

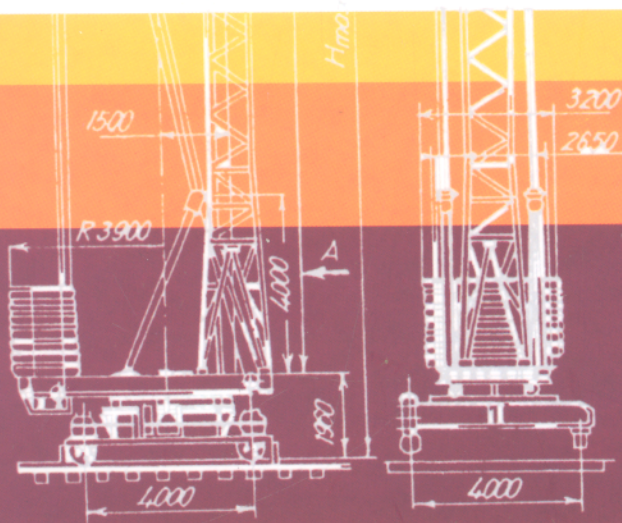


1956 - 2006

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
50 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯỜNG

Cơ ứng dụng trong kỹ thuật



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT



**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI**

LỜI NÓI ĐẦU

Như một nguyên tắc, các ngành kỹ thuật, công nghệ ở tất cả các bậc học đều cần phải và được trang bị các kiến thức về cơ học. Tuy nhiên, cơ học là một lĩnh vực rất rộng bao gồm nhiều môn học như cơ học lý thuyết, nguyên lý máy, chi tiết máy, sức bền vật liệu, cơ học kết cấu, lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến... Do nhiều nguyên nhân mà thời gian đào tạo ở các bậc học có xu hướng rút ngắn đối với mọi quốc gia. Vì vậy, việc chọn một kết cấu giáo trình hợp lý về cơ học vật rắn nói trên để cho người học có đủ kiến thức tiếp thu các môn học nối tiếp, đồng thời có thể nghiên cứu những vấn đề khác nhau của cơ học là một đề tài nóng bỏng nhất của ngày hôm nay ở nước ta trong việc đào tạo các kỹ sư làm việc trong lĩnh vực công nghiệp.

Hiện nay nhiều trường đại học công nghệ trong nước và trên thế giới đã không còn giảng dạy riêng rẽ các môn cơ học nêu trên nữa mà người ta giảng dạy chúng trong một giáo trình thống nhất. Môn học này ở Việt Nam lần đầu tiên được tổ chức vào tháng 10 năm 1970 do một nhóm nhà giáo mà tác giả là một trong số đó, đồng thời là những nhà khoa học đầy nhiệt tâm của trường ĐHBK Hà Nội nhận trách nhiệm tổ chức, xây dựng, đào tạo và giảng dạy. Mục đích của môn học mang tính khoa học liên hoàn này là nhằm cung cấp những kiến thức cơ bản nhất về cơ học và những ứng dụng kỹ thuật của nó cho sinh viên các trường đại học kỹ thuật và công nghệ.

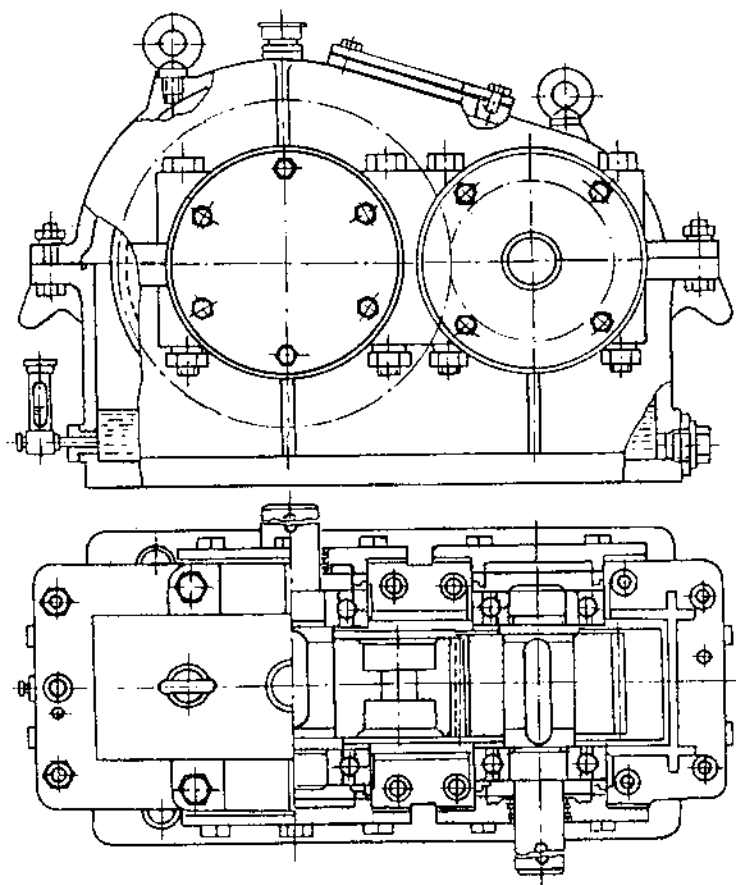
Với mục đích hoàn thiện hơn nữa nội dung các bài giảng, đặc biệt là tính ứng dụng vào kỹ thuật của nội dung đó và khắc phục mâu thuẫn gay gắt giữa nội dung cần truyền đạt với quỹ thời gian khi thực hành giảng dạy các môn cơ học nói trên, đồng thời giúp các cán bộ trẻ mới bước vào nghề và các kỹ sư đang hoạt động trong các lĩnh vực công nghiệp, chúng tôi thấy cần phải giới thiệu cuốn **CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT** cùng các bạn. Vẫn biết, giới thiệu là cần thiết nhưng cái chính là hữu xạ tự nhiên hương. Cuốn sách được biên

soạn công phu, chặt chẽ với sự cập nhật chọn lọc các thông tin mới nhất vào việc xây dựng hệ thống lý thuyết liên hoàn và nhất quán của môn học này. Mặc dù rất cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất mong và cảm ơn sự đóng góp ý kiến trao đổi của các chuyên gia, các thầy giáo và tất cả các bạn sử dụng và đọc cuốn sách này để cuốn sách được hoàn chỉnh hơn trong lần xuất bản sau. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, các bạn đồng nghiệp đã khích lệ và giúp đỡ chúng tôi hoàn thành cuốn sách.

Tác giả

PHẦN I

CƠ HỌC VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI



KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ HỌC CÁC VẬT RẮN

Chuyển động là thuộc tính cơ bản và là hình thức tồn tại của vật chất. Vì thế, vật chất và chuyển động không thể tách rời nhau. Trong môn học này chúng ta chỉ nghiên cứu một loại chuyển động đơn giản nhất: Đó là chuyển động cơ học. Chuyển động cơ học là sự thay đổi vị trí của đối tượng (điểm, vật) trong không gian theo thời gian. Không gian và thời gian được hiểu là chúng có tính tuyệt đối không phụ thuộc vào vật chất và chuyển động. Không gian trống rỗng, nghiệm đúng các tiên đề và các định lý của hình học Óclit (Euclide), còn thời gian được thừa nhận là một đối số độc lập khi khảo sát chuyển động của đối tượng.

I. MÔ HÌNH NGHIÊN CỨU

Đối tượng được nghiên cứu chủ yếu trong môn học này là vật rắn và hệ vật rắn gồm hai loại sau đây:

a) Vật rắn tuyệt đối:

Vật rắn tuyệt đối là những vật rắn mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó không thay đổi trong quá trình chuyển động. Khi những vật mà kích thước và hình dáng có thể bỏ qua trong các tính toán mà không ảnh hưởng đến kết quả thì được gọi là điểm.

b) Vật rắn biến dạng:

Vật rắn biến dạng là những vật rắn mang tính vật chất. Do đó khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong nó có thể bị thay đổi dưới tác dụng của môi trường bên ngoài.

c) Hệ vật rắn:

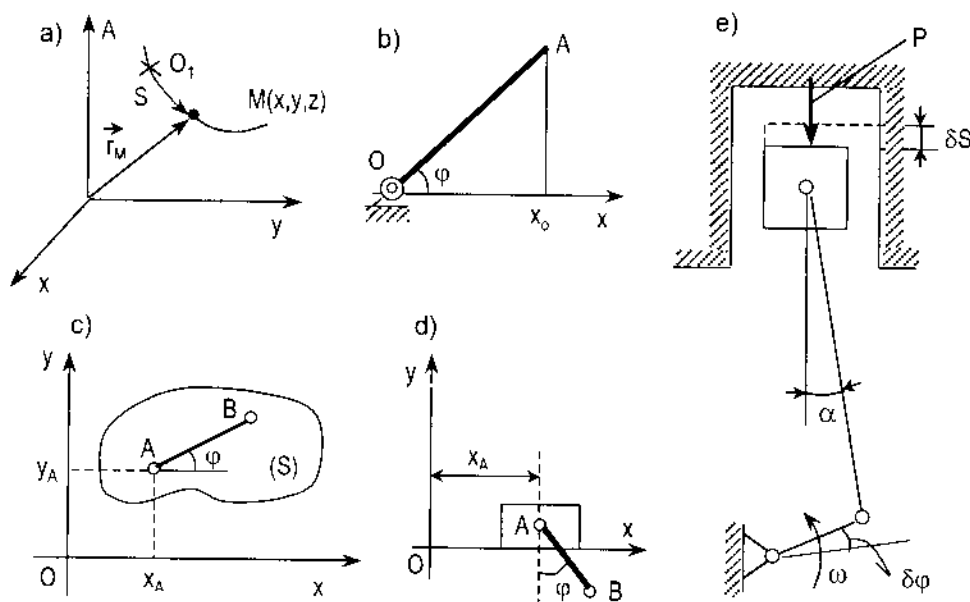
Tập hợp tất cả các vật rắn có chuyển động phụ thuộc nhau được gọi là một hệ vật rắn hay một cơ hệ. Trong môn học này ta quan tâm tới các cơ hệ hay gặp trong các thiết bị và máy móc.

II. TOẠ ĐỘ SUY RỘNG - CHUYỂN ĐỘNG KHẢ DĨ VÀ BẬC TỰ DO

1. Toạ độ suy rộng

Xét vị trí của một vật thể tức là xét vị trí tương đối của nó đối với một vật lấy mốc để so sánh. Vật lấy mốc để so sánh được gọi là hệ quy chiếu. Vị trí của một đối tượng được xét nào đó đối với hệ quy chiếu đã chọn thường được xác định bởi một tập hợp những thông số gọi là những thông số định vị (hình 1-1a, b, c, d).

* *Toạ độ suy rộng là tập hợp những thông số định vị của vật thể đối với hệ quy chiếu đã chọn.*



Hình 1-1

Trên hình 1-1a mô tả ba cách xác định vị trí của điểm M trong không gian:

- Cách 1: ba toạ độ Đề-các x, y, z.
- Cách 2: bán kính vectơ $\vec{r}_M$.
- Cách 3: khi biết đường cong mà điểm M ở trên đó thì có thể dùng toạ độ cong $S = \widehat{O_1M}$.

Trên hình 1-1b mô tả thanh OA quay quanh O cố định trong mặt phẳng hình vẽ. Vị trí của OA có thể được xác định chỉ bởi góc φ hoặc hình chiếu OA trên Ox.

Trên hình 1-1c mô tả một miếng cứng (S) chuyển động trong mặt phẳng xOy. Vị trí của (S) hoàn toàn được xác định bởi đoạn AB gắn cứng trên nó. Có thể xác định AB nhờ tọa độ của A (x_A, y_A) và góc φ , cũng có thể xác định AB nhờ tọa độ A (x_A, y_A) và B (x_B, y_B).

Trên hình 1-1d mô tả một con lắc vật lý chuyển động theo phương Ox. Vị trí của con lắc được xác định nếu biết x_A và φ .

Trên hình 1-1e mô tả một cơ hệ (cơ cấu tay quay thanh truyền) vị trí của cơ cấu này ở mỗi thời điểm chuyển động của nó được xác định, nếu biết góc α .

Qua các ví dụ trên ta thấy để xác định vị trí của một đối tượng có thể dùng tọa độ Đề-các, tọa độ cong (tọa độ tự nhiên), góc lệch và dùng hỗn hợp các tọa độ đó. Thuật ngữ tọa độ suy rộng ra đời là như vậy

Số tọa độ suy rộng độc lập với nhau và vừa đủ để xác định vị trí của cơ hệ được gọi là số tọa độ suy rộng đủ. Nếu giữa những tọa độ suy rộng có mối liên hệ toán học với nhau ta có số tọa độ suy rộng dư (hình 1-1c). Phương trình biểu diễn quan hệ đó gọi là phương trình liên kết. Trong trường hợp hình 1-1c, phương trình này có dạng:

$$\overline{AB} = l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2. Chuyển vị khả dĩ và số bậc tự do của hệ

* Liên kết là những điều kiện hình học hay động học ràng buộc chuyển động tự do của một cơ hệ.

* Tập hợp những chuyển vị vô cùng bé tùy ý và phù hợp với liên kết (không phá vỡ liên kết) của hệ gọi là chuyển vị khả dĩ (CVKD) của hệ và được ký hiệu là δ_c (hình 1-1e).

* Số bậc tự do của hệ là số chuyển vị khả dĩ độc lập và cũng là số tọa độ suy rộng đủ.

III. KHỚP ĐỘNG - CHUỖI ĐỘNG VÀ CƠ CẤU

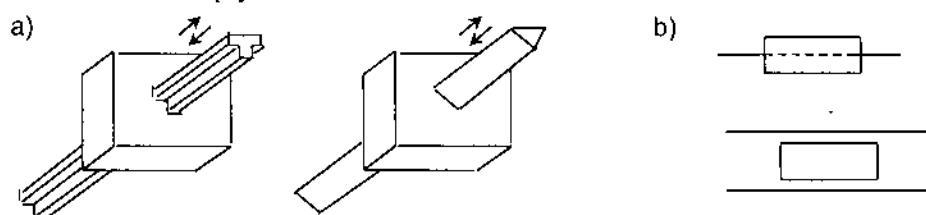
1. Khớp động

Xét hai vật có biên giới phân biệt tựa trên nhau. Ta nói hai vật này nối động với nhau nếu khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của chúng thay đổi trong quá trình chuyển động của hệ. Nếu khoảng cách không đổi thì ta nói hai vật thể đó

đã nối tĩnh hay ghép cứng với nhau và cơ hệ tương đương với một vật rắn tuyệt đối. Một vật được nối động với một vật khác, gọi là một khâu. Tập hợp các điểm tựa của hai biên của hai khâu được gọi là khớp động, tập hợp các điểm tựa thuộc mỗi biên giới gọi là thành phần khớp động hay khớp chờ.

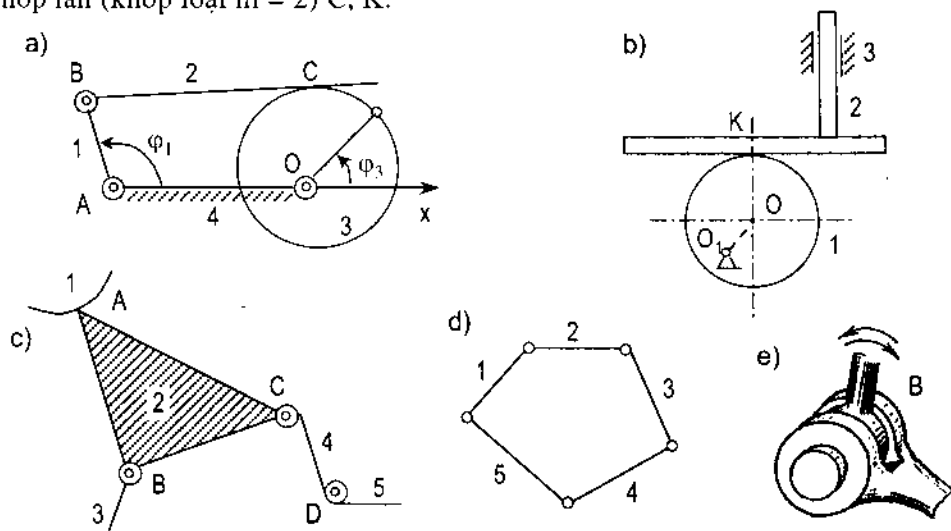
Phân loại khớp động và ký hiệu

Khớp động có thể phân loại theo đặc trưng động học, nghĩa là ta sẽ gọi khớp động là khớp động loại m , nếu số CVKD độc lập của khâu khảo sát so với khâu còn lại được lấy làm hệ quy chiếu bằng m . Trong giáo trình này ta chỉ xét *khớp động phẳng* tức là mỗi điểm của khâu chuyển động trong một mặt phẳng song song nhau. Như thế ta sẽ chỉ có khớp loại một (nếu là *khớp quay* hoặc *khớp tịnh tiến*) hay khớp loại 2 (nếu là *khớp lăn*). Trên hình 1-2a, b mô tả khớp tịnh tiến và sơ đồ quy ước.



Hình 1-2

Trên hình 1-3a, b, c mô tả các khớp quay (khớp loại $m = 1$) A, B, O, O_1 và khớp lăn (khớp loại $m = 2$) C, K.



Hình 1-3

2. Chuỗi động và cơ cấu

Một cơ hệ gồm nhiều khâu nối động với nhau gọi là một chuỗi động. Trong một chuỗi động nếu mỗi khâu được nối với ít nhất hai khâu khác thì ta có một chuỗi động kín. Trường hợp ngược lại, ta có một chuỗi động hở. Để biểu diễn các cơ cấu và chuỗi động ta thường dùng lược đồ cấu trúc (hình 1-3c, d).

** Cơ cấu là một chuỗi động kín có một khâu cố định. Khâu cố định trong một cơ cấu gọi là giá. Người ta quy ước vẽ thêm các nét gạch nhỏ để đặc trưng cho giá (hình 1-3a, b).*

3. Bậc tự do của cơ cấu phẳng

Cơ cấu phẳng là cơ cấu trong đó các điểm của các khâu chuyển động trong những mặt phẳng song song với nhau. Trong một cơ cấu, khâu có qui luật chuyển động cho trước gọi là khâu dẫn, các khâu còn lại gọi là khâu bị dẫn hoặc thanh truyền.

Bậc tự do của cơ cấu phẳng được xác định như sau

Gọi k là số lượng khâu động của một cơ cấu, nếu các khâu để riêng rẽ thì mỗi khâu có 3 bậc tự do, k khâu động có $3k$ bậc tự do. Nhưng các khâu này lại nối với nhau bằng p_1 khớp loại 1 (khớp quay hoặc khớp tịnh tiến) thành thử chúng bị giảm mất $2p_1$ bậc tự do. Ngoài p_1 khớp loại 1 nếu chúng còn nối với nhau bằng p_2 khớp loại 2 nữa (khớp lăn) thì số bậc tự do lại giảm thêm p_2 . Cuối cùng số bậc tự do của cơ cấu chỉ còn lại là:

$$W = 3k - 2p_1 - p_2$$

k là số lượng khâu động của cơ cấu;

p_1 là số lượng khớp quay hoặc khớp tịnh tiến;

p_2 là số lượng khớp lăn.

Chú ý:

- Khớp động là tập hợp các điểm tựa giữa biên giới của *hai khâu* cho nên nếu một nút mà có 3 khâu chẳng hạn thì ở đó có hai khớp.

- Nếu $W = 0$ ta có hệ hoặc kết cấu tĩnh định.

- Nếu $W < 0$ ta có hệ hoặc kết cấu siêu tĩnh.

IV. VẬT RẮN TỰ DO VÀ VẬT RẮN CHỊU LIÊN KẾT

Một hệ chất điểm bất biến và liên tục được gọi là một *vật rắn tuyệt đối*. Các vật rắn thường gặp lại có thể có liên quan đến nhau hoặc không, ta có *vật rắn không tự do* và *vật rắn tự do*.

** Vật rắn tự do là vật rắn có thể thực hiện mọi di chuyển vô cùng bé từ vị trí đang xét sang những vị trí lân cận của nó. Trái lại, nếu một số di chuyển của nó bị cản trở thì vật ấy gọi là vật rắn không tự do.*

1. Liên kết và phản lực liên kết

Liên kết là những điều kiện cản trở chuyển vị tự do của vật đang khảo sát.

Trong một tập hợp các vật rắn nếu ta quan tâm tới vật nào thì vật ấy gọi là *vật khảo sát*. Các vật cản trở chuyển vị tự do của vật khảo sát gọi là *vật gây liên kết*. Tác dụng tương hỗ giữa vật khảo sát và vật gây liên kết gọi là *lực liên kết*.

Lực mà vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát gọi là phản lực liên kết.

** • Phản lực liên kết cùng phương, trái chiều với chiều chuyển động bị cản trở. Cường độ của phản lực liên kết phụ thuộc vào lực tác dụng lên vật khảo sát.*

• Phản lực liên kết chỉ xảy ra ở vùng tiếp xúc giữa vật khảo sát và vật gây liên kết.

Tiên đề giải phóng liên kết sau đây cho phép áp dụng các định luật Newton vào việc nghiên cứu cơ hệ không tự do.

** Trạng thái chuyển động hay đứng yên của hệ không thay đổi khi thay thế các liên kết đặt lên hệ bằng các phản lực liên kết tương ứng.*

2. Các loại liên kết thường gặp

Trên hình 1-4 là các loại liên kết thường gặp có một phản lực liên kết, các ký hiệu biểu diễn chúng và các phản lực liên kết tương ứng. Liên kết này gọi là liên kết gối tựa cứng di động.

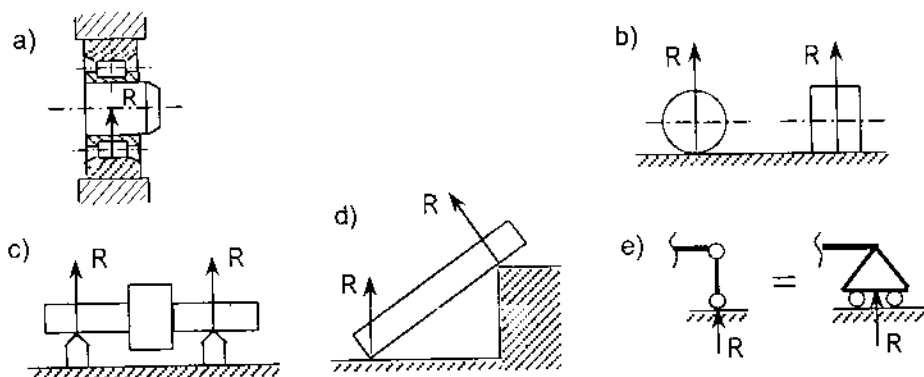
Trên hình 1-5a là liên ngàm cứng thực và ký hiệu mô tả. Liên kết này có ba phản lực: $\vec{R}$, $\vec{H}$, $\vec{M}^*$.

Trên hình 1-5b mô tả liên kết hai phản lực $\vec{R}$ và $\vec{H}$ và ký hiệu mô tả tương ứng. Liên kết này gọi là liên kết gối tựa cứng bất động.

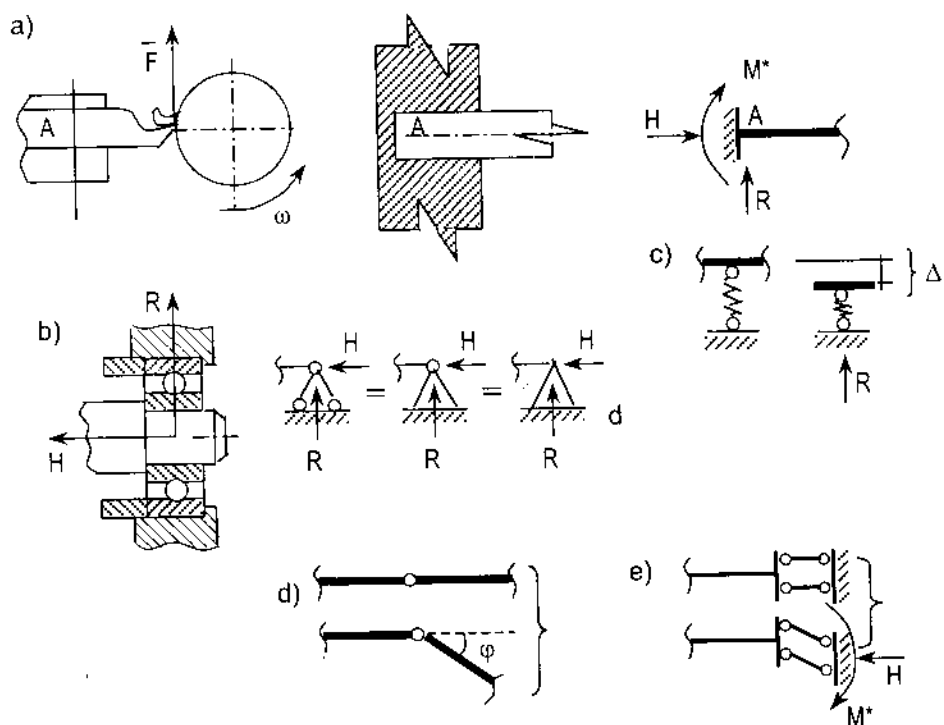
Liên kết trên hình 1-5c là liên kết gối tựa đàn hồi một phản lực.

Liên kết mô tả trên hình 1-5d là liên kết khớp quay (bàn lề) trung gian giữa hai phần của đối tượng.

Hình 1-5e mô tả liên kết ngàm trượt có hai phản lực $\vec{H}$ và $\vec{M}^*$.



Hình 1-4



Hình 1-5

CHƯƠNG 2

ĐỘNG HỌC

Nội dung của động học là nghiên cứu các đặc trưng của chuyển động (phương trình chuyển động, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc) của một đối tượng (điểm, vật, cơ hệ) độc lập với nguyên nhân gây ra chuyển động đó.

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Giả sử chuyển động của điểm M được xét trong hệ quy chiếu cố định R_i (O_i, x_i, y_i, z_i). Vị trí của nó được xác định bằng vector vị trí ở thời điểm t (hình 2-1).

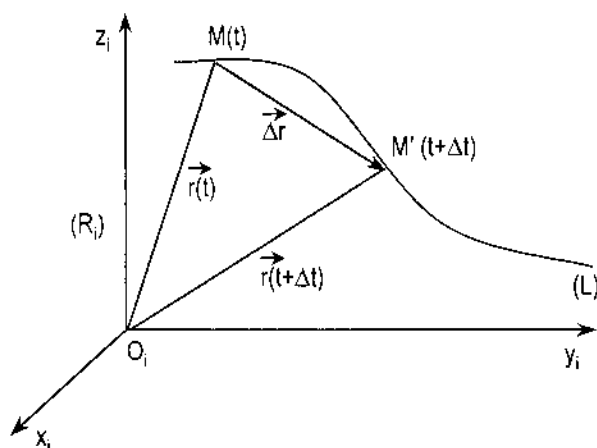
$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

Gọi: $M(t)$ là vị trí của điểm ở thời điểm t .

$\overrightarrow{MM'}$ là vector chuyển vị của M .

$M'(t+\Delta t)$ là vị trí của nó ở thời điểm $(t+\Delta t)$.

a) Quỹ đạo L của điểm M



Hình 2-1

Đường (L) mà M vẽ ra trong không gian trong quá trình chuyển động gọi là quỹ đạo chuyển động đối với hệ quy chiếu R_i . Nếu L là đường thẳng thì chuyển động của điểm gọi là chuyển động thẳng. Nếu L là đường cong ta nói chuyển động của điểm là chuyển động cong.

b) Vectơ vận tốc và vectơ gia tốc

Vectơ vận tốc trung bình được định nghĩa như sau:

$$\vec{V}_M = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Vectơ gia tốc trung bình giữa hai thời điểm t và (t+Δt):

$$\vec{W}_M = \frac{\vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Vận tốc tức thời và gia tốc tức thời là các giới hạn sau đây:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^i \vec{O_i M}}{dt}$$

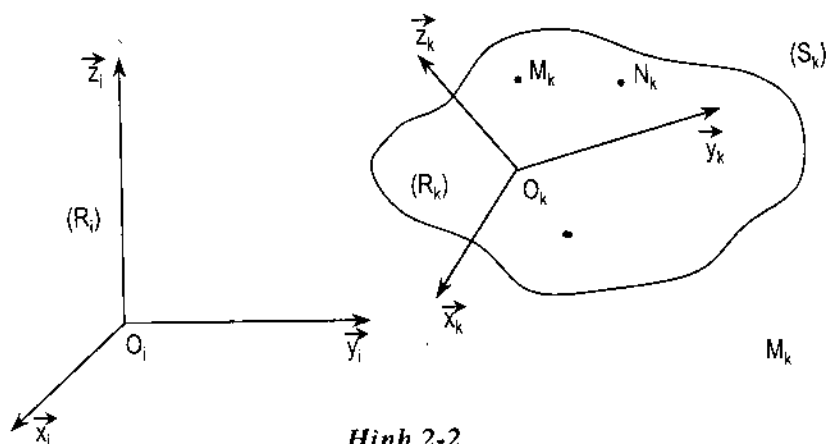
$$\vec{W}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^i \vec{V}_i(M)}{dt}$$

Chỉ số i gắn với hệ quy chiếu mà trên đó ta khảo sát chuyển động.

II. TRƯỜNG VẬN TỐC VÀ GIA TỐC TRONG VẬT RẮN - TOOCXO ĐỘNG HỌC

Vận tốc của mỗi điểm M_k của vật rắn S_k được xét trong hệ quy chiếu R_i là:

$$V^i(M_k) = \frac{d^i \vec{O_i M_k}}{dt}$$



Hình 2-2

Cho hai điểm M_k và N_k thuộc S_k được gắn trên hệ toạ độ (R_k) .

Vì (S_k) là vật rắn tuyệt đối, nên vị trí tương đối của $\overrightarrow{O_k N_k}$ và $\overrightarrow{O_k M_k}$ là bất biến theo thời gian. Chúng ta hãy tìm quan hệ vận tốc giữa $\vec{V}(N_k)$ và $\vec{V}(M_k)$.

Theo quy tắc đạo hàm vectơ, ta có:

$$\vec{V}^i(M_k) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i M_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{O_i M_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_i M_k}$$

$$\vec{V}^i(N_k) = \frac{d^i \overrightarrow{O_i N_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{O_i N_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_i N_k}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}^i(N_k) - \vec{V}^i(M_k) &= \frac{d^k}{dt} (\overrightarrow{O_i N_k} - \overrightarrow{O_i M_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{O_i N_k} - \overrightarrow{O_i M_k}) \\ &= \frac{d^k}{dt} (\overrightarrow{M_k N_k}) + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{M_k N_k}) \end{aligned}$$

$$\text{Nhưng } \overrightarrow{M_k N_k} = \text{cte trong } (R_k) \text{ nên } \frac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = 0.$$

$$\text{Suy ra: } \vec{V}^i(N_k) = \vec{V}^i(M_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{M_k N_k} \quad (2-1)$$

Biểu thức (2-1) cho ta quan hệ vận tốc giữa các điểm N_k và M_k . Tính chất của (2-1) là tính chất của một toạoxơ. Ta có thể phát biểu như sau:

Trường vận tốc của các điểm trong vật rắn khi vật này chuyển động là một trường phản đối xứng. Trường đó cùng với vectơ quay $\vec{\Omega}_k^i$ lập thành một toạoxơ mà ta gọi là toạoxơ động học. Mômen của toạoxơ là vận tốc của các điểm và vectơ của toạoxơ là vectơ vận tốc góc.

$\vec{\Omega}_k^i$ Nếu xác định được vận tốc tại một điểm bất kỳ của vật rắn và vectơ quay $\vec{\Omega}_k^i$ thì trường vận tốc trong vật rắn là hoàn toàn được xác định theo (2-1).

1. Tính chất đẳng chiều của trường vận tốc trong vật rắn

Vì trường vận tốc là một toạoxơ nên nó có tính chất đẳng chiều. Thực vậy nếu ta nhân vô hướng cả hai vế của (2-1) với $\overrightarrow{M_k N_k}$ ta sẽ được:

$$\vec{V}^i(N_k) \cdot \overrightarrow{M_k N_k} = \vec{V}^i(M_k) \cdot \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{M_k N_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{M_k N_k})$$

$$\text{Do } \overrightarrow{M_k N_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{M_k N_k}) = 0, \text{ nên:}$$

$$\vec{V}^i(N_k) \cdot \vec{M_k N_k} = \vec{V}^i(M_k) \cdot \vec{M_k N_k} \quad \text{hay}$$

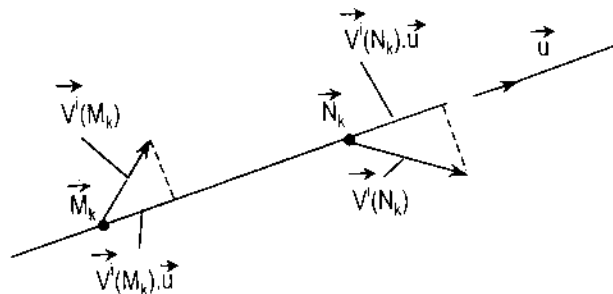
$$\vec{V}^i(N_k) \cdot \vec{u} = \vec{V}^i(M_k) \cdot \vec{u}$$

Trong đó $\vec{u}$ là vectơ đơn vị trên giá $M_k N_k$, còn $\vec{M_k N_k} = \overline{M_k N_k} \cdot \vec{u}$. Kết quả (2-2) được phát biểu dưới dạng một định lý hình chiếu vận tốc sau đây:

Định lý: “Hình chiếu vận tốc của hai điểm thuộc vật rắn chuyển động lên phương đi qua hai điểm đó thì bằng nhau” (hình 2-3).

Biểu thức của định lý:

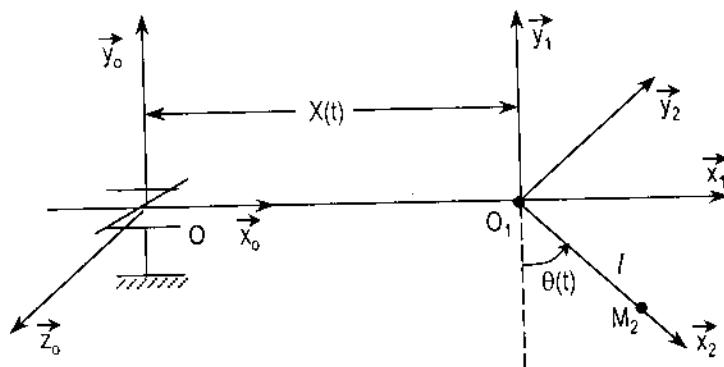
$$hc \vec{V}^i(N_k) = hc \vec{V}^i(M_k) \vec{u} \quad (2-2^*)$$



Hình 2-3

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Hãy xác định vận tốc của điểm M_2 của con lắc Ôle (Euler) so với hệ tọa độ R_0 (hình 2-4).



Hình 2-4

$$\overrightarrow{OO_1} = X(t)\vec{x}_1, \quad \overrightarrow{O_1M_2} = l\vec{x}_2, \quad \vec{\theta} = (-\vec{y}_1, \vec{x}_2), \quad \overrightarrow{V_o(M_2)}?$$

Giải:

* Phương án 1:

$$\overrightarrow{V_o(M_2)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OM_2}}{dt} \quad \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M_2}$$

$$\overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} X(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}; \quad \overrightarrow{O_1M_2} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} l \sin \theta \\ -l \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}; \quad \overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} X + l \sin \theta \\ -l \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Ta lấy đạo hàm $\overrightarrow{OM_2}$ so với (R_0) :

$$\frac{d^0 \overrightarrow{OM_2}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{OM_2}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OM_2}$$

$\vec{\Omega}_1^0 = \vec{O}$ vì hai hệ tọa độ (R_0) và (R_1) song song với nhau. Do đó:

$$\overrightarrow{V^0(M_2)} = \begin{pmatrix} \dot{X} + l\dot{\theta} \cos \theta \\ l\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

* Phương án 2:

$\overrightarrow{O_1M_2}$ gắn liền với (R_2) .

$$\overrightarrow{V^0(M_2)} = \overrightarrow{V^0(O_1)} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_1M_2} \quad (a)$$

$$- \overrightarrow{V^0(O_1)} = \frac{d^0 \overrightarrow{OO_1}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OO_1} = \frac{d^1 \overrightarrow{OO_1}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OO_1} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \Rightarrow \overrightarrow{V^0(O_1)} = \begin{pmatrix} \dot{X} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \quad \vec{\Omega}_1^0 = \vec{O}$$

$$- \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

Thay các kết quả tính toán này vào (a) ta rút ra:

$$\overrightarrow{V^0(M_2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{X} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}}_{R_1} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} l \sin \theta \\ -l \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{X} + l \dot{\theta} \cos \theta \\ l \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{R_1}$$

3. Trường gia tốc trong vật rắn chuyển động

Gia tốc của điểm $N_k \in R_k$ đối với hệ quy chiếu (R_1) được xác định bởi:

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \frac{d^i}{dt} \overrightarrow{V^i(N_k)}$$

Vậy quan hệ giữa $\overrightarrow{W^i(N_k)}$ và $\overrightarrow{W^i(M_k)}$ như thế nào?

Ta đã biết rằng $\overrightarrow{V^i(N_k)} = \overrightarrow{V^i(M_k)} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \frac{d^i}{dt} \overrightarrow{V^i(M_k)} + \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \frac{d^i \overrightarrow{M_k N_k}}{dt}$$

Nhưng

$$\frac{d^i \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} = \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}$$

$$\text{Vì là } \frac{d^k \overrightarrow{M_k N_k}}{dt} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \overrightarrow{W^i(M_k)} + \frac{d^i \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + \overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge (\overrightarrow{\Omega_k^i} \wedge \overrightarrow{M_k N_k}) \quad (2-3)$$

hay:

$$\overrightarrow{W^i(N_k)} = \overrightarrow{W^i(M_k)} + \frac{d \overrightarrow{\Omega_k^i}}{dt} \wedge \overrightarrow{M_k N_k} + (\overrightarrow{\Omega_k^i} \cdot \overrightarrow{M_k N_k}) \overrightarrow{\Omega_k^i} - (\overrightarrow{\Omega_k^i})^2 \cdot \overrightarrow{M_k N_k} \quad (2-3^*)$$

Quan hệ (2-3) cho thấy trường gia tốc không phải là một toạ độ.

Ví dụ 2: Xác định vectơ gia tốc của điểm M_2 so với R_0 trong chuyển động của con lắc Öle trong ví dụ 1.

Giải:

* Phương án đạo hàm:

$$\overrightarrow{W^0(M_2)} = \frac{d^0 \overrightarrow{V^0(M_2)}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{V^0(M_2)}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_1^0} \wedge \overrightarrow{V^0(M_2)}$$

$$\forall i \quad \overrightarrow{\Omega_1^0} = \vec{0} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{V^0(M_2)} = \begin{cases} \dot{X} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases}$$

R_1

Do đó:

$$\overrightarrow{W^0(M_2)} = \begin{cases} \ddot{X} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{cases}$$

R_1

* Phương án áp dụng công thức (2-3):

$$\overrightarrow{W^0(M_2)} = \overrightarrow{W^0(O_1)} + \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2} + \overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge (\overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2}) \quad (a)$$

$$\overrightarrow{W^0(O_1)} = \begin{cases} \ddot{X} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

R_1

$$-\frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} = \frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} + \overrightarrow{\Omega_1^0} \wedge \overrightarrow{\Omega_2^0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases}, \quad (\overrightarrow{\Omega_1^0} = \vec{0})$$

R_1

$$\frac{d^0 \overrightarrow{\Omega_2^0}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases} \wedge \begin{cases} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} l\ddot{\theta}\cos\theta \\ l\ddot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases}$$

$R_1 \quad R_1 \quad R_1$

$$-\overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge (\overrightarrow{\Omega_2^0} \wedge \overrightarrow{O_1 M_2}) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases} \wedge \begin{cases} l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} -l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ l\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{cases}$$

$R_1 \quad R \quad R_1$

Thay các kết quả này vào (a) ta có:

$$\vec{W}'(M_2) = \begin{cases} \ddot{X} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta \\ O \end{cases}$$

R_1

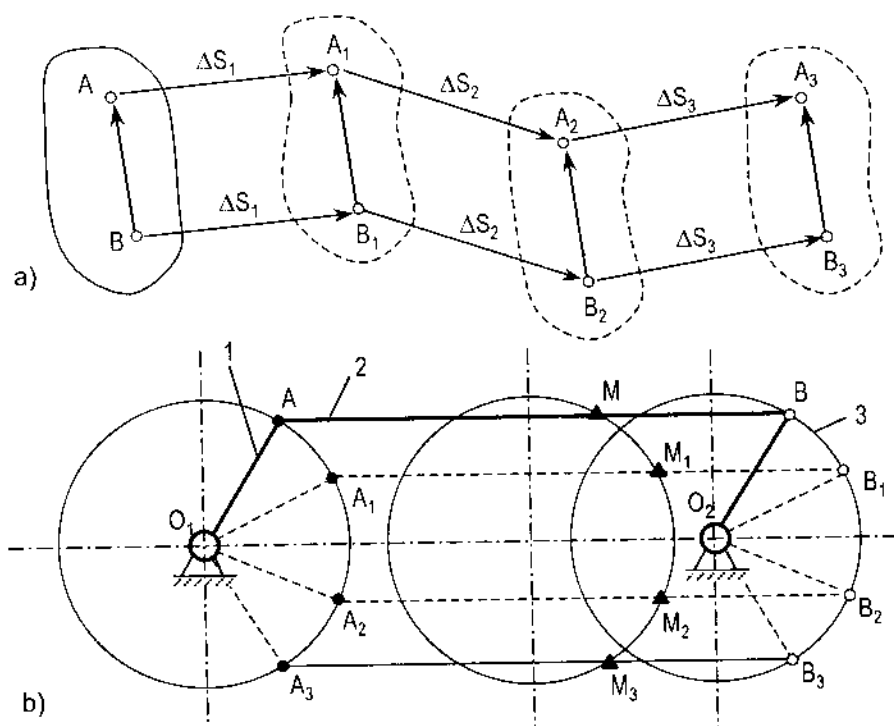
III. CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

1. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Định nghĩa:

* Vật rắn có chuyển động tịnh tiến nếu một đường thẳng AB bất kỳ trên vật luôn luôn có phương không đổi trong quá trình chuyển động (hình 2-5a).

$$\vec{AB} = \text{hằng}$$



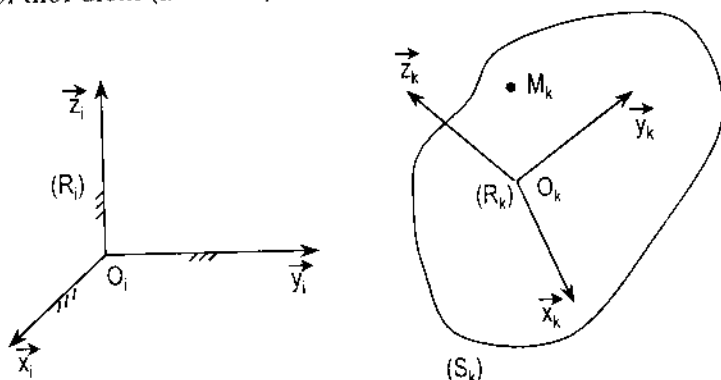
Hình 2-5

Người ta thường lấy tên quỹ đạo của các điểm trên vật chuyển động tịnh tiến để gọi tên chuyển động của vật. Ta gọi là vật chuyển động tịnh tiến thẳng hay tròn, nếu quỹ đạo của các điểm trên vật là những đường thẳng hay tròn.

Trên hình 2-5b mô tả chuyển động tịnh tiến tròn của thanh truyền AB trong cơ cấu bình hành. Vì trong quá trình chuyển động BC luôn luôn song song với giá cố định O_1O_2 và mỗi điểm trên AB đều có quỹ đạo tròn. Ví dụ các điểm A, M và B.

Ta cũng có thể làm một định nghĩa tổng quát như sau:

Vật (S_k) gắn cứng với hệ quy chiếu (R_k) được gọi là chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu (R_i) , nếu các trục toạ độ của (R_k) có phương không đổi so với (R_i) ở mọi thời điểm (hình 2-6).



Hình 2-6

Từ định nghĩa đó và từ (2-1) ta có:

$$\vec{V}_k^i(M_k) = \vec{V}_k^i(O_k), \text{ vì } \vec{\Omega}_k^i = \vec{0} \quad (2-4)$$

Tương tự như vậy đối với gia tốc theo (2-3) ta rút ra:

$$\vec{W}_k^i(M_k) = \vec{W}_k^i(O_k) \quad (2-5)$$

Định lý dưới đây chỉ rõ tính chất của chuyển động tịnh tiến.

* **Định lý:**

Trên vật rắn chuyển động tịnh tiến quỹ đạo của mọi điểm đều như nhau, vận tốc và gia tốc của mọi điểm ở mỗi thời điểm đều bằng nhau, vận tốc góc bằng không.

Toạ độ vận tốc có các toạ độ $[\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}, \vec{V}_k^i(O_k)]$.

Ý nghĩa thực tiễn của định lý là ở chỗ, để nghiên cứu chuyển động của cả vật ta chỉ cần nghiên cứu các đặc trưng động học của một điểm đặc trưng trên vật. Điểm đó thường là khối tâm của vật.

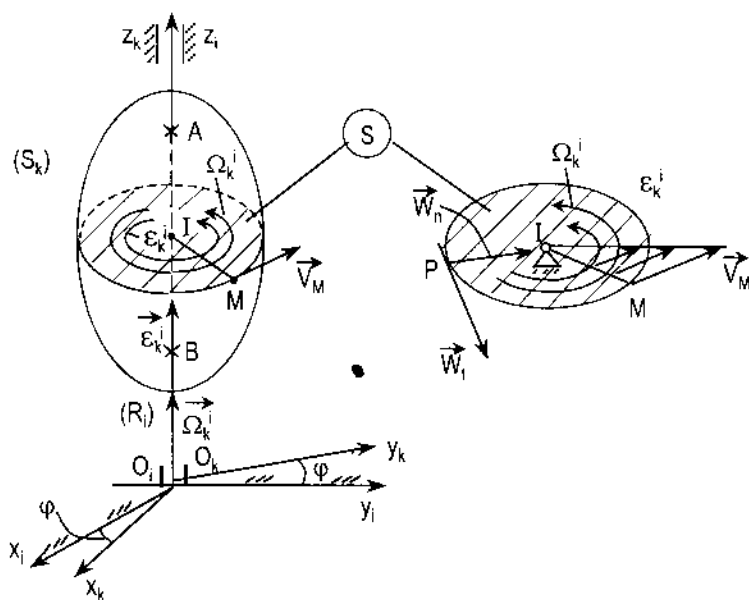
2. Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định

Định nghĩa:

* Nếu trong quá trình chuyển động, vật rắn có hai điểm luôn luôn cố định, ta nói vật rắn có chuyển động quay quanh trục cố định qua hai điểm đó.

Chuyển động này còn được định nghĩa như sau:

Vật rắn (S_k) gắn cứng vào hệ quy chiếu (R_k) được gọi là quay quanh hệ quy chiếu cố định (R_i), nếu có một trục của (R_k) luôn luôn cố định ở trong (R_i) (hình 2-7).



Hình 2-7

Tính vận tốc $\vec{V}_k^i(I)$ của điểm $I \in (z_i, z_k)$.

Theo (2-1) thì $\vec{V}_k^i(I) = \vec{O}$, cụ thể là:

$$\vec{V}_k^i(I) = \vec{V}_k^i(O_k) + \underbrace{\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{O_k I}}_{= \vec{O}}$$

Vận tốc quay của (S_k) quanh trục z_i là:

$$\vec{\Omega}_k^i = \dot{\varphi} \vec{z}_i = \dot{\varphi} \vec{z}_k = \Omega \vec{z}_k$$

Vận tốc dài tại $M \in S_k$ là: $\vec{V}^i(M) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IM}$

Vectơ $\vec{V}^i(M)$ có phương vuông góc với bán kính quay $R = \vec{IM}$, có chiều phụ thuộc chiều quay của $\vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}$ và có độ lớn bằng: $V_M = R\Omega$.

Trong chuyển động quay này toạ độ vận tốc tương đương với một vectơ trượt có toạ độ $[\vec{\Omega}_k^i, \vec{V}_k^i(I) = 0]$

$$\tau_{V_k/i} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i \\ \vec{V}_k^i(I) = 0 \end{cases}, I \in \vec{z}_k, \vec{z}_i$$

Tính gia tốc của điểm M:

$$\vec{W}^i(M) = \frac{d^i \vec{V}^i(M)}{dt} = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \vec{IM}}{dt}$$

Nhưng:

$$\frac{d^i \vec{IM}}{dt} = \frac{d^k \vec{IM}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IM}, \quad \left(\frac{d^k \vec{IM}}{dt} = 0 \right)$$

Vì vậy biểu thức của $\vec{W}^i(M)$ có thể viết lại:

$$\begin{aligned} \vec{W}^i(M) &= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IM} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{IM}) \\ &= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IM} + \vec{\Omega}_k^i (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{IM}) - \vec{IM} (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{\Omega}_k^i) \\ &= -\vec{IM} \cdot (\vec{\Omega}_k^i)^2 + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IM} \end{aligned} \quad (2-6)$$

(Chú ý là vì $\vec{\Omega}_k^i$ vuông góc với $\vec{IM}$ nên $\vec{\Omega}_k^i \cdot (\vec{\Omega}_k^i \cdot \vec{IM}) = 0$).

$$\text{Hay} \quad \vec{W}^i(M) = \vec{W}_n^i + \vec{W}_\tau^i \quad (2-6^*)$$

Trong đó: $\vec{W}_n^i = -\vec{IM} \cdot (\vec{\Omega}_k^i)^2$ là gia tốc pháp tuyến. Gia tốc này hướng vào tâm quay I và có độ lớn là:

$$W_n^i = R\Omega^2 \quad (\text{với } \vec{IM} = R, \vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega})$$

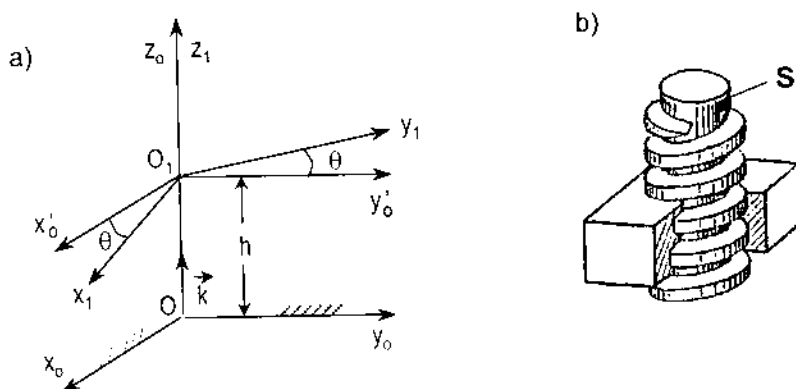
$\vec{W}_\tau^i = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \vec{IM}$ là gia tốc tiếp tuyến. Gia tốc này có phương tiếp tuyến

với quỹ đạo của M tại M và có chiều phụ thuộc vào chiều của gia tốc góc $\varepsilon_k^i = \frac{d^i \Omega_k^i}{dt} = \varepsilon$, có độ lớn là:

$$W_r^i = R\varepsilon$$

Chuyển động xoáy tịnh tiến (Helicoidal)

Một vật rắn S vừa quay quanh trục $z_1 \in R_1$, vừa trượt dọc theo trục $z_0 \in R_0$.



Hình 2-8

Khi đó ta nói rằng vật rắn S có chuyển động xoáy tịnh tiến (hình 2-8). Vận tốc của một điểm P nào đó trên vật rắn được cho bởi biểu thức toocxơ (2-1):

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(O_1) + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_1P} = \frac{dh}{dt} \vec{k} + \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \wedge \vec{OP} \quad (2-7)$$

$\frac{dh}{dt}$ là tốc độ của O_1 so với O, h là đoạn đường OO_1 . Chú ý rằng

$$\frac{d\theta}{dt} \vec{k} \wedge \vec{O_1P} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \wedge (\vec{O_1O} + \vec{OP}) = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \wedge \vec{OP}$$

Như vậy toạ độ của toocxơ động học tại O_1 sẽ là:

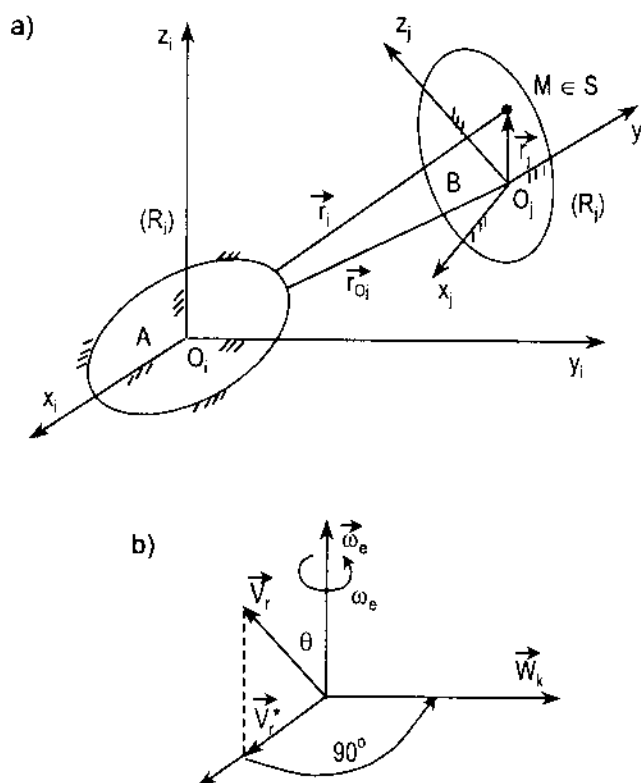
$$\left. \begin{aligned} \vec{\Omega}_1^0 &= \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \\ \vec{V}_1^0(O_1) &= \frac{dh}{dt} \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-7^*)$$

Quan hệ (2-7*) cho thấy chuyển động Helicoïdal bao gồm một thành phần chuyển động tịnh tiến dọc theo trục chung ($z_0 \equiv z_1$) và một thành phần chuyển động quay xung quanh trục chung. Trên hình 2-8b mô tả chuyển động Helicoïdal của một cái vít S.

IV. HỢP CHUYỂN ĐỘNG

1. Đặt bài toán

Khác với các chuyển động đã được nghiên cứu trong mục 1. Mục này xét chuyển động của đối tượng với một hệ qui chiếu đi động so với hệ qui chiếu khác được xem như là cố định. Bài toán này được gọi là bài toán *Hợp chuyển động*. Bài toán được đặt ra dưới dạng mô hình lý thuyết sau đây (hình 2-9a).



Hình 2-9

Đối tượng S chuyển động so với đối tượng B trong khi đối tượng B lại chuyển động so với đối tượng A được xem là cố định.

2. Các định nghĩa

Một hệ toạ độ R_i được gắn cứng vào đối tượng cố định A và hệ trục toạ độ R_j được gắn cứng vào đối tượng chuyển động B. Hệ trục R_j được gọi là hệ động.

Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của đối tượng S so với hệ trục cố định $O_i x_i y_i z_i$. Vận tốc và gia tốc trong chuyển động này gọi là vận tốc và gia tốc tuyệt đối. Ký hiệu là $\vec{V}_a$ và $\vec{W}_a$.

Chuyển động tương đối là chuyển động của đối tượng S so với hệ trục di động $O_j x_j y_j z_j$. Vận tốc và gia tốc trong chuyển động này gọi là vận tốc và gia tốc tương đối. Ký hiệu là $\vec{V}_r$ và $\vec{W}_r$.

Chuyển động theo là chuyển động của hệ động R_j so với hệ cố định $O_i x_i y_i z_i$. Gọi M^* là điểm thuộc R_j , tại thời điểm khảo sát đang trùng với M. Điểm M^* như vậy được gọi là trùng điểm của điểm khảo sát. Vận tốc và gia tốc theo được ký hiệu là $\vec{V}_e$ và $\vec{W}_e$. Chúng là vận tốc và gia tốc của M^* .

3. Hợp chuyển động của điểm

a) Hợp vận tốc

Mục đích của phần này là tìm cách xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm. Nghĩa là xác định $\vec{V}^i(M) = \vec{V}_a$, $M \in S$. Với mục đích đó ta sử dụng biểu thức sau đây:

$$\begin{aligned}\vec{O_i M} &= \vec{O_i O_j} + \vec{O_j M} \\ \vec{V}^i(M) &= \frac{d^i \vec{O_i O_j}}{dt} + \frac{d^i \vec{O_j M}}{dt}\end{aligned}$$

Nhưng:

$$\begin{aligned}\frac{d^i \vec{O_i O_j}}{dt} &= \vec{V}^i(O_j) \\ \frac{d^i \vec{O_j M}}{dt} &= \frac{d^j \vec{O_j M}}{dt} + \vec{\Omega_j^i} \wedge \vec{O_j M} \\ &= \vec{V}^j(M) + \vec{\Omega_j^i} \wedge \vec{O_j M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}^i(M) &= \vec{V}^i(M) + (\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O}_j M + \vec{V}^i(O_j)) \\ \vec{V}^i(M) &= \vec{V}_j^i(M^*) + \vec{V}^i(M)\end{aligned}\quad (2-8)$$

hay:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_c(M^*) + \vec{v}_r(M) \quad (2-8^*)$$

Trong (2-8):

$\vec{V}^i(M) = \vec{V}_a(M)$ là vận tốc tuyệt đối của điểm M đối với hệ trục cố định R_i (O_i, x_i, y_i, z_i).

$\vec{V}_j^i(M^*) = \vec{V}_c(M^*)$ là vận tốc theo. Đó là vận tốc của $M^* \in R_j$, đối với hệ cố định R_i (O_i, x_i, y_i, z_i).

$\vec{V}^i(M) = \vec{V}_r(M)$ là vận tốc tương đối của M đối với hệ quy chiếu động R_j .

Tính chất của vector $\vec{V}_j^i(M^*)$:

- $\vec{V}_j^i(M^*) = -\vec{V}_i^j$ (phản xứng theo chỉ số)
- $\vec{V}_j^i(M^*) = \vec{V}_j^k(M^*) + \vec{V}_k^i(M^*)$

Kết quả (2-8) được diễn đạt dưới dạng một định lý sau:

Định lý hợp vận tốc của điểm

* “*Vector vận tốc tuyệt đối của một điểm bằng tổng hình học các vector vận tốc theo và vận tốc tương đối của nó*”.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_c + \vec{V}_r \quad (2-9)$$

b) Hợp gia tốc

Để tính gia tốc tuyệt đối của điểm M, nghĩa là $\vec{W}^i(M) = \vec{W}_a(M)$, ta sử dụng biểu thức sau đây:

$$\begin{aligned}\vec{V}^i(M) &= \vec{V}^i(M) + \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O}_j M + \vec{V}^i(O_j) \\ \vec{W}^i(M) &= \frac{d^i \vec{V}^i(M)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}_j^i(M)}{dt} + \frac{d^i}{dt} (\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O}_j M) + \frac{d^i \vec{V}^i(O_j)}{dt}\end{aligned}$$

nhưng:

$$\begin{aligned}- \frac{d^i \vec{V}_j^i(M)}{dt} &= \frac{d^j \vec{V}_j^i(M)}{dt} + \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^i(M) \\ &= \vec{W}_j^i(M) + \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^i(M)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \frac{d^i}{dt} (\vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O_j M}) &= \frac{d^i}{dt} \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O_j M} + \vec{\Omega}_j^i \wedge \frac{d^i}{dt} \vec{O_j M} \\
&= \frac{d^i}{dt} \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O_j M} + \vec{\Omega}_j^i \wedge \left(\frac{d^j}{dt} \vec{O_j M} + \vec{\Omega}_j^j \wedge \vec{O_j M} \right) \\
&= \frac{d^i}{dt} \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{O_j M} + \vec{\Omega}_j^i \wedge (\vec{V}^j(M) + \vec{\Omega}_j^j \wedge \vec{O_j M}) \\
- \frac{d^i}{dt} \vec{V}^i(O_j) &= \vec{W}_i(O_j)
\end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
\vec{W}^i(M) &= \vec{W}^j(M) + \left[\vec{W}^i(O_j) + \frac{d^i \vec{\Omega}_j^i}{dt} \wedge \vec{O_j M} + \vec{\Omega}_j^i \wedge (\vec{\Omega}_j^j \wedge \vec{O_j M}) \right] + \\
&\quad + 2 \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M) \\
\vec{W}^i(M) &= \vec{W}^j(M) + \vec{W}_j^i(M) + 2 \vec{\Omega}_j^i \wedge \vec{V}^j(M) \quad (2-10)
\end{aligned}$$

$\vec{W}^i(M) = \vec{W}_a(M)$ là gia tốc tuyệt đối;

$\vec{W}^j(M) = \vec{W}_r(M)$ là gia tốc tương đối;

$\vec{W}_j^i(M) = \vec{W}_c(M^*)$ là gia tốc theo;

$\vec{W}_k(M) = 2 \vec{\Omega}_c^i \wedge \vec{V}^j(M)$ là gia tốc Coriolis ($\vec{\Omega}_c^i = \vec{\Omega}_e$).

Kết quả (2-9) được phát biểu thành một định lý sau đây:

Định lý hợp gia tốc:

Gia tốc tuyệt đối của một điểm bằng tổng hình học các gia tốc theo, gia tốc tương đối và gia tốc Coriolis.

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_k \quad (2-10^*)$$

c) Biểu thức Coriolis

$$\vec{W}_k = 2 \vec{\Omega}_c \wedge \vec{V}_r$$

Vector $\vec{W}_k$ là một vector vuông góc với mặt phẳng xác định bởi $\vec{\Omega}_e$ và $\vec{V}_r$. Có thể xác định chiều của $\vec{W}_k$ bằng phương pháp thực hành như sau: Chiếu $\vec{V}_r$ lên mặt phẳng vuông góc với $\vec{\Omega}_e$, ta được hình chiếu $\vec{V}_r^*$ của $\vec{V}_r$ rồi quay hình chiếu

ấy đi một góc 90° theo chiều quay của $\vec{\Omega}_e$. Phương chiều $\vec{W}_k$ là phương chiều của $\vec{V}_r^*$ sau khi quay, còn về độ lớn của $\vec{W}_k$ được cho bởi biểu thức:

$$W_k = 2\Omega_e V_r \sin(\vec{\Omega}_e, \vec{V}_r).$$

Quy tắc xác định $\vec{W}_k$ được mô tả trên hình 2-9b.

4. Hợp chuyển động tịnh tiến của vật

Định lý:

Hợp hai chuyển động tịnh tiến đồng thời của một vật rắn là một chuyển động tịnh tiến với vận tốc bằng tổng hình học hai vận tốc của các chuyển động thành phần.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \quad (2-11)$$

Giả sử có một vật rắn S chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{V}_j$ đối với hệ quy chiếu động R_j , trong khi đó R_j là chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu cố định R_i với vận tốc $\vec{V}_j^i$. Vận tốc của một điểm bất kỳ $M \in S$ theo (2-8*) được viết:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_e(M^*) + \vec{V}_r(M) = \vec{V}_j^i + \vec{V}_j = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Công thức này đúng cho mọi điểm thuộc vật, cho nên chuyển động tuyệt đối của S là chuyển động tịnh tiến với vận tốc tịnh tiến:

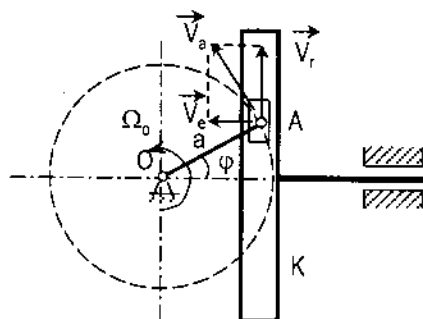
$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 3: Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối, theo, tương đối của con trượt A. Biết $\Omega_0 = \text{hằng}$, $\varphi = 60^\circ$ (hình 2-10).

Giải:

Chuyển động của K so với giá là chuyển động tịnh tiến. Chuyển động của con trượt A so với K là chuyển động tương đối. Chuyển động của A so với giá là chuyển động tuyệt đối. Vậy:



Hình 2-10

$$V_a = a \cdot \omega; V_r = V_a \cdot \cos 60^\circ = a \cdot \Omega_0 / 2; V_e = V_a \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \Omega_0 \sqrt{3} / 2.$$

Vì chuyển động theo là tịnh tiến nên gia tốc $\vec{W}_k = \vec{O}$, do đó:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_a^n = \vec{W}_r + \vec{W}_e.$$

Chiếu phương trình này lên phương thẳng đứng và nằm ngang ta có:

$$W_a^n \cdot \cos 60^\circ = W_e = a \cdot \Omega_0^2 / 2;$$

$$-W_a^n \cdot \sin 60^\circ = W_r = a \cdot \omega^2 \Omega_0^2 \sqrt{3} / 2.$$

Vậy ở thời điểm này A trượt chậm dần về phía trên, còn K tịnh tiến nhanh dần về phía trái.

5. Hợp chuyển động quay quanh hai trục giao nhau

Định lý:

Hợp hai chuyển động quay đồng thời của một vật rắn quanh hai trục giao nhau là một chuyển động quay quanh trục tức thời đi qua giao điểm có vector vận tốc góc bằng tổng hình học hai vận tốc góc thành phần (hình 2-11).

Giả sử có một vật rắn S quay quanh trục II với vận tốc góc $\vec{\Omega}_r = \vec{\Omega}_{II}$, trong khi trục này lại quay quanh trục I với vận tốc góc $\vec{\Omega}_I = \vec{\Omega}_e$. Góc giữa trục I và II là φ . Chọn trục I $\in R_i$ cố định, trục II $\in R_j$ di động. Chuyển động hợp thành là một chuyển động quay quanh trục quay tức thời Δ_a với vận tốc góc tuyệt đối Ω_a và nằm trên Δ_a :

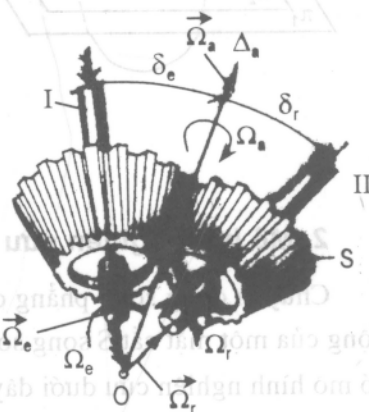
$$\vec{\Omega}_a = \vec{\Omega}_e + \vec{\Omega}_r \quad (2-12)$$

Trục Δ_a chia góc φ làm hai góc δ_e và δ_r theo tỷ lệ:

$$\frac{\Omega_r}{\Omega_e} = \frac{\sin \delta_e}{\sin \delta_r} \quad (2-13)$$

Vận tốc của một điểm M bất kỳ thuộc S với bán kính vector định vị là $\vec{OM} = \vec{r}$ theo định nghĩa là:

$$\vec{V}_a(M) = \vec{\Omega}_a \wedge \vec{r} \quad (2-14)$$



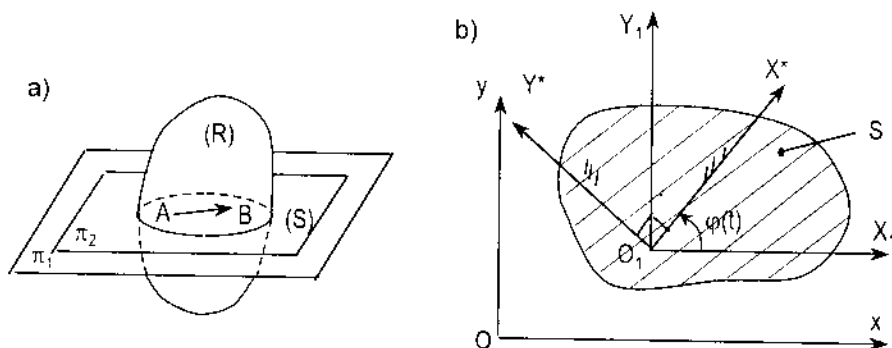
Hình 2-11

V. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG

1. Định nghĩa

Một vật rắn được gọi là chuyển động song phẳng nếu khoảng cách từ mỗi điểm của nó đến một mặt phẳng quy chiếu cố định luôn luôn không đổi trong quá trình chuyển động.

Như vậy, đối với vật rắn R chuyển động song phẳng sẽ tồn tại một mặt phẳng π_2 thuộc R luôn luôn tỷ tiếp xúc với mặt phẳng π_1 được xem là cố định trong quá trình vật rắn chuyển động. Do đó, để nghiên cứu chuyển động của R chúng ta chỉ cần nghiên cứu vị trí tương đối của thiết diện $S \in \pi_2$ so với π_1 (hình 2-12).



Hình 2-12

2. Mô hình nghiên cứu của bài toán

Chuyển động song phẳng của một vật hoàn toàn được đặc trưng bởi chuyển động của một mặt cắt S song song với mặt phẳng quy chiếu cố định π_1 . Do đó ta có mô hình nghiên cứu dưới đây.

3. Nghiên cứu chuyển động của vật (S)

Trong mặt phẳng của S ta lập một hệ trục tọa độ cố định $R_0(Oxy)$. Lấy một điểm O_1 bất kỳ trên S làm cực lập một hệ động $R_1(O_1x_1y_1)$ sao cho luôn luôn song song với R_0 (lập lồng không) và một hệ tọa độ $R'(O_1x'y')$ gắn cứng vào S và quay cùng với S quanh O_1 (hình 2-12b). Như vậy S được định vị bởi điểm $O_1(x_{01}, y_{01})$ và góc $\varphi(t)$ giữa R_1 và R' . Do đó phương trình chuyển động của vật rắn chuyển động song phẳng và các vận tốc và gia tốc của nó có dạng:

$$\left. \begin{aligned} x_{O_1} &= x_{O_1}(t) \\ y_{O_1} &= y_{O_1}(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-15) \quad \left. \begin{aligned} V_{O_1x} &= \dot{x}_{O_1}(t) ; & W_{O_1x} &= \ddot{x}_{O_1}(t) \\ V_{O_1y} &= \dot{y}_{O_1}(t) ; & W_{O_1y} &= \ddot{y}_{O_1}(t) \\ \Omega_{sp} &= \dot{\varphi}(t) ; & \varepsilon_{sp} &= \ddot{\varphi}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

Chuyển động song phẳng đã được phân tích thành hai chuyển động đồng thời: chuyển động theo cùng với cực O_1 (tịnh tiến) và chuyển động quay tương đối quanh O_1 (hình 2-12b).

4. Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc vật

Định lý: Vận tốc của điểm M thuộc vật bằng tổng hình học các vận tốc của cực O_1 và vận tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối quanh O_1 (hình 2-13).

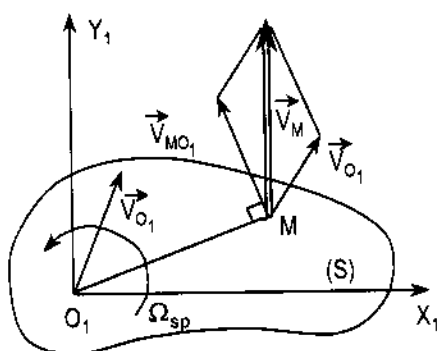
Theo (2-1) vận tốc của một điểm $M \in S$ là:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{MO_1} \quad (2-17)$$

với $\vec{V}_{MO_1} = \vec{\Omega}_{sp} \wedge \vec{O_1M}$

Theo công thức (2-2*) về tính đẳng chiều của toạ độ vận tốc ta có:

$$hc_{O_1M} \vec{V}_M = hc_{O_1M} \vec{V}_{O_1} \quad (2-18)$$



Hình 2-13

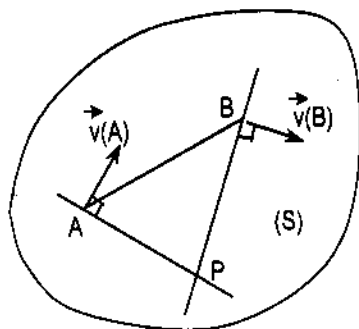
5. Tìm vận tốc tức thời và phương pháp xác định nó

Tâm vận tốc tức thời "P" (TVT "P")

Ở mỗi thời điểm luôn luôn tồn tại một điểm trên hình phẳng S có vận tốc tương đối bằng không. Điểm đó gọi là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng, ký hiệu là "P". Cũng có thể nói: Tâm vận tốc tức thời là điểm tại đó vận tốc tuyệt đối của vật khảo sát và vật quy chiếu bằng nhau.

Ta sẽ chứng minh nhận định trên như sau:

Ta hãy xét đoạn thẳng AB thuộc S nằm trên mặt π_2 (hình 2-14). Trên hình 2-14 ta xem π_1 là mặt phẳng của hình vẽ và π_2 luôn luôn tựa trên đó. Vậy vận tốc $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$ cũng nằm trong mặt phẳng của hình vẽ.



Hình 2-14

Từ A và B ta vạch hai đường thẳng vuông góc với $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$. Giao điểm của hai đường thẳng này được ký hiệu là P.

Theo tính chất đẳng chiều ta thấy ngay rằng mọi điểm trên AP đều có vận tốc và phương của chúng là vuông góc với AP vì hình chiếu của chúng lên phương của AP phải bằng không bằng hình chiếu của $\vec{v}(A)$.

Tương tự như vậy đối với các điểm trên BP. Vậy tại P vận tốc tại đó có hai thành phần hình chiếu lên hai trục khác nhau đều bằng không. Điều đó có nghĩa là $\vec{v}(P) = \vec{0}$.

Ta nói rằng P là điểm duy nhất ở thời điểm t của mặt phẳng π_2 có vận tốc bằng không.

Thực vậy, giả sử ta còn một điểm K nào đó trong π_2 mà vận tốc tức thời tại đó cũng bằng không thì ta sẽ chứng minh rằng vận tốc tại A và B cũng bằng không. Nối A với K và B với K. Hình chiếu của $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$ lên phương KA và KB cũng phải bằng không.

Nghĩa là $\vec{v}(A)$ và $\vec{v}(B)$ có hai hình chiếu trên hai phương khác nhau bằng không. Vận tốc đó phải bằng không.

Như vậy chuyển động của π_2 trên π_1 ở mỗi thời điểm được xem là sự quay của π_2 chung quanh P. Chúng ta ký hiệu tâm vận tốc tức thời này là P_{21} (để chỉ chuyển động của π_2 đối với π_1).

6. Đường nền và đường lăn

a) **Định nghĩa:** Ở mỗi thời điểm đang xét ta phải phân biệt ba điểm P: một điểm nằm trên π_2 với vận tốc $\vec{v}_2^1(P) = \vec{0}$ (vận tốc của π_2 đối với π_1). Điểm này, như đã nói ở trên, là điểm P_{21} .

Một điểm nằm ở trên π_1 có vận tốc $\vec{v}_1^1(P) = \vec{0}$. Ký hiệu điểm này là P_{11} .

Điểm thứ ba là điểm hình học P. Khi thời gian trôi đi thì điểm tâm vận tốc tức thời sẽ di chuyển từ điểm này sang điểm khác cả trong π_2 và π_1 . Từ đó ta có định nghĩa sau đây:

Tập hợp các tâm vận tốc tức thời trên mặt phẳng cố định π_1 được gọi là đường nền (Γ_1) hay còn gọi là đường căn cứ.

Tập hợp các tâm vận tốc tức thời trên mặt phẳng chuyển động π_2 được gọi là đường lăn (Γ_2).

Ta có định lý sau đây:

b) Định lý: Đường lăn (Γ_2) lăn không trượt trên đường nền (Γ_1), trong khi π_2 chuyển động trên π_1 .

Thực vậy, giả sử ta có đường nền (Γ_1) và đường lăn (Γ_2) như trên hình 2-15.

Gọi $\vec{v}_P^{(1)}$ là tốc độ của P trên đường nền (Γ_1) và $\vec{v}_P^{(2)}$ là tốc độ của P trên đường lăn (Γ_2) so với mặt π_2 .

Như ta đã biết định lý hợp vận tốc trong hệ trục cố định và hệ trục di động là:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_c$$

$\vec{v}_a$ là vận tốc tuyệt đối

$\vec{v}_r$ là vận tốc tương đối

$\vec{v}_c$ là vận tốc kéo theo

Do đó ta có thể viết :

$$\vec{v}_P^{(1)} = \vec{v}_P^{(2)} + \vec{v}_2^{(1)}(P)$$

Trong đó $\vec{v}_2^{(1)}(P)$ là vận tốc kéo theo của P trên Γ_2 so với Γ_1 . Ta biết rằng vận tốc này là bằng không vì P là tâm vận tốc tức thời. Vậy ta có:

$$\vec{v}_P^{(1)} = \vec{v}_P^{(2)}$$

Điều đó có nghĩa là:

$$ds_1 = ds_2 = \vec{v}_P^{(1)} \cdot dt = \vec{v}_P^{(2)} \cdot dt$$

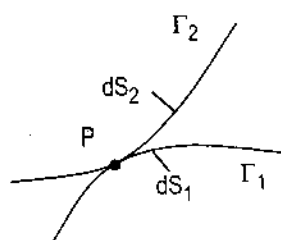
Đường lăn lăn không trượt trên đường nền.

c) Phương pháp giải tích để xác định đường nền và đường lăn

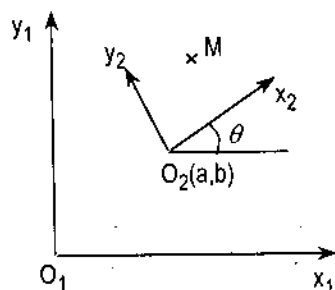
Trên hình 2-16 mặt cố định π_1 được biểu diễn bằng hệ trục tọa độ $O_1x_1y_1$ và mặt di động π_2 được biểu diễn bởi $O_2x_2y_2$. O_2 được xác định bởi các tọa độ (a, b) trong hệ trục $O_1x_1y_1$. Gọi θ là góc tạo bởi O_1x_1 và O_2x_2 và M là một điểm thuộc mặt phẳng π_2 .

Các điểm O_1O_2M liên quan với nhau bởi biểu thức:

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2M}$$



Hình 2-15



Hình 2-16

Chiếu $\vec{O_1M}$ xuống các trục tọa độ ta có:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a + x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \\ y_1 &= b + x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Tọa độ của điểm có tốc độ bằng không (nếu điểm đó tồn tại) phải thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{da}{dt} - x_2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} - y_2 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{db}{dt} + x_2 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - y_2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta có:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\theta} &= x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta \\ -\frac{db}{d\theta} &= x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Vậy phương trình thông số của đường nền và đường lăn là như sau:

Với đường nền: Dem (b) thay vào (a). Ta có:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a - \frac{db}{d\theta} \\ y_1 &= b + \frac{da}{d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

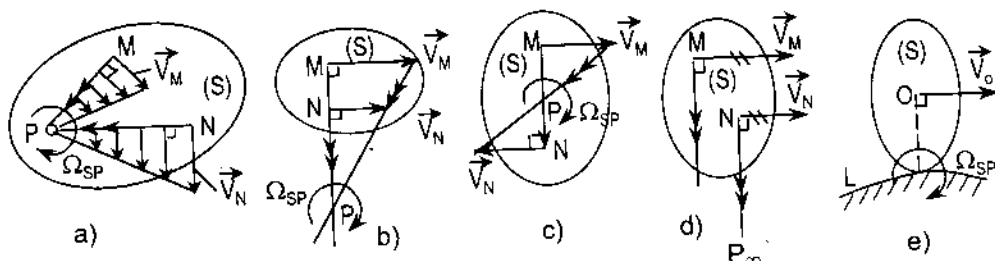
Với đường lăn: Dem nhân phương trình đầu của (b) cho $\sin \theta$ và phương trình thứ hai cho $\cos \theta$ rồi thực hiện phép cộng vế với vế. Tương tự như vậy nhưng với cách ngược lại. Nhân phương trình đầu với $-\cos \theta$ và phương trình thứ hai với $\sin \theta$ rồi cộng vế với vế ta được:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= \frac{da}{d\theta} \sin \theta - \frac{db}{d\theta} \cos \theta \\ y_2 &= \frac{da}{d\theta} \cos \theta + \frac{db}{d\theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-19^*)$$

7. Phương pháp thực hành xác định TVT "P"

Trước hết ta khảo sát sự phân bố vận tốc trên S. Từ công thức tính vận tốc (2-17) khi chọn VTV "P" thay cho O_1 ta có: $\vec{V}_M = \vec{\Omega}_{SP} \wedge \vec{PM}$, khi $\vec{\Omega}_{SP} \neq 0$ thì

$V_M = \Omega_{SP} \cdot PM$. Nghĩa là quy luật phân bố vận tốc trên hình phẳng S giống như vật rắn quay quanh trục đi qua "P" với vận tốc góc tuyệt đối Ω_{SP} (hình 2-13). Khi $\Omega_{SP} = 0$ thì vận tốc mọi điểm trên S đều bằng nhau. Ta nói S tịnh tiến tức thời. Thật vậy: $\vec{V}_N = \vec{V}_M + \vec{V}_{NM}$, nhưng $\vec{V}_{NM} = \vec{0}$ vì $\Omega_{SP} = 0$. Do đó $\vec{V}_N = \vec{V}_M$.



Hình 2-17

Khi xác định tâm vận tốc tức thời ta thường gặp năm trường hợp được cho trên hình 2-17. TVT "P" là giao điểm của hai đường thẳng vuông góc với $\vec{V}_M$ và $\vec{V}_N$ tại M và N (hình 2-17a, d) hoặc đường thẳng AB và đường thẳng qua nút $\vec{V}_M, \vec{V}_N$ (hình 2-17b, c). Các mũi tên kép ($\longleftrightarrow$) trên hình vẽ chỉ cách vẽ các đường thẳng nói trên. Khi S lăn không trượt trên L thì điểm tiếp xúc giữa S và L là tâm vận tốc tức thời "P" (hình 2-17e).

8. Các bài toán áp dụng

Ví dụ 4. Xét hệ có cấu hình như hình vẽ 2-18. Tìm vận tốc điểm B và vận tốc góc của khâu AB. Cho biết $\Omega = 3 \text{ rad/s}$.

Giải:

Với A làm cực ta có:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB} \text{ với } V_A = OA \cdot \Omega.$$

Từ hình vẽ 2-18.

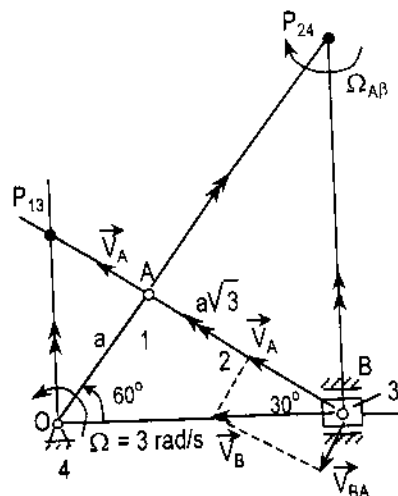
$$V_B = V_A / \cos 30^\circ = 2a \cdot \Omega \sqrt{3} / 3.$$

$$V_{AB} = V_B / 2 = a \cdot \Omega \sqrt{3} / 3.$$

Vận tốc góc của thanh truyền AB là:

$$\Omega_{AB} = V_{AB} / AB = \Omega / 3$$

(Bạn đọc có thể nhận được kết quả này bằng phương pháp tâm vận tốc tức thời).



Hình 2-18

Ví dụ 5. Một bánh xe tâm O bán kính R lăn không trượt trên đường L, vận tốc tâm bánh xe là V_o . Tìm vận tốc của các điểm A, B, C trên vành bánh xe? (hình 2-19).

Giải:

Theo đề bài thì tiếp điểm giữa bánh xe và L là TVT "P". Do đó vận tốc góc của bánh xe là:

$$\Omega_{SP} = \frac{V_o}{OP} = \frac{V_o}{R}$$

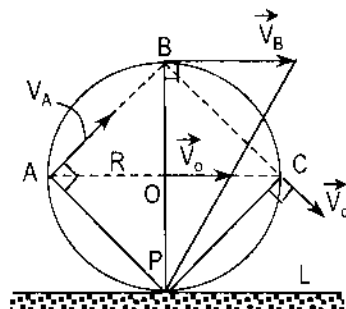
Vì "P" là tâm quay tức thời nên:

$$V_A = \Omega_{SP} \cdot PA = \frac{V_o}{R} \cdot R\sqrt{2} = \sqrt{2} V_o$$

Tương tự ta có vận tốc của các điểm B, C trên vành bánh xe:

$$V_B = \Omega_{SP} \cdot BP = \frac{V_o}{R} \cdot 2R = 2V_o$$

$$V_C = \Omega_{SP} \cdot PC = \frac{V_o}{R} \cdot R\sqrt{2} = \sqrt{2} V_o$$



Hình 2-19

Phương, chiều các vector kết quả được chỉ trên hình 2-19.

9. Quan hệ gia tốc giữa hai điểm thuộc vật

Định lý: Gia tốc của một điểm M thuộc vật bằng tổng hình học các gia tốc của cực O và gia tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng quanh O (hình 2-20).

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1} = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}^t + \vec{W}_{MO_1}^n \quad (2-20)$$

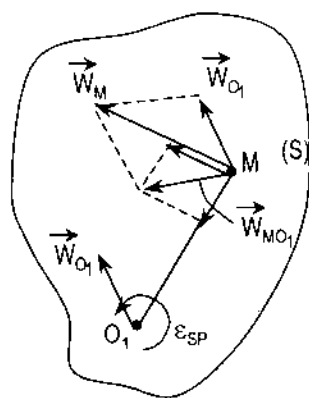
$$\text{Với } \vec{W}_{MO_1}^t = \varepsilon_{SP} \wedge \vec{O_1M}; \quad \vec{W}_{MO_1}^n = \Omega_{SP} \wedge \vec{V}_M$$

Chứng minh định lý:

Vì hệ động chuyển động tịnh tiến so với hệ cố định nên $\vec{W}_M$ có công thức theo (2-10):

$$\vec{W}_M^o = \vec{W}_M^l + \vec{W}_M^* = \vec{W}_M^c + \vec{W}_M^r = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}$$

Cụ thể hơn ta có:



Hình 2-20

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{O_1} + \vec{W}_{MO_1}^r + \vec{W}_{MO_1}^n$$

Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 6. Một bánh xe lăn không trượt trong ví dụ 5. Cho biết ở thời điểm khảo sát tâm O có vận tốc $\vec{V}_o$ và gia tốc $\vec{W}_o$. Tìm gia tốc điểm A và P?

Giải:

Gia tốc góc ε_{SP} của bánh xe:

$$\varepsilon_{SP} = \dot{\Omega}_{SP} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_o(t)}{R} \right) = \frac{1}{R} W_o$$

$$\left(\frac{dV_o}{dt} = W_o^r = W_o \text{ vì "O" chuyển động} \right.$$

trên đường thẳng).

Với "O" làm cực thì theo (2-20) ta có:

$$\vec{W}_A = \vec{W}_o + \vec{W}_{AO}^r + \vec{W}_{AO}^n$$

trong đó: $\vec{W}_{AO}^r \perp AO$, chiều phụ thuộc ε_{SP} , trị số $W_{AO}^r = R\varepsilon_{SP} = W_o$.

$$\vec{W}_{AO}^n \text{ chiều hướng về cực "O", trị số } W_{AO}^n = R\Omega_{SP}^2 = R \frac{V_o^2}{R^2} = \frac{V_o^2}{R}.$$

Từ hình 2-21 gia tốc của A có giá trị:

$$W_A = \sqrt{(W_o + W_{AO}^n)^2 + (W_{AO}^r)^2} = \sqrt{\left(W_o + \frac{V_o^2}{R}\right)^2 + W_o^2}$$

Tương tự với "O" làm cực ta có (hình 2-21):

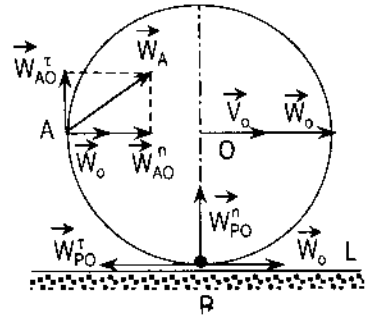
$$\vec{W}_P = \vec{W}_o + \vec{W}_{PO}^r + \vec{W}_{PO}^n$$

trong đó: $\vec{W}_{PO}^r \perp PO$, chiều phụ thuộc ε_{SP} , trị số $W_{PO}^r = W_o$.

$$\vec{W}_{PO}^n \text{ chiều hướng về tâm "O", trị số } W_{PO}^n = \frac{V_o^2}{R}.$$

Từ hình vẽ dễ thấy:

$$\vec{W}_P = \vec{W}_{PO}^n \text{ và có trị số } W_P = \frac{V_o^2}{R}.$$



Hình 2-21

I. CƠ CẤU BỐN KHÂU BẢN LỀ PHẪNG**1. Các định nghĩa**

Một cơ cấu phẳng gồm bốn khâu nối với nhau bằng các khớp quay gọi là cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng.

Trong cơ cấu này khâu cố định gọi là giá (4), khâu đối diện với giá gọi là thanh truyền (2), các khâu nối giá (1) và (3) gọi là tay quay hoặc thanh lắc tùy thuộc khâu đó có quay toàn vòng hay không. Đường tâm của một khâu là đường thẳng nối hai tâm khớp quay của khâu đó (hình 3-1).

2. Điều kiện quay toàn vòng của khâu nối giá

Nếu đòi hỏi cơ cấu có tay quay thì khâu nối giá của nó phải quay được toàn vòng. Ví dụ hãy tìm điều kiện quay toàn vòng của khâu nối giá 1 nghĩa là tìm điều kiện để điểm A_1 thuộc khâu (1) vẽ nên một vòng tròn tâm O, bán kính OA, trong quá trình chuyển động (hình 3-1b).

Ta hình dung rằng nếu khớp A được giải phóng thì khâu (1) quay tự do quanh O. Điều này cho thấy nếu có khớp A mà vẫn muốn khâu (1) quay được toàn vòng thì vết chờ A_1 tới đâu, vết chờ A_2 cũng phải tới đó. Theo nghĩa đó ta có thể viết $\{A_1\} \subset \{A_2\}$.

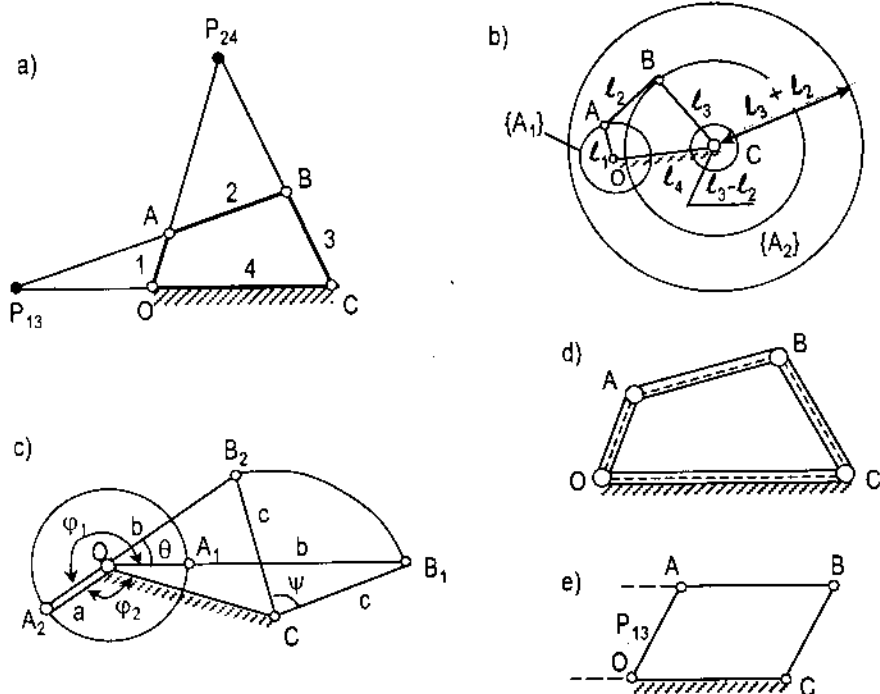
Những phân tích trên cho phép phát biểu điều kiện quay toàn vòng của khâu nối giá dưới dạng hai định lý sau:

a) Định lý (định tính):

Khâu nối giá (1) quay được toàn vòng khi và chỉ khi tập vết chờ $\{X_i\}$ chứa trong tập vết chờ $\{X_j\}$ của thanh truyền (j) kề nó.

$$\{X_i\} \subset \{X_j\}$$

X_i là khớp nối khâu (i) với khâu (j).



Hình 3-1

b) Định lý (định lượng):

Trong cơ cấu bốn khâu bản lề

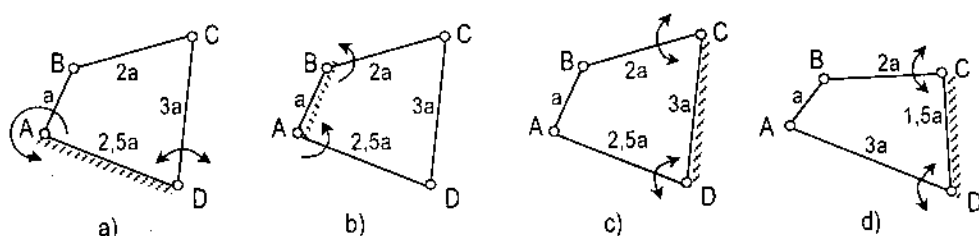
1) Nếu tổng chiều dài của khâu ngắn nhất và khâu dài nhất nhỏ hơn tổng chiều dài của hai khâu còn lại thì (hình 3-2a, b, c):

a. Nếu chọn khâu kề với khâu ngắn nhất làm giá thì khâu ngắn nhất là tay quay, khâu nối giá còn lại là thanh lắc (hình 3-2a).

b. Nếu chọn khâu ngắn nhất làm giá thì cả hai khâu nối giá đều là tay quay (hình 3-2b).

c. Nếu lấy khâu đối diện với khâu ngắn nhất làm giá thì cả hai khâu nối giá đều là cần lắc (hình 3-2c).

2) Nếu tổng chiều dài của khâu ngắn nhất và khâu dài nhất lớn hơn tổng chiều dài của hai khâu còn lại với bất kỳ khâu nào làm giá thì hai khâu nối giá đều là cần lắc (hình 3-2d).



Hình 3-2

3. Tỷ số vận tốc giữa hai khâu nối giá

Trong chương 2 ta đã nghiên cứu kỹ tâm vận tốc tức thời (TVT). Đó là điểm có vận tốc tương đối bằng không, hoặc có thể nói là điểm mà vận tốc tuyệt đối của nó thuộc mỗi vật bằng nhau.

a. Tâm vận tốc tức thời tương đối:

Trở lại cơ cấu bốn khâu bản lề OABC trong đó OC (khâu 4) là giá. Thanh truyền AB (khâu 2) có chuyển động song phẳng. TVT của khâu 2, ký hiệu P_{24} , là giao của OA (đường tâm của khâu 1) và CB (đường tâm của khâu 3).

Nếu bây giờ ta lấy CB (khâu 3) làm giá thì ta lại có OA (khâu 1) có chuyển động phẳng (CĐP). Lúc này TVT của khâu 1, ký hiệu là P_{13} lại là giao của AB (đường tâm của khâu 2) với OC (đường tâm của khâu 4), (hình3-1a).

* Định lý A. B. N. Kennedy:

Trong cơ cấu bốn khâu bản lề tâm vận tốc tức thời tương đối giữa hai khâu không kề nhau là giao điểm của hai đường tâm của hai khâu còn lại.

b. Tỷ số vận tốc của hai khâu nối giá:

Theo tính chất của TVT: $V_{P_{13}}^{(1)} = V_{P_{13}}^{(3)}$ (a)

Nhưng $V_{P_{13}}^{(1)} = \omega_1 \cdot OP_{13}$ và $V_{P_{13}}^{(3)} = \omega_3 \cdot CP_{13}$

Thay vào (a) ta có: $\omega_1 \cdot OP_{13} = \omega_3 \cdot CP_{13}$

hay: $i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{CP_{13}}{OP_{13}}$

Kết quả này được phát biểu dưới tên gọi định lý Willis:

*** Định lý R. Willis:**

Trong cơ cấu bốn khâu bản lề, đường tâm của thanh truyền chia đường tâm của giá làm hai đoạn thẳng tỷ lệ nghịch với vận tốc góc của hai khâu nối giá.

Nhận xét:

- P_{13} nói chung luôn luôn thay đổi nên i_{13} là một đại lượng biến thiên, như vậy nếu khâu dẫn (1) quay đều ($\omega_1 = \text{hằng}$) khâu bị dẫn 3 sẽ quay không đều ($\omega_3 \neq \text{hằng}$).

- Khi P_{13} chia ngoài đoạn OC, $i_{13} > 0$ các khâu (1) và (3) quay cùng chiều. Khi P_{13} chia trong đoạn OC, $i_{13} < 0$ các khâu (1) và (3) quay ngược chiều nhau.

- Khi tay quay và thanh truyền đuổi thẳng hay chập nhau, P_{13} trùng với O, $\omega_3 = 0$, thanh lắc (3) đổi chiều quay. Lúc này các vị trí CB_1 và CB_2 gọi là các vị trí biên của thanh lắc (hình 3-1b).

Đặc biệt, ở cơ cấu hình bình hành P_{13} ở xa ∞ , lúc này $i_{13} = 1$, khâu bị dẫn (3) có cùng vận tốc góc với khâu dẫn (1) (hình 3-1e).

II. CÁC BIẾN THỂ CỦA CƠ CẤU BỐN KHẤU BẢN LỀ

Từ cơ cấu bốn khâu bản lề bằng những lập luận toán học và các giải pháp cấu tạo phù hợp, ta có thể tạo ra những cơ cấu mới và được gọi là những biến thể của cơ cấu bốn khâu bản lề. Vì thế phương pháp nghiên cứu cơ cấu bốn khâu bản lề sẽ được áp dụng cho các cơ cấu biến thể dưới đây.

II.1. Cơ cấu tay quay con trượt (CCTQCT)

1. Sự hình thành của CCTQCT:

Cho cơ cấu bốn khâu bản lề OABC với tay quay (1) và thanh lắc (3) (hình 3-1a).

Giả sử tâm quay C dẫn ra vô tận theo hướng BC. Khi ấy quỹ đạo tròn của B thành một đường thẳng. Thanh lắc CB bây giờ chuyển động tịnh tiến qua lại theo phương vuông góc BC. Vì khâu (3) bây giờ chuyển động tịnh tiến nên chỉ cần xét một đoạn của nó. Cơ cấu bốn khâu bản lề trở thành cơ cấu tay quay con trượt với tay quay (1), thanh truyền (2) và con trượt (3) chạy trong rãnh (4). (Khớp quay C(3,4) đã được thay bằng khớp tịnh tiến).

Cơ cấu tay quay con trượt trong đó quỹ đạo của tâm con trượt B không chạy qua tâm của tay quay gọi là cơ cấu tay quay con trượt lệch tâm. Khoảng cách e từ tâm của tay quay đến quỹ đạo của tâm con trượt gọi là tâm sai. Nếu $e = 0$ ta có cơ cấu tay quay con trượt chính tâm (hình 3-3a, b).

2. Đặc điểm động học của cơ cấu tay quay con trượt

a. Điều kiện quay toàn vòng của khâu nối giá (hình 3-3b)

Chỉ xét điều kiện quay toàn vòng của khâu (1). Tháo khớp quay B. Tập vết chờ $\{B_1\}$ là tập điểm phủ đường tròn tâm A bán kính $AB = l_1$. Tập vết chờ $\{B_2\}$ là một tập điểm phủ dải mặt phẳng rộng $2l_2$ nhận quỹ đạo của C làm trục đối xứng. Khâu (1) chỉ quay toàn vòng khi: $\{B_1\} \subseteq \{B_2\}$ (dạng tập hợp).

Hay là $l_1 + e \leq l_2$ (dạng metric)

b. Tỷ số vận tốc giữa hai khâu nối giá

Khâu (1) có chuyển động quay, đặc trưng vận tốc của nó là ω_1 . Khâu (3) có chuyển động tịnh tiến, đặc trưng vận tốc của nó là v_3 . Để tìm tỷ số vận tốc ta dựa vào TVT P_{13} .

Theo định lý Kennedy, TVT P_{13} là giao của đường tâm thanh truyền (2) và đường tâm của giá (4). Đường tâm thanh truyền (2) là đường nối khớp quay A và B. Đường tâm của giá (4) là đường nối tâm quay O với tâm quay C ở ∞ trên đường vuông góc với quỹ đạo của B (con trượt B chuyển động tịnh tiến nên được xem như chuyển động quay quanh tâm ở vô cùng có bán kính là đường vuông góc với phương của chuyển động tịnh tiến) (hình 3-3a).

Kết luận:

Đường tâm của một khâu có khớp quay O và khớp trượt B là đường thẳng qua tâm khớp quay O và vuông góc với phương tịnh tiến của khớp trượt B.

Theo tính chất của TVT, ta có:

$$V_{P_{13}}^{(1)} = V_{P_{13}}^{(3)}$$

Nhưng $V_{P_{13}}^{(1)} = \omega_1 \cdot OP_{13}$

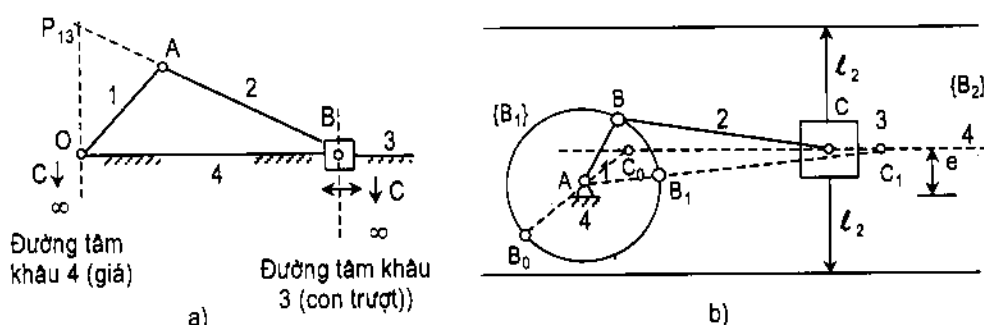
$$V_{P_{13}}^{(1)} = V_3 = V_B \text{ (vì khâu 3 có chuyển động tịnh tiến)}$$

Từ đó suy ra:

$$i_{31} = \frac{v_3}{\omega_1} = OP_{13}$$

Vì P_{13} biến đổi nên tỷ số vận tốc $i_{31} = \frac{v_3}{\omega_1}$ của cơ cấu tay quay con trượt là một đại lượng biến thiên phụ thuộc vào vị trí của tay quay OA. Như vậy, khi tay quay quay đều, con trượt 3 tịnh tiến không đều ($v_B \neq \text{hằng}$).

Lúc thanh truyền và tay quay đuổi thẳng hay chập nhau thì P_{13} trùng với A. Vận tốc của con trượt 3 bằng không, con trượt đổi chiều chuyển động. Các vị trí C_0 và C_1 tương ứng được gọi là các vị trí biên của con trượt. Khoảng cách C_0C_1 gọi là hành trình của con trượt (hình 3-3b).



Hình 3-3

II.2. Cơ cấu culít

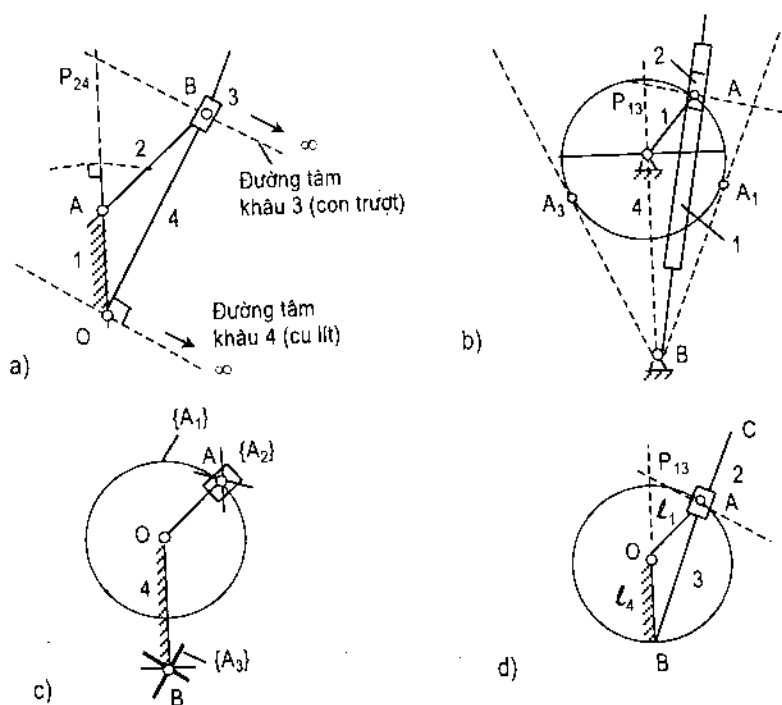
1. Sự hình thành cơ cấu culít

Từ cơ cấu tay quay con trượt, nếu đổi giá của cơ cấu ta sẽ được một cơ cấu mới với tính năng khác hẳn (hình 3-3a).

Chẳng hạn nếu ta lấy khâu (1) hoặc khâu (2) làm giá ta sẽ được một cơ cấu mới có tính năng là biến chuyển động quay của khâu dẫn thành chuyển động quay hoặc lắc của khâu bị dẫn. Cơ cấu này có tên là cơ cấu culít (hình 3-4a, b).

2. Đặc điểm động học của cơ cấu culít

Để cho việc đánh số các khâu thống nhất (khâu cố định là giá thường đánh số (4), khâu nối giá thường đánh số (1) và số (3) ta đổi tên các khâu, các khớp. Như vậy ta có cơ cấu culít OABC như (hình 3-4b, d).



Hình 3-4

a) Điều kiện quay toàn vòng của khâu nối giá:

Trước hết ta xét điều kiện quay toàn vòng của khâu (1). Tháo khớp quay A. Tập vết chờ $\{A_1\}$ là tập điểm phủ đường tròn tâm O bán kính $OA = l_1$. Tập vết chờ $\{A_2\}$ là tập điểm phủ toàn mặt phẳng. Như vậy điều kiện:

$\{A_1\} \subset \{A_2\}$ luôn luôn thoả mãn. Khâu (1) quay toàn vòng.

Xét điều kiện quay toàn vòng của khâu (3). Tháo khớp trượt A. Tập vết chờ $\{A_3\}$ là tập đường thẳng chạy qua B. Tập vết chờ $\{A_2\}$ là tập đường thẳng cắt đường tròn tâm O bán kính l_1 . Khâu (3) quay toàn vòng khi và chỉ khi mọi đường thẳng qua B đều cắt đường tròn (O, l_1) nghĩa là phải thoả mãn điều kiện $\{A_3\} \subseteq \{A_2\}$. Khi ấy tâm quay B chỉ có thể nằm trong hay trên vòng tròn tâm O bán kính $OA = l_1$ (hình 3-4d).

Khác đi, điều kiện quay toàn vòng của khâu (3) là:

$$l_4 \leq l_1$$

b) Tỷ số vận tốc giữa hai khâu nối giá

Khâu nối giá (1) quay quanh O đặc trưng vận tốc của nó là ω_1 . Khâu nối giá (3) quay quanh B, đặc trưng vận tốc của nó là ω_3 .

$$\text{Dựa vào TVT } P_{13} \text{ để tìm tỷ số } i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{BP_{13}}{OP_{13}}$$

Điểm P_{13} thay đổi theo vị trí của tay quay (1) nên tỷ số vận tốc i_{13} là một đại lượng biến thiên.

II.3. Cơ cấu sin

1. Sự hình thành cơ cấu sin

Trở lại cơ cấu culít OABC (hình 3-5a). Cho tâm quay B ra ∞ theo hướng OB. Khâu (3) vốn có chuyển động quay trở thành chuyển động tịnh tiến theo phương vuông góc với OB trước đây. Vị trí của khâu (3) xác định bởi toạ độ điểm A: $x_A = OA \cdot \sin\varphi$. Cho nên cơ cấu có tên là cơ cấu sin. Dạng cấu tạo cụ thể như (hình 3-5c,d).

2. Đặc điểm động học của cơ cấu sin

a) Điều kiện quay toàn vòng của khâu nối giá (1)

Tháo khớp quay A. Tập vết chờ $\{A_1\}$ là tập điểm phủ đường tròn tâm O bán kính l_1 . Tập vết chờ $\{A_2\}$ là tập điểm phủ toàn mặt phẳng cơ cấu. Điều kiện $\{A_1\} \subset \{A_2\}$ luôn luôn thoả mãn. Khâu (1) luôn luôn quay toàn vòng.

2) Tỷ số vận tốc giữa các khâu nối giá

Khâu (1) có chuyển động quay, vận tốc của nó là ω_1 . Khâu (3) có chuyển động tịnh tiến, vận tốc của nó là v_3 . Tìm tỷ số vận tốc $i_{31} = \frac{v_3}{\omega_1} = ?$ Dựa vào

TVT P_{13} . P_{13} là giao của đường tâm khâu (2) và đường tâm khâu (4). Đường tâm khâu (4) là đường vuông góc với phương trượt của khâu (3) vẽ từ O. Đường tâm khâu (2) là đường vuông góc với phương trượt của khâu (2) vẽ từ điểm A (hình 3-5c).

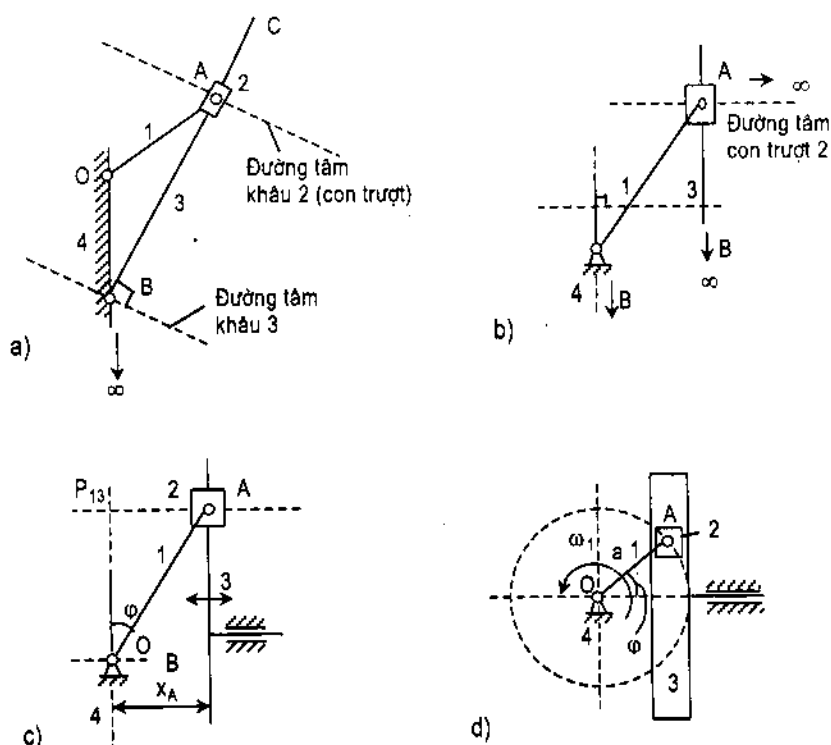
$$\text{Theo tính chất của } P_{13}: V_{P_{13}}^{(1)} = V_{P_{13}}^{(3)}$$

trong đó $V_{P_{13}}^{(1)} = \omega_1 \cdot OP_{13}$

$$V_{P_{13}}^{(1)} = V_3 \text{ (vì khâu 3 có chuyển động tịnh tiến)}$$

Thay vào ta có: $\omega_1 \cdot OP_{13} = V_3$

$$\text{Hay } i_{31} = \frac{V_3}{\omega_1} = OP_{13}$$



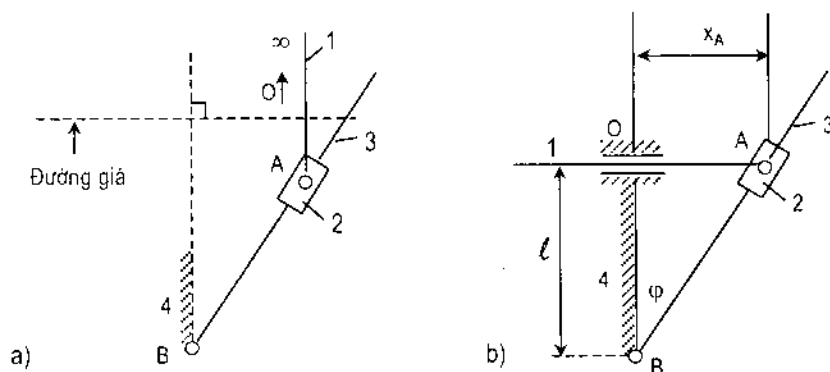
Hình 3-5

II.4. Cơ cấu tang

Trở lại cơ cấu culit OABC (hình 3-5a). Cho tâm quay O ra vô cùng theo hướng BO, lúc này “tay quay OA” có chuyển động tịnh tiến theo phương vuông góc với OB trước đây, có thể mô tả OA trượt trong rãnh vuông góc với OB.

Vị trí của thanh OA xác định bằng tọa độ của điểm A, $x_A = l \cdot \tan \phi$ trong đó

l là khoảng cách OB tới rãnh trượt của OA, φ là góc giữa BA với phương thẳng đứng. Chính vì vậy cơ cấu có tên là cơ cấu tang (hình 3-6a,b).



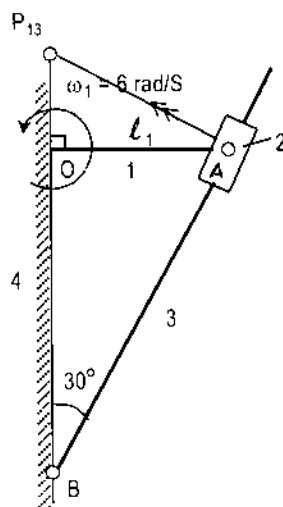
Hình 3-6

III. CÁC VÍ DỤ ỨNG DỤNG

* Ví dụ 1:

Cho cơ cấu như trên hình 3-7. Hãy tính tỷ số truyền i_{13} , ω_3 ? Khâu 1 và khâu 3 có quay được toàn vòng không?

Biết $OA = 10 \text{ cm}$.



Hình 3-7

Giải:

Theo định lý Willis ta có: $i_{13} = BP_{13}/OP_{13} = (40/\sqrt{3})/10/\sqrt{3} = 4$.

Do đó $\omega_3 = \omega_1/4 = 6/4 = 1,5 \text{ rad/s}$.

Vì $l_4 = 10\sqrt{3} > l_1 = 10$, cho nên khâu 3 không quay được toàn vòng.

Khâu 1 luôn luôn quay được toàn vòng.

*** Ví dụ 2:**

Hãy giải bài toán trong ví dụ 4 chương 2 bằng các định lý Kennedy và Willis?

Giải:

Theo định lý Kennedy các P_{13} và P_{24} được cho trên hình 2-17. Theo định lý Willis ta có:

$$i_{31} = \frac{V_3}{\omega_1} = OP_{13} \Rightarrow V_3 = \omega_1 \cdot OP_{13}. \text{ Tính } OP_{13}: \frac{OP_{13}}{OB} = \frac{OP_{13}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow OP_{13} = \frac{2a}{\sqrt{3}}. \text{ Do đó } V_3 = V_B = \frac{6a}{\sqrt{3}} \text{ và } \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{24}} = \frac{\omega a}{3a} = \frac{\omega}{3}.$$

CHƯƠNG 4

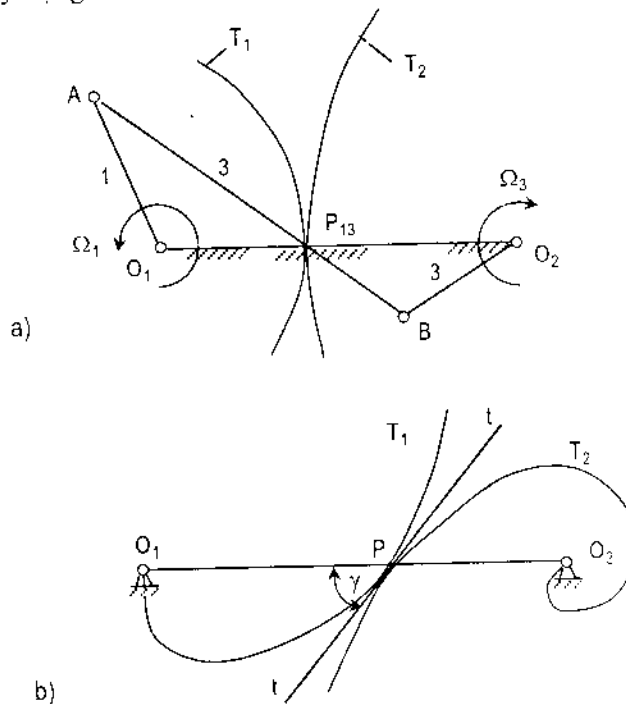
CƠ CẤU BA KHẤU

Trong chương này ta sẽ xét một số cơ cấu gồm ba khâu thực hiện một hàm số truyền cho trước nhờ các khớp cao.

I. CƠ CẤU TÂM TÍCH

1. Tâm tích là gì?

Tâm tích là quỹ tích của tâm vận tốc tức thời trong một hệ quy chiếu nào đó. Tâm tích được ký hiệu là T_i , i là tên hệ quy chiếu trên đó quỹ tích của TVT “P” được xây dựng.



Hình 4-1

2. Cơ cấu tâm tích

Định nghĩa

Cơ cấu ba khâu thực hiện một hàm truyền cho trước nhờ khớp cao do các tâm tích tạo thành gọi là cơ cấu tâm tích (hình 4-1).

3. Phân tích động học cơ cấu tâm tích

Cho cơ cấu tâm tích với khâu dẫn T_1 , khâu bị dẫn T_2 quay quanh các trục cố định O_1 và O_2 . Hãy xác định hàm truyền $i_{12} = i_{12}(\varphi_1)$ của cơ cấu và hàm chuyển vị $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ của khâu 2. Bài toán này được gọi là bài toán phân tích động học của cơ cấu tâm tích.

4. Tổng hợp động học cơ cấu tâm tích

Bây giờ ta xét bài toán ngược của bài toán trên.

Cho trước hàm truyền $i_{21} = i_{21}(\varphi_1)$, tìm tâm tích T_1 và T_2 quay quanh trục cố định O_1, O_2 truyền động với hàm truyền trên. Bài toán này được gọi là bài toán tổng hợp động học (hay thiết kế động học) cơ cấu tâm tích.

- Điều kiện truyền chuyển động cơ cấu tâm tích là góc truyền động (góc giữa đường tâm của giá và tiếp tuyến chung tại tiếp điểm của hai tâm tích) $\gamma \neq \pi/2$ (hình 4-1b).

Đặc biệt khi $i_{12} = \text{hằng}$, các tâm tích là các vòng tròn có tâm trùng với tâm quay thì $\gamma = \pi/2$. Để đảm bảo điều kiện truyền động của cơ cấu tâm tích, cần thêm yếu tố ma sát vào vùng tiếp xúc. Cơ cấu tâm tích truyền động nhờ ma sát ở khớp cao được gọi là cơ cấu ma sát.

Ví dụ: Hãy thiết kế động học cơ cấu tâm tích thay thế cho cơ cấu bốn khâu bản lề phản bình hành O_1ABO_3 cho trên hình 4-1a. Trong đó $O_1A = O_3B$; $O_1O_3 = AB$. Khâu 1 quay với vận tốc góc Ω_1 làm cho khâu 3 quay quanh O_3 với vận tốc góc Ω_3 .

Giải:

Tỷ số truyền của cơ cấu bốn khâu giữa khâu 1 và 3:

$$i_{13} = \frac{\Omega_1}{\Omega_3} = -\frac{O_3P_{13}}{O_1P_{13}}.$$

TVT " P_{13} " là giao giữa khâu 2 và 4.

Để có cơ cấu tâm tích ta phải xây dựng các tâm tích T_1 và T_3 (quỹ tích của P_{13} khi lấy khâu 1 và khâu 3 làm hệ quy chiếu) (hình 4-1a).

Xét hai tam giác O_1AP và BO_3P (để cho gọn ta ký hiệu $P_{13} = P$). Hai tam giác này có:

$$\text{góc } \widehat{O_1PA} = \widehat{BPO_3}; \widehat{AO_1P} = \widehat{O_3BP} \text{ và } O_1A = BO_3 \Rightarrow \Delta O_1AP = \Delta BO_3P.$$

Rút ra:

$$PO_1 = PB, PA = PO_3 \text{ hay } PO_1 + PA = PB + PO_3 = O_1O_3 = AB = \text{const.}$$

Nhận thấy rằng điểm P có tổng khoảng cách không đổi tới các điểm O_1 và A , cũng như tới các điểm O_3 và B . Nên tâm tích T_1 là một elip nhận O_1 và A là các tiêu điểm, còn tâm tích T_3 là elip nhận O_3 và B làm các tiêu điểm. Khi cơ cấu phân bình hành chuyển động, các T_1 và T_3 lăn không trượt trên nhau tiếp điểm của chúng là TVT " P_{13} " nằm trên đường nối các tâm quay O_1O_3 . Như vậy muốn truyền chuyển động từ khâu 2 sang khâu 3 với tỷ số truyền i_{13} của cơ cấu phân bình hành ta chỉ việc cho tâm tích T_1 quay quanh O_1 lăn không trượt với tâm tích T_3 quay quanh O_3 . Nghĩa là ta đã thay cơ cấu bốn khâu bằng cơ cấu ba khâu gồm giá O_1O_3 và hai khâu động là T_1 và T_3 .

II. CƠ CẤU ĐỐI TIẾP

1. Biên dạng đối tiếp là gì?

Một khớp cao có hai bậc tự do (vừa lăn vừa trượt trên nhau) thì mỗi thành phần khớp cao được gọi là một biên dạng đối tiếp. Điều kiện ràng buộc là các biên dạng đối tiếp không trùng với tâm tích.

2. Định nghĩa

Cơ cấu ba khâu thực hiện một hàm truyền cho trước nhờ khớp cao do các biên dạng đối tiếp tạo thành gọi là cơ cấu đối tiếp.

3. Phân tích động học của cơ cấu đối tiếp

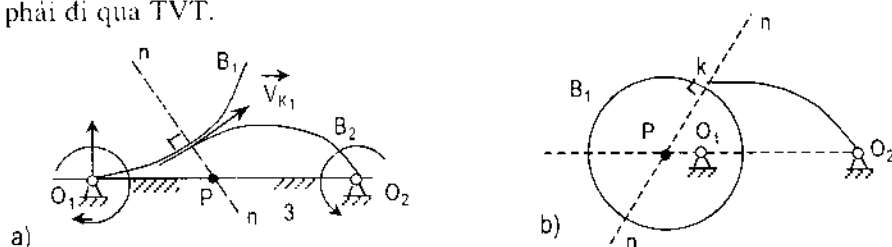
Định lý:

Trong cơ cấu đối tiếp phẳng, pháp tuyến chung của cặp biên dạng đối tiếp luôn luôn đi qua tâm vận tốc tức thời tương đối giữa chúng.

Chứng minh định lý:

Ta tưởng tượng việc đối giá giữa khâu 2 và khâu 3. Với khâu 2 làm giá thì

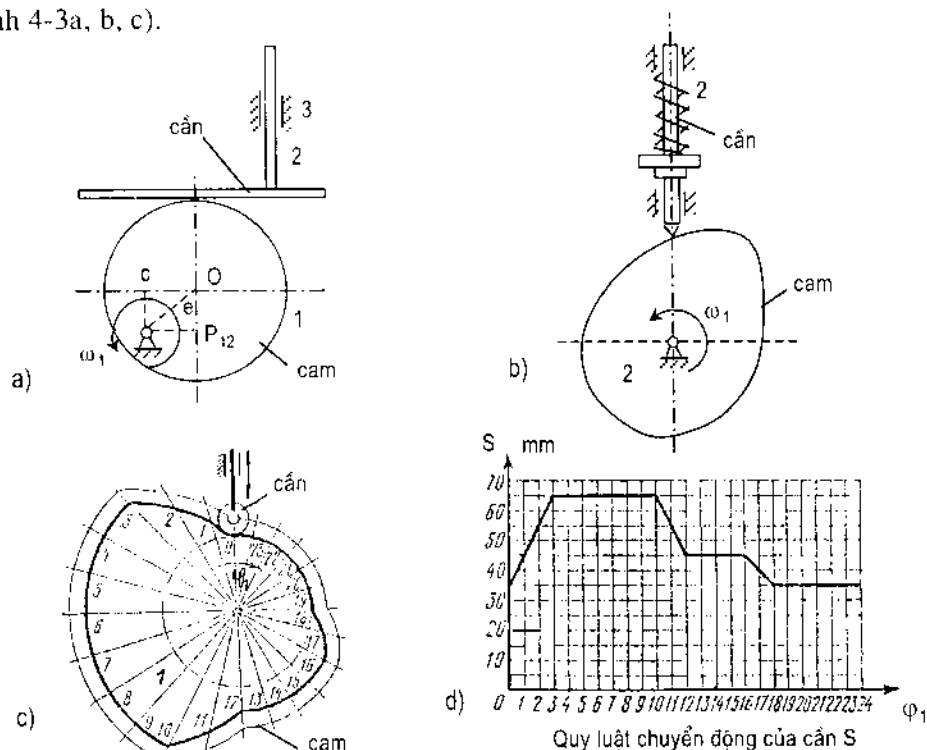
khâu 1 thực hiện chuyển động song phẳng. Khi ấy vận tốc của các điểm K_1, O_1 thuộc khâu 1 có phương như hình 4-2a. Điều này xác định vị trí của TVT "P". Pháp tuyến chung n-n vuông góc với vận tốc của điểm K_1 . Do đó, pháp tuyến này phải đi qua TVT.



Hình 4-2

III. CƠ CẤU CAM

Cơ cấu cam là cơ cấu đổi tiếp dùng để biến chuyển động, thông thường là một chiều của khâu dẫn thành chuyển động qua lại theo quy luật xác định của khâu bị dẫn. Trong cơ cấu cam khâu dẫn gọi là cam, khâu bị dẫn gọi là cần (hình 4-3a, b, c).



Hình 4-3

IV. CƠ CẤU BÁNH RĂNG

1. Khái niệm chung về cơ cấu bánh răng

Trong cơ cấu đối tiếp khi một khâu có nhiều biên dạng tương tự kề nhau thì phần vật thể giữa hai biên dạng kề nhau gọi là răng. Khoảng trống giữa hai biên dạng kề nhau gọi là rãnh răng. Cơ cấu đối tiếp truyền động bằng răng gọi là cơ cấu bánh răng. Trong cơ cấu bánh răng, quá trình tiếp xúc giữa các bánh răng gọi là quá trình ăn khớp của bánh răng.

Trong chế tạo máy có nhiều cơ cấu dùng để truyền chuyển động quay giữa các trục. Khi hai trục cách xa nhau người ta dùng xích, đai truyền; khi hai trục gần nhau thì dùng các bánh ma sát, bánh răng.

Các bánh răng truyền tải lớn hơn nên được dùng rộng rãi trong công nghiệp.

Tuỳ theo vị trí tương đối của hai trục, có các loại bánh răng khác nhau như sau:

- Bánh răng trụ dùng cho hai trục song song quay ngược chiều hoặc cùng chiều với nhau (hình 4-4a, b, c, d, e).

- Bánh răng côn dùng cho hai trục cắt nhau (hình 4-4g).

- Bánh vít và trục vít dùng cho hai trục chéo nhau (hình 4-4h).

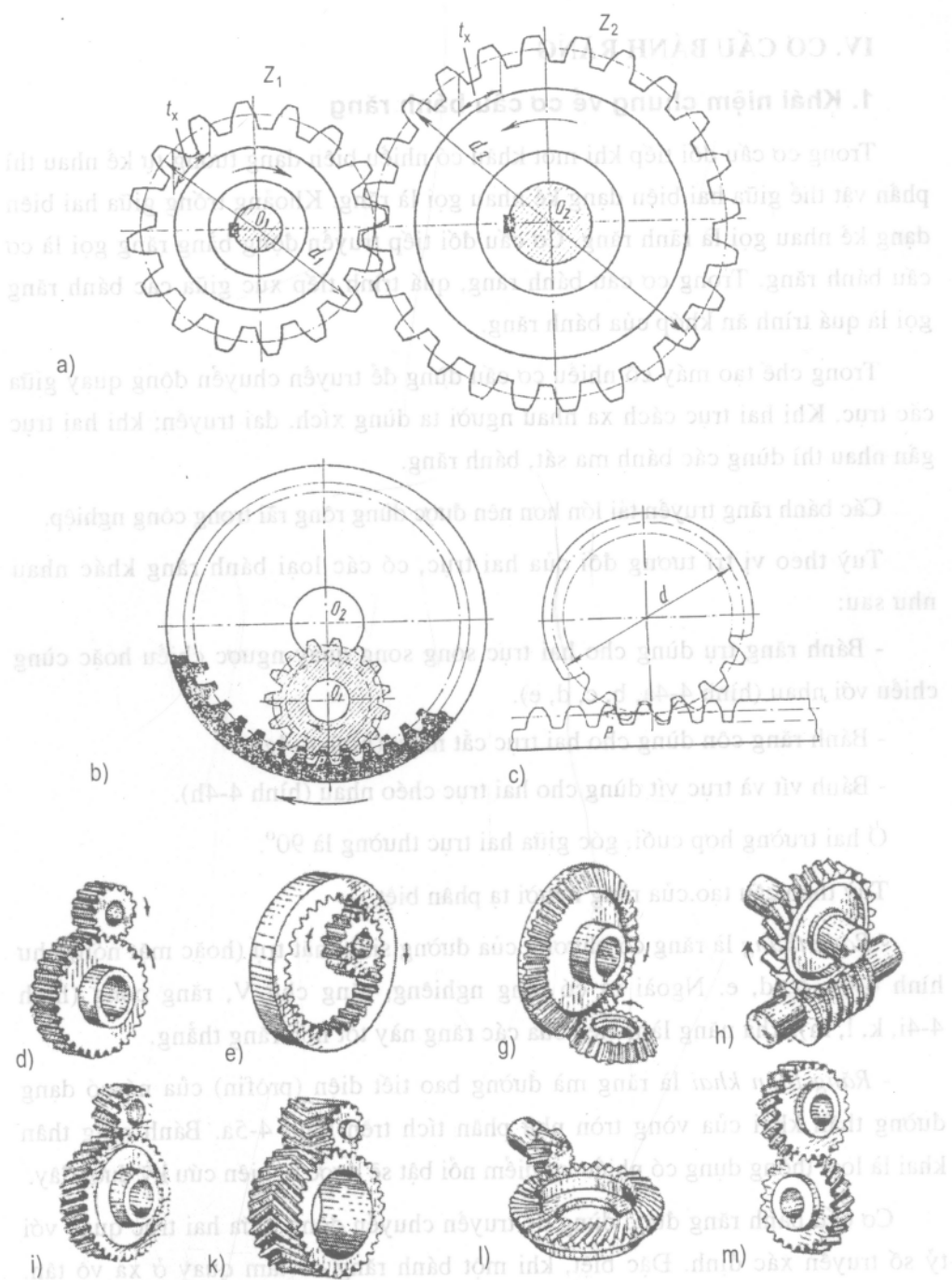
Ở hai trường hợp cuối, góc giữa hai trục thường là 90° .

Tuỳ theo cấu tạo của răng người ta phân biệt:

- *Răng thẳng* là răng có phương của đường sinh mặt trụ (hoặc mặt nón) như hình 4-4a, b, d, e. Ngoài ra có răng nghiêng, răng chữ V, răng cong (hình 4-4i, k, l, m), khả năng làm việc của các răng này tốt hơn răng thẳng.

- *Răng thân khai* là răng mà đường bao tiết diện (prôfin) của nó có dạng đường thân khai của vòng tròn như phân tích trên hình 4-5a. Bánh răng thân khai là loại thông dụng có nhiều ưu điểm nổi bật sẽ được nghiên cứu kỹ dưới đây.

Cơ cấu bánh răng được dùng để truyền chuyển động giữa hai trục quay với tỷ số truyền xác định. Đặc biệt, khi một bánh răng có tâm quay ở xa vô tận. chuyển động của nó sẽ là chuyển động tịnh tiến, ta gọi đây là một thanh răng.



Hình 4-4

Ta có cơ cấu bánh răng - thanh răng dùng để biến chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến và ngược lại (hình 4-4c).

Cơ cấu bánh răng được dùng để truyền chuyển động giữa hai trục với tỷ số truyền xác định. Như vậy về công dụng mà nói thì cơ cấu bánh răng và cơ cấu tâm tích (có ma sát ở chỗ tiếp xúc) không có gì khác nhau. Điều khác nhau cơ bản là ở cơ cấu bánh răng các biên dạng của răng gắn với các tâm tích tỷ lệ nhau, đẩy nhau chuyển động. Muốn tỷ số truyền không đổi các biên dạng này không thể là các đường cong tùy ý. Năm 1754 Euler là người đầu tiên tìm ra cặp biên dạng thân khai có ý nghĩa kỹ thuật hơn cả, vì nó thoả mãn yêu cầu ăn khớp tốt nhất, tỷ số truyền không đổi và dễ chế tạo.

2. Đường thân khai và tính chất của nó

Định nghĩa:

Khi một đường thẳng lăn không trượt trên một vòng tròn, quỹ đạo của một điểm K nào đó của đường thẳng gọi là đường thân khai của vòng tròn (sau này ta sẽ gọi tắt là đường thân khai). Vòng tròn này gọi là vòng tròn cơ sở của đường thân khai.

Tính chất của đường thân khai (hình 4-5):

Theo sự hình thành của đường thân khai, ta thấy:

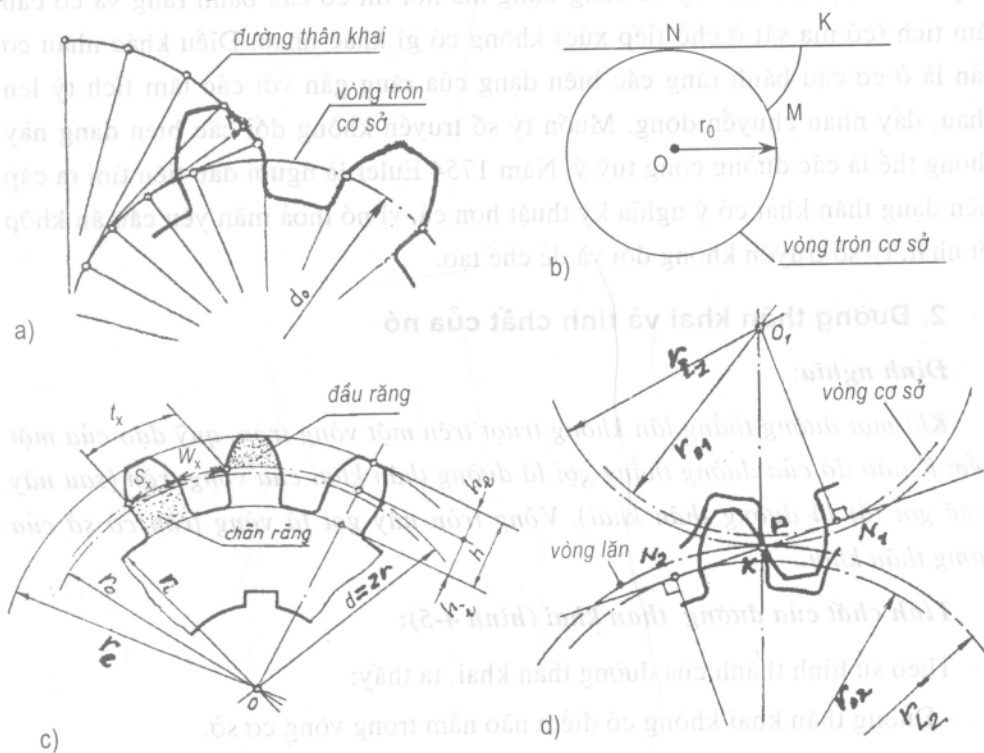
- Đường thân khai không có điểm nào nằm trong vòng cơ sở.
- Pháp tuyến của đường thân khai là tiếp tuyến của vòng cơ sở và ngược lại.
- Tâm cong N tại điểm K của đường thân khai nằm trên vòng cơ sở, bán kính cong NK bằng cung lẩn NM.
- Biên dạng thân khai thoả mãn định lý ăn khớp Willis.

Định lý Willis:

Để đảm bảo tỷ số truyền không đổi, pháp tuyến chung của cặp biên dạng răng phải luôn luôn đi qua một điểm cố định trên đường nối các tâm quay.

Như vậy để có tỷ số truyền không đổi thì pháp tuyến chung của cặp biên dạng thân khai phải đi qua điểm cố định trên đường nối các tâm quay. Theo định lý đối tiếp ở trên, điểm đó là tâm vận tốc tức thời tương đối của cặp biên dạng thân khai. Thực vậy, pháp tuyến chung N_1N_2 qua tiếp điểm K đồng thời là

tiếp tuyến của 2 vòng cơ sở có bán kính r_{O_1} và r_{O_2} . Tiếp tuyến này cắt đường O_1O_2 tại P. Vì tiếp tuyến hai vòng cơ sở và đường nối các tâm quay là cố định nên điểm P là cố định, nhưng theo định lý đối tiếp điểm P lại là TVT tương đối giữa hai biên dạng thân khai này. Đó là điều cần chứng minh.



Hình 4-5

3. Các thông số hình học của bánh răng (hình 4-5c)

- Chiều cao của răng giới hạn bởi vòng đỉnh răng r_e và chiều sâu của rãnh giới hạn bởi vòng chân răng r_i .

Trên một cung tròn đồng tâm với vòng đỉnh răng và vòng chân răng, ta có các cung với tên gọi:

- Chiều dày răng: S_x
- Chiều rộng rãnh: W_x
- Bước răng: t_x
- Số răng của một bánh răng: z

Nếu gọi d là đường kính vòng chia tức là vòng tròn trên đó $S = W$ (các chỉ số x được bỏ đi). Ta có: $\pi \cdot d = t \cdot z$

$$d = \frac{t}{\pi} \cdot z$$

đặt $\frac{t}{\pi} = m$ và gọi là môđun của răng, giá trị của môđun được tiêu chuẩn hoá thành những số tròn để tiện cho việc tính toán và chế tạo bánh răng.

$$d = m \cdot z$$

Các kích thước dài khác cũng được tính toán thống nhất theo môđun m của răng.

4. Đặc trưng ăn khớp của cặp bánh răng thân khai

Khi cặp bánh răng thân khai ăn khớp, giao điểm P giữa pháp tuyến chung của biên dạng răng và đường nối tâm cũng là TVT tương đối, được gọi là tâm ăn khớp (hình 4-5d).

Tâm tích do P gây ra trên hai bánh răng là hai vòng tròn tiếp xúc nhau tại P , các vòng tròn này được gọi là các vòng lăn của cặp bánh răng, bán kính của chúng là:

$$r_{L_1} = O_1P; \quad r_{L_2} = O_2P$$

Một cặp bánh răng phẳng được gọi là nội tiếp hay ngoại tiếp nếu hai vòng tròn lăn nội tiếp hay ngoại tiếp.

Tiếp điểm K của cặp biên dạng đối tiếp gọi là điểm ăn khớp, quỹ tích của K trong mặt phẳng gắn với giá được gọi là đường ăn khớp. Trong cặp bánh răng thân khai đường ăn khớp là đường thẳng, nó là tiếp tuyến chung của hai vòng cơ sở.

Góc giữa tiếp tuyến chung của cặp biên dạng và tiếp tuyến chung của hai vòng lăn gọi là góc ăn khớp α . Trong cặp bánh răng thân khai, góc ăn khớp không đổi trong quá trình ăn khớp.

Tỷ số truyền của cặp bánh răng thân khai là:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{L_1}}{r_{L_2}}$$

Nhưng
$$r_{L1} = \frac{r_{O1}}{\cos\alpha}, \quad r_{L2} = \frac{r_{O2}}{\cos\alpha}$$

Nên:
$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{L2}}{r_{L1}} = \frac{r_{O2}}{r_{O1}}$$

Vì r_{O1} và r_{O2} không đổi nên tỷ số truyền i_{12} không phụ thuộc khoảng cách trục giữa hai bánh răng, nghĩa là nếu vì một lý do nào đó mà khoảng cách trục giữa hai bánh răng có thay đổi, tỷ số truyền của cặp bánh răng thân khai vẫn giữ nguyên (đây là một ưu điểm nổi bật của cặp bánh răng thân khai).

V. HỆ BÁNH RĂNG

1. Các định nghĩa

Cơ cấu bánh răng dùng để truyền chuyển động giữa hai trục với tỷ số truyền xác định. Tỷ số này phụ thuộc bán kính (số răng) của bánh răng.

Khi hai trục xa nhau hoặc muốn có tỷ số truyền lớn không thể chỉ dùng hai bánh răng mà phải dùng nhiều bánh răng.

Một dãy gồm nhiều bánh răng ăn khớp với nhau gọi là một hệ bánh răng. Các hệ bánh răng được chia làm hai loại: Hệ bánh răng thường và hệ bánh răng vi sai.

** Hệ bánh răng thường là hệ trong đó các bánh răng có trục quay cố định*

Hệ bánh răng vi sai là hệ trong đó mỗi cặp bánh răng có ít nhất một bánh răng có trục quay di động.

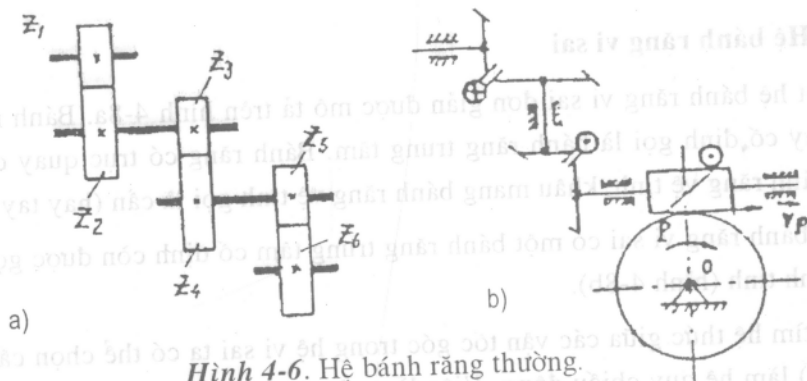
2. Tỷ số vận tốc của một hệ bánh răng

a/ Hệ bánh răng thường (hình 4-6a, b và 4-7)

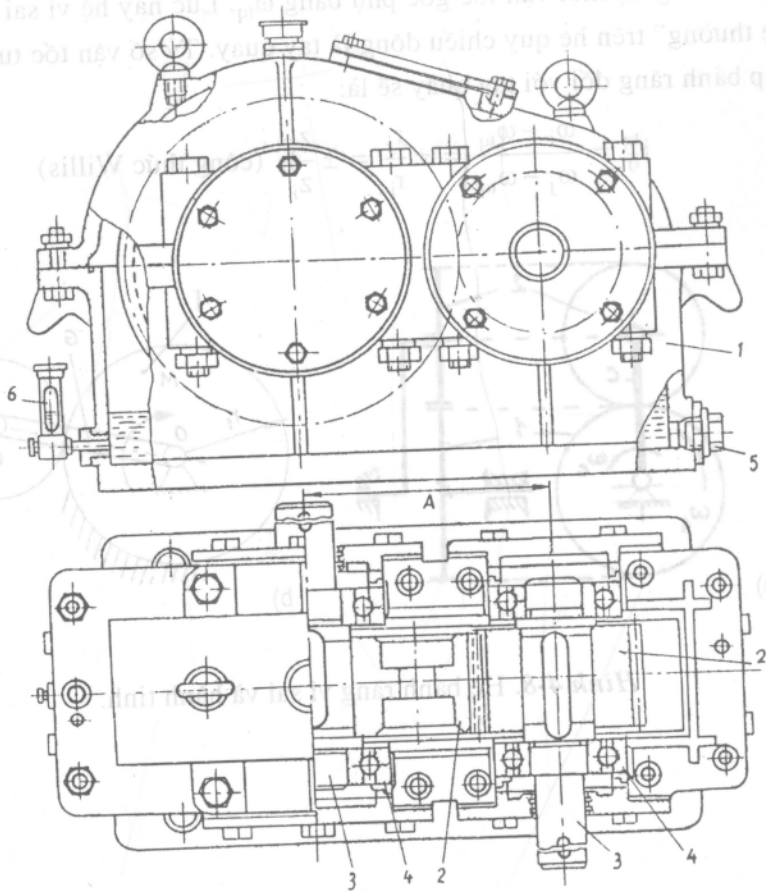
Tỷ số truyền của một hệ bánh răng thường bằng tích các tỷ số truyền của từng cặp bánh răng, cũng bằng tỷ số giữa tích số số răng của các bánh bị dẫn với tích số số răng của các bánh dẫn. Với hệ bánh răng phẳng, nếu để ý đến chiều quay của các bánh răng, tỷ số này mang dấu âm (hoặc dương) nếu số cặp bánh răng ngoại tiếp lẻ (hoặc chẵn).

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^m \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \dots \frac{z_n}{z_{n-1}}$$

m là số cặp bánh răng ngoại tiếp.



Hình 4-6. Hệ bánh răng thường.



Hình 4.7. Kết cấu hộp giảm tốc bánh răng một cấp :

1. Vỏ hộp giảm tốc; 2. Bánh răng (hoặc bánh vít);
3. Trục; 4. Ổ bi; 5. Nút xả dầu; 6. Van kiểm tra dầu.

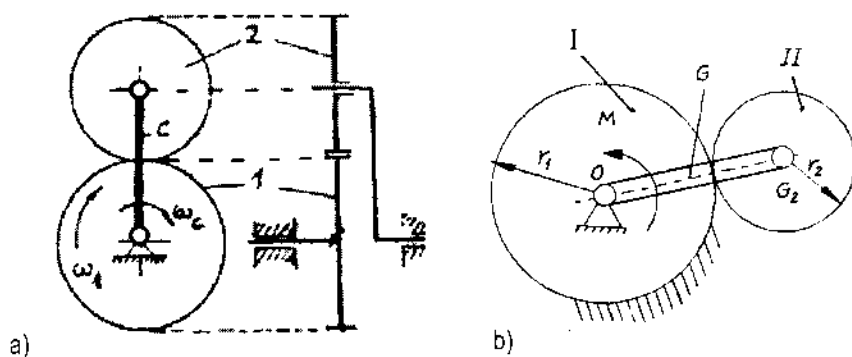
b) Hệ bánh răng vi sai

Một hệ bánh răng vi sai đơn giản được mô tả trên hình 4-8a. Bánh răng cố trục quay cố định gọi là bánh răng trung tâm. Bánh răng cố trục quay đi động gọi là bánh răng vệ tinh, khâu mang bánh răng vệ tinh gọi là cần (hay tay quay).

Hệ bánh răng vi sai có một bánh răng trung tâm cố định còn được gọi là hệ bánh hành tinh (hình 4-8b).

Để tìm hệ thức giữa các vận tốc góc trong hệ vi sai ta có thể chọn cần (hay tay quay) làm hệ quy chiếu động. Việc làm này tương đương với việc cho thêm mỗi khâu trong hệ một vận tốc góc phụ bằng ω_{tq} . Lúc này hệ vi sai "biến thành một hệ thường" trên hệ quy chiếu động là tay quay. Tỷ số vận tốc tương đối của một cặp bánh răng đối với tay quay sẽ là:

$$i_{ij}^{tq} = \frac{\omega_i - \omega_{tq}}{\omega_j - \omega_{tq}} = \pm \frac{r_j}{r_i} = \pm \frac{Z_j}{Z_i} \quad (\text{công thức Willis})$$



Hình 4-8. Hệ bánh răng vi sai và hành tinh.

CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ

I. MÔMEN KHỐI LƯỢNG

Sự phân bố của khối lượng có ảnh hưởng rất nhiều tới chuyển động của cơ hệ. Đặc trưng cho sự phân bố khối lượng này là các mômen khối lượng.

1. Các định nghĩa

* Mômen của một đại lượng đối với một chuẩn nào đó là tích của khoảng cách lũy thừa k với đại lượng ấy.

Xét cơ hệ gồm n chất điểm, mỗi chất điểm thứ K nào đó có tọa độ và khối lượng là x_K, y_K, z_K và m_K . Mômen khối lượng cấp $m = \alpha + \beta + \gamma$ được định nghĩa như sau (hình 5-1a, b).

* Biểu thức $\sum_{K=1}^n m_K x_K^\alpha y_K^\beta z_K^\gamma$ đối với hệ chất điểm rời rạc, $\int_M x^\alpha y^\beta z^\gamma dm$ đối với hệ chất điểm liên tục, được gọi là mômen khối lượng cấp $m = \alpha + \beta + \gamma$ của cơ hệ đối với hệ tọa độ $Oxyz$.

a) Mômen khối lượng cấp không

Nếu $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ta có mômen khối lượng cấp không.

Khối lượng của cơ hệ: $\sum m_K = M$ hay $\int_M dm = M$ (5-1)

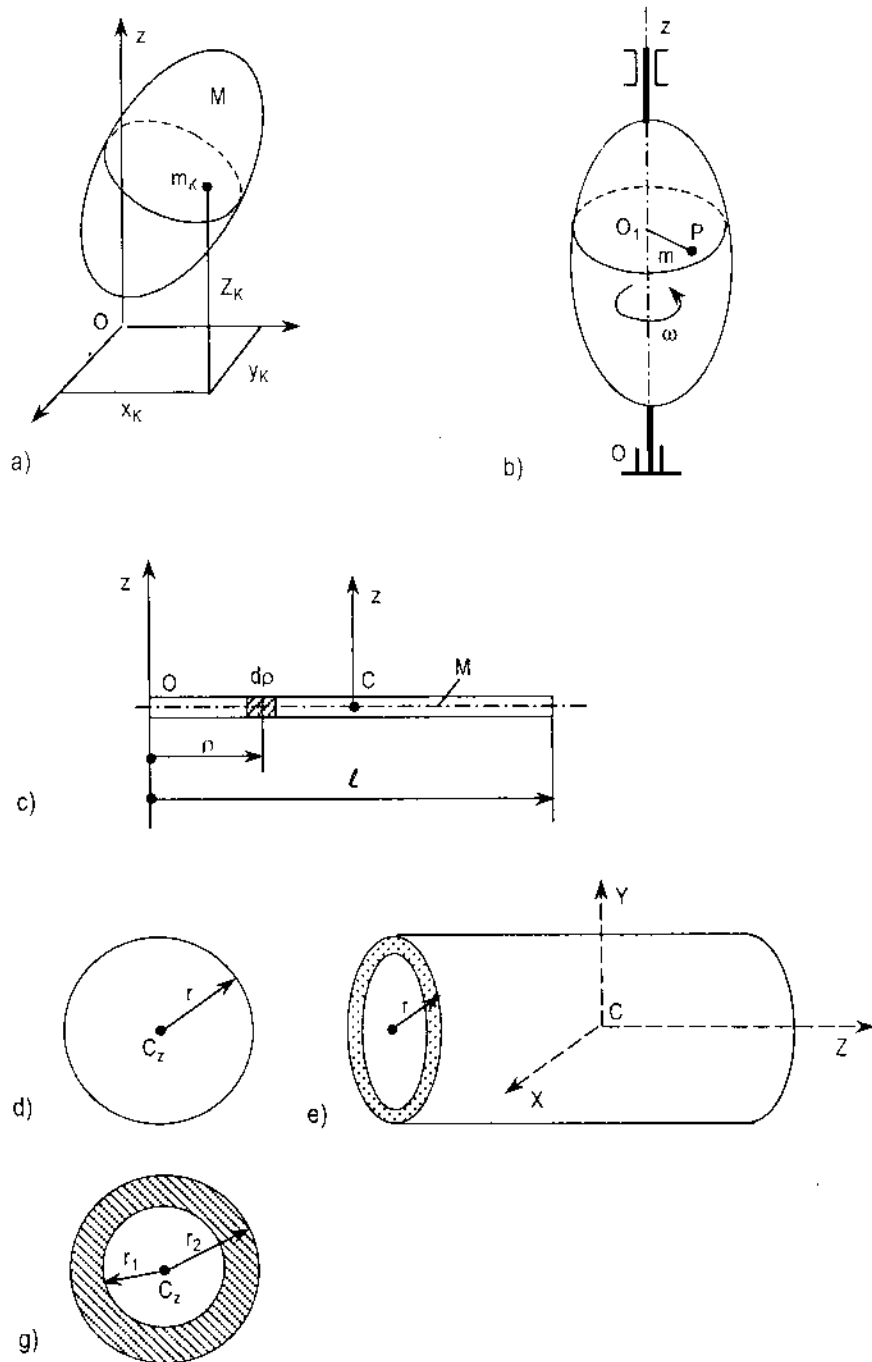
b) Mômen khối lượng cấp một

Nếu $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ ta có $\sum m_K x_K = S_{(yz)}$

hoặc $\int_M x \cdot dm = S_{(yz)}$ (5-2)

gọi là mômen khối lượng cấp một của hệ đối với mặt phẳng tọa độ yz .

Các mômen khối lượng cấp một $S_{(yz)}, S_{(xy)}$ cũng được định nghĩa tương tự.



Hình 5-1

c) Vị trí của khối tâm

$$x_C = \frac{S_{(yz)}}{M}; \quad y_C = \frac{S_{(zx)}}{M}; \quad z_C = \frac{S_{(xy)}}{M} \quad (5-3)$$

d) Mômen khối lượng cấp hai

Nếu $\alpha = 2, \beta = \gamma = 0$ ta có: $\sum m_K x_K^2 = J_{(yz)}$

hoặc
$$\int_M x^2 \cdot dm = J_{(yz)} \quad (5-4)$$

gọi là mômen khối lượng cấp hai của hệ đối với mặt phẳng tọa độ yz.

Các mômen khối lượng cấp hai khác cũng được định nghĩa tương tự.

Cụ thể là: $J_o = \sum m_K (x_K^2 + y_K^2 + z_K^2)$

hoặc
$$J_o = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm \quad (5-5)$$

$$J_{xy} = \sum m_K x_K y_K \text{ hoặc } J_{xy} = \int_M xy \cdot dm \quad (5-6)$$

e) Trục quán tính chính trung tâm

* Trục Ox được gọi là trục quán tính chính nếu ta có: $J_{xy} = J_{yz} = 0$. Các trục Oy và Oz cũng sẽ là những trục quán tính chính, nếu $J_{xy} = J_{yz} = 0$; $J_{zx} = J_{yz} = 0$.

* Hệ trục Oxyz được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm nếu "O" là khối tâm của vật và: $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$. Cụ thể hơn: $S_x = S_y = S_z = J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$.

2. Các trường hợp thường gặp của mômen khối lượng cấp hai

a) Thanh mảnh đồng chất (hình 5-1c)

$$J_{Oz} = \frac{Ml^2}{3}; \quad J_{Cz} = \frac{Ml^2}{12} \quad (5-7)$$

b) Vành tròn đồng chất và ống trụ mỏng (hình 5-1d, e)

$$J_{Cz} = Mr^2 \quad (5-8)$$

c) Đĩa vành khăn đồng chất (hình 5-1g)

$$J_{Cz} = \frac{1}{2} M(r_2^2 + r_1^2) \quad (5-9)$$

Khi $r_1 = 0$ và $r_2 = r$ thì $J_{Cz} = \frac{1}{2} Mr^2 \quad (5-10)$

II. MÔMEN DIỆN TÍCH

Trong mục I ta làm quen với các mômen khối lượng của một vật thể đối với hệ toạ độ vuông góc Oxyz mà trên đó vị trí các vật thể được xác định. Cụ thể là:

$$\int_M x^\alpha y^\beta z^\gamma dm \quad (5-11)$$

Mômen khối lượng này có cấp $m = \alpha + \beta + \gamma$.

Dễ thấy là khi thể tích V của vật thể (mà trong đó khối lượng M được xác định) suy biến theo một phương nào đó. Ví dụ: theo phương Oz, thì ta sẽ nhận được một hình phẳng F trong mặt phẳng Oxy giới hạn bởi đường cong $f(x,y) = 0$. Nói cách khác, tích phân (5-11) tương đương với trường hợp đặc biệt mà ở đó $\gamma = 0$ và khối lượng phân bố đều trên hình phẳng F và bằng đơn vị.

Từ nay về sau, ta sẽ chỉ khảo sát các đặc trưng hình học của hình phẳng trong mặt phẳng này và ký hiệu diện tích của nó là F (hình 5-2). Các đặc trưng hình học của hình phẳng trong các mặt phẳng Oxz, Oyz do sự suy biến của dv tương ứng theo các phương Oy và Ox cũng được giải quyết hoàn toàn tương tự.

Theo cách đặt vấn đề nói trên, ta có thể dễ dàng rút ra một cách trực tiếp các mômen tương ứng từ công thức đã biết về các mômen khối lượng của vật thể.

1. Mômen diện tích cấp k

$$\int_F x^\alpha y^\beta dF = 0 \text{ với } k = \alpha + \beta \quad (5-12)$$

Đại lượng này gọi là mômen diện tích cấp k của hình phẳng F đối với hệ trục xy (hình 5-2a,b).

2. Mômen diện tích cấp 0

Khi $\alpha = \beta = 0$, tích phân (5-12) có dạng:

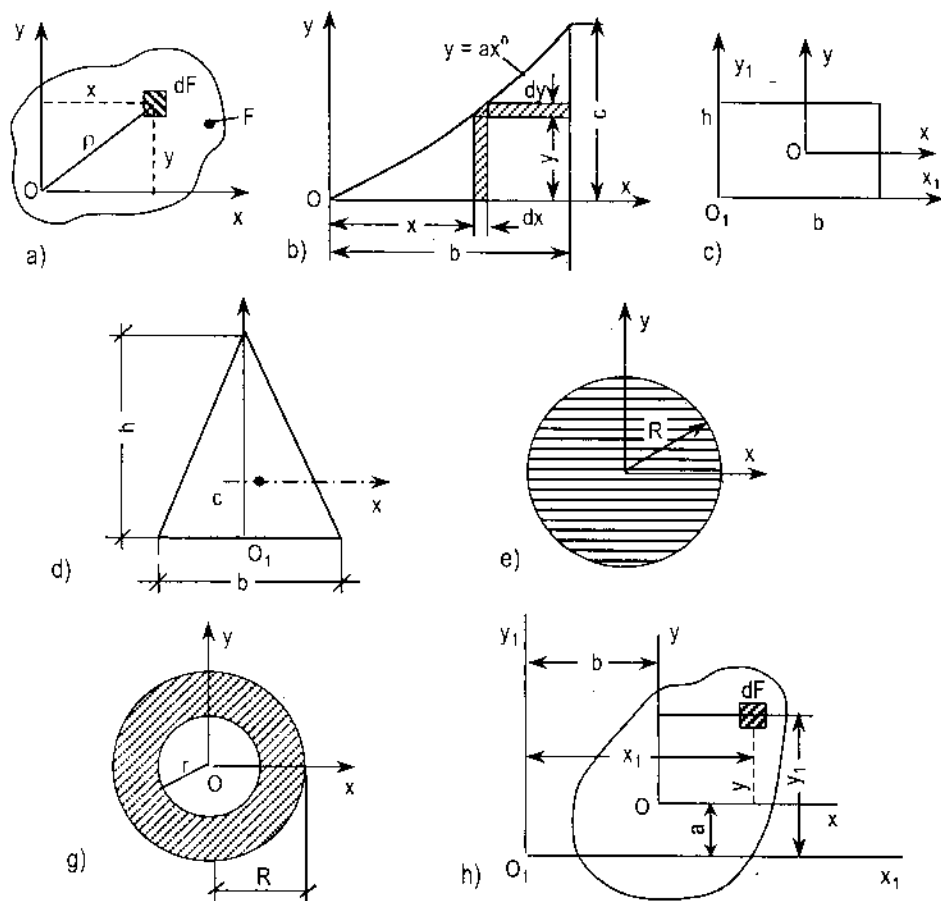
$$F = \int_F dF \quad (\text{cm}^2, \text{m}^2) \quad (5-13)$$

3. Mômen diện tích cấp 1

Khi $\alpha = 0, \beta = 1$ và $\alpha = 1, \beta = 0$, tương ứng ta có:

$$S_x = \int_F y \cdot dF \text{ và } S_y = \int_F x \cdot dF \quad (\text{cm}^3, \text{m}^3) \quad (5-14)$$

Các tích phân S_x, S_y có tên gọi là mômen tĩnh của hình phẳng đối với các trục x và y.



Hình 5-2

* Khi mômen tĩnh của hình phẳng F đối với một trục nào đó bằng không thì trục ấy gọi là trục trung tâm. Giao điểm của hai trục trung tâm gọi là trọng tâm của hình phẳng.

Nếu ký hiệu toạ độ trọng tâm C của hình phẳng F trong hệ toạ độ XOY là X_C và Y_C , còn x, y là toạ độ phần tử dF trong hệ toạ độ xCy ta có:

$$X_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\int x \cdot dF}{F} \quad (5-15)$$

$$Y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\int y \cdot dF}{F}$$

4. MÔMEN ĐIỆN TÍCH CẤP 2

Khi $\alpha = 1, \beta = 1$, tích phân (5-12) cho ta:

$$J_{XY} = \int_F xy \cdot dF, \text{ (cm}^4, \text{ m}^4\text{)} \quad (5-16)$$

J_{XY} : còn gọi là mômen quán tính ly tâm của hình phẳng F đối với hệ trục XOY.

Khi $\alpha = 2, \beta = 0$ và $\alpha = 0, \beta = 2$, ta nhận từ (5-12)

$$J_X = \int_F y^2 dF \text{ và } J_Y = \int_F x^2 dF \int_F y^2 dF, \text{ (cm}^4, \text{ m}^4\text{)} \quad (5-17)$$

Các đại lượng này gọi là mômen quán tính của hình phẳng F đối với trục X và Y.

Nếu gọi ρ là khoảng cách từ phần tử khảo sát dF đến gốc tọa độ thì:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

và ta có:

$$J_\rho = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F \rho^2 dF, \text{ (cm}^4, \text{ m}^4\text{)} \quad (5-18)$$

Tích phân J_ρ gọi là mômen quán tính độc cực của hình phẳng F đối với gốc tọa độ và bằng tổng mômen quán tính đối với các trục vuông góc với nhau tại O.

Từ các công thức định nghĩa các mômen quán tính cấp hai ở trên ta rút ra:

$$J_{XY} \geq 0; \quad J_X > 0; \quad J_Y > 0; \quad J_\rho > 0$$

Khi $J_{XY} = 0$ thì hệ trục xOy, gọi là hệ trục quán tính chính.

** Hệ trục quán tính chính có gốc tọa độ đặt tại trọng tâm C của hình phẳng F được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng đó. Nghĩa là: $J_{xy} = 0; S_x = 0; S_y = 0$.*

5. Mômen điện tích cấp hai đối với các hình đơn giản

a) Hình chữ nhật (hình 5-2c)

$$J_X = \int_F y^2 \cdot dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{bh^3}{12}; \quad J_Y = \frac{b^3h}{12} \quad (5-19)$$

b) Hình tam giác (hình 5-2d)

Gọi trục x là trục qua trọng tâm và x_1 là trục trùng với cạnh đáy. Khi đó, theo định nghĩa ta có:

$$J_X = \int_F y^2 \cdot dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} y^2 \cdot \frac{b}{h} \cdot \left(\frac{2}{3}h - y \right) dy = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_{X_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y_1^2 \cdot (h - y_1) dy_1 = \frac{bh^3}{12} \quad (5-20)$$

c) Hình tròn (hình 5-2e)

Theo định nghĩa của mômen quán tính độc cực, ta tính được:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_F \rho^2 \rho d\varphi d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = 0,1D^4 \quad (5-21)$$

Do tính chất đối xứng toả tròn và quan hệ $J_\rho = J_x + J_y$, ta rút ra mômen quán tính đối với các trục trung tâm:

$$J_x = J_y = \frac{J_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{2} = 0,05D^4 \quad (5-22)$$

d) Hình vành khăn (hình 5-2g)

Trong trường hợp này ta sẽ tìm các mômen quán tính của hình vành khăn như là hiệu giữa hai mômen quán tính của hai hình tròn đặc có bán kính R và r :

$$J_\rho = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \eta^4) \quad (5-23)$$

$$J_X = J_Y = \frac{1}{2} J_\rho = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \eta^4) = 0,05D^4(1 - \eta^4) \quad (5-24)$$

6. Mối quan hệ giữa các mômen quán tính đối với các trục song song

Giả sử mômen quán tính đối với các trục Ox , Oy và diện tích hình phẳng như đã biết. Ta cần tìm các mômen quán tính của hình phẳng này đối với các trục mới O_1x_1 và O_1y_1 tương ứng song song với các trục xOy (hình 5-2h).

Từ (hình 5-2h) ta có:

$$Y_1 = y + a$$

$$X_1 = x + b$$

Vì vậy theo định nghĩa về mômen quán tính ta nhận được:

$$J_{X_1} = \int_F Y_1^2 dF = \int_F (Y + a)^2 dF = \int_F Y^2 dF + 2a \int_F Y dF + a^2 \int_F dF$$

$$J_{X_1} = J_X + 2aS_X + a^2F \quad (a)$$

$$\text{Tương tự như thế: } J_{Y_1} = J_Y + 2aS_Y + b^2F \quad (b)$$

Đối với mômen quán tính ly tâm

$$J_{X_1 Y_1} = \int_F X_1 Y_1 dF = J_{XY} + abF + aS_Y + bS_X \quad (c)$$

Nếu các trục cũ Ox , Oy là những trục trung tâm (đối với các trục này $S_X = S_Y = 0$), thì các công thức (a), (b), (c) có dạng:

$$\begin{aligned} J_{X_1} &= J_X + a^2F \\ J_{Y_1} &= J_Y + b^2F \\ J_{X_1 Y_1} &= J_{XY} + abF \end{aligned} \quad (5-25)$$

Chú ý đến $J_{\rho_1} = J_{X_1} + J_{Y_1}$, ta rút ra:

$$J_{\rho_1} = J_{\rho} + (a^2 + b^2)F$$

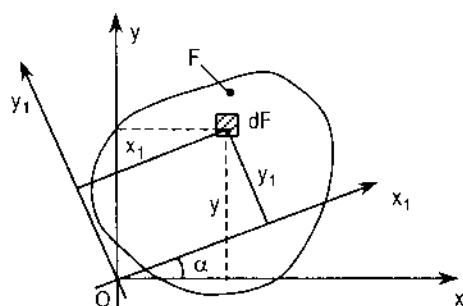
Trong trường hợp cần tìm các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm khi đã biết các mômen quán tính đối với hệ trục bất kỳ, ta giải các phương trình (5-25)

$$\begin{aligned} J_X &= J_{X_1} - a^2F \\ J_Y &= J_{Y_1} - b^2F \\ J_{XY} &= J_{X_1 Y_1} - abF \end{aligned} \quad (5-26)$$

7. Quan hệ giữa các mômen quán tính cấp 2 khi xoay trục tọa độ

Bài toán được đặt ra như sau: Giả sử mômen quán tính của diện tích F đối với hệ trục Oxy đã biết: Hãy xác định các mômen quán tính của F đối với hệ trục Ox_1y_1 xoay đi một góc α đối với hệ trục Oxy . Từ hình 5-3 ta có quan hệ giữa các tọa độ của dF trong hai hệ tọa độ này là:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{aligned}$$



Hình 5-3

Theo công thức (5-17), ta có:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF$$

Khai triển các tích phân này ta được:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

Nếu hệ trục Ox_1y_1 là hệ trục quán tính chính ($J_{x_1 y_1} = 0$) thì công thức xác định phương các trục quán tính chính được rút ra từ công thức thứ ba của (5-27):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (5-28)$$

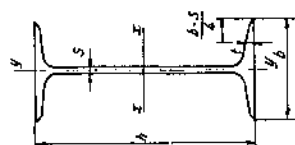
Phương trình này luôn có hai nghiệm xác định 2 trục quán tính chính Ox_1y_1 .

Đối với những hình phẳng là những thép cán định hình chữ I, □, L, ƒ thì các đặc trưng hình học của chúng được tính theo các công thức lý thuyết ở trên và được cho sẵn trong bảng 5-1 “Quy cách thép định hình” dưới đây:

I. Thép hình I cán nóng (theo ГОСТ 8239-89)

Bảng 5-1

- h - chiều cao tiết diện;
 b - chiều rộng của cánh;
 s - bề dày của thân;
 t - chiều dày cánh;
 A - diện tích tiết diện;
- J - mômen quán tính;
 W - mômen chống uốn;
 S - mômen tĩnh của nửa tiết diện;
 r - bán kính quán tính;
 m - khối lượng trên một mét dài.



N ^o	m, kg/m	Kích thước, mm				A cm ²	J _x , cm ⁴	W _x , cm ³	r _x , cm	S _x , cm ³	J _y , cm ⁴	W _y , cm ³	r _y , cm
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,50	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,70	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	15,90	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	18,40	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	21,00	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	24,00	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	27,30	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	31,50	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	36,50	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	42,20	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	48,60	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	57,00	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	66,50	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	78,50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	92,60	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	108,00	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

II. Thép hình U cán nóng (theo ГОСТ 8239-89)



- h - chiều cao tiết diện; J - mômen quán tính;
 b - chiều rộng của cánh; W - mômen chống uốn;
 s - bề dày của thân; S - mômen tĩnh của nửa tiết diện;
 t - chiều dày cánh; r - bán kính quán tính;
 A - diện tích tiết diện; m - khối lượng trên một mét dài;
 z_0 - khoảng cách từ trục y đến mép ngoài của thân.

N ^o	m kg/m	Kích thước				A, cm ²	J _x , cm ⁴	W _x , cm ³	r _x , cm	S _x , cm ³	J _y , cm ⁴	W _y , cm ³	r _y , cm	z ₀ , cm
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	84	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	176	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,70

III. Thép góc không đều cạnh cán nóng (theo ГОСТ 8239-89)

B - chiều rộng cánh lớn;

J - mômen quán tính;

b - chiều rộng cánh nhỏ;

A - diện tích tiết diện;

t - bề dày cánh nhỏ;

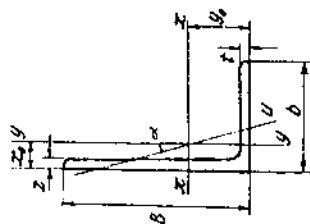
J_{xy} - mômen quán tính ly tâm;

r - bán kính quán tính;

m - khối lượng trên một mét dài;

x_0, y_0 - khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài của cánh;

α - góc nghiêng của trục chính trung tâm.



N°	m kg/m	Kích thước, mm			A , cm ²	J_{xx} , cm ⁴	r_{xx} , cm	J_{yy} , cm ⁴	r_{yy} , cm	I_u min ⁴ , cm ⁴	r_u min ³ , cm	tg α	J_{xy} , cm ⁴	x_0 , cm	y_0 , cm
		B	b	s											
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	5	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,39	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	213	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,7	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

IV. Thép góc đều cạnh cán nóng (theo ГОСТ 8239-89)

b - chiều rộng cánh;

J - mômen quán tính;

t - bề dày cánh;

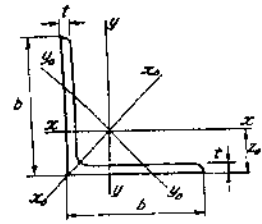
A - diện tích tiết diện;

r - bán kính quán tính;

J_{xy} - mômen quán tính ly tâm;

m - khối lượng trên một mét dài;

z_0 - khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài của cánh.



N ^o	m, kg/m	Kích thước		A, cm ²	J_x , cm ⁴	r_x , cm	$J_{x0 \max}$, cm ⁴	$r_{x0 \max}$, cm	$J_{y0 \min}$, cm ⁴	$r_{y0 \min}$, cm	J_{xy} , cm ⁴	z_0 , cm
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,51	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,11	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	7,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	31,5	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
16	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,53	776	4,89

TÍNH CHẤT CỦA HỆ LỰC TÁC DỤNG LÊN VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

I. LỰC VÀ HỆ LỰC

1. Lực và vectơ mômen của lực đối với một điểm

Đại lượng vectơ cơ bản đặc trưng cho tác dụng tương hỗ về mặt cơ học giữa hai chất điểm hay cơ hệ là lực.

Trong vật rắn tuyệt đối, lực được quan niệm là một đại lượng được truyền đi với tốc độ lớn vô hạn. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu những tính chất cơ bản của hệ lực tác dụng lên vật rắn tuyệt đối.

Ta gọi lực $\vec{f}$ là một vectơ trượt có đường tác dụng nằm trên đường thẳng D (hình 6-1). Lực $\vec{f}$ này có thể thay đổi điểm đặt trên giá D của chúng mà không làm thay đổi đặc trưng cơ học của hệ.

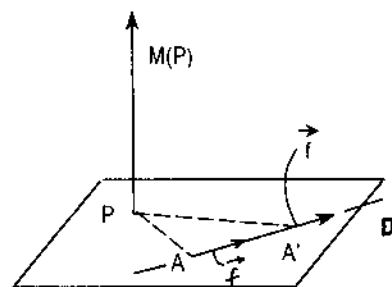
Vectơ mômen của một lực đối với một điểm là gì?

Gọi P là một điểm trên vật khảo sát. Vectơ mômen của $\vec{f}$ đối với P là một đại lượng vectơ được định nghĩa:

$$\vec{M}(P) = \vec{f} \wedge \vec{AP} \text{ (hay } \vec{PA} \wedge \vec{f}) \quad (6-1)$$

Định nghĩa đó không phụ thuộc vị trí của A ở trên giá. Thực vậy, ví dụ lấy một điểm A' khác A (hình 6-1). Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} \vec{M}(P)_{A'} &= \vec{f} \wedge \vec{A'P} = \vec{f} \wedge (\vec{A'A} + \vec{AP}) \\ &= \vec{f} \wedge \vec{AP} + \vec{f} \wedge \vec{A'A} \end{aligned}$$



Hình 6-1

Vì rằng: $\vec{f} \wedge \vec{A'A} = 0$

nên $\vec{M}(P)_{A'} = \vec{M}(P)_A$

Xét mối quan hệ giữa hai mômen của $\vec{f}$ đối với hai điểm P, Q bất kì trong không gian.

Theo định nghĩa ta có:

$$\vec{M}(Q) = \vec{f} \wedge \vec{AQ}$$

Nhưng $\vec{AQ} = \vec{AP} + \vec{PQ}$

Vậy: $\vec{M}(Q) = \vec{f} \wedge (\vec{AP} + \vec{PQ}) = \vec{f} \wedge \vec{AP} + \vec{f} \wedge \vec{PQ}$

hay: $\vec{M}(Q) = \vec{M}(P) + \vec{f} \wedge \vec{PQ}$ (6-2)

Vậy trường vector $\vec{M}$ là một trường phản đối xứng. Vector của trường là $\vec{f}$. Tập hợp $\vec{f}$ và $\vec{M}$ tạo thành một toocxo. Ở đây $\vec{f}$ là một lực nên toocxo đó được gọi là toocxo lực.

2. Hệ lực

2.1. Phân tử rút gọn

Cho một tập hợp nhiều lực $\vec{f}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Gọi phân tử rút gọn của tập hợp đó là hệ hai vector sau đây:

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \\ \vec{M}(Q) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iQ} \end{cases} \quad (6-3)$$

Ta hãy xét mối quan hệ giữa $\vec{R}$ và $\vec{M}$ của tập hợp đó.

Tính tổng mômen của hệ lực $\vec{f}_i$ đối với P . Theo định nghĩa ta có:

$$\vec{M}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iP}$$

Nhưng vì $\vec{A_iP} = \vec{A_iQ} + \vec{QP}$

nên $\vec{M}(P) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iQ} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{QP}$

Hay $\vec{M}(P) = \vec{M}(Q) + \vec{R} \wedge \vec{QP}$ (6-4)

Vậy $\vec{R}$ và $\vec{M}$ lập thành một toạ độ mới, nó là tổng của các toạ độ lực $\vec{f}_i$.

Trường hợp riêng quan trọng

Khi tổng $\vec{R} = \vec{0}$ từ (6-4) ta có:

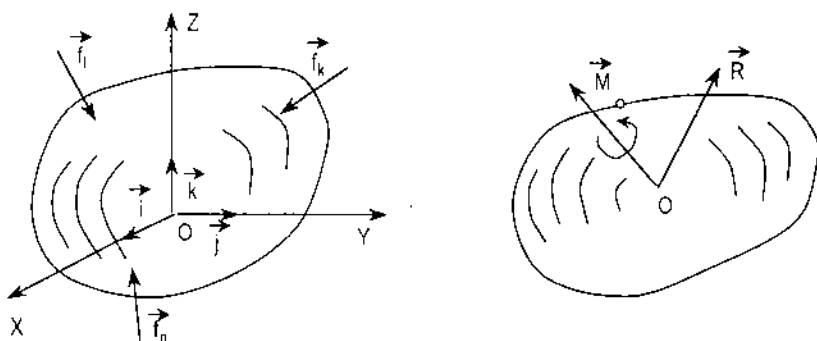
$$\vec{M}(P) = \vec{M}(Q) \quad (6-5)$$

Nghĩa là mômen tại mọi điểm là bằng nhau. Ta gọi trường đó là một trường ngẫu lực đều.

2.2. Hai hệ lực tương đương

Ta có định nghĩa về sự tương đương của hai hệ lực như sau (hình 6-2):

Nếu hai hệ thống vectơ lực khác nhau có các thành phần rút gọn đối với một điểm như nhau thì hai hệ thống vectơ lực đó là tương đương với nhau. Nói một cách khác khi hai hệ thống vectơ lực có cùng một toạ độ đối với một điểm thì chúng tương đương. Như vậy để xác định một toạ độ của một hệ lực chúng ta chỉ cần căn cứ vào các thành phần rút gọn $\vec{R}$ và $\vec{M}$ của nó.



Hình 6-2

Ta xét các trường hợp cụ thể sau đây.

2.a. Khi bất biến vô hướng của toạ độ là bằng không

Sau khi rút gọn về O ta có điều kiện:

$$J = \vec{R} \cdot \vec{M}(O) = 0 \quad (6-6)$$

Điều đó chỉ có thể xảy ra trong các trường hợp sau đây:

b) $\vec{R} = \vec{0}$ và $\vec{M}(O) = \vec{0}$

Như vậy ta có một toạ độ không.

Trường hợp này lại là trường hợp hết sức quan trọng.

Vì $\vec{f}$ là các lực nên đây là các điều kiện cân bằng của hệ lực. Muốn một hệ lực được cân bằng thì toạ độ lực của hệ lực đó phải là một toạ độ không. Nghĩa là phải có một lúc hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}(O) = \vec{0} \end{cases} \quad (6-7)$$

Sử dụng một hệ trục tọa độ vuông góc Đề-các Oxyz với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ thì ta có thể viết:

$$\begin{cases} \vec{R} = s_1\vec{i} + s_2\vec{j} + s_3\vec{k} \\ \vec{M} = M_1\vec{i} + M_2\vec{j} + M_3\vec{k} \end{cases} \quad (6-8)$$

(M đối với bất cứ điểm nào)

Điều kiện $R = 0$ và $M = 0$ dẫn đến sáu phương trình hình chiếu với ký hiệu: $\vec{f}_i = f_{ix}\vec{i} + f_{iy}\vec{j} + f_{iz}\vec{k}$; $\vec{OA} = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^n f_{ix} = 0, & M_1 &= \sum_{i=1}^n (y_i f_{iz} - z_i f_{iy}) \\ s_2 &= \sum_{i=1}^n f_{iy} = 0, & M_2 &= \sum_{i=1}^n (z_i f_{ix} - x_i f_{iz}) \\ s_3 &= \sum_{i=1}^n f_{iz} = 0, & M_3 &= \sum_{i=1}^n (x_i f_{iy} - y_i f_{ix}) \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

Đó cũng là sáu điều kiện của hệ lực cân bằng.

c) $\vec{R} = \vec{0}$ và $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$

Đó là một trường ngẫu lực đều. Mômen ở mọi nơi là bằng nhau.

Nghĩa là một hệ lực đã được thu về thành hai lực song song bằng nhau và ngược chiều nhau.

d) $\vec{R} \neq \vec{0}$ và $\vec{M}(O) = \vec{0}$

Hệ thống được thu về thành một vectơ lực đi qua O.

e) $\vec{R} \neq \vec{0}$ và $\vec{M}(O) \neq \vec{0}$

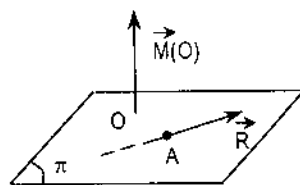
Vậy $\vec{R}$ và $\vec{M}(O)$ phải vuông góc với nhau (hình 6-3).

Khi đó ta luôn luôn tìm thấy một điểm A sao cho

$$\vec{OA} \wedge \vec{R} = \vec{M}(O)$$

Từ biểu thức (T-9) ta có:

$$\vec{OA} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{|\vec{R}|^2} + \lambda \cdot \vec{R}$$



Hình 6-3

Vậy hệ lực thu gọn về thành một vector lực $\vec{R}$ tại A.

Hệ lực tương đương với một lực đặt tại A.

2.b. Khi bất biến vô hướng J của toocxo là khác không

Giả sử khi thu gọn một hệ thống các lực ta được một toocxo (τ) với các tọa độ tại Q là $[R, M(Q)]$ và ta có điều kiện:

$$J = \vec{R} \cdot \vec{M}(O) \neq 0 \quad (6-10)$$

Khi đó ta có thể tách (τ) thành hai toocxo (τ_1) và (τ_2). Các toocxo này có các tọa độ tại Q như sau:

$$(\tau_1) [0, \vec{M}(O)] \quad (6-11)$$

$$(\tau_2) [\vec{R}, 0] \quad (6-12)$$

Như vậy (τ_1) là một toocxo ngẫu lực đều (trường hợp c) và (τ_2) là một lực đi qua Q (glis-xơ) (trường hợp d).

3. Các trường hợp đặc biệt của các hệ lực

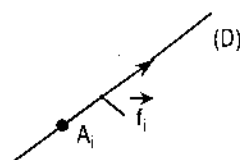
3.1. Khi các lực cùng nằm trên một giá (hình 6-4)

Giả sử các lực $\vec{f}_i$ cùng nằm trên giá D.

Hệ tương đương sẽ là một lực duy nhất nằm trên giá D với

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \quad (6-13)$$

Điểm đặt của $\vec{R}$ là một điểm P bất kỳ trên D.



Hình 6-4

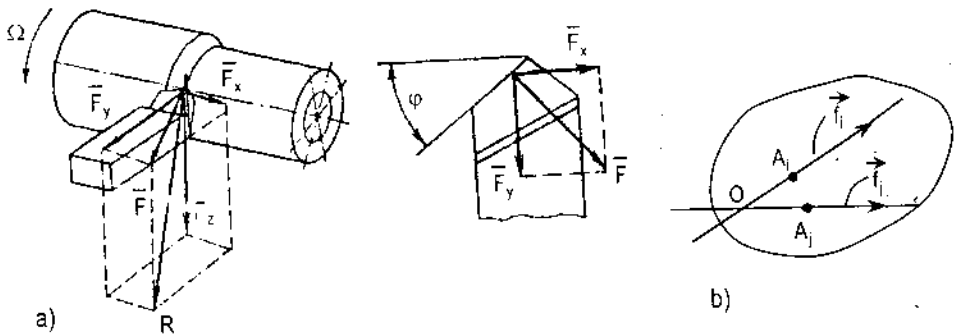
3.2. Hệ các lực có giá đồng quy tại một điểm

Giả sử O là điểm đồng quy của các giá. Trên hình 6-5 ta vẽ hai giá thứ i và j nào đó của hệ.

Các phân tử rút gọn tại O của hệ là:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \\ \vec{M}(O) &\neq \vec{0}\end{aligned}\quad (6-14)$$

Như vậy hệ tương đương với một lực duy nhất qua O.



Hình 6-5

3.3. Hệ các lực song song

Gọi $\vec{u}$ là vector đơn vị song song với các vector lực $\vec{f}_i$ (hình 6-6).

Vector chính sẽ là:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i = \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^n f_i \quad (6-15)$$

a) Nếu
$$R = \sum_{i=1}^n f_i = 0 \quad (6-16)$$

thì ta có hai khả năng:

- Nếu tổng mômen của hệ đối với một điểm nào đó là bằng không:

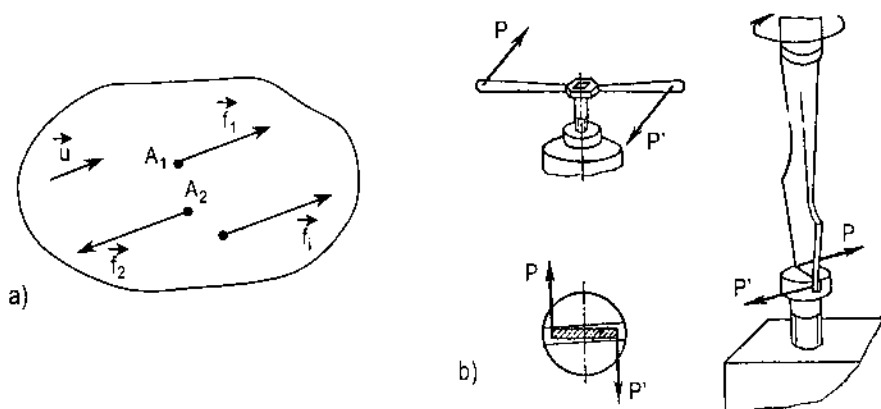
$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iO} = \vec{0} \quad (6-17)$$

Ta suy ra mômen ở mọi nơi là bằng không và ta có một trục không. Nghĩa là các phương trình (6-16) và (6-17) là các điều kiện để hệ lực song song cân bằng.

- Nếu tổng mômen của hệ đối với một điểm nào đó là khác không:

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iO} \neq \vec{0} \quad (6-18)$$

Khi đó mômen ở mọi điểm là như nhau, ta có một trường ngẫu lực đều. Nghĩa là hệ lực tương đương một ngẫu lực (hình 6-6b).



Hình 6-6

a) Nếu
$$R = \sum_{i=1}^n f_i \neq 0 \quad (6-19)$$

Khi đó trị số mômen tại O sẽ là:

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i \wedge \vec{A_iO} \quad (6-20)$$

Có thể viết (6-20) lại dưới dạng:

$$\vec{M}(O) = \sum_{i=1}^n f_i (\vec{u} \wedge \vec{A_iO}) = \sum_{i=1}^n f_i (\vec{OA_i} \wedge \vec{u}) \quad (6-21)$$

Vì $\sum_{i=1}^n f_i$ là khác không nên ta luôn luôn tìm thấy một điểm G sao cho:

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \vec{OA_i}}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (6-22)$$

Từ đó ta có:

$$\vec{M}(O) = \left[\vec{OG} \cdot \sum_{i=1}^n f_i \right] \wedge \vec{u} = \vec{OG} \wedge \vec{R} \quad (6-23)$$

Hệ có thể thu gọn về một lực duy nhất $\vec{R}$ đi qua G. Ta dễ dàng nhận thấy rằng nếu là các lực song song thì công thức (6-22) cho phép ta xác định được tọa độ của hợp lực của những lực song song đó.

Cũng trong công thức (6-22) ta chú ý rằng f_i là số đo vô hướng của $\vec{f}_i$ (độ lớn của $\vec{f}_i$). Như vậy f_i phụ thuộc vào điểm đặt lực A_i vì mỗi điểm tương ứng với một lực. Vậy nếu xem $f_i = m_i$ (m_i là một khối lượng nào đó) thì (6-22) được viết lại như sau (bạn đọc tham khảo chương 5 của sách này):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i \vec{OA}_i - \sum_{i=1}^n f_i \vec{OG} &= \vec{0} \\ \text{hay} \quad \sum_{i=1}^n f_i \vec{GA}_i &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{GA}_i = \vec{0} \end{aligned} \quad (6-24)$$

Theo định nghĩa G là khối lượng của hệ khối lượng m_i . Trong trường hợp một vật thể rắn thì (6-24) được viết lại dưới dạng:

$$\int_V \vec{GA}_i \cdot \rho_i dV = \vec{0} \quad (6-25)$$

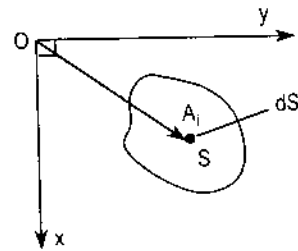
V là thể tích của vật rắn, dV là vi phân thể tích tại A_i và ρ_i là khối lượng riêng tại A_i .

Khi đó (6-22) trở thành công thức để xác định vị trí khối tâm của hệ. Khi hệ nằm trong trọng trường thì G là trọng tâm của hệ. Cũng có thể sử dụng (6-22) để xác định trọng tâm của một hệ phẳng (một diện tích phẳng). Tưởng tượng hệ phẳng hay diện tích đó đặt vuông góc với phương của trọng trường Oz. Các trục Ox, Oy nằm trong mặt phẳng của hệ. Ký hiệu diện tích phẳng là S. Tại A_i ta có vi phân diện tích dS . Xem trọng lượng riêng của S là như nhau ở mọi nơi. Công thức (6-22) sẽ được viết lại dưới dạng (hình 6-7):

$$\vec{OG} = \frac{\int \vec{OA}_i \cdot dS}{S} \quad (6-26)$$

Chiếu xuống các trục tọa độ ta được các phương trình đại số để xác định tọa độ trọng tâm G của hệ phẳng.

$$\left. \begin{aligned} X_G &= \frac{\int x dS}{S} \\ Y_G &= \frac{\int y dS}{S} \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$



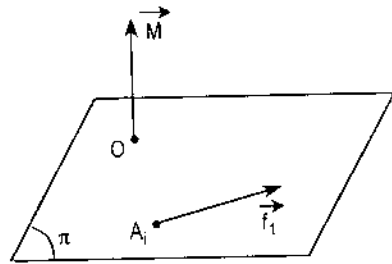
Hình 6-7

trong đó x, y là tọa độ của A_i .

Các tích phân ở tử số (6-27) được gọi là các mômen tĩnh của diện tích đối với các trục Oy và Ox.

3.4. Hệ các lực đồng phẳng

Ta gọi hệ $\vec{f}_i$ là đồng phẳng khi mọi điểm A_i nằm trong mặt phẳng (π) và $\vec{f}_i$ là các vector song song với (π) (hình 6-8). Khi đó các vector mômen phải vuông góc với π .



Hình 6-8

Nếu $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i$ là bằng không và

$\vec{M}(O)$ là khác không thì hệ tương

đương với trường ngẫu lực đều. Hệ được thu về hai vector trượt trong π song song và ngược chiều.

Nếu $\vec{R}$ là khác không thì tích vô hướng

$$J = \vec{R} \cdot \vec{M}(O) = 0$$

Hệ có thể đưa về một vector trượt duy nhất có điểm đặt P trên đường:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}(O))}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} \quad (6-28)$$

3.5. Điều kiện cần để hệ ba lực tạo thành một toocxo không

Giả sử có hệ ba vector $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ với các điểm đặt $A_1 A_2 A_3$ (hình 6-9). Ta tìm điều kiện để ba vector đó tạo thành một toocxo không.

Nghĩa là ta phải có hai điều kiện:

- $\vec{R}$ phải triệt tiêu;
- M cũng phải triệt tiêu.

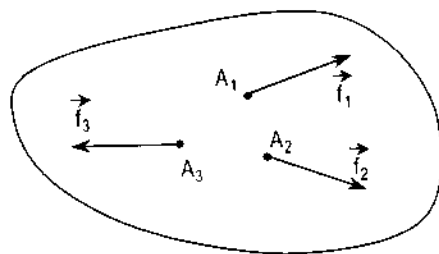
Ta hãy xét điều kiện M phải triệt tiêu.

Chọn ngay điểm A_3 để thu gọn vector mômen về đó.

Ta có:

$$\vec{M}(A_3) = \vec{f}_1 \wedge \vec{A_1A_3} + \vec{f}_2 \wedge \vec{A_2A_3} = \vec{0} \quad (6-29)$$

Vì $\vec{f}_3$ đã đi qua A_3 nên mômen của nó là bằng không. Điều kiện (6-29) nói lên rằng các vector mômen do $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ gây nên phải thẳng hàng. Mômen $\vec{f}_1 \wedge \vec{A_1A_3}$ phải vuông góc với mặt phẳng tạo bởi A_3 và $\vec{f}_1$. Mômen $\vec{f}_2 \wedge \vec{A_2A_3}$ phải vuông góc với mặt phẳng tạo bởi $\vec{f}_2$ và A_3 . Nên hai vector mômen đó phải thẳng hàng có nghĩa là mặt phẳng $(\vec{f}_1, A_3)$, phải trùng với mặt phẳng $(\vec{f}_2, A_3)$.



Hình 6-9

Các vector $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ phải nằm trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$.

Với điều kiện thứ hai. Ta phải có:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{f}_i = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0} \quad (6-30)$$

Điều kiện này cho ta kết luận rằng $\vec{f}_3$ cũng phải nằm trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$. Có thể xảy ra hai khả năng.

* $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ có phương giao nhau tại một điểm trong mặt phẳng $A_1A_2A_3$. Vậy $\vec{f}_3$ cũng phải qua điểm đó để cân bằng với tổng của $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$.

* $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ song song với nhau. Như vậy $\vec{f}_3$ cũng phải song song với chúng. Ta có hệ ba lực song song đồng phẳng. $\vec{f}_3$ phải có giá trị bằng tổng của $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ và phải có chiều ngược lại.

Kết luận. Để một hệ ba lực tạo thành một toạcxơ không là ba lực phải đồng phẳng và phải có:

$$\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0}$$

Nghĩa là các điều kiện trên chính là điều kiện để ba lực cân bằng.

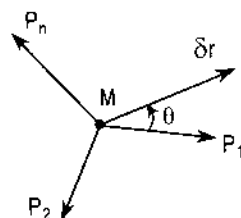
II. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ (CVKD)

Nguyên lý chuyển vị khả dĩ là cơ sở của tĩnh học. Nó được dùng để khảo sát các điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên cơ hệ bất kỳ. Trong trường hợp riêng là vật rắn tuyệt đối. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ được sử dụng rất rộng rãi và hiệu quả cao trong nhiều lĩnh vực khác nhau của cơ học.

1. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với một chất điểm

Giả sử một chất điểm tự do M ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của hệ lực {P} (hình 6-10).

Gọi δr là chuyển vị khả dĩ của M. Với chuyển vị này độ lớn và phương của các lực là không thay đổi. Công nguyên tố của những lực này trên chuyển vị khả dĩ δr là:



Hình 6-10

$$\Sigma \delta A = P_{1r} \delta r + P_{2r} \delta r + \dots + P_{nr} \delta r = \left(\sum_{i=1}^n P_{ir} \right) \delta r$$

Trong đó P_{nr} là hình chiếu của lực P_n lên phương δr . Vì hệ lực cân bằng nên $\sum_{i=1}^n P_{ir} = 0$. Do đó:

$$\Sigma \delta A = 0 \quad (6-31)$$

Kết quả này là nội dung của nguyên lý CVKD đối với một chất điểm và được phát biểu như sau:

“Nếu một chất điểm chịu lực ở trạng thái cân bằng thì tổng công của tất cả các lực trên các chuyển vị khả dĩ phải bằng không”.

Điều kiện cân bằng của một hệ lực có thể được suy ra trực tiếp từ nguyên lý này. Cụ thể là, vì trong (6-31) $\delta r \neq 0$ cho nên $\sum_{i=1}^n P_{ir} = 0$. Đây là điều kiện cân bằng của hệ lực {P}.

2. Nội dung của nguyên lý CVKD đối với một cơ hệ

2.1. Liên kết lý tưởng

* Cơ hệ chịu liên kết lý tưởng khi tổng công nguyên tố của các lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ bằng không.

2.2. Lực hoạt động

* Lực hoạt động là lực sinh công trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ.

2.3. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

* Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các lực hoạt động trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ từ vị trí ấy bằng không.

a) Điều kiện cần: Nếu cơ hệ cân bằng thì

$$\sum \delta A_K = \sum \vec{F}_K \cdot \delta \vec{r}_K = 0$$

b) Điều kiện đủ: Nếu cơ hệ cân bằng và có $\sum \delta A_K = 0$ thì cơ hệ tiếp tục cân bằng.

Nếu lấy đạo hàm của công nguyên tố theo thời gian, ta được công suất của lực hoạt động, nguyên lý di chuyển khả dĩ còn được phát biểu:

* Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là tổng công suất của các lực hoạt động bằng không.

Bài toán tìm điều kiện cân bằng của các cơ cấu được giải một cách nhanh chóng khi áp dụng nguyên lý này.

2.4. Các bài toán áp dụng

Ví dụ 1:

Một máy ép trục vít, tay quay chịu ngẫu lực $(\vec{P}_1, \vec{P}_1)$. Hãy tính lực ép lên vật 3, cho biết bước ren vít là h , chiều dài tay quay là $2l$ (bỏ qua ma sát) (hình 6-11a).

Giải:

Máy ép ở trạng thái cân bằng nên nguyên lý chuyển vị khả dĩ cho ta:

$$\sum \delta A = P \cdot 2l \cdot \delta \varphi - N_{31} \cdot \delta s = 0. \text{ Do đó, } N_{31} = P \cdot 2l \cdot \delta \varphi / \delta s$$

Khi trục vít quay được một góc $\delta\varphi$ thì bàn ép tịnh tiến được một đoạn là δs .

Vì vậy:

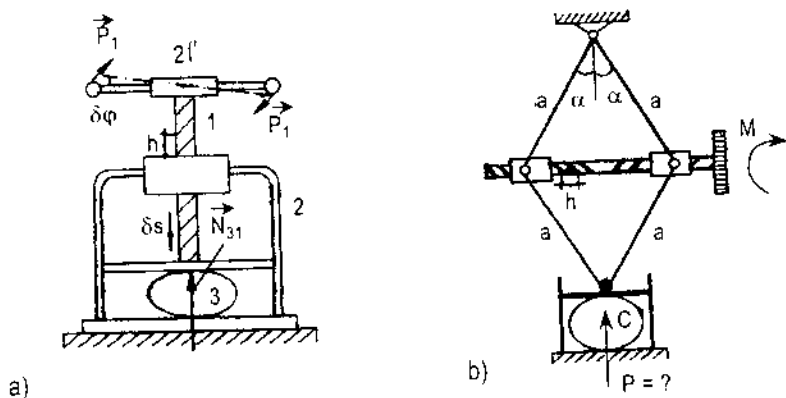
$$\delta s = h \cdot \delta\varphi / 2\pi$$

Thay δs vào biểu thức của N_{31} , ta được:

$$N_{31} = 4\pi \cdot l \cdot P / h$$

Vậy lực ép lên vật 3 là:

$$\vec{N}_{13} = -\vec{N}_{31}$$



Hình 6-11

Ví dụ 2:

Thiết bị ép như hình 6-11b. Cho biết M , hãy xác định lực P ép lên vật C ?
(Đáp số $P = \pi M \cot g/h$).

III. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC TÁC DỤNG LÊN VẬT RẮN

Vật rắn là cơ hệ bất biến hình hình học chịu liên kết dừng (không phụ thuộc thời gian) và lý tưởng.

Vật rắn cân bằng thì hệ lực tác dụng lên nó cân bằng. Nghĩa là, như đã rõ ở trên, toạ độ của hệ lực đó phải là toạ độ không. Với các toạ độ tại O : $\vec{R} = \vec{0}$ và $\vec{M}_O = \vec{0}$

Định lý:

* “Điều kiện cần và đủ để một vật rắn cân bằng là vector chính và vector mômen chính đối với một điểm nào đó của hệ lực tác dụng lên vật ấy đồng thời triệt tiêu”.

* Các dạng cân bằng của hệ lực phẳng:

Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3
$\Sigma X_K = 0$ (1)	$\Sigma \vec{m}_A(\vec{F}_K) = 0$ (1)	$\Sigma \vec{m}_A(\vec{F}_K) = 0$ (1)
$\Sigma Y_K = 0$ (2)	$\Sigma \vec{m}_B(\vec{F}_K) = 0$ (2)	$\Sigma \vec{m}_B(\vec{F}_K) = 0$ (2)
$\Sigma \vec{m}_O(\vec{F}_K) = 0$ (3)	$\Sigma X_K = 0$ (3)	$\Sigma \vec{m}_C(\vec{F}_K) = 0$ (3)
O là điểm bất kỳ	Trục x không được vuông góc với AB	A, B, C không thẳng hàng

IV. CÁC BÀI TOÁN TĨNH HỌC

1. Điều kiện tĩnh học

Bài toán xét điều kiện cân bằng của cơ hệ dưới tác dụng của các lực được gọi là bài toán tĩnh học. Cơ hệ có thể là một cơ cấu hoặc một kết cấu.

Trong trường hợp hệ lực phẳng số phương trình cân bằng tĩnh học có thể được lập cho mỗi khâu là 3, do đó nếu hệ có n khâu thì số phương trình cân bằng có thể thiết lập là 3n. Vậy điều kiện tĩnh định của bài toán là số khâu và số khớp động phải thoả mãn hệ thức:

$$3n = 2p_1 + p_2$$

$$\text{hay} \quad W = 3n - 2p_1 - p_2 = 0$$

Điều này nói lên rằng, để xác định phản lực liên kết trong một cơ cấu, ta phải tách ra từ nó những nhóm có số khâu và số khớp thoả mãn hệ thức trên. Mỗi nhóm như thế gọi là nhóm tĩnh định hay một miếng cứng.

2. Ví dụ

Ví dụ 3:

Cơ cấu tay quay con trượt ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của lực và các ngẫu lực. Hãy xác định áp lực khớp động trong cơ cấu và ngẫu lực phát động M_1 , bỏ qua ma sát ở các khớp động (hình 6-12).

Giải:

Vì cơ cấu này có một bậc tự do nên để xác định các áp lực khớp động ta

phải tách ra từ cơ cấu những nhóm tĩnh định bằng cách tháo khớp quay B và khớp tịnh tiến C như trên hình (6-12b). Từ điều kiện cân bằng của các nhóm tĩnh định ta có thể xác định được các áp lực khớp động cần tính. Cụ thể là:

$$R_{12}^n \cdot BC - M_2 = 0 \Rightarrow R_{12}^n = \frac{M_2}{BC} = \frac{P \cdot r \sqrt{3}}{r \sqrt{3}} = P$$

Để xác định R_{43} và R_{12}^t ta có thể dựng đa giác lực hoặc lập các phương trình hình chiếu của các lực lên các phương P và R_{43} . Kết quả ta có:

$$R_{43} = R_{12}^t = P \cdot \sqrt{3} \text{ và } R_{12} = \sqrt{(R_{12}^n)^2 + (R_{12}^t)^2} = 2P$$

Từ điều kiện cân bằng và nguyên lý tác dụng và phản tác dụng ta có:

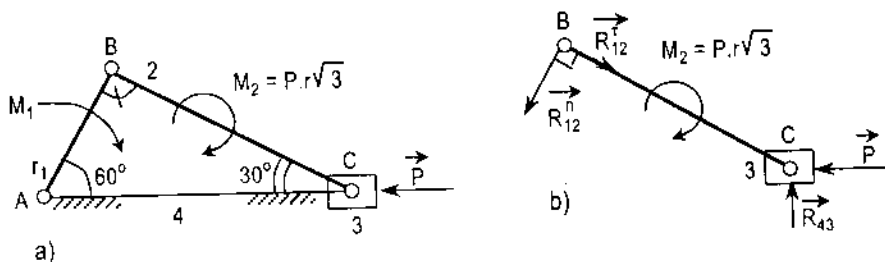
$$\overline{R_{23}} = -\overline{R_{32}}; \quad \overline{R_{21}} = -\overline{R_{12}}$$

Để tìm ngẫu lực M_1 và phản lực liên kết tại A ta sử dụng các điều kiện cân bằng của khâu 1, cụ thể là:

$$\Sigma m_A(F_K) = 0 \Rightarrow M_1 = R_{21} \cdot r \cos 30^\circ = P \cdot r \sqrt{3}$$

Phản lực liên kết của giá 4 và đối với khâu 1 là:

$$\overline{R_{41}} = -\overline{R_{21}} \Rightarrow R_{41} = P$$



Hình 6-12

V. NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

Nguyên lý D'Alembert cho ta phương pháp giải các bài toán về cơ hệ không tự do. Sự kết hợp định luật cơ bản của Newton và tiên đề giải phóng liên kết là tư tưởng cơ bản của nguyên lý này.

1. Nguyên lý D'Alembert

a) Đối với chất điểm

* “Trong chuyển động của chất điểm, các lực thực sự tác dụng vào chất điểm cùng với lực quán tính của nó tạo thành một hệ lực cân bằng”.

$$\vec{F}_K + \vec{R}_K + \vec{F}_K^{qt} = 0$$

Trong đó: $\vec{F}_K, \vec{R}_K$ lực thực và phản lực liên kết đặt vào chất điểm có khối lượng m_K .

$$\vec{F}_K^{qt} = -m_K \cdot \vec{W}_K \text{ lực quán tính của } m_K$$

b) Đối với hệ chất rắn

* “Các lực thực sự đặt vào các chất điểm của hệ cùng với các lực quán tính của hệ tạo thành một hệ lực cân bằng”.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_K^e + \vec{R}^{qt} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_K^e) + \vec{M}_O^{qt} = \vec{0}$$

$\vec{R}^{qt}$ và $\vec{M}_O^{qt}$ là các phần tử thu gọn (vectơ chính và vectơ mômen chính) của hệ lực quán tính đối với điểm “O” của cơ hệ.

Giá trị thực hành của nguyên lý D'Alembert là ở chỗ nó cho một phương pháp giải bài toán động lực theo kiểu tĩnh học thường gọi là phương pháp tĩnh động. Ngoài ra, các phương trình của nguyên lý này không chứa nội lực nên việc áp dụng chúng để giải các bài toán rất thuận tiện và nhẹ nhàng.

2. Lực quán tính của vật trong các chuyển động thường gặp

a) Vật chuyển động tịnh tiến (hình 6-13a)

$$\vec{R}_{qt} = \sum -m_K \vec{W}_K = -M \cdot \vec{W}_G$$

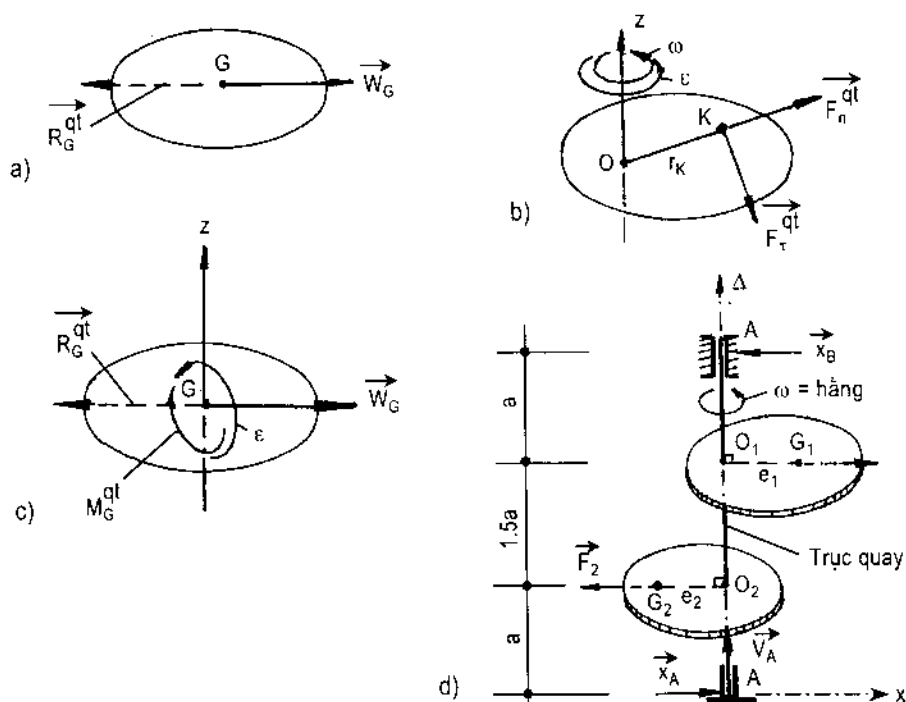
$M, \vec{W}_G$ là khối lượng và gia tốc khối tâm của vật.

b) Hình phẳng quay quanh trục cố định Oz vuông góc với hình phẳng (hình 6-13b)

$$\vec{R}_O^{qt} = -M \cdot \vec{W}_G ; \quad \vec{M}_O^{qt} = -J_{Oz} \cdot \vec{\epsilon}$$

c) Hình phẳng chuyển động song phẳng (hình 6-13c)

$$\vec{R}_G^{qt} = -M \cdot \vec{W}_G ; \quad \vec{M}_G = -J_{Cx} \cdot \vec{\epsilon}$$



Hình 6-13

Ví dụ 4:

Trục Δ quay với vận tốc góc ω không đổi trên đó gắn hai miếng cứng phẳng vuông góc với trục. Các miếng cứng có khối lượng m_1 và m_2 với các khối tâm tương ứng G_1, G_2 , các độ lệch tâm tương ứng e_1, e_2 . Xác định phản lực liên kết động lực ở các ổ A và B? Biết rằng $O_1G_1 \parallel O_2G_2$ (hình 6-13d).

Giải:

Các lực tác dụng lên hệ được cho trên hình 6-13d.

Từ điều kiện cân bằng của hệ lực ta có ba phương trình:

$$\Sigma X = X_A - F_2 + F_1 - X_B = 0$$

$$\Sigma \Delta = V_A = 0$$

$$\Sigma m_A(F) = aF_2 + 3,5aX_B - 2,5aF_1 = 0$$

Giải hệ này ta rút ra:

$$X_B = (5e_1m_1 - 2e_2m_2)\omega^2/7 ; \quad X_A = (5e_2m_2 - 2e_1m_1)\omega^2/7 ; \quad V_A = 0.$$

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

I. ĐỘNG LƯỢNG

1. Định nghĩa

Giả sử một vật rắn (S) chuyển động so với hệ quy chiếu $R_o (O, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$. Trong vật rắn như thế tồn tại một trường vector vận tốc và khối lượng của các chất điểm. Từ các vận tốc và khối lượng của các điểm, ta có thể thiết lập được hai trường vector sau đây:

$$\vec{\sigma}^o = \int_{P \in (S)} \vec{V}^o(P) dm \text{ gọi là động lượng của hệ}$$

Đại lượng vector bằng tích giữa khối lượng của chất điểm với vector vận tốc của nó được gọi là động lượng của chất điểm.

$$\vec{M}^o(A) = \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}^o(P) dm \text{ gọi là mômen động lượng của hệ}$$

đối với điểm A nào đó.

Quan hệ giữa $\vec{M}^o(A)$ và $\vec{M}^o(B)$ là:

$$\vec{M}^o(A) = \vec{M}^o(B) + \vec{AB} \wedge \vec{\sigma}^o, \text{ (A và B là hai điểm bất kỳ thuộc (S))}$$

Như vậy $\vec{M}^o(B)$ và $\vec{\sigma}^o$ tạo thành một toocxo gọi là toocxo động lượng.

Tính $\vec{\sigma}^o$ và $\vec{M}^o(A)$ như thế nào?

2. Tính động lượng

Theo định nghĩa:

$$\vec{\sigma}^o = \int_{(S)} \vec{V}^o(P) dm = \int_{(S)} \frac{d^o \vec{OP}}{dt} dm = \frac{d^o}{dt} \int_{(S)} \vec{OP} dm = \frac{d^o}{dt} \cdot (\vec{M} \cdot \vec{OG}) = \vec{M} \vec{V}^o(G)$$

$$\text{hay} \quad \vec{\sigma}^o = \vec{M} \vec{V}^o(G) \quad (7-1)$$

trong đó: O là gốc toạ độ, P là điểm bất kỳ thuộc (S), còn về khối lượng thì bất biến trong cơ học Galilê (Galiléenne);

M là khối lượng toàn hệ đặt ở khối tâm (G);

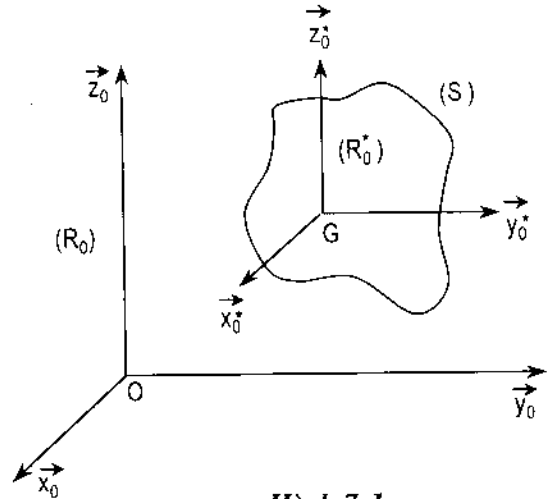
$\vec{V}^0(G)$ là vận tốc của khối tâm đối với hệ quy chiếu (R_0) .

3. Tính mômen động lượng toàn hệ

3.1. Định lý Koëning

Chúng ta hãy khảo sát chuyển động của vật (S) so với R_0 ($O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) thông qua chuyển động tịnh tiến của hệ toạ độ động. $R_0^*(C, \vec{x}_0^*, \vec{y}_0^*, \vec{z}_0^*)$ có gốc ở khối tâm (G) đối với (R_0) (hình 7-1).

Hệ toạ độ R_0^* được gọi là hệ quy chiếu Koëning và chuyển động của (S) so với (R_0^*) được gọi là chuyển động quanh khối tâm (G).



Hình 7-1

Gọi N là một điểm nào đó thuộc (S) thì:

$$\vec{M}^0(N) = \int_{P \in (S)} \vec{NP} \wedge \vec{V}^0(P) dm$$

Theo định lý hợp vận tốc:

$$\vec{V}^0(P) = \vec{V}^{0*}(P) + \vec{V}_{0*}^0(P)$$

Vì (R_0^*) chuyển động tịnh tiến so với (R_0) nên $\vec{V}_{0*}^0(P) = \vec{V}^0(G)$.

$$\vec{V}^0(P) = \vec{V}^{0*}(P) + \vec{V}^0(G)$$

$$\vec{M}^0(N) = \int_{(S)} \vec{NP} \wedge \vec{V}^{0*}(P) dm + \int_{(S)} \vec{NP} \wedge \vec{V}^0(G) dm$$

$$\vec{M}^0(N) = \vec{M}^{0*}(N) + \left(\int_{(S)} \vec{NP} dm \right) \wedge \vec{V}^0(G)$$

$$\begin{aligned}\vec{M}^0(N) &= \vec{M}^{0*}(N) + \vec{NG} \wedge M \cdot \vec{V}^0(G) \\ \vec{M}^{0*}(N) &= \vec{M}^{0*}(G) + \vec{NG} \wedge M \cdot \vec{V}^{0*}(G) \\ \vec{M}^{0*}(N) &= \vec{M}^{0*}(G) \text{ (vì } G \text{ là gốc tọa độ của } (R_0^*) \text{ nên } \vec{V}^{0*}(G) = 0).\end{aligned}$$

Do đó ta có định lý Koëning:

“*Mômen động lượng của hệ (S) đối với một điểm so với hệ quy chiếu R_0 bằng tổng mômen động lượng của hệ đối với hệ quy chiếu động R_0^* và mômen động lượng của khối tâm mang khối lượng toàn hệ.*”

Công thức định lý:

$$\vec{M}^0(N) = \vec{M}^{0*}(G) + \vec{NG} \wedge M \cdot \vec{V}^0(G) \quad (7-2)$$

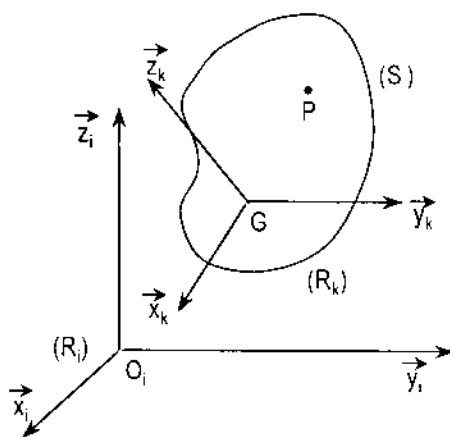
3.2. Mômen động lượng của vật rắn

Ta sẽ tính mômen động lượng đối với điểm $O_K \in (S)$, tại đó ta lập một hệ tọa độ $R_K (O_K, \vec{x}_K, \vec{y}_K, \vec{z}_K)$. Theo công thức (2-1) về sự liên hệ vận tốc giữa các điểm của vật chuyển động thì:

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(O_K) + \vec{\Omega}_K^i \wedge \vec{O_K P}$$

Do đó mômen động lượng của (S) đối với điểm gốc tọa độ O_K là:

$$\vec{M}^i(O_K) = \int_{(S)} \vec{O_K P} \wedge \vec{V}^i(P) dm = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$



Hình 7-2

Trong đó:

$$\vec{J}_1 = \int_{(S)} \vec{O_K P} dm \wedge \vec{V}^i(O_K) = \vec{O_K G} \wedge m \vec{V}^i(O_K)$$

$$\vec{J}_2 = \int_{(S)} \vec{O_K P} \wedge (\vec{\Omega}_K^i \wedge \vec{O_K P}) dm = J_{O_K} \vec{\Omega}_K^i$$

Với J_{O_K} là ma trận quán tính khối lượng của vật và có biểu thức:

$$J_{O_K} = \begin{vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{vmatrix}$$

Cuối cùng mômen động lượng của S đối với điểm O_K là:

$$\vec{M}^I(O_K) = J_{O_K} \vec{\Omega}_K^I + \vec{O_K G} \wedge \vec{V}^I(O_K).M \quad (7-3)$$

3.3. Các trường hợp đặc biệt

* Khi O_K cố định trong R_i thì $\vec{V}^I(O_K) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}^I(O_K) = J_{O_K} \vec{\Omega}_K^I$ (7-3a)

* Khi $O_K \equiv G$ (O_K là khối tâm)

$$\vec{M}^I(O_K) = \vec{M}^I(G) = J_G \vec{\Omega}_K^I \quad (7-3b)$$

và đối với một điểm $N \in (S)$ ta lại trở lại công thức (6-2). Cụ thể là:

$$\vec{M}^I(N) = \vec{M}^{I*}(G) + \vec{NG} \wedge M. \vec{V}^I(G)$$

nhưng $\vec{M}^{I*}(G) = J_G \vec{\Omega}_K^{I*}$

và R_i^* chuyển động tịnh tiến đối với (R_i) :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_K^{I*} &= \vec{\Omega}_K^I \\ \vec{M}^I(N) &= J_G \vec{\Omega}_K^I + \vec{NG} \wedge M. \vec{V}^I(G) \end{aligned} \quad (7-4)$$

II. TOOCXƠ ĐỘNG LỰC HỌC

1. Định nghĩa và cách tính toocxơ động lực học

Một hệ chất điểm (S) chuyển động sẽ xác định hai trường vectơ gia tốc lượng và mômen của gia tốc lượng đối với một điểm (mômen động lực đối với một điểm).

$$\vec{\varepsilon}^0 = \int_{(S)} \vec{W}^0(P) dm \text{ gọi là gia tốc lượng của hệ (S)}$$

$$\vec{\delta}^0(A) = \int_{(S)} \vec{AP} \wedge \vec{W}^0(P) dm \text{ gọi là mômen của gia tốc lượng đối với điểm A}$$

nào đó trong không gian (R_0) .

Ta xét quan hệ mômen của gia tốc lượng đối với hai điểm A, K tùy ý với $\vec{KA} + \vec{AP} = \vec{KP}$.

$$\vec{\delta}^0(K) = \int_{(S)} \vec{KP} \wedge \vec{W}^0(P) dm = \int_{(S)} \vec{KA} \wedge \vec{W}^0(P) dm + \int_{(S)} \vec{AP} \wedge \vec{W}^0(P) dm$$

Sau khi đưa KA ra ngoài tích phân và chú ý là:

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}^0 &= \int_{(S)} \vec{W}^0(P) dm = \int_{(S)} \frac{d\vec{V}^0(P)}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{(S)} \vec{V}^0(P) dm = \frac{d^2}{dt^2} \int_{(S)} \vec{OP} dm = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (M \cdot \vec{OG}) = M \cdot \vec{W}^0(G), \text{ ta thu được:}\end{aligned}$$

$$\vec{\delta}^0(K) = \vec{\delta}^0(A) + \vec{\varepsilon}^0 \wedge \vec{AK} \quad (7-5)$$

Như vậy $\vec{\delta}^0(A)$ và $\vec{\varepsilon}^0$ tạo thành một toạ độ và gọi là toạ độ động lực học.

$$\text{Kết quả: } \vec{\varepsilon}^0 = \int_{(S)} \vec{W}^0(P) dm = M \cdot \vec{W}^0(G) \quad (7-6)$$

Cho thấy: “*Gia tốc lượng của một hệ bằng gia tốc lượng của khối tâm mang khối lượng toàn hệ*”.

Rất tự nhiên chúng ta có thể tự đặt ra một câu hỏi là giữa mômen động lực học (mômen gia tốc lượng) $\vec{\delta}^0(N)$ và mômen động lượng $\vec{M}^0(N)$ có mối liên hệ nào với nhau không?

Dưới đây ta sẽ giải quyết câu hỏi đó.

$$\begin{aligned}\frac{d^0}{dt} \vec{M}^0(N) &= \frac{d^0}{dt} \int_{(S)} \vec{NP} \wedge \vec{V}^0(P) dm \\ &= \int_{(S)} \frac{d^0}{dt} (\vec{NP} \wedge \vec{V}^0(P)) dm \\ &= \int_{(S)} \frac{d^0}{dt} (\vec{NP}) \wedge \vec{V}^0(P) dm + \int_{(S)} \vec{NP} \wedge \vec{W}^0(P) dm\end{aligned}$$

$$\text{Nhưng } \frac{d^0 \vec{NP}}{dt} = \vec{V}^0(P) - \vec{V}^0(M)$$

$$\text{do đó: } \frac{d^0 \vec{M}^0(N)}{dt} = -\vec{V}^0(N) \wedge \int_{(S)} \vec{V}^0(P) dm + \vec{\delta}^0(N)$$

Từ đây rút ra quan hệ cần tìm giữa mômen gia tốc lượng $\vec{\delta}^0(N)$ và mômen động lượng $\vec{M}^0(N)$ như sau:

$$\vec{\delta}^0(N) = \frac{d^0 \vec{M}^0(N)}{dt} + \vec{V}^0(N) \wedge M \cdot \vec{V}^0(G) \quad (7-7)$$

Các trường hợp riêng:

- Khi N là một điểm cố định trong R_0 :

$$\vec{\delta}^0(N) = \frac{d^0 \vec{M}(N)}{dt} \quad (7-8)$$

- Khi N trùng với khối tâm G:

$$\vec{\delta}^0(G) = \frac{d^0 \vec{M}(G)}{dt} \quad (7-9)$$

Như vậy khi N cố định trong R_0 hoặc trùng với trọng tâm của vật rắn thì tương quan giữa hai toạ độ là:

“Đạo hàm của toạ độ động lượng bằng toạ độ gia tốc lượng”.

Nếu ký hiệu τ_g và τ_v là toạ độ động lực học và toạ độ động học thì ta có:

$$\tau_g = \frac{d\tau_v}{dt} \quad \text{cụ thể là: } \tau[\vec{\delta}^0(N), \vec{\epsilon}^0] = \frac{d\tau_v[\vec{M}^0(N), \vec{\delta}^0]}{dt}$$

2. Nguyên lý cơ bản của cơ học cổ điển

Khi tốc độ của vật rắn chưa đạt đến tốc độ ánh sáng, nghĩa là nhỏ hơn 300.000 km/s thì định luật bảo toàn khối lượng vẫn đúng. Khi đó nguyên lý cơ bản của cơ học cổ điển được phát biểu như sau:

Tồn tại một hệ quy chiếu được gọi là hệ quy chiếu Galilê hay hệ quy chiếu tuyệt đối với thời gian tuyệt đối sao cho mỗi một hệ vật chất S, toạ độ động lực học là bằng toạ độ lực của những ngoại lực tác dụng lên hệ:

$$\vec{\epsilon}^0 = \vec{R} = M \cdot \vec{W}_G \quad (7-10)$$

$$\vec{\delta}^0(A) = \vec{M}(A) \quad (7-11)$$

Nếu A là cố định trong (R_0) ta có:

$$\frac{d(\tau_v)}{dt} = (\tau_g) = (\tau_f) \quad (7-12)$$

(τ_f) là toạ độ lực của ngoại lực tác dụng lên hệ.

Biểu thức (7-12) còn có nghĩa là:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{\delta}^0}{dt} &= \vec{R} \\ \frac{d\vec{\delta}^0(A)}{dt} &= \vec{M}(A) \end{aligned} \right\} \quad (7-13)$$

III. ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN

Xét một chất điểm P thuộc hệ chất điểm (S) chuyển động. Chất điểm P chịu tác dụng của hai loại lực: ngoại lực $\vec{dF}_e$ và nội lực $\vec{dF}_i$. Theo định luật Newton ta có:

$$\vec{W}''_{dm} = \vec{dF}_e + \vec{dF}_i \quad (7-14)$$

1. Tính chất của nội lực

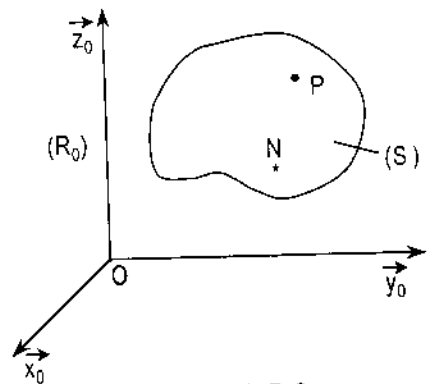
Các phân tử thu gọn của toocxo hệ nội lực:

- Tổng vector $\vec{R}$:

$$\vec{R}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{P_i/P_j} + \vec{F}_{P_j/P_i}) = 0$$

trong đó:

$\vec{F}_{P_i/P_j}$ và $\vec{F}_{P_j/P_i}$ lần lượt là lực mà điểm P_i tác dụng lên điểm P_j và lực mà điểm P_j tác dụng lên điểm P_i .



Hình 7-3

Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng thì

$$\vec{F}_{P_i/P_j} + \vec{F}_{P_j/P_i} = \vec{0}$$

- Tổng vector mômen đối với điểm "O" nào đó.

$$\begin{aligned} \vec{M}_i(O) &= \sum_{i=1}^n (\vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{P_j/P_i} + \vec{OP}_j \wedge \vec{F}_{P_i/P_j}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{P_j/P_i}) + (\vec{OP}_i \wedge \vec{P}_i \vec{P}_j) \wedge \vec{F}_{P_i/P_j} \\ &= \sum_{i=1}^n (\vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{P_j/P_i}) + (\vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{P_i/P_j}) + (\vec{P}_i \vec{P}_j \wedge \vec{F}_{P_i/P_j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{OP}_i \wedge (\vec{F}_{P_j/P_i} + \vec{F}_{P_i/P_j})}_{=0} + \underbrace{(\vec{P}_i \vec{P}_j \wedge \lambda \vec{P}_i \vec{P}_j)}_{=0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Tóm lại:

Toócơ nội lực là một toócơ không:

$$\vec{R}_i = 0, \quad \vec{M}_i(O)$$

2. Định lý chuyển động của khối tâm

Đối với hệ chất điểm (S), từ (7-14) ta có thể viết:

$$\int_{P \in (S)} \vec{W}^o(P) dm = \int_{P \in (S)} d\vec{F}_c + \int_{P \in (S)} d\vec{F}_i$$

Vì các nội lực tạo thành toócơ không nên $\int_{P \in (S)} d\vec{F}_i = 0$.

Đặt $\int_{P \in (S)} d\vec{F}_c = \vec{R}$: hợp lực của ngoại lực, ta rút ra:

$$M\vec{W}^o(G) = \vec{R} \quad (7-15)$$

M là khối lượng toàn hệ đặt ở khối tâm G.

$\vec{W}^o(G)$ là gia tốc của khối tâm trong chuyển động so với R_0 .

Kết quả (7-15) được phát biểu dưới dạng một định lý như sau:

“Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm mang khối lượng toàn hệ chịu tác dụng của lực bằng vectơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên hệ”.

Quan hệ (7-15) tương đương với ba phương trình vô hướng sau đây:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_G(G) &= R_x^o \\ M\ddot{y}_G(G) &= R_y^o \\ M\ddot{z}_G(G) &= R_z^o \end{aligned} \right\} \quad (7-16)$$

Định lý này cho thấy nội lực không có ảnh hưởng tới chuyển động của khối tâm. Do đó, nếu $\vec{R} = \vec{0}$ thì khối tâm chuyển động theo quán tính.

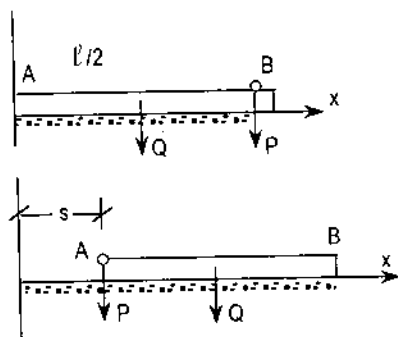
Ví dụ 1: Thanh $AB = l$, trọng lượng Q. Đầu B chịu một vật nặng P. Tìm chuyển vị S của thanh khi P di chuyển từ B đến A. Biết lúc đầu AB đứng yên trên nền nhẵn (hình 7-4).

Giải: Các lực cho và phản lực đều vuông góc với AB cho nên theo (7-16) khối tâm chuyển động theo quán tính trên phương x. Vì lúc đầu hệ đứng yên nên $x_G = \text{hằng}$ với mọi t. Cụ thể là:

$x_G^{(0)} = x_G^{(1)}$. Theo (6-22) thì tọa độ khối tâm lúc $t = 0$ và lúc $t = t_1 > 0$ là:

$$x_G^{(0)} = \frac{\frac{Q}{g} \cdot \frac{l}{2} + \frac{P}{g} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{P+Q}{g}};$$

$$x_G^{(1)} = \frac{\frac{Q}{g} \cdot \left(S + \frac{l}{2}\right) + \frac{P}{g} \cdot S}{\frac{P+Q}{g}}$$



Hình 7-4

Từ điều kiện $x_G = \text{hằng}$ với mọi t ta rút ra:

$$S = \frac{P}{P+Q} \cdot l$$

3. Định lý mômen động lượng

Mômen đối với điểm N nào đó là (hình 7-3):

$$\int_{P \in (S)} \vec{NP} \wedge d\vec{F}_e = \int_{P \in (S)} \vec{NP} \wedge \vec{W}^0(P) dm \quad (\text{chú ý là } \int_{P \in (S)} \vec{NP} \wedge d\vec{F}_i = 0) \quad \text{hay}$$

$$\vec{M}_e(N) = \vec{\delta}^0(N) \quad (7-17)$$

Và vì rằng:

$$\vec{\delta}^0(N) = \frac{d^0 \vec{M}^0(N)}{dt} + \vec{V}^0(N) \wedge M \cdot \vec{V}^0(G)$$

Cho nên:

$$\boxed{\vec{M}_e(N) = \frac{d^0 \vec{M}^0(N)}{dt} + \vec{V}^0(N) \wedge M \cdot \vec{V}^0(G)} \quad (7-18)$$

a) Nếu $N \equiv G$ thì:

$$\vec{M}_e(G) = \frac{d^0 \vec{M}^0(G)}{dt} = \vec{\delta}^0(G)$$

b) Khi N được cố định trong $R_0 \Rightarrow \vec{V}^0(N) = 0$ thì:

$$\vec{M}_e(N) = \frac{d^0 \vec{M}^0(G)}{dt} = \vec{\delta}^0(N)$$

Kết quả (7-17), (7-18) tạo thành định lý sau đây:

Định lý: “Đạo hàm theo thời gian của mômen động lượng (hay chính mômen động lực) đối với một chất điểm bằng tổng hình học mômen của các lực tác dụng lên chất điểm đối với cùng điểm đó”.

Định lý này cũng có thể được phát biểu dưới dạng:

“Toocxo của hệ ngoại lực thì tương đương với toocxo động lực”.

Định lý này cũng chỉ áp dụng được trong hệ quy chiếu Galilê.

Ví dụ 2: Một đĩa tròn có trọng lượng Q , bán kính R . Trên vành đĩa có một chất điểm trọng lượng P . Đĩa quay quanh trục Δ với vận tốc góc Ω_0 (hình 7-5). Tìm vận tốc góc của đĩa lúc động điểm P chạy trên vành đĩa theo chiều quay của đĩa với vận tốc tương đối (so với đĩa) là $\vec{u}$?

Giải:

Xét hệ gồm đĩa và động điểm. Lực tác dụng lên hệ gồm trọng lượng Q của đĩa, trọng lượng P của động điểm, phản lực ở các ổ A và B . Mômen ngoại lực đối với trục Δ bằng không: $\vec{M}_c(\Delta) = \vec{0}$ vì $\vec{P} \parallel \vec{Q} \parallel \Delta$; $\vec{R}_A$ và $\vec{R}_B$ cắt Δ .

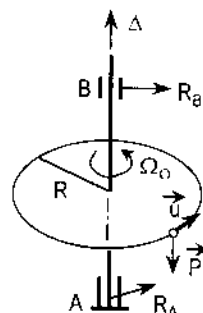
Do đó mômen động lượng đối với trục Δ theo (7-18) được bảo toàn: $M(\Delta) = \text{hằng} \forall t$.

Lúc $t = t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} M^0(\Delta) &= J_{\Delta} \Omega_0 + m_{\Delta}(m \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{QR^2}{2g} \cdot \Omega_0 + \frac{P}{g} \cdot R \Omega_0 R \\ &= \frac{Q + 2P}{2g} \cdot R^2 \Omega_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Gọi Ω là vận tốc góc của đĩa khi động điểm chạy trên vành với vận tốc $\vec{u}$ thì vận tốc tuyệt đối của động điểm là:

$$\vec{V}_a = \vec{\Omega} \wedge \vec{R} + \vec{u} \Rightarrow V_a = R\Omega + u. \text{ Ở thời điểm này } t_1 = t > t_0, \text{ thì:}$$



Hình 7-5

$$M^l(\Delta) = J_{\Delta}\Omega + \frac{P}{g} \cdot (u + R\Omega)R \quad (2)$$

Cho (1) = (2) ta rút ra vận tốc góc của đĩa Ω khi động điểm tham gia chuyển động:

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{2P}{(Q + 2P)R} \cdot u$$

IV. ĐỘNG NĂNG

1. Định nghĩa

Giả sử có một hệ chất điểm (S) chuyển động so với R_0 , chất điểm $P \in (S)$ có vận tốc $\vec{V}^0(P)$ và khối lượng dm , động năng của chất điểm là đại lượng vô hướng sau đây:

$$T = \int_{P \in S} \frac{1}{2} \vec{V}^0{}^2(P) dm \quad (7-19)$$

Trong hệ tọa độ Koëning R_0^* , theo định lý hợp vận tốc ta có:

$$\vec{V}^0(P) = \vec{V}^{0*}(P) + \vec{V}^0(G)$$

Do đó, động năng của hệ đối với hệ tọa độ R_0 là:

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{V}^{0*}{}^2(P) dm + \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{V}^0{}^2(G) dm + \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{V}^{0*}(P) \vec{V}^0(G) dm$$

$$T_0 = T_{0*} + \frac{1}{2} \vec{V}^0{}^2(G) M$$

$$\text{trong đó: } T_{0*} = \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{V}^{0*}{}^2(P) dm \quad \text{và} \quad \vec{V}^0(G) \cdot \int_{(S)} \vec{V}^{0*}(P) dm = \vec{V}^0(G) \cdot M \vec{V}^{0*}(G) = 0$$

vì G là gốc tọa độ (R_0^*) .

2. Định lý động năng

Trong hệ quy chiếu Galilê (Galiléenne) và khi bỏ qua ảnh hưởng của lực quán tính theo và lực quán tính coriolis, ta có thể viết, theo định luật Newton II:

$$\vec{W}^0(P) dm = d\vec{F}_e + d\vec{F}_i$$

$$\begin{aligned} dm \frac{d\vec{V}^o(P)}{dt} \cdot \vec{V}^o(P) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} dm \cdot \vec{V}^o(P)^2 \right) = (d\vec{F}_e + d\vec{F}_i) \cdot \vec{V}^o(P) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \cdot \vec{V}^o(G)^2 \right) &= \vec{R}_e \cdot \vec{V}^o(P) \end{aligned} \quad (7-20)$$

Tích phân hai vế các cận tương ứng t_1, t_2 và P_1, P_2 ta có:

$$\frac{1}{2} MV_2^2 - \frac{1}{2} MV_1^2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{R}_e dP = A$$

A là công của lực $\vec{R}_e$ trên chuyển vị $P_1 P_2$. Vì vậy ta có:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = A \quad (7-21)$$

Trường hợp lực $\vec{R}_e$ là đạo hàm của hàm thế năng $U(P)$:

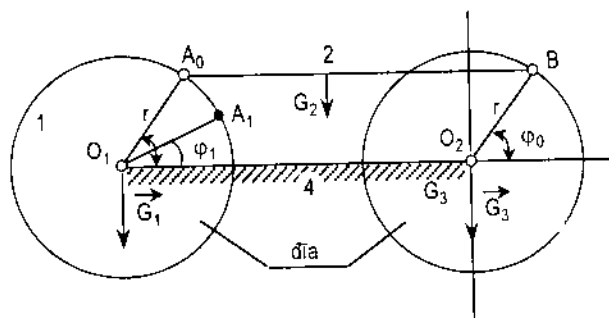
$$\vec{R}_e = -\vec{\text{grad}}U \Rightarrow dA = \vec{R}_e \cdot dP = -dU, \text{ từ (7-21) suy ra:}$$

$$dT = dA = -dU \Rightarrow dT + dU = 0 \Rightarrow T + U = E = \text{hằng}$$

Công thức $T + U = E = \text{hằng}$ là nội dung của định luật bảo toàn năng lượng cơ học.

Ví dụ 3:

Cơ cấu bốn khâu $O_1 A B O_2$ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng gồm hai đĩa tròn đồng chất bán kính r trọng lượng $G_1 = G_3$. Trọng lượng thanh truyền AB là G_2 . Xác định Ω và ε của các đĩa khi cơ cấu chuyển động từ vị trí nghỉ ban đầu $\varphi_0 = 30^\circ$ tới vị trí φ_1 dưới tác dụng của trọng lực (hình 7-6).



Hình 7-6

Giải:

Động năng của hệ $T_h = T_1 + T_2 + T_3$, trong đó:

$T_1 = 0,5 \cdot \omega^2 \cdot (0,5 \cdot G_1 \cdot r^2 / g)$; $T_2 = 0,5 \cdot G_2 \cdot (\omega \cdot r^2 / g)$. Do đó:

$$T_h = \frac{0,5(\omega \cdot r)^2 \cdot (G_1 + G_2)}{g} = 0,5(\omega \cdot r)^2 \cdot M^*$$

Công do các lực gây ra trên chuyển vị tương ứng là:

$A = G_2 \cdot h = G_2 \cdot r \cdot (\sin 30^\circ - \sin \varphi_1)$. Theo định lý biến thiên động năng trong trường hợp này ta có:

$T_h = 0,5(\omega^2 \cdot r) \cdot M^* = G_2 \cdot (0,5 - \sin \varphi_1)$, trong đó $M^* = (G_1 + G_2)/g$.

Từ đó rút ra là:

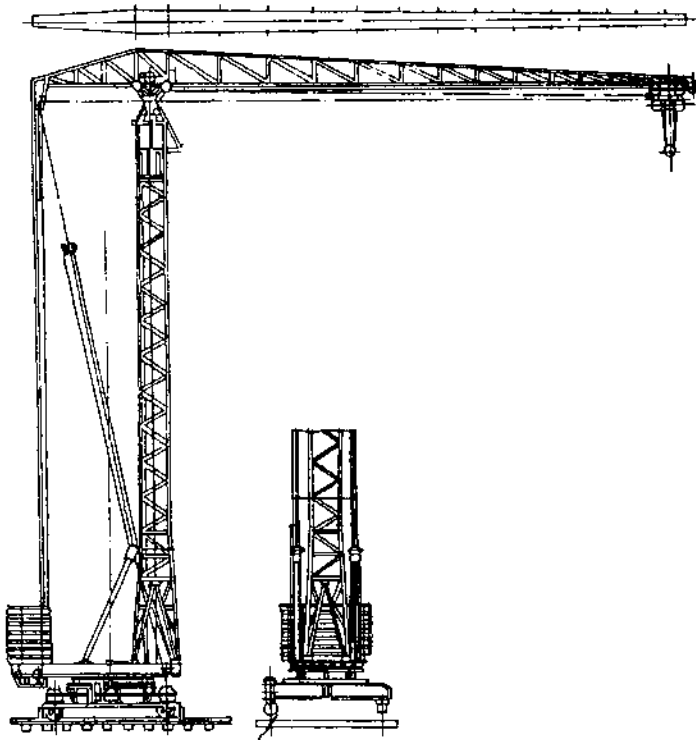
$$\omega = \sqrt{\frac{2G_2 \cdot (0,5 - \sin \varphi_1)}{r \cdot M^*}}$$

Đạo hàm theo thời gian của ω ta có:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{G_2 \cdot \cos \varphi_1}{r \cdot M^*}$$

PHẦN II

CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG



CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Từ phần này chúng ta sẽ xét tác dụng trong của lực lên vật rắn thực, tức là vật thể có thể thay đổi hình dạng, kích thước khi chịu tác dụng của môi trường xung quanh nó.

I. MÔ HÌNH NGHIÊN CỨU

Vật rắn biến dạng là tập hợp các chất điểm có các tính chất sau:

1. Về mặt vật lý

a) Liên tục, đồng chất và đẳng hướng

Vật rắn được gọi là liên tục nếu một phần tử bé tùy ý của nó đều chứa vô số chất điểm, được gọi là đồng chất khi tính chất cơ lý của nó tại mọi điểm đều như nhau và được gọi là đẳng hướng khi tính chất cơ lý của nó theo mọi hướng đều như nhau.

b) Đàn hồi tuyến tính, biến dạng bé và ở trạng thái tự nhiên

Dưới tác dụng của ngoại lực, mọi vật rắn thực đều bị biến dạng vì ngoại lực làm thay đổi vị trí tương đối vốn có giữa các phần tử cấu tạo nên vật ấy. Lực liên kết vốn có giữa các phần tử (để giữ cho vật rắn có một hình dạng nhất định) lúc đó sẽ thay đổi có khuynh hướng khôi phục lại vị trí ban đầu giữa các phần tử.

Vật rắn được gọi là đàn hồi tuyệt đối nếu nó có khả năng phục hồi hoàn toàn hình dạng và kích thước ban đầu vốn có sau khi ngoại lực thôi tác dụng. Biến dạng được khôi phục hoàn toàn sau khi hết ngoại lực được gọi là biến dạng đàn hồi. Trong thực tế, không có những vật đàn hồi tuyệt đối. Đối với nhiều vật rắn khi ngoại lực chưa vượt quá một giới hạn nhất định thì biến dạng của nó là biến dạng đàn hồi, nhưng khi vượt quá giới hạn đó thì vật chỉ khôi phục được

một phần biến dạng. Phần biến dạng không khôi phục được, gọi là biến dạng dẻo hay biến dạng dư.

Vật đàn hồi tuyến tính là vật có biến dạng tỷ lệ bậc nhất với nội lực. Những vật đàn hồi khác được gọi là đàn hồi phi tuyến (quan hệ biến dạng và nội lực là hàm phi tuyến).

Biến dạng được coi là bé nếu nó rất nhỏ so với kích thước tương ứng của vật. Điều này cho phép bỏ qua các tích và các lũy thừa của đạo hàm của biến dạng trong các tính toán.

Trong một số bài toán, khi biến dạng bé, có thể xem điểm đặt của ngoại lực, do đó, vị trí tương đối của ngoại lực không thay đổi khi vật bị biến dạng. Tính chất này cùng với tính chất tuyến tính nói trên cho phép sử dụng nguyên lý cộng tác dụng (định luật III Newton).

2. Về mặt hình học

Vật rắn nghiên cứu có một trong ba dạng sau:

- a) Khối là mô hình của những vật thể có kích thước theo ba phương trục giao đều tương đương nhau.
- b) Tấm và vỏ là mô hình của những vật thể có hai kích thước rất lớn so với kích thước thứ ba.
- c) Thanh là mô hình của vật thể có kích thước theo một phương áp đảo hai phương còn lại.

II. NỘI LỰC, ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

1. Nội lực và các bài toán cơ bản

Xét một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực $\{\vec{P}\}$. Ta tưởng tượng dựng một mặt cắt qua một điểm nào đó chia vật làm hai phần. Hệ phản lực của phần vật thể bên phải tác dụng lên phần vật thể bên trái tại mặt cắt vừa dựng và ngược lại gọi là nội lực tại mặt cắt đó.

Để thống nhất tên gọi nội lực, qua trọng tâm C của mặt cắt, ta chọn hệ trục toạ độ như sau (hình 8-1a).

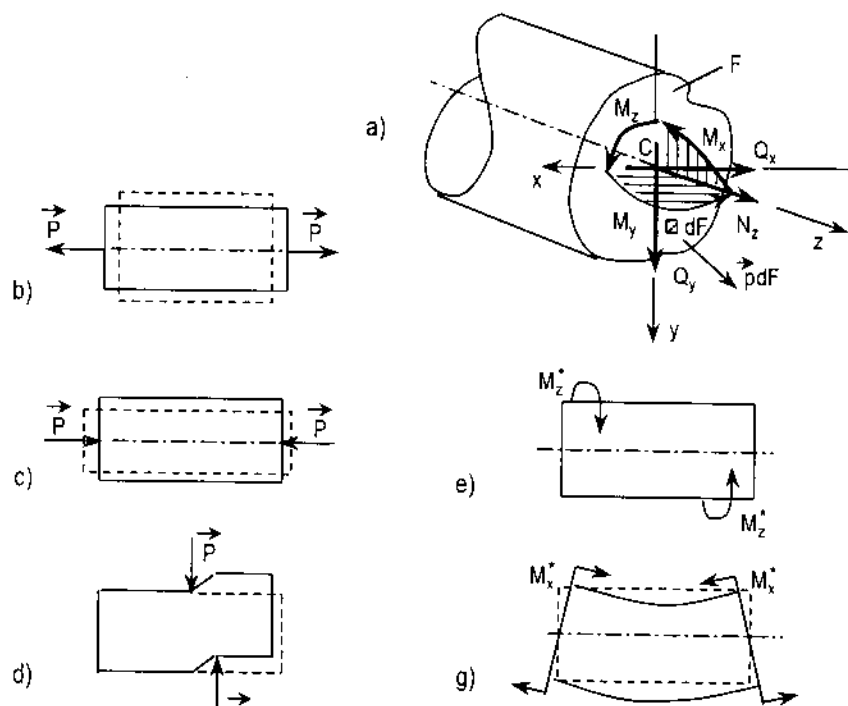
- Trục Cz trùng với trục của thanh.
- Trục Cx hướng về phía người quan sát.
- Trục Cy lập thành một tam diện Cxyz.

Khi thu gọn hệ nội lực tác dụng bất kỳ trên mặt cắt về tâm C ta có 6 thành phần nội lực sau đây:

Lực dọc ký hiệu là	N_z
Lực cắt hay lực ngang ký hiệu là	Q_x và Q_y
Ngẫu lực xoắn có mômen M_z ký hiệu là	M_z
Ngẫu lực uốn có mômen M_u ký hiệu là	M_x và M_y

Trong từng trường hợp cụ thể, một vài yếu tố nội lực có thể không có.

Các yếu tố nội lực xác định loại biến dạng tại tiết diện đang xét. Biến dạng của vật thể nói chung có thể rất phức tạp, song bao giờ cũng là tổ hợp của những biến dạng cơ bản. Tương ứng với các biến dạng cơ bản, ta có bài toán cơ bản sau đây (hình 8-1b, c, d, e, g).



Hình 8-1

1) Kéo (hoặc nén) đúng tâm: nếu hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một lực dọc $N_z \neq 0$.

2) Cắt (hay trượt): nếu hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một lực ngang $Q_x \neq 0$ hoặc $Q_y \neq 0$.

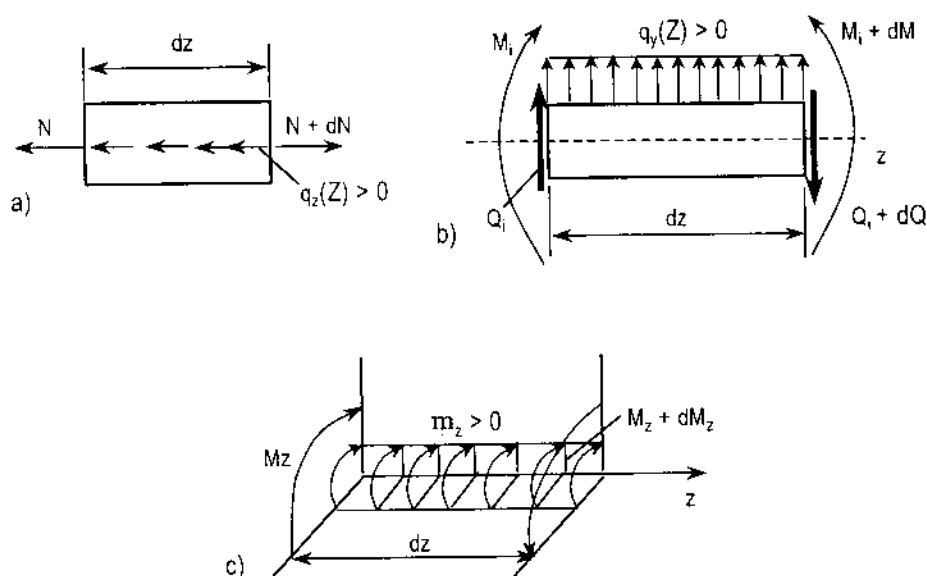
3) Xoắn: nếu hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực nằm trong mặt cắt, ngẫu lực này gọi là ngẫu lực xoắn, mômen của nó ký hiệu là $M_z \neq 0$.

4) Uốn: nếu hệ nội lực ở mặt cắt ngang tương đương với một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt cắt, ngẫu lực này gọi là ngẫu lực uốn, mômen của nó ký hiệu là $M_x \neq 0$ hoặc $M_y \neq 0$.

Để biết loại biến dạng trong từng đoạn thanh và biết tại mặt cắt nào nội lực đạt cực trị (mặt cắt nguy hiểm), người ta vẽ đồ thị của nội lực dọc theo thanh. Đồ thị này gọi là biểu đồ nội lực.

2. Liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực

Xét sự cân bằng của một phần tử thanh chiều dài dz chịu lực tổng quát dương $q_z(z)$, $q_y(z)$, $m_z(z)$ (hình 8-2a, b, c).



Hình 8-2

Từ các điều kiện cân bằng ta rút ra:

$$\Sigma Z_K = 0 \rightarrow q_z(z) = \frac{dN}{dz}$$

$$\Sigma Y_K = 0 \rightarrow q_y(z) = \frac{dQ_y}{dz}$$

$$\Sigma m_{C_2}(\vec{F}_K) = 0 \rightarrow Q_y(z) = \frac{dM_x}{dz} \text{ và } q_y(z) = \frac{d^2 M_x}{dz^2}$$

$$\Sigma m_z(\vec{F}_K) = 0 \rightarrow m_z(z) = \frac{dM_z}{dz}$$

Các kết quả này được phát biểu như sau:

- Đạo hàm cấp một theo phương z tương ứng với $Q_y(z)$, $N(z)$, $M_z(z)$ lần lượt bằng cường độ ngoại lực: $q_y(z)$, $q_z(z)$, $m_z(z)$.
- Đạo hàm cấp một theo z của $M_x(z)$ bằng $Q_y(z)$.
- Đạo hàm cấp hai theo z của $M_x(z)$ bằng $q_y(z)$.

3. Ứng suất

** Ứng suất là nội lực trên một đơn vị diện tích mặt cắt*

Ứng suất tại một điểm có tọa độ x, y trên mặt cắt khảo sát được ký hiệu là:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F}$$

Có thể phân tích ứng suất $\vec{p}$ thành 3 thành phần theo 3 trục tọa độ: σ_z , τ_{zx} và τ_{zy} . Thành phần σ_z theo phương pháp tuyến của mặt cắt gọi là ứng suất pháp, các thành phần τ_{zx} và τ_{zy} nằm trên mặt cắt gọi là ứng suất tiếp. Trong ký hiệu ứng suất tiếp, chỉ số thứ nhất biểu thị phương pháp tuyến của mặt cắt z , còn chỉ số thứ hai biểu thị phương của ứng suất tiếp (x và y).

$$\vec{p} = \vec{\sigma}_z + \vec{\tau}_{zx} + \vec{\tau}_{zy}$$

Khi thu gọn hệ ứng suất này về tâm C của mặt cắt ta có 6 thành phần nội lực (hình 8-1a) như sau:

$$N_z = \int_F \sigma_z \cdot dF \qquad M_x = \int_F \sigma_z \cdot y \cdot dF$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} \cdot dF \quad M_y = \int_F \sigma_z \cdot x \cdot dF$$

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} \cdot dF \quad M_z = \int_F (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y) \cdot dF$$

4. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại 1 điểm

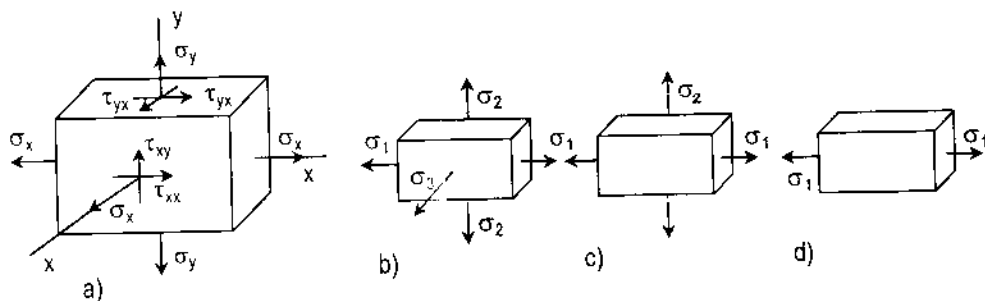
Ta hãy tưởng tượng tách ra quanh một điểm K trong vật thể đàn hồi chịu lực cân bằng một phần tử hình hộp có các cạnh là dx , dy , dz (hình 8-3) khi các cạnh phần tử tiến dần tới 0 thì phần tử thu nhỏ về điểm K. Trên các mặt cắt khác nhau đi qua K các thành phần ứng suất có giá trị khác nhau. Ta có định nghĩa sau đây:

Tập hợp tất cả những ứng suất có thể có trên tất cả các mặt cắt có thể có đi qua một điểm gọi là trạng thái ứng suất tại điểm đó.

Có thể chứng minh rằng tại mỗi điểm của vật thể bao giờ cũng có thể tìm được ba mặt cắt vuông góc với nhau, trên đó chỉ có ứng suất pháp mà không có ứng suất tiếp. Những mặt ấy gọi là mặt chính, phương pháp tuyến của chúng được gọi là các phương chính. Ứng suất pháp trên các mặt ấy được gọi là các ứng suất chính. Những ứng suất chính đồng thời là những ứng suất pháp cực trị của một trạng thái ứng suất. Các ứng suất chính được ký hiệu là σ_1 , σ_2 , σ_3 theo quy ước:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

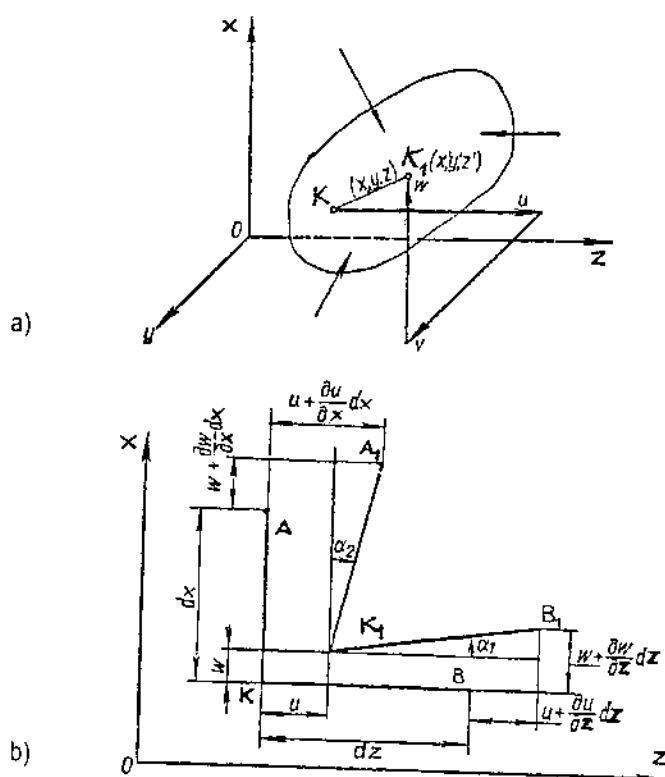
Nếu cả ba ứng suất chính đều khác không thì trạng thái ứng suất ấy được gọi là trạng thái ứng suất khối. Nếu một trong ba ứng suất chính bằng không ta nói đó là trạng thái ứng suất phẳng. Nếu chỉ một trong ba ứng suất chính khác không thì ta có trạng thái ứng suất đơn. Các trạng thái ứng suất này lần lượt được cho trên các hình 8-3a, b, c, d.



Hình 8-3

5. Biến dạng và chuyển vị

Dưới tác dụng của môi trường ngoài (tải trọng, nhiệt độ...) vật thể bị biến dạng. Xét điểm K trong vật thể đó (hình 8-4).



Hình 8-4

Điểm K trước khi biến dạng có tọa độ x, y, z và ở trạng thái biến dạng có vị trí mới K_1 với các tọa độ x', y', z' . Sự thay đổi vị trí của một điểm K như vậy được gọi là chuyển vị của điểm đó. Chuyển vị này gồm hai loại: loại thứ nhất là chuyển vị của vật rắn tuyệt đối (không có biến dạng) và loại thứ hai là chuyển vị liên quan đến biến dạng của vật thể. Trong phần này ta chỉ nghiên cứu loại thứ hai.

Khi bị biến dạng điểm K có vị trí K_1 . Vector $\overrightarrow{KK_1}$ gọi là vector chuyển vị của điểm K có các thành phần theo phương x, y, z là w, v, u . Do đó chuyển vị của điểm A lân cận điểm K có thể viết:

$$w_A = w_K + \frac{\partial w_K}{\partial x} dx$$

Đại lượng $\epsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ gọi là biến dạng dài tỷ đối theo phương x của điểm K.

Tương tự ta có theo các phương y và z các biến dạng:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{và} \quad \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Sự thay đổi góc vuông AKB trong mặt phẳng xOy, tương tự như vậy trong các mặt phẳng còn lại được gọi là biến dạng góc hay biến dạng trượt trong các mặt phẳng đó và ký hiệu là:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

III. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

Để đảm bảo cho hệ làm việc được an toàn về độ bền, độ cứng và độ ổn định thì ta cần phải biết đặc tính ứng xử của từng loại vật liệu trong các điều kiện chất tải khác nhau. Điều này chỉ có thể giải quyết bằng con đường thí nghiệm. Các thí nghiệm này cho ta các đặc trưng bằng số của từng loại vật liệu. Những đặc trưng như thế gọi là đặc trưng cơ học của vật liệu. Từ những đặc trưng này người ta tìm những điều kiện toán học để đảm bảo sự làm việc an toàn cho hệ.

Thí nghiệm thường dùng nhất là thí nghiệm kéo và nén. Vì kết quả của thí nghiệm này có thể ứng dụng cho những trường hợp biến dạng khác nhau. Trong mục này chúng ta lần lượt nghiên cứu các thí nghiệm kéo và nén đối với vật liệu khác nhau.

Các vật liệu cổ điển được chia làm hai loại là vật liệu dẻo và vật liệu giòn.

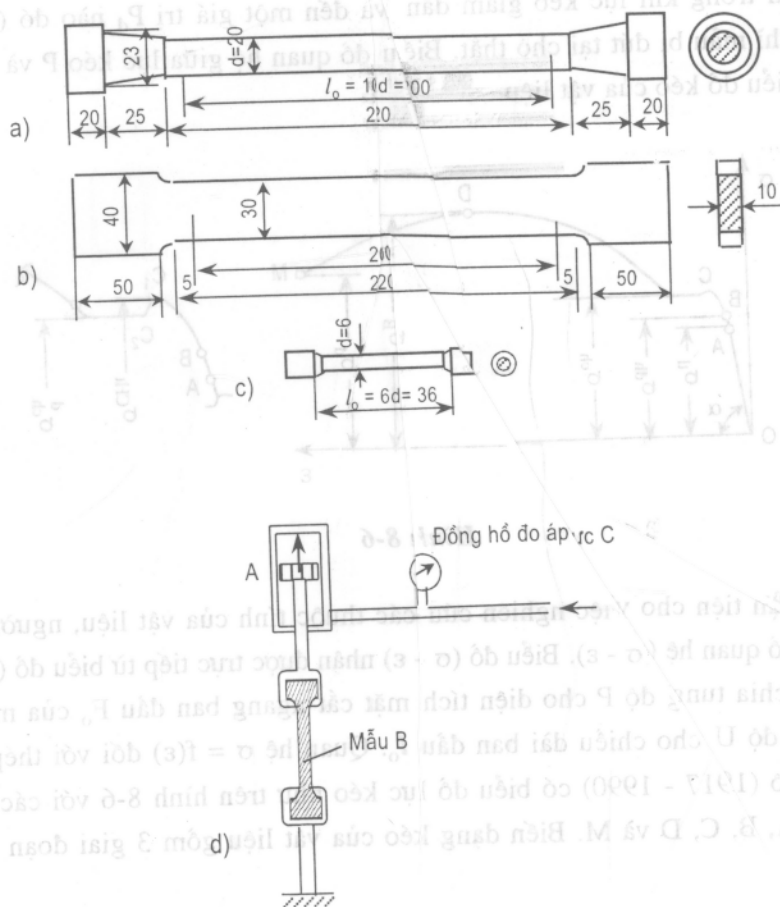
- Vật liệu dẻo là vật liệu có biến dạng dư (biến dạng dẻo) tương đối lớn trước khi cấu kiện bị phá huỷ (như thép, đồng...).

Vật liệu giòn là vật liệu hầu như không có biến dạng dư trước lúc bị phá hỏng (gang, gạch, đá, bê tông v.v...).

Nói một cách chính xác không phải về vật liệu dẻo hay giòn mà là về sự phá huỷ của chúng là phá huỷ dẻo hay giòn.

1. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

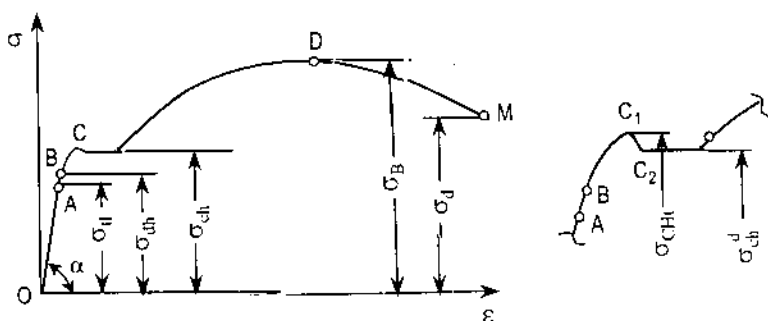
Để tiến hành thí nghiệm trước hết phải chế tạo các mẫu thí nghiệm theo tiêu chuẩn từng nước. Trên hình 8-5 là những mẫu thử tròn và dẹt được dùng ở Việt Nam.



Hình 8-5

Phân thành có chiều dài l_0 gọi là phần làm việc của mẫu. Thiết bị tạo lực kéo mẫu trong thí nghiệm có thể là các thiết bị cơ khí hoặc thủy lực. Hình 8-5d là sơ đồ nguyên lý của máy thí nghiệm có thiết bị thủy lực. Nhờ áp lực dầu trong trụ A tăng lên từ từ mà piston được nâng lên và tạo ra lực kéo trong mẫu B. Lực kéo mẫu có thể xác định bởi giá trị đo trên đồng hồ đo áp lực C.

Để có những kết quả thí nghiệm chuẩn xác, sau khi kẹp chặt mẫu vào máy, người ta cho lực kéo mẫu tăng chậm chậm từ giá trị không. Quá trình biến dạng của mẫu được máy vẽ thành biểu đồ ($\sigma - \epsilon$) trên hình 8-6. Ta thấy chiều dài mẫu tăng dần, chiều ngang hẹp dần cho đến khi, lực kéo P đạt trị số cực đại P_D , thì có một chỗ nào đó trên mẫu bị thắt hẳn lại (ứng với điểm D). Sau đó thanh tiếp tục bị giãn dài trong khi lực kéo giảm dần và đến một giá trị P_M nào đó (ứng với điểm M) thì mẫu bị đứt tại chỗ thắt. Biểu đồ quan hệ giữa lực kéo P và độ giãn U gọi là biểu đồ kéo của vật liệu.



Hình 8-6

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu các thuộc tính của vật liệu, người ta sử dụng biểu đồ quan hệ ($\sigma - \epsilon$). Biểu đồ ($\sigma - \epsilon$) nhận được trực tiếp từ biểu đồ ($P - U$) bằng cách chia tung độ P cho diện tích mặt cắt ngang ban đầu F_0 của mẫu và chia hoành độ U cho chiều dài ban đầu l_0 . Quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ đối với thép CT3 của Liên Xô (1917 - 1990) có biểu đồ lực kéo như trên hình 8-6 với các điểm đặc trưng A, B, C, D và M. Biến dạng kéo của vật liệu gồm 3 giai đoạn chính sau:

** Giai đoạn thứ nhất:*

Vật liệu có tính đàn hồi tuyệt đối, quan hệ $\sigma = f(\epsilon)$ là quan hệ tuyến tính được biểu diễn bởi đoạn thẳng OA:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (8-1)$$

Giai đoạn này gọi là giai đoạn tỷ lệ. Quan hệ (8-1) được gọi là định luật Húc khi kéo. E là môđun đàn hồi dọc (hay young) của vật liệu. Gọi P_{II} là giá trị

lớn nhất của lực kéo trong giai đoạn này và F_0 là diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu thử, ta có:

$$\sigma_{II} = \frac{P_{II}}{F_0} \quad (8-2)$$

Ứng suất σ_{II} gọi là giới hạn tỷ lệ (đối với thép CT3, $\sigma_{II} = 21 \text{ kN/cm}^2 \approx 210 \text{ MN/m}^2$).

Độ dốc của đoạn OA xác định bằng môđun đàn hồi E:

$$\text{tg} \alpha = E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (8-3)$$

Kể từ trên điểm A biểu đồ không còn quan hệ tuyến tính nữa và từ đó định luật Húc mất hiệu lực. Ở rất gần điểm A trên đoạn cung này của biểu đồ có một điểm B, ứng suất ứng với nó ký hiệu là σ_{dh} và được gọi là giới hạn đàn hồi. Trong các tiêu chuẩn kỹ thuật σ_{dh} được xác định khi mà biến dạng dư của mẫu thử đạt được 0,05% và viết $\sigma_{dh} = \sigma_{0,05}$.

** Giai đoạn thứ hai:*

Biến dạng đồng biến với lực chút ít rồi tăng rõ rệt trong khi lực không tăng được nữa (đoạn nằm ngang kể từ C). Ta gọi đoạn này là giai đoạn chảy dẻo. Lực kéo ứng với giai đoạn này được ký hiệu là P_{ch} .

Ứng suất:
$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad (8-4)$$

được gọi là giới hạn chảy (đối với thép CT3, $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2 \approx 240 \text{ kN/m}^2$).

Trong giai đoạn chảy, nếu quan sát mẫu làm bằng thép ít cacbon được mài nhẵn, ta thấy những vết gợn nghiêng với trục thanh một góc 45° . Đó là những vết gây ra do sự trượt giữa các tinh thể vật liệu. Những vết trượt này được gọi là đường Liudertrenop.

** Giai đoạn thứ ba:*

Sau khi kết thúc giai đoạn chảy dẻo, trong vật liệu lại xuất hiện khả năng "tự củng cố". Cụ thể là biến dạng chỉ có thể tăng nếu lực kéo mẫu tăng. Biểu đồ trong giai đoạn này là một đường cong trơn.

Ứng suất ứng với điểm D cao nhất trong giai đoạn này gọi là giới hạn bền.

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (8-5)$$

(đối với thép CT3, $\sigma_B = 40 \text{ kN/cm}^2 \approx 400 \text{ kN/m}^2$).

Sau khi đạt giới hạn bền thì có một chỗ nào đó trên mẫu thử bị thắt lại và từ lúc đó biến dạng tiếp tục tăng nghịch biến với lực cho đến khi mẫu bị đứt ứng với điểm M.

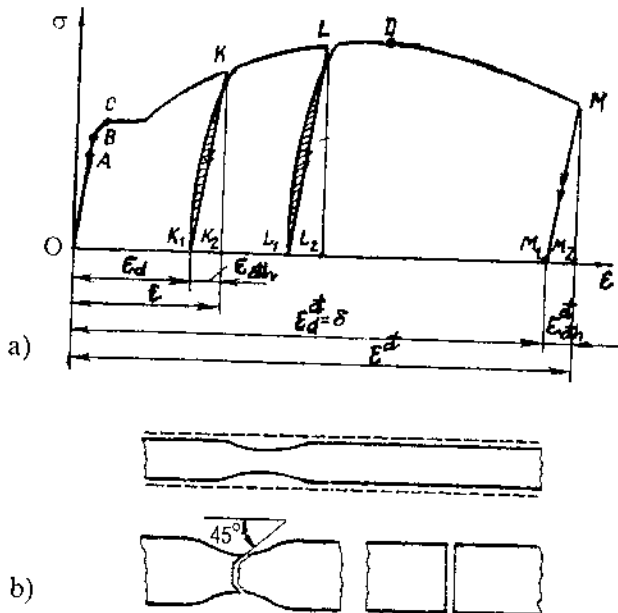
Cần lưu ý rằng giới hạn bền được quy định ở trên chỉ mang một đặc trưng quy ước nào đó. Giới hạn bền này không phải là ứng suất gây ra sự phá huỷ vật liệu. Bởi vì, khi phá huỷ mặt cắt ngang của mẫu thử nhỏ hơn nhiều so với mặt cắt ngang của nó.

Nếu bắt đầu từ một điểm K nào đó trên biểu đồ (hình 8-7), ta hạ tải cho mẫu thì biểu đồ ($\sigma - \epsilon$) diễn ra theo đường KK_1 hầu như song song với đoạn OA. Biến dạng tỷ đối của mẫu ứng với điểm K là:

$$\epsilon = OK_2 = OK_1 + K_1K_2 = \epsilon_d + \epsilon_{dh}$$

trong đó: $OK_1 = \epsilon_d$ là phần biến dạng dư;

$K_1K_2 = \epsilon_{dh}$ là phần biến dạng đàn hồi.



Hình 8-7

Nếu sau khi hạ tải đến điểm K_1 , ta lại tăng tải lên mẫu thì biểu đồ diễn ra theo đường cong K_1KDM thay cho đường cong $OACDM$ ứng với mẫu lúc ban đầu chưa hạ tải lần nào. Qua biểu đồ cho thấy khi đã chất tải vào mẫu quá giới hạn chảy và sau đó là quá trình hạ tải thì thuộc tính cơ học của vật liệu mẫu bị thay đổi. Cụ thể là thêm chảy biến mất, giới hạn tỷ lệ được nâng cao và biến dạng toàn phần khi đứt bị giảm ($K_1M_2 < OM_2$), nghĩa là mẫu thử hình như trở nên giòn hơn. Sự thay đổi thuộc tính như vậy của vật liệu được gọi là hiện tượng (hoá giòn hoặc tái bền) biến cứng nguội.

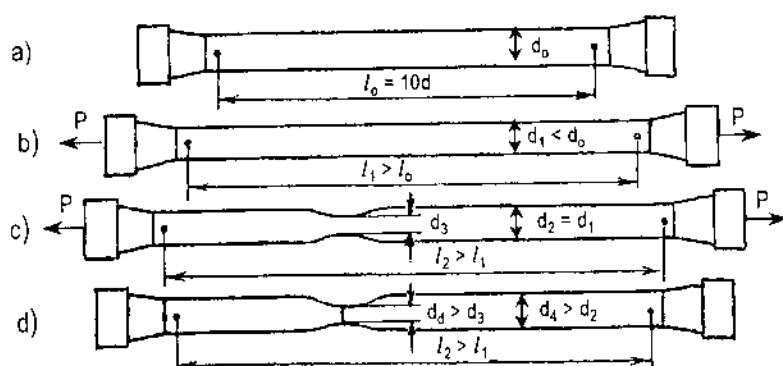
Phần diện tích gạch sọc trên biểu đồ gọi là miền trễ. Hiện tượng tái bền không chỉ phát sinh khi chịu biến dạng kéo (nén) mà còn phát sinh ở bất kỳ biến dạng nào.

Nếu lặp lại quá trình hạ tải rồi tăng tải ở điểm L nào đó thì biểu đồ ($\sigma - \epsilon$) lặp lại hoàn toàn hiện tượng đã mô tả trên.

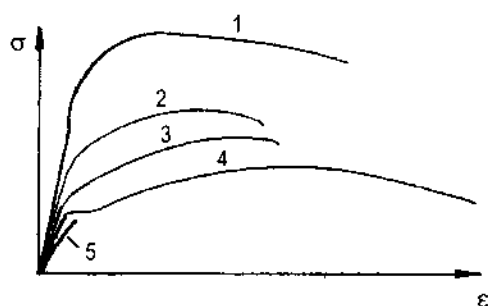
Tính song song của các đoạn OA , K_1K , L_1L , M_1M chứng tỏ là khi hạ tải môđun đàn hồi dọc của vật liệu không thay đổi.

Một vài hình ảnh của một mẫu thử tiêu chuẩn ở những thời điểm khác nhau, khi thử kéo cho trên (hình 8-8). Trong đó:

- a) là hình ảnh mẫu trước thí nghiệm;
- b) là hình ảnh mẫu chịu ứng suất nhỏ hơn giới hạn bền;
- c) là hình ảnh mẫu trước khi đứt;
- d) là hình ảnh mẫu sau khi đứt.



Hình 8-8



Hình 8-9

Sau khi đứt biến dạng đàn hồi không còn nữa, vì thế $l_d < l_2$.

Các ứng suất đặc trưng cho ba giai đoạn biến dạng khảo sát ở trên, cụ thể σ_{tl} , σ_{ch} , σ_B , được gọi là những đặc trưng về độ bền của vật liệu. Để xác định khả năng về biến dạng của vật liệu cho đến lúc đứt, người ta căn cứ vào hai đại lượng sau đây:

- Độ dài dư tương đối của mẫu sau khi đứt:

$$\delta = \frac{l_d - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l_d}{l_0} \quad (8-6)$$

(đối với thép CT3, $\delta = 21 \div 23\%$)

- Độ thắt dư tương đối của mặt cắt ngang nơi bị đứt:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_d}{F_0} = \frac{\Delta F_d}{F_0} \quad (8-7)$$

ở đây: F_0 - diện tích mặt cắt ngang của mẫu trước biến dạng;

F_d - diện tích mặt cắt ngang của mẫu tại chỗ bị đứt

(đối với thép CT3, $\Psi \approx 60 \div 70\%$).

Để thấy rõ đặc điểm làm việc khác nhau trong suốt quá trình biến dạng kéo của những vật liệu khác nhau, ta hãy quan sát và so sánh các biểu đồ kéo được vẽ trên cùng hệ tọa độ ($\sigma - \epsilon$). Trên hình 8-9, đường 1 là thép hợp kim titan (TB4), đường 2 là thép CT6, đường 3 là đũa 16, đường 4 là thép CT3 và đường 5 là biểu đồ kéo một mẫu vật liệu giòn - gang.

Ngày nay việc tạo ra những thép có độ bền cao với tính dẻo dầy đủ là một nhiệm vụ rất quan trọng của các nhà luyện kim. Điều đó cắt nghĩa rằng, khi thép có cường độ cao thì tính dẻo giảm và thép trở nên giòn hơn. Và, nếu như

vậy thì khả năng chịu tải trọng động của loại vật liệu này rất kém. Để khắc phục những mâu thuẫn nói trên, người ta thường pha vào thép những lượng nhất định của các chất phụ trợ như đồng, niken, crôm v.v... Những thép như thế được gọi là thép hợp kim.

2. Thí nghiệm kéo vật liệu giòn

Vật liệu giòn chịu kéo rất kém, nên bị phá hỏng đột ngột ngay khi độ giãn còn rất nhỏ. Nhìn biểu đồ đường 4 (hình 8-10) ta thấy không có giai đoạn tỷ lệ và giai đoạn chảy dẻo, biểu đồ là một đường cong ngay từ khi ứng suất còn rất nhỏ. Tuy vậy, trong giới hạn làm việc, thông thường đối với vật liệu giòn, vẫn có thể áp dụng định luật Húc, nghĩa là thay thế gần đúng đoạn cong của biểu đồ bằng một đoạn thẳng. Với vật liệu giòn ta chỉ có giới hạn bền là:

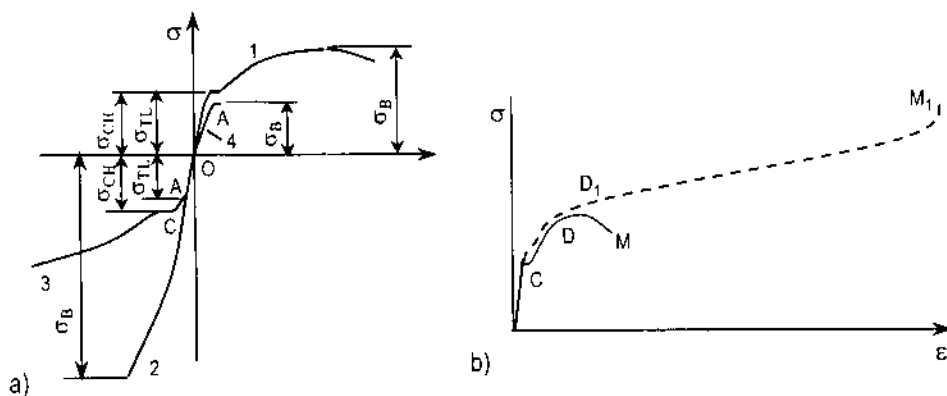
$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (8-8)$$

Nếu đem so sánh với vật liệu dẻo thì giới hạn này rất nhỏ.

Khi bị nén vật liệu cũng bị phá huỷ ngay khi biến dạng còn bé, nhưng giới hạn bền có trị số lớn hơn nhiều so với khi kéo.

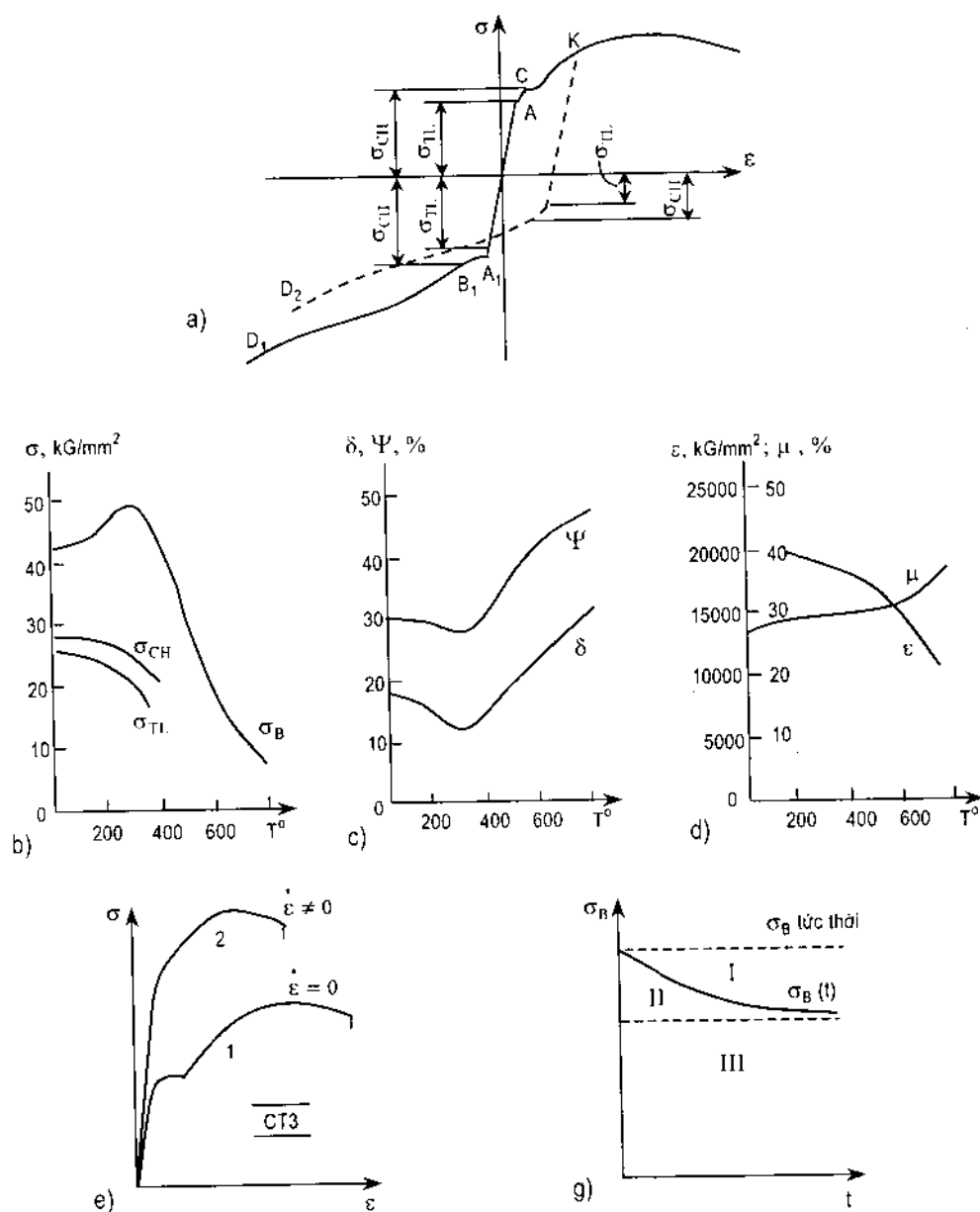
Ví dụ: đối với gang xám, khi kéo $\sigma_{Bk} = 140 \div 130 \text{ kN/mm}^2$, khi nén $\sigma_{Bn} = 600 \div 1000 \text{ kN/mm}^2$.

Biểu đồ ($\sigma - \epsilon$) thực và quy ước đối với thép ít cacbon được cho trên (hình 8-10b). Qua đây ta thấy biểu đồ thực ($\sigma - \epsilon$) chỉ có ý nghĩa lý thuyết. Bởi vì, trong các tính toán thực hành, ứng suất tính toán không được vượt quá giới hạn chảy và trong giới hạn này biểu đồ thực và quy ước trùng nhau.



Hình 8-10

Trên hình 8-11 là các biểu đồ biểu diễn hiệu ứng Bao-xing-ghe (trên hình 8-11a), sự thay đổi của σ_{II} , σ_{CH} , σ_B , δ , Ψ , E , μ (hình 8-11b, c, d) theo nhiệt độ, sự phụ thuộc của ứng suất và biến dạng vào tốc độ chất tải tĩnh (đường 1) và động (đường 2) và sự thay đổi của giới hạn bền σ_B theo thời gian (hình 8-11e, g).



Hình 8-11

3. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU KHI NÉN

Để nghiên cứu sự ứng xử của vật liệu dẻo và giòn khi nén, người ta phải làm các thí nghiệm nén. Các mẫu thử nén bằng kim loại có dạng hình trụ (thông thường $d = h = 20 \text{ mm}$), còn đối với các loại vật liệu khác mẫu thử có dạng hình lập phương cạnh là a .

Đối với gỗ: $a = 50 \text{ mm}$, xi măng $a = 70 \text{ mm}$, bê tông $a = 200 \div 300 \text{ mm}$.

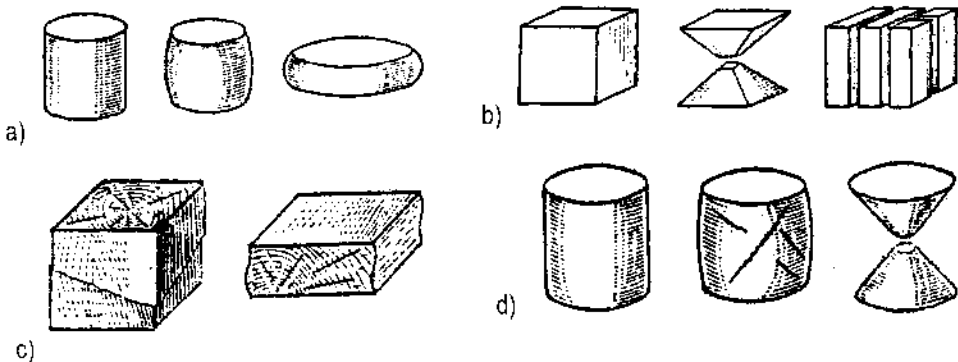
Biểu đồ nén ($\sigma - \epsilon$) của vật liệu dẻo được cho bởi đường 3, còn biểu đồ nén ($\sigma - \epsilon$) của vật liệu giòn được biểu diễn bằng đường 2 trên hình 8-10a. Trên hình 8-12 là hình dạng của các loại mẫu thử dẻo và giòn ở các thời điểm khác nhau trong quá trình biến dạng. Đặc trưng cơ học chủ yếu nhận được từ các thí nghiệm nén này là:

- Vật liệu dẻo có giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy:

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0} \quad \text{và} \quad \sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad (8-9)$$

- Vật liệu giòn chỉ có giới hạn bền:

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (8-10)$$



Hình 8-12

4. HỆ SỐ POISSON

Bằng các thí nghiệm S. D. Poisson đã tìm thấy mối tương quan về độ lớn và dấu giữa biến dạng dọc và biến dạng ngang như sau.

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \cdot \epsilon_z \quad (8-11)$$

μ được gọi là hệ số poisson hay còn là hệ số biến dạng ngang của vật liệu $\mu = 0 \div 0,5$.

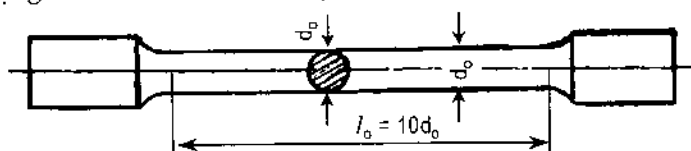
Để giúp bạn đọc có thể tự xác định các thông số chủ yếu của vật liệu mà các bạn gặp trong sản xuất, cũng như tự kiểm tra lại tính đúng đắn của một vài công thức tính toán hoặc trực tiếp kiểm tra sự ứng xử của các kết cấu thực đang làm việc tại hiện trường, chúng tôi giới thiệu một số mẫu bài thí nghiệm cơ bản ở phần dưới đây:

Bài 1

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU Dẻo KHI KÉO ĐỨNG TÂM

I- Vật liệu: Thép cacbon kết cấu.

II- Hình dạng mẫu thử: Mẫu hình trụ có đầu.



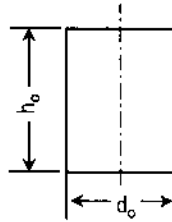
III- Máy thí nghiệm: Máy kéo nén.

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

- | | | |
|--|---|-------------------|
| 1/ Đường kính ban đầu của mẫu | $d_0 =$ | mm |
| 2/ Chiều dài tính toán ban đầu của mẫu | $l_0 =$ | mm |
| 3/ Diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu | $F_0 =$ | mm ² |
| 4/ Lực ứng với giai đoạn chảy | $P_{ch} =$ | N |
| 5/ Lực kéo lớn nhất | $P_{max} =$ | N |
| 6/ Đường kính của mẫu tại chỗ đứt | $d_d =$ | mm |
| 7/ Chiều dài tính toán l_1 sau khi mẫu đứt | $l_d =$ | mm |
| 8/ Diện tích mặt cắt ngang tại chỗ đứt | $F_d =$ | mm ² |
| 9/ Giới hạn chảy vật lý | $\sigma_c = P_{ch} / F_0 =$ | N/mm ² |
| 10/ Giới hạn bền | $\sigma_B = P_{max} / F_0 =$ | N/mm ² |
| 11/ Độ giãn dài | $\delta = (l_1 - l_0) / l_0 \times 100 =$ | % |
| 12/ Độ thắt | $\Psi = (F_0 - F_1) / F_0 \times 100 =$ | % |
| 13/ Đồ thị kéo và hình dạng mẫu sau khi đứt: | | |

Bài 2

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU DẪO KHI NÉN



I- Vật liệu: Thép cacbon kết cấu.

II- Hình dạng mẫu thử: Mẫu hình trụ.

III- Máy thí nghiệm: Máy kéo nén.

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

1/ Đường kính ban đầu của mẫu	$d_0 =$	mm
2/ Chiều cao ban đầu của mẫu	$h_0 =$	mm
3/ Diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu	$F_0 =$	mm ²
4/ Lực ứng với giai đoạn chảy	$P_{ch} =$	N
5/ Lực dừng thí nghiệm	$P_B =$	N
6/ Giới hạn chảy	$\sigma_{ch} = P_{ch} / F_0 =$	N/mm ²
7/ Đồ thị nén và hình dạng mẫu sau khi nén:		

Bài 3

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU GIÒN KHI KÉO

I- Vật liệu: Gang xám.

II- Hình dạng mẫu thử: Mẫu hình trụ (như mẫu kéo thép).

III- Máy thí nghiệm: Máy kéo nén.

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

1/ Đường kính ban đầu của mẫu	$d_0 =$	mm
2/ Diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu	$F_0 =$	mm ²
3/ Lực kéo lớn nhất	$P_{max} =$	N
4/ Giới hạn bền	$\sigma_B = P_{max} / F_0 =$	N/mm ²
5/ Đồ thị kéo và hình dạng mẫu sau khi đứt:		

Bài 4

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU GIÒN KHI NÉN

I- Vật liệu: Gang xám.

II- Hình dạng mẫu thử: Mẫu hình trụ (như mẫu nén thép).

III- Máy thí nghiệm: Máy kéo nén.

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

1/ Đường kính ban đầu của mẫu	$d_0 =$	mm
2/ Diện tích mặt cắt ngang ban đầu của mẫu	$F_0 =$	mm ²
3/ Lực kéo lớn nhất	$P_{\max} =$	N
4/ Giới hạn bền	$\sigma_B = P_{\max} / F_0 =$	N/mm ²
5/ Đồ thị nén và hình dạng mẫu sau khi nén:		

Bài 5

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU DẪO KHI XOẮN

I- Vật liệu: Thép cacbon kết cấu

II- Hình dạng mẫu thử: Mẫu hình trụ (như mẫu kéo thép).

III- Máy thí nghiệm: Máy xoắn K50.

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

1/ Đường kính ban đầu của mẫu	$d_0 =$	mm
2/ Mômen chống xoắn	$W_p = 0,2d_0^3$	mm ³
3/ Mômen xoắn ứng với giai đoạn chảy	$M_c =$	Nmm
4/ Mômen xoắn lớn nhất	$M_{\max} =$	Nmm
5/ Giới hạn chảy	$\tau_{ch} = M_c / W_p =$	N/mm ²
6/ Giới hạn bền	$\tau_B = 3/4 \cdot M_{\max} : W_p =$	N/mm ²
7/ Góc xoắn tương đối lớn nhất	$\varphi_{AB} =$	Độ
8/ Đồ thị xoắn và hình dạng mẫu sau khi đứt:		

Bài 6

TÍNH CHẤT CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU GIÒN KHI XOẮN

I- Vật liệu: Gang xám

II- Hình dạng mẫu thử: Mẫu hình trụ (như mẫu kéo thép).

III- Máy thí nghiệm: Máy xoắn K50.

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

1/ Đường kính ban đầu của mẫu	$d_0 =$	mm
2/ Mômen chống xoắn	$W_p = 0,2d_0^3$	mm ³
3/ Mômen xoắn lớn nhất	$M_{\max} =$	Nmm
4/ Giới hạn bền	$\tau_B = 3/4 \cdot M_{\max} : W_p =$	N/mm ²
5/ Góc xoắn tương đối lớn nhất	$\varphi_{AB} =$	Độ
6/ Đo độ xoắn và hình dạng mẫu sau khi xoắn đứt:		

Bài 7

XÁC ĐỊNH MÔĐUN ĐÀN HỒI E CỦA VẬT LIỆU KHI KÉO

I- Công thức tính E:

$$E = \frac{N_z \cdot l}{\Delta l \cdot F_0} \quad \text{N/cm}^2$$

N_z : lực dọc;

l : chiều dài chuẩn đo;

F_0 : diện tích mặt cắt ngang của mẫu;

Δl : độ giãn dài của l .

Vậy để xác định E ta đo Δl .

II. Vật liệu: Thép cacbon kết cấu.

III. Hình dạng, kích thước mẫu và sơ đồ thí nghiệm (xem hình)

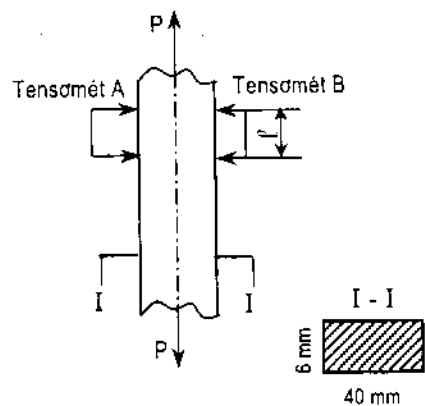
IV- Dụng cụ đo độ giãn: tensomet tròn có độ khuếch đại $K = 1000$
(giá trị 1 khoảng chia trên thang đo $\approx 0,001$ mm).

V- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

$$l = 100 \text{ mm}$$

$$F_0 = 6,40 \text{ mm}^2$$

$$N_z = \Delta P \text{ (N)}$$



TT i	Tải trọng P_i (N)	Tensomet A		Tensomet B	
		Số đọc (khoảng và vạch) A_i	Hiệu các số đọc ($\Delta A_i = A_i - A_{i-1}$)	Số đọc (khoảng và vạch) B_i	Hiệu các số đọc ($\Delta B_i = B_i - B_{i-1}$)
0					
1					
2					
3					
4					
5					

Hiệu số trung bình: $\Delta A_{tb} = (\Sigma \Delta A_i)/n =$ $\Delta B_{tb} = (\Sigma \Delta B_i)/n =$

Độ giãn dài: $\Delta l = (\Delta A_{tb} + \Delta B_{tb})/(2 \cdot K) =$ mm

$E =$ N/cm²

Bài 8

XÁC ĐỊNH MÔĐUN ĐÀN HỒI TRƯỢT G CỦA VẬT LIỆU

I- Công thức tính G:

$$G = \frac{M_z \cdot l_{AB}}{\varphi_{AB} \cdot J_P} \quad \text{N/cm}^2$$

Trong đó: M_z - Mômen xoắn;

l_{AB} - Khoảng cách giữa 2 mặt cắt ngang A và B;

J_P - Mômen quán tính độc cực, $J_P = \pi d^4/32 \text{ mm}^2$

(d - đường kính mặt cắt ngang của mẫu);

φ_{AB} - góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ngang A và B.

Do đó để xác định G ta đo φ_{AB} , $\varphi_{AB} = \varphi_B - \varphi_A$.

II- Vật liệu: Thép cacbon kết cấu.

III- Hình dạng mẫu và sơ đồ thí nghiệm (xem hình)

IV- Dụng cụ đo: Chuyển vị kế cấp chính xác 0,01 mm (giá trị mỗi khoảng chia trên mặt số $\approx 0,01$ mm di chuyển thẳng).

V- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

$$l_{AB} = 300 \text{ mm}$$

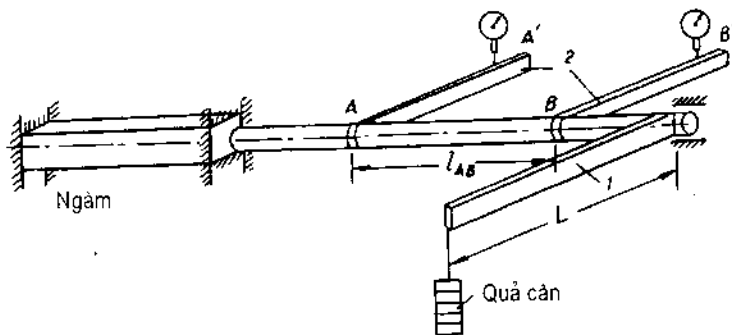
$$L = 300 \text{ mm}$$

$$\Delta P = 10 \text{ N}$$

$$l = 200 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

$$M_z = L \cdot \Delta P \text{ Nmm}$$



TT i	Tải trọng P_i (N)	Chuyển vị kể A		Chuyển vị kể B	
		Số đọc (khoảng và vạch) A_i	Hiệu các số đọc ($\Delta A_i = A_i - A_{i-1}$)	Số đọc (khoảng và vạch) B_i	Hiệu các số đọc ($\Delta B_i = B_i - B_{i-1}$)
0	10				
1	20				
2	30				
3	II				
4	II				

$$\text{Hiệu số trung bình: } \Delta A_{tb} = (\sum \Delta A_i) / n =$$

$$\Delta B_{tb} = (\sum \Delta B_i) / n =$$

$$\varphi_A \approx \tan \varphi_A = A'A''/AA' = \Delta A_{tb} / (l \cdot K); \text{ tương tự với } \varphi_B.$$

$$G = \text{N/mm}^2$$

Bài 9

NGHIỆM LẠI CÔNG THỨC TÍNH $\sigma_{\max, \min}$ TRONG UỐN PHẪNG THUẦN TUY

$$* \text{ Lý thuyết: } \sigma_{\max, \min} = \pm |M_x / W_x| \quad (1)$$

trong đó: M_x - Mômen uốn quay quanh trục x;

W_x - Mômen chống uốn của mặt cắt ngang đối với trục x; $W_x = bh^2/6$

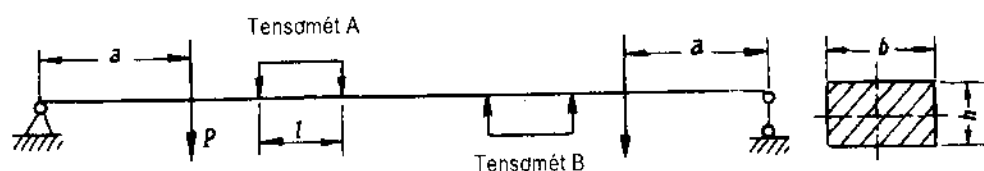
* Định luật Húc: $\sigma_{\max, \min} = E \cdot \varepsilon_{\max, \min}$ (2)

Trong đó: E - Môđun đàn hồi của vật liệu.

$$\varepsilon_{\max, \min} = \Delta l_{\max, \min} / l$$

I- Vật liệu: Thép cacbon kết cấu.

II- Hình dạng mẫu và sơ đồ thí nghiệm:



III- Dụng cụ đo: Tensomét đòn có độ khuếch đại K = 1000.

(1 khoảng trên thang đo $\approx 0,001$ mm).

IV- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

$$a = \text{ mm} \quad b = \text{ mm} \quad M_x = P \cdot A \text{ (Nmm)}$$

$$l = 100 \text{ mm} \quad h = \text{ mm}$$

TT i	Tải trọng (N)	Tensomét A		Tensomét B	
		Số đọc	Hiệu các số đọc	Số đọc	Hiệu các số đọc
0					
1					
2					
3					
4					
5					

$$\text{Hiệu số trung bình: } \Delta A_{tb} = (\Sigma \Delta A_i) / n =$$

$$\Delta B_{tb} = (\Sigma \Delta B_i) / n =$$

$$\Delta l_{\min} = \Delta A_{tb} / K = \text{ mm}$$

$$\Delta l_{\max} = \Delta B_{tb} / K = \text{ mm}$$

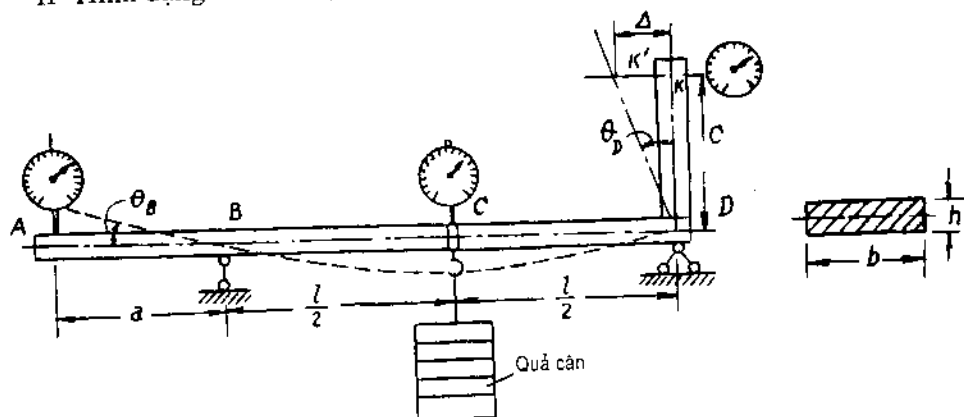
Tính $\sigma_{\max, \min}$ theo (1) và (2).

Bài 10

ĐO ĐỘ VỒNG VÀ GÓC XOAY CỦA DẦM KHI UỐN PHẪNG (NGHIỆM LẠI CÔNG THỨC TÍNH GÓC XOAY VÀ ĐỘ VỒNG)

I- Vật liệu: Thép cacbon kết cấu.

II- Hình dạng mẫu và sơ đồ thí nghiệm:



III- Nội dung thí nghiệm: 1/ Độ võng tại A và C

2/ Góc xoay tại D.

IV- Dụng cụ đo: Chuyển vị kế có giá trị 1 khoảng chia $\approx 0,01$ mm.

V- Số liệu và kết quả thí nghiệm:

a = mm

l = mm

c = mm

h = mm

b = mm

$M_x = P.l/4$ Nmm

Tải trọng P (N)	Chuyển vị kế A		Chuyển vị kế C		Chuyển vị kế D	
	Số đọc	Hiệu các số đọc	Số đọc	Hiệu các số đọc	Số đọc	Hiệu các số đọc

VI- Tính độ võng và góc xoay theo lý thuyết: $J_x = b.h^3/12$

1/ Độ võng tại A: $V_A = a.tg\theta_B =$

2/ Độ võng tại C: $V_C = P.l^3 / (48.E.J_x) =$

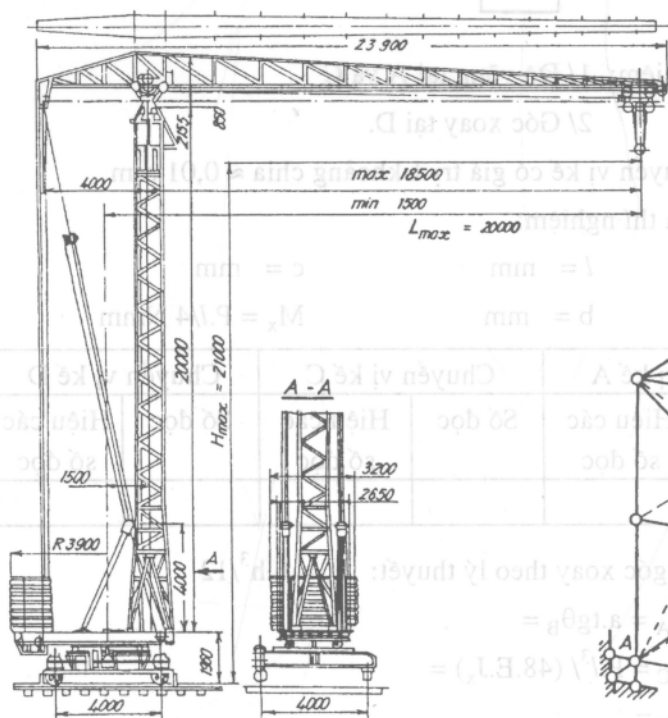
3/ Góc xoay tại D: $\theta_D =$

VII- So sánh và nhận xét về kết quả thực nghiệm và lý thuyết:

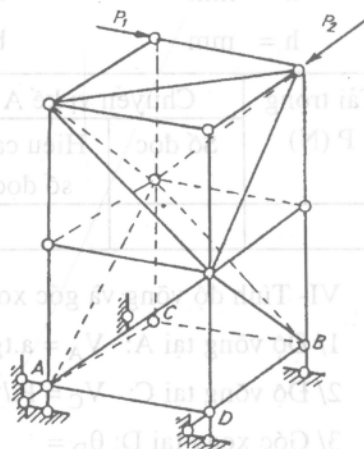
KÉO VÀ NÉN ĐÚNG TÂM

I. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA

Hiện tượng kéo và nén rất hay gặp trong các chi tiết máy và cấu kiện công trình. Ví dụ, hiện tượng kéo phát sinh trong các nhánh căng của dây đai trong truyền động đai, trong mối ghép ren không xiết giữa vít và đai ốc. Mối ghép ren của móc cần trục là một ví dụ của loại mối ghép này. Hiện tượng nén xuất hiện trong các ống khói nhà máy do trọng lượng bản thân gây ra v.v... Thiết bị trên hình 9-1 và hình 9-2 là những kết cấu giàn rất hay gặp trong cơ khí và xây dựng. Tất cả các thanh, dây trong các kết cấu này đều là những chi tiết chịu lực kéo hoặc nén.

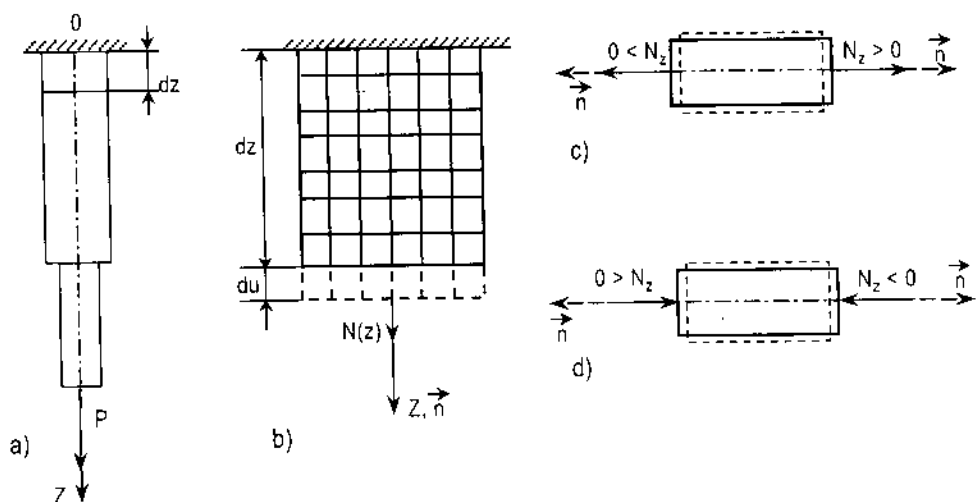


Hình 9-1



Hình 9-2

Giả sử ta có một thanh chịu kéo như hình 9-3a.



Hình 9-3

Để thống nhất cách viết, ta dùng các ký hiệu:

{ } - biểu diễn vectơ, ví dụ {S} biểu diễn vectơ $\vec{S}$.

[] - biểu diễn ma trận.

Ta hãy xét một đoạn thanh chịu kéo có chiều dài dz (hình 9-3b).

Hệ nội lực trên các mặt cắt ngang của cấu kiện nói trên tương đương với (một) lực dọc N trùng với trục của thanh. Nếu $\{N\} \cdot \{n\} > 0$, ta nói thanh chịu kéo, còn nếu $\{N\} \cdot \{n\} < 0$ ta nói thanh chịu nén. Trong đó $\{n\}$ là vectơ pháp tuyến ngoài của mặt cắt ngang (hình 9-3b, c, d).

Vậy ta có định nghĩa sau:

Một thanh được gọi là chịu kéo hoặc chịu nén đúng tâm nếu trên mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N trùng với trục của thanh, còn tất cả các thành phần nội lực khác đều bằng 0.

II. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

1. Các giả thiết tính toán

a) Mặt cắt ngang của thanh trước và sau biến dạng vẫn luôn luôn phẳng và vuông góc với trục của thanh.

b) Trong quá trình biến dạng các thớ dọc luôn luôn thẳng, song song với trục của thanh và không tác dụng tương hỗ lên nhau (hình 9-3b).

2. Ứng suất và biến dạng

Theo các giả thiết ở trên được rút ra từ thí nghiệm thì trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có biến dạng dài tỷ đối theo phương trục z và là hằng với mọi điểm trên mặt cắt, nghĩa là:

$$\varepsilon = \frac{du}{dz} = \text{const} \quad (a)$$

Theo định luật Húc (được tìm ra bằng thí nghiệm) thì quan hệ $\sigma = f(\varepsilon)$ có dạng:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{du}{dz} = \text{const} \quad (b)$$

Mặt khác:

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F \text{ hay } \sigma = \frac{N}{F} \quad (9-1)$$

Từ (b) và (9-1) ta rút ra phương trình vi phân của chuyển vị dọc trục $u(z)$ như sau:

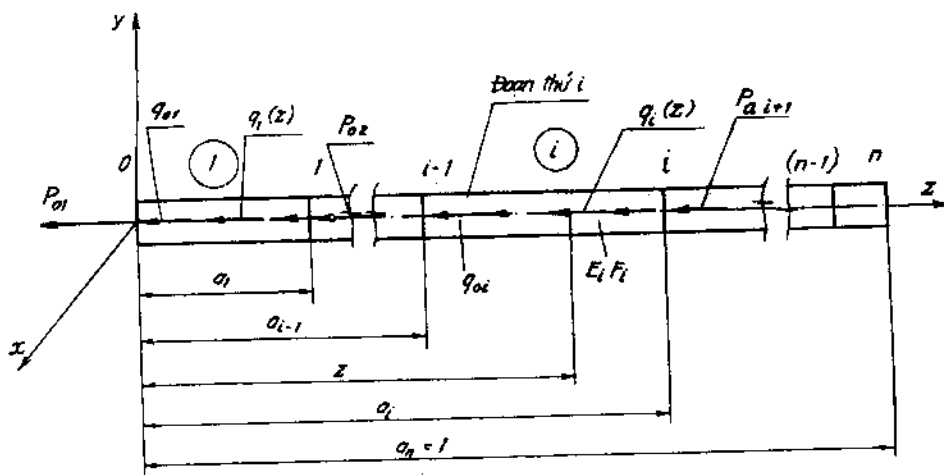
$$\varepsilon = \frac{du}{dz} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF} \quad (9-2)$$

trong đó $N(z)$, $F(z)$, $u(z)$ lần lượt là nội lực dọc, diện tích mặt cắt ngang và chuyển vị dọc trục z tại mặt cắt có hoành độ z .

III. PHƯƠNG PHÁP VẬN NĂNG ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ VÀ NỘI LỰC

Chúng ta khảo sát một thanh chiều dài l gồm n đoạn chịu lực dọc trục thanh. Để thống nhất và tiện sử dụng, các đại lượng cần tính của thanh được thiết lập trong hệ trục tọa độ Oxyz. Gốc tọa độ "O" luôn được đặt cố định ở đầu trái của thanh, các mặt cắt phân chia các đoạn được đánh số là "i" ($i = 1, 2, \dots, n$). Tên gọi của một đoạn thanh mang số hiệu nút cuối phải của nó (hình 9-4). Tất cả các ngoại lực tác dụng dọc theo trục thanh được cho trên hình vẽ này và quy ước là dương (điều này là cần thiết để phù hợp với quy ước dấu của nội lực dọc $N(z)$). Đầu trái của đoạn i được ký hiệu là O_i như là gốc tọa độ địa phương

của đoạn i có chiều dài $l_i = a_i - a_{i-1}$, mặt cắt ngang F_i và môđun đàn hồi kéo (nén) là E_i (hình 9-6).



Hình 9-4

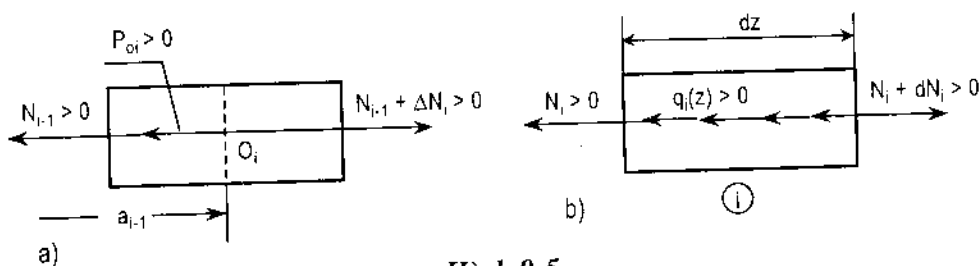
1. Liên hệ vi phân giữa nội lực, chuyển vị và tải trọng ngoài

Xét điều kiện cân bằng của các đoạn thanh dz (hình 9-5a,b). Các điều kiện cân bằng của các đoạn thanh này và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta kết quả (9-3). Bằng cách đạo hàm liên tiếp hai vế của phương trình (9-2) ta có hệ thống (9-4).

$$\Delta N_i = P_{0i} \quad \frac{dU_i}{dz} = \frac{N_i}{E_i F_i}$$

$$\frac{dN_i}{dz} = q_i(z) \quad \frac{d^2 U_i}{dz^2} = \frac{q_i(z)}{E_i F_i} \quad (9-4)$$

$$\frac{d^n N_i}{dz^n} = q_i^{(n-1)}(z) \quad \frac{d^n U_i}{dz^n} = \frac{q_i^{(n-2)}(z)}{E_i F_i}$$

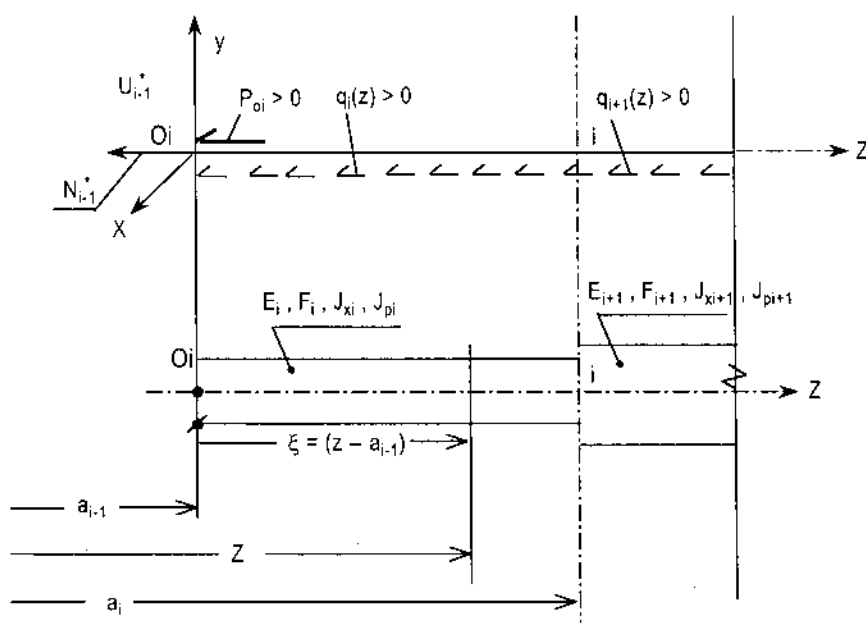


Hình 9-5

2. Phương trình vận năng của chuyển vị dọc trục $U(z)$ và lực dọc $N(z)$

2.1. Dạng ma trận

Xét một đoạn thanh thứ “i” có chiều dài l_i , độ cứng $E_i F_i$ chịu tải trọng phân bố dọc trục $q_i(z)$ và tại đầu trái chịu tác dụng của các yếu tố tập trung như lực P_{oi} , chuyển vị $\bar{u}_{oi}$ cho trước và các thành phần nội lực, chuyển vị của các đoạn thanh phía trái có chiều dài a_{i-1} (hình 9-6).



Hình 9-6

Khi sử dụng các quan hệ (9-3) và (9-4), người ta có thể bằng nhiều cách tìm được nghiệm chuyển vị $U_i(z)$ và nội lực $N_i(z)$ trong đoạn này (khai triển Taylor là một trong những khả năng như vậy):

$$U_i(z) = U_{oi} \Phi_0 + N_{oi} \frac{\Phi_1}{E_i F_i} + q_{oi} \frac{\Phi_2}{E_i F_i} + q'_{oi} \frac{\Phi_3}{E_i F_i} + q''_{oi} \frac{\Phi_4}{E_i F_i} + \dots$$

$$N_i(z) = 0 + N_{oi} \Phi_0 + q_{oi} \Phi_1 + q'_{oi} \Phi_2 + q''_{oi} \Phi_3 + \dots \quad (9-5)$$

trong đó, U_{oi} , N_{oi} , q_{oi} , q'_{oi} , ..., $q_{oi}^{(n)}$ lần lượt là các thông số trạng thái tại đầu trái “O_i” của thanh “i” do tác dụng đồng thời của cả hai phần thanh a_{i-1} và a_i

gây ra. Các hàm Φ_k ($k = 0, \dots, n$) trong (9-5) được định nghĩa như sau:

$$\Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{khi } z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{khi } a_{i-1} > z \geq 0 \end{cases} \quad (9-5a)$$

Dưới dạng ma trận, (9-5) được viết:

$$\{S_i\}(z) = [B_i]\{S_{oi}\} \quad (9-6)$$

$\{S_{oi}\}$ là vectơ chỉ các thông số trạng thái tại đầu trái “O_i” của đoạn “i” được khảo sát khi đã loại bỏ phần thanh a_{i-1} và thay vào đó tác dụng của phần thanh a_{i-1} đã bỏ đi và các thông số trạng thái ở “O_i” chỉ do tác dụng ngoài trên đoạn “i” gây ra.

$[B_i]$ là ma trận biến đổi của đoạn i.

$\{S_i(z)\}$ là vectơ chỉ các đại lượng cần tính tại mặt cắt z thuộc đoạn “i”.

Cụ thể là:

$$\{S_{oi}\} = \{U_{oi}, N_{oi}, q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi}, \dots\}^T \quad (9-6a)$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i F_i} & \frac{\Phi_2}{E_i F_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} & \frac{\Phi_4}{E_i F_i} & \frac{\Phi_5}{E_i F_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \dots \end{bmatrix} \quad (9-6b)$$

$$\{S_i\} = \begin{Bmatrix} U_i(z) \\ N_i(z) \end{Bmatrix} \quad (9-6c)$$

Nếu gọi $[B_i^*]$ là ma trận nhận được từ $[B_i]$ khi thay hiệu $(z - a_{i-1})$ bằng chiều dài l_i của đoạn này thì $\{S_i\}$ trở thành $\{S_i^*\}$ và được viết:

$$\{S_i^*\} = [B_i^*].\{S_{oi}\} \quad (9-7)$$

Khi ký hiệu $\Delta\{S_{oi}\}$ là các thông số trạng thái ở đầu trái “O_i” của đoạn “i” chỉ do các tác dụng ngoài trên đoạn này gây ra và $\{S_{i-1}^*\}$ là vectơ các thông số trạng thái U_{i-1}^* và N_{i-1}^* tại nút cuối phải đoạn (i-1) thì quan hệ (9-6) và (9-7) được viết:

$$\{S_i(z)\} = [B_i].(\{S_{i-1}^*\} + \Delta\{S_{oi}\}) = [B_i].\{S_{i-1}^*\} + [B_i].\Delta\{S_{oi}\} \quad (9-8)$$

$$\{S_i^*(a_i)\} = [B_i^*].\{S_{i-1}^*\} + [B_i^*].\Delta\{S_{oi}\} \quad (9-9)$$

Đối với đoạn “1” ta có:

$$\{S_1(z)\} = [B_1].\Delta\{S_{01}\} \quad (\text{ở đây } \{S_{-1}^*\} = \{S_0^*\} = 0)$$

và
$$\{S_1^*(a_1)\} = [B_1^*].\Delta\{S_{01}^*\}$$

Đối với đoạn “2” ta có:

$$\{S_2(z)\} = [B_2].[B_1^*].\Delta\{S_{01}\} + [B_2].\Delta\{S_{02}\}$$

và
$$\{S_2^*(a_2)\} = [B_2^*].[B_1^*].\Delta\{S_{01}\} + [B_2^*].\Delta\{S_{02}\}$$

Bằng cách thay thế liên tiếp, ta thiết lập được công thức tổng quát để xác định các đại lượng cần tính cho thanh có n đoạn độ cứng khác nhau dưới dạng:

$$\{S_n(z)\} = [B_n].[B_{n-1}^*]...[B_1].\Delta\{S_{01}\} + [B_n].[B_{n-1}^*]...[B_2^*].\Delta\{S_{02}\} + ... + [B_n].\Delta\{S_{0n}\} \quad (9-10)$$

$$\{S_n^*(a_n)\} = [B_n^*].[B_{n-1}^*]...[B_1^*].\Delta\{S_{01}\} + [B_n^*].[B_{n-1}^*]...[B_2^*].\Delta\{S_{02}\} + ... + [B_n^*].\Delta\{S_{0n}\} \quad (9-11)$$

trong đó:

$$\Delta\{S_{0i}\} = \{\bar{U}_{0i}, \bar{N}_{0i} = P_{0i}, q_{0i}, q'_{0i}, q''_{0i} \dots\}^T, i = \overline{1, n}$$

Đối với thanh có cấu tạo liên tục qua các mặt cắt chuyển đoạn thì $U_{0i} = 0$ với $i > 1$.

Trong đó:

$\bar{U}_{0i}$ là chuyển vị tương đối của mặt cắt “O_i” thuộc đoạn i so với mặt cắt đầu phải của đoạn a_{i-1} ;

$P_{0i}, q_{0i}, q'_{0i}, q''_{0i} \dots$ lần lượt là lực dọc trục tập trung, lực phân bố và các đạo hàm các cấp của lực phân bố ở đầu trái đoạn i.

Khi $E_i F_i = \text{const}$ và $I_i = \text{const}$ với mọi “i” các phương trình (9-10) và (9-11) được thu về:

$$\{S_n(z)\} = [B_n].[B^*]^{n-1}.\Delta\{S_{01}\} + [B_n].[B^*]^{n-2}.\Delta\{S_{02}\} + ... + [B_n].[B^*].\Delta\{S_{0,n-1}\} + [B_n].\Delta\{S_{0n}\} \quad (9-12)$$

$$\{S_n^*(a_n)\} = [B^*]^n.\Delta\{S_{01}\} + [B^*]^{n-1}.\Delta\{S_{02}\} + ... + [B^*].\Delta\{S_{0n}\} \quad (9-13)$$

2.2. Dạng biểu diễn tổng

Trong nhiều trường hợp các đại lượng cần tính được biểu diễn dưới dạng tổng lại tỏ ra thuận lợi hơn. Vì vậy, khi $EF = \text{const}$ với mọi “i” thì phương trình (9-10) có dạng tổng quát như sau:

$$U(z) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta U_{oi} \Phi_0 + P_{oi} \frac{\Phi_1}{EF} + \Delta q_{oi} \frac{\Phi_2}{EF} + \Delta q'_{oi} \frac{\Phi_3}{EF} + \dots \right) \quad (9-14a)$$

$$N(z) = \sum_{i=1}^n (P_{oi} \Phi_0 + \Delta q_{oi} \Phi_1 + \Delta q'_{oi} \Phi_2 + \Delta q''_{oi} \Phi_3 + \dots) \quad (9-14b)$$

trong đó:

$\Delta U_{oi} = U_{oi+} - U_{oi-}$ là bước nhảy của chuyển vị dọc trục tại đầu trái đoạn i ;

P_{oi} là lực tập trung theo phương z tại đầu trái đoạn i ;

$\Delta q_{oi}, \Delta q'_{oi}, \Delta q''_{oi} \dots$ lần lượt là bước nhảy của tải trọng phân bố $q(z)$ và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của $q(z)$ tại đầu trái đoạn i :

$$\Delta q_{oi} = q_{oi+} - q_{oi-}$$

Đối với thanh có cấu tạo liên tục ($\Delta U_{oi} = 0$ với $i > 1$). Các công thức từ (9-10) đến (9-14) cho thấy, để tính được chuyển vị và nội lực thì phải biết rõ tất cả các thành phần vectơ $\Delta\{S_{oi}\}$ dù đó là thanh siêu tĩnh hay tĩnh định. Trong số các thành phần của vectơ $\Delta\{S_{oi}\}$ thì các đại lượng $q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi} \dots$ được biết trước từ điều kiện chất tải, còn một trong hai đại lượng U_{oi} và P_{oi} hoặc đã biết từ điều kiện liên kết hoặc đã biết từ điều kiện chất tải tập trung tại mặt cắt “ $i-1$ ”. Đại lượng chưa biết còn lại nhận được từ điều kiện liên kết của thanh với môi trường xung quanh (các điều kiện biên). Khi sử dụng các phương trình vạn năng đã thiết lập sẵn ở trên, trong nhiều trường hợp không cần một phương trình phụ nào để xác định $\Delta\{S_{oi}\}$, nếu chỉ muốn xác định nội lực. Thuật toán xác định chuyển vị và nội lực trong các thanh đàn hồi chịu lực mà thanh chịu kéo (nén) là một trường hợp riêng vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình máy tính bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán bằng chương trình BK45 của tác giả được viết bằng ngôn ngữ Pascal 7.0 nhờ thuật toán này được cho ở cuối chương này.

IV. ỨNG SUẤT CHO PHÉP, ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ CỨNG

1. Ứng suất cho phép

Để đảm bảo sự làm việc an toàn, ứng suất lớn nhất phát sinh trong thanh phải nhỏ hơn giới hạn chịu lực của vật liệu. Ta gọi giới hạn chịu lực này là ứng suất nguy hiểm σ_0 .

Với vật liệu dẻo thường chọn giới hạn chảy làm ứng suất nguy hiểm $\sigma_o = \sigma_{ch}$ để chi tiết không bị biến dạng quá lớn khi làm việc, còn đối với vật liệu giòn thường chọn giới hạn bền $\sigma_o = \sigma_B$. Nhưng để đảm bảo an toàn cần phải hạn chế ứng suất lớn nhất có thể xuất hiện trong chi tiết máy hoặc kết cấu do tác dụng ngoài gây ra sao cho không vượt quá một trị số nhỏ hơn ứng suất nguy hiểm. Trị số này gọi là ứng suất cho phép.

Ứng suất cho phép được ký hiệu là $[\sigma]$ và được xác định theo công thức:

$$[\sigma] = \frac{l}{n} \sigma_o \quad (9-15)$$

trong đó:

σ_o là ứng suất nguy hiểm, n được gọi là hệ số an toàn về bền ($n > 1$).

Muốn chọn hệ số an toàn một cách đúng đắn cần kể đến những nguyên nhân dẫn đến sự không an toàn của chi tiết máy hay kết cấu như:

- Tính chất của vật liệu: dẻo hay giòn, đồng chất nhiều hay ít. Tính chất phân tán của σ_{ch} và σ_B tìm được bằng thí nghiệm.
- Tính chất quan trọng và thời gian sử dụng của thiết bị và công trình.
- Tính chất của tác dụng ngoài (tĩnh hay động, ...) và độ chính xác của việc xác định chúng.

2. Điều kiện bền - ba bài toán thường gặp

Muốn đảm bảo sự làm việc an toàn khi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thoả mãn điều kiện:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (9-16)$$

Điều kiện này được gọi là điều kiện bền.

Từ bất đẳng thức trên, ta có thể gặp ba bài toán cơ bản sau đây:

a) Kiểm tra bền

Kiểm tra bền là bài toán kiểm tra điều kiện (9-16) đối với mọi mặt cắt của thanh, cụ thể là:

$$\sigma_{\max(\min)} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma]_{k(n)} \quad (9-17)$$

trong đó: .

$[\sigma]_{k(n)}$ - ứng suất cho phép khi kéo (k) hoặc nén (n).

b) Chọn kích thước mặt cắt

Yêu cầu của bài toán này là xác định kích thước tối thiểu của mặt cắt ngang thoả mãn điều kiện sau:

$$F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \quad (9-18)$$

Để đảm bảo an toàn và tiết kiệm nên chọn F xấp xỉ tỷ số $\frac{N_z}{[\sigma]}$ chừng $\pm 5\%$ là đủ.

c) Xác định tải trọng cho phép

Khi biết kích thước mặt cắt và ứng suất cho phép, cần xác định tải trọng trong trường hợp tổng quát là tác dụng ngoài P lớn nhất cho phép đặt lên chi tiết máy hoặc kết cấu. Muốn thế phải có:

$$N = f(p) \leq F[\sigma] \quad (9-19)$$

3. Điều kiện cứng - ba bài toán thường gặp

Điều kiện cứng là điều kiện hạn chế biến dạng và chuyển vị đàn hồi dọc trục của thanh tùy thuộc vào yêu cầu kỹ thuật cụ thể cho trước của từng cấu kiện. Các biến dạng và chuyển vị này phải nhỏ hơn biến dạng và chuyển vị cho phép: $[\varepsilon]$ và $[u]$.

Điều kiện cứng được diễn đạt như sau:

$$\varepsilon \leq [\varepsilon] \text{ hoặc } u \leq [u] \quad (9-20)$$

Từ quan hệ (9-20) có thể rút ra ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng.

a) Bài toán kiểm tra điều kiện cứng tức là kiểm tra điều kiện (9-20).

b) Bài toán chọn mặt cắt ngang thoả mãn điều kiện:

$$F \geq \frac{N}{E[\varepsilon]} \quad (9-21)$$

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép P: chọn chế độ tác dụng ngoài cho phép là thực hiện điều kiện:

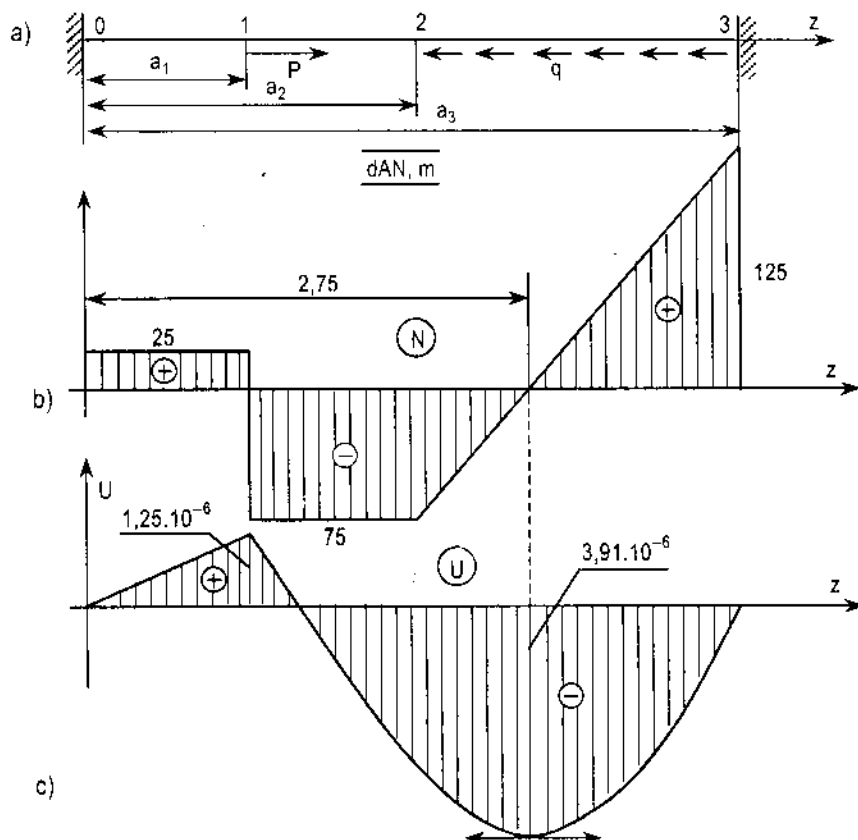
$$N = f(p) \leq EF[\varepsilon] \quad (9-22)$$

V. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1

Một thanh chịu lực như hình (9-7a). Bằng phương pháp vạn năng hãy vẽ các biểu đồ nội lực $N(z)$, chuyển vị $u(z)$, sau đó kiểm tra bền và cứng cho thanh. Cho biết: $q = 100 \text{ daN/m}$, $P = 100 \text{ daN}$, $a_1 = 1 \text{ m}$, $a_2 = 2 \text{ m}$, $a_3 = l = 4 \text{ m}$; $E = 2 \cdot 10^{10} \text{ daN/m}^2$, $F = 10^{-3} \text{ m}^2$, $[\sigma] = 1600 \text{ daN/cm}^2$, $[u] = 0.1 \text{ cm}$.

Giải:



Hình 9-7

Gọi R_0 là phản lực tại ngàm trái, ta có phương trình $U(z)$ và $N(z)$ được viết theo (9-14) như sau:

$$EFU(z) = R_0 z \Big|_{i=1} - 100(z-1) \Big|_{i=2} + \frac{100}{2!} (z-2)^2 \Big|_{i=3}$$

$$N(z) = R_0|_{i=1} - 100|_{i=2} + 100(z-2)|_{i=3}$$

$U(z = a_3 = 4 \text{ m}) = 0$, cụ thể là:

$$4R_0 - 100 \times 3 + 100 \times 2 = 0 \Rightarrow R_0 = 25 \text{ daN}$$

Thay $R_0 = 25 \text{ daN}$ vào phương trình $U(z)$, $N(z)$ và vẽ các biểu đồ như trên hình 9-7b, c.

Ứng suất và chuyển vị lớn nhất lần lượt là:

Tại mặt cắt $z = a_3 = 4 \text{ m}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{125}{10^{-3}} = 125 \cdot 10^3 \text{ daN/m}^2 = 12,5 \text{ daN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \cdot 10^2 \text{ daN/cm}^2$$

Tại mặt cắt $z = 2,75 \text{ m}$:

$$U_{\max}(z = 2,75) = 3,91 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3,91 \cdot 10^{-4} \text{ cm} < [u] = 0,1 \text{ cm}$$

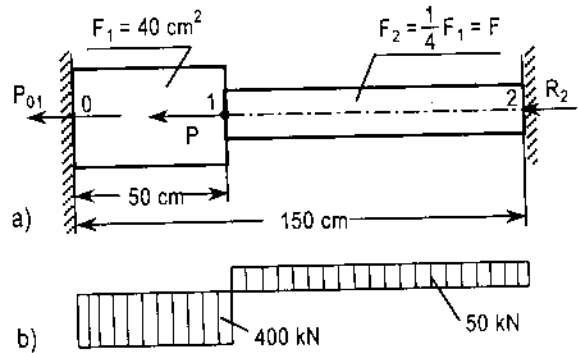
Vậy điều kiện bền và điều kiện cứng đều thỏa mãn rất tốt.

Ví dụ 2:

Một thanh mặt cắt thay đổi chịu lực $P = 450 \text{ kN}$ như hình 9-8. Hãy tính chuyển vị dọc trục tại "1" và vẽ biểu đồ N ?

Giải:

Theo công thức dạng ma trận (9-8) trong trường hợp này $n = 2$ ta có:



Hình 9-8

$$\{S_1(z)\} = \begin{Bmatrix} U_1(z) \\ N_1(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{4EF} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{01} \end{Bmatrix}$$

$$\{S_1^*(50)\} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{50}{4EF} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{01} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{01} \cdot \frac{50}{4EF} \\ P_{01} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\{S_2(z)\} &= \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ N_2(z) \end{Bmatrix} = [B_2] [B_1^*] \Delta \{S_{01}\} + [B_2] \Delta \{S_{02}\} \\
&= \begin{Bmatrix} 1 & \frac{z-50}{EF} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \frac{50}{4EF} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{01} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & \frac{z-50}{EF} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 450 \end{Bmatrix} \\
\{S_2^*(150)\} &= \begin{Bmatrix} 1 & \frac{100}{EF} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 & \frac{50}{4EF} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{01} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & \frac{100}{4EF} \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 450 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Giải phương trình ma trận này ta có:

$P_{01} = -400$ kN, có chiều ngược với chiều đã chọn.

$R_2 = -50$ kN chiều ngược với chiều đã giả thiết.

$N_1 = -400$ kN; $N_2 = 50$ kN. Biểu đồ N được cho trên hình 9-8b.

$$U_1^*(50) = \frac{500}{E} \text{ cm}$$

Ví dụ 3:

Cho một thanh chịu kéo (nén) với các số liệu như hình 9-9.

Hãy: 1) Vẽ $\bar{U}$ và $\bar{N}$?

2) Kiểm tra điều kiện cứng? Biết $[\varepsilon] = 2.10^{-3}$ và $[U] = 0,1$ cm.

Giải:

Biểu thức của U và N theo (9-14) là:

$$U(z) = P_{01} \left[\frac{z}{EF} \right]_{i=1} - 100 \frac{(z-100)}{EF} + 100 \frac{(z-100)^2}{2EF} - 50 \frac{(z-100)^4}{4!EF} \Big|_{i=2}$$

$$N(z) = P_{01} \left[\right]_{i=1} - 100 + 100(z-100) - 50 \frac{(z-100)^3}{6} \Big|_{i=2}$$

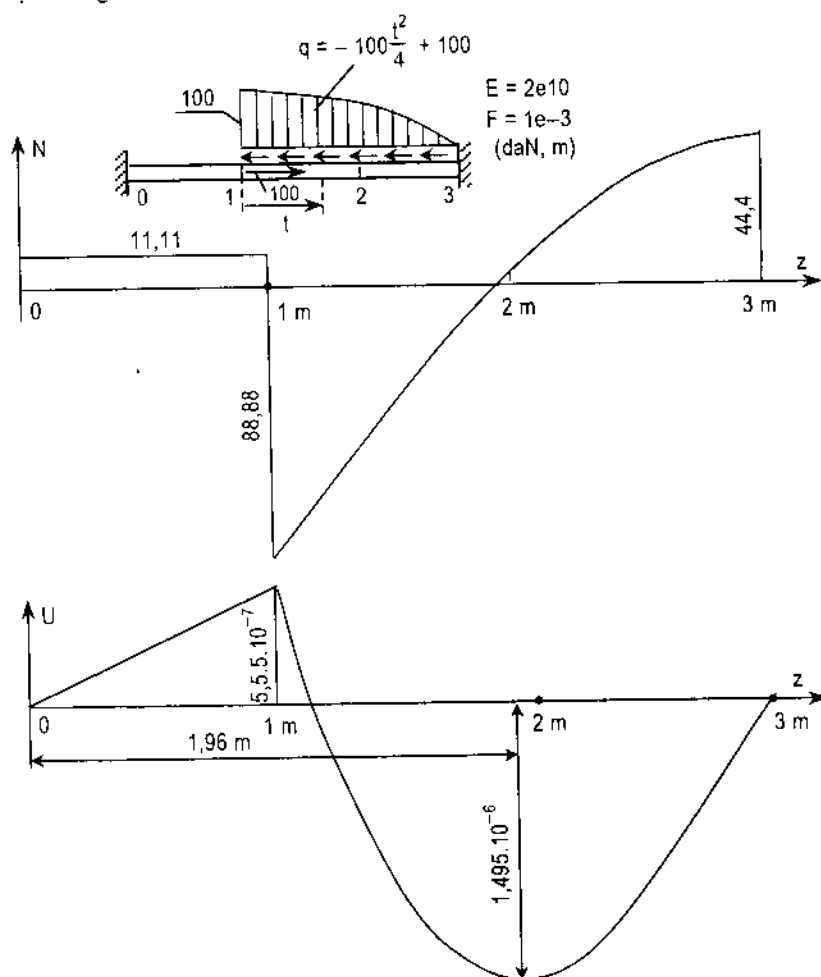
$$U(z=3m) = 0 \Rightarrow P_{01} = 11,11 \text{ daN}$$

Biểu đồ N và U được vẽ trên hình 9-9.

$$|\varepsilon_{\max}| = \frac{N}{EF} = \frac{88,88}{2.10^{10} \cdot 10^{-3}} = \frac{44,44}{10^7} = 0,4444 \cdot 10^{-5} < [\varepsilon] = 2.10^{-3}$$

$$|U_{\max}| = 1,495 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,495 \cdot 10^{-4} \text{ cm} < [U] = 0,1 \text{ cm}.$$

Điều kiện cứng thỏa mãn.



Hình 9-9

Ví dụ 4:

Một thanh AB có độ cứng $E_1 F_1$ dài l_1 được treo thẳng đứng. Đầu dưới A được chống bằng hai thanh xiên cùng có độ cứng $E_2 F_2$, dài l_2 .

Tính chuyển vị của điểm A khi lực P di động từ A đến B.

Công thức tính chuyển vị của điểm A thay đổi như thế nào nếu thay AB bằng hai thanh có độ cứng $E'_1 F'_1$; $E''_1 F''_1$ (hình 9-10).

Giải:

Gọi N_1 là nội lực (nén) ở đầu A của thanh đứng. Tách nút A (hình 9-11a) ta có phương trình cân bằng:

$$2N_2 \cdot \cos \alpha - N_1 = 0$$

Đặt Δl_1 là độ biến dạng tuyệt đối của thanh AB và Δl_2 là độ biến dạng tuyệt đối của thanh xiên, ta được:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos \alpha$$

trong đó:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} ; \Delta l_1 = \frac{P(l_1 - x)}{E_1 F_1} - \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}$$

$$\text{Vậy } \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \left(\frac{P(l_1 - x)}{E_1 F_1} - \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} \right) \cdot \cos \alpha$$

Thay N_2 vào phương trình cân bằng ta có:

$$2 \cdot \frac{1}{l_2} \cdot \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \cdot [P(l_1 - x) - N_1 l_1] \cdot \cos^2 \alpha - N_1 = 0$$

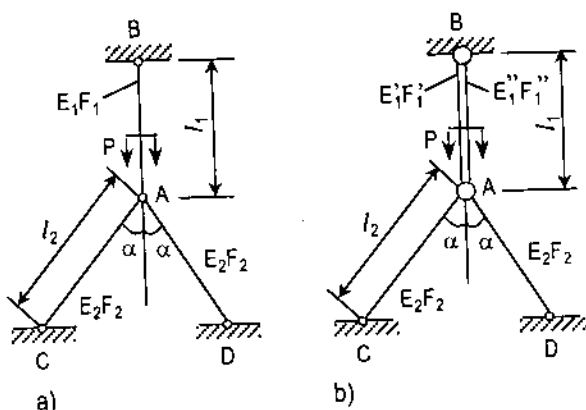
$$\text{Rút ra: } N_1 = \frac{\frac{2}{l_2} \cdot \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \cdot P(l_1 - x) \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \cdot \cos^2 \alpha}$$

Mang N_1 vào Δl_1 ta sẽ được chuyển vị U_A của điểm A:

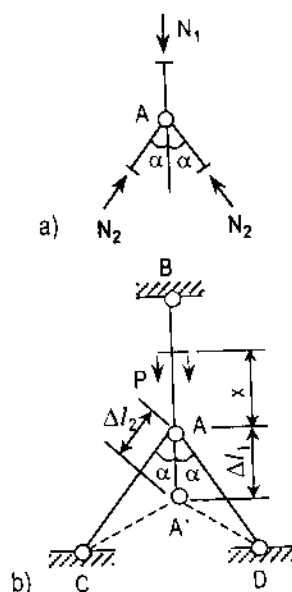
$$U_A = \frac{P(l_1 - x)}{E_1 F_1 \left[1 + 2 \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1} \cdot \cos^2 \alpha \right]} \quad (a)$$

Khi thay thanh AB bằng hai thanh có độ cứng khác nhau, ta phải tìm độ cứng tương đương. Bằng cách so sánh biến dạng, ta được độ cứng tương đương:

$$(EF)_{td} = E'_1 F'_1 + E''_2 F''_2 \quad (b)$$



Hình 9-10



Hình 9-11

Thực vậy, độ biến dạng tuyệt đối của thanh phải bằng nhau:

$$\begin{aligned}\frac{N'_1 l_1}{E_1 F'_1} &= \frac{N''_1 l_1}{E_1 F''_1} \\ &= \frac{(N'_1 + N''_1) l_1}{E_1 F'_1 + E_1 F''_1} = \frac{N_{td} l_1}{(EF)_{td}}\end{aligned}$$

Nhưng $N'_1 + N''_1 = N_{td}$ nên ta có quan hệ (b). Do đó công thức (a) không có gì thay đổi, nếu $E_1 F_1$ được thay bằng $(EF)_{td}$.

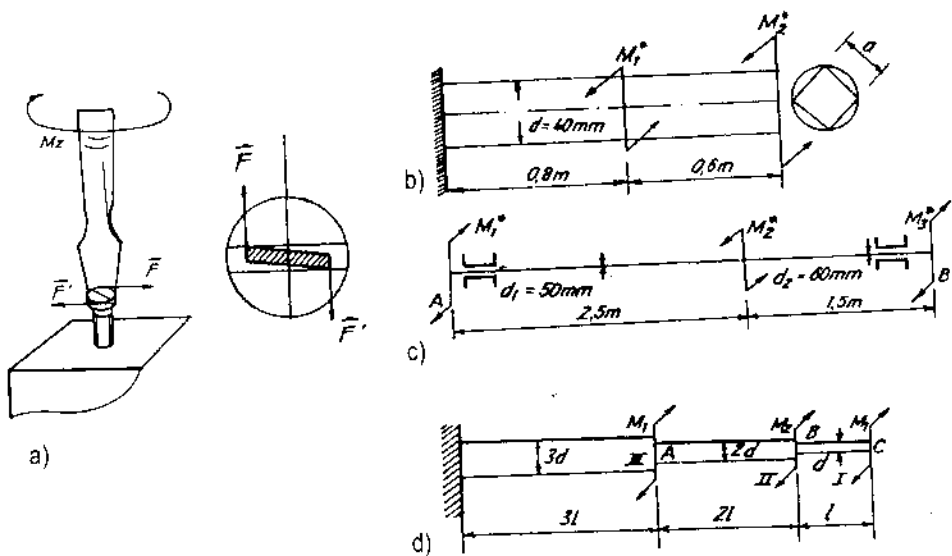
CHƯƠNG 10

XOẮN THANH THẲNG

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ KHÁI NIỆM

Một thanh chịu xoắn thuần túy là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là ngẫu lực xoắn có mômen M_x (còn gọi là mômen xoắn nội lực quanh trục x).

Các chi tiết chịu xoắn được cho trên hình 10-1.



Hình 10-1

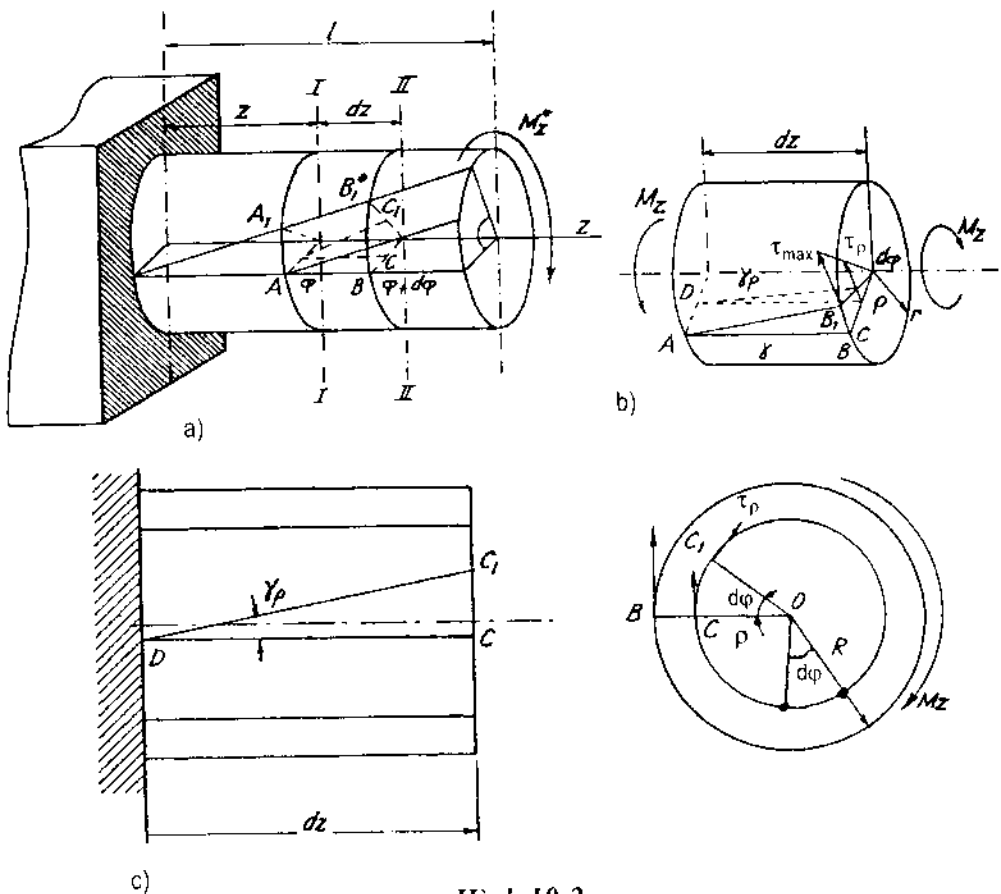
Trên hình 10-2 là bức tranh biến dạng của thanh tròn chịu xoắn.

Khi tác dụng ngoài đặt lên các trục quay được cho bởi thông số vận tốc n (vg/ph) và công suất N (W) thì mômen xoắn ngoài tác dụng lên trục quay được quy đổi theo công thức:

$$M = 9,55 \frac{N}{n}, \text{ Nm} \quad (10-1)$$

Nếu công suất đo bằng mã lực thì công thức trên có dạng:

$$M = 7162 \frac{N}{n}, \text{ Nm} \quad (10-2)$$



Hình 10-2

II. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

1. Các giả thiết tính toán

- Tập hợp các chất điểm trước biến dạng nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh, ở trạng thái biến dạng vẫn nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh. Vắn tắt hơn, các mặt cắt ngang luôn luôn phẳng, vì biến dạng bé nên khoảng cách giữa các mặt cắt ngang coi như không thay đổi.

• Tập hợp các chất điểm trên mặt cắt vuông góc với trục thanh là hình phẳng rắn tuyệt đối, cụ thể hơn là các bán kính của mặt cắt ngang luôn luôn thẳng, có độ dài không đổi và làm thành những góc không đổi trong quá trình biến dạng.

2. Ứng suất và biến dạng

Theo các giả thiết nói trên thì các mặt cắt ngang của thanh (hình 10-2) chỉ có biến dạng trượt. Khi đó bán kính ρ tại điểm C của mặt cắt bị xoay đi một góc $d\varphi$, điểm C trên mặt cắt rời tới vị trí C_1 . Do đó trên mặt cắt ngang (vuông góc với trục z) chỉ có ứng suất tiếp τ_ρ , ứng suất này vuông góc với bán kính ρ tại C.

Gọi γ_ρ và τ_ρ là góc trượt (độ trượt tương đối), ứng suất trượt tại điểm C (ứng với bán kính ρ), $d\varphi$ là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt chỉ cách nhau một đoạn dz . Ta thấy (hình 10-2c):

$$\gamma_\rho \approx \tan \gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho d\varphi}{dz} \quad (a)$$

Theo định luật Húc về trượt thì quan hệ $\tau = f(\gamma)$ là:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho \quad (b)$$

Khi thu gọn hệ ứng suất $\{\tau_\rho\}$ về tâm mặt cắt ta được:

$$\int_F \rho \tau_\rho dF = M_z \quad (c)$$

Kế đến (b) thì công thức (c) trở thành:

$$G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_p = M_z \quad (d)$$

Từ (d) ta có góc xoắn tỷ đối θ như sau:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (10-3)$$

$J_p = \int_F \rho^2 dF$ trong (d) và (10-3) được gọi là mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang.

Đây là phương trình vi phân theo chuyển vị góc xoắn $\varphi(z)$.

Khi thay (10-3) vào (b) ta được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm C bất kỳ trên mặt cắt ngang:

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (10-4)$$

Công thức (10-4) cho ta thấy ứng suất tiếp phân bố theo quy luật bậc nhất dọc theo bán kính ρ . Khi $\rho = R$, ứng suất có giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} \frac{R}{R} = \frac{M_z}{W_p} \quad (10-5)$$

trong đó:

R - bán kính mặt cắt ngang của thanh;

$W_p = J_p/R$ - mômen chống xoắn của mặt cắt ngang của thanh (đơn vị là m^3).

III. CHUYỂN VỊ, NỘI LỰC VÀ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHÚNG

1. Các quan hệ cơ bản giữa chuyển vị, nội lực và tải trọng ngoài

Ta hãy khảo sát điều kiện cân bằng của một đoạn thanh có chiều dài dz (hình 10-3a,b). Kết quả của việc khảo sát cân bằng và các đạo hàm liên tiếp sau đó cho ta quan hệ (10-6). Bằng cách đạo hàm liên tiếp theo z hai vế phương trình (10-3) ta nhận được quan hệ (10-7):

$$\Delta M_{iz} = M_{oi}^*$$

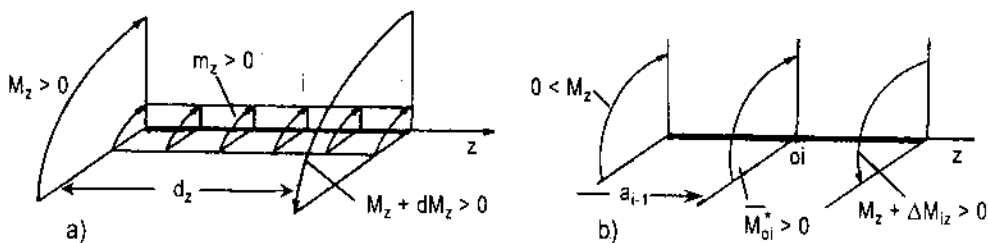
$$\frac{dM_z}{dz} = m_z(z) \quad (10-6)$$

$$\frac{d^n M_z}{dz^n} = m_z^{(n-1)}(z)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z(z)}{G_i J_{pi}}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{m_z(z)}{G_i J_{pi}} \quad (10-7)$$

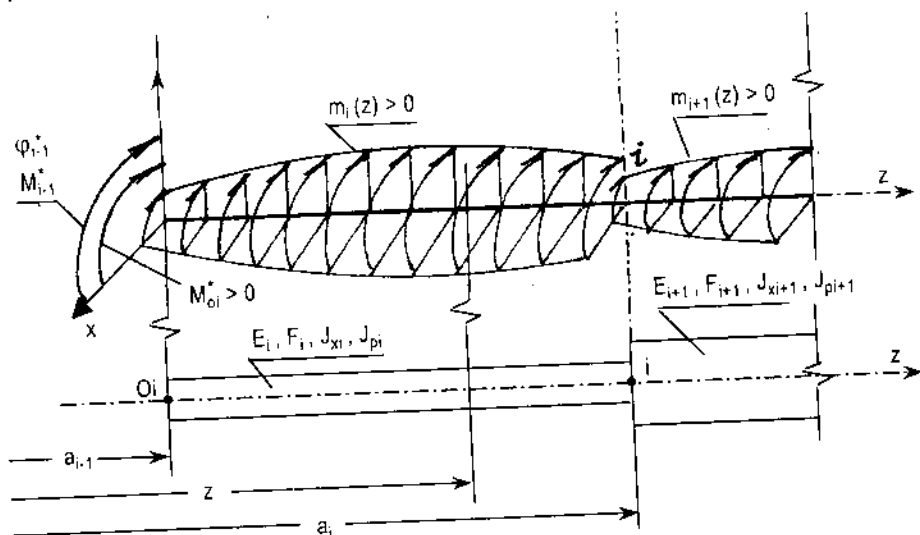
$$\frac{d^n \varphi}{dz^n} = \frac{m_z^{(n-2)}(z)}{G_i J_{pi}}$$



Hình 10-3

2. Phương trình vận năng của góc xoắn $\varphi_z(z)$ và mômen nội lực $M_z(z)$

Các quan hệ (10-6) và (10-7) hoàn toàn tương tự toán học như các quan hệ (9-3) và (9-4) trong bài toán kéo (nén). Vì thế thay cho $E_i F_i$, U_i , N_i , P_{oi} , $q_z(z)$ của bài toán kéo (nén), ta phải lấy tương ứng là $G_i J_{pi}$, φ_{iz} , M_{iz} , M_{oi}^* , $m(z)$. Tương tự các phép biến đổi đã làm trong bài toán kéo (nén), trong trường hợp này khi quy ước dấu dương của ngoại lực xoắn M_z^* và $m_z(z)$ như hình 10-4 và do sự tương tự nói trên từ công thức (9-10) đến (9-14) ta có:



Hình 10-4

2.1. Dạng ma trận

$$\{S_n(z)\} = |B_n| |B_{n-1}^*| \dots |B_1^*| \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n| \Delta\{S_{0n}\} \quad (10-8)$$

$$\{S_n^*(a_n)\} = |B_n^*| |B_{n-1}^*| \dots |B_1^*| \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n^*| \Delta\{S_{0n}\} \quad (10-9)$$

Khi $l_i = \text{const}$ và $G_i J_{pi} = \text{const}$ với $\forall i$, các quan hệ (10-8) và (10-9) có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \{S_n(z)\} &= |B_n| |B^*|^{n-1} \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n| \Delta\{S_{0n}\} \\ \{S_n^*(a_n)\} &= |B_n^*| |B^n| \Delta\{S_{01}\} + \dots + |B_n^*| \Delta\{S_{0n}\} \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

Trong các công thức trên đây $|B_i|$, $\{S_i(z)\}$, $\Delta\{S_{0n}\}$ lần lượt là:

$$\Delta\{S_{0i}\} = \{\Delta\varphi_{0i}, M_{0i}^*, \Delta m_{0i}(z), \Delta m_{0i}'(z), \Delta m_{0i}''(z), \dots\}^T \quad (10-11)$$

$$[B_i] = \begin{vmatrix} \phi_0 & \frac{\phi_1}{G_i J_{pi}} & \frac{\phi_2}{G_i J_{pi}} & \frac{\phi_3}{G_i J_{pi}} & \dots \\ 0 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \dots \end{vmatrix} \quad (10-12)$$

$$\{S_i(z)\} = \{S_i\} = \begin{Bmatrix} \phi_i(z) \\ M_i(z) \end{Bmatrix} \quad (10-13)$$

2.2. Dạng biểu diễn tổng

$$a) \varphi_n(z) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta \varphi_{0i} \phi_0 + M_{0i}^* \frac{\phi_1}{GJ_p} + \Delta m_{0i} \frac{\phi_2}{GJ_p} + \Delta m'_{0i} \frac{\phi_3}{GJ_p} + \dots \right) \quad (10-14)$$

$$b) M_n(z) = \sum_{i=1}^n (M_{0i}^* \phi_0 + \Delta m_{0i} \phi_1 + \Delta m'_{0i} \phi_2 + \Delta m''_{0i} \phi_3 + \dots)$$

với $l_i \neq \text{const}$ và $G_i J_{pi} = \text{const}$, $\forall i$.

IV. ĐIỀU KIỆN BỀN - ĐIỀU KIỆN CỨNG

1. Điều kiện bền - Ba bài toán thường gặp

Tương tự kết quả (9-17), (9-18), (9-19) đối với bài toán kéo (nén), trong trường hợp bài toán xoắn ta có ba bài toán sau đây:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện bền:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (10-15)$$

Trong (10-15), $[\tau]$ được gọi là ứng suất tiếp cho phép.

b) Bài toán thiết kế

$$W_p \geq \frac{M_z}{[\tau]} \quad (10-16)$$

Cụ thể hơn:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau](1-\eta^4)}} \quad (10-16a)$$

trong đó $\eta = \frac{d}{D}$, d và D là đường kính trong và ngoài của mặt cắt, $\eta = 0$ ứng với thanh có mặt cắt tròn đặc.

c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z \leq W_p[\tau] \quad (10-17)$$

Mômen xoắn nội lực M_z trong (10-17) là hàm xác định theo tải trọng ngoài.

2. Điều kiện cứng - Ba bài toán thường gặp

Nếu gọi $[\theta]$ và $[\varphi]$ là góc xoắn tỷ đối và góc xoắn tuyệt đối cho phép của thanh thì tương tự thanh chịu kéo (nén) ta có ba bài toán sau đây theo điều kiện cứng:

a) Bài toán kiểm tra điều kiện cứng

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad \text{và} \quad \varphi_{\max} \leq [\varphi] \quad (10-18)$$

b) Bài toán thiết kế

$$J_p \geq \frac{M_z}{G[\theta]} \quad (10-19)$$

Cụ thể hơn:
$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{0,1[\theta] \cdot (1 - \eta^4) G}} \quad (10-20)$$

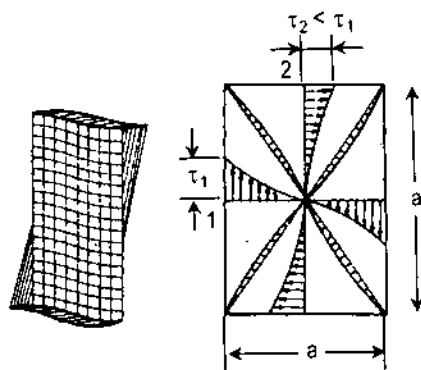
c) Bài toán chọn tải trọng cho phép

$$M_z = f(P) \leq GJ_p[\theta] \quad (10-21)$$

V. XOẮN THANH MẶT CẮT NGANG KHÔNG TRÒN

1. Thanh mặt cắt ngang chữ nhật

Đối với các thanh có mặt cắt ngang không tròn, sau khi bị xoắn các mặt cắt ngang không còn phẳng nữa mà bị vênh đi. Những nghiên cứu sâu hơn của cơ học vật rắn biến dạng cho thấy trên mặt cắt ngang của thanh cũng chỉ có ứng suất tiếp. Đối với thanh mặt cắt ngang chữ nhật, luật phân bố ứng suất tiếp được biểu diễn trên hình 10-5.



Hình 10-5

Ứng suất ở các điểm biên của mặt cắt phân bố không đều dọc theo chiều dài của các cạnh. Điểm giữa của cạnh dài có ứng suất lớn nhất $\tau_{\max}$. Cụ thể là:

- Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh dài:

$$\tau_1 = \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha ab^2} \quad (10-22)$$

- Ứng suất tiếp lớn nhất trên cạnh ngắn:

$$\tau_2 = \gamma \tau_1 \quad (10-23)$$

- Góc xoắn tương đối:

$$\theta = \frac{M_z}{G \beta ab^3} \quad (10-24)$$

Các hệ số α , γ , β phụ thuộc vào tỷ số a/b và được cho trong bảng 10-1.

Bảng 10-1

a/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	1,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

2. Xoắn thanh thành mỏng

Trong kỹ thuật (nhất là kỹ thuật hàng không, kỹ thuật đóng tàu) người ta thường dùng thanh thành mỏng. Lý thuyết thanh thành mỏng (ví dụ của Vlasov) cung cấp cho ta đầy đủ nhất cách xác định sự ứng xử của các loại thanh này đối với những vật liệu khác nhau.

a) Thanh có thành mỏng kín (hình 10-6a)

Khi bị xoắn, trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều dày của thành. Ứng suất tại một điểm bất kỳ A của thành được cho bởi:

$$\tau_A = \frac{M_z}{2F^* \cdot b_A} \quad (10-25)$$

trong đó: b_A - chiều dày của thành tại A;

F^* - diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành (còn gọi là đường chu vi trung gian S của thành).

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{4GF^{*2}} \oint_S \frac{dS}{b} \quad (10-26)$$

trong đó:

$\oint_S$ - tích phân theo đường cong kín S.

b) Thanh có thành mỏng hở

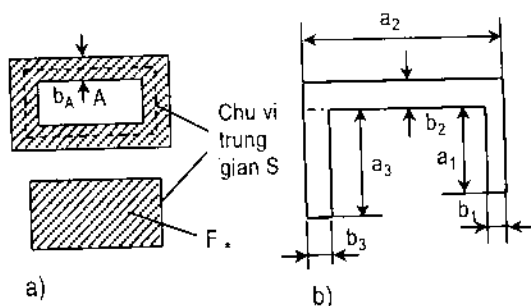
Giả sử mặt cắt ngang của thanh gồm nhiều chữ nhật mảnh ghép lại (hình 10-6b). Ký hiệu a_i , b_i là bề dài và bề rộng của dải chữ nhật thứ i. Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm giữa cạnh a_i được tính theo công thức:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J^*} b_i \quad (10-27)$$

trong đó:

$$J^* = \frac{1}{3} \eta \sum_{i=1}^m a_i b_i^3 \quad (10-28)$$

η - hệ số điều chỉnh được cho trong bảng 10-2.



Hình 10-6

Bảng 10-2

Mặt cắt ngang	η
L	1,00
I	1,20
T	1,15
C	1,12

Góc xoắn tỷ đối có công thức:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ^*} \quad (10-29)$$

Nếu mặt cắt ngang là một dải cong thì khi tính ứng suất và góc xoắn tỷ đối được coi như một dải chữ nhật có chiều dài bằng chu vi.

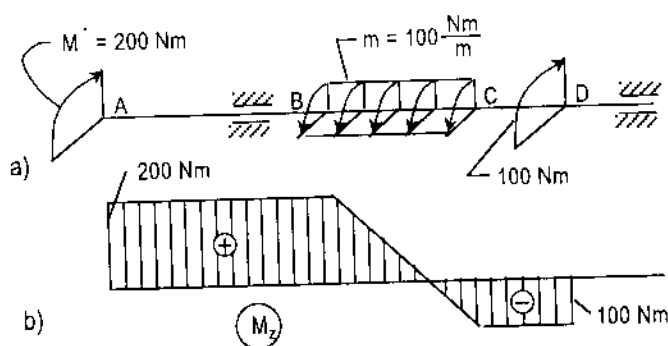
VI. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

Cho một trục chịu xoắn như hình 10-7a. Hãy xác định đường kính d của trục, nếu $[\tau]$ của vật liệu trục là 2000 N/cm^2 .

Giải:

Từ biểu đồ mômen xoắn nội lực, xác định bằng phương pháp mặt cắt hoặc vụn năng được cho trên hình 10.7b, cho thấy mặt cắt nguy hiểm thuộc đoạn AB có $M_x = 200 \text{ Nm}$.



Hình 10-7

Theo công thức (10-16) ta có:

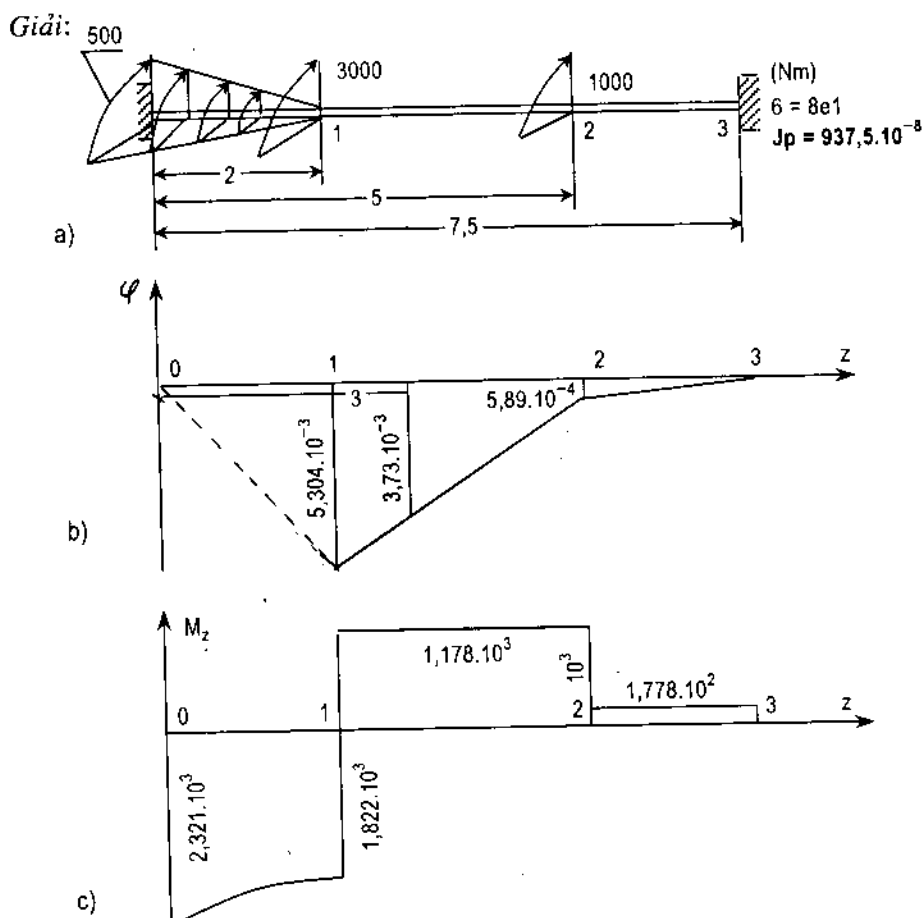
$$0,2d^3 \geq \frac{M_x}{[\tau]}$$

hay:

$$\begin{aligned} d &\geq \sqrt[3]{\frac{M_x}{0,2[\tau]}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{20000}{0,2 \cdot 2000}} = 4,7 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ví dụ 2:

Hãy viết biểu thức giải tích, vẽ các biểu đồ chuyển vị và nội lực đối với thanh được cho trên hình 10-8a. Sau đó kiểm tra xem điều kiện cứng có đảm bảo không? Biết $[\theta] = 0,10^\circ/\text{m}$; $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $J_p = 937,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$.



Hình 10-8

Biểu thức của chuyển vị $\varphi(z)$ và mômen xoắn nội lực $M(z)$, trong trường hợp này được thiết lập theo (10-8) hoặc (10-14), cụ thể là:

$$GJ_p \varphi(z) = M_{01} \cdot z + 500 \frac{z^2}{2} - 250 \frac{z^3}{3!} \Big|_{i=1} + 3000(z-2) +$$

$$+ 250 \frac{(z-2)^3}{3!} \Big|_{i=2} - 1000(z-5) \Big|_{i=3}$$

$$M(z) = M_{01} + 500z - 250 \frac{z^2}{2} \Big|_{i=1} + 3000 + 250 \frac{(z-2)^2}{2} \Big|_{i=2} - 1000 \Big|_{i=3}$$

trong đó M_{01} là phản lực xoắn lại ngàm trái $z = 0$ và được xác định từ điều kiện: $\varphi(z = 7,5) = 0$. Giải phương trình này, ta có:

$$M_{01} = -2322,22 \text{ Nm}$$

Thay M_{01} vào các biểu thức $\varphi(z)$, $M(z)$ và vẽ các biểu đồ của chúng như trên hình 10-8b, c. Theo định nghĩa:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}$$

$$\text{Do đó: } \theta_{\max} = \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{2,321 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 937,5 \cdot 10^{-8}} = 0,18''/\text{m}$$

$$\theta_{\max} > [\theta]$$

Vậy điều kiện cứng không đảm bảo.

Ví dụ 3:

Để xác định công suất tuabin hơi nước, người ta đo góc xoắn của trục trên một đoạn chiều dài 5 m. Đường kính ngoài của trục bằng 25 cm và đường kính trong bằng 17 cm. Vận tốc quay $n = 25$ v/ph, $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.

Xác định công suất của tuabin, biết góc xoắn đo được là $1''$. Tính ứng suất lớn nhất trên mặt cắt ngang.

Giải:

$$\text{Từ } M = 974000 \frac{W}{n} \quad \text{rút ra: } W = \frac{M \cdot n}{974000}$$

$$\text{Từ } \varphi = \frac{M_z \cdot l}{GI_p} \quad \text{rút ra } M_z = \frac{\varphi GI_p}{l}$$

$$\text{Vậy: } W = \frac{\varphi GI_p n}{974000 \cdot l}$$

Ta quy đổi góc xoắn đo được ra rad:

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot L = 0,01745 \text{ rad}$$

và mômen quán tính cực:

$$I_p = 0,1.D^4(1 - \alpha^4) = 0,1.25^4 \cdot \left[1 - \left(\frac{17}{25} \right)^4 \right] = 30700 \text{ cm}^4$$

Thay vào biểu thức của W, được:

$$W = \frac{0,01745.8.10^6.30700.250}{974000.500} = 2200 \text{ kW}$$

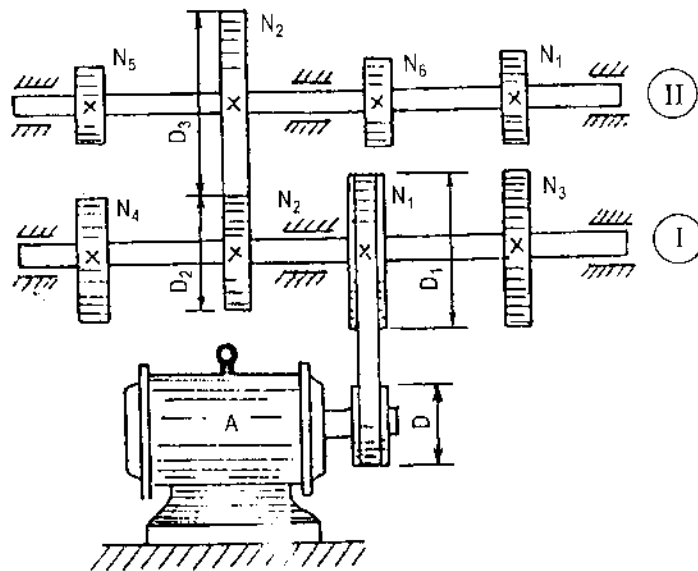
và

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{974000.220}{0,2.25^3 \left[1 - \left(\frac{17}{25} \right)^4 \right].250} = 3500 \text{ N/cm}^2$$

Ví dụ 4:

Động cơ điện A truyền sang puli 1 của trục I công suất $N_1 = 20 \text{ kW}$; các puli 2, 3, 4 nhận được các công suất $N_2 = 15 \text{ kW}$, $N_3 = 2 \text{ kW}$, $N_4 = 3 \text{ kW}$; các puli 5, 6, 7 của trục nhận được các công suất $N_5 = 7 \text{ kW}$, $N_6 = 4 \text{ kW}$, $N_7 = 4 \text{ kW}$ (hình 10-9). Xác định đường kính của hai trục, biết: $[\tau] = 3000 \text{ N/cm}^2$, $[\theta] = 0,25^\circ/\text{m}$, $D = 200 \text{ mm}$, $D_1 = 400 \text{ mm}$, $D_2 = 200 \text{ mm}$, $D_3 = 600 \text{ mm}$, $G = 8.10^6 \text{ N/cm}^2$.

Vận tốc góc của trục động cơ là $n = 1000 \text{ vòng/phút}$.



Hình 10-9

Giải:

Số vòng quay của trục I là:

$$n_1 = n \frac{D}{D_1} = 1000 \cdot \frac{200}{400} = 500 \text{ vg/ph}$$

Vận tốc góc là:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,3 \text{ rad/s}$$

Theo công thức tính mômen tác động lên puli theo công suất N ta có:

$$M = \frac{N(\text{kW})}{\omega}$$

ta được:

$$M_1 = \frac{20 \cdot 10^3}{52,3} = 382 \text{ Nm}$$

$$M_2 = \frac{15 \cdot 10^3}{52,3} = 286 \text{ Nm ;}$$

$$M_3 = \frac{2 \cdot 10^3}{52,3} = 38,2 \text{ Nm}$$

$$M_4 = \frac{3 \cdot 10^3}{52,3} = 57,8 \text{ Nm}$$

Theo biểu đồ mômen xoắn của trục I (hình 10-10a), ta có:

$$M_{z\max} = 343,8 \text{ Nm} = 34380 \text{ Ncm}$$

Đường kính trục theo điều kiện bền:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{34380}{0,2 \cdot 3000}} = 3,85 \text{ cm}$$

Theo điều kiện cứng:

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{0,1 \cdot G[\theta] \cdot \frac{\pi}{180}}} \Rightarrow d_1 \geq 10 \cdot \sqrt[4]{\frac{5,7 \cdot 34380}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,25}} = 5,6 \text{ cm}$$

Số vòng quay trục II là $n_2 = 500 \cdot \frac{200}{600} = 167$ vòng/phút.

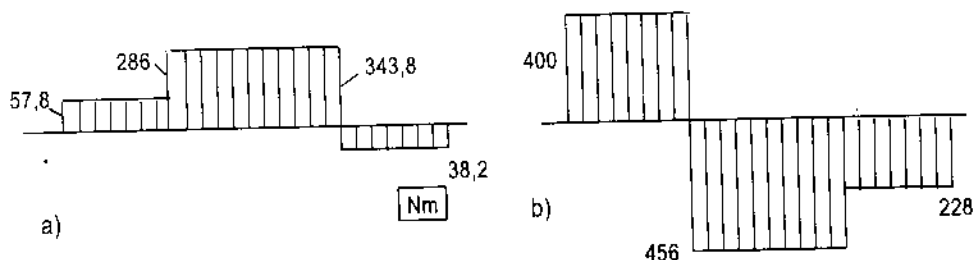
$$\omega_2 = \frac{3,14 \cdot 167}{30} = 17,5 \text{ rad/s}$$

Mômen tác động lên các puli là:

$$M_2 = \frac{15 \cdot 10^3}{17,5} = 856 \text{ Nm}$$

$$M_5 = \frac{7 \cdot 10^3}{17,5} = 400 \text{ Nm}$$

$$M_6 = \frac{4 \cdot 10^3}{17,5} = 228 \text{ Nm}$$



Hình 10-10

Theo biểu đồ mômen xoắn của trục II (hình 10-10b), ta có:

$$M_{z\max} = 45600 \text{ Ncm}$$

Đường kính trục theo điều kiện bền là:

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{45600}{0,2 \cdot 3000}} = 4,25 \text{ cm}$$

Theo điều kiện cứng:

$$d_2 \geq 10 \cdot \sqrt[4]{\frac{5,7 \cdot 45600}{8 \cdot 10^6 \cdot 0,25}} = 5,9 \text{ cm}$$

Vậy đường kính trục I chọn theo điều kiện cứng: $d_1 = 5,6 \text{ cm}$.

Đường kính trục II chọn theo điều kiện cứng: $d_2 = 5,9 \text{ cm}$.

Ví dụ 5:

Tính ứng suất $\tau_{\max}$ tại các điểm A, B và góc xoắn của thanh dài 2 m có thành mỏng kín bị xoắn, mặt cắt ngang của thanh như hình 10-11. Mômen xoắn $M_z = 2 \cdot 10^4 \text{ Nm}$. Vật liệu gang có $G = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Giải:

Diện tích giới hạn bởi đường tâm của thành:

$$F_0 = (0,4 - 0,01) \cdot (0,2 - 0,03) \\ = 0,0663 \text{ m}^2$$

Ứng suất tại A là:

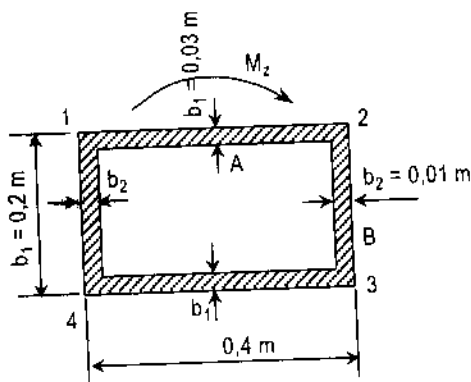
$$\tau_A = \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,0663 \cdot 0,03} = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Ứng suất tại B là:

$$\tau_B = \frac{2 \cdot 10^4}{2 \cdot 0,0663 \cdot 0,01} = 15 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Góc xoắn của thanh:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_z \cdot l}{4GF^{*2}} \oint_S \frac{ds}{b} \\ = \frac{M_z \cdot l}{4GF^{*2}} \cdot \left(\int_{1-2} \frac{ds}{b_1} + \int_{2-3} \frac{ds}{b_2} + \int_{3-4} \frac{ds}{b_1} + \int_{4-1} \frac{ds}{b_2} \right) \\ = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 2}{4,5 \cdot 2 \cdot 10^{10} \cdot (0,0663)^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{0,39}{0,03} + 2 \cdot \frac{0,17}{0,01} \right) \\ \approx 2,62 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



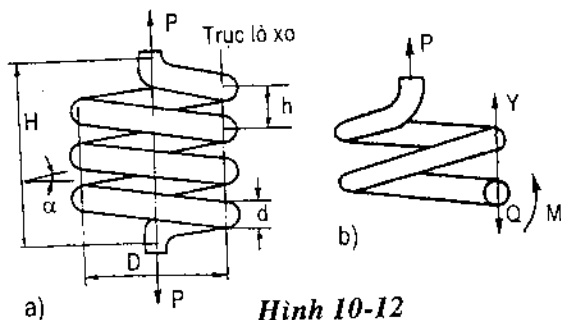
Hình 10-11

VII. TÍNH LÒ XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN

Lò xo là một chi tiết được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật, ví dụ trong các bộ phận giảm chấn, các thiết bị bảo vệ của các máy chịu áp lực lớn.

Hình 10-12 biểu diễn một lò xo xoắn ốc hình trụ bị kéo bởi lực P với:

- h là bước của dây lò xo;
- d là đường kính dây lò xo;
- D là đường kính trung bình của vòng dây lò xo;
- α là góc nghiêng của các dây lò xo;
- n là số vòng dây lò xo.



Hình 10-12

Để đơn giản việc tính toán, ta giả thiết:

1. Góc nghiêng α rất bé. Điều này chỉ đúng khi $h < \frac{D}{10}$.
2. Đường kính d của dây lò xo với đường kính trung bình D của lò xo thoả mãn điều kiện $d < \frac{D}{5}$.

1. Ứng suất

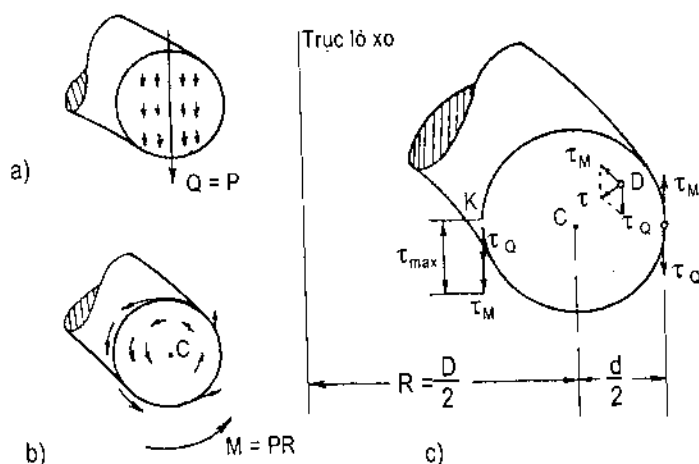
Ta tưởng tượng cắt lò xo bằng một mặt phẳng chứa trục của lò xo và vuông góc với dây lò xo. Xét sự cân bằng của một trong hai phần đó, thí dụ phần trên (hình 10-13b).

Với lò xo bước ngắn, ta có thể coi mặt phẳng của tiết diện dây lò xo trùng với mặt phẳng chứa trục. Để cân bằng với lực kéo P , trên mặt cắt dây lò xo phải xuất hiện hai thành phần nội lực là lực cắt Q và mômen xoắn M_z :

$$Q = P ; \quad M_z = P \cdot \frac{D}{2}$$

Lực cắt Q sinh ra ứng suất tiếp τ_Q cùng chiều với nó. Một cách gần đúng, ta xem ứng suất tiếp τ_Q phân bố đều (hình 10-13a):

$$\tau_Q = \frac{Q}{F} \quad (10-30)$$



Hình 10-13

Mômen xoắn M_z sinh ra ứng suất tiếp τ_M . Vì góc nghiêng α rất bé nên ta có thể tính theo thanh tròn thẳng:

$$\tau_M = \frac{M_z}{J_p} \cdot \rho \quad (10-31)$$

Ứng suất τ_M có giá trị lớn nhất tại những điểm trên chu vi mặt cắt (hình 10-13c):

$$\tau_M^{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{8PD}{\pi \cdot d^3} \quad (10-32)$$

Theo hình (10-13c) ta thấy, điểm K mép trong của tiết diện (tức là tại điểm nằm gần trục lò xo) là điểm nguy hiểm vì hai ứng suất tiếp thành phần cùng chiều. Vậy ứng suất tiếp tổng cộng đạt giá trị lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \tau_M^{\max} + \tau_Q = \frac{8PD}{\pi \cdot d^3} + \frac{4P}{\pi \cdot d^2}$$

hay:

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(1 + \frac{d}{2D}\right) \quad (10-33)$$

Trong thực tế, đường kính của dây lò xo thường bé hơn rất nhiều so với đường kính trung bình của lò xo (theo giả thiết 2 thì tỉ số $\frac{d}{2D} < 0,1$), do đó ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai. Khi đó ta có:

$$\tau_{\max} = K_1 \cdot \frac{8PD}{\pi \cdot d^3} \quad (10-34)$$

trong đó K_1 - hệ số điều chỉnh, kể đến ảnh hưởng của lực cắt Q và ảnh hưởng của độ cong vòng dây lò xo, kể đến sự phân bố và giá trị của ứng suất tiếp do mômen xoắn M_z gây ra.

Các trị số của K_1 được cho trong bảng 10-3.

Bảng 10-3

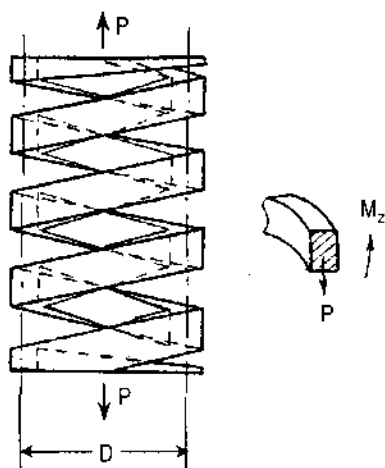
D/d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K_1	2,06	1,58	1,4	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1
K_2	1,12	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1

- Trong trường hợp mặt cắt ngang dây lò xo là hình chữ nhật (hình 10-14) thì do chỉ kể đến ảnh hưởng của mômen xoắn nên công thức tính $\tau_{\max}$ sẽ có dạng sau:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{\text{xoắn}}} = \frac{PD}{2\alpha ab^2} \quad (10-35)$$

Muốn lò xo đảm bảo độ bền thì ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo không được vượt quá ứng suất cho phép, tức là:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$



Hình 10-14

2. Biến dạng của lò xo

Gọi λ là độ giãn hay co của lò xo do lực P gây ra. Công của ngoại lực trên biến dạng đó là:

$$A = \frac{1}{2} P\lambda \quad (10-36)$$

Công này chuyển hoá thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong lò xo. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q thì:

$$U = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p} \quad (10-37)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, ta có:

$$A = U \quad (10-38)$$

Cân bằng công ngoại lực và thế năng với chú ý $l = \pi D$ (n là số vòng dây lò xo) và $J_p = \pi d^4/32$, ta tính được độ giãn (hay co) λ của lò xo:

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4} \quad (10-39)$$

$$\text{hay:} \quad \lambda = \frac{P}{C} \quad (10-40)$$

trong đó: $C = \frac{Gd^4}{8D^3 n}$ gọi là độ cứng của lò xo, đơn vị là N/mm, N/cm.

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Định nghĩa

** Thanh chịu uốn thuần tuý khi trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là ngẫu lực uốn có mômen là $M_x \neq 0$ hoặc $M_y \neq 0$.*

Thanh bị uốn thường được gọi là dầm (hình 11-1a, b, d).

2. Các giả thiết tính toán

a) Mặt cắt ngang của thanh luôn luôn phẳng và vuông góc với trục của thanh trước và sau biến dạng.

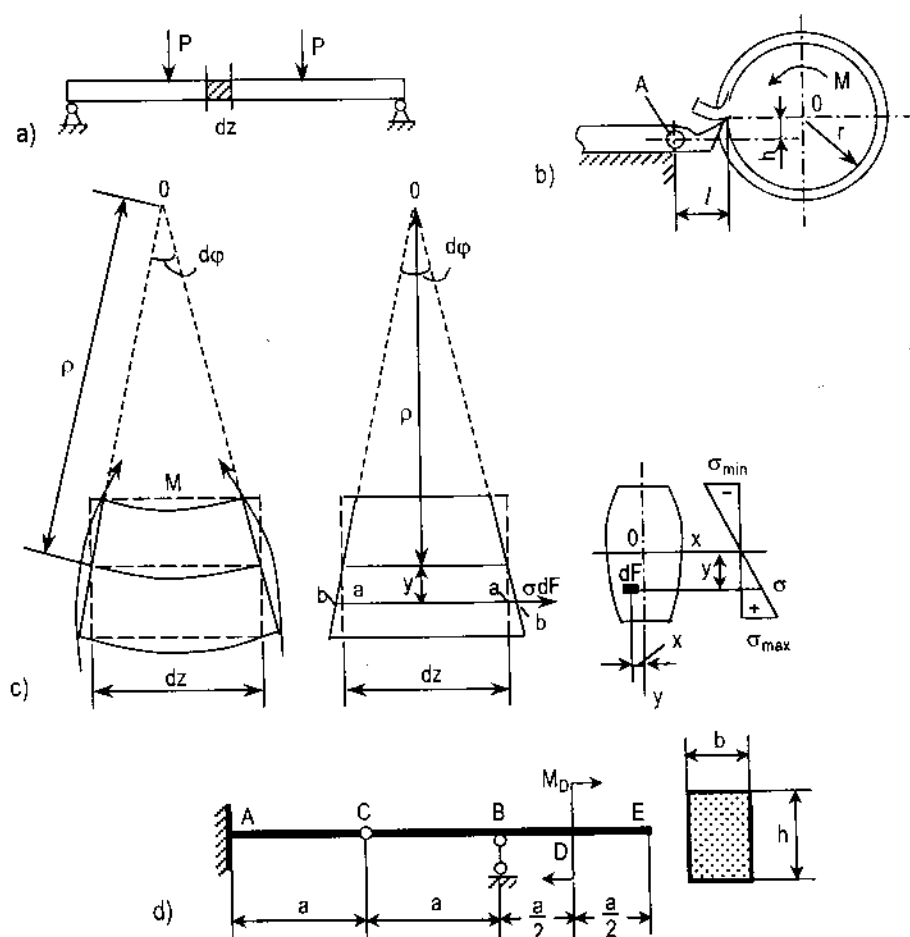
b) Các thớ dọc không có tác dụng tương hỗ lên nhau.

Khi thanh bị uốn các thớ dọc ở phía lõm bị co lại trong khi các thớ dọc ở phía lồi bị giãn ra. Thớ không co, không giãn được gọi là thớ trung hoà. Tập hợp các thớ trung hoà gọi là lớp trung hoà. Lớp trung hoà phân cách phần bị kéo và phần bị nén của dầm. Giao tuyến giữa lớp trung hoà và mặt cắt ngang của dầm được gọi là đường trung hoà hay trục trung hoà. Giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và mặt cắt ngang là đường tải trọng. Ta chỉ nghiên cứu những dầm mà mặt cắt ngang có ít nhất một trục đối xứng và đường tải trọng trùng với trục đối xứng đó (hình 11-1c).

II. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Các giả thiết nêu trên được rút ra từ thực nghiệm và cho phép kết luận rằng:

** Trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn thuần tuý chỉ xuất hiện ứng suất pháp.*



Hình 11-1

Hãy xét một đoạn thanh giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục thanh cách nhau dz . Sau biến dạng đoạn thanh bị uốn cong, hai mặt cắt giao nhau góc $d\varphi$. Gọi ρ là bán kính cong của lớp trung hoà. Vì các thớ của lớp trung hoà không co, giãn nên chiều dài của nó vẫn bằng dz (hình 11-1c), nghĩa là:

$$dz = \rho \cdot d\varphi$$

Bây giờ xét một thớ nào đó cách lớp trung hoà một khoảng y , sau biến dạng nó có chiều dài:

$$dz + \Delta dz = (\rho + dy) \cdot d\varphi$$

Theo định nghĩa, biến dạng dài tương đối của thớ đó là:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \cdot \frac{(\rho + y) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Theo định luật Húc ta có:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (a)$$

Lực tác dụng lên một vi phân diện tích dF là: $\sigma_z \cdot dF$.

Tổng mômen các lực tác dụng lên toàn mặt cắt là:

$$M_x = \int_F \sigma_z \cdot y \cdot dF = \int_F E \cdot \frac{y}{\rho} \cdot y \cdot dF = \int_F \frac{E}{\rho} \cdot y^2 \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 \cdot dF = \frac{E}{\rho} \cdot J_x \quad (b)$$

Từ (b) độ cong của dầm chịu uốn được xác định:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (c)$$

Thay (c) vào (a) ta có ứng suất tại một điểm trên mặt cắt ngang:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \quad (11-1)$$

trong đó:

M_x là mômen của ngẫu lực uốn;

J_x là mômen cấp hai của mặt cắt ngang đối với trục x là trục quán tính

chính trung tâm (trục qua trọng tâm của mặt cắt và có $J_{xy} = 0$);

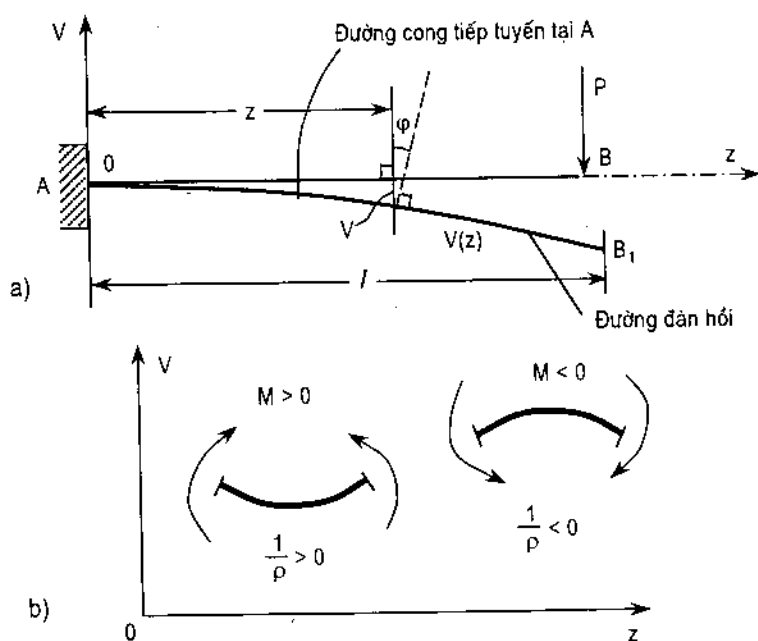
y là khoảng cách từ điểm cần tính ứng suất tới trục trung tâm x .

Khi bị uốn trục của thanh không bị co, giãn nhưng bị uốn cong đi. Trục thanh khi uốn cong gọi là đường đàn hồi của thanh (hình 11-2a).

Chuyển vị dài của một điểm có thể phân tích thành hai thành phần: một thành phần song song với trục thanh ban đầu, một thành phần vuông góc với trục của thanh.

Vì biến dạng bé nên có thể coi chuyển vị của mỗi điểm là thành phần chuyển vị theo phương vuông góc với trục của thanh. Chuyển vị này gọi là độ võng $v = v(z)$ tại một điểm của thanh. Độ võng phụ thuộc hoành độ điểm đó. Như vậy phương trình đường đàn hồi có dạng:

$$v = v(z)$$



Hình 11-2

Tiếp tuyến của đường đàn hồi tại một điểm làm với trục thanh lúc ban đầu một góc (gọi là chuyển vị góc hay là góc xoay của mặt cắt ngang tại điểm đó).

Ta thấy:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dz} = V'(z) \quad (11-2)$$

nghĩa là:

* Khi thanh bị biến dạng uốn, góc xoay của mặt cắt ngang bằng đạo hàm bậc nhất theo z của độ võng.

Quan hệ (c) cho thấy khi thanh bị uốn thì độ cong của đường đàn hồi của trục dầm là:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Mặt khác, công thức xác định độ cong của một đường cong phẳng đã biết trong hình học vi phân là:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{V''}{(1 + V'^2)^{3/2}}$$

So sánh hai công thức trên ta được:

$$\frac{V''}{(1 + V'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_x}{EJ_x}$$

Đó là phương trình vi phân (PTVP) tổng quát của đường đàn hồi.

Theo cách chọn hệ trục tọa độ giáo trình này thì M_x và V'' luôn luôn cùng dấu với nhau. Phương trình vi phân đường đàn hồi có dạng:

$$\frac{V''}{(1 + V'^2)^{3/2}} = + \frac{M_x}{EJ_x}$$

Thực tế kỹ thuật không cho phép các công trình hay chi tiết máy bị biến dạng nhiều, vì thế góc xoay thường rất bé, có thể bỏ qua V'^2 so với 1, thành thử phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng gần đúng như sau:

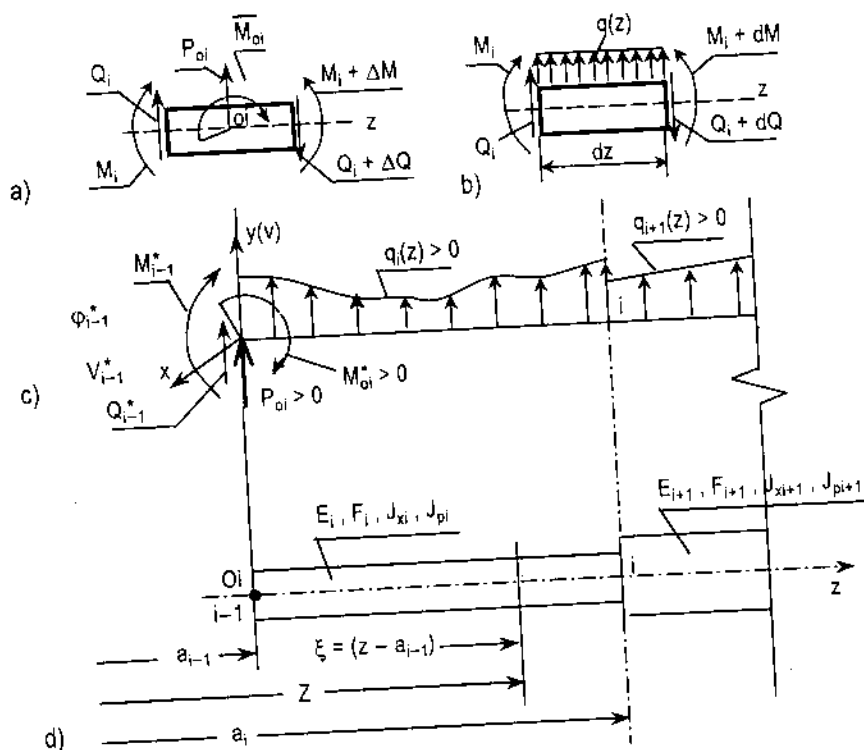
$$V''(z) = \frac{d^2V}{dz^2} = + \frac{M_x}{EJ_x} \text{ (phương trình Bernoulli - Euler) } \quad (11-3)$$

III. PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ $V(z)$, $\varphi(z)$ VÀ NỘI LỰC $M(z)$, $Q(z)$

Phương pháp vụn năng và các công thức thuật toán của nó đã được giới thiệu và thiết lập cặn kẽ ở chương 9. Phương pháp này cho phép tính toán tất cả các loại thanh chịu biến dạng đàn hồi có mặt cắt thay đổi, chế độ chất tải và liên kết tùy ý cả về số lượng và thể loại. Nhiệm vụ cơ bản của cơ học vật rắn biến dạng nói chung và của sức bền vật liệu nói riêng là xác định trường chuyển vị và nội lực trong hệ do tác dụng ngoài gây ra. Dầm chịu uốn ngang phẳng được nghiên cứu trong chương này là một trường hợp riêng của các thanh đàn hồi chịu lực nói trên. Để xác định nội lực và chuyển vị của dầm chịu uốn ngang phẳng chúng ta có nhiều phương pháp khác nhau để giải quyết hai nhiệm vụ trên. Trong mục này chúng ta sẽ áp dụng các công thức thuật toán của phương pháp vụn năng vào trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng.

1. Nhắc lại các liên hệ vi phân giữa nội lực, ngoại lực và chuyển vị

Khi ký hiệu $V(z)$, $\varphi(z)$ là chuyển vị thẳng theo phương y và chuyển vị góc quanh trục x , $M_x(z)$ và $Q_y(z)$ là mômen uốn quanh trục x , lực cắt theo phương y thì các liên hệ vi phân giữa các nội lực, ngoại lực và chuyển vị với nhau trên cơ

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i &= P_{0i} \\ \Delta M_i &= M_{0i} \\ \frac{dQ}{dz} &= q(z) \\ \frac{dM}{dz} &= Q(z) \\ \frac{d^2 M}{dz^2} &= q(z) \end{aligned} \right\} \quad (11-4)$$


Hình 11-3

2. Dạng ma trận

Với cách xây dựng công thức thuật toán hoàn toàn tương tự như ở chương 9, trong mục này công thức của các đại lượng cần tính vẫn giữ nguyên dạng của các công thức từ (9-10) đến (9-14). Sự khác nhau là số lượng và ý nghĩa vật lý của các đại lượng cần tính, cụ thể là (hình 11-3):

$[B_i], \vec{S}_i(z), \vec{\Delta S}_{0i}$ trong trường hợp này có dạng:

$$\vec{S}_i(z) = \begin{Bmatrix} V_i(z) \\ \varphi_i(z) \\ M_i(z) \\ Q_i(z) \end{Bmatrix}; \quad [B_i] = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \frac{\phi_2}{E_i J_i} & \frac{\phi_3}{E_i J_i} & \frac{\phi_4}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & \phi_0 & \frac{\phi_1}{E_i J_i} & \frac{\phi_2}{E_i J_i} & \frac{\phi_3}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & 0 & \phi_0 & \phi_1 & \phi_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \phi_0 & \phi_1 & \dots \end{bmatrix} \quad (11-6)$$

$$\vec{\Delta S}_{0i} = \{\tilde{V}_{0i}, \tilde{\varphi}_{0i}, M_{0i}^*, P_{0i}, q_{0i}, q'_{0i}, q''_{0i}, \dots\}^T \quad (i = \overline{1, n})$$

$$\vec{S}_n(z) = |B_n| |B_{n-1}^*| |B_{n-2}^*| \dots |B_1^*| \cdot \vec{\Delta S}_{01} + |B_n| |B_{n-1}^*| |B_{n-2}^*| \dots |B_2^*| \cdot \vec{\Delta S}_{02} + \dots + |B_n| \cdot \vec{\Delta S}_{0n} \quad (11-7)$$

$$\vec{S}_n^*(a_n) = |B_n| |B_{n-1}^*| |B_{n-2}^*| \dots |B_1^*| \cdot \vec{\Delta S}_{01} + |B_n| |B_{n-1}^*| |B_{n-2}^*| \dots |B_2^*| \cdot \vec{\Delta S}_{02} + \dots + |B_n| \cdot \vec{\Delta S}_{0n}$$

3. Dạng biểu diễn tổng

Trong trường hợp $l_i \neq \text{hằng}$ và $E_i J_i = \text{hằng}$ với mọi "i", các đại lượng cần tính là chuyển vị thẳng $V(z)$, chuyển vị góc $\varphi(z)$, mômen uốn $M(z)$ và lực cắt $Q(z)$ tại hoành độ z thuộc đoạn i có dạng dưới đây, khi ký hiệu $\Delta V_{0i}, \Delta \varphi_{0i}$ là bước nhảy của độ võng và góc xoay ở đầu trái đoạn i , còn M_{0i}^*, P_{0i} là mômen và lực tập trung ở "0i":

$$V(z) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta V_{0i} \phi_0 + \Delta \varphi_{0i} \phi_1 + M_{0i}^* \frac{\phi_2}{EJ} + P_{0i} \frac{\phi_3}{EJ} + \Delta q \frac{\phi_4}{EJ} + \Delta q' \frac{\phi_5}{EJ} + \dots \right)$$

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta \varphi_{0i} \phi_0 + M_{0i}^* \frac{\phi_1}{EJ} + P_{0i} \frac{\phi_2}{EJ} + \Delta q \frac{\phi_3}{EJ} + \Delta q' \frac{\phi_4}{EJ} + \dots \right)$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^n (M_{0i}^* \phi_0 + P_{0i} \phi_1 + \Delta q_{0i} \phi_2 + \Delta q'_{0i} \phi_3 + \dots) \quad (11-8)$$

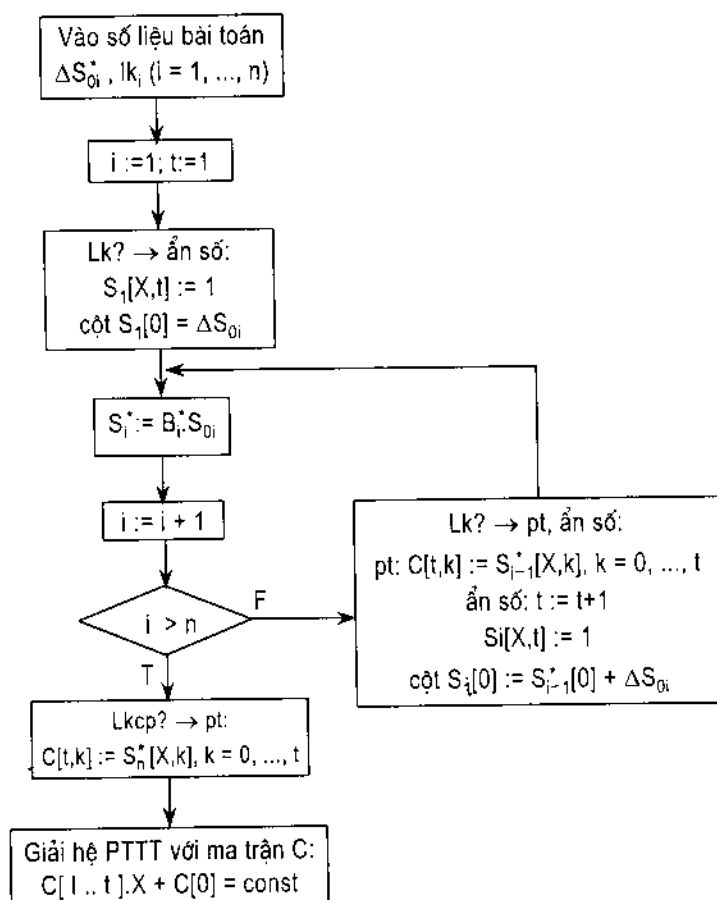
$$Q(z) = \sum_{i=1}^n (P_{0i} \phi_0 + \Delta q_{0i} \phi_1 + \Delta q_{0i} \phi_2 + \Delta q'_{0i} \phi_3 + \dots)$$

$\Delta q_{0i}, \Delta q'_{0i}, \Delta q''_{0i}, \dots$ là bước nhảy của tải trọng phân bố $q(z)$ và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của nó ở 0_i .

Như đã giới thiệu ở chương 9, để xác định chuyển vị và nội lực bằng các phương trình vạn năng đã xây dựng sẵn ở trên thì vấn đề còn lại đối với bài toán cơ bản của sức bền vật liệu là làm rõ các thành phần của vector $\vec{\Delta S}_{0i}$. Trong số đó các thành phần liên quan đến tải trọng phân bố $q_{0i}, q'_{0i}, q''_{0i}, \dots$ được cho trước theo điều kiện chất tải lên thanh. Các thành phần còn lại của vector $\vec{\Delta S}_{0i}$ dù bài toán kéo (nén), uốn hay xoắn, tĩnh định hay siêu tĩnh với bất kỳ số lượng và loại liên kết thừa như thế nào đều có thể xác định bằng các điều kiện biên nhờ sử dụng trực tiếp các phương trình vạn năng đã thiết lập sẵn dưới dạng ma trận hay dưới dạng biểu diễn tổng mà không cần thiết phải dùng đến các phương trình cân bằng tĩnh học. Đối với các bài toán tĩnh định bất kể số đoạn thanh có chế độ chất tải như thế nào, số các thành phần cần xác định trước trong $\vec{\Delta S}_{0i}$, không quá hai đối với dầm chịu uốn, không quá một đối với thanh chịu kéo (nén) và xoắn. Trong nhiều trường hợp không cần phải xác định một thành phần nào của $\vec{\Delta S}_{0i}$ nếu chỉ muốn tính nội lực. Thuật toán xác định nội lực và chuyển vị vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán với chương trình BK45 được viết bằng ngôn ngữ PASCAL 7.0, thuật toán này sẽ được giới thiệu ở mục dưới đây.

4. Sơ đồ thuật toán chương trình BK45

Sơ đồ khối thuật toán tìm các ẩn số tại đầu trái các đoạn



IV. ĐIỀU KIỆN BỀN VÀ HÌNH DẠNG HỢP LÝ CỦA MẶT CẮT NGANG

* Hình dạng hợp lý của mặt cắt ngang là hình dạng sao cho dầm có khả năng chống uốn lớn nhất đồng thời tốn ít vật liệu nhất.

Tuỳ thuộc dầm được làm bằng vật liệu dẻo hay giòn mà điều kiện bền được diễn đạt như sau:

$$\sigma_k^{\max} = + \frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y_k^{\max}| = [\sigma_k] \quad (11-9)$$

hoặc

$$\sigma_k^{\max} = + \frac{|M_x|}{W_{x,k}} \leq [\sigma_k] \quad (11-10)$$

trong đó: $[\sigma_k]$ - ứng suất cho phép khi kéo của vật liệu.

$y_k^{\max}$ - khoảng cách từ trục bị kéo xa nhất tới trục trung hoà.

$W_{x,k} = \frac{J_x}{|y_k^{\max}|}$ - mômen chống uốn của mặt cắt ngang đối với vùng kéo.

$$\sigma_n^{\min} = -\frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y_n^{\max}| = [\sigma_n] \quad (11-11)$$

hoặc
$$\sigma_n^{\min} = +\frac{|M_x|}{W_{x,n}} \leq [\sigma_n] \quad (11-12)$$

trong đó: $[\sigma_n]$ - ứng suất cho phép khi nén của vật liệu.

$y_n^{\max}$ - khoảng cách từ trục bị nén xa nhất tới trục trung hoà.

$W_{x,n} = \frac{J_x}{|y_n^{\max}|}$ - mômen chống uốn của mặt cắt ngang đối với vùng nén.

Xét tỷ số:

$$\frac{y_k^{\max}}{y_n^{\max}} = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]} \quad (11-13)$$

Nếu thanh làm bằng vật liệu dẻo, khả năng chịu kéo và chịu nén của loại vật liệu này như nhau. Khi ấy tỷ số trên bằng 1, nghĩa là $y_k^{\max} = y_n^{\max}$; trục trung hoà là trục đối xứng của mặt cắt ngang (Ví dụ mặt cắt hình chữ nhật). Khi đó hai điều kiện từ (11-9) đến (11-12) trùng nhau.

Hơn nữa ở những điểm càng gần trục trung hoà, trị số ứng suất pháp càng nhỏ, vì vậy để tiết kiệm vật liệu mặt cắt ngang nên có hình dạng sao cho phần lớn vật liệu được phân bố xa trục trung hoà (ví dụ mặt cắt hình chữ I, chữ T).

Đối với thanh làm bằng vật liệu giòn, khả năng chịu kéo và khả năng chịu nén khác nhau ($[\sigma_k] < [\sigma_n]$) như vậy mặt cắt ngang phải có hình dáng sao cho đường trung hoà chia chiều cao của mặt cắt theo tỷ số (11-13). Ví dụ mặt cắt chữ T, không những không đối xứng mà còn phải đặt sao cho phù hợp với điều kiện chịu lực. Trong trường hợp này phải kiểm tra đồng thời cả hai điều kiện (11-9) đến (11-12).

Từ điều kiện bên nói trên ta cũng có thể gặp trong thực tế các bài toán sau đây:

- Bài toán kiểm tra điều kiện bền là bài toán kiểm tra các bất đẳng thức từ (11-9) đến (11-12).

- Bài toán thiết kế là bài toán chọn mặt cắt ngang sao cho có J_x hoặc W_x thoả mãn điều kiện bền.

- Bài toán chọn tải trọng là bài toán từ điều kiện bền xác định mômen uốn tại mặt cắt nguy hiểm nhất. Sau đó từ mômen này rút ra tải trọng ngoài.

V. ĐIỀU KIỆN CỨNG

Một dầm có thể thoả mãn tốt điều kiện bền nhưng chuyển vị đồng thời không được vượt quá độ lớn cho phép mà yêu cầu kỹ thuật cụ thể đặt ra. Điều kiện hạn chế này được gọi là điều kiện cứng. Cụ thể là:

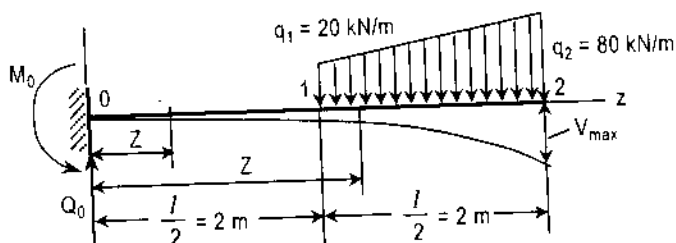
$$V_{\max} \leq [V] \quad (11-14)$$

và

$$\varphi_{\max} \leq [\varphi] \quad (11-15)$$

VI. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Ví dụ 1: Hãy viết phương trình độ võng, góc xoay và tính độ võng lớn nhất đối với dầm cho trên hình dưới đây.



Hình 11-4

Giải:

Phản lực tại ngàm $M_0 = -320 \text{ kNm}$, $Q_0 = 100 \text{ kN}$.

Phương trình độ võng đoạn một là:

$$v_1 = -\frac{320}{EJ} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{100}{EJ} \cdot \frac{z^3}{6} \quad \text{với} \quad 0 \leq z \leq \frac{l}{2}$$

Theo công thức tính bước nhảy của hàm và đạo hàm ta tìm:

$$\Delta q_1 = (-q_1) - (0) = -q_1 = -20 \text{ kN/m}$$

$$\Delta q_1' = \left[-\frac{q_2 - q_1}{l/2} \right] - 0 = -\frac{2(q_2 - q_1)}{l} = -30 \text{ kN/m}^2$$

Do đó ta nhận được phương trình độ võng của đoạn hai như sau:

$$\begin{aligned} v_{II} &= v_1 + \frac{\Delta q_1}{EJ} \cdot \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\Delta q_1'}{EJ} \cdot \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^5}{5!} = \\ &= -\frac{320}{EJ} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{100}{EJ} \cdot \frac{z^3}{6} - \frac{20}{EJ} \cdot \frac{(z-2)^4}{24} - \frac{30}{EJ} \cdot \frac{(z-2)^5}{120}; \quad \frac{l}{2} \leq z \leq l \end{aligned}$$

Bằng cách đạo hàm phương trình độ võng ta nhận được các phương trình góc xoay của đoạn một và hai như sau:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \frac{dv_I}{dz} = -\frac{320}{EJ} \cdot z + \frac{100}{EJ} \cdot \frac{z^2}{2} \\ \varphi_{II} &= \frac{dv_{II}}{dz} = -\frac{320}{EJ} \cdot z + \frac{100}{EJ} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{20}{EJ} \cdot \frac{(z-2)^3}{6} - \frac{30}{EJ} \cdot \frac{(z-2)^4}{24} \end{aligned}$$

Độ võng lớn nhất $v_{\max}$ sẽ là:

$$|v_{\max}| = \frac{2272}{15EJ} \text{ m}$$

Ví dụ 2:

Một dầm làm bằng thép hình chữ I số 33 chịu lực và liên kết như hình 11-5. Đơn vị để tính lực là “Tấn”, chiều dài “mét”; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ T/m}^2$.

a) Hãy viết các phương trình của $V(z)$, $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$, $Q_y(z)$ và vẽ các biểu đồ của chúng?

b) Kiểm tra độ bền và độ cứng của dầm.

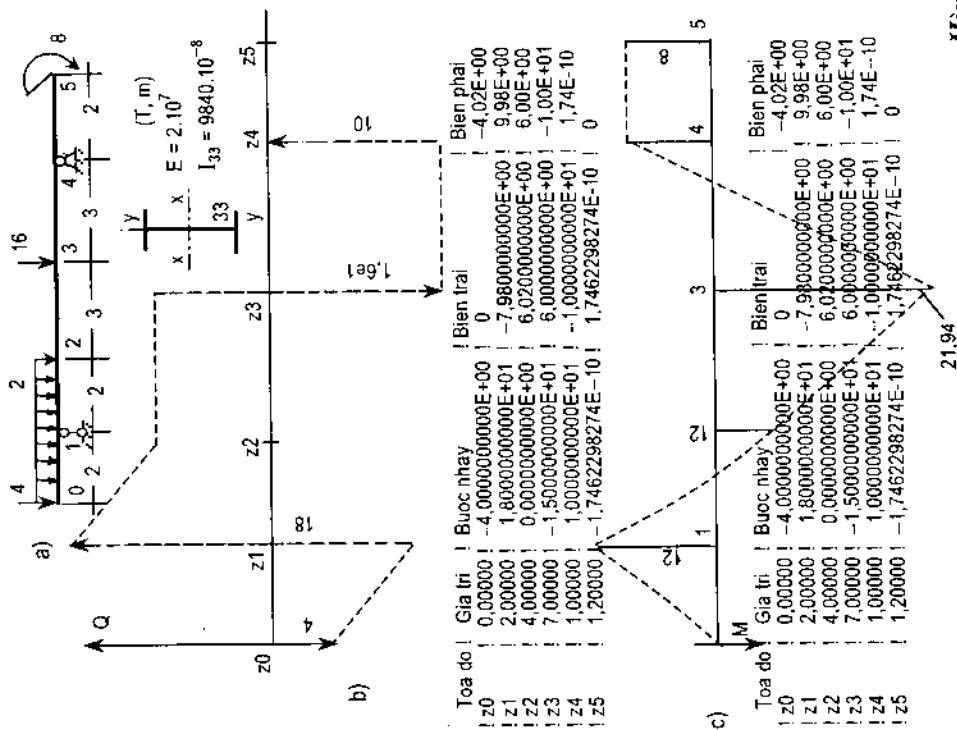
Biết ứng suất cho phép $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$, chuyển vị thẳng đứng cho phép $[V] = 5 \text{ cm}$.

Giải:

a) Phương trình của $V(z)$, $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$ và $Q_y(z)$.

Đoạn I: $0 \leq z \leq 2 \text{ m}$, theo công thức (11-8) ta có:

$$V_1(z) = -4,234 \cdot 10^{-5} z^4 - 3,388 \cdot 10^{-4} z^3 - 4,997 \cdot 10^{-3} z + 1,338 \cdot 10^{-2}$$



Hình 11.5

Đoạn 2: $2 \leq z \leq 4$ m

$$V_2(z) = -4,234 \cdot 10^{-5} z^4 + 8,469 \cdot 10^{-4} z^3 - 3,049 \cdot 10^{-3} z^2 - 1,042 \cdot 10^{-2} z + 1,776 \cdot 10^{-15}$$

Đoạn 3: $4 \leq z \leq 7$ m

$$V_3(z) = 5,081 \cdot 10^{-4} z^3 + 1,016 \cdot 10^{-3} z^2 - 1,380 \cdot 10^{-2} z - 2,693 \cdot 10^{-2}$$

Đoạn 4: $7 \leq z \leq 10$ m

$$V_4(z) = -8,469 \cdot 10^{-4} z^3 + 5,589 \cdot 10^{-3} z^2 + 6,013 \cdot 10^{-3} z - 4,549 \cdot 10^{-2}$$

Đoạn 5: $10 \leq z \leq 12$ m

$$V_5(z) = -2,033 \cdot 10^{-3} z^2 + 1,668 \cdot 10^{-2} z + 1,990 \cdot 10^{-13}$$

Bạn đọc có thể tìm được dễ dàng các hàm $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$ và $Q_y(z)$ từ các quan hệ 11-8 của chương này. Các biểu đồ V , φ , M và Q được cho tương ứng trên các hình 11-5b, c, d, e.

b) Kiểm tra độ bền và độ cứng

Từ các biểu đồ M_x và V cho thấy: mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền tại $z = 7$ m có $M = 21,94$ Tm, $Q = 10$ T. Khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{21,94 \cdot 10^5}{597} = 3675,0 \text{ kG/cm}^2 > [\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$$

Tại mặt cắt $z = 7$ m dầm bị phá huỷ.

Độ võng lớn nhất tại mặt cắt $z = 6,4$ m có $V_{\max} = 4,72$ cm.

Do đó, theo điều kiện cứng ta có:

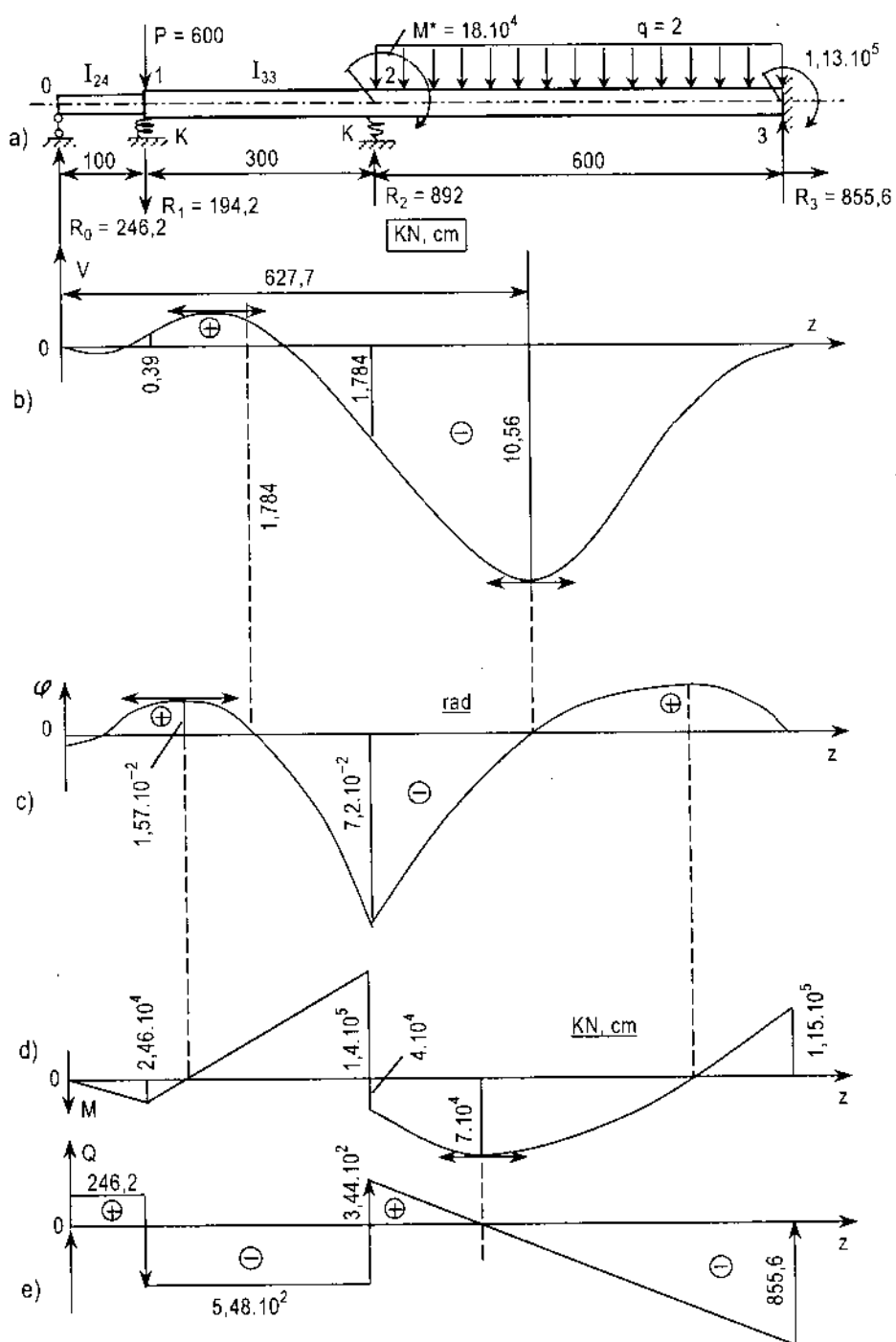
$$V_{\max} = 4,72 \text{ cm} < [V] = 5 \text{ cm}$$

Kết luận:

Điều kiện cứng tuy đảm bảo nhưng điều kiện bền không đảm bảo. Do đó dầm bị phá huỷ và cần phải thiết kế lại.

Ví dụ 3:

Một dầm liên tục bằng thép chữ I có mặt cắt thay đổi như hình 11-6a tựa trên hai gối tựa trung gian đàn hồi có độ cứng $k = 500$ kN/cm. Cho biết $P = 600$ kN, $M^* = 18 \cdot 10^4$ kNcm, $q = 2$ kN/cm; $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm²; $J_{x24} = 3460$ cm⁴; $J_{x33} = 9840$ cm⁴; $a_1 = 100$ cm; $a_2 = 400$ cm; $a_3 = 1000$ cm. Hãy viết các phương trình



Hình 11-6

của $V(z)$, $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$, $Q_y(z)$, vẽ các biểu đồ của chúng và kiểm tra độ cứng nếu $[\varphi] = 0,1 \text{ rad}$.

Giải:

Phương trình chuyển vị của các đoạn được viết theo công thức (11-7) với $i = 1,3$ như sau:

Đoạn 1: $0 \leq z \leq 100 \text{ cm}$

$$V_1(z) = 5,931 \cdot 10^{-7} \cdot z^3 - 2,05 \cdot 10^{-3} \cdot z$$

Đoạn 2: $100 \leq z \leq 400 \text{ cm}$

$$V_2(z) = -4,639 \cdot 10^{-9} \cdot z^3 + 6,256 \cdot 10^{-5} \cdot z^2 + 1,574 \cdot 10^{-2} \cdot z$$

Đoạn 3: $400 \leq z \leq 1000 \text{ cm}$

$$V_3(z) = -4,234 \cdot 10^{-10} \cdot z^4 + 2,917 \cdot 10^{-7} \cdot z^3 + 1,024 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 - 7,198 \cdot 10^{-2} \cdot z - 1,784$$

Các hàm $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$ và $Q_y(z)$ bạn đọc tự xác định lấy khi sử dụng các quan hệ (11-5) hoặc (11-7) của chương này. Biểu đồ $V(z)$, $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$, $Q_y(z)$ được cho trên các hình 11-6b, c, d, e.

VII. TÍNH CHUYỂN VỊ BẰNG PHƯƠNG PHÁP MAXWELL - MOHR - VÉRECHTCHAGUINNE

1. Công thức của Maxwell - Mohr

Trong các mục trên của chương này ta đã nghiên cứu cách xác định các hàm chuyển vị tại $\forall z$ của kết cấu. Trong thực tế kỹ thuật nhiều khi đòi hỏi xác định chuyển vị chỉ ở một số mặt cắt rời rạc của kết cấu. Công thức xác định chuyển vị như thế do Maxwell - Mohr thiết lập có dạng sau đây:

$$\begin{aligned} \Delta_{KP} = & \sum \int \frac{M_x \overline{M_x}}{EJ_x} dz + \sum \int \frac{M_y \overline{M_y}}{EJ_y} dz + \sum \int \frac{N_z \overline{N_z}}{EF} dz + \\ & + \sum \int \frac{k_x Q_x \overline{Q_x}}{GF} dz + \sum \int \frac{k_y Q_y \overline{Q_y}}{GF} dz + \sum \int \frac{M_z \overline{M_z}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (11-16)$$

trong đó:

- N_z , M_x , M_y , M_z , Q_x , Q_y là những biểu thức nội lực trên những mặt cắt bất

kỳ của mỗi đoạn do tải trọng ngoài cho trước gây ra.

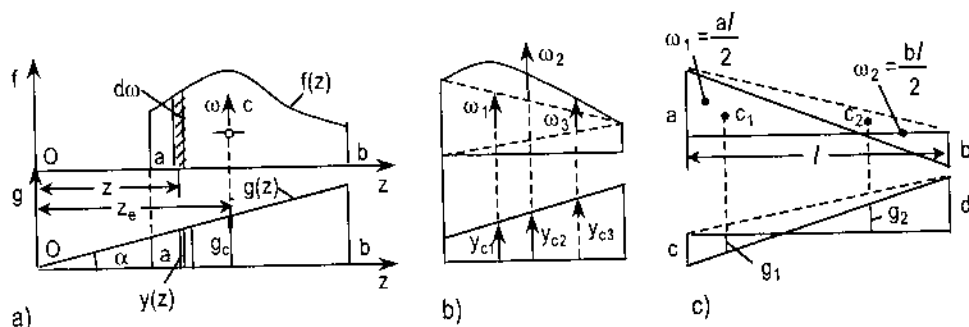
- $\bar{N}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y$ cũng là những nội lực như trên nhưng là do những lực ảo suy rộng bằng một đơn vị không thứ nguyên gây ra ($\bar{P}_K = 1$)

- k_x, k_y là những hệ số kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp do lực cắt gây ra phụ thuộc vào dạng mặt cắt.

- Tích phân được lấy trên từng đoạn thanh, còn dấu tổng được thực hiện cho tất cả các đoạn của kết cấu. Δ_{KP} là chuyển vị tại mặt cắt “K” theo phương của lực $\bar{P}_K = 1$ cần tính chuyển vị do tải trọng ngoài cho trước gây ra. Các đại lượng dưới mẫu số trong (11-16) là những độ cứng của mặt cắt ứng với từng loại biến dạng khác nhau. Do đó, mỗi tổng các tích phân xác định lượng chuyển vị Δ_{KP} do nội lực trong nó gây ra.

2. Thuật toán Vérechtchaquinne

Nếu độ cứng của mặt cắt không đổi trong một đoạn nào đó thì tích phân Maxwell - Mohr trong (11-16) có thể được tính bằng cách nhân diện tích ω của đồ thị nội lực gây ra do tải trọng ngoài cho trước với tung độ g_c của biểu đồ nội lực đó nhưng do lực ảo suy rộng $\bar{P}_K = 1$ gây ra. Tung độ g_c đi qua trọng tâm “C” của biểu đồ thứ nhất ω . Vì vậy các từ số trong mỗi tích phân Mohr có dạng (hình 11-7a).



Hình 11.7

$$\Delta = \int_a^b f(z)g(z)dz = \text{tg}\alpha \int_a^b zd\omega = \text{tg}\alpha Z_c \omega = \omega g_c$$

Do đó, mỗi tích phân Mohr có giá trị là:

$$\delta_j = \frac{\omega \cdot g_c}{K_j} \quad (j = \overline{1, 6})$$

Với K_j tương ứng là EJ_x, EJ_y, EF, GF, GJ_p

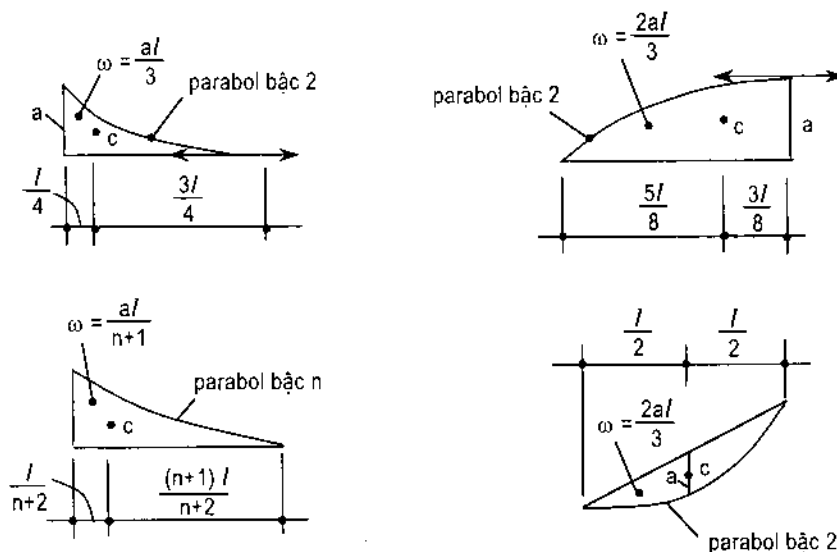
Tổng quát ta có:

$$\Delta_{KP} = \sum_{j=1}^6 \delta_j \quad (11-17)$$

• Chú ý rằng nếu sau khi tính $\Delta_{KP} > 0$ thì chiều của chuyển vị này trùng với chiều của lực $\overline{P_K} = 1$, ngược lại nếu $\Delta_{KP} < 0$ thì chiều của chuyển vị cần xác định ngược với chiều lực $\overline{P_K} = 1$.

Cách tính tích phân Maxwell - Mohr bằng cách “nhân” biểu đồ này được gọi là thuật toán của Vérechtchaguinne.

Khi diện tích ω là một hình phức tạp ta có thể chia thành nhiều hình đơn giản để tính diện tích và trọng tâm để áp dụng riêng biệt cách nhân cho từng hình đơn giản rồi cộng kết quả lại (hình 11-7b, c). Diện tích và trọng tâm của một số hình thường gặp được cho trên hình 11-8.



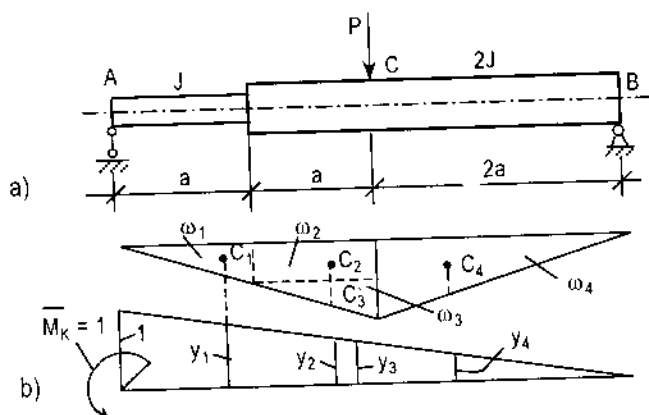
Hình 11-8

Ví dụ 4:

Cho P , a , E và J , tính φ_A và $V_C = ?$ (hình 11-9).

Giải:

Biểu đồ mômen do P và do $\overline{M}_k = 1$ gây ra được cho trên hình 11-9a, b, còn $\overline{M}_{k_{pk}} = M_p/P$.



Hình 11-9

$$\omega_1 = \frac{Pa^2}{4}; \omega_2 = \frac{Pa^2}{2}; \omega_3 = \omega_1; \omega_4 = Pa^2$$

$$y_1 = \frac{5}{6}; y_2 = \frac{5}{8}; y_3 = \frac{7}{12}; y_4 = \frac{1}{3};$$

$$y'_1 = \frac{a}{3}; y'_2 = \frac{3a}{4}; y'_3 = \frac{5a}{6}; y'_4 = \frac{2a}{3};$$

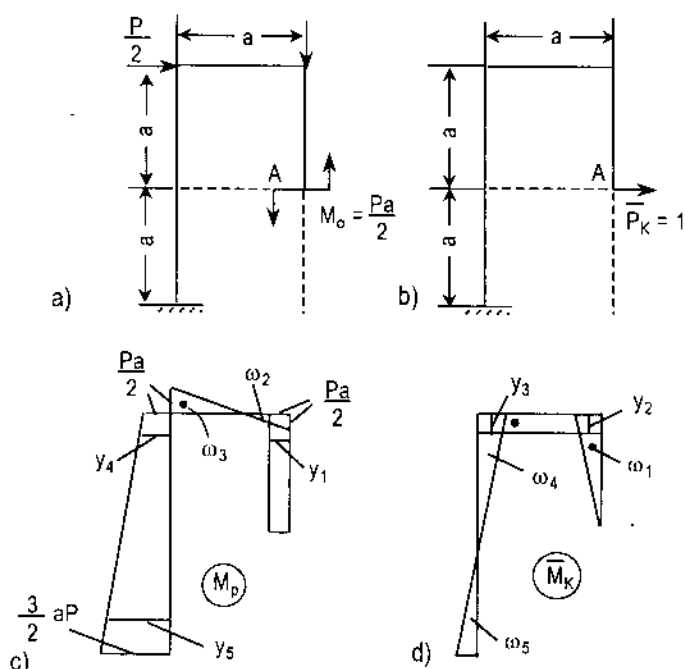
Theo công thức (11-29) ta có:

$$\varphi_A = \frac{\omega_1 y_1 + (\omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4)}{2EJ} = \frac{29Pa^2}{48EJ}$$

$$V_C = \frac{\omega_1 y'_1 + (\omega_2 y'_2 + \omega_3 y'_3 + \omega_4 y'_4)}{2EJ} = \frac{17Pa^3}{24EJ}$$

Ví dụ 5:

Một khung như hình 11-10a. Cho P , a , E và J . Hãy tính U_A ?



Hình 11-10

Giải:

Biểu đồ mômen do tải trọng và $\bar{P}_k = 1$ gây ra được cho trên hình 11-10c, d.

$$\omega_1 = \frac{a^2}{2}; \omega_2 = \frac{P.a^2}{8} = \omega_3; \omega_4 = \frac{a^2}{2} = \omega_5$$

$$y_1 = \frac{P.a}{2}; y_2 = a = y_3; y_4 = \frac{2P.a}{3}; y_5 = \frac{4P.a}{3}$$

Theo công thức (11-17) ta có:

$$U_A = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5}{EJ} = \frac{7Pa^3}{12EJ}$$

Đoạn 2: $100 \leq z \leq 400$ cm

$$v_2(z) = -4,639.10^{-9}.z^3 + 6,256.10^{-5}.z^2 + 1,574.10^{-2}.z$$

Đoạn 3: $400 \leq z \leq 1000$ cm

$$v_3(z) = -4,234.10^{-10}.z^4 + 2,917.10^{-7}.z^3 + 1,024.10^{-4}.z^2 - 7,198.10^{-2}.z - 1,784$$

Các hàm $\varphi_x(z)$, $M_x(z)$, $Q_y(z)$ bạn đọc tự làm theo công thức (11-5) hoặc (11-7).

Biểu đồ V, φ , M, Q được cho trên các hình 11-18b, c, d, e.

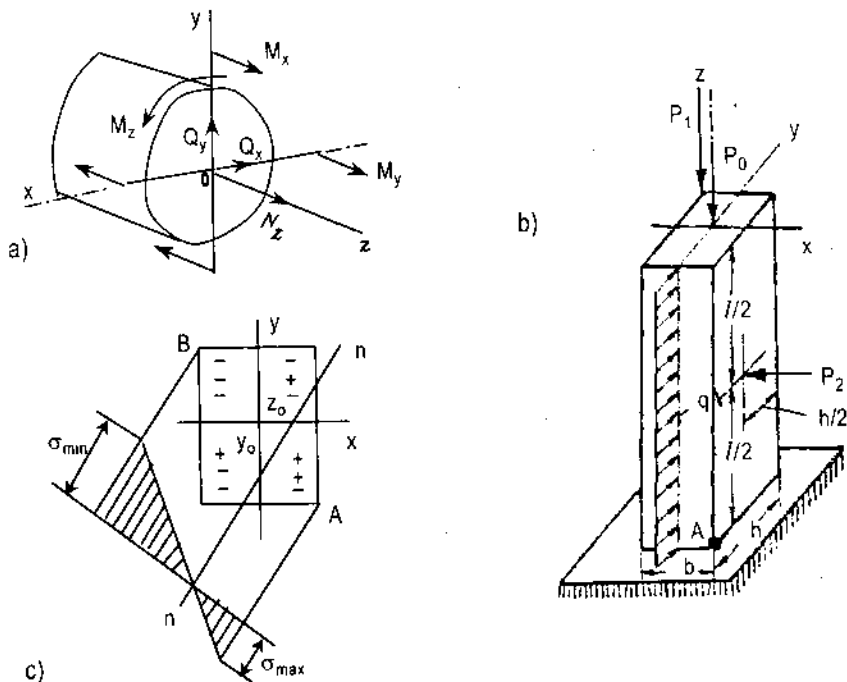
TÍNH TOÁN THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

I. NGUYÊN TẮC TÍNH TOÁN

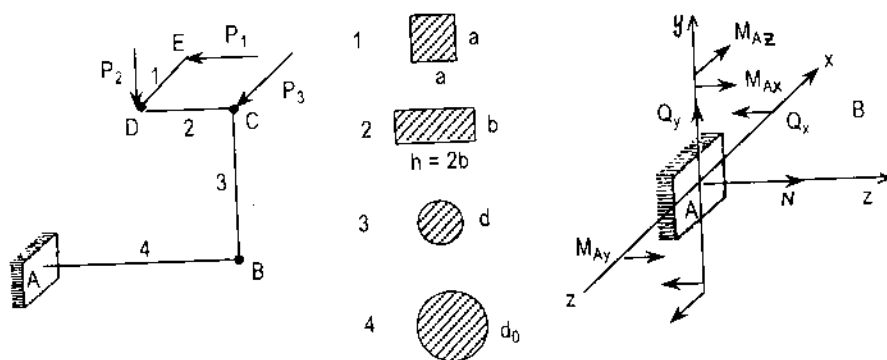
Định nghĩa:

* Một thanh được gọi là chịu lực phức tạp, nếu trên các mặt cắt ngang của nó có ít nhất hai trong sáu thành phần nội lực: $N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z$ (hình 12-1).

Trong trường hợp tổng quát nhất, khi thanh chịu tác dụng bởi hệ lực không gian thì trên mặt cắt ngang được gắn bởi hệ trục xyz có đủ 6 thành phần nội lực. Khi ấy thanh chịu đồng thời các biến dạng kéo hoặc nén, xoắn, cắt và uốn trong hai mặt phẳng yz và xz (hình 12-1 và hình 12-2).



Hình 12-1



Hình 12-2

Để xác định được ứng suất tại một điểm nào đó trên mặt cắt ngang ta sẽ sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực. Nguyên lý này chỉ có hiệu lực đối với những hệ có độ cứng lớn.

Ứng suất tại điểm (x, y) trên mặt cắt gồm hai loại $\vec{\sigma}$ và $\vec{\tau}$.

Ứng suất tổng cộng của mỗi loại này là tổng hình học các ứng suất thành phần của loại đó. Cụ thể là:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \vec{\sigma}_N + \vec{\sigma}_{M_x} + \vec{\sigma}_{M_y} \\ \vec{\tau} &= \vec{\tau}_{M_z} + \vec{\tau}_{Q_x} + \vec{\tau}_{Q_y}\end{aligned}\quad (a)$$

Ứng suất chính tại điểm này là:

$$\sigma_{1/3} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \quad (12-1)$$

Chú ý là các ứng suất thành phần trong (a) được xác định theo các công thức của các bài toán cơ bản: kéo (nén), uốn, xoắn, cắt.

Để tính toán độ bền người ta phải so sánh ứng suất tương đương này với ứng suất cho phép của vật liệu. Cụ thể là:

$$\sigma_{td} \leq [\sigma] \quad (12-2)$$

Trong đó: σ_{td} được xác định theo một trong các thuyết thích hợp về trạng thái ứng suất giới hạn.

Đối với vật liệu dẻo hai thuyết sau đây đối với trạng thái ứng suất phẳng thường được sử dụng:

$$\bullet \sigma_{td3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (12-3)$$

$$\bullet \sigma_{td4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (12-4)$$

Đối với vật liệu giòn khi đặt $k = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]}$ ta có thể sử dụng thuyết của Mohr:

$$\sigma_{td5} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{1-k}{2} \cdot \sigma + \frac{1+k}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (12-5)$$

Chú ý là không phải lúc nào cũng có thể xác định được điểm nguy hiểm nhất. Vì thế thông thường cần phải chọn một vài điểm khả nghi nguy hiểm để tính toán σ_{td} rồi so sánh. Những điểm này thường là những điểm ở trên chu vi của mặt cắt.

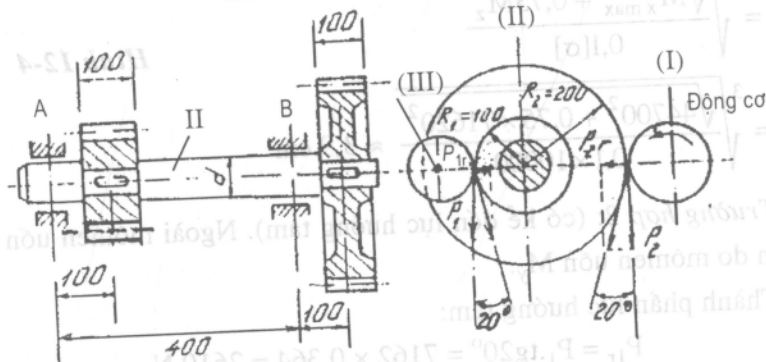
Khi sử dụng công thức (12-2), ta có thể chọn được mặt cắt ngang hoặc kiểm tra xem thanh có đủ bền không hoặc xác định được tải trọng ngoài cho phép tác dụng lên thanh.

Dưới đây là một số bài toán thường gặp trong kỹ thuật được cụ thể hoá bằng số.

II. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

Trục truyền (II) có bánh răng hình trụ răng thẳng truyền công suất $W = 10$ mã lực từ động cơ (I) quay với tốc độ $n = 100$ vòng/phút đến bánh xe (III). Phương các lực tác dụng ghi trên hình 12-3. Ứng suất cho phép của vật liệu chế tạo trục với $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 12-3

Xác định kích thước cần thiết của trục truyền theo thuyết bền thể năng biến đổi hình dáng và thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Xét hai trường hợp có để ý đến thành phần lực hướng tâm và không để ý đến thành phần này. Khi tính bỏ qua trọng lượng trục và sự mất mát lực truyền chuyển động giữa các bánh răng và ổ trục.

Giải:

Mômen xoắn tác dụng vào trục:

$$M_z = 716200 \frac{W}{n} = 716200 \frac{10}{100} = 71620 \text{ Ncm}$$

Trường hợp 1: (bỏ qua lực hướng tâm). Trục chịu uốn bởi lực P_1 và P_2

$$P_1 = \frac{M_z}{r_1} = \frac{71620}{10} = 7162 \text{ N}$$

$$P_2 = \frac{M_z}{r_2} = \frac{71620}{20} = 3581 \text{ N}$$

Từ biểu đồ mômen uốn ta được (hình 12-4d):

$$M_{x \max} = 447 \text{ Nm}$$

Đường kính tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (12-3):

$$d = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{M_{x \max}^2 + 0,75M_z^2}}{0,1[\sigma]}}$$

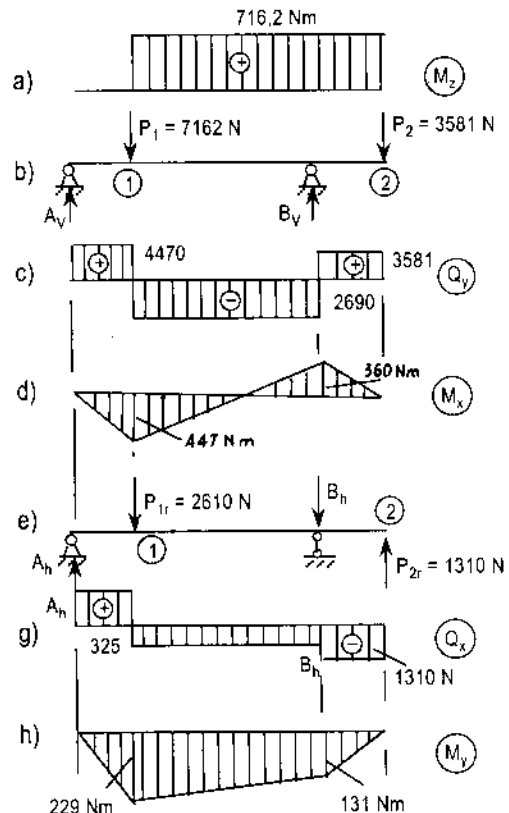
$$= \sqrt[3]{\frac{\sqrt{44700^2 + 0,75 \times 71620^2}}{0,1 \times 10000}} \approx 3,9 \text{ cm}$$

Trường hợp 2: (có kể đến lực hướng tâm). Ngoài mômen uốn M_x , trục còn bị uốn do mômen uốn M_y .

Thành phần lực hướng tâm:

$$P_{1r} = P_1 \cdot \lg 20^\circ = 7162 \times 0,364 = 2610 \text{ N}$$

$$P_{2r} = P_2 \cdot \lg 20^\circ = 3581 \times 0,364 = 1305 \text{ N}$$



Hình 12-4

Vẽ biểu đồ mômen uốn M_y (hình 12-4h) ta được $M_{y \max} = 229 \text{ Nm}$ ở cùng mặt cắt với $M_{x \max}$.

Mômen tương đương tính theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (12-3);

$$M_{td3} = \sqrt{M_{x \max}^2 + M_{y \max}^2 + M_z^2} = \sqrt{44700^2 + 22900^2 + 71620^2} = 76450 \text{ Ncm}$$

Đường kính trục:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{td3}}{0,1 \times [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{76450}{0,1 \times 10000}} = \approx 4,3 \text{ cm}$$

Mômen tương đương tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng lớn nhất (12-4):

$$M_{td4} = \sqrt{M_{x \max}^2 + M_{y \max}^2 + 0,75 M_z^2} = \sqrt{44700^2 + 22900^2 + 0,75 \times 71620^2} = 63750 \text{ Ncm}$$

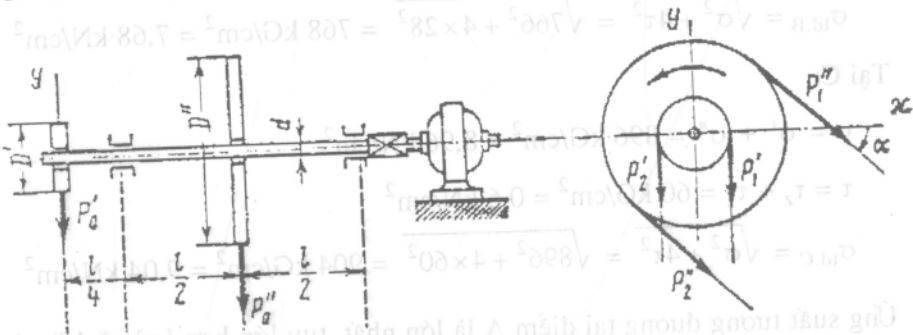
Đường kính trục:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{td4}}{0,1 \times [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{63750}{0,1 \times 10000}} \approx 4 \text{ cm.}$$

Ví dụ 2: (Ban đọc tự tập làm bài toán sau đây).

Hãy chọn đường kính của trục truyền (hình 12-5). Biết: $D' = 20 \text{ cm}$, $D'' = 60 \text{ cm}$, $P'_0 = 200 \text{ daN}$, $P''_0 = 400 \text{ daN}$, $P'_1 = 800 \text{ daN}$, $P'_2 = 400 \text{ daN}$, $P''_1 = 1000 \text{ daN}$, $P''_2 = 600 \text{ daN}$, $l = 2 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $[\sigma] = 1000 \text{ daN/cm}^2$.

Trả lời: $d = 4,2 \text{ cm}$



Hình 12-5

Ví dụ 3:

Hãy kiểm tra bền cho cột chịu lực như trên hình 12-6a.

Cho biết: $P_0 = 40 \text{ T}$, $P_1 = 8 \text{ T}$, $P_2 = 4 \text{ T}$, $P_3 = 2 \text{ T}$.

$$l = 1 \text{ m}, h = 24 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}, [\sigma] = 1400 \text{ kG/cm}^2.$$

Giải:

Mặt cắt nguy hiểm nhất là mặt cắt tại ngàm, ở đó có các nội lực sau đây:

$$N_z = P_0 + P_1 = 48 \text{ T}; M_x = P_1 \cdot \frac{h}{2} + P_2 \cdot l = 496 \text{ T.cm};$$

$$M_y = 132 \text{ T.cm}; M_z = P_3 \cdot \frac{h}{2} = 42 \text{ T.cm};$$

$$Q_y = 4 \text{ T}; Q_x = 2 \text{ T}.$$

Trên hình 12-6b là biểu đồ phân bố của các loại ứng suất do từng thành phần nội lực gây ra trên mặt cắt nguy hiểm này.

Tại A:

$$\begin{aligned}\sigma_{td,A} &= \sigma_{\max} = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' \\ &= 250 + 646 + 516 = 1412 \text{ kG/cm}^2 = 14,12 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

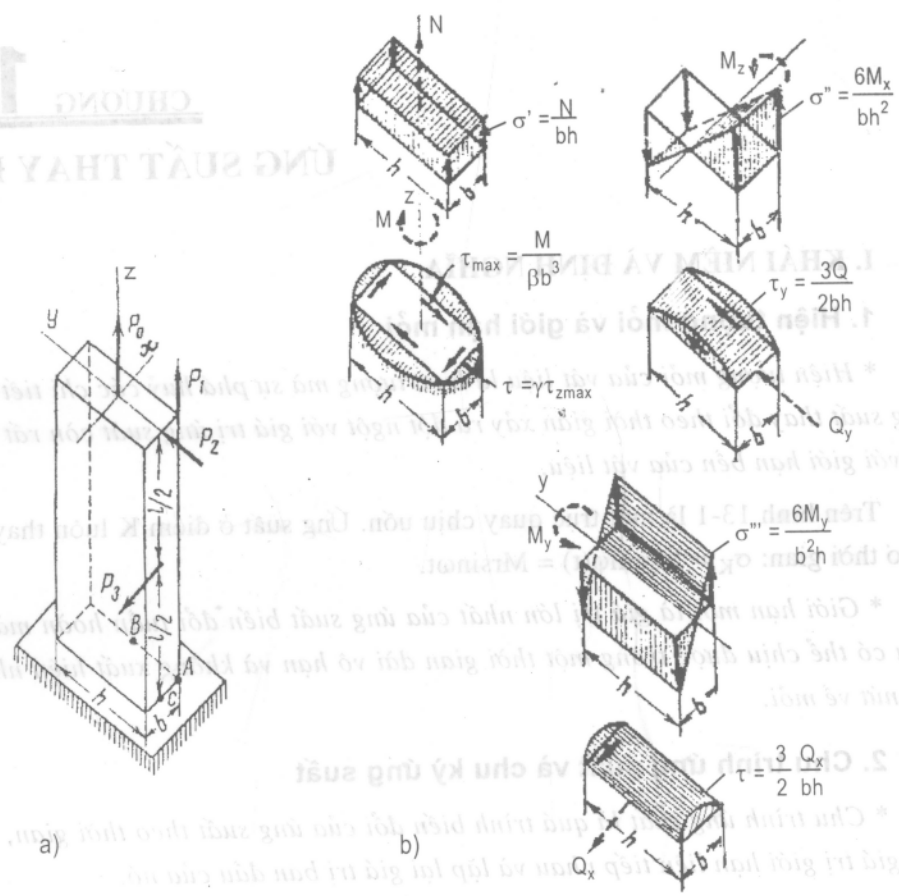
Tại B:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma' + \sigma''' = 766 \text{ kG/cm}^2 = 7,66 \text{ kN/cm}^2 \\ \tau &= \tau_{z \max} - \tau_y = 59 - 31 = 28 \text{ kG/cm}^2 = 0,28 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{td,B} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{766^2 + 4 \times 28^2} = 768 \text{ kG/cm}^2 = 7,68 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

Tại C:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma' + \sigma'' = 896 \text{ kG/cm}^2 = 8,96 \text{ kN/cm}^2 \\ \tau &= \tau_z + \tau_x = 60 \text{ kG/cm}^2 = 0,6 \text{ kN/cm}^2 \\ \sigma_{td,C} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{896^2 + 4 \times 60^2} = 904 \text{ kG/cm}^2 = 9,04 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

Ứng suất tương đương tại điểm A là lớn nhất, tuy lớn hơn $[\sigma]$ cỡ 1% nhưng cột vẫn làm việc an toàn và rất kinh tế.



Hình 12-6

(13-1) $\tau = \frac{p_{min}}{p_{max}}$

Ở đây p_{max} (σ_{max} và τ_{max}) và p_{min} (σ_{min} và τ_{min}) là ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất của chu trình.

Đại lượng:

(13-2) $p_m = \frac{p_{max} + p_{min}}{2}$

Gọi là ứng suất trung bình của chu trình, và đại lượng

ỨNG SUẤT THAY ĐỔI**I. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA****1. Hiện tượng mỏi và giới hạn mỏi**

* *Hiện tượng mỏi của vật liệu là hiện tượng mà sự phá huỷ các chi tiết chịu ứng suất thay đổi theo thời gian xảy ra đột ngột với giá trị ứng suất còn rất thấp so với giới hạn bền của vật liệu.*

Trên hình 13-1 là một trục quay chịu uốn. Ứng suất ở điểm K luôn thay đổi theo thời gian: $\sigma_K = M r \sin \varphi(t) = M r \sin \omega t$.

* *Giới hạn mỏi là giá trị lớn nhất của ứng suất biến đổi tuần hoàn mà vật liệu có thể chịu được trong một thời gian dài vô hạn và không xuất hiện những vết nứt về mỏi.*

2. Chu trình ứng suất và chu kỳ ứng suất

* *Chu trình ứng suất là quá trình biến đổi của ứng suất theo thời gian, qua hai giá trị giới hạn liên tiếp nhau và lặp lại giá trị ban đầu của nó.*

* *Chu kỳ ứng suất là thời gian thực hiện một chu trình ứng suất.*

Một chu trình ứng suất nào đó được đặc trưng bởi hệ số bất đối xứng, ký hiệu là r .

$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (13-1)$$

Ở đây $p_{\max}$ ($\sigma_{\max}$ và $\tau_{\max}$) và $p_{\min}$ ($\sigma_{\min}$ và $\tau_{\min}$) là ứng suất lớn nhất và nhỏ nhất của chu trình.

Đại lượng:

$$p_m = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (13-2)$$

gọi là ứng suất trung bình của chu trình, và đại lượng

$$p_a = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad (13-3)$$

gọi là biên độ của chu trình.

Giới hạn môi là:

$$p_r = p_{\max}^r = p_m^r + p_a^r \quad (13-4)$$

trong đó $p_{\max}^r$, p_m^r , p_a^r là ứng suất lớn nhất, ứng suất trung bình và biên độ của chu trình khi vật liệu làm việc với giới hạn môi.

Các chu trình ứng suất khác nhau được mô tả trên hình 13-2.

Đối với:

- Chu trình đối xứng:

$$p_{\max} = -p_{\min}; \quad p_m = 0; \quad r = -1; \quad p_r = p_{-1}$$

- Chu trình không đối xứng dương:

$$p_{\max} > 0; \quad p_{\min} > 0; \quad 0 < r < 1$$

- Chu trình không đối xứng đổi dấu:

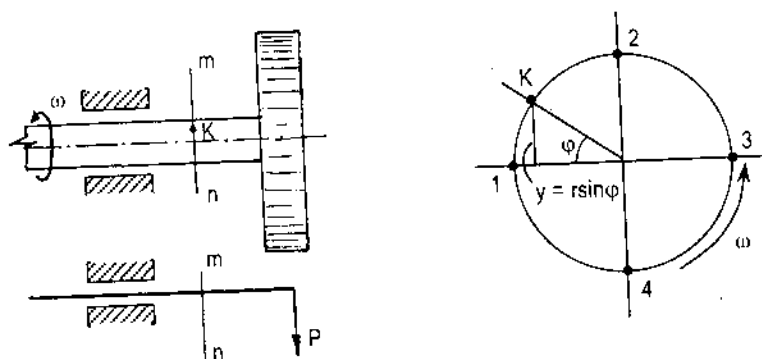
$$p_{\max} > 0; \quad p_{\min} < 0; \quad -1 < r < 0$$

- Chu trình mạch động dương:

$$p_{\max} > 0; \quad p_{\min} = 0; \quad p_m = p_a = \frac{p_{\max}}{2}; \quad r = 0; \quad p_r = p_0$$

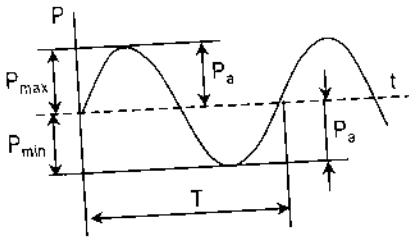
- Chu trình mạch động âm:

$$p_{\max} = 0; \quad p_{\min} < 0; \quad p_m = -p_a = \frac{p_{\min}}{2}; \quad r = \infty; \quad p_r = p_{\infty}$$

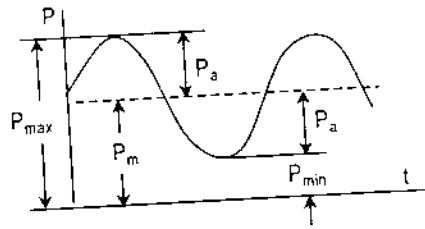


Hình 13-1

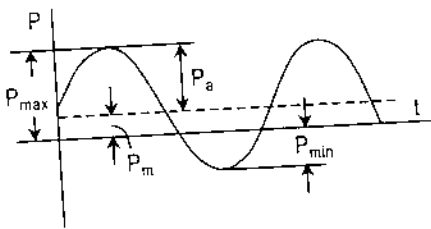
• Chu trình đối xứng



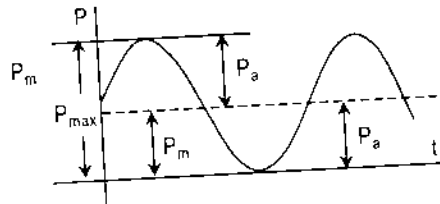
• Chu trình không đối xứng



• Chu trình không đối xứng đối dấu



• Chu trình mạch động dương



Hình 13-2

II. CÁCH TÍNH TOÁN ĐỘ BỀN MỖI CHỊU TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT ĐƠN VÀ TRƯỢT THUẦN TUYẾT

1. Các xác định giới hạn mỏi

Để có một p_r xác định, ví dụ p_{-1} (σ_{-1} và τ_{-1}) người ta phải vẽ đường cong $p_r = p_r(N)$ từ các số liệu thí nghiệm. Tung độ của tiếp tuyến với đường $p_r(N)$ được lấy quy ước là giới hạn mỏi đối với chu trình r (hình 13-3a, c).

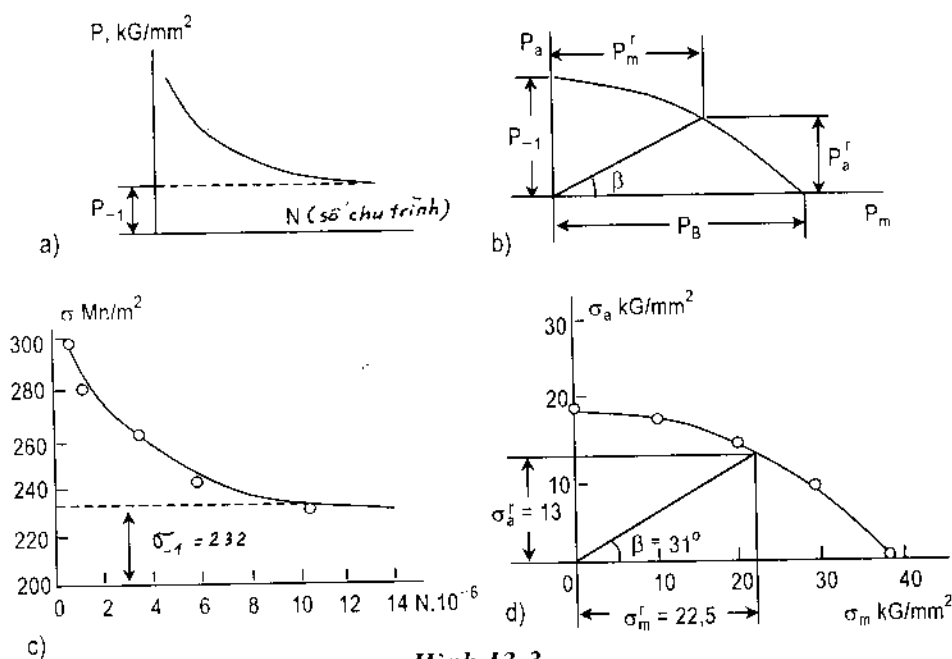
Từ $\{p_r\}$ này người ta vẽ đường cong các biên độ giới hạn trong hệ tọa độ (p_m, p_a) (hình 13-3b, d).

Khi ấy giới hạn mỏi ứng với r nào đó là tổng các tọa độ p_m^r và p_a^r của giao điểm giữa đường cong với đường thẳng.

$$p_a = \operatorname{tg} \beta \cdot p_m = \frac{1-r}{1+r} \cdot p_m$$

Cụ thể là :

$$p_r = p_m^r + p_a^r$$



Hình 13-3

Giới hạn mỏi của một chi tiết thực còn phụ thuộc vào nhiều yếu tố như: sự tập trung ứng suất, kích thước chi tiết, trạng thái bề mặt. Ảnh hưởng của các yếu tố này đến giới hạn mỏi thực được đánh giá thông qua một hệ số.

$$q = \frac{\varepsilon \cdot \beta}{k}$$

Do đó, hệ số an toàn của chi tiết chịu chu trình đối xứng được đánh giá bởi biểu thức:

$$n = \frac{q \cdot P_{-1}}{P_{\max}}$$

Điều kiện bền của chi tiết chịu chu trình đối xứng và bất kỳ là:

$$P_{\max} \leq [p_{-1}] \quad \text{và} \quad P_{\max} = P_m + P_a \leq [p_r] \quad (13-5)$$

Nếu gọi $[n]$ là hệ số an toàn cho phép, thì:

$$[p_{-1}] = \frac{q \cdot P_{-1}}{[n]} \quad \text{và} \quad [p_r] = \frac{2[p_{-1}] \cdot [p]}{(1-r) \cdot [p] + (1+r) \cdot [p_{-1}] \cdot \frac{P_{ch}}{P_B}} \quad (13-6)$$

trong đó: $[p]$ ($[\sigma]$ và $[\tau]$) là ứng suất cho phép khi chịu tải trọng tĩnh;

P_{ch} , P_B là giới hạn chảy, giới hạn bền khi kéo tĩnh.

Khi sử dụng những biểu đồ biên độ đơn giản hoá (p_m , p_a), ta thiết lập được hệ số an toàn mỗi tính toán dưới dạng:

$$\eta_r = \frac{p_{-1}}{\gamma \cdot p_m + \frac{k_p}{\beta} \cdot \frac{p_a}{\varepsilon_p}} \quad (13-7)$$

Trong đó: k_p , ε_p , β là hệ số kể đến sự tập trung ứng suất, kích thước và trạng thái bề mặt của chi tiết thực, còn

$$\gamma = \frac{2p_{-1} - p_0}{p_0}$$

Đối với các chi tiết mà ứng suất thay đổi có biên độ bé thì sự phá huỷ lại do sự chảy dẻo của vật liệu. Trong trường hợp này hệ số an toàn tính toán là:

$$n = \frac{p_{ch}}{p_m + p_a} \quad (13-8)$$

Điều kiện bền mỏi là:

$$n_r \geq [n] \quad (13-9)$$

III. TÍNH TOÁN ĐỘ BỀN MỎI ĐỐI VỚI TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHỨC TẠP

Khi chi tiết chịu trạng thái ứng suất phức tạp thì điều kiện bền theo thuyết ba hoặc bốn về trạng thái ứng suất giới hạn dưới dạng eliptic như sau:

$$\frac{\sigma_{max}^2}{[\sigma_r]^2} + \frac{\tau_{max}^2}{[\tau_r]^2} \leq 1 \quad (13-9)$$

Trong công thức này $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$; $\tau_{max} = \tau_m + \tau_a$;

$[\sigma_r]$, $[\tau_r]$ là ứng suất cho phép mà giá trị của nó được cho bởi (13-6).

Hệ số an toàn mỏi chung và điều kiện bền khi chịu đồng thời σ và τ thay đổi có biểu thức:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n] \quad (13-10)$$

Các n_σ , n_τ được tính theo (13-7) hoặc (13-8).

IV. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

Một trục nhỏ dạng ống của động cơ chịu tác dụng của lực P thay đổi trong giới hạn từ $P = 60 \text{ kN}$ đến $P = -20 \text{ kN}$. Các đặc trưng của vật liệu như sau:

$$\sigma_B = 100 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_{ch} = 80 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{-1} = 50 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_0 = 75 \text{ kN/cm}^2$$

Mặt ngoài chốt được đánh bóng. $\beta = 1$; $\varepsilon_r = 0,9$; $K_\sigma = 1,1$.

Xác định hệ số an toàn về mỏi?

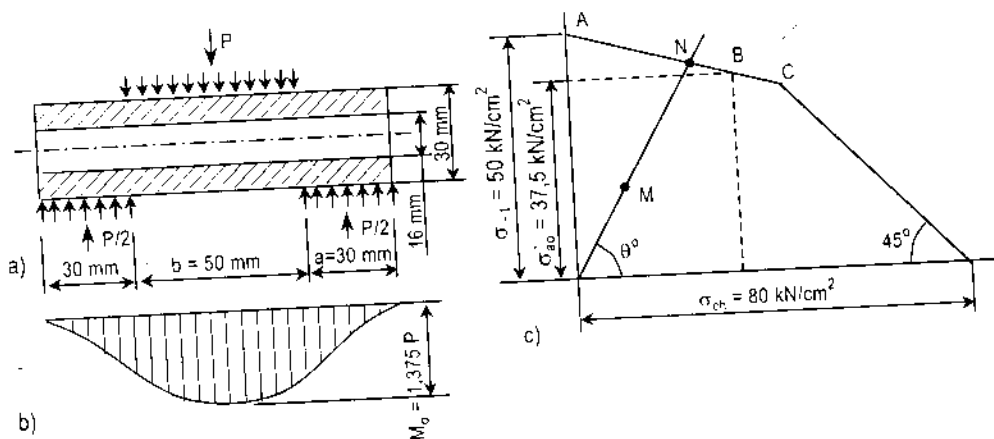
Giải:

Trên hình 13-4 là sơ đồ truyền lực cho trục và biểu đồ mômen uốn. Mômen uốn ở mặt cắt tính toán là:

$$M_u = \frac{1}{2} P \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) - \frac{1}{2} P \frac{b}{4}$$

Mômen chống uốn của mặt cắt:

$$W_u = \frac{\pi 3^3}{32} \left[1 - \left(\frac{1,6}{3,0} \right)^4 \right] = 2,44 \text{ cm}^3$$



Hình 13-4

Giá trị lớn nhất và bé nhất của mômen uốn là:

$$M_{u \max} = 1,375 P_{\max} = 1,375 \times 60 = 82,50 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_{u \min} = 1,375 P_{\min} = 1,375 \times (-20) = -27,30 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất bằng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{u\max}}{W_u} = \frac{82,500}{2,44} = 33,80 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{u\min}}{W_u} = -\frac{27,500}{2,44} = -11,30 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất biên độ và ứng suất trung bình của chu trình làm việc được tính theo công thức (13-3) và (13-2) như sau:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{33,80 - (-11,30)}{2} = 22,55 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{33,80 + (-11,30)}{2} = 11,25 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số giới hạn của ứng suất biên độ và ứng suất trung bình của chu trình mạch động là:

$$\sigma'_{a0} = \sigma'_{m0} = \frac{\sigma_0}{2} = 37,50 \text{ kN/cm}^2$$

Từ các giá trị đã biết của σ_{-1} , σ'_{a0} , σ_{ch} ta lập được biểu đồ giới hạn mỏi gần đúng như trên hình 13-4c.

Vì chu trình giới hạn có cùng một hệ số không đối xứng với chu trình làm việc nên ta có:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sigma_a K_a}{\sigma_m \beta \varepsilon_\sigma} = \frac{22,550 \times 1,1}{11,250 \times 1 \times 0,9} = 2,45$$

$$\Rightarrow \theta = 68^\circ$$

Chu trình làm việc được biểu diễn bởi điểm M có toạ độ $\sigma_a^* = 27,20 \text{ kN/cm}^2$ và $\sigma_m = 11,250 \text{ kN/cm}^2$. Chu trình giới hạn đồng dạng được biểu diễn bởi điểm N có toạ độ $n_r \sigma_a = 43,50 \text{ kN/cm}^2$ và $n_r \sigma_m = 17,85 \text{ kN/cm}^2$. Các toạ độ này được tìm từ biểu đồ giới hạn mỏi gần đúng vừa vẽ. Theo định nghĩa của hệ số an toàn ta có:

$$n_r = \frac{43,50}{27,20} = 1,6$$

Hệ số này có thể xác định bằng cách sử dụng trực tiếp công thức (13-7):

$$\eta_r = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma\sigma_m + \frac{K_\sigma}{\beta\epsilon_\sigma}\sigma_a} = \frac{50,00}{0,333 \times 11,25 + \frac{1,1}{1 \times 0,9} \times 22,55} = 1,59$$

trong đó:

$$\gamma = \frac{\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0}{0,5\sigma_0} = \frac{50,00 - 37,50}{37,50} = 0,333$$

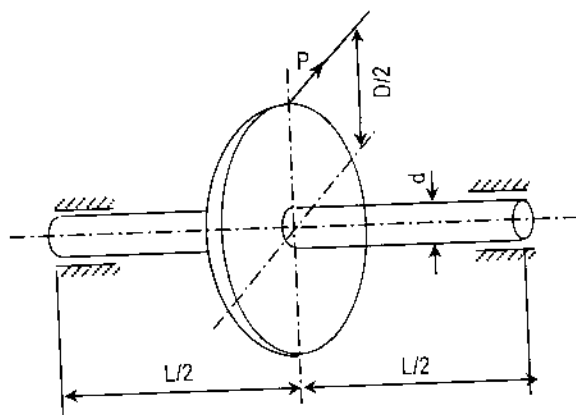
Ví dụ 2:

Một trục quay có đường kính $d = 50 \text{ mm}$, chiều dài $l = 500 \text{ mm}$, trên trục có một bánh răng đường kính 300 mm được liên kết với trục bằng một mối ghép then. Công suất truyền cho trục $N = 50 \text{ kW}$, số vòng quay của trục $n = 600 \text{ vg/ph}$ (hình 13-5). Hãy xác định hệ số an toàn mỗi tính toán cho trục?

Các đặc trưng cơ học của vật liệu trục như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= 50,00 \text{ kN/cm}^2; & \sigma_{ch} &= 36,00 \text{ kN/cm}^2; \\ \sigma_{-1} &= 24,00 \text{ kN/cm}^2; & \sigma_0 &= 35,00 \text{ kN/cm}^2; \\ \tau_{-1} &= 18,00 \text{ kN/cm}^2; & \tau_0 &= 27,00 \text{ kN/cm}^2; \\ \tau_{ch} &= 22,50 \text{ kN/cm}^2. \end{aligned}$$

Giải:



Hình 13-5

Mômen xoắn của trục:

$$M_z = 9736 \cdot \frac{N}{n} = 9736 \cdot \frac{50}{600} = 811,33 \text{ kNcm}$$

Lực vòng bằng:

$$P = \frac{2M_z}{D} = \frac{2 \times 811,33}{30} = 54,09 \text{ kN}$$

Mômen uốn ở mặt cắt 1-1 là:

$$M_u = \frac{P.l}{4} = \frac{54,09 \times 50}{4} = 67,50 \text{ kNcm}$$

Các ứng suất lớn nhất ở mặt cắt này:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} = \frac{67,50}{0,1 \times 125} = 5,40 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2W_u} = \frac{811,33}{0,2 \times 125} = 3,24 \text{ kN/cm}^2$$

Khi trục xoay, các thớ biên của nó chịu kéo nén thay đổi, bởi vậy, đối với ứng suất pháp ta có chu trình đối xứng và chu trình đó có:

$$\sigma_a = 5,400 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_m = 0$$

Mômen xoắn không đổi, do đó:

$$\tau_a = 0; \quad \tau_m = 3,240 \text{ kN/cm}^2$$

Các hệ số β , ε_σ , K_σ trong trường hợp này là:

$$\beta = 0,9; \quad \varepsilon_\sigma = 0,86; \quad K_\sigma = 2,8$$

$$\gamma = \frac{\tau_{-1} - 0,5\tau_0}{0,5\tau_0} = \frac{18,00 - 13,50}{13,50} = 0,33$$

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1} \cdot \frac{\beta \cdot \varepsilon_\sigma}{K_\sigma}}{\gamma \cdot \sigma_m + \sigma_a} = \frac{24,00 \times \frac{0,9 \times 0,86}{2,8}}{0 + 5,40} = 1,23$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1} \cdot \frac{\beta \cdot \varepsilon_\tau}{K_\tau}}{\gamma \cdot \tau_m + \tau_a} = \frac{18,00 \times \frac{0,9 \times 0,86}{2,8}}{0,33 \times 3,24 + 0} = 4,65$$

Hệ số an toàn đối với các giới hạn chảy là:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{36,00}{5,40} = 6,67$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_{max}} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_a + \tau_m} = \frac{22,50}{0 + 3,24} = 6,94$$

Để tính toán ta phải lấy các giá trị bé nhất của n_{σ} và n_{τ} . Hệ số an toàn chung là:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{1,23 \times 4,65}{\sqrt{1,23^2 + 4,65^2}} = 1,2$$

Ví dụ 3:

Xác định hệ số an toàn mỗi của một cột chịu lực dọc tập trung P ở đầu cột thay đổi từ -150 kN (nén) đến $+150$ kN (kéo), đường kính cột $d = 40$ mm.

Hệ số an toàn sẽ thay đổi là bao nhiêu nếu tải trọng P thay đổi từ 0 đến $+150$ kN.

Cột bằng thép 45: $\sigma_{ch} = 360$ N/mm²; $\sigma_{-1} = 200$ N/mm²;

$$\gamma = 0,11; \quad \frac{1}{q} = \alpha_{\tau} = 1,5.$$

Khi tính không xét đến sự mất ổn định.

Giải:

Trường hợp thứ nhất: Tải trọng P thay đổi từ -150 kN đến $+150$ kN. Thanh chịu ứng suất thay đổi theo chu trình đối xứng:

$$\sigma_{min} = -\frac{150 \cdot 10^3}{\frac{3,14 \cdot 10^2}{4}} = -119 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max} = 119 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 0; \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 119 \text{ N/mm}^2$$

Hệ số an toàn mỗi bằng:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\gamma \sigma_m + \alpha_{\tau} \sigma_a} = \frac{200}{1,5 \times 119} = 1,12$$

Hệ số an toàn tính theo giới hạn chảy:

$$n_{ch} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma_{max}} = \frac{360}{119} = 2,72$$

Trong trường hợp này: $n_{\sigma} < n_{ch}$.

Trường hợp thứ hai: Tải trọng P thay đổi từ 0 đến +150 kN. Thanh chịu ứng suất thay đổi theo chu trình mạch động dương:

$$\sigma_{\min} = 0 ; \quad \sigma_{\max} = 119 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}}{2} = \frac{119}{2} = 59,5 \text{ N/mm}^2$$

Hệ số môi an toàn bằng:

$$n_{\sigma} = \frac{200}{0,11 \times 59,5 + 1,5 \times 59,5} = 2,09$$

Ví dụ 4:

Một trục có rãnh tròn vừa chịu uốn, vừa chịu xoắn (hình 13-6), mômen uốn và xoắn thay đổi trong những giới hạn sau:

$$M_{u(\max)} = 5 \text{ kNm} ; \quad M_{u(\min)} = 1 \text{ kNm}$$

$$M_{z(\max)} = 10 \text{ kNm} ; \quad M_{z(\min)} = 2 \text{ kNm}$$

trục bằng thép 45 có các đặc trưng sau:

$$\sigma_b = 650 \text{ N/mm}^2 ; \quad \sigma_{ch} = 430 \text{ N/mm}^2 ; \quad \sigma_{-1} = 275 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{ch} = 220 \text{ N/mm}^2 ; \quad \tau_{-1} = 150 \text{ N/mm}^2 ; \quad \gamma_{\sigma} = 0,17$$

$$\gamma_{\tau} = 0, \text{ lấy } \beta = 1, [n] = 1,8. \text{ Kiểm tra bền.}$$

Giải:

$$W_x = 0,1 \cdot d^3 = 0,1 \times 90^3 = 72,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$W_p = 2 \cdot W_x = 145,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\frac{t}{r} = \frac{2}{5} = 0,4 ; \quad \frac{r}{d} = \frac{5}{90} = 0,055$$

$$\frac{D}{d} = \frac{90 + 2 \times 2}{90} = 1,04$$

Tra bảng được:

$$k_{\sigma} = 1,75 ; \quad k_{\tau} = 1,26$$

$$\varepsilon_{\sigma} = 0,72 ; \quad \varepsilon_{\tau} = 0,61$$

1. Tính theo uốn:

$$\sigma_{\max} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{72,9 \cdot 10^3} = 68,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{72,9 \cdot 10^3} = 13,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_m = \frac{68,6 + 13,7}{2} = 41,15 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_a = \frac{68,6 - 13,7}{2} = 27,45 \text{ N/mm}^2$$

Từ đó:

$$n_\sigma = \frac{275}{0,17 \times 41,15 + \frac{1,75}{0,72} \times 27,45} = 3,72$$

2. Tính theo xoắn:

$$\tau_{\max} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{145,8 \cdot 10^3} = 82,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\min} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{145,8 \cdot 10^3} = 13,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_m = \frac{82,4 + 13,7}{2} = 48,05 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_a = \frac{82,4 - 13,7}{2} = 34,35 \text{ N/mm}^2$$

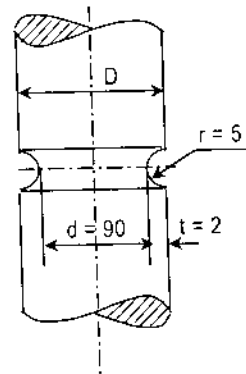
Từ đó:

$$n_\tau = \frac{150}{0 + \frac{1,26}{0,61} \times 34,35} = 2,12$$

Hệ số an toàn mỗi của trục là:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{3,72 \times 2,12}{\sqrt{3,72^2 + 2,12^2}} = 1,85 > [n] = 1,8$$

Vậy trục làm việc vừa an toàn vừa kinh tế.



Hình 13-6

CHƯƠNG 14

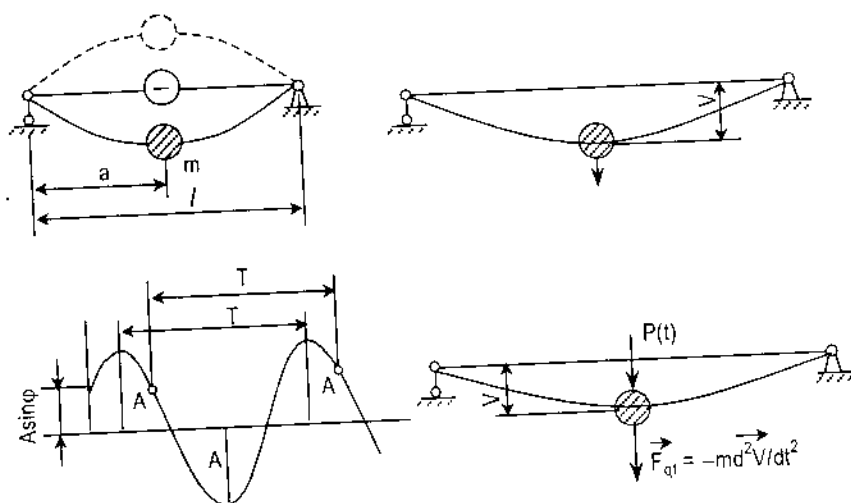
ĐỘNG LỰC HỌC KẾT CẤU

Tác dụng của lực lên kết cấu được đặc trưng bởi sự hiện diện của các gia tốc trong mỗi phần tử của kết cấu khảo sát. Đặc điểm biến dạng và phá hủy của kết cấu phụ thuộc vào dạng gia tốc được sinh ra và do đó là lực quán tính. Trong trường hợp tổng quát tác dụng lực lên kết cấu là rất phức tạp, không phải lúc nào cũng có thể kể đến một cách chính xác được.

Trong chương này chỉ hạn chế xét những bài toán đơn giản nhất của động lực học kết cấu: bài toán va chạm và dao động:

I. DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1. Phương trình chuyển động (hình 14-1)



Hình 14-1

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t) \quad (14-1)$$

trong (14-1):

m - biểu thị khối lượng của hệ dao động;

c - hệ số cản nhớt;

k - độ cứng của hệ đàn hồi;

$v(t)$ - chuyển vị của m theo phương của bậc tự do ở thời điểm t .

Phương trình (14-1) còn được viết dưới dạng sau đây:

$$\ddot{v}(t) + 2\beta\dot{v}(t) + \omega^2v(t) = \frac{1}{m}P(t) \quad (14-2)$$

ở đây:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rad/s]} \text{ là tần số dao động riêng của hệ.}$$

$2\beta = c/m$ - là yếu tố gây cản trở chuyển động.

Khi $\beta = 0$ và $P(t) = 0$ ta có phương trình chuyển động dao động tự do không lực cản:

$$\ddot{v}(t) + \omega^2v(t) = 0 \quad (14-3)$$

Khi $\beta = 0$ và $P(t) \neq 0$ ta có phương trình chuyển động dao động cưỡng bức không lực cản của hệ một bậc tự do:

$$\ddot{v}(t) + \omega^2v(t) = \frac{1}{m}P(t) \quad (14-4)$$

2. Nghiệm của phương trình (14-3) và (14-4)

- Đối với phương trình (14-3):

$$v = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (14-5)$$

Biên độ A và pha dao động φ được xác định từ điều kiện đầu:

$$t = 0; v(0) = v_0; \dot{v}(0) = \dot{v}_0$$

Đặc trưng cơ bản của hệ dao động tự do là giá trị của tần số riêng ω hoặc chu kỳ. Biểu thức của chúng như sau:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_T}} \approx \frac{31,32}{\sqrt{\Delta_T}} ; [\text{rad/s}] \quad (14-6)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta_T}{g}} = 0,2 \cdot \sqrt{\Delta_T} \quad [\text{s}]$$

trong đó:

$\delta = \frac{1}{k}$ là độ mềm của hệ dao động (chuyển vị do lực bằng một đơn vị đặt theo phương của bậc tự do gây ra).

$\Delta_T = Q \cdot \delta = \frac{Q}{k}$ là chuyển vị tĩnh do trọng lượng của khối lượng m ($m = \frac{Q}{g}$)

đặt theo phương của bậc tự do gây ra.

• Đối với phương trình (14-4) với $P(t) = P_o \cdot \sin \theta t$

Trong trường hợp này nghiệm ở chế độ bình ổn có dạng:

$$v(t) = A_o \cdot \sin \theta t \quad (14-7)$$

Thay (14-7) vào (14-4) ta nhận được:

$$-A_o \cdot \theta^2 \cdot \sin \theta t + A_o \cdot \omega^2 \cdot \sin \theta t = \frac{P_o}{m} \sin \theta t$$

Do đó:

$$A_o \cdot (\omega^2 - \theta^2) = \frac{P_o}{m} \quad \text{và} \quad A_o = \frac{\frac{P_o}{m}}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{P_o}{k - m\theta^2}$$

Hoặc là:

$$A_o = \frac{\frac{P_o}{k}}{1 - \frac{m}{k} \theta^2} = \frac{\Delta_T^o}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = k_d \cdot \Delta_T^o \quad (14-8)$$

$$k_d = \frac{A_o}{\Delta_T^o} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \text{ - được gọi là hệ số động lực}$$

Δ_T^o là chuyển vị của m theo phương dao động do P_o đặt tĩnh gây ra.

Khi $\omega = \theta$ thì k_d và do đó là biên độ dao động cưỡng bức A_0 tiến đến vô cùng. Hiện tượng này gọi là hiện tượng cộng hưởng, còn tần số ω có tên gọi là tần số cộng hưởng hay vận tốc góc tới hạn ω_{th} (khi tính toán các trục quay).

Hệ số động lực k_d cho ta khả năng xác định các đại lượng động lực cực đại cần tính theo các đại lượng tĩnh tương ứng. Cụ thể là:

$$P_{dmax} = \pm k_d \cdot P_0 \quad (14-9)$$

$$V_{dmax} = V_d = k_d \cdot \Delta_T \quad (14-10)$$

$$\sigma_{dmax} = k_d \cdot \sigma_T ; \tau_d = k_d \cdot \tau_T \quad (14-11)$$

II. DAO ĐỘNG HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Trong mục này ta xét dao động ngang của dầm, một bài toán điển hình và thường gặp trong kỹ thuật.

1. Dao động tự do

Phương trình vi phân của dầm chịu tải trọng tĩnh đã gặp trong chương 11 có dạng:

$$V''(x) = \frac{M_x}{EJ_x} \text{ hoặc } V^{(IV)}(x) = \frac{q(z)}{EJ_x}$$

Khi thay vào phương trình vi phân này tải trọng ngang bằng lực quán tính với $q(z) = 0$, theo nguyên lý D'Alembert ta nhận được phương trình vi phân dao động tự do:

$$EJ_x \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} = -m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (14-12)$$

ở đây m là khối lượng tính trên một đơn vị chiều dài.

Ta biểu diễn nghiệm (14-12) dưới dạng tách biến:

$$V(z,t) = \Psi(z) \cdot \varphi(t) \quad (a)$$

Thay (a) vào (14-12) với ký hiệu $\lambda^2 = \frac{m}{EJ_x}$ ta được:

$$\frac{1}{\lambda^2 \cdot \Psi(z)} \cdot \frac{d^4 \Psi(z)}{dz^4} = -\frac{1}{\varphi(t)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} = \text{hằng}$$

Ta ký hiệu hằng này bằng ω^2 , khi ấy thu được hai phương trình vi phân thường là:

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega^2.\varphi(t) = 0 \quad (b)$$

$$\frac{d^4\Psi(z)}{dz^4} - \omega^2.\lambda^2.\Psi(z) = 0 \quad (c)$$

Nghiệm của (b) có dạng (14-5):

$$\varphi(t) = A_0.\sin(\omega t + \delta)$$

Nghiệm của (c) có thể viết:

$$\Psi(z) = a.\sin(z\sqrt{\lambda\omega}) + b.\cos(z\sqrt{\lambda\omega}) + c.\operatorname{sh}(z\sqrt{\lambda\omega}) + d.\operatorname{ch}(z\sqrt{\lambda\omega})$$

Bởi vì phương trình đặc trưng của (c) là: $k^4 - \omega^2\lambda^2 = 0$

có nghiệm $k_1 = \sqrt{\lambda\omega}$, $k_2 = -\sqrt{\lambda\omega}$, $k_3 = i\sqrt{\lambda\omega}$, $k_4 = -i\sqrt{\lambda\omega}$.

Bây giờ nghiệm (a) sẽ là:

$$\begin{aligned} V(z,t) &= \Psi(z).\varphi(t) = \\ &= [A.\sin(z\sqrt{\lambda\omega}) + B.\cos(z\sqrt{\lambda\omega}) + C.\operatorname{sh}(z\sqrt{\lambda\omega}) + D.\operatorname{ch}(z\sqrt{\lambda\omega})] \sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (14-13)$$

Các hằng số A, B, C, D và δ được xác định từ các điều kiện biên và điều kiện đầu. Ví dụ, đối với dầm tựa khớp trên hai đầu cuối:

$$\text{tại } z = 0, \quad V(0,t) = 0, \quad V''(0,t) = 0$$

$$\text{tại } z = l, \quad V(l,t) = 0, \quad V''(l,t) = 0$$

Bốn điều kiện này xác định bốn phương trình thuần nhất tìm A, B, C, D. Để có nghiệm không tầm thường định thức của hệ này phải bằng không. Điều kiện này cho ta:

$$\sin(l\sqrt{\lambda\omega})\operatorname{sh}(l\sqrt{\lambda\omega}) = 0 \quad (14-14)$$

Khi $\operatorname{sh}(l\sqrt{\lambda\omega}) = 0$ ta có nghiệm tầm thường $\sqrt{\lambda\omega} = 0$, do đó

$$\sin(l\sqrt{\lambda\omega}) = 0 \quad (14-15)$$

Phương trình này có nghiệm khác không với $l\sqrt{\lambda\omega} = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$ hoặc là:

$$\omega_k = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{ml^4}} \quad (14-16)$$

Đối với một cơ bản của dao động, tần số vòng là:

$$\omega_1 = \pi^2 \cdot \sqrt{\frac{EJ_x}{ml^4}}$$

Nghiệm đầy đủ của bài toán sẽ là:

$$\begin{aligned} V(z,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(z) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \sin(z\sqrt{\lambda\omega_k}) + B_k \cos(z\sqrt{\lambda\omega_k}) + \right. \\ &\quad \left. + C_k \operatorname{sh}(z\sqrt{\lambda\omega_k}) + D_k \operatorname{ch}(z\sqrt{\lambda\omega_k}) \right] \sin(\omega_k t + \delta_k) \end{aligned}$$

2. Dao động cưỡng bức

Khi có mặt ngoại lực kích động $q_y(z,t)$ thì phương trình dao động cưỡng bức có dạng:

$$EJ_x \cdot \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + m \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = q_y(z,t) \quad (14-17)$$

Xét trường hợp kích động là lực tập trung tại $z = z_0$ và có dạng:

$$P(t) = P_0 \cdot \sin \theta t$$

Đối với dầm tựa khớp ở hai đầu, ta có thể biểu diễn nghiệm cần tìm dưới dạng thoả mãn điều kiện biên:

$$\bar{V}(z,t) = a(t) \cdot \sin(\pi z/l) \quad (14-18)$$

Nhân cả hai vế của (14-17) với (14-18) và tích phân từ 0 đến l ta đi đến:

$$\int_0^l \left[EJ_x \frac{\partial^4 \bar{V}}{\partial z^4} + m \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} - q_y(z,t) \right] \bar{V} dz = 0$$

hay là:

$$a(t) \cdot \left[EJ_x a(t) \frac{\pi^4}{l^4} + m \ddot{a}(t) \right] \cdot \frac{l}{2} - a(t) \cdot \int_0^l q_y(z, t) \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0$$

Có thể xem lực tập trung $P(t)$ như là lực phân bố trên đoạn $z_0 - \varepsilon \leq z \leq z_0 + \varepsilon$ có cường độ $q_y = P_0 \delta(z - z_0)$, khi đó:

$$\int_0^l q_y(z, t) \sin \frac{\pi z}{l} dz = \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} P_0 \delta(z - z_0) \sin \theta t \sin \frac{\pi z}{l} dz = P_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)$$

Cuối cùng ta thu được:

$$\ddot{a}(t)m + aEJ_x \frac{\pi^4}{l^4} = \frac{2P_0}{l} \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)$$

hay là:

$$\ddot{a}(t) + \omega_1^2 a(t) = Q_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) \quad (a)$$

Trong đó ta đã đặt: $\omega_1^2 = EJ_x \frac{\pi^4}{ml^4}$ và $Q_0 = \frac{2P_0}{ml}$

Nghiệm riêng của (a):

$$a_r(t) = \frac{Q_0 \cdot \sin \theta t \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right)}{\theta^2 - \omega_1^2}$$

Nghiệm tổng quát của (a) là:

$$a(t) = A \cdot \sin(\omega_1 t) + B \cdot \cos(\omega_1 t) + a_r(t) \quad (14-19)$$

Do đó nghiệm của (14-17) với điều kiện nêu trên là:

$$\bar{V}(z, t) = a(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right) \quad (14-20)$$

Các hằng số A, B trong (14-19) được xác định từ điều kiện đầu.

Ví dụ, tại $t = 0$, $V(z, 0) = 0$, $\dot{V}(z, 0) = 0$ thì $B = 0$ và

$$A = - \frac{Q_0 \cdot \sin \left(\frac{\pi z_0}{l} \right) \cdot \theta}{(\theta^2 - \omega_1^2) \cdot \omega_1}$$

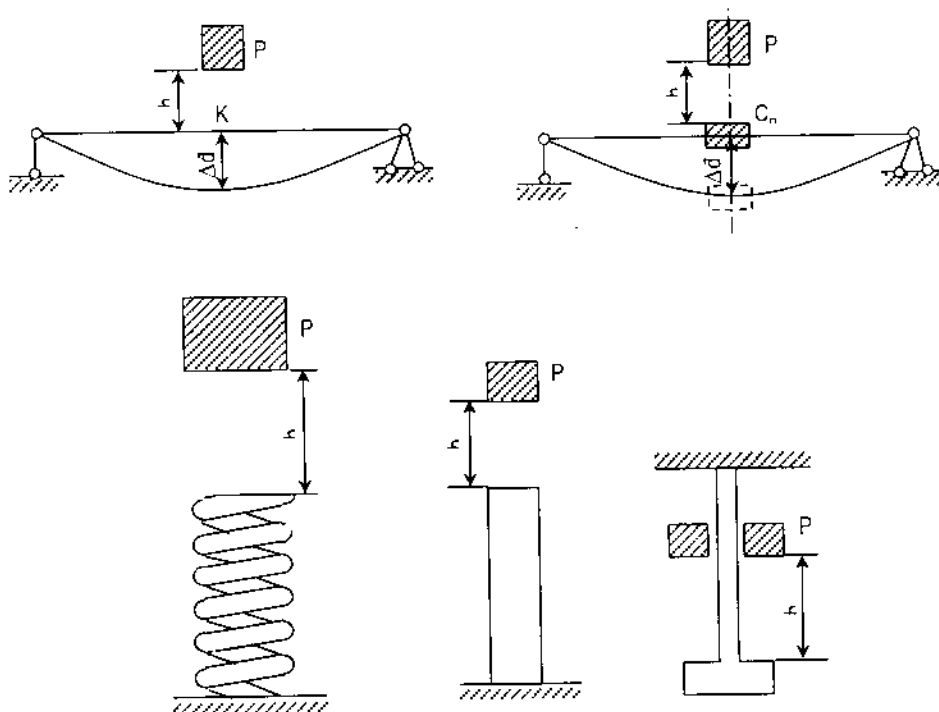
Bây giờ nghiệm (14-20) sẽ là:

$$V(z,t) = \frac{Q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z_0}{l}\right)}{\theta^2 - \omega^2} \cdot \left[\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

Khi θ khác rất ít tần số riêng ω , cụ thể là $\theta = \omega + \varepsilon$ thì việc phân tích nghiệm nhận được cho thấy biên độ tăng vô hạn theo quy luật bậc nhất cùng với thời gian t . Trạng thái này được gọi là trạng thái cộng hưởng của hệ.

III. TẢI TRỌNG VA CHẠM

Va chạm là hiện tượng tác dụng cơ học diễn ra trong một khoảng thời gian rất ngắn và gây ra sự đột biến vận tốc của các chất điểm trong hệ (hình 14-2).



Hình 14-2

Nếu chu kỳ dao động của một cơ bản $T_1 = 2\pi/\omega_1 \ll \tau$ thì quá trình chất tải được xem là tĩnh, τ là thời gian tăng tải cho đến giá trị lớn nhất của nó.

Nếu τ và T_1 cùng bậc thì quá trình chất tải là quá trình động lực và phải kể đến các số hạng quán tính trong các phương trình chuyển động. Điều này dẫn đến bài toán động lực.

Nếu $\tau \ll T_1$ thì quá trình chất tải được gọi là chất tải va chạm. Khi đó cần phải kể đến tính quán tính của hệ.

Giả sử một lực P tác dụng rất nhanh lên dầm ở điểm có tọa độ $z = z_0$. Chuyển vị động lực cần tìm được xem là tỷ lệ với chuyển vị tĩnh.

$$\Delta_d(z) = k_d \Delta_T(z) \quad (14-21)$$

$\Delta_T(z)$ - là chuyển vị tĩnh tại hoành độ z do lực P đặt tĩnh tại z_0 gây ra;

k_d - hệ số động lực.

Theo định luật bảo toàn năng lượng cơ học thì tổng động năng T và thế năng U của hệ bảo toàn ở mỗi thời điểm là như nhau:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{const}$$

Ta chọn trạng thái không biến dạng và vị trí xuất phát của vật gây ra va chạm cách mặt dầm một khoảng là h làm vị trí thứ nhất của hệ. Ở trạng thái này mức thế năng của hệ bằng không, nghĩa là $U_1 = 0$ và $T_1 = 0$.

Trạng thái thứ hai là trạng thái hệ có chuyển vị lớn nhất, ở đó tốc độ của các điểm bằng không, do đó $T_2 = 0$.

Ở trạng thái này U_2 gồm có U'_2 của vật gây va chạm. U''_2 của trọng lượng vật bị va chạm (dầm) và thế năng biến dạng của vật bị va chạm U'''_2 cụ thể là:

$$U_2 = U'_2 + U''_2 + U'''_2 = 0$$

Cụ thể là:

$$U_2 = -P[h + \Delta_d(z_0)] - \int_0^l mg \Delta_d(z) dz + \int_0^t \int_F \int \frac{E}{2} (\epsilon_d)^2 dF dz = 0$$

hay là:

$$k_d^2 U_T - P[h + \Delta_d(z_0)] - \int_0^l mg \Delta_d(z) dz = 0$$

Chú ý đến (14-21), phương trình này trở thành:

$$k_d^2 U_T - k_d \left[P \Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \right] - Ph = 0 \quad (14-22)$$

Trong (14-22): U_T - thế năng biến dạng của dầm khi chịu uốn tĩnh.

Δ_{TO} - độ võng tĩnh của dầm tại $z = z_0$, do P gây ra.

Từ (14-22) ta rút ra:

$$2k_d U_{TO} = P \Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \pm \sqrt{\left(P \Delta_{TO} + \int_0^l mg \Delta_T(z) dz \right)^2 + 4Ph U_{TO}}$$

Ở đây $U_{TO} = \frac{P \Delta_{TO}}{2}$. Nếu bỏ qua trọng lượng của vật bị va chạm (dầm) thì:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_T(z_0)}} \geq 2 \quad (14-23)$$

Đối với ứng suất σ_{dmax} ta có:

$$\sigma_{dmax} = E \varepsilon_{dmax} = E y_{dmax} \left| \frac{d^2 \Delta_{dmax}}{dz^2} \right| = E y_{max} k_d \left| \frac{d^2 \Delta_{Tmax}}{dz^2} \right| = k_d \cdot \sigma_{Tmax}$$

Công thức (14-23) có thể được viết theo vận tốc v_0 của vật va chạm ngay lúc sắp tiếp xúc với vật bị va chạm:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{g \Delta_T(z_0)}} \quad (14-24)$$

Khi $h \gg \Delta_T(z_0)$ thì có thể bỏ qua đơn vị ở trong căn so với số hạng thứ hai trong nó và (14-24) trở thành:

$$k_d = 1 + \frac{v_0}{\sqrt{g \Delta_T(z_0)}} \quad (14-25)$$

Khi va chạm ngang thì công thức trên được viết:

$$k_d = \frac{v_0}{\sqrt{g \Delta_T(z_0)}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_T(z_0)}} \quad (14-26)$$

Trong trường hợp phải kể đến trọng lượng G_0 của đối tượng bị va chạm thì k_d có dạng:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\Delta_T(z_o)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \mu \frac{G_o}{P}\right)}} \quad (14-27)$$

μ - hệ số thu gọn trọng lượng phân bố của vật bị va chạm về điểm va chạm ($\mu < 1$). Hệ số μ được xác định gần đúng trên cơ sở cân bằng động năng của hệ khảo sát và hệ dẫn xuất có khối lượng dẫn xuất đặt ở điểm bị va chạm.

Khi đối tượng gây ra va chạm thực hiện chuyển động quay mà không phải chuyển động tịnh tiến như ở trên và gây ra chuyển vị góc trong vật bị va chạm thì có thể sử dụng trực tiếp các công thức trên với điều kiện thay vào trong các công thức này v_o bởi ω_o , $\frac{P}{g}$, $\frac{G_o}{g}$ bởi mômen quán tính các khối lượng J_m và J_{mo} đối với trục quay của chúng.

Điều kiện bền của bài toán động lực như sau:

$$\max \sigma_d = k_d \cdot \sigma_{Tmax} \leq [\sigma_d] \text{ hoặc } \max \tau_d = k_d \cdot \tau_{Tmax} \leq [\tau_d]$$

trong đó:

$\max \sigma_d$ và $\max \tau_d$ là ứng suất động tính toán lớn nhất;

σ_{Tmax} , τ_{Tmax} là ứng suất lớn nhất do P đặt tĩnh gây ra;

$[\sigma_d]$ và $[\tau_d]$ là ứng suất động lực cho phép.

IV. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

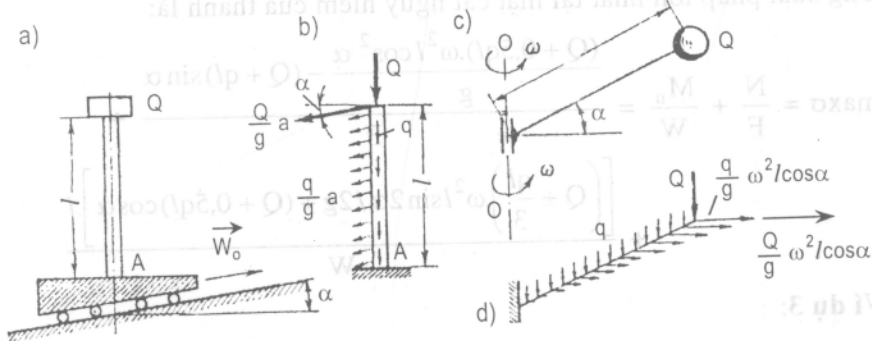
Ví dụ 1:

Cho một thiết bị chuyển động với gia tốc $\vec{W}_o$ trên mặt nghiêng α như trên hình (14-3a,b). Hãy tính ứng suất cực trị tại mặt cắt ngang A của thanh. Biết rằng trọng lượng trên một đơn vị dài của thanh là q , tải trọng Q đặt vào đầu trên của thanh, diện tích mặt cắt ngang và mô đun chống uốn của mặt cắt là F và W .

Giải:

Sơ đồ tính được cho trên hình (14-3b). Ứng suất nén do tải trọng tĩnh và động gây ra là:

$$\sigma_n = -(Q + ql) \frac{a \sin \alpha}{gF} - \frac{Q + ql}{F}$$



Hình 14-3

Ứng suất uốn do lực quán tính sinh ra tại A như sau:

$$\sigma_u = \pm(Ql + 0,5ql^2) \frac{a \cos \alpha}{gW}$$

Giá trị ứng suất pháp cực trị tại mặt cắt nguy hiểm là:

$$\sigma = \pm(Ql + 0,5ql^2) \frac{a \cos \alpha}{gW} - \frac{(Q + ql) \cdot \left(1 + \frac{a \sin \alpha}{g}\right)}{F}$$

Ví dụ 2:

Một thanh nghiêng chịu trọng lượng Q và trọng lượng bản thân q quay quanh trục thẳng đứng $O-O$ với tốc độ góc ω như trên hình (14-3c). Hãy tính ứng suất pháp cực trị tại mặt cắt nguy hiểm nhất của thanh, nếu diện tích mặt cắt ngang và mômen chống uốn là F và W .

Giải:

Mômen uốn tại ngàm A do Q , q và lực quán tính tương ứng do chúng gây ra là:

$$M_u = (Q + 0,5ql) \cos \alpha + \left(Q + \frac{ql}{3}\right) \cdot \frac{\omega^2 l^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

Lực dọc do tác dụng tĩnh và động lực có dạng:

$$N = (Q + 0,5ql) \cdot \frac{\omega^2 l \cos^2 \alpha}{g} - (Q + ql) \sin \alpha$$

Ứng suất pháp lớn nhất tại mặt cắt nguy hiểm của thanh là:

$$\max \sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_u}{W} = \frac{(Q + 0,5ql) \cdot \omega^2 l \cos^2 \alpha - (Q + ql) \sin \alpha}{g} + \frac{\left[\left(Q + \frac{ql}{3} \right) \cdot \omega^2 l \sin 2\alpha / 2g + (Q + 0,5ql) \cos \alpha \right] \cdot l}{W}$$

Ví dụ 3:

Một thanh mặt cắt thay đổi chịu tải trọng tĩnh và động như hình 14-4. Hãy tính ứng suất động lớn nhất?

Giải:

Độ co ngắn tĩnh của thanh là:

$$\Delta l_T = \left(\frac{Q}{E} \right) \cdot \left(\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Theo công thức tính hệ số động lực ta có:

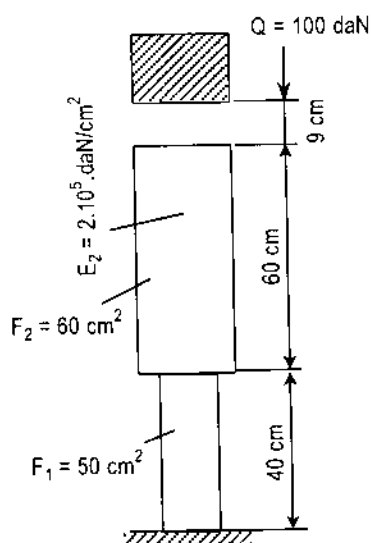
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_T}}$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{1,8 \cdot 10^{-3}}} = 101$$

Ứng suất tĩnh ở phần dưới của cột là:

$$\sigma_T = \frac{100}{50} = 2 \text{ daN/cm}^2$$

Ứng suất động là $\sigma_{d\max} = K_d \cdot \sigma_T = 2 \cdot 101 = 202 \text{ daN/cm}^2$ **Hình 14-4**



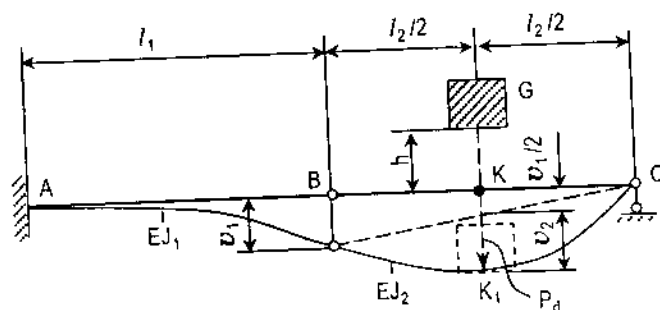
Ví dụ 4:

Một dầm chịu tải trọng tĩnh và động như hình 14-5. Hãy xác định các đại lượng động lực sau đây: M_{dA} , V_{dB} , V_{dK} ?

Giải:

Chuyển vị tĩnh thẳng đứng tại điểm K là:

$$\Delta_{TK} = \frac{V_1}{2} + V_2 = G \left(\frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_2^3}{48EJ_2} \right)$$



Hình 14-5

Do đó hệ số động lực có giá trị:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{TK}}}$$

Mômen động lực tại A là:

$$M_{dA} = K_d \cdot M_{TA} = 0,5 K_d \cdot G \cdot l_1$$

Độ võng động tại điểm B và K lần lượt là:

$$\Delta_{dB} = K_d \cdot G \cdot \frac{l_1^3}{6EJ_1}; \quad \Delta_{TK} = K_d \cdot G \cdot \left(\frac{l_1^3}{12EJ_1} + \frac{l_2^3}{48EJ_2} \right)$$

Ví dụ 5:

Hãy xác định kích thước mặt cắt ngang a.a của một thanh chịu dao động xoắn như trên hình 14-6a. Biết rằng:

$$m = 20 \text{ kg}, b = 8 \text{ cm}, l = 40 \text{ cm}, G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2, f = 20 \text{ hezt.}$$

Giải:

$$\text{Bởi vì } f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{C}{J_m}} \quad \text{và} \quad I_m = 2mb^2$$

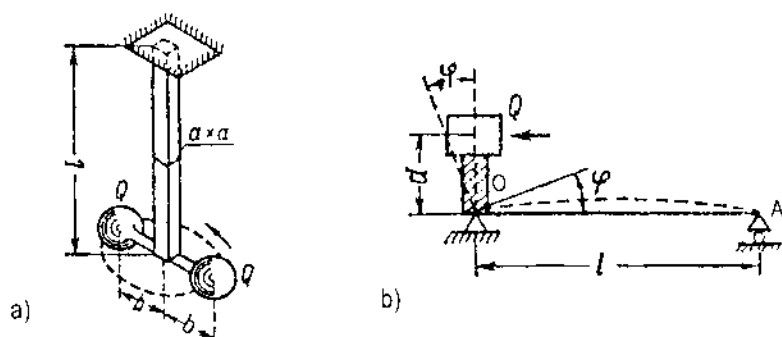
Ta có: $C = 4\pi^2 f^2 \cdot J_m = 8\pi^2 f^2 mb^2$, trong đó C là độ cứng của thanh khi xoắn và C có giá trị là:

$$C = \frac{GJ_p}{l} \approx \frac{G \cdot 0,14a^4}{l}$$

Vì vậy:

$$\frac{G \cdot 0,14a^4}{l} = 8\pi^2 N^2 mb^2$$

$$\text{và } a = \sqrt[4]{\frac{8\pi^2 N^2 m b^2 l}{0,14G}} = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 20 \cdot 64 \cdot 10^{-4} \cdot 40 \cdot 10^{-2}}{0,14 \cdot 8 \cdot 10^{10}}} = 1,95 \cdot 10^{-2} = 1,95 \text{ cm}$$



Hình 14-6

Ví dụ 6:

Hãy xác định tần số vòng của dao động tự do ω , tần số dao động f , chu kỳ dao động T ? (hình 14-6b).

Giải:

Vì thanh cứng OQ được gắn cứng với dầm OA quay quanh O nên góc xoay của dầm tại O và do đó độ cứng của dầm sẽ là:

$$\varphi = \frac{Ml}{3EJ} ; \quad C = \frac{M}{\varphi} = \frac{3EJ}{l}$$

Mômen quán tính khối của vật nặng Q đối với trục quay O là:

$$J_m = \frac{Q}{g} \cdot a^2$$

Theo các công thức xác định tần số vòng của dao động và chu kỳ dao động ta có:

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J_m}} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{3EJg}{Ql}} ; f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \cdot \sqrt{\frac{3EJg}{Ql}} \text{ Hz} ; T = 2\pi a \sqrt{\frac{Ql}{3EJg}}$$

Ví dụ 7:

Một dầm mặt cắt ngang $F = b \cdot h = 12 \cdot 1 \text{ cm}^2$, chiều dài $l = 1 \text{ m}$, giữa dầm đặt một động cơ điện trọng lượng $Q = 20 \text{ daN}$ và có khối lượng lệch tâm là $Q_1 = 1 \text{ daN}$

với độ lệch tâm $p = 4 \text{ cm}$ (hình 14-7). Hãy tính số vòng quay trong 1 phút của động cơ để ứng suất pháp lớn nhất trong dầm đạt giá trị 2000 daN/cm^2 . Biết trọng lượng riêng của vật liệu dầm là 8.10^3 daN/m^3 , $E = 2.10^6 \text{ daN/cm}^2$.

Giải:

Trọng lượng của dầm là:

$$G_0 = \gamma F l = 8.10^{-3} \cdot 12 \cdot 1.10^2 = 9,6 \text{ daN}$$

Mômen quán tính và mômen chống uốn của mặt cắt ngang của dầm lần lượt là:

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \times 1}{12} = 1 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{12 \times 1}{6} = 2 \text{ cm}^3$$

Ứng suất pháp lớn nhất và chuyển vị thẳng đứng lớn nhất dưới tác dụng tĩnh của Q và G_0 là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{\frac{Ql}{4} + \frac{G_0 l}{8}}{W}$$

$$= \frac{l}{4W} \cdot \left(Q + \frac{G_0}{2} \right) = \frac{100}{4 \times 2} \times \left(20 + \frac{9,6}{2} \right) = 310 \text{ daN/cm}^2$$

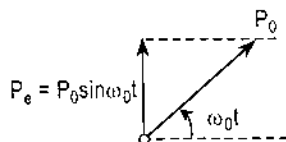
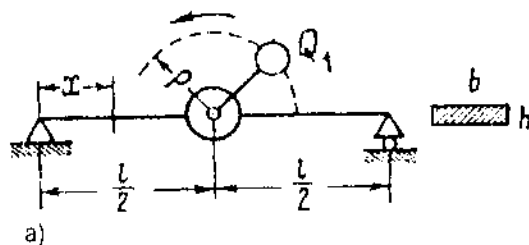
$$\begin{aligned} \Delta_{\max T} &= \frac{Ql^3}{48EI} + \frac{5}{384} \frac{G_0 l^3}{EI} = \frac{l^3}{48EI} \cdot \left(Q + \frac{5}{8} G_0 \right) = \\ &= \frac{10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} \left(20 + \frac{5 \cdot 9,6}{8} \right) \approx 0,27 \text{ cm} \end{aligned}$$

Theo công thức hệ số động lực ta có:

$$k_d = 1 + \frac{A}{\Delta_{\max T}} = \frac{\max \sigma_d}{\sigma_{\max}} = \frac{2000}{310} \approx 6,45$$

Biên độ cho phép của dao động, vì vậy sẽ là:

$$A = \left(\frac{\max \sigma_d}{\sigma_{\max}} - 1 \right) \Delta_{\max T} = 5,45 \times 0,27 = 1,47 \text{ cm}$$



Hình 14-7

Chuyển vị thẳng đứng tại mặt cắt bất kỳ và chuyển vị thẳng đứng tại mặt cắt giữa dầm do tác dụng tĩnh của Q và tỷ số giữa chúng có giá trị lần lượt bằng:

$$\Delta_x = \frac{Ql^3}{48EI} \left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3} \right); \quad \Delta = \frac{Ql^3}{48EI} = \frac{20 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1} = \frac{5}{24} \text{ cm}$$

$$\frac{\Delta_x}{\Delta} = 3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}$$

Hệ số thu gọn khối lượng được xác định bởi:

$$\mu_m = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} \right)^2 dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{17}{35}$$

Tần số vòng dao động tự do của dầm là:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta} \cdot \frac{1}{1 + k_m \frac{G_0}{Q}}} = \sqrt{\frac{981 \times 24}{5} \times \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \times \frac{9,6}{20}}} \approx 61,8 \text{ 1/s}$$

Lực quán tính ly tâm $P_d = P_0 \sin \omega t$ do Q_1 gây ra có biên độ lực kích động là $P_0 = \frac{Q_1}{g} \cdot \Omega_0^2 \rho$, lực $P_d = P_0 \sin \Omega_0 t$ là một lực kích động điều hoà gây ra dao động cưỡng bức của dầm. Đại lượng $\Omega_0 = \frac{\pi n}{30}$ là tần số vòng của lực kích động mà P_0 là biên độ của nó. Chuyển vị thẳng đứng cực đại của dầm do tác dụng tĩnh của P_0 là:

$$\Delta_0 = \frac{P_0 l^3}{48EI} = \frac{Q_1 l^3 \rho}{48EIg} \Omega_0^2 = \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 4}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 981} \Omega_0^2 = \frac{\Omega_0^2}{24 \cdot 981} \text{ cm}$$

Hơn nữa, biên độ dao động cưỡng bức A bằng:

$$1,47 = \frac{\Omega_0^2}{24 \cdot 981 \left(1 - \frac{\Omega_0^2}{61,8^2} \right)} = \frac{61,8^2}{24 \cdot 981} \cdot \frac{\Omega_0^2}{61,8^2 - \Omega_0^2} \approx 0,612 \frac{\Omega_0^2}{61,8^2 - \Omega_0^2}$$

Từ đó ta rút ra là:

$$\Omega_0^2 = \frac{61,8^2 \cdot 1,47}{1,63} \Rightarrow \Omega_0 = 61,8 \sqrt{\frac{147}{163}} \approx 58,6 \text{ 1/s}$$

Cuối cùng số vòng quay trong 1 phút có giá trị là:

$$n = \frac{30}{\pi} \Omega_0 = \frac{30.58,6}{\pi} \approx 560 \text{ vòng/phút}$$

Ví dụ 8:

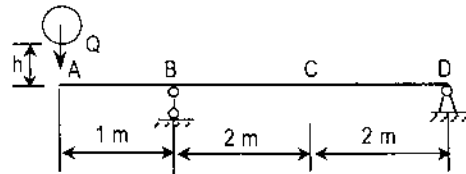
Một vật nặng 10 kN rơi từ độ cao $h = 10 \text{ cm}$ xuống dầm mật cắt ngang I_{20} (hình 14-8a). Tính độ võng và ứng suất động tại mặt cắt C đối với hai trường hợp:

- Gối A và B là gối cứng.
- Gối A và B là đàn hồi có độ cứng $C_B = 2000 \text{ N/cm}$ và $C_D = 5000 \text{ N/cm}$.

Giải:

Các đặc trưng của dầm I_{20} :

$J_x = 1840 \text{ cm}^4$, $W_x = 184 \text{ cm}^3$, $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$. Độ võng tĩnh do Q gây ra tại C và A được tính bằng phương pháp Mohr-Vérechtaguinne là:



Hình 14-8a

$$\Delta_T^C = -0,363 \text{ cm}; \Delta_T^A = +0,454 \text{ cm}.$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_T^A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.10}{0,454}} = 7,8 \text{ cm}$$

Do đó ta có:

$$y_d^C = -0,363 \times 7,8 = -2,80 \text{ cm}$$

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{tmax} \cdot K_d = \frac{M_C}{W_x} \cdot K_d = \frac{5.10^5}{184} \times 7,8 = 21000 \text{ N/cm}^2$$

Trường hợp gối B và D tựa trên lò xo. Đặt Δl^A , Δl^B , Δl^C , Δl^D là chuyển vị tại A, B, C, D của dầm không biến dạng do độ lún của lò xo ở hai bên gối B và D, ta có:

$$\Delta l^B = \frac{V_B}{c_B} = \frac{1.10^4 \times 5.10^2}{4.10^2 \times 2.10^3} = 6,25 \text{ cm}$$

$$\Delta l^D = \frac{V_D}{c_D} = \frac{1.10^4 \times 1.10^2}{4.10^2 \times 5.10^3} = 0,5 \text{ cm}$$

Từ hình vẽ suy ra:

$$\Delta l^A = 7,94 \text{ cm}; \Delta l^C = 2,875 \text{ cm}$$

Độ võng thực tại A, C (có kể đến độ lún hoặc giãn của lò xo).

$$V^A = 0,454 + 7,98 = 8,394 \text{ cm}$$

$$V^C = 2,875 - 0,364 = 2,512 \text{ cm}$$

Tính:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 10}{8,394}} \approx 2,84$$

Do đó ta có:

$$y_d^C = 2,512 \times 2,84 = 7,13 \text{ cm}$$

$$\sigma_{d\max} = \sigma_{t\max} \cdot k_d$$

$$= \frac{5 \cdot 10^5}{184} \times 2,84 = 7725 \text{ N/cm}^2$$

Ví dụ 9:

Một vật nặng $Q = 5 \text{ kN}$ bay ngang với vận tốc đều đến chạm vào đầu mút thừa A của một dầm chữ I (hình 14-9). Xác định vận tốc tối đa của vật nặng Q . Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải:

Mặt cắt có: $I_x = 1080 \text{ cm}^4$; $W_x = 120 \text{ cm}^3$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

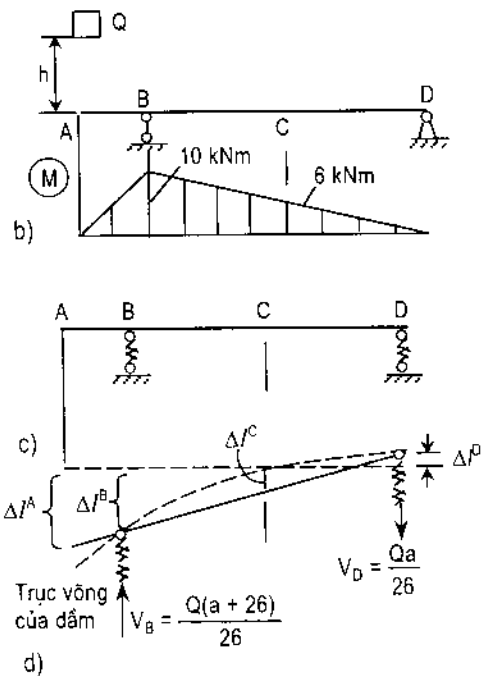
Từ điều kiện bền:

$$\max \sigma_d = \max \sigma_t \cdot k_d \leq [\sigma]$$

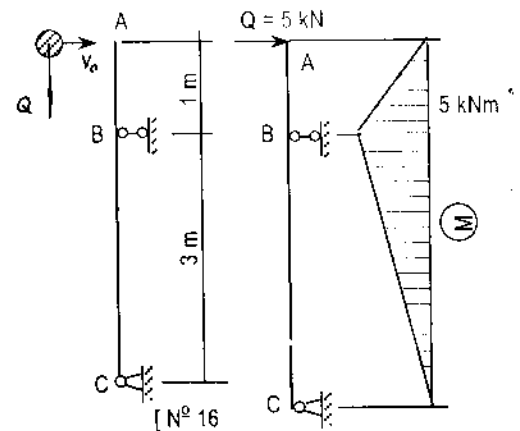
$$\text{hay} \quad \frac{\max M_x}{W_x} \cdot \frac{v}{\sqrt{g \cdot \Delta t}} \leq [\sigma]$$

$$\text{hay} \quad \frac{5 \cdot 10^2}{120} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{9810 \cdot 306}} \leq 16 \text{ kN/cm}^2$$

Ta rút ra: $v_0 = 66,5 \text{ cm/s}$.



Hình 14-8b, c, d



Hình 14-9

TÍNH TOÁN HỆ SIÊU TĨNH**I. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ HỆ SIÊU TĨNH**

Những phương pháp xác định biến dạng và chuyển vị trình bày trong các chương trước được sử dụng rộng rãi để tính các hệ tĩnh định. Trong chương này ta nghiên cứu cách tính hệ siêu tĩnh.

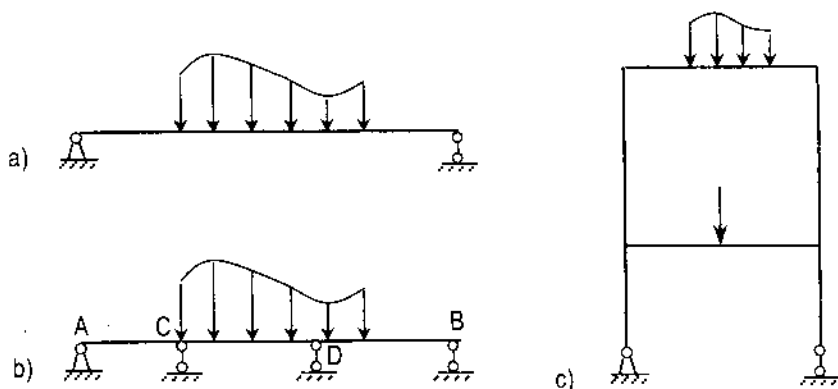
Một kết cấu chịu tác dụng của tải trọng dạng bất kỳ cần phải được liên kết như thế nào đó để nó không trở thành một cơ cấu.

Như đã biết, để xác định phản lực liên kết trong hệ phẳng ta chỉ có thể thiết lập được ba phương trình cân bằng độc lập với nhau. Sau khi giải các phương trình này ta sẽ tìm được ba phản lực ở ba liên kết. Những liên kết này gọi là những liên kết cần thiết. Chúng có nhiệm vụ giữ cho hệ không bị biến hình hình học. Một hệ được giữ chặt bởi những liên kết cần thiết như thế được gọi là hệ tĩnh định. Trong thực tế kỹ thuật ta thường gặp những hệ có số liên kết lớn hơn số liên kết cần thiết. Với ý nghĩa này những liên kết, trừ những liên kết cần thiết, được gọi là những liên kết “thừa”. Đối với những hệ có liên kết thừa ta không thể xác định được những phản lực liên kết chỉ bằng những phương trình cân bằng. Những hệ như thế gọi là những hệ siêu tĩnh. Liên kết “thừa” cũng có thể là những liên kết ngoại hoặc những liên kết nội. Ta gọi những hệ có những liên kết ngoại “thừa” là những hệ siêu tĩnh ngoại và gọi hệ có liên kết nội “thừa” là những hệ siêu tĩnh nội (hình 15-1b, c). Cần phải hiểu rằng thuật ngữ “liên kết thừa” chỉ có tính chất quy ước. Bởi vì, chỉ để đảm bảo cho hệ bất biến hình hình học thì chúng là “thừa”, nhưng sự có mặt của chúng sẽ tạo cho hệ làm việc tốt hơn rất nhiều so với hệ tĩnh định cùng loại.

Từ hình vẽ ta thấy rõ là: Với cùng một chế độ đặt tải và kích thước, độ

võng trong dầm siêu tĩnh (hình 15-1b) nhỏ hơn rất nhiều so với độ võng trong dầm tĩnh định (hình 15-1a). Bởi vậy, các liên kết “thừa” ở các điểm C và D (hình 15-1b) đã tạo cho kết cấu có độ cứng lớn hơn.

Ứng với các “liên kết thừa” được giải phóng ta có các phản lực tại các điểm này gọi là các “phản lực thừa” hay các “ẩn số thừa”. Số các ẩn số thừa này xác định bậc siêu tĩnh của hệ.



Hình 15-1

Đối với hệ (hình 15-1b) số phản lực gối tựa là năm. Để xác định các phản lực này ta lại chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh độc lập. Vì thế số bậc siêu tĩnh của hệ bằng hai.

Nếu dầm hoặc khung có m thanh gối (nhưng không có chu vi kín) thì số bậc siêu tĩnh của hệ bằng số các liên kết ngoài thừa T : đối với hệ phẳng $T = m - 3$; đối với hệ không gian: $T = m - 6$.

Mỗi một khung phẳng kín không có khớp số bậc siêu tĩnh là 3. Vì rằng ở mỗi mặt cắt ngang bất kỳ của khung có ba thành phần nội lực. Để xác định nó cần cắt chu vi kín và đặt vào mặt cắt này các nội lực cần tìm X_1, X_2, X_3 . Các phương trình tĩnh học không cho phép xác định các nội lực ở các mặt cắt bất kỳ của khung. Vì thế chúng là các ẩn cần tìm và chúng xác định sự có mặt của các liên kết thừa bên trong của hệ. Nếu trong khung kín có một khớp thì số liên kết thừa bằng 2. Vì mômen ở khớp $X_1 = 0$. Nếu có n thanh nối với nhau bằng một

khớp thì khớp này tương đương với $n-1$ khớp đơn (khớp có một phản lực liên kết). Dễ hiểu là mỗi khung phẳng có K chu vi kín thì số bậc siêu tĩnh của nó là $3K$. Do đó, bậc siêu tĩnh W của hệ phẳng được xác định theo công thức:

$$W = T + 3K - D \quad (15-1)$$

Trong công thức này, T - số liên kết thừa ngoài; K - số chu vi kín; D - số khớp đơn trong hệ.

Áp dụng các công thức trên vào các hệ trên hình 15-1b,c ta sẽ tìm được bậc siêu tĩnh của chúng như sau:

Đối với hệ siêu tĩnh trên hình 15-1b:

$$T = m - 3 = 5 - 3 = 2$$

$$K = 0; D = 0$$

Do đó:

$$W = 2 + 0 = 2$$

Đối với hệ trên hình 15-1c:

$$T = 3 - 3 = 0$$

$$K = 1; D = 0$$

Do đó:

$$W = 0 + 3.1 - 0 = 3$$

Tất cả các hệ siêu tĩnh đều có những đặc điểm chung sau đây:

a) Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào quan hệ độ cứng giữa các cấu kiện của hệ.

b) Chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nhỏ hơn chuyển vị trong hệ tĩnh định suy ra từ hệ siêu tĩnh này cùng một chế độ chịu tải; bởi vì các liên kết thừa làm tăng độ cứng của hệ.

c) Khi có sự thay đổi nhiệt độ của môi trường hoặc khi nung nóng những cấu kiện của hệ cũng như khi chế tạo và lắp ghép không chính xác thì trong hệ siêu tĩnh sẽ phát sinh các nội lực.

d) Khi những liên kết thừa bị hư hỏng thì hệ vẫn không bị phá hoại, vì khi đó hệ vẫn bất biến hình học.

Có thể tính các hệ siêu tĩnh bằng nhiều phương pháp khác nhau, ví dụ:

- 1) Phương pháp lực.
- 2) Phương pháp chuyển vị.
- 3) Phương pháp H. Cross, phương pháp G. Kani v.v...

Dưới đây ta giới thiệu cách tính hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực.

II. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Để tính toán các hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực, ta sẽ sử dụng tiên đề giải phóng liên kết. Cụ thể là bỏ đi những liên kết thừa và thay thế tác dụng của chúng bằng những ẩn số thừa $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Rõ ràng là với cách làm như thế, ta biến hệ siêu tĩnh đã cho thành hệ tương đương có bậc siêu tĩnh thấp hơn. Hệ suy ra từ hệ tương đương sau khi đã giải phóng tất cả các lực tác dụng lên nó (lực cho và phản lực tại các liên kết bị loại bỏ) gọi là hệ cơ bản.

Các ẩn số thừa $X_1, X_2, \dots, X_n$ trong hệ tương đương được xác định từ các điều kiện biến dạng của hệ. Ý nghĩa của những điều kiện này là như sau:

Dưới tác dụng của tải trọng cho và các ẩn số thừa $X_1, X_2, \dots, X_n$ hệ tương đương làm việc như hệ siêu tĩnh đã cho. Những điều kiện này có dạng xác định và chúng là những phương trình chính tắc của phương pháp lực. Sau khi đã xác định được các ẩn số thừa ta sẽ tìm được các ẩn số còn lại ở các liên kết cần thiết. Và sau đó dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực như đã làm đối với hệ tĩnh định.

Cần chú ý là đối với cùng một hệ siêu tĩnh đã cho có thể chọn những hệ tương đương theo những cách khác nhau. Khi ấy các phương trình biến dạng sẽ có những ý nghĩa khác nhau phù hợp với điều kiện biến dạng tại những liên kết bị loại bỏ. Hệ tương đương có thể là hệ tĩnh định hoặc siêu tĩnh, thông thường hệ tương đương được chọn là hệ tĩnh định. Nhưng điều quan trọng là hệ tương đương đó phải bất biến hình học và cho phép thiết lập phương trình chính tắc đơn giản nhất.

Dưới đây để thấy rõ tư tưởng và trình tự tính toán của phương pháp lực, ta hãy khảo sát một số ví dụ cụ thể (hình 15-2). Đó là một dầm liên tục có hai bậc siêu tĩnh. Một phương án có thể của hệ tương đương được cho trên (hình 15-2b). Đối với phương án này, phương trình biến dạng được viết như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1x_1} + \Delta_{1x_2} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{2x_1} + \Delta_{2x_2} + \Delta_{2p} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15-2)$$

trong đó, Δ_{1x_1} là chuyển vị theo phương của lực X_1 do chính lực X_1 gây ra trong hệ cơ bản; Δ_{1x_2} là chuyển vị theo phương lực X_1 do lực X_2 gây ra trong hệ cơ bản; Δ_{1p} là chuyển vị theo phương lực X_1 do tải trọng đặt lên hệ gây ra trong hệ bản. Các chuyển vị Δ_{2x_1} , Δ_{2x_2} , Δ_{2p} cũng có ý nghĩa tương tự.

Δ_1 là chuyển vị (góc xoay tại ngàm A) theo phương lực X_1 (trong trường hợp này X_1 là mômen) do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây ra bằng không. Chuyển vị Δ_2 cũng có ý nghĩa tương tự. Từ điều kiện biến dạng tại những liên kết bị loại bỏ ta thấy rõ ý nghĩa của phương trình thứ hai của hệ (15-2) là chuyển vị thẳng Δ_2 , tại gối tựa C theo phương lực X_2 do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây ra phải bằng không.

Chuyển vị do các ẩn số X_1 , X_2 gây ra có thể biểu diễn như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1x_1} &= \delta_{11}X_1; & \Delta_{1x_2} &= \delta_{12}X_2 \\ \Delta_{2x_1} &= \delta_{21}X_1; & \Delta_{2x_2} &= \delta_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (15-2a)$$

Khi thay (15-2a) vào (15-2) ta nhận được:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15-2b)$$

trong đó:

δ_{11} , δ_{12} là góc xoay của mặt cắt ngang tại A của hệ cơ bản do các lực đơn vị $\overline{X_1} = 1$ và $\overline{X_2} = 1$ gây ra. Các hệ số δ_{21} và δ_{22} cũng có ý nghĩa tương tự.

Các phương trình của hệ (15-2b) được gọi là những phương trình chính tắc của phương pháp lực. Các ẩn số thừa X_1 , X_2 trong hệ (15-2b) là những phản lực vòng (mômen) và phản lực thẳng. Vì thế phương pháp này gọi là phương pháp lực. Các chuyển vị δ_{KJ} và Δ_{KP} được xác định bằng công thức Mo. Giải hệ phương trình chính tắc (15-2b), ta tìm được các ẩn số X_1 , X_2 . Sau bước này ta có một hệ tĩnh định chịu tác dụng của các lực đã biết X_1 , X_2 và tải trọng ngoài. Cách vẽ các biểu đồ nội lực trong hệ này ta đã biết rõ trong các chương 9, 10, 11. Các biểu đồ nội lực trong hệ siêu tĩnh đã cho là lời giải của bài toán. Một cách tổng quát hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15-3)$$

Hệ này còn có thể viết dưới dạng ma trận sau đây:

$$AX + B = 0 \quad (15-4)$$

trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

là ma trận vuông của các hệ số trong hệ phương trình chính tắc (15-3).

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{là ma trận cột của các ẩn số}$$

$$B = \begin{bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{bmatrix} \quad \text{là ma trận cột của các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc}$$

Các hệ số δ_{KJ} của hệ phương trình chính tắc trên đường chéo chính được gọi là các hệ số chính hay các chuyển vị chính; chúng luôn luôn dương.

Các hệ số còn lại của ma trận A gọi là các hệ số phụ. Chúng có thể có dấu âm, hoặc dương, hoặc bằng không và $\delta_{JK} = \delta_{KJ}$.

Nghiệm của hệ (15-4) viết dưới dạng ma trận như sau:

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (15-5)$$

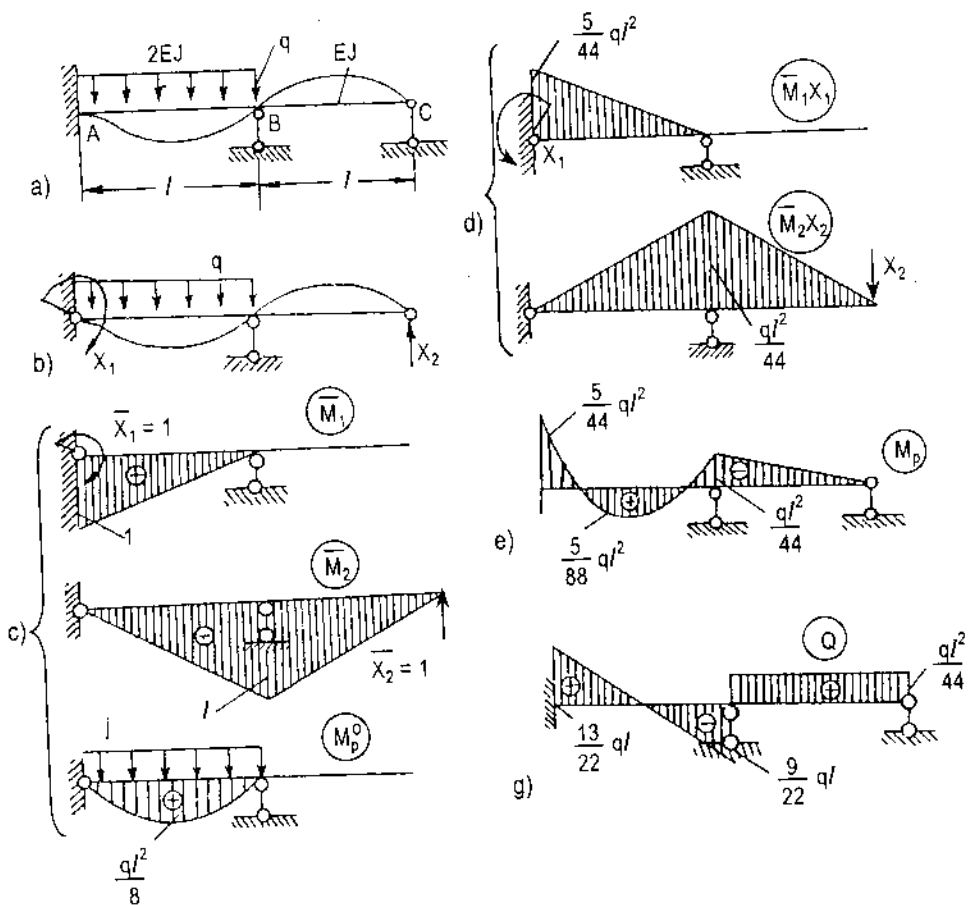
Ở đây A^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận A. Việc giải hệ (15-3) và việc tính ma trận nghịch đảo sẽ đơn giản đáng kể, nếu có nhiều hệ số phụ δ_{KJ} bằng không. Điều này phụ thuộc vào việc chọn hệ cơ bản.

Cần chú ý là tất cả những lập luận trong tiết 2 này chỉ đúng với hệ cho phép sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.

III. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

Hãy vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 15-2a.



Hình 15-2

Giải:

Ta chọn hệ tương đương như hình 15-2b. Biểu đồ mômen trong hệ cơ bản do các lực $\overline{X}_1 = 1$, $\overline{X}_2 = 1$ và tải trọng gây ra được cho trên hình vẽ (hình 15-2c). Bằng cách nhân biểu đồ ta sẽ xác định được các hệ số và số hạng tự do trong các phương trình chính tắc của hệ (15-2b) như sau:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 = \left[l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{l}{6EJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_1 = \left[l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{3} \cdot l \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{l^2}{12EJ}$$

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 = \frac{l^3}{2EJ}$$

$$\Delta_{1P} = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[\frac{1}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^3}{48EJ}$$

$$\Delta_{2P} = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[\frac{1}{2} \cdot l \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^4}{48EJ}$$

Thay các hệ số δ_{mn} và các số hạng tự do Δ_{KP} này vào hệ các phương trình chính tắc (15-2b) và giải nó ta tìm được:

$$X_1 = -\frac{5}{44}ql^2 \quad X_2 = -\frac{ql}{44}$$

Theo nguyên lý độc lập tác dụng của các lực, tung độ của biểu đồ mômen cuối cùng M_p đối với hệ siêu tĩnh đã cho được tính như sau:

$$M_p = M_p^0 + \overline{M}_1 \cdot \overline{X}_1 + \overline{M}_2 \cdot \overline{X}_2$$

Dấu âm (-) trong các biểu thức xác định X_1 , X_2 nói lên rằng chiều của X_1 , X_2 ngược với chiều đã chọn ban đầu. Trên hình vẽ (hình 15-2d) biểu diễn các biểu đồ mômen uốn $\overline{M}_1 \cdot \overline{X}_1$, $\overline{M}_2 \cdot \overline{X}_2$ ứng với chiều đúng của X_1 , X_2 .

Biểu đồ mômen và lực cắt cuối cùng được cho trên hình vẽ (hình 15-2e, g).

Ví dụ 2:

Cho một hệ gồm ba thanh được nối với nhau bằng các khớp ở các đầu cuối. Hệ chịu tải trọng P như trên hình vẽ (hình 15-3a). Độ cứng của thanh giữa $EF\sqrt{2}$, của mỗi thanh bên bằng EF.

Giải:

Bậc siêu tĩnh của hệ bằng 1. Một trong những phương án chọn hệ tương đương được cho trên hình vẽ (hình 15-3b). Khi đó phương trình chính tắc có dạng:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (15-4)$$

Biểu đồ lực dọc đơn vị $\overline{N}_1$ và biểu đồ lực dọc N_P^0 do các lực $X_1 = 1$ và P gây ra trong hệ cơ bản có dạng trên hình vẽ (hình 15-3c, d).

Các hệ số của phương trình chính tắc (15-4) được xác định theo phương pháp Mo:

$$\delta_{11} = \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_1 = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{1}{EF} + [1 \cdot l \sqrt{2}] [1] \frac{1}{EF\sqrt{2}} = \frac{2l}{EF}$$

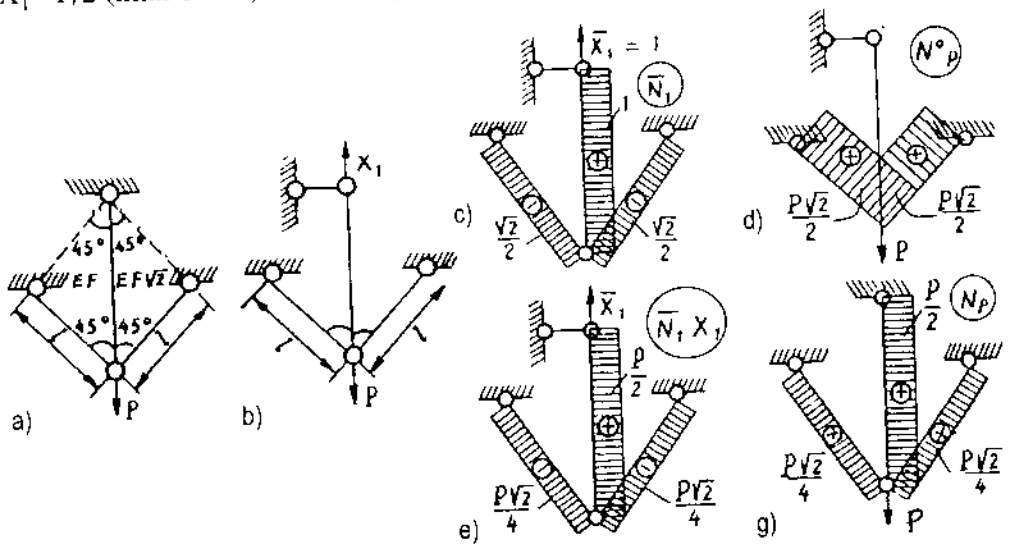
$$\Delta_{1P} = \overline{N}_1 \cdot N_P^0 = -2 \left[\frac{P \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot l \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{1}{EF} = -\frac{Pl}{EF}$$

Thay δ_{11} và Δ_{1P} vừa tìm được vào phương trình (15-4) và giải nó ta được $X_1 = P/2$.

Nguyên lý độc lập tác dụng của các lực cho phép ta viết.

$$N_P = N_P^0 + N_1 X_1$$

Biểu đồ $\overline{N}_1 X_1$ nhận được từ biểu đồ $\overline{N}_1$ sau khi nhân các tung độ của nó với $X_1 = P/2$ (hình 15-3e). Biểu đồ lực dọc cuối cùng N_P được cho trên hình 15-3g.



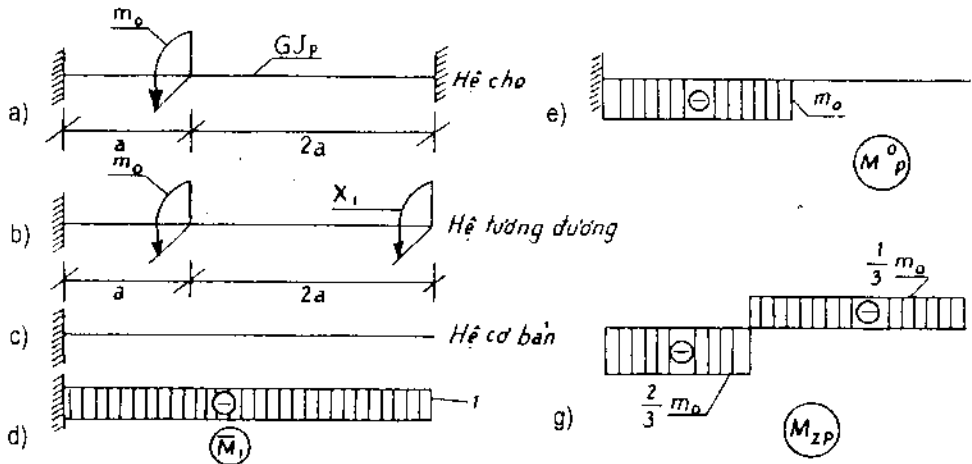
Hình 15-3

Ví dụ 3:

Vẽ M_z đối với một trục chịu xoắn sau đây (hình 15-4).

Giải:

Ta chọn hệ tương đương và hệ cơ bản như hình 15-4b, c.



Hình 15-4

Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Biểu đồ M_1 và M_P có dạng như hình 15-4d, e.

$$\delta_{11} = \frac{1}{GJ_P} [3a \cdot 1 \cdot 1] = \frac{3a}{GJ_P}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{GJ_P} [m_0 \cdot a \cdot 1] = \frac{am_0}{GJ_P}$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{am_0}{3a} = -\frac{m_0}{3}$$

Biểu đồ mômen xoắn cuối cùng được cho trên hình 15-4g.

Ví dụ 4:

Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung siêu tĩnh (hình 15-5a).

Giải:

Hệ tương đương và hệ cơ bản được chọn như trên hình 15-5b,c. Phương trình chính tắc có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15-5)$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do trong hệ phương trình (15-5), cần phải vẽ được các biểu đồ M_1 , M_2 và M_P^0 trong hệ cơ bản, các biểu đồ này được cho trên hình 15-5d,e,g. Bằng cách nhân biểu đồ thích hợp ta tìm được các hệ số và số hạng tự do sau đây:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{2}{3}l + l^3 \right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ} & \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{-1}{EJ} \left[\frac{1}{2}l^3 \right] \\ \delta_{21} &= -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2}l^3 \right] & \delta_{22} &= \frac{l^3}{3EJ} \\ \Delta_{1P} &= \frac{ql^4}{6EJ} & \Delta_{2P} &= -\frac{ql^4}{8EJ} \end{aligned}$$

Thay các kết quả này vào hệ (15-5) ta được:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{ql}{6} &= 0 \\ -\frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{3}X_2 - \frac{ql}{8} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15-5)$$

Nghiệm của hệ (15-6) có dạng:

$$X_1 = \frac{ql}{28} \quad X_2 = \frac{3}{7}ql$$

Mômen uốn ở một mặt cắt bất kỳ của khung được xác định như sau:

$$M_P = M_P^0 + X_1 \overline{M_1} + X_2 \overline{M_2}$$

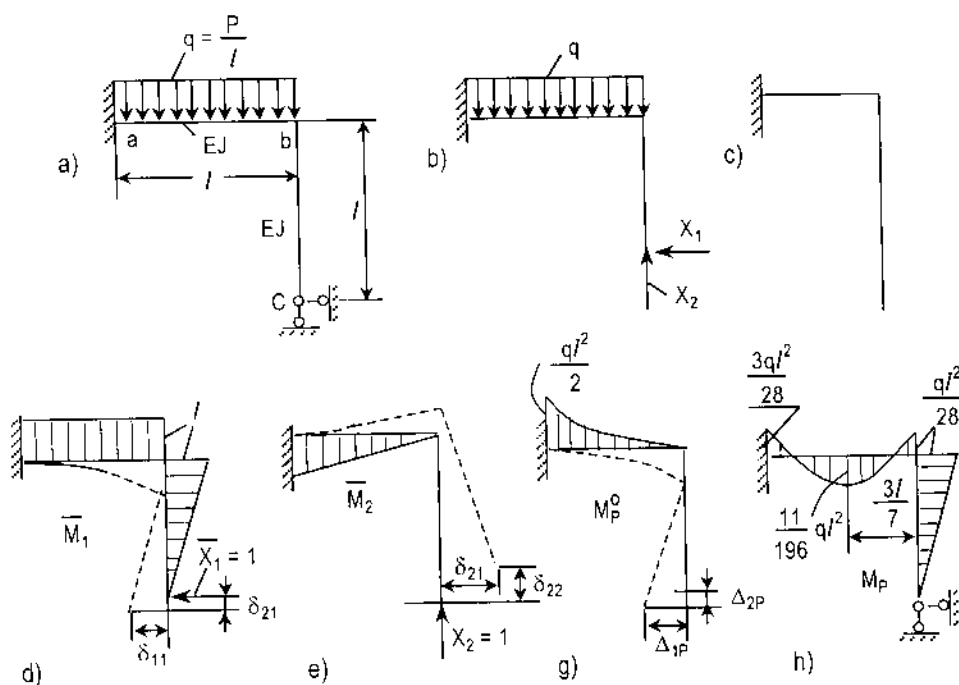
Biểu đồ mômen uốn cuối cùng M_P của khung được biểu diễn trên hình 15-5b. Mặt cắt mà tại đó trên thanh ngang lực cắt Q bằng không được tìm từ điều kiện:

$$Q = qZ - \frac{3}{7}ql = 0$$

Từ đây suy ra: $Z = \frac{3}{7}l$ kể từ gối tựa phải.

Ở mặt cắt $Z^* = \frac{3}{7}l$, mômen uốn có giá trị cực trị là:

$$M^* = \left(\frac{11}{196} \right) q l^2$$



Hình 15-5

IV. TÍNH HỆ SIÊU TÍNH CHỊU NHIỆT ĐỘ THAY ĐỔI

Việc tính hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của nhiệt độ thay đổi cũng tương tự như tính hệ chịu tác dụng của tải trọng, chỉ khác ở đây là sự biến thiên của nhiệt độ là nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ. Và vì thế, các số hạng tự do Δ_{KP} trong hệ (15-4) được thay thế bằng Δ_{Kt} là chuyển vị theo phương X_K do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Cụ thể là:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1t} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2t} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15-7)$$

Trong đó các Δ_{Kt} được xác định như sau:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{Kt} &= \sum_0^l \int \alpha t_c \bar{N}_K dZ + \sum_0^l \int \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} \bar{M}_K dZ \\ \text{hay} \quad \Delta_{Kt} &= \sum \Omega(\bar{N}_K) \alpha t_c + \sum \Omega(\bar{M}_K) \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \end{aligned} \right\} \quad (15-8)$$

Trong công thức tính Δ_{Kt} thì $\Omega(\bar{N}_K)$, $\Omega(\bar{M}_K)$, α , t_c , h , t_1 , t_2 lần lượt là diện tích biểu đồ $\bar{N}_K$, $\bar{M}_K$, hệ số giãn nở nhiệt, nhiệt độ trung bình $t_c = \frac{t_1 + t_2}{2}$, biến thiên nhiệt độ ở mặt trên và dưới, còn h là chiều cao mặt cắt ngang của dầm.

Các hệ số δ_{KJ} được xác định như trường hợp hệ chịu tải trọng.

Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc ta sẽ tìm được các ẩn số $X_1, X_2, X_3 \dots$. Việc vẽ các biểu đồ nội lực được tiến hành theo các phương pháp đã biết.

V. TÍNH HỆ SIÊU TÍNH CÓ CÁC GỐI TỰA CHỊU CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

Để tính toán những hệ siêu tĩnh có các gối tựa chịu chuyển vị cường bức ta cũng sẽ sử dụng những lý luận vừa mô tả ở trên. Khác với các trường hợp trên trong trường hợp này nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ là do các gối tựa chịu các chuyển vị cường bức.

Để áp dụng hệ phương trình chính tắc (15-4) vào trường hợp này ta phải chú ý khi chọn hệ cơ bản không nên loại bỏ các liên kết có chuyển vị cường bức mà phải cắt các liên kết ấy.

Giả sử cho một dầm như hình 15-6a, nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết tại gối tựa B có chuyển vị cường bức thì điều kiện biến dạng theo phương của ẩn số X_1 do các ẩn số X_K nếu có (trên hình 15-6a không chỉ ra những ẩn số này) và chuyển vị cường bức gây ra sẽ không bằng 0. Cụ thể là:

$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \delta \neq 0$$

Bây giờ nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị cường

bức B thì điều kiện chuyển vị theo phương liên kết ấy vẫn bằng 0. Vì lúc này điều kiện vừa nói này là điều kiện mô tả chuyển vị tương đối của hai mặt cắt của liên kết vừa bị cắt.

$$\Delta_{X_1} (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Ngoài ra còn có thể chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết thừa không có chuyển vị cưỡng bức. Nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết thừa có chuyển vị cưỡng bức thì phương trình thứ K có dạng:

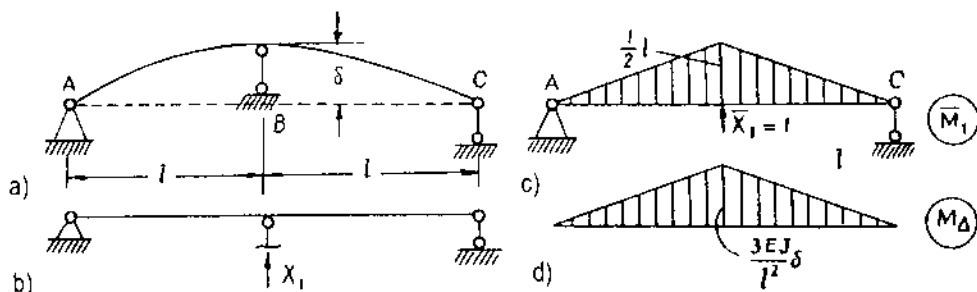
$$\delta_{K1}X_1 + \delta_{K2}X_2 + \dots + \delta_{KK}X_K + \dots + \delta_{Kn}X_n + \Delta_{K\Delta} = 0 \quad (15-9)$$

Các hệ số δ_{Kj} tính như đối với trường hợp hệ chịu tải trọng.

$\Delta_{K\Delta}$ là chuyển vị theo phương của lực X_K do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Nó được xác định theo công thức sau đây:

$$\Delta_{K\Delta} = - \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta_{i\Delta} - \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \theta_{i\Delta} \quad (15-10)$$

Trong đó $\bar{R}_i, \bar{M}_i$ là phản lực theo phương liên kết thứ i do lực $\bar{X}_K = 1$ gây ra trong hệ cơ bản. $\Delta_{i\Delta}$ là chuyển vị thẳng theo phương liên kết thứ i và $\theta_{i\Delta}$ là góc xoay tại liên kết thứ i trong hệ siêu tĩnh đã cho.



Hình 15-6

Ví dụ 5:

Tính mômen uốn lớn nhất trong trục được cho trên hình 15-6a. Nếu khi chế tạo tâm của ổ đỡ giữa bị lệch một đoạn δ .

Giải:

Hệ cơ bản chọn như hình 15-6b. Phương trình chính tắc có dạng:

Ta hãy xét điều kiện biến dạng tại một gối tựa trung gian thứ i nào đó. Ta nhận thấy rằng trong hệ thực hai tiết diện tương ứng hai bên gối tựa i là không thể tách rời nhau, như vậy hai tiết diện đó trong hệ tương đương luôn luôn phải

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0$$

trong đó:

$$\Delta_{1\Delta} = -R_1 \cdot \delta = -1 \cdot \delta = -\delta$$

Biểu đồ M_1 cho trên hình 15-6c và sau khi nhân biểu đồ này với chính nó ta có:

$$\delta_{11} = 2 \left(\frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right) = \frac{l^3}{6EJ}$$

Thay $\Delta_{1\Delta}$ và δ_{11} vừa tìm được vào phương trình (a) và giải nó ta đi đến:

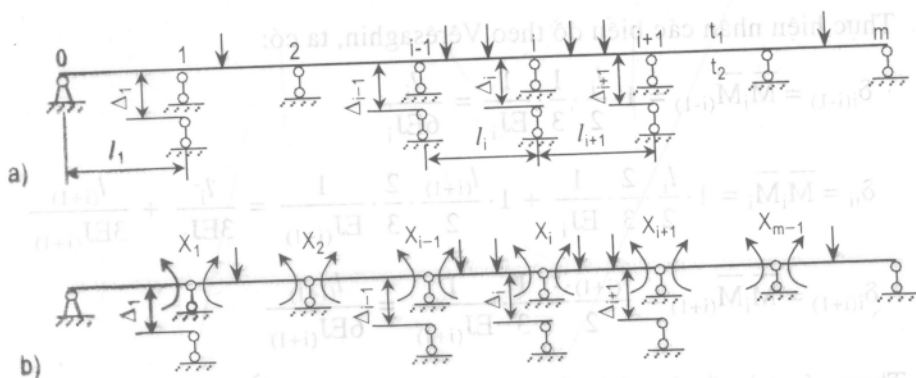
$$X_1 = \frac{6EJ}{l^3} \cdot \delta$$

Biểu đồ mômen uốn và giá trị mômen uốn lớn nhất được cho trên hình 15-6d.

VI. TÍNH DÂM LIÊN TỤC

1. Thiết lập phương trình chính tắc

Giả sử cần tính dâm liên tục (hình 15-7a) chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, của sự chuyển vị cưỡng bức các gối tựa và của sự thay đổi nhiệt độ. Muốn thế ta chọn hệ tương đương như trên hình 15-7b và viết điều kiện bảo đảm cho hệ này làm việc giống hệ thực. Nếu cho dâm tương đương chịu tác dụng của tải trọng, chuyển vị cưỡng bức các gối tựa, và sự thay đổi nhiệt độ giống như dâm thực thì hệ tương đương chỉ còn khác hệ thực ở điều kiện biến dạng tại các tiết diện ở trên gối tựa trung gian.



Hình 15-7

Ta hãy xét điều kiện biến dạng tại một gối tựa trung gian thứ i nào đó. Ta nhận thấy rằng trong hệ thực hai tiết diện tương ứng hai bên gối tựa i là không thể tách rời nhau, như vậy hai tiết diện đó trong hệ tương đương luôn luôn phải dính sát với nhau trong quá trình biến dạng, hay nói khác đi, góc xoay tương đối giữa chúng luôn luôn bằng không.

Như thế tại mỗi gối tựa, chẳng hạn với gối thứ i , ta phải viết điều kiện để cho hệ tương đương biến dạng giống hệ thực tức là góc xoay tương đối của hai tiết diện ở hai bên gối tựa i phải bằng không. Viết điều kiện đó cho gối thứ i dưới dạng phương trình chính tắc của phương pháp lực ta được:

$$\delta_{i(i-1)}M_{(i-1)} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{(i+1)} + \Delta_{iP}'' + \Delta_{iA}'' + \Delta_{it}'' = 0 \quad (15-11)$$

trong đó $\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$ là góc xoay tương đối của hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do các mômen đơn vị $\overline{M}_{(i-1)} = 1$, $\overline{M}_i = 1$, $\overline{M}_{(i+1)} = 1$ gây ra trong hệ cơ bản (chú ý rằng các $\delta_{ik} = 0$ với $k \leq i-2$ và $k \geq i+2$).

Δ_{iP}'' , Δ_{iA}'' , Δ_{it}'' lần lượt là góc xoay tương đối của hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do tải trọng, do chuyển vị cưỡng bức của gối tựa và do nhiệt độ thay đổi gây ra trong hệ cơ bản.

2. Tính các hệ số trong phương trình chính tắc

Trên hình 15-8b, c, d, vẽ các biểu đồ mômen cần thiết trong hệ cơ bản để xác định các hệ số. Do ảnh hưởng của lực cắt rất bé nên ta không vẽ các biểu đồ lực cắt.

Thực hiện nhân các biểu đồ theo Vêrê-saghin, ta có:

$$\delta_{i(i-1)} = \overline{M}_i \overline{M}_{(i-1)} = 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_i} = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

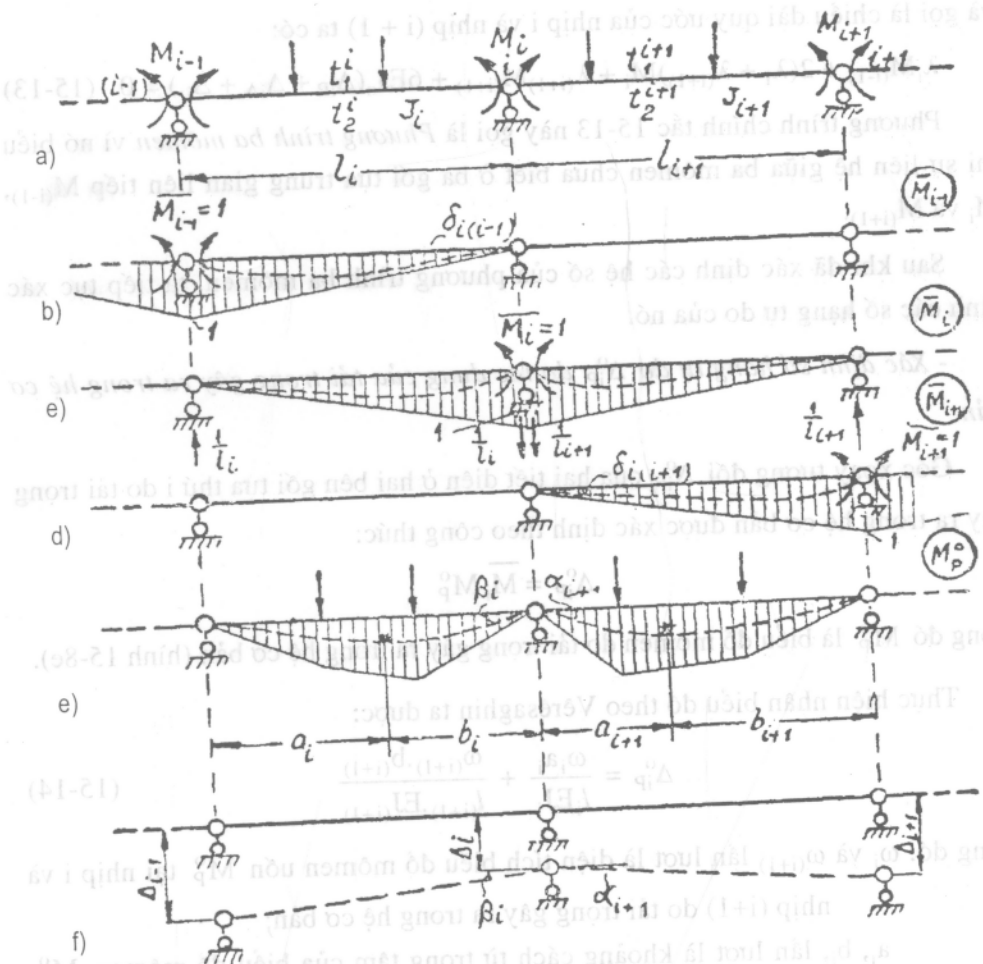
$$\delta_{ii} = \overline{M}_i \overline{M}_i = 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_i} + 1 \cdot \frac{l_{(i+1)}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{(i+1)}} = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = \overline{M}_i \overline{M}_{(i+1)} = \frac{l_{(i+1)}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{(i+1)}} = \frac{l_{(i+1)}}{6EJ_{(i+1)}}$$

Thay các trị số vừa tính được vào phương trình chính tắc 15-11 ta được phương trình tổng quát viết cho gối tựa trung gian thứ i trong trường hợp dầm

chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, chuyển vị cưỡng bức của gối tựa, và sự thay đổi nhiệt độ:

$$\frac{l_i}{6EJ_i} \cdot M_{(i-1)} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}} \right) \cdot M_i + \frac{l_{(i+1)}}{6EJ_{(i+1)}} \cdot M_{(i+1)} + \Delta_{iP}^0 + \Delta_{i\Delta}^0 + \Delta_{it}^0 = 0 \quad (15-12)$$



Hình 15-8

Có thể rút gọn phương trình trên bằng cách nhân hai vế với \$6EJ_0\$, trong đó \$J_0\$ là một hằng số bất kỳ thường được lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó trong dầm:

$$\frac{6EJ_o l_i}{6EJ_i} \cdot M_{(i-1)} + \left(\frac{6EJ_o l_i}{3EJ_i} + \frac{6EJ_o l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}} \right) \cdot M_i + \frac{6EJ_o l_{(i+1)}}{6EJ_{(i+1)}} \cdot M_{(i+1)} + \\ + 6EJ_o \Delta_{ip}^o + 6EJ_o \Delta_{i\Delta}^o + 6EJ_o \Delta_{it}^o = 0$$

$$\text{Đặt } \lambda_i = l_i \cdot \frac{J_o}{J_i}; \lambda_{(i+1)} = l_{(i+1)} \cdot \frac{J_o}{J_{(i+1)}}$$

và gọi là chiều dài quy ước của nhịp i và nhịp $(i+1)$ ta có:

$$\lambda_i M_{(i-1)} + 2(\lambda_i + \lambda_{(i+1)}) M_i + \lambda_{(i+1)} M_{(i+1)} + 6EJ_o (\Delta_{ip} + \Delta_{i\Delta} + \Delta_{it}) = 0 \quad (15-13)$$

Phương trình chính tắc 15-13 này gọi là *Phương trình ba mômen* vì nó biểu thị sự liên hệ giữa ba mômen chưa biết ở ba gối tựa trung gian liên tiếp $M_{(i-1)}$, M_i và $M_{(i+1)}$.

Sau khi đã xác định các hệ số của phương trình ba mômen, ta tiếp tục xác định các số hạng tự do của nó.

- *Xác định số hạng tự do Δ_{ip}^o do tác dụng của tải trọng gây ra trong hệ cơ bản.*

Góc xoay tương đối Δ_{ip}^o của hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức:

$$\Delta_{ip}^o = \overline{M}_i M_p^o$$

trong đó M_p^o là biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản (hình 15-8e).

Thực hiện nhân biểu đồ theo Verésaghin ta được:

$$\Delta_{ip}^o = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{(i+1)} \cdot b_{(i+1)}}{l_{(i+1)} \cdot EJ_{(i+1)}} \quad (15-14)$$

trong đó: ω_i và $\omega_{(i+1)}$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen uốn M_p^o tại nhịp i và nhịp $(i+1)$ do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản;

a_i , b_i , lần lượt là khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen M_p^o trong nhịp i tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó;

$a_{(i+1)}$, $b_{(i+1)}$ lần lượt là các khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ mômen M_p^o trong nhịp $(i+1)$ tính đến gối tựa trái và gối tựa phải của nhịp đó.

- Xác định số hạng tự do $\Delta_{i\Delta}^0$ do tác dụng của lún gối tựa gây ra trong hệ cơ bản.

Góc xoay tương đối $\Delta_{i\Delta}^0$ của hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản được thiết lập trực tiếp từ hình 15-8f.

Trên đó $\Delta_{(i-1)}$, Δ_i , $\Delta_{(i+1)}$ lần lượt là độ lún tại các gối tựa thứ $(i-1)$, thứ i và thứ $(i+1)$ với quy ước hướng xuống phía dưới là dương.

$\Delta_{i\Delta}^0$ chính là tổng số hai góc β_i và $\alpha_{(i+1)}$ ở hai bên gối tựa i :

$$\Delta_{i\Delta}^0 = \beta_i + \alpha_{(i+1)} \approx \operatorname{tg}\beta_i + \operatorname{tg}\alpha_{(i+1)}$$

$$\Delta_{i\Delta}^0 = \frac{\Delta_{(i-1)} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{(i+1)} - \Delta_i}{l_{(i+1)}}$$

- Xác định số hạng tự do Δ_{it}^0 do tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Góc xoay tương đối Δ_{it}^0 của hai tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản được xác định theo công thức quen biết sau:

$$\Delta_{it}^0 = \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega_{(\overline{M}_i)}$$

trong đó: α - hệ số giãn nở dài vì nhiệt của vật liệu làm dầm.

h - chiều cao tiết diện của dầm tại nhịp tương ứng.

t_2, t_1 - lần lượt là độ biến thiên nhiệt độ ở thớ dưới và thớ trên của dầm.

t_c - là độ biến thiên nhiệt độ ở trục dầm, trong trường hợp dầm có tiết diện chữ nhật

$$t_c = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

$\Omega_{(\overline{M}_i)}$ - là diện tích biểu đồ mômen trong hệ cơ bản do các mômen

$\overline{M}_j = 1$ gây ra.

$$\text{Vậy: } \Delta_{it}^0 = \frac{\alpha}{h_i} \cdot (t_2^i - t_1^i) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{(i+1)}} \cdot (t_2^{(i+1)} - t_1^{(i+1)}) \cdot \frac{l_{(i+1)}}{2} \quad (15-15)$$

trong đó:

$h_i, h_{(i+1)}$ - lần lượt là chiều cao của tiết diện dầm tại nhịp thứ i và $(i+1)$;

$t_1^i, t_1^{(i+1)}$ - lần lượt là độ biến thiên của nhiệt độ tại thớ trên của nhịp thứ i và $(i+1)$;

$t_2^i, t_2^{(i+1)}$ - là độ biến thiên nhiệt độ tại thớ dưới của nhịp thứ i và $(i+1)$.

Thay các số hạng tự do đã tính được trong các công thức trên vào phương trình chính tắc ta có phương trình ba mômen viết cho gối tựa trung gian thứ i trong trường hợp dầm chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, của sự chuyển vị gối tựa và của sự thay đổi nhiệt độ:

$$\begin{aligned} & \lambda_i \cdot M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) \cdot M_i + \lambda_{i+1} \cdot M_{i+1} + \\ & + 6 \left[\frac{\omega_i \cdot a_i \cdot J_0}{l_i \cdot J_i} + \frac{\omega_{i+1} \cdot b_{i+1} \cdot J_0}{l_{i+1} \cdot J_{i+1}} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}} \right] + \\ & + 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_i} \cdot (t_2^i - t_1^i) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} \cdot (t_2^{i+1} - t_1^{i+1}) \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \right] = 0 \quad (15-16) \end{aligned}$$

Trường hợp dầm có tiết diện không đổi trong tất cả các nhịp ($J = \text{const}$) ta lấy $J_0 = J$, lúc đó phương trình ba mômen sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} & l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{i+1} + \\ & + 6 \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right] + 6EJ \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}} \right] + \\ & + 3EJ \alpha \left[\frac{l_i}{h_i} \cdot (t_2^i - t_1^i) + \frac{l_{i+1}}{h_{i+1}} \cdot (t_2^{i+1} - t_1^{i+1}) \right] = 0 \quad (15-17) \end{aligned}$$

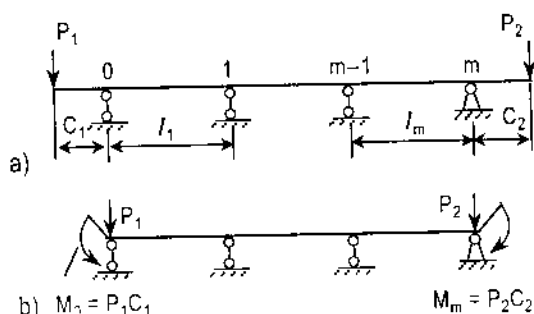
Ứng với mỗi gối trung gian của dầm liên tục ta có một phương trình ba mômen, như vậy với dầm liên tục siêu tĩnh bậc n ta sẽ viết được n phương trình ba mômen cho n gối trung gian.

3. Các trường hợp riêng

3.1. Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa

Ta có thể đưa dầm có đầu thừa chịu tải trọng (hình 15-9a) về dầm liên tục đơn giản (hình 15-9b) bằng cách cắt bỏ các đầu thừa đi và thay tác dụng của

phần đầu thừa bằng những ngoại lực đặt ở các gối biên của dầm liên tục đơn giản. Biểu đồ nội lực của dầm liên tục có đầu thừa trên hình 15-9a chính là biểu đồ nội lực của dầm đơn giản vẽ trên hình 15-9b và phần biểu đồ nội lực ở hai đầu thừa.

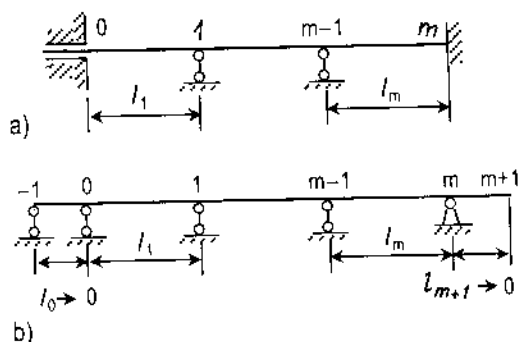


Hình 15-9

Ta tiến hành xác định biểu đồ nội lực của dầm đơn giản vẽ trên hình 15-9b, bằng cách sử dụng phương trình ba mômen như đối với mọi loại dầm liên tục đơn giản thông thường với chú ý rằng mômen nội lực tại các gối ở đầu dầm đã biết, chúng có giá trị bằng mômen tập trung đặt ở các gối đầu tiên và cuối cùng của dầm liên tục.

3.2. Trường hợp dầm liên tục có đầu ngàm

Trong trường hợp dầm liên tục có hai đầu ngàm, ta có thể tưởng tượng thay ngàm cứng và ngàm trượt ở hai đầu bằng hai nhíp ở hai đầu có chiều dài bằng không hoặc có độ cứng $J = \infty$ và có số liên kết tương đương với ngàm như trên hình 15-10b. Lúc đó ta đã đưa bài toán dầm có hai đầu ngàm thành bài toán dầm đơn giản và có thể áp dụng được phương trình ba mômen.



Hình 15-10

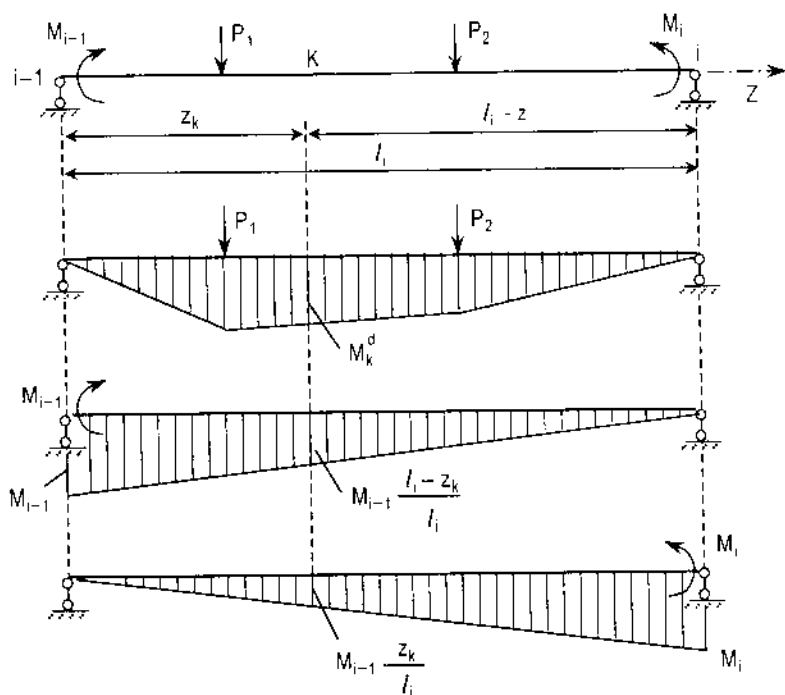
4. Biểu thức mômen uốn và lực cắt tại một tiết diện bất kỳ

Đối với mỗi dầm liên tục bất kỳ sau khi qui về dầm liên tục đơn giản tương ứng, ta có thể thiết lập được hệ phương trình ba mômen viết cho tất cả các gối trung gian của dầm liên tục, trong đó ẩn số là mômen tựa M_i tại các gối tựa trung gian của dầm liên tục, kể cả các mômen ở hai gối tựa biên (bằng không

nếu ở hai đầu không có mômen tập trung) như thế là ta đã tìm được tất cả các mômen nội lực tại các gối tựa.

Vấn đề xác định mômen và lực cắt tại một tiết diện bất kỳ trên dầm liên tục được tiến hành như sau:

Ta có thể xem mỗi nhịp dầm liên tục như một dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối ở hai đầu nhịp, chịu tải trọng và các mômen gối tựa đã xác định được từ hệ phương trình ba mômen ở trên.



Hình 15-11

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta sẽ tìm được biểu thức mômen uốn tại một tiết diện bất kỳ có hoành độ z_k của dầm liên tục như sau:

$$M_k = M_k^d + \frac{M_{i-1}}{l_i} \cdot (l_i - z_k) + \frac{M_i}{l_i} \cdot z_k \quad (15-18)$$

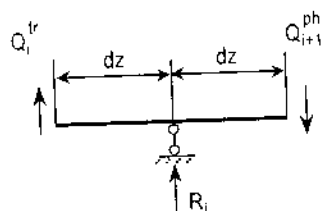
trong đó M_k^d - mômen uốn tại tiết diện k do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên hai gối tựa ở hai đầu nhịp.

Lấy đạo hàm biểu thức trên ta sẽ được biểu thức lực cắt tại tiết diện k của dầm liên tục:

$$Q_k = \frac{dM_k}{dz} = Q_k^d + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} \quad (15-19)$$

Muốn tìm giá trị của phản lực tại gối tựa thứ i nào đó, ta chỉ cần xét cân bằng của phần dầm bị cắt ở hai bên gối như trên hình 15-12. Ta có:

$$R_i = Q_{i+1}^{tr} - Q_i^{ph} \quad (15-20)$$



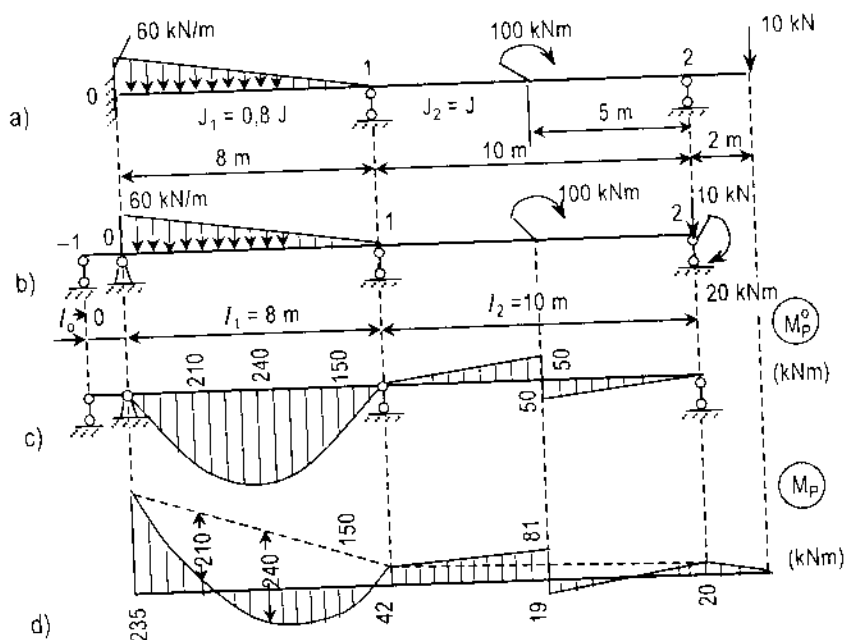
Hình 15-12

VII. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1:

Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm liên tục cho trên hình 15-13.

Cắt bỏ đầu thừa bên phải và thay tác dụng của phần đầu thừa bằng những ngoại lực đặt ở gối biên bên phải của dầm đơn giản. Thay ngàm bên trái của dầm bằng một nhíp có chiều dài $l_0 = 0$ như trên hình 15-13b.



Hình 15-13

Chọn $J_0 = J_2$ chiều dài các nhịp qui ước sẽ là:

$$\lambda_0 = 0; \quad \lambda_1 = \frac{8.J_0}{0,8.J} = 10 \text{ m}; \quad \lambda_2 = \frac{10.J_0}{J} = 10 \text{ m}$$

1. Viết các phương trình ba mômen cho các gối tựa trung gian:

$$\text{- Tại gối 0: } \lambda_0 M_{-1} + 2(\lambda_0 + \lambda_1) M_0 + \lambda_1 M_1 + 6J \left(\frac{\omega_0 a_0}{l_0.J} + \frac{\omega_1 b_1}{l_1 \cdot 0,8.J} \right) = 0$$

$$\text{- Tại gối 1: } \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1 \cdot 0,8.J} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2.J} \right) = 0$$

2. Vẽ biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản. Kết quả vẽ trên hình 15-13c.

3. Xác định số hạng tự do của các phương trình ba mômen

$$\omega_0 = 0; \quad a_0 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{ql^3}{24} = \frac{60.8^3}{24} = 1280 \text{ kNm}^2$$

$$a_1 = \frac{7}{15} \cdot l_1 = \frac{7}{15} \cdot 8 = \frac{56}{15} \text{ m}; \quad b_1 = \frac{8}{15} \cdot l_1 = \frac{8}{15} \cdot 8 = \frac{64}{15} \text{ m}$$

$$\omega_2 b_2 = -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 50 \cdot \left(5 + \frac{1}{3} \cdot 5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 50 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{1250}{3} \text{ kNm}^2$$

4. Thay các trị số của các hệ số vào phương trình ba mômen đồng thời chú ý là $M_2 = -20 \text{ kNm}$:

$$0 + 2 \cdot (0 + 10) \cdot M_0 + 10 \cdot M_1 + 6J \left(0 + \frac{1280 \cdot \frac{64}{15}}{8 \cdot 0,8.J} \right) = 0$$

$$10 \cdot M_0 + 2 \cdot (10 + 10) \cdot M_1 + 10(-20) + 6J \left(\frac{1280 \cdot \frac{56}{15}}{8 \cdot 0,8.J} + \frac{-1250}{10.J} \right) = 0$$

$$\text{Hay:} \quad 2M_0 + M_1 + 512 = 0$$

$$M_0 + 4M_1 + 403 = 0$$

5. Giải hệ phương trình ta được:

$$M_0 = -235 \text{ kNm}; \quad M_1 = -42 \text{ kNm}$$

6. Vẽ biểu đồ mômen tổng cộng: sau khi đã tìm được các mômen tựa M_0 , M_1 , M_2 ta có thể vẽ biểu đồ mômen trong hệ cơ bản do riêng các mômen tựa gây ra.

Trong mỗi nhịp, biểu đồ này có dạng đường thẳng nối liền các tung độ biểu thị mômen tựa ở hai đầu nhịp. Ta gọi biểu đồ này là biểu đồ mômen gối tựa và ký hiệu là M_g . Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể xác định biểu đồ mômen tổng cộng:

$$M_p = M_p^0 + M_g$$

Kết quả biểu diễn trên hình 15-13d.

Cách vẽ biểu đồ Q_p trong dầm liên tục cũng thực hiện như trên:

$$Q_p = Q_p^0 + Q_g$$

Ví dụ 2:

Tính dầm liên tục cho trên hình 15-14a khi gối 0 lún xuống một đoạn bằng Δ và ngàm xoay thuận chiều kim đồng hồ một góc bằng $\varphi = \frac{\Delta}{l}$. Cho biết $EJ = \text{const.}$

Trên hình 15-14b trình bày cách đưa dầm có đầu ngàm về dầm liên tục đơn giản. Nếu cho gối 3 của dầm thay thế chuyển dịch lên phía trên một đoạn $\Delta_3 = \varphi \cdot l_3 = \Delta \cdot \frac{l_3}{l}$ đồng thời $l_3 \rightarrow 0$ thì cách làm việc của dầm này hoàn toàn giống cách làm việc của dầm cho ban đầu.

Thiết lập các phương trình ba mômen lần lượt cho gối 1 và 2, theo (15-17) ta có:

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 6EJ \left(\frac{\Delta_0 - \Delta_1}{l_1} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{l_2} \right) = 0$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 6EJ \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{l_2} + \frac{\Delta_3 - \Delta_2}{l_3} \right) = 0$$

trong đó: $l_1 = l_2 = l$; $l_3 = 0$; $M_0 = M_3 = 0$
 $\Delta_0 = \Delta$; $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$; $\Delta_3 = -\Delta \frac{l_3}{l}$

Sau khi thay thế những giá trị này vào hai phương trình trên, ta được:

$$4/M_1 + 1/M_2 + 6EJ \left(\frac{\Delta - 0}{l} + \frac{0 - 0}{l} \right) = 0$$

$$1/M_1 + 2/M_2 + 6EJ \left(\frac{0 - 0}{l} - \frac{\Delta l_3}{l l_3} + 0 \right) = 0$$

Hay: $4M_1 + M_2 + 6 \frac{EJ}{l^2} \Delta = 0$

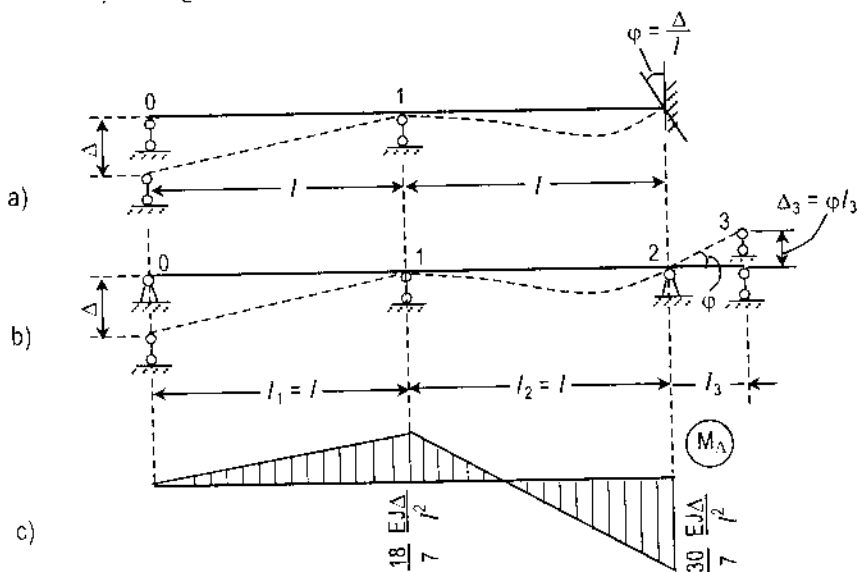
$$M_1 + 2M_2 - 6 \frac{EJ}{l^2} \Delta = 0$$

Giải hệ phương trình này ta được:

$$M_1 = -\frac{18}{7} \cdot \frac{EJ\Delta}{l^2}$$

$$M_2 = +\frac{30}{7} \cdot \frac{EJ\Delta}{l^2}$$

Trên hình 15-14c là biểu đồ mômen tựa. Biểu đồ này cũng là biểu đồ M_Δ cần tìm vì trên hệ không có tải trọng.



Hình 15-14

Ví dụ 3:

Tính dầm liên tục chịu sự biến thiên nhiệt độ như trên hình 15-15a.

Phương trình ba mômen viết cho gối 1 và 2:

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 + 3EJ\alpha \left[\frac{l_1}{h_1} (t_2^1 - t_1^1) + \frac{l_2}{h_2} (t_2^2 - t_1^2) \right] = 0$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 + 3EJ\alpha \left[\frac{l_2}{h_2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{l_3}{h_3} (t_2^3 - t_1^3) \right] = 0$$

trong đó:

$$l_1 = l_2 = l_3 = l;$$

$$M_0 = M_3 = 0$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = h;$$

$$t_2^1 = +t; t_1^1 = +3t;$$

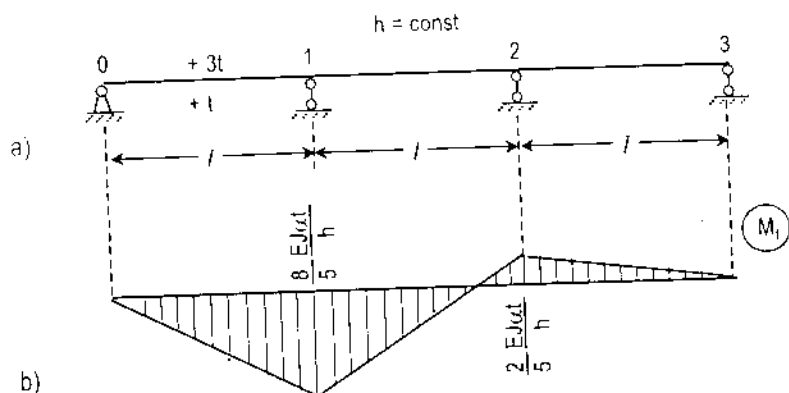
$$t_2^2 = t_1^2 = t_2^3 = t_1^3 = 0$$

Nghiệm của hệ này là:

$$M_1 = \frac{8}{5} \cdot \frac{EJ\alpha t}{h};$$

$$M_2 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{EJ\alpha t}{h}$$

Biểu đồ M_t cho trên hình 15-15b.



Hình 15-15

TÍNH TOÁN THỰC HÀNH CÁC CẤU KIỆN VÀ CHI TIẾT MÁY

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT TÍNH TOÁN CÁC CHI TIẾT CHỊU CẮT

Trong thực tế kỹ thuật, đặc biệt trong ngành chế tạo máy ta thường hay gặp những chi tiết làm việc trong điều kiện trạng thái ứng suất phức tạp. Đó là những bài toán về cắt và dập, bài toán về sự tập trung ứng suất và bài toán về ứng suất tiếp xúc. Để giải quyết đầy đủ những bài toán đó đòi hỏi người thực hiện phải có một kiến thức sâu sắc về cơ học và toán học. Điều này vượt ra ngoài giới hạn của giáo trình cơ học ứng dụng. Nhưng do tính chất thực dụng của những vấn đề nói trên, trong chương này ta sẽ làm quen với cách tính thực hành và những khái niệm cơ bản về cách giải quyết những bài toán đó.

1. Khái niệm về hiện tượng trượt

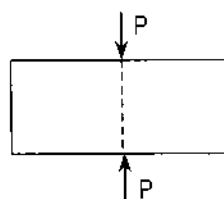
Trong một số trường hợp độ bền cũng như độ cứng của các cấu kiện kết cấu liên quan trực tiếp với khả năng chịu trượt của vật liệu. Do đó cần thiết phải nghiên cứu biến dạng trượt và trạng thái ứng suất tương ứng với nó. Không nên quên rằng, trong trường hợp tổng quát biến dạng trượt là một bộ phận tổ thành của trạng thái biến dạng tại một điểm.

Một dạng của trạng thái ứng suất và biến dạng phẳng, mà ở đó trên hai mặt cắt vuông góc của phần tử chỉ có các ứng suất tiếp tác dụng, được gọi là dạng trượt thuần túy (trạng thái ứng suất trượt thuần túy). Từ đó ta định nghĩa một trạng thái được gọi là chịu trượt thuần túy như sau:

Định nghĩa: Một thanh được gọi là chịu trượt thuần túy nếu trên các mặt cắt ngang của thanh có một loại nội lực là lực cắt ngang Q .

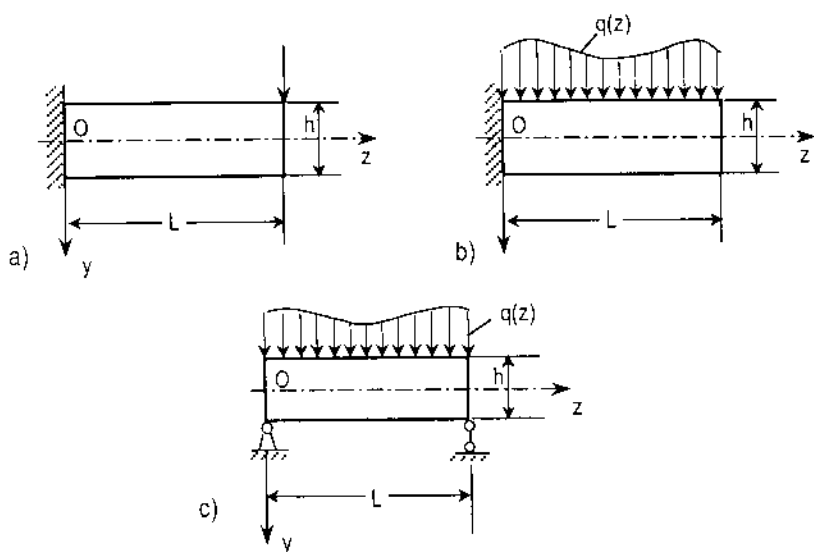
Trong thực tế rất ít gặp những thanh chịu lực lý tưởng như thế. Nghĩa là những thanh chịu cắt bởi hai lực trực đối P (hình 16-1).

Theo mối liên hệ giữa mômen uốn và lực cắt, hiện tượng trượt luôn luôn kèm theo hiện tượng uốn. Trong trường hợp mômen uốn của ngẫu ($\vec{P}, \vec{P}$) rất bé (khoảng cách giữa hai đường tác dụng của các lực $\vec{P}$ rất nhỏ), trong tính toán kỹ thuật có thể bỏ qua ngẫu lực này và chỉ kể đến lực cắt Q .



Hình 16-1

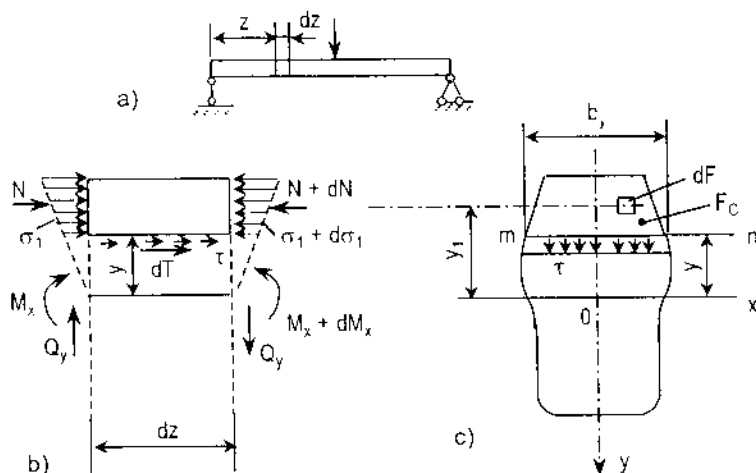
Ví dụ, những dầm chịu các lực ngang trên hình 16-2a,b,c có thể xem là những thanh chỉ chịu cắt, nếu chiều dài l của chúng là khá bé. Cụ thể là $l \leq 5h$, h - kích thước lớn nhất của mặt cắt ngang.



Hình 16-2

2. Ứng suất tiếp khi trượt

Để xác định ứng suất tiếp khi trượt ta tưởng tượng tách ra khỏi dầm (hình 16-3a) một phần tử chiều dài dz bằng hai mặt cắt vuông góc với trục oz và mặt cắt $m-n$ vuông góc với hai mặt cắt trên. Sau đó khảo sát sự cân bằng của một trong hai phần của phần tử đã được tách ra, ví dụ phần trên (hình 16-3c).



Hình 16-3

$$dN = \int_{F_c} d\sigma_1 dF = \int_{F_c} \frac{dM_x}{J_x} \cdot y_1 dF = \frac{dM_x}{J_x} \int_{F_c} y_1 dF$$

Tích phân $S_x^c = \int_{F_c} y_1 dF$ theo định nghĩa là mômen tĩnh của phần diện tích

bị cắt F_c đối với trục trung hoà ox .

Vì thế:

$$dN = \frac{dM_x}{J_x} \cdot S_x^c$$

Để phần đã được tách ra cân bằng, thì trên mặt cắt dọc $m-n$ phải tồn tại các ứng suất tiếp τ . Những ứng suất này tạo thành lực dT .

Theo điều kiện cân bằng $\Sigma Z = 0$.

Ta có:

$$dT = dN$$

Hoặc:

$$dT = \frac{dM_x}{J_x} \cdot S_x^c \quad (a)$$

Để xác định được ứng suất tiếp τ cần phải biết quy luật phân bố của nó theo chiều rộng b_y của mặt cắt ngang. Thực tế quy luật này phụ thuộc vào hình dáng mặt cắt ngang. Tuy nhiên, đối với phần lớn các mặt cắt ngang có thể giả thiết rằng, ứng suất tiếp phân bố đều theo chiều rộng b_y của mặt cắt.

Thừa nhận giả thiết này, ta có thể tính lực trượt dT như sau:

$$dT = \tau_{yz} dz b_y \quad (b)$$

Ở đây b_y - là chiều rộng mặt cắt ngang tại điểm, mà ở đó cần xác định ứng suất tiếp $\tau = \tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Chú ý đến công thức (a) và (b) ta có:

$$\tau_{yz} = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^c}{J_x b_y}$$

Nhưng:
$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

Vì vậy, theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp ta nhận được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt bất kỳ sau đây:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x^c}{J_x \cdot b_y} \quad (16-1)$$

Công thức này gọi là công thức tính ứng suất tiếp của Juravsky. Nếu một lần nữa giả thiết rằng, ứng suất tiếp phân bố đều trên toàn bộ mặt cắt thì rõ ràng là:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{F} \quad (16-2)$$

Khi biến dạng trượt còn chưa vượt quá giới hạn đàn hồi, về thực chất ứng suất tiếp được tìm theo (16-2) là ứng suất trung bình hoá nào đó. Nó luôn luôn nhỏ hơn ứng suất tiếp lớn nhất được xác định theo (16-1). Nếu biến dạng trượt ở tất cả các điểm trên mặt cắt đã vượt quá giới hạn đàn hồi và chuyển vào trạng thái dẻo thì công thức xác định ứng suất tiếp (16-2) là đúng. Khi đó:

$$\tau_{ch} = \frac{Q_{gh}}{F} \quad (16-3)$$

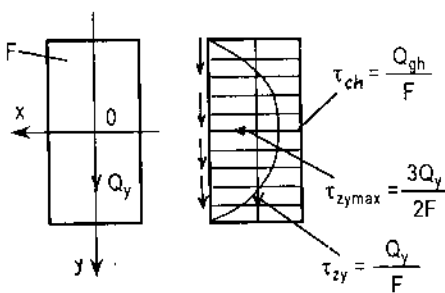
trong đó: F - diện tích mặt cắt ngang;

Q_{gh} - lực cắt giới hạn;

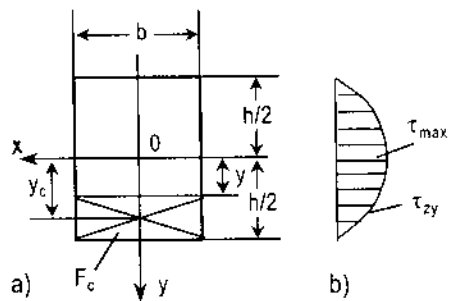
τ_{ch} - ứng suất tiếp chảy (giới hạn chảy khi cắt).

Trên hình 16-4 biểu diễn sự phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt dạng chữ nhật được xác định theo các công thức tương ứng (16-1), (16-2), (16-3).

Dưới đây ta sẽ khai triển cụ thể cách tính ứng suất tiếp theo công thức 16-1.



Hình 16-4



Hình 16-5

3. Sự phân bố ứng suất tiếp trên một số mặt cắt thường gặp

a) Mặt cắt ngang dạng chữ nhật

Với mặt cắt hình chữ nhật $b(y) = \text{hằng} = b$

$$S_x^c(y) = F_c \cdot y_c$$

trong đó: y_c - khoảng cách từ trọng tâm C của diện tích F_c đến trục trung hoà x.

Theo hình 16-5a ta có:

$$F_c = b \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$y_c = y + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

Do đó:

$$S_x^c(y) = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)$$

Vậy theo công thức (16-1):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x} \cdot \frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4y^2)$$

hay:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{8J_x} \cdot (h^2 - 4y^2) = \frac{3Q_y}{2F} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right) \quad (16-4)$$

Từ công thức (16-4) ta thấy ứng suất tiếp τ_{zy} biến thiên theo luật parabol (bậc 2) dọc theo chiều cao h của mặt cắt ngang (hình 16-5b).

Tại trục trung hoà $y = 0$, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (16-4a)$$

tại những điểm xa trục trung hoà nhất, $y_{\max} = \frac{h}{2}$ nên $\tau_{zy} = 0$. Khi cho diện tích biểu đồ hàm (16-4) bằng diện tích biểu đồ chữ nhật ($h \cdot \tau_{zy}$), ta lại được kết quả (16-2).

b) Mặt cắt hình tròn

Gọi r là bán kính của mặt cắt, $b^c(y)$ là chiều rộng của lớp thứ dọc cách trục trung hoà một khoảng y , y_1 là tung độ của một dải diện tích bé song song với trục x , có bề dày dy và chiều dài a ($y \leq y_1 \leq r$) (hình 16-6). Ta có:

$$S_x^c(y) = \int_{F_c} y_1 dF = \int_y^r y_1 a dy \quad (a)$$

Để thuận tiện cho việc lấy tích phân ta đổi biến số y_1 sang biến số góc φ . Hệ thức giữa các biến số đó là:

$$y_1 = r \sin \varphi \quad (\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}) \quad (b)$$

$$dy_1 = r \cos \varphi d\varphi \quad (c)$$

ngoài ra: $a = 2r \cos \varphi \quad (d)$

Thay (b), (c) và (d) vào (a) và đổi cận lấy tích phân, ta có:

$$S_x^c(y) = -2r^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi)$$

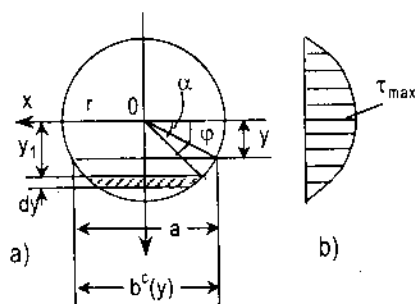
Do đó: $S_x^c(y) = \frac{2r^3 \cos^3 \alpha}{3}$

mặt khác: $b^c(y) = 2r \cos \alpha$

Như vậy theo công thức (16-1) ta có:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y r^2 \cos^2 \alpha}{3J_x}$$

Chú ý rằng: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{y^2}{r^2}$



Hình 16-6

cuối cùng:
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{3J_x} (r^2 - y^2) \quad (16-5)$$

Công thức (16-5) chứng tỏ τ_{zy} biến thiên theo y với luật parabol (hình 16-6b). Tại các điểm trên trục trung hoà $y = 0$, ứng suất tiếp có trị số lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y r^2}{3J_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (16-5a)$$

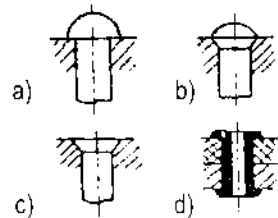
II. MỐI GHÉP KHÔNG THÁO ĐƯỢC VÀ CÁCH TÍNH TOÁN

Chi tiết máy ghép dùng để ghép các chi tiết máy khác lại với nhau. Ví dụ: bulông, hàn, đinh tán, v.v...

Vùng liên kết giữa các chi tiết lại với nhau gọi là *mối ghép*.

Mối ghép được phân ra: mối ghép tháo được và không tháo được.

Mối ghép tháo được là loại (về nguyên tắc) khi tháo không phải phá huỷ một chi tiết máy nào, nếu khi tháo, bắt buộc phải phá bỏ một chi tiết nào đó thì mối ghép đó được gọi là mối ghép không tháo được.



Hình 16-7

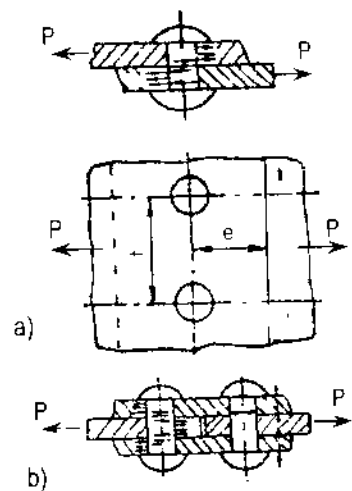
1. Mối ghép đinh tán và cách tính toán

Mối ghép đinh tán là loại mối ghép các chi tiết máy dạng tấm, thanh, vỏ mỏng lại với nhau nhờ một chi tiết máy hình trụ tròn (một đầu có mũ sẵn) gọi là đinh tán, xuyên qua lỗ không ren của các tấm ghép, dùng búa tay, búa máy hoặc máy ép để tạo đầu trụ còn lại thành mũ thứ hai và để ép chặt các chi tiết ghép lại với nhau.

Dựa vào hình dạng mũ đinh tán có sẵn, người ta chia ra (hình 16-7) mũ nửa cầu, mũ nửa chìm, mũ chìm, mũ tán rộng v.v...

Mối ghép đinh tán được phân loại:

– Theo công dụng:



Hình 16-8

+ Mỗi ghép chắc: là loại mỗi ghép chịu lực, ví dụ dùng trong kết cấu cầu sắt, giàn cầu trục v.v...

+ Mỗi ghép kín: là mỗi ghép yêu cầu kín, ví dụ các thùng chứa chất lỏng, khí.

+ Mỗi ghép chắc kín: mỗi ghép vừa yêu cầu chịu lực vừa yêu cầu kín, ví dụ dùng trong nồi áp suất.

- Theo vị trí đầu mối các tấm ghép:

+ Ghép chồng mối (hình 16-8c): đầu các tấm ghép đặt chồng lên nhau.

+ Ghép giáp mối có một hoặc hai tấm đệm (hình 16-8b): các tấm ghép chính đặt đối đầu với nhau và dùng thêm tấm phụ để ghép chúng lại.

- Theo số hàng đinh:

Người ta còn chia ra mỗi ghép một hàng đinh (hình 16-8); hai hàng đinh v.v.

Việc phân loại mỗi ghép liên quan tới việc tính toán có những chỗ khác nhau.

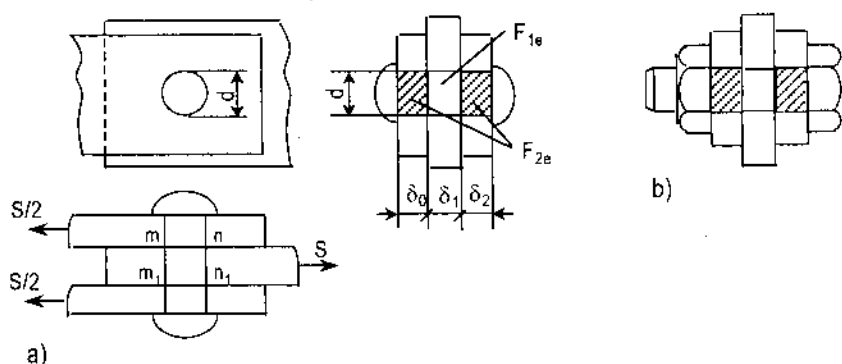
Đặc điểm của mỗi ghép đinh tán là chắc chắn, dễ kiểm tra chất lượng mỗi ghép cho nên thường được dùng trong những kết cấu chịu tải trọng động như cầu sắt, giàn cầu trục v.v... Nhưng nhược điểm của mỗi ghép này là công nghệ gia công nặng nhọc và ồn, hơn nữa các chi tiết ghép phải làm lỗ nên gây ra sự giảm yếu các chi tiết này.

Dưới đây ta sẽ làm quen với cách tính toán thực hành một số mỗi ghép thường gặp như: đinh tán, bulông.

Biến dạng thực của những mỗi ghép này rất phức tạp và chỉ có thể được khảo sát gần đúng như những biến dạng trượt. Vì vậy những tính toán trình bày trong mục này là dựa trên những giả thiết khá thô và chúng chỉ có đặc trưng quy ước. Nhưng do tính đơn giản của các giả thiết đó mà cách tính toán này được sử dụng rất rộng rãi trong thực tế thiết kế.

Ngoài ra một số đại lượng sử dụng trong tính toán được lấy từ những số liệu thí nghiệm. Điều này có nghĩa là những sự hiệu chỉnh tương ứng đã được đưa vào trong tính toán và làm cho những tính toán này trở thành đủ tin cậy.

Ta khảo sát sự làm việc của một đinh tán có ba tấm ghép (hình 16-9a).



Hình 16-9

Đỉnh tán có thể bị cắt tại các mặt cắt m-n và m₁-n₁. Đó là một trong những dạng phá hỏng chủ yếu của mối ghép này (hình 16-9). Ta gọi đỉnh tán như thế là đỉnh tán có hai mặt bị cắt. Mối ghép bulông (hình 16-9b) cũng làm việc trong những điều kiện tương tự như mối ghép đỉnh tán. Phương pháp tính toán mối ghép đỉnh tán được trình bày dưới đây cũng đúng đối với một số loại liên kết bulông (mối ghép bulông thô).

2. Phương pháp trạng thái giới hạn

Ta cần tìm lực giới hạn P_{gh} mà đỉnh tán có hai mặt bị cắt có thể chịu được theo điều kiện cắt. Chúng ta sẽ xem trạng thái chảy trên các mặt bị cắt là lúc mối ghép hết khả năng làm việc. Ở trạng thái này sự trượt đáng kể của các tấm ghép đồng thời xảy ra. Thực tế, sự phá hỏng mối ghép loại này có thể xảy ra với tải trọng vượt quá tải trọng gây ra sự chảy khoảng $1,5 \div 2$ lần.

Có thể xem ở thời điểm xuất hiện hiện tượng chảy ở mỗi điểm của mặt bị cắt, ứng suất đạt được giới hạn chảy tính toán R_c . Do đó, giả sử rằng ở trạng thái giới hạn các ứng suất tiếp phân bố đều trên diện tích bị cắt và bằng R_c .

$$\text{Vì vậy ta có:} \quad P_{gh} = F_c \cdot R_c \quad (16-6)$$

trong đó F_c là diện tích của hai mặt bị cắt m-n và m₁-n₁ của đỉnh tán.

Nếu gọi d là đường kính của đỉnh tán thì:

$$F_c = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (a)$$

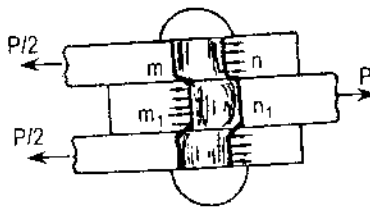
Khi thay (a) vào công thức (16-6) ta tìm được lực giới hạn P_{gh} đối với đỉnh tán có hai mặt bị cắt sau đây:

$$P_{gh} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot R_c \quad (16-7)$$

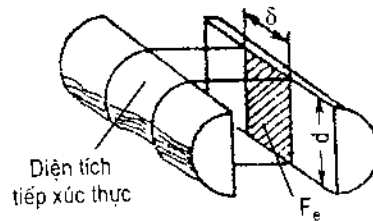
Nếu mối ghép có số tấm ghép lớn hơn ba thì đỉnh tán có thể có không phải hai mà là một số mặt bị cắt lớn hơn. Bởi vậy, nếu đỉnh tán có k mặt bị cắt thì lực giới hạn P_{gh} được xác định theo công thức:

$$P_{gh} = k \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot R_c \quad (16-8)$$

Ngoài sự phá hỏng do đỉnh tán bị cắt, sự phá hỏng mối ghép có thể xảy ra khi những tấm ghép tương đối mỏng do mặt tiếp xúc giữa lỗ và thân đinh bị dập (ép mặt). Quy luật phân bố thực của ứng suất trên bề mặt tiếp xúc này rất phức tạp. Tuy nhiên sự nguy hiểm do ép mặt (dập) có thể đánh giá không phải giá trị thực của ứng suất tiếp xúc, mà là giá trị trung bình của ứng suất này tính trên diện tích ép mặt quy ước F_e (hình 16-11). F_e là hình chiếu của diện tích tiếp xúc thực trên mặt phẳng vuông góc với phương lực kéo tấm ghép P .



Hình 16-10



Hình 16-11

Các diện tích ép mặt quy ước đối với liên kết cho trên (hình 16-9) là $F_{1e} = \delta_1 d$ và $F_{2e} = \delta_2 d$. Cả hai diện tích ép mặt này chịu cùng một lực P , vì thế cần phải lấy diện tích nhỏ nhất trong chúng làm diện tích để tính toán $F_e^{\min}$. Trong trường hợp tổng quát:

$$F_e^{\min} = d \Sigma \delta \quad (16-9)$$

Ở đây $\Sigma \delta$ là chiều dày tổng cộng nhỏ nhất của các tấm ghép được đặt theo một phương.

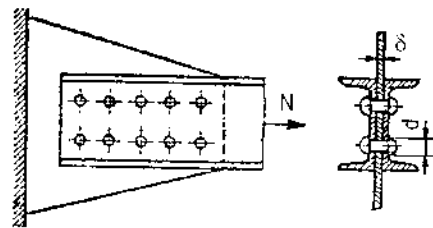
Giá trị tính toán của ứng suất ép mặt quy ước được tìm bằng thực nghiệm R_c . Lực tính toán giới hạn cho một đỉnh tán theo điều kiện chịu ép mặt là:

$$P_c = F_c^{\min} . R_c \quad (16-10)$$

Rõ ràng là lực nhỏ nhất trong hai lực tính toán giới hạn tìm được theo điều kiện chịu cắt và ép mặt là lực tính toán giới hạn đối với đinh tán.

Một câu hỏi được đặt ra là số lượng đinh tán cần thiết đối với một mối ghép chịu tác dụng của lực N là bao nhiêu? (hình 16-12). Để giải quyết vấn đề này ta giả thiết là lực N được chia đều cho các đinh tán. Cần chú ý là trong giai đoạn đàn hồi các đinh tán trong mối ghép làm việc không giống nhau: trên các đầu cuối của mối ghép các đinh tán chịu lực nhiều hơn, còn ở giữa các đinh tán chịu lực ít hơn.

Tuy nhiên, trong giai đoạn biến dạng dẻo do hiện tượng chảy mà các nội lực trong các đinh tán được san đều. Điều này cho phép sử dụng những giả thiết đã nêu trên về sự chịu tải đều của tất cả các đinh tán của mối ghép.



Hình 16-12

Bởi vậy số đinh tán cần thiết được xác định theo công thức dưới đây:

$$n = \frac{N}{P_c^{\min}} \quad (16-11)$$

trong đó $P_c^{\min}$ là lực nhỏ nhất trong hai lực tính toán giới hạn nói trên mà một đinh tán phải chịu theo điều kiện cắt và ép mặt. Việc chọn mặt cắt ngang và kiểm tra bền các cấu kiện ghép cần phải kể đến sự giảm yếu của mặt cắt do lỗ đinh tán. Nghĩa là diện tích mặt cắt ngang tính toán là diện tích giảm yếu F_{gy} .

3. Phương pháp ứng suất cho phép

Khi tính toán các chi tiết chịu cắt theo ứng suất cho phép cần phải đảm bảo điều kiện bền cắt sau đây:

$$\tau_{\max} \leq [\tau_c] \quad (16-12)$$

trong đó, $\tau_{\max}$ là ứng suất tiếp lớn nhất phát sinh trong chi tiết do tải trọng ngoài gây ra và được xác định theo các công thức (16-1) hoặc (16-2). $[\tau_c]$ là ứng suất cắt cho phép của vật liệu làm chi tiết.

Như đã nói ở trên hiện tượng cắt thường đi đôi với hiện tượng ép mặt (đập). Điều kiện ép mặt theo ứng suất cho phép là như sau:

$$\sigma_{\max}^e = \frac{N}{F_e^{\min}} \leq [\sigma_e] \quad (16-13)$$

trong đó $\sigma_{\max}^e$ là ứng suất ép mặt gây ra do ngoại lực N ; $F_e^{\min}$ được xác định theo công thức (16-9); $[\sigma_e]$ là ứng suất ép mặt cho phép.

Tính mối ghép đỉnh tán

Gọi n là số đỉnh trong mối ghép đỉnh tán. Giả thiết tải trọng P phân bố đều cho các đỉnh tán, thì tải trọng trên mỗi đỉnh là:

$$P = \frac{P}{n}$$

Để tránh các khả năng hỏng do cắt và đập các điều kiện bên sau đây phải được thoả mãn:

Đỉnh không bị cắt đứt:

$$\tau_{\max} = \frac{P}{k \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau_e] \quad (16-13')$$

trong đó $[\tau_e]$ - ứng suất cắt cho phép của đỉnh tán.

Mặt lỗ và đỉnh không bị đập:

$$\sigma_{\max}^e = \frac{P}{F_e^{\min}} \leq [\sigma_p] \quad (16-14)$$

trong đó, $F_e^{\min}$ là hình chiếu trên mặt phẳng vuông góc với P của mặt (trụ) tiếp xúc giữa lỗ đỉnh và đỉnh và được tính theo công thức (16-9).

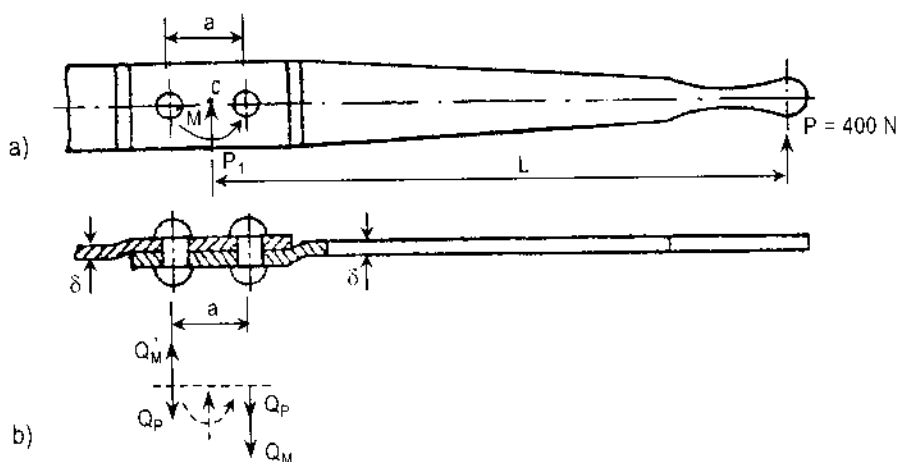
Khi giải bài toán về chọn kích thước mặt cắt của đỉnh tán, người ta thường xuất phát từ *điều kiện bền đều* của đỉnh và tấm ghép. Chẳng hạn, từ các công thức (16-13') và (16-14) suy ra:

$$d = \frac{4}{\pi k} \cdot \frac{[\sigma_e]}{[\tau_e]} \sum \delta \quad (16-15)$$

4. Các ví dụ

Ví dụ 1:

Xác định đường kính đỉnh tán của một tay gạt chịu lực như hình 16-13. Biết ứng suất cho phép $[\tau]_c = 140 \text{ N/mm}^2$; $[\sigma]_d = 280 \text{ N/mm}^2$; $a = 80 \text{ mm}$; $l = 600 \text{ mm}$; $P = 400 \text{ N}$; $\delta = 6 \text{ mm}$.



Hình 16-13

Giải:

Chuyển song song lực P về tâm mối ghép (điểm C) ta có một lực $P_1 = P$ và một mômen $M = Pl$.

Lực P_1 cân bằng với hai lực: (hình 16-13b)

$$Q_P = \frac{P_1}{2} = \frac{P}{2}$$

Mômen M cân bằng với cặp ngẫu lực $(\vec{Q}_M, \vec{Q}'_M)$

$$Q_M \cdot a = M = Pl$$

Từ đó:

$$Q_M = \frac{Pl}{a}$$

Như vậy lực tác dụng lớn nhất vào đỉnh tán bên phải là:

$$Q = Q_P + Q_M = \frac{P}{2} + \frac{Pl}{a} = P \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{l}{a} \right)$$

$$Q = 400 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{600}{80} \right) = 3200 \text{ N}$$

Đường kính lỗ đặt đinh tán theo điều kiện bền cắt:

$$d_o = \sqrt{\frac{4Q}{\pi[\tau]_c}} = \sqrt{\frac{4 \times 3200}{\pi \cdot 140}} = 5,4 \text{ mm}$$

Đường kính lỗ đặt đinh tán theo điều kiện bền dập:

$$d_o = \frac{Q}{8[\sigma]_d} = \frac{3200}{6 \times 280} = 1,9 \text{ mm}$$

Lấy đường kính $d = 5 \text{ mm}$ theo tiêu chuẩn; đường kính lỗ đặt đinh $d_o = 5,5 \text{ mm}$.

Ví dụ 2:

Xác định đường kính và số lượng đinh tán của mối ghép 2 tấm dẽm (hình 16-14) và kiểm tra điều kiện bền kéo của tấm với tải trọng $P = 32000 \text{ daN}$. Tấm ghép vật liệu CT3; đinh tán CT2; lỗ khoan.

Giải:

- Đường kính đinh tán thường chọn $d = 2\delta$ (δ - chiều dày tấm ghép)

$$d = 2 \times 12 = 24 \text{ mm}$$

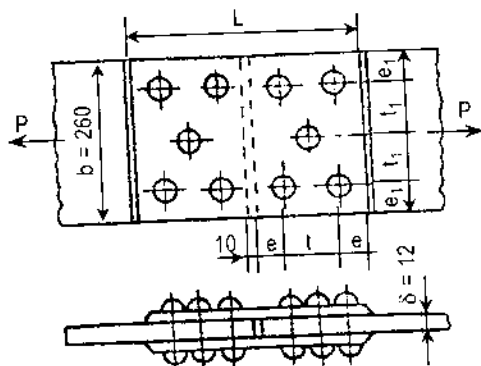
Theo tiêu chuẩn lấy $d = 22 \text{ mm}$ và đường kính lỗ 23 mm.

- Số đinh tán xác định theo điều kiện bền dập của đinh từ thép CT2, $[\sigma]_d = 2800 \text{ daN/cm}^2$.

$$\begin{aligned} n &= \frac{P}{d_o \delta [\sigma]_d} \\ &= \frac{32.000}{2,3 \times 1,2 \times 2800} \\ &= 4,15 \end{aligned}$$

lấy $n = 5$.

- Kiểm tra điều kiện cắt đinh (mỗi đinh có 2 mặt cắt)



Hình 16-14

$$\tau = \frac{P}{2n \cdot \frac{\pi d_n^2}{4}} = \frac{32000}{\frac{2 \times 5 \times \pi \times 2,3^2}{4}} = 770 \text{ daN/cm}^2$$

$$[\tau]_c = 1000 \div 1400 \text{ daN/cm}^2$$

bảo đảm điều kiện bền cắt.

- Theo chiều rộng của tấm ghép có thể bố trí các đinh trong ba dãy như hình vẽ với

$$e_1 = 1,6d \approx 40 \text{ mm}$$

$$t_1 = 90 \text{ mm}$$

$$e = 1,5d = 35 \text{ mm}$$

$$t = 3d = 70 \text{ mm}$$

Khe hở giữa 2 tấm ghép lấy 10 mm, chiều dài của tấm đệm:

$$l = 10 + 4 \times 35 + 2 \times 70 = 290 \text{ mm}$$

- Ứng suất trong tấm ghép tại mỗi ghép:

$$\sigma_K = \frac{P}{F} = \frac{P}{b\delta - 2d_0\delta} = \frac{3200}{26 \times 1,2 - 2 \times 2,3 \times 1,2} = 1245 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_K < [\sigma]_K = 1600 \text{ daN/cm}^2$$

5. Mối ghép hàn (ở đây chỉ xét các loại dùng hàn hồ quang)

Dùng để ghép các chi tiết bằng sắt nóng chảy cục bộ và nhờ lực liên kết các phân tử để ghép lại với nhau tạo thành mối ghép.

Theo vị trí của tấm thép người ta chia ra:

- Hàn giáp mối (hình 16-15).

- Hàn chồng mối (hình 16-16).

- Hàn góc (hình 16-17).

Theo công dụng:

- Mối hàn chắc.

- Mối hàn kín.

- Mối hàn chắc kín.

Mối ghép hàn thường hay dùng để ghép các chi tiết máy bằng thép ít cacbon.

So với mối ghép đinh tán thì mối ghép hàn có những ưu điểm sau:

- Tiết kiệm được kim loại (do không phải làm lỗ nên không cần tăng chiều dày tấm ghép).

- Công nghệ đơn giản, không ồn.

Nhược điểm:

- Không hàn được hoặc rất khó hàn đối với vật liệu thép nhiều cacbon và kim loại màu.

- Chất lượng mối hàn phụ thuộc nhiều vào trình độ của công nhân và khó kiểm tra nó bằng mắt thường.

Nhưng do kỹ thuật hàn phát triển có thể dùng hàn tự động và có thể kiểm tra chất lượng của mối hàn bằng tia X cho nên mối hàn ngày càng được dùng nhiều và thay thế cho một số lớn mối ghép trước đây dùng bằng đinh tán.

Liên kết hàn không gây ra sự giảm yếu các cấu kiện. So với những mối ghép khác, mối ghép hàn cần một khối lượng lao động ít hơn, vì thế, về mặt này nó kinh tế hơn.

Biến dạng xảy ra trong các mối hàn khá phức tạp, nhưng thí nghiệm đã chứng tỏ rằng sự phá hỏng mối hàn dọc chủ yếu xảy ra do bị cắt theo mặt cắt dọc yếu nhất. Mặt cắt này làm với mép tấm một góc 45° . Khi đó mặt cắt ngang tính toán của mối hàn được thừa nhận dưới dạng một hình tam giác.

Nếu ký hiệu chiều cao mối hàn là h , thì diện tích bị cắt của hai mối hàn là:

$$F_c = 2.l.h.\cos 45^\circ = 1,4.l.h$$

Quy luật biến thiên của ứng suất tiếp trên diện tích bị cắt của mối hàn dọc được xem là phân bố đều. Khi đó điều kiện bền có dạng:

$$\frac{N}{F_c} = \frac{N}{1,4.l.h} \leq R_c \quad (16-16)$$

trong đó: R_c - sức bền tính toán của vật liệu mối hàn khi cắt;

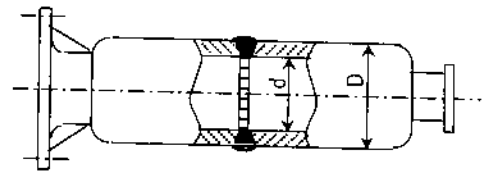
l - chiều dài tính toán của một mối hàn (thường được lấy nhỏ hơn

chiều dài thực của mối hàn là 10 mm do chất lượng hàn không tốt ở các đầu mối hàn).

Như một nguyên tắc, vật liệu mối hàn không có thêm chảy rõ ràng. Vì thế khác với mối ghép đinh tán, ứng suất tiếp ở trạng thái giới hạn trong mối hàn hoàn toàn không được san bằng. Chính vì lý do đó người ta hạn chế chiều dài mối hàn là $4h \leq l \leq 60h$.

Ví dụ 1:

Một bình hơi áp suất cao làm bằng thép có $[\sigma]_K = 190 \text{ N/mm}^2$ đường kính ngoài của bình $D = 200 \text{ mm}$, đường kính trong $d = 170 \text{ mm}$. Người ta liên kết hai phần bình lại bằng mối hàn đối đầu. Hãy kiểm tra bền cho mối hàn?



Hình 16-15

Khi dùng phương pháp hàn bán tự động dưới lớp thuốc hàn.

Áp suất làm việc $p = 30 \text{ N/mm}^2$.

Giải:

Lực tác dụng lên mối hàn là áp lực tác dụng theo hướng đáy bình (đối với mối hàn lực tác dụng vuông góc).

$$P = p \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 30 \times \frac{3,14 \times 170^2}{4} = 682.040 \text{ N}$$

Ứng suất tại mối hàn:

$$\sigma_K = \frac{P}{\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}} = \frac{682.040}{\frac{3,14 \times (200^2 - 170^2)}{4}} = 78 \text{ N/mm}^2$$

Ứng suất cho phép của mối hàn trong trường hợp này:

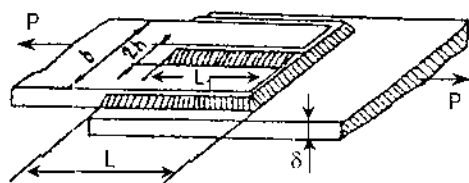
$$[\sigma]'_K = [\sigma]_K = 190 \text{ N/mm}^2$$

Như vậy mối hàn bảo đảm bền.

Ví dụ 2:

Xác định lực P có thể đặt vào các tấm ghép của mối ghép hàn như hình vẽ (16-16) từ điều kiện bền.

Biết: vật liệu các tấm ghép - CT3;
chiều cao mối hàn $h = 8 \text{ mm}$; chiều
dày tấm $\delta = 10 \text{ mm}$; $l = 5\delta$; $\frac{l}{b} = 0,4$;
 $l_1 = 45 \text{ mm}$. Hàn bằng tay que hàn Э34.



Hình 16-16

Giải:

Với tấm ghép bằng CT3 có $[\sigma]_K = 1640 \text{ kG/cm}^2$. Hàn bằng tay que hàn Э34 có $[\tau] = 0,5 \cdot [\sigma]_K = 820 \text{ kG/cm}^2$.

Khả năng chịu lực của tấm ghép:

$$p \leq b \cdot \delta \cdot [\sigma]_K = \frac{l}{0,4} \times 1 \times 1640 = 36900 \text{ kG}$$

Khả năng chịu lực của mối hàn được xác định theo điều kiện bền cắt:

$$p \leq F[\tau']$$

trong đó F - diện tích tiết diện bị phá hỏng theo cắt của mối hàn.

$$F = 2 \times 0,7 \cdot h \cdot l + 0,7 \cdot h \cdot b + 2h \cdot l_1$$

$$= h \cdot (1,4 \cdot l + 0,7 \cdot b + 2l_1)$$

$$l = 50 \text{ mm}$$

$$b = \frac{l}{0,4} = \frac{50}{0,4} = 125 \text{ mm}$$

$$F = 0,8 \times (1,4 \times 5 + 0,7 \times 12,5 + 2 \times 4,5) = 19,8 \text{ cm}^2$$

$$P \leq 19,8 \times 820 = 16250 \text{ kG}$$

Lực P có thể đặt vào các tấm ghép là $P = 16250 \text{ kG}$.

Ví dụ 3:

Xác định lực có thể đặt vào đầu dầm công-xôn của mối ghép hàn góc (hình 16-17a) với vật liệu dầm có ứng suất kéo cho phép $[\sigma]_K = 140 \text{ N/mm}^2$. Hàn bằng tay que hàn Э42.

Giải:

Đối với mối hàn góc (hình 16-17a) được tính toán theo điều kiện bền cắt.

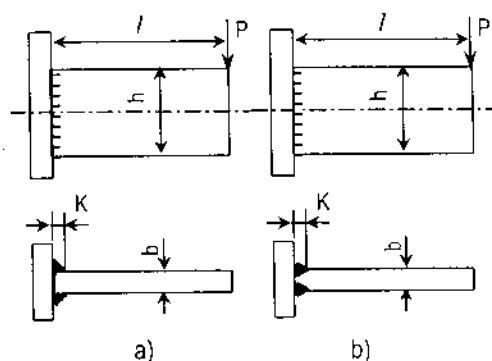
Ứng suất cho phép của mối hàn:

$$[\tau] = 0,6[\sigma]_K = 0,6 \times 140 = 84 \text{ N/mm}^2$$

Tại mối hàn chịu hai thành phần lực (khi chuyển P về mối hàn):

Lực tác dụng dọc theo mối hàn $Q = P$

và ngẫu lực uốn $M = P.l$



Hình 16-17

Tại một điểm bất kỳ trên bề mặt phá hỏng của mối hàn (mặt phá hỏng theo đường phân giác của tiết diện mối hàn) nói chung có hai thành phần ứng suất: τ_Q do lực Q và σ_M do mômen M gây ra có phương vuông góc nhau.

Điểm có ứng suất lớn nhất là những điểm tại $\pm \frac{h}{2}$. Do đó ta có:

$$\tau' = \sqrt{\sigma_M^2 + \tau_Q^2} = \sqrt{\left(\frac{P.l}{\tilde{W}}\right)^2 + \left(\frac{P}{\tilde{F}}\right)^2} \leq [\tau']$$

trong đó: $\tilde{W} = 2 \times 0,7 \frac{kh^2}{6} = 1,4 \times \frac{6 \times 60^2}{6} = 5040 \text{ mm}^2$

$$\tilde{F} = 2 \times 0,7.kh = 1,4 \times 6 \times 60 = 504 \text{ mm}^2$$

Thay vào ta có:

$$\sqrt{\left(\frac{P.600}{5040}\right)^2 + \left(\frac{P}{504}\right)^2} \leq [\tau'] = 84 \text{ N/mm}^2$$

Từ đây ta xác định được tải trọng P cho phép lớn nhất: $[P] = 695 \text{ N}$.

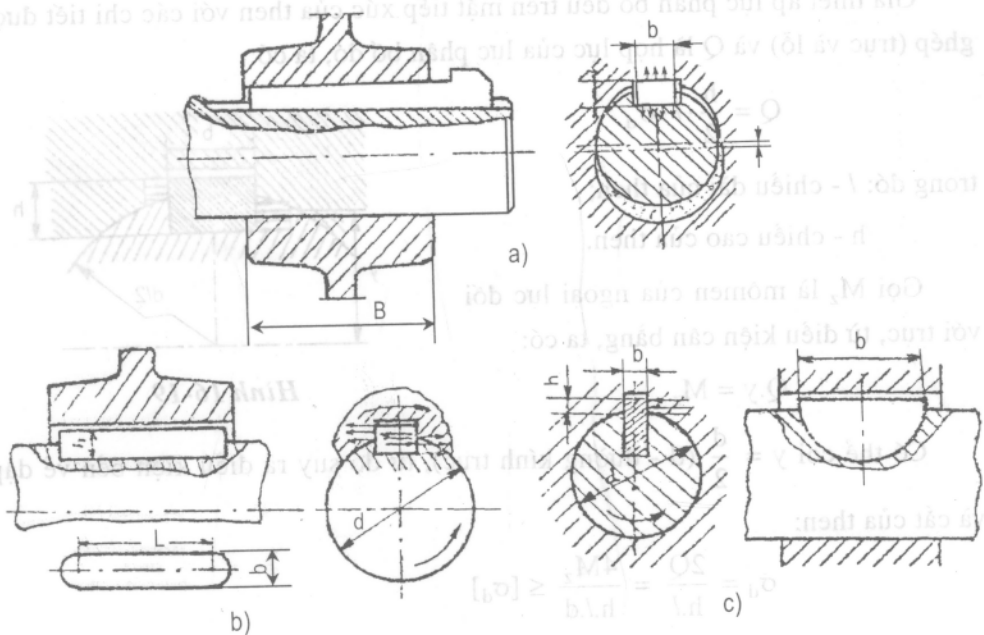
Khi mối hàn được thực hiện như trên hình 16-17b, thì khi đó điều kiện bền phải được tính theo ứng suất pháp:

$$\sigma_K = \frac{M}{W} = \frac{P.l}{W} \leq [\sigma]_K; \quad W = \frac{bh^2}{6}$$

III. MỐI GHÉP THÁO ĐƯỢC VÀ CÁCH TÍNH TOÁN

1. Ghép bằng then

Then là chi tiết máy lắp giữa trục và chi tiết lắp trên trục, để cho các chi tiết máy đó không xoay tương đối được với trục (hình 16-18).



Hình 16-18

Theo hình dạng của then, người ta chia then làm 3 loại:

- Then vát (hình 16-18a) có hai mặt đáy không song song với nhau (có độ dốc 1 : 10). Bề mặt tiếp xúc khi chịu lực giữa then và rãnh trên trục và lỗ chi tiết lắp ghép cũng là hai mặt đáy này.
- Then bằng (hình 16-18b) có dạng hình lăng trụ hai mặt đối diện song song với nhau. Bề mặt tiếp xúc giữa then và rãnh trên trục và lỗ chi tiết lắp ghép là hai mặt bên.
- Then bán nguyệt (hình 16-18c) một mặt đáy có dạng đường tròn. Bề mặt tiếp xúc cũng là hai mặt bên như then bằng.

Theo lắp ghép và cố định thì mối ghép then được phân làm 2 loại:

Mối ghép lỏng: Then không làm được nhiệm vụ hạn chế sự di động các chi tiết dọc theo trục và giữa các chi tiết trong mối ghép không có lực xuyên tâm (hình 16-18b, c). Trong thực tế hay dùng then bằng cho loại mối ghép này vì kết cấu đơn giản, độ đồng tâm tốt, ít dùng mối ghép căng vì độ đồng tâm kém.

Dưới đây, giới thiệu cách tính then lẳng trụ làm ví dụ (hình 16-19).

Giả thiết áp lực phân bố đều trên mặt tiếp xúc của then với các chi tiết được ghép (trục và lỗ) và Q là hợp lực của lực phân bố đó, ta có:

$$Q = \frac{h}{2} \cdot l \cdot \sigma_d$$

trong đó: l - chiều dài của then;

h - chiều cao của then.

Gọi M_z là mômen của ngoại lực đối với trục, từ điều kiện cân bằng, ta có:

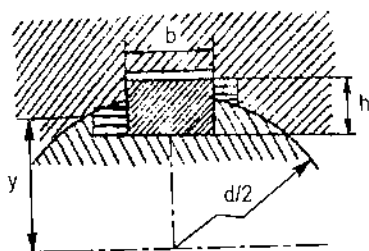
$$Q \cdot y = M_z$$

Có thể coi $y = \frac{d}{2}$ (d - đường kính trục), từ đó suy ra điều kiện bền về dập

và cắt của then:

$$\sigma_d = \frac{2Q}{h \cdot l} = \frac{4M_z}{h \cdot l \cdot d} \leq [\sigma_d]$$

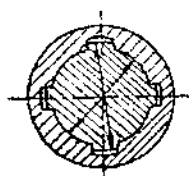
$$\tau_v = \frac{Q}{F_c} = \frac{Q}{b \cdot l} = \frac{2M_z}{b \cdot l \cdot d} \leq [\tau_v]$$



Hình 16-19

2. Ghép bằng trục then hoa

Có thể coi trục then hoa tương tự như một mối ghép then ghép lỏng dùng nhiều then bố trí đều và dọc theo chu vi của nó, nhưng ở đây then làm liền với trục. Với mỗi "then" trên trục thì lỗ chi tiết lắp lên nó cũng có rãnh tương ứng (hình 16-20).



Hình 16-20

Theo hình dạng tiết diện ngang, người ta phân ra:

Then hoa dạng chữ nhật (hình 16-21a), dạng thân khai (hình 16-21b), dạng tam giác (hình 16-21c). Hiện nay hay dùng dạng chữ nhật.

Ghép bằng then hoa thường dùng trong mối ghép yêu cầu đồng tâm cao và truyền lực lớn, nhất là những mối ghép mà chi tiết lắp ghép trên trục phải dịch động dọc theo trục.

Tính toán then hoa cũng tương tự như mối ghép then. Nhưng thường chỉ tính toán theo điều kiện dập với công thức tính toán sau:

$$\sigma_d = \frac{M_z}{\psi \cdot Z \cdot F \cdot r_{tb}} \leq [\sigma]_d \quad (16-17)$$

trong đó:

M_z - mômen xoắn trên trục tại mối ghép;

$\psi = 0,7 \div 0,8$ - hệ số xét đến sự phân bố lực không đều trên các then do sai số công nghệ;

Z - số then;

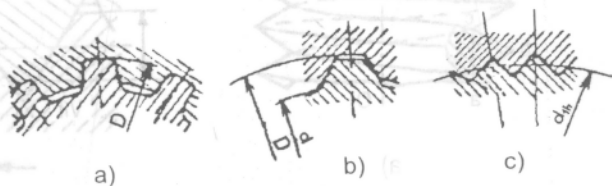
$F = \left[\frac{D-d}{2} - (f+r) \right] \cdot l$ - diện tích tính toán theo dập trên một then (hình 16-22);

l - chiều dài làm việc của mối ghép then bằng chiều rộng moay-ơ của chi tiết máy lắp trên trục;

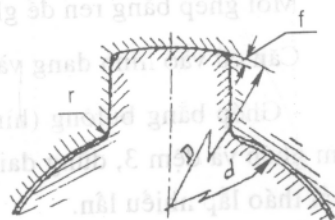
r_{tb} - bán kính trung bình của mối ghép:

$$r_{tb} = \frac{d_{tb}}{2} = \frac{D+d}{4}$$

$[\sigma]_d$ - ứng suất dập cho phép của mối ghép then hoa có giá trị được chọn phụ thuộc vào loại mối ghép di động hay cố định: điều kiện sử dụng nặng (có va đập), trung bình, nhẹ và bề mặt làm việc của mối ghép có được nhiệt luyện hay không.



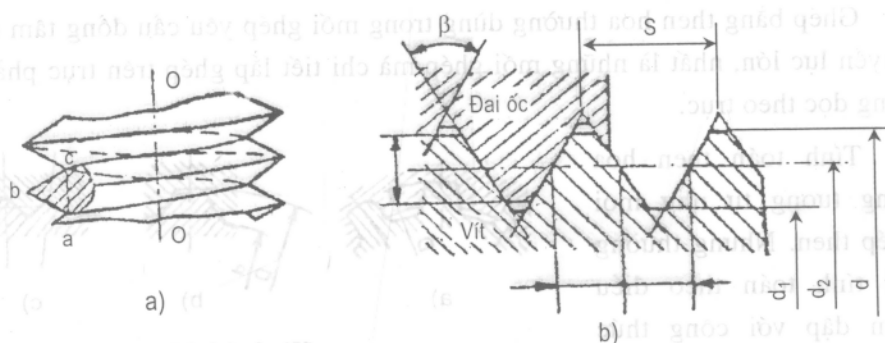
Hình 16-21



Hình 16-22

3. Ghép bằng ren

Ren được tạo thành theo đường xoắn ốc trên mặt trụ (hình 16-23), tiết diện của ren (cắt dọc theo trục) trong mối ghép thường dùng là dạng tam giác đều (hệ mét) hoặc tam giác cân có góc đỉnh $= 55^\circ$ (hệ Anh).



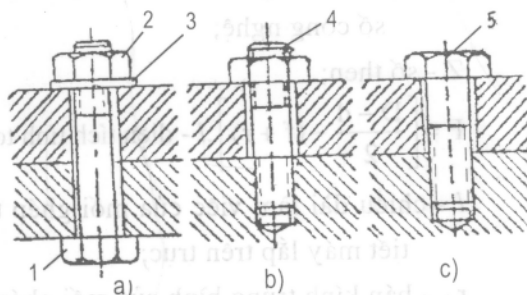
Hình 16-23

Mối ghép bằng ren để ghép các chi tiết hình trụ có ren.

Căn cứ vào hình dạng và cách lắp ghép, chi tiết máy có ren được phân ra:

- Ghép bằng bulông (hình 16-24a) gồm có bulông 1 xuyên qua các lỗ của tấm ghép và đệm 3, dùng đai ốc 2 để xiết chặt lại. Thường dùng nơi chịu lực và phải tháo lắp nhiều lần.

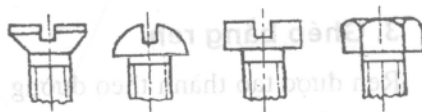
- Ghép bằng vít cấy (hình 16-24b) gồm vít cấy 4 dạng hình trụ hai đầu có ren, một đầu xuyên qua lỗ tròn của một chi tiết máy ghép và vặn chặt vào lỗ có ren của chi tiết máy ghép thứ hai, còn đầu còn lại dùng đai ốc để xiết chặt các chi tiết ghép với nhau. Nó cũng được dùng ở nơi chịu lực và phải tháo



Hình 16-24

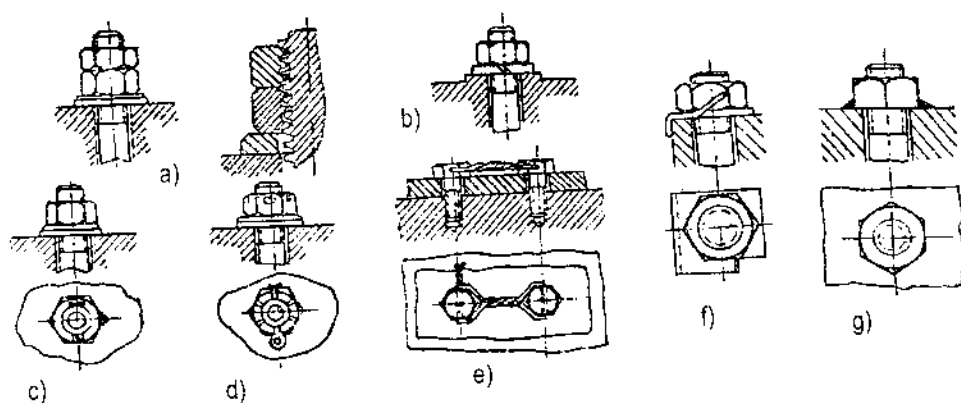
lắp nhiều lần như bulông nhưng ở nơi đó không có thể dùng bulông được (ví dụ một chi tiết quá dày không có thể khoan lỗ suốt được).

- Ghép bằng vít: (hình 16-24c) gồm vít 5, đầu có ren xuyên qua lỗ tròn của một chi tiết ghép và vặn chặt vào lỗ có ren của chi tiết còn lại. Cấu tạo của vít cũng tương tự như bulông nhưng mũ của nó có nhiều dạng khác nhau (hình 16-25). Nó thường dùng trong mối ghép ít tháo lắp, chịu lực không lớn.



Hình 16-25

Trong các mối ghép bằng ren hiện tượng tự tháo lỏng khi làm việc do chấn động, rung động do tính chất tự hãm của ren ít tác dụng, người ta phải dùng các biện pháp phòng lỏng như: vặn thêm đai ốc (hình 16-26a), đệm vành (hình 16-26b), dùng chốt chặn (hình 16-26c, d), chằng dây thép (hình 16-26e), đệm gấp (hình 16-26f), hãm (hình 16-26g) v.v...



Hình 16-26

Ghép bằng ren được dùng rất phổ biến trong công nghiệp cũng như trong dân dụng vì:

- Nó là mối ghép tháo lắp được nhiều lần mà không làm hỏng một bộ phận nào của mối ghép và dễ tháo lắp.

- Là chi tiết máy đã được tiêu chuẩn hoá nên có thể sản xuất ở nhà máy chuyên dùng và có thể mua sẵn, giảm được khối lượng không cần thiết cho người thiết kế cũng như chế tạo.

- Dùng được vật liệu thép cacbon thông thường rẻ tiền.

Tuy vậy, do cắt ren nên nó cũng làm giảm khả năng chịu lực của chi tiết.

Việc tính toán mối ghép bằng ren tùy thuộc vào hình dạng kết cấu chịu lực xiết ban đầu hay không, chịu lực tác dụng dọc theo đường tâm chi tiết ren hay tác dụng ngang mà có cách tính toán khác nhau, ví dụ:

- + Trên hình 16-27 bulông chỉ chịu ngoại lực P tác dụng mà không cần phải lực xiết chặt ban đầu (mối ghép lỏng).

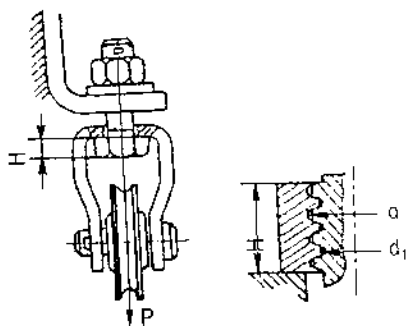
Khi đó trên mặt cắt ngang của thân bulông chỉ có ứng suất pháp do kéo và do đó điều kiện bền sẽ là:

$$\sigma = \frac{P}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \leq [\sigma]$$

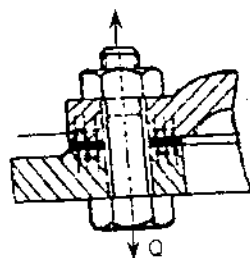
+ Trong trường hợp các mối ghép bắt buộc ban đầu phải xiết đai ốc, để ép chặt các tấm ghép lại với nhau (bulông chịu lực xiết ban đầu) (hình 16-28).

Khi chưa xét tới ngoại lực tác dụng thì, do lực xiết ban đầu Q ngoài thành phần ứng suất pháp:

$$\sigma = \frac{Q}{\frac{\pi d_1^2}{4}}$$



Hình 16-27



Hình 16-28

trên mặt cắt ngang của bulông còn chịu một ngẫu lực xoắn có mômen:

$$M_t = \frac{1}{2} Q d_2 \operatorname{tg}(\beta + \rho')$$

và do đó còn có thành phần τ do M_t tạo ra:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{-\frac{1}{2} Q d_2 \operatorname{tg}(\beta + \rho)}{0,2 d_1^3}$$

trong đó: d_2 - đường kính trung bình của ren, $d_2 = \frac{d + d_1}{2}$;

d - đường kính ngoài của ren (đường kính đỉnh ren);

β - góc nâng của ren;

ρ - góc ma sát.

Điều kiện bền trong trường hợp này phải dựa vào các thuyết bền.

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sigma_{t3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Qua tính toán, với ren theo tiêu chuẩn hệ mét vật liệu thép, có kết quả gần đúng là:

$$\sigma_{t3} \approx 1,3\sigma$$

và điều kiện bền của bulông là:

$$\sigma_{t3} = \frac{1,3.Q}{\frac{\pi d_1^2}{4}} \leq [\sigma] \quad (a)$$

Khi có ngoại lực tác dụng R vuông góc với đường tâm bulông (hình 16-29a), giữa lỗ và bulông có khe hở. Trong trường hợp này, để các tấm ghép không trượt tương đối với nhau thì lực ma sát giữa các bề mặt tiếp xúc (do lực Q gây ra) phải thoả mãn công thức:

$$Q.f \geq R$$

hay là:

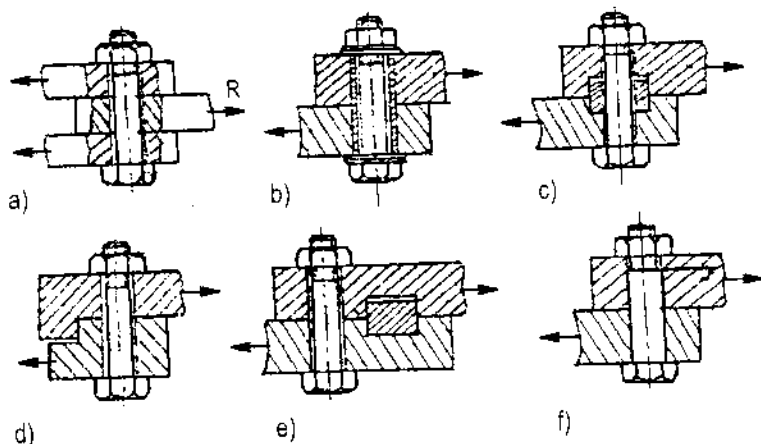
$$Q = \frac{k.R}{2f} \quad (b)$$

trong đó: f - hệ số ma sát ở các tấm ghép;

$k = 1,3 \div 2$ hệ số an toàn;

2 - số bề mặt tiếp xúc giữa các tấm ghép.

Với lực tác dụng lên các tấm ghép vẫn vuông góc với đường tâm bulông, nhưng kết cấu có thay đổi lại như các hình 16-29b, c, d, e, f thì khi đó lực xiết ban đầu Q không cần thiết phải lớn để tạo lực ma sát. Việc tính toán tương tự như mối ghép đinh tán hoặc then (theo cắt và đập) với lực tác dụng R .



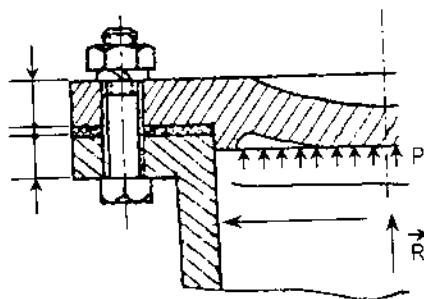
Hình 16-29

Nếu ngoại lực P tác dụng dọc theo đường tâm bulông (hình 16-30) $P = \frac{R}{Z}$

ngoại lực tác dụng trên một bulông.

Z - số bulông của mối ghép.

Trong trường hợp này trước hết phải xác định tải trọng tính Q_t tác dụng trên một bulông rồi ứng dụng dạng công thức (a) thay Q bằng Q_t , để tính toán cho trường hợp tải trọng tĩnh.



Hình 16-30

Gọi Q là lực xiết ban đầu trên một bulông.

P là ngoại lực tác dụng trên một bulông.

Khi đó tải trọng tĩnh của một bulông sẽ là:

$$Q_t = Q + K_b P$$

trong đó: K_b là hệ số ngoại lực $K_b \leq 0,2 \div 0,3$.

IV. CÁC CHI TIẾT MÁY ĐỖ NỔ VÀ CÁCH TÍNH TOÁN

1. Trục

Là chi tiết máy dùng để đỡ các chi tiết máy quay và để truyền lực.

Theo các thành phần ngẫu lực (trong mặt cắt ngang) người ta phân trục ra:

Trục tâm: chỉ có ngẫu lực uốn không có ngẫu lực xoắn. Trong trục tâm người ta lại chia ra: trục tâm quay (quay cùng chi tiết máy lắp trên nó), trục tâm cố định (chỉ đỡ các chi tiết máy quay mà không quay theo các chi tiết máy đó).

Trục truyền: Có cả ngẫu lực uốn và xoắn. Nói cách khác, dùng để đỡ các chi tiết máy quay và truyền mômen xoắn.

Theo đường tâm trục:

Trục thẳng

Trục khuỷu

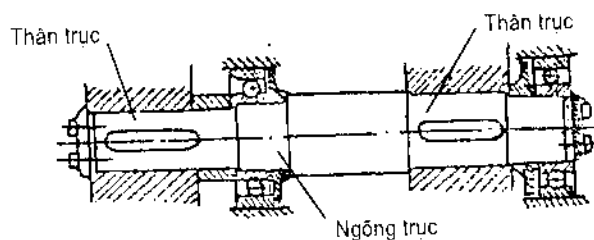
Trục mềm (đường tâm trục không cố định)

Theo hình dạng kết cấu:

Trục trơn (suốt chiều dài chỉ có một đường kính)

Trục bậc (có nhiều đoạn đường kính khác nhau).

Trong thực tế hay gặp là trục bậc (hình 16-31).



Hình 16-31

Trên một trục bậc có tên gọi các phần như sau:

Phần trục để lắp các chi tiết máy quay như bánh răng, bánh đai, đĩa xích v.v..., gọi là thân trục.

Phần trục để lắp ổ trục gọi là ngõng trục.

Để cố định các chi tiết máy theo chiều trục có: gờ, vai trục; cố định chi tiết máy quay theo trục có: rãnh then để lắp then, giữa thân trục và ngõng trục còn có kích thước chuyển tiếp, góc lượn v.v...

Đường kính phần thân trục và ngõng trục được tiêu chuẩn hóa.

Trục là một chi tiết máy rất quan trọng trong các cơ cấu truyền động cơ khí. Vì vậy, việc tính toán trục thường qua ba giai đoạn sau:

a. Tính sơ bộ

Dùng khi kích thước các đoạn trục chưa biết, mà trong đó một số kích thước của một số chi tiết như ổ trục lại phụ thuộc vào đường kính trục.

Tính sơ bộ là xác định sơ bộ đường kính trục theo ngẫu lực xoắn để xác định các kích thước chưa biết trên.

Thường tính toán theo công thức đã biết trong chương xoắn:

$$d = \sqrt{\frac{M_z}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt{\frac{97400 \cdot N}{0,2 \cdot [\tau] \cdot n}} = C \cdot \sqrt{\frac{N}{n}} \quad (\text{cm}) \quad (\text{a})$$

trong đó:
$$C = \sqrt[3]{\frac{97400}{0,2.[\tau]}}$$

Thường lấy: $C = 15 \div 17$ đối với các trục hộp giảm tốc và tương tự

$C = 11 \div 13$ đối với các loại trục khác.

b. Tính gần đúng

Khi kích thước các đoạn trục đã biết (biết kích thước các đoạn đặt lực) tức là biết được các biểu đồ nội lực. Ta đi tính toán đường kính trục tại mặt cắt nguy hiểm theo điều kiện bền (dựa vào thuyết bền):

$$\sigma_t = \frac{M_t}{W_u} \leq [\sigma] \quad (b)$$

trong đó: M_t - mômen tính toán theo thuyết bền.

$$M_{t3} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$M_{t4} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75.M_z^2}$$

W_u đối với trục đặc: $W_u = 0,1.d^3$

trục rỗng: $W_u = 0,1.D^3.(1 - \eta^4)$

Công thức thiết kế:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_t}{0,1.[\sigma]_u}} \quad (c)$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_t}{0,1.(1 - \eta^4).[\sigma]}} \quad (d)$$

trong đó: $\eta = \frac{d_t}{D}$; d_t - đường kính trong của trục.

$[\sigma]$ - ứng suất cho phép lấy gần giới hạn chảy; $[\sigma] \approx 0,8.\sigma_{ch}$.

c. Tính chính xác (theo hệ số an toàn)

Vì trục là chi tiết máy quan trọng, lại làm việc ở chế độ có ứng suất thay đổi mà trong bước tính gần đúng, các nhân tố ảnh hưởng do môi chưa được xét tới vì chưa có kích thước và kết cấu cụ thể. Vì vậy sau khi tính gần đúng ta đã xác định được kích thước và kết cấu phải kiểm tra lại các nhân tố ảnh hưởng tới giới hạn mỏi qua hệ số an toàn theo công thức chương 13.

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_\sigma}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_\tau}\right)^2}} = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n] = 1,5 \div 2,5$$

trong đó: $n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \cdot \sigma_a + \Psi_\sigma \cdot \sigma_m}$ - hệ số an toàn riêng theo ứng suất pháp.

$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \cdot \tau_a + \Psi_\tau \cdot \tau_m}$ - hệ số an toàn riêng theo ứng suất tiếp.

$\sigma_a, \tau_a, \sigma_m, \tau_m$ - theo thứ tự là ứng suất biên độ và ứng suất trung bình theo uốn và xoắn.

Khi ứng suất thay đổi theo chu trình đối xứng.

$$\sigma_m = 0 \quad \sigma_a = \frac{M_u}{0,1 \cdot d^3}$$

$$\tau_m = 0 \quad \tau_a = \frac{M_z}{0,2 \cdot d^3}$$

Khi chu trình mạch động:

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{M_u}{2 \cdot 0,1 \cdot d^3}$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_z}{2 \cdot 0,2 \cdot d^3}$$

Ψ_σ, Ψ_τ - hệ số xét tới ảnh hưởng của từng loại vật liệu khi ứng suất thay đổi chu kỳ.

Thường lấy $\Psi_\sigma = 0,05$; $\Psi_\tau = 0$ thép ít cacbon

$\Psi_\sigma = 0,1$; $\Psi_\tau = 0,05$ thép cacbon trung bình

$\Psi_\sigma = 0,15$; $\Psi_\tau = 0,1$ thép hợp kim.

σ_{-1} và τ_{-1} ứng suất giới hạn mỗi đối xứng.

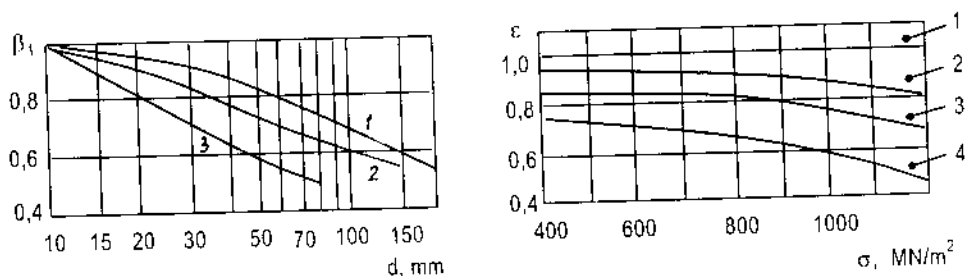
$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \div 0,5) \cdot \sigma_B$$

$$\tau_{-1} \approx (0,2 \div 0,3) \cdot \sigma_B$$

β - hệ số xét tới kích thước tuyệt đối (hình 16-32a)

ε - hệ số xét tới ảnh hưởng của bề mặt (hình 16-32b).

K_σ và K_τ - hệ số xét sự tập trung ứng suất khi uốn và xoắn.



Hình 16-32

Hệ số β

1- Thép cacbon khi không có ứng suất tập trung; 2- Thép hợp kim khi không có ứng suất tập trung và thép cacbon có ứng suất tập trung vừa ($K_\sigma \leq 2$); 3- Thép hợp kim có ứng suất tập trung.

Hệ số ε

1- Mài; 2- Tiện; 3- Gia công thô;
4- Bề mặt không gia công.

Ngoài ra trong một số trường hợp người ta còn phải tính toán độ cứng và dao động của trục.

Tính độ cứng tức là tính theo độ võng V và góc xoay φ không được vượt quá giá trị cho phép:

$$V \leq [y]$$

$$\varphi \leq [\theta]$$

Ví dụ: trục lắp bánh nhỏ của truyền động bánh răng

$$[V] \approx 0,01 \text{ m (tính bằng mm)}$$

trong đó: m - môđun ăn khớp. Trục trong các máy công cụ nói chung

$$[V] = (0,0002 \div 0,0003) \cdot L$$

L - khoảng cách giữa hai ổ.

Góc xoay cho phép tại chỗ lắp ổ trượt $[\varphi] = 0,001 \text{ rad}$.

Góc xoay cho phép chỗ lắp ổ bi đỡ $[\varphi] = 0,01 \text{ rad}$.

2. Ổ trục

Là chi tiết máy dùng để đỡ các trục quay.

Ổ trục được phân làm hai loại (theo tính chất chuyển động tương đối giữa trục và ổ):

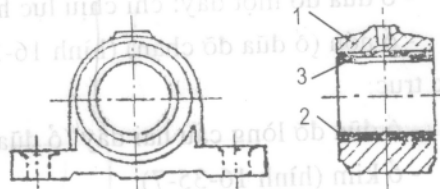
- ổ trượt làm việc theo ma sát trượt;
- ổ lăn làm việc theo ma sát lăn.

Căn cứ theo khả năng chịu lực, trong mỗi loại lại chia ra:

- ổ đỡ chịu lực hướng tâm;
- ổ chặn chịu lực dọc trục;
- ổ đỡ chặn vừa chịu lực hướng tâm, vừa chịu lực dọc trục.

a. Ổ trượt

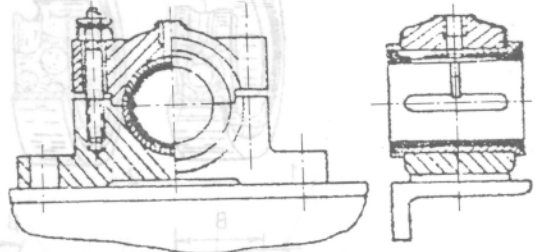
Cấu tạo của một ổ trượt gồm ba bộ phận chính (hình 16-33). Thân ổ (1), lót ổ (2) và rãnh bôi trơn (3).



Hình 16-33

Thân ổ và lót ổ có thể là khối liền gọi là ổ nguyên. Thân ổ có thể lắp lên thành máy bằng bulông hoặc chính nó nằm ngay trong thành máy.

Loại ổ nguyên hạn chế về điều kiện lắp ghép và không điều chỉnh được khe hở giữa trục và ổ.



Hình 16-34

Để mở rộng phạm vi lắp ghép và điều chỉnh khe hở thường hay dùng loại ổ tách (hình 16-34) là loại ổ mà thân và lót ổ lại phân làm nhiều phần (thường hai phần) và dùng bulông hoặc vít cấy để ghép lại.

Vì làm việc ma sát trượt, để giảm tổn hao công suất, lót ổ thường dùng kim loại màu như đồng hoặc các hợp kim màu khác như hợp kim của chì, thiếc v.v. Ngày nay người ta còn dùng chất dẻo làm lót và dùng ở những nơi mà không dùng được kim loại.

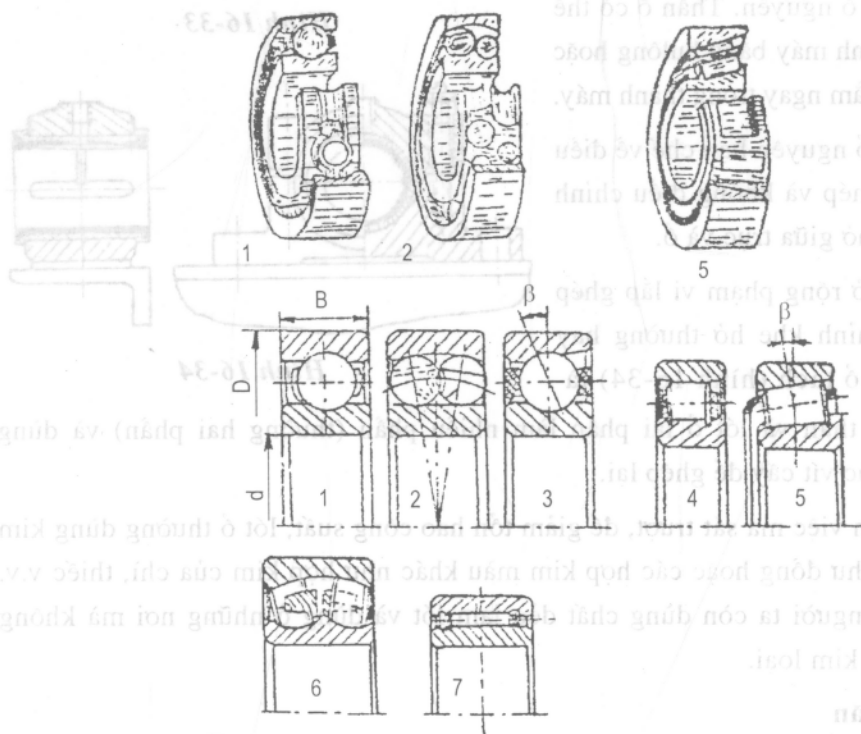
b. Ổ lăn

Cấu tạo ổ lăn nói chung gồm có 4 bộ phận chính: Vòng trong lắp trên trục;

vòng ngoài lắp trên gối trục (giá đỡ ổ) giữa mặt trong của vòng ngoài và mặt ngoài của vòng trong có rãnh để đặt các con lăn lăn trong rãnh đó. Để phân đều các con lăn theo vòng tròn có vòng cách.

Căn cứ vào hình dạng của con lăn mà ta có tên gọi ổ bi (con lăn cầu), ổ đĩa (con lăn trụ), ổ nón (con lăn nón), ổ kim (con lăn có đường kính rất nhỏ so với chiều dài) v.v. Kết hợp với cách phân loại theo khả năng chịu lực ta có tên gọi cụ thể:

- ổ bi đỡ một dây (hình 16-35-1) chủ yếu chịu lực hướng tâm;
- ổ bi đỡ lồng cầu hai dây (hình 16-35-2) còn gọi ổ bi tự lựa; nó làm việc bình thường khi φ tới $2 \div 3^\circ$;
- ổ bi đỡ chặn (hình 16-35-3) vừa chịu lực hướng tâm vừa chịu lực dọc trục;
- ổ đĩa đỡ một dây: chỉ chịu lực hướng tâm (hình 16-35-4);
- ổ nón (ổ đĩa đỡ chặn) (hình 16-35-5) vừa chịu lực hướng tâm vừa chịu lực dọc trục;
- ổ đĩa đỡ lồng cầu hai dây (ổ đĩa tự lựa) (hình 16-35-6);
- ổ kim (hình 16-35-7).



Hình 16-35

3. Tính toán và chọn ổ

Đối với ổ trượt làm việc theo ma sát trượt, nên chủ yếu tính toán theo điều kiện mòn. Dưới tác dụng của lực phải đảm bảo cho giữa hai bề mặt tiếp xúc của lót ổ và ổ ngỗng trục tồn tại chất bôi trơn để kim loại không trực tiếp tiếp xúc với nhau.

3.1. Tính ổ trượt và truyền động ma sát

Ổ trượt và bánh ma sát thường bị hỏng vì mòn. Để đảm bảo độ bền mòn của các mặt tiếp xúc, áp suất p giữa chúng không được vượt quá một áp suất cho phép p nào đó được xác định bằng thực nghiệm. Như vậy, về hình thức, cách tính ổ trượt (hoặc chốt và lỗ trong các khớp quay) và truyền động ma sát cũng tương tự (tương tự toán học) như cách tính các mặt trụ tròn bị đập.

a) Giả sử áp suất được phân bố đều trên mặt tiếp xúc, ta có điều kiện bền mòn của ổ:

$$p = \frac{R}{d \cdot l} \leq [p], \text{ N/mm}^2 \quad (16-18)$$

trong đó: R - tải trọng hướng tâm (N hoặc daN);

d, l - đường kính và chiều dài của ổ (mm).

Đối với hợp kim ba-bit và đồng, thông thường $[p] = 15 \div 20 \text{ N/mm}^2$.

b) Đối với các bánh ma sát, vì lực ép được phân bố trên một dải hẹp dọc theo đường tiếp xúc, nên điều kiện bền mòn được qui ước là: tải trọng trên một đơn vị chiều dài đường tiếp xúc (còn gọi là *tải trọng riêng*) không vượt quá giá trị cho phép $[q]$.

$$q = \frac{Q}{b} \leq [q], \text{ N/mm} \quad (16-19)$$

trong đó: b - chiều dài của đường tiếp xúc (mm);

Q - phản lực giữa hai bánh ma sát (N hoặc daN).

Đối với các ổ lăn: Dạng tiếp xúc giữa con lăn và các vòng là tiếp xúc điểm hoặc đường. Đối với một điểm trên đường lăn của mặt trong vòng ngoài (khi vòng ngoài cố định) theo hướng tác dụng của lực, sẽ chịu lực nén lớn nhất thay đổi theo chu kỳ (khi một con lăn lăn qua đó) gây ra ứng suất nén (tiếp xúc) theo chu kỳ. Từ ứng suất trên và ổ lăn làm việc có dầu, trên mặt tiếp xúc rạn nứt và

dẫn dẫn những mảnh nhỏ kim loại bung ra tạo cho bề mặt có những lỗ hõm gọi là tróc rỗ bề mặt do tiếp xúc (ngoài tróc rỗ, ổ lăn còn có dạng hỏng như mòn, vỡ con lăn hoặc các vòng).

Vì vậy tính toán ổ lăn được xuất phát từ điều kiện bền tiếp xúc và có công thức tính toán là:

$$C = Q \cdot (n \cdot h)^{0,3} \leq [C] \quad (16-20)$$

trong đó:

C - hệ số khả năng làm việc của ổ lăn;

$[C]$ - giá trị cho phép của hệ số khả năng làm việc của ổ, nó phụ thuộc vào kích thước, loại và cỡ ổ cho trong các bảng ổ lăn;

n - số vòng quay trong một phút của vòng trong hay ngoài (tùy vòng nào quay theo chi tiết quay);

h - tổng số giờ làm việc (số giờ làm việc của máy hoặc số giờ đến khi trung, đại tu);

Q - tải trọng tính toán được xác định theo công thức;

$$Q = (K_v \cdot R + m \cdot A) \cdot K_t \cdot K_n \quad (16-21)$$

R - lực hướng tâm tác dụng lên ổ được xét tính bằng daN;

A - tổng lực dọc trục tác dụng lên ổ đang xét nếu có, tính bằng daN;

m - hệ số xét tới sự ảnh hưởng khác nhau của lực hướng tâm và lực dọc trục tới độ bền lâu của ổ (phụ thuộc loại ổ);

K_t - hệ số xét tới tính chất tải trọng;

K_n - hệ số xét tới nhiệt độ;

K_v - hệ số xét tới vòng trong hay vòng ngoài quay.

Các hệ số m , K_v , K_t , K_n cho trong các sổ tay kỹ thuật.

Chú thích:

1) Công thức (16-20) dùng khi $n \geq 10$ vg/ph. Nếu $1 < n < 10$ thì tính toán theo $n = 10$.

Nếu $n \leq 1$ vg/ph thì tính toán theo tải trọng tĩnh, nghĩa là tải trọng tác dụng vào ổ không được vượt quá giá trị Q đã cho trong các bảng.

2) Lực dọc trục A chỉ tính cho ổ nào chống lại tác dụng của nó.

Ví dụ lực tác dụng như hình 16-36:

R_1, R_2 - lực hướng tâm tác dụng lên các ổ I và II;

S - lực dọc trục tác dụng vào bánh răng nón;

S_1, S_2 - lực dọc trục do kết cấu ổ (các ổ đỡ chặn) do R_1, R_2 tạo ra;

$$S_1 = (1 \div 1,3) \cdot R_1 \cdot \operatorname{tg} \beta$$

$$S_2 = (1 \div 1,3) \cdot R_2 \cdot \operatorname{tg} \beta$$

β - góc áp lực tùy theo loại ổ đỡ chặn.

$$A = S + S_1 - S_2$$

nếu $A > 0$, chiều của A theo chiều S hoặc S_1 . A sẽ tác dụng lên ổ II. Khi đó công thức 16-21 tính cho ổ II có A còn ổ I không có A (còn $A < 0$ thì ngược lại).

Trong thực tế việc tính toán và chọn ổ lăn được tiến hành như sau:

Từ tính chất của lực tác dụng lên trục chọn loại ổ (đỡ, đỡ - chặn, hoặc chặn).

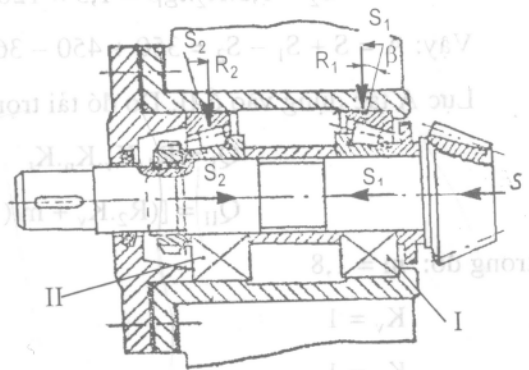
Từ lực tác dụng vào ổ (phản lực liên kết) ta tính toán hệ số C theo công thức (16-20).

Căn cứ vào C tính đường kính trong của ổ (từ đường kính trục đã tính và chọn trong khi tính trục) chọn cỡ ổ sao cho $C_{\text{bảng}} \geq C_{\text{tính}}$.

3.2. Ví dụ

Tính toán và chọn ổ lăn lắp trên trục của hộp giảm tốc (hình 16-36) theo số liệu đã biết như sau:

Lực tác dụng lên các ổ: $R_1 = 1500 \text{ daN}$, $R_2 = 1200 \text{ daN}$, lực chiều trục $S = 350 \text{ daN}$. Đường kính sơ bộ của trục tại chỗ lắp ổ $d = 60 \text{ mm}$, số vòng quay của trục $n = 400 \text{ vg/ph}$, ổ làm việc ở chế độ tải trọng có va đập không lớn, nhiệt độ của nhóm ổ không quá 60°C , thời gian làm việc tính toán 16000 giờ.



Hình 16-36

Giải:

Do có lực chiều trục S tương đối lớn nên ta chọn ổ đỡ - chặn, chọn ổ nón có góc $\beta = 13^\circ$.

Lực S_1 và S_2 do R_1 và R_2 tạo ra:

$$S_1 = 1,3 \cdot R_1 \cdot \operatorname{tg} \beta = 1,3 \times 1500 \times \operatorname{tg} 13^\circ = 450 \text{ daN}$$

$$S_2 = 1,3 \cdot R_2 \cdot \operatorname{tg} \beta = 1,3 \times 1200 \times \operatorname{tg} 13^\circ = 362 \text{ daN}$$

$$\text{Vậy: } A = S + S_1 - S_2 = 350 + 450 - 362 = 462 \text{ daN} > 0$$

Lực A tác dụng vào ổ II. Do đó tải trọng tính toán Q lên các trục là:

$$Q_I = R_1 \cdot K_v \cdot K_n \cdot K_t$$

$$Q_{II} = [(R_2 \cdot K_v + m \cdot (S + S_1 - S_2)) \cdot K_n \cdot K_t]$$

trong đó: $m = 1,8$

$$K_v = 1$$

$$K_n = 1$$

$$K_t = 1,3$$

Ở đây ta chọn 2 ổ cùng loại cho nên chỉ tính và chọn theo Q_{II} vì $Q_I < Q_{II}$.

$$Q_{II} = (1200 \times 1 + 1,8 \times 462) \times 1 \times 1,3 = 2584 \text{ daN}$$

Hệ số khả năng tải tính toán:

$$C = Q \cdot (n \cdot b)^{0,3} = 2584 \times (400 \times 16000)^{0,3} = 284240$$

Theo C tính toán và $d = 60$ tra bảng ổ nón đỡ - chặn chọn được ổ cỡ trung bình rộng 7612 có $[C] = 300000 > C = 284240$.

Các ổ lăn được ký hiệu bằng số với ý nghĩa các số như sau:

Ví dụ: 27308

- Hai số cuối cùng "08" biểu thị đường kính trong của ổ (đường kính lỗ để lắp lên trục).

Từ ký hiệu 04 trở đi, lấy số ký hiệu nhân với 5 là đường kính trong:

Ví dụ: 08 $\rightarrow d = 40 \text{ mm}$.

- Số thứ ba kể từ cuối (số ở hàng trăm) biểu thị cỡ ổ:

1: đặc biệt nhẹ	4: nặng	7 } 8 } không xác định
2: nhẹ	5: nhẹ rộng	
3: trung bình	6: trung bình rộng	9: không tiêu chuẩn

Trong ví dụ trên số 3 là cỡ trung bình.

- Số hạng thứ tư kể từ cuối (số ở vị trí hàng nghìn) (số 7 của ví dụ) biểu thị loại ổ:

0: ổ bi đỡ	5: ổ đĩa đỡ con lăn xoắn
1: ổ bi đỡ lòng cầu	6: ổ bi đỡ - chặn
2: ổ đĩa đỡ	7: ổ nón (thanh lăn đỡ chặn)
3: ổ đĩa đỡ lòng cầu	8: ổ bi chặn
4: ổ kim	9: ổ đĩa chặn (ổ thanh lăn chặn).

Nếu trước số 0 (ổ bi đỡ) không còn số nào khác thì trong ký hiệu không ghi số 0.

Còn từ số hạng thứ năm trở về trước biểu thị ổ lăn có kết cấu đặc biệt.

Như vậy với ví dụ ký hiệu 27308 là:

Ổ nón có góc nén β lớn cỡ trung bình có đường kính trong $d = 40$ mm.

4. Khớp nối trục

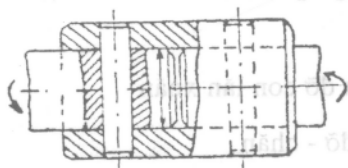
Khớp nối trục là chi tiết dùng để nối các đầu trục với nhau và để nối chuyển động và truyền ngẫu lực xoắn, ví dụ nối đầu trục động cơ điện với đầu trục vào của hộp giảm tốc v.v...

Nó là một chi tiết máy được dùng rất phổ biến trong nhiều loại cơ cấu và máy, cho nên, hiện nay nó được phát triển rất nhiều loại khác nhau, nhưng theo tính chất làm việc có thể phân ra làm ba loại chính như sau:

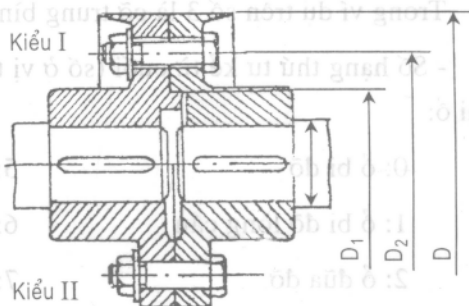
a. Nối trục cứng

Dùng để nối chặt hai đầu trục của hai bộ phận lại với nhau, sau khi nối giữa hai đầu trục đó không có một di chuyển tương đối nào (có thể coi hai trục được nối với nhau như là một khâu).

Ví dụ hình 16-37 nối trục ống, nối trục hai nửa đĩa (hình 16-38) là các nối trục cứng vì không có di chuyển tương đối nên khi lắp ghép đòi hỏi phải đảm bảo độ đồng tâm giữa hai trục rất cao mới giảm được sự uốn trục do lắp ghép.



Hình 16-37



Hình 16-38

b. Nối trục di động hay gọi là nối trục bù

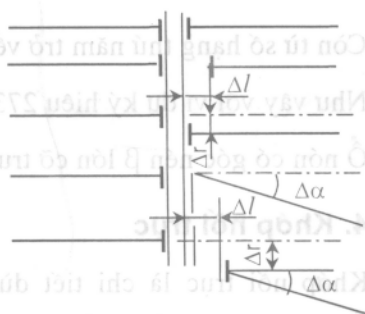
Loại này dùng để nối các trục của hai bộ phận với nhau, nhưng nó cho phép hai đầu trục có một di chuyển tương đối với nhau trong một phạm vi nào đó (hình 16-39) như:

Di động dọc theo trục một lượng Δl .

- Lệch tâm giữa hai trục Δr .

- Nghiêng với nhau một góc $\Delta \alpha$.

- Tổng hợp cả các loại trên.



Hình 16-39

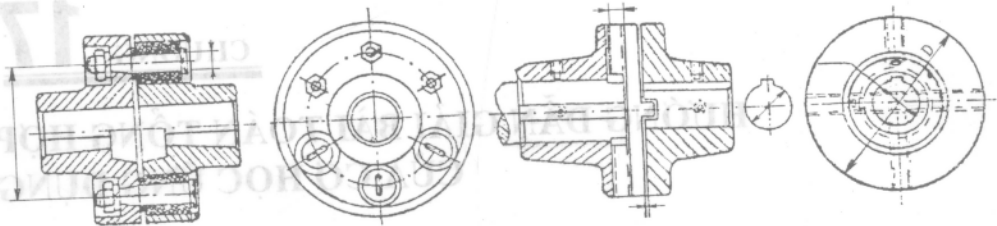
Do những di chuyển tương đối này mà nó có khả năng bù được những sai số khi gia công và lắp ghép. Vì vậy chính xác về lắp không đòi hỏi cao như loại nối trục cứng. Ví dụ nối trục chốt - vòng đàn hồi (hình 16-40), nối trục chữ thập (hình 16-41) là các loại nối trục thuộc loại này.

c. Ly hợp

Cũng là loại nối trục, nhưng nó cho phép nối hoặc tách rời chuyển động hai đầu trục của hai bộ phận ngay khi máy hoặc cơ cấu đang làm việc do một yêu

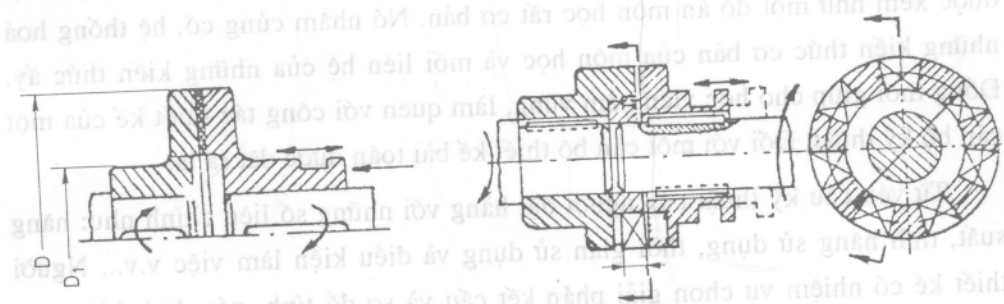
cầu kỹ thuật nào đó.

Ví dụ: Ly hợp ma sát (hình 16-42), ly hợp vấu (hình 16-43).



Hình 16-40

Hình 16-41



Hình 16-42

Hình 16-43

Việc tính toán khớp nối trục tùy thuộc vào kết cấu từng loại, mà người tính toán cần phải vận dụng các công thức và sơ đồ tính thích hợp.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TOÁN TỔNG HỢP CỦA CƠ HỌC ỨNG DỤNG

Bài toán tổng hợp của cơ học ứng dụng ở trong các trường đại học kỹ thuật được xem như một đồ án môn học rất cơ bản. Nó nhằm củng cố, hệ thống hoá những kiến thức cơ bản của môn học và mối liên hệ của những kiến thức ấy. Đồng thời giúp cho học viên nắm vững, làm quen với công tác thiết kế của một cán bộ kỹ thuật. Đối với một cán bộ thiết kế bài toán được đặt ra là:

Từ yêu cầu kỹ thuật của người đặt hàng với những số liệu chính như: năng suất, tính năng sử dụng, thời gian sử dụng và điều kiện làm việc v.v... Người thiết kế có nhiệm vụ chọn giải pháp kết cấu và sơ đồ tính, xác định hiệu ứng ngoài và chọn bộ phận phát động (ví dụ động cơ điện) từ đó tính các hiệu ứng trong và tiến hành thiết kế các chi tiết của phương án đã chọn sao cho thoả mãn những yêu cầu kỹ thuật đã đặt ra. Sau đó tiến hành mọi công việc thiết kế chế

Với mục đích nói trên, trong chương này ta sẽ nghiên cứu một thiết kế kỹ thuật rất hay gặp trong thực tế sau đây.

THIẾT KẾ BỘ DẪN ĐỘNG BĂNG TẢI

I. TÍNH TOÁN ĐỘNG HỌC BỘ DẪN ĐỘNG BĂNG TẢI (hình 17-1)

Bài toán: Cho lực kéo lớn nhất của băng tải là $P = 4,6 \text{ kN}$, tang có đường kính $D = 0,3 \text{ m}$ quay với tốc độ góc $\omega = 13 \text{ rad/s}$ ($n = 124 \text{ vg/ph}$). Hãy chọn động cơ điện và phân phối tỷ số truyền.

Lời giải:

1. Xác định mômen xoắn, công suất trục tang và công suất động cơ điện

$$M_Z = \frac{P.D}{2} = \frac{4,6 \times 0,3}{2} = 0,69 \text{ kN.m}$$

$$N_{tg} = M_Z \cdot \omega = 0,69 \cdot 10^3 \times 13 = 8950 \text{ W} = 8,95 \text{ kW}$$

Để xác định công suất động cơ điện cần phải tìm trước hiệu suất của bộ truyền.

$$\eta = \eta_r \cdot \eta_o^2 \cdot \eta_d = 0,8 \times 0,99^2 \times 0,95 = 0,91$$

trong đó η_r - hiệu suất của cặp bánh răng trụ kín (trong hộp giảm tốc một cấp);

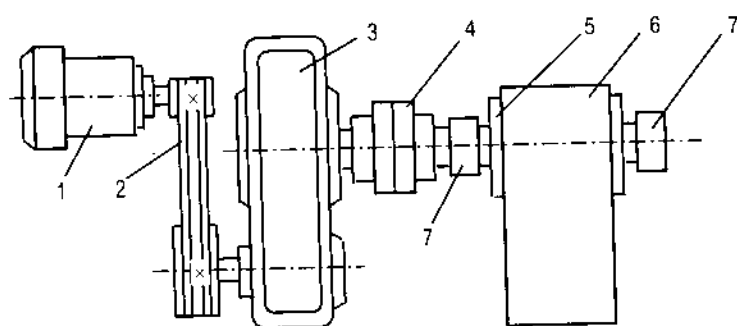
$\eta_o = 0,990 \div 0,995$ - hiệu suất của một cặp ổ lăn;

η_d - hiệu suất của bộ truyền đai (xem bảng 17-1).

Công suất yêu cầu của động cơ là:

$$N_{dc} = \frac{N_{tg}}{\eta} = \frac{8,95}{0,91} = 9,85 \text{ kW}$$

Vì bộ truyền dẫn làm việc trong điều kiện bình thường (nghĩa là không có những quá trình nổ nguy hiểm, độ ẩm và nhiệt độ của môi trường không cao v.v...) nên ta chọn động cơ điện không đồng bộ ba pha loại công dụng chung.



Hình 17-1. Sơ đồ chuyển động của bộ truyền:

- 1- Động cơ điện; 2- Bộ truyền đai; 3- Hộp giảm tốc;
- 4- Khớp ly hợp; 5- Tang; 6- Dây tải; 7- Trục tang

Bảng 17-1. Các thông số và các đặc trưng của các dạng truyền động cơ bản

Dạng truyền động	Tỷ số truyền theo số cấp			Hiệu suất η_i	Công suất cực đại, kW	Tốc độ cực đại, m/s
	1	2	3			
Bánh răng:						
hình trụ	3 ÷ 6 (đến 10*)	đến 30	đến 400	0,93* ÷ 0,98	40000	0,5* ÷ 150
côn níc	2 ÷ 3 (đến 6)	đến 20	—	0,88* ÷ 0,92		
trụ - côn níc	—	đến 30	đến 180	—		
Trục vít	10 ÷ 60	—	—	0,4* ÷ 0,8	60	40
Xích	2 ÷ 6 (đến 8)	—	—	0,92 ÷ 0,96	120	30
Đai	2 ÷ 4 (đến 6)	—	—	0,94 ÷ 0,95	50	25
Ma sát	đến 7	—	—	0,85 ÷ 0,95	20	25

Ghi chú: Dấu (*) đối với các thông số truyền hờ.

Những phương án có thể chọn như sau:

(tỷ số truyền của bộ truyền đai được chọn sơ bộ là $i_d = 2,5$).

Các phương án chọn động cơ

Động cơ	n_{dc} , vg/ph	Tỷ số truyền của		
		Bộ truyền	Đai truyền	Hộp biến tốc
AOP2 - 52 - 4	1440	11,6	2,5	4,65
AOP2 - 61 - 6	970	7,82	2,5	3,10
AOP2 - 62 - 8	720	5,82	2,5	2,33

Các động cơ điện có tốc độ quay $n_d < 750$ vg/ph có giá thành, kích thước và khối lượng tương đối lớn, do đó, trong hai khả năng còn lại, ta chọn động cơ

điện có tốc độ nhanh hơn AOP2-52-4: $\frac{M_{mũ\ máy}}{M_{làm\ việc}} = 1,8$; $\gamma = \frac{M_{max}}{M_{làm\ việc}} = 2,2$;

$\omega_{dc} = 151$ rad/s.

2. Phân phối tỷ số truyền

Tỷ số truyền của bộ truyền bánh răng (trong trường hợp này là của hộp giảm tốc) được tiêu chuẩn hóa theo ГОСТ 2185-66:

- dãy thứ nhất: 1,0; 1,25; 1,6; 2,0; 2,5; 3,15; 4,0; 5,0; 6,3; 8,0; 10; 12,5.

- dãy thứ hai: 1,12; 1,4; 1,8; 2,24; 2,8; 3,5; 4,5; 7,1; 9,0; 11,2.

Ta chọn tỷ số truyền của hộp giảm tốc $i_r = 4$. Khi đó tỷ số truyền của đai truyền là:

$$i_d = \frac{i}{4} = \frac{11,6}{4} = 2,9$$

Lấy $i_d = 3$, ta có $i = i_d \cdot i_r = 3 \times 4 = 12$.

Điều đó dẫn đến làm giảm tốc độ quay của tang từ 13 đến 12,7 rad/s và giảm tốc độ của băng tải tới 2,3%, nhưng trong khoảng đó là cho phép.

3. Xác định công suất, vận tốc góc, mômen xoắn trên các trục hộp giảm tốc

Trên trục dẫn 1 (hình 17-2):

$$N_1 = N_{dc} \cdot \eta_d = 10 \times 0,95$$

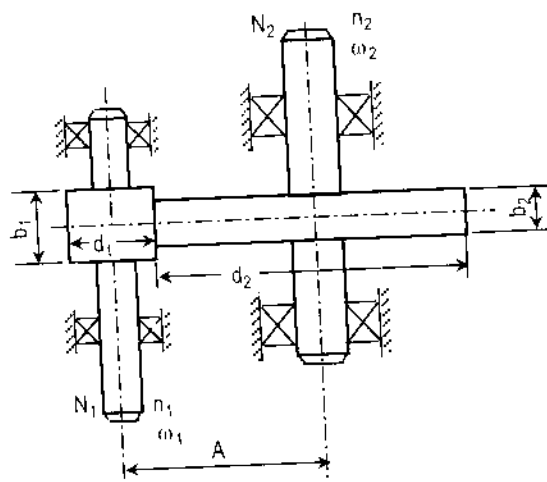
$$= 9,5 \text{ kW} = 9500 \text{ W}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_{dc}}{i_d}$$

$$= \frac{15i}{3} = 50,3 \text{ rad/s}$$

$$n_1 = \frac{30 \cdot \omega_1}{\pi} = 481 \text{ vg/ph}$$

$$M_{1Z} = \frac{N_1}{\omega_1} = \frac{9500}{50,3} = 188 \text{ Nm}$$



Hình 17-2

Trên trục bị dẫn 2:

$$N_2 = N_1 \cdot \eta_r \cdot \eta_c^2 = 9,5 \times 0,98 \times 0,99^2 = 9,13 \text{ kW}$$

$$\omega_2 = \omega_{tg} = \frac{\omega_1}{i_r} = \frac{50,3}{4} = 12,6 \text{ rad/s}$$

$$n_2 = \frac{30 \cdot \omega_2}{\pi} = 120 \text{ vg/ph}$$

$$M_{2z} = \frac{N_2}{\omega_2} = \frac{9130}{12,6} = 725 \text{ Nm}$$

II. TÍNH TOÁN BÁNH RĂNG HÌNH TRỤ RĂNG NGHIÊNG

Bài toán: Từ số liệu có ở bước I, hãy tính cặp bánh răng hình trụ răng nghiêng nghiêng trong hộp giảm tốc với thời gian phục vụ của bộ truyền là $T = 24.000$ giờ. Tải trọng biến đổi như hình 17-3: $T_I = 0,3T$; $T_{II} = 0,1T$; $T_{III} = 0,6T$; $M_I = 0,7M_{\max}$; $M_{II} = M_{\max}$; $M_{III} = 0,3M_{\max}$.

Lời giải:

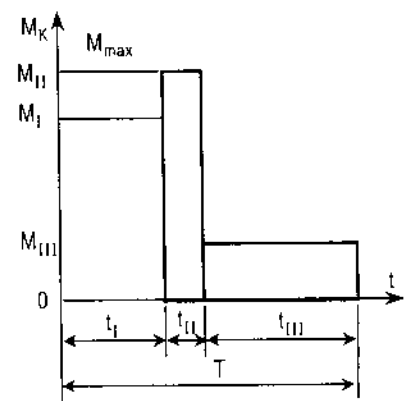
1. Chọn vật liệu bánh răng

Sự chọn phối hợp các vật liệu đối với bánh răng nhỏ và lớn được dẫn ra dưới đây (độ rắn HB ≤ 350):

Bánh nhỏ	45	50	55	50
Bánh lớn	35; 45Π	35; 45Π	45; 55Π	45; 50
Bánh nhỏ	35X	40X	40XH	
Bánh lớn	50; 55	35X	40X	

Thường người ta chế tạo các bánh nhỏ và lớn bằng cùng một loại vật liệu nhưng có chế độ gia công khác nhau. Tuy nhiên các bánh răng cũng có thể có cùng một chế độ gia công nhiệt khi đó đặc trưng cơ học của phối có kích thước lớn sẽ kém đi và trong trường hợp này bánh nhỏ sẽ có đặc tính cơ học cao hơn so với bánh lớn. Khi chế tạo bánh răng lớn có độ rắn bề mặt làm việc 350 HB, thì nên chế tạo bánh nhỏ có độ rắn lớn hơn (20 ÷ 50) HB.

Ta sẽ chọn thép 40X với chế độ gia công nhiệt giống nhau để chế tạo bánh răng



Hình 17-3

nhỏ và lớn (bảng 17-2). Đặc trưng cơ học của thép này như sau:

	Bánh nhỏ	Bánh lớn
Đường kính phối, mm	đến 120	180 ÷ 250
σ_B , MPa	đến 930	780
σ_{ch} , MPa	đến 690	490
HB	257 ÷ 285	215 ÷ 243

Bảng 17-2. Đặc trưng cơ học của thép dùng để chế tạo bánh răng

Mác thép	Đường kính phối, mm	δ_B , MPa	σ_{ch} , MPa	HB	Gia công nhiệt (nhiệt luyện)
40	đến 100	550	280	152 ÷ 207	thường hoá
	100 ÷ 300	530	270		
	300 ÷ 500	510	260		
45	đến 100	590	300	167 ÷ 217	thường hoá
	100 ÷ 300	570	290		
	300 ÷ 500	550	280		
45	đến 90	780	440	207 ÷ 250	hoá tốt
	90 ÷ 120	730	390	194 ÷ 222	
	120 ÷ 150	690	340	180 ÷ 207	
50Г	đến 150	640	370	190 ÷ 229	thường hoá
	150 ÷ 400	610	320		
50Г	đến 100	740	410	241 ÷ 285	hoá tốt
	100 ÷ 200	690	390		
30ХГС	đến 60	980	840	215 ÷ 229	thường hoá
	100 ÷ 160	890	690		
	160 ÷ 250	790	640		
30ХГС	đến 140	1020	840	235 ÷ 280	hoá tốt
	140 ÷ 300	930	740		

Tiếp bảng 17-2

Mác thép	Đường kính phôi, mm	δ_B , MPa	σ_{ch} , MPa	HB	Gia công nhiệt (nhiệt luyện)
35X	đến 60	940	740	190 ÷ 241	thường hoá
	60 ÷ 100	740	490		
	100 ÷ 200	690	440		
35X	đến 200	740	490	220 ÷ 260	hoá tốt
35Cr	đến 120	930	690	257 ÷ 285	hoá tốt
	120 ÷ 150	880	590	243 ÷ 271	
	150 ÷ 180	830	540	230 ÷ 257	
	180 ÷ 250	780	490	215 ÷ 243	
40X	đến 60	980	790	200 ÷ 230	thường hoá
	100 ÷ 200	760	490		
	200 ÷ 300	740	490		
	300 ÷ 600	690	440		
40X	đến 120	930	690	257 ÷ 285	hoá tốt
	120 ÷ 150	880	590	243 ÷ 271	
	150 ÷ 180	830	540	230 ÷ 257	
	180 ÷ 250	780	490	215 ÷ 243	
40XH	đến 60	980	790	220 ÷ 250	thường hoá
	60 ÷ 100	840	590		
	100 ÷ 300	790	570		
	300 ÷ 500	740	550		
40XH	đến 150	930	690	265 ÷ 295	hoá tốt
	150 ÷ 180	880	590	250 ÷ 280	
	180 ÷ 250	835	540	235 ÷ 265	
40XH2MA	đến 120	1080	900	275 ÷ 310	
	120 ÷ 200	980	740	265 ÷ 240	

Tiếp bảng 17-2

Mác thép	Đường kính phôi, mm	δ_B , MPa	σ_{ch} , MPa	HB	Gia công nhiệt (nhiệt luyện)
52Г2	đến 80	740	400	195 ÷ 240	thường hoá
	100 ÷ 300	690	350		
52Г2	đến 100	790	440	269 ÷ 320	hoá tốt
35Л	—	420	270	145	thường hoá
40Л	—	520	290	147	
45Л	—	540	310	153	
50Л	—	570	330	174	
55Л	—	590	340	155 ÷ 217	
40ГЛ	—	630	320	174	
35ГЛ	—	590	340	174	hoá tốt
35ХГСЛ	—	790	590	202	
35ХНЛ	—	690	490	218 ÷ 269	
40Г2Л	—	630	320	190 ÷ 225	

2. Xác định ứng suất tiếp xúc cho phép

Khi tính toán truyền động bánh răng làm việc trong điều kiện tải trọng biến đổi, cần phải lấy tải trọng làm việc cực đại làm tải trọng tính toán. Tính chất thay đổi của tải trọng được kể đến bằng cách đưa vào trong công thức xác định ứng suất tiếp xúc cho phép số chu kỳ đặt tải tương đương.

Số chu kỳ tương đương khi tính toán độ bền tiếp xúc của bánh nhỏ và bánh lớn là:

$$\begin{aligned}
 N_{\sigma_1} &= 60n_1.T \cdot \sum \left(\frac{M_i}{M_{\max}} \right)^3 \cdot \frac{t_i}{T} \\
 &= 60 \times 481 \times 24000 \times (0,7^3 \times 0,3 + 1^3 \times 0,1 + 0,3^3 \times 0,6) \\
 &= 15,3 \cdot 10^7 \\
 N_{\sigma_2} &= \frac{N_{\sigma_1}}{i_r} = \frac{15,3 \cdot 10^7}{4} = 3,8 \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Số chu kỳ ứng suất N_0 trước điểm uốn của đường cong mỏi, nghĩa là khi đạt được giới hạn mỏi dài lâu. Đối với ứng suất tiếp xúc là:

$$N_0 = 30.HB^{2.4}$$

N_0 còn gọi là số chu kỳ cơ sở.

Khi đó đối với bánh nhỏ và bánh lớn:

$$N_{01} = 30 \times 257^{2.4} = 1,8.10^7$$

$$N_{02} = 30 \times 215^{2.4} = 1,2.10^7$$

Để tiện theo dõi trong các ký hiệu ứng suất, ta đưa ra các chỉ số chính và phụ sau đây để chỉ các dạng tính toán (theo ГОСТ 21354-75).

F - chỉ số chính quan hệ tới tất cả các dạng tính toán về độ bền của răng khi uốn;

H - chỉ số chính quan hệ tới tất cả các dạng tính toán về độ bền bề mặt răng;

M - chỉ số phụ quan hệ tới các tính toán về độ bền dưới tác dụng của tải trọng cực đại;

P - chỉ số phụ quan hệ tới ứng suất cho phép.

Ứng suất tiếp xúc cho phép $[\sigma_{HP}]$ khi làm việc lâu dài (đường kính ngoài $d \leq 700$ mm):

$$[\sigma_{HP}] = \frac{\sigma_{OH} \cdot Z_R}{n} \cdot \sqrt[6]{\frac{N_0}{N_\sigma}}$$

trong đó: σ_{OH} - giới hạn mỏi các lớp bề mặt răng, được tìm theo bảng 17-3;

Z_R - hệ số kể đến mức độ nhám bề mặt và được chọn theo các thông số nhám bề mặt R_a và R_z :

$$Z_R = 1 \text{ khi } R_a \leq 1 \text{ } \mu\text{m}; Z_R = 0,95 \text{ khi } R_a = 1,25 \div 2,5 \text{ } \mu\text{m}; Z_R = 0,9 \text{ khi } R_z \geq 10 \text{ } \mu\text{m};$$

n - hệ số an toàn (có thể lấy $n = 1,1$ đối với răng được hóa bền bề mặt).

Nếu $N_\sigma > N_0$, nghĩa là chỉ tiết làm việc trong vùng nằm ngang của đường cong mỏi, thì việc tính toán được tiến hành như khi ứng suất không đổi và thừa

nhận $\sqrt[6]{\frac{N_0}{N}} = 1$. Trong trường hợp này $Z_R = 1$; $n = 1,2$; $N_{\sigma_1} = 15,3 \cdot 10^7 > N_{01} = 1,8 \cdot 10^7$ và $N_{\sigma_2} = 3,8 \cdot 10^7 > N_{02} = 1,2 \cdot 10^7$.

Bảng 17-3. Giới hạn mỏi lớp bề mặt răng σ_{OH}

Nhiệt luyện hoặc hoá nhiệt luyện	Độ cứng của lớp bề mặt	Vật liệu	σ_{OH} , MPa
Hoà tốt, thường hoá	HB $\leq$ 350	Thép cacbon và thép hợp kim	2HB + 70
Tôi thể tích	HRC 40 - 56		18 HRC + 150
Tôi bề mặt	HRC 40 - 56		17 HRC + 200
Xementit hoá và tôi	HRC 54 - 65	Thép hợp kim	23 HRC
Thấm nitơ	HRC 50 - 65		20 HRC
Không nhiệt luyện		Gang	2HB

Vì thế:

$$[\sigma_{HP_1}] = \frac{(2HB_1 + 70) \cdot 1}{1,2} \cdot 1 = 487 \text{ MPa}$$

$$[\sigma_{HP_2}] = \frac{(2HB_2 + 70) \cdot 1}{1,2} \cdot 1 = \frac{2 \times 215 + 70}{1,2} = 417 \text{ MPa}$$

Đối với những bánh răng nghiêng không dịch chỉnh được có độ rắn không giống nhau giữa bánh nhỏ và bánh lớn thì ứng suất cho phép là:

$$[\sigma_{HP}] = \frac{\sigma_{HP_1} + \sigma_{HP_2}}{2} = \frac{487 + 417}{2} = 452 \text{ MPa}$$

3. Xác định khoảng cách trục A (m)

$$A = (i_r + 1) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{0,34 \cdot Z_K}{[\sigma_{HP}] \cdot i_r}\right)^2 + \frac{K_{\alpha H} \cdot K M_2}{\Psi_a}}$$

trong đó, Z_K - hệ số kể đến tính riêng biệt của truyền động răng nghiêng phụ thuộc vào số răng của bánh nhỏ (trong các tính toán gần đúng với số răng bánh nhỏ $Z_1 \geq 20$ thì hệ số $Z_K = 0,8$. Điều này có

nghĩa là làm tăng độ bền tiếp xúc của bộ truyền răng nghiêng so với răng thẳng lên 30%);

$K_{\alpha H}$ - hệ số kể đến sự phân bố không đều của tải trọng giữa các răng (trong dải tốc độ từ 1 đến 20 m/s; $K_{\alpha H} = 1 \div 1,1$ với độ chính xác cấp 7, $K_{\alpha H} = 1,05 \div 1,2$ với độ chính xác cấp 8; K - hệ số tải trọng phụ, đối với tính toán sơ bộ $K = 1,3 \div 1,5$; giá trị bé ứng với các bánh răng đặt đối xứng trên các trục, giá trị lớn ứng với trường hợp bố trí các bánh răng không đối xứng; $\Psi_a = b/A$ - hệ số chiều rộng bánh răng (đối với các bánh răng làm bằng thép tốt bố trí không đối xứng đối với gối tựa, nên lấy $\Psi_a = 0,315 \div 0,400$, còn đối với các bánh răng làm bằng thép tôi $\Psi_a = 0,25 \div 0,315$; khi các bánh răng được đặt đối xứng $\Psi_a = 0,4 \div 0,5$; đối với bánh răng nhỏ dịch động được $\Psi_a = 0,1 \div 0,2$; các giá trị tiêu chuẩn Ψ_a đối với hộp giảm tốc: 0,100; 0,125; 0,160; 0,200; 0,250; 0,315; 0,400; 0,500; 0,630; 0,800; 1,0; 1,25).

$[\sigma_{HP}]$ tính bằng MPa ; M_2 tính bằng Nm.

Trong trường hợp này: $Z_K = 0,8$; $K_{\alpha H} = 1,1$; $K = 1,3$; $\Psi_a = 0,4$.

$$\text{Khi đó: } A = (4 + 1) \sqrt[3]{\left(\frac{0,34 \times 0,8}{452 \times 4}\right)^2 + \frac{1,1 \times 1,3 \times 725}{0,4}} = 0,195 \text{ m}$$

Ta lấy quy tròn $A = 200 \text{ mm}$ theo ГОСТ 2185-66.

4. Xác định các thông số truyền động cơ bản

Đối với sự truyền động mà các bề mặt răng có độ cứng thấp và trung bình, sau khi xác định A từ những tính toán về độ bền tiếp xúc có thể cho trước môđun (hoặc số răng) và sau đó thực hiện việc tính toán kiểm tra về uốn. Môđun cần phải nhỏ, bởi vì cùng với việc tăng môđun thì khối lượng, đường kính ngoài của phôi, khối lượng gia công càng tăng. Mặt khác, đối với những bộ truyền nặng môđun không nên lấy nhỏ hơn 1,5. Thông thường đối với bộ truyền của hộp giảm tốc có công dụng chung môđun được lấy trong khoảng $(0,01 \div 0,02)A$ với các bánh răng làm bằng thép hoá tốt; trong khoảng $(0,016 \div 0,0315)A$ với bánh răng làm bằng thép tôi.

Trong trường hợp khảo sát $m = 0,01.A = 0,01 \times 200 = 2 \text{ mm}$.

Góc nghiêng của răng lấy trong khoảng từ 8 đến 18" (rất ít đến 20").

Ở đây ta lấy $\beta = 12''$ (khi $\beta = 0$ ta có bánh răng hình trụ răng thẳng, hình 4-2a).

Số răng tổng cộng của bánh nhỏ Z_1 và bánh lớn Z_2 là:

$$Z_c = Z_1 + Z_2 = 2A \cdot \cos \beta / m = 2 \times 200 \cdot \cos 12'' / 2 \approx 196,5$$

$$Z_1 = \frac{Z_c}{i_r + 1} = \frac{196,5}{5} = 39,2$$

$$Z_2 = Z_1 \cdot i_r = 39,2 \times 4 = 156,8$$

Ta làm tròn số răng và lấy:

$Z_1 = 39$; $Z_2 = 157$. Khi đó $Z_c = 196$ và góc nghiêng thực tế là:

$$\beta = \arccos(mZ_c/2A) = 11''31'30''$$

Môđun ăn khớp mặt đầu m_t :

$$m_t = \frac{m}{\cos \beta} = \frac{2}{\cos 11''31'30''} = 2,04$$

Chiều rộng bánh răng lớn:

$$b_2 = \Psi_a \cdot A = 0,4 \times 20 = 80 \text{ mm}$$

Để bù vào sự không chính xác lắp ghép lấy chiều rộng bánh nhỏ lớn hơn chiều rộng bánh lớn một chút ($5 \div 7 \text{ mm}$), vì vậy $b_1 = b_2 + 5 = 80 + 5 = 85 \text{ mm}$.

Đường kính vòng chia của bánh lớn và bánh nhỏ:

$$d_2 = \frac{m \cdot Z_2}{\cos \beta} = \frac{2 \times 157}{\cos 11''31'30''} = 320,41 \text{ mm}$$

$$d_1 = \frac{m \cdot Z_1}{\cos \beta} = 79,59 \text{ mm}$$

Giá trị d_1 và d_2 phải tính với độ chính xác đến 1/100 mm và phải kiểm tra theo điều kiện:

$$A = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{79,59 + 320,41}{2} = 200 \text{ mm}$$

Tỷ số truyền thực tế là:

$$i_r^* = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{157}{39} = 4,02$$

Giá trị i_r^* không được khác giá trị tiêu chuẩn 2,5% khi $i_r \leq 4,5$ và 4% khi $i_r \geq 4,5$.

Trong thiết kế này:

$$\Delta i = \frac{i_r^* - i_r}{i_r} \cdot 100 = \frac{4,02 - 4}{4} \times 100 = 0,5\%$$

Vậy sai số trên cho phép.

Tốc độ góc thực của bánh lớn:

$$\omega_2^* = \frac{\omega_1}{i_r^*} = \frac{50,3}{4,02} = 12,5 \text{ rad/s}$$

và tốc độ dài của nó là:

$$v = \frac{\omega_1 \cdot d_1}{2 \times 1000} = \frac{50,3 \times 79,59}{2 \times 1000} = 2 \text{ m/s}$$

Với tốc độ như vậy, cấp chính xác ăn khớp có thể là cấp "9", nhưng bởi vì đối với các bánh răng nghiêng không thể lấy cấp chính xác nhỏ hơn 8, nên ta lấy cấp chính xác là 8.

5. Xác định hệ số tải trọng phụ thực tế

Giá trị thực tế của hệ số tải trọng phụ:

$$K = K_\beta \cdot K_v$$

trong đó: K_β - hệ số tập trung tải trọng theo chiều dài răng (bảng 17-4);

K_v - hệ số tải trọng động (bảng 17-5).

Bảng 17-4. Giá trị K_β của bộ truyền bánh răng thẳng và nghiêng có chạy mài (tử số) và không chạy mài (mẫu số)

b/d	Giá trị K_β theo vị trí bánh nhỏ			
	Đối xứng đối với gối tựa	Gắn một gối tựa; trục rất cứng	Gắn một gối tựa; trục có độ cứng vừa	Đặt trên đầu thừa
0,2	1/1	1/2	1,05/1,025	1,1/1,05
0,4	1/1	1,05/1,025	1,15/1,075	1,2/1,1
0,8	1,05/1,025	1,15/1,075	1,3/1,15	1,5/1,25
1,2	1,15/1,075	1,25/1,125	1,4/1,2	—
1,6	1,25/1,125	1,4/1,2	—	—
2,0	1,45/1,225	—	—	—

Bảng 17-5. Hệ số K_v đối với bánh răng thẳng (tử số) và răng nghiêng (mẫu số)

Cấp chính xác	HB	Giá trị K_v theo tốc độ v , m/s			
		đến 3	3 ÷ 8	8 ÷ 12,5	12,5 ÷ 30
6	≤ 350	1/1	1,2/1	1,3/1,1	1,45/1,2
	> 350	1/1	1,15/1	1,25/1	1,35/1
7	≤ 350	1,15/1	1,35/1	1,45/1,2	-/1,3
	> 350	1,15/1	1,25/1	1,35/1,1	-/1,1
8	≤ 350	1,25/1,1	1,45/1,3	-/1,4	-
	> 350	1,2/1,1	1,35/1,2	-/1,3	-

Khi $\frac{b_1}{d_1} = \frac{85}{79,59} = 1,07$ đối với các bánh răng có độ cứng HB ≤ 350. Khi đạt chúng đối xứng đối với gối tựa $K_\beta = 1,1$. Khi $v = 2$ m/s, HB ≤ 350, độ chính xác bậc 8 đối với các bánh răng $K_v = 1,2$.

Khi đó: $K = 1,1 \times 1,2 = 1,32$

6. Kiểm tra về mỏi theo ứng suất tiếp xúc

Công thức xác định ứng suất tiếp xúc lớn nhất đối với bánh răng nghiêng có dạng:

$$\sigma_H = \frac{0,34 \cdot Z_K}{A \cdot i_r} \cdot \sqrt{\frac{(i_r + 1) \cdot K_{\alpha H} \cdot K \cdot M_2}{b_1}}$$

Với σ_H (MPa); M_2 (N.m); A (m); b_1 (m).

Sau khi thay vào công thức này các giá trị bằng số ta có:

$$\sigma_H = \frac{0,34 \times 0,8}{0,2 \times 4} \times \sqrt{\frac{5 \times 1,1 \times 1,32 \times 725}{0,08}} = 436 \text{ MPa}$$

Sai số của ứng suất tiếp xúc thực tế này với ứng suất tiếp xúc cho phép là:

$$\Delta \sigma_H = \frac{436 - 452}{452} \times 100\% = -3,54\% < +5\%$$

Sai số này cho phép. Nếu độ lệch của σ_H với giá trị cho phép là không được phép thì việc tính toán được làm lại sau khi thay đổi khoảng cách trục.

7. Kiểm tra độ bền tiếp xúc theo sự vượt tải ngắn hạn

Ứng suất tiếp xúc tính toán khi vượt tải:

$$\sigma_{HM} = \sigma_H \sqrt{\gamma} = 436 \times \sqrt{2,2} = 646 \text{ MPa}$$

Ứng suất giới hạn cho phép đối với các bánh răng được tôi thể tích và hoá tốt $[\sigma_{HPM}] = 2,8 \cdot \sigma_{ch}$, đối với các răng được thấm cacbon thì $[\sigma_{HPM}] = 40 \text{ HRC}$, đối với các răng được thấm nitơ $[\sigma_{HPM}] = 30 \text{ HRC}$.

Trong trường hợp khảo sát:

$$[\sigma_{HPM}] = 2,8 \cdot \sigma_{ch} = 2,8 \times 490 = 1370 \text{ MPa}$$

Vì $\sigma_{HM} < \sigma_{HPM}$, nên độ bền theo sự vượt tải ngắn hạn là đảm bảo.

8. Xác định ứng suất cho phép khi uốn

Số chu kỳ chịu tải khi tính toán độ bền uốn như sau:

$$N = 60n_1 \cdot T \cdot \sum \left(\frac{M_i}{M_{\max}} \right)^m \cdot \frac{t_i}{T}$$

trong đó $m = 6$ đối với răng làm bằng thép thường hoá và hoá tốt, đồng thời đối với các răng được hoá bền bề mặt có các rãnh tròn được làm bóng, $m = 9$ đối với các răng làm bằng thép tôi.

Trong bài toán này chúng ta lấy $m = 6$ đối với bánh nhỏ và bánh lớn.

$$\begin{aligned} N_{\sigma_1} &= 60 \times 481 \times 24000 \times (0,7^6 \times 0,3 + 1^6 \times 0,1 + 0,3^6 \times 0,6) \\ &= 9,5 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

$$N_{\sigma_2} = \frac{N_{\sigma_1}}{i_r} = \frac{9,5 \cdot 10^7}{4} = 2,4 \cdot 10^7$$

Ứng suất cho phép khi uốn với sự làm việc lâu dài một phía và hai phía:

$$[\sigma_{0PF}] = \frac{\sigma_0 \cdot Y_R \cdot Y_Y \cdot Y_M}{n} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_\sigma}}$$

$$[\sigma_{-1PF}] = \frac{\sigma_{-1} \cdot Y_R \cdot Y_Y \cdot Y}{n} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_0}{N_\sigma}}$$

σ_0 - giới hạn mỏi khi răng làm việc một phía (chu trình mạch động);

$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_0}{1,2 + 1,6}$ - giới hạn mỏi khi răng làm việc hai phía (tải trọng thuận nghịch), hệ số 1,2 lấy đối với thép được nitơ hoá, 1,4 đối với thép thấm cacbon và hydrocacbon, 1,6 đối với các răng làm bằng thép khác;

Y_R - hệ số kể đến độ nhám bề mặt (khi $R_Z = 10 + 40 \mu\text{m}$ đối với răng tôi thể tích và hoá tốt $Y_R = 0,85 \div 0,95$, khi đánh bóng thô sau xementit và tôi $Y_R = 0,65 \div 0,70$, khi đánh bóng tinh $Y_R = 0,8$);

Y_y - hệ số kể đến sự hoá bền bằng cơ học (phun bi sau khi xementit và tôi $Y_y = 1,1 \div 1,3$);

Y_M - hệ số kích thước (với đường kính ngoài $d \leq 400 \text{ mm}$ và môđun $m \leq 10 \text{ mm}$ thì $Y_M = 1$; $n = n_1 n_2 n_3$ - hệ số an toàn (n_1 được chọn phụ thuộc vào xác suất làm việc không an toàn; $n_2 = 1,3$ chỉ đối với phôi đúc; $n_3 > 1$ đối với chế độ làm việc trong điều kiện có sự ăn mòn và nhiệt độ cao; $N_0 = (2 \div 5) \cdot 10^6$ - số chu kỳ ứng suất trước điểm uốn của đường cong mỏi (số chu kỳ cơ sở); nếu $N_\sigma > N_0$, nghĩa là chi tiết làm việc trong vùng nằm ngang của đường cong mỏi, thì tính toán như với chế độ ứng suất không đổi và lấy $\sqrt[m]{\frac{N_0}{N_\sigma}} = 1$).

Trong bài toán này $\sigma_{01} = 1,8\text{HB} = 1,8 \times 257 = 462 \text{ MPa}$ và $\sigma_{02} = 1,8\text{HB} = 1,8 \times 215 = 387 \text{ MPa}$; $Y_R = 1$; $Y_y = 1$; $Y_M = 1$; $n = 1,75$.

$N_{\sigma_1} = 9,5 \cdot 10^7 > N_0 = 0,3 \cdot 10^7$ và $N_{\sigma_2} = 2,4 \cdot 10^7 > N_0 = 0,3 \cdot 10^7$, vì vậy

$$[\sigma_{0PF1}] = \frac{462 \times 1 \times 1 \times 1}{1,75} \times 1 = 264 \text{ MPa}$$

$$[\sigma_{0PF2}] = \frac{387 \times 1 \times 1 \times 1}{1,75} \times 1 = 221 \text{ MPa}$$

9. Tính toán kiểm tra khi uốn

Số răng tương đương:

$$Z_{01} = \frac{Z_1}{\cos^3 \beta} = \frac{39}{0,98^3} = 41,4$$

$$Z_{02} = \frac{Z_2}{\cos^3 \beta} = \frac{175}{0,98^3} = 166,7$$

hệ số độ bền của răng: $Y_F = 3,75$ đối với $Z_{01} = 41,4$:

$$Y_F = 3,75 \text{ đối với } Z_{02} = 166,7$$

Ứng suất uốn khi chịu tải lâu dài của bánh nhỏ và lớn là:

$$\sigma_{F1} = \frac{2Y_F.K.M_1}{m^2.Z_{01}.b_1} = \frac{2 \times 3,75 \times 1,32 \times 187,5}{0,002^2 \times 41,4 \times 0,08 \times 10^6} = 132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{F2} = \frac{2Y_F.K.M_2}{m^2.Z_{02}.b_2} = \frac{2 \times 3,75 \times 1,32 \times 725}{0,002^2 \times 166,7 \times 0,08 \times 10^6} = 135 \text{ MPa}$$

Độ bền của các bánh nhỏ và bánh lớn được đảm bảo vì $\sigma_{F1} = 132 < [\sigma_{0PF1}] = 264 \text{ MPa}$ và $\sigma_{F2} = 135 < 221 \text{ MPa}$.

10. Kiểm tra bền đối với sự vượt tải ngắn hạn khi uốn

Ứng suất uốn tính toán khi vượt tải là:

$$\sigma_{FM} = \sigma_{F2} \cdot \gamma = 132 \times 2,2 = 296 \text{ MPa}$$

Khi tính toán độ bền uốn do tải trọng lớn nhất đối với thép không tôi có độ cứng không lớn hơn 350 HB thì ứng suất cho phép $[\sigma_{FPM}] = 0,8 \cdot \sigma_{ch}$; đối với thép tôi có độ cứng cao hơn 350 HB thì $[\sigma_{FPM}] = 0,36 \frac{\sigma_B}{K_\sigma}$.

Trong trường hợp này:

$$[\sigma_{FPM}] = 0,8 \cdot \sigma_{ch} = 0,8 \times 490 = 392 \text{ MPa}$$

Bởi vì $\sigma_{FM} < [\sigma_{FPM}]$ nên độ bền của răng được đảm bảo khi chịu uốn do tải trọng cực đại gây ra.

Trong bảng 17-6 đã chỉ ra những kết quả tính toán về các thông số truyền động răng.

Bảng 17-6. Các thông số cơ bản truyền động năng

Thông số	Công thức tính toán	Giá trị thông số đối với	
		Bánh nhỏ	Bánh lớn
Khoảng cách trục A (mm)	$0,5.(d_1 + d_2)$	200	
Môđun ăn khớp pháp tuyến m (mm)	$(0,01 \div 0,02).A$	2	
Môđun ăn khớp mặt đầu	$\frac{m}{\cos\beta}$	2,02	
Số răng Z_c	$2A/m$	196	
Z_1 Z_2	$\frac{Z_c}{i_r + 1}$ $Z_1.i_r$	39	157
Bước ăn khớp pháp tuyến P_n , mm	$\pi.m$	6,28	6,28
Bước ăn khớp tiếp tuyến P_t , mm	$\pi.m_1$	6,41	6,41
Đường kính vòng chia, mm d_1 d_2	$m_1.Z_1$ $m_1.Z_2$	79,59	320,41
Chiều cao đầu răng h_d , mm	m	2	2
Chiều cao chân răng h_c , mm	$1,25.m$	2,5	2,5
Chiều cao răng h, mm	$h_d + h_c$	4,5	4,5
Đường kính vòng tròn đỉnh răng d_d , mm	$d + 2h_c$	83,59	324,41
Đường kính vòng tròn chân răng d_c , mm	$d - 2h_c$	74,59	315,41
Chiều rộng răng, mm b_1 b_2	$b_2 + (5 \div 7)$ $A.\Psi_a$	85	80
Tỷ số truyền i_r	$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	4	

III. TÍNH TOÁN TRỤC HỘP GIẢM TỐC

Bài toán: Hãy tính toán sơ bộ và kiểm tra trục chậm hộp giảm tốc bánh răng hình trụ răng nghiêng một cấp.

Lời giải:

1. Tính toán sơ bộ trục

a) Chọn vật liệu

Đối với hộp giảm tốc công dụng chung người ta thường dùng các thép cacbon sau đây không qua nhiệt luyện để làm trục:

CT3, CT4, CT5, 25, 30, 40 và 45.

Nếu trục cần phải làm việc theo khả năng chịu tải và tuổi thọ cao, thì dùng các vật liệu thép hợp kim hoặc thép cacbon trung bình hoá tốt: 35, 40, 45, 40X, 40XH, v.v... Những trục làm việc nặng thường dùng các thép: 40XH, 40XH2MA, 30XGT.

Trong trường hợp này ta chọn thép 30 có $\sigma_{ch} = 300 \text{ MPa}$; $\sigma_{-1} = 250 \text{ MPa}$ để làm trục hộp giảm tốc.

b) Chọn sơ bộ đường kính trục chậm

Bởi vì kết cấu trục (vị trí đặt tải, khoảng cách giữa các gối tựa v.v...) ở giai đoạn này ta chưa biết, nên cần phải xác định trước đường kính trục, lúc này xem như nó chỉ chịu xoắn theo công thức:

$$d_1 \geq 17 \sqrt[3]{\frac{M_Z}{[\tau]}}$$

Trong đó: d_1 - đường kính trục (mm);

$M_Z = M_2$ - mômen xoắn lớn nhất trục phải chịu (Nm);

$[\tau]$ - ứng suất cho phép đối với thép, $[\tau] = 25 \div 35 \text{ MPa}$.

Đường kính nhỏ nhất cần thiết của trục chậm là:

$$d_1 \geq 17 \sqrt[3]{\frac{725}{30}} = 49 \text{ mm}$$

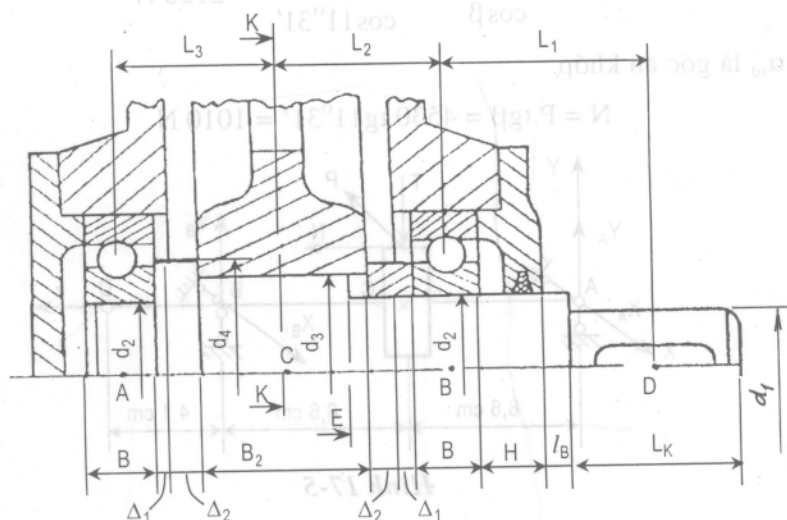
Ta làm tròn giá trị này theo ГОСТ 6636-69: $d_1 = 50 \text{ mm}$.

Chiều dài của phần trục nhô ra phụ thuộc vào loại khớp nối, trong trường hợp bài toán này chiều dài nửa khớp nối là $L_k = 70 \text{ mm}$ (xem bước V).

c) Xác định kích thước trục (hình 17-4)

Các đường kính còn lại được chọn theo kinh nghiệm có kể đến cả sự thuận tiện khi lắp ghép bánh răng, ổ và các chi tiết khác lên trục và sự cần thiết phải cố định chúng trên trục theo phương dọc trục.

Đường kính trục ở chỗ đặt ổ bên phải cần phải bằng đường kính trong của ổ. Khi đó chiều cao của vai trục cần phải lớn hơn gờ trên mô-đun của khớp nối. Từ những nhận thức đó ta chọn $d_2 = 60$ mm và chọn ổ loại nhẹ theo ГОСТ 8338-75 có kích thước thông thủy $D = 110$ mm, $B = 22$ mm.



Hình 17-4. Kết cấu trục chậm hộp giảm tốc

Đường kính trục ở nơi lắp cứng (chặt) cần phải lấy bằng $d_2 = 60$ mm. Chiều rộng của nắp giữ bên phải với $R_2 = 60$ mm theo ГОСТ 11641-73 lấy $H = 23$ mm. Chú ý đến tính không chính xác có thể có của vị trí vỏ hộp chọn, $\Delta_1 = 6$ mm, giữa mặt mút của khớp nối và nắp ổ nên lấy $l_B = 12$ mm. Khoảng cách giữa mặt trong của hộp và bánh răng được xác định như sau:

$$\Delta_2 \geq 1,15 \times (0,025A + 1) = 1,15 \times (0,025 \times 200 + 1) = 6,9 \text{ mm}$$

Nhưng $\Delta_2 \nless 8$ nên lấy $\Delta_2 = 8$ mm.

Đường kính trục ở chỗ lắp bánh răng lớn $d_3 = 63$ mm, đường kính vai $d_4 = 70$ mm.

2. Tính toán kiểm tra trục

a) Lập sơ đồ tính toán trục hộp giảm tốc (hình 17-5). Lực vòng P, lực hướng tâm T và lực dọc N. Trên bánh răng lớn có:

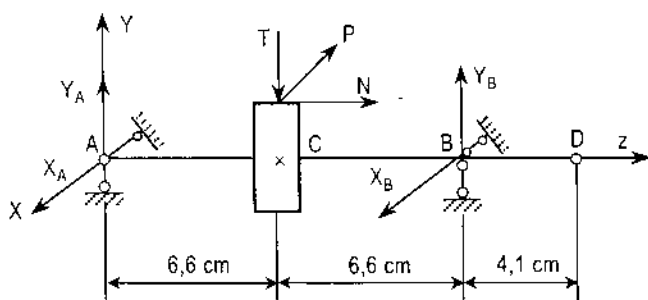
$$d_2 = 320,4 \approx 320 \text{ mm} \quad (\text{bảng 17-6})$$

$$P = \frac{2M_2}{d_2} = \frac{2 \times 725}{0,32} = 4530 \text{ N} \quad (\text{hình 17-5})$$

$$T = \frac{P \cdot \tan \alpha_m}{\cos \beta} = \frac{4530 \cdot \tan 20''}{\cos 11''31'} = 2120 \text{ N}$$

ở đây α_m là góc ăn khớp.

$$N = P \cdot \tan \beta = 4530 \cdot \tan 11''31' = 1010 \text{ N}$$



Hình 17-5

b) Vẽ biểu đồ mômen trong mặt phẳng thẳng đứng (hình 17-6)

Xác định phản lực ở gối tựa

do N và T gây ra.

$$\Sigma M_B = 0$$

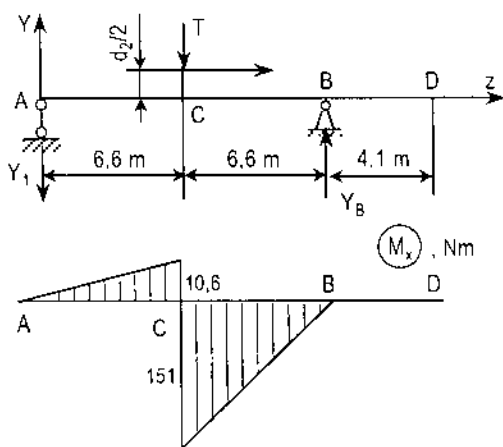
$$Y_A \cdot 13,2 - T \cdot 6,6 + N \cdot \frac{d_2}{2} = 0$$

$$Y_A = \frac{T \cdot 6,6 - N \cdot 0,5 \cdot d_2}{13,2}$$

$$Y_A = \frac{2120 \times 6,6 - 1010 \times 16}{13,2}$$

$$= -165 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0$$



Hình 17-6

$$Y_B \cdot 13,2 - T \cdot 6,6 - N \frac{d_2}{2} = 0$$

$$Y_B = \frac{T \cdot 6,6 + N \cdot 0,5 \cdot d_2}{13,2}$$

$$Y_B = \frac{2120 \times 6,6 + 1010 \times 16}{13,2} = 2285 \text{ N}$$

Kiểm tra lại kết quả tính toán phản lực:

$$Y = 0 \Rightarrow Y_A - T + Y_B = 0$$

$$-165 - 2120 + 2285 = 0$$

Vậy phản lực tìm được là đúng.

Ta vẽ biểu đồ mômen uốn do lực T và N gây nên.

c) Vẽ biểu đồ mômen uốn trong mặt phẳng ngang:

Xác định phản lực do P gây ra (hình 17-7)

$$\Sigma M_B = 0; X_A \cdot 13,2 - P \cdot 6,6 = 0$$

$$X_A = \frac{P \cdot 6,6}{13,2} = \frac{4530 \times 6,6}{13,2} = 2265 \text{ N}$$

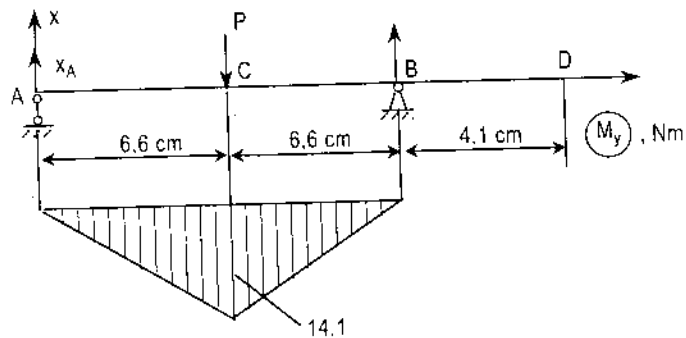
$$\Sigma M_A = 0; X_B \cdot 13,2 - P \cdot 6,6 = 0$$

$$\text{—} \quad X_B = \frac{P \cdot 6,6}{13,2} = \frac{4530 \times 6,6}{13,2} = 2265 \text{ N}$$

Kiểm tra lại phản lực: $\Sigma X = 0; X_A - P + X_B = 0$

$$2265 - 4530 + 2265 = 0$$

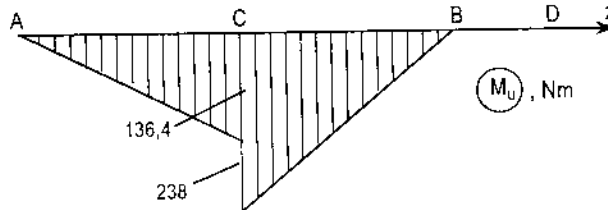
Vậy phản lực tìm được là đúng.



Hình 17-7

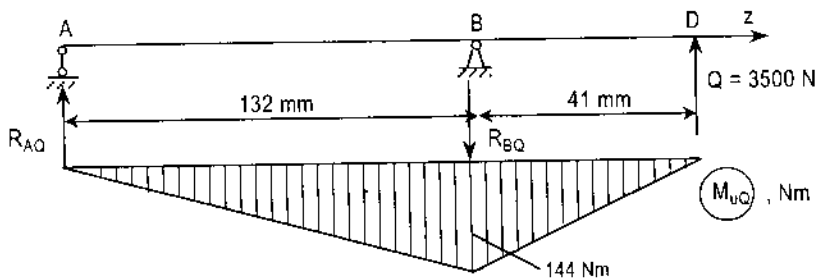
d) Vẽ biểu đồ tổng mômen uốn do P, T và N gây ra (hình 17-8). Mômen tổng cộng được xác định theo công thức:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$



Hình 17-8

e) Biểu đồ mômen do lực Q gây ra (hình 17-9).



Hình 17-9

Trong đại đa số các trường hợp do sự không đồng trục của các trục được nối lại, khớp nối sẽ đặt lên trục một lực ngang phụ Q. Lực này đặt vào điểm D của trục chậm và bằng: $Q \approx 130 \sqrt{M_z}$ đối với hộp giảm tốc một cấp và hành tinh, $Q \approx 260 \sqrt{M_z}$ đối với hộp giảm tốc nhiều cấp.

Ở đây M_z là mômen xoắn (N.m); Q (N).

Trong trường hợp bài toán của ta thì:

$$Q = 130 \cdot \sqrt{725} = 3500 \text{ N.}$$

Xác định phản lực do Q gây ra:

$$\Sigma M_B = 0; - R_{AQ} \cdot 13,2 + Q \cdot 4,1 = 0$$

$$R_{AQ} = \frac{Q \cdot 4,1}{13,2} = \frac{3500 \times 4,1}{13,2} = 1090 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0 ; - R_{BQ} \cdot 13,2 + Q \cdot 17,3 = 0$$

$$R_{BQ} = \frac{Q \cdot 17,3}{13,2} = \frac{3500 \times 17,3}{13,2} = 4590 \text{ N}$$

Kiểm tra lại phản lực:

$$R_{AQ} - R_{BQ} + Q = 0$$

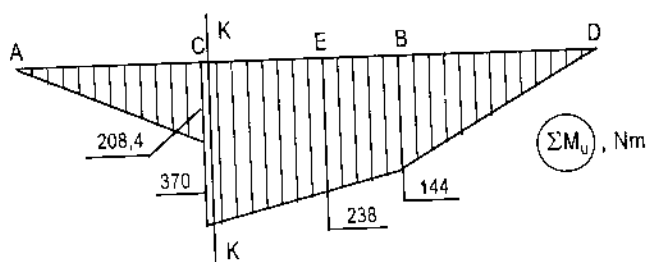
$$1090 - 4590 + 3500 = 0$$

Chúng tỏ phản lực xác định như trên là đúng.

g) Vẽ biểu đồ mômen uốn tổng cộng do P, N, T, Q gây ra (hình 17-10).

Theo công thức:

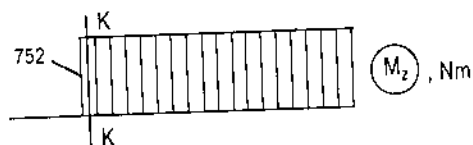
$$\Sigma M_u = M_u + M_{uQ}$$



Hình 17-10

h) Biểu đồ mômen xoắn M_z cho trên hình 17-11.

i) Xác định các mặt cắt nguy hiểm của trục. Từ các biểu đồ, ta thấy các mặt cắt C và E là những mặt cắt nguy hiểm cần phải kiểm tra giới hạn mỏi. Trong tính toán cần phải kể đến ứng suất do tác dụng đồng thời của mômen uốn và xoắn. Ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến độ bền của trục rất bé, nên ta sẽ bỏ qua.



Hình 17-11

k) Kiểm tra bền ở mặt cắt C.

Ở mặt cắt K – K này (hình 17-10) có các mômen nội lực $M_x = 370 \text{ Nm}$, và $M_z = 725 \text{ Nm}$ (hình 17-11). Ứng suất pháp thay đổi theo chu trình đối xứng, ứng suất tiếp thay đổi theo chu trình mạch động.

$$\begin{aligned}\sigma_a = \sigma_u &= \frac{M_u}{W_u} = \frac{370}{18,76 \cdot 10^{-6}} \\ &= 20 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 20 \text{ MPa.}\end{aligned}$$

$$\sigma_m = 0$$

$$\begin{aligned}\tau_a = \tau_m &= \frac{M_z}{2W_p} = \frac{725}{2 \times 40 \cdot 10^{-6}} \\ &= 9,1 \text{ MPa}\end{aligned}$$

trong đó W_u và W_p là mômen chống uốn và xoắn của mặt cắt ngang của trục có kể đến sự giảm yếu do rãnh then.

Hệ số an toàn về bền của trục theo ứng suất tiếp và pháp được tính theo công thức:

$$\begin{aligned}n_\sigma &= \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \\ &= \frac{250}{\frac{1,89}{0,76 \times 0,95} \times 20} = 4,8 \\ n_\tau &= \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \\ &= \frac{145}{\frac{1,71}{0,76 \times 0,95} \times 9,1 + 0,1 \times 9,1} = 9,2.\end{aligned}$$

Các hệ số trong công thức tra bảng (17-7), (17-8), (17-9), ý nghĩa các đại lượng và cách xác định chúng trong các công thức trên đã chỉ rõ trong lý thuyết của chương 13.

Hệ số an toàn về bền ở mặt cắt K – K là:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{4,8 \times 9,2}{\sqrt{4,8^2 + 9,2^2}} = 4,25$$

Giá trị cho phép của hệ số an toàn đối với trục giảm tốc là $[n] = 1,5 < 2,5$, cho nên độ bền mỏi ở mặt cắt này của trục là đảm bảo.

l) Kiểm tra bền cho trục ở mặt cắt E – E.

Ở mặt cắt này chịu những nội lực lớn, hơn nữa ở mặt cắt này lại có sự tập trung ứng suất do các rãnh có góc lượn sinh ra. Mặt cắt E – E đặt cách mặt cắt K – K một đoạn 15 mm.

Các mômen uốn $M_u = 238 \text{ Nm}$ và mômen xoắn $M_x = 725 \text{ Nm}$ (hình 17-10, hình 17-11) tác dụng ở mặt cắt E – E.

Khi đó ứng suất ở mặt cắt này là:

$$\sigma_a = \frac{M_u}{W_u} = \frac{238}{0,1 \times 6^3 \cdot 10^{-6}} = 11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = 0;$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_x}{W_p} = \frac{725}{2 \times 0,2 \times 6^3 \cdot 10^{-6}} = 8,4 \text{ MPa}$$

Đối với mặt cắt có sự giảm yếu này ta có:

$K_{\sigma} = 1,55$; $k_{\tau} = 1,42$; $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon_{\tau} = 0,76$; $\beta = 0,91$; $\Psi_{\sigma} = 0,15$; $\Psi_{\tau} = 0,1$. Với $\sigma_{-1} = 250 \text{ MPa}$; $\tau_{-1} = 145 \text{ MPa}$, ta có:

$$n_{\sigma} = \frac{250}{\frac{1,55}{0,76 \times 0,91} \times 11} = 10,1$$

$$n_{\tau} = \frac{145}{\frac{1,42}{0,76 \times 0,91} \times 8,4 + 0,1 \times 8,4} = 8$$

Hệ số an toàn bền mỏi ở mặt cắt E-E là:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{10,1 \times 8}{\sqrt{10,1^2 + 8^2}} = 6,3 > 2,5$$

Do đó, độ bền ở mặt cắt được đảm bảo.

b) Tính toán độ bền tĩnh

Việc kiểm tra độ bền tĩnh là để ngăn ngừa sự phát sinh biến dạng dẻo do tác dụng đột ngột của tải trọng.

Ở mặt cắt K-K ta có:

$$\sigma^K = \sigma_u \cdot \gamma = 20 \times 2,2 = 44 \text{ MPa}$$

$$\tau^K = 2\tau \cdot \gamma = 2 \times 9,1 \times 2,2 = 40 \text{ MPa}$$

$$n_{\sigma_{ch}} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma^K} = \frac{300}{44} = 6,8; \quad n_{\tau_{ch}} = \frac{174}{40} = 4,35$$

$$n_{ch} = \frac{n_{\sigma_{ch}} \cdot n_{\tau_{ch}}}{\sqrt{n_{\sigma_{ch}}^2 + n_{\tau_{ch}}^2}} = \frac{6,8 \times 4,35}{\sqrt{6,8^2 + 4,35^2}} = 3,7$$

trong đó: τ_{ch} - giới hạn chảy của ứng suất tiếp:

$$\tau_{ch} = 0,58 \cdot \sigma_{ch} = 0,58 \times 300 = 174 \text{ MPa}$$

Độ bền tĩnh hoàn toàn đảm bảo.

IV. TÍNH TOÁN Ổ

Bài toán: Từ các số liệu đã có ở trên hãy chọn ổ cho trục chậm hộp giảm tốc.

Lời giải:

1. Xác định phản lực tựa

Phản lực tựa (xem bước III): $X_A = X_B = 2265 \text{ N}$; $Y_A = 165 \text{ N}$; $Y_B = 2265 \text{ N}$; $R_{AQ} = 1090 \text{ N}$; $R_{BQ} = 4590 \text{ N}$.

Khi làm việc một phía (tải trọng không thuận nghịch) lực dọc trục N do một ổ chịu.

Trong trường hợp này là trục ổ bên phải.

Vì thế $Z_A = 0$; $Z_B = N = 1010 \text{ N}$.

Nếu có sự làm việc hai phía (tác dụng thuận nghịch) của bộ truyền thì

$$Z_A = Z_B = N.$$

Phản lực hướng tâm tổng cộng là:

$$R_{rA} = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} + R_{AQ} = \sqrt{2265^2 + 165^2} + 1090 = 3355 \text{ N}$$

$$R_{rB} = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} + R_{BQ} = \sqrt{2265^2 + 2285^2} + 4590 = 7800 \text{ N}$$

2. Xác định tải trọng tĩnh tương đương

Gối tựa B là gối tựa chịu tải lớn nhất, vì tại đó: $R_{rB} = 7800 \text{ N}$; $R_A = 1010 \text{ N}$.

Giá trị lớn nhất sau đây trong hai giá trị được lấy làm tải trọng tĩnh tương đương đối với ổ đỡ và ổ đỡ chặn.

$$C_0 = X_0 \cdot R_r + Y_0 \cdot R_a \text{ và } C_0 = R_r$$

trong đó X_0 và Y_0 - hệ số tải trọng tĩnh dọc trục và hướng kính đối với các ổ đỡ và đỡ chặn được cho trong các bảng 17-10, đối với ổ bi hướng kính (ГОСТ 8338-75):

$$X_0 = 0,6 \text{ và } Y_0 = 0,5. \text{ Khi đó:}$$

$$C_0 = 0,6 \times 7800 + 0,5 \times 1010 = 5785 \text{ N;}$$

$$C_0 = 7800 \text{ N}$$

Bởi vậy, giá trị tính toán của tải trọng tương đương là: $C_0 = 7800 \text{ N} = 780 \text{ daN}$.
Ta dùng trị số này để tính tải trọng động tương đương. Việc tính toán khả năng chịu tải tĩnh thường chỉ tiến hành với tần số vòng nhỏ hơn 1 vg/ph.

3. Xác định tải trọng động tương đương

Các hệ số của tải trọng hướng kính và dọc trục X và Y được xác định theo tỷ số R_a/C_0 theo bảng cho sẵn. Trong trường hợp này $R_a/C_0 = 1010/7800 \approx 0,13$, vì thế $X = 0,56$ và $Y = 1,4$.

Trong bài toán này vòng trong quay, nên hệ số quay $V = 1$ (trong trường hợp vòng ngoài quay $V = 1,2$).

Vì hộp giảm tốc làm việc với tải trọng bình ổn không có va đập nên $K_\sigma = 1$.
Giá trị của hệ số K kể đến nhiệt độ được chọn theo nhiệt độ nung nóng lớn nhất đối với ổ theo số liệu sau:

Nhiệt độ ổ C_0	< 100	125	150	175	200	225
K_T	1	1,05	1,10	1,15	1,25	1,35

Trong cơ cấu được khảo sát nhiệt độ nung nóng ổ không quá 60°C , nên $K_T = 1$.

Do đó tải trọng động tương đương được xác định như sau:

$$P = X.V.R_r + Y.R_a).K_{\sigma}.K_T \\ = (0,56 \times 1 \times 7800 + 1,4 \times 1010) \times 1 \times 1 = 5780 \text{ N}$$

Khả năng chịu tải động lực C của ổ được xác định theo bảng, trong đó tỷ số của C với P được cho sẵn (bảng 17-10). Với $T = 24000$; $n = 124$ vg/ph, ta có:

$$\frac{C}{P} = 5,65. \text{ Do đó khả năng chịu tải động lực của ổ là:}$$

$$C = 5,65.P = 5,65 \times 5780 = 32600 \text{ N} = 3260 \text{ daN.}$$

Chọn ổ loại nhẹ một dãy hướng kính № 212 phù hợp với giá trị của $C = 3260 \text{ daN}$.

Bởi vì đối với ổ loại đó $d = 60 \text{ mm}$, $D = 110 \text{ mm}$, $B = 22 \text{ mm}$, $r = 2,5 \text{ mm}$, $C = 4110 \text{ daN}$, $C_0 = 3150 \text{ daN}$, hệ số an toàn về khả năng chịu tác dụng động lực của ổ là:

$$n = \frac{4110}{3260} = 1,26$$

V. CHỌN VÀ TÍNH TOÁN KHỚP NỐI TRỤC

Bài toán: Theo các kết quả của các mục trước hãy chọn khớp nối trục chậm hộp giảm tốc với trục tang.

Lời giải:

Để nối trục hộp giảm tốc với trục tang thường dùng khớp ly hợp. Người ta chọn nó theo đường kính lớn nhất của các trục nối và kiểm tra theo công thức:

$$[M] \geq K_{lv}.M$$

trong đó: K_{lv} - hệ số chế độ làm việc (thường lấy $K_{lv} = 1,25 \div 1,5$ đối với băng tải và $K_{lv} = 1,5 \div 2,0$ đối với máy vận chuyển bằng xích: $M = M_2$).

Trong trường hợp này với $d = 50 \text{ mm}$ ta chọn theo ГОСТ 5006-55 khớp nối có đặc trưng sau đây: $[M] = 1400 \text{ Nm}$, $[n] = 5000 \text{ vg/ph}$, chiều dài nửa khớp nối $l_k = 70 \text{ mm}$.

Khi đó (lấy $K_{IV} = 1,50$) ta có:

$$1400 \geq 1,5 \times 725$$

Do đó, độ bền của khớp nối được đảm bảo.

Bảng 17-7. Hệ số tập trung ứng suất khi uốn K_σ và xoắn K_τ của trục

Yếu tố tập trung ứng suất	Giá trị K_σ với σ_B MPa		Giá trị K_τ với σ_B MPa	
	700	1000	700	1000
Rãnh tròn với $h/r = 1$				
$r/d = 0,02$	1,49	1,60	1,37	1,39
$r/d = 0,05$	1,69	1,83	1,46	1,51
$r/d = 0,10$	1,55	1,72	1,42	1,46
rãnh then	1,89	2,26	1,71	2,22
Lắp chặt với $P \geq 20$ MPa	2,4	3,60	1,8	2,5
ren	2,2	2,61	1,0	1,0

Bảng 17.8. Bảng hệ số $\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$

Vật liệu	Giá trị $\varepsilon_\sigma \approx \varepsilon_\tau$ với đường kính trục d , mm							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Thép cacbon ($\sigma_B = 400 \div 500$ MPa)	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Thép cacbon và thép hợp kim ($\sigma_B = 500 \div 800$ MPa)	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Thép hợp kim ($\sigma_B = 800 \div 1200$ MPa)	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Thép hợp kim ($\sigma_B = 1200 \div 1400$ MPa)	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

Bảng 17-9. Hệ số β

Phương pháp gia công	Giá trị β với σ_B , MPa		
	400 ÷ 500	600 ÷ 900	1000 ÷ 1200
Không gia công	0,75	0,65	0,45
Mài	1	1	1
Tiện	0,95	0,9	0,8
Gia công thô	0,85	0,8	0,65
Tôi cao tần	—	1,5 ÷ 2,8	1,3 ÷ 2,2
Thấm cacbon	1,8 ÷ 3	—	—
Thấm nitơ	—	—	1,1 ÷ 2,1

Bảng 17-10. Giá trị hệ số X_o , Y_o đối với ổ đỡ và đỡ chặn

Dạng ổ	Ổ một dãy		Ổ hai dãy	
	X_o	Y_o	X_o	Y_o
Ổ bi đỡ	0,6	0,5	0,6	0,5
Ổ bi chặn với α , °				
18		0,43		0,86
19		0,43		0,86
20		0,42		0,84
25	0,5	0,38	1	0,76
26		0,37		0,74
30		0,33		0,66
35		0,29		0,58
36		0,28		0,56
40		0,26		0,52
Ổ bi tự điều chỉnh, ổ đĩa tự điều chỉnh và ổ côn ních	0,5	$0,22\text{ctg}\alpha$	1	$0,44\text{ctg}\alpha$

Bảng 17-11. Giá trị X và Y đối với ổ đỡ và đỡ chặn

Dạng ổ			Một dãy				Hai dãy		
			$\frac{R_a}{VRr} > e$		$\frac{R_a}{VRr} \leq e$		$\frac{R_a}{VRr} > 0$		e
α°	R_a/C_o	iR_a/C_o	X	Y	X	Y	X	Y	
0	0,014			2,30				2,30	0,19
	0,028			1,99				1,99	0,22
	0,056			0,71				1,71	0,26
	0,084			1,55				1,55	0,28
	0,110		0,56	1,45	1	0	0,56	1,45	0,30
	0,170			1,31				1,31	0,34
	0,28			1,15				1,15	0,38
	0,42			1,04				1,04	0,42
	0,56			1,00				1,00	0,44
12		0,014		1,81		2,08		2,94	0,30
		0,029		1,62		1,84		2,63	0,34
		0,057		1,46		1,60		2,37	0,37
		0,870		1,34		1,52		2,18	0,41
		0,110	0,45	1,22	1	1,39	0,74	1,93	0,45
		0,170		1,13		1,30		1,84	0,45
		0,290		1,04		1,20		1,69	0,52
		0,430		1,01		1,16		1,64	0,54
		0,570		1,00		1,16		1,62	0,54
15		0,015		1,45		1,65		2,39	0,38
		0,020		1,40		1,57		2,28	0,40
		0,058		1,30		1,46		2,11	0,43
		0,087		1,23		1,38		2,00	0,46
		0,120	0,44	1,19	1	1,34	0,72	1,93	0,47
		0,170		1,12		1,26		1,82	0,50

Tiếp theo bảng 17-11

Dạng ổ			Một dãy				Hai dãy		
			$\frac{R_a}{VRr} > e$		$\frac{R_a}{VRr} \leq e$		$\frac{R_a}{VRr} > 0$		e
α°	R_a/C_o	iR_a/C_o	X	Y	X	Y	X	Y	
15		0,290		1,02		1,14		1,66	0,55
		0,44		1,00		1,12		1,63	0,56
		0,58		1,00		1,12		1,63	0,56
18			0,43	1,00		1,09	0,70	1,63	0,57
19,20			0,41	0,87		0,92	0,67	1,44	0,57
24									
25,26			0,39	0,76		0,78	0,63	1,24	0,84
30									
35,36			0,37	0,66	1	0,66	0,60	1,07	0,95
40			0,35	0,57		0,55	0,57	0,93	1,14
Ổ bi tự điều chỉnh			0,4	0,40 $\text{ctg}\alpha$	1	0,42 $\text{ctg}\alpha$	0,65	0,65 $\text{ctg}\alpha$	1,15 $\text{ctg}\alpha$
Ổ bi đỡ tháo được			0,5	0,25	—	—	—	—	0,2

PHỤ CHƯƠNG

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VẬT LÝ VÀ TOÁN

A. VẬT LÝ

I. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

1. Phương trình chuyển động

Mô tả quy luật thay đổi vị trí của chất điểm trong không gian và thời gian:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{hay} \quad x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

2. Phương trình quỹ đạo

Mô tả dạng đường đi (thẳng, tròn, cong...) của chất điểm trong không gian:

$$f(x, y, z) = C$$

3. Những đại lượng động học đặc trưng

a. *Vận tốc*: Đặc trưng cho phương, chiều và sự nhanh chậm của chuyển động:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt};$$

$\vec{v}$ có phương tiếp tuyến với quỹ đạo, có độ lớn $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

b. *Gia tốc*: Đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \text{độ lớn} \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

Trong chuyển động cong, $\vec{w}$ luôn có thể phân tích thành hai thành phần:

$$\vec{w} = \vec{w}_t + \vec{w}_n$$

$\vec{w}_t$: gia tốc tiếp tuyến; độ lớn $w_t = \frac{dv}{dt}$; w_t đặc trưng cho sự biến thiên của vectơ vận tốc về giá trị.

$\vec{w}_n$: gia tốc pháp tuyến; độ lớn $w_n = \frac{v^2}{R}$ (R là bán kính cong chính khúc)

$\vec{w}_n$ đặc trưng cho sự biến thiên về phương của vectơ vận tốc.

c. *Chuyển động tròn*: chuyển động của chất điểm có thể được đặc trưng bởi:

- góc quay φ : $\varphi = \frac{s}{R}$;

- vận tốc góc: $\vec{\omega}$ có phương trùng với trục của quỹ đạo tròn:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \text{ và độ lớn } \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{R}$$

- gia tốc góc: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$; có độ lớn $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{w_t}{R}$ với $\vec{w}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}$.

4. Một số công thức

Dạng chuyển động	Chuyển động thẳng	Chuyển động tròn
Chuyển động đều	$\vec{w} = \vec{0}$; $s = vt$	$\vec{\varepsilon} = \vec{0}$; $\varphi = \omega.t$
Chuyển động biến đổi đều	$\vec{w} = \vec{\text{const}}$ $v = v_0 + w.t$	$\vec{\varepsilon} = \vec{\text{const}}$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon.t$
$W > 0$: nhanh dần đều	$s = v_0.t + \frac{1}{2} w.t^2$	$\varphi = \omega_0.t + \frac{1}{2} \varepsilon.t^2$
$W < 0$: chậm dần đều	$v^2 - v_0^2 = 2w.s$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon.\alpha$

5. Công thức tổng hợp vận tốc và gia tốc

a. *Tổng hợp vận tốc*: $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{V}_r$

$\vec{v}_a$ là vận tốc tuyệt đối của chất điểm;

$\vec{v}_e$ là vận tốc theo của chất điểm;

$\vec{V}_r$ là vận tốc tương đối của chất điểm.

b. *Tổng hợp gia tốc*: $\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r$

$\vec{W}_a$ là gia tốc tuyệt đối của chất điểm;

$\vec{W}_e$ là gia tốc theo của chất điểm;

$\vec{W}_r$ là gia tốc tương đối của chất điểm.

II. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

1. Các định luật Newton

a) *Định luật 1*: “Mọi chất điểm cô lập nếu đang đứng yên thì sẽ tiếp tục

đứng yên, nếu đang chuyển động thì chuyển động của nó là thẳng đều. Nói cách khác là một vật cô lập bảo toàn trạng thái chuyển động của mình.

b. Định luật 2:
$$\vec{W} = \vec{F}/m ;$$

$\vec{W}$ gia tốc; $\vec{F}$ là hợp lực tác dụng lên chất điểm; m là khối lượng của chất điểm (xem là không đổi). Trong trường hợp tổng quát, với m không đổi hoặc thay đổi ta có: $\vec{F} = d\vec{K}/dt$ với $\vec{K} = m \cdot \vec{v}$ gọi là vectơ động lượng chất điểm.

Phương trình động lực học trong hệ quy chiếu có gia tốc $\vec{W}$:

$$\vec{F} + \vec{F}_{qt} = \vec{F} + (-m\vec{W}) = m\vec{W}_e$$

c) Định luật 3: Khi chất điểm A tác dụng lên chất điểm B một lực $\vec{F}$ thì chất điểm B cũng tác dụng lên chất điểm A một lực $\vec{F}$, hai lực này cùng phương, ngược chiều và có độ lớn bằng nhau; tức là trực đối nhau:

$$\vec{F} = -\vec{F}$$

2. Nguyên lý tương đối Galiléo và phép biến đổi Galiléo

a. Nguyên lý: “Mọi định luật cơ học có dạng như nhau trong các hệ quy chiếu quán tính khác nhau”. Cũng có nghĩa là các hiện tượng và các quá trình cơ học đều xảy ra giống nhau trong các hệ quy chiếu quán tính khác nhau.

b. Phép biến đổi:
$$\begin{aligned} x &= x' + Vt & \leftrightarrow & x' = x - Vt \\ y &= y' & z &= z' \\ t &= t' \end{aligned}$$

trong đó (x, y, z, t) là toạ độ không thời gian trong hệ quy chiếu quán tính O (xem là đứng yên) và (x', y', z', t') là toạ độ không thời gian trong hệ quy chiếu quán tính O' chuyển động thẳng đều đối với hệ O dọc theo trục Ox với vận tốc $\vec{v}$.

3. Một số lực thường gặp trong cơ học

- Trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$
- Phản lực N của giá đỡ tác dụng lên vật.
- Lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ hướng ngược chiều chuyển động và có độ lớn $F_{ms} = kN$; k là hệ số ma sát, N là phản lực.
- Lực căng $\vec{T}$ tác dụng tại mỗi điểm của dây.
- Lực hấp dẫn: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$;

G là hằng số hấp dẫn vũ trụ bằng $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$.

- Lực hướng tâm tác dụng lên vật trong chuyển động cong có độ lớn

$$F_{ht} = mv^2/R$$

- Lực quán tính $\vec{F}_{qt} = -m\vec{W}$; $\vec{W}$ là gia tốc tịnh tiến của hệ quy chiếu chuyển động.

4. Định lý về động lượng

• **Định lý 1:** $\vec{F} = d\vec{K}/dt$ - Đạo hàm của động lượng chất điểm hoặc hệ chất điểm theo thời gian bằng hợp lực tác dụng lên chất điểm (hoặc hệ chất điểm) đó.

• **Định lý 2:** Độ biến thiên động lượng của chất điểm (hoặc hệ chất điểm) trong khoảng thời gian Δt bằng xung lượng của hợp lực tác dụng lên chất điểm (hoặc hệ chất điểm) trong khoảng thời gian đó:

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \int_1^2 \vec{F} dt$$

Nếu $\vec{F} = \vec{\text{const}}$ thì $\Delta \vec{K} = \vec{F}\Delta t$.

5. Định luật bảo toàn động lượng

- **Với một hệ cô lập:** Tổng động lượng của các chất điểm được bảo toàn:

$$\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \dots + \vec{K}_n = \sum \vec{K}_i = \vec{\text{const}}$$

• **Bảo toàn động lượng theo một phương:** Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực bằng không trên một phương x nào đó thì tổng động lượng của hệ được bảo toàn trên phương đó:

$$K_{1x} + K_{2x} + \dots + K_{nx} = \sum K_{ix} = \text{const}$$

III. CÔNG VÀ NĂNG LƯỢNG

1. Công và công suất

- **Công:** Đặc trưng cho tác dụng của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt lực di chuyển:

$$dA = \vec{F}d\vec{s} = Fds \cos\alpha \text{ hay } A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s};$$

Nếu lực $\vec{F}$ không đổi và chuyển động là thẳng thì $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$

- **Công suất:** Đặc trưng cho tốc độ thực hiện công của lực: $p = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

2. Định luật bảo toàn và chuyển hóa năng lượng

• *Phát biểu:* Trong một hệ cô lập, năng lượng có thể chuyển hóa từ dạng này sang dạng khác hoặc từ vật này sang vật khác nhưng năng lượng toàn phần của hệ thì không đổi.

• *Đối với hệ không cô lập:* công của ngoại lực tác dụng lên hệ bằng độ biến thiên năng lượng của hệ: $A = E_2 - E_1$.

• *Cơ năng:* Là một dạng của năng lượng, ứng với chuyển động cơ học. Cơ năng bằng tổng động năng và thế năng của các chất điểm của hệ hoặc của chất điểm trong trường lực thế.

3. Động năng và định lý động năng

Động năng là phần cơ năng gắn với trạng thái chuyển động của vật, định nghĩa: $T = \frac{1}{2} mv^2$.

• *Định lý:* Độ biến thiên động năng của chất điểm khi chuyển từ vị trí 1 đến vị trí 2 bằng công của hợp lực tác dụng lên chất điểm trong chuyển động đó:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A$$

4. Thế năng trong trường hấp dẫn

• *Công của lực hấp dẫn* không phụ thuộc vào dạng đường đi mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và cuối. Trường hấp dẫn là một trường lực thế.

• *Định lý về thế năng:* Độ giảm thế năng của chất điểm trong trường hấp dẫn bằng công của lực hấp dẫn tác dụng lên chất điểm trong chuyển động đó:

$$U_1 - U_2 = \left(-G \frac{Mm}{r_1} \right) - \left(-G \frac{Mm}{r_2} \right) = A$$

• *Trường trọng trường* là trường hấp dẫn của quả đất. Đối với trọng trường đều, chọn gốc thế năng tại mặt đất, ta có:

$$U_1 - U_2 = mgh_1 - mgh_2 = A$$

5. Định luật bảo toàn cơ năng

Cơ năng của chất điểm (hay hệ chất điểm) chuyển động trong một trường lực thế được bảo toàn: $E = T + U_1 = \text{const}$.

- Với trường hấp dẫn: $E = \frac{mv^2}{2} + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \text{const}$

- Với trọng trường đều: $E = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}$

6. Va chạm giữa hai vật

- *Va chạm đàn hồi*: Tuân theo định luật bảo toàn động lượng và động năng
- Tổng động lượng cũng như tổng động năng của 2 chất điểm trước và sau va chạm đều bằng nhau.

Với va chạm đàn hồi, xuyên tâm: vận tốc hai chất điểm sau va chạm là:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} ; \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

- *Va chạm mềm*: Chỉ tuân theo định luật bảo toàn động lượng, không tuân theo định luật bảo toàn động năng. Với va chạm mềm tuyệt đối (2 vật dính vào nhau) thì vận tốc sau va chạm là:

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

IV. ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

1. Khối tâm và chuyển động của khối tâm

- *Định nghĩa*: Khối tâm G của hệ n chất điểm có tọa độ:

$$\vec{R}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M} \quad \text{với } M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

- *Chuyển động khối tâm* giống như chuyển động của một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của cả hệ và chịu tác dụng của lực bằng tổng hợp lực tác dụng lên hệ:

$$\vec{F} = M\vec{W}_G$$

vận tốc của khối tâm $\vec{V} = \frac{d\vec{R}_G}{dt} ; \quad \vec{W}_G = \frac{d\vec{V}}{dt}$

2. Chuyển động của vật rắn: Chuyển động bất kỳ của vật rắn có thể quy về hai dạng chuyển động cơ bản gồm chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay.

- **Chuyển động tịnh tiến:** Là chuyển động trong đó mọi chất điểm của vật rắn có quỹ đạo giống nhau, có cùng đường đi s , cùng vận tốc $\vec{v}$ và cùng gia tốc $\vec{W}$. Phương trình chuyển động tịnh tiến của vật rắn là phương trình chuyển động của khối tâm.

- **Chuyển động quay xung quanh một trục cố định:** Là chuyển động trong đó mọi phần tử của vật rắn có quỹ đạo tròn, nằm vuông góc với trục quay, cùng góc quay φ , cùng vận tốc góc $\vec{\omega}$ và cùng gia tốc góc $\vec{\epsilon}$.

Phương trình cơ bản của vật rắn chuyển động quay xung quanh 1 trục Δ cố định có dạng: $\vec{M} = J \cdot \vec{\epsilon}$.

$\vec{M}$ là mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục quay: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t$; có độ lớn $M = r \cdot F_t$; J là mômen quán tính.

3. Mômen quán tính đối với trục quay Δ

- **Định nghĩa:** $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$

- **Mômen quán tính của 1 số vật rắn đối với trục quay qua khối tâm G :**

- Thanh mảnh đồng đều: $J_G = \frac{ml^2}{12}$; trục quay vuông góc với thanh.

- Vành tròn hoặc hình trụ rỗng: $J_G = mr^2$

- Khối cầu đặc: $J_G = \frac{2}{5} mr^2$

- Đĩa tròn đặc hoặc hình trụ đặc: $J_G = \frac{mr^2}{2}$

- **Định lý Steiner - Huguens:** $J = J_G + md^2$

4. Định lý về mômen động lượng

a. **Định lý 1:** $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \vec{M}$

“Đạo hàm theo thời gian của vectơ mômen động lượng của vật rắn quay xung quanh một trục cố định bằng tổng mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn”.

b. **Định lý 2:** $\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_1^2 \vec{M} dt$

“Độ biến thiên của vectơ mômen động lượng của vật rắn quay xung quanh một trục cố định bằng xung lượng của tổng mômen ngoại lực tác dụng lên vật rắn”.

Nếu $\vec{M} = \vec{\text{const}}$ thì $\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \vec{M} \Delta t$

c. Định luật bảo toàn mômen động lượng

Với hệ cô lập thì tổng mômen động lượng của hệ vật rắn bảo toàn:

$$\sum_i \vec{L}_i = \sum_i (J_i \vec{\omega}_i) = \vec{\text{const}}$$

Kết quả này cũng đúng với hệ không cô lập, nhưng tổng mômen ngoại lực $\vec{M}$ bằng không.

5. Công và động năng của vật rắn quay

a. Công và công suất

- Công của lực tác dụng lên vật rắn quay xung quanh một trục cố định:

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 M d\varphi; \quad M \text{ là mômen lực. Nếu } M \text{ không đổi thì } A = M \cdot \Delta\varphi$$

- Công suất: $P = \frac{dA}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

b. Định lý biến thiên động năng của vật rắn quay xung quanh một trục cố định

$$\Delta T = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 = A$$

trong đó $T = \frac{1}{2} J \omega^2$ gọi là động năng của vật rắn quay.

“Biến thiên động năng của vật rắn quay xung quanh một trục cố định có giá trị bằng công của ngoại lực tác dụng lên vật rắn trong chuyển động quay đó”.

Nếu vật rắn vừa quay vừa tịnh tiến thì động năng của vật rắn là:

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} M v^2$$

V. DAO ĐỘNG VÀ SÓNG CƠ

1. Điều kiện để một hệ có thể dao động

- Tồn tại một vị trí cân bằng bền.
- Luôn có một lực kéo hệ về vị trí cân bằng bền.
- Hệ có quán tính.

2. Các phương trình dao động

a. Dao động điều hoà:

- $x = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ với x là độ dời của vật khỏi vị trí cân bằng, chu kỳ

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Năng lượng dao động điều hoà

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 = \text{const}$$

- Con lắc vật lý: Tần số góc $\omega_0 = \sqrt{\frac{J_0 g d}{J}}$; J là mômen quán tính đối với trục O nằm ngang; $d = OG$ với G là trọng tâm của con lắc.

b. Dao động tắt dần:

- $x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ với $\beta = \frac{r}{2m}$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- Lượng giảm lôga là đại lượng đặc trưng cho mức độ tắt dần của dao động:

$$\delta = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T$$

c. Dao động cưỡng bức: $x = A \cos(\Omega t + \Phi)$

với Ω là tần số góc cưỡng bức;

$$A = \frac{P_0}{m \sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$P = P_0 \sin \Omega t$ là lực kích động tuần hoàn;

$$\tan \Phi = \frac{-2\beta \Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}; P_0 \text{ là biên độ của lực kích thích tuần hoàn.}$$

Khi cộng hưởng $\Omega_{ch} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ với ma sát nhỏ $\beta \approx 0$ thì $\Omega_{ch} = \omega_0$.

3. Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng tần số, cùng phương

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{với } \begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

4. Sóng cơ

• **Định nghĩa:** Là những dao động đàn hồi lan truyền trong môi trường vật chất (rắn, lỏng, khí) theo thời gian. Truyền sóng tức là truyền pha dao động, còn các phần tử vật chất chỉ dao động xung quanh vị trí cân bằng.

Với sóng dọc, vận tốc truyền sóng $v = \sqrt{\frac{l}{\alpha\rho}}$;

α là hệ số đàn hồi; ρ là khối lượng riêng;

Với sóng ngang: $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$; G là môđun đàn hồi trượt môi trường.

• **Hàm sóng**

- Đối với sóng phẳng đơn sắc: $x = a \cos\left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}\right)$

- Đối với sóng cầu đơn sắc: $x = k \frac{a}{y} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}\right)$

với y là khoảng cách từ nguồn sóng đến điểm khảo sát; k là hệ số tỷ lệ.

5. Năng lượng sóng cơ

• Năng lượng sóng trong một phần tử thể tích dV là:

$$dE = \rho \omega^2 a^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi y}{\lambda}\right) dV$$

• Mật độ năng lượng trung bình sóng cơ:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 a^2$$

• Mật độ năng thông trung bình là năng thông trung bình gửi qua một đơn vị diện tích:

$$\bar{p} = \frac{\bar{P}}{S} = E v$$

$\Rightarrow$ Năng thông trung bình gửi qua diện tích S đặt vuông góc với nó là $\bar{P} = \bar{E} S v$ với v là vận tốc truyền sóng.

VI. THUYẾT TƯƠNG ĐỐI

1. Hai tiên đề Einsteins

a) Mọi định luật vật lý đều giống nhau trong các hệ quy chiếu quán tính khác nhau.

b) Vận tốc ánh sáng trong chân không đều bằng nhau đối với mọi hệ quy chiếu quán tính và có giá trị $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

2. Phép biến đổi Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'; \quad z = z'$$

trong đó (x, y, z, t) là toạ độ không thời gian trong hệ quy chiếu quán tính O (xem là đứng yên) và (x', y', z', t') là toạ độ không thời gian trong hệ quy chiếu quán tính O' chuyển động thẳng đều đối với hệ O dọc theo trục Ox với vận tốc $\vec{v}$.

3. Động học tương đối

- *Tính tương đối của khoảng không gian:* $l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Chiều dài l' của vật dọc theo phương chuyển động trong hệ quy chiếu mà vật chuyển động ngắn hơn chiều dài l của vật trong hệ quy chiếu mà vật đứng yên.

- *Tính tương đối của khoảng thời gian:* $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Khoảng thời gian trôi đi $\Delta t'$ trong hệ quy chiếu đứng yên lớn hơn so với khoảng thời gian trôi đi Δt trong hệ quy chiếu chuyển động.

4. Động lực học tương đối

- *Phương trình chuyển động:* $\vec{F} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ với $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

- *Hệ thức Einsteins liên hệ giữa khối lượng và năng lượng:* $E = mc^2$.

- *Động năng của vật chuyển động với vận tốc v :*

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

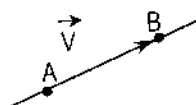
B. TOÁN

VECTƠ - MA TRẬN - TOOCXO

I. VECTƠ

Vectơ là một đoạn thẳng AB có định hướng với gốc là A ngọn là B và được ký hiệu là: $\vec{V}$, $\vec{AB}$.

Vectơ được xác định bởi: gốc, phương, chiều và môđun.



- Vectơ tự do là vectơ có môđun cho trước, nhưng điểm đặt và đường thẳng chứa nó không cho trước.
- Vectơ trượt là vectơ có tất cả các tiêu chí cho trước, trừ điểm đặt của nó.
- Vectơ buộc là vectơ mà tất cả các tiêu chí đều biết trước.
- Vectơ đơn vị là vectơ có môđun bằng đơn vị.

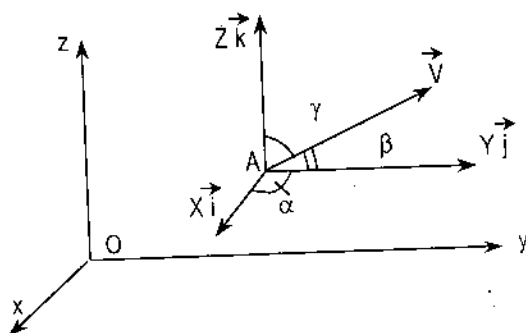
Vectơ $\vec{V}$ song song với vectơ đơn vị $\vec{i}$ được viết:

$$\vec{V} = |\vec{V}| \vec{i}, \quad |\vec{V}| \text{ là môđun của } \vec{V}.$$

Nếu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên ba trục tọa độ vuông góc Oxyz thì có thể viết:

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

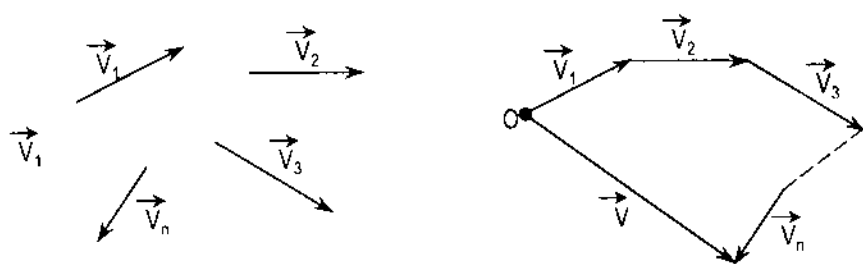
Trong đó X, Y, Z là hình chiếu của $\vec{V}$ lên các phương Ox, Oy, Oz.



• Tổng vectơ:

Giả sử có một hệ vectơ tự do với các thành phần tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz là:

$$\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1) \dots \vec{V}_n(X_n, Y_n, Z_n)$$



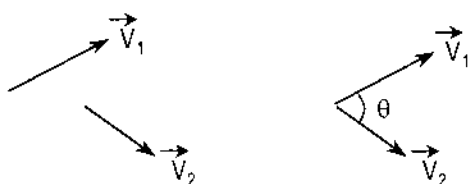
Vector tổng $\vec{V}$ là vector nối gốc của $\vec{V}_1$ với ngọn của $\vec{V}_n$.

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

Trong đó: $X = \sum_{i=1}^n X_i$; $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$; $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$

$$|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

• Tích vô hướng của hai vector $\vec{V}_1, \vec{V}_2$:



$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \text{ nếu } \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2.$$

• Tích vector của hai vector $\vec{V}_1, \vec{V}_2$:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2; \quad \vec{V} \perp (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

$|\vec{V}| = |\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \sin\theta$ là diện tích của hình bình hành OABC.

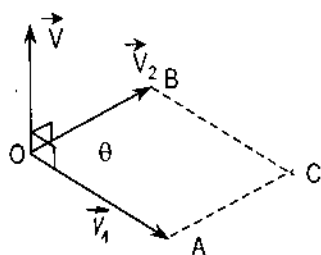
Nếu $\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$ thì $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$$

$$\lambda \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \lambda(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_1 \wedge \lambda \vec{V}_2$$

(λ là một vô hướng)



$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{V}_x \cdot \vec{i} + \vec{V}_y \cdot \vec{j} + \vec{V}_z \cdot \vec{k}$$

trong đó: $V_x = y_1 z_2 - z_1 y_2$

$$V_y = z_2 x_1 - z_1 x_2$$

$$V_z = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

• Tích hỗn hợp của ba vector $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$

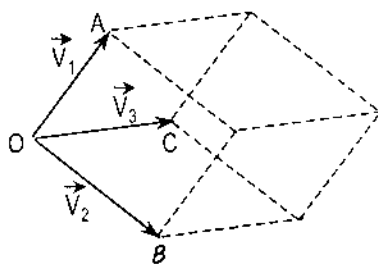
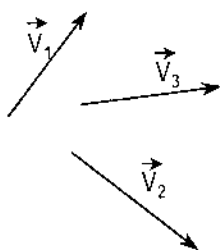
$$P = \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$P = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) =$ thể tích hình hộp dựng trên các vector $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$.

$P > 0$ nếu $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ lập thành một tam diện thuận.

$P < 0$ nếu $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ lập thành một tam diện ngược.

$$\begin{aligned} (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) &= (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = -(\vec{V}_1, \vec{V}_3, \vec{V}_2) \\ &= -(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_3) = -(\vec{V}_3, \vec{V}_2, \vec{V}_1). \end{aligned}$$



• Tích vector kép của ba vector $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3) - \vec{V}_3 \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)$$

• Đạo hàm vector

Cho $\vec{W}(t) = X_i(t) \vec{x}_i + Y_i(t) \vec{y}_i + Z_i(t) \vec{z}_i$ trong hệ quy chiếu $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.
 $\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$ là các vector đơn vị trên các trục tọa độ O_ixyz ; t là biến.

a) Đạo hàm trong R_i của $\vec{W}(t)$ viết trong R_i .

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{W}}{dt} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{d\vec{W}}{du} \\ \frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}) &= \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(f\vec{W}) &= \frac{df}{dt}\vec{W} + f\frac{d\vec{W}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\vec{u} \wedge \vec{v}) &= \frac{d\vec{u}}{dt} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{d^i \vec{W}}{dt} &= \dot{X}_i(t)\vec{x}_i + \dot{Y}_i(t)\vec{y}_i + \dot{Z}_i(t)\vec{z}_i\end{aligned}$$

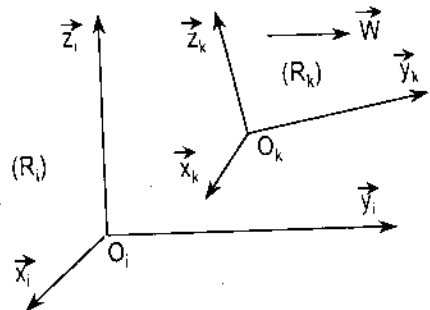
b) Đạo hàm vector $\vec{W}(t)$ thuộc hệ R_k xét trong hệ R_i

$\vec{x}_k = \vec{x}_k(t)$; $\vec{y}_k = \vec{y}_k(t)$; $\vec{z}_k = \vec{z}_k(t)$ là những vector đơn vị trên các trục tọa độ của hệ R_k , ta có biểu diễn:

$$\vec{W}(t) = X_k\vec{x}_k + Y_k\vec{y}_k + Z_k\vec{z}_k$$

Theo quy tắc đạo hàm vector ta có:

$$\begin{aligned}\frac{d^i \vec{W}(t)}{dt} &= \dot{X}_k\vec{x}_k + \dot{Y}_k\vec{y}_k + \dot{Z}_k\vec{z}_k + \\ &+ X_k \frac{d^i \vec{x}_k}{dt} + Y_k \frac{d^i \vec{y}_k}{dt} + Z_k \frac{d^i \vec{z}_k}{dt}\end{aligned}$$



Công thức đạo hàm đối với nền di động được viết:

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

Vector $\vec{\Omega}_k^i$ được gọi là vector quay của hệ R_k đối với hệ R_i .

$$\begin{aligned}\frac{d^i \vec{W}}{dt} &= \frac{d^k \vec{W}}{dt} + X_k \frac{d^i \vec{x}_k}{dt} + Y_k \frac{d^i \vec{y}_k}{dt} + Z_k \frac{d^i \vec{z}_k}{dt} \\ \frac{d^i \vec{W}}{dt} &= \frac{d^k \vec{W}}{dt} + X_k \cdot \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k + Y_k \cdot \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k + Z_k \cdot \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k \\ &= \frac{d^k \vec{W}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge (X_k \vec{x}_k + Y_k \vec{y}_k + Z_k \vec{z}_k)\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\boxed{\frac{d^i \vec{W}(t)}{dt} = \frac{d^k \vec{W}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{W}(t)}$$

Tính chất của vectơ $\vec{\Omega}_k^i$:

* Vectơ $\vec{\Omega}_k^i$ là vectơ phản xứng đối với chỉ số:

$$\vec{\Omega}_k^i = -\vec{\Omega}_i^k$$

* Công thức Chasles:

$$\vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^j + \vec{\Omega}_j^i$$

$$* \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} = \frac{d^k \vec{\Omega}_k^i}{dt}$$

II. CÁC PHÉP TÍNH MA TRẬN

Khi giải quyết các bài toán trong các lĩnh vực khác nhau của kỹ thuật thường dẫn đến một hệ phương trình đại số tuyến tính với n phương trình và n ẩn. Để giải được hệ phương trình đó, cũng như quá trình dẫn đến hệ đó ta thường gặp phải các phép tính về ma trận, đặc biệt là phép nhân và phép nghịch đảo ma trận.

Ví dụ có hai hệ phương trình sau đây:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2y_1 - y_2 \\ x_2 &= -y_1 + y_2 \end{aligned} \right\} (a) \quad \text{trong đó} \quad \left. \begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2 \\ y_2 &= z_1 - z_2 \end{aligned} \right\} (b)$$

hãy biểu diễn x_i qua z_i ?

Theo cách thông thường ta thay (b) vào (a) và có:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= z_1 + 3z_2 \\ x_2 &= z_1 - 3z_2 \end{aligned} \right\} (c)$$

hoặc dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Kết quả (d) có thể nhận được bằng cách viết ma trận. Cụ thể là:
các hệ (a) và (b) dưới dạng ma trận có dạng:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (a^*) \quad \text{và} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (b^*)$$

Thay (b*) vào (a*) ta đi đến biểu diễn đòi hỏi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (e)$$

So sánh (d) và (e) thấy rằng:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Nghĩa là ma trận vế phải là kết quả của phép nhân hai ma trận ở vế trái.
Vậy quy tắc nhân các ma trận là gì?

• Đại số ma trận

Ma trận là một bảng các số thực hoặc phức dưới đây:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mỗi một a_{ij} được gọi là phần tử của ma trận. Ma trận có m hàng và n cột được gọi là ma trận cấp $(m \times n)$. Khi $m = n$ ta có ma trận vuông.

• Phép cộng và trừ ma trận

Phép cộng và trừ ma trận chỉ thực hiện được đối với các ma trận cùng cấp.
[C] là tổng các ma trận [A] và [B]. Nghĩa là có biểu diễn:

$$[C] = [A] + [B]$$

Trong đó mỗi phần tử C_{ij} của $[C]$ có dạng:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1, m} \text{ và } j = \overline{1, n}).$$

Tương tự đối với phép trừ:

$$[E] = [A] - [B]$$

$$\text{với } e_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (i = \overline{1, m} \text{ và } j = \overline{1, n}).$$

Ví dụ:

$$[A] + [B] = [C]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

và

$$[A] - [B] = [E]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• Hai ma trận bằng nhau

Hai ma trận được gọi là bằng nhau, nếu chúng cùng cấp và có các phần tử tương ứng bằng nhau.

Ví dụ: Nếu các ma trận $[A]$ và $[B]$ có các số hạng tương ứng $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$ và $j = \overline{1, m}$) thì $[A] = [B]$.

• Ma trận chuyển

Nếu ta đổi các hàng và các cột của $[A]$ ta có một ma trận mới gọi là ma trận chuyển và ký hiệu là $[A]^T$.

$$\text{Chú ý là: } ([A]^T)^T = [A]$$

Ví dụ:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [A]^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu $[A] = [A]^T$ (trong đó $a_{ij} = a_{ji}$) ta nói $[A]$ là ma trận đối xứng.

Ví dụ:

$$[A] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ma trận được gọi là ma trận đường chéo, nếu tất cả các phần tử của ma trận đều bằng không, trừ các phần tử trên đường chéo chính.

• Nhân ma trận

Ta hãy xét một biến đổi sau đây:

Nếu

$$[X] = [A] [Y] \text{ và } [Y] = [B] [Z] \text{ thì } [X] = [A] \cdot [B] \cdot [Z]$$

Ở đây $[A] \cdot [B]$ là tích của các ma trận $[A]$ và $[B]$.

Ví dụ:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \right\} (a) \quad \text{và} \quad \left. \begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \end{aligned} \right\} (b)$$

Thay (b) vào (a) ta có:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}).z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}).z_2 \\ &(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}).z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}).z_2 \end{aligned}$$

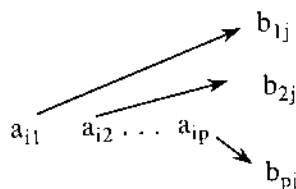
Khi đồng nhất hệ số của z_1 và z_2 ta được:

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^2 a_{ji} b_{ik} \quad (j = 1, 2; k = 1, 2)$$

Như vậy chỉ có thể nhân hai ma trận với nhau, nếu số cột của ma trận thứ nhất bằng số hàng của ma trận thứ hai. Vì vậy, nếu $[A]$ là ma trận cấp $(m \times p)$ và $[B]$ là ma trận cấp $(p \times n)$ thì tích $[A].[B]$ có thể thực hiện được và khi ấy ma trận $[C]$ nhận được có cấp $(m \times n)$. Cụ thể là phần tử C_{ij} được tính theo công thức:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Sơ đồ tính C_{ij} như sau:



Ví dụ:

$$[A] = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}}_{2 \text{ hàng}} \quad \text{và} \quad [B] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}}_{3 \text{ cột}}$$

$$[C] = [A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 56 & 36 & 16 \end{bmatrix}$$

Ngược lại, tích $[B] \cdot [A]$ không thể thực hiện.

• Tính chất của phép nhân ma trận

1- $\{[A] \cdot [B] \cdot [C]\} = [A] \cdot \{[B] \cdot [C]\} = [A] \cdot [B] \cdot [C]$

2- $\{[A] + [B]\} \cdot [C] = [A] \cdot [C] + [B] \cdot [C]$

$[C] \cdot \{[A] + [B]\} = [C] \cdot [A] + [C] \cdot [B]$

3- $\{[A] \cdot [B]\}^T = [B]^T \cdot [A]^T$

• Định thức

Định thức liên hệ trực tiếp với hệ các phương trình đại số tuyến tính và cách giải chúng.

Ví dụ:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = K_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = K_2$$

Nghiệm của hệ này có dạng:

$$x_1 = \frac{K_1 a_{22} - K_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-K_1 a_{21} + a_{11} K_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

với điều kiện là định thức của nó phải khác không.

Nghĩa là:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = D \neq 0$$

Nghiệm trên còn thường được viết:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

Trong đó:

$$D_1 = \begin{bmatrix} K_1 & a_{12} \\ K_2 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_{12} & K_1 \\ a_{22} & K_2 \end{bmatrix}$$

Nói chung, định thức cấp n được cho dưới dạng bảng vuông của n^2 phần tử.

Ví dụ:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Khi loại đi hàng thứ i và cột thứ j của định thức cấp n ta nhận được định thức cấp $(n-1)$, được gọi là ma trận con của phần tử a_{ij} và được ký hiệu là M_{ij} .

$C_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}$ được gọi là phụ đại số của a_{ij} .

Ví dụ:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ta có:

$$c_{11} = (-1)^{(1+1)} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$c_{12} = (-1)^{(1+2)} M_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Định thức D được xác định bởi:

$$D = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n}, \quad (i = \overline{1, n})$$

• Nghịch đảo ma trận

Đối với ma trận vuông $[A]$ tồn tại một ma trận $[B]$ sao cho

$$[A] \cdot [B] = [B] \cdot [A] = [I] \quad (\text{với } [I] \text{ là ma trận đơn vị})$$

thì ma trận $[A]$ là khả đảo, còn ma trận $[B]$ như thế gọi là ma trận nghịch đảo của $[A]$ và được ký hiệu là $[A^{-1}]$. Nghịch đảo của một ma trận chỉ tồn tại nếu nó

không kỳ dị. Nghĩa là định thức của nó khác không. Khi nghịch đảo của một ma trận tồn tại thì đó là duy nhất và biểu thức của nó nhận được bằng cách thay thế từng phần tử a_{ij} của $[A]$ bằng M_{ij} của nó và chuyển vị kết quả nhận được.

$$[A^{-1}] = \frac{1}{\det [A]} \begin{vmatrix} M_{11} & M_{21} & \dots & M_{n1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ M_{1n} & M_{2n} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của $[A]$.

$$[A] = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{vmatrix} \quad \text{ta có:}$$

$$\begin{aligned} \det [A] &= -3 \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} - 11 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = \\ &= -3(-52 + 48) - 6(39 - 24) - 11(-24 + 16) = 10 \neq 0 \end{aligned}$$

$$M_{11} = (-52 + 48) = -4$$

$$M_{12} = (39 - 24) = 15$$

$$M_{13} = (-24 + 16) = -8,$$

tương tự đối với M_{21} , M_{22} , M_{23} , M_{31} , M_{32} , M_{33} .

$$[A^{-1}] = \begin{vmatrix} -0,4 & 1,0 & -0,8 \\ -1,5 & 0,5 & -1,5 \\ -0,8 & 0 & -0,6 \end{vmatrix}$$

Chú ý là:

$$[A^{-1}]^{-1} = [A]; \{[A] \cdot [B]\}^{-1} = [B^{-1}] \cdot [A^{-1}]$$

III. TOOCXO

1. Phép chia hữu hướng

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{p}$ trong không gian vectơ E ba chiều. Tìm một vectơ $\vec{u}$ trong không gian đó để sao cho

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{p} \quad (a)$$

Nếu tồn tại một vectơ $\vec{u}$ như vậy thì ta nói rằng $\vec{u}$ là kết quả của phép chia hữu hướng giữa $\vec{p}$ và $\vec{a}$.

Bất luận vectơ $\vec{u}$ như thế nào ta luôn luôn có

$$\vec{a} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

Vậy nếu $\vec{a} \cdot \vec{p} \neq 0$ thì phương trình (a) không có nghiệm.

Ta hãy xét những khả năng để tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$. Có thể có hai khả năng:

1- Vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{p}$ là bằng không. Khi đó $\vec{u}$ là bất kỳ. Mọi vectơ của không gian E là nghiệm của (a).

2- Cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{p}$ là khác không. Như vậy chỉ còn lại một khả năng duy nhất để tích $\vec{a} \cdot \vec{p} = 0$ là khi hai vectơ trực giao. Trong trường hợp này, tồn tại vectơ $\vec{u}$ dưới dạng:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{p}}{\vec{a}^2} + \lambda \vec{a} \quad (\lambda \text{ là một vô hướng nào đó}).$$

2. Phép ánh xạ phản đối xứng

1. *Định nghĩa:* Ta gọi L là phép ánh xạ của không gian vectơ E và ở trong không gian đó. Nghĩa là L tác dụng vào một vectơ trong không gian E sẽ cho ta một vectơ cũng thuộc về không gian đó. Không gian vectơ E luôn được kết hợp với một không gian affine (ξ). Nếu ta chọn trong (ξ) một hệ trục tọa độ thì mọi vectơ của E đều được xác định trong hệ tọa độ đó.

Cho một vectơ $\vec{a}$ trong không gian E. Phép ánh xạ L tác dụng lên $\vec{a}$ cho ta vectơ $L(\vec{a})$ cũng nằm trong E. Phép ánh xạ L được gọi là phản đối xứng khi nó tác dụng lên hai vectơ bất kỳ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ của E thì ta có điều kiện sau đây:

$$\vec{a} \cdot L(\vec{b}) = -\vec{b} \cdot L(\vec{a})$$

Phép ánh xạ phản đối xứng L là một phép ánh xạ tuyến tính.

Gọi $\vec{b}$ là vectơ ánh xạ của $\vec{a}$ qua L ($\vec{b} = L(\vec{a})$) và $\vec{S}$ là một vectơ có các thành phần S_1, S_2, S_3 trên hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz.

$$\vec{S} = S_1 \vec{i} + S_2 \vec{j} + S_3 \vec{k}$$

thì ta có quan hệ:

$$\vec{b} = \vec{S} \wedge \vec{a}$$

$\vec{S}$ được gọi là vectơ của phép ánh xạ phản đối xứng L .

3. Trường phản đối xứng

1. Định nghĩa: Một trường vectơ xác định bởi phép ánh xạ $a(M)$ là trường mà với mỗi điểm M của (ξ) được kết hợp bằng một vectơ $\vec{a}$ của E .

Cho hai điểm M và P của không gian (ξ) . Ta có hai vectơ tương ứng $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ của E . Ta định nghĩa một trường phản đối xứng là khi trong trường đó có một phép ánh xạ phản đối xứng L sao cho tương quan giữa $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ là như sau:

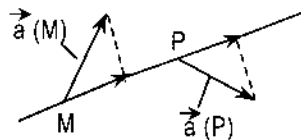
$$\vec{a}(M) = \vec{a}(P) + L(\vec{PM})$$

Nếu $\vec{S}$ là vectơ của phép ánh xạ L thì biểu thức trên được viết lại như sau:

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(P) + \vec{S} \wedge \vec{PM} \quad (b)$$

Khi đó $\vec{S}$ cũng được gọi là vectơ của trường phản đối xứng.

2. Tính chất: Một trường phản đối xứng là một trường đẳng chiếu. Nghĩa là hình chiếu của các vectơ $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ lên đường MP là bằng nhau.



Thực vậy, ta đem nhân cả hai vế của (b) với $\vec{PM}$, ta có:

$$\vec{PM} \cdot \vec{a}(M) = \vec{PM} \cdot \vec{a}(P) + \vec{PM} \cdot (\vec{S} \wedge \vec{PM}) \quad (c)$$

Số hạng cuối cùng của (c) là bằng không. Vậy ta có:

$$\vec{PM} \cdot \vec{a}(M) = \vec{PM} \cdot \vec{a}(P)$$

Đem chia cả hai vế cho $\vec{PM}$ thì ta có hai hình chiếu của $\vec{a}(M)$ và $\vec{a}(P)$ lên PM , hai hình chiếu đó bằng nhau.

Ta cũng dễ dàng chứng minh điều ngược lại: Một trường đẳng chiếu là một trường phản đối xứng.

4. Toocxơ

1. Định nghĩa: Ta gọi toocxơ (τ) là tập hợp tất cả các vectơ $\vec{M}$ của trường

phản đối xứng và vectơ $\vec{S}$ của trường đó. $\vec{M}$ được gọi là mômen của (τ) và $\vec{S}$ được gọi là vectơ của trường hay là vectơ của toocxo.

Ta nhận thấy rằng nếu biết $\vec{M}$ tại một điểm nào đó của trường ví dụ tại điểm 0 chẳng hạn, ta sẽ ký hiệu nó là $\vec{M}(0)$ và biết được $\vec{S}$ thì mọi $\vec{M}$ của trường là được xác định. Thực vậy mômen $\vec{M}$ tại một điểm P nào đó sẽ là:

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(0) + \vec{S} \wedge \vec{OP}$$

$\vec{S}$ và vectơ $\vec{M}(0)$ được gọi là các tọa độ tại 0 của toocxo (τ) và viết:

$$(\tau) [\vec{S}, \vec{M}(0)]$$

Ta cũng nhận thấy $\vec{S}$ là không thay đổi nhưng các vectơ $\vec{M}$ là phụ thuộc vào các điểm của không gian kết hợp (ξ) .

2. Tính chất của toocxo

a. Hai toocxo bằng nhau: Để có hai toocxo bằng nhau điều kiện cần và đủ là chúng phải có cùng vectơ $\vec{S}$ và có cùng một mômen tại một điểm bất kỳ trong không gian kết hợp (ξ) .

Ví dụ ta có:

$$(\tau_1) [\vec{S}_1, \vec{M}_1(0)] \text{ và } (\tau_2) [\vec{S}_2, \vec{M}_2(0)]$$

Để (τ_1) và (τ_2) bằng nhau ta phải có:

$$\begin{cases} \vec{S}_1 = \vec{S}_2 \\ \vec{M}(0) = \vec{M}_1(0) \end{cases}$$

b. Tổng của hai toocxo. Tổng của hai toocxo là một toocxo mà vectơ của nó là tổng các vectơ thành phần và tại một điểm nào đó mômen của nó là tổng của các mômen thành phần.

Ví dụ với các toocxo (τ_1) và (τ_2) . Toocxo tổng sẽ là:

$$(\tau) = (\tau_1) + (\tau_2)$$

Tọa độ của τ tại O là:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \\ \vec{M}(0) &= \vec{M}_1(0) + \vec{M}_2(0) \end{aligned}$$

c. *Phép nhân với một vô hướng:*

Gọi α là một hằng số bất kỳ, tích của α với toócơ (τ) là một toócơ mà:

$$\begin{aligned} \text{vectơ của nó là } \alpha \cdot \vec{S} \\ \text{mômen của nó là } \alpha \cdot \vec{M} \end{aligned}$$

Ví dụ với toócơ (τ₁). Dem nhân (τ₁) với α ta có (τ) với :

$$(\tau) = \alpha (\tau_1) \quad [\alpha \vec{S}_1, \alpha \vec{M}_1(0)]$$

d. *Toócơ không:*

Một toócơ không là một toócơ mà mômen của nó ở mọi điểm trong (ξ) là bằng không và $\vec{S}$ là một vectơ không. Để đạt được điều đó điều kiện cần và đủ là $\vec{S} = \vec{0}$ và tồn tại một điểm mà tại đó $\vec{M}$ cũng bằng không.

e. *Bất biến vô hướng của một toócơ:*

Cho toócơ (τ) với các tọa độ tại hai điểm 0 và 0' như sau:

$$[\vec{S}, \vec{M}(0)] \text{ và } [\vec{S}, \vec{M}(0')]$$

Ta hãy so sánh hai tích vô hướng sau đây:

$$J = \vec{S} \cdot \vec{M}(0) \text{ và } J' = \vec{S} \cdot \vec{M}(0')$$

Theo định nghĩa ta có tương quan giữa $\vec{M}(0)$ và $\vec{M}(0')$ như sau:

$$\vec{M}(0') = \vec{M}(0) + \vec{S} \wedge \vec{OO'}$$

Vậy

$$J' = \vec{S} \cdot [\vec{M}(0) + \vec{S} \wedge \vec{OO'}] = \vec{S} \cdot \vec{M}(0) + \vec{S} \cdot (\vec{S} \wedge \vec{OO'})$$

Số hạng cuối cùng của vế phải là bằng không vậy ta có:

$$J' = \vec{S} \cdot \vec{M}(0) = J$$

Như vậy tích $J = \vec{S} \cdot \vec{M}(0)$ không phụ thuộc vào điểm 0. Trị số đó được gọi là bất biến vô hướng của toócơ.

f. *Tích của hai toócơ:* (còn được gọi là cô-mô-men của hai toócơ)

Cho hai toócơ (τ₁) và (τ₂) với các tọa độ tại 0 như sau:

$$(\tau_1) [\vec{S}_1, \vec{M}_1(0)]$$

$$(\tau_2) [\vec{S}_2, \vec{M}_2(0)]$$

Theo định nghĩa tích của hai toạ độ (τ_1) và (τ_2) là số thực $P(0)$ được xác định như sau:

$$P(0) = \vec{S}_1 \cdot \vec{M}_2(0) + \vec{S}_2 \cdot \vec{M}_1(0)$$

Ta viết

$$P(0) = (\tau_1) \cdot (\tau_2)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $P(0)$ không phụ thuộc vào điểm O .

Thực vậy giả sử ta lấy một O' khác O và tính $P(O')$. Theo định nghĩa ta có:

$$P(O) = \vec{S}_1 \cdot \vec{M}_2(O') + \vec{S}_2 \cdot \vec{M}_1(O') \quad (d)$$

Nhưng như ta có:

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}(O') &= \vec{M}(0) + \vec{S} \wedge \vec{OO'} \\ \vec{M}_1(O') &= \vec{M}_1(0) + \vec{S}_1 \wedge \vec{OO'} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Thay (e) vào (d) ta được:

$$P(O) = \vec{S}_1 \cdot \vec{M}_2(0) + \vec{S}_2 \cdot \vec{M}_1(0) + \vec{S}_1 \cdot (\vec{S}_2 \wedge \vec{OO'}) + \vec{S}_2 \cdot (\vec{S}_1 \wedge \vec{OO'}) \quad (g)$$

Hai số hạng cuối của (g) triệt tiêu lẫn nhau do đó ta có:

$$P(O') = \vec{S}_1 \cdot \vec{M}_2(0) + \vec{S}_2 \cdot \vec{M}_1(0) = P(0)$$

Vậy:

$$P(O') = P(0)$$

Cô-mô-men của hai toạ độ không phụ thuộc vào điểm chọn để tính.

g. Đạo hàm của toạ độ:

Cho toạ độ (τ) được xác định bởi vectơ $\vec{p}$ và mômen $\vec{K}_0$ tại O .

$\vec{p}$ và $\vec{K}_0$ là các hàm số đối với thời gian t . Ta có thể viết:

$$(\tau) [\vec{p}(t) , \vec{K}_0(t)]$$

Tọa độ của (τ) tại O' là

$$(\tau) [\vec{p}(t) , \vec{K}_{0'}(t)]$$

Theo định nghĩa tương quan giữa $\vec{K}_{0'}$ và $\vec{K}_0$ là:

$$\vec{K}_{0'} = \vec{K}_0 + \vec{p}(t) \wedge \vec{OO'} \quad (f)$$

Tính đạo hàm của (f) ta có:

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_{0'} = \frac{d}{dt} \vec{K}_0 + \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{OO'} + \vec{p} \wedge \frac{d\vec{OO'}}{dt} \quad (h)$$

Vì rằng $\vec{OO'}$ là hằng số đối với thời gian vậy $\frac{d\vec{OO'}}{dt} = 0$. Do đó (h) được viết lại như sau:

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_{O'} = \frac{d}{dt} \vec{K}_O + \frac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{OO'}$$

Biểu thức đó cho ta thấy các đạo hàm $\frac{d\vec{K}_{O'}}{dt}$ và $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$ tương quan với nhau như tương quan của hai mômen trong toạoxơ với vectơ là $\frac{d\vec{p}}{dt}$. Như vậy $\frac{d\vec{p}}{dt}$ và $\frac{d\vec{K}}{dt}$ cũng thành lập một toạoxơ và toạoxơ đó là đạo hàm của (τ) . Ta có thể viết:

$$\frac{d}{dt}(\tau) = \left[\frac{d\vec{p}}{dt}, \frac{d\vec{K}_O}{dt} \right]$$

3. Trục trung tâm của một toạoxơ

Cho toạoxơ (τ) với vectơ $\vec{S}$ và bất biến J là khác 0. Tìm quỹ tích của các điểm P trong (ξ) sao cho $M(P)$ là song song với $\vec{S}$.

Giả sử tọa độ của (τ) tại O là $[\vec{S}, \vec{M}(0)]$.

Mômen tại P của (τ) là :

$$\vec{M}(P) = \vec{M}(0) + \vec{S} \wedge \vec{OP}$$

Theo giả thiết $\vec{M}(P)$ phải song song với $\vec{S}$ nghĩa là:

$$\vec{M}(P) = \alpha \vec{S}$$

trong đó α là một hằng số nào đó. Kết hợp hai quan hệ này ta có thể viết:

$$\vec{M}(0) + \vec{S} \wedge \vec{OP} = \alpha \vec{S}$$

Hay:

$$\vec{OP} \wedge \vec{S} = \vec{M}(0) - \alpha \vec{S}$$

Vậy $\vec{OP}$ là thương của phép chia hữu hướng giữa $\vec{M}(0) - \alpha \vec{S}$ và $\vec{S}$. Phép chia đó chỉ có thể thực hiện được khi:

$$\vec{S} \cdot [\vec{M}(0) - \alpha \vec{S}] = 0$$

Từ đó ta có thể xác định các giá trị số của α :

$$\alpha = \frac{\vec{S} \cdot \vec{M}(0)}{|\vec{S}|^2}$$

Sử dụng công thức $\vec{u} = \frac{\vec{a} + \vec{p}}{a^2} + \lambda \vec{a}$ ta có thể viết:

$$\vec{OP} = \frac{\vec{S} \wedge [\vec{M}(0) - \alpha \vec{S}]}{|\vec{S}|^2} + \lambda \vec{S}$$

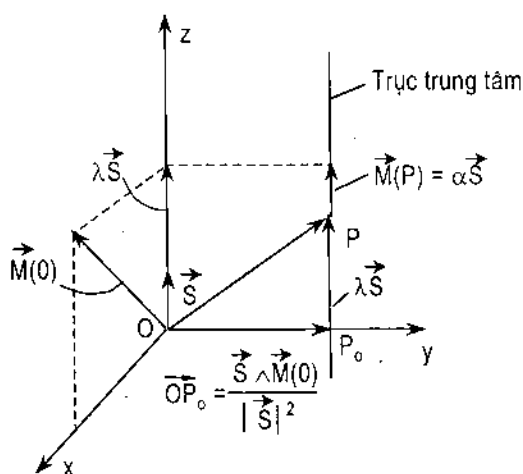
Đường đó được gọi là trục trung tâm của toạoxơ (τ). Đường thẳng đó đi qua điểm P_0 với

$$\vec{OP}_0 = \frac{\vec{S} \wedge \vec{M}(0)}{|\vec{S}|^2}$$

Tại mọi điểm P trên đường đó vectơ mômen $\vec{M}(P)$ là song song với $\vec{S}$ và có trị số là:

$$\vec{M}(P) = \frac{\vec{S} \cdot \vec{M}(0)}{|\vec{S}|^2} \vec{S}$$

Tất cả những điều trên được biểu diễn qua hình vẽ dưới đây.



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Goltin I. I., Prokophiev U. V.
Cơ sở cơ học kỹ thuật (bản tiếng Nga) - 1974.
2. X. Mironov
Sức bền vật liệu (bản tiếng Nga) - 1975.
3. Nguyễn Xuân Lạc, Đỗ Như Lân
Cơ học ứng dụng - Phần I - 1982.
4. Nguyễn Xuân Lạc, Đỗ Như Lân, Nguyễn Bá Dương, Đặng Việt Cường (chủ biên)
Cơ học ứng dụng - Phần II - 1982.
5. Serge Laroze
Résistance des Matériaux et Structures. Tom I, II, III, Masson - 1984.
6. Đặng Việt Cường
Về một giải pháp giảng dạy Sức bền vật liệu với sự trợ giúp của tin học.
Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ VI - 1997.
7. Đặng Việt Cường, Nguyễn Đức Trung
Về một giải pháp tiếp cận các bài toán Sức bền vật liệu bằng tin học.
Tuyển tập công trình khoa học, tập 3, Hội nghị Khoa học toàn quốc về Cơ học kỹ thuật 10/2001.
8. Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai
Sức bền vật liệu tập I, II, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - 2002
9. Đặng Việt Cường (chủ biên), Phan Kỳ Phùng
Cơ sở cơ học ứng dụng, Nhà xuất bản Giao thông vận tải - 2001.
10. Đặng Việt Cường
Cơ học kết cấu, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - 2005.
11. Lê Quang Minh
Tenxơ và toocxơ, Nhà xuất bản Giáo dục - 1998.
12. G. Korn, T. Korn
Mathematical Handbook.
McGraw-Hile book company, New York 1968.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
-------------------	---

Phần I	
CƠ HỌC VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI.....	5

Chương 1

KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ HỌC CÁC VẬT RẮN

I. Mô hình nghiên cứu.....	7
II. Toạ độ suy rộng - chuyển động khả dĩ và bậc tự do.....	8
III. Khớp động - Chuỗi động và cơ cấu.....	9
IV. Vật rắn tự do và vật rắn chịu liên kết	12

Chương 2

ĐỘNG HỌC

I. Các định nghĩa.....	14
II. Trường vận tốc và gia tốc trong vật rắn - toạ độ động học	15
III. Các chuyển động cơ bản.....	21
IV. Hợp chuyển động.....	26
V. Chuyển động song phẳng.....	32

Chương 3

CƠ CẤU BỐN KHÂU

I. Cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng.....	40
II. Các biến thể của cơ cấu bốn khâu bản lề.....	43
III. Các ví dụ áp dụng.....	49

Chương 4 CƠ CẤU BA KHÂU

I. Cơ cấu tâm tích.....	51
II. Cơ cấu đối tiếp	53
III. Cơ cấu cam	54
IV. Cơ cấu bánh răng	55
V. Hệ bánh răng.....	60

Chương 5 CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA CƠ HỆ

I. Mômen khối lượng.....	63
II. Mômen diện tích	66

Chương 6 TÍNH CHẤT CỦA HỆ LỰC TÁC DỤNG LÊN VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

I. Lực và hệ lực	76
II. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ (CVKD)	86
III. Điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật rắn	88
IV. Các bài toán tĩnh học.....	89
V. Nguyên lý D'Alembert	90

Chương 7 CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

I. Động lượng.....	93
II. Toócơ động lực học	96
III. Định luật cơ bản.....	99
IV. Động năng	103

Phần II
CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG..... 107

Chương 8
CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

I. Mô hình nghiên cứu	109
II. Nội lực, ứng suất và biến dạng	110
III. Đặc trưng cơ học của vật liệu	116

Chương 9
KÉO VÀ NÉN ĐÚNG TÂM

I. Khái niệm và định nghĩa	134
II. Ứng suất và biến dạng	135
III. Phương pháp vạn năng để xác định chuyển vị và nội lực	136
IV. Ứng suất cho phép, điều kiện bền và cứng	141
V. Các ví dụ áp dụng	144

Chương 10
XOẮN THANH THẲNG

I. Định nghĩa và khái niệm	150
II. Ứng suất và biến dạng	151
III. Chuyển vị, nội lực và phương pháp xác định chúng	153
IV. Điều kiện bền - điều kiện cứng	155
V. Xoắn thanh mặt cắt ngang không tròn	156
VI. Các ví dụ áp dụng	159
VII. Tính lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn	165

Chương 11

UỖN PHẪNG

I. Định nghĩa và các khái niệm cơ bản.....	169
II. Ứng suất và biến dạng.....	169
III. Phương pháp xác định chuyển vị $V(z)$, $\varphi(z)$ và nội lực $M(z)$, $Q(z)$	173
IV. Điều kiện bền và hình dạng hợp lý của mặt cắt ngang.....	177
V. Điều kiện cứng.....	179
VI. Các bài toán áp dụng.....	179
VII. Tính chuyển vị bằng phương pháp Maxwell - Mohr - Vérechtchaguinne	184

Chương 12

TÍNH TOÁN THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

I. Nguyên tắc tính toán.....	189
II. Các ví dụ áp dụng.....	191

Chương 13

ỨNG SUẤT THAY ĐỔI

I. Khái niệm và định nghĩa.....	196
II. Cách tính toán độ bền mỗi chịu trạng thái ứng suất đơn và trượt thuần túy.....	198
III. Tính toán độ bền mỗi đối với trạng thái ứng suất phức tạp.....	200
IV. Các ví dụ áp dụng.....	201

Chương 14

ĐỘNG LỰC HỌC KẾT CẤU

I. Dao động của hệ một bậc tự do.....	208
II. Dao động hệ vô hạn bậc tự do.....	211

III. Tải trọng va chạm	215
IV. Các bài toán áp dụng	218

Chương 15

TÍNH TOÁN HỆ SIÊU TĨNH

I. Khái niệm chung về hệ siêu tĩnh	227
II. Phương trình chính tắc của phương pháp lực	230
III. Các bài toán áp dụng	233
IV. Tính hệ siêu tĩnh chịu nhiệt độ thay đổi	238
V. Tính hệ siêu tĩnh có các gối tựa chịu chuyển vị cưỡng bức	239
VI. Tính dầm liên tục	241
VII. Các ví dụ áp dụng	249

Chương 16

TÍNH TOÁN THỰC HÀNH CÁC CẤU KIỆN VÀ CHI TIẾT MÁY

I. Cơ sở lý thuyết tính toán các chi tiết chịu cắt	254
II. Mối ghép không tháo được và cách tính toán	260
III. Mối ghép tháo được và cách tính toán	273
IV. Các chi tiết máy đỡ nối và cách tính toán	280

Chương 17

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TOÁN TỔNG HỢP CỦA CƠ HỌC ỨNG DỤNG

THIẾT KẾ BỘ DẪN ĐỘNG BĂNG TẢI	294
I. Tính toán động học bộ dẫn động băng tải	294
II. Tính toán bánh răng hình trụ răng nghiêng	298
III. Tính toán trục hộp giảm tốc	311
IV. Tính toán ổ	320
V. Chọn và tính toán khớp nối trục	322

PHỤ CHƯƠNG

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VẬT LÝ VÀ TOÁN.....	327
A. VẬT LÝ	327
I. Động học chất điểm.....	327
II. Động lực học chất điểm.....	328
III. Công và năng lượng.....	330
IV. Động lực học vật rắn.....	332
V. Dao động và sóng cơ	334
VI. Thuyết tương đối.....	336
B. TOÁN.....	336
Vectơ - ma trận - toocxơ.....	338
I. Vectơ.....	338
II. Các phép tính ma trận.....	342
III. Toocxơ.....	348
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	356

PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

CƠ ỨNG DỤNG TRONG KỸ THUẬT

Chịu trách nhiệm xuất bản:

PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập:

ThS. NGUYỄN HUY TIẾN

Sửa bản in thử:

QUANG NGỌC

Vẽ bìa:

HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo – Hà Nội

In 800 cuốn khổ 16 x 24cm tại Xí nghiệp in NXB Lý luận chính trị
Giấy phép xuất bản số: 469-17, cấp ngày 30-12 - 2004
In xong nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2005

205105



Giá: 49.000đ