình xảy ra trong những điều kiện bình thường – hình 53). Muốn vậy đường đoạn nhiệt phải uốn cong như trình bày trên hình 60; điều kiện không ổn định (90-12) được thực hiện trên đoạn *ab*.



Hình 60



Hình 61

Điều kiện (90-13) đòi hỏi đạo hàm dp_2/dV_2 phải dương, đồng thời độ nghiêng của đường đoạn nhiệt phải đủ nhỏ. Trên hình 60 điều kiện này được thực hiện trên những đoạn xác định của đường đoạn nhiệt, kề sát các điểm *a* và *b* và như vậy, dãn rộng miền không ổn định. Điều kiện (90-13) có thể được thực hiện cả trên đoạn (*cd* trên hình 61) của đường đoạn nhiệt không chứa đoạn loại *ab*.

Điều kiện (90-17) còn kém nghiêm ngặt hơn (90-13) và còn dãn bổ sung thêm miền không ổn định sang các đoạn nhiệt Hugoniot với $dp_2/dV_2 > 0$. Thêm nữa, giới hạn dưới trong (90-17) có thể âm, do đó tính không ổn định của loại này, về nguyên tắc, có thể xảy ra cả trong một số đoạn của đường đoạn nhiệt dạng thông thường, với đạo hàm dp_2/dV_2 âm khắp nơi.

Vấn đề về số phận của các sóng va chạm gợn sóng – không ổn định có liên quan chặt chẽ đến tình hình đáng chú ý sau: khi các điều kiện (90-12) hay (90-13) được thực hiện, nghiệm của các phương trình thuỷ động lực học là không đơn trị (*C.S. Gardner*, 1963). Đối với hai trạng thái của môi trường, *1* và *2*, liên hệ với với nhau bằng các hệ thức (85.1-3), sóng va chạm là nghiệm duy nhất bình thường của bài toán (một chiều) về dòng chảy chuyển môi trường từ trạng thái *1* sang trạng thái *2*. Như

vậy là, nếu trong trạng thái *2* các điều kiện (90-12) hay (90-13) được thực hiện, thì nghiệm của bài toán thủy động lực học đã nêu sẽ không đơn trị: sự chuyển từ trạng thái *1* sang trạng thái *2* có thể được thực hiện không những trong sóng va chạm, mà còn qua cả một hệ các sóng phức tạp hơn. Nghiệm thứ hai này (có thể được gọi là nghiệm phân rã) gồm bởi sóng va chạm cường độ nhỏ hơn, gián đoạn tiếp xúc theo sau nó và bởi sóng dãn không dừng, đẳng entrôpi (xem cuối §99), lan truyền (đối với khí ở sau sóng va chạm) theo hướng ngược lại; trong sóng va chạm entrôpi tăng từ s_1 đến một giá trị nào đó $s_3 < s_2$, và sự tăng tiếp theo từ s_3 đến s_2 đã cho xảy ra bằng bước nhảy trong gián đoạn tiếp xúc (hình ảnh này xét cho loại được biểu diễn dưới đây trên hình 78b; giả thiết bất đẳng thức (86-2) [1] được thực hiện.

Vấn đề điều kiện gì xác định việc lựa chọn một trong hai nghiệm trong các bài toán thuỷ động lực học cụ thể thì vẫn chưa rõ ràng. Nếu lựa chọn nghiệm phân rã, thì điều đó có nghĩa là, sự không ổn định của sóng va chạm với sự tăng cường tự phát của gợn sóng bề mặt hoàn toàn không được thực hiện. Tuy nhiên, chắc là, một sự lựa chọn như thế không thể có liên hệ với đúng sự không ổn định này, vì tính không đơn trị của nghiệm không bị hạn chế bởi các điều kiện (90.12-13) [2].

BÀI TẬP

1. Một sóng âm phẳng đập vuông góc lên sóng va chạm ở đằng sau từ phía khí nén. Xác định hệ số phản xạ của âm.

Giải. Ta xét quá trình trong hệ tọa độ, trong đó sóng va chạm đứng yên, còn khí chuyển động qua sóng theo chiều dương của trục x; sóng âm tới lan truyền theo chiều âm của trục x. Khi đập tới vuông góc (và do đó cả phản xạ) trong sóng entrôpi phản xạ vận tốc $\delta v^{(ent)} = 0$. Nhiễu động áp suất: $\delta p = \delta p^{(âm)}$. $\delta p^{(0)}$, ở

[1] Trong bài báo của *Gardner C. S.* – Phys. Fluids, 1963. T.6, tr. 1366; điều này được chứng minh cho miền (90-13). Một sự khảo sát tổng quát hơn bao gồm cả miền (90-12) được cho bởi *Kuznétxov N.M.* – J.E.T.P., 1985, T.88, tr. 470; ở đó cũng khảo sát các đường đoạn nhiệt va chạm với sự phá hủy điều kiện $(dp_2/dV_2)_s > 0$, khi các nghiệm phân rã gồm bởi các tập hợp sóng khác.

[2] Chắc là, miền không đơn trị trải ra trên đường đoạn nhiệt va chạm có phần nào vượt ra ngoài giới hạn miền không ổn định, xác định bởi các điều kiện đó. Về điều kiện này xem bài báo nêu trên của *N.M. Kuznetxov*.

đây chỉ số (0) được xét cho sóng tới, còn chỉ số (*âm*) được xét cho sóng âm phản xạ. Đối với vận tốc $\delta v_x \equiv \delta v$, ta có:

$$\delta v = \frac{V_2}{c_2}(\delta p^{(âm)} - \delta p^{(0)}$$

(hiệu thay cho tổng, đó là do các chiều lan truyền ngược nhau của cả hai sóng). điều kiện thứ hai trong điều kiện (90-7) có dạng như trước (nhưng bây giờ trong nó $\delta V = \delta V^{(0)} + \delta V^{(âm)} + \delta V^{(ent)}$); nếu xét đến (90-8) và công thức (85-6), điều kiện thứ hai nói trên được viết lại như sau:

$$\delta v = -\frac{1-h}{2j}(\delta p^{(âm)} - \delta p^{(0)}$$

Cho hai biểu thức δV bằng nhau, ta thu được cho hệ thức cần tìm của biên độ áp suất trong các sóng âm phản xạ và sóng tới:

$$\delta p^{(âm)} / \delta p^{(0)} = -\frac{1-2M_2-h}{1+2M_2-h} \tag{1}$$

trong đó $M_2 = v_2/c_2$. Nó bằng vô cùng tại giới hạn trên của miền (90-17).

Đối với khí polytropic $h = -M_1^{-2}$. Đối với sóng va chạm cường độ yếu ($p_2 - p_1 << p_1$) tỷ số (1) tiến đến không như $(p_2 - p_1)^2$, còn trong trường hợp ngược lại của cường độ mạnh tỷ số đó tiến đến giới hạn không đổi

$$\delta p^{(âm)} / \delta p^{(0)} \approx -\frac{\sqrt{\gamma} - \sqrt{2(\gamma-1)}}{\sqrt{\gamma} + \sqrt{2(\gamma-1)}}.$$

2. Một sóng âm phẳng đập vuông góc lên sóng va chạm từ phía trước. Xác định hệ số truyền qua của âm [1].

Giải. Nhiễu động trong khí *1* ở trước sóng va chạm

$$\delta p_1 = \delta p^{(0)}, \quad \delta V_1 = \delta V^{(0)} = -\frac{V_1^2}{c_1^2}\delta p_1, \quad \delta v_1 = \frac{V_1}{c_1}\delta p_1,$$

còn trong khí *2* ở sau sóng va chạm

$$\delta p_2 = \delta p^{(âm)}, \quad \delta V_2 = \delta V^{(ent)} + \delta V^{(âm)}, \quad \delta v_2 = \frac{V_2}{c_2}\delta p_2$$

(các chỉ số (0) và (*âm*), (*ent*) được xét cho sóng âm tới, sóng âm truyền qua và sóng entrôpi). Các nhiễu động δp_2 và δV_2 liên hệ với với nhau bằng hệ thức được suy ra từ phương trình đoạn nhiệt va chạm: nếu biểu thức sau cùng được biểu diễn dưới dạng $V_2 = V_2(p_2, p_1, V_1)$, thì

[1] Đối với khí polytropic bài toán này đã được *Đ.I. Blokhinxev* (1945) và *J.M. Burgers* khảo sát (1946).

$$\delta V_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_H \delta p_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right)_H \delta V_1 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1}\right)_H \delta p_1 =$$

$$= \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_H \delta p_2 + \left[-\frac{V_1^2}{c_1^2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right)_H + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1}\right)_H\right]\delta p_1$$

(chỉ số H ở các đạo hàm ký hiệu các đạo hàm được lấy dọc theo các đường đoạn nhiệt Hugoniot [1]). Điều kiện biên (90-7) bây giờ được thay bằng

$$\delta v_2 - \delta v_1 = -\frac{v_1 - v_2}{2}\left[\frac{\delta p_2 - \delta p_1}{p_2 - p_1} - \frac{\delta V_2 - \delta V_1}{V_1 - V_2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2j}\left[\delta p_2 - \delta p_1 - j^2(\delta V_2 - \delta V_1)\right].$$

Cân bằng hai biểu thức cho $\delta v_2 = \delta v_1$, ta thu được cho tỷ số cần tìm của các biên độ trong sóng âm truyền qua và sóng âm tới:

$$\delta p^{(âm)} / \delta p^{(0)} = \frac{(1 + M_1)^2 + q}{1 + 2M_2 - h}, \tag{2}$$

trong đó h có giá trị như trước, còn

$$q = j^2\left[-\frac{V_1^2}{c_1^2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial V_1}\right)_H + \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_1}\right)_H\right].$$

Đối với khí polytropic

$$q = -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{(M_1^2 - 1)^2}{M_1^2}.$$

và hệ số truyền qua

$$\delta p^{(âm)} / \delta p^{(0)} = \frac{(1 + M_1)^2}{1 + 2M_2 + M_1^{-2}}\left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(1 - \frac{1}{M_1}\right)^2\right],$$

với cường độ yếu của sóng va chạm từ đó ta thu được

$$\delta p^{(âm)} / \delta p^{(0)} \approx 1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\frac{p_2 - p_1}{p_1},$$

còn trong trường hợp ngược lại của cường độ mạnh

$$\delta p^{(âm)} / \delta p^{(0)} \approx \frac{1}{\gamma + \sqrt{2\gamma(\gamma - 1)}}\frac{p_2}{p_1}.$$

Trong cả hai trường hợp, biên độ áp suất trong sóng âm truyền qua tăng so với áp suất trong sóng tới.

[1] Đạo hàm $(\partial V_2/\partial p_2)_H$ là đạo hàm mà ở trên ta ký hiệu đơn giản là $\partial V_2/\partial p_2$, hiểu ngầm đạo hàm được lấy với các p_1, V_1 không đổi.

§91. SỰ LAN TRUYỀN CỦA SÓNG VA CHẠM TRONG ỐNG

Ta khảo sát sự lan truyền của sóng va chạm trong môi trường lấp đầy một ống dài có tiết diện biến thiên. Mục đích của chúng ta khi đó là làm sáng tỏ ảnh hưởng gây bởi sự biến thiên diện tích của sóng va chạm lên vận tốc của nó (*G.B. Whitham*, 1958).

Ta sẽ coi diện tích $S(x)$ của tiết diện ống chỉ biến thiên chậm dọc theo độ dài ống (trục x) – biến thiên ít tại các khoảng cách có bậc độ rộng của ống. Điều này cho phép ứng dụng được sự gần đúng (được gọi là sự gần đúng thủy lực), mà ta đã dùng ở §77; có thể coi tất cả các đại lượng trong dòng chảy là không đổi trên mỗi tiết diện ngang của ống, còn vận tốc thì hướng theo trục của nó; nói một cách khác, dòng chảy được coi là chuẩn một chiều. Một dòng chảy như thế được mô tả bởi các phương trình

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{91-1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} - c^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = 0, \tag{91-2}$$

$$S\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v S) = 0. \tag{91-3}$$

Trong ba phương trình trên, phương trình thứ nhất là phương trình Euler, phương trình thứ hai là phương trình đoạn nhiệt, còn phương trình thứ ba là phương trình liên tục, biểu diễn dưới dạng (77-1).

Để làm sáng tỏ vấn đề ta quan tâm, chỉ cần khảo sát một ống, trong đó sự biến thiên diện tích $S(x)$ không những chậm, mà về giá trị tuyệt đối, nó còn tương đối nhỏ trên toàn bộ độ dài của ống. Khi đó cả các nhiễu động lưu lượng liên quan đến tiết diện biến thiên cũng nhỏ, và các phương trình (91.1-3) có thể được tuyến tính hóa. Cuối cùng các điều kiện ban đầu phải được đặt ra, loại trừ sự xuất hiện của bất kỳ nhiễu động bên ngoài nào có thể ảnh hưởng đến chuyển động của sóng va chạm; ta chỉ quan tâm đến các nhiễu động có liên quan đến sự biến thiên của $S(x)$. Mục đích này sẽ đạt được, nếu thừa nhận rằng, sóng va chạm lúc đầu chuyển động với vận tốc không đổi trong ống có tiết diện không đổi, và diện tích của tiết diện chỉ bắt đầu biến thiên về bên phải

tính từ một điểm nào đó (mà ta lấy làm $x = 0$).

Các phương trình tuyến tính hóa (91.1-3) có dạng

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + v\frac{\partial \delta p}{\partial x} - c^2\left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \delta \rho}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\rho v}{S}\frac{\partial \delta S}{\partial x} = 0,$$

trong đó các chữ không có chỉ số ký hiệu các giá trị không đổi của các đại lượng trong dòng chảy đồng chất ở trong phần đều của ống, còn δ ký hiệu sự biến thiên của các đại lượng đó trong ống có tiết diện biến thiên. Nhân phương trình thứ nhất và thứ ba lần lượt với ρc và c^2, rồi cộng cả ba phương trình lại, ta viết được một tổ hợp sau đây của chúng:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}\right](\delta p + \rho c \delta v) = -\frac{\rho v c^2}{S}\frac{\partial \delta S}{\partial x}. \qquad (91\text{-}4)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này được cho bởi tổng các nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất và nghiệm riêng của phương trình có vế phải. Nghiệm thứ nhất là $F(x - vt - ct)$, trong đó F là một hàm tùy ý; nó mô tả các nhiễu động âm đến từ bên trái. Nhưng ở trong miền đồng chất, với $x < 0$ không có các nhiễu động, do đó cần đặt $F \equiv 0$. Như vậy, nghiệm rút về tích phân của phương trình không thuần nhất:

$$\delta \rho + \rho c \delta v = -\frac{\rho v c^2}{v + c}\frac{\delta S}{S}. \qquad (91\text{-}5)$$

Sóng va chạm chuyển động từ trái sang phải với vận tốc $v_1 > c_1$ trong môi trường đứng yên với các giá trị p_1, ρ_1 đã cho. Còn chuyển động của môi trường ở sau sóng va chạm (môi trường 2) được xác định bởi nghiệm (91-5) trong toàn miền của ống ở bên trái điểm mà gián đoạn đạt tới vào thời điểm đã cho. Sau khi sóng truyền qua, tất cả các đại lượng tại mỗi tiết diện của ống vẫn không đổi theo thời gian, nghĩa là vẫn bằng các giá trị mà chúng thu được vào lúc gián đoạn truyền qua: áp suất p_2, mật độ ρ_2 và vận tốc $v_1 - v_2$ (theo các ký hiệu dùng trong chương này, v_2 ký hiệu vận tốc của khí đối với sóng va chạm chuyển động; còn vận tốc của

nó đối với thành ống khi đó bằng $v_1 - v_2$). Trong các ký hiệu này (lại tách ra các phần biến thiên của các đại lượng này) đẳng thức (91-5) có dạng

$$\frac{\delta S}{S} = -\frac{v_1 - v_2 + c_2}{\rho_2 (v_1 - v_2) c_2^2}\left[\delta p_2 + \rho_2 c_2 (\delta v_1 - \delta v_2)\right]. \qquad (91\text{-}6)$$

Tất cả các đại lượng δv_1, δv_2, δp_2 đều có thể được biểu diễn qua một đại lượng trong chúng, chẳng hạn δv_1. Muốn vậy ta viết các hệ thức biến phân (85.1-2) trên gián đoạn (với p_1 và ρ_1 đã cho):

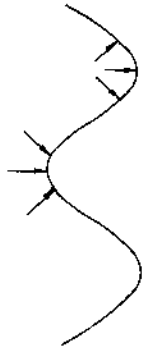
$$\rho_1 \delta v_1 = v_2 \delta \rho_2 + \rho_2 \delta v_2, \quad 2j(\delta v_1 - \delta v_2) = \delta p_2 + v_2^2 \delta \rho_2$$

(trong đó $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ là giá trị không nhiễu động của lưu lượng); còn cần kết hợp với chúng hệ thức sau:

$$\delta p_2 = \frac{dp_2}{d\rho_2}\delta \rho_2,$$

trong đó đạo hàm được lấy theo đường đoạn nhiệt Hugoniot. Phép tính dẫn tới hệ thức sau cùng sau đây sẽ liên kết độ biến thiên δv_1 của vận tốc sóng va chạm đối với khí đứng yên ở trước nó với độ biến thiên δS của diện tích tiết diện ống:

$$-\frac{1}{S}\frac{\delta S}{\delta v_1} = \frac{v_1 - v_2 + c_2}{v_1 c_2}\left[\frac{1 + 2v_2/c_2 - h}{1 + h}\right], \qquad (91\text{-}7)$$



Hình 62

trong đó lại đưa vào ký hiệu

$$h = -\frac{j^2}{\rho_2^2}\frac{d\rho_2}{dp_2} = j^2 \frac{dV_2}{dp_2}. \qquad (91\text{-}8)$$

Hệ số của dấu ngoặc vuông trong (91-7) dương. Do đó, dấu của tỷ số $\delta v_1/\delta S$ được xác định bởi biểu thức trong dấu ngoặc đó. Đối với tất cả các sóng va chạm ổn định, dấu này dương, do đó $\delta v_1/\delta S < 0$. Nhưng khi thực hiện một điều kiện nào đó trong các điều kiện (90.12-13) của tính không ổn định gợn sóng, biểu thức trong dấu ngoặc trở nên âm, do đó $\delta v_1/\delta S > 0$.

Kết quả này cho phép giải thích cụ thể nguồn gốc của tính không ổn định. Hình 62 biểu diễn mặt "gợn sóng" của sóng va chạm dịch chuyển

sang phải; các mũi tên chỉ các sơ đồ chiều của các đường dòng. Khi sóng va chạm dịch chuyển trên các phần mặt lồi ra về phía trước, diện tích δS tăng, còn trên các phần tụt lại sau, diện tích δS giảm. Với $\delta v_1/\delta S < 0$, điều đó dẫn đến làm chậm các phần lồi và tăng tốc các phần tụt lại sau, do đó mặt có xu hướng được san bằng. Ngược lại, với $\delta v_1/\delta S > 0$, dạng mặt sẽ được tăng cường: các phần lồi ngày càng nhô ra, còn các phần tụt lại sẽ càng lõm sâu xuống [1].

§92. SÓNG VA CHẠM NGHIÊNG

Ta xét một sóng va chạm dừng và không chọn hệ quy chiếu đã được dùng từ trước đến nay, trong đó vận tốc của khí hướng vuông góc với phần tử đã cho của mặt sóng. Các đường dòng có thể cắt nghiêng mặt của một sóng như thế và sự cắt đó gây ra "sự khúc xạ" của các đường dòng. Thành phần tiếp tuyến của vận tốc khí không thay đổi khi đi qua sóng va chạm, còn thành phần pháp tuyến giảm theo (87-4):

$$v_{1t} = v_{2t},\ v_{1n} > v_{2n}.$$

Bởi vậy, rõ ràng là khi đi qua sóng va chạm, các đường dòng "đi gần" lại sóng (như được trình bày ở trên hình 63). Như vậy, bây giờ các đường dòng cũng bị khúc xạ theo một phương xác định khi đi qua sóng va chạm.

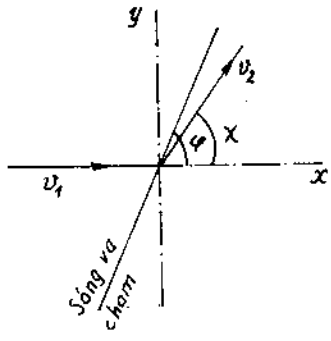
Chọn hướng của vận tốc khí $\mathbf{v}_1$ trước sóng va chạm làm trục x và gọi φ là góc giữa mặt gián đoạn và trục x (hình 63). Các giá trị khả dĩ của góc φ chỉ bị hạn chế bởi điều kiện là thành phần pháp tuyến của vận tốc $\mathbf{v}_1$ phải lớn hơn vận tốc âm c_1. Vì $v_{1n} = v \sin\varphi$, nên từ đó suy ra rằng φ có thể có những giá trị tùy ý trong khoảng giữa $\pi/2$ và góc Mach α_1:

$$\alpha_1 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\alpha_1 = \frac{c_1}{v_1} \equiv \frac{1}{M_1}.$$

Chuyển động ở sau sóng va chạm có thể là dưới âm hoặc vượt âm (chỉ có thành phần pháp tuyến của vận tốc phải nhỏ hơn vận tốc âm c_2); còn đối với chuyển động ở phía trước sóng va chạm, thì nhất thiết nó phải

[1] Biểu thức (91-7) cho môi trường tùy ý (không polytropic) và mối liên hệ của nó với các điều kiện không ổn định gợn sóng của các sóng va chạm được nêu ra bởi *X.G. Xugak* và *V.E. Fortov, A.L. Ni,* (1981).

vượt âm. Nếu chuyển động của khí ở hai bên sóng va chạm là vượt âm, thì tất cả các nhiễu động chỉ có thể lan truyền dọc theo mặt nó về phía của thành phần tiếp tuyến của vận tốc khí. Theo nghĩa này có thể nói về "chiều" của sóng va chạm và phân biệt các sóng "xuất phát" từ một nơi nào đó với các sóng "đi tới" đó (như đã tiến hành đối với các đặc tuyến mà quanh các đặc tuyến này, chuyển động bao giờ cũng là vượt âm; xem §82). Nhưng nếu chuyển động sau sóng va chạm là dưới âm, thì khái niệm về "chiều" của sóng va chạm, nói một cách chặt chẽ, sẽ mất ý nghĩa, vì các nhiễu động có thể lan truyền dọc theo mặt nó theo tất cả các phía.



Hình 63

Ta rút ra hệ thức liên kết hai thành phần của vận tốc khí sau khi nó đi qua một sóng va chạm nghiêng; khi đó ta giả thiết khí là polytropic.

Sự liên tục của thành phần vận tốc tiếp tuyến với sóng có nghĩa là $v_1 \cos\varphi = v_{2x}\cos\varphi + v_{2y}\sin\varphi$ hay

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_1 - v_{2x}}{v_{2y}}. \tag{92-1}$$

Tiếp theo, ta dùng công thức (89-6); trong công thức này v_1 và v_2 ký hiệu cho các thành phần vận tốc vuông góc với mặt phẳng sóng va chạm và bây giờ được thay bằng $v_1\sin\varphi$ và $v_{2x}\sin\varphi - v_{2y}\cos\varphi$, do đó ta có:

$$\frac{v_{2x}\sin\varphi - v_{2y}\cos\varphi}{v_1\sin\varphi} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2c_1^2}{(\gamma+1)v_1^2\sin^2\varphi}. \tag{92-2}$$

Có thể khử góc φ khỏi hai hệ thức đã viết. Sau các phép biến đổi đơn giản, ta thu được công thức sau xác định mối liên hệ giữa v_{2x} và v_{2y} (với v_1 và c_1 đã cho):

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{\dfrac{2}{\gamma+1}\left(v_1 - \dfrac{c_1^2}{v_1}\right) - (v_1 - v_{2x})}{v_1 - v_{2x} + \dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{c_1^2}{v_1}}. \tag{92-3}$$

Công thức này sẽ có một dạng gọn hơn, nếu đưa vào trong đó vận tốc tới hạn. Dựa vào phương trình Bernoulli và định nghĩa của vận tốc tới hạn, ta có:

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma - 1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} c_*^2$$

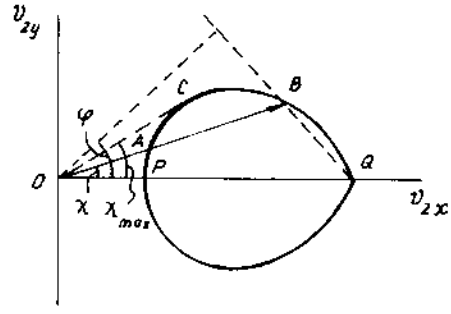
(xem bài tập 1, §89), từ đó

$$c_*^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1^2 + \frac{2}{\gamma + 1} c_1^2. \tag{92-4}$$

Nếu đưa đại lượng này vào trong (92-3), ta thu được:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{\frac{2}{\gamma + 1} v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_*^2}. \tag{92-5}$$

Phương trình (92-5) được gọi là *phương trình cực tuyến va chạm* (*A. Busemann*, 1931). Hình 64 biểu diễn sự phụ thuộc này; đó là một đường cong bậc ba (gọi là đường *strôfôit* hay *lá Đêcác*). Nó cắt trục hoành tại điểm P và Q (hình 64) tương ứng với các giá trị $v_{2x} = c_*^2 / v_1$ và $v_{2x} = v_1$ [1]. Từ gốc tọa độ nếu vạch một tia (OB ở trên hình 64) lập với trục hoành một góc χ, thì dựa theo độ dài của đoạn nằm giữa O và giao điểm của nó với đường cong cực tuyến va chạm, ta xác định được vận tốc của khí ở sau bước nhảy làm quay dòng một góc χ. Có hai giao điểm thuộc loại đó



Hình 64

[1] Từ điểm Q, là điểm kép của đường cong, thực tế đường strôfôit còn kéo dài dưới dạng hai nhánh đi ra vô hạn $|v_{2y}|$, (không vẽ ở trên hình 64) với đường tiệm cận thẳng đứng chung

$$v_{2x} = \frac{c_*^2}{v_1} + \frac{2v_1}{\gamma + 1}.$$

Tuy nhiên, các điểm của hai nhánh này không có ý nghĩa vật lý; chúng cho các v_{2x} và v_{2y} các giá trị, mà $v_{2n} / v_{1n} > 1$, điều này không thể được.

(A và B), nghĩa là ứng với một giá trị đã cho của χ có hai sóng va chạm khác nhau. Phương của sóng va chạm cũng có thể được xác định ngay bằng đồ thị theo cùng giản đồ này – nó được xác định bởi đường vuông góc hạ từ gốc tọa độ xuống đường thẳng vạch từ điểm Q lần lượt đi qua B hay A (hình 64 biểu diễn góc φ cho sóng tương ứng với điểm B). Khi χ giảm, A lại gần điểm P, điểm này tương ứng với bước nhảy vuông góc ($\varphi = \pi/2$) với $v_2 = c_*^2/v_1$. Điểm B khi đó lại gần Q và cường độ của sóng va chạm (bước nhảy của vận tốc trong sóng nay) tiến đến không; tại giới hạn, ở ngay chính điểm Q, góc φ bằng góc Mach α_1 (góc nghiêng lập bởi tiếp tuyến với cực tuyến tại điểm đó và trục hoành bằng $\pi/2 + \alpha_1$), đúng phải như vậy.

Giản đồ của cực tuyến va chạm cho phép rút ra ngay một kết luận quan trọng: góc lệch χ của dòng trên sóng va chạm không thể vượt quá một giá trị cực đại χ_{max} nào đó, tương ứng với tia vạch từ O đến tiếp tuyến với đường cong. Dĩ nhiên, χ_{max} là một hàm của số $M_1 = v_1/c_1$; vì biểu thức của nó phức tạp, nên không nêu ra đây. Với $M_1 = 1$, ta có $\chi_{max} = 0$ và khi M_1 tăng, góc χ_{max} tăng đơn điệu và khi $M_1 \to \infty$ tiến đến một giới hạn hữu hạn. Dễ dàng khảo sát cả hai trường hợp giới hạn.

Nếu vận tốc v_1 gần đến c_*, thì cả vận tốc v_2 cũng gần đến c_* còn góc χ nhỏ; khi đó phương trình của cực tuyến va chạm (92-5) có thể được viết lại một cách gần đúng dưới dạng [1)]

$$\chi^2 = \frac{\gamma + 1}{2c_*^3}(v_1 - v_2)^2(v_1 + v_2 - 2c_*) \qquad (92\text{-}6)$$

(vì χ ở đây nhỏ, nên có thể đặt $v_{2x} \approx v_2$, $v_{2y} \approx c_*^2\gamma$). Từ đó ta dễ dàng thu được [2)]:

$$\chi_{max} = \frac{4\sqrt{\gamma + 1}}{3^{3/2}}\left(\frac{v_1}{c_*} - 1\right)^{3/2} = \frac{2^{7/2}}{3^{3/2}(\gamma + 1)}(M_1 - 1)^{3/2}. \qquad (92\text{-}7)$$

Trong trường hợp giới hạn ngược lại với $M_1 \to \infty$, cực tuyến va chạm suy biến thành đường tròn

[1)] Ta dễ dàng thấy rằng, phương trình (92-6) sẽ đúng đối với một khí bất kỳ (không polytropic), miễn là trong đó ta thay $(\gamma + 1)/2$ bằng α_* xác định bởi (102-2).

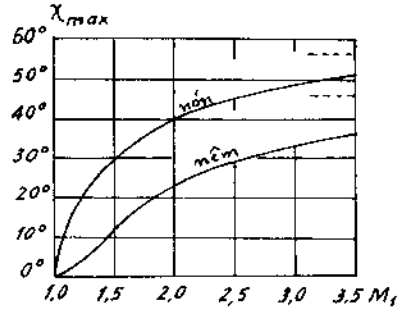
[2)] Ta nhận thấy rằng sự phụ thuộc này của χ_{max} vào $M_1 - 1$ phù hợp với định luật đồng dạng tổng quát (126-7) đối với các dòng chảy gần âm.

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})\left(v_{2x} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} v_1\right).$$

Khi đó ta dễ dàng thấy

$$\chi_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{\gamma}\right). \qquad (92\text{-}8)$$

Hình 65 biểu diễn sự phụ thuộc của χ_{max} vào M_1 đối với không khí ($\gamma = 1{,}4$); đoạn chấm chấm nằm ngang chứng tỏ giá trị giới hạn $\chi_{max}(\infty) = 45{,}6^\circ$ (đường cong ở phía trên hình vẽ là đồ thị tương tự đối với dòng chảy quanh một hình nón; xem §113).



Hình 65

Đường tròn $v_2 = c_*$ cắt trục hoành giữa các điểm P và Q (hình 64), do đó nó chia cực tuyến va chạm thành hai phần tương ứng với các vận tốc dưới âm và vận tốc vượt âm của khí ở sau gián đoạn. Giao điểm của đường tròn $v_2 = c_*$ với cực tuyến nằm bên phải điểm C, nhưng rất gần điểm này; do đó toàn bộ đoạn PC tương ứng với các chuyển dời sang các vận tốc dưới âm, còn đoạn CQ (chỉ trừ một đoạn rất nhỏ ở gần điểm C) tương ứng với các chuyển dời sang các vận tốc vượt âm.

Những sự biến thiên của áp suất và mật độ trong sóng va chạm nghiêng chỉ phụ thuộc vào các thành phần vuông góc của vận tốc với sóng. Do đó, với M_1 và φ đã cho các tỷ số p_2/p_1 và ρ_2/ρ_1 thu được đơn giản từ các công thức (89.6-7) nếu thay trong đó M_1 bằng $M_1 \sin\varphi$:

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 \sin^2\varphi - 1), \qquad (92\text{-}9)$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{2(M_1^2 \sin^2\varphi - 1)}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2\varphi + 2}. \qquad (92\text{-}10)$$

Các tỷ số này tăng đơn điệu khi góc φ tăng từ giá trị $\varphi = \alpha_1$ (khi $p_2/p_1 = \rho_2/\rho_1 = 1$) đến $\pi/2$, nghĩa là dịch chuyển theo cực tuyến va chạm từ điểm Q đến điểm P.

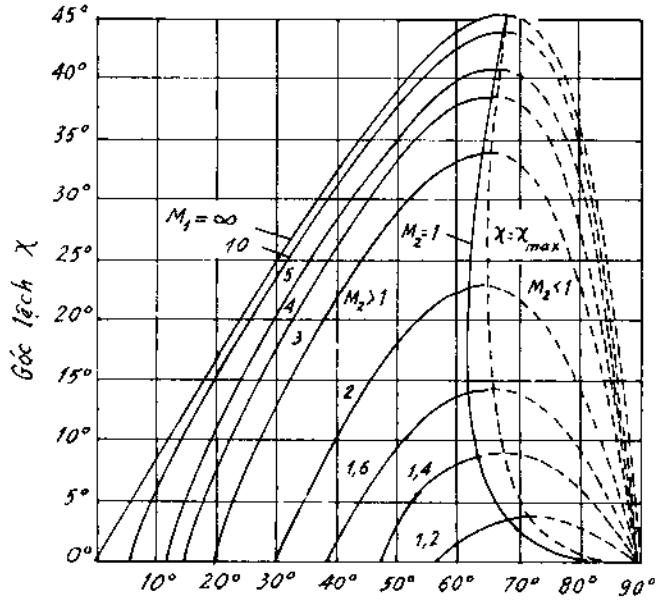
Để tra cứu, ta còn nêu thêm công thức biểu diễn góc quay χ của vận tốc qua số M_1 và góc φ:

$$\operatorname{cotg}\chi = \operatorname{tg}\varphi\left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2(M_1^2\sin^2\varphi - 1)} - 1\right], \qquad (92\text{-}11)$$

và công thức xác định số $M_2 = v_2/c_2$ theo M_1 và φ:

$$M_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2\sin^2\varphi - (\gamma-1)} + \frac{2M_1^2\cos^2\varphi}{2+(\gamma-1)M_1^2\sin^2\varphi} \qquad (92\text{-}12)$$

(với $\varphi = \pi/2$ biểu thức sau cùng chuyển thành (89-9)).



Hình 66

Hai sóng va chạm xác định bởi cực tuyến va chạm với một góc quay đã cho của vận tốc thường được gọi là các *sóng họ yếu* và *sóng họ mạnh*. Sóng va chạm họ mạnh (đoạn *PC* của cực tuyến) có cường độ lớn hơn (tỷ số p_2/p_1 lớn hơn) lập với phương của vận tốc $\mathbf{v}_1$ một góc φ lớn hơn và biến dòng chảy vượt âm thành dòng chảy dưới âm. Còn sóng họ yếu (đoạn *QC* của cực tuyến) có cường độ nhỏ hơn, nó nghiêng trên dòng dưới một

góc nhỏ hơn và hầu như bao giờ cũng vẫn để dòng chảy là vượt âm.

Để minh họa, hình 66 biểu diễn sự phụ thuộc của góc lệch χ của vận tốc vào góc nghiêng φ của mặt gián đoạn đối với không khí ($\gamma = 1,4$) với một số giá trị khác nhau của số M_1, kể cả đối với giới hạn $M_1 \to \infty$. Các nhánh của đường cong, biểu diễn bởi các đường liền nét, tương ứng với các sóng họ yếu, còn các nhánh đường cong biểu diễn bởi các đường chấm chấm tương ứng với các sóng va chạm họ mạnh. Đường chấm chấm $\chi = \chi_{max}$ là quỹ tích của các điểm có góc lệch cực đại (với mỗi M_1 đã cho), còn đường liền nét $M_2 = 1$ ngăn cách miền dòng chảy vượt âm và dưới âm ở sau gián đoạn; miền hẹp giữa hai đường đó tương ứng với các sóng va chạm họ yếu. Tuy nhiên các sóng va chạm này biến đổi dòng chảy từ vượt âm thành dưới âm. Hiệu các giá trị của góc φ trên các đường $\chi = \chi_{max}$ và $M_2 = 1$ (với M_1 đã cho) không ở đâu vượt quá $1,5^\circ$; còn hiệu giữa χ_{max} và giá trị $\chi = \chi_{âm}$ trên đường $M_2 = 1$ (cũng với M_1 đã cho) không vượt quá $0,5^\circ$ [1].

§93. BỀ DẦY CỦA CÁC SÓNG VA CHẠM

Cho đến nay ta vẫn coi các sóng va chạm như các mặt hình học không có bề dầy. Bây giờ, ta khảo sát vấn đề về cấu trúc của các mặt gián đoạn vật lý thực. Ta nhận thấy rằng, các sóng va chạm với các bước nhảy nhỏ của các đại lượng thực tế là các lớp chuyển tiếp có bề dầy hữu hạn; bề dầy này giảm khi độ lớn của các bước nhảy tăng. Nhưng nếu những bước nhảy của các đại lượng trong sóng va chạm không nhỏ thì thực tế gián đoạn xảy ra sẽ sắc nhọn đến mức trong lý thuyết vĩ mô việc nói đến bề dầy của nó sẽ vô nghĩa.

Để xác định cấu trúc và bề dầy của lớp chuyển tiếp, cần phải xét đến độ nhớt và tính dẫn nhiệt của khí, mà cho đến nay ta đã bỏ qua ảnh hưởng của chúng.

Các hệ thức (85.1- 3) về sóng va chạm đã được rút ra từ các điều kiện

[1] Các đồ thị và giản đồ chi tiết xét cho cực tuyến va chạm (đối với $\gamma = 1,4$) có thể tìm trong các sách: *Liepmann H.W. Roshko. Elements of gasdynamics - N.Y: J. Wiley*, 1957, *Oswatitsch K. Gasdynamics - N.Y: Akademic Press*, 1956 (hoặc bản dịch tiếng Nga của nhà XB ngoại văn Matxcơva, 1960).

đòi hỏi các thông lượng chất, dòng xung lượng và năng thông phải không đổi. Nếu coi mặt gián đoạn như một lớp có bề dầy hữu hạn, thì các điều kiện đó phải được viết không phải dưới dạng đẳng thức giữa các đại lượng tương ứng ở hai phía của mặt gián đoạn, mà dưới một dạng biểu diễn sự không đổi của chúng theo toàn bộ bề dầy của lớp gián đoạn. Điều kiện thứ nhất trong các điều kiện đó là (85-1) không thay đổi.

$$\rho v \equiv j = \text{const} \tag{93-1}$$

Nhưng trong hai điều kiện khác, cần xét đến các dòng xung lượng phụ và năng thông phụ gây bởi ma sát nội và tính dẫn nhiệt.

Mật độ dòng xung lượng (theo trục x) gây bởi ma sát nội xác định bởi thành phần $-\sigma'_{xx}$ của tenxơ ứng suất nhớt; theo biểu thức tổng quát (15-3) của tenxơ này, ta có:

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dv}{dx}.$$

Điều kiện (85-2) bây giờ có dạng [1)]

$$p + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{dv}{dx} = \text{const}.$$

Cũng như ở mục §85, thay cho vận tốc v ta đưa vào thể tích riêng V được xác định bởi hệ thức $v = jV$. Còn hằng số ở vế phải của đẳng thức được biểu diễn qua các giá trị giới hạn của các đại lượng tại khoảng cách lớn ở trước sóng va chạm (phía 1). Khi đó điều kiện đã viết có dạng

$$p - p_1 + j^2(V - V_1) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) j\frac{dV}{dx} = 0. \tag{93-2}$$

Tiếp theo, mật độ năng thông gây bởi tính dẫn nhiệt bằng $-\kappa(\partial T/\partial x)$. Còn mật độ năng thông liên quan đến ma sát nội có giá trị bằng

$$-\sigma'_{xi}v_i = -\sigma'_{xx}v = -\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v\frac{dv}{dx}.$$

Như vậy, điều kiện (85-3) được viết dưới dạng

[1)] Chiều dương của trục x trùng với chiều chuyển động của khí qua sóng va chạm đứng yên. Nếu chuyển sang hệ quy chiếu trong đó khí ở trước sóng va chạm đứng yên, thì bản thân sóng va chạm sẽ chuyển động theo chiều âm của trục x.

$$\rho v\left(w+\frac{v^2}{2}\right)-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)v\frac{dv}{dx}-\kappa\frac{dT}{dx}=\text{const},$$

hay lại đưa vào $v = jV$, và biểu diễn const qua các đại lượng có chỉ số 1:

$$w-w_1+\frac{j^2}{2}(V^2-V_1^2)-j\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)V\frac{dV}{dx}-\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=0. \qquad (93\text{-}3)$$

Ở đây khảo sát các sóng va chạm, trong đó tất cả các đại lượng đều chịu một bước nhảy nhỏ. Khi đó tất cả những hiệu: $V - V_1$, $p - p_1$, v.v... giữa các đại lượng ở bên trong và bên ngoài lớp chuyển tiếp cũng đều nhỏ. Các hệ thức thiết lập được ở dưới đây chứng tỏ rằng $1/\delta$ (δ là bề rộng của gián đoạn) là đại lượng nhỏ bậc một đối với $p_2 - p_1$. Do đó việc lấy đạo hàm theo x tăng bậc độ nhỏ lên một đơn vị (chẳng hạn như, đạo hàm dp/dx là đại lượng bậc hai).

Nhân phương trình (93-2) với $(V + V_1)/2$ và trừ nó vào phương trình (93-3), ta được:

$$(w-w_1)-\frac{1}{2}(p-p_1)(V+V_1)=\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx} \qquad (93\text{-}4)$$

(ở đây bỏ qua số hạng chứa $(V + V_1)dV/dx$, là đại lượng nhỏ bậc ba). Ta khai triển biểu thức ở vế trái của (93-4) theo các luỹ thừa của $p - p_1$ và $s - s_1$, chọn áp suất và entrôpi làm các biến độc lập cơ bản. Các số hạng bậc nhất và bậc hai theo $p - p_1$ trong khai triển này biến mất (so sánh với các phép tính khi rút ra công thức (86-1) và sau khi bỏ qua các số hạng bậc cao hơn, ta thu được đơn giản $T(s - s_1)$. Còn đạo hàm dT/dx được viết dưới dạng

$$\frac{dT}{dx}=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx}+\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p\frac{ds}{dx}.$$

Số hạng có đạo hàm ds/dx có thể được bỏ đi như đại lượng nhỏ bậc ba (xem dưới đây). Kết quả ta đi tới công thức biểu diễn hàm $s(x)$ qua hàm $p(x)$

$$T(s-s_1)=\frac{\kappa}{j}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (93\text{-}5)$$

Cần chú ý rằng, hiệu $s - s_1$ bên trong lớp chuyển tiếp là đại lượng có độ nhỏ bậc hai, trong khi đó bước nhảy toàn phần (như đã được chứng minh ở §86) là đại lượng bậc ba so với bước nhảy áp suất. Đó là do, (như sẽ chứng minh dưới đây) áp suất $p(x)$ trong lớp chuyển tiếp biến thiên đơn điệu từ một giá trị giới hạn p_1 đến giá trị giới hạn p_2 khác; còn entrôpi $s(x)$, xác định bởi đạo hàm dp/dx, đi qua cực đại, đạt giá trị lớn nhất ở trong lớp chuyển tiếp.

Phương trình xác định hàm $p(x)$ có thể thu được bằng cách khai triển tương tự các phương trình (93.2-3) và tổ hợp chúng lại với nhau. Tuy nhiên, ta chọn một phương pháp trí tuệ hơn, cho phép hiểu rõ ràng hơn nguồn gốc của các số hạng khác nhau trong phương trình.

Ở §79 đã chứng tỏ rằng, nhiễu động yếu đơn sắc của trạng thái khí (sóng âm) tắt dần khi lan truyền với giảm lượng tỷ lệ với bình phương tần số: $\gamma = a\omega^2$; hệ số dương a được biểu diễn qua các hệ số nhớt và dẫn nhiệt theo công thức (79-6). Ở đó cũng đã chứng tỏ rằng, sự tắt này có thể được mô tả (đối với sóng âm phẳng tùy ý) bằng cách đưa vào số hạng phụ trong phương trình chuyển động tuyến tính hóa – xem (79-9). Trong phương trình đó ta thay đạo hàm cấp hai theo thời gian bằng đạo hàm cấp hai theo tọa độ và đổi dấu trước đạo hàm $\partial p'/\partial x$ (điều này tương ứng với sự lan truyền của sóng theo chiều âm của trục x [1]). Phương trình có dạng

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c\frac{\partial p'}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{93-6}$$

trong đó p' là phần biến thiên của áp suất.

Để xét đến tính phi tuyến cần đưa vào trong phương trình đó số hạng $p'\partial p'/\partial x$:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - c\frac{\partial p'}{\partial x} - \alpha_p p'\frac{\partial p'}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}, \tag{93-7}$$

Hệ số α_p trong số hạng phi tuyến được xác định bằng cách khai triển tương ứng các phương trình thủy động lực học của chất lỏng lý tưởng (không có tiêu tán) và bằng:

[1] Việc chọn hướng lan truyền này có liên quan đến phần bị chú ở trang 573.

$$\alpha_p = \frac{c^3}{2V^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \qquad (93\text{-}8)$$

(xem bài tập) [1].

Phương trình (93-7) mô tả sự lan truyền của các nhiễu động trong môi trường tán sắc phi tuyến yếu. Khi ứng dụng cho sóng va chạm yếu, nó mô tả sự lan truyền của sóng trong hệ quy chiếu, trong đó khi không nhiễu động (ở trước sóng) đứng yên. Cần tìm nghiệm với prôfin dừng (không phụ thuộc vào thời gian) mà trong đó khi ở xa sóng, với $x \to \pm\infty$, áp suất lấy các giá trị đã cho p_2 và p_1; hiệu $p_2 - p_1$ là bước nhảy áp suất trong gián đoạn [2].

Sóng với prôfin dừng được mô tả bởi nghiệm có dạng

$$p'(x,t) = p'(x + v_1 t), \qquad (93\text{-}9)$$

trong đó v_1 là vận tốc lan truyền của một sóng như thế. Thay vào (93-7), ta đi tới phương trình

$$\frac{d}{d\xi}\left[(v_1 - c)p' - \frac{\alpha_p}{2}p'^2 - ac^3\frac{dp'}{d\xi}\right] = 0, \quad \xi = x + v_1 t,$$

tích phân thứ nhất của nó

$$ac^3\frac{dp'}{d\xi} = -\frac{\alpha_p}{2}p'^2 + (v_1 - c)p' + \text{const.} \qquad (93\text{-}10)$$

Tam thức bậc hai ở vế phải đẳng thức phải bằng không với các giá trị p' tương ứng với các điều kiện giới hạn ở các vô cực; tại đây đạo hàm $dp'/d\xi$ bằng không. Các giá trị này bằng $p_2 - p_1$ và 0 nếu quy ước tính p' từ áp

---

[1] Sau khi đưa vào hàm mới chưa biết $u = -p'\alpha_p$, biến độc lập mới (thay cho x) $\zeta = x + ct$ và ký hiệu $\mu = ac^3$, ta đưa phương trình (93-7) về dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \qquad (93\text{-}7a)$$

và gọi là phương trình *Burgers* (*J.M. Burgers*,1940).

[2] Sau này (§102) ta sẽ thấy rằng khi không có sự tiêu tán, các hiệu ứng phi tuyến sẽ dẫn đến sự biến dạng của prôfin sóng trong khi nó lan truyền – đến sự tăng dần độ dốc đứng của mặt sóng. Đến lượt mình, sự tăng này lại dẫn đến sự tăng cường các hiệu ứng tiêu tán, có xu hướng giảm độ dốc đứng của prôfin (nghĩa là giảm các gradiên của các đại lượng biến thiên). Chính sự bù trừ tương hỗ của các xu hướng đối lập nhau dẫn đến khả năng lan truyền các sóng có prôfin dừng trong môi trường tiêu tán phi tuyến.

suất không nhiễu động p_1 ở trước sóng. Điều đó có nghĩa là, tam thức đã nêu có thể được biểu diễn dưới dạng

$$-\frac{\alpha_p}{2}\left[p' - (p_2 - p_1)\right]p',$$

đồng thời hằng số v_1 được biểu diễn qua p_1 và p_2 theo

$$v_1 = c + \frac{\alpha_p}{2}(p_2 - p_1). \tag{93-11}$$

Còn đối với chính áp suất p, phương trình (93-10) có dạng

$$ac^3\frac{dp}{d\xi} = -\frac{\alpha_p}{2}(p - p_1)(p - p_2).$$

Nghiệm của phương trình này, thỏa mãn điều kiện đòi hỏi, có dạng

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{(p_2 - p_1)(x + v_1 t)}{4ac^3/\alpha_p}.$$

Kết quả trên giải quyết bài toán đặt ra. Trở lại hệ quy chiếu trong đó sóng va chạm đứng yên, ta viết được công thức xác định được tiến trình biến thiên của áp suất trong sóng dưới dạng

$$p - \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{p_2 - p_1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{\delta}. \tag{93-12}$$

trong đó

$$\delta = \frac{8aV^2}{(p_2 - p_1)\left(\partial^2 V/\partial p^2\right)_s}. \tag{93-13}$$

Thực tế, tất cả sự biến thiên của áp suất từ p_1 đến p_2 xảy ra tại khoảng cách ~ δ, mà ta gọi là bề rộng của sóng va chạm. Ta nhận thấy rằng, bề rộng của sóng giảm với sự tăng của cường độ sóng – bước nhảy của áp suất $p_2 - p_1$ [1].

[1] Đối với sóng va chạm lan truyền trong hỗn hợp, trong bề rộng của nó cũng có xuất hiện một sự đóng góp xác định từ các quá trình khuếch tán trong lớp chuyển tiếp. Việc tính sự đóng góp này có thể xem ở *Điakov S.P*– JETP, 1954, T.27,tr.283.

Cũng nhắc thêm rằng, các sóng va chạm cường độ yếu vẫn ổn định đối với biến điệu ngang (xem bị chú ở trang 558) và khi xét đến cấu trúc tiêu tán của chúng: xem *Xpektor M.Đ.* – Các bức thư. JETP, 1983, T.35, tr. 181.

Tiến trình biến thiên của entrôpi trong gián đoạn thu được từ (93-5) và (93-12):

$$s - s_1 = \frac{\kappa}{16caVT}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p_2 - p_1)^2 \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/\delta)}. \qquad (93\text{-}14)$$

Từ đó thấy rằng, entrôpi không biến thiên đơn điệu, mà có cực đại ở bên trong sóng va chạm (tại $x = 0$). Với $x = \pm\infty$ thì công thức này cho những giá trị như nhau $s = s_1$: đó là do độ biến thiên toàn phần của entrôpi $s_2 - s_1$ là một đại lượng bậc ba đối với $p_2 - p_1$ (so sánh với (86-1), trong khi đó $s - s_1$ là một đại lượng bậc hai.

Công thức (93-12) chỉ áp dụng được một cách định lượng với các hiệu $p_2 - p_1$ đủ nhỏ. Tuy nhiên, về mặt định tính ta cũng có thể áp dụng được công thức (93-12) để xác định bậc độ lớn của bề rộng sóng va chạm cả khi hiệu $p_2 - p_1$ có bậc độ lớn của chính áp suất p_1, p_2. Vận tốc âm trong khí có bậc độ lớn của vận tốc nhiệt v các phân tử. Còn độ nhớt động học, như đã biết từ lý thuyết động học các chất khí, bằng $\nu \sim lv \sim lc$, trong đó l là quãng đường tự do của các phân tử. Do đó $a \sim l/c^2$ (việc ước lượng số hạng chứa hệ số dẫn nhiệt cho cùng kết quả). Cuối cùng $(\partial^2 V/\partial p^2)_s \sim V/p^2$ và $pV \sim c^2$. Nếu đưa các biểu thức này vào trong (93-13), ta thu được:

$$\delta \sim l. \qquad (93\text{-}15)$$

Như vậy, bề rộng của các sóng va chạm có cường độ lớn có bậc của quãng đường tự do của các phân tử khí [1]. Nhưng trong khí động lực học vĩ mô chất khí được coi như một môi trường liên tục, thì đoạn đường tự do phải được coi bằng không. Do đó, nói một cách chặt chẽ, các phương pháp khí động lực học thuần túy không thích hợp để nghiên cứu cấu trúc bên trong của các sóng va chạm cường độ lớn.

BÀI TẬP

1. xác định hệ số phi tuyến α_p trong phương trình (93-7) cho sự lan truyền của các sóng âm ở trong khí.

Giải. Các phương trình thủy động lực chính xác của chuyển động một chiều cho chất khí lý tưởng (không có tiêu tán):

[1] Một sóng va chạm mạnh sẽ gây ra một sự tăng nhiệt độ đáng kể; l cần được hiểu là đoạn đường tương ứng với một nhiệt độ trung bình nào đó của khí ở trong sóng.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho v = 0. \tag{1}$$

Ta tiến hành khai triển các phương trình trên có xét đến các số hạng có độ nhỏ bậc hai. Muốn vậy, ta đặt

$$p = p_o + p', \qquad \rho = \rho_o + \frac{p'}{c^2} + \frac{p'^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s. \tag{2}$$

Có thể đơn giản các số hạng bậc hai trong các phương trình, bằng cách đưa tất cả chúng về dạng giống nhau có chứa tích $p'\partial p'/\partial x$. Muốn vậy, có nhận xét là đối với sóng lan truyền theo chiều âm của trục x (với vận tốc c), thì việc lấy đạo hàm theo t tương đương với việc lấy đạo hàm theo x/c; khi đó $v = -p'/c\rho_o$. Sau tất cả các sự thay đổi đó, ta thu được từ (1) và (2) các phương trình sau:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = c\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s p'\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{4}$$

(chỉ số 0 ở các giá trị cân bằng không đổi của các đại lượng được bỏ đi); ở đây cũng dùng đẳng thức

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right)_s = \frac{2}{\rho c^2} - \rho^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \tag{5}$$

($V = 1/\rho$ là thể tích riêng). Lấy đạo hàm các phương trình (3) và (5) lần lượt theo x và theo t, rồi trừ phương trình này vào phương trình kia, ta được

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)p' = c^2\rho^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s \frac{\partial}{\partial x}\left(p'\frac{\partial p'}{\partial x}\right).$$

Với cùng độ chính xác ta thay đổi trong vế trái của phương trình này $\partial/\partial x + \partial/c\partial t \to 2\partial/\partial x$. Cuối cùng, sau khi gạch các đạo hàm theo x ở hai vế và so sánh các phương trình thu được với (93-7) ta tìm được cho α_p giá trị (93-8).

Có thể thu được phương trình cho vận tốc v trực tiếp từ (93-7), không phải lặp lại các phép tính tương tự như đã tiến hành ở trên. Thực vậy, tổng các số hạng bậc nhất trong vế trái của (93-7) có chứa toán tử $\partial/\partial t - c\partial/\partial x$. Toán tử này cần được coi như có độ nhỏ bậc một : nó biến hàm $p'(x,t)$ bằng không trong phép gần đúng bậc nhất. Do đó, ta thu được phương trình cho hàm $v(x,t)$ trong phép gần đúng đòi hỏi, chỉ đơn giản bằng cách thay p' trong (93-7) theo hệ thức tuyến tính $p' = -\rho cv$.

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_v v\frac{\partial v}{\partial x} = ac^3\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{6}$$

trong đó $$\alpha_v = \frac{c^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s.$$

Đại lượng α_v không có thứ nguyên; đối với khí polytropic $\alpha_v = (\gamma + 1)/2$.

2. Bằng cách thay thế phi tuyến, đưa phương trình Burgers (93-7a) về dạng của phương trình truyền nhiệt tuyến tính (*E. Hopf*, 1950).

Giải. Bằng cách thay thế

$$u(\zeta,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \varphi(\zeta,t) \tag{1}$$

Phương trình (93-7a) được đưa về dạng

$$2\mu \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\frac{1}{\varphi}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}\right)\right] = 0,$$

từ đó

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = \varphi \frac{df(t)}{dt}, \tag{2}$$

trong đó df/dt ký hiệu cho hàm tùy ý của t. Nếu ký hiệu lại $\varphi \to \varphi e^f$ (không làm thay đổi hàm chưa biết $u(\zeta,t)$) phương trình này được biến đổi về dạng đòi hỏi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}, \tag{3}$$

Nghiệm của nó với điều kiện ban đầu $\varphi(\zeta,0) = \varphi(\zeta)$ được cho bởi công thức (51-3):

$$\varphi(\zeta,t) = \frac{1}{2}(\pi\mu t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_o(\zeta') \exp\left\{-\frac{(\zeta-\zeta')^2}{4\mu t}\right\} d\zeta'. \tag{4}$$

Còn hàm ban đầu $\varphi_o(\zeta)$ liên hệ với giá trị ban đầu của hàm cần tìm $u(\zeta,t)$ bằng đẳng thức

$$\ln \varphi_o(\zeta) = -\frac{1}{2\mu} \int_0^{\zeta} u_o(\zeta)\, d\zeta \tag{5}$$

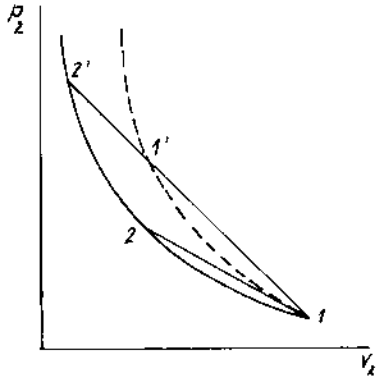
(việc chọn giới hạn dưới trong tích phân là tùy ý).

§94. SÓNG VA CHẠM TRONG MÔI TRƯỜNG HỒI PHỤC

Sự có mặt của các quá trình hồi phục xảy ra tương đối chậm trong chất khí, chẳng hạn các phản ứng hóa học xảy ra chậm, sự truyền chậm

năng lượng giữa các bậc tự do khác nhau của phân tử v.v.., có thể dẫn đến sự dãn nở đáng kể của sóng va chạm (*Ia.B.Zeldovits*, 1946) [1].

Giả sử τ là bậc độ lớn của thời gian hồi phục. Trạng thái đầu cũng như trạng thái cuối của khí phải hoàn toàn cân bằng; vì thế trước hết ta thấy rõ rằng, bề rộng toàn phần của sóng va chạm sẽ có bậc độ lớn τv_1 – đó là khoảng cách mà khi khí đi qua được trong thời gian τ. Ngoài ra nếu cường độ sóng vượt quá giới hạn xác định, thì cấu trúc của sóng sẽ trở nên phức tạp. Có thể thấy được điều này bằng cách sau.



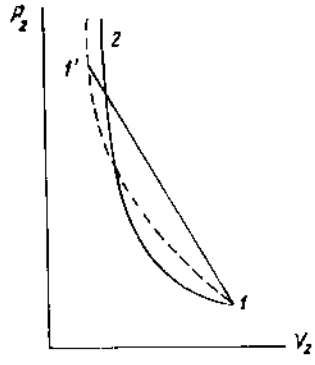
Hình 67

Trên hình 67, đường liền nét biểu diễn đường đoạn nhiệt vạch qua điểm ban đầu *1* đã cho, với giả thiết các trạng thái cuối của khí hoàn toàn cân bằng; độ nghiêng của đường tiếp tuyến với đường cong này tại điểm *1* được xác định bởi vận tốc "cân bằng" của âm, đã ký hiệu ở §81 bằng c_0. Còn đường chấm chấm biểu diễn đường đoạn nhiệt va chạm vạch qua cùng điểm *1*, với giả thiết là, các quá trình hồi phục bị "đông lại" và hoàn toàn không xảy ra; độ nghiêng của đường tiếp tuyến với đường cong này tại điểm *1* được xác định bởi giá trị của vận tốc âm, đã ký hiệu ở §81 bằng c_∞.

Nếu vận tốc của sóng va chạm sao cho $c_0 < v_1 < c_\infty$, thì dây cung *12* như trên hình 67 được sắp xếp bằng đoạn ở dưới. Trong trường hợp này, ta thu được một sự dãn nở đơn giản của sóng va chạm, khi đó, tất cả các trạng thái trung gian giữa trạng thái đầu *1* và trạng thái cuối *2* được biểu diễn trong mặt phẳng p, V bằng một điểm trên đoạn *12*. Điều này được suy ra từ chỗ là (khi bỏ qua độ nhớt và độ dẫn nhiệt thông thường), tất cả các trạng thái kế tiếp mà khí đi qua đều thỏa mãn các phương trình bảo toàn chất $\rho V = j = \text{const}$ và bảo toàn xung lượng $p + j^2 V = \text{const}$ (so sánh với các nhận định tương tự chi tiết hơn ở §129).

[1] Chẳng hạn, trong các khí lưỡng nguyên tử tại một nhiệt độ sau sóng va chạm có bậc 1000 – 3000 K, sự kích thích các dao động nội phân tử là quá trình hồi phục chậm. Tại các nhiệt độ cao hơn, vai trò của một quá trình như thế dẫn đến sự phân ly các phân tử do nhiệt thành các nguyên tử đã tạo thành chúng.

Nhưng nếu $v_1 > c_\infty$, thì dây cung chiếm vị trí *11'2'*. Tất cả các điểm nằm trên đoạn giữa của các điểm *1* và *1'* hoàn toàn không ứng với các trạng thái thực nào của khí; điểm thực thứ nhất (sau 1) là điểm *1'* tương ứng với trạng thái có sự cân bằng hồi phục hoàn toàn không dịch chuyển đối với trạng thái *1*. Sự nén khí từ trạng thái *1* đến trạng thái *1'* được hoàn thành bằng bước nhảy, sau đó có xảy ra (tại các khoảng cách $\sim v_1\tau$) sự nén dần dần đến trạng thái cuối *2'*.



Hình 68

Nếu các đoạn nhiệt va chạm cân bằng và không cân bằng (hình 68) cắt nhau, thì có xuất hiện khả năng tồn tại các sóng va chạm của một loại nữa: nếu vận tốc của sóng sao cho dây cung *12* cắt các đường đoạn nhiệt ở trên giao điểm tương hỗ của chúng (như trên hình 68), thì sự hồi phục sẽ dẫn tới hạ thấp áp suất – từ giá trị tương ứng với điểm *1'* đến giá trị tương ứng với điểm *2* (*X.P. D'Yakov*, 1954) [1].

§95. BƯỚC NHẢY ĐẲNG NHIỆT

Trong tiết §93, khi khảo sát cấu tạo của sóng va chạm, thực tế ta đã giả thiết rằng, các hệ số nhớt và hệ số dẫn nhiệt có cùng bậc độ lớn như thông thường vẫn xảy ra. Tuy nhiên, có thể xảy ra trường hợp $\chi >> \nu$. Cụ thể là nếu nhiệt độ của chất đủ cao, thì có một cơ chế phụ sẽ tham gia vào sự dẫn nhiệt, đó là sự dẫn nhiệt do bức xạ thực hiện bởi sự bức xạ nhiệt cân bằng với chất. Còn đối với độ nhớt (nghĩa là đối với sự truyền xung lượng) thì nó chịu ảnh hưởng của sự bức xạ ở mức độ ít hơn, do đó ν có thể rất nhỏ so với χ. Bây giờ ta thấy rằng, sự có mặt của

[1] Về nguyên tắc, một trường hợp như thế có thể xảy ra trong khí đa nguyên tử bị phân ly, nếu trong trạng trái cân bằng sau sóng va chạm có thể đạt được một sự phân ly đủ toàn phần của các phân tử khí thành các phần nhỏ hơn. Sự phân ly tăng giá trị của tỷ số các nhiệt dung γ, và như thế làm giảm sự nén giới hạn trong sóng va chạm, miễn là sự phân ly đó đủ đến mức sự nung nóng khí không đòi hỏi phải tốn đáng kể năng lượng để tiếp tục phân ly.

một bất đẳng thức như thế sẽ dẫn đến một sự thay đổi rất quan trọng của cấu trúc sóng va chạm.

Nếu bỏ qua những số hạng chứa độ nhớt, ta sẽ viết được các phương trình (93-2), (93-3) để xác định cấu trúc của lớp chuyển tiếp dưới dạng

$$p + j^2V = p_1 + j^2V_1 , \tag{95-1}$$

$$\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx} = w + \frac{j^2V^2}{2} - w_1 - \frac{j^2V_1^2}{2}. \tag{95-2}$$

Vế phải của phương trình thứ hai ở trên chỉ bằng không tại các biên của lớp. Vì nhiệt độ ở sau sóng va chạm phải lớn hơn ở phía trước sóng, nên từ đó suy ra rằng, trong tất cả bề rộng của lớp chuyển tiếp

$$\frac{dT}{dx} > 0, \tag{95-3}$$

nghĩa là, nhiệt độ tăng đơn điệu.

Tất cả các đại lượng ở trong lớp đều là các hàm một biến – tọa độ x – và như vậy chúng là các hàm xác định của nhau. Lấy đạo hàm hệ thức (95-1) theo V, ta thu được:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \frac{dT}{dV} + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T + j^2 = 0.$$

Đạo hàm $(\partial p/\partial T)_V$ luôn luôn dương đối với các chất khí. Do đó, dT/dV được xác định bởi dấu của tổng $j^2 + (\partial p/\partial T)_T$. Trong trạng thái *1*, ta có $j^2 > -(\partial p_1/\partial V_1)_s$ (vì $v_1 > c_1$) và vì độ nén đoạn nhiệt bao giờ cũng nhỏ hơn độ nén đẳng nhiệt, nên trong mọi trường hợp ta đều có

$$j^2 > -\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_T .$$

Do đó, ở phía *1* đạo hàm

$$\frac{dT_1}{dV_1} < 0.$$

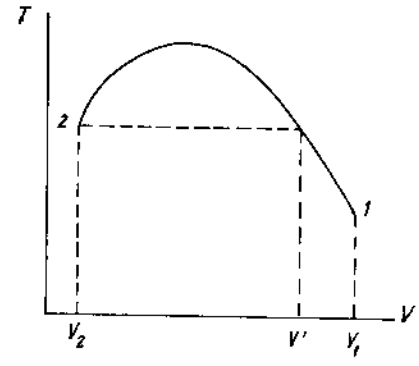
Nếu đạo hàm này âm cả trên toàn bộ bề rộng của lớp chuyển tiếp, thì khi chất bị nén (V giảm), nhiệt độ sẽ tăng đơn điệu khi chuyển từ phía *1* đến phía *2* phù hợp với bất đẳng thức (95-3). Nói một cách khác, ta có một sóng va chạm dãn nở mạnh do độ dẫn nhiệt lớn (sự dãn nở có thể lớn

đến mức chính khái niệm về sóng va chạm trở nên có tính chất quy ước).

Một tình huống khác sẽ xuất hiện, nếu

$$j^2 < -\left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2}\right)_T. \tag{95-4}$$

(bất đẳng thức này tương ứng với cường độ đủ lớn của sóng va chạm, xem dưới đây (95-7)). Khi đó, ở trong trạng thái 2, ta sẽ có $dT_2/dV_2 > 0$, do đó hàm $T(V)$ có một cực đại ở một nơi nào đó giữa các giá trị $V = V_1$ và $V = V_2$ (hình 69). Rõ ràng là, sự chuyển từ trạng thái *1* sang trạng thái *2* với sự biến thiên liên tục của V không thể xảy ra được, vì khi đó bất đẳng thức (95-3) tất yếu sẽ bị vi phạm.



Hình 69

Kết quả là, ta thu được hình ảnh sau đây của sự chuyển từ trạng thái đầu *1* sang trạng thái cuối *2*. Trước hết ta có một miền, trong đó khí bị nén dần dần từ thể tích riêng V_1 đến thể tích V' (đó là giá trị của V để lần đầu tiên $T(V') = T_2$; xem hình 69); bề rộng của miền này, xác định bởi độ dẫn nhiệt, có thể rất lớn. Còn sự nén từ V' đến V_2 được tiến hành bằng bước nhảy ở nhiệt độ không đổi (bằng T_2). Gián đoạn này có thể được gọi là *bước nhảy đẳng nhiệt.*

Ta xác định sự biến thiên của áp suất và mật độ trong bước nhảy đẳng nhiệt, giả thiết rằng khí là lý tưởng. Điều kiện liên tục của dòng xung lượng (95-1) áp dụng cho hai bên của bước nhảy cho ta

$$p' + j^2V' = p_2 + j^2V_2.$$

Đối với khí lý tưởng nhiệt động lực ta viết $V = RT/\mu p$ và nếu chú ý rằng $T' = T_2$, ta thu được:

$$p' + \frac{j^2RT_2}{\mu p'} = p_2 + \frac{j^2RT_2}{\mu p_2}.$$

Phương trình bậc hai này đối với p', (ngoài nghiệm tầm thường $p' = p_2$) cho ta nghiệm

$$p' = \frac{j^2 RT_2}{\mu p_2} = j^2 V_2. \qquad (95\text{-}5)$$

Ta biểu diễn j^2 theo biểu thức (85-6):

$$p' = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} V_2.$$

Tiếp theo, nếu thay ở đây V_2/V_1 lấy từ (89-1), ta thu được cho khí polytropic

$$p' = \frac{1}{2}\left[(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2\right]. \qquad (95\text{-}6)$$

Vì phải có $p_2 > p'$, nên ta nhận thấy rằng, bước nhảy đẳng nhiệt chỉ xuất hiện đối với tỷ số của các áp suất p_2 và p_1 thỏa mãn điều kiện

$$\frac{p_2}{p_1} > \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \qquad (95\text{-}7)$$

(*Rayleigh*, 1910). Điều kiện này chắc chắn cũng có thể rút ra trực tiếp từ (95-4).

Vì tại nhiệt độ đã cho, mật độ khí tỷ lệ với áp suất, nên tỷ số của các mật độ trong bước nhảy đẳng nhiệt bằng tỷ số của các áp suất:

$$\frac{\rho'}{\rho_2} = \frac{V_2}{V'} = \frac{p'}{p_2} \qquad (95\text{-}8)$$

và tiến đến giá trị $(\gamma - 1)/2$ khi p_2 tăng.

§96. CÁC GIÁN ĐOẠN YẾU

Ngoài các mặt gián đoạn, trên đó các đại lượng ρ, p, $\mathbf{v}$, v.v... chịu những bước nhảy, có thể tồn tại cả các mặt, trên đó các đại lượng này, với tính cách là các hàm của tọa độ, có một số điểm kỳ dị nào đó, mặc dù bản thân chúng vẫn liên tục. Các kỳ dị này có thể có những tính chất rất khác nhau. Chẳng hạn, các đạo hàm cấp một của ρ, p, $\mathbf{v}$, v.v... theo các tọa độ có thể có bước nhảy ở trên mặt gián đoạn, hay chúng cũng có thể trở nên vô hạn. Cuối cùng, không riêng gì những đạo hàm cấp một, mà cả những đạo hàm cấp cao hơn cũng có thể có động thái như vậy. Ta gọi tất cả những mặt như thế là các *mặt gián đoạn yếu* khác với các gián

đoạn mạnh (các sóng va chạm và các gián đoạn tiếp tuyến), trong đó bản thân các đại lượng đã nêu chịu những bước nhảy. Ta nhận thấy rằng, do tính liên tục của chính các đại lượng đó ở trên mặt gián đoạn yếu, nên cả các đạo hàm tiếp tuyến của chúng cũng liên tục; chỉ các đạo hàm pháp tuyến với mặt là chịu gián đoạn.

Bằng những lập luận đơn giản, ta dễ dàng thấy rằng, các mặt gián đoạn yếu lan truyền đối với chất khí (ở cả hai phía của mặt) với vận tốc bằng vận tốc âm. Thực vậy, vì chính các hàm ρ, **p**, **v**... không chịu bước nhảy, nên chúng ta có thể mài bằng chúng bằng cách thay thế chúng bởi các hàm trùng với chúng tại mọi nơi, trừ tại lân cận của các mặt gián đoạn, còn trong lân cận này chúng chỉ khác biệt những đại lượng nhỏ tùy ý, nhưng sao cho các hàm đã mài bằng không còn bất kỳ một kỳ dị nào. Như vậy, sự phân bố thực của áp suất chẳng hạn, có thể được biểu diễn dưới dạng chồng chất của một phân bố p_0 hoàn toàn trơn tru (*smooth*, ND), không có một kỳ dị nào, với một nhiễu động rất nhỏ p' của phân bố đó ở gần mặt gián đoạn. Nhiễu động này cũng như mọi nhiễu động nhỏ, đều lan truyền đối với chất khí với vận tốc âm.

Cần nhấn mạnh rằng, trong trường hợp của sóng va chạm các hàm đã được mài bằng khác biệt với các hàm thực ở các đại lượng, nói chung, tuyệt nhiên không nhỏ, do đó lập luận trước không còn áp dụng được. Tuy nhiên, nếu bước nhảy của các đại lượng trong sóng va chạm đủ nhỏ, thì các lập luận này lại có thể áp dụng được và các gián đoạn như thế cũng phải lan truyền với vận tốc âm – kết quả này đã được rút ra ở §86 theo một cách khác.

Nếu chuyển động là dừng đối với hệ tọa độ đã cho, thì mặt gián đoạn đã cho đứng yên đối với hệ này và khí đi qua mặt này. Khi đó thành phần của vận tốc khí vuông góc với mặt gián đoạn phải bằng vận tốc âm. Nếu gọi α là góc giữa phương vận tốc khí và mặt phẳng tiếp tuyến với mặt, thì phải có $v_n = v\sin\alpha = c$, hay

$$\sin\alpha = \frac{c}{v},$$

nghĩa là mặt gián đoạn yếu cắt đường dòng dưới một góc Mach. Nói một cách khác, mặt gián đoạn yếu trùng với một trong các mặt đặc trưng,

kết quả này là hoàn toàn tự nhiên, nếu nhớ lại ý nghĩa vật lý của các mặt này, đó là các mặt mà trên đó có các nhiễu động nhỏ lan truyền (§82). Rõ ràng là, trong chuyển động dừng của khí, các gián đoạn yếu chỉ có thể xuất hiện với các vận tốc bằng hay lớn hơn vận tốc âm.

Về cách thức xuất hiện, các gián đoạn yếu khác căn bản so với các gián đoạn mạnh. Ta sẽ thấy, các sóng va chạm tự chúng có thể được hình thành trực tiếp do chuyển động của chất khí, với các điều kiện biên liên tục (chẳng hạn, sự tạo thành các sóng va chạm ở trong sóng âm; §102). Trái với điều đó, các gián đoạn yếu không thể tự xuất hiện, sự xuất hiện của chúng bao giờ cũng gắn liền với các kỳ dị trong những điều kiện biên hay điều kiện ban đầu của chuyển động. Các kỳ dị này, cũng như bản thân các gián đoạn yếu, có thể có đặc tính rất khác nhau. Chẳng hạn, nguyên nhân tạo thành gián đoạn yếu có thể là sự có mặt của các góc ở trên mặt vật có dòng chảy bao quanh; trong gián đoạn yếu xuất hiện trong trường hợp này, các đạo hàm cấp một của vận tốc theo các tọa độ chịu bước nhảy. Một bước nhảy của độ cong của mặt không có góc ở trên đó cũng dẫn đến sự tạo thành một gián đoạn yếu (các đạo hàm cấp hai của vận tốc theo các tọa độ khi đó chịu bước nhảy) v.v... cuối cùng, mọi kỳ dị trong sự biến thiên của chuyển động theo thời gian đều làm xuất hiện một gián đoạn yếu không dừng.

Thành phần tiếp tuyến của vận tốc với mặt gián đoạn yếu khi khí đi qua mặt đó bao giờ cũng theo hướng đi ra từ nơi xuất phát (chẳng hạn, từ góc ở trên mặt của vật) những nhiễu động đã gây ra gián đoạn này; ta nói rằng, gián đoạn "xuất phát" từ điểm đó. Đó là một trong các biểu hiện định hướng lan truyền của các nhiễu động xuôi dòng trong dòng chảy vượt âm.

Sự có mặt của độ nhớt và độ dẫn nhiệt làm xuất hiện một bề rộng hữu hạn của gián đoạn yếu, do đó các gián đoạn yếu, cũng như các gián đoạn mạnh, thực tế tạo thành một số lớp chuyển tiếp. Tuy nhiên, khác với các sóng va chạm có bề rộng chỉ phụ thuộc vào cường độ của chúng và không đổi theo thời gian, bề rộng của gián đoạn yếu tăng theo thời gian, bắt đầu từ khi nó được tạo thành. Ta dễ dàng xác định được (định tính) định luật của sự tăng này, xuất phát từ sự tương tự giữa sự dịch chuyển của gián đoạn yếu và sự lan truyền của các nhiễu động âm yếu.

Khi có mặt của độ nhớt và sự dẫn nhiệt, nhiễu động lúc đầu tập trung trong một phần tử thể tích nhỏ (bó sóng), dãn nở ra theo thời gian trong khi dịch chuyển; định luật của sự dãn nở này đã được xác định ở §79. Từ đó ta có thể kết luận ngay rằng, bề rộng δ của gián đoạn yếu bằng

$$\delta \sim (ac^3t)^{1/2}, \tag{96-1}$$

trong đó t là thời gian tính từ khi xuất hiện gián đoạn, còn a là hệ số của bình phương tần số trong công thức (79-6) cho sự hấp thụ âm. Nếu ta xét một hình ảnh dừng, trong đó gián đoạn đứng yên, thì thay cho thời gian t, ta cần nói đến khoảng cách l tính từ nơi, tại đó gián đoạn xuất phát (chẳng hạn, đối với gián đoạn yếu xuất hiện từ một góc ở trên mặt của vật có dòng chảy bao quanh, l là khoảng cách tính từ đỉnh góc); khi đó $\delta \sim (ac^2l)^{1/2}$ [1].

Để kết luận cho tiết này, cần có một nhận xét tương tự như nhận xét ở cuối §82. Ở đó ta đã nhận xét rằng, trong số các nhiễu động khác nhau của trạng thái chất khí chuyển động, các nhiễu động của entrôpi (ở áp suất không đổi) và của rot vận tốc là rất khác biệt xét về các tính chất của chúng. Các nhiễu động này đứng yên đối với khí, và không lan truyền với vận tốc âm. Do đó các mặt, mà trên đó entrôpi và rôta vận tốc [2] chịu một gián đoạn yếu nào đó, sẽ đứng yên đối với chất khí, và cùng với chính chất khí chúng chuyển dời đối với hệ tọa độ cố định. Các gián đoạn như thế được gọi là *các gián đoạn tiếp tuyến yếu*; chúng đi qua các đường dòng, và về phương diện này chúng hoàn toàn tương tự với các gián đoạn tiếp tuyến "mạnh".

[1] Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng, để xác định định lượng cấu trúc của gián đoạn yếu thì một sự tương tự với sóng âm là không đủ. Vấn đề là ở chỗ, để xác định định luật tắt dần của âm, có thể giả thiết biên độ của nó nhỏ tùy ý và phù hợp với điều đó có thể xuất phát từ các phương trình chuyển động đã tuyến tính hóa. Còn đối với các gián đoạn yếu (cũng như đối với các sóng va chạm cường độ yếu – §93) cần phải xét đến tính phi tuyến của các phương trình, vì nếu không có tính phi tuyến thì cả các gián đoạn yếu cũng không có mặt. Thí dụ về một sự nghiên cứu như thế được cho trong bài tập 6 của §99.

[2] Gián đoạn yếu của rôta vận tốc có nghĩa là một gián đoạn yếu của thành phần vận tốc tiếp tuyến với mặt gián đoạn. Chẳng hạn, các đạo hàm của vận tốc tiếp tuyến lấy theo phương pháp tuyến với mặt có thể chịu bước nhảy.

Chương X

CHUYỂN ĐỘNG MỘT CHIỀU CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC

§97. SỰ THOÁT KHÍ QUA ỐNG PHUN

Ta khảo sát dòng khí chảy dừng từ một bình lớn qua một ống có tiết diện thay đổi, gọi là vòi phun. Ta sẽ giả thiết rằng, dòng khí được gọi là đều theo tiết diện của ống và vận tốc thực tế hướng dọc theo trục của ống. Muốn vậy, ống phải không lớn quá và diện tích S của tiết diện ống phải thay đổi đủ chậm theo độ dài của nó. Như vậy, tất cả các đại lượng đặc trưng cho dòng chảy sẽ chỉ là các hàm của tọa độ dọc theo trục ống. Với các điều kiện như thế, ta có thể áp dụng trực tiếp các hệ thức đã rút ra ở §83, vẫn đúng dọc theo đường dòng, cho sự biến thiên của các đại lượng dọc theo độ dài của ống.

Lượng (khối lượng) khí đi qua tiết diện ngang của ống sau mỗi đơn vị thời gian (thường gọi là lượng thoát khí), bằng $Q = \rho v S$; rõ ràng đại lượng này phải không đổi dọc theo trục của ống:

$$Q = \rho v S = \text{const} \tag{97-1}$$

Các kích thước dài của chính bình được giả thiết là rất lớn so với đường kính của ống. Do đó, vận tốc của khí ở trong bình có thể được coi bằng không, và như thế tất cả các đại lượng với chỉ số 0 trong các công thức của §83 sẽ biểu diễn các giá trị của các đại lượng tương ứng ở trong bình.

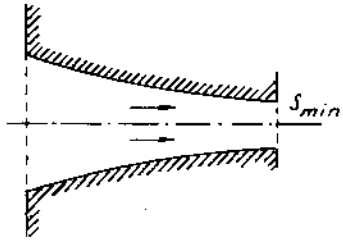
Ta đã nhận thấy rằng, mật độ dòng $j = \rho v$ không thể vượt quá một giá trị giới hạn j_* nào đó. Do đó, rõ ràng là, cả các giá trị khả dĩ của lượng thoát thành phần Q của khí (đối với một ống đã cho và trạng thái đã cho của khí ở trong bình) cũng có một giới hạn trên Q_{max}, mà ta dễ

dàng xác định được. Nếu như giá trị j_* của mật độ dòng đạt được không phải tại nơi hẹp nhất của ống, thì sẽ có $j > j_*$ tại các tiết diện ngang với S nhỏ hơn, điều này không thể có được. Do đó giá trị $j = j_*$ chỉ có thể đạt được tại nơi hẹp nhất của ống, với diện tích tiết diện ngang được ký hiệu là S_{min}. Như vậy, giới hạn trên của lượng thoát khí toàn phần bằng

$$Q_{max} = \rho_* v_* S_{min} = \sqrt{\gamma p_o \rho_o} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}} S_{min}. \qquad (97\text{-}2)$$

Trước hết, ta khảo sát một ống phun thắt lại đơn điệu về phía đầu ngoài, do đó tiết diện cực tiểu đạt được tại đầu này (hình 70). Theo (97-1), mật độ dòng j tăng đều dọc theo ống. Vận tốc v của khí cũng vậy, và do đó áp suất giảm đơn điệu. Giá trị lớn nhất khả dĩ của j sẽ đạt được, nếu vận tốc v đạt tới giá trị c đúng tại đầu thoát của ống, nghĩa là nếu $v_1 = c_1 = v_*$ (các chữ có chỉ số 1 ký hiệu cho các giá trị của các đại lượng tại đầu thoát của ống). Đồng thời ta cũng có cả $p = p_*$.

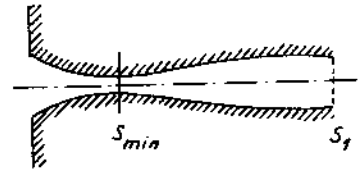
Ta theo dõi sự biến thiên của chế độ chảy của khí ra môi trường ngoài khi áp suất p_e của môi trường này giảm. Khi áp suất bên ngoài giảm từ giá trị của áp suất p_o ở trong bình đến giá trị p_*, thì cùng với nó, cả áp suất p_1 ở trong tiết diện của đầu thoát của ống cũng giảm, và cả hai áp suất p_1 và p_e đều vẫn bằng nhau; nói một cách khác, tất cả độ giảm của áp suất từ p_o đến áp suất ngoài đều xảy ra ở trong ống phun. Còn vận tốc thoát v_1 và lượng thoát toàn phần $Q = j_1 S_{min}$ của khí tăng đơn điệu. Khi $p_e = p_*$, vận tốc thoát trở nên bằng giá trị cực bộ của vận tốc âm, và lượng thoát bằng giá trị Q_{max}. Khi áp suất ngoài tiếp tục giảm, thì áp suất ở chỗ thoát ngừng giảm và luôn luôn bằng p_*; còn sự giảm của áp suất từ p_* đến p_e xảy ra ở ngoài ống, trong không gian bao quanh. Nói một cách khác, dù áp suất ngoài như thế nào, độ giảm áp suất của khí ở trong ống không thể lớn hơn độ giảm áp suất từ p_o đến p_*; chẳng hạn, đối với không khí ($p_* = 0{,}53 p_o$) độ giảm cực đại của áp suất bằng $0{,}47 p_o$. Vận tốc thoát và lượng thoát của khí cũng không đổi



Hình 70

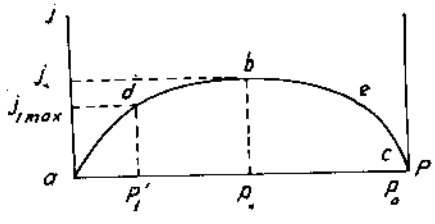
(với $p_e < p_*$). Như vậy, khi thoát qua một ống phun thắt lại thì khí không thể thu được vận tốc vượt âm.

Sự kiện một chất khí thoát ra qua một ống phun thắt lại không thu được các vận tốc vượt âm là do, vận tốc bằng vận tốc cục bộ của âm chỉ có thể đạt được ở ngay đầu thoát của một ống như thế. Rõ ràng là, vận tốc vượt âm có thể đạt được nhờ một ống phun thoạt đầu thắt lại, sau đó lại rộng ra (hình 71). Một ống phun như thế được gọi là *ống phun Laval*.



Hình 71

Mật độ dòng cực đại j_* nếu đạt được, chỉ có thể đạt được ở chỗ tiết diện hẹp nhất, do đó lượng khí thoát trong một ống phun như vậy không thể vượt quá $S_{\min} j_*$. Trong miền hẹp của ống phun, mật độ dòng tăng (và áp suất giảm). Đường cong trên hình 72 biểu diễn sự phụ thuộc của j vào p [1], điều này tương ứng với sự dịch chuyển từ điểm c theo hướng đến b. Nếu mật độ dòng cực đại đạt được ở trong tiết diện $S_{\min}$ (điểm b ở trên hình 72), thì trong phần dãn ra của ống phun, áp suất tiếp tục giảm và cả mật độ dòng j cũng bắt đầu giảm, tương ứng với sự dịch chuyển từ b theo hướng đến a ở trên đường cong của hình 72. Tại đầu thoát của ống, dòng j có giá trị xác định và bằng



Hình 72

$$j_{1\max} = j_* \frac{S_{\min}}{S_1}$$

[1] Theo các công thức (80.15-17) phương trình của sự phụ thuộc này có dạng

$$j = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} p_0 \rho_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{1/2} .$$

còn áp suất lấy giá trị p_1' (một điểm d nào đó của đường cong này) tương ứng với mật độ dòng đó. Nhưng nếu trong tiết diện S_{min} chỉ có một điểm e nào đó đạt được, thì trong phần nở rộng của ống phun, áp suất sẽ tăng tương ứng với sự dịch chuyển ngược theo đường cong từ điểm e xuống dưới. Mới thoạt nhìn, ta thấy hình như có thể từ nhánh cb của đường cong đi xuống nhánh ab bằng bước nhảy, mà không đi qua điểm b, do có sự hình thành của sóng va chạm. Tuy nhiên, điều này không thể được vì khí "đi vào" trong sóng va chạm không thể có một vận tốc dưới âm.

Chú ý tới tất cả những nhận xét đó, bây giờ ta theo dõi sự biến thiên của chế độ chảy khi áp suất ngoài p_e tăng dần. Với các áp suất nhỏ, bắt đầu từ giá trị không đến giá trị $p_e = p_1'$, một chế độ được thiết lập, trong đó áp suất p_* và vận tốc $v_* = c_*$ sẽ đạt được ở trên tiết diện S_{min}. Vận tốc tiếp tục tăng ở trong phần nở rộng của ống phun, do đó dòng chảy vượt âm của khí được thực hiện, còn áp suất tiếp tục giảm một cách tương ứng và đạt được giá trị p_1' tại đầu thoát của ống phun, không phụ thuộc vào giá trị p_e. Độ giảm của áp suất từ p_1' đến p_e xảy ra ở bên ngoài ống phun, trong sóng dãn dời khỏi miệng ống (như sẽ mô tả ở §112).

Khi p_e bắt đầu vượt quá giá trị p_1', một sóng va chạm nghiêng xuất hiện đi từ bờ của miệng ống phun; nén khí từ áp suất thoát p_1' đến áp suất p_2 (§112). Tuy nhiên, ta thấy rằng một sóng va chạm dừng chỉ có thể dời một mặt rắn, chừng nào cường độ của nó không lớn quá (§111). Do đó, khi áp suất ngoài tiếp tục tăng thì sóng va chạm bắt đầu đi vào trong ống phun và ở phía trước nó trên mặt trong của ống phun có xuất hiện sự tách rời. Với một giá trị p_e nào đó, sóng va chạm đạt tới tiết diện hẹp nhất của ống phun, rồi sau đó biến mất; dòng chảy tại mọi nơi trở nên dưới âm với sự tách rời ở trên các thành của phần nở rộng của ống phun (ống khuếch tán). Tất cả các hiện tượng phức tạp đó dĩ nhiên bây giờ có tính chất ba chiều.

BÀI TẬP

Một nhiệt lượng nhỏ được cung cấp cho chất khí trong dòng chảy dừng trên một đoạn nhỏ của ống. Xác định sự biến thiên của vận tốc khí đi qua miền này. Chất khí được giả thiết là polytropic.

Giải. Gọi Sq là nhiệt lượng được cung cấp trong mỗi đơn vị thời gian, (S là diện tích của tiết diện ống trong miền đã cho). Ở cả hai bên của miền nung nóng các mật độ dòng khối lượng $j = \rho v$ và mật độ dòng xung lượng $p + jv$ đều bằng nhau; từ đó $\Delta p = -j\,\Delta v$, trong đó Δ ký hiệu cho độ biến thiên của đại lượng khi đi qua miền đó. Hiệu các mật độ năng thông $(w + v^2/2)j$ bằng q. Nếu viết w dưới dạng

$$w = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} = \frac{p\gamma v}{(\gamma - 1)j},$$

ta sẽ thu được (giả thiết Δv và Δp nhỏ):

$$vj\Delta v + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(p\Delta v + v\Delta p) = q.$$

Khử Δp khỏi hai hệ thức này, ta tìm được:

$$\Delta v = \frac{(\gamma - 1)q}{\rho(c^2 - v^2)}.$$

Ta nhận thấy rằng, trong dòng chảy dưới âm, nhiệt lượng cung cấp tăng tốc dòng chảy ($\Delta v > 0$) và nó làm chậm dòng chảy vượt âm.

Nếu viết nhiệt độ của khí dưới dạng $T = \mu p/R\rho = \mu pv/Rj$ (R là hằng số khí), ta sẽ tìm được cho độ biến thiên của nó biểu thức sau

$$\Delta T = \frac{\mu}{Rj}(v\Delta p + p\Delta v) = \frac{\mu(\gamma - 1)q}{Rj(c^2 - v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma} - v^2\right).$$

Trong chuyển động vượt âm, biểu thức này bao giờ cũng dương – nhiệt độ của khí tăng lên; còn trong chuyển động dưới âm, biểu thức đó có thể âm hoặc dương.

§98. CHUYỂN ĐỘNG NHỚT CỦA MỘT KHÍ NÉN ĐƯỢC TRONG MỘT ỐNG DẪN

Ta khảo sát dòng chảy của khí nén được trong ống (tiết diện không đổi) rất dài đến mức không thể bỏ qua được ma sát của khí lên thành, nghĩa là không thể bỏ qua độ nhớt của khí. Giả sử các thành của ống là cách nhiệt, do đó không có sự trao đổi nhiệt lượng giữa khí và môi trường bên ngoài.

Với các vận tốc chảy có bậc của vận tốc âm hay lớn hơn (ở đây chỉ xét các trường hợp này), thì dĩ nhiên sự chảy của khí ở trong ống là chảy rối (miễn là bán kính của ống không nhỏ quá). Tính chảy rối của chuyển

TB TOLH

động chỉ quan trọng đối với chúng ta ở một khía cạnh. Cụ thể là ở §43, ta đã thấy rằng, trong chuyển động chảy rối, vận tốc (trung bình) thực tế không đổi gần như trong toàn bộ tiết diện của ống dẫn và chỉ giảm tới không tại các khoảng cách rất gần thành. Do đó, ta sẽ coi rằng, vận tốc chảy v đơn giản không đổi trong toàn bộ tiết diện của ống, được xác định sao cho tích $S\rho v$ (S là diện tích tiết diện) bằng lượng thoát toàn phần của khí qua tiết diện ống. Vì lượng thoát toàn phần $S\rho v$ của khí không đổi dọc theo ống dẫn và S theo giả thiết là không đổi, nên cả mật độ dòng của khí cũng không đổi

$$j = \rho v = \text{const.} \tag{98-1}$$

Tiếp theo, vì ống dẫn cách nhiệt, nên cả năng thông toàn phần do khí chuyển qua tiết diện ngang của ống cũng phải không đổi dọc theo ống. Thông lượng này bằng $S\rho v\ (w + v^2/2)$, và theo (98-1) ta có thể viết:

$$w + \frac{v^2}{2} = w + \frac{j^2V^2}{2} = \text{const.} \tag{98-2}$$

Dĩ nhiên, vì có ma sát nội entrôpi s không còn không đổi nữa mà tăng khi chất khí lan truyền về phía trước trong ống dẫn. Nếu x là tọa độ dọc theo trục ống dẫn và chiều dương là chiều dòng chảy, thì

$$\frac{ds}{dx} > 0. \tag{98-3}$$

Bây giờ lấy đạo hàm hệ thức (98-2) theo x. Nhớ rằng, $dw = Tds + Vdp$, ta thu được:

$$T\frac{ds}{dx} + V\frac{dp}{dx} + j^2V\frac{dV}{dx} = 0.$$

Tiếp theo, nếu thay vào đây

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{ds}{dx}, \tag{98-4}$$

ta thu được:

$$\left[T + j^2V\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\right]\frac{ds}{dx} = -V\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]\frac{dp}{dx}. \tag{98-5}$$

Theo công thức nhiệt động lực đã biết

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Hệ số dãn nở nhiệt là dương. Do đó, dựa vào (98-3) ta có thể kết luận rằng, toàn bộ biểu thức của vế trái (98-5) cũng dương. Còn dấu của đạo hàm dp/dx như vậy trùng với dấu của biểu thức

$$-\left[1 + j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right] = \frac{v^2}{c^2} - 1.$$

Ta nhận thấy rằng

$$\frac{dp}{dx} < 0 \quad \text{với} \quad v < c, \qquad \frac{dp}{dx} > 0 \quad \text{với} \quad v > c. \tag{98-6}$$

Như vậy, trong dòng chảy dưới âm, áp suất giảm xuôi dòng (như đối với một chất lỏng không nén được). Còn trong chuyển động vượt âm, áp suất tăng dọc theo ống dẫn.

Một cách tương tự ta có thể xác định dấu của đạo hàm dv/dx. Vì $j = v/V = \text{const}$, dấu của dv/dx trùng với dấu của đạo hàm dV/dx. Đại lượng này có thể được biểu diễn qua đạo hàm dương ds/dx dựa vào (98.4-5). Cuối cùng ta tìm được

$$\frac{dv}{dx} > 0 \quad \text{với} \quad v < c, \qquad \frac{dv}{dx} < 0 \quad \text{với} \quad v > c, \tag{98-7}$$

nghĩa là, vận tốc tăng xuôi dòng trong chuyển động dưới âm và giảm trong chuyển động vượt âm.

Hai đại lượng nhiệt động lực bất kỳ của chất khí chảy trong ống đều là các hàm của nhau, đặc biệt hoàn toàn không phụ thuộc vào định luật cản của ống. Các hàm này phụ thuộc vào giá trị của hằng số j như một thông số và được xác định bởi phương trình $w + j^2V^2/2 = \text{const}$, phương trình này thu được bằng cách khử vận tốc khỏi các phương trình bảo toàn khối lượng và năng lượng của khí.

Chẳng hạn, ta làm sáng tỏ tính chất của các đường cong phụ thuộc của entrôpi vào áp suất. Viết lại (98-5) dưới dạng

$$\frac{ds}{dp} = V\frac{\dfrac{v^2}{c^2} - 1}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p},$$

Ta nhận thấy rằng tại điểm $v = c$, entrôpi có cực trị. Dễ dàng thấy rằng, cực trị đó là một cực đại. Thực vậy, giá trị của đạo hàm cấp hai của s theo p tại điểm đó bằng:

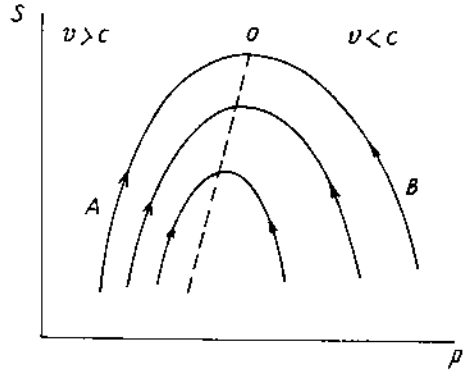
$$\left.\frac{d^2s}{dp^2}\right|_{v=c} = -\frac{j^2V\left(\dfrac{\partial^2V}{\partial p^2}\right)_s}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0$$

(đó là do tại mọi nơi ta đều giả thiết đạo hàm $(\partial^2V/\partial p^2)_s$ dương).

Như vậy, các đường cong phụ thuộc của s vào p có dạng được trình bày ở trên hình 73. Ở bên phải các cực đại là miền các vận tốc dưới âm, còn ở bên trái là miền các vận tốc vượt âm. Khi thông số j tăng, ta chuyển từ các đường cong nằm cao hơn xuống các đường cong nằm thấp hơn. Thực vậy, lấy đạo hàm phương trình (98-2) theo j với p không đổi, ta thu được:

$$\frac{ds}{dj} = -\frac{j^2V}{T + j^2V\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_p} < 0.$$

Từ các kết quả đã tìm được, ta có thể có một kết luận lý thú sau. Giả sử, vận tốc của khí nhỏ hơn vận tốc của âm ở lối vào của ống. Entrôpi tăng xuôi dòng, còn áp suất giảm; điều này tương ứng với sự di động ở trên nhánh phải của đường cong $s = s(p)$ theo hướng từ B về O (hình 73). Tuy nhiên điều đó chỉ có thể tiếp tục cho đến khi entrôpi đạt được giá trị cực đại của nó. Di động tiếp tục dọc theo đường cong ở bên ngoài điểm O (nghĩa là ở trong miền các vận tốc vượt âm) không thể được, vì nó sẽ tương ứng với sự giảm của entrôpi của khí khi chảy trong ống. Sự chuyển từ nhánh BO sang nhánh OA của đường cong không thể xảy ra kể cả



Hình 73

bằng sự xuất hiện sóng va chạm, vì vận tốc của khí "đi vào" trong sóng va chạm không thể nhỏ hơn vận tốc âm.

Như vậy, ta đi tới kết luận là, nếu tại lối vào của ống vận tốc của khí nhỏ hơn vận tốc âm, thì chuyển động sẽ vẫn là dưới âm tại mọi nơi tiếp theo trong ống. Vận tốc, bằng vận tốc cục bộ của âm, nếu như nó đạt được, thì cũng chỉ đạt được ở đầu ra của ống (với áp suất đủ thấp ở môi trường ngoài, nơi khí thoát ra).

Để thực hiện sự chảy vượt âm của khí ở trong ống, thì vận tốc của khí ở lối vào của ống phải là vận tốc vượt âm (không thể có sự lan truyền của các nhiễu động ngược dòng), sự chảy tiếp theo của khí sẽ xảy ra hoàn toàn không phụ thuộc vào các điều kiện ở lối ra của ống. Đặc biệt, entrôpi tăng dọc theo ống theo một cách hoàn toàn xác định, và giá trị cực đại của nó sẽ đạt được tại một khoảng cách xác định $x = l_k$ tính từ lối vào. Nếu độ dài toàn phần của ống dẫn $l < l_k$, chuyển động sẽ là vượt âm trên toàn bộ độ dài của nó (tương ứng với sự di động ở trên nhánh AO theo hướng từ A đến O). Nhưng nếu $l > l_k$, thì dòng chảy không thể là vượt âm trên toàn bộ độ dài của ống, đồng thời dòng chảy cũng không thể biến đổi trơn tru thành dưới âm, vì sự di động theo nhánh OB của đường cong chỉ có thể xảy ra theo chiều mũi tên. Do đó, trong trường hợp này tất yếu phải có xuất hiện sóng va chạm, biến đổi chuyển động vượt âm thành dưới âm bằng bước nhảy. Khi đó áp suất tăng và ta chuyển từ nhánh AO sang nhánh BO không qua điểm O. Dòng chảy hoàn toàn là dưới âm trên toàn bộ độ dài còn lại của ống.

§99. CHUYỂN ĐỘNG MỘT CHIỀU TỰ ĐỒNG DẠNG

Một lớp quan trọng các chuyển động không dừng một chiều của chất khí nén được là lớp các dòng chảy xảy ra trong các điều kiện đặc trưng bởi các thông số nào đó của vận tốc, mà không phải của độ dài. Thí dụ đơn giản nhất của một chuyển động như thế là chuyển động của chất khí trong ống hình trụ vô hạn ở một đầu và đóng kín ở đầu kia bởi một pittông, khi pittông bắt đầu chuyển động với vận tốc không đổi.

Ngoài thông số vận tốc, một dòng chảy như thế còn được xác định bởi

các thông số, cho ta áp suất và mật độ của khí ở thời điểm đầu chẳng hạn. Tuy nhiên, từ các thông số này, ta không thể thành lập được các tổ hợp có thứ nguyên độ dài hay thời gian. Từ đó suy ra rằng, các sự phân bố của tất cả các đại lượng có thể phụ thuộc vào tọa độ x và thời gian t chỉ được dưới dạng các tỷ số x/t của chúng có thứ nguyên vận tốc. Nói một cách khác, tại các thời điểm khác nhau các sự phân bố đó sẽ đồng dạng với nhau, chỉ khác nhau ở thang chia dọc theo trục x, tăng tỷ lệ theo thời gian. Có thể nói rằng, nếu đo các độ dài trong các đơn vị tăng tỷ lệ với t, thì hình ảnh chuyển động sẽ hoàn toàn không đổi. Một chuyển động như thế được gọi là *chuyển động tự đồng dạng* (*similarity flow*, ND).

Phương trình bảo toàn entrôpi cho chuyển động chỉ phụ thuộc vào một tọa độ x có dạng:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Nếu coi tất cả các đại lượng chỉ phụ thuộc vào biến $\xi = x/t$ và chú ý rằng

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t}\frac{d}{d\xi},$$

ta sẽ có $(v_x - \xi)s' = 0$ (dấu phẩy ký hiệu việc lấy đạo hàm theo ξ). Từ đó $s' = 0$, nghĩa là $s = \text{const}$ [1]; như vậy, một chuyển động một chiều tự đồng dạng không những là đoạn nhiệt mà còn là đẳng entrôpi. Tương tự, từ các thành phần y và z của phương trình Euler.

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0$$

ta suy ra rằng v_y và v_z đều không đổi; không làm mất tính tổng quát, dưới đây ta có thể đặt chúng bằng không.

Tiếp theo, phương trình liên tục và thành phần x của phương trình Euler có dạng

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad (99\text{-}1)$$

[1] Giả thiết $v_x - \xi = 0$ mâu thuẫn với các phương trình khác của chuyển động: (99-3) sẽ cho $v_x = \text{const}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết đã nêu.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{99-2}$$

(ở đây ta sẽ viết v thay cho v_x). Sau khi đưa vào biến ξ, các phương trình đó có dạng

$$(v - \xi)\rho' + \rho v' = 0, \tag{99-3}$$

$$(v - \xi)v' = -\frac{p'}{\rho} = -\frac{c^2}{\rho}\rho'. \tag{99-4}$$

(vì entrôpi không đổi, nên trong phương trình thứ hai ta viết $p' = (\partial p/\partial\rho)_s\rho' = c^2\rho'$).

Trước hết các phương trình này có nghiệm tầm thường v = const, ρ = const, nghĩa là dòng chảy đều với vận tốc không đổi. Để tìm nghiệm không tầm thường, ta khử ρ' và v' khỏi các phương trình và ta thu được $(v - \xi)^2 = c^2$, từ đó $\xi = v \pm c$. Ta sẽ viết hệ thức này với dấu cộng:

$$\frac{x}{t} = v + c \tag{99-5}$$

(việc chọn dấu có nghĩa là, ta chấp nhận một điều kiện xác định cho việc chọn chiều dương của trục x, ý nghĩa được giải thích dưới đây). Cuối cùng, nếu thay $v - \xi = -c$ vào trong (99-3), ta sẽ thu được $c\rho' = \rho v'$, hay $\rho dv = cd\rho$. Vận tốc âm là hàm trạng thái nhiệt động lực của khí; nếu chọn entropi s và mật độ ρ làm các đại lượng nhiệt động lực cơ bản, ta có thể biểu diễn vận tốc của âm bởi một hàm $c(\rho)$ của mật độ, với giá trị không đổi đã cho của entrôpi. Nếu c được hiểu là một hàm như thế, thì trên cơ sở của đẳng thức đã tìm được, ta có:

$$v = \int\frac{cd\rho}{\rho} = \int\frac{dp}{c\rho}. \tag{99-6}$$

Công thức này cũng có thể viết được dưới dạng

$$v = \int\sqrt{-dp\,dV}. \tag{99-7}$$

trong đó việc chọn biến độc lập là chưa xác định.

Các công thức (99.5-6) xác định nghiệm cần tìm của các phương trình chuyển động. Nếu hàm $c(\rho)$ đã biết, thì dựa vào công thức (99-6) có thể tính được vận tốc v như hàm của mật độ. Phương trình (99-5) khi đó xác

định dưới dạng ẩn sự phụ thuộc của mật độ vào x/t, sau đó, sự phụ thuộc của tất cả các đại lượng khác vào x/t cũng sẽ được xác định.

Ta làm sáng tỏ một số tính chất tổng quát của nghiệm đã thu được. Lấy đạo hàm phương trình (99-5) theo x, ta có:

$$t\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{d(v+c)}{d\rho} = 1. \tag{99-8}$$

Đối với đạo hàm của $(v + c)$, dựa vào (99-6), ta có:

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{c}{\rho} + \frac{dc}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{d(\rho c)}{d\rho}.$$

Nhưng

$$\rho c = \rho\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \frac{1}{\sqrt{-\partial V / \partial p}};$$

lấy đạo hàm biểu thức này, ta thu được

$$\frac{d(\rho c)}{d\rho} = c^2\frac{d(\rho c)}{dp} = \frac{\rho^3 c^5}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{99-9}$$

Như vậy:

$$\frac{d(v+c)}{d\rho} = \frac{\rho^2 c^5}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \tag{99-10}$$

Do đó, từ (99-8), ta suy ra được rằng, với $t > 0$, sẽ có $\partial\rho/\partial x > 0$. Nếu chú ý $\partial p/\partial x = c^2(\partial\rho/\partial x)$ có thể kết luận được rằng $\partial p/\partial x > 0$. Cuối cùng, ta có $\partial v/\partial x = (c/\rho)(\partial\rho/\partial x)$, do đó $\partial v/\partial x > 0$. Như vậy, ta có các bất đẳng thức

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0. \tag{99-11}$$

Ý nghĩa của các bất đẳng thức này sẽ trở nên rõ hơn, nếu theo dõi không phải sự biến thiên của các đại lượng dọc theo trục x (với t đã cho), mà theo dõi sự biến thiên của chúng theo thời gian đối với phần tử khí đã cho chuyển động trong không gian. Những sự biến thiên này được xác định bởi các đạo hàm thành phần theo thời gian; chẳng hạn đối với mật độ, nếu dùng phương trình liên tục, ta sẽ thu được:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Theo bất đẳng thức thứ ba trong các bất đẳng thức (99-11), đại lượng này âm; dĩ nhiên cùng với đại lượng đó là cả đạo hàm dp/dt cũng âm:

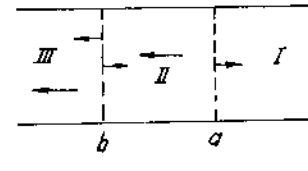
$$\frac{d\rho}{dt} < 0, \quad \frac{dp}{dt} < 0. \tag{99-12}$$

Một cách tương tự (nếu dùng phương trình Euler (99-2)), ta có thể thấy được rằng $dv/dt < 0$; tuy nhiên, điều này không có nghĩa là vận tốc giảm theo thời gian về giá trị tuyệt đối, vì v có thể âm.

Các bất đẳng thức (99-12) chứng tỏ rằng, mật độ và áp suất của mỗi phần tử khí giảm khi nó chuyển động trong không gian. Nói một cách khác, sự dịch chuyển của khí làm cho khí loãng ra một cách đơn điệu. Do đó, chuyển động đang xét có thể được gọi là *sóng dãn không dừng* [1].

Sóng dãn có thể chỉ trải ra tại khoảng cách hữu hạn dọc theo trục x; điều này có thể thấy được từ sự kiện là, công thức (99-5) sẽ dẫn đến một kết quả vô lý khi $x \to \pm \infty$ – vận tốc lớn vô hạn.

Ta áp dụng công thức (99-5) cho mặt phẳng giới hạn miền không gian chiếm bởi sóng dãn. Khi đó x/t sẽ là vận tốc chuyển động của biên giới này đối với hệ tọa độ cố định đã chọn. Còn vận tốc của nó đối với bản thân chất khí bằng hiệu $x/t - v$, và theo (99-5), nó đúng bằng vận tốc âm cục bộ. Điều đó có nghĩa là, các biên giới của sóng dãn là các gián đoạn yếu. Như vậy, hình ảnh của chuyển động tự đồng dạng trong nhiều trường hợp cụ thể gồm các sóng dãn và các miền dòng chảy không đổi ngăn cách nhau bởi các mặt gián đoạn yếu (dĩ nhiên, ngoài ra cũng có thể có những miền chảy không đổi ngăn cách nhau bởi các sóng va chạm).



Hình 74

Như thấy được bây giờ, việc chọn dấu trong công thức (99-5) tương ứng với sự kiện là các gián đoạn yếu đó được giả thiết là chuyển động đối với chất

[1] Chuyển động này có thể chỉ xuất hiện do sự có mặt của một kỳ dị nào đó trong các điều kiện ban đầu (chẳng hạn trong thí dụ pittông vào thời điểm $t = 0$, vận tốc của pittông thay đổi bằng bước nhảy). Chuyển động ngược lại chỉ có thể xảy ra dưới tác dụng của pittông nén chuyển động theo một quy luật hoàn toàn xác định.

khí theo chiều dương của trục x. Các bất đẳng thức (99-11) xuất hiện từ chính việc chọn đó, còn các bất đẳng thức (99-12), dĩ nhiên, hoàn toàn không phụ thuộc vào việc chọn chiều của trục x.

Trong những bài toán cụ thể, thường ta gặp sóng dãn bị giới hạn một phía bởi miền trong đó khí đứng yên. Giả sử miền này (*I* ở trên hình 74) ở bên phải sóng dãn. Miền *II* là sóng dãn và miền *III* là khí chuyển động với vận tốc không đổi; các mũi tên trên hình vẽ nêu chiều chuyển động của khí và chiều dịch chuyển của các gián đoạn yếu bao lấy sóng dãn (gián đoạn a bao giờ cũng chuyển động về phía khí đứng yên, còn gián đoạn b có thể chuyển động về cả hai phía tùy theo độ lớn của vận tốc đạt được trong sóng dãn; xem bài tập 2). Ta viết dưới dạng tường minh các hệ thức giữa các đại lượng khác nhau ở trong một sóng dãn như thế, giả thiết rằng khí là polytropic. Trong quá trình đoạn nhiệt $\rho T^{1/(1-\gamma)} = \text{const}$. Vì vận tốc của âm tỷ lệ với $T^{1/2}$, nên có thể viết hệ thức này dưới dạng

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{c}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)}. \tag{99-13}$$

Thay biểu thức này vào trong tích phân (99-6), ta thu được:

$$v = \frac{2}{\gamma - 1} \int dc = \frac{2}{\gamma - 1} (c - c_0);$$

hằng số tích phân được chọn sao cho $c = c_0$ khi $v = 0$ (chỉ số không để phân biệt giá trị của các đại lượng tại điểm khí đứng yên). Ta sẽ biểu diễn tất cả các đại lượng theo v và cần nhớ rằng, với sự sắp xếp thích hợp các miền, vận tốc của khí hướng theo chiều âm của trục x, do đó $v < 0$. Như vậy:

$$c = c_0 - \frac{\gamma - 1}{2} |v|, \tag{99-14}$$

công thức này xác định vận tốc âm cục bộ theo vận tốc khí. Thay c vào trong (99-13), ta tìm được cho mật độ:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{|v|}{c_0} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} \tag{99-15}$$

và tương tự cho áp suất

$$p = p_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{|v|}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}. \qquad (99\text{-}16)$$

Cuối cùng, thay (99-14) vào (99-5), ta được

$$|v| = \frac{2}{\gamma + 1}\left(c_0 - \frac{x}{t}\right), \qquad (99\text{-}17)$$

công thức này xác định sự phụ thuộc của v vào x và t.

Đại lượng c từ chính bản chất của nó, không thể âm. Do đó, từ công thức (99-14) ta có thể rút ra kết luận quan trọng là, vận tốc phải thỏa mãn bất đẳng thức

$$|v| \leq \frac{2c_0}{\gamma - 1}; \qquad (99\text{-}18)$$

nếu vận tốc đạt được giá trị giới hạn này, mật độ của khí (cũng như cả p và c) sẽ bằng không. Như vậy, khí lúc đầu đứng yên, chỉ có thể được tăng tốc đến một vận tốc không lớn hơn $2c_0/(\gamma - 1)$ khi nó dãn nở không dừng ở trong sóng dãn.

Ở đầu tiết, ta đã nói đến một thí dụ đơn giản về chuyển động tự đồng dạng xuất hiện trong ống hình trụ, khi pittông bắt đầu chuyển động với vận tốc không đổi, nếu pittông được kéo ra khỏi ống, nó sẽ làm dãn khí và sẽ xuất hiện sóng dãn đã mô tả ở trên. Nhưng nếu pittông được đẩy vào trong ống dẫn, nó sẽ nén khí ở phía trước và sự chuyển sang áp suất ban đầu nhỏ hơn chỉ có thể xảy ra trong sóng va chạm, sóng này xuất hiện ở trước pittông và lan truyền về phía trước trong ống (xem các bài tập của tiết này) [1].

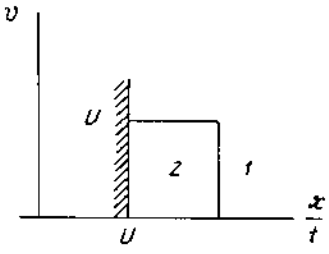
---

[1] Có thể nêu bài toán tương tự ba chiều về chuyển động tự đồng dạng đối xứng xuyên tâm của chất khí gây bởi một quả cầu dãn đều. Một sóng va chạm cầu lan truyền với vận tốc không đổi được hình thành ở trước quả cầu. Khác với trường hợp một chiều, vận tốc chuyển động của khí giữa quả cầu và sóng không phải là không đổi; phương trình xác định sóng đó như hàm của tỷ số r/t (và cùng với nó cả vận tốc lan truyền của sóng va chạm) không thể lấy tích phân được dưới dạng giải tích.

Bài toán này đã được *L.I.Xêđôv* khảo sát lần đầu tiên; xem vấn đề này ở cuối sách của ông "Các phương pháp đồng dạng và thứ nguyên trong cơ học", N.X.B Khoa học, 1981 (sách Nga); và *G.I. Taylor*, Proceeding of the Royal Society, A186, tr.273, 1946.

BÀI TẬP

1. Khí được chứa trong một ống hình trụ vô hạn ở một phía và đóng kín một phía bởi pittông. Tại thời điểm ban đầu, pittông bắt đầu chuyển động ở trong ống với vận tốc không đổi U. Xác định chuyển động xuất hiện của khí (khí được giả thiết là polytropic).



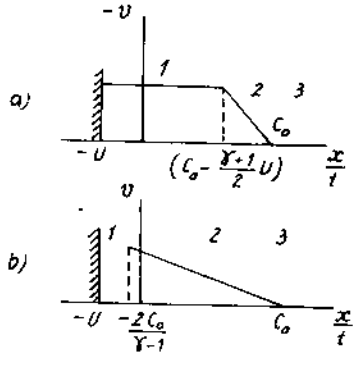
Hình 75

Giải. Ở trước pittông có xuất hiện một sóng va chạm lan truyền trong ống. Tại thời điểm ban đầu, các vị trí của sóng này và pittông trùng nhau, nhưng về sau, sóng "vượt trước" pittông, giữa sóng và pittông (miền *2*) có xuất hiện một miền khí. Trong miền ở trước sóng va chạm (miền *1*) áp suất của khí bằng giá trị ban đầu p_1 của nó, còn vận tốc (đối với ống) bằng không. Trong miền 2 khí chuyển động với vận tốc không đổi, bằng vận tốc U của pittông (hình 75). Hiệu các vận tốc của các khí *1* và *2* như vậy, bằng đúng giá trị U đó, và theo các công thức (85-7) và (89-1), ta có thể viết:

$$U = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} = (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2}}.$$

Từ đó ta tìm được áp suất p_2 của khí ở giữa pittông và sóng va chạm

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)U^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma U}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2U^2}{16c_1^2}}.$$



Hình 76

Nếu biết được p_2, thì theo các công thức (89-4) ta có thể tính được vận tốc của sóng va chạm đối với các chất khí ở trước và sau nó. Vì khí *1* đứng yên, nên vận tốc của sóng đối với khí bằng vận tốc lan truyền của sóng ở trong ống. Nếu tọa độ x dọc theo ống được tính từ vị trí ban đầu của pittông (khí ở về phía $x > 0$), thì sẽ tìm được vị trí của sóng va chạm ở thời điểm t:

$$x = t\left\{\frac{\gamma+1}{4}U + \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2U^2}{16} + c_1^2}\right\}$$

(vị trí của pittông là $x = Ut$).

2. Cũng bài toán đó, nếu pittông được kéo ra khỏi ống với vận tốc U.

Giải. Pittông tiếp giáp với miền khí (miền *1* trên hình 76a), chuyển động theo chiều âm của trục x với vận tốc không đổi $-U$, bằng vận tốc của pittông. Rồi tiếp đến sóng dãn *2*, trong đó khí chuyển động theo chiều âm của trục x với một vận tốc thay đổi từ giá trị $-U$ đến giá trị không theo định luật bậc nhất (99-17). Áp suất biến thiên theo định luật (99-16) từ giá trị

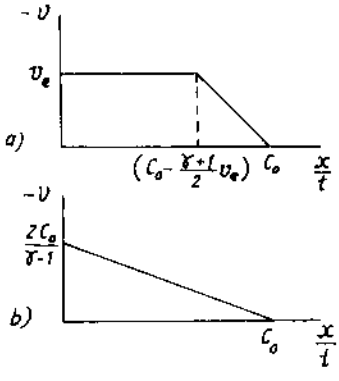
$$p_1 = p_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{U}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

ở trong khí *1* đến p_0 ở trong khí đứng yên *3*. Biên giới giữa các miền *2* và *1* được xác định bởi điều kiện $v = -U$; theo (99-17) ta thu được:

$$x = \left(c_0 - \frac{\gamma + 1}{2}U\right)t = (c - U)t$$

(c là vận tốc âm ở trong khí *1*). Tại biên giới với miền *3* $v = 0$, từ đó $x = c_0 t$. Cả hai biên giới này là các gián đoạn yếu; biên giới thứ hai bao giờ cũng chuyển động về bên phải (nghĩa là chuyển động ra xa pittông); còn biên giới thứ nhất (biên giới *1–2*) có thể chuyển động về bên phải (như đã trình bày trên hình 76a) cũng như về bên trái – nếu vận tốc của pittông $U > 2c_0/(\gamma + 1)$.

Hình ảnh mô tả trên có thể chỉ xảy ra với điều kiện $U < 2c_0/(\gamma - 1)$.Còn nếu $U > 2c_0/(\gamma - 1)$, thì trước pittông sẽ hình thành một miền chân không (khí như thể là không theo kịp pittông), miền này trải ra từ pittông đến điểm có tọa độ $x = -2c_0 t/(\gamma - 1)$ (miền *1* ở trên hình 76b). Tại điểm này $v = -2c_0/(\gamma - 1)$; tiếp theo đến miền *2*, trong đó vận tốc giảm đến giá trị không (tại điểm $x = c_0 t$), rồi đến miền *3* xa hơn của khí đứng yên.



Hình 77

3. Khí được chứa trong một ống hình trụ vô hạn ở một phía ($x > 0$) và đóng kín bởi một nút ở phía kia ($x = 0$). Tại thời điểm $t = 0$, nút được mở và khí thoát ra môi trường ngoài, áp suất p_e của môi trường này nhỏ hơn áp suất ban đầu p_0 ở trong ống. Xác định chuyển động xuất hiện của khí.

Giải. Gọi $-v_e$ là vận tốc của khí tương ứng với áp suất ngoài p_e theo công thức (99-16); với $x = 0$ và $t > 0$, ta phải có $v = -v_e$. Nếu $v_e < 2c_0/(\gamma + 1)$, ta thu được hình ảnh phân bố vận tốc trên hình 77a. Với $v_e = 2c_0/(\gamma + 1)$, (tương ứng với vận tốc thoát khí, bằng vận tốc cục bộ ở miệng ra của ống, điều này thấy được dễ dàng nếu đặt $v = c$ ở trong công thức

(99-14)), miền vận tốc không đổi biến mất và ta thu được hình ảnh đã nêu trên hình 77b. Đại lượng $2c_0/(\gamma+1)$ biểu diễn vận tốc thoát cực đại khả dĩ của khí trong các điều kiện đang xét. Nếu áp suất ngoài

$$p_e < p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \qquad (1)$$

thì vận tốc tương ứng v_e trở nên lớn hơn $2c_0/(\gamma+1)$. Thực tế, khi đó áp suất ở miệng ra của ống sẽ vẫn bằng giá trị giới hạn (1), còn vận tốc thoát bằng $2c_0/(\gamma+1)$; áp suất còn lại giảm (đến p_e) trong môi trường ngoài.

4. Một ống vô hạn được ngăn bởi một pittông. Tại một phía của pittông ($x < 0$) vào thời điểm ban đầu có khí ở áp suất p_0, còn ở phía bên kia là chân không ($x > 0$). Xác định chuyển động của pittông dưới ảnh hưởng của khí dãn nở.

Giải. Trong chất khí có xuất hiện một sóng dãn, một trong các biên giới của sóng chuyển động cùng với pittông về bên phải, còn biên giới kia chuyển động về bên trái. Phương trình chuyển động của pittông là:

$$m\frac{dU}{dt} = p_0\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{U}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

(trong đó U là vận tốc của pittông, m là khối lượng tính theo đơn vị diện tích). Lấy tích phân ta được:

$$U(t) = \frac{2c_0}{\gamma-1}\left\{1-\left[1+\frac{(\gamma+1)p_0}{2mc_0}t\right]^{-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right\}.$$

5. Xác định chuyển động trong một sóng dãn tự đồng dạng đẳng nhiệt.

Giải. Vận tốc đẳng nhiệt của âm bằng

$$c_T = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

và tại nhiệt độ không đổi $c_T = \text{const} = c_{T_0}$. Do đó, theo (99.5-6), ta tìm được:

$$v = c_{T_0}\ln\frac{\rho}{\rho_0} = c_{T_0}\ln\frac{p}{p_0} = \frac{x}{t} - c_{T_0}.$$

6. Dùng phương trình Burgers (§93) để xác định cấu trúc của gián đoạn yếu có liên quan đến sự tiêu tán giữa sóng dãn và khí đứng yên.

Giải. Giả sử khí đứng yên ở bên trái, còn sóng dãn ở bên phải gián đoạn yếu (khi đó gián đoạn chuyển động về bên trái). Nếu không xét đến sự tiêu tán thì ở trong miền thứ nhất ta có $v = 0$, còn trong miền thứ hai chuyển động được mô tả bởi các phương trình (99.5-6) (với dấu ngược ở trước c), khi đó ở gần gián đoạn vận tốc v nhỏ; với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất theo v ta có

$$\frac{x}{t} = v - c \approx -c_0 + \left(1 + \frac{\rho_0}{c_0}\frac{dc_0}{d\rho_0}\right) = -c_0 + \alpha_0 v,$$

trong đó α được xác định ở (102-2), còn chỉ số 0 nêu giá trị các đại lượng tại $v = 0$ (dưới đây chỉ số này được bỏ đi).

Với độ chính xác đến các đại lượng có độ nhỏ bậc hai, vận tốc trong sóng lan truyền sang bên trái tuân theo phương trình (6) đã thu được trong bài tập 1 §93, hay phương trình Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

trong đó $\mu = ac^3$, còn ẩn $u = \alpha v$ được biểu diễn trong hàm của t và $\zeta = x + ct$, biến ζ đo khoảng cách từ gián đoạn yếu tại mỗi thời điểm t. Tìm nghiệm liên tục của phương trình này với các điều kiện biên

$$u = \frac{\zeta}{t} \text{ với } \zeta \to \infty, \quad u = 0 \text{ với } \zeta \to -\infty,$$

tương ứng với chuyển động không xét đến tiêu tán. Phù hợp với định luật dãn nở của gián đoạn yếu (96-1); biến t phải có mặt trong nghiệm trong tổ hợp $z = \zeta/\sqrt{t}$ với biến ζ. Một nghiệm như thế có thể thỏa mãn các điều kiện biên đặt ra, nếu

$$u(t,\zeta) = \frac{1}{\zeta}\psi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{t}}\right).$$

Hàm ψ có liên hệ với hàm φ đã đưa vào trong bài tập 2, §93 bằng hệ thức

$$-2\mu \ln\varphi = \int \psi(z)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int \psi(z)\frac{dz}{z},$$

do đó φ chỉ phụ thuộc vào z, thêm vào đó

$$\psi(z) = -2\mu z\frac{d}{dz}\ln\varphi(z).$$

Phương trình (3) của bài toán nêu trên có dạng $2\mu\varphi'' = -z\varphi'$, từ đó

$$\varphi(z) = \int e^{-z^2/4\mu}dz.$$

Nghiệm thỏa mãn các điều kiện biên:

$$u(z,\zeta) = \frac{2\mu z}{\zeta}\left[e^{z^2/4\mu}\int_z^\infty e^{-z^2/4\mu}dz\right]^{-1},$$

hay cuối cùng đối với vận tốc $v(\zeta, t)$:

$$v(\zeta, t) = \frac{\mu^{1/2}}{\alpha t^{1/2}} \left[e^{\zeta^2/4\mu t} \int_{\zeta/2\sqrt{\mu t}}^{\infty} e^{-z^2} dz \right]^{-1}.$$

Chính nghiệm này xác định cấu trúc của gián đoạn yếu.

§100. CÁC GIÁN ĐOẠN TRONG NHỮNG ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU

Các gián đoạn trong những điều kiện ban đầu của chuyển động có thể là một trong những nhân tố quan trọng nhất của sự xuất hiện các mặt gián đoạn trong chất khí. Các điều kiện ban đầu (nghĩa là các phân bố ban dầu của vận tốc, áp suất v.v..) nói chung có thể được cho trước một cách tùy ý. Đặc biệt, các phân bố ban đầu đó tuyệt nhiên không nhất thiết phải là các hàm liên tục khắp nơi, mà có thể gián đoạn ở trên một số mặt. Chẳng hạn, nếu tại một thời điểm nào đó hai khối lượng khí nén tới áp suất khác nhau được đặt tiếp xúc với nhau, thì mặt tiếp xúc của chúng sẽ là một mặt gián đoạn trong sự phân bố ban đầu của áp suất.

Điều quan trọng là, những bước nhảy của các đại lượng khác nhau trong những gián đoạn của các điều kiện ban đầu (mà ta sẽ gọi là các gián đoạn ban đầu) có thể là hoàn toàn tùy ý; giữa chúng không thể tồn tại một hệ thức nào. Tuy nhiên, chúng ta biết rằng một số điều kiện xác định phải được thỏa mãn ở trên mặt các gián đoạn. Các gián đoạn này có thể tồn tại trong một chất khí như các hình thành ổn định. Chẳng hạn, các bước nhảy của áp suất và mật độ trong sóng va chạm đều có liên hệ với nhau bởi đoạn nhiệt va chạm. Do đó, rõ ràng là nếu các điều kiện cần này không được thỏa mãn trong gián đoạn ban đầu, thì gián đoạn này chắc chắn không thể tiếp tục tồn tại là một gián đoạn tại những thời điểm tiếp sau. Thay cho điều đó, nói chung, gián đoạn ban đầu sẽ tách thành một số gián đoạn, mỗi gián đoạn này là một trong những loại gián đoạn khả dĩ nào đó (sóng va chạm, gián đoạn tiếp tuyến, gián đoạn yếu); sau khi xuất hiện các gián đoạn đó sẽ đi ra xa nhau theo thời gian [1].

[1] *N.E. Kôsin* đã nghiên cứu tổng quát vấn đề này (1926).

Trong một khoảng thời gian ngắn kể từ thời điểm ban đầu $t = 0$ các gián đoạn, được hình thành từ gián đoạn ban đầu phân rã ra, vẫn chưa kịp đi ra xa nhau tới những khoảng cách lớn, do đó toàn bộ hình ảnh của chuyển động đã nghiên cứu sẽ bị giới hạn trong một thể tích tương đối hẹp, kề sát với mặt gián đoạn ban đầu. Như thông thường, chỉ cần khảo sát trong trường hợp tổng quát các phần tách biệt nhau của mặt gián đoạn ban đầu, mỗi phần này có thể coi là phẳng. Do đó, có thể giới hạn chỉ khảo sát mặt gián đoạn phẳng. Chọn mặt phẳng đó là mặt phẳng y, z. Vì những lý do đối xứng, hiển nhiên là các gián đoạn đã xuất hiện do sự phân rã của gián đoạn ban đầu tại thời điểm $t > 0$ cũng vẫn là phẳng và vuông góc với trục x. Toàn bộ hình ảnh chuyển động chỉ phụ thuộc vào một tọa độ x (và vào thời gian), do đó bài toán rút về một chiều. Do không có một thông số nào đặc trưng cho độ dài và thời gian, nên chúng ta có bài toán tự đồng dạng và có thể sử dụng các kết quả đã thu được trong tiết trước.

Các gián đoạn hình thành từ sự phân rã gián đoạn ban đầu hiển nhiên phải đi khỏi nơi tạo thành chúng, nghĩa là đi khỏi vị trí của gián đoạn ban đầu. Dễ dàng thấy rằng, khi đó hoặc một sóng va chạm, hoặc một cặp các gián đoạn yếu bao sóng dãn có thể chuyển động theo một trong hai chiều của x (chiều dương hay chiều âm trục x). Thực vậy, chẳng hạn nếu có hai sóng va chạm được tạo thành tại cùng một nơi vào thời điểm $t = 0$ và cùng lan truyền theo chiều dương của trục x, thì sóng trước phải dịch chuyển với vận tốc lớn hơn vận tốc của sóng sau. Tuy nhiên, theo các tính chất tổng quát của các sóng va chạm, sóng thứ nhất phải chuyển động so với khí ở phía sau nó với một vận tốc nhỏ hơn vận tốc âm c ở trong chất khí đó, còn sóng thứ hai phải chuyển động đối với cùng khí đó với vận tốc lớn hơn c (ở trong miền giữa hai sóng va chạm $c = \text{const}$), nghĩa là nó phải đuổi kịp sóng thứ nhất. Cũng vì lý do đó, một sóng va chạm và sóng dãn không thể theo sau nhau theo cùng một chiều; muốn thấy được điều đó, (chỉ cần chú ý rằng các gián đoạn yếu chuyển động so với các chất khí ở phía trước và phía sau chúng với vận tốc của âm). Cuối cùng, hai sóng dãn đồng thời xuất hiện không thể tách nhau, vì vận tốc của mặt đầu sóng sau của sóng thứ nhất bằng vận tốc của mặt đầu sóng sau của sóng thứ hai.

Ngoài các sóng va chạm và sóng dãn, trong sự phân rã của gián đoạn ban đầu nói chung cũng phải có xuất hiện cả gián đoạn tiếp tuyến. Một gián đoạn như thế trong mọi trường hợp là cần thiết, nếu trong gián đoạn ban đầu các thành phần ngang v_y, v_z vủa vận tốc chịu những bước nhảy. Vì các thành phần này của vận tốc không thay đổi cả trong sóng va chạm cũng như trong sóng dãn, nên bước nhảy của chúng bao giờ cũng xảy ra trong gián đoạn tiếp tuyến, gián đoạn này vẫn ở lại vị trí của gián đoạn ban đầu; ở hai nhía của gián đoạn này v_y, v_z vẫn không đổi (dĩ nhiên thực tế do sự không ổn định của gián đoạn tiếp tuyến với bước nhảy của vận tốc nên với thời gian bao giờ nó cũng sẽ xói lở dần thành miền chảy rối).

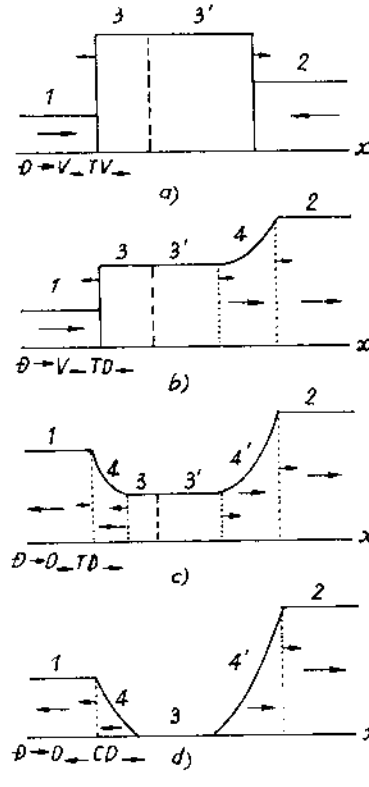
Tuy nhiên, gián đoạn tiếp tuyến phải xảy ra cả trong trường hợp khi v_y, v_z không có bước nhảy trong gián đoạn ban đầu (không hạn chế tính tổng quát, trong trường hợp này, có thể coi rằng v_y và v_z không đổi đều bằng không và hiểu ngầm rằng cả dưới đây cũng vậy). Các nhận định sau đây chứng tỏ điều đó. Các gián đoạn được tạo thành do sự phân rã của gián đoạn ban đầu phải cho khả năng chuyển từ trạng thái *1* đã cho của khí từ một phía của gián đoạn ban đầu sang trạng thái *2* đã cho ở phía bên kia. Trạng thái của khí được xác định bởi ba đại lượng độc lập, chẳng hạn p, ρ và $v_x = v$. Do đó, cần phải có ba thông số tùy ý để bằng một cách chọn nào đó các gián đoạn, ta có thể chuyển từ trạng thái *1* sang trạng thái *2* tùy ý đã cho. Nhưng ta biết rằng, một sóng va chạm (vuông góc với chiều của dòng) lan truyền trong một chất khí, có trạng thái nhiệt động lực đã cho, sẽ hoàn toàn được xác định bởi một thông số (§85). Cũng vậy đối với sóng dãn; như ta đã thấy được từ các công thức (99.14-16), với một trạng thái đã cho của khí đi vào trong sóng dãn, trạng thái của khí đi ra hoàn toàn được xác định bởi việc cho một trong các đại lượng trong nó. Mặt khác, ta sẽ thấy rằng, do sự phân rã, nhiều nhất cũng chỉ có một sóng va chạm hay sóng dãn có thể lan truyền về một phía. Do đó ta chỉ có sẵn tất cả hai thông số, như vậy không đủ.

Gián đoạn tiếp tuyến xuất hiện tại vị trí của gián đoạn ban đầu chính là thông số thứ ba còn thiếu. Ở gián đoạn này, áp suất vẫn liên tục; nhưng còn mật độ (và cùng với nó, cả nhiệt độ và entrôpi), chịu bước nhảy. Gián đoạn tiếp tuyến đứng yên đối với chất khí ở cả hai phía

của nó, do đó không thể áp dụng cho gián đoạn này các lập luận trước đây về sự "đuổi kịp" nhau của hai sóng lan truyền theo cùng một chiều.

Các khí ở hai bên gián đoạn tiếp tuyến không trộn lẫn vào nhau vì không có chuyển động của khí qua gián đoạn tiếp tuyến; trong tất cả các phương án nêu dưới đây, các khí đó thậm chí có thể thuộc về các chất khác nhau.

Hình 78 biểu diễn sơ đồ tất cả các phân rã khả dĩ của gián đoạn ban đầu. Đường liên tục biểu diễn tiến trình biến thiên của áp suất dọc theo trục x (sự biến thiên của mật độ sẽ được biểu diễn bằng một đường có cùng tính chất, chỉ có một điểm khác là cũng sẽ có bước nhảy cả ở trên gián đoạn tiếp tuyến). Các đoạn thẳng đứng biểu diễn những gián đoạn đã được tạo thành, các mũi tên nêu lên chiều lan truyền của chúng và chiều chuyển động khí. Hệ tọa độ được chọn tại mọi nơi cũng là hệ tọa độ, trong đó gián đoạn tiếp tuyến đứng yên; cùng với gián đoạn đó cả khí ở trong các miền tiếp giáp 3, 3′ cũng đứng yên. Các áp suất, mật độ và vận tốc của các khí trong các miền cực trái (*1*) và miền cực phải (*2*) là những giá trị của các đại lượng tương ứng ở thời điểm $t = 0$ ở cả hai bên của gián đoạn ban đầu.



——— Sóng va chạm
------ Gián đoạn tiếp tuyến
..... Gián đoạn yếu

Hình 78

Trong trường hợp thứ nhất (qui ước viết dưới dạng $Đ \rightarrow V \leftarrow TV \rightarrow$, hình 78a), gián đoạn ban đầu $Đ$ cho hai sóng va chạmV lan truyền theo các chiều ngược lại và gián đoạn tiếp tuyến T ở giữa chúng. Trường hợp này được thực hiện do sự va chạm

của hai khối lượng khí chuyển động đến gặp nhau với vận tốc lớn.

Trong trường hợp $Đ \to V {}_{\leftarrow}TD_{\rightarrow}$ (hình 78b), một sóng va chạm lan truyền ở một phía của gián đoạn tiếp tuyến và một sóng dãn lan truyền ở phía kia. Trường hợp này xảy ra chẳng hạn khi hai khối lượng khí đứng yên tương đối với nhau ($v_2 - v_1 = 0$) được nén tới các áp suất khác nhau đem cho tiếp xúc với nhau tại thời điểm ban đầu. Thực vậy chỉ trong trường hợp thứ hai trong bốn trường hợp biểu diễn trên hình 78, các khí *1* và *2* mới chuyển động theo cùng một chiều và vì thế nên có thể có $v_1 = v_2$.

Tiếp theo, trong trường hợp thứ ba ($Đ \to D {}_{\leftarrow}TD_{\rightarrow}$) từ hai phía của gián đoạn tiếp tuyến có những sự dãn lan truyền theo sóng. Nếu các khí *1* và *2* chuyển động ra xa nhau với vận tốc $v_2 - v_1$ đủ lớn, thì trong các sóng dãn áp suất có thể giảm đến giá trị không. Khi đó sẽ xuất hiện hình ảnh được trình bày trên 78d; miền chân không *3* được hình thành giữa các miền *4* và *4'*.

Ta rút ra các điều kiện giải tích xác định đặc tính phân rã của gián đoạn ban đầu, như hàm của các thông số của chúng. Trong mọi trường hợp, đều giả thiết rằng $p_2 > p_1$ và bao giờ cũng chọn chiều dương của trục x là chiều từ miền 1 đến miền 2 (phù hợp với hình 78).

Vì các khí ở hai phía của gián đoạn ban đầu có thể là các khí thuộc các chất khác nhau, nên ta ký hiệu chúng lần lượt bằng các chỉ số *1* và *2*.

1. Phân rã $Đ \to V {}_{\leftarrow}TV_{\rightarrow}$. Nếu $p_3 = p_3'$, $v_3 = v_3'$, V_3, V_3' là áp suất, vận tốc và các thể tích riêng ở trong các miền *3* và *3'* được tạo thành do sự phân rã, thì sẽ có $p_3 > p_2 > p_1$ và các thể tích V_3 và V_3' được xác định như các tọa độ của các điểm có các tung độ p_3 ở trên các đoạn nhiệt va chạm lần lượt vạch qua các điểm p_1, V_1 và p_2, V_2, được lấy làm các điểm xuất phát. Vì các khí ở trong miền *3* và *3'* đứng yên trong hệ tọa độ đã chọn, nên có thể dùng (85-7) để viết các vận tốc v_1 và v_2 lần lượt hướng theo chiều dương và chiều âm của trục x:

$$v_1 = \sqrt{(\overline{p_3 - p_1})(\overline{V_1 - V_3})}, \quad v_2 = -\sqrt{(\overline{p_3 - p_2})(\overline{V_3 - V_3'})}.$$

Giá trị nhỏ nhất mà áp suất p_3 có thể có, với các giá trị đã cho p_1 và p_2 để không mâu thuẫn với giả thiết ban đầu ($p_3 > p_2 > p_1$), đó là $p_3 = p_2$. Hơn nữa, vì hiệu $v_1 - v_2$ là một hàm tăng đơn điệu của p3, nên có thể tìm

được bất đẳng thức đòi hỏi

$$v_1 - v_2 > \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}, \qquad (100\text{-}1)$$

trong đó V' biểu diễn thể tích, là tọa độ của điểm có tung độ p_2 ở trên đoạn nhiệt va chạm của khí *1* vạch qua điểm p_1, V_1 được chọn làm điểm ban đầu. Nếu tính V' theo công thức (89-1) (trong đó viết V' thay cho V_2) ta sẽ tìm được cho khí polytropic điều kiện (100-1) dưới dạng

$$v_1 - v_2 > (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}. \qquad (100\text{-}2)$$

Ta nhận thấy rằng các điều kiện (100-1.2) thiết lập giới hạn cho các giá trị khả dĩ của hiệu các vận tốc $v_1 - v_2$, rõ rằng không phụ thuộc vào việc chọn hệ tọa độ.

2. Phân rã $Đ \to V_{\leftarrow}TD_{\rightarrow}$. Ở đây, $p_1 < p_3 = p_3' < p_2$. Đối với vận tốc của khí ở trong miền *1* ta lại có:

$$v_1 = \sqrt{(p_3 - p_1)(V_1 - V_3)},$$

và theo (99-7) độ biến thiên toàn phần của vận tốc trong sóng dãn *4*

$$v_2 = \int_{p_3}^{p_2} \sqrt{-dp\, dV}.$$

Với các p_1 và p_2 đã cho, các giá trị của p_3 nằm trong các giới hạn từ p_1 đến p_2. Nếu thay p_3 ở trong hiệu $v_2 - v_1$ một lần bằng p_1, và lần khác bằng p_2, ta sẽ thu được điều kiện

$$-\int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-dp\, dV} < v_1 - v_2 < \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V')}. \qquad (100\text{-}3)$$

Ở đây V' có cùng ý nghĩa như trong trường hợp trước; biểu thức xác định giới hạn trên của hiệu $v_1 - v_2$ phải được tính cho khí *1*, còn giới hạn dưới, cho khí *2*. Đối với khí polytropic, ta có:

$$-\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right] < v_1 - v_2 < (p_2 - p_1)\sqrt{\frac{2V_1}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_2}}. \qquad (100\text{-}4)$$

trong đó $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$ là vận tốc âm trong khí *2* ở trạng thái p_2, V_2.

3. Phân rã $Đ \to D\ {}_{\leftarrow}TD_{\rightarrow}$. Ở đây $p_2 > p_1 > p_3 = p_3' > 0$. Theo cách tương tự, ta tìm được điều kiện sau để trường hợp đó xảy ra:

$$-\int_0^{p_1}\sqrt{-dp\,dV} - \int_0^{p_2}\sqrt{-dp\,dV} < v_1 - v_2 < -\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-dp\,dV}. \qquad (100\text{-}5)$$

Tích phân ở vế phải của bất đẳng thức được tính cho khí *2*; tích phân của vế trái được tính cho khí *1* và tích phân thứ hai cho khí hai. Ta thu được cho khí polytropic

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} < v_1 - v_2 < -\frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2}}\right], \qquad (100\text{-}6)$$

với $c_1 = \sqrt{\gamma_1 p_1 V_1}$, $c_2 = \sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$, nếu

$$v_1 - v_2 < -\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1} \qquad (100\text{-}7)$$

thì một miền chân không sẽ xuất hiện giữa các sóng dãn (phân rã $Đ \to D\ {}_{\leftarrow}CD_{\rightarrow}$).

Đặc biệt, các bài toán va chạm khác nhau của các mặt gián đoạn phẳng dẫn tới bài toán gián đoạn trong những điều kiện ban đầu. Tại thời điểm va chạm, cả hai mặt phẳng trùng nhau và lập thành một "gián đoạn ban đầu" nào đó, gián đoạn này sau đó lại phân rã theo một trong các cách đã mô tả ở trên. Chẳng hạn, do sự gặp nhau của hai sóng va chạm lại xuất hiện hai sóng va chạm, các sóng này sẽ đi xa khỏi gián đoạn tiếp tuyến vẫn còn ở giữa chúng:

$$V_{\rightarrow}V_{\leftarrow} \to V\ \ {}_{\leftarrow}TV_{\rightarrow}$$

Khi một sóng va chạm đuổi kịp một sóng khác thì hai trường hợp có thể xảy ra:

$$V_{\rightarrow}V_{\rightarrow} \to V\ {}_{\leftarrow}TV_{\rightarrow}, \quad V_{\rightarrow}V_{\rightarrow} \to D\ {}_{\leftarrow}TV_{\rightarrow}$$

Trong cả hai trường hợp, có một sóng va chạm tiếp tục lan truyền về phía trước.

Bài toán về sự phản xạ và truyền của các sóng va chạm qua một gián đoạn tiếp tuyến (biên giới của hai môi trường) cũng thuộc vào chính lớp đó. Ở đây có thể có hai trường hợp:

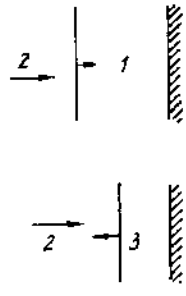
$$V_{-}T \to V_{\leftarrow}TV_{\rightarrow}, \quad V_{\rightarrow}T \to D_{\cdot}TV_{\rightarrow}$$

Sóng truyền qua môi trường thứ hai bao giờ cũng là một sóng va chạm (cũng xem bài tập của tiết này) [1].

BÀI TẬP

1. Một sóng va chạm phẳng phản xạ từ mặt phẳng của vật rắn tuyệt đối. Xác định áp suất của khí ở phía sau sóng phản xạ (*H. Hugoniot,* 1885).

Giải. Khi một sóng va chạm đập tới một thành rắn, thì sẽ có một sóng va chạm phản xạ lan truyền đi từ thành. Ta sẽ lần lượt ký hiệu *1*, *2*, *3* cho khí không nhiễu động trước sóng va chạm tới, khí ở sau sóng tới (đó cũng là khí ở trước sóng phản xạ) và khí ở sau sóng phản xạ (trên hình 79: các mũi tên chỉ chiều chuyển động của các sóng va chạm và của chính bản thân khí). Khí ở trong miền *1* và *3*, là các miền nối tiếp với thành rắn, thì đứng yên (đối với thành rắn đứng yên). Vì thế vận tốc tương đối so với nhau của các khí ở hai bên gián đoạn trong cả hai trường hợp – trong sóng va chạm tới và sóng va chạm phản xạ – đều như nhau (nó có cùng giá trị, và bằng giá trị của vận tốc khí *2*). Do đó, nếu dùng công thức (85-7), ta thu được cho vận tốc tương đối:



Hình 79

$$(p_2 - p_1)(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3).$$

Phương trình của đoạn nhiệt va chạm (89-1) cho mỗi sóng va chạm:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1 + (\gamma+1)p_2},$$

[1] Để cho đầy đủ, cần nhắc lại rằng, khi sóng va chạm và gián đoạn yếu va chạm với nhau (bài toán này không thuộc vào loại tự đồng dạng đang xét) sóng va chạm tiếp tục lan truyền theo hướng trước, để lại trong không gian ở phía sau nó một gián đoạn yếu thuộc loại ban đầu và một gián đoạn "tiếp tuyến" yếu (xem phần cuối của §96).

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_3}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_3}.$$

Có thể khử được các thể tích riêng ra khỏi ba phương trình trên, và ta thu được

$$(p_3 - p_2)^2 \left[(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_2\right] = (p_2 - p_1)^2 \left[(\gamma+1)p_3 + (\gamma-1)p_2\right].$$

Đó là một phương trình toàn phương của p_3 với nghiệm tầm thường $p_3 = p_1$; sau khi giản ước với $(p_3 - p_1)$, ta thu được công thức cần tìm

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{(3\gamma-1)p_2 - (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1},$$

Công thức này xác định p_3 theo p_1 và p_2. Trong trường hợp giới hạn của sóng tới có cường độ lớn, "độ dưới nén" của khí bởi sóng va chạm phản xạ được xác định bằng các công thức:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{3\gamma-1}{\gamma-1}, \qquad \frac{V_3}{V_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

Trong trường hợp giới hạn ngược lại có cường độ nhỏ: $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$, kết quả này tương ứng với sự gần đúng âm.

2. Tìm điều kiện xác định kết quả phản xạ của sóng va chạm trên giới hạn phẳng giữa hai khí.

Giải. Giả sử $p_1 = p'_2$, V_1, V'_2 là các áp suất và thể tích riêng của hai môi trường trước khi sóng va chạm tới (lan truyền trong khí 2) mặt ngăn cách của chúng, còn p_2, V_2 là áp suất và thể tích riêng ở sau sóng va chạm. Điều kiện để cho sóng phản xạ là sóng va chạm được cho bởi đẳng thức (100-2), trong đó đối với trường hợp đã cho, ta cần đặt:

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p'_2)(V'_2 - V_2)}.$$

Nếu biểu diễn tất cả các đại lượng theo tỷ số các áp suất p_2/p_1 và các thể tích riêng ban đầu V_1 và V'_2, ta sẽ thu được điều kiện sau:

$$\frac{V_1}{(\gamma_1+1)p_2/p_1 + (\gamma_1-1)} < \frac{V'_2}{(\gamma_2+1)p_2/p_1 + (\gamma_2-1)}.$$

§101. CÁC SÓNG CHẠY MỘT CHIỀU

Khi nghiên cứu các sóng âm ở §64, biên độ các dao động trong sóng được giả thiết là nhỏ. Kết quả là các phương trình chuyển động đều là tuyến tính và có thể dễ giải. Đặc biệt, nghiệm của các phương trình đó

là hàm của $x \pm ct$ (sóng phẳng), nó tương ứng với "sóng chạy", có prôfin chuyển động với vận tốc c, không thay đổi hình dạng (prôfin sóng được hiểu là sự phân bố các đại lượng khác nhau: mật độ, vận tốc, v.v... dọc theo phương lan truyền của nó). Vì vận tốc v, mật độ ρ, áp suất p (cũng như các đại lượng khác) ở trong một sóng như thế là các hàm của cùng một tổ hợp $x \pm ct$, nên chúng có thể được biểu diễn như các hàm của nhau dưới dạng các hệ thức không chứa tường minh tọa độ và thời gian (chẳng hạn $p = p(\rho)$, $v = v(p)$, v.v...).

Khi biên độ sóng là bất kỳ và không nhỏ, các hệ thức đơn giản đó không còn tồn tại. Tuy nhiên, người ta nhận thấy rằng, có thể tìm được nghiệm tổng quát của phương trình chuyển động chính xác, là một sóng phẳng chạy và là sự mở rộng nghiệm $f(x \pm ct)$ của các phương trình gần đúng, khi áp dụng trong trường hợp các biên độ nhỏ. Để tìm nghiệm này, ta xuất phát từ yêu cầu là, trong trường hợp tổng quát của sóng có biên độ tùy ý, mật độ và vận tốc có thể được biểu diễn qua nhau.

Khi không có các sóng va chạm chuyển động là đoạn nhiệt. Nếu tại một thời điểm ban đầu nào đó khí là thuần nhất (do đó, đặc biệt có $s = \text{const}$), thì tại mọi thời điểm sau vẫn có $s = \text{const}$, dưới dây ta sẽ giả thiết như vậy.

Trong sóng âm phẳng lan truyền dọc theo trục x, tất cả các đại lượng chỉ phụ thuộc vào x và t, và đối với vận tốc, ta có: $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Phương trình liên tục phát biểu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0,$$

và phương trình Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Nếu dựa vào sự kiện là v có thể được biểu diễn như hàm chỉ của mật độ ρ, ta sẽ viết được các phương trình đó dưới dạng

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{d(\rho v)}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \qquad (101\text{-}1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \qquad (101\text{-}2)$$

Nếu chú ý rằng

$$\frac{\partial \rho / \partial t}{\partial \rho / \partial x} = -\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\rho},$$

thì từ (101-1), ta có:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\rho} = \frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho \frac{dv}{d\rho},$$

và tương tự từ (101-2)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{v} = v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}. \tag{101-3}$$

Nhưng vì giá trị của ρ xác định một cách đơn trị giá trị của v, nên các đạo hàm được lấy với ρ hay v không đổi đều như nhau, do đó

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\rho} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{v},$$

từ đó

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv} = \frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho}{dv}.$$

Như vậy, $dv/d\rho = \pm c/\rho$, do đó

$$v = \pm \int \frac{c}{\rho} d\rho = \pm \int \frac{dp}{\rho c}. \tag{101-4}$$

Công thức này xác định hệ thức tổng quát giữa vận tốc và mật độ hay áp suất ở trong sóng [1].

Tiếp theo, phối hợp (101-3) với (101-4), ta viết được

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{v} = v + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv} = v \pm c(v).$$

hay lấy tích phân

$$x = t\left[v \pm c(v)\right] + f(v), \tag{101-5}$$

trong đó $f(v)$ là một hàm tùy ý của vận tốc và hàm $c(v)$ được xác định bởi

[1] Trong một sóng biên độ nhỏ ta có $\rho = \rho_0 + \rho'$ và (101-4) cho ta trong phép gần đúng bậc nhất $v = c_0\rho'/\rho_0$ (với $c_0 = c(\rho_0)$), nghĩa là cho ta công thức thông thường (64-12).

đẳng thức (101-4).

Các công thức (101.4-5) là nghiệm tổng quát cần tìm (lần đầu tiên do *B. Riemann* tìm được, 1860). Các công thức đã nêu xác định dưới dạng ẩn vận tốc (và cùng với nó là cả các đại lượng còn lại) như hàm của x và t, nghĩa là prôfin của sóng tại mọi thời điểm. Với mỗi giá trị xác định của v, ta có $x = at + b$, nghĩa là điểm, mà tại đó vận tốc có giá trị xác định, dịch chuyển trong không gian với vận tốc không đổi; theo nghĩa này, nghiệm thu được biểu diễn một sóng chạy. Hai dấu trong (101-5) tương ứng với các sóng lan truyền (đối với khí) theo các chiều dương và âm của trục x.

Chuyển động mô tả bởi nghiệm (101.4-5) thường được gọi là "sóng đơn giản" , thuật ngữ này sẽ được dùng sau này. Chuyển động tự đồng dạng nghiên cứu ở §99 là trường hợp riêng của sóng đơn giản, tương ứng với $f(v)$ bằng không ở trong (101-5).

Ta viết dưới dạng ẩn các hệ thức cho một sóng đơn giản ở trong khí polytropic; để xác định ta sẽ coi rằng, trong sóng có một điểm mà tại đó $v = 0$, như vẫn thường xảy ra trong nhiều bài toán cụ thể. Vì công thức (101-6) trùng với (99-6), nên tương tự như các công thức (99.14-16), ta viết:

$$c = c_o \pm \frac{\gamma - 1}{2} v, \tag{101-6}$$

$$\rho = \rho_o \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_o}\right)^{\frac{2}{\gamma - 1}}, p = p_o \left(1 \pm \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v}{c_o}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}} \tag{101-7}$$

Thay (101-6) vào (101-5), ta được:

$$x = t\left(\pm c_o + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) + f(v). \tag{101-8}$$

Đôi khi để tiện lợi, ta viết nghiệm này dưới dạng

$$v = F\left[x - t\left(\pm c_o + \frac{\gamma + 1}{2} v\right)t\right], \tag{101-9}$$

trong đó F lại là một hàm tùy ý.

Các công thức (101.6-7) lại chứng tỏ rằng (như ở §99), vận tốc hướng ngược chiều lan truyền của sóng (đối với chính chất khí) bị giới hạn về giá trị tuyệt đối; đối với sóng lan truyền theo chiều dương của trục x, ta có:

$$-v \leq \frac{2c_o}{\gamma - 1}. \tag{101-10}$$

Sóng chạy mô tả bởi các công thức (101.4-5) khác căn bản với sóng thu được trong trường hợp giới hạn của các biên độ nhỏ. Vận tốc dịch chuyển các điểm của prôfin sóng bằng

$$u = v \pm c\,; \tag{101-11}$$

có thể coi cụ thể đó là kết quả thu được khi chồng chất sự lan truyền của nhiễu động đối với khí với vận tốc âm và sự dịch chuyển của chính khí với vận tốc v. Vì bây giờ vận tốc u là hàm của mật độ, do đó nó sẽ khác nhau đối với các điểm khác nhau của prôfin. Như vậy, trong trường hợp tổng quát của sóng phẳng có biên độ tùy ý, không tồn tại "vận tốc sóng" không đổi xác định. Vì các vận tốc của các điểm khác nhau trong prôfin sóng khác nhau, nên prôfin không còn không đổi nữa và nó thay đổi hình dạng theo thời gian.

Chúng ta xét một sóng lan truyền theo chiều dương của trục x; đối với sóng này $u = v + c$. Đạo hàm của $v + c$ theo mật độ đã được tính ở §99 (xem (99-10)). Ta đã thấy rằng $du/d\rho > 0$. Như vậy, vận tốc lan truyền của một điểm đã cho của prôfin sóng sẽ càng lớn nếu mật độ càng lớn. Nếu ký hiệu c_o là vận tốc âm cho mật độ, bằng mật độ cân bằng ρ_o, thì tại các nơi có sự nén, $\rho > \rho_o$ và $c > c_o$; tại các điểm dãn, ngược lại $\rho < \rho_o$ và $c < c_o$.

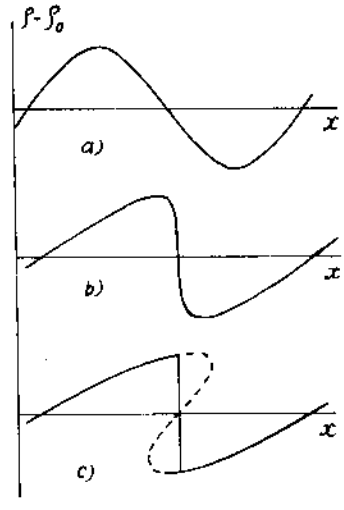
Do vận tốc dịch chuyển của các điểm trong prôfin khác nhau, nên hình dạng của prôfin thay đổi theo thời gian: các điểm nén dịch chuyển về phía trước, còn các điểm dãn ở lại sau (hình 80b). Cuối cùng, prôfin của sóng có thể bị uốn cong đến mức đường cong $\rho(x)$ (tại thời điểm t đã cho) là đa trị – một x nào đó tương ứng với ba giá trị khác nhau của ρ (hình 80c, đường chấm chấm) [1]. Dĩ nhiên một tình hình như vậy không

[1] Người ta thường gọi sự biến dạng như thế của prôfin là sự đảo prôfin.

thể có được về mặt vật lý. Thực tế, các gián đoạn xuất hiện tại những điểm đa trị của ρ, và do đó ρ là một hàm đơn trị khắp nơi (trừ tại chính những điểm gián đoạn). Khi đó prôfin sóng có dạng được biểu diễn trên hình 80c bằng đường liên tục. Như vậy, các mặt gián đoạn xuất hiện trên phạm vi của mỗi bước sóng.

Sau khi các gián đoạn xuất hiện, sóng không còn là sóng đơn giản nữa. Lý do được giải thích cụ thể như sau: khi có các mặt gián đoạn sóng sẽ "phản xạ" trên các mặt đó, nên sóng không còn là "sóng chạy" theo một chiều nữa, do đó giả thiết làm cơ sở cho toàn bộ việc rút ra ở trên về sự phụ thuộc đơn trị giữa các đại lượng khác nhau nói chung không còn đúng nữa.

Sự có mặt của các gián đoạn (các sóng va chạm), như đã nêu ở § 82, sẽ dẫn đến sự tiêu tán năng lượng. Do đó, sự xuất hiện của các gián đoạn sẽ dẫn đến sự tắt nhanh của sóng. Sự tắt như thế thấy được trực tiếp từ hình 80. Khi gián đoạn xuất hiện, thì prôfin của sóng, như thể bị cắt ở phần cao nhất của nó. Với thời gian, prôfin tiếp tục bị uốn cong dần, độ cao của nó giảm dần. Prôfin bị san phẳng đồng thời với sự giảm của biên độ của nó, điều đó có nghĩa là sóng tắt dần.



Hình 80

Từ điều nói trên, thấy rõ là các gián đoạn cuối cùng phải được tạo thành trong mọi sóng đơn giản bao gồm các phần trong đó mật độ giảm theo chiều lan truyền của sóng. Trường hợp duy nhất hoàn toàn không có sự tạo thành các gián đoạn là trường hợp của sóng, trong đó mật độ tăng đơn điệu theo chiều lan truyền trên toàn bộ phạm vi của nó (một sóng như thế chẳng hạn là sóng được tạo thành khi người ta kéo pittông ra từ một ống vô hạn chứa đầy khí; xem các bài tập của tiết này).

Mặc dù sau khi gián đoạn được tạo thành, sóng không còn là sóng đơn giản nữa, nhưng chính thời điểm và nơi tạo thành của gián đoạn có

thể được xác định một cách giải tích. Theo quan điểm toán học, ta đã nhận thấy rằng sự xuất hiện của các gián đoạn có liên hệ với sự kiện là, trong sóng đơn giản p, ρ, v với tính cách là các hàm của x (với t đã cho) trở nên các hàm đa trị của x đối với các t lớn hơn một giá trị xác định t_0 nào đó, trong khi đó với $t < t_0$ các hàm này là đơn trị. Thời điểm t_0 là thời điểm tạo thành gián đoạn. Ngay từ những nhận định thuần túy hình học, đã thấy rõ rằng chính tại thời điểm t_0 đường cong phụ thuộc của v vào x chẳng hạn phải trở nên thẳng đứng tại một điểm $x = x_0$ nào đó, đó chính là điểm, mà tại lân cận đó hàm về sau trở nên đa trị. Về mặt giải tích, điều đó có nghĩa là đạo hàm $(\partial v/\partial t)_t$ trở nên vô hạn, hay ngược lại $(\partial x/\partial v)_t$ triệt tiêu. Cũng thấy rõ rằng, tại thời điểm t_0 đường cong $v = v(x)$ phải ở hai bên đường tiếp tuyến thẳng đứng, nếu không sự phụ thuộc $v(x)$ sẽ là đa trị ngay tại thời điểm ấy. Nói một cách khác $x = x_0$ phải không là một điểm cực trị của $x(v)$, mà là một điểm uốn, do đó cả đạo hàm cấp hai $(\partial^2 x/\partial v^2)_t$ cũng phải triệt tiêu. Như vậy, vị trí và thời điểm tạo thành sóng va chạm đều được xác định bởi nghiệm đồng thời của hai phương trình:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_t = 0. \tag{101-12}$$

Đối với một polytropic, các phương trình đó có dạng:

$$t = -\frac{2}{\gamma + 1} f'(v), \qquad f''(v) = 0, \tag{101-13}$$

trong đó, $f(v)$ là hàm xuất hiện trong nghiệm tổng quát (101-8).

Các điều kiện này cần phải được thay đổi, nếu sóng đơn giản kề sát với khí đứng yên và sóng va chạm xuất hiện đúng trên biên giới đó. Cả ở đây vào lúc xuất hiện va chạm đường cong $v = v(x)$ phải trở nên thẳng đứng, nghĩa là đạo hàm $(\partial x/\partial v)_t$ phải triệt tiêu. Nhưng đạo hàm cấp hai không nhất thiết bằng không; điều kiện thứ hai ở đây đơn giản là điều kiện đòi hỏi vận tốc phải bằng không tại biên giới của khí đứng yên, do đó ta có điều kiện

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_t \Bigg|_{v=0} = 0.$$

Từ điều kiện đó, vị trí và thời điểm tạo thành gián đoạn có thể thu được dưới dạng tường minh. Lấy đạo hàm biểu thức (101-5), ta được:

$$t = -\frac{f'(0)}{\alpha_o}, \qquad x = \pm c_o t + f(0), \tag{101-14}$$

trong đó α_o khi $v = 0$ của đại lượng α được cho bởi công thức (101-2). Đối với một khí polytropic

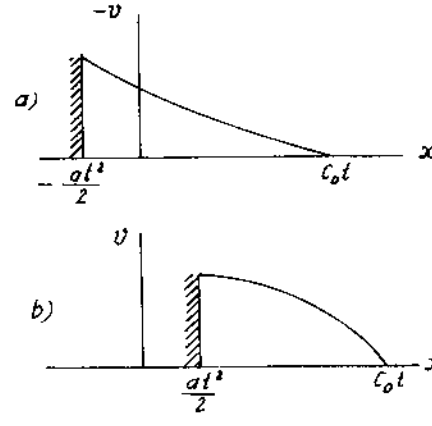
$$t = -\frac{2f'(0)}{\gamma + 1}. \tag{101-15}$$

BÀI TẬP

1. Chất khí ở trong ống hình trụ vô hạn ở một đầu ($x > 0$) và đóng kín ở đầu kia ($x = 0$) bởi một pittông. Tại thời điểm $t = 0$, pittông bắt đầu chuyển động gia tốc đều với vận tốc $U = \pm at$. Xác định chuyển động xuất hiện của khí (coi khí là polytropic).

Giải. Nếu pittông được kéo ra khỏi ống ($U = -at$), thì sẽ hình thành một sóng dãn đơn giản, mà mặt đầu sóng trước của nó lan truyền sang phải với vận tốc c_o ở trong khí đứng yên; trong miền $x > c_o t$ khí đứng yên. Ở trên mặt của pittông, vận tốc của khí phải trùng với vận tốc của pittông, nghĩa là phải có $v = -at$ với $x = -at^2/2$, $t > 0$. Đối với hàm $f(v)$ ở trong (101-8) điều kiện này cho:

$$f(-at) = -c_o t + \frac{\gamma a t^2}{2}.$$



Hình 81

Do đó, ta có:

$$x - \left(c_o + \frac{\gamma + 1}{2} v\right) t = f(v) = \frac{c_o}{a} v + \frac{\gamma}{2a} v^2,$$

từ đó

$$-v = \frac{1}{\gamma}\left(c_o + \frac{\gamma + 1}{2} at\right) - \frac{1}{\gamma}\left[\left(c_o + \frac{\gamma + 1}{2} at\right)^2 - 2a\gamma(c_o t - x)\right]^{1/2}. \tag{1}$$

Công thức này xác định sự biến thiên của vận tốc ở trong miền nằm giữa pittông và mặt đầu sóng trước $x = c_0 t$ (hình 81a) trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 2c_0/(\gamma - 1)a$. Vận tốc của khí tại mọi nơi đều hướng sang trái, theo chiều chuyển động của pittông và giá trị tuyệt đối của nó giảm đơn điệu theo chiều dương của trục x; mật độ và áp suất cũng tăng đơn điệu theo cùng chiều đó. Với $t > 2c_0/(\gamma - 1)a$ bất đẳng thức (101-10) không còn đúng cho vận tốc của pittông, do đó khí không thể chuyển động cùng với nó. Một miền chân không xuất hiện giữa pittông và khí, bên ngoài miền này vận tốc của khí thay đổi theo công thức (1) từ $-2c_0/(\gamma - 1)$ đến giá trị không.

Nếu pittông vào sâu trong ống dẫn ($U = at$) thì một sóng nén đơn giản sẽ xuất hiện; nghiệm tương ứng sẽ thu được một cách đơn giản bằng cách đổi dấu của a ở trong công thức (1) (hình 81b). Nhưng nó chỉ được áp dụng cho tới khi sóng va chạm được tạo thành; thời điểm này được xác định bởi công thức (101-15) và bằng

$$t = \frac{2c_0}{a(\gamma + 1)}.$$

2. Cũng bài toán trên khi định luật chuyển động của pittông là tùy ý.

Giải. Giải sử rằng tại thời điểm $t = 0$ pittông bắt đầu chuyển động theo định luật $x = X(t)$ (với $X(0) = 0$); vận tốc của nó $U = X'(t)$. Điều kiện biên ở trên pittông ($v = U$ với $x = X$) cho ta

$$v = X'(t), \qquad f(v) = X(t) - t\left[c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X'(t)\right]. \tag{1}$$

Nếu bây giờ ta coi rằng t là một thông số, thì hai phương trình đó sẽ xác định hàm $f(v)$ dưới dạng thông số. Sau đây, nếu ký hiệu thông số này bằng τ, thì có thể viết nghiệm cuối cùng dưới dạng

$$v = X'(\tau)$$

$$x = X(\tau) + (t - \tau)\left[c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} X'(\tau)\right], \tag{2}$$

nghiệm này xác định dưới dạng thông số hàm $v(t,x)$ cần tìm trong sóng đơn giản xuất hiện khi pittông chuyển động.

3. Xác định thời điểm và vị trí tạo thành của sóng va chạm, khi chuyển động của pittông tuân theo định luật $U = at^n$, $n > 0$.

Giải. Nếu $a < 0$, nghĩa là nếu pittông được kéo ra khỏi ống, thì một sóng dãn đơn giản xuất hiện, trong đó các sóng va chạm hoàn toàn không được tạo thành. Sau đây giả sử $a > 0$, nghĩa là pittông đi vào trong ống và tạo ra trong đó sóng nén đơn giản.

Khi hàm $v(x,t)$ được cho bởi các công thức dưới dạng thông số (2) với

$$X = \frac{a}{n+1}\tau^{n+1},$$

thì thời điểm và vị trí tạo thành sóng va chạm được xác định bởi các phương trình

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)_t = -c_o + t\tau^{n-1}an\frac{\gamma+1}{2} - \frac{a\tau^n}{2}\left[\gamma - 1 + n(\gamma+1)\right] = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2}\right)_t = t\tau^{n-2}an(n-1)\frac{\gamma+1}{2} - \frac{an}{2}\tau^{n-1}\left[\gamma - 1 + n(\gamma+1)\right] = 0, \quad (3)$$

trong đó phương trình thứ hai cần được thay thế đơn giản bằng đẳng thức $\tau = 0$, nếu ta xét sự tạo thành của gián đoạn tại mặt đầu sóng trước đơn giản.

Với $n = 1$, ta tìm được:

$$\tau = 0, \qquad t = \frac{2c_o}{(\gamma+1)a},$$

nghĩa là sóng va chạm được tạo thành tại mặt đầu sóng trước sau một khoảng thời gian hữu hạn sau khi chuyển động bắt đầu, phù hợp với kết quả của bài tập 1.

Với $n < 1$ đạo hàm $(\partial x/\partial\tau)_t$, với tính cách là hàm của τ đan dấu (do đó, với t đã cho, $v(x)$ là một hàm đa trị) ngay với mọi $t > 0$. Điều đó có nghĩa là, sóng va chạm được tạo thành trên pittông ngay khi nó bắt đầu chuyển động.

Với $n > 1$ sóng va chạm xuất hiện không phải ở mặt đầu sóng trước của sóng đơn giản, mà tại một điểm trung gian nào đó xác định bởi phương trình (3). Sau khi xác định giá trị của τ và t từ (3), ta có thể dựa vào (2) để tìm vị trí tạo thành của gián đoạn. Phép tính cho ta

$$t = \left(\frac{2c_o}{a}\right)^{1/n}\frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{n+1}{n-1}\gamma + 1\right]^{(n+1)/n},$$

$$x = 2c_o\left(\frac{2c_o}{a}\right)^{1/n}\left[\frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{n-1}{n+1}\right]\frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n}\left[\gamma - 1 + n(\gamma+1)\right]^{1/n}}.$$

4. Một sóng phẳng biên độ nhỏ (âm), xác định các giá trị trung bình theo thời gian của các đại lượng trong phép gần đúng toàn phương theo biên độ. Sóng được phát ra bởi pittông dao động theo một định luật nào đó $x = X(t)$, $U = X'(t)$, thêm vào đó $X(0) = 0$, $\overline{X} = 0$, $\overline{U} = (0)$ [1].

Giải. Xuất phát từ nghiệm chính xác (101-9), sau khi viết nó dưới dạng tương đương, với việc chọn đối số khác:

$$v = F\left(t - \frac{x}{u}\right), \qquad u = c_o + \alpha_o v \quad (4)$$

[1] Khi giải bài toán này chúng tôi dựa theo *L.A. Oxtrovxki* (1968).

trong đó $\alpha = (\gamma + 1)/2$, hay $v = F(\xi)$, trong đó biến ξ được xác định dưới dạng ẩn bởi phương trình [1]

$$\xi = t - \frac{x}{u(\xi)}. \tag{5}$$

Ta chứng minh rằng, nếu tính với độ chính xác đến các đại lượng bậc hai thì việc lấy trung bình theo t tương đương với việc lấy trung bình theo ξ. Với x đã cho, ta có

$$dt = d\xi\left(1 - \frac{x}{u^2}\frac{du}{d\xi}\right) \approx d\xi\left(1 - \frac{x\alpha_o}{c_o^2}\frac{dv}{d\xi}\right)$$

(trong mẫu số u^2 có thể bỏ qua đại lượng nhỏ $u << c_o$; hiệu ứng cần tìm có liên quan đến các biến dạng phi tuyến tích lũy lại của prôfin, thu được do việc giải phương trình (4) đối với v). Do đó

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[F - \frac{x\alpha_o}{c_o^2}F\frac{dF}{d\xi}\right]d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F d\xi - \frac{x\alpha_o}{c_o^2}\left[F^2(\xi_2) - F^2(\xi_1)\right].$$

Số hạng thứ hai bao giờ cũng hữu hạn và không đóng góp gì trong việc lấy trung bình theo khoảng thời gian lớn. Nếu để ý rằng

$$\xi_2 - \xi_1 \approx t_2 - t_1 + \frac{x\alpha_o}{c_o^2}(v_2 - v_1) \approx t_2 - t_1,$$

ta sẽ đi tới kết quả đòi hỏi $\overline{v}^t = \overline{v}^\xi$, trong đó chỉ số ở cạnh gạch ngang nêu lên biến số, theo đó tiến hành lấy trung bình (dưới đây chỉ số được bỏ đi); có nhận xét là, giá trị trung bình (theo t) không phụ thuộc vào x. Đối với bài toán về pittông dao động hàm $F(\xi)$ được xác định bởi phương trình (2), mà ta có thể viết lại dưới dạng

$$v(\tau) = X'(\tau), \qquad \tau = \xi + \frac{X(\tau)}{u(\tau)}$$

hay, do các biên độ dao động nhỏ

$$\tau \approx \xi + \frac{1}{c_o}X(\xi), \quad v(\tau) \approx U(\xi) + \frac{1}{c_o}X(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}.$$

Lấy trung bình phương trình trên, ta viết được

$$\overline{v} = \frac{1}{c_o}\overline{X\frac{dU}{d\xi}} = \frac{1}{c_o}\overline{\frac{d(XU)}{d\xi}} - \frac{1}{c_o}\overline{U^2}$$

---

[1] Đối với sóng biên độ nhỏ, nghiệm (4) đúng đối với cả khí bất kỳ (không polytropic), nếu xác định α_o theo (102-2).

và vì giá trị trung bình của đạo hàm toàn phần bằng không nên cuối cùng ta có:

$$\bar{v} = -\frac{\overline{U^2}}{c_o}. \tag{6}$$

Với cùng độ chính xác, ta lấy trung bình theo thời gian mật độ dòng của chất:

$$\overline{\rho v} = \rho_o \bar{v} + \overline{\rho' v} = \rho_o \bar{v} + \frac{\rho_o}{c_o}\overline{v^2}.$$

Dùng (6) và bất đẳng thức (trong cùng phép gần đúng) $\overline{v^2} = \overline{U^2}$, ta tìm được rằng $\overline{\rho v} = 0$; đúng phải như vậy (do định luật bảo toàn chất) trong trường hợp một chiều thuần túy, khi không có sự rò chất "từ bên cạnh". Đối với mật độ năng thông trung bình ta có:

$$\bar{q} = \overline{\rho w v} = w_o \overline{\rho v} + \rho_o \overline{w' v} = \overline{p' v} = \rho_o c_o \overline{v^2}$$

(so sánh với §65) và cuối cùng $\bar{q} = \rho_o c_o \overline{U^2}$.

Để tính $\overline{p'}$ và $\overline{\rho'}$ cần biểu diễn p' và ρ' qua v với độ chính xác đến các số hạng $\sim v^2$. Từ (101-7) (hay từ (101-4) và (101-6) cho không phải khí polytropic), ta thu được:

$$\frac{\rho'}{\rho_o} = \frac{v}{c_o} + \frac{2-\alpha}{2c_o^2}v^2, \qquad p' = c^2\rho' + (\alpha - 1)\rho_o v^2$$

và sau khi lấy trung bình [1)]

$$\overline{\rho'} = -\frac{\alpha\rho_o}{2c_o^2}\overline{U^2}, \quad \overline{p'} = -\frac{2-\alpha}{2}\rho_o\overline{U^2}. \tag{7}$$

Chú ý rằng $\overline{p'}$ ở đây khác không ngay trong phép gần đúng toàn phương – xem cuối §65.

§102. SỰ TẠO THÀNH CÁC GIÁN ĐOẠN TRONG SÓNG ÂM

Một sóng âm chạy phẳng, là nghiệm chính xác của các phương trình chuyển động, cũng biểu diễn một sóng đơn giản. Ta có thể dùng các kết quả tổng quát rút ra trong tiết trước để giải thích một số tính chất của sóng âm biên độ yếu trong phép gần đúng bậc hai (phép gần đúng bậc

[1)] Với các giả thiết hạn chế hơn các công thức (7) đã được *A. Eikhenvald* tìm ra (1932).

một được hiểu là tương ứng với phương trình sóng tuyến tính thông thường).

Trước hết, có nhận xét là, trong thời gian đủ lớn, một gián đoạn phải xuất hiện trong sóng âm trong khoảng mỗi chu kỳ của nó. Hiệu ứng này sau đó dẫn đến một sự tắt rất nhanh của sóng, như đã được giải thích ở §101. Dĩ nhiên, thực tế điều đó chỉ xảy ra cho một sóng đủ mạnh; trong trường hợp ngược lại sóng âm sẽ kịp bị hấp thụ do có hiệu ứng thông thường của độ nhớt và tính dẫn nhiệt của khí trước khi các hiệu ứng cấp cao theo biên độ kịp phát triển trong sóng.

Hiệu ứng làm biến dạng prôfin sóng cũng thể hiện dưới dạng một khía cạnh khác. Nếu tại một thời điểm nào đó sóng là thuần túy điều hòa, thì nó sẽ không còn như thế tại những thời điểm sau, do có sự thay đổi hình dạng prôfin của nó, tuy nhiên chuyển động vẫn là tuần hoàn với chu kỳ như cũ. Trong khai triển của sóng này thành chuỗi Furier, ngoài số hạng với tần số cơ bản ω, bây giờ còn có các số hạng với những tần số bội $n\omega$ (n là các số nguyên). Như vậy, sự biến dạng của prôfin trong khi sóng âm lan truyền có thể được cảm nhận như sự xuất hiện ở trong sóng đó cả các họa âm cao ngoài âm cơ bản.

Vận tốc dịch chuyển u của các điểm trong prôfin sóng (sóng lan truyền theo chiều dương của trục x) thu được trong phép tính gần đúng bậc một, nếu trong (101-11) ta đặt $v = 0$, nghĩa là $u = c_0$, kết quả này tương ứng với sự lan truyền của sóng không có sự biến dạng của prôfin. Trong phép gần đúng tiếp theo, ta có:

$$u = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0}\rho' = c_0 + \frac{\partial u}{\partial \rho_0}\frac{\rho_0}{c_0}v,$$

hay dựa vào biểu thức (99-10) cho đạo hàm $\partial u/\partial \rho$:

$$u = c_0 + \alpha_0 v, \tag{102-1}$$

trong đó, để ngắn gọn, ta đưa vào ký hiệu [1)]

$$\alpha = \frac{c^4}{2V^3}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{102-2}$$

[1)] Trong bài tập 1 ở §93, đại lượng này được ký hiệu là α_v.

Đối với các khí polytropic, $\alpha = (\gamma + 1)/2$ và công thức (102-1) trùng với công thức chính xác (xem (101-8)) cho vận tốc u.

Trong trường hợp tổng quát của biên độ tùy ý, sóng không còn là sóng đơn giản nữa sau khi có xuất hiện các gián đoạn ở trong sóng. Tuy nhiên, điều quan trọng là, một sóng có biên độ nhỏ vẫn còn là một sóng đơn giản trong phép gần đúng bậc hai cả khi có các gián đoạn. Có thể thấy được điều đó như sau. Các độ biến thiên của vận tốc, áp suất và thể tích riêng trong sóng va chạm liên hệ với nhau bằng hệ thức

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}.$$

Sự biến thiên của vận tốc v trong sóng đơn giản dọc theo một đoạn nào đó của trục x bằng tích phân

$$v_1 - v_2 = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{-\frac{\partial V}{\partial p}}\, dp.$$

Phép tính đơn giản dựa vào khai triển theo chuỗi chứng tỏ rằng, hai biểu thức đã viết chỉ khác nhau ở các số hạng bậc ba (khi tính toán, cần nhớ rằng độ biến thiên của entrôpi trong gián đoạn là một đại lượng nhỏ bậc ba và trong sóng đơn giản entrôpi không đổi). Từ đó suy ra rằng, với độ chính xác đến các số hạng bậc hai sóng âm vẫn còn là đơn giản ở hai bên của gián đoạn đã hình thành trong nó, và trên chính gián đoạn một điều kiện biên thích hợp sẽ được thực hiện. Trong các phép gần đúng cao hơn, điều đó không còn đúng nữa, vì có sự xuất hiện các sóng phản xạ từ trên mặt các sóng gián đoạn.

Bây giờ, ta rút ra điều kiện để có thể xác định vị trí các gián đoạn trong sóng âm chạy (bao giờ cũng ở trong phép gần đúng bậc hai này). Gọi u là vận tốc chuyển động của gián đoạn (đối với hệ tọa độ đứng yên), còn v_1, v_2 là vận tốc của khí ở hai bên của nó. Khi đó điều kiện đòi hỏi dòng chất phải liên tục có dạng:

$$\rho_1(v_1 - u) = \rho_2(v_2 - u),$$

từ đó

$$u = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Với độ chính xác đến các số hạng bậc hai, đại lượng này bằng giá trị của đạo hàm $d(\rho v)/d\rho$ lấy tại điểm mà ở đó đối số v có giá trị bằng nửa tổng $v = (v_1 + v_2)/2$. Nhưng vì ở trong sóng đơn giản $d(\rho v)/d\rho = v + c$, nên theo (102-1), ta có

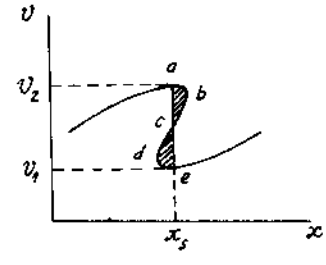
$$u = c_0 + \alpha_0 \frac{v_1 + v_2}{2}. \qquad (102\text{-}3)$$

Từ đó có thể rút ra điều kiện hình học đơn giản sau đây để xác định vị trí sóng va chạm. Đường cong trên hình 82 biểu diễn prôfin phân bố các vận tốc tương ứng với sóng đơn giản và đoạn *ae* biểu diễn gián đoạn được tạo thành ở trong sóng (x_s là tọa độ của nó). Hiệu các diện tích gạch gạch *abc* và *cde* được cho bởi tích phân

$$\int_{v_1}^{v_2} (x - x_s)dv,$$

lấy theo đường cong *abcde*. Với thời gian prôfin của sóng dịch chuyển; ta tính đạo hàm của tích phân này theo thời gian. Vì vận tốc *dx/dt* của các điểm trong prôfin của sóng được xác định bởi công thức (102-1) còn vận tốc *dx/dt* của gián đoạn được xác định bởi công thức (102-3), nên ta thu được:

$$\frac{d}{dt}\int_{v_1}^{v_2}(x - x_s)dv = \alpha\left[\int_{v_1}^{v_2} v dv - \frac{v_1 + v_2}{2}\int_{v_1}^{v_2} dv\right] = 0$$



Hình 82

(Khi lấy đạo hàm tích phân, cần chú ý rằng, mặc dù chính các giới hạn của tích phân v_1 và v_2 cũng thay đổi với thời gian, nhưng giá trị của $x - x_s$ tại các giới hạn này bao giờ cũng bằng không, do đó chỉ cần lấy đạo hàm dưới dấu lấy tích phân).

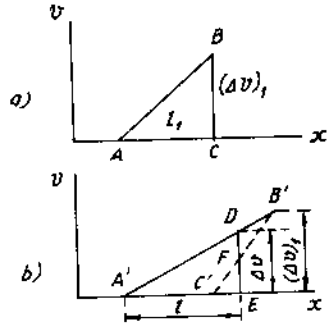
Như vậy, tích phân $\int(x - x_s)dv$ không đổi theo thời gian. Và vì nó bằng không tại thời điểm ban đầu khi sóng va chạm xuất hiện (các điểm *a* và *e* trùng nhau), nên bao giờ cũng có

$$\int_{abcde}(x - x_s)dv = 0. \qquad (102\text{-}4)$$

Về mặt hình học, điều đó có nghĩa là, diện tích *abc* bằng diện tích *cde*. Điều kiện này xác định vị trí của gián đoạn.

Sự tạo thành các gián đoạn trong sóng âm là thí dụ cho sự xuất hiện tự phát của các sóng va chạm khi không có bất kỳ những kỳ dị nào trong các điều kiện bên ngoài của chuyển động. Cần nhấn mạnh rằng, mặc dù sóng va chạm có thể xuất hiện tự phát tại một thời điểm gián đoạn nào đó, nhưng nó vẫn không thể biến mất một cách gián đoạn như thế. Một khi đã xuất hiện, sóng va chạm chỉ tắt đi một cách tiệm cận khi tăng thời gian vô hạn.

Chúng ta xét một xung lượng âm nén đơn độc một chiều của khí, trong đó một sóng va chạm đã kịp được tạo thành, và theo dõi xem sự tắt cuối cùng của sóng này tuân theo định luật nào. Trong các giai đoạn sau của quá trình lan truyền, xung lượng âm với sóng va chạm sẽ có một prôfin vận tốc tam giác, – prôfin tuyến tính trong sự biến dạng tiếp theo của nó vẫn là tuyến tính [1].



Hình 83

Giả sử rằng, tại một thời điểm nào đó (mà ta chọn làm thời điểm $t = 0$), prôfin được biểu diễn bằng tam giác ABC (hình 83a) (giá trị của các đại lượng xét tại thời điểm này sẽ được phân biệt bằng chỉ số 1) [2]. Nếu dịch chuyển các điểm của prôfin này với các vận tốc (102-1), ta sẽ thu được trong khoảng thời gian t một

---

[1] Ở đây và dưới đây ta nói đến prôfin phân bố vận tốc v – chỉ có ý nói sự đơn giản cách viết các công thức. Thực tế đại lượng lý thú hơn là áp suất dư p', chỉ khác v ở thừa số không đổi: $p' = v/\rho_0 c_0$; các kết quả như thế cũng được xét cho đại lượng này. Có nhận xét là, dấu của v trùng với dấu của p', do đó $v > 0$ tương ứng với sự nén, còn $v < 0$ tương ứng với sự dãn. Vận tốc dịch chuyển các điểm của prôfin được biểu diễn qua p' bằng công thức

$$u = c_0(1 + \nu_0 p'/p_0), \nu = \alpha p/\rho c^2$$

(đối với khí polytropic $\gamma = (\gamma + 1)/2\gamma$).

[2] Còn chỉ số 0 để phân biệt giá trị cân bằng của các đại lượng, dưới đây các chỉ số này sẽ bỏ đi.

prôfin có dạng $A'B'C'$ (hình 83b). Thực tế, gián đoạn chuyển đến điểm E, và prôfin thực sẽ là $A'DE$. Các diện tích $DB'F$ và $C'FE$ đều bằng nhau theo (102-4); do đó diện tích $A'DE$ của prôfin mới bằng diện tích ABC của prôfin ban đầu. Gọi l là độ dài của xung lượng âm tại thời điểm t, còn Δv là bước nhảy của vận tốc trong sóng va chạm. Trong thời gian t điểm B đi trước điểm C một đoạn $\alpha t(\Delta v)_1$; tg của góc $B'A'C'$ có giá trị bằng $\Delta v_1/[l_1 + \alpha t(\Delta v)_1]$ và ta thu được đẳng thức giữa các din tích ABC và $A'DE$ dưới dạng

$$l_1(\Delta v)_1 = \frac{l^2(\Delta v)_1}{l_1 + \alpha t(\Delta v)_1},$$

từ đó

$$l = l_1\left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1}t\right]^{1/2}, \quad \Delta v = (\Delta v)_1\left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1}t\right]^{-1/2}. \qquad (102\text{-}5)$$

Năng lượng toàn phần của xung lượng âm chạy (tính cho một đơn vị diện tích mặt đầu sóng của nó) bằng:

$$E = \rho\int v^2 dx = E_1\left[1 + \frac{\alpha(\Delta v)_1}{l_1}t\right]^{-1/2}. \qquad (102\text{-}6)$$

Khi $t \to \infty$ độ lớn bước nhảy trong sóng va chạm và năng lượng của nó tắt tiệm cận với thời gian như $t^{-1/2}$ (hay như $x^{-1/2}$ theo khoảng cách $x = ct$). Còn độ dài xung lượng tăng như $t^{1/2}$. Cũng cần lưu ý rằng, giá trị giới hạn của góc nghiêng của prôfin $\Delta v/l \to 1/\alpha t$ không phụ thuộc vào độ lớn bước nhảy cũng như độ dài xung lượng.

Bây giờ ta khảo sát các tính chất giới hạn (tại các khoảng cách lớn tính từ nguồn) của các sóng va chạm được tạo thành trong các sóng âm trụ và cầu (*L.Đ.Landau,* 1945). Ta bắt đầu từ trường hợp hình trụ.

Tại các khoảng cách r đủ lớn tính từ trục một sóng như thế có thể được coi là phẳng trong mỗi phần tử nhỏ của nó. Vận tốc dịch chuyển của mỗi điểm prôfin sóng khi đó được xác định bởi (102-1). Tuy nhiên, nếu chúng ta muốn dựa vào công thức này để theo dõi sự dịch chuyển của một điểm của prôfin sóng trong những khoảng thời gian lớn, thì cần phải xét đến một sự kiện là biên độ của sóng trụ trong phép gần đúng bậc một đã giảm tỷ lệ nghịch với khoảng cách r như $r^{-1/2}$. Điều đó có nghĩa là, đối với mỗi

điểm đã cho của prôfin v sẽ không là không đổi (như đối với sóng phẳng), mà giảm như $r^{-1/2}$. Nếu v_1 là giá trị của v (đối với một điểm đã cho của prôfin) tại khoảng cách r_1 (lớn), có thể viết $v = v_1(r_1/r)^{1/2}$. Như vậy, đối với vận tốc u của các điểm trong prôfin sóng, ta có:

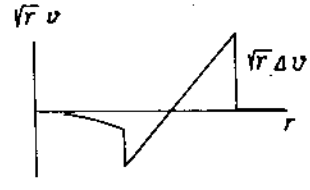
$$u = c + \alpha v_1 \sqrt{\frac{r_1}{r}}. \qquad (102\text{-}7)$$

Số hạng thứ nhất là vận tốc thông thường của âm và tương ứng với sự dịch chuyển của sóng "không có sự biến dạng của prôfin" (bỏ qua sự giảm của biên độ như $r^{-1/2}$, nghĩa là prôfin được hiểu là sự phân bố đại lượng $v\sqrt{r}$). Số hạng thứ hai dẫn đến sự biến dạng của prôfin. Độ lớn δr của sự dịch chuyển phụ này của các điểm trong prôfin trong khoảng thời gian $t = (r - r_1)c$ thu được bằng cách lấy tích phân theo dr/c:

$$\delta r = 2\alpha \frac{v_1}{c} \sqrt{r_1}\left(\sqrt{r} - \sqrt{r_1}\right). \qquad (102\text{-}8)$$

Sự biến dạng của prôfin sóng trụ tăng chậm hơn so với sóng phẳng (ở đây độ dịch chuyển δx tăng tỷ lệ với chính khoảng cách x mà sóng đã vượt qua). Nhưng ở đây, dĩ nhiên độ dịch chuyển của prôfin sóng cuối cùng sẽ dẫn tới sự tạo thành các gián đoạn. Ta khảo sát các sóng va chạm được tạo thành trong một xung lượng âm trụ đơn độc ở cách nguồn (trục) đủ xa.

Trường hợp trụ khác căn bản so với trường hợp phẳng trước hết do bởi sự kiện là, một xung lượng đơn độc không thể gồm chỉ có sự nén hay sự dãn; nếu sau mặt đầu sóng trước của xung âm là miền nén, thì sau miền nén sẽ là miền dãn nở (xem §71) [1]. Điểm dãn cực đại sẽ tụt lại phía sau so với các điểm nằm ở sau nó, kết quả là chính ở đây xuất hiện sự đảo prôfin và xuất hiện gián đoạn. Như vậy, trong xung âm trụ có tạo thành hai sóng va chạm. Trong gián



Hình 84

[1] Ta có ý nói đến chính một giả thiết như thế. Đặc biệt nó tương ứng với việc ứng dụng các kết quả đã trình bày cho các sóng va chạm, xuất hiện trong chuyển động vượt âm của một vật hữu hạn (§122).

đoạn phía trước vận tốc tăng bằng bước nhảy từ giá trị không, sau đó tiếp đến miền nén giảm dần, được thay bằng miền dãn, sau đó áp suất lại tăng bằng bước nhảy trong gián đoạn thứ hai. Nhưng xung âm trụ còn đặc thù (so với các trường hợp phẳng cũng như trường hợp cầu) ở một khía cạnh khác, đó là nó không thể có mặt đầu sóng sau – vận tốc v chỉ tiến tiệm cận đến không. Điều này dẫn đến kết quả là, trong gián đoạn sau v không tăng đến không, mà chỉ đến một giá trị hữu hạn (âm) nào đó và chỉ sau đó mới tiến tiệm cận đến không. Kết quả là xuất hiện prôfin có dạng biểu diễn trên hình 84.

Định luật giới hạn, theo đó cuối cùng xảy ra sự tắt của các sóng va chạm với thời gian (hay với khoảng cách r tính từ trục x cũng vậy), có thể tìm được tương tự như đã được tiến hành ở trên cho trường hợp phẳng. Từ kết luận rút ra ở đây, ta thấy rằng định luật giới hạn tương ứng với thời gian, khi độ dịch chuyển δr của điểm trên của prôfin trở nên lớn hơn so với bề rộng l_1 "ban đầu" của xung lượng (được hiểu chẳng hạn là khoảng cách từ gián đoạn phía trước đến điểm có $v = 0$). Độ dịch chuyển này trên đường từ r_1 đến $r << r_1$ bằng

$$\delta r \approx \frac{2\alpha}{c}(\Delta v)_1 \sqrt{r_1 r},$$

trong đó $(\Delta v)_1$ là bước nhảy "ban đầu" (tại khoảng cách r_1) ở trên gián đoạn phía trước. Khi đó tang "hữu hạn" của góc nghiêng của phần prôfin tuyến tính giữa các gián đoạn sẽ bằng $\approx \sqrt{r_1}(\Delta v)_1 / \delta r \approx c / 2\alpha\sqrt{r}$. Điều kiện diện tích prôfin không đổi cho ta

$$l_1 \sqrt{r_1}(\Delta v)_1 = \frac{l^2 c}{\alpha\sqrt{r}},$$

từ đó $l \sim r^{1/4}$ (thay cho định luật $l \sim x^{1/2}$ trong trường hợp phẳng). Định luật giới hạn giảm bước nhảy Δv trong gián đoạn phía trước thu được sau đó từ $l\sqrt{r}\,\Delta v = \text{const}$, nghĩa là

$$\Delta v \sim r^{-3/4} \qquad (102\text{-}9)$$

Cuối cùng ta khảo sát trường hợp cầu[1]. Sự giảm chung biên độ của sóng

[1] Chẳng hạn nói về sóng va chạm xuất hiện trong vụ nổ và được khảo sát tại các khoảng cách xa đối với nguồn.

cầu phân kỳ xảy ra như $1/r$ (trong đó bây giờ r là khoảng cách tính từ tâm). Lặp lại tất cả những lập luận đã trình bày trên cho trường hợp trụ, ta thu được cho vận tốc dịch chuyển các điểm của prôfin sóng

$$u = c + \frac{\alpha v_1 r_1}{r}, \tag{102-10}$$

sau đó tìm được độ dịch chuyển δr của điểm prôfin trên đường từ r_1 đến r:

$$\delta r = \frac{\alpha v_1 r_1}{c} \ln \frac{r}{r_1}. \tag{102-11}$$

Ta nhận thấy rằng, sự biến dạng của prôfin sóng cầu chỉ tăng theo khoảng cách theo định luật loga – chậm hơn nhiều so với trường hợp phẳng và thậm chí so với trường hợp trụ.

Sự lan truyền của xung âm nén cầu, giống như trong trường hợp trụ, phải kéo theo sự dãn tiếp sau sự nén (xem §70). Do đó cả ở đây cũng phải hình thành hai gián đoạn (xung đơn độc cầu, tuy nhiên, có thể có mặt đầu sóng sau và khi đó trong gián đoạn thứ hai v tăng bằng bước nhảy ngay đến không) [1]. Bằng cùng phương pháp ta tìm được các định luật giới hạn tăng độ dài xung lượng và giảm cường độ sóng va chạm:

$$l \sim \sqrt{\ln \frac{r}{a}}, \quad \Delta v \sim \frac{1}{r\sqrt{\ln(r/a)}} \tag{102-12}$$

trong đó a là một hằng số nào đó có thứ nguyên độ dài [2].

BÀI TẬP

1. Tại thời điểm ban đầu prôfin của sóng gồm một chuỗi vô hạn các "răng" biểu

---

[1] Vì thực tế trong khí bao giờ cũng xảy ra sự hấp thụ âm thông thường, gây bởi tính dẫn nhiệt và tính nhớt, cho nên do sự biến dạng chậm của sóng cầu nó có thể bị hấp thụ trước khi các gián đoạn kịp hình thành.

[2] Hằng số này nói chung không trùng với r_1. Vấn đề là ở chỗ, acgumen của lôga phải không có thứ nguyên, và do đó với $r >> r_1$ không thể đơn giản bỏ qua $\ln r_1$ ở trong (102-11). Còn định nghĩa của hệ số r trong lôga lớn đòi hỏi phải xét chính xác hơn dạng ban đầu của prôfin.

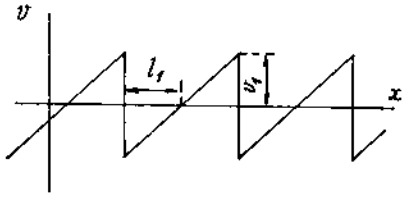
diễn trên hình 85 [1]. Xác định sự biến thiên của prôfin và năng lượng của sóng theo thời gian.

Giải. Hiển nhiên biết trước rằng, tại các thời điểm t tiếp sau prôfin sóng sẽ gồm những răng có cùng dạng, cùng độ dài l_0 nhưng với độ cao thấp hơn v_t. Ta xét một trong các răng đó: tại thời điểm $t = 0$, hoành độ của điểm prôfin có $v = v_t$, cắt phần $v_t l_1/v_1$ của đáy tam giác. Trong khoảng thời gian t, điểm này tiến được về phía trước một khoảng cách $\alpha v_t t$. Điều kiện đòi hỏi độ dài của đáy tam giác bất biến cho ta $v_t l_1/v_1 + \alpha v_t t = l_1$, từ đó

$$v_t = \frac{v_1}{1+\alpha v_1 t / l_1}.$$

Khi $t \to \infty$, biên độ của sóng tắt như $1/t$. Ta tìm được cho năng lượng

$$E = E_0\left(1+\frac{\alpha v_1 t}{l_1}\right)^{-2}.$$



Hình 85

nghĩa là năng lượng tắt như t^{-2} khi $t \to \infty$.

2. Xác định cường độ của họa âm thứ hai xuất hiện trong sóng cầu đơn sắc, gây bởi sự biến dạng prôfin của nó.

Giải. Nếu viết sóng dưới dạng $rv = A\cos(kr - \omega t)$, ta có thể xét đến sự biến dạng trong phép gần đúng bậc nhất, bằng cách thêm δr vào r trong vế hai của đẳng thức và khai triển theo các lũy thừa của δr. Dựa vào (102-11), ta có:

$$rv = A\cos(kr-\omega t) - \frac{\alpha k}{2c}A^2 \ln\frac{r}{r_1}\sin 2(kr-\omega t)$$

ở đây r_1 phải được hiểu là khoảng cách, tại đó sóng có thể còn được coi như triệt để đơn sắc với độ chính xác vừa đủ. Số hạng thứ hai ở trong công thức này xác định họa âm thứ hai trong khai triển phổ của sóng. Cường độ toàn phần I_2 của nó (lấy trung bình theo thời gian) bằng

$$I_2 = \frac{\alpha^2 k^2}{8\pi c^3 \rho}\left(\ln\frac{r}{r_1}\right)^2 I_1^2,$$

trong đó $I = 2\pi c\rho A^2$ là cường độ của họa âm đầu tiên, cơ bản.

[1] Dạng tiệm cận của prôfin sóng tuần hoàn bất kỳ là một prôfin như thế.

§103. CÁC ĐẶC TUYẾN

Định nghĩa của các đặc tuyến, đã nêu ở §82, là các đường mà dọc theo chúng các nhiễu động nhỏ lan truyền (trong phép tính gần đúng âm hình), có một ý nghĩa tổng quát, và không bị hạn chế khi đem áp dụng cho dòng chảy dừng phẳng vượt âm đã nói đến ở §82.

Đối với chuyển động không dừng một chiều, có thể đưa vào các đặc tuyến như các đường trong mặt phẳng x,t, có hệ số góc dx/dt bằng vận tốc truyền của các nhiễu động nhỏ đối với hệ tọa độ đứng yên. Các nhiễu động lan truyền đối với khí với vận tốc âm theo chiều dương hay chiều âm của trục x, chuyển động đối với hệ tọa độ đứng yên với vận tốc $v + c$ hay $v - c$. Một cách tương tự, các phương trình vi phân của hai họ đặc tuyến, mà ta qui ước gọi là các đặc tuyến C_+ và C_-, có dạng:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = v + c, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = v - c. \tag{103-1}$$

Còn các nhiễu động, được kéo đi cùng với chất khí, "lan truyền" trong mặt phẳng x, t theo các đặc tuyến của họ thứ ba C_0, đối với họ này:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v. \tag{103-2}$$

Đó đơn giản là các "đường dòng" trong mặt phẳng x, t (xem phần cuối của §82) [1].

Cần nhấn mạnh rằng, sự tồn tại của các đặc tuyến ở đây tuyệt nhiên không đòi hỏi chuyển động của khí phải là vượt âm. Tính định hướng lan truyền của các nhiễu động, biểu diễn bởi các đặc tuyến, ở đây tương ứng đơn giản với mối liên hệ nhân quả giữa chuyển động tại các thời điểm sau với chuyển động tại các thời điểm trước.

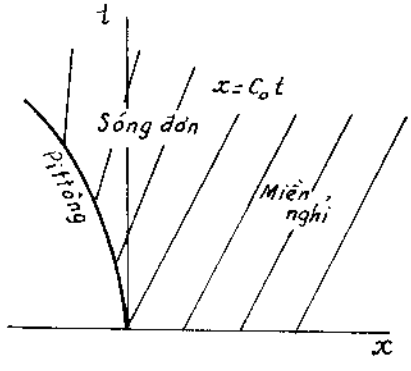
Để làm thí dụ, ta xét các đặc tuyến của một sóng đơn giản. Đối với sóng lan truyền theo chiều dương của trục x, theo (101- 5) $x = t(v + c) + f(v)$.

[1] Các đặc tuyến cho một chuyển động đối xứng cầu không dừng được xác định bằng các phương trình hoàn toàn giống với (103.1-2); chỉ cần thay thế đơn giản x bằng tọa độ cầu r (các đặc tuyến bây giờ là các đường trong mặt phẳng r, t).

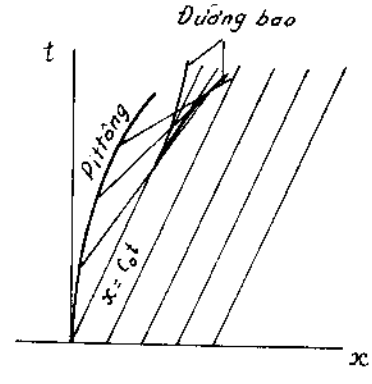
Lấy đạo hàm đẳng thức này, ta có:

$$dx = (v + c)dt + dv\left[t + tc'(v) + f'(v)\right].$$

Mặt khác, dọc theo đặc tuyến C_+ ta có $dx = (v + c)dt$; so sánh cả hai đẳng thức này, ta tìm được rằng, dọc theo đặc tuyến $dv[t + tc'(v) + f'(v)] = 0$. Biểu thức trong dấu móc vuông không thể đồng nhất bằng không, do đó phải có $dv = 0$, nghĩa là $v = \text{const}$. Như vậy, ta đi tới kết luận là, dọc theo mỗi đặc tuyến của họ C_+, vận tốc vẫn không đổi, và cùng với nó, tất cả các đại lượng còn lại cũng vậy (trong sóng lan truyền về bên trái, các đặc tuyến C_- cũng có tính chất đó). Trong tiết sau ta sẽ thấy rằng, tình hình này không thể là ngẫu nhiên, mà nó có liên hệ hữu cơ với bản chất toán học của các sóng đơn giản.



Hình 86



Hình 87

Từ tính chất này của các đặc tuyến C_+ của sóng đơn giản, có thể kết luận rằng, chúng biểu diễn một họ các đường thẳng trong mặt phẳng x, t; vận tốc có các giá trị không đổi dọc theo các đường thẳng $x = t[v + c(v)] + f(v)$ (101-5). Đặc biệt, trong sóng dãn tự đồng dạng (sóng đơn giản với $f(v) = 0$) các đường thẳng này lập thành một chùm với giao điểm chung tại gốc tọa độ trong mặt phẳng x, t. Do tính chất đó, đôi khi một sóng đơn giản tự đồng dạng được gọi là *sóng có tâm*.

Hình 86 biểu diễn họ các đặc tuyến C_+ đối với sóng dãn đơn giản tạo thành khi pittông chuyển động có gia tốc ra khỏi ống. Đó là họ các

đường thẳng phân kỳ, bắt đầu từ đường cong $x = X(t)$, biểu diễn chuyển động của pittông. Ở bên phải của đặc tuyến $x = c_0 t$ là một miền đứng yên của khí, trong đó tất cả các đặc tuyến đều song song với nhau.

Hình 87 biểu diễn hình ảnh tương tự cho một sóng nén đơn giản, được tạo thành khi đẩy pittông với gia tốc vào trong ống. Các đặc tuyến trong trường hợp này lập thành một chùm các đường thẳng hội tụ, cuối cùng chúng phải cắt nhau. Vì mỗi đặc tuyến đều có giá trị không đổi v, nên giao tuyến của chúng chứng tỏ rằng hàm $v(x, t)$ là đa trị, điều này không có ý nghĩa vật lý. Đó là cách giải thích hình học cho kết quả đã thu được, đó là: một sóng nén đơn giản không thể tồn tại vô hạn, và một sóng va chạm tất yếu phải xuất hiện trong nó. Kết quả này đã thu được bằng một con đường tương tự ở §101. Sau đây ta nêu cách giải thích hình học cho các điều kiện (101-12), là các điều kiện xác định thời điểm và vị trí tạo thành sóng va chạm. Nội dung như sau. Họ các đặc tuyến thẳng cắt nhau có một bao hình tận cùng bằng một đỉnh điểm góc (điểm góc – *cusp*, ND.) về phía các t nhỏ, chính điểm này xác định thời điểm đầu tiên xuất hiện tính đa trị. Nếu các phương trình của các đặc tuyến đều được cho dưới dạng thông số $x = x(t)$, $t = t(v)$, thì vị trí của điểm góc được xác định đúng bởi các phương trình (101-12) [1].

Bây giờ ta chứng tỏ ngắn gọn xem định nghĩa vật lý mà ta đã nêu ở trên về các đặc tuyến, là các đường mà dọc theo đó là các nhiễu động lan truyền, tương ứng như thế nào với khía cạnh thuần túy toán học của một khái niệm đã biết trong lý thuyết các phương trình vi phân đạo hàm riêng. Ta xét phương trình với các đạo hàm riêng phần có dạng

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + D = 0, \qquad (103\text{-}3)$$

đó là một phương trình tuyến tính đối với các đạo hàm riêng phần cấp hai (các hệ số A, B, C, D có thể là các hàm nào đó của các biến độc lập x, t,

[1] Toàn bộ miền ở giữa hai nhánh bao hình phủ ba lần bởi các đặc tuyến - phù hợp với tính tam trị của các đại lượng xuất hiện khi có sự đảo prôfin của sóng.

Trường hợp đặc biệt, khi sóng va chạm xuất hiện tại biên giới của miền đứng yên tương ứng với sự suy biến của một trong các nhánh của bao hình thành một đoạn của đặc tuyến $x = c_0 t$.

cũng như của hàm φ chưa biết và các đạo hàm cấp một [1] của chúng. Phương trình (103-3) thuộc loại êliptic, nếu tại mọi nơi $B^2 - AC < 0$, và thuộc loại hypecbôlic nếu $B^2 - AC > 0$. Trong trường hợp thứ hai, phương trình

$$A dt^2 - 2B dx\, dt + C dx^2 = 0, \tag{103-4}$$

hay

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \tag{103-5}$$

xác định trong mặt phẳng x, t hai họ đường cong, đó là các đặc tuyến (với nghiệm đã cho $\varphi(x, y)$ của phương trình (103-3)). Ta nêu lên rằng, nếu các hệ số A, B, C ở trong phương trình chỉ là các hàm của x, t, thì các đặc tuyến sẽ không phụ thuộc vào nghiệm cụ thể của phương trình.

Giả sử rằng dòng chảy đã cho được mô tả bởi một nghiệm $\varphi = \varphi_0(x, t)$ nào đó của phương trình (103-3) và có một nhiễu động nhỏ φ_1 được đặt lên nó. Ta sẽ giả thiết rằng, nhiễu động này thỏa mãn các điều kiện tương ứng với âm hình: nó làm thay đổi ít chuyển động (φ_1 và các đạo hàm cấp một của nó đều nhỏ), nhưng nó thay đổi nhiều trên phạm vi những khoảng cách nhỏ (các đạo hàm cấp hai của φ_1 tương đối lớn). Trong phương trình (103-3), nếu đặt $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, thì khi đó ta thu được cho φ_1 phương trình

$$A\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x\, \partial t} + C\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0,$$

trong các hệ số A, B, C của phương trình này, ta đặt $\varphi = \varphi_0$. Theo phương pháp thường dùng để chuyển từ quang học sóng sang quang học hình, ta viết φ_1 dưới dạng $\varphi_1 = ae^{i\Psi}$, hàm Ψ (gọi là êkonan) là một đại lượng lớn, và ta thu được cho Ψ phương trình

$$A\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial t} + C\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{103-6}$$

Phương trình lan truyền các tia trong âm hình thu được bằng cách cho dx/dt bằng vận tốc nhóm

[1] Đối với chuyển động không dừng một chiều, thế vận tốc thỏa mãn một phương trình có dạng như thế.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk},$$

trong đó

$$k = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Lấy đạo hàm hệ thức

$$Ak^2 - 2Bk\omega + C\omega^2 = 0,$$

ta được:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{B\omega - Ak}{C\omega - Bk}.$$

và nếu khử k/ω khỏi biểu thức này bằng cách dựa vào cùng hệ thức k/ω, ta sẽ tìm lại được phương trình (103-5).

BÀI TẬP

Tìm phương trình của họ đặc tuyến thứ hai trong sóng đơn có tâm trong khí polytropic.

Giải. Trong sóng đơn giản có tâm lan truyền vào khí đứng yên về phía bên phải nó, ta có

$$\frac{x}{t} = v + c = c_o + \frac{\gamma + 1}{2} v.$$

Các đặc tuyến C_+ được biểu diễn bởi chùm các đường thẳng x = const-t. Các đặc tuyến C_- được xác định bởi phương trình

$$\frac{dx}{dt} = v - c = \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1}\frac{x}{t} - \frac{4}{\gamma + 1}c_o.$$

Lấy tích phân, ta được:

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1}c_o t + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}c_o t_o \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma+1}},$$

trong đó hằng số tích phân được chọn sao cho đặc tuyến C_- đi qua điểm $x = c_o t_o$, $t = t_o$ ở trên đặc tuyến $C_+ (x = c_o t)$, là biên giới giữa sóng đơn và miền đứng yên.

Các "đường dòng" trong mặt phẳng x, t được cho bởi phương trình

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{2}{\gamma + 1}\left(\frac{x}{t} - c_o\right),$$

Từ đó đối với các đặc tuyến C_o:

$$x = -\frac{2}{\gamma - 1} c_o t + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_o t_o \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}.$$

§104. CÁC BẤT BIẾN RIEMANN

Một nhiễu động nhỏ tùy ý nói chung lan truyền theo cả ba đặc tuyến (C_+, C_-, C_o) xuất phát từ một điểm đã cho của mặt phẳng x,t. Tuy nhiên, có thể phân tích một nhiễu động tùy ý thành các phần sao cho một trong các phần đó chỉ lan truyền theo một trong các đặc tuyến.

Trước hết, ta xét một chuyển động đẳng entrôpi của khí. Ta viết phương trình liên tục và phương trình Euler dưới dạng

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

trong phương trình liên tục ta đã thay các đạo hàm của mật độ bằng các đạo hàm của áp suất, dựa theo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Chia phương trình thứ nhất cho $\pm \rho c$ và cộng thêm nó vào phương trình thứ hai, ta thu được:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \pm \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right)(v \pm c) = 0. \qquad (104\text{-}1)$$

Tiếp theo, ta đưa các đại lượng sau vào làm các hàm mới chưa biết

$$J_+ = v + \int \frac{dp}{\rho c}, \quad J_- = v - \int \frac{dp}{\rho c}, \qquad (104\text{-}2)$$

các đại lượng này được gọi là *các bất biến Riemann*. Nhớ lại rằng, trong

chuyển động đẳng entrôpi ρ và c là những hàm xác định của p, do đó các tích phân ở đây có một nghĩa xác định. Đối với khí polytropic

$$J_+ = v + \frac{2}{\gamma - 1}c, \quad J_- = v - \frac{2}{\gamma - 1}c, \tag{104-3}$$

Sau khi đưa vào các đại lượng đó, các phương trình chuyển động có dạng đơn giản:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_+ = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + (v - c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_- = 0. \tag{104-4}$$

Các toán tử vi phân tác dụng lên J_+ và J_- chính là các toán tử lấy vi phân trong mặt phẳng x,t dọc theo các đặc tuyến C_+ và C_-. Như vậy, ta nhận thấy rằng J_+ và J_- lần lượt không đổi dọc theo mỗi đặc tuyến C_+ và C_-. Cũng có thể nói rằng, các nhiễu động nhỏ của đại lượng J_+ chỉ lan truyền dọc theo các đặc tuyến C_+ và các nhiễu động nhỏ của J_- chỉ lan truyền dọc theo các đặc tuyến C_-.

Trong trường hợp tổng quát của chuyển động không đẳng entrôpi, các phương trình (104-1) không thể được viết dưới dạng (104-4), vì $dp/\rho c$ không phải là một vi phân toàn phần. Tuy nhiên, cũng như trước các phương trình này cho phép phân biệt các nhiễu động lan truyền theo các đặc tuyến của riêng một họ. Các nhiễu động như thế có dạng $\delta v \pm \delta p/\rho c$, trong đó δv và δp là các nhiễu động nhỏ tùy ý của vận tốc và áp suất. Sự lan truyền của các nhiễu động này được mô tả bằng các phương trình tuyến tính hóa

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \pm c)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\delta v \pm \frac{\delta p}{\rho c}\right) = 0. \tag{104-5}$$

Để thu được hệ đầy đủ các phương trình chuyển động của các nhiễu động nhỏ, cần phải thêm vào đây phương trình đoạn nhiệt

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right]\delta s = 0, \tag{104-6}$$

phương trình này chứng tỏ rằng, các nhiễu động δs lan truyền dọc theo các đặc tuyến C_0. Một nhiễu động nhỏ tùy ý bao giờ cũng có thể phân

tích thành các phần độc lập của ba dạng đã nêu.

Khi so sánh với (101-4) ta nhận thấy rằng, các bất biến Riemann (104-2) trùng với các đại lượng không đổi trong toàn miền chuyển động tại mọi thời điểm: trong các sóng đơn giản, J không đổi trong sóng đơn giản lan truyền về bên phải, còn J_+ không đổi trong sóng chạy về bên trái. Theo quan điểm toán học, đó là tính chất cơ bản của các sóng đơn giản. Đặc biệt, từ đó suy ra rằng, cả tính chất đã nêu trong tiết trước, đó là: một trong các họ các đặc tuyến gồm những đường thẳng. Chẳng hạn, giả thiết sóng lan truyền về bên phải. Mỗi một trong các đặc tuyến C_+ có giá trị không đổi J_+, và ngoài ra, đại lượng J không đổi trên đặc tuyến đó là hằng số trong toàn miền. Nhưng vì J_+ và J không đổi nên suy được rằng, cả v và p cũng không đổi (và cùng với nó, tất cả các đại lượng khác cũng vậy), và ta đi tới các tính chất của các đặc tuyến C_+ đã tìm được ở §103, tính chất này chứng tỏ trực tiếp rằng, chúng là những đường thẳng.

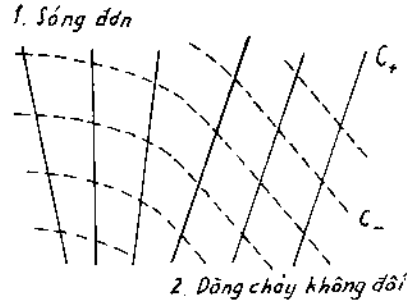
Nếu trong hai miền kề sát nhau của mặt phẳng x, t, dòng chảy được mô tả bởi hai nghiệm khác nhau về mặt giải tích của phương trình chuyển động, thì biên giới giữa các miền đó là một đặc tuyến. Thực vậy, biên giới này là một gián đoạn của các đạo hàm các đại lượng nào đó, nghĩa là nó là một gián đoạn yếu nào đó, và do đó nhất thiết phải trùng với một đặc tuyến nào đó.

Tính chất sau của các sóng đơn giản có một ý nghĩa rất quan trọng trong lý thuyết về chuyển động một chiều đẳng entrôpi: dòng chảy trong miền kề sát với miền dòng chảy không đổi (dòng chảy có $v = \text{const}$, $p = \text{const}$) nhất thiết phải là sóng đơn giản.

Rất dễ dàng chứng minh được điều khẳng định trên. Giả thiết rằng, miền đang xét *1* của mặt phẳng x, t bị giới hạn ở bên phải bởi một miền *2* có dòng chảy không đổi (hình 88). Trong miền *2* này rõ ràng cả hai bất biến J_+ và J đều không đổi, và cả hai họ đặc tuyến đều là những đường thẳng. Biên giới giữa cả hai miền là một trong các đặc tuyến C_+ và các đường C_+ của một miền này không đi vào trong miền kia. Còn các đặc tuyến C kéo dài liên tục từ miền này sang miền khác và khi phủ miền *1* chúng mang giá trị không đổi của J từ miền *2* vào miền *1*. Như vậy,

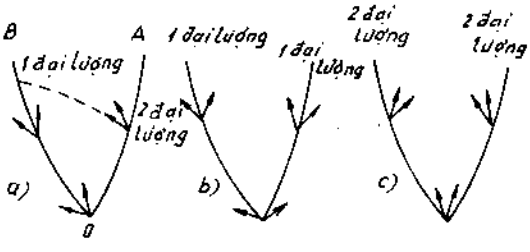
đại lượng J_- cũng không đổi cả trong toàn miềm I, do đó dòng chảy trong miền này là một sóng đơn giản.

Các đặc tuyến có tính chất chuyển các giá trị không đổi của đại lượng xác định theo mình, tính chất đó rọi sáng cho cách đặt vấn đề tổng quát đối với các điều kiện ban đầu và điều kiện biên của các phương trình thủy động lực. Trong nhiều bài toán vật lý cụ thể, việc chọn các điều kiện đó thường không đem lại một sự hoài nghi gì, và được phát biểu trực tiếp bởi các lý do vật lý. Tuy nhiên, trong những trường hợp phức tạp hơn thì cả những nhận định thuần túy toán học dựa trên những tính chất tổng quát của các đặc tuyến cũng có lợi.



Hình 88

Để xác định, ta sẽ xét chuyển động một chiều đẳng entrôpi của khí. Theo quan điểm thuần túy toán học, bài toán khí động học thường rút về việc xác định hai hàm chưa biết (v và p chẳng hạn) ở trong miền của mặt phẳng x, t nằm giữa hai đường cong đã cho (OA và OB ở trên hình 89a), trên đó có cho các giá trị biên. Bài toán ở chỗ, các giá trị của bao nhiêu đại lượng cần được cho trên các đường cong đó. Theo nghĩa này, điều quan trọng là, mỗi đường cong được sắp xếp thế nào đối với các hướng xuất phát [1] từ mỗi điểm của hai nhánh của các đặc tuyến C_+ và C_- (được nêu bằng các mũi tên ở trên hình 89). Hai trường hợp có thể xảy ra: hoặc cả hai



Hình 89

[1] Trong mặt phẳng x, t các nhánh đặc tuyến "xuất phát" từ điểm đã cho của đường cong là những nhánh hướng theo chiều tăng của t.

hướng của những đặc tuyến đều nằm về cùng một phía của đường cong, hoặc đường cong nằm ở giữa chúng. Trên hình 89a, đường OA thuộc về trường hợp thứ nhất, OB thuộc về trường hợp thứ hai. Rõ ràng là, để xác định hoàn toàn các hàm cần tìm ở trong miền AOB, ta phải cho trên đường cong OA các giá trị của hai đại lượng (chẳng hạn, của cả hai bất biến J_+ và J_-), còn trên đường cong OB các giá trị của chỉ một đại lượng. Thực vậy, các giá trị của đại lượng thứ hai sẽ được chuyển từ đường cong OA sang đường cong OB bằng các đặc tuyến của họ tương ứng, do đó chúng không thể được cho một cách tùy ý [1]. Cũng vậy, các hình (89b,c) biểu diễn các trường hợp trong đó cần phải cho một đại lượng hay hai đại lượng trên hai đường cong biên giới.

Cũng cần phải nói rằng, nếu đường cong biên giới trùng với một đặc tuyến nào đó, thì trên đó không thể cho tùy ý hai đại lượng độc lập, vì các giá trị của chúng có liên hệ với nhau bởi một điều kiện, đó là điều kiện đòi hỏi bất biến Riemann tương ứng phải không đổi.

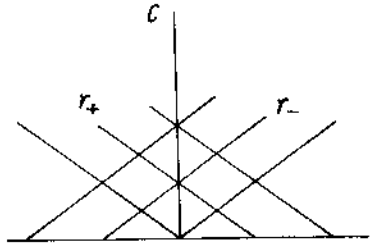
Bài toán xác định các điều kiện biên trong trường hợp tổng quát của một chuyển động không đẳng entrôpi có thể được phân tích theo cách hoàn toàn tương tự.

Tại mọi nơi trên đây ta đã nói đến các đặc tuyến của chuyển động một chiều như các đường trong mặt phẳng x, t. Tuy nhiên cũng có thể xác định các đặc tuyến cả ở trong mặt phẳng của hai biến bất kỳ khác mô tả chuyển động. Chẳng hạn, có thể xét các đặc tuyến ở trong mặt phẳng các biến v, c. Đối với một chuyển động đẳng entrôpi các phương trình của các đặc tuyến này được cho một cách đơn giản bởi các đẳng thức $J_+ = \text{const}$, $J_- = \text{const}$, với các hằng số tùy ý ở các vế bên phải (quy

[1] Để minh họa, ta nêu một thí dụ của trường hợp này: bài toán về chuyển động của khí khi pittông được đẩy vào trong một ống vô hạn hay khi nó được kéo ra khỏi ống đó. Ở đây đề cập đến việc tìm nghiệm của các phương trình khí động lực trong miền của mặt phẳng x, t nằm giữa hai đường sau: bên phải nửa trục x và đường cong $x = X(t)$ biểu diễn chuyển động của pittông (hình 86, 87). Trên đường thứ nhất có cho giá trị của của hai đại lượng (các điều kiện ban đầu $v = 0$, $p = p_0$ tại $t = 0$), còn trên đường thứ hai chỉ cho một đại lượng duy nhất ($v = u$, trong đó $u(t)$ là vận tốc của pittông).

ước gọi chúng là các đặc tuyến Γ_+ và Γ_-). Chẳng hạn, đối với một khí polytropic, theo (104-3), đó là hai họ đường song song (hình 90).

Cần chú ý là, các đặc tuyến này hoàn toàn được xác định bởi các tính chất của môi trường (của khí) chuyển động, và không phụ thuộc vào nghiệm cụ thể của các phương trình chuyển động. Đó là do, phương trình chuyển động đẳng entrôpi trong các biến v, c (như sẽ thấy trong tiết sau) là một phương trình tuyến tính đạo hàm riêng cấp hai, với các hệ số chỉ phụ thuộc vào các biến độc lập.



Hình 90

Các đặc tuyến trong các mặt phẳng x, t và v, c là những ánh xạ tương hỗ của nhau dựa vào nghiệm đã cho của các phương trình chuyển động. Tuy nhiên, ánh xạ này không phải là một đối một. Đặc biệt, chỉ một đặc tuyến trong mặt phẳng v, c tương ứng với một sóng đơn giản đã cho, và tất cả các đặc tuyến trong mặt phẳng x, t ánh xạ lên đặc tuyến đó. Chẳng hạn, đối với sóng chạy về bên phải, thì đó là một trong các đặc tuyến Γ_-; các đặc tuyến C_- ánh xạ lên toàn bộ đường Γ_-, còn các đặc tuyến C_+ ánh xạ lên các điểm riêng lẻ của đường đó.

§105. CHUYỂN ĐỘNG MỘT CHIỀU TÙY Ý CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC

Bây giờ ta khảo sát bài toán tổng quát về chuyển động một chiều đẳng entrôpi tùy ý của khí nén được (không có các sóng va chạm) và trước hết chứng tỏ rằng bài toán này có thể rút về việc giải một phương trình vi phân tuyến tính nào đó.

Mọi chuyển động một chiều (nghĩa là chuyển động chỉ phụ thuộc vào một tọa độ không gian) đều tất yếu là một chuyển động thế, vì mọi hàm $v(x, t)$ đều có thể được viết dưới dạng đạo hàm của $v(x, t) = \partial\varphi(x, t)/\partial x$. Do

đó có thể dùng phương trình Bernoulli (9-3) làm tích phân đầu của phương trình Euler:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = 0.$$

Dựa vào đẳng thức này, có thể thu được cho vi phân $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = v dx - \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dt.$$

Các biến độc lập ở đây là x và t; bây giờ ta chuyển sang các biến độc lập mới v và w. Muốn vậy cần thực hiện phép biến đổi Legendre; nếu viết

$$d\varphi = d(xv) - x dv - d\left[t\left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] + t d\left(\frac{v^2}{2} + w \right)$$

và thay cho thế φ, ta đưa vào hàm bổ trợ mới

$$\chi = \varphi - xv + t\left(\frac{v^2}{2} + w \right),$$

ta sẽ thu được:

$$d\chi = -x dv + t d\left(\frac{v^2}{2} + w \right) = t dw + (vt - x) dv,$$

trong đó χ được coi như hàm của v và w. So sánh hệ thức này với đẳng thức $d\chi = (\partial\chi/\partial w) dw + (\partial\chi/\partial v)\, dv$, ta có:

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial \omega}, \qquad vt - x = \frac{\partial \chi}{\partial v},$$

hay

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial \omega}, \qquad x = v \frac{\partial \chi}{\partial w} - \frac{\partial \chi}{\partial v} \tag{105-1}$$

Nếu hàm $\chi(v,w)$ đã biết, thì các công thức này xác định sự phụ thuộc của v và w vào tọa độ x và thời gian t.

Bây giờ ta rút ra phương trình xác định χ. Muốn vậy, xuất phát từ phương trình liên tục, mà đến nay vẫn chưa được dùng

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

ta biến đổi phương trình này sang các biến v,w. Viết các đạo hàm riêng phần dưới dạng các jacôbiên, ta có:

$$\frac{\partial(\rho,x)}{\partial(t,x)} + v\frac{\partial(t,\rho)}{\partial(t,x)} + \rho\frac{\partial(t,v)}{\partial(t,x)} = 0,$$

hay nhân với $\partial(t,x)/\partial(w,v)$:

$$\frac{\partial(\rho,x)}{\partial(w,v)} + v\frac{\partial(t,\rho)}{\partial(w,v)} + \rho\frac{\partial(t,v)}{\partial(w,v)} = 0.$$

Khi khai triển các jacôbiên này, cần phải nhớ điều sau. Theo phương trình trạng thái của chất khí, mật độ ρ là hàm của hai đại lượng nhiệt động lực độc lập khác nào đó, chẳng hạn có thể coi ρ là hàm của w và s. Với s = const, khi đó đơn giản $\rho = \rho(w)$; thêm vào đó điều quan trọng là, trong các biến v, w mật độ không phụ thuộc vào v. Vì thế khai triển các jacôbiên, ta được

$$\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial x}{\partial v} - v\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial t}{\partial v} + \rho\frac{\partial t}{\partial w} = 0.$$

Thay vào đây các biểu thức (105-1) của t và x, ta thu được sau khi rút gọn:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dw}\left(\frac{\partial \chi}{\partial w} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} = 0.$$

Với s = const, ta có $dw = dp/\rho$. Do đó, có thể viết

$$\frac{d\rho}{dw} = \frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dw} = \frac{\rho}{c^2}.$$

Cuối cùng, ta thu được cho χ phương trình sau:

$$c^2\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0 \qquad (105\text{-}2)$$

(ở đây vận tốc âm c cần phải được coi như hàm của w). Như vậy, bài toán lấy tích phân các phương trình chuyển động phi tuyến rút về việc giải phương trình tuyến tính.

Ta áp dụng phương trình đã thu được cho khí polytropic. Ở đây

$c^2 = (\gamma - 1)w$, và phương trình cơ bản (105-2) có dạng:

$$(\gamma - 1)w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi}{\partial w} = 0. \qquad (105\text{-}3)$$

Phương trình này có thể được lấy tích phân dưới dạng tổng quát theo cách lấy sơ cấp, nếu $(3 - \gamma)/(\gamma - 1)$ là số nguyên chẵn:

$$\frac{3-\gamma}{\gamma-1} = 2n, \qquad \gamma = \frac{3+2n}{2n+1}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2\ ,\ldots \qquad (105\text{-}4)$$

Các khí đơn nguyên tử ($\gamma = 5/3$, $n = 1$) và lưỡng nguyên tử ($\gamma = 7/5$, $n = 2$) thỏa mãn đúng điều kiện này. Nếu đưa n vào thay cho γ, ta sẽ viết lại được (105-3) dưới dạng

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi}{\partial w} = 0. \qquad (105\text{-}5)$$

Ta sẽ ký hiệu hàm thỏa mãn phương trình này với n đã cho bằng chữ χ_n. Đối với χ_o, ta có:

$$2w\frac{\partial^2\chi_o}{\partial w^2} - \frac{\partial^2\chi_o}{\partial v^2} + \frac{\partial\chi_o}{\partial w} = 0.$$

Nếu đưa vào biến $u = (2w)^{1/2}$ thay cho w, ta sẽ được:

$$\frac{\partial^2\chi_o}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\chi_o}{\partial v^2} = 0.$$

Nhưng đó là phương trình sóng thông thường, có nghiệm tổng quát là $\chi_o = f_1(u + v) + f_2(u - v)$, trong đó f_1 và f_2 là các hàm tùy ý. Như vậy:

$$\chi_o = f_1\left(\sqrt{2w} + v\right) + f_2\left(\sqrt{2w} - v\right). \qquad (105\text{-}6)$$

Bây giờ ta chứng tỏ rằng, nếu biết được hàm χ_n thì hàm χ_{n+1} có thể thu được đơn giản bằng cách lấy đạo hàm. Thực vậy, khi lấy đạo hàm phương trình (105-5) theo w, ta thu được dễ dàng sau khi sắp xếp các số hạng:

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) + \frac{2n+3}{2n+1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right) = 0.$$

Nếu thay cho v, ta đưa vào biến

$$v' = v\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}},$$

thì ta sẽ thu được cho $\partial\chi_n/\partial w$ phương trình

$$\frac{2}{2(n+1)+1} w \frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w}\right) - \frac{\partial^2}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial \chi_n}{\partial w}\right) = 0,$$

phương trình này trùng với phương trình (105-5) cho hàm $\chi_{n+1}(w,v')$. Như vậy, ta đi tới kết quả là:

$$\chi_{n+1}(w,v') = \frac{\partial}{\partial w}\chi_n(w,v) = \frac{\partial}{\partial w}\chi_n\left(w, \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}\, v'\right). \qquad (105\text{-}7)$$

Áp dụng công thức này n lần cho hàm χ_0 (105-6), ta thu được nghiệm tổng quát cần tìm của phương trình (105-5):

$$\chi = \frac{\partial^n}{\partial w^n}\left\{f_1\left(\sqrt{2(2n+1)w} + v\right) + f_2\left(\sqrt{2(2n+1)w} - v\right)\right\},$$

hay

$$\chi = \frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}}\left\{\frac{F_1\left(\sqrt{2(2n+1)w} + v\right) + F_2\left(\sqrt{2(2n+1)w} - v\right)}{\sqrt{w}}\right\} \qquad (105\text{-}8)$$

trong đó F_1, F_2 lại là các hàm tùy ý.

Nếu thay cho w, đưa vào vận tốc âm theo

$$w = \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{2n+1}{2}c^2,$$

thì nghiệm (105-8) sẽ có dạng

$$\chi = \left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F_1\left(c + \frac{v}{2n+1}\right) + \frac{1}{c}F_2\left(c - \frac{v}{2n+1}\right)\right\}. \qquad (105\text{-}9)$$

Các biểu thức

$$c \pm \frac{v}{2n+1} = c \pm \frac{\gamma - 1}{2}v,$$

với tính cách là đối số trong các hàm tùy ý, chính là những bất biến Riemann (104-3), không đổi trên các đặc tuyến.

Trong những ứng dụng, thường xuất hiện sự cần thiết phải tính các giá trị của hàm $\chi(v,c)$ ở trên đặc tuyến. Muốn vậy, dùng công thức sau

đây [1]:

$$\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F\left(c\pm\frac{v}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial c^{n-1}}\frac{F(2c+a)}{c^n},\qquad(105\text{-}10)$$

với

$$\pm\frac{v}{2n+1}=c+a$$

trong đó a là một hằng số tùy ý.

Bây giờ ta tìm mối quan hệ giữa nghiệm tổng quát rút ra ở đây của các phương trình khí động lực và nghiệm mô tả sóng đơn giản. Sóng đơn giản này khác biệt bởi tính chất là, trong sóng đó v và w là hàm xác định của nhau: $v = v(w)$, do đó jacôbiên đồng nhất bằng không

$$\Lambda=\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,t)}.$$

Nhưng khi biến đổi sang các biến v,w, ta cần phải chia phương trình chuyển động cho jacôbiên đó, kết quả là nghiệm mà đối với nó $\Delta \equiv 0$ đã bị mất. Như vậy, sóng đơn giản không được chứa trực tiếp trong tích phân tổng quát của các phương trình chuyển động, nhưng nó là một tích phân đặc biệt của chúng.

Tuy nhiên để hiểu được bản chất của tích phân đặc biệt này, điều quan trọng là, nó có thể thu được từ tích phân tổng quát bằng một sự chuyển đến giới hạn độc đáo, có liên hệ mật thiết với ý nghĩa vật lý của

[1] Đơn giản nhất để có thể rút ra công thức này dựa vào lý thuyết các hàm biến phức và dùng định lý Cauchy. Đối với một hàm tùy ý $F(c+u)$, ta có:

$$\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c}=2^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial c^2}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c}=2^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F\left(\sqrt{z}+u\right)}{\sqrt{z}(z-c^2)^n}\,dz,$$

trong đó tích phân được lấy trong mặt phẳng biến phức z theo công tua bao điểm $z=c^2$. Bây giờ nếu đặt $u = c + a$ và trong tích phân thay $\sqrt{z} = 2\zeta - c$, ta sẽ thu được:

$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(2\zeta+a)}{\zeta^n(\zeta-c)^n}\,d\zeta,$$

trong đó công tua lấy tích phân theo ζ bây giờ bao điểm $\zeta = c$; áp dụng lần nữa định lý Cauchy, ta tìm được rằng tích phân này trùng với biểu thức đã viết trong bài giảng.

các đặc tuyến, là những đường lan truyền của các nhiễu động nhỏ. Ta hình dung rằng, miền của mặt phẳng v, w trong đó hàm $\chi(v,w)$ khác không, bị co lại thành một dải rất hẹp (vô cùng hẹp tại giới hạn) dọc theo một trong các đặc tuyến. Các đạo hàm khi đó lấy các giá trị trong một khoảng rất rộng (vô hạn, tại giới hạn) vì χ giảm rất nhanh theo các phương đó. Các nghiệm $\chi(v,w)$ thuộc loại đó của các phương trình chuyển động rõ ràng phải tồn tại. Thực vậy, được coi như "các nhiễu động" trong mặt phẳng v, w, chúng thỏa mãn các điều kiện của âm hình và sắp xếp dọc theo các đặc tuyến, như đúng phải xảy ra đối với các nhiễu động như thế.

Từ điều kiện đã nói, thấy rõ rằng, đối với một hàm χ như thế thời gian $t = \partial\chi/\partial w$ sẽ lấy một khoảng các giá trị lớn tùy ý. Còn đạo hàm của χ dọc theo đặc tuyến sẽ là một đại lượng hữu hạn nào đó. Nhưng dọc theo đặc tuyến (chẳng hạn, một trong các đặc tuyến Γ_-) ta có:

$$\frac{dJ_-}{dv} = 1 - \frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dw}\frac{dw}{dv} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dw}{dv} = 0.$$

Do đó, đạo hàm của χ theo v dọc theo đặc tuyến (ký hiệu bằng $-f(v)$), có dạng

$$\frac{d\chi}{dv} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial\chi}{\partial v} + c\frac{\partial\chi}{\partial w} = -f(v).$$

Nếu biểu diễn các đạo hàm riêng của χ qua x và t theo (105-1) ta sẽ thu được từ đó hệ thức $x = (v + c)t + f(v)$, nghĩa là đúng phương trình (101-5) của sóng đơn giản. Hệ thức (101-4), thiết lập mối quan hệ giữa v và c trong sóng đơn giản, tự động được thoả mãn, vì J_- không đổi dọc theo đặc tuyến Γ_-.

Ở §104 ta đã chứng tỏ rằng, nếu trong một phần nào đó của mặt phẳng x, t nghiệm các phương trình chuyển động rút về một dòng chảy không đổi, thì phải có một sóng đơn giản trong những miền kề sát với nó. Do đó, chuyển động mô tả bởi nghiệm tổng quát (105-8) chỉ có thể theo sau một chuyển động không đổi (đặc biệt, sau một miền nghỉ) bằng cách đi qua giai đoạn trung gian của sóng đơn giản. Biên giới giữa sóng đơn giản và nghiệm tổng quát cũng như mọi biên giới giữa các miền của

hai nghiệm khác nhau về mặt giải tích là một đặc tuyến. Khi giải các bài toán cụ thể khác nhau, có xuất hiện yêu cầu phải xác định giá trị của $\chi(w,v)$ ở đặc tuyến biên giới này.

Điều kiện nối sóng đơn giản với nghiệm tổng quát ở trên đặc tuyến biên giới thu được bằng cách thay thế các biểu thức (105-1) của x và t ở trong phương trình sóng đơn giản $x = (v \pm c)t + f(v)$; ta có

$$\frac{d\chi}{dv} \pm c\frac{\partial\chi}{\partial w} + f(v) = 0.$$

Ngoài ra, trong sóng đơn giản (và trên đặc tuyến biên) ta có:

$$dv = \pm\frac{dp}{\rho c} = \pm\frac{dw}{c}.$$

hay $\pm c = dw/dv$. Thay biểu thức này vào trong điều kiện đã viết, ta thu được:

$$\frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{dw}{dv} + f(v) = \frac{d\chi}{dv} + f(v) = 0$$

từ đó, cuối cùng ta được

$$\chi = -\int f(v)\,dv, \qquad (105\text{-}11)$$

phương trình này xác định giá trị cần tìm tại biên giới của χ. Đặc biệt, nếu sóng đơn giản có tâm trên gốc tọa độ, nghĩa là nếu $f(v) \equiv 0$, thì $\chi = \text{const}$; vì hàm χ chỉ được xác định sai khác một hằng số cộng, nên trong trường hợp này có thể đặt $\chi = 0$ ở trên đặc tuyến biên giới mà không làm giảm tính tổng quát của bài toán.

BÀI TẬP

1. Xác định chuyển động xuất hiện khi một sóng dãn có tâm phản xạ trên thành rắn.

Giải. Giả sử rằng, sóng dãn xuất hiện vào thời điểm $t = 0$ tại điểm $x = 0$ và lan truyền theo chiều dương của trục x; nó đạt tới thành sau khoảng thời gian $t = l/c_0$, trong đó l là khoảng cách đến thành. Hình 91 biểu diễn giản đồ các đặc tuyến đối với quá trình phản xạ của sóng. Khí đứng yên trong các miền *1* và *1'*,

nó chuyển động trong miền *3* với vận tốc không đổi $v = -U$ [1]. Miền *2* là sóng dãn tới (với các đặc tuyến thẳng C_+), miền *5* là sóng phản xạ (với các đặc tuyến C_-). Miền *4* là miền "tương tác" trong đó phải tìm được nghiệm; khi đi vào miền này các đặc tuyến thẳng sẽ uốn cong. Nghiệm này được xác định hoàn toàn bởi các điều kiện biên trên các đoạn *ab* và *ac*. Trên *ab* (nghĩa là trên thành) phải có $v = 0$ với $x = l$; dựa vào (105-1) ta rút ra điều kiện:

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = -l \quad \text{với} \quad v = 0$$

Biên giới *ac* với sóng dãn là một đoạn của đặc tuyến C_-; vì thế ta có trên đó

$$c - \frac{\gamma - 1}{2} v = c - \frac{v}{2n+1} = \text{const}.$$

vì tại điểm *a* ta có $v = 0$, $c = c_o$ nên const $= c_o$. Trên biên giới này phải có $\chi = 0$, do đó ta có điều kiện

$$\chi = 0 \quad \text{với} \quad c - \frac{v}{2n+1} = c_o.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm có dạng (105-9) thỏa mãn các điều kiện này là

$$\chi = \frac{l(2n+1)}{2^n n!}\left(\frac{\partial}{c\,\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}\left[\left(c - \frac{v}{2n+1}\right)^2 - c_o^2\right]^n\right\}, \qquad (1)$$

chính phương trình này xác định nghiệm cần tìm.

Phương trình của đặc tuyến *ac* có dạng (xem bài tập §103)

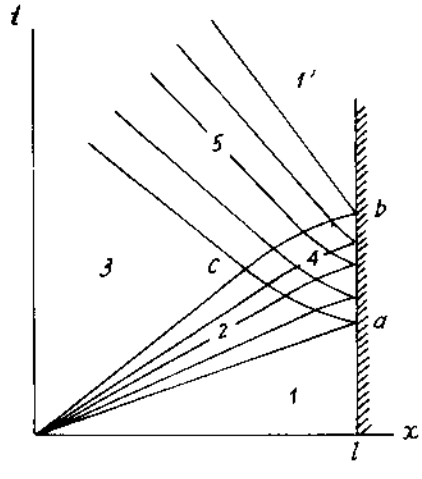
$$x = -(2n+1)c_o t + 2(n+1)\,l\left(\frac{tc_o}{l}\right)^{\frac{2n+1}{2(n+1)}}.$$

Giao tuyến của nó với đặc tuyến *Oc*

$$\frac{x}{t} = c_o - \frac{\gamma + 1}{2}U = c_o - \frac{2(n+1)}{2n+1}U$$

xác định thời điểm biến mất của sóng tới:

$$t_c = \frac{l(2n+1)^{n+1}c_o^n}{\left[(2n+1)c_o - U\right]^{n+1}}.$$



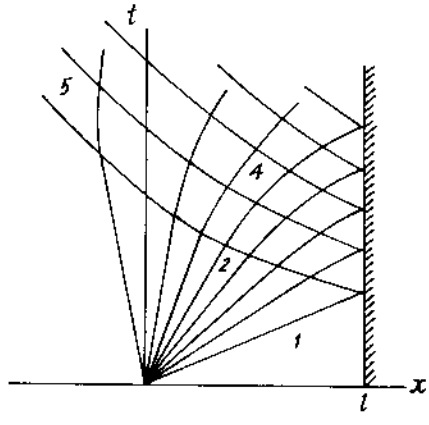
Hình 91

Trên hình 91, ta đã giả thiết rằng

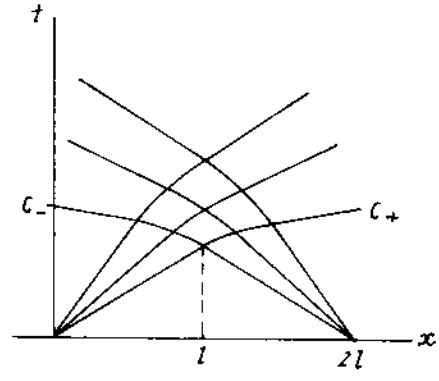
[1] Nếu sóng dãn được sinh ra do pittông bắt đầu chuyển động với vận tốc không đổi về phía miệng ra của ống dẫn, thì *U* là vận tốc của pittông.

$U < 2c_0/(\gamma + 1)$; trong trường hợp ngược lại đặc tuyến Oc hướng theo chiều của các x âm (hình 92). Quá trình tương tác của sóng tới và sóng phản xạ khi đó kéo dài thời gian vô hạn (nó không bị giới hạn như trường hợp ở trên hình 91).

Hàm (1) mô tả cả tương tác của hai sóng dãn có tâm giống nhau, xuất phát tại thời điểm $t = 0$ từ các điểm $x = 0$ và $x = 2l$ và lan truyền về phía nhau, điều này thấy được hiển nhiên từ những lý do đối xứng (hình 93) [1].



Hình 92



Hình 93

2. Tìm phương trình tương tự với (105-3) cho chuyển động đẳng nhiệt một chiều của khí lý tưởng.

Giải. Đối với chuyển động đẳng nhiệt, hàm nhiệt w ở trong phương trình Bernoulli được thay thế bằng đại lượng

$$\mu = \int \frac{dp}{\rho} = c_T^2 \int \frac{d\rho}{\rho} = c_T^2 \ln \rho,$$

trong đó $c_T^2 = (\partial p/\partial \rho)_T$ là bình phương của vận tốc âm đẳng nhiệt; đối với khí lý tưởng trong trường hợp đẳng nhiệt $c_T = \text{const}$. Lấy đại lượng này (thay cho w) làm biến độc lập, rồi tiến hành như trong bài giảng, ta thu được cho χ phương trình tuyến tính sau đây với các hệ số không đổi:

---

[1] Nghiệm trình bày dưới đây của bài toán này do *L.I. Xêđôv* (1946) và *Neumann* (*J.Von .Neumann* 1947) thu được độc lập với nhau. Bài toán kém đầy đủ hơn (không xây dựng nghiệm giải tích của các phương trình) đã được *Taylor* khảo sát (*G.I. Taylor*, 1941, công bố năm 1950).

$$c_T^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mu^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = 0.$$

§106. BÀI TOÁN VỀ SỰ NỔ MẠNH

Chúng ta khảo sát sự lan truyền của một sóng va chạm cầu có công suất lớn gây bởi một vụ nổ lớn, nghĩa là bởi một sự giải phóng tức thời một năng lượng lớn (ký hiệu là E) trong một thể tích nhỏ nào đó. Giả thiết là sóng va chạm lan truyền qua một khí polytropic [1].

Chúng ta xét sóng tại các khoảng cách không xa nguồn lắm, ở trong một miền, mà tại đó sóng vẫn còn có cường độ lớn. Đồng thời các khoảng cách này được giả thiết là lớn so với các kích thước của nguồn; điều này cho phép ta giả thiết rằng, năng lượng đã được giải phóng tại một điểm (ở gốc tọa độ).

Nói sóng va chạm có cường độ lớn có nghĩa là, bước nhảy của áp suất trong sóng rất lớn. Ta sẽ coi rằng áp suất p_2 ở sau gián đoạn lớn so với áp suất p_1 của khí không nhiễu động ở trước nó, đến mức

$$\frac{p_2}{p_1} >> \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}.$$

Điều này cho phép ta bỏ qua p_1 so với p_2 tại mọi nơi, và tỷ số giữa các mật độ ρ_2/ρ_1 sẽ bằng giá trị giới hạn $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ của nó (xem §89).

Như vậy, toàn bộ hình ảnh chuyển động của khí sẽ được xác định hoàn toàn chỉ bởi hai thông số: mật độ ban đầu ρ_1 của khí và năng lượng E được giải phóng trong vụ nổ. Từ các thông số này và hai biến độc lập: thời gian t và tọa độ (khoảng cách tính từ tâm) r, chỉ có thể lập được một tổ hợp độc lập không thứ nguyên, mà ta viết được dưới dạng

$$r\left(\frac{\rho_1}{Et^2}\right)^{1/5}.$$

[1] Nghiệm trình bày dưới đây của bài tập này do *L.I. Xêđôv* (1946) và *Neumann* (1947) thu được độc lập với nhau (*J.Von. Neumann*, 1947). Với sự kém đầy đủ (không xây dựng nghiệm giải tích của các phương trình) bài toán đã được Taylor khảo sát (*G.I. Taylor*, 1941, công bố năm 1950).

Kết quả là, toàn bộ chuyển động sẽ có tính chất tự đồng dạng xác định nào đó.

Trước hết, ta có thể khẳng định rằng, vị trí của chính sóng va chạm tại mỗi thời điểm phải tương ứng với một giá trị không đổi xác định nào đó của tổ hợp không thứ nguyên đã nêu. Như thế, có thể xác định ngay được định luật dịch chuyển của sóng va chạm theo thời gian; ký hiệu khoảng cách của sóng tính từ tâm là R, ta có

$$R = \beta\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5}, \qquad (106\text{-}1)$$

trong đó β là hằng số (phụ thuộc vào γ), bản thân nó được xác định do kết quả giải các phương trình chuyển động. Vận tốc lan truyền của sóng va chạm (vận tốc đối với khí không nhiễu động, nghĩa là đối với hệ tọa độ cố định):

$$u_1 = \frac{dR}{dt} = \frac{2R}{5t} = \frac{2\beta E^{1/5}}{5\rho_1^{1/5} t^{3/5}}. \qquad (106\text{-}2)$$

Như vậy, trong bài toán đang xét định luật chuyển động của sóng va chạm được xác định (với độ chính xác đến thừa số không đổi) ngay từ những lý do thứ nguyên đơn giản.

Áp suất p_2, mật độ ρ_2 và vận tốc $v_2 = u_1 - u_2$ của khí (đối với hệ tọa độ cố định) trên "mặt sau" của gián đoạn có thể được biểu diễn qua u_1 dựa theo các công thức đã thu được ở §89. Theo (89.10-11) [1], ta có

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1}u_1, \qquad \rho_2 = \rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 u_1^2. \qquad (106\text{-}3)$$

Mật độ vẫn không đổi theo thời gian, còn v_2 và p_2 lần lượt giảm như $t^{-3/5}$ và $t^{-6/5}$. Ta cũng nhận thấy rằng, áp suất p_2 tạo bởi sóng va chạm tăng đồng thời với năng lượng nổ toàn phần như $E^{2/5}$.

Tiếp theo, chúng ta chuyển sang xác định chuyển động của khí trong toàn miền ở phía sau sóng va chạm. Thay cho vận tốc v, mật độ ρ của khí và bình phương $c^2 = \gamma p/\rho$ của vận tốc âm trong khí (thay cho biến p – áp suất), ta đưa vào các biến không thứ nguyên V, G, Z xác

[1] Các vận tốc của sóng va chạm xác định bởi các công thức (89-11) đối với khí được ký hiệu ở đây bằng u_1 và u_2.

định như sau [1)]

$$v = \frac{2r}{5t}V, \qquad \rho = \rho_1 G, \qquad c^2 = \frac{4r^2}{25t^2}Z. \tag{106-4}$$

Các đại lượng V, G, Z có thể là các hàm chỉ của một biến "tự đồng dạng" độc lập không thứ nguyên, mà ta định nghĩa như

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{\beta}\left(\frac{\rho_1}{Et^2}\right)^{1/5}, \tag{106-5}$$

Phù hợp với (106-3) ở trên mặt gián đoạn (nghĩa là, với $\xi = 1$) chúng phải lấy những giá trị

$$V(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \qquad G(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad Z(1) = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \tag{106-6}$$

Các phương trình chuyển động đoạn nhiệt đối xứng - xuyên tâm có dạng:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial r}\right)\ln\frac{p}{\rho^\gamma} = 0.\end{gathered} \tag{106-7}$$

Phương trình sau cùng là phương trình bảo toàn entrôpi, trong đó có đưa vào biểu thức (83-12) cho entrôpi của khí polytropic. Sau khi thay các biểu thức (106-4) ta thu được một hệ các phương trình đạo hàm toàn phần cho các hàm V, G, Z. Dễ dàng lấy tích phân hệ phương trình này vì một trong các tích phân của nó có thể thu được trực tiếp xuất phát từ những nhận định sau.

Vấn đề là, ta bỏ qua áp suất p_1 của khí không nhiễu động, nói một cách khác, có nghĩa là, ta bỏ qua năng lượng ban đầu của khí so với năng lượng E do vụ nổ đã truyền cho nó. Do đó, rõ ràng năng lượng toàn phần của khí trong hình cầu giới hạn bởi sóng va chạm là không đổi (và bằng E). Thêm nữa, vì chuyển động là tự đồng dạng, nên hiển nhiên

[1)] Không lẫn ký hiệu V ở trong tiết này và tiết sau với ký hiệu thể tích riêng ở các chỗ khác.

rằng năng lượng của khí vẫn phải không đổi cả ở trong mọi hình cầu bất kỳ có bán kính bé hơn, dãn theo thời gian theo qui luật ξ = const với const là tùy ý (không chỉ bằng 1); vận tốc dịch chuyển xuyên tâm của các điểm ở trên hình cầu này bằng $v_n = 2r/5t$ (xem (106-2)).

Dễ dàng viết được phương trình mô tả sự không đổi này của năng lượng. Một mặt, trong thời gian dt có một lượng năng lượng

$$dt4\pi r^2\rho v\left(w+\frac{v^2}{2}\right)$$

qua mặt cầu (diện tích $4\pi r^2$). Mặt khác, trong cùng khoảng thời gian dt đó, thể tích hình cầu tăng thêm một lượng $dtv_n4\pi r^2$, trong đó có chứa khí với năng lượng

$$dt4\pi r^2\rho v_n\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right).$$

Cân bằng hai biểu thức này với nhau, thay ε và w từ (83.10-11)và đưa vào các hàm không thứ nguyên dựa theo (106-4), ta thu được hệ thức

$$Z=\frac{\gamma(\gamma-1)(1-V)V^2}{2(\gamma V-1)}, \qquad (106\text{-}8)$$

đó chính là tích phân phải tìm của hệ các phương trình. Nó tự động thỏa mãn các điều kiện biên(106-6).

Sau khi thiết lập được tích phân (106-8) thì tích phân hệ các phương trình lấy được theo phương pháp sơ cấp, mặc dù khá dài dòng. Phương trình thứ hai và thứ ba của (106-7) cho ta

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\ln\xi}-(1-V)\frac{d\ln G}{d\ln\xi}&=-3V.\\ \frac{d\ln Z}{d\ln\xi}-(\gamma-1)\frac{d\ln G}{d\ln\xi}&=-\frac{5-2V}{1-V}.\end{aligned} \qquad (106\text{-}9)$$

Từ hai phương trình này, có dựa vào hệ thức (106-8), ta biểu diễn các đạo hàm $dV/d\ln\xi$ và $d\ln G/dV$ dưới dạng các hàm chỉ của V; sau đó, việc lấy tích phân có xét đến các điều kiện biên (106-6) cho ta nhưng kết quả sau:

$$\xi^5 = \left[\frac{\gamma+1}{2}V\right]^{-2}\left\{\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\right\}^{\nu_1}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\right]^{\nu_2},$$

$$G = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\gamma V-1)\right]^{\nu_3}\left\{\frac{\gamma+1}{7-\gamma}[5-(3\gamma-1)V]\right\}^{\nu_4}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(1-V)\right]^{\nu_5} \qquad (106\text{-}10)$$

$$\nu_1 = -\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)}, \qquad \nu_2 = \frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1}, \qquad \nu_3 = \frac{3}{2\gamma+1},$$

$$\nu_4 = -\frac{\nu_1}{2-\gamma}, \qquad \nu_5 = -\frac{2}{2-\gamma}.$$

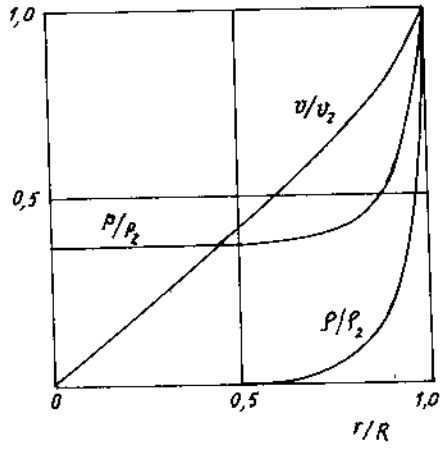
Các công thức (106-8) và (106-10) cho ta nghiệm đầy đủ của bài toán đặt ra. Hằng số β xuất hiện trong định nghĩa của biến độc lập ξ được xác định bởi điều kiện

$$E = \int_0^R \rho\left(\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma(\gamma-1)}\right)4\pi r^2 dr,$$

nó biểu diễn đẳng thức giữa năng lượng toàn phần của khí và năng lượng nổ E. Sau khi đưa vào các đại lượng không thứ nguyên, điều kiện này có dạng

$$\beta^5 \frac{16\pi}{25}\int_0^1 G\left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)}\right]\xi^4 d\xi = 1. \qquad (106\text{-}11)$$

Chẳng hạn, đối với không khí ($\gamma = 7/5$), hằng số này có giá trị bằng $\beta = 1{,}033$.



Hình 94

Từ các công thức (106-10) dễ dàng thấy rằng khi $\xi \to 0$ hàm V tiến đến giới hạn không đổi, còn hàm G tiến đến không theo các qui luật

$$V - \frac{1}{\gamma} \sim \xi^{5/\nu_2} \qquad G \sim \xi^{5\nu_3/\nu_2}$$

Từ đó suy ra rằng, các tỷ số v/v_2 và ρ/ρ_2, với tính cách là các hàm của tỷ

số $r/R = \xi$ tiến đến giá trị không khi $\xi \to 0$ theo các định luật

$$\frac{v}{v_2} \sim \frac{r}{R}, \qquad \frac{\rho}{\rho_2} \sim \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{\gamma-1}}; \tag{106-12}$$

còn tỷ số giữa các áp suất p/p_2 tiến đến giới hạn không đổi, do đó tỷ số giữa các nhiệt độ, một cách tương ứng, tiến đến vô hạn [1].

Hình 94 biểu diễn các đồ thị của những đại lượng v/v_2, p/p_2 và ρ/ρ_2 như các hàm của r/R cho không khí ($\gamma = 1{,}4$). Cần chú ý là, mật độ giảm rất nhanh vì phía trong hình cầu: hầu như toàn bộ chất tập trung trong một lớp tương đối mỏng phía sau mặt đầu sóng va chạm. Dĩ nhiên điều này là do, ở trên mặt có bán kính lớn nhất, bằng R, chất được phân bố mật độ lớn gấp sáu lần mật độ bình thường [2].

§107. SÓNG VA CHẠM CẦU HỘI TỤ

Bài toán về sóng va chạm cường độ lớn [3] hội tụ về tâm có một loạt những đặc điểm bổ ích. Chúng ta sẽ không quan tâm đến cơ chế xuất hiện cụ thể của một sóng như thế; chỉ cần hình dung rằng, sóng được tạo ra bởi một "pittông cầu" thế nào đó, truyền cho khí một cái hích ban đầu; trong quá trình hội tụ về tâm sóng được tăng cường lên.

[1] Các điều khẳng định này được xét cho các giá trị $\gamma < 7$ (khi đó hàm $V(\xi)$ thay đổi từ giá trị $V(1) = 2(\gamma + 1)$ đến $V(0) = 1/\gamma$). Đối với các khí thực, mà các hàm nhiệt động lực học của chúng có thể được coi gần đúng là các công thức cho khí polytropic, thì bất đẳng thức này rõ ràng là được thực hiện (thực tế, theo nghĩa này giới hạn trên γ là giá trị 5/3 tương ứng với khí đơn nguyên tử). Tuy nhiên, để có sự đầy đủ về mặt hình thức, ta nêu ra rằng với $\gamma > 7$ hàm $V(\xi)$ thay đổi từ giá trị $2/(\gamma + 1)$ với $\xi = 1$ đến giá trị giới hạn 1, đạt được với giá trị xác định (phụ thuộc vào γ) của $\xi = \xi_0 < 1$; tại điểm này hàm G bằng không, nghĩa là có xuất hiện miền cầu chân không dãn nở.

[2] Các kết quả tính toán cho các giá trị khác của γ, và cả nghiệm tương tự của bài toán về sự nổ mạnh trong trường hợp đối xứng trụ được *L.I. Xêđôv* dẫn ra trong cuốn sách "Các phương pháp đồng dạng và thứ nguyên trong cơ học", xuất bản lần thứ 9 – Maxcơva. Hayka, 1881, chương IV, §11.

[3] Bài toán này đã được G. Guderley (1942), *L.Đ. Landau* và *K.P. Xtaniukhovits* (1944, công bố năm 1955) khảo sát độc lập với nhau.

Ta sẽ khảo sát chuyển động của khí ở giai đoạn của quá trình khi bán kính R của mặt gián đoạn cầu còn nhỏ so với bán kính ban đầu của nó – bán kính R_0 của "pittông". Trong giai đoạn này đặc tính chuyển động không phụ thuộc mạnh (dưới đây sẽ thấy phụ thuộc như thế nào) vào các điều kiện ban đầu cụ thể. Sóng va chạm sẽ được coi là rất mạnh đến mức áp suất p_1 của khí ở trước nó có thể (giống như trong tiết trước) được bỏ qua so với áp suất p_2 ở sau nó. Còn năng lượng toàn phần của khí chứa trong miền (biến thiên !) đang xét $r \sim R << R_0$ tuyệt nhiên không phải là không đổi (sẽ thấy dưới đây – năng lượng đó giảm theo thời gian).

Cỡ không gian của chuyển động đang xét chỉ có thể được xác định bởi chính bán kính biến thiên theo thời gian $R(t)$ của sóng va chạm, còn cỡ vận tốc được xác định bởi đạo hàm dR/dt. Trong các điều kiện này một cách tự nhiên giả thiết rằng, chuyển động sẽ là tự đồng dạng, với biến "tự đồng dạng" độc lập $\xi = r/R(t)$. Tuy nhiên sự phụ thuộc $R(t)$ không xác định được nếu chỉ từ những lý do thứ nguyên.

Ta lấy thời điểm điều tiêu (*focusing*, ND) sóng va chạm (tức là thời điểm R bằng không) làm $t = 0$. Khi đó các thời điểm tính đến lúc điều tiêu tương ứng với $t < 0$. Hàm $R(t)$ sẽ được tìm dưới dạng

$$R(t) = A(-t)^{\alpha} \tag{107-1}$$

với *chỉ số tự đồng dạng* α không biết trước. Người ta nhận thấy rằng, số này được xác định bởi điều kiện tồn tại của chính nghiệm các phương trình chuyển động (trong miền $r << R_0$) với các điều kiện biên thích hợp. Cả thứ nguyên của thông số không đổi A cũng được xác định như thế. Độ lớn của thông số này vẫn còn bất định và về nguyên tắc có thể chỉ tìm được bằng cách giải bài toán về chuyển động của khí xét về toàn bộ, nghĩa là bằng cách nối nghiệm tự đồng dạng với nghiệm tại các khoảng cách $r \sim R_0$, phụ thuộc vào các điều kiện ban đầu cụ thể. Chính qua thông số này, và chỉ qua nó, chuyển động với $R << R_0$ phụ thuộc vào cách thức tạo ban đầu sóng va chạm.

Chúng ta chứng tỏ xem nghiệm của bài toán đặt ra như vậy được thực hiện như thế nào.

Tương tự như đã làm ở §106, ta đưa vào các hàm chưa biết không thứ

nguyên theo các định nghĩa

$$v = \frac{\alpha r}{t} V(\xi), \qquad \rho = \rho_1 G(\xi), \qquad c^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi), \tag{107-2}$$

trong đó

$$\xi = \frac{r}{R(t)} = \frac{r}{A(-t)^\alpha} \tag{107-3}$$

(với $\alpha = 2/5$ các định nghĩa (107-2) trùng với (106-4)). Ta nhắc lại rằng v là vận tốc xuyên tâm của khí đối với hệ tọa độ đứng yên, gắn với khí đứng yên ở trong hình cầu $r = R_0$; khí cùng chuyển động với sóng va chạm theo hướng về tâm, tương ứng với $v < 0$ (do đó $V(\xi) > 0$).

Thực tế nghiệm cần tìm của các phương trình chuyển động chỉ được xét cho miền $r \sim R$ ở sau sóng va chạm, và cho những thời gian t đủ nhỏ (khi đó $R << R_0$). Nhưng về mặt hình thức, nghiệm thu được bao toàn không gian $r \geq R$ - từ mặt gián đoạn đến vô cùng, và toàn bộ thời gian $t \leq 0$; khi đó biến ξ lấy tất cả các giá trị từ 1 đến ∞. Một cách tương ứng, các điều kiện biên cho các hàm G, V, Z phải được thiết lập với $\xi = 1$ và $\xi = \infty$.

Giá trị $\xi = 1$ tương ứng với mặt sóng va chạm; các điều kiện biên trên đó trùng với (106-6).

Để thiết lập các điều kiện ở vô cùng (theo ξ), cần chú ý là với $t = 0$ (vào lúc điều tiêu sóng) tất cả các đại lượng v, ρ, c^2 tại tất cả các khoảng cách hữu hạn tính từ tâm đều vẫn phải hữu hạn. Nhưng tại $t = 0$, $r \neq 0$ biến $\xi = \infty$. Để cho các hàm $v(r,t)$ và $c^2(r,t)$ khi đó vẫn hữu hạn thì các hàm $V(\xi)$ và $Z(\xi)$ đều phải bằng không,

$$V(\infty) = 0, \qquad Z(\infty) = 0. \tag{107-4}$$

Sau khi thay (107.2-3), hệ các phương trình (106-7) có dạng

$$\begin{gathered}(1-V)\frac{dV}{d\ln\xi} - \frac{Z}{\gamma}\frac{d\ln G}{d\ln\xi} - \frac{1}{\gamma}\frac{dZ}{d\ln\xi} = \frac{2}{\gamma}Z - V\left(\frac{1}{\alpha} - V\right), \\ \frac{dV}{d\ln\xi} - (1-V)\frac{d\ln G}{d\ln\xi} = -3V, \\ (\gamma-1)Z\frac{d\ln G}{d\ln\xi} - \frac{dZ}{d\ln\xi} = \frac{2V(1/\alpha - V)}{1-V}\end{gathered} \tag{107-5}$$

(hai phương trình cuối cùng – so sánh với (106-9)). Có nhận xét là biến độc lập ξ chỉ có mặt trong 3 phương trình này dưới dạng vi phân $d\ln\xi$; hằng số $\ln A$ khi đó biến mất hoàn toàn khỏi các phương trình, do đó vẫn còn bất định – phù hợp với điều nói ở trên.

Các hệ số của các đạo hàm trong các phương trình (107-5) và các vế phải của chúng chỉ chứa V và Z (mà không chứa G) [1]. Sau khi giải các phương trình này đối với các đạo hàm, ta biểu diễn được các đạo hàm qua hai hàm đó. Như vậy, ta thu được các phương trình

$$\frac{d\ln\xi}{dV} = -\frac{Z-(1-V)^2}{(3V-\kappa)Z - V(1-V)(1/\alpha - V)}, \qquad (107\text{-}6)$$

$$(1-V)\frac{d\ln G}{d\xi} = 3V - \frac{(3V-\kappa)Z - V(1-V)(1/\alpha - V)}{Z-(1-V)^2} \qquad (107\text{-}7)$$

(trong đó $\kappa = 2(1-\alpha)/\alpha\gamma$). Để làm phương trình thứ ba, ta viết phương trình thu được bằng cách chia đạo hàm $dZ/d\ln\xi$ cho $dV/d\ln\xi$; ta được:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{Z}{1-V}\left\{\frac{\left[Z-(1-V)^2\right]\left[2/\alpha - (3\gamma-1)V\right]}{(3V-\kappa)Z - V(1-V)(1/\alpha - V)} + \gamma - 1\right\}. \qquad (107\text{-}8)$$

Nếu tìm được nghiệm cần thiết của phương trình (107-8) nghĩa là sự phụ thuộc hàm $Z(V)$, thì sau đó việc giải các phương trình (107.6-7) [tìm sự phụ thuộc $\xi(V)$ và sau đó $G(\xi)$] rút về phép cầu phương.

Như vậy, toàn bộ bài toán trước hết quy về việc giải phương trình (107-8). Đường cong tích phân trên mặt phẳng V, Z phải đi ra từ điểm (gọi là điểm Y) có các tung độ $V(1)$, $Z(1)$ – "hình tượng" của sóng va chạm trên mặt phẳng V, Z. Nghiệm của phương trình (107-8) (với α đã cho) bằng việc nêu ra điểm đó: đường cong tích phân của phương trình cấp một được xác định đơn trị bằng việc cho một điểm (không kỳ dị). Ta làm sáng tỏ điều kiện cho phép thiết lập giá trị α, dẫn tới đường cong tích phân "đúng đắn".

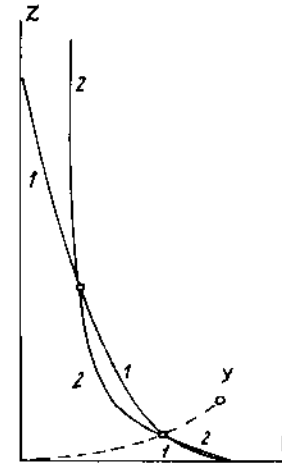
Điều kiện này xuất hiện từ yêu cầu vật lý hiển nhiên: các sự phụ thuộc của tất cả các đại lượng vào ξ đều phải đơn trị – với mỗi giá trị ξ

[1] Đó là tính ưu việt của việc đưa v, ρ, c^2 vào làm các biến cơ bản thay cho v, ρ, p.

phải tương ứng các giá trị duy nhất của V, G, Z. Điều này có nghĩa là, trong toàn miền biến thiên của biến ξ ($1 \le \xi \le \infty$, nghĩa à $0 \le \ln\xi \le \infty$) các hàm $\xi(V)$, $\xi(G)$, $\xi(Z)$ phải không có các cực trị. Nói một cách khác, các đạo hàm $d\ \ln\xi/dV$,... phải không bằng không tại đâu. Trên hình 95, đường cong *1* là một parabôn

$$Z = (1 - V)^2. \qquad (107\text{-}9)$$

Dễ dàng thấy rằng, điểm Y nằm ở phía trên đường cong đó [1]. Tuy nhiên, đường cong tích phân tương ứng với nghiệm của bài toán đặt ra, phải đi về gốc tọa độ – phù hợp với diều kiện giới hạn (107-4); do đó, tất yếu nó phải cắt parabôn (107-9). Nhưng tất cả các đạo hàm, theo (107.6-8), được biểu diễn bằng những biểu thức phân số, và trong tử số có hiệu $Z - (1 - V)^2$. Để biểu thức này không bằng không tại giao điểm của đường cong tích phân và đường parabôn (107-9), phải đồng thời có



Hình 95

$$(3V - \kappa)Z = V(1 - V)(1/\alpha - V) \qquad (107\text{-}10)$$

Nói một cách khác, đường cong tích phân phải đi qua giao điểm của parabôn (107-9) với đường cong (107-10) (đường cong *2* trên hình 95); điểm này là điểm kỳ dị của phương trình (107-8) (đạo hàm $dZ/dV = 0/0$). Chính điều kiện này xác định giá trị của chỉ số tự đồng dạng α; ta dẫn ra hai giá trị thu được do kết quả do phép tính bằng số:

$$\alpha = 0{,}6884 \quad \text{với} \quad \gamma = 5/3; \quad \alpha = 0{,}7172 \quad \text{với} \quad \gamma = 7/5. \qquad (107\text{-}11)$$

Sau khi đi qua điểm kỳ dị, đường cong tích phân hướng về gốc tọa độ (điểm O) tương ứng với các giá trị giới hạn (107-4). Để làm sáng tỏ tình thế toán học, ta mô tả ngắn gọn hình ảnh phân bố các đường cong tích phân của phương trình (107-8) trên mặt phẳng V, Z (với giá trị "đúng"

[1] Tình hình này biểu diễn đơn giản sự kiện là, vận tốc khí ở phía sau mặt gián đoạn nhỏ hơn vận tốc âm trong nó.

của α), không tiến hành các phép tính tương ứng [1].

Các đường cong (107-9) và (107-10) cắt nhau, nói chung ở hai điểm – các đường tròn trên hình 95 (không kể điểm không quan trọng $V = 1$, $Z = 0$ ở trên trục hoành). Ngoài ra phương trình có điểm kỳ dị c tại giao điểm của đường cong (107-10) với đường thẳng $(3\gamma - 1)V = 2/\alpha$ (thừa số thứ hai trong tử số của (107-8) bằng không). Điểm a mà đường cong tích phân "đúng" đi qua là điểm kiểu yên ngựa; các điểm b và c là các điểm nút. Cả điểm gốc tọa độ O cũng là điểm nút kỳ dị. Ở gần điểm gốc này, phương trình (107-8) có dạng

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{2Z}{V + \kappa Z}.$$

Việc lấy tích phân sơ cấp phương trình thuần nhất này chứng tỏ rằng, khi $V \to 0$ hàm $Z(V)$ tiến đến không nhanh hơn V, cụ thể là

$$Z \approx \text{const}.V^2 \qquad (107\text{-}12)$$

Như vậy, một tập hợp vô hạn các đường cong tích phân (khác nhau ở giá trị const trong (107-12)) đi ra từ gốc tọa độ. Tất cả các đường cong này sau đó đi vào nút b hay nút c – chỉ trừ một đường đi qua điểm yên ngựa a (một trong hai đường phân cách – hai đường cong tích phân duy nhất đi qua yên ngựa [2]).

Gốc tọa độ ứng với $\xi = \infty$, nghĩa là lúc diều tiêu sóng va chạm ở tâm. Ta xác định các sự phân bố giới hạn của tất cả các đại lượng theo các khoảng cách xuyên tâm vào thời điểm đó. Nếu xét đến (107-12) thì từ các phương trình (107.6-7) ta tìm được

$$V = \text{const} \cdot \xi^{-1/\alpha}, \quad Z = \text{const} \cdot \xi^{-2/\alpha}, \quad G = \text{const} \quad \text{với} \quad \xi \to \infty \qquad (107\text{-}13)$$

(các giá trị của những hệ số không đổi có thể chỉ tìm được bằng cách xác

[1] Việc nghiên cứu được tiến hành bằng các phương pháp tổng quát của lý thuyết định tính các phương trình vi phân. Việc xếp loại các điểm kỳ dị của phương trình cấp một có thể tìm được trong cuốn sách: *V.V. Xtêpanôv*. Giáo trình các phương trình vi phân, chương II.

[2] Hình ảnh mô tả chỉ xảy ra với $\gamma < \gamma_1 = 1{,}87...$ Với $\gamma = \gamma_1$ và α "đúng", các điểm a và b hợp lại với nhau, còn với $\gamma > \gamma_1$ hình ảnh phân bố các đường cong tích phân thay đổi và đòi hỏi phải nghiên cứu sâu sắc hơn. Tuy nhiên, chúng ta nhớ rằng trong các trường hợp vật lý thực $\gamma \leq 3/5$ (xem bị chú 1 trang 662).

định thực tế đường cong tích phân bằng số ở trên toàn bộ phạm vi của nó). Thay các biểu thức này vào trong (107-2), ta thu được [1]

$$|v| \sim c \sim r^{-(1/\alpha - 1)}, \quad \rho = \text{const}, \quad p \sim r^{-2(1/\alpha - 1)}, \tag{107-14}$$

Các định luật này có thể tìm được trực tiếp từ những lý do thứ nguyên (sau khi thứ nguyên A đã biết). Ta đã có sẵn hai thông số ρ_1 và A và một biến r; từ các đại lượng này có thể chỉ thiết lập được một tổ hợp có thứ nguyên vận tốc: $A^{1/\alpha}\ r^{1-1/\alpha}$; còn đại lượng có thứ nguyên mật độ thì chỉ là chính ρ_1.

Ta còn phải tìm định luật biểu diễn sự biến thiên theo thời gian của năng lượng toàn phần của khí trong miền chuyển động tự đồng dạng. Các kích thước (theo bán kính) của miền này – có bậc độ lớn bán kính R của sóng va chạm và giảm cùng với nó. Ta quy ước lấy một giá trị xác định $r/R = \xi_1$ nào đó làm biên giới của miền tự đồng dạng. Năng lượng toàn phần của khí trong lớp cầu giữa các bán kính R và $\xi_1 R$ sau khi đưa vào các biến không thứ nguyên được xác định bằng tích phân

$$E_{t.d.d.} = \frac{\alpha^2 \rho_1 R^5}{t^2} \int_1^{\xi_1} G\left[\frac{V^2}{2} + \frac{Z}{\gamma(\gamma-1)}\right] 4\pi\xi^2 d\xi$$

(so sánh với (106-11)). Tích phân ở đây là một hằng số [2]. Do đó ta tìm được

$$E_{t.d.d} \sim R^{5-2/\alpha} \sim (-t)^{5\alpha-2} \tag{107-15}$$

Đối với tất cả các giá trị thực của γ, chỉ số lũy thừa ở đây là dương. Mặc dù cường độ của chính sóng va chạm tăng khi tiến gần vào tâm, nhưng đồng thời thể tích miền chuyển động tự đồng dạng giảm và điều này dẫn đến sự giảm năng lượng toàn phần chứa trong miền đó.

Sau khi điều tiêu vào tâm có xuất hiện sóng va chạm "phản xạ", dãn nở (với $t > 0$) gặp khí chuyển động về tâm. Chuyển động trong gián đoạn này cũng là tự đồng dạng, với cùng chỉ số tự đồng dạng α, do đó định

[1] Giá trị giới hạn của tỷ số ρ/ρ_1 vào thời điểm điều tiêu bằng 20,1 đối với $\gamma = 7/5$ và bằng 9,55 đối với $\gamma = 5/3$.

[2] Tích phân phân kỳ khi $\xi \to \infty$. Tình hình đó là hệ quả của việc không ứng dụng được chế độ tự đồng dạng tại các khoảng cách $r >> R$.

luật dãn nở $R \sim t^{\alpha}$. Ở đây ta không quan tâm nghiên cứu chi tiết hơn về chuyển động này [1].

Như vậy, bài toán đã xét cho ta thí dụ về chuyển động tự đồng dạng, tuy nhiên, trong đó chỉ số tự đồng dạng (nghĩa là dạng của biến tự đồng dạng ξ) không thể được xác định từ những lý do thứ nguyên; nó chỉ được xác định do kết quả của việc giải chính các phương trình chuyển động, có xét đến các điều kiện mà bài toán vật lý yêu cầu. Theo quan điểm toán học, điều đặc trưng là các điều kiện này được phát biểu như đòi hỏi đường cong tích phân của phương trình vi phân cấp một đi qua điểm kỳ dị của nó, khi đó chỉ số tự đồng dạng nói chung là số vô tỷ [2].

§108. LÝ THUYẾT "NƯỚC NÔNG"

Có một sự tương tự đáng chú ý giữa chuyển động của khí nén được và chuyển động của chất lỏng không nén được có mặt tự do trong trọng trường, nếu độ sâu của lớp chất lỏng đủ nhỏ (so với các kích thước đặc trưng của bài toán, chẳng hạn so với kích thước của các chỗ mấp mô ở đáy hồ chứa nước). Trong trường hợp này có thể bỏ qua thành phần ngang của vận tốc chất lỏng so với thành phần dọc (dọc theo lớp), thành phần này có thể được giả thiết là không đổi dọc theo bề dầy của lớp. Trong phép gần đúng này (gọi là phép gần đúng "thủy lực"), chất lỏng có thể được coi như một môi trường "hai chiều" có vận tốc $\mathbf{v}$ xác định tại mỗi điểm, ngoài ra, được đặc trưng tại mỗi điểm bởi giá trị của độ dầy h của lớp.

---

[1] Chỉ nêu ra rằng, sự phản xạ của sóng va chạm gây ra sự nén chất tiếp theo, đạt 145 đối với $\gamma = 7/5$ và 32,7 đối với $\gamma = 5/3$.

[2] Một thí dụ khác về chuyển động tự đồng dạng thuộc loại như thế là bài toán về sự lan truyền của sóng va chạm được tạo ra do kết quả va chạm mạnh và ngắn ở trong nửa không gian chứa đầy khí (*Ia.B. Zeldôvits* – Tạp chí âm học. 1956, T.2,tr.29). Nội dung trình bày của bài toán này cũng có thể tìm trong tạp chí đã nêu ở trang 461 của *Ia.B. Zeldôvits* và *Iu.P. Raizelr* (chương XII) và trong cuốn sách của *Barenblat G.I.* Phép đồng dạng, tính tự đồng dạng, tiệm cận trung gian – NXB khí tượng thủy văn, 1982, Maxcơva.

Các phương trình chuyển động tổng quát tương ứng chỉ khác các phương trình đã thu được ở §12 ở chỗ, các độ biến thiên của các đại lượng trong quá trình chuyển động không phải giả thiết là nhỏ nữa, như ở §12 khi nghiên cứu các sóng hấp dẫn dài với biên độ nhỏ; do đó trong phương trình Euler cần phải giữ lại các số hạng bậc hai đối với vận tốc. Đặc biệt, đối với chuyển động một chiều của chất lỏng trong kênh, chỉ phụ thuộc vào tọa độ x (và thời gian), các phương trình đó có dạng

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \tag{108-1}$$

(trong đó độ sâu h ở đây được giả thiết là không đổi theo bề rộng kênh).

Các sóng hấp dẫn dài, theo quan điểm tổng quát, là các nhiễu động nhỏ của chuyển động của hệ đang xét. Các kết quả ở §12 chứng tỏ rằng, các nhiễu động như thế lan truyền đối với chất lỏng với vận tốc hữu hạn bằng

$$c = \sqrt{gh}. \tag{108-2}$$

Vận tốc này ở đây giữ vai trò vận tốc âm trong khí động lực học. Tương tự như ở §82, ta có thể kết luận rằng, nếu chất lỏng chuyển động với các vận tốc $v < c$ (*"dòng êm" – streaming flow*, ND) thì ảnh hưởng của các nhiễu động sẽ lan truyền trên toàn bộ dòng, ngược dòng cũng như xuôi dòng. Nhưng nếu xác định với các vận tốc $v > c$ (*"dòng phụt", shooting flow*, ND), ảnh hưởng của nhiễu động chỉ có ở trong một số miền của dòng chảy xuôi dòng.

Áp suất p (tính từ áp suất khí quyển ở mặt tự do) thay đổi theo độ sâu của chất lỏng theo định luật thủy tĩnh học $p = \rho g(h - z)$, z là độ cao của điểm so với đáy. Cũng nên nhận xét thêm rằng, nếu đưa vào các đại lượng

$$\bar{\rho} = \rho h, \quad \bar{p} = \int_0^h p\, dz = \frac{1}{2}\rho g h^2 = \frac{g}{2\rho}\bar{\rho}^2, \tag{108-3}$$

thì phương trình (108-1) sẽ có dạng

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (v\bar{\rho})}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \tag{108-4}$$

phương trình này về hình thức trùng với dạng các phương trình của dòng chảy đoạn nhiệt của khí polytropic với $\gamma = 2$ ($\bar{p} \sim \rho^2$). Tình hình này cho phép ta chuyển trực tiếp cho lý thuyết lớp *"nước nông"* (*shallow - water*, ND) tất cả các kết quả của khí động lực học xét cho chuyển động không có sự tạo thành các sóng va chạm. Nếu có các sóng va chạm, thì các hệ thức trong lý thuyết lớp *"nước nông"* sẽ khác với các hệ thức khí động lực cho khí lý tưởng.

Một "sóng va chạm" trong chất lỏng chảy theo kênh là một bước nhảy vọt độ cao h của chất lỏng, và cùng với nó cả vận tốc chất lỏng v (mà ta gọi là *"bước nhảy thuỷ lực"* – *hydraulic jump*, ND). Các hệ thức giữa các giá trị của các đại lượng đó ở hai bên của gián đoạn có thể tìm được dựa vào các điều kiện liên tục của các dòng khối lượng và xung lượng chất lỏng. Mật độ dòng khối lượng (tính cho 1 cm bề rộng kênh) bằng $j = \rho v h$. Còn mật độ dòng xung lượng thu được bằng cách lấy tích phân $p + \rho v^2$ theo bề sâu chất lỏng và bằng

$$\int_0^h (p + \rho v^2) dz = \frac{1}{2} \rho g h^2 + \rho v^2 h.$$

Do đó, các điều kiện liên tục của chúng cho ta hai phương trình:

$$v_1 h_1 = v_2 h_2, \qquad v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2}. \tag{108-5}$$

Các hệ thức này thiết lập mối liên hệ giữa bốn đại lượng v_1, v_2, h_1, h_2, trong đó hai đại lượng có thể cho tùy ý. Biểu diễn các vận tốc v_1, v_2 theo các độ cao h_1, h_2, ta được

$$v_1^2 = \frac{g}{2} \frac{h_2}{h_1} (h_1 + h_2), \qquad v_2^2 = \frac{g}{2} \frac{h_1}{h_2} (h_1 + h_2). \tag{108-6}$$

Các năng thông ở hai bên gián đoạn không bằng nhau; hiệu của chúng xác định lượng năng lượng tiêu tán (trong một giây) trong gián đoạn. Mật độ năng thông dọc theo kênh bằng

$$q = \int_0^h \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) \rho v dz = \frac{1}{2} j (gh + v^2).$$

Dùng các biểu thức (108-6) ta thu được cho hiệu cần tìm

$$q_1 - q_2 = \frac{gj}{4h_1h_2}\left(h_1^2 + h_1^2\right)(h_2 - h_1).$$

Giả sử rằng chất lỏng đi qua gián đoạn từ phía 1 sang phía 2. Khi đó, sự kiện năng lượng bị tiêu tán có nghĩa là, phải có $q_1 - q_2 > 0$ và ta đi tới kết luận

$$h_2 > h_1 \tag{108-7}$$

nghĩa là chất lỏng chuyển động từ phía có độ cao thấp hơn đến phía có độ cao cao hơn. Từ (108-6), bây giờ có thể kết luận rằng

$$v_1 > c_1 = \sqrt{gh_1}, \qquad v_2 < c_2 = \sqrt{gh_2} \tag{108-8}$$

Hoàn toàn tương tự, với các kết quả cho các sóng va chạm trong khí động lực học. Các bất đẳng thức (108-8) cũng có thể tìm được như các điều kiện cần để cho gián đoạn được ổn định, tương tự như đã làm ở §84.

BÀI TẬP

Tìm điều kiện ổn định cho gián đoạn tiếp tuyến trên nước nông – trên đường, mà dọc theo đó chất lỏng ở hai bên của nó chuyển động với các vận tốc khác nhau (*X.V. Bezđenkov, O.P. Pogutxe*, 1983).

Giải. Do sự tương tự ở trong bài giảng giữa nước nông thủy động lực và động lực học khí polytropic nén được, bài toán đặt ra tương đương với bài toán về tính ổn định của gián đoạn tiếp tuyến trong khí nén được (bài tập 1, §84). Tuy nhiên, sự khác nhau là ở chỗ trong trường hợp nước nông cần phải xét các nhiễu động chỉ phụ thuộc vào các tọa độ trong mặt phẳng lớp chất lỏng (dọc theo vận tốc v hay vuông góc với nó), nhưng không phụ thuộc vào tọa độ z dọc theo độ sâu của lớp [1]: sự gần đúng của nước nông tương ứng với các nhiễu động có bước sóng dài $\lambda >> h$. Do đó, vận tốc tìm được trong bài tập của §84 bây giờ là giới hạn không ổn định: gián đoạn ổn định với $v > v_k$ (v là bước nhảy của vận tốc trên gián đoạn). Vì mật độ và độ sâu chất lỏng ở cả hai phía gián đoạn là như nhau, nên cùng một đại lượng $c_1 = c_2 = \sqrt{gh}$ giữ vai trò của vận tốc âm ở cả hai phía của nó, do đó gián đoạn ổn định với

$$v > 2\sqrt{2gh}.$$

[1] Trong bài tập ở §84, độ sâu của lớp tương ứng với tọa độ y.

Chương XI

SỰ GIAO NHAU CỦA CÁC MẶT GIÁN ĐOẠN

§ 109. SÓNG DÃN

Xét về phương diện toán học, giao tuyến của hai sóng va chạm là một đường kỳ dị của hai hàm mô tả chuyển động của khí. Cạnh của mọi góc nhọn ở trên mặt của vật có dòng khí chảy quanh cũng là một đường kỳ dị như thế. Người ta thấy rằng, chuyển động của chất khí ở gần một đường kỳ dị có thể được nghiên cứu dưới dạng tổng quát (*L. Prandtl* và *Th. Mayer*, 1908).

Khi xét một miền gần một đoạn nhỏ của đường kỳ dị, ta có thể coi đường này như một đường thẳng và chọn nó làm trục z của hệ tọa độ trụ r, φ, z. Ở gần đường kỳ dị tất cả các đại lượng đều phụ thuộc mạnh vào góc φ. Ngược lại chúng chỉ phụ thuộc yếu vào r và với các r đủ nhỏ có thể bỏ qua sự phụ thuộc vào r, cả sự phụ thuộc của các đại lượng vào z cũng không quan trọng: có thể bỏ qua sự biến thiên của hình ảnh dòng chảy trên một đoạn nhỏ của đường kỳ dị.

Như vậy, ta phải nghiên cứu một chuyển động dừng, mà tất cả các đại lượng đều chỉ là hàm của φ. Phương trình bảo toàn entrôpi $\mathbf{v}\nabla s = 0$ cho ta $v_\varphi(ds/d\varphi) = 0$, từ đó $s = \text{const}$ [1]; nghĩa là chuyển động là đẳng entrôpi. Do đó, trong phương trình Euler thay cho $\nabla p/\rho$, có thể viết ∇w: $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla w$. Trong tọa độ trụ, ta thu được ba phương trình:

[1] Nếu ta đặt $v_\varphi = 0$ (thay cho $ds/d\varphi = 0$), thì như dễ dàng kết luận từ những phương trình chuyển động viết dưới dây, ta sẽ có $v_r = 0$, $v_z \neq 0$. Một chuyển động như thế tương ứng với sự giao nhau của các mặt gián đoạn tiếp tuyến (với bước nhảy của vận tốc v_z), và vì các gián đoạn này không ổn định, nên không xét đến.

$$\frac{v_\varphi}{r}\frac{dv_r}{d\varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} = 0, \qquad \frac{v_\varphi}{r}\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{d\varphi}, \qquad v_\varphi \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = 0.$$

Từ phương trình sau cùng, ta rút ra v_z = const; không làm mất tính chất tổng quát, có thể đặt $v_z = 0$ và coi chuyển động là phẳng: điều đó đơn giản rút về việc chọn thích hợp vận tốc chuyển động của hệ tọa độ dọc theo trục z. Hai phương trình đầu được viết lại dưới dạng

$$v_\varphi = \frac{dv_r}{d\varphi}, \tag{109-1}$$

$$v_\varphi\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi}. \tag{109-2}$$

Thay (109-1) vào (109-2), chúng ta thu được:

$$v_\varphi \frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r \frac{dv_r}{d\varphi} = -\frac{dw}{d\varphi},$$

hay lấy tích phân

$$w + \frac{v_\varphi^2 + v_r^2}{2} = \text{const}. \tag{109-3}$$

Ta nhận thấy rằng, đẳng thức (109-3) nói lên rot $\mathbf{v} = 0$, nghĩa là chuyển động có thế; do đó, ta có phương trình Bernoulli (109-3).

Tiếp theo, phương trình liên tục div $(\rho\mathbf{v}) = 0$ cho ta

$$\rho v_r + \frac{d(\rho v_\varphi)}{d\varphi} = \rho\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right) + v_\varphi \frac{d\rho}{d\varphi} = 0. \tag{109-4}$$

Dùng (109-2), từ đó ta thu được:

$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right)\left(1 - v_\varphi^2 \frac{d\rho}{dp}\right) = 0.$$

Nhưng đạo hàm $dp/d\rho$, hay đúng hơn viết dưới dạng $(\partial p/\partial\rho)_s$, là bình phương của vận tốc âm. Như vậy,

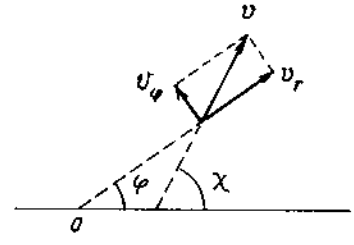
$$\left(\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r\right)\left(1 - \frac{v_\varphi^2}{c^2}\right) = 0. \tag{109-5}$$

Phương trình này có thể được thỏa mãn theo hai cách. Thứ nhất, có thể là

$$\frac{dv_\varphi}{d\varphi} + v_r = 0.$$

Khi đó từ (109-2), ta được p = const, ρ = const và từ (109-3) suy ra rằng $v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$ = const, nghĩa là vận tốc không đổi về giá trị tuyệt đối. Dễ dàng thấy rằng, cả chiều của nó trong trường hợp này cũng không đổi. Góc χ, tạo bởi vận tốc và hướng đã cho nào đó ở trong mặt phẳng của chuyển động, bằng (hình 96)

$$\chi = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{v_\varphi}{v_r}. \qquad (109\text{-}6)$$



Hình 96

Lấy đạo hàm biểu thức này theo φ và dùng (109.1-2), ta thu được sau phép biến đổi đơn giản:

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = -\frac{v_r}{\rho v_\varphi v^2}\frac{dp}{d\varphi}. \qquad (109\text{-}7)$$

Vì p = const, nên suy ra χ = const. Như vậy, nếu cho thừa số thứ nhất trong (109-5) bằng không, ta sẽ thu được đơn giản một nghiệm tầm thường: dòng chảy đều.

Thứ hai, phương trình (109-5) được thỏa mãn nếu đặt $1 = v_\varphi^c / c^2$, nghĩa là $v_\varphi = \pm c$. Vận tốc xuyên tâm được xác định từ bởi (109-3). Trong phương trình này, nếu ký hiệu hằng số bằng w_0, ta sẽ được:

$$v_\varphi = \pm c, \qquad v_r = \pm\sqrt{2(w_o - w) - c^2}.$$

Trong nghiệm này, thành phần của vận tốc vuông góc với bán kính vectơ tại mỗi điểm, về độ lớn đều bằng vận tốc âm cục bộ. Còn vận tốc toàn phần $v = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2}$ bao giờ cũng lớn hơn vận tốc âm. Các vận tốc biến thiên từ điểm này đến điểm khác về độ lớn và về hướng. Vì vận tốc âm không thể đi qua giá trị không, nên rõ ràng là, hàm liên tục $v_\varphi(\varphi)$ tại

mọi nơi phải bằng $+c$ hay $-c$. Nếu bằng cách thích hợp chọn hướng qui chiếu của góc φ, ta có thể lấy $v_\varphi = c$. Dưới đây, ta sẽ thấy rằng, việc chọn dấu của v_r được quyết định bởi những lý do vật lý và nó phải dương. Như vậy,

$$v_\varphi = c, \qquad v_r = \sqrt{2(w_o - w) - c^2}. \tag{109-8}$$

Phương trình liên tục (109-4) cho $d\varphi = -d(\rho v_\varphi)/\rho v_r$. Thay vào đây (109-8) và lấy tích phân, ta được:

$$\varphi = -\int \frac{d(\rho c)}{\rho\sqrt{2(w_o - w) - c^2}}. \tag{109-9}$$

Nếu biết được phương trình trạng thái của khí và phương trình đoạn nhiệt (nhớ lại rằng s = const), thì dựa vào công thức này, có thể xác định được sự phụ thuộc của tất cả các đại lượng vào góc φ. Như vậy, các công thức (109.8-9) xác định hoàn toàn chuyển động của khí.

Bây giờ, ta nghiên cứu chi tiết hơn nghiệm đã thu được. Trước hết, ta nhận thấy rằng, các đường thẳng φ = const cắt các đường dòng tại mỗi điểm dưới góc Mach (sin của nó bằng $v_\varphi/v = c/v$), nghĩa là, chúng là những đặc tuyến. Như vậy, một trong các hai họ đặc tuyến (trong mặt phẳng x, y) là một chùm các đường thẳng xuất phát từ điểm kỳ dị của các đường thẳng và có một tính chất quan trọng trong trường hợp đang xét – dọc theo mỗi đường tất cả các đại lượng đều không đổi. Theo nghĩa này, nghiệm đang xét giữ một vai trò trong lý thuyết về chuyển động dừng phẳng giống như vai trò của chuyển động tự đồng dạng trong lý thuyết về các dòng chảy một chiều không dừng ở §99. Chúng ta sẽ còn trở lại vấn đề này ở §115.

Từ (109-9) suy ra rằng $(\rho c)' < 0$ (dấu phẩy ký hiệu cho việc lấy đạo hàm theo φ). Nếu viết

$$(\rho c)' = \frac{d(\rho c)}{d\rho}\rho'$$

và để ý rằng, đạo hàm $d(\rho c)/d\rho$ dương (xem (99-9)), ta sẽ nhận thấy rằng, đạo hàm $\rho' < 0$; cùng với nó cả các đạo hàm $p' = c^2\rho'$, $w' = p'/\rho$ cũng âm. Tiếp theo, từ sự kiện đạo hàm w' âm, suy ra rằng giá trị tuyệt đối

của vận tốc $v = \sqrt{2(w_* - w)}$ là một hàm tăng của φ. Cuối cùng, từ (109-7) suy ra rằng $\chi' > 0$. Như vậy, ta thu được các bất đẳng thức sau:

$$\frac{dp}{d\varphi} < 0, \quad \frac{d\rho}{d\varphi} < 0, \quad \frac{dv}{d\varphi} > 0, \quad \frac{d\chi}{d\varphi} > 0. \tag{109-10}$$

Nói một cách khác, khi bao quanh điểm kỳ dị theo chiều dòng chảy, mật độ và áp suất giảm, còn vectơ vận tốc tăng về giá trị tuyệt đối và quay theo chiều dòng chảy.

Chuyển động vừa mô tả thường được gọi là *sóng dãn*; sau đây ta sẽ dùng thuật ngữ này.

Dễ dàng thấy rằng, sóng dãn không thể xảy ra trong toàn bộ miền bao quanh đường kỳ dị. Thực vậy, vì v là một hàm tăng đơn điệu của φ, nên nếu khi quay một vòng đầy đủ quanh gốc tọa độ (nghĩa là khi φ biến thiên 2π), thì ta sẽ tìm được cho v một giá trị khác với giá trị ban đầu, điều này vô lý. Vì thế, hình ảnh thực của chuyển động quanh điểm kỳ dị phải là tập hợp các miền hình quạt ngăn cách nhau bởi các mặt phẳng φ = const, là những mặt gián đoạn. Trong mỗi miền như thế, có xuất hiện một chuyển động mô tả bởi một sóng dãn, hoặc một chuyển động với vận tốc không đổi. Số và đặc tính của các miền đó trong các trường hợp cụ thể khác nhau sẽ được thiết lập trong các tiết sau. Ở đây, chỉ nói lên rằng, biên giới giữa sóng dãn và miền dòng chảy đều phải nhất thiết là một gián đoạn yếu. Thực vậy, biên giới này không thể là một gián đoạn tiếp tuyến (gián đoạn có vận tốc v_r), vì thành phần của vận tốc vuông góc với biên giới $v_\varphi = c$ không triệt tiêu ở trên biên giới đó. Nó cũng không thể là một sóng va chạm, vì thành phần pháp tuyến của vận tốc (v_φ) phải lớn hơn vận tốc âm ở một phía của một gián đoạn như thế, và nhỏ hơn vận tốc âm ở phía kia, trong khi đó trong trường hợp đang xét bao giờ cũng có $v_\varphi = c$ ở một trong các phía của biên giới.

Từ điều nói trên, có thể suy ra kết luận quan trọng. Các nhiễu động gây ra những gián đoạn yếu xuất phát từ đường kỳ dị (trục z) và lan truyền ra xa nó. Điều này có nghĩa là, các gián đoạn yếu bao sóng dãn phải là những gián đoạn đi xa đường đó, nghĩa là thành phần vận tốc v_r tiếp tuyến với gián đoạn yếu phải dương. Như vậy, điều đó xác nhận việc chọn dấu của v_r đã nêu ở (109-8).

Bây giờ, ta áp dụng các công thức đã thu được cho khí polytropic. Trong một khí như thế $w = c^2/(\gamma - 1)$; phương trình của đường đoạn nhiệt Poisson có thể được viết dưới dạng

$$\rho c^{-2(\gamma-1)} = \text{const}, \quad pc^{-2\gamma/(\gamma-1)} = \text{const} \tag{109-11}$$

(xem (99-13)). Dùng các công thức này, ta sẽ đặt tích phân (109-9) dưới dạng

$$\varphi = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\int \frac{dc}{\sqrt{c_*^2 - c^2}},$$

trong đó c_* là vận tốc tới hạn (xem (83-14)). Từ đó

$$\varphi = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c}{c_*} + \text{const},$$

hay, nếu chọn gốc của góc φ sao cho const = 0:

$$v_\varphi = c = c_* \cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi. \tag{109-12}$$

Từ công thức (109-8), ta rút ra được

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,c_* \sin\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi. \tag{109-13}$$

Tiếp theo, nếu dùng phương trình đoạn nhiệt Poisson dưới dạng (109-11), ta sẽ tìm được sự phụ thuộc của áp suất theo góc φ:

$$p = p_*\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{109-14}$$

Sau cùng, đối với góc χ (109-6), ta có:

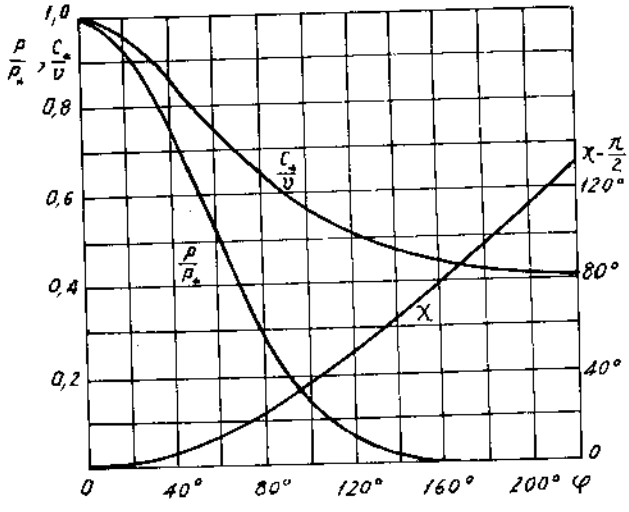
$$\chi = \varphi + \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\operatorname{cotg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right) \tag{109-15}$$

(góc χ được tính theo cùng chiều với góc φ).

Vì phải có $v_r > 0$, $c > 0$, nên góc φ trong các công thức đó chỉ có thể thay đổi giữa các giới hạn $\varphi = 0$ và $\varphi = \varphi_{max}$, trong đó

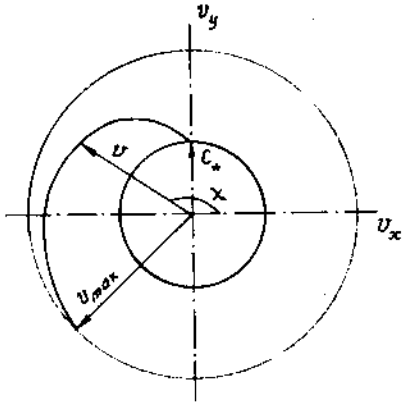
$$\varphi_{max} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \qquad (109\text{-}16)$$

Điều đó có nghĩa là, sóng dãn có thể chiếm một hình quạt, mà góc mở của nó không lớn hơn φ_{max}; chẳng hạn, đối với một khí lưỡng nguyên tử (không khí) góc này bằng 219,3°. Khi φ thay đổi từ 0 đến φ_{max}, góc χ thay đổi từ $\pi/2$ đến φ_{max}. Như vậy, hướng của vận tốc trong sóng dãn có thể quay một góc không lớn hơn $\varphi_{max} - \pi/2$ (đối với không khí, bằng 219,3°).



Hình 97

Với $\varphi = \varphi_{max}$, áp suất bằng không. Nói một cách khác, nếu sóng dãn trải rộng tới góc đó, thì gián đoạn yếu bao sóng đó về một phía và là biên giới với chân không. Khi đó, dĩ nhiên nó trùng với một trong các đường dòng; ở đây, ta có:



Hình 98

$$v_\varphi = c = 0,\ v_r = v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,c_* = v_{max},$$

nghĩa là vận tốc hướng theo bán kính và đạt tới giá trị cực đại v_{max} của nó (xem §83).

Hình 97 biểu diễn các đồ thị của p/p_*, c_*/v và χ như hàm của góc φ đối với không khí ($\gamma = 1{,}4$).

Để tiện lợi, nên chú ý xét đường cong được xác định bởi các công thức (109.12-13) ở trong mặt phẳng v_x, v_y (gọi là *tốc đồ*). Đó là một cung epixicloit

được dựng giữa hai vòng tròn có các bán kính $v = c_*$ và $v = v_{max}$ (hình 98).

BÀI TẬP

1. Xác định dạng các đường dòng ở trong sóng dãn.

Giải. Phương trình các đường dòng đối với chuyển động hai chiều trong tọa độ cực có dạng $dr/v_r = r\,d\varphi/v_\varphi$. Thay vào (109.12-13) rồi lấy tích phân, ta được:

$$r = r_o\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\varphi\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}.$$

Các đường dòng này biểu diễn một họ các đường cong quay bề lõm về phía gốc tọa độ, đó là tâm đồng dạng.

2. Xác định góc khả dĩ cực đại giữa các gián đoạn yếu bao sóng dãn, với các giá trị v_1, c_1 đã cho của vận tốc khí và vận tốc âm ở trong gián đoạn thứ nhất.

Giải. Từ (109-12), ta rút ra giá trị của góc tương ứng với gián đoạn thứ nhất:

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*}.$$

Vì $\varphi_2 = \varphi_{max}$, nên góc cần tìm bằng

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\frac{c_1}{c_*}.$$

Vận tốc tới hạn c_* được biểu diễn qua v_1, c_1 bằng các phương trình Bernoulli

$$w_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2,$$

góc quay khả dĩ cực đại của vận tốc khí ở trong sóng dãn thu được như hiệu $\chi_{max} = \chi(\varphi_1) - \chi(\varphi_2)$ bằng cách dựa vào (109-15):

$$\chi_{max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\frac{c_1}{c_*} - \arcsin\frac{c_1}{v_1}.$$

Với tính cách là hàm của v_1/c_1, χ_{max} có giá trị lớn nhất với $v_1/c_1 = 1$.

$$\chi_{max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right).$$

Khi $v_1/c_1 \to \infty$, χ_{max} tiến đến không như

$$\chi_{max} = \frac{2}{\gamma-1}\frac{c_1}{v_1}.$$

§ 110. CÁC LOẠI GIAO TUYẾN CỦA CÁC MẶT GIÁN ĐOẠN

Các sóng va chạm có thể cắt nhau, sự cắt nhau này xảy ra theo một đường nào đó. Khi xét dòng chảy ở gần những đoạn nhỏ của đường này, có thể coi đường này là đường thẳng và các mặt gián đoạn như các mặt phẳng. Như vậy, chỉ cần xét giao nhau của các sóng va chạm phẳng.

Về phương diện toán học, giao tuyến của các gián đoạn là đường kỳ dị (như đã nêu ở đầu §109). Toàn bộ hình ảnh của chuyển động ở quanh đường này gồm bởi một dãy các miền có dạng hình quạt, trong mỗi miền đó có hoặc một dòng chảy đều hoặc một sóng dãn thuộc loại đã mô tả ở §109. Dưới đây sẽ trình bày một sự phân loại tổng quát các loại giao tuyến khả dĩ của các mặt gián đoạn [1].

Trước hết, cần có nhận xét sau. Nếu ở hai phía của sóng va chạm chuyển động của khí là vượt âm, thì khi đó (như đã nêu ở đầu §92) có thể nói về "hướng" của sóng va chạm, và do đó, có thể phân biệt được các sóng va chạm "xuất phát" từ giao tuyến và các sóng "đi tới" nó. Trong trường hợp thứ nhất, thành phần tiếp tuyến của vận tốc hướng từ giao tuyến và có thể nói rằng các nhiễu động gây ra gián đoạn "xuất phát" đi từ đường đó. Trong trường hợp thứ hai, các nhiễu động xuất phát từ một nơi nào đó không có quan hệ gì với giao tuyến.

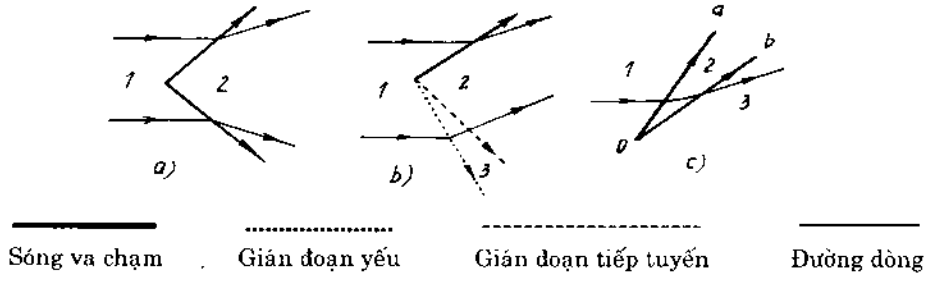
Nếu ở một phía của sóng va chạm, chuyển động là dưới âm, thì các nhiễu động lan truyền theo cả hai hướng dọc theo mặt của nó, và nói một cách chặt chẽ khái niệm "hướng" của sóng mất ý nghĩa của nó.Tuy nhiên, trong những lập luận sau đây, điều quan trọng là ở chỗ các nhiễu động từ nơi giao nhau có thể lan truyền dọc theo một gián đoạn như thế. Theo nghĩa này, các sóng va chạm tương tự sẽ giữ một vai trò ở trong những lập luận trình bày dưới đây giống như các sóng thuần túy xuất phát vượt âm và dưới đây ta sẽ hiểu các sóng va chạm xuất phát là cả hai loại sóng đó.

Các hình vẽ dưới đây biểu diễn các hình ảnh dòng chảy ở trong mặt phẳng vuông góc với giao tuyến. Không hạn chế tính tổng quát, có thể

[1] Nó được cho bởi *L.Đ. Landau* (1944), và trong một số điểm (xét cho tương tác của các sóng va chạm với các gián đoạn tiếp tuyến và gián đoạn yếu) được bổ sung bởi *X.P. Điakov* (1954).

coi rằng chuyển động xảy ra trong mặt phẳng này. Thành phần của vận tốc song song với giao tuyến (và như vậy song song với tất cả các mặt phẳng gián đoạn) phải như nhau trong tất cả các miền ở quanh giao tuyến, do đó bao giờ cũng có thể cho bằng không với sự chọn thích hợp hệ tọa độ.

Trước hết, ta nêu ra một số cấu hình rõ ràng là không thể tồn tại được.



Hình 99

Dễ dàng thấy rằng, không thể tồn tại một sự giao nhau như thế của các sóng va chạm, mà trong đó không có một sóng nào đi tới. Chẳng hạn, trong trường hợp giao nhau của hai sóng va chạm dời xa, đã trình bày trên hình 99a, các đường dòng của dòng chảy tới từ bên trái sẽ lệch đi về các hướng khác nhau, trong khi đó trong toàn miền 2, vận tốc phải không đổi; khó khăn này không thể khắc phục được bằng cách đưa thêm vào trong miền 2 bất kỳ những gián đoạn nào khác [1]. Một cách tương tự, người ta cũng nhận thấy rằng không thể có sự giao nhau của một sóng va chạm dời xa đi từ giao tuyến với một sóng dãn cũng dời xa đi từ giao tuyến (hình 99b); mặc dù trong một hình ảnh như thế vận tốc trong miền 2 có thể không đổi về hướng, nhưng áp suất khi đó không thể không đổi, vì trong sóng va chạm, áp suất tăng nhưng trong sóng dãn, nó giảm.

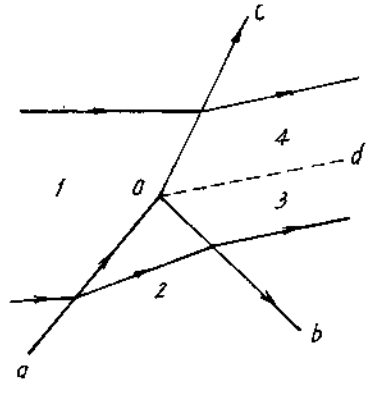
[1] Để không làm phức tạp bài giảng bằng những lập luận đơn điệu, chúng tôi sẽ không dẫn ra những lập luận tương tự cho những trường hợp, khi có những miền dòng chảy dưới âm và sóng dời xa thực tế là một sóng va chạm bị bao bởi miền dưới âm.

Tiếp theo, vì giao tuyến không thể ảnh hưởng ngược lại lên các sóng va chạm đi tới, nên sự giao nhau đồng thời (dọc theo một đường chung) của nhiều hơn hai sóng như thế, xuất hiện do những nguyên nhân khác, sẽ là một sự ngẫu nhiên ít xảy ra. Như vậy, trong hình ảnh giao nhau, có thể chỉ có một hay hai sóng va chạm đi tới tham gia.

Một sự kiện sau rất quan trọng: khí chảy qua một giao điểm chỉ có thể đi qua một sóng va chạm hay sóng dãn xuất phát từ điểm đó. Chẳng hạn, giả sử khí đi qua hai sóng va chạm kế tiếp nhau xuất phát từ điểm O (hình 99c). Vì ở sau sóng Oa thành phần pháp tuyến của vận tốc $v_{2n} < c_2$, nên thành phần vận tốc trong miền 2 vuông góc với sóng Ob cũng phải nhỏ hơn c_2, điều này cũng mâu thuẫn với tính chất cơ bản của các sóng va chạm. Một cách tương tự, ta có thể nhận thấy rằng, khí không thể đi qua hai sóng dãn liên tiếp hay một sóng dãn và sóng va chạm xuất phát từ O.

Những lập luận đó rõ ràng không thể mở rộng sang các sóng va chạm đi tới giao điểm.

Bây giờ ta có thể bắt đầu đếm những loại giao nhau khả dĩ.



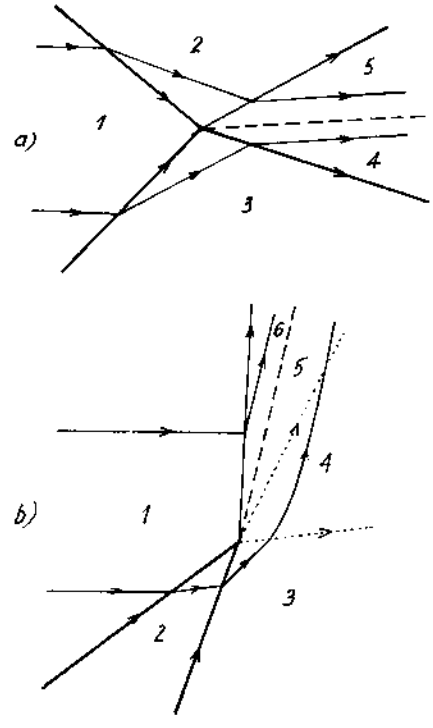
Hình 100

Hình 100 biểu diễn một sự giao nhau trong đó chỉ có một sóng va chạm Oa đi tới tham gia; hai sóng va chạm khác Ob và Oc là những sóng va chạm xuất phát. Trường hợp này có thể được coi là sự tách một sóng va chạm thành hai [1]. Dễ dàng thấy rằng, ngoài hai sóng va chạm dời xa, còn phải xuất hiện một gián đoạn tiếp tuyến ổn định Od, nằm ở giữa chúng, gián đoạn này tách các dòng chảy của khí lần lượt qua Ob hay Oc [2]. Thực vậy, sóng Oa xuất hiện

[1] Cần chú ý rằng, một sóng va chạm không thể được phân nhánh thành một sóng va chạm và một sóng dãn (có thể thấy được dễ dàng rằng, trong một sự giao nhau như thế không thể có sự phù hợp giữa các độ biến thiên của áp suất và các độ biến thiên về hướng của vận tốc ở trong cả hai sóng xuất phát).

[2] Như bao giờ cũng xảy ra, gián đoạn tiếp tuyến thực tế xói lở thành miền chảy rối.

do các nhân tố bên ngoài, và do đó hoàn toàn là đã cho. Điều đó nghĩa là, các đại lượng nhiệt động lực (p và ρ chẳng hạn) và vận tốc $\mathbf{v}$ có những giá trị xác định đã cho ở trong miền *1* và *2*. Do đó, ta chỉ có sẵn hai đại lượng – đó là các góc xác định các hướng của gián đoạn *Ob* và *Oc*. Nhưng nói chung, dựa vào chúng thì không thỏa mãn được bốn điều kiện (sự không đổi của p, ρ và của hai thành phần vận tốc) ở trong miền *3* - *4*, là những điều kiện đòi hỏi khi không có gián đoạn tiếp tuyến *Od*. Việc đưa vào gián đoạn này giảm số điều kiện xuống hai (sự không đổi của áp suất và hướng vận tốc).



Hình 101

Tuy nhiên, một sóng va chạm tùy ý tuyệt nhiên không thể bị phân nhánh. Một sóng va chạm đi tới được xác định (đối với một trạng thái nhiệt động lực đã cho của khí *1*) bởi hai thông số, chẳng hạn bởi số M_1 của dòng tới và tỷ số giữa các áp suất p_1/p_2. Sự phân nhánh chỉ có thể xảy ra trong một miền xác định ở trong mặt phẳng của hai biến đó [1)].

Các sự giao nhau chứa hai sóng va chạm đi tới có thể được coi như kết quả "va chạm" của hai sóng gây bởi các nhân tố bên ngoài tại một nơi nào đó. Khi đó có thể xảy ra

[1)] Việc xác định miền này đòi hỏi nhiều tính toán đại số và các phép tính bằng số. Nhắc lại một lần nữa về sự cần thiết khi đó phải theo dõi "hướng" của các sóng va chạm. Các trường hợp, trong đó có hai sóng va chạm đi tới và một sóng va chạm dời xa là sự giao nhau của hai gián đoạn xuất hiện từ các nguyên nhân bên ngoài và do đó đi tới nơi giao nhau với các giá trị đã cho của tất cả các thông số. Sự hợp nhất của chúng thành một sóng chỉ có thể xảy ra với các hệ thức hoàn toàn xác định giữa các thông số tùy ý này, đó là trường hợp ngẫu nhiên khó có thể xảy ra.

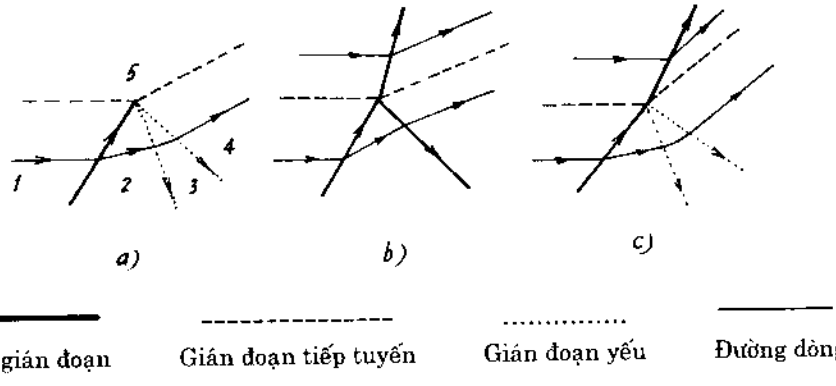
hai trường hợp khác nhau căn bản được biểu diễn trên hình 101.

Trong trường hợp thứ nhất, sự va chạm của hai sóng va chạm dẫn đến sự xuất hiện hai sóng va chạm xuất phát từ giao điểm. Nếu tất cả các điều kiện cần đều được thực hiện, thì một gián đoạn tiếp tuyến lại đòi hỏi phải được tạo thành và nó nằm giữa các sóng va chạm dời xa.

Trong trường hợp thứ hai, thay cho hai sóng va chạm, có xuất hiện một sóng va chạm và một sóng dãn.

Hai sóng va chạm khi va chạm nhau được xác định bởi ba thông so (chẳng hạn M_1 và các tỷ số p_1/p_2, p_1/p_3). Các loại giao nhau đã mô tả chỉ có thể xảy ra ở trong những miền giá trị xác định của các thông số đó. Nếu các giá trị của các thông số nằm ở ngoài các miền đó, thì trước khi va chạm, các sóng va chạm phải phân nhánh.

Tiếp theo, ta khảo sát các loại giao nhau có thể xuất hiện khi sóng va chạm dập lên gián đoạn tiếp tuyến.



Hình 102

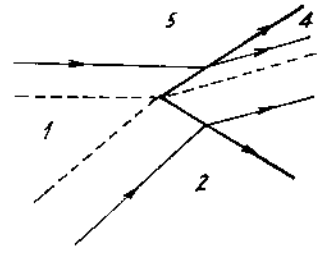
Hình 102a biểu diễn sự phản xạ của sóng va chạm từ biên giới ngăn cách giữa một khí chuyển động và một khí đứng yên. Miền *5* là miền khí đứng yên; nó được ngăn cách với khí chuyển động bởi gián đoạn tiếp tuyến. Trong cả hai miền *1* và *4* tiếp giáp với nó, áp suất phải như nhau (bằng p_5). Nhưng vì áp suất tăng trong sóng va chạm, nên rõ ràng là, sóng va chạm phải phản xạ từ gián đoạn tiếp tuyến dưới dạng sóng dãn *3*, sóng này giảm áp suất đến giá trị ban đầu. Tại giao điểm gián đoạn tiếp tuyến chịu sự gẫy.

Không thể có sự giao nhau của sóng va chạm với gián đoạn tiếp tuyến, mà phía bên kia của nó vận tốc chất lỏng khác không và dưới âm. Thực vậy, sóng va chạm cũng như sóng dãn không thể đi vào miền dưới âm; vì thế trong miền dưới âm chỉ có thể có dòng chảy bình thường với vận tốc không đổi, do đó gián đoạn tiếp tuyến không thể có sự gẫy. Không thể có sự phản xạ của sóng va chạm dưới dạng sóng dãn, vì điều này tất yếu gây ra sự gẫy của gián đoạn tiếp tuyến; sự phản xạ dưới dạng sóng va chạm cũng không thể xảy ra; vì khi đó không thỏa mãn được điều kiện các áp suất phải bằng nhau ở trên gián đoạn tiếp tuyến.

Nhưng nếu dòng chảy ở cả hai bên gián đoạn tiếp tuyến là vượt âm, thì có thể có hai cấu hình khác nhau. Trong một trường hợp (hình 102b) cùng với sóng va chạm đập lên gián đoạn tiếp tuyến còn xuất hiện cả các sóng va chạm phản xạ và khúc xạ nữa; gián đoạn tiếp tuyến chịu sự gẫy.

Trong trường hợp khác (hình 102c) có xuất hiện sóng dãn phản xạ và sóng va chạm khúc xạ truyền vào môi trường khác. Cả hai cấu hình này chỉ có thể xảy ra ở trong các miền giá trị thông số xác định của sóng va chạm tới và gián đoạn tiếp tuyến [1].

Tương tác của hai gián đoạn tiếp tuyến có thể dẫn tới cấu hình không có các sóng va chạm đi tới, mà chỉ với hai sóng dời xa (điều này không thể được, như đã nói ở trên, khi không có các gián đoạn tiếp tuyến). Trong miền *1* trên hình 103 khí đứng yên; rõ ràng cấu hình chỉ có thể xảy ra với dòng chảy vượt âm trong các miền *2* và *5*.



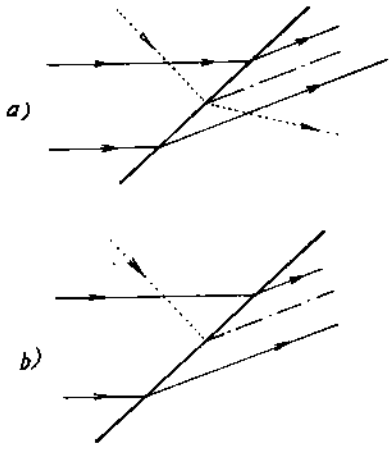
Hình 103

Ta dừng lại ngắn gọn ở việc đếm sóng va chạm với đoạn yếu đi tới từ một nguồn bên ngoài. Hai trường hợp có thể xảy ra ở đây, tùy theo ở sau sóng va chạm chuyển động là vượt âm hay dưới âm. Trong trường hợp thứ nhất (hình 104a) gián đoạn yếu khúc xạ trên sóng va chạm và đi vào không

[1] Cả hai cấu hình này thu được một nghĩa nào đó mở rộng các trường hợp được biểu diễn ở trên hình 100 và 101b.

gian ở sau sóng va chạm đó (bản thân sóng va chạm tại giao điểm không có sự gẫy; hình dạng của nó chỉ có một kỳ dị cấp cao hơn, có cùng tính chất như kỳ dị ở trên gián đoạn yếu). Ngoài ra, sự biến thiên của entrôpi ở trong sóng va chạm phải dẫn đến sự xuất hiện ở sau nó một gián đoạn tiếp tuyến yếu, trên đó các đạo hàm của entrôpi chịu bước nhảy.

Nhưng nếu ở sau sóng va chạm dòng chảy trở nên dưới âm, thì gián đoạn yếu không thể đi vào miền này và kết thúc tại giao điểm (hình 104b). Trong trường hợp này, điểm đó là một điểm kỳ dị (chẳng hạn, nếu gián đoạn yếu đập tới là gián đoạn của các đạo hàm bậc nhất của các đại lượng thuỷ động lực thì có thể chứng minh rằng, gián đoạn tiếp tuyến yếu dời xa, dạng sóng va chạm và sự phân bố áp suất ở lân cận giao điểm đều có kỳ dị lôga). Ngoài ra cũng như trong trường hợp trước, ở sau sóng va chạm có xuất hiện gián đoạn tiếp tuyến yếu của entrôpi [1].



Hình 104

Điều nói trên cho tương tác của các sóng va chạm với gián đoạn yếu cũng đúng cho tương tác với các gián đoạn tiếp tuyến yếu. Nếu dòng chảy ở trong miền sau sóng va chạm là vượt âm, thì trong đó có xuất hiện các gián đoạn tiếp tuyến yếu. Nhưng nếu dòng chảy sau sóng va chạm là dưới âm thì trong nó chỉ xuất hiện gián đoạn tiếp tuyến yếu khúc xạ.

Cuối cùng, ta hãy nhớ lại tương tác của các gián đoạn yếu với gián đoạn tiếp tuyến. Nếu dòng chảy ở hai phía gián đoạn tiếp tuyến là vượt âm thì ngoài các gián đoạn yếu tới, còn xuất hiện cả gián đoạn yếu phản xạ và khúc xạ nữa. Nhưng nếu dòng chảy ở phía kia của gián đoạn tiếp

[1] Nghiên cứu định lượng chi tiết về sự giao nhau của các sóng va chạm với các gián đoạn yếu được cho bởi *X.P. Điakov*. JETP, 1957, T.33, trang 948, 962.

tuyến là dưới âm, thì gián đoạn yếu không xuyên vào trong nó và có xảy ra "phản xạ trong toàn phần" của gián đoạn yếu.

§111. SỰ GIAO NHAU CỦA CÁC SÓNG VA CHẠM VỚI MẶT RẮN

Trong hiện tượng giao nhau dừng của các sóng va chạm với mặt vật có dòng chảy bao quanh, sự tương tác của chúng với lớp biên giữ một vai trò cơ bản. Các tính chất của tương tác này rất phức tạp và sự nghiên cứu chi tiết chúng vượt ra ngoài phạm vi cuốn sách này. Chúng ta chỉ giới hạn ở đây một số điều khẳng định tổng quát [1].

Trong sóng va chạm, áp suất chịu bước nhảy và tăng theo chiều chuyển động của khí. Do đó, nếu sóng va chạm cắt mặt của vật, thì ở gần nơi giao nhau, áp suất sẽ tăng một lượng hữu hạn trên một đoạn độ dài rất ngắn, có nghĩa là có một gradiên áp suất dương rất lớn. Nhưng ta biết rằng một sự tăng áp suất đột ngột như thế không thể xảy ra ở gần thành rắn (xem phần cuối của §40); nó phải gây ra hiện tượng tách và kết quả là hình ảnh của dòng chảy sẽ thay đổi sao cho sóng va chạm bị đẩy ra khỏi mặt vật đến một khoảng cách đủ xa. Ngoại lệ chỉ áp dụng cho trường hợp khi sóng va chạm có cường độ đủ nhỏ. Từ phần chứng minh đã trình bày ở cuối §40, ta thấy rõ rằng, sự không thể có một bước nhảy dương của áp suất tại biên giới của lớp biên là hệ quả của giả thiết cho rằng, bước nhảy đó đủ lớn: nó phải lớn hơn một giới hạn nào đó phụ thuộc vào giá trị của R, và nó giảm khi R tăng.

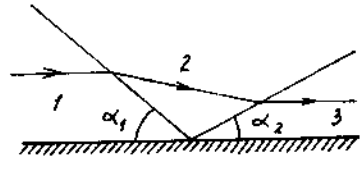
Như vậy, sự giao nhau dừng của các sóng va chạm với mặt vật rắn chỉ có thể xảy ra với các sóng va chạm có cường độ không quá lớn, cường độ này càng nhỏ nếu R càng lớn. Cường độ giới hạn cho phép của sóng va chạm cũng phụ thuộc vào chỗ lớp biên là chảy tầng hay chảy rối. Nếu lớp biên là chảy rối, thì sự tách khó xảy ra (§45). Do đó, trong lớp biên chảy rối các sóng va chạm mạnh có thể dời khỏi mặt vật hơn trong lớp biên chảy tầng.

[1] Trong lớp biên nhất thiết có một phần dưới âm kề sát với mặt vật, mà sóng va chạm hoàn toàn không thể xuyên vào được. Khi nói về sự giao nhau, ta bỏ qua tình hình này, nó không có ảnh hưởng đến những lập luận tiếp theo.

Cần nhấn mạnh rằng, đối với tất cả những lập luận đã trình bày, điều quan trọng là lớp biên phải ở trước sóng va chạm (nghĩa là ở thượng lưu của nó). Do đó, điều nói trên không được xét cho các sóng dời khỏi bờ trước của vật, như trường hợp có thể xảy ra, chẳng hạn, khi dòng chảy bao quanh một nêm nhọn (ta sẽ nói chi tiết về vấn đề này trong tiết sau). Trong trường hợp này, khí đi tới bờ của góc từ phía ngoài, nghĩa là từ một miền không gian trong đó không tồn tại một lớp biên nào; do đó, rõ ràng các lập luận đã trình bày hoàn toàn không ảnh hưởng đến khả năng tồn tại của các sóng va chạm dời khỏi bờ có một góc như vậy.

Đối với dòng chảy dưới âm sự tách chỉ có thể xảy ra khi áp suất tăng trong dòng chảy cơ bản xuôi dòng dọc theo mặt bị bao. Đối với chuyển động vượt âm, thì có khả năng độc đáo xuất hiện sự tách cả ở trong miền, tại đó áp suất giảm xuôi dòng. Một hiện tượng như thế có thể được thực hiện bằng sự tổ hợp một sóng va chạm cường độ yếu với sự tách, thêm vào đó sự tăng áp suất cần thiết để xuất hiện sự tách xảy ra ở trong chính sóng va chạm; còn ở trong miền phía trước sóng va chạm, áp suất khi đó có thể tăng hay giảm xuôi dòng.

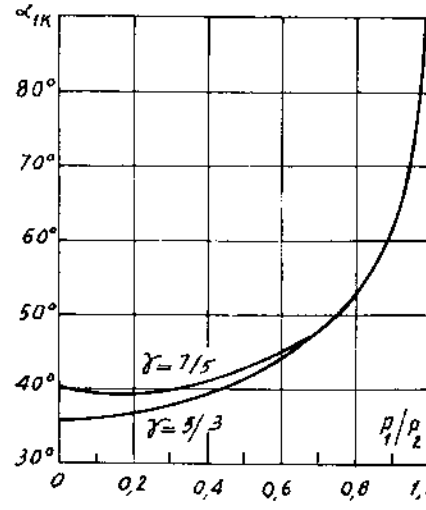
Tất cả những điều đã nói chỉ xét cho sự giao nhau dừng, trong đó sóng va chạm và vật rắn đứng yên tương đối với nhau. Ta chuyển sang khảo sát sự giao nhau không dừng, trong đó một sóng va chạm chuyển động đập tới một vật rắn từ phía ngoài, do đó giao tuyến của nó với mặt vật dịch chuyển ở trên mặt. Một sự giao nhau như thế kéo theo sự phản xạ của sóng va chạm: cùng với sóng tới, còn xuất hiện một sóng phản xạ nữa dời khỏi vật.



Hình 105

Ta sẽ khảo sát hiện tượng trong hệ tọa độ chuyển động cùng với giao tuyến; trong hệ này các sóng va chạm đều là dừng. Hình ảnh phản xạ đơn giản nhất là hình ảnh trong đó sóng phản xạ dời trực tiếp từ giao tuyến; một sự phản xạ như thế được coi là sự phản xạ đều (*regular reflection*, ND) (hình 105). Nếu cho trước góc tới α_1 và cường độ của sóng

tới, thì dòng chảy ở trong miền 2 được xác định đơn trị. Vận tốc của khí phải quay một góc xác định ở trong sóng phản xạ, sao cho nó lại song song với mặt của vật. Vị trí và cường độ của sóng phản xạ được xác định bởi phương trình của cực tuyến va chạm (*shock polar*, ND) theo góc đó. Nhưng đối với một góc quay đã cho của vận tốc, thì cực tuyến va chạm này xác định hai sóng va chạm khác nhau: các sóng thuộc các họ "mạnh" và "yếu" (§92). Các số liệu thực nghiệm chứng tỏ rằng, thực tế sóng phản xạ bao giờ cũng thuộc về họ "yếu" và dưới đây ta cũng sẽ hiểu ngầm như vậy. Cần nêu lên rằng, với sự lựa chọn như vậy, khi cường độ của sóng tới tiến đến giới hạn vô cùng yếu, thì cường độ của sóng phản xạ α_2 cũng tiến đến không, và góc phản xạ cũng tiến tới α_1, như đúng phải như thế, phù hợp với sự gần đúng âm học. Tại giới hạn $\alpha_1 \to 0$, sóng phản xạ của họ "yếu" chuyển liên tục thành sóng thu được đối với sự phản xạ của sóng va chạm đập tới chính diện (frontally, ND) (bài tập 1, §100).



Hình 106

Các phép tính toán học đối với sự phản xạ đều (trong khí lý tưởng) về mặt nguyên tắc không có gì khó khăn, nhưng là các phép tính đại số dài dòng. Ta chỉ giới hạn trình bày ở đây một số kết quả [1].

Từ các tính chất tổng quát của các cực tuyến va chạm, rõ ràng là sự phản xạ đều hoàn toàn không xảy ra đối với các giá trị tuỳ ý của các thông số của sóng tới (với góc tới α_1 và tỷ số p_2/p_1). Với giá trị đã cho của p_2/p_1 chỉ tồn tại góc giới hạn cho phép α_{1k}; với $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ sự phản xạ đều

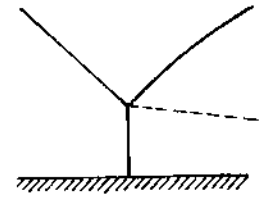
[1] Phần trình bày chi tiết hơn về vấn đề phản xạ của các sóng va chạm có thể tìm được ở trong sách *R. Courant, K. Friedrichs, Supersonic flow and shock waves Interscience, New York*, 1948, *Mises R. Mathematical theory of compressible fluid flow · – N.Y. Academic Press*, 1958 cũng như trong bài báo của *W. Bleakney* và *A.H. Taub, Reviews of Modern Physics* 21, 584, 1949.

không thể xảy ra được. Tại giới hạn $p_2/p_1 \to 1$, góc giới hạn tiến đến 90°, nghĩa là sự phản xạ đều có thể xảy ra được với mọi góc tới tùy ý. Tại giới hạn $p_2/p_1 \to \infty$, góc giới hạn tiến đến giá trị nào đó, phụ thuộc vào γ (bằng 40° đối với không khí). Hình 106 biểu diễn đồ thị của α_{1k} như là hàm của p_1/p_2 đối với $\gamma = 7{,}5$ và $\gamma = 5/3$.

Góc phản xạ α_2 nói chung không trùng với góc tới. Có tồn tại một giá trị xác định α_* của góc tới sao cho, với $\alpha_1 < \alpha_*$ góc phản xạ $\alpha_2 < \alpha_1$; nhưng nếu $\alpha_1 > \alpha_*$ chúng ta có $\alpha_2 > \alpha_1$. Giá trị của α_* bằng

$$\alpha_* = \frac{1}{2}\arccos\frac{\gamma - 1}{2}$$

(với giá trị $\alpha_* = 39{,}2^\circ$); đáng chú ý là góc này không phụ thuộc vào cường độ của sóng tới.



Hình 107

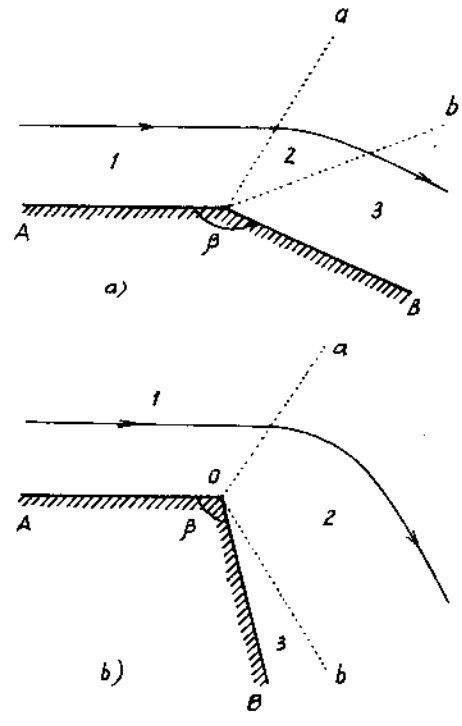
Với $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ sự phản xạ đều không thể xảy ra và sóng va chạm tới phải phân nhánh tại một khoảng cách xác định tính từ mặt của vật, do đó, có xuất hiện một hình ảnh đã được biểu diễn ở trên hình 107 với cấu hình bộ ba của các sóng va chạm và gián đoạn tiếp tuyến dời đi từ điểm phân nhánh (một cấu hình như vậy được gọi là *phản xạ Mach*).

§112. DÒNG CHẢY VƯỢT ÂM QUANH MỘT GÓC

Khi nghiên cứu chuyển động ở gần bờ của góc trên mặt vật bị bao, ta lại chỉ cần xét các đoạn nhỏ dọc theo bờ của góc, và như vậy có thể coi rằng cạnh này thẳng và bản thân góc được thiết lập bởi sự giao nhau của hai mặt phẳng. Ta sẽ nói rằng dòng chảy xảy ra quanh một góc lồi nếu dòng chảy xảy ra ở trong một góc lớn hơn π và dòng chảy quanh một góc lõm nếu khí chuyển động ở trong một góc nhỏ hơn π.

Dòng chảy dưới âm quanh một góc về tính chất không khác gì so với dòng chảy của một chất lỏng không nén được. Còn dòng chảy vượt âm có một tính chất hoàn toàn khác; đặc tính quan trọng của nó là sự xuất hiện của các gián đoạn dời đi từ bờ của góc.

Trước hết, ta xét các chế độ chảy bao quanh khả dĩ, khi một dòng khí vượt âm đi tới bờ của góc dọc theo một trong các cạnh của nó. Theo các tính chất tổng quát của dòng chảy vượt âm, dòng vẫn đều cho tới tận bờ của góc. Sự quay của dòng chảy có tác dụng làm cho dòng song song với cạnh kia của góc, được thực hiện ở trong sóng dãn dời đi từ bờ của góc, và toàn bộ hình ảnh của chuyển động gồm bởi ba miền ngăn cách nhau bởi các gián đoạn yếu (*Oa* và *Ob* ở trên hình 108): dòng khí đều *1* chuyển động dọc theo cạnh *AO* của góc, quay sang sóng dãn *2*, sau đó lại chuyển động với vận tốc không đổi dọc theo cạnh kia của góc. Cần chú ý là, trong một dòng chảy bao quanh như thế không có một miền chảy rối nào được tạo thành; trong trường hợp dòng chảy tương tự bao quanh chất lỏng không nén được nhất thiết phải xuất hiện một miền chảy rối, với đường tách theo bờ của góc (hình 24).



Hình 108

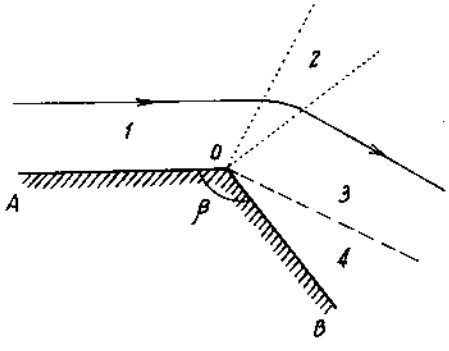
Giả sử v_1 là vận tốc của dòng tới (*1* ở trên hình 108), và c_1 là vận tốc của âm trong dòng đó. Vị trí của gián đoạn yếu *Oa* được xác định trực tiếp theo số $M_1 = v_1/c_1$, do bởi điều kiện là nó cắt các đường dòng dưới góc Mach. Sự biến thiên của vận tốc và áp suất trong sóng dãn được xác định bởi các công thức (109.12-15), đồng thời chỉ cần xác định được hướng để từ đó ta đo góc φ trong các công thức này. Tia thẳng đứng $\varphi = 0$ tương ứng với $v = c = c_*$; với $M_1 > 1$ thực tế một đường như thế không có, vì tại mọi nơi $v/c > 1$. Tuy nhiên, nếu hình dung rằng, sóng dãn về hình thức đã được kéo dài vào trong miền ở bên trái *Oa* và nếu dùng

công thức (109-12), ta sẽ tìm được rằng, gián đoạn *Oa* phải tương ứng với góc φ có giá trị

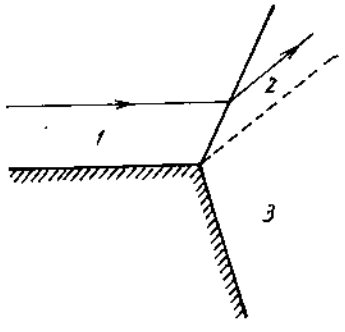
$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

sau đó, φ phải tăng theo chiều từ *Oa* về *Ob*. Vị trí của gián đoạn *Ob* được xác định bởi lúc mà hướng của vận tốc trở nên song song với cạnh *OB* của góc.

Góc quay của dòng ở trong sóng dãn không thể vượt quá giá trị χ_{max} đã tính được trong bài tập 2 của §109. Nếu độ lớn của góc bị bao $\beta < \pi - \chi_{max}$, thì sóng dãn không thể quay dòng một góc đòi hỏi, và xuất hiện hình ảnh được biểu diễn bởi hình 108b. Sự dãn ở trong sóng *2* khi đó xảy ra cho đến khi áp suất bằng không (đạt được ở trên đường *Ob*), do đó sóng dãn được ngăn cách với thành bởi miền chân không *3*.



Hình 109



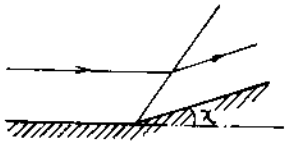
Hình 110

Nhưng chế độ bao quanh đã mô tả không phải là chế độ duy nhất có thể có. Các hình 109 và 110 biểu diễn các chế độ, trong đó cạnh thứ hai của góc kề sát với miền khí đứng yên, được ngăn cách với khí chuyển động bởi một gián đoạn tiếp tuyến; như vẫn xảy ra, gián đoạn tiếp tuyến bị xói lở thành miền chảy rối, do đó trường hợp này tương ứng với sự có mặt của sự tách [1]. Sự quay của dòng một góc xác định nào đó xảy ra ở

[1] Theo các số liệu thực nghiệm, ta thấy rằng tính nén được của khí phần nào làm giảm góc mở của miền chảy rối, được hình thành từ gián đoạn tiếp tuyến bị xói lở.

trong sóng dãn (hình 109) hay trong sóng va chạm (hình 110). Tuy nhiên, trường hợp sau cùng chỉ có thể xảy ra nếu cường độ của sóng va chạm không lớn quá (theo những nhận định tổng quát đã trình bày trong tiết trước).

Trong số các chế độ đã mô tả, chế độ nào được thực hiện trong trường hợp cụ thể này hay khác, nói chung, đều phụ thuộc vào các điều kiện của dòng chảy ở xa bờ của góc. Chẳng hạn, khi khí chảy ra từ miệng một ống phun (bờ của góc ở đây là bờ của miệng ống phun) thì quan hệ giữa áp suất ra p_1 và áp suất ở trong môi trường ngoài p_e có tầm quan trọng. Nếu $p_e < p_1$, dòng chảy bao quanh xảy ra theo kiểu hình vẽ 109; vị trí và góc mở của sóng dãn khi đó được xác định bởi điều kiện đòi hỏi áp suất trong các miền *3 - 4* phải trùng với p_e; p_e càng nhỏ, dòng phải quay một góc càng lớn. Tuy nhiên, nếu góc β bị bao trên hình 109 quá lớn, thì áp suất khí có thể "không kịp" đạt tới giá trị p_e đòi hỏi – phương của vận tốc trở nên song song với cạnh *OB* của góc trước khi áp suất giảm tới giá trị này. Chuyển động ở gần bờ của ống phụt khi đó xảy ra theo kiểu đã trình bày ở hình 107. Áp suất ở gần cạnh ngoài *OB* của miệng hoàn toàn được xác định bởi góc β và không phụ thuộc vào giá trị của p_e; sự giảm cuối cùng của áp suất tới p_e chỉ xảy ra tại một khoảng cách nào đó tính từ miệng ống phun.



Hình 111

Nhưng nếu $p_e > p_1$, thì dòng chảy bao quanh của miệng ống phun xảy ra theo kiểu được trình bày trên hình 110 với sự tạo thành một sóng va chạm dời đi từ bờ của ống phun, làm áp suất tăng từ p_1 đến p_e. Tuy nhiên, điều này chỉ có thể xảy ra được nếu p_e không quá lớn so với p_1, khi cường độ sóng va chạm không quá lớn; trong trường hợp ngược lại sẽ có sự tách ở trên mặt trong của ống phun và sóng va chạm dịch chuyển cùng với nó vào trong ống phun. Vấn đề này đã được đề cập đến ở §97.

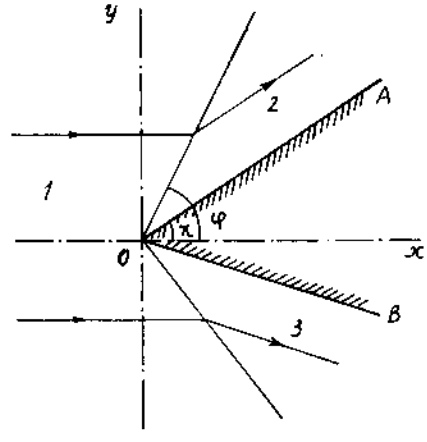
Tiếp theo, ta xét dòng chảy ở trong góc lõm. Trong trường hợp dưới âm một dòng bao quanh như thế sẽ gây ra sự tách tại một khoảng cách xác định nào đó ở trước bờ của góc (xem phần cuối của §40). Nhưng nếu

dòng tới là vượt âm, sự thay đổi phương của nó có thể được thực hiện trong sóng va chạm dời đi từ bờ của góc (hình 111). Ở đây còn cần phải nói rằng, thực tế một chế độ không tách đơn giản như thế chỉ có thể xảy ra nếu sóng va chạm không quá mạnh. Cường độ của sóng va chạm tăng với góc quay χ của dòng mà nó thực hiện. Do đó ta có thể nói rằng, dòng chảy bao quanh không tách chỉ có thể xảy ra đối với các giá trị χ không quá lớn.

Bây giờ, ta xét hình ảnh của chuyển động xuất hiện khi một dòng vượt âm tự do đạt tới bờ của góc (hình 112). Sự quay của dòng chảy theo phương song song với các cạnh của góc được thực hiện trong các sóng va chạm xuất phát từ bờ của góc. Như đã giải thích trong tiết trước, đó chính là trường hợp đặc biệt, trong đó một sóng va chạm cường độ tùy ý có thể dời khỏi mặt của vật rắn.

Nếu biết được các vận tốc $\mathbf{v}_1$ và c_1 ở trong dòng tới *1*, có thể xác định được vị trí của các sóng va chạm và chuyển động của khí ở trong các miền nằm phía sau chúng. Phương của vận tốc $\mathbf{v}_2$ phải song song với cạnh *OB* của góc

$$\frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \operatorname{tg} \chi.$$

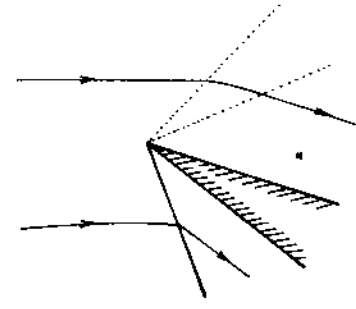


Hình 112

Như vậy, việc xác định v_2 và góc φ của sóng va chạm được thực hiện trực tiếp theo đồ thị của cực tuyến va chạm, dựa vào tia vạch từ gốc tọa độ lập với trục hoành một góc χ đã cho (hình 64), như đã được giải thích chi tiết ở §92. Ta đã thấy rằng, với góc χ đã cho; cực tuyến va chạm xác định hai sóng va chạm khác nhau với các góc φ khác nhau. Một trong các sóng đó (tương ứng với điểm *B* ở trên hình 64), yếu hơn, nói chung giữ dòng chảy là vượt âm; còn sóng kia, mạnh hơn, biến dòng chảy thành dưới âm. Trong trường hợp đã cho, đối với dòng bao quanh các góc ở trên mặt các vật hữu hạn, bao giờ

cũng phải lấy sóng thứ nhất, sóng thuộc họ "yếu". Cần nhớ rằng, thực tế việc chọn đó được xác định bởi các điều kiện bao quanh ở xa góc. Đối với sự bao quanh một góc rất nhọn (χ bé), rõ ràng sóng va chạm được tạo thành phải có cường độ rất nhỏ. Một cách tự nhiên coi rằng, khi góc này tăng, cường độ của sóng tăng đơn điệu; điều đó tương ứng với đúng chuyển động trên cung QC của cực tuyến va chạm (hình 64) từ điểm Q về điểm C [1].

Ở §92, ta cũng đã thấy rằng, góc quay của vectơ vận tốc trong sóng va chạm không thể vượt quá một giá trị xác định χ_{max} nào đó (phụ thuộc vào M_1). Do đó, hình ảnh dòng chảy đã mô tả không thể có được, nếu một cạnh nào đó của góc nghiêng so với phương của dòng tới một góc lớn hơn χ_{max} (trong trường hợp như thế, chuyển động của khí ở trong miền gần góc phải dưới âm, điều đó thực tế được thực hiện bởi sự xuất hiện của một sóng va chạm tại một nơi nào đó ở trước vật; xem §112). Vì χ_{max} là một hàm tăng đơn điệu của M_1, nên có thể nói rằng, với một giá trị đã cho của góc χ, số M_1 của dòng tới phải lớn hơn một giá trị $M_{1\,min}$ nào đó.



Hình 113

Cuối cùng, có thể nêu lên rằng, nếu các cạnh của góc được sắp xếp đối với dòng tới như đã trình bày ở hình 113, thì sóng va chạm hiển nhiên chỉ xuất hiện về một phía của cạnh góc; sự quay của dòng về phía cạnh kia được thực hiện trong sóng dãn.

BÀI TẬP

1. Xác định vị trí và cường độ của sóng va chạm trong một dòng chảy quanh một góc rất nhỏ ($\chi << 1$) với các giá trị rất lớn của M_1: $M_1\chi << 1$.

[1] Tuy nhiên, xem bị chú 1 ở trang 694. Vấn đề thuần tuý hình thức về sự bao quanh nêm tạo bởi hai mặt phẳng vô hạn không có gì đặc biệt về mặt vật lý.

Giải. Với $\chi << 1$ cực tuyến va chạm xác định hai giá trị: một giá trị gần bằng $\pi/2$ (gần điểm P trên hình 64) và một giá trị gần góc Mach α_1 (gần điểm Q). Giá trị thứ hai tương ứng với sóng thuộc họ "yếu" mà ta quan tâm. Từ (92-11), ta có $\chi << 1$:

$$M_1^2 \sin^2 \varphi - 1 \approx \chi \frac{\gamma+1}{2} M_1^2 \operatorname{tg} \alpha_1 = \chi \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Thay biểu thức này vào (92-9) ta được

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \chi.$$

Góc φ được tìm dưới dạng $\varphi = \alpha_1 + \varepsilon$, $\varepsilon << \alpha_1$ và từ chính biểu thức này ta tìm được

$$\varphi - \alpha_1 = \frac{\gamma+1}{4} \frac{M_1^2}{M_1^2 - 1} \chi.$$

Với $M_1 >> 1$ góc $\alpha_1 \approx 1/M_1$ và để các công thức thu được là đúng, cần phải có $\chi M_1 << 1$.

2. Cũng bài tập trên nếu số M_1 lớn đến mức $M\chi >> 1$.

Giải. Trong trường hợp này các góc φ và χ có cùng bậc độ nhỏ. Từ (92-11) ta tìm được

$$\varphi = \frac{\gamma+1}{2} \chi.$$

Đối với các tỷ số giữa các áp suất theo (92-9)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 \varphi^2 = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} M_1^2 \chi^2.$$

Giá trị M_2 ở sau sóng (từ (92-12)):

$$M_2 = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}},$$

nghĩa là vẫn còn lớn hơn so với 1, mà không phải so với $1/\chi$. Trong cùng phép gần đúng này

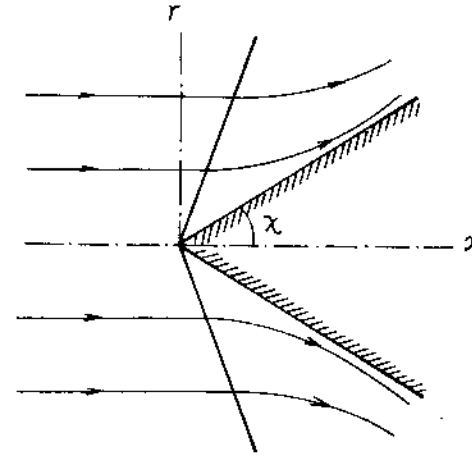
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \qquad \frac{v_2}{v_1} = 1$$

(hiệu $v_1 - v_2 \sim v_1 \chi^2$). Do đó sự giảm của số Mach thực tế chỉ liên quan đến sự tăng của vận tốc âm $M_2/M_1 = c_1/c_2$.

§113. DÒNG CHẢY QUANH MŨI NHỌN HÌNH NÓN

Việc nghiên cứu dòng chảy dừng vượt âm ở gần mũi nhọn trên mặt vật có dòng chảy bao quanh là bài toán ba chiều, do đó bài toán này phức tạp hơn nhiều so với việc nghiên cứu dòng chảy bao quanh một góc với bờ thẳng. Bài toán về dòng chảy đối xứng trục quanh mũi nhọn có thể được giải hoàn toàn và ở đây ta khảo sát trường hợp này.

Ở gần đầu của nó, mũi nhọn đối xứng trục có thể được coi như một hình nón thẳng có tiết diện tròn, như vậy bài toán bao gồm ở việc nghiên cứu sự chảy của một dòng đều quanh một hình nón có trục trùng với phương tới của nó. Về mặt định tính, ta có hình ảnh sau.



Hình 114

Cũng như trong trường hợp tương tự của dòng chảy quanh một góc phẳng, một sóng va chạm phải xuất hiện (*A. Busemann*, 1929); vì lý do đối xứng, hiển nhiên sóng này sẽ là một mặt nón đồng trục với mặt nón nhúng trong dòng chảy bao quanh có cùng đỉnh (hình 114 biểu diễn mặt cắt của hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục của nó). Tuy nhiên, khác với trường hợp phẳng, sóng va chạm không gây ra ở đây sự quay của vận tốc chất khí một góc toàn phần χ, cần thiết để cho khí chuyển động dọc theo mặt nón (góc mở của mặt nón bằng 2χ). Sau khi chuyển qua mặt gián đoạn, các đường dòng uốn cong và tiến tiệm cận đến các đường sinh của mặt nón. Sự uốn cong này làm cho mật độ của khí tăng liên tục (bổ sung thêm vào sự tăng xảy ra trong bản thân sóng) với sự giảm tương ứng của vận tốc.

Sự biến thiên về phương và độ lớn của vận tốc trên chính sóng va

chạm được xác định bởi cực tuyến va chạm, đồng thời ở đây nghiệm tương ứng với nhánh "yếu" của cực tuyến được thực hiện [1]. Phù hợp với điều đó, đối với mỗi giá trị số Mach của dòng tới $M_1 = v_1/c_1$ có tồn tại một giá trị giới hạn xác định của nửa góc mở hình nón χ_{max}, sau góc này một sự bao quanh như thế không thể tồn tại được và sóng va chạm "tách" khỏi đỉnh hình nón. Vì sau sóng va chạm có xảy ra sự quay phụ thêm của dòng chảy, nên các giá trị χ_{max} cho sự bao quanh hình nón vượt (với các M_1 như nhau) các giá trị χ_{max} cho trường hợp phẳng (sự bao quanh hình nêm). Ngay sau sóng va chạm, chuyển động của khí thường là vượt âm, nhưng cũng có thể là dưới âm (với χ gần với χ_{max}). Dòng chảy vượt âm sau sóng va chạm khi đến gần mặt hình nón có thể trở nên dưới âm và khi đó trên mặt nón xác định vận tốc đi qua giá trị vận tốc âm.

Sóng va chạm hình nón cắt tất cả các đường dòng của dòng tới dưới cùng một góc, do đó có cường độ không đổi. Từ đó suy ra rằng (xem §114), dòng chảy là đẳng entrôpi và có thế cả ở sau sóng va chạm.

Vì bài toán là đối xứng và "tự đồng dạng" (không có một hằng số độ dài đặc trưng nào ở trong các điều kiện của nó), nên hiển nhiên là sự phân bố của tất cả các đại lượng (vận tốc, áp suất) trong dòng ở sau sóng va chạm chỉ là hàm của góc nghiêng θ trên trục của mặt nón (trục x trên hình 114) của bán kính vectơ vạch từ đỉnh hình nón đến điểm đang xét. Một cách tương ứng, các phương trình chuyển động rút về các phương trình vi phân thông thường; các điều kiện biên cho các phương trình đó ở trong sóng va chạm được xác định bởi phương trình của cực tuyến va chạm, và chúng đòi hỏi ở trên mặt nón, vận tốc phải song song với các đường sinh hình nón. Tuy nhiên, các phương trình này không thể tích phân được dưới dạng giải tích và phải giải bằng phương pháp số. Tìm những kết quả của các phép tính đó ở các tài liệu gốc [2]. Ở đây

[1] Tuy nhiên, điều này có thể không phải như thế trong một số dạng "kỳ dị" của vật bị bao quanh. Chẳng hạn, có tồn tại những sự nêu ra việc chọn sóng họ "mạnh" khi dòng chảy bao quanh mặt nón ở bờ phía trước của một vật tù và rộng.

[2] Xem *Taylor G.I., Maccol J.W.* – Proc. Roy Soc, 1933, tập 139A, tr.278; *Maccol J.W.* – Proc. Roy Soc, 1937, t.159A, tr.459. cũng xem cả phần trình bày trong sách của *K.E. Kibel, I.A. Roze,* NXB Cơ học chất lỏng, M., sách Nga, phần II, §27

chỉ cho đường cong (hình 65) biểu diễn sự phụ thuộc của góc mở giới hạn cho phép $2\chi_{max}$ của mặt nón như hàm của số M_1. Cũng nêu ra rằng, khi $M_1 \to 1$, góc χ_{max} tiến đến không theo định luật

$$\chi_{max} = \text{const}\sqrt{\frac{M_1 - 1}{\gamma + 1}}. \qquad (113\text{-}1)$$

như người ta có thể kết luận trên cơ sở của định luật đồng dạng gần âm tổng quát (126-11) (const là một con số không phụ thuộc vào M_1, cũng như bản chất khí).

Nghiệm giải tích đóng kín về dòng chảy bao quanh một mặt nón chỉ có thể có được trong trường hợp giới hạn của các góc mở nhỏ của mặt nón (*Th. Karman, N.B. Moor, 1932*). Hiển nhiên rằng trong một trường hợp như thế vận tốc của khí trong toàn không gian chỉ khác ít so với vận tốc v_1 của dòng tới. Nếu ký hiệu v là hiệu nhỏ giữa vận tốc của khí tại điểm đã cho và v_1, và đưa vào thế φ của nó, ta có thể áp dụng được cho nó phương trình tuyến tính hóa (114-4); nếu đưa vào các tọa độ trụ x, r, ω với trục nằm trên trục của mặt nón (ω là góc cực), thì phương trình này có dạng

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} - \beta^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \qquad (113\text{-}2)$$

hay đối với chuyển động đối xứng trục

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) - \beta^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \qquad (113\text{-}3)$$

trong đó đã đưa vào ký hiệu

$$\beta = (M_1^2 - 1)^{1/2}. \qquad (113\text{-}4)$$

Để cho sự phân bố vận tốc chỉ là hàm của θ, thế phải có dạng $\varphi = xf(\xi)$, trong đó $\xi = r/x = \text{tg}\theta$. Sau khi thay vào ta tìm được cho $f(\xi)$ phương trình

$$\xi(1 - \beta^2\xi^2)f'' + f' = 0,$$

phương trình này được giải theo cách sơ cấp. Nghiệm tầm thường $f = \text{const}$ tương ứng với dòng đều, và nghiệm thứ hai là

$$f = \text{const}\left(\sqrt{1-\beta^2\xi^2} - \text{Arch}\frac{1}{\beta\xi}\right).$$

Điều kiện biên ở trên mặt nón (nghĩa là với $\xi = \text{tg}\chi \approx \chi$) phát biểu:

$$\frac{v_r}{v_1 + v_x} \approx \frac{1}{v_1}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \chi, \tag{113-5}$$

hay $f' = v_1\chi$. Từ đó const $= v_1\chi^2$ và kết quả là ta thu được biểu thức cuối cùng cho thế (trong miền $x > \beta r$ [1]):

$$\varphi = v_1\chi^2\left[\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2} - x\,\text{Arch}\frac{x}{\beta r}\right]. \tag{113-6}$$

Cần chú ý rằng, φ có kỳ dị loga khi $r \to 0$.

Từ đó ta tìm được các thành phần của vận tốc

$$v_x = -v_1\chi^2\text{Arch}\frac{x}{\beta r}, \quad v_r = \frac{v_1\chi^2}{r}\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}. \tag{113-7}$$

Áp suất ở trên mặt nón được tính theo công thức (114-5); vì φ có kỳ dị loga khi $r \to 0$, nên vận tốc v_r ở ngay trên mặt nón (nghĩa là với các r nhỏ) sẽ lớn so với v_x, do đó số hạng chứa v_r^2 phải được giữ lại trong công thức của áp suất. Cuối cùng ta thu được:

$$p - p_1 = \rho_1 v_1^2\chi^2\left(\ln\frac{2}{\beta\chi} - \frac{1}{2}\right). \tag{113-8}$$

Tất cả các công thức thu được dựa vào lý thuyết tuyến tính hóa không còn ứng dụng được cho các giá trị quá lớn của M_1, vào cỡ so sánh được với $1/\chi$ (xem §127).

---

[1] Trong phép gần đúng đang xét, mặt nón $x = \beta r$ là một gián đoạn yếu. Trong phép gần đúng tiếp theo có xuất hiện sóng va chạm với cường độ (bước nhảy tương đối của áp suất) tỷ lệ với χ^4, và góc nửa mở lớn hơn góc Mach một lượng cũng tỷ lệ với χ^4.

Chương XII

DÒNG CHẢY PHẲNG CỦA MỘT CHẤT KHÍ NÉN ĐƯỢC

§114. CHUYỂN ĐỘNG THẾ CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC

Sau đây ta sẽ gặp nhiều trường hợp quan trọng, khi chuyển động của khí nén được có thể được coi là chuyển động thế hầu như trong toàn không gian. Ở đây, ta rút ra các phương trình tổng quát của một dòng chảy thế và khảo sát trong trường hợp tổng quát vấn đề áp dụng chúng [1].

Tính có thế của dòng khí nén được nói chung bị phá hủy bởi các sóng va chạm; sau khi đi qua một sóng va chạm một dòng thế nói chung trở nên một dòng xoáy. Tuy nhiên, ngoại lệ là trường hợp khi dòng thế dừng đi qua một sóng va chạm với cường độ không đổi (trên toàn bộ mặt nó). Các trường hợp như thế chẳng hạn là, khi một dòng đều đi qua một sóng cắt tất cả các đường dòng dưới cùng một góc [2]. Trong các trường hợp như thế, dòng chảy vẫn là dòng chảy thế ở sau sóng va chạm.

Để chứng minh điều khẳng định này, ta dùng phương trình Euler viết dưới dạng

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

(xem (2-10)), hay

$$\nabla\left(w + \frac{v^2}{2}\right) - [\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}] = T\nabla s,$$

---

[1] Trong tiết này, dòng chảy chưa được giả thiết là phẳng!

[2] Chúng ta đã gặp những trường hợp như thế khi nghiên cứu dòng chảy vượt âm quanh một nêm và mặt nón (§§112,113).

trong đó có xét đến hệ thức nhiệt động lực học $dw = Tds + dp/\rho$. Nhưng trong một dòng thế trước sóng va chạm $w + v^2/2 = \text{const}$ và đại lượng này liên tục ở ngay trên sóng; do đó nó vẫn không đổi cả trong toàn không gian ở sau sóng va chạm, như vậy ta có:

$$\left[\mathbf{v}\ \text{rot}\ \mathbf{v}\right] = -T\nabla s. \tag{114-1}$$

Dòng thế trước sóng va chạm là đẳng entrôpi. Trong trường hợp tổng quát của sóng va chạm tùy ý với bước nhảy entrôpi biến thiên theo mặt sóng trong không gian ở sau sóng $\nabla s \neq 0$, và cùng với nó cả $\text{rot}\,\mathbf{v} \neq 0$. Tuy nhiên, nếu sóng va chạm có cường độ không đổi, thì cả bước nhảy của entrôpi trong sóng cũng không đổi, do đó dòng chảy ở sau sóng cũng là đẳng entrôpi, nghĩa là $\nabla s = 0$. Từ đó suy ra rằng hoặc $\text{rot}\,\mathbf{v} = 0$, hoặc các vectơ $\text{rot}\,\mathbf{v} = 0$ và $\mathbf{v}$ song song với nhau tại mọi nơi. Nhưng trường hợp sau này không thể xảy ra: trên bản thân sóng va chạm $\mathbf{v}$ có thành phần pháp tuyến bao giờ cũng khác không, còn thành phần pháp tuyến của rot $\mathbf{v}$ thì bao giờ cũng bằng không (thành phần pháp tuyến của rot $\mathbf{v}$ được xác định bởi các đạo hàm tiếp tuyến của các thành phần tiếp tuyến của vận tốc, các thành phần này liên tục ở trên mặt gián đoạn).

Một trường hợp quan trọng khác khi tính có thể có dòng chảy có thể coi không bị phá hủy bởi các sóng va chạm, đó là trường hợp của các sóng có cường độ yếu. Đã biết (§86) rằng, trong những sóng va chạm như thế, bước nhảy của entrôpi là một đại lượng bậc ba so với bước nhảy của áp suất hay vận tốc. Do đó, từ hệ thức (114-1) thấy rằng, ở sau gián đoạn rot $\mathbf{v}$ cũng là một đại lượng bậc ba. Điều đó cho phép coi rằng, với độ chính xác đến các đại lượng nhỏ bậc cao, thì dòng chảy lại có thế ở cả sau sóng va chạm.

Bây giờ ta rút ra phương trình tổng quát cho thế vận tốc với dòng thế dừng của khí nén được. Muốn vậy ta khử mật độ khỏi phương trình liên tục $\text{div}\,\rho\mathbf{v} \equiv \rho\ \text{div}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\rho = 0$ dựa vào phương trình Euler

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{c^2}{\rho}\nabla\rho$$

và ta thu được:

$$c^2\ \text{div}\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = 0.$$

Nếu đưa vào đây thế xác định bởi công thức $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ và khai triển các biểu thức vectơ, ta sẽ thu được phương trình cần tìm:

$$(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} + (c^2 - \varphi_z^2)\varphi_{zz} - \\ - 2(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} + \varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}) = 0. \tag{114-2}$$

(các chỉ số dưới ở đây ký hiệu các đạo hàm riêng). Đặc biệt, đối với chuyển động phẳng

$$(c^2 - \varphi_x^2)\varphi_{xx} + (c^2 - \varphi_y^2)\varphi_{yy} - 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} = 0. \tag{114-3}$$

Trong các phương trình này bản thân vận tốc âm phải được biểu diễn như hàm vận tốc, điều này về nguyên tắc có thể làm được dựa vào phương trình Bernoulli $w + v^2/2 = \text{const}$ và phương trình đẳng entrôpi $s = \text{const}$ (đối với khí polytropic, sự phụ thuộc của c vào v được cho bởi công thức (83-18)).

Phương trình (114-2) đơn giản đi rất nhiều, nếu vận tốc khí trong toàn không gian khác ít về độ lớn và hướng so với vận tốc của dòng tới từ vô cùng [1]. Như thế ta hiểu ngầm rằng cả các sóng va chạm (nếu có) đều có cường độ nhỏ, và do đó chúng không phá hoại tính thế của dòng chảy.

Từ $\mathbf{v}$ ta tách ra vận tốc không đổi $\mathbf{v}_1$ của dòng tới và viết $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}'$, trong đó $\mathbf{v}'$ là một đại lượng nhỏ. Thay cho thế φ của vận tốc toàn phần, ta đưa vào thế φ' của vận tốc $\mathbf{v}'$: $\mathbf{v}' = \nabla\varphi'$. Phương trình cho thế này được rút ra từ (114-2) bằng cách thay thế $\varphi = \varphi' + xv_1$ (chọn trục x theo chiều của vectơ $\mathbf{v}_1$). Sau đó, nếu coi rằng φ' là một đại lượng nhỏ và bỏ tất cả các số hạng bậc cao hơn cấp một, ta thu được phương trình tuyến tính sau:

$$(1 - M_1^2)\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2} = 0, \tag{114-4}$$

trong đó $M_1 = v_1/c_1$; dĩ nhiên c_1 ở đây là vận tốc đã cho của âm tại vô cùng.

Áp suất tại bất kỳ một điểm nào của dòng đều được xác định theo vận

[1] Ta đã gặp một trường hợp như thế ở §113 (sự chảy bao quanh một mặt nón mỏng) và ta lại trở lại khi nghiên cứu dòng chảy của khí nén được quanh các vật mỏng tùy ý.

tốc trong cùng phép gần đúng đó bởi một công thức mà ta có thể tìm được như sau. Nếu coi p như một hàm của w (với s đã cho) và nhớ rằng $(\partial w/\partial p)_s = 1/\rho$, ta sẽ viết được:

$$p - p_1 \approx \left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_s (w - w_1) = \rho_1 (w - w_1).$$

Nhưng theo phương trình Bernoulli, ta có:

$$w - w_1 = -\frac{1}{2}\left[(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v})^2 - v_1^2\right] \approx -\frac{1}{2}\left(v_y^2 + v_z^2\right) - v_1 v_x,$$

do đó

$$p - p_1 = \rho_1 v_1 v_x - \frac{\rho_1}{2}\left(v_y^2 + v_z^2\right). \qquad (114\text{-}5)$$

Trong biểu thức này, nói chung, phải giữ lại số hạng chứa các bình phương của vận tốc ngang, vì ở trong miền gần trục x (đặc biệt ở trên chính mặt của vật mỏng bao bởi dòng khí) các đạo hàm $\partial\varphi'/\partial y$, $\partial\varphi'/\partial z$ có thể trở nên lớn so với $\partial\varphi'/\partial x$.

Tuy nhiên, phương trình (114-4) không còn áp dụng được, nếu số M_1 rất gần đơn vị (chuyển động gần âm), do đó hệ số của số hạng thứ nhất trở nên rất nhỏ. Rõ ràng là, trong một trường hợp như thế ta phải giữ lại trong phương trình cả các số hạng cấp cao hơn theo các đạo hàm của thế đối với tọa độ x. Để thiết lập được phương trình tương ứng, ta trở lại phương trình xuất phát (114-2). Phương trình này, nếu bỏ qua các số hạng biết rõ là nhỏ, sẽ rút về phương trình sau:

$$\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{c^2}\right)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \qquad (114\text{-}6)$$

Trong trường hợp đang xét, vận tốc $v_x \approx v$ và vận tốc c của âm gần với vận tốc tới hạn c_* (v ở đây ký hiệu vận tốc toàn phần). Do đó ta có thể viết:

$$c - c_* = (v - c_*)\left.\frac{dc}{dv}\right|_{v=c_*},$$

hay

$$c - v = (c_* - v)\left(1 - \left.\frac{dc}{dv}\right|_{v=c_*}\right).$$

Vì với $v = c = c_*$, dựa vào (83-4) ta có $d\rho/dv = -\rho/c$, nên ta viết được (với $v = c_*$):

$$\frac{dc}{dv} = \frac{dc}{d\rho}\frac{d\rho}{dv} = -\frac{\rho}{c}\frac{d\rho}{d\rho},$$

do đó

$$c - v = (c_* - v)\frac{1}{c}\frac{d(\rho c)}{d\rho} = \alpha_*(c_* - v). \qquad (114\text{-}7)$$

Ở đây đã dùng biểu thức (99-9) cho đạo hàm $d(\rho c)/d\rho$ và α_* ký hiệu cho giá trị của đại lượng α (102-2) với $v = c_*$ (đối với khí polytropic, α đơn giản là một hằng số, do đó $\alpha_* = \alpha = (\gamma + 1)/2$). Với cùng độ chính xác, đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_*\left(\frac{v}{c_*} - 1\right). \qquad (114\text{-}8)$$

Hệ thức này thiết lập, dưới dạng tổng quát, mối liên hệ với giữa M và M_* trong trường hợp gần âm.

Dựa vào công thức này, ta viết được:

$$1 - \frac{v_x^2}{c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 2\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 2\alpha_*\left(1 - \frac{v}{c_*}\right).$$

Cuối cùng ta đưa vào một thế mới bằng cách thay thế

$$\varphi \to c_*(x + \varphi),$$

do đó bây giờ ta có

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{v_x}{c_*} - 1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{v_y}{c_*}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{v_z}{c_*}. \qquad (114\text{-}9)$$

Thay tất cả những công thức này vào trong (114-6), cuối cùng ta thu được phương trình sau cho thế của dòng chảy gần âm (với vận tốc tại mọi nơi có phương gần như song song với trục x):

$$2\alpha_*\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (114\text{-}10)$$

Các tính chất của khí chỉ xuất hiện trong biểu thức này qua hằng số α_*. Sau đây ta sẽ thấy rằng, sự phụ thuộc của tất cả những tính chất của

dòng chảy gần âm vào mỗi loại khí cụ thể hoàn toàn được xác định bởi hằng số này.

Phương trình tuyến tính hóa (114-4) trở nên không áp dụng được cả trong một trường hợp giới hạn khác, đó là trường hợp của các M_1 rất lớn, chưa nói đến là, do có các sóng va chạm cường độ lớn xuất hiện, nên một dòng chảy thực với các M_1 như thế thực tế không được coi là dòng chảy thế (xem §127).

§115. CÁC SÓNG ĐƠN GIẢN DỪNG

Chúng ta đang xét dạng tổng quát cho nghiệm của các phương trình chuyển động dừng phẳng vượt âm của khí, mô tả các dòng chảy, trong đó tại vô cùng có dòng đều song - phẳng, sau đó dòng bị quay đi do chảy quanh một prôfin cong. Ta đã gặp một trường hợp đặc biệt của một nghiệm như thế khi nghiên cứu chuyển động ở gần một góc; thực tế khi đó, ta đã xét một dòng song - phẳng chảy dọc theo một trong các cạnh của góc và quay quanh bờ của góc đó. Trong nghiệm riêng này, tất cả các đại lượng – hai thành phần của vận tốc, áp suất, mật độ – đều chỉ là các hàm của một biến: góc φ. Do đó, mỗi một trong các đại lượng đó có thể được biểu diễn như hàm của một trong các đại lượng khác. Vì nghiệm này phải được chứa như trường hợp riêng trong nghiệm tổng quát, nên một cách tự nhiên, để tìm nghiệm này người ta xuất phát từ điều kiện đòi hỏi rằng, mỗi một trong các đại lượng p, ρ, v_x, v_z (mặt phẳng chuyển động được chọn làm mặt phẳng x,y) có thể được biểu diễn như hàm của một trong các đại lượng kia. Dĩ nhiên, yêu cầu đó là sự hạn chế rất quan trọng đặt cho các phương trình chuyển động, và nghiệm thu được như vậy tuyệt nhiên không phải là tích phân tổng quát của các phương trình đó. Trong trường hợp tổng quát mỗi đại lượng p, ρ, v_x, v_y, là hàm của hai tọa độ x, y, chỉ có thể được biểu diễn qua hai trong các đại lượng đó.

Vì tại vô cùng có một dòng đều, trong đó tất cả các đại lượng, và nói riêng cả entrôpi s, đều không đổi và vì trong chuyển động dừng của chất lỏng lý tưởng entrôpi được bảo toàn dọc theo các đường dòng, nên rõ ràng là trong toàn không gian sẽ có s = const, miễn là trong khí không có các sóng va chạm, như ta sẽ giả thiết sau này.

Các phương trình Euler và phương trình liên tục có dạng

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

Nếu viết các đạo hàm riêng dưới dạng các jacôbiên, ta sẽ viết lại các phương trình đó dưới dạng

$$v_x \frac{\partial(v_x, y)}{\partial(x, y)} - v_y \frac{\partial(v_x, x)}{\partial(x, y)} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p, y)}{\partial(x, y)},$$

$$v_x \frac{\partial(v_y, y)}{\partial(x, y)} - v_y \frac{\partial(v_y, x)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(p, x)}{\partial(x, y)};$$

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Bây giờ chọn các biến x và p chẳng hạn làm các biến độc lập. Để thực hiện phép biến đổi tương ứng, chỉ cần nhân các phương trình đã viết với $\partial(x, y)/\partial(x, p)$, sau đó ta thu được các phương trình có cùng dạng, chỉ có điều khác là, ở tất cả các mẫu số của tất cả các jacôbiên $\partial(x, p)$ thay thế cho $\partial(x, y)$. Ta khai triển các jacôbiên đó; khi đó cần nhớ rằng, trong các biến độc lập x và p, theo giả thiết, tất cả các đại lượng ρ, v_x, v_y đều chỉ là các hàm của áp suất p, do đó các đạo hàm riêng của chúng đối với x đều bằng không. Khi đó ta thu được:

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_x}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_y}{dp} = -\frac{1}{\rho},$$

$$\left(v_y - v_x \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{d\rho}{dp} + \rho\left(\frac{dv_y}{dp} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{dv_x}{dp}\right) = 0$$

(trong đó $\partial y/\partial x$ ký hiệu cho $(\partial y/\partial x)_p$). Tất cả các đại lượng trong các phương trình này, chỉ trừ $\partial y/\partial x$, đều là các hàm của p, do giả thiết, còn x

hoàn toàn không xuất hiện tường minh trong phương trình. Do đó trước hết, từ các phương trình trên, ta có thể kết luận rằng: cả $\partial y/\partial x$ cũng là một hàm nào đó chỉ của p:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_p = f_1(p),$$

từ đó

$$y = xf_1(p) + f_2(p), \tag{115-1}$$

trong đó $f_2(p)$ là một hàm tùy ý của áp suất.

Không cần tiến hành thêm những phép tính nữa, nếu ta dùng trực tiếp nghiệm riêng đã biết cho sóng dãn được tạo thành trong dòng chảy quanh một góc (§109, 112). Nhắc lại rằng, trong nghiệm này tất cả các đại lượng (kể cả áp suất) đều không đổi dọc theo mọi đường thẳng (mọi đặc tuyến) đi qua đỉnh của góc. Hiển nhiên rằng, nghiệm riêng này tương ứng với trường hợp, khi hàm tùy ý $f_2(p)$ đồng nhất bằng không trong biểu thức tổng quát (115-1). Còn hàm $f_1(p)$ được xác định bởi các công thức đã rút ra ở §109.

Phương trình (115-1) với các p không đổi xác định một họ các đường thẳng trong mặt phẳng x, y. Các đường thẳng này cắt các đường dòng tại mỗi điểm của chúng dưới góc Mach. Điều đó là hiển nhiên, các đường thẳng $y = xf_1(p)$ trong nghiệm riêng với $f_2 \equiv 0$ có tính chất như thế. Như vậy, cả trong trường hợp tổng quát một trong các họ đặc tuyến (các đặc tuyến "xuất phát" từ mặt vật) là các đường thẳng, mà dọc theo chúng tất cả các đại lượng vẫn không đổi; tuy nhiên, các đường thẳng này bây giờ không có một giao điểm chung nào nữa.

Các tính chất vừa trình bày của chuyển động đang xét, về phương diện toán học, hoàn toàn tương tự với các tính chất của các sóng đơn giản một chiều, trong đó một trong các họ đặc tuyến là các đường thẳng trong mặt phẳng x, t (xem §101, 103, 104). Do đó, lớp các dòng chảy đang xét trong lý thuyết về chuyển động phẳng dừng (vượt âm) giữ một vai trò giống như vai trò của các sóng đơn giản trong lý thuyết về chuyển động không dừng một chiều. Do có sự tương tự này mà các dòng chảy đó cũng được gọi là các sóng đơn giản. Đặc biệt, sóng dãn tương ứng với trường hợp $f_2 \equiv 0$ được gọi là *sóng đơn giản có tâm*.

Cũng như trong trường hợp không dừng, một trong các tính chất quan trọng nhất của các sóng đơn giản là, dòng chảy trong mọi miền của mặt phẳng x, y tiếp giáp với miền của dòng chảy đều là một sóng đơn giản (xem §104).

Bây giờ ta chứng tỏ xem một sóng đơn giản đối với dòng chảy bao quanh một prôfin đã cho được cấu tạo như thế nào.

Hình 115 biểu diễn prôfin đó; bên trái điểm O nó là thẳng; nhưng bên phải điểm O nó bắt đầu uốn cong. Trong dòng vượt âm, dĩ nhiên ảnh hưởng của độ cong chỉ lan xuôi dòng ở miền đặc tuyến OA xuất phát từ O. Do đó, toàn bộ dòng chảy ở bên trái của đặc tuyến này sẽ là một dòng đều (các đại lượng thuộc miền này được ký hiệu bằng chỉ số *1*). Tất cả các đặc tuyến ở trong miền này đều song song với nhau và nghiêng trên trục x dưới góc Mach $\alpha_1 = \arcsin(c_1/v_1)$.

Trong các công thức (109.12-15), góc nghiêng φ của các đặc tuyến được tính từ đường mà trên đó $v = c = c_*$. Điều đó có nghĩa là (xem §112), đặc tuyến OA phải có một giá trị của φ bằng

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

và sau đó, các góc φ đối với tất cả các đặc tuyến phải được tính từ phương OA' (hình 115). Góc nghiêng của các đặc tuyến trên trục x khi đó sẽ bằng $\varphi_* - \varphi$, trong đó $\varphi_* = \alpha_1 + \varphi_1$. Theo các công thức (109.12-15), vận tốc và áp suất được biểu diễn theo góc φ bằng những công thức

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\sin\theta, \tag{115-2}$$

$$v^2 = c_*^2\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\sin^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right]. \tag{115-3}$$

$$\theta = \varphi_* - \varphi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\cot g\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right), \tag{115-4}$$

$$p = p_*\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\,\varphi\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{115-5}$$

Phương trình của đặc tuyến được viết dưới dạng

$$y = x\,\mathrm{tg}(\varphi_* - \varphi) + F(\varphi). \qquad (115\text{-}6)$$

Hàm tùy ý $F(\varphi)$ được xác định theo dạng đã cho của prôfin như sau. Giả sử dạng của prôfin được cho bởi phương trình $Y = Y(X)$, trong đó X và Y là các tọa độ các điểm của nó. Ở trên chính mặt, vận tốc của khí hướng theo tiếp tuyến với mặt, nghĩa là

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dY}{dX}. \qquad (115\text{-}7)$$

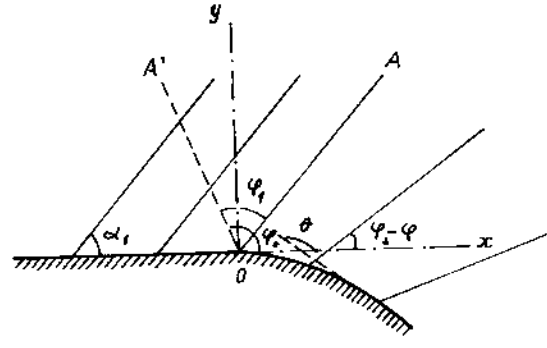
Phương trình của đường thẳng đi qua điểm X, Y và lập với trục x một góc $\varphi_* - \varphi$, có dạng

$$y - Y = (x - X)\,\mathrm{tg}(\varphi_* - \varphi).$$

Phương trình này trùng với (115-6) nếu trong đó ta đặt

$$F(\varphi) = Y - X\,\mathrm{tg}(\varphi_* - \varphi). \qquad (115\text{-}8)$$

Xuất phát từ phương trình đã cho $Y = Y(X)$ và (115-7), ta biểu diễn dạng của prôfin dưới dạng các phương trình thông số $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$, trong đó thông số là góc nghiêng θ của tiếp tuyến với prôfin. Thay vào đây biểu thức (115-4) của θ biểu diễn qua φ, ta thu được X và Y dưới dạng các hàm của φ; cuối cùng nếu thay các biểu thức này vào trong (115-8), ta sẽ thu được hàm $F(\varphi)$ cần tìm.

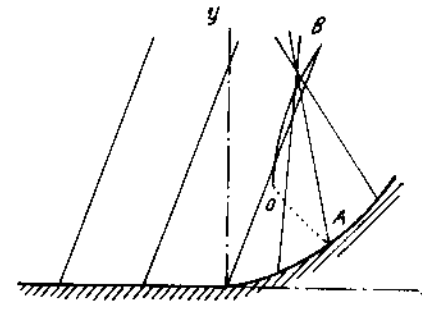


Hình 115

Đối với dòng chảy bao quanh một mặt lồi góc nghiêng θ của vectơ vận tốc trên trục x giảm xuôi dòng (hình 115). Cùng với góc này, cả góc nghiêng $\varphi_* - \varphi$ của các đặc tuyến cũng giảm đơn điệu (tại mọi nơi ta đều nói đến các đặc tuyến xuất phát từ vật). Vì thế các đặc tuyến không cắt nhau tại đâu (trong miền của dòng chảy). Như vậy, trong miền chảy

xuôi dòng của đặc tuyến OA (đặc tuyến này là một gián đoạn yếu), ta sẽ có một dòng liên tục, (không có các sóng va chạm), dãn đơn điệu.

Tình hình sẽ khác trong dòng chảy quanh một prôfin lõm. Ở đây góc nghiêng θ của tiếp tuyến với prôfin và cả góc nghiêng của các đặc tuyến đều tăng theo chiều của dòng chảy. Kết quả là, các đặc tuyến cắt nhau (ở trong miền dòng chảy). Nhưng trên các đặc tuyến khác nhau, không song song với nhau tất cả các đại lượng (vận tốc, áp suất, v.v..) đều có những giá trị khác nhau. Do đó, tại các giao điểm của các đặc tuyến tất cả các hàm đó đều là đa trị, điều đó vô lý về mặt vật lý. Hiện tượng tương tự cũng đã gặp trong sóng nén đơn giản một chiều không dừng (§101). Cũng như ở đấy, ở đây điều đó có nghĩa là, thực tế có xuất hiện sóng va chạm. Vị trí của gián đoạn này không thể được xác định hoàn toàn từ nghiệm đã xét, là nghiệm đã được rút ra với giả thiết là không có gián đoạn. Kết quả duy nhất có thể thu được, đó là vị trí của gốc sóng va chạm (điểm O ở trên hình 116, sóng va chạm được biểu diễn bởi đường liền nét OB). Nó được xác định như giao điểm của các đặc tuyến ở trên đường dòng nằm gần mặt của vật nhất. Trên các đường dòng đi qua dưới điểm O (nghĩa là gần mặt vật hơn) nghiệm là đơn trị khắp nơi; tính đa trị của nó bắt đầu tại điểm O. Các phương trình xác định các tọa độ x_0, y_0 của điểm này có thể được rút ra theo cách tương tự như cách đã rút ra các phương trình tương ứng để xác định các thời điểm và vị trí tạo thành của gián đoạn trong một sóng đơn giản không dừng một chiều. Nếu coi góc nghiêng của các đặc tuyến như hàm các tọa độ x,y của các điểm mà chúng đi qua, thì hàm đó trở thành đa trị khi x và y vượt quá những giá trị xác định x_0, y_0 nào đó. Ở §101, tình hình hoàn toàn tương tự đối với hàm $v(x,t)$; do đó không cần lặp lại tất cả những lập luận, ta viết ngay những phương trình



Hình 116

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_x = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)_x = 0, \tag{115-9}$$

để xác định ở đây gốc của sóng va chạm. Về phương diện toán học, điểm đó là một *điểm góc* (*a cusp*, ND) của bao hình của họ các đặc tuyến thẳng hàng (xem §103).

Khi dòng chảy bao quanh một prôfin lõm, miền tồn tại của sóng đơn nằm dọc theo các đường dòng đi qua ở phía trên điểm O cho đến nơi giao nhau của các đường đó với sóng va chạm. Các đường dòng đi qua dưới điểm O hoàn toàn không cắt sóng va chạm. Tuy nhiên, từ đó không thể kết luận được rằng, nghiệm đang xét áp dụng được tại mọi nơi dọc theo các đường dòng đó. Lý do là vì, sóng va chạm xuất hiện có một ảnh hưởng làm nhiễu động cả chất khí chảy dọc theo các đường dòng đó, và như vậy nó phá hủy chuyển động đáng lẽ phải xảy ra, nếu không có mặt của sóng va chạm. Tuy nhiên, do tính chất của dòng vượt âm, các nhiễu động này chỉ thâm nhập vào miền dòng khí ở xuôi dòng của đặc tuyến OA xuất phát từ điểm gốc của sóng va chạm (đó là một trong các đặc tuyến của họ thứ hai). Như vậy, nghiệm đang xét ở đây áp dụng được trong toàn miền nằm bên trái đường AOB. Còn đối với chính đường OA, thì đó là một gián đoạn yếu. Ta nhận thấy rằng, không thể tồn tại một sóng nén đơn liên tục (không có sóng va chạm) trong toàn miền dọc theo một mặt lõm, tương tự như một sóng dãn đơn theo một mặt lồi.

Trong sóng va chạm xuất hiện trong dòng chảy bao quanh một prôfin lõm, ta có một thí dụ về sóng "bắt đầu" từ một điểm nào đó nằm ở ngay trong dòng ở xa các thành rắn. Một điểm "gốc" như thế của sóng va chạm có một số tính chất tổng quát, sẽ được nêu ở đây. Tại ngay điểm gốc cường độ của sóng va chạm bằng không và nhỏ ở gần gốc. Nhưng trong một sóng va chạm cường độ yếu các bước nhảy của entrôpi và của rota vận tốc đều là các đại lượng nhỏ bậc ba. Do đó, độ biến thiên của dòng khi đi qua sóng chỉ khác độ biến thiên liên tục có thể, dẳng entrôpi ở các đại lượng bậc ba. Từ đó suy ra rằng, trong những gián đoạn yếu xuất phát từ điểm gốc của sóng va chạm, chỉ những đạo hàm cấp ba của các đại lượng khác nhau mới chịu bước nhảy. Nói chung có hai gián đoạn như thế: một gián đoạn yếu trùng với đặc tuyến và một gián đoạn yếu "tiếp tuyến" trùng với một đường dòng (xem phần cuối của §96).

§116. PHƯƠNG TRÌNH CHAPLYGIN (BÀI TOÁN TỔNG QUÁT VỀ CHUYỂN ĐỘNG DỪNG HAI CHIỀU CỦA KHÍ NÉN ĐƯỢC)

Sau khi đã khảo sát các sóng đơn giản dừng, bây giờ ta chuyển sang xét bài toán tổng quát về chuyển động thế phẳng dừng tùy ý. Khi nói về một dòng chảy thế, ta hiểu ngầm rằng, chuyển động là đẳng entrôpi và trong đó không có sóng va chạm.

Có thể đưa bài toán trên về việc chỉ giải một phương trình đạo hàm riêng tuyến tính duy nhất (*X.A. Chaplygin*, 1902). Điều này được thực hiện bằng cách biến đổi về các biến độc lập mới – về các thành phần vận tốc v_x, v_y (thường gọi đó là *phép biến đổi tốc đồ*); mặt phẳng các biến v_x, v_y khi đó là *mặt phẳng tốc đồ*, mặt phẳng x, y là *mặt phẳng vật lý*.

Đối với chuyển động thế, có thể thay trực tiếp các phương trình Euler bằng tích phân đầu của chúng, tức là phương trình Bernoulli:

$$w + \frac{v^2}{2} = w_o. \tag{116-1}$$

Phương trình liên tục có dạng:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0. \tag{116-2}$$

Đối với vi phân của thế φ vận tốc, ta có:

$$d\varphi = v_x\,dx + v_y\,dy.$$

Bằng phép biến đổi Legendre, ta chuyển từ các biến độc lập x, y sang các biến độc lập v_x, v_y. Muốn vậy, ta viết:

$$d\varphi = d(xv_x) - x dv_x + d(yv_y) - y dv_y.$$

Nếu đưa vào hàm

$$\Phi = -\varphi + xv_x + yv_y \tag{116-3}$$

ta thu được:

$$d\Phi = x dv_x + y dv_y$$

trong đó Φ được coi là hàm v_x và v_y. Như vậy, ta có:

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial v_x}, \qquad y = \frac{\partial \Phi}{\partial v_y}. \tag{116-4}$$

Tuy nhiên, để tiện lợi hơn thì không nên dùng các thành phần đềcác của vận tốc, mà dùng giá trị tuyệt đối v và góc θ mà nó lập với trục x.

$$v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta. \tag{116-5}$$

Tiến hành phép biến đổi tương ứng cho các đạo hàm, ta thu được các hệ thức sau thay cho (116-4):

$$x = \cos\theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\sin\theta}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \qquad y = \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \tag{116-6}$$

Mối quan hệ giữa thế φ và hàm Φ khi đó được cho bởi công thức đơn giản

$$\varphi = -\Phi + v\frac{\partial \Phi}{\partial v}. \tag{116-7}$$

Cuối cùng để rút ra phương trình xác định hàm $\Phi(v,\theta)$, thì phương trình liên tục (116-2) cần chuyển sang các biến mới. Nếu viết các đạo hàm dưới dạng các jacôbiên:

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x,y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x,y)} = 0,$$

rồi nhân với $\partial(x,y)/\partial(v,\theta)$ và thay (116-5) vào, ta được:

$$\frac{\partial(\rho v\cos\theta, y)}{\partial(v,\theta)} - \frac{\partial(\rho v\sin\theta, x)}{\partial(v,\theta)} = 0,$$

Khi khai triển các jacôbiên này, ta cần thay x và y bằng các biểu thức (116-6) của chúng. Ngoài ra, vì entrôpi s là một dại lượng không đổi đã cho, nên nếu biểu diễn mật độ dưới dạng hàm của s và w và thay w bằng $w_0 - v^2/2$, ta nhận được rằng, mật độ có thể được viết dưới dạng hàm chỉ của vận tốc $\rho = \rho(v)$. Do đó, sau các phép biến đổi đơn giản, ta thu được phương trình sau:

$$\frac{d(\rho v)}{dv}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{1}{v}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right) + \rho v\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 0.$$

Thay (83-5), ta có:

$$\frac{d(\rho v)}{dv} = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

và kết quả là cuối cùng ta thu được cho hàm $\Phi(v,\theta)$ *phương trình Chaplyghin* sau:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} + v\frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0. \qquad (116\text{-}8)$$

Ở đây, vận tốc của âm là một hàm đã cho của vận tốc $c = c(v)$, được xác định bằng phương trình trạng thái khí và phương trình Bernoulli.

Cùng với các hệ thức (116-6) phương trình (116-8) thay cho các phương trình chuyển động. Như vậy, bài toán giải các phương trình chuyển động phi tuyến rút về bài toán giải một phương trình tuyến tính cho hàm $\Phi(v,\theta)$.

Nhưng thực tế, các điều kiện biên cho phương trình này là phi tuyến. Các điều kiện đó như sau. Trên mặt của vật có khí bao quanh, vận tốc của khí phải hướng theo tiếp tuyến với vật. Biểu diễn các tọa độ của phương trình mặt dưới dạng thông số $X = X(\theta)$, $Y = Y(\theta)$ (như đã giải thích trong tiết trước) và đưa X và Y vào trong (116-6) thay cho x và y ta thu được hai phương trình phải thỏa mãn tất cả các giá trị của θ, điều này không thể xảy ra được đối với mọi $\Phi(v,\theta)$ bất kỳ. Điều kiện biên đòi hỏi rằng, cả hai phương trình đó phải tương thích với tất cả các θ, nghĩa là một trong hai phương trình đó phải là hệ quả tự động của phương trình kia.

Tuy nhiên, việc thỏa mãn các điều kiện biên vẫn chưa đủ để bảo đảm rằng, nghiệm thu được của phương trình Chalyghin tiện lợi cho việc xác định một dòng chảy thực trong toàn miền chuyển động trong mặt phẳng vật lý. Còn cần phải thỏa mãn điều kiện sau: jacôbiên

$$\Delta = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,v)}$$

phải không đổi dấu ở bất cứ đâu khi đi qua giá trị không (chỉ trừ trường hợp tầm thường, khi cả bốn đạo hàm tạo thành jacôbiên đó triệt tiêu đồng thời). Dễ dàng thấy rằng nếu điều kiện này bị vi phạm, thì khi đi qua đường (gọi là *"đường giới hạn"*) nằm trong mặt phẳng x,y xác định

bởi đẳng thức $\Delta = 0$, nói chung, nghiệm trở nên phức [1]. Thực vậy, giả sử rằng $\Delta = 0$ ở trên đường $v = v_0(\theta)$ và khi đó $(\partial y/\partial\theta)_v \neq 0$. Khi đó, ta có:

$$-\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_v = \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,\theta)}\frac{\partial(v,\theta)}{\partial(v,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,y)} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y = 0.$$

Từ đó, thấy rằng ở gần đường giới hạn, v với tính cách là hàm của x (với y đã cho) được xác định bởi phương trình có dạng

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_y (v - v_0)^2,$$

và v trở nên phức ở một trong hai bên của đường giới hạn đó [2].

Dễ dàng thấy rằng, đường giới hạn có thể chỉ xuất hiện trong các miền chuyển động vượt âm. Phép tính trực tiếp có sử dụng các hệ thức (116-6) và phương trình (116-8) cho ta

$$\Delta = \frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial v} - \frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{v^2}{1 - v^2/c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)^2\right]. \qquad (116\text{-}9)$$

Rõ ràng là bao giờ cũng có $\Delta > 0$ là với $v \leq c$, và chỉ với $v > c$ thì Δ mới có thể đổi dấu, đi qua giá trị không.

Sự xuất hiện các đường giới hạn ở trong nghiệm của phương trình Chalyghin chứng tỏ rằng, trong những điều kiện cụ thể đã cho, một chế độ chảy liên tục trong toàn miền chuyển động không thể xảy ra được và trong dòng phải xuất hiện các sóng va chạm. Tuy nhiên cần nhấn mạnh rằng, vị trí của các sóng này tuyệt nhiên không trùng với các đường giới hạn.

Trong tiết trước ta đã khảo sát một trường hợp đặc biệt về dòng chảy

---

[1] Sự chuyển qua giá trị không khi Δ trở nên vô hạn không bị cấm. Nếu $1/\Delta = 0$ ở trên một đường nào đó, thì điều đó chỉ có nghĩa là sự tương ứng giữa các mặt phẳng x, y và v, θ không còn là một đối một theo nghĩa khi đi vòng trong mặt phẳng x, y, ta sẽ qua được một phần nào đó của mặt phẳng v, θ hai hay ba lần.

[2] Điều khẳng định này rõ ràng vẫn còn đúng trong những trường hợp, khi $(\partial^2 x/\partial v^2)_y$ triệt tiêu cùng với Δ, nhưng cũng như trước, đạo hàm $(\partial x/\partial v)_y$ đổi dấu khi $v = v_0$, nghĩa là hiệu $x - x_0$ tỷ lệ với lũy thừa bậc chẵn cao hơn của $v - v_0$.

vượt âm dừng hai chiều (sóng đơn giản) sóng này được đặc trưng bởi điều là, trong sóng đó độ lớn vận tốc chỉ là hàm của phương của nó: $v = v(\theta)$. Nghiệm này không thể thu được từ phương trình Chalyghin; đối với nghiệm đó, đồng nhất $1/\Delta \equiv 0$, và nghiệm đó "bị mất" khi nhân phương trình chuyển động (phương trình liên tục) với jacôbiên Δ trong phép biến đổi về mặt phẳng tốc đồ. Tình hình ở đây hoàn toàn tương tự với điều đã gặp trong lý thuyết về chuyển động không dừng một chiều. Tất cả những điều đã nói ở §105 về mối quan hệ giữa sóng đơn giản và tích phân tổng quát của phương trình (105-2) hoàn toàn được xét cho mối quan hệ giữa sóng đơn giản dừng và tích phân tổng quát của phương trình Chalyghin.

Jacôbiên Δ dương trong chuyển động dưới âm, tính chất đó cho phép ta thiết lập được một qui tắc xác định để xét phương quay của vận tốc theo dòng (*A.A. Nicolxki* và *G. Taganôv*, 1946). Ta có đồng nhất

$$\frac{1}{\Delta} \equiv \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\theta, v)}{\partial(x, v)} \frac{\partial(x, v)}{\partial(x, y)},$$

hay

$$\frac{1}{\Delta} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x. \tag{116-10}$$

Trong dòng dưới âm $\Delta > 0$, và ta nhận thấy rằng, các đạo hàm $(\partial\theta/\partial x)_v$ và $(\partial\theta/\partial y)_x$ cùng dấu. Kết quả này có một ý nghĩa hình học đơn giản: nếu đi dọc một đường $v = \text{const} = v_o$ sao cho miền $v < v_o$ nằm ở bên phải, thì góc θ sẽ tăng đơn điệu, nghĩa là vectơ vận tốc quay đơn điệu ngược với chiều quay kim đồng hồ. Nói riêng, kết quả này còn đúng cho đường chuyển tiếp từ dòng chảy dưới âm sang dòng chảy vượt âm, mà dọc theo đường này $v = c = c_*$.

Để kết luận, ta viết phương trình Chaplyghin cho khí polytropic và trong đó biểu diễn dưới dạng tường minh c theo v:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + v^2 \frac{1 - \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \dfrac{v^2}{c_*^2}}{1 - \dfrac{v^2}{c_*^2}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + v \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0. \tag{116-11}$$

Phương trình này có một họ các tích phân riêng được biểu diễn qua các hàm siêu bội [1].

§117. CÁC ĐẶC TUYẾN CỦA DÒNG CHẢY DỪNG PHẲNG

Một số tính chất tổng quát của các đặc tuyến của chuyển động dừng phẳng (vượt âm) đã được khảo sát ở §82. Bây giờ, chúng ta sẽ thiết lập những phương trình xác định các đường đó dựa theo nghiệm đã cho của các phương trình chuyển động.

Trong dòng vượt âm dừng phẳng trong trường hợp tổng quát có ba họ đặc tuyến. Dọc theo hai trong ba họ đó (sẽ gọi là các đặc tuyến C_+ và C_-) có tất cả các nhiễu động nhỏ lan truyền, chỉ trừ các nhiễu động của entrôpi và của rôta vận tốc; các nhiễu động này lan truyền theo các đặc tuyến của họ thứ ba C_0 trùng với các đường dòng. Đối với dòng chảy đã cho, các đường dòng đã được biết, chỉ còn phải xác định các đặc tuyến của hai họ đầu.

Các phương của các đặc tuyến C_+ và C_- đi qua tại mỗi điểm của mặt phẳng đều nằm ở cả hai bên của đường dòng đi qua cùng điểm đó và lập với đường dòng một góc bằng giá trị cục bộ của góc các nhiễu động α (hình 51). Ta ký hiệu m_0 là tang của góc nghiêng ("hệ số góc") với trục của đường dòng tại điểm đã cho, và m_+ và m_- là các hệ số góc của các đặc tuyến C_+ và C_-. Khi đó, theo công thức về phép cộng các tang, ta viết được:

$$\frac{m_+ - m_0}{1 + m_+ m_0} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{m_- - m_0}{1 + m_- m_0} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

từ đó

$$m_\pm = \frac{m_0 \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp m_0 \operatorname{tg}\alpha}$$

Các dấu trên tại mọi nơi xét cho C_+, và các dấu dưới, cho C_-. Thay vào đây

---

[1] Chẳng hạn xem *L. Xêđôv*. Các bài toán phẳng của thủy động lực và khí động lực, Maxcơva, Hayka, 1966, chương X; *Mizes. R*, Lý thuyết toán về các dòng chảy của chất lỏng nén được. NXB Ngoại văn M. 1961, §20.

$$m_v = \frac{v_y}{v_x}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$$

rồi rút gọn, ta thu được biểu thức sau cho các hệ số góc của các đặc tuyến

$$m_\pm \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_\pm = \frac{v_x v_y \pm c\sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}. \qquad (117\text{-}1)$$

Nếu đã biết dược sự phân bố các vận tốc ở trong dòng, thì đó chính là phương trình vi phân xác định các đặc tuyến C_+ và C_- [1)].

Ngoài những đặc tuyến trong mặt phẳng x, y, cũng có thể khảo sát cả những đặc tuyến ở trong mặt phẳng tốc đồ, các đặc tuyến này đặc biệt có ích đối với việc nghiên cứu dòng chảy thế, đẳng entrôpi, mà chúng ta sẽ nói đến dưới đây. Theo quan điểm toán học, thì đó là những đặc tuyến của phương trình Chaplyghin (116-8) (thuộc loại hypebôlic với $v > c$). Theo phương pháp tổng quát đã biết trong vật lý toán (xem §103), ta viết được phương trình của đặc tuyến dựa vào các hệ số của phương trình này:

$$dv^2 + d\theta^2 \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = 0,$$

hay

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)_\pm = \pm\frac{1}{v}\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}. \qquad (117\text{-}2)$$

Các đặc tuyến xác định bởi phương trình này không phụ thuộc vào nghiệm cụ thể của phương trình Chalyghin, vì các hệ số của phương trình này không phụ thuộc vào Φ. Các đặc tuyến trong mặt phẳng tốc đồ là ánh xạ của các đặc tuyến C_+ và C_- trong mặt phẳng vật lý, chúng được qui ước gọi lần lượt là các đặc tuyến Γ_+ và Γ_- (các dấu trong (117-2) tương ứng với điều kiện này).

Việc lấy tích phân (117-2) cho ta những hệ thức có dạng $J_+(v,\theta) = \text{const}$,

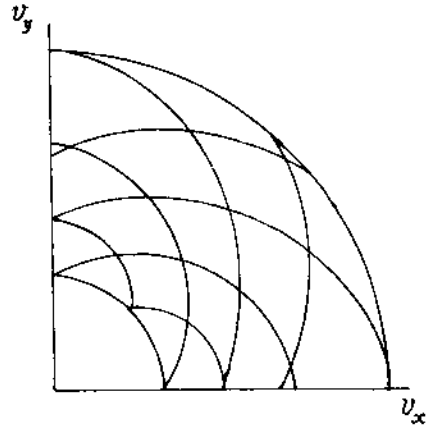
[1)] Phương trình (117-1) xác định các đặc tuyến cả cho một dòng chảy dừng đối xứng trục, miễn là ta thay v_y và y bằng v_r và r, trong đó r là tọa độ trụ (khoảng cách tính từ trục đối xứng, tức trục x); rõ ràng là toàn bộ sự rút ra hoàn toàn không thay đổi, nếu thay cho mặt phẳng x, y, ta khảo sát mặt phẳng x, r đi qua trục đối xứng.

$J_-(v,\theta)$ = const. Các hàm J_+ và J_- là những đại lượng vẫn không đổi lần lượt dọc theo các đặc tuyến C_+ và C_- (các bất biến Riemann). Trong trường hợp của khí polytropic, phương trình (117-2) có thể được lấy tích phân dưới dạng tường minh. Tuy nhiên, ta không cần phải lặp lại các phép tính đó, vì có thể thấy trước được kết quả dựa vào các công thức (115.3-4). Thực vậy, theo các tính chất tổng quát của các sóng đơn giản (xem §104) sự phụ thuộc của v vào θ trong một sóng đơn giản chính được xác định bởi điều kiện đòi hỏi một trong các bất biến Riemann phải không đổi trong toàn không gian. Hằng số tùy ý trong các công thức (115,3-4) là φ_*; khử thông số φ khỏi các công thức này, ta thu được:

$$J_\pm = \theta \pm \left\{ \arcsin\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\left(1-\frac{c_*^2}{v^2}\right)} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{v^2}{c_*^2}-1\right)} \right\}. \quad (117\text{-}3)$$

Các đặc tuyến ở trong mặt phẳng tốc đồ lập thành một họ êpixyclôit lấp đầy không gian giữa hai vòng tròn có các bán kính (hình 117):

$$v = c_* \quad \text{và} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\,c_*.$$



Hình 117

Trong chuyển động thế đẳng entrôpi các đặc tuyến Γ_+ và Γ_- có tính chất quan trọng sau: các họ đặc tuyến Γ_+ và Γ_- lần lượt trực giao với các đặc tuyến C_- và C_+ (giả thiết rằng, các trục tọa độ x,y song song với các trục v_x, v_y) [1].

Để chứng minh điều khẳng định này, ta xuất phát từ phương trình (114-3) cho thế của dòng chảy phẳng, phương trình đó có dạng

$$A\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (117\text{-}4)$$

[1] Điều khẳng định này không áp dụng cho các đặc tuyến của chuyển động đối xứng trục ở trong mặt phẳng x, r!

(điều quan trọng là trong phương trình trên không có số hạng tự do).

Các hệ số góc $m_{\pm}$ của các đặc tuyến $C_{\pm}$ đều được xác định như các nghiệm của phương trình bậc hai

$$Am^2 - 2Bm + C = 0.$$

Ta xét biểu thức $dv_x^+ dx^- + dv_y^+ dy^-$, trong đó các vi phân vận tốc được lấy dọc theo đặc tuyến Γ_+, và các vi phân tọa độ được lấy dọc theo C_-. Ta có đồng nhất thức:

$$dv_x^+ dx^- + dv_y^+ dy^- = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx^+ dx^- + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(dx^+ dy^- + dx^- dy^+) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy^+ dy^-.$$

Chia biểu thức này cho $dx^+ dx^-$, ta tìm được cho các hệ số của $\partial^2\varphi/\partial x\partial y$ và $\partial^2\varphi/\partial y^2$ lần lượt bằng $m_+ + m_- = 2B/A$ và $m_+m_- = C/A$, sau đó, theo phương trình (117-4), thấy rõ là biểu thức triệt tiêu. Như vậy,

$$dv_x^+ dx^- + dv_y^+ dy^- = d\mathbf{v}^+ d\mathbf{r}^- = 0.$$

Tương tự, ta thu được:

$$d\mathbf{v}^- d\mathbf{r}^+ = 0.$$

Các đặc tuyến này biểu diễn điều khẳng định ở trên.

§118. PHƯƠNG TRÌNH EULER - TRICOMI. SỰ CHUYỂN SANG VẬN TỐC ÂM

Sự nghiên cứu các đặc điểm của dòng chảy xuất hiện khi chuyển từ miền dưới âm sang miền vượt âm, hay ngược lại, có một tầm quan trọng mang tính chất nguyên tắc. Các dòng chảy dừng, kéo theo sự chuyển tiếp như thế xảy ra, được gọi là các *dòng chảy pha trộn* hay *dòng chảy gần âm*, còn biên giới chuyển tiếp gọi là *mặt chuyển tiếp* hay *mặt âm*.

Phương trình Chaplyghin đặc biệt tiện lợi cho việc nghiên cứu dòng chảy ở gần biên giới chuyển tiếp, trong miền này phương trình đó đơn giản đi rất nhiều.

Tại biên giới chuyển tiếp $v = c = c_*$, và ở gần vùng đó (trong miền"gần âm") các hiệu $v - c_*$ và $c - c_*$ đều nhỏ và có liên hệ với nhau bằng hệ thức (114-8):

$$\frac{v}{c} - 1 = \alpha_* \left(\frac{v}{c_*} - 1 \right).$$

Ta tiến hành những sự đơn giản hóa tương ứng trong phương trình Chalyghin. Số hạng thứ ba ở trong (116-8) nhỏ so với số hạng thứ hai, có chứa $1 - v^2/c^2$ ở mẫu số. Trong số hạng thứ hai, một cách gần đúng ta đặt

$$\frac{v^2}{1 - v^2 / c^2} = \frac{c_*^2}{2(1 - v / c)} = \frac{c_*}{2\alpha_*(1 - v / c_*)}.$$

Cuối cùng, nếu thay cho vận tốc v, đưa vào biến mới

$$\eta = (2\alpha_*)^{1/3} \frac{v - c_*}{c_*}, \tag{118-1}$$

thì ta sẽ thu được phương trình cần tìm dưới dạng

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{118-2}$$

Trong vật lý toán, phương trình dạng như thế được gọi là *phương trình Euler - Tricomi* [1]. Nó thuộc loại hypecbolic ở trong nửa mặt phẳng $\eta > 0$ và thuộc loại êliptic trong nửa mặt phẳng $\eta < 0$. Ở đây, ta khảo sát một loạt các tính chất toán học thuần túy của phương trình này, chúng quan trọng cho việc nghiên cứu những trường hợp vật lý cụ thể này hay khác.

Các đặc tuyến của phương trình (118-2) được xác định bằng phương trình

$$\eta \, d\eta^2 - d\theta^2 = 0,$$

có tích phân tổng quát

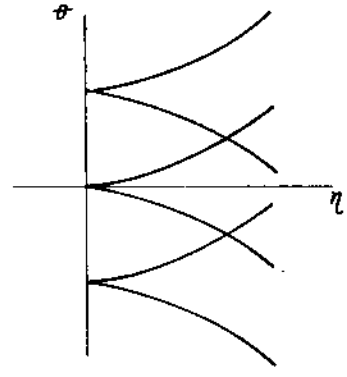
$$\theta \pm \frac{2}{3} \eta^{3/2} = C, \tag{118-3}$$

trong đó C là một hằng số tùy ý. Phương trình này biểu diễn ở trong mặt phẳng η, θ hai họ đặc tuyến, đó là những nhánh parabôn nửa cubic nằm trong nửa mặt phẳng phải với các điểm lùi ở trên trục θ (hình 118).

[1] Phương trình Tricomi lần đầu tiên đã được *F.Frankl* (1945) áp dụng cho bài toán về khí động lực.

Khi nghiên cứu chuyển động ở trong một miền nhỏ của không gian, trong đó phương của vận tốc khí thay đổi ít [1], thì bao giờ cũng có thể chọn phương của trục x sao cho góc θ tính từ phương đó là nhỏ trong toàn miền đang xét. Các phương trình (116-6) xác định các tọa độ x, y theo hàm $\Phi(\eta,\theta)$ [2] khi đó sẽ đơn giản đi rất nhiều:

$$x = (2\alpha_*)^{1/3}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \qquad y = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$



Hình 118

Để tránh xuất hiện thừa số $(2\alpha_*)^{1/3}$ trong các công thức, dưới đây ở §118 - 121, ta sẽ thay thế x bằng đại lượng $x(2\alpha_*)^{-1/3}$ và cũng ký hiệu đại lượng này là x. Khi đó

$$x = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \qquad y = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{118-4}$$

Nên chú ý rằng, do có liên hệ đơn giản với hàm Φ, hàm $y(\eta,\theta)$ (mà không phải $x(\eta,\theta)$) cũng thỏa mãn phương trình Euler - Tricomi. Do đó, có thể viết được jacôbiên của phép biến đổi từ mặt phẳng vật lý sang mặt phẳng tốc đồ dưới dạng

$$\Delta = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\eta)} = \Phi_{\eta\theta}^2 - \Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 - \eta\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2. \tag{118-5}$$

Như đã nói, phương trình Euler - Tricomi thường được áp dụng để nghiên cứu các tính chất của nghiệm ở lân cận gốc tọa độ trong mặt phẳng η,θ. Trong những trường hợp đáng quan tâm về mặt vật lý, điểm đó là một điểm kỳ dị của nghiệm. Vì thế, họ các tích phân riêng của phương trình Euler - Tricomi với những tính chất thuần nhất xác định có một tầm quan trọng đặc biệt. Các nghiệm này là thuần nhất đối với

[1] Tất nhiên là không được hiểu từ "miền nhỏ" theo đúng nguyên văn từng chữ. Miền cần nghiên cứu có thể là "ở lân cận một điểm xa vô cùng" nghĩa là dòng chảy ở cách vật có dòng bao quanh những khoảng cách đủ lớn.

[2] Chúng ta đã bỏ đi thừa số $1/c_*$ ở trong những vế phải của đẳng thức; điều đó có nghĩa là chỉ thay Φ bằng $\alpha_*\Phi$, phép thay thế này không thay đổi phương trình (118-2) và do đó bao giờ cũng được phép.

các biến θ^2 và η^3; các nghiệm như thế phải tồn tại, vì phép biến đổi $\theta^2 \to a\theta^2$, $\eta^3 \to a\eta^3$ làm bất biến phương trình (118-2). Chúng ta sẽ tìm các nghiệm đó dưới dạng

$$\Phi = \theta^{2k} f(\xi), \qquad \xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}.$$

trong đó k là một hằng số (độ thuần nhất của hàm Φ đối với phép biến đổi đã nói). Biến ξ được chọn sao cho nó triệt tiêu trên các đặc tuyến đi qua điểm $\eta = \theta = 0$. Sau khi thay, ta tìm được cho $f(\xi)$ phương trình

$$\xi(1-\xi)f'' + \left[\frac{5}{6} - 2k - \xi\left(\frac{3}{2} - 2k\right)\right]f' - k\left(k - \frac{1}{2}\right)f = 0.$$

Đó là một trường hợp riêng của phương trình siêu bội. Dựa vào biểu thức đã biết cho hai tích phân độc lập của phương trình siêu bội, ta thu được nghiệm cần tìm (với số $2k + 1/6$ không nguyên) dưới dạng

$$\Phi_k = \theta^{2k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ -2k+\frac{5}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + B\left(1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+1/6} F\left(k+\frac{1}{6},\ k+\frac{2}{3},\ 2k+\frac{7}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right] \tag{118-6}$$

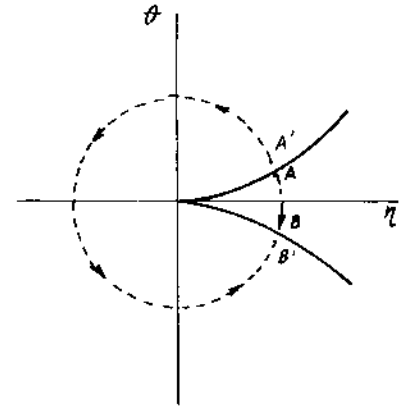
Dựa vào các hệ thức đã biết giữa các hàm siêu bội của các đối số z, $1/z$, $1 - z$, $1/(1 - z)$, $z/(1 - z)$, có thể còn biểu diễn nghiệm này dưới năm dạng khác; năm dạng này đều cần được sử dụng để nghiên cứu những trường hợp cụ thể khác nhau [1]. Ta chỉ nêu ở đây hai dạng sau đây:

$$\Phi_k = \theta^{2k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ \frac{2}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) + B\frac{4\eta}{\theta^{2/3}} F\left(-k+\frac{1}{3},\ -k+\frac{5}{6},\ \frac{4}{3};\ \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right], \tag{118-7}$$

[1] Các công thức tương ứng có thể tìm được trong phụ lục toán ở III. Nhân tiện đính chính in sai trong công thức (e-9) của tiết này: trong số hạng thứ hai, đúng ra là thừa số $z^{\beta-\gamma}$ thay cho $z^{\alpha-\gamma}$.

$$\Phi_k = \eta^{3k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{3},\ \frac{1}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)+\right.$$
$$\left.+B\frac{\theta}{\eta^{2/3}}F\left(-k+\frac{1}{2},\ -k+\frac{5}{6},\ \frac{3}{2};\ \frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)\right] \qquad (118\text{-}8)$$

(các hằng số A, B ở trong các công thức (118.6-8) dĩ nhiên là không trùng nhau). Từ các biểu thức đó ta rút ngay ra được tính chất quan trọng của các hàm Φ_k, mà không thấy được hiển nhiên trực tiếp từ biểu thức (118-6): các đường $\eta = 0$ và $\theta = 0$ không phải là những đường kỳ dị của chúng ((118-7) chứng tỏ rằng ở gần $\eta = 0$ hàm Φ_k được khai triển theo các lũy thừa nguyên của η, và từ (118-8) tình hình cũng tương tự với θ). Biểu thức (118-6) chứng tỏ rằng, trái lại, các đặc tuyến là những đường kỳ dị (nghĩa là chứa hai hằng số A và B) của tích phân tổng quát thuần nhất Φ_k của phương trình Euler - Tricomi: với $2k$ + 1/6 không nguyên thừa số $(9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k+1/6}$ có những điểm rẽ nhánh, và với $2k$ +1/6 nguyên, một trong các số hạng của (118-6) không có ý nghĩa [1] (hoặc nó trùng với số hạng kia nếu $2k$ + 1/6 = 0) và phải được thay thế bằng nghiệm thứ hai độc lập của phương trình siêu bội, như chúng ta đã biết, trong trường hợp này, nghiệm này có kỳ dị lôga.



Hình 119

Giữa các tích phân Φ_k với các k khác nhau có các hệ thức sau:

$$\Phi_k = \Phi_{-k-1/6}(9\theta^2 - 4\eta^3)^{2k+1/6}, \qquad (118\text{-}9)$$

$$\Phi_{k-1/2} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \theta}. \qquad (118\text{-}10)$$

Hệ thức thứ nhất được suy từ (118-6), và hệ thức thứ hai được suy từ điều kiện là hàm $\partial k/\partial\theta$ thỏa mãn phương trình Euler - Tricomi và có

[1] Ta nhớ lại rằng, chuỗi $F(\alpha,\beta,\gamma, z)$ không có ý nghĩa khi $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$

cùng độ thuần nhất với $\Phi_{k-1/2}$. Dĩ nhiên là, trong các công thức này Φ_k được hiểu ngầm là biểu thức tổng quát với hai hằng số tùy ý.

Khi nghiên cứu nghiệm ở gần điểm $\eta = \theta = 0$, cần phải theo dõi sự biến thiên của nó khi bao quanh điểm đó. Chẳng hạn, giả sử rằng hàm Φ_k (118-6) biểu diễn nghiệm tại điểm A ở gần đặc tuyến $\theta = 2/3\eta^{3/2}$ (hình 119) và đòi hỏi phải tìm dạng của nghiệm ở gần đặc tuyến $\theta = -2/3\eta^{3/2}$ (tại B). Sự chuyển dọc theo AB, phải cắt trục hoành; nhưng giá trị $\theta = 0$ là một điểm kỳ dị của các hàm siêu bội trong biểu thức (118-6), vì đối số của chúng bằng vô hạn. Do đó, để đi từ A đến B, trước hết cần biến đổi các hàm siêu bội thành các hàm có đối số nghịch đảo $9\theta^2/(9\theta^2 - 4\eta^3)$, đối với các hàm này $\theta = 0$ không còn là một điểm kỳ dị nữa, sau đó người ta đổi dấu của θ và lặp lại phép biến đổi tương tự để trở lại các hàm có đối số ban đầu. Bằng cách như vậy đối với các hàm ở trong (118-6) ta thu được các công thức biến đổi sau đây:

$$F_1 \to \frac{F_1}{2\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)} + F_2 . 2^{4k-1/3}\frac{\Gamma\left(-2k-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\Gamma\left(-2k+\frac{2}{3}\right)},$$

$$F_2 \to -\frac{F_2}{2\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)} + F_1 . 2^{4k+1/3}\frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{6}{7}\right)}{\Gamma(2k+1)\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)}, \qquad (118\text{-}11)$$

trong đó F_1 và F_2 được hiểu là các biểu thức

$$F_1 = |\theta|^{2k} F\left(-k,\ -k+\frac{1}{2},\ -2k+\frac{5}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right),$$

$$F_2 = |\theta|^{2k}\left|1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k+1/6} F\left(k+\frac{1}{6},\ k+\frac{2}{3},\ 2k+\frac{7}{6};\ 1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \qquad (118\text{-}12)$$

ở đây θ và $1 - 4\eta^3/9\theta^2$ trong các hệ số của các hàm siêu bội được lấy theo các giá trị tuyệt đối của chúng.

Tương tự, ta có thể thu được các công thức biến đổi khi chuyển từ A' sang B' (hình 119) bằng cách bao quanh gốc tọa độ theo chiều ngược lại.

Các phép tính khi đó phức tạp hơn, vì phải đi qua ba điểm kỳ dị của các hàm siêu bội – qua điểm tương ứng với $\theta = 0$ và qua điểm tương ứng với $\eta = 0$ hai lần (nhắc lại rằng, các điểm kỳ dị của hàm siêu bội của z là những điểm $z = 1$ và $z = \infty$). Cuối cùng ta thu được các công thức sau:

$$F_1 \to -\frac{\sin\pi\left(4k-\frac{1}{6}\right)}{\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)}F_1 + F_2 2^{-4k+2/3}\cos\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)\frac{\Gamma\left(-2k-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\,\Gamma\left(-2k+\frac{2}{3}\right)},$$

$$F_2 \to -\frac{\sin\pi\left(4k-\frac{1}{6}\right)}{\sin\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)}F_2 + F_1 \cdot 2^{4k+4/3}\cos\pi\left(2k+\frac{1}{6}\right)\frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)}. \quad (118\text{-}13)$$

Ngoài họ các nghiệm thuần nhất vừa khảo sát, tất nhiên cũng có thể xây dựng các họ tích phân riêng của phương trình Euler - Tricomi. Ở đây, ta nêu họ các nghiệm xuất hiện do việc khai triển Fourier theo góc θ. Nếu tìm Φ dưới dạng

$$\Phi_\nu = g_\nu(\eta)e^{\pm i\nu\theta}, \quad (118\text{-}14)$$

trong đó ν là một hằng số tùy ý, thì ta sẽ tìm được cho g_ν phương trình

$$g_\nu'' + \nu^2\eta\, g_\nu = 0.$$

Đó chính là phương trình của các hàm Airy, có tích phân tổng quát bằng

$$g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta}\; Z_{1/3}\left(\frac{2\nu}{3}\eta^{3/2}\right). \quad (118\text{-}15)$$

trong đó $Z_{1/3}$ là một tổ hợp tuyến tính tùy ý của các hàm Bessel cấp 1/3.

Cuối cùng, nên nhớ rằng tích phân tổng quát của phương trình Euler - Tricomi có thể được viết dưới dạng

$$\Phi = \int_C f(\zeta)dz, \qquad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \quad (118\text{-}16)$$

trong đó $f(\xi)$ là một hàm tùy ý, và việc lấy tích phân được tiến hành trong mặt phẳng biến phức ξ theo một công tua C bất kỳ, tại các đầu

của công tua này đạo hàm $f'(\xi)$ lấy các giá trị như nhau. Thực vậy, thay trực tiếp biểu thức (118-16) vào phương trình Euler - Tricomi, ta được

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} - \eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 9\int_C (z^2 - \eta)f''(\zeta)\,dz = 3\int f''(\zeta)\,d\zeta = 3f'(\zeta) = 0,$$

nghĩa là, phương trình đã được thỏa mãn.

§119. CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH EULER - TRICOMI Ở GẦN CÁC ĐIỂM KHÔNG KỲ DỊ CỦA MẶT ÂM

Bây giờ ta xác định xem những nghiệm Φ_k nào tương ứng với các trường hợp trong đó dòng chảy của khí ở gần biên giới chuyển tiếp không có những kỳ dị vật lý nào (không có những gián đoạn yếu và các sóng va chạm). Tuy nhiên, muốn vậy, để tiện lợi hơn người ta không xuất phát trực tiếp từ phương trình Euler - Tricomi, mà từ phương trình của thế vận tốc ở trong mặt phẳng vật lý. Một phương trình như vậy đã được rút ra ở §114; đối với chuyển động phẳng, sau khi đưa vào tọa độ mới $x \to x(2\alpha_*)^{1/3}$ phương trình (114-10) có dạng

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}. \qquad (119\text{-}1)$$

Ta nhắc lại rằng, thế φ ở đây được xác định sao cho các đạo hàm của nó đối với với các tọa độ cho ta vận tốc theo các đẳng thức

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \eta, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \qquad (119\text{-}2)$$

Ta cũng nhận xét rằng, phương trình Euler - Tricomi có thể được rút ra trực tiếp từ phương trình (119-1) bằng cách chuyển sang các biến độc lập θ, η dựa vào phép biến đổi Legendre; thêm vào đó $\Phi = -\varphi + x\eta + y\theta$, hay

$$\varphi = -\Phi + \eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \qquad (119\text{-}3)$$

Sau khi chọn tọa độ gốc x, y tại điểm của đường âm mà lân cận nó

cần đang nghiên cứu, ta khai triển φ theo các luỹ thừa của x và y. Trong trường hợp tổng quát, số hạng thứ nhất thỏa mãn phương trình (119-1) có dạng

$$\varphi = \frac{1}{a}xy. \tag{119-4}$$

Khi đó $\theta = x/a$, $\eta = y/a$, do đó

$$\Phi = a\theta\eta \tag{119-5}$$

Theo độ thuần nhất của hàm này, rõ ràng là nó tương ứng với một trong các hàm $\Phi_{5/6}$; đó là số hạng thứ hai của biểu thức (118-7), trong đó hàm siêu bội với $k = 5/6$ rút đơn giản về 1:

$$\eta\theta F\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \eta\theta.$$

Nếu ta muốn tìm được phương trình của đường âm trong mặt phẳng vật lý, thì số hạng khai triển thứ nhất đã viết là chưa đủ. Số hạng khai triển thứ hai của Φ có độ thuần nhất 1, nghĩa là tương ứng với một trong các hàm Φ_1; đó là số hạng thứ nhất của biểu thức (118-7) khi $k = 1$ sẽ rút về đa thức:

$$\theta^2 F\left(-1, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \theta^2 + \frac{\eta^3}{3}.$$

Như vậy, hai số hạng khai triển đầu tiên của Φ bằng:

$$\Phi = a\eta\theta + b\left(\theta^2 + \frac{\eta^3}{3}\right). \tag{119-6}$$

Từ đó

$$x = a\theta + b\eta^2, \qquad y = a\eta + 2b\theta. \tag{119-7}$$

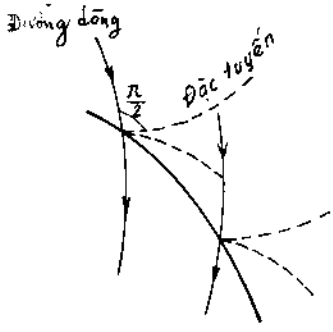
Đường âm ($\eta = 0$) là đường thẳng $y = 2bx/a$.

Số hạng khai triển thứ nhất đủ để tìm được phương trình của đặc tuyến trong mặt phẳng vật lý. Thay $\theta = x/a$, $\eta = y/a$ vào phương trình của các đặc tuyến đầu tốc (*hodograph*,ND) $\theta = \pm 2\eta^{3/2}/3$, ta thu được:

$$x = \pm\frac{2}{3\sqrt{a}}y^{3/2},$$

nghĩa là lại thu được hai nhánh của parabol nửa cubic với điểm lùi (*cusp*) ở trên đường âm (đường cong đậm trên hình 120).

Có thể thấy trước được tính chất này của các đặc tuyến từ các nhận định đơn giản sau đây. Tại các điểm của đường chuyển tiếp góc Mach bằng $\pi/2$. Điều đó có nghĩa là, các tiếp tuyến với các đặc tuyến của hai họ trùng nhau, nghĩa là ở đây có điểm lùi (hình 120). Các đường dòng cắt đường âm vuông góc với các đặc tuyến, ở đây không có các kỳ dị.



Hình 120

Nghiệm (119-6) không áp dụng được trong trường hợp đặc biệt khi đường dòng vuông góc với đường âm tại điểm đang xét [1]. Ở gần một điểm như thế dòng chảy hiển nhiên là đối xứng đối với trục x. Trường hợp này đòi hỏi một sự nghiên cứu đặc biệt (đã được *F.I. Frankl* và *S.V. Falcovits* tiến hành năm 1945).

Sự đối xứng của dòng chảy có nghĩa là vận tốc v_y thay đổi dấu khi người ta đổi dấu của y, còn v_x vẫn không đổi. Nói một cách khác, thế φ phải là một hàm chẵn của y (còn thế Φ là một hàm chẵn của θ). Do đó, các số hạng khai triển đầu tiên của φ trong trường hợp này có dạng sau:

$$\varphi = \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2xy^2}{2} + \frac{a^3y^4}{24} \qquad (119\text{-}8)$$

(bậc độ nhỏ tương đối của các đại lượng x và y không được xác định trước, do đó cả ba số hạng đã viết ở trên có thể có cùng bậc). Từ đó, ta tìm được các công thức biến đổi sau đây từ mặt phẳng vật lý sang mặt phẳng đầu tốc:

$$\eta = ax + \frac{a^2y^2}{2}, \qquad 0 = a^2xy + \frac{a^3y^3}{6}. \qquad (119\text{-}9)$$

Ngay trước khi giải được dưới dạng tường minh các phương trình đó đối với x, y, ta dễ dàng nhận thấy rằng, độ thuần nhất của hàm $y(\theta,\eta)$ bằng

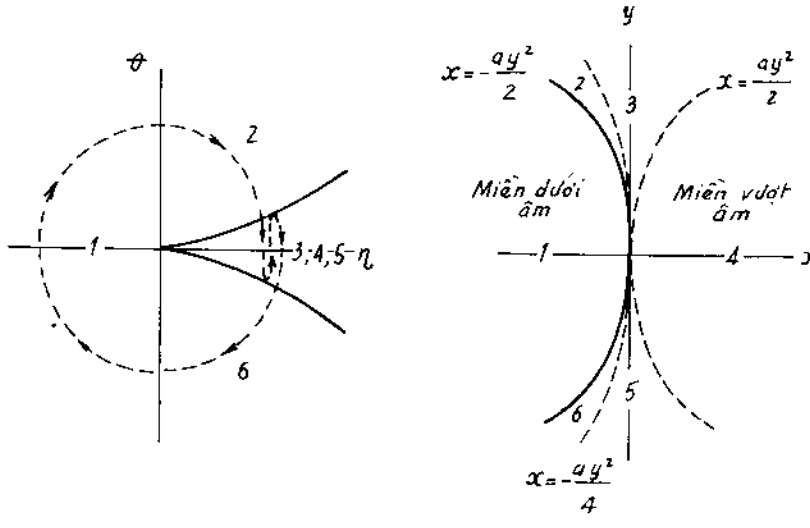
[1] Trong (119-6) ta sẽ có $a = 0$ tương ứng với điều đó; nhưng khi $a = 0$ thì nghiệm đó sẽ không có ý nghĩa, vì jacôbiên Δ bằng không ở trên đường $\eta = 0$.

1/6. Do đó, đối với hàm Φ tương ứng, ta có $k = 1/6 + 1/2 = 2/3$, nghĩa là nó được chứa trong tích phân tổng quát $\Phi_{2/3}$.

Khử x khỏi các phương trình (119-9), ta thu được cho $y(\theta,\eta)$ phương trình bậc ba

$$(ay)^3 - 3\eta ay + 3\theta = 0. \tag{119-10}$$

Với $\theta^2 - 4\eta^3/9 > 0$, nghĩa là trong toàn bộ miền nằm ở bên trái các đặc tuyến đầu tốc đi qua điểm $\eta = \theta = 0$ (đặc biệt kể cả trong toàn miền dưới âm, $\eta < 0$; hình 121) phương trình này chỉ có một nghiệm thực, nghiệm đó phải được lấy làm hàm $y(\theta,\eta)$. Trong miền nằm ở bên phải các đặc tuyến, cả ba nghiệm đều là thực; trong số đó người ta giữ lại nghiệm, là kéo dài của nghiệm thực ở miền bên trái.



Hình 121

Các đặc tuyến trong mặt phẳng vật lý (đi qua gốc tọa độ θ) thu được bằng cách thay các biểu thức (119-9) vào phương trình $4\eta^3 = 9\theta^2$. Ta thu được hai parabôn:

$$\begin{aligned} &\text{Các đặc tuyến } 23 \text{ và } 56\text{:} \quad x = -ay^2/4, \\ &\text{Các đặc tuyến } 34 \text{ và } 45\text{:} \quad x = ay^2/2. \end{aligned} \tag{119-11}$$

(các con số nêu lên hai miền nào trong mặt phẳng vật lý bị ngăn cách bởi đặc tuyến đã cho). Còn đường âm ($\eta = 0$ ở trong mặt phẳng đầu tốc), là parabôn $x = -ay^2/2$ ở trong mặt phẳng vật lý (đường cong đậm trong hình 121). Ta nhận thấy đặc tính sau của giao điểm giữa đường âm với trục đối xứng: bốn nhánh của các đặc tuyến xuất phát từ điểm này, trong khi đó chỉ có hai nhánh xuất phát từ mọi điểm khác của đường âm.

Trên hình 121, ta ký hiệu các miền tương ứng của mặt phẳng đầu tốc và mặt phẳng vật lý bằng cùng những con số như nhau. Sự tương ứng này không phải là quan hệ một đối một [1]; khi đi một vòng tròn toàn phần quanh dốc tọa độ ở trong mặt phẳng vật lý, miền nằm giữa hai đặc tuyến trong mặt phẳng đầu tốc được đi qua ba lần, như đã được trình bày ở trên hình 121 bằng đường chấm chấm, đường này "phản xạ" hai lần từ các đặc tuyến.

Vì chính hàm $y(\theta,\eta)$ thỏa mãn phương trình Euler - Tricomi, nên nó phải được chứa trong tích phân tổng quát $\Phi_{1/6}$. Ở gần đặc tuyến *23* trong mặt phẳng vật lý, đó chính là

$$y = \frac{1}{a}\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3} F\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{2};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \qquad (119\text{-}12)$$

(số hạng thứ nhất của biểu thức (118-6) không có kỳ dị ở trên đặc tuyến). Bằng sự khai triển giải tích hàm này vào miền lân cận của đặc tuyến *56* (theo con đường đi qua miền dưới âm *1*, nghĩa là dựa vào các công thức (118-13)), ta thu được ở đây cùng hàm đó. Nhưng ở gần các đặc tuyến *34* và *45*, $y(\theta,\eta)$ được cho bởi các tổ hợp tuyến tính của hàm này và của hàm

$$\theta^{1/3}\sqrt{\frac{4\eta^3}{9\theta^2}-1}\; F\left(\frac{1}{3},\frac{5}{6},\frac{3}{2};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \qquad (119\text{-}13)$$

(số hạng thứ hai của biểu thức (118-6)); các tổ hợp này thu được bằng sự thác triển giải tích dựa vào các công thức (118-11) (ở đây cần nhớ rằng, căn bậc hai ở trong hàm (119-13) đổi dấu sau mỗi lần "phản xạ" từ đặc

[1] Phù hợp với sự kiện là, trên đặc tuyến $x = ay^2/2$ ở trong mặt phẳng vật lý $\Delta = \infty$ (xem bị chú trang 717).

tuyến đầu tốc).

Theo quan điểm thuần túy toán học, các kết qủa rút ra được chứng tỏ rằng các hàm $\Phi_{1/6}$ là các tổ hợp tiếp tuyến các nghiệm của phương trình bậc ba

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \tag{119-14}$$

nghĩa là chúng qui về các hàm đại số [1]. Cùng với $\Phi_{1/6}$, tất cả các Φ_k với

$$k = \frac{1}{6} \pm \frac{n}{2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{119-15}$$

đều qui về các hàm đại số; chúng thu được từ $\Phi_{1/6}$ dựa vào các công thức (118-9) và (118-10) bằng cách lấy đạo hàm liên tiếp (điều nhận xét này của *F.Frankl*, 1947).

Cũng quy về các hàm đại số cả các hàm Φ_k nào với

$$k = \pm\frac{n}{2}, \qquad k = \frac{1}{3} \pm \frac{n}{2}, \tag{119-16}$$

trong đó hàm siêu bội rút về một đa thức [2] (chẳng hạn, với $k = n/2$ thì đó là số hạng thứ nhất và với $k = -n/2$, thì đó là số hạng thứ hai của (118-6)).

Ba họ hàm đại số Φ_k này, đặc biệt, bao gồm tất cả các hàm (với tính cách là thế Φ) tương ứng với các dòng chảy không có các kỳ dị ở trong mặt phẳng vật lý. Đối với các dòng chảy như thế, tất cả các số hạng khai triển của Φ ở gần điểm không đối xứng của dường chuyển tiếp (mà hai số hạng khai triển đầu tiên của nó được cho bởi công thức (119-6)) chỉ có thể có $k = 5/6 + n/2$ hay $k = 1 + n/2$. Ngoài ra, khai triển của Φ ở gần điểm đối xứng (khai triển bắt đầu từ số hạng với $k = 2/3$), còn có thể chứa các hàm với $k = 2/3 + n/2$.

[1] Thực tế, sẽ không thuận lợi nếu dùng biểu thức tường minh của các hàm đó, là các hàm rút ra được từ (119-14) dựa vào công thức Cardano.

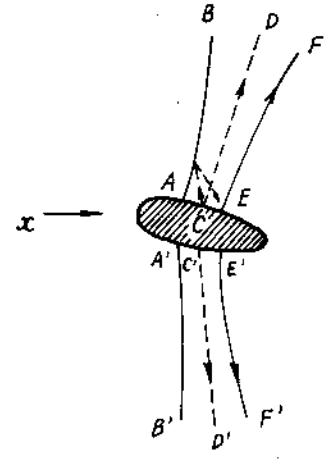
[1] Ở đây, cần nhớ rằng $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ rút về một đa thức, nếu đối với α (hay β), ta có $\alpha = -n$ hay $\gamma - \alpha = -n$.

§120. DÒNG BAO QUANH VỚI VẬN TỐC ÂM

Phương trình Chaplygin đã đơn giản hóa dưới dạng phương trình Euler - Tricomi về nguyên tắc phải được ứng dụng để nghiên cứu các đặc điểm định tính cơ bản của dòng phẳng dừng bao quanh các vật, có liên quan đến sự có mặt của các miền gần âm trong dòng chảy đó. Trước hết, đó là những vấn đề có liên quan với sự xuất hiện của các sóng va chạm. Trong vùng dưới âm cường độ của sóng va chạm nhỏ. Cần nhấn mạnh rằng, chính tình hình đó làm cho việc ứng dụng phương trình Euler - Tricomi trong các điều kiện đó trở nên hợp lý. Ta nhớ lại rằng, (xem §§86, 114) trong sóng va chạm yếu, độ biến thiên của entropi và rôta vận tốc là những đại lượng có bậc độ nhỏ cao hơn; do đó trong phép gần đúng bậc nhất có thể coi chuyển động cả ở sau gián đoạn là đẳng entrôpi và có thế.

Trong tiết này, ta xét một vấn đề nữa có tầm quan trọng về mặt lý thuyết, đó là đặc tính của một dòng chảy phẳng dừng, khi vận tốc của dòng tới đúng bằng vận tốc của âm.

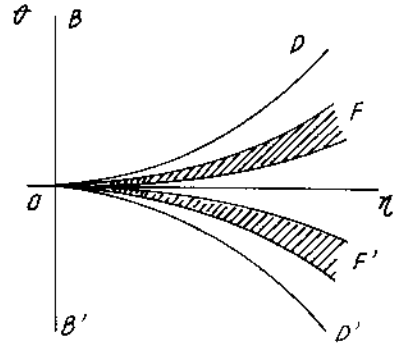
Ta sẽ thấy rằng một dòng chảy bao quanh như thế nhất thiết phải chứa một sóng va chạm, trải ra từ vật đến vô hạn. Từ đó, rút ra một kết luận quan trọng là, sóng va chạm phải xuất hiện đầu tiên với số M_∞ trong mọi trường hợp đều nhỏ hơn đơn vị.



Hình 122

Chẳng hạn, ta hãy xét dòng chảy phẳng quanh một vật có sải cánh dài vô hạn ("cánh") với tiết diện tùy ý, không nhất thiết đối xứng. Khi đó, ta quan tâm đến hình ảnh dòng chảy ở những khoảng cách đủ lớn (so với các kích thước) tính từ vật. Để tiện lợi cho việc trình bày, thoạt đầu ta mô tả định tính các kết qủa đã thu được, sau đó đi tới tính toán định lượng. Ở trên hình 122, AB và $A'B'$ là các đường âm, do đó ở bên trái

chúng (ngược dòng) là toàn bộ miền dưới âm; mũi tên biểu diễn chiều dòng tới (mà dưới đây được chọn làm chiều trục x với gốc tại một điểm nào đó ở trong vật). Tại một khoảng cách nào đó đối với đường chuyển tiếp có xuất hiện các sóng va chạm "xuất phát" từ vật (*EF* và *E'F'* ở trên hình 122). Tất cả những đặc tuyến xuất phát từ vật (ở trong miền nằm giữa đường chuyển tiếp và sóng va chạm) có thể được chia thành hai nhóm. Các đặc tuyến của nhóm thứ nhất gặp đường âm và kết thúc trên nó (nói cách khác, chúng phản xạ trên đó dưới dạng các đặc tuyến đi đến gặp vật; một trong các đặc tuyến đó được biểu diễn ở trên hình 122). Các đặc tuyến của nhóm thứ hai kết thúc ở trên sóng va chạm. Cả hai nhóm này được ngăn cách bởi các *đặc tuyến giới hạn*, chỉ những đặc tuyến này đi ra xa vô cùng và không bao giờ gặp đường âm và sóng va chạm (*CD* và *C'D'* ở trên hình 122). Vì các nhiễu động (gây bởi sự biến thiên của côngtua bao vật chẳng hạn) lan truyền từ vật dọc theo các đặc tuyến của nhóm thứ nhất đạt tới biên giới của miền dưới âm, nên rõ ràng là, phần của dòng vượt âm nằm giữa đường chuyển tiếp và đặc tuyến giới hạn có ảnh hưởng đến miền dưới âm; nhưng toàn bộ dòng chiếm trong miền bên phải các đặc tuyến giới hạn không có ảnh hưởng gì đến dòng chảy ở bên trái: dòng chảy ở bên trái hoàn toàn không thay đổi gì khi có xuất hiện nhiễu động dòng chảy ở bên phải (kể cả khi prôfin của vật thay đổi ở bên phải các điểm C và C'). Dòng chảy ở sau sóng va chạm, như đã biết, không hề có ảnh hưởng đến dòng chảy ở trước nó. Do đó, toàn bộ dòng chảy có thể được chia thành ba phần (ở bên trái *DCC'D'*, ở giữa *DCC'D'* và *FEE'F'*, ở bên phải *FEE'F'*), dòng chảy ở trong phần thứ hai không ảnh hưởng đến dòng chảy ở trong phần thứ nhất và dòng chảy ở trong phần thứ ba không ảnh hưởng đến dòng chảy ở trong phần thứ hai.



Hình 123

Bây giờ, ta chuyển sang tính toán định lượng về hình ảnh dòng chảy đã mô tả (đồng thời cũng là kiểm nghiệm).

Gốc tọa độ ở trong mặt phẳng đầu tốc ($\theta = \eta = 0$) tương ứng với miền ở xa vô cùng trong mặt phẳng vật lý, và các đặc tuyến đầu tốc xuất phát từ gốc tọa độ tương ứng với các đặc tuyến giới hạn CD và $C'D'$. Hình 123 biểu diễn miền lân cận của gốc tọa độ, các chữ tương ứng với các ký hiệu của hình 122. Sóng va chạm được biểu diễn ở trong mặt phẳng đầu tốc không phải bằng một đường duy nhất, mà bằng hai đường (tương ứng với chuyển động của khí ở hai bên của gián đoạn) và các miền (gạch gạch ở trên hình 123) nằm giữa chúng không tương ứng với một miền nào trong mặt phẳng vật lý.

Trước hết, điều quan trọng là phải xem tích phân nào trong các tích phân tổng quát Φ_k tương ứng với trường hợp của dòng chảy đang xét. Nếu $\Phi(\theta,\eta)$ có bậc thuần nhất k, thì các hàm $x = \partial\Phi/\partial\eta$ và $y = \partial\Phi/\partial\theta$ đều thuần nhất lần lượt bằng $k - 1/3$ và $k - 1/2$. Khi θ và η tiến đến giá trị không, thì nói chung ta phải rơi vào vô cùng trong mặt phẳng vật lý, nghĩa là x và y phải tiến đến vô cùng. Muốn vậy, rõ ràng là phải có $k < 1/3$. Mặt khác, các đặc tuyến giới hạn trong mặt phẳng vật lý không thể nằm hoàn toàn ở vô cùng, nghĩa là không thể có $y = \pm\infty$ trên toàn bộ đường $9\theta^2 = 4\eta^3$. Trong trường hợp đó (với $2k + 1/6 < 5/6$) số hạng thứ hai trong các dấu ngoặc của (118-6) phải bằng không. Như vậy, hàm $\Phi(\theta,\eta)$ phải được biểu diễn bởi số hạng thứ nhất của (118-6):

$$\Phi = A\theta^{2k}F\left(-k,-k+\frac{1}{2},-2k+\frac{5}{6};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) \qquad (120\text{-}1)$$

Hàm $\Phi(\theta,\eta)$ (cũng thỏa mãn phương trình Euler - Tricomi) có cùng dạng như thế, nhưng với $k - 1/2$ thay cho k.

Nhưng nếu biểu thức (120-1) xảy ra ở gần đặc tuyến trên ($\theta = +2\eta^{3/2}/3$), thì với $k < 1/3$ tùy ý, nó sẽ tuyệt nhiên không xảy ra cả khi ở gần đặc tuyến thứ hai ($\theta = -2\eta^{3/2}/3$). Do đó, ta cũng phải đòi hỏi rằng dạng (120-1) của $\Phi(\theta,\eta)$ vẫn giữ nguyên khi bao quanh gốc tọa độ ở trong mặt phẳng đầu tốc từ đặc tuyến này sang đặc tuyến khác, và đường bao quanh phải đi qua nửa mặt phẳng $\eta < 0$ (đường $A'B'$ ở trên hình 119). Một sự bao quanh như thế tương ứng với sự chuyển trong mặt phẳng vật lý từ các điểm ở xa của một trong các đặc tuyến giới hạn đến các điểm ở xa của một đặc tuyến giới hạn khác, thêm vào đó, đường chuyển tiếp đi qua

miền dưới âm, và do đó nó không cắt sóng va chạm ở đâu, sóng này phá hủy sự liên tục của dòng chảy. Sự biến đổi của hàm siêu bội ở trong (120-1) trong một sự chuyển như thế được cho bởi công thức đầu tiên trong các công thức (118-13) và ta đòi hỏi hệ số của F_2 trong công thức này phải bằng không. Điều kiện này được thực hiện đối với các giá trị sau đây của $k < 1/3$:

$$k = \frac{1}{6} - \frac{n}{2}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Trong số tất cả các giá trị này, chỉ có thể lấy được một giá trị, đó là

$$k = -\frac{1}{3}. \tag{120-2}$$

Có thể chứng tỏ rằng, tất cả các giá trị của k với $n > 1$ đều dẫn tới một ánh xạ không đơn trị của mặt phẳng đầu tốc trên mặt phẳng vật lý (khi mặt phẳng thứ nhất được bao quanh một lần, thì mặt phẳng thứ hai được bao quanh nhiều lần), nghĩa là dẫn tới tính không đơn trị của dòng chảy vật lý, điều này tất nhiên là vô lý. Còn giá trị $k = 1/6$ cho ta một nghiệm, trong đó sự tiến đến không của θ và η không theo tất cả mọi phương trong mặt phẳng vật lý có nghĩa là sự đi ra xa vô cùng; rõ ràng là một nghiệm như thế cũng không thích hợp về mặt vật lý.

Với $k = -1/3$ hệ số của F_1 trong vế phải của (118-13) bằng +1, nghĩa là hàm Φ hoàn toàn không thay đổi khi đi từ một đặc tuyến này sang đặc tuyến khác. Điều đó có nghĩa là Φ là một hàm chẵn của θ, còn tọa độ $y = \partial\Phi/\partial\theta$ vì thế sẽ là một hàm lẻ. Về mặt vật lý, điều đó có nghĩa là trong phép gần đúng bậc nhất đang xét, hình ảnh của dòng chảy tại các khoảng cách lớn tính từ vật là đối xứng đối với mặt phẳng $y = 0$, dù vật có hình dạng thế nào, và nói riêng, dù có lực nâng hay không.

Như vậy, ta đã xác định được tính chất của kỳ dị của $\Phi(\theta, \eta)$ tại điểm $\theta = \eta = 0$. Từ đó, có thể kết luận ngay về dạng của đường âm, của các đặc tuyến giới hạn và sóng va chạm tại các khoảng cách lớn tính từ vật. Mỗi một trong các đường đó phải tương ứng với một giá trị xác định của tỷ số θ^2/η^3, và vì Φ có dạng $\Phi = \theta^{-2/3} f(\eta^3/\theta^2)$ nên từ các công thức (118-4) ta suy ra rằng $x \sim \theta^{-4/3}$, $y \sim \theta^{-5/3}$. Do đó dạng của các đường đã nêu được xác định bởi các phương trình có dạng

$$x = \text{const} \cdot y^{4/5} \tag{120-3}$$

const có giá trị khác nhau đối với mỗi đường. Dọc theo các đường đó, θ và η giảm theo các định luật

$$\theta \sim y^{-3/5}, \quad \eta = y^{-2/5} \tag{120-4}$$

(*F.I. Frankl*, 1947; *K. Guderley*, 1948) [1].

Để xác định, trong các công thức viết dưới đây các dấu tương ứng với nửa mặt phẳng trên ($y > 0$).

Ta sẽ chứng tỏ xem có thể tính các hệ số trong những công thức đó như thế nào. Giá trị $k = -1/3$ là một trong những giá trị để Φ_k rút về các hàm đại số (xem tiết trước). Tích phân riêng, xác định Φ trong trường hợp đã cho, có thể viết được dưới dạng $\Phi = (a_1/2)(\partial f/\partial\theta)$, trong đó a_1 là một hằng số dương tùy ý và f là nghiệm của phương trình bậc ba

$$f^3 - 3\eta f + 3\theta = 0, \tag{120-5}$$

với $9\theta^2 - 4\eta^3 > 0$, nghiệm này trùng với nghiệm thực duy nhất. Từ đó

$$\Phi = \frac{a_1}{2}\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{a_1}{2(f^2 - \eta)}, \tag{120-6}$$

và đối với cả các tọa độ

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{a_1(f^2 + \eta)}{2(f^2 - \eta)^3}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{a_1 f}{(f^2 - \eta)^3}. \tag{120-7}$$

Các công thức này có thể được biểu diễn dưới dạng thông số tiện lợi bằng cách đưa vào thông số $s = f^2/(f^2 - \eta)$; khi đó

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_1^{1/5}\frac{2s-1}{2s^{2/5}}, \quad \eta\, y^{2/5} = a_1^{2/5} s^{1/5}(s-1), \quad \theta\, y^{3/5} = \frac{a_1^{3/5}}{3} s^{1/5}(3-2s), \tag{120-8}$$

[1] Nhớ lại rằng, ta có thể thu được các kết quả tương tự cho cả dòng chảy bao quanh đối xứng trục (với $M_\infty = 1$).

Trong các tọa độ trụ x, r dạng của mặt âm, đặc tuyến giới hạn, sóng va chạm, và cả định luật biến thiên của vận tốc ở trên chúng được cho (ở xa vật) bởi các công thức

$$x = \text{const} \cdot r^{4/7}, \quad v_x \sim r^{-6/7}, \quad v_r \sim r^{-9/7}.$$

Xem *Guderley KG.* Theorie schallnaher Strömunger – Springer Verlag, 1957; Falkovits, *X.V. Tsernov I. A* – Cơ Toán ứng dụng, 1964, T 28, trang 342 (sách Nga),

Các công thức này xác định dưới dạng thông số sự phụ thuộc của θ và η vào các tọa độ. Thông số s lấy các giá trị dương kể từ số không ($s = 0$ tương ứng với $x = -\infty$, nghĩa là tương ứng với dòng đi từ vô cùng lại). Nói riêng, giá trị $s = 1/2$ tương ứng với $x = 0$, nghĩa là nó cho ta sự phân bố các vận tốc với các y lớn ở trong mặt phẳng vuông góc với trục x, đi qua miền của vật có dòng chảy bao quanh. Giá trị $s = 1$ tương ứng với đường âm ($\eta = 0$), và $s = 4/3$, như thấy được dễ dàng, tương ứng với đặc tuyến giới hạn. Còn giá trị của hằng số phụ thuộc vào dạng cụ thể của vật có dòng bao quanh và chỉ có thể xác định được bằng cách giải chính xác bài toán trong toàn không gian.

Các công thức (120-8) chỉ được xét cho toàn miền ở trước sóng va chạm. Sóng này tất yếu phải xuất hiện, như thấy được từ trước lập luận sau đây. Phép tính đạo hàm dựa theo công thức (118-5) cho ta biểu thức sau của jacôbiên Δ

$$\Delta = \alpha_1^2 \frac{4f^2 - \eta}{(f^2 - \eta)^3}.$$

Dễ dàng thấy rằng, trên các đặc tuyến và trong toàn bộ miền nằm ở bên trái chúng (điều này tương ứng với miền ngược dòng của các đặc tuyến giới hạn trong mặt phẳng vật lý) $\Delta > 0$ và không triệt tiêu ở bất cứ đâu. Còn trong miền nằm ở bên phải của các đặc tuyến Δ đi qua giá trị không, do đó một sóng va chạm tất yếu phải xuất hiện ở đây.

Các điều kiện biên mà nghiệm của phương trình Euler - Tricomi phải được thỏa mãn trong sóng va chạm là các điều kiện sau. Gọi θ_1, η_1 và θ_2, η_2 là các giá trị của θ và η ở hai bên của gián đoạn. Trước hết, chúng phải tương ứng với cùng một đường cong trong mặt phẳng vật lý, nghĩa là

$$x(\theta_1, \eta_1) = x(\theta_2, \eta_2), \qquad y(\theta_1, \eta_1) = y(\theta_2, \eta_2). \tag{120-9}$$

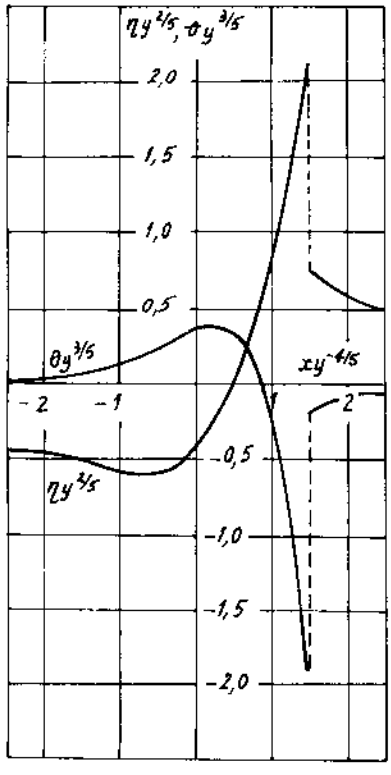
Tiếp theo, điều kiện liên tục của thành phần vận tốc tiếp tuyến với gián đoạn (nghĩa là điều kiện liên tục của đạo hàm của thế φ dọc theo đường gián đoạn) tương đương với điều kiện liên tục của bản thân thế

$$\varphi(\theta_1, \eta_1) = \varphi(\theta_2, \eta_2) \tag{120-10}$$

(thế φ được xác định từ hàm Φ bởi công thức (119 -3)). Sau cùng, điều kiện

trên có thể được rút ra từ dạng giới hạn của phương trình cực tuyến va chạm(92-6), là phương trình thiết lập mối liên hệ xác định giữa các thành phần của vận tốc ở hai bên của gián đoạn. Thay góc χ bằng $\theta_2 - \theta_1$ vào trong (92-6) và đưa vào η_1, η_2 thay cho v_1, v_2 ta thu được hệ thức sau:

$$2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (\eta_2 - \eta_1)^2(\eta_2 + \eta_1). \tag{120-11}$$



Hình 124

Trong trường hợp đã cho nghiệm của phương trình Euler - Tricomi ở sau sóng va chạm (miền giữa *OF* và *OF'* trong mặt phẳng đầu tốc; hình 123) có cùng dạng (120.5-6), nhưng dĩ nhiên với một hệ số không đổi khác (ký hiệu là $-a_2$) thay cho a_1. Bốn phương trình (120.9-11) xác định tỷ số a_2/a_1 và liên hệ các đại lượng η_1, θ_1, η_2, θ_2 với nhau. Việc giải các phương trình đó khá phức tạp và đưa tới những kết quả sau. Sóng va chạm tương ứng với giá trị

$$s = \frac{5\sqrt{3} + 8}{6} = 2{,}58$$

của thông số s trong các biểu thức (120-8), là các công thức khi đó xác định dạng của sóng và sự phân bố vận tốc ở phần phía trước của gián đoạn. Trong miền ở phía sau (xuôi dòng) sóng va chạm hệ số $-a_2$ âm, còn thông số $f^2/(f^2 - \eta)$ lấy các giá trị âm. Nếu đưa vào đây đại lượng dương $s = f^2/(\eta - f^2)$, ta sẽ thu được các công thức sau thay cho (120-8)

$$\frac{x}{y^{4/5}} = a_2^{1/5}\frac{2s+1}{2s^{2/5}}, \quad \eta y^{2/5} = a_2^{2/5}s^{1/5}(s+1),$$
$$\theta y^{3/5} = -\frac{a_2^{3/5}}{3}s^{4/5}(2s+3), \tag{120-12}$$

với

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{9\sqrt{3}+1}{9\sqrt{3}-1} = 1{,}14,$$

và s lấy các giá trị từ

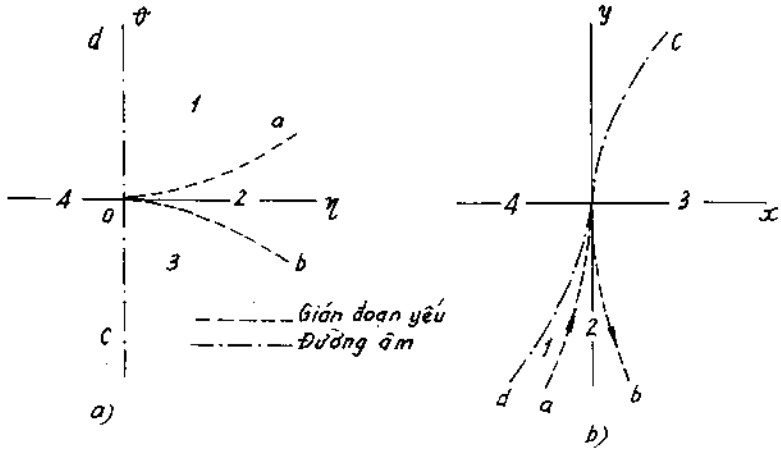
$$s = \frac{5\sqrt{3}-8}{6} = 0{,}11$$

(ở trên sóng va chạm) đến giá trị không (tại vô hạn phía xuôi dòng).

Các đồ thị trên hình 124 biểu diễn sự phụ thuộc của $\eta y^{2/5}$ và $\theta y^{3/5}$ vào $xy^{-4/5}$ được tính theo các công thức (120-8) và (120-12) (hằng số a_1 được qui ước bằng đơn vị).

§121. SỰ PHẢN XẠ CỦA GIÁN ĐOẠN YẾU TRÊN ĐƯỜNG ÂM

Chúng ta lại dựa vào phương trình Euler - Tricomi để khảo sát sự phản xạ của một gián đoạn yếu từ đường âm.



Hình 125

Chúng ta sẽ coi rằng, gián đoạn yếu đập tới đường âm (gián đoạn "tới" đối với giao điểm của chúng) – thuộc loại thông thường, chẳng hạn được tạo thành bởi dòng chảy quanh các góc nhọn, nghĩa là gián đoạn của các đạo hàm cấp một của vận tốc, theo các tọa độ. Nó "phản xạ" từ đường âm dưới dạng một gián đoạn khác, tuy nhiên tính chất của gián

đoạn này không được biết trước và phải được xác định bằng sự nghiên cứu dòng chảy ở gần giao điểm. Dưới đây, ta chọn điểm này làm gốc tọa độ x, y và hướng trục x theo vận tốc của khí tại điểm này; do đó nó cũng tương ứng với gốc tọa độ cả ở trong mặt phẳng đầu tốc.

Như đã biết, các gián đoạn yếu nằm dọc theo các đặc tuyến. Giả sử rằng đặc tuyến Oa (hình 125a) tương ứng với gián đoạn yếu ở trong mặt phẳng đầu tốc. Vì các tọa độ x, y liên tục ở trên gián đoạn, nên các đạo hàm cấp một Φ_η, Φ_θ cũng phải liên tục. Ngược lại, các đạo hàm cấp hai của Φ được biểu diễn qua các đạo hàm cấp một của vận tốc theo các tọa độ, do đó chúng phải chịu bước nhảy. Ký hiệu các bước nhảy của các đại lượng khác nhau bằng các dấu móc vuông, như vậy, ta có

Ở trên Oa:

$$\left[\Phi_\eta\right] = \left[\Phi_\theta\right] = 0; \quad \left[\Phi_{\theta\theta}\right], \left[\Phi_{\theta\eta}\right], \left[\Phi_{\eta\eta}\right] \neq 0. \tag{121-1}$$

Bản thân các hàm Φ ở trong các miền *1* và *2* ở hai bên đặc tuyến Oa phải không có các kỳ dị ở trên đặc tuyến đó. Có thể xây dựng một nghiệm như thế dựa vào số hạng thứ hai ở trong (118-6) với $k = 11/12$, số hạng này tỷ lệ với bình phương của hiệu $(1 - 4\eta^3/9\theta^2)$ (nghiệm độc lập thứ hai $\Phi_{11/12}$ có điểm kỳ dị ở trên đặc tuyến; xem dưới đây); các đạo hàm cấp một của hàm này bằng không ở trên đặc tuyến, còn các đạo hàm cấp hai đều hữu hạn. Ngoài ra, Φ có thể chứa các nghiệm riêng của phương trình Euler - Tricomi, chúng không đem lại các kỳ dị cho dòng chảy trong mặt phẳng vật lý. Nghiệm thuộc loại này có bậc thấp nhất của θ và η là $\theta\eta$ (§119). Như vậy, ở gần đặc tuyến Oa, Φ sẽ được tìm được dưới dạng

$$\begin{aligned}
\Phi_{a1} &= -A\eta\theta - B\theta^{11/6}\xi^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \xi\right), \\
\Phi_{a2} &= -A\eta\theta - C\theta^{11/6}\xi^2 F\left(\frac{13}{12}, \frac{19}{12}, 3; \xi\right),
\end{aligned} \tag{120-2}$$

trong đó các chỉ số $a1$ và a2 chỉ ra các lân cận ở hai phía của đặc tính (trong các miền *1* và *2*); A, B, C là các hằng số, và đưa vào ký hiệu

$$\xi = 1 - \frac{4\eta^3}{9\theta^2}$$

(trên các đặc tuyến $\xi = 0$).

Dưới đây, ta nhận thấy rằng, tùy theo dấu của tích AB có thể xảy ra hai trường hợp: gián đoạn yếu phản xạ dưới dạng gián đoạn yếu có đặc tính (lôga) khác hay dưới dạng sóng va chạm cường độ yếu.

Sự phản xạ dưới dạng gián đoạn yếu

Trước hết, ta khảo sát trường hợp thứ nhất (*L.Đ. Landau, E.M. Lifsitx*, 1954). Đặc tuyến thứ hai (*Ob* ở trên hình 125a) tương ứng với gián đoạn yếu phản xạ từ đường âm ở trong mặt phẳng đầu tốc. Dạng của hàm Φ ở gần đặc tuyến này được thiết lập bằng sự thác triển giải tích các hàm (121-2) theo các công thức (118.11-13). Tuy nhiên, với $k = 11/12$ hàm F_1 sẽ mất ý nghĩa, do đó không thể dùng trực tiếp các công thức đó. Thay cho điều đó, trước hết ta đặt trong đó $k = \varepsilon + 11/12$, sau đó cho ε tiến đến không. Theo lý thuyết tổng quát của phương trình siêu bội, khi đó xuất hiện các số hạng lôga.

Dựa vào (118-13), phép tính cho hàm Φ ở trong miền 3 gần đặc tuyến *Ob* biểu thức sau, trong đó ta giữ lại số hạng cấp hai đối với ξ:

$$\Phi_{b3} = -A\eta\theta - \frac{B}{\pi}(-\theta)^{11/6}\left\{\xi^2 \ln|\xi| + c_o + c_1\xi + c_2\xi^2\right\}, \qquad (121\text{-}3)$$

trong đó c_o, c_1, c_2 là các hằng số bằng số [1]. Một sự biến đổi tương tự dựa vào (118-11) của hàm Φ_{a2} từ lân cận của đặc tuyến *Oa* sang lân cận đặc tuyến *Ob* cho ta hàm Φ_{b2} chỉ khác (121-3) ở chỗ thay B bằng $C/2$. Các tọa độ x, y của các điểm của đặc tuyến trong mặt phẳng vật lý được tính như các đạo hàm (118-4) lấy tại $\xi = 0$. Chẳng hạn, nếu xuất phát từ (121-3), ta tìm được

$$\begin{aligned} x &= -A\theta - \frac{12^{1/3}Bc_1}{\pi}(-\theta)^{7/6}, \\ y &= -A\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{2/3} - \frac{B}{\pi}\left(\frac{11}{6}c_o + 2c_1\right)(-\theta)^{5/6}, \end{aligned} \qquad (121\text{-}4)$$

còn việc lấy vi phân hàm Φ_{b2} cũng cho ta các biểu thức với $C/2$ thay cho B. Do đó, điều kiện liên tục của các tọa độ x, y trên đặc tuyến *Ob* dẫn đến

[1] Giá trị của các số này bằng

$$c_o = -2^9 \cdot 3^4/385 = -108,\ c_1 = 288/7 = 41{,}1,\ c_2 = 4{,}86.$$

hệ thức

$$C = 2B \tag{121-5}$$

Tiếp theo, để thực hiện được hình ảnh phản xạ đang xét, các đường giới hạn phải không có mặt trong mặt phẳng đầu tốc (và như thế – chúng là những miền không vật lý trong mặt phẳng này), nghĩa là jacôbiên không bằng không ở bất cứ nơi đâu. Ở gần đặc tuyến Oa, Δ được tính dựa theo các hàm (121-2) và Δ dương (số hạng chính trong $\Delta \approx A^2$). Ở gần đặc tuyến Ob, phép tính dựa vào (121-3) cho

$$\Lambda \approx A^2 - 16\left(\frac{3}{2}\right)^{1/6} AB\eta^{1/4} \ln|\xi|. \tag{121-6}$$

Khi đến gần đặc tuyến lôga tiến đến $-\infty$, và số hạng thứ hai là chính. Do đó điều kiện $\Delta > 0$ ta có $AB > 0$, nghĩa là A và B phải cùng dấu.

Cuối cùng, để xác định dạng của đường âm, ta cần đến biểu thức cho Φ ở gần trục $\eta = 0$. Biểu thức, thích hợp ở lân cận phần trên của trục đó, thu được một cách đơn giản bằng cách biến đổi hàm siêu bội ở trong Φ (121-2) thành các hàm siêu bội có đối số $1 - \xi = 4\eta^2/9\theta^2$, đại lượng này triệt tiêu khi $\eta = 0$ [1]. Nếu chỉ giữ lại các số hạng có bậc thấp nhất của η, ta sẽ thu được

$$\Phi_d = -A\eta\theta - \frac{2\Gamma(1/3)}{\Gamma(23/12)\Gamma(17/12)} B\theta^{11/6} = -A\eta\theta - 6{,}25B\theta^{11/6}. \tag{121-7}$$

Một sự thác triển giải tích vào trong miền ở gần phần dưới của trục cho ta

$$\Phi_e = -A\eta\theta - 6{,}25\sqrt{3}\, B\theta^{11/6} \tag{121-8}$$

(các phép tính tương tự với việc rút ra công thức biến đổi (118-13)).

Bây giờ, có thể xác định dạng của tất cả các đường mà ta quan tâm. Ở trên các đặc tuyến, nếu bỏ qua các số hạng cấp cao hơn, ta sẽ có $x = -A\theta$, $y = -A\eta$. Ta sẽ qui ước coi rằng, đặc tuyến trên ($\theta > 0$) tương ứng với gián đoạn yếu đi tới. Vì vận tốc của khí hướng theo chiều dương của trục x, nên để cho gián đoạn này là gián đoạn đi tới, thì nó phải nằm trong nửa mặt phẳng $x < 0$. Từ đó suy ra rằng, hằng số A và cùng với nó

[1] Chẳng hạn, phép biến đổi này được dẫn ra trong Še, Ứng dụng toán học ở III – công thức (e,7).

hằng số B nữa đều phải dương. Phương trình của đường gián đoạn yếu ở trong mặt phẳng vật lý có dạng

$$-y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} A^{1/3}(-x)^{2/3} = 1{,}31A^{1/3}(-x)^{2/3}. \qquad (121\text{-}9)$$

Còn gián đoạn "phản xạ" tương ứng với đặc tuyến dưới, được xác định bởi phương trình [1)]

$$-y = 1{,}31\,A^{1/3}\,x^{2/3} \qquad (121\text{-}10)$$

(xem hình 125, b; ký hiệu của các đường và các miền trên hình này tương ứng với các ký hiệu ở trên hình 125, a)

Phương trình đường âm được rút ra từ các hàm (121.7-8). Lấy đạo hàm theo θ và η, sau đó đặt $\eta = 0$, ta rút ra được từ (121-7) phương trình của phần đường cong trên đó $\theta > 0$:

$$x = -A\theta, \qquad y = -\frac{11}{6}\cdot 6{,}25B\theta^{5/6},$$

từ đó

$$y = -\,11{,}4\,BA^{-5/6}\,(-x)^{5/6}. \qquad (121\text{-}11)$$

Đó là phần dưới của đường âm ở trên hình 125b. Một cách tương tự cũng rút ra được từ (121-8) phương trình của phần trên của đường này:

$$y = 11{,}4\sqrt{3}\,BA^{-5/6}x^{5/6}. \qquad (121\text{-}12)$$

Như vậy, cả hai gián đoạn yếu và cả hai nhánh của đường âm đều có một tiếp tuyến chung (trục y) tại giao điểm O. Thêm vào đó, hai nhánh của đường âm nằm ở hai bên trục y.

Trên gián đoạn đi tới, các đạo hàm của vận tốc theo các tọa độ chịu bước nhảy; có thể coi bước nhảy của đạo hàm $(\partial\eta/\partial x)_y$ như một đại lượng đặc trưng. Nếu chú ý rằng

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\eta, y)}{\partial(\eta, \theta)}\Big/\frac{\partial(x, y)}{\partial(\eta, \theta)} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2},$$

và dùng các công thức (121-2), (121-5), ta sẽ thu được cho bước nhảy cần tìm

[1)] Nếu xét đến các số hạng bổ chính thứ nhất (các số hạng thứ hai trong các công thức (121-4)), phương trình gián đoạn phản xạ

$$-y = 1{,}31A^{1/3}\,x^{2/3} - 10{,}5\,BA^{5/6}\,x^{5/6}. \qquad (121\text{-}10a)$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\Big|_1^2 = 8\left(\frac{3}{2}\right)^{1/6}\frac{B}{A^2}\eta^{-1/4} = 8{,}56BA^{-7/4}(-y)^{-1/4}. \qquad (121\text{-}13)$$

Như vậy, bước nhảy này tăng khi đến gần giao điểm như $(-y)^{-1/4}$.

Các đạo hàm của vận tốc hoàn toàn không chịu bước nhảy trên gián đoạn yếu phản xạ, nhưng sự phân bố các vận tốc có một kỳ dị lôga rất độc đáo. Sau khi tính được các tọa độ x, y như hàm của η, θ xuất phát từ hàm (121-3) (chỉ giữ lại số hạng thứ nhất trong dấu ngoặc), có thể viết được sự phụ thuộc của η vào x với y đã cho ở gần gián đoạn phản xạ dưới dạng thông số sau:

$$\eta = \frac{|y|}{A} + \frac{x - x_o}{2\sqrt{A|y|}} - \frac{1}{6A}|y|\,\zeta,$$
$$x - x_o = \frac{1}{3\sqrt{A}}|y|^{3/2}\zeta - 5{,}7\frac{B\,|y|^{7/4}}{\pi A^{7/4}}\zeta\,\ln\,|\zeta|, \qquad (121\text{-}14)$$

trong đó ξ giữ vai trò của thông số, còn $x_o = x_o(y)$ là phương trình đường gián đoạn trong mặt phẳng vật lý.

Sự phản xạ dưới dạng sóng va chạm

Ta chuyển sang khảo sát một trường hợp khác - trường hợp phản xạ yếu từ đường âm dưới dạng sóng va chạm (*L.P. Gorkov*, *L.P. Pitaevxli*, 1962 [1]).

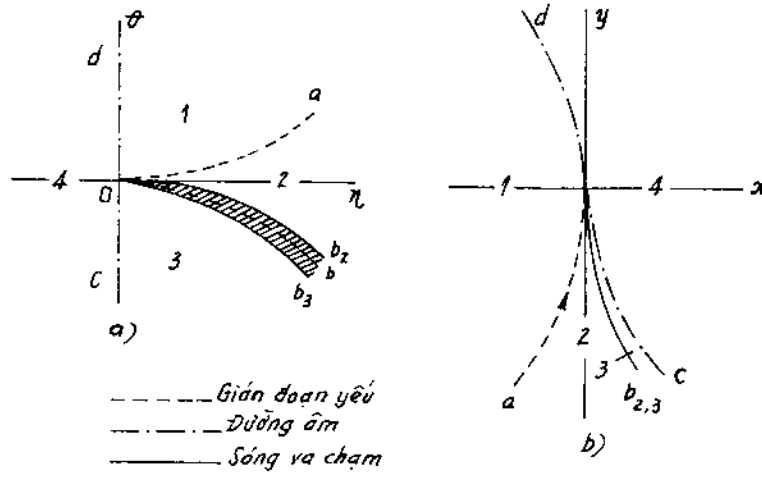
Trường hợp này xuất hiện, nếu tích $AB < 0$. Từ (121-6), ta thấy rằng trong trường hợp này có hai đường giới hạn, ở gần dạng hàm mũ với đặc tuyến *Ob*: jacôbiên Δ bằng không với

$$|\xi| \approx \frac{2}{|\theta|}\left|\theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2}\right| e^{-\Theta}, \qquad \Theta = \frac{A\pi(2/3)^{1/6}}{16|B|\eta^{1/4}}. \qquad (121\text{-}15)$$

Rõ ràng thấy trước rằng, cả hai biên giới của miền phi vật lý trên mặt phẳng đầu tốc (Ob_2 và Ob_3 trên hình 126a) cũng sẽ gần dạng hàm mũ với đặc tuyến, và như thế sẽ là sóng va chạm có cường độ nhỏ dạng hàm mũ.

[1] Khả năng có tính chất nguyên tắc của một phản xạ như vậy đã được *K.G. Guderley* ghi nhận từ trước (1948).

Nếu bỏ qua các giá trị ξ nhỏ dạng hàm mũ trên các đường Ob_2 và Ob_3, ta sẽ thu được cho các tọa độ x, y trên chúng cùng những biểu thức đã thu được trên hai phía của đặc tuyến Ob trong trường hợp trước. Do đó, điều kiện liên tục của các tọa độ trong sóng va chạm trong mọi trường hợp đều dẫn tới hệ thức trước (121-5). Một cách tương ứng, cả biểu thức (121-13) cho bước nhảy của đạo hàm vận tốc trên gián đoạn đập tới cũng vẫn như trước. Nếu lại thừa nhận rằng, đặc tuyến trên Oa trên mặt phẳng đầu tốc tương ứng với gián đoạn này, ta sẽ có như trước $A > 0$, do đó bây giờ $B < 0$. Do đó từ (121-13), ta thấy rằng, dấu của bước nhảy đạo hàm vận tốc trên gián đoạn yếu là tiêu chuẩn vật lý cho nguồn gốc hai trường hợp phản xạ của gián đoạn yếu.



Hình 126

Các phương trình (121.9-10) của các đường gián đoạn đập tới (gián đoạn yếu) và gián đoạn phản xạ (sóng va chạm) cũng vẫn như trước (nếu bỏ qua các bổ chính nhỏ dạng hàm mũ). Nhưng do dấu khác của hằng số B, nên sự sắp xếp các đường đó trên mặt phẳng vật lý thay đổi, – như hình 126b chứng tỏ.

Để xác định cường độ sóng va chạm (nghĩa là các bước nhảy của các đại lượng $\delta\theta$ và $\delta\eta$ trên sóng đó) cần chú ý đến hệ đầy đủ các điều kiện biên mà nghiệm của phương trình Euler - Tricomi trên sóng va chạm

phải thỏa mãn. Chúng đã được phát biểu ở §120: các điều kiện (120.9-11). Điều kiện sau cùng trong các điều kiện đó, phương trình cực tuyến va chạm, có dạng $(\delta\theta)^2 = \eta(\delta\eta)^2$, trong đó $\delta\theta = \theta_{b2} - \theta_{b3}$, $\delta\eta = \eta_{b2} - \eta_{b3}$ là các bước nhảy nhỏ dạng hàm mũ của các đại lượng trên sóng va chạm (các chỉ số $b2$ và $b3$ được xét cho các đường Ob_2 và Ob_3 trên mặt phẳng đầu tốc, nghĩa là tương ứng với mặt trước và mặt sau của sóng va chạm trên mặt phẳng vật lý). Từ đó

$$\delta\theta = \sqrt{\eta}\,\delta\eta; \tag{121-16}$$

việc chọn dấu khi khai căn được xác định bởi điều là, đồng thời với việc giảm vận tốc khí khi nó đi qua sóng va chạm, các đường dòng phải đến gần mặt gián đoạn.

Phù hợp với (121-15), phương trình của các đường Ob_2 và Ob_3 trong mặt phẳng đầu tốc được tìm dưới dạng

$$\theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2} = a_{b2}|\theta|e^{-\Theta}, \quad \theta + \frac{2}{3}\eta^{3/2} = -a_{b3}|\theta|e^{-\Theta},$$

trong đó a_{b2} và a_{b3} là các số dương. Theo (121-16), $\delta(\theta + 2\eta^{3/2}/3) = \delta\theta + \sqrt{\eta}\,\delta\eta = 2\delta\theta$. Các bước nhảy cần tìm $\delta\theta$ và $\delta\eta$ được cho bởi các biểu thức sau:

$$\begin{gathered}\delta\theta = a\frac{x}{A}e^{-\Theta}, \quad \delta\eta = a\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\left(\frac{x}{A}\right)^{2/3}e^{-\Theta}, \\ \Theta = \frac{A\pi(2/3)^{1/3}}{16\,|B|}\left(\frac{A}{x}\right)^{1/6} = 0{,}17\frac{A^{7/6}}{|B|\,x^{1/6}},\end{gathered} \tag{121-17}$$

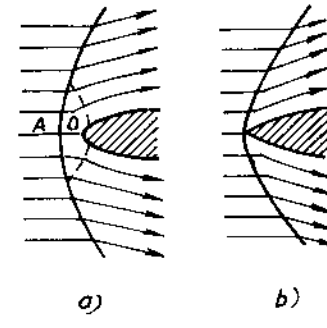
trong đó $a = (a_{b2} + a_{b3})/2$, các biến η và θ được biểu diễn qua các tọa độ ở trên mặt phẳng vật lý theo $x \approx -A\theta$, $y \approx -A\eta$. Việc xác định hệ số a đòi hỏi phải xét đến tất cả các điều kiện biên còn lại, đồng thời trong đó phải xét đến các số hạng tuyến tính cũng như toàn phương theo các đại lượng nhỏ hàm mũ $\exp(-\Theta)$. Không dẫn ra đây các phép tính khá dài, ta chỉ nêu kết quả: $a_{b2} = a_{b3} = a = 5{,}2$.

Chương XIII

DÒNG BAO QUANH CÁC VẬT HỮU HẠN

§ 122. SỰ TẠO THÀNH CÁC SÓNG VA CHẠM TRONG DÒNG CHẢY VƯỢT ÂM BAO QUANH CÁC VẬT

Những lập luận đơn giản chứng tỏ rằng, khi dòng chảy vượt âm bao quanh một vật nào đó, thì một sóng va chạm tất yếu phải xuất hiện ở trước vật. Thực vậy, trong dòng vượt âm các nhiễu động, do sự có mặt của vật gây ra, chỉ lan truyền xuôi dòng. Do đó, một dòng đều vượt âm đi tới vật vẫn không bị nhiễu động cho tới cả ở đầu trước của vật. Nhưng khi đó ở trên mặt của đầu này, thành phần pháp tuyến của vận tốc khí sẽ khác không, mâu thuẫn với điều kiện biên đòi hỏi. Chỉ có sự xuất hiện của một sóng va chạm mới khắc phục được mâu thuẫn đó, và kết quả là chuyển động của khí ở giữa sóng va chạm và đầu trước của vật trở nên dưới âm.



Hình 127

Như vậy, có một sóng va chạm xuất hiện phía trước vật khi dòng chảy vượt âm bao quanh vật; nó được gọi là sóng mũi tàu (*bow wave,* ND). Khi dòng bao quanh vật có đầu trước tù thì sóng đó không tiếp xúc với chính vật. Ở phía trước sóng va chạm, dòng là đều; còn ở phía sau nó chuyển động thay đổi và dòng uốn quanh vật (hình 127a). Mặt sóng va chạm đi xa ra vô cùng và tại các khoảng cách lớn tính từ vật, tại đây cường độ của

sóng yếu, nó cắt phương của dòng tới dưới một góc gần bằng góc Mach. Nét đặc trưng của dòng bao quanh vật có đầu tù là sự tồn tại của miền dòng chảy dưới âm sau sóng va chạm – ở phía sau phần nhô hẳn ra phía trước của mặt vật; miền này trải ra đến vật bị dòng bao và như vậy bị giới hạn bởi mặt gián đoạn, mặt vật và mặt âm "bên" (đường chấm chấm trên hình 127a).

Sóng va chạm chỉ có thể tiếp xúc với vật nếu đầu trước của vật nhọn. Khi đó, mặt của gián đoạn cũng có một điểm nhọn, trùng với đầu nhọn của vật (hình 127b); với dòng bao không đối xứng thì một phần của mặt này có thể là mặt gián đoạn yếu. Tuy nhiên, đối với một vật có dạng đã cho, một chế độ dòng chảy như thế chỉ có thể xảy ra đối với các vận tốc lớn hơn một giới hạn xác định nào đó; với các vận tốc nhỏ hơn sóng va chạm tách khỏi đầu dẫn của vật dù cho đầu này nhọn (xem §113).

Chúng ta hãy khảo sát dòng chảy vượt âm bao quanh một vật tròn xoay đối xứng trục và xác định áp suất của khí ở tại mũi trước thuôn tròn của vật (tại điểm ngưng đọng, điểm O ở trên hình 127a). Vì lý do đối xứng hiển nhiên rằng, đường dòng, kết thúc tại O, cắt vuông góc sóng va chạm theo phương vuông góc với nó, do đó tại A thành phần của vận tốc vuông góc với mặt gián đoạn trùng với vận tốc toàn phần. Như thường lệ, ta ký hiệu giá trị của các đại lượng khác nhau trong dòng tới bằng chỉ số 1, còn giá trị của chúng tại A ở phần sau của sóng va chạm bằng chỉ số 2. Các giá trị này được xác định trực tiếp theo các công thức (89.6-7) dưới dạng

$$p_2 = \frac{p_1}{\gamma+1}\left[2\gamma \mathrm{M}_1^2 - (\gamma-1)\right],$$

$$v_2 = c_1 \frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}{(\gamma+1)\mathrm{M}_1}, \qquad \rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_1}{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}.$$

Áp suất p_o tại điểm O (tại đây, vận tốc của khí bằng $v = 0$) bây giờ có thể thu được dựa vào các công thức xác định sự biến thiên của các đại lượng dọc theo đường dòng. Chúng ta có (xem bài tập của §83):

$$p_o = p_2\left[1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{v_2^2}{c_2^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

và phép tính đơn giản cho ta kết quả sau:

$$p_o = p_1\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} M_1^2\left[\gamma - \frac{\gamma-1}{2M_1^2}\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (122\text{-}1)$$

Như vậy, công thức trên xác định áp suất tại đầu trước của vật bao quanh bởi dòng vượt âm ($M_1 > 1$).

Để so sánh, ta đưa ra công thức cho áp suất tại điểm ngưng đọng thu được do sự hãm đoạn nhiệt liên tục một chất khí, không có sóng va chạm (như xảy ra với dòng chảy dưới âm quanh một vật):

$$p_o = p_1\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \qquad (122\text{-}2)$$

Với $M_1 = 1$, cả hai công thức đều cho cùng giá trị p_o và đối với $M_1 > 1$, áp suất xác định bởi công thức (122-2) bao giờ cũng lớn hơn áp suất thực p_o cho bởi (122-1) [1].

Trong trường hợp giới hạn của các vận tốc rất lớn ($M_1 \gg 1$), công thức (122-1) cho ta

$$p_o = p_1\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma-1}} M_1^2, \qquad (122\text{-}3)$$

nghĩa là áp suất p_o tỷ lệ với bình phương của vận tốc dòng chảy. Kết quả này cho phép kết luận rằng, cả lực cản toàn phần tác dụng lên vật tại các vận tốc lớn so với vận tốc của âm cũng tỷ lệ với bình phương vận tốc. Cần chú ý là, định luật này giống với định luật biểu diễn sự biến thiên

[1] Điều khẳng định này có tính chất tổng quát và không liên quan đến tính polytropic giả thiết trong (122.1-2) của khí (thậm chí không liên quan đến tính lý tưởng nhiệt động lực của nó). Thực vậy, khi có mặt của sóng va chạm entrôpi của khí tại điểm O, $s_o > s_1$, trong khi mà sóng va chạm không có mặt entrôpi sẽ bằng s_1. Còn hàm nhiệt trong cả hai trường hợp đều bằng $w_o = w_1 + v_1^2/2$, vì khi đường dòng cắt một gián đoạn nén vuông góc, đại lượng $w + v^2/2$ không thay đổi. Nhưng từ đẳng thức nhiệt động lực $dw = Tds + dp/\rho$, chúng ta suy ra rằng đạo hàm

$$(\partial p/\partial s)_w = -\rho T < 0,$$

nghĩa là sự tăng của entrôpi khi w không đổi làm giảm áp suất, điều đó xác nhận điều khẳng định của chúng ta.

của lực cản tại các vận tốc nhỏ hơn so với vận tốc âm, nhưng khá lớn để cho số Reynolds là đủ lớn (xem §45).

Ngoài sự kiện là các sóng va chạm nhất thiết phải xuất hiện, còn có thể khẳng định thêm rằng, với dòng vượt âm bao quanh một vật hữu hạn tại các khoảng cách lớn tính từ vật trong mọi trường hợp đều phải có hai sóng va chạm kế tiếp nhau (*L. Landau*, 1945). Thực vậy, tại các khoảng cách lớn tính từ vật, các nhiễu động do vật gây ra đều yếu, do đó ta có thể coi chúng như một sóng âm trụ phân kỳ từ trục x, trục này đi qua vật song song với phương của dòng bao; như vẫn làm tại mọi nơi, nếu xét chuyển động ở trong hệ tọa độ, trong đó vật đứng yên, ta sẽ có sóng trong đó x/v_1 giữ vai trò thời gian, và $c_1/\sqrt{M_1^2-1}$ giữ vai trò vận tốc lan truyền (xem §123). Do đó, ta sẽ có thể áp dụng trực tiếp các kết quả đã rút ra ở §102 cho một sóng trụ tại các khoảng cách lớn tính từ nguồn; như vậy, ta đi tới hình ảnh sau của các sóng va chạm ở xa vật: trong sóng va chạm thứ nhất, áp suất tăng với bước nhảy, do đó ở sau sóng có hình thành một sự nén; rồi đến áp suất giảm dần, theo sau sự nén là sự dãn, sau đó áp suất lại tăng với bước nhảy ở trong sóng va chạm thứ hai. Cường độ của sóng va chạm phía trước giảm với khoảng cách r tăng tính từ trục x như $r^{-3/4}$, còn khoảng cách giữa hai sóng tăng như $r^{1/4}$ [1)].

Ta theo dõi sự xuất hiện và sự tiến triển của các sóng va chạm khi số Mach M_1 tăng dần. Miền vượt âm ở trong dòng khí xuất hiện lần đầu tiên với một giá trị nào đó của $M_1 < 1$ dưới dạng miền tiếp giáp với mặt của vật bị bao. ít nhất cũng có một sóng va chạm ở trong miền đó – thường là miền vượt âm khép kín. Khi M_1 tăng, miền này nở rộng ra, và đồng thời với cả nó, sóng va chạm dài ra mà sự tồn tại của sóng này khi $M_1 = 1$ đã được chứng tỏ (đối với trường hợp phẳng, xem §120); như vậy, đã chứng minh được rằng, sóng va chạm phải xuất hiện lần đầu tiên với $M_1 < 1$.

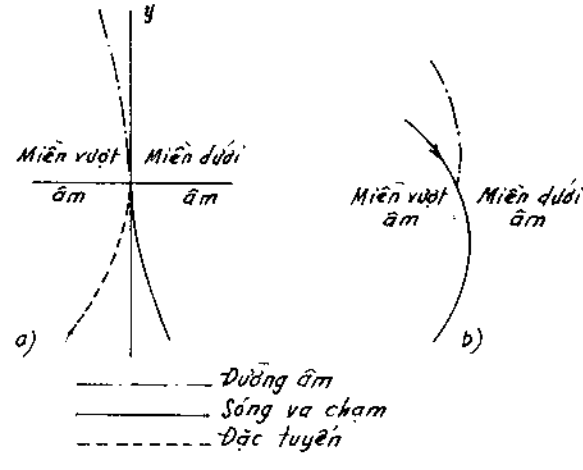
Khi M_1 vừa bắt đầu lớn hơn đơn vị, thì lại một sóng va chạm mới xuất hiện – sóng va chạm đầu (*bow wave*, ND) – sóng này cắt toàn bộ dòng khí tới rộng vô hạn. Với M_1 đúng bằng 1, toàn bộ dòng chảy ở phía

[1)] Đối với các sóng va chạm xuất hiện khi dòng chảy đối xứng trục bao quanh các vật mỏng nhọn, thì có thể xác định được cả các hệ số định lượng trong các định luật này – xem bị chú ở trang 757.

trước vật hoàn toàn là dưới âm. Do đó, với $M_1 > 1$, nhưng gần 1 tùy ý, phần vượt âm của dòng tới và cùng với nó cả sóng va chạm đầu đều ở xa trước vật một cách tùy ý. Khi M_1 tiếp tục tăng, sóng va chạm đầu tiến gần dần dần đến vật.

Sóng va chạm trong vùng vượt âm cục bộ phải giao nhau theo cách nào đó với đường âm (ta sẽ nói về trường hợp phẳng). Không được coi vấn đề về tính chất của sự giao nhau như thế là đã được làm sáng tỏ. Nếu sóng va chạm kết thúc tại giao điểm, thì tại chính điểm này, cường độ sóng bằng không, còn trong toàn mặt phẳng ở gần giao điểm chuyển động là gần âm. Hình ảnh dòng chảy trong một trường hợp như thế phải được mô tả bằng nghiệm tương ứng của phương trình Euler - Tricomi. Ngoài các điều kiện tổng quát về tính đơn trị của nghiệm trong mặt phẳng vật lý và các điều kiện biên trên sóng va chạm còn phải thỏa mãn thêm các điều kiện sau nữa: 1) nếu cả hai phía của sóng va chạm chuyển động là vượt âm (chẳng hạn, nếu tại giao điểm chỉ có sóng va chạm tận cùng, "chết" thành đường âm), thì sóng va chạm phải là sóng đi tới đối với giao điểm, 2) các đặc tuyến "đi tới" giao điểm trong miền vượt âm phải không mang theo bất cứ một kỳ dị nào của dòng chảy (các kỳ dị có thể xuất hiện chỉ do kết quả của chính sự giao nhau và như vậy phải bị cuốn đi khỏi giao điểm). Sự tồn tại của nghiệm phương trình Euler - Tricomi, thỏa mãn tất cả các yêu cầu đó, tỏ ra là chưa được chứng minh [1].

[1] *P. Germain* đã tìm được một số loại nghiệm của phương trình Euler - Tricomi để có thể biểu diễn sự giao nhau của sóng va chạm với đường âm, nhưng việc nghiên cứu chúng thực ra chưa hoàn thành. Một số dạng này không thỏa mãn điều kiện (1) đặt ra ở trên. Hình 128a biểu diễn trường hợp có thể đáp ứng với điểm tận cùng của sóng va chạm khép kín miền vượt âm cục bộ: tại giao điểm sóng va chạm và đường âm cả hai bên đều tận cùng và có tiếp tuyến chung, chúng →



Hình 128

Một khả năng khác cho cấu hình của sóng va chạm và đường âm trong vùng vượt âm cục bộ bao hàm ở chỗ, chỉ có một đường âm (hình 128b) tận cùng ở giao điểm, tại điểm này cường độ sóng va chạm tuyệt nhiên không bằng không, do đó dòng chảy ở gần nó chỉ là gần âm về một phía của sóng va chạm. Bản thân sóng va chạm khi đó có thể "tựa" một đầu vào thành rắn, còn đầu kia (hay cả hai) bắt đầu trực tiếp vào dòng vượt âm (xem cuối §115).

§123. DÒNG CHẢY VƯỢT ÂM BAO QUANH VẬT NHỌN

Hình dạng mà một vật phải có để trong dòng chảy vượt âm nó có dạng thuôn tốt, nghĩa là sao cho sức cản tác dụng lên vật là cực tiểu, khác căn bản với hình dạng tương ứng của nó ở trong dòng chảy dưới âm. Nhắc lại rằng trong trường hợp dưới âm, các vật có dạng thuôn tốt là các vật thon dài, ở phía trước thì thuôn tròn, phía sau thì nhọn. Nhưng với chuyển động vượt âm, ở phía trước các vật như thế có xuất hiện một sóng va chạm mạnh, dẫn tới làm tăng mạnh sức cản. Do đó, trong trường hợp vượt âm một vật có dạng thuôn dài phải nhọn cả phía trước lẫn phía sau, vì góc tại mũi nhọn phải nhỏ; nếu trục của vật nghiêng so với phương của chuyển động, thì góc nghiêng (góc tới, *angle of attack*, ND) cũng phải nhỏ.

Trong dòng chảy vượt âm dừng quanh vật có dạng như thế vận tốc khí tại mọi nơi, kể cả ngay sát vật, chỉ khác rất ít về độ lớn và phương so với vận tốc của dòng tới và các sóng va chạm được tạo thành đều có cường độ nhỏ (cường độ của sóng đầu giảm với sự giảm góc mở của vật). Ở xa vật, chuyển động của khí được biểu diễn bởi các sóng âm phân kỳ. Có thể coi rằng, phần cơ bản của lực cản của khí được gây bởi sự biến

---

nằm ở hai bên khác nhau của tiếp tuyến (khí chuyển động từ trái sang phải). Tuy nhiên, sự thực hiện điều kiện (2) không được kiểm nghiệm. Đối với chỉ số k của nghiệm, chỉ nêu khoảng trong đó nó có thể tồn tại ($3/4 < k < 11/12$), nhưng không được kiểm nghiệm, khi đó điều kiện liên tục của các tọa độ trên sóng va chạm trong mặt phẳng vật lý liệu có thể được thỏa mãn không. Xem *Germain P-Ecouleménts transoniques homogènes*, trong cuốn sách *Progress . in Aeronautical Sciences – Pergamon Press*, tập 5, 1964.

đổi động năng của vật chuyển động thành năng lượng các sóng âm do nó phát ra. Lực cản này, là đặc thù đối với dòng chảy vượt âm, được gọi là *lực cản sóng* [1]; nó có thể được tính dưới dạng tổng quát đối với mọi tiết diện bất kỳ của vật (*Th. Karman, N.B. Moore*, 1932).

Đặc tính vừa mô tả của dòng chảy cho ta khả năng áp dụng được phương trình tuyến tính hoá của thế (114-4):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0, \qquad (123\text{-}1)$$

trong đó, để ngắn gọn, ta đã đưa vào hằng số dương

$$\beta^2=\frac{v_1^2}{c_1^2}-1 \qquad (123\text{-}2)$$

(trục x hướng theo phương chuyển động, chỉ số 1 ký hiệu cho các đại lượng thuộc về dòng tới); $1/\beta$ chính là tang của góc Mach.

Phương trình (123-1) về hình thức trùng với phương trình sóng hai chiều và x/v_1 giữ vai trò thời gian, còn v_1/β giữ vai trò vận tốc truyền sóng. Điều này không phải là ngẫu nhiên và có một ý nghĩa vật lý sâu sắc, vì chuyển động của khí ở xa vật, như đã nói, là các sóng âm phân kỳ do vật phát ra. Nếu khí ở vô cùng được coi như đứng yên, còn vật được coi như chuyển động, thì tiết diện ngang của vật tại một điểm đã cho của không gian sẽ thay đổi theo thời gian, và khoảng cách mà tại thời điểm t các nhiễu động truyền tới (nghĩa là khoảng cách đến "hình nón Mach" sẽ tăng như v_1t/β; như vậy, ta có một sự phát âm "hai chiều" (truyền với vận tốc v_1/β) do một công tua mạch động phát ra.

Nếu dùng sự "tương tự âm" này, ta có thể viết ngay được biểu thức cần tìm cho thế vận tốc khí bằng cách dùng vận tốc (74-15) cho thế của các sóng âm trụ do nguồn mạch động phát ra (tại các khoảng cách lớn đối với kích thước của nguồn), và trong đó thay thế ct bằng x/β. Gọi $S(x)$ là diện tích của tiết diện vật cắt bởi các mặt phẳng vuông góc với phương của dòng chảy (trục x), và l là độ dài của vật theo phương đó; ta chọn gốc tọa độ ở đầu trước của vật. Khi đó, ta có:

[1] Lực cản toàn phần thu được bằng cách thêm vào lực cản sóng các lực, gây bởi ma sát và bởi sự tách ở đầu sau của vật.

$$\varphi(x,r) = -\frac{v_1}{2\pi}\int_0^{x-\beta r}\frac{S'(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\beta^2 r^2}}; \qquad (123\text{-}3)$$

Chọn giới hạn dưới bằng không, vì với $x < 0$ (cũng như với $x > l$), cần đồng nhất đặt $S(x) \equiv 0$.

Như vậy, chuyển động của khí đã hoàn toàn xác định được tại các khoảng cách r tính từ trục, các khoảng cách này đều lớn so với bề dầy của vật [1)]. Dĩ nhiên các nhiễu động xuất phát từ vật ở trong miền phía sau hình nón $x - \beta r = 0$ có đỉnh ở đầu trước của vật; trước hình nón này đơn giản $\varphi = 0$ (dòng đều). Giữa các hình nón $x - \beta r = 0$ và $x - \beta r = l$ thế được xác định bởi công thức (123-3); ở phía sau hình nón $x - \beta r = l$ (với đỉnh ở đầu sau của vật) trong công thức này giới hạn trên hiển nhiên được thay thế bằng đại lượng không đổi l. Cả hai hình nón nêu trên, trong phép gần đúng đang xét, đều là những gián đoạn yếu; thực tế đó là những sóng va chạm cường độ yếu.

Lực cản tác dụng lên vật chính là thành phần x của xung lượng được sóng âm mang đi trong một đơn vị thời gian. Ta lấy mặt trụ bán kính r đủ lớn có trục trùng với trục x làm mặt kiểm tra. Mật độ dòng thành phần x của xung lượng qua mặt đó bằng

$$\Pi_{xr} = \rho v_r(v_x + v_1) \approx \rho_1 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(v_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Khi lấy tích phân trên toàn bộ mặt này, số hạng thứ nhất biến mất, vì tích phân của ρv_r là thông lượng toàn phần của khối lượng khí qua mặt kiểm tra, thông lượng này bằng không. Như vậy, còn

[1)] Đối với dòng chảy đối xứng trục quanh vật có đối xứng tròn xoay công thức (123-3) đúng đối với mọi r ngay ở trên mặt của vật. Đặc biệt, từ đó ta có thể lại rút ra được công thức (113-6) cho dòng chảy quanh một hình nón hẹp.

Mặt khác, sau khi khảo sát nghiệm ở xa vật có dòng bao quanh thu được trong phép gần đúng bậc nhất, ta có thể đưa vào trong nó hiệu ứng biến dạng phi tuyến của prôfin, tương tự như đã làm ở §102 cho sóng âm trụ. Bằng cách này có thể xác định được cường độ sóng va chạm tại các khoảng cách lớn đối với vật mỏng nhọn tròn xoay (kể cả sự phụ thuộc của nó vào M_1), nghĩa là hệ số trong định luật tắt ($\sim r^{-3/4}$), đã được nói đến trong tiết trước (xem *Whitham G.B. Linear and nonlinear waves – Wiley*, 1974).

$$F_x = -2\pi r \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_{xr}\, dx = -2\pi r \rho_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx. \qquad (123\text{-}4)$$

Tại các khoảng cách lớn (trong vùng sóng), các đạo hàm của thế được tính như đã làm ở §74 (xem công thức (74-17)) và ta thu được:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\beta}{2r}} \int_0^{x-\beta r} \frac{S''(\xi) d\xi}{\sqrt{x - \xi - \beta r}}.$$

Biểu thức này được thay vào trong (123-4), trong đó bình phương của tích phân được viết lại dưới dạng tích phân kép; để ngắn gọn ký hiệu $x - \beta r = X$, ta thu được:

$$F_x = \frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^X \int_0^X \frac{S''(\xi_1) S''(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dX}{\sqrt{(X - \xi_1)(X - \xi_2)}}.$$

Lấy tích phân theo dX; sau khi thay đổi thứ tự lấy tích phân, tích phân phải được lấy trong các giới hạn từ giá trị lớn hơn trong ξ_1 và ξ_2 đến $+\infty$. Để làm giới hạn trên, trước hết chúng ta lấy một đại lượng L lớn nhưng hữu hạn, sau đó có thể cho L tiến đến vô cùng. Như vậy, ta thu được

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^l \int_0^{\xi_2} S''(\xi_1) S''(\xi_2) \left[\ln(\xi_2 - \xi_1) - \ln 4L\right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Tích phân của số hạng có chứa thừa số không đổi $\ln 4L$ đồng nhất bằng không, vì tại các đầu nhọn của vật không những đẳng thức $S(x)$, mà cả đạo hàm $S'(x)$ của nó bằng không. Cuối cùng, ta thu được:

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi} \int_0^l \int_0^{\xi_2} S''(\xi_1) S''(\xi_2) \ln(\xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2,$$

hay

$$F_x = -\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi} \int_0^l \int_0^l S''(\xi_1) S''(\xi_2) \ln|\xi_2 - \xi_1| d\xi_1 d\xi_2. \qquad (123\text{-}5)$$

Đó chính là công thức cần tìm để tính lực cản sóng trên một vật

mỏng nhọn [1]. Bậc độ lớn của tích phân ở dây bằng $(S/l^2)^2 l^2$, trong đó S là diện tích trung bình nào đó của tiết diện vật. Do đó

$$F_x \sim \frac{\rho_1 v_1^2 S^2}{l^2}.$$

Hệ số cản đối với một vật thon dài được qui ước xác định như sau

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l^2}, \qquad (123\text{-}6)$$

tính theo bình phương độ dài của vật. Trong trường hợp đã cho

$$C_x \sim \frac{S^2}{l^4}; \qquad (123\text{-}7)$$

Nó tỷ lệ với bình phương diện tích tiết diện ngang của vật.

Cần chú ý đến sự tương tự hình thức giữa công thức (123-5) và công thức (47-4) đối với lực cản cảm ứng trên cánh mỏng: thay cho hàm $\Gamma(z)$ ở trong (47-4) ở đây là hàm $v_1 S'(x)$. Do sự tương tự này, để tính tích phân (123-5) có thể tiến hành bằng phương pháp đã trình bày ở cuối §47.

Cũng cần nhận xét rằng, lực cản sóng xác định bởi (123-5) không thay đổi, nếu đảo ngược chiều dòng chảy: tích phân xuất hiện trong công thức này không phụ thuộc vào độ dài của vật nằm theo chiều nào. Tính chất này của lực cản là một đặc trưng của lý thuyết tuyến tính hóa [2].

Sau cùng, ta nói vài điều về phạm vi áp dụng của công thức đã thu được. Có thể đề cập đến vấn đề này như sau. Biên độ dao động của các hạt chất khí trong các sóng âm do vật phát ra có bậc độ lớn của bề dầy vật, ký hiệu bằng δ. Còn vận tốc các dao động, một cách tương ứng, có bậc độ lớn của tỷ số $\delta v_1/l$ giữa biên độ δ và chu kỳ l/v_1 của sóng. Nhưng phép gần đúng cấp một đối với sự lan truyền các sóng âm (nghĩa là, phương trình tuyến tính hóa cho thế) trong mọi trường hợp đều đòi hỏi vận tốc chuyển động của khí ở trong sóng phải nhỏ so với vận tốc âm, nghĩa là phải có $v_1/\beta \gg v_1\delta/l$, hay thực tế:

[1] Còn lực nâng (đối với một vật không có tính đối xứng trục, hay chỉ có mặt góc tới) trong phép gần đúng đang xét ở đây bằng không.

[2] Nó vẫn còn đúng trong lý thuyết về lực cản của sóng lên cánh mỏng đã trình bày ở §125.

$$M_1 << \frac{l}{\delta}. \qquad (123.8)$$

cũng thế.

Như vậy, lý thuyết đã trình bày không áp dụng được với các giá trị M_1 so sánh được với tỷ số giữa độ dài của vật và bề dầy của nó.

Dĩ nhiên, nó cũng không còn áp dụng được trong trường hợp giới hạn ngược lại của các M_1 quá gần đơn vị, khi sự tuyến tính hóa các phương trình cũng không còn đúng.

BÀI TẬP

Xác định dạng của một vật tròn xoay thon dài chịu lực cản cực tiểu với thể tích V và độ dài l đã cho.

Giải. Do sự tương tự đã nêu trong bài giảng, ta đưa vào biến θ theo $x = l(1 - \cos\theta)/2$ ($0 \le \theta \le \pi$); gốc tọa độ x được lấy ở đầu trước của vật) và viết hàm $f(x) = S'(x)$ dưới dạng

$$f = -l\sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

(từ điều kiện $S = 0$ với $x = 0$, l dễ dàng suy ra rằng, trong tổng này chỉ có thể xuất hiện các số hạng với $n \ge 2$). Hệ số cản khi đó bằng

$$C_x = \frac{\pi}{4}\sum_{n=2}^{\infty} nA_n^2.$$

Diện tích $S(x)$ và thể tích toàn phần V tính được dựa theo $f(x)$ như sau:

$$S = \int_0^x f(x)dx, \qquad V = \int_0^l f(x)dx.$$

Phép tính đơn giản cho ta

$$V = \frac{\pi l^3}{16} A_2,$$

nghĩa là thể tích chỉ được xác định bởi hệ số A_2. Do đó, giá trị cực tiểu của F_x đạt được nếu $A_n = 0$ với $n \ge 3$. Kết quả là:

$$C_{x\min} = \frac{128}{\pi}\left(\frac{V}{l^3}\right)^2 = \frac{9\pi}{2}\left(\frac{S_{\max}}{l^2}\right)^2.$$

Khi đó diện tích của tiết diện ngang của vật $S = (l^2 A_2 \sin^3\theta)/3$, và bán kính của vật với tính cách là hàm của tọa độ x được biểu diễn dưới dạng

$$R(x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{V}{3l^3}\right)^{1/2}\left[x(l-x)\right]^{3/4}\left(\frac{2}{l}\right)^{1/2}.$$

Vật đối xứng đối với mặt phẳng $x = l/2$ [1].

§124. DÒNG CHẢY DƯỚI ÂM QUANH CÁNH MỎNG

Chúng ta hãy khảo sát một "cánh" mỏng có dạng thuôn trong một dòng dưới âm của khí nén được. Cũng giống như trong khí không nén được, một cánh có dạng thuôn trong dòng dưới âm phải mỏng, phải có mép sau nhọn và mép trước thuôn tròn; góc tới phải nhỏ. Chọn trục x theo chiều của dòng và trục z theo chiều sải cánh.

Vận tốc khí trong toàn không gian [2] chỉ khác rất ít so với vận tốc $\mathbf{v}_1$ của dòng tới, do đó ta có thể áp dụng phương trình tuyến tính hóa (114-4) cho thế

$$\left(1 - \mathrm{M}_1^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \qquad (124\text{-}1)$$

Trên mặt của cánh (gọi là mặt C) vận tốc phải hướng theo tiếp tuyến với cánh; nếu đưa vào vectơ đơn vị $\mathbf{n}$ của pháp tuyến với mặt cánh, ta sẽ viết được điều kiện này dưới dạng

$$\left(v_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)n_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}n_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}n_z = 0.$$

Vì cánh có dạng dẹt và góc tới nhỏ, nên pháp tuyến $\mathbf{n}$ gần như song song với trục y, do đó $|n_y|$ gần bằng đơn vị, còn n_x, n_z đều nhỏ. Vì thế trong điều kiện đã viết, có thể bỏ các số hạng nhỏ bậc hai $(\partial\varphi/\partial x)n_x$ và $(\partial\varphi/\partial z)n_z$ và thay thế n_y bằng ± 1 (+1 ở mặt trên của cánh và −1 ở mặt dưới). Như

[1] Mặc dù $R(x)$ triệt tiêu tại các đầu của vật, nhưng đạo hàm $R'(x)$ trở nên vô hạn, nghĩa là vật không nhọn; do đó, nói một cách chặt chẽ, phép gần đúng làm cơ sở cho phương pháp không còn áp dụng được ở gần sát các đầu.

[2] Chỉ trừ một miền nhỏ ở gần mép phía trước cánh – ở gần đường dừng của khí.

vậy, điều kiện biên cho phương trình (124-1) có dạng

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \qquad (124\text{-}2)$$

Vì cánh được giả thiết là mỏng, nên giá trị của $\partial\varphi/\partial y$ ở trên mặt nó có thể được tính đơn giản như giá trị giới hạn khi $y \to 0$.

Bài toán giải phương trình (124-1) với điều kiện (124-2) có thể được đưa dễ dàng về bài toán với dòng chảy của một chất lỏng không nén được. Muốn vậy, thay cho các tọa độ x, y, z ta đưa vào các biến

$$x' = x, \quad y' = y\sqrt{1 - M_1^2}, \quad z' = z\sqrt{1 - M_1^2}. \qquad (124\text{-}3)$$

Trong các biến này phương trình (124-1) có dạng

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = 0, \qquad (124\text{-}4)$$

nghĩa là nó chuyển thành phương trình Laplace. Dạng của mặt vật được thay thế bằng mặt khác, C', mặt này thu được bằng cách giữ nguyên prôfin các tiết diện ngang của cánh, được cắt bởi các mặt phẳng song song với mặt phẳng x, y, chỉ thu nhỏ theo tỷ số $(1 - M_1^2)^{1/2}$ tất cả các kích thước dọc theo độ sải cánh (theo trục z).

Điều kiện biên (124-2) khi đó có dạng

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \varphi'}{\partial y}\sqrt{1 - M_1^2} = 0,$$

nó có thể được đưa về dạng thông thường bằng cách đưa vào thế φ' mới thay cho φ theo

$$\varphi' = \varphi\sqrt{1 - M_1^2}. \qquad (124\text{-}5)$$

Ta sẽ có cùng phương trình Laplace và điều kiện biên cho φ'

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = 0. \qquad (124\text{-}6)$$

điều kiện này phải được thỏa mãn với $y' = 0$.

Nhưng phương trình (124-4) với điều kiện biên (124 - 6) là phương

trình phải được thỏa mãn bởi thế vận tốc của chất lỏng không nén được chảy quanh vật với mặt C'. Như vậy, bài toán xuất hiện sự phân bố các vận tốc trong dòng chảy của chất lỏng nén được quanh một cánh có mặt C rút về việc xác định sự phân bố các vận tốc trong dòng chảy của chất lỏng không nén được quanh một cánh có dạng của mặt C'.

Bây giờ, ta xét lực nâng F_y của cánh. Trước hết, có nhận xét là, việc rút ra công thức Giukôvxki (38-4) ở §38 cũng hoàn toàn áp dụng được cho một chất lỏng nén được, vì mật độ thay đổi ρ của chất lỏng cần được thay bằng mật độ không đổi ρ_1 trong phép gần đúng đó. Như vậy,

$$F_y = -\rho_1 v_1 \int \Gamma \, dz, \tag{124-7}$$

trong đó tích phân được lấy dọc theo toàn độ dài l_z của sải cánh. Từ hệ thức (124-5) và sự như nhau của các prôfin ngang của các sải cánh C và C', ta suy ra rằng lưu số Γ của vận tốc trong trong chất lỏng nén được quanh cánh C có liên hệ với lưu số Γ′ của vận tốc trong dòng chảy của chất lỏng không nén được quanh cánh C' bằng hệ thức

$$\Gamma' = \Gamma\sqrt{1 - M_1^2}. \tag{124-8}$$

Thay hệ thức này vào trong (124-7) và chuyển từ tích phân lấy theo dz sang tích phân lấy theo dz', ta thu được:

$$F_y = -\frac{\rho_1 v_1 \int \Gamma' \, dz'}{1 - M_1^2}.$$

Đại lượng ở tử số là lực nâng tác dụng lên cánh C' trong chất lỏng không nén được. Ký hiệu lực đó bằng F_y' ta có:

$$F_y = -\frac{F_y'}{1 - M_1^2}. \tag{124-9}$$

Nếu đưa vào các hệ số của lực nâng

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l_x l_z}, \quad C_y' = \frac{F_y'}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l_x l_z'}$$

(trong đó l_x, l_z và l_x, $l'_z = l_z\sqrt{1-M_1^2}$ là những độ dài của các cánh C và C' dọc theo các trục x và z), ta sẽ viết lại được đẳng thức này dưới dạng

$$C_y = \frac{C'_y}{\sqrt{1-M_1^2}}. \tag{124-10}$$

Đối với các cánh có sải đủ lớn (với prôfin không đổi theo sải của tiết diện) hệ số lực nâng trong chất lỏng không nén được tỷ lệ với góc tới và không phụ thuộc vào độ dài và bề rộng của cánh:

$$C'_y = \text{const.}\alpha, \tag{124-11}$$

trong đó const chỉ phụ thuộc vào dạng của prôfin tiết diện (xem §46). Như vậy, trong trường hợp này, thay cho (124-10), ta có thể viết

$$C_y = \frac{C_y^{(0)}}{\sqrt{1-M_1^2}}, \tag{124-12}$$

trong đó C_y và $C_y^{(0)}$ là những hệ số lực nâng của cùng một cánh lần lượt trong các dòng khí nén được và không nén được. Như vậy, ta thu được qui tắc: lực nâng tác dụng lên một cánh dài trong dòng khí nén được gấp $(1-M_1^2)^{-1/2}$ lần so với lực nâng tác dụng lên cùng cánh như thế (đặc biệt với cùng góc tiến) trong một dòng khí không nén được (*L. Prandtl*, 1922; *G. Glauert*, 1928).

Các hệ thức tương tự có thể thu được cho cả lực cản. Ngoài công thức của Giucôvxki cho lực nâng, cả công thức (47-4) của lực cản cảm ứng của một cánh cũng có thể được chuyển hoàn toàn sang lý thuyết của chất lỏng nén được. Tiến hành cùng những phép biến đổi (124-3) và (124-8), ta thu được:

$$F_x = \frac{F'_x}{1-M_1^2} \tag{124-13}$$

trong đó F'_x là lực cản lên cánh C' trong chất lỏng không nén được. Khi tăng độ dài sải cánh, lực cản cảm ứng tiến đến một giới hạn không đổi (§47). Do đó, trong trường hợp của các cánh đủ dài có thể thay F'_x bằng $F_x^{(0)}$ (đó là lực cản ở trong chất lỏng không nén được lên cánh C ứng với

F_x). Hệ số cản khi đó bằng:

$$C_x = \frac{C_x^{(0)}}{1 - M_1^2}. \tag{124-14}$$

So sánh công thức này với (124-12), ta nhận thấy rằng khi chuyển từ chất lỏng không nén được sang chất lỏng nén được, tỷ số C_y^2 / C_x không thay đổi.

Tất cả những kết quả đã trình bày ở đây, rõ ràng không thể áp dụng được cho các giá trị của M_1 quá gần đơn vị, khi đó lý thuyết tuyến tính hóa không còn đúng.

§125. DÒNG CHẢY VƯỢT ÂM QUANH MỘT CÁNH

Để có được dạng thuôn tốt trong một dòng vượt âm, cánh phải có các mép trước và mép sau nhọn, tương tự như các vật mỏng nhọn đã xét ở §123.

Ở đây, ta giới hạn chỉ nghiên cứu dòng chảy quanh một cánh mỏng có sải cánh rất lớn, với prôfin của tiết diện không đổi dọc theo sải cánh. Nếu coi sải cánh dài vô hạn, ta sẽ có một dòng chảy phẳng của khí (ở trong mặt phẳng x, y). Thay cho phương trình (123-1), bây giờ ta có phương trình cho thế

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{125-1}$$

với điều kiện biên

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y \to \pm 0} = \mp v_1 n_x \tag{125-2}$$

(các dấu $\mp$ ở trong vế hai của đẳng thức tương ứng lần lượt với mặt trên và mặt dưới của cánh). Phương trình (125-1) thuộc loại phương trình sóng một chiều, có nghiệm tổng quát

$$\varphi = f_1(x - \beta y) + f_2(x + \beta y).$$

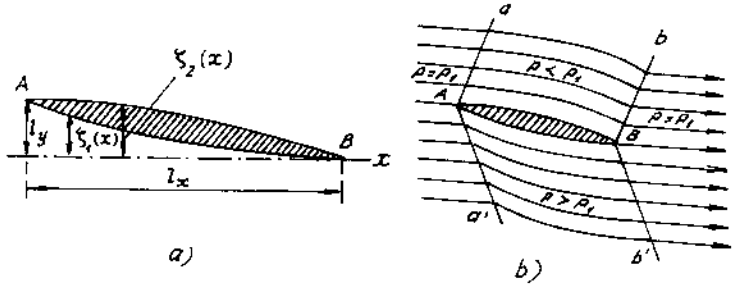
Các nhiễu động xuất phát từ vật có ảnh hưởng đến chuyển động của chất lỏng, sự kiện này có nghĩa là, trong không gian phía trên cánh

($y > 0$) phải có $f_2 \equiv 0$, do đó $\varphi = f_1(x - \beta y)$, còn trong không gian phía dưới cánh ($y < 0$): $\varphi = f_2(x + \beta y)$. Để xác định, ta xét không gian ở phía trên cánh, trong đó

$$\varphi = f(x - \beta y).$$

Hàm f được xác định từ điều kiện biên (125-2), và đặt trong điều kiện này $n_x \approx -\zeta'_2(x)$, trong đó $y = \zeta_2(x)$ là phương trình của phần trên của đường prôfin cánh (hình 129a). Chúng ta có:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y\to+0} = -\beta f'(x) = v_1\zeta'_2(x), \qquad f(x) = -\frac{v_1}{\beta}\zeta_2(x).$$



Hình 129

Như vậy, sự phân bố lại các vận tốc được xác định (với $y > 0$) bởi thế

$$\varphi(x, y) = -\frac{v_1}{\beta}\zeta_2(x - \beta y). \qquad (125\text{-}3)$$

Tương tự với $y < 0$, ta thu được

$$\varphi = \frac{v_1}{\beta}\zeta_1(x + \beta y),$$

trong đó $y = \zeta_1(x)$ là phương trình của phần dưới prôfin. Ta nhận thấy rằng, thế, và cùng với nó, cả các đại lượng khác, đều không đổi dọc theo các đường thẳng $x \pm \beta y = \text{const}$ (các đặc tuyến) phù hợp với các kết quả của §115 mà nghiệm rút ra ở đây là một trường hợp riêng.

Về mặt định tính, hình ảnh của dòng chảy thể hiện như sau. Các gián đoạn yếu (aAa' và bBb' ở trên hình 129b) [1] dời khỏi các mép nhọn trước và sau. Trong không gian ở phía trước gián đoạn aAa' và sau gián đoạn bBb' dòng là đều, còn ở trong miền nằm giữa chúng dòng quay đi và bao quanh mặt của cánh; dòng ở đây là một sóng đơn giản và trong phép gần đúng tuyến tính hóa đang xét tất cả những đặc tuyến ở đó đều có cùng độ nghiêng, bằng góc Mach của dòng tới.

Sự phân bố áp suất được cho bởi công thức

$$p - p_1 = -\rho_1 v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

(ở trong công thức tổng quát (114-5), số hạng chứa v_y^2 có thể được bỏ qua trong trường hợp đang xét, vì v_x và v_y có cùng bậc độ lớn). Thay vào đây (125-3) và đưa vào hệ số áp suất C_p, ta sẽ thu được ở trong nửa mặt phẳng trên

$$C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2} = \frac{2}{\beta}\zeta_2'(x - \beta y).$$

Đặc biệt, hệ số áp suất tác dụng lên mặt trên của cánh bằng

$$C_{p2} = \frac{2}{\beta}\zeta_2'(x). \qquad (125\text{-}4)$$

Tương tự, ta tìm được cho mặt dưới

$$C_{p1} = -\frac{2}{\beta}\zeta_1'(x). \qquad (125\text{-}5)$$

Ta có nhận xét là, áp suất tại mỗi điểm trên prôfin của tiết diện cánh chỉ phụ thuộc vào độ nghiêng của công tua của nó tại cùng điểm đó.

---

[1] Điều này chỉ đúng trong phép gần đúng dùng ở đây. Thực tế đó không phải là các gián đoạn yếu, mà là các sóng va chạm cường độ yếu hay các sóng dãn hẹp có tâm, phụ thuộc vào chiều quay của phương vận tốc trong các sóng đó. Chẳng hạn, đối với prôfin được biểu diễn ở trên hình 129b, Aa và Bb' là các sóng dãn, còn Aa' và Bb là sóng va chạm.

Đường dòng xuất phát từ mép sau (điểm B trên hình 129b) thực tế là một gián đoạn tiếp tuyến của vận tốc (thực tế nó xói lở thành một vết mỏng chảy rồi).

Vì góc nghiêng của đường công tua prôfin trên trục x tại mọi nơi đều nhỏ, nên thành phần thẳng đứng của các áp lực bằng chính áp suất với độ chính xác vừa đủ. Lực nâng tổng hợp tác dụng lên cánh bằng hiệu các áp lực tác dụng lên các mặt dưới và mặt trên của cánh. Từ đó, hệ số lực nâng bằng

$$C_y = \frac{1}{l_x}\int_0^{l_x}(C_{p1} - C_{p2})dx = \frac{4l_y}{\beta l_x}$$

(các độ dài l_x, l_y được định nghĩa ở trên hình 129a). Chúng ta xác định góc tới α như góc nghiêng với trục x của dây cung AB, vạch qua các đỉnh của các mép trước và mép sau (hình 129a): $\alpha \approx l_y/l_x$; cuối cùng, ta thu được công thức đơn giản sau:

$$C_y = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \qquad (125\text{-}6)$$

(*Ackeret*, 1925). Ta nhận thấy rằng, lực nâng được xác định chỉ bởi góc tiến và nó không phụ thuộc vào dạng của tiết diện cánh, khác với điều đã xảy ra trong dòng chảy dưới âm (xem §48, công thức (48-7)).

Bây giờ, ta xác định lực cản tác dụng lên cánh (đó là lực cản sóng, có cùng bản chất như lực cản sóng lên các vật mỏng; xem §123). Muốn vậy, cần phải chiếu các áp lực lên phương trục x và lấy tích phân hình chiếu này trên toàn bộ công tua của prôfin. Khi đó, đối với hệ số lực cản, ta thu được:

$$C_x = \frac{2}{\beta l_x}\int_0^{l_x}\left(\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2\right)dx. \qquad (125\text{-}7)$$

Ta đưa vào các góc nghiêng $\theta_1(x)$ và $\theta_2(x)$ của các phần trên và phần dưới của công tua lập với dây cung AB của nó; khi đó $\zeta_1' = \theta_1 - \alpha$, $\zeta_2' = \theta_2 - \alpha$. Các tích phân của θ_1 và θ_2 rõ ràng bằng không, do đó cuối cùng ta thu được công thức sau:

$$C_x = \frac{4\alpha^2 + 2\left(\overline{\theta_1^2} + \overline{\theta_2^2}\right)}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \qquad (125\text{-}8)$$

(gạch ngang ký hiệu cho việc lấy trung bình theo x). Đối với một góc tới đã cho, hệ số sức cản rõ ràng là cực tiểu nếu cánh là một bản phẳng (do đó $\theta_1 = \theta_2 = 0$). Trong trường hợp này $C_x = \alpha C_y$. Nếu áp dụng công thức (125-8) cho một mặt thô nhám, chúng ta sẽ thấy rằng độ thô nhám có thể gây ra một sự tăng đáng kể của lực cản, thậm chí nếu độ cao của các chỗ mấp mô riêng lẻ là nhỏ [1]. Thực vậy, lực cản không phụ thuộc vào độ cao của các chỗ mấp mô riêng lẻ, nếu độ nghiêng trung bình của các mặt của chúng, nghĩa là tỷ số trung bình giữa độ cao của các chỗ mấp mô và khoảng cách giữa chúng, không thay đổi.

Cuối cùng, ta có thêm nhận xét sau. Ở đây, cũng như mọi nơi, khi nói về một cánh, ta có ý nói nó nằm vuông góc với chuyển động tại các mép trước và mép sau của nó. Hiển nhiên có thể mở rộng sang trường hợp, trong đó góc γ giữa phương chuyển động và mép ("*góc trượt*") là tùy ý. Rõ ràng là, các lực tác dụng lên một cánh vô hạn có tiết diện không đổi chỉ phụ thuộc vào thành phần pháp tuyến của vận tốc dòng tới đối với các bờ mép cánh; trong chất lỏng không nhớt thành phần của vận tốc song song với các mép không gây ra một lực nào. Do đó, các lực tác dụng lên cánh với góc trượt ở trong một dòng có số M_1 đều giống như các lực tác dụng lên cùng cánh đó không có góc trượt trong một dòng với số M_1 bằng $M_1 \sin\gamma$. Nói riêng, nếu $M_1 > 1$, nhưng $M_1 \sin\gamma < 1$ thì lực cản sóng, đặc thù cho dòng chảy vượt âm, sẽ bằng không.

§126. ĐỊNH LUẬT ĐỒNG DẠNG GẦN ÂM

Lý thuyết về các dòng chảy vượt âm và dưới âm bao quanh các vật mỏng đã được phát triển trong §§ 123-125 không áp dụng được cho trường hợp của chuyển động gần âm, khi phương trình tuyến tính hóa cho thế không còn đúng nữa. Trong trường hợp này, hình ảnh của dòng chảy trong toàn không gian được xác định bởi phương trình phi tuyến (114-10)

$$2\alpha_* \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (126\text{-}1)$$

[1] Nhưng vẫn lớn hơn bề dày của lớp biên.

(hay, bởi phương trình Euler - Tricomi tương đương với nó đối với dòng chảy phẳng). Tuy nhiên, việc giải phương trình này trong những trường hợp cụ thể rất khó. Do đó, các qui tắc đồng dạng, mà ta có thể thiết lập cho các dòng chảy như thế, không cần tìm một lời giải cụ thể nào, có một tầm quan trọng.

Trước hết, ta khảo sát một dòng chảy phẳng, và giả sử

$$Y = \delta f\left(\frac{x}{l}\right) \tag{126-2}$$

là phương trình xác định dạng của công tua mỏng qua đó có dòng chảy, l là độ dài của nó (theo chiều dòng bao) còn δ đặc trưng cho bề dày của nó ($\delta << l$). Cho biến thiên hai thông số l và δ, ta thu được một họ các công tua đồng dạng. Phương trình chuyển động có dạng

$$2\alpha_* \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \tag{126-3}$$

và các điều kiện biên của nó như sau. Tại vô cùng, vận tốc bằng vận tốc v_1 của dòng không nhiễu động, nghĩa là

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = M_{1*} - 1 = \frac{M_1 - 1}{\alpha_*} \tag{126-4}$$

(xem định nghĩa của thế φ theo (114-9)). Trên prôfin vận tốc phải hướng theo tiếp tuyến với nó:

$$\frac{v_y}{v_x} \approx \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{dY}{dx} = \frac{\delta}{l} f'\left(\frac{x}{l}\right); \tag{126-5}$$

vì prôfin mỏng nên có thể đòi hỏi điều kiện này phải được thỏa mãn khi $y = 0$.

Ta đưa vào các biến mới không thứ nguyên được xác định như sau

$$x = l\bar{x}, \qquad y = \frac{1}{(\theta\alpha_*)^{1/3}}\bar{y}, \qquad \varphi = \frac{l\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}}\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) \tag{126-6}$$

(ta đưa vào góc $\theta = \delta/l$ đặc trưng cho "góc mở" của vật hay góc tới). Khi đó, ta thu được phương trình

$$2\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}^2}=\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{y}^2}$$

với các điều kiện biên

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}=K,\quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{y}}=0\ \text{ở}\ \infty,\quad \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{y}}=f'(\bar{x})\quad\text{với}\quad \bar{y}=0,$$

trong đó

$$K=\frac{M_1-1}{(\alpha_*\theta)^{2/3}}. \tag{126-7}$$

Các điều kiện này chỉ chứa một thông số: K. Như vậy, ta đã thu được định luật đồng dạng cần tìm: các dòng chảy gần âm phẳng với cùng các giá trị của số K là các dòng chảy đồng dạng, như đã được thiết lập bởi các công thức (126-6) (*X.V. Falcovits*, 1947).

Chú ý rằng, biểu thức (126-7) cũng chứa một thông số duy nhất α_* đặc trưng cho các tính chất của bản thân khí. Do đó, qui tắc thu được cũng xác định cả sự đồng dạng theo sự biến thiên của loại chất khí.

Trong phép gần đúng đang xét, áp suất được xác định bởi công thức

$$p-p_1\approx-\rho_1v_1(v_x-v_1).$$

Phép tính dựa vào biểu thức (126-6) chứng tỏ rằng, hệ số áp suất trên prôfin là một hàm có dạng

$$C_p=\frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1v_1^2}=\frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}}P\left(K,\frac{x}{l}\right).$$

Các hệ số lực cản và lực nâng được xác định bởi các tích phân lấy theo công tua của prôfin:

$$C_y=\frac{1}{l}\int C_p\frac{dY}{dx}dx,\quad C_y=\frac{1}{l}\oint C_p\,dx$$

và như thế là các hàm có dạng [1)]

[1)] Miền ứng dụng được các công thức này được xác định bởi các bất đẳng thức $|M_1-1|\ll 1$. Lý thuyết tuyến tính hóa tương ứng với các giá trị lớn của K, nghĩa là $|M_1-1|\gg\theta^{2/3}$. Trong miền $1\gg M_1-1\gg\theta^{2/3}$ các công thức (126-8) như vậy phải chuyển thành các công thức (125.6-8) của lý thuyết đã tuyến tính hóa. Điều này có nghĩa là, đối với các K lớn, các hàm f_x và f_y phải tỷ lệ với $K^{-1/2}$.

$$C_x = \frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_x(K), \qquad C_y = \frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}} f_y(K). \tag{126-8}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có thể thu được định luật đồng dạng cho dòng chảy ba chiều bao quanh một vật mỏng có dạng được xác định bởi các phương trình

$$Y = \delta f_1\left(\frac{x}{l}\right), \qquad Z = \delta f_2\left(\frac{x}{l}\right) \tag{126-9}$$

với hai thông số δ và l ($\delta \ll l$). Điểm khác nhau cơ bản đối với trường hợp phẳng là ở chỗ, thế có một kỳ dị lôga khi $y \to 0$, $z \to 0$ (chẳng hạn, xem các công thức về dòng chảy quanh một hình nón hẹp ở §113). Do đó, điều kiện biên trên trục x phải xác định, không phải chính các đạo hàm $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, mà xác định các tích vẫn còn hữu hạn:

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Y\frac{dY}{dx}, \qquad z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = Z\frac{dZ}{dx}.$$

Dễ dàng thấy được rằng, sự biến đổi đồng dạng trong trường hợp này là (lại đưa vào góc $\theta = \delta/l$)

$$x = l\bar{x}, \quad y = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\bar{y}, \quad z = \frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\bar{z}, \quad \varphi = l\theta^2\bar{\varphi}, \tag{126-10}$$

với thông số đồng dạng

$$K = \frac{M_1 - 1}{\alpha_*\theta^2}. \tag{126-11}$$

(*T. Karman*, 1947). Hệ số áp suất thu được ở trên mặt của vật một biểu thức, có dạng

$$C_p = \theta^2 P\left(K, \frac{x}{l}\right),$$

và tương ứng cho hệ số cản [1)]

$$C_x = \theta^4 f(K). \tag{126-12}$$

[1)] Ở trong miền $1 \gg M_1 - 1 \gg \theta^2$, ta phải thu được công thức (123-7) của lý thuyết tuyến tính hóa, theo lý thuyết này $C_x \sim \theta^4$; điều đó có nghĩa là $f(K)$ phải tiến đến một hằng số khi K tăng.

Tất nhiên, tất cả các công thức đã thu được đều được xét cho các giá trị nhỏ dương cũng như âm của $M_1 - 1$. Nếu chính xác $M_1 = 1$ thì thông số đồng dạng $K = 0$ và các hàm ở trong (126-8) và (126-12) rút về các hằng số, do đó các công thức đó xác định hoàn toàn sự phụ thuộc của C_x và C_y vào góc θ và các tính chất của khí α_*.

§127. ĐỊNH LUẬT ĐỒNG DẠNG SIÊU ÂM

Như đã nêu ở cuối § 114, lý thuyết tuyến tính hóa không ứng dụng được cho dòng chảy quanh các vật nhọn mỏng với các vận tốc vượt âm lớn (các M_1 lớn). Do đó, qui tắc đồng dạng đơn giản có thể thiết lập được cho các dòng chảy như thế (*dòng chảy siêu âm*) đáng được chú ý (*H.S. Tzian*, 1946).

Các sóng va chạm được tạo thành trong một dòng chảy như thế nghiêng so với phương của chuyển động dưới một góc nhỏ, có bậc của tỷ số $\theta = \delta/l$ giữa bề dày của vật và độ dài của nó. Nói chung, các sóng này bị uốn cong đồng thời có cường độ lớn – mặc dù bước nhảy vận tốc trong chúng tương đối nhỏ, nhưng bước nhảy áp suất (và cùng với nó, cả bước nhảy entrôpi) sẽ lớn. Do đó, dòng chảy của khí trong trường hợp tổng quát tuyệt nhiên không phải là dòng thế.

Ta coi rằng, số M_1 có bậc của $1/\theta$ hay lớn hơn. Sóng va chạm hạ thấp giá trị cục bộ của M, nhưng trong mọi trường hợp nó vẫn có bậc của đại lượng $1/\theta$ (xem bài tập 2 của §112), do đó số M lớn trong toàn không gian.

Dùng "sự tương tự âm" đã nêu ở §123: bài toán ba chiều của dòng chảy dừng quanh vật mỏng có tiết diện $S(x)$ thay đổi tương đương với bài toán hai chiều không dừng về sự phát sóng âm bởi một công tua có diện tích thay đổi theo thời gian theo định luật $S(v_1,t)$; khi đó, đại lượng $v_1(M_1^2 - 1)^{-1/2}$ giữ vai trò vận tốc âm hay đơn giản c_1 giữ vai trò vận tốc âm nếu các M_1 lớn. Cần nhấn mạnh rằng, điều kiện duy nhất bảo đảm cho sự tương đương của hai bài toán là, tỷ số δ/l phải nhỏ, điều này cho phép ta coi các miền nhỏ hình khuyên của mặt dọc theo độ dài vật như là các miền mặt trụ. Tuy nhiên, đối với các M_1 lớn, vận tốc lan truyền

của các sóng được phát ra có độ lớn so sánh được với vận tốc của các hạt chất khí trong những sóng đó (xem phần cuối của §123) và do đó bài toán phải được giải trên cơ sở các phương trình phi tuyến hóa chính xác.

Nhiễu động vận tốc (so với vận tốc v_1 của dòng tới) là nhỏ ngay với mọi dòng vượt âm bao quanh vật nhọn mỏng. Trong dòng chảy bao quanh siêu âm còn bổ sung thêm nhiễu động vận tốc dọc nhỏ so với các vận tốc ngang xuất hiện:

$$v_y \sim v_z \sim v_1\theta, \qquad v_x - v_1 \sim v_1\theta^2. \tag{127-1}$$

Nhưng các độ biến thiên áp suất và mật độ tuyệt nhiên không nhỏ:

$$\frac{p - p_1}{p_1} \sim M_1^2\theta^2, \qquad \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \sim 1, \tag{127-2}$$

đồng thời, độ biến thiên áp suất thậm chí có thể lớn (với $M_1\theta >> 1$) tùy ý (xem bài tập 2, §112).

Hiển nhiên là sự tương tự âm học chỉ được xét cho bài toán hai chiều về chuyển động trong mặt phẳng y, z vuông góc với phương của dòng tới. Trong bài toán hai chiều này, vận tốc dài của nguồn có bậc độ lớn của $v_1\theta$; ngoài vận tốc này, bài toán chỉ còn chứa vận tốc c_1 của âm và các kích thước δ của nguồn (và thông số mật độ ρ_1) [1] làm các thông số độc lập. Từ các thông số đó, ta chỉ có thể thiết lập được một tổ hợp duy nhất không thứ nguyên

$$K = M_1\theta \tag{127-3}$$

đó chính là tiêu chuẩn đồng dạng [2]. Người ta chọn các tọa độ y, z làm

[1] Dĩ nhiên ta xét không những các phương trình chuyển động của khí, mà còn xét cả các điều kiện của chúng ở trên mặt vật và các điều kiện phải được thỏa mãn ở trên các sóng va chạm được tạo thành. Khí được giả thiết là polytropic, do đó các tính chất khí động lực của nó chỉ phụ thuộc vào thông số không thứ nguyên γ; tuy nhiên qui tắc đồng dạng thu được dưới đây không xác định tính chất phụ thuộc của chuyển động vào thông số đó.

Cần lưu ý là, với dòng bao có $M_1 >> 1$ khi bị nung nóng mạnh, kết quả là các tính chất nhiệt động lực của nó có thể thay đổi căn bản. Do đó, ý nghĩa định lượng của các công thức cho khí polytropic (nghĩa là với giả thiết coi nhiệt dung khí không đổi) đối với các vận tốc siêu âm thực tế bị hạn chế.

[2] Nếu M_1 không được giả thiết là lớn, thì sẽ thu được một qui tắc đồng dạng với thông số $K = \theta\sqrt{M_1^2 - 1}$. Tuy nhiên, qui tắc này không quan trọng, vì với các M_1 không lớn, lý thuyết tuyến tính hoá thực tế xác định hoàn toàn sự phụ thuộc của tất cả các đại lượng vào thông số đó.

các thang chia độ dài, còn đối với thang chia thời gian, cần chọn các đại lượng có thứ nguyên thích hợp, được tạo bởi cùng những thông số đó, chẳng hạn δ và $\delta/v_1\theta = l/v_1$. Thông số tự nhiên cho tọa độ x là độ dài l của vật,khi đó có thể khẳng định rằng

$$v_y = v_1\theta v_y', \quad v_z = v_1\theta v_z' \quad p = \rho_1 v_1^2\theta^2 p', \quad \rho = \rho_1\rho', \qquad (127\text{-}4)$$

trong đó v_y', v_x', p', ρ' là các hàm của các biến không thứ nguyên x/l, y/δ, z/δ và thông số K; nếu chú ý đến (127.1-2) có thể khẳng định rằng các hàm này có bậc đơn vị [1].

Lực cản F_x được tính như tích phân

$$F_x = \oint p\,dy\,dz,$$

lấy theo toàn bộ mặt của vật (do điều kiện biên $v_n = 0$, số hạng $v_x(\mathbf{v}\,\mathbf{n})$ trong dòng xung lượng bằng không ở trên mặt vật; $\mathbf{n}$ là pháp tuyến với mặt đó). Nếu chuyển sang các biến không thứ nguyên theo (127-4) ta thu được hệ số cản C_x (được xác định theo (123-6)) dưới dạng

$$C_x = 2\theta^4 \oint p'\,dy'\,dz',$$

Tích phân còn lại là hàm của thông số không thứ nguyên K. Như vậy

$$C_x = \theta^4 f(K). \qquad (127\text{-}5)$$

Hiển nhiên là, cũng chính định luật đồng dạng như thế có thể thu được cả trong trường hợp phẳng – với dòng bao quanh cánh mỏng rộng vô hạn. Đối với các hệ số cản và lực nâng khi đó, ta thu được các công thức có dạng

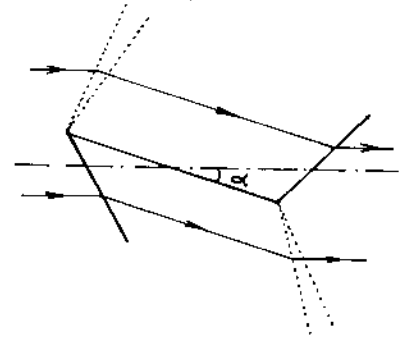
$$C_x = \theta^3 f_x(K), \qquad C_y = \theta^3 f_y(K). \qquad (127\text{-}6)$$

Để ứng dụng các định luật (127.5-6), cần nhớ rằng, sự đồng dạng các dòng chảy giả thiết rằng, dạng, kích thước và sự định hướng của các vật đối với dòng tới thu được của nhau chỉ bằng cách thay đổi kích thước (thang chia) δ dọc theo các trục y, z và kích thước l dọc theo trục x. Điều

[1] Định luật đồng dạng cho dòng chảy siêu âm được *H.S. Tsien* phát biểu (1946). Mối liên hệ của nó với "sự tương tự âm" được *Hayes* mở rộng sang bài tập phi tuyến (*W.D. Hayes*, 1947); trong tài liệu chuyên khảo, sự tương tự này được gọi là sự tương tự "pittông".

đó có nghĩa là, đặc biệt, nếu góc tới α khác không, thì đối với các cấu hình đồng dạng tỷ số α/θ phải như nhau.

Với $K_1 \to \infty$, các hàm của thông số này trong (127.5-6) tiến đến các giới hạn không đổi. Điều khẳng định này là hệ quả của sự tồn tại một chế độ giới hạn (khi $M_1 \to \infty$) của dòng bao quanh, các tính chất của chế độ này trong miền cơ bản của dòng chảy không phụ thuộc vào M_1 (*V. Vallander*, 1947; *K. Oswatitsch*, 1951). Miền "cơ bản" được biểu diễn là miền dòng chảy nằm giữa phần phía trước có cường độ lớn nhất của sóng va chạm đầu và mặt của vật có dòng bao quanh, không ở quá xa phần phía trước của vật (nhấn mạnh rằng, chính phần này, với áp suất lớn nhất, xác định các lực tác dụng lên vật). Nếu mô tả dòng chảy bằng vận tốc "rút gọn" v/v_1, bằng áp suất "rút gọn" $p/\rho_1 v_1^2$ và bằng mật độ "rút gọn" ρ/ρ_1 như các hàm của các tọa độ không thứ nguyên, thì hình ảnh dòng bao quanh vật có dạng đã cho trong miền đã nêu ở trong giới hạn không phụ thuộc vào M_1. Vấn đề là ở chỗ, được biểu diễn qua các biến này không những các phương trình thủy động lực, và điều kiện biên ở trên mặt vật có dòng bao, mà còn tất cả các điều kiện ở trên mặt sóng va chạm cũng không phụ thuộc vào M_1. Sự hạn chế miền chuyển động bởi phần "cơ bản" là do, các đại lượng bỏ qua trong các điều kiện sau cùng – có bậc tỷ đối $1/M_1^2 \sin^2\varphi$, trong đó φ là góc giữa $\mathbf{v}_1$ và mặt gián đoạn; tại các khoảng cách lớn, tại đó cường độ sóng va chạm nhỏ, góc này tiến đến góc Mach arc $\sin(1/M_1) \approx 1/M_1$, do đó thông số khai triển không còn nhỏ nữa: $1/M_1^2 \sin^2\varphi \sim 1$[1)].



Hình 130

[1)] Các chi tiết chứng minh có thể tìm trong các cuốn sách: *Tsernưi G.G.* Các dòng chảy của khí với vận tốc vượt âm lớn – M: NXB Toán – Lý Quốc gia, 1959, ch.I, § 4, (sách Nga).

BÀI TẬP

Xác định lực nâng tác dụng lên một cánh phẳng có sải cánh vô hạn, nằm nghiêng với phương chuyển động một góc tới nhỏ α, với $M_1\alpha \gtrsim 1$. (*R.D. Linnell*, 1949).

Giải. Hình ảnh dòng bao được mô tả trên hình 130: một sóng va chạm và một sóng dãn dời mép trước và mép sau, trong đó dòng chảy thoạt đầu quay một góc α, sau đó dòng quay cùng một góc như vậy theo chiều ngược lại. Theo sự tương tự âm học, bài toán về dòng chảy dừng quanh một bản như vậy tương đương với bài toán về chuyển động không dừng một chiều của khí ở trước và sau một pittông chuyển động đều với vận tốc αv_1. Trước pittông có hình thành một sóng va chạm và sau pittông, hình thành một sóng dãn (xem các bài tập 1, 2 §99). Dùng các kết quả đã thu được ở đó, ta tìm được lực nâng đòi hỏi như hiệu các áp suất tác dụng lên hai mặt của bản. Hệ số lực nâng bằng

$$C_y = \alpha^2\left[\frac{2}{\gamma K^2} + \frac{\gamma+1}{2} + \sqrt{\frac{4}{K^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2}\right] - \frac{2\alpha^2}{\gamma K^2}\left[1 - \frac{\gamma-1}{2}K\right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

(trong đó $K = \alpha M_1$) với $K \geq 2/(\gamma - 1)$ ở dưới bản có hình thành một miền chân không và số hạng thứ hai phải bỏ đi. Trong miền $1 << M_1 << 1/\alpha$, công thức này chuyển thành công thức $C_y = 4\alpha/M_1$, được cho bởi lý thuyết tuyến tính hóa, phù hợp với sự kiện là, ở đây cả hai miền ứng dụng được phủ lên nhau.

Chương XIV

THỦY ĐỘNG LỰC HỌC VỀ SỰ CHÁY

§128. SỰ CHÁY CHẬM

Vận tốc của phản ứng hóa học (đo được chẳng hạn bằng số các phân tử tham gia phản ứng trong một đơn vị thời gian) phụ thuộc vào nhiệt độ hỗn hợp khí trong đó phản ứng xảy ra, nó tăng với nhiệt độ. Trong nhiều trường hợp sự phụ thuộc này rất mạnh [1]. Vận tốc phản ứng ở các nhiệt độ thông thường có thể nhỏ đến mức phản ứng thực tế hầu như không xảy ra, mặc dù hỗn hợp khí có các thành phần đã tham gia phản ứng với nhau, tương ứng với trạng thái cân bằng nhiệt động lực (hóa học). Nhưng nếu tăng nhiệt độ lên đủ cao thì phản ứng xảy ra với vận tốc đáng kể. Nếu phản ứng thu nhiệt, thì để duy trì phản ứng đó cần phải cung cấp liên tục nhiệt lượng từ ngoài; nếu nhiệt độ hỗn hợp chỉ được tăng vào lúc ban đầu của phản ứng thì chỉ một lượng chất không đáng kể tham gia vào phản ứng, rồi sau đó nhiệt độ của khí giảm tới mức phản ứng lại dừng lại. Tình hình sẽ hoàn toàn khác đối với một phản ứng mạnh tỏa nhiệt, kèm theo một nhiệt lượng đáng kể tỏa ra. Ở đây chỉ cần nâng nhiệt độ dù tại một nơi nào đó của hỗn hợp; được mồi tại nơi đó phản ứng sẽ tỏa nhiệt và nhiệt lượng tỏa ra sẽ nung nóng khí chung quanh và như vậy, phản ứng, một khi bắt đầu, sẽ lan truyền trong toàn khối khí. Khi đó, người ta nói có "*sự cháy chậm*" hay đơn

[1] Vận tốc của phản ứng thông thường là một hàm mũ của nhiệt đô, chủ yếu tỷ lệ với một thừa số có dạng $\exp(-U/T)$, trong đó U là một đặc trưng không đổi cho mỗi phản ứng đã cho gọi là *năng lượng kích hoạt*. U càng lớn, sự phụ thuộc của vận tốc phản ứng vào nhiệt độ càng mạnh.

giản, sự cháy của hỗn hợp khí [1].

Sự cháy của hỗn hợp khí nhất thiết kéo theo sự chuyển động của khí. Nói một cách khác, quá trình cháy không những chỉ là một hiện tượng hóa học, mà còn là một quá trình khí động lực. Trong trường hợp tổng quát, để xác định chế độ cháy cần phải giải đồng thời một hệ các phương trình bao gồm cả các phương trình động hóa học của phản ứng đã cho và các phương trình chuyển động của hỗn hợp khí.

Tuy nhiên, tình hình sẽ đơn giản đi nhiều trong trường hợp rất quan trọng (thường hay gặp), trong đó các kích thước đặc trưng l xác định các điều kiện của bài toán cụ thể đang xét là đủ lớn (so với đại lượng sẽ nói dưới đây). Trong các trường hợp như thế, ta sẽ thấy rằng bài toán thuần túy khí động lực, theo một nghĩa nào đó, có thể được xét tách biệt với bài toán động hóa học.

Miền chất khí bị đốt (nghĩa là miền trong đó phản ứng đã kết thúc và khí là một hỗn hợp của các sản phẩm cháy) được ngăn cách với chất khí, trong đó sự cháy vẫn chưa bắt đầu, bằng một lớp chuyển tiếp nào đó, đó chính là nơi phản ứng xảy ra (vùng cháy hay "lửa"); với thời gian lớp này tiến triển về phía trước với vận tốc có thể được gọi là vận tốc lan truyền cháy trong khí. Vận tốc lan truyền phụ thuộc vào cường độ truyền nhiệt lượng từ miền cháy sang hỗn hợp khí ban đầu chưa bị đốt. Cơ chế cơ bản của sự truyền nhiệt lượng là sự dẫn nhiệt thông thường (*V.A. Mikhelson*, 1890).

Bậc độ lớn của bề rộng vùng cháy δ được xác định bằng khoảng cách trung bình, trên đó nhiệt lượng tỏa ra trong phản ứng kịp lan truyền được trong khoảng thời gian kéo dài τ của phản ứng (tại một phần đã cho của khí). Thời gian τ là một đại lượng đặc trưng cho phản ứng đang xét, nó chỉ phụ thuộc vào trạng thái nhiệt động lực của khí bốc cháy (nhưng không phụ thuộc vào các thông số đặc trưng l của bài toán). Nếu

[1] Cần chú ý rằng, trong một hỗn hợp có khả năng tự đốt cháy, trong một số điều kiện nào đó, sự lan truyền tự phát của sự cháy có thể không xảy ra. Các giới hạn tương ứng được xác định bởi những sự mất mát nhiệt gây bởi các nhân tố sau: sự dẫn nhiệt qua các thành ống (khi khí cháy trong ống), sự mất nhiệt do bức xạ v.v.. Do đó, sự cháy không thể xảy ra trong những ống có bán kính quá nhỏ.

χ là độ dẫn nhiệt độ của khí, thì ta sẽ có [1] (xem (51-6)):

$$\delta \sim \sqrt{\chi\tau}. \tag{128-1}$$

Bây giờ cần chính xác hóa giả thiết đã nêu ở trên: ta sẽ giả thiết các kích thước đặc trưng của bài toán là lớn so với bề dày của vùng cháy ($l >> \delta$). Khi điều kiện này được thực hiện, có thể xét tách biệt bài toán thuần tuý động lực chất khí. Khi xác định chuyển động của khí, có thể bỏ qua bề dày của vùng cháy và coi vùng này đơn giản là mặt ngăn cách các sản phẩm cháy với khí chưa bị cháy. Trên mặt này (*mặt đầu lửa*) trạng thái của khí chịu bước nhảy, nghĩa là, nó là mặt gián đoạn đặc thù.

Vận tốc dịch chuyển v_l của gián đoạn này đối với bản thân khí (theo phương pháp tuyến với mặt đầu) được gọi là *vận tốc pháp tuyến của lửa*. Trong thời gian τ, sự cháy có thể kịp lan truyền tới một khoảng cách có bậc của δ; từ đó ta thu được vận tốc cháy cần tìm [2]:

$$v_l \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \left(\frac{\chi}{\tau}\right)^{1/2}. \tag{128-2}$$

Độ dẫn nhiệt độ thông thường của khí có bậc độ lớn của tích đoạn đường tự do của các phân tử với vận tốc nhiệt của chúng, hay tích khoảng thời gian đi được đoạn đường tự do τ_{td} với bình phương vận tốc. Nếu nhớ rằng, vận tốc nhiệt của các phân tử trùng với vận tốc âm về bậc độ lớn, thì ta có

$$\frac{v_l}{c} \sim \left(\frac{\chi}{\tau c^2}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{\tau_{td}}{\tau}\right)^{1/2}.$$

Tuyệt nhiên không phải mọi va chạm của các phân tử đều kéo theo phản ứng hóa học giữa chúng; ngược lại chỉ một phần nhỏ không đáng kể các phân tử va chạm nhau tham gia vào phản ứng. Điều đó có nghĩa

[1] Để tránh hiểu nhầm, ta có nhận xét là, nếu τ phụ thuộc mạnh vào nhiệt độ, thì một hệ số khá lớn còn phải xuất hiện ở trong (128-1) (nếu τ được chọn là giá trị tại nhiệt độ của các sản phẩm cháy). Tuy nhiên, điều quan trọng hàng đầu ở đây là, δ không phụ thuộc vào l.

[2] Để làm thí dụ, ta nêu lên rằng, vận tốc lan truyền của lửa trong hỗn hợp có 6% CH_4 và 94% không khí chỉ bằng 5 cm/s, còn trong hỗn hợp nổ ($2H_2 + O_2$), bằng 1000 cm/s; bề rộng của vùng cháy trong hai trường hợp lần lượt bằng $\sim 5.10^{-2}$ và 5.10^{-4} cm.

là, $\tau_{td} << \tau$ và như vậy $v_1 << c$. Như vậy, trong chế độ đang xét, vận tốc lan truyền của lửa nhỏ so với vận tốc âm [1].

Trên mặt gián đoạn, thay thế vùng cháy, cũng như trên mọi mặt gián đoạn bất kỳ, các điều kiện liên tục của các dòng chất, xung lượng, năng lượng đều phải được thỏa mãn. Thông thường, điều kiện thứ nhất trong các điều kiện đó xác định tỷ số của các thành phần vuông góc với mặt gián đoạn của vận tốc khí đối với gián đoạn: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, hay

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1}{V_2}, \tag{128-3}$$

trong đó V_1 và V_2 là các thể tích riêng của khí không bị đốt cháy và sản phẩm cháy. Theo các kết quả tổng quát đã rút ra ở §84 cho các gián đoạn tùy ý, khi vận tốc pháp tuyến có bước nhảy, thành phần tiếp tuyến của vận tốc phải tiếp tục. Do đó, các đường dòng đều bị khúc xạ tại mặt gián đoạn.

Vì vận tốc pháp tuyến lan truyền của lửa nhỏ so với vận tốc của âm, nên điều kiện liên tục của dòng xung lượng rút về điều kiện liên tục của hàm nhiệt:

$$p_1 = p_2, \quad w_1 = w_2. \tag{128-4}$$

Khi dùng các điều kiện này, cần nhớ rằng các chất khí ở cả hai bên gián đoạn đang xét đều có bản chất hóa học khác nhau, do đó các đại lượng nhiệt động lực của chúng không phải là các hàm như nhau.

Nếu coi khí là polytropic, ta sẽ có:

$$w_1 = w_{o1} + c_{p1}T_1, \quad w_2 = w_{o2} + c_{p2}T_2$$

Các hằng số cộng ở đây không thể đặt bằng không như trong trường hợp của một chất khí (bằng sự chọn thích hợp gốc năng lượng), vì ở đây w_{01} và w_{02} khác nhau. Ta đưa vào ký hiệu $w_{01} - w_{02} = q$, q chính là nhiệt lượng do phản ứng tỏa ra (tính cho một đơn vị khối lượng), nếu phản

[1] Sự khuếch tán tương hỗ của các thành phần khác nhau của hỗn hợp cháy cũng giữ vai trò nào đó trong quá trình lan truyền của sự cháy; nhưng điều này không làm thay đổi bậc độ lớn của vận tốc và bề rộng của lửa. Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng, ở đây mọi nơi đều nói đến sự cháy của các hỗn hợp khí cháy sơ bộ được pha trộn, mà không nói đến các trường hợp khi các chất phản ứng được ngăn cách về mặt không gian và sự cháy chỉ xảy ra do sự khuếch tán tương hỗ của chúng.

ứng xảy ra tại nhiệt độ không tuyệt đối. Khi đó ta thu được các hệ thức sau giữa các đại lượng nhiệt động lực của khí ban đầu (khí *1*) và khí đã cháy (khí *2*):

$$p_1 = p_2, \quad T_2 = \frac{q}{c_{p2}} + \frac{c_{p1}}{c_{p2}} T_1, \qquad V_2 = V_1 \frac{\gamma_1(\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_1 - 1)} \left(\frac{q}{c_{p1} T_1} + 1 \right). \qquad (128\text{-}5)$$

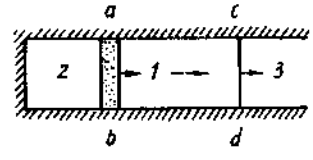
Vì lửa có một vận tốc lan truyền pháp tuyến nào đó không phụ thuộc vào vận tốc chuyển động của bản thân khí, nên mặt đầu lửa có một dạng xác định khi sự cháy ở trong dòng khí chuyển động là sự cháy dừng. Một thí dụ là sự cháy của chất khí thoát ra từ đầu một ống (lỗ của mỏ hàn). Nếu v là vận tốc trung bình (theo tiết diện của ống) của khí, thì hiển nhiên là $v_1 S = vS$, trong đó S là diện tích tiết diện ngang của ống và S_1 là diện tích toàn phần của mặt đầu lửa.

Có nẩy ra vấn đề về các giới hạn ổn định của chế độ đã mô tả đối với các nhiễu động nhỏ – đó là các điều kiện tồn tại thực của nó. Vì vận tốc chuyển động của khí nhỏ so với vận tốc của âm, nên để nghiên cứu tính ổn định của các mặt đầu lửa, ta có thể coi khí là một môi trường lý tưởng (không nhớt) không nén được, thêm vào đó sẽ giả thiết rằng, vận tốc đầu lửa được hình thành là đại lượng đã cho không đổi. Một sự nghiên cứu như thế dẫn tới kết quả về tính không ổn định của mặt đầu lửa (*L. Landau*, 1944, xem bài tập 1 của tiết này). Dưới một dạng như thế, việc nghiên cứu chỉ được xét cho các số Reynolds đủ lớn lv_1/ν_1 và lv_2/ν_2. Tuy nhiên, việc xét đến tính nhớt của khí trong những điều kiện đã cho tự nó không thể dẫn đến một giá trị tới hạn rất lớn của các số này.

Tính không ổn định như thế phải dẫn đến sự rối hóa tự phát của lửa. Trong khi đó các số liệu thực nghiệm chứng tỏ rằng sự rối hóa tự phát của lửa thực tế không xảy ra, – trong mọi trường hợp đến những giá trị rất lớn của số Reynolds. Điều đó liên quan đến sự có mặt trong các điều kiện thực của một loạt các nhân tố khác (thủy động lực học và khuếch tán – nhiệt), làm ổn định lửa. Nội dung của các vấn đề phức tạp này vượt ra ngoài phạm vi cuốn sách, và ở đây chỉ giới hạn nhận xét ngắn gọn về một số các nguồn gốc khả dĩ làm ổn định lửa.

Ảnh hưởng uốn cong mặt đầu lửa lên vận tốc cháy có thể giữ vai trò quan trọng làm một nguồn như thế. Nếu chỉ xét đến sự dẫn nhiệt thì tại

các phần lõm của mặt đầu lửa (đối với hỗn hợp cháy ban đầu) vận tốc v_1 tăng lên (do có sự cải tiến các điều kiện truyền nhiệt vào hỗn hợp mới bị bao bởi hốc lõm), còn tại các nơi lồi v_1 giảm; hiệu ứng này có xu hướng san bằng mặt đầu lửa, nghĩa là có ảnh hưởng theo hướng ổn định. Còn sự biến đổi của chế độ khuếch tán, như suy ra từ các nhận định tương tự, có tác dụng làm mất ổn định. Như vậy, dấu hiệu chung của hiệu ứng phụ thuộc vào hệ thức giữa các hệ số dẫn nhiệt độ và hệ số khuếch tán (*I.P. Đrozđôv, Ia. B. Zelđôvits*, 1943). Để mô tả, về mặt hiện tượng luận, ảnh hưởng uốn cong mặt đầu lửa lên vận tốc cháy v_1 có thể đưa vào trong vận tốc đó một số hạng tỷ lệ với độ cong của mặt đầu lửa (*G.H. Markstein,* 1951); với dấu thích hợp của số hạng này việc đưa nó vào trong các điều kiện biên ở trên mặt đầu cháy sẽ dẫn đến việc khử tính không ổn định của các nhiễu động với các bước sóng dài [1]. Sự phát triển của các nhiễu động không ổn định (trong phép gần đúng bậc nhất) có thể được ổn định hóa tại giới hạn dừng xác định (theo biên độ của chúng) do các hiệu ứng phi tuyến (*R.E. Petersen, N.W. Emmons*, 1956; *Ia.B. Zelđôvits*, 1966); cơ chế này có thể dẫn tới cấu trúc "*ô mạng*" của lửa [2].



Hình 131

Lửa lan truyền trong hỗn hợp cháy làm cho khí bên ngoài chuyển động đến một khoảng cách lớn. Chuyển động của khí tất yếu phải xuất hiện sau sự cháy, sự kiện này là hiển nhiên, vì các vận tốc v_1 và v_2 khác nhau, nên các sản phẩm cháy phải chuyển động đối với khí không bị đốt cháy với vận tốc $v_1 - v_2$. Trong một số trường hợp chuyển động này cũng làm xuất hiện những sóng va chạm. Các sóng này không có quan hệ trực tiếp với quá trình cháy, và sự xuất hiện của chúng có liên quan đến sự

[1] Trong các ký hiệu đưa vào bài tập 1, biểu thức cho v_1 có xét đến hiệu ứng này cần được viết dưới dạng $v_1 = v_1^{(0)}(1 - \mu\partial^2\zeta / \partial y^2)$, trong đó $v_1^{(0)}$ là vận tốc cháy với mặt đầu lửa phẳng, còn μ là hằng số thực nghiệm (có thứ nguyên độ dài), có giá trị dương trong các điều kiện làm ổn định.

[2] Nội dung chi tiết của các vấn đề này được cho trong sách: *Zelđôvits, Ia. B. Barenblatt G.I. Librovits. V.B. Makhviladze. G.M.* lý thuyết toán học về sự cháy và sự nổ, M. Hayka, 1980, chương 4,6.

không thể thỏa mãn các điều kiện biên một cách khác. Chẳng hạn, ta xét sự cháy lan truyền từ một đầu bịt kín của ống. Trên hình 131 *ab* là miền cháy. Trong các miền *1* và *3* có hỗn hợp khí ban đầu không bị cháy, còn trong miền *2* có các sản phẩm cháy. Vận tốc lan truyền v_1 của vùng cháy đối với khí *1* ở trước nó, là một đại lượng được xác định bởi các tính chất của phản ứng và các điều kiện truyền nhiệt, và phải được coi như đã được cho trước. Sau đó, vận tốc chuyển động v_2 của lửa đối với khí *2* được xác định sau đó trực tiếp bởi điều kiện (128-3) tại đầu kín của ống vận tốc của khí phải triệt tiêu; do đó khí đứng yên trong toàn miền *2*. Vì thế, khí *1* phải chuyển động đối với ống với vận tốc không đổi bằng $v_2 - v_1$. Trong phần trước của ống ở xa lửa, khí cũng phải đứng yên. Điều kiện này chỉ có thể được thỏa mãn bằng cách đưa vào sóng va chạm (*cd* ở trên hình 131), trong đó vận tốc của khí chịu một bước nhảy, do đó khí *3* vẫn đứng yên. Việc cho trước bước nhảy của v cho phép ta xác định được cả bước nhảy của các đại lượng còn lại, và cả vận tốc truyền của bản thân sóng. Như vậy, ta nhận thấy rằng, mặt đầu lửa lan truyền có tác dụng như một pittông đẩy khí ở trước mặt nó. Sóng va chạm dịch chuyển nhanh hơn lửa, do đó lượng khí tham gia vào chuyển động tăng với thời gian [1)].

Với các số Reynolds đủ lớn, chuyển động của khí ở trong ống theo sau sự cháy trở nên chảy rối, và đến lượt mình nó có tác dụng gây rối ngược lại lên ngọn lửa. Trong các vấn đề về tính rối của sự cháy vẫn còn nhiều điều chưa rõ, nhưng ở đây không xét đến.

BÀI TẬP

1. Nghiên cứu tính ổn định của mặt đầu lửa phẳng với sự cháy chậm đối với các

[1)] Trong các điều kiện thực mặt đầu cháy trong ống thường là lồi đối với hỗn hợp khí ban đầu ở trước nó. Điều này dẫn đến sự xuất hiện một cơ chế đặc thù làm ổn định lửa đối với các nhiễu động cỡ nhỏ. Sự lan truyền của cháy theo các pháp tuyến với mặt đầu "làm dãn" mặt đầu, đồng thời các nhiễu động xuất hiện tại những điểm nào đó bị cuốn đi theo phương đến các thành ống và khi đạt tới thành, sẽ tắt đi (những tính dừng của dạng mặt đầu khi đó sẽ được duy trì bởi chuyển động của khí ở phía trước mặt đầu). Xem *Zeldôvits. Ia.B. Ixtratov A.G., Kiđin N.I. Librovits V.B.* Combustion Science and Technology, 1980, tập 24, trang 113.

nhiễu động nhỏ.

Giải. Ta lấy mặt phẳng gián đoạn (mặt đầu lửa) làm mặt phẳng y, z trong hệ tọa độ mà gián đoạn đứng yên; vận tốc không nhiễu động của khí hướng theo chiều dương của trục x. Một nhiễu động tuần hoàn theo thời gian và theo tọa độ y được đặt lên chuyển động với các vận tốc v_1, v_2 không đổi (ở hai bên gián đoạn). Từ các phương trình chuyển động

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho}\nabla p' \tag{1}$$

($\mathbf{v}$ và ρ được hiểu là $\mathbf{v}_1$, ρ_1 hay $\mathbf{v}_2$, ρ_2), ta thu được như ở §29 phương trình

$$\Delta p' = 0. \tag{2}$$

Trên mặt gián đoạn (nghĩa là với $x \approx 0$), các điều kiện sau phải được thỏa mãn: phương trình liên tục của áp suất

$$p_1' = p_2', \tag{3}$$

phương trình liên tục của thành phần vận tốc tiếp tuyến với mặt

$$v_{1y}' + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = v_{2y}' + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{4}$$

(trong đó $\zeta(y,t)$ là độ dịch chuyển nhỏ của mặt gián đoạn dọc theo trục x khi có nhiễu động) và điều kiện về tính bất biến của vận tốc pháp tuyến của khí đối với gián đoạn

$$v_{1x}' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_{2x}' - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Trong miền $x < 0$ (khí ban đầu 1), nghiệm của các phương trình (1) và (2) được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} &v_{1x}' = Ae^{iky+kx-i\omega t}, \quad v_{1y}' = iAe^{iky+kx-i\omega t}, \\ &p_1' = A\rho_1\left(\frac{i\omega}{k} - v_1\right)e^{iky+kx-i\omega t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Trong miền $x > 0$ (khí 2, các sản phẩm cháy) ngoài nghiệm có dạng const. $e^{iky-kx-i\omega t}$ còn phải xét một nghiệm đặc biệt khác của các phương trình (1) và (2), trong đó sự phụ thuộc của các đại lượng vào y và t được xác định bởi cùng thừa số $e^{iky-i\omega t}$. Nghiệm này thu được nếu đặt $p' = 0$; khi đó trong phương trình Euler, vế thứ hai biến mất và phương trình thuần nhất còn lại có một nghiệm, trong đó

$$v_x', v_y' \sim \exp\left\{iky - i\omega t + \frac{i\omega}{v}x\right\}.$$

Lý do để ta chỉ xét nghiệm này đối với khí 2, mà không đối với khí 1 là vì, mục đích cuối cùng của ta là xác định xem có tồn tại các tần số ω với phần ảo là dương hay không; nhưng đối với các ω như thế, thừa số $e^{i\omega x/v}$ tăng vô hạn theo

có xét đến ảnh hưởng của trọng trường và các lực mao dẫn (*L.Đ. Landau*, 1944).

Giải. Chúng ta coi vùng cháy ở trong hơi gần mặt chất lỏng như một mặt gián đoạn, nhưng bây giờ, ta gán cho mặt đó sức căng mặt α. Các phép tính tiếp theo hoàn toàn tương tự với các phép tính của bài tập 1, chỉ có điểm khác là thay cho điều kiện biên (3), bây giờ là

$$p_1' - p_2' = -\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (\rho_1 - \rho_2) g\zeta$$

(môi trường *1* là chất lỏng, còn môi trường *2* là chất khí bị đốt). Các điều kiện (4) và (5) vẫn không thay đổi. Thay cho phương trình (9), bây giờ ta thu được

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + \left[k^2(v_1 - v_2) + \frac{gk(\rho_1 - \rho_2) + \alpha k^3}{j} \right] v_1 v_2 = 0.$$

Điều kiện ổn định của chế độ đang xét đòi hỏi các nghiệm của phương trình này phải có các phần thực âm, nghĩa là số hạng tự do của phương trình phải dương với mọi k tùy ý. Yêu cầu này dẫn tới điều kiện ổn định:

$$j^4 < \frac{4\alpha g \rho_1^2 \rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Vì mật độ các sản phẩm cháy dạng khí nhỏ so với mật độ chất lỏng ($\rho_1 >> \rho_2$), nên điều kiện này thực tế rút về bất đẳng thức

$$j^4 < 4\alpha g \rho_1 \rho_2^2.$$

3. Xác định sự phân bố nhiệt độ ở trong khí trước mặt đầu lửa phẳng.

Giải. Trong hệ tọa độ chuyển động cùng với mặt đầu lửa, sự phân bố nhiệt độ là dừng, còn khí chuyển động với vận tốc $-v_1$. Phương trình dẫn nhiệt

$$\mathbf{v}\nabla T = -v_1 \frac{dT}{dx} = \chi \frac{d^2T}{dx^2}$$

có nghiệm

$$T = T_o e^{-v_1 x/\chi},$$

trong đó T_o là nhiệt độ ở mặt đầu lửa, tính từ nhiệt độ ở xa mặt đầu lửa.

§129. SỰ NỔ

Trong chế độ cháy chậm mô tả trên, sự lan truyền của nó ở trong khí được gây bởi sự nung nóng, xuất hiện do có sự truyền nhiệt trực tiếp từ

khí đang cháy đến khí còn chưa cháy. Cũng có thể có một cơ chế lan truyền cháy hoàn toàn khác, có liên quan đến các sóng va chạm. Sóng va chạm nung nóng khí khi nó đi qua – nhiệt độ của khí ở sau sóng lớn hơn nhiệt độ ở trước sóng. Nếu cường độ của sóng va chạm đủ lớn, thì sự tăng nhiệt độ do nó gây ra có thể đủ để mồi cho sự cháy bắt đầu. Trong quá trình chuyển động, sóng va chạm có thể nói là "nhóm lửa" cho hỗn hợp khí, nghĩa là sự cháy lan truyền với vận tốc bằng vận tốc sóng, còn nhanh hơn nhiều đối với sự cháy thông thường. Một cơ chế lan truyền cháy như thế được gọi là *sự nổ*.

Khi sóng va chạm đi qua một nơi nào đó của khí, thì một phản ứng được bắt đầu tại nơi đó, sau đó nó tiếp tục cho đến khi toàn bộ khí bị đốt cháy tại nơi đó, nghĩa là trong khoảng thời gian τ [1)] nào đó đặc trưng cho động học của phản ứng đã cho. Do đó, rõ ràng là, sóng va chạm kéo theo sau nó một lớp cùng chuyển động với nó, trong đó có xảy ra sự cháy, bề dầy của lớp này bằng tích của vận tốc truyền sóng và thời gian τ. Điều quan trọng là, nó không phụ thuộc vào các kích thước của vật có mặt trong bài toán cụ thể đã cho. Do đó, với các kích thước đặc trưng cho bài toán đủ lớn, có thể coi sóng va chạm cùng với miền cháy theo sau nó như là một mặt gián đoạn, ngăn cách khí bị đốt cháy với khí không bị đốt cháy. Một "mặt gián đoạn" như thế được gọi là *một sóng nổ*.

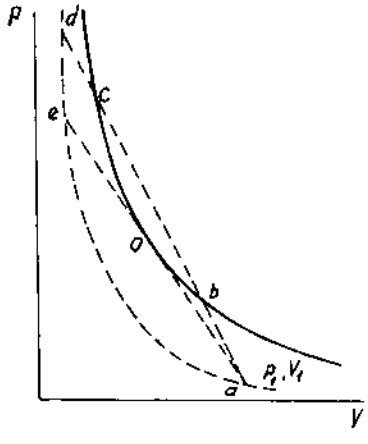
Ở trên sóng nổ, các điều kiện liên tục của các mật độ dòng khối lượng, mật độ năng thông và mật độ dòng xung lượng phải được thực hiện, ngoài ra tất cả các hệ thức từ (85.1-10) thu được trước đây cho các sóng va chạm vẫn còn đúng, chúng là các hệ quả chỉ của riêng các điều kiện đó. Đặc biệt, phương trình sau còn đúng

$$w_1 - w_2 + \frac{V_1 + V_2}{2}(p_2 - p_1) = 0 \qquad (129\text{-}1)$$

(các chữ có chỉ số 1 tại mọi nơi ký hiệu cho khí ban đầu chưa bị đốt cháy, còn các chữ có chỉ số 2 ký hiệu cho các sản phẩm cháy). *Đường đoạn nhiệt nổ* là đường cong phụ thuộc của p_2 vào V_2, xác định bởi phương trình đó. Khác với đường đoạn nhiệt va chạm trước đây, đường

[1)] Tuy nhiên, thời gian này bản thân nó phụ thuộc vào cường độ sóng va chạm: nó giảm nhanh với sự tăng của cường độ sóng do có sự tăng của tốc độ xảy ra phản ứng khi nhiệt độ tăng.

cong này không đi qua điểm ban đầu đã cho p_1, V_1. Đường đoạn nhiệt va chạm đi qua điểm nói trên, tính chất đó là do w_1 và w_2 đều là các hàm như nhau lần lượt của p_1, V_1 và p_2, V_2, điều này bây giờ không xảy ra, do có sự khác nhau về bản chất hóa học của hai khí. Trên hình 132, đường vẽ liền nét biểu diễn đường đoạn nhiệt nổ. Đường đoạn nhiệt va chạm thông thường cho hỗn hợp cháy ban đầu được vạch qua điểm p_1, V_1 bằng đường chấm chấm với tính cách là đường cong bổ trợ. Đường đoạn nhiệt nổ bao giờ cũng nằm trên đường đoạn nhiệt va chạm, vì khi cháy nhiệt độ cao được phát triển lên và áp suất của khí tăng so với áp suất của khí không bị đốt với cùng thể tích riêng.



hình 132

Đối với mật độ dòng vật chất, ta có công thức trước đây (85-6)

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}, \qquad (129\text{-}2)$$

do đó, ở đây về mặt đồ thị j^2 cũng như trước biểu diễn tang góc nghiêng của dây cung vạch từ p_1, V_1 đến điểm tùy ý p_2, V_2 của đường đoạn nhiệt nổ (chẳng hạn, dây cung ac ở trên hình 132). Từ hình vẽ, thấy ngay rằng, j^2 không thể có giá trị nhỏ hơn giá trị tương ứng với độ nghiêng của tiếp tuyến aO. Dòng j chính là lượng của chất đốt trong một đơn vị thời gian (tính cho 1 cm^2 của mặt sóng nổ); ta nhận thấy rằng, khi nổ đại lượng này không thể nhỏ hơn một giới hạn xác định j_{min} nào đó (giới hạn này phụ thuộc vào trạng thái đầu của khí ban đầu).

Công thức (129-2) là hệ quả của riêng các điều kiện liên tục của các dòng khối lượng và xung lượng. Do đó, phương trình (129-2) đúng (đối với trạng thái ban đầu đã cho của khí) không những đối với trạng thái cuối của các sản phẩm cháy, mà còn đúng cho tất cả các trạng thái trung gian, trong đó chỉ một phần năng lượng của phản ứng [1] được tỏa

[1] ở đây giả thiết rằng, có thể bỏ qua sự khuếch tán và độ nhớt trong vùng cháy, do đó sự chuyển vận khối lượng và xung lượng chỉ được thực hiện nhờ vào phương trình thuỷ động lực.

ra. Nói cách khác, áp suất p và thể tích riêng V của chất trong tất cả các trạng thái đó đều có quan hệ với nhau bằng hệ thức tuyến tính sau

$$p = p_1 + j^2(V_1 - V) \qquad (129\text{-}3)$$

hệ thức này được biểu diễn trên đồ thị bằng các điểm của dây cung ad (*V. A. Mikhel'son*, 1890).

Bây giờ (theo *Ia. B. Zeldôvits,* 1940) ta theo dõi tiến trình biến thiên của trạng thái chất dọc theo một lớp có bề rộng hữu hạn, thực tế đó là một sóng nổ. Mặt đầu trước của sóng nổ là một sóng va chạm thực trong khí *1* (hỗn hợp cháy ban đầu). Chất ở đó bị nén và bị nung nóng, dưa đến trạng thái biểu diễn bởi điểm d (hình 132) ở trên đường đoạn nhiệt va chạm của khí *1*. Ở trong chất bị nén phản ứng hóa học bắt đầu, trong quá trình phản ứng tiếp diễn trạng thái của chất được biểu diễn bởi một điểm đi xuống ở trên dây cung da; nhiệt lượng khi đó tỏa ra, chất dãn nở và áp suất của nó giảm xuống. Phản ứng tiến triển như vậy cho đến khi sự cháy kết thúc và toàn bộ nhiệt lượng của phản ứng được tỏa ra. Vào lúc đó điểm c ở trên đường đoạn nhiệt nổ biểu diễn các trạng thái cuối cùng của các sản phẩm cháy. Còn đối với điểm ở dưới giao điểm b của dây ad với đường đoạn nhiệt nổ, thì đó là điểm không đạt được đối với chất, mà trong đó sự cháy dược gây bởi sự nén và sự nung nóng chất ở trong sóng va chạm [1].

Như vậy, chúng ta đi tới kết luận quan trọng là, sự nổ không tương ứng với toàn bộ đường đoạn nhiệt nổ mà chỉ tương ứng với phần trên của nó, nằm ở phía trên điểm O, là điểm tiếp xúc của đường đoạn nhiệt với đường thẳng aO vạch từ điểm ban đầu a.

Ở §87, ta đã chứng minh rằng, tại điểm đó $d(j^2)/dp_2 = 0$, (nghĩa là dây cung *12* tiếp xúc với đường đoạn nhiệt va chạm), vận tốc v_2 bằng giá trị tương ứng của vận tốc âm c_2. Kết quả này đã thu được chỉ từ các định luật bảo toàn ở trên mặt gián đoạn, do đó chúng có toàn quyền được áp dụng cho sóng nổ. Trên đường đoạn nhiệt va chạm thông thường cho một khí, các điểm như thế không tồn tại (như ta đã chứng tỏ tại đó).

[1] Để cho những lập luận được đầy đủ, còn phải nêu lên rằng sự chuyển dạng bước nhảy từ trạng thái c sang trạng thái b trong một sóng va chạm khác cũng không thể xảy ra được, vì khí sẽ phải cắt một sóng như vậy theo chiều từ các áp suất lớn đến các áp suất nhỏ hơn, một điều không thể xảy ra được.

Nhưng trên đường đoạn nhiệt nổ, một điểm như thế tồn tại, đó là điểm O. Đồng thời với đẳng thức $v_2 = c_2$ trong sóng như thế cũng có bất đẳng thức (87-10) $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$, và vì thế với các p_2 lớn, nghĩa là phía trên điểm O, vận tốc $v_2 < c_2$. Vì chỉ có phần trên của đường đoạn nhiệt phía trên điểm O tương ứng với sự nổ, nên ta đi tới kết quả là

$$v_2 \leq c_2 \tag{129-4}$$

nghĩa là, sóng nổ chuyển động đối với khí ở lại ngay sau nó với vận tốc bằng hay nhỏ hơn vận tốc âm; đẳng thức $v_2 = c_2$ xảy ra đối với sự nổ tương ứng với điểm O (gọi là *điểm Chapman - Jouguet*) [1].

Vận tốc của sóng đối với khí *1* bao giờ cũng là vượt âm (kể cả đối với điểm O):

$$v_1 > c_1 \tag{129-5}$$

Điều này có thể thấy được một cách đơn giản nhất ở trên hình 132. Vận tốc âm c_1 được biểu diễn bởi độ nghiêng của tiếp tuyến với đường đoạn nhiệt va chạm của khí *1* (đường cong chấm chấm) tại điểm a. Vận tốc v_1 được xác định bởi độ nghiêng của dây cung ac. Vì tất cả các dây cung đang xét đều dốc hơn đường tiếp tuyến đã nói, nên bao giờ cũng có $v_1 > c_1$. Khi dịch chuyển với vận tốc vượt âm, sóng nổ cũng như sóng va chạm đều không ảnh hưởng đến trạng thái của khí ở trước nó. Vận tốc dịch chuyển v_1 của sóng đối với khí đứng yên ban đầu chính là vận tốc truyền của sự nổ ở trong hỗn hợp cháy.

Vì $v_1/V_1 = v_2/V_2 \equiv j$ và $V_1 > V_2$, nên $v_1 > v_2$. Hiệu $v_1 - v_2$ hiển nhiên là vận tốc chuyển động của các sản phẩm cháy đối với khí không bị đốt. Hiệu này là dương, nghĩa là các sản phẩm cháy chuyển động theo chiều lan truyền của sóng nổ.

Ta nhận xét thêm tình hình sau. Ở §87 cũng đã chứng tỏ rằng $ds_2/d(j^2) > 0$. Do đó, tại điểm mà j^2 có cực tiểu thì cả s_2 cũng có cực tiểu. Điểm O đúng là một điểm như thế, và từ đó ta kết luận rằng, nó tương ứng với giá trị cực tiểu của entrôpi s_2 ở trên đường đoạn nhiệt nổ. Entrôpi s_2 cũng có cực trị tại điểm O, nếu ta theo dõi sự biến thiên trạng thái dọc theo đường thẳng ae (vì các độ nghiêng của đường cong và đường

[1] Cần nhớ rằng, bao giờ ta cũng hiểu v_1, v_2 tại mọi nơi là các vận tốc theo phương pháp tuyến với mặt gián đoạn.

tiếp tuyến tại O trùng nhau). Tuy nhiên, cực trị này là một cực đại (*V.A. Mikhel'son*). Thực vậy, sự dịch chuyển từ e về O tương ứng với một sự biến thiên trạng thái trong quá trình diễn biến của phản ứng cháy trong hỗn hợp bị nén, kéo theo sự tỏa nhiệt và sự tăng của entrôpi; nhưng sự chuyển từ O đến a tương ứng với sự chuyển hóa thu năng lượng của các sản phẩm cháy thành chất ban đầu có entrôpi nhỏ hơn.

Nếu sự nổ được gây bởi sóng va chạm xuất hiện do một nguồn bên ngoài nào đó tạo ra, và đập tới hỗn hợp cháy thì một điểm bất kỳ nào đó nằm ở phần trên của đường đoạn nhiệt nổ có thể tương ứng với một sự nổ như thế. Tuy nhiên sự nổ xuất hiện tự phát do bởi chính quá trình cháy đặc biệt đáng chú ý. Trong tiết sau, ta sẽ thấy rằng trong một số trường hợp quan trọng một sự nổ như thế nhất thiết phải tương ứng với điểm Chapman - Jouguet, do đó vận tốc của sóng nổ đối với các sản phẩm cháy ở lại ngay sau nó đúng bằng vận tốc âm, còn vận tốc đối với khí ban đầu $v_1 = jV_1$ có giá trị khả dĩ cực tiểu [1].

Bây giờ, chúng ta sẽ rút ra các hệ thức giữa các đại lượng khác nhau trong sóng nổ ở trong khí polytropic. Nếu thay vào trong phương trình tổng quát (129-1) hàm nhiệt dưới dạng

$$w = w_o + c_p T = w_o + \frac{\gamma pV}{\gamma - 1},$$

thì ta sẽ thu được

$$\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} p_2 V_2 - \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1} p_1 V_1 - V_1 p_2 + V_2 p_1 = 2q, \qquad (129\text{-}6)$$

trong đó, lại ký hiệu $q = w_{01} - w_{02}$ là nhiệt lượng phản ứng (qui về nhiệt độ không tuyệt đối). Đường cong $p_2(V_2)$ xác định bởi phương trình đó là một hypecbon đều. Khi $p_2/p_1 \to \infty$, tỷ số của các mật độ tiến đến giới hạn xác định

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1};$$

[1] Điều khẳng định này đã được *D. Chapman* (1899) và *E. Jouguet* (1905) giả thiết, và được *Ia.B. Zeldôvits* (1940) xác nhận bằng lý thuyết và sau đó bởi *Neumann* (*J.von Neumann*, 1942 và *Doring*, 1943).

đó là độ nén cực đại của chất có thể đạt được trong sóng nổ.

Các công thức sẽ đơn giản đi trong trường hợp quan trọng của các sóng nổ mạnh khi nhiệt lượng của phản ứng tỏa ra lớn so với nội năng nhiệt của khí ban đầu, nghĩa là $q >> c_{v1}T_1$. Trong trường hợp này, có thể bỏ qua các số hạng chứa p_1, ở trong (129-6) và viết

$$p_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}V_2 - V_1\right) = 2q. \qquad (129\text{-}7)$$

Ta khảo sát chi tiết hơn sự nổ tương ứng tại điểm Chapman - Jouguet, sự nổ này như đã nói, có một tầm quan trọng đặc biệt. Tại điểm đó, ta có:

$$j^2 = \frac{c_2^2}{V_2^2} = \frac{\gamma_2 p_2}{V_2}.$$

Xuất phát từ hệ thức này và hệ thức (129-2), ta có thể biểu diễn p_2 và V_2 dưới dạng

$$p_2 = \frac{p_1 + j^2V_1}{\gamma_2+1}, \qquad V_2 = \frac{\gamma_2(p_1 + j^2V_1)}{j^2(\gamma_2+1)}. \qquad (129\text{-}8)$$

Bây giờ nếu thay các biểu thức này vào trong (129-6) và đưa vào vận tốc $v_1 = jV_1$ thay cho dòng j, sau khi rút gọn, ta sẽ thu được phương trình trùng phương sau đây cho v_1:

$$v_1^4 - 2v_1^2\left[(\gamma_2^2 - 1)q + (\gamma_2^2 - \gamma_1)c_{v1}T_1\right] + \gamma_2^2(\gamma_1 - 1)^2 c_{v1}^2 T_1^2 = 0$$

(nhiệt độ được đưa vào đây dựa theo $T = pV/(c_p - c_v) = pV/c_v(\gamma - 1)$. Từ đó ta có [1])

[1] Nếu $x^4 - 2px^2 + q = 0$, thì

$$x = \sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q}} = \sqrt{\frac{p+\sqrt{q}}{2}} \pm \sqrt{\frac{p-\sqrt{q}}{2}}.$$

Hai dấu ở trước nghiệm trong trường hợp đã cho tương ứng với sự kiện là, từ điểm a có thể vạch hai tiếp tuyến với đường đoạn nhiệt nổ – một lên phía trên, như đã trình bày trên hình vẽ và một xuống phía dưới. Tiếp tuyến trên là tiếp tuyến cần xét, có độ dốc lớn hơn, và tương ứng với điều đó ta chọn dấu dương ở phía trước nghiệm.

$$v_1 = \left\{\frac{\gamma_2 - 1}{2}\left[(\gamma_2 + 1)q + (\gamma_1 + \gamma_2)c_{v1}T_1\right]\right\}^{1/2} + \\ + \left\{\frac{\gamma_2 + 1}{2}\left[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1\right]\right\}^{1/2}. \quad (129\text{-}9)$$

Công thức này xác định vận tốc lan truyền nổ theo nhiệt độ T_1 của hỗn hợp khí ban đầu.

Chúng ta viết lại các công thức (129-8) dưới dạng

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^2 + (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}{(\gamma_2 + 1)(\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1}, \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2\left[v_1^2 + (\gamma_1 - 1)c_{v1}T_1\right]}{(\gamma_2 + 1)v_1^2}. \quad (129\text{-}10)$$

Cùng với (129-9), các công thức này xác định tỷ số các áp suất và mật độ giữa các sản phẩm cháy và chất ban đầu theo nhiệt độ T_1.

Vận tốc v_2 được tính theo $v_2 = (V_2/V_1)v_1$ dựa vào các công thức (129-9) và (129-10). Kết quả ta thu được:

$$v_2 = \left\{\frac{\gamma_2 - 1}{2}\left[(\gamma_2 + 1)q + (\gamma_1 + \gamma_2)c_{v1}T_1\right]\right\}^{1/2} + \\ + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}\left\{\frac{\gamma_2 + 1}{2}\left[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1\right]\right\}^{1/2}. \quad (129\text{-}11)$$

Còn hiệu $v_1 - v_2$, nghĩa là vận tốc của khí bị đốt đối với khí không bị đốt, có giá trị bằng

$$v_1 - v_2 = \left\{\frac{2\left[(\gamma_2 - 1)q + (\gamma_2 - \gamma_1)c_{v1}T_1\right]}{\gamma_2 + 1}\right\}^{1/2}. \quad (129\text{-}12)$$

Nhiệt độ của các sản phẩm cháy được tính theo công thức

$$c_{v2}T_2 = \frac{v_2^2}{\gamma_2(\gamma_2 - 1)} \quad (129\text{-}13)$$

(nhớ lại rằng $v_2 = c_2$).

Tất cả các công thức khá phức tạp này sẽ đơn giản đi nhiều đối với các sóng nổ mạnh. Trong trường hợp này, ta thu được cho vận tốc các công thức đơn giản sau:

$$v_1 = \sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}, \quad v_1 - v_2 = \frac{v_1}{\gamma_2 + 1}. \tag{129-14}$$

Trạng thái nhiệt động lực của các sản phẩm cháy được xác định bằng các công thức

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2(\gamma_2 - 1)}{\gamma_1 - 1}\frac{q}{c_{v1}T_1} = \frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2 + 1)c_1^2}, \tag{129-15}$$

$$T_2 = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + 1}\frac{q}{c_{v2}}.$$

So sánh các công thức (129-15) với các công thức tương tự (128-5) cho sự cháy chậm, có thể nhận thấy rằng, trong trường hợp giới hạn $q >> c_{v1}T_1$ tỷ số giữa các nhiệt độ của các sản phẩm cháy sau sự nổ và nhiệt độ sau sự cháy chậm bằng

$$\frac{T_2^{\text{nổ}}}{T_2^{\text{ch}}} = \frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2 + 1}.$$

Tỷ số này bao giờ cũng lớn hơn đơn vị (vì bao giờ, ta cũng có $\gamma_2 > 1$).

BÀI TẬP

Xác định các đại lượng nhiệt động lực của khí ở ngay sau sóng va chạm, đó là mặt đầu trước của một sóng nổ mạnh tương ứng với điểm Chapman - Jouguet.

Giải. Ở ngay sau sóng va chạm, còn có một hỗn hợp khí không bị đốt và trạng thái của nó được biểu diễn bởi giao điểm *e* của đường kéo dài tiếp tuyến *aO* (hình 132) với đường đoạn nhiệt va chạm của khí *1* (biểu diễn bằng đường chấm chấm). Ký hiệu các tọa độ của điểm đó bằng p_1', V_1', một mặt dựa theo phương trình (89-1) của đường đoạn nhiệt va chạm của khí *1*, ta có:

$$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{(\gamma_1 + 1)p_1 + (\gamma_1 - 1)p_1'}{(\gamma_1 - 1)p_1 + (\gamma_1 + 1)p_1'}$$

và mặt khác

$$\frac{p_1' - p_1}{V_1 - V_1'} = j^2 = \frac{v_1^2}{V_1^2}.$$

Lấy v_1 từ (129-14), ta được:

$$p_1' = p_1 \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{\gamma_1^2 - 1} \frac{q}{c_{v1} T_1}, \quad V_1' = V_1 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad T_1' = \frac{q}{c_{v1}} \frac{4(\gamma_2^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}.$$

Tỷ số giữa áp suất p_1' và áp suất p_2 ở sau sóng va chạm bằng

$$\frac{p_1'}{p_2} = 2\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1 + 1}.$$

§130. SỰ LAN TRUYỀN CỦA SÓNG NỔ

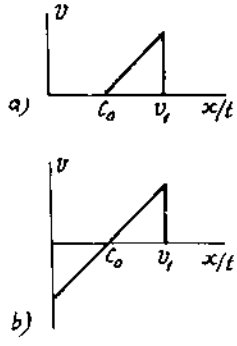
Bây giờ ta khảo sát một số trường hợp cụ thể về sự lan truyền của các sóng nổ trong một khí ban đầu đứng yên. Ta bắt đầu từ sự nổ trong khí chứa trong một ống bịt kín một đầu ($x = 0$). Trong trường hợp này, các điều kiện biên đòi hỏi vận tốc khí phải bằng không ở trước sóng nổ (sóng nổ không có ảnh hưởng đến trạng thái của khí ở phía trước nó) cũng như ở đầu bịt kín. Vì khi sóng nổ đi qua, khí thu được một vận tốc khác không, nên vận tốc của khí phải giảm trong khoảng không gian giữa sóng nổ và đầu bịt kín. Để xác định xem khi đó hình ảnh chuyển động của khí như thế nào, ta có nhận xét là, trong bài toán đang xét không có các thông số độ dài nào có thể đặc trưng cho các điều kiện chuyển động dọc theo ống dẫn (trục x). Ở §99, ta đã nhận thấy rằng, trong một trường hợp như thế sự biến thiên của vận tốc khí có thể xảy ra hoặc ở trong sóng va chạm (ngăn cách hai miền có vận tốc không đổi) hoặc ở trong sóng dãn tự đồng dạng.

Trước hết, giả sử rằng, sóng nổ không tương ứng với điểm Chapman - Jouguet. Khi đó vận tốc lan truyền của nó đối với khí ở lại sau nó $v_2 < c_2$. Dễ dàng thấy rằng, trong trường hợp đó, không thể có một sóng va chạm nào, một gián đoạn yếu nào (mặt đầu sóng dãn trước) có thể theo sau sóng nổ. Thực vậy, sóng va chạm phải dịch chuyển so với khí ở trước nó với vận tốc lớn hơn c_2 và gián đoạn yếu, với vận tốc bằng c_2; trong cả hai trường hợp chúng đều vượt sóng nổ. Như vậy, với giả thiết đã nêu, vận tốc của khí chuyển động sau sóng nổ không thể giảm, nghĩa là điều kiện biên tại $x = 0$ không thể được thỏa mãn.

Điều kiện này chỉ có thể được thỏa mãn với sóng nổ tương ứng với điểm Chapman - Jouguet. Trong trường hợp này $v_2 = c_2$ và sóng dãn có

thể theo sau sóng nổ. Xuất hiện tại điểm $x = 0$ đồng thời với sự nổ bắt đầu, sóng dãn có mặt đầu trước trùng với sóng nổ.

Như vậy, ta đi tới kết quả quan trọng là, sóng nổ lan truyền trong ống với khí được đốt ở đầu bịt kín nhất thiết phải tương ứng với điểm Chapman - Jouguet . Nó chuyển động đối với khí ở ngay sau nó với vận tốc bằng vận tốc âm cục bộ. Sóng nổ tiếp giáp với miền sóng dãn, trong đó vận tốc của khí (đối với ống) giảm đơn điệu đến không. Điểm tại đó vận tốc triệt tiêu lần đầu tiên là một gián đoạn yếu. Sau gián đoạn yếu, khí đứng yên (hình 133a).



Hình 133

Bây giờ, ta khảo sát sóng nổ lan truyền ở trong ống từ đầu hở của nó. Áp suất của khí ở trước sóng nổ phải bằng áp suất ban đầu của khí ban đầu, áp suất này hiển nhiên trùng với áp suất ngoài. Rõ ràng là, cả trong trường hợp này nữa, vận tốc phải giảm tại một nơi nào đó sau sóng nổ. Nếu vận tốc của khí không đổi trong toàn khoảng từ đầu hở của ống đến sóng nổ, thì điều đó như thể có nghĩa là, khí sẽ bị hút từ ngoài vào tại đầu hở của ống; trong khi đó áp suất của khí ở trong ống lớn hơn áp suất ngoài (vì áp suất ở sau sóng nổ lớn hơn ở trước sóng nổ), do đó một sự hút khí như thế không thể có được. Vì những lý do như vậy, cũng như trong trường hợp trước, sóng nổ phải tương ứng với điểm Chapman - Jouguet. Kết quả là ta thu được hình ảnh chuyển động được biểu diễn bằng sơ đồ ở trên hình 133b. Ngay sau sóng nổ là bắt đầu miền sóng dãn tự đồng dạng, trong đó vận tốc giảm đơn điệu về phía đầu ống, và nó đổi dấu tại một điểm nào đó. Điều đó có nghĩa là, trong một phần nào đó của đầu ống khí chuyển động về phía đầu hở và thoát ra ngoài khỏi đó; vận tốc thoát bằng vận tốc âm cục bộ và áp suất ở chỗ thoát lớn hơn áp suất ngoài (ở §97, ta đã thấy rằng, một chế độ chảy thoát như vậy có thể xảy ra được) [1].

[1] Tại mọi nơi, ta đều bỏ qua hoàn toàn các sự mất mát nhiệt có thể gây bởi sự lan truyền của sóng nổ. Cũng như trong trường hợp cháy chậm, các sự mất mát này có thể làm cho sự lan truyền nổ không thể xảy ra được. Đối với sự nổ ở trong ống, nguồn mất mát trước hết là sự thoát nhiệt qua thành ống và sự làm chậm khí do ma sát.

Tiếp theo, ta xét trường hợp quan trọng của sóng nổ đối xứng cầu phân kỳ từ tâm của nó, đó là điểm bốc cháy ban đầu của khí (*Ia.B. Zeldôvit*, 1942). Vì khí phải đứng yên ở trước sóng nổ, và cả ở gần tâm, nên ở đây vận tốc cũng phải giảm theo chiều từ sóng nổ đến tâm. Cũng như trong trường hợp chuyển động trong ống, ở đây cũng không có các thông số đặc trưng nào đã cho có thứ nguyên độ dài. Do đó, chuyển động xuất hiện của khí phải là tự đồng dạng, chỉ có điểm khác là, bây giờ khoảng cách r đến tâm giữ vai trò của tọa độ x; như vậy, tất cả các đại lượng đều phải là các hàm của tỷ số r/t [1].

Đối với chuyển động đối xứng xuyên tâm ($v_r = v(r,t)$, $v_\varphi = v_0 = 0$) các phương trình chuyển động có dạng sau.

Phương trình liên tục:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial r} + \frac{2v\rho}{r} = 0;$$

phương trình Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

.và phương trình bảo toàn entrôpi

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial r} = 0.$$

Đưa vào biến $\xi = r/t$ ($\xi > 0$) và coi rằng tất cả các đại lượng đều là các hàm chỉ của ξ, ta sẽ thu được hệ phương trình sau:

$$(\xi - v)\frac{\rho'}{\rho} = v' + \frac{2v}{\xi}, \qquad (130\text{-}1)$$

$$(\xi - v)v' = \frac{p'}{\rho}, \qquad (130\text{-}2)$$

$$(\xi - v)s' = 0 \qquad (130\text{-}3)$$

(dấu phẩy ký hiệu đạo hàm lấy theo ξ). Ở đây không thể đặt $v = \xi$, vì

[1] Biến tự đồng dạng không thứ nguyên trong bài tập này có thể được xác định như $r/t\sqrt{q}$, trong đó thông số không đổi đặc trưng q là nhiệt phản ứng cho một đơn vị khối lượng.

như thế sẽ mâu thuẫn với phương trình thứ nhất. Do đó, từ phương trình thứ ba suy ra ngay $s' = 0$, nghĩa là

$$s = \text{const}$$

Vì entrôpi không đổi, nên có thể viết $p' = c^2\rho'$ và (130-2) có dạng

$$(\xi - v)v' = c^2\frac{\rho'}{\rho} \tag{130-4}$$

Thay ρ'/ρ lấy từ (130-1) vào đây, ta thu được hệ thức sau

$$\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1\right]v' = \frac{2v}{\xi}. \tag{130-5}$$

Các phương trình (130-4) và (130-5) không thể tích phân được dưới dạng giải tích, nhưng các tính chất của những nghiệm của chúng có thể nghiên cứu được.

Miền trong đó khí thực hiện chuyển động thuộc loại đã cho, như sẽ thấy dưới đây, được giới hạn bởi hai mặt cầu, mặt cầu ngoài là mặt sóng nổ, còn mặt cầu trong là mặt gián đoạn yếu, trên đó vận tốc triệt tiêu.

Trước hết, ta nghiên cứu các tính chất của nghiệm ở gần điểm tại đó v triệt tiêu. Dễ dàng thấy rằng, tại điểm mà $v = 0$, nhất thiết có đồng thời $\xi = c$:

$$v = 0, \quad \xi = c. \tag{130-6}$$

Thực vậy, khi $v \to 0$, $\ln v \to -\infty$; do đó khi ξ giảm về phía giá trị tương ứng với biên giới trong của miền đang xét, thì đạo hàm $d(\ln v)/d\xi$ phải tiến đến $+\infty$. Nhưng từ (130-5), với $v = 0$, ta có

$$\frac{d\ln v}{d\xi} = \frac{2}{\xi(\xi^2/c^2 - 1)}.$$

Biểu thức này chỉ có thể tiến đến $+\infty$ nếu $\xi \to c$.

Tại gốc tọa độ, vận tốc xuyên tâm phải bằng không, suy ngay từ lý do đối xứng. Như vậy, ở quanh gốc tọa độ sẽ có một miền khí đứng yên (đó là miền bên trong hình cầu $\xi = c_0$, c_0 là giá trị của vận tốc âm tại điểm $v = 0$).

Ta nghiên cứu các tính chất của $v(\xi)$ ở gần điểm (130-6). Từ (130-5), ta có:

$$v\frac{d\xi}{dv} = \frac{\xi}{2}\left[\frac{(\xi - v)^2}{c^2} - 1\right].$$

Với độ chính xác đến các đại lượng nhỏ bậc một (các số hạng như thế là v, $\xi - c_0$, $c - c_0$), sau một phép tính đơn giản, ta thu được:

$$v\frac{d(\xi - c_0)}{dv} = (\xi - c_0) - (v + c - c_0).$$

Theo (102-1), ta có $v + c - c_0 = \alpha_0 v$, trong đó α_0 là một hằng số dương (giá trị của (102-2) với $v = 0$) và ta thu được phương trình vi phân tuyến tính cấp một sau đây cho $\xi - c_0$ như hàm của v:

$$v\frac{d(\xi - c_0)}{dv} - (\xi - c_0) = -\alpha_0 v.$$

Nghiệm của phương trình này là

$$\xi - c_0 = \alpha_0 v \ln\frac{\text{const}}{v}. \qquad (130\text{-}7)$$

Đó là biểu thức dưới dạng ẩn của $v(\xi)$ ở gần điểm, tại đó $v = 0$.

Ta nhận thấy rằng, biên giới trong là mặt gián đoạn yếu: vận tốc triệt tiêu tại đó, không có bước nhảy. Đường cong phụ thuộc $v(\xi)$ tại biên giới này có một tiếp tuyến nằm ngang ($dv/d\xi = 0$). Ở đây, ta có một gián đoạn yếu thuộc loại rất đặc biệt: đạo hàm cấp một ở đây liên tục và tất cả các đạo hàm cấp cao hơn đều vô hạn (điều này thấy được dễ dàng từ (130-7)). Rõ ràng là tỷ số r/t với $v = 0$ là vận tốc dịch chuyển biên giới của miền đối với khí; theo (130-6) nó bằng giá trị cục bộ của vận tốc âm, đúng phải như thế đối với một gián đoạn yếu.

Tiếp theo, từ (130-7), ta có với các v nhỏ:

$$\xi - v - c = (\xi - c_0) - (v + c - c_0) = \alpha_0 v\left(\ln\frac{\text{const}}{v} - 1\right).$$

Đại lượng này dương đối với các v nhỏ:

$$\xi - v - c > 0.$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng, hiệu $(\xi - v) - c$ không thể đổi dấu tại bất cứ nơi nào trong miền chuyển động đang xét. Ta khảo sát điểm tại đó

$$\xi - v = c, \quad v \neq 0. \tag{130-8}$$

Từ (130-5) nhận thấy rằng tại một điểm như thế đạo hàm v' phải bằng vô hạn, nghĩa là

$$\frac{d\xi}{dv} = 0. \tag{130-9}$$

Bằng phép tính đơn giản, ta tìm được cho đạo hàm cấp hai $d^2\xi/dv^2$ giá trị (với điều kiện (130-8) và (130-9)):

$$\frac{d^2\xi}{dv^2} = -\frac{\alpha_o}{c_o}\frac{\xi}{v},$$

khác không. Nhưng điều đó có nghĩa là tại điểm đang xét, ξ với tính cách là hàm của v có cực đại. Nói một cách khác, hàm $v(\xi)$ chỉ tồn tại với các ξ nằm ở phía dưới giá trị tương ứng với các điều kiện (130-8); giá trị này là biên giới thứ hai, miền đang xét không thể ở ngoài đó. Vì $\xi - v - c$ chỉ có thể triệt tiêu tại biên giới của miền và trong mọi trường hợp $\xi - v - c > 0$ với v nhỏ, nên có thể kết luận rằng

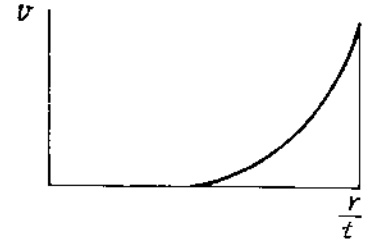
$$\xi - v > c \tag{130-10}$$

tại mọi nơi bên trong miền này.

Bây giờ dễ dàng thấy rằng, biên giới trước thực của miền chuyển động đang xét phải trùng với điểm tại đó các điều kiện (130-8) được thực hiện. Để thấy được điều đó, ta có nhận xét là, hiệu $r/t - v$, trong đó r là tọa độ của biên giới, chính là vận tốc dịch chuyển của biên giới đó đối với khí ở lại sau nó. Nhưng, mặt trên đó $r/t - v > c$ không thể là mặt sóng nổ (trên mặt sóng này phải có $r/t - v \leq c$). Do đó, ta đi tới kết quả là, biên giới trước của miền đang xét có thể chỉ là điểm tại đó (130-8) được thỏa mãn. Tại biên giới này, v giảm bằng bước nhảy đến không, và vận tốc truyền của biên giới này đối với khí ở ngay sau đó bằng vận tốc cục bộ của âm. Điều đó có nghĩa là, sóng nổ phải tương ứng với điểm Chapman - Jouguet của đường đoạn nhiệt nổ [1].

[1] Để cho những lập luận được đầy đủ, ta có nhận xét là, $v = \text{const}$ không phải là nghiệm của các phương trình chuyển động đối xứng xuyên tâm. Do đó, ở sau sóng nổ không thể có tiếp miền vận tốc không đổi.

Ta đi tới hình ảnh sau đây về chuyển động của khí với lan truyền cầu của sóng nổ. Sóng nổ, cũng như sự nổ trong ống, tương ứng với điểm Chapman - Jouguet. Ngay sau nó là một miền sóng dãn cầu tự đồng dạng, trong đó vận tốc của khí giảm đến không. Sự giảm xảy ra đơn điệu, vì theo (130-5) đạo hàm $dv/d\xi$ chỉ có thể triệt tiêu tại điểm, ở đó đồng thời $v = 0$. Cùng với vận tốc, cả áp suất và mật độ khí cũng giảm đơn điệu (vì theo (130-4) và (130-10), đạo hàm p' tại mọi nơi đều có cùng dấu với v'). Đường cong phụ thuộc của v vào r/t có trên biên giới trước một tiếp tuyến đứng (theo (130-9)) và tiếp tuyến ngang trên biên giới trong hình 134. Biên giới trong này là một gián đoạn yếu, ở gần gián đoạn này sự phụ thuộc của v vào hàm r/t được xác định bằng phương trình (130-7). Bên trong hình cầu giới hạn bởi mặt gián đoạn yếu, khí đứng yên. Nhưng khối lượng toàn phần của chất đứng yên là rất nhỏ (xem điều nhận xét ở cuối §106).



Hình 134

Như vậy, trong tất cả các trường hợp điển hình đang xét về sự lan truyền cầu tự phát một chiều của sự nổ, các điều kiện biên trong miền ở sau sóng nổ cho ta một vận tốc duy nhất của sóng này, tương ứng với điểm Chapman - Jouguet (sau khi đã loại trừ toàn bộ miền đoạn nhiệt nổ nằm ở dưới điểm đó, vì những lý do đã trình bày ở §129). Để thực hiện ở trong ống có tiết diện không đổi một sự nổ tương ứng với phần của đường đoạn nhiệt nằm trên điểm Chapman - Jouguet, cần phải nén nhân tạo các sản phẩm cháy bằng một pittông chuyển động với vận tốc vượt âm (xem bài tập 3 của tiết này). Các sóng nổ như thế được gọi là các sóng nổ *quá nén*.

Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng các kết luận này không phải có tính bất biến và có thể hình dung những trường hợp xuất hiện tự phát của sóng nổ *quá nén*. Chẳng hạn, sóng *quá nén* xuất hiện khi sóng nổ chuyển từ một ống lớn sang một ống hẹp. Hiện tượng này xuất hiện là do, khi sóng nổ tới phần hẹp của ống, thì sóng bị phản xạ một phần, do đó áp suất của các sản phẩm cháy từ phần rộng đi vào phần hẹp của

ống tăng lên đột ngột (xem bài tập 4, *B.V. Aivazov, Ia.B. Zeldôvits*, 1947) [1].

Nhân lý thuyết trình bày trong tiết này và tiết trước, cần có nhận xét tổng quát sau. Cấu trúc của sóng nổ được giả thiết trong sóng là dừng và thuần nhất theo diện tích của sóng; cấu trúc đều theo nghĩa là, sự lan truyền của tất cả các đại lượng trong vùng cháy được giả thiết là chỉ phụ thuộc vào một tọa độ – theo bề rộng của vùng. Tuy nhiên, các tài liệu thực nghiệm tích lũy được hiện nay chứng tỏ rằng, một hình ảnh như thế là một sự lý tưởng hóa đi quá xa, mà ta chỉ có thể dùng cho một sự mô tả lấy trung bình cho quá trình; hình ảnh thực quan sát được thường khác căn bản so với hình ảnh lý tưởng ở trên. Thực tế cấu trúc của sóng nổ căn bản là không dừng, căn bản là ba chiều; sóng cấu trúc phức tạp, biến thiên nhanh theo thời gian, cỡ nhỏ trên diện tích sóng. Sự xuất hiện của nó là kết quả của tính không ổn định, có liên quan trước hết đến sự phụ thuộc vào nhiệt độ (theo hàm mũ) của vận tốc phản ứng – ngay những biến thiên không lớn của nhiệt độ khi mặt đầu sóng va chạm biến dạng cũng được phản ánh mạnh lên tiến trình của phản ứng; tính không ổn định này được thể hiện càng mạnh, nếu tỷ số giữa năng lượng kích hoạt của phản ứng và nhiệt độ khí (sau sóng va chạm) càng mạnh. Đặc biệt tính không thuần nhất và tính không dừng của cấu trúc sóng nổ được thể hiện cụ thể trong các điều kiện gần với giới hạn lan truyền sóng nổ trong ống; sự bốc lửa của hỗn hợp cháy xảy ra chủ yếu ở sau các phần riêng lẻ biến dạng đột ngột nằm lệch tâm (và chuyển động theo các đường xoắn ốc). Sự nổ trong các trường hợp như thế được gọi là *sự nổ quay* (*spinning detonation*, ND). Việc nghiên cứu các cơ chế khả dĩ của tất cả các hiện tượng phức tạp này vượt ra ngoài phạm vi cuốn sách [2].

---

[1] Sự quá nén cũng xuất hiện trong sự lan truyền của sóng nổ trụ hay cầu – xem *Zeldôvits Ia.B* – JETP, 1959, T 36, trang 782.

[2] Chúng tôi nêu một số sách và bài báo tổng quan chỉ để trích dẫn: *Selkin K.I.. Trôsin Ia.G.*, Khí động lực sự cháy – M., Hayka, 1963 (sách Nga). *Soloukhin R.I.* Các sóng va chạm và sự nổ. M.,1963; *Soloukhin R.I.* – УФН, 1963. T.80, tr. 525; *Oppenheim A.K., Soloukhin R.I.* Ann. Rev. Fluid Mech. 1973.V.5, tr.31.

BÀI TẬP

1. Xác định chuyển động của khí khi có sóng nổ lan truyền trong ống từ đầu kín của nó.

Giải. Vận tốc v_1 của sóng nổ đối với khí đứng yên ở trước nó và vận tốc v_2 của nó đối với khí đã bị đốt ở ngay sau nó đều được xác định theo nhiệt độ T_1 bởi các công thức (129.11-12); v_1 đồng thời cũng là vận tốc dịch chuyển của sóng đối với ống, do đó tọa độ của nó bằng $x = v_1 t$. Vận tốc (đối với ống) của các sản phẩm cháy ở trên sóng nổ bằng $v_1 - v_2$. Vận tốc v_2 trùng với vận tốc âm cục bộ. Vì trong một sóng dãn tự đồng dạng vận tốc âm có liên quan với vận tốc v của khí bằng hệ thức $c = c_o + (\gamma - 1)v/2$, nên ta có:

$$v_2 = c_o + \frac{\gamma_2 - 1}{2}(v_1 - v_2)$$

từ đó

$$c_o = \frac{\gamma_2 + 1}{2} v_2 - \frac{\gamma_2 - 1}{2} v_1.$$

Đối với một sóng nổ mạnh, dựa vào (129-14) ta thu được đơn giản $c_o = v_1/2$. Đại lượng c_o chính là vận tốc dịch chuyển của biên giới sau của sóng dãn. Giữa hai biên giới, vận tốc biến thiên theo định luật tuyến tính (hình 133a).

2. Cũng bài tập đó cho ống có đầu hở.

Giải. Các vận tốc v_1 và v_2 được xác định như trong trường hợp trước; do đó vận tốc c_o cũng vẫn thế. Tuy nhiên, miền sóng dãn bây giờ không trải dài tới điểm tại đó $v = 0$, mà tới tận miệng ống ($x = 0$, hình 133b). Công thức $x/t = v + c$ (99-5) chứng tỏ rằng, khí thoát ra khỏi ống với vận tốc $v = -c$ bằng vận tốc âm cục bộ. Viết

$$-v = c = c_o + \frac{\gamma_2 - 1}{2} v,$$

do đó, ta thu được cho vận tốc thoát của khí giá trị sau:

$$-v\Big|_{x=0} = \frac{2c_o}{\gamma_2 + 1}.$$

Với một sóng nổ mạnh vận tốc này bằng $v_1/(\gamma_2 + 1)$ và về độ lớn nó trùng với vận tốc khí ở ngay sau sóng.

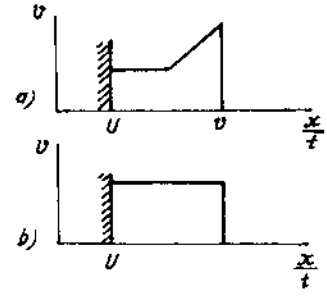
3. Cũng bài toán đó khi sóng nổ lan truyền từ đầu của ống bịt kín bằng một pittông. Tại thời điểm ban đầu, pittông này bắt đầu chuyển động về phía trước với vận tốc không đổi U.

Giải. Nếu $U < v_1$, thì sự phân bố vận tốc ở trong có dạng được biểu diễn trên hình 135a. Vận tốc của khí giảm từ giá trị $v_1 - v_2$ với $x/t = v_1$ đến U với

$$\frac{x}{t} = c_0 + \frac{\gamma_2 + 1}{2} U$$

với giá trị như trước của c_0. Tiế theo đến miền khí chuyển động với vận tốc không đổi U.

Nhưng nếu $U > v_1$ sóng nổ không còn có thể tương ứng với điểm Jouguet nữa (vì ittông đã "vượt" quá nó). Khi đó có xuất hiện một sóng nổ "quá nén" tương ứng với điểm của đường đồng dạng ở hía trên điểm Jouguet. Nó được xác định bởi sự kiện là, bước nhpy vận tốc ở trong sóng hpi đúng bằng vận tốc của ittông: $v_1 - v_2 = U$. Trong toàn miền ở giữa sóng nổ và ittông khí chuyển động với vận tốc không đổi (hình 135b).



Hình 135

4. Xác định á suất xuất hiện trên một thành rắn tuyệt đối khi có một sóng nổ hẳng mạnh đậ tới hpn xạ vuông góc ở trên thành đó (*K.P. Xtaniukovits*, 1946).

Giải. Khi một sóng nổ đậ tới một thành rắn, thì một sóng va chạm hpn xạ được tạo thành và lan truyền theo chiều ngược lại, qua các spn hẩm cháy. Các hé tính hoàn toàn giống như các hé tính trong bài tậ 1 của §100). Với cùng những ký hiệu như ở đó, trong trường hợ đã cho, ta có ba hệ thức

$$p_2(V_1 - V_2) = (p_3 - p_2)(V_2 - V_3)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1}, \qquad \frac{V_3}{V_2} = \frac{(\gamma_2 + 1)p_2 + (\gamma_2 - 1)p_3}{(\gamma_2 - 1)p_2 + (\gamma_2 + 1)p_3}$$

(bỏ qua p_1 so với p_2, nhưng p_2 và p_3 có cùng bậc độ lớn). Nếu khử đi các thể tích, ta sẽ thu được cho p_3 một hương trình toàn hương, và hpi giữ lại nghiệm sao cho $p_3 > p_2$:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{5\gamma_2 + 1 + \sqrt{17\gamma_2^2 + 2\gamma_2 + 1}}{4\gamma_2}.$$

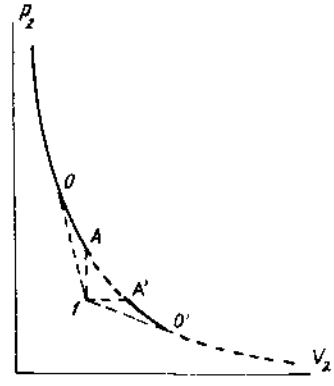
Ta có nhận xét là, tỷ số này hầu như không hụ thuộc vào γ_2, nó biến thiên trong các giới hạn từ 2,6 đến 2,3 khi γ_2 biến thiên từ 1 đến vô cùng.

§131. HỆ THỨC GIỮA CÁC CHẾ ĐỘ CHÁY KHÁC NHAU

Ở §129, ta đã chứng tỏ rằng, sự nổ tương ứng với các điểm của phần trên đường đoạn nhiệt nổ đối với một quá trình cháy đã cho. Vì phương

trình của đường đoạn nhiệt này chỉ là hệ quả của riêng các định luật bảo toàn khối lượng, bảo toàn xung lượng, bảo toàn năng lượng (ứng dụng cho các trạng thái đầu và cuối của khí cháy), nên rõ ràng đường cong này cũng phải chứa các điểm biểu diễn trạng thái của các sản phẩm phản ứng đối với bất kỳ một chế độ cháy nào khác, trong đó vùng cháy, có thể được coi như một "mặt gián đoạn" nào đó. Bây giờ, ta tìm hiểu ý nghĩa vật lý của các đoạn khác trên đường cong đó.

Ta vạch qua điểm p_1, V_1 (điểm *1* ở trên hình 136) đường thẳng đứng *1A*, đường nằm ngang *1A'* và hai đường tiếp tuyến *1O* và *1O'* với đường đoạn nhiệt. Các điểm *A*, *A'*, *O*, *O'* tiếp xúc hay các giao điểm của các đường thẳng đó và đường cong chia đường đoạn nhiệt thành năm phần. Phần đường cong nằm ở phía trên điểm *O*, như đã nói, tương ứng với sự nổ. Bây giờ, ta xét các đoạn khác của đường cong.



Hình 136

Trước hết, dễ dàng thấy rằng đoạn *AA'* hoàn toàn không có ý nghĩa vật lý. Thực vậy, trên đoạn này $p_2 > p_1$, $V_2 > V_1$, do đó dòng chất j sẽ là ảo (xem (129-2)).

Tại các điểm tiếp xúc *O* và *O'*, đạo hàm $d(j^2)/dp_2$ bằng không; ở §129 (xem tra cứu ở §87) đã chứng tỏ rằng, tại các điểm như thế có đồng thời đẳng thức $v_2 = c_2$ và bất đẳng thức $d(v_2/c_2)/dp_2 < 0$. Từ đó suy ra rằng ở phía trên các điểm tiếp xúc $v_2 < c_2$ và ở phía dưới $v_2 > c_2$. Hệ thức tương hỗ giữa các vận tốc v_1 và c_1 bao giờ cũng có thể thiết lập được dễ dàng bằng cách xét độ nghiêng của các dây cung và tiếp tuyến tương ứng, tương tự như đã được tiến hành ở §129 đối với đoạn đường cong ở phía trên điểm *O*. Kết quả là, ta tìm được rằng, trên các đoạn khác nhau riêng lẻ của đường đoạn nhiệt các bất đẳng thức sau được thỏa mãn:

Ở phía trên điểm *O*: $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$;

Trên đoạn *AO*: $v_1 > c_1$, $v_2 > c_2$;

Trên đoạn $A'O'$: $v_1 < c_1$, $v_2 < c_2$; (131-1)

Dưới điểm O': $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$.

Tại các điểm O và O' ta có $v_2 = c_2$. Khi đến gần điểm A, dòng j và cùng với nó cả các vận tốc v_1, v_2 đều tiến đến vô cùng. Tuy nhiên, khi đến gần A', dòng j và các vận tốc v_1, v_2 tiến đến không.

Ở §88 đã đưa vào khái niệm về tính tiến hóa của các sóng va chạm như điều kiện cần về khả năng thực hiện chúng. Ta nhận thấy rằng, tiêu chuẩn này được thiết lập bằng sự so sánh số các thông số xác định nhiễu động và số các điều kiện mà nhiễu động phải thỏa mãn trên chính mặt gián đoạn.

Tất cả các nhận định đó có thể được áp dụng cả cho việc nghiên cứu các "mặt gián đoạn" đang xét ở đây. Đặc biệt, vẫn còn hiệu lực cả phép tính thực hiện ở §88 về số các thông số của nhiễu động đối với mỗi một trong bốn trường hợp (131-1) đã được biểu diễn ở trên hình 57. Đối với chế độ nổ (đường đoạn nhiệt phía trên điểm O) số các điều kiện biên cũng giống như đối với sóng va chạm thông thường, và điều kiện tiến hóa vẫn như cũ. Còn đối với chế độ không nổ (đường đoạn nhiệt ở phía dưới điểm O) tình hình thay đổi do có sự thay đổi số các điều kiện biên. Vấn đề ở chỗ, trong một chế độ cháy như thế, vận tốc lan truyền của nó hoàn toàn được xác định bởi các tính chất của chính phản ứng hóa học và các điều kiện truyền nhiệt từ vùng cháy sang hỗn hợp không bị đốt ở phía trước vùng đó. Điều đó có nghĩa là, dòng chất j đi qua vùng cháy bằng một đại lượng xác định đã cho (chính xác hơn, bằng một hàm xác định của trạng thái khí ban đầu I), trong khi đó ở trong một sóng va chạm hay sóng nổ j có thể có một giá trị tùy ý. Từ đó suy ra rằng, trên các gián đoạn biểu diễn vùng cháy không nổ số các điều kiện biên nhiều hơn một đơn vị so với ở trên sóng va chạm – thêm vào điều kiện để xác định giá trị của j. Như vậy, có tất cả bốn điều kiện, và cũng như đã tiến hành ở §87, bây giờ có thể kết luận rằng, gián đoạn chỉ không ổn định tuyệt đối trong trường hợp $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, là trường hợp được biểu diễn bằng các điểm trên phần đoạn nhiệt ở phía dưới O'. Ta đi tới kết luận là, phần đường cong này không tương ứng với bất kỳ một chế độ cháy nào thực hiện được trong thực tế.

Đoạn $A'O'$ của đường đoạn nhiệt, trên đó cả hai vận tốc v_1 và v_2 đều dưới âm, tương ứng với chế độ cháy chậm thông thường. Sự tăng của vận tốc cháy j tương ứng với sự dịch chuyển từ A' (tại đó $j = 0$) về O' ở trên đoạn $A'O'$ của đường đoạn nhiệt. Các công thức (128-5) đã viết ở §128 tương ứng với điểm A' (tại đó $p_1 = p_2$) còn áp dụng được chừng nào j còn đủ nhỏ, nghĩa là chừng nào vận tốc lan truyền cháy còn nhỏ so với vận tốc âm. Điểm O' tương ứng với chế độ "nhanh nhất" giới hạn thuộc loại đang xét. Ta sẽ nêu ở đây các công thức thuộc về trường hợp giới hạn đó.

Cũng như O, điểm O' là tiếp điểm của đường cong với tiếp tuyến vạch từ điểm 1. Do đó, các vận tốc xét cho điểm O' có thể thu được trực tiếp từ các công thức (129.8-11) xét cho điểm O bằng cách đổi dấu thích hợp (xem bị chú ở trang 788). Cụ thể là, trong các công thức (129-9) và (129-11) của v_1 và v_2, cần phải đổi dấu ở trước căn số thứ hai, do đó dấu của biểu thức (129-12) cho $v_1 - v_2$ cũng đổi dấu. Các công thức (129-10) vẫn không thay đổi nếu v_1 được hiểu lấy giá trị mới của nó. Tất cả các công thức này sẽ đơn giản đi nhiều khi nhiệt lượng của phản ứng lớn ($q >> c_{v1}T_1$). Khi đó, ta thu được:

$$v_1 = \frac{\gamma_2 p_1 V_1}{\sqrt{2(\gamma_2^2 - 1)q}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2(\gamma_2 - 1)q}{\gamma_2 + 1}},$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\gamma_2 + 1}, \qquad c_{v2}T_2 = \frac{2q}{\gamma_2(\gamma_2 + 1)}. \tag{131-2}$$

Có một điều cần nói thêm ở đây. Ta đã nhận thấy rằng, trong sự cháy chậm ở trong ống kín, một sóng va chạm tất yếu xuất hiện trước vùng cháy. Đối với các vận tốc cháy lớn, cường độ sóng đó lớn và nó làm thay đổi cơ bản trạng thái của hỗn hợp khí khi đi vào vùng cháy. Do đó, nói đúng ra, thật là vô nghĩa nếu theo dõi sự biến thiên của chế độ cháy khi tăng vận tốc của nó đối với một trạng thái đã cho p_1, V_1 của hỗn hợp cháy ban đầu. Để đạt tới điểm O', cần phải tạo ra các điều kiện cháy sao cho không một sóng va chạm nào có thể xuất hiện. Chẳng hạn, điều đó có thể thực hiệu được đối với sự cháy ở trong một ống hở hai đầu, với các sản phẩm cháy được liên tục "hút" ra khỏi đầu sau của ống. Vận tốc "hút" phải được chọn sao cho vùng cháy vẫn đứng yên, và do đó không

xuất hiện sóng va chạm [1].

Đoạn AO của đường đoạn nhiệt tương ứng với chế độ cháy không nổ, lan truyền với vận tốc vượt âm. Về nguyên tắc, nó có thể xuất hiện với sự có mặt của các điều kiện truyền nhiệt rất tốt (chẳng hạn, sự truyền nhiệt bằng bức xạ) dẫn tới các vận tốc cháy j vượt giá trị ứng với điểm O'.

Để kết luận cần chú ý đến những sự khác biệt tổng quát sau đây (ngoài những sự khác biệt chứa đựng trong các bất đẳng thức (131-1)) giữa các chế độ được biểu diễn lần lượt bằng các phần trên và phần dưới của đường đoạn nhiệt. Ở phía trên điểm A ta có:

$$p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1, \quad v_2 < v_1.$$

Nói một cách khác, các sản phẩm của phản ứng được nén đến các áp suất và mật độ cao hơn chất ban đầu, và chuyển động theo sau mặt đầu cháy (*combustion front*. ND) (với vận tốc $v_1 - v_2$). Còn trong miền dưới điểm A, ta có các bất đẳng thức ngược:

$$p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1, \quad v_2 > v_1;$$

các sản phẩm cháy được dãn ra so với chất ban đầu.

§132. CÁC BƯỚC NHẢY NGƯNG TỤ

Các *bước nhảy ngưng tụ*, xuất hiện chẳng hạn trong sự chuyển động của một khí chứa hơi nước quá bão hòa [2], có một sự giống nhau về mặt hình thức với các sóng nổ. Các bước nhảy đó là kết quả của một sự ngưng tụ đột ngột của hơi nước, thêm vào đó quá trình ngưng tụ xảy ra rất nhanh trong một vùng rất hẹp, mà ta có thể coi như một mặt gián đoạn nào đó ngăn cách khí ban đầu với khí chứa hơi ngưng tụ "sương". Cần nhấn mạnh rằng, các bước nhảy ngưng tụ tạo nên một hiện tượng vật lý độc lập, mà không phải là kết quả của một sự nén khí trong một

[1] Sự cháy chậm thông thường ở trong ống có thể chuyển tự hát thành sự nổ. Sự tăng tốc lan truyền lửa tự hát xuất hiện trước hiện tượng trên, còn sóng nổ xuất hiện trước sự lan truyền lửa. Sự hân tích các cơ chế khp dĩ của các quá trình này có thể tìm trong các cuốn sách được nêu ở các trang 783, 803.

[2] Việc nghiên cứu các vấn đề này về mặt lý thuyết được *K. Oswatitsch*, (1942) và *X.Z. Belenki*, (1945) gipi quyết.

sóng va chạm thông thường; sự nén khí này hoàn toàn không thể dẫn đến sự ngưng tụ của hơi, vì hiệu ứng tăng áp suất ở trong sóng va chạm, xét về ảnh hưởng của nó đến độ quá bão hòa, bị che lấp bởi hiệu ứng ngược của sự tăng nhiệt độ.

Cũng như phản ứng cháy, sự ngưng tụ của hơi là một quá trình tỏa nhiệt. Khi đó nhiệt lượng tỏa ra trong sự ngưng của hơi chứa trong một đơn vị khối lượng của khí [1] giữ vai trò của nhiệt phản ứng q. Đường đoạn nhiệt ngưng tụ xác định sự phụ thuộc của p_2 vào V_2 đối với một trạng thái đã cho p_1, V_1 của khí ban đầu với các hơi không ngưng tụ có cùng dạng như đường đoạn nhiệt của phản ứng cháy ở hình 136. Sự tương quan giữa các vận tốc lan truyền bước nhảy v_1, v_2 với các vận tốc âm c_1, c_2 ở trong các đoạn khác nhau của đường đoạn nhiệt ngưng tụ được xác định bởi các bất đẳng thức (131-1). Ty nhiên, không phải tất cả bốn trường hợp nêu trong (131-1) đều được thực hiện thực sự.

Trước hết xuất hiện vấn đề về tính tiến hóa của các bước nhảy ngưng tụ. Về phương diện này, các tính chất của chúng hoàn toàn tương tự với các tính chất của các gián đoạn biểu diễn vùng cháy. Chúng ta đã thấy rằng (§131), sự ổn định của các gián đoạn này khác với sự ổn định của các sóng va chạm thông thường liên quan đến sự có mặt của một điều kiện phụ (giá trị đã cho của dòng j) ở trên mặt của chúng. Trong trường hợp đã cho, cũng có một điều kiện phụ – trạng thái nhiệt động lực của khí *1* ở trước gián đoạn phải đúng là trạng thái tương ứng với sự bắt đầu ngưng tụ nhanh của hơi (điều kiện này là hệ thức xác định giữa áp suất và nhiệt độ của khí *1*). Do đó, có thể kết luận ngay rằng, toàn bộ đoạn đường đoạn nhiệt nằm ở phía dưới điểm O' trên đoạn này $v_1 < c_1$, $v_2 > c_2$, đều phải loại trừ vì nó không tương ứng với các bước nhảy ổn định.

Dễ dàng thấy rằng, các bước nhảy tương ứng với đoạn nằm ở phía trên điểm O ($v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$) cũng không thể được thực hiện thực sự. Một bước nhảy như thế sẽ dịch chuyển đối với khí nằm ở trước nó với vận tốc vượt âm, do đó sự xuất hiện của nó không ảnh hưởng gì đến trạng

[1] Nói một cách chặt chẽ, nhiệt lượng q không trùng với ẩn nhiệt ngưng tụ thông thường, vì quá trình xpy ra trong vùng ngưng tụ không những bao hàm sự ngưng tụ đẳng nhiệt của hơi, mà còn bao hàm cp một sự biến thiên tổng quát nào đó của nhiệt độ khí. Nhưng nếu độ quá bão hòa của hơi không quá nhỏ (như thường xpy ra), thì sự khác nhau này không quan trọng.

thái của khí đó. Điều đó có nghĩa là, bước nhảy phải xuất hiện trên một mặt được xác định trước bởi các điều kiện của dòng chảy bao quanh (tức là mặt trên đó các định luật cần cho sự bắt đầu ngưng tụ nhanh sẽ được thực hiện với dòng chảy liên tục). Mặt khác, vận tốc của bước nhảy đối với khí ở lại sau nó, trong trường hợp đã cho, là dưới âm. Nhưng các phương trình của một chuyển động dưới âm nói chung không có các nghiệm, trong đó tất cả các đại lượng lấy các giá trị được xác định trước ở trên một mặt đã cho tùy ý [1].

Như vậy, có thể chỉ có hai loại bước nhảy ngưng tụ: 1) các bước nhảy vượt âm (đoạn AO của đường đoạn nhiệt), trên đó

$$v_1 > c_1, \quad v_2 > c_2, \quad p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1 \tag{132-1}$$

trong đó, sự ngưng tụ kéo theo sự nén chất; 2) các bước nhảy dưới âm (đoạn $A'O'$ của đường đoạn nhiệt), trên đó

$$v_1 < c_1, \quad v_2 < c_2, \quad p_2 < p_1, \quad V_2 > V_1 \tag{131-2}$$

và sự ngưng tụ được tiến hành với sự dãn khí.

Giá trị của dòng j (của vận tốc ngưng tụ) tăng đơn điệu dọc theo đoạn $A'O'$ từ điểm A' (tại đó $j = 0$) đến điểm O', và giảm đơn điệu dọc theo đoạn AO từ điểm A (tại đó $j = \infty$) đến O. Khoảng các giá trị của j (và cùng với nó cả khoảng tương ứng của các giá trị vận tốc $v_1 = jV_1$), nằm giữa các giá trị của j tại các điểm O và O', đều bị cấm và không thể thực hiện được trong các bước nhảy ngưng tụ. Lượng (khối lượng) toàn phần của hơi ngưng thường rất nhỏ so với lượng khí cơ bản. Do vậy, ta có thể hoàn toàn coi cả hai khí *1* và *2* là các khí lý tưởng; cũng vì lý do đó, có thể coi nhiệt dung của cả hai khí bằng nhau. Khi đó giá trị v_1 tại O được xác định bởi công thức (129-9) còn tại O', bởi cùng công thức với sự đổi dấu trước căn thức thứ hai; trong các công thức này nếu đặt $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ và đưa vào vận tốc âm c_1 theo $c_1^2 = \gamma(\gamma - 1)c_v T_1$, ta sẽ tìm được khoảng cấm sau đây của các giá trị v_1:

[1] Các lậ luận tương tự vẫn còn hiệu lực cp trong trường hợ khi vận tốc toàn hần v_2 ($v_2 < c_2$ là thành hần há tuyến đối với bước nhpy) là vượt âm.

Để tránh mọi hiểu nhầm, ta có nhận xét là, một bước nhpy ngưng tụ với $v_1 > c_1$, $v_2 < c_2$ thực tế (trong các điều kiện xác định của độ ẩm và dạng của mặt có dòng bao) có thể được mô hỏng bởi một bước nhpy ngưng tụ thực với $v_1 > c_1$, $v_2 > c_2$, và bởi một sóng va chạm theo sát sau nó để biến dòng chpy thành dưới âm.

$$\sqrt{c_1^2 + \frac{\gamma^2 - 1}{2}q} - \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}q} < v_1 < \sqrt{c_1^2 + \frac{\gamma^2 - 1}{2}q} + \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{2}q}. \quad (132\text{-}3)$$

BÀI TẬP

Xác định các giá trị giới hạn của tỷ số giữa các á suất p_2/p_1 trong bước nhpy ngưng tụ, coi rằng $q/c_1^2 << 1$.

Giải. Trên đoạn $A'O'$ của đường đoạn nhiệt ngưng tụ (hình 136) tỷ số p_2/p_1 tăng đơn điệu theo hướng từ O' đến A' và lấy các giá trị trong khopng

$$1 - \gamma\sqrt{\frac{2(\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)c_1^2}} \le \frac{p_2}{p_1} \le 1.$$

Còn trên đoạn AO, tỷ số này tăng theo chiều từ A đến O, lấy các giá trị trong khopng

$$1 + \frac{\gamma(\gamma - 1)q}{c_1^2} \le \frac{p_2}{p_1} \le 1 + \gamma\sqrt{\frac{2(\gamma - 1)q}{(\gamma + 1)c_1^2}}.$$

Chương XV

THỦY ĐỘNG LỰC HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

§133. TENXƠ NĂNG - XUNG LƯỢNG CỦA CHẤT LỎNG

Sự cần thiết phải xét đến các hiệu ứng tương đối tính có thể nhất thiết chỉ là do vận tốc chuyển động vĩ mô của chất lỏng có giá trị lớn (so với vận tốc của ánh sáng). Các phương trình thủy động lực học cũng thay đổi căn bản cả khi vận tốc đó không lớn, nhưng các vận tốc của chuyển động vĩ mô của các hạt tạo thành chất lỏng có giá trị lớn.

Để rút ra các phương trình thủy động lực học tương đối tính, trước hết phải thiết lập dạng của 4-tenxơ năng - xung lượng T^{ik} của các chất lỏng chuyển động [1]. Chúng ta nhớ lại rằng, $T^{00} = T_{00}$ là mật độ năng lượng, $T^{0\alpha}/c = -T_{0\alpha}/c$ là mật độ thành phần xung lượng, các đại lượng $T^{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$ lập thành tenxơ mật độ dòng xung lượng, còn mật độ năng thông $cT^{0\alpha}$ chỉ khác mật độ xung lượng ở thừa số c^2.

Dòng xung lượng qua phần tử mặt df của mặt vật [2] chính là lực tác

---

[1] Nội dung của tiết này lặp lại ở mức độ đáng kể nội dung của II §35 và được dẫn ra ở đây để liên hệ cách trình bày.

Các ký hiệu của chương này ứng với các ký hiệu của II. Các ký hiệu Latinh i, k, l ..., lấy các giá trị 0, 1, 2, 3, còn $x^0 = ct$ là tọa độ thời gian, trong chương này c là vận tốc ánh sáng. Các chỉ số Hi lạp α, β, γ, ..., ở các chỉ số lấy các giá trị 1, 2, 3 tương ứng với các tọa độ không gian. Metric galilien (thuyết tương đối hẹp ứng với tenxơ metric với các thành phần

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

[2] Đối với vectơ ba chiều df (và vectơ vận tốc v dưới đây) trong các tọa độ đêcác, không cần phải phân biệt các thành phần contra và cova, tại mọi nơi chúng được viết với các chỉ số dưới. Cũng vậy, xét cho tenxơ đơn vị ba chiều $\delta_{\alpha\beta}$.

dụng lên phần tử đó. Do đó $T^{\alpha\beta}df_\beta$ là thành phần thứ α của lực tác dụng lên phần tử mặt. Ta xét một phần tử thể tích nào đó của chất lỏng và dùng hệ qui chiếu trong đó phần tử này đứng yên (*hệ qui chiếu riêng cục bộ* hay *hệ đứng yên cục bộ*. Các giá trị của các đại lượng trong đó được gọi là *các giá trị riêng*). Trong một hệ quy chiếu như thế, định luật Pascal đúng, nghĩa là áp suất gây bởi một phần đã cho của chất lỏng là như nhau theo tất cả các phương và tại mọi nơi đều vuông góc với diện tích chịu tác dụng của áp suất đó. Vì thế ta có thể viết

$$T_{\alpha\beta} = p\,\delta_{\alpha\beta}$$

Các thành phần $T^{0\alpha}$, biểu diễn mật độ xung lượng, đều bằng không ở trong hệ qui chiếu riêng cục bộ. Thành phần T^{00} bằng mật độ "riêng" của nội năng chất lỏng, ký hiệu trong chương này bằng e.

Như vậy, trong hệ qui chiếu đứng yên cục bộ, năng - xung lượng (đối với phần tử đã cho của chất lỏng) có dạng

$$T^{ik} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}. \qquad (133\text{-}1)$$

Bây giờ dễ dàng tìm được biểu thức T^{ik} trong hệ qui chiếu bất kỳ. Muốn vậy, ta đưa vào 4-vận tốc u^i của chuyển động chất lỏng. Trong hệ qui chiếu đứng yên cục bộ, các thành phần của 4-vận tốc của nó là $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$. Biểu thức của T^{ik}, chuyển thành (133-1) với các giá trị đó của u^i, có dạng

$$T^{ik} = w u^i u - p g^{ik}, \qquad (133\text{-}2)$$

trong đó $w = e + p$ là hàm nhiệt của một đơn vị thể tích. Đó chính là biểu thức cần tìm của tenxơ năng - xung lượng [1].

Các thành phần của T^{ik} viết dưới dạng ba chiều:

[1] Trong tất cả các công thức của chương này, các đại lượng nhiệt động lực được hiểu là các giá trị riêng của chúng. Các đại lượng như e, w (và mật độ entrôpi σ dưới đây) được tính cho một đơn vị thể tích và được ký hiệu trong hệ qui chiếu đứng yên cục bộ.

$$T^{\alpha\beta} = \frac{wv_\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + p\delta_{\alpha\beta}, \qquad T^{0\alpha} = \frac{wv_\alpha}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

$$T^{00} = \frac{w}{1-\frac{v^2}{c^2}} - p = \frac{e + p\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{133-3}$$

Các vận tốc $v << c$ và các vận tốc nhỏ của chuyển động nội tại (vi mô) của các hạt chất lỏng tương ứng với trường hợp phi tương đối tính. Khi hoàn thành việc chuyển đến giới hạn, cần nhớ lại rằng nội năng tương đối tính cũng chứa năng lượng nghỉ $n\,mc^2$ (m là khối lượng nghỉ của một hạt). Ngoài ra, cần chú ý rằng, mật độ số hạt n được tính cho đơn vị thể tích riêng; tuy nhiên trong các biểu thức phi tương đối tính, mật độ năng lượng được tính cho một đơn vị thể tích ở trong hệ qui chiếu của "phòng thí nghiệm", mà đối với hệ này phần tử chất lỏng đang xét chuyển động. Do đó, khi chuyển giới hạn cần thay thế

$$mn \to \rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \rho - \frac{\rho v^2}{2c^2},$$

trong đó ρ là mật độ khối lượng thông thường phi tương đối tính. Mật độ năng lượng phi tương đối tính (ký hiệu bằng $\rho\varepsilon$) cũng như áp suất đều nhỏ so với ρc^2.

Do đó, ta nhận thấy rằng giá trị giới hạn

$$T_{00} = \rho c^2 + \rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2},$$

nghĩa là, nó bằng mật độ năng lượng phi tương đối tính, trừ đi ρc^2. Giá trị giới hạn tương ứng của $T_{\alpha\beta}$ bằng:

$$T^{\alpha\beta} = \rho v_\alpha v_\beta + p\delta_{\alpha\beta},$$

nghĩa là, nó trùng với biểu thức thông thường của mật độ dòng xung lượng, đã được ký hiệu bằng $\Pi_{\alpha\beta}$ ở §7.

Mối liên hệ đơn giản giữa mật độ xung lượng và mật độ năng thông (khác ở thừa số c^2) không còn trong giới hạn phi tương đối tính khi

chuyển sang giới hạn phi tương đối tính, đó là do năng lượng phi tương đối tính không chứa năng lượng nghỉ. Thực vậy, các thành phần của $T^{0\alpha}/c$ lập thành vectơ ba chiều, gần đúng bằng

$$\rho\mathbf{v} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\left(\rho\varepsilon + p + \frac{\rho v^2}{2}\right).$$

Từ đó, thấy rằng giá trị giới hạn của mật độ xung lượng đơn giản bằng $\rho\mathbf{v}$, đúng như phải vậy; còn đối với mật độ năng thông, nếu bỏ số hạng $\rho c^2\mathbf{v}$ ta sẽ tìm được biểu thức $\mathbf{v}(\rho\varepsilon + p + \rho v^2/2)$, biểu thức này trùng với biểu thức đã tìm được ở §6.

§134. PHƯƠNG TRÌNH THỦY ĐỘNG LỰC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Như đã biết, các phương trình chuyển động được chứa trong các phương trình

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{134-1}$$

các phương trình này biểu diễn các định luật bảo toàn năng lượng và xung lượng của hệ vật lý, trong đó xét tenxơ T^{ik}. Dùng biểu thức (133-2) của T^{ik}, ta rút ra được từ đó các phương trình chuyển động của chất lỏng; tuy nhiên, khi đó còn phải xét bổ sung cả định luật bảo toàn số hạt, không chứa trong các phương trình (134-1). Cần nhấn mạnh rằng, tenxơ năng - xung lượng (133-2) không xét đến quá trình tiêu tán nào (kể cả độ nhớt và tính dẫn nhiệt, do đó các phương trình chuyển động ở đây xét cho chất lỏng lý tưởng).

Để phát biểu phương trình biểu diễn sự bảo toàn của số hạt trong chất lỏng (phương trình liên tục), ta đưa vào 4-vectơ dòng hạt n^i. Thành phần thời gian của nó là mật độ số hạt, còn các thành phần không gian lập thành vectơ dòng ba chiều các hạt. Hiển nhiên là, 4-vectơ n^i phải tỷ lệ với 4-vectơ u^i, nghĩa là nó phải có dạng

$$n^i = nu^i \tag{134-2}$$

trong đó n là một vô hướng; từ định nghĩa của n, thấy rõ là, vô hướng này chính là mật độ riêng số hạt [1]. Phương trình liên tục được biểu diễn đơn giản bằng cách triệt tiêu đive bốn chiều của vectơ dòng:

$$\frac{\partial(nu^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{134-3}$$

Bây giờ, ta trở lại các phương trình (134-1). Lấy đạo hàm biểu thức (133-2), ta thu được

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \tag{134-4}$$

Nhân phương trình này với u^i, nghĩa là chiếu phương trình đó lên phương của 4-vận tốc. Nếu nhớ lại rằng $u_i u^i = 1$, $u_i \partial u^i/\partial x^k = 0$, ta sẽ tìm được

$$\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} - u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0. \tag{134-5}$$

Thay thế $wu^k = nu^k(w/n)$ và dùng phương trình liên tục (134-3), ta viết lại dưới dạng

$$nu^k\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{w}{n} - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k}\right] = 0.$$

Theo hệ thức nhiệt động lực học đã biết của hàm nhiệt, ta có

$$d\frac{w}{n} = Td\frac{\sigma}{n} + \frac{1}{n}dp \tag{134-6}$$

(T là nhiệt độ, σ là entrôpi tính cho một đơn vị thể tích riêng) [2]. Từ đó, thấy rằng biểu thức trong dấu móc vuông là đạo hàm $T\partial(\sigma/n)/\partial x^k$. Như vậy, nếu bỏ thừa số nT đi, ta sẽ đi tới phương trình

[1] Tại các nhiệt độ rất cao, nhiều hạt mới có thể xuất hiện ở trong chất, do đó số toàn phần các hạt thuộc mỗi loại có thể thay đổi. Trong các trường hợp như thế cần hiểu n chẳng hạn là đại lượng vĩ mô bảo toàn, đặc trưng cho số hạt. Chẳng hạn, nếu nói đến sự tạo thành các cặp electrôn, thì n có thể được hiểu là số các electrôn còn lại sau khi có sự hủy tất cả các cặp. Mật độ số các bariôn (số các antibariôn – nếu chúng tồn tại, khi đó được coi là âm) có thể dùng làm định nghĩa tiện lợi cho n.

[2] Nhớ lại rằng, một hệ thức như thế phải được viết cho lượng chất xác định (mà không phải cho thể tích xác định, trong đó có thể có số hạt thay đổi). Trong (134-6), hệ thức được viết cho hàm nhiệt xét cho một hạt, còn $1/n$ là thể tích tính cho một hạt.

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\sigma}{n} \equiv \frac{d}{ds} \frac{\sigma}{n} = 0, \tag{134-7}$$

biểu diễn tính đoạn nhiệt của chuyển động chất lỏng (d/ds là đạo hàm được lấy dọc theo đường vũ trụ của chuyển động của phần tử chất lỏng đã cho). Dựa vào phương trình liên tục (134-3), phương trình (134-7) còn có thể được viết dưới dạng tương đương

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sigma u^i = 0, \tag{134-8}$$

nghĩa là dưới dạng cho đive bốn chiều của dòng entrôpi σu^i bằng không.

Bây giờ, chiếu phương trình (134-1) lên phương pháp tuyến với u^i. Nói một cách khác, ta thiết lập tổ hợp của chúng [1)]

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} - u_i u^k \frac{\partial T_k^l}{\partial x^l} = 0,$$

(biểu thức ở vế trái đồng nhất bằng không khi nhân vô hướng với u^i). Phép tính đơn giản cho ta phương trình

$$w u^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}. \tag{134-9}$$

Ba thành phần không gian của phương trình này là sự mở rộng tương đối tính của phương trình Euler (còn thành phần thời gian là một hệ quả của ba phương trình thứ nhất).

Phương trình (134-9) có thể được biểu diễn dưới một dạng khác trong trường hợp chuyển động đẳng entrôpi (tương tự như phép biến đổi từ (2-3) về (2-9) cho phương trình Euler phi tương đối tính). Với σ/n = const theo (134-6), ta có

$$\frac{\partial p}{\partial x^i} = n \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{w}{n}.$$

và phương trình (134-9) có dạng

$$u^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{w}{n} u_i \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{w}{n}. \tag{134-10}$$

[1)] Để tiện lợi, nhớ lại rằng các thành phần của 4-vận tốc (xem II, §4)

$$u^i = (\gamma, \gamma \mathbf{v}/c), \quad u_i = (\gamma, -\gamma \mathbf{v}/c),$$

trong đó để ngắn gọn ta đưa vào (trong chương này !) ký hiệu $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Nếu chuyển động lại dẫn tới dừng (tất cả các đại lượng không phụ thuộc vào thời gian), thì các thành phần không gian của (134-10) cho ta

$$\gamma(\mathbf{v}\nabla)\left(\frac{\gamma w}{n}\mathbf{v}\right)+c^2\nabla\frac{w}{n}=0.$$

Nhân vô hướng phương trình này với $\mathbf{v}$, sau những biến đổi đơn giản ta thu được $(\mathbf{v}\nabla)(\gamma w/n)=0$. Từ đó suy ra rằng, dọc theo mỗi đường dòng đại lượng sau không đổi

$$\frac{\gamma w}{n}=\text{const.} \tag{134-11}$$

Đó là sự mở rộng tương đối tính phương trình Bernoulli [1].

Không giả thiết dòng chảy đẳng entrôpi là dừng, ta dễ dàng thấy rằng các phương trình (134-10) có nghiệm dạng

$$\frac{w}{n}u_i=-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \tag{134-12}$$

trong đó φ là hàm của tọa độ và thời gian; các nghiệm này là sự tương tự tương đối tính của các dòng chảy thế của thủy động lực học phi tương đối tính (*I.M. Khalatnikov*, 1954). Để kiểm nghiệm điều đã nêu, ta có nhận xét là, do sự đối xứng của các đạo hàm $\partial^2\varphi/\partial x^i\partial x^k$ theo các chỉ số i và k, ta có

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}u_k\right),$$

sau khi nhân vô hướng đẳng thức với u^k và khai triển đạo hàm ở vế phải, ta thực sự trở lại phương trình (134-10). Các thành phần không gian và thời gian của đẳng thức (134-12) cho ta

$$\gamma\frac{w}{cn}\mathbf{v}=\nabla\varphi,\qquad c\gamma\frac{w}{n}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$

Phương trình thứ nhất trong giới hạn phi tương đối cho ta điều kiện

[1] Với $v \ll c$, ta có $w/n = mc^2 + nw_{\text{p.t.d}}$ (ở đây $w_{\text{p.t.d}}$ là hàm nhiệt phi tương đối tính của một đơn vị khối lượng, đã ký hiệu ở §5 là w và (134-11) chuyển thành phương trình (5-3).

thông thường của tính có thế, còn phương trình thứ hai cho ta phương trình (9-3) (với phép biến đổi tương ứng $\varphi/cm \to \varphi$).

Chúng ta khảo sát sự lan truyền của âm trong môi trường có phương trình trạng thái tương đối tính (nghĩa là trong đó, áp suất so sánh được với mật độ nội năng, có chứa năng lượng nghỉ). Các phương trình thủy động lực học của các sóng âm có thể được tuyến tính hóa; khi đó tiện lợi hơn là nên xuất phát trực tiếp từ các phương trình chuyển động được viết dưới dạng ban đầu (134-1), mà không phải từ các phương trình tương đương (134.8-9) với nó. Thay các biểu thức (133-3) của các thành phần tenxơ năng - xung lượng và tại mọi nơi chỉ giữ lại các đại lượng có độ nhỏ bậc một theo biên độ sóng, ta sẽ thu được hệ phương trình

$$\frac{\partial e'}{\partial t} = -w \operatorname{div} \mathbf{v}, \qquad \frac{w}{c^2}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p', \tag{134-13}$$

trong đó dấu phẩy biểu thị các thành phần của các đại lượng ở trong sóng. Khử $\mathbf{v}$ khỏi hệ phương trình, ta thu được

$$\frac{\partial^2 e'}{\partial t^2} = c^2 \Delta p'.$$

Cuối cùng, nếu viết $e' = (\partial e/\partial p)_{\text{đ.n}}\, p'$, ta tìm được cho p' phương trình sóng với vận tốc âm [1)]

$$u = c\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)^{1/2}_{\text{đ.n}} \tag{134-14}$$

(chỉ số "đ.n" nói lên đạo hàm phải được lấy đối với một quá trình đoạn nhiệt nghĩa là với σ/n không đổi). Công thức này khác với biểu thức tương ứng phi tương đối tính ở chỗ, ở đây e/c^2 thay cho mật độ khối lượng thông thường. Trong trường hợp siêu tương đối tính (*ultra - relativistic*, ND), phương trình trạng thái của mọi chất $p = e/3$, vận tốc âm bằng $u = c/\sqrt{3}$.

Cuối cùng, ta phát biểu ngắn gọn về các phương trình thủy động lực học khi có mặt của các trường hấp dẫn quan trọng, nghĩa là trong thuyết tương đối rộng. Chúng thu được từ các phương trình (134.8 - 9) đơn giản

[1)] Trong chương này, vận tốc âm ký hiệu bằng u.

bằng cách thay trong đó các đạo hàm thông thường bằng các đạo hàm hiệp biến [1)]

$$wu^k u_{i,k} = \frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}, \qquad (\sigma u^i)_{,i} = 0. \tag{134-15}$$

Từ các phương trình này, ta rút ra điều kiện cân bằng cơ học trong trường hấp dẫn. Ở cân bằng trường hấp dẫn là trường tĩnh; có thể chọn một hệ qui chiếu, trong đó chất đứng yên ($u^\alpha = 0$, $u^0 = g_{00}^{-1/2}$), tất cả các đại lượng đều phụ thuộc vào thời gian, còn các thành phần hỗn hợp của tenxơ mêtric đều bằng không ($g_{0\alpha} = 0$). Các thành phần không gian của phương trình (134-15) khi đó cho ta

$$w\Gamma^0_{\alpha 0} u^0 u_0 = \frac{1}{2}\frac{w}{g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial p}{\partial x^\alpha},$$

hay

$$\frac{1}{w}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln g_{00}. \tag{134-16}$$

Đó chính là phương trình cân bằng cần tìm. Trong trong đó giới hạn phi tương đối tính $w = \rho c^2$, $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ (φ là thế hấp dẫn Newton), và phương trình (134-16) chuyển thành

$$\nabla p = -\rho\nabla\varphi,$$

đó chính là phương trình thủy tĩnh học thông thường.

BÀI TẬP

1. Tìm nghiệm của các phương trình thủy động lực học, mô tả sóng đơn giản không dừng một chiều.

[1)] Trong trường hợp tổng quát, các phương trình này khá phức tạp. Dạng khai triển chi tiết của phương trình đó (biểu diễn dựa vào tenxơ ba chiều của mêtric không gian $-\gamma_{\alpha\beta}$ trong II, §84) được cho trong bài báo *Nelson R.A – Gen.Rel.Grav*, 1981, t 13, trang 569. Các phương trình thủy động lực học trong phép gần đúng sau Newton được cho trong bài báo Chandrasekhar *S. Astroph. J*, 1965, V.142, trang 1488; chúng cũng được nêu trong sách: [*Misner C.W. Thorne K.S. Wheeler J.A.Gravitation.– Freeman*, 1973, §39].

Giải. Trong sóng đơn giản, tất cả các đại lượng đều có thể được biểu diễn dưới dạng một hàm bất kỳ của nhau (xem §101). Viết các phương trình chuyển động dưới dạng

$$\frac{\partial T_{00}}{c\partial t} - \frac{\partial T_{01}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_{01}}{c\partial t} - \frac{\partial T_{11}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

và coi T_{00}, T_{01}, T_{11} là các hàm của nhau, ta thu được hệ thức $dT_{00}\,dT_{11} = (dT_{01})^2$. Trong hệ thức này, ta cần đặt

$$T_{00} = eu_o^2 + pu_1^2, \quad T_{01} = wu_o u_1, \quad T_{11} = eu_1^2 + pu_o^2,$$

và khi đó nếu chú ý rằng, $u_o^2 - u_1^2 = 1$ (trong khi tính toán, tiện lợi là nên đưa vào thông số η theo $u_0 = \operatorname{ch}\eta$, $u_1 = \operatorname{sh}\eta$). Phép tính cho ta:

$$\operatorname{Arth}\frac{v}{c} = \pm\frac{1}{c}\int\frac{u}{w}\,de \tag{2}$$

(u là vận tốc của âm). Tiếp theo, từ (1), ta có

$$\frac{\partial x}{\partial t} = c\frac{dT_{01}}{dT_{00}}$$

Tính đạo hàm này, ta thu được:

$$x = t\frac{v \pm u}{1 \pm uv/c^2} + f(v). \tag{3}$$

Các công thức (2), (3) xác định nghiệm cần tìm.

2. Viết các phương trình thủy động lực cho môi trường siêu tương đối tính với số hạt bất định (bản thân số hạt được xác định bằng các điều kiện cân bằng nhiệt động lực).

Giải. Điều kiện cân bằng nhiệt động lực xác định số hạt trong một môi trường như thế đòi hỏi tất cả các thế hóa phải bằng không. Khi đó $e - T\sigma + p = 0$, nghĩa là $w = T\sigma$, nhưng theo biểu thức nhiệt động lực vi phân của hàm nhiệt (với thể tích đơn vị đã cho và các thế hóa bằng không) $dw = Td\sigma + dp$; tổ hợp cả hai công thức, ta thu được: $dp = \sigma dT$ [1]. Phương trình (134-5) (trong đó vẫn chưa dùng phương trình liên tục) dẫn đến phương trình đoạn nhiệt dưới dạng (134-8). Còn phương trình (134-9) có dạng

$$u^k\frac{\partial Tu_i}{\partial x^k} = \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

[1] Đối với phương trình trạng thái siêu tương đối tính $p = e/3$ từ các công thức đã viết dễ dàng tìm được rằng, $e \sim T^4$, $\sigma \sim T^3$, nghĩa là những định luật đúng cho bức xạ đen (xem V, §63), – đúng như cần chờ đợi.

§135. SÓNG VA CHẠM TRONG THỦY ĐỘNG LỰC HỌC TƯƠNG ĐỐI TÍNH

Lý thuyết các sóng va chạm trong thủy động học tương đối tính được xây dựng tương tự như lý thuyết phi tương đối tính (*A.H. Taub*, 1948).

Cũng như ở §85, ta khảo sát mặt gián đoạn trong hệ tọa độ mà nó đứng yên, còn khí chuyển động vuông góc với mặt (dọc theo trục $x^1 \equiv x$) từ phía *1* sang phía *2*. Các điều kiện liên tục cho mật độ dòng các chất, mật độ dòng xung lượng và mật độ năng thông phát biểu:

$$\left[n^x\right] = \left[nu^x\right] = 0, \quad \left[T^{xx}\right] = \left[w(u^x)^2 + p\right] = 0,$$
$$c\left[T^{0x}\right] = c\left[wu^0u^x\right] = 0,$$

hay sau khi thay giá trị của các thành phần 4 - vận tốc:

$$\frac{v_1\gamma_1}{V_1} = \frac{v_2\gamma_2}{V_2} \equiv j, \tag{135-1}$$

$$\frac{1}{c^2}w_1v_1^2\gamma_1^2 + p_1 = \frac{1}{c^2}w_2v_2^2\gamma_2^2 + p_2, \tag{135-2}$$

$$w_1v_1\gamma_1^2 = w_2v_2\gamma_2^2 \tag{135-3}$$

trong đó $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$, $\gamma_2 = (1 - v_2^2/c^2)^{-1/2}$, còn $V_1 = 1/n_1$ và $V_2 = 1/n_2$ là các thể tích xét cho một hạt [1)].

Từ (135-1) và (135-2) ta tìm được

$$j^2 = (p_2 - p_1)c_j^2\left(w_1V_1^2 - w_2V_2^2\right). \tag{135-4}$$

Tiếp theo, ta viết lại điều kiện (135-3) có xét đến (135-1) dưới dạng

$$w_1^2V_1^2\gamma_1^2 = w_2^2V_2^2\gamma_2^2.$$

[1)] Tại giới hạn phi tương đối tính dòng hạt định nghĩa theo (135-1) khác với mật độ dòng khối lượng ký hiệu bằng j ở §85 ở thừa số $1/m$. Các thể tích V cũng được định nghĩa ở đây và §85 khác ở thừa số m.

Bằng các phép biến đổi đại số đơn giản (từ (135-1) ta biểu diễn γ_1^2 và γ_2^2 qua j^2, sau đó thay j^2 lấy từ (135-4), ta thu được phương trình đoạn nhiệt tương đối tính (*đoạn nhiệt Taub*) sau:

$$w_1^2V_1^2 - w_2^2V_2^2 + (p_2 - p_1)(w_1V_1^2 + w_2V_2^2) = 0. \qquad (135\text{-}5)$$

Ta cũng nêu ra các biểu thức cho các vận tốc khí ở hai bên mặt gián đoạn, có thể thu được bằng các phép biến đổi sơ cấp từ các điều kiện (135.2-3) [1]:

$$\frac{v_1}{c} = \left[\frac{(p_2 - p_1)(e_2 + p_1)}{(e_2 - e_1)(e_1 + p_2)}\right]^{1/2}, \qquad \frac{v_2}{c} = \left[\frac{(p_2 - p_1)(e_1 + p_2)}{(e_2 - e_1)(e_2 + p_1)}\right]^{1/2}. \qquad (135\text{-}6)$$

Vận tốc tương đối của các khí ở hai bên gián đoạn, theo qui tắc cộng vận tốc tương đối tính, bằng

$$v_{12} = \frac{v_1 - v_2}{1 - v_1v_2 / c^2} = c\left[\frac{(p_2 - p_1)(e_2 - e_1)}{(e_1 + p_2)(e_2 + p_1)}\right]^{1/2}. \qquad (135\text{-}7)$$

Tại giới hạn phi tương đối tính, nếu đặt $e \approx mc^2n = mc^2/V$ và bỏ qua p so với e, thì các công thức (135-4), (135.6-7) chuyển thành các công thức (85-4), (85.6-7) (có xét đến sự khác nhau nêu trong bị chú trong các định nghĩa của j và V ở đây và §85) [2]. Đối với các phương trình trạng thái siêu tương đối tính $p = e/3$, từ (135-6), ta có

$$\frac{v_1}{c} = \left[\frac{3e_2 + e_1}{3(3e_1 + e_2)}\right]^{1/2}, \qquad \frac{v_2}{c} = \left[\frac{3e_1 + e_2}{3(3e_2 + e_1)}\right]^{1/2} \qquad (135\text{-}8)$$

(để ý rằng $v_1v_2 = c^2/3$). Khi cường độ sóng va chạm tăng ($e_2 \to \infty$) v_1 tiến đến vận tốc ánh sáng, còn v_2 tiến đến $c/3$.

Tương tự như trong chương IX ta đã biểu diễn đoạn nhiệt va chạm bằng đồ thị trong mặt phẳng V, p để biểu diễn đoạn nhiệt va chạm tương

---

[1] Trong các phép biến đổi, để tiện lợi dùng sự thay thế $v/c = \text{th}\,\varphi$, $\gamma = \text{ch}\,\varphi$.

[2] Đối với sự chuyển giới hạn từ phương trình đoạn nhiệt (135-5) sang phương trình phi tương đối tính (85-10), một sự gần đúng như thế là chưa đủ; cần phải đặt $w = nmc^2 + nm\varepsilon + p$ (ε là nội năng phi tương đối tính cho một đơn vị khối lượng), và sau khi chia phương trình (135-5) cho c^2, ta đi tới giới hạn $c \to \infty$.

đối tính các biến tự nhiên sẽ là wV^2, pc^2; trong các tọa độ này j^2 xác định độ nghiêng của dây cung vạch từ điểm ban đầu *1* của đường đoạn nhiệt đến điểm tùy ý *2*.

Các sóng va chạm tương đối tính cường độ yếu có thể được khảo sát hoàn toàn tương tự như đã làm ở §86 trong trường hợp phi tương đối tính (*I.M. Khalatnikov*, 1954). Không nhắc lại tất cả các phép tính, ta chỉ nêu kết quả cho bước nhảy entrôpi, đại lượng này lại là các độ nhỏ bậc ba so với bước nhảy áp suất:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{wV^2T}\left(\frac{\partial^2(wV^2)}{\partial p^2}\right)_{đ.n}\right]_1 (p_2 - p_1)^3. \qquad (135\text{-}9)$$

Vì phải có $\sigma_2 > \sigma_1$, nên ta nhận thấy rằng sóng va chạm là sóng nén, nếu

$$\left(\frac{\partial^2(wV^2)}{\partial p^2}\right)_{\sigma V} > 0. \qquad (135\text{-}10)$$

Điều kiện này là sự mở rộng tương đối tính của điều kiện (86-2) của thủy động lực phi tương đối [1]. Với $p_2 > p_1$, từ (135-4) và (135-5), ta suy ra rằng

$$w_2V_2^2 < w_1V_1^2, \qquad w_2V_2 > w_1V_1;$$

Từ đó suy ra rằng, trong mọi trường hợp $V_2 < V_1$ – thể tích V phải giảm thậm chí mạnh hơn, nếu wV tăng hơn nữa. Các vận tốc v_1 và v_2 của sóng va chạm cường độ yếu trong phép tính gần đúng bậc nhất dĩ nhiên trùng với vận tốc âm: vì độ biến thiên entrôpi là đại lượng bậc ba, nên các biểu thức (135-6) khi $p_2 \to p_1$, $e_2 \to e_1$ sẽ chuyển thành đạo hàm (134 -14) [2]. Các lập luận hoàn toàn tương tự với những lập luận đã tiến

[1] Dùng hệ thức nhiệt động lực cho hàm nhiệt tính cho một hạt, $d(wV) = Vdp$ (với $\sigma V = \text{const}$), ta tìm được rằng điều kiện (135-10) tương dương với bất đẳng thức

$$\left(\frac{(\partial^2 V)}{\partial p^2}\right)_{đ.n} > \frac{3}{w}\left|\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{đ.n}\right|.$$

Tại giới hạn phi tương đối tính, vế phải được thay bằng số không.

[2] Còn biểu thức (135-4) chuyển thành đạo hàm $-c^2[dp/d(wV^2)]$. Dựa vào các biểu thức nhiệt động lực học $d(eV) = -pdV$, $d(wV) = Vdp$ (với $\sigma V = \text{const}$) dễ dàng thấy được rằng, đạo hàm này nhân với V_1^2 bằng $u_1^2 / (1 - u_1^2)$, đúng phải như vậy.

hành ở §86, chứng tỏ rằng, trong phép tính gần đúng tiếp theo $v_1 > u_1$, $v_2 < u_2$.

Như vậy, chiều biến thiên của các đại lượng trong sóng va chạm tương đối tính cường độ yếu tuân theo (với điều kiện (135-10)), cùng những bất đẳng thức như trong trường hợp phi tương đối tính. Sự mở rộng kết quả này sang các sóng va chạm cường độ tùy ý có thể được thực hiện bằng biện pháp hoàn toàn tương tự như đã được áp dụng ở §87 [1].

Đồng thời, cần nhấn mạnh rằng, các bất đẳng thức $v_1 > u_1$ và $v_2 < u_2$ đúng đối với các sóng va chạm tương đối tính (cũng như phi tương đối tính) không phụ thuộc vào các điều kiện nhiệt động lực như thế nào – như là hệ quả đòi hỏi của sự tiến hóa. Nhớ rằng, khi rút ra các điều kiện đó (§88) điều quan trọng chỉ là dấu các vận tốc lan truyền $u \pm v$ của các nhiễu động âm trong chất lỏng chuyển động đối với mặt gián đoạn đứng yên. Theo qui tắc cộng vận tốc tương đối tính các vận tốc này được cho bởi các biểu thức $(u \pm v)/(1 \pm vu/c^2)$, mà dấu của chúng chỉ được xác định bởi các tử số của chúng, do đó tất cả các lập luận ở §88 vẫn còn hiệu lực.

§136. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI TÍNH CỦA MÔI TRƯỜNG NHỚT VÀ DẪN NHIỆT

Việc thiết lập các phương trình thủy động lực học tương đối tính khi có mặt các quá trình tiêu tán (độ nhớt, tính dẫn nhiệt) đưa tới bài toán xác định dạng các số hạng bổ sung tương ứng ở trong tenxơ năng - xung lượng và trong vectơ mật độ dòng của chất. Ký hiệu các số hạng này lần lượt bằng τ_{ik} và ν_i, ta viết được:

$$T_{ik} = pg_{ik} + wu_iu_k + \tau_{ik} \tag{136-1}$$

$$n_i = nu_i + \nu_i \tag{136-2}$$

Cũng như trước, các phương trình chuyển động được chứa trong

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial n^i}{\partial x^i} = 0.$$

[1] Xem *Thorne K.S.* – Astroph. J. 1973, V. 179, p.897.

Tuy nhiên, trước hết có xuất hiện vấn đề là, ta phải xác định chính xác hơn bản thân khái niệm của vận tốc u^i. Trong cơ học tương đối tính, mọi năng thông tất yếu có liên hệ cả với dòng khối lượng. Do đó, chẳng hạn khi có mặt của dòng nhiệt, định nghĩa của vận tốc theo dòng khối lượng (như trong thủy động lực phi tương đối tính) sẽ mất ý nghĩa trực tiếp của nó. Ở đây, ta định nghĩa vận tốc bằng điều kiện là, trong hệ qui chiếu riêng của mỗi phần tử đã cho của chất lỏng, xung lượng của nó phải bằng không và năng lượng của nó được biểu diễn qua các đại lượng nhiệt động lực khác bằng cùng những công thức như khi không có các quá trình tiêu tán. Điều đó có nghĩa là, trong hệ qui chiếu đã nói, các thành phần τ_{00} và $\tau_{0\alpha}$ của tenxơ τ_{ik} phải bằng không; vì ở trong hệ này cả $u^\alpha = 0$, nên trong nó (và như vậy, trong bất kỳ hệ qui chiếu nào khác) đều có hệ thức tenxơ

$$\tau_{ik}\, u^k = 0 \tag{136-3}$$

Hệ thức tương tự

$$\nu_i\, u^i = 0 \tag{136-4}$$

phải được thực hiện đối với cả vectơ ν_i; vì trong hệ qui chiếu riêng thành phần n^0 của 4-vectơ dòng n^i của các hạt, theo định nghĩa, phải trùng với mật độ số hạt n.

Có thể thiết lập được dạng cần tìm của tenxơ τ_{ik} và vectơ ν_i bằng cách xuất phát từ các điều kiện đòi hỏi đặt cho định luật tăng entrôpi. Định luật này phải được chứa trong các phương trình chuyển động (tương tự như ở §134 từ các phương trình này, ta đã rút ra cho chất lỏng lý tưởng điều kiện entrôpi không đổi). Bằng những phép biến đổi đơn giản, có dùng phương trình liên tục, ta dễ dàng thu được phương trình sau đây:

$$u^i \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = T \frac{\partial(\sigma u^i)}{\partial x^i} - \mu \frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + u^i \frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0,$$

trong đó μ là thế hóa tương đối tính của chất: $n\mu = w - T\sigma$ và dùng hệ thức nhiệt động lực cho vi phân $d\mu$:

$$d\mu = \frac{1}{n} dp - \frac{\sigma}{n} dT. \tag{136-5}$$

Cuối cùng, nếu dùng (136-3), ta có thể viết lại phương trình này dưới dạng

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i\right) = -\nu^i \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu}{T} + \frac{\tau_i^k}{T}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \tag{136-6}$$

Biểu thức của vế trái phải là 4-div của dòng entrôpi; còn biểu thức của vế phải phải là độ tăng của entrôpi do các quá trình tiêu tán. Như vậy, 4-vectơ mật độ dòng entrôpi bằng

$$\sigma^i = \sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i, \tag{136-7}$$

còn τ_{ik} và ν^i phải được biểu diễn tuyến tính qua các gradiên vận tốc và các đại lượng nhiệt động lực sao cho vế phải của (136-6) bảo đảm được tính dương cốt yếu. Cùng với các điều kiện (136.3-4), điều kiện này xác định đơn trị dạng của 4-tenxơ τ_{ik} và 4 vectơ ν_i:

$$\begin{aligned}\tau_{ik} = -c\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} - u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right) - \\ - c\left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u^l}{\partial x^l}(g_{ik} - u_i u_k),\end{aligned} \tag{136-8}$$

$$\nu^i = \frac{\kappa}{c}\left(\frac{nT}{w}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\mu}{T} - u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\mu}{T}\right]. \tag{136-9}$$

ở đây η, ζ là hai hệ số nhớt, còn κ là hệ số dẫn nhiệt, các hệ số này được chọn phù hợp với định nghĩa phi tương đối tính của chúng. Tại giới hạn phi tương đối tính các thành phần của tenxơ $\tau_{\alpha\beta}$ rút về các thành phần của tenxơ các ứng suất nhớt $\sigma'_{\alpha\beta}$ (15-3).

Sự dẫn nhiệt thuần túy tương ứng với năng thông khi không có mặt dòng chất. Điều kiện để không có dòng chất là $nu^\alpha + \nu^\alpha = 0$. Khi đó các thành phần không gian của 4-vận tốc $u^\alpha = -\nu^\alpha/n$ là các đại lượng bậc nhất theo các gradiên; vì các biểu thức (136.8-9) chỉ được viết với độ chính xác đến các đại lượng bậc này, nên cần đặt thành phần u^0 của 4-vectơ bằng đơn vị: $u_o^2 = 1 + u_\alpha u^\alpha = 1 + \nu_\alpha \nu^\alpha / n^2 \approx 1$. Với độ chính xác này, cần bỏ qua số hạng thứ hai trong các dấu móc vuông ở (136-9). Khi

đó, ta tìm được cho mật độ năng thông $cT^{0\alpha} = -cT_{\alpha}^{0}$:

$$-cT_{\alpha}^{0} = -cwu_{\alpha}u^{0} = \frac{cw}{n}\nu_{\alpha} = -\frac{\kappa nT^{2}}{w^{2}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\mu}{T}.$$

Dùng hệ thức nhiệt động lực (136-5) viết lại dưới dạng

$$d\frac{\mu}{T} = -\frac{w}{nT^{2}}dT + \frac{dp}{nT},$$

ta thu được năng thông:

$$-\kappa\left(\nabla T - \frac{T}{w}\nabla p\right). \qquad (136\text{-}10)$$

Chúng ta nhận thấy rằng trong trường hợp tương đối tính, dòng nhiệt tỷ lệ không đơn giản với gradiên nhiệt độ, mà tỷ lệ với một tổ hợp xác định các gradiên nhiệt độ và áp suất (tại giới hạn phi tương đối tính $w \approx nmc^{2}$ và số hạng với ∇p phải bỏ đi).

Chương XVI

THỦY ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT LỎNG SIÊU CHẢY

§137. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA CHẤT LỎNG SIÊU CHẢY

Tại các nhiệt độ gần độ không tuyệt đối, trong các tính chất của chất lỏng, các hiệu ứng lượng tử được đưa lên hàng đầu. Trong các trường hợp như thế, người ta nói đến các *chất lỏng lượng tử*. Thực tế trong tự nhiên, chỉ có hêli còn là chất lỏng ở cả nhiệt độ không tuyệt đối; tất cả các chất lỏng khác đông đặc sớm hơn nhiều trước khi các hiệu ứng lượng tử trở nên thấy được. Tuy nhiên, có tồn tại hai đồng vị hêli – ^{4}He và ^{3}He, khác nhau ở thống kê mà các nguyên tử của chúng tuân theo. Hạt nhân ^{4}He không có spin, và cùng với nó cả spin của nguyên tử xét về toàn bộ cũng bằng không; các nguyên tử này tuân theo thống kê Bose - Einstein. Còn các nguyên tử ^{3}He có (do nhân của nó) spin 1/2 và tuân theo thống kê Fermi - Dirac. Sự khác nhau này có ý nghĩa nguyên tắc đối với các tính chất của các chất lỏng lượng tử tạo bởi các chất đó; trong trường hợp thứ nhất, ta có chất lỏng Bose lượng tử, còn trong trường hợp thứ hai, ta có chất lỏng Fermi lượng tử. Trong chương này, ta chỉ xét trường hợp thứ nhất.

Ở nhiệt độ 2,19 K, hêli lỏng (đồng vị ^{4}He) có điểm gọi là λ-điểm (chuyển pha loại hai) [1]. Tại các nhiệt độ thấp hơn điểm này, hêli lỏng

[1] Các λ-điểm tạo thành một đường trên giản đồ pha của hêli trong mặt phẳng p,T. Nhiệt độ 2,19 K tương ứng với giao điểm của đường này với đường cân bằng của chất lỏng với hơi.

(trong chương này gọi là hêli II) có nhiều tính chất tuyệt vời, mà tính chất quan trọng nhất là tính chất siêu chảy do *P.L. Kapixa* khám phá ra năm 1938. Đó là tính chất chảy không có độ nhớt trong các ống mao dẫn hay trong các khe hẹp.

Lý thuyết siêu chảy đã được *L.D. Landau* phát triển (1941). Phần vi mô của lý thuyết này đã được trình bày trong một tập khác của giáo trình này (xem IX, chương III). Ở đây, ta chỉ giới hạn ở thủy động lực vĩ mô chất lỏng siêu chảy, phần này có thể được xây dựng trên cơ sở các quan niệm của thuyết vi mô [1].

Kết quả cơ bản sau đây của lý thuyết vi mô là điểm xuất phát cho thủy động lực hêli-II. Tại các nhiệt độ khác không, hêli-II có động thái như thể nó là một hỗn hợp của hai chất lỏng khác nhau. Một trong hai chất đó là siêu chảy và không có một độ nhớt nào khi chuyển động trên mặt rắn. Còn chất lỏng kia có động thái như một chất lỏng nhớt thông thường. Điều rất quan trọng là, không có ma sát giữa hai phần khối lượng chất lỏng chuyển động "phần nọ qua phần kia", nghĩa là không có sự truyền xung lượng giữa chúng.

Tuy nhiên, cũng cần nhấn mạnh dứt khoát rằng, việc coi chất lỏng như một hỗn hợp của các phần bình thường và siêu chảy chỉ là một phương pháp mô tả cụ thể các hiện tượng xảy ra trong chất lỏng lượng tử. Cũng như mọi sự mô tả các hiện tượng lượng tử trong các thuật ngữ cổ điển,một sự mô tả như thế không thể hoàn toàn trọn vẹn. Thực tế, cần phải nói rằng, trong chất lỏng lượng tử – hêli II – có thể tồn tại đồng thời hai chuyển động, một chuyển động có liên quan đến khối lượng hiệu dụng của nó (do đó tổng của cả hai khối lượng này bằng khối lượng toàn phần thực của chất lỏng). Một trong các chuyển động đó là bình thường, nghĩa là nó có cùng những tính chất như chuyển động của một chất lỏng nhớt bình thường; còn chuyển động kia là *siêu chảy*. Cả hai chuyển động này xảy ra không có sự trao đổi xung lượng cho nhau. Theo một nghĩa nào đó, có thể nói đến các phần khối lượng siêu chảy và

[1] Chất lỏng Fermi của đồng vị ^{3}He cũng trở nên siêu chảy, nhưng tại các nhiệt độ thấp hơn nhiều ~ 10^{-3}K. Thủy động lực học chất lỏng siêu chảy này phức tạp hơn do đặc tính phức tạp hơn của "thông số trật tự" mô tả trạng thái của nó (xem IX. §54).

phần khối lượng bình thường của chất lỏng, điều đó tuyệt nhiên không có nghĩa là ta có khả năng tách chất lỏng thành hai phần [1].

Chỉ sau khi lưu ý tất cả những sự thận trọng đó đối với tính chất thực của các hiện tượng xảy ra trong các hiện tượng hêli II, ta mới có thể dùng các thuật ngữ *phần siêu chảy* và *phần bình thường* của chất lỏng với tính cách là một cách mô tả cụ thể và ngắn gọn các hiện tượng đó. Tuy nhiên, ta nên ưu tiên dùng các thuật ngữ chính xác hơn, đó là *chuyển động siêu chảy* và *chuyển động bình thường*, không liên hệ chúng với các thành phần của một "hỗn hợp" gồm hai "phần" chất lỏng.

Quan niệm về hai dạng chuyển động cho phép ta giải thích đơn giản các tính chất cơ bản của dòng chảy hêli II đã được quan sát thấy trong thực nghiệm. Sự không có mặt của độ nhớt khi hêli II chảy qua một khe hẹp được giải thích là do, ở trong khe hẹp có chuyển động siêu chảy, không có ma sát; có thể nói rằng phần bình thường được giữ lại trong bình, chảy qua khe chậm hơn rất nhiều, với một vận tốc tương ứng với độ nhớt của nó và bề rộng của khe. Ngược lại, việc đo độ nhớt của hêli II theo sự tắt của các dao động xoắn của một đĩa nhúng trong chất lỏng phải cho những giá trị khác không: sự quay của đĩa sẽ tạo quanh nó một chuyển động bình thường của chất lỏng, có tác dụng hãm đĩa do độ nhớt đặc trưng riêng cho chuyển động đó. Như vậy, trong các thí nghiệm về dòng chảy trong ống mao dẫn hay qua khe người ta quan sát được chuyển động siêu chảy của chất lỏng, trong các thí nghiệm với sự quay của đĩa trong hêli II, người ta quan sát thấy chuyển động bình thường của nó.

Ngoài sự không có mặt của độ nhớt, chuyển động siêu chảy của chất lỏng còn có hai tính chất quan trọng nhất: nó không gây ra sự truyền nhiệt và bao giờ cũng là chuyển động thế. Cả hai tính chất này đều cũng được suy ra từ lý thuyết vi mô, theo lý thuyết này, chuyển động bình thường của chất lỏng thực tế là chuyển động của một "khí kích thích";

[1] Độc lập với Landau, ý tưởng định tính về sự mô tả vĩ mô hêli II dựa vào sự tách mật độ của nó thành hai phần và đưa vào hai trường vận tốc đã được *L. Tisza* (1940) nêu ra. Ý tưởng này cũng cho phép ông tiên đoán được sự tồn tại của hai dạng sóng âm trong hêli II (xem cuối §141). Tuy nhiên, do sự sai lầm của các quan niệm vi mô xuất phát, nên thuyết siêu chảy nhất quán (kể cả thủy động lực học) không xây dựng được trong các công trình của Tisza.

chúng ta nhớ lại rằng chuyển động nhiệt tập thể của các nguyên tử chất lỏng lượng tử có thể được coi như tập hợp các kích thích nguyên tố có động thái như các "chuẩn hạt" (*quasi - particles*, ND) nào đó chuyển động ở trong thể tích chiếm bởi chất lỏng, có xung lượng và năng lượng xác định.

Entrôpi của hêli II được xác định bởi phân bố thống kê của các kích thích nguyên tố. Do đó, với mọi chuyển động của chất lỏng, mà trong đó khí các lượng tử kích thích vẫn đứng yên, đều không xuất hiện một sự vận chuyển vĩ mô nào của entrôpi. Điều đó có nghĩa là, chuyển động siêu chảy không gây ra một sự vận chuyển entrôpi nào, hay nói cách khác, nó không vận chuyển nhiệt lượng. Từ đó lại suy ra rằng, dòng chảy của hêli II, trong đó chỉ có chuyển động siêu chảy, là thuận nghịch nhiệt động lực.

Sự vận chuyển nhiệt lượng bởi chuyển động bình thường của chất lỏng là cơ chế truyền nhiệt lượng ở trong hêli II. Như vậy, nó có một đặc tính đối lưu đặc thù, về nguyên tắc, khác hẳn với sự dẫn nhiệt thông thường. Mọi hiệu nhiệt độ ở trong hêli II đều làm xuất hiện ở trong đó các chuyển động nội tại bình thường và siêu chảy; khi đó cả hai dòng (bình thường và siêu chảy) có thể bù trừ cho nhau về lượng khối lượng mà chúng vận chuyển, do đó không có một sự vận chuyển vĩ mô thực nào của khối lượng có thể xảy ra trong chất lỏng.

Tiếp theo, ta ký hiệu các vận tốc chuyển động siêu chảy và bình thường lần lượt bằng $\mathbf{v}_1$ và $\mathbf{v}_2$. Cơ chế vận chuyển nhiệt lượng đã mô tả có nghĩa là, mật độ dòng entrôpi bằng tích $\mathbf{v}_n \rho s$ của vận tốc $\mathbf{v}_n$ nhân với entrôpi của một đơn vị thể tích chất lỏng (s là entrôpi tính cho một đơn vị khối lượng). Mật độ dòng nhiệt lượng thu được một cách tương ứng bằng cách nhân mật độ dòng entrôpi với T, nghĩa là bằng

$$\mathbf{q} = \rho T_s \mathbf{v}_n. \tag{137-1}$$

Tính chất có thế của chuyển động siêu chảy biểu diễn bởi đẳng thức

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0, \tag{137-2}$$

đẳng thức này phải xảy ra tại mọi thời điểm trong toàn thể tích chất lỏng. Tính chất đó là sự phát biểu vĩ mô về đặc tính của phổ năng lượng

hêli II, nó là cơ sở của lý thuyết vi mô về tính siêu chảy: các kích thích nguyên tố có bước sóng dài (nghĩa là có những xung lượng và năng lượng nhỏ), chúng đều là những lượng tử âm – *các fônôn*. Do đó, thủy động lực học vĩ mô của chuyển động siêu chảy không thể chấp nhận bất kỳ những dao động nào khác, trừ các dao động âm, một kết quả được bảo đảm bởi điều kiện (137-2) [1].

Vì chuyển động siêu chảy là chuyển động thế, nên nó không tác động một lực nào lên vật rắn có dòng dừng bao (nghịch lý *d' Alembert*; xem §11). Ngược lại, chuyển động bình thường tác dụng một lực cản lên vật có dòng bao. Nếu chuyển động của chất lỏng xảy ra sao cho cả các dòng khối lượng siêu chảy và bình thường bù trừ lẫn nhau, thì ta sẽ thu được một hình ảnh rất đặc thù; một vật nhúng trong hêli II chịu tác dụng một lực, trong khi đó không có một sự chuyển vận khối lượng toàn phần nào của chất lỏng.

BÀI TẬP

Giữa các đầu của ống mao dẫn đựng hêli II, có duy trì một hiệu nhiệt độ ΔT. Xác định dòng nhiệt lan truyền dọc theo ống mao dẫn.

Giải. Theo công thức (138-3) độ chênh áp suất giữa hai đầu ống mao dẫn $\Delta p = \rho s \Delta T$. Độ chênh này tạo ra trong ống mao dẫn chuyển động bình thường, có vận tốc trung bình (theo tiết diện) bằng

$$v_n = R^2 \frac{\Delta p}{8\eta l}$$

(trong đó R là bán kính, l là độ dài ống mao dẫn, η là độ nhớt của chuyển động bình thường; xem (17-10)). Dòng nhiệt toàn phần bằng

$$T\rho s v_n \pi R^2 = \frac{T\pi R^4 \rho^2 s^2 \Delta T}{8\eta l}.$$

Theo hướng ngược lại có xuất hiện chuyển động siêu chảy, với vận tốc được xác định bằng điều kiện không có sự chuyển vận toàn phần khối lượng $v_s = -\bar{v}_n \rho_n / \rho_s$.

[1] Cơ sở vi mô đầy đủ hơn cho điều khẳng định này, xem IX, §26.

§138. HIỆU ỨNG NHIỆT CƠ

Nội dung của hiệu ứng nhiệt cơ ở hêli II như sau. Khi hêli II chảy ra từ một bình qua một ống mao dẫn nhỏ, thì ở trong bình người ta quan sát thấy có sự nung nóng; ngược lại có một sự lạnh đi ở nơi mà hêli chảy từ ống mao dẫn vào một bình khác [1]. Hiện tượng này được giải thích một cách tự nhiên như sau, chuyển động của chất lỏng chảy qua ống mao dẫn về cơ bản là siêu chảy, do đó nó không mang theo nhiệt lượng, vì thế nhiệt lượng còn lại trong bình sẽ được phân bố trong một lượng nhỏ hơn của hêli II. Nếu nó chảy vào trong bình, hiện tượng xảy ra ngược lại.

Dễ dàng tìm được nhiệt lượng Q bị hấp thụ khi một gam hêli chảy qua ống mao dẫn vào bình. Chất lỏng chảy vào không mang theo entrôpi. Để cho hêli chứa trong bình vẫn ở nhiệt độ T của nó thì cần phải cung cấp cho nó một nhiệt lượng Ts bù lại độ giảm entrôpi tính cho một đơn vị khối lượng do việc đưa vào một gam hêli có entropi bằng không. Điều đó có nghĩa là, khi một gam hêli chảy trong bình chứa hêli ở nhiệt độ T, thì trong đó sẽ có sự hấp thụ một nhiệt lượng

$$Q = Ts \tag{138-1}$$

Ngược lại, khi một gam hêli chảy ra từ một bình chứa hêli ở nhiệt độ T, thì có sự tỏa ra một nhiệt lượng bằng Ts.

Bây giờ, ta khảo sát hai bình chứa hêli ở các nhiệt độ T_1 và T_2, các bình được thông với nhau bằng một ống mao dẫn nhỏ. Vì chất lỏng siêu chảy có thể chảy tự do qua ống mao dẫn, nên sự cân bằng cơ học của chất lỏng ở trong cả hai bình được thiết lập nhanh. Tuy nhiên, vì chuyển động siêu chảy không chuyển vận nhiệt lượng, nên sự cân bằng

[1] Một hiệu ứng nhiệt cơ rất yếu, nói một cách chặt chẽ, phải xảy ra cả trong những chất lỏng bình thường; cái dị thường ở hêli II là đại lượng lớn của hiệu ứng này. Hiệu ứng nhiệt cơ trong các chất lỏng bình thường là một hiện tượng không thuận nghịch thuộc loại hiệu ứng nhiệt điện Peltier (một hiệu ứng như thế thực tế được quan sát thấy trong các khí kém, xem X, bài tập 1, §14). Một hiệu ứng thuộc loại này cũng phải tồn tại cả trong hêli II, nhưng trong trường hợp này nó bị che lấp bởi một hiệu ứng khác mạnh hơn rất nhiều, sẽ được mô tả dưới đây, đó là một hiệu ứng đặc thù của hêli II và không có gì giống với các hiện tượng không thuận nghịch thuộc loại hiệu ứng Peltier.

nhiệt (với sự cân bằng này, các nhiệt độ ở trong cả hai bình đều bằng nhau) chỉ được thiết lập chậm hơn rất nhiều.

Điều kiện cân bằng cơ học dễ dàng viết được nếu ta dựa vào sự kiện là, theo điều đã trình bày, sự cân bằng này được thiết lập với các entrôpi không đổi s_1 và s_2 của khí hêli ở trong cả hai bình.

Nếu ε_1 và ε_2 là các nội năng của một đơn vị khối lượng của hêli ở các nhiệt độ T_1 và T_2, thì điều kiện cân bằng cơ học (điều kiện cực tiểu của năng lượng) được thực hiện bởi dòng siêu chảy của chất lỏng sẽ là

$$\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial N}\right)_{s_1} = \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial N}\right)_{s_2},$$

trong đó N là số nguyên tử trong 1 gam hêli. Nhưng đạo hàm $(\partial\varepsilon/\partial N)_s$ là thế hóa μ. Do đó ta thu được điều kiện cân bằng dưới dạng

$$\mu(p_1, T_1) = \mu(p_2, T_2) \tag{138-2}$$

(p_1, p_2 là các áp suất ở trong cả hai bình).

Sau đây, ta sẽ hiểu thế hóa μ không phải là thế nhiệt động lực xét cho một hạt (nguyên tử), như thường lệ, mà là thế nhiệt động lực tính cho một đơn vị khối lượng của hêli; hai định nghĩa đó chỉ khác nhau ở một thừa số không đổi – khối lượng của nguyên tử hêli.

Nếu các áp suất p_1, p_2 đều nhỏ, thì khi khai triển theo các lũy thừa của chúng và nhớ rằng $(\partial\mu/\partial p)_T$ là thể tích riêng (phụ thuộc yếu vào nhiệt độ), ta sẽ thu được

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \mu(0, T_1) - \mu(0, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} s\, dT,$$

trong đó $\Delta p = p_2 - p_1$. Nếu hiệu nhiệt độ $\Delta T = T_2 - T_1$ cũng nhỏ, thì khi khai triển theo các lũy thừa của ΔT và để ý rằng $(\partial\mu/\partial T)_p = -s$, ta sẽ thu được hệ thức sau:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \rho s \tag{138-3}$$

(*H. London*, 1939). Vì $s > 0$, nên cả $\Delta p/\Delta T > 0$.

§139. CÁC PHƯƠNG TRÌNH THỦY ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CHẤT LỎNG SIÊU CHẢY

Bây giờ, ta chuyển sang thiết lập hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực mô tả về mặt vĩ mô (hiện tượng luận) chuyển động của hêli II. Từ những quan niệm đã trình bày ở trên, ta quan tâm đến việc thiết lập các phương trình chuyển động được mô tả tại mỗi điểm, không phải bởi một vận tốc như trong thủy động lực nọc thông thường, mà bởi hai vận tốc $\mathbf{v}_s$ và $\mathbf{v}_n$. Người ta nhận thấy rằng, hệ các phương trình cần tìm có thể được rút ra một cách hoàn toàn đơn giản, nếu chỉ xuất phát từ những đòi hỏi do nguyên lý tương đối Galiléo và các định luật bảo toàn cần thiết đặt ra (đồng thời cũng dùng các tính chất chuyển động biểu diễn bởi các phương trình (137-1) và (137-2).

Cần nhớ rằng, hêli II thực sự mất tính siêu chảy của nó tại các vận tốc chuyển động đủ lớn. Do có hiện tượng này của các *vận tốc tới hạn*, các phương trình thủy động lực của hêli siêu chảy chỉ có ý nghĩa vật lý thực đối với các vận tốc $\mathbf{v}_s$ và $\mathbf{v}_n$ không quá lớn [1]. Tuy nhiên, thoạt đầu ta thiết lập các phương trình đó, không đặt những giả thiết gì cho các vận tốc $\mathbf{v}_s$ và $\mathbf{v}_n$, vì khi bỏ qua những lũy thừa cao hơn của vận tốc, thì khả năng rút ra một cách nhất quán các phương trình xuất phát từ các định luật bảo toàn sẽ bị mất. Việc chuyển sang trường hợp có ý nghĩa quan trọng về mặt vật lý của các vận tốc nhỏ sẽ được tiến hành trong các phương trình thu được cuối cùng.

Ký hiệu $\mathbf{j}$ là mật độ dòng khối lượng của chất lỏng; đại lượng này đồng thời là xung lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng (xem bị chú ở trang 320). Chúng ta viết $\mathbf{j}$ dưới dạng tổng

[1] Sự tồn tại vận tốc giới hạn của chuyển động siêu chảy được suy ngay từ lý thuyết vi mô – dạng cụ thể của phổ năng lượng các kích thích nguyên tố trong hêli II dẫn đến sự phá hủy điều kiện về tính siêu chảy Landau tại các vận tốc lớn (xem IX, §23). Tuy nhiên, thực tế các vận tốc tới hạn quan sát được nhỏ hơn nhiều so với giá trị giới hạn, đồng thời phụ thuộc vào các điều kiện chảy cụ thể (chẳng hạn, đối với dòng chảy theo các ống mao dẫn nhỏ hay các khe, chúng sẽ lớn hơn so với các chuyển động trong các thể tích lớn). Bản chất vật lý của các hiện tượng này bao gồm ở sự xuất hiện các vòng xoáy lượng tử; các dây xoáy loại như thế (nhưng thẳng) xuất hiện khi quay hêli lỏng trong một bình trụ (xem IX, §29). Các hiện tượng đó không được khảo sát trong chương này.

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \tag{139-1}$$

của các dòng có liên quan lần lượt đến chuyển động siêu chảy và chuyển động bình thường. Các hệ số ρ_s và ρ_n có thể được gọi là mật độ siêu chảy và mật độ bình thường của chất lỏng. Tổng của chúng bằng mật độ thực ρ của hêli II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n. \tag{139-2}$$

Dĩ nhiên, các đại lượng ρ_s và ρ_n là các hàm của nhiệt độ; ρ_n triệt tiêu tại độ không tuyệt đối, khi hêli II là "hoàn toàn siêu chảy" [1] và ρ_s triệt tiêu tại λ-điểm, khi chất lỏng trở nên "hoàn toàn bình thường".

Mật độ ρ và dòng $\mathbf{j}$ phải thỏa mãn phương trình liên tục

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{139-3}$$

là phương trình biểu diễn định luật bảo toàn khối lượng. Định luật bảo toàn xung lượng là phương trình có dạng

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{139-4}$$

trong đó Π_{ik} là tenxơ mật độ dòng xung lượng. Bây giờ, ta sẽ không xét đến các quá trình tiêu tán ở trong chất lỏng; khi đó chuyển động là thuận nghịch và cả entrôpi của chất lỏng cũng phải được bảo toàn. Nếu chú ý rằng, "dòng entrôpi" bằng $\rho s \mathbf{v}_n$, ta sẽ viết được phương trình bảo toàn entrôpi dưới dạng

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}_n) = 0. \tag{139-5}$$

Còn cần phải thêm vào các phương trình từ (139-3) đến (139-5) một phương trình nữa xác định đạo hàm của $\mathbf{v}_s$ theo thời gian. Phương trình này phải được thiết lập sao cho tại mọi thời điểm vẫn bảo đảm được theo thời gian tính có thế của chuyển động: điều này có nghĩa là đạo hàm của $\mathbf{v}_s$ phải được biểu diễn dưới dạng gradiên của một vô hướng nào đó. Ta viết phương trình này dưới dạng

[1] Nếu hêli II chứa một tạp chất lạ (chẳng hạn, có thể là đồng vị ^{3}He, thì ρ_n vẫn khác không cả tại độ không tuyệt đối.

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu\right) = 0, \qquad (139\text{-}6)$$

trong đó μ là một vô hướng nào đó.

Các phương trình (139-4) và (139-6) dĩ nhiên chỉ có một ý nghĩa thực sau khi thiết lập được dạng của các đại lượng Π_{ik} và μ, còn chưa được xác định. Muốn vậy, cần dùng định luật bảo toàn năng lượng và những lập luận dựa trên nguyên lý tương đối Galiléo. Cụ thể là, các phương trình thủy động lực học (136.3-6) phải tự động dẫn đến sự thực hiện định luật bảo toàn xung lượng, được biểu diễn bằng một phương trình có dạng

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \qquad (139\text{-}7)$$

trong đó E là năng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng và $\mathbf{Q}$ là mật độ năng thông. Nguyên lý tương đối Galiléo cho ta khả năng xác định được sự phụ thuộc của tất cả các đại lượng vào một trong các vận tốc ($\mathbf{v}_s$) với giá trị đã cho của vận tốc tương đối $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ của cả hai chuyển động xảy ra đồng thời trong chất lỏng.

Ngoài hệ tọa độ K ban đầu, ta đưa vào thêm một hệ tọa độ khác K_0, trong đó vận tốc của chuyển động siêu chảy của phần tử chất lỏng đã cho bằng không. Hệ K_0 chuyển động đối với K với vận tốc bằng vận tốc chuyển động siêu chảy $\mathbf{v}_s$ trong hệ ban đầu. Các giá trị của tất cả các đại lượng ở trong K liên hệ với các giá trị của cùng các đại lượng ấy ở trong K_0 (được phân biệt bởi chỉ số 0) bằng các công thức biến đổi đã biết trong cơ học [1].

---

[1] Các công thức này là hệ quả trực tiếp của nguyên lý tương đối Galiléo, do đó chúng đúng, không phụ thuộc vào hệ cụ thể đang xét. Có thể thu được chúng bằng cách khảo sát một chất lỏng bình thường chẳng hạn. Trong thủy động lực học thông thường tenxơ mật độ dòng xung lượng bằng $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$. Vận tốc $\mathbf{v}$ của chất lỏng trong hệ K liên hệ với vận tốc $\mathbf{v}_0$ ở trong K_0 bằng hệ thức $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, trong đó $\mathbf{u}$ là vận tốc của K_0 đối với K. Sự thay thế vào trong Π_{ik} cho ta

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k} + \rho v_{0i} u_k + \rho u_i v_{0k} + \rho u_i u_k$$

Nếu đưa vào $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_{0i} v_{0k}$ và $\mathbf{j}_0 = \rho \mathbf{v}_0$, ta sẽ thu được công thức biến đổi cho tenxơ Π_{ik} đã nêu trong bài giảng. Các công thức khác được rút ra theo cách tương tự.

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{j}_o, \qquad E = \frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_o \mathbf{v}_s + E_o,$$

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{j}_o \mathbf{v}_s + E_o \right) \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{j}_o + (\Pi_o \mathbf{v}_s) + \mathbf{Q}_o, \qquad (139\text{-}8)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{oi} + \Pi_{0ik}$$

(ở đây $(\Pi_o \mathbf{v}_s)$ ký hiệu vectơ có các thành phần $\Pi_{oik}\, \mathbf{v}_{sk}$).

Trong hệ K_o phần tử chất lỏng đã cho chỉ thực hiện một chuyển động. Chuyển động bình thường với vận tốc $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Do đó, tất cả các đại lượng $\mathbf{j}_o$, E_o, $\mathbf{Q}_o$, Π_{oik} thuộc về hệ đó có thể chỉ phụ thuộc vào hiệu $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, mà không phụ thuộc vào $\mathbf{v}_n$ và $\mathbf{v}_s$ một cách riêng lẻ; đặc biệt các vectơ $\mathbf{j}_o$ và $\mathbf{Q}_o$ phải hướng theo $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Như vậy, các công thức (139-8) xác định sự phụ thuộc của các đại lượng cần tìm vào $\mathbf{v}_s$ với $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ đã cho.

Năng lượng E_o được coi như hàm của ρ, s và xung lượng $\mathbf{j}_o$ của một đơn vị thể tích của chất lỏng thỏa mãn hệ thức nhiệt động lực

$$dE_o = \mu dp + T d(\rho s) + (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_s) d\mathbf{j}_o, \qquad (139\text{-}9)$$

trong đó μ là thế hóa (thế nhiệt động lực của một đơn vị khối lượng). Hai số hạng đầu tương ứng với hệ thức nhiệt động lực thông thường cho một chất lỏng đứng yên với thể tích không đổi (ở đây bằng đơn vị), còn số hạng cuối cùng biểu diễn sự kiện là, đạo hàm của năng lượng theo xung lượng là vận tốc của chuyển động. Xung lượng $\mathbf{j}_o$ (mật độ dòng khối lượng trong hệ K_o) rõ ràng bằng

$$\mathbf{j}_o = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$$

(công thức thứ nhất trong (139-8) khi đó trùng với (139-1).

Sau đây chúng tôi nêu đường lối tính toán. Trong phương trình bảo toàn năng lượng (139-7), ta thay E và $\mathbf{Q}$ lấy từ (139-8), đồng thời đạo hàm $\partial E_o / \partial t$ được biểu diễn qua các đạo hàm của ρ, ρs và $\mathbf{j}_o$ theo (139-9). Sau đó, ta khử tất cả các đạo hàm theo thời gian ($\dot{\rho}, \dot{\mathbf{v}}_s$, v.v..) dựa vào các phương trình thủy động lực (139.3-6). Các phép tính khá dài dòng, sau khi rút gọn, cho kết quả sau

$$-\Pi_{0ik} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} + w_i \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{0ik} + p \operatorname{div} \mathbf{v}_s - \mathbf{w} \nabla p + \rho_n \mathbf{w} (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{v}_n +$$

$$+ \operatorname{div} \left[\mathbf{w} (T \rho s + \rho_n \mu) \right] + (\rho_n - \rho_s) \mathbf{w} \nabla (\varphi - \mu) = \operatorname{div} \mathbf{Q}_o;$$

ở đây, vô hướng có mặt trong (139-6) tạm thời được ký hiệu bằng φ (thay cho μ), và để rút gọn cách viết, dưa vào ký hiệu $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$;

$$p = -E_o + T\rho s + \mu p + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \qquad (139\text{-}10)$$

Ý nghĩa của ký hiệu này sẽ giải thích ở dưới. Phương trình bảo toàn năng lượng này phải được đồng nhất thỏa mãn. Khi đó $\mathbf{Q}_o$, Π_o, φ phải chỉ phụ thuộc vào các biến nhiệt động lực và vào vận tốc $\mathbf{w}$, mà không phụ thuộc vào bất cứ các gradiên nào của các đại lượng đó (vì ta không xét các quá trình tiêu tán). Các điều kiện này xác định việc chọn các biểu thức cho $\mathbf{Q}_o$, Π_o, φ một cách đơn trị.

Trước hết, cần đặt φ = μ, nghĩa là vô hướng có mặt trong phương trình (139-6) trùng với thế hóa của chất lỏng, được xác định theo (139-9)(chính vì thế, trước đây ta ký hiệu nó bằng μ). Đối với các đại lượng còn lại, cần đặt

$$\mathbf{Q}_o = (T\rho s + \rho_n v)\mathbf{w} + \rho_n w^2 \mathbf{w}$$
$$\Pi_{0ik} = p\delta_{ik} + \rho_n w_i w_k.$$

Bây giờ, thay các biểu thức này vào công thức (139-8), ta sẽ thu được các biểu thức cuối cùng sau đây cho mật độ năng thông và tenxơ mật độ dòng xung lượng:

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2}\right)\mathbf{j} + T\rho s\mathbf{v}_n + \rho_n \mathbf{v}_n(\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \qquad (139\text{-}11)$$

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p\delta_{ik}. \qquad (139\text{-}12)$$

Biểu thức (139-2) có dạng là sự mở rộng tự nhiên của công thức $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}$ của thủy động lực học thông thường. Khi đó, một cách tự nhiên ta coi đại lượng p xác định theo (139-10) như áp suất chất lỏng; trong chất lỏng hoàn toàn đứng yên biểu thức (139-10), dĩ nhiên, trùng với định nghĩa thông thường của nó, vì Φ = μ ρ trở nên thế nhiệt động lực thông thường của một đơn vị thể tích chất lỏng [1].

[1] Định nghĩa nhiệt động lực thông thường của áp suất như lực trung bình tác dụng vuông góc lên một đơn vị diện tích, được xét cho môi trường đứng yên. Tuy nhiên, thủy động lực thông thường không xuất hiện vấn đề định nghĩa khái niệm áp suất (nếu không xét các quá trình tiêu tán), vì bao giờ cũng có thể chuyển về hệ tọa độ, trong đó phần tử chất lỏng đang xét đứng yên. Nhưng →

Các phương trình (139.3-6), với $\mathbf{j}$ và Π_{ik} được xác định theo (139-12), là hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực học cần tìm. Hệ này rất phức tạp trước hết là do, các đại lượng ρ_s, ρ_n, μs có mặt trong phương trình đều là các hàm không những của các biến nhiệt động lực p và T, mà còn của bình phương vận tốc tương đối của cả hai chuyển động $w^2 = (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$. Bình phương này là một vô hướng, bất biến đối với các phép biến đổi Galiléo cho hệ qui chiếu và đối với phép quay của chất lỏng coi như toàn bộ; đại lượng này là đặc thù đối với chất lỏng siêu chảy, tuyệt nhiên không bằng không trong cân bằng nhiệt động lực, và phải có mặt trong phương trình trạng thái của chất lỏng cùng với p và T.

Tuy nhiên, các phương trình sẽ đơn giản đi nhiều trong trường hợp đáng quan tâm về mặt vật lý của các vận tốc không quá lớn (tỷ số giữa các vận tốc và vận tốc âm thứ hai được giả thiết là một đại lượng nhỏ, §141).

Trước hết, trong trường hợp này, có thể bỏ qua sự phụ thuộc của ρ_s và ρ_n vào $\mathbf{w}$; biểu thức (139-1) cho dòng $\mathbf{j}$ khi đó thực chất là các số hạng khai triển đầu tiên của đại lượng này theo các lũy thừa $\mathbf{v}_n$ và $\mathbf{v}_s$. Khai triển theo lũy thừa của các vận tốc cần được tiến hành cho cả các đại lượng nhiệt động lực tham gia vào phương trình.

Lấy vi phân biểu thức (139-10) và dùng (139-9), ta thu được biểu thức sau cho vi phân thế hóa

$$d\mu = -sdT + \frac{1}{\rho}dp - \frac{\rho_n}{\rho}\mathbf{w}d\mathbf{w}. \qquad (139\text{-}13)$$

Từ đó thấy rằng, hai số hạng khai triển đầu tiên của μ theo các lũy thừa $\mathbf{w}$ có dạng

$$\mu(p,T,\mathbf{w}) \approx \mu(p,T) - \frac{\rho_n}{2\rho}w^2, \qquad (139\text{-}14)$$

→ trong thủy động lực học chất lỏng siêu chảy, bằng cách chọn thích hợp hệ tọa độ chỉ có thể khử một trong hai chuyển động xảy ra đồng thời, và do đó định nghĩa thông thường của áp suất hoàn toàn không có thể ứng dụng được.

Cũng có nhận xét là, biểu thức (139-10) tương ứng với cả định nghĩa áp suất là đạo hàm $p = -\partial(E_0V)/\partial V$ của năng lượng toàn phần chất lỏng với khối lượng toàn phần ρV, entrôpi toàn phần ρsV và xung lượng toàn phần đã cho của chuyển động tương đối $\rho\mathbf{w}V$.

trong đó ở vế phải của đẳng thức có mặt thế hóa thông thường $\mu(p,T)$ và mật độ $\rho(p,T)$ thông thường của chất lỏng đứng yên. Lấy vi phân biểu thức này theo nhiệt độ và áp suất, ta tìm được các khai triển tương ứng cho entrôpi và mật độ:

$$s(p,T,\mathbf{w}) \approx s(p,T) - \frac{w^2}{2}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\rho_n}{\rho},$$
$$\rho(p,T,\mathbf{w}) \approx \rho(p,T) + \frac{\rho^2 w^2}{2}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_n}{\rho}. \qquad (139\text{-}15)$$

Chúng cần được thay vào các phương trình thủy động lực. Sau đó các phương trình này sẽ đúng với độ chính xác đến các số hạng bậc hai kể cả theo các vận tốc (ngay ở trong **j**, việc xét đến sự phụ thuộc của ρ_s và ρ_n vào w^2 cũng đã dẫn đến các số hạng có độ nhỏ bậc ba) [1].

Việc đưa vào trong các phương trình thủy động lực các số hạng có xét đến các phương trình tiêu tán trong chất lỏng siêu chảy, sẽ được tiến hành trong tiết sau. Nhưng ngay ở đây, chúng ta đã nêu các điều kiện biên cho các phương trình đó.

Trước hết, trên mọi mặt rắn (đứng yên) thành phần dòng khối lượng **j** vuông góc với mặt đó phải bằng không. Để làm sáng tỏ các điều kiện biên đặt cho $\mathbf{v}_n$, cần nhớ rằng chuyển động bình thường thực tế là chuyển động của "khí" các kích thích nhiệt nguyên tố ở trong nó. Khi chuyển động trên mặt rắn các lượng tử kích thích tương tác với mặt, điều này phải được mô tả về mặt vĩ mô như là "sự dính" của phần bình thường khối lượng chất lỏng vào thành, tương tự như đã xảy ra đối với

[1] Cần chú ý rằng, hệ các phương trình thủy động lực học, trong đó ρ_s được coi như hàm đã cho của p và T, có thể trở nên không ứng dụng được ở gần λ-điểm. Vấn đề ở chỗ, khi đến gần điểm này (cũng như đến gần các điểm chuyển pha loại II) thời gian hồi phục để thiết lập giá trị cân bằng của thông số trật tự và bán kính tương quan của các thăng giáng của nó đều tăng vô hạn; nhưng trong ^{4}hêli giữ vai trò thông số trật tự là hàm sóng ngưng tụ, mà bình phương môdun của nó xác định ρ_s (xem IV, §§26, 28; về sự hồi phục trong chất lỏng siêu chảy – xem X, §103). Các phương trình thủy động lực với hàm $\rho_s(p,T)$ đã cho chỉ ứng dụng được chừng nào các khoảng cách và thời gian đặc trưng của chuyển động còn lớn so với bán kính tương quan và thời gian hồi phục. Trong trường hợp ngược lại, hệ đầy đủ các phương trình chuyển động phải chứa cả các phương trình xác định ρ_s. Xem *Ginzburg V.L. Xobialin A.A* УФН, 1975, t 120, trong đó 153; *J. Low.* Temp. Physics, 1982. V 49, p 507.

các chất lỏng nhớt bình thường. Nói một cách khác, trên mặt rắn, thành phần tiếp tuyến của vận tốc $\mathbf{v}_n$ phải bằng không.

Còn đối với thành phần vuông góc với thành của $\mathbf{v}_n$, thì cần nhớ rằng các lượng tử kích thích có thể bị hấp thụ hoặc phát xạ bởi vật rắn – điều này tương ứng đơn giản sự truyền nhiệt giữa chất lỏng và vật rắn. Do đó, thành phần vuông góc với thành của vận tốc $\mathbf{v}_n$ không nhất thiết phải bằng không; điều kiện biên chỉ đòi hỏi thành phần vuông góc với thành của dòng nhiệt phải liên tục. Còn nhiệt độ tại biên giới chịu bước nhảy, tỷ lệ với dòng nhiệt: $\Delta T = Kq$, với hệ số tỷ lệ phụ thuộc vào các tính chất của chất lỏng, cũng như của vật rắn. Sự xuất hiện của bước nhảy đó có liên quan đến các đặc điểm truyền nhiệt trong hêli II. Tất cả nhiệt trở (*thermal resistance*, ND) giữa vật rắn và chất lỏng tập trung trong lớp chất lỏng kề sát, vì sự lan truyền nhiệt do đối lưu trong thể tích chất lỏng thực tế không có liên quan đến bất kỳ một nhiệt trở nào; kết quả là độ chênh nhiệt độ, gây ra sự xuất hiện dòng nhiệt, xảy ra thực tế ngay ở mặt vật.

Tính chất đáng chú ý của các điều kiện biên đã mô tả là: sự trao đổi nhiệt lượng giữa vật rắn và chất lỏng chuyển động dẫn đến xuất hiện các lực tiếp tuyến tác dụng lên mặt vật. Nếu trục x hướng theo phương pháp tuyến và trục y theo phương tiếp tuyến với mặt, thì lực tiếp tuyến tác dụng lên một đơn vị diện tích sẽ bằng thành phần Π_{ik} của tenxơ dòng xung lượng. Nếu chú ý rằng, ở trên mặt phải có $\mathbf{j}_x = \rho_n v_{nx} + \rho_s v_{sx} = 0$, ta sẽ tìm được cho lực đó biểu thức khác không:

$$\Pi_{xy} = \rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny} = \rho_n (v_{ny} - v_{sy}).$$

Đưa vào dòng nhiệ $\mathbf{q} = \rho s T \mathbf{v}_n$, có thể viết lại lực này dưới dạng

$$\Pi_{xy} = -\frac{\rho_n}{\rho s T} q_x (v_{ny} - v_{sy}), \qquad (139\text{-}16)$$

trong đó q_x là dòng nhiệt, liên tục ở trên mặt, đi từ vật rắn vào chất lỏng.

Khi không có sự truyền nhiệt giữa thành rắn và chất lỏng, giá trị biên của thành phần $\mathbf{v}_n$ vuông góc với thành rắn cũng bằng không. Các điều kiện biên $\mathbf{j}_x = 0$ và $\mathbf{v}_n = 0$ (trục x hướng theo phương pháp tuyến với mặt) đều tương đương với các điều kiện $v_{sx} = 0$ và $\mathbf{v} = 0$. Nói một cách

khác, trong trường hợp này ta thu được các điều kiện biên thông thường của chất lỏng lý tưởng cho $\mathbf{v}_s$, và của chất lỏng nhớt cho $\mathbf{v}_n$.

Cuối cùng, ta nói ngắn gọn về thủy động lực học hỗn hợp ^{4}He lỏng với chất lạ (thực tế là với đồng vị ^{4}hêli). Ngoài các phương trình biểu diễn sự bảo toàn khối lượng, xung lượng, entrôpi và tính có thế của chuyển động siêu chảy, hệ đầy đủ các phương trình thủy động lực của hỗn hợp còn phải chứa thêm phương trình biểu diễn sự bảo toàn của mỗi chất xét riêng lẻ. Phương trình đó có dạng

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0,$$

trong đó c là nồng độ khối lượng ^{3}He trong hỗn hợp, còn $\mathbf{i}$ là mật độ dòng thủy động lực của nó. Tuy nhiên, những yêu cầu đặt cho các định luật bảo toàn và tính bất biến Galiléo đặt ra là đủ để thiết lập dạng của tất cả các phương trình, chỉ cần biết biểu thức cho dòng $\mathbf{i}$. Điều khẳng định sau xác định biểu thức đó: tạp chất (^{3}He) chỉ tham gia vào chuyển động bình thường, nghĩa là $\mathbf{i} = \rho c \mathbf{v}_n$ [1)].

§140. CÁC PHƯƠNG TRÌNH TIÊU TÁN TRONG CHẤT LỎNG SIÊU CHẢY

Để xét đến các quá trình tiêu tán trong các phương trình thủy động lực chất lỏng siêu chảy, cần phải (giống như trong thủy động lực học thông thường) đưa vào trong chúng các số hạng bổ sung, là bậc nhất đối với các đạo hàm không gian của các vận tốc và nhiệt độ. Dạng của các số hạng này có thể được thiết lập một cách đơn trị xuất phát từ các yêu cầu đặt ra bởi định luật tăng entrôpi và nguyên lý đối xứng của các hệ số động lực Onsager (*I.M. Khalatnikov*, 1952).

Cũng như trước, ρ và $\mathbf{j}$ là khối lượng và xung lượng của một đơn vị

[1)] Việc rút ra đầy đủ các phương trình thủy động lực học cho hỗn hợp – xem cuốn sách *Khalatnikov I.M.* Lý thuyết về tính siêu chảy – M. Hayka, 1971, chương XIII. Các phương trình này không ứng dụng được ở các nhiệt độ rất thấp, khi có xuất hiện sự suy biến lượng tử của các kích thích sơ cấp có liên quan đến các nguyên tử của tạp chất.

khối lượng chất lỏng. Phương trình liên tục bảo toàn dạng của nó (139-3). Còn trong phương trình (139-4), (139-7) cần đưa vào các số hạng bổ sung được viết ở các vế phải của chúng

$$\frac{\partial j_t}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi'_{xy}}{\partial x_k}, \tag{140-1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v_s^2}{2} + \mu\right) = -\nabla\varphi' \tag{140-2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = -\operatorname{div}\mathbf{Q}'. \tag{140-3}$$

Còn phương trình entrôpi bây giờ không có dạng của phương trình bảo toàn (139-5); ngược lại, các đại lượng Π', φ', $\mathbf{Q}'$ phải được xác định sao cho bảo đảm sự tăng entrôpi. Muốn vậy, ta lại thay vào trong phương trình bảo toàn năng lượng (140-3) đạo hàm $\partial E_o/\partial t$ biểu diễn dựa vào (139-9), sau đó ta khử các đạo hàm $\dot{\rho}, \dot{j}, \dot{v}_s$ dựa vào (139-3), (140.1-2). Khi đó hiểu ngầm rằng Q và Π đã được cho bởi các phương trình đã biết (139.1-2); do đó cần giản ước tất cả các số hạng, chỉ trừ các số hạng có liên quan đến entrôpi và đến các đại lượng tiêu tán Π', Q', ρ'. Kết quả là, ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} T\left\{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}_n)\right\} = \\ = -\operatorname{div}\left\{\mathbf{Q}' + \rho_s \mathbf{w}\varphi' - (\Pi' \mathbf{v}_n)\right\} + \varphi' \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{w}) - \Pi'_{ik}\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{140-4}$$

(ở đây lại đặt $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$).

Các biểu thức bậc nhất đối với các gradiên của các đại lượng Π', Q', ρ', bảo đảm cho sự tăng entrôpi, có dạng [1]:

$$\Pi'_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}_n\right) - \delta_{ik}\xi_1 \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{w}) - \delta_{ik}\zeta_2 \operatorname{div}\mathbf{v}_n \tag{140-5}$$

$$\varphi' = \xi_3 \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{w}) + \xi_4 \operatorname{div}\mathbf{v}_n, \tag{140-6}$$

[1] Ở đây cũng xét cả điều kiện là, sự quay của phần chất lỏng bình thường coi như toàn bộ ($\mathbf{v}_n = [\Omega\, \mathbf{r}]$) không thể dẫn đến sự tiêu tán (xem §15).

$$\mathbf{Q}' = -\varphi' \rho_s \mathbf{w} + (\Pi' \mathbf{v}_n) - \kappa \nabla T \qquad (140\text{-}7)$$

(trong đó Π'_{ik} có đưa vào các tổ hợp của những đạo hàm của $\mathbf{v}_n$ với vết bằng không – tương tự như đã làm trong thủy động lực thông thường). Khi đó theo nguyên lý Onsager phải có

$$\zeta_1 = \zeta_4, \qquad (140\text{-}8)$$

do đó chỉ còn lại tất cả 5 hệ số động học độc lập [1].

Cuối cùng, nếu thay các biểu thức (140.5-7) vào phương trình (140-4), sau các phép biến đổi đơn giản, ta đi tới

$$T\left\{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho s \mathbf{v}_n - \frac{\kappa}{T}\nabla T\right)\right\} = R, \qquad (140\text{-}9)$$

trong đó

$$R = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}_n\right)^2 + \\ + 2\xi_1 \operatorname{div}\mathbf{v}_n \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{w}) + \zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v}_n)^2 + \zeta_3(\operatorname{div}\rho_s\mathbf{w})^2 + \frac{\kappa}{T}(\nabla T)^2. \qquad (140\text{-}10)$$

Phương trình này tương tự với phương trình truyền nhiệt tổng quát của thủy động lực thông thường (49-5) [2] nếu vế phải xác định vận tốc tăng entrôpi của chất lỏng và phải là một đại lượng cốt yếu dương. Từ đó suy ra rằng, tất cả các hệ số η, ζ_1, ζ_2, ζ_3, κ đều là dương, thêm nữa ${\zeta_1}^2 \leq \zeta_2 \zeta_3$. Hệ số η "độ nhớt thứ nhất", có liên quan đến chuyển động thông thường, tương tự với độ nhớt của chất lỏng thông thường; nhưng bây giờ có ba (ζ_1, ζ_2, ζ_3) hệ số "độ nhớt thứ hai" thay cho một hệ số trong thủy động lực thông thường.

Tuy nhiên, nhân có các kết quả thu được cần có thêm nhận xét sau. Dĩ nhiên năng lượng tiêu tán trong chất lỏng là bất biến đối với phép

[1] Chúng tôi không nêu ra các lập luận hoàn toàn tương ứng (chẳng hạn hoàn toàn tương tự như đã trình bày ở §59). Chỉ cần chú ý là ζ_1 là hệ số của div ($\rho_s \mathbf{w}$) trong Π', còn trong vế phải của phương trình (140-4) số hạng này tham gia vào (140-4) sau khi nhân với div $\mathbf{v}_n$; ngược lại, ζ_4 là hệ số của div $\mathbf{v}_n$ trong φ', đại lượng này tham gia vào vế phải của (140-4) sau khi nhân với div ($\rho_s \mathbf{w}$).

[2] Tất cả những điều đã nói ở cuối §49 về định nghĩa entrôpi trong trạng thái không cân bằng yếu nhiệt động lực vẫn còn hiệu lực cả ở đây.

biến đổi Galiléo của hệ quy chiếu. Tất nhiên các đạo hàm của vận tốc thỏa mãn yêu cầu này, nhưng trong chất lỏng siêu chảy thì cả hiệu các vận tốc $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ cũng bất biến Galiléo. Do đó cả các dòng tiêu tán trong chất lỏng siêu chảy có thể phụ thuộc không những vào các gradiên của các đại lượng nhiệt động lực và các vận tốc, mà còn vào cả chính $\mathbf{w}$. Như đã nhận xét ở §139, hiệu này thực tế phải được coi như một đại lượng nhỏ, và theo ý nghĩa này các biểu thức (140.5-6) về nguyên tắc, không phải chứa tất cả các số hạng khả dĩ, mà chỉ chứa những số hạng lớn nhất trong chúng [1].

BÀI TẬP

Tách các phương trình chuyển động bình thường và chuyển động siêu chảy trong chất lỏng siêu chảy không nén được (không những mật độ toàn phần ρ_l mà cả ρ_s và ρ_n xét riêng lẻ cũng được coi là không đổi).

Giải. Các số hạng tiêu tán trong phương trình entrôpi là những đại lượng nhỏ bậc hai và trong trường hợp đã cho có thể được bỏ đi; khi đó cả $s = \text{const}$, còn từ các phương trình (139-3) và (139-5) ta có $\operatorname{div} \mathbf{v}_s = \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0$. Còn trong tenxơ mật độ dòng xung lượng ta giữ lại số hạng bậc nhất đối với các gradiên vận tốc, có liên quan đến độ nhớt của chuyển động bình thường:

$$\Pi'_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}\right).$$

Thay biểu thức này (cùng với Π_{ik} lấy từ (139-12), ta thu được phương trình

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_s(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s + \rho_n(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n = -\nabla p + \eta \operatorname{div}\mathbf{v}_n,$$

[1] Nếu từ chối điều kiện này thì sự đa dạng của các số hạng đã được chấp nhận trong các dòng tiêu tán sẽ tăng lên thực sự (không nói đến là, cả chính các hệ số động học nói chung đều là các hàm của w); chẳng hạn trong φ' có xuất hiện các số hạng $\mathbf{w}\nabla T$ và $w_i w_k \partial v_{ni}/\partial x_k$. Tổng số các hệ số động học độc lập mô tả sự tiêu tán trong hêli II bằng 13 (*A. Clark*, 1963). Xem vấn đề này trong cuốn sách của *S.J. Putterman*, Superfluid hydrodynamics, North Holland Publishing Co, 1974.

Nhân đây, có nhận xét là, trong (140.5-6) có viết các số hạng với $\operatorname{div} \rho_s\mathbf{w}$, vì chính tổ hợp các đạo hàm này xuất hiện một cách tự nhiên trong phương trình chính xác (140.5-6). Với độ chính xác được thừa nhận, đúng đắn hơn ở trong (140.5-6) nên viết $\rho_s \operatorname{div} \mathbf{w}$.

hay

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \nabla)\mathbf{v}_n + \rho_s \nabla \frac{v_s^2}{2} + \rho_s \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla p + \eta \operatorname{div} \mathbf{v}_n ,$$

trong đó đưa vào thế chuyển động siêu chảy theo $\mathbf{v}_s = \nabla\varphi$ và có xét đến $(\mathbf{v}_s\nabla)\ \mathbf{v}_s = \nabla \mathbf{v}_s^2/2$. Vì div $\mathbf{v}_s = 0$, nên thế φ thỏa mãn phương trình Laplace $\Delta\varphi_s = 0$. Để làm hai đại lượng bổ trợ, ta đưa vào các "áp suất" của chuyển động bình thường và chuyển động siêu chảy p_n và p_s theo đẳng thức $p = p_o + p_n + p_s$, trong đó p_o là áp suất tại vô cùng, còn p_s là áp suất được xác định bởi công thức bình thường cho chất lỏng lý tưởng.

$$p_s = -\rho_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} - \frac{\rho_s v_s^2}{2}.$$

Phương trình cho vận tốc $\mathbf{v}_n$ khi đó có dạng

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + (\mathbf{v}_n \nabla)\mathbf{v}_n = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \frac{\eta}{\rho_n}\Delta \mathbf{v}_n ,$$

về hình thức trùng với phương trình Navier - Stokes cho chất lỏng với mật độ ρ_n và độ nhớt η.

Như vậy, bài toán về chuyển động khí hêli II không nén được rút về hai bài toán của thủy động lực thông thường cho chất lỏng lý tưởng và cho chất lỏng nhớt. Chuyển động siêu chảy được xác định bởi phương trình Laplace với điều kiện biên cho đạo hàm pháp tuyến $\partial\varphi_s/\partial n$, như trong bài tập thông thường về dòng chảy thế bao quanh bởi chất lỏng lý tưởng. Chuyển động bình thường được xác định bằng phương trình Navier - Stokes với cùng điều kiện biên cho $\mathbf{v}_n$ (không có sự trao đổi nhiệt giữa thành và chất lỏng) giống như trong bài toán thông thường về sự bao quanh bởi chất lỏng nhớt. Sự phân bố áp suất sau đó được xác định bằng tổng $p_o + p_n + p_s$.

Để xác định sự phân bố nhiệt độ, trong phương trình (139-6) (với μ lấy từ (139-14)) ta viết $\mathbf{v}_s = \nabla\varphi_s$, rồi lấy tích phân ta được

$$\mu(p,T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 + \frac{\partial \varphi_s}{\partial t} = \text{const}$$

Sự biến thiên của nhiệt độ và áp suất trong chất lỏng không nén được đều nhỏ, và với độ chính xác đến các số hạng bậc nhất, ta viết được

$$\mu - \mu_o = -s(T - T_o) + \frac{1}{\rho}(p - p_o)$$

(T_o, p_o là nhiệt độ và áp suất tại vô cùng). Thay biểu thức này vào trong tích phân đã viết của phương trình chuyển động và đưa vào p_n và p_s, ta thu được

$$T - T_o = \frac{\rho_n}{\rho_s}\left[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2}\right].$$

§141. SỰ LAN TRUYỀN ÂM TRONG CHẤT LỎNG SIÊU CHẢY

Ta ứng dụng các phương trình thủy động lực học của hêli II cho sự lan truyền của âm trong chất lỏng này. Như thường lệ, ta giả sử rằng, trong sóng âm vận tốc của chuyển động đều nhỏ, còn mật độ, áp suất, entrôpi đều gần như bằng các giá trị cân bằng không đổi của chúng. Khi đó có thể tuyến tính hóa hệ các phương trình thủy động lực – trong (139.12-14), và bỏ qua các số hạng toàn phương đối với các vận tốc. Còn trong (139-5) có thể đưa entrôpi ρs có mặt trong $\mathrm{div}(\rho s \mathbf{v}_n)$ ra ngoài dấu div (vì số hạng này đã chứa đại lượng nhỏ $\mathbf{v}_n$). Vì vậy hệ phương trình thủy động lực có dạng

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0, \tag{141-1}$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \rho s\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_n = 0, \tag{141-2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \tag{141-3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \tag{141-4}$$

Lấy vi phân (141-1) theo thời gian và thay (141-3) vào ta thu được

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \tag{141-5}$$

Dựa vào hệ thức nhiệt động lực $d\mu = -sdT + dp/d\rho$, ta có

$$\nabla p = \rho s \nabla T + \rho \nabla \mu.$$

Thay vào đây ∇p lấy từ biểu thức (141-3) và $\nabla \mu$ từ biểu thức (141-4), ta thu được

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) + \rho s \nabla T = 0.$$

Tác dụng vào phương trình này phép toán div và thay $\mathrm{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$ bằng biểu thức

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \frac{\rho}{\rho_s s}\frac{\partial s}{\partial t},$$

suy ra từ đẳng thức

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} - \frac{s}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -s\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}_n + \frac{s}{\rho}\mathrm{div}\,\mathbf{j} = \frac{s\rho_s}{\rho}\mathrm{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n).$$

Kết quả ta thu được phương trình

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\Delta T. \qquad (141\text{-}6)$$

Các phương trình (141-5) và (141-6) xác định sự lan truyền của âm trong chất lỏng siêu chảy. Vì có hai phương trình, nên ta nhận thấy rằng có hai vận tốc truyền âm.

Ta viết s, p, ρ, T dưới dạng $s = s_0 + s'$, $p = p_0 + p'$ v.v... các chữ có dấu phẩy biểu diễn các độ biến thiên nhỏ của các đại lượng tương ứng trong sóng âm, còn chỉ số 0 (dưới đây được bỏ đi cho đơn giản) ký hiệu cho các giá trị cân bằng không đổi của chúng. Khi đó ta có thể viết

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p}p' + \frac{\partial \rho}{\partial T}T', \qquad s' = \frac{\partial s}{\partial p}p' + \frac{\partial s}{\partial T}T',$$

và các phương trình (141-5) và (141-6) có dạng:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\Delta T' = 0.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của các phương trình này dưới dạng sóng phẳng, trong đó p' và T' tỷ lệ với thừa số $e^{-i\omega(t - x/u)}$ (vận tốc âm ở đây ký hiệu là u). Để làm điều kiện tương thích cho cả hai loại phương trình đó, ta thu được phương trình sau

$$u^4 \frac{\partial(s,\rho)}{\partial(T,p)} - u^2\left(\frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\frac{\partial \rho}{\partial p}\right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0$$

(trong đó $\partial(s, \rho)/\partial(T, \rho)$ ký hiệu jacôbiên của phép biến đổi từ s, ρ sang T, ρ). Bằng phép biến đổi đơn giản có dùng đến các hệ thức nhiệt động lực, có thể viết được phương trình này dưới dạng

$$u^4 - u^2\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = 0. \qquad (141\text{-}7)$$

(trong đó c_v là nhiệt dung của một đơn vị khối lượng). Phương trình này, toàn phương (theo u^2), xác định hai vận tốc truyền âm trong hêli II. Với $\rho_s = 0$, thì một trong hai nghiệm của phương trình này bằng không, và ta thu được chỉ một vận tốc âm thông thường $u^2 = (\partial p/\partial \rho)_s$ đúng phải như vậy.

Thực tế, các nhiệt dung riêng c_p và c_v của hêli II, tại các nhiệt độ không quá gần λ-điểm, đều gần nhau(vì hệ số dãn nở nhiệt nhỏ). Theo công thức nhiệt động lực đã biết, trong các điều kiện này, độ nén đẳng nhiệt và đoạn nhiệt cũng gần nhau:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{c_v}{c_p} \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s.$$

Ký hiệu giá trị chung của c_p và c_v bằng c, và giá trị của $(\partial p/\partial \rho)_T$ và $(\partial p/\partial \rho)_s$ đơn giản bằng $\partial p/\partial \rho$, ta thu được từ (14-7) các biểu thức sau cho các vận tốc của âm

$$u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}, \qquad u_1 = \sqrt{\frac{T s^2 \rho_s}{\rho_n}}, \qquad (141\text{-}8)$$

Một trong các vận tốc đó, u_1, hầu như không đổi, còn vận tốc kia, u_2 phụ thuộc mạnh vào nhiệt độ và triệt tiêu cùng với ρ_s tại λ-điểm [1].

Tuy nhiên, ở gần λ-điểm hệ số dãn nở nhiệt không nhỏ và không bỏ qua được sự khác nhau giữa c_p và c_o. Để thu được công thức cho u_2 trong trường hợp này, cần bỏ đi số hạng thứ hai ở trong dấu móc vuông (của (141-7)) (có chứa ρ_s) và số hạng u^4, số hạng này trong trường hợp này nhỏ (vì u_2 tiến đến không). Ngoài ra, có thể đặt $\rho_n \approx \rho$. Kết quả, ta thu được

[1] Về sự lan truyền của âm trong các hỗn hợp của ^{4}He với ^{3}He, xem chương XIII nêu ở trang 719 của sách *I.M. Khalatnikov*.

$$u_2 = \sqrt{\frac{Ts^2\rho_s}{c_p\rho}}. \qquad (141\text{-}9)$$

Còn đối với vận tốc v_1, ta thu được công thức (141-8), trong đó $\partial p/\partial\rho$ cần được hiểu là $(\partial p/\partial\rho)_s$, nghĩa là công thức thông thường cho vận tốc âm.

Nhân công thức (141-9) cần chú ý rằng, có chỉ được ứng dụng với các tần số đủ thấp – càng thấp nếu chất lỏng càng ở gần λ-điểm. Vấn đề ở chỗ (như đã nhắc đến ở bị chú ıranг 838) ở gần λ-điểm thời gian hồi phục τ của thông số trật tự tăng vô hạn; công thức (141-9), không xét đến sự tán sắc và hấp thu âm, chỉ đúng với điều kiện $\omega\tau << 1$. Còn đối với vận tốc u_1, thì ở gần λ-điểm có xuất hiện sự tắt bổ sung gây bởi sự hồi phục của thông số trật tự – phù hợp với những khẳng định tổng quát ở §81.

Tại các nhiệt độ thấp nhất, khi hầu như tất cả các kích thích nguyên tố trong chất lỏng đều là các fônôn, thì các đại lượng ρ_n, c và s liên hệ với nhau bằng các hệ thức [1)]

$$c = 3s, \quad \rho_n = \frac{cT}{2u_1^2}\rho,$$

và $\rho_s \approx \rho$. Thay các biểu thức này vào trong công thức (141-8) của u_2, ta tìm được

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{3}}.$$

Như vậy, khi nhiệt độ tiến đến giá trị không, các giá trị u_1 và u_2 tiến đến một giới hạn không đổi, sao cho tỷ số của chúng tiến đến $\sqrt{3}$.

Để làm sáng tỏ hơn bản chất vật lý của cả hai loại sóng âm ở trong hêli II, ta khảo sát một sóng âm phẳng (*E. Lifsitx*, 1944). Trong một sóng như thế các vận tốc v_s, v_n và các phần biến thiên T', p' của nhiệt độ và áp suất đều tỷ lệ với nhau. Ta đưa vào các hệ số tỷ lệ theo

$$\mathbf{v}_n = a\mathbf{v}_s, \quad p' = bv_s, \quad T' = cv_s. \qquad (141\text{-}10)$$

Phép tính đơn giản dựa vào các phương trình từ (141.1-6), với độ chính xác đòi hỏi cho ta

[1)] Dễ dàng thu được chúng từ các công thức cho các đại lượng nhiệt động lực của hêli II, nêu ở IX; §§22, 23.

$$a_1 = 1 + \frac{\beta\rho}{\rho_s s}\frac{u_1^2 u_2^2}{\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \qquad b_1 = \rho u_1, \qquad c_1 = -\frac{\beta T u_1^2}{c\left(u_1^2 - u_2^2\right)},$$

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\beta\rho}{\rho_n s}\frac{u_1^2 u_2^2}{\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \quad b_2 = \frac{\beta\rho u_1^2 u_2^2}{s\left(u_1^2 - u_2^2\right)}, \quad c_1 = -\frac{u_2}{s}; \tag{141-11}$$

ở đây $\beta = -\partial\rho/\rho\partial T$ là hệ số dãn nở nhiệt độ; vì nó nhỏ, nên các đại lượng chứa β đều nhỏ so với các đại lượng tương ứng không chứa β.

Ta nhận thấy rằng, trong sóng âm thuộc loại thứ nhất $\mathbf{v}_n \approx \mathbf{v}_s$, nghĩa là trong mỗi phần tử thể tích của một sóng như thế, chất lỏng dao động coi như toàn bộ trong phép gần đúng bậc nhất; các khối lượng bình thường và khối lượng siêu chảy chuyển động cùng với nhau. Dĩ nhiên là, các sóng này tương ứng với các sóng âm thông thường ở trong các chất lỏng thông thường.

Ở trong sóng thuộc loại hai, ta có $\mathbf{v}_n \approx -(\rho_s/\rho_n)\mathbf{v}_s$, nghĩa là mật độ dòng toàn phần của chất

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \approx 0.$$

Như vậy, trong sóng của *âm thứ hai* các khối lượng siêu chảy và khối lượng bình thường của chất lỏng dao động đến gặp nhau, do đó trong phép tính gần đúng bậc nhất, tâm quán tính của chúng ở trong mỗi phần tử thể tích vẫn đứng yên và dòng chất toàn phần bằng không. Rõ ràng là, dạng sóng này là đặc thù cho chất lỏng siêu chảy.

Giữa hai dạng sóng còn có một sự khác nhau cơ bản khác, thấy được từ các công thức (141-11). Trong sóng âm của âm thông thường, biên độ các dao động áp suất tương đối lớn, còn biên độ các dao động nhiệt độ thì nhỏ. Ngược lại, trong sóng của âm thứ hai, biên độ tương đối của các dao động nhiệt độ lớn so với biên độ tương đối của các dao động áp suất. Theo nghĩa này, có thể nói rằng các sóng của âm thứ hai là các sóng nhiệt độ không tắt đặc thù [1].

Trong phép gần đúng, mà người ta có thể bỏ qua hoàn toàn sự dãn nở nhiệt, các sóng của âm thứ hai là các dao động nhiệt độ thuần tuý (với $\mathbf{j} = 0$), còn các sóng của âm thứ nhất là các dao động áp suất (với $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_n$).

[1] Dĩ nhiên, chúng không có gì giống với các "sóng nhiệt độ" tắt dần trong một môi trường dẫn nhiệt thông thường (§52).

Do đó, các phương trình chuyển động của chúng tách biệt hoàn toàn: trong (141-6), ta viết $s' = cT'/T$, và thu được

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = u_2^2 \Delta T', \tag{141-12}$$

và trong (141-5), ta đặt $\rho' = p' \partial\rho/\partial p$, và thu được

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = u_1^2 \Delta p', \tag{141-13}$$

Cả vấn đề về các phương pháp khác nhau kích thích các sóng âm cũng có liên hệ chặt chẽ với các tính chất đã mô tả của các sóng âm trong hêli II (E.M. Lifsitx, 1944). Các phương pháp cơ học thông thường kích thích âm (bằng các vật rắn dao động) đều cực kỳ không thích hợp cho sự tạo thành âm thứ hai, theo nghĩa là, cường độ của âm thứ hai được phát ra nhỏ không đáng kể so với cường độ của âm thông thường được phát ra đồng thời. Tuy nhiên, ở trong hêli II, còn có thể kích thích các sóng âm bằng những biện pháp khác, đặc thù cho nó. Sự phát âm bởi các vật rắn có nhiệt độ thay đổi tuần hoàn là một sự phát âm như thế; cường độ của âm thứ hai được phát ra ở đây lớn hơn so với cường độ của âm thứ nhất, điều này là dĩ nhiên, vì có sự khác nhau đã nêu trên ở trong đặc tính các dao động nhiệt độ trong các sóng đó (xem bài tập 1 và 2).

Khi sóng âm thứ hai có biên độ lớn lan truyền, prôfin của nó biến dạng dần dần do kết quả của các hiệu ứng phi tuyến, và điều này cuối cùng dẫn tới sự xuất hiện các gián đoạn – giống như đối với âm thông thường trong thủy động lực thông thường (xem §§101,102). Ta khảo sát các hiện tượng này cho sóng chạy một chiều của âm thứ hai (*I.M. Khalatnikov*, 1952).

Trong sóng chạy một chiều, tất cả các đại lượng (ρ, p, T, v_s, v_n) có thể được biểu diễn dưới dạng các hàm của một thông số, để làm thông số này, có thể chọn một trong chính các đại lượng đó chẳng hạn (§101). Vận tốc dịch chuyển U của điểm prôfin sóng bằng đạo hàm dx/dt, lấy với giá trị xác định của thông số này. Các đạo hàm theo tọa độ và thời gian của mỗi đại lượng có liên hệ với nhau bằng hệ thức $\partial/\partial t = -U\partial/\partial x$.

Thay cho các vận tốc v_s và v_n, tiện lợi hơn là dùng các đại lượng $v = j/\rho$ và $w = v_n - v_s$; ta chọn một hệ tọa độ sao cho vận tốc v tại điểm đã cho

của prôfin sóng bằng không. Các phương trình thủy động lực (139.3-6) (với Π, μ, ρ, s từ các công thức (139.12-15) dẫn tới hệ phương trình sau

$$-U\frac{\partial \rho}{\partial p}p' - U\rho^2\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_n}{\rho}ww' + \rho v' = 0, \tag{141-14}$$

$$p' + 2\frac{\rho_n\rho_s}{\rho}ww' - U\rho v' = 0, \tag{141-15}$$

$$\left[-\rho U\frac{\partial s}{\partial T} + w\frac{\partial}{\partial T}(\rho_s s)\right]T' + sw\frac{\partial \rho_s}{\partial p}p' + \left[\rho_s s - Uw\frac{\partial \rho_n}{\partial p}\right]w' = 0, \tag{141-16}$$

$$\left[-\rho s + Uw\frac{\partial_n}{\partial T}\right]T' + \left[1 + Uwp\frac{\partial}{\partial p}\frac{\rho_s}{\rho}\right]p' + \left[\rho_n s - \frac{\rho_n\rho_s}{\rho}w\right]w' - \left[U\rho + w\rho_n\right]v' = 0. \tag{141-17}$$

Ở đây bỏ qua tất cả các số hạng có độ nhỏ cao hơn bậc hai, và cả tất cả các số hạng chứa hệ số dãn nở nhiệt; dấu phẩy tại mọi nơi ký hiệu cho việc lấy vi phân theo thông số [1].

Trong sóng âm thứ hai, biên độ tương đối của các dao động p và v nhỏ so với các biên độ T và w; do đó có thể bỏ cả các số hạng chứa wp' và wv'. Để xác định U chỉ cần khảo sát phương trình (141-16) và hiệu các phương trình (141-15) và (141-17). Điều kiện tương thích của hai phương trình bậc nhất thu được như vậy cho T' và w' dẫn tới phương trình toàn phương

$$\rho_n U^2\frac{\partial s}{\partial T} - Uw\left[\frac{4\rho_s\rho_n}{\rho}\frac{\partial s}{\partial T} - 2s\frac{\partial \rho_n}{\partial T}\right] - \rho_s s^2 = 0,$$

từ đó

$$U = u_2 + w\left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{sT}{\rho_n c}\frac{\partial \rho_n}{\partial T}\right).$$

Ở đây u_2 là giá trị cục bộ của vận tốc âm thứ hai, thay đổi từ điểm này

[1] Không phải ký hiệu biến thiên của các đại lượng dao động, như đã dùng ở trên trong tiết này!

đến điểm khác của prôfin sóng cùng với độ lệch δT của nhiệt độ khỏi giá trị cân bằng của nó. Khai triển u_2 theo các lũy thừa δT, ta thu được

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\frac{\rho_n u_s}{\rho s}w,$$

trong đó u_{20} là giá trị cân bằng của u_2. Cuối cùng, ta thu được

$$U = u_{20} + w\frac{\rho_n sT}{\rho s}\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{u_{20}^3 c}{T}. \qquad (141\text{-}18)$$

Khi prôfin sóng biến dạng đủ mạnh, trong sóng sẽ xuất hiện các gián đoạn (xem §102) – trong trường hợp đã cho, đó là các gián đoạn nhiệt độ. Vận tốc lan truyền gián đoạn bằng nửa tổng các vận tốc U ở cả hai bên gián đoạn, nghĩa là bằng

$$c_{20} + \frac{w_1 + w_2}{2}\frac{\rho_s sT}{\rho s}\frac{\partial}{\partial T}\ln\frac{u_{20}^3 c}{T}, \qquad (141\text{-}19)$$

ở đây w_1, w_2 là những giá trị của w ở hai bên gián đoạn.

Hệ số của w trong biểu thức (141-18) có thể dương hoặc âm. Tùy theo điều đó các điểm có các giá trị w lớn hơn sẽ vượt trước hoặc chậm lại sau các điểm có các giá trị w nhỏ hơn, còn gián đoạn sẽ tương ứng xuất hiện hoặc ở mặt đầu sóng trước, hay mặt đầu sóng sau (trái với âm thông thường, ở đây sóng va chạm bao giờ cũng xuất hiện ở mặt đầu sóng trước).

BÀI TẬP

1. Xác định tỷ số giữa các cường độ phát của âm thứ nhất và âm thứ hai bởi một mặt phẳng thực hiện những dao động theo phương pháp tuyến với nó.

Giải. Ta tìm vận tốc v_s (hướng theo trục x vuông góc với mặt phẳng) ở trong các sóng thứ nhất và thứ hai được phát ra lần lượt dưới dạng

$$v_{s1} = A_1\cos\left(t - \frac{x}{u_1}\right), \qquad v_{s2} = A_2\cos\left(t - \frac{x}{u_2}\right).$$

Trên mặt của mặt phẳng dao động các vận tốc v_s và v_n phải bằng vận tốc các dao động của nó (được ký hiệu bằng $v_n\cos\omega t$). Điều đó cho các phương trình

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 = v_0$$

(các hệ số a_1, a_2 được lấy từ (141-11)). Mật độ năng thông trung bình (theo thời gian) trong sóng âm trong hêli II bằng

$$\rho_s \overline{v_s^2} + \rho_n \overline{v_n^2} = \frac{1}{2} A^2 \left(\rho_s + \rho_n a^2\right);$$

năng thông (cường độ) thu được bằng cách nhân với vận tốc tương ứng u của âm. Tỷ số giữa các cường độ của các sóng âm thứ hai và thứ nhất bằng

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2 \left(\rho_s + \rho_n a_2^2\right) u_2}{A_1^2 \left(\rho_s + \rho_n a_1^2\right) u_1} \approx \frac{\beta^2 T u_2^3}{c u_1}$$

(ở đây, chúng ta giả thiết $u_2 << u_1$, điều này còn đúng cho tới các nhiệt độ rất thấp). Tỷ số này rất nhỏ.

2. Cũng bài tập trên cho sự phát âm từ một mặt nhiệt độ biến thiên tuần hoàn.

Giải. Chỉ cần viết điều kiện biên $\mathbf{j} = 0$, điều kiện này phải được thỏa mãn ở trên mặt đứng yên. Nó cho ta

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0,$$

từ đó

$$\left|\frac{A_2}{A_1}\right| = \frac{\rho_s + \rho_n a_1}{\rho_s + \rho_n a_2} \approx \frac{s}{\beta^2 u_2^2}.$$

Ta tìm được cho tỷ số giữa các cường độ

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{c}{T\beta^2 u_1 u_2}.$$

Tỷ số này rất lớn.

3. Xác định vận tốc âm truyền dọc theo ống mao dẫn có đường kính nhỏ so với độ xuyên sâu nhớt $\delta \sim (\eta/\rho_n \omega)^{1/2}$ (*K.R. Atkins*, 1959)[1].

Giải. Trong những điều kiện đã nêu có thể coi rằng, chuyển động bình thường trong ống mao dẫn hoàn toàn được giữ lại bởi ma sát với thành ($\mathbf{v}_n = 0$). Hệ các phương trình tuyến tính hóa (141.1-2), (141-4) có dạng [2]

---

[1] Các sóng này được gọi là *âm thứ tư*. *Âm thứ ba* được gọi là các sóng truyền theo màng hêli II ở trên mặt rắn; các lực tương tác Van - der - Waals của chất lỏng trong màng với vật rắn giữ vai trò chủ yếu.

[2] Còn phương trình bảo toàn xung lượng (141-3) cần được bỏ đi: nó không xảy ra trong các điều kiện đang xét, khi cần phải đặt ngoại lực vào ống mao dẫn để giữ nó đứng yên.

$$\dot{\rho}' + \rho_s \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \quad \dot{\mathbf{v}}_s + \nabla\mu' = \dot{\mathbf{v}}_s - s\nabla T' + \frac{1}{\rho}\nabla p' = 0 \ .$$

$$(s\rho)^{\cdot} = \rho\dot{s}' + s\dot{\rho}' = 0$$

(dấu phẩy ký hiệu cho phần biến thiên của các đại lượng trong sóng). Nếu lại bỏ qua sự dãn nở nhiệt của chất lỏng, từ phương trình thứ ba, ta tìm được

$$\frac{p's}{u_1^2} = -\frac{T'\rho c}{T}.$$

Bây giờ, khử v_s khỏi hai phương trình đầu, ta thu được phương trình sóng $p' = u^2\Delta p' = 0$, trong đó vận tốc truyền âm u được cho bởi công thức

$$u^2 = \frac{\rho_s}{\rho}u_1^2 + \frac{\rho_n}{\rho}u_2^2.$$

4. Tìm các hệ số hấp thụ của âm thứ nhất và âm thứ hai trong hêli II.

Giải. Các phép tính được thực hiện tương tự như đã làm ở §79 cho âm trong các chất lỏng thông thường; khi đó thay (79-1) ta dùng biểu thức (140-10). Nếu bỏ qua tất cả các số hạng chứa hệ số dãn nở nhiệt độ β (kể cả trong (141.10-11)), và thu được cho hệ số hấp thụ

$$\gamma_1 = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2\right), \quad \gamma_2 = \frac{\omega^2\rho_s}{2\rho\rho_n u_2^3}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 + \rho^2\zeta_3 - 2\rho\dot{\zeta}_1 + \frac{\rho_n\kappa}{\rho_s c}\right).$$

L.Đ.LANĐAU và E.M.LIFSITX

THỦY ĐỘNG LỰC HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản	PGS, TS TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập	ĐẶNG VĂN SỬ
Sửa bông	ĐẶNG VĂN SỬ, ĐẶNG ĐÌNH THẠCH
Vẽ bìa	HƯƠNG LAN
Người chế bản	NGUYỄN HOÀNG ANH

Mã số $\frac{53 - 532.5}{\text{KHKT} - 2001}$ 123 - 46, 29/6/2001

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo - Hà nội

In 700 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Tổng hợp Hà Nội. Giấy phép xuất bản số: 123-46 cấp ngày 29-6-2001. In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2001.

201233



Giá : 125.000đ