PHAN HUY THIỆN

Phương trình TOÁN LÝ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

PHAN HUY THIỆN

PHƯƠNG TRÌNH TOÁN LÝ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

*Nội dung chính của cuốn **Phương trình Toán lý** này đang được tác giả giảng dạy cho sinh viên các khoa Toán, Lý và các ngành kỹ thuật có liên quan của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội. Ngoài ra, cuốn sách được bổ sung và sửa đổi để đáp ứng nhu cầu học tập của sinh viên các trường Đại học Khoa học Tự nhiên và các trường Đại học Kỹ thuật trong cả nước.*

Mối liên hệ giữa các đại lượng vật lý trong tự nhiên là phức tạp nhưng có quy luật, mục đích của chúng ta là tìm ra được các mối liên hệ có quy luật đó. Cho đến nay, người ta phân loại các dạng phương trình toán lý theo môn học Phương trình đạo hàm riêng, vì nó phù hợp với phương pháp giải. Cụ thể, có ba dạng phương trình đạo hàm riêng cơ bản: phương trình Hyperbolic, phương trình Parabolic và phương trình Elliptic. Nội dung của cuốn sách bao gồm:

– Chương I trình bày việc phân loại các phương trình đạo hàm riêng cấp 2; tóm tắt cách giải phương trình vi phân cấp 2; khái niệm chuỗi Fourier và biểu diễn các toán tử vi phân trong các hệ tọa độ cong trực giao.

– Chương II trình bày về phương trình Hyperbolic, còn được gọi là phương trình sóng. Nó được thiết lập trên cơ sở nghiên cứu các dao động của dây, màng mỏng, sóng âm, sóng tạo ra do thuỷ triều, sóng đàn hồi, sóng điện từ trường...

– Chương III trình bày về phương trình Parabolic, còn được gọi là phương trình truyền nhiệt. Phương trình Parabolic không chỉ đặc trưng cho quá trình truyền nhiệt mà còn mô tả các hiện tượng khuếch tán như khuếch tán chất khí, chất lỏng...

– Chương IV trình bày về phương trình Elliptic, đặc biệt là lý thuyết thế.

– Chương V đề cập đến các phép biến đổi tích phân, là công cụ quan trọng để giải phương trình phương trình vi phân đạo hàm riêng.

– Chương VI trình bày về phương pháp hàm Green.

– Chương VII trình bày các hàm đặc biệt như các đa thức trực giao, hàm Gamma, hàm trụ, hàm cầu, hàm siêu bội... và tính trực giao của chúng.

Cuốn sách có đưa vào một số bài giải mẫu và bài tập có hướng dẫn.

Mặc dù, tác giả đã có nhiều cố gắng trong quá trình biên soạn sao cho nội dung kiến thức trong cuốn sách mang tính khoa học và thực tiễn cao nhất. Tuy nhiên, cuốn sách không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của độc giả để lần xuất bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn. Thư từ xin gửi về địa chỉ: Công ty Cổ phần Sách Đại học – Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

TÁC GIẢ

Chương I
MỞ ĐẦU

§1. PHÂN LOẠI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 2

1. Phương trình đạo hàm riêng cấp 2

Phương trình đạo hàm riêng cấp m là phương trình có dạng

$$F\left(x;u;\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n};\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\ldots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)=0.$$

trong đó: F là hàm nhiều biến; $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ là vector trong không gian Euclide n chiều $\mathbb{R}^n$; $u(x)$ là hàm chưa biết; $k_1+k_2+\ldots+k_n=m$.

Cấp (bậc) của phương trình là cấp của đạo hàm cấp cao nhất trong phương trình. Phương trình tuyến tính có thể viết dưới dạng $\hat{L}u=b(x)$, trong đó toán tử tuyến tính $\hat{L}$ có dạng

$$\hat{L}=a_0(x)+\sum_{\substack{k=1\\ k_1,k_2,\ldots,k_n\geq 0\\ k_1+k_2+\ldots+k_n=k}}^{m} a_k^{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x)\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}.$$

Nếu $b(x)=0$, phương trình được gọi là *phương trình thuần nhất*.

Nghiệm tổng quát của phương trình phụ thuộc vào hàm tùy ý, khác với phương trình vi phân thường là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thường phụ thuộc vào hằng số tùy ý.

Trong các bài toán vật lý, phương trình thường gặp là phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2 (m = 2).

Ví dụ 1: Xét phương trình

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

trong mặt phẳng (x,y) nó có nghiệm tổng quát $u(x,y)=f(y)$.

Phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 2 với hai biến độc lập x,y là hệ thức liên hệ giữa hàm chưa biết $u(x,y)$ và đạo hàm riêng của nó đến cấp 2:

$$F\left(x,\ y,\ u,\ u_x,u_y,u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}\right)=0. \qquad (*)$$

Trường hợp số biến độc lập lớn hơn được mô tả tương tự.

Phương trình vi phân (*) được gọi là *tuyến tính đối với đạo hàm cấp 2* nếu nó có dạng

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0, \qquad (1.1)$$

trong đó: a_{11}, a_{12}, a_{22} là hàm của x và y.

Nếu các hệ số a_{11}, a_{12}, a_{22} không chỉ phụ thuộc vào x và y mà còn phụ thuộc cả vào x, y, u, u_x, u_y giống như F_1 thì (1.1) được gọi là *phương trình chuẩn tuyến tính.*

Phương trình (1.1) được gọi là *tuyến tính* nếu nó tuyến tính cả với đạo hàm cấp 2: u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} và đạo hàm cấp 1: u_x, u_y của nó, tức là nó có dạng

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \qquad (1.2)$$

trong đó: a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f là các hàm chỉ phụ thuộc vào x và y.

Nếu các hệ số của phương trình không phụ thuộc vào x, y thì nó là *phương trình tuyến tính với hệ số hằng số.* Phương trình được gọi là *thuần nhất* nếu $f\left(x, y\right) = 0$.

Nhờ phép đổi biến: $\xi = \varphi\left(x, y\right)$, $\eta = \psi\left(x, y\right)$ và giả sử tồn tại phép biến đổi ngược, sẽ nhận được phương trình mới tương đương với phương trình xuất phát. Đương nhiên, vấn đề đặt ra là *có thể chọn biến mới như thế nào sao cho sau khi đổi biến phương trình mới có dạng đơn giản nhất?*

Để trả lời câu hỏi trên, xét phương trình (1.1)

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0.$$

Sau khi đưa vào biến mới, các đạo hàm riêng có dạng

$$\left.\begin{aligned}
&u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x;\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx}\\
&u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}\\
&u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

Thay các giá trị đạo hàm (1.3) vào (1.1) thu được phương trình mới có dạng

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \qquad (1.4)$$

trong đó:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \;;$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y \;;$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2;$$

$\bar{F}$ là hàm không phụ thuộc vào đạo hàm cấp 2.

Nhận xét rằng, nếu phương trình xuất phát tuyến tính, tức là

$$F\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f\,,$$

thì $\bar{F}$ có dạng

$$\bar{F}\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta\,,$$

tức là phương trình vẫn tuyến tính. Chọn biến ξ và η sao cho một trong các hệ số hệ số $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{22}$ bằng không, phương trình sẽ có dạng đơn giản.

2. Phân loại phương trình đạo hàm riêng cấp 2

Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng đã chỉ ra rằng, dấu của biểu thức $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ xác định loại của phương trình

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0\,. \qquad (**)$$

Phương trình (**) tại điểm M được phân loại như sau:

– *Loại Hyperbolic* nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

– *Loại Elliptic* nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$;

– *Loại Parabolic* nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Dễ dàng khẳng định được tính đúng đắn của hệ thức :

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)D^2\,,$$

với

$$D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y\,.$$

Từ đó suy ra tính bất biến của loại phương trình khi thực hiện phép đổi biến, vì định thức hàm Jacobian D trong phép đổi biến là khác không. Tại mỗi điểm khác nhau trong miền đã cho, phương trình có thể thuộc các loại khác nhau.

Xét miền G, tại các điểm trong vùng này phương trình có cùng một loại. Như vậy, qua mỗi điểm của miền G sẽ có 2 đường đặc trưng :

– *Hyperbolic* có 2 đường đặc trưng thực và khác nhau;

– *Elliptic* có 2 đường đặc trưng phức và khác nhau;

– *Parabolic* có 2 đường đặc trưng thực và trùng nhau.

Trong mỗi trường hợp trên, đưa được phương trình về dạng đơn giản sau :

a) Phương trình loại Hyperbolic

Nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, đặt

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

đưa phương trình (1.1) về dạng (1.4). Chia hai vế của (1.4) cho hệ số của $u_{\xi\eta}$ phương trình thu được có dạng

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \text{ trong đó } \Phi = -\frac{\overline{F}}{2\overline{a}_{12}}.$$

Đó là *dạng chính tắc* của phương trình loại Hyperbolic.

Người ta thường sử dụng dạng chính tắc thứ hai của phương trình loại Hyperbolic như sau :

Đặt $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$, tức là: $\alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2}, \beta = \dfrac{\xi - \eta}{2}$, trong đó α và β là các biến mới. Ta có đạo hàm riêng của hàm u theo các biến mới là

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

Thay vào *dạng chính tắc* của phương trình loại Hyperbolic ở trên phương trình (1.1) có dạng

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \text{trong đó } \Phi_1 = 4\Phi. \tag{1.5}$$

Đó là *dạng chính tắc thứ hai* của phương trình loại Hyperbolic.

b) Phương trình loại Parabolic

Nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ suy ra $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. Đặt: $\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$, khi các hệ số biến đổi thành

$$\overline{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{11}a_{22}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)^2.$$

Vì $a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$ suy ra

$$\overline{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x + \sqrt{a_{22}}\,\eta_y\right) = 0.$$

Cuối cùng chia phương trình (1.4) cho hệ số của $u_{\eta\eta}$ ta nhận được *dạng chính tắc* của phương trình loại Parabolic

$$u_{\eta\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right), \tag{1.6}$$

trong đó $\Phi = -\dfrac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}$.

c) Phương trình loại Elliptic

Nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, đặt: $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi*(x, y)$. Như vậy, phương trình loại Elliptic sẽ có dạng giống như phương trình loại Hyperbolic.

Để không gặp biến phức, ta đưa vào biến mới α và β với $\alpha = \dfrac{\varphi + \varphi*}{2}, \beta = \dfrac{\varphi - \varphi*}{2i}$, sao cho: $\xi = \alpha + i\beta$, $\eta = \alpha - i\beta$. Trong trường hợp này ta có:

$$\begin{aligned} &a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \\ &\quad = \left(a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2\right) - \left(a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2\right) + \\ &\quad + 2i\left(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}\left(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x\right) + a_{22}\alpha_y\beta_y\right) = 0, \end{aligned}$$

tức là $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22}$ và $\overline{a}_{12} = 0$.

Phương trình (1.4) sau khi chia cho hệ số của $u_{\alpha\alpha}$ có dạng

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta\right), \text{ trong đó } \Phi = -\frac{\overline{F}}{\overline{a}_{22}}. \tag{1.7}$$

Ta nhận được *dạng chính tắc* của phương trình loại Elliptic.

Như vậy, do tính phụ thuộc vào dấu của biểu thức $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, ta có thể đưa phương trình (1.1) về các dạng sau:

– Nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (loại Hyperbolic): $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ hay $u_{xy} = \Phi$;

– Nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (loại Elliptic): $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$;

– Nếu $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (loại Parabolic): $u_{xx} = \Phi$.

3. Các ví dụ

Ví dụ 1: Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$$

Giải: Theo như phương trình (1.1) ta có

$$a_{11} = x^2,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = -y^2,\ F_1 = 0,\ a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 > 0.$$

Do đó phương trình thuộc dạng Hyperbolic. Lập phương trình đặc trưng

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \Rightarrow (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} xdy + ydx = 0 \\ xdy - ydx = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{dy}{y} + \dfrac{dx}{x} = 0 \\ \dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln y + \ln x = \ln C_1 \\ \ln y - \ln x = \ln C_2 \end{array}\right.$$

Ta có hai họ đường cong đặc trưng:

$$\begin{cases} xy = C_1 \\ \dfrac{y}{x} = C_2 \end{cases}$$

Thực hiện phép đổi biến mới: $\xi = xy,\ \eta = \dfrac{y}{x}$.

Tính các đạo hàm riêng theo các biến cũ qua các đạo hàm riêng theo các biến mới:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi y - u_\eta \frac{y}{x^2};\quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi x + u_\eta \frac{1}{x};$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\xi y - u_\eta \frac{y}{x^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{y^2}{x^4} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{y}{x^3};$$

$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(u_\xi x + u_\eta \frac{1}{x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{x^2}.$$

Thay các giá trị đạo hàm cấp 2 vào phương trình vi phân đã cho ta được

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{y^2}{x^4} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{y}{x^3}\right) - y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} y^2 + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{xy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

tức là phương trình được đưa về dạng chính tắc.

Ví dụ 2: Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sin^2 x - 2y\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Giải: Ta có

$a_{11} = \sin^2 x;\quad a_{12} = -y\sin x;\quad a_{22} = y^2 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2\sin^2 x - y^2\sin^2 x = 0$

Vậy phương trình đã cho thuộc dạng Parabolic. Phương trình đặc trưng có dạng:

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sin^2 x dy^2 + 2y\sin x dx dy + y^2 dx^2 = \left(\sin x dy + y dx\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sin x dy + y dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0 \Rightarrow \ln y + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln C$$

$$\Rightarrow \qquad y \operatorname{tg}\frac{x}{2} = C$$

là đường cong tích phân đặc trưng.

Thực hiện phép đổi biến:

$$\xi = y \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \quad \eta = y \text{ (hàm tùy ý)}.$$

Tính các đạo hàm theo biến mới:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{y}{\sin^2\frac{x}{2}}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{y}{\sin^2\frac{x}{2}}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{y^2}{\sin^4\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{y}{\sin^2\frac{x}{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\right)\frac{y}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Thay các giá trị của $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ vào phương trình đã cho ta được:

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}y^2\frac{\sin^2 x}{\sin^4\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{y\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\right)\frac{y^2\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} -$$

$$-\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{y\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} + y^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{y\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{y\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow y\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\sin x.$$

Vì $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\xi}{\eta} \Rightarrow \sin x = \dfrac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$, ta có dạng chính tắc của phương trình là

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

Ví dụ 3: Đưa phương trình sau về dạng chính tắc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Giải: Trong trường hợp này

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = -1,\ a_{22} = 2 \Rightarrow a_{12}^2 - a_{11}a_{12} = -1 < 0.$$

Phương trình thuộc dạng Elliptic, có phương trình đặc trưng

$$dy^2 + 2dxdy + 2dx^2 = 0 \Rightarrow y'^2 + 2y' + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (y'+1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow y'+1 = \pm i \Rightarrow y' = -1 \pm i.$$

Ta nhận được 2 họ đặc trưng ảo:

$$y' = -1 \pm i \Leftrightarrow dy = (-1 \pm i)dx \Rightarrow \begin{cases} y + x - ix = C_1 \\ y + x + ix = C_2 \end{cases}$$

Thực hiện phép đổi biến: $\xi = y + x,\ \eta = x$ ta được

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Thay các giá trị của đạo hàm riêng vào phương trình đã cho ta thu được

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

Đó là dạng chính tắc của phương trình Elliptic.

§2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

Chúng ta nhắc lại một số cách giải phương trình vi phân thường. Xét phương trình vi phân tuyến tính có dạng

$$L(y) = a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = F(x), \quad (1.8)$$

trong đó: $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ là các hàm liên tục trong khoảng $a \le x \le b$ và $a_0(x) \ne 0$ trong khoảng $a \le x \le b$. Cách chung để giải phương trình (1.8) là: trước hết giải phương trình thuần nhất cấp n là $L(y) = 0$, thu được một tập nghiệm cơ bản $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, nghiệm tổng quát y_c của phương trình thuần nhất là một tổ hợp tuyến tính của tập nghiệm cơ bản:

$$y_c = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \quad (1.9)$$

trong đó: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ là các hằng số tùy ý.

Tiếp theo, tìm bất cứ nghiệm riêng y_p nào của phương trình vi phân không thuần nhất $L(y) = F(x)$. Để giải phương trình này, ta thường dùng phương pháp hệ số bất định hoặc phương pháp biến thiên hằng số để tìm nghiệm riêng. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (1.8) sẽ là $y = y_c + y_p$.

Trong các bài toán ứng dụng, nghiệm phương trình vi phân (1.8) đòi hỏi phải thỏa mãn các điều kiện bổ sung nào đó. Số điều kiện này trong hầu hết các ứng dụng bằng cấp cao nhất của phương trình. Ví dụ, đối với phương trình vi phân cấp 2:

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x) = 0, \quad a \le x \le b \quad (1.10)$$

bị lệ thuộc bởi điều kiện bổ sung tại $x = a$ có dạng:

$$y(a) = \alpha, \; y'(a) = \beta,$$

với α, β là các hằng số.

Phương trình vi phân với điều kiện bổ sung được xem như là một bài toán cho trước giá trị ban đầu. Bài toán giá trị ban đầu thường có nghiệm duy nhất. Khi phương trình vi phân (1.10) bị hạn chế bởi hai điểm khác nhau, tức là tại $x = a$ và $x = b$ phương trình có dạng

$$\begin{cases} c_{11}y(a) + c_{12}y'(a) = \alpha, \; c_{11}^2 + c_{12}^2 \ne 0 \\ c_{21}y(b) + c_{22}y'(b) = \beta, \; c_{21}^2 + c_{22}^2 \ne 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

trong đó: $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, \alpha$ và β là các hằng số.

Điều kiện bổ sung (1.11) được gọi là *điều kiện biên*.

Phương trình vi phân (1.10) với điều kiện biên (1.11) được gọi là *bài toán biên*. Nghiệm của bài toán biên phụ thuộc vào điều kiện biên. Bài toán biên không chỉ có một nghiệm, mà nó có vô số nghiệm. Điều kiện biên có dạng

$$\begin{cases} c_{11}y(a)+c_{12}y'(a)+c_{13}y(b)+c_{14}y'(b)=\alpha \\ c_{21}y(b)+c_{22}y'(b)+c_{23}y(a)+c_{24}y'(a)=\beta \end{cases}$$

trong đó: $c_{ij}, i=1, 2, j=1, 2, 3, 4$ và α, β là các hằng số; được gọi là *điều kiện biên hỗn hợp*.

Bài toán biên hỗn hợp thường khó giải. Xét phương trình tuyến tính cấp 1:

$$L(y)=\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x). \tag{1.12}$$

Để giải phương trình (1.12), trước hết giải phương trình thuần nhất

$$L(y)=\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \tag{1.13}$$

để thu được nghiệm tổng quát y_c. Ta có thể tách biến phương trình (1.13) có dạng

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx. \tag{1.14}$$

Đặt

$$P(x)=\int_0^x p(\xi)d\xi \quad \text{với} \quad \frac{dP}{dx}=p(x). \tag{1.15}$$

Tích phân (1.14) thu được

$$\ln y=-P(x)+C$$

$$\Rightarrow e^{\ln y}=e^{-P(x)+C}=e^{-P(x)}e^{C} \Rightarrow y=C_1e^{-P(x)}, C_1=e^{C}.$$

Vậy nghiệm tổng quát (1.13) là $y_c=C_1e^{-P(x)}$.

Dùng phương pháp biến thiên hằng số và giả thiết một nghiệm riêng có dạng $y_p=u(x)e^{-P(x)}$, trong đó C_1 ở trong nghiệm tổng quát đã được thay thế bằng hàm chưa biết $u(x)$, nghiệm giả định này có đạo hàm là

$$\frac{dy_p}{dx}=u(x)e^{-P(x)}\left(-p(x)\right)+\frac{du}{dx}e^{-P(x)}.$$

Thay y_p và $\frac{dy_p}{dx}$ vào phương trình không thuần nhất (1.12) ta có

$$\frac{dy_p}{dx} + p(x)y_p = q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}e^{-P(x)} = q(x) \Rightarrow u = u(x) = \int_0^x q(\xi)e^{P(\xi)}d\xi .$$

Suy ra nghiệm riêng

$$y_p = e^{-P(x)}\int_0^x q(\xi)e^{P(\xi)}d\xi .$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.12) có dạng

$$y = y_c + y_p = e^{-P(x)}\left[C_1 + \int_0^x q(\xi)e^{P(\xi)}d\xi\right]. \qquad (1.16)$$

Một phương pháp khác để giải phương trình tuyến tính cấp 1 (1.12) là nhân phương trình với thừa số tích phân $e^{P(x)}$ với $P(x) = \int_0^x p(\xi)d\xi$ để thu được phương trình vi phân

$$e^{P(x)}\frac{dy}{dx} + e^{P(x)}p(x)y = e^{P(x)}q(x).$$

trong đó $e^{P(x)}\frac{dy}{dx} + e^{P(x)}p(x)y = \frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}y\right)$ suy ra

$$\frac{d}{dx}\left(e^{P(x)}y\right) = e^{P(x)}q(x).$$

Phương trình này dễ dàng tích phân để thu được nghiệm cho bởi (1.16).

1. Phương trình vi phân cấp 2

Xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2 có dạng (1.10). Giả sử $\{y_1(x), y_2(x)\}$ là tập nghiệm cơ bản của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2

$$L(y) = a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0.$$

Suy ra nghiệm tổng quát có dạng

$$y_c = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \qquad (1.17)$$

trong đó: C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Dùng phương pháp biến thiên hằng số tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất

$$L(y) = a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \qquad (1.18)$$

có dạng $$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \tag{1.19}$$

trong đó: $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm thay thế hằng số C_1, C_2 trong (1.17).

Các hàm u, v cần tìm để thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} u'(x)y_1(x) + v'(x)y_2(x) = 0 \\ u'(x)y_1'(x) + v'(x)y_2'(x) = \dfrac{F(x)}{a_0(x)}, a_0(x) \neq 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

Dùng quy tắc Cramer giải hệ (1.20) đối với u' và v' ta được:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \dfrac{F(x)}{a_0(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}; v'(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \dfrac{F(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}},$$

hay $$\frac{du}{dx} = \frac{-y_2(x)F(x)}{a_0(x)W(x)}; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{y_1(x)F(x)}{a_0(x)W(x)}. \tag{1.21}$$

trong đó $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ là định thức Wronskian.

Các phương trình (1.21) sau khi tích phân sẽ thu được các hàm $u(x)$ và $v(x)$:

$$\begin{aligned} u = u(x) &= -\int_\alpha^x \frac{y_2(\xi)F(\xi)}{a_0(\xi)W(\xi)}d\xi; \\ v = v(x) &= \int_\alpha^x \frac{y_1(\xi)F(\xi)}{a_0(\xi)W(\xi)}d\xi, \end{aligned} \tag{1.22}$$

trong đó α là hằng số nào đó.

Như vậy, nghiệm của phương trình vi phân không thuần nhất có một nghiệm riêng tìm được là

$$\begin{aligned} y_p = y_p(x) &= y_1(x)\int_\alpha^x \frac{-y_2(\xi)F(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi + y_2(x)\int_\alpha^x \frac{y_1(\xi)F(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi \\ &= \int_\alpha^x \frac{\left[y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)\right]F(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = y_c + y_p = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_\alpha^x \frac{\left[y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)\right]F(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}d\xi \tag{1.24}$$

Một trong những phương trình vi phân cấp 2 có cách giải đơn giản là

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \lambda F = 0. \tag{1.25}$$

Phương trình này xuất hiện do việc nghiên cứu nhiều phương trình vi phân đạo hàm riêng trong tọa độ Đề-các (Descartesian) đối với các hiện tượng vật lý và kỹ thuật. Phương trình vi phân (1.25) chứa tham số λ, vì thế ta sẽ xét 3 trường hợp của tham số : âm, dương và bằng không.

- *Trường hợp 1*: $\lambda = -\omega^2 \ (\omega > 0)$

Phương trình vi phân có dạng

$$\frac{d^2F}{dx^2} - \omega^2 F = 0.$$

là phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng số, vì thế người ta có thể giả thiết nó có một nghiệm mũ $F = e^{mx}$; ta có phương trình đặc trưng là $m^2 - \omega^2 = 0$ với nghiệm đặc trưng $\begin{cases} m = \omega \\ m = -\omega \end{cases}$ và tập nghiệm cơ bản là $\left\{e^{\omega x}, e^{-\omega x}\right\}$. Nếu biết được tập nghiệm cơ bản của các nghiệm, có thể tạo nên một tổ hợp tuyến tính của các nghiệm này và sinh ra một tập vô hạn các nghiệm khác

$$F(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, nó phụ thuộc vào các điều kiện bổ sung là điều kiện ban đầu hoặc điều kiện biên.

Từ tính tùy ý của C_1, C_2 có thể viết nghiệm dưới nhiều cách như:

$$F(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x};$$

$$F(x) = C_1 e^{\omega(x - x_0)} + C_2 e^{-\omega(x - x_0)};$$

$$F(x) = C_1 \operatorname{sh} \omega x + C_2 \operatorname{ch} \omega x;$$

$$F(x) = C_1 \operatorname{sh} \omega(x - x_0) + C_2 \operatorname{ch} \omega(x - x_0),$$

với C_1, C_2, x_0 là các hằng số tùy ý.

• *Trường hợp 2:* $\lambda = 0$

Nghiệm phương trình vi phân $\dfrac{d^2F}{dx^2} = 0$ có các dạng sau:

$$F(x) = C_1 + C_2 x;$$

$$F(x) = K_1 + K_2(x - x_0).$$

• *Trường hợp 3:* $\lambda = \omega^2$ $(\omega > 0)$

Phương trình vi phân $\dfrac{d^2F}{dx^2} + \omega^2 F = 0$ là phương trình vi phân cấp 2 với hệ số hằng số, vì thế có thể giả thiết nó có một nghiệm mũ $F = e^{mx}$, ta có phương trình đặc trưng $m^2 + \omega^2 = 0$ với các nghiệm đặc trưng $\begin{cases} m = i\omega \\ m = -i\omega \end{cases}$ và tập nghiệm cơ bản là $\left\{e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}\right\}$. Nếu biết được tập nghiệm cơ bản có thể tạo nên một tổ hợp tuyến tính của các nghiệm này và sinh ra một tập vô hạn các nghiệm khác

$$F(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x},$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý, nó phụ thuộc vào các điều kiện bổ sung là điều kiện ban đầu hoặc điều kiện biên.

Từ tính tùy ý của C_1, C_2 có thể viết nghiệm dưới nhiều cách như sau :

$$F(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x};$$

$$F(x) = C_1 e^{i\omega(x - x_0)} + C_2 e^{-i\omega(x - x_0)};$$

$$F(x) = C_1 \sin\omega x + C_2 \cos\omega x;$$

$$F(x) = C_1 \sin\omega(x - x_0) + C_2 \cos\omega(x - x_0),$$

với C_1, C_2, x_0 là các hằng số tùy ý.

2. Phương trình Cauchy – Euler

Phương trình Cauchy – Euler là phương trình có dạng

$$a_0 x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \qquad (1.26)$$

trong đó: a_0, a_1, a_2 là các hằng số tùy ý.

Thực hiện phép biến đổi $t = \ln x$ và biến đổi đạo hàm:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{dy}{dt}\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

đưa phương trình (1.26) về dạng

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+\left(a_1-a_0\right)\frac{dy}{dt}+a_2y=0. \qquad (1.27)$$

Giả sử phương trình (1.27) có nghiệm dưới dạng mũ $y=e^{mt}$, ta có phương trình đặc trưng:

$$a_0m^2+\left(a_1-a_0\right)m+a_2=0. \qquad (1.28)$$

Phương trình này cũng có thể được suy ra ngay từ (1.27) bằng cách giả sử nghiệm có dạng $y=x^m \Rightarrow y=e^{mt}=e^{m\ln x}=x^m$. Nghiệm của phương trình đặc trưng xác định loại nghiệm có thể tồn tại do dạng của phương trình Cauchy–Euler. Xét các trường hợp sau:

• *Trường hợp 1:* Nếu phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực phân biệt $m=\alpha$ và $m=\beta$ thì phương trình vi phân (1.26) có tập nghiệm cơ bản là $\left\{x^\alpha, x^\beta\right\}$, vì thế nghiệm tổng quát có dạng $y=C_1x^\alpha+C_2x^\beta$, với C_1,C_2 là các hằng số tùy ý.

• *Trường hợp 2:* Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm thực kép $m=\alpha$ thì tập nghiệm cơ bản của phương trình (1.27) có dạng $\left\{e^{\alpha t}, te^{\alpha t}\right\}$. Phép biến đổi $t=\ln x$ cho tập nghiệm cơ bản $\left\{x^\alpha, x^\alpha\ln x\right\}$ của phương trình (1.26). Nghiệm tổng quát có dạng $y=C_1x^\alpha+C_2x^\alpha\ln x$, trong đó C_1,C_2 là các hằng số tùy ý.

• *Trường hợp 3:* Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm phức dạng $m=\alpha+i\beta$, $m=\alpha-i\beta$ thì tập nghiệm cơ bản của phương trình (1.27) có dạng $\left\{e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t\right\}$. Phép biến đổi $t=\ln x$ cho tập nghiệm cơ bản $\left\{e^{\alpha t}\cos\left(\beta\ln x\right), e^{\alpha t}\sin\left(\beta\ln x\right)\right\}$ của phương trình (1.26). Nghiệm tổng quát có dạng $y=C_1x^\alpha\cos\left(\beta\ln x\right)+C_2x^\alpha\sin\left(\beta\ln x\right)$, trong đó C_1,C_2 là các hằng số tùy ý.

§3. KHÁI NIỆM CHUỖI VÀ TÍCH PHÂN FOURIER

1. Khái niệm

Tập các hàm $\left\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$ là các hàm riêng trực giao nhau trong khoảng $(-L, L)$. Hàm $f(x)$ được gọi là *trơn từng khúc* trong một khoảng nào đó, có nghĩa là khoảng này có thể chia ra nhiều khoảng nhỏ, mà trong mỗi khoảng nhỏ đó, hàm $f(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ liên tục. Tập các hàm trực giao ở trên có thể dùng để biểu diễn hàm trơn từng khúc $f(x)$ dưới dạng chuỗi

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1.29}$$

được gọi là *chuỗi lượng giác Fourier* biểu diễn hàm $f(x)$ trong khoảng $(-L, L)$. Các hằng số a_0, a_n và b_n được gọi là *các hệ số Fourier* của chuỗi. Từ tính trực giao của tập $\left\{1, \sin\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$ có thể tìm được các hệ số Fourier a_0, a_n và b_n như sau:

$$\left.\begin{aligned}
a_0 &= \frac{(f,1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx;\\
a_n &= \frac{\left(f, \cos\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx;\\
b_n &= \frac{\left(f, \sin\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.
\end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

Ví dụ 1: Tìm biểu diễn chuỗi lượng giác Fourier của hàm $f(x) = e^x$ trong khoảng xác định $(-L, L)$.

Giải: Theo công thức (1.30), các hệ số Fourier của khai triển trên có dạng:

$$a_0 = \frac{(f,1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^x dx = \frac{1}{L}\text{sh}L\ ;$$

$$a_n = \frac{\left(f, \cos\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} e^x \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L(-1)^n \text{sh}L}{L^2 + n^2\pi^2}\ ;$$

$$b_n = \frac{\left(f, \sin\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} e^x \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-2n\pi(-1)^n \text{sh}L}{L^2 + n^2\pi^2}.$$

Do đó biểu diễn chuỗi lượng giác Fourier của hàm $f(x) = e^x$ trong khoảng xác định $(-L, L)$ có dạng

$$e^x = \frac{1}{L}\text{sh}L + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2L(-1)^n \text{sh}L}{L^2 + n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L} - \frac{2n\pi(-1)^n \text{sh}L}{L^2 + n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ví dụ 2: Sử dụng chương trình Mathematica khai triển hàm $f(x) = x$ bằng chuỗi Fourier với độ dài $L = 2$.

Giải:

```
L = 2;
```

Định nghĩa các hàm cơ sở Fourier

$$f1_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi m}{L}x \text{ và } f2_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2\pi m}{L}x$$

```
f1[x_,m_] :=Sqrt[2/L] Sin[(2 Pi m)/L x];
f2[x_,m_] :=Sqrt[2/L] Cos[(2 Pi m)/L x];
```

Giả sử chọn hàm khai triển là $f(x) = x$

```
f[x_] :=x ;
```

Các hệ số khai triển được tính theo công thức:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) f2_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-L/2}^{L/2} x\cos\frac{2n\pi}{L}x dx;$$

$$b_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) f1_n(x) dx = \sqrt{\frac{2}{L}}\int_{-L/2}^{L/2} x\sin\frac{2n\pi}{L}x dx.$$

```
acoff[n_] := Sqrt[2/a]
                Integrate[f[x]*f2[x,n],{x,-L/2,L/2}]
bcoff[n_] := Sqrt[2/a]
                ntegrate[f[x]*f1[x,n],{x,-a/2,a/2}]
```

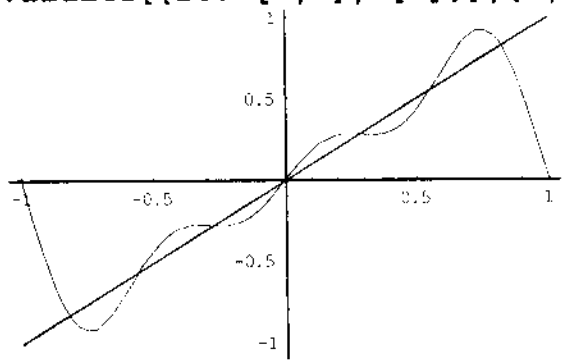
Biểu diễn chuỗi Fourier có dạng

$$x = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{n_{max}} a_n \cos\frac{2n\pi}{L}x + \sum_{n=1}^{n_{max}} b_n \sin\frac{2n\pi}{L}x$$

Sau đó vẽ đồ thị khi $n_{max} = 3$, $n_{max} = 10$ và $n_{max} = 100$, ta thấy rằng với n_{max} càng lớn thì khai triển chuỗi Fourier càng gần sát giá trị thực của hàm $f(x) = x$.

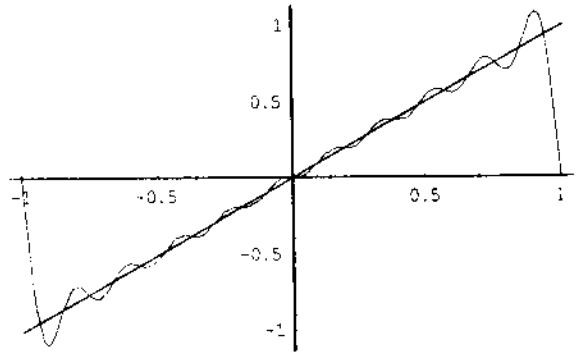
```
four[x_,nmax_] := 1/2 acoff[0] +
                Sum[ acoff[n] f2[x,n],{n,1,nmax}] +
                Sum[ bcoff[n] f1[x,n],{n,1,nmax}]
```

```
nmax=3
Plot[Evaluate[{four[x,3],f[x]}],{x,-a/2,a/2}]
```



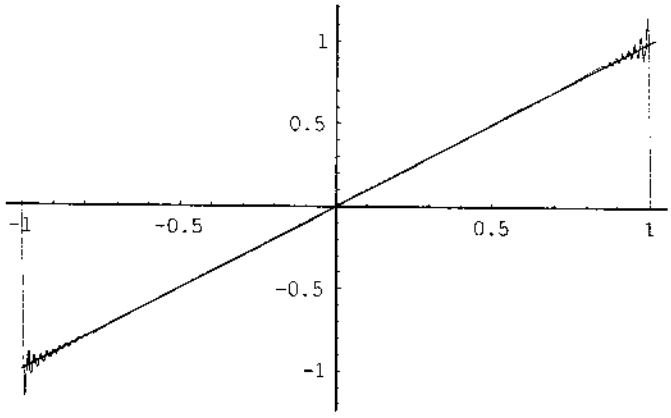
Hình 1.1. **Khai triển hàm *f(x)* = *x* bằng chuỗi Fourier với *n* = 3**

```
nmax=10
Plot[Evaluate[{four[x,10],f[x]}],{x,-a/2,a/2}]
```



Hình 1.2. **Khai triển hàm f(x) = x bằng chuỗi Fourier với *n* =10**

```
max=100
    Plot[Evaluate[{four[x,100],f[x]}],{x,-a/2,a/2}]
```



Hình 1.3. **Khai triển hàm *f(x)* = *x* bằng chuỗi Fourier với *n* =100**

2. Các tính chất của chuỗi lượng giác Fourier

1) *Điều kiện Dirichlet* để tồn tại một chuỗi Fourier là :

– Hàm $f(x)$ phải là đơn trị và tuần hoàn với chu kỳ $2L$;

– Hàm $f(x)$ có một số hữu hạn các cực đại và cực tiểu, một số hữu hạn các điểm gián đoạn trong khoảng $(-L, L)$.

2) Giả sử khoảng $(-L, L)$ là *khoảng Fourier đầy đủ* của hàm $f(x)$. Chuỗi Fourier xác định ở điểm x ngoài khoảng Fourier đầy đủ của hàm $f(x)$, khi đó cho phép khai triển tuần hoàn hàm $f(x)$ xác định ngoài khoảng Fourier đầy đủ.

3) Dấu bằng $(=)$ trong biểu thức (1.29) có thể được thay bằng dấu gần bằng $(\approx)$, có nghĩa là "*tương đương với*", bởi vì chuỗi bên phải không phải hội tụ thành hàm $f(x)$ đối với mọi giá trị của x. Chuỗi Fourier chỉ biểu diễn hàm $f(x)$ trong khoảng Fourier đầy đủ. Một cách chọn khác, người ta có thể xác định hàm $\tilde{f}(x)$ là mở rộng của hàm $f(x)$ bên ngoài khoảng Fourier đầy đủ. Như vậy, $\tilde{f}(x)$ là mở rộng tuần hoàn của hàm $f(x)$, $-L \le x \le L$ có tính chất $\tilde{f}(x+2L) = \tilde{f}(x)$, ngược lại hàm $f(x)$ đối với mọi x không phải là hàm tuần hoàn.

4) Hàm $f(x)$ gọi là *có một biểu diễn chuỗi Fourier* khi các hệ số a_0, a_n và b_n được tính cụ thể. Do đó, có một số hàm không có biểu diễn chuỗi Fourier, ví dụ như các hàm: $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ không có biểu diễn chuỗi lượng giác Fourier trong khoảng $(-L, L)$. Chú ý rằng, các hàm này không xác định ở một hoặc vài điểm trong khoảng $(-L, L)$.

5) Hàm $f(x)$ được gọi là *có bước nhảy gián đoạn* tại điểm x_0 nếu

$$f(x_0^-) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x_0 - \varepsilon) \neq f(x_0^+) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} f(x_0 + \varepsilon).$$

Nếu hàm $f(x)$ và $f'(x)$ là liên tục từng khúc trong khoảng $(-L, L)$ thì biểu diễn chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện:

– Hội tụ về hàm $f(x)$ tại điểm mà hàm $f(x)$ là liên tục;

– Hội tụ về đoạn mở rộng tuần hoàn của hàm $f(x)$ nếu x ở ngoài khoảng Fourier đầy đủ;

– Tại điểm x_0 có bước nhảy gián đoạn hữu hạn thì biểu diễn chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$ là giá trị trung bình của giới hạn trái và phải của bước nhảy gián đoạn.

6) Hàm $S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ được gọi là *tổng riêng thứ* N, nó biểu diễn tổng của N số hạng đầu tiên. Người ta thường vẽ xấp xỉ hàm $S_N(x)$ khi biểu diễn chuỗi Fourier bằng đồ thị. Hàm $f(x)$ bất kỳ có một điểm bước nhảy gián đoạn thì hàm $S_N(x)$ có đồ thị tại lân cận bước nhảy gián đoạn là dạng hàm dao động. Hiệu ứng này được gọi là *hiệu ứng Gibb*. Hiện ứng Gibb luôn có mặt khi người ta dùng một chuỗi hàm liên tục để biểu diễn một hàm gián đoạn, hiệu ứng này vẫn tồn tại cho dù tăng giá trị N rất lớn.

7) Chuỗi có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

có thể viết dưới dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \varphi_n\right),$$

trong đó: $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ được gọi là *biên độ*; $\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ được gọi là *pha*; số hạng thứ n: $C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \varphi_n\right)$ được gọi là *dao động điều hoà thứ* n. Dao động điều hoà thứ nhất $(n = 1)$ được gọi là *dao động điều hoà cơ bản.*

3. Hàm chẵn và hàm lẻ

Hàm $f(x)$ được gọi là *hàm chẵn* của x nếu $f(-x) = f(x)$ với mọi giá trị của x, hàm chẵn đối xứng theo trục y. Hàm $f(x)$ được gọi là *hàm lẻ* của x nếu $f(-x) = -f(x)$ với mọi giá trị của x. Các tính chất sau của hàm chẵn và hàm lẻ cho phép đơn giản biểu diễn chuỗi Fourier :

1) Nếu $f(x)$ là một hàm chẵn của x thì

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$$

Thật vậy, vì $f(x)$ là hàm chẵn nên $f(-x) = f(x)$, do đó

$$\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi = \int_{-L}^{0} f(\xi)d\xi + \int_{0}^{L} f(\xi)d\xi = \int_{0}^{L} f(-\xi)d\xi + \int_{0}^{L} f(\xi)d\xi = 2\int_{0}^{L} f(\xi)d\xi.$$

2) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ của x, tức là $f(-x) = -f(x)$ thì

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$$

Thật vậy

$$\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi = \int_{-L}^{0} f(\xi)d\xi + \int_{0}^{L} f(\xi)d\xi = \int_{0}^{L} f(-\xi)d\xi + \int_{0}^{L} f(\xi)d\xi = 0.$$

3) Tích của hai hàm chẵn là một hàm chẵn, tích của hai hàm lẻ là một hàm chẵn, tích của một hàm chẵn với một hàm lẻ là một hàm lẻ.

– Nếu $f(x)$ là một hàm lẻ, biểu diễn (1.29) có dạng

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L,$$

trong đó $b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$

– Nếu $f(x)$ là một hàm chẵn, biểu diễn Fourier của nó là

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L,$$

trong đó: a_0 và a_n được xác định theo công thức:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Ví dụ 1: Tìm chuỗi Fourier của hàm $f(x) = \begin{cases} -x, & -L < x < 0 \\ x, & 0 < x < L \end{cases}$

Giải: Vì $f(x)$ là hàm chẵn, nên chuỗi Fourier là chuỗi cosin:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

với các hệ số:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^L xdx = \frac{L}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[-1+(-1)^n\right].$$

Suy ra biểu diễn chuỗi Fourier theo hàm cosin của $f(x)$ là:

$$x = \frac{L}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Công thức trên cho phép xác định hàm $f(x)$ trong khoảng $(0, L)$.

Ví dụ 2: Tìm khai triển chuỗi sin Fourier của hàm $f(x) = x$ với $0 < x < L$.

Giải:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

với các hệ số:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2(-1)^n L}{n\pi}.$$

Suy ra biểu diễn chuỗi Fourier theo hàm sin của $f(x)$ có dạng

$$x = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Ví dụ 3: Tìm khai triển chuỗi Fourier cho hàm sóng hình vuông

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -L<x<0\\ 1, & 0<x<L\end{cases}\quad ;\quad f(x+2L)=f(x),$$

ở đây $f(x)$ là một hàm lẻ của x.

Tìm khai triển chuỗi sin Fourier của hàm $f(x)$.

Giải:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

trong đó $b_n = 2\int_0^L (1)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$.

Vậy khai triển chuỗi sin Fourier của $f(x)$ có dạng

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Một dạng viết khác của chuỗi Fourier này là thay lại chỉ số tổng

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{L}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L}+\frac{1}{7}\sin\frac{7\pi x}{L}+\ldots\right].$$

Gọi tổng thứ n của chuỗi là

$$S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{2m+1}\sin\frac{(2m+1)\pi x}{L}.$$

Ví dụ 4. Xét hàm có dạng

$$f(x)=\begin{cases}2, & -2<x<0\\ x, & 0<x<2\end{cases};\quad f(x+4)=f(x)\quad \forall x.$$

Dạng biểu diễn chuỗi Fourier của hàm này là

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right),$$

trong đó:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0}2dx+\int_{0}^{2}xdx\right]=\frac{3}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{2}^{0} 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] = \frac{-2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right];$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] = \frac{-2}{n\pi}.$$

Từ đó suy ra biểu diễn Fourier

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Đó là tổng của hai hàm chẵn và lẻ :

$$F_c(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos\frac{n\pi x}{2};$$

$$G_l(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

4. Các dạng biểu diễn của chuỗi Fourier

a) Biểu diễn Fourier dưới dạng lượng giác

Biểu diễn Fourier dưới dạng lượng giác có dạng

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L < x < L,$$

với các hệ số:

$$a_0 = \frac{(f,1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{\left(f,\cos\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx;$$

$$b_n = \frac{\left(f,\sin\frac{n\pi x}{L}\right)}{\left\|\sin\frac{n\pi x}{L}\right\|^2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Đôi khi người ta còn biểu diễn dưới dạng đối xứng sau:

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{L}+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\ -L<x<L,$$

trong đó: $$A_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx;$$

$$B_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Một số trường hợp hàm $f(x)$ xác định trong khoảng $\alpha\le x\le\alpha+2L$, với $f(x+2L)=f(x)$ có biểu diễn dưới dạng chuỗi lượng giác Fourier như sau

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),$$

với các hệ số được xác định theo công thức:

$$a_0=\frac{1}{2L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx;$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Dạng phức của chuỗi Fourier được xác định bằng đồng nhất thức Euler

$$e^{\frac{in\pi x}{L}}=\cos\frac{n\pi x}{L}+i\sin\frac{n\pi x}{L};\ i^2=-1$$

$$\Rightarrow\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}+e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2};\ \sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}}-e^{-\frac{in\pi x}{L}}}{2i}. \qquad (*)$$

b) Biểu diễn Fourier dưới dạng mũ

Từ (*) ta có khai triển chuỗi Fourier dạng mũ

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n}{2}\left(e^{in\pi x/L}+e^{-in\pi x/L}\right)+\frac{-iB_n}{2}\left(e^{in\pi x/L}-e^{-in\pi x/L}\right)\right]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n-iB_n)e^{in\pi x/L}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+iB_n)e^{-in\pi x/L}.$$

Các hằng số được xác định như sau:

$$C_0=\frac{A_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx;$$

$$C_n = \frac{1}{2}(A_n - iB_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} - if(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx;$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(A_n + iB_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left(f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} + if(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{in\pi x/L}dx.$$

Như vậy

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-in\pi x/L}.$$

Thay tổng cuối cùng n bằng $-n$ ta có

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\pi x/L} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_{-n} e^{in\pi x/L}.$$

Biểu thức này là dạng phức của chuỗi Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi x/L},$$

trong đó $C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx$.

§4. CÁC HỆ TỌA ĐỘ CONG TRỰC GIAO

Giả sử x, y, z là tọa độ Đề-các của một điểm nào đó, còn x_1, x_2, x_3 là tọa độ của hệ tọa độ cong trực giao cũng của điểm này. Xét yếu tố khoảng trong hệ tọa độ Đề-các và hệ tọa độ cong trực giao

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

trong đó $h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}$, $i = 1, 2, 3$; là các hệ số Metric hay còn được gọi là *hệ số Lame*.

Các hệ tọa độ trực giao được đặc trưng đầy đủ bằng ba hệ số Metric h_1, h_2, h_3. Ta đưa vào biểu diễn các toán tử grad, div, rot và toán tử Laplax Δ trong các hệ tọa độ cong trực giao khác nhau, dạng tổng quát của chúng có dạng:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \vec{i}_i;$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial u}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3) \right];$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{i}_1 & h_2 \vec{i}_2 & h_3 \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \right],$$

trong đó: $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ là vector cơ sở có độ dài bằng đơn vị; $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ là vector tùy ý; $u = u(x_1, x_2, x_3)$ là một hàm vô hướng; $A_k = A_k(x_1, x_2, x_3)$, $k = 1, 2, 3$.

1. Hệ tọa độ Đề-các

Các trục tọa độ cong trùng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow h_1 = 1,\ h_2 = 1, h_3 = 1.$$

Các toán tử grad, div, rot và toán tử Laplax Δ trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc được viết:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k};$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \ldots\ldots;$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

trong đó: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector chỉ phương của các trục x, y, z.

2. Hệ tọa độ trụ

Xét hệ tọa độ cong $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = z$ liên hệ với hệ tọa độ Đề-các bởi các hệ thức $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$, các bề mặt của hệ tọa độ cong này khi $r = \text{const}$ là mặt trụ, khi $\varphi = \text{const}$ là mặt phẳng, khi $z = \text{const}$ là mặt phẳng, vì thế còn được gọi là *hệ tọa độ trụ*. Hệ số Metric $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$, do đó các toán tử grad, div, rot và toán tử Laplax Δ trong hệ tọa độ trụ được viết:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{i}_3;$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & r\vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & rA_2 & A_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right)\vec{i}_2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}\right)\vec{i}_3;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. Hệ tọa độ cầu

Xét hệ tọa độ cong $x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \varphi$ liên hệ với hệ tọa độ Đề-các bởi các hệ thức $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, các bề mặt của hệ tọa độ cong này khi $r = \text{const}$ là mặt cầu, khi $\varphi = \text{const}$ là mặt phẳng, khi $z = \text{const}$ là mặt nón, vì thế còn được gọi là hệ tọa độ cầu. Hệ số Metric $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$, do đó các toán tử grad, div, rot và toán tử Laplax Δ trong hệ tọa độ trụ được viết:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{i}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{i}_3;$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_1\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_2) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & r\vec{i}_2 & r\sin\theta\,\vec{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_1 & rA_2 & r\sin\theta A_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_3\right) - \frac{\partial A_2}{\partial\varphi}\right]\vec{i}_1 + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_3\right)\right]\vec{i}_2$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_2\right) - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\right]\vec{i}_3;$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Chương II
PHƯƠNG TRÌNH HYPERBOLIC

§1. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH SÓNG

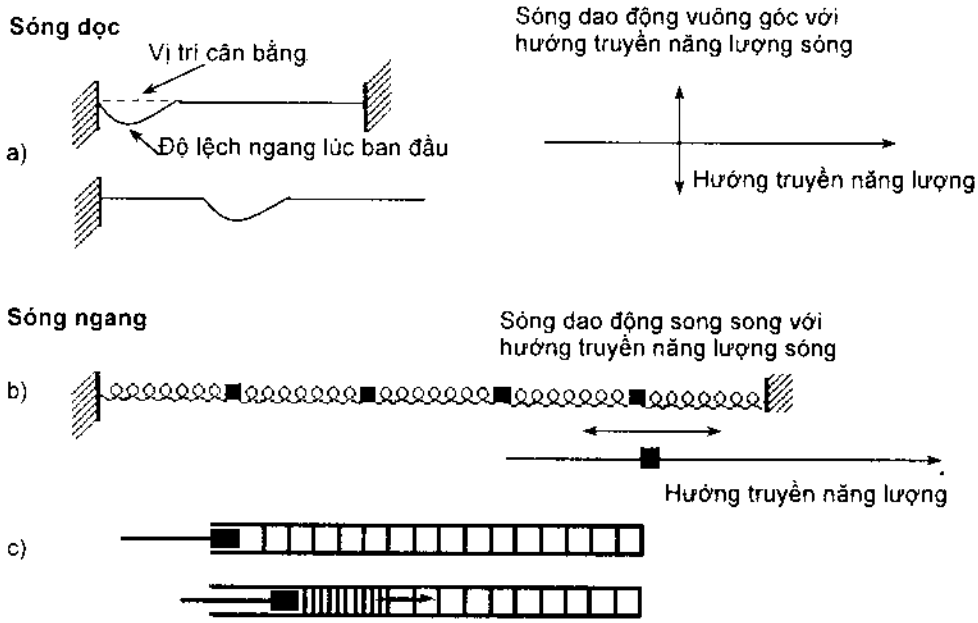
Phương trình sóng còn được gọi là *phương trình Hyperbolic*, nó đóng một vai trò quan trọng trong vật lý cũng như các ngành kỹ thuật, được thiết lập trên cơ sở nghiên cứu các dao động của: dây, màng mỏng, sóng âm, sóng tạo ra do thuỷ triều, sóng đàn hồi, sóng điện từ trường... Chuyển động sóng là sự di chuyển nhiễu loạn một môi trường vật chất có quy luật, dưới sự ảnh hưởng của một nguồn sóng nào đó. Trong quá trình truyền sóng, năng lượng và moment của hệ được truyền từ nguồn sóng. Sự di chuyển của sóng có thể là dọc, ngang hoặc xoắn.

Sóng được phân loại thành *sóng cơ học* và *sóng điện từ*. Sóng cơ học đòi hỏi môi trường vật chất đàn hồi để lan truyền, vì thế thường được gọi là *sóng đàn hồi*. Môi trường đàn hồi được đặc trưng bởi một tập hợp liên tục các điểm, mà tại đó một sự di chuyển của một điểm lập tức tác động lên các điểm lân cận bởi các lực và phản lực. Phản lực ở các điểm lân cận sinh ra do chính các lực tác động lên chúng, do tính liên tục của các quá trình này nên sự di chuyển ban đầu truyền sang môi trường đàn hồi theo cách các điểm lân cận bị ảnh hưởng như một hàm số của thời gian. Sóng điện từ khác với sóng cơ học ở chỗ nó có thể truyền qua chân không.

Hình 2.1a mô tả một sợi dây dài bị một độ dịch chuyển ngang lúc ban đầu và sau đó thả ra, tính đàn hồi của sợi dây tạo nên các lực cố gắng đẩy độ dịch chuyển lúc ban đầu của dây về phía sau để phần dây bị dịch chuyển lúc đầu trở về vị trí cân bằng. Các lực này ảnh hưởng trực tiếp đến các điểm ở bên phải của độ dịch chuyển. Các điểm lân cận bị đẩy xuống và vì thế độ dịch chuyển có xu hướng chuyển động về phía bên phải với một tốc độ nào đó và nó phụ thuộc vào các tính chất vật liệu của sợi dây. Đây là một ví dụ điển hình của sóng truyền ngang, trong đó độ dịch chuyển trong môi trường đàn hồi vuông góc với hướng truyền sóng.

Hình 2.1b mô tả các khối vật được nối với nhau bằng các lò xo đàn hồi dưới dạng dây xích. Các khối vật có thể đặc trưng cho các nguyên tử, còn lò xo đặc trưng cho lực giữa các nguyên tử. Khi một khối vật bị dịch chuyển

theo chiều dọc, gây nên sự căng ra và nén lại của lò xo, tạo nên các lực tác dụng lên khối vật bên cạnh. Nếu khối vật sát phía bên trái bị một dịch chuyển ban đầu về phía bên phải, gây nên một tác động nén theo kiểu dây truyền cho các khối vật phía bên phải. Đây là một ví dụ về sóng truyền dọc hay sóng do tác động nén.

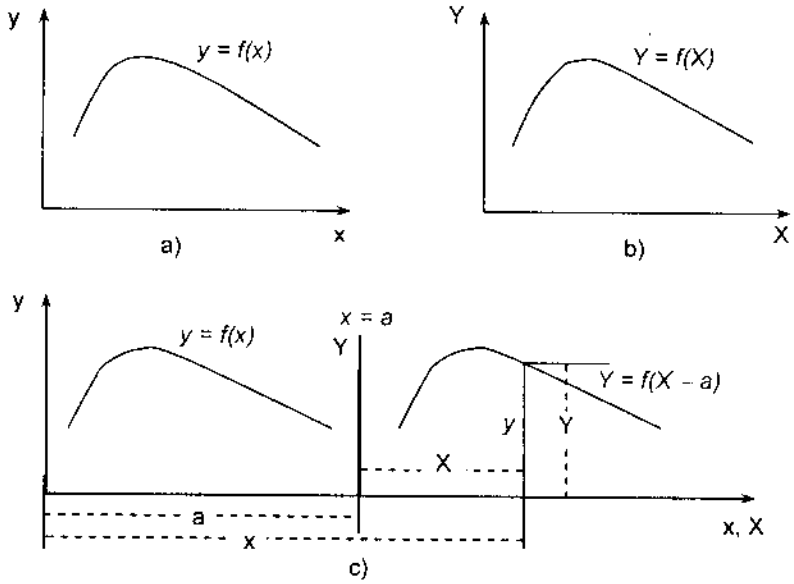


Hình 2.1. **Dao động của sóng dọc và sóng ngang**

Hình 2.1c mô tả một chất khí với mật độ ρ chứa bên trong một ống trụ tròn, có thiết diện là A. Giả sử có một pit-tông (piston) bị truyền một xung lực F, làm cho pit-tông dịch chuyển với tốc độ c trong khoảng thời gian Δt. Sự tác động đột ngột này làm nén chất khí ở bên trong ống và sinh ra một sóng nén di chuyển về bên phải. Đó là ví dụ về sóng dọc.

Sóng âm cũng là ví dụ của sóng dọc, trong khi một sợi dây dao động là ví dụ của một sóng ngang. Sóng dọc chuyển động theo hướng năng lượng được truyền, trong khi sóng ngang chuyển động theo hướng vuông góc với hướng năng lượng được truyền. Mặt sóng là bề mặt chuyển động trong không gian 3 chiều, trong không gian 2 chiều rút gọn thành một đường cong và thành một điểm trong không gian 1 chiều. Mặt sóng được đặc trưng bởi tốc độ sóng như nhau tại mọi điểm trên mặt sóng. Ví dụ, từ một nguồn điểm ở đó có thể tạo nên một sóng cầu lan truyền theo tất cả các hướng của mặt sóng là một hình cầu, trong không gian 2 chiều mặt sóng là một hình tròn,

còn theo một hướng mặt sóng chỉ là một điểm. Nếu nguồn sóng là một đường thẳng, mặt sóng sẽ là một hình trụ chuyển động trong không gian 3 chiều và sẽ là một đường thẳng chuyển động trong không gian 2 chiều. Nếu nguồn là một mặt phẳng, mặt sóng là một mặt phẳng.



Hình 2.2. **Biểu diễn hình dạng chuyển động của sóng**

Trước hết, xét các đặc trưng toán học của một chuyển động sóng. Xét một đường cong liên tục tùy ý $y = f(x)$ đặc trưng cho một vài dạng sóng hay là hình sóng tại một thời điểm nào đó. Một dạng sóng nhỏ được cho bởi đường cong trên hình 2.2a. Giả sử hình dạng của sóng là không đổi khi nó chuyển động, điều này sẽ không đúng khi môi trường không đồng nhất hoặc dị thường. Bây giờ tất cả các ký hiệu trên đồ thị này được thay thế x bằng X, y bằng Y ở mọi nơi để thu được hình 2.2b. Đặt đồ thị (X, Y) phía trên đồ thị (x, y) sao cho trục Y nằm trùng với đường thẳng $x = a$ như trên hình 2.2c. Chúng ta biểu diễn đường cong $Y = f(X)$ trong hệ trục tọa độ x và y. Theo hình 2.2c ta thấy $x = a + X$, $y = Y$, do đó phương trình mô tả đường cong $Y = f(X)$ có dạng $y = f(x - a)$ trên hệ trục tọa độ x và y. Khoảng cách a bằng tốc độ truyền sóng b nhân với thời gian t, do đó $b = at$. Như vậy, đường cong $y = f(x - at)$ mô tả sóng truyền về bên phải theo hướng trục x. Tương tự, có thể mô tả một dạng sóng $g(x)$ khi truyền về bên trái, sự di chuyển của sóng được đặc trưng bởi hàm $y = g(x + at)$.

Xét một chuyển động sóng tổng quát

$$u = u(x,t) = f(x - at) + g(x + at) \tag{2.1}$$

trong đó: có một dạng sóng truyền về bên phải, một dạng sóng khác truyền về bên trái; c là hằng số tốc độ truyền sóng; f, g là hàm đặc trưng cho dạng sóng tùy ý.

Đạo hàm riêng của chúng có dạng

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) + g'(x + at)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) + g''(x + at)\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at)(-a) + g'(x + at)(a)\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f''(x - at)a^2 + g''(x + at)a^2\\
&a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - ct)a^2 + g''(x + ct)a^2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Vậy phương trình sóng 1 chiều là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.2}$$

Lập luận tương tự, trong tọa độ Đề-các phương trình sóng 2 chiều và 3 chiều có dạng:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = a^2\nabla^2 u;\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = a^2\nabla^2 u.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

trong đó: a là hằng số tốc độ, ∇^2 là toán tử Laplace 2 hoặc 3 chiều.

Phương trình trên có thể thêm vào số hạng đặc trưng cho nguồn sóng phát ra, số hạng làm cho sóng tắt dần làm thay đổi hình dạng sóng. Số hạng tắt dần tỷ lệ với tốc độ truyền sóng có dạng $-\beta\frac{\partial u}{\partial t}$. Phương trình sóng có thể được viết trong hệ tọa độ khác bằng việc thay toán tử Laplace ∇^2 trong các hệ tọa độ cong khác nhau.

Ta có phương trình sóng trong các hệ tọa độ khác nhau:

Tọa độ	*Dạng của phương trình* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\nabla^2 u + q(x,y,z,t)$
Đề-các	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + q(x,y,z,t)$
Trụ	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + q(r,\theta,z,t)$
Cầu	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] + q(r,\theta,\varphi,t)$

Phương trình sóng có trong rất nhiều bài toán vật lý. Chúng ta sẽ xét phương trình dao động của dây, phương trình chuyển động của sóng âm trong môi trường chất khí hoặc chất lỏng, phương trình chuyển động của sóng điện từ...

§2. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA DÂY

1. Phương trình dao động của dây

Xét một sợi dây có chiều dài L, với mọi điểm được căng ra theo chiều dài của trục x. Mỗi điểm của sợi dây dài L có thể biểu thị bằng hoành độ x của nó. Ta mô tả quá trình dao động của dây theo vị trí của mỗi điểm đã cho của sợi dây tại các thời điểm khác nhau, bằng cách đưa ra vector dịch chuyển của sợi dây tại vị trí x và tại thời điểm t có dạng $\vec{u} = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$. Để đơn giản, giả sử quá trình dao động của sợi dây chỉ nằm trong mặt phẳng (u,x) và sao cho vector dịch chuyển $\vec{u}$ vuông góc với trục x tại thời điểm bất kỳ. Như vậy, việc mô tả quá trình dao động chỉ cần một hàm $u(x,t)$ đặc trưng cho độ dịch chuyển vuông góc với sợi dây.

Xét sợi dây như sợi chỉ đàn hồi dễ uốn, về mặt toán học, khái niệm đàn hồi dễ uốn thể hiện ở chỗ sức căng xuất hiện trong dây luôn luôn hướng theo tiếp tuyến với dạng đường cong tức thời của nó, điều đó biểu thị dây không bị cản trở khi uốn cong.

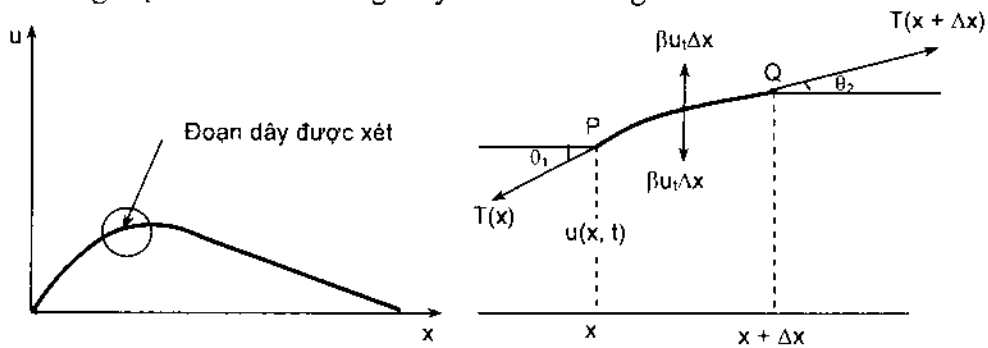
– *Sức căng t tại mỗi điểm không phụ thuộc thời gian.* Thật vậy, độ lớn của sức căng xuất hiện trong dây do đàn hồi có thể được tính theo định luật Hooke. Xét dao động nhỏ của dây và bỏ qua bình phương của u_x so với 1:

$$(u_x)^2 << 1.$$

Khi sử dụng điều kiện này, ta tính được độ dài đường cong của sợi dây khi dao động trên đoạn (x_1, x_2):

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x)^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

Như vậy, trong giới hạn của bài toán lý tưởng này, có thể cho rằng độ dài của sợi dây không đổi khi dao động. Do đó, theo định luật Hooke, độ lớn sức căng t tại mỗi điểm không thay đổi theo thời gian.



Hình 2.3. **Dao động của dây**

– Sức căng T tại mỗi điểm không phụ thuộc vào toạ độ x, tức là:

$$T(x) = T_0 = \text{const}$$

Thật vậy, hình chiếu sức căng trên trục x và u ký hiệu là T_x và T_u:

$$T_x(x) = T(x)\cos\theta = \frac{T(x)}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \approx T(x);$$

$$T_u(x) = T(x)\sin\theta \approx T(x)tg\theta \approx T(x)u_x,$$

trong đó θ là góc giữa tiếp tuyến của đường cong $u(x,t)$ với trục x.

Trên đoạn (x_1, x_2) có tác dụng của *lực sức căng, ngoại lực và lực quán tính*, tổng hình chiếu của tất cả các lực trên trục x cần phải bằng không (ở đây giới hạn chỉ xét các dao động ngang). Vì ngoại lực và lực quán tính theo giả thiết hướng dọc theo trục u cho nên

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \Rightarrow T_x(x_2) = T_x(x_1).$$

Do tính tùy ý của đoạn (x_1, x_2), suy ra sức căng không phụ thuộc vào x:

$$T(x) \equiv T_0.$$

Để cho thuận tiện, ta đưa vào các ký hiệu:

$u = u(x,t)$ là độ dịch chuyển dao động ngang của dây;

$\rho = \rho(x)$ là mật độ khối lượng chiều dài của sợi dây;

$T = T(x)$ là sức căng của sợi dây;

$w = w(x)$ là ngoại lực tính trên một đơn vị độ dài;

$u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ là tốc độ dao động ngang của sợi dây;

$u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ là gia tốc dao động ngang của sợi dây;

β là hệ số tắt dần tuyến tính, với giả thiết lực tắt dần tỷ lệ với vận tốc dao động của sợi dây.

Xét một đoạn dây với mật độ ρ tính trên một đơn vị độ dài nằm trong khoảng giữa x và $x+\Delta x$. Trên hình 2.3, các đạo hàm $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$ là độ dốc của tiếp tuyến đường cong ở các đầu Δx:

$$\mathrm{tg}\theta_2 = \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}, \mathrm{tg}\theta_1 = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Lực bên ngoài tác dụng lên đoạn Δx bao gồm: ngoại lực $w\Delta x$ và lực làm sóng yếu đi (lực tắt dần) $\beta u_t \Delta x$, trong đó lực tắt dần tỷ lệ với vận tốc dao động của dây và bỏ qua trọng lực. Mọi chuyển động hầu hết là theo phương thẳng đứng, do đó sức căng theo phương chuyển động ngang trong trạng thái cân bằng là như nhau tại mọi điểm:

$$T(x+\Delta x)\cos\theta_1 = T(x)\cos\theta_2 = T.$$

Áp dụng định luật Newton theo phương thẳng đứng của chuyển động dao động, tức là khối lượng nhân với gia tốc bằng tổng hợp lực tác dụng lên dây theo phương thẳng đứng:

$$\rho\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x\frac{\partial^2 u\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)}{\partial t^2} =$$

$$= T(x+\Delta x)\sin\theta_2 - T(x)\sin\theta_1 + w\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x - \beta\Delta x\frac{\partial u\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)}{\partial t}$$

$$= T(tg\theta_2 - tg\theta_1) + w\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x - \beta\Delta x\frac{\partial u\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)}{\partial t}.$$

Chia phương trình trên cho Δx, rồi lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$ và chú ý rằng

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{T\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{\Delta x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right).$$

Kết quả ta thu được phương trình chuyển động dao động của dây

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + w(x,t) - \beta\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (2.4)$$

• *Trường hợp 1:* Mật độ ρ và sức căng $T = T_0$ là hằng số với $\beta = 0$, $w = 0$. Đặt $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$ ta thu được *phương trình sóng 1 chiều*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.5)$$

• *Trường hợp 2:* Mật độ ρ và sức căng $T = T_0$ là hằng số với $w = 0$. Đặt $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$; $k = \dfrac{\beta}{\rho}$ ta thu được *phương trình điện báo*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.6)$$

• *Trường hợp 3:* Mật độ ρ và sức căng $T = T_0$ là hằng số với $\beta = 0$, $w = -\rho g$, trong đó g là gia tốc trọng trường. Đặt $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$ ta thu được *phương trình dao động của dây dưới tác dụng của trọng lực*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.7)$$

• *Trường hợp 4:* Mật độ ρ và sức căng T phụ thuộc vào tọa độ $\rho = r(x)$, $T = a^2 p(x)$ và $\beta = w = 0$, ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{r(x)}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \qquad (2.8)$$

Để tìm nghiệm dưới dạng tường minh, cần phải có các điều kiện biên cho phương trình dao động. Các dạng điều kiện biên cho phương trình dao động của dây thường có dạng sau:

1) Điều kiện biên Dirichlet: Sự di chuyển của các đầu dây có dạng:

$$B(u)\big|_{x=0} = u(0,t) = g_1(t);$$

$$B(u)\big|_{x=l} = u(L,t) = g_2(t).$$

2) Điều kiện biên Neumann: Đạo hàm của các đầu dây có dạng:

$$B(u)\big|_{x=0} = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = g_3(t);$$

$$B(u)\big|_{x=L} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = g_4(t).$$

3) Điều kiện biên Robin: còn được gọi là *điều kiện biên hỗn hợp* là tổ hợp tuyến tính của hai điều kiện biên trên, tức là độ dịch chuyển và độ dốc trên các đầu dây có dạng:

$$B(u)\big|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_{x=0} = g_5(t);$$

$$B(u)\big|_{x=L} = \left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_{x=L} = g_6(t),$$

trong đó $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad}\, u.\vec{n}$, $\vec{n}$ là vector pháp tuyến đơn vị.

Điều kiện ban đầu cho bài toán dao động của dây là *hình dạng ban đầu và vận tốc ban đầu*:

$$u(x,0) = f(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = g(x). \tag{2.9}$$

2. Năng lượng dao động của dây

Xét yếu tố nhỏ PQ của dây trên hình 2.3, đó là một cung hình có độ dài

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx. \tag{2.10}$$

Công thực hiện để đoạn dây dx dịch chuyển từ vị trí $y = 0$ lên vị trí PQ có độ dài ds được gọi là *thế năng* của yếu tố PQ. Công làm căng sợi dây từ dx thành ds bằng lực sức căng nhân với khoảng cách. Giả sử lực sức căng là T, thế năng của yếu tố PQ được viết là

$$dV = T_0(ds - dx) = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{2.11}$$

Động năng của yếu tố PQ được định nghĩa bằng một nửa khối lượng nhân với bình phương của tốc độ dao động của đoạn dây PQ:

$$dT = \frac{1}{2}(\rho dx)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{2.12}$$

Toàn bộ năng lượng dao động của dây bằng tổng động năng và thế năng của yếu tố PQ, sau đó lấy tích phân từ 0 đến L:

$$E = T + V = \int_0^L dT + dV = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx, \qquad (2.13)$$

trong đó $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho} = \text{const}$.

3. Nghiệm của phương trình sóng là duy nhất

Xét phương trình dao động của dây có lực tác dụng và điều kiện biên thuần nhất

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w(x,t), 0 \le x \le L, t > 0: \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x), \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x). \end{cases}$$

Giả sử tồn tại hai nghiệm của phương trình trên là $u_1(x,t)$ và $u_2(x,t)$. Hiệu của chúng $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ phải thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, 0 \le x \le L, t > 0: \\ v(0,t) = 0, v(L,t) = 0; \\ v(x,0) = 0, \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Về mặt vật lý, phương trình trên mô tả trạng thái cân bằng của dây không có lực ngoài tác động, vì thế dây đứng yên không chuyển động. Ta có thể kiểm tra phương trình năng lượng của hàm $v(x,t)$:

$$E = T + V = \frac{\rho}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx;$$

$$\frac{dE}{dt} = \rho\int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}\right)dx = \rho\int_0^L \frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)dx + \rho a^2\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$$

hay là

$$\frac{dE}{dt} = \rho a^2\left[\frac{\partial v(L,t)}{\partial t}\frac{\partial v(L,t)}{\partial x} - \frac{\partial v(0,t)}{\partial t}\frac{\partial(0,t)}{\partial x}\right] = 0.$$

Như vậy, $E = \text{const}$ nhưng $E(0) = 0$, vì thế năng lượng E bằng không trong mọi khoảng thời gian. Nếu E luôn luôn bằng không thì $v(x,t)$ là hằng số. Do $v(x,0) = 0$ suy ra

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0;\ \ \forall t,\ 0 \le x \le L \Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Vậy, nghiệm của bài toán dao động của dây là duy nhất.

§3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA DÂY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÁCH BIẾN

1. Phương trình thuần nhất

Trong phần này sẽ giải phương trình dao động của dây bằng *phương pháp tách biến Fourier*. Xét phương trình thuần nhất:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; 0 \le x \le L, t > 0, \tag{2.14}$$

với điều kiện biên là hai đầu dây được gắn chặt

$$u(0,t) = 0; u(L,t) = 0 \tag{2.15}$$

và điều kiện ban đầu bao gồm: hình dạng ban đầu và vận tốc ban đầu:

$$u(x,0) = f(x); u_t(x,0) = g(x), \tag{2.16}$$

hay là viết dưới dạng

$$\begin{cases} L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < L, t > 0: \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x); \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x). \end{cases} \tag{2.17}$$

Biểu diễn nghiệm dưới dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$, ta thu được một hệ Sturm–Liouville, thay vào phương trình ta được $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$ và chia hai vế cho $a^2 X(x)T(t)$, kết quả là

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Vế trái chỉ phụ thuộc t, vế phải chỉ phụ thuộc x, nghĩa là cho dù các biến số thay đổi, nhưng tỷ số luôn luôn bằng nhau. Nó chỉ có thể thỏa mãn nếu bằng một hằng số được chọn là $-\lambda$, với $\lambda = \text{const}$. Như vậy

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

ta nhận được hai phương trình vi phân sau:

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, T(t) \neq 0; \tag{2.18}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(x) \neq 0. \tag{2.19}$$

Các điều kiện biên (2.15) cho ta

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0 \text{ (do } T(t) \neq 0\text{)}.$$

Giải bài toán đơn giản nhất về trị riêng: Tìm giá trị của tham số λ để phương trình

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \tag{2.20}$$

có nghiệm không tầm thường.

Sau khi biện luận các giá trị λ thấy rằng, để (2.20) có nghiệm không tầm thường thì $\lambda > 0$. Khi đó ta có:

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}x;$$

$$X(0) = D_1 = 0, \; X(L) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0.$$

Suy ra phương trình tìm trị riêng

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}. \tag{2.21}$$

Do đó, bài toán chỉ có nghiệm không tầm thường khi giá trị riêng

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2; \quad n = 1,2,3..., \tag{2.22}$$

tương ứng có các hàm riêng

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.23}$$

Với trị riêng đã cho, nghiệm của phương trình (2.18) theo biến t là

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \sin\frac{n\pi at}{L}, \tag{2.24}$$

với A_n và B_n là các hằng số tùy ý.

Nghiệm riêng của phương trình (2.14) có dạng

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{2.25}$$

Nghiệm tổng quát là tổng của tất cả các nghiệm riêng ứng với các giá trị của n là

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{L}+B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}. \qquad (2.26)$$

Điều kiện ban đầu (2.16) cho ta xác định các hệ số tùy ý A_n và B_n. Ta có:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi x}{L};$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Theo lý thuyết chuỗi Fourier, có thể tìm được các hệ số A_n và B_n theo công thức sau:

$$A_n=\frac{(f,X_n)}{\|X_n\|^2}=\frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi;$$

$$B_n=\frac{1}{\omega_n}\frac{(g,X_n)}{\|X_n\|^2}=\frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi, \qquad (2.27)$$

trong đó $\omega_n=\dfrac{n\pi a}{L}$.

2. Ý nghĩa vật lý của nghiệm

Xét một nghiệm riêng

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{L}+B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}=\alpha_n\cos\frac{n\pi a}{L}(t+\delta_n)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

trong đó: $\alpha_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$; $\dfrac{n\pi a}{L}\delta_n=-\text{arctg}\dfrac{B_n}{A_n}$.

Mỗi điểm của dây $x=x_0$ thực hiện một dao động điều hòa

$$u_n(x_0,t)=\alpha_n\cos\frac{n\pi a}{L}(t+\delta_n)\sin\frac{n\pi x_0}{L},$$

với biên độ $\alpha_n\sin\dfrac{n\pi x_0}{L}$.

Chuyển động của dây loại như thế được gọi là *sóng đứng*. Các điểm $x=m\dfrac{L}{n}$ $(m=1,2,\ldots,n-1)$ tại đó $\sin\dfrac{n\pi x}{L}=0$ trong suốt quá trình dao động thì các điểm đó được gọi là *nút sóng*. Các điểm $x=(2m+1)\dfrac{L}{2n}$

$(m = 1, 2, ..., n-1)$, tại đó $\sin\frac{n\pi x}{L} = \pm 1$ thực hiện dao động với biên độ α_n cực đại trong suốt quá trình dao động thì các điểm đó được gọi là *bụng sóng*.

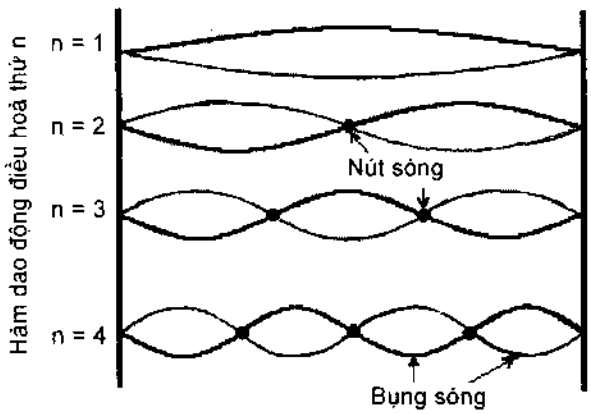
Dạng sóng đứng tại thời điểm bất kỳ có dạng hình sin:

$$u_n(x,t) = C_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

trong đó: $C_n(t) = \alpha_n \cos\omega_n(t+\delta_n)$, $\omega_n = \frac{n\pi a}{L}$.

Tại thời điểm t khi $\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$, độ lệch đạt giá trị cực đại, còn vận tốc chuyển động bằng không. Tại thời điểm t khi $\cos\omega_n(t+\delta_n) = 0$, độ lệch bằng không, còn vận tốc đạt giá trị cực đại. Tần số dao động tại mọi điểm của dây giống nhau và bằng

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$



Hình 2.4. **Hàm dao động điều hòa của dây**

Năng lượng sóng đứng của dao động điều hoà thứ n cho dao động ngang của dây là

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\int_0^L \left[\rho\omega_n^2 \sin^2\omega_n(t+\delta_n)\sin^2\frac{n\pi x}{L} + T\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos^2\omega_n(t+\delta_n)\cos^2\frac{n\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\frac{L}{2}\left[\rho\omega_n^2 \sin^2\omega_n(t+\delta_n) + T\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos^2\omega_n(t+\delta_n)\right].$$

Thay $T = a^2\rho$, $\omega_n = \dfrac{n\pi a}{L}$ suy ra $E_n = \dfrac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2 L}{4}$, ta có năng lượng dao động của dây thứ n:

$$E_n = \frac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2 L}{4} = \omega_n^2 M \frac{A_n^2 + B_n^2}{4},$$

trong đó $M = L\rho$, ta có *âm cơ bản* do dây phát ra có dạng $\omega_1 = \dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, các âm còn lại được gọi là các *họa âm*. Bằng phương pháp tách biến Fourier giải bài toán dao động của dây, người ta đã giải thích được cơ sở vật lý của quá trình dao động của dây phát ra âm thanh bao gồm âm cơ bản có năng lượng lớn nhất kèm theo các họa âm ứng với các chỉ số n khác nhau biểu thị trong nghiệm của bài toán là một chuỗi vô hạn. Dựa trên kết quả này giúp cho các nhà sáng chế tạo nên âm thanh trung thực khi thiết kế các thiết bị thu, phát âm thanh.

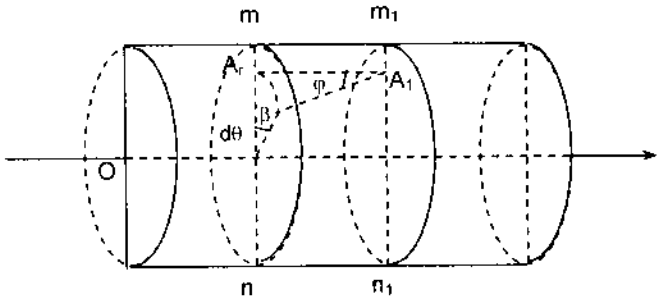
§4. DAO ĐỘNG XOẮN CỦA MỘT THANH ĐỒNG CHẤT

1. Phương trình dao động xoắn

Xét một thanh trụ tròn, đồng chất, chiều dài L, giả thiết thanh bị một dao động xoắn, tức là khi dao động xoắn các thiết diện ngang của thanh được giữ trên một mặt phẳng và quay quanh trục của thanh. Các thiết diện này không bị méo, làm ảnh hưởng đến các thiết diện bên cạnh. Trong trường hợp hình trụ tròn, các thiết diện không di chuyển song song với trục của thanh khi xoắn. Ở đây chỉ xét dao động xoắn của thanh với biên độ nhỏ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng, góc quay của thiết diện khi dao động là hàm phụ thuộc thời gian và tọa độ thoả mãn phương trình sóng. Chọn gốc toạ độ là một trong các đầu mút của thanh, và chọn hướng trục x dọc theo trục của thanh. Giả sử mn và m_1n_1 là hai thiết diện trong thanh, cách nhau một khoảng dx, một moment xoắn M đặt vào mn gây nên một góc xoắn θ so với thiết diện m_1n_1 (hình 2.5).

Tính moment xoắn theo cách sau: Xét hình trụ mỏng có thiết diện $d\sigma$, dưới tác dụng của moment xoắn đặt vào thiết diện này, điểm A của đoạn AA_1 bị di chuyển một đoạn AB:

$$AB = rd\theta. \qquad (2.28)$$



Hình 2.5. **Dao động xoắn của thanh**

Gọi τ là độ lớn của sức căng do đoạn AA_1 bị dịch chuyển thành đoạn BA_1, theo định luật Hooke ta có

$$\tau = G\varphi;\ \varphi = \widehat{AA_1B}, \tag{2.29}$$

trong đó G là hằng số, được gọi là *suất biến dạng*.

Nhân hai vế của (2.29) với $d\sigma$ ta có

$$\tau d\sigma = G\varphi d\sigma,$$

do góc $\varphi = \widehat{AA_1B}$ rất nhỏ, có thể viết:

$$AB = \varphi dx, \tag{2.30}$$

suy ra
$$\varphi = r\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

và do đó
$$\tau d\sigma = G\varphi d\sigma = G\frac{\partial\theta}{\partial x} r d\sigma.$$

Nếu gọi dM là yếu tố moment xoắn tác dụng lên thiết diện $d\sigma$, thu được:

$$dM = r\tau d\sigma = G\frac{\partial\theta}{\partial x} r^2 d\sigma.$$

Moment xoắn M tìm được bằng cách lấy tích phân trên cả thiết diện mn:

$$M = G\frac{\partial\theta}{\partial x}\iint_{mn} r^2 d\sigma = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{2.31}$$

trong đó $J = \iint_{mn} r^2 d\sigma$ là *moment quán tính* của thiết diện mn.

Ta có moment xoắn tại $x + dx$ là

$$GJ\frac{\partial\theta}{\partial x} + GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 x}dx$$

và thu được phương trình dao động xoắn

$$GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 x}dx = K\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 t}dx,$$

trong đó K là moment quán tính trên một đơn vị độ dài của thanh.

Suy ra
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 t} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial^2 x} \text{ với } a^2 = \frac{GJ}{K}, \tag{2.32}$$

là *phương trình dao động xoắn của một thanh hình trụ.*

2. Dao động của thanh với một đầu gắn đĩa

Xét dao động của một thanh đồng chất trong trường hợp một đầu $x = 0$ được giữ cố định, đầu $x = L$ được gắn một đĩa nặng với moment quán tính K_1 quanh trục của thanh. Nếu thiết lập phương trình tại đầu $x = L$ gắn moment quán tính K_1 ta thu được điều kiện biên tại đầu $x = L$:

$$K_1\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|_{x=L} = -GJ\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=L}.$$

Như vậy, bài toán trở về việc giải phương trình (2.32) có điều kiện biên

$$\theta\big|_{x=0} = 0; \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|_{x=L} = -c^2\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=L} \text{ với } c = \sqrt{GJ/K_1}, \tag{2.33}$$

và điều kiện ban đầu

$$\theta\big|_{t=0} = f(x), \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{t=0} = F(x). \tag{2.34}$$

Nghiệm của phương trình (2.32) dưới dạng tách biến là

$$\theta(x,t) = T(t)X(x). \tag{2.35}$$

Ta thu được các phương trình sau:

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0; \tag{2.36}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{2.37}$$

Để hàm (2.35) thỏa mãn điều kiện biên (2.33), suy ra

$$X(0) = 0,\ c^2X'(L) - a^2\lambda^2 X(L) = 0. \tag{2.38}$$

Xét bài toán trị riêng của phương trình (2.37) với điều kiện biên (2.38). Nghiệm phương trình (2.37) có dạng

$$X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x.$$

Thay điều kiện biên (2.38) vào nghiệm ta có

$$C_1 = 0,\ \left(c^2\lambda\cos\lambda L - a^2\lambda^2\sin\lambda L\right)C_2 = 0.$$

Nếu $C_2 \neq 0$ ta thu được phương trình siêu việt:

$$a^2\lambda \sin\lambda L - c^2 \cos\lambda L = 0. \qquad (2.39)$$

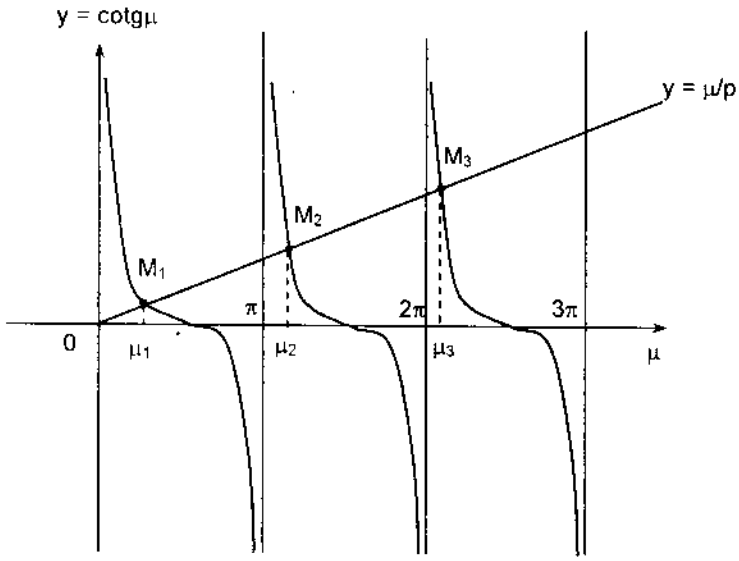
Phương trình trên xác định trị riêng cho bài toán (2.37) và (2.38). Giải phương trình siêu việt (2.39) bằng phương pháp đồ thị, nếu đặt

$$L\lambda = \mu, \quad p = \frac{Lc^2}{a^2} = \frac{LK}{K_1} \qquad (2.40)$$

thì phương trình (2.39) có dạng

$$\mu \sin\mu - p\cos\mu = 0 \qquad (p > 0). \qquad (2.41)$$

Để tìm nghiệm của phương trình này, chỉ cần xây dựng đồ thị của hai hàm: $y = \text{cotg}\mu$ và $y = \frac{\mu}{p}$ và xác định các điểm cắt nhau của hai đường đồ thị là $M_1, M_2, M_3, \ldots$ như hình 2.6.



Hình 2.6. **Điểm cắt nhau của hai đồ thị *y* = cotgμ và *y* = μ/*p***

Từ hình 2.6, rõ ràng là các nghiệm μ_k tăng lên theo giá trị tăng của k, đồng thời hiệu $\mu_k - (k-1)\pi \to 0$. Từ đó suy ra với k đủ lớn có thể xem rằng

$$\mu_k \approx (k-1)\pi. \qquad (2.42)$$

Các trị riêng

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{L}\right)^2, \; k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.43)$$

tương ứng với các hàm riêng

$$X_k(x) = \sin\frac{\mu_k}{L}, \; k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.44)$$

Có thể thấy các hàm riêng không trực giao. Với $\lambda = \lambda_k$, nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{\mu_k at}{L} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{L},$$

với a_k, b_k là các hằng số tùy ý.

Nghiệm riêng có dạng

$$\theta_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{\mu_k at}{L} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{L}\right)\sin\frac{\mu_k x}{L}.$$

Nghiệm tổng quát có dạng

$$\theta(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\mu_k at}{L} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{L}\right)\sin\frac{\mu_k x}{L}. \qquad (2.45)$$

Từ các điều kiện ban đầu ta có

$$\begin{cases} \theta(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin\dfrac{\mu_k x}{L} = f(x) \\ \dfrac{\partial\theta(x,0)}{\partial t} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\mu_k a}{L} b_k \sin\dfrac{\mu_k x}{L} = F(x) \end{cases}. \qquad (2.46)$$

Hệ các hàm $\left\{\sin\dfrac{\mu_k x}{L}\right\}$ không trực giao trong khoảng $(0,L)$, nhưng hệ các hàm $\left\{\cos\dfrac{\mu_k x}{L}\right\}$ lại trực giao trong khoảng $(0,L)$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\int_0^L \cos\frac{\mu_k x}{L}\cos\frac{\mu_n x}{L}\,dx = L\cos\mu_k \cos\mu_n \frac{\mu_k \operatorname{tg}\mu_k - \mu_n \operatorname{tg}\mu_n}{(\mu_k^2 - \mu_n^2)}.$$

Thật vậy:

$$\int_0^L \cos\frac{\mu_k x}{L}\cos\frac{\mu_n x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L \cos\frac{(\mu_k - \mu_n)x}{L} + \frac{1}{2}\int_0^L \cos\frac{(\mu_k + \mu_n)x}{L}$$

$$= \frac{L}{2(\mu_k - \mu_n)}\sin\frac{(\mu_k - \mu_n)x}{L}\Bigg|_0^L + \frac{L}{2(\mu_k + \mu_n)}\sin\frac{(\mu_k + \mu_n)x}{L}\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{L}{2(\mu_k - \mu_n)}\sin(\mu_k - \mu_n) + \frac{L}{2(\mu_k + \mu_n)}\sin(\mu_k + \mu_n)$$

$$= \frac{L(\mu_k + \mu_n)}{2(\mu_k^2 - \mu_n^2)}\sin(\mu_k - \mu_n) + \frac{L(\mu_k - \mu_n)}{2(\mu_k^2 - \mu_n^2)}\sin(\mu_k + \mu_n).$$

Do $\sin(a \pm b) = (\mathrm{tg}a \pm \mathrm{tg}b)(\cos a \cos b)$, suy ra

$$\int_0^L \cos\frac{\mu_k x}{L}\cos\frac{\mu_n x}{L}dx$$

$$= \frac{L\cos\mu_k\cos\mu_n}{2\left(\mu_k^2-\mu_n^2\right)}(2\mu_k\,\mathrm{tg}\mu_k - \cancel{\mu_k\,\mathrm{tg}\mu_n} + \cancel{\mu_n\,\mathrm{tg}\mu_k} + \cancel{\mu_k\,\mathrm{tg}\mu_n} - \cancel{\mu_n\,\mathrm{tg}\mu_k} - 2\mu_n\,\mathrm{tg}\mu_n)$$

$$= L\cos\mu_k\cos\mu_n\frac{\mu_k\,\mathrm{tg}\mu_k - \mu_n\,\mathrm{tg}\mu_n}{\left(\mu_k^2-\mu_n^2\right)}.$$

Nếu μ_k và μ_n là nghiệm của (2.41), tức là $\mu\sin\mu - p\cos\mu = 0$ thì $\mathrm{tg}\mu = \frac{p}{\mu}$. Do đó, nếu $k \neq n$ ta có

$$\int_0^L \cos\frac{\mu_k x}{L}\cos\frac{\mu_n x}{L}dx = L\cos\mu_k\cos\mu_n\frac{\mu_k\,\mathrm{tg}\mu_k - \mu_n\,\mathrm{tg}\mu_n}{\left(\mu_k^2-\mu_n^2\right)} = 0$$

(do thay $\mathrm{tg}\mu = \frac{p}{\mu}$).

Nếu $k = n$, xét giới hạn theo quy tắc L'Hopital

$$\lim_{\mu_k\to\mu_n} L\cos\mu_k\cos\mu_n\frac{\mu_k\,\mathrm{tg}\mu_k - \mu_n\,\mathrm{tg}\mu_n}{\left(\mu_k^2-\mu_n^2\right)} =$$

$$= \lim_{\mu_k\to\mu_n} L\frac{\mu_k\sin\mu_k\cos\mu_n - \mu_n\sin\mu_n\cos\mu_k}{\left(\mu_k^2-\mu_n^2\right)}$$

$$= \lim_{\mu_k\to\mu_n} L\frac{\sin\mu_k\cos\mu_n + \mu_k\cos\mu_k\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n\sin\mu_k}{2\mu_k}$$

$$\Rightarrow \lim_{\mu_k\to\mu_n} L\cos\mu_k\cos\mu_n\frac{\mu_k tg\mu_k - \mu_n tg\mu_n}{\left(\mu_k^2-\mu_n^2\right)} =$$

$$= L\frac{\sin\mu_n\cos\mu_n + \mu_n\cos\mu_n\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n\sin\mu_n}{2\mu_n}$$

$$= L\frac{\frac{1}{2}\sin 2\mu_n + \mu_n}{2\mu_n} = \frac{L}{4\mu_n}\left(2\mu_n + \sin 2\mu_n\right).$$

Như vậy, đã chứng minh được tính trực giao của hệ các hàm $\left\{\cos\frac{\mu_k x}{L}\right\}$ như sau:

$$\int_0^L \cos\frac{\mu_k x}{L}\cos\frac{\mu_n x}{L}dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \dfrac{L}{4\mu_n}\left(2\mu_n + \sin 2\mu_n\right), & k = n \end{cases}$$

Bằng cách đạo hàm công thức (2.46) dựa trên tính trực giao của hệ các hàm $\left\{\cos\frac{\mu_k x}{L}\right\}$ như trên ta thu được các hệ số:

$$a_k = \frac{4}{2\mu_k + \sin 2\mu_k}\int_0^L f'(x)\cos\frac{\mu_k x}{L}dx;$$

$$b_k = \frac{4L}{a\mu_k}\frac{4}{2\mu_k + \sin 2\mu_k}\int_0^L F'(x)\cos\frac{\mu_k x}{L}dx.$$

§5. DAO ĐỘNG VỚI BIÊN ĐỘ NHỎ CỦA MỘT SỢI CHỈ TREO MỘT ĐẦU

Xét một sợi chỉ nhỏ, đồng chất, dễ uốn với một khối lượng nào đó, chiều dài L. Sợi chỉ được buộc chặt một đầu $x = L$ và dao động dưới tác dụng của trọng lực (hình 2.7). Độ dịch chuyển cực đại tại đầu $x = 0$ so với phương thẳng đứng một khoảng là h.

Chọn trục x theo hướng thẳng đứng, do đó nó trùng với vị trí ban đầu của sợi chỉ. Đặt $u = u(x,t)$ là độ dịch chuyển của sợi chỉ khỏi vị trí cân bằng tại thời điểm t.

Xét dao động với biên độ nhỏ, do đó có thể bỏ qua bình phương của đạo hàm $\partial u/\partial x$ so với đơn vị. Như vậy

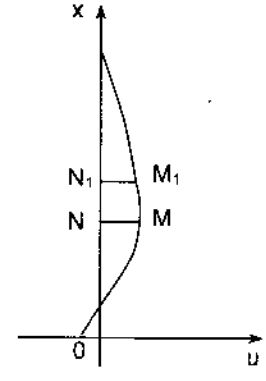
$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha(x)}} = \frac{\partial u/\partial x}{\sqrt{1+(\partial u/\partial x)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

trong đó $\alpha(x)$ là góc theo hướng dương giữa trục x với tiếp tuyến của sợi chỉ tại điểm x và tại thời điểm t.

Sức căng t của sợi chỉ tại điểm N là x, nó bằng trọng lượng của sợi chỉ ở phần thấp hơn N:

$$T = g\rho x,$$

với ρ là mật độ khối lượng tuyến tính của sợi chỉ, g là gia tốc trọng trường.



Hình 2.7. **Dao động của một sợi chỉ treo một đầu**

Chọn một đoạn tùy ý của sợi chỉ MM_1, có độ dài dx, trong đó đoạn tương ứng ở vị trí cân bằng là NN_1. Thành phần nằm ngang của tổng hợp sức căng tác dụng lên cuối của đoạn MM_1 biểu thị bằng hiệu

$$\left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}-\left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}=g\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx, \qquad (2.47)$$

còn thành phần thẳng đứng bằng

$$\left[g\rho x\cos\alpha(x)\right]_{M_1}-\left[g\rho x\cos\alpha(x)\right]_{M}\approx g\rho dx,$$

chú ý rằng, $\cos\alpha(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\partial u/\partial x\right)^2}}\approx 1$.

Chuyển động của đoạn MM_1 được xem là tự do với điều kiện ta vẫn duy trì lực sức căng tại điểm M và M_1, đồng thời tính đến trọng lực hướng xuống dưới bằng $g\rho dx$. Thành phần thẳng đứng của tổng hợp lực sức căng là sự cân bằng của lực hấp dẫn. Vì thế giả sử rằng, yếu tố sợi chỉ MM_1 chuyển động dưới sự tác động của các thành phần nằm ngang của lực (2.47). Nếu cân bằng các lực này với tích của khối lượng ρdx của các phần tử của sợi chỉ với gia tốc của nó $\left(\partial^2u/\partial t^2\right)$, ta thu được phương trình vi phân cho dao động của sợi chỉ với biên độ nhỏ được treo ở một đầu

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}, \quad a=\sqrt{g}. \qquad (2.48)$$

Bài toán dao động của một sợi chỉ treo một đầu được đưa về việc tích phân phương trình (2.48) với điều kiện biên

$$u\big|_{x=L}=0 \qquad (2.49)$$

và các điều kiện ban đầu

$$u\big|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \qquad (2.50)$$

Để áp dụng phương pháp tách biến Fourier giải bài toán (2.48), (2.50), ta biến đổi phương trình (2.48) bằng cách đưa vào biến mới

$$\xi=\sqrt{x}\Rightarrow\xi^2=x, 2\xi d\xi=dx\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{2\xi\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial u}{2\xi\partial\xi}\right)=\frac{1}{4\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right).$$

Phương trình (2.48) có dạng mới

$$\frac{1}{4\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}. \qquad (2.51)$$

Tìm một nghiệm của phương trình này dưới dạng

$$u(\xi,t)=\omega(\xi)T(t),$$

thay vào phương trình (2.51) ta có

$$\frac{1}{\xi\omega(\xi)}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\omega}{d\xi}\right)=\left(\frac{2}{a}\right)^2\frac{T''(t)}{T(t)}=-\lambda^2,$$

và thu được hai phương trình vi phân:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\omega}{d\xi}\right)+\lambda^2\xi\omega=0; \tag{2.52}$$

$$T''(t)+(a\lambda/2)^2T(t)=0. \tag{2.53}$$

Phương trình (2.52) chính là phương trình Bessel cấp không, nó có nghiệm là hàm Bessel loại một và loại hai cấp không

$$\omega(\xi)=C_1J_0(\lambda\xi)+C_2Y_0(\lambda\xi). \tag{2.54}$$

Vì $Y_0(\lambda\xi)\to\infty$ khi $\xi\to 0$, do đó C_2 phải bằng không. Điều kiện biên (2.49) xác định trị riêng $J_0\left(\lambda\sqrt{L}\right)=0$. Gọi μ là các không điểm của hàm Bessel cấp không sao cho $J_0(\mu)=0$, đó là một số vô hạn các nghiệm thực $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$. Suy ra các trị riêng được xác định bởi phương trình

$$\lambda_k^2=\mu_k^2/L,\quad k=1,2,3,\ldots \tag{2.55}$$

Các hàm riêng tương ứng với trị riêng này có dạng

$$\omega_k(x)=J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right). \tag{2.56}$$

Giải phương trình (2.53), nghiệm có dạng

$$T_k(t)=A_k\cos\frac{\mu_k at}{L}+B_k\sin\frac{\mu_k at}{L}.$$

Kết quả cuối cùng ta có nghiệm tổng quát của phương trình (2.48) là chuỗi vô hạn

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\mu_k at}{L}+B_k\sin\frac{\mu_k at}{L}\right)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right), \tag{2.57}$$

ở đây các hằng số A_k, B_k được xác định thỏa mãn điều kiện ban đầu (2.50) và

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) \tag{2.58}$$

Từ tính trực giao của các hàm Bessel suy ra

$$A_k = \frac{1}{LJ_1^2(\mu_k)}\int_0^L f(x)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)dx. \qquad (2.59)$$

Tương tự ta cũng tìm được

$$B_k = \frac{2}{a\sqrt{L}\mu_k J_1^2(\mu_k)}\int_0^L F(x)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)dx. \qquad (2.60)$$

Nếu đặt $A_k = N_k \sin\varphi_k$, $B_k = N_k\cos\varphi_k$ có thể viết nghiệm (2.57) dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\sin\left(\frac{\mu_k at}{2L}+\varphi_k\right). \qquad (2.61)$$

Như vậy, dao động nhỏ của sợi chỉ treo một đầu là tổng hợp của một số vô hạn các dao động điều hoà. Chu kỳ của tần số cơ bản của dao động này là

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{a\mu_1/2\sqrt{L}} = \frac{4\pi}{\mu_1}\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (2.62)$$

Từ phương trình (2.61) cho thấy biên độ của dao động điều hòa thứ k bằng không ở các điểm:

$$J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{L}}\right) = 0 \Rightarrow \mu_k\sqrt{\frac{x}{L}} = \mu_1,\ \mu_k\sqrt{\frac{x}{L}} = \mu_1,\ldots$$

$$x_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_k}\right)^2 L,\ x_2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_k}\right)^2 L,\ldots,x_{k-1} = \left(\frac{\mu_{k-1}}{\mu_k}\right)^2 L,\ x_k = L.$$

§6. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG THUẦN NHẤT

Xét phương trình không thuần nhất

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + h(x,t), 0 < x < L, t > 0,$$

với điều kiện biên:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \le x \le L$$

và điều kiện ban đầu:

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0.$$

Hay là viết dưới dạng

$$\begin{cases} L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,t), 0 < x < L,\ t > 0: \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = 0; \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{2.63}$$

Đây là loại phương trình không thuần nhất, nhưng điều kiện biên và điều kiện ban đầu thuần nhất, tức là có một ngoại lực tác dụng vào sợi dây. Dùng kết quả bài toán trước và có tính đến các hàm riêng với điều kiện biên bằng không:

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}; n = 1,2,3...$$

Giả sử nghiệm của phương trình (2.63) có dạng

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) F_n(x), \tag{2.64}$$

trong đó $A_n(t)$ là hệ số khai triển phụ thuộc thời gian và thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$A_n(0) = 0, \quad A_n'(0) = 0. \tag{2.64a}$$

Thay (2.64) vào (2.63) ta thu được

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n''(t) + \omega_n^2 A_n(t)\right] F_n(x) = h(x,t) \\ \omega_n = \dfrac{n\pi a}{L}, n = 1,2,3... \end{cases} \tag{2.65}$$

Nhân cả hai vế của phương trình (2.65) với $F_m(x)$, rồi tích phân hai vế từ 0 đến L, đồng thời sử dụng tính trực giao của tập hợp các hàm $\{F_n(x)\}$ trong khoảng $0 < x < L$ ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n''(t) + \omega_n^2 A_n(t)\right](F_n, F_m) = \int_0^L h(x,t) F_m(x)\,dx. \tag{2.66}$$

Tính trực giao của tập hợp các hàm riêng $\{F_n(x)\}$ trong khoảng $0 < x < L$ làm cho tích trong (F_n, F_m) bằng không trừ giá trị khi n bằng $m: (F_m, F_m) = \|F_m\|^2$, do đó phương trình (2.66) khi n bằng m trở thành

$$\left[A_m''(t) + \omega_m^2 A_m(t)\right]\|F_m\|^2 = \int_0^L h(x,t) F_m(x)\,dx. \tag{2.67}$$

Ta đưa ra phương trình vi phân không thuần nhất để xác định các hệ số $A_m(t)$:

$$A_m''(t)+\omega_m^2 A_m(t)=H_m(t), \tag{2.68}$$

trong đó

$$H_m(t)=\frac{1}{\|F_m\|^2}\int_0^L h(x,t)F_m(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin\frac{m\pi x}{L}dx. \tag{2.69}$$

Nghiệm của phương trình (2.68) với điều kiện (2.64a) được giải bằng phương pháp biến thiên hằng số. Giải phương trình thuần nhất $A_m''(t)+\omega_m^2 A_m(t)=0$ ta thu được nghiệm là

$$A_m(t)=C_1\cos\omega_m t+C_2\sin\omega_m t.$$

Để giải phương trình không thuần nhất, giả sử rằng nghiệm có dạng

$$A_m(t)=\alpha(t)\cos\omega_m t+\beta(t)\sin\omega_m t, \tag{2.70}$$

trong đó $\alpha(t),\beta(t)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}\alpha'(t)\cos\omega_m t+\beta'(t)\sin\omega_m t=0\\ \alpha'(t)(-\omega_m\sin\omega_m t)+\beta'(t)(\omega_m\cos\omega_m t)=H_m(t).\end{cases}$$

Suy ra

$$\alpha'(t)=-\frac{1}{\omega_m}H_m(t)\sin\omega_m t,\quad \beta'(t)=\frac{1}{\omega_m}H_m(t)\cos\omega_m t. \tag{2.71}$$

Tích phân (2.71) sẽ cho các giá trị:

$$\alpha=\alpha(t)=-\int_0^t\frac{1}{\omega_m}H_m(\xi)\sin\omega_m\xi d\xi; \tag{2.71a}$$

$$\beta=\beta(t)=\int_0^t\frac{1}{\omega_m}H_m(\xi)\cos\omega_m\xi d\xi, \tag{2.71b}$$

với ξ là biến lấy tích phân.

Thay thế các giá trị $\alpha(t),\beta(t)$ trong (2.71a) và (2.71b) vào phương trình (2.70) ta có

$$A_m(t)=\frac{1}{\omega_m}\int_0^t H_m(\xi)(\cos\omega_m\xi\sin\omega_m t-\cos\omega_m t\sin\omega_m\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\omega_m}\int_0^t H_m(\xi)\sin\omega_m(t-\xi)d\xi.$$

Có thể thay đổi m thành n trong công thức trên và viết nghiệm của phương trình (2.63) dưới dạng

$$u = u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi\right]\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad (2.73)$$

Tiếp theo ta hãy xét bài toán tổng quát hơn có điều kiện ban đầu không thuần nhất:

$$\begin{cases} L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,t), 0 < x < L,\ t > 0: \\ u(0,t) = 0, u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x); \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x). \end{cases} \qquad (2.74)$$

Chú ý rằng, toán tử

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

là toán tử tuyến tính, nên có thể viết nghiệm của (2.74) dưới dạng $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, trong đó chọn $v(x,t)$ thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} L(v) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = h(x,t),\ 0 < x < L,\ t > 0: \\ v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0; \\ v(x,0) = 0;\ \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad (2.75)$$

Nghiệm của (2.75) có dạng (2.73)

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Còn $w(x,t)$ thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} L(w) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, 0 < x < L,\ t > 0: \\ w(0,t) = 0, w(L,t) = 0; \\ w(x,0) = f(x); \dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t} = g(x). \end{cases} \qquad (2.76)$$

Nghiệm của (2.76) có dạng

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{L}+B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

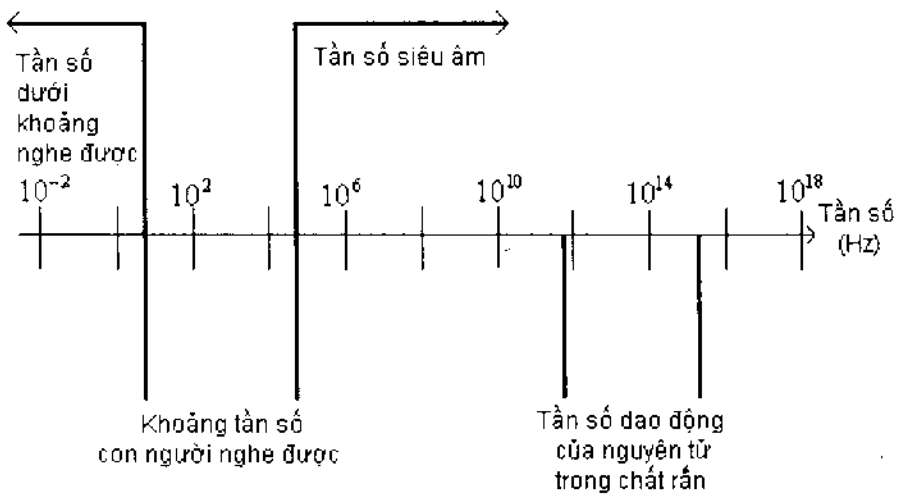
Bằng cách tách ra tổng của hai phương trình (2.75) và (2.76), nghiệm của (2.74) có dạng

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{L}+B_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}+\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\omega_n}\int_0^t H_n(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)d\xi\right]\sin\frac{n\pi x}{L}.\end{aligned}\qquad(2.77)$$

§7. SÓNG ÂM TRONG CHẤT KHÍ HOẶC CHẤT LỎNG

Sóng âm là sóng đàn hồi theo chiều dọc, được sinh ra do các dao động của dây, của cột khí hay của bề mặt nào đó. Từ "âm" theo đa số mọi người hiểu có nghĩa là sóng dao động di chuyển sinh ra âm thanh để người ta có thể nghe thấy được.

Hình 2.8 mô tả một phổ âm thanh với tần số f (số dao động thực hiện trên 1 giây) đo bằng Hertz (Hz). Tần số f của một dao động liên hệ với chu kỳ dao động theo công thức $f=1/T$. Một số ví dụ con người biết được về phổ âm thanh như sóng dưới tốc độ âm thanh là sóng sinh ra do động đất, người ta có thể tạo ra âm thanh để kiểm tra các mẫu vật chất không phá huỷ như các khuyết tật trong kim loại, tìm ra các khối u trong cơ thể con người. Sóng lớn hơn tốc độ âm thanh dùng để đập nhỏ các khối đá, rửa vật liệu, phá huỷ các tế bào sống hoặc sử dụng trong các phương pháp chẩn đoán y học.



Hình 2.8. **Thang loga của phổ âm thanh**

Chúng ta sẽ nghiên cứu sóng âm từ việc nén chất lỏng hoặc chất khí có mật độ khối lượng ρ. Giả sử có bề mặt S bao quanh thể tích V của một chất lỏng nào đó, xét một yếu tố thể tích $d\tau = dx\,dy\,dz$ bao quanh điểm (x, y, z) bên trong thể tích đó. Xét các lực tác dụng lên yếu tố thể tích này, gọi $P = P(x, y, z)$ là áp suất (lực tính trên một đơn vị diện tích) hướng theo pháp tuyến tại mỗi điểm của bề mặt. Lấy tổng tất cả các lực áp suất qua bề mặt của thể tích và thu được

$$-\oiint_S P(x, y, z)\vec{n}\,d\sigma,$$

trong đó: $\vec{n}$ là vector pháp tuyến ngoài đối với bề mặt được xét; $d\sigma$ là yếu tố diện tích bề mặt.

Định lý Gauss cho phép chuyển tích phân mặt thành tích phân ba lớp theo thể tích

$$-\oiint_S P(x, y, z)\vec{n}\,d\sigma = -\iiint_V \operatorname{grad} P(x, y, z)\,d\tau,$$

trong đó $d\tau$ là một yếu tố thể tích.

Giả sử lực ngoài đặt lên mỗi điểm của yếu tố thể tích có dạng

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}.$$

Bằng cách lấy tích phân các điểm bên trong thể tích, ta có tổng lực ngoài tác dụng là $\iiint_V \rho\vec{F}d\tau$. Áp dụng định luật II – Newton cho yếu tố thể tích, trong đó lực tác dụng lên chúng bao gồm gradient của lực áp suất và ngoại lực. Vector vận tốc tại điểm (x, y, z) là

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z) = u(x, y, z)\vec{i} + v(x, y, z)\vec{j} + w(x, y, z)\vec{k},$$

trong đó: $\dfrac{\partial x}{\partial t} = u, \dfrac{\partial y}{\partial t} = v, \dfrac{\partial z}{\partial t} = w$.

Theo định luật II – Newton

$$\iiint_V \rho\frac{d\vec{V}}{dt}d\tau = \iiint_V \left(\rho\vec{F} - \operatorname{grad}P\right)d\tau. \qquad (2.79)$$

Vì thể tích V là tùy ý, nên ta có phương trình

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\vec{F} - \operatorname{grad}P. \qquad (2.80)$$

Phương trình (2.80) có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}u+\dfrac{\partial u}{\partial y}v+\dfrac{\partial u}{\partial z}w=F_1(x,y,z)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial v}{\partial x}u+\dfrac{\partial v}{\partial y}v+\dfrac{\partial v}{\partial z}w=F_2(x,y,z)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial x}u+\dfrac{\partial w}{\partial y}v+\dfrac{\partial w}{\partial z}w=F_3(x,y,z)-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \tag{2.81}$$

được gọi là *phương trình chuyển động Euler* cho chất lỏng và chất khí lý tưởng.

Lượng chất lỏng, hay chất khí đi vào khối thể tích V bằng lượng chất lỏng hay chất khí đi ra khỏi chúng. Khối lượng chất lỏng hay chất khí thay đổi bên trong thể tích V bằng

$$\frac{\partial m}{\partial t}=\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}d\tau. \tag{2.82}$$

Thông lượng chất lỏng, hay chất khí đi qua bề mặt thể tích V theo định lý Gauss cho phép chuyển tích phân mặt thành tích phân ba lớp theo thể tích

$$\iint_S -\left(\rho\vec{V}.\vec{n}\right)d\sigma=\iiint_V -\nabla\left(\rho\vec{V}\right)d\tau, \tag{2.83}$$

với ∇ là toán tử Nabla.

Cũng cần nhắc lại là toán tử Nabla ∇ tác động lên một vô hướng là toán tử grad, tác động lên vector là toán tử div. Toán tử grad là một vector, toán tử div là một vô hướng: $\nabla.\alpha=\text{grad}\,\alpha, \nabla.\vec{V}=\text{div}\,\vec{V}$.

Như vậy ta có

$$\iiint_V\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\text{div}\left(\rho\vec{V}\right)\right)d\tau=0.$$

Phương trình trên thể hiện *định luật bảo toàn khối lượng* cho một thể tích chất lỏng hay chất khí V tuỳ ý. Từ đó ta đưa ra *phương trình liên tục* cho chất lỏng hay chất khí được xét

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\text{div}\left(\rho\vec{V}\right)=0 \text{ hay } \frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\left(\rho\vec{V}\right)=0. \tag{2.84}$$

Ngoài ra, có một phương trình liên hệ giữa áp suất và mật độ là kết quả của lý thuyết nhiệt động học với giả thiết rằng Entropi của hệ là không đổi

$$P=P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \gamma=\frac{C_P}{C_V}, \tag{2.85}$$

trong đó: P_0, ρ_0 là áp suất và mật độ lúc ban đầu (khi hệ chưa bị tác động); C_p, C_V là nhiệt dung của chất lỏng hay chất khí khi áp suất và thể tích không đổi; γ là tỷ số nhiệt dung.

Hệ ba phương trình (2.81), cùng với hai phương trình (2.84) và (2.85) là 5 phương trình xác định 5 đại lượng u, v, w, ρ, P.

Tóm lại, sự chuyển động của sóng âm được mô tả bằng hệ các phương trình đặc trưng cho quá trình nén chất lỏng hoặc chất khí.

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V}\right) = \rho\vec{F} - \nabla P; \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{V}\right) = 0; \tag{2.87}$$

$$P = P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \gamma = \frac{C_p}{C_V}, \tag{2.88}$$

trong đó: P là áp suất; ρ là mật độ; $\vec{V}$ là vận tốc có các thành phần u, v, w của chất lỏng hay chất khí được xét.

Các hệ 5 phương trình (2.86), (2.87) và (2.88) biểu diễn 5 đại lượng chưa biết u, v, w, ρ, P. Các hệ phương trình đó là phi tuyến nên khó giải được, vì vậy cần phải tuyến tính hoá chúng để đưa về dạng dễ giải. Để làm điều đó, chúng ta sẽ đưa ra một vài định nghĩa và giả thiết sau:

1. Nồng độ chất khí hoặc chất lỏng đặc trưng cho độ loãng hay đậm đặc của chúng được định nghĩa

$$s = s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}. \tag{2.89}$$

2. Giả sử các thành phần tốc độ $\vec{V}$, mật độ ρ và nồng độ s là nhỏ, do đó tích của các hạng thức $\vec{V}.\nabla\vec{V}$, $s\nabla\vec{V}$, $\vec{V}.\nabla\rho$ và s^2 là nhỏ và có thể bỏ qua.

3. Không có ngoại lực tác dụng $\vec{F} = 0$.

Với các giả thiết trên, rút gọn phương trình (2.86) về dạng

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V}\right) = \rho\vec{F} - \nabla P \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P$$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}. \tag{2.90}$$

Phương trình (2.89) rút gọn thành

$$\rho = \rho_0(1+s), \tag{2.91}$$

vì thế phương trình (2.88) có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi của s như sau

$$P = P_0(1+s)^\gamma \equiv P_0\left(1+\gamma s+\gamma(\gamma-1)\frac{s^2}{2!}+\ldots\right).$$

Dạng tuyến tính của phương trình trên thu được khi cắt chuỗi đến số hạng cấp 2 và bỏ qua các số hạng cấp cao hơn là

$$P = P_0(1+\gamma s). \tag{2.92}$$

Thay phương trình (2.91) và (2.92) vào phương trình (2.87) thu được

$$\rho_0\frac{\partial s}{\partial t}+\rho_0\nabla\vec{V}+\rho s\nabla\vec{V}+\nabla\rho.\vec{V}=0.$$

Bỏ qua các hạng thức $\rho s\nabla\vec{V}$, $\nabla\rho.\vec{V}$ ta thu được phương trình liên tục cho nồng độ s

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\nabla\vec{V}=0. \tag{2.93}$$

Thay phương trình (2.91) và (2.92) vào phương trình (2.90) thu được

$$\frac{P_0\gamma}{\rho_0(1+s)}\approx\frac{P_0\gamma}{\rho_0}=a^2=\text{const}.$$

Như vậy, phương trình Euler được rút gọn thành phương trình tuyến tính

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-a^2\dfrac{\partial s}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}=-a^2\dfrac{\partial s}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial t}=-a^2\dfrac{\partial s}{\partial z}\end{cases}\quad\text{hay}\quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=-a^2\nabla s. \tag{2.94}$$

Tóm lại, dạng tuyến tính của phương trình (2.86), (2.87) và (2.88) là:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}=-a^2\nabla s;\ a^2=\frac{P_0\gamma}{\rho_0}; \tag{2.95}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\nabla\vec{V}=0; \tag{2.96}$$

$$P=P_0(1+\gamma s). \tag{2.97}$$

trong đó $\gamma=\dfrac{C_p}{C_V}$ là tỷ số nhiệt dung, $s=\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$ là nồng độ chất khí hoặc chất lỏng.

Các hệ 5 phương trình (2.95), (2.96) và (2.97) biểu diễn 5 đại lượng chưa biết u, v, w, ρ, P.

Bây giờ vi phân phương trình (2.96) theo biến t và chú ý đến phương trình (2.95), ta có phương trình vi phân đạo hàm riêng xác định nồng độ (chú ý: $\nabla^2 = \Delta$):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\vec{V} = a^2\nabla^2 s = a^2\Delta s = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) \qquad (2.98)$$

Nồng độ s là một nghiệm của phương trình sóng 3 chiều. Chú ý rằng, ta có thể vi phân phương trình (2.97) để thu được

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} &= P_0\gamma\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \\ \nabla^2 P &= P_0\gamma\nabla^2 s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = a^2\Delta P.$$

Áp suất $P = P(x, y, z, t)$ cũng thỏa mãn là nghiệm của phương trình sóng 3 chiều. Tương tự, có thể chỉ ra tốc độ $\vec{V}$ cũng thỏa mãn là nghiệm của phương trình sóng 3 chiều

$$\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial t^2} = -a^2\nabla\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) = -a^2\nabla\left(-\nabla\vec{V}\right) = a^2\nabla^2\vec{V}.$$

Nếu tốc độ $\vec{V}$ nhận được từ một hàm thế $U = U(x, y, z, t)$ có dạng

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = -\text{grad}\,U(x, y, z, t) = -\nabla U \qquad (2.99)$$

thì từ phương trình (2.94) ta có

$$\vec{V} = -a^2\int_0^t \text{grad}\,s\,dt + \vec{C} = -a^2\,\text{grad}\left(\int_0^t s\,dt\right) + \vec{C}, \qquad (2.100)$$

trong đó $\vec{C}$ là hằng số tích phân.

Cho giá trị của hằng số $\vec{C}$ khi $t = 0$:

$$\vec{V}(x, y, z, 0) = \vec{C} = -\text{grad}\,U(x, y, z, 0)$$

vì thế có thể viết

$$\vec{V} = -\text{grad}\left(U(x, y, z, 0) + a^2\int_0^t s\,dt\right) = -\text{grad}\,U(x, y, z, t) = -\nabla U \qquad (2.101)$$

hoặc

$$U = U(x, y, z, t) = U(x, y, z, 0) + a^2\int_0^t s\,dt. \qquad (2.102)$$

Vi phân phương trình (2.101) và sử dụng phương trình (2.96) suy ra phương trình xác định hàm thế U:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}=a^2 s;\\&\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial s}{\partial t}=-a^2\nabla\vec{V}=-a^2\nabla\left(-\nabla U\right)=a^2\nabla^2 U\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 U,\quad(2.103)$$

cũng là phương trình sóng.

§8. SÓNG ĐIỆN VÀ TỪ

Hệ phương trình Maxwell có dạng:

$$\begin{cases}\nabla.\vec{D}=\rho,\\\nabla.\vec{B}=0,\\\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

trong đó : $\vec{D}$ $\left(\text{coulomb/m}^2\right)$ là vector cảm ứng điện trường;

$\vec{B}\left(\text{weber/m}^2\right)$ là vector cảm ứng từ trường;

$\vec{E}\left(\text{volt/m}\right)$ là vector điện trường;

$\vec{H}\left(\text{ampere/m}\right)$ là vector từ trường;

$\vec{J}\left(\text{ampere/m}^2\right)$ là vector mật độ dòng;

$\rho\left(\text{coulomb/m}^3\right)$ là mật độ điện tích.

Trong một môi trường không có điện tích hoặc nguồn ở trạng thái dừng, ta có

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E},\quad\vec{B}=\mu_0\vec{H},$$

trong đó: $\varepsilon_0\left(\text{farad/m}\right)$ là hằng số điện môi; $\mu_0\left(\text{henry/m}\right)$ là hằng số từ môi hay độ từ thẩm; hai hằng số này liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2},$$

ở đây c là tốc độ ánh sáng.

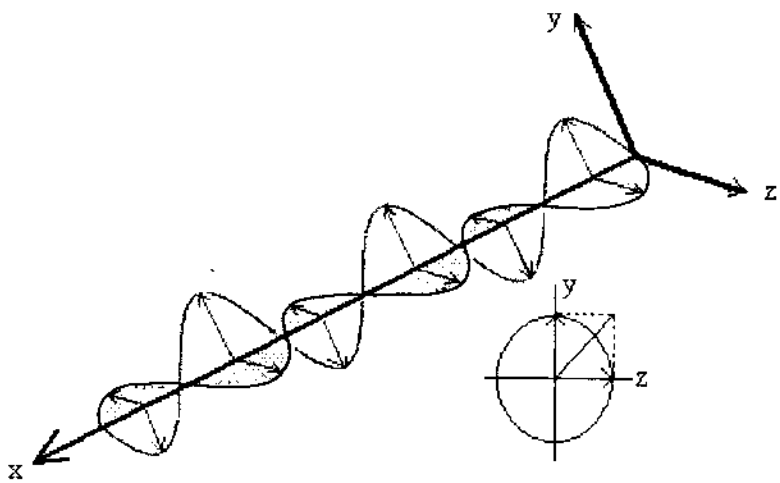
Khi $\vec{J}=0, \rho=0$ trong không gian tự do, các vector $\vec{E}$ và $\vec{H}$ thỏa mãn phương trình sóng 3 chiều. Thật vậy, nhân vector toán tử ∇ với hai phương trình Maxwell cuối cùng ta có:

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)&=\nabla\times\left(-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\ \nabla\times\left(\nabla\times\vec{H}\right)&=\nabla\times\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\tag{2.104}$$

Dùng đồng nhất thức $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=-\nabla^2\vec{A}+\nabla\left(\nabla.\vec{A}\right)=-\nabla^2\vec{A}+\operatorname{div}\vec{A}$ ta có thể đưa phương trình (2.104) về dạng của phương trình sóng (chú ý rằng nếu môi trường không có nguồn $\operatorname{div}\vec{A}=0$):

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\vec{E},\qquad \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\vec{H}\,.\tag{2.105}$$

Như vậy, mỗi thành phần (E_1,E_2,E_3) của $\vec{E}$ và mỗi thành phần (H_1,H_2,H_3) của $\vec{H}$ phải thỏa mãn phương trình sóng.



Hình 2.9. **Sự chuyển động của sóng phân cực và vector tổng hai sóng**

Bây giờ, xét sự chuyển động dao động của sóng dọc theo một đường *bán vô hạn*. Chú ý, sóng được gọi là *sóng ngang* khi độ dịch chuyển của sóng vuông góc với hướng truyền năng lượng. Trong trường hợp đặc biệt, với bài toán dao động của dây, hạn chế chỉ xét trong mặt phẳng (x,y), ta

nói chuyển động sóng chỉ trong miền phân cực phẳng hoặc phân cực tuyến tính và mặt phẳng được gọi là *mặt phẳng phân cực*. Trong cùng một chuyển động sóng đó, xét thêm một mặt phẳng phân cực nữa, gọi là mặt phẳng (x, z) được minh họa trên hình 2.9.

Nếu sợi dây truyền sóng chỉ với một mặt phẳng phân cực, sự chồng chất của các sóng thực hiện bằng phép lấy tổng các vector cùng chiều. Nhưng nếu một sợi dây truyền hai hay nhiều sóng với các mặt phẳng phân cực khác nhau, sự chồng chất của các sóng phải lấy tổng đại số theo các vector với các hướng khác nhau. Trong trường hợp có hai mặt phẳng phân cực vuông góc nhau, ta chỉ cần lấy tổng đại số các vector vuông góc.

Chúng ta đã chỉ ra rằng, trong không gian tự do với $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{H}$ phải thỏa mãn phương trình Maxwell:

$$\begin{aligned} &\nabla\vec{E} = 0; \nabla\vec{H} = 0; \\ &\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.106}$$

trong đó điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{H}$ phải thỏa mãn phương trình sóng (2.105):

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\vec{E}; \quad \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\vec{H}; \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}.$$

Viết điện trường $\vec{E}$ và từ trường $\vec{H}$ dưới dạng các thành phần

$$\begin{cases} \vec{E} = E_1\vec{i} + E_2\vec{j} + E_3\vec{k} \ ; \\ \vec{H} = H_1\vec{i} + H_2\vec{j} + H_3\vec{k}, \end{cases} \tag{2.107}$$

trong đó mỗi thành phần $\{E_1, E_2, E_3\}$ của điện trường $\vec{E}$ và mỗi thành phần $\{H_1, H_2, H_3\}$ của từ trường $\vec{H}$ đều thỏa mãn phương trình sóng. Nghiệm của phương trình sóng cho $\vec{E}$ và $\vec{H}$ không phải là sóng tùy ý khi các phương trình Maxwell đặt một vài điều kiện lên dạng sóng. Ví dụ, xét một sóng phân cực trong mặt phẳng (x, y) chuyển động theo hướng của trục x. Giả sử nghiệm của phương trình (2.105) có dạng

$$\begin{cases} E_1 = f(x-ct); H_1 = F(x-ct); \\ E_2 = g(x-ct); H_2 = G(x-ct); \\ E_3 = h(x-ct); H_3 = H(x-ct). \end{cases} \tag{2.108}$$

Các hàm này không thể tùy ý và thỏa mãn phương trình Maxwell. Thật vậy, xét dạng vô hướng của phương trình Maxwell (2.106):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_1}{\partial x}+\dfrac{\partial E_2}{\partial y}+\dfrac{\partial E_3}{\partial z}=0; \dfrac{\partial H_1}{\partial x}+\dfrac{\partial H_2}{\partial y}+\dfrac{\partial H_3}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial E_3}{\partial y}-\dfrac{\partial E_2}{\partial z}=-\mu_0\dfrac{\partial H_1}{\partial t}; \dfrac{\partial H_3}{\partial y}-\dfrac{\partial H_2}{\partial z}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial z}-\dfrac{\partial E_3}{\partial x}=-\mu_0\dfrac{\partial H_2}{\partial t}; \dfrac{\partial H_1}{\partial z}-\dfrac{\partial H_3}{\partial x}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial x}-\dfrac{\partial E_1}{\partial y}=-\mu_0\dfrac{\partial H_3}{\partial t}; \dfrac{\partial H_2}{\partial x}-\dfrac{\partial H_1}{\partial y}=\varepsilon_0\dfrac{\partial E_3}{\partial t} \end{cases} \tag{2.109}$$

Thay các thành phần $\{E_1, E_2, E_3\}$ và $\{H_1, H_2, H_3\}$ từ (2.108) vào hàng đầu của phương trình (2.109), trong đó $\nabla\vec{E}=0$, $\nabla\vec{H}=0$ ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=0.$$

Như vậy f, F là các hàm không phụ thuộc vào x. Điều đó cho ta thấy phương trình Maxwell không cho phép thực hiện các sóng dọc (tức là không cho phép E_1 và H_1 di chuyển theo hướng truyền sóng). Nếu đặt $f=F=0$ thì chỉ có các thành phần E_2, E_3 và H_2, H_3; còn lại tạo nên các sóng ngang vuông góc với phương chuyển động của sóng. Có thể chứng minh, đại diện cho $\vec{E}$ là các thành phần E_2, E_3 (các sóng phân cực trên mặt phẳng (x, y)). Đặt $H_1=0$ với H_2, H_3 được xác định và tính được:

$$E_1=0,\ E_2=g(x-ct),\ E_3=0. \tag{2.110}$$

Xét đến hàng thứ ba của phương trình (2.109), phương trình (2.109) được rút gọn như sau

$$\begin{cases} 0-0=0; & 0-0=0 \\ 0-0=-\mu_0\dfrac{\partial H_2}{\partial t}; & 0-\dfrac{\partial H_3}{\partial x}=\varepsilon_0\left(-c\dfrac{dg}{d\xi}\right) \\ \dfrac{dg}{d\xi}-0=-\mu_0\dfrac{\partial H_3}{\partial t}; & \dfrac{\partial H_2}{\partial x}-0=0, \end{cases} \tag{2.111}$$

trong đó $\xi=x-ct$, phương trình (2.111) đòi hỏi H_2 là hằng số, có thể chọn bằng không.

Phương trình cho H_3 có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_3}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{dg}{d\xi}; & \dfrac{\partial H_3}{\partial x} = c\varepsilon_0\dfrac{dg}{d\xi}; \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial \xi}(-c) = -\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{dg}{d\xi}; & \dfrac{\partial H_3}{\partial \xi} = c\varepsilon_0\dfrac{dg}{d\xi}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$H_3 = \frac{1}{c\mu_0}g = c\varepsilon_0 g = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}g,$$

trong đó $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow c\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c\mu_0} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$.

Ta có các thành phần của sóng

$$\begin{cases} E_1 = 0; & H_1 = 0 \\ E_2 = g(x-ct); & H_2 = 0 \\ E_3 = 0; & H_3 = \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}g(x-ct). \end{cases} \tag{2.112}$$

Kể từ đây, phương trình Maxwell đòi hỏi cả sóng điện và từ phải là các sóng ngang của cùng một dạng và mặt phẳng phân cực của sóng điện phải vuông góc với mặt phẳng phân cực của sóng từ.

Nếu muốn tìm nghiệm tuần hoàn của phương trình (2.105), có thể giả thiết các vector $\vec{E}$ và $\vec{H}$ có dạng sau:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z)e^{-i\omega t};\ \vec{H}(x,y,z,t) = \vec{H}(x,y,z)e^{-i\omega t} \tag{2.113}$$

Từ đó ta đưa ra được phương trình mới, bằng cách lấy vi phân cấp hai hai vế (2.113) và chú ý tới (2.105):

$$\nabla^2\vec{E} = -c^2\omega^2\vec{E};\ \nabla^2\vec{H} = -c^2\omega^2\vec{H}. \tag{2.114}$$

Điều này chứng tỏ các thành phần E_i của $\vec{E}$ và H_i của $\vec{H}$, với $i = 1,2,3$ phải thỏa mãn phương trình Hemholtz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0;\quad k^2 = c^2\omega^2 \tag{2.115}$$

Trường điện từ tương ứng là phần thực của các đại lượng $\vec{E}e^{-i\omega t}$, $\vec{H}e^{-i\omega t}$. Các thành phần của vector điện $\vec{E}$ và từ $\vec{H}$ tạo nên một sóng điện từ trường, chúng là nghiệm của phương trình (2.115). Điều kiện biên của phương trình Hemholtz là thành phần tiếp tuyến của $\vec{E}$ và pháp tuyến của $\vec{H}$ triệt tiêu trên biên.

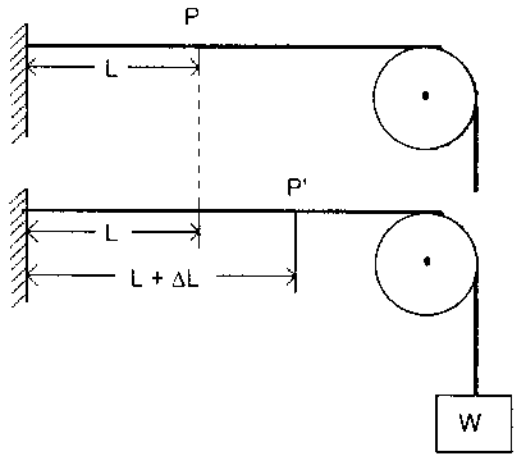
§9. CHUYỂN ĐỘNG SÓNG CỦA CHẤT RẮN

Thí nghiệm của Hooke nghiên cứu sức căng của một sợi dây kim loại, có thiết diện A như nhau bị một lực làm căng dây như hình 2.11. Độ căng và độ nén được định nghĩa:

– Độ căng $= \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{\text{sự thay đổi chiều dài}}{\text{chiều dài gốc}}$;

– Độ nén $= \sigma = \dfrac{W}{A} = \dfrac{\text{lực}}{\text{diện tích}}$.

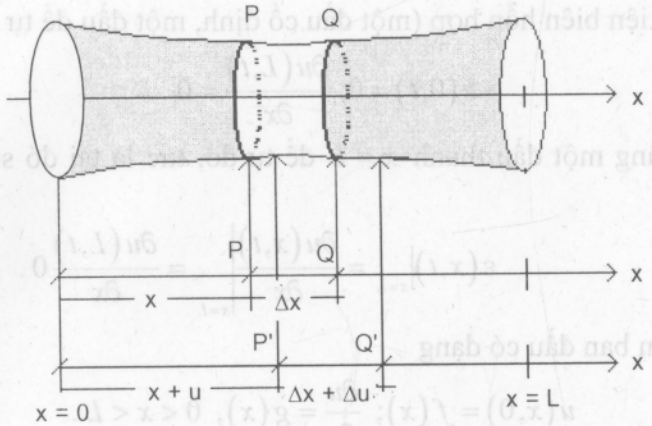
Định luật Hooke: Độ nén tỷ lệ với độ căng $\sigma = E\varepsilon$, trong đó E là hằng số đối với các vật liệu đồng chất và đẳng hướng được gọi là *suất Young* của độ đàn hồi; đối với các vật liệu không đồng chất và đẳng hướng, $E = E(x)$ là hàm của tọa độ.



Hình 2.11. **Thí nghiệm của Hooke**

Phương trình Pochammer: Xét một thanh có thiết diện $A = A(x)$, suất Young của độ đàn hồi là $E = E(x)$, thanh có mật độ thay đổi theo tọa độ $\rho = \rho(x)$ như minh họa trên hình 2.12. Thanh chịu một dao động dọc, do đó tại thời điểm t thiết diện tại P ở điểm x dịch chuyển theo chiều dọc của thanh một lượng $u(x,t)$. Vì thế P chuyển sang điểm P'. Điểm Q bên cạnh có tọa độ $x + \Delta x$ chịu một sự dịch chuyển là $u(x + \Delta x, t)$ và dịch chuyển sang điểm Q'. Độ căng tác dụng lên yếu tố PQ tại thời điểm t được tính bằng

$$\varepsilon = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\left[x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - x - u(x,t)\right] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}.$$



Hình 2.12. **Thanh với thiết diện thay đổi** $PQ = \Delta x, P'Q' = \Delta x + \Delta u$

Cho $\Delta x \to 0$, ta có độ căng tại thời điểm t là

$$\varepsilon = \varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Do đó độ nén tại toạ độ x và tại thời điểm t có dạng

$$\sigma(x,t) = E(x)\varepsilon(x,t) = E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Áp dụng định luật II – Newton vào yếu tố PQ ta có

$$\rho\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x\frac{\partial^2 u\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)}{\partial t^2} = A(x+\Delta x)\sigma(x+\Delta x,t) - A(x)\sigma(x,t) =$$

$$= A(x+\Delta x)E(x+\Delta x)\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - A(x)E(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

Chia hai vế cho Δx và lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$, ta được phương trình chuyển động dao động của thanh

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Đó là *phương trình Pochammer*. Khi A, E, ρ là hằng số, phương trình này rút gọn thành phương trình sóng 1 chiều

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; a^2 = \frac{AE}{\rho}.$$

Các điều kiện biên điển hình là:

– Điều kiện biên Dirichlet (các đầu cố định):

$$u(0,t) = 0;\ u(L,t) = 0,\ t > 0;$$

– Điều kiện biên hỗn hợp (một đầu cố định, một đầu để tự do):

$$u(0,t)=0;\ \frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0.$$

Chú ý rằng một đầu thanh $x=L$ để tự do, tức là tại đó sức căng bằng không:

$$\varepsilon(x,t)\Big|_{x=L}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Bigg|_{x=L}=\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}0.$$

Điều kiện ban đầu có dạng

$$u(x,0)=f(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}=g(x),\ 0<x<L.$$

Xét một thanh trụ với thiết diện A và mật độ ρ như nhau, có độ dài L, tại đầu $x=0$ cố định, đầu $x=L$ để tự do. Kéo đầu để tự do ra đến khoảng cách L_1 rồi thả ra, như vậy thanh sẽ thực hiện dao động dọc. Hãy nghiên cứu quá trình dao động của thanh để biết được độ dịch chuyển và vận tốc chuyển động của một thiết diện bất kỳ của thanh. Như vậy, cần phải giải phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ \ a^2=\dfrac{AE}{\rho}\\ u(0,t)=0,\ \dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0\end{cases}\tag{2.116}$$

trong đó $u=u(x,t)$ là độ di chuyển của thiết diện tại vị trí x và tại thời điểm t.

Theo điều kiện ban đầu, độ căng của thanh là

$$\varepsilon=\frac{L-L_1}{L}=\frac{du}{dx}$$

và độ dịch chuyển lúc ban đầu là

$$u(x,0)=\varepsilon x,\ 0<x<L.\tag{2.117}$$

Một thiết diện tùy ý lúc ban đầu ở trạng thái nghỉ, do đó vận tốc ban đầu được viết

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ \ 0<x<L.\tag{2.118}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.116) có thể tìm được bằng phương pháp tách biến Fourier . Đặt nghiệm dưới dạng

$$u(x,t)=X(x)T(t).$$

Thay vào phương trình, ta có

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Chú ý rằng, trong chương mở đầu chúng tôi đã nêu các điều kiện cho trị riêng λ để bài toán có nghiệm không tầm thường, do đó chọn đẳng thức trên bằng hằng số $-\lambda^2$. Từ đó ta đưa ra được hai phương trình vi phân

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0; \tag{2.119}$$

$$T''(x) + a^2\lambda^2 T(x) = 0. \tag{2.120}$$

Điều kiện biên một đầu thanh gắn chặt, một đầu tự do được viết:

$$X(0) = 0, X'(L) = 0. \tag{2.121}$$

Tích phân phương trình (2.119) ta thu được

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$$

Từ điều kiện biên (2.121), ta tìm được

$$C_1 = 0;\ C_2\lambda\cos\lambda L = 0,$$

Giả sử $C_2 \neq 0$ (nếu không phải thế, bài toán có nghiệm tầm thường):

$$\cos\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2L};\ k = 0,1,2,...$$

Gọi λ_k là các trị riêng có tương ứng các hàm riêng là:

$$X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}; k = 0,1,2,... \tag{2.122}$$

Với mỗi $\lambda = \lambda_k$, nghiệm của phương trình (2.120) có dạng

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}, \tag{2.123}$$

trong đó A_k và B_k là các hằng số tùy ý.

Như vậy, một nghiệm riêng của phương trình (2.116) có dạng:

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(t) = \left[A_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}. \tag{2.124}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.116) là tổ hợp tuyến tính của vô hạn các nghiệm riêng được biểu diễn bằng chuỗi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + B_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}. \tag{2.124}$$

Dựa vào điều kiện ban đầu và tính trực giao của các hàm riêng, chúng ta thu được các hệ số

$$\begin{cases} A_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2L}dx; \\ B_k = \dfrac{4}{(2k+1)\pi a}\displaystyle\int_0^L F(x)\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2L}dx. \end{cases} \tag{2.125}$$

Một lần nữa chúng ta nhận thấy rằng, nghiệm của phương trình dao động dọc của thanh là chồng chất của các dao động điều hòa có dạng

$$M_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+\varphi_k\right];$$

$$M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; tg\varphi_k = \frac{A_k}{B_k}$$

Dao động này có biên độ $M_k \sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2L}$ và tần số

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi a}{2L} = \frac{(2k+1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

nếu chọn thiết diện của thanh bằng đơn vị. Âm cơ bản của thanh khi dao động phát ra là:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4L\sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

Áp dụng điều kiện ban đầu (2.117), (2.118):

$$u(x,0) = \varepsilon x; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$

ta thu được các hệ số khai triển chuỗi

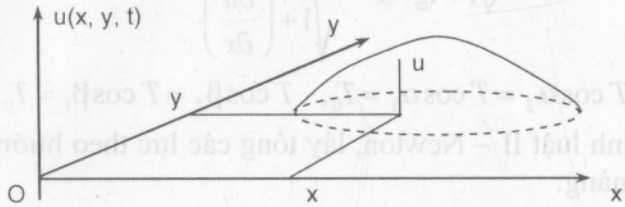
$$A_k = \frac{(-1)^k 8L\varepsilon}{(2k+1)^2\pi^2}, B_k = 0.$$

Như vậy, nghiệm của phương trình dao động dọc của thanh một đầu gắn chặt, một đầu tự do với điều kiện ban đầu là kéo căng một đầu đến độ dài xác định rồi thả tự do có dạng chuỗi Fourier sau

$$u(x,t) = \frac{8\varepsilon L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}. \tag{2.126}$$

§10. PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA MÀNG

Xét chuyển động dao động của một màng mỏng được căng ra trên mặt phẳng (x, y), các dao động chuyển động ngang vuông góc với mặt phẳng của màng dưới sự tác dụng của lực ngoài (hình 2.13).



Hình 2.13. **Dao động của màng**

Đưa vào các đại lượng sau:

$u = u(x, y, t)$ là đại lượng mô tả dao động ngang của màng tại (x, y, t);

ρ là mật độ khối lượng trên một đơn vị diện tích của màng;

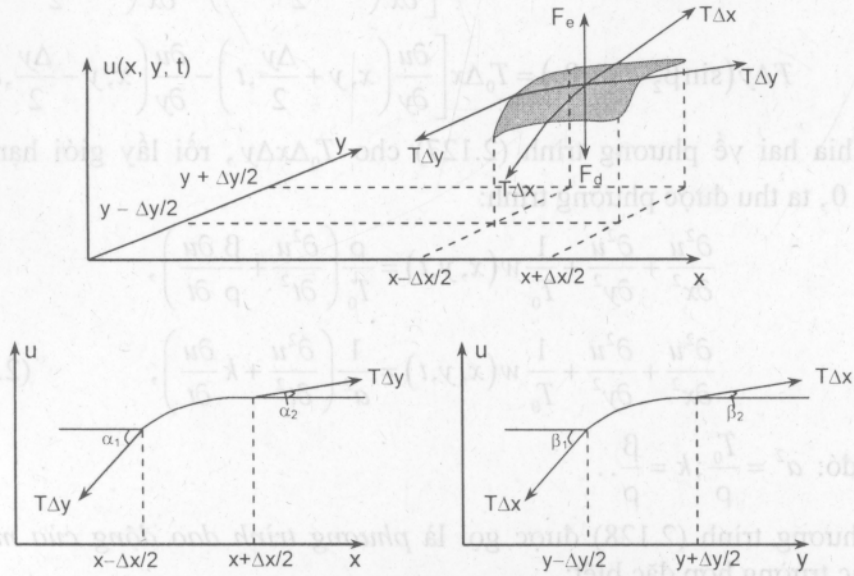
T là sức căng tính trên một đơn vị diện tích;

$w = w(x, y, t)$ là ngoại lực tác dụng tính trên một đơn vị diện tích;

$F_e = w(x, y, t)\Delta x\Delta y$ là ngoại lực tác dụng lên yếu tố diện tích $\Delta x\Delta y$;

$F_d = \beta\Delta x\Delta y\dfrac{\partial u}{\partial t}$ là lực hãm hay lực tắt dần tỷ lệ với vận tốc dao động trên yếu tố diện tích $\Delta x\Delta y$; β là hệ số tắt dần.

Xét một phần nhỏ của màng tại điểm (x, y) như minh họa trên hình 2.14.



Hình 2.14. **Các lực tác dụng lên yếu tố của màng**

Xét độ dịch chuyển nhỏ, trong đó các góc $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ là nhỏ và tổng các lực tác dụng lên yếu tố của màng theo hướng x và y là hình chiếu của sức căng lên mặt phẳng, ta có:

$$T\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \cong \frac{T}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx T \equiv T_0,$$

$$T\cos\alpha_2 = T\cos\alpha_1 = T_0, \quad T\cos\beta_2 = T\cos\beta_1 = T_0.$$

Áp dụng định luật II – Newton, lấy tổng các lực theo hướng vuông góc với yếu tố của màng:

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) + T\Delta x(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) + w(x,y,t)\Delta x\Delta y - \beta\Delta x\Delta y\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.127}$$

Chú ý rằng

$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \cong \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0,$$

do đó ta có

$$T\Delta y(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T_0\Delta y\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, t\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, t\right)\right];$$

$$T\Delta y(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) = T_0\Delta x\left[\frac{\partial u}{\partial y}\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}, t\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}, t\right)\right].$$

Chia hai vế phương trình (2.127) cho $T_0\Delta x\Delta y$, rồi lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$, ta thu được phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{T_0}w(x,y,t) = \frac{\rho}{T_0}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\beta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

hay

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{T_0}w(x,y,t) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{2.128}$$

trong đó: $a^2 = \frac{T_0}{\rho}; k = \frac{\beta}{\rho}$..

Phương trình (2.128) được gọi là *phương trình dao động của màng*. Xét các trường hợp đặc biệt:

• *Trường hợp 1:* Cho $\beta = 0, w = 0$ thu được phương trình sóng 2 chiều

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2.129}$$

• *Trường hợp 2:* Dao động của màng trong trạng thái dừng, suy ra phương trình Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{T_0} w(x, y). \tag{2.130}$$

Gọi C là đường cong đóng kín, nó là biên của màng nằm trên mặt phẳng (x, y), gọi $\vec{n}$ là vector pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài đường cong trên biên. Điều kiện biên của dao động của màng có các dạng sau:

– Điều kiện biên Dirichlet được gọi là *điều kiện biên gắn chặt*

$$u(x, y, t)\Big|_{x,y\in C} = f(x, y). \tag{2.131}$$

– Điều kiện biên Neumann được gọi là *điều kiện biên tự do*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = gradu \cdot \vec{n}\Big|_{x,y\in C} = f(x, y). \tag{2.132}$$

– Điều kiện biên hỗn hợp bao gồm cả điều kiện biên gắn chặt và điều kiện biên tự do, có dạng

$$\begin{cases} u(x, y, t)\Big|_{x,y\in C_1} = f(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = gradu \cdot \hat{n}\Big|_{x,y\in C_2} = g(x, y) \end{cases} \tag{2.133}$$

Điều kiện ban đầu dao động của màng là hình dạng ban đầu và vận tốc ban đầu tại mọi điểm trên bề mặt của màng khi $t = 0$, có dạng:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y) \\ \dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = g(x, y) \end{cases} \tag{2.134}$$

§11. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA MÀNG CHỮ NHẬT

Trong tiết này, mục đích là giải phương trình dao động của màng chữ nhật bằng phương pháp tách biến trên mặt phẳng (x, y) với biên có dạng:

$$0 \le x \le L_1, 0 \le y \le L_2,$$

thỏa mãn phương trình sóng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), 0 \le x \le L_1, 0 \le y \le L_2, t > 0: \\ u(0,y,t) = 0, u(L_1,y,t) = 0, u(x,0,t) = 0, u(x,L_2,t) = 0; \\ u(x,y,0) = f(x,y), \dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = g(x,y). \end{cases} \quad (2.135)$$

Trong phương pháp tách biến, giả sử nghiệm có dạng

$$u = u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (2.136)$$

Thay vào phương trình (2.135) ta có

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_1. \quad (2.137)$$

trong đó λ_1 là hằng số tách biến.

Từ (2.137) ta suy ra hai phương trình

$$T''(t) - a^2\lambda_1 T(t) = 0;$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_1.$$

Tách biến cho phương trình thứ hai:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda_2 X(x) = 0 & X(0) = X(L_1) = 0 \\ Y''(y) - (\lambda_1 - \lambda_2)Y(y) = 0, & Y(0) = Y(L_2) = 0 \end{cases}$$

ta thu được 2 phương trình Sturm–Liouville với các hệ số λ_2 và $\lambda_1 - \lambda_2$.

Chọn

$$\lambda_2 = -\omega_1^2,\ \lambda_1 - \lambda_2 = -\omega_2^2 \quad (2.138)$$

ta có:

$$\begin{aligned} X''(x) + \omega_1^2 X(x) = 0,\ X(0) = X(L_1) = 0; \\ Y''(y) + \omega_2^2 Y(y) = 0,\ Y(0) = Y(L_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Giải phương trình (2.139) ta thu được các hàm riêng và trị riêng sau:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 = \left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2;\ X(x) = X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L_1};\ n = 1,2,3... \\ \omega_2^2 = \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2;\ Y(y) = Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{L_2};\ m = 1,2,3... \end{aligned} \quad (2.140)$$

Đó là tập hợp các hàm trực giao trong khoảng xác định của màng.

$$\left.\begin{aligned}\lambda_2 &= -\omega_1^2 = -\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= -\omega_2^2 = -\left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\left[\left(\frac{n\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2}\right)^2\right] = -\lambda_{nm}^2 \quad (2.141)$$

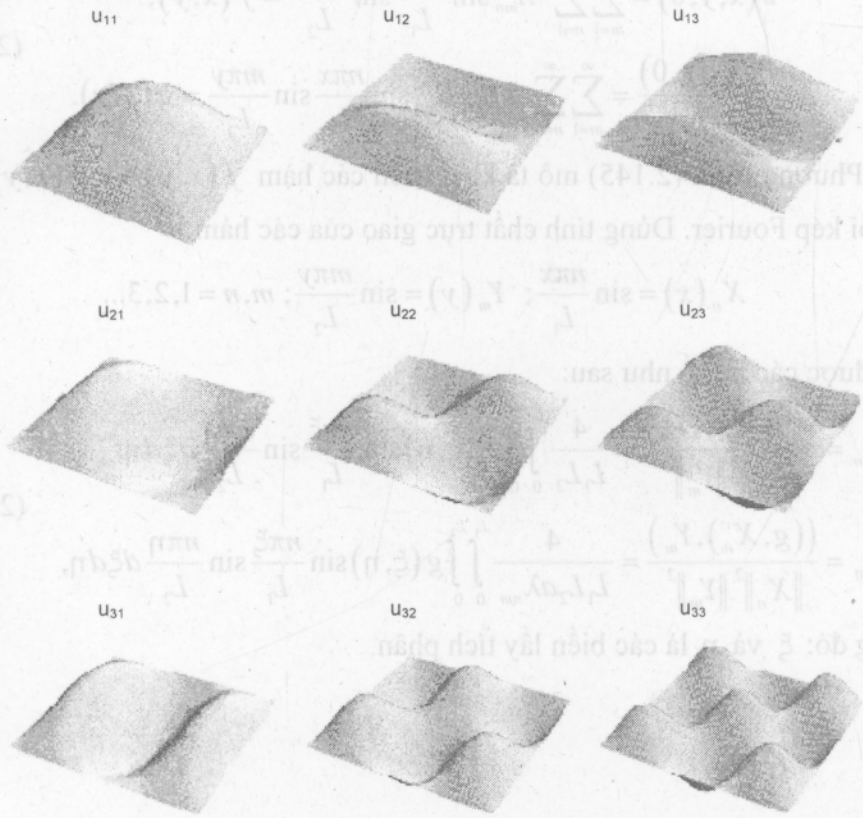
Phương trình hàm t có dạng

$$T''(t) + a^2\lambda_{nm}^2 T(t) = 0 \quad (2.142)$$

và có nghiệm là

$$T(t) = T_{mn}(t) = A_{mn}\cos a\lambda_{nm}t + B_{mn}\sin a\lambda_{nm}t \quad (2.143)$$

trong đó, A_{mn}, B_{mn} là các hằng số tuỳ ý.



Hình 2.15. **Dao động màng vuông**

Phương pháp tách biến cho ta tích của 3 phương trình vi phân tương ứng với 3 biến độc lập là một trong các nghiệm riêng sau

$$u_{mn}(x,y,t) = T_{mn}(t)X_n(x)Y_m(y) =$$

$$= \left(A_{mn}\cos a\lambda_{nm}t + B_{mn}\sin a\lambda_{nm}t\right)\sin\frac{n\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2}.$$

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, nghiệm tổng quát có dạng:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t)X_n(x)Y_m(y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn}\cos a\lambda_{nm}t + B_{mn}\sin a\lambda_{nm}t\right)\sin\frac{n\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2}. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Điều kiện ban đầu của phương trình (2.135), cho phép xác định các hằng số A_{mn}, B_{mn}:

$$\begin{aligned} u(x,y,0) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2} = f(x,y); \\ \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_{mn}B_{mn}\sin\frac{n\pi x}{L_1}\sin\frac{m\pi y}{L_2} = g(x,y). \end{aligned} \tag{2.145}$$

Phương trình (2.145) mô tả khai triển các hàm $f(x,y)$ và $g(x,y)$ vào chuỗi kép Fourier. Dùng tính chất trực giao của các hàm:

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L_1};\quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{L_2};\ m,n = 1,2,3...$$

tìm được các hệ số như sau:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{\left((f,X_n),Y_m\right)}{\|X_n\|^2\|Y_m\|^2} = \frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} f(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{L_1}\sin\frac{n\pi\eta}{L_2}d\xi d\eta; \\ B_{mn} &= \frac{\left((g,X_n),Y_m\right)}{\|X_n\|^2\|Y_m\|^2} = \frac{4}{L_1L_2a\lambda_{nm}}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2} g(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi\xi}{L_1}\sin\frac{n\pi\eta}{L_2}d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{2.146}$$

trong đó: ξ và η là các biến lấy tích phân.

§12. DAO ĐỘNG CỦA MÀNG TRÒN

Xét bài toán dao động của màng bán kính L, với các biên tròn được gắn chặt. Bài toán này dẫn đến việc giải phương trình sóng trong hệ toạ độ cực:

$$u_{tt} = a^2\Delta_{r\varphi}u, \Delta_{r\varphi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right), \ (0 \le r \le L). \quad (2.147)$$

Điều kiện biên gắn chặt được viết

$$u(L,\varphi,t) = 0. \quad (2.148)$$

Điều kiện ban đầu có dạng

$$u(r,\varphi,0) = f(r,\varphi), \ u_t(r,\varphi,0) = F(r,\varphi). \quad (2.149)$$

Bài toán có hai điều kiện đòi hỏi:

– Hàm $u(r,\varphi,t)$ cần phải là hàm tuần hoàn đơn trị của φ với chu kỳ 2π;

– Hàm $u(r,\varphi,t)$ cần phải hữu hạn tại mọi điểm của màng, nhất là tại $r = 0$.

Dùng phương pháp tách biến, đặt

$$u(r,\varphi,t) = T(t)V(r,\varphi),$$

thay vào phương trình (2.147) ta có

$$V(r,\varphi)\frac{d^2T(t)}{a^2dt^2} = T(t)\left(\frac{\partial^2 V(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}\right). \quad (2.150)$$

Chia hai vế của (2.150) cho $T(t)V(r,\varphi)$ ta được:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{V(r,\varphi)}\left[\frac{\partial^2 V(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}\right] = -\lambda^2; \quad (2.151)$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad (2.152)$$

trong đó λ là hằng số.

Nghiệm tổng quát của (2.164) là

$$T(t) = C_1\cos a\lambda t + C_2\sin a\lambda t. \quad (2.153)$$

Phương trình đối với V có dạng

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 V = 0, \ 0 \le r \le L, \quad (2.154)$$

thỏa mãn điều kiện:

$$V(L,\varphi)=0; \tag{2.155}$$

$$|V(0,\varphi)|<\infty; V(r,\varphi)=V(r,\varphi+2\pi); V_\varphi(r,\varphi)=V_\varphi(r,\varphi+2\pi). \tag{2.156}$$

Tìm $V(r,\varphi)$ dưới dạng $V(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, sau đó thay vào phương trình (2.154) ta thu được

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda^2r^2R(r)}{R(r)}=-p^2.$$

Suy ra các phương trình vi phân sau và các điều kiện tương ứng:

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi); \Phi'(\varphi)=\Phi'(\varphi+2\pi)\end{cases}; \tag{2.157}$$

$$\begin{cases}R''(r)+\dfrac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\dfrac{p^2}{r^2}\right)R(r)=0\\ |R(0)|<\infty;\ R(L)=0\end{cases} \tag{2.158}$$

Giải phương trình (2.157) với các điều kiện tuần hoàn chỉ có nghiệm khi $p=n$, với n nguyên:

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\ n=0,1,2....$$

Phương trình (2.158) có dạng

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\frac{n^2}{r^2}\right)R(r)=0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+\left[(\lambda r)^2-n^2\right]R=0.$$

Ta được phương trình Bessel

$$(\lambda r)^2\frac{d^2R}{d(\lambda r)^2}+(\lambda r)\frac{dR}{d(\lambda r)}+\left[(\lambda r)^2-n^2\right]R=0,$$

có nghiệm dưới dạng

$$R_n(r)=D_nJ_n(\lambda r)+\varepsilon_nY_n(\lambda r).$$

Từ điều kiện của phương trình (2.158) $\Rightarrow \varepsilon_n=0,\ J_n(\lambda L)=0$. Đặt $\lambda L=\mu$, nhận được phương trình xác định μ (còn gọi là *phương trình xác định trị riêng*):

$$J_n(\lambda L)=0=J_n(\mu).$$

có một tập hợp các số vô hạn nghiệm dương của phương trình này là

$$\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \ldots \mu_m^{(n)} \quad ; n = 0,1,2,\ldots; m = 1,2,\ldots$$

Vì $\lambda L = \mu$, suy ra trị riêng

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{L} \quad (m = 1,2\ldots, n = 0,1,2\ldots), \tag{2.159}$$

tương ứng với mỗi trị riêng ta có hàm riêng

$$R_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right). \tag{2.160}$$

Như vậy, nghiệm riêng của (2.154) là

$$V_{nm}(r,\varphi) = \begin{cases} J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right)\cos n\varphi \\ J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right)\sin n\varphi \end{cases} \quad ; m = 1,2,3\ldots; n = 0,1,2\ldots$$

Kết hợp với

$$T_{nm}(t) = \begin{cases} \cos\dfrac{\mu_m^{(n)} at}{L} \\ \sin\dfrac{\mu_m^{(n)} at}{L} \end{cases} \quad ; n = 0,1,2\ldots; m = 1,2,\ldots,$$

ta có nghiệm riêng của (2.147):

$$\begin{aligned} u_{nm}(r,\varphi,t) = \Bigg[&\left(A_{nm}\cos\frac{\mu_m^{(n)} at}{L} + B_{nm}\sin\frac{\mu_m^{(n)} at}{L}\right)\cos n\varphi \\ &+ \left(C_{nm}\cos\frac{\mu_m^{(n)} at}{L} + D_{nm}\sin\frac{\mu_m^{(n)} at}{L}\right)\sin n\varphi\Bigg] J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right). \end{aligned} \tag{2.161}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.147) có dạng:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \Bigg[&\left(A_{nm}\cos\frac{\mu_m^{(n)} at}{L} + B_{nm}\sin\frac{\mu_m^{(n)} at}{L}\right)\cos n\varphi \\ &+ \left(C_{nm}\cos\frac{\mu_m^{(n)} at}{L} + D_{nm}\sin\frac{\mu_m^{(n)} at}{L}\right)\sin n\varphi\Bigg] J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right). \end{aligned} \tag{2.162}$$

Các hệ số A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} và D_{nm} trong phương trình (2.162) được xác định từ điều kiện ban đầu (2.149). Ta có

$$u(r,\varphi,0)=f(r,\varphi)=A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)\right]\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)\right]\sin n\varphi;$$

$$u_t(r,\varphi,0)=F(r,\varphi)=B_{0m}\frac{\mu_m^{(0)}a}{L}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}B_{nm}\frac{\mu_m^{(n)}a}{L}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)\right]\cos n\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}D_{nm}\frac{\mu_m^{(n)}a}{L}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)\right]\sin n\varphi.$$

Lần lượt nhân vào bộ hàm riêng $\{1,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi\}$ rồi lấy tích phân hai vế từ 0 đến 2π ta có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{L}\right);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right).$$

Vế phải là khai triển hàm tuỳ ý $\Phi(r)$ vào các hàm Bessel $J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)$:

$$\Phi(r)=\sum_{m=1}^{\infty}a_mJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)\Rightarrow a_m=\frac{2}{L^2J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)}\int_0^L r\Phi(r)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)dr$$

Chú ý đến tính trực giao của các hàm Bessel

$$\int_0^L rJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{L}\right)J_n\left(\frac{\mu_{m'}^{(n)}r}{L}\right)dr=\begin{cases}0, & m\neq m'\\ \frac{L^2}{2}J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right), & m=m'\end{cases},$$

ta thu được các hệ số:

$$\left.\begin{aligned}
A_{0m} &= \frac{1}{\pi L^2 J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) r dr d\varphi \\
A_{nm} &= \frac{2}{\pi L^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right) \cos n\varphi r dr d\varphi \\
C_{nm} &= \frac{2}{\pi L^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right) \sin n\varphi r dr d\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (2.163)$$

Các hệ số B_{0m}, B_{nm}, D_{nm} được xác định tương tự:

$$\left.\begin{aligned}
B_{0m} &= \frac{1}{\pi L a \mu_m^{(0)} J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} F(r,\varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) r dr d\varphi \\
B_{nm} &= \frac{2}{\pi L a \mu_m^{(n)} J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} F(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right) \cos n\varphi r dr d\varphi \\
D_{nm} &= \frac{2}{\pi L a \mu_m^{(n)} J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} F(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{L}\right) \sin n\varphi r dr d\varphi
\end{aligned}\right\} \quad (2.164)$$

Có thể viết lại nghiệm dưới dạng:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_{nm} J\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L} r\right) \sin\left(n\varphi + \psi_{nm}\right) \sin\left(\frac{\mu_m^{(n)} at}{L} + \nu_{nm}\right). \quad (2.165)$$

Các hệ số $M_{nm}, \psi_{nm}, \nu_{nm}$ được xác định bởi các hằng số A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} và D_{nm}. Dao động của màng tròn là tập hợp vô hạn các dao động có tần số

$$\omega_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}, \quad (2.166)$$

trong đó: T_0 là cường độ; σ là mật độ khối lượng bề mặt của màng.

Khi $(n,m) = (0,1)$, ta có âm cơ bản với tần số thấp nhất

$$\omega_{01} = \frac{\mu_1^{(0)}}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}. \quad (2.167)$$

Công thức (2.167) chỉ ra rằng, trong trường hợp dao động của màng tròn, sóng đứng của các tần số khác nhau có các đường nút, đường nút đơn giản nhất được xác định bởi phương trình:

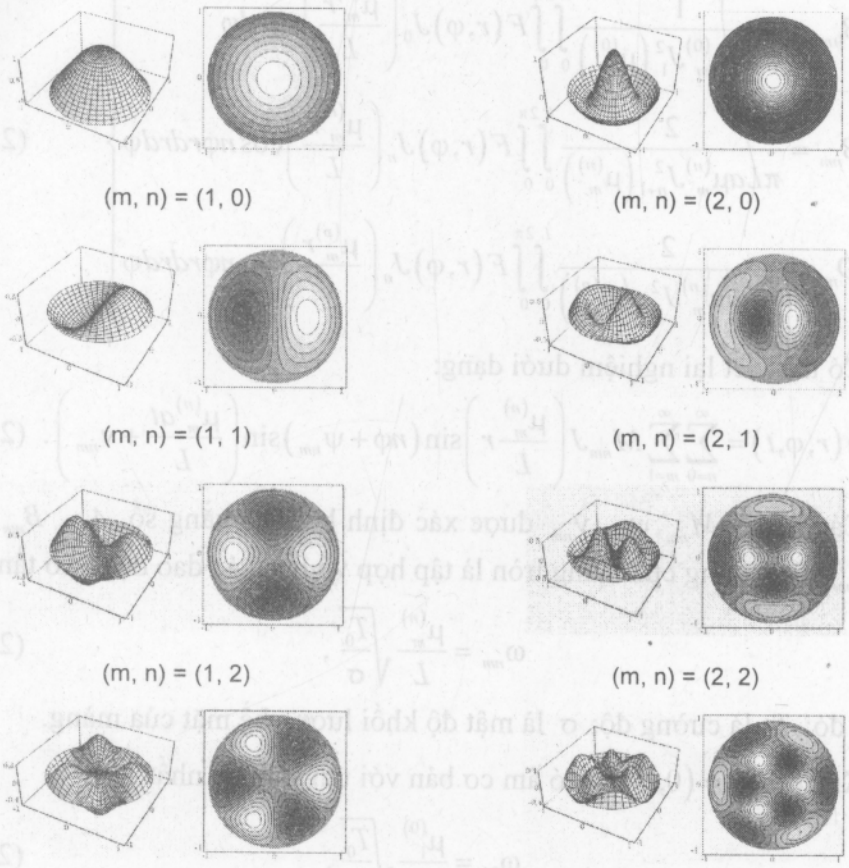
$$J\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{L}r\right)=0;\ \sin\left(n\varphi+\psi_{nm}\right)=0\,. \tag{2.168}$$

Phương trình đầu trong (2.168) xác định $(m-1)$ vòng tròn bao quanh tâm màng có phương trình sau

$$r_1=\frac{\mu_1^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}L,\ r_2=\frac{\mu_2^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}L,.....r_{m-1}=\frac{\mu_{m-1}^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}L\,. \tag{2.181}$$

Phương trình thứ hai trong (2.168) xác định n đường kính của màng với phương trình:

$$\varphi_1=-\frac{\psi_{nm}}{n},\varphi_2=\frac{\pi}{n}-\frac{\psi_{nm}}{n},.....,\varphi_2=\frac{(n-1)\pi}{n}-\frac{\psi_{nm}}{n}. \tag{2.182}$$



Hình 2.16. **Hình ảnh dao động của màng tròn với các (m,n) khác nhau**

§13. NGHIỆM D'ALEMBERT CỦA PHƯƠNG TRÌNH SÓNG

1. Công thức D'Alembert

Trong tiết này, chúng ta đưa ra một phương pháp khác tìm nghiệm của bài toán biên đối với phương trình loại Hyperbolic khác với phương pháp tách biến Fourier. Hãy bắt đầu với bài toán dây dài vô hạn

$$\begin{cases} L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty: \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \end{cases} \tag{2.171}$$

Đưa phương trình này về dạng chính tắc, bằng cách thay biến mới, xét phương trình đặc trưng

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} dx - adt = 0 \Rightarrow x - at = C_1 \\ dx + adt = 0 \Rightarrow x + at = C_2 \end{cases}$$

Như vậy, có thể đưa vào biến mới

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at. \tag{2.172}$$

Khi đó phương trình dao động của dây (2.171) chuyển về dạng

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{2.173}$$

Thật vậy:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0; \xi = x + at, \quad \eta = x - at;$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = a(u_\xi - u_\eta);$$

$$u_{tt} = a(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta})\xi_t + a(u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta})\eta_t$$

$$= a^2(u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta}) - a^2(u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta});$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = (u_\xi + u_\eta);$$

$$u_{xx} = (u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta});$$

$$\Rightarrow u_{\xi\eta} = 0.$$

Có thể giải (2.173) ta được nghiệm

$$u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta),$$

trong đó: $f^*(\eta)$ là hàm của biến η.

Tích phân theo η với ξ cố định ta nhận được nghiệm

$$u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)\, d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{2.174}$$

trong đó: f_1 và f_2 là hàm chỉ phụ thuộc vào ξ và η.

Do đó $$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \tag{2.175}$$

là tích phân tổng quát của phương trình (2.171). Giả sử rằng nghiệm tổng quát của bài toán đã cho tồn tại, đó là nghiệm (2.175), ta xác định hàm f_1 và f_2 sao cho thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \end{cases} \tag{2.176}$$

Tích phân phương trình thứ hai, nhận được

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C,$$

với x_0 và C là hằng số.

Từ tổng và hiệu của f_1 và f_2 ta thu được

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{C}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha - \frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2.177}$$

Như vậy, đã xác định hàm f_1 và f_2 qua các hàm φ và ψ, thay vào (2.175) thu được

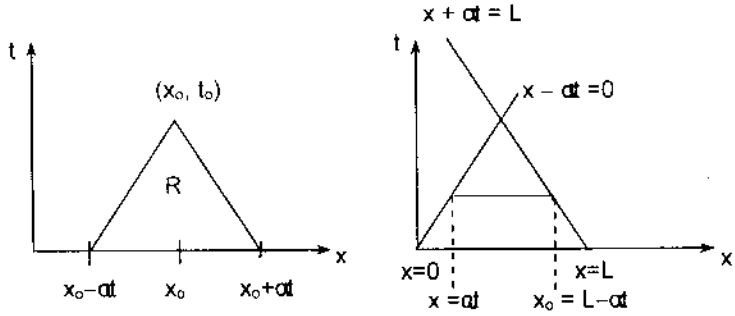
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\,d\alpha\right\},$$

hay là $$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha. \tag{2.178}$$

Công thức (2.178) được gọi là *công thức D'Alembert* xác định nghiệm của phương trình sóng. Công thức này chứng tỏ tính duy nhất của nghiệm.

2. Ý nghĩa vật lý

Phương pháp tìm hàm $u(x,t)$ được xác định bởi (2.178) còn được gọi là *phương pháp D'Alembert*, các đường cong đặc trưng được cho bởi họ các đường: $x - at = \text{const}$, $x + at = \text{const}$. Chọn điểm (x_0, t_0) trong mặt phẳng (x,t), thu được hai đường cong đặc trưng $x + at = x_0 + at_0$ và $x - at = x_0 - at_0$. Các đường này đi qua điểm (x_0, t_0) (hình 2.17).



Hình 2.17. **Miền phụ thuộc sóng**

Nghiệm tại thời điểm $t = t_0$ và vị trí $x = x_0$ chỉ phụ thuộc vào các số liệu ban đầu ở giữa các điểm $x_0 - at_0$ và $x_0 + at_0$. Số hạng đầu tiên của nghiệm D'Alembert là giá trị trung bình của hình dạng sóng lúc ban đầu di chuyển về bên phải và hình dạng sóng lúc ban đầu di chuyển về bên trái tại (x_0, t_0). Hạng thức thứ hai là tích phân của ψ giữa điểm $x_0 - at_0$ và $x_0 + at_0$, miền $x_0 - at_0 < x < x_0 + at_0$ được gọi là *miền phụ thuộc.*

MỘT SỐ BÀI GIẢI MẪU

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\dfrac{2\pi}{L}x. \end{cases}$$

Giải. Biểu diễn nghiệm dưới dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$, suy ra

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}. \tag{1}$$

Vì vế trái của đẳng thức không phụ thuộc vào x, còn vế phải không phụ thuộc vào t, do đó: T''/T và X''/X không phụ thuộc vào x và t, nghĩa là

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2. \tag{2}$$

Từ các điều kiện biên, ta có

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0.$$

Tìm giá trị của tham số λ để phương trình

$$X'' + \lambda^2 X = 0, X(0) = X(L) = 0, \qquad (3)$$

không có nghiệm tầm thường.

Sau khi biện luận các giá trị λ, thấy rằng (3) có nghiệm không tầm thường khi $\lambda > 0$. Khi đó ta có: $X(x) = D_1 \cos\lambda x + D_2 \sin\lambda x$.

Theo điều kiện biên suy ra

$$X(0) = D_1 = 0,\ X(L) = D_2 \sin\lambda L = 0.$$

Vậy phương trình tìm trị riêng là

$$\sin\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}.$$

Do đó, bài toán (3) chỉ có nghiệm không tầm thường khi giá trị riêng

$$\lambda^2 = \lambda^2{}_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2; n = 1,2,3...$$

tương ứng ta có các hàm riêng

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Với trị riêng đã cho ta có nghiệm của phương trình theo biến t là

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \sin\frac{n\pi at}{L},$$

trong đó A_n và B_n là các hằng số tùy ý.

Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Nghiệm tổng quát tương ứng có dạng:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \sin\frac{n\pi at}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Điều kiện ban đầu cho ta xác định các hệ số tùy ý A_n và B_n.

Theo lý thuyết chuỗi Fourier, có thể tìm được các hệ số A_n và B_n theo công thức sau:

$$A_n = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L 0.\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0;$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n}\frac{(g, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L \sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{2\pi a}.$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$u(x,t) = \frac{L}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a t}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}.$$

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0: \\ u_x(0,t) = 0, u_x(L,t) + hu(L,t) = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1, \quad h > 0 \end{cases}$$

Giải. Theo phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

sử dụng phương pháp tách biến, đặt $u(x,t) = X(x)T(t)$ suy ra

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \tag{1}$$

Vì vế trái của (1) không phụ thuộc vào x, còn vế phải không phụ thuộc vào t, do đó T''/T và X''/X không phụ thuộc vào x và t, nghĩa là

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2. \tag{2}$$

Từ phương trình (2) suy ra hai phương trình:

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \tag{3}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{4}$$

Phương trình đối với X thỏa mãn các điều kiện

$$X'(0) = 0, X'(L) + hX(L) = 0. \tag{5}$$

Tìm nghiệm không tầm thường của phương trình vi phân cấp 2 (4) thỏa mãn điều kiện biên (5). Nghiệm tổng quát của (4) là

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x. \tag{6}$$

Từ các điều kiện biên (5) suy ra

$$\begin{cases} B = 0 \\ A(-\lambda\sin\lambda L + h\cos\lambda L) = 0 \end{cases}$$

Với $A \neq 0$ thì $-\lambda\sin\lambda L + h\cos\lambda L = 0$. Điều đó xảy ra khi $\lambda\,\mathrm{tg}\,\lambda L = h$. Phương trình siêu việt $\mathrm{tg}\,\lambda L = \frac{h}{\lambda}$ xác định một bộ các trị riêng $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2...$ Các hàm riêng có dạng

$$X_k(x) = \{\cos\lambda_k x\}.$$

Với trị riêng đã cho, ta có nghiệm của phương trình theo biến t là

$$T_k(t) = C_k \cos\lambda_k at + D_k \sin\lambda_k at,$$

trong đó: C_k và D_k là các hằng số tùy ý.

Nghiệm của bài toán dưới dạng tổng quát là

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos\lambda_k at + B_k \sin\lambda_k at\right)\cos\lambda_k x,$$

trong đó các hệ số A_k, B_k được xác định như sau:

$$A_k = \frac{1}{\|\cos\lambda_k x\|^2}\int_0^L \varphi(x)\cos\lambda_k x\,dx,\ B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\cos\lambda_k x\|^2}\int_0^L \psi(x)\cos\lambda_k x\,dx.$$

Từ điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = 0 \Rightarrow A_k = 0;\ u_t(x,0) = 1 \Rightarrow B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\cos\lambda_k x\|^2}\int_0^L \cos\lambda_k x\,dx.$$

Ta có

$$\int_0^L \cos\lambda_k x\,dx = \frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k x\Big|_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k L = \frac{h}{\lambda_k^2}\frac{\lambda_k}{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}$$

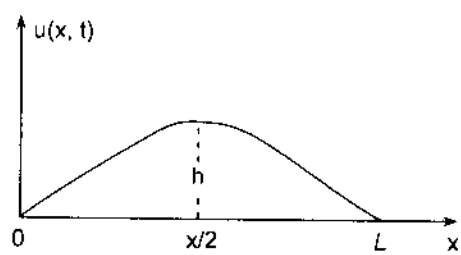
$$\Rightarrow \int_0^L \cos\lambda_k x\,dx = \frac{h}{\lambda_k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\cos\lambda_k x\|^2}\times\frac{h}{\lambda_k\sqrt{h^2+\lambda_k^2}} = \frac{2h}{a}\frac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2\left[L\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h\right]}.$$

Nghiệm tổng quát của bài toán đã cho có dạng

$$u(x,t) = \frac{2h}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k^2\left[L\left(h^2+\lambda_k^2\right)+h\right]}\sin\lambda_k at\cos\lambda_k x.$$

3. Cho sợi dây dài L với hai đầu gắn chặt, tìm nghiệm của phương trình dao động, nếu hình dạng ban đầu của sợi dây là một Parabol đối xứng có độ cao bằng h, vận tốc ban đầu bằng không. (xem hình vẽ).



Giải. Ta cần phải giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

với các điều kiện biên: $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ và điều kiện ban đầu:

$$u(x,0) = f(x) = \frac{4h}{L^2}x(L-x), u_t(x,0) = 0.$$

Nghiệm phương trình được tìm dưới dạng:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k \cos\frac{k\pi at}{L} + D_k \sin\frac{k\pi at}{L}\right)\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

(Xem phương pháp tách biến để tìm được nghiệm của phương trình trên trong §3 chương 2).

Theo điều kiện ban đầu, do vận tốc ban đầu bằng không, suy ra $D_k = 0$, hệ số C_k được tìm theo công thức:

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{8h}{L^3}\int_0^L (Lx - x^2)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần hai lần ta được:

$$C_k = -\frac{8h}{L^3}\left(Lx - x^2\right)\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_0^L + \frac{8h}{k\pi L^2}\int_0^L (L-2x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx,$$

ở đây $\int_0^L (L-2x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx = -\frac{2L^2}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k - 1\right]$, do đó

$$C_k = -\frac{8h}{k\pi L^2}\times\frac{2L^2}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k - 1\right] = -\frac{16h}{(k\pi)^3}\left[(-1)^k - 1\right].$$

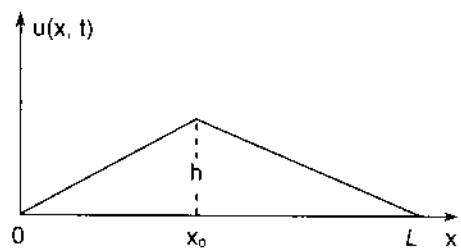
Chú ý rằng

$$\left[(-1)^k - 1\right] = \begin{cases} 0, & k = 2n \\ -2, & k = 2n+1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{L}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}.$$

4. Cho sợi dây dài L với hai đầu gắn chặt, tìm nghiệm của phương trình dao động nếu hình dạng ban đầu của sợi dây là một tam giác có độ cao bằng h, chân đường cao tại x_0, vận tốc ban đầu bằng không. Tìm năng lượng của dao động điều hoà.



Giải. Ta cần giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

với các điều kiện biên: $u(0,t)=0; u(L,t)=0$ và điều kiện ban đầu:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} \dfrac{2h}{L}x, & 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2h}{L}(L-x), & \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases} ; \quad u_t(x,0)=0 .$$

Trong trường hợp này chân đường cao là $L/2$. Nghiệm phương trình được tìm dưới dạng:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k \cos\frac{k\pi at}{L} + D_k \sin\frac{k\pi at}{L}\right)\sin\frac{k\pi x}{L}$$

(Xem phương pháp tách biến để tìm được nghiệm của phương trình trên trong §3 chương 2).

Theo điều kiện ban đầu, do vận tốc ban đầu bằng không, suy ra $D_k = 0$, hệ số C_k được tìm theo công thức:

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{4h}{L^2}\int_0^{\frac{L}{2}} x\sin\frac{k\pi x}{L}dx + \frac{4h}{L^2}\int_{\frac{L}{2}}^{L}(L-x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{8h}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Do đó ta có nghiệm tổng quát là:

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi at}{L}.$$

Chú ý rằng, bằng cách trên, nếu hàm $f(x)$ có dạng:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} \dfrac{h}{x_0}x & 0 < x \le x_0 \\ \dfrac{h}{L-x_0}(L-x) & x_0 < x < L \end{cases} ; \quad u_t(x,0)=0, \quad 0 < x < L$$

(Hình dạng ban đầu của sợi dây khi dao động có dạng một tam giác có độ cao h, chân đường cao đặt tại x_0) ta tính được:

$$u(x,t)=\frac{2hL^2}{\pi^2 x_0(L-x_0)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi x_0}{L}\sin\frac{k\pi x}{L}\cos\frac{k\pi at}{L}.$$

Năng lượng của dao động điều hoà thứ n bằng:

$$E_n = Mh^2 \frac{a^2L^2}{\pi^2 n^2 x_0^2 (L - x_0)} \sin^2 \frac{k\pi x_0}{L},$$

trong đó $M = \rho L$, ρ là mật độ khối lượng của dây.

5. Cho sợi dây dài L, có hai đầu gắn chặt, giả sử có một ngoại lực tác dụng $p(x,t)$ tính trên một đơn vị độ dài. Phương trình dao động của dây dưới sự tác dụng của ngoại lực là:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), g(x,t) = \frac{1}{\rho} p(x,t).$$

Các điều kiện biên và điều kiện ban đầu có dạng:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = F(x) \end{cases}.$$

Giải. Nghiệm được tìm dưới dạng:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

thay vào phương trình ta có:

$$v_{tt}(x,t) + w_{tt}(x,t) = a^2 \left[v_{xx}(x,t) + w_{xx}(x,t) \right] + g(x,t),$$

hay $\quad v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) - g(x,t) = -w_{tt}(x,t) + a^2 w_{xx}(x,t)$.

Hàm v không chứa điều kiện ban đầu, còn hàm w chứa điều kiện ban đầu, chọn w sao cho:

$$\begin{cases} w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t): \\ w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0; \\ w(x,0) = f(x), \quad w_t(x,0) = F(x). \end{cases}$$

Như vậy, phương trình và các điều kiện biên cho hàm $v(x,t)$ là:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + g(x,t): \\ v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0; \\ v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Có thể nói bài toán tìm v là bài toán tìm dao động cưỡng bức của dây không có điều kiện ban đầu, tức là bài toán không có nhiễu loạn. Bài toán tìm w đã giải ở §3 với bộ hàm riêng là:

$$\left\{ \sin \frac{k\pi x}{L} \right\}, k = 1, 2, \ldots.$$

Hàm v sẽ tìm dưới dạng khai triển vào bộ hàm riêng trên, mà hệ số khai triển là hàm $T_k(t)$ phụ thuộc vào t:

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[T_k''(t)+\omega_k T_k(t)]\sin\frac{k\pi x}{L}=g(x,t),\ \omega_k=\frac{k\pi a}{L}.$$

Khai triển hàm $g(x,t)$ vào bộ hàm riêng, mà hệ số khai triển là hàm $g_k(t)$ phụ thuộc vào t:

$$g(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó $g_k(t)=\frac{2}{L}\int_0^L g(\xi,t)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi$.

Ta có

$$[T_k''+\omega_k^2T_k(t)]=g_k(t),\quad k=1,2,...$$

Tìm v trong chuỗi hàm $T_k(t)$ thỏa mãn điều kiện: $T_k(0)=0, T_k'(0)=0$.

Nghiệm của phương trình với điều kiện biên có dạng:

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t g_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau,$$

hay $$T_k(t)=\frac{2}{L\omega_k}\int_0^t d\tau\int_0^L g(\xi,\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi. \qquad (*)$$

Đặt biểu thức vừa tìm được vào chuỗi, ta tìm được hàm $v(x,t)$. Nghiệm của phương trình đối với $u(x,t)$ có hai phần: nghiệm của phương trình không thuần nhất và nghiệm của phương trình thuần nhất:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{k\pi at}{L}+D_k\sin\frac{k\pi at}{L}\right)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó $T_k(t)$ được tính theo công thức (*); còn các hệ số C_k và D_k được xác định theo công thức:

$$C_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx,\quad D_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^L F(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

6. Giải phương trình

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{L},\quad 0<x<L$$

thỏa mãn các điều kiện:

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0;$$

$$u(x,0)=0, u_t(x,0)=0.$$

Giải. Khai triển vào bộ các hàm riêng Fourier

$$\left\{X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{L}\right\},\ k=1,2...$$

Hàm u được khai triển có dạng:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

suy ra:

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k''(t)\sin\frac{k\pi x}{L};$$

$$a^2u_{xx}(x,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

Thay vào phương trình ban đầu ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{L}=Ae^{-t}\sin\frac{\pi x}{L}.$$

Từ sự bằng nhau của hai chuỗi, suy ra

$$T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)=\begin{cases}Ae^{-t}, & k=1\\ 0, & k=2,3...\end{cases}$$

hoặc hai phương trình vi phân

$$\begin{cases}T_1''(t)+\left(\dfrac{\pi a}{L}\right)^2T_1(t)=Ae^{-t}\\ T_k''(t)+\left(\dfrac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)=0, \qquad k=2,3...\end{cases}$$

Các điều kiện ban đầu của hàm $T_k(x)$ là

$$T_k''(0)=T_k(0)=0,\quad k=1,2,...$$

Phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{T}_1(t)=P\cos\frac{a\pi t}{L}+Q\sin\frac{a\pi t}{L}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là tổng của nghiệm phương trình thuần nhất và một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất là

$$T_1(t) = M e^{-t} + P\cos\frac{a\pi t}{L} + Q\sin\frac{a\pi t}{L}.$$

Theo điều kiện ban đầu:

$$T_1(0) = M + P = 0 \qquad \Rightarrow M = -P,$$

$$T_1'(0) = -M + Q\frac{a\pi}{L} = 0 \Rightarrow Q = M\frac{L}{a\pi}.$$

Thay vào $T_1(t)$ ta có

$$T_1(t) = M e^{-t} - M\cos\frac{a\pi t}{L} - M\frac{L}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{L},$$

ở đây M được tìm từ các phương trình:

$$\begin{cases} T_1''(t) = M e^{-t} + M\left(\dfrac{L}{a\pi}\right)^2\cos\dfrac{a\pi t}{L} - M\dfrac{a\pi}{L}\sin\dfrac{a\pi t}{L}. \\ \left(\dfrac{a\pi}{L}\right)^2 T_1(t) = \left(\dfrac{a\pi}{L}\right)^2 M e^{-t} - M\left(\dfrac{L}{a\pi}\right)^2\cos\dfrac{a\pi t}{L} + M\dfrac{a\pi}{L}\sin\dfrac{a\pi t}{L} \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên, ta có

$$Ae^{-t} = \left[1 + \left(\frac{a\pi}{L}\right)^2\right]Me^{-t} + 0 + 0 \Rightarrow M = \frac{A}{\left[1 + \left(\dfrac{a\pi}{L}\right)^2\right]}.$$

Từ đó suy ra

$$T_1(t) = \frac{A}{\left[1 + \left(\dfrac{a\pi}{L}\right)^2\right]}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{L} + \frac{L}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{L}\right),$$

$$T_k(t) = 0, k = 2,3,...$$

Nghiệm cuối cùng có dạng:

$$u(x,t) = \frac{A}{\left[1 + \left(\dfrac{a\pi}{L}\right)^2\right]}\left(e^{-t} - \cos\frac{a\pi t}{L} + \frac{L}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{L}\right)\sin\frac{a\pi x}{L}.$$

7. Cho một thanh đàn hồi ($0 \le x \le L$) được treo thẳng đứng với đầu trên $x = 0$ gắn chặt, còn một đầu thả tự do và cho rằng tại $t = 0$ vận tốc dịch chuyển của thanh là v_0, hình dạng ban đầu bằng không. Tìm dao động dọc của thanh.

Giải

• *Cách 1:* Phương trình dao động của thanh có dạng:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g, \quad g = \text{const}, \ 0 < x < L$$

thỏa mãn các điều kiện:

$$u(0,t) = 0, \ u_x(L,t) = 0;$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = v_0.$$

Nghiệm được tìm có dạng:

$$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t);$$

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} - g = -W_{tt} + a^2 W_{xx}.$$

Chọn $W_{tt} = a^2 W_{xx}$ với các điều kiện:

$$W(0,t) = 0, \quad W_x(0,t) = 0;$$

$$W(x,0) = 0, \quad W_t(x,0) = v_0.$$

Nghiệm W có dạng:

$$W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2L} + \beta_k \sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2L} \right] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Theo điều kiện biên ta có:

$$W(x,0) = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0;$$

$$W_t(x,0) = v_0 \Rightarrow \beta_k = \frac{4v_0}{(2k+1)\pi a} \int_0^L \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L} dx = \frac{8Lv_0}{(2k+1)^2 \pi^2 a},$$

suy ra

$$W(x,t) = \frac{8Lv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2L} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Hàm V thỏa mãn phương trình và các điều kiện:

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{xx} - g = 0; \\ V(0,t) = 0, \ V_x(L,t) = 0;. \\ V(x,0) = 0, \ V_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Hàm V có thể được khai triển theo bộ hàm riêng $\left\{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\}$ có dạng:

$$V(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L};$$

$$V_{tt}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k''(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L};$$

$$V_{xx}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4L^2}\right)T_k(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Thay vào phương trình (*) và để ý các điều kiện

$$V(x,0)=0\Rightarrow T_k(0)=0;$$

$$V_t(x,0)=0\Rightarrow T_k'(0)=0;$$

$$g=\sum_{k=0}^{\infty}K\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Rightarrow K=\frac{2g}{L}\int_0^L\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=-\frac{4g}{(2k+1)\pi}$$

ta được:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{T_k''(t)+\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2T_k(t)\right\}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4g}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

suy ra

$$T_k''(t)+\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2T_k(t)=-\frac{4g}{(2k+1)\pi}. \qquad (**)$$

Do đó

$$T_k(t)=P+Q\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+R\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L},$$

trong đó P, Q và R là các hệ số được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$T_k(0)=0\Rightarrow P+Q=0\Rightarrow Q=-P;$$

$$T_k'(0)=0\Rightarrow R\frac{(2k+1)\pi a}{2L}=0\Rightarrow R=0.$$

Vậy:

$$T_k(t)=P-P\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}=P\left(1-\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right);$$

$$T_k''(0)=\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 P\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L};$$

$$\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 T_k(t)=\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 P\left[1-\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right].$$

Chú ý tới (**) suy ra:

$$-\frac{4g}{(2k+1)\pi}=\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 P \Rightarrow P=-\frac{16gL^2}{(2k+1)^3\pi^3a^2}.$$

Hàm T có dạng:

$$T_k(t)=-\frac{16gL^2}{(2k+1)^3\pi^3a^2}\left[1-\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right].$$

Nghiệm V có dạng

$$V(x,t)=-\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Kết quả cuối cùng ta thu được

$$u(x,t)=-\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{8Lv_0}{\pi^2a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

• *Cách 2:* Phương trình có dạng:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+g,\quad g=\text{const},\ 0<x<L:$$

$$u(0,t)=0,\ u_x(L,t)=0,$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=v_0.$$

Nghiệm được tìm có dạng:

$$u(x,t)=V(x)+W(x,t),$$

do đó $$V_{tt}-a^2V_{xx}-g=-W_{tt}+a^2W_{xx}.$$

Chọn hàm V như sau:

$$\left.\begin{array}{l} V(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma; V_{xx}(x)=-\dfrac{g}{a^2}=2\alpha \Rightarrow \alpha=-\dfrac{g}{2a^2} \\ V(0)=0 \Rightarrow \gamma=0; V_x(L)=0 \Rightarrow 2\alpha L=-\beta \Rightarrow \beta=\dfrac{gL}{a^2} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow V(x)=\frac{gx}{a^2}\left(L-\frac{x}{2}\right).$$

Hàm $W(x,t)$ thỏa mãn

$$W_{tt}=a^2W_{xx},$$

với các điều kiện:

$$W(0,t)=0,\quad W_x(0,t)=0;$$

$$W(x,0)=-V(x,0)=-\frac{gx}{a^2}\left(L-\frac{x}{2}\right),\quad W_t(x,0)=v_0.$$

Nghiệm W có dạng:

$$W(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\alpha_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+\beta_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Từ điều kiện biên của hàm $W(x,t)$ có thể xác định được các hệ số α_k và β_k như sau:

$$W(x,0)=0 \Rightarrow \alpha_k=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{gx}{a^2}\left(\frac{x}{2}-L\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{16gL^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3};$$

$$W_t(x,0)=v_0 \Rightarrow \beta_k=\frac{4v_0}{(2k+1)\pi a}\int_0^L\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{8Lv_0}{(2k+1)^2\pi^2 a}.$$

Chú ý rằng:

$$\int_0^L x^2\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{8L^3(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}+\frac{16L^3}{(2k+1)^3\pi^3};$$

$$\int_0^L x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{4L^2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Thật vậy, đặt

$$I_1 = \int_0^L x^2 \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$I_1 = -\frac{2Lx^2}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_{x=0}^{x=L} + \frac{4L}{(2k+1)\pi}\int_0^L x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx$$

$$= \frac{4L}{(2k+1)\pi}\int_0^L x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx.$$

Sử dụng công thức tính tích phân từng phần cho tích phân

$$I_2 = \int_0^L x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx$$

ta được

$$I_2 = \frac{2Lx}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_{x=0}^{x=L} - \frac{2L}{(2k+1)\pi}\int_0^L \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx$$

$$= \frac{2L^2(-1)^k}{(2k+1)\pi} + \frac{4L^2}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Suy ra

$$I_1 = \frac{8L^3(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} + \frac{16L^3}{(2k+1)^3\pi^3}.$$

Tiếp theo ta tính $I_3 = \int_0^L x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx$:

$$I_3 = -\frac{2Lx}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_{x=0}^{x=L} + \frac{2L}{(2k+1)\pi}\int_0^L \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\,dx$$

$$= \frac{2L}{(2k+1)\pi}\cdot\frac{2L(-1)^k}{(2k+1)\pi} = \frac{4L^2(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Như vậy

$$W(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{16gL^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+\frac{8Lv_0}{(2k+1)^2\pi^2 a}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right]\times$$

$$\times\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

$$=\frac{16gL^2}{a^2\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{8Lv_0}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Cùng với nghiệm V ta có kết quả cuối cùng:

$$u(x,t)=\frac{gx}{a^2}\left(L-\frac{x}{2}\right)+\frac{16gL^2}{a^2\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{8Lv_0}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

So sánh với cách 1:

$$u(x,t)=-\frac{16gL^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{16gL^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{8Lv_0}{\pi^2 a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

Cách nào đúng?

$$\alpha_k=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{gx}{a^2}\left(L-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=-\frac{16gL^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3};$$

$$\frac{gx}{a^2}\left(L-\frac{x}{2}\right)=-\frac{16gL^2}{\pi^3 a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Vậy kết quả trong hai cách hoàn toàn giống nhau.

8. Tìm dao động ngang của màng hình chữ nhật $0\le x\le L_1, 0\le y\le L_2$ có các mép được gắn chặt, với điều kiện ban đầu:

$$u(x,y,0)=Axy(L_1-x)(L_2-y),\ \ u_t(x,y,0)=0.$$

Giải. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$$

thỏa mãn các điều kiện:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=L_1} = u\big|_{y=0} = u\big|_{x=L_2} = 0\,;$$

$$u(x,y,0) = Axy(L_1 - x)(L_2 - y),\ \ u_t(x,y,0) = 0\,.$$

Hàm dao động xác định trong khoảng $0 \le x \le L_1,\ 0 \le y \le L_2$. Trong phương pháp tách biến, giả sử nghiệm có dạng

$$u = u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t), \tag{1}$$

thay vào phương trình đã cho ta có

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_1, \tag{2}$$

trong đó λ_1 là hằng số tách biến.

Từ (2) ta suy ra hai phương trình:

$$T''(t) - a^2\lambda_1 T(t) = 0\ ;$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_1\,. \tag{3}$$

Tách biến phương trình thứ hai:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda_2 X(x) = 0, & X(0) = X(L_1) = 0 \\ Y''(y) - (\lambda_1 - \lambda_2)Y(y) = 0, & Y(0) = Y(L_2) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

thu được hai phương trình Sturm–Liouville với các hệ số là λ_2 và $\lambda_1 - \lambda_2$.

Chọn $$\lambda_2 = -\omega_1^2,\ \lambda_1 - \lambda_2 = -\omega_2^2\,. \tag{5}$$

Hai phương trình (3) có dạng:

$$\begin{aligned} X''(x) + \omega_1^2 X(x) = 0, \qquad & X(0) = X(L_1) = 0; \\ Y''(y) + \omega_2^2 Y(y) = 0, \qquad & Y(0) = Y(L_2) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Giải hai phương trình này, ta được các hàm riêng và trị riêng sau:

$$\omega_1^2 = \left(\frac{(2n+1)\pi}{L_1}\right)^2;\ X(x) = X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1};\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{(2m+1)\pi}{L_2}\right)^2;\ Y(y) = Y_m(y) = \sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2};\ m = 0, 1, 2,...$$

Đó là tập hợp các hàm trực giao trong khoảng xác định của màng.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= -\omega_1^2 = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{L_1}\right)^2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= -\omega_2^2 = -\left(\frac{(2m+1)\pi}{L_2}\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{L_2}\right)^2\right] = -\lambda_{nm}^2.$$

Phương trình hàm t có dạng

$$T''(t) + a^2\lambda_{nm}^2 T(t) = 0, \tag{7}$$

và có nghiệm:

$$T(t) = T_{mn}(t) = A_{mn}\cos a\lambda_{nm}t + B_{mn}\sin a\lambda_{nm}t \tag{8}$$

trong đó các hệ số A_{mn}, B_{mn} là các hằng số tuỳ ý.

Dùng phương pháp tách biến cho ta ba phương trình vi phân với các nghiệm:

$$\begin{aligned} u &= u_{mn}(x,y,t) = T_{mn}(t)X_n(x)Y_m(y) \\ &= \left(A_{mn}\cos a\lambda_{nm}t + B_{mn}\sin a\lambda_{nm}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2}. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý chồng chất, thu được nghiệm tổng quát:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t)X_n(x)Y_m(y) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{mn}\cos a\lambda_{nm}t + B_{mn}\sin a\lambda_{nm}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2}. \end{aligned}$$

Điều kiện ban đầu của phương trình cho phép xác định các hằng số A_{mn}, B_{mn}:

$$u(x,y,0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2} = Axy(L_1 - x)(L_2 - y) \\ \displaystyle\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_{nm}B_{mn}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Dùng tính chất trực giao của các hàm

$$X_n(x) = \sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1};$$

$$Y_m(y) = \sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2};\ m,n = 0,1,2,3...$$

tìm được các hệ số như sau:

$$A_{mn} = \frac{64AL_1^2L_2^2}{\pi^6(2n+1)^3(2m+1)^3}$$

$$a\lambda_{nm}B_{mn} = 0$$

Kết quả thu được:

$$u(x,y,t) = \frac{64A\,L_1^2\,L_2^2}{\pi^6}\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L_1}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{L_2}}{(2n+1)^3(2m+1)^3}\times\cos\left\{\pi a t\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{L_1^2}+\frac{(2m+1)^2}{L_2^2}}\right\}.$$

BÀI TẬP

2.1. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x).$$

2.2. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$

$$u(0,t) = u_x(L,t) = 0;$$

$$u(x,0) = x,\ \ u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2L} + \sin\frac{3\pi x}{2L}.$$

2.3. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$

$$u_x(0,t) = u(L,t) = 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x).$$

2.4. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x).$$

2.5. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$
$$u(0,t) = u_x(L,t) + hu(L,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ h > 0.$$

2.6. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$
$$u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(L,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x),\ \ h > 0.$$

2.7. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0:$$
$$u_x(0,t) - hu(0,t) = u_x(L,t) + hu(L,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,0) = \psi(x),\ \ h > 0.$$

2.8. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x):$$
$$u(0,t) = \alpha,\ \ u(L,t) = \beta;$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

2.9. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x):$$
$$u_x(0,t) = \alpha,\ \ u_x(L,t) = \beta;$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x).$$

2.10. Tìm dao động dọc của một thanh, đầu $x = 0$ gắn chặt, còn đầu $x = L$ để tự do với điều kiện ban đầu:

$$u(x,0) = kx,\ \ u_t(x,0) = 0 \qquad \text{khi} \quad 0 \le x \le L.$$

2.11. Tìm dao động dọc của một thanh đàn hồi, với hai đầu tự do nếu vận tốc ban đầu và hình dạng ban đầu của thanh là một hàm tuỳ ý.

2.12. Tìm dao động của một thanh đàn hồi, với các đầu để tự do, tại thời điểm ban đầu có một xung lực I tác dụng lên một đầu của thanh.

2.13. Tìm dao động dọc của thanh, một đầu của thanh gắn chặt đàn hồi, còn đầu kia để tự do, với điều kiện ban đầu tùy ý.

2.14. Một thanh đồng chất với mật độ ρ và độ dài L, có một đầu $x = 0$ gắn chặt, đầu $x = L$ bị một lực có sức căng P tác dụng, tại thời điểm $t = 0$ lực tác dụng bị biến mất. Tìm dao động dọc của thanh.

2.15. Hãy giải phương trình dao động xoắn của một thanh đồng chất, với một đầu $x = 0$ để tự do, đầu còn lại $x = L$ gắn một đĩa có moment quán tính là K_1.

2.16. Hãy giải phương trình dao động xoắn của một thanh đồng chất, với cả hai đầu gắn đĩa có moment quán tính giống nhau là K.

2.17. Giải phương trình dao động của dây và thanh với các đầu chuyển động

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t)$$

trong đó: $g(x,t) = \dfrac{1}{\rho} p(x,t)$.

Điều kiện biên: $u(0,t) = \chi_1(t), \quad u(L,t) = \chi_1(t)$.

Điều kiện ban đầu: $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = F(x)$.

2.18. Giải phương trình dao động của dây dưới sự tác dụng của ngoại lực là:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A\sin\omega t:$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0;$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0$$

2.19. Giải phương trình dao động của thanh bị tác động của trọng lực, với một đầu gắn chặt và một đầu tự do. Hãy cho biết độ dịch chuyển cực đại của thanh tại $x = L$.

2.20. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + Axe^{-t}, 0 < x < L:$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0;$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0.$$

2.21. Giải phương trình

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t):$$

$$u(0,t)=0, \qquad u_x(L,t)=0;$$
$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0.$$

2.22. Giải phương trình

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+Ae^{-t}\cos\frac{\pi x}{2L}:$$
$$u_x(0,t)=0, \qquad u(L,t)=0;$$
$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0.$$

2.23. Giải phương trình

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t):$$
$$u_x(0,t)=0, \qquad u_x(L,t)=0;$$
$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0.$$

2.24. Giải phương trình

$$u_{xx}=u_{tt}, \quad 0<x<L:$$
$$u(0,t)=\mu(t), \quad u(L,t)=\nu(t);$$
$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x).$$

2.25. Giải phương trình

$$u_{tt}=u_{xx}, \ 0<x<\pi:$$
$$u(0,t)=t^2, \ u(\pi,t)=t^3;$$
$$u(x,0)=\sin x, \quad u_t(x,0)=0.$$

2.26. Giải phương trình

$$u_{tt}=u_{xx}, \ 0<x<\pi:$$
$$u(0,t)=e^{-t}, \quad u(\pi,t)=t;$$
$$u(x,0)=\sin x\cos x, \quad u_t(x,0)=1$$

2.27. Giải phương trình

$$u_{tt}=u_{xx}, \ 0<x<\pi:$$
$$u(0,t)=t, \quad u_x(\pi,t)=1;$$
$$u(x,0)=\sin\frac{x}{2}, \quad u_t(x,0)=1.$$

2.28. Giải phương trình

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<L:$$

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=Ae^{-t};$$

$$u(x,0)=\frac{Aa\,ch\frac{x}{a}}{sh\frac{x}{a}},\quad u_t(x,0)=-\frac{Aa\,ch\frac{x}{a}}{sh\frac{x}{a}}.$$

2.29. Giải phương trình

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+\sin 2t,\quad 0<x<L:$$

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(L,t)=\frac{2}{a}\sin\frac{2L}{a}\sin 2t;$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=-2\sin\frac{2x}{a}.$$

2.30. Tìm dao động dọc của thanh $0<x<L$ nếu một đầu gắn chặt, còn đầu kia tại thời điểm $t=0$ đặt một lực $F_0=\text{const}$, các điều kiện ban đầu bằng không.

2.31. Giải phương trình

$$u_{tt}=u_{xx}+\sin t\sin 2\pi x,\quad 0<x<1:$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0;$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0.$$

2.32. Giải phương trình

$$u_{tt}=u_{xx}+1,\quad 0<x<1:$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0;$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0.$$

2.33. Chứng minh rằng với phép đổi biến $x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi$, toán tử Laplace trong hệ tọa độ Đề-các: $\Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sau phép đổi biến toán tử Laplace trong hệ tọa độ cực có dạng:

$$\Delta_{r\varphi}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

2.34. Tìm dao động ngang của màng hình chữ nhật $0\le x\le L_1, 0\le y\le L_2$ có các mép được gắn chặt, điều kiện ban đầu:

$$u(x,y,0)=0,\quad u_t(x,y,0)=Axy(L_1-x)(L_2-y)$$

2.35. Tìm dao động của màng $0 \le x \le L_1$, $0 \le y \le L_2$ bị tác dụng bởi xung lực K tập trung tại (x_0, y_0).

2.36. Tìm dao động ngang của màng tròn bán kính $r = L$, với các biên gắn chặt, gây nên bởi độ lệch và vận tốc ban đầu đối xứng xuyên tâm. Điều kiện ban đầu có dạng: $u(r,0) = f(r)$; $u_t(r,0) = F(r)$.

2.37. Tìm dao động ngang của màng tròn với các biên gắn chặt, gây nên bởi độ lệch ban đầu có dạng Parabol tròn xoay và vận tốc ban đầu bằng không.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \ 0 \le r \le L: \\ u(L,t) = 0 \\ u(r,0) = f(r) = A\left(1 - \dfrac{r^2}{L^2}\right); \quad u_t(r,0) = F(r) = 0 \end{cases}$$

2.38. Tìm dao động của nước trong một bình trụ thẳng đứng, nếu vận tốc ban đầu là một hàm đối xứng xuyên tâm, còn áp suất trên mặt nước được giữ không đổi.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC

§1. PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Nhiệt truyền từ nơi có nhiệt độ cao sang nơi có nhiệt độ thấp theo ba cách: quá trình dẫn nhiệt, quá trình bức xạ nhiệt và quá trình đối lưu. Quá trình dẫn nhiệt bên trong vật là do sự chuyển động của các phân tử bên trong vật. Trong vật rắn, dòng nhiệt chuyển từ nơi có nhiệt độ cao (là nơi có một số lớn phân tử chuyển động có vận tốc lớn hay động năng lớn) sang nơi có nhiệt độ thấp hơn (là nơi có vận tốc và động năng các phân tử nhỏ hơn). Quá trình bức xạ nhiệt giữa hai vật xảy ra khi nhiệt truyền qua không gian từ vật nóng hơn sang vật lạnh hơn (không tính đến nhiệt độ không gian giữa hai vật), đó chính là chuyển động nhiệt dưới dạng sóng. Một ví dụ là sự truyền nhiệt độ của Mặt Trời cho Trái Đất. Nhiệt truyền do đối lưu xảy ra khi một số loại chuyển động nhiệt di chuyển từ nơi này sang nơi khác. Cường độ của dòng đối lưu xảy ra khi cánh quạt thổi dòng nhiệt từ nơi này sang nơi khác. Có một loại truyền nhiệt khác được sinh ra do bay hơi hoặc ngưng tụ. Tất cả các quá trình truyền nhiệt này được nghiên cứu trong các môn học đại cương và chuyên đề về nhiệt. Trong chương này chủ yếu tập trung nghiên cứu quá trình truyền nhiệt trong vật dẫn. Chúng ta nhắc lại định lý Gauss thường dùng để chuyển từ tích phân mặt sang tích phân 3 lớp.

Nếu $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ là một trường vector liên tục, xác định mọi nơi bên trong thể tích V với bề mặt kín S bao quanh nó, thì theo định lý Gauss

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, d\tau = \oiint_S \vec{F}.\vec{n}\, d\sigma, \tag{3.1}$$

trong đó: $d\tau$ là yếu tố thể tích và $d\sigma$ là yếu tố diện tích bề mặt; $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của bề mặt có độ dài bằng đơn vị.

Sử dụng định lý Gauss, định luật Fourier về quá trình truyền nhiệt và định luật bảo toàn năng lượng để xây dựng phương trình truyền nhiệt. Theo định luật Fourier về quá trình truyền nhiệt

$$\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} u = -\kappa \nabla u = -\kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{k} \right), \tag{3.2}$$

trong đó: $\vec{q}$ là lượng nhiệt truyền qua một đơn vị diện tích trong một đơn vị thời gian; κ là hệ số dẫn nhiệt phụ thuộc vào tính chất của vật liệu khi nhiệt truyền qua; hàm $u = u(x, y, z)$ biểu diễn nhiệt độ của vật.

Bề mặt có nhiệt độ không đổi $u(x, y, z) = \text{const}$ được gọi là *mặt đẳng nhiệt*. Ta thấy rằng, vector gradient trùng với pháp tuyến tại bất kỳ điểm nào trên bề mặt và hướng theo chiều tăng của nhiệt độ. Vì dòng nhiệt hướng từ nóng sang lạnh nên trong công thức (3.2) của định luật Fourier về quá trình truyền nhiệt lấy dấu trừ. Như vậy, định luật Fourier về quá trình truyền nhiệt có thể được giải thích là dòng nhiệt truyền theo hướng tăng của nhiệt độ. Đại lượng $\vec{q}$ được gọi là *vector dòng nhiệt*, bằng lượng nhiệt truyền qua một đơn vị diện tích.

Sử dụng các đại lượng nhiệt sau:

$c = c(x, y, z)$ là nhiệt dung của chất rắn ;

$\rho = \rho(x, y, z)$ là mật độ khối lượng tính trên một đơn vị thể tích;

$\kappa = \kappa(x, y, z)$ là hệ số dẫn nhiệt của chất rắn ;

$\vec{q} = \vec{q}(x, y, z, t)$ là dòng nhiệt truyền qua một đơn vị diện tích ;

$H = H(x, y, z, t)$ là nguồn nhiệt tự sinh ra trên một đơn vị thể tích ;

$u = u(x, y, z, t)$ là nhiệt độ tại mọi điểm của vật.

Viết định luật bảo toàn năng lượng cho một miền tùy ý V với bề mặt kín S bao quanh. Gọi H_S là lượng nhiệt thay đổi trong V với khoảng thời gian Δt. H_C là lượng nhiệt đi qua bề mặt S trong khoảng thời gian Δt. H_G là lượng nhiệt sinh ra trong V trong khoảng thời gian Δt. Định luật bảo toàn được viết dưới dạng

$$H_S = H_C + H_G \Rightarrow H_C + H_G - H_S = 0. \tag{3.3}$$

Lượng nhiệt có ở trong yếu tố thể tích $d\tau$ của V là $c\rho u d\tau$. H_S là lượng nhiệt thay đổi trong V trong khoảng thời gian Δt có dạng

$$H_S = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c\rho u d\tau \ . \tag{3.4}$$

H_C là lượng nhiệt đi qua bề mặt S trong khoảng thời gian Δt, nói cách khác là *thông lượng nhiệt* đi vào bề mặt S là

$$H_C = \oiint_S -\vec{q}.\vec{n}\, d\sigma, \tag{3.5}$$

trong đó dấu trừ để đổi dấu cho vector pháp tuyến ngoài có độ dài đơn vị $\vec{n}$. Theo định lý Gauss, tích phân bề mặt được chuyển thành:

$$H_C = \iiint_V -\mathrm{div}\vec{q}\,d\tau. \tag{3.6}$$

Nhiệt lượng sinh ra trong V được cho bởi

$$H_G = \iiint_V H d\tau\ . \tag{3.7}$$

Kết quả từ các công thức (3.4), (3.6) và (3.7) cho phép viết định luật bảo toàn bởi phương trình

$$\iiint_V \left\{ -\mathrm{div}\vec{q} + H - \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) \right\} d\tau. \tag{3.8}$$

Kết quả trên cho một thể tích V tùy ý và thời gian tùy ý Δt, như vậy số hạng trong dấu ngoặc {} phải bằng không. Thay biểu thức của $\vec{q}$ vào phương trình (3.2) biểu thị định luật Fourier của quá trình truyền nhiệt ta thu được phương trình truyền nhiệt trong vật dẫn

$$\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,u) + H = \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u). \tag{3.9}$$

Hoặc có thể viết dưới dạng mở rộng

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial}{\partial z}\right) + H = \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u). \tag{3.10}$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu κ là hằng số ta có

$$\mathrm{div}(\kappa\,\mathrm{grad}\,u) = \nabla(\kappa\nabla u) = \kappa\nabla^2 u = \kappa\Delta u, \tag{3.11}$$

$\nabla^2 = \Delta$ được gọi là toán tử Laplace.

Khi các hệ số đều là hằng số, có thể viết phương trình truyền nhiệt dưới dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + Q, \quad a = \sqrt{\frac{\kappa}{c\rho}}, \quad Q = \frac{H}{c\rho}, \tag{3.12}$$

hệ số a được gọi là *độ khuếch tán* của vật liệu.

Nếu $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ thì có thể nói nhiệt độ ở trạng thái dừng hay ổn định. Trong trường hợp trạng thái dừng $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, trong phương trình (3.12) nhiệt độ chỉ phụ thuộc vào các vị trí bên trong. Nếu không có nguồn nhiệt, tức là $Q = 0$, phương trình truyền nhiệt trở thành phương trình thuần nhất. Ta có thể thiết lập bảng sau cho phương trình truyền nhiệt trong hệ tọa độ Đề-các.

Bảng 1. Các dạng khác nhau của phương trình truyền nhiệt trong hệ toạ độ Đề-các

Các trường hợp	*Dạng toán tử*	*Dạng một chiều*
Tổng quát	$\nabla(\kappa\nabla u)+H=\rho c\dfrac{\partial u}{\partial t}$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+H=\rho c\dfrac{\partial u}{\partial t}$
Vật liệu đồng chất	$\nabla^2 u+\dfrac{H}{\kappa}=\dfrac{\rho c}{\kappa}\dfrac{\partial u}{\partial t}$	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{H}{\kappa}=\dfrac{\rho c}{\kappa}\dfrac{\partial u}{\partial t}$
Trạng thái dừng	$\nabla(\kappa\nabla u)+H=0$	$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+H=0$
Trạng thái dừng với vật liệu đồng chất	$\nabla^2 u+\dfrac{H}{\kappa}=0$	$\dfrac{d^2 u}{dx^2}+\dfrac{H}{\kappa}=0$

§2. CÁC ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU VÀ ĐIỀU KIỆN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT

Cho vật thể V với mặt S bao quanh, các điều kiện biên khác nhau có thể đặt trên mặt biên S như sau:

1) *Điều kiện biên Dirichlet* hay *bài toán biên loại I* đòi hỏi nhiệt độ được xác định trên biên của miền, mà tại đó phương trình truyền nhiệt giải được. Loại điều kiện biên này có dạng

$$u(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in S}=f_1(x,y,z,t), \tag{3.13}$$

trong đó f_1 là nhiệt độ đã được xác định.

2) *Điều kiện biên Neumann* hay *bài toán biên loại II* đòi hỏi dòng nhiệt đi qua biên được xác định rõ trên biên của miền, mà tại đó phương trình truyền nhiệt giải được. Loại điều kiện biên này có dạng

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}\right|_{(x,y,z)\in S}=\operatorname{grad}u.\vec{n}\big|_{(x,y,z)\in S}=f_2(x,y,z,t)\big|_{(x,y,z)\in S}, \tag{3.14}$$

trong đó f_2 là dòng nhiệt đã được xác định.

Chú ý rằng, đối với biên được bảo vệ, tức là cách nhiệt (không cho dòng nhiệt đi qua) thì

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{Biên}}=\operatorname{grad}u.\vec{n}\big|_{\text{Biên}}=0. \tag{3.15}$$

3) *Điều kiện biên Robin* hay *bài toán biên loại III* đòi hỏi dòng nhiệt đi qua biên và nhiệt độ trao đổi với môi trường xung quanh được xác định rõ trên biên của miền, mà tại đó phương trình truyền nhiệt giải được. Loại điều kiện biên này có dạng

$$\left.\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial n}+hu(x,y,z,t)\right|_{(x,y,z)\in S}=f_3(x,y,z,t)\Big|_{(x,y,z)\in S}, \qquad (3.16)$$

trong đó: $h>0$ là hằng số, f_3 là dòng nhiệt đã được xác định.

Chú ý rằng, dòng nhiệt trao đổi với môi trường xung quanh phụ thuộc vào cả nhiệt độ của môi trường.

4) *Điều kiện biên hỗn hợp* là kết quả của các điều kiện biên loại I và loại II.

§3. PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN

Phương trình truyền nhiệt cũng mô tả quá trình khuếch tán, có khi người ta còn gọi là *phương trình khuếch tán*. Trong công thức phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial u}{\partial z}\right)+H=\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u),$$

để mô tả quá trình khuếch tán, người ta thay nhiệt độ $u(x,y,z,t)$ bằng nồng độ của chất khuếch tán $C(x,y,z,t)$ tại điểm (x,y,z) và tại thời điểm t. Định luật Fourier của quá trình truyền nhiệt được thay bằng định luật Fick của quá trình khuếch tán, được phát biểu như sau: *Tỷ số chất khuếch tán truyền qua một đơn vị diện tích của thiết diện tỷ lệ với gradient của nồng độ chất khuếch tán theo hướng khuếch tán.* Dạng công thức của định luật được viết:

$$\vec{J}=-D\,grad\,C=-D\nabla C, \qquad (3.17)$$

trong đó: $\vec{J}$ là khối lượng khí đi qua tính trên một đơn vị diện tích trên một giây; D là hệ số khuếch tán hay độ khuếch tán; C là nồng độ chất khuếch tán.

Định luật Fick chỉ có giá trị đối với chất rắn, chất lỏng hay chất khí có môi trường đẳng hướng. Hệ số khuếch tán D phụ thuộc vào các quá trình được xét. Phương trình khuếch tán là phi tuyến nếu D là hàm của nồng độ. Đối với vật liệu phi tuyến, định luật Fick có dạng

$$\vec{J}=-J_x\vec{i}-J_y\vec{j}-J_z\vec{k}, \qquad (3.18)$$

trong đó:

$$\left.\begin{aligned}
-J_x &= D_{11}\frac{\partial C}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial C}{\partial y} + D_{13}\frac{\partial C}{\partial z}\\
-J_y &= D_{21}\frac{\partial C}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial C}{\partial y} + D_{23}\frac{\partial C}{\partial z}\\
-J_z &= D_{31}\frac{\partial C}{\partial x} + D_{32}\frac{\partial C}{\partial y} + D_{33}\frac{\partial C}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

ở đây: D_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ là hệ số khuếch tán, nó chỉ ra các tính chất khuếch tán khác nhau theo các hướng khác nhau.

Nếu tất cả các hệ số khuếch tán D_{ij} là hằng số thì phương trình khuếch tán có dạng

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} &= D_{11}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + D_{13}\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z}\\
&+ D_{21}\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + D_{22}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_{23}\frac{\partial^2 C}{\partial z \partial y}\\
&+ D_{31}\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} + D_{32}\frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} + D_{33}\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Trong trường hợp đặc biệt, $D_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ D, & i = j \end{cases}$ phương trình (3.20) trở thành

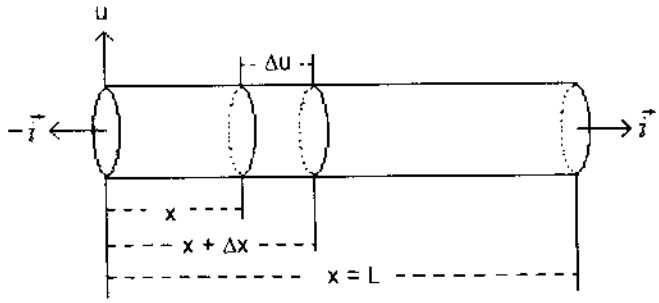
$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) = D\nabla^2 C. \tag{3.21}$$

Phương trình này có cùng dạng với phương trình truyền nhiệt khi nguồn nhiệt bằng không. Điều kiện biên của phương trình khuếch tán giống như của phương trình truyền nhiệt đã được xét trong §2. Điều kiện Dirichlet đòi hỏi nồng độ của chất khuếch tán xác định trên biên. Điều kiện Neumann đòi hỏi dòng chất khuếch tán xác định trên biên. Điều kiện Robin yêu cầu xác định sự bay hơi trên bề mặt với một tỷ lệ nào đó so với nồng độ trên bề mặt và nồng độ của môi trường xung quanh.

§4. QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH, PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT MỘT CHIỀU

Trong tiết này, sẽ cụ thể hoá phương trình truyền nhiệt một chiều bằng cách nghiên cứu quá trình truyền nhiệt của một thanh mỏng. Xét một thanh dài L (hình 3.1). Giả sử dọc theo chiều dài thanh có sự cách nhiệt (tức là

không có sự trao đổi nhiệt dọc theo chiều dài của thanh), giả thiết thanh rất mỏng làm bằng vật liệu đồng chất sao cho nhiệt độ không đổi tại mọi điểm trong một thiết diện bất kỳ. Vì bề mặt của thanh cách nhiệt, nên dòng nhiệt chỉ di chuyển theo hướng trục x. Xét định luật bảo toàn năng lượng trong một khoảng tùy ý Δx.



Hình 3.1. **Truyền nhiệt trong thanh một chiều**

Sử dụng các ký hiệu sau:

c là nhiệt dung của thanh;

ρ là mật độ khối lượng của thanh;

A là diện tích thiết diện thanh;

$u = u(x,t)$ là nhiệt độ của thanh;

t là thời gian;

Δx là khoảng cách;

κ là hệ số dẫn nhiệt của thanh;

H là nguồn nhiệt phát ra của thanh.

Giả sử c, ρ và k là hằng số, yếu tố thể tích của thiết diện Δx là $A\Delta x$. Theo định luật bảo toàn năng lượng, tốc độ thay đổi nhiệt lượng trong yếu tố thể tích này bằng tốc độ nhiệt truyền qua các đầu thiết diện. Tốc độ thay đổi nhiệt lượng được trữ trong yếu tố thể tích giữa x và $x+\Delta x$ là

$$H_S = \frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(x,t)\,dx = \int_x^{x+\Delta x} c\rho A \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx,$$

trong đó $c\rho u = e$ được gọi là *mật độ năng lượng nhiệt.*

Chú ý rằng

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u.\vec{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}.\left(-\vec{i}\right); \frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u.\vec{n} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}.\left(\vec{i}\right),$$

Do đó, nhiệt lượng mất đi ở phần thiết diện bên trái và bên phải là

$$H_C = \kappa A\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right].$$

Lượng nhiệt phát ra do nguồn nhiệt nằm trong yếu tố thể tích là

$$H_G = A\int_x^{x+\Delta x} H(x,t)\,dx.$$

Theo (3.3), định luật bảo toàn năng lượng được viết

$$H_C + H_G - H_S = 0.$$

Nếu sử dụng định lý trung bình tích phân

$$\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f(x+\theta\Delta x)\Delta x\ ;\ 0<\theta<1$$

ta có

$$\kappa A\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + AH(x+\theta_1\Delta x,t)\Delta x - c\rho A\frac{\partial u(x+\theta_2\Delta x,t)}{\partial t}\Delta x = 0 \tag{3.22}$$

Chia hai vế của phương trình (2.22) cho $A\Delta x$ và lấy giới hạn khi $\Delta x \to 0$ ta thu được phương trình truyền nhiệt một chiều

$$\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H(x,t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t} \text{ với } u = u(x,t), 0<x<L, \tag{3.23}$$

hay là

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t), \text{ với } a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}, Q = \frac{H}{c\rho}. \tag{3.24}$$

Đại lượng a^2 được gọi là *độ khuếch tán* của thanh đồng chất.

Nếu tính đến sự trao đổi nhiệt với bề mặt của thanh mà nhiệt độ của môi trường bên ngoài bề mặt là u_0, ta thêm vào lượng nhiệt bị mất mát trong yếu tố thể tích được xét là

$$H_L = -\beta_1(u-u_0)A\Delta x.$$

Định luật bảo toàn năng lượng được viết là: $H_C + H_G + H_L - H_S = 0$. Như vậy, phương trình truyền nhiệt tổng quát có tính đến sự trao đổi nhiệt với môi trường xung quanh có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u-u_0) + Q(x,t), \tag{3.25}$$

trong đó $\beta = \dfrac{\beta_1}{c\rho}$ là hằng số trao đổi nhiệt với môi trường bên ngoài.

Đặt $U = u - u_0$ là nhiệt độ của thanh có tính đến sự chênh lệch với môi trường xung quanh, phương trình (3.25) có thể viết

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \beta U + Q(x,t). \qquad (3.26)$$

Nếu tính đến sự đối lưu, tức là xét các phân tử trong thanh chuyển động với vận tốc $\vec{V}$ thì định luật Fourier của quá trình truyền nhiệt được viết là $\vec{q} = -\kappa \operatorname{grad} u + c\rho u\vec{V}$. Thay $\vec{q}$ vào phương trình

$$\iiint_V \left\{ -\operatorname{div}\vec{q} + H - \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) \right\} d\tau = 0,$$

ta có phương trình truyền nhiệt xét đến quá trình đối lưu

$$\operatorname{div}\left(\kappa \nabla u - c\rho u\vec{V}\right) + H = \frac{\partial}{\partial t}(c\rho u).$$

Vì c, ρ, κ là hằng số, nên phương trình truyền nhiệt có tính đến quá trình đối lưu là

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\nabla.\vec{V} - \vec{V}.\nabla u \right) + Q(x,t),$$

trong đó $a^2 = \dfrac{\kappa}{c\rho}, Q = \dfrac{H}{c\rho}$.

Trường hợp một chiều, với V là hằng số tốc độ trung bình của phân tử thì phương trình truyền nhiệt có tính đến quá trình đối lưu có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,t). \qquad (3.27)$$

§5. PHƯƠNG PHÁP TÁCH BIẾN CHO PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH HỮU HẠN

Xét bài toán:

$$\begin{cases} L(u) = \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \qquad (3.28)$$

Đây là điều kiện Dirichlet xác định nhiệt độ tại các đầu mút của thanh và $f(x)$ là nhiệt độ phân bố lúc ban đầu. Giả sử nghiệm được tìm dưới dạng

$$u = u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (3.29)$$

Biểu diễn nghiệm dưới dạng $u(x,t) = X(x)T(t)$, ta thu được một hệ Sturm–Liouville, thay vào phương trình ta được $X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t)$ và chia hai vế cho $a^2X(x)T(t)$, kết quả là

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{3.30}$$

Vế trái chỉ phụ thuộc t, vế phải chỉ phụ thuộc x, nghĩa là cho dù các biến số thay đổi, nhưng tỷ số luôn luôn bằng nhau. Nó chỉ có thể thỏa mãn nếu bằng một hằng số được chọn là $-\lambda$, với $\lambda = \text{const}$. Như vậy

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

ta nhận được hai phương trình vi phân sau:

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, T(t) \neq 0; \tag{3.31}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(x) \neq 0. \tag{3.32}$$

Các điều kiện biên (3.28) cho ta

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0 \text{ do } T(t) \neq 0.$$

Sau khi biện luận các giá trị λ thấy rằng, để (3.32) có nghiệm không tầm thường thì $\lambda > 0$. Khi đó ta có:

$$X(x) = D_1\cos\sqrt{\lambda}x + D_2\sin\sqrt{\lambda}x;$$

$$X(0) = D_1 = 0,\ X(L) = D_2\sin\sqrt{\lambda}L = 0.$$

Suy ra phương trình tìm trị riêng

$$\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}. \tag{3.33}$$

Do đó, bài toán chỉ có nghiệm không tầm thường khi giá trị riêng

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2;\ n = 1,2,3... \tag{3.34}$$

gọi là phổ rời rạc các giá trị riêng tạo nên một tập hợp các nghiệm riêng. Sau này chúng ta sẽ có các bài toán có phổ rời rạc các giá trị riêng, trong khi các bài toán khác có phổ liên tục các trị riêng tạo nên các nghiệm riêng liên tục khi $L \to \infty$. Với mỗi trị riêng có một hàm riêng tương ứng được viết

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.35}$$

Với trị riêng đã cho, nghiệm của phương trình (3.31) theo biến t là

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}, n = 1,2,3... \tag{3.36}$$

với A_n là các hằng số tùy ý.

Nghiệm riêng của phương trình (3.28) có dạng

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.37}$$

Nghiệm tổng quát là tổng của tất cả các nghiệm riêng ứng với các giá trị khả dĩ của n

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.38}$$

Điều kiện ban đầu (3.28) cho ta xác định tùy ý A_n. Ta có:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.39}$$

Theo lý thuyết chuỗi Fourier, có thể tìm được các hệ số A_n và B_n theo công thức sau:

$$A_n = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi. \tag{3.40}$$

Chú ý 1: Ở đây coi tập các hằng số của nghiệm các phương trình vi phân xác định hàm X và T là bằng 1. Giả sử, viết lại nghiệm là một hằng số tùy ý có dạng

$$X_n(x) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right); T_n(t) = \gamma_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}, \ n = 1,2,3... \tag{3.41}$$

trong đó: β_n, γ_n là các hằng số tùy ý.

Sau khi nhân các nghiệm $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ ta xác định được một hằng số tùy ý mới $\delta_n = \beta_n\gamma_n$. Điều đó cũng giống như việc sử dụng nguyên lý chồng chất, nhân nghiệm với một hằng số tùy ý và đặt tên cho hằng số đó. Cách làm này thuận tiện hơn vì tránh phải viết lại các hằng số.

Chú ý 2: Cần nhấn mạnh rằng, ở đây hàm X và T không chỉ có một nghiệm mà có một số vô hạn các nghiệm X_n và T_n với $n = 1,2,3...$, vì thế tích $u = u(x,t) = X(x)T(t)$ cũng có vô hạn các nghiệm và được viết là u_n với $n = 1,2,3...$ Lập luận này sẽ thay đổi trong các bài toán khác.

Chú ý 3: Xét trường hợp đặc biệt cho một thanh bằng vàng:

$$\left.\begin{array}{l}\kappa \approx 0.70\,\text{cal/cm}^2\text{s}^\circ\text{C/cm}\\ c \approx 0.03\,\text{cal/g}^\circ\text{C}\\ \rho \approx 19.3\,\text{g/cm}^3\end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = \frac{\kappa}{c\rho} \approx 1.209\text{cm}^2/\text{s}.$$

Chọn độ khuếch tán của vàng là $a^2 \approx 1.209\text{cm}^2/\text{s}$, chọn $L = \pi$, điều kiện ban đầu $f(x) = T_0 x(\pi - x)$. Thay vào công thức (3.40) ta tính được

$$A_n = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^L T_0 x(\pi - x)\sin nx dx = \frac{4T_0}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}.$$

Vậy nghiệm có dạng

$$u(x,t) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\exp\left(-1.209n^2 t\right)\sin nx. \qquad (3.42)$$

§6. TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH CÓ NGUỒN NHIỆT

Xét phương trình truyền nhiệt trong thanh có chứa nguồn

$$\begin{cases} L(u) = \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x,t),\ 0 < x < L: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \qquad (3.43)$$

Dùng kết quả trong §5 để giải bài toán này. Sử dụng tập các hàm trực giao $\left\{X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L}\right\}$ trong khoảng $(0,L)$ để khai triển nghiệm. Giả sử rằng, nghiệm được khai triển từ bộ các hàm trực giao trên là

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)X_n(x). \qquad (3.44)$$

Nhắc lại tính trực giao của hàm $X_n(x)$:

$$(X_n, X_m) = \int_0^L X_n(x)X_m(x)dx = \|X_n\|^2\delta_{mn};\quad \|X_n\|^2 = \frac{L}{2}. \qquad (3.45)$$

Chú ý rằng, nghiệm đã chọn thỏa mãn điều kiện biên, vì các hàm riêng (3.45) đã thỏa mãn điều kiện biên này. Giả sử nghiệm cho bởi phương trình (3.44) và các đạo hàm của nó liên tục trong khoảng $(0,L)$, vì thế chuỗi Fourier có thể vi phân theo từng số hạng, ta thu được:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{dB_n}{dx} \sin\dfrac{n\pi x}{L} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t) \dfrac{n\pi}{L} \cos\dfrac{n\pi x}{L} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n(t) \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\dfrac{n\pi x}{L} \end{cases} \tag{3.46}$$

Thay nghiệm (3.44) và các đạo hàm (3.46) vào phương trình (3.43) ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dB_n(t)}{dt} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 B_n(t) X_n(x) + q(x,t). \tag{3.47}$$

Để tìm hàm chưa biết $B_n(t)$, dùng tính trực giao của tập các hàm $\left\{X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L}\right\}$ trong khoảng $(0, L)$ theo cách sau: nhân cả hai vế của phương trình (3.47) với $X_m(x)dx$, cố định chỉ số m và tích phân phương trình từ 0 đến L ta thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dB_n(t)}{dt} (X_n, X_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 B_n(t)(X_n, X_m) = \int_0^L q(x,t) X_m(x) dx \tag{3.48}$$

Do tính trực giao của tập các hàm $\left\{X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{L}\right\}$ nên trong các tổng bên trái chỉ khác không khi n có giá trị bằng m. Như vậy, khi $n = m$ ta có phương trình vi phân

$$\frac{dB_m(t)}{dt} + \left(\frac{m\pi a}{L}\right)^2 B_m(t) = q_m(t), \tag{3.49}$$

trong đó định nghĩa

$$q_m(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x,t) \sin\frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, 3.... \tag{3.50}$$

Phương trình (3.49) là phương trình vị phân tuyến tính cấp 1, có thể giải được. Thay chỉ số m bằng n và giải phương trình ta nhận được $B_n(t)$. Sau khi nhân phương trình với thừa số tích phân $\exp\left[\left(\dfrac{n\pi a}{L}\right)^2 t\right]$, phương trình (3.49) trở thành

$$\frac{d}{dt}\left[B_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\right] = q_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}. \tag{3.51}$$

Tích phân (3.51) ta tìm được

$$\int_0^t dB_n(t)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} = \int_0^t q_n(\tau)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau}d\tau. \tag{3.52}$$

Nghiệm của phương trình (3.52) có dạng

$$B_n(t) = B_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} + e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\int_0^t q_n(\tau)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau}d\tau. \tag{3.53}$$

Có thể dùng điều kiện ban đầu để tìm hệ số $B_n(0)$, hệ số này phải thỏa mãn điều kiện

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.54}$$

Công thức (3.54) chính là khai triển chuỗi Fourier theo hàm sin của hàm $f(x)$ với các hệ số khai triển Fourier là $B_n(0)$ (xem mục 3, §3 Chương I). Suy ra

$$B_n(0) = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1,2,3... \tag{3.55}$$

Bài toán (3.43) bây giờ đã được giải và có nghiệm như sau

$$u = u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)X_n(x),$$

trong đó

$$B_n(t) = B_n(0)e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} + e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\int_0^t q_n(\tau)e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau}d\tau$$

với

$$q_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1,2,3...$$

và

$$B_n(0) = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n = 1,2,3...$$

§7. BÀI TOÁN TRUYỀN NHIỆT HỖN HỢP

Xét bài toán truyền nhiệt trên một thanh mỏng có nguồn nhiệt và điều kiện biên không thuần nhất

$$\begin{cases} \rho(x)c(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + Q(x,t),\ a < x < b,\ t > 0: \\ \alpha_1 u(a,t) - \alpha_2 \dfrac{\partial u(a,t)}{\partial x} = A(t), \beta_1 u(b,t) + \beta_2 \dfrac{\partial u(b,t)}{\partial x} = B(t); \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad (3.56)$$

trong đó: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ là các hằng số phụ thuộc vào biến x; $c = c(x)$ là nhiệt dung của thanh; $\rho = \rho(x)$ là mật độ khối lượng trên một đơn vị thể tích của thanh; $\kappa = \kappa(x)$ là hệ số truyền nhiệt của thanh.

Để giải phương trình trên, ta tìm nghiệm dưới dạng

$$u = u(x,t) = w(x,t) + v(x,t). \quad (3.57)$$

Thay vào phương trình (3.56), ta thu được:

$$\begin{cases} \rho c\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\kappa\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + Q(x,t),\ a < x < b,\ t > 0: \\ \alpha_1\left[w(a,t) + v(a,t)\right] - \alpha_2\left(\dfrac{\partial w(a,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial v(a,t)}{\partial x}\right) = A(t); \\ \beta_1\left[w(b,t) + v(b,t)\right] + \beta_2\left(\dfrac{\partial w(b,t)}{\partial x} + \dfrac{\partial v(b,t)}{\partial x}\right) = B(t); \\ u(x,0) = w(x,0) + v(x,0) = f(x). \end{cases} \quad (3.58)$$

Bài toán hỗn hợp trên được tách thành hai bài toán riêng lẻ, được gọi là bài toán 1 (chứa điều kiện biên không thuần nhất) và bài toán 2 (chứa phương trình không thuần nhất). Tổng hợp kết quả hai bài toán này sẽ là kết quả của bài toán hỗn hợp.

Bài toán 1: Đưa điều kiện biên không thuần nhất gán cho hàm $v(x,t)$, thoả mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right] = 0, a < x < b, t > 0: \\ \alpha_1 v(a,t) - \alpha_2 \dfrac{\partial v(a,t)}{\partial x} = A(t), \beta_1 v(b,t) + \beta_2 \dfrac{\partial v(b,t)}{\partial x} = B(t). \end{cases} \quad (3.59)$$

Tích phân phương trình ta có

$$\kappa(x)\frac{\partial v}{\partial x} = C_1(t) \Leftrightarrow \partial v = \frac{C_1(t)}{\kappa(x)}\partial x .$$

Tích phân một lần nữa ta được

$$v = v(x,t) = C_1(t)\int_a^x \frac{dx}{\kappa(x)} + C_2(t),$$

trong đó: $C_1(t)$, $C_2(t)$ là các hàm tuỳ ý của t được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện biên. Điều kiện này đòi hỏi:

$$\begin{cases} \alpha_1 C_1(t) - \alpha_2 \dfrac{C_1(t)}{\kappa(a)} = A(t); \\ \beta_1\left[C_1(t)\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\kappa(x)} + C_2(t)\right] + \beta_2 \dfrac{C_1(t)}{\kappa(b)} = B(t). \end{cases} \tag{3.60}$$

Hệ phương trình (3.60) chính là hệ phương trình xác định $C_1(t)$, $C_2(t)$.

Bài toán 2: Việc lựa chọn các điều kiện cho bởi phương trình (3.59) làm đơn giản hoá phương trình (3.56):

$$\begin{cases} \rho c\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + Q(x,t) - \rho c\dfrac{\partial v}{\partial t}, \quad a < x < b, t > 0: \\ \alpha_1 w(a,t) - \alpha_2 \dfrac{\partial w(a,t)}{\partial x} = 0, \beta_1 w(b,t) + \beta_2 \dfrac{\partial w(b,t)}{\partial x} = 0; \\ w(x,0) = f(x) - v(x,0). \end{cases} \tag{3.61a}$$

Đặt $q(x,t) = Q(x,t) - \rho c\dfrac{\partial v}{\partial t}$; $h(x) = f(x) - v(x,0)$, phương trình có dạng

$$\begin{cases} \rho c\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + q(x,t), a < x < b, t > 0: \\ \alpha_1 w(a,t) - \alpha_2 \dfrac{\partial w(a,t)}{\partial x} = 0, \beta_1 w(b,t) + \beta_2 \dfrac{\partial w(b,t)}{\partial x} = 0; \\ w(x,0) = h(x). \end{cases} \tag{3.61b}$$

Để giải phương trình (3.61b), trước hết giải với phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} \rho c\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\dfrac{\partial w}{\partial x}\right), a < x < b: \\ \alpha_1 w(a,t) - \alpha_2 \dfrac{\partial w(a,t)}{\partial x} = 0, \beta_1 w(b,t) + \beta_2 \dfrac{\partial w(b,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{3.62}$$

để tìm $w = w(x,t)$. Giả sử một nghiệm của phương trình (3.62) là $w(x,t) = X(x)T(t)$, trong đó các biến là được tách. Thay nghiệm này vào phương trình (3.62) ta có phương trình xác định $X(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\kappa \dfrac{dX}{dx}\right) + \lambda^2 \rho(x) c(x) X(x) = 0, \ a < x < b: \\ \alpha_1 X(a) - \alpha_2 X'(a) = 0, \beta_1 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \end{cases}$$

và phương trình xác định $T(t)$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \to T(t) = e^{-\lambda^2 t},$$

trong đó chọn $-\lambda^2$ là hằng số tách biến.

Phương trình để tìm hàm $X(x)$ chính là bài toán Sturm–Liouville có các trị riêng λ_n $(n = 1,2,3)$ tương ứng với các hàm riêng $X_n(x)$ trực giao nhau trong khoảng (a,b) thoả mãn đẳng thức

$$(X_n, X_m) = \int_a^b r(x) X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \|X_n\|^2, & n = m \end{cases},$$

trong đó $r(x) = c(x)\rho(x)$ được gọi là *hàm trọng*.

Vì mỗi hàm $X_n(x)$ thỏa mãn điều kiện biên, cho nên để tìm nghiệm của phương trình (3.61) ta chọn nghiệm dưới dạng khai triển của các hàm trực giao $X_n(x)$ có dạng

$$w = w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) X_n(x).$$

Thay vào phương trình (3.61) ta thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(x)\rho(x) \frac{dB_n(t)}{dt} X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \frac{d}{dx}\left[\kappa(x) \frac{dX_n(x)}{dx}\right] + q(x,t).$$

Phương trình trên được đơn giản thành

$$\sum_{n=1}^{\infty} r(x) \frac{dB_n}{dt} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} -B_n(t) r(x) \lambda_n^2 X_n(x) + q(x,t).$$

Để tìm hàm chưa biết $B_n(t)$, dùng tính trực giao của các hàm $\{X_n(x)\}$ trong khoảng (a,b) theo cách sau: nhân cả hai vế của phương trình trên với $X_m(x)dx$, cho một vài giá trị cố định của chỉ số m và tích phân phương trình từ a đến b ta thu được

$$\frac{dB_m}{dt} + \lambda_m^2 B_m = Q_m(t) \tag{3.63}$$

trong đó: $Q_m(t) = \frac{1}{\|X_m\|^2} \int_a^b q(x,t) X_m(x) dx$.

Nghiệm của phương trình (3.63) được tìm dưới dạng

$$B_m(t) = B_m(0) e^{-\lambda_m^2 t} + e^{-\lambda_m^2 t} \int_0^t Q_m(\xi) e^{-\lambda_m^2 \xi} d\xi .$$

Bây giờ thay m bằng n để xác định $B_n(0)$ từ điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) X_n(x) = h(x).$$

Công thức này chính là khai triển chuỗi Fourier theo các hàm sin của hàm $h(x)$ với các hệ số khai triển Fourier là $B_n(0)$. Suy ra

$$B_n(0) = \frac{(h, X_n)}{\|X_n\|^2} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b r(x) h(x) X_n(x) dx .$$

Như vậy bài toán 2 đã được giải, cùng với bài toán 1 ta có thể tìm được nghiệm của bài toán hỗn hợp.

§8. TRUYỀN NHIỆT TRONG THANH DÀI VÔ HẠN

1. Truyền nhiệt trong thanh dài vô hạn

Bài toán truyền nhiệt trong một thanh dài vô hạn với các mặt ngoài của thanh bị cách nhiệt được phát biểu về mặt toán học như sau:

Tìm hàm $u(x,t)$ thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$u_t = a^2 u_{xx};\ t \ge 0, -\infty < x < +\infty, \tag{3.64}$$

với điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{3.65}$$

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình (3.64) dưới dạng

$$u(x,t) = X(x) T(t). \tag{3.66}$$

Thay (3.66) vào phương trình (3.64) ta có:

$$T'(t) X(x) = a^2 T(t) X''(x);$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{3.67}$$

Từ (3.67) thu được hai phương trình vi phân:

$$\begin{aligned} &T'(t)+\lambda^2a^2T(t)=0; \to T(t)=e^{-\lambda^2a^2t}; \\ &X''(x)+\lambda^2X(x)=0; \to X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Các hằng số A và B có thể phụ thuộc vào λ, tức là $A=A(\lambda)$ và $B=B(\lambda)$. Nghiệm của phương trình (3.64) có thể viết dưới dạng

$$U_\lambda(x,t)=e^{-\lambda^2a^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right], \tag{3.69}$$

trong đó $U_\lambda(x,t)$ là nghiệm riêng của phương trình với mọi $A(\lambda)$, $B(\lambda)$.

Tích phân theo λ ta có:

$$\begin{cases} U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U_\lambda(x,t)d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda; \\ U(0,x)=\varphi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda. \end{cases} \tag{3.70}$$

Dùng phương pháp tích phân Fourier :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi; \\ f'(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}id\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}; \\ F(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{d\lambda}{i\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi. \end{cases} \tag{3.71}$$

Mặt khác, khai triển tích phân Fourier của hàm $\varphi(x)$ ta có

$$\begin{aligned} \varphi(x)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cos\lambda(x-\xi)d\xi \\ &=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi+\sin\lambda x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\right]d\lambda. \end{aligned} \tag{3.72}$$

So sánh (3.70) và (3.72) suy ra:

$$\begin{aligned} A(\lambda)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi; \\ B(\lambda)&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Thay (3.73) vào (3.70) ta được:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\xi.$$

Vậy nghiệm có dạng

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda. \qquad (3.74)$$

Xét nghiệm tìm được

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda.$$

Đặt
$$\begin{cases} a\lambda\sqrt{t}=z\rightarrow d\lambda=\dfrac{dz}{a\sqrt{t}};\ a^2\lambda^2t=z^2 \\ \lambda(\xi-x)=\mu z\rightarrow\mu=\dfrac{\lambda(\xi-x)}{z}=\dfrac{\lambda(\xi-x)}{a\lambda\sqrt{t}} \end{cases}$$

suy ra
$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos\mu z dz.$$

Tính $\dfrac{1}{a\sqrt{t}}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos\mu z dz$.

Để tính tích phân trên, đặt

$$\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos\mu z\,dz=\frac{1}{a\sqrt{t}}J(\mu),\ J(0)=\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}\cos\mu z\,dz=J(\mu),\ \frac{dJ(\mu)}{d\mu}=-\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}z\sin\mu z\,dz.$$

$$\Rightarrow J(\mu)=\frac{1}{\mu}e^{-z^2}\sin\mu z\Big|_{z=0}^{z=\infty}+\frac{2}{\mu}\int_{0}^{+\infty}e^{-z^2}z\sin\mu z\,dz=-\frac{2}{\mu}\frac{dJ(\mu)}{d\mu}.$$

Vậy $\quad\dfrac{dJ(\mu)}{d\mu}=-\dfrac{\mu}{2}J(\mu)$ hay $J'(\mu)+\dfrac{\mu}{2}J(\mu)=0$.

Suy ra $\quad\dfrac{dJ(\mu)}{J(\mu)}=-\dfrac{\mu}{2}d\mu$, do đó:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dJ(\mu)}{J(\mu)}=-\int_0^{+\infty}\frac{\mu}{2}d\mu\to\ln J(\mu)=-\frac{\mu^2}{4}+\ln C;$$

$$\ln\frac{J(\mu)}{C}=-\frac{\mu^2}{4}\to\frac{J(\mu)}{C}=e^{-\frac{\mu^2}{4}}\to J(\mu)=Ce^{-\frac{\mu^2}{4}};$$

$$J(0)=C=\int_0^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\to J(\mu)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\mu^2}{4}}.$$

Cuối cùng với việc thực hiện phép đặt

$$\begin{cases} a\lambda\sqrt{t}=z\to d\lambda=\dfrac{dz}{a\sqrt{t}},\ a^2\lambda^2t=z^2 \\ \lambda(\xi-x)=\mu z\to\mu=\dfrac{\lambda(\xi-x)}{z}=\dfrac{\lambda(\xi-x)}{a\lambda\sqrt{t}}=\dfrac{(\xi-x)}{a\sqrt{t}} \end{cases}$$

ta có

$$\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi\text{-x})d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\cos\mu z dz=\frac{1}{a\sqrt{t}}J(\mu)$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{\mu^2}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}},$$

trong đó

$$J(\mu)=\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi\text{-x})d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}. \qquad (3.75)$$

Vậy hàm $u(x,t)$ có dạng

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)d\xi\times J(\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)G(x,\xi,t)d\xi.$$

Ta thu được hàm Green đối với quá trình truyền nhiệt trong thanh dài vô hạn.

Ví dụ: Áp dụng phương pháp biến đổi Fourier giải bài toán:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx};\quad -\infty<x<+\infty,\ 0<t<+\infty \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

Giải. Phương trình được viết dưới dạng

$$\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi}.$$

Tích phân theo ξ từ $-\infty$ đến $+\infty$ ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\lambda\xi} d\xi = a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} e^{-i\lambda\xi} d\xi;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{d\bar{u}}{dt},$$

trong đó $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\xi} u d\xi$.

Tính $I_1 = a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} e^{-i\lambda\xi} d\xi$.

Áp dụng công thức tích phân từng phần suy ra

$$I_1 = a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} + a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{-i\lambda\xi} d\xi$$

$$= a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} + a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda e^{-i\lambda\xi}\, \xi\Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} - a^2\lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\xi} u d\xi$$

$\Rightarrow I_1 = -a^2\lambda^2 \bar{u}(\lambda,t)$.

Như vậy

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + a^2\lambda^2 \bar{u} = 0,\ \bar{u}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,t) e^{-i\lambda\xi} d\xi.$$

Khi $t = 0$:

$$\bar{u}(\lambda,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi,0) e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi = \bar{f}(\lambda).$$

Giải phương trình với điều kiện đã cho ta có

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + a^2\lambda^2 \bar{u} = 0,\ \bar{u}(\lambda,0) = \bar{f}(\lambda) \to \bar{u}(\lambda,t) = \bar{f}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Áp dụng phép biến đổi Fourier ngược suy ra

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\lambda,t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

thay $\bar{u}(\lambda,t) = \bar{f}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}, \bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$, ta được

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}e^{-i\lambda(\xi-x)}d\lambda.$$

Vậy

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi\text{-x})d\lambda.$$

Chú ý rằng, tích phân trên chỉ lấy trên trục thực, còn trục phức ta không tính đến.

$$J(\mu)=\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}$$

do đó kết quả là

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi\int_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi-x)d\lambda=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}d\xi.$$

2. Truyền nhiệt trong thanh bán vô hạn

Giải bài toán:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<+\infty,\ t>0: \\ u(0,t)=\psi(t), & t\ge 0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0 \end{cases}$$

Tìm nghiệm dưới dạng :

$$u(x,t)=\mathrm{w}(\mathrm{x,t})+v(x,t).$$

Hàm $w(x,t)$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} w_t=a^2w_{xx}, & 0<x<+\infty, \quad t>0 \\ w(0,t)=\psi(t), & t\ge 0 \\ w(x,0)=0, & x\ge 0 \end{cases}$$

Còn hàm $v(x,t)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} v_t=a^2v_{xx}, & 0<x<+\infty,\ t>0 \\ v(0,t)=0, & t\ge 0 \\ v(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0 \end{cases}$$

Sử dụng kết quả trong ví dụ trước, ta có

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_{0}^{\infty}\varphi(-\xi)e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_{0}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi\right];$$

$$v(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\left[\varphi(\xi)+\varphi(-\xi)\right]d\xi.$$

§9. KHÁI NIỆM VỀ HÀM GREEN

1. Hàm Green cho phương trình truyền nhiệt một chiều

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<L:\\ u(0,t)=0,\ u(L,t)=0;\\ u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}$$

Phương trình có nghiệm

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2t}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

trong đó

$$C_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi.$$

Như vậy, nghiệm có dạng

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{L}d\xi\right]e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2t}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Thay đổi vị trí giữa tổng và tích phân ta có

$$u(x,t)=\int_0^L\varphi(\xi)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2t}\right]d\xi.$$

Đại lượng nằm trong dấu ngoặc [ ] là hàm ảnh hưởng của điều kiện ban đầu, nó biểu thị nhiệt độ tại vị trí x, tại thời điểm t do tác động từ nhiệt độ ban đầu tại ξ. Để thu được nhiệt độ $u(x,t)$, lấy tổng (tích phân) toàn bộ ảnh hưởng của tất cả các vị trí ban đầu.

Trước khi giải thích rõ hơn về kết quả này, hãy xét phương trình truyền nhiệt tổng quát có nguồn nhưng điều kiện biên vẫn thuần nhất

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + Q(x,t)\,;\ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{3.76}$$

Áp dụng phương pháp mở rộng hàm riêng chọn nghiệm có dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Khai triển hàm $Q(x,t)$ vào theo bộ hàm riêng ta được:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Thay vào phương trình (3.76) ta có phương trình vi phân cấp 1 để tìm $u_n(t)$

$$\frac{du_n(t)}{dt} + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 u_n(t) = q_n(t). \tag{3.77}$$

Nghiệm của phương trình (3.77) có dạng

$$u_n(t) = u_n(0) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} + e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \int_0^t q_n(\tau) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} d\tau,$$

trong đó $u_n(0)$ được xác định từ điều kiện ban đầu

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{n\pi x}{L} \Rightarrow u_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{L} d\xi.$$

Cuối cùng ta thu được

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi) \sin\frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right) e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} + \right.$$

$$\left. + e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \int_0^t \left(\frac{2}{L}\int_0^L Q(\xi,\tau) \sin\frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right) e^{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \tau} d\tau \right] \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Sau khi tráo đổi thứ tự giữa tổng và tích phân, thu được

$$u(x,t)=\int_0^L \varphi(\xi)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\right)d\xi+$$

$$+\int_0^L\int_0^t Q(\xi,\tau)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 (t-\tau)}\right)d\tau d\xi.$$

Vì thế ta đưa ra hàm Green $G(x,t;\xi,\tau)$ có dạng

$$G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 (t-\tau)}.$$

Như vậy nghiệm của phương trình (3.76) có thể viết dưới dạng

$$u(x,t)=\int_0^L \varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi+\int_0^L\int_0^t Q(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

Hàm Green tại $\tau=0$ có dạng $G(x,t;\xi,0)$ nói lên sự ảnh hưởng của nhiệt độ ban đầu tại điểm ξ lên nhiệt độ ở vị trí x tại thời điểm t.

Hàm Green $G(x,t;\xi,\tau)$ nói lên sự ảnh hưởng của nhiệt độ lên vị trí x tại thời điểm t do nguồn nhiệt $Q(\xi,\tau)$ đặt tại vị trí ξ tại thời điểm τ.

Như vậy, hàm Green chỉ phụ thuộc vào thời gian $t-\tau$:

$$G(x,t;\xi,\tau)=G(x,t-\tau;\xi,0)$$

Một nguyên lý nhân quả ở đây là sự phân bố nhiệt độ hiện tại là do nguồn nhiệt phát ra trong quá khứ ảnh hưởng đến ($0<\tau<t$), bất kỳ nguồn nhiệt nào phát ra trong tương lai cũng không ảnh hưởng đến hiện tại.

2. Hàm Green của bài toán giá trị biên đối với phương trình vi phân thường

a) Phương trình truyền nhiệt một chiều trong trạng thái dừng

Xét trạng thái dừng của phương trình truyền nhiệt một chiều, nguồn nhiệt có dạng:

$$Q(x,t)=Q(x);\ f(x)=-\frac{Q(x)}{a^2};$$

$$0=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x)\Leftrightarrow\frac{du}{dx}=f(x).$$

Các điều kiện biên có dạng: $u(0)=0;\ u(L)=0$.

Cách giải bài toán trên là tìm nghiệm của phương trình truyền nhiệt khi cho thời gian tiến đến vô hạn. Ta có

$$u(x,t)=\int_0^L \varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)\,d\xi+\int_0^L\left[-\frac{f(\xi)}{a^2}\left(\int_0^t G(x,t;\xi,\tau)\,d\tau\right)\right]d\xi,$$

trong đó: $G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2(t-\tau)}$.

Khi $t\to\infty$, $G(x,t;\xi,0)\to 0$ vì sự ảnh hưởng của điều kiện ban đầu $u(x,0)=\varphi(x)$ sẽ biến mất khi $t\to\infty$. Tuy nhiên, ngay cả khi $G(x,t;\xi,\tau)\to 0$ khi $t\to\infty$, nguồn nhiệt dừng vẫn còn tồn tại khi $t\to\infty$. Thật vậy

$$\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2(t-\tau)}d\tau=\left.\frac{e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2(t-\tau)}}{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2}\right|_{\tau=0}^{t}=\frac{1-e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}}{\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2},$$

do đó khi $t\to\infty$, hàm $u(x,t)\to u(x)=\int_0^L f(\xi)G(x,\xi)\,d\xi$, trong đó

$$G(x,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\frac{\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}.$$

Ta thu được sự phân bố nhiệt dừng $u(x)$ bằng cách lấy giới hạn khi $t\to\infty$ của bài toán phụ thuộc thời gian với nguồn nhiệt dừng $Q(x)=-a^2f(x)$. Hàm $G(x,\xi)$ là hàm ảnh hưởng hay là hàm Green cho bài toán trong trạng thái dừng. Chú ý rằng, hàm Green có tính chất đối xứng

$$G(x,\xi)=G(\xi,x).$$

b) Phương pháp biến thiên tham số

Có một cách trực tiếp hơn để thu được nghiệm của phương trình $\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$ bằng cách xét bài toán không thuần nhất tổng quát

$$L(u)=f(x)$$

xác định trong khoảng $a<x<b$, phụ thuộc vào hai điều kiện biên thuần nhất, trong đó L là toán tử Sturm–Liouville có dạng

$$L=\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)+q.$$

Khi $p=1$, $q=0$ ta được toán tử của phương trình truyền nhiệt trong trạng thái dừng $L=\dfrac{d^2u}{dx^2}$.

Phương trình vi phân thường không thuần nhất luôn có thể giải bằng phương pháp biến thiên tham số, nếu biết hai nghiệm của phương trình thuần nhất $u_1(x)$ và $u_2(x)$. Theo phương pháp biến thiên tham số, nghiệm riêng của phương trình $L(u)=f(x)$ được tìm dưới dạng

$$u=v_1u_1+v_2u_2,$$

khi đó v_1 và v_2 là hàm phụ thuộc vào x chưa được xác định. Phương trình vi phân gốc có một hàm chưa biết, vì rằng có một bậc tự do thêm vào là du/dx. Nếu v_1 và v_2 là hằng số thì

$$\frac{du}{dx}=v_1\frac{du_1}{dx}+v_2\frac{du_2}{dx}.$$

Vì v_1 và v_2 không phải là hằng số nên

$$u_1\frac{dv_1}{dx}+u_2\frac{dv_2}{dx}=0.$$

Vi phân $L(u)=f(x)$ được thỏa mãn nếu

$$\frac{dv_1}{dx}p\frac{du_1}{dx}+\frac{dv_2}{dx}p\frac{du_2}{dx}=f(x).$$

Phương pháp biến thiên tham số tạo ra hai phương trình vi phân cho các hàm chưa biết dv_1/dx và dv_2/dx là:

$$\frac{dv_1}{dx}=\frac{-fu_2}{p\left(u_1\dfrac{du_2}{dx}-u_2\dfrac{du_1}{dx}\right)}=\frac{-fu_2}{c};$$

$$\frac{dv_2}{dx}=\frac{fu_1}{p\left(u_1\dfrac{du_2}{dx}-u_2\dfrac{du_1}{dx}\right)}=\frac{fu_1}{c}.$$

trong đó $c=p\left(u_1\dfrac{du_2}{dx}-u_2\dfrac{du_1}{dx}\right)$, hằng số c tùy thuộc vào việc lựa chọn u_1 và u_2.

Nghiệm tổng quát $L(u)=f(x)$ được cho bởi $u=u_1v_1+u_2v_2$, ở đây v_1 và v_2 xác định bởi tích phân của dv_1/dx và dv_2/dx ở trên.

Ta định nghĩa *Wronskian W* là đại lượng

$$W = u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx}.$$

Nó thỏa mãn phương trình vi phân cơ bản

$$\frac{dW}{dx} = u_1 \frac{d^2u_2}{dx^2} - u_2 \frac{d^2u_1}{dx^2} = -\frac{dp/dx}{p}\left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx}\right) = -\frac{dp/dx}{p} W$$

trong đó, các phương trình vi phân thuần nhất $L(u_1) = 0$ và $L(u_2) = 0$ được dùng đến. Giải phương trình trên suy ra $W = c/p$ hay là $pW = c$.

Ví dụ: Xét bài toán

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x);\ u(0) = 0,\ u(L) = 0$$

Theo như trên $p = 1$, $q = 0$, ta có hai nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là 1 và x. Nếu chọn: $u_1 = x; u_2 = L - x$, vì $p = 1, c = -L$ nên thu được:

$$v_1(x) = \frac{1}{L}\int_0^x f(\xi)(L-\xi)d\xi + c_1,$$

$$v_2(x) = -\frac{1}{L}\int_0^x f(\xi)\xi d\xi + c_2.$$

Đây là hai công thức cần thiết trong phương pháp biến thiên hằng số $(u = u_1v_1 + u_2v_2)$. Từ điều kiện biên suy ra:

$$u = u_1v_1 + u_2v_2; \quad u(0) = 0 \to 0 = c_2L;$$

$$u(L) = 0 \to 0 = \int_0^L f(\xi)(L-\xi)d\xi + c_1L.$$

Nghiệm của bài toán biên không thuần nhất là

$$u(x) = -\frac{x}{L}\int_x^L f(\xi)(L-\xi)d\xi - \frac{L-x}{L}\int_0^x f(\xi)\xi d\xi,$$

hay $u(x) = \int_0^L f(\xi)G(x,\xi)d\xi,$

trong đó

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{x(L-\xi)}{L} & x < \xi \\ -\dfrac{\xi(L-x)}{L} & x > \xi \end{cases}$$

Ta cũng thấy tính đối xứng của hàm Green: $G(x,\xi)=G(\xi,x)$.

Như vậy, khi giải phương trình truyền nhiệt trong trạng thái dừng, ta thu được hai hàm Green

$$G(x,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{L}\frac{\sin\frac{n\pi\xi}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \text{ và } G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{x(L-\xi)}{L} & x<\xi\\ -\dfrac{\xi(L-x)}{L} & x>\xi\end{cases}$$

Chúng xuất hiện hoàn toàn khác nhau, có thể chứng minh chúng hoàn toàn giống nhau, vì đó chính là khai triển vào chuỗi Fourier $\left\{\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ của các hàm bên phải. Nghiệm của phương trình $\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$ thỏa mãn các điều kiện $u(0)=0,\ u(L)=0$ còn có thể giải trực tiếp có dạng

$$u(x)=\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+c_1x+c_2.$$

Ta cũng suy ra

$$u(x)=-\frac{x}{L}\int_x^L f(\xi)(L-\xi)d\xi-\frac{L-x}{L}\int_0^x f(\xi)\xi d\xi.$$

3. Phương pháp mở rộng trị riêng cho các hàm Green

Ở trên đã sử dụng phương pháp mở rộng trị riêng cho việc giải các bài toán không thuần nhất, ta áp dụng để giải phương trình vi phân không thuần nhất Sturm–Liouville tổng quát: $L(u)=f(x)$.

Giả thiết hai điều kiện biên là thuần nhất, ta đưa vào một bài toán trị riêng tương ứng:

$$L(\phi)=-\lambda\sigma\phi$$

có cùng điều kiện biên thuần nhất, hàm trọng σ có thể tùy ý. Ta thường tìm nghiệm $u(x)$ bằng cách khai triển vào chuỗi Fourier của các hàm riêng:

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\phi_n.$$

Tác động toán tử L vào hai vế của đẳng thức trên, thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nL(\phi_n)=-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\lambda_n\sigma\phi_n=f(x).$$

Chú ý rằng, các hàm riêng trực giao nhau theo công thức

$$\int_a^b \sigma\phi_n(x)\phi_{n'}(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq n' \\ \int_a^b \sigma\phi_n^2 dx, & n \neq n' \end{cases},$$

suy ra
$$-a_n\lambda_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n dx}{\int_a^b \sigma\phi_n^2 dx}.$$

Nghiệm của bài toán giá trị biên cho phương trình vi phân không thuần nhất là

$$u(x) = \int_a^b f(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{-\lambda_n\int_a^b \sigma\phi_n^2 dx}d\xi = \int_a^b f(\xi)G(x,\xi)d\xi,$$

trong đó: $G(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{-\lambda_n\int_a^b \sigma\phi_n^2 dx}$; $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

Một lần nữa ta lại chỉ ra tính đối xứng của bài toán.

Ví dụ: Áp dụng để giải bài toán:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x);\ u(0) = 0,\ u(L) = 0.$$

Giải: Các trị riêng và hàm riêng tương ứng là

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1,2,...\quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Ta có: $u(x) = \int_0^L f(\xi)G(x,\xi)d\xi$;

$$G(x,\xi) = -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2},$$

nã trùng với kết quả của bài toán phụ thuộc thời gian khi $t \to \infty$ với nguồn nhiệt dừng $Q(x) = -a^2 f(x)$.

§10. TRUYỀN NHIỆT TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỤ

1. Tọa độ trụ xuyên tâm

Xét quá trình truyền nhiệt trong một thanh trụ dài với thiết diện hình tròn, giả sử nhiệt độ của thanh có dạng $u = u(r,t)$ là hàm của bán kính r và thời gian t:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), 0 < r < r_0: \\ u(r_0,t) = 0; \\ u(r,0) = f(r). \end{cases} \tag{3.78}$$

Giả sử rằng nghiệm có dạng

$$u = u(r,t) = R(r)T(t). \tag{3.79}$$

Thay vào phương trình đã cho ta có

$$\begin{cases} R(r)T'(t) = a^2\left[R''(r)T(t) + \dfrac{1}{r}R'(r)T(t)\right] \\ R(r_0)T(t) = 0 \end{cases}.$$

Từ điều kiện biên, suy ra $R(r_0) = 0$. Chia cả hai vế của phương trình trên cho $a^2R(r)T(t)$ ta thu được

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{R''(r) + \dfrac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \lambda_1, \tag{3.80}$$

trong đó λ_1 là hằng số tách biến.

Từ (3.80) ta đưa ra hai phương trình vi phân:

$$T'(t) - \lambda_1 a^2 T(t) = 0; \tag{3.81}$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \lambda_1 R(r) = 0,\ 0 < r < r_0,\ R(r_0) = 0. \tag{3.82}$$

Phương trình (3.82) là bài toán Sturm–Liouville đơn giản, trong đó với $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \omega^2$ nghiệm không tồn tại. Khi $\lambda_1 = -\omega^2$ ta có phương trình Bessel cấp không. Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng

$$R = R(r) = C_1J_0(\omega r) + C_2Y_0(\omega r),\ 0 \le r \le r_0,\ C_1, C_2 = \text{const}.$$

Để xác định nghiệm trên biên, vì tính chất hữu hạn của nghiệm, đặt $C_2 = 0$, chọn $C_1 = 1$, nghiệm xác định trong khoảng $0 < r < r_0$ có dạng

$$R = R(r) = J_0(\omega r).$$

Giá trị ω được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện biên

$$R(r_0) = J_0(\omega r_0) = J_0\left(\mu_i^{(0)}\right) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_i = \frac{\mu_i^{(0)}}{r_0},\ i = 1,2,3,...$$

trong đó $\mu_i^{(0)}$ là các không điểm của hàm Bessel loại 1 (xem mục 1, §4, Chương VII). Với mỗi trị riêng có một hàm riêng

$$R = R_i(r) = J_0(\omega_i r) = J_0\left(\frac{\mu_i^{(0)}}{r_0} r\right), i = 1,2,3,... \tag{3.83}$$

Các hàm riêng này trực giao nhau trong khoảng từ 0 đến r_0 với hàm trọng là r. Giải phương trình (3.81) theo biến t ta có

$$T = T_i(t) = e^{-\omega_i^2 a^2 t},\ i = 1,2,...$$

do đó nghiệm của phương trình vi phân đạo hàm riêng (3.78) có dạng

$$u_i = u_i(r,t) = R_i(r)T_i(t) = J_0(\omega_i r)e^{-\omega_i^2 a^2 t}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của (3.78) có dạng

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\omega_i r) e^{-\omega_i^2 a^2 t}. \tag{3.84}$$

Điều kiện ban đầu đòi hỏi

$$u(r,0) = f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(\omega_i r).$$

Do tính trực giao của các hàm Bessel (xem mục 1, §5, Chương VII) ta tính được các hệ số A_i theo công thức

$$A_i = \frac{\left(f(r), J_0(\omega_i r)\right)}{\left\|J_0(\omega_i r)\right\|^2} = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\omega_i r_0)} \int_0^{r_0} r f(r) J_0(\omega_i r)\, dr. \tag{3.85}$$

Do đó nghiệm cuối cùng có dạng

$$u = u(r,t) = \frac{2}{r_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_i r)}{J_1^2(\omega_i r_0)} \int_0^{r_0} \eta f(\eta) J_0(\omega_i \eta)\, d\eta. \tag{3.86}$$

2. Tọa độ trụ không xuyên tâm

Tìm nhiệt độ của ống trụ tròn dài vô hạn có bán kính r_0 $(0 < r < r_0; 0 < \varphi < 2\pi)$ nếu nhiệt độ ban đầu có dạng $u|_{t=0} = f(r,\varphi)$, biết rằng trên bề mặt trụ duy trì nhiệt độ bằng không.

Phương trình có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right], 0<r<r_0, 0<\varphi<2\pi: \\ u(r_0,\varphi,t)=0; \\ u\big|_{t=0} = f(r,\varphi). \end{cases} \tag{3.87}$$

Các điều kiện:

– Hàm nhiệt độ tại miền được xét phải hữu hạn: $|u(r,\varphi,t)|<\infty$;

– Theo biến φ hàm nhiệt độ có tính tuần hoàn

$$u(r,\varphi,t) = u(r,\varphi+2\pi,t).$$

Chọn nghiệm dưới dạng tách biến $u(r,\varphi,t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$, thay vào phương trình (3.87) ta có

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{R(r)}\frac{\left[rR'(r)\right]'}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda^2. \tag{3.88}$$

Chọn: $$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -n^2 \Rightarrow \Phi''(\varphi)+n^2\Phi(\varphi)=0. \tag{3.89}$$

Nghiệm của (3.89) có dạng

$$\Phi(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Do tính tuần hoàn $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ suy ra n phải nguyên dương hoặc bằng 0, tức là $n = 0,1,2,...$ Từ (3.88) ta có:

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0; \tag{3.90}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\lambda^2r^2-n^2\right)R(r)=0. \tag{3.91}$$

Phương trình (3.91) có nghiệm là hàm Bessel nếu chọn $x=\lambda r$:

$$x^2R''(x)+xR'(x)+\left(x^2-n^2\right)R(x)=0;$$

$$\Rightarrow R(x) = \alpha_n J_n(x)+\beta_n Y_n(x).$$

Điều kiện $|R|<\infty \Rightarrow \beta_n = 0$ vì hàm $Y_n(0)\to-\infty$. Thay điều kiện ban đầu ta có $R(r_0)=\alpha_n J_n(\lambda r_0)=0$, đánh số các không điểm của hàm Bessel là $\mu_0^{(n)},\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},...\mu_k^{(n)},...,\quad k=0,1,2...\infty \Rightarrow \lambda=\lambda_{nk}=\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}$ chính xác đến một hệ số hằng số, hàm theo biến r có dạng

$$R(r) = R_{nk}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right). \tag{3.92}$$

Phương trình (3.90) có nghiệm: $T(t) = T_{nk}(t) = e^{-\left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0}\right)^2 t}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.87) có dạng

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n,k=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right)\left(A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi\right) e^{-\left(\frac{\mu_k^{(n)} a}{r_0}\right)^2 t}. \tag{3.93}$$

Do tính trực giao của hàm Bessel và tính trực giao của các hàm $\{1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\}$ ta có:

$$\int_0^{r_0} r J_\nu^2\left(\frac{\mu}{r_0} r\right) dr = \frac{r_0^2}{2} J_\nu'^2(\mu) = \frac{r_0^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu);$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos n'\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq n' \\ 2\pi & n = n' = 0; \\ \pi & n = n' \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin n'\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq n' \text{ và } n = n' = 0 \\ \pi & n = n' \neq 0 \end{cases}.$$

Suy ra công thức tính các hệ số A_{nk} và B_{nk} là:

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2\left[J_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi)\cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) dr d\varphi; \\ B_{nk} &= \frac{2}{\pi r_0^2\left[J_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi)\sin n\varphi J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) dr d\varphi, \end{aligned} \tag{3.94}$$

với $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$

3. Toạ độ trụ với độ dài hữu hạn

Tìm nhiệt độ của ống trụ tròn. dài hữu hạn, có bán kính r_0 $(0 \le r \le r_0; 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le z \le L)$ nếu nhiệt độ ban đầu có dạng $u|_{t=0} = f(r,\varphi,z)$, biết rằng trên bề mặt trụ duy trì nhiệt độ bằng không.

Phương trình có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right], 0 < r < r_0, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < L: \\ u(r_0,\varphi,z,t) = 0; u(r,\varphi,0,t) = 0; u(r,\varphi,L,t) = 0; \\ u\big|_{t=0} = f(r,\varphi,z). \end{cases} \quad (3.95)$$

Các điều kiện:

– Hàm nhiệt độ tại miền được xét phải hữu hạn: $|u(r,\varphi,z,t)| < \infty$;

– Theo biến φ hàm nhiệt độ có tính tuần hoàn:

$$u(r,\varphi+2\pi,z,t) = u(r,\varphi,z,t).$$

Chọn nghiệm dưới dạng tách biến $u(r,\varphi,t) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)T(t)$, thay vào phương trình (3.95) ta có

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{R(r)}\frac{\left[rR'(r)\right]'}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2.$$

Chọn:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -n^2; \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\gamma^2;$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\left[rR'(r)\right]'}{r} - \frac{n^2}{r^2} = -\lambda^2 + \gamma^2 = -\sigma^2; \lambda^2 = \gamma^2 + \sigma^2. \quad (3.96)$$

Vì $\dfrac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -n^2 \Rightarrow \Phi''(\varphi) + n^2\Phi(\varphi) = 0$ nên

$$\Phi(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Do tính tuần hoàn $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$ suy ra n phải nguyên dương hoặc bằng 0 tức là $n = 0,1,2,...$

Do $\dfrac{Z''(z)}{Z(z)} = -\gamma^2 \Rightarrow Z''(z) + \gamma^2 Z(z) = 0; Z(0) = Z(L) = 0$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{m\pi}{L}; Z(z) = \sin\frac{m\pi z}{L}; m = 1,2,...$$

Từ (3.96) ta suy ra:

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0; \quad (3.97)$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\sigma^2r^2-n^2\right)R(r)=0. \qquad (3.98)$$

Phương trình (3.98) có nghiệm là hàm Bessel nếu chọn $x=\sigma r$:

$$x^2R''(x)+xR'(x)+\left(x^2-n^2\right)R(x)=0;$$

$$R(x)=\alpha_nJ_n(x)+\beta_nY_n(x).$$

Điều kiện $|R|<\infty \Rightarrow \beta_n=0$ vì hàm $Y_n(0)\to-\infty$. Thay điều kiện ban đầu ta có $R(r_0)=\alpha_nJ_n(\sigma r_0)=0$, đánh số các không điểm của hàm Bessel là $\mu_0^{(n)},\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},...\mu_k^{(n)}$ $k=0,1,2...\infty \to \sigma=\sigma_{nk}=\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}$ chính xác đến một hệ số hằng số, hàm theo biến r có dạng

$$R(r)=R_{nk}(r)=J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right).$$

Phương trình (3.97) có nghiệm: $T(t)=T_{nk}(t)=e^{-\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2\right]a^2t}$.

Vì $\lambda^2=\gamma^2+\sigma^2$ suy ra $\lambda_{mnk}^2=\left(\dfrac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.95) có dạng

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n,k=0}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\left(A_{mnk}\cos n\varphi+B_{mnk}\sin n\varphi\right)\times\sin\frac{m\pi z}{L}e^{-\left[\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\right]a^2t}$$

(3.99)

Do tính trực giao của hàm Bessel và tính trực giao của các hàm $\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}$ ta có:

$$\int_0^{r_0}rJ_\nu^2\left(\frac{\mu}{r_0}r\right)dr=\frac{r_0^2}{2}J_\nu'^2(\mu)=\frac{r_0^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu);$$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\cos n'\varphi d\varphi=\begin{cases}0, & n\neq n'\\ 2\pi, & n=n'=0\\ \pi, & n=n'\neq 0\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\sin n'\varphi d\varphi=\begin{cases}0, & n\neq n' \text{ và } n=n'=0\\ \pi, & n=n'\neq 0\end{cases}$$

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi z}{L}\sin\frac{m'\pi z}{L}dz = \begin{cases} 0, & m \neq m' \\ \dfrac{L}{2}, & m = m' \end{cases}.$$

Suy ra công thức tính các hệ số A_{mnk} và B_{mnk} là

$$A_{mnk} = \frac{2\varepsilon_n}{\pi L r_0^2\left[J_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^L rf(r,\varphi)\cos n\varphi \sin\frac{m\pi z}{L}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)drd\varphi dz\,1;$$

$$B_{mnk} = \frac{4}{\pi L r_0^2\left[J_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\int_0^L rf(r,\varphi)\sin n\varphi \sin\frac{m\pi z}{L}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)drd\varphi dz,$$

với $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$.

§11. TRUYỀN NHIỆT TRONG TỌA ĐỘ CẦU

Tìm nhiệt độ của quả cầu bán kính r_0 $(0 \le r < r_0; 0 \le \theta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi)$ nếu nhiệt độ ban đầu có dạng $u|_{t=0} = f(r,\theta,\varphi)$, biết rằng trên bề mặt cầu duy trì nhiệt độ bằng không.

Phương trình có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]: \\ \left.\begin{array}{l} u(r_0,\theta,\varphi,t) = 0 \\ u|_{t=0} = f(r,\theta,\varphi) \end{array}\right\}(0 \le r < r_0; 0 \le \theta \le \pi; 0 \le \varphi \le 2\pi) \end{cases} \quad (3.100)$$

Các điều kiện:

– Hàm nhiệt độ tại miền được xét phải hữu hạn $|u(r,\theta,\varphi,t)| < \infty$;

– Theo biến φ hàm nhiệt độ có tính tuần hoàn

$$u(r,\theta,\varphi+2\pi,t) = u(r,\theta,\varphi,t).$$

Chọn nghiệm dưới dạng tách biến $u(r,\varphi,t) = R(r)Y(\theta,\varphi)T(t)$, thay vào phương trình ta có

$$\frac{1}{a^2T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right] = -\lambda^2.$$

Đặt $\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right]=-\sigma$, ta chọn $\sigma=n(n+1)$ để có nghiệm là các đa thức

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0. \qquad (3.101)$$

Chọn $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ rồi thay vào phương trình (3.101) ta có:

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{P}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+n(n+1)P\Phi=0;$$

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+n(n+1)=0.$$

Chọn $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-k^2$, hàm Φ thỏa mãn phương trình

$$\left.\begin{array}{l}\Phi''+k^2\Phi=0\\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\end{array}\right\}\Rightarrow\Phi(\varphi)=\left\{\begin{array}{l}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{array}\right. \qquad (3.102)$$

Hàm phụ thuộc θ sẽ có chỉ số k và n:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{\sin^2\theta}\right]P=0 \qquad (3.103)$$

Nghiệm của phương trình (3.103) là:

$$P=P_n^{(k)}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_n}{dx^k},\quad k<n;$$

$$P=P_n^{(k)}(\cos\theta)=(\sin\theta)^k\frac{d^kP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^k}.$$

Ta thu được hàm cầu

$$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}\left(A_{kn}\cos k\varphi+B_{kn}\sin k\varphi\right)P_n^{(k)}(\cos\theta)=\sum_{k=-n}^{n}C_{kn}Y_n^{(k)}(\theta,\varphi),$$

trong đó $C_{kn}=\left\{\begin{array}{l}A_{kn},\ m\le 0\\ B_{kn},\ m>0\end{array}\right.$.

Các phương trình của $T(t)$ và $R(r)$ là:

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0; \qquad (3.104)$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+\left[\lambda^2r^2-n(n+1)\right]R(r)=0. \qquad (3.105)$$

Ta có: $$n(n+1)=n^2+2\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Đặt $\lambda r = x$ và thay vào phương trình (3.105) ta có

$$x^2\frac{d^2R(x)}{dx^2}+2x\frac{dR(x)}{dx}+\left[x^2-n(n+1)\right]R(x)=0,$$

hay là $$x^2\frac{d^2R(x)}{dx^2}+2x\frac{dR(x)}{dx}+\left[x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]R(x)=0. \qquad (3.106)$$

Đặt $R=\dfrac{K(x)}{\sqrt{x}}$, sau đó tính $\dfrac{dR}{dx}$ và $\dfrac{d^2R}{dx^2}$ rồi thay vào phương trình (3.106) ta có

$$x\sqrt{x}\frac{d^2K}{dr^2}-\sqrt{x}\frac{dK}{dx}+\frac{3}{4\sqrt{x}}K+2\sqrt{x}\frac{dK}{dx}-\frac{1}{\sqrt{x}}K+x\sqrt{x}K-$$
$$-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{\sqrt{x}}K+\frac{1}{4\sqrt{x}}K=0$$

hay là

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x^2\frac{d^2K}{dx^2}-x\frac{dK}{dx}+\frac{3}{4}K+2x\frac{dK}{dx}-K+\left(x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)K(x)+\frac{1}{4}K\right]=0$$

Suy ra

$$x^2\frac{d^2K}{dx^2}+x\frac{dK}{dx}+\left(x^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)K(x)=0. \qquad (3.107)$$

Nghiệm của (3.107) là: $K(r)=CJ_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)+DY_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$.

Do đó

$$R(r)=\frac{K(\lambda r)}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r}}\left[CJ_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)+DY_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\right].$$

Điều kiện $|R|<\infty \Rightarrow D=0$ vì hàm $Y_{n+\frac{1}{2}}(0)\to-\infty$. Thay điều kiện ban đầu ta có $R(r_0)=C\dfrac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r_0)=0$, đánh số các không điểm của hàm Bessel là $\mu_0^{(n)},\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},...\mu_m^{(n)}$ $m=0,1,2...\infty\to\lambda=\lambda_{nm}=\dfrac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$ chính xác đến một hệ số hằng số, hàm theo biến r có dạng

$$R(r)=R_{nm}(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right). \qquad (3.108)$$

Phương trình theo biến t có nghiệm $T(t)=T_{nm}(t)=e^{-\left(\frac{\mu_m^{(n)}a}{r_0}\right)^2 t}$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.100) có dạng

$$u(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)}{\sqrt{r}}\left(A_{mnk}\cos k\varphi+B_{mnk}\sin k\varphi\right)\times P_n^{(k)}(\cos\theta)e^{-\left(\frac{\mu_k^{(m)}a}{r_0}\right)^2 t}$$

(3.104)

trong đó $\mu_n^{(m)}$ là nghiệm của phương trình $J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_n^{(m)}\right)=0$; các hệ số A_{mnk} và B_{mnk} được xác định theo công thức sau:

$$A_{mnk}=\frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)r^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_n^{(m)}r}{r_0}\right)\sin\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\varepsilon_k\frac{\pi r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_n^{(m)}\right)\right]^2};(3.109)$$

$$B_{mnk}=\frac{\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\theta,\varphi)r^{\frac{3}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_n^{(m)}r}{r_0}\right)\sin\theta P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}{\frac{\pi r_0^2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\left[J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_n^{(m)}\right)\right]^2}, (3.110)$$

với $\varepsilon_k=\begin{cases}2, & k=0\\ 1, & k\neq 0\end{cases}$

MỘT SỐ BÀI GIẢI MẪU

1. Giải phương trình:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L:\\ u(0,t)=u(L,t)=0;\\ u(x,0)=Ax.\end{cases}$$

Giải. Giả sử nghiệm tìm được dưới dạng $u(x,t)=X(x)T(t)$, thay vào phương trình ta có

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Vì vế trái của đẳng thức không phụ thuộc vào x, còn vế phải không phụ thuộc vào t, do đó cả T''/T và X''/X không phụ thuộc vào x và t, nghĩa là

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \qquad (1)$$

Từ các điều kiện biên cho ta

$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0 \\ u(L,t) &= X(L)T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X(0) = X(L) = 0.$$

Đi đến giải bài toán đơn giản nhất về trị riêng: Tìm giá trị của tham số λ để cho có nghiệm không tầm thường của bài toán

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0. \qquad (2)$$

Sau khi biện luận các giá trị λ thấy rằng: để (2) có nghiệm không tầm thường thì $\lambda > 0$. Khi đó ta có

$$X(x) = D_1 \cos\lambda x + D_2 \sin\lambda x;$$

$$X(0) = D_1 = 0,\ X(L) = D_2 \sin\lambda L = 0.$$

Suy ra phương trình tìm trị riêng

$$\sin\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}.$$

Do đó, bài toán chỉ có nghiệm không tầm thường khi giá trị riêng

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2; \quad n = 1,2,3...$$

tương ứng ta có các hàm riêng

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Giải phương trình đối với $T(t)$ được

$$T(t) = T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 a^2 t} = e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}; \quad n = 1,2,3,...$$

Ta tìm được một số vô hạn các nghiệm của phương trình vi phân đạo hàm riêng là:

$$u(x,t) = u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}; \quad n = 1,2,3,... \qquad (3)$$

Theo nguyên lý chồng chất, có thể nhân các nghiệm này với một hằng số tùy ý và cộng tất cả các nghiệm này thành nghiệm tổng quát. Như vậy, nghiệm tổng quát có dạng

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2}t}.$$

Điều kiện ban đầu đòi hỏi hệ số B_n được chọn sao cho

$$u(x,0)=Ax=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Đây chính là khai triển chuỗi Fourier theo các hàm sin của hàm Ax với các hệ số khai triển Fourier là B_n. Hệ số này được tìm từ biểu thức

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L Ax\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ; n=1,2,3...$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{2LA}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$u(x,t)=\frac{2LA}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

2. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+f(x),\ \ 0<x<L: \\ u(0,t)=0,\ u_x(L,t)=q; \\ u(x,0)=\varphi(x). \end{cases}$$

Giải. Đặt nghiệm dưới dạng: $u(x,t)=w(x)+v(x,t)$, thay vào phương trình ta có: $v_t(x,t)=a^2v_{xx}+a^2w''(x)+f(x)$.

Chọn w sao cho:

$$w''(x)=-\frac{1}{a^2}f(x)\rightarrow w'(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x f(\xi)d\xi+A;$$

$$w(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy+Ax+B;$$

$$w(0)=0,\ w_x(L)=q.$$

Từ các điều kiện của w ta có:

$$w(0) = B = 0;$$

$$w'(L) = -\frac{1}{a^2}\int_0^L f(\xi)d\xi + A = q;$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{a^2}\int_0^L f(\xi)d\xi + qx,$$

$$\Rightarrow w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy + \frac{x}{a^2}\int_0^L f(\xi)d\xi + qx.$$

Như vậy, hàm v thoả mãn phương trình thuần nhất và các điều kiện biên thuần nhất. Nghiệm có dạng

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Hệ số C_k được xác định từ điều kiện ban đầu

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L\left[\varphi(x) - w(x)\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx.$$

Kết quả:

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t), \text{ với:}$$

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L};$$

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\left[\int_0^y f(\xi)d\xi\right]dy + \frac{x}{a^2}\int_0^L f(\xi)d\xi + qx,$$

trong đó: $C_k = \frac{2}{L}\int_0^L\left[\varphi(x) - w(x)\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx.$

3. Tìm phân bố nhiệt độ của một thanh ($0 \le x \le L$), với các bề mặt của thanh cách nhiệt, đầu mút tại $x = 0$ cũng cách nhiệt, tại đầu mút $x = L$ có một dòng nhiệt không đổi Q đi vào. Nhiệt độ ban đầu bằng không.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L: \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = Q; \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Giải. Chọn nghiệm có dạng $u(x,t) = W(x,t) + v(x,t)$, trong đó $W(x,t)$ thỏa mãn:

$$W(x,t) = (\alpha x^2 + \beta x)Q;$$

$$W_x(0,t) = (2\alpha x + \beta)Q\big|_{x=0} = 0 \to \beta = 0; \qquad (1)$$

$$W_x(L,t) = 2\alpha x Q\big|_{x=L} = Q \to \alpha = \frac{1}{2L}.$$

Giải (1) thu được

$$W(x,t) = \frac{x^2}{2L}Q, \quad a^2 W_{xx}(x,t) = \frac{a^2 Q}{2L}. \qquad (2)$$

Bây giờ ta cần phải giải phương trình

$$v_t = a^2 v_{xx} + \frac{a^2 Q}{2L}, \; 0 < x < L \qquad (3)$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} v_x(0,t) = 0, \; v_x(L,t) = 0 \\ v(x,0) = -W(x,t) - \dfrac{x^2 Q}{2L} \end{cases}$$

Đặt: $$\frac{a^2 Q}{2L} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{L},$$

đây chính là khai triển chuỗi Fourier theo các hàm cos của hàm $\frac{a^2 Q}{2L}$ với các hệ số khai triển Fourier là C_n được xác định như sau

$$C_0 = \frac{a^2 Q}{2L}, \quad C_n = 0 \text{ khi } n \neq 0.$$

Nghiệm $v(x,t)$ có dạng

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{L}. \qquad (4)$$

Từ điều kiện ban đầu của $v(x,t)$ trong (3) ta có:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\frac{n\pi x}{L} = -\frac{x^2 Q}{2L}$$

$$\Rightarrow \; T_0(0) = -\frac{1}{L} \times \frac{Q}{2L}\int_0^L x^2 dx = -\frac{Q}{2L^2}\frac{L^3}{3} = -\frac{QL}{6}; \qquad (5)$$

$$T_n(0) = -\frac{Q}{L^2}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{Q}{L^2} \times \frac{2L^3}{(k\pi)^2}(-1)^k = -\frac{2QL}{(k\pi)^2}(-1)^k; \qquad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 T_n(t)\right]\cos\frac{n\pi x}{L}=\frac{a^2Q}{2L}. \tag{7}$$

Do
$$T_0'(t)=\frac{a^2Q}{2L} \tag{8}$$

nên ta suy ra

$$T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 T_n(t)=0. \tag{9}$$

Từ phương trình (8) suy ra

$$T_0(t)=\frac{a^2Q}{2L}t+M. \tag{10}$$

với M là hằng số.

Từ điều kiện ban đầu ta có

$$T_0(0)=M. \tag{11}$$

So sánh (11) và (5) suy ra $M=-\frac{QL}{6}$. Vậy $T_0(t)=\frac{a^2Q}{2L}t-\frac{QL}{6}$.

Từ (9) suy ra

$$T_n(t)=Pe^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \tag{12}$$

Từ điều kiện ban đầu ta có

$$T_n(0)=-\frac{2QL}{(k\pi)^2}(-1)^k=P.$$

Thay vào (12) ta được

$$T_n(t)=-\frac{2QL}{(k\pi)^2}(-1)^k e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}.$$

Nghiệm bài toán có dạng

$$u(x,t)=\frac{x^2Q}{2L}+\frac{a^2Qt}{2L}-\frac{QL}{6}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2QL}{(k\pi)^2}(-1)^k e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{L},$$

hay là

$$u(x,t)=Q\frac{a^2t}{2L}+Q\frac{3x^2-L^2}{6L}+\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}(-1)^{k+1}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi x}{L}.$$

4. Giải phương trình: $u_t = u_{xx} + \sin 3\pi x, \quad 0 < x < 1$

thỏa mãn điều kiện biên: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0$ và điều kiện ban đầu $u(x,0) = 0$.

Giải. Chọn bộ hàm riêng có dạng:

$$\{X_n = \cos n\pi x\}, \quad n = 0,1,2... \tag{1}$$

Khai triển nghiệm dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos n\pi x.$$

Khai triển hàm $\sin 3\pi x$ thành chuỗi

$$\sin 3\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\pi x,$$

thay vào phương trình $u_t = u_{xx} + \sin 3\pi x$ ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t)\right]\cos n\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\pi x$$

$$\Rightarrow T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t) = C_n.$$

Giải phương trình cho T ta thu được:

$$T_0'(t) = C_0 \to T_0(t) = C_0 t + D_0$$

$$T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t) = C_n, \qquad n = 1,2...$$

$$T_n(t) = T_n(0)e^{-(n\pi)^2 t} + \frac{C_n}{(n\pi)^2}, \qquad n = 1,2...$$

Như vậy nghiệm có dạng:

$$u(x,t) = C_0 t + D_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n(0)e^{-(n\pi)^2 t} + \frac{C_n}{(n\pi)^2}\right]\cos n\pi x. \tag{2}$$

Sử dụng điều kiện ban đầu ta có:

$$u(x,0) = D_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n(0) + \frac{C_n}{(n\pi)^2}\right]\cos n\pi x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad D_0 = 0; \qquad T_n(0) = -\frac{C_n}{(n\pi)^2}.$$

Do đó: $$u(x,t) = C_0 t + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{(n\pi)^2}\left[1 - e^{-(n\pi)^2 t}\right]\cos n\pi x.$$

Các hệ số được tìm như sau:

$$\sin 3\pi x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\pi x;$$

$$C_0 = \frac{2}{3\pi},\ C_n = \begin{cases} \dfrac{12}{\pi\left[9-(2k+1)^2\right]}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

Kết quả là:

$$u(x,t) = \frac{2}{3\pi}t + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(2k+1)^2\pi^3\left[9-(2k+1)^2\right]}\left[1-e^{-\left[(2k+1)\pi\right]^2 t}\right]\cos n\pi x.$$

5. Tìm nhiệt độ của ống trụ tròn dài vô hạn có bán kính r_0 $(0 < r < r_0;$ $0 < \varphi < 2\pi)$ nếu nhiệt độ ban đầu có dạng $u|_{t=0} = f(r,\varphi)$, biết rằng trên bề mặt trụ duy trì nhiệt độ bằng không.

Giải. Phương trình có dạng

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]$$

thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} u(r_0,\varphi,t) = 0 \\ u|_{t=0} = f(r,\varphi) \end{cases}$$

Các điều kiện:

– Hàm nhiệt độ tại miền được xét phải hữu hạn: $|u(r,\varphi,t)| < \infty$.

– Theo biến φ hàm nhiệt độ có tính tuần hoàn

$$u(r,\varphi,t) = u(r,\varphi+2\pi,t).$$

Chọn nghiệm dưới dạng tách biến $u(r,\varphi,t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$ thay vào phương trình ta có

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{R(r)}\frac{\left[rR'(r)\right]'}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda^2.$$

Chọn $$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -n^2 \Rightarrow \Phi''(\varphi) + n^2\Phi(\varphi) = 0.$$

Nghiệm $\Phi(\varphi)$ có dạng

$$\Phi(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi.$$

Do tính tuần hoàn $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ suy ra $n=0,1,2,...$

Phương trình đối với $T(t)$ và $R(r)$ là:

$$T'(t)+a^2\lambda^2T(t)=0;$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)+\left(\lambda^2r^2-n^2\right)R(r)=0.$$

Phương trình thứ hai có nghiệm là hàm Bessel nếu chọn $x=\lambda r$:

$$x^2R''(x)+xR'(x)+\left(x^2-n^2\right)R(x)=0;$$

$$R(x)=\alpha_nJ_n(x)+\beta_nY_n(x).$$

Điều kiện $|R|<\infty\Rightarrow\beta_n=0$ vì hàm $Y_n(0)\to-\infty$, từ điều kiện ban đầu ta có $R(r_0)=\alpha_nJ_n(\lambda r_0)=0$, đánh số các không điểm của hàm Bessel là $\mu_0^{(n)},\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},...\mu_k^{(n)}$ $k=0,1,2...\infty\to\lambda=\lambda_{nk}=\dfrac{\mu_k^{(n)}}{r_0}$ chính xác đến một hệ số hằng số, hàm theo biến r có dạng

$$R(r)=R_{nk}(r)=J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right).$$

Phương trình theo biến t có nghiệm

$$T(t)=T_{nk}(t)=e^{-\left(\frac{\mu_k^{(n)}a}{r_0}\right)^2t}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho có dạng

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n,k=0}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0}r\right)\left(A_{nk}\cos n\varphi+B_{nk}\sin n\varphi\right)e^{-\left(\frac{\mu_k^{(n)}a}{r_0}\right)^2t}.$$

Do tính trực giao của hàm Bessel và tính trực giao của các hàm $\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}$:

$$\int_0^{r_0}rJ_\nu^2\left(\frac{\mu}{r_0}r\right)dr=\frac{r_0^2}{2}J_\nu'^2(\mu)=\frac{r_0^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu);$$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\cos n'\varphi d\varphi=\begin{cases}0 & n\neq n'\\ 2\pi & n=n'=0;\\ \pi & n=n'\neq 0\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\sin n'\varphi d\varphi=\begin{cases}0 & n\neq n' \text{ và } n=n'=0\\ \pi & n=n'\neq 0\end{cases}.$$

Suy ra công thức tính các hệ số là:

$$A_{nk} = \frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2 \left[J_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} rf(r,\varphi)\cos n\varphi J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) dr d\varphi;$$

$$B_{nk} = \frac{2}{\pi r_0^2 \left[J_n\left(\mu_k^{(n)}\right)\right]^2} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} rf(r,\varphi)\sin n\varphi J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{r_0} r\right) dr d\varphi$$

với $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$

BÀI TẬP

3.1. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L: \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

3.2. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L: \\ u_x(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = A(L-x). \end{cases}$$

3.3. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L: \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0; \\ u(x,0) = U. \end{cases}$$

3.4. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta x, \quad 0 < x < L: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

3.5. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < L: \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0; \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{2L}. \end{cases}$$

3.6. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L: \\ u(0,t) = T, \quad u(L,t) = U; \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

3.7. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\dfrac{\pi x}{L}, \quad 0 < x < L: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

3.8. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos 3\pi x, \quad 0 < x < 1, t > 0: \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0; \\ u(x,0) = 1. \end{cases}$$

3.9. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\dfrac{\pi x}{L}, \quad 0 < x < L: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

3.10. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}: \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ u(x,0) = Ax; \quad u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3.11. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < L: \\ u(0,t) = 0, \ u_x(L,t) = Ae^{-t}; \\ u(x,0) = T. \end{cases}$$

3.12. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < L: \\ u_x(0,t) = At, \ u_x(L,t) = T; \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

3.13. Trong một khối lập phương ($0 \le x, y, z \le L$) xảy ra sự khuếch tán vật chất mà các hạt của chất đó bị phân huỷ với vận tốc tỷ lệ với nồng độ của nó. Hãy xác định nồng độ của chất trong khối lập phương này nếu nồng độ ban đầu của nó không đổi và bằng U. Nồng độ của chất đó trên bề mặt được giữ bằng 0.

3.14. Tìm phân bố nhiệt độ của một thanh ($0 \le x \le L$) với các bề mặt của thanh cách nhiệt, còn các đầu mút duy trì nhiệt độ không đổi là:

$$u(0,t) = U_1 = \text{const}, \ u(L,t) = U_2 = \text{const}.$$

Nhiệt độ ban đầu của thanh bằng $f(x) = U_0 = \text{const}$.

3.15. Tìm phân bố nhiệt độ của một thanh ($0 \le x \le L$) với các bề mặt của thanh có sự trao đổi nhiệt với môi trường bên ngoài theo định luật Newton nhiệt độ của môi trường bên ngoài là $U_0 = \text{const}$, còn các đầu mút duy trì nhiệt độ không đổi bằng

$$u(0,t) = U_1 = \text{const}, \ u(L,t) = U_2 = \text{const}.$$

Nhiệt độ ban đầu của thanh bằng $f(x)$. Hãy xét trường hợp khi $U_1 = U_2 = 0, \ f(x) = 0$.

3.16. Tìm nhiệt độ của ống quạt trụ dài vô hạn có mặt cắt là một hình quạt với bán kính $r_0 (0 < r < r_0; 0 < \varphi < \varphi_0)$ nếu nhiệt độ ban đầu có dạng $u|_{t=0} = f(r, \varphi)$, biết rằng trên bề mặt trụ và hai phần mặt phẳng hình quạt duy trì nhiệt độ bằng không.

Chương IV

PHƯƠNG TRÌNH ELLIPTIC

§1. MỞ ĐẦU

1. Phương trình Laplace và các điều kiện biên

Phương trình Laplace thuần nhất có dạng

$$\nabla^2 u = 0;\ x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

và dạng không thuần nhất là: $\nabla^2 u = f(x, y, z);\ x, y, z \in \mathbb{R}$. (4.2)

Phương trình Poisson hay là *phương trình Hemholtz* có dạng

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0;\ x, y, z \in \mathbb{R},\ \ \lambda = \text{const}. \tag{4.3}$$

Các phương trình trên được gọi là *phương trình Elliptic* luôn luôn tìm thấy trong các ngành học khoa học và công nghệ liên quan đến các bài toán dừng. Phương trình Hemholtz liên quan đến bài toán trị riêng Elliptic, trong đó trị riêng λ được tìm sao cho nghiệm là khác không. Các phương trình trên có thể có dạng khác nhau phụ thuộc vào dạng của toán tử Laplace trong các hệ tọa độ khác nhau. Trong chương này, sẽ nghiên cứu các dạng khác nhau của các phương trình trên một cách đầy đủ và minh họa các ứng dụng của chúng trong một vài ngành khoa học và công nghệ.

Ta có bảng sau mô tả dạng của phương trình Laplace trong các hệ tọa độ thông thường:

Tọa độ	*1 chiều*
Đề-các	$\nabla^2 u(x) = \dfrac{d^2u}{dx^2}$
Trụ	$\nabla^2 u(r) = \dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}$
Cầu	$\nabla^2 u(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{du}{dr}\right)$

Tọa độ	*2 chiều*
Đề-các	$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
Trụ	$\nabla^2 u(r,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ $\nabla^2 u(r,\theta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ $\nabla^2 u(r,\varphi) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$
Cầu	$\nabla^2 u(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$ $\nabla^2 u(r,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$

Tọa độ	*3 chiều*
Đề-các	$\nabla^2 u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Trụ	$\nabla^2 u(r,\theta,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Cầu	$\nabla^2 u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$

Chúng ta sẽ giải chi tiết các phương trình Laplace, Poisson và Hemholtz với các điều kiện biên sau:

– Điều kiện biên Dirichlet:

$$B(u) = u = g(x,y,z); \forall x,y,z \in \partial\mathbb{R},$$

– Điều kiện biên Neumann:

$$B(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \vec{n} = g(x,y,z); \forall x,y,z \in \partial\mathbb{R},$$

– Điều kiện biên Robin:

$$B(u) = \alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = g(x,y,z); \forall x,y,z \in \partial\mathbb{R},$$

trong đó hằng số α,β và hàm $g(x,y,z)$ được xác định; điều kiện x,y,z nằm trên biên của miền $\mathbb{R}$ được viết là $x,y,z \in \partial\mathbb{R}$, ở đây $\partial\mathbb{R} \in \mathbb{R}$.

Như vậy bài toán biên cho phương trình Elliptic có thể viết:

Giải phương trình

$$L(u)=\begin{cases}\nabla^2 u\\ \nabla^2 u+\lambda u\end{cases}=f(x,y,z):\ x,y,z\in\mathbb{R},$$

với các điều kiện biên: $B(u)=\alpha\dfrac{\partial u}{\partial n}+\beta u=g(x,y,z);\forall x,y,z\in\partial\mathbb{R}$:

– Khi $\alpha=0,\beta=1$ là điều kiện biên Dirichlet;

– Khi $\alpha=1,\beta=0$ là điều kiện biên Neumann;

– Khi $\alpha\neq 0,\beta\neq 0$ là điều kiện biên Robin.

Ví dụ: Nhiệt độ của một vật đồng chất có nguồn nhiệt trong $\mathbb{R}$ thoả mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\nabla^2 u+q(x,y,z,t),\ \ u=u(x,y,z,t),\ \ x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Trạng thái dừng của phương trình trên cho ta phương trình Poisson

$$\nabla^2 u=-\frac{q(x,y,z,t)}{a^2},\ \ u=u(x,y,z),\ \ x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Trạng thái dừng của phương trình trên khi không có nguồn cho ta phương trình Laplace

$$\nabla^2 u=0,\ \ u=u(x,y,z),\ \ x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Như vậy, phương trình Poisson và phương trình Laplace ở trên là trường hợp đặc biệt của phương trình truyền nhiệt khi hàm u không phụ thuộc vào biến thời gian, được gọi là *trạng thái dừng* của phương trình truyền nhiệt.

2. Nghiệm của phương trình Laplace trong các hệ tọa độ

Nghiệm của phương trình Laplace còn được gọi là các hàm điều hoà.

a) Nghiệm phương trình Laplace trong tọa độ Đề-các

Cho hàm $u=u(x,y,z)$, phương trình Laplace trong hệ tọa độ Dề-các 3 chiều có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Đặt $u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$, ta có

$$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{\alpha^2}+\underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\beta^2}+\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\gamma^2}=0\Rightarrow\begin{cases}X''+\alpha^2X=0\to X(x)=Ae^{i\alpha x}+Be^{-i\alpha x}\\ Y''+\beta^2Y=0\to Y(y)=Ce^{i\beta y}+De^{-i\beta y}\\ Z''-\gamma^2Z=0\to Z(z)=Ee^{\gamma z}+Fe^{-\gamma z}\end{cases}$$

trong đó: $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$.

Như vậy: $u(x,y,z) \sim e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{-\gamma z}$.

Nghiệm đầy đủ của bài toán là

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) =$$

$$= \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(A_m e^{i\alpha_m x} + B_m e^{-i\alpha_m x}\right)\left(C_n e^{i\beta_n y} + D_n e^{-i\beta_n y}\right)\left(E_{mn} e^{\gamma_{mn} z} + F_{mn} e^{-\gamma_{mn} z}\right).$$

b) Nghiệm phương trình Laplace trong tọa độ trụ

Cho hàm $u = u(r,\varphi,z)$, phương trình Laplace trong hệ tọa độ trụ 3 chiều có dạng:

$$\Delta u(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Đặt $u(r,\varphi,z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$, thay vào phương trình ta có:

$$\frac{1}{rR}(rR')' + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R}(rR')' + r^2\underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{k^2} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = n^2 \Rightarrow \begin{cases} \Phi'' + n^2\Phi = 0 \\ Z'' - k^2 Z = 0 \\ r^2R'' + rR' + \left(k^2r^2 - n^2\right)R = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình (*) là phương trình xác định hàm Bessel. Trong trường hợp $k = 0$, tức là không có hàm Z, phương trình (*) có dạng

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0.$$

Nghiệm R là $$R_n(r) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r \\ A_n r^n + B_n r^{-n} \end{cases}.$$

Hàm Φ có dạng

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} C_0 + D_0\varphi \\ C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình Laplace khi $k = 0$ là

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\left(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right).$$

Công thức trên được gọi là *hàm điều hoà trụ*.

Trong trường hợp $k > 0$, ta có nghiệm của phương trình (*) là

$$R_n(kr) = A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr).$$

Nghiệm của phương trình có dạng

$$u(r,\varphi,z) = \sum_{m,n}\left[A_{mn} J_n(k_m r) + B_{mn} Y_n(k_m r)\right] e^{\pm in\varphi} e^{\pm k_m z}.$$

c) Nghiệm phương trình Laplace trong tọa độ cầu

Cho hàm $u = u(r,\theta,\varphi)$, phương trình Laplace trong hệ tọa độ trụ 3 chiều có dạng:

$$\Delta u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Đặt $u(r,\theta,\varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi)$, thay vào phương trình ta có:

$$\frac{1}{Rr^2}\left(r^2R'\right)' + \frac{1}{Pr^2\sin\theta}\left(\sin\theta P'\right)' + \frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\Phi'' = 0;$$

$$\frac{\left(r^2R'\right)'}{R} + \frac{\left(\sin\theta P'\right)'}{P\sin\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Đặt

$$\begin{cases} \dfrac{\left(r^2R'\right)'}{R} = \lambda^2;\ \dfrac{\Phi''}{\Phi} = -m^2, \\ \dfrac{\left(\sin\theta P'\right)'}{P\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 \end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda^2R = 0, \\ \Phi'' + m^2\Phi = 0, \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dP}{d\theta}\right) + \left(\lambda^2 - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Trong phương trình (*) đặt $x = \cos\theta \Rightarrow dx = -\sin\theta d\theta \Rightarrow d\theta = -\dfrac{dx}{\sin\theta}$, ta có

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}\right) + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP(x)}{dx}\right] + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0. \qquad (**)$$

Chú ý rằng, phương trình (**) là phương trình xác định đa thức Legendre liên kết, phương trình sẽ có nghiệm là đa thức Legendre liên kết nếu $\lambda = n(n+1)$ (xem mục 3, §7, Chương VII). Đa thức Legendre liên kết có dạng

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}; P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \; n = 0,1,2,...$$

Do đó có thể viết

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m+n}(1-x^2)^n}{dx^{m+n}}, n = 0,1,2,...; -n \le m \le n.$$

Công thức trên được gọi là *công thức Rodrigue*.

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & k \ne n \\ \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k = n \end{cases};$$

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Với mỗi n có $n+1$ nghiệm riêng của phương trình đó là $P_n, P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, ..., P_n^{(n)}$, ứng với $m = 0,1,2,...,n$.

Với mỗi cặp nghiệm $\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$ tương ứng với $n+1$ nghiệm, ta có $2n+1$ nghiệm của hàm cầu độc lập tuyến tính như sau:

$$\left[P_n, \begin{cases} P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi \\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}, \begin{cases} P_n^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi \\ P_n^{(2)}(\cos\theta)\sin 2\varphi \end{cases}, ..., \right.$$
$$\left. ..., \begin{cases} P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \\ P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \end{cases}, ..., \begin{cases} P_n^{n}(\cos\theta)\cos n\varphi \\ P_n^{n}(\cos\theta)\sin n\varphi \end{cases} \right], \text{ với } \begin{cases} m = 1,2,...,n \\ n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Theo công thức trên, ta quy ước $2n+1$ hàm cầu là:

$$Y_n^{(0)}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta), \begin{cases} Y_n^{(-1)}(\cos\theta) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi \\ Y_n^{(1)}(\cos\theta) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}, ...$$

$$..., \begin{cases} Y_n^{(-m)}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \\ Y_n^{(m)}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \end{cases}, ..., \begin{cases} Y_n^{(-n)}(\cos\theta) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\cos n\varphi \\ Y_n^{(n)}(\cos\theta) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\sin n\varphi \end{cases}$$

Hoặc viết dưới dạng

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sum_{m=-n}^{n} C_{mn} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

trong đó $C_{mn} = \begin{cases} A_{mn} & m \le 0 \\ B_{mn} & m > 0 \end{cases}$.

Hàm $Y_n^{(0)}(\theta) = P_n(\cos\theta)$ không phụ thuộc vào φ được gọi là *hàm đới*, tức là hình cầu được chia thành $n+1$ miền vĩ tuyến, tại đó dấu của hàm đới được bảo toàn. Xét hàm $Y_n^{(2m)} = \sin^m\theta\left[\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)\right]_{t=\cos\theta}\begin{cases}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{cases}$ trên hình cầu, bởi vì $\sin\theta$ bằng không ở trên các cực, các hàm $\begin{cases}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{cases}$ bằng không tại các đường kinh tuyến $2m$.

Với $2n+1$ hàm cầu trực giao và chuẩn hoá có thể khai triển hàm $f(\theta,\varphi)$ bất kỳ vào chuỗi các hàm cầu:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Như vậy, nghiệm của phương trình Laplace trong tọa độ cầu có thể viết $u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_{mn}r^n + B_{mn}r^{-(n+1)}\right)Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$:

$$\iint_{\Sigma} Y_n^{(k_1)}(\theta,\varphi)Y_n^{(k_2)}(\theta,\varphi)\,d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)}(\theta,\varphi)Y_n^{(k_2)}(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos k_1\varphi\cos k_2\varphi\,d\varphi\int_{-1}^{1}P_n^{(k_1)}(t)P_n^{(k_2)}(t)\,dt = \begin{cases}0, & k_1 \neq k_2\\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}, & k_1 = k_2 = k \neq 0\\ \dfrac{4\pi}{2n+1}. & k_1 = k_2 = 0\end{cases}$$

Hay có thể viết gọn hơn

$$\left\|Y_n^{(k)}\right\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Y_n^{(k)}(\theta,\varphi)\right]^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \frac{2}{2n+1}\pi\varepsilon_k\frac{(n+k)!}{(n-k)!}$$

$\varepsilon_0 = 2; \varepsilon_k = 1$ khi $k > 0$.

Tính trực giao của hàm cầu có thể được sử dụng để khai triển một hàm bất kỳ xác định trên mặt cầu Σ

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

trong đó các hệ số được xác định:

$$A_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2};$$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2};$$

$$\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\pi\varepsilon_m \frac{(n+m)!}{(n-m)!}; \varepsilon_0 = 2; \varepsilon_m = 1 \ \ khi\ k > 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình Laplace có thể viết dưới dạng

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\varphi), \text{ khi } r < a;$$

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi), \text{ khi } r > a.$$

trong đó: $Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}(\alpha_{nm}\cos m\varphi + \beta_{nm}\sin m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)$.

§2. LÝ THUYẾT THẾ

Xét một vật thể, trong đó có một đại lượng vector $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$ được sinh ra từ một vô hướng $\psi = \psi(x,y,z)$ bởi toán tử Gradien:

$$\vec{V} = \vec{V}(x,y,z) = \text{grad}\psi = \nabla\psi, \tag{4.4}$$

hoặc ký hiệu $(-)$ được dùng: $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z) = -\text{grad}\psi = -\nabla\psi$.

Chọn dấu $(+)$ hay $(-)$ tuỳ thuộc vào tính chất của các đại lượng trong các môi trường khác nhau. Khi một trường vector $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$ được sinh ra từ một trường vô hướng $\psi = \psi(x,y,z)$ thì trường vector này được gọi là *trường Gradien* hay là *trường thế*, còn hàm $\psi = \psi(x,y,z)$ được gọi là *thế vô hướng*. Toán tử Gradien trong các hệ tọa độ khác nhau có dạng:

Tọa độ	*Vector đơn vị trực giao*	*3 chiều*
Đề-các (x,y,z)	$(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$	$\nabla\psi(x,y,z)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z$
Trụ (r,φ,z)	$(\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$	$\nabla\psi(r,\varphi,z)=\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z$
Cầu (r,θ,φ)	$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$	$\nabla\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$

Điều kiện cần để $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z)$ là một trường vector được sinh ra từ một trường vô hướng $\psi=\psi(x,y,z)$ là: $\mathrm{rot}\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=0$, hay là xoáy của trường bằng không. Điều kiện này khẳng định trường vector là trường không xoáy. Trường vector là trường cảm ứng nếu div của trường vector này bằng không ($\nabla\cdot\vec{V}=0$). Ta có bảng các toán tử $\nabla\cdot\vec{V}$, $\nabla\times\vec{V}$ trong các hệ tọa độ khác nhau:

Tọa độ	*Vector đơn vị trực giao*	*3 chiều*
Đề-các (x,y,z)	$(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$	$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$; $\nabla\times\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}$
Trụ (r,φ,z)	$(\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z)$	$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$; $\nabla\times\vec{V}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_r & rV_\varphi & V_z\end{vmatrix}$

Cầu (r,θ,φ)	$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$	$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho^2V_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta)+$ $+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$ $\nabla\times\vec{V}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & r\sin\theta\hat{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ V_r & rV_\theta & r\sin V_\varphi\end{vmatrix}$

Như vậy, với một trường vector $\vec{V}$ là không xoáy và cảm ứng, chúng có các tính chất sau:

1. $\mathrm{rot}\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=\vec{0}$; $\mathrm{div}\vec{V}=\nabla\cdot\vec{V}=0$.

2. Trường vector $\vec{V}$ được sinh ra từ một trường vô hướng $\psi=\psi(x,y,z)$:

$$\vec{V}=\pm\mathrm{grad}\psi\,.$$

3. Hàm thế $\psi=\psi(x,y,z)$ là nghiệm của phương trình Laplace:

$$\nabla\cdot\vec{V}=\nabla\cdot\nabla\psi=\nabla^2\psi=0\,.$$

4. Tích phân đường $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\vec{V}d\vec{r}$ là độc lập với đường lấy tích phân nối hai điểm (x_1,y_1,z_1) và (x_2,y_2,z_2).

5. Tích phân đường của vector $\vec{V}$ lấy quanh một đường cong đóng kín C bằng không

$$\oint_C\vec{V}\cdot d\vec{r}=0\,.$$

6. $\vec{V}\cdot d\vec{r}=\nabla\psi\cdot d\vec{r}=d\psi$ là một vi phân.

Sau đây là một vài ví dụ của trường thế:

a) Trường hấp dẫn

Định luật Newton của trường hấp dẫn phát biểu rằng: hai vật thể có khối lượng M_1 và M_2 sẽ hút nhau với một lực $\vec{F}$:

$$\vec{F}=-GM_1M_2\frac{\vec{e}_\rho}{\rho^2}\,.$$

trong đó, các đơn vị đo là $M(\mathrm{kg})$, $F(\mathrm{N})$, $G\left(\mathrm{Nm^2/kg^2}\right)$ và ρ (m); G là hằng số hấp dẫn; ρ là khoảng cách giữa hai khối lượng.

Nếu đặt $M_2 = 1$ thì M_2 được gọi là *khối lượng thử*, lực $\vec{F}$ có dạng $\vec{F} = \vec{g} = -GM_1 \frac{\hat{e}_\rho}{\rho^2}$ được gọi là *lực hấp dẫn* ($\vec{g}$ $\left(\text{N/kg=m/s}^2\right)$). Lực $\vec{F}$ là lực được sinh ra từ hàm thế $\psi = \frac{GM_1M_2}{\rho}$ bằng cách tác động Gradien. Ta thấy hàm thế ψ là nghiệm của phương trình Laplace: $\nabla^2\psi = 0$.

b) Sự di chuyển của chất lỏng

Cho một chất lỏng không bị nén, chúng không có xoáy và không bị cảm ứng:

$$\text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0;\ \text{div}\vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = 0,$$

trong đó, vector $\vec{V}$ là vận tốc của chất lỏng, vector $\vec{V}$ được sinh ra từ một hàm thế ψ:

$$\vec{V} = -\nabla\psi = -\text{grad}\psi.$$

Hàm thế ψ là nghiệm của phương trình Laplace $\nabla^2\psi = \nabla \cdot \vec{V} = 0$.

c) Trường tĩnh điện

Trong trường tĩnh điện, từ định luật Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ và từ định luật Faraday: $\text{rot}\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = \vec{0}$ ta suy ra vector điện trường $\vec{E}$ nhận được từ một hàm thế ψ: $\vec{E} = -\nabla\psi = -\text{grad}\psi$, thỏa mãn phương trình Poisson $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\psi = \rho/\varepsilon_0$. Khi mật độ điện tích bằng không ta có phương trình Laplace: $\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\psi = 0$.

d) Trường tĩnh từ

Vì mật độ dòng bằng không: $\vec{J} = 0, \nabla \times \vec{B} = 0$ và $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ta được vector $\vec{B}$ được sinh ra từ một hàm thế ψ:

$$\vec{B} = -\nabla\psi = -\text{grad}\psi.$$

Hàm thế ψ là nghiệm của phương trình Laplace: $\nabla^2\psi = \nabla \cdot \vec{B} = 0$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH HELMHOLTZ

Phương trình truyền nhiệt hoặc phương trình khuếch tán $\nabla^2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$ mô tả nhiệt độ $u = u(x, y, z, t)$ của miền được xét $\mathbb{R}$ nào đó. Dùng phương pháp tách biến đặt nghiệm dưới dạng

$$u = u(x, y, z, t) = H(x, y, z) \cdot T(t).$$

Thay vào phương trình ta có

$$\nabla^2 H.T(t) = \frac{1}{a^2} H.T'(t) \Rightarrow \frac{\nabla^2 H}{H} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2,$$

trong đó λ là hằng số tách biến.

Ta suy ra phương trình Helmholtz và phương trình của T:

$$\nabla^2 H + \lambda^2 H = 0;\ T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0.$$

Tương tự, trong phương trình sóng $\nabla^2 u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$, dùng phương pháp tách biến, ta cũng suy ra phương trình Helmholtz và phương trình của T:

$$\nabla^2 H + \lambda^2 H = 0 \quad ; \quad T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0.$$

Đối với các phương trình trên, ta sẽ nghiên cứu chi tiết phương trình Helmholtz trong các hệ tọa độ khác nhau.

1. Phương trình Helmholtz trong hệ tọa độ Đề-các (*x, y, z*)

Giải phương trình sau

$$\nabla^2 H + \lambda H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \lambda H = 0, \tag{4.5}$$

$$0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c.$$

Tìm nghiệm dưới dạng: $H = H(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$.

Thay vào phương trình (4.5) ta có

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \lambda XYZ = 0.$$

Thực hiện tách biến cho từng biến

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_1;\ -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \lambda = \lambda_1.$$

Tương tự

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda + \lambda_1 + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_2 \Rightarrow -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_2;\quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda.$$

Như vậy, các nghiệm tách biến đòi hỏi phải thỏa mãn các phương trình sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_1,\ -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_2;\quad \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda.$$

Chọn các hằng số tách biến dưới dạng thuận tiện hơn

$$\lambda_1 = -\omega^2 < 0,\ \ \lambda_2 = \mu^2 > 0,\ \ \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda = -\nu^2 < 0.$$

Ta thu được các phương trình sau

$$\begin{cases} X''(x) + \omega^2 X(x) = 0, 0 < x < a \\ Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0, 0 < y < b \ ; \lambda = \nu^2 + \mu^2 + \omega^2. \\ Z''(y) + \nu^2 Z(z) = 0, 0 < z < c \end{cases} \tag{4.6}$$

Phương trình (4.6) là dạng Sturm–Liouville có nghiệm

$$X_l(x) = \sin\frac{l\pi x}{a};\ Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b};\ Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{c};\ l, m, n = 1, 2, 3...$$

Nghiệm tổng quát của phương trình Helmholtz là chồng chất của các nghiệm riêng

$$H = H(x, y, z) = \sum_l \sum_m \sum_n C_{lmn} X_l(x) Y_m(y) Z_n(z), \tag{4.7}$$

C_{lmn} là các hệ số hằng số.

2. Phương trình Helmholtz trong hệ tọa độ trụ (r, φ, z)

Giải phương trình sau

$$\nabla^2 H + \lambda H = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \lambda H = 0, \tag{4.8}$$

$$0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < z < c.$$

Tìm nghiệm dưới dạng: $H(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$.

Thay vào phương trình (4.8) ta có

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rR')\Phi Z + \frac{1}{r^2}R\Phi'' Z + R\Phi Z'' + \lambda R\Phi Z = 0.$$

Thực hiện tách biến cho từng biến

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + r^2\frac{Z''}{Z} + \lambda r^2 = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \Phi''(\varphi) + \lambda_1\Phi(\varphi) = 0,\ \frac{r^2 R'' + rR'}{R} + r^2\frac{Z''}{Z} + \lambda r^2 = \lambda_1.$$

Tách biến cho R và Z ta có

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{r^2 R} - \frac{\lambda_1}{r^2} + \lambda = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z''(z) + \lambda_2 Z(z) = 0, \\ r^2 R'' + rR' + \left[(\lambda - \lambda_2) r^2 - \lambda_1\right] R = 0 \end{cases}$$

Ta thu được các phương trình:

$$\begin{aligned} & r^2 R'' + rR' + \left[(\lambda - \lambda_2) r^2 - \lambda_1\right] R = 0, && 0 < r < a; \\ & \Phi''(\varphi) + \lambda_1 \Phi(\varphi) = 0, && 0 < \varphi < 2\pi; \\ & Z''(z) + \lambda_2 Z(z) = 0, && 0 < z < c. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Điều kiện biên trong hình trụ có dạng

$$H(r, 0, z) = H(r, 2\pi, z), \quad \frac{\partial H(r, 0, z)}{\partial \varphi} = \frac{\partial H(r, 2\pi, z)}{\partial \varphi}.$$

Do đó phương trình xác định $\Phi = \Phi(\varphi)$ trở thành phương trình Sturm–Liouville với điều kiện biên tuần hoàn, dẫn đến kết quả $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \omega^2$. Xét các trường hợp điều kiện biên sau:

a) Trường hợp 1: Cho $\lambda_2 = \mu^2 = \text{const} > 0$, nghiệm của $Z(z)$ có dạng

$$Z = Z(z) = C_1 \cos \mu z + C_2 \sin \mu z. \tag{4.10}$$

Do đó:

– Nếu $\lambda - \lambda_2 = \lambda - \mu^2 = \nu^2$, phương trình cho R có dạng

$$r^2 R'' + rR' + \left[\nu^2 r^2 - \omega^2\right] R = 0 \tag{4.11}$$

là phương trình Bessel.

– Nếu $\lambda - \lambda_2 = \lambda - \mu^2 = -\nu^2$, phương trình cho R có dạng

$$r^2 R'' + rR' - \left[\nu^2 r^2 + \omega^2\right] R = 0 \tag{4.12}$$

là phương trình Bessel biến thể.

b) Trường hợp 2: Cho $\lambda_2 = -\mu^2 = \text{const} < 0$, nghiệm của $Z(z)$ có dạng

$$Z = Z(z) = C_1 \operatorname{ch} \mu z + C_2 \operatorname{sh} \mu z. \tag{4.13}$$

Do đó:

– Nếu $\lambda - \lambda_2 = \lambda + \mu^2 = \nu^2$, phương trình cho R có dạng

$$r^2 R'' + rR' + \left[\nu^2 r^2 - \omega^2\right] R = 0$$

là phương trình Bessel.

– Nếu $\lambda - \lambda_2 = \lambda + \mu^2 = -\nu^2$, phương trình cho R có dạng

$$r^2 R'' + rR' - \left[\nu^2 r^2 + \omega^2\right] R = 0$$

là phương trình Bessel biến thể.

3. Phương trình Helmholtz trong hệ tọa độ cầu (r,θ,φ)

$$\nabla^2 H + \lambda H = 0;$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dH}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial H}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi^2}+\lambda H=0 \qquad (4.14)$$

$$0<r<a,\quad 0<\theta<\pi,\quad 0<\varphi<2\pi.$$

Tìm nghiệm dưới dạng: $H(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, thay vào phương trình (4.14) ta có

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2R'\right)\Theta\Phi+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\Theta'\right)R\Phi+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R\Theta\Phi''+\lambda R\Theta\Phi=0$$

Thực hiện tách biến cho từng biến

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{\sin^2\theta}{R}\left[r^2R''+2rR'\right]+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda r^2\sin^2\theta=\lambda_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda_1\Phi=0\\[2ex] \dfrac{\sin^2\theta}{R}\left[r^2R''+2rR'\right]+\dfrac{\sin\theta}{\Theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda r^2\sin^2\theta=\lambda_1\end{cases}$$

trong đó λ_1 là hằng số tách biến, thực hiện tách các biến còn lại r,θ ta có

$$\frac{r^2R''+2rR'}{R}+\lambda r^2=\frac{\lambda_1}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\Theta'\right)=\lambda_2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r^2R''+2rR'+\left(\lambda r^2-\lambda_2\right)R=0,\\[2ex] \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda_2-\dfrac{\lambda_1}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0\end{cases}$$

Như vậy, các nghiệm tách biến của phương trình Helmholtz trong tọa độ cầu $H(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ thỏa mãn các phương trình sau:

$$\begin{cases}r^2\dfrac{\partial^2R}{\partial r^2}+2r\dfrac{\partial R}{\partial\rho}+\left(\lambda r^2-\lambda_2\right)R=0, & 0<r<a;\\[2ex] \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda_2-\dfrac{\lambda_1}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, & 0<\theta<\pi;\\[2ex] \dfrac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda_1\Phi=0, & 0<\varphi<2\pi.\end{cases}$$

Nhận thấy, R thỏa mãn phương trình Bessel, Θ thỏa mãn phương trình xác định đa thức Legendre liên kết, còn hàm Φ chính là phương trình cho dao động tử điều hoà một chiều, hay bài toán Sturm–Liouville với điều kiện biên tuần hoàn. Giải bài toán Sturm–Liouville ta có các trị riêng $\lambda_1 = m^2$, $m = 0,1,2,3...$ Thực hiện phép biến đổi $\xi = \cos\theta$ phương trình cho V có dạng

$$\left(1-\xi^2\right)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\xi\frac{d\Theta}{d\xi} + \left(\lambda_2 - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)\Theta = 0, \quad -1 < \xi < 1.$$

Đây là bài toán Sturm–Liouville của phương trình xác định đa thức Legendre liên kết có trị riêng $\lambda_1 = n(n+1)$, $n = 0,1,2...; m = 0,1,2...$ (xem mục 3, §7, Chương VII). Nghiệm của phương trình trên cho đa thức Legendre liên kết:

$$\Theta = \Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \qquad 0 < \theta < \pi.$$

Suy ra phương trình cho R có dạng

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r} + \left[\lambda r^2 - n(n+1)\right]R = 0, \qquad 0 < r < a.$$

Để giải phương trình này, xét các trường hợp sau:

a) Trường hợp 1: Cho $\lambda = -\omega^2 < 0$, phương trình xác định R có dạng

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r} - \left[\omega^2 r^2 + n(n+1)\right]R = 0, 0 < r < a. \qquad (4.15)$$

là phương trình xác định hàm Besel cầu.

b) Trường hợp 2: Cho $\lambda = 0$, phương trình xác định R có dạng

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r} + \lambda_2 R = 0, \; 0 < r < a \qquad (4.16)$$

là phương trình Cauchy–Euler.

c) Trường hợp 3: Cho $\lambda = \omega^2 < 0$, phương trình xác định R có dạng

$$r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r} + \left[\omega^2 r^2 - n(n+1)\right]R = 0, \; 0 < r < a \qquad (4.17)$$

là phương trình xác định hàm Besel cầu.

Qua các bài toán giải phương trình Helmholtz ở trên, ta thấy: việc lựa chọn hệ tọa độ phù hợp với các điều kiện biên cho ta các phương trình khác nhau để tìm nghiệm tách biến. Thực chất phương trình Laplace là trường hợp riêng của phương trình Helmholtz khi $\lambda = 0$.

§4. HÀM ĐIỀU HOÀ VÀ CÁC TÍNH CHẤT

Bất kỳ một nghiệm nào của phương trình Laplace cũng được gọi là *hàm điều hòa* hoặc còn được gọi là *hàm thế*. Hàm điều hòa $u = u(x, y, z)$ khả vi và liên tục thỏa mãn phương trình Laplace trong thể tích V bị bao bởi bề mặt S có các tính chất sau:

1. Tích phân theo bề mặt của đạo hàm theo pháp tuyến bằng không

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0 .$$

2. Nếu $u = 0$ trên biên S thì $u = 0$ mọi nơi trên thể tích V.

3. Giá trị của hàm $u(x, y, z)$, $x, y, z \in V$ là duy nhất được xác định bằng các giá trị đã biết của hàm u và $\frac{\partial u}{\partial n}$ trên biên S.

4. Nếu $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ mọi nơi trên biên S thì $u = \text{const}$ mọi nơi trong V.

5. Nếu u là hàm điều hòa bên trong hình cầu bán kính ρ, nếu S là bề mặt cầu có tâm nằm tại điểm (x_0, y_0, z_0) thì giá trị trung bình của hàm u trên bề mặt S có dạng

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \oiint_S u(x, y, z) d\sigma .$$

6. Nếu C là vòng tròn bán kính r có tâm tại (x_0, y_0) và cho hàm u thỏa mãn phương trình Laplace bên trong và trên đường tròn C thì giá trị trung bình của hàm u trên đường cong C có dạng

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi r} \int_C u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) r d\theta .$$

Tính chất 6 là trường hợp hai chiều của tính chất 5.

7. Giá trị cực đại và cực tiểu của hàm điều hòa u luôn luôn nằm trên biên của miền được xét. Tính chất này áp dụng cho cả trường hợp 2 và 3 chiều.

8. Bài toán Dirichlet

$$\nabla^2 u = 0,\ (x, y, z) \in V;\ \ u\big|_{(x,y,z)\in S} = g(x, y, z)$$

có nghiệm duy nhất.

9. Cho dù đổi biến, một hàm điều hòa vẫn luôn giữ tính chất là hàm điều hoà theo biến mới.

§5. PHƯƠNG TRÌNH POISSON TRONG MIỀN CHỮ NHẬT

Xét phương trình Poisson trong hình chữ nhật:

$$\nabla^2 u = f(x,y),\ (x,y) \in R = \{x,y \mid 0 < x < a, 0 < y < b\} \tag{4.18}$$

thỏa mãn điều kiện biên

$$u(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial R} = g(x,y). \tag{4.19}$$

Nghiệm của phương trình (4.18) có thể tìm được dựa trên nghiệm của bài toán trị riêng hai chiều:

$$\nabla^2\Phi + \lambda\Phi = 0,\quad (x,y) \in R, \tag{4.20}$$

thỏa mãn điều kiện biên thuần nhất

$$\Phi\big|_{(x,y)\in\partial R} = 0. \tag{4.21}$$

Giả sử nghiệm có dạng $\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$, thực hiện phép tách biến ta thu được các phương trình vi phân cấp hai

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda = \lambda_1. \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} - \lambda_1 X = 0, \qquad X(0) = 0,\ X(a) = 0 \\ \dfrac{d^2Y}{dy^2} + (\lambda + \lambda_1)Y = 0,\ Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 \end{cases} \tag{4.22a}$$

trong đó λ_1 là hằng số tách biến, đặt $\lambda_1 = -\omega^2$, $\lambda + \lambda_1 = \mu^2$ ta có

$$\begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2} + \omega^2 X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega = \omega_n = \frac{n\pi}{a},\ X = X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{4.23a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dy^2} + \mu^2 Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = \mu_m = \frac{m\pi}{b},\quad Y = Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b} \tag{4.23b}$$

Trị riêng λ có dạng

$$\lambda = \lambda_{nm} = \omega_n^2 + \mu_m^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{4.24}$$

tương ứng có hàm riêng

$$\Phi = \Phi_{nm}(x,y) = \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \tag{4.25}$$

thỏa mãn phương trình

$$\nabla^2\Phi_{nm}(x,y) = -\lambda_{nm}\Phi_{nm}(x,y). \tag{4.26}$$

Các hàm riêng có tính trực giao:

$$\iint_R \Phi_{nm}(x,y)\Phi_{ij}(x,y)dxdy = \begin{cases} 0, & (i,j) \neq (n,m) \\ \|\Phi_{nm}\|^2 = \dfrac{ab}{4}, & (i,j) = (n,m) \end{cases} \tag{4.27}$$

Bây giờ giả sử nghiệm của phương trình (4.18) và (4.19) là

$$u = u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\Phi_{nm}(x,y). \tag{4.28}$$

Sử dụng tính trực giao của các hàm $\Phi_{nm}(x,y)$ ta có

$$\iint_R u\Phi_{ij}dxdy = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\iint_R \Phi_{nm}\Phi_{ij}dxdy. \tag{4.29}$$

Chỉ có một hạng thức khác không trong dấu tổng khi $n = i$ và $m = j$, vì thế phương trình (4.29) rút gọn thành

$$\iint_R u\Phi_{ij}dxdy = A_{ij}\|\Phi_{ij}\|^2,$$

hoặc thay i, j bằng n, m ta có thể viết

$$A_{nm} = \frac{4}{ab}\iint_R u\Phi_{nm}dxdy. \tag{4.30}$$

Phương trình (4.26) cho phép ta viết

$$\Phi_{nm}(x,y) = -\frac{1}{\lambda_{nm}}\nabla^2\Phi_{nm}(x,y),$$

do đó phương trình (4.30) được viết

$$A_{nm} = -\frac{4}{ab\lambda_{nm}}\iint_R u\nabla^2\Phi_{nm}dxdy. \tag{4.31}$$

Công thức Green 2 chiều có dạng

$$\iint_R (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)d\sigma = \int_\Gamma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds$$

được dùng để ước lượng tích phân (4.31). Thay $v = \Phi_{nm}$ vào phương trình trên và viết công thức Green dưới dạng

$$\iint_R (u\nabla^2\Phi_{nm} - \Phi_{nm}\nabla^2 u)dxdy = \oint (u\nabla\Phi_{nm} - \Phi_{nm}\nabla u)\cdot\vec{n}ds. \tag{4.32}$$

trong đó $\vec{n}$ là vector đơn vị pháp tuyến ngoài trên biên của hình chữ nhật.

Nếu u thỏa mãn phương trình

$$\nabla^2 u = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in R, \; u(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial R} = g(x,y)$$

thì phương trình (4.32) có dạng

$$\iint_R u\nabla^2\Phi_{nm}dxdy = \iint_R \Phi_{nm}f(x,y)dxdy + \oint \left(g(x,y)\nabla\Phi_{nm} - \Phi_{nm}\nabla g\right)\cdot\vec{n}ds \tag{4.33}$$

Chú ý rằng, $\Phi_{nm} = 0$ trên $C = \partial R$, do đó phương trình (4.33) được viết đơn giản là

$$\iint_R u\nabla^2\Phi_{nm}dxdy = \iint_R \Phi_{nm}f(x,y)dxdy + \oint g(x,y)\nabla\Phi_{nm}\cdot\vec{n}ds. \tag{4.34}$$

Suy ra hệ số A_{nm} được ước lượng theo công thức

$$\begin{aligned} A_{nm} &= -\frac{4}{ab\lambda_{nm}}\iint_R u\nabla^2\Phi_{nm}dxdy \\ &= -\frac{4}{ab\lambda_{nm}}\iint_R \Phi_{nm}f(x,y)dxdy + \oint g(x,y)\nabla\Phi_{nm}\cdot\vec{n}ds. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Tương tự, có thể ước lượng kết quả như trên đối với các bài toán biên Neumman và Robin.

§6. CÔNG THỨC TÍCH PHÂN POISSON TRONG MIỀN TRÒN

Tìm nghiệm của phương trình Laplace, chẳng hạn trong bài toán nhiệt dừng $u = u(r,\varphi)$:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \\ u(a,\varphi) = f(\varphi),\ -\pi < \varphi < \pi,\ 0 < r < a. \end{cases} \tag{4.36}$$

Đặt nghiệm dưới dạng tách biến

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \tag{4.37}$$

thay vào phương trình (4.36) ta được

$$\frac{(rR')'}{rR} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \Leftrightarrow \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Suy ra hai phương trình vi phân:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0;\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0.$$

Phương trình cho R là phương trình Cauchy – Euler, phương trình cho Φ là phương trình xác định một dao động điều hoà. Các nghiệm $u(r,\varphi)$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

1) Nghiệm phải hữu hạn trên biên và bên trong vòng tròn:

$$\left|u(r,\varphi)\right| < \infty,\ r \le a.$$

2) Nghiệm phải thỏa mãn điều kiện liên tục và tuần hoàn:

$$u(r,-\pi) = u(r,\pi);\ \frac{\partial u(r,-\pi)}{\partial\varphi} = \frac{\partial u(r,\pi)}{\partial\varphi}.$$

Trường hợp 2, áp dụng cho hàm Φ là:

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi);\ \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi).$$

Như vậy, đối với hàm Φ ta có bài toán Sturm–Liouville với các điều kiện biên tuần hoàn. Xét trường hợp $\lambda = -\omega^2$, $\lambda = 0$, $\lambda = \omega^2$ ta thu được các hàm riêng và trị riêng sau:

$$\lambda = \lambda_0 = 0 \Rightarrow \Phi = \Phi_0(\varphi) = 1;$$

$$\lambda = \lambda_n = n^2 \Rightarrow \Phi = \Phi_n(\varphi) = \alpha_0 \sin n\varphi + \alpha_1 \cos n\varphi,\ n = 1,2...$$

Nghiệm tương ứng cho phương trình Cauchy – Euler có dạng:

$$\lambda = \lambda_0 = 0:\quad R = R_0(r) = c_0 + c_1 \ln r;$$

$$\lambda = \lambda_n = n^2:\ R = R_n(r) = \beta_0 r^n + \beta_1 r^{-n},\ n = 1,2...$$

Tương ứng, ta có nghiệm cho hàm $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$:

$$u_0(r,\varphi) = c_0 + c_1 \ln r;$$

$$u_n(r,\varphi) = \left(\beta_0 r^n + \beta_1 r^{-n}\right)\left(\alpha_0 \sin n\varphi + \alpha_1 \cos n\varphi\right).$$

Xét nghiệm hữu hạn trong khoảng $0 \le r \le a$ ta suy ra $c_1 = 0$, $\beta_1 = 0$ vì giá trị tuyệt đối của các hàm $\ln r$ và r^{-n} dần đến vô hạn khi r dần đến 0. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân sẽ có dạng

$$u(r,\varphi) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \text{ khi } r < a \\ \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \text{ khi } r > a \end{cases} \tag{4.38}$$

là nghiệm bên trong và bên ngoài vòng tròn.

Thay điều kiện biên tại $r = a$ ta có

$$u(a,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = f(\varphi). \tag{4.39}$$

Có thể khai triển $f(\varphi)$ vào chuỗi Fourier như sau

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi\right), \tag{4.40}$$

trong đó: $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(\psi)d\psi$;

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi;$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi.$$

So sánh (4.38) và (4.40) ta có:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2},\quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n},\ B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \quad \text{(Bài toán trong);}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2},\quad A_n = \alpha_n a^n,\ B_n = \beta_n a^n \quad \text{(Bài toán ngoài).}$$

Nghiệm của phương trình có dạng:

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi) \quad \text{(Bài toán trong);}$$

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi + \beta_n\sin n\varphi) \quad \text{(Bài toán ngoài).}$$

Dưới đây sẽ đưa ra công thức tích phân Poisson.

Xét bài toán trong, đặt vào phương trình ta có

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n\psi\cos n\varphi + \sin n\psi\sin n\varphi\right\}d\psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\psi)\right\}d\psi.$$

Hệ thức trong dấu móc {} có dạng

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\varphi-\psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t^n\left[e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2},\quad t = \frac{r}{a} < 1.$$

Chú ý rằng, đã sử dụng công thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{b}{1-b} \quad \text{khi } b < 1.$$

Do đó, nghiệm có thể viết

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\cos\psi+a^2}d\psi,$$

đó là nghiệm của phương trình Laplace bên trong vòng tròn và được gọi là *tích phân Poisson*. Hạng thức

$$K(r,\varphi,a,\psi)=\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\cos\psi+a^2}$$

được gọi là *nhân Poisson*. Nhận xét rằng, $K>0$ khi $r<a$ vì $2ar<a^2+r^2$. Vậy nghiệm trong và ngoài hình tròn có thể viết

$$u(r,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\frac{a^2-r^2}{r^2-2ar\cos\psi+a^2}d\psi, & \text{khi } r<a\\ f(\varphi), & \text{khi } r=a\end{cases}$$

$$u(r,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\frac{r^2-a^2}{a^2-2ar\cos\psi+r^2}d\psi, & \text{khi } r>a\\ f(\varphi), & \text{khi } r=a\end{cases}$$

MỘT SỐ BÀI GIẢI MẪU

1. Hãy viết nghiệm của bài toán biên thứ nhất cho phương trình Laplace bên trong vòng tròn và bên ngoài vòng tròn:

$$\Delta_{r,\varphi}u=0,\quad 0\le r\le a,\ 0\le\varphi\le 2\pi;$$

$$u\big|_{r=a}=f(\varphi).$$

Giải. Phương trình Laplace có dạng

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0,\ (0\le r\le a),u\big|_{r=a}=f(\varphi).$$

Sử dụng phương pháp tách biến đặt

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi),$$

thay vào phương trình ta suy ra

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2}=0\Rightarrow\frac{1}{Rr}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2}=0.$$

Chọn $\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{d^2\Phi}{dr^2}=-\nu^2$ nên ta có phương trình: $\dfrac{d^2\Phi}{dr^2}+\nu^2\Phi=0$.

Hàm $\Phi(\varphi)$ là hàm tuần hoàn thỏa mãn $\begin{cases}\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\\ \Phi'(\varphi+2\pi)=\Phi'(\varphi)\end{cases}$

Vậy $\Phi(\varphi)$ có dạng

$$\begin{cases}\nu=n,\ n=0,1,2...\\ \Phi_n(\varphi)=(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi)\end{cases}$$

Phương trình đối với $R(r)$ là

$$r^2R''+rR'-n^2R=0.$$

Chọn nghiệm có dạng $R=r^\sigma$, thay vào phương trình trên ta được

$$\sigma(\sigma-1)+\sigma-n^2=0\Rightarrow\sigma=\pm n.$$

Vậy nghiệm R là: $R_n=\begin{cases}r^n, r<a\\ r^{-n}, r>a\end{cases}$

Nghiệm riêng của u có dạng:

$$u_n=R_n\Phi_n=r^n(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi), r<a.$$

Nghiệm tổng quát là

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi),$$

trong đó các hệ số c_n và d_n được xác định từ điều kiện biên.

Từ điều kiện biên ta có:

$$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi)=f(\varphi);$$

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}a^n(c_n\cos n\varphi+d_n\sin n\varphi)=f(\varphi),\quad c_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{A_0}{2};$$

$$c_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\frac{A_n}{a^n},d_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{B_n}{a^n}.$$

Vậy nghiệm của bài toán trong là

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi).$$

Kết quả tương tự cho bài toán ngoài:

$$u(r,\varphi)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi).$$

2. Cho một hình trụ dẫn vô hạn, được tích điện đến thế:

$$V = \begin{cases} V_1, & 0 < \varphi < \pi \\ V_2, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Tìm thế của trường điện từ bên trong và bên ngoài mặt trụ.

Giải. Thế của trường điện từ thoả mãn phương trình Laplace trong hình trụ, tuy nhiên do điều kiện biên không phụ thuộc vào z cho nên đạo hàm theo z bằng 0:

$$\begin{aligned} &\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, \ (0 \le r \le a) \\ &u\big|_{r=a} = V = \begin{cases} V_1, & 0 < \varphi < \pi \\ V_2, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Sử dụng phương pháp tách biến $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{Rr}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Phi r^2}\frac{d^2\Phi}{dr^2} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Đặt

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\nu^2 \Rightarrow \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \nu^2\Phi = 0. \tag{3}$$

Hàm $\Phi(\varphi)$ là hàm tuần hoàn thỏa mãn $\begin{cases} \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \\ \Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi) \end{cases}$.

Vậy $\Phi(\varphi)$ có dạng

$$\begin{cases} \nu = n, \ n = 0,1,2... \\ \Phi_n(\varphi) = (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) \end{cases}$$

Phương trình đối với $R(r)$ là

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0. \tag{4}$$

Chọn $R = r^\sigma$, thay vào (4) ta suy ra

$$\sigma(\sigma - 1) + \sigma - n^2 = 0 \Rightarrow \sigma = \pm n.$$

Do đó: $$R_n = \begin{cases} r^n, & r < a \\ r^{-n}, & r > a \end{cases}$$

Nghiệm của (1) có dạng

$$u_n = \begin{cases} r^n\left(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi\right), & r < a \\ r^{-n}\left(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi\right), & r > a \end{cases}$$

trong đó các hệ số c_n và d_n được xác định từ điều kiện biên.

Nghiệm bên trong là

$$u(r,\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi\right).$$

Theo điều kiện biên ta có

$$u(a,\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi\right) = V = \begin{cases} V_1, & 0 < \varphi < \pi \\ V_2, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

trong đó :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\left[V_1 \int_0^{\pi} d\varphi + V_2 \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi\right] = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

$$c_n = \frac{1}{\pi a^n}\left[V_1 \int_0^{\pi} \cos n\varphi d\varphi + V_2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos n\varphi d\varphi\right] = 0$$

$$d_n = \frac{1}{\pi a^n}\left[V_1 \int_0^{\pi} \sin n\varphi d\varphi + V_2 \int_{\pi}^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi\right]$$

$$= \frac{V_1\left[1-(-1)^n\right]}{a^n n\pi} + \frac{V_2\left[(-1)^n - 1\right]}{a^n n\pi} = \frac{2(V_1 - V_2)}{(2k+1)\pi a^n}.$$

Do $\int_0^{\pi} \sin n\varphi d\varphi = -\frac{1}{n}\cos n\varphi\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n}$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi = -\frac{1}{n}\cos n\varphi\Big|_{\varphi=\pi}^{\varphi=2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n}$$

$$\Rightarrow u(r,\varphi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{(2k+1)}.$$

Tương tự ta có nghiệm bên ngoài:

$$u(r,\varphi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{(2k+1)}.$$

Xét biểu thức

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow J=\sum_{k=0}^{\infty}\xi^{2k+1}\frac{\sin(2k+1)\varphi}{(2k+1)}=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{2k+1}e^{i(2k+1)\varphi}}{(2k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^{2k+1}e^{-i(2k+1)\varphi}}{(2k+1)}\right\}$$

đặt $z=\xi e^{i\varphi}=\xi\cos\varphi+i\xi\sin\varphi$ suy ra $z^*=\xi e^{-i\varphi}=\xi\cos\varphi-i\xi\sin\varphi$

$$J=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(z^{2k+1}\right)^*}{(2k+1)}\right\}=\frac{1}{4i}\left\{\ln\frac{1+z}{1-z}-\ln\frac{1+z^*}{1-z^*}\right\}$$

$$=\frac{1}{4i}\ln\frac{1-\xi^2+2i\xi\sin\varphi}{1-\xi^2-2i\xi\sin\varphi}=\frac{1}{4i}\ln\frac{1+\dfrac{2i\xi\sin\varphi}{1-\xi^2}}{1-\dfrac{2i\xi\sin\varphi}{1-\xi^2}}$$

$$=\frac{1}{2i}\operatorname{arcth}\frac{2i\xi\sin\varphi}{1-\xi^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\xi\sin\varphi}{1-\xi^2}.$$

Vì $\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $\operatorname{tg}z=-i\operatorname{th}iz$

Kết quả suy ra được:

$$u(r,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{V_1+V_2}{2}+\dfrac{2(V_1-V_2)}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2ar\sin\varphi}{a^2-r^2}, & r<a\\[2ex] \dfrac{V_1+V_2}{2}+\dfrac{2(V_1-V_2)}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{2ar\sin\varphi}{r^2-a^2}, & r>a\end{cases}$$

3. Tìm nghiệm $u(x,y)$ của phương trình Laplace trong hình chữ nhật $0<x<p$, $0<y<s$ thỏa mãn các điều kiện biên sau:

a) $u(0,y)=u_x(p,y)=0,\ u(x,0)=0,\ u(x,s)=f(x)$;

b) $u_x(0,y)=u_x(p,y)=0,\ u(x,0)=A,\ u(x,s)=Bx$;

c) $u(0,y)=U,\ u_x(p,y)=0,\ u_y(x,0)=T\sin\frac{\pi x}{2p},\ u(x,s)=0.$

Giải. a) Ta giải phương trình Laplace

$$\Lambda_{x,y}u(x,y)=0\Leftrightarrow\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0 \qquad (a.1)$$

thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases}u(0,y)=u_x(p,y)=0,\\ u(x,0)=0,\ u(x,s)=f(x)\end{cases},\quad L_x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} L_x X(x) = -\lambda^2 X(x) \\ X(0) = X'(p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_k(x) = \sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2p} \\ \lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2p} \end{cases}$$

Nghiệm có dạng

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(y) X_k(x).$$

thay vào phương trình (a.1) ta có

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[Y_k''(y) - \lambda^2 Y_k(y)\right] X_k(x) = 0 \qquad \text{(a.2)}$$

$$\Rightarrow Y_k''(y) - \lambda^2 Y_k(y) = 0$$

Giải (a.2) ta được

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch}(\lambda_k y) + B_k \operatorname{sh}(\lambda_k y)$$

Do đó nghiệm của (a.1) là

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k \operatorname{ch}(\lambda_k y) + B_k \operatorname{sh}(\lambda_k y)\right] X_k(x).$$

Từ điều kiện biên $u(x,0) = 0$ ta suy ra

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x) = 0 \Rightarrow A_k = 0.$$

Vậy : $u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \operatorname{sh}\lambda_k y X_k(x)$.

Từ điều kiện

$$u(x,s) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \operatorname{sh}(\lambda_k s) X_k(x)$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{2}{p\operatorname{sh}(\lambda_k s)} \int_0^p f(x) X_k(x)\,dx.$$

Kết quả là

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{2p} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2p},$$

trong đó $B_k = \dfrac{2}{p\operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)\pi s}{2p}} \displaystyle\int_0^p f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2p}\,dx.$

b) Giải phương trình Laplace

$$\Delta_{x,y} u(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(b.1)}$$

thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} u_x(0,y) = u_x(p,y) = 0, \\ u(x,0) = A,\ u(x,s) = Bx \end{cases} \qquad \text{(b.2)}$$

Đặt $\quad L_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_x X(x) = -\lambda^2 X(x) \\ X'(0) = X'(p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi x}{p} \\ \lambda_n = \dfrac{n\pi}{p} \end{cases}$$

Nghiệm có dạng

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) X_n(x),$$

thay vào phương trình (b.1) ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[Y_n''(y) - \lambda^2 Y_n(y) \right] X_n(x) = 0 \\ &\Rightarrow Y_n''(y) - \lambda_n^2 Y_n(y) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(b.3)}$$

Xét các trường hợp:

$$n = 0 \Rightarrow Y_0''(y) = 0 \Rightarrow Y_0 = My + N;$$

$$n > 0 \Rightarrow Y_n(y) = A_n ch(\lambda_n y) + B_n sh(\lambda_n y).$$

Suy ra nghiệm của (b.1) có dạng

$$u(x,y) = My + N + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n ch(\lambda_n y) + B_n sh(\lambda_n y) \right] X_n(x).$$

Sử dụng các điều kiện (b.2) để xác định các hệ số M, N, A_n và B_n:

$$u(x,0) = A = N + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = A \Rightarrow N = A, A_n = 0;$$

$$u(x,s) = Bx = Ms + A + \sum_{n=1}^{\infty} B_n sh(\lambda_n s) X_n(x)$$

$$\Rightarrow Ms + A = B \times \frac{1}{p} \int_0^p x dx = \frac{Bp}{2} \Rightarrow M = \frac{Bp - 2A}{2s};$$

$$B_n \operatorname{sh}(\lambda_n s) = \frac{2B}{p}\int_0^p x\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{px}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{p}\Big|_{x=0}^{x=p} - \frac{p}{n\pi}\int_0^p \sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$= \left(\frac{p}{n\pi}\right)^2\left[(-1)^n - 1\right] = -\frac{4Bp}{(2k+1)^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow B_n = -\frac{4Bp}{(2k+1)^2\pi^2 \operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)\pi s}{p}}$$

Kết quả là

$$u(x,y) = \frac{(Bp-2A)y}{2s} +$$

$$+ A - \frac{4Bp}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2 \operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)\pi s}{p}}\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{p}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{p}$$

c) Cách giải tương tự ta thu được kết quả như sau

$$u(x,y) = U + \frac{2p}{\pi}\left[T\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2p} - \left(\operatorname{ch}^{-1}\frac{\pi s}{2p}\right)\left(\frac{2U}{p} + T\operatorname{sh}\frac{\pi s}{2p}\right)\operatorname{ch}\frac{\pi y}{2p}\right]\sin\frac{\pi x}{2p} -$$

$$-\frac{4U}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}^{-1}\dfrac{(2k+1)\pi s}{2p}}{2k+1}\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi y}{2p}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2p}.$$

4. Tìm phân bố nhiệt dừng của tấm kim loại có dạng hình quạt tròn, hai đường bán kính duy trì nhiệt độ u_1, còn phần cung tròn duy trì nhiệt độ u_2.

Giải. Giải phương trình:

$$\Delta_{r,\varphi}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,\ u = u(r,\varphi);\ \begin{cases} 0 < r < R \\ 0 < \varphi < \alpha \end{cases}$$

thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u(r,0) = u(r,\alpha) = u_1 \\ u(R,\varphi) = u_2 \end{cases}$.

Chọn nghiệm dưới dạng $u(r,\varphi) = v(r,\varphi) + u_1$. Từ các điều kiện đã cho suy ra các điều kiện tương ứng sau

$$\begin{cases} u(r,0) = v(r,0) + u_1 = u_1 \Rightarrow v(r,0) = 0 \\ u(r,\alpha) = v(r,\alpha) + = u_1 \Rightarrow v(r,\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$u(R,\varphi)=v(R,\varphi)+u_1=u_2 \Rightarrow v(R,\varphi)=u_2-u_1$$

$$L_\varphi=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\ \begin{cases} L_\varphi\Phi(\varphi)=-\lambda^2\Phi(\varphi) \\ \Phi(0)=\Phi(\alpha)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \Phi_n(\varphi)=B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha};\ \lambda_n=\frac{n\pi}{\alpha},\ n=1,2... \right.$$

Hàm $v(r,\varphi)$ có dạng

$$v(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\Phi_n(\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 f_n''(r)+r f_n'(r)-\lambda_n^2 f_n(r)=0 \\ f_n(r)=r^\sigma \to \sigma=\pm\lambda_n \end{cases} \Rightarrow f_n(r)=\begin{cases} r^{\frac{n\pi}{\alpha}},\ 0<r<R \\ r^{-\frac{n\pi}{\alpha}},\ r>R \end{cases}$$

Từ điều kiện ban đầu ta có

$$v(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n\pi}{\alpha}} B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha};$$

$$v(R,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} R^{\frac{n\pi}{\alpha}} B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}=u_2-u_1$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{2(u_2-u_1)}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^\alpha \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi=\frac{4(u_2-u_1)}{(2k+1)\pi}R^{-\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}}.$$

Vậy nghiệm $v(r,\varphi)$ có công thức là

$$v(r,\varphi)=\frac{4(u_2-u_1)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}}\sin\frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}.$$

Suy ra nghiệm của bài toán cần tìm là

$$u(r,\varphi)=u_1+\frac{4(u_2-u_1)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}}\sin\frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow u(r,\varphi)=\frac{2u_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-R^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2R^{\frac{\pi}{\alpha}}r^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}}+\frac{2u_2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2R^{\frac{\pi}{\alpha}}r^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}}{r^{\frac{2\pi}{\alpha}}-R^{\frac{2\pi}{\alpha}}}.$$

BÀI TẬP

4.1. Hãy viết nghiệm của bài toán biên thứ II cho phương trình Laplace bên trong vòng tròn và bên ngoài vòng tròn:

$$\Delta_{r,\varphi} u = 0, \quad 0 \le r \le a, \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{r=a} = f(\varphi)$$

trong đó: ν – hướng pháp tuyến ngoài đối với vùng được xét, trong trường hợp vòng tròn $\nu \equiv r$:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) + \alpha .$$

4.2. Tìm nghiệm bên trong và bên ngoài của phương trình Laplace, nếu điều kiện biên có dạng:

$a)\, u\big|_{r=a} = A\sin\varphi;$

$b)\, u\big|_{r=a} = A\sin^3\varphi + B;$

$$c)\, u\big|_{r=a} = \begin{cases} A\sin\varphi, & 0 < \varphi < \pi \\ \dfrac{1}{3} A\sin^3\varphi, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Chú ý rằng: $\sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin 3\varphi$

4.3. Giải bài toán trong của phương trình Dirichlet đối với một vành tròn $a \le r \le b$, với điều kiện biên:

$$u\big|_{r=a} = f(\varphi), \ u\big|_{r=b} = F(\varphi).$$

4.4. Tìm nghiệm của phương trình Laplace trong hình vành khuyên $a < r < b$ thỏa mãn các điều kiện biên sau:

$a)\ u(a,\varphi) = 0, \ u(b,\varphi) = \cos\varphi;$

$b)\ u(a,\varphi) = A, \ u(b,\varphi) = B\sin 2\varphi;$

$c)\ u_r(a,\varphi) = q\cos\varphi, \ u(b,\varphi) = Q + T\sin 2\varphi.$

4.5. Tìm nghiệm của phương trình Laplace trong hình quạt $0 < r < R, \ 0 < \varphi < \alpha$ thỏa mãn các điều kiện biên sau:

$a)\ u(r,0) = u(r,\alpha) = 0; \ u(\mathrm{R},\varphi) = A\varphi;$

$b)\ u_\varphi(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \ u(R,\varphi) = f(\varphi).$

4.6. Biên của một tấm kim loại mỏng có dạng hình quạt $r \le R$, $0 \le \varphi \le \alpha$ cho bởi nhiệt độ sau:

$$u = \begin{cases} f(\varphi), & r = R \\ 0, & \varphi = 0, \varphi = \alpha \end{cases}$$

Hãy tìm trường nhiệt dừng của tấm này, xét trường hợp riêng:

$$f(\varphi) = \begin{cases} u_1, & 0 < \varphi < \dfrac{\alpha}{2} \\ u_2, & \dfrac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha \end{cases}$$

4.7. Tìm điện trường bên trong một khối trụ dài vô hạn mà mặt cắt của khối trụ có dạng một nửa hình tròn, phần đường kính tích điện đến thế V_1, phần cung nửa vòng tròn tích điện đến thế V_2.

4.8. Giải phương trình Laplace bên trong hình quạt giới hạn bởi:

$$r = a,\ r = b,\ a < r < b;\ \varphi = 0,\ \varphi = \alpha,\ 0 < \varphi < \alpha .$$

Các điều kiện biên có dạng:

$$u(r,0) = u(r,\alpha) = 0;$$

$$u(r,\varphi) = \begin{cases} f(\varphi), & r = a \\ F(\varphi), & r = b \end{cases}$$

Giải cụ thể cho trường hợp: $f(\varphi) = u_0, F(\varphi) = 0$.

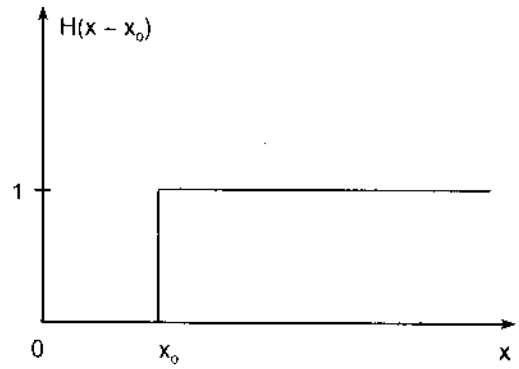
Chương V
CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN

§1. HÀM BƯỚC HEAVISIDE VÀ HÀM DELTA DIRAC

Hàm bước đơn vị Heaviside được định nghĩa

$$H(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0\\ 0, & \xi<0\end{cases} \tag{5.1}$$

(hàm bằng đơn vị khi đối số của hàm là dương và bằng không khi đối số của hàm là âm).



Hình 5.1. **Hàm bước đơn vị Heaviside**

Hàm bước đơn vị Heaviside được dùng để định nghĩa hàm xung:

$$\delta_\varepsilon(x-x_0)=\frac{1}{\varepsilon}\left[H(x-x_0)-H\left(x-(x_0+\varepsilon)\right)\right], \tag{5.2}$$

là hàm có độ cao $1/\varepsilon$ trong khoảng x_0 và $x_0+\varepsilon$; và bằng không ở các vị trí khác. Đồ thị được biểu diễn trên hình 5.2.

Hàm Delta Dirac hoặc hàm xung đơn vị được định nghĩa

$$\delta(x-x_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x-x_0). \tag{5.3}$$

Hàm Delta Dirac không phải là một hàm theo nghĩa thông thường. Hàm này bằng không ở mọi nơi, trừ tại điểm x_0 mà tại đó nó có giá trị vô hạn sao cho

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1. \tag{5.4}$$

Một tính chất khác của hàm Delta Dirac là

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0). \tag{5.5}$$

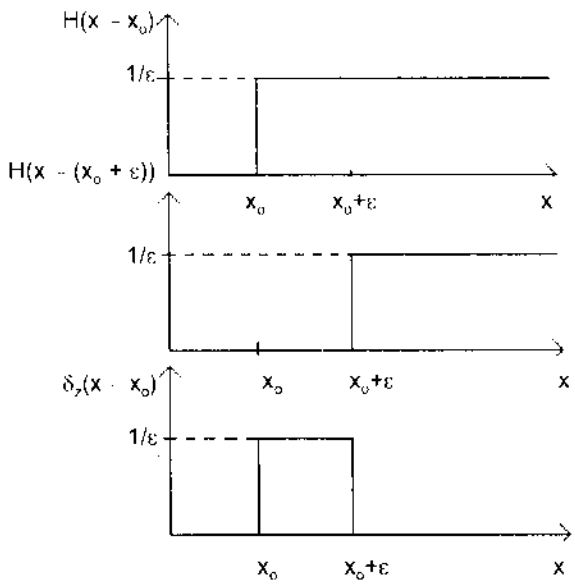
Thật vậy, bằng định nghĩa hàm Delta Dirac ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x - x_0) f(x) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{x_0} 0 \cdot f(x) dx + \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} 0 \cdot f(x) dx \right].$$

Dùng định lý giá trị trung bình trong tích phân, chọn $0 < \theta < 1$ ta có thể viết

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} f(x_0 + \theta\varepsilon)\varepsilon = f(x_0).$$



Hình 5.2. **Hàm** $\delta_\varepsilon(x - x_0) = \frac{1}{\varepsilon}\left[H(x - x_0) - H(x - (x_0 + \varepsilon))\right]$

Một tính chất khác là đạo hàm của hàm bước Heaviside là hàm Delta Dirac:

$$\frac{dH(x - x_0)}{dx} = \delta(x - x_0). \tag{5.6}$$

Thật vậy, điều này suy trực tiếp từ định nghĩa đạo hàm

$$H'(x-x_0)=\frac{dH(x-x_0)}{dx}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{H(x-x_0)-H(x-(x_0+\varepsilon))}{\varepsilon}.$$
$$=\delta(x-x_0)$$

Tích phân các hàm Delta Dirac được

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}0, & x<x_0\\ H(x-x_0), & x>x_0.\end{cases} \tag{5.7}$$

Hàm Delta Dirac cũng có tính chất đạo hàm:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x-x_0)f(x)dx=-f'(x_0),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta''(x-x_0)f(x)dx=f''(x_0),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'''(x-x_0)f(x)dx=-f'''(x_0), \tag{5.8}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(x-x_0)f(x)dx=(-1)^n f^{(n)}(x_0).$$

Trong không gian 2 hoặc 3 chiều ta có các hàm Delta Dirac:

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)dxdy=1;$$
$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)dxdydz=1.$$

Hàm Delta Dirac này có thể biểu diễn trong các hệ tọa độ khác nhau. Ví dụ, nếu chuyển sang hệ tọa độ cực

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\\ y&=r\sin\theta\end{aligned}\right\}dxdy\Rightarrow rdrd\theta$$

thì công thức I_2 có dạng: $I_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}A\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)rdrd\theta=1;\ \ A=\frac{1}{r}$.

Do đó có thể nói rằng, khi chuyển sang hệ toạ độ cực thì từ hàm $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ biến thành hàm $\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{r}$. Nếu có tính đối xứng đối với biến θ thì từ hàm $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ biến thành hàm

$\dfrac{\delta(r-r_0)}{2\pi r}$. Trong trường hợp 3 chiều, hàm Delta Dirac được biểu diễn trong các hệ tọa độ cong như sau:

Toạ độ trụ (r,θ,z)	$\dfrac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(z-z_0)}{r}$
Toạ độ trụ (r,θ,z) có tính đến đối xứng theo θ	$\dfrac{\delta(r-r_0)\delta(z-z_0)}{2\pi r}$
Toạ độ cầu (r,θ,φ)	$\dfrac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2\sin\theta}$
Toạ độ cầu (r,θ,φ) có tính đến đối xứng theo φ	$\dfrac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{2\pi r^2\sin\theta}$
Toạ độ cầu (r,θ,φ) có tính đến đối xứng theo cả φ và θ	$\dfrac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}$

§2. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Phép biến đổi Laplace $\mathscr{L}$

$$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \Leftrightarrow f(t)\doteq F(s) \qquad (5.9)$$

tồn tại nếu tích phân là hội tụ. Ta hiểu phép biến đổi Laplace là tác động của toán tử $\mathscr{L}$ vào hàm gốc $f(t)$ cho ta một hàm ảnh $F(s)$.

1. Biến đổi Laplace của các hàm thông thường

Xét hàm gốc $u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$, phép biến đổi Laplace

$$\mathscr{L}\{u(t)\}=\int_0^\infty 1.e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty=\frac{1}{s},\quad s>0.$$

Tương tự đối với các hàm e^{-at}, $\cos at$, $\sin at$ và t^n:

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\}=\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt=\left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^\infty=\frac{1}{s+a}\quad s>-a;$$

$$\mathscr{L}\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cos at\,dt = \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\cos at + a\sin at)\Big|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2+a^2};$$

$$\mathscr{L}\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin at\,dt = \frac{e^{-st}}{s^2+a^2}(-s\sin at - a\cos at)\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{s^2+a^2};$$

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st}dt = \frac{t^n e^{-st}}{-s}\Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s}\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-st}dt = \frac{n}{s}\mathscr{L}\{t^{n-1}\} \quad s>0,$$

do đó $\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\frac{n-2}{s}\ldots;\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s>0, n=1,2\ldots$

2. Các tính chất của phép biến đổi Laplace

Tính chất 1. $\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$

Chứng minh:

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^{\infty}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]e^{-st}dt$$

$$= c_1\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st}dt + c_2\int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st}dt$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ: Tìm biến đổi Laplace của biểu thức

$$u(t) = 4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}.$$

Giải. Theo tính chất 1 ta có:

$$\mathscr{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4\mathscr{L}\{t^2\} - 3\mathscr{L}\{\cos 2t\} + 5\mathscr{L}\{e^{-t}\}$$

$$= 4\frac{2!}{s^3} - 3\frac{s}{s^2+4} + 5\frac{1}{s+1} = \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}.$$

Tính chất 2: $\mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a).$

Chứng minh:

$$\mathscr{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^{\infty}[e^{-at}f(t)]e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt = F(s+a).$$

Ví dụ: Áp dụng tính chất 2 xác định biến đổi Laplace của các hàm $f(t)$ sau: $\cos bt$, $\sin bt$ và t^n.

Giải: $\mathscr{L}\left\{e^{-at}\cos bt\right\} = \dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$, $s > -a$;

$\mathscr{L}\left\{e^{-at}\sin bt\right\} = \dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$; $s > -a$;

$\mathscr{L}\left\{e^{-at}t^n\right\} = \dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$, $s > -a$;

$\mathscr{L}\left\{t^2e^{3t}\right\} = \dfrac{2!}{(s-3)^3}$.

Tính chất 3: $\mathscr{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$, với $u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$

Chứng minh:

$$\mathscr{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = \int_0^{\infty} f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt$$

$$= \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)}dx = e^{-as}\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx = e^{-as}F(s).$$

Ví dụ: Xác định biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(t - \dfrac{2\pi}{3}\right), & t > \dfrac{2\pi}{3} \\ 0, & t < \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Giải: Theo tính chất 3 ta thu được

$$\begin{cases} \mathscr{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1} \\ \mathscr{L}\{f(t)\} = \dfrac{se^{-\frac{2\pi s}{3}}}{s^2+1} \end{cases}$$

Tính chất 4: $\mathscr{L}\left\{f(at)\right\} = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$; $a > 0$

Chứng minh: Theo định nghĩa của phép biến đổi Laplace ta có

$$\mathscr{L}\left\{f(at)\right\} = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-s\frac{x}{a}}\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0.$$

Ví dụ: Áp dụng tính chất 4 xác định biến đổi Laplace của hàm $\dfrac{\sin t}{t}$.

Chứng minh: Theo tính chất 4 ta có

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \operatorname{arctg}\frac{1}{s} \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a}\mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{s}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \operatorname{arctg}\frac{a}{s}.$$

Tính chất 5: $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

Chứng minh: Theo định nghĩa của phép biến đổi Laplace ta có

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0).$$

Tính chất 6: $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

Tính chất 7:

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Ví dụ: Chứng minh các công thức sau:

a) $\mathscr{L}\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$;

b) $\mathscr{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

Chứng minh:

a) Ta có $f(t) = e^{-at} \Rightarrow f'(t) = -ae^{-at}$; $f(0) = 1$,

suy ra $$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \mathscr{L}\{-ae^{-at}\} = \begin{cases} -a\mathscr{L}\{f(t)\} \\ s\mathscr{L}\{f(t)\} - 1 \end{cases} \Rightarrow \mathscr{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

Đó là điều phải chứng minh.

b) Ta có: $f(t) = \sin at$; $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, suy ra

$$f'(t) = a\cos at;\ f''(t) = -a^2\sin at;\ f(0) = 0;\ f'(0) = a.$$

Theo tính chất 6 của phép biến đổi Laplace ta có

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = \mathscr{L}\{-a^2\sin at\} = -a^2\mathscr{L}\{\sin at\} = -a^2\mathscr{L}\{f(t)\};$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - s.0 - a = s^2\mathscr{L}\{f(t)\} - a$$

$\Longrightarrow \mathscr{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$. Đó là điều phải chứng minh.

Tính chất 8: $$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Chứng minh: Đặt

$$g(t)=\int_0^t f(u)du \text{, suy ra } g'(t)=f(t);\ g(0)=0.$$

Theo tính chất 5 ta có

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}=sG(s)-g(0)=sG(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s).$$

Suy ra $G(s)=\dfrac{F(s)}{s}$, do đó

$$\mathscr{L}\{g(t)\}=\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(s)}{s}.$$

Tính chất 9: $\mathscr{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)=(-1)^n F^{(n)}(s)$

Chứng minh: Ta có $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$, do đó

$$F'(s)=\int_0^\infty f(t)\frac{\partial}{\partial s}e^{-st}dt=\int_0^\infty -tf(t)e^{-st}dt=-\mathscr{L}\{tf(t)\}.$$

Suy ra : $\mathscr{L}\{tf(t)\}=-\dfrac{d}{ds}F(s)=F'(s)$. Công thức này được chứng minh bằng phương pháp quy nạp, đúng với $n=k$ suy ra nó đúng với $n=k+1$.

Ví dụ: Xác định biến đổi Laplace của hàm $t\sin at$ và $t^2\cos at$.

Giải. Theo tính chất 9 ta có:

$$\mathscr{L}\{t\sin at\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2};$$

$$\mathscr{L}\{t^2\cos at\}=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)=\frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}.$$

Ta có bảng sau:

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$, $s>0$
e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$, $s>-a$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$

$f(t)$	$F(s)$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s>0$
$t^n,\ n=0,1,2...$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s>0$
$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}, s>-a$
$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}, s>-a$
$e^{-at}t^n,\ n=0,1,2...$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, s>-a$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}, s>0$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, s>0$
$\mathrm{ch}at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s>\lvert a\rvert$
$\mathrm{sh}at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s>\lvert a\rvert$
$tu(t)=r(t)$	$\frac{1}{s^2}=R(s)$
$\frac{t^2}{2}u(t)=p(t)$	$\frac{1}{s^3}=P(s), s>0$
$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$	$c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-...-f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$

$f(t)$	$F(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^n(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^{\infty} F(u)du$
$f(t)=f(t+T)$	$\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int\limits_0^T e^{-st} f(t)dt$
$\lim\limits_{t\to 0} f(t)$	$\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$
$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	$\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$

3. Phép biến đổi Laplace ngược

Phép biến đổi Laplace ngược được định nghĩa như sau

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(s)\Rightarrow f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}. \qquad (5.10)$$

4. Các tính chất của phép biến đổi Laplace ngược

Tính chất 1: $\mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1f_1(t)+c_2f_2(t)$.

Tính chất 2: $\mathscr{L}^{-1}\{F(s+a)\}=e^{-at}f(t)=e^{-at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Tính chất 3: $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=e^{-at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}$.

Tính chất 4: $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Ví dụ: Xác định các biến đổi Laplace ngược của biểu thức $\dfrac{1}{s^2-2s+5}$.

Giả. Ta có: $F(s)=\dfrac{1}{s^2-2s+5}=\dfrac{1}{(s-1)^2+2^2}$; $F(s+1)=\dfrac{1}{s^2+2^2}$.

Do đó:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s+1)\}=\frac{1}{2}\sin 2t;\ \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}e^t\sin 2t.$$

Tính chất 5: $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)u(t-a)$.

Ý nghĩa: Để tìm biến đổi Laplace ngược của hàm có chứa thừa số e^{-as} ta thực hiện các bước sau:

– Bỏ thừa số e^{-as};

– Tìm $\mathscr{L}^{-1}$ của hàm còn lại;

– Dời hàm t vừa tìm về phía phải một đoạn bằng a và cắt bỏ phía trái (nếu $a > 0$).

Tính chất 6: $\mathscr{L}^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right),\ a > 0$.

Tính chất 7:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\};$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{(-1)^n}{t^n} \mathscr{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}.$$

Ví dụ: Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm $F(s) = \ln\frac{s+1}{s-1}$.

Giải: Ta có $F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$, suy ra

$$\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\} = e^{-t} - e^{t} = -2\text{sh}t$$

Theo công thức $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{(-1)^n}{t^n} \mathscr{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(s)\right\}$ với n là bậc của đạo hàm ta suy ra

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{(-1)}{t} \mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\} = \frac{2\text{sh}t}{t}.$$

Tính chất 8:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)\,du\right\} = \frac{1}{t} \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\};$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty} F(u)\,du\right\}.$$

§3. PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

Xét các bộ hàm riêng khi sử dụng để khai triển Fourier

$$\{\cos nx;\ \sin nx,\ n = 1, 2...\}.$$

Một cách tổng quát, có thể xét khai triển hàm thực

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx), \tag{5.11}$$

với $x \in [0, 2\pi]$; các hệ số a_0, a_n và b_n được xác định theo công thức:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Chú ý đến công thức Euler: $e^{inx} = \cos nx + i\sin nx$, có thể khai triển hàm $f(x)$ dưới dạng

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (5.12)$$

trong đó: $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$; $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$; $c_0 = a_0$

hoặc $a_n = c_n + c_{-n}$; $b_n = i(c_n + c_{-n})$.

Như vậy, hàm $f(x)$ khi khai triển có dạng

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (5.13)$$

Chú ý rằng, $\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2 \ldots \end{cases}$, suy ra

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx. \quad (5.14)$$

Hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, do đó tích phân (5.14) có thể viết

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Áp dụng cách khai triển trên, xét bộ hàm $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ hay tương ứng với nó xét hàm $\left\{e^{\frac{in\pi x}{L}}\right\}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π xác định trong khoảng từ $[-L, L]$. Xét hàm $f(x)$ xác định trong khoảng trên và khai triển nó vào bộ hàm riêng trong khoảng $[-L, L]$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}. \quad (5.15)$$

Chú ý, vì $$\int_{-L}^{L} e^{\frac{in\pi x}{L}} dx = \begin{cases} 2L, & n = 0 \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2 \ldots \end{cases},$$

suy ra

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{\frac{in\pi\xi}{L}} d\xi.$$

Thay hệ số vào (5.15) ta có

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{\frac{in\pi(x-\xi)}{L}} d\xi.$$

Chia trục số theo các điểm $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ với các đoạn $\Delta\lambda_n = \frac{\pi}{L}$:

$$-\downarrow - - \downarrow - - \downarrow - - \downarrow - - \downarrow - - - \rightarrow \lambda_n$$

$$-\frac{\pi}{L} \quad 0 \quad \frac{\pi}{L} \quad \frac{2\pi}{L} \quad \frac{3\pi}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}; \quad \Delta\lambda_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Như vậy, hàm $f(x)$ được viết

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{\frac{in\pi(x-\xi)}{L}} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_n}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\lambda_n(x-\xi)} d\xi. \qquad (5.16)$$

Chuyển sang giới hạn khi $L \to \infty$, $\Delta\lambda_n \to 0$ ta có

$$f(x) = \lim_{\Delta\lambda_n \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\lambda_n}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(\xi) e^{i\lambda_n(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \qquad (5.17)$$

Như vậy, bằng phép thác triển L ra vô hạn về hai phía ta có

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi.$$

Vậy công thức (5.17) có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi \right]. \qquad (5.18)$$

Đặt $\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$, ta có

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Hoặc viết dưới dạng đối xứng:

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi;$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Khi đó $\hat{f}$ được gọi là *phép biến đổi Fourier* của hàm f. Sau đây sẽ đề cập đến cách làm để nhận được hàm thực của phép biến đổi Fourier của hàm f. Nếu hàm f là thực thì

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda(x-\xi)d\xi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi.\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi.
\end{aligned}$$

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn, hạng thức thứ hai sẽ bằng không, nghĩa là

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=0.$$

Như vậy, nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos\lambda x d\lambda\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi.$$

Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin\lambda x d\lambda\int_{0}^{\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi.$$

Vậy các toán tử:

$$F_c: f_c(x)\longrightarrow\hat{f}_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f_c(\xi)\cos\lambda\xi d\xi;$$

$$F_l: f_l(x)\longrightarrow\hat{f}_l(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f_l(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,$$

tương ứng được gọi là *phép biến đổi Fourier cosin* và *phép biến đổi Fourier sin*.

Chú ý rằng: $F^2 = I$, I là phép biến đổi đồng nhất.

Người ta gọi *phép biến đổi Fourier* là:

$$F:\left[f(x);x\to\lambda\right]\xrightarrow{Thuận}\hat{f}(\lambda);\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi;$$

$$F^{-1}:\left[\hat{f}(\lambda);\lambda\to x\right]\xrightarrow{Nghịch}f(x);f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda;$$

$$F\left[f(x)\right]=\hat{f}(\lambda);F^{-1}\left[\hat{f}(\lambda)\right]=f(x).$$

Nếu gọi P là phép toán tử phản xạ

$$P:f(x)\to f(-x)$$

có thể khẳng định $F^{-1}=PF$.

Ví dụ: Chúng ta đã định nghĩa hàm Delta Dirac:

$$\delta(x)=0,\quad x\neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\delta(x-y)dy=f(x).$$

Biểu diễn tích phân của hàm Delta

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}dy.$$

Một cách tổng quát có thể định nghĩa phép biến đổi Fourier của hàm $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi=\left[\text{thay }\lambda=x,\xi=x'\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{iy(x-x')}dx'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{ixy}dy,$$

trong đó $g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')e^{-ix'y}dx'$.

Như vậy, phép biến đổi Fourier là phép biến đổi:

$$F:f(x)\xrightarrow{Thuận}g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixy}dx;\quad F\left[f(x)\right]=g(y);$$

$$F^{-1}:g(y)\xrightarrow{Nghịch}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}g(y)e^{ixy}dy;\quad F^{-1}\left[g(y)\right]=f(x).$$

Trong trường hợp nhiều chiều, ta có:

$$\phi(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\vec{x}); \; f(\vec{x}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{x});$$

$$\delta(\vec{x}) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k}\vec{x}); \; \int d^3x f(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{y}).$$

Các công thức trên rất cần thiết để biểu diễn không gian và xung lượng trong cơ lượng tử.

Tóm tắt các tính chất của phép biến đổi Fourier:

	Hàm gốc	*Hàm ảnh*
	$f(x) = \int_0^x \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$	$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi$
Gaussian	$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\lambda^2/4\alpha}$
	$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-x^2/4\beta}$	$e^{-\beta\lambda^2}$
Đạo hàm	$\frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}$
	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$-i\lambda \hat{f}(\lambda)$
	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$(-i\lambda)^2 \hat{f}(\lambda)$
	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx'$	$\hat{f}(\lambda) \hat{g}(\lambda)$
Hàm Delta Dirac	$\delta(x - x_0)$	$\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda x_0}$
Định lý dịch chuyển	$f(x - \beta)$	$e^{i\lambda\beta} \hat{f}(\lambda)$
Nhân với x	$x f(x)$	$-i \frac{d\hat{f}}{d\lambda}$
	$\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}$	$e^{-\lvert\lambda\rvert\alpha}$
	$f(x) = \begin{cases} 0, & \lvert x\rvert > a \\ 1, & \lvert x\rvert < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \frac{\sin a\lambda}{\lambda}$

Chương VI
HÀM GREEN

§1. KHÁI NIỆM

Để đưa vào khái niệm hàm Green, chúng ta bắt đầu với các toán tử vi phân cấp 2 có dạng đồng nhất với hàm Green. Mọi toán tử vi phân cấp 2 có dạng

$$L_x(y) = a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y. \tag{6.1}$$

Các toán tử liên hợp đồng dạng với nó là:

$$L_x^*(y) = \frac{d^2}{dx^2}\left[a_0(x)y\right] - \frac{d}{dx}\left[a_1(x)y\right] + a_2(x)y$$

$$\Rightarrow L_x^*(y) = a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[2a_0'(x) - a_1(x)\right]\frac{dy}{dx} + a_2(x)y. \tag{6.2}$$

Cho hai hàm $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm liên tục tùy ý cùng với đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của nó. Dùng hai toán tử (6.1) và (6.2) để xác định đồng nhất thức Lagrange của hai hàm $u(x)$ và $v(x)$ như sau

$$vL_x(u) - uL_x^*(v) = \frac{d}{dx}\left[P(u,v)\right], \tag{6.3}$$

trong đó: $P(u,v) = \left[a_0(x)\frac{du}{dx} + a_1(x)u\right]v - \left[a_0(x)\frac{dv}{dx} + a_0'(x)v\right]u$ (6.4)

được gọi là *hàm song tuyến.*

Đồng nhất thức Lagrange của hai hàm khả vi $u(x)$ và $v(x)$ được xác định trên miền $I = \{x \mid a \le x \le b\}$. Tích phân đồng nhất thức (6.3) ta có đồng nhất thức các hàm Green

$$\int_a^b \left[vL_x(u) - uL_x^*(v)\right]dx = \left[P(u,v)\right]_a^b, \tag{6.5}$$

trong đó

$$\left[P(u,v)\right]_a^b = \left[a_0(b)u'(b) + a_1(b)u(b)\right]v(b) - \left[a_0(b)v'(b) + a_0'(b)v(b)\right]u(b) -$$
$$-\left[a_0(a)u'(a) + a_1(a)u(a)\right]v(a) - \left[a_0(a)v'(a) + a_0'(a)v(a)\right]u(a)$$

Định nghĩa tích hàm của đồng nhất thức Green:

$$\left(v, L_x(u)\right) = \int_a^b v L_x(u)\,dx\,. \tag{6.6}$$

Tích phân từng phần tích hàm thu được

$$\left(v, L_x(u)\right) = \left(u, L_x^*(v)\right) + \text{các hạng thức trên biên}\,.$$

Sử dụng đồng nhất thức Green cho thích hợp để tìm nghiệm phương trình với biên ở hai điểm như sau

$$\begin{cases} L_x(y) = f(x); \\ B_1(y) = g_1\ ;\ B_2(y) = g_2, \end{cases} \tag{6.7}$$

trong đó: L_x là toán tử tuyến tính cho bởi (6.1); g_1, g_2 là các hằng số và B_1, B_2 là các toán tử biên tuyến tính dạng Robin:

$$\begin{aligned} B_1(y) &= \left[\alpha_1 \frac{dy(x)}{dx} + \beta_1 y(x)\right]_{x=a}; \\ B_2(y) &= \left[\alpha_2 \frac{dy(x)}{dx} + \beta_2 y(x)\right]_{x=b}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Ví dụ dùng đồng nhất thức Green để giải bài toán biên Dirichlet

$$L_x(y) = f(x); \tag{6.9}$$

$$B_1(y) = y(a) = 0, \quad B_2(y) = y(b) = 0\,. \tag{6.10}$$

Để giải phương trình này, đổi biến x trong phương trình (6.1) và (6.2) thành biến mới ξ và viết đồng nhất thức Green theo biến mới

$$\int_a^b \left[v(\xi) L_\xi(u) - u(\xi) L_\xi^*(v)\right] d\xi = \left[P\left(u(\xi), v(\xi)\right)\right]_a^b. \tag{6.11}$$

Trong phương trình (6.11), biến ξ được dùng như một biến giả của phép lấy tích phân và vì thế các toán tử L_ξ và L_ξ^* là toán tử đạo hàm đối với ξ.

Để giải phương trình (6.9) với điều kiện (6.10), đặt $u(\xi) = y(\xi)$ là nghiệm của phương trình (6.9) với x thay bằng ξ và u thay bằng y trong đồng nhất thức Green. Như vậy, trong đồng nhất thức Green (6.11) thay $L_\xi(y) = f(\xi)$ ta có

$$\int_a^b v(\xi) f(\xi)\,d\xi - \int_a^b y(\xi) L_\xi^*(v)\,d\xi = \left[P\left(y(\xi), v(\xi)\right)\right]_a^b \tag{6.12}$$

trong đó

$$\left[P(y,v)\right]_a^b = \left[a_0(b)y'(b)+a_1(b)y(b)\right]v(b)-\left[a_0(b)v'(b)+a_0'(b)v(b)\right]y(b)-$$
$$-\left[a_0(a)y'(a)+a_1(a)y(a)\right]v(a)-\left[a_0(a)v'(a)+a_0'(a)v(a)\right]y(a) \tag{6.13}$$

Chọn $v(\xi)=G^*(\xi;x)$ là hàm Green thỏa mãn điều kiện

$$L_\xi^*\left(G^*(\xi;x)\right)=\delta(x-\xi),\quad a\le\xi\le b, \tag{6.14}$$

nó là phương trình liên hợp với đạo hàm trong L_ξ^* (đạo hàm theo biến ξ), $\delta(x-\xi)$ là hàm Delta Dirac có tính chất

$$\int_{\xi=x-\varepsilon}^{\xi=x+\varepsilon} y(\xi)\delta(\xi-x)d\xi = y(x). \tag{6.15}$$

Thay $v(\xi)=G^*(\xi;x)$ vào đồng nhất thức Green (6.12), rút gọn thành

$$\int_a^b G^*(\xi;x)f(\xi)d\xi - y(x) = P\left(y(b),G^*(b;x)\right)-P\left(y(a),G^*(a;x)\right). \tag{6.16}$$

Nghiệm $y(x)$ trong bài toán (6.9) có thể thu được bằng kết quả của tích phân (6.16). Chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ hơn tích phân (6.16). Hàm $f(\xi)$ đã cho từ phương trình (6.9), hàm $G^*(\xi;x)$ thu được từ việc giải phương trình (6.14) có dạng $L_\xi^*\left(G^*(\xi;x)\right)=\delta(x-\xi)$. Theo điều kiện (6.10) ta có

$$P\left[y(\xi),G^*(\xi;x)\right]_a^b = \left[a_0(b)y'(b)\right]G^*(b;x)-\left[a_0(a)y'(a)\right]G^*(a;x)$$
$$B_1^*\left[G^*\right]=G^*(\xi;x)\big|_{\xi=b}=0,\quad B_2^*\left[G^*\right]=G^*(\xi;x)\big|_{\xi=a}=0. \tag{6.17}$$

Điều kiện biên này được gọi là *điều kiện biên liên hợp*. Từ đó ta có nghiệm của (6.16) là

$$y(x)=\int_a^b G^*(\xi;x)f(\xi)d\xi, \tag{6.18}$$

trong đó $G^*(\xi;x)$ là hàm Green thỏa mãn phương trình

$$L_\xi^*\left(G^*(\xi;x)\right)=\delta(x-\xi),\quad a\le\xi\le b,$$

với các điều kiện biên

$$B_1^*\left[G^*\right]=G^*(a;x)=0,\quad B_2^*\left[G^*\right]=G^*(b;x)=0. \tag{6.19}$$

Như vậy, để tìm nghiệm của phương trình (6.9), ta đi tìm hàm Green $G^*(\xi;x)$. Đó chính là phương pháp tìm nghiệm mới, được gọi là *phương pháp hàm Green*.

Nhằm mục đích xây dựng phương pháp hàm Green, ta đưa ra hai hàm Green G và hàm Green liên kết G^* thỏa mãn các toán tử L_x và L_x^* cho bởi phương trình (6.20) và (6.21) sau:

$$L_x G(x;\xi) = \delta(x-\xi), \quad a \le x \le b; \tag{6.20}$$

$$L_x^* G^*(x;\xi) = \delta(x-\xi), \quad a \le x \le b, \tag{6.21}$$

với các điều kiện biên:

$$B_1^*\left[G^*\right] = G^*(a;x) = 0; \quad B_2^*\left[G^*\right] = G^*(b;x) = 0.$$

Trong các phương trình trên, các vi phân lấy theo biến x. Các toán tử (L_x, B_1, B_2) có dạng liên hợp của nó là (L_x^*, B_1^*, B_2^*), điều kiện biên liên hợp được chọn là $P(G,G^*)\Big|_a^b = 0$. Hàm Green cho bởi phương trình (6.20) và (6.21) thỏa mãn quan hệ đối xứng

$$G^*(x;\xi) = G(\xi;x). \tag{6.22}$$

Để chứng minh tính đối xứng trên, nhân phương trình (6.20) với $G^*(x;t)$ và sau đó thay biến ξ trong phương trình (6.21) bằng biến t, rồi nhân phương trình (6.21) với $G^*(x;\xi)$ ta thu được:

$$\begin{aligned} &G(x;t)L_x G(x;\xi) = \delta(x-\xi); \\ &G(x;\xi)L_x^* G^*(x;t) = \delta(x-t). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Trừ hai phương trình trên và sau đó tích phân từ a đến b ta thu được đồng nhất thức Green

$$\begin{aligned} P\left[G,G^*\right]\Big|_a^b &= \int_a^b \left[G^*(x;t)L_x\left(G(x;\xi)\right) - G(x;\xi)L_x^*\left(G^*(x;t)\right)\right] = \\ &= \int_a^b \left[G^*(x;t)\delta(x-\xi) - G(x;\xi)\delta(x-t)\right] = G^*(\xi;t) - G^*(t;\xi) = 0 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Từ đó suy ra (6.22), và gọi là *tính chất đối xứng của hàm Green*. Như vậy, nghiệm của bài toán Dirichlet (6.18) có dạng

$$y(x) = \int_a^b G^*(\xi;x) f(\xi)\,d\xi = \int_a^b G(x;\xi) f(x)\,dx. \tag{6.25}$$

§2. TÌM HÀM GREEN BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

1. Bài toán 1

Dùng phép biến đổi Laplace tìm hàm Green cho toán tử

$$\begin{cases} L_x(y) = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ a \le x \le b \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

Hàm Green gắn liền với toán tử vi phân đã cho thu được từ nghiệm của phương trình vi phân

$$\begin{cases} \dfrac{d^2G}{dx^2} = \delta(x-\xi), \ a \le x \le b \\ G(a) = G(b) = 0 \end{cases} \tag{6.27}$$

Có thể coi phương trình vi phân (6.27) xác định trong khoảng $0 < x < \infty$, tuy nhiên chỉ quan tâm đến khoảng $a < x < b$. Đặt $\mathscr{L}$ là phép biến đổi Laplace

$$\mathscr{L}\{G\} = \int_0^\infty Ge^{-sx}dx = \bar{G}(s).$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace cho hai vế phương trình (6.27) ta thu được

$$\mathscr{L}\{G''\} = \mathscr{L}\{\delta(x-\xi)\} \Leftrightarrow s^2\bar{G} - sG(0) = e^{-s\xi}. \tag{6.28}$$

Chọn các đại lượng chưa biết $G(0) = A$, $G'(0) = B$, giải phương trình (6.28) cho ta

$$\bar{G}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{e^{-s\xi}}{s^2}.$$

Lấy phép biến đổi Laplace ngược ta thu được

$$G = G(x;\xi) = A + Bx + (x-\xi)H(x-\xi), \tag{6.29}$$

$H(x-\xi)$ là hàm bước đơn vị Heaviside; A và B là các hằng số tùy ý.

Phương trình (6.29) cho thấy: nếu $a \le x < \xi$ thì $H(x-\xi) = 0$, do đó $G = A + Bx$. Từ điều kiện $G(a) = 0$, ta có

$$A + Ba = 0. \tag{6.30}$$

Nếu $\xi < x \le b$ thì phương trình (6.29) có dạng $G = A + Bx + x - \xi$, từ điều kiện $G(b) = 0$ ta có

$$A + Bb + b - \xi = 0. \tag{6.31}$$

Giải phương trình (6.30) và (6.31), thu được các hệ số:

$$A = \frac{a(\xi - b)}{(a-b)}; \quad B = \frac{b-\xi}{a-b}.$$

Vậy, hàm Green có dạng

$$G = G(x;\xi) = \frac{(\xi - b)(x-a)}{(b-a)} + (x-\xi)H(x-\xi). \tag{6.32}$$

2. Bài toán 2

Dùng phép biến đổi Laplace tìm hàm Green cho toán tử

$$L_x(G) = \frac{d^2G}{dx^2} + 3\frac{dG}{dx} + 2G = \delta(x-\xi),\ 0 \le x \le L, \tag{6.33}$$

thỏa mãn điều kiện $G(a) = G(L) = 0$.

Bằng phép biến đổi Laplace ta tìm được nghiệm có dạng

$$G = G(x;\xi) = \left(\frac{e^{-2(L-\xi)} - e^{-(L-\xi)}}{e^{-L} - e^{-2L}}\right)\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) + \left(e^{-(x-\xi)} - e^{-2(x-\xi)}\right)H(x-\xi) \tag{6.34}$$

Hoặc có thể biểu diễn dưới dạng gọn hơn

$$G = G(x;\xi) = \begin{cases} G_1(x;\xi) = e^{-2x+\xi}\left[\dfrac{e^x - 1}{e^L - 1}\right]\left(e^{\xi} - e^{L}\right), & x < \xi \\ G_2(x;\xi) = e^{-2x+\xi}\left[\dfrac{e^{\xi} - 1}{e^L - 1}\right]\left(e^{x} - e^{L}\right), & \xi < x \end{cases} \tag{6.35}$$

Xét hàm Green liên kết thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} L_x^*(G^*) = \dfrac{d^2G^*}{dx^2} - 3\dfrac{dG^*}{dx} + 2G^* = \delta(x-\xi),\ 0 \le x \le L \\ G^*(a) = G^*(L) = 0 \end{cases} \tag{6.36}$$

Dùng phép biến đổi Laplace có thể tìm được nghiệm của (6.36):

$$G^* = G^*(x;\xi) = \left(\frac{e^{(L-\xi)} - e^{2(L-\xi)}}{e^{2L} - e^{L}}\right)\left(e^{2x} - e^{x}\right) + \left(e^{2(x-\xi)} - e^{(x-\xi)}\right)H(x-\xi). \tag{6.37}$$

Hoặc có thể biểu diễn dưới dạng gọn hơn

$$G^* = G^*(x;\xi) = \begin{cases} G_1^*(x;\xi) = e^{x-2\xi}\left[\dfrac{e^x - 1}{e^L - 1}\right]\left(e^{\xi} - e^{L}\right), & x < \xi \\ G_2^*(x;\xi) = e^{x-2\xi}\left[\dfrac{e^{\xi} - 1}{e^L - 1}\right]\left(e^{x} - e^{L}\right), & \xi < x \end{cases} \tag{6.38}$$

Nhận thấy: Nếu tráo hai biến x và ξ trong biểu thức (6.35) ta có G_1 đúng bằng G_2^* và G_2 đúng bằng G_1^*. Như vậy, có thể viết $G(x;\xi) = G^*(\xi;x)$. Đó là tính đối xứng của hàm Green.

Giải phương trình sau với dụng ý đổi biến lấy đạo hàm

$$\begin{cases} L_\xi\left(G(\xi;x)\right) = \dfrac{d^2G}{dx^2} + 3\dfrac{dG}{dx} + 2G = \delta(\xi - x), \ 0 \le \xi \le L \\ G(0;x) = G(L;x) = 0 \end{cases}$$

ta thu được phương trình

$$G(\xi;x) = \begin{cases} e^{-2\xi+x}\left[\dfrac{e^{\xi}-1}{e^{L}-1}\right]\left(e^{x} - e^{L}\right), \ \xi < x \\ e^{-2\xi+x}\left[\dfrac{e^{x}-1}{e^{L}-1}\right]\left(e^{\xi} - e^{L}\right), \ x < \xi \end{cases}$$

Vậy $G(\xi;x) = G^*(x;\xi)$. Tương tự, phương trình xác định hàm Green liên kết có dạng:

$$\begin{cases} L_\xi^*\left(G^*(\xi;x)\right) = \dfrac{d^2G^*}{dx^2} - 3\dfrac{dG^*}{dx} + 2G^* = \delta(\xi - x), \ 0 \le \xi \le L \\ G^*(0;x) = G^*(L;x) = 0 \end{cases}$$

nó có nghiệm

$$G^*(x;\xi) = \begin{cases} e^{\xi-2x}\left[\dfrac{e^{\xi}-1}{e^{L}-1}\right]\left(e^{x} - e^{L}\right), \ \xi < x \\ e^{\xi-2x}\left[\dfrac{e^{x}-1}{e^{L}-1}\right]\left(e^{\xi} - e^{L}\right), \ x < \xi \end{cases}$$

Do đó: $G^*(\xi;x) = G(x;\xi)$.

Tổng hợp lại ta thấy rằng:

- $G = G(x;\xi)$ thỏa mãn phương trình $L_x(G) = \delta(x - \xi)$ theo biến x;
- $G^* = G^*(\xi;x) = G(x;\xi)$ thỏa mãn phương trình $L_\xi^*(G) = \delta(\xi - x)$ theo biến ξ;
- $G^* = G^*(x;\xi)$ thỏa mãn phương trình $L_x^*(G^*) = \delta(x - \xi)$ theo biến x;
- $G = G(\xi;x) = G^*(x;\xi)$ thỏa mãn phương trình $L_\xi(G^*) = \delta(\xi - x)$ theo biến ξ.

Vì vậy, người ta có thể xét phương trình $L_x(G)=\delta(x-\xi)$ hoặc $L_\xi(G)=\delta(\xi-x)$ để xác định hàm $G(x;\xi)$.

Nghiệm của phương trình $L_xG(x;\xi)=\delta(x-\xi)$, $a\le x\le b$ cho trực tiếp tìm hàm Green $G(x;\xi)$. Còn nghiệm của phương trình $L_x^*G^*(x;\xi)=\delta(x-\xi)$, $a\le x\le b$ xác định hàm Green liên hợp. Hoặc cũng có thể giải thích là: $G(x;\xi)$ thỏa mãn phương trình $L_xG(x;\xi)=\delta(x-\xi)$, $a\le x\le b$ theo biến x, và cũng thỏa mãn phương trình xác định hàm Green liên hợp $L_x^*G(x;\xi)=\delta(\xi-x)$, $a\le\xi\le b$ nhưng theo biến ξ. Cũng có thể dùng hai phương trình:

$$L_xG(x;\xi)=\delta(x-\xi),\quad a\le x\le b;$$

$$L_x^*G(x;\xi)=\delta(\xi-x),\quad a\le\xi\le b$$

để tính hàm Green $G(x;\xi)$.

Trong trường hợp L_x là toán tử vi phân tuyến tính cấp 2 tự liên hợp, ta có $L_x=L_x^*$, vì thế $G(x;\xi)=G^*(x;\xi)$. Trong trường hợp này, hàm Green đối xứng theo ξ và x. Vì $G^*(x;\xi)=G(\xi;x)$, nên suy ra $G(x;\xi)=G(\xi;x)$. Tiếp theo dùng trường hợp riêng để viết dưới dạng tự liên hợp cho các phương trình tuyến tính cấp 2.

Xét toán tử vi phân tuyến tính cấp 2 tự liên hợp $L_x=L_x^*$. Mọi phương trình vi phân tuyến tính cấp 2:

$$L_{1x}(y)=a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y,\quad a_0(x)\ne 0$$

có thể viết dưới dạng tự liên hợp

$$L_x[y]=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0.$$

Chương VII
CÁC HÀM ĐẶC BIỆT

§1. CÁC HÀM TRỰC GIAO

1. Định nghĩa hàm trực giao

Xét tích của hai vector khác không và thực hiện toán tử là phép lấy tích vô hướng của hai vector đó:

$$\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}, \quad \vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}.$$

Ta có thể hiểu như sau:

$$\begin{array}{l} \vec{A} \longrightarrow \\ \vec{B} \longrightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c}\text{Toán tử tích vô hướng} \\ (\vec{A}\,.\,\vec{B})\end{array}} \longrightarrow (\vec{A}\,.\,\vec{B}) = \begin{cases} A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ 0 \Rightarrow \vec{A} \text{ trực giao với } \vec{B} \end{cases}$$

Xét toán tử cặp của hai hàm thực khác không một biến $f(x), g(x)$:

$$\begin{array}{l} f(x) \longrightarrow \\ g(x) \longrightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c}\text{Toán tử tích hàm} \\ (f\,,\,g)\end{array}} \longrightarrow (f,\,g) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^b r(x)f(x)g(x)dx \\ 0 \Rightarrow f(x) \text{ trực giao với } g(x) \end{cases}$$

Hàm $r(x) > 0$ được gọi là *hàm trọng số* hay *hàm trọng* của tích phân. Như vậy, ta có định nghĩa *toán tử tích hàm*

$$(f,g) = \int_a^b r(x)f(x)g(x)dx. \tag{7.1}$$

Ta có toán tử tích hàm cho chính một hàm là

$$(f,f) = \int_a^b r(x)f^2(x)dx = \|f\|^2. \tag{7.2}$$

Một hàm thực $f(x)$ cần phải thỏa mãn

$$\int_a^b r(x)f^2(x)dx < +\infty. \tag{7.3}$$

Công thức trên nói lên tính hữu hạn của hàm f. Tương tự, với tích vô hướng của hai vector, ta nói rằng $f(x), g(x)$ trực giao nhau trên đoạn (a,b) với trọng số $r(x)$ nếu tích hàm của chúng bằng không. Tích hàm bằng không có nghĩa là diện tích bị bao bởi đường cong $y = r(x)f(x)g(x)$ trên đoạn $x = a$, $x = b$ bằng không.

Một tập hợp hoặc một chuỗi các hàm

$$\{f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ..., f_m(x), ...\}$$

được gọi là *trực giao* trên đoạn (a,b) với điều kiện hàm trọng số $r(x) > 0$, nếu cho mọi giá trị nguyên của n và m ($n \neq m$) thì tích hàm của hàm f_m và f_n thỏa mãn điều kiện

$$(f_m, f_n) = \int_a^b r(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \tag{7.4}$$

Ở đây tích hàm bằng không cho tất cả các giá trị tổ hợp của m và n với $n \neq m$. Nếu chuỗi của các hàm $\{f_n(x)\}$, $n = 0,1,2...$ là một chuỗi trực giao, có thể viết biểu thức tích hàm cho các cặp số nguyên m và n thỏa mãn mối quan hệ

$$(f_m, f_n) = \|f_n\|^2 \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \|f_n\|^2, & m = n \end{cases} \tag{7.5}$$

Trong trường hợp đặc biệt, $\|f_n\|^2 = 1$ đối với mọi giá trị n và $\forall x \in (a, b)$, chuỗi hàm $\{f_n(x)\}$ được cho là *trực giao nhau* trên đoạn (a,b). Nhận xét rằng, nếu chuỗi $\{g_n(x)\}$ trực giao thì có thể xây dựng một chuỗi hàm trực giao mới $\{f_n(x)\}$ được định nghĩa là $f_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{\|g_n(x)\|}$.

Ví dụ 1: Tập hợp các hàm trực giao $\left\{\sin\dfrac{m\pi x}{L}\right\}$ với $n = 1,2,3,...$ là tập hợp các hàm trực giao trên đoạn $(0, L)$ với hàm trọng số $r(x) = 1$.

Giải. Thật vậy, theo định nghĩa tích hàm

$$\left(\sin\frac{m\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} =$$

$$= \frac{L}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}}{2(m-n)} - \frac{\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}}{2(m+n)}\right]_0^L = 0, \quad m \neq n.$$

Bình phương chuẩn hoá cho mỗi hàm được cho bởi

$$(f_m, f_m) = \|f_m\|^2 = \int_0^L \sin^2\frac{m\pi x}{L}dx = \int_0^L \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2m\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{L}{4m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{L}{2}, \quad m = 1,2,3...$$

Kết quả này được viết trong ký hiệu tích hàm như sau

$$\left(\sin\frac{m\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{L}{2}\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{L}{2}, & m = n \end{cases} \tag{7.6}$$

Chú ý rằng, chuỗi $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ cũng là một chuỗi trực giao.

Ví dụ 2: Cho $n = 1,2,3,...$ đối với tập hợp các hàm $\left\{1, \cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$ là một tập hợp các hàm trực giao trong khoảng $(0, L)$ với hàm trọng số $r(x) = 1$.

Giải. Thật vậy, theo định nghĩa tích hàm:

$$\left(1, \cos\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = 0; \quad n = 1,2,3,...$$

$$\left(\cos\frac{m\pi x}{L}, \cos\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{L}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{(m-n)\pi x}{L}}{2(m-n)} + \frac{\sin\frac{(m+n)\pi x}{L}}{2(m+n)}\right]_0^L = 0, m \neq n.$$

Bình phương chuẩn hoá là: $\|1\|^2 = \int_0^L dx = L$;

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{L}\right\|^2 = \int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^L \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{L}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{L}\right]_0^L = \frac{L}{2}; \quad n = 1,2,3,...$$

Kết quả này có thể được chuẩn hoá bằng cách dùng ký hiệu tích hàm

$$\left(\cos\frac{m\pi x}{L},\cos\frac{n\pi x}{L}\right)=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{L}{2}, & m=n\neq 0\\ L, & m=n=0\end{cases} \qquad (7.7)$$

Tập hợp các hàm trực giao được viết $\left\{1,\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$ đối với $n=1,2,3,...$ rõ hơn là dạng được viết $\left\{\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}$ đối với $n=0,1,2,3,...$ bởi vì chúng ta muốn nhấn mạnh rằng trường hợp $n=0$ có dạng chuẩn bình phương khác.

Tích hàm gắn với các hàm thực liên tục $f(x),g(x)$ và tập hợp các hàm thực $\{f_k(x)\}$ và $\{g_k(x)\}$ thỏa mãn các tính chất:

1) $(f,g)=(g,f)$;

2) $(cf,g)=c(g,f)$; $(f,cg)=c(g,f)$, $c=\text{const}$;

3) $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$; $(f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2)$; (7.8)

4) $\left(\sum_{k=1}^{n}f_k,g\right)=\sum_{k=1}^{n}(f_k,g)$; $\left(f,\sum_{k=1}^{n}g_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(f,g_k)$.

$\|f\|=0$ nếu và chỉ nếu $f=0$.

2. Quá trình trực giao hoá Gram-Schmidt

Một tổ hợp tuyến tính của một tập hợp các hàm $\{f_1(x),f_2(x),...,f_n(x)\}$ được viết:

$$c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+...+c_nf_n(x),$$

trong đó $c_1,c_2,...,c_n$ là các hằng số tùy ý.

Nếu các hằng số không bằng không, trong đó có thể tìm thấy một số tổ hợp tuyến tính của hàm $\{f_m(x)\}$ bằng không thì tập hợp các hàm này là *phụ thuộc tuyến tính*. Ngược lại, nếu chỉ một tổ hợp tuyến tính bằng không với mọi x, khi đó $c_1=c_2=...=c_n=0$, ta nói rằng tập hợp các hàm $\{f_m(x)\}$, $m=1,2,...,n$ là *độc lập tuyến tính*. Một tập hợp vô hạn được gọi là *độc lập tuyến tính* nếu mọi tập hợp hữu hạn là độc lập tuyến tính. Nhận xét rằng, nếu tập hợp $\{f_m(x)\}$ là một tập hợp trực giao thì nó sẽ là một tập hợp độc

lập tuyến tính. Để chứng tỏ điều đó, giả sử có số hữu hạn n, tổ hợp tuyến tính của chúng bằng không:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0.$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với hàm $r(x) f_k(x)$, trong đó k là số cố định và $1 \le k \le n$, sau đó thực hiện phép lấy tích phân đối với các hàm trực giao, ta có

$$c_1(f_1, f_k) + c_2(f_2, f_k) + \ldots + c_k(f_k, f_k) + \ldots + c_n(f_n, f_k) = 0. \qquad (7.9)$$

Xét mỗi tích hàm của phương trình (7.9) và chỉ chú ý đến hạng thức khác không ở vế trái của phương trình này. Đó là hạng thức thứ k với tích hàm khác không $c_k(f_k, f_k) = c_k \|f_k\|^2$. Phương trình (7.9) rút gọn thành $c_k \|f_k\|^2 = 0$, suy ra $c_k = 0$. Từ đó cho $k = 1, 2, \ldots, n$ ta có thể chỉ ra tất cả các c_k là bằng không. Chứng tỏ tập hợp trên là độc lập tuyến tính.

Một tập hợp trực giao các hàm $\{g_n(x)\}$ có thể được xây dựng từ một tập hợp các hàm độc lập tuyến tính không trực giao $\{f_n(x)\}$. Điều này được thực hiện bằng cách định nghĩa các hàm

$$g_0(x) = f_0(x); \quad g_1(x) = f_1(x) - c_{01} g_0(x),$$

trong đó: c_{01} được chọn để tích hàm (g_0, g_1) bằng không.

Hàm tiếp theo được đặt

$$g_2(x) = f_2(x) - c_{02} g_0(x) - c_{12} g_1(x),$$

trong đó: c_{02}, c_{12} được chọn để tích các hàm $(g_0, g_2), (g_1, g_2)$ bằng không.

Hàm tiếp theo được đặt

$$g_3(x) = f_3(x) - c_{03} g_0(x) - c_{13} g_1(x) - c_{23} g_2(x),$$

trong đó: c_{03}, c_{13} và c_{23} được chọn để các tích hàm $(g_0, g_3), (g_1, g_3)$ và (g_2, g_3) bằng không.

Tiếp tục cách làm như thế cho hàm thứ n ta có

$$g_n(x) = f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{kn} g_k(x).$$

Mỗi một hằng số trong các hằng số c_{kn} với $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ được chọn để cho tích hàm $(g_m, g_n) = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Quá trình này mang tên là *quá trình trực giao Gram-Schmidt*. Bằng cách xét hạng thức tổng quát, ta có thể đòi hỏi tích hàm tổng quát bằng không hoặc

$$(g_m, g_n) = \left(g_m, f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{kn} g_k(x) \right) = 0;$$

$$(g_m, g_n) = (g_m, f_n) - \sum_{k=0}^{n-1} c_{kn} (g_m, g_k) = 0.$$

Bây giờ xét hạng thức dưới dấu tổng và chỉ chú ý đến hạng thức khác không, còn lại trong tổng này khi $k = m$, kết quả là

$$(g_m, g_n) = (g_m, f_n) - c_{mn} \|g_m\|^2 = 0 \Rightarrow c_{kn} = \frac{(g_k, f_n)}{\|g_k\|^2};\ k = 0,1,2,...,n-1.$$

Như vậy, ta tìm thấy mỗi hệ số chưa biết trong quá trình trực giao Gram-Schmidt được cho bởi tích hàm chia cho bình phương của chuẩn.

Ví dụ 3: Từ tập hợp của các hàm độc lập tuyến tính $f_n(x) = x^n$; $n = 0,1,2,...$ ta xây dựng được một tập hợp các hàm trực giao trong khoảng $(-1,1)$ với hàm trọng $r(x) = 1$. Bắt đầu tiến trình trực giao Gram-Schmidt bằng cách đặt $g_0(x) = f_0(x) = 1$ và chú ý $\|1\|^2 = 2$. Tiếp theo, đặt $g_1(x) = f_1(x) - c_{01} g_0(x)$ với c_{01} được chọn sao cho $(g_1, g_0) = 0$ ta được $g_1(x) = x - c_{01}(1)$ với $c_{01} = \frac{(x,1)}{\|1\|^2} = 0$, hoặc $g_1(x) = x$ với

$$\|x\|^2 = (x,x) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Nhận xét rằng, hằng số c_{01} được cho bởi tích hàm chia cho bình phương chuẩn. Số hạng tiếp theo trong tập hợp trực giao là:

$$g_2(x) = f_2(x) - c_{02} g_0(x) - c_{12} g_1(x);$$

$$g_2(x) = x^2 - c_{02} 1 - c_{12} x,$$

trong đó hệ số được chọn sao cho cả hai tích hàm (g_0, g_2) và (g_1, g_2) bằng không. Hệ số này tìm được bởi tích hàm chia cho bình phương chuẩn, tức là

$$c_{02} = \frac{(x^2, 1)}{\|1\|^2} = \frac{1}{3};\quad c_{12} = \frac{(x^2, x)}{\|x\|^2} = 0.$$

Từ đó:

$$g_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \text{ với } \|g_2\|^2 = \frac{8}{45}.$$

Số hạng tiếp theo là:

$$g_3(x) = f_3(x) - c_{03}g_0(x) - c_{13}g_1(x) - c_{23}g_2(x);$$
$$= x^3 - c_{03}1 - c_{13}x - c_{23}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$

trong đó:

$$c_{03} = \frac{(x^3,1)}{\|1\|^2} = 0; \quad c_{13} = \frac{(x^3,x)}{\|x\|^2} = \frac{3}{5}; \quad c_{23} = \frac{\left(x^3, x^2 - \frac{1}{3}\right)}{\left\|x^2 - \frac{1}{3}\right\|^2} = 0..$$

Vậy

$$g_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x \text{ và } \|g_3\|^2 = \frac{8}{175}.$$

Tiếp tục như trên, ta được các hàm tiếp theo:

$$g_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \text{ với } \|g_4\|^2 = \frac{128}{11025};$$

$$g_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21} \text{ với } \|g_5\|^2 = \frac{128}{43659}.$$

Tập hợp các hàm trực giao được dùng để xây dựng nghiệm của các phương trình vi phân đạo hàm riêng.

§2. CÁC HỆ STURM-LIOUVILLE

Hệ Sturm-Liouville đầy đủ có chứa phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = -\lambda r(x)y \tag{7.10}$$

xác định trên khoảng $a \le x \le b$ chứa một tham số λ và bị ràng buộc ở điều kiện biên ở mỗi điểm có dạng

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 \frac{dy(a)}{dx} = 0; \quad \beta_3 y(b) + \beta_4 \frac{dy(b)}{dx} = 0, \tag{7.11}$$

trong đó: β_1, β_2, β_3 và β_4 là các hằng số độc lập của λ, các cặp (β_1, β_2) và (β_3, β_4) không đồng thời bằng không.

Điều đó được biểu thị bằng hệ thức $\beta_1^2 + \beta_2^2 \ne 0$ và $\beta_3^2 + \beta_4^2 \ne 0$. Phương trình vi phân (7.10) có một tham số λ và một toán tử vi phân tự liên hợp

$L(y)$. Các hệ số trong phương trình (7.10) là $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ và $r(x)$ là thực và liên tục với đòi hỏi $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ trong khoảng $a \le x \le b$.

Khi điều kiện biên (7.11) được thay thế bởi điều kiện biên tuần hoàn có dạng

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b) \tag{7.12}$$

thì tập hợp (7.10) và (7.12) được gọi là *hệ Sturm-Liouville tuần hoàn*. Kết hợp với phương trình (7.11), ta đưa ra một vài nhận xét, tính chất và chú ý sau:

1) Chúng ta chỉ xét nghiệm liên tục khác không cho hệ Sturm-Liouville. Hệ Sturm-Liouville cho bởi phương trình (7.10) có thể không có nghiệm, có một nghiệm duy nhất hoặc có một số vô hạn nghiệm. Số và loại của nghiệm phụ thuộc vào giá trị được chọn λ. Tham số λ sẽ được chọn sao cho thu được nghiệm không âm.

2) Giá trị của λ để nghiệm tồn tại và khác không được gọi là *trị riêng*. Tập hợp các trị riêng kết hợp với bài toán Sturm-Liouville được gọi là *phổ của bài toán*. Nếu tất cả các trị riêng là thực và có một số vô hạn các giá trị riêng ký hiệu là $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ trong đó λ_1 là trị riêng nhỏ nhất và $\lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ thì hàm số khác không tương ứng với các trị riêng được gọi là các *hàm riêng*. Đối với mỗi trị riêng λ_n tương ứng có một hàm riêng được viết là $y_n(x) = y(x;\lambda_n)$. Nhận xét rằng, nếu y_n là một hàm riêng thì cy_n cũng là một hàm riêng, với hằng số $c \ne 0$. Đôi khi để cho tiện, người ta ký hiệu trị riêng nhỏ nhất là λ_0.

3) Hàm riêng $y_n(x), n = 1,2,3$ có $n-1$ không điểm trên khoảng $a \le x \le b$.

4) Tập hợp các hàm riêng trực giao nhau trong khoảng (a,b) với hàm trọng là $r(x)$, đó là tích hàm kết hợp với hai hàm riêng khác nhau thỏa mãn

$$(y_n, y_m) = \int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = 0;\ \text{nếu } m \ne n, \tag{7.13}$$

và bình phương chuẩn khác không cho mỗi giá trị n

$$(y_n, y_n) = \int_a^b r(x) y_n^2(x) dx \ne 0. \tag{7.14}$$

5) Các hàm trị riêng tạo thành một tập hợp đầy đủ. Giả sử rằng *f(x)* là một hàm trơn từng khúc và có thể coi như một chuỗi có chứa các hàm riêng $y_n(x)$ có dạng

$$f(x)=\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n y_n(x). \tag{7.15}$$

Các trị riêng làm thành một tập hợp đầy đủ nếu

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b r(x)\left(f(x)-\sum_{n=n_0}^{k} c_n y_n(x)\right)^2 dx=0, \tag{7.16}$$

trong đó n_0 là chỉ số bắt đầu có giá trị 0 hoặc 1 phụ thuộc vào việc đánh số các trị riêng.

Chuỗi vừa biểu diễn được gọi là *chuỗi Fourier tổng quát*, còn các hằng số c_n được gọi là các *hằng số Fourier*. Có thể chỉ ra các hệ số Fourier được cho bởi một tích hàm chia cho bình phương chuẩn. Nếu $n=1,2,3...$ ta có thể viết

$$c_n=\frac{(f,y_n)}{\|y_n\|^2}=\frac{\int_a^b r(x)f(x)y_n(x)dx}{\int_a^b r(x)y_n^2(x)dx}. \tag{7.17}$$

6) Hệ Sturm-Liouville được gọi là *một hệ đầy đủ* nếu các hệ số trong phương trình vi phân thỏa mãn $p(x)>0, q(x)>0$ và $r(x)>0$ ở mọi nơi, và điều kiện biên (7.11).

7) Nếu một trong các điều kiện đầy đủ đã cho trong tính chất 6 là không được thỏa mãn, thì hệ Sturm-Liouville được gọi là hệ *Sturm-Liouville đơn*. Ví dụ, hàm $p(x)$ biến mất ở các điểm mút; hoặc một trong các hàm $p(x), q(x), r(x)$ có giá trị vô hạn ở các điểm mút; hoặc tất cả các điều kiện biên bằng hằng số, hoặc bằng không; hoặc một hay cả hai điểm mút a, b trở nên vô hạn thì hệ Sturm-Liouville ở trên được gọi là một hệ Sturm-Liouville đơn.

Để chứng minh tính chất trực giao, bắt đầu với giả thiết rằng, cho hai trị riêng khác nhau λ_m và λ_n ứng với hai nghiệm riêng khác nhau, khác không $y_m(x)$ và $y_n(x)$ của phương trình vi phân $L(y)=-\lambda r(x)y$, trong đó $L(y)$ là toán tử vi phân tự liên hợp được xác định trong công thức (7.10). Vì thế có thể viết:

$$\begin{aligned} L(y_m(x))&=-\lambda_m r(x)y_m(x);\\ L(y_n(x))&=-\lambda_n r(x)y_n(x). \end{aligned} \tag{7.18}$$

Dùng đồng nhất thức Green và thay $u=y_n(x)$ và $v=y_m(x)$ thu được

$$\int_a^b \left[y_n L(y_m) - y_m L(y_n) \right] dx = p(x)\left[y_n(x) y'_m(x) - y_m(x) y'_n(x) \right]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \left[y_n\left(-\lambda_m r(x) y_m\right) - y_m\left(-\lambda_n r(x) y_n\right) \right] dx = p(x)\left[y_n(x) y'_m(x) - y_m(x) y'_n(x) \right]_a^b$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b r(x) y_n(x) y_m(x) dx = p(b)\left[y_n(b) y'_m(b) - y_m(b) y'_n(b) \right] -$$

$$- p(a)\left[y_n(a) y'_m(a) - y_m(a) y'_n(a) \right] \tag{7.19}$$

Vế trái của phương trình (7.19) có một tích phân biểu diễn tích hàm của hai hàm riêng. Chúng bằng không khi hai hàm riêng này trực giao ($n \neq m$). Xét các trường hợp sau:

Trường hợp	***Điều kiện***
1) $p(a) = 0; p(b) = 0$	
2) $p(a) = 0; p(b) \neq 0$	$\beta_3 y_n(b) + \beta_4 y'_n(b) = 0$ $\beta_3 y_m(b) + \beta_4 y'_m(b) = 0$ $y_n(b) y'_m(b) - y'_n(b) y_m(b) = 0$
3) $p(a) \neq 0; p(b) = 0$	$\beta_1 y_n(a) + \beta_2 y'_n(a) = 0$ $\beta_1 y_m(a) + \beta_2 y'_m(a) = 0$ $y_n(a) y'_m(a) - y'_n(a) y_m(a) = 0$
4) $p(a) \neq 0; p(b) \neq 0$	$\beta_3 y_n(b) + \beta_4 y'_n(b) = 0$ $\beta_3 y_m(b) + \beta_4 y'_m(b) = 0$ $y_n(b) y'_m(b) - y'_n(b) y_m(b) = 0$ $\beta_1 y_n(a) + \beta_2 y'_n(a) = 0;\ \beta_1 y_m(a) + \beta_2 y'_m(a) = 0$ $y_n(a) y'_m(a) - y'_n(a) y_m(a) = 0$

Hàm $f(x)$ trơn từng khúc biểu diễn dưới dạng chuỗi của các hàm riêng

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + \ldots \tag{7.20}$$

Nhân cả hai vế với $r(x) y_m(x) dx$ rồi lấy tích phân từ a đến b ta có

$$\int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx = (f, y_m) = c_1(y_1, y_m) + c_2(y_2, y_m) + c_3(y_3, y_m) + \ldots \quad (7.21)$$

Tập hợp các hàm $\{y_n\}$ trực giao nhau trong khoảng (a,b), suy ra

$$(f, y_m) = c_m(y_m, y_m) = c_m \|y_m\|^2, \quad (7.22)$$

trong đó các hệ số có dạng

$$c_m = \frac{(f, y_m)}{\|y_m\|^2} = \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx}{\int_a^b r(x) y_m^2(x) dx}; \; m = 1,2,3. \quad (7.23)$$

§3. HỆ STURM-LIOUVILLE CHO CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC VÀ HÀM MŨ

1. Hệ Sturm-Liouville trong khoảng $0 \le x \le L$

Xét bài toán Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, 0 \le x \le L; \\ y(0) = 0; \; y(L) = 0. \end{cases} \quad (7.24)$$

So sánh với phương trình Sturm-Liouville (7.19) ta suy ra $p(x) = 1, q(x) = 0$ và $r(x) = 1$. Yêu cầu tìm trị riêng λ để phương trình có nghiệm không tầm thường, tức là nghiệm khác không. Xét các trường hợp của λ sau:

Trường hợp	*Điều kiện*
1) $\lambda = -\omega^2 \Rightarrow y'' - \omega^2 y = 0$ $y = C_1 \operatorname{sh} \omega x + C_2 \operatorname{ch} \omega x$	$y(0) = 0 = C_1 \operatorname{sh} 0 + C_2 \operatorname{ch} 0 \Rightarrow C_2 = 0$ $y(L) = 0 = C_1 \operatorname{sh} L \Rightarrow C_1 = 0$
2) $\lambda = 0 \Rightarrow y'' = 0$ $y = C_3 x + C_4$	$y(0) = 0 = C_3 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = 0$ $y(L) = 0 = C_1 L \Rightarrow C_3 = 0$
3) $\lambda = \omega^2 \Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0$ $y = C_5 \sin \omega x + C_6 \cos \omega x$	$y(0) = 0 = C_5 \sin 0 + C_6 \cos 0 \Rightarrow C_6 = 0$ $y(L) = 0 = C_5 \sin \omega L \Rightarrow C_5 \ne 0$ $\sin \omega L = 0 = \sin n\pi \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1,2\ldots$

Như vậy chỉ có trường hợp 3, khi

$$\lambda = \lambda_n = \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2;\ n = 1,2,3... \tag{7.25}$$

thì phương trình mới cho nghiệm khác không. Đó là nghiệm

$$y_n(x) = y(x,\lambda_n) = \sin\omega_n x = \sin\frac{n\pi x}{L};\ n = 1,2,3... \tag{7.26}$$

2. Hệ Sturm-Liouville trong khoảng $-L \le x \le L$

Xét bài toán Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx^2} + \lambda F = 0; \quad -L \le x \le L \\ F(-L) = F(L);\ F'(-L) = F'(L) \end{cases} \tag{7.27}$$

Yêu cầu tìm trị riêng λ để phương trình có nghiệm không tầm thường. Xét các trường hợp của λ sau:

Trường hợp	*Điều kiện*
1) $\lambda = -\omega^2 \Rightarrow \dfrac{d^2F}{dx^2} - \omega^2 F = 0$ $F = C_1 \operatorname{sh}\omega x + C_2 \operatorname{ch}\omega x$ $F' = C_1\omega \operatorname{ch}\omega x + C_2\omega \operatorname{sh}\omega x$	$F(-L) = C_1 \operatorname{sh}(-\omega L) + C_2 \operatorname{ch}(-\omega L)$ $= F(L) = C_1 \operatorname{sh}(\omega L) + C_2 \operatorname{ch}(\omega L)$ $F'(-L) = C_1\omega \operatorname{ch}(-\omega L) + C_2\omega \operatorname{sh}(-\omega L)$ $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow F = 0$
2) $\lambda = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2F}{dx^2} = 0$ $F = C_3 x + C_4$	$F'(-L) = C_3 = F'(L) = C_3$ $F(-L) = C_3(-L) + C_4 = F(L) = C_3 L + C_4$ $\Rightarrow C_3 = 0,\ C_4$ tùy ý. Chọn $F_0(x) = 1$.
3) $\lambda = \omega^2 \Rightarrow \dfrac{d^2F}{dx^2} + \omega^2 F = 0$ $F = C_5 \cos\omega x + C_6 \sin\omega x$ $F' = -C_5\omega \sin\omega x + C_6\omega \cos\omega x$	$F(-L) = C_5 \cos(-\omega L) + C_6 \sin(-\omega L)$ $= F(L) = C_5 \cos(\omega L) + C_6 \sin(\omega L)$ $\Rightarrow 2C_6 \sin(\omega L) = 0; C_5$ tùy ý; $F'(-L) = -C_5\omega \sin(-\omega L) + C_6\omega \cos(-\omega L)$ $= F'(L) = -C_5\omega \sin(\omega L) + C_6\omega \cos(\omega L)$ $\Rightarrow 2C_5 \sin(\omega L) = 0; C_6$ tùy ý $\Rightarrow \sin\omega L = 0; C_5, C_6$ tùy ý. $\sin\omega L = 0 = \sin n\pi \Rightarrow \omega = \omega_0 = \dfrac{n\pi}{L}, n = 1,2$ $F(x) = C_5 \cos\dfrac{n\pi}{L} + C_6 \sin\dfrac{n\pi}{L}$

Tóm lại, bài toán Sturm-Liouville có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{d^2F}{dx^2} + \lambda F = 0; \quad -L \le x \le L \\ F(-L) = F(L);\ F'(-L) = F'(L) \end{cases}$$

có các trị riêng là $\lambda_0 = 0, \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2$; $n = 1,2,3...$ tương ứng với các hàm riêng $\left\{1, \cos\dfrac{n\pi x}{L}, \sin\dfrac{n\pi x}{L}\right\}$. Các trị riêng này thỏa mãn các điều kiện trực giao như sau:

$$\begin{aligned}
&\left(1, \sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n = 1,2,3,...; \\
&\left(1, \cos\frac{n\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n = 1,2,3,...; \\
&\left(\sin\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{m\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n \ne m; \\
&\left(\cos\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{m\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0, \quad n \ne m; \\
&\left(\cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{m\pi x}{L}\right) = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0, \quad \forall n, m.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Bình phương chuẩn của các hàm riêng có dạng

$$\begin{cases}
(1,1) = \displaystyle\int_{-L}^{L} dx = 2L \\
\left(\sin\dfrac{n\pi x}{L}, \sin\dfrac{n\pi x}{L}\right) = \left\|\sin\dfrac{n\pi x}{L}\right\|^2 = \displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\dfrac{n\pi x}{L}\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx = L \\
\left(\cos\dfrac{n\pi x}{L}, \cos\dfrac{n\pi x}{L}\right) = \left\|\cos\dfrac{n\pi x}{L}\right\|^2 = \displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx = L.
\end{cases} \tag{7.29}$$

Đối với các hàm mũ, một tập hợp hàm $\phi_n(x)$ được gọi là trực giao nếu

$$(\phi_n(x), \phi_m(x)) = \int_a^b r(x)\phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}\,dx = 0, \text{ khi } m \ne n, \tag{7.30}$$

trong đó $\overline{\phi_m(x)}$ là liên hợp phức của hàm $\phi_m(x)$.

Ví dụ các hàm $\phi_n(x) = e^{\frac{in\pi x}{L}}$ trực giao nhau trong khoảng $(-L, L)$ với hàm trọng $r(x) = 1$:

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_{-L}^{L} e^{in\pi x/L} e^{-im\pi x/L} dx = \begin{cases} 0, & \text{khi } m \neq n \\ 2L, & \text{khi } m = n \end{cases}$$

§4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HÀM BESSEL

1. Phương trình và hàm Bessel

Phương trình Bessel là phương trình có dạng

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0, \tag{7.31}$$

trong đó ν là hằng số.

Phương trình (7.31) có điểm kỳ dị tại $x = 0$. Tìm nghiệm riêng của phương trình dưới dạng chuỗi

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_0 \neq 0). \tag{7.32}$$

Đặt chuỗi (7.32) vào phương trình (7.31) ta có

$$\left(\rho^2 - \nu^2\right) a_0 x^{\rho} + \left[(\rho+1)^2 - \nu^2\right] a_1 x^{\rho+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left\{\left[(\rho+k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2}\right\} x^{\rho+k} = 0 \tag{7.33}$$

Chuỗi (7.33) chỉ bằng không khi các hệ số của x bằng không. Tức là

$$\rho^2 - \nu^2 = 0, \tag{7.34}$$

$$\left[(\rho+1)^2 - \nu^2\right] a_1 = 0, \tag{7.35}$$

$$\left[(\rho+k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2} = 0, \; k = 2, 3, \ldots \tag{7.36}$$

Từ (7.34) suy ra $\rho = \pm\nu$.

Nếu chọn $\rho = \nu$, nhận được

$$a_1 = 0, \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\nu + k)} \quad (k = 2, 3, 4 \ldots), \tag{7.37}$$

suy ra

$$a_{2k+1} = 0, \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{7.38}$$

Vậy:

$$k = 2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)1!};$$

$$k=4 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4(2\nu+4)} = -\frac{a_2}{2^2(\nu+2)2!} = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!};$$

$$k=6 \Rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6(2\nu+6)} = -\frac{a_4}{2(\nu+3)3!} = -\frac{a_0}{2^6(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)3!};$$

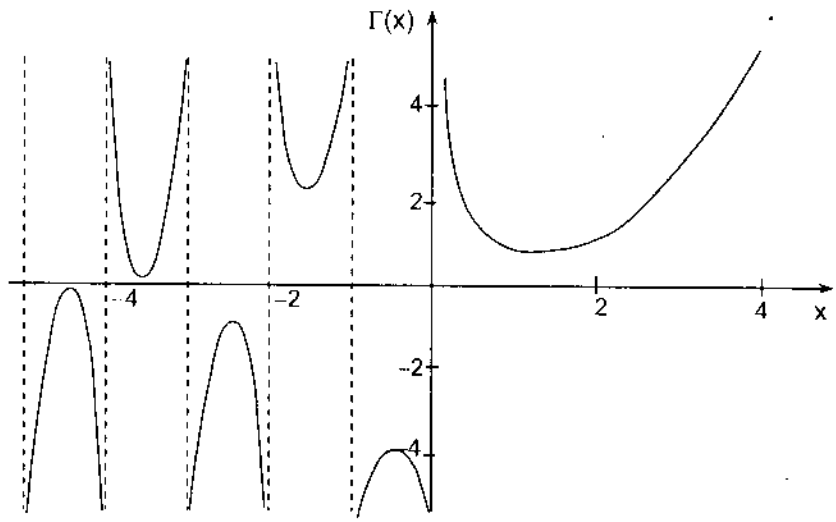
$$k=2k \Rightarrow a_{2k} = \frac{a_0(-1)^k}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)....(\nu+k)k!}.$$

Chọn a_0 có dạng

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

trong đó $\Gamma(\nu)$ là hàm Gamma xác định đối với mọi giá trị dương ν (cũng như xác định đối với mọi giá trị phức với phần thực dương) có dạng

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx.$$



Hình 7.1. **Đồ thị hàm** $\Gamma(\nu)$

Khi chọn a_0, hệ số a_{2k} có thể viết dưới dạng

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)\Gamma(\nu+1)}. \qquad (7.39)$$

Nếu sử dụng tính chất của hàm Gamma $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$ có thể viết

$$(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+k+1).$$

Chú ý rằng

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1,\ \Gamma(k+1)=k!.$$

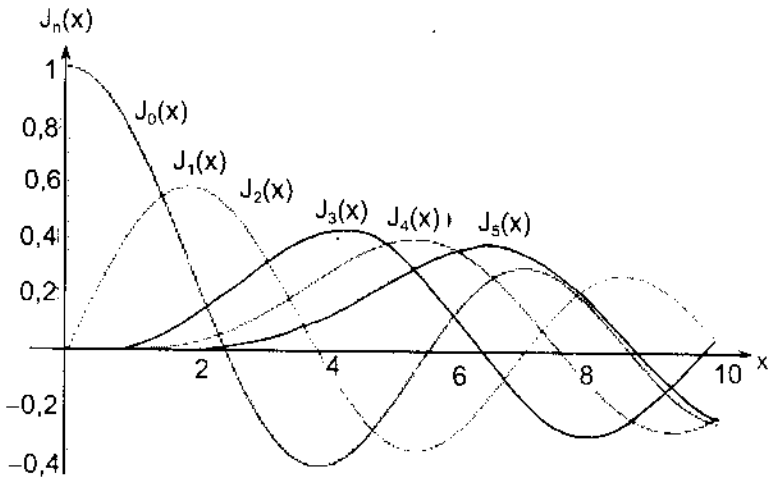
Công thức (7.39) có dạng gọn hơn

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{7.40}$$

Thay các giá trị của hệ số a_{2k}, a_{2k+1} vào chuỗi ta nhận được nghiệm riêng của phương trình (7.31):

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{7.41}$$

Nghiệm này được gọi là *hàm Bessel loại 1 cấp* ν. Chuỗi (7.41) hội tụ với mọi x.



Hình 7.2. **Đồ thị hàm Bessel loại 1** $J_n(x)$

Sử dụng nghiệm thứ hai $\rho_2=-\nu$ có thể tìm được nghiệm thứ hai của phương trình (7.31), nó nhận được bằng cách thay ν bằng $-\nu$. Bởi vì phương trình (7.31) chỉ chứa ν^2 nên nó không thay đổi khi thay ν bằng $-\nu$. Ta có

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}. \tag{7.42}$$

Nếu v không phải số nguyên thì nghiệm riêng $J_v(x)$ và $J_{-v}(x)$ của phương trình sẽ độc lập tuyến tính, bởi vì khai triển các số hạng của (7.37) và (7.38) theo các bậc khác nhau của x. Còn nếu v là số nguyên dương n thì dễ dàng thấy rằng các nghiệm $J_v(x)$ và $J_{-v}(x)$ là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy khi v nguyên, $k = 0,1...,n-1$ thì đại lượng $(-v+k+1)$ nhận các giá trị nguyên âm hay bằng không, đối với các giá trị này $\Gamma(-v+k+1)=\infty$. Điều này suy từ các công thức

$$\Gamma(m)=\frac{\Gamma(m+1)}{m}$$

$$\Rightarrow \Gamma(0)=\frac{\Gamma(1)}{0}=\infty,\ \Gamma(-1)=\frac{\Gamma(0)}{-1}=-\infty.$$

Như vậy n hạng thức đầu tiên trong khai triển chuyển bằng không, do đó có

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)}. \tag{7.43}$$

Nếu đặt $k=n+l$ và thay vào công thức (7.43) ta có:

$$J_{-n}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2n+2l}}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)}=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)};$$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2l}}{\Gamma(l+1)\Gamma(n+l+1)}, \tag{7.44}$$

suy ra

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x). \tag{7.45}$$

Nếu v là số nguyên dương n thì nghiệm $J_v(x)$ và $J_{-v}(x)$ là phụ thuộc tuyến tính.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình với v bằng số nguyên n cần phải tìm một số hạng khác độc lập tuyến tính với $J_v(x)$. Muốn vậy ta đưa hàm $Y_v(x)$ về dạng

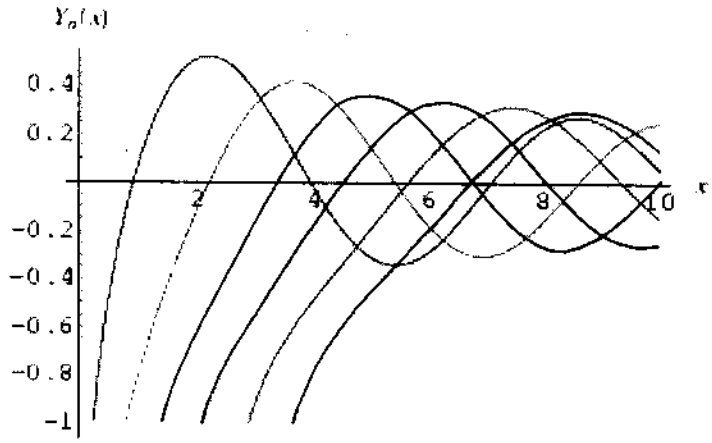
$$Y_v(x)=\frac{J_v(x)\cos v\pi - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}. \tag{7.46}$$

Chú ý rằng:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Vì $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ cho nên khi lấy giới hạn biểu thức trên có dạng $0/0$, áp dụng quy tắc L'Hopital thu được biểu thức tường minh của $Y_n(x)$:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \\ -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!(k+n)} \left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]. \tag{7.47}$$



Hình 7.3. **Đồ thị hàm Bessel loại II** $Y_n(x)$

Khi $n = 0$, hàm

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

Rõ ràng hàm $Y_\nu(x)$ này cũng là nghiệm của phương trình (7.31), bởi vì nó là tổ hợp tuyến tính của hai nghiệm riêng $J_\nu(x)$ và $J_{-\nu}(x)$ của phương trình này. $Y_\nu(x)$ được gọi là *hàm Bessel loại II cấp ν* hay còn được gọi là *hàm Weber*. $J_\nu(x)$ và $Y_\nu(x)$ là hai hàm độc lập tuyến tính, với ν là số hữu tỷ, nó tạo nên hệ nghiệm cơ bản của phương trình (7.31).

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x) \tag{7.48}$$

2. Các tính chất truy hồi của hàm Bessel

Hàm Bessel có các tính chất:

$$\begin{cases} J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \dfrac{\nu}{x} J_\nu(x), & Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \dfrac{\nu}{x} Y_\nu(x) \quad (1) \\ J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \dfrac{\nu}{x} J_\nu(x), & Y'_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \dfrac{\nu}{x} Y_\nu(x) \quad (2)\ (7.49) \\ J_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x), & Y_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x) \quad (3) \end{cases}$$

Ta chứng minh công thức (2), thật vậy:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{\nu+2k} k!\Gamma(\nu+k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{\nu+2k-1}(k-1)!\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Trong biểu thức cuối, thay tổng k bằng $k+1$ ta có

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2^{\nu+2k-1}(k-1)!\Gamma(\nu+k+1)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{\nu+2k+1} k!\Gamma(\nu+1+k+1)}$$

$$= -\frac{1}{x^\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2k}}{k!\Gamma(\nu+1+k+1)} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

Chú ý rằng

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = \frac{J'_\nu(x)x^\nu - \nu x^{\nu-1}J_\nu(x)}{x^{2\nu}} = \frac{J'_\nu(x)}{x^\nu} - \frac{\nu}{x.x^\nu}J_\nu(x) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

$$\Rightarrow J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x), \qquad Y'_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}Y_\nu(x).$$

Đó là điều phải chứng minh.

3. Một vài trường hợp riêng của hàm Bessel

Trong vật lý – toán thường gặp các hàm sau

$$J_0(x),\ J_1(x),\ Y_0(x),\ J_{\pm n+\frac{1}{2}}(x),$$

với n nguyên. Hai hàm đầu tiên được biểu diễn dưới dạng chuỗi:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\times 4^2} - \frac{x^6}{2^2\times 4^2\times 6^2} + \ldots;$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2\times 4} + \frac{x^4}{2\times 4^2\times 6} - \frac{x^6}{2\times 4^2\times 6^2\times 8} + \ldots\right)$$

Từ công thức truy hồi $J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x)$, các hàm $J_2(x)$, $J_3(x)$ có thể được tìm từ $J_0(x)$, $J_1(x)$.

Các hàm $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ được biểu diễn như sau

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}.$$

Theo công thức của hàm Gamma ta có

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right);\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

$$\Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Tương tự $$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Áp dụng công thức $J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x)$ ta tìm được:

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\sin x+\frac{3}{x}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right].$$

4. Hàm Bessel ảo

Xét phương trình

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0, \tag{7.50}$$

với x được thay bằng ix.

Nếu x được thay bằng ix, phương trình (7.50) có dạng

$$(ix)^2\frac{d^2y}{d(ix)^2}+(ix)\frac{dy}{d(ix)}+\left[(ix)^2-\nu^2\right]y=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left[-x^2-\nu^2\right]y=0 \Leftrightarrow x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-\left(x^2+\nu^2\right)y=0$$

hay
$$x^2y''+xy'-\left(x^2+\nu^2\right)y=0. \qquad (*)$$

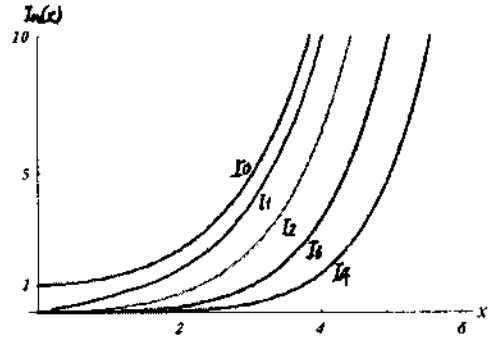
(*) được gọi là thể biến dạng của phương trình Bessel, nghiệm có dạng
$$y(x)=C_1J_\nu(ix)+C_2Y_\nu(ix).$$

Như vậy

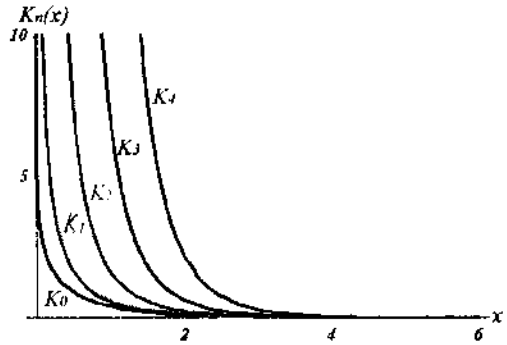
$$J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}i^\nu(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^\nu(-1)^k(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}=i^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}=i^\nu I_\nu(x).$$

Chọn $K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}$, ta có nghiệm của phương trình (7.31) là tổng của các hàm Bessel ảo loại I và II, có dạng
$$y(x)=C_1I_\nu(x)+C_2K_\nu(x).$$



Hình 7.4. **Hàm Bessel ảo loại I $I_n(x)$**



Hình 7.5. Hàm Bessel ảo loại II $K_n(x)$

§5. TÍNH TRỰC GIAO CỦA HÀM BESSEL

1. Tính chất trực giao thứ nhất của hàm Bessel

Xét phương trình

$$x^2y'' + xy' + \left(k^2x^2 - \nu^2\right)y = 0, \tag{7.51}$$

trong đó k là hằng số nào đó khác không.

Nếu thay $t = kx$, khi đó ta đưa phương trình (7.51) về dạng

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \nu^2\right)y = 0. \tag{7.52}$$

(7.52) là phương trình Bessel biến số t, vì vậy nghiệm có dạng

$$y = J_\nu(kx) \text{ hay } x^2\frac{d^2J_\nu(kx)}{dx^2} + x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx} + \left(k^2x^2 - \nu^2\right)J_\nu(kx) = 0. \tag{7.53}$$

Chia hai vế của (7.53) cho x ta có

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}\right] + \left(k^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(kx) = 0.$$

Lấy hai giá trị khác nhau của k và viết 2 phương trình tương ứng:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}\right] + \left(k_1^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_1x) = 0 \quad \left|\times J_\nu(k_2x)\right.;$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right] + \left(k_2^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_2x) = 0 \quad \left|\times J_\nu(k_1x)\right..$$

Trừ hai vế của phương trình cho nhau, ta có

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right)xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x) = \frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(k_2x)\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx} - xJ_\nu(k_1x)\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right].$$

Lấy tích phân từ 0 đến L phương trình trên ta được

$$\left(k_2^2 - k_1^2\right)\int_0^L xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)dx = L\left[k_1J_\nu(k_2L)J'_\nu(k_1L) - k_2J_\nu(k_1L)J'_\nu(k_2L)\right].$$

Chú ý rằng, nếu $\nu > -1$, hàm $J_\nu(x)$ có tất cả các nghiệm thực. Vì theo (7.41):

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

sẽ có từng cặp giống nhau về giá trị tuyệt đối, nhưng ngược nhau về dấu, nên ta chỉ xét các nghiệm dương. Giả sử $k_1 = \frac{\mu_i}{L}$, $k_2 = \frac{\mu_j}{L}$, trong đó μ_i, μ_j là hai nghiệm dương khác nhau của phương trình $J_\nu(x) = 0$. Suy ra

$$\int_0^L xJ_\nu\left(\mu_i \frac{x}{L}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{L}\right) dx = 0,\ i \neq j. \tag{7.54}$$

Thật vậy, giả sử $k = \frac{\mu}{L}$ với μ là nghiệm dương của phương trình $J_\nu(x) = 0$. Trong công thức (7.54), thay $k_1 = k$, cho $k_2 \to k$ và coi k_2 như là biến số, ta có

$$\int_0^L xJ_\nu(kx) J_\nu(k_2 x) dx = \frac{LkJ_\nu(k_2 L) J_\nu'(kL)}{k_2^2 - k^2}.$$

Khi $k_2 \to k$, vế phải có dạng bất định $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hopital ta có

$$\lim_{k_2 \to k} \frac{LkJ_\nu(k_2 L) J_\nu'(kL)}{k_2^2 - k^2} = \lim_{k_2 \to k} \frac{\frac{d}{dk_2}\left[LkJ_\nu(k_2 L) J_\nu'(kL)\right]}{\frac{d}{dk_2}\left(k_2^2 - k^2\right)}$$

$$= \lim_{k_2 \to k} \frac{L^2 k J_\nu'(k_2 L) J_\nu'(kL)}{2k_2} = \frac{L^2}{2} J_\nu'^2(kL).$$

Vậy
$$\int_0^L xJ_\nu^2\left(\mu \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L^2}{2} J_\nu'^2(\mu). \tag{7.55}$$

Ta có

$$J_\nu'(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu).$$

Như vậy, công thức (7.55) có dạng

$$\int_0^L xJ_\nu^2\left(\mu \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L^2}{2} J_\nu'^2(\mu) = \frac{L^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu).$$

Do đó, ta có công thức trực giao

$$\int_0^L xJ_\nu\left(\mu_i \frac{x}{L}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{L^2}{2} J_\nu'^2(\mu_i) = \frac{L^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i), & i = j \end{cases} \tag{7.56}$$

với μ_i và μ_j là nghiệm dương của phương trình $J_\nu(x) = 0$.

2. Tính chất trực giao thứ hai của hàm Bessel

Nếu cho điều kiện:

$$\alpha J_\nu(x)+\beta x J_\nu'(x)=0,\ \nu>-1; \tag{7.57}$$

$$\int_0^L x J_\nu^2\left(\mu\frac{x}{L}\right)dx=\frac{L^2}{2}\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu) \tag{7.58}$$

có μ là nghiệm dương của phương trình trên thì giả sử $k_1=\frac{\mu_i}{L}$, $k_2=\frac{\mu_j}{L}$, trong đó μ_i,μ_j là hai nghiệm dương khác nhau của phương trình (7.57), tức là:

$$\alpha J_\nu(k_1L)+\beta k_1L J_\nu'(k_1L)=0;$$

$$\alpha J_\nu(k_2L)+\beta k_2L J_\nu'(k_2L)=0.$$

Nhân phương trình trên với $J_\nu(k_2L)$ và phương trình dưới với $J_\nu(k_1L)$, rồi trừ cho nhau ta thu được

$$k_1J_\nu'(k_1L)J_\nu(k_2L)-k_2J_\nu'(k_2L)J_\nu(k_1L)=0.$$

Khi $k_1\neq k_2$:

$$\int_0^L xJ_\nu(k_1x)J_\nu(k_2x)dx=L\left[k_1J_\nu(k_2L)J_\nu'(k_1L)-k_2J_\nu(k_1L)J_\nu'(k_2L)\right]=0.$$

Trong trường hợp này, ta cũng có tính trực giao của các hàm Bessel

$$\int_0^L xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)J_\nu\left(\mu_j\frac{x}{L}\right)dx=0,\ i\neq j.$$

Chú ý rằng, nếu $\nu>-1$ và $\frac{\alpha}{\beta}+\nu\geq 0$ thì nghiệm của phương trình là thực.

Giả sử $k=\frac{\mu}{L}$, trong đó μ là nghiệm của phương trình (7.57), theo công thức (7.58) ta đặt $k_1=k$, cho $k_2\to k$ và coi k_2 như là biến số, ta có

$$\int_0^L xJ_\nu(kx)J_\nu(k_2x)dx=\frac{L\left[kJ_\nu(k_2L)J_\nu'(\mu)-k_2J_\nu(\mu)J_\nu'(k_2L)\right]}{k_2^2-k^2}.$$

Khi $k_2\to k$ vế phải có dạng bất định $\frac{0}{0}$, áp dụng quy tắc L'Hopital ta có

$$\int_0^L xJ_\nu^2\left(\mu\frac{x}{L}\right)dx=\frac{L\left[\mu J_\nu'^2(\mu)-J_\nu'(\mu)J_\nu(\mu)-\mu J_\nu''(\mu)J_\nu(\mu)\right]}{2k}. \tag{7.59}$$

Theo phương trình Bessel

$$J_\nu''(\mu)+\frac{1}{\mu}J_\nu'(\mu)+\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu(\mu)=0.$$

Nhân phương trình trên với $\mu J_\nu(\mu)$ ta được

$$\mu J_\nu(\mu)J_\nu''(\mu)+J_\nu(\mu)J_\nu'(\mu)=-\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu).$$

Như vậy, công thức (7.59) có dạng

$$\int_0^L xJ_\nu^2\left(\mu\frac{x}{L}\right)dx=\frac{L^2}{2}\left[J_\nu'^2(\mu)+\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)\right].$$

Từ phương trình (7.57), suy ra

$$J_\nu'(\mu)=-\frac{\alpha}{\beta\mu}J_\nu(\mu).$$

Thay ngược lên trên, ta có công thức trực giao

$$\int_0^L xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)J_\nu\left(\mu_j\frac{x}{L}\right)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \dfrac{L^2}{2}\left(1+\dfrac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu), & \begin{cases}\mu=\mu_i=\mu_j\\ i=j\end{cases}\end{cases}.\quad(7.60)$$

§6. KHAI TRIỂN MỘT HÀM TÙY Ý VÀO CÁC HÀM BESSEL

Hãy tìm hệ số khai triển một hàm tuỳ ý vào chuỗi của các hàm Bessel $J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)$ trên đoạn $0<x<L$ trong 2 trường hợp:

a) μ_i $(i=1,2,...)$ là nghiệm của phương trình $J_\nu(x)=0$.

b) μ_i $(i=1,2,...)$ là nghiệm của phương trình $\alpha J_\nu(x)+\beta xJ_\nu'(x)=0$.

Trong §5, đã chứng tỏ các hàm $J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)$ trực giao và chuẩn hoá trên đoạn $0<x<L$. Khai triển một hàm bất kỳ vào chuỗi các hàm Bessel $J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)$ với hệ số khai triển là a_i:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right),\quad \nu>-1,\ 0<x<L.$$

a) Nếu μ_i $(i=1,2,...)$ là nghiệm của phương trình $J_\nu(x)=0$, theo công thức (7.56) ta có

$$\int_0^L xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)J_\nu\left(\mu_j\frac{x}{L}\right)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \dfrac{L^2}{2}J_\nu'^2(\mu_i)=\dfrac{L^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_i), & i=j\end{cases}.$$

Nhân hai vế với $xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)$ rồi lấy tích phân từ 0 đến L suy ra được hệ số

$$a_i=\frac{2}{L^2J_{\nu+1}^2(\mu_i)}\int_0^L xf(x)J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)dx.$$

Người ta gọi khai triển này là *khai triển Fourier-Bessel.*

b) Nếu μ_i $(i=1,2,...)$ là nghiệm của phương trình

$$\alpha J_\nu(x)+\beta xJ_\nu'(x)=0.$$

Theo mục 2, §5 ta có

$$\int_0^L xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)J_\nu\left(\mu_j\frac{x}{L}\right)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \dfrac{L^2}{2}\left(1+\dfrac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu), & \begin{cases}\mu=\mu_i=\mu_j\\ i=j\end{cases}\end{cases}.$$

Nhân hai vế của phương trình đã cho với $xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)$ rồi lấy tích phân từ 0 đến L suy ra được hệ số

$$a_i=\frac{2}{L^2\left(1+\dfrac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_i^2}\right)J_\nu^2(\mu_i)}\int_0^L xf(x)J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{L}\right)dx.$$

Người ta gọi khai triển này là *khai triển Dyni-Bessel.*

§7. ĐA THỨC LEGENDRE

1. Đa thức Legendre

Phương trình Legendre có dạng

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0, \tag{7.61}$$

hoặc

$$\begin{cases}(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+\lambda y=0\\ x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}-\lambda y=0\end{cases} \tag{7.62}$$

trong đó λ là tham số nào đó, phương trình có các điểm đặc biệt tại $x=\pm1$.

Vấn đề đặt ra là tìm giá trị của tham số λ, sao cho phương trình tồn tại nghiệm không tầm thường trong đoạn $[-1,1]$.

Tìm nghiệm của phương trình Legendre dưới dạng chuỗi

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Thay y vào (7.62) ta nhận được:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 .$$

Thay $n = n+2$ vào số hạng thứ hai ta thu được

$$\left[n(n+1) - \lambda\right]a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0,$$

hay là

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n , \tag{7.63}$$

các hệ số a_0 và a_1 tuỳ ý.

Khi $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ ta có nghiệm riêng của phương trình Legendre chỉ chứa các bậc chẵn của x. Khi $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ ta có nghiệm riêng của phương trình Legendre chỉ chứa các bậc lẻ của x.

Khi $\lambda = n(n+1)$ phương trình có nghiệm dưới dạng chuỗi đến bậc n. Tìm nghiệm tương ứng của phương trình

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0,$$

hay

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

có dạng chuỗi bậc n.

Xét đa thức bậc $2n$:

$$z = (x^2 - 1)^n . \tag{7.64}$$

Dễ dàng thấy rằng, đa thức (7.64) thỏa mãn phương trình vi phân sau

$$(x^2 - 1)\frac{dz}{dx} - 2nxz = 0 . \tag{7.65}$$

Đạo hàm hai vế của phương trình (7.65) n lần theo x, ta nhận được

$$(1-x^2)\frac{dz^{(n)}}{dx} + n(n+1)z^{(n-1)} = 0 . \tag{7.66}$$

Nếu vi phân phương trình này một lần nữa theo x, sẽ tìm được $z^{(n)}$ thỏa mãn phương trình (7.61):

$$\left[(1-x^2)z^{(n+1)}+n(n+1)z^{(n-1)}\right]' = (1-x^2)z^{(n+2)}-2xz^{(n+1)}+n(n+1)z^{(n)}=0;$$

$$(1-x^2)\frac{dz^{(n)}}{dx}-2x\frac{dz^{(n)}}{dx}+n(n+1)z^{(n)}=0.$$

Như vậy, phương trình (7.62) có nghiệm

$$y = Cz^{(n)} = C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

trong đó C là hằng số. Đặt $C=\dfrac{1}{2^n n!}$, ta có

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},\ (n=0,1,2...). \qquad (7.67)$$

Đây là đa thức Legendre, là nghiệm của phương trình (7.61) khi $\lambda = n(n+1)$. Một vài giá trị đầu tiên của nghiệm là:

$$P_0(x)=1;\ P_1(x)=x;\ P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right);\ P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right).$$

Chứng minh rằng, các đa thức Legendre với bậc khác nhau trực giao và chuẩn hoá với nhau trong khoảng $(-1,+1)$.

Phương trình của hai đa thức Legendre khác nhau là:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]+\lambda_m P_m(x)=0,\\&\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]+\lambda_n P_n(x)=0\end{aligned}\right\},(m\neq n).$$

Nhân phương trình đầu với $P_n(x)$, phương trình thứ hai với $P_m(x)$, trừ hai phương trình rồi lấy tích phân 2 vế trong khoảng từ $(-1,+1)$ ta được:

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_n'(x)\right]-P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P_m'(x)\right]\right\}dx$$

$$=(1-x^2)\left[P_m(x)P_n'(x)-P_n(x)P_m'(x)\right]\Big|_{x=-1}^{x=1}=0.$$

Như vậy $$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0,$$

hay là $$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0 \quad (m\neq n) \qquad (7.68)$$

tức là các đa thức Legendre trực giao nhau trên đoạn $(-1,+1)$.

Bây giờ chuẩn hoá đa thức bằng cách xét bình phương của đa thức Legendre

$$H_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx .$$

Sử dụng công thức tường minh của đa thức Legendre, tích phân trên có dạng

$$H_n = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}dx .$$

Tích phân từng phần n lần và chú ý rằng sẽ xuất hiện một hạng thức bên ngoài tích phân bằng không ta có

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx .$$

Biết rằng

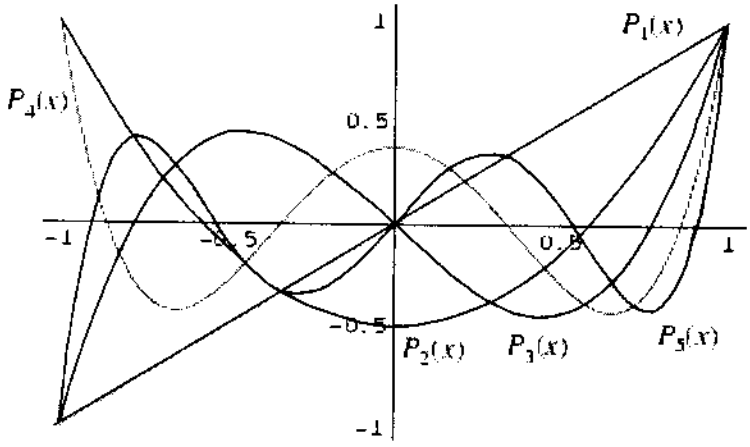
$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = (-1)^n.2.\frac{2.4...2n}{3.5...(2n+1)},$$

do đó

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} .$$

Như vậy tính trực giao và chuẩn hoá của đa thức Legendre trên đoạn $(-1,+1)$ là

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases} \qquad (7.69)$$



Hình 7.6. **Đồ thị đa thức Legendre**

Với tính trực giao của các đa thức Legendre, có thể khai triển hàm bất kỳ vào chuỗi các đa thức Legendre

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x),$$

trong đó

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx.$$

2. Các tính chất của đa thức Legendre

1) $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$;

2) $P_{2n-1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=\dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$;

3) $P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n$;

4) Các nghiệm của $P_n(x)$ đều thực và nằm trong khoảng $(-1,+1)$.

3. Đa thức Legendre liên kết

Tìm trị riêng và hàm riêng của phương trình

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\dfrac{m^2}{1-x^2}\right)y=0,\quad -1<x<1\\ \left|y(\pm1)\right|<\infty\end{cases}\tag{7.70}$$

Nghiệm được tìm dưới dạng

$$y(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}V(x),\quad V(\pm1)\neq0.\tag{7.71}$$

Ta có

$$\frac{dy}{dx}=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}V'(x)-\frac{m}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}2xV(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}V'(x)-\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}-1}mxV(x);$$

$$\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}+1}V'(x)-\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}mxV(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left[\left(1-x^2\right)V''(x)-2(m+1)xV'(x)+\frac{m^2x^2}{\left(1-x^2\right)}V(x)-mxV(x)\right]$$

Thay vào phương trình (7.70), ta được:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=\left(1-x^2\right)V''-2(m+1)xV'+\left[\lambda-m(m+1)\right]V=0$$

Vậy phương trình (7.70) có dạng

$$\left(1-x^2\right)V''-2\left(m+1\right)xV'+\left[\lambda-m\left(m+1\right)\right]V=0. \qquad (7.72)$$

Mặt khác, vi phân m lần phương trình Legendre (7.61) ta có

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\lambda y\right]=0.$$

Vì $\left(u.v\right)^{(m)}=\sum_{i=0}^{m}C_m^i u^{(i)}v^{(m-i)}$, với

$$C_m^i=\frac{m!}{i!\left(m-i\right)!};\ C_m^0=1;\ C_m^1=m;\ C_m^2=\frac{m\left(m-1\right)}{2}$$

suy ra

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}\right]-\frac{d^m}{dx^m}\left[2x\frac{dy}{dx}\right]+\frac{d^m}{dx^m}\left[\lambda y\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x^2\right)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}-2\left(m+1\right)x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+\left[\lambda-m\left(m+1\right)\right]\frac{d^my}{dx^m}=0. \qquad (7.73)$$

So sánh (7.72) với (7.73), suy ra

$$V\left(x\right)=\frac{d^mP_n}{dx^m},\ \ \lambda=n\left(n+1\right). \qquad (7.74)$$

Ta có nghiệm

$$P_n^{(m)}\left(x\right)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n\left(x\right)}{dx^m} \qquad (7.75)$$

tương ứng với trị riêng

$$\lambda_n=n\left(n+1\right),\quad n=1,2...$$

$P_n^{(m)}\left(x\right)$ là hàm Legendre liên kết cấp m, với $m=0,1,2...$ và

$$P_n^{(0)}\left(x\right)=P_n\left(x\right);$$

$$P_n^{(m)}\left(x\right)\neq 0,\quad m\leq n.$$

4. Tính trực giao và chuẩn hoá của đa thức Legendre liên kết

Nhân phương trình (7.72) với $\left(1-x^2\right)^m$ ta có

$$\left(1-x^2\right)^{m+1}V''-2\left(m+1\right)\left(1-x^2\right)^m xV'+\left[\lambda-m\left(m+1\right)\right]\left(1-x^2\right)^mV=0,$$

trong đó $V\left(x\right)$ và λ được xác định theo công thức (7.74).

Thay $m+1$ bằng m, ta được:

$$\left(1-x^2\right)^m \bar{V}'' - 2mx\left(1-x^2\right)^{m-1}\bar{V}' + \left[\lambda - m(m-1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1}\bar{V} = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{d\bar{V}}{dx}\right] = -\left[\lambda - m(m-1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1}\bar{V},$$

với $\bar{V}(x) = \dfrac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}$.

Do đó

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\right] = -\left[\lambda - m(m-1)\right]\left(1-x^2\right)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}.$$

Đưa vào ký hiệu

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)P_k^{(m)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\frac{d^m P_k}{dx^m}\,dx.$$

Tính tích phân $L_{n,k}^m = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m \dfrac{d^m P_n}{dx^m}\dfrac{d^m P_k}{dx^m}\,dx$ bằng cách áp dụng công thức tính tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} u = \left(1-x^2\right)^m \dfrac{d^m P_k}{dx^m} \Rightarrow du = -\left[\lambda - m(m-1)\right]\dfrac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\,dx \\ dv = \dfrac{d^m P_n}{dx^m}\,dx \qquad \Rightarrow v = \dfrac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}} \end{cases}$$

Suy ra

$$L_{n,k}^m = \left(1-x^2\right)^m \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\frac{d^m P_k}{dx^m}\Bigg|_{-1}^{1} + \left[\lambda - m(m-1)\right]\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\,dx$$

$$= \left(1-x^2\right)^m \frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\frac{d^m P_k}{dx^m}\Bigg|_{-1}^{1} + \left[n(n+1) - m(m-1)\right]\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}\,dx$$

$$= \left[n(n+1) - m(m-1)\right]L_{n,k}^{m-1} = (n+m)(n-m+1)L_{n,k}^{m-1}.$$

Do đó

$$L_{n,k}^{m-1} = (n+m-1)(n-m+2)L_{n,k}^{m-2}.$$

Vậy $L_{n,k}^m$ biểu diễn qua $L_{n,k}^{m-2}$ như sau

$$L_{n,k}^m = (n+m)(n+m-1)(n-m+1)(n-m+2)L_{n,k}^{m-2}.$$

Tiếp tục cách làm như trên ta thu được công thức

$$L_{n,k}^m = (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\times(n-m+1)(n-m+2)\ldots nL_{n,k}^0.$$

Vì

$$\begin{cases}(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)=\dfrac{(n+m)!}{n!}\\(n-m+1)(n-m+2)\ldots n=\dfrac{n!}{(n-m)!}\end{cases}$$

suy ra $$L_{n,k}^{0}=\int_{-1}^{1}P_n^{(0)}(x)P_k^{(0)}(x)dx=\frac{2}{2n+1}.$$

Vậy

$$L_{n,k}^{m}=\int_{-1}^{1}P_n^{(m)}(x)P_k^{(m)}(x)dx=\begin{cases}0, & k\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k=n\end{cases}\qquad(7.76)$$

Hay công thức chuẩn hóa của đa thức Legendre liên kết là

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\qquad(7.77)$$

§8. ĐỊNH NGHĨA HÀM CẦU

1. Hàm cầu

Xét phương trình Laplace được viết trong hệ tọa độ cầu

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\qquad(7.78)$$

trong đó $u=u(r,\theta,\varphi)$.

Dùng phương pháp tách biến đặt

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r).Y(\theta,\varphi).\qquad(7.79)$$

Thay (7.79) vào phương trình (7.78) ta có

$$Y(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{R(r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0.$$

Chia hai vế cho $R(r)Y(\theta,\varphi)$ ta có

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

Chọn:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R(r)}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial R(r)}{\partial r}\right)=\lambda \\ \dfrac{1}{Y(\theta,\varphi)}\left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right]=-\lambda \end{cases}$$

Bằng cách chọn λ cho các biểu thức trên ta có các phương trình sau

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)=\lambda \Leftrightarrow \frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr}=\lambda$$

và $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0.$$

Hàm R thỏa mãn phương trình

$$r^2R''+2rR'-\lambda R=0. \tag{7.80}$$

Nghiệm của R có dạng

$$R(r)=A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}},$$

trong đó n thỏa mãn phương trình $\lambda=n(n+1)$.

Xét bài toán ngoài, do n nguyên, $A_n=0$ suy ra $R=\dfrac{B_n}{r^{n+1}}$.

Phương trình cho Y có dạng

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y+\lambda Y=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0. \tag{7.81}$$

Hàm Y thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} Y(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi+2\pi) \\ |Y(0,\varphi)|<\infty,\ |Y(\pi,\varphi)|<\infty \end{cases} \tag{7.82}$$

Nghiệm của phương trình Laplace có dạng

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{Y_n(\theta,\varphi)}{R^{n+1}}.$$

Người ta định nghĩa hàm cầu là nghiệm của phương trình

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2}+n(n+1)Y_n=0 \\ Y_n(\theta,\varphi+2\pi)=Y_n(\theta,\varphi);|Y_n(0,\varphi)|<\infty;|Y_n(\pi,\varphi)|<\infty \end{gathered} \tag{7.83}$$

Phương trình trên còn được gọi là *phương trình xác định hàm cầu*. Để giải phương trình hàm cầu, chọn

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta).\Phi(\varphi). \tag{7.84}$$

Thay (7.84) vào phương trình (7.83) ta có:

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{P}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+n(n+1)P\Phi=0;$$

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+n(n+1)=0.$$

Chọn $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=-m^2$, hàm Φ thỏa mãn phương trình

$$\left.\begin{aligned}&\Phi''+m^2\Phi=0\\&\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)\end{aligned}\right\} \tag{7.85}$$

và

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P=0. \tag{7.86}$$

Đặt $x=\cos\theta\Rightarrow dx=-\sin\theta d\theta$, phương trình (7.86) được đổi sang biến mới

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P=0.$$

Đây là phương trình xác định đa thức Legendre liên kết và đã được giải ở §7. Nghiệm của phương trình này là

$$P=P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n}{dx^m},\qquad m<n$$

$$\text{hay}\quad P=P_n^{(m)}(\cos\theta)=(\sin\theta)^m\frac{d^mP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}.$$

Với mỗi n có $n+1$ nghiệm riêng của phương trình đó là $P_n, P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)},\ldots,P_n^{(n)}$. Với mỗi cặp nghiệm

$$\Phi_m(\varphi)=\begin{cases}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{cases}$$

tương ứng với $n+1$ nghiệm, ta có $2n+1$ nghiệm của hàm cầu độc lập tuyến tính là:

$$P_n,\ \begin{cases} P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi \\ P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi \end{cases},\ \begin{cases} P_n^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi \\ P_n^{(2)}(\cos\theta)\sin 2\varphi \end{cases},\ldots,$$

$$\begin{cases} P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \\ P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \end{cases},\ldots,\ \begin{cases} P_n^{n}(\cos\theta)\cos n\varphi \\ P_n^{n}(\cos\theta)\sin n\varphi \end{cases}$$

trong đó $m = 1,2...,n;\ n = 0,1,2...$

Theo công thức trên, ta quy ước $2n+1$ hàm cầu là

$$Y_n^{(0)}(\cos\theta) = P_n(\cos\theta);$$

$$\begin{cases} Y_n^{(-1)}(\cos\theta) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi \\ Y_n^{(1)}(\cos\theta) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

.....

$$\begin{cases} Y_n^{(-m)}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \\ Y_n^{(m)}(\cos\theta) = P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \end{cases}$$

.....

$$\begin{cases} Y_n^{(-n)}(\cos\theta) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\cos n\varphi \\ Y_n^{(n)}(\cos\theta) = P_n^{(n)}(\cos\theta)\sin n\varphi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình (7.83) có dạng

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n}\left(A_{mn}\cos m\varphi + B_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta) = \sum_{m=-n}^{n} C_{mn}Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

trong đó

$$C_{mn} = \begin{cases} A_{mn} & m \le 0 \\ B_{mn} & m > 0 \end{cases}$$

Hàm $Y_n^{(0)}(\theta) = P_n(\cos\theta)$ không phụ thuộc vào φ được gọi là *hàm đới*, tức là hình cầu chia thành $n+1$ miền vĩ tuyến, tại đó dấu của hàm đới được bảo toàn.

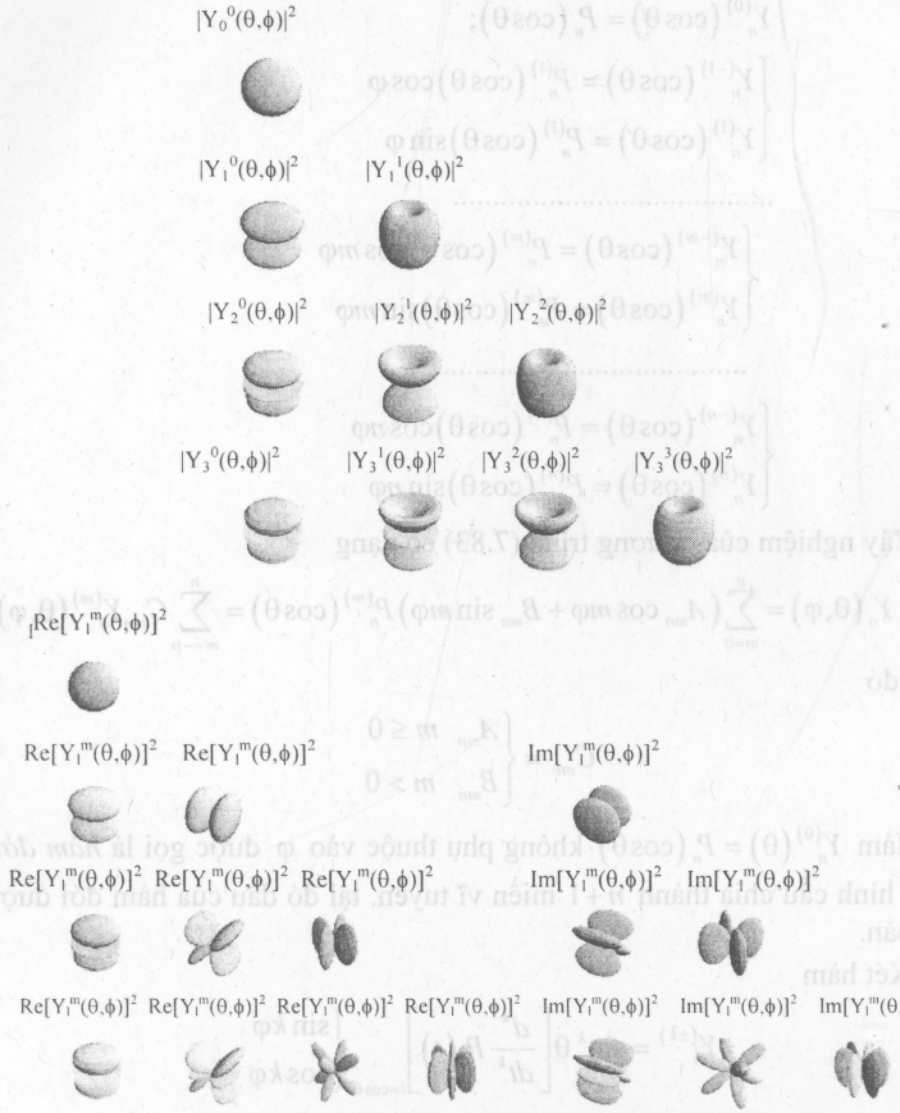
Xét hàm

$$Y_n^{(\pm k)} = \sin^k\theta\left[\frac{d^k}{dt^k}P_n(t)\right]_{t=\cos\theta}\begin{cases}\sin k\varphi \\ \cos k\varphi\end{cases}$$

trên hình cầu, bởi vì $\sin\theta$ chuyển bằng không ở trên các cực, các hàm $\begin{cases}\sin k\varphi \\ \cos k\varphi\end{cases}$ chuyển bằng không tại các đường kinh tuyến $2k$.

Với $2n+1$ hàm cầu trực giao và chuẩn hoá có thể khai triển hàm $f(\theta,\varphi)$ bất kỳ vào chuỗi các hàm cầu

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{mn}\cos m\varphi+B_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta) \quad (7.87)$$



Hình 7.7. **Dạng hàm cầu**

2. Dao động riêng của hình cầu

Xét bài toán

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v = 0. \tag{7.88}$$

Thay toán tử Laplace trong tọa độ cầu, ta có

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} v + \lambda v = 0, \tag{7.89}$$

trong đó:

$$\Delta_{\theta,\varphi} v = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Giải phương trình dưới dạng tách biến

$$v(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi), \tag{7.90}$$

thay vào (7.89) ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(r^2\dfrac{dR}{dx}\right)}{R} + \lambda r^2 + \dfrac{\Delta_{\theta,\varphi} Y}{Y} = 0 \\ \Delta_{\theta,\varphi} Y + \mu Y = 0 \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dx}\left(r^2\dfrac{dR}{dx}\right) + \left(\lambda - \dfrac{\mu}{r^2}\right)R = 0 \end{cases} \tag{7.91}$$

Giải hệ phương trình (7.91) với điều kiện

$$|Y|_{\theta=0,\pi} < \infty, \; Y(\theta,\varphi+2\pi) = Y(\theta,\varphi) \Rightarrow \mu = n(n+1). \tag{7.92}$$

Với mỗi n có tương ứng với $2n+1$ hàm cầu

$$\begin{cases} Y_n^{(0)}(\theta,\varphi) = P_n(\cos\theta) \\ Y_n^{(-j)}(\theta,\varphi) = P_n^{(j)}(\cos\theta)\cos j\varphi \\ Y_n^{(j)}(\theta,\varphi) = P_n^{(j)}(\cos\theta)\sin j\varphi, \; (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases} \tag{7.93}$$

Quay về phương trình với R:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)R = 0; \\ &R(r_0) = 0, \; R(0) < \infty. \end{aligned} \tag{7.94}$$

Nhờ cách đặt biến mới $R(r) = \dfrac{y(r)}{\sqrt{r}}$, suy ra:

$$\frac{dR}{dr} = r^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}y, \quad r^2\frac{dR}{dr} = r^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}y;$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = r^{\frac{3}{2}}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{3}{2}r^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{4}r^{-\frac{1}{2}}y;$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = r^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2y}{dr^2} + r^{-\frac{3}{2}}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{4}r^{-\frac{5}{2}}y.$$

Thay vào (7.94) ta được

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy}{dr} - \frac{1}{4r^2}y + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy}{dr} + \left[\lambda - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right]y = 0. \tag{7.95}$$

Phương trình (7.95) có nghiệm là

$$y(r) = AJ_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right) + BN_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right). \tag{7.96}$$

Từ điều kiện biên suy ra:

$$|R(0)| < \infty \Rightarrow B = 0;$$

$$R(r_0) = 0 \Rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}\,r_0\right) = 0.$$

Ký hiệu $\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, ..., \nu_m^{(n)}$ là nghiệm của phương trình $J_{n+\frac{1}{2}}(\nu) = 0$, ta có các trị riêng

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{7.97}$$

Mỗi trị riêng $\lambda_{m,n} = \left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$ ta có $2n+1$ hàm riêng. Đưa vào ký hiệu

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x), \tag{7.98}$$

khi đó nghiệm của phương trình (7.88) là

$$v_{n,m,j}(r,\theta,\varphi) = \psi_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}r\right)Y_n^{(j)}(\theta,\varphi) \tag{7.99}$$

$$(n = 0,1,...;\ m = 1,2,...;\ j = -n,...,-1,0,...,n)$$

Xét bài toán biên trong đối với phương trình sóng

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad ; \quad v\big|_{\Sigma(r_0)} = f(\theta,\varphi). \tag{7.100}$$

Nghiệm có dạng: $v(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=-n}^{n} f_{nj}\dfrac{\psi_n(kr)}{\psi_n(kr_0)}Y_n^{(j)}(\theta,\varphi)$, (7.101)

trong đó: f_{nj} là hệ số khai triển $f(\theta,\varphi)$ theo hàm cầu $\left\{Y_n^{(j)}(\theta,\varphi)\right\}$:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=-n}^{n} f_{nj}Y_n^{(j)}(\theta,\varphi). \tag{7.102}$$

§9. TÍNH TRỰC GIAO CỦA HÀM CẦU

Xét hai hàm cầu Y_1 và Y_2 trên bề mặt Σ, với các giá trị tương ứng λ_1 và λ_2 thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} \Delta_{\theta,\varphi}Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \quad \Delta_{\theta,\varphi}Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0 \\ \Delta_{\theta,\varphi} = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{cases} \tag{7.103}$$

Ta có $$\iint_\Sigma Y_2\Delta_{\theta,\varphi}Y_1\, d\Omega = -\iint_\Sigma \left\{\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\right\} d\Omega, \tag{7.104}$$

trong đó $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma Y_2\Delta_{\theta\varphi}Y_1 d\Omega &= \iint_\Sigma Y_2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\varphi^2}\right]\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \iint_\Sigma Y_2\left[\sin\theta\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\theta^2} + \cos\theta\frac{\partial Y_1}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 Y_1}{\partial\varphi^2}\right]d\theta d\varphi \\ &= -\iint_\Sigma\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\right\}d\Omega, \end{aligned} \tag{7.105}$$

$(d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi)$

Trên bề mặt hình cầu:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right].$$

Như vậy

$$\iint_{\Sigma} Y_2 \Delta_{\theta\varphi} Y_1 d\Omega = -\iint_{\Sigma} \operatorname{grad} Y_1 \operatorname{grad} Y_2 d\Omega, \ \left(d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi\right).$$

Ta có công thức Green đối với toán tử hình cầu

$$J = \iint_{\Sigma} \left(Y_2 \Delta_{\theta\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta\varphi} Y_2\right) d\Omega = 0,$$

suy ra

$$J = \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) \iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0.$$

Vì $\lambda_2 \neq \lambda_1$ suy ra

$$\iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 d\Omega = 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_1(\theta,\varphi) Y_2(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = 0.$$

Như vậy, đã chứng minh được tính trực giao của các hàm cầu tương ứng với các trị riêng λ khác nhau.

Ở §8 đã nêu lên rằng: nếu $\lambda = n(n+1)$ sẽ có $2n+1$ hàm cầu $Y_n^{(m)}(\theta,\varphi)$. Để tìm tính chuẩn hoá của các hàm cầu, xét hai hàm cầu có chung chỉ số n là $Y_n^{(k_1)}(\theta,\varphi)$ và $Y_n^{(k_2)}(\theta,\varphi)$. Tích phân chúng ta có

$$\iint_{\Sigma} Y_n^{(k_1)}(\theta,\varphi) Y_n^{(k_2)}(\theta,\varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)}(\theta,\varphi) Y_n^{(k_2)}(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1\varphi \cos k_2\varphi d\varphi \int_{-1}^{1} P_n^{(k_1)}(t) P_n^{(k_2)}(t) dt$$

$$= \begin{cases} 0, & k_1 \neq k_2 \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!}, & k_1 = k_2 = k \neq 0 \\ \dfrac{4\pi}{2n+1}, & k_1 = k_2 = 0 \end{cases}$$

Hay có thể viết gọn hơn:

$$\left\|Y_n^{(k)}\right\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[Y_n^{(k)}(\theta,\varphi)\right]^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{2}{2n+1}\pi\varepsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \quad (7.106)$$

trong đó $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_k = 1$ khi $k > 0$.

Tính trực giao của hàm cầu có thể được sử dụng để khai triển một hàm bất kỳ xác định trên mặt cầu Σ:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_{nm}\cos m\varphi+B_{nm}\sin m\varphi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

trong đó các hệ số được xác định theo công thức:

$$A_{nm}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2};$$

$$B_{nm}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2}; \qquad (7.107)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình Laplace có thể viết dưới dạng:

$$u(r,\theta,\varphi)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta,\varphi), & \text{khi } r<a\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi), & \text{khi } r>a\end{cases}$$

trong đó: $$Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{n}\left(\alpha_{mn}\cos m\varphi+\beta_{mn}\sin m\varphi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

§10. VÍ DỤ VỀ HÀM CẦU

Nghiệm của phương trình Laplace trong hệ tọa độ cầu có dạng

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)Y_n(\theta,\varphi), \qquad 7.108)$$

trong đó $Y_n(\theta,\varphi)$ là hàm điều hoà cầu, nó là tổ hợp tuyến tính của $2n+1$ hàm cầu.

Nếu xét bài toán trong $r<a$ thì $B_n=0$, còn $r>a$ thì $A_n=0$, cuối cùng trong vùng $a<r<b$ (tức là không chứa điểm 0 và ∞) thì kết quả có cả r^n và $\frac{1}{r^{n+1}}$.

Bài toán: Cho hình cầu bán kính a, đặt vào tâm hình cầu một hệ tọa độ cầu (r,θ,φ), xét 2 bài toán Dirichlet :

$$\Delta u=0,\ r<a,\ u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi); \qquad (7.109)$$

$$\Delta u=0,\ r>a,\ u\big|_{r=a}=f(\theta,\varphi), \qquad (7.110)$$

với $f = f(\theta,\varphi)$ là hàm đã cho trên bề mặt hình cầu, có thể khai triển vào chuỗi theo các hàm cầu:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos\theta).$$

Các hệ số A_{nm} và B_{nm} được xác định theo công thức:

$$A_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2};$$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta d\theta d\varphi}{\left\|Y_n^{(m)}\right\|^2}.$$

Nghiệm của bài toán trong có dạng

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \overline{Y}_n(\theta,\varphi).$$

Sử dụng điều kiện biên $r = a$ và tính đến khai triển $f(\theta,\varphi)$ ta tìm được

$$\overline{Y}_n(\theta,\varphi) = Y_n(\theta,\varphi).$$

Tương tự đối với bài toán ngoài ta có

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\varphi), \quad r \ge a.$$

§11. ĐA THỨC HERMITE

1. Hàm sinh

Hàm sinh của đa thức Hermite có dạng

$$\psi(\rho,x) = e^{2x\rho-\rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{\rho^n}{n!} \tag{7.111}$$

Từ định lý Cauchy suy ra

$$H_n(x) = \left.\frac{\partial^n \psi(\rho,x)}{\partial\rho^n}\right|_{\rho=0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\psi(\zeta,x)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^{-(x-\zeta)^2}}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \tag{7.112}$$

trong đó: C là đường cong kín trong mặt phẳng phức bao quanh điểm $\zeta = 0$.

Bằng cách đổi biến $z = x - \zeta$, công thức (7.112) có dạng

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz = (-1)^n e^{x^2} \left\{ \frac{n!}{2\pi i} \frac{d^n}{dx^n} \int_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{z-x} dz \right\}, \quad (7.113)$$

ở đây C_1 là đường cong kín trong mặt phẳng phức bao quanh điểm $z = x$.

Theo định lý Cauchy

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \; f'(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \\ f''(z) = \dfrac{2}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta, \; f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \end{cases}$$

Suy ra

$$\left\{ \frac{n!}{2\pi i} \frac{d^n}{dx^n} \int_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{z-x} dz \right\} = \frac{d^n\left(e^{-x^2}\right)}{dx^n}.$$

Từ công thức (7.113) suy ra công thức vi phân

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right). \quad (7.114)$$

Công thức (7.114) chứng tỏ rằng $H_n(x)$ là đa thức bậc n, đồng thời

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (7.115)$$

Từ công thức (7.114) ta tìm được

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, \; H_2(x) = 4x^2 - 2, \ldots$$

2. Các công thức truy hồi

Vi phân hàm sinh theo ρ và x ta tìm được

$$\psi(\rho, x) = e^{2x\rho - \rho^2} \rightarrow \begin{cases} \psi_x = e^{-\rho^2} \dfrac{d}{dx} e^{2x\rho} = 2\rho e^{2x\rho - \rho^2} = 2\rho\psi \\ \psi_\rho = \dfrac{d}{d\rho}\left(e^{2x\rho}.e^{-\rho^2}\right) = 2(x - \rho)\psi \end{cases} \quad (7.116)$$

$$\psi_x - 2\rho\psi = 0, \; \psi_\rho - 2(x - \rho)\psi = 0$$

Trong mỗi đồng nhất thức (7.116), đặt chuỗi (7.111) vào và đặt các hệ số của luỹ thừa ρ^n cùng bậc và cho các hệ số bằng 0, ta nhận được hai công thức truy hồi:

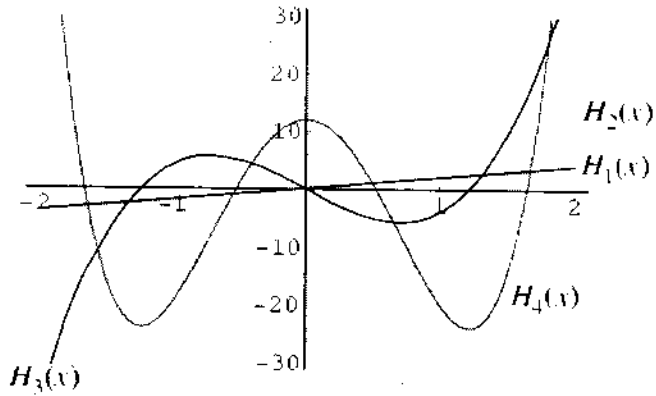
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x); \tag{7.117}$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \tag{7.118}$$

Công thức (7.118) cho phép xác định dạng tường minh của các $H_n(x)$:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, \Rightarrow H_2(x) = 2xH_1(x) - 2H_0(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - 4H_1(x) = 8x^3 - 12x, \ldots$$



Hình 7.8 . **Đa thức Hermite** $H_n(x)$

3. Phương trình xác định đa thức Hermite

Ta tìm phương trình thỏa mãn đa thức Hermite $H_n(x)$. Sử dụng công thức (7.117) và (7.118) ta có:

$$H_{n+1} - 2xH_n + H_n' = 0;$$

$$H_{n+1}' - 2xH_n' - 2H_n + H_n'' = 0;$$

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dH_n}{dx}\right) + 2ne^{-x^2}H_n = 0 \tag{7.119}$$

Như vậy, đa thức Hermite (7.119) là một hàm riêng tương ứng với trị riêng $\lambda = 2n$ của bài toán Sturm-Liouville: Tìm trị riêng λ, với trị riêng này phương trình Hermite

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + \lambda e^{-x^2}y = 0 \tag{7.120}$$

có nghiệm không tầm thường và tăng không nhanh hơn so với bậc hữu hạn của x.

Bài toán được giải nếu tìm nghiệm dưới dạng

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \to a_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n. \qquad (7.121)$$

Từ công thức trên, rõ ràng khi $\lambda = 2n$ tất cả các hệ số $a_k = 0$, khi $k > n$ chuỗi sẽ bị ngắt trở thành đa thức.

4. Chuẩn hoá đa thức $H_n(x)$

Ta hãy chứng minh các đa thức Hermite trực giao với nhau với trọng số e^{-x^2} trên khoảng $-\infty < x < \infty$ và nó có công thức chuẩn hoá là

$$\|H_n\| = \sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}\ . \qquad (7.122)$$

Xét biểu thức

$$L_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)dx\ .$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta có

$$L_{mn} = (-1)^n H_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} - (-1)^n 2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right)dx\ .$$

$$L_{mn} = (-1)^{n-1} 2m\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(e^{-x^2}\right)dx = \ldots$$

$$\ldots = (-1)^{n-m} 2^m m!\int_{-\infty}^{\infty} H_0(x)\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(e^{-x^2}\right)dx$$

Do $H_0(x) = 1$ nên

$$L_{mn} = \begin{cases} L_{mn} = (-1)^{n-m} 2^m m!\dfrac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(e^{-x^2}\right)\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0, & m < n \\ L_{mn} = 2^n n!\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 2^n n!\sqrt{\pi} = \|H_n\|^2, & m = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m = n \end{cases}$$

5. Hàm Hermite

Trong các ứng dụng, ta thường sử dụng hàm Hermite:

$$\psi_n(x) = h_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}},\ h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\|H_n(x)\|}$$

tạo nên một hệ hàm trực giao và chuẩn hoá với trọng số $\rho(x)=1$ trong khoảng $-\infty < x < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}.$$

Phương trình này bằng 0 khi $x \to \pm\infty$ và thỏa mãn phương trình

$$\psi_n'' + \left(\lambda - x^2\right)\psi_n = 0, \quad \lambda = 2n+1.$$

6. Bài toán ứng dụng dao động tử điều hoà

Tìm trị riêng và hàm riêng trong trường hợp thế dao động tử

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{7.123}$$

Đưa vào ký hiệu

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2};\ \lambda = \frac{m\omega}{\hbar},$$

phương trình Schrodinger được viết dưới dạng

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(k^2 - \lambda^2 x^2\right)u = 0. \tag{7.124}$$

Giải phương trình trên bằng cách cho rằng tại vùng tiệm cận $|x| \gg \frac{k}{\lambda}$ phương trình có dạng

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda^2 x^2 u \Rightarrow u = e^{\pm\left(\frac{1}{2}\lambda x^2\right)}. \tag{7.125}$$

Tìm nghiệm dưới dạng

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} v(x), \tag{7.126}$$

thay vào phương trình (7.124) ta có

$$v'' - 2\lambda x v' + \left(k^2 - \lambda\right)v = 0. \tag{7.127}$$

Đặt $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, ta có công thức truy hồi các hệ số:

$$a_{j+2} = \frac{\lambda(2j+1) - k^2}{(j+2)(j+1)} a_j. \tag{7.128}$$

Khi $j \to \infty$ ta có $a_{j+2} = \frac{2\lambda}{j} a_j$, tương ứng với số mũ của hàm khai triển $e^{\lambda x^2}$. Như vậy, nghiệm $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} v(x)$ không thể được chuẩn hoá nếu chuỗi $v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ không chuyển thành chuỗi cố số hạng hữu hạn. Đặt $k^2 = \lambda(2n+1)$, như vậy

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2};\ \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega}{\hbar}(2n+1) \to E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\ n = 0,1,2...$$

Hàm riêng $u_n(x)$ có thể xác định nhờ hệ thức (7.126) và chuẩn hoá theo điều kiện

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^2(x)dx = 1. \tag{7.129}$$

Một số hàm riêng:

$$u_0 = C_0 e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2},\ u_1 = C_1 x e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2};$$

$$u_2 = C_2\left(1 - 2\lambda x^2\right)e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2};$$

$$u_3 = C_3\left(1 - 4\lambda x^2 + \frac{4}{3}\lambda^2 x^4\right)e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2},$$

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} c_n,\ c_0 = 1,\ c_1 = \sqrt{2\lambda},\ c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ c_3 = \sqrt{3\lambda}.$$

§12. ĐA THỨC LAGUERRE

1. Dạng vi phân

Xét đa thức $L_n(x)$ với hàm sinh có dạng

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{1-\rho} e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}. \tag{7.130}$$

Khai triển thành chuỗi:

$$\Psi(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\rho^n,\quad L_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi}{\partial\rho^n}\bigg|_{\rho=0} \tag{7.131}$$

Sử dụng định lý Cauchy ta tìm được

$$L_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Psi(\zeta,x)}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \tag{7.132}$$

trong đó C là đường cong kín bao quanh điểm $\zeta=0$.

Dưa vào biến mới: $\zeta=1-\frac{x}{z}\Rightarrow d\zeta=\frac{xdz}{z^2}$

$$\Rightarrow\quad L_n(x)=e^x\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{z^ne^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz, \tag{7.133}$$

trong đó C_1 là đường cong kín bao quanh điểm $z=x$, từ (7.133) ta có:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^ne^{-x}\right). \tag{7.134}$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}\to f^{(n)}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-x)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow L_n(x)=e^x\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{z^ne^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz=\frac{e^x}{n!}\left[\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{z^ne^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz\right]$$

Vì $\left[\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{z^ne^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz\right]=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^ne^{-x}\right)$ suy ra

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^ne^{-x}\right),$$

như vậy $L_n(x)$ là đa thức bậc n: $L_0(x)=1,\ L_1(x)=1-x$.

2. Các công thức truy hồi

$$(1-\rho)^2\Psi_\rho-(1-\rho-x)\Psi=0; \tag{7.135}$$

$$(1-\rho)\Psi_x+\rho\Psi=0. \tag{7.136}$$

Đặt (7.135) và (7.136) vào (7.131) ta được:

$$(n+1)L_{n+1}-(2n+1-x)L_n+nL_{n-1}=0; \tag{7.137}$$

$$L'_{n+1}-L'_n+L_n=0.$$

(7.138)

Công thức (7.137) thiết lập mối liên hệ giữa các đa thức L_{n+1}, L_n, L_{n-1} và cho phép xác định các L_n.

Đưa vào một hệ thức truy hồi tiếp theo:

$$xL_n' + (n+1-x)L_n - (n+1)L_{n+1} = 0. \qquad (7.139)$$

Thật vậy, từ (7.137) suy ra

$$(n+2)L_{n+2} - (2n+3-x)L_{n+1} + (n+1)L_n = 0.$$

Đạo hàm hai vế của phương trình trên ta được

$$(n+2)L_{n+2}' - (2n+3-x)L_{n+1}' + L_{n+1} + (n+1)L_n' = 0. \qquad (7.140)$$

Từ (7.138) suy ra

$$L_{n+2}' = L_{n+1}' - L_{n+1},\ L_{n+1}' = L_n' - L_n.$$

Thay vào (7.140) ta được

$$(n+2)(L_{n+1}' - L_{n+1}) - (2n+3-x)(L_n' - L_n) + L_{n+1} + (n+1)L_n' = 0$$
$$\Rightarrow xL_n' + (n+1-x)L_n - (n+1)L_{n+1} = 0.$$

3. Phương trình Laguerre

Vi phân (7.139) theo x ta có

$$xL_n'' + (n+2-x)L_n' - L_n - (n+1)L_{n+1}' = 0.$$

Thay $L_{n+1}' = L_n' - L_n$ vào phương trình trên ta được

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0,$$

hay là

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dL_n}{dx}\right) + ne^{-x}L_n = 0. \qquad (7.141)$$

Phương trình (7.141) được gọi là *phương trình Laguerre.*

Như vậy, $L_n(x)$ là hàm riêng tương ứng với trị riêng $\lambda = n$ của bài toán: Tìm trị riêng λ của phương trình

$$\left(xe^{-x}y'\right)' + \lambda e^{-x}y = 0,\ 0 < x < \infty \qquad (7.142)$$

để phương trình có nghiệm không tầm thường. Nghiệm hữu hạn khi $x = 0$ và tăng khi $x \to \infty$ không nhanh hơn bậc hữu hạn của x.

Phương trình (7.141) có thể nhận được nếu vi phân $n+2$ lần hàm $z = x^n e^{-x}$ và sử dụng công thức $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^n e^{-x}\right)$.

4. Tính trực giao và chuẩn hoá của đa thức Laguerre

Xét: $J_{mn} = \int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty L_m(x) \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) dx$

Đặt

$$U = L_m(x) \Rightarrow dU = \frac{dL_m}{dx} dx; dV = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) dx \Rightarrow V = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow J_{mn} = \frac{1}{n!} L_m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right)\Big|_0^\infty - \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{dL_m}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right) dx$$

$$= (-1)^m \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{d^m L_m}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(x^n e^{-x}\right) dx.$$

Sau đó lại đặt

$$U = \frac{d^m L_m}{dx^m} \Rightarrow dU = \frac{d^{m+1} L_m}{dx^{m+1}} dx; dV = \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left(x^n e^{-x}\right) dx \Rightarrow V = \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(x^n e^{-x}\right)$$

suy ra

$$J_{mn} = (-1)^m \frac{1}{n!} \frac{d^m L_m}{dx^m} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(x^n e^{-x}\right)\Big|_0^\infty - (-1)^m \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{d^{m+1} L_m}{dx^{m+1}} \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left(x^n e^{-x}\right) dx = 0$$

vì $\frac{d^{m+1} L_m}{dx^{m+1}} = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left[L_m(x) = \frac{1}{m!} e^x \frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(x^m e^{-x}\right)\right] = 0$

Trong trường hợp $m = n$

$$\frac{d^n L_n}{dx^n} = (-1)^n \text{ và } J_{nn} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1 = \|L_n\|^2. \quad (7.143)$$

Như vậy đa thức Laguerre trực giao với nhau với trọng số e^{-x}

$$\int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}. \quad (7.144)$$

5. Đa thức Laguerre suy rộng

Khi nghiên cứu chuyển động của điện tử trong trường Coulomb, bên cạnh đa thức Laguerre $L_n(x)$ ta còn gặp đa thức Laguerre suy rộng $L_n^s(x)$. Xét hàm sinh

$$\Psi^s(\rho, x) = \frac{1}{(1-\rho)^{s+1}} e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}, \quad s > -1. \quad (7.145)$$

Khai triển (7.145) vào chuỗi theo bậc của ρ:

$$\Psi^s(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x)\rho^n\ ;\ L_n^s(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\Psi^s(\rho,x)\Big|_{\rho=0} \qquad (7.146)$$

Lặp lại cách làm như trường hợp đa thức Laguerre, ta được

$$L_n^s(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Psi^s(\zeta,x)}{\zeta^{n+1}}d\zeta = x^{-s}e^{-x}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{z^{n+s}e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

từ đó suy ra

$$L_n^s(x)=\frac{1}{n!}x^{-s}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+s}e^{-x}\right), \qquad (7.147)$$

tức là $L_n^s(x)$ là một đa thức cấp n, đặc biệt

$$L_0^s(x)=1,\ L_1^s(x)=1+s-x.$$

Khi đưa vào hàm $z=x^{n+s}e^{-x}$ và vi phân nó $n+2$ lần theo x ta tìm được phương trình

$$xu''+(x+1-s)u'+(n+1)u=0,\ u=\frac{d^nz}{dx^n}.$$

Tính đạo hàm của $L_n^s(x)=\frac{1}{n!}x^{-s}e^xu$ và tính đến phương trình đối với u, ta nhận được phương trình

$$x\left(L_n^s\right)''-(x-s-1)\left(L_n^s\right)'+nL_n^s=0 \qquad (7.148)$$

thỏa mãn đa thức suy rộng $L_n^s(x)$. Thấy rằng đa thức Laguerre suy rộng $L_n^s(x)$ là hàm riêng tương ứng với trị riêng

$$\lambda_n=n+\frac{s+1}{2}$$

của bài toán: Tìm giá trị λ để phương trình

$$xy''+(s+1-x)y'+\left(\lambda-\frac{s+1}{2}\right)y=0,$$

hay là

$$\left(x^{s+1}e^{-x}y'\right)'+x^se^{-x}\left(\lambda-\frac{s+1}{2}\right)y=0 \qquad (7.149)$$

có nghiệm không tầm thường trong khoảng $0\le x<\infty$, nghiệm hữu hạn khi $x=0$ và tăng khi $x\to\infty$ không nhanh hơn bậc hữu hạn của x.

Đa thức (7.147) trực giao nhau với trọng số $e^{-x}x^s$:

$$\int_0^\infty L_n^s(x)L_m^s(x)e^{-x}x^s dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \quad (s > -1) \\ \dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n \end{cases}$$

Ta đưa vào hàm

$$\psi_n^s(x) = x^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{x}{2}}l_n^s(x), \quad \|l_n^s\| = 1,$$

là nghiệm của phương trình

$$(x\psi')' + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x}\right)\psi = 0.$$

Tương ứng với trị riêng

$$\lambda_n = n + \frac{s+1}{2}.$$

Từ công thức (7.147) rõ ràng là $L_n^0(x) = L_n(x)$, với λ_n bằng $n + 1/2$.

§13. CÁC HÀM TRỰC GIAO ĐẶC BIỆT

Trong tiết này, chúng tôi sẽ liệt kê một số các hàm trực giao trên cơ sở các hàm đặc biệt được dùng rất nhiều trong các ngành khoa học vật lý và khoa học công nghệ ngoài hai hàm Bessel và đa thức Legendre đã nghiên cứu khá chi tiết ở các tiết trước.

1. Hàm Legendre liên kết $P_n^m(x), Q_n^m(x)$

Phương trình xác định hàm Legendre liên kết có dạng

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (7.150)$$

Nghiệm tổng quát

$$y = c_1P_n^m(x) + c_2Q_n^m(x),$$

trong đó

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x); \\ Q_n^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x). \end{aligned} \quad (7.151)$$

Các hàm trên được gọi là *đa thức Legendre liên kết*; $P_n(x), Q_n(x)$ là các đa thức Legendre loại I và loại II. Các nghiệm trên chỉ xác định trong khoảng $-1 \le x \le 1$.

Tính trực giao:

$$\left(P_n^k, P_m^k\right) = \int_{-1}^{1} P_n^k(x) P_m^k(x) dx = \left\|P_n^k\right\|^2 \delta_{nm} . \qquad (7.152)$$

Bình phương chuẩn:

$$\left\|P_n^k\right\|^2 = \left(P_n^k, P_n^k\right) = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} . \qquad (7.153)$$

Một vài hàm chọn lọc:

$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}$,

$P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$, $\quad P_2^2(x) = 3\left(1-x^2\right)$,

$P_3^1(x) = \frac{3}{2}\left(5x^2-1\right)\sqrt{1-x^2}$, $\quad P_3^2(x) = 15x\left(1-x^2\right)$, $\quad P_3^3(x) = 15\left(1-x^2\right)^{3/2}$,

$P_4^1(x) = \frac{5}{2}\left(7x^2-3x\right)\sqrt{1-x^2}$, $P_4^2(x) = \frac{15}{2}\left(7x^2-1\right)\left(1-x^2\right)$, $\quad P_4^3(x) = 105x\left(1-x^2\right)^{3/2}$

Công thức truy hồi:

$$P_n^{m+2}(x) - \frac{2(m+1)x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{m+1}(x) + \left[n(n+1) - m(m+1)\right] P_n^m(x) = 0 .$$

Phép biến đổi $x = \cos\theta$ đưa phương trình (7.150) về dạng

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dy}{d\theta}\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] y = 0 \qquad (7.154)$$

với các nghiệm xác định $P_n^m(\cos\theta)$ trực giao nhau trong khoảng $(0, \pi)$ và với hàm trọng $\sin\theta$:

$$\left(P_n^m(\cos\theta), P_l^m(\cos\theta)\right) = \int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl}$$

(7.155)

2. Đa thức Hermite $H_n(x)$

Phương trình xác định đa thức Hermite có dạng

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \qquad -\infty < x < \infty . \qquad (7.156)$$

Nghiệm của đa thức Hermite là:

$$y = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \tag{7.157}$$

Tính trực giao:

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \|H_n\|^2 \delta_{nm}. \tag{7.158}$$

Bình phương chuẩn:

$$\|H_n\|^2 = \sqrt{\pi} 2^n n! \tag{7.159}$$

Một vài hàm chọn lọc:

$H_0 = 1;$ $\quad H_2 = 4x^2 - 2;$ $\quad H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12;$

$H_1 = 2x;$ $\quad H_3 = 8x^3 - 12x;$ $\quad H_5 = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$

Công thức truy hồi:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x); \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Đa thức Laguerre $L_n(x)$

Phương trình xác định đa thức Laguerre có dạng

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad 0 < x < \infty. \tag{7.160}$$

Nghiệm của đa thức Laguerre:

$$y = L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right). \tag{7.161}$$

Tính trực giao:

$$(L_n, L_m) = \int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \|L_n\|^2 \delta_{nm}. \tag{7.162}$$

Bình phương chuẩn:

$$\|L_n\|^2 = 1. \tag{7.163}$$

Một vài hàm chọn lọc:

$L_0 = 1;$ $\quad L_3 = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right);$

$L_1 = 1 - x;$ $\quad L_4 = \frac{1}{24}\left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\right);$

$L_2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right);$ $\quad L_5 = \frac{1}{120}\left(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120\right).$

Công thức truy hồi:

$$(n+1)L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0.$$

4. Đa thức Laguerre liên kết $L_n^m(x)$

Phương trình xác định đa thức Laguerre liên kết có dạng

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(m+1-x)\frac{dy}{dx}+ny=0 \quad 0<x<\infty. \tag{7.164}$$

Nghiệm của đa thức Laguerre liên kết là:

$$y=L_n^m(x)=\frac{1}{n!}x^{-m}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+m}e^{-x}\right). \tag{7.165}$$

Tính trực giao:

$$\left(L_n^k,L_m^k\right)=\int_0^\infty x^m e^{-x}L_n^k(x)L_m^k(x)dx=\left\|L_n^k\right\|^2\delta_{nm}. \tag{7.166}$$

Bình phương chuẩn:

$$\left\|L_n^k\right\|^2=\left(L_n^k,L_m^k\right)=\frac{\Gamma(1+m+n)}{n!} \quad m>-1. \tag{7.167}$$

Một vài hàm chọn lọc:

$$L_1^2(x)=\frac{1}{2}\left(6-6x+x^2\right); \qquad L_3^1(x)=\frac{1}{6}\left(24-36x+12x^2-x^3\right);$$

$$L_2^2(x)=\frac{1}{2}\left(12-8x+x^2\right); \qquad L_3^2(x)=\frac{1}{6}\left(60-6x+15x^2-x^3\right);$$

$$L_3^3(x)=\frac{1}{6}\left(120-90x+18x^2-x^3\right).$$

Công thức truy hồi:

$$(n+1)L_{n+1}^m(x)+(x-m-2n-1)L_n^m(x)+(n+m)L_{n-1}^m(x)=0.$$

5. Đa thức Chebyshev loại I $T_n(x)$

Phương trình xác định đa thức Chebyshev loại I có dạng

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0, \quad -1<x<1. \tag{7.168}$$

Nghiệm của đa thức Chebyshev loại I:

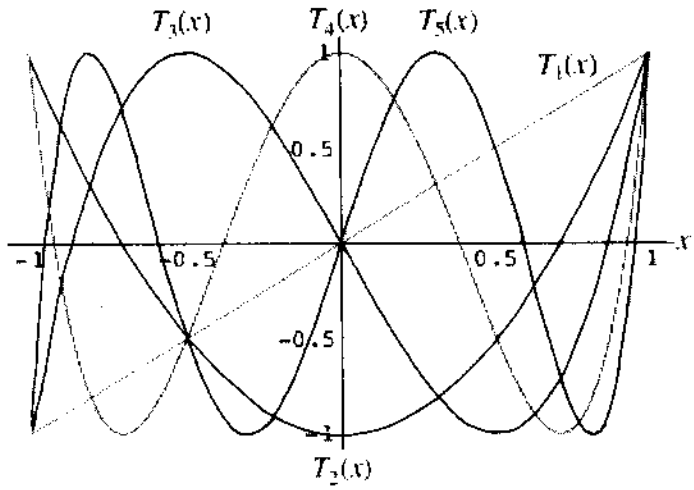
$$y=T_n(x)=\cos(n\arccos x). \tag{7.169}$$

Tính trực giao:

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \|T_n\|^2 \delta_{nm}. \qquad (7.170)$$

Bình phương chuẩn

$$\|T_n\|^2 = (T_n, T_n) = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \pi/2 & n = 1,2,3,... \end{cases} \qquad (7.171)$$



Hình 7.9. **Đa thức Chebyshev loại I**

Một vài hàm chọn lọc:

$T_0 = 1;$ $\qquad T_2 = 2x^2 - 1;$

$T_1 = x;$ $\qquad T_3 = 4x^4 - 3x.$

Công thức truy hồi:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$$

6. Đa thức Chebyshev loại II $U_n(x)$

Phương trình xác định đa thức Chebyshev loại II có dạng

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \qquad (7.172)$$

Nghiệm của da thức Chebyshev loại II:

$$y = U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sin(\arccos x)}. \qquad (7.173)$$

Tính trực giao:

$$(U_n, U_m) = \int_{-1}^{1} (1-x^2) U_n(x) U_m(x)\, dx = \|U_n\|^2 \delta_{nm}. \qquad (7.174)$$

Bình phương chuẩn:

$$\|U_n\|^2 = (U_n, U_n) = \frac{\pi}{2}. \qquad (7.175)$$

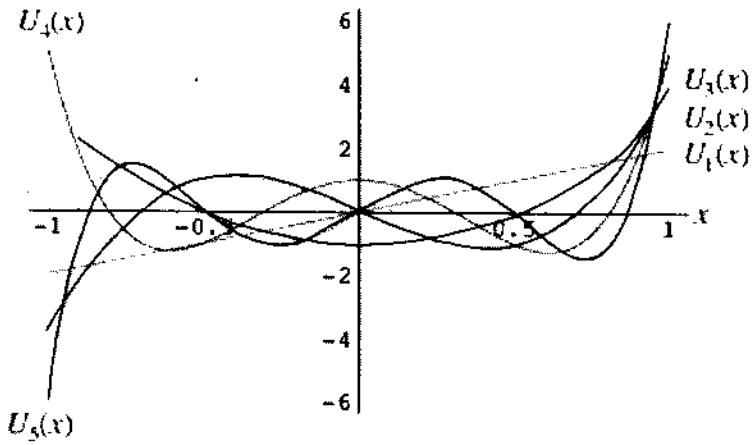
Một vài hàm chọn lọc:

$$T_0 = 1; \qquad T_2 = 4x^2 - 1;$$

$$T_1 = 2x; \qquad T_3 = 8x^3 - 4x.$$

Công thức truy hồi:

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0.$$



Hình 7.10. **Đa thức Chebyshev loại II**

BÀI TẬP

7.1. Chứng minh rằng các hàm Bessel $J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}$, $n = 1, 2, \ldots$ có đồng nhất thức sau:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x),$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x),$$

$$xJ_n'(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x).$$

7.2. Kiểm tra tính đúng đắn của biểu diễn tích phân đối với hàm Bessel

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

7.3. Chứng minh rằng

$$J_0'(x) = -J_1(x),$$

$$J_0''(x) = \frac{1}{2}\left[J_2(x) - J_0(x)\right].$$

trong đó α, β là các hằng số, $n > -1$.

7.4. Từ biểu thức tường minh của hàm Bessel

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!\Gamma(n+k+1)}$$

hãy chứng minh rằng

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad ; \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

7.5. Chứng minh rằng khi thực hiện phép đổi biến $x = \cos\theta$ phương trình Chebyshev

$$(1-x^2)v'' - xv' + n^2 v = 0$$

có thể đưa về dạng

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + n^2 u = 0,$$

trong đó $u(\theta) = v(\cos\theta)$.

7.6. Sử dụng công thức

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \ldots,$$

chứng minh rằng hàm Chebyshev

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right]$$

là đa thức bậc n.

7.7. Hãy chứng minh tính trực giao và chuẩn hoá của đa thức Chebyshev với trọng số $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ trong khoảng $(-1,1)$, tức là

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\\ \pi, & m=n=0\end{cases}$$

7.8. Hãy chứng minh rằng hàm $L_n(x)$

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right),\ n=0,1,...$$

là nghiệm của phương trình Laguere:

$$xv''+(1-x)v'+nv=0.$$

7.9. Chứng minh công thức tích phân

$$\int_0^x xJ_0(x)dx=xJ_1(x); \tag{1}$$

$$\int_0^x x^3J_0(x)dx=2x^2J_0(x)+\left(x^3-4x\right)J_1(x). \tag{2}$$

7.10. Cho hàm sinh của đa thức Legendre có dạng:

$$\psi(\rho,x)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}$$

Chứng minh rằng:

a) $\left(1-2\rho x+\rho^2\right)\psi_\rho-(x-\rho)\psi=0$;

b) $\left(1-2\rho x+\rho^2\right)\psi_x-\rho\psi=0$.

7.11. Theo khai triển $\psi(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n$ và 2 công thức đã chứng minh ở bài tập 7.10, hãy chứng minh các công thức truy hồi sau của đa thức Legendre:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0;$$

$$P'_{n-1}(x)=xP'_n(x)-nP'_{n-1}(x);$$

$$P'_n(x)-xP'_{n-1}(x)-nP_{n-1}(x)=0.$$

Suy ra dạng tường minh của đa thức $P_2(x)$.

7.12. Chứng minh rằng $P_n(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$\left[\left(1-x^2\right)P'_n(x)\right]'+n(n+1)P_n(x)=0.$$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG II

2.1. Nghiệm của phương trình là

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{L}+b_k\sin\frac{k\pi at}{L}\right)\sin\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó:

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx;$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^L\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

2.2. Nghiệm của phương trình là

$$u(x,t)=\frac{8L}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}+$$

$$+\frac{2L}{a\pi}\sin\frac{\pi at}{2L}\sin\frac{\pi x}{2L}+\frac{2L}{3a\pi}\sin\frac{3\pi at}{2L}\sin\frac{3\pi x}{2L}.$$

2.3. Nghiệm của phương trình là

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+b_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L},$$

trong đó:

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx;$$

$$b_k=\frac{2}{(2k+1)\pi a}\int_0^L\psi(x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx.$$

2.4. Nghiệm của phương trình là

$$u(x,t)=a_0+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{L}+b_k\sin\frac{k\pi at}{L}\right)\cos\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L\varphi(x)dx;\quad b_0=\frac{1}{L}\int_0^L\psi(x)dx;$$

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx;\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^L\psi(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx.$$

2.5. Từ phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, đặt $u(x,t) = X(x)T(t)$ suy ra

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2 \to T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0.$$

Nghiệm X thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm X của có dạng

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Từ các điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ X'(L) + hX(L) = 0 \Rightarrow B(\lambda\cos\lambda L + h\sin\lambda L) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda\cos\lambda L + h\sin\lambda L = 0 \Rightarrow h\operatorname{tg}\lambda L = -\lambda \Rightarrow \lambda_k,\ k = 1, 2...$$

Vậy nghiệm riêng của X là: $X_k(x) = \{\sin\lambda_k x\}$.

$$\|\sin\lambda_k x\|^2 = \int_0^L \sin^2\lambda_k x\,dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L}$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k L}{4\lambda_k} = \frac{L(h^2 + \lambda_k^2) + h}{2(h^2 + \lambda_k^2)}$$

$$\Rightarrow \|\sin\lambda_k x\|^2 = \frac{L(h^2 + \lambda_k^2) + h}{2(h^2 + \lambda_k^2)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\lambda_k at + B_k\sin\lambda_k at)\sin\lambda_k at$$

trong đó các hệ số A_k và B_k được xác định theo công thức

$$A_k = \frac{1}{\|\sin\lambda_k x\|^2}\int_0^L \varphi(x)\sin\lambda_k x\,dx$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|\sin\lambda_k x\|^2}\int_0^L \psi(x)\sin\lambda_k x\,dx$$

2.6. Từ phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, đặt $u(x,t) = X(x)T(t)$ suy ra

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2 \to T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0.$$

Nghiệm X thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X'(0) = 0, X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm X có dạng

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

Từ các điều kiện suy ra

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = 0 \Rightarrow B\lambda - Ah = 0 \\ LX'(L) = 0 \Rightarrow B\left(-\dfrac{\lambda^2}{h}\sin\lambda L + \lambda\cos\lambda L\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda^2}{h}\sin\lambda L + \lambda\cos\lambda L = 0 \Rightarrow h\,\mathrm{ctg}\lambda L = \lambda \Rightarrow \lambda_k,\ k = 1,2...$$

Vậy nghiệm riêng của X là

$$X_k(x) = \{\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x\}.$$

Ta xét :

$$\|X_k(x)\|^2 = \int_0^L (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)^2\,dx$$

$$= \lambda_k^2\left(\frac{L}{2} + \frac{\sin 2\lambda_k L}{4\lambda_k}\right) + 2\lambda_k h\left(\frac{1}{2\lambda_k}\sin^2\lambda_k L\right) + h^2\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k L}{4\lambda_k}\right)$$

$$= \frac{L}{2}\left(\lambda_k^2 + h^2\right) + \frac{1}{2}\left(\lambda_k - \frac{h^2}{\lambda_k}\right)\frac{\cot g\lambda_k L}{1 + \cot g^2\lambda_k L} + h\frac{1}{1 + \cot g^2\lambda_k L} = \frac{L\left(\lambda_k^2 + h^2\right) + h}{2}.$$

$$\Rightarrow \|X(x)\|^2 = \frac{L\left(\lambda_k^2 + h^2\right) + h}{2} \qquad (*)$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\lambda_k at + B_k\sin\lambda_k at\right)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x\right),$$

trong đó các hệ số A_k và B_k được xác định theo công thức:

$$A_k = \frac{1}{\|X(x)\|^2}\int_0^L \varphi(x)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x\right)dx;$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|X(x)\|^2}\int_0^L \psi(x)\left(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x\right)dx,$$

với $\|X(x)\|^2$ được xác định theo (*).

2.7. Từ phương trình $u_{tt} = a^2u_{xx}$, đặt $u(x,t) = X(x)T(t)$, suy ra

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2 \to T''(t) + \lambda^2a^2T(t) = 0.$$

Nghiệm X thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2X(x) = 0 \\ X'(0) - hX(0) = 0,\ X'(L) + hX(L) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm X có dạng

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

Từ các điều kiện suy ra

$$\begin{cases} X'(0) - hX(0) = 0 \Rightarrow B\lambda - Ah = 0 \Rightarrow A = \dfrac{\lambda}{h}B \\ X'(L) + hX(L) = 0 \Rightarrow B\left(-\dfrac{\lambda^2}{h}\sin\lambda L + \lambda\cos\lambda L + \lambda\cos\lambda L + h\sin\lambda L\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda^2}{h}\sin\lambda L + \lambda\cos\lambda L + \lambda\cos\lambda L + h\sin\lambda L = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{h^2 - \lambda^2}{h} + 2\lambda\operatorname{cotg}\lambda L = 0 \Rightarrow \operatorname{cotg}\lambda L = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda_k,\ k = 1, 2...$$

Vậy nghiệm riêng của X là

$$X_k(x) = \{\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x\}.$$

Ta xét : $\|X_k(x)\|^2 = \int_0^L (\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)^2\,dx$

$$= \lambda_k^2\left(\frac{L}{2} + \frac{\sin 2\lambda_k L}{4\lambda_k}\right) + 2\lambda_k h\left(\frac{1}{2\lambda_k}\sin^2\lambda_k L\right) + h^2\left(\frac{L}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k L}{4\lambda_k}\right)$$

$$= \frac{L}{2}(\lambda_k^2 + h^2) + \frac{1}{2}\left(\lambda_k - \frac{h^2}{\lambda_k}\right)\frac{\cot g\lambda_k L}{1 + \cot g^2\lambda_k L} + h\frac{1}{1 + \cot g^2\lambda_k L}$$

$$= \frac{L}{2}(\lambda_k^2 + h^2) + h = \frac{L(\lambda_k^2 + h^2) + 2h}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \|X(x)\|^2 = \frac{L(\lambda_k^2 + h^2) + 2h}{2}. \qquad (*)$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\lambda_k at + B_k\sin\lambda_k at)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x),$$

trong đó các hệ số A_k và B_k được xác định theo công thức:

$$A_k = \frac{1}{\|X(x)\|^2}\int_0^L \varphi(x)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,dx;$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k\|X(x)\|^2}\int_0^L \psi(x)(\lambda_k\cos\lambda_k x + h\sin\lambda_k x)\,dx,$$

với $\|X(x)\|^2$ được xác định theo (*).

2.8. Theo phương trình $u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x)$, đặt $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, suy ra

$$v_{tt} = a^2v_{xx} + a^2w_{xx} + f(x).$$

Hàm v thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0, v(L,t) = 0 \\ u(x,0) = -w(x), u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Nghiệm v có dạng

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi at}{L} \sin\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó hệ số A_k được tính theo công thức:

$$A_k = -\frac{2}{L}\int_0^L w(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx. \qquad (*)$$

Hàm w thỏa mãn: $a^2 w_{xx} + f(x) = 0 \Rightarrow w_{xx} = -\dfrac{f(x)}{a^2}$;

$$w(0) = \alpha, w(L) = \beta;$$

$$w_x = -\frac{1}{a^2}\int_0^x f(\xi)d\xi + M;$$

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + Mx + N.$$

Từ các điều kiện cho w ta có:

$$w(0) = N = \alpha \Rightarrow N = \alpha;$$

$$w(L) = -\frac{1}{a^2}\int_0^L\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + ML + \alpha = \beta$$

$$\Rightarrow M = \frac{\beta-\alpha}{L} + \frac{1}{La^2}\int_0^L\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy.$$

Vậy nghiệm w có dạng

$$w(x) = -\frac{1}{a^2}\int_0^x\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x}{La^2}\int_0^L\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{(\beta-\alpha)x}{L} + \alpha.$$

Nghiệm của phương trình đã cho là

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi at}{L}\sin\frac{k\pi x}{L} - \frac{1}{a^2}\int_0^x\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{x}{La^2}\int_0^L\left(\int_0^y f(\xi)d\xi\right)dy + \frac{(\beta-\alpha)x}{L} + \alpha.$$

trong đó A_k được tính theo công thức (*).

2.9. Từ phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x)$, đặt $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, suy ra

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + a^2 w_{xx} + f(x).$$

Hàm w có dạng $w(x) = (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x)\alpha + (\alpha_2 x^2 + \beta_2 x)\beta$, suy ra

$$w_x(x) = (2\alpha_1 x + \beta_1)\alpha + (2\alpha_2 x + \beta_2)\beta.$$

Từ các điều kiện ta có:

$$w_x(0) = \beta_1\alpha + \beta_2\beta = \alpha \Rightarrow \beta_1 = 1,\ \ \beta_2 = 0;$$

$$w_x(L) = (2\alpha_1 L + 1)\alpha + 2\alpha_2 L\beta = \beta \Rightarrow (2\alpha_1 L + 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha_2 L = -1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2L},\ \ \alpha_2 = \frac{1}{2L}.$$

Nghiệm w là:

$$w(x) = \left(-\frac{1}{2L}x^2 + x\right)\alpha + \frac{x^2\beta}{2L} = \frac{(\beta-\alpha)x^2}{2L} + \alpha x.$$

Do đó $$a^2 w_{xx} = \frac{(\beta-\alpha)a^2}{L}.$$

Hàm v thỏa mãn phương trình

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \frac{(\beta-\alpha)a^2}{L} + f(x) = a^2 v_{xx} + F(x),$$

trong đó $$F(x) = \frac{(\beta-\alpha)a^2}{L} + f(x).$$

Sử dụng phương pháp tách biến đối với hàm v ta thu được:

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L};$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{k\pi x}{L} \Rightarrow C_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \left[\frac{(\beta-\alpha)a^2}{L} + f(x)\right]dx;$$

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \left[\frac{(\beta-\alpha)a^2}{L} + f(x)\right]\cos\frac{k\pi x}{L}dx;$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)\right]\cos\frac{k\pi x}{L} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Từ các điều kiện của u ta có

$$u(x,0) = v(x,0) + \frac{(\beta-\alpha)x^2}{2L} + \alpha x = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow v(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0)\cos\frac{k\pi x}{L} = \varphi(x) - \frac{(\beta-\alpha)x^2}{2L} - \alpha x,$$

suy ra:

$$T_0(0) = \frac{1}{L}\int_0^L \left[\varphi(x) - \frac{(\beta-\alpha)x^2}{2L} - \alpha x\right]dx;$$

$$T_k(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \left[\varphi(x) - \frac{(\beta-\alpha)x^2}{2L} - \alpha x\right]\cos\frac{k\pi x}{L}dx;$$

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) = \psi(x) \to v_t(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0)\cos\frac{k\pi x}{L} = \psi(x);$$

$$T_0'(0) = \frac{1}{L}\int_0^L \psi(x)dx, \quad T_k'(0) = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx.$$

2.10. $u(x,0) = kx, \quad u_t(x,0) = 0$ khi $0 \le x \le L$.

Ta cần phải giải phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, với các điều kiện biên : $u_x(0,t) = 0; u_x(L,t) = 0$ và điều kiện ban đầu : $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$.

Bằng phương pháp tách biến Fourier, đặt nghiệm dưới dạng : $u(x,t) = X(x).T(t)$.

Thay vào phương trình được:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Ta có hai phương trình vi phân với các điều kiện biên tương ứng :

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0;$$
$$X''(t) + \lambda^2 X(t) = 0;$$
$$X(0) = 0, X'(L) = 0.$$

Giải phương trình cho hàm $X(x)$ thu được trị riêng $\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2L}$ và hàm riêng có dạng (chính xác đến một hệ số hằng số): $X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)x}{2L}$. Như vậy, nghiệm tổng quát của phương trình có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L} + D_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Đây là phương trình cơ bản cho bài toán dao động của thanh với đầu $x = 0$ gắn chặt, $x = L$ tự do. Sử dụng các điều kiện ban đầu thu được $D_k = 0$, còn C_k được tìm bằng cách lấy tích phân :

$$C_k = \frac{2k}{L}\int_0^L x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx.$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta có

$$C_k = -\frac{4kx}{(2k+1)\pi}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_0^L + \frac{4k}{(2k+1)\pi}\int_0^L \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx$$

$$= \frac{8kL}{(2k+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_0^L = \frac{8kL}{(2k+1)^2\pi^2}(-1)^k.$$

Phương trình dao động của thanh có kết quả cuối cùng là:

$$u(x,t) = \frac{8kL}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

2.11. Giải phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, với các điều kiện biên :

$$u_x(0,t) = 0; \quad u_x(L,t) = 0, \tag{1}$$

và điều kiện ban đầu :

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x)\qquad \text{khi}\quad 0\le x\le L.$$

Bằng phương pháp tách biến Fourier, đặt nghiệm dưới dạng

$$u(x,t)=X(x).T(t),$$

thay vào phương trình được

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2.$$

Ta có hai phương trình vi phân với các điều kiện biên tương ứng :

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0;$$

$$X''(t)+\lambda^2X(t)=0;$$

$$X'(0)=0, X'(L)=0.$$

Giải phương trình cho hàm $X(x)$, trước hết xét trường hợp $\lambda=0$ với điều kiện biên đã cho có dạng là một hằng số M, còn hàm $T(t)$ là

$$T(t)=A_1t+B_1.$$

Như vậy một nghiệm riêng trong trường hợp $\lambda=0$ là :

$$u_0(x,t)=X(x)T(t)=M(A_1t+B_1)=At+B.$$

Trong trường hợp $\lambda>0$, trị riêng có dạng

$$\lambda_k=\frac{k\pi}{L}, k=1,2...$$

Suy ra $X_k(x)=\cos\frac{k\pi x}{L}$, như vậy nghiệm tổng quát của phương trình sẽ có dạng :

$$u(x,t)=At+B+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{k\pi at}{L}+D_k\sin\frac{k\pi at}{L}\right)\cos\frac{k\pi x}{L}. \qquad (2)$$

Hệ các phần tử Fourier $\left\{1,\cos\frac{k\pi x}{L}\right\}, k=1,2...$ có tính trực giao sau :

$$\begin{cases}\int_0^L 1.1dx=L\\ \int_0^L 1.\cos\frac{k\pi x}{L}dx=0\\ \int_0^L\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}0, & m\ne n\\ \frac{L}{2}, & m=n\end{cases}\end{cases}$$

Nhờ đó tính được các hệ số của phương trình (2) A, B, C_k, D_k. Kết quả cuối cùng thu được :

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L[\varphi(z)+t\psi(z)]dz+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{k\pi at}{L}+D_k\sin\frac{k\pi at}{L}\right)\cos\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó các hệ số được xác định theo công thức:

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(z)\cos\frac{k\pi z}{L}dz;\quad D_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^L \psi(z)\cos\frac{k\pi z}{L}dz\,.$$

2.12. Giải phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, với các điều kiện biên :

$$u_x(0,t)=0;\quad u_x(L,t)=0\,,$$

và điều kiện ban đầu :

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x)=0, \\ u_t(x,0)=\psi(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le L-\delta \\ -\dfrac{I}{\delta\rho}, & L-\delta<x\le L \end{cases} \end{cases}$$

Chuyển giới hạn khi $\delta\to 0$, hàm $\psi(x)$ có dạng :

$$\psi(x) = -\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0),\quad 0<x<L\,,$$

ở đây $\delta(x)$ là hàm Delta, ta có kết quả sau khi thay $x_0 = L$:

$$u(x,t) = -\frac{I}{\rho L}t - \frac{2L}{\pi a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cos\frac{k\pi x}{L}\sin\frac{k\pi at}{L}\,.$$

Gợi ý : Ta cần phải giải phương trình $u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0<x<L$, với các điều kiện biên : $u_x(0,t)=0;\ u_x(L,t)+hu(x,t)=0$ và điều kiện ban đầu :

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x)\qquad \text{khi}\quad 0\le x\le L.$$

Bằng phương pháp tách biến Fourier, đặt nghiệm dưới dạng :

$$u(x,t) = X(x).T(t)\,,$$

thay vào phương trình ta được :

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2\,.$$

Ta có hai phương trình vi phân với các điều kiện biên tương ứng :

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0;$$
$$X''(t)+\lambda^2X(t)=0;$$
$$X'(0)=0, X'(L)+hX(L)=0.$$

Nghiệm phương trình có dạng

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\lambda_n at + D_n\sin\lambda_n at)\cos\lambda_n x\,,$$

trong đó: λ_n là nghiệm riêng của phương trình $\lambda tg\lambda L = h$; hàm riêng $X_n(x) = \cos\lambda_n x$. Hàm riêng thứ n được chuẩn hoá :

$$\|X_n\|^2 = \int_0^L X_n^2(x)dx = \frac{L}{2}\left[1+hL\left(\frac{\cos\lambda_n L}{\lambda_n L}\right)^2\right] = \frac{L}{2}\left[1+\frac{h}{L(\lambda_n^2+h^2)}\right].$$

Các hệ số tìm được từ các công thức :

$$C_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^L \varphi(z)\cos\lambda_n z\,dz;\ D_n = \frac{1}{\|X_n\|^2 a\lambda_n}\int_0^L \psi(z)\cos\lambda_n z\,dz\,.$$

2.14. Xét lực P tác dụng lên thanh tại thời điểm ban đầu $t=0$, độ dịch ban đầu $u(x,0)=f(x)$, đạo hàm của độ dịch chuyển này theo định luật Hooke tỷ lệ với sức căng tác dụng :

$$f'(x)=\frac{P}{ES},$$

trong đó: S là thiết diện bề mặt. Cho điều kiện $f(0)=0$ ta có

$$f(x)=\frac{P}{ES}x,$$

tức là độ dịch chuyển của thanh tại thời điểm bất kỳ tỷ lệ với hoành độ của nó.

Nghiệm của bài toán tổng quát đối với trường hợp một đầu $(x=0)$ gắn chặt, một đầu $(x=L)$ tự do là :

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(C_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+D_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Ta tính được

$$C_k=\frac{2P}{LES}\int_0^L x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{8PL}{\pi^2 ES}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}.$$

Vậy, nghiệm của phương trình cần tìm là

$$u(x,t)=\frac{8PL}{\pi^2 ES}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L},$$

trong đó $a=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$.

2.15. Đáp số:

$$\theta(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{L}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{L}\right)\cos\frac{\mu_k x}{L},$$

trong đó:
$$a_k=\frac{2}{\mu_k}\frac{p^2+\mu_k^2}{p(p+1)+\mu_k^2}\int_0^L f'(x)\sin\frac{\mu_k x}{L}dx;$$

$$b_k=\frac{2L}{a\mu_k^2}\frac{p^2+\mu_k^2}{p(p+1)+\mu_k^2}\int_0^L F'(x)\sin\frac{\mu_k x}{L}dx,$$

ở đây $\mu_1,\mu_2,\mu_3,...$ là nghiệm dương của phương trình

$$\mu\cos\mu+p\sin\mu=0\quad\left(p=\frac{LK}{K_1}>0\right).$$

2.16. Đáp số:

$$\theta(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{L}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{L}\right)\left(\sin\frac{\mu_k x}{L}-\frac{p}{\mu_k}\cos\frac{\mu_k x}{L}\right),$$

trong đó:

$$a_k = \frac{2\mu_k}{p(p+2)+\mu_k^2}\int_0^L f'(x)\left(\sin\frac{\mu_k x}{L} - \frac{p}{\mu_k}\cos\frac{\mu_k x}{L}\right)dx;$$

$$b_k = \frac{2L}{a\left[p(p+2)+\mu_k^2\right]}\int_0^L F'(x)\left(\sin\frac{\mu_k x}{L} - \frac{p}{\mu_k}\cos\frac{\mu_k x}{L}\right)dx,$$

ở đây $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ là nghiệm dương của phương trình

$$2\operatorname{cotg}\mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu} \quad \left(p = \frac{LK}{K_1} > 0\right).$$

2.17. Ta cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t) \\ u(0,t) = \chi_1(t), \quad u(L,t) = \chi_1(t) \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = F(x) \end{cases} \tag{1}$$

Trong trường hợp này ta đưa vào hàm bổ trợ

$$w(x,t) \equiv \chi_1(t) + \left[\chi_2(t) - \chi_1(t)\right]\frac{x}{L},$$

rõ ràng là $\quad w(0,t) = \chi_1(t), \quad w(L,t) = \chi_1(t).$

Tìm nghiệm dưới dạng tổng

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \tag{2}$$

trong đó: $v(x,t)$ là hàm mới chưa biết, thoả mãn điều kiện biên: $v(0,t) = 0$, $v(L,t) = 0$, và điều kiện ban đầu:

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - \chi_1(0) - \left[\chi_2(0) - \chi_1(0)\right]\frac{x}{L} = f_1(x);$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = F(x) - \chi_1'(0) - \left[\chi_2'(0) - \chi_1'(0)\right]\frac{x}{L} = F_1(x).$$

Thay (2) vào phương trình (1) ta có

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + g(x,t) + a^2 w_{xx} - w_{tt}.$$

Do $w(x,t) \equiv \chi_1(t) + \left[\chi_2(t) - \chi_1(t)\right]\frac{x}{L}$, suy ra $v_{tt} = a^2 v_{xx} + g_1(x,t)$,

trong đó: $\quad g_1(x,t) = g(x,t) - \chi_1''(t) - \left[\chi_2''(t) - \chi_1''(t)\right]\frac{x}{L}.$

Như vậy ta có bài toán cho hàm $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + g_1(x,t) \\ v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = f_1(x), \quad v_t(x,0) = F_1(x) \end{cases}$$

Bài toán này đã được giải trong bài 7 (bài giải mẫu).

2.18. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}$,

hàm $T_k(t)$ được xác định theo công thức

$$T_k(t)=\frac{2A}{L\omega_k}\int_0^t d\tau\int_0^L \sin\omega\tau\sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi;$$

$$=\frac{2A}{L\omega_k}\int_0^t \sin\omega\tau\sin\omega_k(t-\tau)d\tau\int_0^L \sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi;$$

$$=-\frac{A\left[(-1)^n-1\right]}{\omega_k k\pi}\frac{2\omega\sin\omega_k t-2\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2};$$

$$=-\frac{AL\left[(-1)^n-1\right]}{(k\pi)^2 a}\frac{2\omega\sin\omega_k t-2\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2},$$

trong đó: $\omega=\frac{k\pi a}{L}$

Thật vậy, lấy tích phân ta có :

$$\int_0^t \cos\left[(\omega+\omega_k)\tau-\omega_k t\right]d\tau=\frac{1}{\omega+\omega_k}\sin\left[(\omega+\omega_k)\tau-\omega_k t\right]\Big|_0^t=\frac{\sin\omega t+\sin\omega_k t}{\omega+\omega_k};$$

$$\int_0^t \cos\left[(\omega-\omega_k)\tau+\omega_k t\right]d\tau=\frac{1}{\omega-\omega_k}\sin\left[(\omega-\omega_k)\tau+\omega_k t\right]\Big|_0^t=\frac{\sin\omega t-\sin\omega_k t}{\omega-\omega_k}.$$

Từ $\frac{\sin\omega t+\sin\omega_k t}{\omega+\omega_k}-\frac{\sin\omega t-\sin\omega_k t}{\omega-\omega_k}=\frac{2\omega\sin\omega_k t-2\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2}$, cuối cùng ta nhận được

$$T_k(t)=\begin{cases}-\frac{2AL}{\pi^2k^2a}\left[1-(-1)^k\right]\left[\frac{\omega\sin\omega_k t}{\omega^2-\omega_k^2}-\frac{\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2}\right], & \omega\neq\omega_k\\ \frac{AL}{\pi^2k^2a}\left[1-(-1)^k\right]\frac{\omega_k t\cos\omega_k t-\sin\omega_k t}{\omega_k}, & \omega=\omega_k\end{cases}$$

Áp dụng quy tắc L' Hopital để lấy giới hạn, ta có

$$\lim_{\omega\to\omega_k}\left[\frac{\omega\sin\omega_k t}{\omega^2-\omega_k^2}-\frac{\omega_k\sin\omega t}{\omega^2-\omega_k^2}\right]=\lim_{\omega\to\omega_k}\left[\frac{\omega t\cos\omega_k t}{-2\omega_k}-\frac{\sin\omega t}{-2\omega_k}\right]=-\left(\frac{\omega_k t\cos\omega_k t}{2\omega_k}-\frac{\sin\omega_k t}{2\omega_k}\right).$$

Xét khi $w\neq w_{2k+1}$ ta có:

$$T_k(t)=\frac{4AL}{\pi^2(2k+1)^2a}\left[\frac{\omega\sin\frac{(2k+1)\pi at}{L}}{\omega^2-\omega_{2k+1}^2}-\frac{\frac{(2k+1)\pi a}{L}\sin\omega t}{\omega^2-\omega_{2k+1}^2}\right]$$

$$=\frac{4AL}{\pi(2k+1)}\frac{\sin\omega t}{\omega_{2k+1}^2-\omega^2}-\frac{4AL\omega}{\pi^2(2k+1)^2a}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi at}{L}}{\omega_{2k+1}^2-\omega^2}.$$

Cuối cùng nhận được nghiệm khi $\omega \neq \omega_{2k+1}$:

$$u(x,t)=\frac{4A}{\pi}\sin\omega t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}}{(2k+1)\left(\omega_{2k+1}^2-\omega^2\right)}-\frac{4AL\omega}{a\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi at}{L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}}{(2k+1)^2\left(\omega_{2k+1}^2-\omega^2\right)}.$$

2.19. Giải phương trình:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+g: \\ u(0,t)=0,\ u_x(L,t)=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

Nghiệm được tìm dưới dạng $u=v+w$, trong đó v là nghiệm phương trình không thuần nhất thoả mãn điều kiện biên:

$$v(0,t)=0,\ v_x(L,t)=0.$$

Còn w là nghiệm phương trình thuần nhất cũng thoả mãn điều kiện biên

$$w(0,t)=0,\ w_x(L,t)=0.$$

và điều kiện ban đầu

$$w(x,0)=f(x)=-v(x,0);$$
$$w_t(x,0)=F(x)=-w_t(x,0).$$

Tìm nghiệm $v(x,t)$ dưới dạng đa thức cấp 2:

$$\begin{cases} -v_{tt}+a^2v_{xx}+g=0 \\ v(0,t)=0,\ v_x(L,t)=0 \end{cases}$$

Chọn $v(x,t)$ có dạng: $v(x,t)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, tức là v không phụ thuộc vào t. Thay vào phương trình, suy ra

$$\alpha=-\frac{g}{2a^2},\ \beta=\frac{gL}{a^2},\ \gamma=0.$$

Như vậy
$$v=\frac{gx(2L-x)}{2a^2}.$$

Theo điều kiện ban đầu ta có:

$$w(x,0)=f(x)=-v(x,0)=-\frac{gx(2L-x)}{2a^2};$$
$$w_t(x,0)=F(x)=-w_t(x,0)=0.$$

Bài toán đối với w được giải như sau:

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(M_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}+N_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L},$$

Theo điều kiện trên:

$$M_k=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{gx(x-2L)}{2a^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=-\frac{16gL^2}{\pi^3a^2(2k+1)^3}\quad\text{và}\quad N_k=0.$$

Kết quả cuối cùng ta thu được

$$u(x,t)=\frac{gx(2L-x)}{2a^2}-\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}}{(2k+1)^3}.$$

Tại $x=L$, nghiệm có dạng

$$u(L,t)=\frac{gL^2}{2a^2}-\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2L}}{(2k+1)^3}.$$

Vế phải sẽ đạt được giá trị cực đại khi $t=\frac{2L}{a}$, suy ra

$$u_{max}=\frac{gL^2}{2a^2}+\frac{16gL^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Chú ý: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$, suy ra $u_{max}=\frac{gL^2}{a^2}$.

Như vậy, thanh dịch chuyển độ dài một khoảng từ L đến $L+\frac{gL^2}{a^2}$.

2.20. Đáp số:

$$u(x,t)=\frac{2AL}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\left[1+\left(\frac{ka\pi}{L}\right)^2\right]}\left(e^{-t}-\cos\frac{ka\pi t}{L}+\frac{L}{ka\pi}\sin\frac{ka\pi t}{L}\right)\sin\frac{ka\pi x}{L}.$$

2.21. Khai triển theo bộ hàm riêng Fourier

$$\left\{X_k(x)=\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\},\ k=0,1,2\ldots,$$

hàm u có dạng:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Chú ý rằng:

$$f(x,t)=A\sin t=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow f_k(t)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx,\quad k=0,1,2,\ldots;$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k''(t)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2L};$$

$$a^2u_{xx}(x,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k+1)\pi a}{L}\right)^2T_k(t)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2L}.$$

Thay vào phương trình ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{(2k+1)\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)\right]\sin\frac{(2k+1)\pi}{2L}=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2L}.$$

Từ sự bằng nhau của hai chuỗi, suy ra

$$T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)=f_k(t).$$

Các điều kiện ban đầu cho hàm $T_k(x)$ là

$$T_k''(0)=T_k(0)=0,\quad k=0,1,2,...$$

Phương trình vi phân cấp 2 không thuần nhất có nghiệm:

$$T_k(t)=\frac{2L}{(2k+1)\pi a}\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{(2k+1)\pi a}{2L}(t-\tau)\,d\tau.$$

Cuối cùng thu được

$$u(x,t)=\frac{2L}{\pi a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\left[\int_0^t f_k(\tau)\sin\frac{(2k+1)\pi a}{2L}(t-\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

2.22. Khai triển theo bộ hàm riêng Fourier

$$\left\{X_k(x)=\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\right\},\ k=0,1,2...$$

hàm u có dạng

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Chú ý rằng :

$$f(x,t)=Ae^{-t}\cos\frac{\pi x}{2L}=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow f_k(t)=\begin{cases}Ae^{-t}, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k''(t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L};$$

$$a^2u_{xx}(x,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(2k+1)\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

Thay vào phương trình ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right)^2 T_k(t)\right]\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}=Ae^{-t}\cos\frac{\pi x}{2L}.$$

Từ sự bằng nhau của hai chuỗi, suy ra hệ phương trình

$$\begin{cases} T_0''(t) + \left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2 T_0(t) = Ae^{-t} \\ T_k''(t) + \left(\dfrac{(2k+1)\pi a}{2L}\right)^2 T_k(t) = 0, \quad k = 1,2... \end{cases}$$

Các điều kiện ban đầu cho hàm $T_k(x)$ là:

$$T_k''(0) = T_k(0) = 0, \quad k = 0,1,2,...$$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là

$$\overline{T}_0(t) = P\cos\frac{\pi a t}{2L} + Q\sin\frac{\pi a t}{2L}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất là tổng của nghiệm phương trình thuần nhất và một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất.

$$T_0(t) = M e^{-t} + P\cos\frac{\pi a t}{2L} + Q\sin\frac{\pi a t}{2L}$$

theo điều kiện ban đầu:

$$T_0(0) = M + P = 0 \qquad \Rightarrow M = -P;$$

$$T_0'(0) = -M + \frac{\pi a}{2L}Q = 0 \Rightarrow Q = M\frac{2L}{\pi a}.$$

Thay vào phương trình ta có

$$T_0(t) = M e^{-t} - M\cos\frac{\pi a t}{2L} + M\frac{2L}{\pi a}\sin\frac{\pi a t}{2L}.$$

Do đó

$$+\begin{cases} T_0''(t) = M e^{-t} + M\left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2\cos\dfrac{\pi a t}{2L} - M\dfrac{\pi a}{2L}\sin\dfrac{\pi a t}{2L} \\ \left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2 T_0(t) = M\left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2 e^{-t} - M\left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2\cos\dfrac{\pi a t}{2L} + M\dfrac{\pi a}{2L}\sin\dfrac{\pi a t}{2L} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Ae^{-t} = M\left[1 + \left(\frac{\pi a}{2L}\right)^2\right]e^{-t} \Rightarrow M = \frac{A}{\left[1 + \left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2\right]}$$

Từ đó suy ra

$$T_0(t) = \frac{A}{\left[1 + \left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2\right]}\left(e^{-t} - \cos\frac{\pi a t}{2L} + \frac{2L}{\pi a}\sin\frac{\pi a t}{2L}\right).$$

Nghiệm cuối cùng có dạng

$$u(x,t) = \frac{A}{\left[1 + \left(\dfrac{\pi a}{2L}\right)^2\right]}\left(e^{-t} - \cos\frac{\pi a t}{2L} + \frac{2L}{\pi a}\sin\frac{\pi a t}{2L}\right)\cos\frac{\pi a x}{2L}.$$

2.23. Khai triển theo bộ hàm riêng Fourier

$$\left\{X_k(x)=1,\ \cos\frac{k\pi x}{L}\right\},\ k=1,2...$$

hàm u có dạng

$$u(x,t)=At+B+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Hàm $f(x,t)$ được khai triển có dạng:

$$f(x,t)=A_1t+B_1+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L};$$

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k''(t)\cos\frac{k\pi x}{L};$$

$$a^2u_{xx}(x,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Thay vào phương trình ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)\right]\cos\frac{k\pi x}{L}=A_1t+B_1+\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Từ sự bằng nhau của hai chuỗi, suy ra

$$T_k''(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2T_k(t)=f_k(t).$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(x,t)=\int_0^t\left[\int_0^\tau f_0(\xi)d\xi\right]d\tau+\frac{L}{a\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\int_0^t f_k(\xi)\sin\frac{k\pi a}{L}(t-\xi)d\xi\right]\cos\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó:

$$f_0(\xi)=\frac{1}{L}\int_0^L f(x,\xi)dx;\ f_k(\xi)=\frac{2}{L}\int_0^L f(x,\xi)\cos\frac{k\pi x}{L}dx.$$

2.24. Gợi ý:

Chọn nghiệm dưới dạng

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t).$$

Thay vào phương trình ta có

$$V_{tt}+W_{tt}=V_{xx}+W_{xx}\Rightarrow V_{tt}-V_{xx}=W_{xx}-W_{tt},$$

trong đó W được gọi là hàm gánh điều kiện biên, nghĩa là nó có dạng

$$W(x,t)=(\alpha_1x+\beta_1)\mu(t)+(\alpha_2x+\beta_2)\nu(t).$$

Thay các điều kiện ban đầu:

$$W(0,t)=\mu(t),\ W(L,t)=\nu(t)$$

ta có

$$W(x,t)=\left(1-\frac{x}{L}\right)\mu(t)+\frac{x}{L}\nu(t).$$

Nếu chọn:

$$W_{tt}=0\Rightarrow W_{tt}=\left(1-\frac{x}{L}\right)\mu''(t)+\frac{x}{L}\nu''(t)=0;$$

$$W(x,0)=\left(1-\frac{x}{L}\right)\mu(0)+\frac{x}{L}\nu(0);$$

$$W_t(x,0)=\left(1-\frac{x}{L}\right)\mu'(0)+\frac{x}{L}\nu'(0).$$

Hàm W có thể tìm được, hàm V nhờ đó tìm được dễ hơn vì điều kiện biên là không thuần nhất:

$$V_{tt}=V_{xx};$$

$$V(0,t)=0,\ V(L,t)=0;$$

$$V(x,0)=\varphi(x)-W(x,0)=\varphi(x)-\left(1-\frac{x}{L}\right)\mu(0)+\frac{x}{L}\nu(0);$$

$$V_t(x,0)=\psi(x)-W_t(x,0)=\psi(x)-\left(1-\frac{x}{L}\right)\mu'(0)+\frac{x}{L}\nu'(0).$$

2.25. Chọn: $u(x,t)=W(x,t)+V(x,t),\ 0<x<\pi$.

Hàm W có dạng:

$$W(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)t^2+\frac{x}{\pi}t^3;$$

$$W_t(x,t)=2\left(1-\frac{x}{\pi}\right)t+\frac{3x}{\pi}t^2;$$

$$W_{tt}=2\left(1-\frac{x}{\pi}\right)+\frac{6xt}{\pi}=2-\frac{2(1-3t)}{\pi}x,\ W_{xx}=0.$$

Suy ra phương trình cho hàm V:

$$V_{tt}=V_{xx}-W_{tt}=V_{xx}-\left(2-\frac{2(1-3t)}{\pi}x\right).$$

Hàm V có điều kiện biên : $V(0,t)=0,\quad V(\pi,t)=0$.

Hàm V có điều kiện ban đầu:

$$u(x,0)=W(x,0)+V(x,0)=\sin x\Rightarrow V(x,0)=\sin x;$$

$$u_t(x,0)=W_t(x,0)+V_t(x,0)=0\quad\Rightarrow V_t(x,0)=0.$$

Khai triển hàm V theo bộ hàm riêng $\{X_k(x)=\sin kx\}$, $k=1,2...$ ta có:

$$V(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\sin kx.$$

$$f(x,t)=2-\frac{2(1-3t)}{\pi}x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin kx$$

$$\Rightarrow f_k(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2-\frac{2(1-3t)}{\pi}x\right)\sin kx\,dx=\frac{4(3t-1)}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\sin kx\,dx+\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx$$

$$=-\frac{12t}{\pi k}(-1)^k+\frac{4}{\pi k}(-1)^k-\frac{4}{\pi k}(-1)^k+\frac{4}{\pi k}=-\frac{12t}{\pi k}(-1)^k+\frac{4}{\pi k}=\frac{-4}{\pi k}\left[(-1)^k3t-1\right];$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[V_k''(t)+k^2V_k(t)\right]\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin kx=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k}\left[(-1)^k3t-1\right]\sin kx.$$

Suy ra phương trình vi phân để xác định $V_k(t)$ là

$$\left[V_k''(t)+k^2V_k(t)\right]=\frac{-4}{\pi k}\left[(-1)^k3t-1\right].$$

Giải phương trình vi phân trên, rút ra kết quả

$$u(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)t^2+\frac{x}{\pi}t^3+\sin x\cos t-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left[(-1)^k3t-1+\cos kt-\frac{(-1)^k3}{k}\sin kt\right]\sin kx.$$

2.26. *Gợi ý*: Cách giải tương tự bài tập 2.25.

Ta có thể chọn

$$u(x,t)=W(x,t)+V(x,t),\ 0<x<\pi.$$

Hàm W được chọn có dạng

$$W(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)e^{-t}+\frac{x}{\pi}t.$$

Suy ra phương trình cho hàm V:

$$V_{tt}=V_{xx}-W_{tt}=V_{xx}+\left(\frac{x}{\pi}-1\right)e^{-t}.$$

Hàm V có điều kiện biên: $V(0,t)=0,\quad V(\pi,t)=0$ và điều kiện ban đầu:

$$u(x,0)=W(x,0)+V(x,0)=\sin x\cos x\Rightarrow V(x,0)=\sin x\cos x;$$

$$u_t(x,0)=W_t(x,0)+V_t(x,0)=1\quad\Rightarrow V_t(x,0)=1.$$

Kết quả cuối cùng là

$$u(x,t)=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)e^{-t}+\frac{x}{\pi}t+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2t-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(1+k^2)}\left[e^{-t}+k^2\cos kt-\left(2k+\frac{1}{k}\right)\sin kt\right]\sin kx.$$

2.27. Ta có thể chọn

$$u(x,t)=W(x,t)+V(x,t),\ 0<x<\pi$$

Hàm W được chọn có dạng

$$W(x,t)=(\alpha_1 x+\beta_1)t+(\alpha_2 x+\beta_2);$$
$$W(0,t)=\beta_1 t+\beta_2=t\Rightarrow\beta_1=1,\beta_2=0;$$
$$W_x(\pi,t)=\alpha_1 t+\alpha_2=1\Rightarrow\alpha_1=0,\ \alpha_2=1$$
$$\Rightarrow W(x,t)=x+t$$

Suy ra

$$W_t(x,t)=1;$$
$$W_{tt}=0,\ W_{xx}=0.$$

Vậy phương trình cho hàm V có dạng

$$V_{tt}=V_{xx}.$$

Hàm V có điều kiện biên : $V(0,t)=0,\quad V(\pi,t)=0$ và điều kiện ban đầu:

$$V(x,0)=\sin\frac{x}{2}-x;\quad V_t(x,0)=0.$$

Hàm V có dạng

$$V(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(M_k\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2}+N_k\sin\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

Do điều kiện ban đầu suy ra $N_k=0$, còn M_k được tính bằng tích phân

$$M_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-x\right)\sin\frac{(2k+1)x}{2}dx=1-\frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi}.$$

Suy ra nghiệm

$$u(x,t)=x+t+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

2.28. Có thể chọn nghiệm dưới dạng

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)=V(x,t)+f(x)e^{-t},\ 0<x<L.$$

Thay vào phương trình ta có:

$$V_{tt}+W_{tt}=a^2(V_{xx}+W_{xx});$$
$$V_{tt}+f(x)e^{-t}=a^2V_{xx}+a^2f''(x)e^{-t};$$
$$V_{tt}=a^2V_{xx}+\left[a^2f''(x)-f(x)\right]e^{-t}.$$

Chọn : $\left[a^2f''(x)-f(x)\right]e^{-t}=0\Rightarrow f''(x)-\frac{1}{a^2}f(x)=0.$

Hàm f thoả mãn các điều kiện sau:

$$W_t(0,t)=0\quad\Rightarrow f'(0)e^{-t}=0\quad\Rightarrow f'(0)=0;$$
$$W_x(L,t)=Ae^{-t}\Rightarrow f'(L)e^{-t}=Ae^{-t}\Rightarrow f'(L)=A.$$

Giải ra thu được: $f(x)=M\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}+N\,\mathrm{sh}\frac{x}{a}.$

Do đó:

$$f'(x)=\frac{M}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}+\frac{N}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a};$$

$$f'(0)=\left[\frac{M}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}+\frac{N}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right]_{x=0}=\frac{N}{a}=0\Rightarrow N=0;$$

$$f'(L)=\frac{M}{a}\operatorname{sh}\frac{L}{a}=A\Rightarrow M=\frac{Aa}{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}\Rightarrow f(x)=\frac{Aa}{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Như vậy

$$W(x,t)=f(x)e^{-t}=\frac{Aa}{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}\operatorname{ch}\frac{x}{a}e^{-t}.$$

Hàm V thoả mãn các điều kiện sau:

$$u(x,0)=V(x,0)+W(x,0)=\frac{Aa\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}\Rightarrow V(x,0)=0;$$

$$u_t(x,0)=V_t(x,0)+W_t(x,0)=-\frac{Aa\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}\Rightarrow V_t(x,0)=0.$$

Hàm V có nghiệm bằng không:

$$\left.\begin{array}{l} V_{tt}=a^2V_{xx} \\ V(0,t)=0,\ \ V(L,t)=0 \\ V(x,0)=0,\ V_t(x,0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow V(x,t)=0.$$

Kết quả cuối cùng ta có:

$$u(x,t)=W(x,t)=f(x)e^{-t}=\frac{Aa}{\operatorname{sh}\frac{L}{a}}\operatorname{ch}\frac{x}{a}e^{-t}.$$

2.29. Chọn nghiệm dưới dạng

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t)=V(x,t)+f(x)\sin 2t,\ 0<x<L.$$

Thay vào phương trình ta được:

$$V_{tt}+W_{tt}=a^2(V_{xx}+W_{xx})+\sin 2t;$$

$$V_{tt}-4f(x)\sin 2t=a^2V_{xx}+a^2f''(x)\sin 2t+\sin 2t;$$

$$V_{tt}=a^2V_{xx}+\left[a^2f''(x)+4f(x)+1\right]\sin 2t.$$

Có thể chọn :

$$\left[a^2f''(x)+4f(x)+1\right]\sin 2t=0\Rightarrow f''(x)+\frac{4}{a^2}f(x)=-\frac{1}{a^2}.$$

Hàm f thoả mãn các điều kiện:

$$W_x(0,t)=0 \qquad \Rightarrow f'(0)\sin 2t=0 \qquad \Rightarrow f'(0)=0;$$

$$W_x(L,t)=\frac{2}{a}\sin\frac{2L}{a}\sin 2t \Rightarrow f'(L)\sin 2t=\frac{2}{a}\sin\frac{2L}{a}\sin 2t \Rightarrow f'(L)=\frac{2}{a}\sin\frac{2L}{a}.$$

Giải ra thu được: $\quad f(x)=M\cos\frac{2x}{a}+N\sin\frac{2x}{a}+P,$

trong đó M, N và P là các hệ số.

$$f'(x)=-M\frac{2}{a}\sin\frac{2x}{a}+N\frac{2}{a}\cos\frac{2x}{a};$$

$$f'(0)=\left[-M\frac{2}{a}\sin\frac{2x}{a}+N\frac{2}{a}\cos\frac{2x}{a}\right]_{x=0}=\frac{2N}{a}=0\Rightarrow N=0;$$

$$f'(L)=-M\frac{2}{a}\sin\frac{2L}{a}=\frac{2}{a}\sin\frac{2L}{a}\Rightarrow M=-1\Rightarrow f(x)=-\cos\frac{2x}{a}+P.$$

Thay vào phương trình ta có:

$$f(x)=-\cos\frac{2x}{a}+P;$$

$$f'(x)=\frac{2}{a}\sin\frac{2x}{a};$$

$$f''(x)=\frac{4}{a^2}\cos\frac{2x}{a};$$

$$f''(x)+\frac{4}{a^2}f(x)=-\frac{1}{a^2};$$

$$\frac{4}{a^2}\cos\frac{2x}{a}+\frac{4}{a^2}\left(P-\cos\frac{2x}{a}\right)=-\frac{1}{a^2}\Rightarrow P=-\frac{1}{4}.$$

Như vậy : $\quad W(x,t)=-\left(\frac{1}{4}+\cos\frac{2x}{a}\right)\sin 2t.$

Hàm V thoả mãn điều kiện:

$$W(x,t)=-\left(\frac{1}{4}+\cos\frac{2x}{a}\right)\sin 2t$$

$$\Rightarrow W(x,0)=0,\quad W_t(x,0)=-\frac{1}{2}-2\cos\frac{2x}{a}.$$

Từ điều kiện ta có:

$$u(x,0)=V(x,0)+W(x,0)=0 \qquad \Rightarrow V(x,0)=0;$$

$$u_t(x,0)=V_t(x,0)+W_t(x,0)=-2\cos\frac{2x}{a}\Rightarrow V_t(x,0)=\frac{1}{2}.$$

Hệ phương trình xác định V là

$$\begin{cases} V_{tt}=a^2V_{tt} \\ V_x(0,t)=0,\ V_x(L,t)=0 \\ V(x,0)=0,\ V_t(x,0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(x,t) = Qt + R + \sum_{k=1}^{\infty}\left(S_k \cos\frac{k\pi at}{L} + T_k \sin\frac{k\pi at}{L}\right)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Từ các điều kiện ban đầu của hàm V ta có:

$$V(x,0) = 0 \Rightarrow R = S_k = 0;$$

$$V_t(x,0) = Q + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \frac{k\pi a}{L}\cos\frac{k\pi x}{L} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_k = 0,\ Q = \frac{1}{2}.$$

Hàm V tìm được là:

$$V(x,t) = \frac{t}{2}.$$

Kết quả cuối cùng, ta có

$$u(x,t) = \frac{t}{2} - \left(\frac{1}{4} + \cos\frac{2x}{a}\right)\sin 2t.$$

2.30. Cần phải giải phương trình :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L:$$

$$u(0,t) = 0,\ u_x(L,t) = \frac{F_0}{ES};$$

$$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0.$$

Kết quả

$$u(x,t) = \frac{F_0}{ES}x - \frac{8F_0L}{ES\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2L}.$$

2.31. Chọn bộ hàm riêng $\{X_n(x) = \sin n\pi x\}, n = 1,2...$

Khai triển hàm $u(x,t)$ theo bộ hàm riêng ta được

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Khai triển hàm $f(x,t) = \sin t \sin 2\pi x$ theo bộ hàm riêng ta cũng có

$$f(x,t) = \sin t \sin 2\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \Rightarrow f_2(t) = \sin t,\ \ f_n(t) = 0,\ n \neq 2.$$

Thay vào phương trình

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + n^2\pi^2 T_n(t) - f_n(t)\right]\sin n\pi x = 0.$$

Suy ra

$$T_n''(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = f_n(t) \Rightarrow \begin{cases} T_2''(t) + 4\pi^2 T_2(t) = \sin t \\ T_n''(t) + n^2\pi^2 T_n(t) = 0, n \neq 2 \end{cases}$$

Như vậy, nếu $n \neq 2$ với các điều kiện $T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0$ ta suy ra $T_n(t) = 0$.

Khi $n = 2$ ta có:

$$T_2(t) = a\sin 2\pi t + b\cos 2\pi t + c\sin t;$$

$$T_2(0) = b = 0,\ T_2'(0) = 2\pi a + c = 0 \Rightarrow a = -\frac{c}{2\pi};$$

$$T_2(t) = c\left(\sin t - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right).$$

Thay vào phương trình:

$$T_2''(t) = -c(\sin t - 2\pi\sin 2\pi t);$$

$$4\pi^2 T_2(t) = c\left(4\pi^2\sin t - 2\pi\sin 2\pi t\right)$$

$$\Rightarrow T_2''(t) + 4\pi^2 T_2(t) = c\left(4\pi^2 - 1\right)\sin t = \sin t$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{4\pi^2 - 1}.$$

Như vậy

$$T_2(t) = \frac{1}{4\pi^2 - 1}\left(\sin t - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{4\pi^2 - 1}\left(\sin t - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right)\sin 2\pi x.$$

2.32. Cách giải tương tự bài 2.31.

Kết quả bài toán là

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_n}{(n\pi)^2}(1 - \cos n\pi t)\right]\sin n\pi x.$$

Chú ý rằng

$$c_n = 2\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2\left[1 - (-1)^n\right]}{n\pi} = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

Do đó

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3\pi^3}\left[1 - \cos(2k+1)\pi t\right]\sin(2k+1)\pi x.$$

2.33. *Chứng minh:* Trong hệ tọa độ Đề-các ta thay một hệ tọa độ mới như sau :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \quad r > 0,\ \varphi \in [-\pi, \pi],\ z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases} \tag{1}$$

Gọi $u(x,y,z)$ là hàm đủ trơn trong hệ tọa độ Đề-các, còn hàm $v(r,\varphi,z)$ tương ứng ở trong hệ tọa độ cực, tức là :

$$v(r,\varphi,z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \tag{2}$$

Biểu thị $\Delta u(x,y,z)$ (và $\Delta u(x,y)$) qua các đạo hàm riêng $v_{rr}, v_{\varphi\varphi}, v_{r\varphi}, v_r, v_\varphi, v_{zz}$.

Theo quy tắc đạo hàm riêng ta có :

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ u_y = \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \qquad (3)$$

Vì thế cần xác định các đạo hàm riêng: $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$. Ta có :

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} 2r\dfrac{\partial r}{\partial x} = 2x = 2r\cos\varphi \Rightarrow \dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi \\ 2r\dfrac{\partial r}{\partial y} = 2y = 2r\sin\varphi \Rightarrow \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi \end{cases} \qquad (*)$$

Đạo hàm riêng hai vế của (*) ta có :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[y = r\sin\varphi\right] \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x = r\cos\varphi\right] \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Từ phương trình (3) ta có :

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = K;$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = M.$$

Như vậy

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial K}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial K}{\partial r} - \sin\varphi\frac{\partial K}{\partial \varphi},$$

trong đó:

$$K = \cos\varphi\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \cos\varphi\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial r};$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\varphi\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}; \quad (4)$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial M}{\partial r}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial M}{\partial \varphi},$$

ở đây:

$$M=\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial r}=\sin\varphi\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\dfrac{\cos\varphi}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+\dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial M}{\partial\varphi}=\cos\varphi\dfrac{\partial v}{\partial r}+\sin\varphi\dfrac{\partial v}{\partial r\partial\varphi}-\dfrac{\sin\varphi}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+\dfrac{\cos\varphi}{r}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \quad (5)$$

Cộng (4) và (5) thu được kết quả:

$$\Delta u(x,y)=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}; \quad (6)$$

$$\Delta u(x,y,z)=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (7)$$

2.34. Đáp số:

$$u(x,y,t)=\frac{64AL_1^2L_2^2}{\pi^7 a}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{L_1}\sin\dfrac{(2m+1)\pi y}{L_2}}{(2m+1)^3(2n+1)^3\sqrt{\dfrac{(2n+1)^2}{L_1^2}+\dfrac{(2m+1)^2}{L_2^2}}}\times$$

$$\times\sin\left\{\pi at\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{L_1^2}+\frac{(2m+1)^2}{L_2^2}}\right\}.$$

2.35. Đáp số:

$$u(x,y,t)=\frac{4K}{\pi a\rho L_1^2L_2^2}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{n\pi x_0}{L_1}\sin\dfrac{n\pi x}{L_1}\sin\dfrac{m\pi y_0}{L_2}\sin\dfrac{m\pi y}{L_2}}{\sqrt{\dfrac{n^2}{L_1^2}+\dfrac{m^2}{L_2^2}}}\times\sin\left\{\pi at\sqrt{\frac{n^2}{L_1^2}+\frac{m^2}{L_2^2}}\right\}.$$

2.36. Đáp số : $u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{0m}\cos\dfrac{a\mu_m^{(0)}t}{L}+B_{0m}\sin\dfrac{a\mu_m^{(0)}t}{L}\right)J_0\left(\dfrac{\mu_m^{(0)}r}{L}\right),$

trong đó $\mu_m^{(0)}$ là nghiệm dương của phương trình $J_0(\mu)=0$ và các hệ số được tìm từ điều kiện ban đầu :

$$u(r,0)=f(r)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{L}\right);$$

$$u_t(r,0)=F(r)=\sum_{m=1}^{\infty}B_{0m}\frac{\mu_m^{(0)}a}{L}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{L}\right).$$

Chú ý rằng : $\displaystyle\int_0^L rJ_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{L}r\right)J_0\left(\frac{\mu_{m'}^{(0)}}{L}r\right)dr=\begin{cases}0. & m\neq m'\\ \dfrac{2}{L^2J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)}, & m=m'\end{cases}$

Các hệ số có dạng :

$$\begin{cases} A_{0m} = \dfrac{2}{L^2 J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)} \displaystyle\int_0^L rf(r) J_0\left(\dfrac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) dr \\ B_{0m} = \dfrac{2}{La\mu_m^{(0)} J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)} \displaystyle\int_0^L rF(r) J_0\left(\dfrac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right) dr \end{cases}$$

2.37. Đáp số:

$$u(r,t) = 8A\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\dfrac{\mu_m^{(0)} r}{L}\right)}{\left(\mu_m^{(0)}\right)^3 J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)} \cos\frac{\mu_m^{(0)} at}{L},$$

trong đó $\mu_m^{(0)}$ là nghiệm dương của phương trình $J_0(\mu) = 0$.

2.38. *Gợi ý:* Ta cần giải phương trình

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right); 0 \le r \le r_0.$$

thỏa mãn các điều kiện:

$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u_r(r_0,t) = 0;$$
$$u(r,0) = \varphi(r), \quad u_t(r,0) = \psi(r).$$

Bằng phương pháp tách biến ta thu được

$$u(r,t) = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} r\{\varphi(r) + t\psi(r)\} dr + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\frac{a\mu_n t}{r_0} + B_n \sin\frac{a\mu_n t}{r_0}\right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right),$$

trong đó các hệ số A_n và B_n được xác định theo công thức:

$$A_n = \frac{2}{r_0^2\left[J_0(\mu_n)\right]^2}\int_0^{r_0} r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr;$$

$$B_n = \frac{2}{a\mu_n r_0\left[J_0(\mu_n)\right]^2}\int_0^{r_0} r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) dr.$$

với μ_m^n là các nghiệm dương của phương trình $J_n(\mu) = 0$.

CHƯƠNG III

3.1. *Gợi ý:* Nghiệm có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 t} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}; \; k = 0,1,2...,$$

trong đó C_k được xác định từ điều kiện ban đầu :

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L} dx.$$

3.2. *Gợi ý:* Nghiệm có dạng

$$u(x,t)=\sum_{k\geq 0}^{\infty}C_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L},\ k=0,1,2...,$$

trong đó C_k được xác định từ điều kiện ban đầu :

$$C_k=\frac{2A}{L}\int_0^L(L-x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{4AL}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_{x=0}^{x=L}-\frac{2A}{L}\int_0^L x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx$$

$$=\frac{4AL(-1)^k}{(2k+1)\pi}-\frac{2A}{L}\int_0^L x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx.$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta có

$$\int_0^L x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx=\frac{2Lx}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}\Bigg|_{x=0}^{x=L}-\frac{2L}{(2k+1)\pi}\int_0^L\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}$$

$$=\frac{2L^2}{(2k+1)\pi}(-1)^k-\left[\frac{2L}{(2k+1)\pi}\right]^2.$$

Vậy

$$C_k=\frac{4AL(-1)^k}{(2k+1)\pi}-\frac{4AL}{(2k+1)\pi}(-1)^k+\frac{8AL}{(2k+1)^2\pi^2}=\frac{8AL}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

Thay hệ số vào nghiệm ta được

$$u(x,t)=\frac{8LA}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2L}.$$

3.3. *Gợi ý:* Nghiệm có dạng

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{L}$$

trong đó C_k được xác định từ điều kiện ban đầu :

$$C_k=\frac{2U}{L}\int_0^L\cos\frac{k\pi x}{L}dx=0,\ k\neq 1;$$

$$C_1=\frac{U}{L}\int_0^L dx=U.$$

Kết quả : $u(x,t)=U$.

3.4. *Gợi ý:* Nếu đặt $u(x,t)=e^{-\beta t}v(x,t)$, thay vào phương trình $u_t=a^2u_{xx}-\beta u$ ta được:

$$-\beta e^{-\beta t}v(x,t)+e^{-\beta t}v_t(x,t)=a^2e^{-\beta t}v_{xx}(x,t)-\beta e^{-\beta t}v(x,t)$$

$$\Rightarrow v_t(x,t)=a^2v_{xx}(x,t)$$

thỏa mãn điều kiện:

$$v(0,t) = v(L,t);$$
$$v(x,0) = \varphi(x).$$

Nghiệm v có dạng :

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó C_k được xác định từ điều kiện ban đầu :

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi.$$

Vậy nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^L \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{L}d\xi\right)e^{-\left[\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2+\beta\right]t}\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

3.5. *Gợi ý:* Nghiệm có dạng

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left\{\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2+\beta\right\}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L},$$

trong đó C_k được xác định từ điều kiện ban đầu :

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L} = \sin\frac{\pi x}{2L}$$
$$\Rightarrow C_0 = 1,\ C_k = 0\ khi\ k \neq 0$$

Kết quả : $$u(x,t) = e^{-\left\{\left[\frac{\pi a}{2L}\right]^2+\beta\right\}t}\sin\frac{\pi x}{2L}.$$

3.6. *Gợi ý:* Chọn:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t);$$
$$v(x) = T + \frac{x}{L}(U-T).$$

Hàm v gánh các điều kiện biên không thuần nhất.

Hàm w thoả mãn :

$$w_t(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t);$$
$$w(0,t) = w(L,t) = 0;$$
$$w(x,0) = -v(x) = -T - \frac{x}{L}(U-T).$$

Hàm w có dạng là :

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{L},$$

trong đó C_k được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$C_k = -\frac{2T}{L}\int_0^L \sin\frac{k\pi x}{L}dx - \frac{2(U-T)}{L^2}\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

$$= -\frac{2T}{L}\left[-\frac{L}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}\right] - \frac{2(U-T)}{L^2}\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2T}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right] - \frac{2(U-T)}{L^2}\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx.$$

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta tính $\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx$:

$$\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx = -\frac{Lx}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{k\pi}{L}\int_0^L \cos\frac{k\pi x}{L}dx = -\frac{L^2}{k\pi}(-1)^k.$$

Do đó

$$C_k = \frac{2U}{k\pi}(-1)^k - \frac{2T}{k\pi} = \frac{2}{k\pi}\left[U(-1)^k - T\right].$$

Thay vào nghiệm ta được

$$u(x,t) = T + \frac{x}{L}(U-T) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[U(-1)^k - T\right]e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

3.7. *Gợi ý*: Đặt nghiệm dưới dạng :

$$u(x,t) = v(x,t)e^{-\beta t}. \qquad (1)$$

Thay vào phương trình $u_t = a^2 u_{xx} - \beta u + \sin\frac{\pi x}{L}$, ta có :

$$e^{-\beta t}v_t - \beta e^{-\beta t}v = a^2 e^{-\beta t}v_{xx} - \beta e^{-\beta t}v + \sin\frac{\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow v_t = a^2 v_{xx} + e^{\beta t}\sin\frac{\pi x}{L}$$

thỏa mãn điều kiện

$$v(0,t) = 0,\ v(L,t) = 0,\ v(x,0) = 0.$$

Phương trình cho v được giải bằng cách đặt :

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}. \qquad (2)$$

Từ (2) ta có:

$$v_t = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin\frac{k\pi x}{L};$$

$$a^2 v_{xx} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

Khai triển hàm $e^{\beta t}\sin\frac{\pi x}{L}$ thành chuỗi ta được

$$e^{\beta t}\sin\frac{\pi x}{L}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}\Rightarrow\begin{cases}f_1(t)=e^{\beta t}\\ f_k(t)=0,k\neq 1\end{cases}$$

Như vậy ta đưa ra hai phương trình vi phân cho T :

$$T_1'(t)+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2T_1(t)=e^{\beta t},T_1(0)=0\Rightarrow T_1(t)=Me^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t}+Ne^{\beta t}$$

$$+\begin{cases}T_1'(t)=-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2Me^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t}+\beta Ne^{\beta t}\\ \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2T_1(t)=\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2Me^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t}+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2Ne^{\beta t}\end{cases}$$

$$e^{\beta t}=\left[\beta+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]Ne^{\beta t}\Rightarrow N=\frac{1}{\left[\beta+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]}=-M$$

$$T_1(t)=\frac{1}{\left[\beta+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]}\left(-e^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t}+e^{\beta t}\right)=\frac{e^{\beta t}}{\left[\beta+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right]}\left\{1-e^{-\left[\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t+\beta\right]}\right\}.$$

Kết quả :

$$u(x,t)=\frac{1}{\beta+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2}\left\{1-e^{-\left[\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t+\beta\right]}\right\}\sin\frac{\pi x}{L}. \qquad (3)$$

3.8. *Đáp số:*

$$u(x,t)=1+\frac{1}{(3\pi)^2}\left[1-e^{-(3\pi)^2t}\right]\cos 3\pi x.$$

3.9. *Đáp số:*

$$u(x,t)=\frac{1}{\beta+\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2}\left\{1-e^{-\left[\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2t+\beta\right]}\right\}\sin\frac{\pi x}{L}.$$

3.10. *Đáp số:*

$$u(x,t)=\frac{2LA}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2t}\sin\frac{k\pi x}{L}.$$

3.11. Chọn nghiệm dưới dạng

$$u(x,t)=f(x)e^{-t}+v(x,t).$$

Thay vào phương trình $u_t=a^2u_{xx}$ ta có :

$$v_t - a^2 v_{xx} = a^2 f''(x)e^{-t} + f(x)e^{-t}.$$

Chọn : $$a^2 f''(x)e^{-t} + f(x)e^{-t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) + \dfrac{1}{a^2} f(x) = 0 \\ f(0) = 0,\ f'(L) = A \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là

$$f(x) = M\cos\frac{x}{a} + N\sin\frac{x}{a}.$$

Từ điều kiện biên suy ra các hệ số M và N như sau:

$$f(0) = 0 \Rightarrow M = 0;$$

$$f'(L) = N\frac{1}{a}\cos\frac{L}{a} = A \Rightarrow N = \frac{aA}{\cos\dfrac{L}{a}}.$$

Vậy

$$f(x) = \frac{aA}{\cos\dfrac{L}{a}}\sin\frac{x}{a}.$$

Hàm v thỏa mãn :

$$v_t = a^2 v_{xx},$$

với các điều kiện:

$$v(0,t) = v_x(L,t) = 0;$$

$$v(x,0) = T - f(x) = T - \frac{aA}{\cos\dfrac{L}{a}}\sin\frac{x}{a}.$$

Nghiệm phương trình có dạng :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{2L}\right]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L},$$

trong đó C_k được xác định theo công thức

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \left[T - \frac{aA}{\cos\dfrac{L}{a}}\sin\frac{x}{a}\right]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx$$

$$= \frac{2T}{L}\int_0^L \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2L}dx - \frac{2aA}{L\cos\dfrac{L}{a}}\int_0^L \sin\frac{x}{a}\sin\omega_k x\,dx = \frac{2T}{L\omega_k} - \frac{2a^3\omega_k(-1)^k A}{L\left(1 - a^2\omega_k^2\right)}.$$

Chú ý rằng

$$\int_0^L \sin\frac{x}{a}\sin\omega_k x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^L\left[\cos\left(\frac{1}{a}-\omega_k\right)x-\cos\left(\frac{1}{a}+\omega_k\right)x\right]dx$$

$$=\frac{a}{2(1-a\omega_k)}\sin\left(\frac{1}{a}-\omega_k\right)L-\frac{a}{2(1+a\omega_k)}\sin\left(\frac{1}{a}+\omega_k\right)L$$

$$=\frac{a(-1)^k}{2(1-a\omega_k)}\cos\frac{L}{a}-\frac{a(-1)^k}{2(1+a\omega_k)}\cos\frac{L}{a}=\frac{a^2\omega_k(-1)^k}{(1-a^2\omega_k{}^2)}\cos\frac{L}{a},\qquad \omega_k\neq\frac{1}{a}.$$

Vậy nghiệm có dạng

$$u(x,t)=\frac{aA}{\cos\frac{L}{a}}e^{-t}\sin\frac{x}{a}+\frac{2}{L}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{T}{\omega_k}-\frac{a^3\omega_k(-1)^k A}{(1-a^2\omega_k{}^2)}\right]e^{-a^2\omega_k{}^2 t}\sin\omega_k x\,.$$

3.12. Đặt nghiệm dưới dạng :

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t),$$

trong đó w có dạng :

$$W(x,t)=(\alpha_1x^2+\beta_1x)At+(\alpha_2x^2+\beta_2x)T\,.$$

Suy ra:

$$W_x(0,t)=\beta_1At+\beta_2T=At\Rightarrow\beta_1=1,\beta_2=0;$$

$$W_x(L,t)=(2\alpha_1L+1)At+2\alpha_2LT=T$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1L+1=0,\ \alpha_1=-\frac{1}{2L},\ \alpha_2=\frac{1}{2L}.$$

Vậy:

$$W(x,t)=-\frac{x^2A}{2L}t+xAt+\frac{Tx^2}{2L}=\frac{x^2}{2L}(T-At)+Atx\,;$$

$$W(x,0)=\frac{x^2T}{2L},\ W_t=-\frac{x^2A}{2L}+Ax,\ a^2W_{xx}=\frac{a^2}{L}(T-At)$$

$$\Rightarrow a^2W_{xx}-W_t=\frac{x^2A}{2L}+Ax+\frac{a^2}{L}(T-At)$$

$$\Rightarrow v_t-a^2v_{xx}=\frac{x^2A}{2L}-Ax+\frac{a^2}{L}(T-At).$$

Thay vào phương trình $u_t=a^2u_{xx}$ ta được:

$$Ax-\frac{Ax^2}{2L}+v_t=a^2v_{xx}+\frac{a^2}{L}(T-At);$$

$$v_t-a^2v_{xx}=\frac{Ax^2}{2L}-Ax+\frac{a^2}{L}(T-At).$$

Khai triển theo bộ hàm riêng $\left\{\cos\frac{k\pi x}{L}\right\}$ ta có:

$$\frac{Ax^2}{2L}-Ax+\frac{a^2}{L}(T-At)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Hệ số $f_k(t)$ được xác định từ điều kiện ban đầu:

$$f_0(t)=\frac{1}{L}\int_0^L\left[\frac{Ax^2}{2L}-Ax+\frac{a^2}{L}(T-At)\right]dx=\frac{AL}{6}-\frac{AL}{2}+\frac{a^2(T-At)}{L};$$

$$f_k(t)=\frac{2}{L}\int_0^L\left[\frac{Ax^2}{2L}-Ax+\frac{a^2}{L}(T-At)\right]\cos\frac{k\pi x}{L}dx,\quad k\neq 0$$

$$=\frac{A}{L^2}\frac{2L^3}{(k\pi)^2}(-1)^k-\frac{2A}{L}\frac{L^2}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k-1\right]=\frac{2AL}{(k\pi)^2}.$$

Chú ý rằng : $I_1=\int_0^L x^2\cos\frac{k\pi x}{L}dx$.

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần hai lần ta được

$$I_1=\frac{Lx^2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}-\frac{2L}{k\pi}\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx=-\frac{2L}{k\pi}\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}dx=\frac{2L^3}{(k\pi)^2}(-1)^k.$$

Tính tích phân $\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}$:

$$\int_0^L x\sin\frac{k\pi x}{L}=-\frac{Lx}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}+\frac{L^2}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}=-\frac{L^2}{k\pi}(-1)^k.$$

Tiếp theo ta tính tích phân $\int_0^L x\cos\frac{k\pi x}{L}dx$:

$$\int_0^L x\cos\frac{k\pi x}{L}dx=\frac{Lx}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}-\frac{L}{k\pi}\int_0^L\sin\frac{k\pi x}{L}dx=\frac{L^2}{(k\pi)^2}\cos\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$=\frac{L^2}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k-1\right];$$

$$\int_0^L\cos\frac{k\pi x}{L}dx=\frac{L}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{L}\Big|_{x=0}^{x=L}=0.$$

Chú ý điều kiện :

$$v(x,0)=-W(x,0)=-\frac{x^2T}{2L}=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(0)\cos\frac{k\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow T_0(0)=\frac{1}{L}\int_0^L\left(-\frac{x^2T}{2L}\right)dx=-\frac{T}{2L^2}\int_0^L x^2dx=-\frac{TL}{6}$$

$$\Rightarrow T_k(0)=\frac{2}{L}\int_0^L\left(-\frac{x^2T}{2L}\right)\cos\frac{k\pi x}{L}dx=-\frac{T}{L^2}\int_0^L x^2\cos\frac{k\pi x}{L}dx=-\frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k;$$

$$f_0(t)=-\frac{AL}{3}+\frac{a^2T}{L}-\frac{a^2A}{L}t,\ v_t(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k'(t)\cos\frac{k\pi x}{L};$$

$$a^2 v_{xx}(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

Thay vào phương trình ta có:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t)\right]\cos\frac{k\pi x}{L} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\cos\frac{k\pi x}{L};$$

$$T_0'(t) = f_0(t) = -\frac{AL}{3}+\frac{a^2T}{L}-\frac{a^2A}{L}t$$

$$\Rightarrow T_0(t) = \left(-\frac{AL}{3}+\frac{a^2T}{L}\right)t-\frac{Aa^2}{2L}t^2+Q.$$

Vì $T_0(0) = -\frac{TL}{6}$, suy ra $Q = -\frac{TL}{6}$. Vậy:

$$T_0(t) = \left(-\frac{AL}{3}+\frac{a^2T}{L}\right)t-\frac{Aa^2}{2L}t^2-\frac{TL}{6};$$

$$T_k'(t)+\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 T_k(t) = \frac{2AL}{(k\pi)^2} \to T_k(t) = M(t)e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t};$$

$$T_k(0) = -\frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k \to M(0) = -\frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k;$$

$$M'(t)e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} - M(t)\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} + M(t)\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} = \frac{2AL}{(k\pi)^2}$$

$$\Rightarrow M(t) = \frac{2AL}{(k\pi)^2}\int_0^t e^{\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}dt + R = \frac{L^2}{(k\pi)^2 a^2}\frac{2AL}{(k\pi)^2}e^{\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} + R = \frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2}e^{\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} + R;$$

$$M(0) = \frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2} + R = -\frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k \Rightarrow R = -\frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k - \frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2}.$$

Vậy:
$$M(t) = \frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2}e^{\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} - \frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k - \frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2};$$

$$T_k(t) = \left\{\frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2}e^{\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t} - \frac{2TL}{(k\pi)^2}(-1)^k - \frac{2AL^3}{(k\pi)^4 a^2}\right\}e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}$$

$$= \frac{2L}{a^2\pi^4}\frac{1}{k^4}\left\{AL^2 - \left[AL^2 + (-1)^k T(ak\pi)^2\right]e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}\right\}.$$

Kết quả :

$$W(x,t) = \frac{x^2}{2L}(T-At)+Atx,\ T_0(t) = \left(-\frac{AL}{3}+\frac{a^2T}{L}\right)t-\frac{Aa^2}{2L}t^2-\frac{TL}{6};$$

$$u(x,t) = -\frac{Aa^2}{2L}t^2 - \left(\frac{A}{2L}x^2 - Ax + \frac{AL}{3} - \frac{a^2T}{L}\right)t + \frac{T}{2L}x^2 - \frac{TL}{6} +$$

$$+\frac{2L}{a^2\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^4}\left\{AL^2 - \left[AL^2 + (-1)^k T(ak\pi)^2\right]e^{-\left(\frac{k\pi a}{L}\right)^2 t}\right\}\cos\frac{k\pi x}{L}.$$

3.13. *Gợi ý*: Ta cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) = U_0 \end{cases}$$

Kết quả :
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

trong đó: $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$.

Khi $u(x,0) = f(x) = U_0$:

$$u(x,t) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi a}{L}\right]^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{L}.$$

3.14. *Gợi ý*: Ta cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L \\ u(0,t) = U_1,\ \ u(L,t) = U_2 \\ u(x,0) = f(x) = U_0 \end{cases} \tag{1}$$

Đặt :

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t); \tag{2}$$

$$w(x) = U_1 + \frac{x}{L}(U_2 - U_1). \tag{3}$$

Hàm v thoả mãn:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx},\ 0 < x < L \\ v(0,t) = 0,\ \ v(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) - w(x) = U_0 - U_1 - \frac{x}{L}(U_2 - U_1) \end{cases} \tag{4}$$

Kết quả :

$$u(x,t) = U_1 + \frac{x}{L}(U_2 - U_1) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\times$$
$$\times\left\{(U_0 - U_1)\left[1 - (-1)^n\right] + (-1)^{n+1}(U_1 - U_2)\right\}e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{5}$$

3.15. Ta cần giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - h(u - U_0),\ 0 < x < L \\ u(0,t) = U_1,\ \ u(L,t) = U_2 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

Đặt : $$u(x,t) = U_0 + w(x) + v(x,t). \tag{2}$$

Chọn hàm v sao cho :

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - hv \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \\ v(x,0) = f(x) - w(x) - U_0 \end{cases} \tag{3}$$

Do đó :

$$v_t = a^2 v_{xx} - hv + a^2 w_{xx} - hw \Rightarrow w_{xx} - \frac{h}{a^2} w = 0;$$

$$u(0,t) = U_0 + w(0) + v(0,t) = U_1 \Rightarrow w(0) = U_1 - U_0;$$

$$u(L,t) = U_0 + w(L) + v(L,t) = U_2 \Rightarrow w(L) = U_2 - U_0.$$

Giải theo w ta được :

$$w_{xx} - \frac{h}{a^2} w = 0,\ w(0) = U_1 - U_0,\ w(L) = U_2 - U_0;$$

$$w(x) = M\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x + N\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x \Rightarrow w(0) = M = U_1 - U_0;$$

$$w(L) = (U_1 - U_0)\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L + N\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L = U_2 - U_0$$

$$\Rightarrow N = \frac{U_2 - U_0}{\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L} - (U_1 - U_0)\frac{\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L}{\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L};$$

$$w(x) = (U_1 - U_0)\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x + \left(\frac{U_2 - U_0}{\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L} - (U_1 - U_0)\frac{\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L}{\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L}\right)\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x$$

$$= \frac{1}{\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L}\left[(U_1 - U_0)\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L - (U_1 - U_0)\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x + (U_2 - U_0)\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\right]$$

Mà $(U_1 - U_0)\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L - (U_1 - U_0)\text{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x = (U_1 - U_0)\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L - x)$

suy ra: $$w(x) = \frac{(U_1 - U_0)\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L - x) + (U_2 - U_0)\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x}{\text{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L}.$$

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left[\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2+h\right]t}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

với $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\left[f(\xi)-w(\xi)-U_0\right]\sin\frac{n\pi x}{L}d\xi$.

Trong điều kiện $U_1=U_2=0,\ f(x)=0$, ta có :

$$w(x)=-U_0\frac{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L-x)+\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L};$$

$$A_n=\frac{2U_0}{L}\int_0^L\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L-x)+\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L}-1\right]\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\frac{2U_0}{L\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L}\left[\int_0^L\left[\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L-x)+\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\right]\sin\frac{n\pi x}{L}dx-\frac{2U_0}{L}\int_0^L\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

$$=\frac{2U_0}{L\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L}\frac{a^2nL}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L\left[1-(-1)^n\right]-\frac{2U_0}{L}\left[-\frac{L}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]\right]$$

$$=2U_0\left[1-(-1)^n\right]\left[\frac{a^2n}{L^2h+a^2n^2\pi^2}-\frac{1}{n\pi}\right].$$

Chú ý

$$I_1=\int_0^L\left[\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L-x)+\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\right]\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$=\int_0^L\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\int_0^L\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Tính $\operatorname{sh}\frac{L\sqrt{h}}{a}\int_0^L\operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx-\left(\operatorname{ch}\frac{L\sqrt{h}}{a}-1\right)\int_0^L\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx$.

Ta có: $$\int_0^L e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx).$$

Áp dụng công thức trên ta có:

$$\int_0^L\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^L e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x}\sin\frac{n\pi x}{L}dx-\int_0^L e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)$$

$$=-\frac{a^2nL(-1)^n}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L;$$

$$\int_0^L \operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^L e^{\frac{\sqrt{h}}{a}x}\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_0^L e^{-\frac{\sqrt{h}}{a}x}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)$$

$$= -\frac{a^2nL(-1)^n}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L + \frac{a^2nL}{L^2h+a^2n^2\pi^2}$$

$$= \frac{a^2nL}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L\right).$$

Từ hai tích phân trên suy ra

$$\operatorname{sh}\frac{L\sqrt{h}}{a}\int_0^L \operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx - \left(\operatorname{ch}\frac{L\sqrt{h}}{a}-1\right)\int_0^L \operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}x\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \operatorname{sh}\frac{L\sqrt{h}}{a}\times\frac{a^2nL}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L\right) + \left(\operatorname{ch}\frac{L\sqrt{h}}{a}-1\right)\times\frac{a^2nL(-1)^n}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L$$

$$= \frac{a^2nL}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L\left[1-(-1)^n\operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L + (-1)^n\operatorname{ch}\frac{\sqrt{h}}{a}L - (-1)^n\right]$$

$$= \frac{a^2nL}{L^2h+a^2n^2\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{h}}{a}L\left[1-(-1)^n\right].$$

3.16. *Đáp số:* $u(r,\varphi,t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}J_n\left(\lambda_k^{(n)}r\right)e^{-\left(\lambda_k^{(n)}a\right)^2 t}$,

trong đó

$$A_{nk} = \frac{4}{\varphi_0 r_0^2\left[J_n\left(\lambda_k^{(n)}r_0\right)\right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} rf(r,\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}J_{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\left(\lambda_k^{(n)}r\right)drd\varphi.$$

CHƯƠNG IV

4.1. *Đáp số:* Nghiệm có dạng $u(r,\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(c_n\cos n\varphi + d_n\sin n\varphi\right)$,

trong đó: $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}\left(c_n\cos n\varphi + d_n\sin n\varphi\right) = f(\varphi)$;

$$c_n = \frac{1}{na^{n-1}\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{A_n}{na^{n-1}};$$

$$d_n = \frac{1}{na^{n-1}\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi = \frac{B_n}{na^{n-1}}.$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{na^{n-1}}\left(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right) + \alpha.$$

4.2. *Đáp số:*

Nghiệm bài toán trong :	*Nghiệm bài toán ngoài :*
$a)\, u(r,\varphi) = A\frac{r}{a}\sin\varphi$	$a)\, u(r,\varphi) = A\frac{a}{r}\sin\varphi$
$b)\, u(r,\varphi) = B + 3A\frac{r}{a}\sin\varphi - 4A\left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin 3\varphi$	$b)\, u(r,\varphi) = B + 3A\frac{a}{r}\sin\varphi - 4A\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 3\varphi$
$c)\, u(r,\varphi) = A\frac{r}{a}\sin\varphi - \frac{8A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$	$c)\, u(r,\varphi) = A\frac{a}{r}\sin\varphi - \frac{8A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$

4.3. *Đáp số:*

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\varphi\right] + B_0 \ln r + A_0,$$

trong đó các hệ số được tính theo công thức sau:

$$A_n = \frac{b^n F_n^{(1)} - a^n f_n^{(1)}}{b^{2n} - a^{2n}},\ B_n = \frac{\left(b^n f_n^{(1)} - a^n F_n^{(1)}\right)a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}},\ A_0 = \frac{f_n^{(1)} - F_n^{(1)}}{\ln\frac{a}{b}},$$

$$C_n = \frac{b^n F_n^{(2)} - a^n f_n^{(2)}}{b^{2n} - a^{2n}},\ D_n = \frac{\left(b^n f_n^{(2)} - a^n F_n^{(2)}\right)a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}},\ B_0 = \frac{f_n^{(1)}\ln a - F_n^{(1)}\ln b}{\ln\frac{a}{b}},$$

với:

$$f_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi,\ f_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\ f_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi;$$

$$F_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi,\ f_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\ F_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

4.4. a) Ta có phương trình Laplace:

$$\Delta_{r,\varphi}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,\ a < r < b:$$

$$u(a,\varphi) = 0,\ u(b,\varphi) = \cos\varphi;$$

$$L_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\ L_\varphi\Phi(\varphi) = -\lambda^2\Phi(\varphi) \Leftrightarrow \Phi''(\varphi) + \lambda^2\Phi(\varphi) = 0;$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),\ \Phi'(\varphi + 2\pi) = \Phi'(\varphi) \Rightarrow \lambda = n\ \ (n = 0, 1, 2...)$$

Đối với nghiệm R ta có:

$$n = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{dR}{dr} = M \Rightarrow \frac{dR}{dr} = \frac{B_0}{r} \Rightarrow R_0(r) = B_0\ln r + A_0;$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n}\right)\cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\sin n\varphi\right] + B_0\ln r + A_0.$$

Từ các điều kiện biên ta có:

$$u(b,\varphi)=\cos\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n b^n+\frac{B_n}{b^n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n b^n+\frac{D_n}{b^n}\right)\sin n\varphi\right]+B_0\ln b+A_0;$$

$$u(a,\varphi)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n a^n+\frac{B_n}{a^n}\right)\cos n\varphi+\left(C_n a^n+\frac{D_n}{a^n}\right)\sin n\varphi\right]+B_0\ln a+A_0;$$

$$\begin{cases}A_1 b+\dfrac{B_1}{b}=1\Rightarrow A_1=\dfrac{1}{b}-\dfrac{B_1}{b^2};\\ A_1 a+\dfrac{B_1}{a}=0\Rightarrow A_1=-\dfrac{B_1}{a^2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{b}-\frac{B_1}{b^2}=-\frac{B_1}{a^2}\Rightarrow B_1=\frac{a^2b}{a^2-b^2},\ A_1=\frac{1}{b}-\frac{B_1}{b^2}=-\frac{b}{a^2-b^2}.$$

Vậy nghiệm là

$$u(r,\varphi)=\left[-\frac{br}{a^2-b^2}+\frac{a^2b}{(a^2-b^2)r}\right]\cos\varphi$$

$$\text{hay}\ \ u(r,\varphi)=\frac{b}{b^2-a^2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi.$$

b) Ta có phương trình Laplace:

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \ a<r<b;$$

$$u(a,\varphi)=A,\ \ u(b,\varphi)=B\sin 2\varphi.$$

Cách giải tương tự câu a.

Vậy nghiệm là

$$u(r,\varphi)=A\frac{\ln\dfrac{r}{b}}{\ln\dfrac{a}{b}}+\frac{b^2B}{b^4-a^4}\left(r^2-\frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

c) Ta có phương trình Laplace:

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \ a<r<b;$$

$$u(a,\varphi)=A,\ \ u(b,\varphi)=B\sin 2\varphi.$$

Cách giải tương tự câu a, cuối cùng ta thu được:

$$u(r,\varphi)=Q+\frac{a^2q}{a^2+b^2}\left(r-\frac{b^2}{r}\right)\cos\varphi+\frac{b^2T}{a^4+b^4}\left(r^2+\frac{a^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

4.5. a) Ta có phương trình Laplace

$$\Delta_{r,\varphi}u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \ \begin{cases}0<r<R\\ 0<\varphi<\alpha\end{cases};$$

$$u = u(r,\varphi); \begin{cases} u(r,0) = u(r,\alpha) = 0 \\ u(R,\varphi) = A\varphi \end{cases}$$

$$L_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}; \begin{cases} L_\varphi \Phi(\varphi) = -\lambda^2 \Phi(\varphi) \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_n(\varphi) = B_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}; \lambda_n = \frac{n\pi}{\alpha}, n = 0,1,2...$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\Phi_n(\varphi) \Rightarrow \begin{cases} r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - \lambda_n^2 f_n(r) = 0 \\ f_n(r) = r^\sigma \Rightarrow \sigma = \pm\lambda_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n(r) = \begin{cases} r^{\frac{n\pi}{\alpha}}, \ 0 < r < R \\ r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}, \ r > R \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n\pi}{\alpha}} B_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha};$$

$$u(R,\varphi) = A\varphi \Rightarrow u(R,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^{\frac{n\pi}{\alpha}} B_n \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} = A\varphi;$$

$$B_n = \frac{2A}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \int_0^\alpha \varphi \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} d\varphi = -\frac{2A\alpha}{n\pi R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}(-1)^n;$$

$$u(r,\varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}.$$

b) Ta có phương trình Laplace

$$\Delta_{r,\varphi} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \ \begin{cases} 0 < r < R \\ 0 < \varphi < \alpha \end{cases};$$

$$u = u(r,\varphi); \begin{cases} u_\varphi(r,0) = u(r,\alpha) = 0, \\ u(R,\varphi) = f(\varphi); \end{cases}$$

$$L_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \begin{Bmatrix} L_\varphi \Phi(\varphi) = -\lambda^2 \Phi(\varphi) \\ \Phi'(0) = \Phi(\alpha) = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi_n(\varphi) = A_k \cos\frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha}; \ \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}, k = 0,1,2...$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r)\Phi_k(\varphi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 f_k''(r) + r f_k'(r) - \lambda_k^2 f_k(r) = 0 \\ f_k(r) = r^\sigma \Rightarrow \sigma = \pm\lambda_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_k(r)=\begin{cases} r^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}, & 0<r<R \\ r^{-\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}, & r>R \end{cases}$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} A_k \sin\frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha}$$

trong đó hệ số được xác định từ điều kiện biên như sau:

$$u(\mathrm{R},\varphi)=f(\varphi)\Rightarrow u(\mathrm{R},\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} R^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}} A_k \sin\frac{(2k+1)\pi\varphi}{2\alpha}=f(\varphi)$$

$$\Rightarrow A_k=\frac{2}{\alpha R^{\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha}}}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi.$$

4.6. Ta có phương trình Laplace

$$\Delta_{r,\varphi}u(r,\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \begin{cases}0<r<R\\0<\varphi<\alpha\end{cases};$$

$$u(r,0)=u(r,\alpha)=0\ ;\ u(\mathrm{R},\varphi)=f(\varphi)$$

$$L_\varphi=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\begin{cases}L_\varphi\Phi(\varphi)=-\lambda^2\Phi(\varphi)\\ \Phi(0)=\Phi(\alpha)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_n(\varphi)=B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha};\lambda_n=\frac{n\pi}{\alpha},n=1,2...$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\Phi_n(\varphi)\Rightarrow\begin{cases}r^2 f_n''(r)+r f_n'(r)-\lambda_n^2 f_n(r)=0\\ f_n(r)=r^\sigma\rightarrow\sigma=\pm\lambda_n\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n(r)=\begin{cases}r^{\frac{n\pi}{\alpha}}, & 0<r<R\\ r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}, & r>R\end{cases}$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n\pi}{\alpha}} B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}.$$

Từ điều kiện biên ta có

$$u(\mathrm{R},\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} R^{\frac{n\pi}{\alpha}} B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}=f(\varphi)\Rightarrow B_n=\frac{2}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\alpha} f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi.$$

Xét trường hợp riêng

$$f(\varphi)=\begin{cases}u_1, & 0<\varphi<\dfrac{\alpha}{2}\\ u_2, & \dfrac{\alpha}{2}<\varphi<\alpha\end{cases}$$

$$\Rightarrow B_n=\frac{2u_1}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_0^{\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi+\frac{2u_2}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi=\frac{2}{n\pi R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\left[u_1-u_2(-1)^n\right].$$

Chú ý rằng:

$$\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi = -\frac{\alpha}{n\pi}\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha}{n\pi},$$

$$\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\,d\varphi = -\frac{\alpha}{n\pi}\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\Big|_{\varphi=\frac{\alpha}{2}}^{\varphi=\alpha} = -\frac{\alpha}{n\pi}(-1)^n$$

Vậy nghiệm có dạng

$$u(r,\varphi) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[u_1 - u_2(-1)^n\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}$$

$$= \frac{2(u_1+u_2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2k\pi}{\alpha}}\sin\frac{2k\pi\varphi}{\alpha} + \frac{2(u_1-u_2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}}\sin\frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}$$

hay là

$$u(r,\varphi) = \frac{u_1+u_2}{\pi}\,arctg\frac{2r^{\frac{\pi}{\alpha}}\alpha^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\varphi}{\alpha}}{R^{\frac{2\pi}{\alpha}} - r^{\frac{2\pi}{\alpha}}} + \frac{u_1-u_2}{\pi}\,arctg\frac{2r^{\frac{2\pi}{\alpha}}\alpha^{\frac{2\pi}{\alpha}}\sin\frac{2\pi\varphi}{\alpha}}{R^{\frac{4\pi}{\alpha}} - r^{\frac{4\pi}{\alpha}}}.$$

4.7. Ta giải phương trình:

$$\Delta_{r,\varphi}u(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,\ \begin{cases}0 < r < R\\ 0 < \varphi < \pi\end{cases};$$

$$\begin{cases}u(r,0) = u(r,\pi) = V_1\\ u(R,\varphi) = V_2\end{cases}$$

Chọn nghiệm có dạng

$$u(r,\varphi) = v(r,\varphi) + V_1.$$

Từ điều kiện ta suy ra

$$\begin{cases}u(r,0) = v(r,0) + V_1 = V_1 \Rightarrow v(r,0) = 0\\ u(r,\pi) = v(r,\pi) + V_1 = V_1 \Rightarrow v(r,\pi) = 0\\ u(R,\varphi) = v(R,\varphi) + V_1 = V_2 \Rightarrow v(R,\varphi) = V_2 - V_1\end{cases}$$

Nghiệm Φ:

$$L_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\ \begin{cases}L_\varphi\Phi(\varphi) = -\lambda^2\Phi(\varphi)\\ \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0\end{cases} \Rightarrow \Phi_n(\varphi) = B_n\sin n\varphi;\lambda_n = n, n = 1,2...$$

Nghiệm $v(r,\varphi)$ có dạng

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\Phi_n(\varphi).$$

Mặt khác

$$\begin{cases}r^2 f_n''(r) + r f_n'(r) - \lambda_n^2 f_n(r) = 0\\ f_n(r) = r^\sigma \Rightarrow \sigma = \pm\lambda_n\end{cases} \Rightarrow f_n(r) = \begin{cases}r^n,\ 0 < r < R\\ r^{-n},\ r > R\end{cases}$$

Suy ra

$$v(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n B_n \sin n\varphi .$$

Từ điều kiện ta có:

$$v(\mathrm{R},\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty} R^n B_n \sin n\varphi = V_2 - V$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2(V_2-V_1)}{\pi R^n}\int_0^{\pi}\sin n\varphi d\varphi = \frac{4(V_2-V_1)}{\pi R^{2m+1}(2m+1)}$$

Do đó

$$v(r,\varphi)=\frac{4(V_2-V_1)}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{(2m+1)}\sin(2m+1)\varphi .$$

Nghiệm $u(r,\varphi)$ có dạng

$$u(r,\varphi)=V_1+\frac{4(V_2-V_1)}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)}\left(\frac{r}{R}\right)^{(2m+1)}\sin(2m+1)\varphi$$

$$\Leftrightarrow u(r,\varphi)=V_1+\frac{2(V_2-V_1)}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{Rr\sin\varphi}{r^2-R^2}.$$

$$\overline{\mathrm{E}}=-\operatorname{grad} u.$$

4.8. Ta có phương trình Laplace:

$$\Delta_{r,\varphi}u(r,\varphi)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ \begin{cases}0<r<R\\0<\varphi<\alpha\end{cases}$$

$$u(r,0)=u(r,\alpha)=0;\ u(r,\varphi)=\begin{cases}f(\varphi),\ r=a\\F(\varphi),\ r=b\end{cases}$$

$$L_\varphi=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};\ \begin{cases}L_\varphi\Phi(\varphi)=-\lambda^2\Phi(\varphi)\\\Phi(0)=\Phi(\alpha)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Phi_n(\varphi)=B_n\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha};\lambda_n=\frac{n\pi}{\alpha}, n=1,2...$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)\Phi_n(\varphi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}r^2 f_n''(r)+r f_n'(r)-\lambda_n^2 f_n(r)=0\\f_n(r)=r^\sigma\Rightarrow\sigma=\pm\lambda_n\end{cases}\Rightarrow f_n(r)=C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}.$$

Từ các điều kiện ta có:

$$u(\mathrm{a},\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}=f(\varphi);$$

$$u(b,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n b^{\frac{n\pi}{\alpha}}+D_n b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}=F(\varphi);$$

$$C_n=\frac{b^{\frac{n\pi}{\alpha}}F_n-a^{\frac{n\pi}{\alpha}}f_n}{b^{\frac{2n\pi}{\alpha}}-a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}},\ D_n=\frac{b^{\frac{n\pi}{\alpha}}f_n-a^{\frac{n\pi}{\alpha}}F_n}{b^{\frac{2n\pi}{\alpha}}-a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}}a^{\frac{n\pi}{\alpha}}b^{\frac{n\pi}{\alpha}},$$

trong đó:

$$\begin{cases} f_n=\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha}f(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi \\ F_n=\dfrac{2}{\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha}F(\varphi)\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi \end{cases}$$

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha},\ r>a, 0<\varphi<\alpha$$

Trong trường hợp $f(\varphi)=u_0,\ F(\varphi)=0$:

$$u(r,\varphi)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(ab)^{\frac{n\pi}{\alpha}}}{b^{\frac{2n\pi}{\alpha}}-a^{\frac{2n\pi}{\alpha}}}\left[\left(\frac{b}{r}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}+\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\right]\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha},\ n=2k+1.$$

CHƯƠNG VII

7.1. Thật vậy

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{n-1+2k}}{2^{n-1+2k}(k-1)!(n-1+k)!}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{2n}{x}\left[\frac{x^n}{2^n n!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{n+2k}}{2^{n+2k}k!(n+k)!}\right]=\frac{2n}{x}J_n(x).$$

Các công thức khác được chứng minh tương tự.

7.2. *Gợi ý:* Vì

$$\int_0^1\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{1}{2^k}C_{2k}^k\frac{\pi}{2},$$

suy ra

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\int_0^1\frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}dt=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}=J_0(x).$$

7.3. *Gợi ý:* Áp dụng các đồng nhất thức trong bài tập 7.1:

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x);$$

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x);$$

$$xJ_n'(x)=-xJ_{n+1}(x)+nJ_n(x).$$

7.4. *Gợi ý:* Vì $\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}k!}$ do đó

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{1/2+2k}}{2^{1/2+2k}k!\Gamma(n+k+1)}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Công thức cho hàm cos chứng minh tương tự.

7.5. *Gợi ý*: Chú ý rằng, khi thay $x=\cos\theta$, $-1<x<1$ ta có các đạo hàm riêng thay đổi như sau:

$$\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta};\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Thay vào phương trình ta suy ra kết quả.

7.6. Khi $x=\cos\theta$ ta có

$$T_n(x)=T_n(\cos\theta)=\frac{1}{2}\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right]=\cos n\theta=\cos n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\ldots$$

Suy ra : $T_n(x)=x^n-C_n^2x^{n-2}(1-x^2)+\ldots$ là đa thức bậc n.

7.7. *Gợi ý :* Sử dụng công thức $T_n(x)=\cos n\theta$ ta có

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=0,\ m\neq n.$$

7.8. *Gợi ý:* Sử dụng công thức Lepnitz ta có:

$$\frac{1}{n!}L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{d^ke^{-x}}{dx^k}\frac{d^{n-k}x^n}{dx^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}C_n^{n-k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

Suy ra

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(C_n^{n-k}\frac{n}{k!}-C_n^{n-k}\frac{1}{(k-1)!}-C_n^{n-k+1}\frac{1}{(k-1)!}-C_n^{n-k-1}\frac{1}{k!}\right)x^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\left[C_n^{n-k}(n-k)-C_n^{n-k+1}(k+1)\right]=0.$$

7.9. a) Chứng minh công thức (1)

Theo tính chất truy hồi của hàm Bessel ta có

$$J_1'(x)=J_0(x)-\frac{1}{x}J_1(x).$$

Suy ra $$J_0(x)=J_1'(x)+\frac{1}{x}J_1(x)$$

Do đó

$$\int_0^x xJ_0(x)dx=\int_0^x xJ_1'(x)dx+\int_0^x J_1(x)dx.$$

Mà $$\int_0^x xJ_1'(x)\,dx = \int_0^x x\,dJ_1(x) = xJ_1(x) - \int_0^x J_1(x)\,dx$$

suy ra $$\int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Vậy $$\int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Đó là điều phải chứng minh.

b) Chứng minh công thức (2)

Theo tính chất truy hồi của hàm Bessel ta có

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x}J_1(x) \Rightarrow J_0(x) = J_1'(x) + \frac{1}{x}J_1(x), J_0'(x) = -J_1(x).$$

Đặt $I = \int_0^x x^3 J_0(x)\,dx$, suy ra

$$I = \int_0^x x^3 J_1'(x)\,dx + \int_0^x x^2 J_1(x)\,dx.$$

Do $\int_0^x x^3 J_1'(x)\,dx = \int_0^x x^3\,dJ_1(x) = x^3 J_1(x) - 3\int_0^x x^2 J_1(x)\,dx$ suy ra

$$I = x^3 J_1(x) - 2\int_0^x x^2 J_1(x)\,dx.$$

Ta có: $$\int_0^x x^2 J_1(x)\,dx = -\int_0^x x^2 J_0'(x)\,dx = -\int_0^x x^2\,dJ_0(x) = -x^2 J_0(x) + 2\int_0^x xJ_0(x)\,dx$$

$$\int_0^x xJ_0(x)\,dx = \int_0^x xJ_1'(x)\,dx + \int_0^x J_1(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Vậy $$I = x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x) = 2x^2 J_0(x) + \left(x^3 - 4x\right)J_1(x).$$

Cuối cùng ta thu được

$$\int_0^x x^3 J_0(x)\,dx = 2x^2 J_0(x) + \left(x^3 - 4x\right)J_1(x).$$

Đó là điều phải chứng minh.

7.10. a) Ta có $\psi(\rho, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2 - 2\rho x}} = \left(1+\rho^2 - 2\rho x\right)^{-\frac{1}{2}}$

suy ra

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}\left(1+\rho^2 - 2\rho x\right)^{-\frac{3}{2}}(2\rho - 2x) = \frac{\psi}{\left(1 - 2\rho x + \rho^2\right)}(x - \rho)$$

$$\Rightarrow \left(1 - 2\rho x + \rho^2\right)\psi_\rho - (x - \rho)\psi = 0.$$

b) Ta có $$\psi(\rho,x)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\left(1+\rho^2-2\rho x\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Lấy vi phân theo biến x ta được

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(1+\rho^2-2\rho x\right)^{-\frac{3}{2}}(-2\rho)=\frac{\psi\rho}{\left(1-2\rho x+\rho^2\right)},$$

suy ra $$\left(1-2\rho x+\rho^2\right)\psi_x-\rho\psi=0.$$

7.11. Chứng minh các công thức truy hồi của đa thức Legendre.

• Chứng minh công thức truy hồi thứ nhất:

Theo khai triển: $$\psi(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n;$$

$$\left(1-2\rho x+\rho^2\right)\psi_\rho-(x-\rho)\psi=0; \qquad (1)$$

$$\psi(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n.$$

Đạo hàm theo biến ρ ta được

$$\psi_\rho=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)n\rho^{n-1}.$$

Thay $n=n+1$ ta có

$$\psi_\rho=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n.$$

Thay vào phương trình (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n-\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)xP_{n+1}(x)\rho^{n+1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)\rho^n+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^{n+1}=0.$$

Thay $n+1=n$ vào số hạng thứ 2, $n+2=n$ vào số hạng thứ ba và $n+1=n$ vào số hạng thứ tư ta thu được

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n-\sum_{n=-1}^{\infty}2nxP_n(x)\rho^n+\sum_{n=-2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)\rho^n-\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)\rho^n+\sum_{n=-1}^{\infty}P_{n-1}(x)\rho^n=0;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n-\sum_{n=-1}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)\rho^n+\sum_{n=0}^{\infty}nP_{n-1}(x)\rho^n=0;$$

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \qquad (2)$$

Đồng nhất thức này là công thức truy hồi của ba đa thức liên tiếp.

Theo công thức

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right],$$

suy ra

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)=x;$$
$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$
$$\Rightarrow 2P_2(x)-3xP_1(x)+P_0(x)=0.$$

Vậy công thức tường minh của $P_2(x)$ là

$$P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right).$$

• Chứng minh công thức truy hồi thứ hai và ba.

Theo bài tập 7.10 ta có

$$\left\|\begin{array}{ll}\left(1-2\rho x+\rho^2\right)\psi_\rho-(x-\rho)\psi=0 & \times\rho\\ \left(1-2\rho x+\rho^2\right)\psi_x-\rho\psi=0 & \times(x-\rho)\\ \hline \rho\psi_\rho-(x-\rho)\psi_x=0 & \end{array}\right.$$

Mặt khác $\psi(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\rho^n$, do đó đạo hàm ψ theo biến x và ρ ta được:

$$\psi_x=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\rho^n\quad;\quad \psi_\rho=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\rho^{n-1}=\sum_{n=-1}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)\rho^n.$$

Thay vào phương trình $\rho\psi_\rho-(x-\rho)\psi_x=0$ ta có

$$\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\rho^n-x\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\rho^n+\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\rho^{n+1}=0.$$

Thay $n=n-1$ vào số hạng thứ hai của phương trình trên ta nhận được

$$\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)\rho^n-x\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)\rho^n+\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}'(x)\rho^n=0.$$

Suy ra $nP_n(x)-xP_n'(x)+P_{n-1}'(x)=0$, do đó

$$P_{n-1}'(x)=xP_n'(x)-nP_n(x) \tag{3}$$
$$\Rightarrow P_n'(x)-xP_{n-1}'(x)-nP_{n-1}(x)=0.$$

Theo công thức truy hồi đã chứng minh ở trên ta có

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

Đạo hàm 2 vế của công thức này ta được

$$(n+1)P_{n+1}'(x)-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)xP_n'(x)+nP_{n-1}'(x)=0.$$

Thay (3) vào ta được

$$(n+1)P_{n+1}'(x)-(2n+1)P_n(x)-(2n+1)xP_n'(x)+nxP_n'(x)-n^2P_n(x)=0$$
$$\Rightarrow (n+1)P_{n+1}'(x)-(n+1)^2P_n(x)-(n+1)xP_n'(x)=0$$
$$\Rightarrow P_{n+1}'(x)-(n+1)P_n(x)-xP_n'(x)=0.$$

Vậy $P_n'(x)-xP_{n-1}'(x)-nP_{n-1}(x)=0$. Đó là điều phải chứng minh.

Như vậy:

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP'_{n-1}(x);$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

7.12. Tìm phương trình vi phân để xác định $P_n(x)$.

Do hai phương trình đã chứng minh trong bài tập 7.11:

$$\begin{cases} P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x) \\ P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0 \end{cases}$$

suy ra

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

Mặt khác $P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x)$ nên

$$\left(1-x^2\right)P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

Do đó

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0\right];$$

$$\left[\left(1-x^2\right)P'_n(x)\right]' + nP_n(x) + nxP'_n(x) - nP'_{n-1}(x) = 0.$$

Vì $P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x)$ nên thay vào phương trình ta được

$$\left[\left(1-x^2\right)P'_n(x)\right]' + nP_n(x) + nxP'_n(x) - nxP'_n(x) + n^2P_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\left(1-x^2\right)P'_n(x)\right]' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Công thức trên khẳng định đa thức $P_n(x)$ là nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Abramowitz M. and Stegun I.S. (1972), *Handbook of Mathematical Functions*, 10th edition, New York: Dover Publications.
2. Arfken G. (1985), *Mathematical Methods for Physics*, 3rd edition, Academic Press.
3. Đỗ Đình Thanh (1996), *Phương pháp toán lý*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
4. Haberman R. (1987), *Elementary Applied Partial Differential Equations*, Prentice-Hall.
5. Heckbert P. (2000), *Partial Differential Equations*, Computer Science Department, Carnegie Mellon University.
6. Nguyễn Đình Trí và Nguyễn Trọng Thái (1971), *Phương trình vật lý – toán*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội.
7. Nguyễn Tú Uyên (1997), *Phương trình toán lý*, Khoa Vật lý, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG Hà Nội.
8. Snieder R. (1994), *A Guided Tour of Mathematical Physics*, Utrecht University.
9. Trodden M. (1999), *Methods of Mathematical Physics*, Lecture Notes, Department of Physics, Case Western Reserve University.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Chịu trách nhiệm nội dung :
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH – DN
TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
HOÀNG MẠNH DỨA

Chế bản :
QUANG CHÍNH

PHƯƠNG TRÌNH TOÁN LÝ
Mã số : 7K677M6 – DAI
In 1.500 bản, khổ 16 x 24cm. Tại Nhà in Hà Nam
Số 29 - QL 1A - P. Quang Trung - TX. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 373. Số xuất bản: 155-2006/CXB/7-250/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2006.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH
DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC VỀ VẬT LÝ
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1.	**Giáo trình cơ học**	*Bạch Thành Công*
2.	**Vật lý kỹ thuật**	*Đặng Hùng*
3.	**Vật lý siêu dẫn và ứng dụng**	*Nguyễn Huy Sinh*
4.	**Vô tuyến điện tử**	*Ngạc Văn An*
5.	**Tuyển tập các bài tập Vật lý đại cương (tập 1, 2)**	*Nguyễn Văn Hậu* *Ngô Quốc Quýnh*

Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ty Sách – Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh; 62 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1 ;
Cửa hàng 451B 453, Hai Bà Trưng, Quận 3 ;
240 Trần Bình Trọng, Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4.

Website : www.nxbgd.com.vn

8 934980 693100

phương trình toán lý
1 006110 200360
36.500 VNĐ

Giá: 36.500đ