GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU

THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

GS. TSKH. VÕ NHƯ CẦU

TÍNH KẾT CẤU
THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

- NỘI DUNG TRÌNH BÀY RÕ RÀNG, DỄ HIỂU.
- LÝ THUYẾT ĐƯỢC MINH HOẠ BẰNG NHIỀU VÍ DỤ.
- NHIỀU BÀI TẬP KÈM ĐÁP ÁN, THUẬN TIỆN CHO NGƯỜI TỰ HỌC.
- CÓ MỘT SỐ CHƯƠNG TRÌNH SOẠN THEO NGÔN NGỮ TURBO- PASCAL 7.0.
- SÁCH DÙNG CHO SINH VIÊN ĐẠI HỌC, SINH VIÊN CAO HỌC, NGHIÊN CỨU SINH, CÁN BỘ GIẢNG DẠY, KỸ SƯ THUỘC CÁC NGÀNH: XÂY DỰNG; CƠ KHÍ...

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2005

LỜI MỞ ĐẦU

Trong vòng nửa thế kỷ nay, lý thuyết phần tử hữu hạn đã được ứng dụng vào lĩnh vực tính kết cấu trong nhiều ngành KHKT như chế tạo hàng không, chế tạo cơ khí, xây dựng v.v... Nó đã tỏ ra có hiệu lực trong quá trình giải nhiều bài toán cơ học mà riêng lý thuyết đàn hồi không thể giải được.

Cuốn sách này nhằm mục đích trang bị cho sinh viên, cán bộ giảng dạy, kỹ sư, nghiên cứu sinh thuộc các ngành xây dựng, chế tạo cơ khí... những khái niệm cơ bản về lý thuyết phần tử hữu hạn. Sách trình bày theo quan điểm thực dụng, nghĩa là lý thuyết được minh họa bằng nhiều ví dụ cụ thể để bạn đọc dễ tiếp thu. Hơn nữa, có nhiều nguyên lý nhưng tác giả chỉ chọn những nguyên lý dễ hiểu nhất và không đi sâu chứng minh về mặt toán học. Để hiểu được nội dung sách, bạn đọc nên tham khảo các tài liệu (11) và (12) để nắm được các khái niệm về đại số ma trận.

Cuối sách có các bài tập kèm đáp án mang tính chất lý thuyết để rèn luyện kỹ năng tính toán của người học. Ngoài ra, còn có các chương trình tính theo ngôn ngữ Turbo Pascal 7.0. Sở dĩ tác giả chọn ngôn ngữ này vì nó gần với cách nói của con người, dễ hiểu, hơn nữa đang được giảng dạy tại các trường đại học.

Nội dung sách gồm có:

Chương một - Khái niệm và nguyên lý cơ bản trong lý thuyết phần tử hữu hạn;

Chương hai - Tính chất của các phần tử hữu hạn;

Chương ba - Bài toán một chiều;

Chương bốn - Hệ giàn;

Chương năm - Bài toán hai chiều dùng tam giác biến dạng không đổi;

Chương sáu - Vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng;

Chương bảy - Phần tử hữu hạn cùng tham số hai chiều - Phương pháp tích phân bằng số;

Chương tám - Dầm hai chiều và khung phẳng;

Chương chín - Hệ dầm trực giao.

Chương mười - Dầm ba chiều và khung không gian;

Chương mười một - Bài toán ba chiều;

Chương mười hai - Bài toán dao động;

Do những nguyên nhân chủ quan và khách quan nên, không tránh được thiếu sót, mong bạn đọc phê bình và góp ý.

Cuối cùng, tác giả chân thành cảm ơn Ban biên tập Nhà xuất bản Xây dựng đã tham gia biên tập và cho xuất bản sách. Đặc biệt, tác giả tỏ lòng cảm ơn biên tập viên Trần Cường đã hết lòng giúp đỡ và cổ vũ để hoàn thành tốt việc biên soạn sách.

Tác giả

Chương 1

KHÁI NIỆM VÀ NGUYÊN LÝ CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chương này trình bày một số khái niệm và nguyên lý làm cơ sở cho lý thuyết phần tử hữu hạn. Trước hết, ta hãy tìm hiểu nội dung khái quát của phương pháp phần tử hữu hạn.

§1.1.KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Phương pháp phần tử hữu hạn là một công cụ có hiệu lực để giải các bài toán cơ học trong nhiều lĩnh lực: Xây dựng, Cơ khí v.v... Nó có thể áp dụng vào bất cứ một hệ nào, từ hệ đơn giản như thanh đến hệ phức tạp như bản, vỏ.

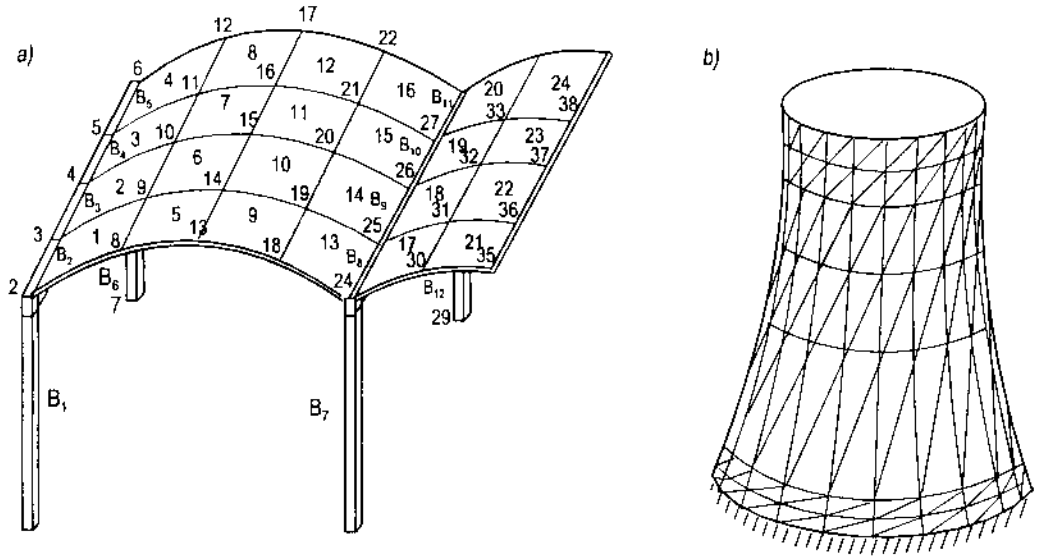
Từ năm 1955, Argyris (1) nêu lên các định lý về năng lượng và phương pháp ma trận, đặt nền tảng cho sự phát triển về sau của phương pháp phần tử hữu hạn. Cuốn sách đầu tiên về phương pháp phần tử hữu hạn được Zienkiewicz (2) và Chung xuất bản vào năm 1967. Về sau, phương pháp đã được áp dụng vào các bài toán phi tuyến và bài toán biến dạng lớn.

Thực chất của phương pháp phần tử hữu hạn là chia vật thể biến dạng thành nhiều phần tử có kích thước hữu hạn gọi là *phần tử hữu hạn*. Các phần tử này được liên kết với nhau bằng các điểm gọi là *nút* hoặc *điểm nút* (hình 1.1).

Các đặc trưng của các phần tử hữu hạn được phối hợp với nhau để đưa đến một lời giải tổng thể cho toàn hệ. Chẳng hạn trong phương pháp chuyển vị, các *hàm hình dạng* được chọn để biểu thị sự biến thiên của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn theo các thành phần chuyển vị tại các điểm nút. Ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn cũng được biểu thị qua các thành phần chuyển vị tại các nút. Một số nguyên lý cơ bản như nguyên lý công ảo, nguyên lý thế năng bé nhất được áp dụng để thành lập hệ phương trình cân bằng cho mỗi phần tử hữu hạn.

Phương trình cân bằng của toàn hệ kết cấu được suy ra bằng cách phối hợp các phương trình cân bằng của các phần tử hữu hạn riêng rẽ sao cho vẫn bảo đảm được tính liên tục của toàn bộ kết cấu.

Cuối cùng, căn cứ vào các điều kiện biên, giải hệ phương trình cân bằng tổng thể để xác định giá trị của các thành phần chuyển vị. Các thành phần này sẽ được dùng để tính ứng suất và biến dạng.

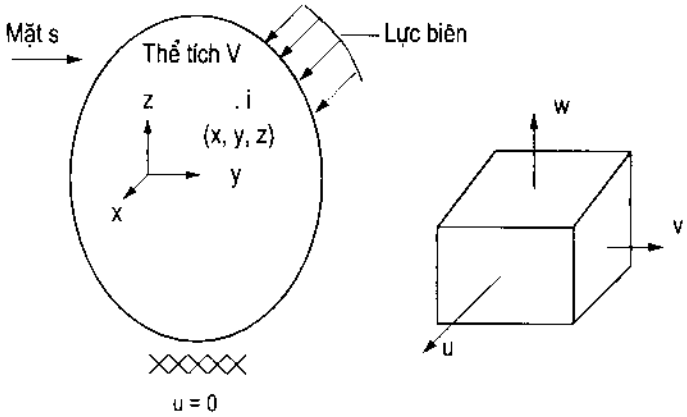


Hình 1.1: *a) Mô hình phần tử hữu hạn mái cong*
b) Mô hình phần tử hữu hạn tháp làm lạnh

§1.2. CÁC ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG

Một vật thể biến dạng 3 chiều có thể tích V và mặt S biểu thị như trên hình (1.2). Một điểm trong vật thể có các toạ độ x, y, z. Trên biên của nó, có lực T tác dụng trên đơn vị diện tích gọi là lực biên. Dưới tác dụng của các lực, vật biến dạng các thành phần chuyển vị tại điểm có toạ độ x, y, z biểu thị bằng véc tơ chuyển vị:

$$\mathbf{U} = [u \quad v \quad w]'^{*} \tag{1.1}$$



Hình 1.2

---

* Trong cuốn sách này, nhất quán sử dụng [ ]' là ma trận chuyển vị.

Lực thể tích (do trọng lượng) phân bố trên đơn vị thể tích và được biểu thị bằng vectơ:

$$\mathbf{f} = [f_x\ f_y\ f_z)]' \tag{1.2}$$

Trong (1.1) và (1.2):

u - thành phần chuyển vị trên phương trục x.

v - thành phần chuyển vị trên phương trục y.

w - thành phần chuyển vị trên phương trục z.

f_x - lực thể tích trên phương trục x.

f_y - lực thể tích trên phương trục y.

f_z - lực thể tích trên phương trục z.

Các thành phần *lực biên* được biểu thị bằng vectơ.

$$\mathbf{T} = [T_x\ T_y\ T_z\ ]' \tag{1.3}$$

Trong đó: T_x - lực biên trên phương trục x;

T_y - lực biên trên phương trục y;

T_z - lực biên trên phương trục z.

Lực tiếp xúc, áp lực tác dụng trên bề mặt, lực ma sát là một số thí dụ về lực biên.

Tải trọng P tác dụng tại điểm i được biểu thị bằng vectơ:

$$\mathbf{P_i} = [P_x\ P_y\ P_z)]' \tag{1.4}$$

Trong đó:

P_x - lực P trên phương trục x;

P_y - lực P trên phương trục y;

P_z - lực P trên phương trục z.

Các thành phần ứng suất biểu thị trên hình (1.3) .

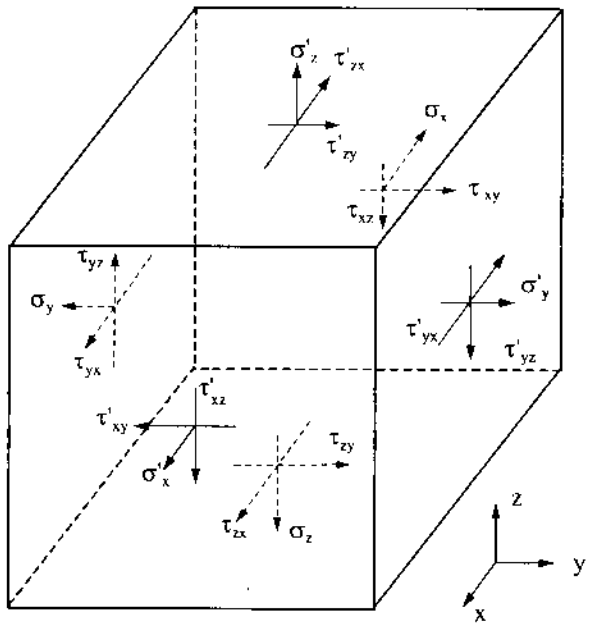
$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx \qquad \tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx \qquad \sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$$

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy \qquad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz; \qquad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz$$



Hình 1.3. *Phân tố thể tích dV ở thế cân bằng*

Các thành phần ứng suất được biểu thị bằng vectơ:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \left[\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{yz} \tau_{xz} \tau_{xy}\right] \tag{1.5}$$

Trong đó: σ_x, σ_y, σ_z là các thành phần ứng suất pháp trên các phương x, y, z; τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy} là các thành phần ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp chỉ có hai chỉ số: chỉ số thứ nhất biểu thị phương pháp tuyến của mặt tác dụng, chỉ số thứ 2 biểu thị phương của ứng suất tiếp. Chẳng hạn τ_{xy} là ứng suất tiếp tác dụng trên mặt có phương pháp tuyến là x và phương của nó là y.

Lực tác dụng trên mặt của phân tố bằng ứng suất nhân với diện tích của mặt tương ứng. Thể tích của phân tố $d_v = d_x d_y d_z$. Lần lượt lập các phương trình hình chiếu trên phương các trục z, y, z, ta được các điều kiện cân bằng như sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Lần lượt lập các phương trình mô men đối với các trục x, y, z, ta được:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx} \tag{1.7}$$

§1.3. CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Trên hình (1.2), ta có điều kiện biên:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

Cũng có thể có điều kiện biên khác, chẳng hạn như **u** = **a**; u là véc tơ chuyển vị.

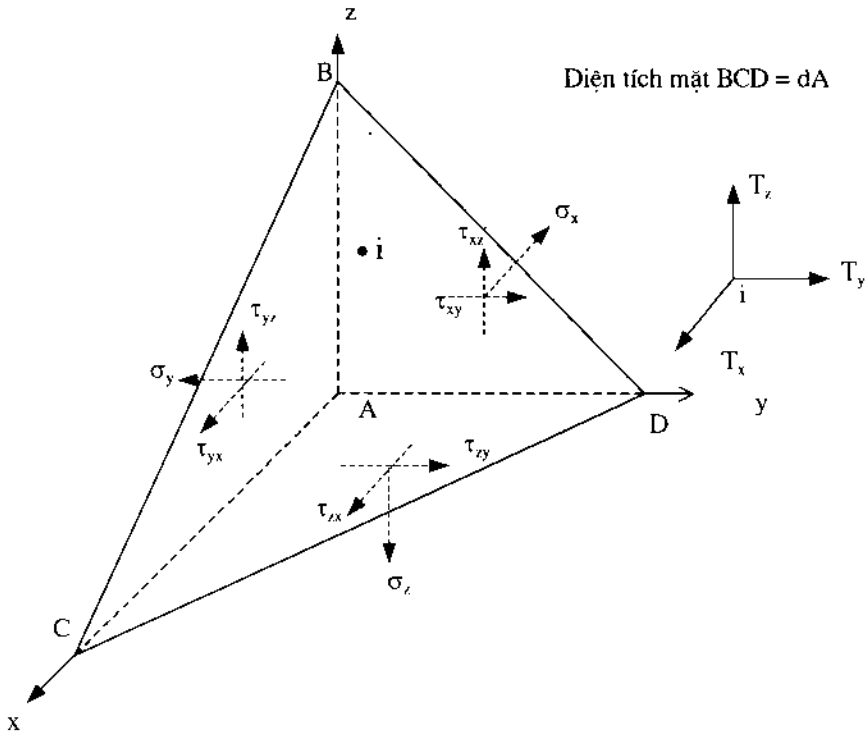
Bây giờ ta hãy xét phân tố thể tích 4 mặt ABCD như trên hình (1.4). Các cạnh AC, AD, AB song song với các trục x, y, z. Diện tích của mặt BCD bằng dA.

Nếu n_x, n_y, n_z là các thành phần pháp tuyến đơn vị của mặt dA (tức mặt BCD), diện tích của mặt ABD bằng $n_x dA$, diện tích của mặt ABC bằng $n_y dA$, diện tích của mặt ACD bằng $n_z dA$. Căn cứ vào các điều kiện cân bằng trên các trục x, y, z, ta có các điều kiện biên:

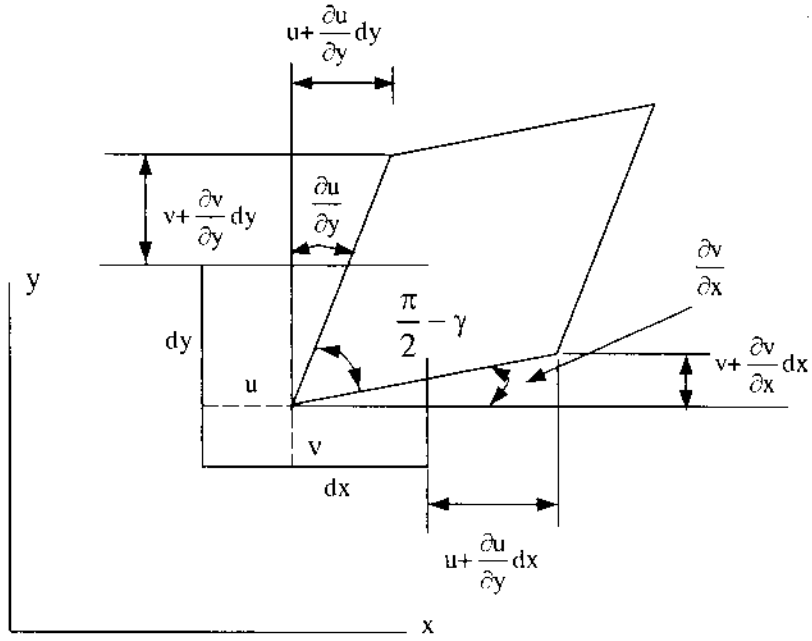
$$\begin{aligned}
&\sigma_z n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = T_x \\
&\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = T_y \\
&\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = T_z
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Các điều kiện trên phải được thỏa mãn trên bề mặt của hình (1.2).

Tải trọng tác dụng tại một điểm được xem như tác dụng trên một diện tích vô cùng bé.



Hình 1.4. *Phân tố thể tích trên bề mặt*



Hình 1.5. *Mặt biến dạng của phân tố (trong mặt phẳng xoy)*

§1.4. HỆ THỨC BIẾN DẠNG - CHUYỂN VỊ

Các thành phần biến dạng ứng với phương trình (1.5) được biểu thị bằng véc tơ:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{1.10}$$

Trong đó: ε_x, ε_y, ε_z là các thành phần biến dạng trên các phương x, y, z; γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{xy} là các ứng suất tiếp đã được định nghĩa trong phần trước.

Hình (1.5) biểu thị biến dạng của mặt dx - dy trong điều kiện biến dạng bé.

Nếu xét đồng thời các mặt khác, ta có véc tơ biến dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

Hệ thức trên gọi là hệ thức biến dạng - chuyển vị.

Cần chú ý rằng hệ thức này có hiệu lực khi biến dạng bé.

§1.5. HỆ THỨC ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, hệ thức ứng suất - biến dạng được suy ra từ định luật Húc tổng quát. Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, có hai đặc trưng vật liệu là mô đun đàn hồi E và hệ số Poatxong. Định luật Húc cho ta các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \nu\frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\ ;\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}\ ;\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{1.13}$$

Trong đó, mô đun trượt:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.14}$$

Từ (1.12) ta có:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) \tag{1.15}$$

Lần lượt thay $(\sigma_y + \sigma_z)$, $(\sigma_z + \sigma_x)$, $(\sigma_x + \sigma_y)$ vào (1.12), ta được hệ thức nghịch đảo:

$$\sigma = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.16}$$

Trong đó **D** là ma trận cấp 6 × 6.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

D gọi là *ma trận cấu trúc vật liệu* vì nó phụ thuộc vào tính chất của vật liệu (đồng tính hoặc dị tính trên các phương khác nhau).

Từ các hệ thức tổng quát trên, ta có thể suy ra một số trường hợp đặc biệt như sau:

1. Trường hợp một chiều

Trong trường hợp này, ta chỉ có ứng suất pháp σ và biến dạng ε tác dụng trên phương x. Hệ thức (1.16 biến thành).

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.18)$$

2. Trường hợp 2 chiều

a. Ứng suất phẳng

Một vật phẳng và mỏng chịu tải trọng tác dụng trong mặt phẳng (hình 1.6a) có ứng suất phẳng phân bố trong mặt phẳng. Nghĩa là σ_z, τ_{xz}, τ_{yz} đều triệt tiêu.

Căn cứ vào định luật Húc, ta có các hệ thức:

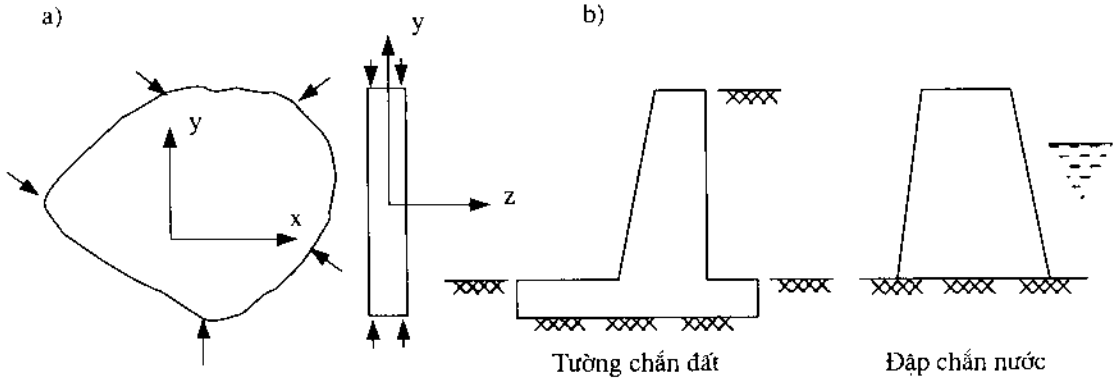
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}.\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hệ thức nghịch đảo của (1.19) là:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.20a)$$



Hình 1.6. *a) Ứng suất phẳng; b) Biến dạng phẳng.*

Các thành phần biến dạng cũng có thể biểu thị bằng các thành phần ứng suất:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\upsilon) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

b. Biến dạng phẳng

Trường hợp này xuất hiện khi vật thể dài và có kích thước, hình dạng, tải trọng không đổi trên phương dọc. Tường chắn đất, đập chắn nước (hình 1.6b) là những kết cấu như vậy. Nếu ta xét một mặt cắt ngang bất kỳ, có thể giả thiết rằng chuyển vị dọc trục w = 0 còn các chuyển vị u và v chỉ là những hàm của x, y không phụ thuộc vào z. Có nghĩa là:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \tag{1.22}$$

Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & \upsilon & 0 \\ \upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\upsilon)}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

Đồng thời, ta có các hệ thức:

$$\sigma_z = \upsilon(\sigma_x + \sigma_y) \tag{1.24a}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \tag{1.24b}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \begin{bmatrix} (1-\upsilon) & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & (1-\upsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

Trong đó, **D** là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 3 x 3. Như trong phần đầu đã trình bày, để thiết lập được hệ phương trình cân bằng cho mỗi phần tử hữu hạn, cần phải vận dụng một số nguyên lý cơ bản sau đây.

§1.6. NGUYÊN LÝ THẾ NĂNG CỰC TIỂU

Ta định nghĩa thế năng toàn phần của một vật thể đàn hồi là tổng của năng lượng biến dạng toàn phần và công của ngoại lực và nội lực.

TNT = U (năng lượng biến dạng) + W (công ngoại lực và nội lực)

Đối với vật liệu đàn hồi tuyến tính, năng lượng biến dạng của vật rắn trên hình (1.2) là:

$$U = \frac{1}{2}\int_v \boldsymbol{\sigma}'\varepsilon dv \tag{1.26}$$

Công của nội lực và ngoại lực là (hình 1.2)

$$W = -\int_v \mathbf{u}'\mathbf{f}dv - \int_v \mathbf{u}'\mathbf{T}ds - \sum u_i' P_i \tag{1.27}$$

Vậy thế năng toàn phần của vật thể đàn hồi (hình 1.2) là:

$$TNT = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}'\varepsilon dV - \int_V \mathbf{u}'\mathbf{f}dv - \int_s \mathbf{u}'\mathbf{T}d_s - \sum u_i' P_i \tag{1.28}$$

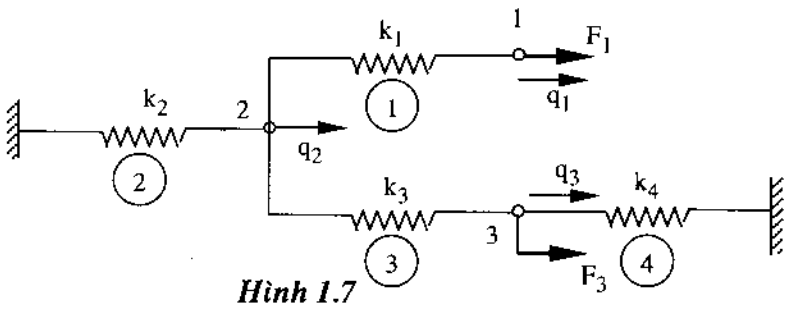
Các ký hiệu **σ, ε, u, f, T, P** đã được định nghĩa trong phần trước. Ở đây, ta chỉ nghiên cứu các hệ bảo toàn trong đó công của ngoại lực không phụ thuộc vào đường đi. Nói một cách khác, nếu hệ chuyển dời từ một điểm nào đó rồi quay về điểm đó thì công của ngoại lực triệt tiêu, dù cho đường đi như thế nào.

Nguyên lý thế năng cực tiểu phát biểu như sau:

Đối với hệ bảo toàn, trong mọi trường chuyển vị cho phép về mặt động học, chỉ có trường chuyển vị làm cho thế năng toàn phần có giá trị cực tiểu mới thỏa mãn được điều kiện cân bằng ổn định của hệ.

Chuyển vị cho phép về mặt động học là chuyển vị thỏa mãn tính chất đơn trị của nó và các điều kiện biên.

Để minh họa nguyên lý trên, ta hãy nghiên cứu ví dụ sau:



Hình 1.7

Ví dụ 1.1: Cho một hệ thống lò xo như trên hình (1.7). Thế năng toàn phần của hệ có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}k_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\delta_2^2 + \frac{1}{2}k_3\delta_3^2 + \frac{1}{2}k_4\delta_4^2 - F_1q_1 - F_3q_3$$

Trong đó:

δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 là độ giãn của 4 lò xo; k_1, k_2, k_3, k_4 là các độ cứng tương ứng; q_1, q_2, q_3 là các chuyển vị.

Vì $\delta_1 = q_1 - q_2$, $\delta_2 = q_2$, $\delta_3 = q_3 - q_2$, $\delta_4 = -q_3$ nên

$$TNT = \frac{1}{2}k_1(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_2q_2^2 + \frac{1}{2}k_3(q_3 - q_2)^2 + \frac{1}{2}k_4q_3^2 - F_1q_1 - F_3q_3$$

Để hệ cân bằng ổn định, ta cần cực tiểu hóa thế năng toàn phần nghĩa là phải triệt tiêu đạo hàm của nó đối với các chuyển vị q_i:

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.29}$$

Sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_1} = k_1(q_1 - q_2) - F_1 = 0$$

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_2} = -k_1(q_1 - q_2) + k_2q_2 - k_3(q_3 - q_2) = 0$$

$$\frac{\partial TNT}{\partial q_3} = k_3(q_3 - q_2) + k_4q_3 - F_3 = 0$$

Các phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận:

Kq = F hay

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

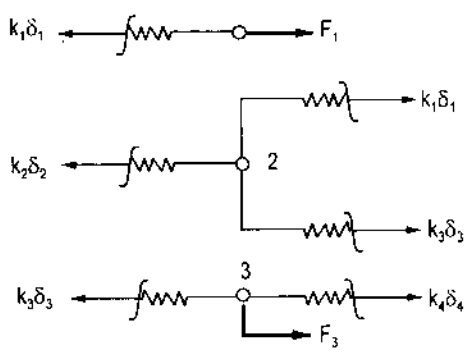
Ta cũng có thể cắt rời các lò xo (hình 1.8) để lập các phương trình cân bằng:

$$k_1\delta_1 = F_1$$

$$k_2\delta_2 - k_1\delta_1 - k_3\delta_3 = 0$$

$$k_3\delta_3 - k_4\delta_4 = F_3$$

Kết quả trên hoàn toàn giống với kết quả khi vận dụng nguyên lý thế năng cực tiểu.



Hình 1.8

§1.7. NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO

Ta đã biết rằng công là tích của lực nhân với chuyển dời tương ứng:

$$W = P.\,r$$

Khi chuyển dời r không phải do lực P gây ra, ta gọi W là công ảo và r gọi là chuyển vị ảo.

Dưới đây, trình bày nguyên lý về công ảo.

Đối với kết cấu hai chiều, công ảo của ngoại lực có thể viết:

$$\delta W_c = \iint f_x\delta_u + f_y\delta_v)d_x d_y + \int\left(T_x\delta_u + T_y\delta_v\right)d_s \qquad (1.31)$$

Công ảo của nội lực có thể viết:

$$\delta U = \iint\left(\sigma_x\delta_{\varepsilon x} + \sigma_y\delta_{\varepsilon y} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\right)\ d_x d_y$$

f_x, f_y , f_z - lực thể tích; T_x, T_y - lực biên

δ_u, δ_v - chuyển vị ảo trên phương x và y

$\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, $\delta\gamma_{xy}$ - biến dạng ảo

Đối với kết cấu 3 chiều, ta có:

$$\delta W_c = \iiint\left(f_x\delta_u + f_y\delta_v + f_z\delta_w\right)dV + \iint_s\left(T_x\delta_u + T_y\delta_v + T_z\delta_w\right)ds \qquad (1.33)$$

$$\delta U = \iiint\left(\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}\right)dV \qquad (1.34)$$

Dưới dạng ma trận, các hệ thức trên có thể viết:

$$\delta We = \iiint\boldsymbol{\delta}'_u.\mathbf{f}.dv + \iint_s\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{u}}.\mathbf{T}.ds \qquad (1.35)$$

Trong đó: $\delta'_u = [\delta_u\ \delta_v\ \delta_w]$; $\mathbf{f}' = [\ f_x\ f_y\ f_z]$

$$\mathbf{T}' = [T_x\ T_y\ T_z\ ] \qquad (1.36)$$

$$\delta U = \iiint\ \boldsymbol{\delta}'_{\boldsymbol{\varepsilon}}.\sigma\ dV \qquad (1.37)$$

Cần chú ý rằng chuyển vị ảo và biến dạng ảo là những đại lượng có giá trị bất kỳ.

Nguyên lý công ảo phát biểu như sau:

Để một vật thể biến dạng ở thế cân bằng, công ảo của ngoại lực phải bằng công ảo của nội lực.

Nghĩa là hệ thức sau đây phải được thỏa mãn.

$$\delta W_c = \delta U \qquad (1.38)$$

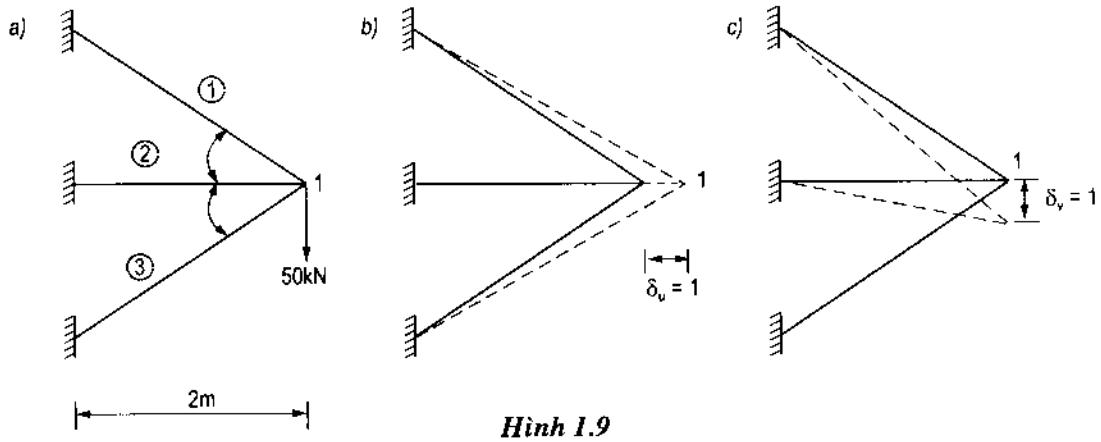
Trong trường hợp tổng quát (hệ 3 chiều), δW_c tính theo (1.35) và δU tính theo (1.37).

Trong các chương sau, nguyên lý công ảo sẽ được áp dụng để suy ra biểu thức ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn.

Sau đây là một thí dụ nhằm minh họa nguyên lý trên.

Ví dụ 1.2:

Cho một kết cấu giàn với kích thước và tải trọng biểu thị trên hình (1.9).



Hình 1.9

Vận dụng nguyên lý công ảo để tính các chuyển vị u, v tại nút 1, ứng suất và biến dạng trong thanh giàn.

Giải:

Với các thành phần chuyển vị thực tế u và v, biến dạng trong các thanh giàn 1,2,3 có thể viết:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{u\cos 45^0 + v\sin 45^0}{2\sqrt{2}} = \frac{u+v}{4} \\ \varepsilon_2 &= u/2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{u\cos 45^0 - u\sin 45^0}{2\sqrt{2}} = \frac{u-v}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Với chuyển vị ảo $\delta_u = 1$, các biến dạng ảo trong (a) trở thành:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon_1' &= 1/4 \\ \delta\varepsilon_2' &= 1/2 \\ \delta\varepsilon_3' &= 1/4 \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

Công ảo của nội lực trong một thanh giàn

$$= \iiint \sigma_x . \sigma_\varepsilon . dV$$

$$= E.\ A.\ L.\ \varepsilon\ .\ \delta'_\varepsilon$$

Kết hợp 2 hệ phương trình (a) và (b), ta có tổng công ảo của nội lực do chuyển vị ảo $\delta_u = 1$ gây ra bằng:

$$\delta U = E.A.2\sqrt{2}\frac{(u+v)}{4}\frac{1}{4} + EA2\frac{u}{2}.\frac{1}{2} + EA2\sqrt{2}\frac{(u-v)}{4}\frac{1}{4}$$

$$= EAu\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right\} + EAu\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right\}$$

$$= EAu\left\{\frac{2\sqrt{2}+4}{8}\right\}$$

Công ảo của ngoại lực: $\delta W_c = 0 \times 1$

Theo (1.38) :

$$\delta W_c = \delta U$$

$$EAu\left\{\frac{2\sqrt{2}+4}{8}\right\} = 0 \text{ do đó } u = 0 \qquad (c)$$

Với chuyển vị ảo $\delta v = 1$, tính toán tương tự như trên, ta có:

$$\delta\varepsilon_1' = \frac{1}{4}$$

$$\delta\varepsilon_1' = 0$$

$$\delta\varepsilon_1' = -\frac{1}{4}$$

Tổng cộng ảo của nội lực do chuyển vị ảo $\delta_v = 1$:

$$\delta U = EA\ 2\sqrt{2}\left(\frac{u+v}{4}\right).\frac{1}{4} + EA\ \ 2\sqrt{2}\ \left(\frac{u-v}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Thay u = 0: $\delta U = EA.v\left\{\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right\} = \frac{EA\ \ v\ \ \sqrt{2}}{4}$

Công ảo của ngoại lực: $\delta W_c = 50 \times 1$

Vì $\delta W_c = \delta U$, ta được :

$$EA\ v\ \frac{\sqrt{2}}{4} = 50, \text{ do đó } v = \frac{200}{\sqrt{2}\ \ AE} \qquad (d)$$

Cuối cùng, ta được: $u = 0$ và $v = \frac{200}{\sqrt{2}AE}$

Thay các giá trị trên vào (a), ta được biến dạng trong các thanh giàn:

$$\varepsilon_1 = \frac{50}{\sqrt{2}AE}$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{50}{\sqrt{2}.A.E}$$

Lực dọc trong các thanh giàn:

$$F_1 = AE\,\frac{50}{\sqrt{2}AE} = 25\sqrt{2}\ \text{kN (kéo)}$$

$$F_2 = 0$$

$$F_3 = -\,25\,\sqrt{2}\ \text{kN (nén)}$$

§1.8. NGUYÊN LÝ BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG

Nguyên lý bảo toàn năng lượng phát biểu như sau:

Để một vật thể biến dạng ở thể cân bằng đàn hồi, công của ngoại lực W_{ng} phải bằng công của nội lực W_n.

$$W_{ng} = W_n \tag{1.39}$$

Nguyên lý này được áp dụng cho hệ thanh (giàn, khung) để suy ra ma trận độ cứng tổng thể của toàn bộ kết cấu.

Trong hệ tọa độ chung, phương trình cân bằng của toàn bộ kết cấu có dạng:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}.\,\mathbf{Q} \tag{1.40}$$

Trong đó: **F** - vectơ tải trọng;

Q - véc tơ chuyển vị;

K - ma trận độ cứng tổng thể.

Trong hệ tọa độ riêng, hệ thức giữa véc tơ nội lực S và véc tơ chuyển vị q có dạng:

$$\mathbf{S} = \mathbf{k_e}.\mathbf{q} \tag{1.41}$$

Trong đó: $\mathbf{k_e}$ là ma trận độ cứng riêng.

Vì có hệ toạ độ riêng và hệ toạ độ chung, ta chuyển đổi vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ riêng thành vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung qua hệ thức:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}.\,\mathbf{Q} \tag{1.42}$$

R gọi là ma trận xoay

Theo (1.39), ta có: $\frac{1}{2}\mathbf{Q'F} = \frac{1}{2}\mathbf{q'S}$

Theo (1.40), (1.41) và (1.42):

$$\mathbf{Q'KQ} = \mathbf{Q'R'S} = \mathbf{Q'R'.k_e.q} = \mathbf{Q'R'k_eR\,Q}$$

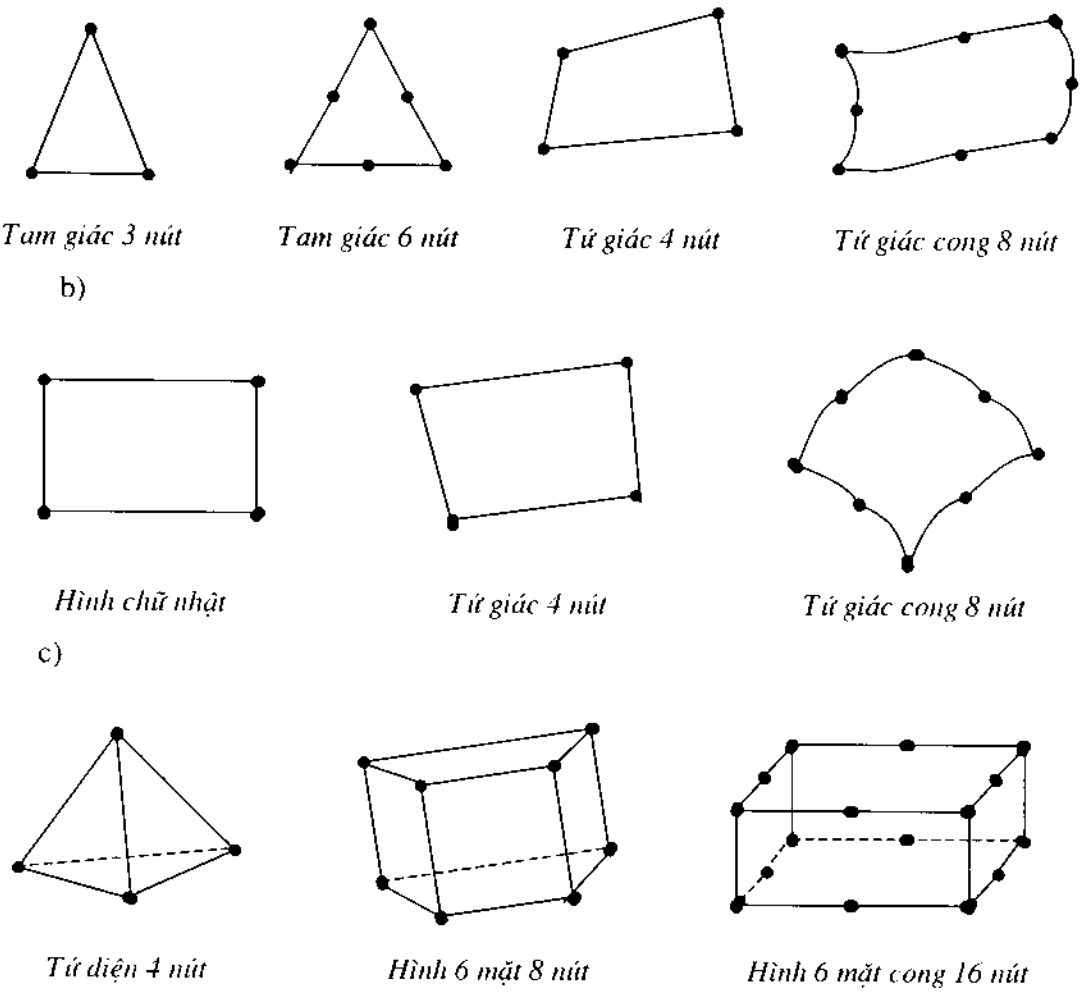
Vậy: $$\mathbf{K} = \mathbf{R'.\,k_e\,.\,R} \tag{1.43}$$

Công thức ma trận độ cứng tổng thể **K** ở trên sẽ được áp dụng cho hệ giàn và hệ khung.

Chương 2

TÍNH CHẤT CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Như trong chương 1 đã trình bày, phần tử hữu hạn là một mô hình quan trọng để tính ứng suất và biến dạng trong kết cấu. Chương này tập trung giới thiệu một số phần tử hữu hạn cùng với tính chất của chúng. Các khái niệm về hàm hình dạng, ứng suất và biến dạng trong phần tử hữu hạn, ma trận độ cứng sẽ được đề cập một cách khái quát.



Hình 2.1. *Một số phần tử hữu hạn có tính chất tiêu biểu.*

Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1a) áp dụng cho bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng.

Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1b) áp dụng cho bản chịu uốn và vỏ.

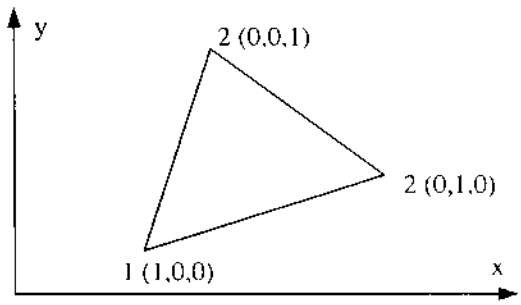
Các phần tử hữu hạn trên hình (2.1c) áp dụng cho bài toán ứng suất 3 chiều.

Phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên giả thiết phân tích sự biến thiên của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn. Một mô hình phân tích như vậy gọi là *mô hình chuyển vị*.

§2.1. MÔ HÌNH CHUYỂN VỊ

Bước đầu tiên là dùng các hàm thích hợp để biểu thị sự biến thiên gần đúng của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn. Thông thường, các hàm đó có dạng đa thức mà ta sẽ nghiên cứu trong phần sau.

Giả sử phần tử hữu hạn có hình tam giác như trên hình (2.2)



Hình 2.2. *Phần tử hữu hạn tam giác*

Sự biến thiên của các thành phần chuyển vị u (trên phương trục x) và v (trên phương trục y) có thể biểu thị bằng các hàm sau:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \tag{2.1}$$

Trong đó: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ là các hệ số chưa biết mà ta gọi là *tọa độ khái quát*. Biểu thị (2.1) dưới dạng ma trận, ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.2a}$$

hoặc: $$\mathbf{U} = \boldsymbol{\phi}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.2b}$$

Nói chung, nếu đa thức có bậc n, các thành phần chuyển vị trong một phần tử hữu hạn 2 chiều có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + ... + \alpha_m y^n \\ v &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+3} y + \alpha_{m+4} . x^2 + \alpha_{m+5} xy + \alpha_{m+6} y^2 + ... + \alpha_{2m} y^n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Viết các phương trình dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2' & 0' \\ 0' & \phi_2' \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u} = \phi' \alpha$$

$$\phi_2' = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots & y^n \end{bmatrix} \tag{2.4a}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \cdots & \alpha_{2m} \end{bmatrix} \tag{2.4b}$$

Trong trường hợp phần tử hữu hạn 3 chiều, các hàm chuyển vị có dạng:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xz + \ldots + \alpha_m z^n \\ v &= \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} x + \alpha_{m+s3} y + \ldots + \alpha_{2m} z^n \\ w &= \alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2} x + \alpha_{2m+s3} y + \ldots + \alpha_{3m} z^n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_3' & 0' & 0' \\ 0' & \phi_3' & 0' \\ 0' & 0' & \phi_3' \end{bmatrix} . \boldsymbol{\alpha}$$

hay $$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Phi}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.6}$$

Trong đó: $$\phi_3' = \begin{bmatrix} 1 & x & y & \dots\dots & z & xz & \dots\dots & z^n \end{bmatrix}$$

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_{3m} \end{bmatrix} \tag{2.6a}$$

§2.2. HỆ THỨC GIỮA BẬC TỰ DO CỦA CÁC NÚT VÀ CÁC TỌA ĐỘ KHÁI QUÁT

Các hệ số chưa biết α trong các đa thức có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn, ta gọi các thành phần chuyển vị này là các *bậc tự do* tại các nút. Lấy ví dụ phần tử hữu hạn có hình tam giác trên hình (2.2). Thay tọa độ của các nút vào phương trình (2.2), ta có:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

hoặc: $$\mathbf{q} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.8}$$

Trong đó: x_1, y_1: tọa độ của nút 1 trên phương x và y;
x_2, y_2: tọa độ của nút 2 trên phương x và y.

x_3, y_3: tọa độ của nút 3 trên phương x và y.

u_1, v_1: các thành phân chuyển vị của nút 1 trên phương x và y.

u_2, v_2: các thành phân chuyển vị của nút 2 trên phương x và y.

u_3, v_3: các thành phân chuyển vị của nút 3 trên phương x và y.

Phương trình trên biểu thị mối quan hệ giữa các bậc tự do tại các nút và các tọa độ khái quát. Ta tính các phần tử của ma trận **A** bằng cách thay tọa độ của các nút của phần tử hữu hạn vào hàm chuyển vị. Nói chung, **A** là một ma trận vuông, tổng số các tọa độ khái quát bằng tổng số tọa độ của các nút.

Giải phương trình (2.8) đối với α, ta được :

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{q} \tag{2.9}$$

Thay α vào (2.2b):

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{q} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q}$$

Trong đó: $\mathbf{N} = \boldsymbol{\phi}.\mathbf{A}^{-1}$; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn.

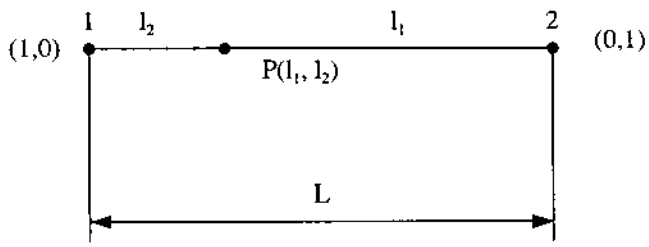
N gọi là *hàm hình dạng*. Phương trình (2.11) biểu thị mối quan hệ giữa các thành phần chuyển vị **u** tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn và các thành phần chuyển vị tại các nút của nó.

§2.3. HỆ TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

Hệ tọa độ tự nhiên rất thuận tiện cho việc biểu thị các tính chất của phần tử hữu hạn. Nó là một hệ cục bộ trong đó một điểm trong phần tử hữu hạn được biểu thị bằng các số không có thứ nguyên và có giá trị không bao giờ lớn hơn đơn vị hoặc bằng không. Cách biểu thị tọa độ như vậy làm cho việc tính tích phân được dễ dàng.

2.3.1. Hệ tọa độ tự nhiên một chiều

Hình (2.3) biểu thị hệ tọa độ tự nhiên một chiều.



Hình 2.3. Hệ tọa độ tự nhiên một chiều

Tọa độ tự nhiên của một điểm P bất kỳ (hình 2.3) được định nghĩa như sau:

$$l_1 = 1 - \frac{x}{L}$$
$$l_2 = \frac{x}{L} \qquad (2.12)$$

Tọa độ của điểm P bây giờ là l_1, l_2. Hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

Theo nguyên tắc tính đạo hàm, có thể viết:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial l_2} \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x}$$

Từ (2.12): $\frac{\partial l_1}{\partial x} = -\frac{1}{L}; \quad \frac{\partial l_2}{\partial x} = \frac{1}{L}$

Vậy $$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial}{\partial l_1} - \frac{\partial}{\partial l_2}\right) \qquad (1.15)$$

Tích phân trên chiều dài L:

$$\int_L l_1^p . l_2^l dl = \frac{p!q!}{(p+q+1)\ !} L \qquad (2.16)$$

Trong đó 0! được định nghĩa bằng đơn vị.

2.3.2. Phần tử hữu hạn tam giác hai chiều

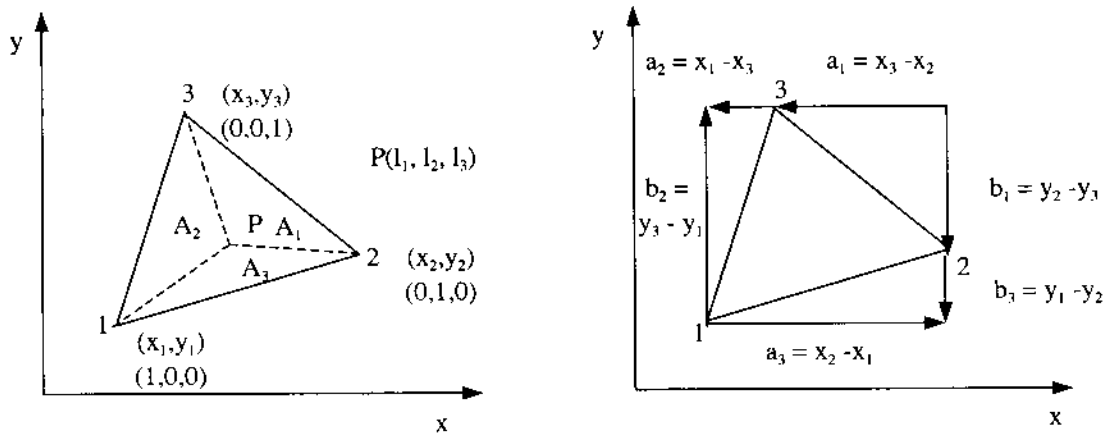
Xét một phần tử hữu hạn tam giác trên hình (2.4). Một điểm P trong hình tam giác được biểu thị bằng các tọa độ tự nhiên như sau:

$$l_1 = \frac{A_1}{A} \qquad l_2 = \frac{A_2}{A} \qquad l_3 = \frac{A_3}{A} \qquad (2.17)$$

Trong đó: A_1, A_2, A_3 là diện tích của 3 tam giác con tạo thành bởi điểm P và các cạnh đối diện của tam giác (hình 2.4); A là diện tích của tam giác lớn.

Do quan hệ hình học

$$A_1 + A_2 + A_3 = A$$
$$l_1 + l_2 + l_3 = 1 \qquad (2.18)$$



Hình 2.4: *Tọa độ cục bộ của phần tử hữu hạn tam giác*

Tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3 là:

Nút 1: (1, 0, 0)

Nút 2: (0, 1, 0)

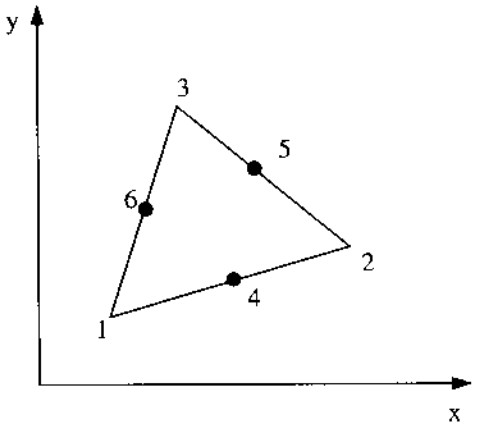
Nút 3: (0, 0, 1)

Tọa độ tự nhiên của các điểm giữa của các cạnh tam giác (hình 2.5) là:

Nút 4: (1/2, 1/2, 0)

Nút 5: (0, 1/2, 1/2)

Nút 6: (1/2, 0, 1/2)



Hình 2.5

Diện tích của tam giác biểu thị bằng hàm của các tọa độ x, y tại các nút 1, 2, 3:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2.19}$$

Diện tích của các tam giác con (hình 2.4) là:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2.20}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

Trong đó: x,y là tọa độ của một điểm P bất kỳ nằm trong phần tử hữu hạn hoặc nằm trên biên của nó.

Theo tài liệu [3], hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và tọa độ vuông góc:

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Để xác định các tính chất của phần tử hữu hạn, cần phải tính đạo hàm đối với các tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial l_1}\cdot\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_2}\cdot\frac{\partial l_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_3}\cdot\frac{\partial l_3}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_1} + \frac{b_2}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_2} + \frac{b_3}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_3}$$

Trong đó: $b_1 = y_2 - y_3$;

$b_2 = y_3 - y_1$;

$b_3 = y_1 - y_2$. (xem hình 2.4)

Tương tự như trên , ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3}\frac{a_i}{2A}\cdot\frac{\partial f}{\partial l_i} \tag{2.23b}$$

Trong đó: $a_1 = x_3 - x_2$;

$a_2 = x_1 - x_3$;

$a_3 = x_2 - x_1$. (xem hình 2.4)

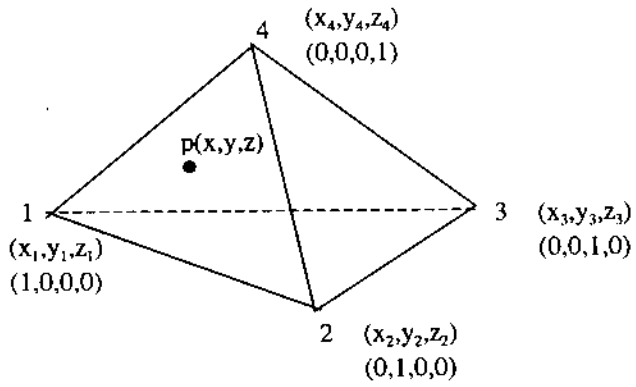
Theo tài liệu [5], tích phân diện tích tính theo công thức:

$$\int_A l_1^p . l_2^q . l_3^r . dA = \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)\ !} . 2A \tag{2.24}$$

Trong đó: 0! được định nghĩa bằng đơn vị.

§ 2.3.3. Phần tử hữu hạn tứ diện 3 chiều

Xét khối tứ diện 3 chiều biểu thị trên hình (2.6)



Hình 2.6. *Khối tứ diện 3 chiều*

Một điểm P bất kỳ trong khối tứ diện (hình 2.6) được xác định bằng các tọa độ tự nhiên như sau:

$$l_i = \frac{V_i}{V} \tag{2.25}$$

Trong đó: V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P và mặt đối diện với điểm i (i = 1, 2, 3, 4), V là thể tích của khối tứ diện lớn (hình 2.6). Chẳng hạn V_1 là khối tứ diện tạo bởi điểm P và mặt 234 (đối diện với nút 1). l_1 là tỷ số giữa thể tích V_1 và thể tích V. Thể tích V được xác định bằng định thức* của các tọa độ tại các nút như sau:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \tag{2.26}$$

Theo tài liệu [5], hệ thức giữa tọa độ vuông góc và tọa độ tự nhiên của điểm P có dạng:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Cần chú ý rằng:

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 1$$

Hệ thức ngược lại giữa tọa độ tự nhiên và toạ độ vuông góc:

---

* Trong cuốn sách này, nhất quán sử dụng ký hiệu | | để biểu thị định thức của ma trận.

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} v_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ v_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Trong đó:

V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P và mặt đối diện với điểm nút i; a_i, b_i, c_i lần lượt là diện tích hình chiếu của mặt đối diện với nút i lên các mặt phẳng tọa độ x y z ; a_i, b_i, c_i có dạng như sau:

$$\begin{aligned} a_i &= \left(z_j y_k - z_k y_j\right) + \left(z_k y_l - z_l y_k\right) + \left(z_l y_j - z_j y_l\right) \\ b_i &= \left(z_j x_k - z_k x_j\right) + \left(z_k x_l - z_l x_k\right) + \left(z_l x_j - z_j x_l\right) \\ c_i &= \left(y_j x_k - y_k x_j\right) + \left(y_k x_l - y_l x_k\right) + \left(y_l x_j - y_j x_l\right) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Các chỉ số i, j, k, l theo thứ tự vòng tròn ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$)

Các đạo hàm riêng của tọa độ tự nhiên đối với tọa độ vuông góc:

$$\frac{\partial l_i}{\partial x} = \frac{a_i}{6V} \qquad \frac{\partial l_i}{\partial y} = \frac{b_i}{6V}; \qquad \frac{\partial l_i}{\partial z} = \frac{c_i}{6V} \tag{2.30}$$

Tích phân thể tích của phần tử hữu hạn có dạng:

$$\int_v l_1^p l_2^q l_3^r l_4^s dV = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)\ !} 6V \tag{2.31}$$

§2.4. HÀM ĐỊNH DẠNG (HÀM NỘI SUY)

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta dùng mô hình chuyển vị và nêu lên giả thiết về sự biến thiên của các thành phần chuyển vị vì ta chưa biết sự biến thiên thực tế của chúng. Về mặt toán học, người ta nêu lên những hàm mà dạng giải tích của nó hoàn toàn chưa biết hoặc gặp phải nhiều khó khăn trong các phép tính. Vì vậy, người ta tìm cách thay các hàm đó bằng hàm đơn giản hơn gọi là *hàm hình dạng* hoặc *hàm nội suy*. Có 2 loại hàm nội suy:

1. Hàm nội suy Lagrange.

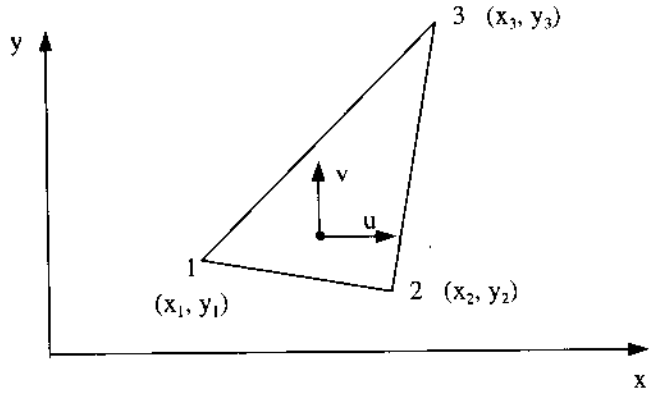
2. Hàm nội suy Hecmit

Trong mục này ta chỉ nghiên cứu hàm nội suy Lagrange còn được gọi là *hàm hình dạng*.

Hàm hình dạng Lagrange có thể suy ra từ các phương trình (2.10) và (2.11). Việc sử dụng hệ tọa độ tự nhiên như đã trình bày trong phần trước, tỏ ra có nhiều ưu điểm trong quá trình tính toán.

2.4.1. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác bậc nhất

Sự biến thiên tuyến tính của các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn tam giác (hình 2.7) có thể biểu thị bằng các tọa độ tự nhiên như sau:



Hình 2.7: Phần tử hữu hạn tam giác 3 nút

Một trong các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút 1, 2, 3 của phần tử hữu hạn có thể viết:

$$u = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \tag{2.32}$$

Nếu kết hợp cả 3 thành phần chuyển vị, ta có dạng ma trận:

Dưới dạng ma trận: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_2.\alpha$ (2.33)

Trong đó: $\boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$;

$\boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}$

Thay tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3 vào hệ thức trên ta có véctơ các thành phần chuyển vị $\mathbf{d_u}$ như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\boldsymbol{\alpha} \tag{3.34}$$

do đó:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

Từ phương trình (2.33) ta có:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\mathbf{d_u}$$

Ma trận trên có thể viết:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N'_2 d_u} \tag{2.36a}$$

Trong đó:

$$\mathbf{N'_2} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Một cách tương tự, các thành phần chuyển vị trên phương y tại các nút 1, 2, 3 có dạng ma trận:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N_{2n} . d_V} \tag{2.36b}$$

Sự biến thiên của các thành phần chuyển vị u và v trên phương x và y biểu thị trên hình (2.8).

Cuối cùng, ma trận các thành phần chuyển vị tại 1 điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn có dạng:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{N'_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N'_2} \end{bmatrix} . \ \mathbf{q} \tag{2.38}$$

tức là:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.39}$$

Trong đó:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{d_u} \\ \mathbf{d_v} \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Trong đó: **u** là vectơ các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn theo các phương x và y; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút 1, 2, 3 trên các phương x và y; **N** là ma trận hàm hình dạng.

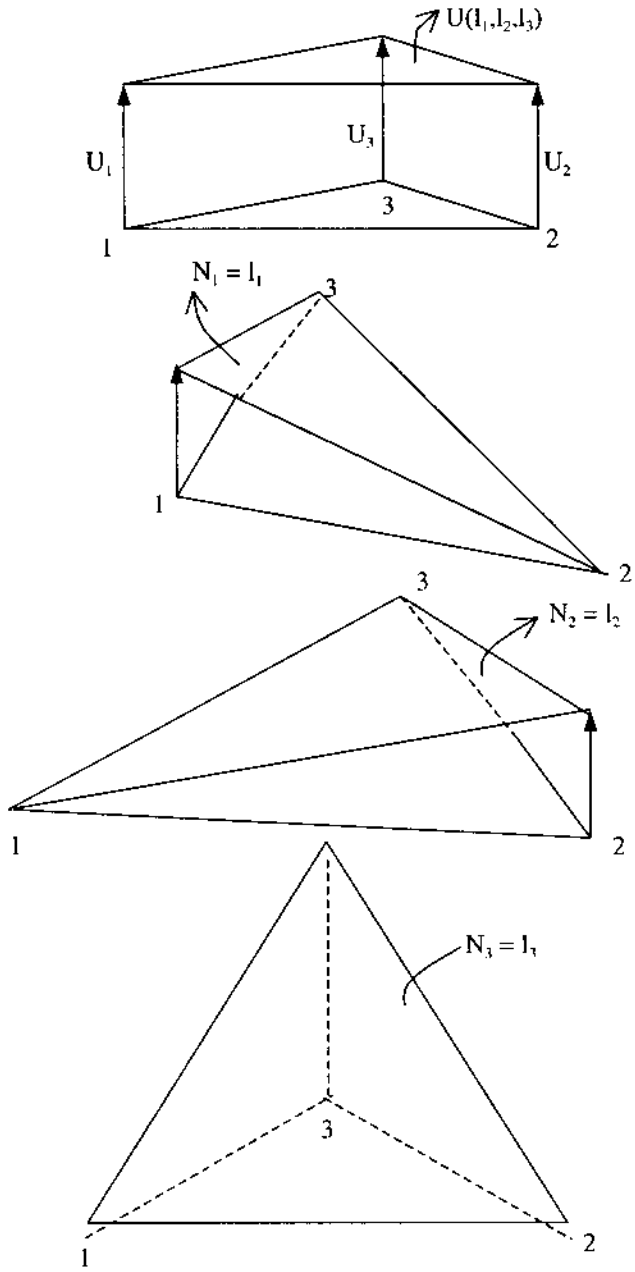
Đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút:

$$N_1 = l_1 \qquad N_2 = l_2 \qquad N_3 = l_3$$

Do đó, các thành phần chuyển vị u và v tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn theo các phương x và y, có thể viết:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Cần lưu ý rằng hàm hình dạng N_i (i = 1, 2, 3) có giá trị bằng đơn vị tại nút i và có giá trị bằng không tại những nút còn lại.

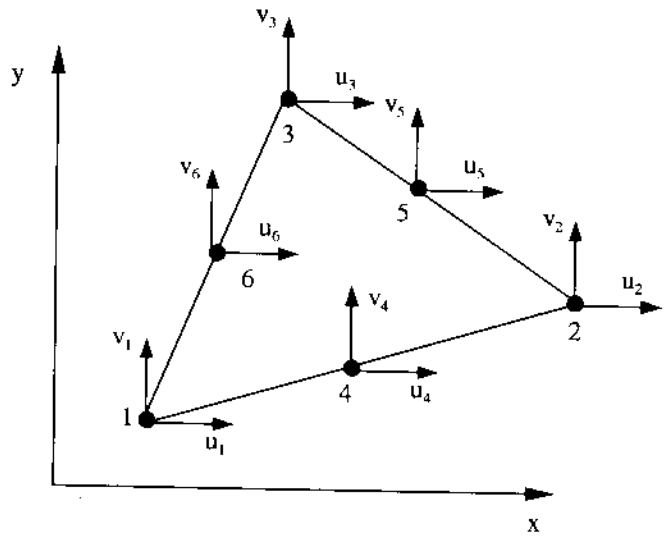


Hình 2.8: Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút

2.4.2. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn tam giác bậc hai.

Sự biến thiên bậc hai của các thành phần chuyển vị trong một phần tử hữu hạn tam giác 6 nút (hình 2.9) có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$u = \alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 + \alpha_4 l_1 l_2 + \alpha_5 l_2 l_3 + \alpha_6 l_3 l_1 \qquad (2.43)$$



Hình 2.9: *Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút*

Thay tọa độ tự nhiên của các nút 1, 2, 3, 4, 5, 6 vào hệ thức (2.43) ta có:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

tức là:

$$\mathbf{d_u} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\alpha} \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{d_u} \tag{2.46}$$

Nghịch đảo của ma trận A có dạng:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

Có thể viết:

$$\mathbf{N}'_2 = \boldsymbol{\phi}_2.\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_1l_2 & l_2l_3 & l_3l_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(l_1^2 - l_1l_2 - l_3l_1\right) & \left(l_2^2 - l_1l_2 - l_2l_3\right) & \left(l_3^2 - l_2l_3 - l_3l_1\right) & 4l_1l_2 & 4l_2l_3 & 4l_3l_1 \end{bmatrix} \tag{2.48a}$$

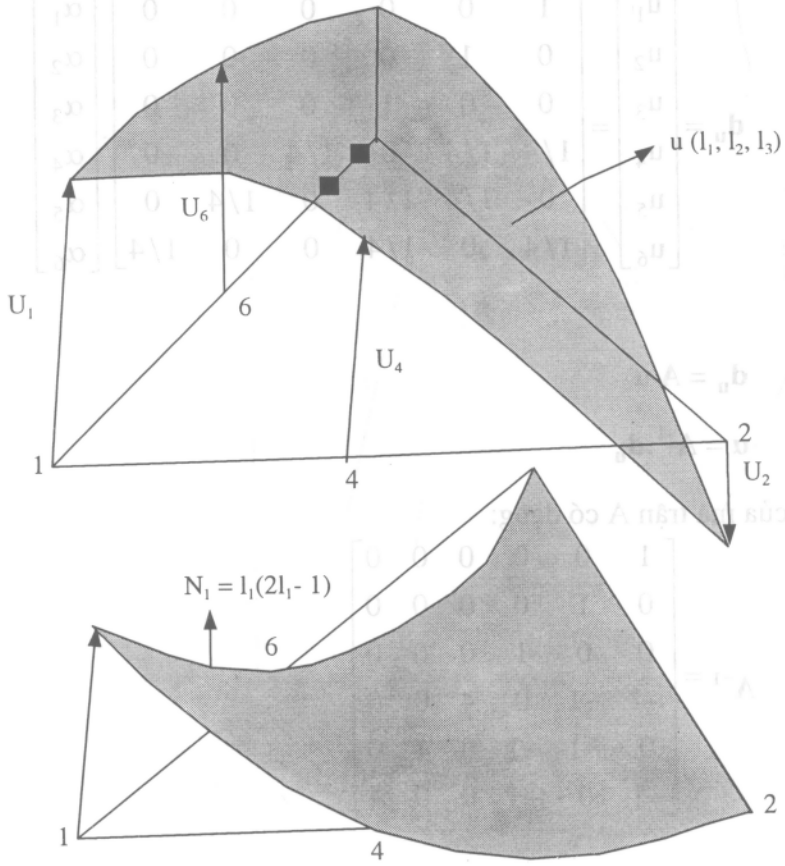
Sau khi đơn giản hoá (căn cứ vào $l_1 + l_2 + l_3 = 1$):

$$\mathbf{N}'_2 = \begin{bmatrix} l_1(2l_1 - 1) & l_2(2l_2 - 1) & l_3(2l_3 - 1) & 4l_1l_2 & 4l_2l_3 & 4l_3l_4 \end{bmatrix} \tag{2.48b}$$

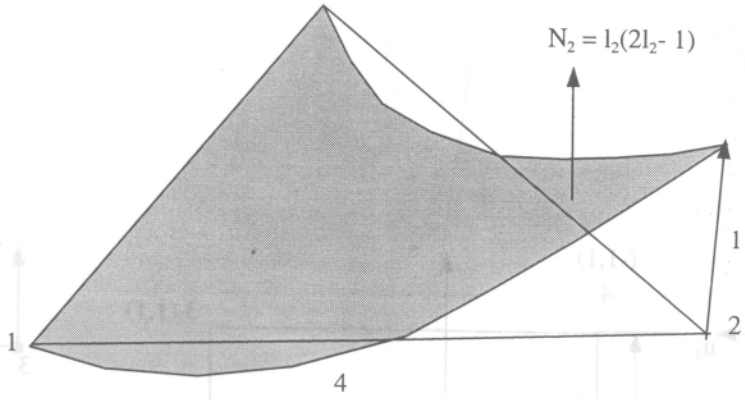
Dưới dạng ngắn gọn:

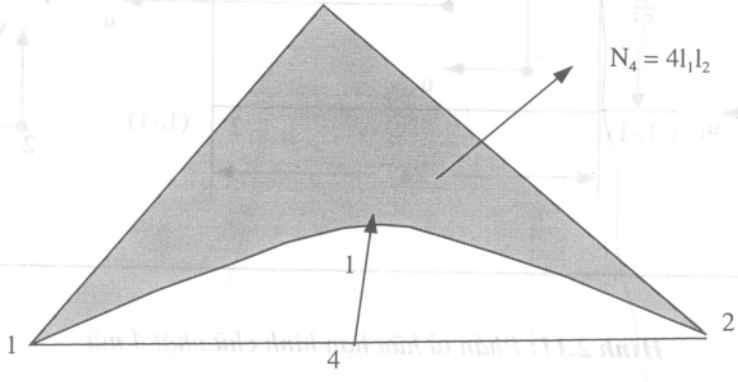
$$\mathbf{N}'_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Trong đó, các hàm hình dạng $N_i(1, 2, 3\ldots6)$ được biểu thị trong (2.48b). Hình (2.10a, b) cho ta thấy sự biến thiên phi tuyến tính của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_4



Hình 2.10





***Hình 2.10b**: Sự biến thiên phi tuyến tính của các hàm hình dạng trong phần tử hữu hạn tam giác 6 nút.*

Vậy là các thành phần chuyển vị u và v tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn được biểu thị bằng hệ thức ma trận:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_2' \end{bmatrix} . \mathbf{q} \tag{2.49a}$$

hay

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.49}$$

Trong đó: $\mathbf{N}_2'$ tính theo (2.48b)

$$\mathbf{q'} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

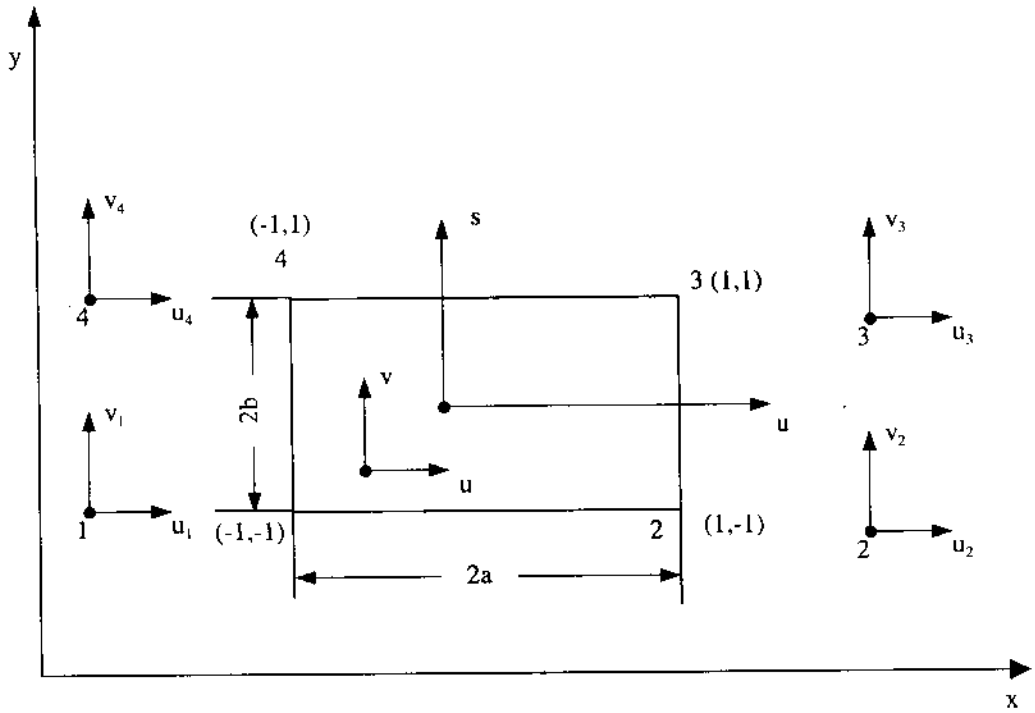
(xem hình 2.9)

2.4.3. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật bậc nhất.

Tọa độ tự nhiên đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật (hình 2.11) được xác định như sau:

$$r = \frac{x - x_c}{a} \qquad s = \frac{y - y_c}{b} \tag{2.51}$$

Trong đó: x_c và y_c là toạ độ của tâm phần tử hữu hạn hình chữ nhật.



Hình 2.11: Phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút

Một trong các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút 1, 2, 3, 4 có thể biểu thị bằng hàm đa thức:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 rs \tag{2.52}$$

Thay tọa độ tự nhiên tại các nút vào (2.52), ta được vectơ các thành phần chuyển vị trên phương x tại các nút (hình 2.11) như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

Do đó: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d_u}$

Ma trận nghịch đảo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Vậy:

$$\mathbf{N}_2' = \phi_2 \,.\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} c & r & s & r & s \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

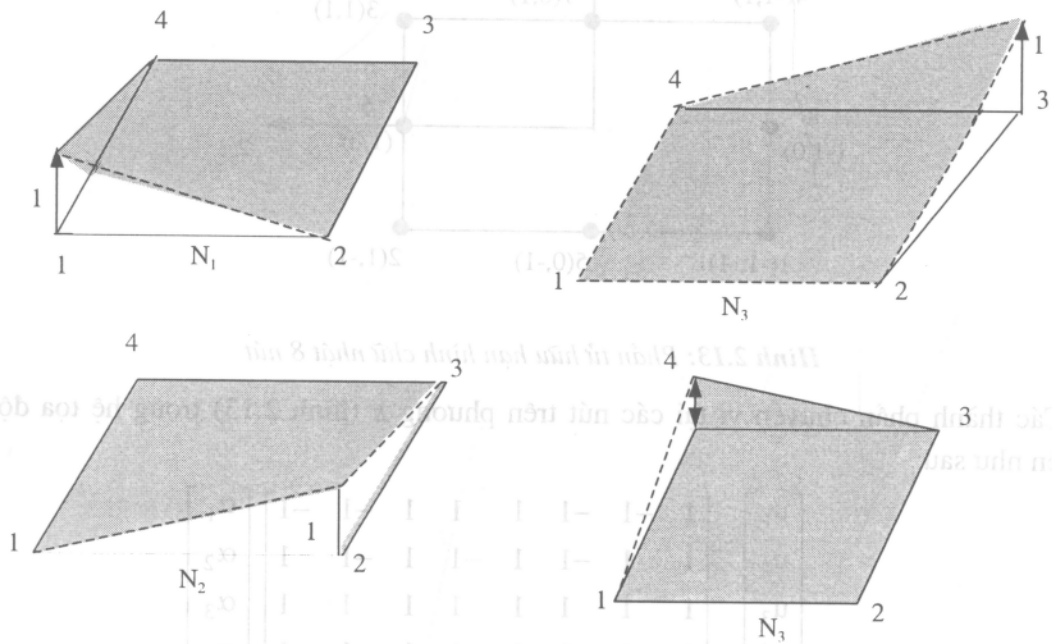
và

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} \frac{(1-r)(1-s)}{4} & \frac{(1+r)(1-s)}{4} & \frac{(1+r)(1+s)}{4} & \frac{(1-r)(1+s)}{4} \end{bmatrix} \tag{2.56a}$$

Hệ thức trên có thể viết:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}$$

Trong đó các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3, N_4 tính theo (2.56a). Sự biến thiên của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3, N_4 biểu thị trên hình (2.12).



Hình 2.12: *Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút*

Ma trận hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật 4 nút có dạng:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2' & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_2' \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

Trong đó: $\mathbf{N}_2'$ tính theo (2.56) và (2.56a)

Cuối cùng ta có hệ thức:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.58}$$

Trong đó:

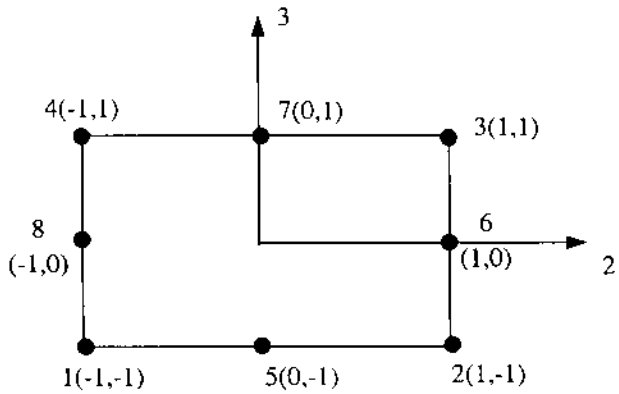
$$\mathbf{q}^t = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

(xem hình 2.11)

2.4.4. Hàm hình dạng đối với phần tử hữu hạn hình chữ nhật bậc hai.

Sự biến thiên của một trong các thành phần chuyển vị u (trên phương x) có thể biểu thị bằng đa thức trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 \tag{2.60}$$



Hình 2.13: Phần tử hữu hạn hình chữ nhật 8 nút

Các thành phần chuyển vị tại các nút trên phương x (hình 2.13) trong hệ tọa độ tự nhiên như sau:

$$\mathbf{d_u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Do đó:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d_u} \tag{2.62}$$

Nghịch đảo của ma trận **A**:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

Vậy:

$$\mathbf{N}_2' = \boldsymbol{\phi}_2 . \mathbf{A}^{-1} \tag{2.64}$$

$$\phi_2' = \begin{bmatrix} 1 & r & s & r^2 & rs & s^2 & r^2s & rs^2 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Thay (2.65) vào (2.64) và đơn giản hoá, ta có:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(-r-s-1) & \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(r-s-1) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(r+s-1) & \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(-r+s-1) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-r)(1-s) & \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r)(1-r)(1+s) & \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(1-s) \end{bmatrix} \tag{2.64b}$$

Ma trận $\mathbf{N}'_2$ có thể viết:

$$\mathbf{N}_2' = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

Các hàm hình dạng $N_1, N_2, \ldots, N_8$ tính theo (2.64b)

Cuối cùng, ma trận hàm hình dạng có thể viết:

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_2' & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' & \mathbf{N}_2' \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Ma trận các thành phần chuyển vị tại một điểm trong phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q} \tag{2.67}$$

Trong đó:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

§2.5. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG PHẦN TỬ HỮU HẠN

Hệ thức (1.11) trong chương một sẽ giúp ta tính biến dạng tại một điểm trong phần tử hữu hạn thông qua các thành phần chuyển vị tại các nút.

Nói chung, hệ thức biến dạng - chuyển vị của phần tử hữu hạn có dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \tag{2.69}$$

Trong đó:

ε là véctơ biến dạng tại một điểm bất kỳ trong phần tử hữu hạn; **q** là vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn.

B gọi là ma trận biến dạng - chuyển vị. Theo (1.16) (chương một) và (2.69), ta có hệ thức giữa ứng suất pháp và chuyển vị của phần tử hữu hạn như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D.B.q} \tag{2.70}$$

Trong đó: $\boldsymbol{\sigma}$ là vectơ các thành phần ứng suất tại một điểm trong phần tử hữu hạn;

D là ma trận cấu trúc vật liệu (xem công thức 1.17);

q đã được định nghĩa ở phần trên.

Ví dụ: Suy ra ma trận **B** đối với phần tử hữu hạn tam giác 3 nút biểu thị trên hình (2.7). Ta làm như sau:

Theo (2.39) và (2.41) ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

Mặt khác, từ (1.11) đối với bài toán 2 chiều, ta có:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Theo (2.23a) và (2.23b) ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{b_1}{2A}u_1 + \frac{b_2}{2A}u_2 + \frac{b_3}{2A}u_3 = \frac{1}{2A}\left(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3\right)$$

Một cách tương tự, ta có:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(a_1 + a_2 + a_3u_3 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3\right)$$

Vậy:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

§2.6. MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VECTƠ TẢI TRỌNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong các phần trước, ta đã suy ra các biểu thức về ma trận hàm hình dạng **N** và ma trận biến dạng - chuyển vị **B**.

Tiếp theo, cần phải suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn để lập phương trình cân bằng. Nguyên lý công ảo trình bày trong chương một sẽ giúp ta làm việc này.

Trong bài toán tổng quát 3 chiều, theo (1.37) công ảo của nội lực có dạng:

$$\delta u = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{\varepsilon}.\boldsymbol{\sigma} dv \tag{2.71}$$

Theo (1.35) công ảo của ngoại lực có dạng:

$$\delta u = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{u}.\mathbf{f} dv + \int\int \boldsymbol{\delta}'_{u}.\mathrm{T} ds \tag{2.72}$$

Theo (2.39), (2.69) và (2.70), ta có:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{2.73}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \tag{2.74}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D.B.q} \tag{2.75}$$

Từ (2.73) ta suy ra:

$$\boldsymbol{\delta}_u = \mathbf{N}.\delta_q \tag{a}$$

Từ (2.74) ta suy ra:

$$\boldsymbol{\delta}_{\varepsilon} = \mathbf{B}.\delta_q \tag{b}$$

Thay (b) và (2.75) vào (2.71), ta có:

$$\delta U = \iiint \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}}.\mathbf{D.B.q}.dV = \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}} \iiint \mathbf{B}'.\mathbf{D.B.q}.dV \tag{2.76}$$

Thay (a) vào (2.72), ta có:

$$\begin{aligned} \delta w_e &= \iiint \boldsymbol{\delta}'\mathbf{q}.\mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \iint \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}}.\mathbf{N}'.\mathbf{T}.ds \\ &= \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}} \iiint \mathbf{N}'.\mathbf{f}.dV + \boldsymbol{\delta}'_{\mathbf{q}} \iint \mathbf{N}'.\mathbf{T}.ds \end{aligned} \tag{2.77}$$

Theo (1.38), ta có:

$$\delta w_e = \delta U \Rightarrow \iiint (\mathbf{B}'.\mathbf{D.B}.dv)\mathbf{q} + \iiint \mathbf{N}'.\mathbf{f}dV + \iint \mathbf{N}'^{s}.\mathbf{T}.ds$$

Phương trình trên có thể viết:

$$\mathbf{k.q} = \mathbf{t} \tag{2.78}$$

Trong đó: $\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B'.D.B}dV$ (2.79)

$$\mathbf{t} = \iiint \mathbf{N'.f}.dV + \iint \mathbf{N'^s.T}.ds \quad (2.80)$$

(2.78) là hệ phương trình cân bằng của phần tử hữu hạn.

k gọi là *ma trận độ cứng* của phần tử hữu hạn.

t gọi là *vectơ tải trọng* của phần tử hữu hạn.

$\mathbf{N'^s}$ là ma trận hàm hình dạng ứng với mặt có lực biên T tác dụng.

f véctơ lực thể tích (do trọng lượng)

$$\mathbf{f'} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}$$

T vectơ các lực biên:

$$\mathbf{T'} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}$$

Các công thức (2.79) và (2.80) áp dụng cho bài toán 3 chiều

Trong bài toán 2 chiều, giả sử bề dày h của kết cấu không đổi, ta có:

$$dV = dA.h\ , \qquad ds = h.dl$$

dA - phân tố diện tích;

dl - phân tố đoạn thẳng men theo đó có lực biên T tác dụng

Giả sử **B** chứa các hằng số. Thay các hệ thức trên vào (2.78), ta có:

$\mathbf{k} = h\int \mathbf{B'.D.B}dA = h.\mathbf{B'.D.B}\int_A dA$, do đó:

$$\mathbf{k} = Ah\mathbf{B'.D.B} \quad (2.81)$$

Trong đó: A - diện tích tấm hai chiều.

Một cách tương tự, ta có:

$$\mathbf{t} = h\iint \mathbf{N'.f}.dA + h\int \mathbf{N'^s T}dl \quad (2.82a)$$

hay

$$\mathbf{t} = h\iint \mathbf{N'.f}.dx.dy + h\int \mathbf{N'^s T}dl \quad (2.82)$$

Trong bài toán một chiều:

$$dV = Adx, \qquad ds = dx, \qquad \mathbf{D} = E$$

Trong đó: A - diện tích tiết diện của mặt cắt ngang;

dx- phân tố đoạn thẳng trên trục x;

E - môđun đàn hồi.

Vậy ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = \int \mathbf{B'}.E.\mathbf{B}.Adx = \mathbf{B'}.E.\mathbf{B}.A\int_e dx$$

Nếu **B** là hằng số:

$$\mathbf{k}_e = AL_eE\mathbf{B}'.\mathbf{B} \tag{2.83a}$$

Nếu **B** không phải là hằng số:

$$\mathbf{k}_e = AL_eE\int\mathbf{B}'.\mathbf{B}dx \tag{2.83b}$$

Trong đó: L_e - chiều dài của phần tử hữu hạn;

E - môđun đàn hồi (trong kết cấu một chiều, **D** = E).

Theo (2.80) vectơ tải trọng:

$$\mathbf{t} = \int\mathbf{N}'.\mathbf{f}.Adx + \int\mathbf{N}'^s.\mathbf{T}dx \Rightarrow$$

$$\mathbf{t} = A.\mathbf{f}\int\mathbf{N}'dx + \mathbf{T}\int\mathbf{N}'^s dx \tag{2.84}$$

Chương 3
BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

§3.1. ĐẶC ĐIỂM CỦA BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

Trong bài toán một chiều, ứng suất, biến dạng, chuyển vị và tải trọng chỉ phụ thuộc vào một biến là x. Như vậy, chuyển vị u, ứng suất σ, biến dạng ε, véc tơ lực thể tích **f**, véc tơ lực biên **T** là những hàm của x.

$$u = u(x) \qquad \sigma = \sigma(x) \qquad \varepsilon = \varepsilon(x) \tag{3.1}$$

$$f = f(x) \qquad T = T(x)$$

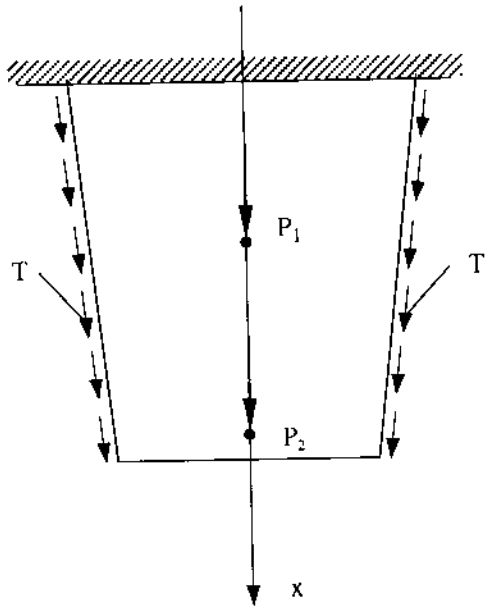
Các hệ thức ứng suất - biến dạng và ứng suất - chuyển vị

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \tag{3.2}$$

Thể tích của phần tử hữu hạn:

$$dV = Adx \tag{3.3}$$

Trong đó: A là diện tích tiết diện của phần tử hữu hạn một chiều (thực ra là một đoạn thanh thẳng).



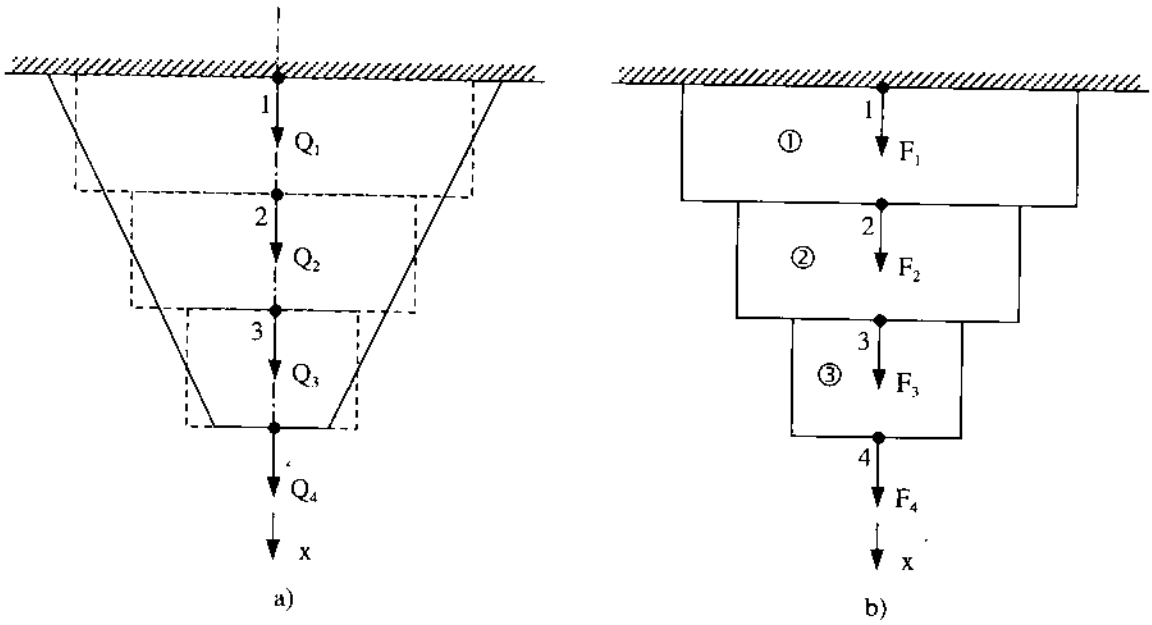
Hình 3.1. *Thanh một chiều chịu tác dụng của các lực*

Tải trọng gồm có: lực thể tích f không biểu thị trên hình vẽ, lực biên T, tải trọng điểm P_i. Lực thể tích (chẳng hạn như trọng lượng) tác dụng lên thể tích của vật thể và được tính trên đơn vị thể tích. Lực biên T tác dụng trên mặt biên của vật thể và được tính trên đơn vị diện tích. Các lực này biểu thị trên hình (3.1). Lực ma sát, lực nhờn, lực tiếp xúc là những ví dụ về lực biên. Cuối cùng, P_i là lực tác dụng tại điểm i.

Dưới đây, sẽ nghiên cứu mô hình phần tử hữu hạn áp dụng cho kết cấu một chiều.

§3.2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN ÁP DỤNG CHO KẾT CẤU MỘT CHIỀU

Ta hãy xét thanh trên hình (3.2a). Trước hết, ta chia nó ra thành một số miền gọi là phần tử hữu hạn, chẳng hạn chia thành 3 miền, mỗi miền có diện tích mặt cắt ngang không thay đổi (hình 3.2b).



Hình 3.2. Mô hình phần tử hữu hạn đối với thanh thẳng

Mô hình phần tử hữu hạn cùng 4 điểm nút biểu thị trên hình (3.2b). Số thứ tự các phần tử hữu hạn được khoanh tròn để phân biệt với số thứ tự các điểm nút. Mặt cắt ngang, lực thể tích và lực biên được xem như không đổi trong mỗi phần tử hữu hạn. Chúng chỉ thay đổi từ phần tử hữu hạn này đến phần tử hữu hạn khác. Cần chú ý rằng, kết quả tính toán càng chính xác khi số phần tử hữu hạn càng nhiều. Để tiện cho việc tính toán, ta đặt nút tại điểm có tải trọng tập trung tác dụng.

Trong bài toán một chiều, mỗi điểm nút chỉ được phép chuyển vị trên phương x, nghĩa là mỗi điểm nút chỉ có một bậc tự do. Trên hình (3.2b), mô hình phần tử hữu hạn có 4 nút nghĩa là toàn hệ có 4 bậc tự do. Chuyển vị tại các nút được biểu thị bằng các đại

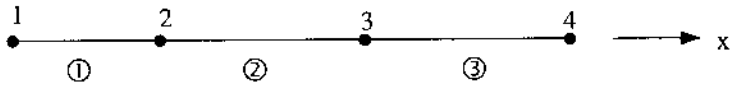
lượng Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Véc tơ cột $\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4]'$ gọi là véc tơ chuyển vị tổng thể. Véc tơ tải trọng tổng thể:

$\mathbf{F'} = [F_1\ F_2\ F_3\ F_4]$ gồm các tải trọng tác dụng tại các nút (xem hình 3.2)

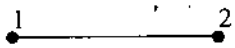
Dấu của chuyển vị và tải trọng quy ước là dương khi cùng chiều với chiều dương của trục x, là âm trong trường hợp ngược lại.

Điều kiện biên: $Q_1 = 0$ tại điểm ngàm

Mỗi phần tử hữu hạn có hai nút. Sơ đồ liên kết giữa các phần tử biểu thị trên hình (3.3).



Số thứ tự các phần tử và số thứ tự nút tổng thể



Số thứ tự nút cục bộ

Số thứ tự nút cục bộ và số thứ tự nút tổng thể (xem bảng dưới)

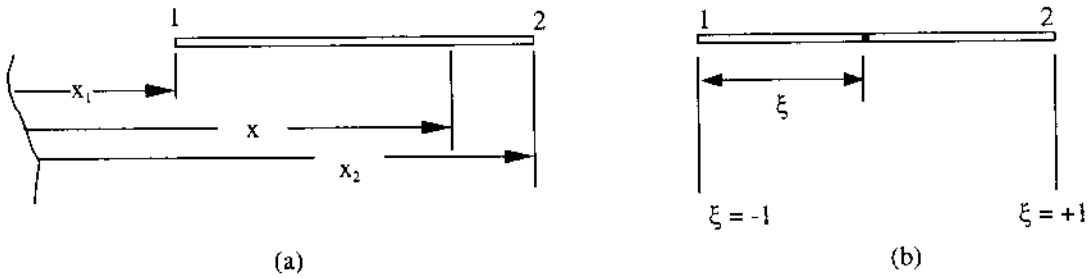
Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ		Số thứ tự nút tổng thể	
1	1	2	1	2
2	1	2	2	3
3	1	2	3	4

Hình 3.3. *Sơ đồ liên kết giữa các phần tử hữu hạn*

Bảng thống kê các phần tử và các nút tương ứng biểu thị trên hình (3.3). Ở đây, các số thứ tự 1 và 2 tại các nút của mỗi phần tử là những chỉ số có tính chất cục bộ.

§3.3. TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN VÀ HÀM HÌNH DẠNG

Giả sử một phần tử hữu hạn e biểu thị như trên hình (3.4a).



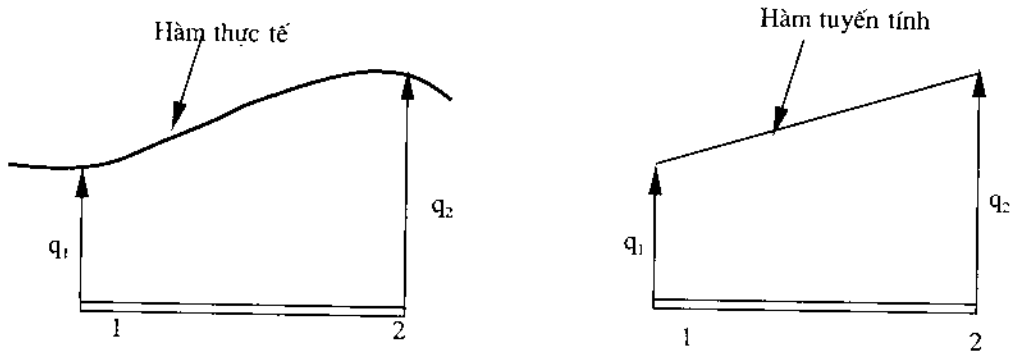
Hình 3.4. *Phần tử hữu hạn trong tọa độ x và tọa độ tự nhiên*

Số thứ tự của nút đầu tiên là 1, của nút thứ 2 là 2. Nút 1 có toạ độ x_1, nút 2 có toạ độ x_2. Hệ toạ độ tự nhiên được định nghĩa như sau:

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \tag{3.4}$$

Từ hệ thức trên, ta có $\xi = -1$ tại nút 1 và $\xi = 1$ tại nút 2 (hình 3.4b). Ta sẽ dùng hệ tọa độ tự nhiên này dễ suy ra hàm hình dạng.

Trường chuyển vị chưa biết trong phạm vi phần tử hữu hạn sẽ được nội suy qua sự phân bố tuyến tính (hình 3.5).



Hình 3.5. *Hàm nội suy tuyến tính của chuyển vị trong phần tử hữu hạn*

Đây là một giả thiết gần đúng nhưng kết quả tính toán càng chính xác khi số phần tử hữu hạn càng lớn.

Ta đưa vào các hàm biến dạng như sau:

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \tag{3.5}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{3.6}$$

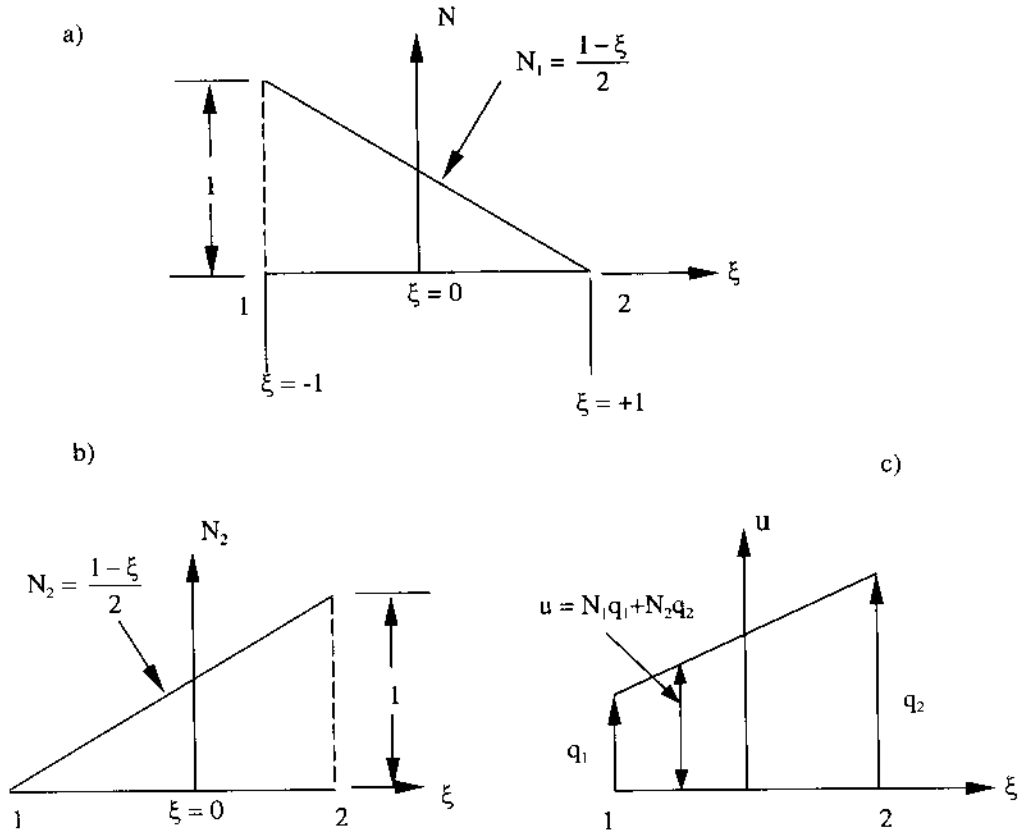
Các hàm hình dạng này biểu thị trên các hình (3.6a) và (3.6b). Khi các hàm hình dạng được xác định, trường chuyển vị tuyến tính trong phạm vi phần tử hữu hạn có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị q_1 và q_2 tại các nút.

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \tag{3.7a}$$

Dưới dạng ma trận $\quad \mathbf{u} = \mathbf{N}.\,\mathbf{q}$ (3.7b)

Trong đó: $\quad \mathbf{N} = [N_1\ N_2] \qquad \mathbf{q}' = [q_1\ q_2]$ (3.8)

Trong các phương trình trên, **q** là véc tơ các thành phần chuyển vị tại các nút của phần tử hữu hạn. Từ phương trình (3.7a), $u = q_1$ tại nút 1 và $u = q_2$ tại nút 2 và chuyển vị u trong phần tử hữu hạn biến đổi tuyến tính.



Hình 3.6:

a) Hàm hình dạng N_1; b) Hàm hình dạng N_2 ; c) Hàm nội suy tuyến tính.

Cần chú ý rằng từ phương trình (3,4), có thể thực hiện phép biến đổi từ toạ độ tự nhiên ξ sang tọa độ x;

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 \tag{3.9}$$

So sánh (3.7a) với (3.9), ta thấy rằng chuyển vị u và toạ độ x đã được nội suy trong phạm vi phần tử hữu hạn, thông qua các hàm hình dạng hoàn toàn như nhau. Ta gọi phép biến đổi này là *phép biến đổi cùng tham số.*

Nói chung, các hàm hình dạng phải thỏa mãn các điều kiện sau:

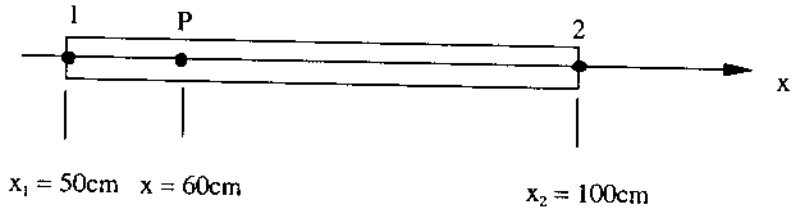
1. Đạo hàm bậc nhất phải hữu hạn trong phạm vi phần tử hữu hạn.

2. Chuyển vị phải liên tục trên biên của phần tử hữu hạn.

Ví dụ 3.1. Cho một thanh trên hình (3.7)

a) Tính ξ, N_1 và N_2 tại điểm P.

b) Nếu $q_1 = 0{,}2$cm, $q_2 = 0{,}5$cm, xác định giá trị chuyển vị u tại điểm P.



Hình 3.7

Giải:

a) Theo (3.4), ta có: $\xi = \frac{2}{(100-50)}(60-50)-1 = -0,6$

Theo (3,5) và (3,6) $N_1 = \frac{1-(-0,6)}{2} = 0,8$

$$N_2 = \frac{1-0,6}{2} = 0,2$$

b) Theo (3.7a) $u_p = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,5 = 0,26$ cm

Theo (3.2), hệ thức biến dạng - chuyển vị:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm

$$\varepsilon = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \tag{3.10}$$

Theo (3.4) $$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \tag{3.11}$$

Do đó: $$u = N_1q_1 + N_2q_2 = \frac{1-\xi}{2}q_1 + \frac{1+\xi}{2}q_2$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \tag{3.12}$$

Theo (3.10): $$\varepsilon = \frac{1}{x_2 - x_1}(-q_1 + q_2) \tag{3.13}$$

Dưới dạng ma trận: $$\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \tag{3.14}$$

Trong đó: $$\mathbf{B} = \frac{1}{x_2 - x_1}[-1 \quad 1] \tag{3.15}$$

$$\mathbf{q}' = [q_1\ q_2] \tag{3.16}$$

B *là ma trận biến dạng - chuyển vị* cấp 1 × 2 đồng thời là ma trận chứa các hằng số.

Theo định luật Húc, ứng suất trong phần tử hữu hạn

$$\sigma = E.\ \varepsilon$$

Thay (3.14) vào hệ thức trên, ta có:

$$\sigma = E\ (\mathbf{B}\ .\ \mathbf{q}) \tag{3.17}$$

Theo (3.17), ứng suất σ là một hằng số trong phạm vi phần tử hữu hạn. Nó được xem như tác dụng tại trọng tâm của tiết diện.

§3.4. MA TRẬN ĐỘ CỨNG VÀ VÉC TƠ TẢI TRỌNG CỦA PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong phần trên, ta đã suy ra các biểu thức của ứng suất, biến dạng, hàm hình dạng N, ma trận biến dạng - chuyển vị **B**. Tiếp theo, cần phải suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trong của phần tử hữu hạn để lập phương trình cân bằng.

3.4.1. Ma trận độ cứng

Ta sẽ vận dụng nguyên lý công ảo đã trình bày trong chương một dễ suy ra ma trận độ cứng.

Áp dụng công thức (2.83a) ta có ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = A.E.\ L_e\ (\mathbf{B'B}) \tag{3.18}$$

Trong đó: A - diện tích mặt cắt ngang của thanh;

E - mô đun đàn hồi;

L_e - chiều dài của phần tử hữu hạn.

Thay (3.15) vào (3.18), ta có:

$$\mathbf{k}_e = AEL_e \frac{1}{L_e}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{L_e}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, hệ thức trên trở thành:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

3.4.2. Vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn

Áp dụng công thức (2.84), ta có vectơ tải trọng:

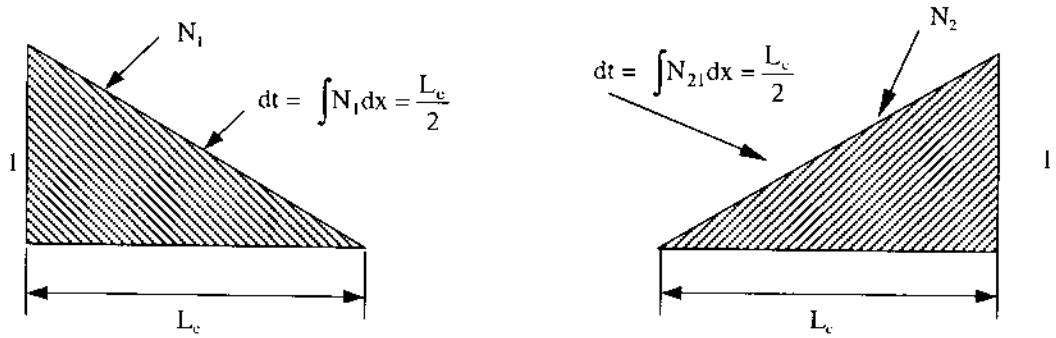
$$\mathbf{t}_e = A_e\ .\ f_e \int \mathbf{N'}dx + T_e \int \mathbf{N'}dx \tag{3.20}$$

Trong đó: f_e - Vectơ lực thể tích của phần tử e;

T_e - Vectơ lực biên của phần tử e;

N - hàm hình dạng.

Các hàm hình dạng N_1 và N_2 biểu thị trên hình (3.8).



Hình 3.8. *Tích phân* $\int N_1 dx$ *và* $\int N_2 dx$

Áp dụng công thức (3.8) vào (3.20), ta có:

$$\mathbf{t}_e = A_e.\ f_e \int \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} dx + T_e \int \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} dx$$

$$= A_e.f_e \begin{bmatrix} \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \end{bmatrix} + T_e \begin{bmatrix} \int N_1 dx \\ \int N_2 dx \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào giá trị tích phân trên hình (3.8), ta có:

$$\mathbf{t}_e = \frac{A_e.L_e.f_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{T_e L_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Ý nghĩa vật lý của công thức (3.21) như sau. Tích $A_e l_e f_e$ biểu thị tổng lực thể tích của phần tử hữu hạn e; tích $T_e.L_e$ biểu thị tổng lực biên tác dụng trên phần tử hữu hạn. Các lực này đều chia đều cho hai đầu của phần tử hữu hạn.

Sau khi tính được ma trận độ cứng và vec tơ tải trọng của các phần tử hữu hạn, ta ghép chúng lại để được *ma trận độ cứng tổng thể* và *vec tơ tải trọng tổng thể.*

Gọi **K** là ma trận độ cứng tổng thể và **F** là vectơ tải trọng tổng thể. Ta có sơ đồ ghép như sau:

$$\mathbf{K} \leftarrow \sum \mathbf{k}_e \tag{3.22}$$

$$\mathbf{F} \leftarrow \sum \mathbf{t}_e + \mathbf{P} \tag{3.23}$$

Trong đó: **P** là véc tơ tải trọng tập trung nếu có.

Ví dụ 3.2. Cho 1 thanh biểu thị trên hình (3.9). Mỗi phần tử chịu tác dụng của lực biên T trên đơn vị dài và lực thể tích f trên đơn vị thể tích. Ngoài ra, có tải trọng tập trung P tác dụng tại nút 2. Xác định ma trận độ cứng tổng thể và véc tơ tải trọng tổng thể.

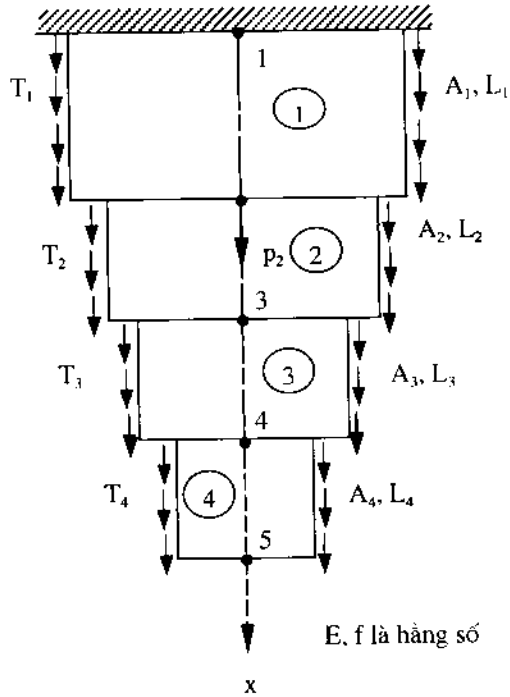
Giải:

Theo (3.19), ta có ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn thứ i (i = 1, 2,3,4) như sau:

$$k_i = \frac{EA_i}{L_i}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng 3.1. Sơ đồ liên kết các nút giữa các phần tử

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể	
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5



Hình 3.9

Ma trận độ cứng tổng thể có thể xác định bằng cách tính tổng của các ma trận.

$$\mathbf{K} = \frac{EA_1}{L_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_2}{L_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{EA_3}{L_3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_4}{L_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cách làm trên bất lợi khi tính trên máy tính điện tử vì phải lưu vào bộ nhớ quá nhiều con số 0.

Cách làm dưới đây thuận lợi cho việc lập trình. Ta đã biết rằng mỗi phần tử hữu hạn có hai bậc tự do mang các chỉ số 1 và 2. Đối với toàn hệ, nó có hai bậc tự do mang các chỉ số biểu thị như trên hình (3.9) và bảng (3.1).

Đặt $\frac{EA_i}{L_i} = e_i\left(i = 1,2,3,4\right)$, ta có các ma trận riêng (tức ma trận của các phần tử hữu hạn) như sau:

Phần tử 1: $$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(11)}{e_1} & \underset{(12)}{-e_1} \\ \underset{(21)}{-e_1} & \underset{(22)}{e_1} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Phần tử 2: $$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(22)}{e_2} & \underset{(23)}{-e_2} \\ \underset{(32)}{-e_2} & \underset{(33)}{e_2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 3: $$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(33)}{e_3} & \underset{(34)}{-e_3} \\ \underset{(43)}{-e_3} & \underset{(44)}{e_3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$$

Phần tử 4: $$\mathbf{k}_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underset{(44)}{e_4} & \underset{(45)}{-e_4} \\ \underset{(54)}{-e_4} & \underset{(55)}{e_4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \end{array}$$

Trong các ma trận độ cứng riêng trình bày trên, các số bên ngoài biểu thị số thứ tự của các bậc tự do trong toàn hệ. Các chỉ số (ij) biểu thị vị trí của các phần tử ma trận trong ma trận độ cứng tổng thể. Chẳng hạn - $e_{4\,(54)}$ là phần tử - e_4 của ma trận k_4 nằm ở hàng thứ 5 và cột thứ 4 của ma trận độ cứng tổng thể.

Để xác định ma trận độ cứng tổng thể **k** ta lần lượt đặt các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể ở những vị trí thích hợp. Nguyên tắc ghép các ma trận riêng như sau: nếu các phần tử của các ma trận riêng cùng chỉ số ij thì chúng được cộng với nhau. Chẳng hạn $e_1(22) + e_2(22)$, $e_2=(33) + e_3(33)$, $e_3\,(44) + e_4(44)$.

Sau khi thực hiện các bước trên, ta được:

$$\mathbf{K} = E \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_1}{L_1} & -\frac{A_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{L_1} & \left(\frac{A_1}{L_1}+\frac{A_2}{L_2}\right) & -\frac{A_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{L_2} & \left(\frac{A_2}{L_2}+\frac{A_3}{L_3}\right) & -\frac{A_3}{L_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{L_3} & \left(\frac{A_3}{L_3}+\frac{A_4}{L_4}\right) & -\frac{A_4}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{L_4} & \frac{A_4}{L_4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \qquad (3.24)$$

Theo (3.21), ta có vectơ tải trọng

$$t_i = \frac{A_iL_if_i}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{T_iL_i}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3,4.$$

Cách ghép các vectơ tải trọng riêng cũng làm tương tự như trên.

Phần tử 1:

$$t_1 = \begin{bmatrix}\frac{A_1L_1f_1}{2} + \frac{T_1L_1}{2}\\ \frac{A_1L_1f_1}{2} \quad \frac{T_1L_1}{2}\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\end{matrix}$$

Phần tử 2:

$$t_2 = \begin{bmatrix}\frac{A_2L_2f_2}{2} + \frac{T_2L_2}{2} + P_2\\ \frac{A_2L_2f_2}{2} \quad \frac{T_2L_2}{2}\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$$

Phần tử 3:

$$t_3 = \begin{bmatrix}\frac{A_3L_3f_3}{2} + \frac{T_3L_3}{2}\\ \frac{A_3L_3f_3}{2} \quad \frac{T_3L_3}{2}\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\4\end{matrix}$$

Phần 4:

$$t_4 = \begin{bmatrix}\frac{A_4L_4f_4}{2} + \frac{T_4L_4}{2}\\ \frac{A_4L_4f_4}{2} \quad \frac{T_4L_4}{2}\end{bmatrix}\begin{matrix}4\\5\end{matrix}$$

Các số bên phải biểu thị số thứ tự các bậc tự do. Để ghép các vectơ tải trọng, ta cộng với nhau các phần tử trong vectơ tải trọng cùng có bậc tự do (tức số thứ tự của hàng) như nhau.

Chẳng hạn, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_1$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_2$, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_2$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_3$, phần tử thứ 2 trong $\mathbf{t}_3$ cộng với phần tử thứ nhất trong $\mathbf{t}_4$.

Cuối cùng, vectơ tải trọng tổng thể có dạng như sau:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{A_1L_1f}{2}+\dfrac{L_1T_1}{2} \\ \left(\dfrac{A_1L_1f}{2}+\dfrac{L_1T_1}{2}\right)+\left(\dfrac{A_2L_2f}{2}+\dfrac{L_2T_2}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_2L_2f}{2}+\dfrac{L_2T_2}{2}\right)+\left(\dfrac{A_3L_3f}{2}+\dfrac{L_3T_3}{2}\right) \\ \left(\dfrac{A_3L_3f}{2}+\dfrac{L_3T_3}{2}\right)+\left(\dfrac{A_4L_4f}{2}+\dfrac{L_4T_4}{2}\right) \\ \dfrac{A_4L_4f}{2}+\dfrac{L_4T_4}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

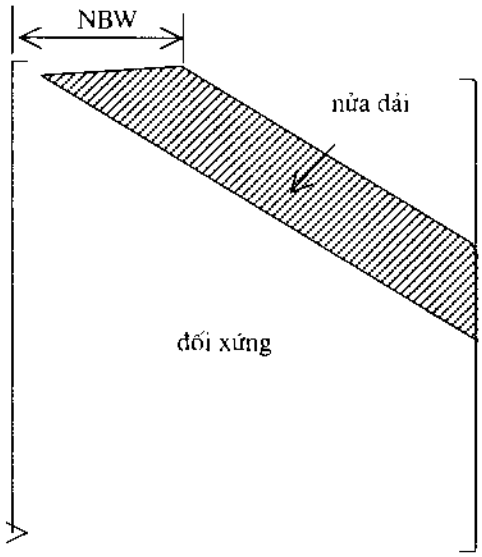
§3.5. CÁC TÍNH CHẤT CỦA MA TRẬN ĐỘ CỨNG TỔNG THỂ K

Ma trận độ cứng tổng thể **K** trong bài toán một chiều có các tính chất quan trọng sau đây:

1. Ma trận **K** có cấp n × n,trong đó n là số bậc tự do hoặc số nút vì mỗi nút chỉ có một bậc tự do.

2. Ma trận **K** đối xứng (xem 3.24)

4. **K** là ma trận dải (hình 3.10)



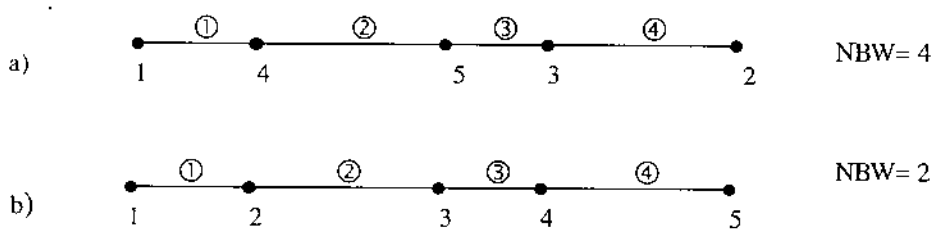
Hình 3.10. *Ma trận dải đối xứng*

Trong ma trận dải, các phần tử của ma trận phân bố trong một dải đối xứng, các phần tử còn lại đều triệt tiêu. Trong ví dụ (3.2), ma trận **K** ở (3.34) là một ma trận dải đối xứng, bề rộng nửa dải NBW = 2. Để tiết kiệm bộ nhớ khi tính trên máy tính điện tử, ta lưu các phần tử của ma trận vào một bảng hình chữ nhật như sau:

$$
\begin{array}{c}
\overleftrightarrow{\quad\text{NBW} = 2\quad} \\
\mathbf{K}_d = E \begin{bmatrix}
\dfrac{A_1}{L_1} & -\dfrac{A_1}{L_1} \\
\dfrac{A_1}{L_1} + \dfrac{A_2}{L_2} & -\dfrac{A_2}{L_2} \\
\dfrac{A_2}{L_2} + \dfrac{A_3}{L_3} & -\dfrac{A_3}{L_3} \\
\dfrac{A_3}{L_3} + \dfrac{A_4}{L_4} & -\dfrac{A_4}{L_4} \\
\dfrac{A_4}{L_4} & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ma trận $\mathbf{K}_d$ có cấp $\mathbf{n} \times$ NBW trong đó NBW là bề rộng nửa dải tức là số phần tử trong một hàng của nửa dải. Trong các bài toán 1 chiều, mỗi phần tử hữu hạn thứ i có 2 nút i và i + 1 do đó NBW = 2. Bề rộng nửa dải có thể tính theo công thức sau:

NBW = max (hiệu các bậc tự do trong một phần tử hữu hạn)+1 (3.25)



Hình 3.11. *Cách đặt số thứ tự các nút và bề rộng nửa dải tương ứng*

Chẳng hạn đối với mô hình 4 phần tử hữu hạn trên hình (3.11a), ta có:

NBW = max (4-1, 5-4, 5-3, 3-2) + 1 = 4.

Theo hình (3.11b) NBW = max (2-1, 3-2, 4-3, 5-4) + 1 = 2

Rõ ràng là cách đặt số thứ tự các nút trên hình (3.11b) có tính chất tối ưu vì bề rộng nửa dải bé nhất do đó tiết kiệm được bộ nhớ của máy tính điện tử.

§3.6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA TOÀN BỘ KẾT CẤU. CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

3.6.1. Hệ phương trình cân bằng tổng thể

Trong chương hai, ta đã thiết lập được hệ phương trình cân bằng của một phần tử hữu hạn thứ i theo công thức (2.78).

$$\mathbf{k}_i\mathbf{q}_i = \mathbf{t}_i \tag{3.26}$$

Trong đó: $\mathbf{k}_i$ - ma trận độ cứng của phần tử thứ i;

$\mathbf{q}_i$ - vectơ chuyển vị của phần tử thứ i;

$\mathbf{t}_i$ - vectơ tải trọng của phần tử thứ i.

Trong phần trước, ta đã trình bày cách ghép các ma trận độ cứng riêng và các vectơ tải trọng riêng để được ma trận độ cứng tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Bây giờ ta xếp các thành phần chuyển vị trong toàn hệ theo số thứ tự bậc tự do để được vectơ chuyển vị tổng thể **Q**:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ .....Q_n]'$$

Trong đó n là số bậc tự do của toàn hệ.

Xuất phát từ (3.26), ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q} = \mathbf{F} \tag{3.27}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị Q_i. Sau khi áp dụng các công thức (3.14), (3.17), ta tính được biến dạng và ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn.

Trong kết cấu nói chung, có thể xảy ra trường hợp chuyển vị tại một điểm nào đó triệt tiêu hoặc có giá trị biết trước. Đây là những điều kiện biên cần phải xét đến trong quá trình giải hệ phương trình cân bằng tổng thể. Vấn đề này sẽ được nghiên cứu trong phần sau.

3.6.2. Cách xử lý các điều kiện biên

3.6.2.1. Các loại điều kiện biên

Có hai loại điều kiện biên.

Đối với loại thứ nhất, chuyển vị tại một điểm nào đó có giá trị cho trước. Chẳng hạn như:

$$Q_{d1} = a_1\ ;\ Q_{d2} = a_2\ .....\ Q_{dr} = a_r \tag{3.28}$$

Trong đó Q_{di} là chuyển vị trên phương bậc tự do d_i của toàn hệ ; a_i là giá trị chuyển vị cho trước (chẳng hạn như độ lún của nền móng); r - số bậc tự do có chuyển vị cho trước.

Các hệ thức (3.28) có thể áp dụng cho bài toán 2 chiều, 3 chiều và hệ thanh.

Loại thứ hai gọi là các *ràng buộc nhiều điểm*.

Nó có dạng:

$$\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} = \beta_0 \tag{3.29}$$

Trong đó: β_0, β_1, β_2 là những hằng số cho trước. Loại điều kiện biên này áp dụng cho các gối tựa lăn, liên kết cứng.

Có hai phương pháp xử lý các điều kiện biên:

- Phương pháp loại trừ
- Phương pháp mô hình lò xo.

3.6.2.2. Phương pháp loại trừ

Trước hết, ta hãy suy ra biểu thức của thế năng toàn phần.

Gọi **F** là vectơ tải trọng tổng thể;

Q là vectơ chuyển vị tổng thể.

Năng lượng biến dạng của phần tử hữu hạn có dạng:

$$U_e = \frac{1}{2}\int \sigma'\varepsilon.A.dx$$

Thay $\sigma = E\,\mathbf{Bq}$ vào $\varepsilon = \mathbf{Bq}$ vào hệ thức trên, ta có:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_e \mathbf{q'B}.E.\mathbf{B.q}Adx$$

Vì **q, B,** E, A là những hằng số nên :

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(A'ELe\mathbf{B'B}\right)\mathbf{q}$$

Trong đó: A - diện tích mặt cắt ngang;

L_e - chiều dài của thanh 1 chiều;

E - mô đun đàn hồi.

Theo (2.83):

$$U_e = \frac{1}{2}\mathbf{q'k_e q}$$

Đối với toàn hệ, ta có năng lượng biến dạng toàn phần:

$$U = \frac{1}{2}\ \mathbf{Q'K.Q}$$

Vậy thế năng toàn phần của hệ kết cấu có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} - \mathbf{Q'.F} \qquad (3.30)$$

Ta sẽ vận dụng nguyên lý thế năng cực tiểu để xử lý các điều kiện biên loại một. Giả sử chỉ có một điều kiện biên $Q_1 = a_1$. Đối với kết cấu có N bậc tự do, ta có:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ .....\ Q_N]'$$

$$\mathbf{F} = [\ F_1 \qquad F_2\ .....\ F_N]'$$

Ma trận độ cứng tổng thể có dạng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & & & \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

Cần chú ý rằng **K** là ma trận đối xứng. Thế năng toàn phần trong (3.30) có thể khai triển như sau:

$$\begin{aligned} TNT = \frac{1}{2}(&Q_1K_{11}Q_1 + Q_1K_{12}Q_2 + \cdots + Q_1K_{1N}Q_N \\ &+ Q_2K_{21}Q_1 + Q_2K_{22}Q_2 + \ldots + Q_2K_{2N}Q_N \\ &- \\ &+ Q_NK_{N1}Q_1 + Q_NK_{N2}Q_2 + \cdots + Q_NK_{NN}Q_N) \\ &- (Q_1F_1 + Q_2F_2 + \cdots + Q_NF_N) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Thay điều kiện biên $Q_1 = a_1$ vào (3.32)

$$\begin{aligned} TNT = \frac{1}{2}(&a_1K_{11}a_1 + a_1K_{12}Q_2 + \cdots + a_1K_{1N}Q_N \\ &+ Q_2K_{21}a_1 + Q_2K_{22}Q_2 + \cdots + Q_2K_{2N}Q_N \\ &- \\ &+ Q_NK_{N1}a_1 + Q_NK_{N2}Q_2 + \cdots + Q_NK_{NN}Q_N) \\ &- (a_1F_1 + Q_2F_2 + \cdots + Q_NF_N \end{aligned} \tag{3.33}$$

Cần chú ý rằng chuyển vị Q_1 đã bị loại trừ khỏi biểu thức thế năng toàn phần nêu trên. Để cực tiểu hóa thế năng toàn phần, ta triệt tiêu đạo hàm của nó đối với chuyển vị Q_i:

$$\frac{dTNT}{dQ_i} = 0 \qquad i = 2, 3, \cdots, N \tag{3.34}$$

Từ (3.33) và (3.34), ta có:

$$\begin{aligned} &K_{22}Q_2 + K_{23}Q_3 + \cdots + K_{2N}Q_N = F_2 - K_{21}a_1 \\ &K_{32}Q_2 + K_{33}Q_3 + \cdots + K_{3N}Q_N = F_3 - K_{31}a_1 \\ &- \\ &K_{N2}Q_2 + K_{N3}Q_3 + \cdots + K_{NN}Q_N = F_N - K_{N1}a_1 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3N} \\ \vdots & & & \\ K_{N2} & K_{N3} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & - & K_{21}a_1 \\ F_3 & - & K_{31}a_1 \\ \vdots & & \\ F_N & - & K_{N1}a_1 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Qua trên, ta thấy rằng cấp của ma trận **K** bây giờ là (N-1) × (N-1) vì đã loại trừ hàng thứ nhất và cột thứ nhất (ứng với Q_1) từ ma trận gốc cấp N × N.

Từ hệ phương trình cân bằng tổng thể **KQ** = **F** với ma trận **K** có cấp (N-1) × (N-1), ta xác định vectơ chuyển vị tổng thể **Q** theo phương pháp Gauss và từ đó tính ứng suất và biến dạng.

Phản lực R_1 tại gối tựa có chuyển vị a_1 tính từ phương trình sau:

$$K_{11}Q_1 + K_{12}Q_2 + ... + K_{1n}Q_n = F_1 + R_1 \qquad (3.37)$$

Trong đó: Các chuyển vị Q_1, Q_2, ...Q_N đã biết;

F_1 là lực đặt tại gối tựa (nếu có).

Vậy:

$$R_1 = K_{11}\, Q_1 + K_{12}Q_2 + ...K_{1N}Q_N - F_1 \qquad (3.38)$$

Cần chú ý rằng các phần tử của ma trận K_{11}, K_{12}, ...K_{1N} cần được lưu riêng vào bộ nhớ vì chúng đã bị loại trừ khỏi ma trận gốc **K.**

Phương pháp trên có thể áp dụng cho trường hợp tổng quát trong đó có nhiều điều kiện biên.

Phương pháp loại trừ có thể tóm tắt như sau:

$$Q_{d1} = a_1;\ Q_{d2} = a_2\ .....Qd_r = a_r$$

Bước 1: Lưu vào bộ nhớ các dòng thứ d_1, thứ d_2, ...thứ d_r của ma trận tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Bước 2: Loại trừ khỏi ma trận **K** các hàng và cột thứ d_1, thứ d_2, ...thứ d_r (d_i là số thứ tự bậc tự do trong toàn hệ). Ma trận **K** bây giờ có cấp (N-r)×(N-r) và vectơ tải trọng có cấp (N-r) × 1. Biến đổi mỗi thành phần của vectơ tải trọng như sau:

$$F_i = F_i - (K_{id_1} \,.\, a_1 + K_{id_2}\, a_2 + ...+K_{idr}.a_r) \qquad (3.39)$$

Trong đó, bậc tự do i không phải là gối tựa (tức là ứng với chuyển vị cần phải tìm). Căn cứ vào ma trận $\mathbf{K}^*$ và $\mathbf{F}^*$ đã được biến đổi, giải hệ phương trình.

$$\mathbf{K}^*\mathbf{Q} = \mathbf{F}^*$$

để xác định vectơ chuyển vị **Q.**

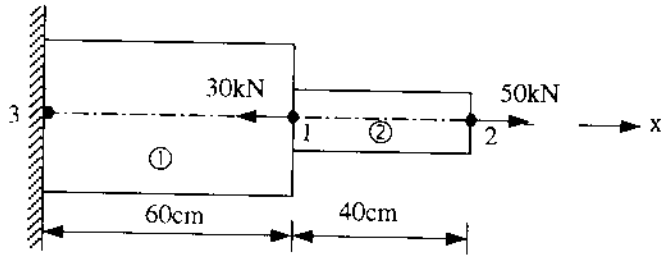
Bước 3: Đối với mỗi phân tử hữu hạn, căn cứ vào vectơ tải trọng **q**, xác định ứng suất và biến dạng.

Bước 4: Căn cứ vào các số liệu lưu trữ ở bước 1, tính các phản lực tại mỗi gối tựa.

$$\begin{aligned}
R_{d1} &= K_{d1,1}\, Q_1 + K_{d1,2}\, Q_2 + ...+ K_{d1,N}\, Q_N - F_{d1}\\
R_{d2} &= K_{d2,1}Q_1 + K_{d2,2}Q_2 + ... + K_{d2,N}\, Q_N - F_{d2}\\
&.....\\
R_{dr} &= K_{dr,1}Q_1 + Q_{dr,2}\, Q_2 + ...+ Q_{dr,n}Q_N - F_{dr}
\end{aligned} \qquad (3.40)$$

Trong đó: $K_{i,j}$ là phần tử của ma trận **K** nằm trên hàng thứ i và cột (thứ j (ở đây, có nhiều chỉ số con nên phải dùng dấu phẩy); R_{dj} - phản lực men theo bậc tự do d_j.

Ví dụ 3.3: Cho kết cấu một chiều như trên hình (3.12)



Diện tích:
Thanh 1: 5 cm²
Thanh 2: 2 cm²
Môđun đàn hồi: 21000kN/cm²

Hình : 3.12

Dùng phương pháp loại trừ tính: - Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

1) Căn cứ vào (3.19) xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 \\ & 1750 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

Thanh 2:
$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1050 & -1050 \\ & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

2) Ghép các MTDC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1050 \\ +1050 & \\ \hline 2800 & \\ -1050 & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ \\ 2 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên kết cấu (không có lực thể tích và lực biên), ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$(q_1, q_2) = (1{,}143 \quad 5{,}905).10^{-2}\ \text{cm}$$

5) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1: $\sigma_1 = 21000.\frac{1}{60}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}143 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 4\ \text{kN/cm}^2$

Thanh 2: $\sigma_2 = 21000.\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1{,}143 \times 10^{-2} \\ 5{,}905 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 25\ \text{kN/cm}^2$

6) Tính phản lực theo (3.38)

$$FL = -1050 \times 1{,}143 \times 10^{-2} + 1050 \times 5{,}905 \times 10^{-2} = -20\text{kN}$$

3.6.2.3. Phương pháp mô hình lò xo

Phương pháp mô hình lò xo thuận tiện cho việc lập trình để tính trên máy tính điện tử. Nó đơn giản ngay cả khi được áp dụng vào các ràng buộc nhiều điểm như trong phương trình (3..20). Ta sẽ nghiên cứu vấn đề này trong các trường hợp sau:

Trường hợp điều kiện biên với các chuyển vị cho trước.

Giả sử có điều kiện biên:

$$Q_1 = a_1$$

Trong đó: a_1 là chuyển vị cho trước dọc theo bậc tự do 1 ở gối tựa. Phương pháp mô hình lò xo trình bày như sau:

Gối tựa được mô hình là một lò xo có độ cứng C rất lớn. Giá trị độ cứng này sẽ nghiên cứu sau. Một đầu của lò xo chuyển vị một đoạn a_1 như trên hình (3.13). Chuyển vị Q_1 dọc theo bậc tự do 1 tại gối tựa xấp xỉ bằng a_1 do lực cản của kết cấu tương đối bé.

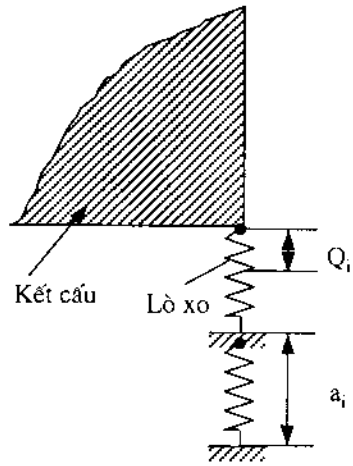
Độ giãn của lò xo là $(Q_1 - a_1)$. Năng lượng biến dạng của lò xo

$$U_1 = \frac{1}{2}C(Q_1 - a_1)^2 \qquad (3.41)$$

Thế năng toàn phần TNT bằng thế năng của kết cấu + thế năng của lò xo.

Kết hợp (3.30) và (3.41), ta có:

$$TNT = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} + \frac{1}{2}C(Q_1 - a_1)^2 - \mathbf{Q'F} \tag{3.42}$$



***Hình 3.13**. Mô hình lò xo tại gối tựa kết cấu*

Theo nguyên lý thế năng cực tiểu, ta triệt tiêu đạo hàm của TNT đối với Q_i (i = 1,2, ... N) :

$$\frac{dTNT}{dQ_i} = 0 \qquad (i = 1,2, ...N)$$

Sau các phép tính, ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} (K_{11}+C) & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & +C.a_1 \\ F_2 & \\ \vdots & \\ F_N & \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Qua trên, ta thấy rằng ứng với điều kiện biên $Q_1 = a_1$, độ cứng C rất lớn được cộng vào phần tử đầu tiên trên đường chéo chính của ma trận **K** và tích $C.a_1$ được cộng vào phần tử đầu tiên của vectơ **F**. Ta xác định giá trị các thành phần chuyển vị Q_i bằng cách giải hệ phương trình (3.43).

Phản lực men theo bậc tự do d_1 bằng lực của lò xo tác dụng lên kết cấu. Vì độ giãn của lò xo là $(Q_1 - a_1)$ nên phản lực:

$$R_1 = -C(Q_1 - a_1) \tag{3.44}$$

Phương pháp mô hình lò xo có thể tóm tắt như sau:

Giả sử có các điều kiện biên:

$$Q_{d_1} = a_1 \qquad Q_{d_2} = a_2 \ ..... \ Q_{d_2} = a_r$$

Bước 1: Thay đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** bằng cách cộng số C rất lớn vào các phần tử thứ d_1, d_2, ...d_r trên đường chéo chính của ma trận **K** (d_i là số thứ tự bậc tự do). Đồng thời, cộng tích $C.a_1$ vào F_{d1}, $C.a_2$ vào F_{d_2} ....., $C.a_r$ vào F_{dr} trong vectơ tải trọng **F**. Giải hệ phương trình $\mathbf{K^*Q^*} = \mathbf{F^*}$ trong đó $\mathbf{K^*}$ và $\mathbf{F^*}$ là những ma trận đã được biến đổi.

Bước 2: Sau khi đã xác định được các thành phần chuyển vị, tính ứng suất và biến dạng trong kết cấu.

Bước 3: Tính phản lực tại gối tựa theo công thức:

$$R_{di} = -C(Q_{di} - a_i) \ i = 1,2, ... \tag{3.45}$$

Cần chú ý rằng phương pháp mô hình lò xo có tính chất gần đúng. Độ chính xác, đặc biệt đối với phản lực, phụ thuộc vào cách chọn số C.

Cách chọn số C

Phương trình đầu tiên trong (3.43) có dạng:

$$(K_{11} + C)\, Q_1 + K_{12}\, Q_2 + \ldots\ldots\ldots + K_{1N}\, Q_N = F_1 + C.\, a_1 \qquad (3.46a)$$

Chia phương trình trên cho C, ta được:

$$\left(\frac{K_{11}}{C} + 1\right) Q_1 + \frac{K_{12}}{C} Q_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{K_{1N}}{C} Q_N = \frac{F_1}{C} + a_1 \qquad (3.46b)$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng khi C khá lớn so với các phần tử của ma trận K_{11}, K_{12}, ...K_{1N}, $Q_1 \approx a_1$. Cần chú ý rằng F_1 là tải trọng đặt tại gối tựa (nếu có) và tỷ số F_1/C thường rất bé. Có thể chọn số C như sau:

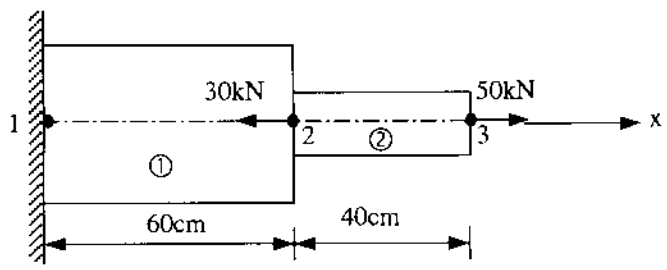
$$C = \max \left|K_{ij}\right| \times 10^8$$

$$1 \le i \le N \qquad (3.47)$$

$$1 \le j \le N$$

Kinh nghiệm cho thấy cách chọn thừa số 10^8, nói chung, thỏa mãn yêu cầu của máy tính điện tử.

Ví dụ 3.4: Cho hệ một chiều như trên hình (3.14)



Diện tích:
Thanh 1: 5 cm²
Thanh 2: 2 cm²
Môđun đàn hồi: 21000kN/cm²

Hình 3.14

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1

1) Căn cứ vào (3.19) xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 \\ & 1750 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1050 & -1050 \\ & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

2) Ghép các MTDC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1750 & -1750 & 0 \\ & \begin{array}{r} 1750 \\ +\ 1050 \\ \hline 2800 \end{array} & -1050 \\ & -1050 & 1050 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều, xác lập vectơ tải trọng (không có lực biên và lực thể tích):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và ma trận **F**

Vì số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước bằng 1 (ở đây, chuyển vị cho trước bằng 0) nên phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của ma trận **K** được cộng thêm số C và phần tử thứ nhất của vectơ tải trọng **F** được cộng thêm giá trị (C. chuyển vị tương ứng). Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận **K** bằng 2800. Chọn $C = 2800 \times 10^8$.

Vậy:

$$k(1, 1) = 1750 + 28 \times 10^{10} \qquad f(1) = 0 + 2800 \times 10^8 \times 0 = 0$$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Ta được giá trị các chuyển vị:

$$(q_1, q_2, q_3) = (7{,}14286 \times 10^{-12} \quad 1{,}143 \times 10^{-2} \quad 5{,}905 \times 10^{-2})\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

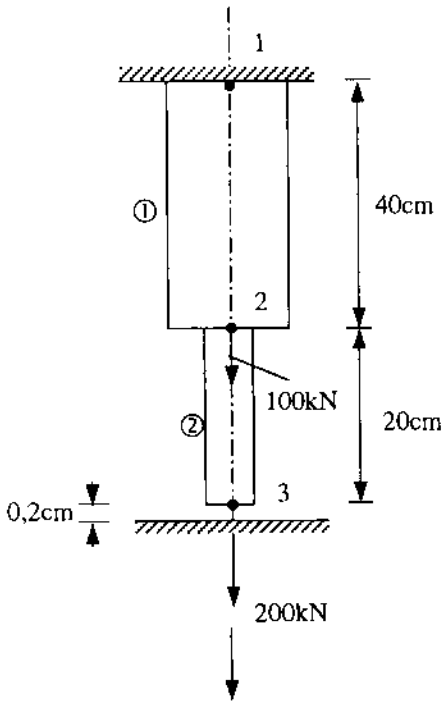
Thanh 1: $\sigma_1 = 21000.\frac{1}{60}[-1 \quad 1].\begin{bmatrix} 0 \\ 1,143 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 4\ kN/cm^2$

Thanh 2: $\sigma_2 = 21000.\frac{1}{40}[-1 \quad 1].\begin{bmatrix} 1,143 \times 10^{-2} \\ 5,905 \times 10^{-2} \end{bmatrix} = 25\ kN/cm^2$

7) Tính phản lực theo (3.38)

Tại nút 1: $fl(1) = -28 \times 10^{10}(7,14286 \times 10^{11} - 0) = -20$ kN

Ví dụ 3.5: Cho hệ một chiều như trên hình (3.15)



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Diện tích:
Thanh 1: 4 cm²
Thanh 2: 2 cm²

Hình 3.15

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất;
- Phản lực.

Giải: Số thanh: 2

Tổng số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3

Chuyển vị tương ứng (xem hình 3.15): 0; 0,2cm.

1) Căn cứ vào (3.19) tính các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 \\ & 2100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 \\ & 2100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2100 & -2100 & 0 \\ & \begin{array}{r} 2100 \\ +\ 2100 \\ \hline 4200 \end{array} & -2100 \\ & & 2100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều (không có lực thể tích và lực biên), xác lập vectơ tải trọng:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và **F**

Vì các chuyển vị cho trước xuất hiện tại BTD có số thứ tự 1 và 3 (hình 3.15), ta phải cộng giá trị C vào phần tử thứ nhất và phần tử thứ 3 trên đường chéo chính của ma trận **K**; cộng giá trị (C × chuyển vị cho trước) vào phần tử thứ nhất và phần tử thứ 3 của ma trận **F**.

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận K bằng 4200.

Ta chọn $C = 4200 \times 10^8. = 42 \times 10^{10}.$

Vậy: $k(1, 1) = 2100 + 42 \times 10^{10}$ $\quad k(3,3) = 2100 + 42 \times 10^{10}$

$f(1) = 0 + C.0$ $\quad f(3) = 200 + (42 \times 10^{10}.0,2)$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3) = (6{,}1905 \times 10^{-11}\ ;\ 0{,}124\ ;\ 0{,}2)\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1:

$$\sigma_1 = 21000.\frac{1}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0{,}124\end{bmatrix} = 65\ \text{kN/cm}^2$$

Thanh 2:

$$\sigma_2 = 21000.\frac{1}{20}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}124\\0{,}200\end{bmatrix} = 80\ \text{kN/cm}^2$$

7) Tính phản lực theo (3.45)

Tại nút 1: $fl(1) = -42 \times 10^{10}(6{,}1905 \times 10^{11} - 0) = -260\text{kN}$

Tại nút 3: $fl(3) = -42 \times 10^{10}(0{,}2 - 0{,}2) = -40\text{kN}$

3.6.2.4. Trường hợp ràng buộc nhiều điểm

Trong trường hợp gối tựa nằm nghiêng hoặc liên kết cứng, điều kiện biên có dạng.

$$\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} = \beta_0$$

Trong đó: β_0, β_1, β_2 là các hằng số đã biết. Phương pháp mô hình lò xo sẽ được áp dụng cho điều kiện này như sau:

Thế năng toàn phần có dạng:

$$TNT = \frac{1}{2}\mathbf{Q'KQ} + \frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} - \beta_0\right)^2 - \mathbf{Q'F} \qquad (3.48)$$

Trong đó: C là một số rất lớn. Vì C rất lớn, để TNT có giá trị cực tiểu, $(\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2})$ phải rất bé nghĩa là $\beta_1 Q_{d1} + \beta_2 Q_{d2} \approx \beta_0$ như ta mong muốn. Bằng cách triệt tiêu $\frac{dTNT}{dQ_i}(i = 1,2.....N)$, ta được các hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix}K_{d_1d_1} & K_{d_1d_2}\\K_{d_2d_1} & K_{d_2d_2}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}K_{d_1d_1} + C\beta_1^2 & K_{d_1d_2} + C\beta_1\beta_2\\K_{d_2d_1} + C\beta_1\beta_2 & K_{d_2d_2} + C\beta_2^2\end{bmatrix} \qquad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix}F_{d_1}\\F_{d_2}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}F_{d_1} + C\beta_0\beta_1\\F_{d_2} + C\beta_0\beta_1\end{bmatrix} \qquad (3.50)$$

Từ các phương trình $\partial TNT/\partial Q_{d_1} = 0$ và $\partial TNT/\partial Q_{d_2} = 0$ ta có:

$$\sum_j K_{d_{ij}} Q_j - F_{d_1} = R_{d_1} \quad \text{và} \quad \sum_j K_{d_{zj}} Q_j - F_{d2} = R_{d2}$$

Các phản lực R_{d_1} và R_{d_2} dọc theo các bậc tự do d_1 và d_2:

$$R_{d_1} = -\frac{\partial}{\partial Q_{d_1}}\left[\frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right)^2\right] \tag{3.51}$$

$$R_{d_2} = -\frac{\partial}{\partial Q_{d_2}}\left[\frac{1}{2}C\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right)^2\right] \tag{3.51b}$$

Sau khi đơn giản hóa các phương trình (3.51) ta được:

$$R_{d_1} = -C\beta_1\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right) \tag{3.52a}$$

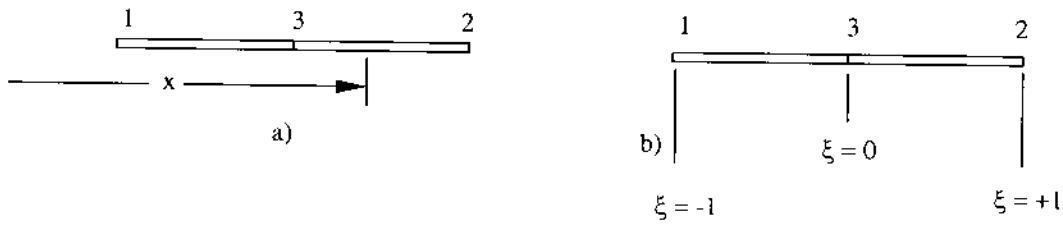
$$R_{d_2} = -C\beta_2\left(\beta_1 Q_{d_1} + \beta_2 Q_{d_2} - \beta_0\right) \tag{3.52b}$$

Các ràng buộc nhiều điểm là loại điều kiện biên tổng quát nhất, vì từ đó có thể suy ra các trường hợp đặc biệt khác.

§3.7. HÀM HÌNH DẠNG BẬC 2

Trong các phần trước, ta đã dùng hàm hình dạng tuyến tính để giải bài toán một chiều. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ta có thể dùng hàm hình dạng phi tuyến tính bậc 2 để được những kết quả tính toán chính xác hơn. Cách suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tương tự như đã làm trước đây.

Ta hãy xét một phần tử hữu hạn bậc hai 3 nút như trên hình (3.16a).



Hình 3.16. *Phần tử hữu hạn bậc 2 trong tọa độ x và tọa độ tự nhiên*

Số thứ tự các nút như sau: nút 1 ở bên trái, nút 2 ở bên phải và nút 3 ở giữa, nút này gọi là nút bên trong. Sở dĩ đưa nó vào để suy ra hàm hình dạng bậc 2. Gọi x là tọa độ của một điểm. Véc tơ chuyển vị $\mathbf{q} = [\, q_1\ q_2\ q_3]$ trong đó q_1, q_2, q_3 là các thành phần chuyển vị tại các nút 1, 2, 3 . Tọa độ x tại 1 điểm trong phần tử hữu hạn được biến đổi thành tọa độ tự nhiên như sau:

$$\xi = \frac{2\left(x - x_3\right)}{x_2 - x_1} \tag{3.53}$$

Từ phương trình trên, ta thấy rằng $\xi = -1$, 0 và +1 tại các nút tương ứng 1, 3, 2 (hình 3.16b).

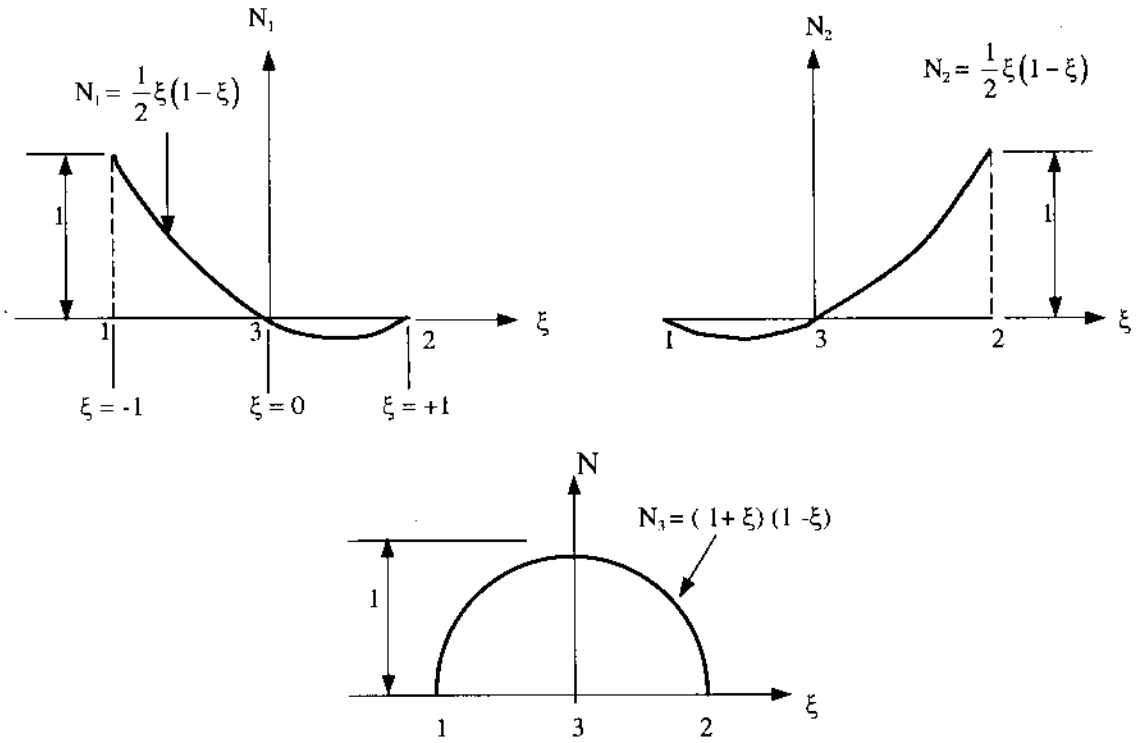
Bây giờ trong tọa độ tự nhiên ξ, ta định nghĩa các hàm hình dạng bậc 2 N_1, N_2, N_3 như sau:

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \tag{3.54a}$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1-\xi) \tag{3.54b}$$

$$N_3(\xi) = (1+\xi)(1-\xi) \tag{3.54c}$$

Hàm hình dạng N_1 bằng 1 tại nút 1 và bằng 0 tại các nút 2 và 3. Một cách tương tự, N_2 bằng 1 tại nút 2 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 3; N_3 bằng 1 tại nút 3 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 2. Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 biểu thị trên hình (3.17).



Hình 3.17. *Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3*

Ta suy ra các hàm hình dạng trên như sau. Chẳng hạn $N_1 = 0$ tại $\xi = 0$ và $N_1 = 0$ tại $\xi = 1$, vậy N_1 phải chứa tích $\xi(1-\xi)$ nghĩa là nó phải có dạng.

$$N_1 = c\xi(1-\xi).$$

Hằng số c xác định từ điều kiện $N_1 = 1$ tại $\xi = -1$, do đó $c = -\frac{1}{2}$. Cuối cùng, ta có công thức (3-54a). Các hàm hình dạng trên gọi là *hàm hình dạng Lagrange*.

Các thành phần chuyển vị trong phần tử hữu hạn được biểu thị qua các thành phần chuyển vị tại các nút.

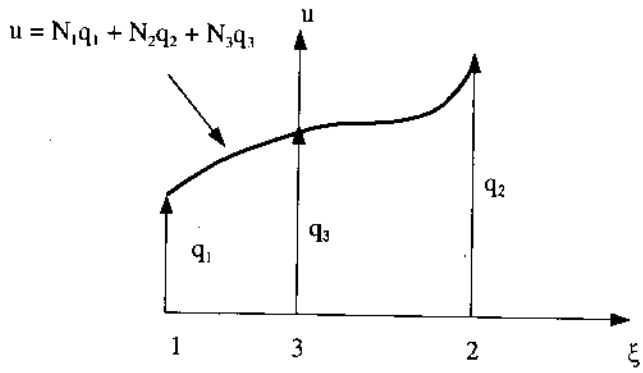
$$u = N_1q_1 + N_2q_2 + N_3q_3 \tag{3.53a}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{3.55b}$$

Trong đó: $\mathbf{N} = [N_1\ N_2\ N_3]$ là ma trận cấp 1×3;

$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3]'$ là vectơ chuyển vị cấp 3×1. Ta nhận thấy rằng tại nút 1, $N_1 = 1$, $N_2 = N_3 = 0$ do đó $u = q_1$. Một cách tương tự, $u = q_2$ tại nút 2 và $u = q_3$ tại nút 3. Vậy u trong (3.55a) là hàm nội suy bậc 2 đi qua các điểm q_1, q_2 và q_3 (hình 3.18).



Hình 3.18. *Hàm nội suy u*

Căn cứ vào (3.53), (3.54) và (3.55), ta có biểu thức biến dạng như sau:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$$

$$= \frac{2}{x_2 - x_1}\frac{du}{d\xi}$$

$$= \frac{2}{x_2 - x_1}\left[\frac{dN_1}{d\xi}\quad \frac{dN_2}{d\xi}\quad \frac{dN_3}{d\xi}\right].\mathbf{q}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{x_2 - x_1}\left[-\frac{1-2\xi}{2}\quad \frac{1+2\xi}{2}\quad -2\xi\right].\mathbf{q} \tag{3.56a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{3.56b}$$

$$\mathbf{B} = \frac{2}{x_2 - x_1}\left[-\frac{1-2\xi}{2}\quad \frac{1+2\xi}{2}\quad -2\xi\right] \tag{3.57}$$

Trong đó: ξ tính theo (3.53)

Theo định luật Húc, ta có ứng suất:

$$\sigma = E\,(\mathbf{Bq}) \tag{3.58}$$

Cần chú ý N_i là hàm hình dạng bậc 2, nên **B** trong (3.57) có tính chất tuyến tính đối với ξ. Điều này chứng tỏ *biến dạng và ứng suất biến đổi tuyến tính trong phần tử hữu hạn*, trong khi chúng là những hằng số nếu hàm hình dạng có tính chất tuyến tính (như trong các phần trước đã trình bày).

Bây giờ, ta xuất phát từ phương trình (2,83b) để suy ra ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn.

$$\mathbf{k}_e = A.E \int \mathbf{B'.B}.dx \tag{a}$$

Theo (3.53):

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L_e} \Rightarrow dx = \frac{L_e d\xi}{2} \tag{b}$$

Trong đó, L_e là chiều dài của phần tử hữu hạn. Thay (b) vào (a) ta có:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A.E.L_e}{2} \int \mathbf{B'B}\ \ d\xi \tag{c}$$

Thay **B** từ (3.57) vào (c) và tiến hành tính tích phân, ta được:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{3L_e} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{3.59}$$

Theo (2.84), ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{t}_e = A.\,f \int \mathbf{N'}dx + T \int \mathbf{N'}dx = \frac{A_e L_e f}{2} \int_{-1}^{1} \mathbf{N'}d\xi + \frac{T.L_e}{2} \int_{-1}^{1} \mathbf{N'}d\xi$$

Thay **N** từ (3.54) vào phương trình trên, ta có vectơ tải trọng của phần tử hữu hạn trong trường hợp tổng quát.

$$\mathbf{t}_e = A_e L_e f \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} + L_e.T \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{3.60}$$

Để được ma trận độ cứng tổng thể **K** và vectơ tải trọng tổng thể **F**, ta phải ghép các ma trận $\mathbf{k}_e$ và các ma trận $\mathbf{t}_e$ như đã làm trong phần trước.

Cuối cùng, giải hệ phương trình cân bằng tổng thể.

$$\mathbf{K.\,Q = F}$$

để xác định các thành phần chuyển vị và từ đó xác định ứng suất và biến dạng trong kết cấu.

§3.8. TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Trong mục này, ta nghiên cứu cách tính ứng suất do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong một vật liệu đàn hồi tuyến tính đồng tính trên mọi phương. Đây là bài toán ứng suất nhiệt.

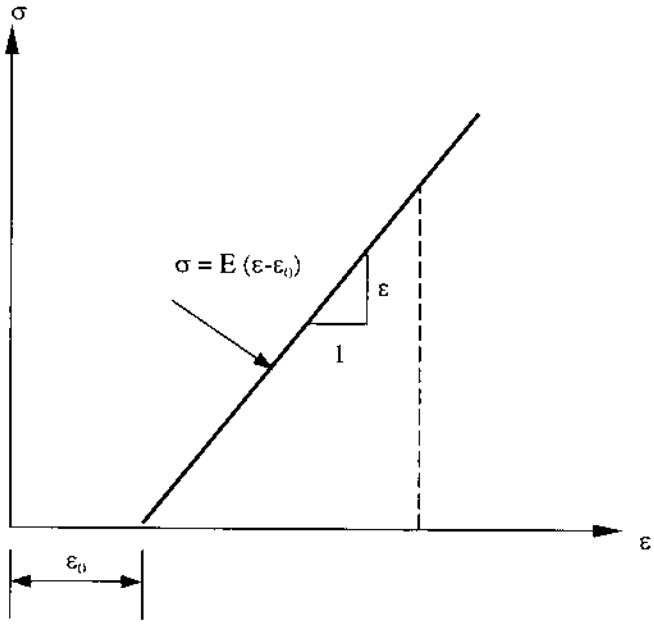
Giả sử đã biết độ biến thiên nhiệt độ Δt (x). Biến dạng ban đầu do nhiệt độ gây ra có thể viết:

$$\varepsilon_0 = \alpha \,.\, \Delta T \tag{3.61}$$

Trong đó, α là hệ số giãn nở do nhiệt.

Cần chú ý rằng khi $\Delta T > 0$, nhiệt độ tăng và khi $\Delta T < 0$ thì nhiệt độ giảm. Định luật ứng suất - biến dạng trong trường hợp có biến dạng ban đầu ε_0 biểu thị trên hình (3.21). Hệ thức ứng suất biến dạng có thể viết:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \tag{3.62}$$



Hình 3.19. *Định luật ứng suất biến dạng khi có ứng suất ban đầu do nhiệt gây ra*

Bây giờ ta suy ra biểu thức ma trận độ cứng và vectơ tải trọng tương đương trong trường hợp có tác dụng của nhiệt độ.

Từ công thức tổng quát (2.71) suy ra cho bài toán 1 chiều:

$$\delta U = \delta_\varepsilon'.\sigma.A.dx$$

Trong bài toán một chiều dV = Adx; **D** = E (mô đun đàn hồi).

Thay $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$ ta có:

$$\delta U = \int \delta_\varepsilon.E(\varepsilon - \varepsilon_0)Adx = \int \delta_\varepsilon.E\varepsilon Adx - \int \delta_\varepsilon.E.\varepsilon_0 Adx$$

Vì $\varepsilon = \mathbf{B}.\mathbf{q}$ nên $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\,\delta_q$ do đó:

$$\delta U = \delta'_q\, EA\, \mathbf{B}'.\,\varepsilon.\,\mathbf{q} \int dx - \delta'_q EA\varepsilon_0 \mathbf{B}' \int dx$$

$$= \delta'_q.(EAL\,\mathbf{B}'.\mathbf{B})\,\mathbf{q} - \delta'_q.(\mathbf{EA}\,\alpha.\Delta T.\mathbf{LB}') \qquad (a)$$

Mặt khác, từ (2.72), ta có:

$$\delta W_c = \iiint \delta'_u.\mathbf{f}\; dv + \iint \delta'_u.\mathbf{T}\; ds$$

Trong bài toán một chiều: $dV = Adx$, $ds = dx$:

Vì $\mathbf{u} = \mathbf{N}.\mathbf{q}$ nên $\delta_u = \mathbf{N}\,.\,\delta_q$ do đó:

$$\delta W_c = \delta'_q\,.\,f\,.\,A \int \mathbf{N}.dx + \delta_q T \int \mathbf{N}'dx \qquad (b)$$

Áp dụng nguyên lý công ảo, từ (a) và (b) ta có:

$\delta U = \delta W$ do đó

$$(EAL\mathbf{B}'\mathbf{B})\mathbf{q} = EA\,\alpha\Delta T.L\mathbf{B}' + A.f \int \mathbf{N}'dx + T \int \mathbf{N}'dx \qquad (c)$$

Phương trình trên có thể viết: $\mathbf{k}_c\,.\,\mathbf{q} = \mathbf{f}$

Trong đó: **k** - ma trận độ cứng của phần tử hữu hạn, đã được suy ra từ (3.18) và (3.19).

f - vectơ tải trọng.

Hai số hạng cuối cùng trong vế phải của (c) đã suy ra từ (3.20) và (3.21). Số hạng đầu tiên ở vế phải của (c).

$$EA\alpha\Delta T.\,L.\,\mathbf{B}' = E.A\alpha.\Delta T.L.\frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix} = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix}$$

Từ các kết quả trên, ta có vectơ tải trọng

$$\mathbf{f} = (E_eA_e\alpha\,\Delta T\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix} + \frac{A_eL_ef_e}{2}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} + \frac{T_eL_e}{2}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} \qquad (3.63)$$

Trong đó: $$\mathbf{f}_n = E_eA_e\alpha\,\Delta T\begin{bmatrix}-1 \\ 1\end{bmatrix} \qquad (3.64)$$

$\mathbf{f}_n$ gọi là vectơ tải trọng do nhiệt.

Ta ghép các ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ và vectơ tải trọng **f** như đã làm trong các phần trước để được hệ phương trình cân bằng tổng thể.

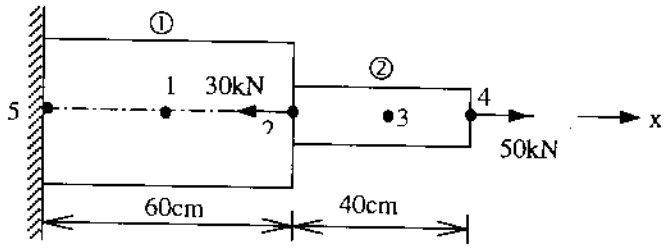
$$\mathbf{K}\,.\,\mathbf{Q} = \mathbf{F}$$

Giải hệ phương trình trên để xác định giá trị các thành phần chuyển vị, từ đó tính biến dạng trong kết cấu. Ứng suất tính theo công thức:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) = E(\mathbf{B}.\mathbf{q} - \alpha.\Delta T)$$

hay $$\sigma_e = \frac{E}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{q}_e - E\alpha\Delta T \qquad (3.65)$$

Ví dụ 3.6: Cho hệ một chiều như trên hình (3.20)



Môđun đàn hồi: 21000kN/cm²
Diện tích:
Thanh 1: 5 cm²
Thanh 2: 2 cm²

Hình 3.20

Dùng phương pháp hàm hình dạng bậc 2 tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 4 (hình 3.20)

Tổng số BTD: 5

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 5 (hình 3.20)

1) Căn cứ vào (3.59), xác lập các ma trận độ cứng riêng:

Thanh 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4083,33 & 583,33 & -4666,67 \\ & 4083,33 & -4666,67 \\ & & 9333,33 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Thanh 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2450 & 350 & -2800 \\ & 2450 & -2800 \\ & & 5600 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4333,33 & -4666,67 & 0 & 0 \\ & 4083,33 & -2800 & 350 \\ & & 5600 & -2800 \\ \text{đối xứng} & & & 2450 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

3) Căn cứ vào các tải trọng tác dụng lên hệ một chiều, ta có vectơ tải trọng (không có lực biên và lực thể tích):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

4) Giải hệ phương trình

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0{,}571\ ;\ 1{,}143\ ;\ 5{,}905) \times 10^{-2}\ \text{cm}$$

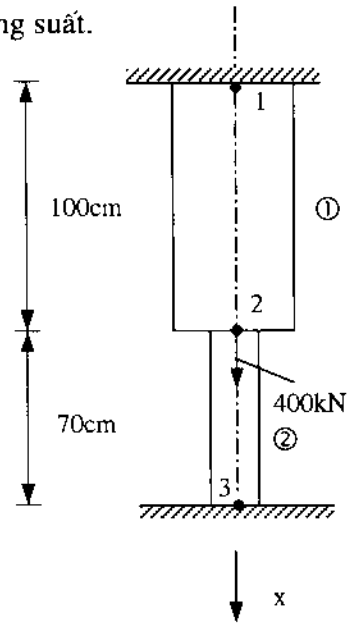
6) Tính ứng suất theo (3.17)

Tại nút 1: $\sigma(1) = 4\ \text{kN/cm}^2$

Tại nút 3: $\sigma(3) = 25\ \text{kN/cm}^2$

Ví dụ 3.7: Hệ một chiều như trên hình (3.21). Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Diện tích:
Thanh 1: 6 cm^2
Thanh 2: 4 cm^2
Tỷ trọng: 0,0785 kN/cm^3
Hệ số giãn nở: 11,7 x 10^{-6}/^{0}C
Số gia nhiệt độ: 60^0

Hình 3.21

Giải: Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3

Chuyển vị tương ứng : 0; 0

1) Xác lập các MTĐC riêng theo (3.19)

Thanh 1:
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1260 & -1260 \\ & 1260 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:
$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1200 & -1200 \\ & 1200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

2) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1260 & -1260 & 0 \\ & \begin{array}{r} 1260 \\ + \\ \underline{1200} \\ 2460 \end{array} & -1200 \\ \text{đối xứng} & & 1200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

3) Căn cứ vào (3.63) xác lập vectơ tải trọng tổng thể trường hợp xét cả trọng lượng bản thân và tác dụng của nhiệt độ:

Thanh 1:
$$\begin{bmatrix} 23,55 - 88,452 = -64,902 \\ 23,55 + 88,452 = 112,002 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:
$$\begin{bmatrix} 10,99 - 58,968 = -47,978 \\ 10,99 + 58,968 = 69,958 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array}$$

Sau khi ghép các vectơ tải trọng (xét cả tải trọng tác dụng bên ngoài), ta có vectơ tải trọng tổng thể:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -64,902 \\ 112,002 - 47,978 + 400 = 464,024 \\ 69,958 \end{bmatrix}$$

4) Biến đổi ma trận **K** và ma trận **F**

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong ma trận **K** bằng 2460. Chọn số C = $2460 \times 10^8 = 246 \times 10^9$. Các phần tử thứ nhất và thứ 3 trên đường chéo chính của ma trận **K** cần được cộng thêm vào số C. Các phần tử thứ nhất và thứ 3 trong ma trận **F** cần được cộng thêm giá trị (C × chuyển vị tương ứng) nhưng vì chuyển vị cho trước đều triệt tiêu nên các thành phần của ma trận **F** không thay đổi. Cuối cùng:

$$k(1, 1) = 1260 + 246 \times 10^9 ; \qquad k(3,3) = 1200 + 246 \times 10^9$$

5) Căn cứ vào ma trận **K** và ma trận **F** đã được biến đổi, giải hệ phương trình:

$$\mathbf{K.Q} = \mathbf{F}$$

Kết quả tính:

$$(q_1, q_2, q_3) = (0\ ;\ 0{,}189\ ;\ 0)\text{cm}$$

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

Thanh 1:

$$\sigma_1 = \frac{21000}{100}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0\\0{,}189\end{bmatrix} = 39{,}612\ \text{kN/cm}^2$$

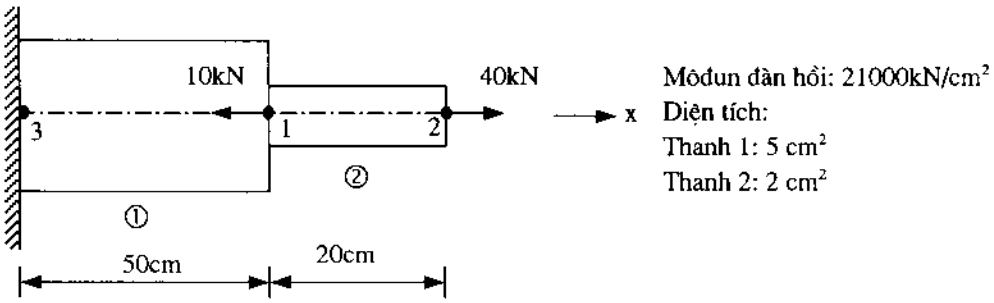
Thanh 2:

$$\sigma_2 = \frac{21000}{70}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}0{,}189\\0\end{bmatrix} = -56{,}588\ \text{kN/cm}^2$$

§3.9. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN MỘT CHIỀU

3.9.1. Thuật toán giải bài toán một chiều dùng phương pháp loại trừ (CTR1)

Lấy ví dụ trên hình (3.22)



Hình 3.22

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị: 2

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Tổng số BTD: 3

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Tải trọng: -10; 40

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD	
				d_1	d_2
1	50	5	21000	3	1
2	20	2	21000	1	2

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.19)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Xác lập vectơ tải trọng

Nếu có cả lực thể tích và nhiệt độ tác dụng thì dùng công thức (3.63).

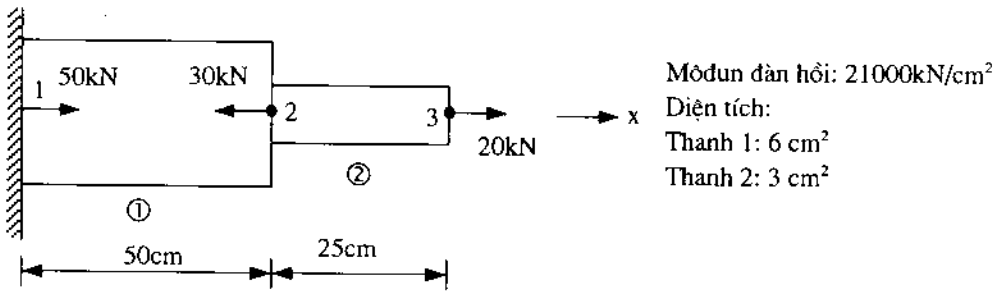
5) Giải hệ phương trình **K.Q = F**

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.38)

3.9.2. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều dùng phương pháp mô hình lò xo (CTR2)

Lấy ví dụ trên hình (3.23)



Hình 3.23

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị (kể cả chuyển vị cho trước): 3

Tổng số BTD: 3

Số BTD có chuyển vị cho trước: 1

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1

Chuyển vị cho trước tương ứng: 0

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Cường độ lực thể tích: 0

Thành phần tải trọng: 50; -30; 20

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD	
				d_1	d_2
1	50	6	21000	1	2
2	25	3	21000	2	3

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.19)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Biến đổi các ma trận **K** và **F** như đã làm trong ví dụ (3.4)

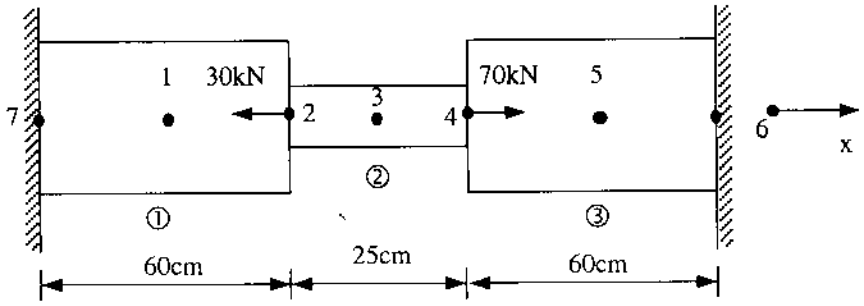
5) Giải hệ phương trình **K*.Q = F***

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.45)

3.9.3. Thuật toán lập trình giải bài toán một chiều dùng hàm hình dạng bậc 2 (CTR3)

Lấy ví dụ trên hình (3.24)



Hình 3.24

1) Nhập số liệu

Số thanh :2

Số BTD có chuyển vị : 5

Tổng số BTD: 7

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 2

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6; 7

Cường độ lực biên: 0

Hệ số giãn nở: 0

Số gia nhiệt độ: 0

Tỷ trọng: 0

Thành phần tải trọng: 0; -30; 0; 70; 0

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môdun đàn hồi (kN/cm^2)	Số thứ tự BTD		
				d_1	d_2	d_3
1	60	6	21000	7	2	1
2	40	3	21000	2	4	3
3	60	6	21000	4	6	5

2) Xác định các MTĐC riêng theo (3.59)

3) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4) Xác lập vectơ tải trọng. Nếu có lực biên, lực thể tích, nhiệt độ tác dụng thì căn cứ vào (3.63)

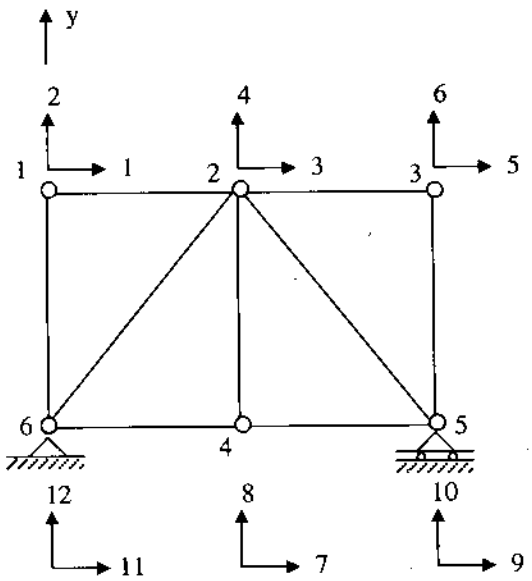
5) Giải hệ phương trình **K.Q = F**

6) Tính ứng suất theo (3.15) và (3.17)

7) Tính phản lực theo (3.38)

Chương 4
HỆ GIÀN

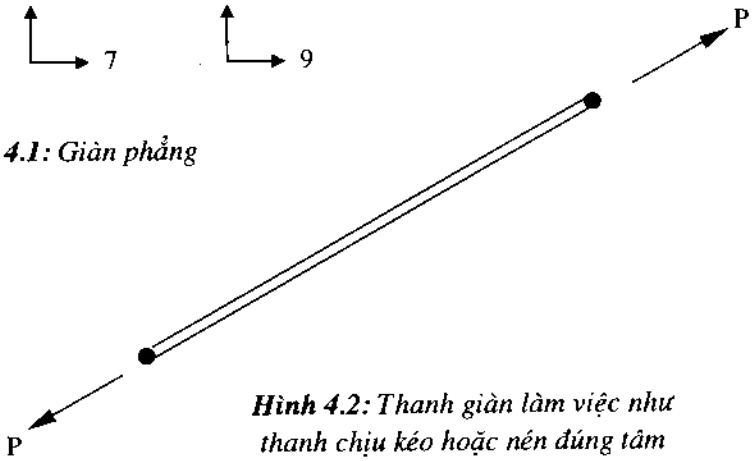
§4.1. KHÁI NIỆM



Hình 4.1: Giàn phẳng

Giàn là kết cấu gồm các thanh được liên kết với nhau bằng 2 khớp ở 2 đầu (hình 4.1). Điểm quy tụ của các thanh giàn gọi là *nút giàn*. Trong tính toán, người ta thường bỏ qua trọng lượng của thanh giàn, đưa ra giả thiết tải trọng đặt tại các nút giàn và nút giàn là một khớp lý tưởng.

Vì những lẽ trên, thanh giàn làm việc như một thanh chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm (hình 4.2).



Hình 4.2: Thanh giàn làm việc như thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm

Nói một cách khác, lực dọc, ứng suất và biến dạng trùng với trục của thanh gian và ta lại trở về bài toán kết cấu một chiều như đã trình bày trong chương 3.

Trong cơ học kết cấu, ta dùng 2 phương pháp tính giàn tĩnh định: phương pháp tách nút và phương pháp mặt cắt. Tuy nhiên, vẫn không tính được chuyển vị tại các nút giàn. Đối với giàn siêu tĩnh thì việc tính toán lại càng phức tạp hơn.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta xem các thanh giàn là những phần tử một chiều (như đã giải thích ở trên). Với phương pháp này, ta vừa xác định được các thành phần chuyển vị tại các nút giàn, vừa xác định được ứng suất và nội lực trong các thanh giàn. Nó có thể áp dụng cho giàn tĩnh định cũng như giàn siêu tĩnh.

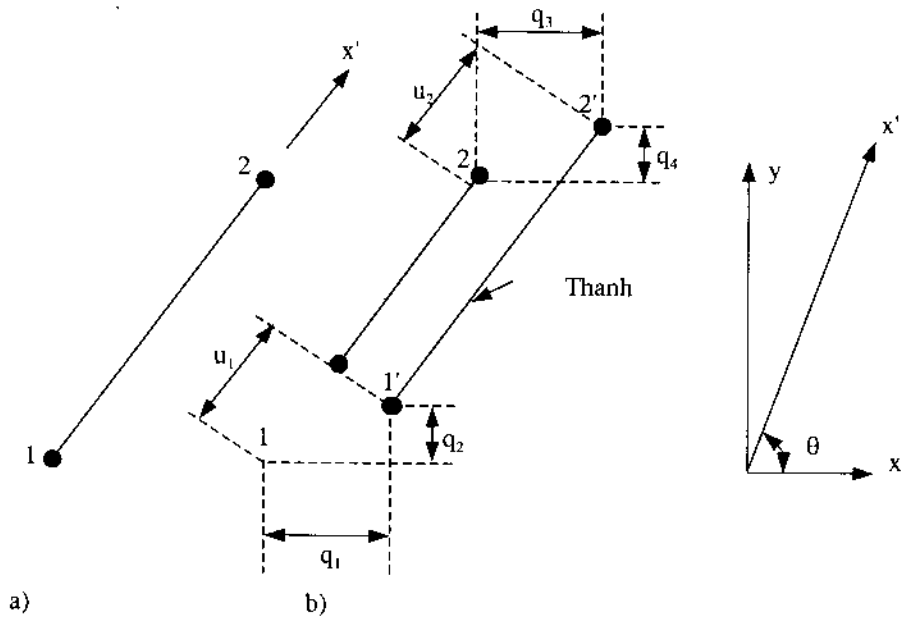
Dưới đây, ta sẽ nghiên cứu cách tính 2 loại giàn: giàn phẳng và giàn không gian.

§4.2. GIÀN PHẲNG

4.2.1. Hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể

Trong giàn phẳng, tải trọng và các thanh giàn cùng nằm trong một mặt phẳng. Ta còn gọi giàn phẳng là *giàn 2 chiều*. Khác với kết cấu 1 chiều đã nghiên cứu trong chương ba, ở đây, các thanh giàn có các hướng khác nhau. Vì vậy, phải đưa vào 2 hệ tọa độ: *hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể.*

Một thanh giàn phẳng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể, biểu thị như trên hình (4.3). Trong hệ tọa độ cục bộ, mỗi thanh giàn có 2 đầu 1 và 2. Gọi x' là trục của thanh giàn (tức hệ trục tọa độ cục bộ), x và y là hệ trục tọa độ tổng thể. Chiều dương của trục x' đi từ đầu 1 đến đầu 2. Trong hệ tọa độ tổng thể, mỗi nút giàn có 2 bậc tự do d_1 (trên phương x) và d_2 (trên phương y). Để tiện cho việc lập trình, số thứ tự bậc tự do tại mỗi nút giàn tính như sau:



Hình 4.3: *a) Thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ;*
b) Thanh giàn trước và sau khi biến dạng trong hệ tọa độ tổng thể.

Tại nút i: $d_1 = 2i - 1$ (trên phương x)

$d_2 = 2i$ (trên phương y) (4.1)

Số thứ tự các bậc tự do biểu thị trên hình (4.1)

Các thành phần chuyển vị có các chỉ số như số thứ tự bậc tự do tương ứng. Chẳng hạn tại nút 4 trên hình (4.1), các thành phần chuyển vị.

Men theo bậc tự do 7 là Q_7

Men theo bậc tự do 8 là Q_8

Giả sử u_1 và u_2 là các chuyển vị dọc trục tại đầu 1 và đầu 2 của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ (hình 4.3b).

Ta có vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{U} = [u_1 \quad u_2]' \tag{4.2}$$

Vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.3b) là:

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4]' \tag{4.3}$$

Theo quan hệ hình học trên hình (4.3), hệ thức giữa các chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ và chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$U_1 = q_1\cos\theta + q_2\sin\theta \tag{4.4a}$$

$$U_2 = q_3\cos\theta + q_4\sin\theta \tag{4.4b}$$

Đặt côsin định hướng $l = \cos\theta$, $m = \cos\phi$ (= $\sin\theta$); các côsin định hướng này chính là côsin của các góc tạo thành bởi trục x' và các trục x, y. Dưới dạng ma trận, các phương trình (4.4a) và (4.4b) có thể viết:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Rq} \tag{4.5}$$

Trong đó, **R** gọi là *ma trận xoay* hoặc *ma trận biến đổi*. Nó có dạng:

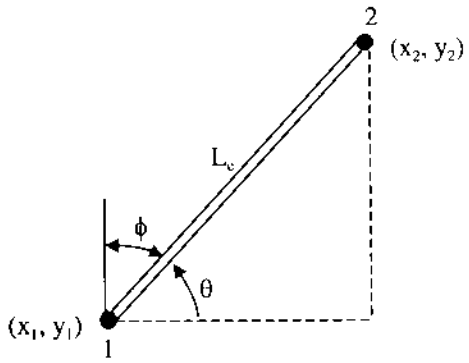
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Các côsin định hướng và chiều dài của thanh giàn tính theo hình (4.4). Giả sử (x_1, y_1) và (x_2, y_2) là tọa độ của các nút 1 và 2. Ta có:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \tag{4.7}$$

Trong đó: L_e là chiều dài của thanh giàn.

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4.8}$$



Hình 4.4: *Các côsin định hướng*

4.2.2. Ma trận độ cứng của thanh giàn

Như trong phần trên đã trình bày, mỗi thanh giàn là một kết cấu một chiều, do đó có thể vận dụng các công thức trong chương một và chương ba để tính ma trận độ cứng của thanh giàn:

Theo (3.19), ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{k}_e = \frac{A_e Ee}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Mặt khác, vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một), ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể tính theo công thức (1.43):

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}'.\mathbf{k}_e.\mathbf{R} \tag{4.10a}$$

Thay (4.6), (4.9) vào (4.10a), ta được:

$$K_e = \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix} \times \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K}_e = \frac{E_e A_e}{L_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Đối với giàn, trong vectơ tải trọng, không xét lực thể tích và lực biên, chỉ có các tải trọng đặt tại các nút giàn trên phương x và phương y, số thứ tự của chúng như đã trình bày trong 4.2.1.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng $\mathbf{K}_e$ và các tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \tag{4.11}$$

Ta giải hệ phương trình trên để xác định giá trị các thành phần chuyển vị tại các nút giàn, từ đó tính ứng suất trong các thanh giàn.

4.2.3. Tính ứng suất

Vì mỗi thanh giàn là một kết cấu một chiều (chương ba), ứng suất tính theo công thức:

$$\sigma = E.\varepsilon \tag{4.12a}$$

Trong đó: ε là biến dạng tỷ đối (trên đơn vị dài) của thanh giàn.

Từ hình (4.3), ta có:

$$\varepsilon = \frac{U_2 - U_1}{L_e}$$

do đó:
$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix} \tag{4.12b}$$

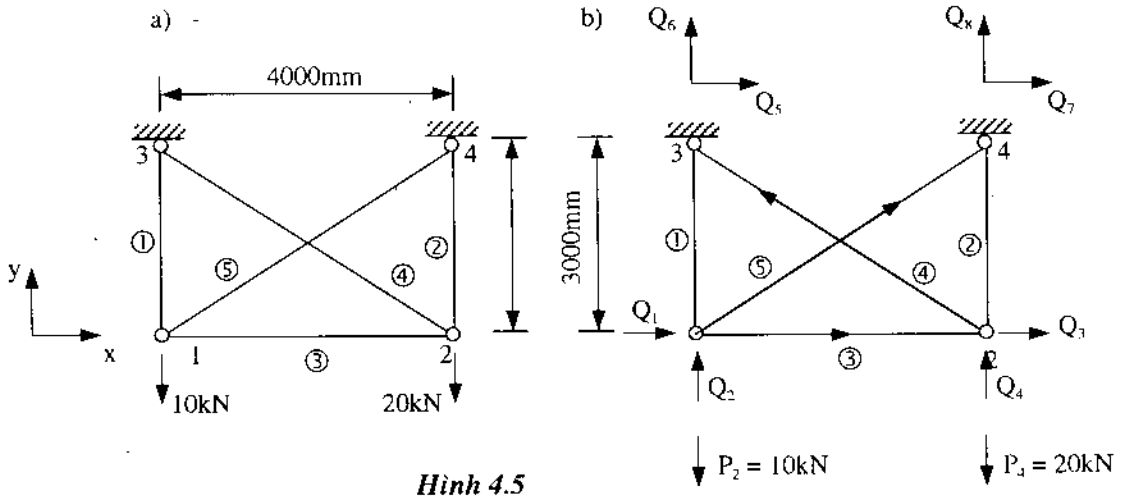
Theo (4.5):
$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{R.\,q} \tag{4.12c}$$

Thay **R** từ (4.6) vào (4.12c):

$$\sigma = \frac{E_e}{L_e}\begin{bmatrix}-l & -m & l & m\end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{4.13}$$

Cần chú ý rằng ứng suất σ có dấu dương khi thanh giàn chịu kéo và có dấu âm khi thanh giàn chịu nén.

Ví dụ 4.1:



Hình 4.5

Cho 1 giàn phẳng với kích thước và tải trọng như trên hình (4.5a). Diện tích tiết diện của các phần tử 1 và 2 bằng 2000m^2, của các phần tử còn lại là 600mm^2. E = 210kN/mm^2.

Xác định ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn;

Ghép các ma trận độ cứng trên để được ma trận độ cứng tổng thể **K;**

Dùng phương pháp loại trừ, tính chuyển vị tại các nút;

Tính ứng suất trong mỗi thanh giàn;

Tính phản lực tại các gối tựa.

Giải:

Trước hết, căn cứ vào (4.1) ta xếp số thứ tự các bậc tự do tại các nút như trên hình (4.5b). Vectơ chuyển vị tổng thể:

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ Q_6\ Q_7\ Q_8]'$$

Điều kiện biên: $Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = 0.$

Vectơ tải trọng: $\mathbf{F} = [0 \quad P_2 \quad 0 \quad P_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7 \quad R_8]'$

Trong đó: P_2 và P_4 - tải trọng thẳng đứng đặt tại các nút 1 và 2;

R_5, R_6, R_7, R_8 - các phản lực tại các gối tựa 3 và 4.

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	y
1	0	0
2	4000	0
3	0	3000
4	4000	3000

Số thứ tự bậc tự do

Nút	u	v
1	1	2
2	3	4
3	5	6
4	7	8

Số thứ tự bậc tự do tại đầu 1 và đầu 2.

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	1	3
2	2	4
3	1	2
4	2	3
5	1	4

Đặc trưng hình học của các phần tử.

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	L	l	m	A	$\frac{AE}{L}$
1	0	3000	3000	0	1,0	2000	140
2	0	3000	3000	0	1,0	2000	140
3	4000	0	4000	1,0	0	600	31,5
4	-4000	3000	5000	-0,8	0,6	600	25,2
5	4000	3000	5000	0,8	0,6	600	25,2

a) Ma trận độ cứng của các thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể:

Căn cứ vào (4.10), ta có:

Phần tử 1:

$$K_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -140 & 0 & 140 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$K_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -140 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -140 & 0 & 140 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Phần tử 3:

$$K_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 31,5 & 0 & -31,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -31,5 & 0 & 31,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Phần tử 4:

$$K_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 16,13 & -12,10 & -16,13 & 12,10 \\ -12,10 & 9,07 & 12,10 & -9,07 \\ -16,13 & 12,10 & 16,13 & -12,10 \\ 12,10 & -9,07 & -12,10 & 9,07 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Phần tử 5:

$$K_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 16,13 & 12,10 & -16,13 & -12,10 \\ 12,10 & 9,07 & -12,10 & -9,07 \\ -16,13 & -12,10 & 16,13 & 12,10 \\ -12,10 & -9,07 & 12,10 & 9,07 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

b) Sau khi ghép các ma trận trên, ta có ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
\mathbf{K} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\begin{pmatrix}
\begin{array}{c} 0 \\ 31{,}5 \\ \underline{16{,}13} \\ 47{,}63 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \underline{12{,}10} \\ 12{,}10 \end{array} & -31{,}5 & 0 & 0 & 0 & -16{,}18 & -12{,}10 \\
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \underline{12{,}10} \\ 12{,}10 \end{array} & \begin{array}{c} 140 \\ 0 \\ \underline{9{,}07} \\ 149{,}07 \end{array} & 0 & 0 & 0 & -140 & -12{,}10 & -9{,}07 \\
-31{,}5 & 0 & \begin{array}{c} 0 \\ 31{,}5 \\ \underline{16{,}13} \\ 47{,}63 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -12{,}10 \end{array} & -16{,}13 & 12{,}10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{array}{c} 0 \\ \underline{-12{,}10} \\ -12{,}10 \end{array} & \begin{array}{c} 140 \\ \underline{9{,}07} \\ 149{,}07 \end{array} & 12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 \\
0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 & \begin{array}{c} 0 \\ 16{,}13 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -12{,}10 \end{array} & 0 & 0 \\
0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 & \begin{array}{c} 0 \\ \underline{-12{,}10} \\ -12{,}10 \end{array} & \begin{array}{c} 140 \\ \underline{9{,}07} \\ 149{,}07 \end{array} & 0 & 0 \\
-16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} 0 \\ \underline{16{,}13} \\ 16{,}13 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \underline{12{,}10} \\ 12{,}10 \end{array} \\
-12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 & 0 & 0 & \begin{array}{c} 0 \\ \underline{12{,}10} \\ 12{,}10 \end{array} & \begin{array}{c} 140 \\ \underline{9{,}07} \\ 149{,}07 \end{array}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
$$

Vậy:

$$
K = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
47{,}63 & 12{,}10 & -31{,}5 & 0 & 0 & 0 & -16{,}13 & -12{,}10 \\
12{,}10 & 149{,}07 & 0 & 0 & 0 & -140 & -12{,}10 & -9{,}07 \\
-31{,}5 & 0 & 47{,}63 & -12{,}10 & -16{,}13 & 12{,}10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -12{,}10 & 149{,}07 & 12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 \\
\hline
0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 & 16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 \\
0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 & -12{,}10 & 149{,}07 & 0 & 0 \\
-16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16{,}13 & 12{,}10 \\
-12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 & 0 & 0 & 12{,}10 & 149{,}07
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
$$

(4.14)

Để tính chuyện vị và phản lực, ta chia ma trận độ cứng tổng thể **K** trong (4.14) thành 4 khối M_1, M_2, M_3, M_4. Hệ phương trình cân bằng tổng thể của toàn hệ có thể viết:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\left[\begin{array}{c|c} M_1 & M_2 \\ \hline M_3 & M_4 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ \hline Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -20 \\ \hline R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}
\qquad (4.15)
$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận chia khối, ta được các hệ thức ma trận sau:

$$
\begin{bmatrix} 47{,}63 & 12{,}10 & -31{,}5 & 0 \\ 12{,}10 & 149{,}07 & 0 & 0 \\ -31{,}5 & 0 & 47{,}63 & -12{,}10 \\ 0 & 0 & -12{,}10 & 149{,}07 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} \qquad (4.16)
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -16{,}13 & 12{,}10 \\ 0 & -140 & 12{,}10 & -9{,}07 \\ -16{,}13 & -12{,}10 & 0 & 0 \\ -12{,}10 & -9{,}07 & 0 & -140 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{bmatrix} \qquad (4.17)
$$

c) Tính chuyển vị tại các nút

Giải hệ phương trình (4.16), ta được giá trị các thành phần chuyển vị.

$$\mathbf{Q} = [Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4]' = 10^{-2}[-1,12\quad -6,62\quad -4,24\quad -13,76]\ \text{mm}$$

d) Tính ứng suất trong các thanh giàn theo (4.13)

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_3 - q_1)l_i - (q_4 - q_2)m_i\right]$$

Phần tử 1:

$$\sigma_1 = \frac{210 \times 10^{-2}}{3000}\left[0 - (0 + 6,62)\right] = -4,634 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma_2 = \frac{210 \times 10^{-2}}{3000}\left[0 - (0 + 13,76)\right] = -9,632 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 3:

$$\sigma_3 = \frac{210 \times 10^{-2}}{4000}\left[(-4,24 + 1,12) \times 1,0 + 0\right] = -1,638 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 4:

$$\sigma_4 = \frac{210 \times 10^{-2}}{5000}\left[(0 + 4,24) \times (-0,8) + (0 + 13,76) \times 0,6\right]$$

$$= 2,043 \times 10^{-3}\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 5:

$$\sigma_5 = \frac{210 \times 10^{-2}}{5000}\left[(0 + 4,24) \times 0,8 + (0 + 13,76) \times 0,6\right]$$

$$= 4,892\ \text{kN/mm}^2$$

e) Tính phản lực theo (4.17)

$$R_5 = -16,13 \times 10^{-2}(-4,24) + 12,10 \times 10^{-2}(-13,76) = -0,982\text{kN}$$

$$R_6 = 10^{-2}[-140 \times (-6,62) + 12,10 \times (-4,24) - 9,07 \times (-13,76)] = 10\text{kN}$$

$$R_7 = 10^{-2}[-16,13 \times (-1,12) - 12,10 \times (-6,62)] = 0,982\text{kN}$$

$$R_8 = 10^{-2}[-12,10 \times (-1,12) - 9,07 \times (-6,62) - 140 \times (-13,76)] = 20\text{kN}$$

4.2.4. Tác dụng của nhiệt độ và sự chế tạo không chính xác

4.2.4.1. Trường hợp tác dụng của nhiệt độ.

Trong chương 3, ta đã suy ra công thức tính vectơ tải trọng tương đương trong trường hợp tác dụng của nhiệt độ (công thức 3.64):

$$f^*_{td} = EA\alpha\Delta T\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Trong đó: α - hệ số giãn nở do nhiệt độ;

ΔT - độ biến thiên (tăng hoặc giảm) của nhiệt độ.

Công thức trên áp dụng cho kết cấu một chiều. Đối với giàn, nó chỉ áp dụng cho mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ.

Bây giờ, ta sẽ biểu thị (4.18) trong hệ tọa độ tổng thể. Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có:

$$\mathbf{U'f^*_{td} = q'f_{td}} \quad (4.19)$$

Trong đó: $\mathbf{U'}$ - vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{f^*_{td}}$ - vectơ tải trọng tương đương trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{q}$ - vectơ chuyển vị của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể;

$\mathbf{f_{td}}$ - vectơ tải trọng tương đương trong hệ tọa độ tổng thể,

Theo (4.5) : $\mathbf{U = Rq}$

Thay hệ thức trên vào (4.19).

$$\mathbf{q'R'f^*_{td} = q'f_{td}} \quad (4.20)$$

do đó:

$$\mathbf{f_{td} = R'f^*_{td}} \quad (4.21)$$

Thay **R** từ (4.6) vào (4.21) và (4.18):

$$\mathbf{f^*_{td}} = E_cA_c\alpha.\Delta T\begin{bmatrix}-l\\-m\\l\\m\end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ sẽ được ghép với các tải trọng khác để được vectơ tải trọng tổng thể **F**.

Sau khi xác định các thành phần chuyển vị, ta tính ứng suất.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (4.23)$$

Kết hợp với công thức (4.13), ta có:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix}-l_i & -m_i & l_i & m_i\end{bmatrix}.\mathbf{q}_i - E_i.\alpha.\Delta T \quad (4.24)$$

Trong đó: chỉ số i ứng với thanh giàn thứ i:

4.2.4.2. Trường hợp chế tạo không chính xác

Một thanh giàn chế tạo không chính xác có nghĩa là khi lắp ráp, thanh đó ngắn hơn hoặc dài hơn so với chiều dài quy định trong thiết kế. Để thanh có chiều dài quy định, ta

kéo giãn nó ra hoặc đập co vào một đoạn Δ. Điều này tương đương với việc cho tác dụng lên thanh giàn độ biến thiên nhiệt độ.

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i . L_i} \tag{4.25}$$

Vậy bài toán chế tạo không chính xác được đưa về bài toán tác dụng của nhiệt độ.

Ví dụ 4.2: Đầu đề giống ví dụ (4.1) nhưng ngoài tải trọng, còn có tác dụng của nhiệt độ. Độ biến thiên của nhiệt độ bằng 20^0, $\alpha = 10 \times 10^{-6}/^0C$.

Tính các thành phần chuyển vị;

Tính ứng suất trong các thanh giàn.

Giải:

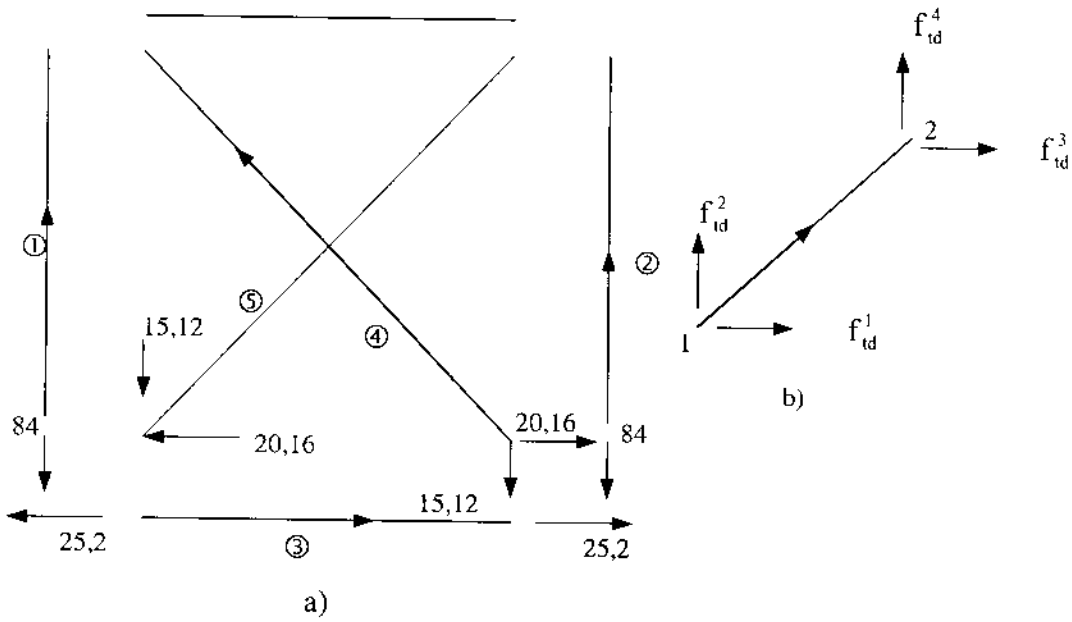
Ta áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để giải bài toán này nghĩa là chuyển vị bằng tổng của chuyển vị đã tính trong ví dụ (4.1) (do tải trọng) và chuyển vị tính trong ví dụ 4.2 (do nhiệt độ). Đối với ứng suất, ta cũng làm tương tự.

Các số liệu ban đầu đã thống kê trong ví dụ (4.1). Đồng thời, ma trận độ cứng tổng thể **K** cũng đã tính trong ví dụ đó.

Bây giờ chỉ xét tác dụng của nhiệt độ. Áp dụng (4.22), ta có:

$$f^i_{cd} = E_i A_i . \alpha . \Delta T[-l_i \quad -m_i \quad l_i \quad m_i]'$$

Trong đó: chỉ số i áp dụng cho thanh giàn thứ i.



Hình 4.6: *Tải trọng tương đương do nhiệt độ*

Phần tử 1: $f_{td}^1 = 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 2000 \times 0 = 0$

$f_{td}^2 = 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20 \times 2000 \times (-1,0) = -8,4kN$

Phần tử 2: $f'_{td} = 0$

$f_{td}^2 = 42 \times 10^{-3} \times 2000 \times (-1,0) = -84kN$

Phần tử 3: $f'_{td} = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-1) = -25,2kN$

$f_{td}^2 = 0$

$f_{td}^3 = 25,2kN$

$f_{td}^4 = 0$

Phần tử 4: $f_{td}^1 = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (0,8) = 20,16$

$f_{td}^2 = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0,6) = -15,12$

Phần tử 5: $f_{td}^1 = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0,8) = -20,16$

$f_{td}^2 = 42 \times 10^{-3} \times 600 \times (-0,6) = -15,12$

Trong đó: 1, 2, 3, 4 là số thứ tự các bậc tự do ở 2 đầu thanh trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.6b). Các tải trọng tương đương ghi trên hình (4.6a).

Ghép các tải trọng tương đương trên phương các bậc tự do tổng thể:

$F_1 = -20,16 - 25,20 = -45,36kN$

$F_2 = -84 - 25,12 = -99,12kN$

$F_3 = 25,20 + 20,16 = 45,36kN$

$F_4 = -84 - 15,12 = -99,12kN$

Hệ phương trình cân bằng tổng thể có dạng:

$$\begin{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{K} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45,36 \\ -99,12 \\ 45,36 \\ -99,12 \end{bmatrix}$$

Trong đó: **K** tính theo (4.16)

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị do nhiệt độ:

$$\mathbf{Q}^n = [-0,4775 \quad -0,6262 \quad -0,4775 \quad -0,6262]' \text{ mm}$$

Tổng chuyển vị do tải trọng và do nhiệt độ:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^t + \mathbf{Q}^n$$

$\mathbf{Q}^t$ đã tính trong mục c ví dụ (4.1).

Tính ứng suất

Ứng suất do nhiệt độ tính theo (4.24).

$$\sigma_i^n = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_3 - q_1)l_i + (q_4 - q_2)m_i - E\alpha\Delta T\right]$$

Phần tử 1: $$\sigma_1^n = \frac{210}{3000}\left[0 + 0,6262 \times 1,0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$$

$$= 1,834 \times 10^{-2} kN/mm^2$$

Phần tử 2: $$\sigma_2^n = \frac{210}{3000}\left[0 + 0,6262 \times 1,0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$$

$$= 4,34 \times 10^{-2} kN/mm^2$$

Phần tử 3: $$\sigma_3^n = \frac{210}{4000}\left[(-0,475 + 0,4775) \times 1,0 + 0\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$$

$$= -4,187 \times 10^{-2} kN/mm^2$$

Phần tử 4: $$\sigma_4^n = \frac{210}{5000}\left[0,4775 \times (-0,8) + 0,6262 \times (0,6)\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$$

$$= -4,226 \times 10^{-2} kN/mm^2$$

Phần tử 5: $$\sigma_5^n = \frac{210}{5000}\left[0,4775 \times (0,8) + 0,6262 \times (0,6)\right] - 210 \times 10 \times 10^{-6} \times 20$$

$$= -1,018 \times 10^{-2} kN/mm^2$$

Tổng ứng suất pháp do tải trọng và do nhiệt độ là tổng của ứng suất pháp tính trong mục d) của ví dụ (4.1) và ứng suất pháp vừa tính trên.

§4.3. GIÀN KHÔNG GIAN

4.3.1. Ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể

Giàn không gian là một kết cấu trong đó các thanh giàn và tải trọng không cùng nằm trong một mặt phẳng. Giàn không gian còn gọi là *giàn 3 chiều*.

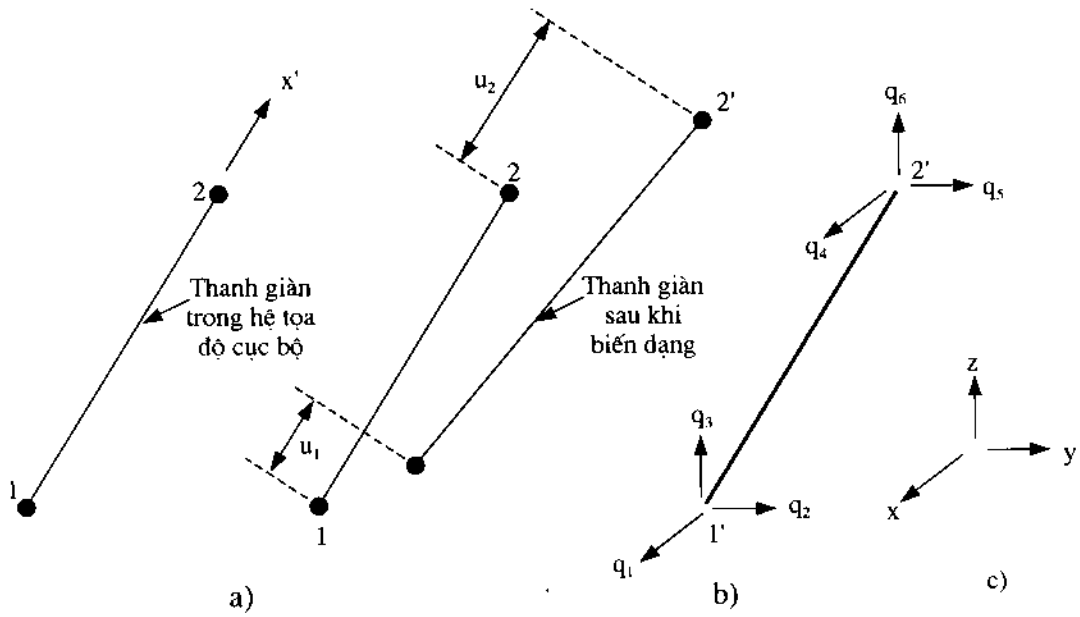
Giống như giàn phẳng, mỗi thanh giàn làm việc như kết cấu 1 chiều. Vì vậy, cần có 2 hệ trục tọa độ: hệ tọa độ cục bộ x' trùng với trục của thanh giàn (hình 4.7a), chiều dương của trục x' đi từ đầu 1 đến đầu 2; hệ trục tọa độ x, y, z biểu thị trên hình 4.7b, 4.7c.

Vectơ chuyển vị của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ (hình 4.7a) là:

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]' \tag{4.26}$$

Vectơ chuyển vị ở 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể là (hình 4.7b):

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6]' \tag{4.27}$$



Hình 4.7

Tương tự như trong §4.2, hệ thức giữa **u** và **q** như sau:

$$u_1 = q_1 l + q_2 m + q_3 n$$

$$u_2 = q_4 l + q_5 m + q_6 n$$

Dưới dạng ma trận

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}.\mathbf{q} \tag{4.28}$$

Trong đó:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

R gọi là trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Trong đó: l, m, n là các côsin định hướng của trục x' đối với các trục x, y, z.

Ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ cục bộ tính theo công thức (4.9).

$$\mathbf{k_e} = \frac{A_e E_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Áp dụng công thức (1.43), ta có ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{K_e} = \mathbf{R'}.\mathbf{k_e}.\mathbf{R} \tag{4.31a}$$

Căn cứ vào (4.29) và (4.30), sau khi thực hiện các phép nhân ma trận trong (4.31a), ta được:

$$\mathbf{k}_e = \frac{E_e A_e}{L_e}\begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -lm \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -m.n \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Các côsin định hướng tính như sau:

$$l = \frac{x_2 - x_1}{L_e} \qquad m = \frac{y_2 - y_1}{L_e} \qquad n = \frac{z_2 - z_1}{L_e} \tag{4.32}$$

Chiều dài của thanh giàn:

$$L_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{4.33}$$

Công việc tiếp theo là ghép các ma trận độ cứng của các thanh giàn và ghép các vectơ tải trọng để có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành chuyển vị.

4.3.2. Ứng suất pháp

Ứng suất pháp trong thanh giàn có thể viết:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{4.34a}$$

theo (4.28):

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R.q} \tag{a}$$

Trong đó:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} \tag{b}$$

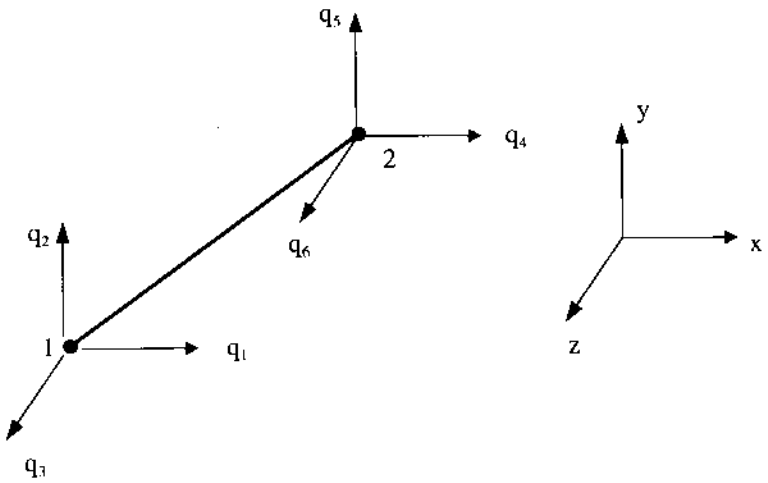
Thay (a) và (b) vào (4.34a), ta được;

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}.\mathbf{q}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\begin{bmatrix} -l & -m & -n & l & m & n \end{bmatrix}\mathbf{q} \tag{4.34}$$

q là vectơ chuyển vị tại 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể (hình 4.8).



Hình 4.8: Các thành phần chuyển vị tại 2 đầu thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể

4.3.3. Trường hợp tác dụng của nhiệt độ và chế tạo không chính xác

Tương tự như trong (4.22, ta có vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ):

$$f_{td}^{e} = E_e A_e \alpha.\Delta T.\left[-l_e \quad -m_e \quad n_e \quad l_e \quad m_e \quad n_e\right]' \tag{4.35}$$

Ứng suất do nhiệt độ:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[-l_i \quad -m_i \quad -n_i \quad l_i \quad m_i \quad n_i\right].\mathbf{q}_i - E_i\alpha\Delta T \tag{4.36}$$

Trong đó: **q** tính theo (4.27).

Trường hợp chế tạo không chính xác

Ta đưa về trường hợp tác dụng của nhiệt độ bằng cách áp dụng công thức sau:

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i L_i} \tag{4.37}$$

Trong đó: Δ là độ dài hơn hoặc độ ngắn hơn so với chiều dài thiết kế của một thanh giàn trong quá trình chế tạo.

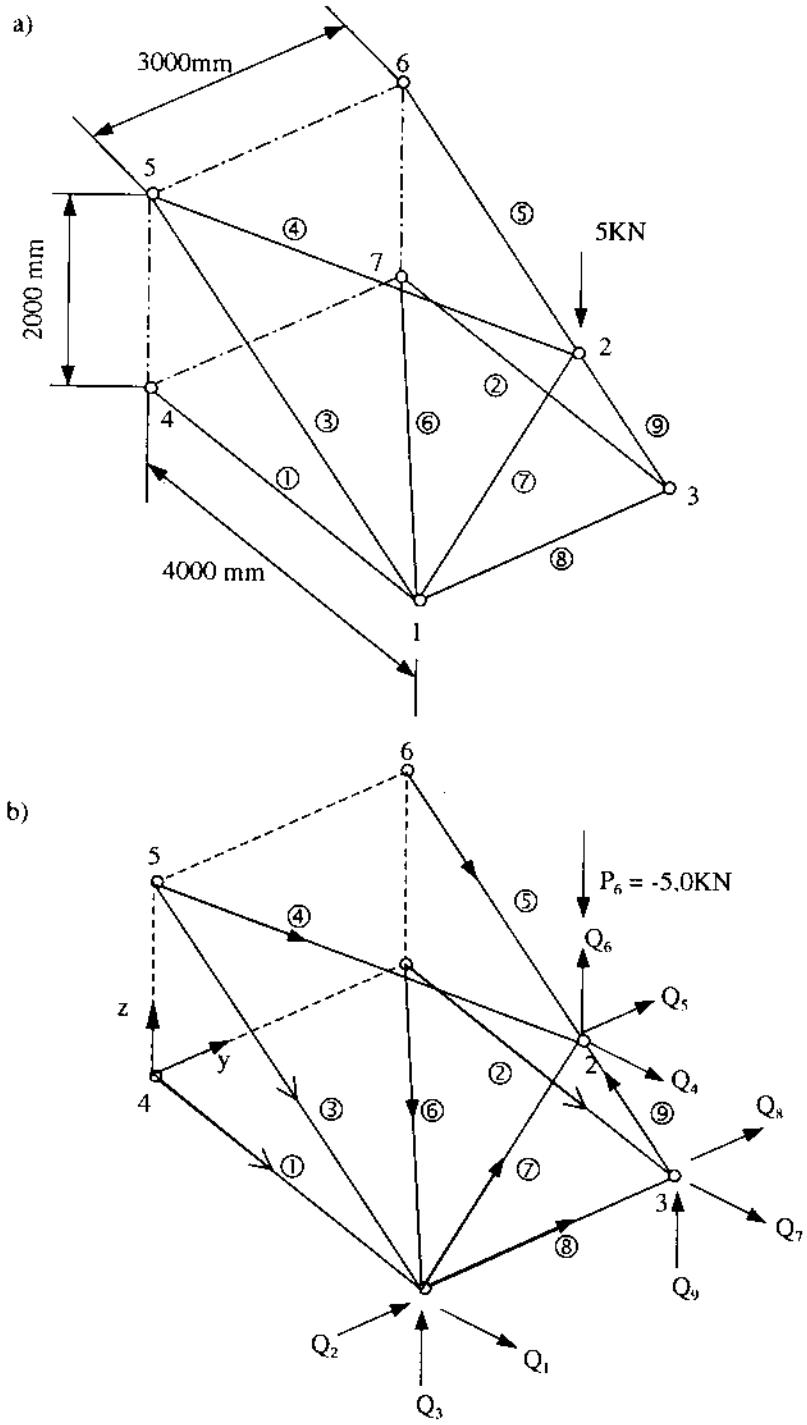
Ví dụ 4.3:

Cho 1 giàn không gian như trên hình (4.9a). E = 210kN/mm^2

Xác định ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ;

Tính các thành phần chuyển vị;

Tính lực dọc trong các thanh giàn.



Hình 4.9

Giải:

Số thứ tự các nút và các thanh giàn (được khoanh tròn) biểu thị trên hình (4.9a). Có tất cả 7 nút và 9 thanh. Chiều dương của trục x' biểu thị bằng các mũi tên. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	y	z
1	4000	0	0
2	4000	1500	2000
3	4000	3000	0
4	0	0	0
5	0	0	2000
6	0	3000	2000
7	0	3000	0

Số thự tự bậc tự do tại các nút

Nút	u	v	w
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0

Số thứ tự các bậc tự do tại đầu 1 và đầu 2 của thanh giàn

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	4	1	5	6	2
2	7	3	6	7	1
3	5	1	7	1	2
4	5	2	8	1	3
			9	3	2

Đặc trưng hình học và cơ học của các thanh giàn

Phần tử	$(x_2 - x_1)$	$(y_2 - y_1)$	$(z_2 - z_1)$	L	l	m	n	AE/L
1	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
2	4000	0	0	4000	1,0	0	0	4,5
3	4000	0	-2000	4472	0,8944	0	-0,4472	4,025
4	4000	1500	0	4272	0,9363	0,3511	0	4,214
5	4000	-1500	0	4272	0,9363	-0,3511	0	4,214
6	4000	-3000	0	5000	0,8	-0,6	0	3,6
7	0	1500	2000	2500	0	0,6	0,8	7,2
8	0	3000	0	3000	0	1,0	0	6,0
9	0	-1500	2000	2500	0	-0,6	0,8	7,2

a) Theo (4.31), xác định các ma trận độ cứng của mỗi thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể.

Thanh số 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Thanh số 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Thanh số 3:

$$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3,22 & 0 & -1,61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,61 & 0 & 0,81 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Thanh số 4:

$$\mathbf{k}_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3,69 & 1,39 & 0 \\ 1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Thanh số 5:

$$\mathbf{k}_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3,69 & -1,39 & 0 \\ -1,39 & 0,52 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Thanh số 6:

$$\mathbf{k}_6 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2,30 & -1,73 & 0 \\ -1,73 & 1,30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Thanh số 7:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\mathbf{k}_7 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,59 & 3,46 & 0 & -2,59 & -3,46 \\ 0 & 3,46 & 4,61 & 0 & -3,46 & -4,61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,59 & -3,46 & 0 & 2,59 & 3,46 \\ 0 & -3,46 & -4,61 & 0 & 3,46 & 4,61 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Thanh số 8:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\mathbf{k}_8 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,0 & 0 & 0 & -6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6,0 & 0 & 0 & -6,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}
\end{array}
$$

Thanh số 9:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 6 \end{array} \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\
\mathbf{k}_9 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,59 & -3,46 & 0 & -2,59 & 3,46 \\ 0 & -3,46 & 4,61 & 0 & 3,46 & -4,61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,59 & 3,46 & 0 & 2,59 & -3,46 \\ 0 & 3,46 & -4,61 & 0 & -3,46 & 4,61 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\end{array}
$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ:

$$
\mathbf{K} = \begin{pmatrix}
\begin{array}{c}4,5\\3,22\\\underline{2,30}\\10,02\end{array} & -1,73 & -1,61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \begin{array}{c}2,59\\6,0\\\underline{1,30}\\9,89\end{array} & 3,46 & 0 & -2,59 & -3,46 & 0 & -6,0 & 0 \\
 & & \begin{array}{c}0,81\\\underline{4,61}\\5,42\end{array} & 0 & -3,46 & -4,61 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \begin{array}{c}3,69\\\underline{3,69}\\7,38\end{array} & \begin{array}{c}-1,39\\\underline{1,39}\\0\end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \begin{array}{c}0,52\\0,52\\2,59\\\underline{2,59}\\6,22\end{array} & \begin{array}{c}3,46\\\underline{-3,46}\\0\end{array} & 0 & -2,59 & 3,46 \\
 & & & & & \begin{array}{c}4,61\\\underline{4,61}\\9,22\end{array} & 0 & 3,46 & -4,61 \\
\text{Đối xứng} & & & & & & 4,5 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \begin{array}{c}6,0\\\underline{2,59}\\8,59\end{array} & -3,46 \\
 & & & & & & & & 4,61
\end{pmatrix}
$$

b) Ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể như sau:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5,0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$[Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9]' =$$

$$= [-3,3508 \quad -7,4646 \quad -1,2833 \quad 0 \quad 3,7569 \quad -2,234 \quad 0 \quad -7,4775 \quad -3,0772]\text{mm}$$

Ở trên, ta đã dùng phương pháp loại trừ để khử các hàng và cột của ma trận K ứng với các bậc tự do tại các nút không có chuyển vị 4, 5, 6, 7 (hình 4.9).

c) Tính lực dọc theo (4.34)

$$Ld_i = \sigma_i A_i = \frac{A_i E_i}{L_i}\left[(q_4 - q_1)l + (q_5 - q_2)m + (q_6 - q_3)n\right]$$

Phần tử 1: $Ld_1 = 4,5 \times [1,0 \times (-3,3508) + 0] = -15,08\text{kN}$

Phần tử 2: $Ld_2 = 4,5 \times [1,0 \times 0] = 0\text{kN}$

Phần tử 3: $Ld_3 = 4,025 \times [0,8944 \times (-3,3508) + 0 - 0,4472 \times (-1,2833)]$

$= -9,75\text{kN}$

Phần tử 4: $Ld_4 = 4,214 \times [0,9362 \times 0 + 0,3511 \times 3,7569 + 0] = -5,56\text{kN}$

Phần tử 5: $Ld_5 = 4,214 \times [0,9363 \times 0 - 0,3511 \times 3,7569 + 0] = -5,56\text{kN}$

Phần tử 6: $Ld_6 = 3,6 \times [0,8 \times (-3,3508) - 0,6 \times (-7,4646) + 0] = 6,76\text{kN}$

Phần tử 7:

$Ld_7 = 7,2 \times [0 - 0,6 \times (-7,4646 - 0,8 \times (-1,2833) + 0 + 0,6 \times 3,7569 + 0,8 \times (-2,234)]$

$= 43,00\text{kN}$

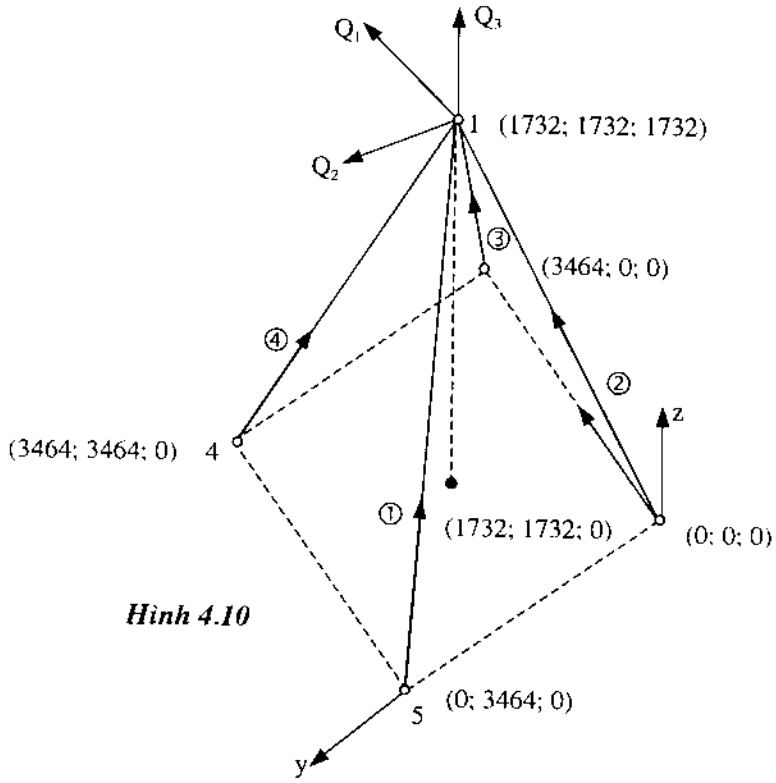
Phần tử 8: $Ld_8 = 6,0 \times [0 - 1,0 \times (-7,4646) + 0 + 0 + 1,0 \times (-7,4775) + 0] = -0,08\text{ kN}$

Phần tử 9:

$Ld_9 = 7,2 \times [0 + 0,6 \times (-7,4775) - 0,8 \times (-3,0772) + 0 - 0,6 \times 3,7569 + 0,8 \times (-2,234)]$

$= -43,68\text{kN}$

Ví dụ 4.4: Cho 1 giàn không gian như trên hình (4.10).



Hình 4.10

Thanh 1 - 5 dài hơn chiều dài quy định 0,1%. E = 210kN/mm^2, chiều dài mỗi thanh L = 3000mm, diện tích tiết diện A = 230mm^2, hệ số giãn nở do nhiệt độ 10×10^{-6}/°C.

Xác định ma trận độ cứng tổng thể;

Tính chuyển vị;

Tính ứng suất.

Giải:

Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y	z
1	1732	1732	1732
2	0	0	0
3	3464	0	0
4	3464	3464	0
5	0	3464	0

Bậc tự do

Nút	u	v	w
1	d_1	d_2	d_3
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0

Số thứ tự bậc tự do tại 2 đầu thanh

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2
1	5	1
2	2	1
3	3	1
4	4	1

Tính các côsin định hướng theo (4.32):

Phần tử 1: $l_1 = \dfrac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$

$$m_1 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$n_1 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 2: $l_2 = \dfrac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$

$$m_2 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$m_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 3: $l_3 = \dfrac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$

$$m_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

$$n_3 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

Phần tử 4: $l_4 = \dfrac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$

$$m_4 = \frac{1732-3464}{3000} = -0{,}5773$$

$$n_4 = \frac{1732-0}{3000} = 0{,}5773$$

a) Xác định ma trận độ cứng của thanh giàn trong hệ tọa độ tổng thể. Áp dụng công thức (4.31) và dùng phương pháp loại trừ để khử các hàng và cột của ma trận ứng với các bậc tự do ở các nút cố định 2, 3, 4, 5.

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5773^2 & -(0{,}5773)^2 & 0{,}5773^2 \\ & (0{,}5773)^2 & -0{,}5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0{,}5773^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5773^2 & 0,5773^2 & 0,5773^2 \\ & 0,5773^2 & 0,5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0,5773^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 3:

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5773^2 & -0,5773^2 & -0,5773^2 \\ & 0,5773^2 & 0,5773^2 \\ \text{dx} & & 0,5773^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Phần tử 4:

$$\mathbf{k}_4 = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,5773^2 & 0,5773^2 & -0,5773^2 \\ & 0,5773^2 & -0,5773^2 \\ \text{đối xứng} & & 0,5773^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận trên, ta được ma trận độ cứng tổng thể:

$$\mathbf{K} = 16,1 \times \begin{bmatrix} 4\times 0,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 4\times 0,3333 & 0 \\ 0 & 0 & 4\times 0,3333 \end{bmatrix}$$

Cuối cùng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 21,4645 & 0 & 0 \\ & 21,4645 & 0 \\ \text{đối xứng} & & 21,4645 \end{bmatrix}$$

b) Tính chuyển vị

Tính độ biến thiên nhiệt độ tương đương theo (4.37)

$$\Delta T = \frac{\Delta}{\alpha_i L_i} = \frac{3000}{1000\times 10\times 10^{-6}\times 3000} = 100^0 C$$

Tính vectơ tải trọng tương đương do nhiệt độ gây ra theo (4.35).

$$\mathbf{f}_{td}^{i} = E_i.A_i\alpha.\Delta T\left[-l_i \quad -m_i \quad -n_i \quad l_i \quad m_i \quad n_i\right]$$

Chỉ có phần tử 1 chế tạo không chính xác nên i = 1.

Các thành phần tải trọng tương đương men theo các bậc tự do 1, 2, 3 (hình 4.10):

$$F_1 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \times 0,5773 = 28kN$$

$$F_2 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{6} \times 100 \times (-0,5773) = -28kN$$

$$F_3 = 210 \times 231 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 \times 0,5773 = 28kN$$

Kết hợp ma trận **K** đã cho và vectơ tải trọng vừa tính ở trên, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} 21,46 & 0 & 0 \\ 0 & 21,46 & 0 \\ 0 & 0 & 21,46 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q_1 = \frac{28}{21,46} = 1,30mm$$

$$Q_2 = -\frac{28}{21,46} = -1,30mm$$

$$Q_1 = \frac{28}{21,46} = 1,30mm$$

b) Tính ứng suất theo (4.36)

$$\sigma_i = \frac{E_i}{L_i}\left[(q_4 - q_1)l_i + (q_5 - q_2)m_i + (q_6 - q_3)n_i\right] - E_i.\alpha.\Delta T$$

Phần tử 1:

$$\sigma_1 = \frac{210}{3000}\left[(1,30 - 0) \times 0,577 + (-1,30) \times (-0,5773) + (1,30) \times 0,577\right]$$

$$-210 \times 10 \times 10^{-6} \times 100 = -0,0525\ kN/mm^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma_2 = \frac{210}{3000}\left[(1,30 - 0) \times 0,5773 + (-1,30) \times 0,5773 + 1,30 \times 0,577\right]$$

$$-0,21 = -0,1575\ kN/mm^2$$

Phần tử 3:

$$\sigma_3 = \frac{210}{3000}\left[(1,30) \times (-0,5773) + (-1,30) \times 0,5773 + (1,30) \times 0,5773\right]$$

$$-0,21 = -0,0625\ kN/mm^2$$

Phần tử 4:

$$\sigma_4 = \frac{210}{3000}\left[(1,30)\times(-0,5773)+(-1,30)\times(-0,5773)+(1,30)\times 0,5773\right]$$

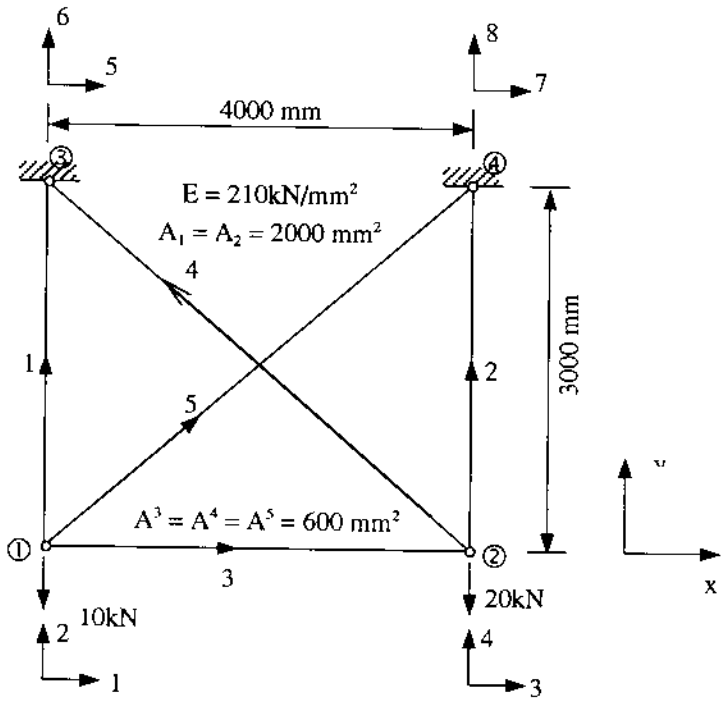
$$-0,21 = -0,1575\ \text{kN/mm}^2$$

§4.4. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN PHẲNG (CTR4)

Trong chương trình này, xét trường hợp tổng quát: tác dụng của tải trọng và tác dụng của nhiệt độ.

1) Những điều cần phải tuân thủ (lấy thí dụ trong hình 4.11)

- Số thứ tự các nút nên xếp theo dãy số tự nhiên (1, 2, 3, ...). Chẳng hạn, trong thí dụ này, có 4 nút 1, 2, 3, 4.
- Số thứ tự các thanh cũng làm như trên.
- Số thứ tự các bậc tự do nên xếp theo dãy số tự nhiên.



Hình 4.11

Theo nguyên tắc chung, số thứ tự bậc tự do tại nút i, xác định như sau:

Trên phương y : 2i

Trên phương x : 2i - 1

Số thứ tự bậc tự do không có chuyển vị nên xếp ở cuối để tiện cho việc chia khối ma trận khi dùng phương pháp loại trừ.

Trong mỗi thanh giàn, số thứ tự BTD của đầu 1 nên bé hơn so với đầu 2. Trong thí dụ này, số thứ tự các BTD là: 1, 2, 3, ..., 7, 8. Trong đó: 5, 6, 7, 8 là số thứ tự các BTD không có chuyển vị. Sắp xếp số thứ tự như trên sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho việc chia khối ma trận nhằm tính chuyển vị và phản lực tại các gối tựa không có chuyển vị.

2) Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau:

Số thanh: 4

Số BTD có chuyển vị: 4

Tổng số BTD: 8

Các thành phần tải trọng: 0; -10; 0; -20

Phần tử	Tọa độ (mm)				Diện tích (mm^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Hệ số giãn nở	Số gia nhiệt độ
	x_1	x_2	x_3	x_4				
1	0	0	0	3000	2000	210	0	0
2	4000	4000	0	3000	2000	210	0	0
3	0	4000	0	0	600	210	0	0
4	4000	0	0	3000	600	210	0	0
5	0	4000	0	3000	600	210	0	0

Phần tử	Số bậc tự do			
	d_1	d_2	d_3	d_4
1	1	2	5	6
2	3	4	7	8
3	1	2	3	4
4	3	4	5	6
5	1	2	7	8

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (4.10)

4) Giải hệ phương trình **Q** = **F** để được giá trị các thành phần chuyển vị.

5) Tính ứng suất theo (4.13)

6) Tính phản lực theo sơ đồ chia khối ma trận theo (4.15) và (4.17)

§ 4.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN KHÔNG GIAN (CTR 5)

Trong chương trình này, xét trường hợp tổng quát: tác dụng của tải trọng và tác dụng của nhiệt độ.

1) Những điều cần phải tuân thủ

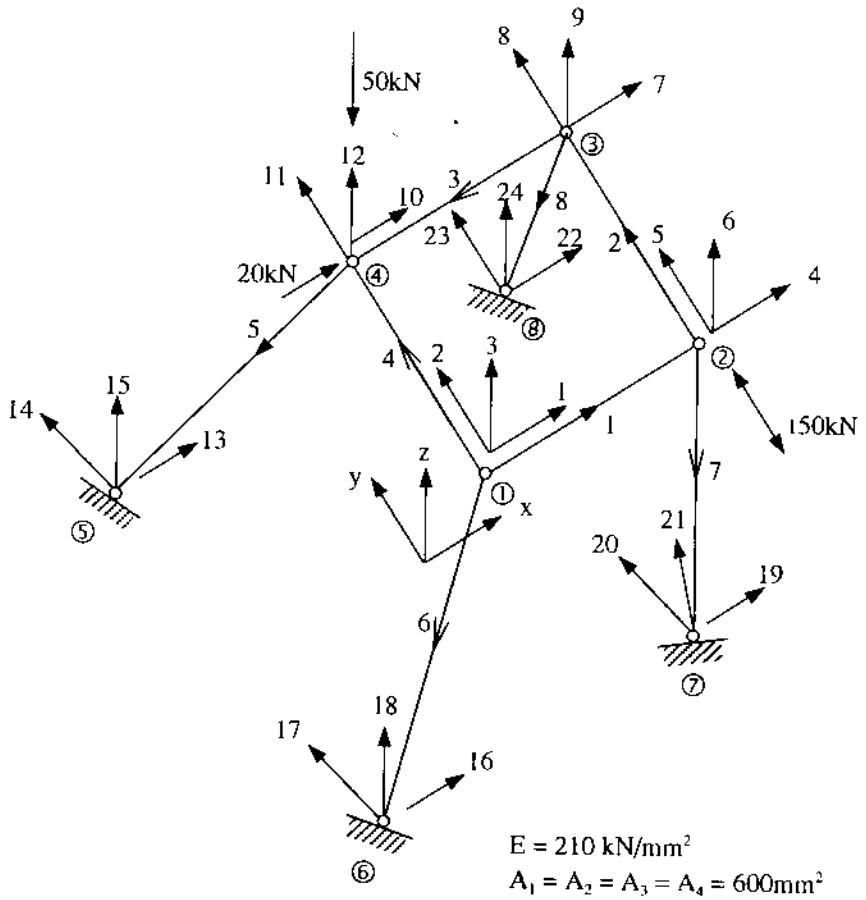
Giống như đã trình bày trong §4.4. Tuy nhiên, mỗi nút có 3 BTD. Số thứ tự các BTD tại nút i, xác định như sau:

Trên phương x : 3i - 2

Trên phương y : 3i - 1

Trên phương z : 3i

Trong ví dụ trên hình (4.12), ta có tất cả 24 BTD trong đó có 12 BTD có chuyển vị và 12 BTD không có chuyển vị, chúng được xếp thứ tự theo dãy số tự nhiên.



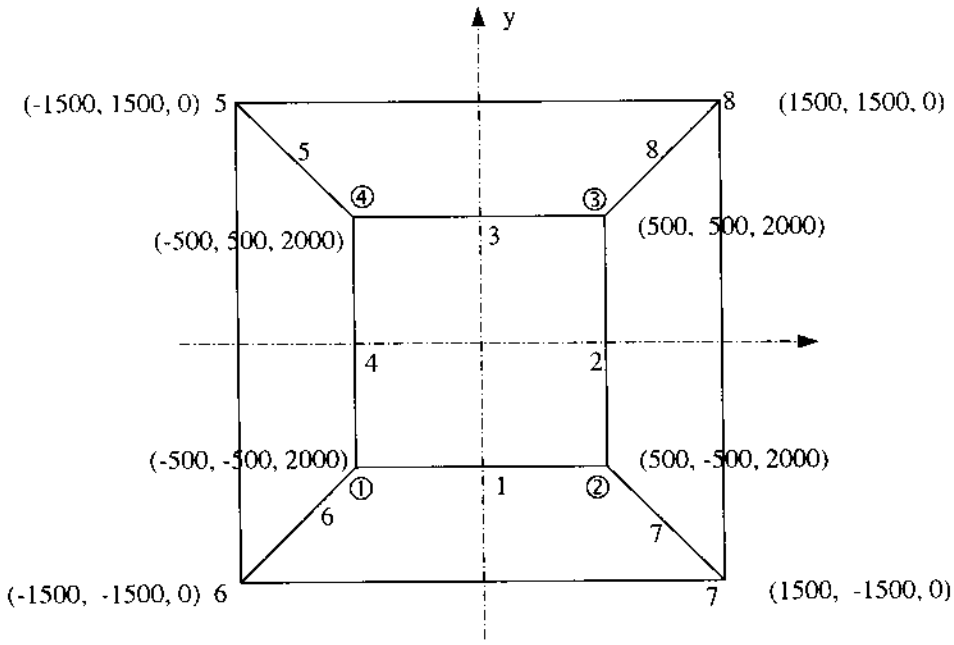
$E = 210\ kN/mm^2$

$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 600mm^2$

$A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 2400mm^2$

Số thứ tự các nút: khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: không khoanh tròn



Hình 4.12

2) Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy thí dụ trên hình 4.12)

Số thanh: 8

Số BTD có chuyển vị: 12

Tổng số BTD: 24

Phần tử	Tọa độ (mm)						Diện tích (mm^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Hệ số giãn nở	Số gia nhiệt độ
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2				
1	-500	-500	2000	500	-500	2000	600	210	0	0
2	500	-500	2000	500	500	2000	600	210	0	0
3	500	500	2000	-500	500	2000	600	210	0	0
4	-500	-500	2000	-500	500	2000	600	210	0	0
5	-500	500	2000	-1500	1500	0	2400	210	0	0
6	-500	-500	2000	-1500	-1500	0				
7	500	-500	2000	1500	-1500	0				
8	500	500	2000	1500	1500	0				

Phần tử	Số bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12
4	1	2	3	10	11	12
5	10	11	12	13	14	15
6	1	2	3	16	17	18
7	4	5	6	19	20	21
8	7	8	9	22	23	24

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (4.31).

4) Giải hệ phương trình cân bằng theo phương pháp Gauss

5) Tính ứng suất theo (4.36)

6) Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và sơ đồ chia khối ma trận (như trong thí dụ 4.1).

§4.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÀN CHỊU TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ VÀ GIÀN CHẾ TẠO KHÔNG CHÍNH XÁC (CTR6, CTR7)

Thuật toán ở đây giống CTR4 và CTR5. Chỉ khác là cần thống kê thêm các số liệu về hệ số giãn nở và số gia nhiệt độ thực tế hoặc số gia nhiệt độ tương đương khi giàn chế tạo không chính xác.

Các thành phần tải trọng tính theo (4.35) và (4.37).

Chương 5

BÀI TOÁN HAI CHIỀU DÙNG TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

§5.1. ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN HAI CHIỀU

Trong bài toán hai chiều, chuyển vị, biến dạng, ứng suất, lực thể tích, lực biên là những hàm của hai biến x và y.

Vectơ chuyển vị u có dạng:

$$\mathbf{U} = [u \quad v]' \tag{5.1}$$

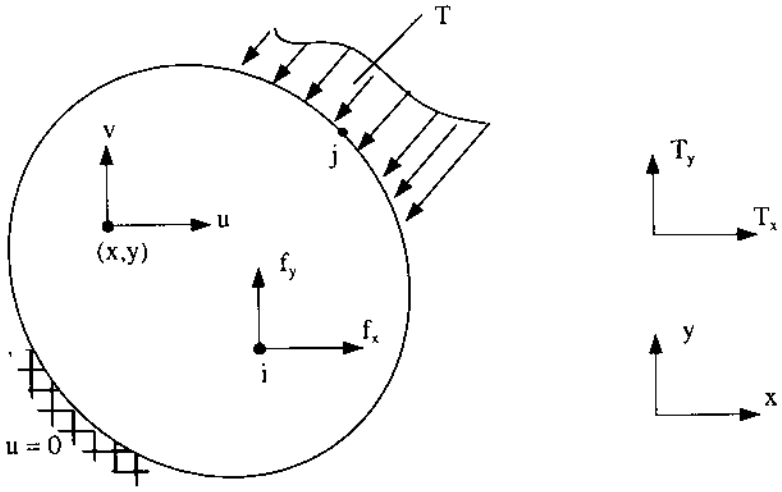
Trong đó: u - thành phần chuyển vị song song với trục x;

v - thành phần chuyển vị song song với trục y.

Ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}' \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}' \tag{5.3}$$



Hình 5.1. Kết cấu 2 chiều

Hình 5.1 biểu thị kết cấu hai chiều một cách khái quát, trong đó vectơ lực thể tích **f**, vectơ lực biên **T** và phân tố thể tích dV như sau:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}' \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}' \qquad dV = hdA \tag{5.4}$$

Trong đó: h - bề dày của kết cấu hai chiều trên phương z;

fx, fy - các lực thể tích trên đơn vị thể tích trên các phương x, y;

Tx, Ty - các lực biên trên đơn vị diện tích trên các phương x và y;

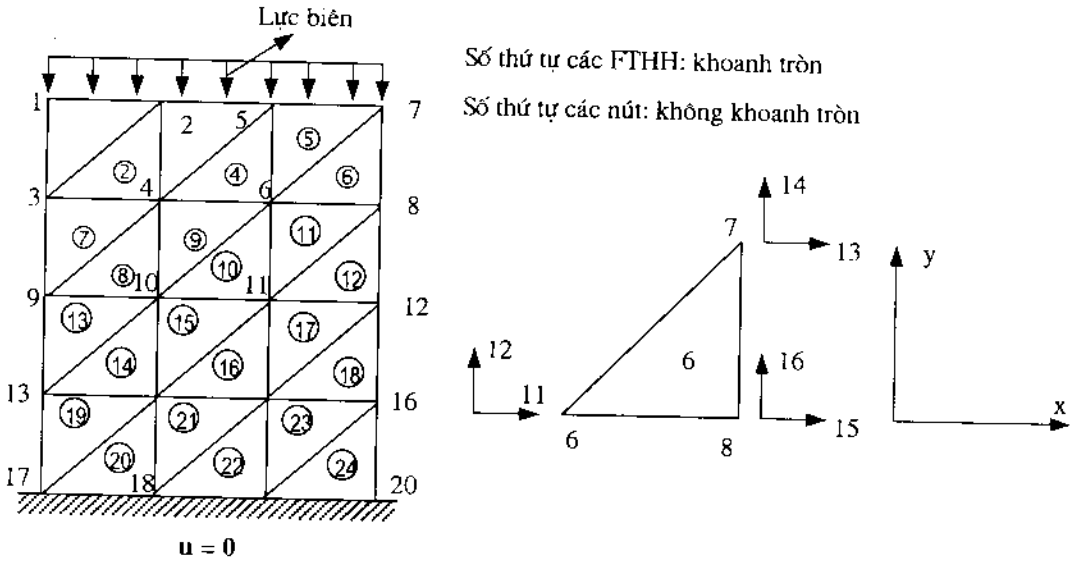
dA - phân tố diện tích; Hệ thức biến dạng chuyển vị

$$\varepsilon = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \tag{5.5}$$

Hệ thức trên suy ra từ hệ thức tổng quát (1.11) trong bài toán 3 chiều. Theo (1.20) và (1.20a) ta có hệ thức giữa ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.6}$$

Để giải bài toán hai chiều, trước hết ta dùng mô hình phần tử hữu hạn tam giác. Nguyên lý công ảo sẽ được áp dụng để suy ra các biểu thức của ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng



Hình 5.2. *Mô hình phần tử hữu hạn trong bài toán 2 chiều*

Miền 2 chiều được chia thành các hình tam giác như trên hình (5.2). Các đỉnh tam giác gọi là nút, mỗi tam giác do 3 nút và 3 cạnh tạo thành gọi là một phần tử hữu hạn (viết tắt là FTHH). Các FTHH tam giác lấp đầy miền hai chiều. Nếu có miền rỗng ở biên thì thay nó bằng các FTHH bé hơn hoặc các FTHH có biên cong, do đó bài toán sẽ được giải một cách gần đúng. Trên hình 5.2, số thứ tự của các FTHH được khoanh tròn, số thứ tự các nút biểu thị bên cạnh nút.

Trong bài toán 2 chiều, mỗi nút được phép chuyển vị trên 2 phương x và y. Vậy mỗi nút có 2 bậc tự do (viết tắt là BTD). Để tiện cho việc lập trình trên máy tính điện tử, ta đặt số thứ tự cho mỗi nút như sau:

Tại nút j: BTD trên phương x: $d_1 = 2j - 1$

BTD trên phương y: $d_2 = 2j$ (5.7)

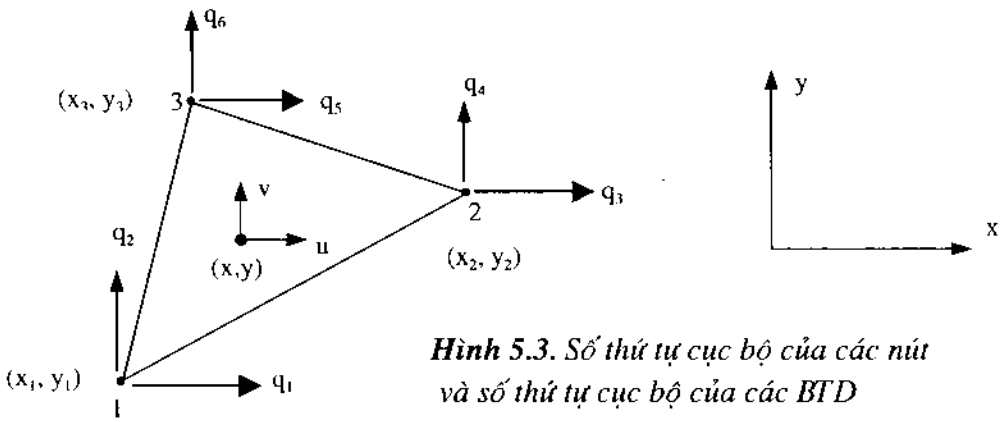
Ví dụ: đối với FTHH số 6 trên hình (5.2), ta có số thứ tự các BTD: 11, 12, 15, 16, 13, 14 (lần lượt ứng với các nút 6, 8, 7).

Véctơ chuyển vị tổng thể có dạng:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_N \end{bmatrix}' \quad (5.8)$$

Trong đó: N là số BTD của toàn hệ.

Trong tính toán, cần biểu thị tọa độ của các nút và sơ đồ liên kết giữa chúng. Tọa độ nút biểu thị trên hình 5.3. Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút biểu thị trên hình 5.2. Nếu tách riêng một FTHH, nó có 3 nút 1, 2, 3 (có tính chất cục bộ) và các BTD cục bộ biểu thị như trên hình 5.3.



Hình 5.3. *Số thứ tự cục bộ của các nút và số thứ tự cục bộ của các BTD*

Sự tương ứng giữa số thứ tự cục bộ (1, 2, 3) của các nút và số thứ tự tổng thể của chúng biểu thị trên hình 5.2 và bảng 5.1.

Bảng 5.1. Sự tương ứng giữa số thứ tự cục bộ và số thứ tự tổng thể của 3 nút FTHH

Số thứ tự FTHH	Số thứ tự nút cục bộ			Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	3	1	3	2
2	1	2	3	2	3	4
3	1	2	3	2	4	5
4	1	2	3	5	4	6
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
22	1	2	3	15	18	19
23	1	2	3	15	19	16
24	1	2	3	16	19	20

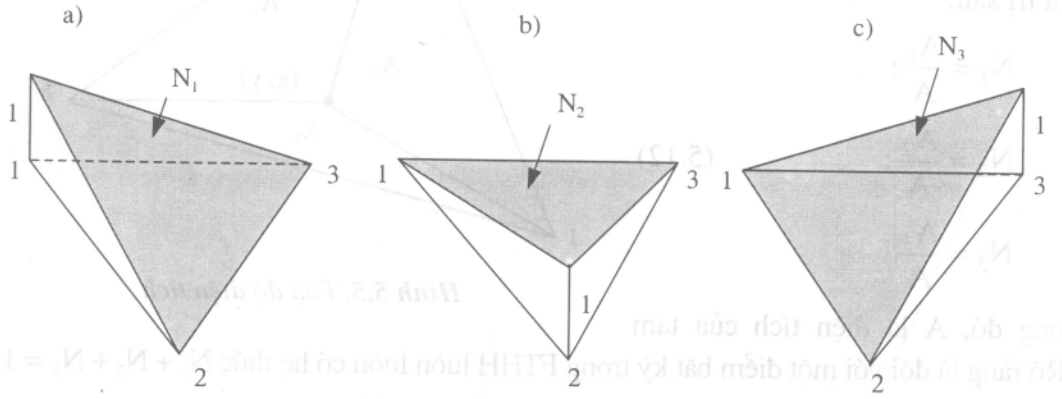
Chẳng hạn đối với FTHH có số thứ tự 4 (hình 5.2), có sự tương quan như sau: nút 1 (cục bộ) → nút 5; nút 2 (cục bộ) → nút 4; nút 3 (cục bộ) → nút 6 Các nút của FTHH tam giác đếm theo chiều *ngược kim đồng hồ* để tránh diện tích âm (vấn đề này sẽ được đề cập trong phần sau).

Các thành phần chuyển vị tại các nút của FTHH men theo các BTD cục bộ (1, 2, 3) biểu thị như trên hình (5.3). Các thành phần q_1, q_3, q_5 ứng với các nút 1, 2, 3 trên phương x; các thành phần q_2, q_4, q_6 ứng với các nút 1, 2, 3 trên phương y. Vậy vectơ chuyển vị cục bộ của FTHH là:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

§5.3. FTHH TAM GIÁC CÓ BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

Các thành phần chuyển vị tại một điểm trong FTHH u và v biểu thị trên hình (5.3). Trong đó, u là thành phần chuyển vị trên phương x, v là thành phần chuyển vị trên phương y. Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta dùng *hàm hình dạng* hoặc *hàm nội suy* để biểu thị các thành phần chuyển vị tại một điểm trong FTHH qua các thành phần chuyển vị tại các nút.



Hình 5.4. *Sự biến thiên của các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3*

Đối với FTHH tam giác có biến dạng không đổi, hàm hình dạng có tính chất tuyến tính trong phạm vi FTHH. Khái niệm về hàm hình dạng đối với FTHH đã trình bày trong chương hai. Ở đây, ta dùng 3 hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 ứng với các nút 1, 2, 3. Sự biến thiên của chúng (xem hình 5.4) như sau. Hàm hình dạng N_1 bằng đơn vị tại nút 1 và bằng 0 tại 2 nút 2 và 3 (hình 5.4a). Hàm hình dạng N_2 bằng đơn vị tại nút 2 và bằng 0 tại 2 nút 1 và 3 (hình 5.4b). Hàm hình dạng N_3 bằng đơn vị tại nút 3 và bằng 0 tại các nút 1 và 2 (hình 5.4c). Các hàm hình dạng nói trên được biểu thị bằng các mặt phẳng. Tổ hợp tuyến tính của các hàm đó cũng biểu thị một mặt phẳng. Đặc biệt tổ hợp của các hàm $N_1 + N_2 + N_3$ là một mặt phẳng đi qua các điểm có chiều cao bằng đơn vị tại các nút

1, 2, 3 nghĩa là mặt phẳng đó song song với tam giác 123. Vậy đối với bất kỳ hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 nào, ta có hệ thức:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \tag{5.10}$$

N_1, N_2, N_3 là những hàm không độc lập tuyến tính. Chỉ có 2 hàm là độc lập tuyến tính. Các hàm hình dạng độc lập tuyến tính được biểu thị bằng các số không thứ nguyên ξ và η như sau:

$$N_1 = \xi \qquad N_2 = \eta \qquad N_3 = 1 - \xi - \eta \tag{5.11}$$

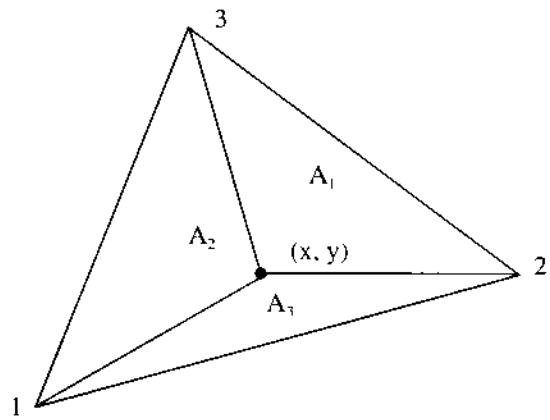
Trong đó ξ và η là các tọa độ tự nhiên. Trong bài toán 1 chiều, ta dùng một tọa độ tự nhiên ξ. Trong bài toán 2 chiều, ứng với tọa độ vuông góc x,y, ta có các tọa độ tự nhiên ξ và η và hàm hình dạng ở đây là hàm của ξ và η.

Ý nghĩa vật lý của các hàm hình dạng như sau:

Một điểm bất kỳ có tọa độ (x,y) trong FTHH tam giác chia nó ra thành 3 miền có các diện tích A_1, A_2, A_3 (hình 5.5).

Các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 có các giá trị sau:

$$N_1 = \frac{A_1}{A}; \quad N_2 = \frac{A_2}{A}; \quad N_3 = \frac{A_3}{A}. \tag{5.12}$$



Hình 5.5. *Tọa độ diện tích*

Trong đó, A là diện tích của tam giác. Rõ ràng là đối với một điểm bất kỳ trong FTHH luôn luôn có hệ thức $N_1 + N_2 + N_3 = 1$

§5.4. CÁCH BIỂU THỊ CÙNG THAM SỐ. BIỂU THỨC BIẾN DẠNG

5.4.1. Ma trận Jacobian

Các thành phần chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong FTHH có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút.

$$\begin{aligned} u &= N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 . q_5 \\ v &= N_1 q_2 + N_2 . q_4 + N_3 . q_6 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Theo (5.11):

$$\begin{aligned} u &= (q_1 - q_5)\xi + (q_3 - q_5) + q_5 \\ v &= (q_2 - q_6)\xi + (q_4 - q_6) + q_6 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Dưới dạng ma trận, hệ thức (5.13) có thể viết:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N.q} \tag{5.15}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Đối với FTHH tam giác, cũng có thể dùng các hàm hình dạng nói trên để biểu thị các tọa độ x, y tại 1 điểm trong FTHH qua các tọa độ tại các nút. Cách biểu thị này gọi là *cách biểu thị cùng tham số*. Nó đơn giản và giúp cho việc tính toán sau này được dễ dàng.

Theo trên, có thể viết:

$$\begin{aligned} x &= N_1.\,x_1 + N_2.x_2 + N_3.x_3 \\ y &= N_1.y_1 + N_2.y_2 + N_3.y_3 \end{aligned} \tag{5.17a}$$

Theo (5.11)

$$\begin{aligned} x &= (x_1 - x_3).\xi + (x_2 - x_3).\eta + x_3 \\ y &= (y_1 - y_3).\xi + (y_2 - y_3).\eta + y_3 \end{aligned} \tag{5.17b}$$

Đặt $x_{ij} = x_i - x_j$ và $y_{ij} = y_i - y_j$, (5.17b) có thể viết:

$$\begin{aligned} x &= x_{13}.\xi + x_{23}.\eta + x_3 \\ y &= y_{13}.\xi + y_{23}.\eta + y_3 \end{aligned} \tag{5.17c}$$

Các phương trình trên chuyển tọa độ x, y thành các tọa độ tự nhiên ξ, η

Ví dụ 5.1: Tính các hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 tại điểm P trong hình tam giác trên hình (5.6).

Giải:

Căn cứ vào các phương trình (5.17), ta có:

$3{,}85 = 1{,}5N_1 + 7N_2 + 4N_3 = -2{,}5\xi + 3\eta + 4$

$4{,}8 = 2N_1 + 3{,}5N_2 + 7N_3 = -5\xi - 3{,}5\eta + 7$

Biến đổi các phương trình trên thành dạng:

$2{,}5\xi - 3\eta = 0{,}15$

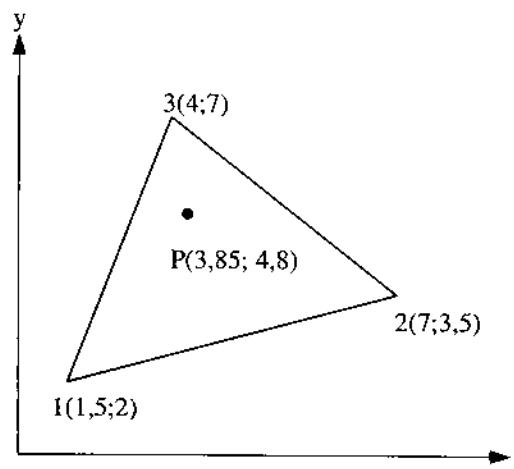
$5\xi + 3{,}5\eta = 2{,}2$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$N_1 = 0{,}3$

$N_2 = 0{,}2$

$N_3 = 0{,}5$



Hình 5.6

Để tính biến dạng, ta phải tính các đạo hàm riêng của u và v đối với x và y. Từ các phương trình (5.12) và (5.17) ta thấy rằng u, v, x, y là những hàm của ξ và η. Nghĩa là $u = u[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ và $v = v[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$.

Áp dụng nguyên tắc tính đạo hàm riêng của u, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Trong đó, ma trận cấp 2 × 2 sau đây gọi là ma trận Jacobian:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Sau khi lấy đạo hàm của x và y đối với ξ và η, ta được:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Từ (5.18)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

J^{-1} là nghịch đảo của ma trận Jacobi

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

$$\det \mathbf{J} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} \tag{5.23}$$

Từ kiến thức về diện tích tam giác, ta thấy rằng định thức của **J** tức det**J** bằng 2 lần diện tích của tam giác. Nếu các nút của tam giác 1, 2, 3 được xếp theo thứ tự *ngược chiều kim đồng hồ* thì det J có dấu dương. Ta có diện tích:

$$A = \frac{1}{2}|\det \mathbf{J}| \tag{5.24}$$

Trong đó: ký hiệu | | biểu thị giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 5.2: Xác định ma trận Jacobian đối với hình tam giác cho trên hình (5.6)

Giải:

Theo (5.20):

$$J = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & -5,0 \\ 3,0 & -3,5 \end{bmatrix}$$

Vậy det **J** = 23,75 đơn vị, bằng 2 lần diện tích của tam giác. Nếu 3 nút 1, 2, 3 được xếp số thứ tự theo chiều kim đồng hồ, det **J** sẽ mang dấu âm.

5.4.2. Biểu thức biến dạng

Theo (5.21) và (5.22) ta có:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}.\dfrac{\partial u}{\partial \xi} & -y_{13}.\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23}.\dfrac{\partial u}{\partial \xi} & +x_{13}.\dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

Thay u bằng v ta có hệ thức tương tự:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}.\dfrac{\partial v}{\partial \xi} & -y_{13}.\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23}.\dfrac{\partial v}{\partial \xi} & +x_{13}.\dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

Thay (5.14), (5.25), (5.26) vào (5.5), ta có:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{5.27a}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}(q_1 - q_5) - y_{13}(q_3 - q_5) \\ -x_{23}(q_2 - q_6) - x_{13}(q_4 - q_6) \\ -x_{23}(q_1 - q_5) - x_{13}(q_3 - q_5) + y_{23}(q_2 - q_6) - y_{13}(q_4 - q_6) \end{pmatrix}$$

Từ định nghĩa của x_{ij} và y_{ij}, ta có thể viết $y_{31} = -y_{13}$, $y_{12} = y_{13} - y_{23}$...., ta có biểu thức của biến dạng:

$$\varepsilon = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} y_{23}q_1 + y_{31}q_3 + y_{12}q_5 \\ x_{32}q_2 + x_{13}q_4 + x_{21}q_6 \\ x_{32}q_1 + y_{23}q_2 + x_{13}q_3 + y_{31}q_4 + x_{21}q_5 + y_{12}q_6 \end{pmatrix} \tag{5.27b}$$

Dưới dạng ma trận:

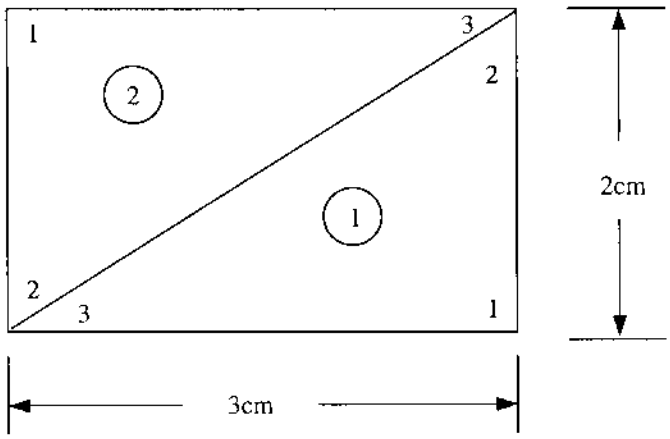
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\,\mathbf{q} \qquad (5.28)$$

Trong đó, ma trận cấp 3 × 6 **B** gọi là *ma trận biến dạng-chuyển vị*, nó biểu thị mối quan hệ giữa 3 thành phần biến dạng trong FTHH và 6 thành phần chuyển vị tại các nút.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{J}}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{21} & x_{13} & y_{21} & x_{12} & y_{12} \end{bmatrix} \qquad (5.29)$$

Cần chú ý rằng các phần tử của ma trận **B** là những hằng số, các hằng số này được biểu thị bằng tọa độ tại các nút.

Ví dụ 5.3: Xác định ma trận biến dạng-chuyển vị **B** cho các FTHH biểu thị trên hình (5.7). 1, 2, 3 là số thứ tự nút cục bộ.



Hình 5.7

Giải:

Theo (5.29), ta có:

Phần tử 1:
$$\mathbf{B}^1 = \frac{1}{\det \mathbf{J}}\begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:
$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ở trên, det **J** tính theo công thức $x_{13}y_{23}-x_{23}y_{13} = 3 \times 2 - 3 \times 0 = 6$.

§5.5. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA FTHH

Trong chương hai ta đã vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra công thức ma trận độ cứng của FTHH trong bài toán 2 chiều. Theo (2.81):

$$k_C = Ah\mathbf{B'DB} \tag{5.30}$$

Trong đó: A - diện tích của FTHH;

h - bề dày của FTHH;

B - ma trận biến dạng-chuyển vị theo (5.29);

D - ma trận cấu trúc vật liệu theo (1.21) (chương 1).

Cần chú ý rằng $\mathbf{k_e}$ đối xứng vì **D** đối xứng. Bằng cách ghép các ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn như đã làm trong các phần trước, ta được ma trận độ cứng tổng thể **K** của toàn hệ. **K** là một ma trận đối xứng mang tính chất dải đối xứng hoặc có tính chất rời rạc. Ta dựa vào sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút (chẳng hạn như trong bảng 5.1) để ghép các ma trận $\mathbf{k_e}$. Nếu các BTD i và j không được liên kết với nhau trong một phần tử hữu hạn thì phần tử tương ứng trong ma trận **K** triệt tiêu. Nếu các BTD i và j được liên kết với nhiều FTHH thì phần tử tương ứng trong ma trận K có tính chất tích luỹ. Căn cứ vào các BTD tổng thể thống kê trong hình 5.2, ta tính bề rộng của nửa dải đối xứng trong ma trận **K** như sau. Giả sử i_1, i_2, i_3 là số thứ tự các nút của một FTHH, hiệu lớn nhất giữa số thứ tự các nút trong FTHH đó là:

$$m_e = \max\left(|i_1-i_2|, |i_2-i_3|, |i_3-i_1|\right) \tag{5.31}$$

Nửa bề rộng của dải tính theo công thức:

$$NBW = 2\left[\max_{1\le e\le NE}(m_e)+1\right] \tag{5.32}$$

Trong đó: NE - số FTHH;

2 là số BTD tại mỗi nút.

Giá trị m_e trong (5.31) tính cho toàn bộ số FTHH.

Khi xét đến điều kiện biên, có thể áp dụng phương pháp loại trừ hoặc phương pháp mô hình lò xo đã trình bày trong chương 3 để biến đổi ma trận **K**.

§5.6. VECTƠ TẢI TRỌNG, ỨNG SUẤT

Trong chương hai, ta cũng đã vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra biểu thức véctơ tải trọng trong bài toán 2 chiều. Theo (2.82), ta có vectơ tải trọng:

$$t = h\iint \mathbf{N^t.f}\, dA + h\iint \mathbf{N'^s.T}.dl \tag{5.33}$$

Trong đó: h - bề dày của kết cấu;

N - hàm hình dạng;

f - vectơ lực thể tích;

T - vectơ lực biên.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}'$$

Trong đó: f_x, f_y - các thành phần lực thể tích theo phương x và y;

T_x, T_y - các thành phần lực biên theo phương x và y.

Thay hàm hình trạng từ (5.16) và f vào (5.33), ta có vectơ lực thể tích:

$$\mathbf{f_t} = h\iint \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} dA = h\iint \begin{bmatrix} N_1.f_x.dA \\ N_1.f_y.dA \\ N_2.f_x.dA \\ N_2.f_y.dA \\ N_3.f_x.dA \\ N_3.f_y.dA \end{bmatrix}$$

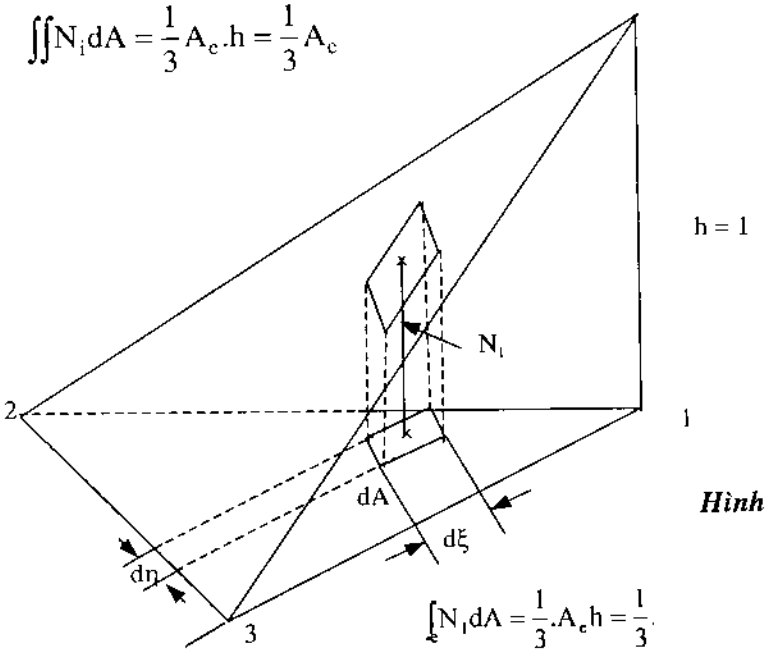
hay:

$$f_t = h \times$$

$$\times \left[f_x \iint N_1 dA + f_y \iint N_1 dA + f_x \iint N_2 dA + f_y \iint N_2 dA + f_x \iint N_3 dA + f_y \iint N_3 dA \right]' \quad \text{(a)}$$

Các tích phân $\iint N_i dA (i = 1,2,3)$ có thể tính theo hình (5.8)

$$\iint N_i dA = \frac{1}{3} A_e.h = \frac{1}{3} A_e \quad \text{(b)}$$



Hình 5.8: *Tính tích phân* $\int N_i dA$

Thay (b) và (a), ta được vectơ lực thể tích của FTHH:

$$\mathbf{f_t} = \frac{h_e A_e}{3}\left[f_x \quad f_y \quad f_x \quad f_y \quad f_x \quad f_y\right]' \tag{5.34}$$

Số hạng thứ 2 ở vế phải của (5.33) có thể viết:

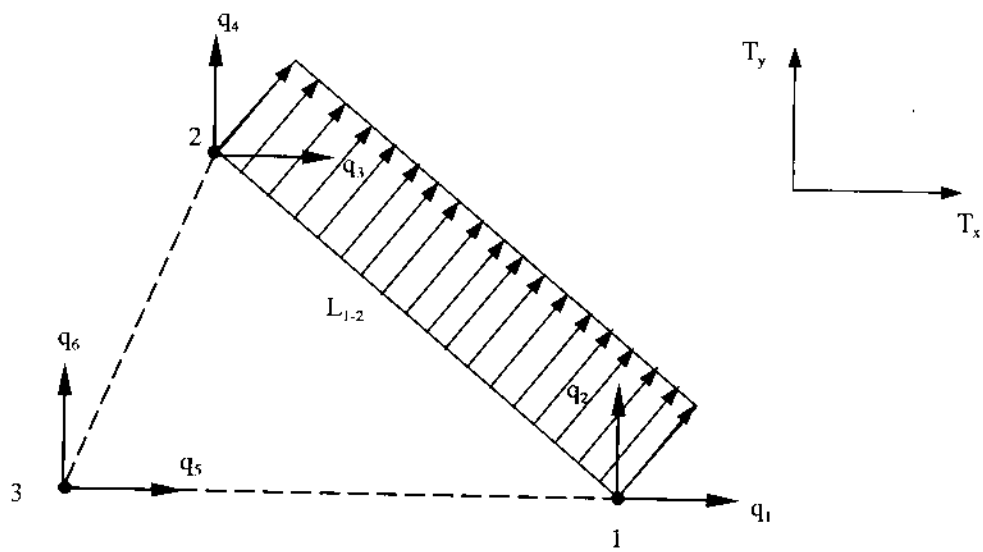
$$\mathbf{f_b} = h\int \mathbf{N}^{s'}\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} dl \tag{a}$$

Trong đó: $\mathbf{f_b}$ - vectơ lực biên của FTHH;

$\mathbf{N}^s$ - hàm hình dạng men theo cạnh chịu tác dụng của tải trọng biên của FTHH (hình 5.9);

dl - phân tố đường thẳng men theo cạnh trên.

Để tính tích phân $\int \mathbf{N}^{s'} dl$, ta làm như sau. Giả sử cạnh 1-2 của FTHH chịu tác dụng của tải trong biên (hình 5.9). Trên cạnh này, $N_3 = 0$, chỉ còn lại 2 hàm hình dạng N_1 và N_2.



Hình 5.9: FTHH chịu tác dụng của lực biên

Do đó:

$$f_b = h\int \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} . dl = h. \begin{bmatrix} T_x \int N_1 dl \\ T_y \int N_1 dl \\ T_x \int N_2 dl \\ T_y \int N_2 dl \end{bmatrix} \tag{b}$$

Các tích phân có thể tính theo hình (5.8)

$$\int L_{1-2}N_1dl = \int L_{1-2}N_2dl = \frac{1}{2}L_{1-2}.h = \frac{1}{2}.L_{1-2}$$

Ở đây, L_{1-2} là chiều dài của cạnh 1-2 (hình 5.9) nên:

$$\int_{L_{1-2}} N_1dl = \int_{L_{1-2}} N_2dl = \frac{L_{1-2}}{2} \qquad (c)$$

Thay (c) vào (b), ta có:

$$\mathbf{f_b} = \frac{h.L_{1-2}}{2}\begin{bmatrix} T_x & T_y & T_x & T_y \end{bmatrix}' \qquad (5.35)$$

Vậy là đã suy ra biểu thức của vectơ lực thể tích $\mathbf{f_t}$ và vectơ lực biên $\mathbf{f_b}$. Nếu có tải trọng tập trung **P** thì khi ghép các véctơ tải trọng, ta phải cộng thêm vào tải trọng đó.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng của các FTHH và ghép các vectơ tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị, từ đó tính ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn.

Tính ứng suất:

Theo (5.6) và (5.28), ta có ứng suất:

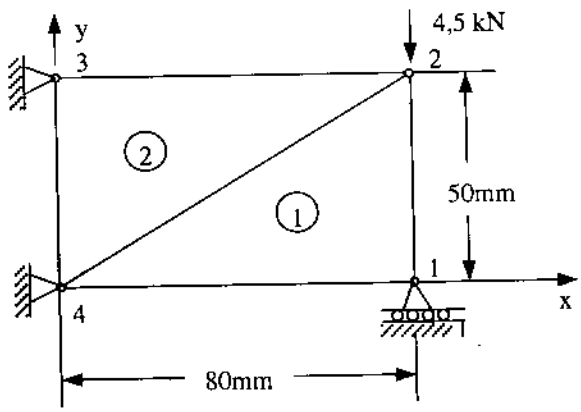
$$\sigma = \mathbf{D.B.q} \qquad (5.36)$$

Vì biến dạng là một hằng số trong FTHH tam giác có biến dạng không đổi nên ứng suất cũng là một hằng số. Ta tính ứng suất cho mỗi phần tử hữu hạn. Vì **q** trong (5.36) là vectơ chuyển vị của FTHH nên khi tính ứng suất, cần tách ra các thành phần chuyển vị tương ứng từ vectơ chuyển vị tổng thể **Q**, dựa trên sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút (chẳng hạn bảng (5.1)).

Các ứng suất tính được xem như tác dụng tại trọng tâm của FTHH. Các ứng suất chính và phương của chúng tính theo vòng tròn M_0.

Sau đây là một ví dụ để minh họa các bước tính toán.

Ví dụ 5.4: Cho một tấm hai chiều chịu tải trọng như trên hình 5-10. Căn cứ vào các điều kiện ứng suất phẳng, xác định các thành phần chuyển vị tại các nút 1 và 2. Bỏ qua trọng lượng bản thân, bề dày của tấm h = 1,25mm; E = 210kN/mm^2, hệ số Poatxong ν = 0,25.



Hình 5.10

Giải:

Trong bài toán ứng suất phẳng, căn cứ vào (1.20), ta có ma trận cấu trúc vật liệu:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,375 \end{bmatrix}$$

Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút như sau:

Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ			Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	3	1	2	4
2	1	2	3	3	4	2

Tính ma trận biến dạng-chuyển vị **B** theo (5.29)

Phần tử 1:

$$\det \mathbf{J} = 2A_1 = 2.\frac{80 \times 50}{2} = 4.000\ \text{mm}^2$$

$Y_{23} = 50 - 0 = 50\text{mm}$ $\qquad$ $y_{13} = 0 - 0 = 0$

$Y_{12} = 0 - 50 = -50\text{mm}$ $\qquad$ $x_{32} = 0 - 80 = -80\text{mm}$

$X_{13} = 80 - 0 = 80\text{mm}$ $\qquad$ $x_{21} = 80 - 80 = 0\ \text{mm}$

Vậy:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{4000}\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & -80 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ -80 & 50 & 80 & 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\det \mathbf{J} = 2A_2 = 2 \times \frac{80 \times 50}{2} = 4000\text{mm}^2$$

$Y_{23} = 0 - 50 = -50\text{mm}$ $\qquad$ $y_{31} = 50 - 50 = 0$

$Y_{12} = 50 - 0 = 50\text{mm}$ $\qquad$ $x_{32} = 80 - 0 = 80\text{mm}$

$X_{13} = 0 - 80 = -80\text{mm}$ $\qquad$ $x_{21} = 0 - 0 = 0\ \text{mm}$

Vậy:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4000}\begin{bmatrix} -50 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & -80 & 0 & 0 \\ 80 & -50 & -80 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Áp dụng (5.30) và thực hiện các phép nhân ma trận, ta được ma trận độ cứng của các phần tử hữu hạn:

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 171{,}5 & -87{,}5 & -84 & 35 & -87{,}5 & 52{,}5 \\ & 256{,}813 & 52{,}5 & -224 & 35 & -32{,}813 \\ & & 84 & 0 & 0 & -52{,}5 \\ & & & 224 & -35 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 87{,}5 & 0 \\ & & & & & 32{,}813 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 171{,}5 & -87{,}5 & -84 & 35 & -87{,}5 & 52{,}5 \\ & 256{,}813 & 52{,}5 & -224 & 35 & -32{,}813 \\ & & 84 & 0 & 0 & -52{,}5 \\ & & & 224 & -35 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 87{,}5 & 0 \\ & & & & & 32{,}813 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Sau khi ghép các ma trận riêng và dùng phương pháp loại trừ, ta được phương trình cân bằng:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 171{,}5 & -84 & 35 \\ & 171{,}5 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & 256{,}813 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}5 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$Q_1 = 4{,}883 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

$$Q_3 = 2{,}392 \times 10^{-3}\,\text{mm}$$

$$Q_4 = -1{,}819 \times 10^{-2}\,\text{mm}$$

Cuối cùng áp dụng (5.36) để tính ứng suất.

Đối với phần tử 1, các thành phần chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_7 & q_8 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4{,}883 \times 10^{-3} & 0 & 2{,}392 \times 10^{-3} & -1{,}819 \times 10^{-2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Đối với phần tử 2, các thành phần chuyển vị là:

$$\begin{bmatrix} q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}392 \times 10^{-3} & -1{,}819 \times 10^{-2} \end{bmatrix}'$$

Các thành phần ứng suất tính theo (5.36):

Phần tử 1: $\boldsymbol{\sigma}_1 = \left[-6,697\times10^{-3} \quad -7,806 \times 10^{-2} \quad -4,186 \times 10^{-3}\right]'$

Phần tử 2: $\boldsymbol{\sigma}_2 = \left[6,697\times10^{-3} \quad 1,674 \times 10^{-3} \quad -1,909 \times 10^{-2}\right]'$

§5.7.TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

Giả sử độ biến thiên nhiệt độ trong bài toán 2 chiều là $\Delta T(x,y)$. Biến dạng ban đầu do nhiệt độ gây ra là ε_0. Từ lý thuyết cơ học chất rắn, ε_0 tính như sau:

Bài toán ứng suất phẳng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left[\alpha.\Delta T \quad \alpha.\Delta T \quad 0\right]' \tag{5.37}$$

Bài toán biến dạng phẳng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1+\nu)\left[\alpha.\Delta T \quad \alpha.\Delta T \quad 0\right]' \tag{5.38}$$

Hệ thức giữa ứng suất và biến dạng:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{5.39}$$

Bây giờ ta vận dụng nguyên lý công ảo trình bày trong chương hai để suy ra vectơ tải trọng tương đương do sự biến thiên của nhiệt độ gây ra. Từ (2.71) và (2.72), ta có:

Công ảo của nội lực: $\delta U = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{\varepsilon}\boldsymbol{\sigma} \quad dV$ (5.40a)

Công ảo của nội lực: $\delta W = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{u}.\mathbf{f} \quad dV + \iint \boldsymbol{\delta}'_{u}.\mathbf{T}ds$ (5.41)

Biến dạng ảo: $\boldsymbol{\delta}_{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_{q}$

Thay (5.39) và hệ thức trên vào (5.40a):

$$\delta U = \iiint \boldsymbol{\delta}'_{q}.\mathbf{B}'.\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0)dV$$

Trong bài toán 2 chiều dV=dA.h

δU có thể viết:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_{q}.h\iint \mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad dA - \boldsymbol{\delta}'_{q}h\iint \mathbf{B}'.\mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon}_0 dA$$

Vì $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\mathbf{q}$ nên:

$$\delta U = \boldsymbol{\delta}'_{q}\left[(hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{q} - hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\right]$$

Thay $\boldsymbol{\delta}_u = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}_q$ vào (5.41) và cho $\delta U = \delta W_e$, cuối cùng ta được:

$$(hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\mathbf{B})\mathbf{q} = hA\mathbf{B}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{5.42}$$

hay:

$$\mathbf{k}_e\mathbf{q} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{5.43}$$

Trong đó: $\mathbf{k_e}$ - ma trận độ cứng của FTHH, tính như trước:

$$\mathbf{f_n} = hA\,\mathbf{B'D.\varepsilon_0} \tag{5.44}$$

$\mathbf{f_n}$ - tải trọng tương đương do sự biến thiên nhiệt độ gây ra.

$\mathbf{f_t}$ và $\mathbf{f_b}$ tính theo các công thức (5.34) và (5.35).

Khai triển công thức (5.44), ta có 6 thành phần tải trọng tương đương như sau:

$$\mathbf{f_n} = \begin{bmatrix} f_n^1 & f_n^2 & f_n^3 & f_n^4 & f_n^5 & f_n^6 \end{bmatrix}' \tag{5.45}$$

Trong đó: các chỉ số 1, 2, 3...là số thứ tự các BTD tại các nút 1, 2, 3 của FTHH tam giác.

Ứng suất trong mỗi phần tử hữu hạn:

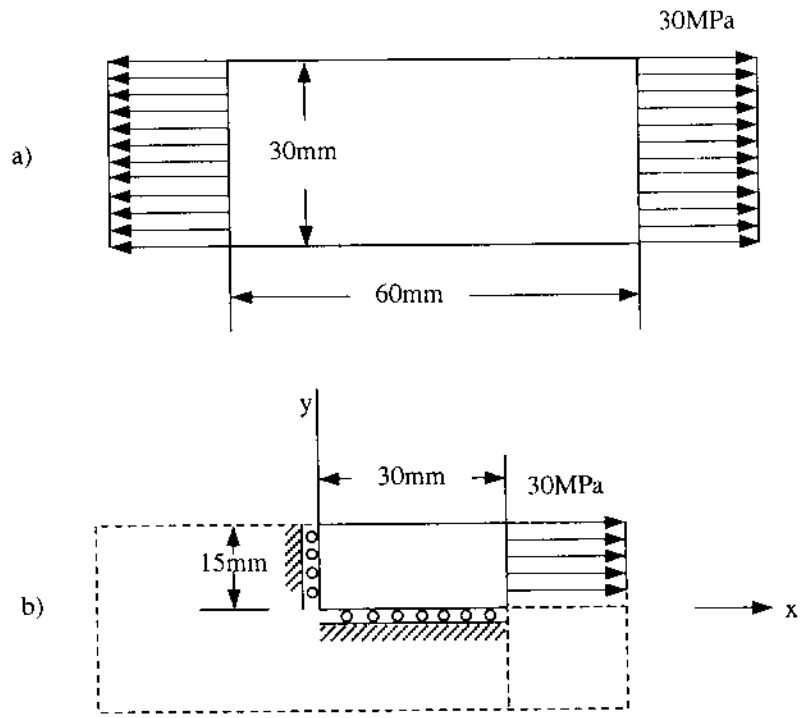
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D.}\left(\mathbf{B.q} - \boldsymbol{\varepsilon_0}\right) \tag{5.46}$$

§5.8. MỘT SỐ THÍ DỤ VỀ CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Trong các phần trước, ta đã xét đến các điều kiện biên một cách tổng quát. Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu cách xử lý các điều kiện biên trong một số trường hợp đặc biệt.

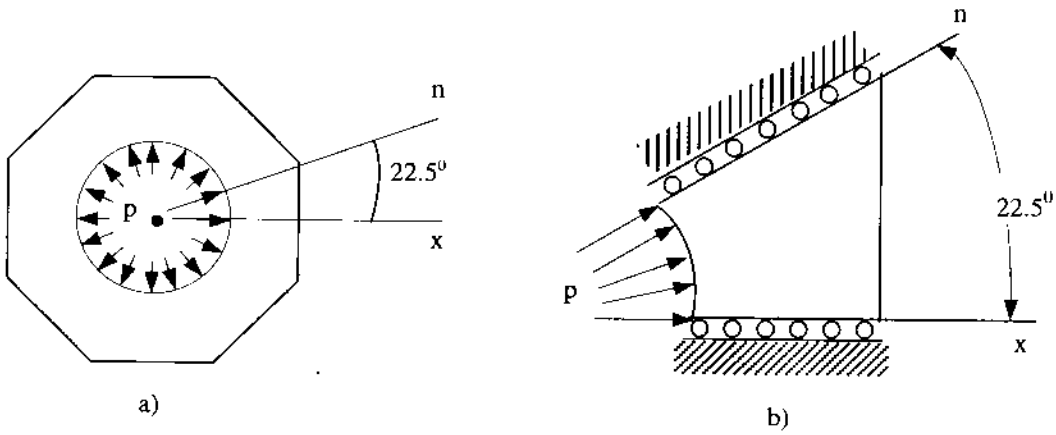
Ví dụ đầu tiên được trình bày trên hình 5.11.

Đây là một tấm đối xứng đối với 2 trục x, y và chịu tác dụng của tải trọng đối xứng. Trên hình vẽ, các trục x và y đi qua tâm của tấm và chia tấm thành 4 phần bằng nhau.



Hình 5.11: *Tấm đối xứng chịu tải trọng đối xứng*

Vì tính chất đối xứng của tấm và của tải trọng, tấm biến dạng trên phương x nhưng chuyển vị lại bằng không trên phương y; ngược lại, tấm biến dạng trên phương y nhưng chuyển vị lại bằng không trên phương x. Vì vậy, sơ đồ tính đưa về 1/4 tấm với các điều kiện biên biểu thị như trên hình 5.11b.

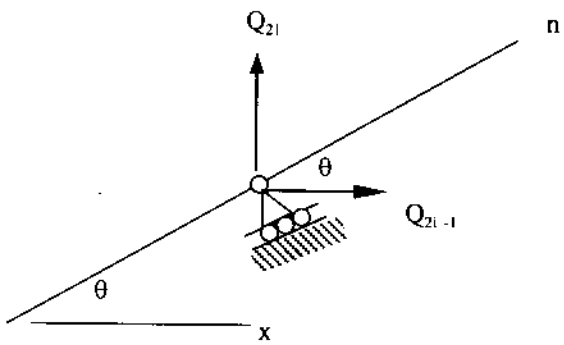


Hình 5.12: *Ống hình 8 cạnh chịu tải trọng đối xứng*

Ví dụ 2 biểu thị trên hình (5.12). Đây là 1 ống 8 cạnh chịu áp lực đối xứng. Do tính chất đối xứng của kết cấu và của tải trọng, ống chỉ biến dạng trên các phương xuyên tâm. Nói một cách khác, chuyển vị đều triệt tiêu trên các phương vuông góc với phương xuyên tâm. Sơ đồ tính đưa về phần ống nằm trong phạm vi góc $22,5^0$ như trên hình (5.12b). Giả sử n là phương xuyên tâm. Tại nút i với các bậc tự do Q_{2i-1} và Q_{2i} (hình 5.13), ống chỉ biến dạng trên phương n nhưng chuyển vị lại triệt tiêu trên phương vuông góc với phương n. Do đó, ta có điều kiện biên:

$$Q_{2i-1}.\sin\theta - Q_{2i}.\cos\theta = 0 \qquad (5.47)$$

Đây là điều kiện biên có tính chất ràng buộc nhiều điểm mà ta đã thảo luận trong chương ba.



Hình 5.13: *Gối tựa lăn trên phương nghiêng.*

§5.9. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN HAI CHIỀU KIỂU FTHH TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI (CTR8)

1. Những điều cần tuân thủ

- Số thứ tự các BTD nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên (1, 2, ...); số thứ tự các BTD không có chuyển vị hoặc có chuyển vị cho trước nên xếp ở các vị trí cuối cùng để tiện chia khối ma trận trong phương pháp loại trừ.

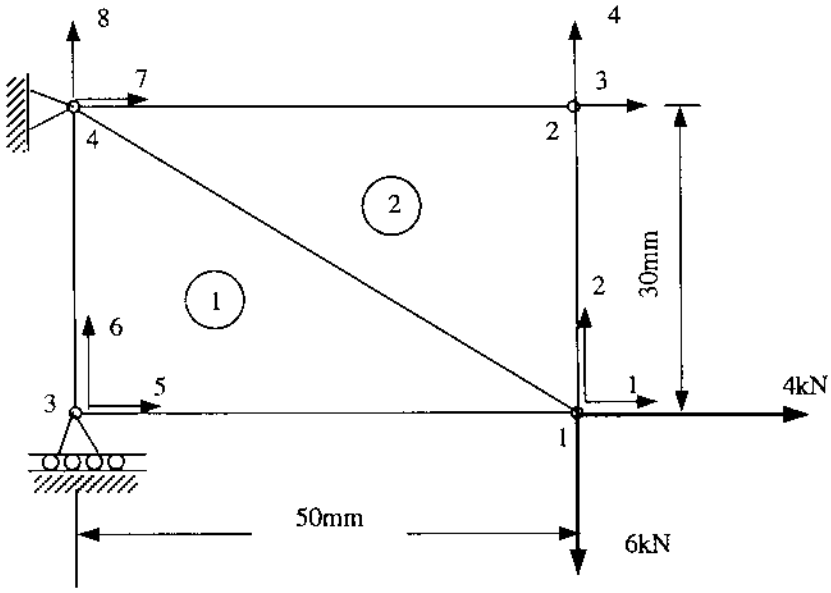
- Nói chung, số thứ tự BTD tại nút i, xác định như sau:

Tại nút i: Số thứ tự BTD trên phương x: 2i - 1

Số thứ tự BTD trên phương y: 2i

- Số thứ tự BTD theo chiều ngược kim đồng hồ.

2. Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy ví dụ trên hình 5.14)



Hình 5.14

Số phần tử: 2

Số BTD có chuyển vị: 5

Tổng số BTD: 8

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6, 7, 8

Bề dày tấm = 1,25mm

Hệ số poát xong: 0,25

Tỉ trọng: 0

Thành phần tải trọng: 4; -6; 0; 0; 0

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	4	3
2	1	2	4

ft	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	e
1	1	2	7	8	5	6	50	0	0	0	30	0	210
2	1	2	3	4	7	8	50	50	0	0	30	30	210

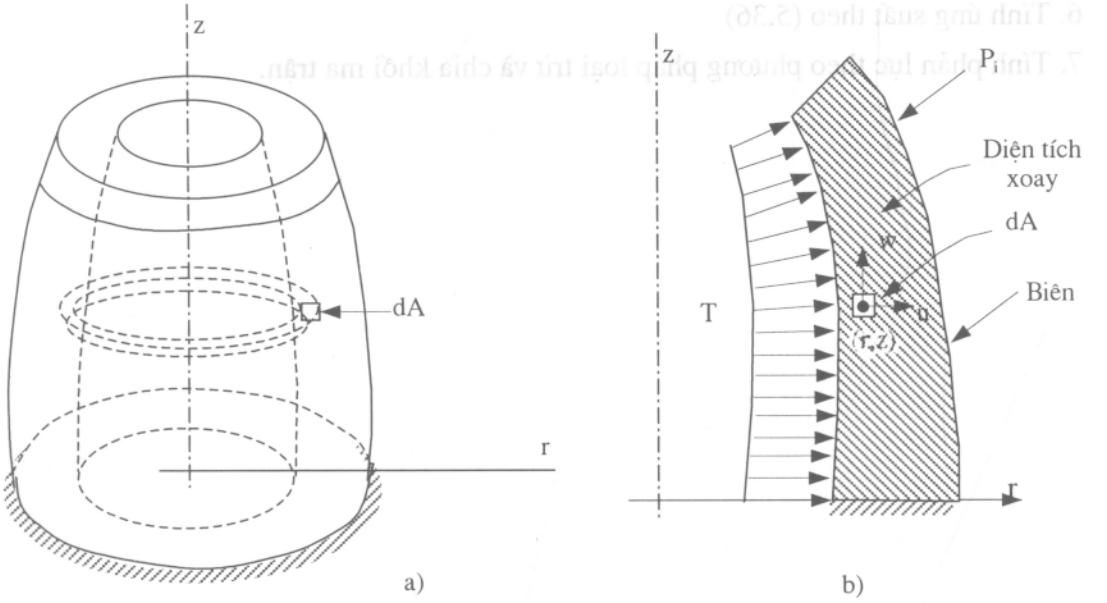
3. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (5.30)
4. Ghép các vectơ tải trọng theo (5.34), (5.35), (5.44) và vectơ tải trọng nhập vào.
5. Giải hệ phương trình cân bằng để được giá trị các thành phần chuyển vị.
6. Tính ứng suất theo (5.36)
7. Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và chia khối ma trận.

Chương 6

VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG

§6.1. KHÁI NIỆM

Vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng là một kết cấu đối xứng chịu tải trọng đối xứng. Nói chung, nó làm việc trên 3 chiều, nhưng do tính chất đối xứng về kết cấu và tải trọng, ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc xoay, do đó bài toán 3 chiều có thể đưa về bài toán 2 chiều.



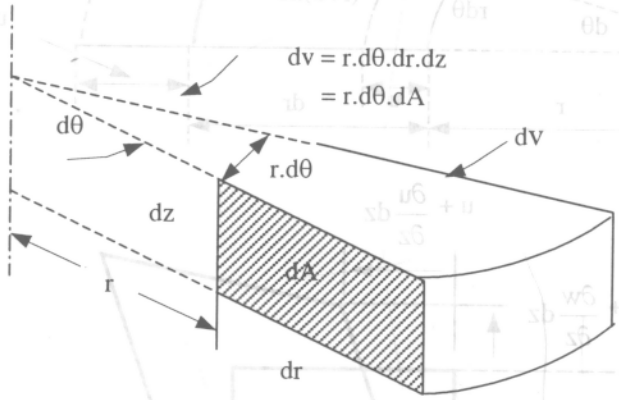
Hình 6.1: *Vật rắn tròn xoay đưa về bài toán 2 chiều*

Chẳng hạn đối với kết cấu trên hình 6.1a, sơ đồ tính toán nằm trong mặt phẳng z-r (hình 6.1b). z là là trục của vật rắn tròn xoay, r là phương nằm ngang xuyên tâm; A là diện tích tròn xoay (gạch chéo), dA là phân tố diện tích; u, w là các thành phần chuyển vị ngang và chuyển vị đứng tác dụng trên phân tố diện tích dA. T là lực biên, P_i là lực tập trung phân bố trên vòng tròn ở mặt ngoài của vật rắn.

Các lực thể tích f, lực biên T và lực tập trung P_i được chia thành 2 thành phần: thành phần nằm ngang song song với phương xuyên tâm r, thành phần thẳng đứng song song với trục z.

Đặc điểm của bài toán này là ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào góc xoay θ.

§6.2. PHÂN TÍCH ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG VẬT THỂ TRÒN XOAY



Hình 6.2: *Phân tố thể tích trong vật rắn tròn xoay*

Xét phân tố thể tích dV trên hình 6.2. Thế năng toàn phần có thể viết:

$$TNT = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_A \boldsymbol{\sigma\varepsilon} r\, dA\, d\theta - \int_0^{2\pi}\int_A \mathbf{u'}\, \mathbf{f} r dA d\theta - \int_0^{2\pi}\int_A \mathbf{u'}\, \mathbf{T} r\, d\ell\, d\theta - \sum_i \mathbf{u}_i' \mathbf{P}_i \qquad (6.1)$$

Trong đó: rdA dθ = dV là phân tố thể tích trên hình 6.2;

rdldθ - diện tích bề mặt của phân tố trên đó có lực biên tác dụng.

Vì mọi biến dạng trong các tích phân trên không phụ thuộc vào góc xoay θ nên (6.1) có thể viết:

$$TNT = 2\pi\left(\frac{1}{2}\int_A \boldsymbol{\sigma'\varepsilon}\, r\, dA - \int_A \mathbf{u'}\, \mathbf{f} r\, dA - \int_L \mathbf{u'}\mathbf{T} r\, d\ell\right) - \sum_i \mathbf{u}_i' \mathbf{P}_i \qquad (6.2)$$

Trong đó:

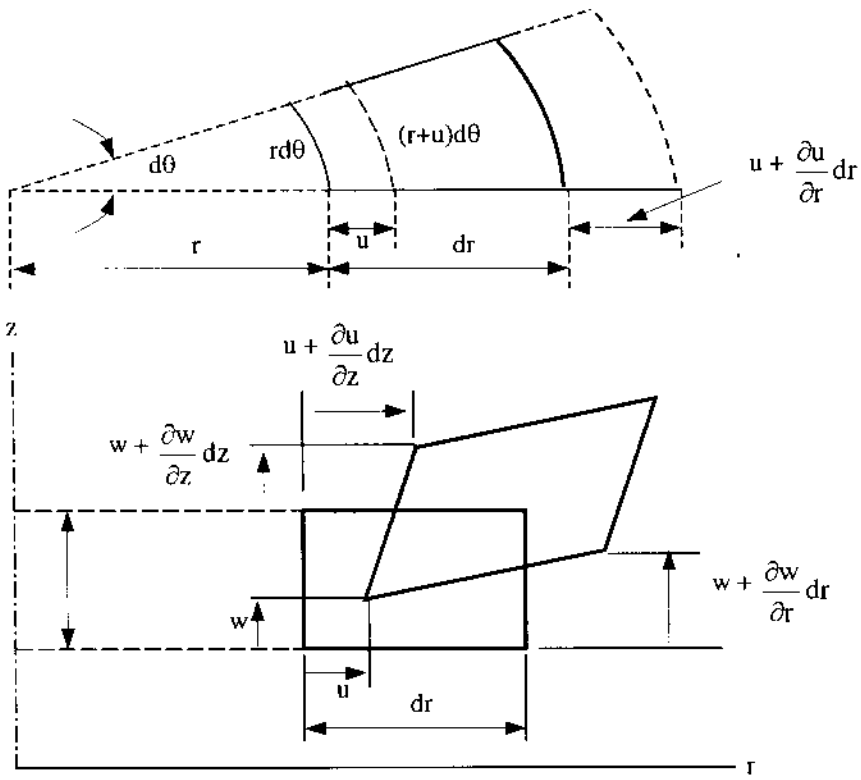
Vectơ chuyển vị $\mathbf{u} = [u \quad w]'$ (6.3)

Vectơ lực thể tích $\mathbf{f} = [f_r \quad f_z]'$ (6.4)

Vectơ lực biên $\mathbf{T} = [T_r \quad T_z]'$ (6.5)

Từ hình (6.3), ta có hệ thức giữa biến dạng ε và chuyển vị u như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{rz} \quad \varepsilon_\theta]$$
$$= \left[\frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad \frac{u}{r}\right] \qquad (6.6)$$



Hình 6.3: Biến dạng của phân tố thể tích

Vectơ ứng suất tương ứng

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix}\sigma_r & \sigma_z & \tau_{rz} & \sigma_\theta\end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Trong đó: ε_r , σ_r - biến dạng và ứng suất trên phương ngang xuyên tâm r;

ε_z, σ_z - biến dạng và ứng suất trên phương z;

γ_{rz} - ứng suất tiếp trên phương z; ε_θ - biến dạng trên phương chu vi tròn.

Hệ thức ứng suất - biến dạng

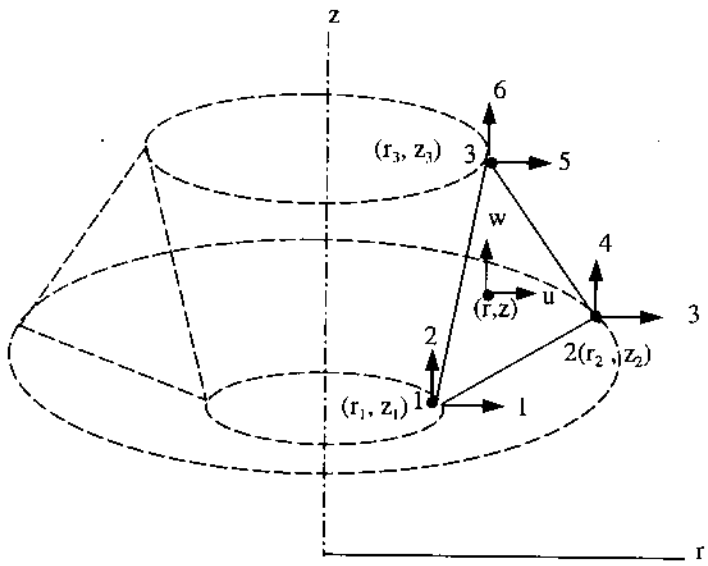
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.8}$$

Trong đó, **D** là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 4 × 4. Ma trận này được suy ra từ (1.17) (chương một) bằng cách bỏ các phần tử không thích hợp.

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

§6.3. MÔ HÌNH FTHH TAM GIÁC. HỆ THỨC BIẾN DẠNG - CHUYỂN VỊ

Miền 2 chiều xác định bởi diện tích xoay được chia thành các FTHH tam giác. Mặc dầu mỗi FTHH được biểu thị trong mặt phẳng rz nhưng trong thực tế nó là vật rắn tròn xoay tạo thành bởi sự xoay tam giác quanh trục z. Một FTHH có tính chất tiêu biểu như trên hình (6.4).



Hình 6.4: FTHH tam giác trong vật rắn tròn xoay

Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và giữa các nút như đã trình bày trong các chương trước. Cần chú ý rằng các tọa độ r, z thay cho các tọa độ x, y.

Ở đây, ta dùng 3 hàm hình dạng N_1, N_2, N_3 để biểu thị mối liên hệ giữa vectơ chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH và vectơ chuyển vị tại các nút:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q} \tag{6.10}$$

Trong đó: **u** tính theo (6.3)

Ma trận hàm hình dạng **N** và vectơ chuyển vị **q** tại các nút của FTHH như sau:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \end{bmatrix}' \tag{6.12}$$

Đặt $N_1 = \xi$, $N_2 = \eta$, $N_3 = 1-\xi-\eta$; hệ thức (6.10) có thể viết:

$$u = \xi q_1 + \eta q_3 + (1-\xi-\eta)q_5$$

$$w = \xi q_2 + \eta q_4 + (1-\xi-\eta)q_6 \tag{6.13}$$

Dạng biểu thị cùng tham số:

$$r = \xi r_1 + \eta r_2 + (1 - \xi - \eta) r_3$$

$$z = \xi z_1 + \eta z_2 + (1 - \xi - \eta) z_3 \tag{6.14}$$

Áp dụng nguyên tắc tính đạo hàm:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

Trong đó, **J** là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

Trong đó: r_1, z_1 - tọa độ trên phương r và trên phương z tại nút 1;

r_2, z_2 - tọa độ trên phương r và trên phương z tại nút 2;

r_3, z_3 - tọa độ trên phương r và trên phương z tại nút 3;

r_{ij}, z_{ij} được định nghĩa như trong chương năm nghĩa là $r_{ij} = r_i - r_j$, $z_{ij} = z_i - z_j$.

Định thức của ma trận Jacobian

$$\det \mathbf{J} = r_{13}z_{23} - r_{23}z_{13} \tag{6.18}$$

Cần nhắc lại rằng $|\det \mathbf{J}| = 2A$ nghĩa là giá trị tuyệt đối của định thức ma trận Jacobian bằng 2 lần diện tích của tam giác.

Các hệ thức nghịch đảo của (6.15) và (6.16).

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

Thay các hệ thức trên vào hệ thức biến dạng - chuyển vị (6.6) và căn cứ vào (6.13), ta được:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \dfrac{z_{23}(q_1 - q_5) - z_{13}(q_3 - q_5)}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{-r_{23}(q_2 - q_6) - r_{13}(q_4 - q_6)}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{-r_{23}(q_1 - q_5) + r_{13}(q_3 - q_5) + z_{23}(q_2 - q_6) - z_{13}(q_4 - q_6)}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{N_1 q_1 + N_2 q_3 + N_3 q_5}{r} \end{Bmatrix}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{q} \tag{6.21}$$

B là ma trận biến dạng - chuyển vị cấp 4 × 6

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{z_{12}}{\det \mathbf{J}} & 0 \\ 0 & \dfrac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & 0 & \dfrac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{r_{32}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{z_{23}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{r_{13}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{z_{31}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{r_{21}}{\det \mathbf{J}} & \dfrac{r_{12}}{\det \mathbf{J}} \\ \dfrac{N_1}{r} & 0 & \dfrac{N_2}{r} & 0 & \dfrac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

§6.4. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA FTHH. VECTƠ TẢI TRỌNG. TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ

6.4.1. Ma trận độ cứng của FTHH

Ta sẽ vận dụng nguyên lý công ảo áp dụng cho vật rắn tròn xoay để suy ra biểu thức của ma trận độ cứng và vectơ tải trọng

Căn cứ vào (6.2), công ảo của nội lực có thể viết

$$\delta U = 2\pi \int \delta'_{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}.r \quad dA \tag{6.23a}$$

Công của ngoại lực:

$$\delta W = 2\pi \int \delta'_{u}.\mathbf{f}\, r dA + \int \delta'_{u} \mathbf{T} r dl \tag{6.24a}$$

Trong đó: δ_{ε} - vectơ biến dạng ảo;

δ'_{u} - vectơ chuyển vị ảo.

Vì $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q}$ nên $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\delta_q$; $\sigma = \mathbf{D}.\,\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D.B.q}$

Vì $\mathbf{u} = \mathbf{Nq}$ nên $\delta_u = \mathbf{N}\delta_q$

Trong đó: $\boldsymbol{\delta}_q$ - vectơ chuyển vị ảo tại các nút.

Thay các hệ thức trên vào (6.23a):

$$\delta U = \delta'_q\left[(2\pi\ \ \mathbf{B'DB}\ \ .\mathrm{rdA})\mathbf{q}\right] \tag{6.23b}$$

Thay các hệ thức trên vào (6.24a)

$$\delta W = \delta'_q\left(2\pi\int \mathbf{N'^s f}\,\mathrm{r\,dA} + 2\pi\int \mathbf{N'^s T}\mathrm{rd}\ell\right) \tag{6.24b}$$

Vận dụng nguyên lý công ảo $\delta U = \delta W$, ta được:

$$\left(2\pi\int \mathbf{B'DB}.\mathrm{rdA}\right)\mathbf{q} = 2\pi\int \mathbf{N'.f}\mathrm{rdA} + 2\pi\int \mathbf{N'.T}\mathrm{rd}\ell$$

hoặc $$\mathbf{k_c\,.\,q} = \mathbf{f_t} + \mathbf{f_b}$$

Trong đó, ma trận độ cứng của FTHH:

$$\mathbf{k_c} = 2\pi\int \mathbf{B'.D.B}\,\mathrm{rdA} \tag{6.25}$$

Véc tơ lực thể tích: $$\mathbf{f_t} = 2\pi\int \mathbf{N'^s.f}.\mathrm{rdA} \tag{6.26a}$$

Vectơ lực biên: $$\mathbf{f_b} = 2\pi\int \mathbf{N'^s\,T}\mathrm{rd}\ell \tag{6.27a}$$

Trong đó, $\mathbf{N'^s}$ là ma trận hàm hình dạng ứng với cạnh có lực biên tác dụng.

Ta chú ý rằng hàng thứ 4 của ma trận **B** (công thức 6.22) có các số hạng N_i/r. Hơn nữa, trong tích phân (6.25), cũng có thừa số r. Một cách gần đúng, ta có thể tính **B** và r tại trọng tâm của FTHH tam giác. Tại đó:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$$

và $$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \tag{6.28}$$

Trong đó, $\bar{r}$ là bán kính của trọng tâm FTHH tam giác. Gọi $\overline{\mathbf{B}}$ là ma trận biến dạng - chuyển vị ứng với trọng tâm của FTHH tam giác, từ (6.25) ta có:

$$\mathbf{k_e} = 2\pi\bar{r}\ \ \overline{\mathbf{B}}'.\ \ \mathbf{D}.\overline{\mathbf{B}}\int \mathrm{dA}$$

hay $$\mathbf{k_e} = 2\pi\bar{r}A_e\overline{\mathbf{B}}'\mathbf{D}\overline{\mathbf{B}}$$

Ta chú ý rằng $2\pi\ \bar{r}A_e$ là thể tích của vật tròn xoay biểu thị trên hình (6.5) và A_e là diện tích của FTHH tam giác:

$$A_e = \frac{1}{2}\left|\det \mathbf{J}\right| \tag{6.30}$$

6.4.2. Vectơ tải trọng

Theo (6.26a), ta có vectơ lực thể tích:

$$\mathbf{f}_t = 2\pi \int \mathbf{N}'\mathbf{f}r \quad dA \tag{6.26b}$$

Thay **N** từ (6.11) và **f** từ (6.4) vào (6.26b), ta được:

$$\mathbf{f}_t = 2\pi \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ f_z \end{bmatrix} rdA$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận

$$\mathbf{f}_t = 2\pi \int N_1.f_r \quad N_1f_z \quad N_2f_r \quad N_2f_z \quad N_3f_r \quad N_3f_z] \; rdA$$

Một cách gần đúng, ta tính các hàm hình dạng N_1, N_2 , N_3 và bán kính r tại trọng tâm của tam giác. Gọi $\bar{r}$ là bán kính của trọng tâm tam giác. Vì $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$ nên cuối cùng, ta được:

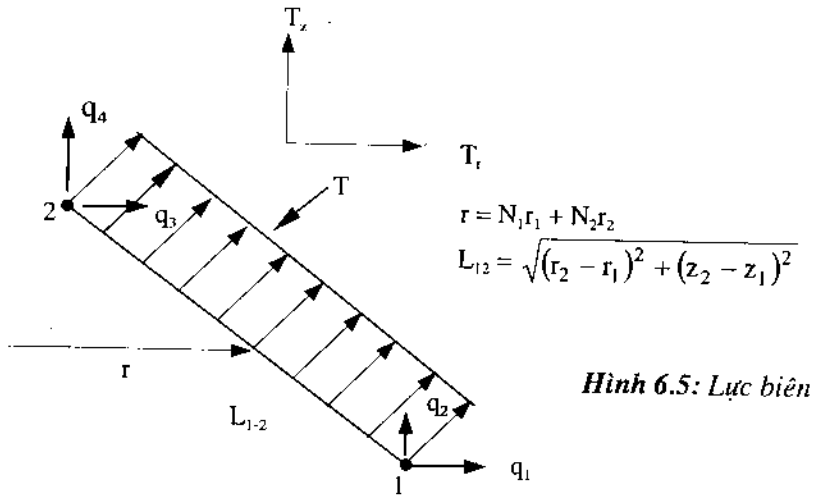
$$\mathbf{f}_t = \frac{2\pi\bar{r}A_e}{3}\left[\bar{f}_r \quad \bar{f}_z \quad \bar{f}_r \quad \bar{f}_z \quad \bar{f}_r \quad \bar{f}_z\right] \tag{6.31}$$

Trong đó, $\bar{f}_r, \bar{f}_z$ là các lực thể tích tính tại trọng tâm của tam giác.

Theo (6.27a), ta có vectơ lực biên

$$\mathbf{f}_b = 2\pi \int \mathbf{N}'^s \mathbf{T} r d\ell \tag{6.27b}$$

Trong đó, $\mathbf{N}^s$ là ma trận hàm hình dạng ứng với cạnh của tam giác trên đó có lực biên tác dụng. Chẳng hạn, đó là cạnh 1-2 trên hình (6.5).



Hình 6.5: Lực biên tác dụng trên cạnh 1-2

Trong trường hợp này, $N_3 = 0$, $N_1 + N_2 = 1$. Thay ma trận hàm hình dạng **N** từ (6.11), **T** từ (6.5) và $r = N_1r_1 + N_2r_2$ từ (6.14) vào (6.27b), ta được:

$$\mathbf{f_b} = 2\pi\int\begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_r \\ T_z \end{bmatrix}\left(N_1r_1 + N_2r_2\right)d\ell$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và chỉnh lý các kết quả tính toán, ta được:

$$\mathbf{f_b} = 2\pi\begin{bmatrix} \left(r_1\int N_1^2 d\ell + r_2\int N_1N_2 d\ell\right) & 0 \\ 0 & \left(r_1\int N_1^2 d\ell + r_2\int N_1N_2 d\ell\right) \\ \left(r_1\int N_1N_2 d\ell + r_2\int N_2^2 d\ell\right) & 0 \\ 0 & r_1\int N_1N_2 d\ell + r_2\int N_2^2 d\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_r \\ T_z \end{bmatrix} \qquad (6.27c)$$

Có thể chứng minh được rằng $\int N_1^2 d\ell = \int N_2^2 d\ell = \frac{L_{12}}{3}$ và $\int N_1N_2 d\ell = \frac{L_{12}}{6}$ *

Thay các kết quả này vào (6.27c) và chỉnh lý kết quả tính toán, cuối cùng ta được:

$$\mathbf{f_b} = 2\pi\ L_{1-2}\left[aT_r \quad aT_z \quad bT_r \quad bT_z\right] \qquad (6.32)$$

Trong đó: $$a = \frac{2r_1 + r_2}{6} \qquad b = \frac{r_1 + 2r_2}{6} \qquad (6.33)$$

Chiều dài của cạnh 1-2

$$L_{1\text{-}2} = \sqrt{\left(r_2 - r_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} \qquad (6.34)$$

Khi cạnh 1-2 song song với trục z, ta có $r_1 = r_2$, do đó $a = b = 0{,}5r_1$.

Ở trên, ta đã suy ra các biểu thức của vectơ lực thể tích $\mathbf{f_t}$ và vectơ lực biên f_b. Nếu có tải trọng phân bố dọc theo chu vi vòng tròn trên bề mặt vật rắn tròn xoay, ta phải cộng thêm lực tập trung đó vào các nút của FTHH tam giác.

Sau khi ghép các ma trận độ cứng của các FTHH và ghép các vectơ tải trọng, ta được hệ phương trình cân bằng tổng thể.

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \qquad (6.35)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị tại các nút.

Căn cứ vào (6.21), ứng suất tính như sau:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}.\overline{\mathbf{B}}.\mathbf{q} \qquad (6.36)$$

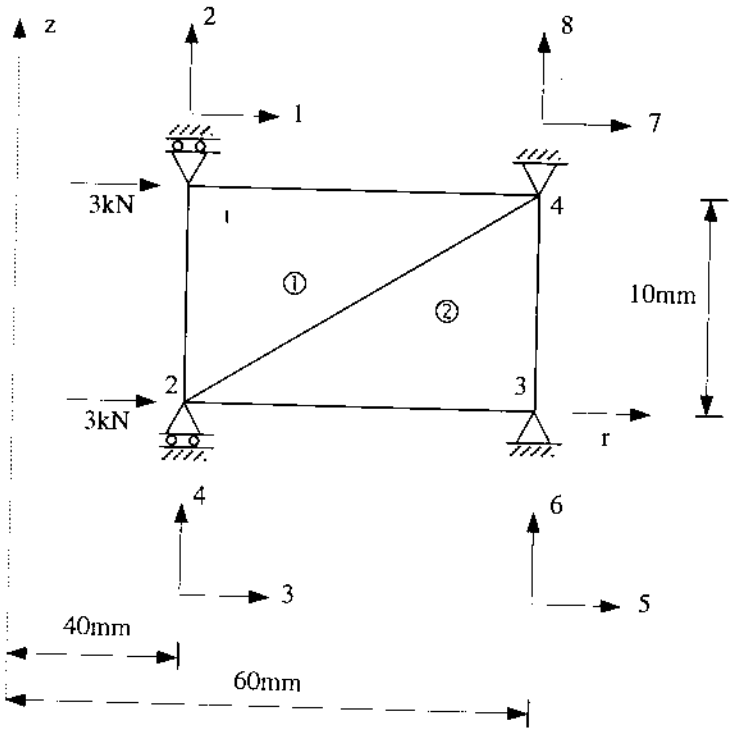
Trong đó: $\overline{\mathbf{B}}$ là ma trận **B** trong (6.22) ứng với trọng tâm của tam giác.

---

* Chứng minh ở cuối chương

Hai ứng suất chính σ_1, σ_2 ứng với σ_r , σ_z, τ_{rz} tính theo vòng tròn M_0.

Ví dụ 6.1: Mô hình FTHH trong 1 vật thể tròn xoay như trên hình (6.6)



Môđun đàn hồi: 210kN/mm²

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	4
2	4	2	3

Hình 6.6

Tính: Chuyển vị

Ứng suất

Giải:

Số phần tử : 2

Số BTD : 8

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Thứ tự số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 2, 4, 5, 6, 7, 8

Tính ma trận cấu trúc vật liệu theo (6.9)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 282,692 & 121,154 & 0 & 121,154 \\ & 282,692 & 0 & 121,154 \\ \text{Đối xứng} & & 80,769 & 0 \\ & & & 282,692 \end{bmatrix}$$

Tính các ma trận **B** theo (6.22)

Phần tử 1:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,05 & -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,007143 & 0 & 0,007143 & 0 & 0,007143 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,05 & 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & -0,1 \\ 0,1 & 0 & 0 & -0,05 & -0,1 & 0,1 \\ 0,00625 & 0 & 0,00625 & 0 & 0,00625 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính các ma trận độ cứng riêng theo (6.29)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 42290,769 & -27066,092 & -24528,646 & 15224,677 & -20299,569 & 11841,415 \\ & 88890,615 & 14378,862 & -82889,908 & 20299,569 & -5920,708 \\ & & 24105,738 & -2537,446 & 1691,631 & -1184,415 \\ & & & 82889,908 & -20299,569 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & & & 23682,831 & 0 \\ & & & & & 5920,708 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 27436,137 & 2537,446 & -898,679 & -13533,046 & -25427,325 & 10995,6 \\ & 94731,323 & -17762,123 & 0 & 22837,015 & -94731,323 \\ & & 21515,429 & 0 & -23312,787 & 17762,123 \\ & & & 8766,523 & 13533,046 & -6766,523 \\ \text{Đối xứng} & & & & 53656,413 & -36370,062 \\ & & & & & 101497,846 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Dùng phương pháp loại trừ ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 42290,769 & -24528,646 \\ & 45621,167 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}$$

Giải hệ phương trình cân bằng:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính:

$$Q_1 = 1{,}585 \times 10^{-4}\text{m} \qquad Q_3 = 1{,}510 \times 10^{-4}\text{ mm}$$

Giá trị các thành phần chuyển vị của các phần tử:

Phần tử 1:

$$[q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_7 \quad q_8]' = [1{,}585 \times 10^{-4} \quad 0 \quad 1{,}510 \times 10^{-4} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Phần tử 2:

$$[q_7 \quad q_8 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]' = [0 \quad 0 \quad 1{,}510 \times 10^{-4} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Tính ứng suất theo (6.36)

Phần tử 1:

$$\sigma'_1 = [-1{,}973 \times 10^{-3} \quad -6{,}924 \times 10^{-4} \quad 6{,}078 \times 10^{-5} \quad -3{,}353 \times 10^{-4}]\ \text{kN/mm}^2$$

Phần tử 2:

$$\sigma'_2 = [-2{,}02 \times 10^{-3} \quad -8{,}003 \times 10^{-4} \quad 0 \quad -6{,}478 \times 10^{-4}]\ \text{kN/mm}^2$$

6.4.3. Tác dụng của nhiệt độ

Độ biến thiên đồng đều trên các phương của nhiệt độ ΔT sản sinh ra biến dạng ban đầu ε_0:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0 \quad \alpha\Delta T]' \tag{6.37}$$

Ứng suất có thể viết (theo 6.36)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) \tag{6.38}$$

Thay σ từ (6.28) vào (6.23a), ta có công thức của nội lực:

$$\delta U = 2\pi \int \delta'_\varepsilon\, \boldsymbol{\sigma} r dA - 2\pi \int \delta'_\varepsilon \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 r dA \tag{6.39}$$

Công ảo của ngoại lực vẫn tính theo (6.24b)

Sau khi thay $\delta_\varepsilon = \mathbf{B}\delta_q$ và $\varepsilon = \mathbf{Bq}$ vào (6.39) và cho $\delta U = \delta W$, ta được:

$$(2\pi \int \mathbf{B'DB}\ \ r dA)\mathbf{q} = 2\pi \int \mathbf{B'D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dA + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b$$

hoặc

$$\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{q} = \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_b \tag{6.40}$$

Trong đó: $\mathbf{k}_e$ - ma trận độ cứng của FTHH, vẫn tính theo công thức (6.29);

$\mathbf{f}_t$, $\mathbf{f}_b$ vẫn tính theo các công thức (6.31) và (6.32);

$\mathbf{f}_n$ - vectơ tải trọng do sự biến thiên của nhiệt độ gây ra:

$$\mathbf{f}_n = 2\pi \int \mathbf{B'D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 r dA \tag{6.41a}$$

Nếu tính $\mathbf{B}$, r, ε_0 tại trọng tâm của FTHH, (6.41a) được đưa về dạng:

$$\mathbf{f}_n = 2\pi \bar{r} A_c \overline{\mathbf{B}}'\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{6.41}$$

$\mathbf{f}_n$ là một vectơ cột:

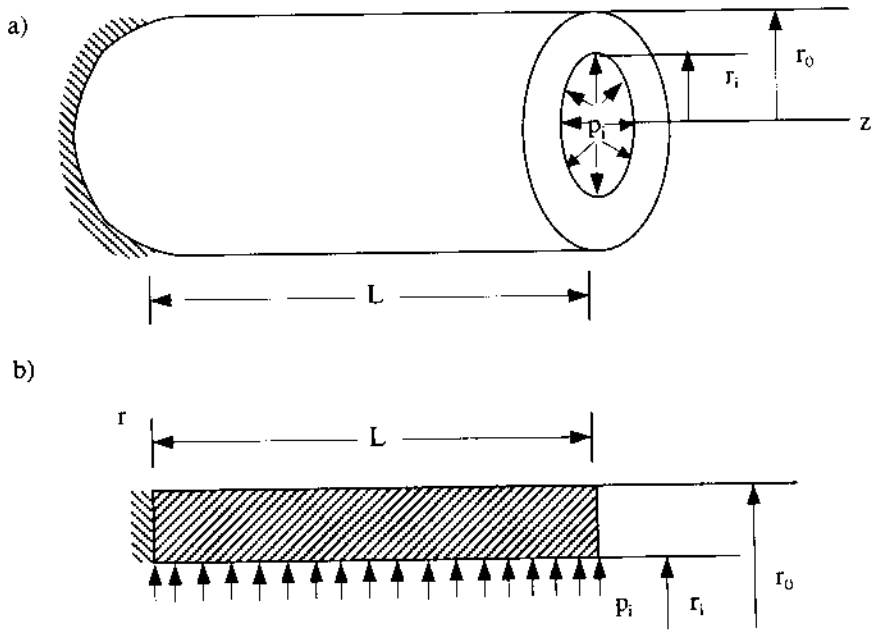
$$\mathbf{f}_n = \begin{bmatrix} f_n^1 & f_n^2 & f_n^3 & f_n^4 & f_n^5 & f_n^6 \end{bmatrix}' \tag{6.42}$$

Trong đó: f_n^i là thành phần tải trọng do sự biến thiên nhiệt độ gây ra men theo BTD thứ i của FTHH.

§6.5. MỘT SỐ THÍ DỤ VỀ CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN TRONG VẬT RẮN TRÒN XOAY

Như trong phần trước đã trình bày, khi tính vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng, ta chỉ xét mặt phẳng xuyên tâm đi qua trục z vì biến dạng và ứng suất chỉ phát sinh trong mặt đó, chúng không phụ thuộc vào góc xoay. Vì vậy, ở đây, ta cũng chỉ xét các điều kiện biên trong mặt phẳng nói trên.

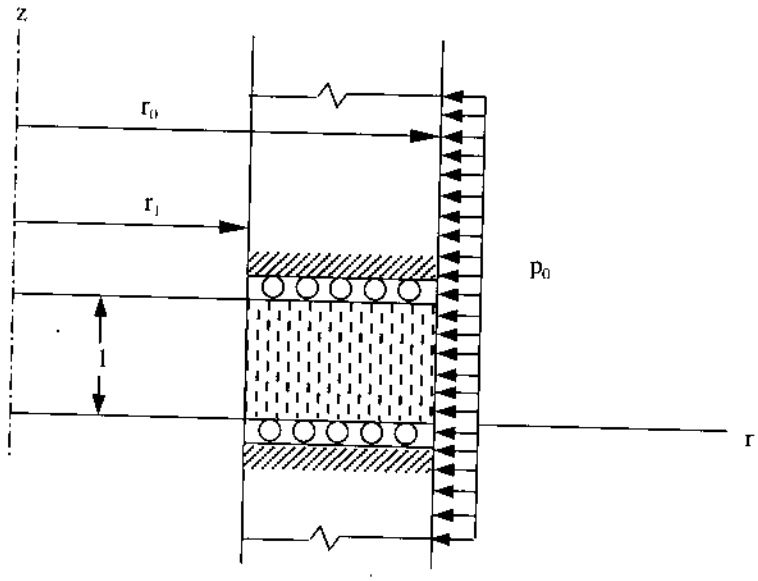
- Hình trụ rỗng chịu áp lực bên trong



Hình 6.7: Hình trụ rỗng chịu áp lực đều ở bên trong

Trên hình (6.7a) là một hình trụ rỗng chịu áp lực đều ở bên trong và có một đầu cố định vào tường. Khi tính toán, ta chỉ xét mặt xuyên tâm hình chữ nhật có gạch chéo giới hạn bởi 2 bán kính r_0 và r_1, một đầu ngàm và chiều dài bằng L (hình 6.7b). Tại đầu ngàm, chuyển vị triệt tiêu trên phương r cũng như trên phương z. Do đó, nếu tính theo mô hình lò xo, ma trận độ cứng và vectơ tải trọng phải được biến đổi ứng với các BTD ở gối tựa ngàm.

Hình trụ rỗng dài vô hạn

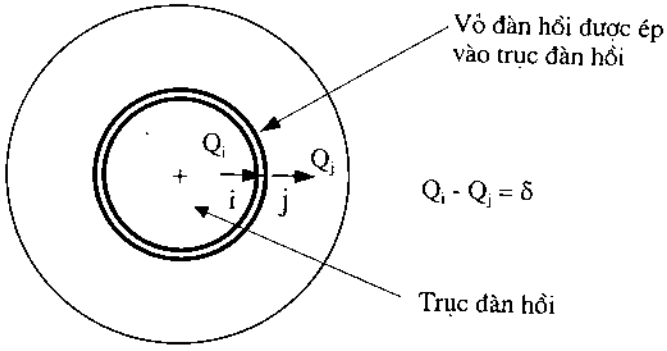


Hình 6.8: *Hình trụ rỗng dài vô hạn chịu áp lực bên ngoài*

Một hình trụ rỗng dài vô hạn và chịu áp lực bên ngoài biểu thị như trên hình (6.8). Với giả thiết kích thước chiều dài không đổi, bài toán biến dạng phẳng này được đưa về mô hình mặt xuyên tâm hình chữ nhật có chiều bằng đơn vị và có 2 cạnh biên men theo đó chuyển vị triệt tiêu trên phương z (hình 6.8).

Vỏ đàn hồi ép vào trục đàn hồi

Một vỏ đàn hồi được ép vào để tiếp xúc với một trục đàn hồi như trên hình (6.9), khoảng cách giữa vỏ và trục là δ .



Hình 6.9: *Vỏ đàn hồi được ép vào trục đàn hồi*

Trong trường hợp này, ta đưa về mô hình một cặp nút i và j trên biên tiếp xúc, một nút nằm trên trục, một nút nằm trên ống bao (hình 6.9). Nếu Q_i và Q_j là các chuyển vị men theo các BTD xuyên tâm, ta có điều kiện biên cần được thỏa mãn.

$$Q_j - Q_i = \delta \tag{6.43}$$

Điều kiện biên trên là một ràng buộc nhiều điểm đã được đề cập trong chương ba. Áp dụng phương pháp mô hình lò xo, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}C\left(Q_j - Q_i - \delta\right)^2 &= \frac{1}{2}CQ_i^2 + \frac{1}{2}CQ_j^2 - \frac{1}{2}C(Q_iQ_j + Q_jQ_i) \\ &+CQ_i\delta - CQ_j\delta + \frac{1}{2}C\delta^2\end{aligned} \tag{6.44}$$

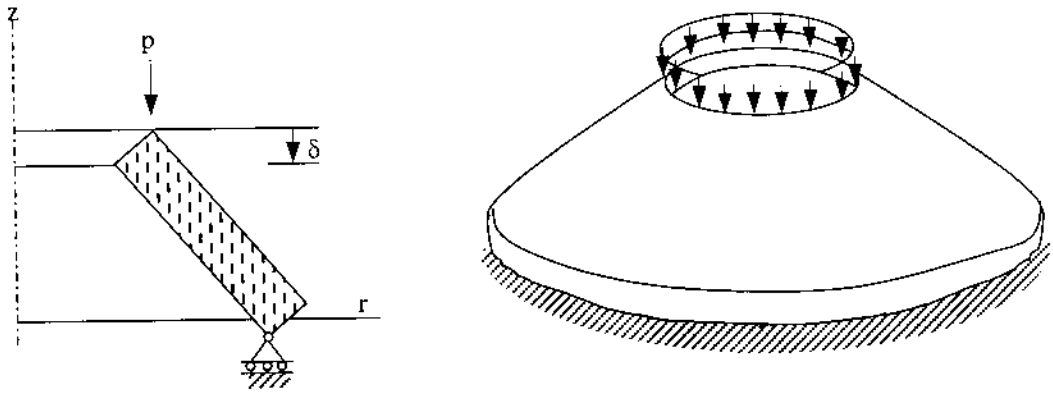
Phương trình trên đưa đến sự biến đổi ma trận độ cứng và vectơ tải trọng:

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} K_{ii} + C & K_{ij} - C \\ K_{ji} - C & K_{jj} + C \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} F_i - C\delta \\ F_j + C\delta \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

- Lò xo Belleville

Lò xo Belleville là một loại đĩa hình côn. Nó chịu tác dụng của tải trọng men theo chu vi vòng tròn ở phía trên và tựa lên gối tựa lăn ở phía dưới (hình 6.10). Sơ đồ tính toán đưa về mô hình hình chữ nhật gạch chéo chịu tải trọng đối xứng P ở góc phía trên, góc phía dưới có chuyển vị triệt tiêu trên phương z. Vì tải trọng thẳng đứng, mép của lò xo chuyển vị hướng ra ngoài.

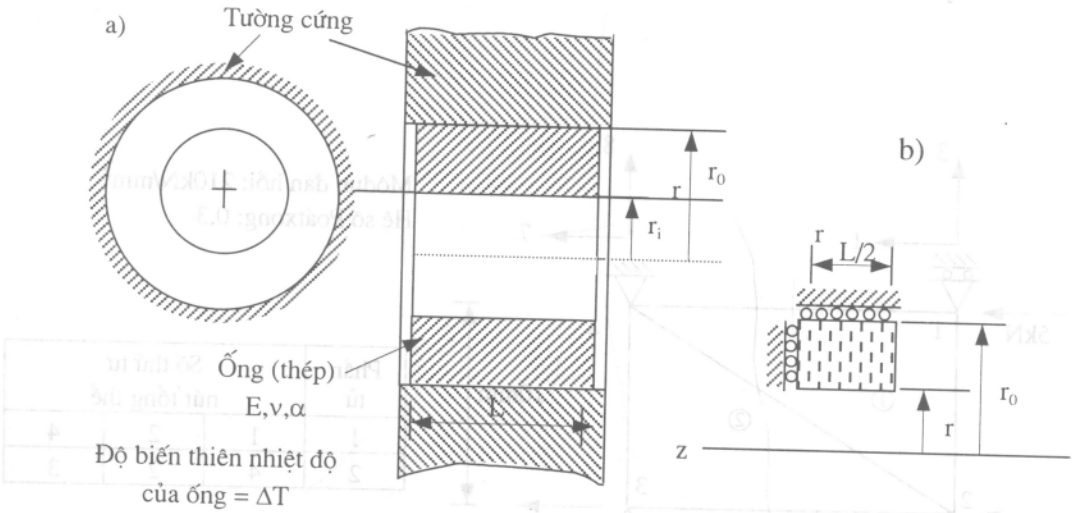


Hình 6.10: *Lò xo Belleville*

Bài toán ứng suất nhiệt

Một ống thép được đút vào một tường cứng như trên hình (6.11). Ống tiếp xúc với tường và nhiệt độ tăng lên ΔT. Do bị tường ngăn cản, ứng suất trong ống tăng lên. Sơ đồ tính toán đưa về mô hình hình chữ nhật có chiều dài bằng L/2 và có chiều rộng giới hạn bởi các bán kính r_1 và r_0 (hình 6.11b). Các điểm nằm trên chu vi ngoài không có chuyển vị trên phương xuyên tâm và các điểm ở cạnh bên trái không có chuyển vị trên phương

dọc trục. Vectơ tải trọng tương đương do biến thiên nhiệt độ gây ra, cần được xét đến theo (6.11).



Hình 6.11: *Bài toán ứng suất nhiệt*

§6.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG (CTR9)

1. Các điều cần tuân thủ

- Số thứ tự các BTD nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên (1,2,3…). Số thứ tự các BTD không có chuyển vị nên bố trí ở các vị trí cuối cùng để tiện cho việc chia khối ma trận trong phương pháp loại trừ.

- Số thứ tự các nút trong một FTHH được đếm theo chiều *ngược kim đồng hồ*.

- Nói chung, số thứ tự BTD tại nút i, xác định như sau:

Trên phương r: 2i - 1

Trên phương z: 2i

2. Nhập các số liệu ban đầu theo các bảng sau (lấy thí dụ trên hình 6.12).

Số phần tử: 2

Số BTD có chuyển vị: 2

Tổng số BTD: 8

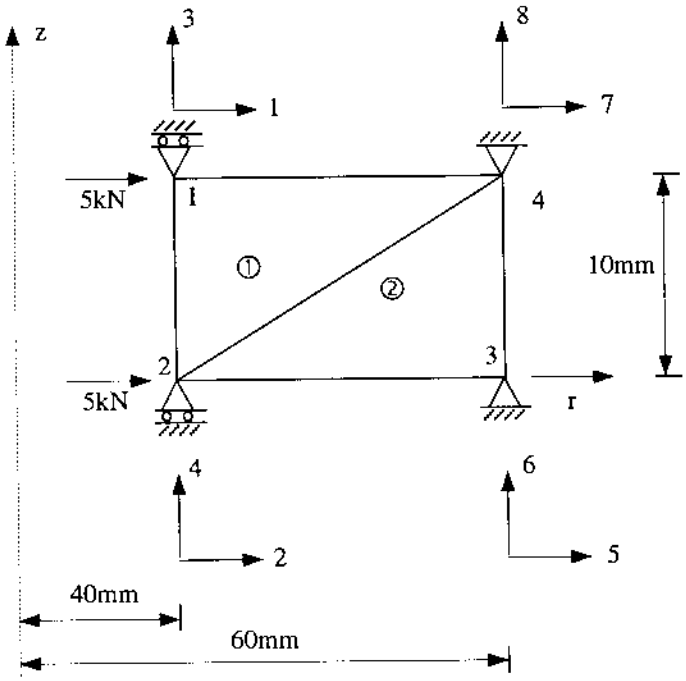
Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3, 4, 5, 6,7, 8

Môđun đàn hồi: 210 kN/mm^2

Hệ số poátxong: 0,3

Thành phần tải trọng: 5; 5



Môđun đàn hồi: 210kN/mm^2
Hệ số Poátxong: 0,3

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể		
1	1	2	4
2	4	2	3

Hình 6.12

Số thứ tự BTD và các toạ độ thống kê trong bảng sau:

Phần tử	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	r_1	r_2	r_3	z_1	z_2	z_3
1	1	3	2	4	7	8	40	40	60	10	0	10
2	7	8	2	4	5	6	60	40	60	10	0	0

3) Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể theo (6.29).

4) Ghép các vectơ tải trọng theo (6.31) và (6.32).

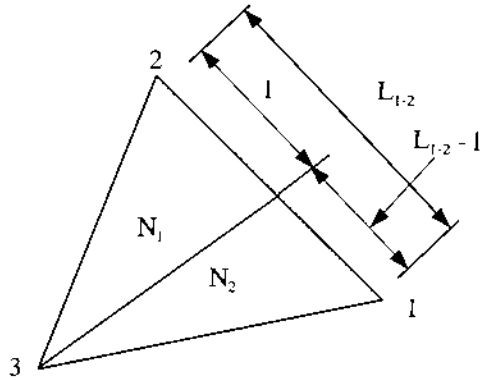
5) Giải hệ phương trình cân bằng theo phương pháp Gauss

6) Tính ứng suất theo (6.22), (6.9) và (6.36)

7) Tính phản lực theo phương pháp loại trừ và chia khối ma trận.

* Chứng minh: $\int N_1^2 d\ell = \int N_2^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$

$$\int N_1 N_2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{6}$$



Trên cạnh 1-2, $N_3 = 0$, $N_1 + N_2 = 1$

Gọi h là chiều cao của tam giác

1 - 2 - 3: Theo định nghĩa:

$$N_1 = \frac{l.h/2}{L_{1-2}.h/2} = \frac{l}{L_{1-2}}$$

$$N_1^2 d\ell = \frac{1}{L_{1-2}^2} \int_0^{L_{1-2}} l^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$$

Chứng minh một cách tương tự, $\int N_2^2 d\ell = \frac{L_{1-2}}{3}$

$$N_1 N_2 = l(L_{1-2} - l)/L_{1-2}^2$$

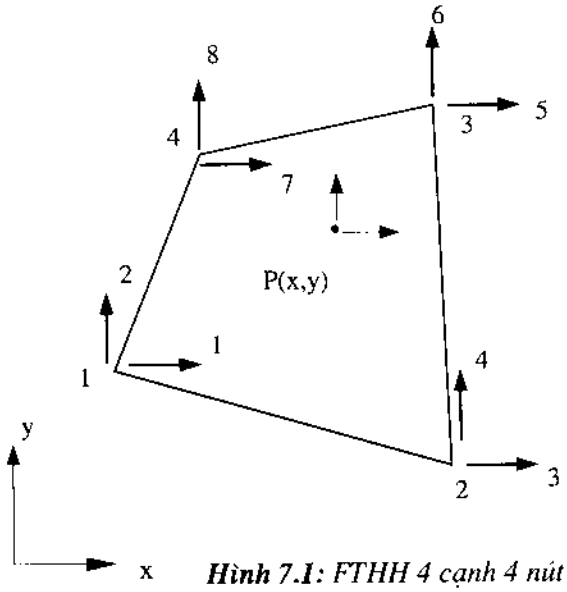
$$\int N_1 N_2 d\ell = \frac{1}{L_{1-2}^2} \int_0^{L_{1-2}} l(L_{1-2} - l) d\ell = \frac{L_{1-2}}{6}$$

Chương 7

PHẦN TỬ HỮU HẠN CÙNG THAM SỐ HAI CHIỀU - PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

Trong các chương 5 và 6, ta đã đề cập đến phương pháp phân tích ứng suất và biến dạng trong trường hợp FTHH là một tam giác có biến dạng không đổi. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu các FTHH cùng tham số và áp dụng chúng vào việc phân tích ứng suất và biến dạng. Các FTHH thuộc loại này đã tỏ ra có hiệu lực trong nhiều bài toán 2 chiều và 3 chiều. Ta sẽ tập trung nghiên cứu một cách chi tiết loại FTHH 4 cạnh, 4 nút để suy ra ma trận độ cứng riêng. Đối với FTHH bậc cao hơn, ta cũng thực hiện các bước tương tự như đối với FTHH 4 cạnh 4 nút. Phương pháp tích phân bằng số sẽ được trình bày để tính ma trận độ cứng và ứng suất.

§7.1. PHẦN TỬ HỮU HẠN 4 CẠNH 4 NÚT



Hình 7.1: *FTHH 4 cạnh 4 nút*

Xét hình 4 cạnh 4nút trên hình (7.1). Số thứ tự cục bộ của các nút 1, 2, 3, 4 được đếm theo *chiều ngược kim đồng hồ.*

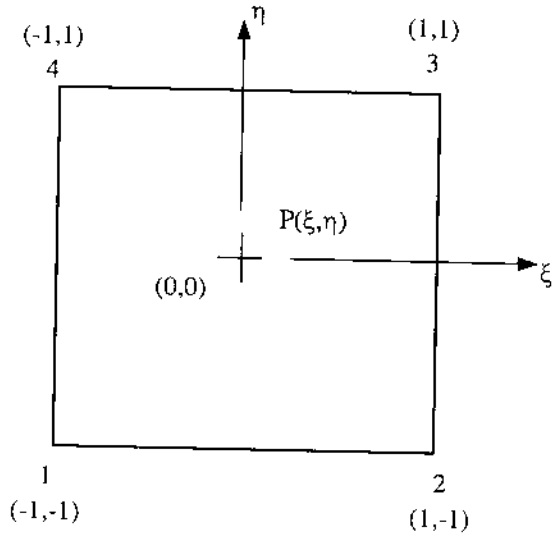
Vec tơ các thành phần chuyển vị men theo các BTD trên hình (7.1) tại các nút là:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8]' \tag{7.1}$$

Vectơ các thành phần chuyển vị tại một điểm P có tọa độ (x, y) trong FTHH là:

$$u = \left[u(x,y) \qquad v(x,y)\right]' \tag{7.2}$$

7.1.1. Hàm hình dạng



Hình 7.2: *FTHH 4 cạnh trong hệ tọa độ tự nhiên*

Trước hết, ta suy ra hàm hình dạng cho FTHH hình vuông (hình 7.2) trong hệ tọa độ tự nhiên ξ và η. Hàm hình dạng Lagrange N_i (i = 1,2,3,4) được định nghĩa như sau: N_i bằng đơn vị tại nút i và bằng 0 tại các nút còn lại. Chẳng hạn, đối với nút 1:

$$N_1 = 1 \qquad \text{tại nút 1}$$

$$N_1 = 0 \qquad \text{tại các nút 2, 3, 4} \tag{7.3}$$

Điều kiện $N_1 = 0$ tại các nút 2,3,4 tương đương với điều kiện $N_1 = 0$ dọc theo các cạnh $\xi = +1$ và $\eta = +1$ (hình 7.2). Vậy N_1 phải có dạng:

$$N_1 = C\,(1-\xi)\,(1-\eta) \tag{7.4}$$

Trong đó, C là hằng số . Hằng số này được xác định từ điều kiện $N_1 = 1$ tại nút 1 tại đó $\xi = -1$ và $\eta = -1$. Nghĩa là: $1 = c \times 2 \times 2$

Vậy $c = \dfrac{1}{4}$ và $N_1 = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

4 hàm hình dạng có các dạng sau:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (7.5)$$

Để tiện cho việc lập trình, ta biểu thị:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i+\eta\eta_i) \qquad (7.6)$$

Trong đó: (ξ,η) là tọa độ của nút i.

Bây giờ, ta sẽ thông qua các thành phần chuyển vị tại các nút của FTHH để biểu thị các thành phần chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH. Theo hình 7.1 và 7.2, $\mathbf{u} = [\,u \quad v]'$ là vectơ chuyển vị tại điểm có tọa độ tự nhiên (ξ,η) (hình 7.2) và **q** là vectơ chuyển vị cấp 8×1 tại các nút của FTHH. Ta có thể viết:

$$u = N_1q_1 + N_2q_3 + N_3q_5 + N_4q_7$$
$$v = N_1q_2 + N_2q_4 + N_3q_6 + N_4q_8 \qquad (7.7a)$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}.\,\mathbf{q} \qquad (7.7b)$$

Trong đó:
$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (7.8)$$

Nếu cũng thông qua các hàm hình dạng trên để biểu thị tọa độ tại một điểm trong FTHH bằng tọa độ của các điểm nút, thì ta có *dạng biểu thị cùng tham số* như sau;

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4$$
$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \qquad (7.9)$$

Trong đó: x, y - tọa độ tại một điểm trong FTHH;

x_i - tọa độ của nút i trên phương x; y_i - tọa độ của nút i trên phương y.

Giả sử f là một hàm bất kỳ của x, y và x, y là những hàm của (ξ,η), nghĩa là f là một hàm ẩn của (ξ,η) do đó $f = f\,[x(\xi,\eta), y\,(\xi,\eta)]$. Theo nguyên tắc tính đạo hàm riêng.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (7.10)$$

hay:
$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (7.11)$$

Trong đó **J** là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Từ (7.5) và (7.9), ta có:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1+\xi)x_2 + (1+\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1+\xi)y_2 + (1+\xi)y_3 + (1-\xi)y_4) \end{bmatrix} \tag{7.13a}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{7.13b}$$

Từ (7.11):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{7.14a}$$

hoặc:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.14b}$$

Các hệ thức trên sẽ được dùng để suy ra ma trận độ cứng của FTHH. Ngoài các kết quả trên, có thể chứng minh được rằng

$$dxdy = \det \mathbf{J}\, d\xi\, d\eta \tag{7.15}$$

7.1.2. Ma trận độ cứng của FTHH. Vectơ tải trọng

Hệ thức biến dạng - chuyển vị có thể viết:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \tag{7.16}$$

Đặt f = u, từ (7.14b), ta có:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

Một cách tương tự, khi f = v:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

Căn cứ vào (7.16), (7.17), (7.18), ta có:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

Trong đó:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix} \tag{7.20}$$

Từ 7.7a) :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{Gq} \tag{7.21}$$

Trong đó:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

Từ (7.19) và (7.21), hệ thức biến dạng - chuyển vị

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{7.23}$$

Trong đó: $\mathbf{B} = \mathbf{AG}$ (7.24)

Ứng suất: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

Theo (7.23): $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBq}$ (7.25)

Bây giờ, ta vận dụng nguyên lý công ảo để suy ra ma trận độ cứng và vectơ tải trọng.

- Ma trận độ cứng:

Áp dụng (2.79) (chương hai) cho bài toán 2 chiều, ta có ma trận độ cứng

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B'DB}\, dV \tag{a}$$

nhưng dV = hdxdy

Trong đó: h - bề dày của kết cấu.

Theo (7.15) dxdy = det **J** dξdη. Thay các đại lượng trên vào (a):

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B'DB}\det\mathbf{J}\}\, d\xi d\eta \tag{7.26}$$

$\mathbf{k}_e$ là ma trận cấp 8 × 8. Cần chú ý rằng điều khác với các chương trước là các ma trận **B** và **J** đều là những hàm của các tọa độ tự nhiên (ξ,η). Việc tính tích phân bằng số ma trận $\mathbf{k}_e$ sẽ được đề cập trong phần sau.

Vectơ tải trọng:

Véc tơ lực thể tích:

Theo (2.80), ta có: $\mathbf{f}_t = \iiint \mathbf{N'f}dV$

Phân tích tương tự như trên, ta có vectơ lực thể tích

$$\mathbf{f}_t = h\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N'}\det \mathbf{J}d\xi d\eta\right]\cdot\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

(7.27) cũng cần được tích phân bằng số như (7.26)

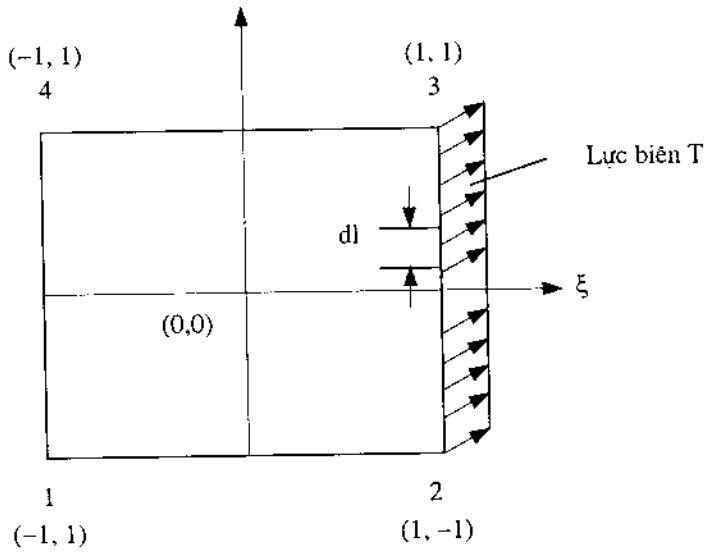
Véctơ lực biên:

Theo (2.80), ta có vectơ lực biên

$$f_b = \iint \mathbf{N'^s T}ds \tag{7.28a}$$

Trong đó: $\mathbf{N}^s$ - ma trận hàm hình dạng men theo cạnh trên đó có lực biên tác dụng; ds = hdl, h là bề dày của kết cấu, dl là phân tố đường thẳng men theo cạnh nói trên.

Giả sử lực biên phân bố đều tác dụng trên cạnh 2-3 (hình 7.3).



Hình 7.3: *Lực biên tác dụng trên cạnh 2,3*

Vectơ lực biên $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}'$ phân bố trên đơn vị diện tích. Dọc theo cạnh (2-3), ta có $\xi = 1$. Căn cứ vào (7.5), ta có:

$$N_1 = N_4 = 0$$

$$N_2 = (1 - \eta)/2$$

$$N_3 = (1 + \eta)/2$$

Theo các kết quả trên, (2.28a) có thể viết:

$$\mathbf{f}_b = h \int_0^{L_{2-3}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ (1-\eta)/2 & 0 \\ 0 & (1-\eta)/2 \\ (1+\eta)/2 & 0 \\ 0 & (1+\eta)/2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times dl \times \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad (7.28b)$$

Vì $\frac{1}{2}\int(1 \pm \eta)dl = \frac{L_{2-3}}{2}$ nên cuối cùng, ta có:

$$\mathbf{f}_b = h.\ \frac{L_{2-3}}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & T_x & T_y & T_x & T_y & 0 & 0 \end{bmatrix}' \qquad (7.28)$$

Trong đó: L_{2-3} - chiều dài của cạnh 2-3 trên đó có lực biên tác dụng.

§7.2. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

Trước hết, ta nghiên cứu bài toán tính bằng số tích phân một chiều có dạng:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \tag{7.29}$$

Phương pháp cầu phương Gauss để tính tích phân I như sau.

Đây là phương pháp rất hữu hiệu trong lý thuyết phần tử hữu hạn. Nó có thể mở rộng cho các tích phân 2 chiều và 3 chiều.

Xét phép xấp xỉ n điểm:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \cdots\cdots + w_n f(\xi_n) \tag{7.30}$$

Trong đó: $w_1, w_2 \ldots\ldots\ldots w_n$ gọi là *trọng lượng*;

$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots \xi_n$ gọi là các *điểm Gauss*.

Vấn đề đặt ra là chọn n điểm Gauss và n trọng lượng sao cho tích phân (7.30) cho lời giải chính xác đối với đa thức $f(\xi)$ có bậc càng cao càng tốt. Nói một cách khác, tích phân (7.30) cần có giá trị chính xác dù bậc của đa thức cao đến bao nhiêu và ngay cả khi f không phải là đa thức. Trước hết, ta hãy nghiên cứu cách tính xấp xỉ trong trường hợp 1 điểm và 2 điểm.

7.2.1. Công thức một điểm

Với n = 1, ta có :

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \approx w_1 f(\xi_1) \tag{7.31}$$

Vì có 2 tham số w_1 và ξ_1, ta yêu cầu công thức (7.31) phải chính xác khi $f(\xi)$ là một đa thức bậc nhất $f(\xi) = a_0 + a_1\xi$. Tức là:

$$\text{Sai số: } = \int_{-1}^{1} (a_0 + a_1\xi) - w_1 f(\xi_1) = 0 \tag{7.32a}$$

hay:

$$\text{Sai số} = 2a_0 - w_1\ (a_0 + a_1\xi) = 0 \tag{7.32b}$$

hay:

$$\text{Sai số} = a_0\ (2 - w_1) - w_1\ a_1\xi_1 = 0 \tag{7.32c}$$

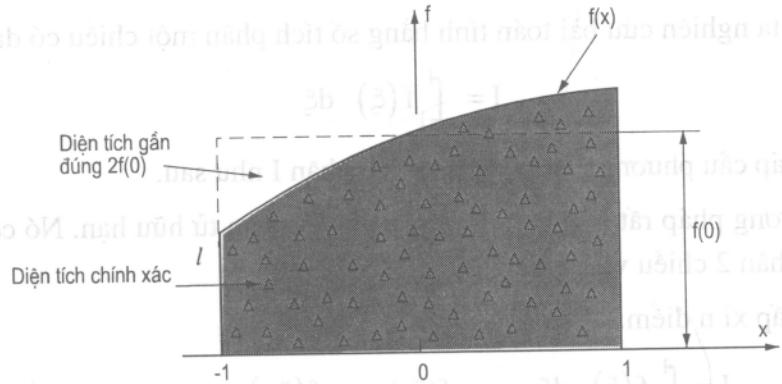
Từ (7.32c), ta thấy rằng sai số triệt tiêu khi

$$w_1 = 2 \qquad \text{và } \xi_1 = 0$$

Vậy:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \approx 2.f(0) \tag{7.34}$$

Cách tính trên phù hợp với quy tắc điểm giữa (hình 7.4).



Hình 7.4: Phép cầu phương Gauss

7.2.2. Công thức hai điểm

Ta xét trường hợp 2 điểm Gauss (n = 2)

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\ d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \tag{7.35}$$

Có 4 tham số: w_1, w_2, ξ_1, ξ_2. Ta yêu cầu công thức (7.35) cho giá trị chính xác đối với đa thức bậc 3 $f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$.

Nghĩa là:

$$\text{Sai số} = \left[\int_{-1}^{1}\left(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3\right)d\xi\right] - \left[w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)\right] = 0 \tag{7.36}$$

Để thỏa mãn phương trình trên:

$$\begin{aligned} &w_1 + w_2 = 2 \\ &w_1\xi + w_2\xi_2 = 0 \\ &w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = 2/3 \\ &w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Các phương trình phi tuyến tính trên có lời giải duy nhất khi

$$w_1 = w_2 = 1 - \xi_1 = \xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0{,}5773502691 \tag{7.38}$$

Từ trên, có thể kết luận rằng phép cầu phương Gauss n điểm cho lời giải chính xác khi đa thức có bậc (2n-1) hoặc bé hơn.

Bảng (7.1) cho giá trị của W_i và ξ_i khi số điểm Gauss n bằng 1 đến 6. Cần chú ý rằng các điểm Gauss được đặt đối xứng so với điểm gốc và các điểm đối xứng có trọng lượng như nhau. Hơn nữa, các số có rất nhiều chữ số được dùng trong tính toán để bảo đảm độ chính xác.

Bảng 7.1. Các điểm Gauss và trọng lượng trong phép cầu phương Gauss

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i)$$

Số điểm	Vị trí	Trọng lượng
1	0,0	2,0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1,0
3	±0,7745966692	0,5555555556
	0,0	0,8888888889
4	±0,8611363116	0,.34785548451
	±0,3399810436	0,6521451549
5	±0,9061798459	0,.2369268851
	±0,5384693101	0,4786286705
	0,0	0,5688888889
6	±0,9324695142	0,1713244924
	±0,6612093865	0,3607615730
	±0,2386191861	0,4679139346

Ví dụ 7.1:

Dùng công thức một điểm và công thức hai điểm để tính tích phân sau:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[3e^x + x^2 + \frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

Giải:

Căn cứ vào bảng (7.1)

$n = 1$: $w_1 = 2$, $x_1 = 0$ nên

$$I = 2f(0)$$
$$= 7$$

$n = 2$: $w_1 = w_2 = 1$; $x_1 = -0,57735$ .....; $x_2 = +0,57735$ .....

$$I \approx 8,7857$$

Giá trị chính xác của tích phân $I = 8,8165$

7.2.3. Tích phân 2 chiều

Phép cầu phương Gauss có thể mở rộng cho tích phân 2 chiều (hoặc tích phân kép).

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi,\eta) d\xi \quad d\eta \tag{7.39}$$

Có thể viết một cách gần đúng:

$$I \approx \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i,\eta)\right] d\eta$$

$$\approx \sum_{j=1}^{n} w_j \left[\sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i,\eta_j)\right]$$

hay

$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j f(\xi_i,\eta_j) \tag{7.40}$$

7.2.4. Tích phân ma trận độ cứng

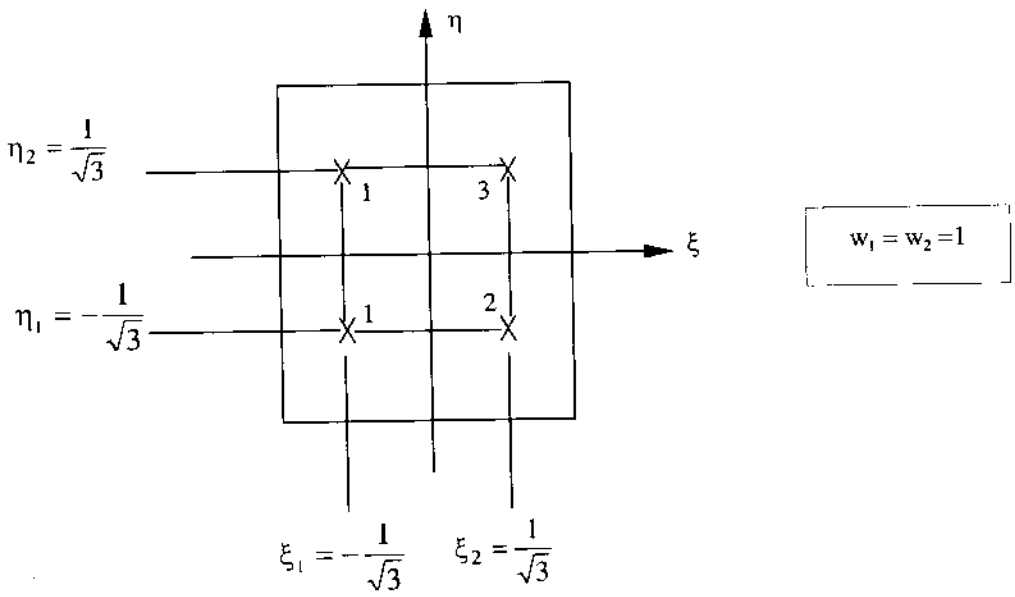
Xét tích phân ma trận độ cứng theo (7.26) :

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B'DB} \ \det\mathbf{J} \ d\xi d\eta$$

Trong đó **B** và **J** là những hàm của ξ và η. Cần chú ý rằng tích phân trên bao gồm tích phân của mỗi phần tử trong ma trận độ cứng cấp 8 × 8. Tuy nhiên, do tính chất đối xứng của ma trận $\mathbf{k}_e$, ta chỉ cần tính tích phân cho các phần tử của ma trận từ đường chéo chính trở lên.

Giả sử $\phi(\xi,\eta)$ là hàm thứ ij dưới dấu tích phân trong ma trận $\mathbf{k}_e$;

$$\phi(\xi,\eta) = h_e\,(\mathbf{B'DB}\ \det\mathbf{J})_{ij} \tag{7.41}$$



$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \approx w_1^2 f(\xi_1,\eta_1) + w_2 w_1 f(\xi_2,\eta_1) + w_2^2 f(\xi_2,\eta_2) + w_1 w_2 (\xi_1,\eta_2)$$

Hình 7.5: *Phép cầu phương đối với tích phân 2 chiều (n = 2)*

Theo (7.40), ta có phần tử thứ ij của ma trận $\mathbf{k}_e$:

$$k_{ij} \approx w_1^2\phi(\xi_1,\eta_1) + w_1w_2\phi(\xi_1,\eta_2) + w_2w_1\phi(\xi_2,\eta_1) + w_2^2\phi(\xi_2,\eta_2) \qquad (7.42a)$$

Trong (7.42a), ta dùng 2 điểm Gauss (n = 2); $w_1 = w_2 = 1,0$; $\xi_1 = \eta_1 = -0,57735\ldots$; $\xi_2 = \eta_2 = +0,57735\ldots$ (bảng 7.1).

Nếu ta tính k_{ij} cho 4 điểm 1, 2, 3, 4 như trên hình 7.5, (7.42a) có thể viết:

$$k_{ij} = \sum_{IP=1}^{4} W_{IP}\phi_{IP} \qquad (7.42b)$$

Trong đó, ϕ_{IP} và W_{IP} là giá trị của ϕ và của W tại các điểm tích phân IP (hình 7.5).

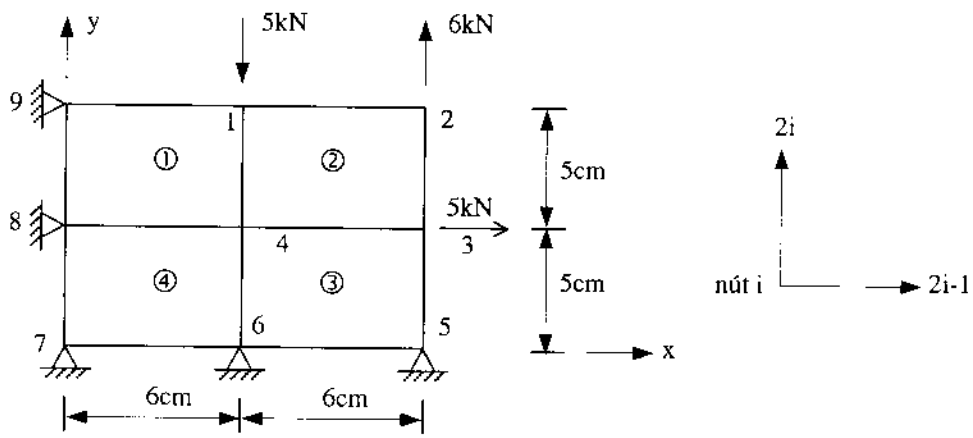
Đối với các tích phân 3 chiều (hoặc tích phân 3 lớp), cách tính cũng tương tự như trên.

7.2.5. Tính ứng suất

Khác với trường hợp FTHH tam giác có biến dạng không đổi đã nghiên cứu trong các chương 5 và 6, ứng suất $\sigma = \mathbf{DBq}$ lại biến đổi trong phạm vi FTHH 4 cạnh. Nó là hàm của ξ, η, nên cần được tính tại các điểm Gauss như khi tính k_e.

Đối với FTHH 4 cạnh, ta có 4 giá trị ứng suất tại 4 điểm (hình 7.5). Thông thường, để đơn giản, ta tính ứng suất tại điểm $\xi = 0$ và $\eta = 0$.

Ví dụ 7.2: Cho một kết cấu có mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình (7.6).



Hình 7.6

Sơ đồ bố trí các nút cục bộ và các nút tổng thể biểu thị trong bảng (7.2)

Bảng 7.2

Phần tử	Nút cục bộ				Nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	9	8	4
2	1	2	3	4	1	4	3	2
3	1	2	3	4	4	6	5	3
4	1	2	3	4	8	7	6	4

Dùng chương trình CTR 13 tính:

- Chuyển vị;
- Ứng suất.

Giải:

Bài toán này có khối lượng tính rất lớn, không thể tính bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của máy tính điện tử.

Trình tự tính toán như sau:

1) Nhập số liệu

Số phần tử: 4 (hình 7.6)

Số BTD có chuyển vị: 8

Tổng số BTD: $9 \times 2 = 18$

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 10

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

Bề dày tấm: 0,5cm

Hệ số poát xong: 0,3

Các thành phần tải trọng: 0; -5; 0; 6; 5; 0; 0; 0

Các số liệu khác thống kê trong bảng (7.3)

Bảng 7.3

Phần tử	Tọa độ (cm)							
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	6	0	0	6	10	10	5	5
2	6	6	12	12	10	5	5	10
3	6	0	0	6	5	5	0	0
4	12	6	6	12	5	5	0	0

2) Xác định ma trận A theo (7.20)

3) Xác định ma trận G theo (7.20)

4) Xác định ma trận B theo (7.24)

5) Xác định ma trận cấu trúc vật liệu D theo (1, 20)

6) Thực hiện phép tính tích phân đối với mỗi phần tử của MTĐC theo phép cầu phương Gauss, căn cứ vào (7.41), (7.42b).

Ở đây, các số ξ và η lần lượt có tập hợp giá trị khác nhau:

$\xi = 1$ $\eta = 1$

$\xi = 1$ $\eta = -1$

$\xi = -1$ $\eta = 1$

$\xi = -1$ $\eta = -1$

Tính cho mỗi tập hợp giá trị rồi cuối cùng cộng lại để được giá trị cuối cùng của mỗi phần tử ma trận. Mỗi MTĐC có 36 phần tử, mỗi phần tử phải tính đến 4 lần, tổng số phép tính lên đến 36 x 4 = 144.

7) Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

8) Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã nhập vào, gọi chương trình con để giải hệ phương trình.

9) Tính ứng suất tại trọng tâm của mỗi phần tử theo (8.25)

Kết quả chạy chương trình:

1) Chuyển vị:

$q(1) = 2{,}274 \times 10^{-4}$ cm; $q(2) = 1{,}108 \times 10^{-3}$ cm;

$q(3) = -6{,}722 \times 10^{-5}$ cm; $q(4) = -1{,}118 \times 10^{-4}$ cm;

$q(5) = -5{,}278 \times 10^{-5}$ cm; $q(6) = -1{,}847 \times 10^{-4}$ cm;

$q(7) = -5{,}329 \times 10^{-5}$ cm; $q(8) = 9{,}036 \times 10^{-6}$ cm;

2) Ứng suất

US1(1) = 34,489 kN/cm^2; US2(1) = 370,422 kN/cm^2;

US1(2) = 174,794 kN/cm^2; US2(2) = 436,383 kN/cm^2;

US1(3) = -15,009 kN/cm^2; US2(3) = -1,543 kN/cm^2;

US1(4) = -18,816 kN/cm^2; US2(4) = -63,177 kN/cm^2;

US3(1) = 95,363 kN/cm^2;

US3(2) = -185,623 kN/cm^2;

US3(3) = -5,765 kN/cm^2;

US3(4) = 33,702 kN/cm^2;

§7.3. CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN CÓ BẬC CAO HƠN

Các khái niệm về FTHH 4 cạnh 4 nút trình bày trên có thể mở rộng cho các FTHH cùng tham số có bậc cao hơn. Trong FTHH 4 cạnh 4 nút, các hàm hình dạng chứa các số hạng 1, ξ, η và $\xi.\eta$. Các FTHH trình bày trong phần dưới chứa các số hạng $\xi.^2\eta$, $\xi.\eta^2$, làm cho độ chính xác cao hơn. Sau đây, chỉ trình bày các hàm hình dạng N. Như trong phần trước, ma trận độ cứng được suy ra từ các bước sau:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{7.43}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Bq} \tag{7.44}$$

$$\mathbf{k}_e = h_e \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{B'DB}\det \mathbf{J} \,.\, d\xi.d\eta \tag{7.45}$$

Trong đó $\mathbf{k}_e$ tính theo phương pháp cầu phương Gauss

7.3.1. Phần tử hữu hạn 4 cạnh 9 nút

FTHH 4 cạnh 9 nút đã tỏ ra rất hữu hiệu trong tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn. Số thứ tự cục bộ các nút biểu thị trên hình (7.7a). FTHH hình vuông biểu thị trên hình (7.7b). Các hàm hình dạng sẽ được định nghĩa như sau.

Trước hết, hãy xét trục tọa độ tự nhiên ξ trên hình (7.7c). Số thứ tự cục bộ các nút là 1, 2, 3. Chúng tương ứng với các vị trí $\xi = -1$, $\xi = 0$ và $\xi = +1$.

Ta định nghĩa các hàm hình dạng gốc L_1, L_2, L_3 như sau:

$$L_i(\xi) = 1 \text{ tại nút i}$$

$$L_i(\xi) = 0 \text{ tại 2 nút còn lại} \tag{7.46}$$

Trước hết, ta xét L_1. Vì $L_1 = 0$ tại điểm $\xi = 0$ và điểm $\xi = +1$ nên L_1 có dạng $L_1 = c.\xi(1-\xi)$. Hằng số c được xác định từ điều kiện $L_1 = 1$ tại điểm $\xi = -1$ (hình 7.7c), từ đó c=-1/2. Vậy $L_1(\xi) = -\xi(1-\xi)/2$. L_2 và L_3 cũng được xác định một cách tương tự. Tóm lại, ta có:

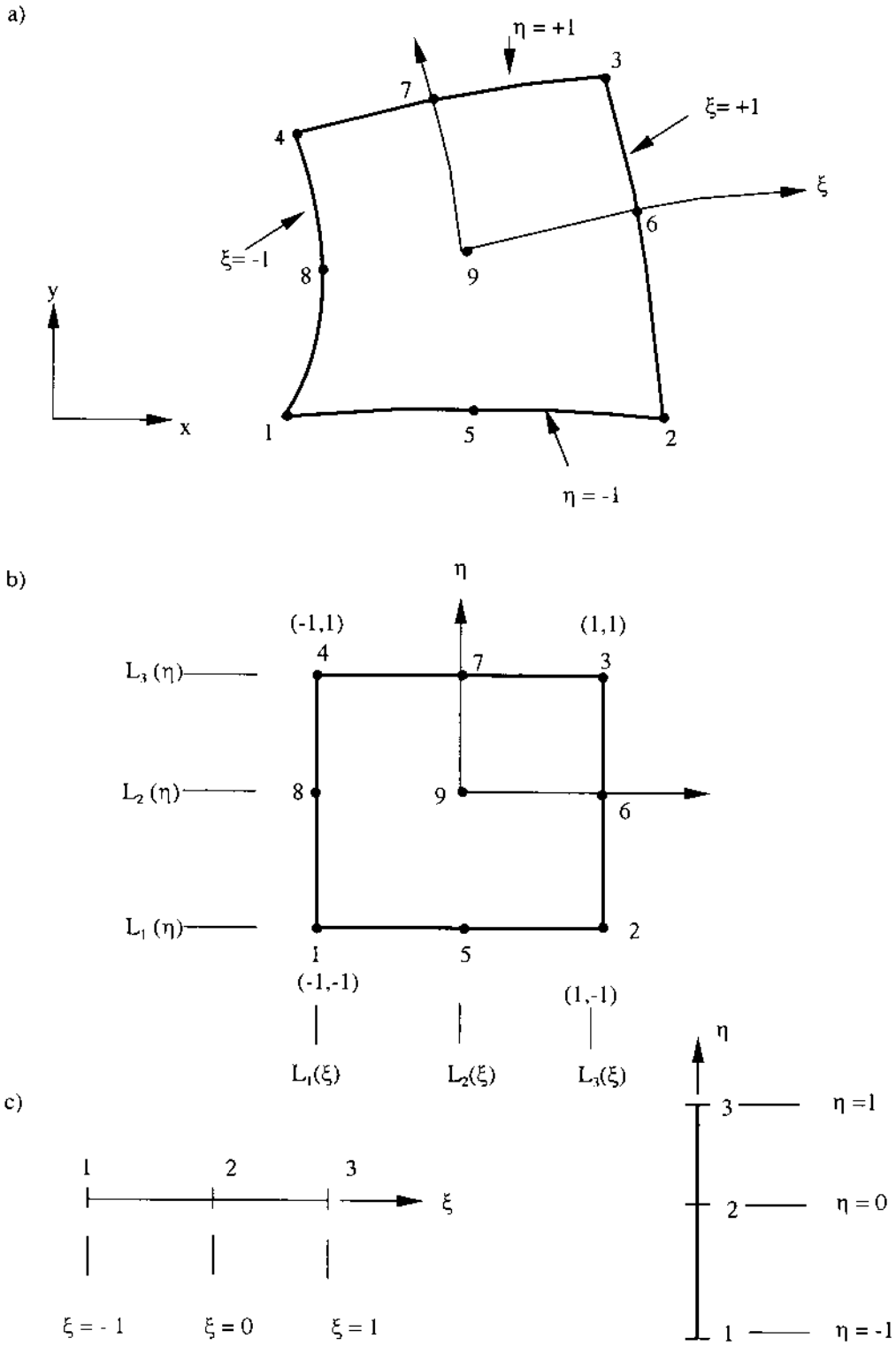
$$\begin{aligned} L_1(\xi) &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \\ L_2(\xi) &= (1+\xi)(1-\xi) \\ L_3 &= \left(\frac{\xi(1+\xi)}{2}\right) \end{aligned} \tag{7.47}$$

Các hàm hình dạng gốc dọc theo trục tọa độ tự nhiên η (hình 7.7c) cũng được xác định một cách tương tự:

$$\begin{aligned} L_1(\eta) &= -\frac{\eta(1-\eta)}{2} \\ L_2(\eta) &= (1+\eta)(1-\eta) \\ L_3 &= \left(\frac{\eta(1+\eta)}{2}\right) \end{aligned} \tag{7.48}$$

Trên hình (7.7b) ta thấy rằng mỗi nút đều có các tọa độ tự nhiên như sau: $\xi = -1$, 0 hoặc + 1; $\eta = -1$, 0 hoặc + 1. Các hàm hình dạng N_1, $N_2 \ldots N_9$ tại 9 nút có dạng như sau:

$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(\xi)L_1(\eta) & N_5 &= L_2(\xi)L_1(\eta) & N_2 &= L_3(\xi)L_1(\eta) \\ N_8 &= L_1(\xi)L_2(\eta) & N_9 &= L_2(\xi)L_2(\eta) & N_6 &= L_3(\xi)L_2(\eta) \\ N_4 &= L_1(\xi)L_3(\eta) & N_7 &= L_2(\xi)L_3(\eta) & N_3 &= L_3(\xi)L_3(\eta) \end{aligned} \tag{7.49}$$



Hình 7.7: FTHH 4 cạnh 9 nút

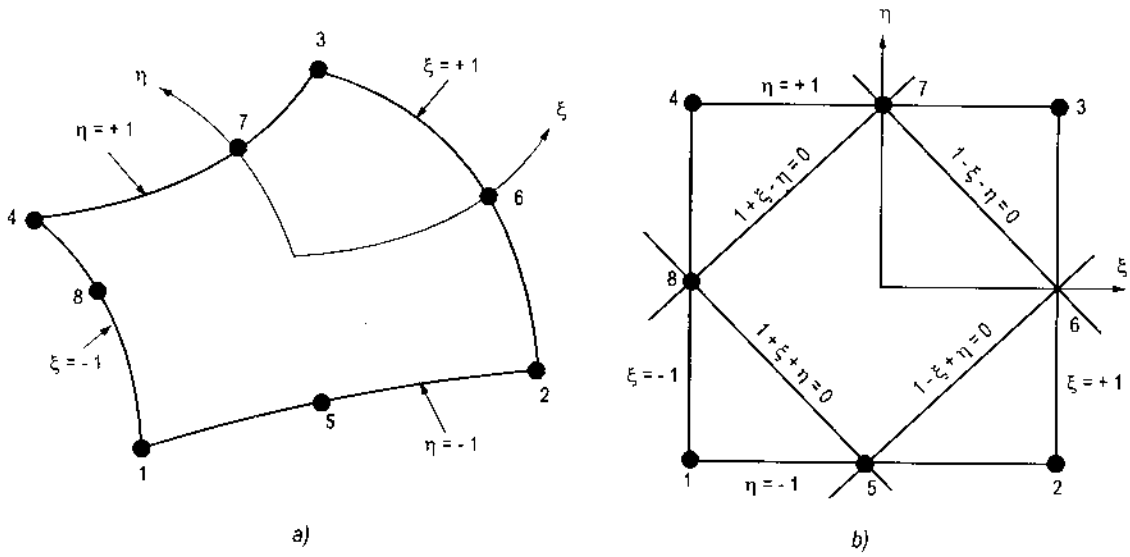
Bằng cách xác định các hàm hình dạng như trên, ta có thể kiểm tra để thấy rằng $N_i = 1$ tại nút i và bằng 0 tại nút j còn lại ($j \neq i$).

Như đã nói trong phần đầu, việc dùng các số hạng có bậc cao hơn trong ma trận hàm hình dạng **N**, đưa đến việc nội suy ở bậc cao hơn trường chuyển vị cho bởi **u= Nq**.

Hơn nữa, vì $x = \sum_i N_i x_i$, $y = \sum_i N_i y_i$, ta có thể dùng các số hạng có bậc cao hơn để xác định kích thước hình học.

Vì vậy, FTHH có thể có biên cong.

7.3.2. Phần tử hữu hạn 4 cạnh 8 nút



Hình 7.8: FTHH 4 cạnh 8 nút

FTHH 4 cạnh 8 nút biểu thị trên hình (7.8). Toàn bộ các nút đều nằm trên biên của FTHH. Ta xác định hàm hình dạng N_i (i =1,2...8) với điều kiện N_i=1 tại nút i và $N_i = 0$ tại các nút j còn lại ($j \neq i$). Khi xác định N_i, ta căn cứ vào FTHH hình vuông trên hình (7.8b). Trước hết, ta xác định $N_1 \div N_4$. Chẳng hạn, đối với N_1, nó phải triệt tiêu trên các đường $\xi = +1$, $\eta = +1$ và $\xi + \eta = -1$ (hình 7.8b). Do đó N_1 phải có dạng:

$$N_1 = c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

Nhưng tại nút 1, $N_1 = 1$, $\xi = \eta = -1$ do đó $c = -\frac{1}{2}$

Một cách tương tự, ta có:

$$N_1 = -\frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$$

$$N_2 = -\frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4}$$
$$N_3 = -\frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4} \qquad (7.50)$$
$$N_4 = -\frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$$

Bây giờ ta xác định N_5, N_6, N_7, N_8. Chẳng hạn đối với N_5, nó triệt tiêu trên các cạnh $\xi = +1$, $\eta = +1$ và $\xi = -1$. Vậy nó phải có dạng:

$$N_5 = c(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) = c\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)$$

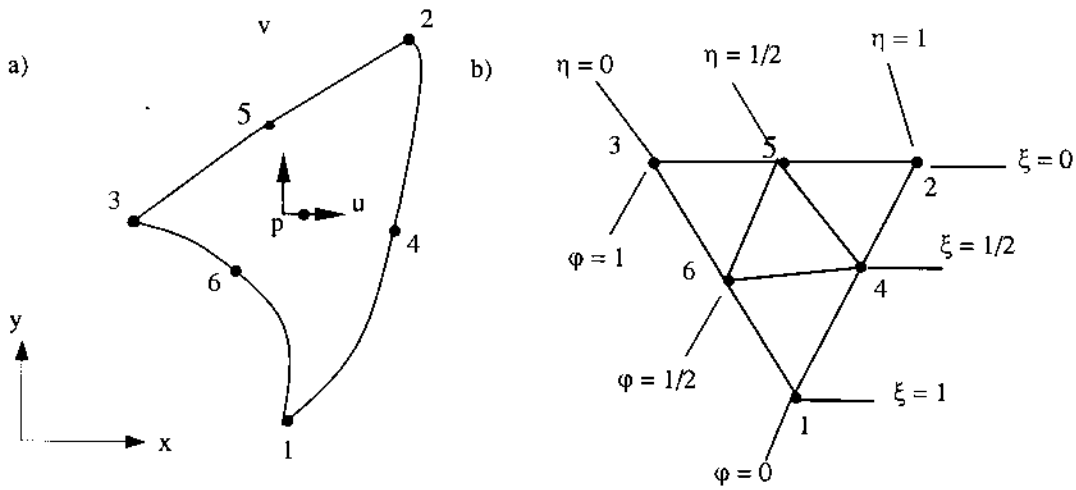
Hằng số c xác định từ điều kiện $N_5 = 1$ tại nút 5 tại đó $\xi = 0, \eta = -1$ do đó $c = \frac{1}{2}$

Tóm lại, ta có:

$$N_5 = \frac{\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)}{2}$$
$$N_6 = \frac{(1+\xi)\left(1-\eta^2\right)}{2} \qquad (7.51)$$
$$N_7 = \frac{\left(1-\xi^2\right)(1+\eta)}{2}$$
$$N_8 = \frac{(1-\xi)\left(1-\eta^2\right)}{2}$$

7.3.3. Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút

Phần tử hữu hạn tam giác 6 nút biểu thị trên hình (7.9)



Hình 7.9: FTHH tam giác 6 nút

Căn cứ vào hình (7.9b), chứng minh tương tự như trong phần trước, ta có:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi(2\xi-1) & N_4 &= 4\xi\eta \\ N_2 &= \eta(2\eta-1) & N_5 &= 4\varphi\eta \\ N_3 &= \varphi(2\varphi-1) & N6 &= 4\zeta\varphi \end{aligned} \tag{7.52}$$

Trong đó: $\varphi = 1-\xi-\eta$. Vì các hàm hình dạng chứa các số hạng ξ^2, η^2, φ^2 nên FTHH trên gọi là FTHH tam giác bậc 2. Dưới dạng biểu thị cùng tham số, ta có:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{7.53}$$

$$x = \sum_i N_i x_i \qquad y = \sum_i N_i y_i$$

Ma trận độ cứng của FTHH tính theo công thức (như trong các phần trước).

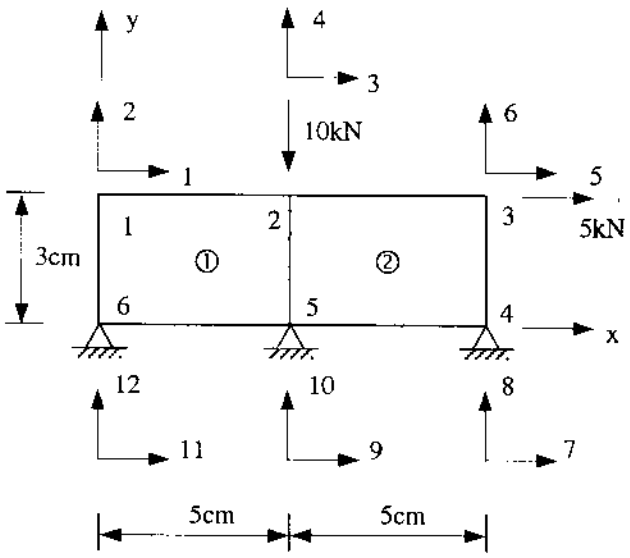
$$\mathbf{k}_e = h_e \iint \mathbf{B'DB} \det \mathbf{J}\, d_\xi d_\eta \tag{7.54}$$

Tích phân trên trong miền tam giác khác với tích phân trong miền 4 cạnh. Cách đơn giản nhất là dùng quy tắc 1 điểm ở trọng tâm tại đó trọng lượng $w_i = \frac{1}{2}$ và $\xi_1 = \eta_1 = \varphi_1 = \frac{1}{3}$. Phương trình (7.54) có dạng:

$$k_e \approx \frac{1}{2} t_e \overline{\mathbf{B}}'\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{B}} \quad \det \overline{\mathbf{J}} \tag{7.55}$$

Trong đó, $\overline{\mathbf{B}}$ và $\overline{\mathbf{J}}$ tính tại điểm Gauss.

§7.4. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN 2 CHIỀU KIỂU FTHH CÙNG THAM SỐ 4 CẠNH 4 NÚT (CTR 13)



Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	6	5	2
2	2	5	4	3

Hình 7.10

Các số liệu còn lại ghi trong bảng sau:

Phần tử	Tọa độ (cm)							
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
1	0	0	5	5	3	0	0	3
2	5	5	10	10	3	0	0	3

1. Những điều cần tuân thủ:

Số thứ tự bậc tự do tại nút i biểu thị như sau:

2i trên phương y

2i-1 trên phương x.

2. Nhập các số liệu ban đầu (lấy thí dụ trên hình 7.10)

- Số phần tử: 2
- Số BTD có chuyển vị: 6
- Tổng số BTD : 12
- Số BTD triệt tiêu : 6
- Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 7, 8, 9, 10, 11, 12
- Bề dày tấm: 0,2cm
- Các thành phần tải trọng: 0; 0; 0; -10; 5; 0

3. Thành lập ma trận độ cứng cho mỗi phần tử hữu hạn

Tính tích phân cho mỗi phần tử của ma trận đó theo phép cầu phương Gauss, dựa trên các công thức (7.41), (7.42b).

4. Ghép các ma trận độ cứng riêng vào ma trận độ cứng tổng thể.

5. Tính các lực thể tích theo phép cầu phương Gauss theo (7.27) nếu có

6. Tính các lực biên theo (7.28) nếu có.

7. Giải hệ phương trình cân bằng để được giá trị chuyển vị tại các nút

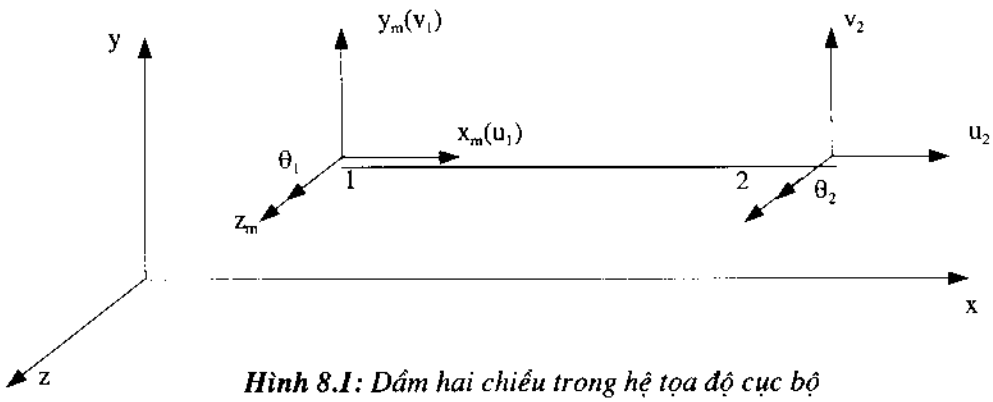
8. Tính ứng suất tại trung tâm của FTHH theo (7.25)

Chương 8
DẦM HAI CHIỀU VÀ KHUNG PHẲNG

§8.1. DẦM HAI CHIỀU CÓ TRỤC SONG SONG VỚI HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ

8.1.1. Khái niệm

Dầm hai chiều trong mặt phẳng x-y có trục song song với trục x biểu thị trên hình (8.1)

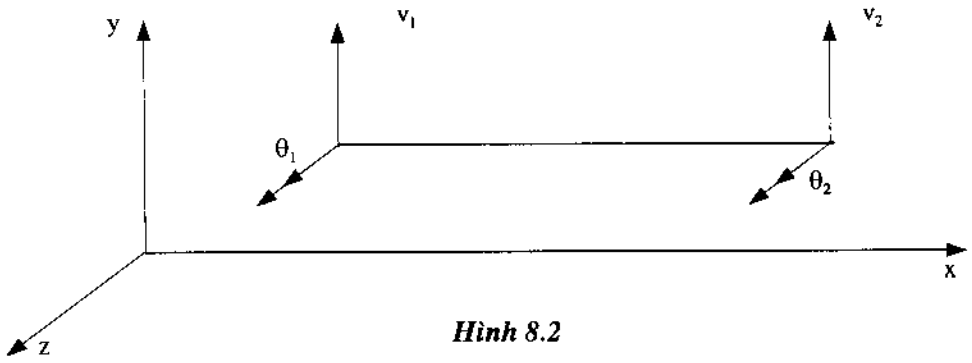


Hình 8.1: Dầm hai chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Hệ tọa độ cục bộ của dầm là x_m, y_m, z_m vuông góc nhau, chúng song song với hệ trục tọa độ tổng thể x, y, z. Trong hệ tọa độ cục bộ, dầm có hai nút 1 và 2, chiều dương của trục dầm quy ước đi từ đầu 1 đến đầu 2. Véctơ chuyển vị của dầm tại 2 nút:

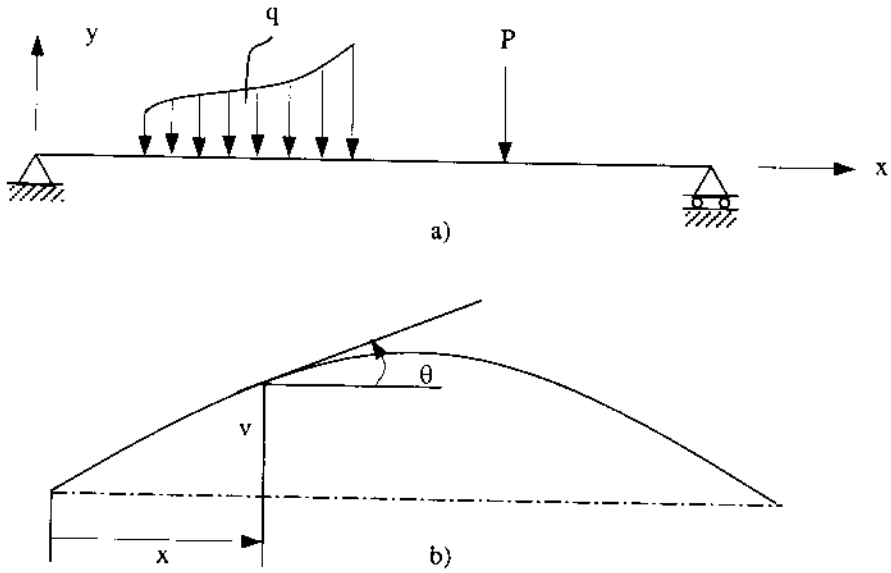
$$q_m' = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

Trong đó: u_1 , u_2 là chuyển vị dọc theo trục; u_1 và u_2 đã suy ra trong chương ba. Các hệ số độ cứng do các chuyển vị v_1, θ_1 và v_2, θ_2 sẽ được suy ra trong phần sau (hình 8.2)



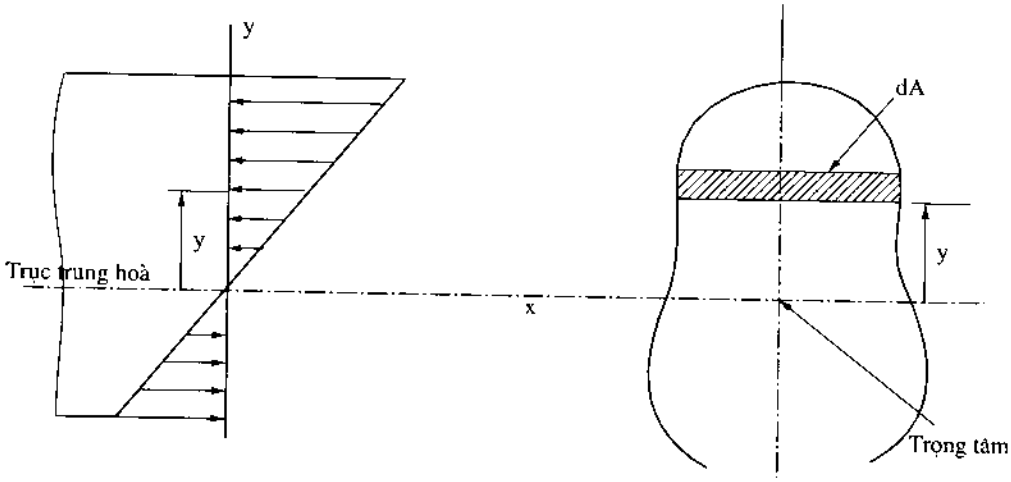
Hình 8.2

Ở đây, ta chỉ xét loại dầm có mặt cắt đối xứng đối với mặt phẳng tải trọng. Trong trường hợp tổng quát, giả sử dầm chịu tải trọng như trên hình (8.3). Đường cong biến dạng như trên hình (3.3b).



***Hình 8.3**: a) Dầm chịu tải trọng; b) Đường biến dạng của trục trung hoà.*

Mặt cắt ngang của dầm và sự phân bố của ứng suất uốn biểu thị trên hình (8.4)



***Hình 8.4:** Mặt cắt ngang của dầm và sự phân bố ứng suất uốn*

Trong trường hợp biến dạng bé, từ môn Sức bền vật liệu, ta có các công thức:

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \qquad (8.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{8.3}$$

$$\frac{dv^2}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{8.4}$$

Trong đó: σ - ứng suất pháp (trên phương trục x);

ε - biến dạng dọc trục;

M - mômen uốn;

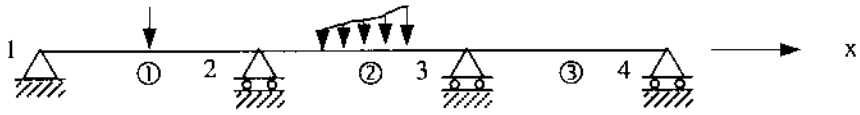
v - chuyển vị (hoặc độ võng) của trục dầm trên phương y;

I - mômen quán tính đối với trục z qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

8.1.2. Mô hình phần tử hữu hạn

Trong mô hình phần tử hữu hạn, dầm được chia thành nhiều phần tử như trên hình (8.5a).

a)



b)

Phần tử	Số thứ tự nút cục bộ				Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	2	3	4
2	1	2	3	4	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6	7	8

Hình 8.5: *a) Mô hình phần tử hữu hạn trong hệ tọa độ tổng thể*

b) Phần tử hữu hạn trong hệ toạ độ cục bộ

Nếu bỏ qua chuyển vị dọc trục, mỗi nút của phần tử hữu hạn có hai bậc tự do. Để tiện cho việc lập trình, ta quy ước Q_{2i-1} là thành phần chuyển vị trên phương trục y tại nút i. Q_{2i} là góc xoay tại nút i (hình 8.5a). Véctơ chuyển vị tổng thể trên hình (8.5a) là:

$$\mathbf{Q'} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \cdots\cdots \quad Q_8] \tag{8.5}$$

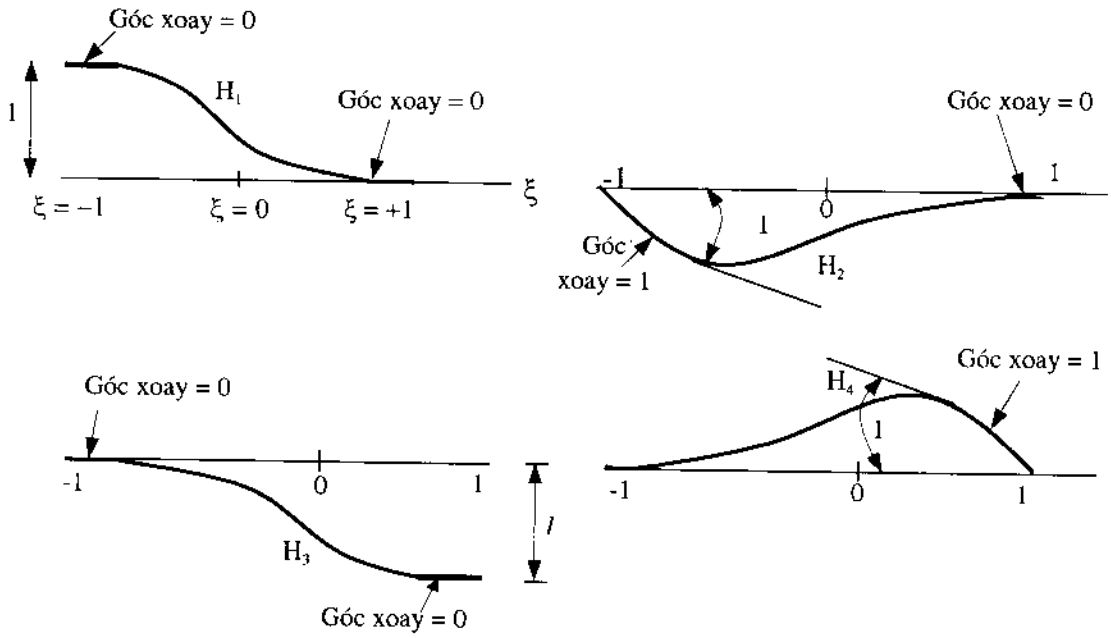
Vectơ chuyển vị men theo các BTD cục bộ (hình 8.5b) là:

$$\mathbf{q'} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4] \tag{8.6}$$

Trong (8.6), q_1, q_2, q_3, q_4 chính là v_1, θ_1 , v_2, θ_2 trên hình (8.2).

Bây giờ, ta sẽ căn cứ vào các hàm hình dạng để suy ra biểu thức chuyển vị v. Các hàm hình dạng ở đây không giống các hàm hình dạng đã thảo luận trong các chương trước. Ta dùng các hàm hình dạng Hecmit bậc 3 được định nghĩa như sau (hình 8.6):

$$H_i = a_i + b_i\xi + c_i\xi^2 + d_i\xi^3 \tag{8.7}$$



Hình 8.6: *Các hàm Hecmit*

Các hàm hình dạng (8.7) phải thỏa mãn các điều kiện trong bảng sau:

	H_1	H_1'	H_2	H_2'	H_3	H_3'	H_4	H_4'
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = 1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Các hệ số a_i, b_i, c_i, d_i xác định từ các điều kiện nói trên:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right)\\
H_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)\\
H_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right)\\
H_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{4}\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Các hàm Hecmit có thể dùng để biểu thị chuyển vị v dưới dạng:

$$v(\xi) = H_1V_1 + H_2\left(\frac{dv}{d\xi}\right) + H_3V_2 + H_4\left(\frac{dv}{d\xi}\right)_2 \tag{8.9}$$

Trong đó: ξ - tọa độ tự nhiên; các chỉ số 1 và 2 ứng với các nút 1 và 2. Hệ thức giữa x và ξ như sau (xem lại chương ba):

$$x = \frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}\xi \tag{8.10}$$

Trong đó: $L_e = x_2 - x_1$ là chiều dài của dầm. Ta có:

$$dx = \frac{L_e}{2}d\xi \tag{8.11}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm:

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{d\xi} \tag{8.12}$$

Chú ý rằng $\frac{dv}{dx}$ tính tại nút 1 và 2 chính là q_2 và q_4 do đó:

$$v(\xi) = H_1q_1 + \frac{L_e}{2}H_2q_2 + H_3q_3 + \frac{L_e}{2}H_4q_4 \tag{8.13}$$

Dưới dạng ma trận:

$$\mathbf{V} = \mathbf{H.q} \tag{8.14}$$

Trong đó:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1 & \frac{L_e}{2}H_2 & H_3 & \frac{L_e}{2}H_4 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

8.1.3. Ma trận độ cứng. Vectơ tải trọng

Ma trận độ cứng

Ma trận độ cứng của dầm được suy ra từ nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một). Công nội lực trên đoạn dài dx của dầm:

$$dW_n = \frac{1}{2}\int \sigma.\varepsilon.dA.dx$$

Theo (8.2) và (8.3)

$$dW_n = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI^2}\int_A y^2dA\right)dx$$

Vì $\int_A y^2dA$ chính là mômen quán tính I nên

$$dW_n = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx$$

Đối với toàn bộ dầm, theo (8.4)

$$W_n = \frac{1}{2}EI\int_e\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 dx \tag{8.16}$$

Từ (8.12): $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{L_e}.\frac{dv}{d\xi}$ $\qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{4}{L_e^2}.\frac{d^2v}{d\xi^2}$

Thay **v = H.q**

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = \mathbf{q}'.\frac{16}{L_e^4}.\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right)'\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right).\mathbf{q} \tag{8.17}$$

$$\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{d\xi^2}\right) = \left[\frac{3}{2}\xi \quad \frac{-1+3\xi}{2}.\frac{L_e}{2} \quad \frac{-3}{2}\xi \quad \frac{1+3\xi}{2}.\frac{L_e}{2}\right] \tag{8.18}$$

Thay $dx = \frac{L_e}{2}.d\xi$ vào (8.16):

$$W_n = \frac{1}{2}\mathbf{q}'.\frac{8EI}{L_e^3}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix} \frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}.\xi(-1+3\xi).L_e & -\frac{9}{4}\xi^2 & \frac{3}{8}.\xi(1+3\xi).L_e \\ & \left(\frac{-1+3\xi}{4}\right)^2 L_e^2 & -\frac{3}{8}.\xi(-1+3\xi).L_e & \frac{-1+9\xi^2}{16}L_e^2 \\ & & \frac{9}{4}\xi^2 & -\frac{3}{8}.\xi(1+3\xi).L_e \\ & \text{Đối xứng} & & \left(\frac{1+3\xi}{4}\right)^2 L_e^2 \end{bmatrix} \tag{8.19}$$

Trong (8.19): $\int_{-1}^{+1}\xi^2 d\xi = \frac{2}{3}$; $\int_{-1}^{+1}\xi d\xi = 0$; $\int_{-1}^{+1}d\xi = 2$ (8.19) có thể viết:

$$W_n = \frac{1}{2}.\mathbf{q}'.\mathbf{k_e}.\mathbf{q} \tag{8.20}$$

Giả sử tải trọng tác dụng lên dầm có tính chất phân bố đều, công của ngoại lực có thể viết:

$$W_{ng} = \frac{1}{2}\int_L p.v.dx$$

Căn cứ vào (8.14) và (8.11)

$$W_{ng} = \left(\frac{1}{2}p\frac{L}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{H}d\xi\right)\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(p\frac{L}{2}\int_{-1}^{1}\mathbf{H}d\xi\right)' \tag{8.21}$$

Vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng $W_n = W_{ng}$, ta được:

$$\mathbf{k}_e.\mathbf{q} = \left(\left(\frac{pL}{2}\right)\int_{-1}^{1}\mathbf{H}d\xi\right)' \tag{8.22}$$

Sau khi tính các tích phân trong (8.19), ta được ma trận độ cứng:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & \frac{4EI_z}{L} & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ & & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{8.23}$$

Trong đó: L - chiều dài của dầm

Ma trận độ cứng trên chỉ có 4 bậc tự do (không xét đến ảnh hưởng của biến dạng dọc).

Trong trường hợp xét biến dạng dọc, kết hợp với công thức (3.19) trong chương 3, ta có ma trận độ cứng với 6 bậc tự do như sau:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{+6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{+6EI_z}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{+6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \tag{8.24}$$

Vectơ chuyển vị ứng với (8.24) như sau:

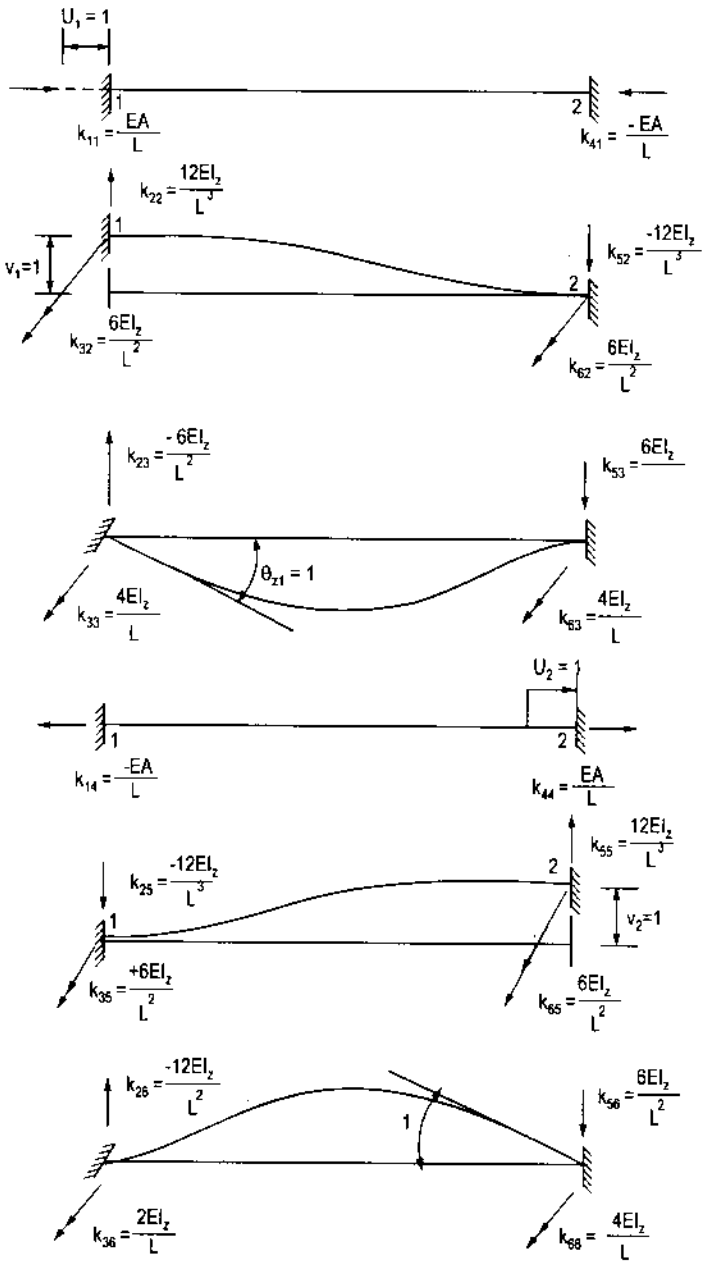
$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6] \tag{8.25}$$

Trong đó: q_1, q_4 chuyển vị trên phương x tại các nút 1 và 2;

q_2, q_5 chuyển vị trên phương y tại các nút 1 và 2;

q_3, q_6 góc xoay tại các nút 1 và 2.

Ý nghĩa vật lý của các hệ số độ cứng giải thích trên hình (8.7):



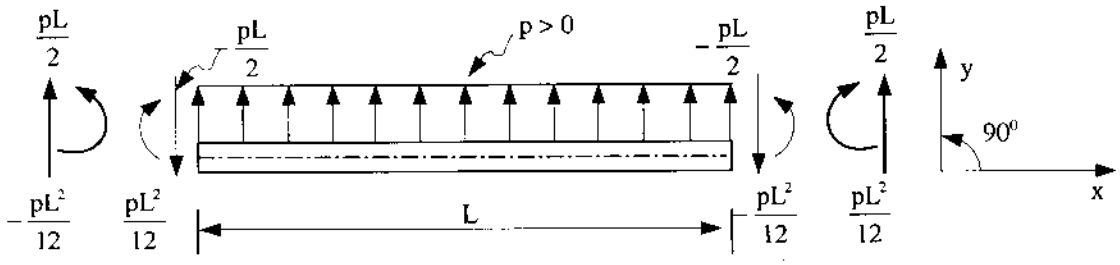
Hình 8.7

Véc tơ tải trọng:

Vế phải trong (8.22) chính là vectơ tải trọng do lực phân bố đều gây ra. Sau khi tính tích phân, ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{f} = \left[\frac{pL}{2} \quad -\frac{pL^2}{12} \quad \frac{pL}{2} \quad +\frac{pL^2}{12} \right]' \tag{8.26}$$

Các lực tương đương trong (8.26) biểu thị trên hình (8.8)



Hình 8.8

Dấu tải trọng quy ước như sau. Từ chiều dương x của trục dầm quay một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hồ. Tải trọng là dương khi cùng chiều với trục y (xem hình 8.8), là âm trong trường hợp ngược lại.

Momen uốn ở đầu dầm quy ước là dương khi quay thuận chiều kim đồng hồ, là âm trong trường hợp ngược lại.

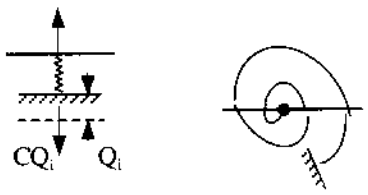
8.1.4. Các điều kiện biên. Nội lực

Điều kiện biên:

Gối tựa của dầm có 3 khả năng:

1. Gối tựa bị lún.
2. Gối tựa đàn hồi.
3. Gối tựa thông thường.

Đối với loại thứ nhất, ta dùng phương pháp mô hình lò xo để biến đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** (xem chương 3).



Hình 8.9

Đối với loại thứ 2, ta thay gối tựa bằng 1 lò xo có độ cứng C (hình 8.9). Men theo BTD i, ta có lực tác dụng F_i - CQ_i. Ta biến đổi ma trận độ cứng tổng thể **K** như sau. Nhân hàng thứ i của ma trận **K** với vectơ chuyển vị **Q**, ta có:

$$K_{i1}.Q_1 + K_{i2}.Q_2 + \cdots + K_{ii}.Q_i + \cdots + Q_{in}.Q_n = F_i - CQ_i$$

Chuyển CQ_i sang vế trái:

$$K_{i1}.Q_1 + K_{i2}.Q_2 + \cdots + (K_{ii} + C).Q_i + \cdots + Q_{in}.Q_n = F_i \qquad (8.27)$$

Vậy ta biến đổi ma trận **K** bằng cách thêm số C vào phần tử thứ i trên đường chéo chính.

Nội lực

Nội lực trong dầm gồm có lực cắt V và mômen uốn M.

Căn cứ vào các công thức $M = EI\dfrac{d^2v}{dx^2}$ $V = \dfrac{dM}{dx}$ và $v = \mathbf{Hq}$

Ta có:

$$M = \frac{EI}{L^2}\left[6\xi q_1 + (3\xi - 1)Lq_2 - 6\xi q_3 + (3\xi + 1)Lq_4\right] \tag{8.28}$$

$$V = \frac{6EI}{L^3}\left(2q_1 + Lq_2 - 2q_3 + Lq_4\right) \tag{8.29}$$

Các nội lực ở hai đầu dầm tính theo (8.28) và (8.29). Chúng phải được cộng vào các phản lực ở trạng thái ngàm không tô đậm trên (hình 8.8b) để được nội lực cuối cùng. Gọi S_i là nội lực cuối cùng ta có:

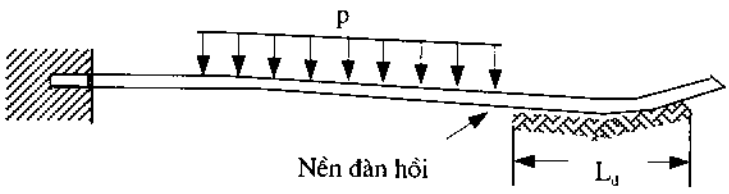
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & +6L & 2L^2 \\ +12 & +6L & 12 & +6L \\ 6L & 2L^2 & +6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{-pL}{2} \\ \dfrac{+pL^2}{12} \\ \dfrac{-pL}{2} \\ \dfrac{-pL^2}{12} \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

Trong đó: S_1, S_3 - lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 của dầm;

S_2, S_4 - mômen tại đầu 1 và đầu 2 của dầm.

8.1.5. Dầm trên nền đàn hồi

Dầm trên nền đàn hồi biểu thị trên hình (8.10)



Hình 8.10: *Dầm trên nền đàn hồi.*

Giả sử độ cứng trên đơn vị dài của nền đàn hồi là S - Ngoài công của nội lực theo công thức (8.16), còn có công của nội lực do phản lực từ nền đàn hồi tác dụng lên dầm gây ra. Phản lực phân bố trên đơn vị dài là s.v do đó công của nội lực bổ sung là:

$$W_{ng}^{b} = \frac{1}{2}\int(sv)vdx$$
$$= \frac{1}{2}\int sv^2 dx \qquad (8.31)$$

Thay **v** = **H.q** vào (8.31), ta có:

$$W_n^b = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left(s\int_e \mathbf{H}'\mathbf{H}dx\right)\mathbf{q} \qquad (8.32)$$

Căn cứ vào (8.8) và (8.15), ta được

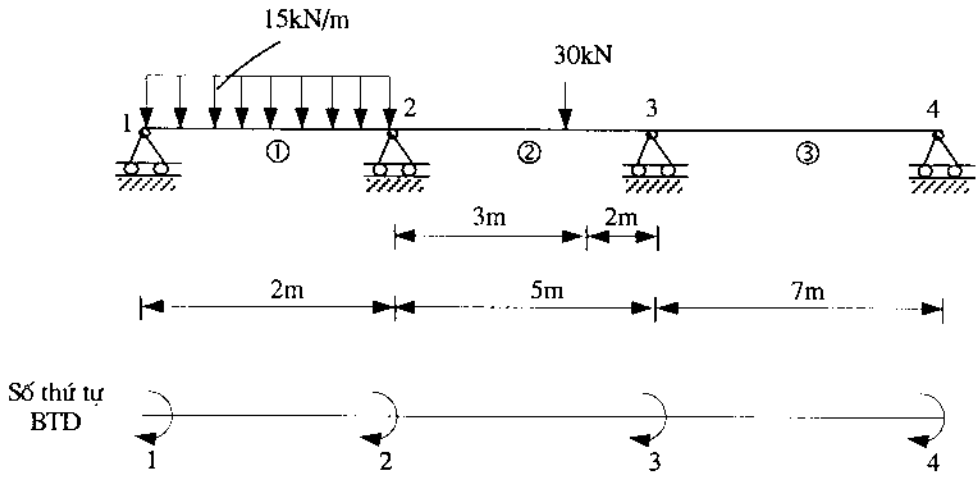
$$\mathbf{k}_e^b = \frac{SL_d}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L_d & 54 & -13L_d \\ 22L_d & 4L_d^2 & 13L_d & -3L_d^2 \\ 54 & 13L_d & 156 & -22L_d \\ -13L_d & -3L_d^2 & -22L_d & 4L_d^2 \end{bmatrix} \qquad (8.33)$$

Trong đó: s là độ cứng trên đơn vị dài của nền đàn hồi;

L_d là chiều dài của nền đàn hồi.

Ma trận $\mathbf{k}_e^b$ cần được cộng vào ma trận (8.23) trong trường hợp có 4 bậc tự do.

Ví dụ 8.1:



Môđun đàn hồi: 21.10^7 kN/m^2; Mômen quán tính: 23.10^{-6} m^4

Hình 8.11

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

2- Lực cắt

Giải:

Số thanh: 3

số BTD cần tính: 4

Chuyển vị là các góc xoay, nội lực là các mômen uốn.

1- Tính ma trận độ cứng riêng theo (8.23)

Thanh 1:
$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9660 & 4830 \\ & 9660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Thanh 2:
$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2760 & 1380 \\ & 3864 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Thanh 3:
$$\mathbf{k}_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2760 & 1380 \\ & 2760 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

2- Ghép các MTĐC riêng thanh MTĐC tổng thể:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 9660 & 4830 & 0 & 0 \\ & \begin{array}{r} 9660 \\ +\ 3864 \\ \hline 13524 \end{array} & 1932 & 0 \\ & & \begin{array}{r} 3864 \\ +\ 2760 \\ \hline 6624 \end{array} & 1380 \\ & & & 2760 \end{bmatrix}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về các tải trọng tác dụng tại nút. Ta có vectơ tải trọng.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9,4 \\ -21,6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4- Giải hệ phương trình:

$$\mathbf{K.Q} = \mathbf{F}$$

Ta được các thành phần chuyển vị như sau:

$(q_1, q_2, q_3, q_4) = (-0,147;\ 1,329;\ -4,073;\ 2,036).10^{-3}$ rad

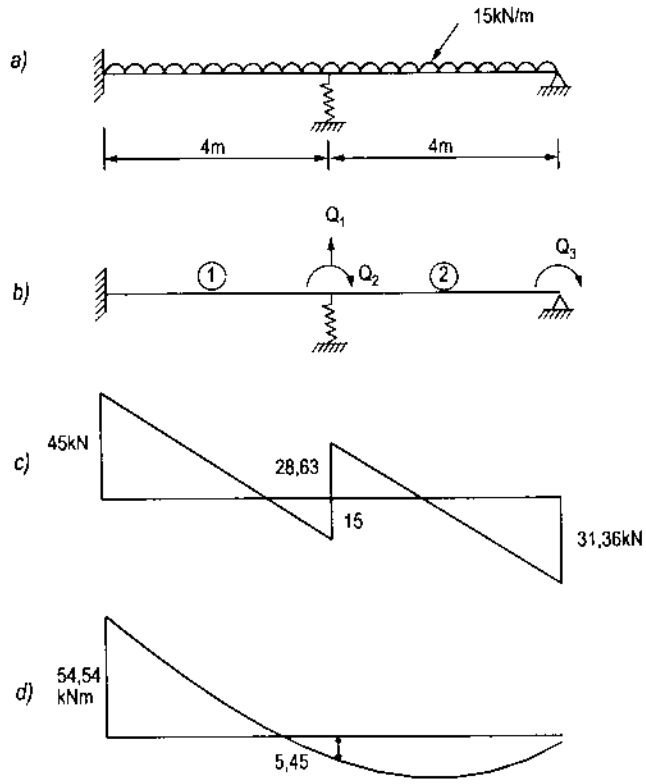
5- Tính nội lực theo (8.30)

Giá trị mômen và lực cắt thống kê trong bảng dưới:

Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	0	17,132	6,434	23,566
2	-17,132	8,431	12,300	17,699
3	-8,431	0	1,204	-1,204

Ví dụ 8.2:

Tính dầm liên tục biểu thị trên hình (8.12a). Gối tựa trung gian là 1 lò xo có độ cứng $\frac{24EI}{L^3}$;EI=400 đơn vị. Vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen.



Hình 8.12

Giải:

Xác định các ma trận độ cứng:

Bậc tự do cục bộ trong mối dầm là q_1, q_2, q_3, q_4. Các bậc tự do tổng thể là Q_1, Q_2, Q_3 như trên hình (8.12b).

Ma trận độ cứng của các phần tử tính theo (8.23) (bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc)

Phần tử 1:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \leftarrow \text{BTD tổng thể} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \leftarrow \text{BTD cục bộ} \\
\begin{array}{c} \text{BTD tổng thể} \rightarrow \\ \text{BTD cục bộ} \rightarrow \end{array} \mathbf{k}_1 = \begin{array}{c} 0\ 1 \\ 0\ 2 \\ 1\ 3 \\ 2\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đối xứng} & & & 400 \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{a}
$$

Véc tơ tải trọng tính theo (8.26) ($p < 0$)

$$
\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} +\dfrac{WL}{2} \\ -\dfrac{WL^2}{12} \\ +\dfrac{WL}{2} \\ \dfrac{WL^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ +20 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix}
\tag{b}
$$

Phần tử 2:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \leftarrow \text{BTD tổng thể} \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \leftarrow \text{BTD cục bộ} \\
\mathbf{k}_2 = & \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ \text{đối xứng} & & 75 & -150 \\ & & & 400 \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{c}
$$

Véc tơ tải trọng:

$$
\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -30 \\ +20 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix}
\tag{d}
$$

Ghép các ma trận độ cứng riêng và các vectơ tải trọng như đã làm trong các chương trước. Vì gốc tựa trung gian là 1 lò xo có độ cứng bằng $\frac{24 \times 400}{4^3} = 150 kN/m$, ta phải cộng số này vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính (lò xo nằm trên phương BTD Q_1). Cuối cùng, ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\begin{bmatrix} 300 & 0 & 150 \\ & 800 & 200 \\ \text{Đối xứng} & & 400 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$Q_3 = \frac{2}{11}$$
$$Q_2 = -\frac{1}{22} \qquad \text{(f)}$$
$$Q_1 = -\frac{16}{55}$$

Theo (8.30), nội lực cuối cùng của các phần tử như sau:

Phần tử 1:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đối xứng} & & & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16/55 \\ -1/22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 30 \\ +20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.0 \\ 54.54 \\ 15.0 \\ 5.45 \end{pmatrix} \qquad \text{(g)}$$

Phần tử 2:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 75 & 150 & -75 & 150 \\ & 400 & -150 & 200 \\ & & 75 & -150 \\ \text{Đối xứng} & & & 400 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16/55 \\ -1/22 \\ 0 \\ 2/11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -20 \\ 30 \\ +20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.63 \\ -5.45 \\ 31.36 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Căn cứ vào các kết quả tính trên, ta vẽ biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen như trên hình (8.12c), (8.12d).

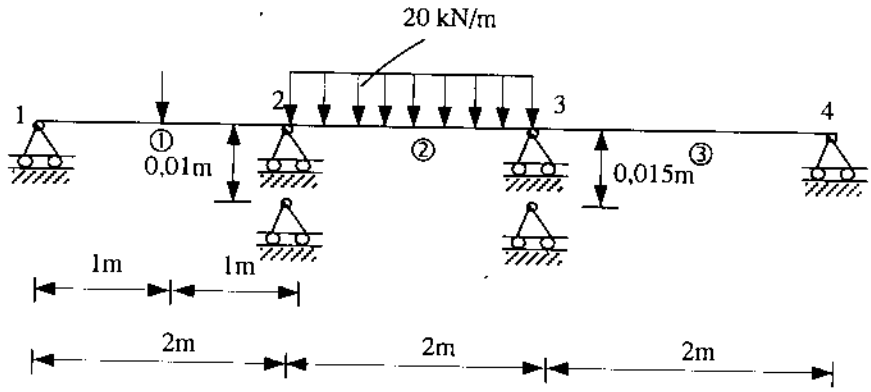
Ví dụ 8.3: Một dầm liên tục như trên hình (8.13)

Độ lún gối tựa 2: 0,01m.

Độ lún gối tựa 3: 0,015m

Môđun đàn hồi: 21.10^7 kN/m^2;

Mômen quán tính: 23.10^{-6}m^4



Hình 8.13

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Giải:

Trong phương pháp lò xo, cần phải thống kê toàn bộ các bậc tự do. Vì mỗi nút có 2 bậc tự do nên ta có.

Tổng số bậc tự do = 2 × 4 = 8

Số bậc tự do có chuyển vị cho trước: 4

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho: 1, 3, 5, 7

Các chuyển vị tương ứng: 0; 0,01 (độ lún); 0,015 (độ lún); 0

Ứng với BTD thứ i có chuyển vị cho trước, phần tử thứ i trên đường chéo chính của ma trận độ cứng tổng thể cần được cộng thêm số c khá lớn, phần tử thứ i của vectơ tải trọng cũng cần được cộng thêm giá trị (c x chuyển vị tương ứng).

Trình tự tính toán như sau:

1) Lập các ma trận độ cứng riêng theo (8.23)

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ \text{đối xứng} & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7245 & -7245 & -7245 & -7245 \\ & 9660 & 7245 & 4830 \\ \text{đối xứng} & & 7245 & 7245 \\ & & & 9660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

2- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành MTĐC tổng thể:

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7245* & -7245 & -7245 & -7245 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 9660 & 7245 & 4830 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 14490* & 0 & -7245 & -7245 & 0 & 0 \\ & & & 19320 & 7245 & 4830 & 0 & 0 \\ & & & & 14490* & 0 & -7245 & -7245 \\ & & & & & 19320 & 7245 & 4830 \\ & & & & & & 7245* & 7245 \\ & & & & & & & 9660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về các tải trọng tập trung tại các nút. Ta có vectơ tải trọng:

$$f = \begin{bmatrix} -15* \\ 7,5 \\ -35* \\ -0,83 \\ -20* \\ -6,67 \\ 0* \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

4- Biến đổi ma trận độ cứng tổng thể và vectơ tải trọng.

Giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong MTĐC tổng thể là 19320. Chọn giá trị $c = 19320.10^8$.

Các giá trị của các phần tử có đánh dấu sao trong MTĐC tổng thể cần sửa lại như sau:

$S(1,1) = 7245 + 19320.10^8$ $\quad$ $S(3,3) = 14490 + 19320.10^8$

$S(5,5) = 14490 + 19320.10^8$ $\quad$ $S(7,7) = 7245 + 19320.10^8$

Các phần tử có đánh dấu sao trong vectơ tải trọng cần sửa lại như sau:

$f(1,1) = -15 + c \times 0 = -15$ $\quad$ $f(3,3) = -35 + c \times (-0{,}01)$

$f(5,5) = -20 + c \times (-0{,}015)$ $\quad$ $f(7,7) = 0 + c \times 0 = 0$

5- Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã được biến đổi, giải hệ phương trình đã được các giá trị thành phần chuyển vị:

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (0 \quad -4{,}137\text{x}10^{-3}\text{ rad} \quad -0{,}01\text{m}$

$-5{,}173\text{x}10^{-3}\text{ rad} \quad -0{,}015\text{m} \quad 2{,}155 \times 10^{-3}\text{ rad} \quad 0 \quad 1{,}017 \times 10^{-2}\text{ rad})$

6- Căn cứ vào (8.30), tính mômen và lực cắt. Kết quả thống kê trong bảng (8.2)

Bảng 8.2

Phần tử \ Lực	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	0	10	10	20
2	-10	38,725	5,638	34,362
3	-38,725	0	19,362	-19,362

§.8.2 DẦM HAI CHIỀU CÓ TRỤC KHÔNG SONG SONG VỚI HỆ TỌA ĐỘ TỔNG THỂ KHUNG PHẲNG.

Dầm hai chiều nằm nghiêng biểu thị trên hình (8.14). Bây giờ, trục dầm x_m trong hệ toạ độ cục bộ không còn song song với trục x trong hệ tọa độ tổng thể x, y, z.

8.2.1. Ma trận xoay

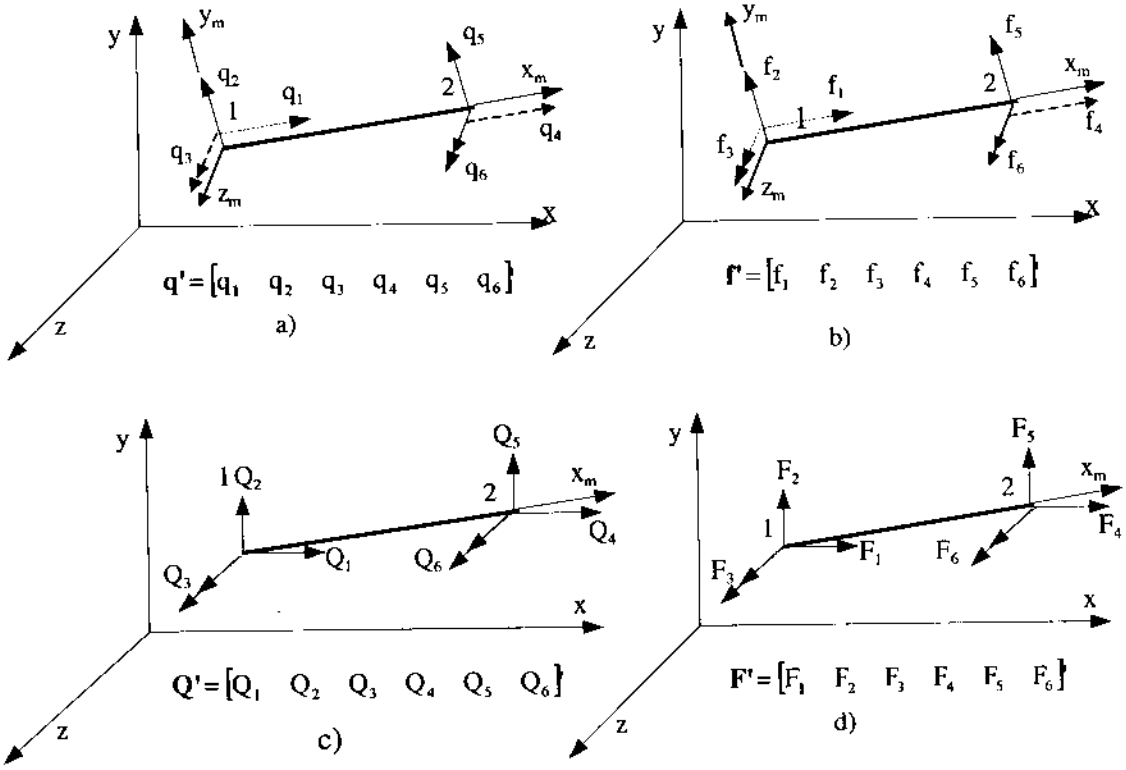
Trong trường hợp dầm hai chiều nằm nghiêng, ta có 2 hệ tọa độ: hệ tọa độ cục bộ x_m, y_m, z_m và hệ tọa độ tổng thể x, y, z. (hình 8.14). Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6] \tag{8.35}$$

Trong đó: q_1, q_4 - các thành phần chuyển vị trên phương x_m tại nút 1 và nút 2;

q_2, q_5 - các thành phần chuyển vị trên phương y_m tại nút 1 và nút 2;

q_3, q_6 - các thành phần góc xoay trên phương z_m tại nút 1 và nút 2.



Hình 8.14:

a) Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ;
b) Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ;
c) Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể;
d) Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể

Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ là:

$$\mathbf{f'} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6] \tag{8.36}$$

Trong đó: f_1, f_4 - các thành phần tải trọng trên phương x_m tại nút 1 và nút 2;

f_2, f_5- các thành phần tải trọng trên phương y_m tại nút 1 và nút 2;

f_3, f_6- các thành phần mômen xoay quanh trục z_m.

Các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{Q'} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6] \tag{8.37}$$

Trong đó: Q_1, Q_4 - các thành phần chuyển vị trên phương x tại nút 1 và nút 2;

Q_2, Q_5 - các thành phần chuyển vị trên phương y tại nút 1 và nút 2;

Q_3, Q_6 - các thành phần góc xoay quay trục z tại nút 1 và nút 2.

Các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể:

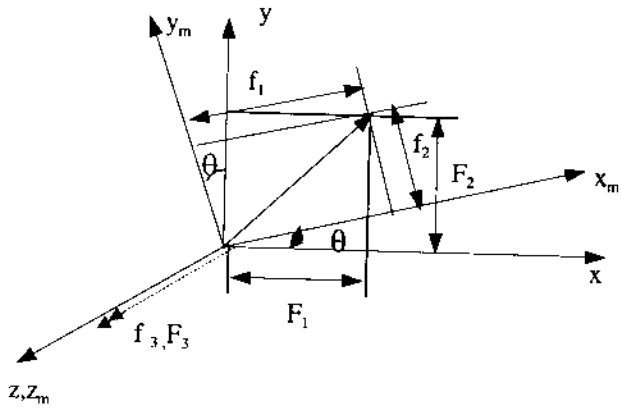
$$\mathbf{F'} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6] \tag{8.38}$$

Trong đó: F_1, F_4- các thành phần tải trọng trên phương x tại nút 1 và nút 2;

F_2, F_5- các thành phần tải trọng trên phương y tại nút 1 và nút 2;

F_3, F_6 - các thành phần mômen xoay quanh trục z tại nút 1 và nút 2.

Nếu cho mặt $x_m y_m$ trùng với mặt xy, ta có hình (8.15)



Hình 8.15

Hệ thức giữa các thành phần tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ và hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$f_1 = F_1 \cos\theta + F_2 \sin\theta = F_1 C_x + F_2 C_y$$
$$f_2 = -F_1 \sin\theta + F_2 \cos\theta = -F_1 C_y + F_2 C_x \tag{8.39}$$

Trong đó: $C_x = \cos\theta \qquad C_y = \sin\theta$ (8.40)

Riêng đối với các thành phần mômen f_3 và F_3, chúng bằng nhau:

$$f_3 = F_3 \tag{8.41}$$

Từ trên, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{8.42}$$

Vậy là ta đã dùng các thành phần chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể để biểu thị các thành phần chuyển vị tại nút đó trong hệ tọa độ cục bộ (8.42) có thể viết:

$$\mathbf{f}_{(1)} = \mathbf{T}.\mathbf{F}_{(1)} \tag{8.42a}$$

Trong đó: $\mathbf{f}_{(1)}$ vectơ tải trọng tại nút 1 trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{F}_{(1)}$ vectơ tải trọng tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể;

T ma trận xoay hoặc ma trận biến đổi.

Đối với các thành phần chuyển vị, ta cũng có những hệ thức tương tự như trên:

$$\mathbf{q}_{(1)} = \mathbf{T}.\mathbf{Q}_{(1)} \tag{8.43}$$

Trong đó: $\mathbf{q}_{(1)}$ vectơ chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ cục bộ;

$\mathbf{Q}_{(1)}$ vectơ chuyển vị tại nút 1 trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong thực tế, mỗi dầm có 2 nút (hình 8.13) nên đối với nút 2, ta cũng có những hệ thức tương tự như trên:

$$\mathbf{f}_{(2)} = \mathbf{T}.\mathbf{F}_{(2)} \tag{8.44}$$

$$\mathbf{q}_{(2)} = \mathbf{T}.\mathbf{Q}_{(2)} \tag{8.45}$$

Đối với toàn bộ dầm, ta có hệ thức ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_y & C_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_x & C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix} \tag{8.46}$$

Dưới dạng ma trận chia khối, ta có:

$$\begin{bmatrix} f_{(1)} \\ \hline f_{(2)} \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} F_{(1)} \\ \hline F_{(2)} \end{bmatrix} \tag{8.47}$$

Trong đó: $\mathbf{f}_{(1)}, \mathbf{f}_{(2)}, \mathbf{F}_{(1)}, \mathbf{F}_{(2)}$ là những ma trận cấp 3×1;

T, 0 là các ma trận cấp 3×3.

(8.46) có thể viết:

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}.\mathbf{F} \tag{8.48}$$

Trong đó: **f** - vectơ tải trọng của toàn bộ dầm trong hệ tọa độ cục bộ;

F - vectơ tải trọng của toàn bộ dầm trong hệ tọa độ tổng thể.

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{array}\right] \tag{8.49}$$

R gọi là ma trận xoay tổng thể.

Đối với vectơ chuyển vị, ta có hệ thức tương tự:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}.\mathbf{Q} \tag{8.50}$$

Trong đó: **q** và **Q** như đã trình bày trong (8.35) và (8.37)

Ngược lại, ta có thể dùng các thành phần trong hệ tọa độ cục bộ để biểu thị các thành phần trong hệ tọa độ tổng thể. Từ (8.48), ta có:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}^{-1}.\mathbf{f}$$

nhưng $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}'$ nên

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}'.\mathbf{f}$$

Từ (8.50):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}'.\mathbf{q} \tag{8.52}$$

8.2.2. Ma trận độ cứng. Vectơ tải trọng của hệ khung phẳng.

Một dầm 2 chiều ở vị trí bất kỳ là một thành phần của hệ khung phẳng.

Ma trận độ cứng:

Vận dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng (chương một), theo (1.43), ta có ma trận độ cứng tổng thể của dầm như sau:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}'.\mathbf{k}_e.\mathbf{R} \tag{8.53}$$

Trong đó: **R** - ma trận xoay, tính theo (8.49);

$\mathbf{k}_e$ - ma trận độ cứng trong hệ tọa độ cục bộ tính theo (8.24) (trường hợp tổng quát có 6 bậc tự do).

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận trong (8.53) ta được ma trận độ cứng tổng thể **K** như sau:

Số thứ tự BTD cục bộ :1,2,3,4,5,6.

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_4 & -C_1 & -C_2 & C_4 \\ & C_3 & -C_5 & -C_2 & -C_3 & -C_5 \\ & & C_6 & -C_4 & C_5 & C_7 \\ & & & C_1 & C_2 & -C_4 \\ & \text{đối xứng} & & & C_3 & C_5 \\ & & & & & C_6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \end{array} \tag{8.53a}$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = \frac{AE}{L}.l^2 + \frac{12EI}{L^3}.m^2; C_2 = \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right).lm; \\ &C_3 = \frac{AE}{L}.m^2 + \frac{12EI}{L^3}.l^2; C_4 = \frac{6EI}{L^2}.m; \\ &C_5 = \frac{6EI}{L^2}.l; C_6 = \frac{4EI}{L}; C_7 = \frac{2EI}{L}; \end{aligned}\right\} \tag{8.53b}$$

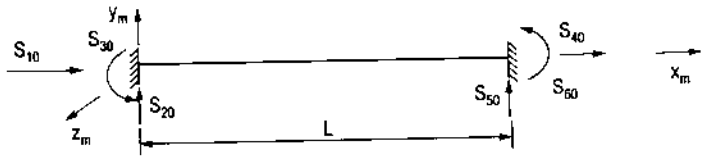
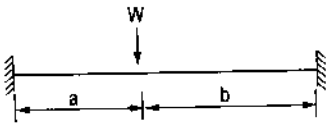
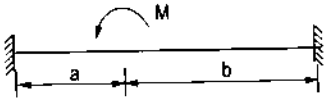
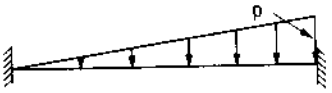
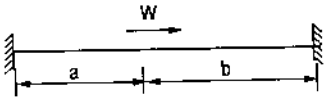
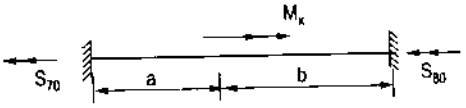
A: diện tích; E: môđun đàn hồi; L: chiều dài

l, m: côsin định hướng

Vectơ tải trọng:

Để tiện cho việc tính toán, người ta lập sẵn bảng (8.1) trong đó đã được thống kê các phản lực ở 2 đầu dầm ở trạng thái ngàm do các loại tải trọng khác nhau gây ra.

Bảng 8.1.Các phản lực ở hai đầu dầm trong trạng thái ngầm do các loại tải trọng khác nhau gây ra

	
 $S_{30} = \frac{Wab^2}{L^2}$ $S_{60} = \frac{Wa^2b}{L^2}$ $S_{20} = \frac{Wb^2}{L^3}(2a+b)$ $S_{50} = \frac{Wa^2}{L^3}(2b+b)$	 $S_{30} = -S_{60} = \frac{-WL}{12}$ $S_{20} = -S_{60} = \frac{W}{2}$
 $S_{30} = \frac{Mb}{L^2}(2a-b)$ $S_{60} = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$ $S_{20} = -S_{60} = \frac{6Mab}{L^3}$	 $S_{30} = \frac{PL}{30}$ $S_{60} = \frac{+PL^2}{20}$ $S_{20} = \frac{3PL}{20}$ $S_{50} = \frac{7PL}{20}$
 $S_{10} = -\frac{Wb}{L}$ $S_{40} = -\frac{Wa}{L}$	 $S_{70} = -\frac{M_x b}{L}$ $S_{80} = -\frac{M_x a}{L}$

Trong bảng (8.1): S_{10}, S_{40} - lực dọc;

S_{20}, S_{50} - lực cắt;

S_{30}, S_{60} - mômen.

Khi tính vectơ tải trọng trong hệ toạ độ cục bộ, ta lấy các giá trị phản lực trong bảng (8.1) nhưng phải đổi dấu toàn bộ. Chẳng hạn dầm chịu tải trọng w, vectơ tải trọng phải tính như sau:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +\dfrac{Wb^2}{L^3}(3a+b) & -\dfrac{Wab^2}{L^2} & 0 & +\dfrac{Wa^2}{L^3}(a+3b) & +\dfrac{Wa^2b}{L^3} \end{bmatrix}^t$$

Cần chú ý đến dấu của lực và dấu của mômen đã quy ước trong phần trước.

Sau khi xác định được các ma trận độ cứng trong hệ tọa độ tổng thể và các vectơ tải trọng, ta ghép chúng lại như đã làm trong các chương trước để có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q = F}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể. Tiếp theo áp dụng (8.50) để tính các thành phần chuyển vị trong hệ toạ độ cục bộ. Nội lực cuối cùng ở hai đầu dầm tính như sau:

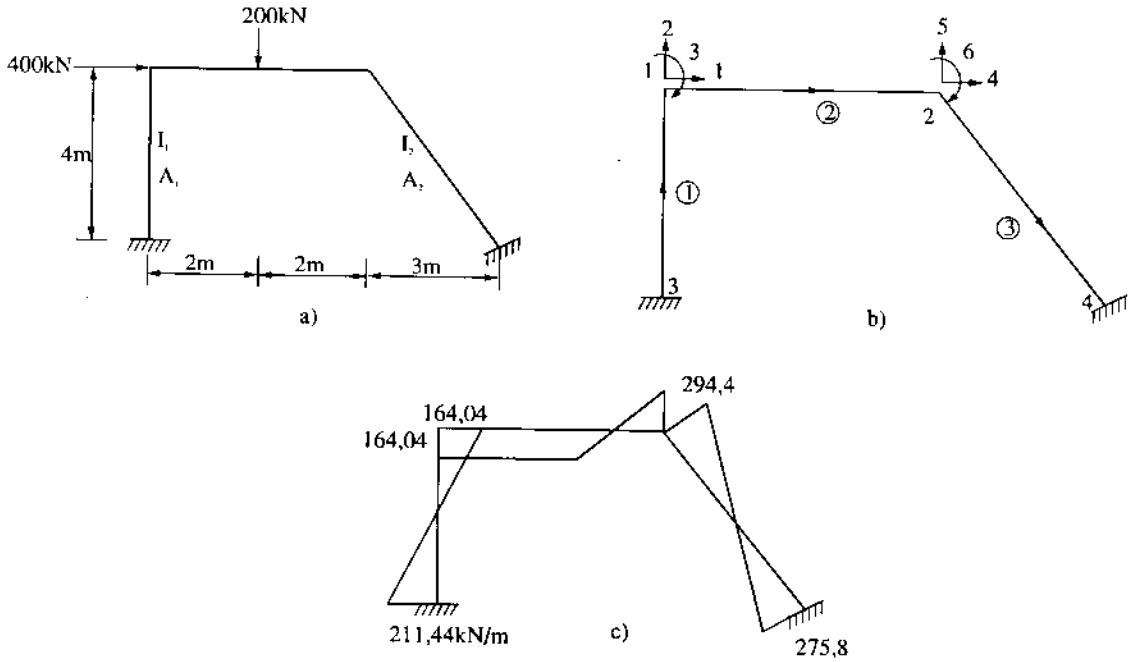
$$\mathbf{S = k_e.q + S_0} \tag{8.54}$$

So tra ở bảng (8.1)

Ví dụ 8.4: Cho 1 khung như trên hình (8.16).

$E = 2\times10^7$ kN/m^2; $I_1 = 12\times10^{-5}$m^4; $A_1 = 0{,}03$m^2 ; $I_2 = 15\times10^{-5}$m^4; $A_2 = 0{,}035$m^2

Vẽ biểu đồ mômen. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc.



Hình 8.16

Giải:

Căn cứ vào ma trận xoay **R** ở (8.46) và ma trận độ cứng $\mathbf{k_e}$ trong hệ tọa độ cục bộ ở (8.24), ta tính ma trận độ cứng tổng thể cho từng phần tử. Tiếp theo, căn cứ vào bảng (8.1) để tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ,từ đó, dùng (8.51) để tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể.

Phần tử 1:

$$\mathbf{k_e} = \begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Ma trận độ cứng tổng thể $\mathbf{K} = \mathbf{R}'.\mathbf{k_e}.\mathbf{R}$:

$$\mathbf{K_1} = \begin{array}{c} \text{BTD tổng thể} \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \text{BTD tổng thể} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 450 & 0 & -900 & -450 & 0 & -900 \\ 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 \\ -900 & 0 & 2400 & 900 & 0 & 1200 \\ -450 & 0 & 900 & 450 & 0 & 900 \\ 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 \\ -900 & 0 & 1200 & 900 & 0 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{(c)}$$

Phần tử 2:

Trục phần tử 2 x_m song song với trục x trong hệ trục tọa độ tổng thể nên không cần biến đổi ma trận độ cứng.

$$
\begin{array}{cc}
\text{BTD tổng thể} \rightarrow & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\mathbf{K_2} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix}
15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\
0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\
0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\
-15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\
0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\
0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad \text{(d)}
$$

Căn cứ vào bảng (8.1), tính vectơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể (không cần biến đổi):

$$
\mathbf{F}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\dfrac{WL}{2} \\ -\dfrac{WL}{8} \\ 0 \\ +\dfrac{WL}{2} \\ \dfrac{WL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ +100 \\ 0 \\ -100 \\ 100 \end{Bmatrix} \qquad \text{(e)}
$$

Phần tử 3:

$$
\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix}
14\times10^4 & 0 & 0 & -14\times10^4 & 0 & 0 \\
0 & 288 & 720 & 0 & -288 & 720 \\
0 & 720 & 2400 & 0 & -720 & 1200 \\
-14\times10^4 & 0 & 0 & 14\times10^4 & 0 & 0 \\
0 & -288 & -720 & 0 & 288 & -720 \\
0 & 720 & 1200 & 0 & -720 & 2400
\end{bmatrix} \qquad \text{(f)}
$$

$C_x = 0{,}6 \qquad C_y = -0.8$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(g)}$$

$$\mathbf{K_3} = \mathbf{R'}.\mathbf{k_3}.\mathbf{R}$$

$$\mathbf{K_3} = \begin{array}{c} \text{BTD tổng thể} \rightarrow \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ \text{BTD tổng thể} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50584 & -67062 & 576 & -50584 & 67062 & 576 \\ -67062 & 89704 & 432 & 67062 & -89704 & 432 \\ 576 & 432 & 2400 & 576 & 432 & 1200 \\ -50584 & 67062 & 576 & 50584 & -67062 & -576 \\ 67062 & -89704 & 432 & -67062 & 89704 & -432 \\ 576 & 432 & 1200 & -576 & -432 & 2400 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{(h)}$$

Sau khi ghép các ma trận độ cứng K_i và các vectơ tải trọng ta được:

$$\begin{bmatrix} 150450 & 0 & 900 & -150000 & 0 & 0 \\ 0 & 150450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 900 & 900 & 4800 & 0 & -900 & 1200 \\ -150000 & 0 & 0 & 200584 & -67062 & 576 \\ 0 & -450 & -900 & -67062 & 90154 & -468 \\ 0 & 900 & 1200 & 576 & -468 & 4800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ -100,0 \\ -100,0 \\ 0,0 \\ -100,0 \\ 100,0 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,2876 \\ 0,00010073 \\ -0,0395 \\ 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \end{bmatrix} \qquad \text{(j)}$$

Nội lực ở hai đầu thanh:

Nội lực ở hai đầu của mỗi phần tử tính theo (8.54).

$$S = k_e.\mathbf{q} + S_0$$

Trong đó: **q** tính theo (8.50):

$$\mathbf{q} = \mathbf{R.Q}$$

S_0 tra ở bảng (8.1)

Phần tử 1:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2876 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,0395 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,2876 \\ -0,0395 \end{bmatrix} \qquad \text{(k)}$$

$$S = \begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,2876 \\ -0,0395 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,11 \\ 93,87 \\ 211,44 \\ 15,11 \\ -93,87 \\ 164,04 \end{bmatrix} \qquad \text{(l)}$$

Phần tử 2: Vì phần tử 2 song song với trục x nên **q** = **Q**

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 15\times10^4 & 0 & 0 & -15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 900 & 0 & -450 & 900 \\ 0 & 900 & 2400 & 0 & -900 & 1200 \\ -15\times10^4 & 0 & 0 & 15\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -450 & -900 & 0 & 450 & -900 \\ 0 & 900 & 1200 & 0 & -900 & 2400 \end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} 0,2876 \\ 1,0073\times10^{-4} \\ -0,0395 \\ 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0,0 \\ 100,0 \\ -100,0 \\ 0,0 \\ 100,0 \\ +100,0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 300,0 \\ -15,1 \\ -164,06 \\ -300,0 \\ 215,1 \\ -296,4 \end{bmatrix} \qquad \text{(m)}$$

Phần tử thứ 3:

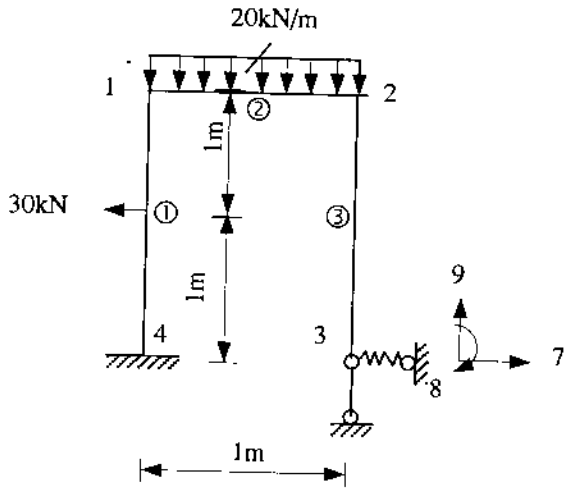
$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0,2856 \\ 0,2107 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2,8\times10^{-3} \\ 0,3549 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} \qquad \text{(n)}$$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 14\times10^4 & 0 & 0 & -14\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 288 & 720 & 0 & -288 & 720 \\ 0 & 720 & 2400 & 0 & -720 & 1200 \\ -14\times10^4 & 0 & 0 & 14\times10^4 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & -720 & 0 & 288 & -720 \\ 0 & 720 & 1200 & 0 & -720 & 2400 \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} 2,8\times10^{-3} \\ 0,3549 \\ 0,0169 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +392,0 \\ +114,4 \\ 296,1 \\ -392,0 \\ -114,4 \\ 275,8 \end{bmatrix} \qquad \text{(o)}$$

Biểu đồ mômen vẽ trên hình (3.16c).

Ví dụ 8.5: Cho 1 khung phẳng như trên hình 8.17.



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\,m^2$
Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\,m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\,kN/m^2$
Gối tựa đàn hồi men theo BTD thứ 7
Hệ số độ cứng: 10×10^4 KN/m

Hình 8.17

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Giải:

Số BTD cần tính: 8

Số BTD triệt tiêu: 4

Số thứ tự BTD triệt: 9, 10, 11, 12

Lập các MTĐC riêng:

Căn cứ vào (8.53a) ta được các MTĐC riêng như sau:

Thanh 1:

BTD tổng thể

$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 \\ \text{đối xứng} & & 0 \\ & & 84000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1680000 & 0 & 0 & -1680000 & 0 & 0 \\ & 504000 & -252000 & 0 & -504000 & -252000 \\ & & 1680000 & 0 & 252000 & 84000 \\ & & & 1680000 & 0 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & 504000 & 252000 \\ & & & & & 168000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 63000 & 0 & -63000 & -63000 & 0 & -63000 \\ & 840000 & 0 & 0 & 840000 & 0 \\ & & 84000 & 63000 & 0 & 42000 \\ & & & 63000 & 0 & 63000 \\ & \text{đối xứng} & & & 840000 & 0 \\ & & & & & 84000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \end{array}$$

2- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể:

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1743000 & 0 & -63000 & -1680000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1344000 & -252000 & 0 & -504000 & -252000 & 0 & 0 \\ & & 2520000 & 0 & 252000 & 8400 & 0 & 0 \\ & & & 1743000 & 0 & -63000 & 0 & -63000 \\ & & & & 1344000 & 252000 & 0 & 0 \\ & & & & & 2000 & 0 & 42000 \\ & \text{đối xứng} & & & & & 840000 * & 0 \\ & & & & & & & 840000 \end{bmatrix} \end{array}$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại các nút

Ta có vectơ tải trọng:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \\ 9,167 \\ 0 \\ -10 \\ -1,667 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4- Biến đổi MTĐC tổng thể

Phần tử thứ 7 trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể cần cộng thêm hệ số độ cứng:

$$S(7, 7) = 840000 + 10^5$$

5- Căn cứ vào MTĐC đã được biến đổi và vectơ tải trọng, giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị.

$(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8) = (-2{,}233 \times 10^{-4}m \quad -2{,}283 \times 10^{-5}m$

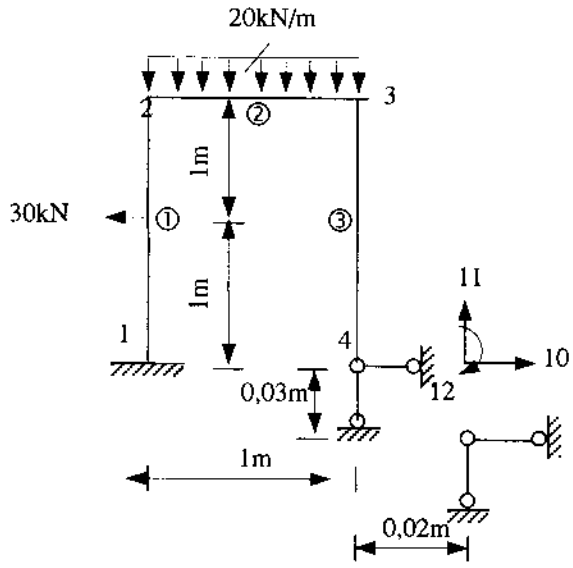
$-1{,}779 \times 10^{-5}rad \quad -2{,}221 \times 10^{4}m \quad -9{,}195 \times 10^{-6}m \quad -4{,}591 \times 10^{-5}rad$

$-8{,}217 \times 10^{-6}m \quad -1{,}436 \times 10^{-4}rad)$

6- Căn cứ vào (8.24), (8.50), (8.54) và các giá trị chuyển vị vừa tính ở trên, ta tính mômen và lực cắt. Kết quả thống kê trong bảng (8.3).

Nội lực / Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-20,822	5,075	-27,948	-2,052
2	-5,075	-4,104	19,178	0,822
3	4,104	0	-2,052	2,052

Ví dụ 8.6: Một khung phẳng như trên hình 8.18.



Diện tích: $8 \times 10^{-3} m^2$
Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4} m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7 kN/m^2$
Độ lún:
Men theo BTD thứ 10: 0,02m
Men theo BTD thứ 11: 0,03m

Hình 8.18

Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Giải:

Trong phương trình mô hình lò xo, phải thống kê toàn bộ các BTD. Ở đây toàn bộ BTD = 12. Số BTD cần tính = 12. Số BTD có chuyển vị cho trước: 5. Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 2, 3, 10, 11. Các chuyển vị cho trước tương ứng: 0 0 0 0,02 -0,03.

Các phần tử trên đường chéo chính ứng các số thứ tự BTD nói trên cần được cộng thêm số C khá lớn. Các phần tử của vectơ tải trọng ứng với các số thứ tự BTD nói trên cũng cần được cộng thêm giá trị (C × chuyển vị tương ứng).

1- Căn cứ vào (8.53a), thành lập các MTĐC riêng:

Thanh 1:

$$S_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 63000 & 840000 & 63000 & -63000 & -840000 & 63000 \\ & 840000 & 0 & -840000 & -840000 & 0 \\ & & 840000 & -63000 & 0 & 42000 \\ & & & 63000 & 840000 & -63000 \\ & \text{đối xứng} & & & 840000 & 0 \\ & & & & & 840000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

Thanh 2:

$$S_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1680000 & 1680000 & 0 & -1680000 & -1680000 & 0 \\ & 504000 & -252000 & -1680000 & -504000 & -252000 \\ & & 1680000 & 0 & 252000 & -252000 \\ & & & 1680000 & 1680000 & 0 \\ & \text{đối xứng} & & & 504000 & 252000 \\ & & & & & 84000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Thanh 3:

$$S_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -63000 & 840000 & -63000 & 63000 & -840000 & -63000 \\ & -840000 & 0 & -840000 & 840000 & 0 \\ & & 840000 & 63000 & 0 & 42000 \\ & & & -63000 & 840000 & 63000 \\ & \text{đối xứng} & & & -840000 & 0 \\ & & & & & 840000 \end{bmatrix} \end{array}$$

2- Ghép các ma trận độ cứng riêng vào MTĐC tổng thể:

$$
\begin{bmatrix}
63000^{*} & 840000 & 63000 & -63000 & -840000 & 63000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 840000^{*} & 0 & -840000 & -840000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 840000^{*} & -63000 & 0 & 42000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 1743000 & 2520000 & -63000 & -1680000 & -1680000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1344000 & -252000 & -1680000 & -504000 & -252000 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & 2520000 & 0 & 252000 & -252000 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 1617000 & 2520000 & -63000 & 63000 & -840000 & -63000 \\
 & & & & & & & -336000 & 252000 & -840000 & 840000 & 0 \\
 & & & & & & & & 1680000 & 63000 & 0 & 42000 \\
 & & & & & & & & & -63000^{*} & 840000 & 63000 \\
 & & & & & & & & & & -840000^{*} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 840000
\end{bmatrix}
$$

3- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại các nút (tạo ra trạng thái ngàm). Ta có vectơ tải trọng.

$$
\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -15^{*} \\ 0^{*} \\ -7{,}5^{*} \\ -15 \\ -10 \\ 9{,}167 \\ 0 \\ -10 \\ -1{,}67 \\ 0^{*} \\ 0^{*} \\ 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix}
$$

4- Biến đổi MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng. Ứng với các phần tử có dấu ngôi sao trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể **S**, cần cộng thêm giá trị c.

Giá trị cực đại tuyệt đối của MTĐC tổng thể là $|\max| = 2520000$. Chọn giá trị $c = 2520000 \times 10^{8} = 252 \times 10^{12}$.

$S(1,1) = 63000 + 252 \times 10^{12}$ $\qquad$ $S(2,2) = 840000 + 252 \times 10^{12}$

$S(3,3) = 840000 + 252 \times 10^{12}$ $\qquad$ $S(10,10) = -63000 + 252 \times 10^{12}$

$S(11,11) = -840000 + 252 \times 10^{12}$

Ứng với các phần tử có đánh dấu sao trên véctơ tải trọng, ta cộng thêm giá trị (c x chuyển vị tương ứng):

$f(1) = -15 + c \times 0 = -15$ $\qquad$ $f(2) = 0 + c \times 0 = 0$

$f(3) = -7,5 + c \times 0 = -7,5$ $\qquad$ $f(10) = 0 + c \times 0,02$

$f(11) = 0 + c \times (-0,03)$

5- Căn cứ vào MTĐC **S*** và vectơ tải trong **f*** đã được biến đổi, ta giải hệ phương trình để được các giá trị chuyển vị.

$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}) =$

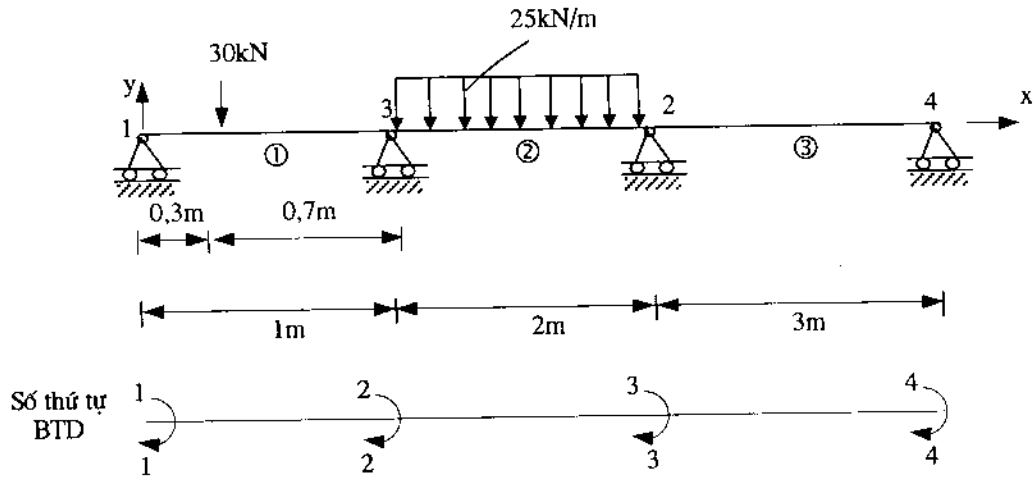
(0 0 0 -0,028m 0,008m -0,026rad -0,028m 0,029m -0,028rad 0,02m -0,03m -0,022rad)

6- Căn cứ vào (8,24); (8, 50), (8,54), tính nội lực cho mỗi phần tử của khung. Kết quả ghi trong bảng (8.4).

Phần tử \ Nội lực	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-694,269	416,118	-154,076	124,076
2	-416,118	248,151	-654,269	674,269
3	-248,151	0	124,076	-124,076

§8.3. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA THÔNG THƯỜNG (CRT 10)

Lấy thí dụ trên hình (8.19).



Hình 8.19

1- Nhập số liệu

Số thanh = 3; Số BTD có chuyển vị = 4;

Có 3 loại thanh cần thống kê:

a) Thanh chịu tải trong phân bố đều

b) Thanh chịu tải trọng tập trung

c) Thanh không chịu tải trọng

Trong thí dụ trên:

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều = 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung = 1

Số thanh không chịu tải trọng = 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều = 2

Cường độ tải trọng tương ứng: -25kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

- Tải trọng tương ứng: -30kN
- Vị trí tải trọng tương ứng: 0,3m; 0,7m

Số thứ tự thanh không chịu tải trọng: 3

Ở trên, quy ước dấu của tải trọng như sau:

- Dương nếu cùng chiều với trục tọa độ y
- Âm trong trường hợp ngược lại

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.5)

Bảng 8.5

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	Số TT BTD d_1	Số TT BTD d_2
1	1m	21×10^7 kN/m^2	23×10^{-6} m^4	1	2
2	2m	21×10^7 kN/m^2	23×10^{-6} m^4	2	3
3	3m	21×10^7 kN/m^2	23×10^{-6} m^4	3	4

2- Căn cứ vào các số liệu nhập vào, tính các ma trận độ cứng riêng theo (8.23) (ở đây, chỉ xét đến mômen, không xét đến lực cắt).

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Lập vectơ tải trọng

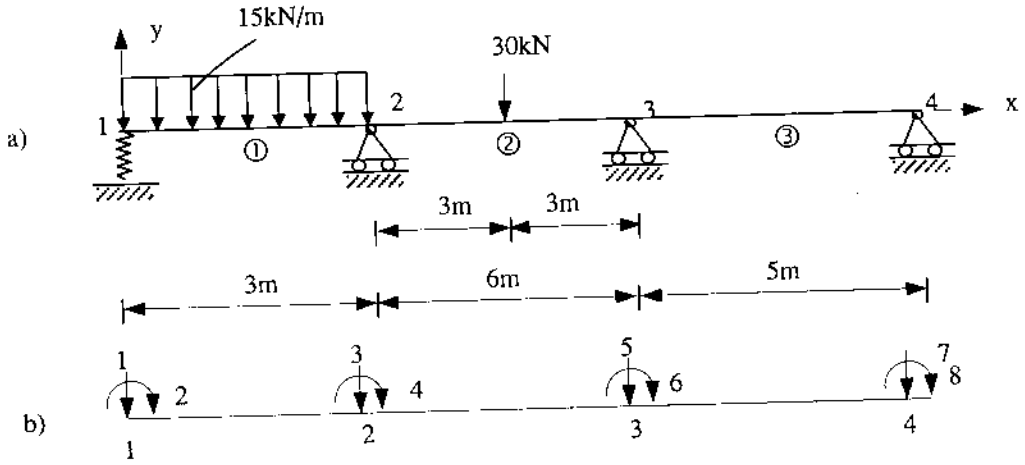
5- Giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị

6- Tính mômen theo (8.30)

7- Tính lực cắt theo giá trị mômen vừa tính trên.

§8.4. THUẬT TOÁN TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA ĐÀN HỒI (CTR 11)

Lấy thí dụ trên hình (8.20)



Hình 8.20

1- Nhập các số liệu:

Mỗi nút có 2 BTD. Số thứ tự BTD biểu thị như sau:

Tại nút i: - Lực thẳng đứng: 2i - 1

- Mômen: 2i (xem hình (8.20b)

Số thanh: 3

Số bậc tự do có chuyển vị: 5

Số thứ tự BTD có chuyển vị: 1, 2, 4, 6, 8 (hình 8.20b)

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 3, 5, 7

Số BTD có gối tựa đàn hồi: 1

Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi: 1 (hình 3.20a)

Hệ số độ cứng tương ứng: 10×10^4 kN/m

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Cường độ tải trọng: -50 kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

- Tải trọng: -30kN

- Vị trí tải trọng tập trung: 3, 3 (hình 8.20a)

Số thứ tự thanh không chịu tải trọng : 3

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.6)

Bảng 8.6

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	d_1	d_2	d_3	d_4
1	3m	$21x10^7$	$120x10^{-6}$	1	2	3	4
2	6m	$21x10^7$	$120x10^{-6}$	3	4	5	6
3	5m	$21x10^7$	$120x10^{-6}$	5	6	7	8

2- Căn cứ vào (8.23), lập các ma trận độ cứng riêng

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Biến đổi MTĐC tổng thể

Cộng vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể số C khá lớn.

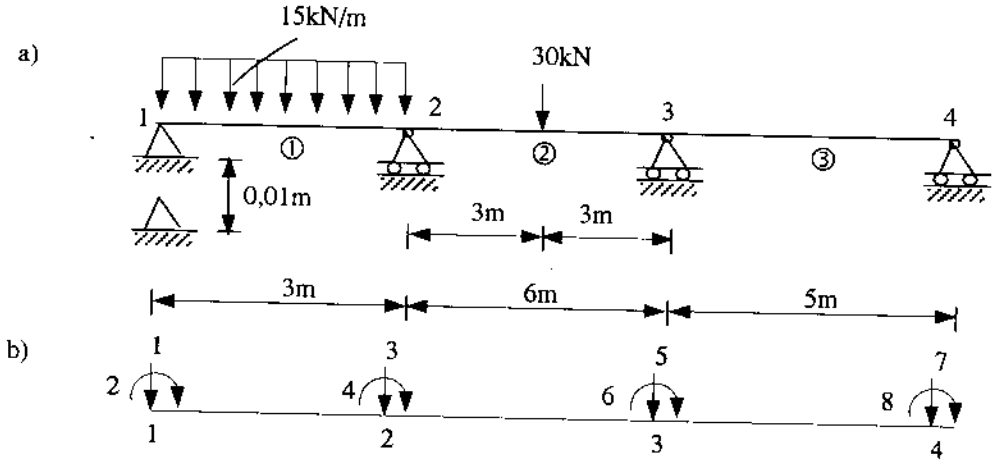
5- Lập vectơ tải trọng

6- Giải hệ phương trình để được giá trị các thành phần chuyển vị

7- Tính nội lực trung dầm liên tục theo (8.30)

§8.5. THUẬT TOÁN TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA LÚN THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH LÒ XO (CTR 12)

Lấy thí dụ trên hình (8.21).



Hình 8.21

1- Nhập các số liệu

Số thứ tự các BTD thống kê như trong chương trình CTR 11.

Số thanh: 3

Tổng số BTD: 8

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Cường độ tải trọng: -15 kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

- Tải trọng: -30kN
- Vị trí tải trọng tập trung: 3,3 (hình 8.21)

Số BTD có chuyển vị cho trước: 4

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước: 1, 3, 5, 7

Chuyển vị cho trước tương ứng: 0,01; 0; 0; 0

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.7)

Bảng 8.7

Phần tử	Chiều dài	Môđun đàn hồi	Mômen quán tính	d_1	d_2	d_3	d_4
1	3m	21×10^7	120×10^{-6}	1	2	3	4
2	6m	21×10^7	120×10^{-6}	3	4	5	6
3	5m	21×10^7	120×10^{-6}	5	6	7	8

2- Căn cứ vào (8.23), lập các ma trận độ cứng riêng

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Gọi chương trình con để tính giá trị cực đại tuyệt đối của các phần tử trong MTĐC tổng thể. Chọn giá trị C.

5- Biến đổi MTĐC tổng thể bằng cách thêm số C vào mỗi phần tử ứng với số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước trên đường chéo chính của MTĐC tổng thể.

6- Lập vectơ tải trọng. Biến đổi vectơ tải trọng bằng cách thêm vào giá trị (C x chuyển vị tương ứng) cho mỗi phần tử ứng với số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước.

7- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình.

8- Tính nội lực theo (8.30).

§8.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG PHẲNG TRÊN GỐI TỰA THÔNG THƯỜNG HOẶC GỐI TỰA ĐÀN HỒI (CTR 14)

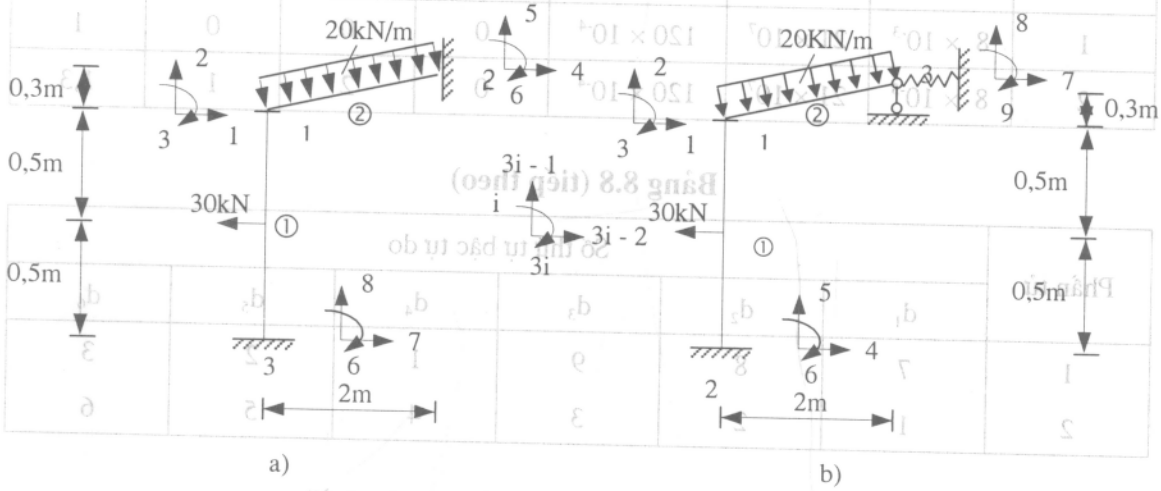
Lấy thí dụ trên hình (8.22)

1- Nhập số liệu

Số thanh: 2

Số BTD có chuyển vị: 3 (hình 8.23a)

Số BTD có chuyển vị: 4 nếu có gối tựa đàn hồi (hình 3.23b)



Hình 8.22

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6 (hình 3.22a)

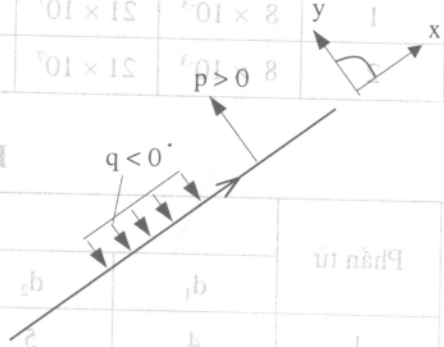
Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9 (hình 3.22a)

Số BTD có gối tựa đàn hồi: 1 (hình 8.22b)

- Số BTD triệt tiêu : 4, 5, 6, 8 (hình 3.22b)

- Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi : 7 (hình 3.22b)

- Hệ số độ cứng tương ứng: 10×10^4 kN/m



Hình 8.23

Số thanh chịu tải trọng phân bố: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng: 0

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2

Cường độ tải trọng: -20 kN/m.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

- Tải trọng: 30kN

- Vị trí tải trọng tập trung: 0,5m; 0,5m (hình 3.22).

Quy ước về dấu của tải trọng (xem hình 8.22) như sau: Từ chiều dương của trục thanh x quay một góc 90^0 ngược chiều kim đồng hồ; tải trọng là dương nếu cùng chiều với trục y, là âm trong trường hợp ngược lại. Các số liệu còn lại thống kê trong các bảng (8.8) và (8.9).

Bảng 8.8

Phần tử	Diện tích (m^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)	Tọa độ x_1	Tọa độ x_2	Tọa độ y_1	Tọa độ y_2
1	8×10^{-3}	21×10^7	120×10^{-4}	0	0	0	1
2	8×10^{-3}	21×10^7	120×10^{-4}	0	2	1	1,3

Bảng 8.8 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6

Bảng 8.9 (trường hợp có gối tựa đàn hồi)

Phần tử	Diện tích (m^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)	Tọa độ (m)			
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}	0	0	0	1
2	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-7}	0	2	1	1,3

Bảng 8.9 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	4	5	6	1	2	3
2	1	2	3	7	8	9

2- Lập các ma trận độ cứng riêng theo (8.53a)

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Nếu có gối tựa đàn hồi, biến đổi MTĐC tổng thể như trong ví dụ (8.5)

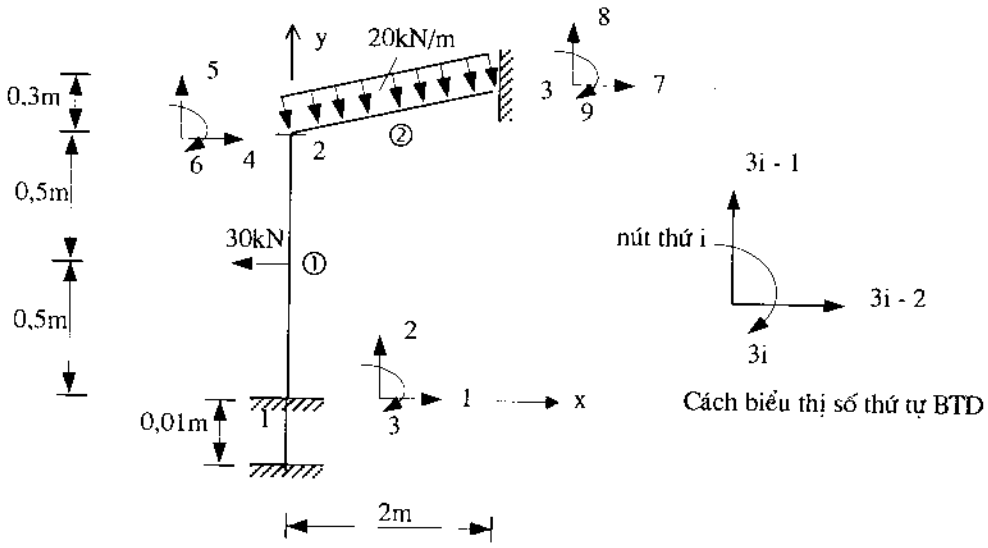
5- Lập vectơ tải trọng

6- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình

7- Tính nội lực theo (8.24), (8.50), (8.54)

§8.7. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG PHẲNG TRÊN GỐI TỰA LÚN THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH LÒ XO (CTR 15)

Lấy thí dụ trên hình (8.24)



Hình 8.24

I- Nhập số liệu

Số thanh: 2.

Tổng số BTD: 9.

Số BTD có chuyển vị cho trước 1, 2, 3, 7, 8, 9 (hình 8.24).

Số thứ tự BTD có chuyển vị cho trước 1, 2, 3, 7, 8, 9 (hình 8.24).

Chuyển vị tương ứng: 0; -0,01; 0; 0; 0; 0.

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1.

Số thanh chịu tải tập trung: 1.

Số thanh không chịu tải trọng: 0.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2.

Cường độ tải trọng: -20kN/m.

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1.

Tải trọng: 30 kN.

Vị trí tải trọng tập trung: 0,5m, 0,5m.

Quy ước dấu tải trọng như trong CTR 14.

Các số liệu khác thống kê trong bảng (8.10).

Bảng 8.10

Phần tử	Diện tích (m^2)	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)	Tọa độ (m)			
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	8×10^{-3}	$21x10^7$	$2x10^{-4}$	0	0	0	1
2	8×10^{-3}	$21x10^7$	$2x10^{-7}$	0	2	1	1,3

Bảng 8.10 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9

2- Lập các MTĐC riêng theo (8.53a)

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Biến đổi MTĐC tổng thể như đã làm trong ví dụ (8.3)

5- Lập vectơ tải trọng

6- Biến đổi vectơ tải trọng như đã làm trong ví dụ (8.3)

7- Căn cứ vào MTĐC tổng thể và vectơ tải trọng đã được biến đổi, gọi chương trình con để giải hệ phương trình

8- Tính nội lực theo (8.24), (8.50), (8.54).

Chương 9

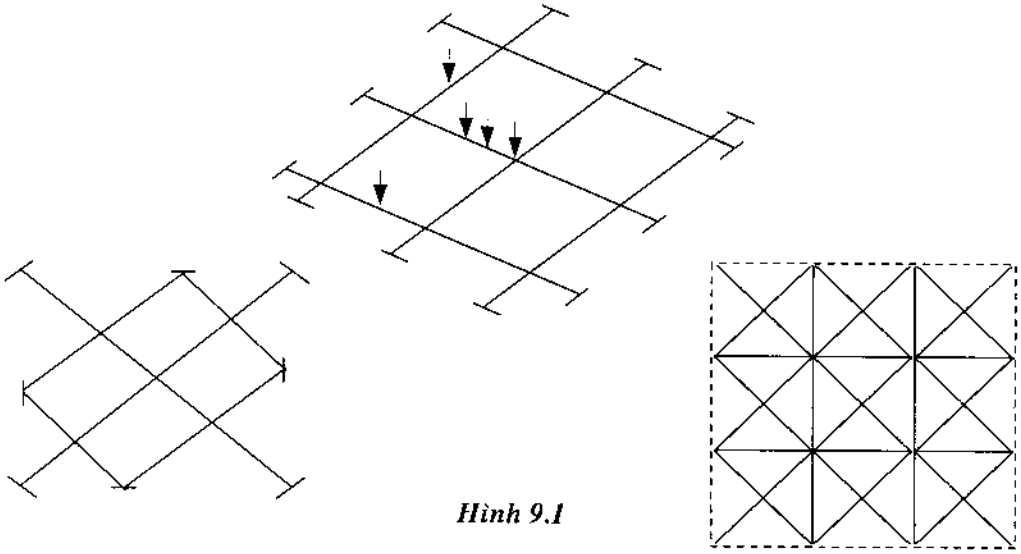
HỆ DẦM GIAO NHAU

Hệ dầm giao nhau là hệ trong đó các dầm trực giao hoặc không trực giao cùng nằm trong một mặt phẳng, còn tải trọng thì vuông góc với mặt phẳng đó (hình 9.1). Khác với hệ phẳng có nút cứng, sự làm việc của hệ dầm giao nhau có tính chất không gian.

Hệ dầm giao nhau thường thấy trong sàn nhà, mái nhà, sàn cầu.

Mỗi phần tử của hệ dầm giao nhau có các thành phần nội lực: mômen uốn, lực cắt và mômen xoắn. Bậc tự do gồm có góc xoay, góc xoắn và chuyển vị trên phương vuông góc với mặt phẳng của dầm.

Cách tính hệ dầm giao nhau tương tự như cách tính hệ khung. Trước hết, ta thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ nội lực và vectơ chuyển vị của mỗi phần tử, sau đó xuất phát từ điều kiện cân bằng của từng nút để thành lập hệ thức ma trận giữa vectơ tải trọng và vectơ chuyển vị của các nút.



Hình 9.1

§9.1 HỆ THỨC MA TRẬN GIỮA VECTƠ NGOẠI LỰC VÀ VECTƠ CHUYỂN VỊ TRONG HỆ TỌA ĐỘ CHUNG. MA TRẬN ĐỘ CỨNG CỦA PHẦN TỬ TRONG HỆ TỌA ĐỘ CHUNG

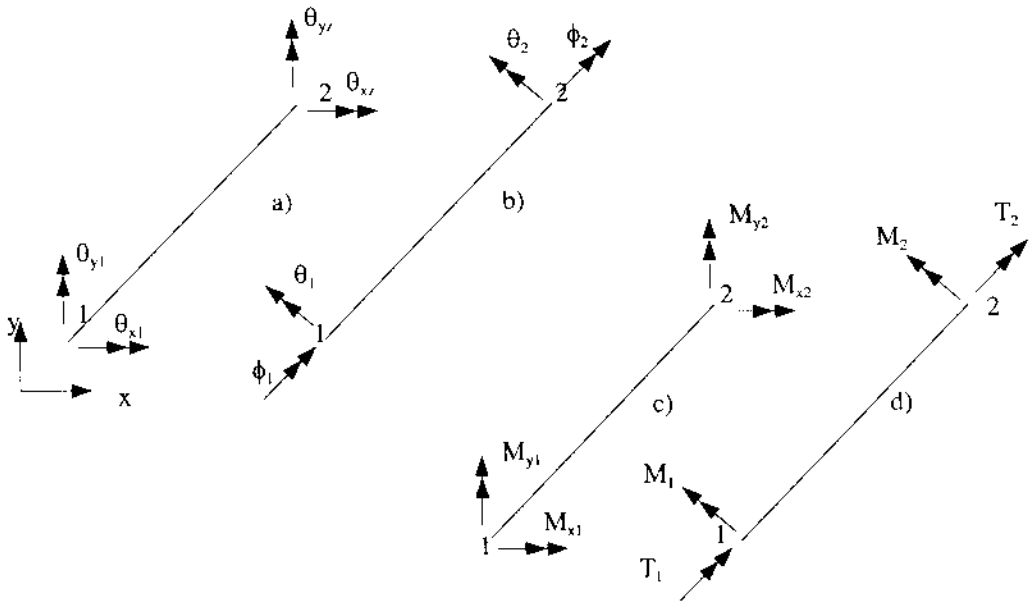
Giả sử một phần tử bất kỳ có 2 đầu 1 và 2 liên kết với 2 nút nào đó của hệ (hình 9.2). Ta chọn hệ tọa độ chung X, Y, Z trong đó các trục X và Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm.

Trong hệ tọa độ riêng (hình 9.2b và 9.2d), ta có các thành phần nội lực.

M_1, M_2 - mômen uốn tại đầu 1 và đầu 2; T_1, T_2 - mômen xoắn tại đầu 1 và đầu 2; F_{z1}, F_{z2} - lực cắt tại đầu 1 và đầu 2 trên phương của trục Z (không biểu thị trên hình vẽ). Các thành phần chuyển vị tương ứng là: θ_1, θ_2 - góc xoay tại đầu 1 và đầu 2; ψ_1, ψ_2 - góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2; W_1, W_2 - thành phần chuyển vị tại đầu 1 và đầu 2 trên phương trục Z (không biểu thị trên hình vẽ).

Trong hệ tọa độ chung (hình 9.2a và 9.2c) ta có các thành phần nội lực:

M_{x1}, M_{x2} - mômen quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2; M_{y1}, M_{y2} - mômen quanh trụcY tại đầu 1 và đầu 2; F_{z1}, F_{z2} như trên. Các thành phần chuyển vị tương ứng là: θ_{x1}, θ_{x2} - góc xoay quanh trục X tại đầu 1 và đầu 2; θ_{y1}, θ_{y2} - góc xoay quanh trục Y tại đầu 1 và đầu 2; W_1, W_2 như trên.



Hình 9.2

Đối với mômen xoắn, ta có các hệ thức:

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= G.J\left(\psi_2 - \psi_1\right) \\ T_1 &= -T_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

Trong đó: G - môđun trượt;

J - mômen quán tính xoắn.

Bây giờ ta tìm cách đưa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị về tọa độ chung X, Y, Z. Từ hình (9.2), ta có các công thức:

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_1 = \theta_{x1}.l + \theta_{y1}.m & \psi_2 = \theta_{x2}.l + \theta_{y2}.m \\ \theta_1 = -\theta_{x1}.m + \theta_{y1}.l & \theta_2 = -\theta_{x2}.m + \theta_{y2}.l \end{array}\right\} \quad (9.2)$$

Trong đó: l, m - côsin định hướng của phần tử 1 - 2.

Căn cứ vào công thức (9.2), ta có hệ thức ma trận giữa các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng và các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận xoay R có dạng.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

Căn cứ vào (8.33) (chương 8) và công thức (9.1), ta có hệ thức ma trận giữa nội lực và các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ T_1 \\ M_1 \\ F_{z2} \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{-JG}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_i \\ \theta_i \\ w_2 \\ \psi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Vậy ma trận độ cứng riêng trong hệ tọa độ cục bộ có dạng:

$$\mathbf{k_e} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & \frac{-JG}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \tag{9.5}$$

Theo (1.39) (chương một), ta có ma trận độ cứng riêng trong hệ tọa độ chung như sau:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R'}.\mathbf{k_e}.\mathbf{R} \tag{9.6}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận, ta được:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & -C_1 & C_2 & C_3 \\ & C_4 & C_5 & -C_2 & C_6 & C_7 \\ & & C_8 & -C_3 & C_7 & C_9 \\ & & & C_1 & -C_2 & -C_3 \\ & \text{Đối xứng} & & & C_4 & C_5 \\ & & & & & C_8 \end{bmatrix} \tag{9.6a}$$

Trong đó:

$C_1 = 12EI/L^3$ $\qquad$ $C_2 = \frac{6EI}{L^2}.m$

$C_3 = \frac{-6EI}{L^2}.l$ $\qquad$ $C_4 = \left(4m^2 + \alpha l^2\right)\frac{EI}{L}$

$C_5 - (4-\alpha).l.m.\frac{EI}{L}$ $\qquad$ $C_6 = \left(2m^2 - \alpha l^2\right).\frac{EI}{L}$

$C_7 = -(2+\alpha).l.m\frac{EI}{L}$ $\qquad$ $C_8 = \left(4l^2 + \alpha m^2\right).\frac{EI}{L}$

$C_9 = \left(2l^2 - \alpha m^2\right).\frac{EI}{L}$ $\qquad$ $\alpha = \frac{GJ}{EI}$

Cuối cùng, ta có hệ thức ma trận giữa vectơ ngoại lực và vectơ chuyển vị trong hệ tọa độ chung ứng với một phần tử như sau:

$$\begin{bmatrix} F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K}_e & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} \tag{9.7}$$

Các ký hiệu đã được giải thích trong phần đầu.

Phương trình ma trận (9.7) có thể viết dưới dạng:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_e.\mathbf{Q}_e \tag{9.8}$$

Trong đó: $\mathbf{F}_e$ - vectơ ngoại lực của phần tử e;

$\mathbf{K}_e$ - ma trận độ cứng tổng thể của phần tử e;

$\mathbf{Q}_e$ - vectơ chuyển vị của phần tử e trong hệ tọa độ tổng thể.

Sau khi ghép các vectơ $\mathbf{F}_e$ và ma trận $\mathbf{K}_e$ như đã làm trong các chương trước, ta được hệ phương trình cân bằng trong hệ tọa độ chung:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}.\mathbf{Q} \tag{9.9}$$

Trong đó: **F** - vectơ ngoại lực ứng với toàn hệ;

K - ma trận độ cứng tổng thể ứng với toàn hệ;

Q - vectơ chuyển vị ứng với toàn hệ.

Giải hệ phương trình (9.9), ta được giá trị các thành phần chuyển vị của toàn hệ trong hệ tọa độ chung.

Tính các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ riêng theo công thức sau:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}.\mathbf{Q} \tag{9.10}$$

Cuối cùng, tính nội lực của mỗi phần tử theo hệ thức ma trận (9.4).

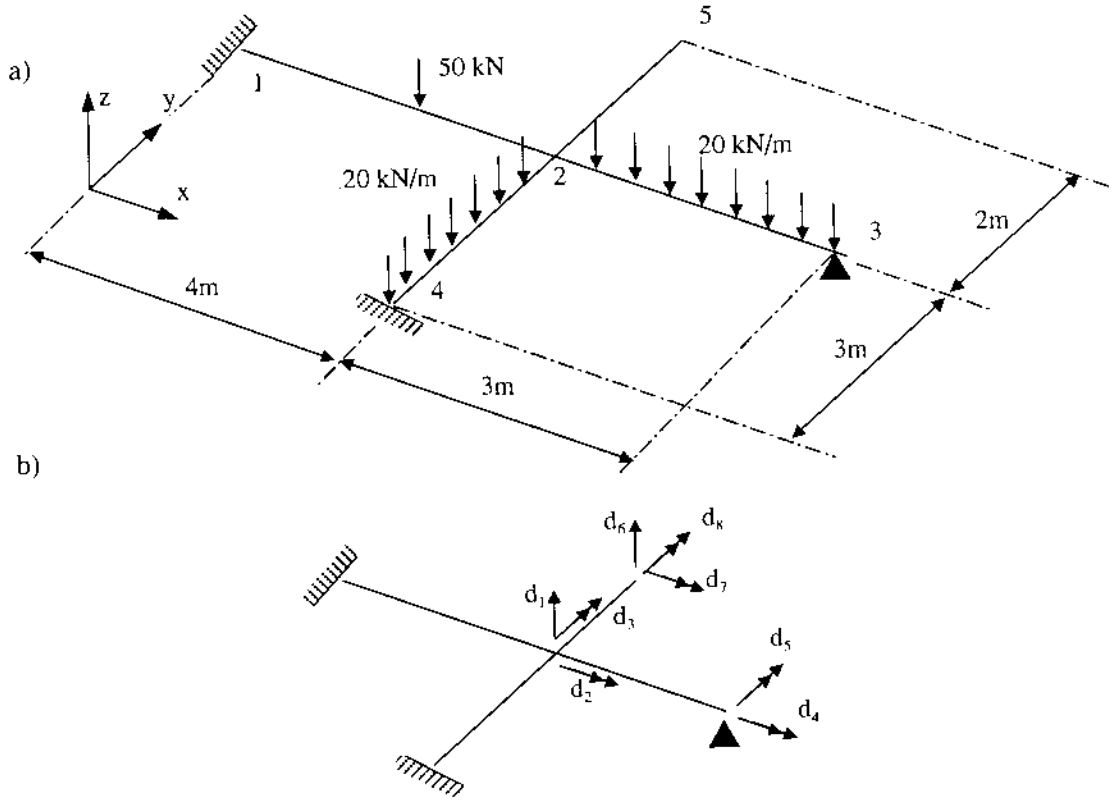
§9.2. TRÌNH TỰ TÍNH TOÁN HỆ DẦM GIAO NHAU

Lấy thí dụ hệ trên hình (9.3). Ta tiến hành tính toán theo các bước sau:

1. Chọn hệ trục tọa độ X, Y, Z trong đó các trục X, Y nằm trong mặt phẳng của hệ dầm, trục Z vuông góc với mặt phẳng của dầm. Thống kê tọa độ của các nút như trong bảng sau:

Tọa độ các nút

Nút	x	Y	Nút	x	Y
1	0	3	4	4	0
2	4	3	5	4	5
3	7	3			



Hình 9.3

2- Xác định bậc tự do của hệ. Như trên đã trình bày, mỗi nút có 3 bậc tự do (2 góc xoay và 1 thành phần chuyển vị trên phương trục Z). Vậy số bậc tự do.

$$n = 3 \times \text{số nút} - \text{số bậc tự do triệt tiêu ở các gối tựa}$$

Đối với hệ trên hình (9.3a): n = 3.5 - (6 + 1) = 8. Các bậc tự do biểu thị trên hình (9.3b) và thống kê trong bảng sau:

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	d_4	d_5
4	0	0	0
5	d_6	d_7	d_8

3- Xác định vị trí các đầu 1 và 2 của các phần tử. Dùng số thứ tự của các nút để biểu thị vị trí của các đầu 1 và 2 đồng thời tính các côsin định hướng của các phần tử. Đối với các phần tử trên hình (9.3), ta thống kê các số liệu trong bảng sau:

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	4	2	0	1
4	2	5	0	1

4- Theo (9.6a), thành lập ma trận độ cứng của các phần tử.

5- Khi các phần tử chịu tác dụng trực tiếp của các tải trọng tập trung hoặc tải trọng phân bố, cần tạo ra trạng thái ngàm và trạng thái tự do. Chẳng hạn đối với hệ trên hình (9.3), ta có trạng thái ngàm như trên hình (9.4a). Cần chú ý trong các bảng tính sẵn, người ta chỉ cho biểu thức của các nội lực ở trạng thái ngàm trong hệ tọa độ riêng. Để đưa các nội lực này về hệ tọa độ chung, ta áp dụng các công thức:

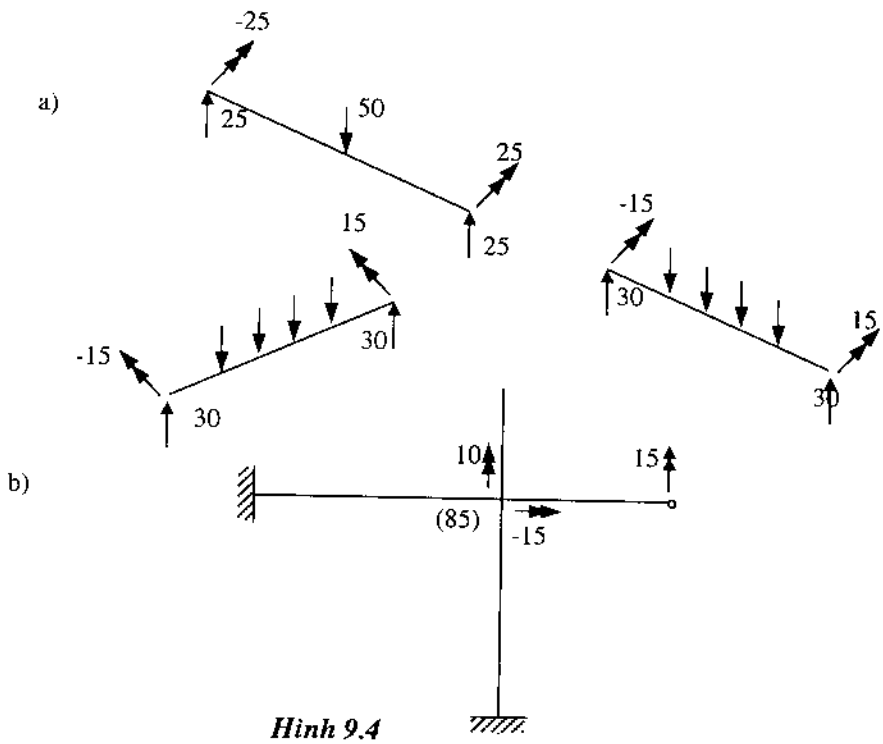
$M_{x1} = T_1 l - M_1.m;$ $\qquad M_{y1} = T_1 m + M_1.l;$

$M_{x2} = T_2 l - M_2.m;$ $\qquad M_{y2} = T_2 m + M_2.l;$

Trong đó: T_1, T_2 - mômen xoắn tại đầu 1 và đầu 2;

M_1, M_2 - mômen uốn tại đầu 1 và đầu 2.

Vì các nút bị chốt nên sản sinh ra phản lực tại các nút như trên hình (9.4b) , số nằm trong dấu ngoặc là phản lực trên phương trục Z.



Hình 9.4

Cần tạo ra trạng thái tự do bằng cách giữ nguyên giá trị tuyệt đối của các phản lực trên hình (9.4b) nhưng đổi chiều của chúng. Như vậy, từ hình (9.4b), ta suy ra các thành phần tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái tự do như sau:

$F_1 = -(85) = -85;$ $F_2 = -(-15) = 15;$ $F_3 = -(10) = -10;$

$F_4 = 0$ $F_5 = -(15) = -15;$ $F_6 = F_7 = F_8 = 0$

6- Căn cứ vào các thành phần tải trọng trên , ta được hệ thức ma trận:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}}_{F} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}}_{Q}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị của vectơ chuyển vị ($d_1, d_2, \ldots, d_n$).

7- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. áp dụng các công thức:

$$M_1 = \frac{EI}{L}\left[\left(4\theta_1 + 2\theta_2\right) - \frac{6}{L}\left(W_2 - W_1\right)\right]$$

$$M_2 = \frac{EI}{L}\left[\left(2\theta_1 + 4\theta_2\right) - \frac{6}{L}\left(W_2 - W_1\right)\right]$$

$$T_1 = -T_2 = \frac{GJ}{L}\left(\Phi_2 - \Phi_1\right) \qquad (9.11)$$

Trong đó: $\theta_1 = -\theta_{x1}.m + \theta_{y1}.l;$ $\theta_2 = -\theta_{x2}.m + \theta_{y2}.l;$

$\psi_1 = \theta_{x1}.l + \theta_{y1}.m;$ $\psi_2 = \theta_{x2}.l + \theta_{y2}.m;$

8- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do.

Thí dụ: 9.1:

Cho một hệ như trên hình (9.5)

$E = 14.10^6$ kN/m^2

$G = 6{,}36.10^6$ kN/m^2

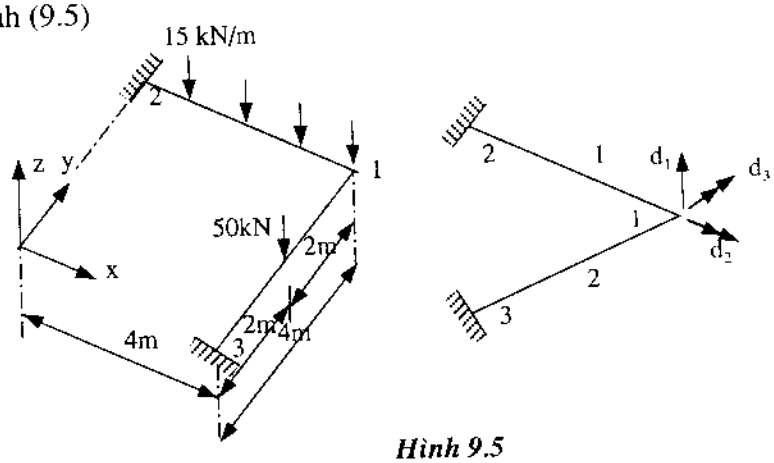
$I = 2600.10^{-6}$ m^4

$J = 1821.10^{-6}$ m^4

$L = 4$m

$A = 125000.10^{-6}$ m^2

Yêu cầu tính nội lực



Hình 9.5

Giải:

1- Xác định bậc tự do của hệ. Số bậc tự do n = 3.3 - 6 =3. Các số liệu ban đầu kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y
1	0	4
2	4	4
3	4	0

Bậc tự do

Nút	W	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	0	0	0

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	3	1	0	1

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k_1} = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & 0 & 13,65 \\ 0 & 2,895 & 0 \\ 13,65 & 0 & 36,40 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k_2} = 10^3 \begin{bmatrix} 6,83 & -13,65 & 0 \\ -13,65 & 36,40 & 0 \\ 0 & 0 & 2,895 \end{bmatrix}$$

3- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành ma trận độ cứng tổng thể **K**:

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} \begin{array}{r} 6,83 \\ +\ 6,83 \\ \hline 13,66 \end{array} & -13,65 & 13,65 \\ & \begin{array}{r} 2,895 \\ +\ 36,40 \\ \hline 39,295 \end{array} & 0 \\ \text{Đối xứng} & & \begin{array}{r} 2,895 \\ +\ 36,40 \\ \hline 39,295 \end{array} \end{bmatrix}$$

4- Tạo ra trạng thái ngàm (hình 9.6) và trạng thái tự do. Các thành phần tải trọng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (hình 9.6):

$F_1 = -(30 + 25) = -55$

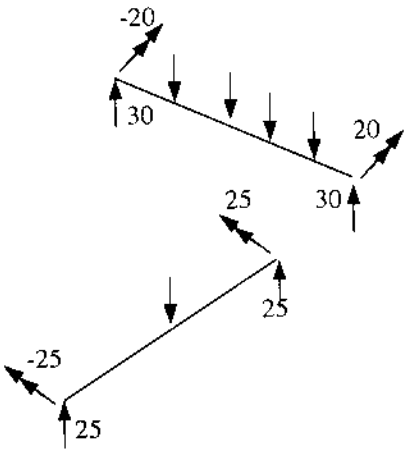
$F_2 = -(25) = -25$

$F_3 = -(20) = -20$

Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	-20	20
2	-25	25



Hình 9.6

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng đã tính, ta có hệ thức ma trận:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(-9{,}4482,\ \ -2{,}6458,\ \ 2{,}7731)\text{m}$$

6- Xác định nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (9.4). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

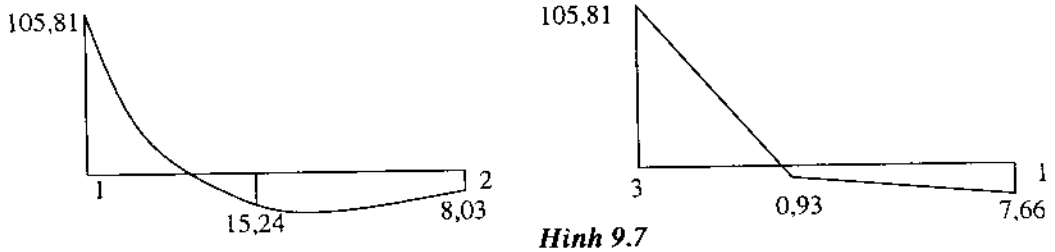
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-78,49	-28,03	-7,66
2	-80,81	-32,66	8,03

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong các bảng sau:

Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-20 - 78,49 = -98,49	20 - 28,03 = -8,03	-7,66
2	-25 - 80,81 = -105,81	25 - 32,66 = -7,66	-8,03

8- Vẽ biểu đồ mômen (hình 9.7)

Cần chú ý là tại nút 2, các mômen không cân bằng nhau vì 2 phần tử trực giao với nhau.



Hình 9.7

Ví dụ 9.2: Cho một hệ như trên hình (9.8). E = 14.10^6 kN/m^2, G = $6,36.10^6$ kN/m^2. Các đặc trưng hình học thống kê trong bảng sau:

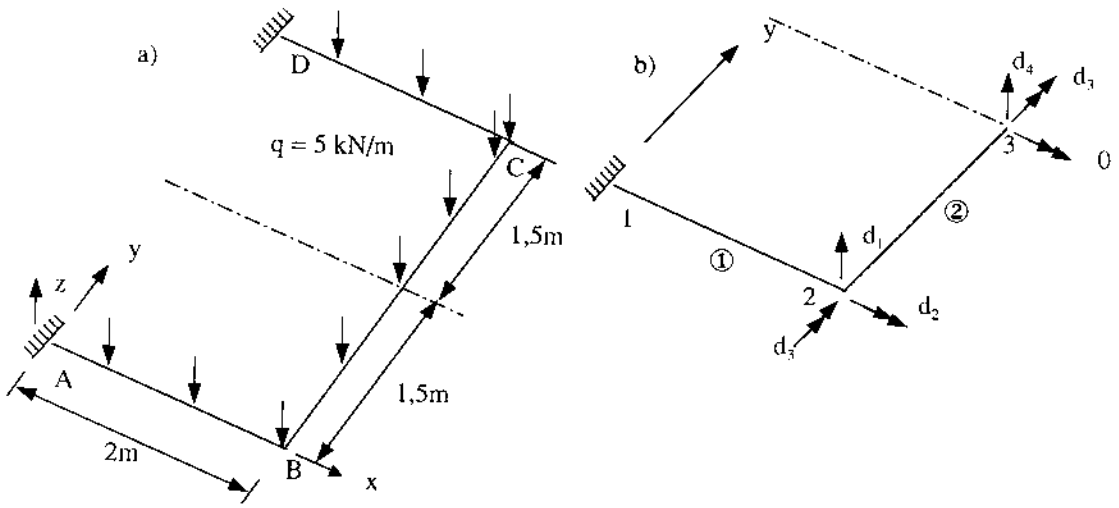
Đặc trưng hình học (đơn vị bằng mét)

Phần tử	L	I × 10^{-6}	J × 10^{-6}	A × 10^{-6}
A - B D - C	2	66,67	46,67	20000
B - C	3	27,31	19,12	12800

Yêu cầu tính nội lực.

Giải:

Vì hệ đối xứng và tải trọng cũng đối xứng nên sơ đồ tính đưa về nửa hệ như trên hình (9.8b).



Hình 9.8

1- Xác định bậc tự do. Vì nút 3 nằm trên trục đối xứng nên góc xoay θ_x quanh trục triệt tiêu. Mặt khác, góc xoắn của dầm BC tại điểm B và điểm C bằng nhau nên góc xoay nút 2 bằng góc xoắn tại nút 3. Vậy số bậc tự do n = 3 + 1 = 4. Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y
1	0	0
2	2	0
3	2	1.5

Bậc tự do

Nút	w	θ_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_3
3	d_4	0	d_3

Vị trí các đầu 1 và 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	0	1

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = 10^3\begin{bmatrix} 1,40 & 0 & 1,40 \\ 0 & 0,149 & 0 \\ 1,40 & 0 & 1,87 \end{bmatrix}.$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = 10^3\begin{bmatrix} 1,36 & 1,02 & 0 & -1,36 & 0 \\ 1,02 & 1,02 & 0 & -1,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,08 & 0 & -0,08 \\ -1,36 & -1,02 & 0 & 1,36 & 0 \\ 0 & 0 & -0,08 & 0 & 0,08 \end{bmatrix}.$$

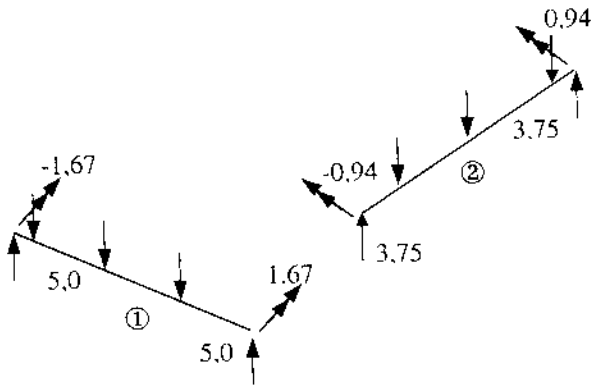
3- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành ma trận độ cứng tổng thể **K**:

$$\mathbf{K} = 10^3\begin{bmatrix} \begin{array}{r} 1,40 \\ 1,36 \\ \hline 2,76 \end{array} & \begin{array}{r} 1,02 \\ \\ \\ \end{array} & 1,40 & -1,36 \\ & \begin{array}{r} 0,15+0,08 \\ 1,02+0,08 \\ +\ 0,08 \\ -0,08 \\ \hline 1,17 \end{array} & 0 & -1,02 \\ \text{Đối xứng} & & 1,87 & 0 \\ & & & 1,36 \end{bmatrix}$$

4- Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (9.9). Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	-1,67	1,67
2	-0,94	0,94



Hình 9.9

Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau:

$$F_1 = -(5 + 3,75) = -8,75;\ F_2 = -(-0,97) = 0,94$$

$F_3 = -(1,667) = -1,667;\ F_4 = -(3,75) = -3,75$

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng trên. ta có hệ thức ma trận:

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,75 \\ 0,94 \\ -1,67 \\ -3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & K & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3, d_4) = 10^{-3}(-32,14;\ -9,30;\ 23,21;\ -41,87\ )m$$

6- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

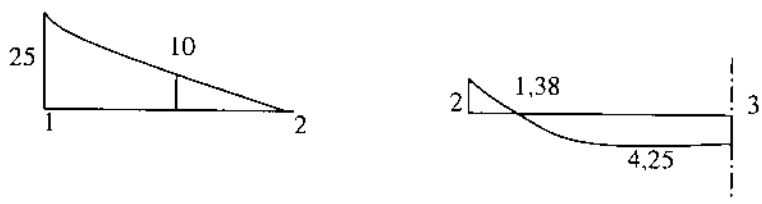
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-23,33	-1,67	-1,38
2	-0,44	-5,18	0

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-1,67 - 23,33 = -25,0	1,67 - 1,67 = 0	-1,38
2	-0,94 - 0,44 = -1,38	0,94 - 5,18 = -4,24	0

8- Biểu đồ mômen vẽ trên hình (9.10)



Hình 9.10

Ví dụ 9.3: Cho một hệ như trên hình (9.11).

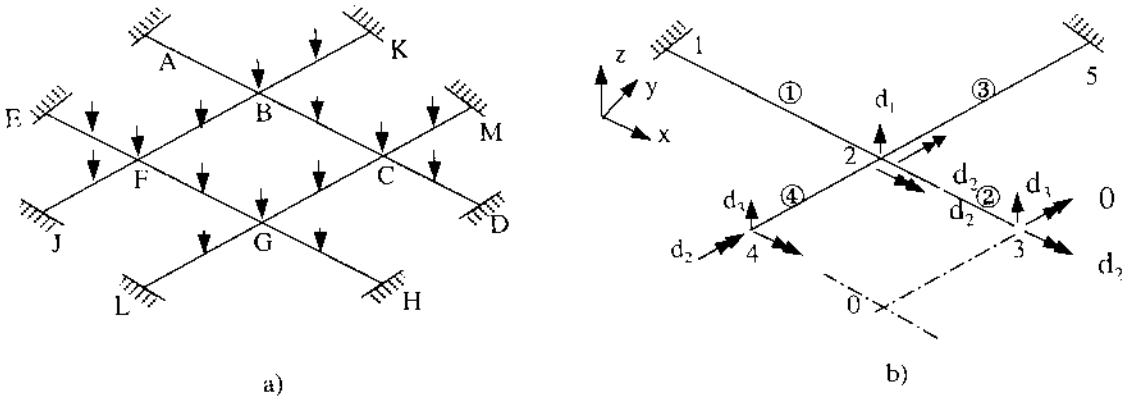
$E = 14.10^6\ kN/m^2;\ G = 6,36.10^6\ kN/m^2;\ I = 41666,67.10^{-6}m^4$

$J = 29166,67.10^{-6}m^4;\ A = 0,5m^2;\ L = 4m$

Tải trọng phân bố đều q = 2200 kN/m.

Giải:

Vì kết cấu đối xứng và tải trọng đối xứng đối với 2 trục X và Y, ta đưa sơ đồ tính về một phần tư hệ như trên hình (9.11b).



Hình 9.11

1- Xác định bậc tự do. Vì các thành phần chuyển vị trên phương trục Z tại các điểm B, C, F, G bằng nhau nên các thành phần chuyển vị trên tại 2 nút 3 và 4 cũng bằng nhau (hình 9.11b). Các dầm BC và FG xoay như một vật thể tuyệt đối cứng (tức không chịu xoắn) nên các góc xoay θ_x tại 2 nút 2 và 3 bằng nhau. Phân tích một cách tương tự, góc xoay θ_y tại 2 nút 2 và 4 cũng bằng nhau. Vì các nút 3 và 4 nằm trên các trục đối xứng nên $0_x = 0$ tại nút 4, $\theta_y = 0$ tại nút 3. Cũng vì tính chất đối xứng, $\theta_x = \theta_y$ tại nút 2. Do sự phân tích trên, số bậc tự do n = 3. Các bậc tự do biểu thị trên hình (9.11b). Các số liệu ban đầu thống kê trong các bảng sau:

Tọa độ nút

Nút	x	y
1	0	2
2	4	2
3	6	2
4	4	0
5	4	6

Bậc tự do

Nút	w	0_x	θ_y
1	0	0	0
2	d_1	d_2	d_2
3	d_3	d_2	0
4	d_3	0	d_2
5	0	0	0

Vị trí các đầu 1, đầu 2

Phần tử	Đầu 1	Đầu 2	l	m
1	1	2	1	0
2	2	3	1	0
3	2	5	0	1
4	4	2	0	1

2- Thành lập ma trận độ cứng của các phần tử theo (9.6a)

Phần tử 1:

$$\mathbf{k}_1 = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 0 & 21,88 \\ 0 & 4,64 & 0 \\ 21,88 & 0 & 58,33 \end{bmatrix}$$

Phần tử 2:

$$\mathbf{k}_2 = 10^4 \begin{bmatrix} 87,5 & 0 & -87,5 & -87,5 & 0 \\ 0 & 9,28 & 0 & 0 & -9,28 \\ -87,5 & 0 & 116,67 & 87,5 & 0 \\ -87,5 & 0 & 87,5 & 87,5 & 0 \\ 0 & -9,28 & 0 & 0 & 9,28 \end{bmatrix}$$

Phần tử 3:

$$\mathbf{k}_3 = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 0 & 21,88 \\ 21,88 & 58,33 & 0 \\ 0 & 0 & 4,64 \end{bmatrix}.$$

Phần tử 4:

$$\mathbf{k}_4 = 10^4 \begin{bmatrix} 87,5 & 0 & -87,5 & -87,5 & 0 \\ 0 & 9,28 & 0 & 0 & -9,28 \\ -87,5 & 0 & 87,5 & -87,5 & 0 \\ 87,5 & 0 & -87,5 & 116,67 & 0 \\ 0 & -9,28 & 0 & 0 & 9,28 \end{bmatrix}$$

3- Ghép các ma trận độ cứng riêng thành ma trận độ cứng tổng thể **K**:

$$\mathbf{K} = 10^4 \begin{bmatrix} 10,94 & 21,88 & & & -87,5 \\ 87,5 & -87,5 & & & -87,5 \\ 10,94 & 21,88 & & & -175,0 \\ 87,5 & -87,5 & & & \\ 196,88 & -131,24 & & & \\ & 4,64 & +\ 9,28 & +\ 9,28 & \\ & 58,33 & -\ 9,28 & -\ 9,28 & 87,5 \\ & 116,67 & +\ 9,28 & & 87,5 \\ & 58,33 & -\ 9,28 & & 175,0 \\ & 4,64 & +\ 9,28 & & \\ & 116,67 & -\ 9,28 & & \\ & 359,28 & & & 87,5 \\ & & & & 87,5 \\ & \text{Đối xứng} & & & 175,0 \end{bmatrix}$$

4- Tạo ra trạng thái ngàm như trên hình (9.12). Nội lực ở trạng thái ngàm thống kê trong bảng sau:

Nội lực ở trạng thái ngàm

Phần tử	M_1	M_2
1	-266,67	266,67
2	-66,67	66,67
3	-266,67	266,67
4	-66,67	66,67

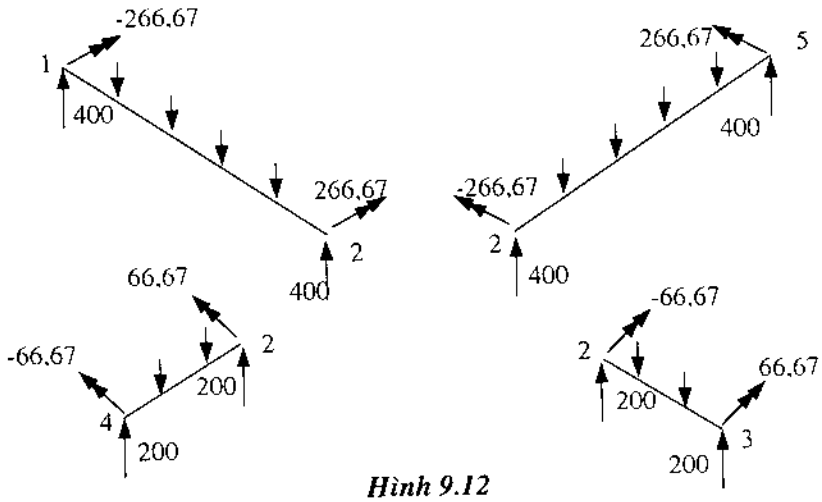
Các thành phần tải trọng tác dụng tại các nút ở trạng thái tự do tính như sau (xem hình 9.12):

$$F_1 = -(400 + 200 + 200 + 400) = -1200$$

$$F_2 = -(266,67 - 66,67 - 66,67 + 266,67) = -400$$

$$F_3 = -(200 + 200 = 400$$

Cần chú ý rằng bậch tự do d_2 hoặc d_3 có thể có phương khác nhau hoặc vị trí khác nhau từ nút này sang nút khác (xem hình 9.11b) nhưng khi tính F_2 hoặc F_3 cần phải lấy tổng của các phản lực tương ứng.



Hình 9.12

5- Căn cứ vào các thành phần tải trọng đã tính, ta có hệ thức ma trận

$$\begin{bmatrix} -1200 \\ -400 \\ -400 \end{bmatrix} = . \begin{bmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$(d_1, d_2, d_3) = 10^{-3}(13,93;\ 3,307;\ -17,462)m$$

6- Tính nội lực do chuyển vị gây ra ở trạng thái tự do theo (9.4). Kết quả thống kê trong bảng sau:

Nội lực do chuyển vị (trạng thái tự do)

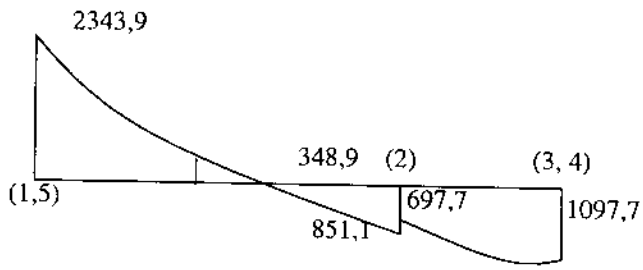
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-2082,19	-1117,81	153,42
2	764,38	-1164,38	0
3	1117,81	2082,19	-153,42
4	1164,38	-764,38	0

7- Tính tổng nội lực = nội lực ở trạng thái ngàm + nội lực ở trạng thái tự do. Kết quả thống kê trong bảng sau:

Tổng nội lực

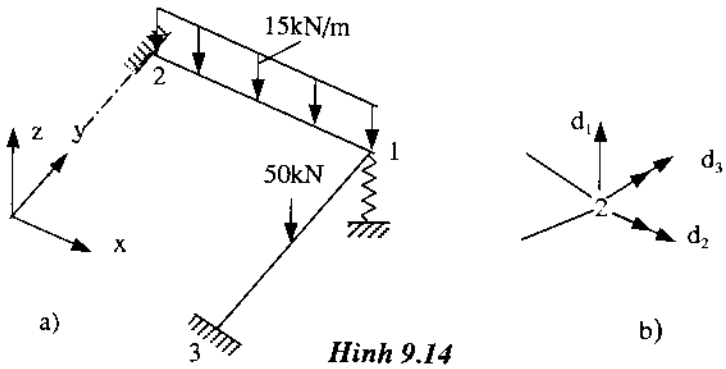
Phần tử	M_1	M_2	$T_2 = -T_1$
1	-2348,56	-851,14	153,42
2	697,71	-1097,71	0
3	851,14	2348,86	-153,42
4	1097,71	-697,71	0

5- Biểu đồ mômen vẽ trên hình (9.13)



Hình 9.13

Ví dụ 9.4: Đầu đề giống ví dụ (9.1) nhưng thêm gối tựa đàn hồi vào nút 1 (hình 9.14). Hệ số độ cứng: 40.10^3 kN/m. Tính nội lực.



Hình 9.14

Giải:

Trong ví dụ (9.1), ta đã suy ra phương trình cân bằng:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = 10^3.\begin{bmatrix} 13,65 & -13,65 & 13,65 \\ & 39,30 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & 39,30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Vì gối tựa đàn hồi men theo BTD có số thứ tự 1 (hình 9.14b), ta phải cộng thêm vào giá trị hệ số độ cứng (40.10^3) vào phần tử thứ nhất trên đường chéo chính của MTĐC tổng kể **K**:

$$\mathbf{K}(1, 1) = (13,65 + 40).10^3$$

Sau khi đã biến đổi ma trận **K**, giải hệ phương trình cân bằng trên. Ta được:

$$\mathbf{Q} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]' = 10^{-3}[-0,891 \quad 0,327 \quad -0,199]'m$$

Căn cứ vào (9.10) và (9.4), ta được các thành phần nội lực như sau:

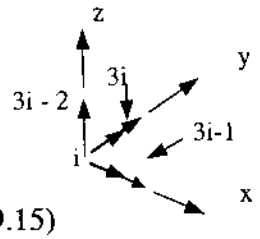
Phần tử	Mômen uốn (kN - m)		Mômen xoắn (kN - m)	
1	-35,70	0,58	-0,93	0,93
2	-43,11	0,95	0,58	-0,58

§9.3. THUẬT TOÁN TÍNH HỆ DẦM TRỰC GIAO (CTR 16)

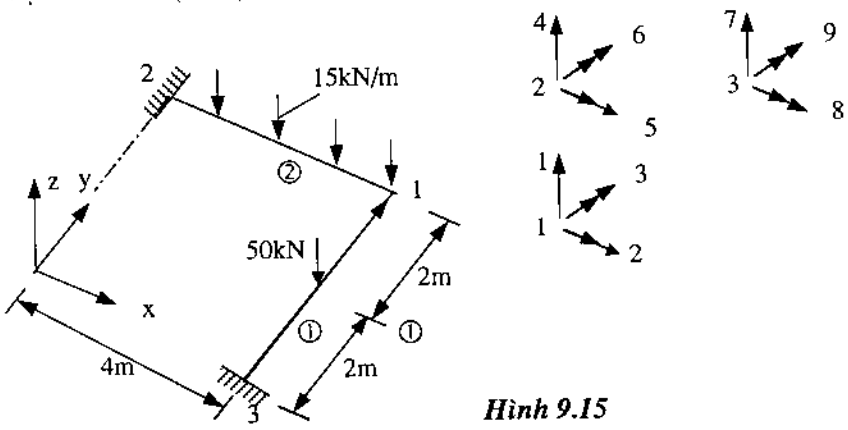
Đối với hệ dầm trực giao, nên chọn hệ tọa độ có các trục X, Y song song với các trục dầm. Chiều của các trục dầm nên chọn sao cho các cosin định hướng đều dương.

Số thứ tự các BTD nên chọn như sau:

Tại nút i



Lấy thí dụ trên hình (9.15)



Hình 9.15

I- Nhập số liệu

Số thanh: 2

Số BTT có chuyển vị: 3

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 6

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9 hình (9.15)

Tổng số BTD: 9

Số BTD có gối tựa đàn hồi (nếu có)

Số thứ tự BTD có gối tựa đàn hồi (nếu có)

Hệ số độ cứng tương ứng (nếu có)

Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Số thanh không chịu tải trọng : 0

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 2

Cường độ tải trọng: -15kN/m

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Tải trọng: -50kN

Vị trí tải trọng tập trung: 2, 2

Dấu của tải trọng quy ước như sau: dương nếu cùng chiều với trục Z của hệ tọa độ chung, âm trong trường hợp ngược lại. Các số liệu còn lại thống kê trong bảng (9.1).

Bảng 9.1

Phần tử	Chiều dài (m)	Côsin định hướng		Diện tích (m^2)	Mômen quán tính x (m^4)	Mômen quán tính y (m^2)	Môđun đàn hồi kN/m^2	Môđun trượt kN/m^2
		l	m					
1	4	0	1	0,125	1821.10^{-6}	36.10^{-6}	14.10^6	$6,36.10^6$
2	4	1	0	0,125	1821.10^{-6}	36.10^{-6}	14.10^6	$6,36.10^6$

Bảng 9.1 (tiếp theo)

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	7	8	9	1	2	3
2	4	5	6	1	2	3

2- Xác định các ma trận độ cứng riêng theo (9.6a)

3- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể

4- Biến đổi MTĐC tổng thể nếu có gối tựa đàn hồi (xem ví dụ (9.4)

5- Đưa các tải trọng trên nhịp về tải trọng tác dụng tại cát nút

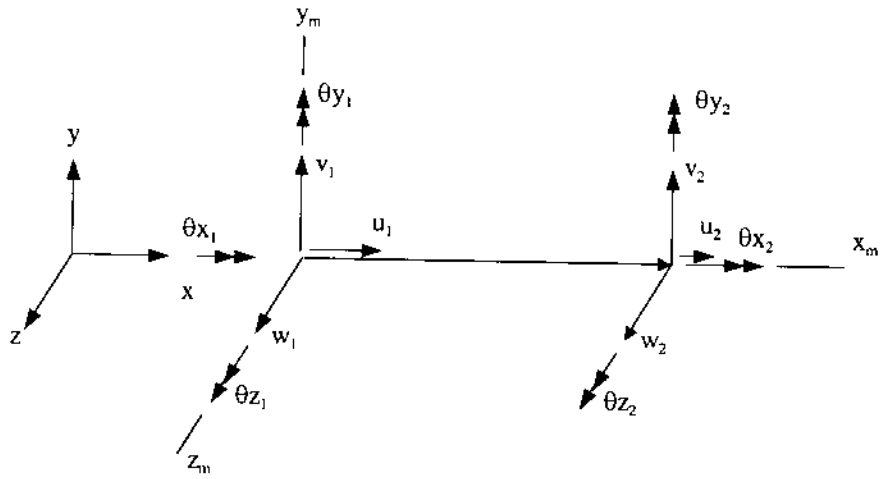
6- Ghép các vectơ tải trọng

7- Gọi chương trình con để giải hệ phương trình

8- Tính nội lực theo (9.10) và (9.4).

Chương 10
DẦM BA CHIỀU VÀ KHUNG KHÔNG GIAN

§10.1. DẦM BA CHIỀU TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỤC BỘ



Hình 10.1: *Dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ*

Dầm ba chiều trong hệ tọa độ cục bộ biểu thị trên hình (10.1). Gọi x_m, y_m, z_m là hệ tọa độ cục bộ. Trục x_m trùng với trục của dầm, các trục y_m, z_m nằm trong mặt cắt ngang của dầm. Dầm có 2 đầu 1 và 2 (trong hệ tọa độ cục bộ), chiều dương của trục x_m đi từ đầu 1 đến đầu 2. Dầm có tất cả 12 bậc tự do:

$u_1(q_1)$, $u_2(q_7)$ - các thành phần chuyển vị trên phương trục x_m tại đầu 1 và đầu 2.

$v_1(q_2)$, $v_2(q_8)$ - các thành phần chuyển vị trên phương trục y_m tại đầu 1 và đầu 2.

$w_1(q_3)$, $w_2(q_9)$ - các thành phần chuyển vị trên phương trục z_m tại đầu 1 và đầu 2.

$\theta_{x_1}(q_4)$, $\theta_{x_2}(q_{10})$ - các thành phần góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2.

$\theta_{y_1}(q_5)$, $\theta_{x_1}(q_{11})$ - các thành phần góc xoay quanh trục y_m tại đầu 1 và đầu 2.

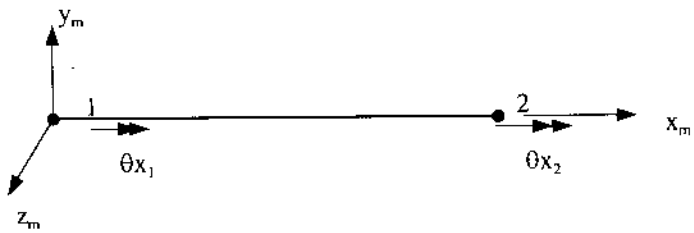
$\theta_{x_1}(q_6)$, $\theta_{x_1}(q_{12})$ - các thành phần góc xoay quanh trục z_m tại đầu 1 và đầu 2.

Để tiện cho việc lập trình, ta biểu thị vectơ chuyển vị của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ như sau:

$$\mathbf{q} = [q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8\ q_9\ q_{10}\ q_{11}\ q_{12}]' \qquad (10.1)$$

Trước hết, ta sẽ suy ra hệ số độ cứng do xoắn và sau đó, sẽ lợi dụng các hệ số độ cứng do uốn trong mặt phẳng để suy ra ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ.

10.1.1. Hệ số độ cứng do xoắn



Hình 10.2: *Góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2*

Xét dầm trên hình (10.2) trong đó θ_{x_1} và θ_{x_2} là các góc xoắn tại đầu 1 và đầu 2. Góc xoắn biến thiên tuyến tính dọc theo chiều dài của dầm giống như chuyển vị dọc trục đã nghiên cứu trong các phần trước. Góc xoắn tại 1 điểm bất kỳ trên dầm có thể biểu thị bằng hàm nội suy tuyến tính:

$$\theta_x = L_1\theta_{x_1} + L_2\theta_{x_2} \tag{10.2}$$

Trong đó: L_1, L_2 là các tọa độ tự nhiên (xem chương hai).

Biến thiên góc xoắn trên đơn vị dài:

$$\alpha = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{1}{L}\left(\theta_{x_2} - \theta_{x_1}\right) \tag{10.3}$$

Mômen xoắn có thể viết: $M_x = GI_x\alpha = GI_x\dfrac{1}{L}\left(\theta_{x_2} - \theta_{x_1}\right)$ (10.4)

Xem $\theta_{x_2} - \theta_{x_1}/L$ như ε và M_x như σ (trong trường hợp biến dạng dọc trục), ta có:

$$D = G.I_x \tag{10.5}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} \tag{10.6}$$

Theo (2.79) (chương 2), ma trận độ cứng của dầm do xoắn có thể viết:

$$\mathbf{k_m} = \int_0^l \mathbf{B'DB}dl \tag{10.7}$$

Thay (10.5), (10.6) vào (10.7), ta được:

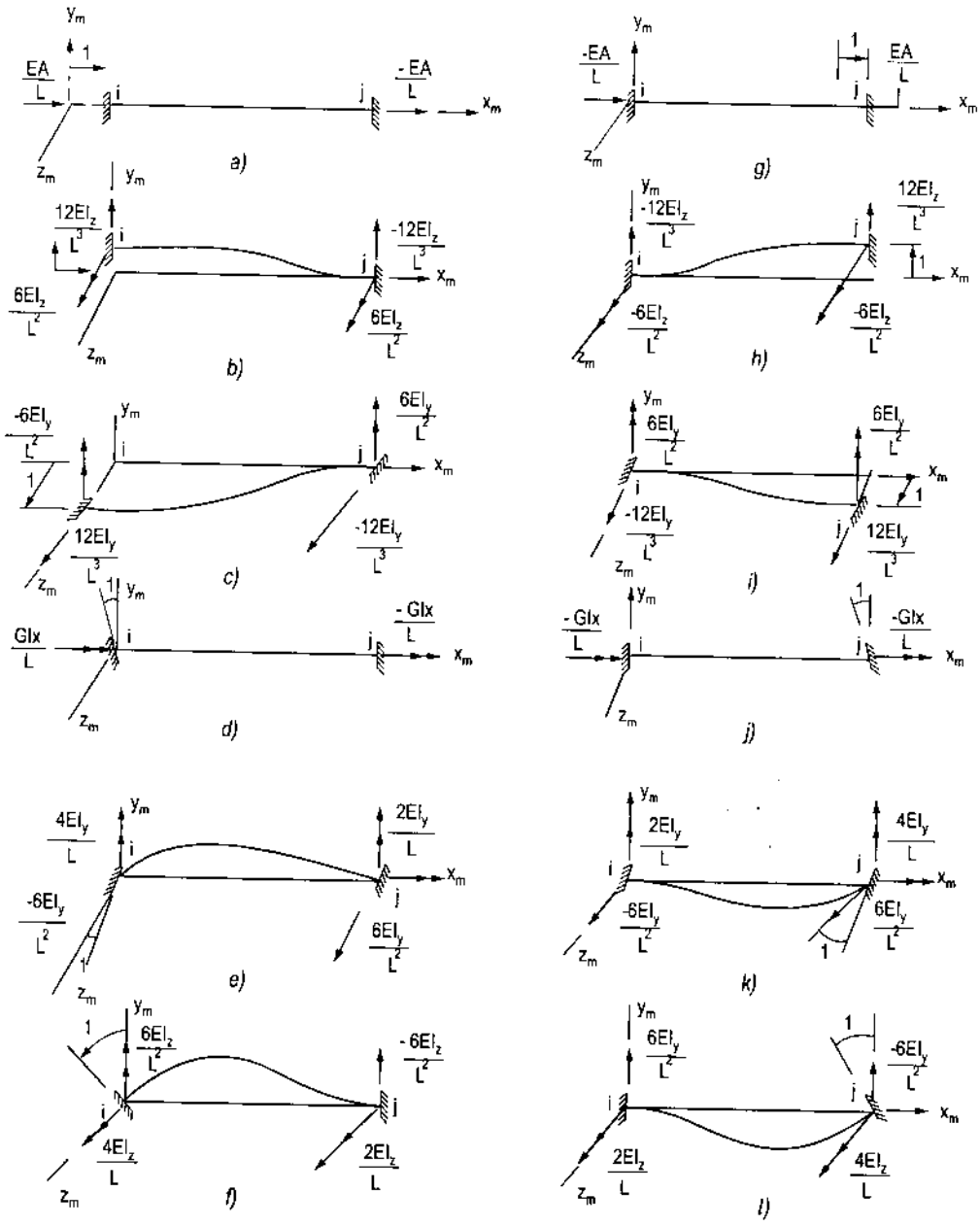
$$\mathbf{k_m} = \frac{GI_x}{L^2}\int_l \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}dl$$

$$\mathbf{k_m} = \frac{GI_x}{L}\begin{bmatrix}+1 & -1\\-1 & +1\end{bmatrix} \tag{10.8}$$

10.1.2. Ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ

Giả sử dầm 3 chiều có 3 trục x_m, y_m, z_m lần lượt song song với 3 trục x, y, z trong hệ tọa độ tổng thể (hình 10.1). Các trục y_m và z_m cần chọn sao cho x_m - y_m và x_m - z_m là những mặt phẳng uốn chính.

Hình (10.3) trình bày công thức các hệ số độ cứng của dầm 3 chiều, ứng với các chuyển vị bằng đơn vị men theo 12 bậc tự do ở các đầu i và j.



Hình 10.3: *Các hệ số độ cứng của dầm 3 chiều men theo 12 bậc tự do*

$$
\begin{array}{c}
\text{Bậc tự do cục bộ} \\
\mathbf{k}_e =
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^2} & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix}
\end{array}
\qquad (10.9)
$$

Trên hình (10.3a) là lực dọc do chuyển vị bằng đơn vị trên phương x_m tại nút i gây ra; trên hình (10.3b) là lực cắt và mômen do chuyển vị bằng đơn vị trên phương y_m tại nút i gây ra (dầm chịu uốn thông thường); trên hình (10.3c) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương z_m tại nút i gây ra (uốn trong mặt phẳng x_m - z_m); trên hình (10.3d) là mômen xoắn do góc xoắn bằng đơn vị tại nút i gây ra; trên hình (10.3e) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục z_m tại nút i gây ra (uốn trong mặt phẳng x_m - z_m).

Trên hình (10.3f) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục y_m tại nút i gây ra; trên hình (10.3g) là lực dọc do chuyển vị bằng đơn vị trên phương x_m tại nút j gây ra; trên hình (10.3h) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương y_m tại nút j gây ra; trên hình (10.3i) là lực cắt và mômen uốn do chuyển vị bằng đơn vị trên phương z_m tại nút j gây ra (uốn trong mặt phẳng x_m - z_m); trên hình (10.3j) là mômen xoắn do góc xoắn quanh trục y_m tại nút j gây ra; trên hình (10.3k) là mômen uốn và lực cắt do góc xoay bằng đơn vị quanh trục z_m tại nút j gây ra (uốn trong mặt phẳng x_m z_m). Trên hình (10.3l) là lực cắt và mômen uốn do góc xoay bằng đơn vị quanh trục y_m tại nút j gây ra.

Các hệ số độ cứng trong hình (10.3) được sắp xếp theo số thứ tự các bậc tự do cục bộ trong bảng (10.9) để tạo thành ma trận độ cứng của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ cục bộ.

Giữa các thành phần nội lực và các thành phần chuyển vị tương ứng trong hệ toạ độ riêng, ta có hệ thức ma trận:

$$\mathbf{NL} = \begin{bmatrix} N_1 \\ Q_{1y} \\ Q_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_2 \\ Q_{2y} \\ Q_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 = q_1 \\ v_1 = q_2 \\ w_1 = q_3 \\ \theta_{1x} = q_4 \\ \theta_{1y} = q_5 \\ \theta_{1z} = q_6 \\ u_2 = q_7 \\ v_2 = q_8 \\ w_2 = q_9 \\ \theta_{2x} = q_{10} \\ \theta_{2y} = q_{11} \\ \theta_{2z} = q_{12} \end{bmatrix} \qquad (10.10)$$

Trong đó: N_1 - lực dọc tại đầu 1;

N_2 - lực cắt tại đầu 2;

Q_{1y} - lực cắt trên phương y tại đầu 1;

Q_{2y} - lực cắt trên phương y tại đầu 2;

Q_{1z} - lực cắt trên phương z tại đầu 1;

Q_{2z} - lực cắt trên phương z tại đầu 2;

M_{1x} - mômen xoắn tại đầu 1;

M_{2x} - mômen xoắn tại đầu 2;

M_{1y} - mômen quanh trục y tại đầu 1;

M_{2y} - mômen quanh trục y tại đầu 2;

M_{1z} - mômen quanh trục z tại đầu 1;

M_{2z} - mômen quanh trục z tại đầu 2;

u_1 - thành phần chuyển vị trên phương dọc trục tại đầu 1;

u_2 - thành phần chuyển vị trên phương dọc trục tại đầu 2;

v_1 - thành phần chuyển vị trên phương trục y tại đầu 1;

v_2 - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 2;

w_1 - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 1;

w_2 - thành phần chuyển vị trên phương trục z tại đầu 2;

θ_{1x} - góc xoắn tại đầu 1;

θ_{2x} - góc xoắn tại đầu 2;

θ_{1y} - góc xoanh quay trục y tại đầu 1;

θ_{2y} - góc xoanh quay trục y tại đầu 2;

θ_{1z} - góc xoanh quay trục z tại đầu 1;

θ_{2z} - góc xoanh quay trục z tại đầu 2.

Trong thực tế, dầm 3 chiều có thể có vị trí bất kỳ trong không gian. Vì vậy, ta phải tìm cách chuyển ma trận độ cứng từ hệ tọa độ cục bộ sang hệ tọa độ tổng thể. Để làm điều này, trước hết, ta cần tìm hiểu khái niệm về ma trận xoay.

§10.2. DẦM 3 CHIỀU TRONG KHÔNG GIAN

Gọi x_m, y_m, z_m là hệ tọa độ cục bộ của dầm 3 chiều và x, y, z là hệ tọa độ tổng thể. Trong hệ tọa độ cục bộ, vectơ chuyển vị tại 2 đầu dầm là (hình 10.4a):

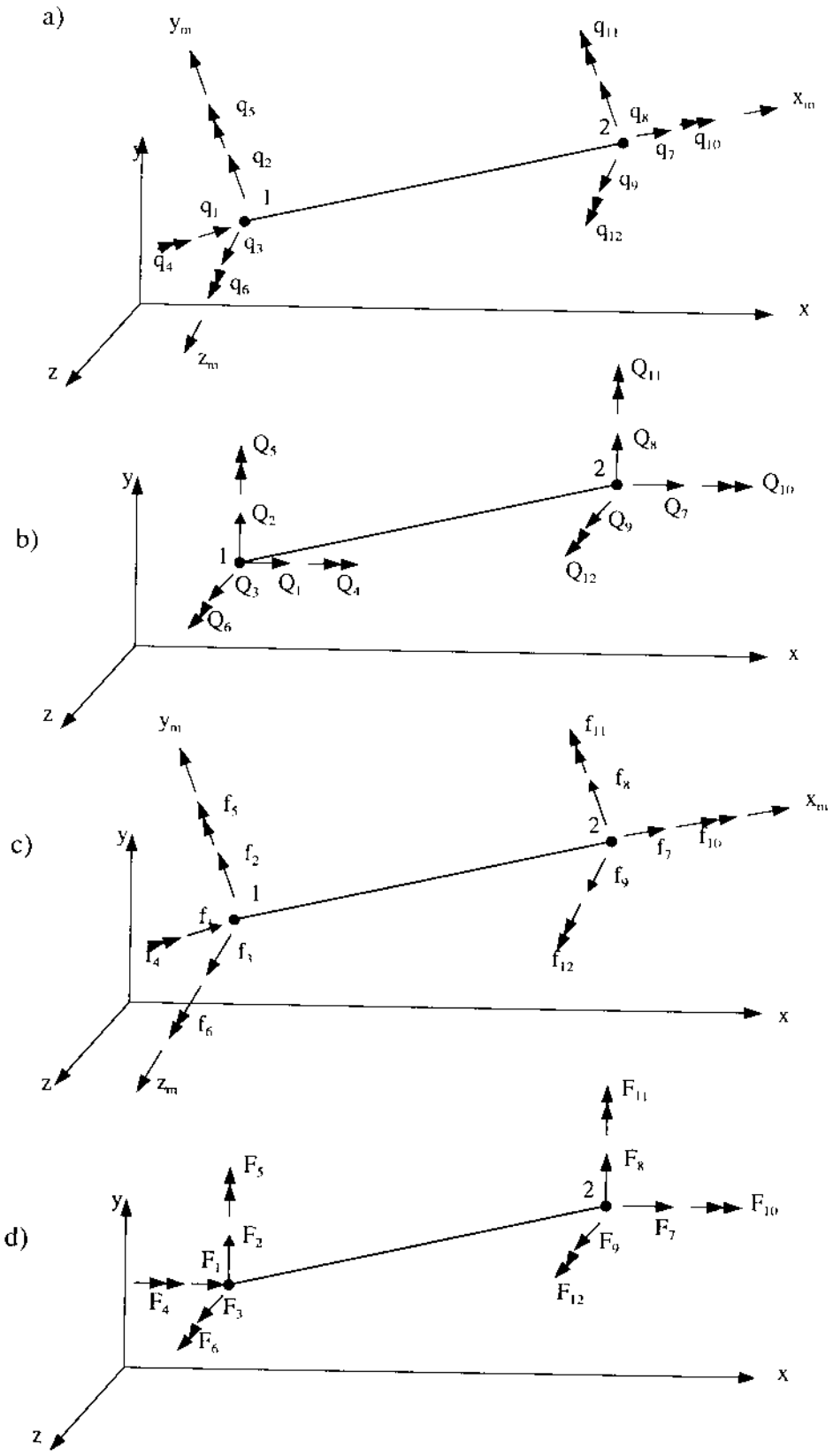
$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12}]' \qquad (10.11)$$

Trong hệ tọa độ tổng thể, vectơ chuyển vị (hình 10.4b) là:

$$\mathbf{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5 \quad Q_6 \quad Q_7 \quad Q_8 \quad Q_9 \quad Q_{10} \quad Q_{11} \quad Q_{12}]' \qquad (10.12)$$

Vectơ tải trọng trong hệ tọa độ cục bộ (hình 10.4c) là:

$$\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5 \quad f_6 \quad f_7 \quad f_8 \quad f_9 \quad f_{10} \quad f_{11} \quad f_{12}]' \qquad (10.13)$$



Hình 10.4: *Các thành phần chuyển vị và tải trọng trong dầm 3 chiều*

Vectơ tải trọng trong hệ tọa độ tổng thể (hình 10.4d) là:

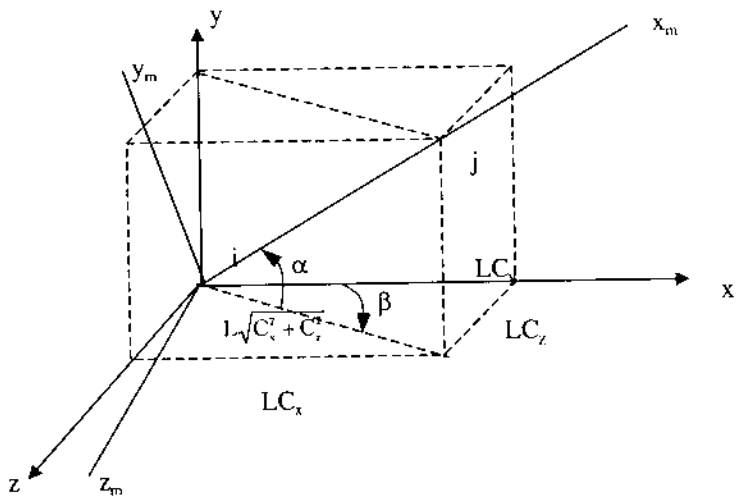
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10} & F_{11} & F_{12} \end{bmatrix}' \qquad (10.14)$$

Cần có sự chuyển đổi từ **q** sang **Q** và từ **f** sang **F**.

Dưới đây, sẽ suy ra ma trận xoay dùng để thực hiện các chuyển đổi nói trên.

§10.3. MA TRẬN XOAY (HOẶC MA TRẬN BIẾN ĐỔI)

Ta có thể suy ra ma trận xoay bằng cách ứng dụng các nguyên lý về đại số vectơ hoặc dùng phương pháp xoay dần các trục tọa độ. Ở đây, ta sẽ dùng phương pháp thứ hai.



Hình 10.5: *Vị trí bất kỳ của dầm 3 chiều trong hệ tọa độ tổng thể*

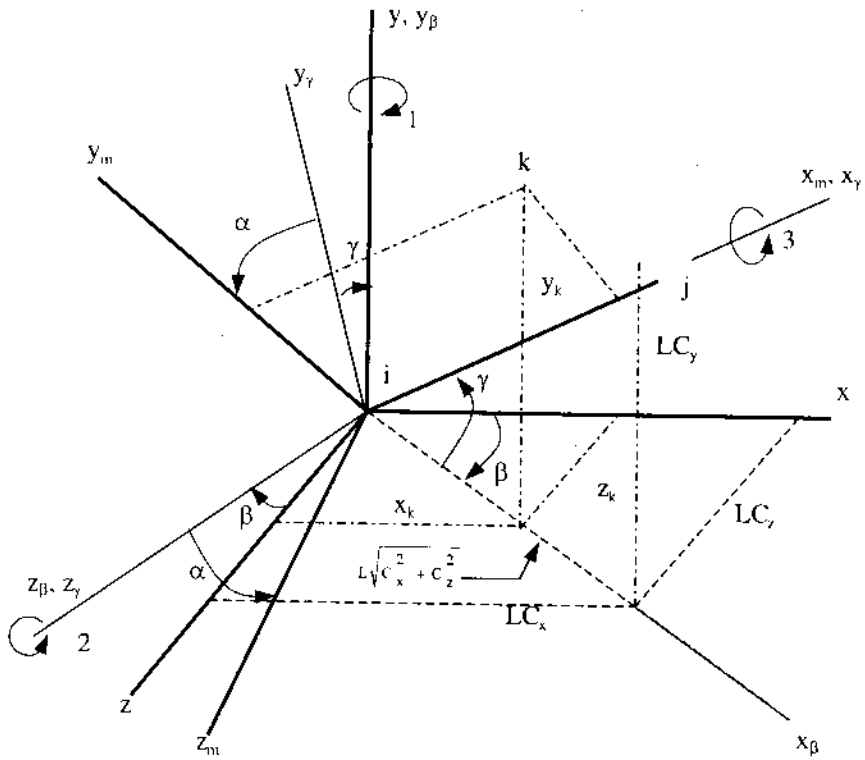
Hình (10.5) trình bày vị trí bất kỳ của trục dầm 3 chiều x_m và các quan hệ hình học trong hệ tọa độ tổng thể x, y, z.

Các trục của hệ tọa độ tổng thể sẽ được xoay dần quanh các trục y, z, x sao cho cuối cùng, hệ tọa độ tổng thể hoàn toàn trùng với hệ tọa độ cục bộ.

Quá trình xoay các trục tọa độ biểu thị trên hình (10.6). Trước hết, ta xoay trục x quanh trục y một góc β. Như vậy, trục x có vị trí mới là trục x_β, trục này là hình chiếu của trục dầm x_m lên mặt phẳng x - z. Nói một cách khác, trục x_β bây giờ là giao tuyến giữa mặt phẳng y - x_m và mặt phẳng x - z. Bằng cách xoay như vậy, trục z chiếm vị trí trục z_β còn trục y vẫn không thay đổi. Các thành phần vectơ A_1, A_2, A_3 trong hệ tọa độ x, y, z có thể tổ hợp thành vectơ $A_{1\beta}$, $A_{2\beta}$, $A_{3\beta}$ trong hệ tọa độ mới x_β, y_β, z_β theo hệ thức sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad (10.15)$$

Trong đó: cosβ và sinβ có thể biểu thị bằng các côsin định hướng của trục dầm x_m đối với các trục x, y, z như sau (xem hình 10.6).



Hình 10.6: *Phương pháp xoay dần các trục tọa độ*

$$\cos\beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \tag{10.16}$$

$$\sin\beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \tag{10.17}$$

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad C_y = \frac{y_j - y_i}{L} \tag{10.18}$$

$$C_z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \tag{10.19}$$

Trong đó: C_x, C_z - côsin định hướng của trục dầm x_m đối với các trục x và z;

x_i, x_j - tọa độ của điểm i và j trên trục x; y_i;

y_j - tọa độ của điểm i và j trên trục y;

z_i, z_j - tọa độ của điểm i và j trên trục z;

L - chiều dài của dầm ij.

Sau khi xoay quanh trục y một góc β, từ (10.15), ta có ma trận biến đổi hoặc ma trận xoay:

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \dfrac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \tag{10.20}$$

Tiếp tục xoay các trục x_β, y_β quanh trục z_β một góc γ sao cho trục x_β trùng với trục dầm x_m, trục y_β (tức trục y) dời đến vị trí trục y_γ, trục z_β không thay đổi; lúc bấy giờ, mặt phẳng y_γ - z_γ chứa các trục y_m và z_m của dầm 3 chiều. Các thành phần vectơ $A_{1\beta}$, $A_{2\beta}$, $A_{3\beta}$ trên các trục x_β, y_β, z_β bây giờ được tổ hợp thành các vectơ $A_{1\gamma}$, $A_{2\gamma}$, $A_{3\gamma}$ trên phương các trục mới x_γ, y_γ, z_γ như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\beta} \\ A_{2\beta} \\ A_{3\beta} \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

Vậy sau khi xoay góc γ, căn cứ vào (10.21), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.22}$$

Các số hạng trong (10.22) là các côsin định hướng của các trục x_γ, y_γ, z_γ đối với các trục x_β, y_β, z_β. Từ hình (10.6), ta có:

$$\cos\gamma = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \tag{10.23}$$

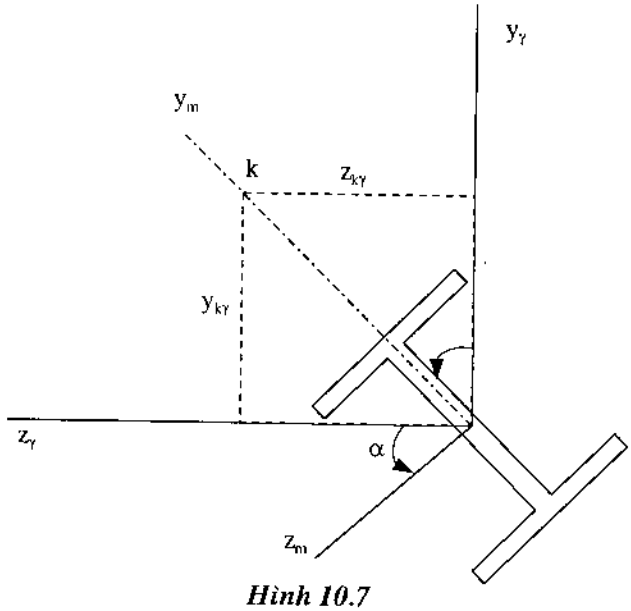
$$\sin\gamma = C_y$$

Vậy $\mathbf{T}_\gamma$ có thể viết:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.24}$$

Cuối cùng, ta xoay quanh trục x_m các trục y_γ, z_γ một góc α sao cho trục y_γ trùng với trục y_m và trục z_γ trùng với trục z_m (hình 10.6).

Hình (10.7) cho ta thấy mặt cắt ngang của dầm cùng vị trí của trục y_m và z_m, trục x_m vuông góc với mặt phẳng của tờ giấy.



Hình 10.7

Mặt phẳng x_m - y_m là một mặt phẳng thẳng đứng đi qua trục dầm và xác định góc giữa y_γ và y_m hoặc góc giữa z_γ và z_m (tức là góc α được đo từ mặt phẳng đó đến một trong các trục chính của mặt cắt ngang hình 10.7.

Cuối cùng, các thành phần vectơ A_{1m}, A_{2m}, A_{3m} trên các trục x_m, y_m, z_m được biểu thị bằng các thành phần vectơ $A_{1\gamma}$, $A_{2\gamma}$, $A_{3\gamma}$ trên các trục x_γ, y_γ, z_γ như sau:

$$\begin{bmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ A_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\gamma} \\ A_{2\gamma} \\ A_{3\gamma} \end{bmatrix} \tag{10.25}$$

Sau khi xoay góc α, căn cứ vào (10.25), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{10.26}$$

Các phần tử trong (10.26) là các côsin định hướng của các trục x_m, y_m, z_m đối với các trục x_γ, y_γ, z_γ (hình 10.6).

Kết hợp các phương trình (10.20), (10.22), (10.24), các thành phần vectơ trong hệ tọa độ cục bộ x_m, y_m, z_m có thể biểu thị bằng các thành phần vectơ trong hệ tọa độ tổng thể như sau:

$$\mathbf{A_m} = \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_\gamma \mathbf{T}_\beta . \mathbf{A} \tag{10.27}$$

hay

$$\mathbf{A_m} = \mathbf{T.A} \tag{10.28}$$

Trong đó: $$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\alpha.\mathbf{T}_\gamma.\mathbf{T}_\beta \qquad (10.29)$$

$\mathbf{A}_m$ là vectơ cột biểu thị các thành phần vectơ trong hệ tọa độ cục bộ; **A** là vectơ cột biểu thị các thành phần vectơ trong hệ tọa độ tổng thể. Các thành phần vectơ ở đây có thể là chuyển vị hoặc tải trọng.

Thay (10.20), (10.22), (10.24) vào (10.29), ta có:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_xC_y\cos\alpha - C_z\sin\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & \sqrt{C_x^2+C_z^2}\cos\alpha & \dfrac{-C_yC_z\cos\alpha + C_x\sin\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \\ \dfrac{C_xC_y\sin\alpha - C_z\cos\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2+C_z^2}\sin\alpha & \dfrac{C_yC_z\sin\alpha + C_x\cos\alpha}{\sqrt{C_x^2+C_z^2}} \end{bmatrix} \qquad (10.30)$$

Từ (10.27), ta có thể viết: $$\mathbf{A}_m = \mathbf{T}.\mathbf{A} \qquad (10.31)$$

Trong đó **T** là ma trận biến đổi cấp 3 × 3.

Đối với dầm 3 chiều, ta có 12 bậc tự do nên cuối cùng, ma trận xoay có thể viết:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \qquad (10.32)$$

Trong đó: **T**, **0** là những ma trận con cấp 3 × 3.

Từ (10.11), (10.12), (10.13), (10.14), ta có các hệ thức:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}.\mathbf{Q} \qquad (10.33)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}.\mathbf{F} \qquad (10.34)$$

R gọi là ma trận xoay tổng thể.

Trong ma trận biến đổi **T** trong (10.30), chỉ còn góc α là chưa được xác định. Để làm điều này, ta chọn một điểm k nằm trong mặt phẳng chính x_m - y_m nhưng không nằm trên trục x_m (hình 10.6 và 10.7). Giả sử tọa độ của điểm k trong hệ tọa độ tổng thể là x_K, y_K, z_K. Các thành phần của vectơ ik trong hệ tọa độ tổng thể là:

$$\begin{aligned} x_{Ki} &= x_K - x_i \\ y_{Ki} &= y_K - y_i \\ z_{Ki} &= z_K - z_i \end{aligned} \qquad (10.35)$$

Giả sử $x_{K\gamma}$, $y_{K\gamma}$, $z_{K\gamma}$ là các hình chiếu của vectơ ik trên các trục x_γ, y_γ, z_γ. Áp dụng 2 phép biến đổi đầu tiên, ta có hệ thức:

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\gamma \ .\mathbf{T}_\beta \ . \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \qquad (10.36)$$

Sau khi đơn giản hoá:

$$\begin{aligned} x_{k\gamma} &= C_x x_{ki} + C_y y_{ki} + C_z z_{ki} \\ y_{k\gamma} &= -\frac{C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \ .y_{ki} - \frac{C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} .z_{ki} \\ z_{k\gamma} &= \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} x_{ki} + \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} z_{ki} \end{aligned} \qquad (10.37)$$

Như vậy là đã xác định được tọa độ $y_{k\gamma}$, $z_{k\gamma}$ của điểm k trong mặt phẳng y_m - z_m. Từ hình (10.7), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{Z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \qquad (10.38a)$$

$$\cos\alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \qquad (10.38b)$$

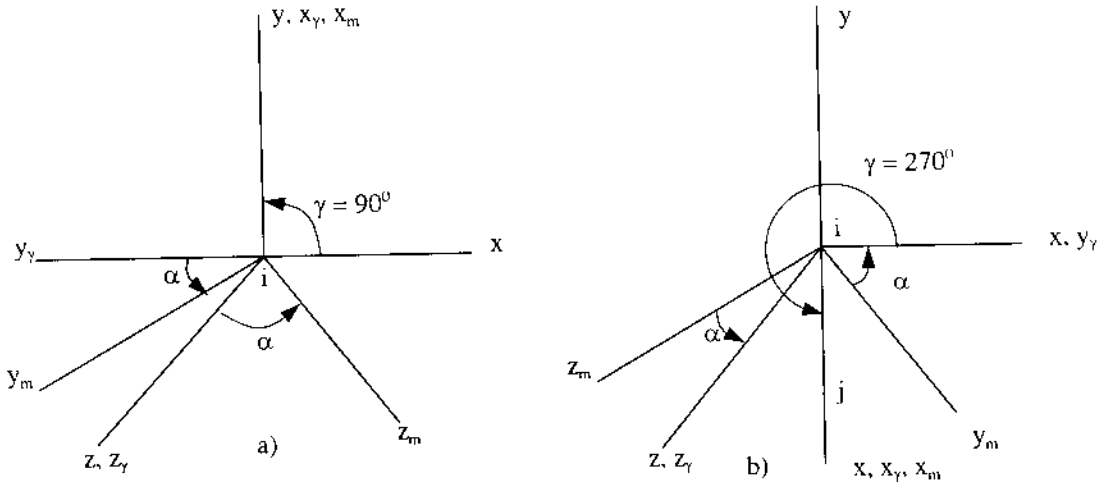
Trong đó, $y_{k\gamma}$ và $z_{k\gamma}$ tính theo (10.37). Vậy là ma trận biến đổi **T** trong (10.30) hoàn toàn được xác định.

Cần chú ý rằng các hệ thức nói trên không thể áp dụng cho trường hợp trục của dầm 3 chiều x_m nằm trên phương thẳng đứng nghĩa là song song với trục y trong hệ tọa độ tổng thể.

Trong trường hợp này (hình 10.8), C_x và C_z đều triệt tiêu, điều này không thể đưa đến những kết quả chính xác.

Sau đây, ta xét 2 trường hợp: trục x_m cùng chiều với trục y và x_m ngược chiều với trục y.

Ta thực hiện 2 phép xoay. Trước hết, xoay 1 góc $\gamma = 90^0$ (hình 10.8a) hoặc $\gamma = 270^0$ (hình 10.8b). Khi $\gamma = 90^0$, trục x trùng với trục x_m (thẳng đứng) và trục y chuyển đến vị trí y_γ, $C_y = 1$ (hình 10.8a). Khi $\gamma = 270^0$, trục x trùng với trục x_m (ngược chiều với trục y), trục y chuyển đến vị trí trục y_γ, $C_y = -1$. Tiếp theo, quay 1 góc α quanh trục x_m để trục y_γ trùng với trục y_m và trục z trùng với trục z_m.



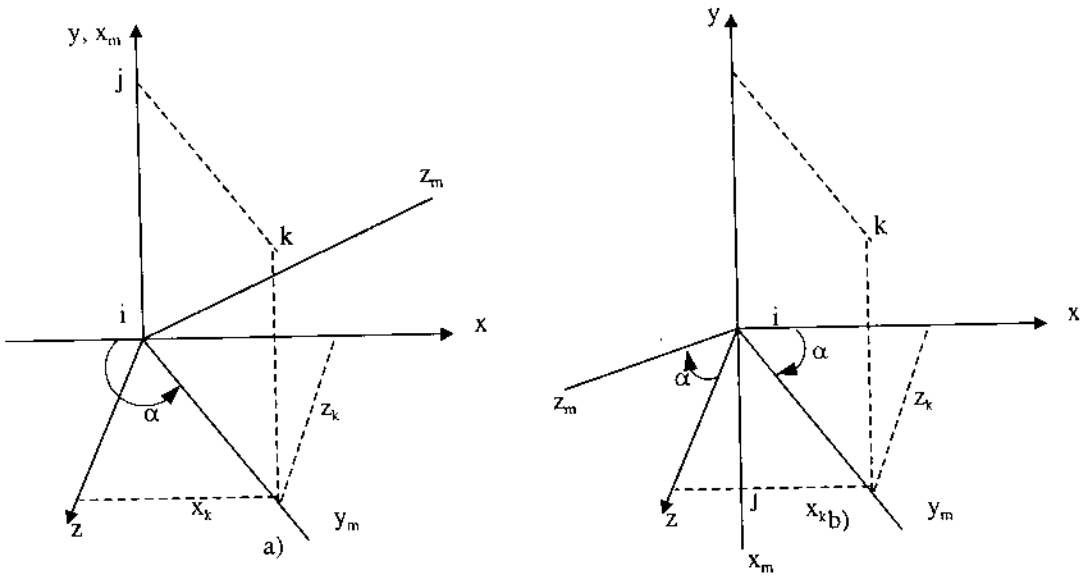
Hình 10.8:

a) Trục dầm cùng chiều với trục y; b)Trục dầm ngược chiều với trục y

Từ hình (10.8), ta có ma trận biến đổi:

$$\mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y\cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ C_y\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{10.39}$$

Góc α trong (10.39) được xác định bằng cách tìm vị trí của điểm k nằm trong mặt phẳng uốn chính. Hình (10.9a) biểu thị 1 thanh đứng có nút dưới tại điểm i và nút trên tại điểm j.



Hình 10.9: *Cách xác định góc α*

Tọa độ của điểm k trên hình (10.9a) đều dương và góc α nằm giữa 90^0 và 180^0. Từ quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \tag{10.40}$$

Hình (10.9b) biểu thị một thanh đứng có nút trên là i và nút dưới là j. Trong trường hợp này, các tọa độ của điểm k đều dương và góc α nằm giữa 0^0 và 90^0. Từ các quan hệ hình học, ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \tag{10.41}$$

Kết hợp (10.40) và (10.41), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} C_y \tag{10.42}$$

Trong đó C_y là côsin định hướng của thanh ij đối với trục y. Nó có giá trị bằng +1 (hình 10.9a) hoặc bằng -1 (hình 10.9b).

Thay các giá trị sinα và cosα từ (10.42) vào (10.39), ta xác định được ma trận biến đổi **T** cấp 3 × 3 trong trường hợp đặc biệt trục dầm song song với trục y của hệ tọa độ tổng thể.

§10.4. TÍNH KHUNG KHÔNG GIAN

Khung không gian là tập hợp các dầm 3 chiều có vị trí bất kỳ trong không gian. Để tính khung không gian, ta phải thực hiện các bước sau:

1. Xác định ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ của mỗi phần tử của khung trong hệ tọa độ cục bộ theo (10.9).

2. Xác định ma trận độ cứng $\mathbf{k}_e$ của mỗi phần tử của khung trong hệ tọa độ tổng thể theo công thức sau:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}'\mathbf{k}_e\mathbf{R} \tag{10.43}$$

Trong đó: **R** - ma trận xoay; tính theo (10.32)

Công thức (10.43) chứng minh tương tự như công thức (8.53) trong §8.2.2 (chương 8).

3. Căn cứ vào bảng (8.1) (chương 8), xác định vectơ tải trọng **f** trong hệ tọa độ cục bộ. Đối với dầm 3 chiều, tại mỗi nút có 6 thành phần tải trọng.

4. Xác định vectơ tải trọng **F** cho mỗi phần tử của khung theo (10.34):

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{R}_e\mathbf{F}_e$$

do đó:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}'_e.\mathbf{f}_e \tag{10.44}$$

5. Sau khi ghép các ma trận $\mathbf{k}_e$ từ (10.43) và các ma trận $\mathbf{F}_e$ từ (10.44); ta được phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \tag{10.45}$$

6. Giải hệ phương trình (10.45), ta được giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.

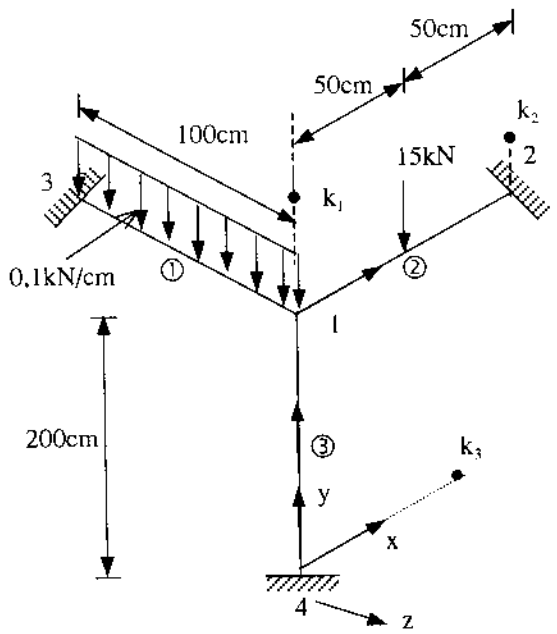
7. Xác định các thành phần chuyển vị của mỗi phần tử của khung theo (10.33).

$$\mathbf{q} = \mathbf{RQ} \tag{10.46}$$

8. Căn cứ vào công thức (8.54) và bảng (8.1) (chương 8), tính nội lực ở các đầu dầm:

$$\mathbf{S} = \mathbf{k}_e.\mathbf{q} + \mathbf{S}_0 \tag{10.47}$$

Ví dụ 10.1: Một giàn không gian như trên hình (10.10)



Số BTD có chuyển vị: 6
Tổng số BTD: 24
Số thanh: 3
Số thanh loại 1: 2
Số thanh loại 2: 1
Số thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1
Số thanh chịu tải trọng tập trung: 1

Hình 10.10

Dùng chương trình CTR18 tính nội lực.

Giải:

Đây là bài toán khối lượng tính rất lớn, không thể tích bằng tay mà phải nhờ vào sự hỗ trợ của máy tính.

Trước hết phải nhập các số liệu:

Nhập số liệu

Một phần đã trình bày trên hình (10.10). Tiếp theo, nhập các số liệu sau:

Số thứ tự thanh loại 1: 1, 2

Số thứ tự thanh loại 2: 3

Số thứ tự thanh chịu tải trọng phân bố đều: 1

Số thứ tự thanh chịu tải trọng tập trung: 2

Cường độ tải trọng phân bố: -0,1

Tải trọng tập trung: -15

Vị trí tải trọng tập trung: 50; 50

Các số liệu còn lại thống kê trong các bảng sau:

Phần tử	Diện tích (cm^2)	Môđun xoắn (kN/cm^2)	Mômen quán tính x (cm^4)	Mômen quán tính y (cm^4)	Mômen quán tính z (cm^4)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)
1	20	8077	4	55	750	21000
2	20	8077	4	55	750	21000
3	30	8077	10	150	2230	21000

Phần tử	Tọa độ (cm)						Tọa độ điểm k (cm)		
	x_j	y_j	z_j	x_i	y_i	z_i	x_k	y_k	z_k
1	0	200	-100	0	200	0	0	250	0
2	0	200	0	100	200	0	100	250	0
3	0	0	0	0	200	0	50	0	0

Phần tử	Số thứ tự các bậc tự do											
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1	13	14	15	16	17	18	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6

Tọa độ điểm k (xem hình (10.10):

Thanh 1: điểm k_1 nằm trên phương trục thanh 3

Thanh 2: điểm k_2 nằm trên phương thẳng đứng tại nút 2

Thanh 3 (cột): điểm k_3 nằm trên phương trục x tại nút 4

Kết quả chạy chương trình

Nội lực \ Phần tử	1	2
Q_{y1} (kN)	-5,067	-5,067
M_{x1} (kN - cm)	0	0
M_{z1} (kN - cm)	-4,415	-4,46
Q_{y2} (kN)	-10,398	-0,398
M_{x2} (kN - cm)	0	0
M_{z2} (kN - cm)	359,879	26,545

Nội lực \ Phần tử	3
N_1 (kN)	0
M_{y1} (kN - cm)	18900
M_{z1} (kN - cm)	164,434
N_2 (kN)	0
M_{y2} (kN - cm)	18900
M_{z2} (kN - cm)	-4,465

§10.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH KHUNG KHÔNG GIAN

Về thuật toán này, nên kết hợp xem ví dụ 10.1.

Khối lượng tính rất lớn, hơn nữa do sự hạn chế của bộ nhớ trong máy tính, nên trong thuật toán này chỉ xét các trường hợp sau:

1. Chỉ xét 2 loại thanh

- Thanh có trục không song song với trục Y của hệ toạ độ tổng thể
- Thanh có trục song song và cùng chiều với trục Y của hệ tọa tổng thể.

2. Tải trọng tác dụng trên dầm và nằm trong mặt phẳng thẳng đứng x - y trong hệ tọa độ cục bộ.

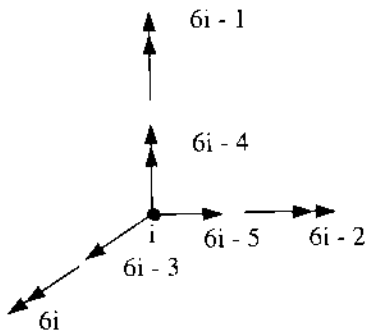
Để thuận tiện cho việc lập trình, số thứ tự các thanh nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên 1, 2, 3... Các dầm chịu tải trọng phân bố đều xếp trước, sau đó đến các dầm chịu tải trọng tập trung, cuối cùng là các cột.

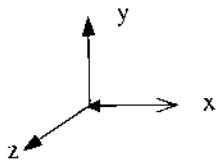
Số thứ tự các bậc tự do cũng nên xếp theo số thứ tự của dãy số tự nhiên, các bậc tự do có chuyển vị triệt tiêu nên xếp ở phần cuối.

Vì khối lượng tính quá lớn, chương trình được chia ra nhiều chương trình con (Procedure) để khi cần thì gọi đến.

Mỗi nút có 6 bậc tự do, được ký hiệu như sau:

Tại nút i:





Về các côsin định hướng, ở đây xét đến trường hợp tổng quát nhất: thanh có thể nằm ở vị trí bất kỳ trong không gian. Đối với các lực N, Q_y, Q_z các cosin định hướng có thể mang dấu dương hoặc âm, nhưng đối với các mômen M_x, M_y, M_z các côsin định hướng cần lấy giá trị tuyệt đối để giữ nguyên dấu của bản thân mômen.

Trong chương trình này, dấu của mômen quy ước là dương khi quay ngược chiều kim đồng hồ, quy ước là âm trong trường hợp ngược lại.

Vị trí của điểm k có thể chọn tuỳ ý nhưng phải nằm trong mặt phẳng quán tính chính x - y của dầm và không nằm trên trục x của nó (xem ví dụ 10.1). Đối với cột, điểm k nằm trong mặt phẳng x - z của hệ tọa độ tổng thể và nằm trên phương song song với trục x hoặc trục z tuỳ theo phương của trục y của nó. Trong ví dụ (10.1) điểm k_3 nằm trên phương trục x của hệ tọa độ tổng thể.

Thuật toán được tiến hành theo các bước.

- Xác lập các ma trận độ cứng riêng theo (10.9)
- Xác lập các ma trận xoay theo (10.30), (10.32)
- Xác lập các MTĐC riêng trong hệ tọa độ tổng thể theo (10.43)
- Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
- Xác lập vectơ tải trọng như đã làm đối với khung phẳng
- Gọi chương trình con để tính giá trị các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ tổng thể.
- Xác định các thành phần chuyển vị trong hệ tọa độ cục bộ theo (10.33).
- Xác định các thành phần nội lực theo (10.47)

Chương 11
BÀI TOÁN BA CHIỀU

§11.1. KHÁI NIỆM VỀ BÀI TOÁN BA CHIỀU

Trong các chương trước, ta đã nghiên cứu bài toán một chiều, bài toán hai chiều, hệ thanh gồm dầm và khung. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu bài toán 3 chiều thường gặp trong thực tế. Mô hình phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút sẽ được đề cập đến.

Cần nhắc lại rằng (xem lại chương 1) trong bài toán ba chiều, ta có các hệ thức sau đây.

Véc tơ các thành phần chuyển vị trong FTHH

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}' \tag{11.1}$$

Trong đó: u, v, w - các thành phần chuyển vị trên phương các trục x, y, z tại 1 điểm trong FTHH.

Vectơ ứng suất $\boldsymbol{\sigma}$ và vectơ biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{bmatrix}' \tag{11.2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}' \tag{11.3}$$

Hệ thức ứng suất - biến dạng

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\varepsilon \tag{11.4}$$

Trong đó: **D** là ma trận cấu trúc vật liệu cấp 6 × 6. Đối với vật liệu đồng tính trên mọi phương, **D** tính theo (1.17) (chương một).

Hệ thức biến dạng - chuyển vị:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial_u}{\partial x} & \frac{\partial_v}{\partial y} & \frac{\partial_w}{\partial z} & \frac{\partial_v}{\partial z} + \frac{\partial_w}{\partial y} & \frac{\partial_u}{\partial z} & \frac{\partial_w}{\partial x} & \frac{\partial_u}{\partial y} + \frac{\partial_v}{\partial x} \end{bmatrix}' \tag{11.5}$$

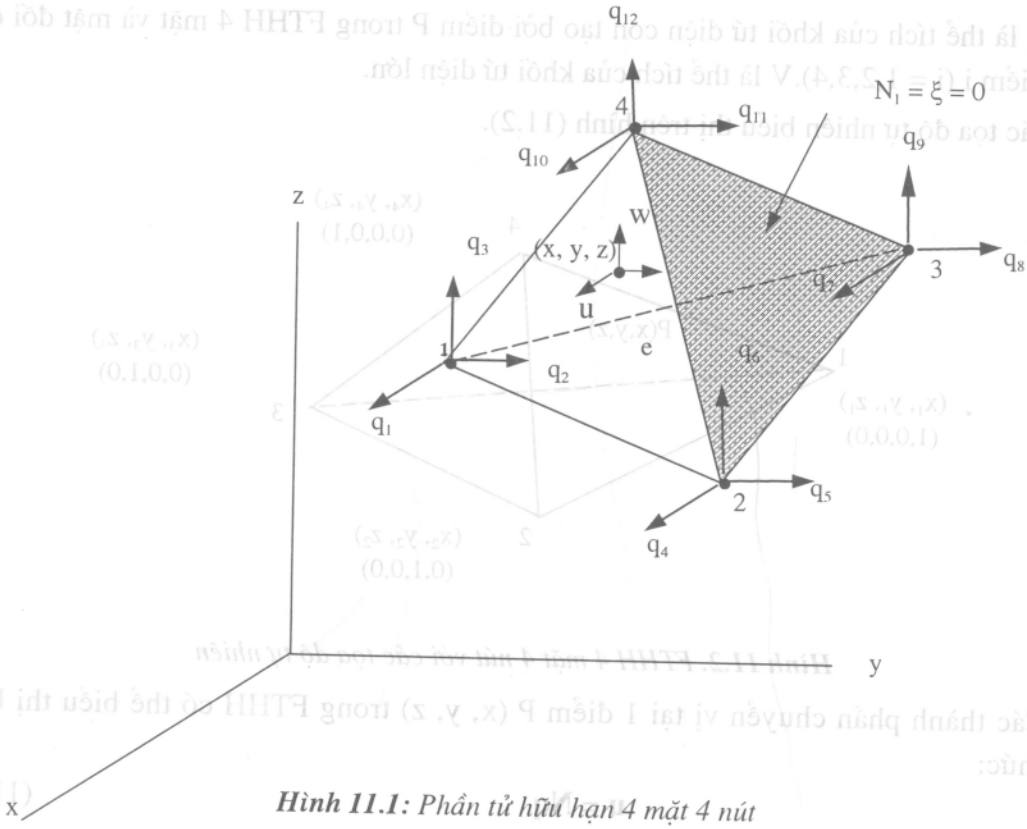
Vectơ lực thể tích **f** và vectơ lực biên **T**

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}'$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}' \tag{11.7}$$

§11.2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN

Ta chia vật thể thành các FTHH 4 mặt 4 nút như trên hình (11.1).



Hình 11.1: *Phần tử hữu hạn 4 mặt 4 nút*

Tại điểm có tọa độ (x, y, z) trong FTHH, có 3 thành phần chuyển vị u, v, w trên các phương x, y, z. Mỗi nút i của FTHH có 3 thành phần chuyển vị q_{3i-2}, q_{3i-1}, q_{3i}. Chẳng hạn tại nút 3, có 3 thành phần chuyển vị q_7, q_8, q_9. Ta gọi các thành phần chuyển vị này là các chuyển vị cục bộ. Các chuyển vị tổng thể tại nút I là Q_{3I-2}, Q_{3I-1}, Q_{3I}. Vậy vectơ chuyển vị cục bộ **q** và vectơ chuyển vị tổng thể **Q** là:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \cdots\cdots & q_{12} \end{bmatrix}' \tag{11.8}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots\cdots & Q_N \end{bmatrix}' \tag{1.9}$$

11.2.1. Hàm hình dạng. Hệ thức biến dạng - chuyển vị

Ta định nghĩa 4 hàm hình dạng Lagrange N_1, N_2, N_3, N_4 như sau. Hàm hình dạng N_i tại nút i bằng đơn vị tại nút đó và triệt tiêu tại các nút còn lại. Chẳng hạn, hàm hình dạng N_1 bằng đơn vị tại nút 1 và triệt tiêu tại các nút 2, 3, 4.

Hàm hình dạng được xác định bằng các tọa độ tự nhiên

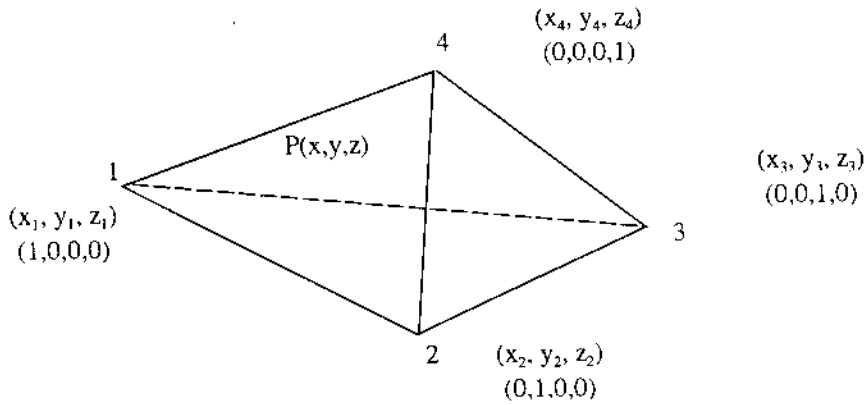
$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3 \qquad N_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3 \tag{11.10}$$

Trong đó:

$$L_i = \frac{V_i}{V}$$

V_i là thể tích của khối tứ diện con tạo bởi điểm P trong FTHH 4 mặt và mặt đối diện với điểm i (i = 1,2,3,4).V là thể tích của khối tứ diện lớn.

Các tọa độ tự nhiên biểu thị trên hình (11.2).



Hình 11.2. *FTHH 4 mặt 4 nút với các tọa độ tự nhiên*

Các thành phần chuyển vị tại 1 điểm P (x, y, z) trong FTHH có thể biểu thị bằng hệ thức:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{11.11}$$

Trong đó:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{11.12}$$

q - vectơ các thành phần chuyển vị tại các nút.

Dưới dạng biểu thị cùng tham số, tọa độ của điểm P (x, y, z) trong phần tử hữu hạn có thể biểu thị bằng tọa độ của các nút (hình 11.2):

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \\ z &= N_1z_1 + N_2z_2 + N_3z_3 + N_4z_4 \end{aligned} \tag{11.13}$$

Thay N_i từ (11.10) vào (11.13) và áp dụng các ký hiệu $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $z_{ij} = z_i - z_j$, ta có:

$$\begin{aligned} x &= x_4 + x_{14}L_1 + x_{24}L_2 + x_{34}L_3 \\ y &= y_4 + y_{14}L_1 + y_{24}L_2 + y_{34}L_3 \\ z &= z_4 + z_{14}L_1 + z_{24}L_2 + z_{34}L_3 \end{aligned} \tag{11.14}$$

Theo quy tắc tính đạo hàm của hàm ẩn:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{11.15}$$

Trong đó, **J** là ma trận Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial L_1} & \dfrac{\partial y}{\partial L_1} & \dfrac{\partial z}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial L_2} & \dfrac{\partial y}{\partial L_2} & \dfrac{\partial z}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial L_3} & \dfrac{\partial y}{\partial L_3} & \dfrac{\partial z}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix} \tag{11.16}$$

Định thức của **J**:

$$\det \mathbf{J} = x_{14}\,(y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24}) + y_{14}(z_{24}z_{34} - z_{34}x_{24}) + z_{14}(x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24}) \tag{11.17}$$

Thể tích FTHH tứ diện:

$$V_e = \left| \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} \det \mathbf{J} \;\; dL_1 dL_2 dL_3 \right| \tag{11.18}$$

$$V_e = \left|\det \mathbf{J}\right| \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} dL_1 dL_2 dL_3 \tag{11.18a}$$

Công thức tích phân đa thức có dạng như sau:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_1-L_2} L_1^m . L_2^n . L_3^p dL_1 dL_2 dL_3 = \frac{m!n!p!}{(m+n+p+3)\;!} \tag{11.19}$$

Áp dụng (11.19), ta được:

$$V_e = \frac{1}{6}\left|\det \mathbf{J}\right| \tag{11.20}$$

Hệ thức nghịch đảo của (11.15):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial L_3} \end{bmatrix} \tag{11.21}$$

Trong đó A là nghịch đảo của ma trận Jacobian:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} (y_{24}.z_{34} - y_{34}.z_{24}) & (y_{34}z_{14} - y_{14}.z_{34}) & (y_{14}z_{24} - y_{24}.z_{14}) \\ (z_{24}.x_{34} - z_{34}.x_{24}) & (z_{34}x_{14} - z_{14}.x_{34}) & (z_{14}.x_{24} - z_{24}.x_{14}) \\ (x_{24}.y_{34} - x_{34}.z_{24}) & (x_{34}y_{14} - x_{14}.y_{34}) & (x_{14}.y_{24} - x_{24}.y_{14}) \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

Theo (11.5) và (11.21) , ta có:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\mathbf{q} \quad (11.23)$$

Trong đó, ma trận **B** có dạng:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\tilde{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -\tilde{A}_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\tilde{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\tilde{A}_3 & -\tilde{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\tilde{A}_3 & 0 & -\tilde{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\tilde{A}_2 & -\tilde{A}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(11.24)

Trong đó: A_{ij} là các phần tử của ma trận **A** trong (11.22)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} \\ \tilde{A}_2 &= A_{21} + A_{22} + A_{23} \\ \tilde{A}_3 &= A_{31} + A_{32} + A_{33} \end{aligned} \quad (11.25)$$

11.2.2. Ma trận độ cứng-Vectơ tải trọng

Ma trận độ cứng:

Theo (2.79) (chương hai), ta có ma trận độ cứng

$$\mathbf{k} = \iiint \mathbf{B'DB}dv \quad (11.26a)$$

Vì các ma trận **B** và **D** chứa các hằng số nên

$$\mathbf{k} = \mathbf{B'DB} \int dv$$

do đó:

$$\mathbf{k} = V_e\mathbf{B'DB}$$

Trong đó, V_e là thể tích của FTHH tứ diện, tính theo công thức (11.20).

Véc tơ lực thể tích:

Theo (2.80) (chương hai), ta có véctơ lực thể tích:

$$\mathbf{F_t} = \iiint \mathbf{N'fdV} \tag{11.27a}$$

Vì lực thể tích tác dụng tại trọng tâm của FTHH tứ diện, trọng tâm này lại chia hình tứ diện thành 4 khối tứ diện con có thể tích bằng nhau nên theo (11.10).

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}$$

Vì **N** và **f** chứa các hằng số, $\mathbf{f_t}$ có thể viết

$$\mathbf{f_t} = \mathbf{N'f} \int dv = \mathbf{N'.f.V} \tag{11.27b}$$

Thay **N** từ (11.12) và $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_x \end{bmatrix}'$ vào (11.27b) ta được:

$$\mathbf{f_t} = V.\begin{vmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{vmatrix} . \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \tag{11.27c}$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và thay $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = \frac{1}{4}$, ta có công thức cuối cùng:

$$\mathbf{f_t} = \frac{V_e}{4}\begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z & f_x & f_y & f_z & f_x & f_y & f_z & f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}' \tag{11.28}$$

Vectơ lực biên:

Theo (2.80) (chương 2), ta có vectơ lực biên:

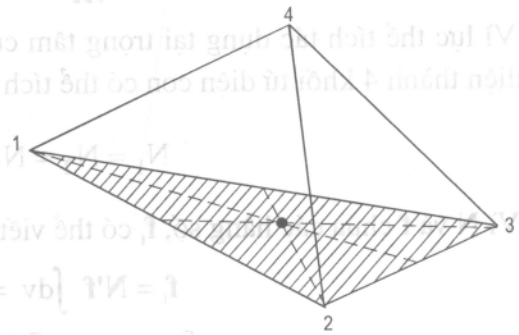
$$\mathbf{f_b} = \iint \mathbf{N'^s T} dA \tag{11.29}$$

Chẳng hạn, lực biên phân bố đều trên diện tích tam giác 1-2-3 có gạch chéo trên hình 11-3. Trên diện tích này, rõ ràng là $N_4 = 0$. Vì tổng lực biên tác dụng tại trọng tâm của tam giác 1-2-3, trọng tâm này lại chia tam giác 1-2-3 thành 3 tam giác con có diện tích như nhau nên:

$$\left.\begin{aligned} N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3} \\ N_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11.30)$$

Vì ma trận **N** và **T** chứa các hằng số nên (11.29) có thể viết:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{N}'^s.\mathbf{T}.\int dA \quad (11.31a)$$
$$= A.\mathbf{N}'^s.\mathbf{T}$$



Hình 11.3: *Lực biên tác dụng trên mặt tam giác 1-2-3*

Thay **N** từ (11.12) và

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z \end{bmatrix}$$

vào (10.31a):

$$\mathbf{f}_b = A.\begin{vmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 \\ N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_4 \end{vmatrix} . \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (11.31b)$$

Sau khi thực hiện các phép nhân ma trận và thay $N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$, $N_4 = 0$ vào (11.31b), ta được công thức cuối cùng:

$$\mathbf{f}'_b = \frac{A_e}{3}\begin{bmatrix} T_x & T_y & T_z & T_x & T_y & T_z & T_x & T_y & T_z & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

Trong đó: A_e - diện tích mặt tam giác 1-2-3.

Trong phần trên, ta đã suy ra ma trận độ cứng, vectơ lực thể tích, vectơ lực biên đối với phần tử hữu hạn hình 4 mặt, 4 nút. Sau khi ghép các ma trận độ cứngvà các vectơ tải trọng như thường lệ, ta có hệ phương trình cân bằng tổng thể:

$$\mathbf{K.Q} = \mathbf{F} \quad (11.32)$$

Giải hệ phương trình trên, ta được giá trị các thành phần chuyển vị.

11.2.3. Tính ứng suất

Vì $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\boldsymbol{\varepsilon}$ và $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}.\mathbf{q}$ nên ứng suất có thể viết:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.\mathbf{B}.\mathbf{q} \tag{11.34}$$

Các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ được tính theo các hệ thức sau. Ba bất biến của tenxơ ứng suất là:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy} \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \tag{11.34}$$

Đặt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\ b &= -2\left(\frac{I_1}{3}\right)^3 + \frac{I_1 I_2}{3} - I_3 \\ c &= 2\sqrt{\frac{a}{3}} \\ \theta &= \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\frac{3b}{ac}\right) \end{aligned} \tag{11.35}$$

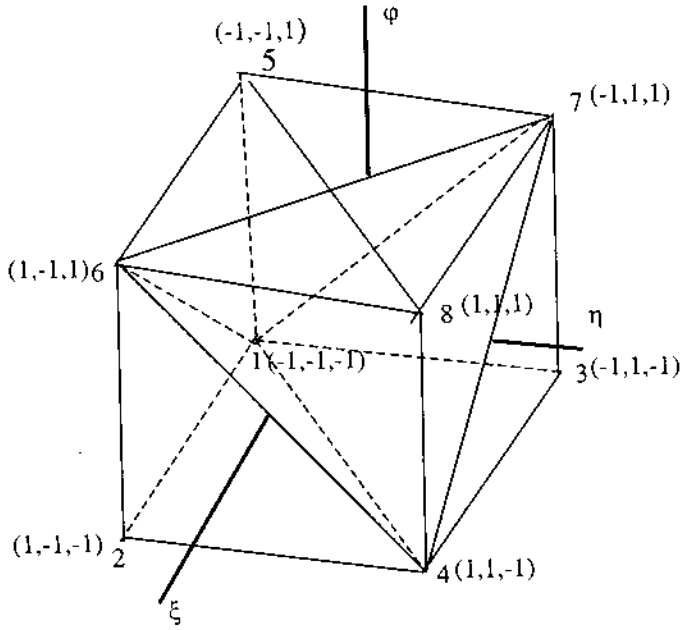
Các ứng suất chính:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + c\cos\theta \\ \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} + c\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} + c\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{11.36}$$

§11.3. CÁCH BỐ TRÍ MẠNG FTHH 4 MẶT 4 NÚT

Trong miền 2 chiều, cách bố trí mạng FTHH tam giác hoặc tứ giác có thể thực hiện một cách tuỳ ý, nhưng trong miền 3 chiều thì việc bố trí mạng FTHH tứ diện có tính chất phức tạp hơn. Dưới đây, giới thiệu một số cách bố trí mạng FTHH tứ diện trong miền khối vuông.

Trên hình (11.4) là cách bố trí 5 FTHH tứ diện trong miền khối vuông. Sơ đồ liên kết giữa các nút biểu thị trong bảng 11.1. Trong cách bố trí trên, 4 tứ diện đầu tiên có thể tích như nhau còn tứ diện thứ 5 thì có thể tích gấp đôi thể tích của phần tử khác.



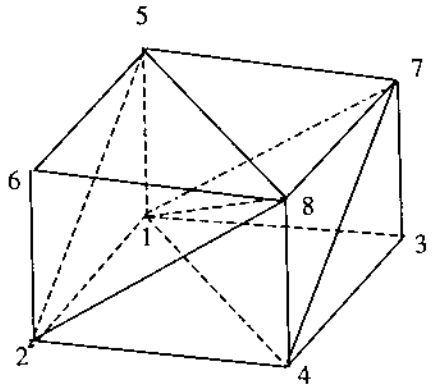
Hình 11.4: Cách bố trí 5 FTHH tứ diện trong miền khối vuông.

Bảng 11.1. Sơ đồ liên kết giữa các FTHH và các nút

FTHH số	Nút cục bộ				
	1	2	3	4	
1	1	4	2	6	Nút tổng thể
2	1	4	3	7	
3	6	7	5	1	
4	6	7	8	4	
5	1	4	6	7	

Cũng có thể bố trí 6 FTHH tứ diện trong một miền khối vuông như trên hình (11.5).

Trong cách chia này, một nửa khối vuông được chia thành 3 tứ diện có thể tích bằng nhau (hình 11.5). Sơ đồ liên kết giữa các tứ diện và giữa các nút như trên bảng (11.2) và hình (11.5).



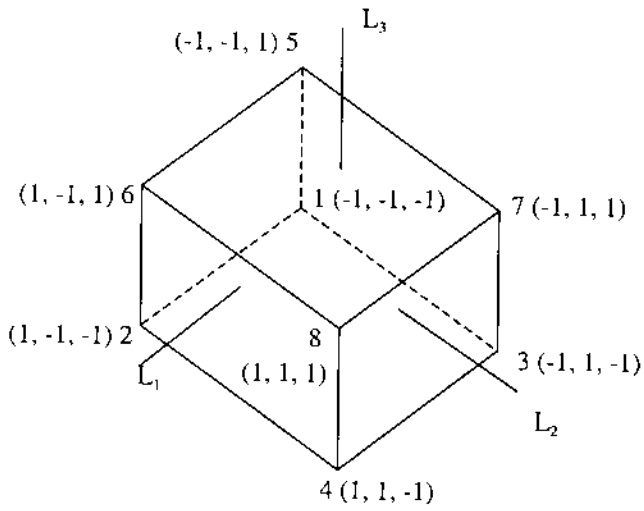
Hình 11.5: Cách bố trí 6 tứ diện trong miền khối vuông.

Bảng 11.2. Sơ đồ liên kết giữa các nút trên hình (11.6)

FTHH số	Nút cục bộ: 1, 2, 3, 4			
	Số thứ tứ nút tổng thể			
1	1	2	4	8
2	1	2	8	5
3	2	8	5	6
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

§11.4. PHẦN TỬ HỮU HẠN 6 MẶT VÀ CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN BẬC CAO HƠN

Hình 11.6 biểu thị một phần tử hữu hạn 6 mặt 8 nút có dạng khối vuông với kích thước mỗi cạnh bằng 2 đơn vị trong hệ tọa độ tự nhiên L_1, L_2, L_3.



Hình 11.6: Phần tử hữu hạn 6 mặt 8 nút

Đối với FTHH khối vuông (hình 11.6), các hàm hình dạng Lagrange có thể viết:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + L_{1i}L_{1i})(1 + L_{2i}L_{2i})(1 + L_{3i}L_{3i}) \qquad (11.37)$$

$$i = 1,2,\ldots 8$$

Trong đó: L_{1i}, L_{2i}, L_{3i} là các tọa độ tự nhiên L_1, L_2, L_3 tại nút i trong hệ tọa độ (L_1, L_2, L_3).

Mỗi nút của FTHH 6 mặt 8 nút có 3 thành phần chuyển vị nên có tất cả 24 thành phần chuyển vị tại các nút. Vectơ chuyển vị:

$$q = \left[q_1 \quad q_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q_{24}\right]' \tag{11.38}$$

Các thành phần chuyển vị tại 1 điểm trong FTHH có thể biểu thị bằng các thành phần chuyển vị tại các nút như sau:

$$\begin{aligned} u &= N_1q_1 + N_2q_4 + \ldots + N_8q_{22} \\ v &= N_1q_2 + N_2q_5 + \ldots + N_8q_{23} \\ w &= N_1q_3 + N_2q_6 + \ldots + N_8q_{24} \end{aligned} \tag{11.39}$$

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + \ldots + N_8x_8 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + \ldots + N_8y_8 \\ z &= N_1z_1 + N_2z_2 + \ldots + N_8z_8 \end{aligned} \tag{11.40}$$

Dưới dạng biểu thị cùng tham số, các tọa độ tại 1 điểm trong FTHH có thể biểu thị bằng tọa độ tại các nút như trong (11.40).

Giống như các bước trình bày trong chương 7 đối với FTHH tứ giác, ta có các hệ thức nhau sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B.q} \tag{11.41}$$

Ma trận độ cứng của FTHH:

$$k = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}' \,.\, \mathbf{D.B}\, \left|\det \mathbf{J}\right| dL_1\, dL_2\, dL_3 \tag{11.42}$$

Trong đó: $dV = \left|\det \mathbf{J}\right| \; dL_1\, dL_2\, dL_3$;

J - ma trận Jacobian.

Việc tính tích phân (11.42) thực hiện theo phép cầu phương Gauss.

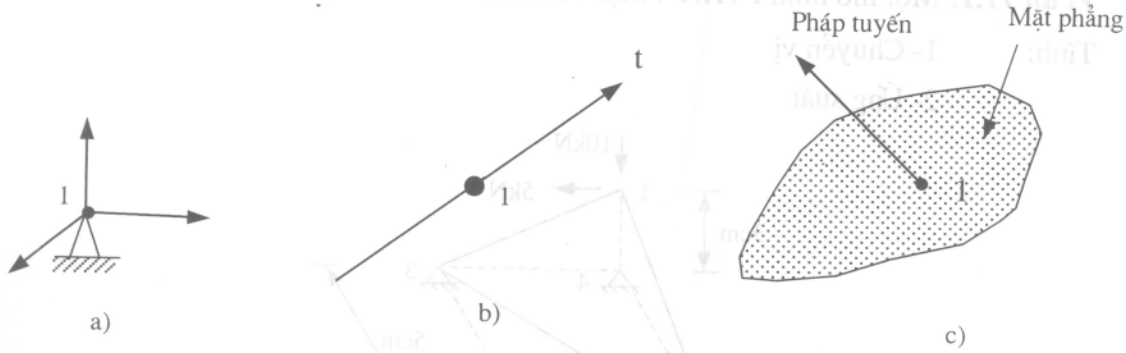
Đối với các FTHH tứ diện bậc cao hơn, chẳng hạn như loại 10 nút, 20 nút, 27 nút, cũng có thể thực hiện các bước như đã trình bày trong chương 7.

§11.5. CÁCH XỬ LÝ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN

Về cách xử lý các điều kiện biên, ta làm như đối với các bài toán 1 chiều hoặc 2 chiều.

Ràng buộc điểm (hình 11.7a) là ràng buộc tại đó một điểm hoàn toàn cố định. Trong trường hợp này, ta thêm một số C khá lớn vào phần tử có bậc tự do tương ứng trên đường chéo chính của ma trận độ cứng.

Ràng buộc đường thẳng là một ràng buộc trong đó 1 điểm chỉ được phép chuyển vị trên phương đường thẳng t (hình 11.7b).



Hình 11.7: *Ràng buộc tại các nút*
a)Ràng buộc điểm; b) Ràng buộc trên đường thẳng; c) Ràng buộc mặt phẳng.

Giả sử t có các côsin định hướng (l, m, n). Xuất phát từ điều kiện $\mathbf{u} \times \mathbf{t} = 0$ ta thêm các số hạng độ cứng sau vào các phần tử có BTD tương ứng của nút I trong ma trận độ cứng:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 3l-2 & 3l-1 & 3l \end{array} \leftarrow \text{BTD của nút 1} \\ \begin{array}{c} 3l-2 \\ 3l-1 \\ 3l \end{array} & \begin{bmatrix} Cl^2 & Clm & Cln \\ & Cm^2 & Cmn \\ & & Cn^2 \end{bmatrix} \\ \uparrow & \\ \text{BTD} & \end{array}$$

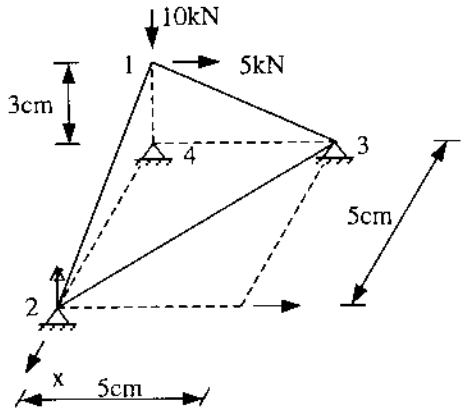
Đối với ràng buộc mặt phẳng (hình 11.7c), một nút chỉ được di chuyển trong mặt phẳng có pháp tuyến t. Giả sử t có các côsin định hướng (l, m, n). Xuất phát từ điều kiện **u.t = 0,** ta thêm vào các số hạng sau vào các phần tử có BTD tương ứng của nút I trong ma trận độ cứng.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 3l-2 & 3l-1 & 3l \end{array} \leftarrow \text{BTD của nút 1} \\ \begin{array}{c} 3l-2 \\ 3l-1 \\ 3l \end{array} & \begin{bmatrix} C\left(1-l^2\right) & -Clm & -Cln \\ & C\left(1-m^2\right) & Cmn \\ & & C\left(1-n^2\right) \end{bmatrix} \\ \uparrow & \\ \text{BTD} & \end{array}$$

Ví dụ 11.1: Một mô hình FTHH 4 mặt 4 nút như trên hình (11.8).

Tính: 1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000kN/cm^2

Hệ số poatxong: 0,3

Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	3	4

Hình 11.8

Giải:

Tính ma trận cấu trúc vật liệu theo (1.17)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4523,077 & 1938,462 & 1938,462 & 0 & 0 & 0 \\ & 4523,077 & 1938,462 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4523,077 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1292,308 & 0 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & 1292,308 & 0 \\ & & & & & 1292,308 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận **B** theo (11.24):

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,33 \\ 0 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & -0,33 & -0,2 \\ 0,33 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & -0,33 & 0 & 0 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & -0,2 & -0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận độ cứng riêng theo (11.26)

$$
\mathbf{k}_1 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
143,589 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86,154 & 0 & 0 & 0 & -143,589 & 0 & -86,154 \\
 & 143,589 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 86,154 & 0 & -143,589 & -86,154 \\
 & & 502,654 & 129,231 & 0 & 0 & 0 & 129,231 & 0 & -129,231 & -129,231 & -502,564 \\
 & & & 180,923 & 0 & 0 & 0 & 77,538 & 0 & -180,923 & -77,538 & -129,231 \\
 & & & & 51,692 & 0 & 51,692 & 0 & 0 & -51,692 & -51,692 & 0 \\
 & & & & & 51,692 & 0 & 0 & 0 & -86,154 & 0 & -51,692 \\
 & & & & & & 51,692 & 0 & 0 & -51,692 & -51,692 & 0 \\
 & & & & & & & 180,923 & 0 & -77,538 & 180,923 & -129,231 \\
 & & & & & & & & 51,692 & 0 & -86,154 & -51,692 \\
 & & & & & & & & & 376,205 & 129,231 & 215,385 \\
 & & & & & & & & & & 376,205 & 215,385 \\
 & & & & & & & & & & & 605,949
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Xác lập ma trận độ cứng tổng thể:

Vì chỉ có một phần tử, từ ma trận độ cứng riêng $\mathbf{k}_1$, ta dùng phương pháp loại trừ để xác lập MTĐC tổng thể:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \leftarrow \text{Số thứ tự BTD tổng thể} \\ \mathbf{K} = & \begin{bmatrix} 143,589 & 0 & 0 \\ & 143,589 & 0 \\ \text{Đối xứng} & & 502,654 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{K} & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Kết quả tính:

$$[Q_1\ Q_2\ Q_3] = [0 \quad 0,0348 \quad -0,0199]' \text{ cm}$$

Tính ứng suất theo (11.33)

Các thành phần chuyển vị của phần tử là:

$[q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5\ q_5\ q_6\ q_7\ q_8\ q_9\ q_{10}\ q_{11}\ q_{12}]' = [0 \quad 0,035 \quad -0,019 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

Các thành phần ứng suất:

US1 = -12,857 kN/cm^2 US2 = -12,857 kN/cm^2

US3 = -30 kN/cm^2 US4 = 14,999 kN/cm^2

US5 = 0 US6 = 0

§11.6. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH GIẢI BÀI TOÁN 3 CHIỀU (CTR17)

1. Nhập số liệu (lấy thí dụ trên hình (11.9)

Số phần tử: 1

Số BTD có chuyển vị: 3

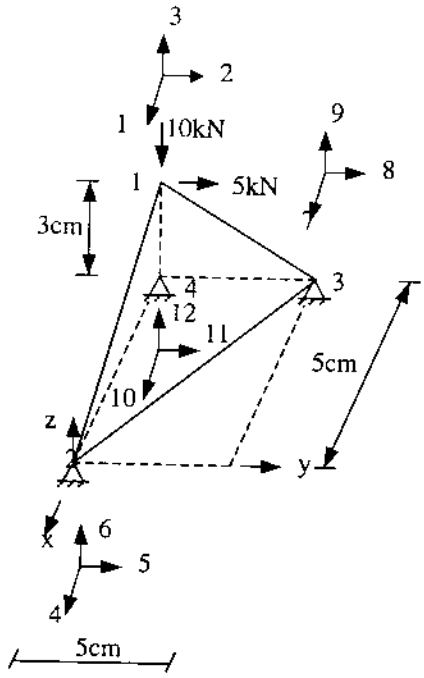
Tổng số BTD : 12

Số BTD có chuyển vị triệt tiêu: 9

Số thứ tự BTD có chuyển vị triệt tiêu: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hệ số poát xong: 0,3



Phần tử	Số thứ tự nút tổng thể			
1	1	2	3	4

Hình 11.9

Các số liệu còn lại thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Tọa độ (cm)											
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	z_1	z_2	z_3	z_4
1	-5	0	-5	-5	0	0	5	0	3	0	0	0

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do											
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

2. Xác lập các ma trận độ cứng riêng theo (11.26)
3. Ghép các MTĐC riêng thành MTĐC tổng thể
4. Ghép các vectơ tải trọng theo (11.28), (11.31) và các tải trọng nhập vào.
5. Gọi chương trình con để giải hệ phương trình cân bằng
6. Căn cứ vào các giá trị chuyển vị tìm được ở trên, tính ứng suất theo (11.33).

Chương 12
BÀI TOÁN DAO ĐỘNG

§12.1. KHÁI NIỆM

Trong các chương 3 - 10, ta đã phân tích ứng suất và biến dạng của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng tĩnh. Ta gọi là tải trọng tĩnh khi nó được đặt lên kết cấu một cách chậm chạp và từ từ. Ta gọi là *tải trọng động* khi nó tác dụng lên kết cấu một cách đột ngột hoặc thay đổi theo thời gian. Tải trọng động gây ra gia tốc và dẫn đến sự dao động của kết cấu. Đối với một vật rắn biến dạng đàn hồi, khi cất tải trọng một cách đột ngột, nó có xu hướng dao động quanh vị trí cân bằng của nó. Chuyển động có tính chu kỳ do năng lượng biến dạng phục hồi gây ra, gọi là *dao động tự do*. Số chu kỳ trong đơn vị thời gian gọi là *tần số*. Chuyển vị lớn nhất kể từ vị trí cân bằng gọi là *biên độ*. Trong thực tế, dao động sẽ giảm dần nếu có lực cản. Tuy nhiên, nếu lực cản không lớn, sự khác nhau giữa tần số dao động tự do không cơ lực cản và tần số dao động tự do có lực cản, có thể bỏ qua. Ở đây, ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cản khi áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu dao động tự do của kết cấu.

§12.2. CÔNG THỨC CƠ BẢN

Ta định nghĩa *hàm Lagrange L* như sau:

$$L = T - TN \tag{12.1}$$

Trong đó: T - động năng;

TN - thế năng.

Nguyên lý Hamintơn:

Trong khoảng thời gian bất kỳ từ t_1 đến t_2, trạng thái chuyển động của vật thể, cực trị hóa hàm:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{12.2}$$

Nếu hàm L được biểu thị bằng các biến khái quát (q_1, q_2, q_3 ... q_n, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 ... \dot{q}_n$ thì phương trình chuyển động có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,2, \dots n \tag{12.3}$$

Trong đó: $\dot{q}_i = dq_i/dt$

Ví dụ sau sẽ minh họa nguyên lý Hamintơn.

Ví dụ 12.1: Cho một hệ lò xo và khối lượng như trên hình (12.1).

Động năng và thế năng có thể viết;

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$TN = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\left(x_2 - x_1\right)^2$$

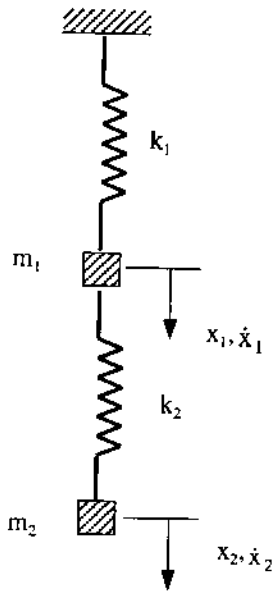
Vì L = T - TN, ta có phương trình chuyển động:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_2\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = m_2\ddot{x}_2 + k_2\left(x_2 - x_1\right) = 0$$

Phương trình trên có thể viết:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$



Hình 12.1

Phương trình trên có thể viết dưới dạng ma trận rút gọn:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{12.4}$$

Trong đó: **M** - ma trận khối lượng;

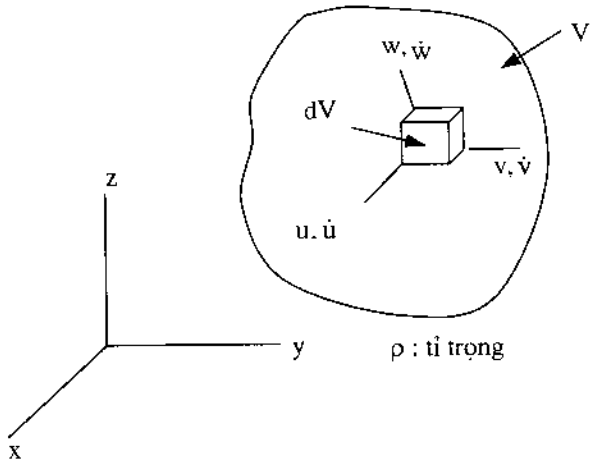
K - ma trận độ cứng;

$\ddot{\mathbf{x}}$ - véc tơ gia tốc;

$\mathbf{x}$ - véc tơ chuyển vị.

Vật rắn có khối lượng phân bố

Xét một vật rắn có khối lượng phân bố như trên hình (12.2)



Hình 12.2. *Vật rắn có khối lượng phân bố*

Thế năng đã được trình bày trong chương 1. Động năng có dạng

$$T = \frac{1}{2}\int \dot{\mathbf{u}}'.\dot{\mathbf{u}}.\rho \quad dV \tag{12.5}$$

Trong đó: ρ - tỉ trọng (khối lượng trên đơn vị thể tích) của vật liệu; $\dot{\mathbf{u}}$ - véc tơ vận tốc tại điểm (x, y, z) với các thành phần $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ (hình 12.2)

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix}\dot{u} & \dot{v} & \dot{w}\end{bmatrix} \tag{12.6}$$

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, ta chia vật thể thành các phần tử, véc tơ chuyển vị trong mỗi phần tử được biểu thị bằng hàm hình dạng và các thành phần chuyển vị tại các nút:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Nq} \tag{12.7}$$

Trong động lực học, các thành phần chuyển vị phụ thuộc vào thời gian, do đó, véc tơ vận tốc có dạng:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}} \tag{12.8}$$

Thay (12.8) vào (12.5), ta có:

$$T_e = \frac{1}{2}\mathbf{q}'\left[\int \rho \mathbf{N}'\mathbf{N}dV\right]\dot{\mathbf{q}} \tag{12.9}$$

Trong đó, số hạng trong dấu ngoặc vuông là ma trận khối lượng của phần tử hữu hạn:

$$m_e = \int \rho \mathbf{N}'\mathbf{N}dV \tag{12.10}$$

Ma trận khối lượng cho các FTHH khác nhau sẽ được suy ra trong phần sau.

Tổng động năng cho toàn hệ có thể viết:

$$T = \sum T_c = \sum \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}'.\mathbf{m}_e.\mathbf{q} = \frac{1}{2}\mathbf{Q}'\mathbf{M}\mathbf{Q} \tag{12.11}$$

Như trong chương hai đã trình bày, thế năng có dạng:

$$TN = \frac{1}{2}\mathbf{Q}'\mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\mathbf{F} \tag{12.12}$$

Theo (12,1) và (12.3), ta có phương trình chuyển động:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F} \tag{12.13}$$

Đối với dao động tự do, lực $\mathbf{F} = 0$ nên:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = 0 \tag{12.14}$$

Xuất phát từ trạng thái cân bằng, ta đặt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\sin\omega t \tag{12.15}$$

Trong đó: **U** - vec tơ biên độ dao động tại các nút;

ω (radian/s) là tần số vòng (= $2\pi.f$, f = số chu kỳ/s hoặc Hz).

Thay (12.15) vào (12.14), ta có:

$$\mathbf{k}\mathbf{U} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{U} \tag{12.16}$$

Đây là bài toán giá trị riêng khái quát:

$$\mathbf{k}\mathbf{U} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{U} \tag{12.17}$$

Trong đó: **U** là vectơ riêng, nó biểu thị *mốt dao động* và ứng với giá trị riêng λ. Giá trị riêng λ là bình phương của tần số vòng ω. Tần số f bằng heztz (số chu kỳ trên giây) tính theo công thức $f = \omega/2\pi$.

Các phương trình trên cũng có thể suy ra từ nguyên lý D' Alembert hoặc công ảo.

§12.3. MA TRẬN KHỐI LƯỢNG CỦA CÁC PHẦN TỬ HỮU HẠN

Dưới đây, căn cứ vào các hàm hình dạng đã trình bày trong các chương trước, ta suy ra biểu thức ma trận khối lượng cho các FTHH khác nhau. Giả sử tỷ trọng không thay đổi trong FTHH, ta có:

$$m_c = \rho\int \mathbf{N}'\mathbf{N}dV \tag{12.18}$$

12.3.1. Thanh 1 chiều (chương 3)

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2] \tag{12.19}$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2]$$

Trong đó: $N_1 = \dfrac{1-\xi}{2}$ $\qquad N_2 = \dfrac{1+\xi}{2}$

$$\mathbf{m}_e = \rho \int_e \mathbf{N'NA}\,dx = \frac{\rho A_e.L_e}{2}\int_{-1}^{+1} \mathbf{N'N}d\xi$$

Sao khi tính tích phân:

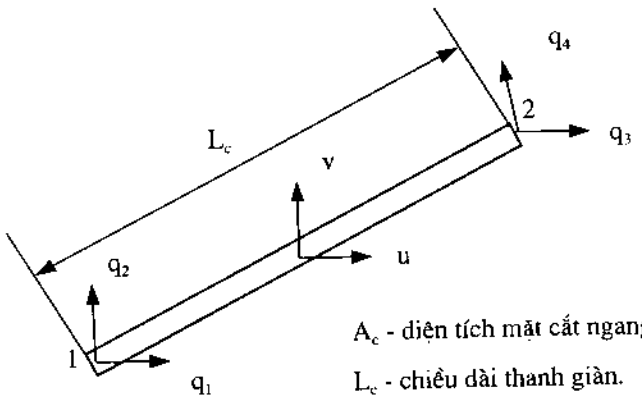
$$m_e = \frac{\rho A_e L_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{12.20}$$

12.3.2. Giàn (chương 4)

$$\mathbf{u'} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q'} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \tag{12.21}$$



A_e - diện tích mặt cắt ngang của thanh giàn

L_e - chiều dài thanh giàn.

Hình 12.3: Giàn

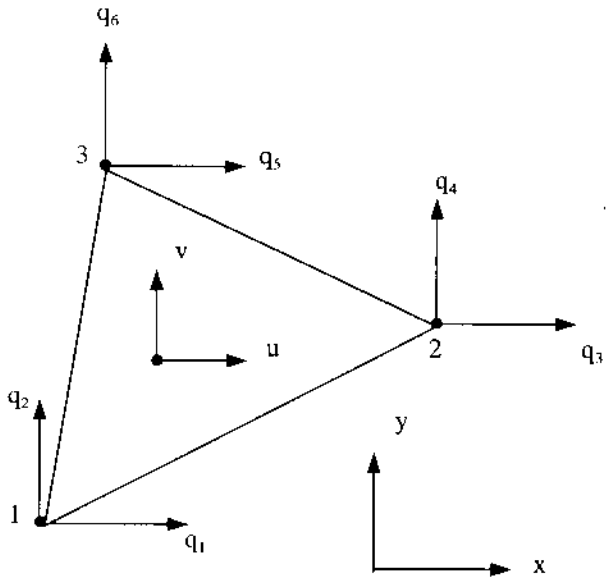
Cận tích phân lấy từ - 1 đến + 1 :

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \qquad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e L_e}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{12.22}$$

12.3.3. Phần tử hữu hạn tam giác 3 nút (chương 5)

Trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng từ chương 5, ta có:



A_e - diện tích của FTHH tam giác
h_e - bề dày của FTHH (dạng tấm)

Hình 12.4: FTHH tam giác 3 nút

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{12.23}$$

Ma trận khối lượng của phần tử hữu hạn

$$\mathbf{m}_e = \rho \int \mathbf{N}'\mathbf{N} dA$$

Do $\int_e N_1^2 dA = \frac{1}{6} A_e$, $\int_e N_1 N_2 dA = \frac{1}{12} A_e$ ... ta có:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho h_e A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \tag{12.24}$$

12.3.4. Phần tử hữu hạn trong vật thể tròn xoay (chương 6)

Ta có: $\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix}$

Trong đó: u, w là các thành phần chuyển vị trên phương xuyên tâm và phương dọc trục. Các vectơ **q** và **N** tương tự như đối với FTHH tam giác trong (12.23). Ta có:

$$\mathbf{m}_e = \int \rho \mathbf{N}'\mathbf{N} dV = \int \rho \mathbf{N}'\mathbf{N} 2\pi r dA \qquad (12.25$$

Vì $r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3$ (chương 6) nên:

$$\mathbf{m}_e = 25\pi\rho \int (N_1.r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3)\mathbf{N}'\mathbf{N} dA$$

Vì $\int N_1^2 dA = \frac{20A_e}{20}$; $\int N_1^2 N_2 dA = \frac{2A_e}{60}$; $\int N_1 N_2 N_3 dA = \frac{2A_e}{120}$, v.v...

ta có:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\pi\rho A_e}{10}\begin{bmatrix} \frac{4}{3}r_1 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_3}{3} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_2}{3} & 0 \\ & \frac{4}{3}r_1 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_3}{3} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_2}{3} \\ & & \frac{4}{3}r_2 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_1}{3} & 0 \\ & & & \frac{4}{3}r_2 + 2\bar{r} & 0 & 2\bar{r} - \frac{r_1}{3} \\ & & & & \frac{4}{3}r_3 + 2\bar{r} & 0 \\ & & & & & \frac{4}{3}r_3 + 2\bar{r} \end{bmatrix} \qquad (12.26)$$

Trong đó: $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ (12.27)

12.3.5. Phần tử hữu hạn tứ giác (chương 7)

Đối với FTHH tứ giác trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng, ta có:

$$\mathbf{u}' = [u \quad v]$$

$$\mathbf{q}' = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_8]$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \qquad (12.28)$$

Ma trận khối lượng có dạng:

$$\mathbf{m}_e = \rho L_e \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}'\mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \qquad (12.29)$$

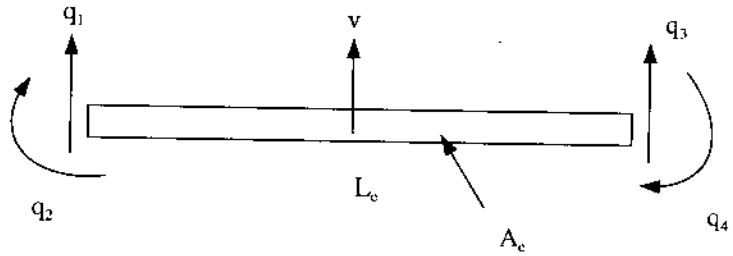
Tích phân trong (12.29) tiến hành theo phép cầu phương Gauss (xem chương 7).

12.3.6. Dầm (chương 8)

Đối với dầm trên hình (12.5), ta dùng các hàm hình dạng Hecmit trong chương 8.

$$v = \mathbf{H}.\mathbf{q} \qquad (12.30)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{-1}^{+1} \mathbf{H'H}\rho A_e = \frac{L_e}{2} d\xi \tag{12.31}$$



Hình 12.5: Dầm

Sau khi tính tích phân, ta được:

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho A_e L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ \text{đối xứng} & & 156 & -22L_e \\ & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} \tag{12.32}$$

12.3.7. Phần tử của khung phẳng (chương 8)

Phần tử của khung trong hệ tọa độ cục bộ (hình 8.14a,b) là sự kết hợp của dầm và thanh 1 chiều. Vậy kết hợp (12.20) với (12.32), ta có ma trận khối lượng trong hệ tọa độ cục bộ:

$$\mathbf{m}_e = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ & 156b & 22L_e b & 0 & 54b & -13L_e b \\ & & 4L_e^2 b & 0 & 13L_e b & -3L_e^2 b \\ & & & 2a & 0 & 0 \\ & & & & 156b & -22L_e b \\ & & & & & 4L_e^2 b \end{bmatrix} \tag{12.33}$$

Dùng ma trận xoay **R** trong (8.49) (chương 8), ta có ma trận khối lượng trong hệ tọa độ tổng thể:

$$\mathbf{m}_e = \mathbf{R'}\mathbf{m}_e.\mathbf{R} \tag{12.34}$$

12.3.8. Phần tử hữu hạn tứ diện (chương 11)

Theo chương 11, vectơ chuyển vị **u** và ma trận hàm hình dạng **N** có dạng:

$$\mathbf{u'} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{12.35}$$

Ma trận khối lượng

$$m_e = \frac{\rho V_e}{20}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 2 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & 0 & 0 \\ & \text{Đối xứng} & & & & & & & & & 2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \qquad (12.36)$$

§12.4. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG

Trước hết, ta nghiên cứu hệ phương trình tuyến tính dưới dạng tổng quát:

$$\mathbf{A.\,X} = \lambda \mathbf{X} \qquad (12.37)$$

Trong đó: **A** - ma trận vuông;

X - véc tơ riêng;

λ - giá trị riêng.

Đối với bài toán dao động tự do, từ (12.17), ta có:

$$\mathbf{KU} = \lambda\, \mathbf{MU} \qquad (12.38)$$

Để đưa phương trình (12.38) về dạng (12.37), ta nhân bên trái 2 vế của nó với nghịch đảo của ma trận khối **M:**

$$\mathbf{M^{-1}KU} = \lambda \mathbf{U} \qquad (12.39)$$

Đặt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M^{-1}K} \qquad (12.40)$$

và:

$$\mathbf{U} = \mathbf{X} \qquad (12.41)$$

ta trở về dạng phương trình (12.37)

M là ma trận khối;

K là ma trận độ cứng.

12.4.1. Các tính chất của vectơ riêng và một số định lý liên quan

Phương trình (12.37) có thể đưa về dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ . & & . & . \\ . & & . & \\ . & . & . & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Dưới dạng ma trận, phương trình trên có thể viết:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{12.42}$$

Hệ phương trình thuần nhất (12.42) có nghiệm duy nhất khi định thức của ma trận $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ triệt tiêu, nghĩa là:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0} \tag{12.43}$$

Khai tính định thức trên, ta có đa thức bậc n của λ:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n$$

Nếu cho vế phải bằng không, ta có phương trình đặc trưng của ma trận **A**:

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n = 0$$

Khi cấp của ma trận A bằng n, phương trình đặc trưng trên cho n giá trị riêng (λ_1, λ_2, ..., λ_n)

Các nghiệm này có thể là số thực, số phức hoặc nghiệm bội (có từ 2 nghiệm bằng nhau trở lên).

Thay một giá trị riêng, chẳng hạn giá trị λ_i vào hệ phương trình (12.37) ta được *véc tơ riêng* tương ứng X_i. X_i là một véc tơ cột được ký hiệu như sau:

$X_1 = [x_{11} \quad x_{21} \cdots x_{n1}]'$ ứng với λ_1.

$X_2 = [x_{12} \quad x_{22} \cdots x_{n2}]'$ ứng với λ_2

.....

$X_n = [x_{1n} \quad x_{2n} \ldots x_{nn}]'$ ứng với λ_n

Các vectơ riêng thường được biểu thị dưới dạng chuẩn hóa nghĩa là các phần tử X_i được chọn sao cho:

$$x_{1i}^2 + x_{2i}^2 + x_{3i}^2 + \ \ldots \ + x_{ni}^2 = 1$$

Ma trận vuông tạo thành bởi các vectơ riêng gọi là *ma trận các mô đơ*:

$$\overline{X} = [X_1 \quad X_2 \ldots X_n] \tag{12.44}$$

Ma trận chéo tạo thành bởi các giá trị riêng gọi là *ma trận phổ*:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . \\ . & & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{12.45}$$

Thay $\overline{\mathbf{X}}$ từ (12.44) vào (12.37 sau khi đã xác định được toàn bộ các giá trị riêng của ma trận A, ta được:

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{X}}.\mathbf{D} \tag{12.46}$$

do đó:

$$\overline{\mathbf{X}}^{-1}.\mathbf{A}.\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{D} \tag{12.47}$$

Sau đây là một số định lý liên quan đến giá trị riêng và vec tơ riêng, không chứng minh:

Định lý 1: Nếu ma trận vuông A có các giá trị riêng λ_i và các vectơ riêng tương ứng X_i thì các giá trị riêng của chuyển vị của A (tức A') bằng các giá trị riêng tương ứng nhưng các véc tơ riêng Y_i thì lại trực giao với vectơ riêng X_i của A nghĩa là:

$$\mathbf{Y}'_j\,\mathbf{X}_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \tag{12.48}$$

Trong đó, các véc tơ **X** và **Y** đều được chuẩn hóa.

Định lý 2: Nếu ma trận A đối xứng và toàn bộ các phần tử của nó đều là những số thực thì toàn bộ các giá trị riêng và vec tơ riêng của nó cũng là những số thực. Hơn nữa, các véc tơ riêng trực giao với nhau nghĩa là:

$$\mathbf{X}'_i\,\mathbf{Y}_j = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu } i \neq j \end{cases} \tag{12.49}$$

Định lý 3: Một ma trận đối xứng A có thể được biến đổi thành một ma trận chéo trong đó các phần tử là các giá trị riêng của nó bằng phép biến đổi trực giao $\overline{\mathbf{X}}'.\mathbf{A}.\overline{\mathbf{X}}$, $\overline{\mathbf{X}}$ là ma trận các mô đơ của A.

Định lý 4: Nếu các giá trị riêng và vec tơ riêng của ma trận **A** là λ_i và $\mathbf{X}_i$ thì các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T}.\mathbf{A}.\mathbf{T}^{-1}$ bằng các giá trị riêng tương ứng của **A** còn các vec tơ riêng bằng $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}_i$, **T** là một ma trận vuông không suy biến.

Định lý 5: Nếu gọi vệt của ma trận **A** là tổng các phần tử trên đường chéo chính của nó thì tổng các giá trị riêng của **A** bằng vệt của nó nghĩa là:

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{12.50}$$

Định lý 6: Định thức của ma trận **A** bằng tích toàn bộ các giá trị riêng của nó nghĩa là:

$$|A| = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \tag{12.51}$$

Định lý 7: Cho ma trận **A** và ma trận **B** = **T.A.T**$^{-1}$, **T** là một ma trận vuông bất kỳ không suy biến. Định thức và vệt của 2 ma trận **A** và **B** hoàn toàn như nhau nghĩa là:

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \\ a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn} \end{array}\right\} \qquad (12.52)$$

Dưới đây, trình bày cách tính các giá trị riêng và vectơ riêng của một ma trận.

12.4.2. Một số phương pháp tính giá trị riêng và vectơ riêng

Sau đây là một số phương pháp tính giá trị riêng và vectơ riêng.

12.4.2.1. Phương pháp đa thức đặc trưng

Như trong phần trước đã trình bày, giải hệ phương trình (12.43), ta sẽ được các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$. Lần lượt thay các giá trị riêng λ_i vào phương trình (12.37), ta sẽ được các vectơ riêng tương ứng. Phương pháp này khá phức tạp.

12.4.2..2. Phương pháp thương số Rayleigh để xác định giá trị riêng lớn nhất

Như trong phần trước đã trình bày, đối với ma trận cấp n, ta có n giá trị riêng được sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn như sau:

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots \le \lambda_n \qquad (12.53)$$

Trong đó: λ_1 - giá trị riêng bé nhất;

λ_n - giá trị riêng lớn nhất.

Phương pháp thương số Rayleigh là phương pháp tính lặp. Quá trình tính chia thành nhiều vòng cho đến khi nào giá trị riêng và vectơ riêng ở vòng sau xấp xỉ với các giá trị tương ứng ở vòng trước.

Trước hết, ta gán cho vectơ riêng những giá trị bất kỳ, chẳng hạn:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thay vào (12.37) ta được: $\mathbf{AX}^{(1)} = \lambda \mathbf{X}^{(1)}$

Trong vòng tính đầu tiên, ta được giá trị ban đầu gần đúng $\lambda^{(1)}$ bằng cách chia phần tử đầu tiên của ma trận cột $\mathbf{A.X}^{(1)}$ cho phần tử đầu tiên của vectơ riêng:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\text{Phần tử đầu tiên của } \mathbf{AX}^{(1)}}{\mathbf{x}_1^{(1)}} \tag{12.54}$$

Trong đó, chỉ số trong dấu ngoặc biểu thị số thứ tự của vòng tính. Giá trị gần đúng thứ hai của vectơ riêng được xác định theo công thức:

$$X^{(2)} = \frac{\mathbf{AX}^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \tag{12.55}$$

Một cách tổng quát, ta có hệ thức:

$$\mathbf{A.X}^{(m)} = \lambda^{(m)}.\mathbf{X}^{(m+1)} \tag{12.56}$$

Trong đó, m biểu thị số thứ tự của vòng tính. Ta tiếp tục các vòng tính theo (12.54), (12.55), (12.56) cho đến khi giá trị của vectơ riêng trong vòng tính cuối cùng xấp xỉ với giá trị tương ứng của nó trong vòng tính trước thì kết thúc.

Khi giá trị riêng chỉ cần độ chính xác vừa phải và vectơ riêng là một đại lượng không quan trọng, ta tính giá trị riêng bằng công thức gần đúng sau đây gọi là *thương số Rayleizh*.

$$\lambda_0 = \frac{\mathbf{X'.A.X}}{\mathbf{X'.X}} \tag{12.57}$$

Ví dụ 12.2: Tìm giá trị riêng lớn nhất $\lambda_3$và vectơ riêng tương ứng của ma trận:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

Giải:

Trước hết, ta gán cho vectơ riêng những giá trị bất kỳ chẳng hạn bằng đơn vị:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các vòng tính theo (12.54), (12.55), (12.56), ta lần lượt được các kết quả sau:

	$AX^{(m)}$	$\lambda^{(m)}$	$X^{(m+1)}$
m = 1	$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
m = 2	$\begin{bmatrix} 11 \\ -18 \\ 19 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1,63 \\ 1,72 \end{bmatrix}$

$$m = 3 \qquad \begin{bmatrix} 13,24 \\ -20,63 \\ 19,54 \end{bmatrix} \qquad 13,24 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,56 \\ 1,48 \end{bmatrix}$$

$$m = 7 \qquad \begin{bmatrix} 12,29 \\ -18,26 \\ 16,28 \end{bmatrix} \qquad 12,29 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

$$m = 8 \qquad \begin{bmatrix} 12,265 \\ -18,21 \\ 16,21 \end{bmatrix} \qquad 12,265 \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Sau 8 vòng tính, ta thấy 2 vectơ riêng cuối cùng bằng nhau. Vậy giá trị riêng lớn nhất là:

$$\lambda_3 = 12,265 \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,485 \\ 1,325 \end{bmatrix}$$

Trong vòng tính thứ 3, nếu áp dụng (12.57), ta được kết quả:

$$m = 3 \qquad \mathbf{X'AX} = 68,87 \qquad \mathbf{X'X} = 5,63$$

Vậy $\lambda_3 = 68,87/5,63 = 12,33$. So với kết quả vừa tính ở trên, sai số không lớn.

12.4.2.3. Phương pháp thương số Rayleizh xác định giá trị riêng bé nhất.

Giả sử λ_n là giá trị riêng lớn nhất của ma trận **A**. Theo (12.37) ta có:

$$\mathbf{AX} = \lambda_n \mathbf{X}$$

Nhân bên trái 2 vế của phương trình trên với A^{-1}, ta có:

$$\mathbf{A^{-1}X} = \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{X} = \lambda_1 \mathbf{X} \qquad (12.58)$$

Trong đó, λ_1 là giá trị riêng bé nhất của **A**.

Vậy ta có quy tắc tìm giá trị riêng bé nhất của ma trận **A**: *giá trị riêng bé nhất của A bằng nghịch đảo của giá trị riêng lớn nhất của A^{-1}.*

12.4.2.4. Phương pháp khử dần giá trị riêng đã biết để tính các giá trị riêng tiếp theo.

Giả sử xuất phát từ giá trị riêng lớn nhất λ_n và vectơ riêng tương ứng X_n, ta tính các giá trị riêng và vectơ riêng tiếp theo bằng cách khử nghiệm λ_n trong phương trình đặc trưng.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Theo định lý 4, các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T^{-1}.A.T}$ bằng các giá trị riêng tương ứng của A còn các vectơ riêng $\mathbf{Y_i} = \mathbf{T^{-1}.X_i}$ trong đó **T** là một ma trận vuông không suy biến.

Giả sử dùng phép biến đổi sao cho ma trận **B** có dạng:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{12.59}$$

Ta có:

$$|B - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow (\lambda_n - \lambda)|C - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

Trong đó:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{12.60}$$

Vậy các giá trị riêng của **C** cũng là các giá trị riêng của **B** đồng thời cũng là giá trị riêng của **A**.

Ma trận **T** thoả mãn điều kiện (12.59) có dạng như sau:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_{n2} & 1 & \ldots & 0 \\ x_{n3} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \\ x_{nn} & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -x_{n2} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -x_{n3} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ -x_{nn} & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{12.61}$$

Trong đó, cột đầu tiên của **T** biểu thị vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ_n. Xác định giá trị riêng tiếp theo λ_{n-1} theo các bước sau:

Lập ma trận biến đổi **T** và nghịch đảo của nó theo (12.61);

Tính ma trận $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}$

Chia khối ma trận B như sau:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & B_{12} \\ \hline 0 & B_{22} \end{array}\right] \tag{12.62}$$

Trong đó: $b_{11} = \lambda_n$;

$\mathbf{B}_{12}$ là hàng đầu tiên của ma trận **A** sau khi loại bỏ phần tử thứ nhất.

Tính giá trị riêng lớn nhất của ma trận $\mathbf{C} = \mathbf{B}_{22}$ theo phương pháp tính lặp. Giá trị này chính là giá trị riêng tiếp theo λ_{n-1} của ma trận A.

Vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_{n-1} được tính như sau:

Véc tơ riêng Y_{n-1} ứng với giá trị riêng λ_{n-1} thỏa mãn hệ thức:

$$\mathbf{B}.\ \mathbf{Y}_{n-1} = \lambda_{n-1}\ .Y_{n-1}$$

Thay $b_{11} = \lambda_n$ và $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{C}$ vào (12.62) ta có:

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_n & \mathbf{B}_{12} \\ \hline 0 & \mathbf{C} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_{12} \\ \hline Y'_{n-1} \end{array}\right] = \lambda_{n-1} \left[\begin{array}{c} y_{12} \\ \hline Y'_{n-1} \end{array}\right] \tag{12.63}$$

Trong đó: y_{12} là phần tử đầu tiên của vectơ riêng Y_{n-1};

Y'_{n-1} là vectơ riêng của ma trận **C** vì $\mathbf{C}\mathbf{Y}_{n-1} = \lambda_2.\mathbf{Y}_{n-1}$.

Thực hiện phép nhân ma trận:

$$\lambda_n y_{12} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{Y}'_{n-1} = \lambda_{n-1} y_{12}$$

do đó

$$y_{12} = \frac{\mathbf{B}_{12}.\mathbf{Y}'_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \tag{12.64}$$

Vectơ riêng $\mathbf{X}_{n-1}$ ứng với giá trị riêng λ_{n-1} của ma trận **A** tính theo công thức:

$$\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{T}.\mathbf{Y}_{n-1} \tag{12.65}$$

Giá trị riêng tiếp theo λ_{n-2} và vectơ giá trị riêng tương ứng $\mathbf{X}_{n-2}$ của ma trận **A** được xem như giá trị riêng thứ hai và vectơ riêng thứ hai của ma trận **C**. Cứ như vậy, ta tiếp tục tính các giá trị riêng và vectơ riêng tiếp theo cách trình bày trên.

Ví dụ 12.3: Xác định các giá trị riêng tiếp theo của ma trận:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \text{ nếu } \lambda_3 = 12{,}265$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}485 \\ 1{,}325 \end{bmatrix}$$

Giải:

Theo (12.61) ta có:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1,485 & 1 & 0 \\ -1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân ma trận:

$$\mathbf{AT}_1 = \begin{bmatrix} 12,265 & -4 & 1 \\ -18,21 & 6 & -4 \\ 16,21 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}_1^{-1}.\mathbf{A}.\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 12,265 & -4 & 1 \\ 0 & 0,06 & -2,515 \\ 0 & 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$$

Vậy theo (12.60): $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,06 & -2,515 \\ 1,30 & 5,675 \end{bmatrix}$

Sau khi dùng phương pháp tính lặp đối với ma trận **C**, ta được kết quả:

$$\lambda_2 = 5,01 \qquad \mathbf{Y'}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Vì B_{12} = [-4 1] nên sau khi áp dụng (12.64) ta được kết quả:

$$y_{12} = \frac{\mathbf{B}_{12}\mathbf{Y'}_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{5,97}{12,265 - 5,01} = \frac{5,97}{7,255} = 0,825$$

Vậy vectơ riêng thứ hai của B là:

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 1 \\ -1,97 \end{bmatrix}$$

Theo định lý 4:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}_1.\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} 0,825 \\ 0,224 \\ -0,878 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,371 \\ -1,062 \end{bmatrix}$$

Giá trị riêng cuối cùng được xác định bằng cách khử λ_2 từ phương trình đặc trưng:

$$|\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = \mathbf{0}$$

Căn cứ vào giá trị $\mathbf{Y'}_2$ và (12.61), ta được kết quả:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1,97 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CT}_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,515 \\ 9,88 & 5,675 \end{bmatrix}$$

Vậy $\mathbf{D} = \mathbf{T}_2^{-1}\,\mathbf{CT}_2 = \begin{bmatrix} 5,01 & -2,512 \\ 0 & 0,725 \end{bmatrix}$

Thực hiện phương pháp tính lặp đối lập với ma trận **D**, ta được kết quả:

$$\lambda_1 = 0,725 \quad Z'_3 = 1. \text{ Theo (12.64)}$$

$$z_{23} = \frac{(-2,512).1}{5,01 - 0,725} = 0,586$$

Vậy : $\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$$\mathbf{Y'}_1 = \mathbf{T}_2\mathbf{Z}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,97 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,586 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,586 \\ -0,154 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$$

Theo (12.64):

$$y_{13} = \frac{-\begin{bmatrix} -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}}{12,265 - 0,725} = \frac{4,263}{11,54} = 0,369$$

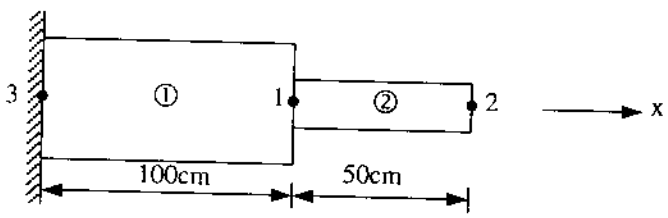
Vậy: $\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix}$

Cuối cùng, vectơ tiêng ứng với giá trị riêng λ_1 của ma trận **A** là:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}_1\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1,485 & 1 & 0 \\ 1,325 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,369 \\ 1 \\ -0,263 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,369 \\ 0,452 \\ 0,226 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,221 \\ 0,612 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 12.4:

Hệ một chiều như trên hình (12.6)



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Khối lượng riêng: 0,00785 kG/cm³

Hình : 12.6

Tính : 1- Giá trị riêng lớn nhất;

2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Căn cứ vào (12.20), xác lập các ma trận độ cứng riêng và ghép thành MTĐC tổng thể. Ta có ma trận khối lượng.

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1,793 & 0,262 \\ \text{Đối xứng} & 0,523 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

Nghịch đảo ma trận trên:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,602 & -0,301 \\ -0,301 & 2,063 \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (3.19), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2940 & -1680 \\ \text{Đối xứng} & 1680 \end{bmatrix}$$

Tính ma trận **A** theo (12.40)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1926,115 & -1284,076 \\ -4173,248 & 3852,229 \end{bmatrix}$$

Tính lặp giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng của ma trận **A** theo (12.54), (12.55), (12.56).

Kết quả: GTRLN: 5396,411

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 -2,703]'

Ví dụ 12.5:

Hệ một chiều như trong ví dụ (12.4). Tính:

1- Giá trị riêng bé nhất;

2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Theo quy tắc trình bày trong 12.4.2.3, tính nghịch đảo của ma trận **A** (đã tính trong ví dụ (12.4).

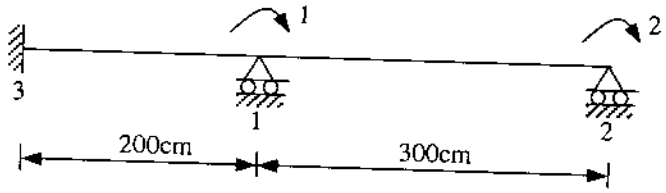
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,869\times10^{-3} & 6,231\times10^{-4} \\ 2,025\times10^{-3} & 9,345\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

Tính lặp giá trị riêng lớn nhất và vectơ riêng tương ứng theo (12.54), (12.55), (12.56).

GTRBN = 1/GTRLN = 382,03

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 1,203]'

Ví dụ 12.6: Một dầm liên tục như trên hình (12.7)



Diện tích: 110cm²
Mômen quán tính: 45000cm⁴
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Khối lượng riêng: 0,00785 kg/cm³

Hình 12.7

Tính : 1- Giá trị riêng lớn nhất;

2- Vectơ riêng tương ứng.

Giải:

Căn cứ vào (12.32), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể:

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 28783313,33 & -166522,14 \\ -166532,14 & 222042,86 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nghịch đảo ma trận trên:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 6,137\text{x}10^{-6} & 4,603\text{x}10^{-6} \\ 4,603\text{x}10^{-6} & 7,956\text{x}10^{-6} \end{bmatrix}$$

Căn cứ vào (8.23), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể.

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 315\times10^5 & 63\times10^5 \\ \text{Đối xứng} & 126\times10^5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

Tính ma trận **A** theo (12.40)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 222,329 & 96,665 \\ 195,120 & 192,244 \end{bmatrix}$$

Tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56). Kết quả:

GTRLN: 320,795

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 1,019]'

Ví dụ 12.7:

Dầm liên tục như trong ví dụ (12.6)

Tính: 1- Giá trị riêng bé nhất

2- Vectơ riêng tương ứng

Giải:

Theo quy tắc trình bày trong 12.4.2.3, nghịch đảo ma trận **A** (đã tính trong ví dụ 12.6) và tiến hành tính lặp.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0131 & -0,0098 \\ -0,0198 & 0,0225 \end{bmatrix}$$

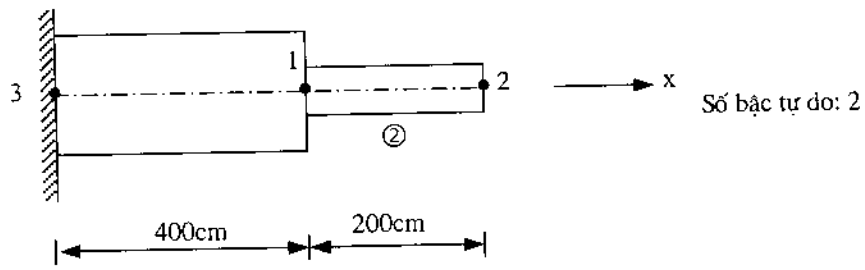
Kết quả: GTRBN: 1/GTRLN = 30,982

Vectơ riêng tương ứng: [1,0 -1,982]'

§12.5. THUẬT TOÁN LẬP TRÌNH TÍNH GIÁ TRỊ RIÊNG LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ RIÊNG BÉ NHẤT CHO MỘT SỐ KẾT CẤU

12.5.1. Thuật toán lập trình tính GTRLN cho hệ một chiều (CTR19)

Lấy thí dụ trên hình (12.8)



Hình 12.8

Nhập số liệu theo bảng dưới:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Khối lượng riêng (kg/cm^3)	Số thứ tự BTD	
					d_1	d_2
1	400	4	21000	0,00785	3	1
2	200	2	21000	0,00785	1	2

2- Xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M** theo (12.20).

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K** theo (3.19)

5- Tính ma trận **A** theo (12.40).

6- Thực hiện phương pháp tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56) để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

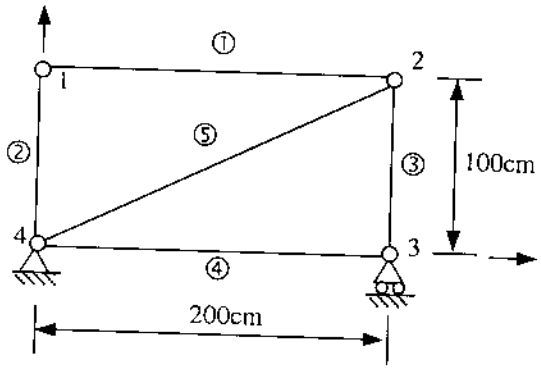
12.5.2. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ một chiều (CTR20)

Các bước giống như đã trình bày trong §12.5.1 (CTR19)

Chỉ khác là nghịch đảo ma trận **A** và thực hiện phương pháp tính lặp.

12.5.3. Thuật toán tính GTRLN và vectơ riêng tương ứng cho hệ giàn (CTR21)

Lấy ví dụ trên hình (12.9):



Số BTD : = 4

Hình 12.9

Nhập số liệu như trong bảng sau:

Phần tử	Diện tích (cm^2)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Khối lượng riêng (kg/cm^3)	Tọa độ (cm)				Số thứ tự bậc tự do			
				x_1	x_2	y_1	y_2	d_1	d_2	d_3	d_4
1	12	21000	0,00785	0	200	100	100	1	2	3	4
2	12	21000	0,00785	0	0	0	100	7	8	1	2
3	12	21000	0,00785	200	200	0	100	5	6	3	4
4	12	21000	0,00785	0	200	0	0	7	8	5	6
5	12	21000	0,00785	0	200	0	100	7	8	3	4

2- Căn cứ vào (12.22), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Căn cứ vào (4.10), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

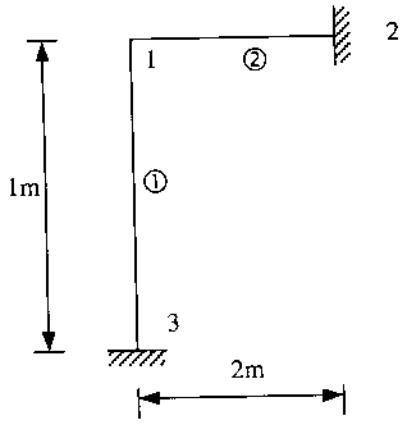
6- Thực hiện phương pháp tính lặp theo (12.54), (12.55), (12.56) để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.4. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ giàn (CTR22)

Các bước giống như đã trình bày trong §12.5.3 (CTR21) chỉ khác là nghịch đảo ma trận **A** và thực hiện phương pháp tính lặp để được GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.5. Thuật toán tính GTRLN và vectơ riêng tương ứng cho hệ khung (CTR23)

Lấy ví dụ trên hình (12.10)



Số BTD = 3

Hình 12.10

Phần tử	Tọa độ (m)				Diện tích m^2	Môđun đàn hồi (kN/m^2)	Mômen quán tính (m^4)
	x_1	x_2	x_3	x_4			
1	0	0	0	1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}
2	0	2	1	1	8×10^{-3}	21×10^7	2×10^{-4}

Phần tử	Số thứ tự bậc tự do					
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	7	8	9	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6

2- Căn cứ vào (12.34), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể

4- Căn cứ vào (8.53a), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

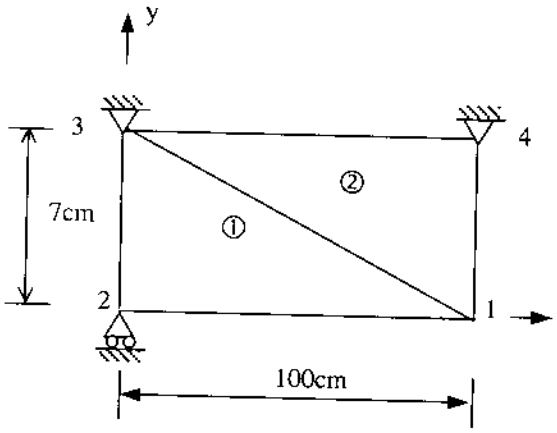
6- Thực hiện phương pháp lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.6. Thuật toán tính GTRBN và vectơ riêng tương ứng cho hệ khung (CTR24)

Các bước như đã trình bày trong §12.5.5 (CTR23). Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận **A** để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.7. Thuật toán tính GTRLN cho hệ 2 chiều kiểu FTHH tam giác 3 nút (CTR25)

Lấy ví dụ trên hình (12.11):



Phần tử	Số thứ tự tổng thể		
1	1	3	2
2	1	4	3

Số BTD có chuyển vị: 3

Hình 12.11

1- Nhập số liệu

Phần tử	Tọa độ (m)						Môđun đàn hồi (kN/cm²)	Bề dày tấm (cm²)
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
1	10	0	0	0	7	0	21000	0,5
2	10	10	0	0	7	7	21000	0,5

Phần tử	Hệ số poát xong	Số thứ tự bậc tự do					
		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
1	0,3	1	2	5	6	3	4
2	0,3	1	2	7	8	5	6

2- Căn cứ vào (12.24), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể

4- Căn cứ vào (5.30), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

6- Thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

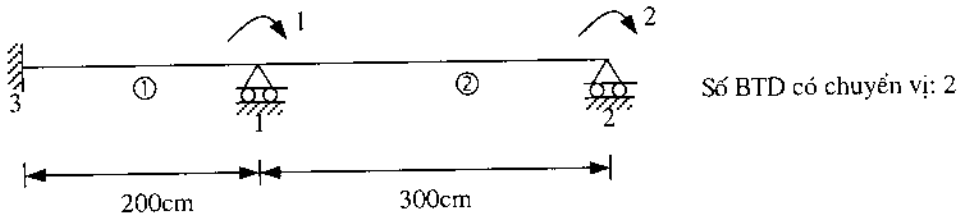
12.5.8. Thuật toán tính GTRBN cho hệ 2 chiều kiểu FTHH tam giác 3 nút (CTR26)

Các bước như đã trình bày trong § 12.5.7 (CTR25).

Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận **A** và thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.9. Thuật toán tính GTRLN cho hệ dầm liên tục (CTR27)

Lấy ví dụ trên hình 12.12.



Hình 12.12

1- Nhập số liệu trong bảng sau:

Phần tử	Chiều dài (cm)	Diện tích (cm^2)	Mômen quán tính (cm^4)	Môđun đàn hồi (kN/cm^2)	Khối lượng riêng (kG/cm^3)	Số thứ tự bậc tự do			
						d_1	d_2	d_3	d_4
1	200	110	45000	21000	0,00785	5	6	3	1
2	300	110	45000	21000	0,00785	3	1	4	2

2- Căn cứ vào (12.32), xác lập các ma trận khối lượng riêng và ghép thành ma trận khối lượng tổng thể **M**.

3- Nghịch đảo ma trận khối lượng tổng thể.

4- Căn cứ vào (8.23), xác lập các MTĐC riêng và ghép thành MTĐC tổng thể **K**.

5- Tính ma trận **A** theo (12.40)

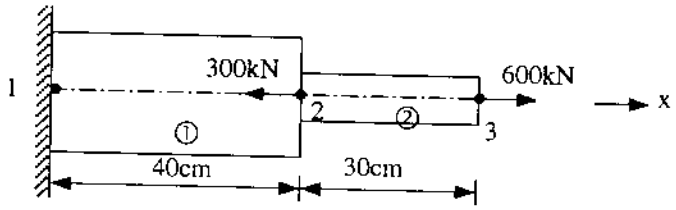
6- Thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRLN và vectơ riêng tương ứng.

12.5.10. Thuật toán tính GTRBN cho hệ dầm liên tục(CTR28)

Các bước như đã trình bày trong §12.5.9. Công việc tiếp theo là nghịch đảo ma trận **A** và được thực hiện phương pháp tính lặp để tìm GTRBN và vectơ riêng tương ứng.

BÀI TẬP

Bài 1:



Diện tích:

Thanh 1: $4cm^2$

Thanh 2: $2,5cm^2$

Môđun đàn hồi:

Hình: B_1

Cho thanh 1 chiều như trên hình B_1. Dùng phương pháp loại trừ tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Biến dạng

Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,1429 -0,4857]'cm

2- Ứng suất: [75 240]' kN/cm^2

3- Phản lực: -300kN

Bài 2: Đầu đề như trên hình B_1. Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

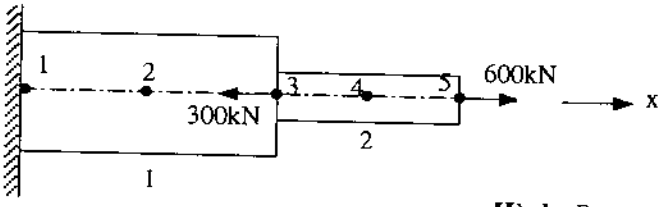
Đáp án:

1- Chuyển vị: [$-7,79.10^{-6}$ -0,1429 -0,485]' cm

2- Ứng suất: [75 240]' kN/cm^2

3- Phản lực: -300kN

Bài 3:



Diện tích:

Thanh 1: $4cm^2$

Thanh 2: $2,5cm^2$

Môđun đàn hồi: 21000 N/cm^2

Hình: B_2

Đầu đề như trên hình B_2. Dùng phương pháp mô hình phân tử hữu hạn bậc 2 tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

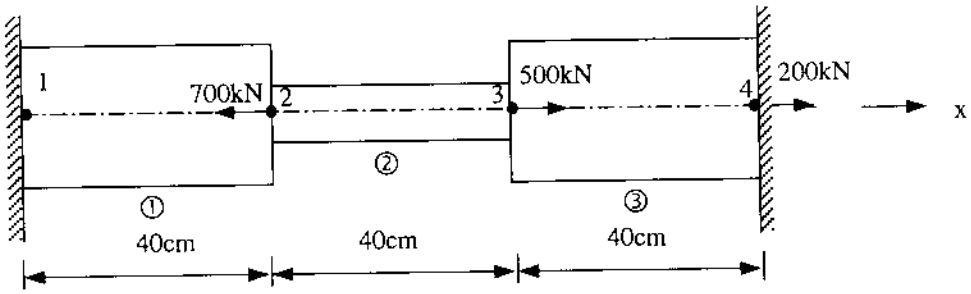
Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,0714 -0,1429 -0,3143 -0,4857]'cm

2- Ứng suất: giống bài 1 và bài 2

3- Phản lực: giống bài 1 và bài 2

Bài 4:



Diện tích:

Thanh 1: $4cm^2$

Thanh 2: $2cm^2$ Môđun đàn hồi: $21000kN/cm^2$

Thanh 3: $4cm^2$

Hình: *B_3*

Đầu đề như trên hình B_3. Dùng phương pháp mô hình lò xo tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

1- Chuyển vị: [$-1,2698.10^{-5}$ -0,1905 0,0952 $1,2698.10^{-5}$]'cm

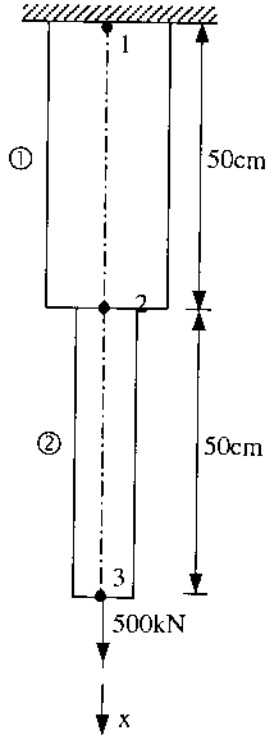
2- Ứng suất: [-99,997 150 -49,997]' kN/cm^2

3- Phản lực:

Điểm 1: 400 kN

Điểm 4: -400kN

Bài 5: Đầu đề như trên hình B_4



Diện tích:

Thanh 1: $6cm^2$

Thanh 2: $2cm^2$

Môđun đàn hồi: $21000\ kN/cm^2$

Hệ số giãn nở: $20.10^{-6}/^0C$

Gia số nhiệt độ: 40^0C

Tỷ trọng: $785.10^{-5}\ kN/cm^3$

Hình: B_4

Thanh chịu tác dụng của tải trọng, của nhiệt độ và trọng lượng bản thân. Dùng phương pháp loại trừ tính:

1- Chuyển vị

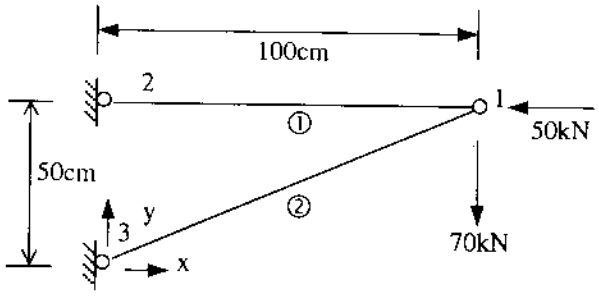
2- Ứng suất

Đáp án:

1) Chuyển vị: $[0,2306\ 0,8612]'cm$

2) Ứng suất: $[96,86 \quad 264,84]'\ kN/cm^2$

Bài 6: Cho một giàn như trên hình B_5



Diện tích:

Thanh 1: $8cm^2$

Thanh 2: $8cm^2$

Môđun đàn hồi: $21000\ kN/cm^2$

Hình: B_5

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

So sánh với kết quả tách nút

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,0536 -0,34]'cm

2- Ứng suất: [11,25 19,57]' kN/cm^2

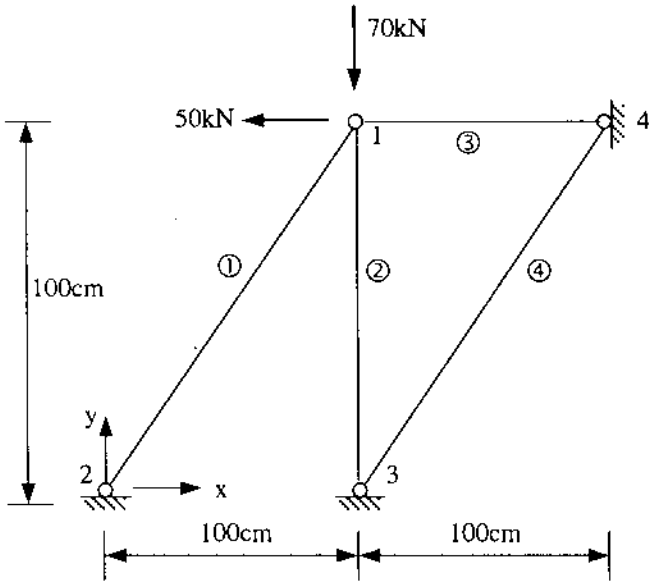
3- Phản lực

fl(3) = -90kN fl(4) = 0 fl(5) = 140kN fl(6) = 70kN

4- Kết quả hoàn toàn giống với phương pháp tách nút.

Bài 7:

Cho 1 giàn như trên hình B_6.



Diện tích toàn bộ các thanh 1: 12cm^2
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Hình: *B_6*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

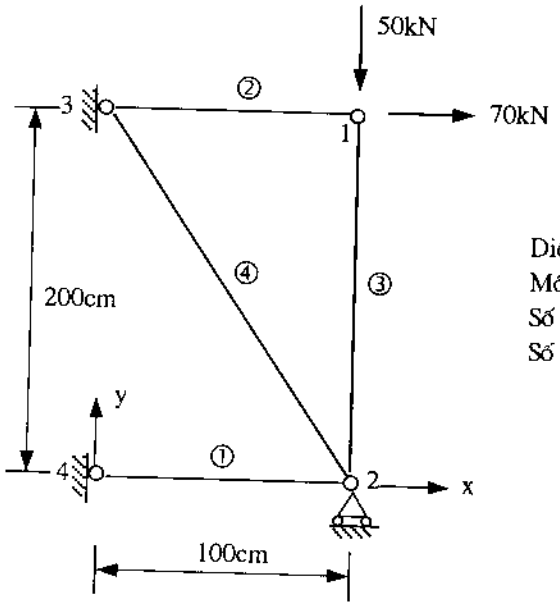
1- Chuyển vị: [-0,0099 0,0179]'cm

2- Ứng suất: [-2,93 -3,76 2,09 0]' kN/cm^2

3- Phản lực: fl(3) = 2485kN fl(4) = 2485kN fl(5) = 0

fl(6) = 4515 kN fl(7) = 2515kN fl(8) = 0

Bài 8: Một giàn phẳng như trên hình B_7.



Diện tích toàn bộ các thanh 1 : 12cm^2
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

***Hình** B_7*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,028 -0,04 0]'cm

2- Ứng suất: [0 5,83 -4,16 0]' kN/cm^2

3- Phản lực

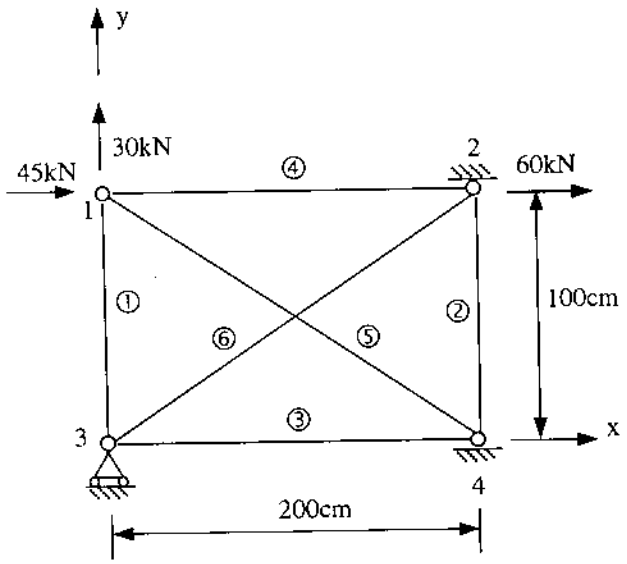
fl(4) = 50kN fl(5) = -70 fl(6) = 0kN fl(7) = 0KN fl(8) = 0

Bài 9: Cho một giàn phẳng như trên hình B_8

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Diện tích toàn bộ các thanh 1: 12cm^2
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

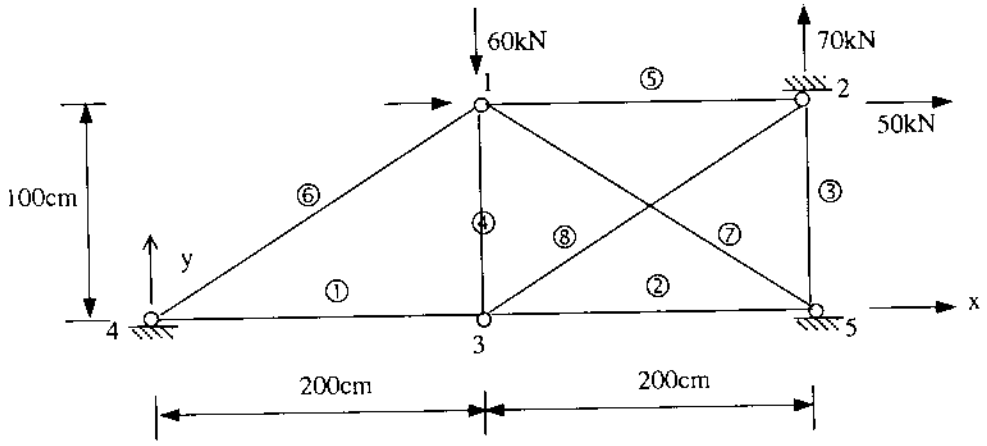
Hình: *B_8*

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,048 0,019 0,039 0,0005 0]'cm

2- Ứng suất: [3,93 -3,28 0 -0,88 -3,20 3,31]' KN/cm^2

Bài 10: Cho một giàn phẳng như trên hình B_9.



Diện tích toàn bộ các thanh : 4cm^2

Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: *B_9*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

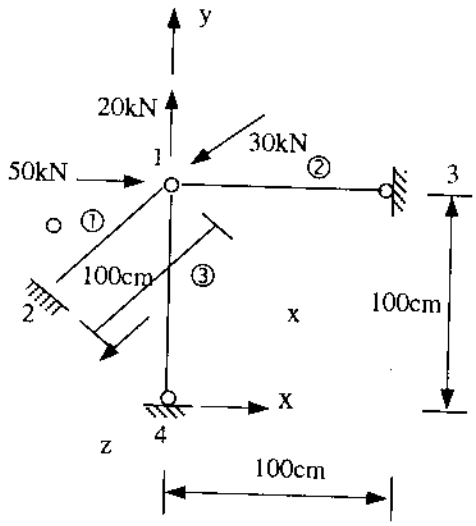
Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,053 -0,103 0,093 0,13 -0,007 -0,12]'cm

2- Ứng suất: [-0,72 0,72 6,56 4,05 4,17 -5,21 -8,78 -1,62]' KN/cm^2

Bài 11:

Cho một giàn không gian như trên hình B_{10}.



Diện tích toàn bộ các thanh : 1cm^2
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{10}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

3- Phản lực

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,016 0,006 0,01]'cm

2- Ứng suất: [-2,00 -3,33 1,33]' kN/cm^2

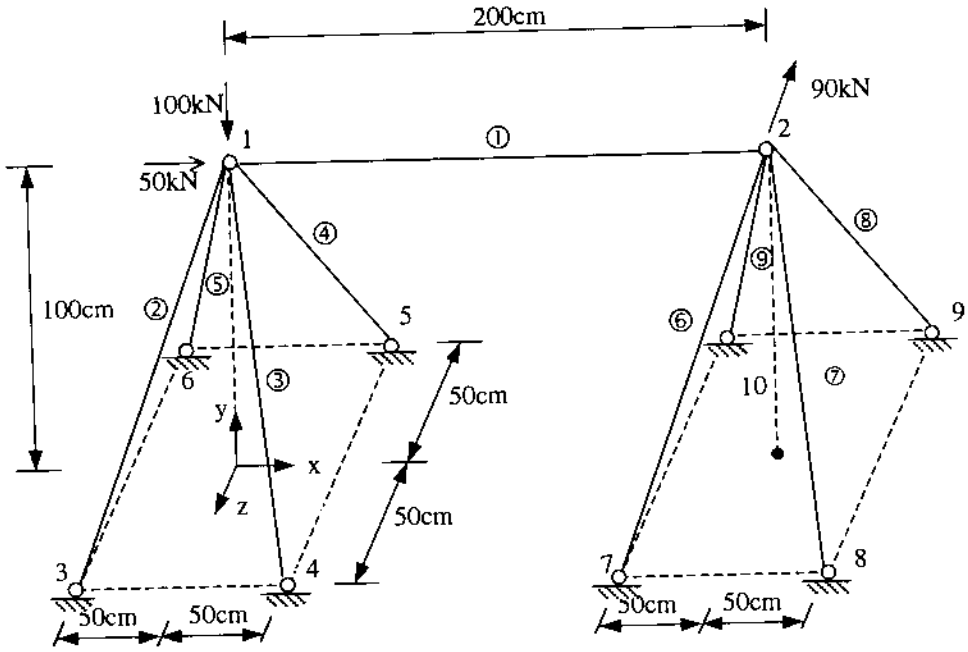
3- Phản lực

fl(4) = 0 fl(5) = 0 fl(6) = -30kN

fl(7) = -50kN fl(8) = 0 fl(9) = 0

fl(10) = 0 fl(11) = -20kN fl(12) = 0

Bài 12: Cho 1 giàn không gian như trên hình B_{11}.



Diện tích toàn bộ các thanh : $20cm^2$
Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{11}

Dùng hương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,01 -0,01 0 0,007 -0,079 0,591]'cm

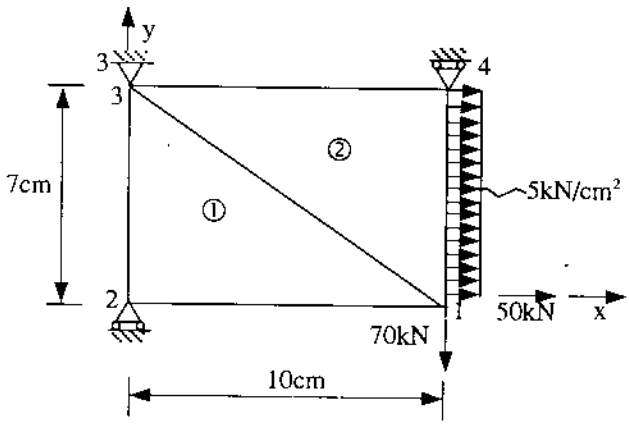
2- Ứng suất: [-51,86 -52,85 29,82 30,81 -0,50 -51,86 -52,85 29,82 30,81]' kN/cm^2

Bài 13: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{12}.

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{12}

Đáp án:

1- Chuyển vị: [0,0048 -0,032 0,019]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [6,82 3,20 2,05]' kN/cm²

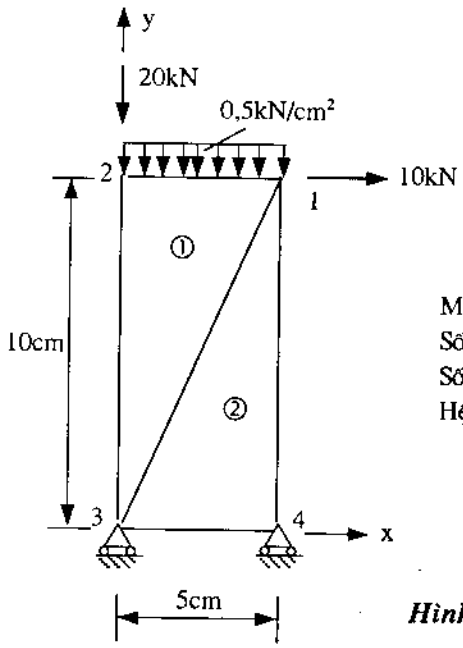
Phần tử 2: [10,66 -4,78 -5,57]' kN/cm²

Bài 14:

Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{13}. Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{13}

Đáp án:

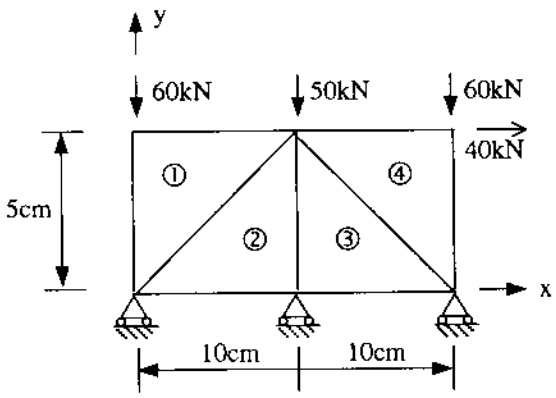
1- Chuyển vị: [0,0025 -0,002 0,0019 -0,0023]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [1,009 -1,361 -4,462]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-4,538 2,019 1,981]' kN/cm^2

Bài 15: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{14}



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{14}

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,0010 -0,0029 0,0072 -0,0078 0,0050 -0,0039]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [0,0527 -11,983 0,0264]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-1,076 -3,587 1,153]' kN/cm^2

Phần tử 3: [-1,076 -3,587 1,153]' kN/cm^2

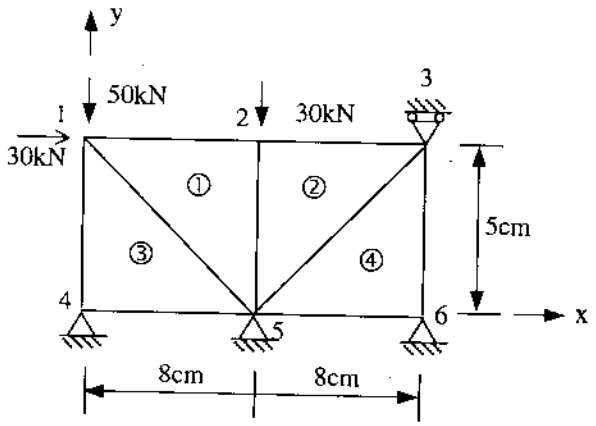
Phần tử 4: [4,663 -14,830 5,669]' kN/cm^2

Bài 16: Một mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi như trên hình B_{15}

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{15}

Đáp án:

1) Chuyển vị: [0,0022 -0,0024 0,0003 -0,0007 0,0034]'cm

2) Ứng suất:

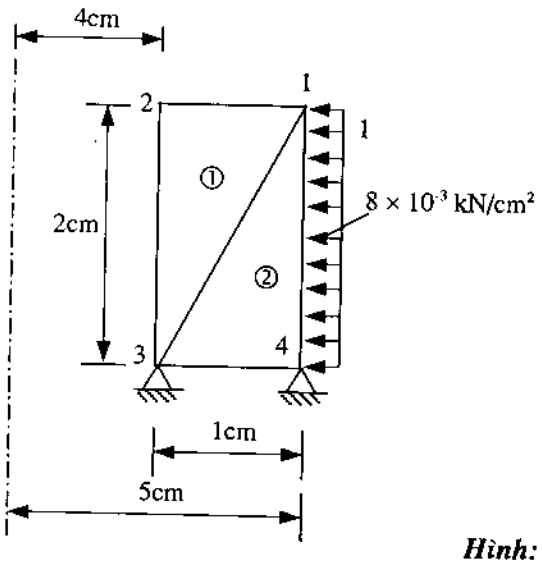
Phần tử 1: [-6,371 -4,886 2,215]' kN/cm²

Phần tử 2: [-0,884 -3,239 1,214]' kN/cm²

Phần tử 3: [-3,335 -11,115 3,518]' kN/cm²

Phần tử 4: [0 0 0,5528]' kN/cm²

Bài 17: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B16



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm²

Hệ số Poátxong: 0,3

Số thứ tự các nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B_{16}

Yêu cầu tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

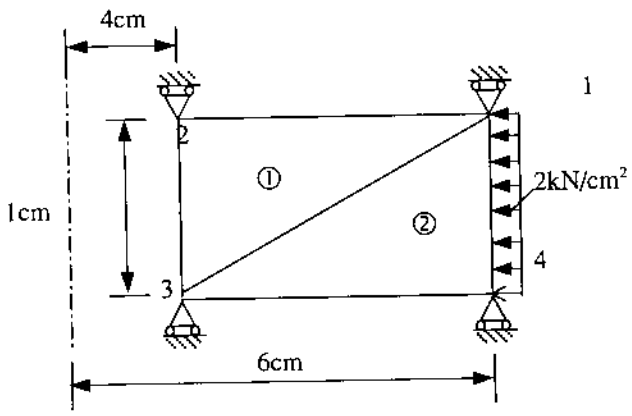
1- Chuyển vị: [0,1625 0,0689 0,0937 0,128]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [-0,007 -0,0023 -0,0122 0,0141]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-0,0061 0,0406 -0,0568 -0,0114]' kN/cm^2

Bài 18: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B17.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Hệ số Poátxong: 0,3
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình : B_{17}

Đáp án:

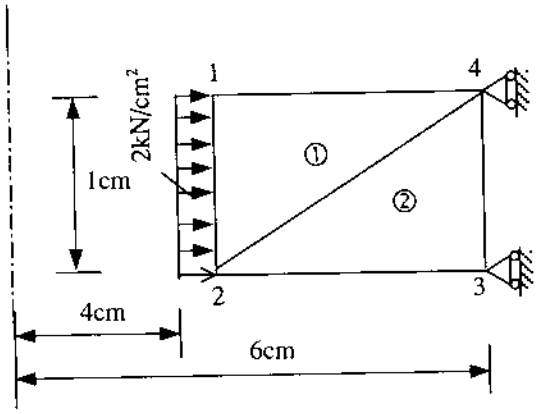
1- Chuyển vị: [-1,112 -1,246 -1,229 -1,131]'.10^{-3}cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [-1,204 -2,290 -0,143 -0,428]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-1,246 -2,036 -0,153 -5,540]' kN/cm^2

Bài 19: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B_{18}.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Hệ số Poátxong: 0,3
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B_{18}

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

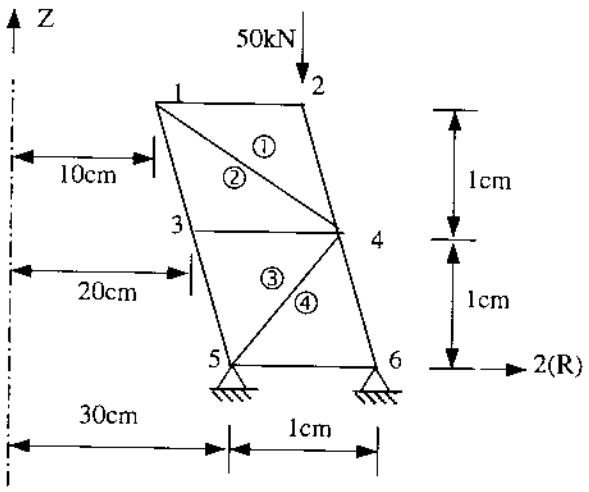
1- Chuyển vị: [-9,842.10^{-5} 3,043.10^{-4} -9,278.10^{-16} 2,799.10^{-4} 1,964.10^{-4} 2,02.10^{-4}]'cm

2- Ứng suất:

Phần tử 1: [-1,01 0,1797 0,3593 -0,1014]' kN/cm^2

Phần tử 2: [-0,067 -0,157 -0,314 -0,067]' kN/cm^2

Bài 20: Một vật rắn tròn xoay có mô hình FTHH như trên hình B_{19}.



Hệ số Poátxong: 0,3
Thứ tự các nút: không khoanh tròn
Thứ tự các phần tử: khoanh tròn

Hình: B_{19}

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: [-0,0722.10^{-5} 0,03.10^{-4} -0,0538.10^{-5} 0,0239.10^{4} 0,0684.10^{-5} -0,0430.10^{-4} 0,0732.10^{-5} -0,0442.10^{-4}]'cm

2- Ứng suất:

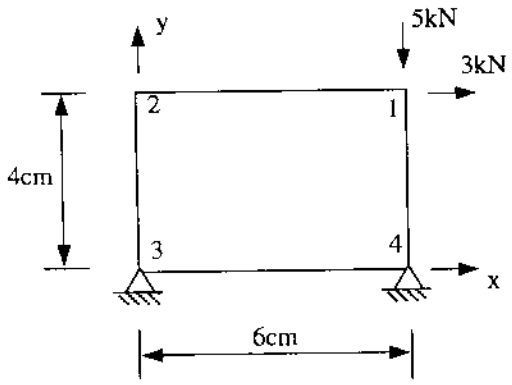
Phần tử 1: [0,0129 0,0214 -0,0021 0,0100]' kN/cm^2

Phần tử 2: [0,0760 0,1745 -0,0084 0,0754]' kN/cm^2

Phần tử 3: [-0,0645 -0,1535 0,0085 -0,0650]' kN/cm^2

Phần tử 4: [-0,0534 -0,1248 0,0059 -0,0533]' kN/cm^2

Bài 21: Một mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình B_{20}.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Bề dày tấm: 0,5cm
Hệ số Poátxong: 0,3
Không xét trọng lượng bản thân

Hình: B_{20}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

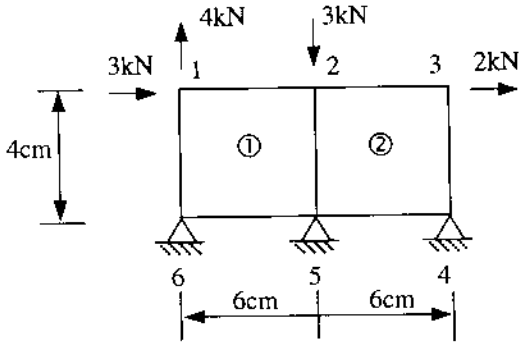
Đáp án:

Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (0,218; -9,774; -2,243; 7,116) \times 10^{-3}$ cm

Ứng suất: US1 = 303,559 kN/cm^2; US2 = -779,787 kN/cm^2

US3 = 1673,925 kN/cm^2

Bài 22: Một mô hình FTHH 4 cạnh 4 nút như trên hình B21



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Bề dày tấm: 0,5cm
Hệ số Poátxong: 0,3
Không xét trọng lượng bản thân

Hình: B_{21}

Số thứ tự các nút cục bộ và nút tổng thể thống kê trong bảng sau:

Phần tử	Nút cục bộ				Nút tổng thể			
1	1	2	3	4	1	6	5	2
2	1	2	3	4	2	5	4	3

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

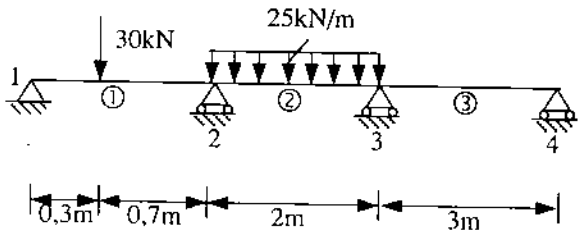
Đáp án:

1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (-0,452; -4,786; -0,584; 2,313; 3,092; 5,741) \times 10^{-4}$cm

2- Ứng suất (xem bảng dưới)

Phần tử	US1 (kN/cm^2)	US2 (kN/cm^2)	US3 (kN/cm^2)
1	-29,877	-89,972	46,590
2	175,200	316,433	60,396

Bài 23: Cho 1 dầm liên tục như trên hình B_{22}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/m^2
Mômen quán tính: 23×10^{-6}m^4
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{22}

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

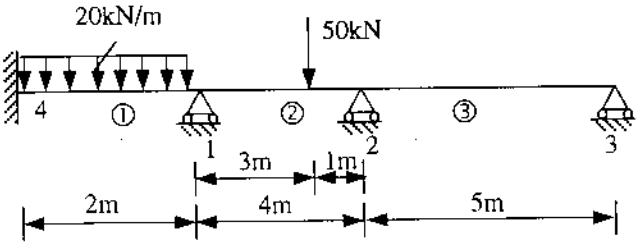
1- Chuyển vị: $[7,26.10^{-5} \quad 3,11.10^{-4} \quad -6,79.10^{-4} \quad 3,39.10^{-4}]'$ radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	8,6054	14,915	15,085
2	-8,6054	3,2789	27,663	22,337
3	-3,2789	0	1,093	-1,093

Bài 24: Một dầm liên tục như trên hình B_{23}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2

Mômen quán tính: 25×10^{-6}m^4

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: *B_{23}*

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

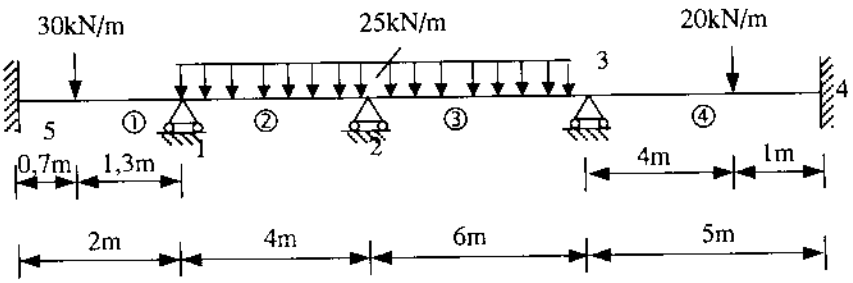
1- Chuyển vị: [7,701.10^{-4} -3,589.10^{-3} 1,794.10^{-3}]' radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-2,624	14,753	13,935	26,065
2	-14,753	11,305	8,674	41,326
3	-11,305	0	2,261	-2,261

Bài 25: Một dầm liên tục như trên hình B_{24}



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2

Mômen quán tính: 30×10^{-6} m^4

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: *B_{24}*

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

2- Lực cắt

Đáp án:

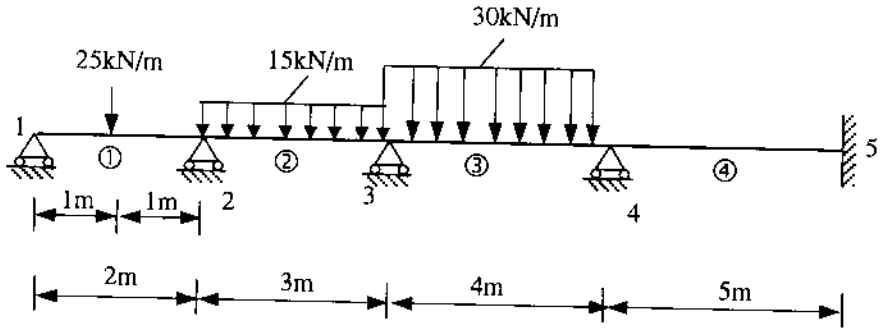
1- Chuyển vị: $[5,769.10^{-4}\ \ -5,604.10^{-3}\ \ -9,044.10^{-3}]'$ radian

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN. m)		Lực cắt (kN)	
1	-5,238	12,046	18,143	11,857
2	-12,046	70,456	35,398	64,602
3	-70,456	48,783	76,612	71,388
4	-48,783	-9,991	13,835	6,165

Bài 26: Một dầm liên tục như trên hình B_{25}



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2

Thứ tự nút: không khoanh tròn

Mômen quán tính: 35×10^{-6} m^4

Thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{25}

Dùng phương pháp phần tử hữu hạn tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

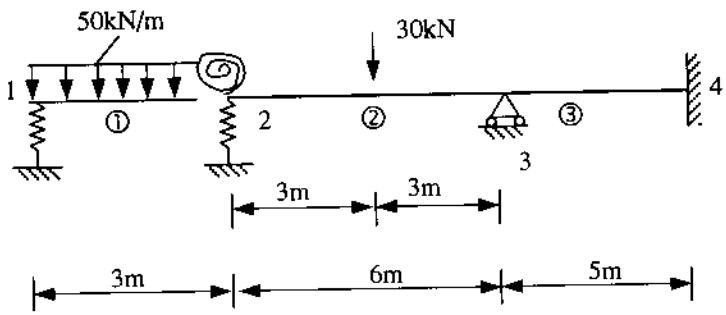
1- Chuyển vị: $[0,689\ \ -0,526\ \ 2,621\ \ 3,704]'$ rad

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	3,569	10,715	14,285
2	-3,569	34,352	12,239	32,761
3	-34,352	22,404	62,987	57,013
4	-22,404	-11,202	6,721	-6,721

Bài 27: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B_{26}



Độ cứng thẳng đứng (nút 1): 10×10^4 kN/m;
Độ cứng xoay (nút 2): 4×10^4 kN-m/rad;
Số thứ tự nút: không khoanh tròn;
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{26}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[-5{,}814.10^{-4}\text{m} \quad 1{,}035\text{rad} \quad -4{,}185.10^{-4}\text{rad} \quad -5{,}137.10^{-4}\text{ rad}]'$

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

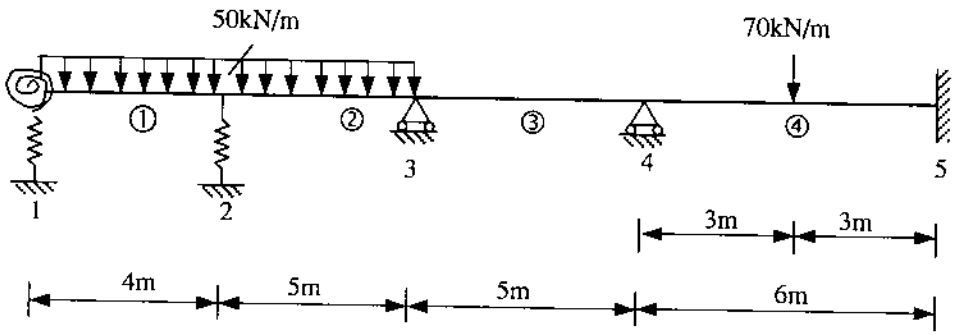
Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	0	50,587	58,138	97,862
2	-33,846	10,355	18,915	11,085
3	-10,355	-5,178	3,107	-3,107

Bài 28: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B_{27}. Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2;

Độ cứng xoay (nút 1): = 4.10^4 kN-m/rad;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Mômen quán tính: 120×10^{-6} m^4;

Độ cứng thẳng (nút 2): 10.10^4kN/m;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn.

Hình: *B_{27}*

Đáp án:

1- Chuyển vị: [1,072rad -2,470m 1,599rad 1,599rad -3,980rad]

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

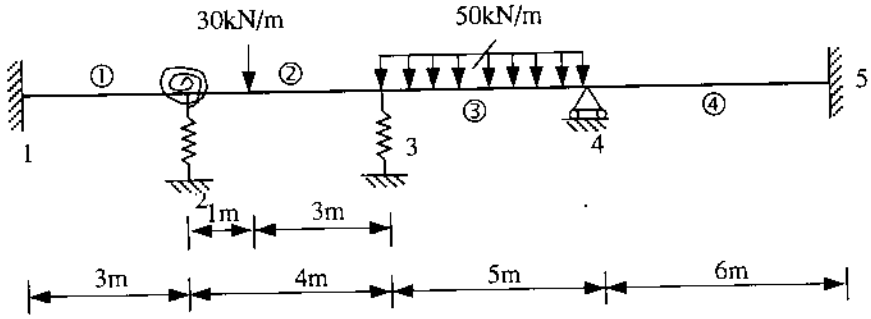
Thanh	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	42,860	97,117	86,436	113,564
2	-97,117	54,980	133,427	116,573
3	-54,980	10,340	8,916	-8,916
4	-10,340	73,550	24,475	45,525

Bài 29: Một dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi biểu thị trên hình B_{28}. Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2; Mômen quán tính: 120×10^{-6} m^4;

Độ cứng xoay (nút 2): = 4.10^4 kN-m/rad; Độ cứng thẳng (nút 3): 10.10^4kN/m;

Số thứ tự nút: không khoanh tròn; Số thứ tự các thanh: khoanh tròn.

Hình: B_{28}

Đáp án:

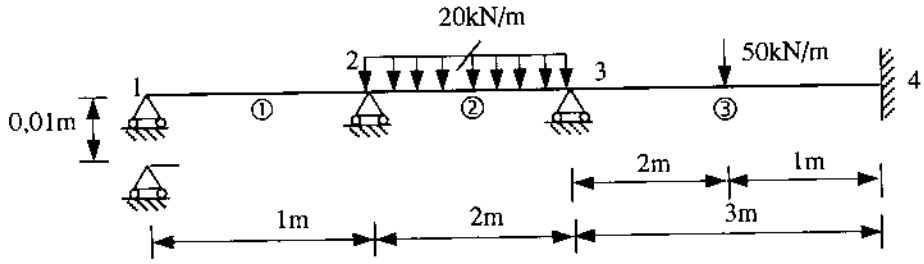
1- Chuyển vị: [$-8,965.10^{-5}$rad $-1,526.10^{-3}$m $3,187.10^{-3}$rad 0 $-3,937.10^{-3}$ rad]'

2- Mômen (xem kết quả dưới)

3- Lực cắt (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-1,501	-3,012	1,506	-1,506
2	6,598	70,380	6,068	23,932
3	-70,380	66,144	125,847	124,153
4	-66,144	-33,072	16,536	-16,536

Bài 30: Một dầm liên tục trên gối tựa bị lún như trên hình B_{29}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm^2 Mômen quán tính: 23×10^{-6} m^4

Số thứ tự nút: không khoanh tròn; Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{29}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

Đáp án:

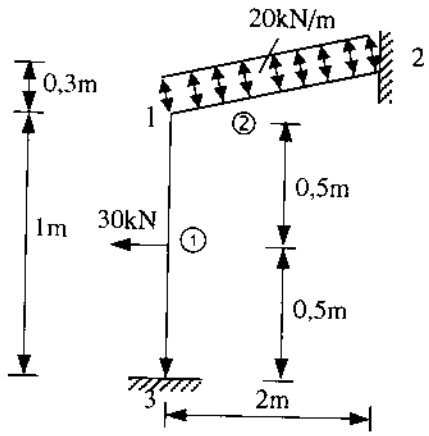
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6) = (-0{,}01m;\ 0{,}012rad;\ 0;\ 0{,}006rad;\ 0;\ -0{,}001rad)'$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)	
1	0	-50,795
2	50,795	27,492
3	-27,492	0

Bài 31: Một khung phẳng như trên hình B_{30}.



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\ m^2$

Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$

Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\ m^4$

Số thứ tự nút: không khoanh tròn;

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{30}

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

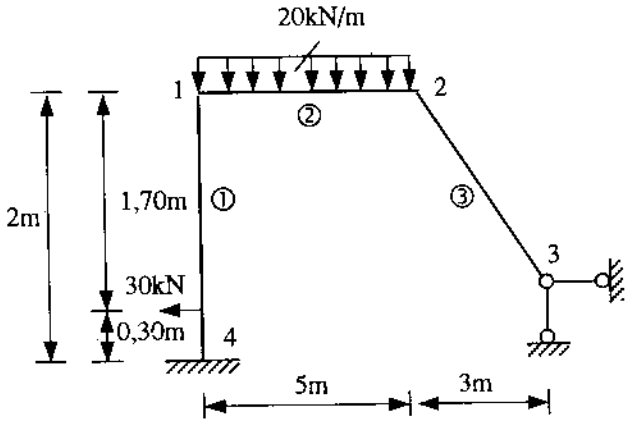
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3) = (-0{,}115m;\ -0{,}997m;\ 3{,}856rad)' \times 10^{-5}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN. m)		Lực cắt(kN. m)	
1	7,278	3,017	-25,294	-4,706
2	-3,017	9,015	17,258	23,190

Bài 32: Một khung phẳng như trên hình B_{31}.



Diện tích: 7×10^{-3} m^2
Mômen quán tính: 3×10^{-4} m^4
Môđun đàn hồi: 21×10^2 kN/m^2
Số thứ tự nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{31}

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7)' = (-2{,}023\text{m}; -0{,}602\text{m}; 1{,}851\text{rad};$
$-3{,}207\text{m}; -7{,}396\text{m}; -3{,}616\text{rad}; -1{,}492\text{rad})' \times 10^{-4}$

2- Mômen (xem bảng sau)

3- Lực cắt (xem bảng sau)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	37,288	41,302	-67,473	37,473
2	-41,302	7,420	44,276	30,724
3	-7,420	0	2,058	-2,058

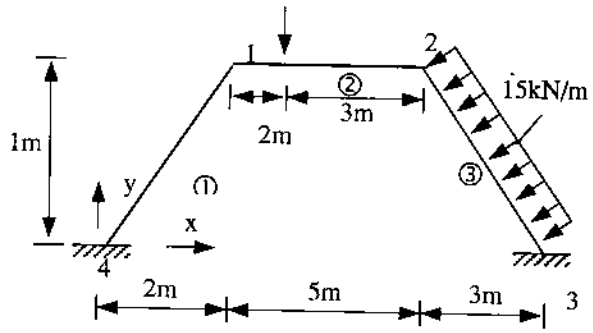
Bài 33: Một khung phẳng như trên hình B_{32}.

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt



Diện tích: $8 \times 10^{-3}\ m^2$

Mômen quán tính: $2 \times 10^{-4}\ m^4$

Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$

Số thứ tự nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{32}

Đáp án:

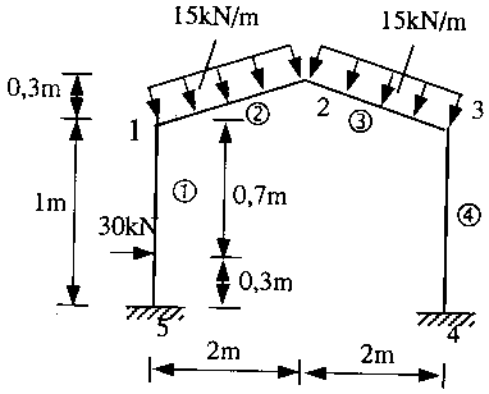
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)' = (-0{,}012m;\ -2{,}154m;\ 4{,}139rad;$
$-2{,}122m;\ -10{,}53m;\ -3{,}144\ rad)' \times 10^{-4}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	5,867	21,415	-12,201	12,201
2	-21,415	2,35	23,253	6,747
3	-2,35	31,003	14,656	32,778

Bài 34: Một khung phẳng như trên hình B_{33}.



Diện tích: $7 \times 10^{-3}\ m^2$

Mômen quán tính: $3 \times 10^{-4}\ m^4$

Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$

Số thứ tự nút: không khoanh tròn

Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{33}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

3- Lực cắt

Đáp án:

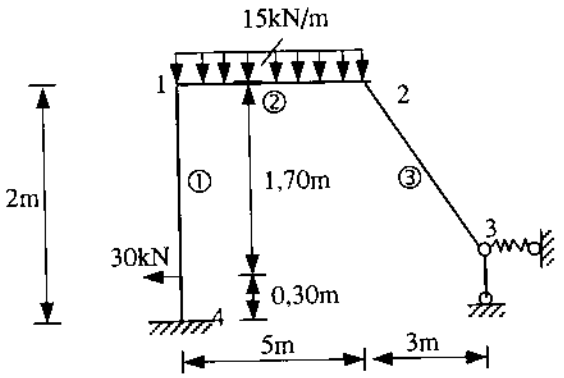
1- Chuyển vị: $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9) = (1{,}416m; -2{,}027m; 6{,}947rad;$
$0{,}653m; -21{,}240m; -0{,}207rad; -0{,}124m; -2{,}054m; -6{,}075rad) \times 10^{-5}$

2- Mômen (xem bảng dưới)

3- Lực cắt (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN - m)		Lực cắt (kN)	
1	-1,011	14,042	10,490	19,510
2	-14,042	-8,274	26,202	4,134
3	8,274	14,843	3,737	26,598
4	-14,843	-7,188	22,030	-22,030

Bài 35: Một khung phẳng có gối tựa đàn hồi như trên hình B_{34}.



Diện tích: $7 \times 10^{-3}\ m^2$
Mômen quán tính: $3 \times 10^{-4}\ m^4$
Môđun đàn hồi: $21 \times 10^7\ kN/m^2$
Độ cứng lò xo (nút 3): 10×10^4 kN/m
Số thứ tự nút: không khoanh tròn
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn

Hình: B_{34}

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

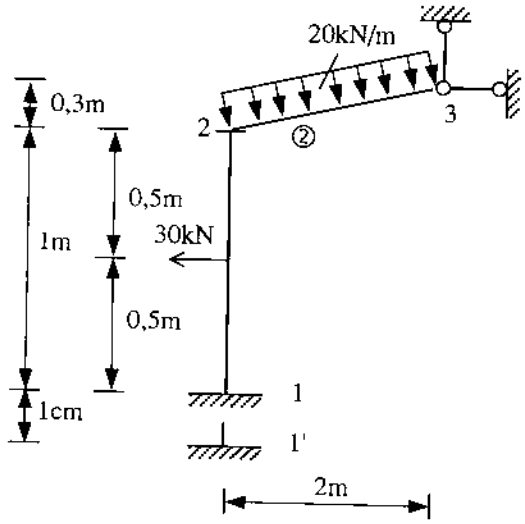
Đáp án:

1) Chuyển vị: $[6{,}945 \times 10^{-4}m \quad -3{,}446 \times 10^{-6}m \quad 7{,}138 \times 10^{-4}rad \quad 6{,}945 \times 10^{-4}m$
$-1{,}009 \times 10^{-3}m \quad -5{,}028 \times 10^{-4}rad \quad 1{,}372 \times 10^{-3}m \quad -2{,}543 \times 10^{-4}rad]^T$

2- Mômen (xem kết quả dưới)

Thanh	Mômen (kN - m)	
1	-14,158	23,158
2	-23,158	8,684
3	-8,684	0

Bài 36: Một khung phẳng có gối tựa bị lún như trên hình B_{35}.



Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/cm²
Diện tích: 8×10^{-3} m²
Mômen quán tính: 2×10^{-4} m⁴
Số thứ tự nút: không khoanh tròn;
Số thứ tự các thanh: khoanh tròn
Độ lún tại nút 1: 1cm

Hình: B_{35}

Dùng phương FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Mômen

Đáp án:

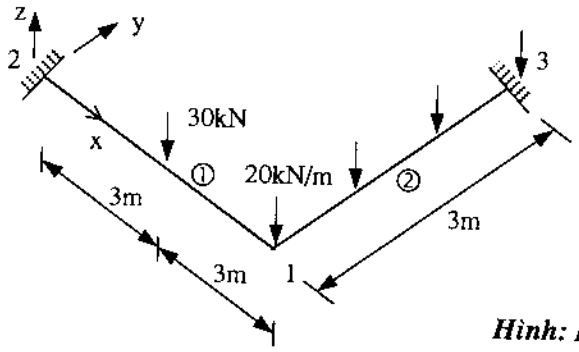
Chuyển vị: $[d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8 \quad d_9]'$

$$[0 \quad -0,01\text{m} \quad 0 \quad 0,0023\text{m} \quad -0,0004\text{m} \quad -0,008\text{rad} \quad 0 \quad 0 \quad 0,003\text{rad}]'$$

Mômen (xem bảng sau):

Phần tử	Mômen (kN.m)	
1	131,995	57,689
2	-57689	0

Bài 37: Cho một hệ dầm trực giao như trên hình B_{36}:



Diện tích: 0,125m²
Mômen quán tính x: 1821×10^{-6} m⁴
Mômen quán tính y: 26×10^{-4} m⁴
Môđun trượt: $6,36 \times 10^6$ kN/m²
Mômen đun đàn hồi: 21×10^7 kN/m²

Hình: B_{36}

Tính: 1- Chuyển vị

2- Mômen uốn và mômen xoắn

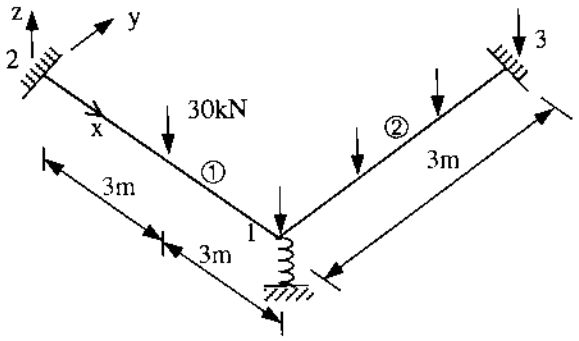
Đáp án:

$(d_1, d_2, d_3) = (-6{,}802m; 3{,}598rad; 1{,}271rad) \times 10^4$

Xem bảng dưới

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-3,006	61,486	0,694	-0,694
2	-276,904	-116,593	-0,413	0,413

Bài 38: Cho một hệ dầm trực giao như trên hình B_{37}



Diện tích: $0{,}135m^2$

Mômen quán tính x: $1821 \times 10^{-6} m^4$

Mômen quán tính y: $26 \times 10^{-4} m^4$

Môđun trượt: $6{,}36 \times 10^6 kN/m^2$

Mômen đun đàn hồi: $21 \times 10^7 kN/m^2$

Hệ số độ cứng (gối đàn hồi): 10^5 kN/m

Hình: B_{37}

Tính: 1- Chuyển vị

2- Mômen uốn

3- Mômen xoắn

Đáp án:

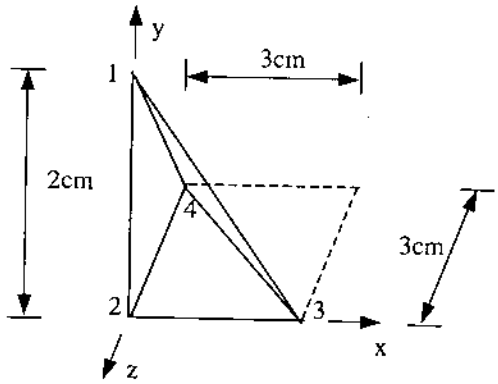
1- Chuyển vị $(d_1, d_2, d_3) = (-4{,}389m; 4{,}244rad; -5{,}031rad) \times 10^{-5}$

2- Mômen uốn (xem bảng dưới)

3- Mômen xoắn (xem bảng dưới)

Phần tử	Mômen (kN.m)		Lực cắt (kN)	
1	-31,656	4,188	0,082	-0,082
2	-45,893	-44,662	0,194	-0,194

Bài 39: Một phần tử hữu hạn tứ diện 1234 như trên hình B_{38}



Hình: B_{38}

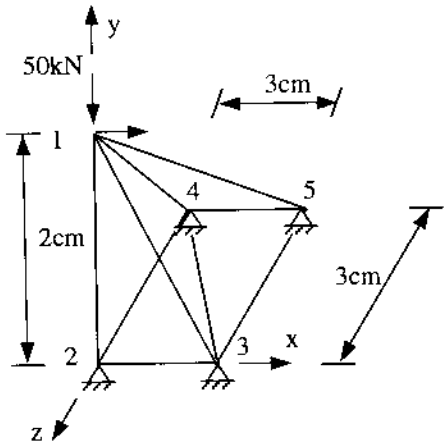
Lập ma trận độ cứng tổng thể S.

Đáp án:

Ma trận S có tính đối xứng

S(1,1) = 646,15	S(1,2) = 0	S(1,3) = 0	S(1,4) = -538,46
S(1,5) = -215,38	S(1,6) = 215,38	S(1,7) = 0	S(1,8) = -215,38
S(1,9) = 107,69	S(1,10) = 0	S(1,11) = 0	S(1,12) = 215,38
S(2,2) = 1453,85	S(2,3) = -807,69	S(2,4) = -323,08	S(2,5) = -1346,15
S(2,6) = 323,077	S(2,7) = 323,07	S(2,8) = 0	S(2,9) = 0
S(2,10) = -107,69	S(2,11) = 161,54	S(2,12) = 0	S(3,3) = 1543,846
S(3,4) = 323,28	S(3,5) = 700	S(3,6) = -753,85	S(3,7) = -323,08
S(3,9) = 0	S(3,10) = 107,69	S(3,11) = -376,92	S(3,12) = 0
S(4,4) = 969,23	S(4,5) = 538,46	S(4,6) = 358,97	S(4,7) = -502,56
S(4,8) = 143,59	S(4,9) = 71,79	S(4,10) = 0	S(4,11) = -107,69
S(4,12) = -215,38	S(5,5) = 1417,95	S(5,6) = -323,08	S(5,7) = -323,08
S(5,8) = 0	S(5,9) = 0	S(5,10) = 71,79	S(5,11) = 161,54
S(5,12) = -143,59	S(6,6) = 646,154	S(6,7) = 215,38	S(6,8) = 143,59
S(6,9) = -71,79	S(6,10) = 0	S(6,11) = 0	S(6,12) = 0
S(7,7) = 502,56	S(7,8) = 0	S(7,9) = 0	S(7,10) = 0
S(7,11) = 107,69	S(8,8) = 143,59	S(8,9) = 71,79	S(8,10) = 0
S(8,11) = 0	S(8,12) = 0	S(9,9) = 35,90	S(9,10) = 0
S(9,11) = 0	S(9,12) = 0	S(10,10) = 35,90	S(10,11) = 0
S(10,12) = 0	S(11,11) = 125,64	S(11,12) = 0	S(12,12) = 143,59

Bài 40: Một hình FTHH tứ diện 12345 như trên hình B_{39}.



Phần tử	Số TT nút tổng thể			
1	1	2	3	4
2	1	3	5	4

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{39}

Dùng phương pháp FTHH tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

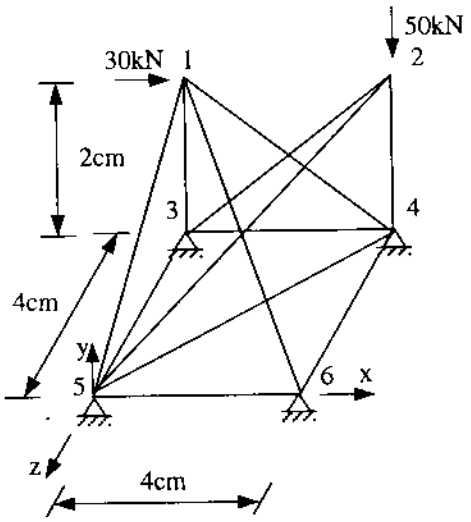
1- Chuyển vị: [2,321 -2,487 -1,382] x 10^{-2}cm

2- Ứng suất

Phần tử 1: [-10,714 -42,857 7,143 7,143 -15 15] kN/cm^2

Phần tử 2: [-10,714 -42,857 7,143 7,143 -15 15] kN/cm^2

Bài 41: Một hình FTHH tứ diện gồm 3 phần tử như trên hình B_{40}.



Phần tử	Số TT nút tổng thể			
1	1	5	4	3
2	1	6	4	5
3	2	3	5	4

Hệ số Poátxong: 0,3

Hình: B_{40}

Tính:

1- Chuyển vị

2- Ứng suất

Đáp án:

1- Chuyển vị: $[4{,}536 \times 10^{-8} \quad 1{,}451 \times 10^{-10} \quad -1{,}152 \times 10^{-15}$

$0 \quad -2{,}264 \times 10^{-7} \quad 0\,]'$cm

2) Ứng suất

Phần tử 1: $[-6{,}40 \times 10^{-2} \quad 6{,}40 \times 10^{-2} \quad -6{,}40 \times 10^{-2} \quad -5{,}08 \times 10^{-7}$

$0 \quad 20]'$ kN/cm^2

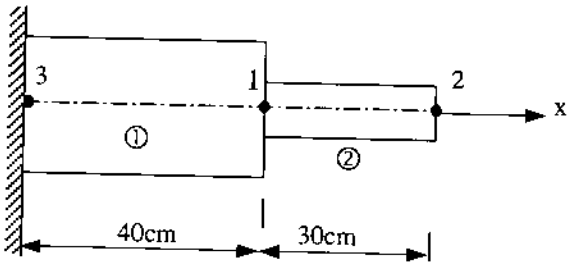
Phần tử 2: $[-6{,}40 \times 10^{-2} \quad 6{,}40 \times 10^{-2} \quad -6{,}40 \times 10^{-2}$

$-5{,}08 \quad 0 \quad 20]'$ kN/cm^2

Phần tử 3: $[99{,}31 \quad 6{,}40 \times 10^{-2} \quad 99{,}81$

$0 \quad 0 \quad 0]'$ kN/cm^2

Bài 42: Tính giá trị riêng lớn nhất và véctơ riêng tương ứng cho hệ một chiều trên hình B_{41}.



Diện tích thanh 1: 4cm^2
Diện tích thanh 2: 2,5cm^2
Môđun đàn hồi: 21000kN/cm^2
Khối lượng riêng: 785×10^{-5} kg/cm^3

Hình: B_{41}

Đáp án:

Giá trị riêng lớn nhất: 17719,24

Véctơ riêng tương ứng: $[1 \quad -0{,}4951]'$

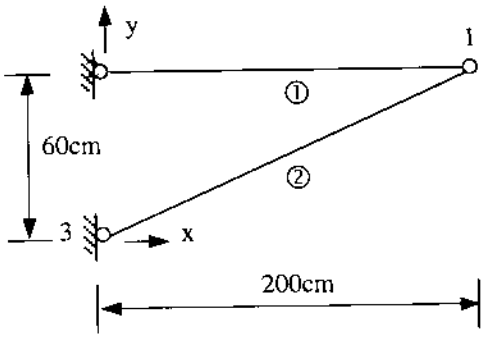
Bài 43: Đầu đề trên hình B_{41}. Tính giá trị riêng bé nhất và vectơ riêng tương ứng.

Đáp án:

Giá trị riêng bé nhất: 1864,12

Vectơ riêng tương ứng: $[1 \quad 0{,}7158]'$

Bài 44: Tính giá trị riêng lớn nhất và véctơ riêng tương ứng cho hệ giàn trên hình B_{42}.



Diện tích toàn bộ các thanh: $4cm^2$
Môđun đàn hồi: 7200 kN/cm^2
Khối lượng riêng: 28×10^{-4} kg/cm^3

Hình: B_{42}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 48,214

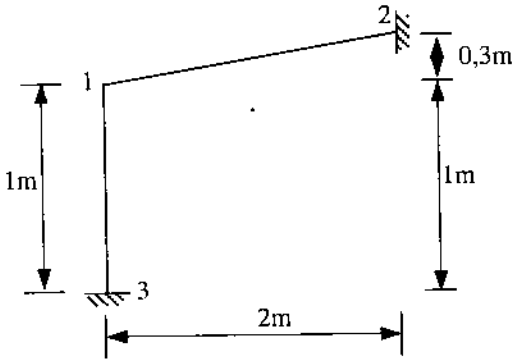
Véctơ riêng tương ứng: [1,0 0,002]'

Bài 44: Đầu đề như trên hình B_{42}. Tìm giá trị riêng bé nhất và véctơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 48,214

Véctơ riêng tương ứng: [1,0 493,829]'

Bài 45: Tìm giá trị riêng lớn nhất cho hệ khung trên hình B_{43}.



Diện tích toàn bộ các thanh: 8×10^{-3} m^2
Mômen quán tính toàn bộ các thanh: 2×10^{-4} m^4
Môđun đàn hồi: 21×10^7 kN/m^2
Khối lượng riêng: 7850 kg/m^3

Hình: B_{43}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 3382040,28

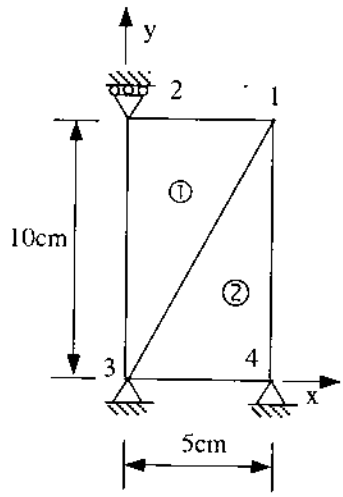
Véctơ riêng tương ứng: [1,0 0,058 -0,098]'

Bài 46: Đầu đề như trên hình B_{43}. Tính giá trị riêng bé nhất và véctơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 560537,56

Véctơ riêng tương ứng: [1,0 0,369 3,289]'

Bài 47: Tìm giá trị riêng lớn nhất và véctơ riêng tương ứng cho hệ có mô hình FTHH tam giác biến dạng không đổi biểu thị trên hình B_{44}.



Môđun đàn hồi: 21000 kN/cm^2
Bề dày tấm: 1cm
Hệ số Poátxong: 0,3
Số thứ tự các nút: không khoanh tròn
Số thứ tự phần tử: khoanh tròn
Khối lượng riêng: 785 × 10^{-5} kg/cm^3

Hình: B_{44}

Đáp án: Giá trị riêng lớn nhất: 780694,49

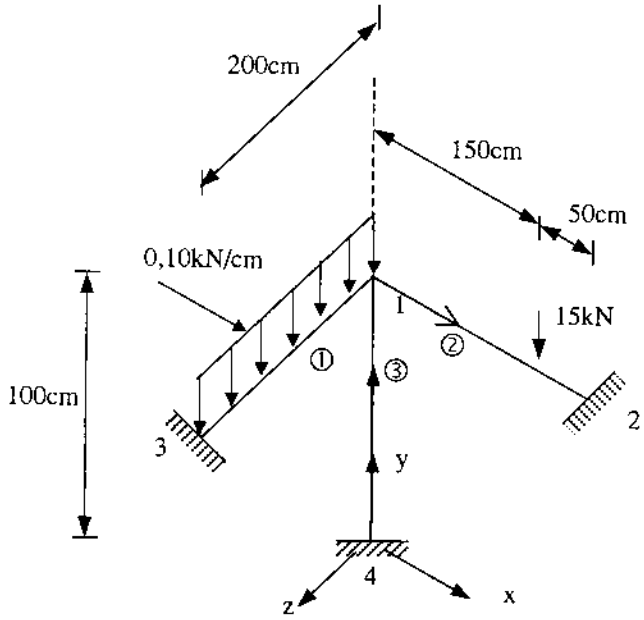
Véctơ riêng tương ứng: [1,0 -5,931 -5,466]'

Bài 48: Đầu đề như trên hình B_{44}. Tính giá trị riêng bé nhất và véctơ riêng tương ứng.

Đáp án: Giá trị riêng bé nhất: 0,113

Véctơ riêng tương ứng: [1,0 -0,281 0,965]'

Bài 49: Một khung không gian như trên hình B_{45}.



Hình: B_{45}

Diện tích:

Thanh 1: 20cm^2

Thanh 2: 20cm^2

Thanh 3: 30cm^2

Môđun đàn hồi : 21000kN/cm^2

Môđun xoắn: 8077cm^2

Mômen quán tính x:

Thanh 1: 4cm^4

Thanh 2: 4cm^4

Thanh 3: 10cm^4

Môđun quán tính y:

Thanh 1: 53cm^4

Thanh 2: 53cm^4

Thanh 3: 150cm^4

Môđun quán tính z

Thanh 1: 720cm^4

Thanh 2: 720cm^4

Thanh 3: 2230cm^4

Dùng chương trình CTR18 tính các nội lực:

- Q_y, M_x, M_z cho các thanh 1, 2
- N, M_y, M_z, M_z cho thanh 3

Đáp án:

Nội lực \ Phần tử	1	2
Q_{y1} (kN)	-5,067	-5,067
M_{x1} (kN.cm)	0	0
M_{z1} (kN.cm)	-4,465	-4,465
Q_{y2} (kN)	-10,398	-0,398
M_{x2} (kN.cm)	0	0
M_{y2} (kN.cm)	359,879	26,545

Nội lực \ Phần tử	3
N_1 (kN)	0
M_{y1} (kN.cm)	18900
M_{z1} (kN.cm)	164,434
N_2 (kN)	0
M_{y2} (kN.cm)	18900
M_{z2} (kN.cm)	-4,465

Bài 50: Tìm giá trị riêng liên tiếp và các véctơ riêng tương ứng của ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Đáp án:

Giá trị riêng lớn nhất:	38,802
Véctơ riêng tương ứng:	[1 0,648 2,955]'
Giáp trị trung gian :	6,429
Véctơ riêng tương ứng:	[1 -18,310 -12,430]
Giá trị riêng bé nhất:	-2,150
Véctơ riêng tương ứng:	[1 -1,011 1,558]

PHỤ LỤC

Sau đây là 22 chương trình soạn theo ngôn ngữ Turbo Pascal 7.0

1. Chương trình **CTR1**: Bài toán một chiều dùng phương pháp loại trừ
2. Chương trình **CTR2**: Bài toán một chiều dùng phương pháp mô hình lò xo
3. Chương trình **CTR3**: Bài toán một chiều kiểu hàm hình dạng bậc hai
4. Chương trình **CTR4**: Tính giàn phẳng
5. Chương trình **CTR5**: Tính giàn không gian
6. Chương trình **CTR6**: Tính giàn phẳng chịu tác dụng của nhiệt độ
7. Chương trình **CTR7**: Tính giàn phẳng chế tạo không chính xác
8. Chương trình **CTR8**: Bài toán 2 chiều kiểu phần tử hữu hạn tam giác biến dạng không đổi.
9. Chương trình **CTR9**: Tính gần đúng vật rắn tròn xoay chịu tải trọng đối xứng
10. Chương trình **CTR10**: Tính dầm liên tục trên gối tựa thông thường
11. Chương trình **CTR11**: Tính dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi
12. Chương trình **CTR12**: Tính dầm liên tục trên gối tựa lún theo phương pháp mô hình lò xo.
13. Chương trình **CTR13**: Giải gần đúng bài toán ứng suất phẳng kiểu FTHH 4 cạnh 4 nút.
14. Chương trình **CTR14**: Tính khung phẳng trên gối tựa thường và gối tựa đàn hồi.
15. Chương trình **CTR15**: Tính khung phẳng trên gối tựa lún theo phương pháp mô hình lò xo.
16. Chương trình **CTR16**: Tính hệ dầm trực giao
17. Chương trình **CTR17**: Giải bài toán 3 chiều kiểu FTHH 4 mặt 4 nút
18. Chương trình **CTR18**: Tính khung không gian
19. Chương trình **CTR19**: Tính giá trị riêng lớn nhất cho hệ giàn
20. Chương trình **CTR20**: Tính giá trị riêng bé nhất cho hệ giàn
21. Chương trình **CTR21**: Tính giá trị riêng lớn nhất cho hệ khung
22. Chương trình **CTR22**: Tính giá trị riêng bé nhất cho hệ khung

```
Program CTR1_Bai_toan_mot_chieu_dung_ff_loai_tru;
Uses crt;
type  mt1= array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3= array[1..20] of integer;
Var  i,j,k,n,x,ss,tbt,st,sbt,rr,y:integer; a,d1,d2,u:mt3;
    c1,c2,c3,c4,c5,c6,cv,f,fc,fe,fl,fn,t,cd,dt,e,tg,qq,us,qc,b:mt2;
    s,sc,sr:mt1;
    al,del,q,r,tt:real;

 Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
    s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
 UNTIL(s= n -1);
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
       if(a[i,i]<>0) then
       x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;
end;
Begin    clrscr;

(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so  BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu');
readln(y);
```

```
writeln('nhap so thu tu  BTD co chuyen vi triet tieu');
if (y<>0) then for i:=1 to y do
readln(u[i]);
writeln('nhap chieu dai ');
for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);
writeln('nhap cuong do luc bien');
for i:=1 to st do  readln(t[i]);
writeln('nhap he so gian no');
readln(al);
writeln('nhap so gia mhiet do');
readln(del);
writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to tbt do  readln(fn[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
c1[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i];
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]-c1[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];
(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to st do
begin
c2[i]:=dt[i]*cd[i]*tt/2;  c3[i]:=t[i]*cd[i]/2; c4[i]:=e[i]*dt[i]*al*del;
c5[i]:=c2[i]+c3[i]-c4[i];  c6[i]:=c2[i]+c3[i]+c4[i];
f[d1[i]]:=f[d1[i]]+c5[i];  f[d2[i]]:=f[d2[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to tbt do    f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);
```

```
(*Tnh ung suat*);
if(y<>0) then for i:=1 to y do qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(qq[d2[i]]-qq[d1[i]]);

(*Tnh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do     sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
  fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k]-f[i];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR2_Bai_toan_mot_chieu_dung_ff_mo_hinh_lo_xo;
Uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real;  mt2=array[1..20] of real;
   mt3=array[1..20] of integer;
Var   i,j,k,n,x,ss,st,sbt,tbt,rr,y:integer; d1,d2,u:mt3;
     c1,c2,c3,c4,c5,c6,cv,f,fc,fe,fl,fn,t,cd,dt,e,tg,qq,us,max,a:mt2;
     ke,s,sc:mt1;
     al,del,q,r,c,maxx,tt:real;

procedure gtcdtd(a:mt1;n:integer);
begin
 max[i]:=abs(a[i,1]);
for i:=1 to n do
for j:=2 to n do
begin
if ((abs(a[i,j])>max[i]) or (abs(a[i,j])=max[i]))  then
 max[i]:=abs(a[i,j]) else max[i]:=max[i] ;
end;
 maxx:=max[1];
for i:=2 to n do
begin
 if(max[i]>maxx) then
 maxx:=max[i] else maxx:=maxx ;
end;
end;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 (*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
     s:=0;
  REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
   UNTIL(s= n -1);
    x[n]:=b[n]/a[n,n];
    for i:= n -1  downto 1 do
       Begin
         r :=0;
```

```
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
      End;
  end;

  Begin    clrscr;
  (*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
  writeln('nhap so thanh');
  readln(st);
  writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
  readln(sbt);
  writeln('nhap tong so BTD ');
  readln(tbt);
  writeln('nhap so BTD co  chuyen vi cho truoc ');
  readln(y);
  writeln('nhap so thu tu BTD co  chuyen vi cho truoc ');
  if(y<>0) then for i:=1 to y do
  readln(u[i]);
  writeln('nhap  gia tri cac  chuyen vi cho truoc');
  if(y<>0) then for i:=1 to y do
  readln(a[i]);
  writeln('nhap chieu dai');
  for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
  writeln('nhap dien tich');
  for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
  writeln('nhap modun dan hoi');
  for i:=1 to st do  readln(e[i]);
  writeln('nhap BTD d1');
  for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
  writeln('nhap BTD d2');
  for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
  writeln('nhap ti trong');
  readln(tt);
  writeln('nhap cuong do luc bien');
  for i:=1 to st do  readln(t[i]);
  writeln('nhap he so gian no');
  readln(al);
  writeln('nhap so gia mhiet do');
  readln(del);
  writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc');
  for i:=1 to tbt do  readln(fn[i]);
  (*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
  for i:=1 to st do
```

```
begin
c1[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i];
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]-c1[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de tinh GTTD max cua cac fan tu MT*);
GTCDTD(s,tbt);
 c:=(maxx)*10E+08;
 if(y<>0) then for i:=1 to y do    s[u[i],u[i]]:=s[u[i],u[i]]+c;
(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to st do
begin
c2[i]:=dt[i]*cd[i]*tt/2;  c3[i]:=t[i]*cd[i]/2; c4[i]:=e[i]*dt[i]*al*del;
c5[i]:=c2[i]+c3[i]-c4[i];  c6[i]:=c2[i]+c3[i]+c4[i];
f[d1[i]]:=f[d1[i]]+c5[i];  f[d2[i]]:=f[d2[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to tbt do    f[i]:=f[i]+fn[i];
if (y<>0) then for i:=1 to y do   f[u[i]]:=f[u[i]]+c*a[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,tbt);

(*Tnh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(qq[d2[i]]-qq[d1[i]]);

(*Tnh fan luc*);
if(y<>0) then for i:=1 to y do
fl[u[i]]:=-c*(qq[u[i]]-a[i]);

(*Doc ket qua*);
writeln('chuyen vi');
for i:=1 to tbt  do
writeln(qq[i]);
writeln('ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln('fan luc');
for i:=1 to y do
writeln(fl[u[i]]);
readln;
end.
```

```
Program CTR3_Bai_toan_mot_chieu_kieu_ham_hinh_dang_bac_hai;
Uses crt;
type mt1= array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
     mt3= array[1..20] of integer;
Var  i,j,k,n,x,ss,tbt,st,sbt,rr,y:integer; a,d1,d2,d3,u:mt3;
     c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,f,fl,fn,cd,dt,e,qq,us1,us2,us3:mt2;
     s,sc,sr,ke:mt1; q,r,tt,t:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
(*Khu dan cac fan tu cua ma tran*);
    s:=0;
REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
     Begin
      if(a[s,s]<>0) then
      q:=a[s,i]/a[s,s];
      for j:=i to n do
       a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
     End
UNTIL(s= n -1);
x[n]:=b[n]/a[n,n];
for i:= n -1  downto 1 do
   Begin
      r :=0;
      for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
      if(a[i,i]<>0) then
      x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
   End;
end;

Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu');
readln(y);
writeln('nhap so thu tu  BTD co chuyen vi triet tieu');
```

```
if(y<>0) then for i:=1 to y do
readln(u[i]);
writeln('nhap chieu dai ');
for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);
writeln('nhap cuong do  luc bien');
readln(t);
writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to tbt do  readln(fn[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
c1[i]:=7*dt[i]*e[i]/(3*cd[i]);  c2[i]:=dt[i]*e[i]/(3*cd[i]);
c3[i]:=-8*dt[i]*e[i]/(3*cd[i]); c4[i]:=16*dt[i]*e[i]/(3*cd[i]);
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
s[d2[i],d1[i]]:=s[d2[i],d1[i]]+c2[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c3[i];
s[d3[i],d1[i]]:=s[d3[i],d1[i]]+c3[i];
s[d3[i],d2[i]]:=s[d3[i],d2[i]]+c3[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c4[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do  s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to st do
begin
c5[i]:=dt[i]*cd[i]*tt/6;  c6[i]:=t*cd[i]/6; c7[i]:=c5[i]+c6[i];
f[d1[i]]:=f[d1[i]]+c7[i];  f[d2[i]]:=f[d2[i]]+c7[i];
```

```
f[d3[i]]:=f[d3[i]]+c7[i];
end;
for i:=1 to tbt do     f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tnh ung suat*);
if(y<>0) then for i:=1 to y do  qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to st do
begin
us1[i]:=(2*e[i]/cd[i])*(-1.5*qq[d1[i]]-0.5*qq[d2[i]]+2*qq[d3[i]]);
us2[i]:=(2*e[i]/cd[i])*(0.5*qq[d1[i]]+1.5*qq[d2[i]]-2*qq[d2[i]]);
us3[i]:=(2*e[i]/cd[i])*(-0.5*qq[d1[i]]+0.5*qq[d2[i]]);
end;

(*Tnh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do     sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
  fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k]-f[i];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
begin
writeln(us1[i]);
writeln(us2[i]);
writeln(us3[i]);
end;
writeln('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR4_Tinh_gian_phang;
 uses crt;
Type mt1=array[1..20,1..20] of real;  mt2=array[1..20] of real;
    mt3= array[1..20]of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr:integer; q,r:real;
 a,cd,b,c,d,f,qq,us,fl,l,m,dt,e,x1,x2,y1,y2:mt2;
 n1,n2,d1,d2,d3,d4:mt3;
 s,sr:mt1;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var     i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
  s:=0;
  REPEAT
      s:=s+1;
      for i:= s+1 to n do
        Begin
          if(a[s,s]<>0) then
          q:=a[s,i]/a[s,s];
          for j:=i to n do
           a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
        End
  UNTIL(s= n -1);
   x[n]:=b[n]/a[n,n];
   for i:= n -1  downto 1 do
      Begin
         r :=0;
         for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
         if(a[i,i]<>0) then
         x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
      End;
  end;

   begin  clrscr;
   (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
   writeln('nhap tong so BTD');
   readln(tbt);
   writeln('nhap so thanh');
   readln(st);
   writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
   readln (sbt);
   writeln('nhap ngoai luc');
   for i :=1 to sbt do
```

```
  readln(f[i]);
  writeln('nhap toa do x1'); for i:=1 to st do readln(x1[i]);
  writeln('nhap toa do x2'); for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
  writeln('nhap toa do y1'); for i:=1 to st do readln(y1[i]);
  writeln('nhap toa do y2'); for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
  writeln('nhap dien tich'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
  writeln('nhap modun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
  writeln('nhap thu tu bac tu do d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
  writeln('nhap thu tu bac tu do d2');  for i:=1 to st do   readln(d2[i]);
  writeln('nhap thu tu bac tu do d3'); for i:=1 to st do   readln(d3[i]);
  writeln('nhap thu tu bac tu do d4');  for i:=1 to st do   readln(d4[i]);

  (* Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
  for i:=1 to st do
  begin
     cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
     l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i];  m[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
     b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i]; c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
     d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
  end;
  for i:=1 to st do
  begin
     s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b[i];
     s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c[i];
     s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
     s[d1[i],d3[i]]:= s[d1[i],d3[i]]-b[i];
     s[d2[i],d3[i]]:= s[d2[i],d3[i]]-c[i];
     s[d3[i],d3[i]]:= s[d3[i],d3[i]]+b[i];
     s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c[i];
     s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
     s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c[i];
     s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
  end;
  for i:=1 to tbt do
  for j:= 1 to i-1 do      s[i,j]:=s[j,i];

 (*Goi chuong trinh con de tinh chuyen vi*);
 GHFT(s,f,qq,sbt);

  (*Tinh fan luc*);
  rr:=sbt+1;
  for i:=rr to tbt do
  for j:=1 to sbt do  fl[i]:=0;   fl[i]:= fl[i]+sr[i,j]*qq[j];
```

```
(*Tinh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*(l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]));

(*Doc ket qua*);
 writeln ('gia tri chuyen vi la');
 for i:=1 to sbt do
 writeln(qq[i]);
 writeln ('gia tri ung suat la');
 for i:=1 to st do
 writeln(us[i]);
 writeln ('gia tri fan luc');
 for i:=rr to tbt do
 writeln(fl[i]);
 readln;
 end.
```

```
Program CTR5_Tinh_gian_khong_gian;
 uses crt;
type  mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
     mt3=array[1..20]of integer;
Var i,j, k,tbt,st,sbn,sbt,ss,rr:integer;
 x1,x2,y1,y2,z1,z2,md,a,b,c,d,x,y,f,qq,fl,us,l,m,n,cd,dt,e:mt2;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6:mt3;
 s,sr:mt1;   q,r:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var     i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
 UNTIL(s= n -1);  if(a[n,n]<>0) then
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
       if(a[i,i]<>0) then
       x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;
end;

begin  clrscr;
 (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('nhap tong so BTD ');
 readln(tbt);
 writeln('nhap so thanh');
 readln(st);
 writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
 readln (sbt);
 writeln('nhap ngoai luc');
 for i :=1 to sbt do
 readln(f[i]);
```

```
writeln('nhap x1'); for i:=1 to st do readln(x1[i]);
writeln('nhap x2'); for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('nhap y1'); for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('nhap y2'); for i:=1 to st do readln(y2[i]);
writeln('nhap z1'); for i:=1 to st do  readln(z1[i]);
writeln('nhap z2'); for i:=1 to st do readln(z2[i]);
writeln('nhap dien tich'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap thu tu bac tu do');
writeln('nhap  d1[i]');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap  d2[i]');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap  d3[i]');  for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap  d4[i]');  for i:=1 to st do readln(d4[i]);
writeln('nhap  d5[i]');  for i:=1 to st do readln(d5[i]);
writeln('nhap  d6[i]');  for i:=1 to st do readln(d6[i]);

(*Ghep cac ma tran do cung rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to st do
 begin
  cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i])+sqr(z2[i]-z1[i]));
  if(cd[i]<>0) then
  begin
  l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; m[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
  n[i]:=(z2[i]-z1[i])/cd[i];
  a[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];    b[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
  c[i]:=l[i]*n[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];    d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
  x[i]:=m[i]*n[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];    y[i]:=sqr(n[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
  end;
 end;
 for i:=1 to st do
 begin
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+a[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+b[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+x[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+y[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-a[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-b[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+a[i];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-b[i];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-d[i];
  s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]-x[i];
```

```
  s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]+b[i];
  s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+d[i];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]-c[i];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-x[i];
  s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]-y[i];
  s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c[i];
  s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+x[i];
  s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+y[i];
 end;
 for i:=1 to tbt do
 for j:=1 to i-1 do        s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

 (*Tinh ung suat*);
 for i :=1 to st do
 us[i]:=(e[i]/cd[i])*(l[i]*(qq[d4[i]]-qq[d1[i]])+m[i]*(qq[d5[i]]-
 qq[d2[i]])+n[i]*(qq[d6[i]]-qq[d3[i]]));

(*Doc ket qua*)
writeln ('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln (qq[i]);
writeln ('ung suat');
for i:=i to st do
writeln (us[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR6_Tinh_gian_phang_chiu_tac_dung_cua_nhiet_do;
 uses crt;
 Var i,j, k,st,sbt,tbt,ss,rr:integer;
 e,dt,cd,b,c,d,f,ft,fn,qq,fl,ff,us,l,m,eal:array[1..10] of real;
 d1,d2,d3,d4:array[1..10]of integer;
 s,sc,sr,ke:array[1..20,1..20] of real; q,r,hg,del:real;

 begin clrscr;
 (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('nhap tong so BTD');
 readln(tbt);
 writeln('nhap so thanh');
 readln(st);
 writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
 readln (sbt);
 writeln('nhap so thu tu bac tu do ');
 writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
 writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do   readln(d2[i]);
 writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do   readln(d3[i]);
 writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do   readln(d4[i]);
 writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do  readln(l[i]);
 writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
 writeln('nhap chieu dai'); for i:=1 to st do readln(cd[i]);
 writeln('nhap mo dun dan hoi E'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
 writeln('nhap dien tich tiet dien'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
 writeln('nhap he so gian no'); readln(hg);
 writeln('nhap so gia nhiet do');  readln(del);
 writeln('nhap cac thanh fan ngoai luc'); for i:=1 to sbt do readln(fn[i]);

 (*Tinh cac thanh fan tai trong tuong duong do nhiet do*);
 for i:= 1 to st do
 begin
 ff[i]:=-dt[i]*e[i]*hg*del;  ft[d1[i]]:=ft[d1[i]]+ff[i]*l[i];
 ft[d2[i]]:=ft[d2[i]]+ff[i]*m[i];   ft[d3[i]]:= ft[d3[i]]-ff[i]*l[i];
 ft[d4[i]]:=ft[d4[i]]-ff[i]*m[i];
 end;
 for i:=i to sbt do        f[i]:=ft[i]+fn[i];
 (*Ghep cac MTDC riengvao MTDC tong the *);
 for i:=1 to st do
   begin
 b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];    c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
 d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
 end;
 for i:=1 to st do
```

```
 begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
 s[d1[i],d3[i]]:= s[d1[i],d3[i]]-b[i];
 s[d2[i],d3[i]]:= s[d2[i],d3[i]]-c[i];
 s[d3[i],d3[i]]:= s[d3[i],d3[i]]+b[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
 end;
 for i:=1 to tbt do
 for j:=1 to i-1 do        s[i,j]:=s[j,i];

 (*Chia khoi ma tran*);
 for i := 1 to sbt do
 for j:=1 to sbt do
  sc[i,j]:=s[i,j];
(*Giai he fuong trinh theo fuong fap Gauss*);
    ss:=0;
 REPEAT
    ss:=ss+1;
    for i:= ss+1 to sbt do
      Begin
        if(sc[ss,ss]<>0) then
        q:=sc[ss,i]/sc[ss,ss];
        for j:=i to sbt do
        sc[i,j]:= sc[i,j]-sc[ss,j]*q; f[i]:=f[i]-f[ss]*q;
      End
UNTIL(ss= sbt -1);
if(sc[sbt,sbt]<>0) then
qq[sbt]:=f[sbt]/sc[sbt,sbt];
 for i:= sbt -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= sbt  downto i+1 do r:=r+sc[i,j]*qq[j];

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
for j:=1 to sbt do
for i:=rr to tbt do     sr[i,j]:=s[i,j];
for i:= rr to tbt do
begin
```

```
 fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
end;

(*Tinh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])
+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]])-e[i]*hg*del;

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR7_Tinh_gian_phang_che_tao_khong_chinh_xac;
 uses crt;
 Type  mt1=array[1..20,1..20] of real;     mt2=array[1..10] of real;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x:integer;
 e,cd,dt,b,c,d,f,ft,qq,fl,ff,us,l,m,det,t:mt2;
 g,d1,d2,d3,d4:array[1..10]of integer;
 s,sc,sr:mt1;   q,r,hg:real;
 Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
 var     i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
 UNTIL(s= n -1);
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;
end;
 begin  clrscr;
 (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('nhap tong so BTD');
 readln(tbt);
 writeln('nhap so thanh');
 readln(st);
 writeln ('nhap so BTD co chuyen vi');
 readln (sbt);
 writeln('nhap so thu tu bac tu do ');
 writeln('nhap d1'); for i:=1 to st do readln(d1[i]);
 writeln('nhap d2'); for i:=1 to st do   readln(d2[i]);
 writeln('nhap d3'); for i:=1 to st do   readln(d3[i]);
 writeln('nhap d4'); for i:=1 to st do   readln(d4[i]);
 writeln('nhap chieu dai'); for i:=1 to st do  readln(cd[i]);
```

```
writeln('nhap cosin dh l'); for i:=1 to st do  readln(l[i]);
writeln('nhap cosin dh m'); for i:=1 to st do readln(m[i]);
writeln('nhap mo dun dan hoi E'); for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich tiet dien'); for i:=1 to st do readln(dt[i]);
writeln('nhap he so gian no tuong duong'); readln(hg);
writeln('nhap so thanh che tao khong chinh xac'); readln(x);
writeln('nhap so thu tu thanh che tao khong chinh xac');
for i:=1 to x do readln(g[i]);
writeln('nhap do dai doi ra hoac do ngan hut');
for i:=1 to x do readln(det[i]);

(*Tinh cac thanh fan tai trong do che tao khong chinh xac*);
for i:= 1 to x do
begin
t[i]:=det[i]/(hg*cd[g[i]]);  ff[i]:=-e[g[i]]*dt[g[i]]*hg*t[i];
ft[d1[g[i]]]:=ft[d1[g[i]]]+ff[i]*l[g[i]];
ft[d2[g[i]]]:=ft[d2[g[i]]]+ff[i]*m[g[i]];
ft[d3[g[i]]]:=ft[d3[g[i]]]-ff[i]*l[g[i]];
ft[d4[g[i]]]:=ft[d4[g[i]]]-ff[i]*m[g[i]];
end;
for i:=1 to sbt do      f[i]:=ft[i];

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to st do
begin
b[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];   c[i]:=l[i]*m[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
d[i]:=sqr(m[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b[i];
s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c[i];
s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
s[d1[i],d3[i]]:= s[d1[i],d3[i]]-b[i];
s[d2[i],d3[i]]:= s[d2[i],d3[i]]-c[i];
s[d3[i],d3[i]]:= s[d3[i],d3[i]]+b[i];
s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c[i];
s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do      s[i,j]:=s[j,i];
```

```
 (*Chia khoi ma tran*);
 for i := 1 to sbt do
 for j:=1 to sbt do
  sc[i,j]:=s[i,j];

(*Goi chuong trinh con de giai he fuong trinh*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh fan luc*);
rr:=sbt+1;
 for j:=1 to sbt do
 for i:=rr to tbt do     sr[i,j]:=s[i,j];
 for i:= rr to tbt do
 begin
 fl[i]:=0; for k:=1 to sbt do  fl[i]:= fl[i]+sr[i,k]*qq[k];
 end;

(*Tinh ung suat*);
for i:=1 to st do
us[i]:=(e[i]/cd[i])*l[i]*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]])
+m[i]*(qq[d4[i]]-qq[d2[i]]);

writeln ('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri ung suat');
for i:=1 to st do
writeln(us[i]);
writeln ('gia tri fan luc');
for i:=rr to tbt do
for j:=1 to sbt do
writeln(fl[i]);
readln;
end.
```

```
Program TR8_Bai_toan_hai_chieu_kieu_FTHH_tam_giac_bien_dang_khong_doi;
Uses crt;
type mt1=array[1..10,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3= array[1..20] of integer;
Var   d1,d2,d3,d4,d5,d6,u: mt3;
      f,fl,fb,ft,fn,e,x1,x2,x3,y1,y2,y3,qq,px,py,dt,det,c1,c2,c3,c4,
      c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,e1,e2,
      e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9,e10,e11,e12,e13,e14,e15,e16,e17,e18,y23,y31,y12,
      y13,x32,x13,x21,x23,h1,h2,us1,us2,us3:mt2;
      i,j,k,ss,sn,sf,sbt,tbt,rr,x:integer;  q,r,hp,h,tx,ty:real;
      s:mt1;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
  UNTIL(s= n -1);
   x[n]:=b[n]/a[n,n];
   for i:= n -1  downto 1 do
      Begin
         r :=0;
         for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
         if(a[i,i]<>0) then
         x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
      End;
  end;

  begin clrscr;
  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
   writeln('nhap so nut');
   readln(sn);
   writeln('so fan tu');
   readln(sf);
   writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
   readln(sbt);
   writeln('nhap tong so so BTD ');
```

```
readln(tbt);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu ');
readln(x);
writeln('nhap so thu tu BTD co chuyen vi triet tieu ');
if(x<>0) then for i:=1 to x do
readln(u[i]);
writeln('btd d1'); for i :=1 to sf do  readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i :=1 to sf do  readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i :=1 to sf do  readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i :=1 to sf do  readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i :=1 to sf do  readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i :=1 to sf do  readln(d6[i]);
writeln('toa do x1'); for i :=1 to sf do  readln(x1[i]);
writeln('toa do x2'); for i :=1 to sf do  readln(x2[i]);
writeln('toa do x3'); for i :=1 to sf do  readln(x3[i]);
writeln('toa do y1'); for i :=1 to sf do  readln(y1[i]);
writeln('toa do y2'); for i :=1 to sf do  readln(y2[i]);
writeln('toa do y3'); for i :=1 to sf do  readln(y3[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to sf do  readln(e[i]);
writeln('nhap be day tam');
readln(h);
writeln('nhap he so Poatxong');
readln(hp);
writeln('nhap ti trong tren fuong x');
readln(tx);
writeln('nhap ti trong tren fuong y');
readln(ty);
writeln('nhap luc bien');
for i:=1 to sbt do  readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do  readln(fn[i]);
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to sf do
begin
y23[i]:=y2[i]-y3[i];   y31[i]:=y3[i]-y1[i];  y12[i]:=y1[i]-y2[i];
y13[i]:=-y31[i];       x32[i]:=x3[i]-x2[i];  x13[i]:=x1[i]-x3[i];
x21[i]:=x2[i]-x1[i];   x23[i]:=-x32[i];
det[i]:=x13[i]*y23[i]-x23[i]*y13[i];   dt[i]:=det[i]/2;
h1[i]:=dt[i]*h*e[i]/((1-sqr(hp))*sqr(det[i]));
c1[i]:=h1[i]*(sqr(y23[i])+sqr(x32[i])*(1-hp)/2);
c2[i]:=h1[i]*(y23[i]*x32[i]*hp+x32[i]*y23[i]*(1-hp)/2);
c3[i]:=h1[i]*(y23[i]*y31[i]+x32[i]*x13[i]*(1-hp)/2);
c4[i]:=h1[i]*(y23[i]*x13[i]*hp+x32[i]*y31[i]*(1-hp)/2);
```

```
c5[i]:=h1[i]*(y23[i]*y12[i]+x32[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c6[i]:=h1[i]*(y23[i]*x21[i]*hp+x32[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c7[i]:=h1[i]*(sqr(x32[i])+sqr(y23[i]))*(1-hp)/2);
c8[i]:=h1[i]*(x32[i]*y31[i]*hp+y23[i]*x13[i]*(1-hp)/2);
c9[i]:=h1[i]*(x32[i]*x13[i]+y23[i]*y31[i]*(1-hp)/2);
c10[i]:=h1[i]*(x32[i]*y12[i]*hp+y23[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c11[i]:=h1[i]*(x32[i]*x21[i]+y23[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c12[i]:=h1[i]*(sqr(y31[i])+sqr(x13[i]))*(1-hp)/2);
c13[i]:=h1[i]*(y31[i]*x13[i]*(1+hp)/2);
c14[i]:=h1[i]*(y31[i]*y12[i]+x13[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c15[i]:=h1[i]*(y31[i]*x21[i]+x13[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c16[i]:=h1[i]*(sqr(x13[i])+sqr(y31[i]))*(1-hp)/2);
c17[i]:=h1[i]*(x13[i]*y12[i]*hp+y31[i]*x21[i]*(1-hp)/2);
c18[i]:=h1[i]*(x13[i]*x21[i]+y31[i]*y12[i]*(1-hp)/2);
c19[i]:=h1[i]*(sqr(y12[i])+sqr(x21[i]))*(1-hp)/2);
c20[i]:=h1[i]*(y12[i]*x21[i]*(1+hp)/2);
c21[i]:=h1[i]*(sqr(x21[i])+sqr(y12[i]))*(1-hp)/2);
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c7[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c8[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c12[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c4[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c9[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c13[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c16[i];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c5[i];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c10[i];
  s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c14[i];
  s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c17[i];
  s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c19[i];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c6[i];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+c11[i];
  s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c15[i];
  s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c18[i];
  s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c20[i];
  s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c21[i];
 end;
 for i:=1 to tbt do
 for j:=1 to i-1 do    s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to sf do
```

```
begin
px[i]:=tx*h*dt[i];  py[i]:=ty*h*dt[i]; ft[d1[i]]:=px[i]; ft[d2[i]]:=py[i];
ft[d3[i]]:=px[i];   ft[d4[i]]:=py[i];  ft[d5[i]]:=px[i]; ft[d6[i]]:=py[i];
end;
for i:=1 to sbt do   f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];
(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat*);
if(x<>0) then for i:=1 to x do qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to sf do
begin
h2[i]:=e[i]/((1-sqr(hp))*det[i]);
e1[i]:=h2[i]*y23[i];   e2[i]:=h2[i]*hp*x32[i];   e3[i]:=h2[i]*y31[i];
e4[i]:=h2[i]*hp*x13[i]; e5[i]:=h2[i]*y12[i];    e6[i]:=h2[i]*hp*x21[i];
e7[i]:=h2[i]*hp*y23[i]; e8[i]:=h2[i]*x32[i];    e9[i]:=h2[i]*hp*y31[i];
e10[i]:=h2[i]*x13[i];   e11[i]:=h2[i]*hp*y12[i];  e12[i]:=h2[i]*x21[i];
e13[i]:=h2[i]*x32[i]*(1-hp)/2;  e14[i]:=h2[i]*y23[i]*(1-hp)/2;
e15[i]:=h2[i]*x13[i]*(1-hp)/2;  e16[i]:=h2[i]*y31[i]*(1-hp)/2;
e17[i]:=h2[i]*x21[i]*(1-hp)/2;  e18[i]:=h2[i]*y12[i]*(1-hp)/2;
us1[i]:=e1[i]*qq[d1[i]]+e2[i]*qq[d2[i]]+e3[i]*qq[d3[i]]+e4[i]*qq[d4[i]]+
e5[i]*qq[d5[i]]+e6[i]*qq[d6[i]];
us2[i]:=e7[i]*qq[d1[i]]+e8[i]*qq[d2[i]]+e9[i]*qq[d3[i]]+e10[i]*qq[d4[i]]+
e11[i]*qq[d5[i]]+e12[i]*qq[d6[i]];
us3[i]:=e13[i]*qq[d1[i]]+e14[i]*qq[d2[i]]+e15[i]*qq[d3[i]]+e16[i]*qq[d4[i]]+
e17[i]*qq[d5[i]]+e18[i]*qq[d6[i]];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do writeln (qq[i]);
writeln('gia tri ung suat');
for i:=1 to sf do writeln (us1[i]);
for i:=1 to sf do writeln (us2[i]);
for i:=1 to sf do writeln (us3[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR9_Tinh_gan_dung_vat_ran_tron_xoay_chiu_tai_trong_doi_xung;
Uses crt;
type   mt1=array[1..20,1..20] of real;mt2= array[1..20] of real;
     mt3= array[1..20] of integer;
Var    d1,d2,d3,d4,d5,d6,u:mt3;
     f,fl,fb,ft,fn,r1,r2,r3,z1,z2,z3,rt,qq,pr,pz,dt,det,c1,c2,c3,c4,
     c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,
     z23,z31,z12,z13,r32,r13,r21,r23,h,us1,us2,us3,us4,b1,b2,b3,b4,b5,b6,
     b7:mt2;
     i,j,k,ss,sn,sf,sbt,tbt,rr,x:integer;  q,r,hp,tr,tz,e,e1,e2,e3:real;
     s:mt1;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
 UNTIL(s= n -1);
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;
 end;
 begin clrscr;
 (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  writeln('nhap tong so BTD');
  readln(tbt);
  writeln('so fan tu');
  readln(sf);
  writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
  readln(sbt);
  writeln('nhap tong so so BTD ');
  readln(tbt);
```

```
writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu ');
readln(x);
writeln('nhap so thu tu BTD co chuyen vi triet tieu ');
if(x<>0) then for i:=1 to x do
readln(u[i]);
writeln('btd d1'); for i :=1 to sf do  readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i :=1 to sf do  readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i :=1 to sf do  readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i :=1 to sf do  readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i :=1 to sf do  readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i :=1 to sf do  readln(d6[i]);
writeln('toa do r1'); for i :=1 to sf do  readln(r1[i]);
writeln('toa do r2'); for i :=1 to sf do  readln(r2[i]);
writeln('toa do r3'); for i :=1 to sf do  readln(r3[i]);
writeln('toa do z1'); for i :=1 to sf do  readln(z1[i]);
writeln('toa do z2'); for i :=1 to sf do  readln(z2[i]);
writeln('toa do z3'); for i :=1 to sf do  readln(z3[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
readln(e);
writeln('nhap he so Poatxong');
readln(hp);
writeln('nhap ti trong tren fuong r');
readln(tr);
writeln('nhap ti trong tren fuong z');
readln(tz);
writeln('nhap luc bien');
for i:=1 to sbt do  readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do  readln(fn[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
for i:=1 to sf do
begin
z23[i]:=z2[i]-z3[i];   z31[i]:=z3[i]-z1[i];  z12[i]:=z1[i]-z2[i];
z13[i]:=-z31[i];       r32[i]:=r3[i]-r2[i];  r13[i]:=r1[i]-r3[i];
r21[i]:=r2[i]-r1[i];   r23[i]:=-r32[i];
det[i]:=r13[i]*z23[i]-r23[i]*z13[i];   dt[i]:=det[i]/2;
rt[i]:=(r1[i]+r2[i]+r3[i])/3;  h[i]:=2*3.1416*rt[i]*dt[i];
b1[i]:=z23[i]/det[i];  b2[i]:=z31[i]/det[i];  b3[i]:=z12[i]/det[i];
b4[i]:=r32[i]/det[i];  b5[i]:=r13[i]/det[i];  b6[i]:=r21[i]/det[i];
b7[i]:=1/(3*rt[i]); e1:=(e*(1-hp))/((1+hp)*(1-2*hp)); e2:=e1*hp/(1-hp);
e3:=e1*(1-2*hp)/(2*(1-hp));
c1[i]:=((b1[i]*e1+b7[i]*e2)*b1[i]+(b4[i]*e3)*b4[i]+
(b1[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c2[i]:=((b1[i]*e2+b7[i]*e2)*b4[i]+(b4[i]*e3)*b1[i])*h[i];
```

```
c3[i]:=((b1[i]*e1+b7[i]*e2)*b2[i]+(b4[i]*e3)*b5[i]+
(b1[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c4[i]:=((b1[i]*e2+b7[i]*e2)*b5[i]+(b4[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c5[i]:=((b1[i]*e1+b7[i]*e2)*b3[i]+(b4[i]*e3)*b6[i]+
(b1[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c6[i]:=((b1[i]*e2+b7[i]*e2)*b6[i]+(b4[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c7[i]:=((b4[i]*e1)*b4[i]+(b1[i]*e3)*b1[i])*h[i];
c8[i]:=((b4[i]*e2)*b2[i]+(b1[i]*e3)*b5[i]+(b4[i]*e2)*b7[i])*h[i];
c9[i]:=((b4[i]*e1)*b5[i]+(b1[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c10[i]:=((b4[i]*e2)*b3[i]+(b1[i]*e3)*b6[i]+(b4[i]*e2)*b7[i])*h[i];
c11[i]:=((b4[i]*e1)*b6[i]+(b1[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c12[i]:=((b2[i]*e1+b7[i]*e2)*b2[i]+(b5[i]*e3)*b5[i]+
(b2[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c13[i]:=((b2[i]*e2+b7[i]*e2)*b5[i]+(b5[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c14[i]:=((b2[i]*e1+b7[i]*e2)*b3[i]+(b5[i]*e3)*b6[i]+
(b2[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c15[i]:=((b2[i]*e2+b7[i]*e2)*b6[i]+(b5[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c16[i]:=((b5[i]*e1)*b5[i]+(b2[i]*e3)*b2[i])*h[i];
c17[i]:=((b5[i]*e2)*b3[i]+(b2[i]*e3)*b6[i]+(b5[i]*e2)*b7[i])*h[i];
c18[i]:=((b5[i]*e1)*b6[i]+(b2[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c19[i]:=((b3[i]*e1+b7[i]*e2)*b3[i]+(b6[i]*e3)*b6[i]+
(b3[i]*e2+b7[i]*e1)*b7[i])*h[i];
c20[i]:=((b3[i]*e2+b7[i]*e2)*b6[i]+(b6[i]*e3)*b3[i])*h[i];
c21[i]:=((sqr(b6[i]))*e1+(sqr(b3[i]))*e3)*h[i];
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c4[i];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c5[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c7[i];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c8[i];
  s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c12[i];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c9[i];
  s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c13[i];
  s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c16[i];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c10[i];
  s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c14[i];
  s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c17[i];
  s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c19[i];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c6[i];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+c11[i];
  s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c15[i];
  s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c18[i];
  s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c20[i];
  s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c21[i];
end;
```

```
 for i:=1 to tbt do
 for j:=1 to i-1 do    s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to sf do
begin
pr[i]:=tr*2*3.1416*rt[i]*dt[i];  pz[i]:=tz*2*3.1416*rt[i]*dt[i];
 ft[d1[i]]:=pr[i]; ft[d2[i]]:=pz[i];
ft[d3[i]]:=pr[i];   ft[d4[i]]:=pz[i];  ft[d5[i]]:=pr[i]; ft[d6[i]]:=pz[i];
end;
for i:=1 to sbt do   f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat*);
if (x<>0) then for i:=1 to x do  qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to sf do
begin
us1[i]:=(e1*b1[i]+e2*b7[i])*qq[d1[i]]+(e2*b4[i])*qq[d2[i]]+
(e1*b2[i]+e2*b7[i])*qq[d3[i]]+(e2*b5[i])*qq[d4[i]]+(e1*b3[i]+
e2*b7[i])*qq[d5[i]]+(e2*b6[i])*qq[d6[i]];
us2[i]:=+(e2*b1[i]+e2*b7[i])*qq[d1[i]]+(e1*b4[i])*qq[d2[i]]+
(e2*b2[i]+e2*b7[i])*qq[d3[i]]+(e1*b5[i])*qq[d4[i]]+
(e2*b3[i]+e2*b7[i])*qq[d5[i]]+(e1*b6[i])*qq[d6[i]];
us3[i]:=e3*b4[i]*qq[d1[i]]+e3*b1[i]*qq[d2[i]]+e3*b5[i]*qq[d3[i]]+
e3*b2[i]*qq[d4[i]]+e3*b6[i]*qq[d5[i]]+e3*b3[i]*qq[d6[i]];
us4[i]:=(e2*b1[i]+e1*b7[i])*qq[d1[i]]+(e2*b4[i])*qq[d2[i]]+
(e2*b2[i]+e1*b7[i])*qq[d3[i]]+(e2*b5[i])*qq[d4[i]]+(e2*b3[i]+
e1*b7[i])*qq[d5[i]]+(e2*b6[i])*qq[d6[i]];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do writeln (qq[i]);
writeln('gia tri us1 ');
for i:=1 to sf do writeln (us1[i]);
writeln('gia tri us2 ');
for i:=1 to sf do writeln (us2[i]);
writeln('gia tri us3 ');
for i:=1 to sf do writeln (us3[i]);
writeln('gia tri us4 ');
for i:=1 to sf do writeln (us4[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR10_Tinh_dam_lien_tuc_goi_tua_thong_thuong;
 uses crt;
 type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
 mt3=array[1..20]of integer;
Var i,j, k,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w:integer;
 a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt,c1,c2,c3,lc1,lc2,m1x,m2x,
 m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z,el,el1,el2,el3,mb1,mb2,ma,la,lb1,
 lb2,z1,z2,z3:mt2;
 n1,n2,a,b,c,d,d1,d2,k1,k2,k3,k4:mt3;
 s:mt1; q,r:real;

 Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
 var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
 begin
  s:=0;
  REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
   UNTIL(s= n -1);
    x[n]:=b[n]/a[n,n];
    for i:= n -1  downto 1 do
       Begin
          r :=0;
          for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
          if(a[i,i]<>0) then
          x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
       End;
   end;

    begin   clrscr;
    (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
    writeln('tong so BTD');
    readln(tbt);
    writeln('nhap so thanh');
    readln(st);
    writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
    readln(sbt);
    writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
```

```
 readln(w);
 writeln('nhap so  thu tu bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
 if(w<>0) then for i:=1 to w do   readln(d[i]);
 writeln('nhap chieu dai thanh');
 for i :=1 to st do   readln(cd[i]);
 writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
 readln (x);
 writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
 readln(y);
 writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
 readln(z);
 if(x<>0) then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (a[i]);
 writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (q1[i]);
 end;
 if (y<>0)then
 begin
  writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do      readln (b[i]);
  writeln('nhap tai trong tap trung');
  for i:= 1 to y do  readln (p[i]);
  writeln('nhap a1');
  for i:= 1 to y do  readln (a1[i]);
  writeln('nhap b1');
  for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
end;
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 if (z<>0)then for i:=1 to z do readln(c[i]);
 writeln('nhap mo dun dan hoi');  for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');  for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2 ');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 if(cd[i]<>0) then
 begin
 for i:=1 to st do
 begin
   c1[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];
   c2[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
```

```
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c1[i];
end;
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vec to tai trong*);
if (x<>0)then
begin
 for i:=1 to x do
 begin
 el[i]:=cd[a[i]]; k1[i]:=d1[a[i]]; k2[i]:=d2[a[i]];
 ma[i]:=(q1[i]*sqr(el[i])/12);
 end;
 for i:=1 to x do
 begin
 f[k1[i]]:=f[k1[i]]-ma[i];
 f[k2[i]]:=f[k2[i]]+ma[i];
 end;
end;
if (y<>0) then
begin
 for i:=1 to y do
 begin
 k3[i]:=d1[b[i]]; k4[i]:=d2[b[i]];  el1[i]:=cd[b[i]];
 mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(el1[i]));
 mb2[i]:= (p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(el1[i]));
 end;
 for i:=1 to y do
 begin
 f[k3[i]]:=f[k3[i]]-mb1[i];
 f[k4[i]]:=f[k4[i]]+mb2[i]
 end;
end;

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

 (*Tinh mo men*);
 for i:=1 to w do      qq[d[i]]:=0;
 if(cd[i]<>0) then
 begin
```

```
 for i:=1 to st do
 begin
 z1[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d1[i]]+2*qq[d2[i]]);
 z2[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d1[i]]+4*qq[d2[i]]);
 m1[i]:=z1[i];
 m2[i]:=z2[i];
 end;
 end;
(*tinh tong mo men*);
 if (x<>0) then
 begin
 for i:=1 to x do
 begin
  m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
  m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
 end;
 end;
 if (y<>0) then
 begin
 for i:=1 to y do
 begin   if(sqr(el1[i])<>0) then
  m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
  m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
 end;
 end;
 if(z<>0) then
 begin
 for i:=1 to z do
 begin
 m1z[i]:=m1[c[i]];     m2z[i]:=m2[c[i]];
 end;
 end;

(*Tinh luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
begin
 la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;
 l1x[i]:=-(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
 l2x[i]:=(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then
```

```
begin
for i :=1 to y do
 begin
 cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
 lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
 l1y[i]:=-(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
 l2y[i]:= (m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
 end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
l1z[i]:=-(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]]; l2z[i]:=(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]];
end;
end;
(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
```

```
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.
```

```
Program CTR11_Tinh_dam_lien_tuc_tren_goi_tua_dan_hoi;
 uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3=array[1..20]of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w,v:integer;
 a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt,c1,c2,c3,c4,lc1,lc2,m1x,m2x,
 m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z,mb1,mb2,ma,la,lb1,lb2,z1,hc:mt2;
 n1,n2,a,b,c,d,dd,e1,d1,d2,d3,d4,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4:mt3;
 s:mt1;  q,r:real;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var     i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
 UNTIL(s= n -1);
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;
 end;

  begin   clrscr;
  (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  writeln('nhap tong so BTD');
  readln(tbt);
  writeln('nhap so thanh');
  readln(st);
  writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
  readln(sbt);
  writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
  readln(w);
```

```
 writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi triet tieu ');
 if(w<>0) then for i:=1 to w do  readln(d[i]);
 writeln('nhap so goi tua dan hoi');
 readln(v);
 writeln('nhap so thu tu bac tu do co goi tua dan hoi');
 if(v<>0) then for i:=1 to v do readln(e1[i]);
 writeln('nhap he so do cung');
 if(v<>0) then for i:=1 to v do readln(hc[i]);
 writeln('nhap chieu dai thanh');
 for i :=1 to st do   readln(cd[i]);
 writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
 readln (x);
 writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
 readln(y);
 writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
 readln(z);
 if(x<>0) then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (a[i]);
 writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (q1[i]);
 end;
 if (y<>0)then
 begin
  writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do     readln (b[i]);
  writeln('nhap tai trong tap trung');
  for i:= 1 to y do  readln (p[i]);
  writeln('nhap a1');
  for i:= 1 to y do  readln (a1[i]);
  writeln('nhap b1');
  for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
 end;
  writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
  if (z<>0) then   for i:=1 to z do readln(c[i]);
  writeln('nhap mo dun dan hoi');  for i:=1 to st do readln(e[i]);
 writeln('nhap mo men quan tinh');  for i:=1 to st do readln(mq[i]);
 writeln('nhap BTD d1');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
 writeln('nhap BTD d2 ');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);
 writeln('nhap BTD d3');  for i:=1 to st do readln(d3[i]);
 writeln('nhap BTD d4');  for i:=1 to st do readln(d4[i]);
```

```
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to st do
begin
   cd3[i]:=sqr(cd[i])*cd[i];
   if(((cd3[i]<>0)and(sqr(cd[i])<>0))and(cd[i]<>0)) then
   begin
   c1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i];  c2[i]:=-6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
   c3[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];    c4[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
   end;
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c4[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c3[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];
for i:=1 to v do   s[e1[i],e1[i]]:=s[e1[i],e1[i]]+hc[i];
  (*Ghep cac vecto tai trong*);
  if (x<>0)then
  begin
     for i:=1 to x do
     begin
     la[i]:= q1[i]*cd[a[i]]/2;    ma[i]:=(q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12);
     x1[i]:=d1[a[i]];            x2[i]:=d2[a[i]];          x3[i]:=d3[a[i]];
     x4[i]:=d4[a[i]];
     f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
     f[x2[i]]:=f[x2[i]]-ma[i];
     f[x3[i]]:=f[x3[i]]+la[i];
      f[x4[i]]:=f[x4[i]]+ma[i];
     end;
   end;
    if (y<>0) then
   begin
   for i:=1 to y do
```

```
  begin
      cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
      lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
       mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]));
      mb2[i]:=(p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]));
      y1[i]:=d1[b[i]];          y2[i]:=d2[b[i]];          y3[i]:=d3[b[i]];
      y4[i]:=d4[b[i]];
      if (cd3[i]<>0) then
      f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
      f[y2[i]]:=f[y2[i]]-mb1[i];
      f[y3[i]]:=f[y3[i]]+lb2[i];
      f[y4[i]]:=f[y4[i]]+mb2[i];
      end;
  end;

 (*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
 GHFT(s,f,qq,sbt);

 (*Tinh mo men*);
 if (W<>0) then for i:=1 to w do qq[d[i]]:=0;
 for i:=1 to st do
 begin
 if  (sqr(cd[i])<>0) then
 z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]]);
 if(cd[i]<>0) then
 m1[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d2[i]]+2*qq[d4[i]]);
 m2[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d2[i]]+4*qq[d4[i]]);
 end;
(*tinh tong mo men*);
 if (x<>0) then
 begin
 for i:=1 to x do
 begin
  m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
  m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
 end;
 end;
 if (y<>0) then
 begin
 for i:=1 to y do
 begin
  m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
  m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
end;
```

```
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
m1z[i]:=m1[c[i]];     m2z[i]:=m2[c[i]];
end;
end;

(*Tinh luc cat*);
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
begin
 l1x[i]:=-(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
 l2x[i]:=(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
end;
end;
if (y<>0) then
begin
 for i :=1 to y do
  begin
    l1y[i]:=-(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
    l2y[i]:= (m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
  end;
end;
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
begin
l1z[i]:=-(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]]; l2z[i]:=(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]];
end;
end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
```

```
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.
```

```
Program CTR12_Tinh_dam_lien_tuc_tren_goi_tua_lun_theo_FF_mo_hinh_lo_xo;
 uses crt;
type mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
    mt3=array[1..20]of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w,v,sgc:integer;
 a1,b1,p,q1,e,f,fc,mq,qq,l,m,m1,m2,cd,cd3,dt,c1,c2,c3,c4,lc1,lc2,m1x,m2x,
 m1y,m2y,m1z,m2z,l1x,l2x,l1y,l2y,l1z,l2z,mb1,mb2,ma,la,lb1,lb2,z1,hc,
 max,cv:mt2;
 n1,n2,a,b,c,d,dd,e1,d1,d2,d3,d4,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,tgc:mt3;
 s:mt1;  q,r,cc,maxx:real;

procedure gtcdtd(a:mt1;n:integer);
begin
 max[i]:=abs(a[i,1]);
for i:=1 to n do
for j:=2 to n do
begin
if ((abs(a[i,j])>max[i]) or (abs(a[i,j])=max[i]))  then
 max[i]:=abs(a[i,j]) else max[i]:=max[i] ;
end;
 maxx:=max[1];
for i:=2 to n do
begin
 if(max[i]>maxx) then
 maxx:=max[i] else maxx:=maxx ;
end;
end;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var     i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
  UNTIL(s= n -1);
   x[n]:=b[n]/a[n,n];
   for i:= n -1  downto 1 do
```

```
    Begin
      r :=0;
      for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
      if(a[i,i]<>0) then
      x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;
end;

begin   clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi cho truoc');
readln(sgc);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi cho truoc');
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do  readln(tgc[i]);
writeln('nhap gia tri chuyen vi cho cho truoc');
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do  readln(cv[tgc[i]]);
writeln('nhap chieu dai thanh');
for i :=1 to st do   readln(cd[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(z);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
 for i:=1 to y do     readln (b[i]);
 writeln('nhap tai trong tap trung');
 for i:= 1 to y do  readln (p[i]);
 writeln('nhap a1');
 for i:= 1 to y do  readln (a1[i]);
```

```
 writeln('nhap b1');
 for i:= 1 to y do readln (b1[i]);
end;
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 if (z<>0) then   for i:=1 to z do readln(c[i]);
 writeln('nhap mo dun dan hoi');  for i:=1 to st do readln(e[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');  for i:=1 to st do readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');  for i:=1 to st do readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2 ');  for i:=1 to st do readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');  for i:=1 to st do readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');  for i:=1 to st do readln(d4[i]);

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to st do
begin
   cd3[i]:=sqr(cd[i])*cd[i];
   if(((cd3[i]<>0)and(sqr(cd[i])<>0))and(cd[i]<>0)) then
   begin
   c1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i];  c2[i]:=-6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
   c3[i]:=4*e[i]*mq[i]/cd[i];    c4[i]:=2*e[i]*mq[i]/cd[i];
   end;
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c4[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c3[i];
end;
for i:=1 to tbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Goi chuong trinh con de tinh tdmax cua cac fan tu MT*);
GTCDTD(s,tbt);
cc:=(maxx)*10E+08;
if(sgc<>0) then  for i:=1 to sgc do
s[tgc[i],tgc[i]]:=s[tgc[i],tgc[i]]+cc;
(*Ghep cac vecto tai trong*);
if (x<>0)then
```

```
 begin
  for i:=1 to x do
  begin
  la[i]:= q1[i]*cd[a[i]]/2;   ma[i]:=(q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12);
  x1[i]:=d1[a[i]];          x2[i]:=d2[a[i]];        x3[i]:=d3[a[i]];
  x4[i]:=d4[a[i]];
  f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
  f[x2[i]]:=f[x2[i]]-ma[i];
  f[x3[i]]:=f[x3[i]]+la[i];
  f[x4[i]]:=f[x4[i]]+ma[i];
  end;
 end;
 if (y<>0) then
 begin
 for i:=1 to y do
  begin
   cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
   lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
   mb1[i]:=(p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]));
   mb2[i]:=(p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]));
   y1[i]:=d1[b[i]];          y2[i]:=d2[b[i]];        y3[i]:=d3[b[i]];
   y4[i]:=d4[b[i]];
   if (cd3[i]<>0) then
   f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
   f[y2[i]]:=f[y2[i]]-mb1[i];
   f[y3[i]]:=f[y3[i]]+lb2[i];
   f[y4[i]]:=f[y4[i]]+mb2[i];
  end;
 end;
 if (sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
 f[tgc[i]]:= f[tgc[i]]+cc*cv[tgc[i]];

 (*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
 GHFT(s,f,qq,tbt);

 (*Tinh mo men*);
 if (W<>0) then for i:=1 to w do qq[d[i]]:=0;
 for i:=1 to st do
 begin
 if  (sqr(cd[i])<>0) then
 z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*(qq[d3[i]]-qq[d1[i]]);
 if(cd[i]<>0) then
 m1[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(4*qq[d2[i]]+2*qq[d4[i]]);
 m2[i]:=z1[i]+(e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq[d2[i]]+4*qq[d4[i]]);
 end;
```

```
(*tinh tong mo men*);
 if (x<>0) then
 begin
 for i:=1 to x do
 begin
  m1x[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
  m2x[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
 end;
 end;
 if (y<>0) then
 begin
 for i:=1 to y do
 begin
   m1y[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
   m2y[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
  end;
  end;
  if(z<>0) then
  begin
  for i:=1 to z do
  begin
  m1z[i]:=m1[c[i]];      m2z[i]:=m2[c[i]];
  end;
  end;

  (*Tinh luc cat*);
  if (x<>0) then
  begin
  for i :=1 to x do
  begin
   l1x[i]:=-(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
   l2x[i]:=(m1x[i]+m2x[i])/cd[a[i]]-la[i];
  end;
  end;
  if (y<>0) then
  begin
   for i :=1 to y do
    begin
      l1y[i]:=-(m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
      l2y[i]:= (m1y[i]+m2y[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
    end;
  end;
  if(z<>0) then
  begin
  for i:=1 to z do
```

```
 begin
 l1z[i]:=-(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]]; l2z[i]:=(m1z[i]+m2z[i])/cd[c[i]];
 end;
 end;

(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi la');
for i:=1 to tbt do
writeln(qq[i]);
writeln('gia tri mo men x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (m1x[i],m2x[i]);
end;
writeln('gia tri mo men y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (m1y[i],m2y[i]);
end;
writeln('gia tri mo men z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1z[i],m2z[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat x');
if(x<>0) then
begin
for i:=1 to x do
writeln (l1x[i],l2x[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat y');
if(y<>0) then
begin
for i:=1 to y do
writeln (l1y[i],l2y[i]);
end;
writeln('gia tri luc cat z');
if(z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (l1z[i],l2z[i]);
end;
readln;
end.
```

```
Program CTR13_Giai_gan_dung_bai_toan_us_fang_kieu_FTHH_bon_canh_bon_nut;
Uses crt;
Type   mt1=array [1..15,1..15] of real; mt2=array [1..15] of real;
     mt3= array[1..15] of integer;
Var    d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,u:mt3;
     f,fl,fb,ft,fn,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,qq,dt,det1,det2,det3,det4,

us1,us2,us3,k11,k12,k21,k22;z1,z1a,z1b,z1c,z1d,z3,z3a,z3b,z3c,z3d,z5,z5a,z5b,z5c,z5d,
     z7,z7a,z7b,z7c,z7d:mt2;
     i,j,k,ss,sf,sbt,tbt,x,p:integer;  q,hp,tx,ty,e,e1,e2,e3,et,kx,w,
     t:real;
     s,b1,b2,b3,b4,b1c,b2c,b3c,b4c,d,h1,h2,h3,h4,l1,l2,l3,l4,a1,a2,a3,a4,
     g1,g2,g3,g4,r,ja,jb,jc,jd:mt1;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
  UNTIL(s= n -1);
  if(a[n,n]<>0) then
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;
  end;
  procedure tinhl1;
  begin
  for k:=1 to sf do
  begin
  for i:=1 to 2 do
  for i:=1 to 2 do
```

```
begin
 ja[1,1]:=(-(1-w)*x1[k]+(1-w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]-(1+w)*x4[k])/4;
 ja[1,2]:=(-(1-w)*y1[k]+(1-w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]-(1+w)*y4[k])/4;
 ja[2,1]:=(-(1-w)*x1[k]-(1+w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]+(1-w)*x4[k])/4;
 ja[2,2]:=(-(1-w)*y1[k]-(1+w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]+(1-w)*y4[k])/4;
end;
det1[k]:=ja[1,1]*ja[2,2]-ja[1,2]*ja[2,1];
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 8 do
begin
g1[1,1]:=-(1-w)/4;  g1[1,2]:=0;      g1[1,3]:=(1+w)/4;      g1[1,4]:=0;
g1[1,5]:=(1+w)/4;   g1[1,6]:=0;      g1[1,7]:=-(1+w)/4;     g1[1,8]:=0;
g1[2,1]:=-(1-w)/4;  g1[2,2]:=0;      g1[2,3]:=-(1+w)/4;     g1[2,4]:=0;
g1[2,5]:=(1+w)/4;   g1[2,6]:=0;      g1[2,7]:=(1-w)/4;      g1[2,8]:=0;
g1[3,1]:=0;         g1[3,2]:=-(1-w)/4;  g1[3,3]:=0;        g1[3,4]:=(1-w)/4;
g1[3,5]:=0;         g1[3,6]:=(1+w)/4;   g1[3,7]:=0;        g1[3,8]:=-(1+w)/4;
g1[4,1]:=0;         g1[4,2]:=-(1-w)/4;  g1[4,3]:=0;        g1[4,4]:=-(1+w)/4;
g1[4,5]:=0;         g1[4,6]:=(1+w)/4;   g1[4,7]:=0;        g1[4,8]:=(1-w)/4;
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 4 do
begin
a1[1,1]:=ja[2,2]/det1[k];     a1[1,2]:=-ja[1,2]/det1[k];
a1[1,3]:=0;                   a1[1,4]:=0;
a1[2,1]:=0;                   a1[2,2]:=0;
a1[2,3]:=-ja[2,1]/det1[k];    a1[2,4]:=ja[1,1]/det1[k];
a1[3,1]:=-ja[2,1]/det1[k];    a1[3,2]:=ja[1,1]/det1[k];
a1[3,3]:=ja[2,2]/det1[k];     a1[3,4]:=-ja[1,2]/det1[k];
end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=1 to 8 do
  begin
  b1[i,j]:=0;  for p :=1 to 4 do
  b1[i,j]:=b1[i,j]+a1[i,p]*g1[p,j];
  end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=i to 3 do
  begin  d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:= e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
  d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
  end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=1 to i-1 do  d[i,j]:=d[j,i];
  for i:=1 to 8 do
  for j:=1 to 3 do   b1c[i,j]:=b1[j,i];
```

```
 for  i:=1 to 8 do
 for j:=1 to 3 do
 begin   h1[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
 h1[i,j]:=h1[i,j]+b1c[i,p]*d[p,j];
 end;
 for i:=1 to 8 do
 for j:=1 to 8 do
 begin
 l1[i,j]:=0;   for p:=1 to 3 do
 l1[i,j]:=l1[i,j]+(h1[i,p]*b1[p,j])*t*det1[k];
 end;
end;
end;
procedure tinhl2;
begin
for k:=1 to sf do
begin
  for i :=1 to 2 do
  for j :=1 to 2 do
  begin
 jb[1,1]:=(-(1-w)*x1[k]+(1-w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]-(1+w)*x4[k])/4;
 jb[1,2]:=-((1-w)*y1[k]+(1-w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]-(1+w)*y4[k])/4;
 jb[2,1]:=-((1+w)*x1[k]-(1-w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]+(1+w)*x4[k])/4;
 jb[2,2]:=-((1+w)*y1[k]-(1-w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]+(1+w)*y4[k])/4;
 end;
 det2[k]:=jb[1,1]*jb[2,2]-jb[1,2]*jb[2,1];
 for i:=1 to 4 do
 for j:=1 to 8 do
 begin
 g2[1,1]:=-(1-w);  g2[1,2]:=0;      g2[1,3]:=(1-w)/4;      g2[1,4]:=0;
 g2[1,5]:=1+w;     g2[1,6]:=0;      g2[1,7]:=-(1+w)/4;     g2[1,8]:=0;
 g2[2,1]:=-(1+w);  g2[2,2]:=0;      g2[2,3]:=-(1-w)/4;     g2[2,4]:=0;
 g2[2,5]:=1-w;     g2[2,6]:=0;      g2[2,7]:=(1+w)/4;      g2[2,8]:=0;
 g2[3,1]:=0;       g2[3,2]:=-(1-w)/4;  g2[3,3]:=0;         g2[3,4]:=(1-w)/4;
 g2[3,5]:=0;       g2[3,6]:=(1+w)/4;   g2[3,7]:=0;         g2[3,8]:=-(1+w)/4;
 g2[4,1]:=0;       g2[4,2]:=-(1+w)/4;  g2[4,3]:=0;         g2[4,4]:=-(1-w)/4;
 g2[4,5]:=0;       g2[4,6]:=(1-w)/4;   g2[4,7]:=0;         g2[4,8]:=(1+w)/4;
 end;
 for i:=1 to 3 do
 for j:=1 to 4 do
 begin
 a2[1,1]:=jb[2,2]/det2[k];      a2[1,2]:=-jb[1,2]/det2[k];
 a2[1,3]:=0;                    a2[1,4]:=0;
 a2[2,1]:=0;                    a2[2,2]:=0;
```

```
  a2[2,3]:=-jb[2,1]/det2[k];    a2[2,4]:=jb[1,1]/det2[k];
  a2[3,1]:=-jb[2,1]/det2[k];    a2[3,2]:=jb[1,1]/det2[k];
  a2[3,3]:=jb[2,2]/det2[k];     a2[3,4]:=-jb[1,2]/det2[k];
  end;
    for i:=1 to 3 do
    for j:=1 to 8 do
    begin
    b2[i,j]:=0;  for p :=1 to 4 do
    b2[i,j]:=b2[i,j]+a2[i,p]*g2[p,j];
    end;
    for i:=1 to 3 do
    for j:=i to 3 do
    begin  d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:= e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
    d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
    end;
    for i:=1 to 3 do
    for j:=1 to i-1 do       d[i,j]:=d[j,i];
    for i:=1 to 8 do
    for j:=1 to 3 do         b2c[i,j]:=b2[j,i];
    for  i:=1 to 8 do
    for j:=1 to 3 do
    begin   h2[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
    h2[i,j]:=h2[i,j]+b2c[i,p]*d[p,j];
    end;
    for i:=1 to 8 do
    for j:=1 to 8 do
    begin
    l2[i,j]:=0;   for p:=1 to 3 do
    l2[i,j]:=l2[i,j]+(h2[i,p]*b2[p,j])*t*det2[k];
    end;
 end;
 end;
 procedure  tinhl3;
 begin
 for k:=1 to sf do
 begin
 for i:=1 to 2 do
 for j:=1 to 2 do
 begin
 jc[1,1]:=-((1+w)*x1[k]+(1+w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]-(1-w)*x4[k])/4;
 jc[1,2]:=-((1+w)*y1[k]+(1+w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]-(1-w)*y4[k])/4;
 jc[2,1]:=-((1-w)*x1[k]-(1+w)*x2[k]+(1+w)*x3[k]+(1-w)*x4[k])/4;
 jc[2,2]:=-((1-w)*y1[k]-(1+w)*y2[k]+(1+w)*y3[k]+(1-w)*y4[k])/4;
end;
```

```
det3[k]:=jc[1,1]*jc[2,2]-jc[1,2]*jc[2,1];
for i:=1 to 4 do
for j:=1 to 8 do
begin
g3[1,1]:=-(1+w); g3[1,2]:=0;      g3[1,3]:=(1+w)/4;      g3[1,4]:=0;
g3[1,5]:=1-w;    g3[1,6]:=0;      g3[1,7]:=-(1-w)/4;     g3[1,8]:=0;
g3[2,1]:=-(1-w); g3[2,2]:=0;      g3[2,3]:=-(1+w)/4;     g3[2,4]:=0;
g3[2,5]:=1+w;    g3[2,6]:=0;      g3[2,7]:=(1-w)/4;      g3[2,8]:=0;
g3[3,1]:=0;      g3[3,2]:=-(1+w)/4; g3[3,3]:=0;          g3[3,4]:=(1+w)/4;
g3[3,5]:=0;      g3[3,6]:=(1-w)/4;  g3[3,7]:=0;          g3[3,8]:=-(1-w)/4;
g3[4,1]:=0;      g3[4,2]:=-(1-w)/4; g3[4,3]:=0;          g3[4,4]:=-(1+w)/4;
g3[4,5]:=0;      g3[4,6]:=(1+w)/4;  g3[4,7]:=0;          g3[4,8]:=(1-w)/4;
end;
for i:=1 to 3 do
for j:=1 to 4 do
begin
a3[1,1]:=jc[2,2]/det3[k];     a3[1,2]:=-jc[1,2]/det3[k];
a3[1,3]:=0;                   a3[1,4]:=0;
a3[2,1]:=0;                   a3[2,2]:=0;
a3[2,3]:=-jc[2,1]/det3[k];    a3[2,4]:=jc[1,1]/det3[k];
a3[3,1]:=-jc[2,1]/det3[k];    a3[3,2]:=jc[1,1]/det3[k];
a3[3,3]:=jc[2,2]/det3[k];     a3[3,4]:=-jc[1,2]/det3[k];
end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=1 to 8 do
  begin
  b3[i,j]:=0;  for p :=1 to 4 do
  b3[i,j]:=b3[i,j]+a3[i,p]*g3[p,j];
  end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=i to 3 do
  begin  d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:= e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
  d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
  end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=1 to i-1 do      d[i,j]:=d[j,i];
  for i:=1 to 8 do
  for j:=1 to 3 do        b3c[i,j]:=b3[j,i];
  for  i:=1 to 8 do
  for j:=1 to 3 do
  begin  h3[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
  h3[i,j]:=h3[i,j]+b3c[i,p]*d[p,j];
  end;
  for i:=1 to 8 do
```

```
    for j:=1 to 8 do
    begin
    l3[i,j]:=0;  for p:=1 to 3 do
    l3[i,j]:=l3[i,j]+(h3[i,p]*b3[p,j])*t*det3[k];
    end;
  end;
  end;
  procedure tinhl4;
  begin
  for k:=1 to sf do
  begin
  for i:=1 to 2 do
  for j:=1 to 2 do
  begin
  jd[1,1]:=(-(1+w)*x1[k]+(1+w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]-(1-w)*x4[k])/4;
  jd[1,2]:=(-(1+w)*y1[k]+(1+w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]-(1-w)*y4[k])/4;
  jd[2,1]:=(-(1+w)*x1[k]-(1-w)*x2[k]+(1-w)*x3[k]+(1+w)*x4[k])/4;
  jd[2,2]:=(-(1+w)*y1[k]-(1-w)*y2[k]+(1-w)*y3[k]+(1+w)*y4[k])/4;
  end;
  det4[k]:=jd[1,1]*jd[2,2]-jd[1,2]*jd[2,1];
  for i:=1 to 4 do
  for j:=1 to 8 do
  begin
  g4[1,1]:=-(1+w);  g4[1,2]:=0;     g4[1,3]:=(1+w)/4;     g4[1,4]:=0;
  g4[1,5]:=1-w;     g4[1,6]:=0;     g4[1,7]:=-(1-w)/4;    g4[1,8]:=0;
  g4[2,1]:=-(1+w);  g4[2,2]:=0;     g4[2,3]:=-(1-w)/4;    g4[2,4]:=0;
  g4[2,5]:=1-w;     g4[2,6]:=0;     g4[2,7]:=(1+w)/4;     g4[2,8]:=0;
  g4[3,1]:=0;       g4[3,2]:=-(1+w)/4;  g4[3,3]:=0;       g4[3,4]:=(1+w)/4;
  g4[3,5]:=0;       g4[3,6]:=(1-w)/4;   g4[3,7]:=0;       g4[3,8]:=-(1-w)/4;
  g4[4,1]:=0;       g4[4,2]:=-(1+w)/4;  g4[4,3]:=0;       g4[4,4]:=-(1-w)/4;
  g4[4,5]:=0;       g4[4,6]:=(1-w)/4;   g4[4,7]:=0;       g4[4,8]:=(1+w)/4;
  end;
  for i:=1 to 3 do
  for j:=1 to 4 do
  begin
  a4[1,1]:=jd[2,2]/det4[k];     a4[1,2]:=-jd[1,2]/det4[k];
  a4[1,3]:=0;                   a4[1,4]:=0;
  a4[2,1]:=0;                   a4[2,2]:=0;
  a4[2,3]:=-jd[2,1]/det4[k];    a4[2,4]:=jd[1,1]/det4[k];
  a4[3,1]:=-jd[2,1]/det4[k];    a4[3,2]:=jd[1,1]/det4[k];
  a4[3,3]:=jd[2,2]/det4[k];     a4[3,4]:=-jd[1,2]/det4[k];
  end;
    for i:=1 to 3 do
    for j:=1 to 8 do
```

```
 begin
 b4[i,j]:=0;  for p:=1 to 4 do
 b4[i,j]:=b4[i,j]+a4[i,p]*g4[p,j];
 end;
 for i:=1 to 3 do
 for j:=i to 3 do
 begin  d[1,1]:=e/(1-sqr(hp)); d[1,2]:= e*hp/(1-sqr(hp)); d[1,3]:=0;
 d[2,2]:=d[1,1]; d[2,3]:=0; d[3,3]:=e*(1-hp)/2*(1-sqr(hp));
 end;
 for i:=1 to 3 do
 for j:=1 to i-1 do       d[i,j]:=d[j,i];
 for i:=1 to 8 do
 for j:=1 to 3 do         b4c[i,j]:=b4[j,i];
 for  i:=1 to 8 do
 for j:=1 to 3 do
 begin   h4[i,j]:=0; for p:=1 to 3 do
 h4[i,j]:=h4[i,j]+b4c[i,p]*d[p,j];
 end;
 for i:=1 to 8 do
 for j:=1 to 8 do
 begin
 l4[i,j]:=0;   for p:=1 to 3 do
 l4[i,j]:=l4[i,j]+(h4[i,p]*b4[p,j])*t*det4[k];
 end;
end;
end;
procedure tinhs;
begin
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to sf do
 begin
  s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+r[1,1];
  s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+r[1,2];
  s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+r[1,3];
  s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+r[1,4];
  s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+r[1,5];
  s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+r[1,6];
  s[d1[i],d7[i]]:=s[d1[i],d7[i]]+r[1,7];
  s[d1[i],d8[i]]:=s[d1[i],d8[i]]+r[1,8];
  s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+r[2,2];
  s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+r[2,3];
  s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+r[2,4];
  s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+r[2,5];
  s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+r[2,6];
```

```
    s[d2[i],d7[i]]:=s[d2[i],d7[i]]+r[2,7];
    s[d2[i],d8[i]]:=s[d2[i],d8[i]]+r[2,8];
    s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+r[3,3];
    s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+r[3,4];
    s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+r[3,5];
    s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+r[3,6];
    s[d3[i],d7[i]]:=s[d3[i],d7[i]]+r[3,7];
    s[d3[i],d8[i]]:=s[d3[i],d8[i]]+r[3,8];
    s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+r[4,4];
    s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+r[4,5];
    s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+r[4,6];
    s[d4[i],d7[i]]:= s[d4[i],d7[i]]+r[4,7];
    s[d4[i],d8[i]]:=s[d4[i],d8[i]]+r[4,8];
    s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+r[5,5];
    s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+r[5,6];
    s[d5[i],d7[i]]:=s[d5[i],d7[i]]+r[5,7];
    s[d5[i],d8[i]]:=s[d5[i],d8[i]]+r[5,8];
    s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+r[6,6];
    s[d6[i],d7[i]]:=s[d6[i],d7[i]]+r[6,7];
    s[d6[i],d8[i]]:=s[d6[i],d8[i]]+r[6,8];
    s[d7[i],d7[i]]:=s[d7[i],d7[i]]+r[7,7];
    s[d7[i],d8[i]]:=s[d7[i],d8[i]]+r[7,8];
    s[d8[i],d8[i]]:=s[d8[i],d8[i]]+r[8,8];
  end;
  end;
procedure tinhus;
begin
(*Tinh ung suat tai trong tam cua FTHH*);
if(x<>0) then for i:=1 to x do  qq[u[i]]:=0;
for i:=1 to sf do
begin
k11[i]:=-x1[i]+x2[i]+x3[i]-x4[i];  k12[i]:=-y1[i]+y2[i]+y3[i]-y4[i];
k21[i]:=-x1[i]-x2[i]+x3[i]+x4[i];  k22[i]:=-y1[i]-y2[i]+y3[i]+y4[i];
 us1[i]:=e1*(-k22[i]+k12[i])*qq[d1[i]]+e2*(k21[i]-k11[i])*qq[d2[i]]+
 e1*(k22[i]+k12[i])*qq[d3[i]]-e2*(k21[i]+k11[i])*qq[d4[i]]+
 e1*(k22[i]-k12[i])*qq[d5[i]]+ e2*(-k21[i]+k11[i])*qq[d6[i]]-
 e1*(k22[i]+k12[i])*qq[d7[i]]+ e2*(k21[i]+k11[i])*qq[d8[i]];
 us2[i]:=e2*(-k22[i]+k12[i])*qq[d1[i]]+e1*(k21[i]-k11[i])*qq[d2[i]]+
 e2*(k22[i]+k12[i])*qq[d3[i]]-e1*(k21[i]+k11[i])*qq[d4[i]]-
 e2*(k22[i]+k12[i])*qq[d5[i]]+ e1*(-k21[i]+k11[i])*qq[d6[i]]-
 e2*(k22[i]+k12[i])*qq[d7[i]]+ e1*(k21[i]+k11[i])*qq[d8[i]];
 us3[i]:=e3*(k21[i]-k11[i])*qq[d1[i]]+e3*(-k22[i]+k12[i])*qq[d2[i]]+
 e3*(k21[i]-k11[i])*qq[d3[i]]+e3*(k22[i]+k12[i])*qq[d4[i]]+
 e3*(-k21[i]+k11[i])*qq[d5[i]]+e3*(k22[i]-k12[i])*qq[d6[i]]+
```

```
 e3*(k21[i]+k11[i])*qq[d7[i]]-e3*(k22[i]+k12[i])*qq[d8[i]];
end;
end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('so fan tu');
 readln(sf);
 writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
 readln(sbt);
 writeln('nhap tong so so BTD ');
 readln(tbt);
 writeln('nhap so BTD co chuyen vi triet tieu ');
 readln(x);
 writeln('nhap so thu tu BTD co chuyen vi triet tieu ');
 if(x<>0) then for i:=1 to x do
 readln(u[i]);
 writeln('btd d1'); for i :=1 to sf do  readln(d1[i]);
 writeln('btd d2'); for i :=1 to sf do  readln(d2[i]);
 writeln('btd d3'); for i :=1 to sf do  readln(d3[i]);
 writeln('btd d4'); for i :=1 to sf do  readln(d4[i]);
 writeln('btd d5'); for i :=1 to sf do  readln(d5[i]);
 writeln('btd d6'); for i :=1 to sf do  readln(d6[i]);
 writeln('btd d7'); for i :=1 to sf do  readln(d7[i]);
 writeln('btd d8'); for i :=1 to sf do  readln(d8[i]);
 writeln('toa do x1'); for i :=1 to sf do  readln(x1[i]);
 writeln('toa do x2'); for i :=1 to sf do  readln(x2[i]);
 writeln('toa do x3'); for i :=1 to sf do  readln(x3[i]);
 writeln('toa do x4'); for i :=1 to sf do  readln(x4[i]);
 writeln('toa do y1'); for i :=1 to sf do  readln(y1[i]);
 writeln('toa do y2'); for i :=1 to sf do  readln(y2[i]);
 writeln('toa do y3'); for i :=1 to sf do  readln(y3[i]);
 writeln('toa do y4'); for i :=1 to sf do  readln(y4[i]);
 writeln('nhap modun dan hoi');
 readln(e);
  writeln('nhap be day tam');
 readln(t);
 writeln('nhap he so Poatxong');
 readln(hp);
 writeln('nhap ti trong tren fuong x');
 readln(tx);
 writeln('nhap ti trong tren fuong y');
 readln(ty);
 writeln('nhap luc bien');
```

```
 for i:=1 to sbt do  readln(fb[i]);
 writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
 for i:=1 to sbt do  readln(fn[i]);
 w:=0.5773502691;  e1:=e/(1-hp);  e2:=e1*hp;   e3:=e1*(1-hp)/2;
tinhl1;
tinhl2;
tinhl3;
tinhl4;
for k:=1 to sf do
begin
for i:=1 to 8 do
for j:=i to 8 do  r[i,j]:=l1[i,j]+l2[i,j]+l3[i,j]+l4[i,j];
end;
tinhs;
 for i:=1 to sbt do
 for j:=1 to i-1 do     s[i,j]:=s[j,i];

for k:=1 to sf do
begin
z1a[k]:=(1-w)*(1-w)*det1[k];
z1b[k]:=(1+w)*(1-w)*det2[k];
z1c[k]:=(1-w)*(1+w)*det3[k];
z1d[k]:=(1+w)*(1+w)*det4[k];

z3a[k]:=(1+w)*(1-w)*det1[k];
z3b[k]:=(1-w)*(1-w)*det2[k];
z3c[k]:=(1+w)*(1+w)*det3[k];
z3d[k]:=(1-w)*(1+w)*det4[k];

z5a[k]:=(1+w)*(1+w)*det1[k];
z5b[k]:=(1-w)*(1+w)*det2[k];
z5c[k]:=(1+w)*(1-w)*det3[k];
z5d[k]:=(1-w)*(1-w)*det4[k];
z7a[k]:=(1-w)*(1+w)*det1[k];
z7b[k]:=(1+w)*(1+w)*det2[k];
z7c[k]:=(1-w)*(1-w)*det3[k];
z7d[k]:=(1+w)*(1-w)*det4[k];

z1[k]:=z1a[k]+z1b[k]+z1c[k]+z1d[k];
z3[k]:=z3a[k]+z3b[k]+z3c[k]+z3d[k];
z5[k]:=z5a[k]+z5b[k]+z5c[k]+z5d[k];
z7[k]:=z7a[k]+z7b[k]+z7c[k]+z7d[k];
end;
for i:=1 to sf do
```

```
begin
ft[d1[i]]:=ft[d1[i]]+z1[i]*tx*t/4;  ft[d2[i]]:=ft[d2[i]]+z1[i]*ty*t/4;
ft[d3[i]]:=ft[d3[i]]+z3[i]*tx*t/4;  ft[d4[i]]:=ft[d4[i]]+z3[i]*ty*t/4;
ft[d5[i]]:=ft[d5[i]]+z5[i]*tx*t/4;  ft[d6[i]]:=ft[d6[i]]+z5[i]*ty*t/4;
ft[d7[i]]:=ft[d7[i]]+z7[i]*tx*t/4;  ft[d8[i]]:=ft[d8[i]]+z7[i]*ty*t/4;
end;
for i:=1 to sbt do    f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Goi chuong trinh con de tinh ung suat*);
tinhus;

(*Doc ket qua*);
writeln ('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('ung suat1');
for i:=1 to sf do
writeln(us1[i]);
writeln ('ung suat2');
for i:=1 to sf do
writeln(us2[i]);
writeln ('ung suat3');
for i:=1 to sf do
writeln(us3[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR14_Tinh_khung_phang_tren_goi_tua_thuong_va_goi_tua_dan_hoi ;
 uses crt;
 type  mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
 mt3=array[1..20] of integer;
 Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,sgd,ss,rr,x,y,w,z:integer;
 a1,b1,p,q1,e,dt,f,fn,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,m1q,m2q,m1p,m2p,c1,c2,c3,c4,c5,c6,
 c7,cd,cd3,cd4,el1,el2,g1,g2,g3,g4,ma,la,mb1,mb2,lb1,lb2,l1w,l2w,m1w,m2w,
 lc1,lc2,l1q,l2q,l1p,l2p,u,v,z1,z2,z3,qq1,qq2,qq3,qq4,qq5,qq6,xx1,xx2,yy1,
 yy2,hc:mt2;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgd:mt3;
 s:mt1; q,r:real;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
 UNTIL(s= n -1);
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
       if(a[i,i]<>0) then
       x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;
end;

begin clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap so BTD khong co chuyen vi');
```

```
readln(z);
writeln('nhap so so thu tu BTD khong co chuyen vi');
for i :=1 to z do
readln(d[i]);
writeln('nhap tong so bac tu do');
readln(tbt);
writeln('nhap  toa do x1');
for i :=1 to st do  readln(xx1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i :=1 to st do  readln(xx2[i]);
 writeln('nhap  toa do y1');
for i :=1 to st do  readln(yy1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i :=1 to st do  readln(yy2[i]);
writeln('btd d1'); for i :=1 to st do   readln(d1[i]);
writeln('btd d2'); for i :=1 to st do   readln(d2[i]);
writeln('btd d3'); for i :=1 to st do   readln(d3[i]);
writeln('btd d4'); for i :=1 to st do   readln(d4[i]);
writeln('btd d5'); for i :=1 to st do   readln(d5[i]);
writeln('btd d6'); for i :=1 to st do   readln(d6[i]);
writeln('nhap so BTD co goi tua dan hoi');
readln(sgd);
writeln('nhap so thu tu BTD co goi tua dan hoi');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do  readln(tgd[i]);
writeln('nhap he so do cung');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do  readln(hc[tgd[i]]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do
readln (fn[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(w);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
```

```
 for i:=1 to x do
 readln (a[i]);
 writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (q1[i]);
 end;
 if (y<>0)then
 begin
  writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do
  readln (b[i]);
  writeln('nhap tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do
  readln (p[i]);
  writeln('nhap a1');
  for i:=1 to y do
  readln (a1[i]);
  writeln('nhap b1');
  for i:=1 to y do
  readln (b1[i]);
  end;
  if(w<>0) then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 for i:=1 to w do
 readln (c[i]);
 end;

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to st do
 begin
  cd[i]:=sqrt(sqr(xx2[i]-xx1[i])+sqr(yy2[i]-yy1[i]));
  l[i]:=(xx2[i]-xx1[i])/cd[i]; m[i]:=(yy2[i]-yy1[i])/cd[i];
  cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
  if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
  begin
  g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
  g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
  end;
  c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(m[i]);
  c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*m[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(m[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
  c4[i]:=g2[i]*m[i];  c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i];  c7[i]:=2*g4[i];
end;
for i:=1 to st do
```

```
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
 s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
 s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
 s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
 s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
 s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
 s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
 s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
 s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do
s[tgd[i],tgd[i]]:=s[tgd[i],tgd[i]]+hc[tgd[i]];

(*Ghep cac vec to tai trong*);
if(x<>0) then
begin
  for i:=1 to x do
  begin
  x1[i]:=d1[a[i]];      x2[i]:=d2[a[i]];      x3[i]:=d3[a[i]];
  x4[i]:=d4[a[i]];      x5[i]:=d5[a[i]];      x6[i]:=d6[a[i]];
  la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;   ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12;
  end;
  for i:=1 to x do
  begin
  f[x1[i]]:=f[x1[i]]-(la[i])*m[a[i]];
  f[x2[i]]:=f[x2[i]]+(la[i])*l[a[i]];
  f[x3[i]]:=f[x3[i]]-ma[i];
  f[x4[i]]:=f[x4[i]]-(la[i])*m[a[i]];
  f[x5[i]]:=f[x5[i]]+(la[i])*l[a[i]];
```

```
    f[x6[i]]:=f[x6[i]]+ma[i];
    end;
  end;
  if (y<>0) then
    begin
      for i :=1 to y do
      begin
      cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]];  y1[i]:=d1[b[i]];    y2[i]:=d2[b[i]];
      y3[i]:=d3[b[i]];                 y4[i]:=d4[b[i]];   y5[i]:= d5[b[i]];
      y6[i]:= d6[b[i]];  mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
      mb2[i]:=p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
      if(cd3[i]<>0) then
          begin
           lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
           lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
          end;
    end;
    for i :=1 to y do
    begin
         if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
          begin
          f[y1[i]]:=f[y1[i]]-(lb1[i])*m[b[i]];
          f[y2[i]]:=f[y2[i]]+(lb1[i])*l[b[i]];
          f[y3[i]]:=f[y3[i]]-mb1[i];
          f[y4[i]]:=f[y4[i]]-(lb2[i])*m[b[i]];
          f[y5[i]]:=f[y5[i]]+(lb2[i])*l[b[i]];
          f[y6[i]]:=f[y6[i]]+mb2[i];
          end;
  end;
  end;
  for i:=1 to sbt do    f[i]:=f[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

for i:=1 to st do
 begin
 qq1[i]:=qq[d1[i]];        qq2[i]:=qq[d2[i]];        qq3[i]:=qq[d3[i]];
 qq4[i]:=qq[d4[i]];        qq5[i]:=qq[d5[i]];        qq6[i]:=qq[d6[i]];
 end;

(*Tinh mo men o trang thai tu do*);
for i:=1 to z do      qq[d[i]]:=0;
for i:=1 to st do
```

```
begin
if(cd[i]<>0) then
 begin
 z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*((qq1[i]-qq4[i])*m[i]+(qq5[i]-
 qq2[i])*l[i]); z2[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq3[i]+qq6[i]);
 z3[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(qq3[i]+2*qq6[i]);
 end;
 m1[i]:=z1[i]+z2[i];
 m2[i]:=z1[i]+z3[i];
 end;
(*Tinh tong momen*);
  if(x<>0) then
   begin
     for i:=1 to x do
     begin
      m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
      m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
     end;
   end;
  if(y<>0) then
  begin
   for i:=1 to y do
   begin
   m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
   m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
   end;
  end;
  if(w<>0) then
  begin
   for i:=1 to w do
   begin
   m1w[i]:=m1[c[i]];
   m2w[i]:=m2[c[i]];
   end;
  end;

 (*Tinh luc cat*);
 if(x<>0) then
   begin
    for i:=1 to x do
    begin
     la[i]:=q1[i]*(cd[a[i]])/2;
     l1q[i]:=-(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
     l2q[i]:=(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
    end;
   end;
```

```
  if(y<>0) then
  begin
   for i:=1 to y do
    begin
    cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
    lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
    lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
    l1p[i]:=-(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
    l2p[i]:=(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
   end;
  end;
  if(w<>0) then
  begin
   for i:=1 to w do
    begin
    l1w[i]:=-(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
    l2w[i]:=(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
    end;
  end;
 (*Doc ket qua*);
 writeln('gia tri chuyen vi');
 for i:=1 to sbt do
 writeln(qq[i]);
 writeln ('gia tri mo men w');
 if (w<>0) then
 begin
 for i:=1 to w do
 writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
 end;
 writeln ('gia tri mo men x');
 if (x<>0) then
 begin
 for i :=1 to x do
 writeln (m1q[i],m2q[i]);
 end;
 writeln ('gia tri mo men y');
 if (y<>0) then
 begin
 for i :=1 to y do
 writeln (m1p[i],m2p[i]);
 end;
 writeln ('gia tri luc cat w');
 if (w<>0) then
```

```
begin
for i :=1 to w do
writeln (l1w[i],l2w[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (l1q[i],l2q[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (l1p[i],l2p[i]);
end;
readln;
end.
```

```
Program CTR15_Tinh_khung_phang_co_goi_tua_lun_theo_FF_mo_hinh_lo_xo;
 uses crt;
 type  mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
 mt3=array[1..20] of integer;
Var i,j, k,sn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,w,z,sgc:integer;
 a1,b1,p,q1,e,dt,f,fn,mq,qq,fl,l,m,m1,m2,m1q,m2q,m1p,m2p,c1,c2,c3,c4,c5,c6,
 c7,cd,cd3,cd4,el1,el2,g1,g2,g3,g4,ma,la,mb1,mb2,lb1,lb2,l1w,l2w,m1w,m2w,
 lc1,lc2,l1q,l2q,l1p,l2p,u,v,z1,z2,z3,qq1,qq2,qq3,qq4,qq5,qq6,xx1,xx2,yy1,
 yy2,cv,max:mt2;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgc:mt3;
 s:mt1; q,r,cc,maxx:real;

procedure gtcdtd(a:mt1;n:integer);
begin
 max[i]:=abs(a[i,1]);
for i:=1 to n do
for j:=2 to n do
begin
if ((abs(a[i,j])>max[i]) or (abs(a[i,j])=max[i]))  then
 max[i]:=abs(a[i,j]) else max[i]:=max[i] ;
end;
 maxx:=max[1];
for i:=2 to n do
begin
 if(max[i]>maxx) then
 maxx:=max[i] else maxx:=maxx ;
end;
end;

Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
UNTIL(s= n -1);
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
```

```
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;
 end;
  begin clrscr;
 (*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
  writeln('nhap tong so BTD');
  readln(tbt);
  writeln('so thanh');
  readln(st);
  writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi cho truoc');
  readln(sgc);
  writeln('nhap so thu tu bac tu do co chuyen vi cho truoc');
  if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do  readln(tgc[i]);
  writeln('nhap gia tri chuyen vi cho cho truoc');
  if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do  readln(cv[tgc[i]]);
  writeln('nhap  toa do x1');
  for i :=1 to st do  readln(xx1[i]);
  writeln('nhap toa do x2');
  for i :=1 to st do  readln(xx2[i]);
   writeln('nhap  toa do y1');
  for i :=1 to st do  readln(yy1[i]);
  writeln('nhap toa do y2');
  for i :=1 to st do  readln(yy2[i]);
  writeln('btd d1'); for i :=1 to st do   readln(d1[i]);
  writeln('btd d2'); for i :=1 to st do   readln(d2[i]);
  writeln('btd d3'); for i :=1 to st do   readln(d3[i]);
  writeln('btd d4'); for i :=1 to st do   readln(d4[i]);
  writeln('btd d5'); for i :=1 to st do   readln(d5[i]);
  writeln('btd d6'); for i :=1 to st do   readln(d6[i]);
  writeln('nhap modun dan hoi');
  for i:=1 to st do  readln(e[i]);
  writeln('nhap dien tich');
  for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
  writeln('nhap mo men quan tinh');
  for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
  writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
  for i:=1 to sbt do
  readln (fn[i]);
  writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
```

```
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(y);
writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
readln(w);
if(x<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (a[i]);
writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
for i:=1 to x do
readln (q1[i]);
end;
if (y<>0)then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (b[i]);
writeln('nhap tai trong tap trung');
for i:=1 to y do
readln (p[i]);
writeln('nhap a1');
for i:=1 to y do
readln (a1[i]);
writeln('nhap b1');
for i:=1 to y do
readln (b1[i]);
end;
if(w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
for i:=1 to w do
readln (c[i]);
end;

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the *);
for i:=1 to st do
begin
cd[i]:=sqrt(sqr(xx2[i]-xx1[i])+sqr(yy2[i]-yy1[i]));
l[i]:=(xx2[i]-xx1[i])/cd[i]; m[i]:=(yy2[i]-yy1[i])/cd[i];
cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
begin
g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
```

```
 g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
 end;
 c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(m[i]);
 c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*m[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(m[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
 c4[i]:=g2[i]*m[i];  c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i];  c7[i]:=2*g4[i];
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
 s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
 s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
 s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
 s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
 s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
 s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
 s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
 s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
 s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
 end;
 for i:=1 to tbt do
 for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

 (*Goi chuong trinh con de tinh gia tri tuyet doi max cua cac fan tu MT*);
 GTCDTD(s,tbt);
  cc:=(maxx)*(10E+08);
  if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
  s[tgc[i],tgc[i]]:=s[tgc[i],tgc[i]]+cc;

  (*Ghep cac vec to tai trong*);
  if(x<>0) then
  begin
    for i:=1 to x do
    begin
    x1[i]:=d1[a[i]];       x2[i]:=d2[a[i]];      x3[i]:=d3[a[i]];
```

```
    x4[i]:=d4[a[i]];        x5[i]:=d5[a[i]];      x6[i]:=d6[a[i]];
    la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;   ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12;
    end;
    for i:=1 to x do
    begin
    f[x1[i]]:=f[x1[i]]-(la[i])*m[a[i]];
    f[x2[i]]:=f[x2[i]]+(la[i])*l[a[i]];
    f[x3[i]]:=f[x3[i]]-ma[i];
    f[x4[i]]:=f[x4[i]]-(la[i])*m[a[i]];
    f[x5[i]]:=f[x5[i]]+(la[i])*l[a[i]];
    f[x6[i]]:=f[x6[i]]+ma[i];
    end;
  end;
  if (y<>0) then
   begin
    for i :=1 to y do
    begin
    cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]];  y1[i]:=d1[b[i]];     y2[i]:=d2[b[i]];
    y3[i]:=d3[b[i]];                 y4[i]:=d4[b[i]];    y5[i]:= d5[b[i]];
    y6[i]:= d6[b[i]];   mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
    mb2[i]:=p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
    if(cd3[i]<>0) then
        begin
         lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
         lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
        end;
   end;
   for i :=1 to y do
   begin
        if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
         begin
         f[y1[i]]:=f[y1[i]]-(lb1[i])*m[b[i]];
         f[y2[i]]:=f[y2[i]]+(lb1[i])*l[b[i]];
         f[y3[i]]:=f[y3[i]]-mb1[i];
         f[y4[i]]:=f[y4[i]]-(lb2[i])*m[b[i]];
         f[y5[i]]:=f[y5[i]]+(lb2[i])*l[b[i]];
         f[y6[i]]:=f[y6[i]]+mb2[i];
         end;
end;
end;
if(sgc<>0) then for i:=1 to sgc do
f[tgc[i]]:=f[tgc[i]]+cc*cv[tgc[i]];
for i:=1 to tbt do    f[i]:=f[i]+fn[i];
```

```
(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,tbt);

for i:=1 to st do
 begin
 qq1[i]:=qq[d1[i]];      qq2[i]:=qq[d2[i]];      qq3[i]:=qq[d3[i]];
 qq4[i]:=qq[d4[i]];      qq5[i]:=qq[d5[i]];      qq6[i]:=qq[d6[i]];
 end;

(*Tinh mo men o trang thai tu do*);
for i:=1 to z do      qq[d[i]]:=0;
for i:=1 to st do
begin
if(cd[i]<>0) then
 begin
 z1[i]:=(6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]))*((qq1[i]-qq4[i])*m[i]+(qq5[i]-
 qq2[i])*l[i]); z2[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(2*qq3[i]+qq6[i]);
 z3[i]:=(2*e[i]*mq[i]/cd[i])*(qq3[i]+2*qq6[i]);
 end;
 m1[i]:=z1[i]+z2[i];
 m2[i]:=z1[i]+z3[i];
end;
(*Tinh tong momen*);
  if(x<>0) then
   begin
     for i:=1 to x do
     begin
      m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
      m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
     end;
    end;
   if(y<>0) then
   begin
    for i:=1 to y do
    begin
    m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
    m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
    end;
   end;
   if(w<>0) then
   begin
    for i:=1 to w do
    begin
    m1w[i]:=m1[c[i]];
```

```
      m2w[i]:=m2[c[i]];
      end;
     end;

    (*Tinh luc cat*);
    if(x<>0) then
     begin
      for i:=1 to x do
      begin
       la[i]:=q1[i]*(cd[a[i]])/2;
       l1q[i]:=-(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
       l2q[i]:=(m1q[i]+m2q[i])/cd[a[i]]-la[i];
      end;
     end;
    if(y<>0) then
    begin
     for i:=1 to y do
      begin
      cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]]; if(cd3[i]<>0) then
      lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+2*a1[i])/cd3[i];
      lb2[i]:=p[i]-lb1[i];
      l1p[i]:=-(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb1[i];
      l2p[i]:=(m1p[i]+m2p[i])/cd[b[i]]-lb2[i];
     end;
    end;
    if(w<>0) then
    begin
     for i:=1 to w do
      begin
      l1w[i]:=-(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
      l2w[i]:=(m1w[i]+m2w[i])/cd[c[i]];
      end;
    end;

  (*Doc ket qua*);
  writeln('gia tri chuyen vi');
  for i:=1 to sbt do
  writeln(qq[i]);
  writeln ('gia tri mo men w');
  if (w<>0) then
  begin
  for i:=1 to w do
  writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
  end;
```

```
writeln ('gia tri mo men x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (m1q[i],m2q[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (m1p[i],m2p[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat w');
if (w<>0) then
begin
for i :=1 to w do
writeln (l1w[i],l2w[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat x');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (l1q[i],l2q[i]);
end;
writeln ('gia tri luc cat y');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (l1p[i],l2p[i]);
end;
readln;
end.
```

```
Program CTR16_Tinh_he_dam_truc_giao;
 uses crt;
 type  mt1=array[1..20,1..20] of real; mt2=array[1..20] of real;
 mt3=array[1..10] of integer;
 Var i,j, k,sn,sbn,st,sbt,tbt,ss,rr,x,y,z,w,sgd:integer;

a1,b1,p,q1,e,dt,f,fc,mq,qq,l,m,m1q,m2q,m1p,m2p,m1z,m2z,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,el1
,el2,g1,g2,g3,g4:mt2;
 cd,cd3,mt,mqx,e1,m1,m2,t1,t2,la,ma,lb1,lb2,mb1,mb2,z1,z2,xx1,xx2,yy1,yy2,
 hc,mqy,r1,r2,r3,r4:mt2;
 d1,d2,d3,d4,d5,d6,a,b,c,d,x1,x2,x3,x4,x5,x6,y1,y2,y3,y4,y5,y6,tgd:mt3;
 s:mt1;   q,r:real;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
 UNTIL(s= n -1);
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
 for i:= n -1  downto 1 do
    Begin
       r :=0;
       for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
       if(a[i,i]<>0) then
       x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
    End;
end;

begin  clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('nhap tong so BTD');
readln(tbt);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so bac tu do co chuyen vi');
readln(sbt);
```

```
writeln('nhap tong so bac tu do');
readln(tbt);
writeln('nhap so bac tu do khong co chuyen vi');
readln(w);
if (w<>0) then
begin
writeln('nhap so thu tu bac tu do khong co chuyen vi');
for i:=1 to w do
readln(d[i]);
end;
writeln('nhap so bac tu do co goi tua dan hoi');
readln(sgd);
writeln('nhap so thu tu bac tu do co goi tua dan hoi');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do readln(tgd[i]);
writeln('nhap he so do cung');
if(sgd<>0) then for i:=1 to sgd do readln(hc[tgd[i]]);
writeln ('nhap so thu tu bac tu do');
writeln('nhap d1'); for i :=1 to st do   readln(d1[i]);
writeln('nhap d2'); for i :=1 to st do   readln(d2[i]);
writeln('nhap d3'); for i :=1 to st do   readln(d3[i]);
writeln('nhap d4'); for i :=1 to st do   readln(d4[i]);
writeln('nhap d5'); for i :=1 to st do   readln(d5[i]);
writeln('nhap d6'); for i :=1 to st do   readln(d6[i]);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(xx1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(xx2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(yy1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(yy2[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh y');
for i:=1 to st do  readln(mqy[i]);
writeln('nhap mo men quan tinh x');
for i:=1 to st do  readln(mqx[i]);
 writeln('nhap mo dun truot');
for i:=1 to st do  readln(mt[i]);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln (x);
writeln ('nhap so thanh chiu tai trong tap trung');
```

```
 readln(y);
 writeln ('nhap so thanh khong chiu tai trong ');
 readln(z);
 if(x<>0) then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (a[i]);
 writeln('nhap cuong do tai trong fan bo deu');
 for i:=1 to x do
 readln (q1[i]);
 end;
 if (y<>0)then
 begin
  writeln('nhap so thu tu thanh chiu tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do
  readln (b[i]);
  writeln('nhap tai trong tap trung');
  for i:=1 to y do
  readln (p[i]);
  writeln('nhap a1');
  for i:=1 to y do
  readln (a1[i]);
  writeln('nhap b1');
  for i:=1 to y do
  readln (b1[i]);
  end;
   if(z<>0) then
 begin
 writeln('nhap so thu tu thanh khong chiu tai trong ');
 for i:=1 to z do
 readln (c[i]);
 end;

(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to st do
 begin
 cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
 l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i];
 m[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
  cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
  if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
  begin
  g1[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i]; g2[i]:=e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
```

```
 g3[i]:=e[i]*mq[i]/cd3[i]; g4[i]:=mt[i]*mqx[i]/cd[i];
 end;
c1[i]:=12*g3[i];  c2[i]:=6*g2[i]*m[i]; c3[i]:=6*g2[i]*l[i];
c4[i]:=4*g1[i]*sqr(m[i])+g4[i]*sqr(l[i]); c5[i]:=(4*g1[i]-g4[i])*l[i]*m[i];
c6[i]:=2*g1[i]*sqr(m[i])+g4[i]*sqr(l[i]);  c7[i]:=(2*g1[i]+g4[i])*l[i]*m[i];
c8[i]:=4*g1[i]*sqr(l[i])+g4[i]*sqr(m[i]); c9[i]:=2*g1[i]*sqr(l[i])-
g4[i]*sqr(m[i]);
end;
for i:=1 to st do
begin
 s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c4[i];
 s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-c3[i];
 s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
 s[d3[i],d3[i]]:= s[d3[i],d3[i]]+c8[i];
 s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
 s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
 s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c3[i];
 s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
 s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c2[i];
 s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c6[i];
 s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]-c7[i];
 s[d4[i],d5[i]]:=s[d4[i],d5[i]]-c2[i];
 s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c4[i];
 s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]-c3[i];
 s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c7[i];
 s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c9[i];
 s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c3[i];
 s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]-c5[i];
 s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c8[i];
end;
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to i-1 do    s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
 if(x<>0) then
 begin
  for i:=1 to x do
  begin
  x1[i]:=d1[a[i]];        x2[i]:=d2[a[i]];   x3[i]:=d3[a[i]];
  x4[i]:=d4[a[i]];        x5[i]:=d5[a[i]];   x6[i]:=d6[a[i]];
  la[i]:=q1[i]*cd[a[i]]/2;  ma[i]:=q1[i]*sqr(cd[a[i]])/12;
  r1[i]:=(ma[i])*m[a[i]];  r2[i]:=(ma[i])*l[a[i]];
  end;
```

```
      for i:=1 to x do
        begin
          f[x1[i]]:=f[x1[i]]+la[i];
          f[x2[i]]:=f[x2[i]]-r1[i];
          f[x3[i]]:=f[x3[i]]-r2[i];
          f[x4[i]]:=f[x4[i]]+la[i];
          f[x5[i]]:=f[x5[i]]+r1[i];
          f[x6[i]]:=f[x6[i]]+r2[i];
        end;
    end;
    if (y<>0) then
    begin
     for i :=1 to y do
      begin
      y1[i]:=d1[b[i]];    y2[i]:=d2[b[i]];      y3[i]:=d3[b[i]];
      y4[i]:=d4[b[i]];    y5[i]:=d5[b[i]];      y6[i]:=d6[b[i]];
      cd3[i]:=sqr(cd[b[i]])*cd[b[i]];
      mb1[i]:=p[i]*a1[i]*sqr(b1[i])/sqr(cd[b[i]]);
      mb2[i]:= p[i]*b1[i]*sqr(a1[i])/sqr(cd[b[i]]);
      if(cd3[i]<>0) then lb1[i]:=p[i]*sqr(b1[i])*(cd[b[i]]+
      2*a1[i])/cd3[i]; lb2[i]:=p[i]-lb1[i];  r3[i]:=(mb1[i])*m[b[i]];
      r4[i]:=(mb1[i])*l[b[i]];
      end;
      for i :=1 to y do
      begin
      if(sqr(cd[b[i]])<>0) then
      begin
      f[y1[i]]:=f[y1[i]]+lb1[i];
      f[y2[i]]:=f[y2[i]]-r3[i];
      f[y3[i]]:=f[y3[i]]-r4[i];
      f[y4[i]]:=f[y4[i]]+lb2[i];
      f[y5[i]]:=f[y5[i]]+r3[i];
      f[y6[i]]:=f[y6[i]]+r4[i];
      end;
      end;
  end;

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh mo men uon*);
for i:=1 to st do
begin
 e1[i]:=6*(qq[d4[i]]-qq[d1[i]])/cd[i];
```

```
z1[i]:=(e[i]*mq[i]/cd[i])*((4*qq[d3[i]]+2*qq[d6[i]])*l[i]-(4*qq[d2[i]]+
2*qq[d5[i]])*m[i]);
z2[i]:= (e[i]*mq[i]/cd[i])*((2*qq[d3[i]]+4*qq[d6[i]])*l[i]-(2*qq[d2[i]]
+4*qq[d5[i]])*m[i]);
end;
for i:=1 to st do
begin
 m1[i]:=z1[i]-e1[i];
 m2[i]:=z2[i]-e1[i];
end;

(*Tinh tong momen*);
 if(x<>0) then
   begin
     for i:=1 to x do
     begin
     m1q[i]:=m1[a[i]]+ma[i];
     m2q[i]:=m2[a[i]]-ma[i];
     end;
   end;
  if(y<>0) then
  begin
   for i:=1 to y do
   begin
   m1p[i]:=m1[b[i]]+mb1[i];
   m2p[i]:=m2[b[i]]-mb2[i];
   end;
  end;
   if(z<>0) then
  begin
   for i:=1 to z do
   begin
   m1z[i]:=m1[c[i]];
   m2z[i]:=m2[c[i]];
   end;
   end;

  (*tinh momen xoan*);
  for i:=1 to st do
  begin
   t1[i]:=(mt[i]*mqx[i]/cd[i])*((qq[d5[i]]-qq[d2[i]])*l[i]+(qq[d6[i]]
  -qq[d3[i]])*m[i]);     t2[i]:=-t1[i];
  end;
```

```
(*Doc ket qua*);
writeln('gia tri chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('gia tri mo men mz');
if (z<>0) then
begin
for i:=1 to z do
writeln (m1[c[i]],m2[c[i]]);
end;
writeln ('gia tri mo men mq');
if (x<>0) then
begin
for i :=1 to x do
writeln (m1q[i],m2q[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men mp');
if (y<>0) then
begin
for i :=1 to y do
writeln (m1p[i],m2p[i]);
end;
writeln ('gia tri mo men tx');
for i :=1 to st do
writeln (t1[i],t2[i]);
readln;
end.
```

```
Program CTR17_Giai_bai_toan_3_chieu_kieu_FTHH_4_mat_4_nut;
Uses crt;
 Type   mt1=array [1..20,1..20] of real;
      mt2=array [1..20] of real;
 Var    d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,v:array[1..20] of integer;
      f,fl,fb,ft,fn,x1,x2,x3,x4,y1,y2,y3,y4,z1,z2,z3,z4,qq,dt,det,c1,c2,c3,
      c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14,c15,c16,c17,c18,c19,c20,c21,
      c22,c23,c24,c25,c26,c27,c28,c29,c30,c31,c32,c33,c34,c35,c36,c37,c38,
      c39,c40,c41,c42,c43,c44,c45,c46,c47,c48,c49,c50,c51,c52,c53,c54,c55,
      c56,c57,c58,c59,c60,c61,c62,c63,c64,c65,c66,c67,c68,c69,c70,c71,c72,
      c73,c74,c75,c76,c77,c78,x14,x34,x24,y24,y34,y14,z34,z24,z14,
      a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,an1,an2,an3,us1,us2,us3,us4,us5,
      us6,m1,m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11,m12,h1,h2,h3,h4,h5,h6,h7,
      h8,h9,h10,h11,h12,b1,b2,b3,b4,b5,b6,b7,b8,b9,b10,b11,b12,bb1,bb2,bb3,
      bb4,bb5,bb6,bb7,bb8,bb9,bb10,bb11,bb12,n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,
      n11,n12,s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,s10,s11,s12:mt2;
      p,i,j,k,ss,sf,sbt,tbt,u:integer;  q,hp,tx,ty,e,e1,e2,e3,e4,r:real;
      s,sc,b,d,g,h,l,bcv:mt1;

 Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
 var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
 begin
  s:=0;
  REPEAT
     s:=s+1;
     for i:= s+1 to n do
       Begin
         if(a[s,s]<>0) then
         q:=a[s,i]/a[s,s];
         for j:=i to n do
          a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
       End
  UNTIL(s= n -1);
   x[n]:=b[n]/a[n,n];
   for i:= n -1  downto 1 do
      Begin
         r :=0;
         for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
         if(a[i,i]<>0) then
         x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
      End;
  end;
  procedure nhapdulieu;
```

```
begin
 clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
 writeln('nhap tong so BTD');
 readln(tbt);
 writeln('so fan tu');
 readln(sf);
 writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
 readln(sbt);
 writeln('nhap tong so so BTD ');
 readln(tbt);
 writeln('nhap cac  BTD co chuyen vi triet tieu ');
 readln(u);
 writeln('nhap so thu tu BTD co chuyen vi triet tieu ');
 if (U<>0) then for i:=1 to u do readln(v[u]);
 writeln('btd d1'); for i :=1 to sf do  readln(d1[i]);
 writeln('btd d2'); for i :=1 to sf do  readln(d2[i]);
 writeln('btd d3'); for i :=1 to sf do  readln(d3[i]);
 writeln('btd d4'); for i :=1 to sf do  readln(d4[i]);
 writeln('btd d5'); for i :=1 to sf do  readln(d5[i]);
 writeln('btd d6'); for i :=1 to sf do  readln(d6[i]);
 writeln('btd d7'); for i :=1 to sf do  readln(d7[i]);
 writeln('btd d8'); for i :=1 to sf do  readln(d8[i]);
 writeln('btd d9'); for i :=1 to sf do  readln(d9[i]);
 writeln('btd d10'); for i :=1 to sf do  readln(d10[i]);
 writeln('btd d11'); for i :=1 to sf do  readln(d11[i]);
 writeln('btd d12'); for i :=1 to sf do  readln(d12[i]);
 writeln('toa do x1'); for i :=1 to sf do  readln(x1[i]);
 writeln('toa do x2'); for i :=1 to sf do  readln(x2[i]);
 writeln('toa do x3'); for i :=1 to sf do  readln(x3[i]);
 writeln('toa do x4'); for i :=1 to sf do  readln(x4[i]);
 writeln('toa do y1'); for i :=1 to sf do  readln(y1[i]);
 writeln('toa do y2'); for i :=1 to sf do  readln(y2[i]);
 writeln('toa do y3'); for i :=1 to sf do  readln(y3[i]);
 writeln('toa do y4'); for i :=1 to sf do  readln(y4[i]);
 writeln('toa do z1'); for i :=1 to sf do  readln(z1[i]);
 writeln('toa do z2'); for i :=1 to sf do  readln(z2[i]);
 writeln('toa do z3'); for i :=1 to sf do  readln(z3[i]);
 writeln('toa do z4'); for i :=1 to sf do  readln(z4[i]);
 writeln('nhap modun dan hoi');
 readln(e);
 writeln('nhap he so Poatxong');
 readln(hp);
 writeln('nhap ti trong tren fuong x');
```

```
readln(tx);
writeln('nhap ti trong tren fuong y');
readln(ty);
writeln('nhap luc bien');
for i:=1 to sbt do  readln(fb[i]);
writeln('nhap thanh fan ngoai luc');
for i:=1 to sbt do  readln(fn[i]);
end;

procedure part1;
begin
 for i:=1 to sf do
 begin
    x14[i]:=x1[i]-x4[i];  x34[i]:=x3[i]-x4[i]; x24[i]:=x2[i]-x4[i];
    y24[i]:=y2[i]-y4[i];  y34[i]:=y3[i]-y4[i]; y14[i]:=y1[i]-y4[i];
    z34[i]:=z3[i]-z4[i];  z24[i]:=z2[i]-z4[i]; z14[i]:=z1[i]-z4[i];
    det[i]:=x14[i]*(y24[i]*z34[i]-y34[i]*z24[i])+ y14[i]*(z24[i]*x34[i]-
    z34[i]*x24[i])+z14[i]*(x24[i]*y34[i]-x34[i]*y24[i]);
    a11[i]:=(y24[i]*z34[i]-y34[i]*z24[i])/det[i];
    a12[i]:=(y34[i]*z14[i]-y14[i]*z34[i])/det[i];
    a13[i]:=(y14[i]*z24[i]-y24[i]*z14[i])/det[i];
    a21[i]:=(z24[i]*x34[i]-z34[i]*x24[i])/det[i];
    a22[i]:=(z34[i]*x14[i]-z14[i]*x34[i])/det[i];
    a23[i]:=(z14[i]*x24[i]-z24[i]*x14[i])/det[i];
    a31[i]:=(x24[i]*y34[i]-x34[i]*z24[i])/det[i];
    a32[i]:=(x34[i]*y14[i]-x14[i]*y34[i])/det[i];
    a33[i]:=(x14[i]*y24[i]-x24[i]*y14[i])/det[i];
    an1[i]:=a11[i]+a12[i]+a13[i];
    an2[i]:=a21[i]+a22[i]+a23[i];
    an3[i]:=a31[i]+a32[i]+a33[i];
    e1:=e/(1+hp)*(1-2*hp);
    e2:=e1*(1-hp);  e3:=e1*hp;  e4:=e1*(0.5-hp);
  end;
  for i:=1 to 6 do
  for j:=1 to 6 do
  begin
     d[1,1]:=e2; d[1,2]:=e3; d[1,3]:=e3; d[1,4]:=0; d[1,5]:=0; d[1,6]:=0;
     d[2,2]:=e2; d[2,3]:=e3; d[2,4]:=0;  d[2,5]:=0; d[2,6]:=0;
     d[3,3]:=e2;  d[3,4]:=0; d[3,5]:=0; d[3,6]:=0;
     d[4,4]:=e4; d[4,5]:=0; d[4,6]:=0; d[5,5]:=e4; d[5,6]:=0;  d[6,6]:=e4;
  end;
  for i:=1 to 6 do
  for j:=1 to i-1 do    d[i,j]:=d[j,i];
  for k:=1 to sf do
```

```
 begin
  for i:=1 to 6 do
  for j:=1 to 12 do
  begin
     b[1,1]:=a11[k]; b[1,2]:=0; b[1,3]:=0; b[1,4]:=a12[k]; b[1,5]:=0;
     b[1,6]:=0; b[1,7]:=a13[k]; b[1,8]:=0; b[1,9]:=0; b[1,10]:=-an1[k];
     b[1,11]:=0; b[1,12]:=0;
     b[2,1]:=0; b[2,2]:=a21[k];  b[2,3]:=0; b[2,4]:=0; b[2,5]:=a22[k];
     b[2,6]:=0;
     b[2,7]:=0; b[2,8]:=a23[k]; b[2,9]:=0;  b[2,10]:=0; b[2,11]:=-an2[k];
     b[2,12]:=0;
     b[3,1]:=0; b[3,2]:=0;   b[3,3]:=a31[k]; b[3,4]:=0; b[3,5]:=0;
     b[3,6]:=a32[k]; b[3,7]:=0;b[3,8]:=0;  b[3,9]:=a33[k]; b[3,10]:=0;
     b[3,11]:=0; b[3,12]:=-an3[k];
     b[4,1]:=0;      b[4,2]:=a31[k];      b[4,3]:=a21[k];      b[4,4]:=0;      b[4,5]:=a32[k];
b[4,6]:=a22[k];
     b[4,6]:=0;  b[4,7]:=0;  b[4,8]:=a33[k]; b[4,9]:=a23[k]; b[4,10]:=0;
     b[4,11]:=-an3[k];   b[4,12]:=-an2[k];
     b[5,1]:=a31[k];b[5,2]:=0; b[5,3]:=a11[k];b[5,4]:=a32[k]; b[5,5]:=0;
     b[5,6]:=a12[k];b[5,7]:=a33[k];  b[5,8]:=0; b[5,9]:=a13[k];
     b[5,10]:=-an3[k]; b[5,11]:=0; b[5,12]:=-an1[k];
     b[6,1]:=a21[k];   b[6,2]:=a11[k]; b[6,3]:=0; b[6,4]:=a22[k];
     b[6,5]:=a12[k]; b[6,6]:=0;·b[6,7]:=a23[k];   b[6,8]:=a13[k];
     b[6,9]:=0;  b[6,10]:=-an2[k]; b[6,11]:=-an1[k]; b[6,12]:=0;
 end;
 for i:=1 to 12 do
 for j:=1 to 6 do    bcv[i,j]:=b[j,i];
 for i:=1 to 12 do
 for j:=1 to 6 do
 begin
    g[i,j]:=0;
    for p:=1 to 6 do g[i,j]:=g[i,j]+bcv[i,p]*d[p,j];
 end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
   h[i,j]:=0;
   for p:=1 to 6 do h[i,j]:=h[i,j]+g[i,p]*b[p,j];
end;
c1[k]:=h[1,1]; c2[k]:=h[1,2];  c3[k]:=h[1,3]; c4[k]:=h[1,4]; c5[k]:=h[1,5];
c6[k]:=h[1,6]; c7[k]:=h[1,7]; c8[k]:=h[1,8]; c9[k]:=h[1,9]; c10[k]:=h[1,10];
c11[k]:=h[1,11];c12[k]:=h[1,12]; c13[k]:=h[2,2]; c14[k]:=h[2,3];
c15[k]:=h[2,4];  c16[k]:=h[2,5]; c17[k]:=h[2,6]; c18[k]:=h[2,7];
c19[k]:=h[2,8];  c20[k]:=h[2,9];  c21[k]:=h[2,10]; c22[k]:=h[2,11];
```

```
 c23[k]:=h[2,12]; c24[k]:=h[3,3];  c25[k]:=h[3,4];  c26[k]:=h[3,5];
 c27[k]:=h[3,6];  c28[k]:=h[3,7];  c29[k]:=h[3,8];  c30[k]:=h[3,9];
 c31[k]:=h[3,10];  c32[k]:=h[3,11]; c33[k]:=h[3,12]; c34[k]:=h[4,4];
 c35[k]:=h[4,5];   c36[k]:=h[4,6]; c37[k]:=h[4,7];  c38[k]:=h[4,8];
 c39[k]:=h[4,9];  c40[k]:=h[4,10];  c41[k]:=h[4,11];  c42[k]:=h[4,12];
 c43[k]:=h[5,5];   c44[k]:=h[5,6];  c45[k]:=h[5,7];  c46[k]:=h[5,8];
 c47[k]:=h[5,9];  c48[k]:=h[5,10];   c49[k]:=h[5,11];  c50[k]:=h[5,12];
 c51[k]:=h[6,6];  c52[k]:=h[6,7];   c53[k]:=h[6,8];   c54[k]:=h[6,9];
 c55[k]:=h[6,10];  c56[k]:=h[6,11]; c57[k]:=h[6,12];  c58[k]:=h[7,7];
 c59[k]:=h[7,8];  c60[k]:=h[7,9];   c61[k]:=h[7,10];  c62[k]:=h[7,11];
 c63[k]:=h[7,12]; c64[k]:=h[8,8];  c65[k]:=h[8,9];   c66[k]:=h[8,10];
 c67[k]:=h[8,11];  c68[k]:=h[8,12]; c69[k]:=h[9,9];   c70[k]:=h[9,10];
 c71[k]:=h[9,11]; c72[k]:=h[9,12]; c73[k]:=h[10,10]; c74[k]:=h[10,11];
 c75[k]:=h[10,12]; c76[k]:=h[11,11]; c77[k]:=h[11,12]; c78[k]:=h[12,12];
end;
end;
begin
 nhapdulieu;
 part1;
(*Ghep cac MTDC rieng vao MTDC tong the*);
 for i:=1 to sf do
 begin
   s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
   s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
   s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c3[i];
   s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]+c4[i];
   s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]+c5[i];
   s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c6[i];
   s[d1[i],d7[i]]:=s[d1[i],d7[i]]+c7[i];
   s[d1[i],d8[i]]:=s[d1[i],d8[i]]+c8[i];
   s[d1[i],d9[i]]:=s[d1[i],d9[i]]+c9[i];
   s[d1[i],d10[i]]:=s[d1[i],d10[i]]+c10[i];
   s[d1[i],d11[i]]:=s[d1[i],d11[i]]+c11[i];
   s[d1[i],d12[i]]:=s[d1[i],d12[i]]+c12[i];
   s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c13[i];
   s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]+c14[i];
   s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]+c15[i];
   s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]+c16[i];
   s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]+c17[i];
   s[d2[i],d7[i]]:=s[d2[i],d7[i]]+c18[i];
   s[d2[i],d8[i]]:=s[d2[i],d8[i]]+c19[i];
   s[d2[i],d9[i]]:=s[d2[i],d9[i]]+c20[i];
   s[d2[i],d10[i]]:=s[d2[i],d10[i]]+c21[i];
   s[d2[i],d11[i]]:=s[d2[i],d11[i]]+c22[i];
```

```
s[d2[i],d12[i]]:=s[d2[i],d12[i]]+c23[i];
s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c24[i];
s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+c25[i];
s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c26[i];
s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c27[i];
s[d3[i],d7[i]]:=s[d3[i],d7[i]]+c28[i];
s[d3[i],d8[i]]:=s[d3[i],d8[i]]+c29[i];
s[d3[i],d9[i]]:=s[d3[i],d9[i]]+c30[i];
s[d3[i],d10[i]]:=s[d3[i],d10[i]]+c31[i];
s[d3[i],d11[i]]:=s[d3[i],d11[i]]+c32[i];
s[d3[i],d12[i]]:=s[d3[i],d12[i]]+c33[i];
s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c34[i];
s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c35[i];
s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]+c36[i];
s[d4[i],d7[i]]:= s[d4[i],d7[i]]+c37[i];
s[d4[i],d8[i]]:=s[d4[i],d8[i]]+c38[i];
s[d4[i],d9[i]]:= s[d4[i],d9[i]]+c39[i];
s[d4[i],d10[i]]:=s[d4[i],d10[i]]+c40[i];
s[d4[i],d11[i]]:= s[d4[i],d11[i]]+c41[i];
s[d4[i],d12[i]]:=s[d4[i],d12[i]]+c42[i];
s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c43[i];
s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c44[i];
s[d5[i],d7[i]]:=s[d5[i],d7[i]]+c45[i];
s[d5[i],d8[i]]:=s[d5[i],d8[i]]+c46[i];
s[d5[i],d9[i]]:=s[d5[i],d9[i]]+c47[i];
s[d5[i],d10[i]]:=s[d5[i],d10[i]]+c48[i];
s[d5[i],d11[i]]:=s[d5[i],d11[i]]+c49[i];
s[d5[i],d12[i]]:=s[d5[i],d12[i]]+c50[i];
s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c51[i];
s[d6[i],d7[i]]:=s[d6[i],d7[i]]+c52[i];
s[d6[i],d8[i]]:=s[d6[i],d8[i]]+c53[i];
s[d6[i],d9[i]]:=s[d6[i],d9[i]]+c54[i];
s[d6[i],d10[i]]:=s[d6[i],d10[i]]+c55[i];
s[d6[i],d11[i]]:=s[d6[i],d11[i]]+c56[i];
s[d6[i],d12[i]]:=s[d6[i],d12[i]]+c57[i];
s[d7[i],d7[i]]:=s[d7[i],d7[i]]+c58[i];
s[d7[i],d8[i]]:=s[d7[i],d8[i]]+c59[i];
s[d7[i],d9[i]]:=s[d7[i],d9[i]]+c60[i];
s[d7[i],d10[i]]:=s[d7[i],d10[i]]+c61[i];
s[d7[i],d11[i]]:=s[d7[i],d11[i]]+c62[i];
s[d7[i],d12[i]]:=s[d7[i],d12[i]]+c63[i];
s[d8[i],d8[i]]:=s[d8[i],d8[i]]+c64[i];
s[d8[i],d9[i]]:=s[d8[i],d9[i]]+c65[i];
s[d8[i],d10[i]]:=s[d8[i],d10[i]]+c66[i];
```

```
 s[d8[i],d11[i]]:=s[d8[i],d11[i]]+c67[i];
 s[d8[i],d12[i]]:=s[d8[i],d12[i]]+c68[i];
 s[d9[i],d9[i]]:=s[d9[i],d9[i]]+c69[i];
 s[d9[i],d10[i]]:=s[d9[i],d10[i]]+c70[i];
 s[d9[i],d11[i]]:=s[d9[i],d11[i]]+c71[i];
 s[d9[i],d12[i]]:=s[d9[i],d12[i]]+c72[i];
 s[d10[i],d10[i]]:=s[d10[i],d10[i]]+c73[i];
 s[d10[i],d11[i]]:=s[d10[i],d11[i]]+c74[i];
 s[d10[i],d12[i]]:=s[d10[i],d12[i]]+c75[i];
 s[d11[i],d11[i]]:=s[d11[i],d11[i]]+c76[i];
 s[d11[i],d12[i]]:=s[d11[i],d12[i]]+c77[i];
 s[d12[i],d12[i]]:=s[d12[i],d12[i]]+c78[i];
end;
 for i:=1 to sbt do
 for j:=1 to i-1 do    s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac vecto tai trong*);
for i:=1 to sbt do    f[i]:=ft[i]+fb[i]+fn[i];

(*Goi chuong trinh con de giai he FT*);
GHFT(s,f,qq,sbt);

(*Tinh ung suat tai trong tam cua FTHH*);
if(u<>0) then for i:=1 to u do  qq[v[u]]:=0;
for k:=1 to sf do
begin
for i:=1 to 6 do
for j:=1 to 12 do
begin  l[i,j]:=0;
for p:=1 to 6 do  l[i,j]:=l[i,j]+d[i,p]*b[p,j];
end;

m1[k]:=l[1,1]; m2[k]:=l[1,2]; m3[k]:=l[1,3]; m4[k]:=l[1,4]; m5[k]:=l[1,5];
m6[k]:=l[1,6];  m7[k]:=l[1,7];  m8[k]:=l[1,8]; m9[k]:=l[1,9]; m10[k]:=l[1,10];
m11[k]:=l[1,11];  m12[k]:=l[1,12]; h1[k]:=l[2,1];  h2[k]:=l[2,2];
h3[k]:=l[2,3];   h4[k]:=l[2,4];  h5[k]:=l[2,5];   h6[k]:=l[2,6];
h7[k]:=l[2,7];   h8[k]:=l[2,8];   h9[k]:=l[2,9];   h10[k]:=l[2,10];
h11[k]:=l[2,11];   h12[k]:=l[2,12]; b1[k]:=l[3,1];   b2[k]:=l[3,2];
 b3[k]:=l[3,3];    b4[k]:=l[3,4];    b5[k]:=l[3,5];   b6[k]:=l[3,6];
 b7[k]:=l[3,7];    b8[k]:=l[3,8];     b9[k]:=l[3,9];   b10[k]:=l[3,10];
 b11[k]:=l[3,11]; b12[k]:=l[3,12]; bb1[k]:=l[4,1];   bb2[k]:=l[4,2];
bb3[k]:=l[4,3];    bb4[k]:=l[4,4];   bb5[k]:=l[4,5];   bb6[k]:=l[4,6];
bb7[k]:=l[4,7];   bb8[k]:=l[4,8];    bb9[k]:=l[4,9];   bb10[k]:=l[4,10];
bb11[k]:=l[4,11];   bb12[k]:=l[4,12]; n1[k]:=l[5,1];   n2[k]:=l[5,2];
```

```
n3[k]:=l[5,3];  n4[k]:=l[5,4];   n5[k]:=l[5,5];   n6[k]:=l[5,6];
n7[k]:=l[5,7];  n8[k]:=l[5,8];   n9[k]:=l[5,9];  n10[k]:=l[5,10];
n11[k]:=l[5,11];  n12[k]:=l[5,12];   s1[k]:=l[6,1];
s2[k]:=l[6,2];  s3[k]:=l[6,3];  s4[k]:=l[6,4];   s5[k]:=l[6,5];
s6[k]:=l[6,6];  s7[k]:=l[6,7];  s8[k]:=l[6,8];   s9[k]:=l[6,9];
s10[k]:=l[6,10];   s11[k]:=l[6,11];  s12[k]:=l[6,12];
 us1[k]:=m1[k]*qq[d1[k]]+m2[k]*qq[d2[k]]+m3[k]*qq[d3[k]]+m4[k]*qq[d4[k]]+
 m5[k]*qq[d5[k]]+m6[k]*qq[d6[k]]+m7[k]*qq[d7[k]]+m8[k]*qq[d8[k]]+
 m9[k]*qq[d9[k]]+ m10[k]*qq[d10[k]]+m11[k]*qq[d11[k]]+ m12[k]*qq[d12[k]];

 us2[k]:=h1[k]*qq[d1[k]]+h2[k]*qq[d2[k]]+h3[k]*qq[d3[k]]+h4[k]*qq[d4[k]]+
 h5[k]*qq[d5[k]]+h6[k]*qq[d6[k]]+h7[k]*qq[d7[k]]+h8[k]*qq[d8[k]]+
 h9[k]*qq[d9[k]]+ h10[k]*qq[d10[k]]+h11[k]*qq[d11[k]]+ h12[k]*qq[d12[k]];

 us3[k]:=b1[k]*qq[d1[k]]+b2[k]*qq[d2[k]]+b3[k]*qq[d3[k]]+b4[k]*qq[d4[k]]+
 b5[k]*qq[d5[k]]+b6[k]*qq[d6[k]]+b7[k]*qq[d7[k]]+b8[k]*qq[d8[k]]+
 b9[k]*qq[d9[k]]+ b10[k]*qq[d10[k]]+b11[k]*qq[d11[k]]+ b12[k]*qq[d12[k]];

 us4[k]:=bb1[k]*qq[d1[k]]+bb2[k]*qq[d2[k]]+bb3[k]*qq[d3[k]]+bb4[k]*qq[d4[k]]+
 bb5[k]*qq[d5[k]]+bb6[k]*qq[d6[k]]+bb7[k]*qq[d7[k]]+bb8[k]*qq[d8[k]]+
 bb9[k]*qq[d9[k]]+ bb10[k]*qq[d10[k]]+bb11[k]*qq[d11[k]]+bb12[k]*qq[d12[k]];

 us5[k]:=n1[k]*qq[d1[k]]+n2[k]*qq[d2[k]]+n3[k]*qq[d3[k]]+n4[k]*qq[d4[k]]+
 n5[k]*qq[d5[k]]+n6[k]*qq[d6[k]]+n7[k]*qq[d7[k]]+n8[k]*qq[d8[k]]+
 n9[k]*qq[d9[k]]+ n10[k]*qq[d10[k]]+n11[k]*qq[d11[k]]+ n12[k]*qq[d12[k]];

 us6[k]:=s1[k]*qq[d1[k]]+s2[k]*qq[d2[k]]+s3[k]*qq[d3[k]]+s4[k]*qq[d4[k]]+
 s5[k]*qq[d5[k]]+s6[k]*qq[d6[k]]+s7[k]*qq[d7[k]]+s8[k]*qq[d8[k]]+
 s9[k]*qq[d9[k]]+ s10[k]*qq[d10[k]]+s11[k]*qq[d11[k]]+ s12[k]*qq[d12[k]];
end;

(*Doc ket qua*);
writeln ('chuyen vi');
for i:=1 to sbt do
writeln(qq[i]);
writeln ('us1');
for k:=1 to sf do
writeln(us1[k]);
writeln ('us2');
for k:=1 to sf do
writeln(us2[k]);
writeln ('us3');
for k:=1 to sf do
writeln(us3[k]);
```

```
writeln ('us4');
for k:=1 to sf do
writeln(us4[k]);
writeln ('us5');
for k:=1 to sf do
writeln(us5[k]);
writeln ('us6');
for k:=1 to sf do
writeln(us6[k]);
readln;
end.
```

```
Program CTR18_Tinh_khung_khong_gian;
Uses crt;
Type mt1=array[1..20,1..20] of real;  mt2=array[1..20] of real;
   mt3=array[1..20] of integer;
var k1,k2,l,l1,l2,l3,m,m1,m2,s,t,t1,t2,r,r1,r2,rc1,rc2,aa1:mt1;
   cx,cy,cz,xl,yl,zl,xk,yk,zk,xj,yj,zj,xkj,ykj,zkj,xkg,ykg,zkg,s1,s2,
   c1,c2,c3,d,x1,dt,cd,cd2,cd3,mqx,mqy,mqz,mx,aa,b,c,nl,q,qc,qt,f,fn,b1,b2,
   p1,o,cf,ct,pt,pf,v1,v2,v3,v4,v5,v6:mt2;
   g,d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,n:mt3;
   i,j,k,p,st,sbt,tbt,sbk,x,y,z,w,ss,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,
   z1,z2,z3,z4,z5:integer;  h,e:real;

Procedure TS( var m:mt1;a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12:integer);
begin  s[a1,a1]:= s[a1,a1]+m[1,1]; s[a1,a2]:= s[a1,a2]+m[1,2];
     s[a1,a3]:= s[a1,a3]+m[1,3]; s[a1,a4]:= s[a1,a4]+m[1,4];
     s[a1,a5]:= s[a1,a5]+m[1,5]; s[a1,a6]:= s[a1,a6]+m[1,6];
     s[a1,a7]:= s[a1,a7]+m[1,7]; s[a1,a8]:= s[a1,a8]+m[1,8];
     s[a1,a9]:= s[a1,a9]+m[1,9]; s[a1,a10]:= s[a1,a10]+m[1,10];
     s[a1,a11]:= s[a1,a11]+m[1,11];  s[a1,a12]:= s[a1,a12]+m[1,12];

     s[a2,a2]:= s[a2,a2]+m[2,2]; s[a2,a3]:= s[a2,a3]+m[2,3];
     s[a2,a4]:= s[a2,a4]+m[2,4];  s[a2,a5]:= s[a2,a5]+m[2,5];
     s[a2,a6]:= s[a2,a6]+m[2,6];  s[a2,a7]:= s[a2,a7]+m[2,7];
     s[a2,a8]:= s[a2,a8]+m[2,8];  s[a2,a9]:= s[a2,a9]+m[2,9];
     s[a2,a10]:= s[a2,a10]+m[2,10];  s[a2,a11]:= s[a2,a11]+m[2,11];
     s[a2,a12]:= s[a2,a12]+m[2,12];

     s[a3,a3]:= s[a3,a3]+m[3,3];   s[a3,a4]:= s[a3,a4]+m[3,4];
     s[a3,a5]:= s[a3,a5]+m[3,5];   s[a3,a6]:= s[a3,a6]+m[3,6];
     s[a3,a7]:= s[a3,a7]+m[3,7];   s[a3,a8]:= s[a3,a3]+m[3,8];
     s[a3,a9]:= s[a3,a9]+m[3,9];   s[a3,a10]:= s[a3,a10]+m[3,10];
     s[a3,a11]:= s[a3,a11]+m[3,11];   s[a3,a12]:= s[a3,a12]+m[3,12];

     s[a4,a4]:= s[a4,a4]+m[4,4];    s[a4,a5]:= s[a4,a5]+m[4,5];
     s[a4,a6]:= s[a4,a6]+m[4,6];    s[a4,a7]:= s[a4,a7]+m[4,7];
     s[a4,a8]:= s[a4,a8]+m[4,8];    s[a4,a9]:= s[a4,a9]+m[4,9];
     s[a4,a10]:= s[a4,a10]+m[4,10];    s[a4,a11]:= s[a4,a11]+m[4,11];
     s[a4,a12]:= s[a4,a12]+m[4,12];
     s[a5,a5]:= s[a5,a5]+m[5,5];    s[a5,a6]:= s[a5,a6]+m[5,6];
     s[a5,a7]:= s[a5,a7]+m[5,7];    s[a5,a8]:= s[a5,a8]+m[5,8];
     s[a5,a9]:= s[a5,a9]+m[5,9];    s[a5,a10]:= s[a5,a10]+m[5,10];
     s[a5,a11]:= s[a5,a11]+m[5,11];    s[a5,a12]:= s[a5,a12]+m[5,12];

     s[a6,a6]:= s[a6,a6]+m[6,6];    s[a6,a7]:= s[a6,a7]+m[6,7];
     s[a6,a8]:= s[a6,a8]+m[6,8];     s[a6,a9]:= s[a6,a9]+m[6,9];
```

```
    s[a6,a10]:= s[a6,a10]+m[6,10];   s[a6,a11]:= s[a6,a11]+m[6,11];
    s[a6,a12]:= s[a6,a12]+m[6,12];

    s[a7,a7]:= s[a7,a7]+m[7,7];   s[a7,a8]:= s[a7,a8]+m[7,8];
    s[a7,a9]:= s[a7,a9]+m[7,9];   s[a7,a10]:= s[a7,a10]+m[7,10];
    s[a7,a11]:= s[a7,a11]+m[7,11];   s[a7,a12]:= s[a7,a12]+m[7,12];

    s[a8,a8]:= s[a8,a8]+m[8,8];    s[a8,a9]:= s[a8,a9]+m[8,9];
    s[a8,a10]:= s[a8,a10]+m[8,10];    s[a8,a11]:= s[a8,a11]+m[8,11];
    s[a8,a12]:= s[a8,a12]+m[8,12];

    s[a9,a9]:= s[a9,a9]+m[9,9];    s[a9,a10]:= s[a9,a10]+m[9,10];
    s[a9,a11]:= s[a9,a11]+m[9,11];    s[a9,a12]:= s[a9,a12]+m[9,12];

    s[a10,a10]:= s[a10,a10]+m[10,10];  s[a10,a11]:= s[a10,a11]+m[10,11];
    s[a10,a12]:= s[a10,a12]+m[10,12];

    s[a11,a11]:= s[a11,a11]+m[11,11];  s[a11,a12]:= s[a11,a12]+m[11,12];

    s[a12,a12]:= s[a12,a12]+m[12,12];
end;
procedure tinhm1;
begin
if(x<>0) then for k:=1 to x do
begin
cd[k]:=sqrt(sqr(xl[k]-xj[k])+sqr(yl[k]-yj[k])+
sqr(zl[k]-zj[k]));
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do
begin
k1[1,1]:=e*dt[k]/cd[k]; k1[1,2]:=0; k1[1,3]:=0;k1[1,4]:=0;k1[1,5]:=0;
k1[1,6]:=0;k1[1,7]:=-k1[1,1]; k1[1,8]:=0; k1[1,9]:=0; k1[1,10]:=0;
k1[1,11]:=0; k1[1,12]:=0;
cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k]; cd2[k]:=sqr(cd[k]);
k1[2,2]:=12*e*mqz[k]/cd3[k];k1[2,3]:=0; k1[2,4]:=0; k1[2,5]:=0;
k1[2,6]:=6*e*mqz[k]/cd2[k]; k1[2,7]:=0; k1[2,8]:=-k1[2,2];
k1[2,9]:=0;k1[2,10]:=0; k1[2,11]:=0; k1[2,12]:=k1[2,6];
k1[3,3]:=12*e*mqy[k]/cd3[k]; k1[3,4]:=0; k1[3,5]:=-6*e*mqy[k]/cd2[k];
k1[3,6]:=0;k1[3,7]:=0;k1[3,8]:=0; k1[3,9]:=-k1[3,3]; k1[3,10]:=0;
k1[3,11]:=k1[3,5]; k1[3,12]:=0;
k1[4,4]:=mx[k]*mqx[k]/cd[k];k1[4,5]:=0; k1[4,6]:=0; k1[4,7]:=0;
k1[4,8]:=0; k1[4,9]:=0; k1[4,10]:=-k1[4,4]; k1[4,11]:=0; k1[4,12]:=0;
k1[5,5]:=4*e*mqy[k]/cd[k];k1[5,6]:=0; k1[5,7]:=0; k1[5,8]:=0;
k1[5,9]:=6*e*mqy[k]/cd2[k]; k1[5,10]:=0;k1[5,11]:=2*e*mqy[k]/cd[k];
```

```
k1[5,12]:=0;
k1[6,6]:=4*e*mqz[k]/cd[k]; k1[6,7]:=0; k1[6,8]:=-6*e*mqz[k]/cd2[k];
k1[6,9]:=0;k1[6,10]:=0;k1[6,11]:=0; k1[6,12]:=2*e*mqz[k]/cd[k];
k1[7,7]:=k1[1,1];k1[7,8]:=0; k1[7,9]:=0; k1[7,10]:=0;  k1[7,11]:=0;
k1[7,12]:=0;
k1[8,8]:=k1[2,2]; k1[8,9]:=0;k1[8,10]:=0;k1[8,11]:=0; k1[8,12]:=-k1[6,8];
k1[9,9]:=k1[3,3]; k1[9,10]:=0; k1[9,11]:=k1[5,9];  k1[9,12]:=0;
k1[10,10]:=k1[4,4]; k1[10,11]:=0;  k1[10,12]:=0;
k1[11,11]:=k1[5,5]; k1[11,12]:=0;
k1[12,12]:=k1[6,6];
end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to i-1 do   k1[i,j]:=k1[j,i];
      cx[k]:=(xl[k]-xj[k])/cd[k];
      cy[k]:=(yl[k]-yj[k])/cd[k];
      cz[k]:=(zl[k]-zj[k])/cd[k];
      xkj[k]:=xk[k]-xj[k];
      ykj[k]:=yk[k]-yj[k]; zkj[k]:=zk[k]-zj[k];
      aa[k]:=sqrt(sqr(cx[k])+sqr(cz[k])); xkg[k]:=cx[k]*
      xkj[k]+cy[k]*ykj[k]+cz[k]*zkj[k];
      ykg[k]:=(cx[k]*cy[k]*xkj[k])/aa[k]+aa[k]*ykj[k]-
      (cy[k]*cz[k]*zkj[k])/aa[k]; zkg[k]:=-(cz[k]*
      xkj[k])/aa[k]+(cx[k]*zkj[k])/aa[k];
      b[k]:=sqrt(sqr(ykg[k])+sqr(zkg[k]));  s1[k]:=zkg[k]/b[k];
      c1[k]:=ykg[k]/b[k];
      for i:=1 to 3 do
      for j:=1 to 3 do
      begin
      t1[1,1]:=cx[k];  t1[1,2]:=cy[k]; t1[1,3]:=cz[k];
      t1[2,1]:=-(cx[k]*cy[k]*c1[k]-cz[k]*s1[k])/aa[k];
      t1[2,2]:=aa[k]*c1[k];
      t1[2,3]:=-(cy[k]*cz[k]*c1[k]+cx[k]*s1[k])/aa[k];
      t1[3,1]:=(cx[k]*cy[k]*s1[k]-cz[k]*c1[k])/aa[k];
      t1[3,2]:=-aa[k]*s1[k];
      t1[3,3]:=(cy[k]*cz[k]*s1[k]+cx[k]*c1[k])/aa[k];
      end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r1[1,1]:=t1[1,1]; r1[1,2]:=t1[1,2]; r1[1,3]:=t1[1,3]; r1[1,4]:=0; r1[1,5]:=0;
r1[1,6]:=0;  r1[1,7]:=0;  r1[1,8]:=0;  r1[1,9]:=0;  r1[1,10]:=0;
r1[1,11]:=0;  r1[1,12]:=0;
r1[2,1]:=t1[2,1];  r1[2,2]:=t1[2,2]; r1[2,3]:=t1[2,3];r1[2,4]:=0;r1[2,5]:=0;
```

```
r1[2,6]:=0; r1[2,7]:=0; r1[2,8]:=0; r1[2,9]:=0; r1[2,10]:=0;  r1[2,11]:=0;
r1[2,12]:=0;
r1[3,1]:=t1[3,1]; r1[3,2]:=t1[3,2];  r1[3,3]:=t1[3,3];r1[3,4]:=0;r1[3,5]:=0;
r1[3,6]:=0; r1[3,7]:=0;  r1[3,8]:=0;  r1[3,9]:=0;  r1[3,10]:=0;  r1[3,11]:=0;
r1[3,12]:=0;
r1[4,1]:=0;r1[4,2]:=0;r1[4,3]:=0; r1[4,4]:=abs(t1[1,1]);
r1[4,5]:=abs(t1[1,2]);r1[4,6]:=abs(t1[1,3]); r1[4,7]:=0; r1[4,8]:=0;
r1[4,9]:=0;  r1[4,10]:=0;r1[4,11]:=0; r1[4,12]:=0;
r1[5,1]:=0;r1[5,2]:=0;r1[5,3]:=0;r1[5,4]:=abs(t1[2,1]);
r1[5,5]:=abs(t1[2,2]);r1[5,6]:=abs(t1[2,3]); r1[5,7]:=0; r1[5,8]:=0;
r1[5,9]:=0;  r1[5,10]:=0;r1[5,11]:=0;  r1[5,12]:=0;
r1[6,1]:=0;r1[6,2]:=0;r1[6,3]:=0;r1[6,4]:=abs(t1[3,1]);
r1[6,5]:=abs(t1[3,2]);r1[6,6]:=abs(t1[3,3]); r1[6,7]:=0; r1[6,8]:=0;
r1[6,9]:=0;  r1[6,10]:=0;r1[6,11]:=0; r1[6,12]:=0;
r1[7,1]:=0;r1[7,2]:=0;r1[7,3]:=0;r1[7,4]:=0;r1[7,5]:=0;r1[7,6]:=0;
r1[7,7]:=t1[1,1];r1[7,8]:=t1[1,2];r1[7,9]:=t1[1,3];r1[7,10]:=0; r1[7,11]:=0;
r1[7,12]:=0;
r1[8,1]:=0;r1[8,2]:=0;r1[8,3]:=0;r1[8,4]:=0;r1[8,5]:=0;r1[8,6]:=0;
r1[8,7]:=t1[2,1];  r1[8,8]:=t1[2,2];r1[8,9]:=t1[2,3];r1[8,10]:=0;
r1[8,11]:=0;  r1[8,12]:=0;
r1[9,1]:=0;r1[9,2]:=0;r1[9,3]:=0; r1[9,4]:=0;r1[9,5]:=0;r1[9,6]:=0;
r1[9,7]:=t1[3,1]; r1[9,8]:=t1[3,2];r1[9,9]:=t1[3,3]; r1[9,10]:=0;
r1[9,11]:=0; r1[9,12]:=0;
r1[10,1]:=0;r1[10,2]:=0;r1[10,3]:=0;r1[10,4]:=0; r1[10,5]:=0;r1[10,6]:=0;
r1[10,7]:=0;r1[10,8]:=0;r1[10,9]:=0;r1[10,10]:=abs(t1[1,1]);
r1[10,11]:=abs(t1[1,2]);r1[10,12]:=abs(t1[1,3]);
r1[11,1]:=0;r1[11,2]:=0;r1[11,3]:=0;r1[11,4]:=0;r1[11,5]:=0; r1[11,6]:=0;
r1[11,7]:=0;r1[11,8]:=0;r1[11,9]:=0; r1[11,10]:=abs(t1[2,1]);
r1[11,11]:=abs(t1[2,2]);r1[11,12]:=abs(t1[2,3]);
r1[12,1]:=0; r1[12,2]:=0;r1[12,3]:=0; r1[12,4]:=0;r1[12,5]:=0;r1[12,6]:=0;
r1[12,7]:=0;r1[12,8]:=0;r1[12,9]:=0; r1[12,10]:=abs(t1[3,1]);
r1[12,11]:=abs(t1[3,2]);r1[12,12]:=abs(t1[3,3]);
end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 12 do
      begin
      rc1[i,j]:=r1[j,i]; l1[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
      l1[i,j]:=l1[i,j]+rc1[i,p]*k1[p,j];
      end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 12 do
      begin
      m1[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
```

```
        m1[i,j]:=m1[i,j]+l1[i,p]*r1[p,j];
        end;
  end;
  end;
  procedure tinhm2;
  begin
  if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
  begin
  cd[k]:=sqrt(sqr(xl[k]-xj[k])+sqr(yl[k]-yj[k])+
  sqr(zl[k]-zj[k]));
  for i:=1 to 12 do
  for j:=i to 12 do
  begin
  k2[1,1]:=e*dt[k]/cd[k]; k2[1,2]:=0; k2[1,3]:=0;k2[1,4]:=0;k2[1,5]:=0;
  k2[1,6]:=0;k2[1,7]:=-k2[1,1]; k2[1,8]:=0; k2[1,9]:=0; k2[1,10]:=0;
  k2[1,11]:=0; k2[1,12]:=0;
  cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k]; cd2[k]:=sqr(cd[k]);
  k2[2,2]:=12*e*mqz[k]/cd3[k];k2[2,3]:=0; k2[2,4]:=0; k2[2,5]:=0;
  k2[2,6]:=6*e*mqz[k]/cd2[k]; k2[2,7]:=0; k2[2,8]:=-k2[2,2];
  k2[2,9]:=0;k2[2,10]:=0; k2[2,11]:=0; k2[2,12]:=k2[2,6];
  k2[3,3]:=12*e*mqy[k]/cd3[k]; k2[3,4]:=0; k2[3,5]:=-6*e*mqy[k]/cd2[k];
  k2[3,6]:=0;k2[3,7]:=0;k2[3,8]:=0; k2[3,9]:=-k2[3,3]; k2[3,10]:=0;
  k2[3,11]:=k2[3,5]; k2[3,12]:=0;
  k2[4,4]:=mx[k]*mqx[k]/cd[k];k2[4,5]:=0; k2[4,6]:=0; k2[4,7]:=0;
  k2[4,8]:=0; k2[4,9]:=0; k2[4,10]:=-k2[4,4]; k2[4,11]:=0; k2[4,12]:=0;
  k2[5,5]:=4*e*mqy[k]/cd[k];k2[5,6]:=0; k2[5,7]:=0; k2[5,8]:=0;
  k2[5,9]:=6*e*mqy[k]/cd2[k]; k2[5,10]:=0;k2[5,11]:=2*e*mqy[k]/cd[k];
  k2[5,12]:=0;
  k2[6,6]:=4*e*mqz[k]/cd[k]; k2[6,7]:=0; k2[6,8]:=-6*e*mqz[k]/cd2[k];
  k2[6,9]:=0;k2[6,10]:=0;k2[6,11]:=0; k2[6,12]:=2*e*mqz[k]/cd[k];
  k2[7,7]:=k2[1,1];k2[7,8]:=0; k2[7,9]:=0; k2[7,10]:=0;  k2[7,11]:=0;
  k2[7,12]:=0;
  k2[8,8]:=k2[2,2]; k2[8,9]:=0;k2[8,10]:=0;k2[8,11]:=0; k2[8,12]:=-k2[6,8];
  k2[9,9]:=k2[3,3]; k2[9,10]:=0; k2[9,11]:=k2[5,9];  k2[9,12]:=0;
  k2[10,10]:=k2[4,4]; k2[10,11]:=0;  k2[10,12]:=0;
  k2[11,11]:=k2[5,5]; k2[11,12]:=0;
  k2[12,12]:=k2[6,6];
  end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to i-1 do   k2[i,j]:=k2[j,i];
     b1[k]:=sqrt(sqr(xk[k])+sqr(zk[k])); s2[k]:=zk[k]/b1[k];
     c2[k]:=xk[k]/b1[k];
     for i:=1 to 3 do
     for j:=1 to 3 do
```

```
      begin
      t2[1,1]:=0; t2[1,2]:=1; t2[1,3]:=0;
      t2[2,1]:=-c2[k];t2[2,2]:=0; t2[2,3]:=s2[k]; t2[3,1]:=s2[k];
      t2[3,2]:=0; t2[3,3]:=c2[k];
      end;
for i:=1 to 12 do
for j:=1 to 12 do
begin
r2[1,1]:=t2[1,1]; r2[1,2]:=t2[1,2]; r2[1,3]:=t2[1,3]; r2[1,4]:=0; r2[1,5]:=0;
r2[1,6]:=0;  r2[1,7]:=0;  r2[1,8]:=0;  r2[1,9]:=0;  r2[1,10]:=0;
r2[1,11]:=0;  r2[1,12]:=0;
r2[2,1]:=t2[2,1];  r2[2,2]:=t2[2,2]; r2[2,3]:=t2[2,3];r2[2,4]:=0;r2[2,5]:=0;
r2[2,6]:=0; r2[2,7]:=0; r2[2,8]:=0; r2[2,9]:=0; r2[2,10]:=0;  r2[2,11]:=0;
r2[2,12]:=0;
r2[3,1]:=t2[3,1]; r2[3,2]:=t2[3,2];  r2[3,3]:=t2[3,3];r2[3,4]:=0;r2[3,5]:=0;
r2[3,6]:=0; r2[3,7]:=0;  r2[3,8]:=0;  r2[3,9]:=0;  r2[3,10]:=0;  r2[3,11]:=0;
r2[3,12]:=0;
r2[4,1]:=0;r2[4,2]:=0;r2[4,3]:=0; r2[4,4]:=abs(t2[1,1]);
r2[4,5]:=abs(t2[1,2]);r2[4,6]:=abs(t2[1,3]); r2[4,7]:=0; r2[4,8]:=0;
r2[4,9]:=0;  r2[4,10]:=0;r2[4,11]:=0; r2[4,12]:=0;
r2[5,1]:=0;r2[5,2]:=0;r2[5,3]:=0; r2[5,4]:=abs(t2[2,1]);
r2[5,5]:=abs(t2[2,2]); r2[5,6]:=abs(t2[2,3]); r2[5,7]:=0; r2[5,8]:=0;
r2[5,9]:=0;  r2[5,10]:=0;r2[5,11]:=0;  r2[5,12]:=0;
r2[6,1]:=0;r2[6,2]:=0;r2[6,3]:=0; r2[6,4]:=abs(t2[3,1]);
r2[6,5]:=abs(t2[3,2]);r2[6,6]:=abs(t2[3,3]); r2[6,7]:=0;  r2[6,8]:=0;
r2[6,9]:=0;  r2[6,10]:=0; r2[6,11]:=0; r2[6,12]:=0;
r2[7,1]:=0;r2[7,2]:=0;r2[7,3]:=0;r2[7,4]:=0;r2[7,5]:=0;r2[7,6]:=0;
r2[7,7]:=t2[1,1];r2[7,8]:=t2[1,2];r2[7,9]:=t2[1,3];r2[7,10]:=0; r2[7,11]:=0;
r2[7,12]:=0;
r2[8,1]:=0;r2[8,2]:=0;r2[8,3]:=0;r2[8,4]:=0;r2[8,5]:=0;r2[8,6]:=0;
r2[8,7]:=t2[2,1];  r2[8,8]:=t2[2,2];r2[8,9]:=t2[2,3];r2[8,10]:=0;
r2[8,11]:=0;  r2[8,12]:=0;
r2[9,1]:=0;r2[9,2]:=0;r2[9,3]:=0; r2[9,4]:=0;r2[9,5]:=0;r2[9,6]:=0;
r2[9,7]:=t2[3,1]; r2[9,8]:=t2[3,2];r2[9,9]:=t2[3,3]; r2[9,10]:=0;
r2[9,11]:=0; r2[9,12]:=0;
r2[10,1]:=0;r2[10,2]:=0;r2[10,3]:=0;r2[10,4]:=0; r2[10,5]:=0;r2[10,6]:=0;
r2[10,7]:=0;r2[10,8]:=0;r2[10,9]:=0; r2[10,10]:=abs(t2[1,1]);
r2[10,11]:=abs(t2[1,2]);r2[10,12]:=abs(t2[1,3]);
r2[11,1]:=0;r2[11,2]:=0;r2[11,3]:=0;r2[11,4]:=0;r2[11,5]:=0; r2[11,6]:=0;
r2[11,7]:=0;r2[11,8]:=0;r2[11,9]:=0; r2[11,10]:=abs(t2[2,1]);
r2[11,11]:=abs(t2[2,2]);r2[11,12]:=abs(t2[2,3]);
r2[12,1]:=0; r2[12,2]:=0;r2[12,3]:=0; r2[12,4]:=0;r2[12,5]:=0;r2[12,6]:=0;
r2[12,7]:=0;r2[12,8]:=0;r2[12,9]:=0; r2[12,10]:=abs(t2[3,1]);
```

```
r2[12,11]:=abs(t2[3,2]);r2[12,12]:=abs(t2[3,3]);
end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 12 do
      begin
      rc2[i,j]:=r2[j,i]; l2[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
      l2[i,j]:=l2[i,j]+rc2[i,p]*k2[p,j];
      end;
      for i:=1 to 12 do
      for j:=1 to 12 do
      begin
      m2[i,j]:=0;  for p:=1 to 12 do
      m2[i,j]:=m2[i,j]+l2[i,p]*r2[p,j];
      end;
end;
end;
Procedure tinhvt;
begin
if(y<>0) then for k:=1 to y do
begin
v1[k]:=cf[k]*cd[k]/2; v2[k]:=cf[k]*sqr(cd[k])/12;
f[d1[k]]:=f[d1[k]]+((t1[2,1])*v1[k]);
f[d2[k]]:=f[d2[k]]+((t1[2,2])*cf[k]);
f[d3[k]]:=f[d3[k]]+((t1[2,3])*v1[k]);
f[d4[k]]:=f[d4[k]]+(abs(t1[3,1])*v2[k]);
f[d5[k]]:=f[d5[k]]+(abs(t1[3,2])*v2[k]);
f[d6[k]]:=f[d6[k]]+(abs(t1[3,3])*v2[k]);
f[d7[k]]:=f[d7[k]]+((t1[2,1])*v1[k]);
f[d8[k]]:=f[d8[k]]+((t1[2,1])*v1[k]);
f[d9[k]]:=f[d9[k]]+((t1[2,3])*v1[k]);
f[d10[k]]:=f[d10[k]]-(abs(t1[3,1])*v2[k]);
f[d11[k]]:=f[d11[k]]-(abs(t1[3,2])*v2[k]);
f[d12[k]]:=f[d12[k]]-(abs(t1[3,3])*v2[k]);
end;
if(z<>0) then for k:=z1 to z2 do
begin
v3[k]:=ct[k]*sqr(pf[k])*(2*pt[k]+cd[k])/cd3[k];
v4[k]:=ct[k]*pt[k]*sqr(pf[k])/sqr(cd[k]);
v5[k]:=ct[k]*sqr(pt[k])*(cd[k]+2*pf[k])/cd3[k];
v6[k]:=ct[k]*pf[k]*sqr(pt[k])/sqr(cd[k]);
cd3[k]:=sqr(cd[k])*cd[k];
f[d1[k]]:=f[d1[k]]+((t1[2,1])*v3[k]);
f[d2[k]]:=f[d2[k]]+((t1[2,2])*v3[k]);
f[d3[k]]:=f[d3[k]]+((t1[2,3])*v3[k]);
```

```
f[d4[k]]:=f[d4[k]]+(abs(t1[3,1])*v4[k]);
f[d5[k]]:=f[d5[k]]+(abs(t1[3,2])*v4[k]);
f[d6[k]]:=f[d6[k]]+(abs(t1[3,3])*v4[k]);
f[d7[k]]:=f[d7[k]]+((t1[2,1])*v5[k]);
f[d8[k]]:=f[d8[k]]+((t1[2,2])*v5[k]);
f[d9[k]]:=f[d9[k]]+((t1[2,3])*v5[k]);
f[d10[k]]:=f[d10[k]]-(abs(t1[3,1])*v6[k]);
f[d11[k]]:=f[d11[k]]-(abs(t1[3,2])*v6[k]);
f[d12[k]]:=f[d12[k]]-(abs(t1[3,3])*v6[k]);
end;
end;
Procedure GHFT(a:mt1;b:mt2; var x:mt2; n:integer);
var    i,j,k,s:integer; q,r:real ;
begin
 s:=0;
 REPEAT
    s:=s+1;
    for i:= s+1 to n do
      Begin
        if(a[s,s]<>0) then
        q:=a[s,i]/a[s,s];
        for j:=i to n do
         a[i,j]:= a[i,j]-a[s,j]*q ; b[i]:=b[i]-b[s]*q;
      End
 UNTIL(s= n -1);
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for i:= n -1  downto 1 do
     Begin
        r :=0;
        for j:= n  downto i+1 do r:=r+a[i,j]*x[j];
        if(a[i,i]<>0) then
        x[i]:= (b[i]-r)/ a[i,i];
     End;
end;
Procedure Tinhcv(var qc,qt:mt2;r:mt1;a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12:
        integer);
begin
       qc[a1]:=r[1,1]*qt[a1]+r[1,2]*qt[a2]+r[1,3]*qt[a3]+r[1,4]*qt[a4]+
       r[1,5]*qt[a5]+r[1,6]*qt[a6]++r[1,7]*qt[a7]+r[1,8]*qt[a8]+
       r[1,9]*qt[a9]+r[1,10]*qt[a10]+r[1,11]*qt[a11]+r[1,12]*qt[a12];

       qc[a2]:=r[2,1]*qt[a1]+r[2,2]*qt[a2]+r[2,3]*qt[a3]+r[2,4]*qt[a4]+
       r[2,5]*qt[a5]+r[2,6]*qt[a6]++r[2,7]*qt[a7]+r[2,8]*qt[a8]+
       r[2,9]*qt[a9]+r[2,10]*qt[a10]+r[2,11]*qt[a11]+r[2,12]*qt[a12];
```

```
qc[a3]:=r[3,1]*qt[a1]+r[3,2]*qt[a2]+r[3,3]*qt[a3]+r[3,4]*qt[a4]+
r[3,5]*qt[a5]+r[3,6]*qt[a6]++r[3,7]*qt[a7]+r[3,8]*qt[a8]+
r[3,9]*qt[a9]+r[3,10]*qt[a10]+r[3,11]*qt[a11]+r[3,12]*qt[a12];

qc[a4]:=r[4,1]*qt[a1]+r[4,2]*qt[a2]+r[4,3]*qt[a3]+r[4,4]*qt[a4]+
r[4,5]*qt[a5]+r[4,6]*qt[a6]++r[4,7]*qt[a7]+r[4,8]*qt[a8]+
r[4,9]*qt[a9]+r[4,10]*qt[a10]+r[4,11]*qt[a11]+r[4,12]*qt[a12];

qc[a5]:=r[5,1]*qt[a1]+r[5,2]*qt[a2]+r[5,3]*qt[a3]+r[5,4]*qt[a4]+
r[5,5]*qt[a5]+r[5,6]*qt[a6]++r[5,7]*qt[a7]+r[5,8]*qt[a8]+
r[5,9]*qt[a9]+r[5,10]*qt[a10]+r[5,11]*qt[a11]+r[5,12]*qt[a12];

qc[a6]:=r[6,1]*qt[a1]+r[6,2]*qt[a2]+r[6,3]*qt[a3]+r[6,4]*qt[a4]+
r[6,5]*qt[a5]+r[6,6]*qt[a6]++r[6,7]*qt[a7]+r[6,8]*qt[a8]+
r[6,9]*qt[a9]+r[6,10]*qt[a10]+r[6,11]*qt[a11]+r[6,12]*qt[a12];

qc[a7]:=r[7,1]*qt[a1]+r[7,2]*qt[a2]+r[7,3]*qt[a3]+r[7,4]*qt[a4]+
r[7,5]*qt[a5]+r[7,6]*qt[a6]++r[7,7]*qt[a7]+r[7,8]*qt[a8]+
r[7,9]*qt[a9]+r[7,10]*qt[a10]+r[7,11]*qt[a11]+r[7,12]*qt[a12];

qc[a8]:=r[8,1]*qt[a1]+r[8,2]*qt[a2]+r[8,3]*qt[a3]+r[8,4]*qt[a4]+
r[8,5]*qt[a5]+r[8,6]*qt[a6]++r[8,7]*qt[a7]+r[8,8]*qt[a8]+
r[8,9]*qt[a9]+r[8,10]*qt[a10]+r[8,11]*qt[a11]+r[8,12]*qt[a12];

qc[a9]:=r[9,1]*qt[a1]+r[9,2]*qt[a2]+r[9,3]*qt[a3]+r[9,4]*qt[a4]+
r[9,5]*qt[a5]+r[9,6]*qt[a6]++r[9,7]*qt[a7]+r[9,8]*qt[a8]+
r[9,9]*qt[a9]+r[9,10]*qt[a10]+r[9,11]*qt[a11]+r[9,12]*qt[a12];

qc[a10]:=r[10,1]*qt[a1]+r[10,2]*qt[a2]+r[10,3]*qt[a3]+r[10,4]*qt[a4]+
r[10,5]*qt[a5]+r[10,6]*qt[a6]++r[10,7]*qt[a7]+r[10,8]*qt[a8]+
r[10,9]*qt[a9]+r[10,10]*qt[a10]+r[10,11]*qt[a11]+r[10,12]*qt[a12];

qc[a11]:=r[11,1]*qt[a1]+r[11,2]*qt[a2]+r[11,3]*qt[a3]+
r[11,4]*qt[a4]+r[11,5]*qt[a5]+r[11,6]*qt[a6]+
r[11,7]*qt[a7]+r[11,8]*qt[a8]+r[11,9]*qt[a9]+
r[11,10]*qt[a10]+r[11,11]*qt[a11]+r[11,12]*qt[a12];

qc[a12]:=r[12,1]*qt[a1]+r[12,2]*qt[a2]+r[12,3]*qt[a3]+
r[12,4]*qt[a4]+r[12,5]*qt[a5]+r[12,6]*qt[a6]++r[12,7]*qt[a7]+
r[12,8]*qt[a8]+r[12,9]*qt[a9]+r[12,10]*qt[a10]+r[12,11]*qt[a11]+
r[12,12]*qt[a12];
end;
Procedure Tinhnl(var nl,qc:mt2;k:mt1;a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12:
    integer);
```

```
begin
    nl[a1]:=k[1,1]*qc[a1]+k[1,2]*qc[a2]+k[1,3]*qc[a3]+k[1,4]*qc[a4]+
    k[1,5]*qc[a5]+k[1,6]*qc[a6]++k[1,7]*qc[a7]+k[1,8]*qc[a8]+
    k[1,9]*qc[a9]+k[1,10]*qc[a10]+k[1,11]*qc[a11]+k[1,12]*qc[a12];

    nl[a2]:=k[2,1]*qc[a1]+k[2,2]*qc[a2]+k[2,3]*qc[a3]+k[2,4]*qc[a4]+
    k[2,5]*qc[a5]+k[2,6]*qc[a6]++k[2,7]*qc[a7]+k[2,8]*qc[a8]+
    k[2,9]*qc[a9]+k[2,10]*qc[a10]+k[2,11]*qc[a11]+k[2,12]*qc[a12];

    nl[a3]:=k[3,1]*qc[a1]+k[3,2]*qc[a2]+k[3,3]*qc[a3]+k[3,4]*qc[a4]+
    k[3,5]*qc[a5]+k[3,6]*qc[a6]++k[3,7]*qc[a7]+k[3,8]*qc[a8]+
    k[3,9]*qc[a9]+k[3,10]*qc[a10]+k[3,11]*qc[a11]+k[3,12]*qc[a12];

    nl[a4]:=k[4,1]*qc[a1]+k[4,2]*qc[a2]+k[4,3]*qc[a3]+k[4,4]*qc[a4]+
    k[4,5]*qc[a5]+k[4,6]*qc[a6]++k[4,7]*qc[a7]+k[4,8]*qc[a8]+
    k[4,9]*qc[a9]+k[4,10]*qc[a10]+k[4,11]*qc[a11]+k[4,12]*qc[a12];

    nl[a5]:=k[5,1]*qc[a1]+k[5,2]*qc[a2]+k[5,3]*qc[a3]+k[5,4]*qc[a4]+
    k[5,5]*qc[a5]+k[5,6]*qc[a6]++k[5,7]*qc[a7]+k[5,8]*qc[a8]+
    k[5,9]*qc[a9]+k[5,10]*qc[a10]+k[5,11]*qc[a11]+k[5,12]*qc[a12];

    nl[a6]:=k[6,1]*qc[a1]+k[6,2]*qc[a2]+k[6,3]*qc[a3]+k[6,4]*qc[a4]+
    k[6,5]*qc[a5]+k[6,6]*qc[a6]++k[6,7]*qc[a7]+k[6,8]*qc[a8]+
    k[6,9]*qc[a9]+k[6,10]*qc[a10]+k[6,11]*qc[a11]+k[6,12]*qc[a12];

    nl[a7]:=k[7,1]*qc[a1]+k[7,2]*qc[a2]+k[7,3]*qc[a3]+k[7,4]*qc[a4]+
    k[7,5]*qc[a5]+k[7,6]*qc[a6]++k[7,7]*qc[a7]+k[7,8]*qc[a8]+
    k[7,9]*qc[a9]+k[7,10]*qc[a10]+k[7,11]*qc[a11]+k[7,12]*qc[a12];

    nl[a8]:=k[8,1]*qc[a1]+k[8,2]*qc[a2]+k[8,3]*qc[a3]+k[8,4]*qc[a4]+
    k[8,5]*qc[a5]+k[8,6]*qc[a6]++k[8,7]*qc[a7]+k[8,8]*qc[a8]+
    k[8,9]*qc[a9]+k[8,10]*qc[a10]+k[8,11]*qc[a11]+k[8,12]*qc[a12];

    nl[a9]:=k[9,1]*qc[a1]+k[9,2]*qc[a2]+k[9,3]*qc[a3]+k[9,4]*qc[a4]+
    k[9,5]*qc[a5]+k[9,6]*qc[a6]++k[9,7]*qc[a7]+k[9,8]*qc[a8]+
    k[9,9]*qc[a9]+k[9,10]*qc[a10]+k[9,11]*qc[a11]+k[9,12]*qc[a12];

    nl[a10]:=k[10,1]*qc[a1]+k[10,2]*qc[a2]+k[10,3]*qc[a3]+
    k[10,4]*qc[a4]+k[10,5]*qc[a5]+k[10,6]*qc[a6]+
    k[10,7]*qc[a7]+k[10,8]*qc[a8]+k[10,9]*qc[a9]+
    k[10,10]*qc[a10]+k[10,11]*qc[a11]+k[10,12]*qc[a12];

    nl[a11]:=k[11,1]*qc[a1]+k[11,2]*qc[a2]+k[11,3]*qc[a3]+
    k[11,4]*qc[a4]+k[11,5]*qc[a5]+k[11,6]*qc[a6]+
```

```
        k[11,7]*qc[a7]+k[11,8]*qc[a8]+k[11,9]*qc[a9]+
        k[11,10]*qc[a10]+k[11,11]*qc[a11]+k[11,12]*qc[a12];

        nl[a12]:=k[12,1]*qc[a1]+k[12,2]*qc[a2]+k[12,3]*qc[a3]+
        k[12,4]*qc[a4]+k[12,5]*qc[a5]+k[12,6]*qc[a6]+
        k[12,7]*qc[a7]+k[12,8]*qc[a8]+k[12,9]*qc[a9]+
        k[12,10]*qc[a10]+k[12,11]*qc[a11]+k[12,12]*qc[a12];
end;

Begin Clrscr;
(*Nguoi lap trinh:Vo nhu Cau*);
writeln('so thanh');
readln(st);
writeln('so bac tu do');
readln(sbt);
writeln('tong so bac tu do');
readln(tbt);
writeln('so bac tu do khong co chuyen vi');
readln(sbk);
writeln('so thu tu BTD khong co chuyen vi');
if(sbk<>0) then for i:=1 to sbk do
readln(g[i]);
writeln('modun dan hoi');
readln(e);
writeln('so thanh loai 1');
readln(x);
writeln('so thanh loai 2');
readln(w);
writeln('so thanh chiu tai trong fan bo deu');
readln(y);
writeln('so thanh chiu tai trong tap trung');
readln(z);
if(y<>0) then for i:=1 to y do
begin
writeln('cuong do tai trong');
readln(cf[i]);
end;
if(z<>0) then for i:=z1 to z2 do
begin
writeln('tai trongtap trung');
readln(ct[i]);
writeln('a1');
readln(pt[i]);
writeln('b1');
```

```
readln(pf[i]);
end;
writeln('dien tich');
for i:=1 to st do
readln(dt[i]);
writeln('modun xoan');
for i:=1 to st do
readln(mx[i]);
writeln('momen quan tinh x');
for i:=1 to st do
readln(mqx[i]);
writeln('momen quan tinh y');
for i:=1 to st do
readln(mqy[i]);
writeln('momen quan tinh z');
for i:=1 to st do
readln(mqz[i]);
writeln('xj');
for i:=1 to st do
readln(xj[i]);
writeln('yj');
for i:=1 to st do
readln(yj[i]);
writeln('zj');
for i:=1 to st do
readln(zj[i]);
writeln('xl');
for i:=1 to st do
readln(xl[i]);
writeln('yl');
for i:=1 to st do
readln(yl[i]);
writeln('zl');
for i:=1 to st do
readln(zl[i]);
writeln('toa do diem xk');
for i:=1 to st do
readln(xk[i]);
writeln('toa do diem yk');
for i:=1 to st do
readln(yk[i]);
writeln('toa do diem zk');
for i:=1 to st do
readln(zk[i]);
```

```
writeln('BTD d1');
for i:=1 to st do
readln(d1[i]);
writeln('BTD d2');
for i:=1 to st do
readln(d2[i]);
writeln('BTD d3');
for i:=1 to st do
readln(d3[i]);
writeln('BTD d4');
for i:=1 to st do
readln(d4[i]);
writeln('BTD d5');
for i:=1 to st do
readln(d5[i]);
writeln('BTD d6');
for i:=1 to st do
readln(d6[i]);
writeln('BTD d7');
for i:=1 to st do
readln(d7[i]);
writeln('BTD d8');
for i:=1 to st do
readln(d8[i]);
writeln('BTD d9');
for i:=1 to st do
readln(d9[i]);
writeln('BTD d10');
for i:=1 to st do
readln(d10[i]);
writeln('BTD d11');
for i:=1 to st do
readln(d11[i]);
writeln('BTD d12');
for i:=1 to st do
readln(d12[i]);
writeln('thanh fan tai trong');
for i:=1 to sbt do
readln(fn[i]);

z1:=y+1; z2:=y+z; z3:=z2+1; z4:=x+1; z5:=x+w;
tinhm1;
if(x<>0) then for k:=1 to x do
```

```
begin
a1:=d1[k];a2:=d2[k];a3:=d3[k]; a4:=d4[k]; a5:=d5[k];
a6:=d6[k];  a7:=d7[k]; a8:=d8[k]; a9:=d9[k];
a10:=d10[k];a11:=d11[k];  a12:=d12[k];
for k:=1 to x do
begin
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do   m[i,j]:=m1[i,j];
end;
TS(m1,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,10,a11,a12);
end;
tinhm2;
if(w<>0) then  for k:=z4 to z5 do
begin
a1:=d1[k];a2:=d2[k];a3:=d3[k]; a4:=d4[k]; a5:=d5[k];
a6:=d6[k];  a7:=d7[k]; a8:=d8[k]; a9:=d9[k];
a10:=d10[k];a11:=d11[k];  a12:=d12[k];
for k:=z4 to z5 do
begin
for i:=1 to 12 do
for j:=i to 12 do   m[i,j]:=m2[i,j];
end;
TS(m2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,10,a11,a12);
end;
      for i:=1 to sbt do
      for j:=1 to i-1 do    s[i,j]:=s[j,i];
tinhvt;

(*Goi chuong trinh con giai he FT*);
  GHFT(s,f,qt,sbt);

(*Tinh chuyen vi 2 loai thanh*);
if(x<>0) then for k:=1 to x do
      begin
      a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
      a5:=d5[k];  a6:=d6[k]; a7:=d7[k];  a8:=d8[k];
      a9:=d9[k];  a10:=d10[k]; a11:=d11[k];  a12:=d12[k];
      tinhcv(qc,qt,r1,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);;
      end;
if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
      begin
      a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
      a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k];  a8:=d8[k];
      a9:=d9[k];  a10:=d10[k];a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
```

```
        tinhcv(qc,qt,r2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);
        end;

  (*Tinh noi luc trong 2 loai thanh*);
        if(sbk<>0) then for i:=1 to sbk do qc[g[i]]:=0;
        if(x<>0) then for k:=1 to x do
        begin
        a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
        a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k];
        a9:=d9[k]; a10:=d10[k]; a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
        tinhnl(nl,qc,k1,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);;
        end;
       if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
       begin
       a1:=d1[k]; a2:=d2[k]; a3:=d3[k]; a4:=d4[k];
       a5:=d5[k]; a6:=d6[k]; a7:=d7[k]; a8:=d8[k];
       a9:=d9[k]; a10:=d10[k]; a11:=d11[k]; a12:=d12[k];
       Tinhnl(nl,qc,k2,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12);
       end;
 if(y<>0) then for k:=1 to y do
 begin
 nl[d2[k]]:=nl[d2[k]]-(cf[k]*cd[k]/2);
 nl[d6[k]]:=nl[d6[k]]-(cf[k]*sqr(cd[k])/12);
 nl[d8[k]]:=nl[d8[k]]-(cf[k]*cd[k]/2);
 nl[d12[k]]:=nl[d12[k]]+(cf[k]*sqr(cd[k])/12);
 end;
 if(z<>0) then for k:=z1 to z2 do
 begin
 nl[d2[k]]:=nl[d2[k]]-(ct[k]*sqr(pf[k])*(2*pt[k]+
 cd[k])/cd3[k]);
 nl[d6[k]]:=nl[d6[k]]-(ct[k]*pt[k]*sqr(pf[k])/sqr(cd[k]));
 nl[d8[k]]:=nl[d8[k]]-(ct[k]*sqr(pt[k])*(cd[k]+
 2*pf[k])/cd3[k]);
 nl[d12[k]]:=nl[d12[k]]+(ct[k]*pf[k]*sqr(pt[k])/sqr(cd[k]));
 end;

 (*Doc ket qua*);
 writeln('chuyen vi');
 for i:=1 to sbt do
 writeln(qt[i]);
 writeln('noi luc fb');
 if(y<>0) then for k:=1 to y do
 begin
 writeln(nl[d2[k]]);
```

```
writeln(nl[d4[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d8[k]]);
writeln(nl[d10[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
writeln('noi luc tt');
if(z<>0) then for k:=z1 to z2 do
begin
writeln(nl[d2[k]]);
writeln(nl[d4[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d8[k]]);
writeln(nl[d10[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
writeln('noi luc ktt ');
for k:=z3 to x do
begin
writeln(nl[d2[k]]);
writeln(nl[d4[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d8[k]]);
writeln(nl[d10[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
writeln('noi luc trong cot');
if(w<>0) then for k:=z4 to z5 do
begin
writeln(nl[d1[k]]);
writeln(nl[d5[k]]);
writeln(nl[d6[k]]);
writeln(nl[d7[k]]);
writeln(nl[d11[k]]);
writeln(nl[d12[k]]);
end;
readln;
end.
```

```
Program CTR19_Tinh_gia_tri_rieng_lon_nhat_cho_he_gian;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
   c1,c2,b1,e1,d,cd,dt,e,y,vtrn,l,mm,x1,x2,y1,y2:mt2;
   s,m,a,u,b,x:mt1;
   tt,gtrln,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
 Var    i,j,p :integer;   c:real;
begin
p:=0;
REPEAT
      p:=p+1;
      if(a[p,p]<>0)then
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
          a[p,j]:=a[p,j]*c;
          U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do
      if(i<>p) then
        begin
          c:=a[i,p];
          for j:=1 to n do
           begin
             a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
             U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
           end;
         end;

UNTIL(p=n);
end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
begin
k:=0;
REPEAT
     k:=k+1;
     for i:=1 to n do
       begin
        B[i,k]:=0;
        for p:=1 to n do
        B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
       end;
```

```
      if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
      for i:=1 to n do
       begin
         if(Y[k]<>0) then
         X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
       end;
  UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
  for i:=1 to sbt do   VTRN[i]:=X[i,k+1];
      GTRLN:=Y[k];
end;
Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
for i:=1 to st do
 begin
    cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(x2[i]-x1[i]));
    l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
```

```
      b1[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];  c1[i]:=l[i]*mm[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
      d[i]:=sqr(mm[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
      s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b1[i];
      s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+e1[i];
      s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
      s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-b1[i];
      s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-e1[i];
      s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+b1[i];
      s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-e1[i];
      s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
      s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+e1[i];
      s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
   end;
   for i:=1 to sbt do
   for j:=1 to i-1 do     s[i,j]:=s[j,i];

  (*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *);
  for i:=1 to st do
   begin
      c1[i]:=tt*dt[i]*cd[i]/3;    c2[i]:=c1[i]/2;
      m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+c1[i];
      m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+0;
      m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+c1[i];
      m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+c2[i];
      m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+0;
      m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+c1[i];
      m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+0;
      m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+c2[i];
      m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+0;
      m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+c1[i];
  end;
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to i-1 do   m[i,j]:=m[j,i];

  (*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
  begin
  if(i=j) then u[i,j]:=1;
  if(i<>j) then u[i,j]:=0;
  end;
  NDMT(m,u,sbt);

  (*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
  for i:=1 to sbt do
```

```
for j:=1 to sbt do
begin
  a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
  a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;
(*Goi chuong trinh con de tinh gia tri rieng lon nhat*);
for i:=1 to sbt do x[i,1]:=1;
TGTRLN(a,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng n');
for i:=1 to sbt do
writeln(VTRn[i]);
writeln('Gia tri rieng lon nhat');
writeln(GTRLN);
readln;
end.
```

```
Program CTR20_Tinh_gia_tri_rieng_be_nhat_cho_he_gian;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4:array[1..10] of integer;
   c1,c2,b1,e1,d,cd,dt,e,y,vtr1,l,mm,x1,x2,y1,y2:mt2;
   s,m,a,u,b,x:mt1;
   tt,gtrbn,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;n:integer);
 Var    i,j,p :integer;   c:real;
begin
 p:=0;
 REPEAT
      p:=p+1;
      if(a[p,p]<>0)then
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
          a[p,j]:=a[p,j]*c;
          U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do
      if(i<>p) then
        begin
          c:=a[i,p];
          for j:=1 to n do
           begin
            a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
            U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
           end;
        end;

 UNTIL(p=n);
 end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
 begin
  k:=0;
  REPEAT
      k:=k+1;
      for i:=1 to n do
        begin
          B[i,k]:=0;
          for p:=1 to n do
          B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
        end;
```

```
      if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
      for i:=1 to n do
       begin
        if(Y[k]<>0) then
        X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
       end;
  UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
  for i:=1 to sbt do   VTR1[i]:=X[i,k+1];
      GTRBN:=1/Y[k];
end;
Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
for i:=1 to st do
 begin
    cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(x2[i]-x1[i]));
    l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
```

```
    b1[i]:=sqr(l[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];  c1[i]:=l[i]*mm[i]*e[i]*dt[i]/cd[i];
    d[i]:=sqr(mm[i])*e[i]*dt[i]/cd[i];
    s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+b1[i];
    s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+e1[i];
    s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+d[i];
    s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]-b1[i];
    s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-e1[i];
    s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+b1[i];
    s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-e1[i];
    s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-d[i];
    s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]+e1[i];
    s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+d[i];
  end;
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to i-1 do     s[i,j]:=s[j,i];

 (*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *);
 for i:=1 to st do
  begin
    c1[i]:=tt*dt[i]*cd[i]/3;    c2[i]:=c1[i]/2;
    m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+0;
    m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+c2[i];
    m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+0;
    m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+c1[i];
    m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+0;
    m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+c2[i];
    m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+0;
    m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+c1[i];
  end;
 for i:=1 to sbt do
 for j:=1 to i-1 do   m[i,j]:=m[j,i];

 (*Goi chuong trinh con de ngich dao MT m*);
 for i:=1 to sbt do
 for j:=1 to sbt do
 begin
 if(i=j) then u[i,j]:=1;
 if(i<>j) then u[i,j]:=0;
 end;
 NDMT(m,u,sbt);

 (*Xac dinh ma tran a de tinh lap*);
 for i:=1 to sbt do
```

```
for j:=1 to sbt do
begin
  a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
  a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;

(*Goi chuong trinh con de ngich dao MT a*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
if(i=j) then u[i,j]:=1;
if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(a,u,sbt);

(*Goi chuong trinh con de tinh gia tri rieng be nhat*);
for i:=1 to sbt do x[i,1]:=1;
TGTRLN(u,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng 1');
for i:=1 to sbt do
writeln(VTR1[i]);
writeln('Gia tri rieng be nhat');
writeln(GTRBN);
readln;
end.
```

```
Program CTR21_Tinh_gia_tri_rieng_lon_nhat_cho_he_khung;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10] of integer;
   a1,b1,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd3,mq,g1,g2,g3,g4,cd,dt,e,y,vtrn,l,mm,
   x1,x2,y1,y2:mt2;
   s,m,me,mc,r,a,u,b,t,tc,x:mt1;
   tt,gtrln,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1);
 Var    i,j,p :integer;   c:real;
begin
 p:=0;
 REPEAT
      p:=p+1;
      if(a[p,p]<>0)then
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to n do
        begin
          a[p,j]:=a[p,j]*c;
          U[p,j]:=U[p,j]*c;
        end;
      for i:=1 to n do
      if(i<>p) then
        begin
          c:=a[i,p];
          for j:=1 to n do
           begin
             a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
             U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
           end;
        end;

 UNTIL(p=n);
 end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
 begin
  k:=0;
  REPEAT
      k:=k+1;
      for i:=1 to n do
        begin
          B[i,k]:=0;
          for p:=1 to n do
```

```
          B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
        end;
      if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
      for i:=1 to n do
       begin
         if(Y[k]<>0) then
         X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
       end;
  UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
  for i:=1 to n do   VTRn[i]:=X[i,k+1];
       GTRLN:=Y[k];
end;
Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap momen quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap BTD d5');
for i:=1 to st do  readln(d5[i]);
writeln('nhap BTD d6');
for i:=1 to st do  readln(d6[i]);
```

```
 writeln('nhap ti trong');
 readln(tt);

 (*Ghep cac MTDC rieng*);
  for i:=1 to st do
  begin
   cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
   l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
   cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
   if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
   begin
   g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
   g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
   end;
   c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(mm[i]);
   c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*mm[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(mm[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
   c4[i]:=g2[i]*mm[i];  c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i];  c7[i]:=2*g4[i];
   s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
   s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
   s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
   s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
   s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
   s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
   s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
   s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
   s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
   s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
   s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
   s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
   s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
   s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
   s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
   s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
   s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
   s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
   s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
   s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
   s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
  end;
 for i:=1 to sbt do
 for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *)
for k:=1 to st do
```

```
begin
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
  begin t[1,1]:=l[k]; t[1,2]:=mm[k]; t[2,1]:=-mm[k]; t[2,2]:=l[k];
  t[4,4]:=l[k]; t[4,5]:=mm[k]; t[5,4]:=-mm[k]; t[5,5]:=l[k]; t[6,6]:=1;
  end;
  a1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/6;    b1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/420;
  for i:=1 to sbt do
  for j:=i to sbt do
  begin me[1,1]:=2*a1[k]; me[1,4]:=a1[k]; me[1,1]:=2*a1[k];
      me[2,2]:=156*b1[k]; me[2,3]:=22*cd[k]*b1[k]; me[2,5]:=54*b1[k];
      me[2,6]:=-13*cd[k]*b1[k];   me[3,3]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
      me[3,5]:=13*cd[k]*b1[k]; me[3,6]:=-3*sqr(cd[k])*b1[k];
      me[4,4]:=2*a1[k]; me[5,5]:=156*b1[k]; me[5,6]:=-22*cd[k]*b1[k];
      me[6,6]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
   end;
      for i:=1 to sbt do
      for j:=1 to i-1 do     me[i,j]:=me[j,i];
      for i:=1 to sbt do
      for j:=1 to sbt do     tc[i,j]:=t[j,i];
      for i:=1 to sbt do
      for j:=1 to sbt do
      begin
      r[i,j]:=0; for p:=1 to sbt do r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
      end;
      for i:=1 to sbt do
      for j:=1 to sbt do
      begin
      mc[i,j]:=0; for p:=1 to sbt do mc[i,j]:=mc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
      end;
    m[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+mc[1,1];
    m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+mc[1,2];
    m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+mc[2,2];
    m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+mc[1,3];
    m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+mc[2,3];
    m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+mc[3,3];
    m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+mc[1,4];
    m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+mc[2,4];
    m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+mc[3,4];
    m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+mc[4,4];
    m[d1[i],d5[i]]:=m[d1[i],d5[i]]+mc[1,5];
    m[d2[i],d5[i]]:=m[d2[i],d5[i]]+mc[2,5];
    m[d3[i],d5[i]]:=m[d3[i],d5[i]]+mc[3,5];
    m[d4[i],d5[i]]:=m[d4[i],d5[i]]+mc[4,5];
```

```
    m[d5[i],d5[i]]:=m[d5[i],d5[i]]+mc[5,5];
    m[d1[i],d6[i]]:=m[d1[i],d6[i]]+mc[1,6];
    m[d2[i],d6[i]]:=m[d2[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d3[i],d6[i]]:=m[d3[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d4[i],d6[i]]:=m[d4[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d5[i],d6[i]]:=m[d5[i],d6[i]]+mc[1,1];
    m[d6[i],d6[i]]:=m[d6[i],d6[i]]+mc[6,6];
  end;
    for i:=1 to sbt do
    for j:=1 to i-1 do   m[i,j]:=m[j,i];

  (*Nghich dao MT khoi luong*);
    for i:=1 to sbt do
    for j:=1 to sbt do
    begin
    if (i<>j) then u[i,j]:=0;
    if(i=j) then u[i,j]:=1;
    end;
  NDMT(m,u);
  (*Xac dunh ma tran a de tinh lap*);
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
  begin
    a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
    a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
  end;

  (*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri rieng lon nhat va vec to rieng*);
  for i:=1 to sbt do    (X[i,1]):=1;
  TGTRLN(a,x,sbt);

  (*Doc ket qua*);
  writeln('vecto rieng n');
  for i:=1 to sbt do
  writeln(VTRn[i]);
  writeln('gia tri rieng lon nhat');
  writeln(GTRLN);
  readln;
  end.
```

```
Program CTR22_Tinh_gia_tri_rieng_be_nhat_cho_he_khung;
Uses crt;
Type
  mt1= array[1..10,1..10 ] of real ; mt2= array[1..10] of real ;
Var  i,j,k,p,sn,st,sbt,n:integer; d1,d2,d3,d4,d5,d6:array[1..10] of integer;
   a1,b1,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,cd3,mq,g1,g2,g3,g4,cd,dt,e,y,vtr1,l,mm,
   x1,x2,y1,y2:mt2;
   s,m,me,mc,r,a,u,b,t,tc,x:mt1;
   tt,gtrbn,c:real;
Procedure NDMT(var a,u:mt1;sbt:integer);
var  i,j,p:integer;   c:real;
begin
 p:=0;
 REPEAT
      p:=p+1;
      if(a[p,p]<>0)then
      begin
      c:=1/a[p,p];
      for j:=1 to sbt do
         begin
           a[p,j]:=a[p,j]*c;
           U[p,j]:=U[p,j]*c;
         end;
       for i:=1 to sbt do
       if(i<>p) then
          begin
            c:=a[i,p];
            for j:=1 to sbt do
             begin
               a[i,j]:=a[i,j]-a[p,j]*c;
               U[i,j]:=U[i,j]-U[p,j]*c;
             end;
          end
      end;
 UNTIL(p=sbt);
end;
Procedure TGTRLN(a,x:mt1;n:integer);
  begin
  k:=0;
  REPEAT
       k:=k+1;
       for i:=1 to n do
         begin
           B[i,k]:=0;
           for p:=1 to n do
```

```
            B[i,k]:=B[i,k]+A[i,p] * X[p,k];
          end;
        if (X[1,k]<>0) then Y[k]:=B[1,k]/X[1,k];
        for i:=1 to n do
         begin
          if(Y[k]<>0) then
          X[i,k+1]:= B[i,k]/Y[k];
         end;
   UNTIL (abs(Y[k]-Y[k-1])<0.0001);
   for i:=1 to n do    VTR1[i]:=X[i,k+1];
       GTRBN:=1/Y[k];
end;
Begin    clrscr;
(*Nguoi lap trinh :Vo nhu Cau*);
 for i:=1 to sbt do
 for j:=1 to sbt do
  begin
  if (i<>j) then u[i,j]:=0;
  if(i=j) then u[i,j]:=1;
  end;
writeln('nhap so thanh');
readln(st);
writeln('nhap so BTD co chuyen vi');
readln(sbt);
writeln('nhap toa do x1');
for i:=1 to st do  readln(x1[i]);
writeln('nhap toa do x2');
for i:=1 to st do  readln(x2[i]);
writeln('nhap toa do y1');
for i:=1 to st do  readln(y1[i]);
writeln('nhap toa do y2');
for i:=1 to st do  readln(y2[i]);
writeln('nhap dien tich');
for i:=1 to st do  readln(dt[i]);
writeln('nhap modun dan hoi');
for i:=1 to st do  readln(e[i]);
writeln('nhap momen quan tinh');
for i:=1 to st do  readln(mq[i]);
writeln('nhap BTD d1');
for i:=1 to st do  readln(d1[i]);
writeln('nhap BTD d2');
for i:=1 to st do  readln(d2[i]);
writeln('nhap BTD d3');
for i:=1 to st do  readln(d3[i]);
writeln('nhap BTD d4');
```

```
for i:=1 to st do  readln(d4[i]);
writeln('nhap BTD d5');
for i:=1 to st do  readln(d5[i]);
writeln('nhap BTD d6');
for i:=1 to st do  readln(d6[i]);
writeln('nhap ti trong');
readln(tt);

(*Ghep cac MTDC rieng*);
 for i:=1 to st do
 begin
   cd[i]:=sqrt(sqr(x2[i]-x1[i])+sqr(y2[i]-y1[i]));
   l[i]:=(x2[i]-x1[i])/cd[i]; mm[i]:=(y2[i]-y1[i])/cd[i];
   cd3[i]:= sqr(cd[i])*cd[i];
   if(((cd3[i]<>0) and (cd[i]<>0)) and (sqr(cd[i])<>0)) then
   begin
   g1[i]:=12*e[i]*mq[i]/cd3[i]; g2[i]:=6*e[i]*mq[i]/sqr(cd[i]);
   g3[i]:=dt[i]*e[i]/cd[i]; g4[i]:=e[i]*mq[i]/cd[i];
   end;
   c1[i]:=g3[i]*sqr(l[i])+g1[i]*sqr(mm[i]);
   c2[i]:=(g3[i]-g1[i])*l[i]*mm[i]; c3[i]:=g3[i]*sqr(mm[i])+g1[i]*sqr(l[i]);
   c4[i]:=g2[i]*mm[i];  c5[i]:=g2[i]*l[i]; c6[i]:=4*g4[i];  c7[i]:=2*g4[i];
   s[d1[i],d1[i]]:=s[d1[i],d1[i]]+c1[i];
   s[d1[i],d2[i]]:=s[d1[i],d2[i]]+c2[i];
   s[d2[i],d2[i]]:=s[d2[i],d2[i]]+c3[i];
   s[d1[i],d3[i]]:=s[d1[i],d3[i]]+c4[i];
   s[d2[i],d3[i]]:=s[d2[i],d3[i]]-c5[i];
   s[d3[i],d3[i]]:=s[d3[i],d3[i]]+c6[i];
   s[d1[i],d4[i]]:=s[d1[i],d4[i]]-c1[i];
   s[d2[i],d4[i]]:=s[d2[i],d4[i]]-c2[i];
   s[d3[i],d4[i]]:=s[d3[i],d4[i]]-c4[i];
   s[d4[i],d4[i]]:=s[d4[i],d4[i]]+c1[i];
   s[d1[i],d5[i]]:=s[d1[i],d5[i]]-c2[i];
   s[d2[i],d5[i]]:=s[d2[i],d5[i]]-c3[i];
   s[d3[i],d5[i]]:=s[d3[i],d5[i]]+c5[i];
   s[d4[i],d5[i]]:= s[d4[i],d5[i]]+c2[i];
   s[d5[i],d5[i]]:=s[d5[i],d5[i]]+c3[i];
   s[d1[i],d6[i]]:=s[d1[i],d6[i]]+c4[i];
   s[d2[i],d6[i]]:=s[d2[i],d6[i]]-c5[i];
   s[d3[i],d6[i]]:=s[d3[i],d6[i]]+c7[i];
   s[d4[i],d6[i]]:=s[d4[i],d6[i]]-c4[i];
   s[d5[i],d6[i]]:=s[d5[i],d6[i]]+c5[i];
   s[d6[i],d6[i]]:=s[d6[i],d6[i]]+c6[i];
  end;
  for i:=1 to sbt do
```

```
 for j:=1 to i-1 do   s[i,j]:=s[j,i];

(*Ghep cac ma tran khoi luong rieng *)
for k:=1 to st do
begin
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to sbt do
  begin  t[1,1]:=l[k];  t[1,2]:=mm[k]; t[2,1]:=-mm[k];  t[2,2]:=l[k];
  t[4,4]:=l[k]; t[4,5]:=mm[k]; t[5,4]:=-mm[k]; t[5,5]:=l[k];  t[6,6]:=1;
  end;
  a1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/6;     b1[k]:=tt*dt[k]*cd[k]/420;
  for i:=1 to sbt do
  for j:=i to sbt do
  begin  me[1,1]:=2*a1[k];  me[1,4]:=a1[k];  me[1,1]:=2*a1[k];
       me[2,2]:=156*b1[k]; me[2,3]:=22*cd[k]*b1[k];   me[2,5]:=54*b1[k];
       me[2,6]:=-13*cd[k]*b1[k];    me[3,3]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
       me[3,5]:=13*cd[k]*b1[k];  me[3,6]:=-3*sqr(cd[k])*b1[k];
       me[4,4]:=2*a1[k]; me[5,5]:=156*b1[k]; me[5,6]:=-22*cd[k]*b1[k];
       me[6,6]:=4*sqr(cd[k])*b1[k];
 end;
     for i:=1 to sbt do
     for j:=1 to i-1 do      me[i,j]:=me[j,i];
     for i:=1 to sbt do
     for j:=1 to sbt do      tc[i,j]:=t[j,i];
     for i:=1 to sbt do
     for j:=1 to sbt do
     begin
     r[i,j]:=0;  for p:=1 to sbt do  r[i,j]:=r[i,j]+tc[i,p]*me[p,j];
     end;
     for i:=1 to sbt do
     for j:=1 to sbt do
     begin
     mc[i,j]:=0;  for p:=1 to sbt do  mc[i,j]:=mc[i,j]+r[i,p]*t[p,j];
     end;
m[d1[i],d1[i]]:=m[d1[i],d1[i]]+mc[1,1];
m[d1[i],d2[i]]:=m[d1[i],d2[i]]+mc[1,2];
m[d2[i],d2[i]]:=m[d2[i],d2[i]]+mc[2,2];
m[d1[i],d3[i]]:=m[d1[i],d3[i]]+mc[1,3];
m[d2[i],d3[i]]:=m[d2[i],d3[i]]+mc[2,3];
m[d3[i],d3[i]]:=m[d3[i],d3[i]]+mc[3,3];
m[d1[i],d4[i]]:=m[d1[i],d4[i]]+mc[1,4];
m[d2[i],d4[i]]:=m[d2[i],d4[i]]+mc[2,4];
m[d3[i],d4[i]]:=m[d3[i],d4[i]]+mc[3,4];
m[d4[i],d4[i]]:=m[d4[i],d4[i]]+mc[4,4];
m[d1[i],d5[i]]:=m[d1[i],d5[i]]+mc[1,5];
```

```
  m[d2[i],d5[i]]:=m[d2[i],d5[i]]+mc[2,5];
  m[d3[i],d5[i]]:=m[d3[i],d5[i]]+mc[3,5];
  m[d4[i],d5[i]]:=m[d4[i],d5[i]]+mc[4,5];
  m[d5[i],d5[i]]:=m[d5[i],d5[i]]+mc[5,5];
  m[d1[i],d6[i]]:=m[d1[i],d6[i]]+mc[1,6];
  m[d2[i],d6[i]]:=m[d2[i],d6[i]]+mc[1,1];
  m[d3[i],d6[i]]:=m[d3[i],d6[i]]+mc[1,1];
  m[d4[i],d6[i]]:=m[d4[i],d6[i]]+mc[1,1];
  m[d5[i],d6[i]]:=m[d5[i],d6[i]]+mc[1,1];
  m[d6[i],d6[i]]:=m[d6[i],d6[i]]+mc[6,6];
end;
  for i:=1 to sbt do
  for j:=1 to i-1 do   m[i,j]:=m[j,i];

NDMT(m,u,sbt);

(*Tich MT mghich dao M va MTDC tong the*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
  a[i,j]:=0; for k:=1 to sbt do
  a[i,j]:=a[i,j]+u[i,k]*s[k,j];
end;

(*Goi chuong trinh con ngich dao MT a*);
for i:=1 to sbt do
for j:=1 to sbt do
begin
if(i=j) then u[i,j]:=1;  if(i<>j) then u[i,j]:=0;
end;
NDMT(a,u,sbt);

(*Qua trinh tinh lap de xac dinh gia tri rieng be nhat *);
  for i:=1 to sbt do    (X[i,1]):=1;
  TGTRLN(u,x,sbt);

(*Doc ket qua*);
writeln('vecto rieng');
for i:=1 to sbt do
writeln(VTR1[i]);
writeln('Gia tri rieng be nhat');
writeln(GTRBN);
readln;
end.
```

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Argyric, T. H. *Energy Methods in Structural Analysis*. Butterworth, London, 1960 (reprinted from Aircraft Engineering, 1954 - 1955)
2. Zienkiewicz, O. C, and Y. K, Cheung. *The Finite Element Method in Structural and Continium Mechanics*. London McGraw - Hill, 1967.
3. Felippa, C.A. *Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two - Dimensional Structures. Ph. D. Dissertation*. University of California. Berkeley, 1966.
4. Eisenberg, M. A and L. E Malvern. *On finite Element Integration in Natural Corordinates, Int. Journal for Num. Method in Engg Vol.7 No. 4 pp. 574-75*. 1973.
5. Though, R. W. *Comparison of Three - Dimensional Finite Element, Proc. Symposium on Application of Finite Element in Civil Engineering*. Vanderbiet University, Nashville, Tenn. Nov. 1969, pp. 1-26.
6. Tirupathi R. Chandrupatla. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. 1991 by Prentice Hall.
7. Melosh. *Structural engineering anlysis by finite elements*.
8. P. Bhalt. *Une présentation de la méthode des élements finis*. 1983
9. Richards, T. H. *Energy Methods in Structural Analysis with an Introduction to Finite Element Techniques*. Ellis Horwood Ltd., 1977.
10. Stran, G. and G. J. Fix. *An an alysis of the Finite Element Method*. Prentice, Hall, 1973.
11. Võ Như Cầu. *Đại số ma trận, Khái niệm cơ bản*. NXB Trẻ, 2004.
12. Võ Như Cầu. *Tính kết cấu theo phương pháp ma trận*. NXB Xây dựng, 2004
13. Nguyễn Mạnh Yên. *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1996.

MỤC LỤC

Chương 4

HỆ GIÀN

Chương 5

BÀI TOÁN HAI CHIỀU DÙNG TAM GIÁC BIẾN DẠNG KHÔNG ĐỔI

Chương 6

VẬT RẮN TRÒN XOAY CHỊU TẢI TRỌNG ĐỐI XỨNG

Chương 7

PHẦN TỬ HỮU HẠN CÙNG THAM SỐ HAI CHIỀU - PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN BẰNG SỐ

Chương 8

DẦM HAI CHIỀU VÀ KHUNG PHẲNG

Chương 9

HỆ DẦM GIAO NHAU

Chương 10

DẦM BA CHIỀU VÀ KHUNG KHÔNG GIAN

Chương 11

BÀI TOÁN BA CHIỀU

Chương 12

BÀI TOÁN DAO ĐỘNG

TÍNH KẾT CẤU
THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chịu trách nhiệm xuất bản:
BÙI HỮU HẠNH

Biên tập: TRẦN CƯỜNG
Chế bản: TRẦN KIM ANH
Sửa bản in: HUY HOÀNG
Vẽ bìa: VŨ BÌNH MINH

In 1000 cuốn khổ 19 × 27cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng kí kế hoạch xuất bản số 1844/XB-QLXB-105 ngày 01-12-2004. In xong và nộp lưu chiểu tháng 3-2005.

6X6 - 6X2
XD- 2005 1844 - 2004

Giá : 68.000đ