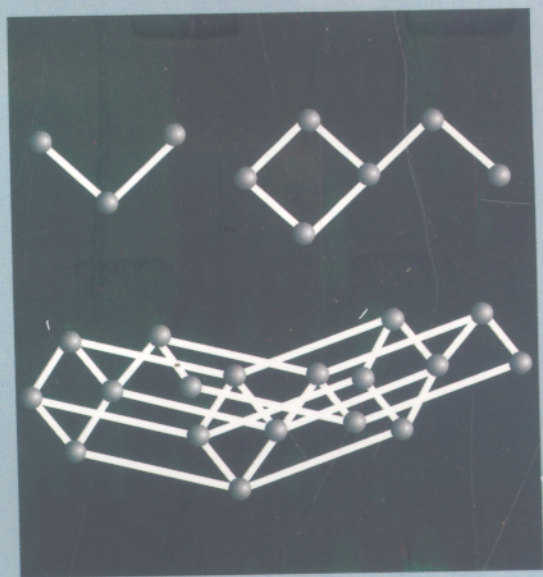


NGUYỄN XUÂN QUỲNH

TOÁN RỜI RẠC CHO KỸ THUẬT SỐ



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN QUỲNH

TOÁN RỜI RẠC CHO KỸ THUẬT SỐ



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2002

LỜI NÓI ĐẦU

Sự phát triển nhanh chóng của công nghệ thông tin và kỹ thuật điện tử đã làm cho kỹ thuật số xâm nhập vào mọi hoạt động của con người, đặc biệt trong các lĩnh vực: thông tin liên lạc, điều khiển tự động, kỹ thuật điện và điện tử, công nghệ thông tin, công nghệ chế tạo máy, giao thông vận tải, an ninh quốc phòng v.v... Để tìm hiểu và nắm bắt được các công nghệ mới trong các lĩnh vực trên, sinh viên, nghiên cứu sinh cũng như những người làm công tác nghiên cứu, thiết kế chế tạo v.v... phải nắm vững công cụ toán học dành riêng cho kỹ thuật số, đó là toán học rời rạc.

"Toán rời rạc cho kỹ thuật số" là tài liệu đúc kết những thành tựu nghiên cứu cơ bản về lý thuyết tập hợp, tổ hợp, lý thuyết đồ thị và đại số. Nội dung cuốn sách được chia thành mười chương. Từ chương I đến chương IX cung cấp cho bạn đọc những kiến thức cơ bản về lý thuyết tập hợp, tổ hợp và cấu trúc đại số; đặc biệt đi sâu về đại số logic, đại số chuyển mạch vector theo quan điểm hiện đại. Chương cuối cùng (chương X) giới thiệu tổng quát nhất về lý thuyết nhóm, vành và trường nhằm tạo cơ sở cho những độc giả muốn đi sâu hơn về lĩnh vực toán ứng dụng. Sau mỗi chương đều có các bài tập để bạn đọc tự kiểm tra lại kiến thức của mình.

Những kiến thức cơ bản này đủ cho sinh viên, nghiên cứu sinh và những người làm công tác nghiên cứu, thiết kế, chế tạo có liên quan đến các ngành toán ứng dụng, tin học, tự động hóa,

điện tử, kỹ thuật hệ thống v.v... tiếp tục đi sâu vào các lĩnh vực toán hiện đại cũng như nắm bắt các thông tin mới về kỹ thuật số trong các ngành tương ứng.

Cuốn “**Toán rời rạc cho kỹ thuật số**” được đúc kết từ nhiều năm giảng dạy và nghiên cứu của tác giả về các lĩnh vực trên ở Việt Nam cũng như ở các nước ngoài. Cuốn sách ra đời nhằm hoàn thiện và bổ sung thêm vào các tài liệu trước đây của tác giả đã xuất bản như “**Lý thuyết mạch logic và kỹ thuật số**”, “**Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng**” v.v... Đây cũng là một tài liệu cơ bản để đào tạo sau đại học cho kỹ sư các ngành kỹ thuật về toán ứng dụng đồng thời cũng là tài liệu tham khảo tốt cho những người làm công tác nghiên cứu về các lĩnh vực liên quan. Tùy theo mức độ yêu cầu của từng người và từng ngành mà độc giả có thể tập trung chủ yếu vào những chương nhất định của cuốn sách.

Vì phạm vi cuốn sách có hạn nên chắc chắn còn có những khiếm khuyết nhất định. Tác giả xin chân thành tiếp thu tất cả những ý kiến đóng góp của bạn đọc. Thư góp ý xin gửi về Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 70 Trần Hưng Đạo Hà Nội.

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn NXBK&KT và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tận tình để cuốn sách có thể đến được với quý bạn đọc.

Tác giả

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
LỜI NÓI ĐẦU	3
<i>Chương I. TẬP HỢP VÀ MỆNH ĐỀ</i>	9
1.1. Mở đầu	9
1.2. Tập hữu hạn và vô hạn	14
1.3. Các phép tính của tập hợp	16
1.4. Các tiêu đề của đại số tập hợp	21
1.5. Phép tính lũy thừa tập hợp	22
1.6. Nguyên lý bao gồm và loại trừ	23
1.7. Mệnh đề	26
Bài tập	28
<i>Chương II. CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP</i>	30
2.1. Mở đầu	30
2.2. Khái niệm về luật cộng và luật nhân	30
2.3. Chỉnh hợp	31
2.4. Tổ hợp	34
Bài tập	36
<i>Chương III. QUAN HỆ VÀ HÀM SỐ</i>	38
3.1. Quan hệ hai ngôi giữa hai tập hợp	38
3.2. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp và các tính chất của chúng	42
3.3. Quan hệ tương đương và phân hoạch	43

3.4.	Quan hệ sắp xếp, tập sắp xếp và các đại số	46
3.5.	Dàn và các hệ thống đại số	52
3.6.	Đại số Boole và hàm số Boole	61
	Bài tập	75
Chương IV. ĐỒ THỊ VÀ CÂY		78
4.1.	Khái niệm chung	79
4.2.	Đường và mạch - Đường ngắn nhất và thuật toán Dijkstra	84
4.3.	Đường Ô-le (Euler)	88
4.4.	Đường Haminton	91
4.5.	Đồ thị phẳng	95
4.6.	Khái niệm về cây và cây có gốc	98
4.7.	Cây nhị phân và mã Huffman	103
4.8.	Các mạng giao thông	111
4.9.	Ôtômat hữu hạn	116
	Bài tập	118
Chương V. ĐẠI SỐ CHUYỂN MẠCH VECTOR VÀ HÀM CHUYỂN MẠCH VECTOR		121
5.1.	Đại số chuyển mạch vector và hàm chuyển mạch vector	122
5.2.	Phép toán bù tổng hợp và phép toán quay	125
5.3.	Các tính chất của đại số chuyển mạch vector và hàm chuyển mạch vector	128
5.4.	Những vấn đề tối thiểu hóa các biểu thức Boole	136
	Bài tập	144

Chương VI. CÁC PHÉP TÍNH ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN	
BOOLE	146
6.1. Đạo hàm riêng	147
6.2. Khai triển chuỗi các hàm Boole	151
6.3. Đạo hàm toàn phần và vi phân toàn phần	161
6.4. Phương pháp đồ thị và phương pháp thuật toán để tính đạo hàm Boole	165
Bài tập	167
Chương VII. PHÂN GIẢI CÁC HÀM CHUYỂN MẠCH	170
7.1. Phân giải đơn tách biệt	172
7.2. Các dạng phân giải khác	184
7.3. ứng dụng đạo hàm Boole	186
Bài tập	188
Chương VIII. CÁC HÀM CHUYỂN MẠCH ĐẶC BIỆT	189
8.1. Các hàm đơn điệu	189
8.2. Các hàm ngưỡng	193
8.3. Các hàm đối xứng	197
8.4. Các hệ hàm đầy đủ	203
Bài tập	206
Chương IX. CÁC HÀM LOGIC ĐA TRỊ	208
9.1. Các hàm logic m trị	208
9.2. Logic mờ và logic m lớp	215
9.3. Phân tích các hàm logic m lớp	220
Bài tập	221

Chương X. LÝ THUYẾT NHÓM, VÀNH VÀ TRƯỜNG	223
10.1. Nhóm và nửa nhóm	223
10.2. Các phần tử sinh	227
10.3. Tập kề và định lý La Grange	231
10.4. Nhóm hoán vị và định lý Burnside	133
10.5. Đồng cấu và đồng cấu	237
10.6. Vành, miền nguyên và trường	240
10.7. Vành đồng cấu	243
10.8. Vành đa thức	244
Bài tập	247
TÀI LIỆU THAM KHẢO	250

Chương I

TẬP HỢP VÀ MỆNH ĐỀ

1.1. MỞ ĐẦU

Tập hợp là một trong những khái niệm quan trọng nhất của toán học. Có thể nói rằng “lí thuyết tập hợp” là cái gốc, cái rễ của các ngành toán học khác nhau. Chúng ta có thể xem việc nghiên cứu mỗi ngành toán học là nghiên cứu tập hợp của các đối tượng loại này hay loại khác. Ví dụ một cách đơn giản ta có thể xem hình học là môn học nghiên cứu các tập hợp của các điểm, đại số là môn học nghiên cứu các tập hợp của các con số và các phép toán trên các tập hợp số đó, giải tích là môn học nghiên cứu chủ yếu các tập hợp của các hàm số v.v... Bởi vậy chúng ta không ngạc nhiên khi người ta xây dựng lí thuyết tập hợp trên cơ sở các tiên đề chứ không phải trên cơ sở các định nghĩa của những khái niệm nào khác.

Vào nửa cuối thế kỉ XIX, nhà toán học người Đức Georg Cantor (1845 - 1918), lần đầu tiên đã nghiên cứu các tập hợp và ứng dụng của chúng theo ý nghĩa là nền tảng của các ngành toán học (các công trình công bố trong khoảng từ 1871 - 1883). Từ đó lí thuyết tập hợp đã thống nhất được nhiều quan niệm toán học tưởng chừng như không có liên hệ gì với nhau cả và đã giúp xây dựng các cơ sở logic cho nhiều ngành toán học khác nhau.

Vậy tập hợp là gì? Một cách đơn giản có thể hiểu tập hợp là kết hợp các đối tượng có bản chất (hay thuộc tính) tùy ý, gọi là các phần tử của tập hợp. Mặc dầu tập hợp có thể bao gồm những phần tử có bản chất tùy ý nhưng thường mỗi tập hợp cụ thể là toàn thể các phần tử có cùng một số tính chất và dấu hiệu chung nào đó. Chẳng hạn kết hợp các số tự nhiên là một tập hợp, kết hợp các số nguyên trong khoảng từ 1 đến 250 mà chia hết cho một trong các số nguyên 2, 3, 5, 7 là một tập hợp, kết hợp các công trình đầu tư của nước ngoài có giá trị từ 1 triệu USD trở lên tại Hà Nội trong 10 năm gần đây là một tập hợp v.v... Tập hợp thứ nhất nêu ra ở trên bao gồm các phần tử có một dấu hiệu đặc trưng (thuộc tính) là: số tự nhiên. Tập hợp thứ 2 bao gồm các phần tử có 3 thuộc tính: số nguyên, trong khoảng từ 1 đến 250, chia hết cho một trong các số nguyên 2, 3, 5, 7. Tập hợp thứ 3 bao gồm các phần tử có cùng 5 thuộc tính: công trình đầu tư, của nước ngoài, giá trị từ 1 triệu USD trở lên, trong 10 năm gần đây, tại Hà Nội v.v...

Chúng ta kí hiệu $\{a, b, c\}$ để chỉ tập hợp do các đối tượng (gọi là phần tử hay thành phần) a, b, c tạo nên. Mỗi tập hợp thường có 1 tên gọi riêng. Chẳng hạn chúng ta viết $T = \{a, b, c\}$ thì gọi đó là tập hợp T ; $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ là tập hợp các số tự nhiên. Tương tự như vậy, tập hợp các chợ ở Hà Nội = {Đồng Xuân, Mơ, Hôm - Đức Viên, Hàng Da, Bắc Qua, v.v...} có tên gọi là tập hợp các chợ ở Hà Nội.

Để chỉ đối tượng a là một phần tử của tập hợp T chúng ta viết $a \in T$, còn phần tử d không thuộc tập hợp T chúng ta viết $d \notin T$. Mặt khác người ta cũng có thể nói tập hợp T bao gồm phần tử a ($T \ni a$) mà không bao gồm phần tử d ($T \nmid d$).

Cần lưu ý rằng tập hợp chỉ chứa các phần tử riêng biệt mà thôi. Thật vậy, chúng ta viết $\{a, a, b, c, c\}$ là cách biểu diễn thừa của tập hợp $\{a, b, c\}$. Các phần tử trong một tập hợp không cần phải sắp xếp theo một thứ tự nào cả, chẳng hạn $\{a, b, c\}$ và $\{c, a, b\}$ biểu diễn sự kết hợp như nhau của các phần tử a, b, c . Về sau chúng ta sẽ đưa vào khái niệm nữa có tính đến thuộc tính “sắp xếp” của các phần tử gọi là tập sắp xếp.

Trên đây là phương pháp mô tả các thành phần của một tập hợp bằng cách liệt kê tất cả các phần tử tập hợp đó. Chẳng hạn $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Ngoài ra người ta có thể mô tả các thành phần của tập hợp bằng cách biểu diễn tính chất đặc trưng (thuộc tính) của các phần tử của tập hợp đó. Chẳng hạn tập hợp các con số ở trên có thể viết một cách khác như sau:

$$A = \{a \mid a \text{ là một số nguyên dương chẵn không lớn hơn } 10\}.$$

Một cách tổng quát chúng ta có thể mô tả tập hợp T với các phần tử x như sau:

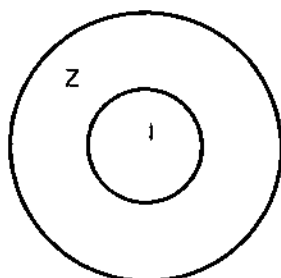
$$T = \{x \mid x \text{ có các tính chất đặc trưng của tập hợp}\}.$$

Một tập hợp không chứa một phần tử nào cả gọi là tập hợp trống và có kí hiệu $\emptyset$ hoặc $\{\}$. Ví dụ “Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 1 = 0$ ” là một tập trống $\emptyset$; “Tập hợp các bài thơ do Nguyễn Du sáng tác trong thế kỉ XX” là một tập trống $\emptyset$.

Trở lại định nghĩa tổng quát về tập hợp chúng ta thấy các phần tử của một tập hợp bất kì không bị một hạn chế nào cả. Chẳng hạn: $T = \{1, 2, \text{Hà Nội}, 3, \text{Hải Phòng}, \text{BAMBOO} - 8088, 4\}$ cũng là một tập hợp, trong đó 1, 2, 3, 4 là các số nguyên và dương bé hơn 5, BAMBOO - 8088 là máy vi tính còn các phần tử còn lại là các thành phố lớn ở miền Bắc Việt Nam. Như vậy, có

thể trong một tập hợp các phần tử không có một tính chất chung nào cả. Nói một cách khác, một tập hợp này có thể là một phần tử của một tập hợp khác: Chẳng hạn tập hợp $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}, f\}$ có ba phần tử là $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$ và f . Tập hợp $\{\{a, b, c\}, a, b, c\}$ có 4 phần tử là $\{a, b, c\}$, a , b và c . Tương tự như vậy, tập hợp $\{x, \{x\}, \{\{x\}\}\}$ có 3 phần tử là x , $\{x\}$, $\{\{x\}\}$. Tập hợp $\{\emptyset\}$ có một phần tử là tập hợp trống $\emptyset$, còn tập hợp $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ có hai phần tử là tập hợp trống $\emptyset$ và tập hợp nhận tập hợp trống $\emptyset$ làm phần tử của mình.

Hình 1.1.1 minh họa tập hợp các số nguyên I được chứa trong tập hợp các số hữu tỉ Z , nói cách khác tập các số hữu tỉ... nhận tập các số nguyên làm phần tử của mình, sở dĩ như vậy vì mỗi số nguyên cũng là một số hữu tỉ.



Hình 1.1.1

Tổng quát, cho 2 tập R và S , ta nói rằng R là một tập con của S nếu mỗi phần tử của R cũng là một phần tử của S và khi đó chúng ta kí hiệu $R \subset S$. Một cách khác chúng ta có thể viết:

$$R \subset S \text{ nếu và chỉ nếu: } a \in R \Rightarrow a \in S \quad (1.1)$$

(Ở đây ta dùng kí hiệu $\Rightarrow$ có nghĩa là kéo theo).

Ví dụ tập hợp $R = \{a, b, c\}$ là tập con của $S = \{a, k, e, b, m, c\}$ nhưng không phải là tập con của $T = \{d, e, a, b\}$ và ta viết: $R \subset S$, $R \not\subset T$, hay $T \not\supset R$.

Ta hãy lấy một ví dụ khác. Cho Σ là một bộ chữ cái, Σ_n là tập của tất cả các từ (có nghĩa và vô nghĩa) có n chữ cái trên Σ và Σ' là tập của tất cả các từ được cấu tạo từ Σ . Vậy $\Sigma_n \subset \Sigma'$. Tập

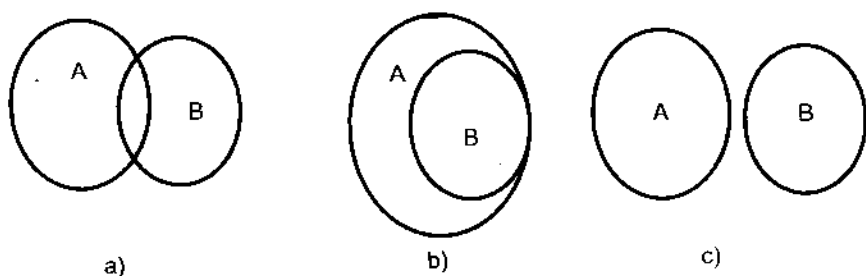
Σ còn được gọi là một ngôn ngữ trên Σ . Chẳng hạn tập của tất cả các từ tiếng Việt cấu tạo từ tập $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$ là một ngôn ngữ, đó chính là ngôn ngữ tiếng Việt. Tương tự như vậy, tập của tất cả các byte là một ngôn ngữ trên tập $\Sigma = \{0, 1\}$.

Khi $R \subset S$ mà $R \neq S$, nghĩa là có ít nhất một phần tử x mà $x \in S$ nhưng $x \notin R$, thì ta nói rằng R là tập con thực sự của S .

Như vậy $R \subset T$ khi và chỉ khi không phải mỗi một phần tử của tập R là một phần tử của T , nghĩa là còn tồn tại ít nhất một phần tử trong R không phải là phần tử trong T , nghĩa là:

$R \subset T$ nếu và chỉ nếu: có một phần tử x sao cho $x \in R$ và $x \notin T$.

Hình 1.1.2 minh họa các trường hợp mà $A \subset B$. Ở đây các tập A và B được biểu thị bằng các vòng tròn.



Hình 1.1.2.

Cho A là tập tất cả các số nguyên chia hết cho 3 và B là tập tất cả các số nguyên chia hết cho 6. Rõ ràng là $A \subset B$ vì có những phần tử thuộc A (ví dụ số 9) nhưng lại không thuộc B .

Các tập hợp R và S bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử như nhau:

$R = S$ khi và chỉ khi đối với mỗi phần tử x :

$$x \in R \Rightarrow x \in S \text{ và } x \in S \Rightarrow x \in R$$

Một cách ngắn gọn có thể viết:

$$(R = S) \Leftrightarrow (\forall x : x \in R \Leftrightarrow x \in S) \quad (1.2)$$

Ở đây kí hiệu $\Leftrightarrow$ chỉ “khi và chỉ khi”, còn kí hiệu $\wedge$ chỉ “với mọi”.

Ví dụ R là tập các số nguyên chia hết đồng thời cho 2 và 3 còn S là tập các số nguyên chia hết cho 6, rõ ràng $R = S$.

Nói một cách khác các tập R và S bằng nhau khi và chỉ khi R là tập con của S và ngược lại S là tập con của R :

$$(R = S) \Rightarrow (R \subset S \text{ và } S \subset R) \quad (1.3)$$

Từ định nghĩa tổng quát về tập hợp chúng ta có thể rút ra:

1. $\emptyset \subset A$: Tập trống là tập con của một tập hợp bất kì.
2. $A \subset A$: Cho A là một tập hợp bất kì thì A là tập con của chính bản thân nó. Chú ý rằng $\emptyset \subset \emptyset$ nhưng $\emptyset \not\subset \{\emptyset\}$.

3. Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

$$(\text{Hay có thể viết } A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C) \quad (1.4)$$

$$4. A \neq B \Rightarrow A \not\subset B \text{ hoặc } B \not\subset A \quad (1.5)$$

1.2. TẬP HỮU HẠN VÀ TẬP VÔ HẠN

Như phần khái niệm chung đã chỉ rõ, một tập hợp (gọi tắt là tập) được đặc trưng bằng những phần tử của nó, ví dụ $T = \{a, b, c, d\}$. Tập T có 4 phần tử. Khi nói như vậy là chúng ta đã đụng đến khái niệm “hữu hạn” của tập hợp. Bên cạnh các tập hữu hạn là các tập vô hạn, ví dụ tập tất cả các số nguyên là tập vô hạn. Để định nghĩa chính xác tập hữu hạn và tập vô hạn người ta đưa ra khái niệm **lực lượng tập hợp**. Số lượng các phần tử phân biệt của tập hợp T có kí hiệu là $|T|$ và được gọi là lực lượng của tập hợp T .

$$\text{Ví dụ: } T_1 = \{a, b, c\} \Rightarrow |T_1| = 3$$

$$T_2 = \{a, \emptyset, b, \{\emptyset\}\} \Rightarrow |T_2| = 4$$

Nói một cách khác có sự tương ứng một - một giữa các phần tử của tập T và các phần tử của một tập con N_n các số tự nhiên nào đó. Ở đây $N_n \subset N$ (tập tất cả các số tự nhiên) và n chỉ số tự nhiên lớn nhất trong tập N_n . Nghĩa là ta có: $|T| = |N_n| = n$, ví dụ $T_1 = \{a, b, c\}$ tương ứng với tập $N_3 = \{1, 2, 3\}$, ở đây $|N_3| = |T| = 3$.

Tập hợp có lực lượng là hữu hạn được gọi là tập hữu hạn. Ngược lại, nếu lực lượng của tập hợp là vô hạn thì ta có tập hợp vô hạn. Ví dụ tập tất cả các số tự nhiên $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ là một tập vô hạn.

Trong lớp các tập vô hạn người ta lại phân biệt thành hai loại: Tập vô hạn đếm được và tập vô hạn không đếm được. Ví dụ tập tất cả các số nguyên chẵn không âm $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ và tập tất cả các bội số không âm của 5: $B = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$ là những tập hợp vô hạn đếm được. Bên cạnh các tập vô hạn đếm được là các tập vô hạn không đếm được. Ví dụ tập R_1 của tất cả các số thực nằm trong khoảng từ 0 đến 1 là một tập vô hạn không đếm được. Thật vậy, giả sử R_1 là một tập vô hạn đếm được, nghĩa là ta có sự tương ứng một - một giữa tập R_1 và tập N của các số tự nhiên. Do đó ta có thể liệt kê được một dãy số kế tiếp nhau trong khoảng từ 0 đến 1 (theo hệ số thập phân) như sau:

$$\begin{array}{ll} \text{Số thứ 1:} & 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1j} \dots \\ \text{Số thứ 2:} & 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2j} \dots \\ \text{Số thứ 3:} & 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3j} \dots \\ \dots & \dots \\ \text{Số thứ } i: & 0, a_{i1} a_{i2} a_{i3} \dots a_{ij} \dots \\ \dots & \dots \end{array} \quad (1.6)$$

Ở đây a_{ij} chỉ chữ số thứ j trong số thực thứ i của danh sách và $a_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Chúng ta thấy ngay rằng (1.6) là một danh sách không chính xác của tập tất cả các số thực trong khoảng $[0, 1]$. Điều này trái với giả thiết rằng tập hợp này là vô hạn đếm được. Thật vậy, giả sử chúng ta cấu tạo một số thực trong khoảng $[0, 1]$ như sau:

$$0, b_1 b_2 b_3 \dots b_i \dots$$

$$\text{Ở đây } b_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu } a_{ii} = 9 \\ 9 - a_{ii}, & \text{nếu } a_{ii} = 0, 1, 2, \dots, 8 \end{cases}$$

Rõ ràng là b_i khác với tất cả mọi số nằm trong danh sách (1.6) ở trên vì nó khác với số thứ nhất ở chữ số đầu tiên (a_{11}), khác với số thứ 2 ở chữ số thứ 2 (a_{22}), v.v..., nghĩa là không nằm trong danh sách (1.6).

Từ những khái niệm trên chúng ta có thể đi đến một khái niệm khác sâu hơn là “mức độ vô hạn” của các tập hợp cũng có thể khác nhau. Tuy nhiên chúng ta phải tạm dừng lại đây vì khuôn khổ có hạn của cuốn sách.

1.3. CÁC PHÉP TÍNH CỦA TẬP HỢP

Bằng những phương pháp tổ hợp khác nhau chúng ta có thể tạo nên các tập hợp mới. Các phương pháp tổ hợp đó gọi là những phép toán của tập hợp. Sau đây chúng ta sẽ xét đến những phép toán cơ bản nhất của tập hợp.

1.3.1. Phép toán tuyển (hợp)

Tuyển của hai tập hợp A và B , kí hiệu là $A \cup B$, là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A và B . Nói một cách khác ta có thể viết:

$$(x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)) \quad (1.7)$$

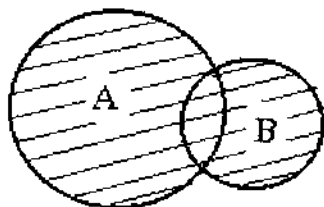
Ở đây kí hiệu $\vee$ để chỉ “hoặc”.

Ví dụ 1.1. $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$

$$\{a, b\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

$$\{a, b\} \cup \emptyset = \{a, b\}$$

Tuyển của tập tất cả các số hữu tỷ và tập tất cả các số vô tỷ là tập của tất cả các số thực. Tuyển của tập tất cả các số nguyên và tập của tất cả các số hữu tỷ là tập của tất cả các số hữu tỷ.



Hình 1.3.1

Nếu ta biểu diễn tập A và tập B bằng những vòng tròn như ở hình 1.3.1 thì tập $A \cup B$ là toàn bộ phần gạch chéo trên 2 vòng tròn.

1.3.2. Phép toán hội (giao)

Hội của hai tập hợp A và B , ký hiệu là $A \cap B$, là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc cả A lẫn B . Ta có thể viết gọn:

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \quad (1.8)$$

Ở đây kí hiệu $\wedge$ để chỉ “và” (đồng thời)

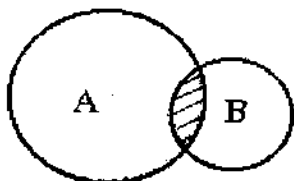
Ví dụ 1.2. $\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\}$

$$\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$$

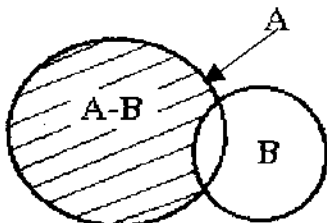
$$\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$$

Hội của tập hợp của tất cả các số nguyên chẵn và tập hợp của tất cả các số nguyên chia hết cho 3 là tập hợp của tất cả các số nguyên chia hết cho 6. Hội của tập tất cả các số hữu tỷ và tập của tất cả các số vô tỷ là một tập trống.

Nếu ta biểu diễn tập A và tập B bằng các vòng tròn như ở hình 1.3.2 thì hội $A \cap B$ là phần diện tích gạch chéo (chung nhau giữa 2 vòng tròn).



Hình 1.3.2



Hình 1.3.3

1.3.3. Phép toán trừ

Hiệu của hai tập hợp A và B , ký hiệu là $A \setminus B$ là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B . Nghĩa là:

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \quad (1.9)$$

Ví dụ 1.3. $\{a, b, c\} \setminus \{a\} = \{b, c\}$

$$\{a, b, c\} \setminus \{a, c, d\} = \{b\}$$

$$\{a, b, c\} \setminus \{d, e\} = \{a, b, c\}$$

Hiệu của tập hợp tất cả các số thực và tập hợp tất cả các số hữu tỷ là tập của tất cả các số vô tỷ.

Nếu ta biểu diễn các tập A và B bằng các vòng tròn như ở hình 1.3.3 thì hiệu $A \setminus B$ là tập hợp được biểu thị bằng phần gạch chéo

1.3.4. Phép toán hiệu đối xứng

Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B , ký hiệu là $A \oplus B$, là một tập hợp bao gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B nhưng không đồng thời thuộc A và B .

Nghĩa là:

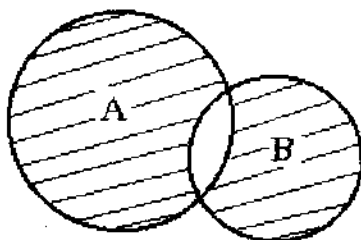
$$(x \in A \oplus B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B) \quad (1.10)$$

Ví dụ 1.4. $\{a, b\} \oplus \{a, c\} = \{b, c\}$

$$\{a, b\} \oplus \{\emptyset\} = \{a, b\}$$

$$\{a, b\} \oplus \{a, b\} = \emptyset$$

Nếu ta biểu diễn các tập hợp A và B bằng các vòng tròn như ở hình 1.3.4 thì hiệu đối xứng $A \oplus B$ là tập hợp được biểu thị bằng phần gạch chéo.



Hình 1.3.4

Chúng ta có thể tóm tắt bốn phép toán cơ bản ở trên giữa hai tập hợp A và B bằng những dòng dưới đây:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \\ A \oplus B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B \wedge x \notin A \cap B\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ở đây: $\vee$ kí hiệu “hoặc” còn $\wedge$ kí hiệu “và”.

Các tính chất cơ bản của các phép toán trên được đúc kết trong định lý sau đây:

Định lý 1.3.1. Cho A, B, C và X là các tập tùy ý. Các luật sau đây được thỏa mãn:

- Luật giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A \quad (1.12)$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Luật kết hợp:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (1.13)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

- Luật phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1.14)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Công thức De Morgan:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \quad (1.15)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

Định lý 1.3.1 có thể chứng minh một cách đơn giản căn cứ vào định nghĩa của tập hợp và các phép toán của tập hợp (thực ra các định nghĩa này phải dựa trên những tiên đề nhất định mà về sau ta sẽ nói).

Thật vậy, giả sử chúng ta phải chứng minh luật phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Quá trình chứng minh bao gồm 2 bước. Trước hết ta phải chứng minh rằng $A \cap (B \cup C)$ là một tập con của tập $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Thật vậy, giả sử x là một phần tử của $A \cap (B \cup C)$, nghĩa là $x \in A$ đồng thời $x \in B$ hoặc $x \in C$. Nếu $x \in B$, tức $x \in A \cap B$, còn nếu $x \in C$ tức $x \in A \cap C$, do vậy ta có:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Nói cách khác $A \cap (B \cup C)$ là tập con của $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. Bước thứ 2 bằng cách tương tự như vậy chúng ta chứng minh ngược lại $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ là tập con của tập $A \cap (B \cup C)$. Giả sử $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, nghĩa là $x \in (A \cap B)$ hoặc $x \in (A \cap C)$. Như vậy x thuộc về A đồng thời thuộc về B hoặc C :

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

Do vậy, rõ ràng $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ là tập con của tập $A \cap (B \cup C)$. Từ 2 bước chứng minh này chúng ta có thể rút ngay ra:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Khái niệm về phép tuyển và phép hội có thể mở rộng cho một số bất kỳ các tập hợp. Thật vậy, nếu chúng ta gọi ϕ là một họ các tập hợp thì ta có:

$$\bigcup_{S \in \phi} S = \{s \mid s \in S \text{ với một } S \text{ nào đó } \in \phi\} \quad (1.16)$$

$$\bigcap_{S \in \phi} S = \{s \mid s \in S \text{ với mọi } S \in \phi\} \quad (1.17)$$

Định lý 1.3.1 đúng với một số lượng bất kỳ các tập hợp.

1.4. CÁC TIÊN ĐỀ CỦA ĐẠI SỐ TẬP HỢP

Thực ra tất cả những khái niệm liên quan đến tập hợp mà chúng ta đã nêu ra từ trước đến nay cũng như các tính chất quan trọng của chúng được đúc kết trong định lý 1.3.1 đều dựa trên hệ thống các tiên đề sau đây về tập hợp.

• **Tiên đề đẳng trị:** Nếu các tập hợp A và B có cùng các phần tử như nhau thì bằng nhau ($A = B$).

• **Tiên đề tổng:** Đối với các tập hợp bất kỳ A và B tồn tại một tập hợp mà các phần tử của nó là tất cả các phần tử của tập A và tất cả các phần tử của tập B , ngoài ra không chứa một phần tử nào khác.

• **Tiên đề hiệu:** Đối với các tập hợp bất kỳ A và B tồn tại một tập hợp mà các phần tử của nó là các phần tử của A nhưng không phải là các phần tử của B , đồng thời không chứa một phần tử nào khác.

• **Tiên đề tồn tại:** Có ít nhất một tập hợp tồn tại.

Tiên đề này giúp chúng ta giải thích sự tồn tại của tập trống $\emptyset$, vì rằng tập trống $\emptyset$ xem như là hiệu của một tập A bất kỳ với chính bản thân nó ($A \setminus A$).

1.5. PHÉP TÍNH LŨY THỪA TẬP HỢP

Định nghĩa 1.5.1. Cho một tập hợp A bất kỳ. Lũy thừa của tập hợp A , kí hiệu $P(A)$, là một tập hợp bao gồm các tập con của A , nghĩa là:

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\} \quad (1.18)$$

Ví dụ 1.5. $A = \emptyset \Rightarrow P(A) = \{\emptyset\}$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Nhờ phép lũy thừa của tập hợp mà chúng ta có thể cấu tạo nên nhiều tập hợp mới.

Định lý 1.5.1. Nếu tập hợp A có n phần tử thì tập lũy thừa $P(A)$ có đúng 2^n phần tử.

Chứng minh: Mỗi tập con của tập lũy thừa $P(A)$ có thể không chứa phần tử nào hoặc chứa 1 phần tử, 2 phần tử, ..., n phần tử của tập hợp A . Theo phép tính tổ hợp ta suy ra nếu tập con của $P(A)$ chứa i phần tử của tập A thì số lượng tập con như vậy của $P(A)$ là:

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Vậy số lượng phần tử (tập con) của tập lũy thừa $P(A)$, kí hiệu là $|P(A)|$, được xác định như sau:

$$|P(A)| = \sum_{i=0}^n C_i^n \quad (1.19)$$

Như chúng ta đã biết, trong triển khai nhị thức Niuton sau đây:

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

nếu thay $x = 1$ thì ta sẽ có:

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n \quad (1.20)$$

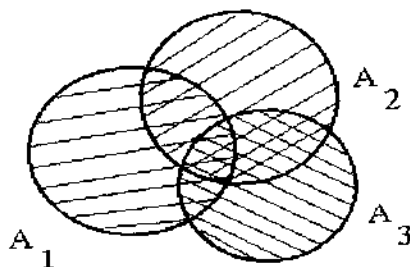
Vậy $|P(A)| = \sum_{i=0}^n C_i^n = 2^n \quad (1.21)$

1.6. NGUYÊN LÝ BAO GỒM VÀ LOẠI TRỪ

Trên cơ sở khái niệm về lực lượng của các tập hợp hữu hạn chúng ta có thể rút ra một số tính chất sau đây. Cho P và Q là các tập hữu hạn bất kỳ, ta có:

$$\begin{aligned} |P \cup Q| &\leq |P| + |Q| \\ |P \cap Q| &\leq \min(|P|, |Q|) \\ |P - Q| &\geq |P| - |Q| \\ |P \oplus Q| &= |P| + |Q| - 2|P \cap Q| \end{aligned} \quad (1.22)$$

Những tính chất nêu ra ở (1.22) có thể chứng minh dễ dàng nên dành cho độc giả thay phần bài tập.



Hình 1.6.1

Tương tự như vậy chúng ta có thể suy ra các nguyên lý sau:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \quad (1.23)$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \quad (1.24)$$

Ở đây A_1, A_2, A_3 là các tập hữu hạn.

Chúng ta có thể kiểm tra lại tính chất (1.24) nhờ hình 1.6.1. Việc chứng minh đẳng thức (1.23) dành cho độc giả.

Ví dụ 1.6. Một xưởng điện tử lắp ráp 600 đầu video. Trong số đó có 300 chiếc có điều khiển từ xa, 160 chiếc có đồng hồ thời gian và 120 chiếc có bộ phận ghi chậm. Đặc biệt có 60 đầu video có cả 3 tính chất trên. Hỏi có ít nhất bao nhiêu đầu video không có một tính chất nào cả trong 3 tính chất trên.

Giả sử ta gọi P là tập tất cả các đầu video có tính chất thứ nhất (điều khiển từ xa), Q là tập tất cả các đầu video có tính chất thứ hai (đồng hồ thời gian), R là tập tất cả các đầu video có tính chất thứ ba (bộ phận ghi chậm). Như vậy ta có:

$$|P| = 300, \quad |Q| = 160, \quad |R| = 120$$

$$\text{và} \quad |P \cap Q \cap R| = 60$$

Theo tính chất (1.24) ta có:

$$\begin{aligned} |P \cup Q \cup R| &= |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| + |P \cap Q \cap R| \\ &= 300 + 160 + 120 - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| + 60 \\ &= 640 - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| \end{aligned}$$

Mặt khác ta có các quan hệ sau đây:

$$|P \cap Q| \geq |P \cap Q \cap R| = 60$$

$$|P \cap R| \geq |P \cap Q \cap R| = 60$$

$$|Q \cap R| \geq |P \cap Q \cap R| = 60$$

$$\text{Do vậy: } |P \cup Q \cup R| \leq 640 - 60 - 60 - 60 = 460$$

Điều này có nghĩa rằng có nhiều nhất là 460 đầu video có ít nhất là một trong 3 đặc tính đã cho (có thể có 2 hoặc 3 đặc tính trên một đầu máy). Nói cách khác, chúng ta có ít nhất là $600 - 460 = 140$ đầu video không có một đặc tính nào cả trong 3 đặc tính đã cho.

Nguyên lý mô tả ở biểu thức (1.24) có thể mở rộng cho một số lượng bất kỳ hữu hạn các tập hợp khác nhau. Trong trường hợp tổng quát ta có:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned} \quad (1.25)$$

Để chứng minh đẳng thức (1.25) chúng ta dùng phương pháp truy chứng toán học đối với số lượng tập hợp bằng n . Rõ ràng rằng biểu thức (1.23) đã thực hiện bước 1 của phép truy chứng. Bước tiếp theo chúng ta giả thiết đẳng thức (1.25) đúng đối với $n-1$ tập hợp. Áp dụng (1.23) cho hai tập hợp $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})$ và A_n ta có:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| + |A_n| - \\ &- |A_n \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})| \end{aligned} \quad (1.26)$$

Mặt khác áp dụng tính chất phân phối ta có:

$$|A_n \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1})| = |(A_n \cap A_1) \cup (A_n \cap A_2) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n-1})|$$

Với giả thiết nêu lên ở trên ta có thể áp dụng (1.25) cho $n-1$ tập hợp là:

$$(A_n \cap A_1), (A_n \cap A_2), \dots, (A_n \cap A_{n-1}).$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned}
 & |(A_n \cap A_1) \cup (A_n \cap A_2) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n-1})| = \\
 & = |A_n \cap A_1| + |A_n \cap A_2| + \dots + |A_n \cap A_{n-1}| \\
 & \quad - |(A_n \cap A_1) \cap (A_n \cap A_2)| - |(A_n \cap A_1) \cap (A_n \cap A_3)| \\
 & \quad - \dots \\
 & \quad + |(A_n \cap A_1) \cap (A_n \cap A_2) \cap (A_n \cap A_3)| + \dots \\
 & \quad + \dots \\
 & \quad + (-1)^{n-2} |(A_n \cap A_1) \cap (A_n \cap A_2) \cap \dots \cap (A_n \cap A_{n-1})| \\
 & = |A_n \cap A_1| + |A_n \cap A_2| + \dots + |A_n \cap A_{n-1}| \\
 & \quad - |A_n \cap A_1 \cap A_2| - |A_n \cap A_1 \cap A_3| - \dots \\
 & \quad + |A_n \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots \\
 & \quad + \dots \\
 & \quad + (-1)^{n-2} |A_n \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}| \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

Mặt khác áp dụng (1.25) cho $n-1$ tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ chúng ta nhận được:

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}| &= |A_1| + |A_2| + \dots \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}| \quad (1.28)
 \end{aligned}$$

Thay (1.27) và (1.28) vào (1.26) chúng ta sẽ nhận được biểu thức (1.25)

1.7. MỆNH ĐỀ

Mệnh đề là một câu tường thuật đúng hoặc sai. Ví dụ “Hôm nay trời nắng”, “Xí nghiệp đã hoàn thành kế hoạch”, “Ngày mai

sinh viên được nghỉ” v.v... là những mệnh đề. Ngược lại những câu như: “Mấy giờ rồi?”, “Đề nghị giữ trật tự”, “Cho tôi xin cốc nước ” v.v... không phải là những mệnh đề. Sở dĩ như vậy vì chúng không phải là những câu tường thuật và do đó chúng không có đầy đủ nghĩa để có thể nói về chúng “đúng” hay “sai”.

Người ta thường dùng các ký hiệu để chỉ các mệnh đề. Ví dụ ta gọi P là mệnh đề “Ngày mai trời sẽ mưa”. P có thể là đúng và cũng có thể là sai, điều này phụ thuộc vào kết quả thời tiết ngày mai. Do vậy người ta cũng có thể nói rằng P có thể nhận một trong hai giá trị là đúng (ký hiệu T) và sai (ký hiệu F).

Hai mệnh đề p và q là tương đương nếu trong mọi trường hợp khi p là đúng thì q cũng là đúng, và ngược lại khi p là sai thì q cũng là sai. Ví dụ hai mệnh đề, “Sáng nay nước đóng băng” và “Sáng nay nhiệt độ ngoài trời dưới 0°C ” là tương đương. Tương tự như vậy các mệnh đề “Bác Hồ sinh năm 1890” và “Bác Hồ vĩnh biệt chúng ta lúc Người 79 tuổi ” là tương đương. Nhưng các mệnh đề sau không phải là tương đương: “Sinh viên A học giỏi nhất lớp” và “Sinh viên A học toàn điểm 5” (học toàn điểm 5 chưa chắc đã giỏi nhất lớp); “ x là một số nguyên tố” và “ x không chia hết cho 3” cũng không phải là hai mệnh đề tương đương.

Vì các mệnh đề có thể nhận một trong 2 giá trị T hoặc F do đó chúng ta hoàn toàn có thể định nghĩa được các phép toán trên các mệnh đề. Tuy vậy để bạn đọc có thể hiểu được một cách hệ thống chúng tôi sẽ quay trở lại các phép toán của mệnh đề sau phần tìm hiểu về đại số Boole.

BÀI TẬP

1. Kiểm tra xem các quan hệ sau đây là đúng hay sai:

- | | |
|--|--|
| a) $\emptyset \subseteq \emptyset$; | e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ |
| b) $\emptyset \in \emptyset$; | f) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$ |
| c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; | g) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ |
| d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$; | h) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$ |

2. Có phải mỗi mệnh đề sau đây là đúng với các tập hợp bất kỳ A, B, C không?

- a) Nếu $A \in B$ và $B \subseteq C$, thì $A \in C$
- b) Nếu $A \in B$ và $B \subseteq C$, thì $A \subseteq C$
- c) Nếu $A \subseteq B$ và $B \in C$, thì $A \in C$
- d) Nếu $A \subseteq B$ và $B \in C$, thì $A \subseteq C$

3. Cho A, B, C là các tập con của U . Để có được các đẳng thức $A \cap B = A \cap C$ và $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$ có cần điều kiện $B = C$ hay không?

4. a) Cho $A \subseteq B$ và $C \subseteq D$; có phải lúc nào ta cũng có được quan hệ sau đây:

$$(A \cup C) \subseteq (B \cup D) ?$$

$$(A \cap C) \subseteq (B \cap D) ?$$

b) Cho $W \subset X$ và $Y \subset Z$, có phải lúc nào ta cũng có được quan hệ sau đây:

$$(W \cup Y) \subset (X \cup Z) ?$$

$$(W \cap Y) \subset (X \cap Z) ?$$

5. Cho A, B, C là các tập hợp, với điều kiện nào thì mỗi mệnh đề sau đây là đúng.

a) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A$

b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \emptyset$

$$c) (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \emptyset$$

$$d) (A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = \emptyset$$

6. Cho A, B, C là các tập hợp bất kỳ, chứng minh:

$$a) (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

$$b) (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$$

$$c) (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

7. Cho $A = \{\emptyset, B = P(P(A))\}$, kiểm tra xem các quan hệ sau đây là đúng hay sai:

$$a) \emptyset \in B; \emptyset \subseteq B$$

$$b) \{\emptyset\} \in B; \{\emptyset\} \subseteq B$$

$$c) \{\{\emptyset\}\} \in B; \{\{\emptyset\}\} \subseteq B$$

8. Cho $A = \{a, \{a\}\}$, kiểm tra lại các quan hệ sau đúng hay sai.

$$a) \{a\} \in P(A); \{a\} \subseteq P(A); \{\{a\}\} \in P(A); \{\{a\}\} \subseteq P(A)$$

b) Nếu $A = \{a, \{b\}\}$, kiểm tra lại các quan hệ ở mục a.

9. a) Trong một lớp học có 50 sinh viên, có 26 sinh viên đạt điểm A trong môn thi thứ nhất, 21 sinh viên đạt điểm A trong môn thi thứ 2. Nếu 17 sinh viên không đạt điểm A trong một môn thi nào cả thì có bao nhiêu sinh viên đạt điểm A trong cả 2 môn thi.

b) Nếu số lượng sinh viên đạt điểm A trong môn thi thứ nhất và môn thi thứ 2 là như nhau, tổng số sinh viên đạt điểm A chỉ trong 1 môn thi là 40 và có 4 sinh viên không đạt điểm A trong một môn thi nào cả, hãy xác định số lượng sinh viên đạt điểm A chỉ ở môn thi thứ 1, số lượng sinh viên đạt điểm A chỉ ở môn thi thứ 2 và số lượng sinh viên đạt điểm A trong cả 2 môn.

10. Xác định tập lũy thừa của các tập sau đây: $\{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$

Chương II

CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

2.1. MỞ ĐẦU

Ở chương I chúng ta đã đề cập đến lực lượng của tập hợp cũng như khái niệm về tập lũy thừa. Định lý 1.5.1 cho ta định lượng về mối quan hệ giữa lực lượng của một tập hợp A với lực lượng của tập lũy thừa $P(A)$. Một vấn đề được đặt ra là có thể có bao nhiêu tập con cùng có một lực lượng k như nhau được cấu thành từ tập hợp A . Ví dụ một uỷ ban Olympic có 10 thành viên và do đó chúng ta có thể thành lập được 2^{10} tiểu ban khác nhau (lực lượng của tập $P(A)$, ở đây $|A| = 10$). Nếu mỗi tiểu ban Olympic bao gồm 6 thành viên và được thành lập từ 10 uỷ viên trên thì chúng ta có thể có 210 tiểu ban khác nhau. Chương này chúng ta dành để nghiên cứu những vấn đề liên quan đến việc cấu thành các tập hợp mới trên cơ sở hoán vị và tổ hợp các phần tử của các tập hợp đã cho.

2.2. KHÁI NIỆM VỀ LUẬT CỘNG VÀ LUẬT NHÂN

Khi nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên chúng ta đã biết có nhiều sự kiện ngẫu nhiên xuất hiện với những khả năng khác nhau. Ví dụ gieo một con xúc xắc trong đó việc xuất hiện một mặt nào đó là một sự kiện ngẫu nhiên và sự kiện này có 6 khả năng khác nhau. Nếu ta lại gieo 1 đồng tiền thì sự kiện ngẫu

nhiên xuất hiện bề mặt đồng tiền (âm hay dương) chỉ có 2 khả năng mà thôi.

Nếu các sự kiện ngẫu nhiên cùng xuất hiện đồng thời thì kết quả sẽ ra sao. Sau đây chúng ta nghiên cứu hai luật cơ bản:

- **Luật nhân:** Nếu một sự kiện xuất hiện trong m khả năng và một sự kiện khác xuất hiện trong n khả năng thì sẽ có $m \times n$ khả năng xuất hiện 2 sự kiện đồng thời.

Ví dụ ta gieo đồng thời con xúc xắc và đồng tiền thì có 6×2 khả năng khác nhau xuất hiện

- **Luật cộng:** Nếu một sự kiện xuất hiện trong m khả năng và một sự kiện khác xuất hiện trong n khả năng thì sẽ có $m + n$ khả năng xuất hiện chính xác một trong hai sự kiện này.

Ví dụ ta gieo lần lượt con xúc xắc và đồng tiền thì rõ ràng có $6 + 2$ khả năng khác nhau xuất hiện chỉ một mặt xúc xắc hoặc chỉ một mặt đồng tiền

Giả sử có 10 môn học buổi sáng và 7 môn học buổi chiều thì sinh viên sẽ có 10×7 khả năng lựa chọn để buổi sáng nghe 1 môn và buổi chiều nghe 1 môn, đồng thời có $10 + 7$ khả năng lựa chọn để sinh viên chỉ nghe 1 môn trong 1 ngày.

2.3. CHỈNH HỢP

Chỉnh hợp là một trong các khái niệm quan trọng của phép toán tổ hợp. Chỉnh hợp m của n phần tử là một tập con xếp thứ tự gồm m phần tử của tập hợp gồm n phần tử. Hai chỉnh hợp được coi là khác nhau hoặc do thành phần của các phần tử hoặc là do thứ tự của các phần tử khác nhau.

Ta hãy xét một bài toán đơn giản sau đây. Giả sử ta ném lần lượt (theo thứ tự) 3 quả bóng được đánh dấu bằng các màu

xanh, đỏ và vàng vào 10 cái rổ được đánh số thứ tự 1, 2, 3,..., 10 với điều kiện mỗi cái rổ chỉ nhận 1 quả bóng. Rõ ràng quả bóng xanh có thể lọt vào 1 trong 10 rổ kể trên còn quả bóng đỏ chỉ có thể lọt vào 1 trong 9 cái rổ còn lại. Tương tự như vậy quả bóng vàng ném sau cùng chỉ có thể lọt vào 1 trong 8 rổ còn lại. Như vậy chúng ta có $10 \times 9 \times 8$ khả năng khác nhau ném bóng vào rổ. Tổng quát nếu ta có m quả bóng và n cái rổ thì số khả năng khác nhau ném bóng vào rổ kí hiệu là $P(n, m)$, được xác định như sau:

$$P(n, m) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - m + 1) \quad (2.1)$$

Hoặc ta có thể biểu diễn dưới dạng khác như sau:

$$P(n, m) = \frac{n!}{(n - m)!} \quad (2.2)$$

Ở đây phép giai thừa được định nghĩa như thường lệ:

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \dots \times 2 \times 1 \text{ và } 0! = 1$$

Bài toán ném bóng vào rổ ở trên thực chất là bài toán xác định chỉnh hợp chập m của n yếu tố kí hiệu là $P(n, m)$ được xác định như ở biểu thức (2.2).

Ví dụ 2.1. Có bao nhiêu khả năng để tổ chức 3 cuộc họp khác nhau trong vòng một tuần (6 ngày) sao cho mỗi ngày có nhiều nhất là 1 cuộc họp. Để giải bài toán này chúng ta hình dung 3 cuộc họp như 3 quả bóng còn 6 ngày như 6 cái rổ. Vậy số khả năng tổ chức là chỉnh hợp chập 3 của 6 yếu tố:

$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6 - 3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

Ví dụ 2.2. Có bao nhiêu cách phân bổ chỉ tiêu đi nghiên cứu sinh cho các trường đại học, nếu chỉ có 4 nghiên cứu sinh phân cho 10 trường đại học với điều kiện mỗi trường có nhiều nhất là

1 chỉ tiêu. Tương tự như bài toán ném bóng vào rổ, ở đây chúng ta có

$$P(n, m) = P(10, 4) = \frac{10!}{(10-4)!} = 18900$$

Bây giờ chúng ta quay trở lại bài toán ném bóng vào rổ. Giả sử chúng ta có 5 quả bóng, nhưng trong đó có 3 quả bóng cùng màu đỏ, 1 quả bóng màu xanh và 1 quả màu vàng. Số bóng này được ném lần lượt vào 10 cái rổ, hỏi có mấy khả năng phân biệt (không trùng lặp) của sự kiện ném bóng vào rổ. Tất nhiên cũng như trước đây, mỗi rổ chỉ nhận 1 quả bóng mà thôi. Nếu 5 quả bóng là 5 màu phân biệt thì chúng ta có $P(10, 5) = 30.240$ khả năng khác nhau. Nhưng vì có 3 quả bóng cùng màu đỏ nên số lần không phân biệt được khi kết hợp với 2 quả bóng khác màu kia là bằng $3 \times 2 \times 1$. Vậy cuối cùng số khả năng phân biệt của sự kiện ném 5 quả bóng trên sẽ là:

$$\frac{P(10,5)}{3!} = 5040$$

Một cách tổng quát, nếu ta có m quả bóng mà trong đó loại màu thứ nhất là C_1 quả, loại màu thứ hai là C_2 quả... và loại màu thứ k là C_k quả; m quả bóng này được ném lần lượt vào n cái rổ khác nhau sao cho mỗi rổ chỉ chứa 1 quả. Số khả năng có thể xảy ra của sự kiện này sẽ là:

$$\frac{P(m,n)}{C_1!C_2!\dots C_k!} \quad (2.3)$$

Ví dụ 2.3. Giả sử ta có 3 quả cam, 2 quả chuối, 3 cái bánh và 2 đồ chơi chia đều cho 10 em bé, trong đó mỗi em chỉ nhận được một thứ mà thôi. Hỏi có mấy khả năng chia phân biệt nhau.

Áp dụng công thức (2.3) vào trường hợp này với lưu ý rằng ở đây $m = n = 10$ (10 em bé, 10 món quà), ta có số khả năng của sự kiện là:

$$\frac{P(10,10)}{3!2!3!2!} = 25.200$$

2.4. TỔ HỢP

Tổ hợp m phần tử của tập hợp n phần tử còn gọi là tổ hợp chập m của n phần tử là mọi tập hợp con gồm m phần tử của tập hợp n phần tử. Hai tổ hợp chỉ xem là khác nhau nếu một phần tử nào đó của tổ hợp này không có trong tổ hợp kia. Như vậy thứ tự của các phần tử ở đây là không quan trọng. Đó là điểm phân biệt giữa tổ hợp và chỉnh hợp. Suy diễn từ công thức (2.3) cho trường hợp tổ hợp chập m của n yếu tố, kí hiệu $C(n,m)$, ta có:

$$C(n,m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{P(n,m)}{m!} \quad (2.4)$$

Bây giờ chúng ta quay lại bài toán ném bóng vào rổ. Nếu cả 3 quả bóng đều sơn cùng một màu và ném lần lượt vào 10 cái rổ, mỗi rổ chỉ nhận 1 quả bóng thì số khả năng ném bóng vào rổ chính là tổ hợp chập 3 của 10 yếu tố:

$$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}$$

Từ công thức (2.4) chúng ta dễ dàng suy ra:

$$C(n, m) = C(n, n - m) \quad (2.5)$$

Ví dụ 2.4. Hội đồng khoa học có 11 uỷ viên trong đó có ông A và ông B. Hỏi có mấy khả năng để thành lập một tiểu ban

gồm 5 người mà trong đó ít nhất phải có mặt một trong hai ông A và B .

Số khả năng để thành lập một tiểu ban gồm 5 trong số 11 thành viên của hội đồng sẽ là:

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$$

Nếu tiểu ban 5 người không có mặt đồng thời cả hai ông A và B thì khả năng lựa chọn chỉ là 5 trong số 9 uỷ viên còn lại:

$$C(9,5) = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126$$

Vậy số khả năng thành lập tiểu ban 5 người trong đó có ít nhất một trong hai ông A và B (có thể có mặt đồng thời cả hai ông) là:

$$C(11, 5) - C(9, 5) = 462 - 126 = 336$$

Ví dụ 2.5. Cho 1 hình thập giác lồi như ở hình 2.3.1. Giả sử không có 3 đường chéo nào của hình thập giác cắt nhau tại một điểm. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng được hình thành từ các đường chéo do các giao điểm giữa chúng tạo ra. Như ta biết đường chéo được tạo thành giữa 2 đỉnh. Do vậy tổng số đường chéo của một hình thập giác là: $C(10, 2) - 10 = 35$.

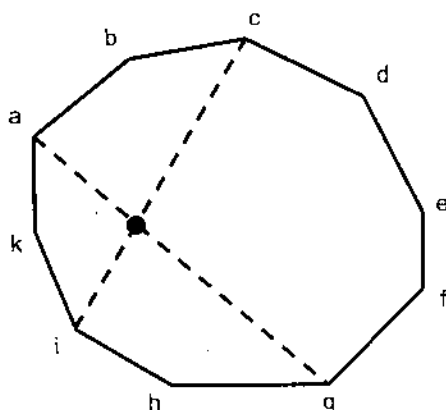
Ở đây ta phải trừ bớt đi 10 từ tổ hợp chập 2 của 10 yếu tố vì phải bớt đi 10 cạnh của thập giác.

Ta lại biết cứ 4 đỉnh thì tạo thành 1 giao điểm của 2 đường chéo. Như vậy tổng số giao điểm giữa các đường chéo là:

$$C(10, 4) = 210$$

Mặt khác, nếu trên một đường chéo có k giao điểm thì đường chéo đó bị chia thành $k + 1$ đoạn thẳng. Vì mỗi giao điểm

lại nằm trên 2 đường chéo nên tổng số đoạn thẳng do các giao điểm tạo ra trên các đường chéo là: $35 + (2 \times 210) = 455$.



Hình 2.3.1

BÀI TẬP

1. Có bao nhiêu khả năng để chọn 2 số từ các số nguyên 1, 2, ..., 100 sao cho tổng của chúng là một số chẵn? một số lẻ?
2. Áp dụng phép toán tổ hợp chứng minh đẳng thức sau:

$$C(2n, 2) = 2C(n, 2) + n^2$$
3. Có bao nhiêu khả năng để phân chia 22 quyển sách cho 5 sinh viên sao cho 2 sinh viên có mỗi người 5 quyển và 3 sinh viên còn lại có mỗi người 4 quyển?
4. Có bao nhiêu khả năng để chia $2n$ người thành n cặp?
5. Chứng minh đẳng thức sau đây

$$C(2n + 2, n + 1) = C(2n, n + 1) + 2C(2n, n) + C(2n, n - 1)$$

6. Cho $2n$ đối tượng, trong đó n đối tượng là giống hệt nhau. Có bao nhiêu khả năng để chọn ra n đối tượng từ $2n$ đối tượng trên.
7. Có bao nhiêu khả năng để chọn 2 số nguyên trong các số $1, 2, \dots, n-1$ sao cho tổng của chúng lớn hơn n .
8. Có bao nhiêu từ được cấu tạo từ tập $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ có chiều dài là 8 và “chữ” đầu tiên là 0? Tương tự như vậy có bao nhiêu từ có chiều dài 8 và “chữ” đầu tiên không phải là 0.

Chương III

QUAN HỆ VÀ HÀM SỐ

Như chúng ta đã biết tất cả các đối tượng trong thế giới xung quanh ta đều có những mối quan hệ nhất định với nhau. Rõ ràng không có một đối tượng nào có thể tồn tại tách rời (không liên quan) với thế giới bên ngoài. Mặt khác, mỗi đối tượng lại chứa đựng rất nhiều mối quan hệ nội tại của bản thân nó. Xét một nhóm sinh viên trong cùng một lớp, ta có thể nói rằng hai sinh viên có quan hệ với nhau nếu họ cùng có một quê hương. Xét một tập hợp các số nguyên $\{1, 2, \dots, 15\}$ ta có thể nói rằng 3 phần tử nào đó của tập hợp này có quan hệ với nhau nếu tổng của chúng chia hết cho 4. Nói một cách khác, các phần tử hay các đối tượng có quan hệ chặt chẽ với nhau nhưng mối quan hệ được hiểu như thế nào là phụ thuộc vào định nghĩa của chúng ta.

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các mối quan hệ trên cơ sở lý thuyết tập hợp. Trước hết chúng ta nghiên cứu các mối quan hệ hai ngôi trên hai tập hợp và trên cùng một tập hợp, cùng với các tính chất của các mối quan hệ đó. Tiếp theo chúng ta sẽ xét đến các mối quan hệ sắp xếp và các mối liên quan giữa tập hợp, tập sắp xếp và các đại số.

3.1. QUAN HỆ HAI NGÔI GIỮA HAI TẬP HỢP

Định nghĩa 3.1.1. Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ tích trực tiếp của n tập trên được định nghĩa như sau:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} \quad (3.1)$$

Ví dụ cho $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, ta có tích trực tiếp của hai tập trên như sau:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2, b_3\} = \\ &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\} \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.1.2. Quan hệ hai ngôi từ tập A đến tập B , ký hiệu R , là một tập con của tích trực tiếp $A \times B$

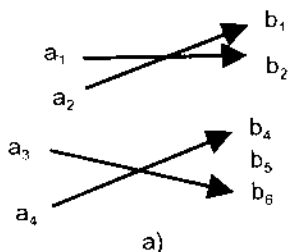
$$R \subseteq A \times B \quad (3.2)$$

ở đây, A gọi là *miền xác định của R* còn B là *đối miền xác định*.

Ví dụ 3.1. Cho $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ là tập hợp các sinh viên tốt nghiệp còn $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ là tập hợp các cơ quan cần nhận sinh viên tốt nghiệp.

Giả sử: $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_3, b_6), (a_4, b_4)\}$ là quan hệ từ tập A đến tập B ; R mô tả các cặp sắp xếp nơi công tác cho mỗi sinh viên. Rõ ràng là $R \subset A \times B$.

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn, nghĩa là $|A| = m$, $|B| = n$ người ta dùng phương pháp đồ thị để mô tả quan hệ $R \subset A \times B$. Các đỉnh của đồ thị biểu thị các phần tử của A và B , còn các cạnh là các đường nối các cặp $(a_i, b_j) \in R$ (có khi người ta viết tắt dưới dạng $a_i R b_j$).



	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	0	1	0	0	0	0
a_2	1	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0	1
a_4	0	0	0	1	0	0

Hình 3.1.1

Ngoài ra, người ta cũng thường dùng ma trận $m \times n$ để biểu thị mối quan hệ R từ A đến B . Phần tử m_{ij} của ma trận được xác định như sau:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases} \quad (3.3)$$

Quan hệ R giữa 2 tập hợp A và B trong ví dụ 3.1 được mô tả dưới dạng đồ thị và ma trận như ở hình 3.1.1.

Bản thân các quan hệ lại liên quan với nhau tạo nên các quan hệ mới. Chẳng hạn hợp thành giữa các quan hệ là một hình thức tạo nên các quan hệ mới giữa các quan hệ.

Giả sử ta có 3 quan hệ như sau: $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$, $T \subset C \times D$. **Hợp thành của 2 quan hệ R và S** được định nghĩa như sau:

$$R.S = \{(a_i, c_k) \mid \exists b_j : (a_i, b_j) \in R, (b_j, c_k) \in S\} \quad (3.4)$$

(Ở đây kí hiệu $\exists b_j$: đọc là “có một b_j mà...”)

Định lí 3.1.1. Hợp thành của hai quan hệ hai ngôi có tính chất kết hợp:

$$(R.S).T = R.(S.T) \quad (3.5)$$

Nếu R_1 và R_2 là các quan hệ hai ngôi từ A đến B thì:

- Giao của hai quan hệ : $R_1 \cap R_2$
- Hợp của hai quan hệ : $R_1 \cup R_2$
- Hiệu đối xứng của hai quan hệ : $R_1 \oplus R_2$
- Hiệu của hai quan hệ : $R_1 \setminus R_2$

Cũng là các quan hệ hai ngôi.

Định lí 3.1.2.

a) Hợp thành của các quan hệ có tính chất phân bố đối với phép hợp, nghĩa là:

$$(\bar{R}_1 \cup R_2). S = (R_1. S) \cup (R_2. S) \quad (3.6)$$

$$R. (S_1 \cup S_2) = (R. S_1) \cup (R. S_2)$$

b) Hợp và giao của các quan hệ có tính chính quy đối với phép bao gồm, nghĩa là:

$$R_1 \subseteq R_2 \text{ và } R_3 \subseteq R_4 \Rightarrow R_1 \cup R_3 \subseteq R_2 \cup R_4 \quad (3.7)$$

$$R_1 \cap R_3 \subseteq R_2 \cap R_4$$

c) Hợp thành của các quan hệ có tính chính quy đối với các phép bao gồm các quan hệ, nghĩa là:

$$R_1 \subseteq R_2 \text{ và } S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1. S_1 \subseteq R_2. S_2 \quad (3.8)$$

Định nghĩa 3.1.3. Ảnh của một phần tử $a \in A$ do quan hệ R gây ra là một tập con aR của tập hợp B và được định nghĩa như sau:

$$aR = \{b_i \in B \mid (a, b_i) \in R\} \quad (3.9)$$

Ảnh của một tập con $A' \subset A$ do R gây ra là một tập con $A'R$ của B :

$$A'R = \bigcup_{a \in A'} aR \quad (3.10)$$

Ảnh aR của A do R gây ra gọi là ảnh của A .

Đối ảnh của $b \in B$ do quan hệ R gây ra là một tập con bR_c của A .

Đối ảnh của một tập con $B' \subseteq B$ do R gây ra là một tập con $B'R_c$ của A . Đối ảnh của B là tập con BR_c của A .

Sau đây chúng ta sẽ đề cập đến một vài tính chất của quan hệ hai ngôi R đến tập B .

Định nghĩa 3.1.4. Quan hệ hai ngôi R từ tập A đến tập B là:

a) Hoàn toàn xác định nếu $aR \neq \emptyset$, đối với mỗi $a \in A$ (nghĩa là $BR_c = A$);

- b) Một quan hệ lên trên, nếu $AR = B$;
- c) Một quan hệ hàm số, nếu $|aR| \leq 1$ đối với mỗi $a \in A$.
- d) Một quan hệ một - một, nếu $|bR_c| \leq 1$ đối với mỗi $b \in B$.

Một quan hệ hai ngôi hàm số và hoàn toàn xác định (theo định nghĩa 3.1.4) được gọi là một **ánh xạ** hay một **hàm số**. Một ánh xạ lên trên được gọi là một **toàn ánh** còn một ánh xạ một - một được gọi là một **đơn ánh**. Một ánh xạ lên trên và một - một được gọi là một **song ánh**.

Định lý 3.1.3. Cho một ánh xạ f , một quan hệ đảo f_c cũng là một ánh xạ nếu và chỉ nếu f là một song ánh.

Trong trường hợp này f và f_c được gọi là các **song ánh đảo**.

3.2. QUAN HỆ HAI NGÔI TRÊN MỘT TẬP HỢP VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓ

Định nghĩa 3.2.1. Một quan hệ hai ngôi từ tập hợp A lên chính bản thân nó gọi là **quan hệ hai ngôi trên tập hợp A** . Ví dụ cho A là tập hợp các số nguyên, dương. Chúng ta có thể định nghĩa một quan hệ hai ngôi R trên A như sau:

$(a, b) \in R$ nếu và chỉ nếu $(a - b) \geq 20$. Như vậy, chẳng hạn $(26, 5) \in R$ nhưng $(44, 25) \notin R$ và $(5, 26) \notin R$.

Một quan hệ Δ_A trên tập hợp A , trong đó:

$$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \quad (3.11)$$

gọi là **quan hệ đường chéo** hay **quan hệ đồng nhất**.

Sau đây là những tính chất cơ bản của một quan hệ hai ngôi trên tập hợp A .

Định lý 3.2.1. Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A là:

a) Quan hệ **phản xạ** nếu:

$$\Delta_A \subseteq R, \text{ nghĩa là } (a, a) \in R \text{ đối với mọi } a \in A$$

b) Quan hệ **đối xứng** nếu:

$$R = R_c, \text{ nghĩa là } (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

c) Quan hệ **phản xứng** nếu:

$$R \cap R_c \subseteq \Delta_A, \text{ nghĩa là } (a, b) \in R \text{ và } (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

d) Quan hệ **bắc cầu** nếu:

$$R \cdot R \subseteq R, \text{ nghĩa là } (a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

Ví dụ cho A là tập hợp các số nguyên, chúng ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi R_1 trên A : $(a, b) \in R_1$ nếu và chỉ nếu a chia hết cho b . Rõ ràng R_1 là một quan hệ phản xạ vì mỗi số nguyên chia hết cho chính bản thân nó. Nếu cũng trên tập A ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi khác R_2 : $(a, b) \in R_2$ nếu và chỉ nếu $a > b$. Rõ ràng R_2 không phải là quan hệ phản xạ.

Ví dụ khác, ta cho B là tập hợp các sinh viên và R là một quan hệ trên B được định nghĩa như sau: $(a, b) \in R$ nếu và chỉ nếu a ở cùng một phòng với b . Như vậy R là một quan hệ đối xứng còn quan hệ R_2 mà chúng ta định nghĩa trong ví dụ trước là một quan hệ phản xứng.

Nếu C là tập các học sinh, một quan hệ hai ngôi T được định nghĩa trên C như sau: $(a, b) \in T$ nếu và chỉ nếu a và b cùng một họ. Như vậy T là một quan hệ bắc cầu.

3.3. CÁC QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHÂN HOẠCH

Định nghĩa 3.3.1. Một quan hệ hai ngôi trên một tập hợp gọi là **quan hệ tương đương** nếu nó là quan hệ phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

	a	b	c	d	e	f
a	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0
c	0	0	1	0	0	0
d	0	0	0	1	1	1
e	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

Hình 3.3.1

Ví dụ quan hệ R cho trên tập $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ được mô tả ở hình 3.3.1 là một quan hệ tương đương.

Cho B là tập hợp của các dãy số 0 và 1 có chiều dài ít nhất bằng 3. Một quan hệ R trên tập B được định nghĩa như sau:

$(a, b) \in R$ nếu và chỉ nếu các dãy số a và b có 3 con số cuối cùng như nhau. Rõ ràng đây là một quan hệ tương đương.

Định nghĩa 3.3.2. Một *phân hoạch của một tập hợp* A là một tập các tập con của A , kí hiệu $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, sao cho:

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A \text{ và } A_i \cap A_j = \emptyset; i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Các tập con $A_i \subset A$ còn gọi là *các khối của phân hoạch*.

Ví dụ $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, một phân hoạch của A có dạng như sau:

$$\pi = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\}$$

Người ta còn viết các khối của phân hoạch dưới dạng khác là:

$$\pi = \{\overline{a, b, c}, \overline{d}, \overline{e, f}, \overline{g, h}\}$$

Bây giờ chúng ta hãy xét đến mối liên quan giữa quan hệ tương đương trên tập hợp A và phân hoạch của tập hợp đó. Từ quan hệ tương đương trên tập A ta định nghĩa một phân hoạch của A sao cho mỗi cặp hai phần tử trong cùng một khối có quan hệ với nhau, còn cặp hai phần tử bất kỳ ở hai khối khác nhau thì không có quan hệ với nhau. Khi đó mỗi khối của phân hoạch được gọi là *một lớp tương đương*.

Ví dụ 3.2. Cho A là tập các số tự nhiên, còn n là một số nguyên nào đó xác định. Chúng ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi R trên A như sau: $(a, b) \in R$, nếu và chỉ nếu các số dư do a và b chia cho n là như nhau. Như vậy R là một quan hệ tương đương và R tạo nên n lớp tương đương trên tập A . Lớp thứ nhất bao gồm các số chia hết cho n (số dư bằng không), lớp thứ 2 bao gồm các số chia cho n còn dư 1, lớp thứ 3 bao gồm các số chia cho n còn dư 2... và lớp thứ n bao gồm các số chia cho n còn dư $n - 1$. Hai số a và b ở cùng một lớp tương đương như trên được gọi là *tương đương với nhau theo modul n* , thường có kí hiệu là:

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Định nghĩa 3.3.3. Giả sử π_1 và π_2 là hai phân hoạch của tập A . Chúng ta nói rằng π_1 bé hơn hoặc bằng π_2 ($\pi_1 \leq \pi_2$) nếu và chỉ nếu mỗi một khối của phân hoạch π_1 nằm trong một khối nhất định của π_2 :

$$\pi_1 \leq \pi_2 \Leftrightarrow \bigwedge A_i \in \pi_1, \bigvee A_j \in \pi_2: A_i \subset A_j \quad (3.12)$$

(Biểu thức (3.12) được đọc là: π_1 bé hơn hoặc bằng π_2 nếu và chỉ nếu với mọi A_i thuộc π_1 có một A_j thuộc π_2 sao cho A_i là tập con của A_j).

Ví dụ 3.3. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\pi_1 = \{\overline{1,2}, \overline{3,4}, \overline{5,6}, \overline{7,8,9}\}$$

$$\pi_2 = \{\overline{1,6}, \overline{2,3}, \overline{4,5}, \overline{7,8,9}\}$$

$$\pi_3 = \{\overline{1,2}, \overline{3,4}, \overline{5,6}, \overline{7,8,9}\}$$

Chúng ta có $\pi_3 \leq \pi_1$, còn giữa π_1 và π_2 cũng như π_2 và π_3 không có quan hệ so sánh như trên.

Định nghĩa 3.3.4. Phân hoạch π gọi là *tích của hai phân hoạch* π_1 và π_2 ($\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$) nếu và chỉ nếu π là phân hoạch lớn nhất thỏa mãn điều kiện $\pi \leq \pi_1$ và $\pi \leq \pi_2$.

Như vậy nếu R_1 và R_2 là các quan hệ tương đương ứng với π_1 và π_2 thì $R = R_1 \cap R_2$ là quan hệ tương đương ứng với $\pi = \pi_1 \cdot \pi_2$.

Định nghĩa 3.3.5. Phân hoạch π gọi là *tổng của hai phân hoạch* π_1 và π_2 ($\pi = \pi_1 + \pi_2$) nếu và chỉ nếu π là phân hoạch bé nhất thỏa mãn điều kiện $\pi \geq \pi_1$ và $\pi \geq \pi_2$.

Nói một cách khác, phân hoạch π ứng với quan hệ $R = R_1 \cup R_2$. Hai phần tử a và b ở trong cùng một khối của $\pi_1 + \pi_2$ nếu tồn tại một chuỗi các phần tử $C_1, C_2, \dots, C_k$ sao cho a và C_1 ở trong cùng một khối của π_1 hoặc π_2 , C_1 và C_2 ở trong cùng một khối của π_1 hoặc $\pi_2, \dots$ và cuối cùng C_k và b ở trong cùng một khối của π_1 hoặc π_2 . Từ ví dụ 3.3. ta có:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}; \overline{7,8}; \overline{9}\}$$

$$\pi_1 + \pi_2 = \{\overline{1,2,3,4,5,6}; \overline{7,8,9}\}$$

Hệ quả 3.3.5. Cho π_1 và π_2 là các phân hoạch của tập hợp A .

$$\pi_1 \leq \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \cdot \pi_2 = \pi_1 \quad (3.13)$$

$$\pi_1 \leq \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 + \pi_2 = \pi_2$$

Chẳng hạn từ tập A và các phân hoạch π_1 và π_3 cho ở ví dụ 3.3 ta có:

$$\pi_1 \cdot \pi_3 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}; \overline{7,8}; \overline{9}\} = \pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_3 = \{\overline{1,2}; \overline{3,4}; \overline{5,6}; \overline{7,8,9}\} = \pi_1$$

3.4. QUAN HỆ SẮP XẾP, TẬP SẮP XẾP VÀ CÁC ĐẠI SỐ

Định nghĩa 3.4.1. Một quan hệ $\leq$ trên một tập A gọi là một *sắp xếp riêng* trên A nếu nó thỏa mãn các tiên đề sau đây:

1. Tính phản xạ: $\forall x \in A, x \leq x$

(ki hiệu $\wedge x$ có nghĩa là “với mọi x ”)

2. **Tính phản xứng:** Nếu $x, y \in A$, $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$

3. **Tính bắc cầu:** Nếu $x, y, z \in A$, $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$

Một tập A mà trên đó định nghĩa được một quan hệ sắp xếp riêng $\leq$ được gọi là **tập sắp xếp riêng**.

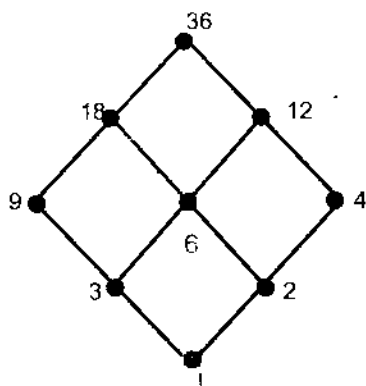
Định nghĩa 3.4.2. Một quan hệ $\leq$ trên tập hợp A gọi là một **sắp xếp toàn phần** của A nếu:

- a) nó là một sắp xếp riêng;
- b) nó thỏa mãn thêm tiên đề về tính liên thông (4) sau đây

4. **Tính liên thông:** $x, y \in A \Rightarrow x \leq y$ hoặc $y \leq x$

Một tập hợp A mà trên đó có thể định nghĩa được một quan hệ sắp xếp toàn phần gọi là một tập **sắp xếp toàn phần**, hay là một **tập sắp xếp đơn giản** hoặc một **dãy**.

Ví dụ 3.4. Cho A là tập các số chia hết của 36, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 18, 36\}$, chúng ta định nghĩa một quan hệ R như sau: " $x \leq y$ " là quan hệ " x là số chia hết của y ". Quan hệ R có thể được mô tả bằng đồ thị ở hình 3.4.1.



Hình 3.4.1

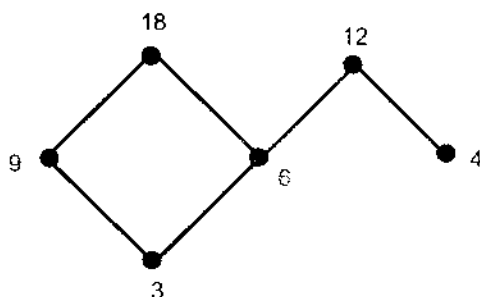


Hình 3.4.2

Rõ ràng đây là một quan hệ sắp xếp riêng vì không phải tất cả các phần tử đều thỏa mãn tính liên thông, chẳng hạn các phần tử 4, 6, 9, v.v...

Nếu A lại là tập các số chia hết của 27, $A = \{1, 3, 9, 27\}$ và R cũng được định nghĩa như ở trên thì đây là một quan hệ sắp xếp toàn phần và ta có một dãy như ở hình 3.4.2.

Giả sử B là một tập con không trống của tập sắp xếp riêng A và $b_0 \in B$. Phần tử b_0 gọi là **phần tử bé nhất** của B nếu $b_0 \leq b$ với mọi $b \in B$. Phần tử b_0 được gọi là **phần tử cực tiểu** của B nếu không có phần tử b nào mà $b < b_0$. Như vậy phần tử bé nhất cũng là phần tử cực tiểu nhưng phần tử cực tiểu không nhất thiết là phần tử bé nhất vì quan hệ sắp xếp riêng không kéo theo quan hệ liên thông. Tương tự như vậy chúng ta có thể định nghĩa được **phần tử lớn nhất** và **phần tử cực đại**.



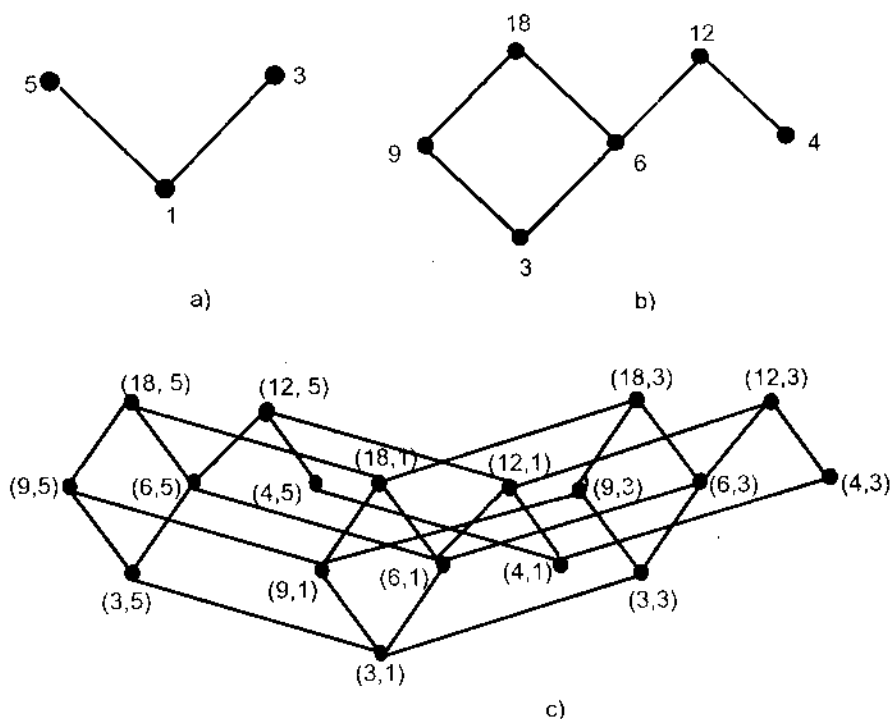
Hình 3.4.3

Từ định nghĩa đó chúng ta có thể suy ra rằng một tập con hữu hạn X của tập sắp xếp riêng P luôn có các phần tử cực đại và cực tiểu. Trong một dãy (tập sắp xếp toàn phần) thì khái niệm về phần tử lớn nhất và phần tử cực đại cũng như khái niệm về phần tử bé nhất và phần tử cực tiểu là tương đương với nhau. Một dãy hữu hạn luôn có một phần tử lớn nhất và một

phần tử bé nhất, chẳng hạn dãy được mô tả ở hình 3.4.2 có phần tử bé nhất là 1 và phần tử lớn nhất là 27. Một tập con hữu hạn mô tả ở hình 3.4.3 của tập sắp xếp riêng A (mô tả ở hình 3.4.1) có các cực tiểu là 3 và 4 còn các cực đại là 12 và 18.

Bây giờ chúng ta hãy đề cập đến một khái niệm quan trọng của toán học hiện đại, đó là khái niệm về đẳng cấu và đồng cấu.

Trong lý thuyết tập hợp thì hai tập hợp **đẳng cấu** với nhau là hai mô hình cụ thể của cùng một khái niệm toán học trừu tượng. Hai tập hợp đẳng cấu với nhau sẽ không khác gì nhau về phương diện các tính chất được mô tả.



Hình 3.4.4

Định nghĩa 3.4.3. Cho A và B là hai tập hợp. Nếu tồn tại sự tương ứng một - một giữa A và B thì sự tương ứng đó gọi là **đẳng cấu**. Tập A và B lúc đó được gọi là có tính đẳng cấu với nhau. Nếu sự tương ứng đó không phải là một - một mà là nhiều lên một từ A đến B thì được gọi là **đồng cấu**, còn A và B gọi là có tính đồng cấu với nhau.

Ví dụ 3.5. Một dãy hữu hạn k phần tử là đẳng cấu với một tập sắp xếp $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Ở đây k là các số nguyên, dương. Nói một cách khác luôn luôn tồn tại một ánh xạ f từ một dãy C có k phần tử đến tập sắp xếp N_k .

Cấu trúc đại số của một tập sắp xếp riêng có thể mở rộng cho một tập các tập sắp xếp riêng. Định lí sau đây cho chúng ta thấy rõ điều đó.

Định lí 3.4.1. Cho P là tích trực tiếp của hai tập sắp xếp riêng A và B . Chúng ta định nghĩa một **quan hệ bao gồm** như sau: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ nếu và chỉ nếu $a_1 \leq a_2$ trong A và $b_1 \leq b_2$ trong B . Tập P có quan hệ bao gồm tích như trên là một tập sắp xếp riêng.

Định lí này có thể mở rộng cho trường hợp tổng quát là tích trực tiếp của nhiều tập sắp xếp riêng.

Ví dụ 3.6. Cho $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ là hai tập sắp xếp riêng được định nghĩa theo tính chia được số học (x là số chia hết của y). Đồ thị mô tả các tập sắp xếp riêng A , B và tích trực tiếp $A \times B$ tương ứng với các hình 3.4.4 a , b , c .

Để phân biệt và thấy rõ mối liên hệ giữa tập hợp, tập sắp xếp và các đại số chúng ta sẽ đưa ra các định nghĩa về các phép toán giao và hợp. Đồng thời chúng ta cũng chứng minh rằng tập sắp xếp là sợi dây liên hệ giữa tập hợp và các đại số.

Định nghĩa 3.4.4. Cho một tập sắp xếp riêng P và hai phần tử x, y của tập hợp A . Một phần tử $b \in P$ gọi là *giới hạn dưới* của x và y nếu $b \leq x$ và $b \leq y$. Phần tử $m \in P$ gọi là *giới hạn dưới lớn nhất* của x và y nếu $m \leq x$ và $m \leq y$ và $b \leq m$ đối với mọi b mà $b \leq x$ và $b \leq y$.

Cũng tương tự như vậy chúng ta có thể định nghĩa được *giới hạn trên* và *giới hạn trên bé nhất*.

Phần tử $m \in P$ gọi là *giao* của x và y nếu nó là giới hạn dưới lớn nhất. Phần tử $l \in P$ gọi là *hợp* của x và y nếu nó là giới hạn trên bé nhất.

Từ các định nghĩa trên chúng ta thấy đối với x và y cho trước thì giao và hợp của chúng là đơn trị, nếu chúng tồn tại. Đồng thời giao và hợp là *các đối ngẫu sắp xếp lẫn nhau*, nghĩa là các định nghĩa của giao có thể suy ra từ các định nghĩa của hợp và ngược lại bằng cách thay thế quan hệ $x \leq y$ bằng nghịch đảo của chúng.

Ngoài ra phép tính giao và hợp có *tính hấp thụ*, nghĩa là:

$$x \cap (x \cup y) = x \quad (3.14)$$

$$x \cup (x \cap y) = x$$

Ta kí hiệu O và I là các phần tử bé nhất và lớn nhất của một tập sắp xếp riêng (nếu chúng tồn tại). Đến đây chúng ta có đủ cơ sở để có thể định nghĩa đại số một cách tóm tắt như sau:

Định nghĩa 3.4.5. Cho $\Omega = \{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ là một tập hữu hạn các số nguyên không âm và A là một tập nào đó. Nếu ứng với mỗi phần tử n_i chúng ta gán cho một phép toán ω_i định nghĩa trên tập A thì chúng ta có một *cấu trúc đại số* $A, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$. Đây là cấu trúc đại số lồng hợp trên A với miền toán tử Ω .

Để thấy rõ mối liên hệ giữa tập hợp, tập sắp xếp và các đại số chúng ta giới thiệu một bảng so sánh sau đây (Bảng 3.4.1).

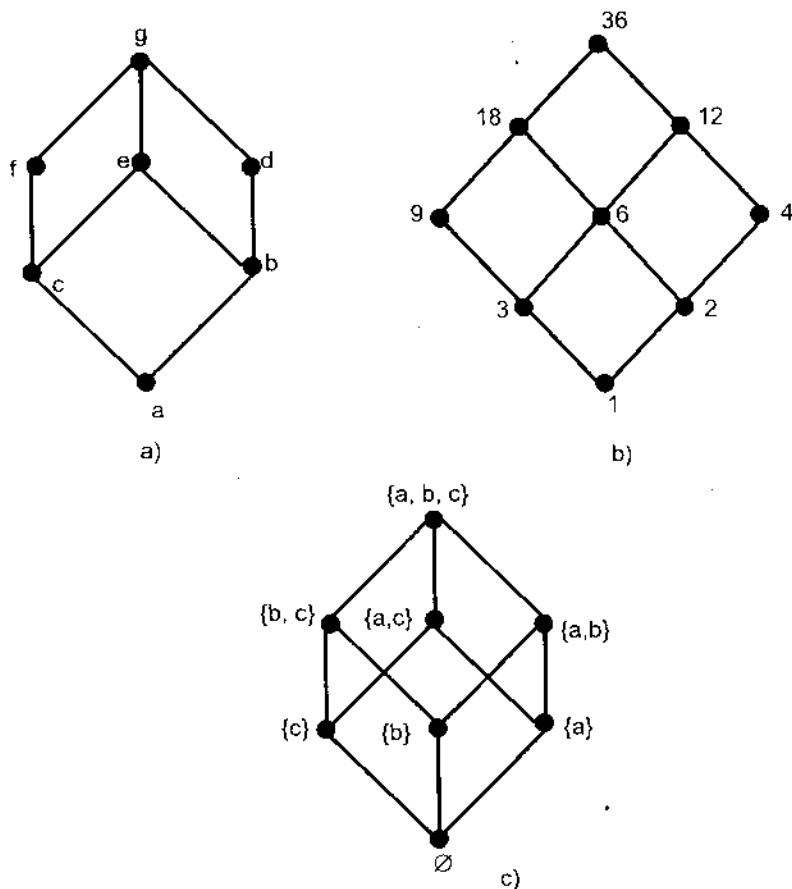
Bảng 3.4.1

	Tập hợp	Tập sắp xếp	Đại số
Quan hệ	$\subseteq$: chứa $X \subseteq Y$: X chứa trong Y	$\leq$: bao gồm $x \leq y$: y bao gồm x	$\leq$: bất đẳng thức $a \leq b$: b lớn hơn hoặc bằng a
Các phép toán	$\cup$: tuyển $X \cup Y$: tập các phần tử có trong X, trong Y và trong cả hai	$\cup$: hợp $x \cup y$: giới hạn trên bé nhất của x và y	$+$: giới hạn trên bé nhất $a + b$: giới hạn trên bé nhất của a và b
	$\cap$: hội $X \cap Y$: tập các phần tử chứa trong cả X và Y	$\cap$: giao $x \cap y$: giới hạn dưới lớn nhất của x và y	$\cdot$: giới hạn dưới lớn nhất $a \cdot b$: giới hạn dưới lớn nhất của a và b
Phần tử	A: tập hợp tổng	I: phần tử lớn nhất	1: số lớn nhất
	$\emptyset$: tập hợp trống	O: phần tử bé nhất	0: số bé nhất

3.5. DÀN VÀ CÁC HỆ THỐNG ĐẠI SỐ

Trong phần này chúng ta chỉ xét đến khía cạnh đại số của các tập sắp xếp, do vậy chúng ta sẽ sử dụng các kí hiệu của các phép toán giao và hợp như ở đại số. Trong các hệ thống đại số để chỉ phép toán giao chúng ta dùng kí hiệu “ $\cdot$ ” hoặc “ $\wedge$ ” hoặc không có dấu chấm, còn để chỉ phép hợp chúng ta dùng kí hiệu “ $+$ ” hoặc “ $\vee$ ”. Chẳng hạn $a \cdot b = a \wedge b = ab$ và $a + b = a \vee b$. Nội dung chủ yếu của phần này là giới thiệu một khái niệm cơ bản của đại số hiện đại, đó là khái niệm về dàn. Từ khái niệm về dàn chúng ta sẽ xây dựng các hệ thống đại số mà phần quan trọng nhất là đại số Boole.

Định nghĩa 3.5.1. *Dàn* là một sắp xếp riêng D mà trong đó 2 phần tử bất kì x và y có cả 2 phép toán giao và hợp.



Hình 3.5.1

Chúng ta có thể kiểm tra một cách dễ dàng rằng các hình 3.5.1 a, b, c là các dàn. Dàn ứng với hình 3.5.1 c , xây dựng từ tập lũy thừa của tập hợp $S = \{a, b, c\}$.

Từ khái niệm về dàn chúng ta có thể dễ dàng định nghĩa **hệ thống đại số** với hai phép toán tương ứng với dàn đã cho. Chẳng

hạn hệ thống đại số với hai phép toán giao và hợp ứng với dàn ở hình 3.5.1 a cho ở hình 3.5.2.

Bằng cách tương tự như vậy ta có thể định nghĩa các hệ thống đại số tương ứng với các dàn cho ở hình 3.5.1 b và hình 3.5.1 c.

+	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	d	e	f	g
b	b	b	e	d	e	g	g
c	c	e	c	g	e	f	g
d	d	d	g	d	g	g	g
e	e	e	e	g	e	g	g
f	f	g	f	g	g	f	g
g	g	g	g	g	g	g	g

.	a	b	c	d	e	f	g
a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b	a	b
c	a	a	c	a	c	c	c
d	a	b	a	d	b	a	d
e	a	b	c	b	e	c	e
f	a	a	c	a	c	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g

Hình 3.5.2

Trước khi nghiên cứu các tính chất của dàn chúng ta hãy xét các tính chất của hai phép toán giao và hợp.

Từ các định nghĩa của phép toán giao và phép toán hợp chúng ta có thể suy ra rằng, trong một tập sắp xếp riêng A , nếu tồn tại các phép toán giao và hợp của hai phần tử $x, y \in A$ thì chúng phải thỏa mãn tính chất sau:

$$x \leq y \text{ nếu và chỉ nếu } x \cdot y = x; x + y = y \quad (3.15)$$

Biểu thức (3.15) có thể viết dưới dạng ngắn gọn như sau:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cdot y = x; x + y = y$$

Các tính chất cơ bản của hai phép toán giao và hợp có thể tóm tắt trong định lí sau:

Định lí 3.5.1. Trong một tập sắp xếp riêng A , nếu tồn tại các phép toán giao và hợp giữa hai phần tử của A thì chúng sẽ

thỏa mãn các tính chất *lũy đẳng, giao hoán, kết hợp* và *loại trừ* sau đây:

$$D_1: x. x = x \qquad x + x = x \qquad (3.16)$$

$$D_2: x. y = y. x \qquad x + y = y + x \qquad (3.17)$$

$$D_3: x. (y. z) = (x. y). z \qquad x + (y + z) = (x + y) + z \qquad (3.18)$$

$$D_4: x. (x + y) = x \qquad x + x. y = x \qquad (3.19)$$

Các tính chất trên có thể được chứng minh một cách dễ dàng trên cơ sở các định nghĩa của hai phép toán giao và hợp. Chẳng hạn chúng ta thử chứng minh tính chất kết hợp (D_3), nghĩa là phải chứng minh:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Giả sử ta đặt $g = x + (y + z)$ và $h = (x + y) + z$

Vì g là hợp của x và $(y + z)$ nên:

$$x \leq g \text{ và } (y + z) \leq g$$

Vì $(y + z) \leq g$ nên $y \leq g$ và $z \leq g$

Vì hợp của x và y là giới hạn trên bé nhất của chúng nên từ các bất đẳng thức $x \leq g$ và $y \leq g$ ta có:

$$(x + y) \leq g$$

Bất đẳng thức trên kết hợp với $z \leq g$ chúng ta có:

$$(x + y) + z \leq g \Rightarrow h \leq g$$

Bằng cách tương tự như vậy chúng ta chứng minh được $g \leq h$ và do đó $g = h$

Bây giờ chúng ta hãy đề cập đến các tính chất của dàn.

Định lý 3.5.2. Trong một dàn bất kì, tất cả các phần tử thỏa mãn:

a) bốn tính chất từ D_1 đến D_4

b) *tính chất bảo toàn*, nghĩa là:

$$x \leq y \Rightarrow x. z \leq y. z, \quad x + z \leq y + z \quad (3.20)$$

c) *bất đẳng thức modul*, nghĩa là:

$$x \leq z \Rightarrow x + (z. y) \leq (x + y). z \quad (3.21)$$

d) *bất đẳng thức phân bố*, nghĩa là:

$$x. (y + z) \geq (x. y) + (x. z) \quad (3.22)$$

$$x + y. z \leq (x + y). (x + z) \quad (3.23)$$

Chứng minh: Tính chất a) coi như đương nhiên, các tính chất còn lại có thể chứng minh một cách dễ dàng trên cơ sở các định nghĩa cùng với các tính chất của các phép giao và hợp. Ví dụ chúng ta thử chứng minh tính chất c):

$$\text{Vì } x \leq z \text{ và } x \leq x + y \text{ nên } x \leq (x + y). z \quad (3.24)$$

$$\text{Vì } yz \leq z, yz \leq y \text{ và } y \leq (x + y)$$

$$\text{nên: } y. z \leq (x + y). z \quad (3.25)$$

kết hợp (3.25) với (3.24) ta có:

$$x + y. z \leq (x + y). z \quad (3.26)$$

Từ định nghĩa về dàn chúng ta có thể suy ra là một dàn hữu hạn có một phần tử bé nhất và một phần tử lớn nhất. Phần tử bé nhất chính là giao tử tất cả các phần tử của dàn, còn phần tử lớn nhất chính là hợp của tất cả các phần tử.

Định nghĩa 3.5.2a. Một tập hợp không trống với các phép toán hai ngôi đơn giản thỏa mãn các tính chất từ D_1 đến D_8 gọi là *nửa dàn*.

Định nghĩa 3.5.2b. Nếu P là một tập sắp xếp riêng mà trong đó hai phần tử bất kì có phép toán giao (hợp) thì P gọi là *nửa dàn giao* (nửa dàn hợp).

Định lý 3.5.3. Một tập không trống D với hai phép toán hai ngôi thỏa mãn các tính chất từ D_1 đến D_4 là một *dàn*.

Định lý 3.5.4. Tích trực tiếp $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ là một dàn nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các dàn.

Từ định nghĩa về dàn và các tính chất của chúng, ta thấy có thể chia thành nhiều lớp dàn khác nhau. Ở đây chúng ta chỉ quan tâm đến 3 lớp đặc biệt của dàn, đó là dàn modul, dàn phân bố và dàn phân bố bù (hay là dàn Boole).

Trước hết chúng ta hãy xét đến dàn modul.

Định nghĩa 3.5.4. Dàn D là một *dàn modul* nếu nó thỏa mãn các đẳng thức modul:

$$D_5: \wedge x, y, z \in D, x \leq z \Rightarrow x + (y \cdot z) = (x + y)z \quad (3.27)$$

Định lý 3.5.5. Dàn D là một dàn modul nếu và chỉ nếu có quan hệ sau đây:

$$(x \leq z, xy = zy, x + y = z + y) \Rightarrow x = z \quad (3.28)$$

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả thiết dàn D là một dàn modul, chúng ta phải chứng minh rằng nếu ba quan hệ ở vế trái của biểu thức (3.28) thỏa mãn thì $x = z$. Giả sử $x, y, z \in D$ ta có:

$$\begin{aligned} x &= x + xy \text{ (theo } D_4) \\ &= x + zy \text{ (theo giả thiết)} \\ &= (x + y)z \text{ (theo } D_5) \\ &= (z + y)z \text{ (theo giả thiết)} \\ &= z \text{ (theo } D_4) \end{aligned}$$

Điều kiện đủ: Chúng ta phải chứng minh rằng ba quan hệ ở vế trái của (3.28) kéo theo $x = z$, nghĩa là ta có quan hệ (3.28), thì dàn D là một dàn modul (nghĩa là D phải thỏa mãn tính chất D_5). Thật vậy:

$$\begin{aligned}
x + (y \cdot z) &= x + (x \cdot y) \text{ (theo giả thiết)} \\
&= x \text{ (theo } D_1) \\
&= z \text{ (theo giả thiết)} \\
&= z(y + z) \text{ (theo } D_4) \\
&= z(x + y) \text{ (theo giả thiết)}
\end{aligned}$$

Vậy đó là một dàn modul.

Một lớp quan trọng khác của dàn là **dàn phân bố**.

Định nghĩa 3.5.5. Dàn D là một **dàn phân bố** nếu nó thỏa mãn các phương trình phân bố sau đối với mọi $x, y, z \in D$:

$$D_{6a}: x(y + z) = (xy) + (xz) \quad (3.29)$$

$$D_{6b}: x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \quad (3.30)$$

Định lý 3.5.6. Dàn D là một dàn phân bố nếu và chỉ nếu đối với mọi $x, y, z \in D$

$$(xy = zy \text{ và } x+y = z+y) \Rightarrow x=z \quad (3.31)$$

Chúng minh định lý này cũng tương tự như chứng minh định lý 3.5.5, chỉ khác là ở đây chúng ta vận dụng thêm các tính chất D_{6a} và D_{6b} . Từ định lý này chúng ta có thể suy ra dàn phân bố là một dàn modul.

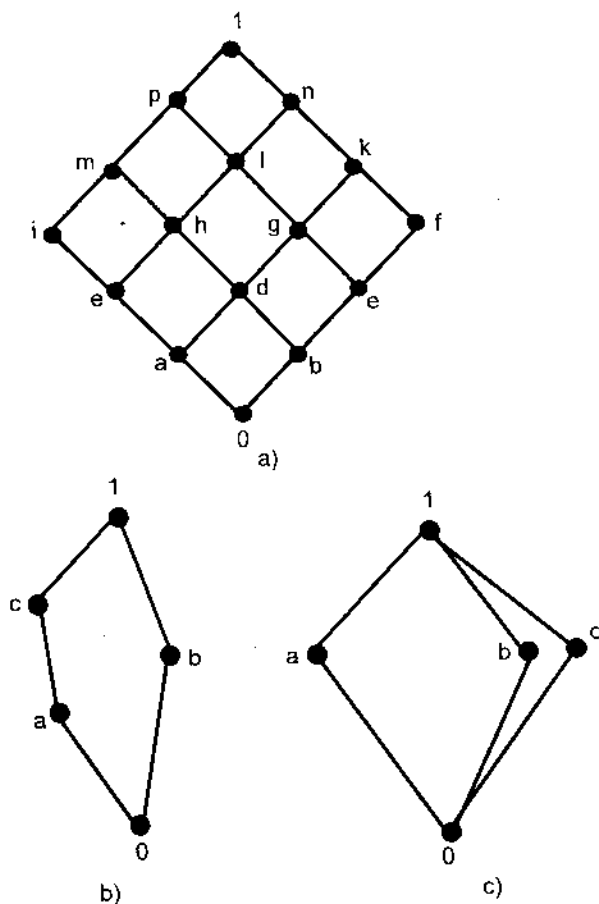
Một lớp đặc biệt của dàn phân bố là một **dàn phân bố bù** hay **dàn Boole**.

Cho D là một dàn có phần tử bé nhất là 0 và một phần tử lớn nhất là 1. Giả sử $x, y \in D$. Nếu $xy = 0$ và $x + y = 1$ thì y là **phần tử bù** của x và ngược lại x là phần tử bù của y . Phần tử bù duy nhất của 0 là 1 và ngược lại phần tử bù duy nhất của 1 là 0.

Định nghĩa 3.5.6. Dàn D là một **dàn bù** nếu các phần tử của nó đều có phần tử bù.

Một cách tổng quát, trong một dàn có thể có những phần tử không có phần tử bù nhưng ngược lại có những phần tử có nhiều phần tử bù. Chẳng hạn trong dàn vẽ ở hình 3.5.3 *a* phần tử *h* không có phần tử bù nào cả, nhưng phần tử *b* ở hình 3.5.3 *b* và hình 3.5.3 *c* có 2 phần tử bù là *a* và *c*.

Tuy nhiên có những lớp dàn mà mỗi phần tử chỉ có một phần tử bù duy nhất nếu phần tử bù đó tồn tại.



Hình 3.5.3

Định lý 3.5.7. Trong một dàn phân bố, nếu một phần tử có bù thì phần tử bù là duy nhất.

Chứng minh: Giả sử phần tử a có hai phần tử bù là b và c , như vậy ta có:

$$a + b = 1 \quad a \cdot b = 0$$

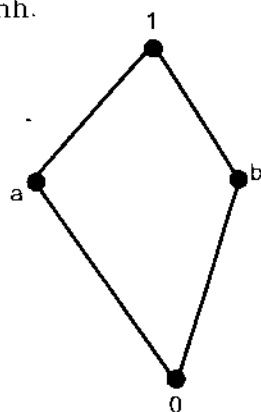
$$a + c = 1 \quad a \cdot c = 0$$

Mặt khác chúng ta có:

$$\begin{aligned} b &= b \cdot 1 = b(a + c) = (b \cdot a) + (b \cdot c) = 0 + (b \cdot c) = \\ &= (a \cdot c) + (b \cdot c) = (a + b)c = c \end{aligned}$$

Như vậy định lý đã được chứng minh.

Một *dàn phân bố bù* được gọi là một **dàn Boole**. Như vậy số lượng phần tử của một dàn Boole là chẵn, hay nói một cách khác, nếu cho ta một dàn Boole thì ta có thể tìm được một số nguyên n sao cho số lượng phần tử của dàn Boole đó là 2^n . Ví dụ dàn cho ở hình 3.5.4 là một dàn Boole với số lượng phần tử là $4 = 2^2$.

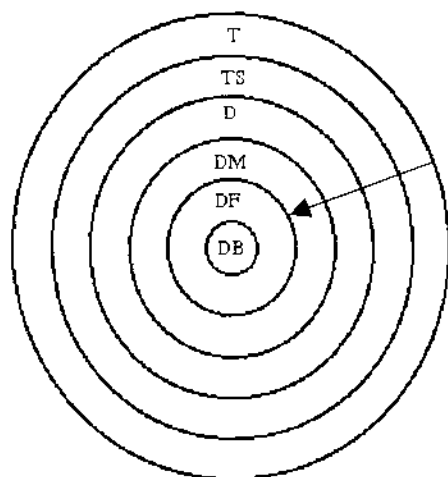


Hình 3.5.4

Tóm lại, tập hợp của các tập sắp xếp (*TS*) là một tập con của tập hợp các tập nói chung (*T*). Dàn là một tập sắp xếp mà trong đó hai phần tử bất kỳ x và y có phép giao và phép hợp, nghĩa là tập hợp các dàn (*D*) là một tập con của tập hợp các tập sắp xếp. Tập hợp các dàn modul (*DM*) là tập con của tập hợp các dàn *D*, vì bản thân dàn modul là một dàn mà trong đó các phần tử của nó thỏa mãn đẳng thức modul. Theo định nghĩa ở trên

thì dàn phân bố cũng là dàn modul cho nên tập hợp các dàn phân bố *DF* là một tập con của tập hợp các dàn modul *DM*. Tương tự như vậy ta có thể suy ra tập hợp các dàn phân bố bù, hay là dàn Boole (*DB*), là một tập con của tập các dàn phân bố *DF*.

Tất cả các mối quan hệ nêu trên, từ tập hợp tổng quát đến dàn Boole, có thể được minh họa như ở hình 3.5.5:



Hình 3.5.5

T: Tập hợp các tập
 TS: Tập hợp tập sắp xếp
 D: Tập hợp các dàn
 DM: Tập hợp các dàn modul
 DF: Tập hợp các dàn phân bố
 DB: Tập hợp các dàn Boole

Chúng ta nghiên cứu dàn Boole kết hợp với 3 phép toán giao, hợp và phủ định tức là nghiên cứu đại số Boole. Phần tiếp theo của chương này sẽ đề cập đến đại số Boole và hàm Boole.

3.6. ĐẠI SỐ BOOLE VÀ HÀM BOOLE

3.6.1. Đại số Boole và các tính chất cơ bản

Khi nghiên cứu các tính chất đại số của dàn Boole chúng ta thay các phép toán giao, hợp và phủ định bằng các phép toán tương ứng trong đại số là nhân ($\cdot$), cộng ($+$) và phủ định ($-$). Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa đại số Boole một cách tổng quát như sau:

Định nghĩa 3.6.1. Đại số Boole là một hệ thống đại số $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ bao gồm tập hợp B , các phép toán hai ngôi cộng (+), nhân ($\cdot$), và phủ định ($-$) hay phép toán bù thỏa mãn các tiên đề từ D_1 đến D_6 và tiên đề sau đây:

D_7 : Đối với mỗi phần tử $x \in B$ tồn tại một phần tử bù $\bar{x}$ sao cho

$$x \cdot \bar{x} = 0, \quad x + \bar{x} = 1.$$

Đại số Boole gọi là suy biến nếu đồng nhất tích bằng đồng nhất tổng, nghĩa là $0 = 1$.

Tập hợp B với các phép toán hai ngôi thỏa mãn các tiên đề trên chính là một dàn phân bố bù hay một dàn Boole. Chúng ta biết rằng dàn Boole có một số chẵn các phần tử, hay nói một cách khác, cho một đại số Boole ta luôn luôn tìm được một số nguyên dương n để có thể biểu diễn số lượng phần tử của đại số Boole đó dưới dạng 2^n .

Ví dụ đại số Boole hai phần tử $B_2 = \{0, 1\}$ thì $n = 1$, đại số Boole 4 phần tử $B_4 = \{0, a, b, 1\}$ thì $n = 2$. Từ nhận xét trên chúng ta có thể suy ra rằng, một đại số Boole B_{2^n} đẳng cấu với tập lũy thừa $P(A)$, ở đây $|A| = n$.

Ví dụ 3.7. Cho đại số Boole $B_4 = \{0, a, b, 1\}$ với các phép toán mô tả ở bảng 3.6.1

Bảng 3.6.1

.	0	a	b	1	+	0	a	b	1	-	
0	0	0	0	0	0	0	a	b	1	0	1
a	0	a	0	a	a	a	a	1	1	a	b
b	0	0	b	b	b	0	1	b	1	b	a
1	0	a	b	1	1	1	1	1	1	1	0

Bây giờ chúng ta xét một tập lũy thừa $P(A)$, trong đó $A = \{a, b\}$, do vậy $P(A)$ có 4 phần tử:

$$P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$$

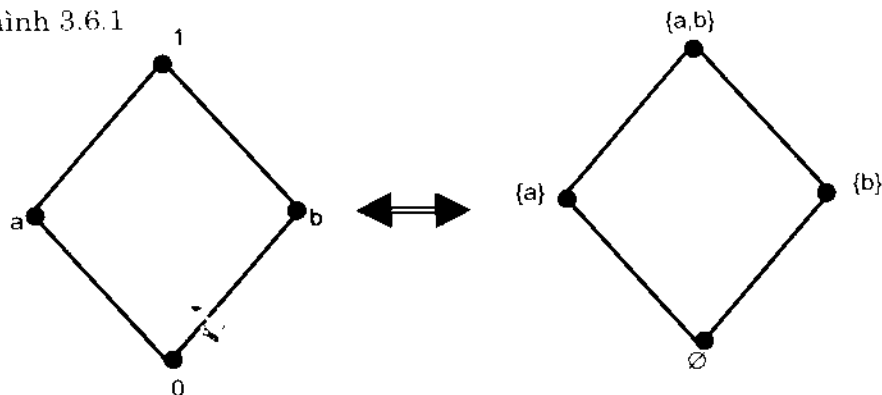
Như vậy $P(A)$ là một đại số Boole với 3 phép toán được mô tả ở bảng 3.6.2.

Bảng 3.6.2

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\cup$	
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$

$\cap$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

Rõ ràng $P(A)$ đẳng cấu với B_2 , điều này được minh họa ở hình 3.6.1



Hình 3.6.1

Định nghĩa 3.6.2. Trong dàn có phần tử 0 thì một phần tử bất kỳ phủ phần tử 0 gọi là **nguyên tử của dàn**.

Ví dụ dàn $B_8 = \{ 0, a, b, c, d, e, f, 1 \}$ vẽ ở hình 3.6.2 có 3 nguyên tử là a, b, c vì chúng phủ phần tử 0.

Cho B là một đại số Boole và $x \in B$. Ta gọi $A(x)$ là tập của các nguyên tử a sao cho $a \leq x$.

$$A(x) = \{ a \mid a \leq x \} \quad (3.32)$$

Vì B là một dàn nên khi $x \neq 0$ thì $A(x) \neq \emptyset$. Nếu A là tập hợp của tất cả các nguyên tử của một đại số Boole thì tập nguyên tử $A(x)$ có một số tính chất sau đây:

$$a) \quad A(x) \cap A(\bar{x}) = \emptyset$$

$$b) \quad A(x) \cup A(\bar{x}) = A$$

$$c) \quad A(x) = A(y) \Leftrightarrow \wedge x, y \in B, x = y$$

$$d) \quad A(x) \subseteq A(y) \Leftrightarrow x \leq y$$

$$e) \quad A(x \cdot y) = A(x) \cap A(y)$$

$$f) \quad A(x + y) = A(x) \cup A(y)$$

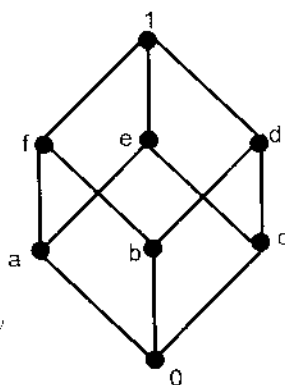
$$g) \quad A(\bar{x}) = A - A(x)$$

$$h) \quad A(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m) = A(a_1) \cap A(a_2) \cap \dots \cap A(a_m) = \emptyset$$

$$i) \quad A(a_1 + a_2 + \dots + a_m) = A(a_1) \cup A(a_2) \cup \dots \cup A(a_m) = A \quad (3.33)$$

trong đó $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$.

Các tính chất trên đây có thể chứng minh một cách dễ dàng trên cơ sở định nghĩa về nguyên tử. Mặt khác các tính chất này cho phép chúng ta chứng minh một định lý quan trọng sau đây.



Hình 3.6.2

Định lý 3.6.1. Nếu $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ là một đại số Boole và F là tập hợp của các tập hợp $A(x_i)$, nghĩa là:

$$F = \{A(x_1), A(x_2), \dots, A(x_m)\},$$

thì $(B, +, \cdot, -)$ và $(F, \cup, \cap, -)$ là đẳng cấu với nhau.

Chứng minh: Vì tất cả các x_i là khác nhau nên từ tính chất (c) ở trên chúng ta thấy rằng:

$$\text{phép biến đổi } \varphi: x_i \xrightarrow{\varphi} A(x_i)$$

từ tập B vào tập F là ánh xạ một - một và lên trên. Như vậy phép biến đổi φ mang các toán tử $+, \cdot, -$, vào các toán tử của lý thuyết tập hợp: $\cup, \cap$ và $-$ từ B vào F . Do vậy B và F đẳng cấu với nhau.

Định lý 3.6.2. Cho A là tập hợp của tất cả các nguyên tử $a_1, a_2, \dots, a_m$ của đại số Boole B , ta có:

$$F = P(A) \quad (3.34)$$

Chứng minh: Từ định nghĩa của F chúng ta thấy mỗi phần tử của F là một phần tử của $P(A)$. Ngược lại, chúng ta kiểm tra xem có phải mỗi phần tử của $P(A)$ là một phần tử của F hay không?

Thật vậy, xét một phần tử bất kì của $P(A)$, chẳng hạn

$$A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

với $k \leq m$ các a_i là phân biệt nhau, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$:

$$A_k = A(a_1) \cup A(a_2) \cup \dots \cup A(a_k) = A(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$$

vì $A(x_i)$ là một phần tử của F , do đó $F = P(A)$.

Định lý 3.6.3. Nếu A là tập hợp của tất cả các nguyên tử của đại số Boole B thì B đẳng cấu với $P(A)$.

Từ định lý 3.6.3 chúng ta có thể suy ra một số hệ quả quan trọng sau đây:

Hệ quả 3.6.3a. Số lượng các phần tử của đại số Boole là lũy thừa của 2. Nói một cách khác, đối với mỗi đại số Boole cho trước tồn tại một số nguyên dương sao cho số lượng các phần tử của đại số Boole B là 2^n .

Hệ quả 3.6.3b. Nếu B và C là hai đại số Boole có cùng một số lượng phần tử khác nhau thì B và C là đẳng cấu.

Hệ quả 3.6.3c. Một đại số Boole có 2^n phần tử (ký hiệu là B_{2^n}) có đúng n nguyên tử.

Định lý 3.6.4 Tích trực tiếp của hai tập hợp B và C là một đại số Boole nếu và chỉ nếu B và C là các đại số Boole.

Hệ quả 3.6.4a. Nếu B và C là hai đại số Boole với số lượng nguyên tử tương ứng là m và n thì tích trực tiếp $B \times C$ là một đại số Boole có $m \times n$ nguyên tử.

Hệ quả 3.6.4b. Một đại số Boole bất kỳ n nguyên tử (B_{2^n}) đẳng cấu với tích trực tiếp n đại số Boole hai phần tử $B_2 = \{0, 1\}$:

$$B_{2^n} = \underbrace{B_2 \times B_2 \times \dots \times B_2}_n \Leftrightarrow B_{2^n} \quad (3.35)$$

Ví dụ 3.8. Đại số Boole 8 phần tử $B_8 = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ đẳng cấu với tích trực tiếp

$$B_8^3 = B_2 \times B_2 \times B_2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

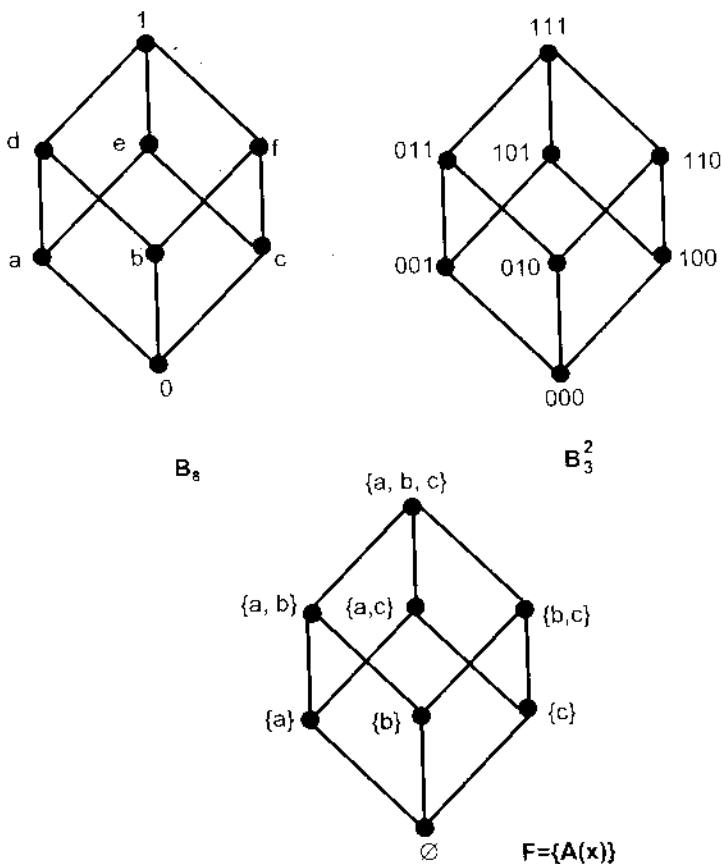
Tính chất này được minh họa ở hình 3.6.3.

Đại số Boole B_8 có 3 nguyên tử là a, b, c và từ đó chúng ta có thể lập được tập hợp F của tất cả các tập $A(x_i)$ như sau:

$$\begin{aligned} A(0) &= (\emptyset) & A(d) &= \{a, b\} \\ A(a) &= \{a\} & A(e) &= \{a, c\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(b) &= \{b\} & A(f) &= \{b, c\} \\
 A(c) &= \{c\} & A(1) &= \{a, b, c\}
 \end{aligned}$$

Rõ ràng là B đẳng cấu với F .



Hình 3.6.3

Bây giờ chúng ta hãy xét đến các tính chất cơ bản của đại số Boole. Các tính chất này có thể được mô tả một cách ngắn gọn qua các định lý sau đây:

Định lí 3.6.5. Trong một đại số Boole thì:

$$\begin{aligned}\overline{(a+b)} &= \bar{a} \cdot \bar{b} \\ \overline{(a \cdot b)} &= \bar{a} + \bar{b}\end{aligned}\tag{3.36}$$

Định lí này còn gọi là định lý De Morgan.

Chứng minh: chúng ta có:

$$\begin{aligned}(a+b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) &= [(a+b) + \bar{a}] \cdot [(a+b) + \bar{b}] = \\ &= [(a + \bar{a}) + b] \cdot [(a + (\bar{b} + \bar{b}))] = \\ &= 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Và $(a+b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = [a(\bar{a} \cdot \bar{b}) + b(\bar{a} \cdot \bar{b})] = 0 \cdot 0 = 0$

Vậy $(\bar{a} \cdot \bar{b})$ là phần tử bù của $(a+b)$, do đó:

$$\overline{(a+b)} = (\bar{a} \cdot \bar{b})$$

Phần hai của định lí này có thể suy ra từ nguyên lí đối ngẫu.

Định lí 3.6.6. Trong một đại số Boole thì:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \cdot b = a \Leftrightarrow a + b = b\tag{3.37}$$

Chứng minh định lí này coi như bài tập dành cho độc giả.

Định lí 3.6.7.

- a) Đối ngẫu của đại số Boole là một đại số Boole.
- b) Mỗi một khoảng cách của đại số Boole cũng là đại số Boole.
- c) Ảnh đồng cấu của một đại số Boole cũng là một đại số Boole.

Chứng minh: Các tính chất a) và b) coi như đương nhiên, không cần phải chứng minh. Bây giờ chúng ta hãy chứng minh tính chất c). Giả sử B là một đại số Boole. x, y và z là các phần

tử của ảnh H của B do phép đồng cấu h gây ra. Như vậy tồn tại ít nhất một trong các phần tử a, b, c trong B sao cho $h(a) = x$, $h(b) = y$ và $h(c) = z$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}x(y + z) &= h(a) \cdot [h(b) + h(c)] \\&= h(a) \cdot [h(b + c)] \\&= h[a \cdot (b + c)] \\&= h(ab + ac) \\&= h(ab) + h(ac) \\&= h(a) \cdot h(b) + h(a) \cdot h(c) \\&= x \cdot y + y \cdot z\end{aligned}$$

Do vậy H có tính chất phân bố. Chúng ta gọi $\bar{x}$ là ảnh của $\bar{a}$ do h gây ra. Vậy ta có:

$$x \cdot \bar{x} = h(a) \cdot h(\bar{a}) = h(a \cdot \bar{a}) = h(0) = 0$$

Tương tự như vậy chúng ta có thể chứng minh được rằng $x + \bar{x} = 1$. Vậy H là một đại số Boole.

3.6.2. Hàm Boole và các dạng chính quy

Trong phần này chúng ta sẽ định nghĩa một cách tổng quát các hàm Boole, đồng thời mô tả các dạng chính quy của chúng. Nghiên cứu hàm Boole tức là nghiên cứu các ánh xạ Boole từ một đại số Boole vào chính bản thân nó.

Mỗi phần tử của đại số Boole B gọi là **hằng số trên B** .

Mỗi một kí hiệu biểu diễn một trong các phần tử của B gọi là một biến Boole.

Định nghĩa 3.6.3. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các biến của đại số Boole B . Một ánh xạ f của B vào chính bản thân nó gọi là một hàm Boole n biến nếu nó được cấu tạo theo nguyên tắc sau đây:

a) Cho a là một hằng số trên B . Hàm hằng số $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a$ và hàm chiếu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$ cũng là hàm số Boole.

b) Nếu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là một hàm Boole thì $\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cũng là một hàm Boole.

c) Nếu f_1 và f_2 là các hàm Boole thì $f_1 f_2$ và $f_1 + f_2$ cũng là các hàm Boole.

d) Mọi hàm số được cấu tạo bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các quy luật kể trên đều là hàm Boole.

Như vậy hàm Boole là một hàm số được cấu tạo từ các hàm hằng số và hàm chiếu bằng cách ứng dụng một số hữu hạn lần các phép toán cộng, nhân và phủ định.

Người ta có thể cho hàm Boole dưới dạng bảng giá trị của hàm ứng với những tổ hợp các giá trị khác nhau của các biến.

Một danh sách đầy đủ các giá trị của hàm Boole được gọi là bảng giá trị thật hay gọi tắt là bảng thật. Chẳng hạn hàm Boole $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3$ có bảng thật là bảng 3.6.3.

Bảng 3.6.3

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Hai hàm số *tương đương* với nhau nếu chúng có các bảng thật hoàn toàn như nhau. Bây giờ chúng ta thử xét xem có bao nhiêu hàm Boole khác nhau trên đại số Boole 2 phần tử B_2 . Muốn trả lời vấn đề này chúng ta phải xét xem có bao nhiêu ánh xạ từ tích trực tiếp $B_2'' = \{0,1\}''$ vào $B_2 = \{0, 1\}$.

Định lý 3.6.8. Có 2^{2^n} ánh xạ từ tích trực tiếp $\{0,1\}^n$ vào $\{0,1\}$.

Chứng minh: Trong miền xác định rõ ràng có số lượng phần tử là:

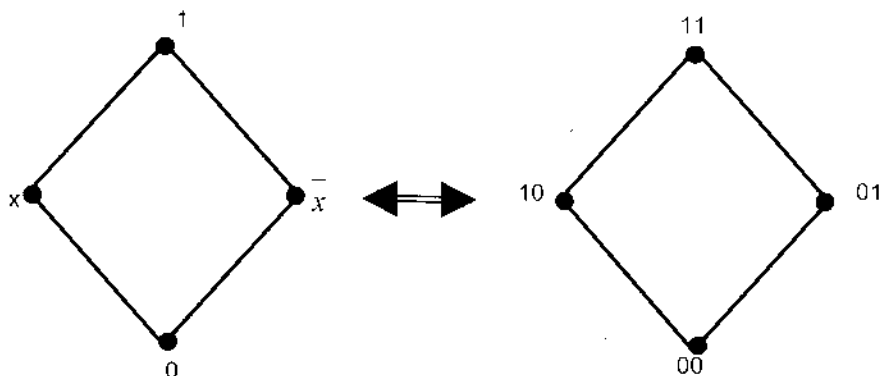
$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n \quad (3.38)$$

Mỗi phần tử như vậy có thể lấy một trong hai giá trị 0 và 1 độc lập. Do vậy chúng ta có $2^{(2^n)}$ tổ hợp giá trị khác nhau, nghĩa là có 2^{2^n} ánh xạ khác nhau.

Ví dụ 3.9. Khi $n = 1$ chúng ta có $2^{2^1} = 4$ ánh xạ với 4 hàm số như sau:

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \bar{x}, \quad f_4(x) = 1$$

Đó là các hàm Boole. Nếu người ta đặt $F_1 = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$ thì F_1 cùng với 3 phép toán cộng, nhân và phủ định tạo thành một đại số Boole đẳng cấu với tích trực tiếp B_2^1 như minh họa ở hình 3.6.4.



Hình 3.6.4

Nếu $n = 2$ ta có 16 ánh xạ khác nhau từ tích trực tiếp B_2^2 vào B_2 . Nói một cách khác có 16 hàm khác nhau trong trường

hợp số biến bằng 2 và chúng ta có thể kiểm tra một cách dễ dàng đó là các hàm Boole. Các hàm số này được liệt kê ở bảng 3.6.4.

Bảng 3.6.4

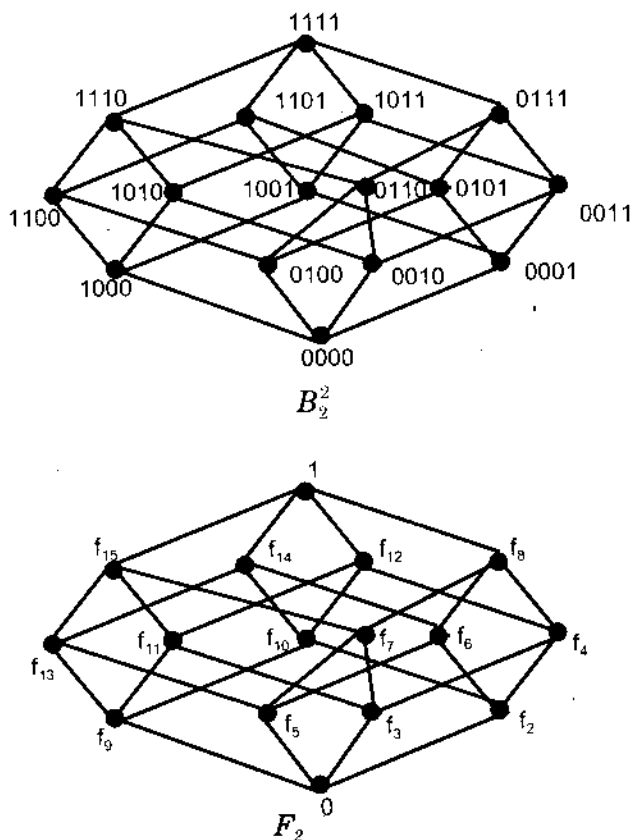
$X = (x_1, x_2)$				$f(x_1, x_2)$	Tên gọi
00	01	10	11		
0	0	0	0	$f_1 = 0$	Hàm số 0
0	0	0	1	$f_2 = x_1 x_2$	Hàm AND (và) hay hàm nhân
0	0	1	0	$f_3 = x_2 \not\subset x_1$	Hàm kéo theo không điều kiện
0	0	1	1	$f_4 = x_1$	Hàm chiếu x_1
0	1	0	0	$f_5 = x_1 \not\subset x_2$	Hàm kéo theo không đảo
0	1	0	1	$f_6 = x_2$	Hàm chiếu x_2
0	1	1	0	$f_7 = x_1 \oplus x_2$	Hàm cộng modul 2
0	1	1	1	$f_8 = x_1 + x_2$	Hàm OR (hoặc) hay hàm cộng
1	0	0	0	$f_9 = x_1 \downarrow x_2$	Hàm NOR
1	0	0	1	$f_{10} = x_1 \not\equiv x_2$	Hàm tương đương
1	0	1	0	$f_{11} = \overline{x_2}$	Hàm không chiếu x_2
1	0	1	1	$f_{12} = x_1 \subset x_2$	Hàm kéo theo đảo
1	1	0	0	$f_{13} = \overline{x_1}$	Hàm không chiếu x_1
1	1	0	1	$f_{14} = x_1 \supset x_2$	Hàm kéo theo có điều kiện
1	1	1	0	$f_{15} = x_1 x_2$	Hàm NAND (hàm Sheffer)
1	1	1	1	$f_{16} = 1$	Hàm 1

Các hàm số $f_3, f_5, f_7, f_9, f_{10}, f_{12}, f_{14}$ và f_{15} có thể được biểu diễn thông qua hàm cộng (+), nhân (.), và phủ định (-). Thật vậy:

$$f_3 = x_2 \not\subset x_1 = x_1 \overline{x_2}; \quad f_5 = x_1 \not\subset x_2 = \overline{x_1} x_2;$$

$$\begin{aligned}
 f_7 &= x_1 \oplus x_2 = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2; & f_9 &= x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2; \\
 f_{10} &= x_1 \neq x_2 = x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2; & f_{12} &= x_1 \supset x_2 = x_1 + \bar{x}_2; \\
 f_{14} &= x_1 \supset x_2 = \bar{x}_1 + x_2; & f_{15} &= x_1 \mid x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2;
 \end{aligned}$$

Chúng ta có thể kiểm tra lại một cách dễ dàng các kết quả trên bằng cách so sánh các bảng thật của từng cặp hàm số tương ứng. Nếu ta đặt $F_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_{16}\}$ thì F_2 cùng với các phép toán cộng, nhân và phủ định tạo thành đại số Boole đẳng cấu với tích trực tiếp B_2^2 (hình 3.6.5)



Hình 3.6.5

Định lí 3.6.9. Nếu F_n là tập hợp của 2^{2^n} ánh xạ khác nhau từ $\{0, 1\}^n$ vào $\{0, 1\}$ thì:

- mỗi ánh xạ thuộc F_n là một hàm Boole trên B . Như vậy là có 2^{2^n} hàm Boole khác nhau.
- $(F_n, +, \cdot, -, 0, 1)$ là một đại số Boole đẳng cấu với $B_2^{(2^n)}$.

Như chúng ta đã biết, một trong những cách cho hàm Boole là dùng bảng thật. Mỗi bảng thật có thể biểu diễn nhiều hàm số khác nhau nhưng các hàm số này phải tương đương với nhau. Nói một cách khác có thể dùng bảng thật để kiểm tra các hàm Boole có tương đương với nhau hay không.

Ngoài ra để so sánh các hàm Boole với nhau người ta đưa ra dạng chính quy (hay dạng chuẩn). Hai cách biểu diễn khác nhau của hàm số Boole có cùng một **dạng chính quy** nếu và chỉ nếu chúng tương đương với nhau. Nói cách khác là dạng chính quy của một cách biểu diễn hàm Boole là duy nhất. Có hai dạng chính quy thường dùng, đó là dạng **tuyến chính quy** (hay dạng tổng của các tích) và dạng **hội chính quy** (hay dạng tích của các tổng).

Định lí 3.6.10. Một hàm số Boole bất kỳ có thể biểu diễn dưới dạng tuyến chính quy:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum f(e_0, \dots, e_{n-1}) x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_{n-1}^{e_{n-1}}$$

hoặc dưới dạng hội chính quy:

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod f(e_0, \dots, e_{n-1}) + x_0^{e_0} + x_1^{e_1} + \dots + x_{n-1}^{e_{n-1}} \quad (3.39)$$

$$\text{Ở đây } x_i^{e_i} = \begin{cases} x_i, & \text{nếu } e_i = 1 \\ \bar{x}_i, & \text{nếu } e_i = 0 \end{cases}; x_i^{e_i} = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{nếu } e_i = 1 \\ x_i, & \text{nếu } e_i = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3.10. Dạng tuyến chính quy và dạng hội chính quy của hàm Boole cho ở bảng 3.6.5 như sau:

$$f_2 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3$$

$$f_{11} = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)$$

Bảng 3.6.5

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Như vậy dạng chính quy không những giúp chúng ta so sánh các hàm số mà còn giúp chúng ta trong việc biểu diễn hàm Boole dưới dạng biểu thức đại số từ dạng bảng thật và trong việc đơn giản hoá, tối thiểu hóa các hàm Boole.

BÀI TẬP

1. Cho $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ là một tập hợp sắp xếp riêng. Chứng minh rằng $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_1$ kéo theo $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.
2. Chứng minh rằng tích trực tiếp của hai dãy không thể là một dãy. Ở đây số lượng phần tử của một dãy lớn hơn hoặc bằng hai.
3. Cho R là một quan hệ trong tập A . R là một quan hệ tương đương nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

a) xRx đối với mọi $x \in A$

b) Nếu xRy , thì yRx với mọi $x, y \in A$.

c) Nếu xRy và yRz , thì xRz đối với mọi $x, y, z \in A$.

4. Cho R là một quan hệ phản xạ trên tập hợp A , chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương nếu và chỉ nếu:

$$(a, b) \in R \text{ và } (a, c) \in R \Rightarrow (b, c) \in R$$

5. R là một quan hệ hai ngôi từ A đến B và đảo của R là R^{-1} cũng là một quan hệ hai ngôi từ $B \rightarrow A$ sao cho:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

- a) Cho R_1 và R_2 là các quan hệ hai ngôi từ A đến B . Kiểm tra xem có phải

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$$

- b) Cho R là một quan hệ hai ngôi trên A . Nếu R là phản xạ thì có nhất thiết R^{-1} là phản xạ không? Nếu R là đối xứng thì có phải R^{-1} cũng cần đối xứng không? Và cũng câu hỏi trên cho tính bắc cầu.

6. Cho a, b, c là các phần tử của D . Chứng minh rằng nếu $a \leq b$ thì

$$a + (b, c) \leq b(a + c)$$

7. Chứng minh rằng dàn là phân bố nếu và chỉ nếu đối với các phần tử a, b, c bất kì trong dàn chúng ta có:

$$(a + b)c \leq b(a + c)$$

8. Chứng minh rằng D là một dàn modul nếu và chỉ nếu:

$$a + [b(a + c)] = (a + b). (a + c)$$

9. Cho x, y, z là các phần tử của dàn D . Chứng minh rằng:

$$x. y + y. z + z. x \leq (x + y). (y + z). (z + x)$$

10. Chứng minh rằng D là một dàn phân bố nếu và chỉ nếu đối với mỗi một tập hợp các phần tử x, y, z trong D , ta có quan hệ sau đây:

$$x \cdot z \leq y \leq x + z \Rightarrow x \cdot y + y \cdot z = (x + y) \cdot (y + z)$$

11. Chứng minh rằng các hàm Boole sau đây trên đại số Boole B_2 tương đương với hàm hằng số 1:

a) $(x_1, x_2) \supset x_1$

b) $[x_1(x_1 \supset x_2)] \supset x_2$

c) $(x_1 \supset x_2) \cdot (x_1 + x_2)$

d) $[(x_1 \supset x_2) \cdot (x_3 \supset x_4)] \supset [(x_1 + x_3) \supset (x_2 + x_4)]$

12. Chứng minh các hàm số sau đây là tương đương với nhau:

$$f_1(x_1, x_2) = (\overline{x_1 + x_2}) + (\overline{x_1 \downarrow x_2})$$

$$f_2(x_1, x_2) = (\overline{x_1 \supset x_2}) \neq (x_2 \supset x_1)$$

$$f_3(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \neq (\overline{x_1 \cdot x_2})$$

13. Tìm dạng tuyến tính chính quy của hàm số Boole sau đây trên đại số Boole $B_4 = \{0, a, b, 1\}$:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 \overline{x_1}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3 \overline{x_1}$$

Chương IV

ĐỒ THỊ VÀ CÂY

Như chúng ta đã đề cập đến trong phần quan hệ và hàm số. trong thế giới xung quanh ta các đối tượng rời rạc khác nhau đều có những mối quan hệ với nhau, đặc biệt là mối quan hệ nhị phân. Một trong những phương pháp hữu ích để biểu diễn các mối quan hệ nhị phân kể trên là phương pháp đồ thị. Chúng ta hãy lấy ví dụ quan hệ giữa các thành phố và các đường ô tô nối liền các thành phố đó. Ta biểu diễn các thành phố a, b, c, d, e bằng các điểm khác nhau trên mặt phẳng. Cặp điểm bất kì được nối với nhau nếu giữa 2 thành phố tương ứng có đường ô tô. Như vậy thông qua đồ thị này (bản đồ đường bộ) chúng ta có thể xác định được đường đi, đường đi ngắn nhất giữa 2 thành phố, v.v... Ví dụ khác là trò chơi cờ. Mối quan hệ giữa các vị trí trên bàn cờ và các nước đi có thể có cũng hoàn toàn biểu diễn được bằng đồ thị. Ta gọi S là tập các vị trí của bàn cờ $S = \{a, b, c, \dots, n\}$, R là mối quan hệ nhị phân trên S sao cho $(a, b) \in R$ nếu từ vị trí a có thể chuyển đến vị trí b bằng một nước đi hợp lệ.

Như vậy bằng đồ thị chúng ta có được một hình thức thuận lợi để biểu diễn mối liên hệ giữa các đối tượng rời rạc và các mối quan hệ nhị phân xác định trên chúng. Điều này giải thích vì sao chúng ta lại dành chương này để nghiên cứu lí thuyết về đồ thị và đồ thị phẳng.

4.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Định nghĩa 4.1.1. Đồ thị có hướng G là một cặp sắp xếp sau đây:

$$G = (V, E) \quad (4.1)$$

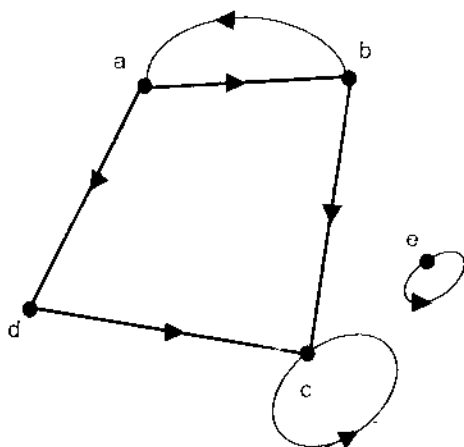
trong đó, V là tập hợp phần tử hay các đỉnh của đồ thị; E là tập hợp các quan hệ một chiều hay các vectơ nối các cặp đỉnh. Các vectơ này được gọi là các cạnh.

Hình 4.1.1 giới thiệu một đồ thị, trong đó

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c), (d, c), (a, d)\}.$$

Kí hiệu các cạnh cho ta biết rõ đỉnh đầu và đỉnh cuối của vectơ, ví dụ cạnh (a, b) có nghĩa là vectơ nối từ đỉnh a (đỉnh đầu) đến đỉnh b (đỉnh cuối).



Hình 4.1.1

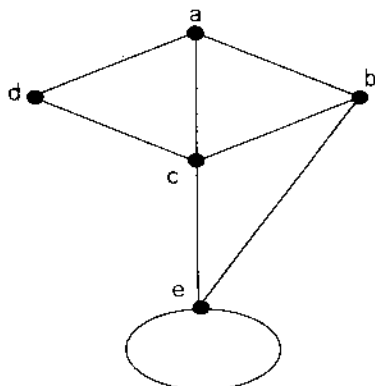
Nếu đỉnh đầu và đỉnh cuối của một cạnh trùng nhau thì tạo thành 1 vòng, ví dụ vòng (c, c) . Hai đỉnh được nối với nhau bằng 1 cạnh thì được gọi là hai đỉnh kề nhau. Một đỉnh gọi là cách biệt nếu nó không kề với một đỉnh nào cả, ví dụ đỉnh e ở hình 4.1.1.

Định nghĩa 4.1.2. Đồ thị vô hướng G là một cặp sắp xếp sau đây:

$$G = (V, E)$$

trong đó, V là tập hợp các phần tử hay các đỉnh của đồ thị; E là tập hợp các mối quan hệ hai chiều hay các đoạn thẳng nối các cặp đỉnh.

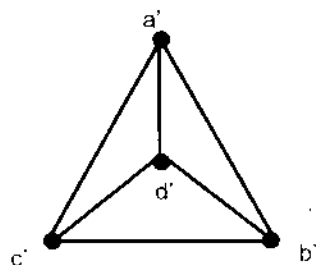
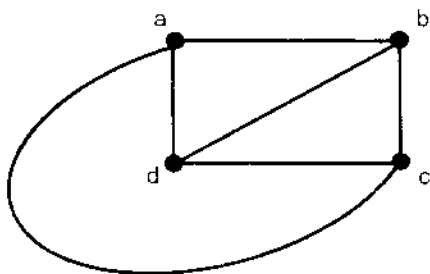
Như vậy một đồ thị vô hướng khác với đồ thị có hướng ở chỗ các cạnh là các đoạn thẳng vô hướng chứ không phải là các vectơ. Ví dụ hình 4.1.2 là một đồ thị vô hướng. Trong phần này khi dùng thuật ngữ đồ thị chúng ta phải hiểu là chúng có thể vô hướng hay có hướng.



Hình 4.1.2

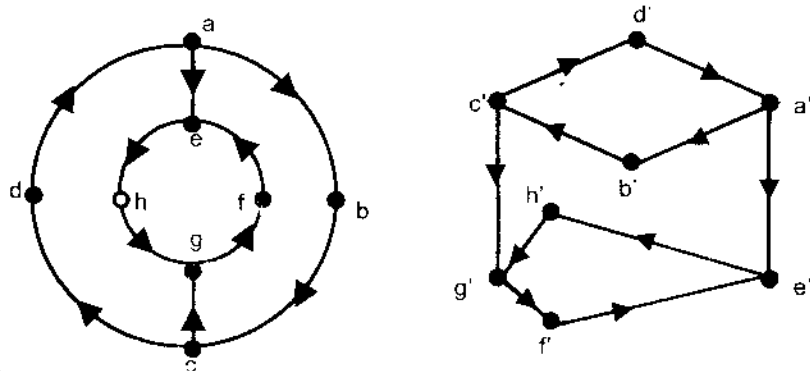
Định nghĩa 4.1.3. Hai đồ thị gọi là *đẳng cấu* với nhau nếu có sự tương ứng một - một giữa các đỉnh của chúng với nhau và giữa các cạnh của chúng với nhau.

Như vậy, có một cạnh nối liền hai đỉnh trên đồ thị này nếu và chỉ nếu có cạnh tương ứng giữa hai đỉnh tương ứng trên đồ thị kia. Hình 4.1.3 cho ta 2 đồ thị vô hướng đẳng cấu với nhau và hình 4.1.4 cho ta 2 đồ thị có hướng đẳng cấu với nhau.



Hình 4.1.3

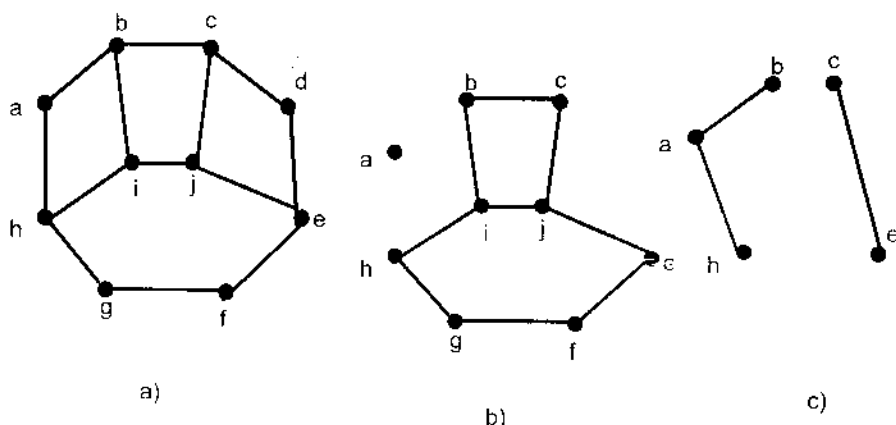
Định nghĩa 4.1.4. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị. Đồ thị $G' = (V', E')$ là *đồ thị con* của G nếu $E' \subset E$, $G' \subset G$ sao cho các cạnh trong E' chỉ bao gồm các mối quan hệ giữa các đỉnh trong G' mà thôi.



Hình 4.1.4

Đồ thị con G' của G được gọi là **đồ thị con mở rộng** nếu nó bao gồm tất cả các đỉnh của G .

Phần bù của đồ thị con $G' = (V', E')$ thuộc đồ thị G là một đồ thị con $G'' = (V'', E'')$ sao cho $E'' = E - E'$ và V'' chỉ chứa các đỉnh có liên quan đến các cạnh trong E'' . Hình 4.1.5a là ví dụ về đồ thị G , hình 4.1.5b là đồ thị con G' và hình 4.1.5c là phần bù G'' trong G .



Hình 4.1.5

Một đồ thị được gọi là đầy đủ, kí hiệu K_n , với n đỉnh là đồ thị mà trong đó giữa 2 đỉnh phân biệt chỉ có 1 cạnh mà thôi.

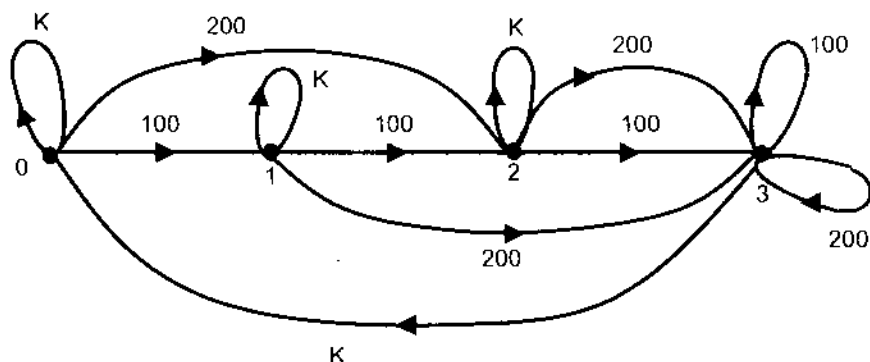
Ngoài khái niệm về đồ thị có hướng và vô hướng người ta còn đưa vào khái niệm *đồ thị có trọng số* hay gọi tắt là *trọng đồ*. Trọng đồ là đồ thị mà trong đó các đỉnh hoặc các cạnh, hoặc cả hai có ghi các chỉ số (hay trọng số) để chỉ rõ mức độ lưu tâm của các đối tượng đó. Ví dụ đồ thị phản ánh các đường bộ nối liền các thành phố của một quốc gia thì các chỉ số giúp ta phân biệt tầm quan trọng của các thành phố (trọng số cho các đỉnh) và tính chất của các đường bộ, chẳng hạn đường quốc lộ, tỉnh lộ v.v... (tức trọng số cho các cạnh của đồ thị). Do vậy có khi người ta định nghĩa đồ thị như sau:

$$G = (V, E, v, e) \quad (4.2)$$

Trong đó V và E chúng ta đã biết còn v là hàm trọng số của các đỉnh có miền xác định trên V và e là hàm trọng số cho các cạnh có miền xác định trên E .

Ví dụ 4.1. Chúng ta hãy vẽ đồ thị mô tả trạng thái hoạt động của một máy tự động bán diêm. Giả sử mỗi bao diêm giá 300 đồng và để mua diêm chúng ta dùng hai loại đồng xèng có trọng lượng khác nhau, một loại ứng với 100 đồng và một loại ứng với 200 đồng. Nguyên tắc hoạt động của máy là khi ta bỏ số đồng xèng lớn hơn hoặc đủ với số tiền 300đ và ấn nút điều khiển K thì nhận được 1 bao diêm. Nếu bỏ quá số tiền 300đ thì máy không trả lại tiền thừa còn nếu bỏ ít hơn thì ấn nút K không có tác dụng.

Đồ thị mô tả các trạng thái hoạt động của máy vẽ ở hình 4.1.6. Rõ ràng đây là một trọng đồ. Các đỉnh 0, 1, 2, 3 ứng với các mức tích lũy tiền (ứng với các đồng xèng).



Hình 4.1.6

- Tại đỉnh O ta có trạng thái ban đầu, nghĩa là máy chưa nhận được đồng xèng nào cả (mức tích lũy bằng 0). Nếu ta bỏ đồng xèng 100 vào thì máy chuyển đến trạng thái 1 (tích lũy được 100đ) và nếu ta bỏ đồng xèng 200 vào thì máy chuyển đến trạng thái 2 (mức tích lũy 200đ). Nếu ở trạng thái 0 (ứng với đỉnh O) ta ấn nút điều khiển K thì trạng thái máy không thay đổi và chẳng có chuyện gì xảy ra cả.

- Ở trạng thái 1 nếu ta bỏ đồng xèng 100 vào thì máy chuyển đến trạng thái 2; còn nếu ta bỏ đồng xèng 200 thì máy chuyển đến trạng thái 3 (tích lũy được 300đ). Ở trạng thái 1 và 2 nếu ta ấn nút điều khiển K thì cũng không có chuyện gì xảy ra cả (máy giữ nguyên trạng thái tương ứng).

- Ở trạng thái 2 nếu ta bỏ đồng xèng 100 hay đồng xèng 200 thì máy đều chuyển đến trạng thái 3 (máy không trả lại tiền thừa).

- Ở trạng thái 3, tức là trạng thái đã tích lũy được ít nhất 300đ, nếu ta tiếp tục bỏ xèng vào thì máy vẫn giữ nguyên trạng thái 3. Nếu ở trạng thái 3 ta ấn nút điều khiển K thì sẽ nhận được 1 bao diêm và máy trở về trạng thái 0 ban đầu.

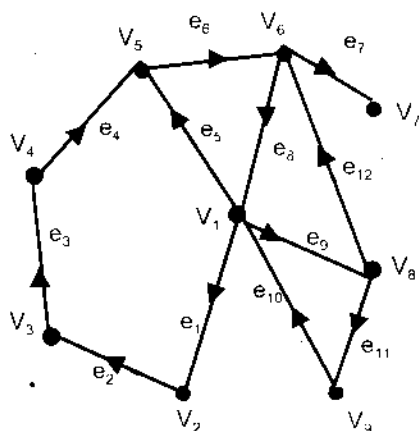
Như vậy là trọng đồ (đồ thị có trọng số) giúp ta mô tả được hoạt động của máy. Một cách tổng quát ta có thể dùng trọng đồ để mô tả các trạng thái vật lí khác nhau của các máy tự động (các ô tô mat), phần cứng của máy tính cũng như của các hệ điện tử nói chung và cả để mô tả cấu trúc chương trình của các máy tính.

4.2. ĐƯỜNG VÀ MẠCH - ĐƯỜNG NGẮN NHẤT VÀ THUẬT TOÁN DIJKSTRA

Định nghĩa 4.2.1. Một dãy liên tiếp các cạnh $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ nối liền đỉnh v_i với đỉnh v_j , ở đây $1 \leq j \leq k-1$, được gọi là một **đường** trong đồ thị có hướng.

Một đường được gọi là **đường đơn giản** nếu nó không chứa 2 lần 1 cạnh. Một đường được gọi là **đường cơ bản** nếu nó không gặp một đỉnh hai lần.

Trong hình 4.2.1 thì dãy $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7)$ là một đường đơn giản còn dãy $(e_2, e_3, e_4, e_6, e_8, e_5, e_6, e_7)$ cũng là một đường nhưng không phải là đường đơn giản. Đường $(e_2, e_3, e_4, e_6, e_8, e_9, e_{12}, e_7)$ là một đường đơn giản nhưng không phải là đường cơ bản vì nó đi qua đỉnh v_6 hai lần.



Hình 4.2.1

Định nghĩa 4.2.2. Một đường $(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ mà trong đó đỉnh đầu v_i trùng với đỉnh cuối v_j thì được gọi là **mạch**.

Mạch được gọi là **mạch đơn giản** nếu nó không chứa hai lần 1 cạnh. Còn nếu mạch không chứa 2 lần 1 đỉnh được gọi là **mạch cơ bản**.

Trên hình 4.2.1 đường $(e_2, e_3, e_4, e_5, e_1)$ là một mạch cơ bản còn đường $(e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_{12}, e_8, e_1)$ là một mạch đơn giản nhưng không phải là mạch cơ bản vì nó bắt gặp đỉnh v_1 hai lần.

Trong nhiều trường hợp người ta biểu diễn một đường hay mạch của đồ thị bằng một dãy các đỉnh.

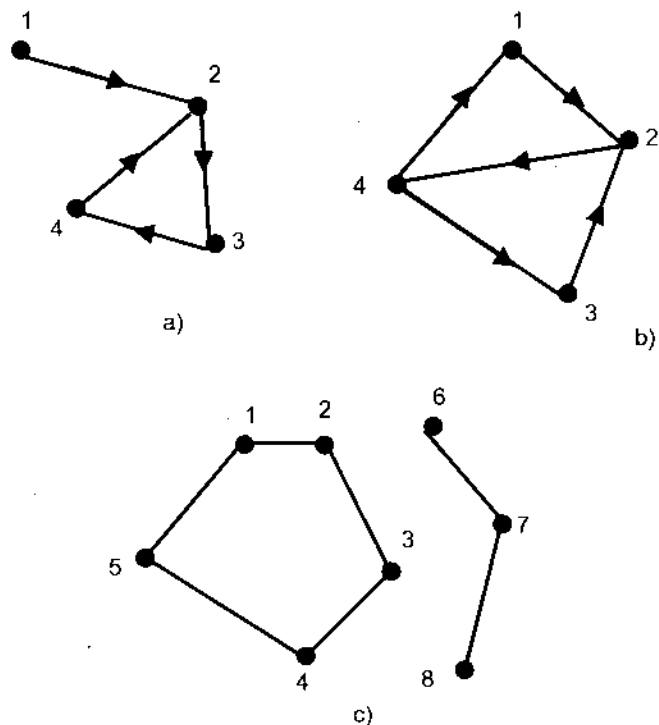
Đối với đồ thị vô hướng thì cách định nghĩa đường và mạch cũng tương tự như vậy.

Định lý 4.2.1. Trong một đồ thị (có hướng và vô hướng) với n đỉnh, nếu tồn tại một con đường từ đỉnh v_1 đến đỉnh v_2 thì sẽ tồn tại một con đường chứa không nhiều hơn $n - 1$ cạnh đi từ v_1 đến v_2 .

Chứng minh: Giả sử ta có một đường từ v_1 đến v_2 và $(v_1, \dots, v_p, \dots, v_2)$ là dãy các đỉnh mà con đường đó đi qua. Nếu đường đó có l cạnh thì ta có một dãy $l + 1$ đỉnh. Nếu l lớn hơn $n - 1$ thì nhất thiết phải có đỉnh v_k nào đó xuất hiện nhiều hơn 1 lần, chẳng hạn $(v_1, \dots, v_p, \dots, v_k, \dots, v_k, \dots, v_2)$. Loại bỏ tất cả các cạnh trên đường vòng từ v_k lại trở về v_k chúng ta sẽ có con đường từ v_1 đến v_2 có số cạnh ít hơn đường ban đầu. Thuật toán này có thể lặp lại nhiều lần cho đến khi ta có con đường với $n - 1$ cạnh hay ít hơn. Như vậy định lý đã được chứng minh.

Một đồ thị vô hướng được gọi là **liên thông** nếu giữa 2 đỉnh bất kì đều tồn tại một con đường, trong trường hợp ngược lại là đồ thị không liên thông. Đồ thị có hướng được gọi là liên thông nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó (bỏ hết các chiều vectơ định hướng) là liên thông. Trong trường hợp ngược lại ta có đồ

thị có hướng không liên thông. Một đồ thị có hướng được gọi là **liên thông mạnh** nếu giữa hai đỉnh bất kì a và b tồn tại con đường từ a đến b và con đường ngược lại từ b đến a .



Hình 4.2.2

Ví dụ hình 4.2.2a là một đồ thị liên thông nhưng không phải là liên thông mạnh, hình 4.2.2b là một đồ thị liên thông mạnh, còn hình 4.2.2c là một đồ thị không liên thông.

Một trong những bài toán quan trọng được đặt ra trong lý thuyết đồ thị là xác định được điểm ngắn nhất từ đỉnh i đến đỉnh j trong đồ thị G . Sau đây chúng ta nghiên cứu sâu hơn vấn đề này:

Giả sử ta biểu diễn l trọng đồ dưới dạng sau:

$$G = (V, E, w),$$

trong đó, V là tập hợp các đỉnh, E là tập hợp các cạnh và w là ánh xạ từ E đến tập các số thực dương. Chẳng hạn V là tập hợp các thành phố, E là tập hợp các con đường bộ nối liền các thành phố trên. Trọng số của một cạnh e_{ij} được biểu diễn bằng $w(e_{ij})$, có thể đó là độ dài của đường bộ đi từ thành phố i đến thành phố j . Đó cũng có thể là giá thành sửa chữa đường hàng năm của đoạn đường e_{ij} hoặc đó là số tai nạn xảy ra hàng tháng trên đoạn đường bộ e_{ij} . Độ dài của một đường trong đồ thị G được định nghĩa là tổng độ dài của các cạnh trên đường đó. Có nhiều phương pháp thuật toán để giải quyết bài toán tìm đường ngắn nhất. Một trong các thuật toán đó là thuật toán Dijkstra. Thuật toán này có thể được tóm tắt như sau: Giả sử ta phải tính khoảng cách ngắn nhất từ đỉnh a đến một đỉnh nào đó trong G .

1. Trước hết ta đặt $P = \{a\}$ và $T = V - \{a\}$. Đối với mỗi đỉnh $t \in T$ ta giả thiết độ dài $l(t) = w(a, t)$. Ở đây $w(a, t)$ là tổng độ dài (trọng số) của các cạnh của con đường nối liền a với t .

2. Gọi x là một đỉnh trong T sao cho đỉnh này có chỉ số nhỏ nhất đối với P . Chỉ số của x chính là khoảng cách từ x đến đỉnh a trong P .

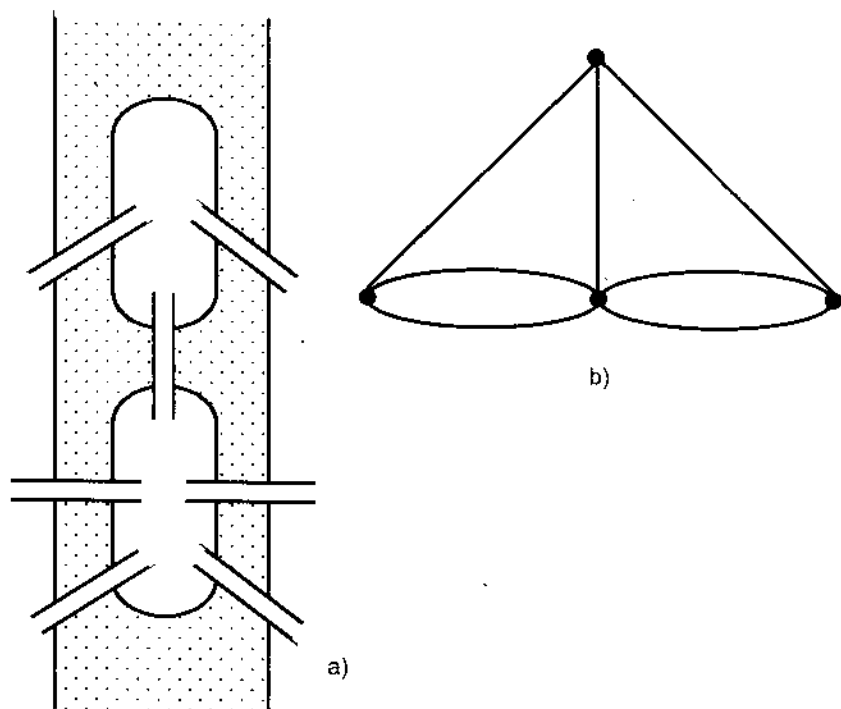
3. Nếu x là đỉnh mà ta cần đi đến từ a thì stop. Nếu không phải thì ta đặt $P' = P \cup \{x\}$ và $T' = T - \{x\}$. Đối với mỗi đỉnh $t \in T'$ ta tính chỉ số (hay trọng số) đối với P' theo công thức sau:

$$l'(t) = \min[l(t), l(x) + w(x, t)]$$

Trong đó $l'(t)$ là chỉ số từ t đối với P' . Lặp lại bước 2 với P' và T' thay cho P và T .

4.3. ĐƯỜNG Ơ-LE (EULER)

Nhà bác học L. Euler đã trở thành ông tổ của lí thuyết đồ thị khi vào năm 1736 ông đã chứng minh rằng không thể bằng một vòng đi qua tất cả 7 cái cầu trên sông Pregel ở Đức với điều kiện chỉ được phép đi qua mỗi cầu một lần mà thôi. Bản đồ của các cầu này vẽ ở hình 4.3.1a và đồ thị tương ứng với nó vẽ ở hình 4.3.1b.



Hình 4.3.1

Trên đồ thị hình 4.3.1b thì các đỉnh là hai hòn đảo và hai bờ của sông Pregel. Các cạnh của đồ thị là các cầu. Bài toán đi qua tất cả 7 cầu trên sông Pregel chỉ một lần chính là bài toán tìm

đường trên đồ thị hình 4.3.1b sao cho nó đi qua tất cả các cạnh chỉ 1 lần. Euler đã đưa ra một tiêu chuẩn rất đơn giản để xác định xem có tồn tại đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị chỉ 1 lần hay không?. Đường như vậy gọi là **đường Euler**. Tương tự như vậy ta có khái niệm **mạch Euler**. Trước hết ta nghiên cứu bài toán cho đồ thị vô hướng và sau đó có thể suy ra dễ dàng cho đồ thị có hướng.

Để xác định điều kiện cần và đủ để tồn tại đường Euler hay mạch Euler trong một đồ thị bất kì người ta đưa ra khái niệm mức của đỉnh đồ thị. **Mức của một đỉnh** là số lượng các cạnh nối liền với đỉnh đó. Vì mỗi cạnh được nối với hai đỉnh nên rõ ràng tổng số mức của các đỉnh bằng hai lần số các cạnh trong đồ thị. Điều này có nghĩa rằng nhất thiết phải có một số chẵn các đỉnh với mức lẻ. Chúng ta giới thiệu kết quả nghiên cứu của Euler về vấn đề này bằng định lí sau đây:

Định lí 4.3.1. Đồ thị vô hướng có một đường Euler nếu và chỉ nếu nó là liên thông và hoặc là không có hoặc là có 2 đỉnh với mức lẻ.

Chứng minh: Giả sử ta có đường Euler trong đồ thị. Như vậy đồ thị là liên thông. Khi vạch đường Euler ta nhận xét mỗi lần đường này gặp một đỉnh nó phải đi qua hai cạnh nối với đỉnh đó mà trước đó nó chưa đi qua. Như vậy trừ hai đỉnh đầu và cuối của đường, các đỉnh trong đồ thị đều phải có mức chẵn. Do đó nếu vị trí hai đỉnh đầu và cuối của đường là khác nhau thì ta có hai đỉnh với mức lẻ. Nếu hai đỉnh đó trùng nhau thì tất cả các đỉnh đều có mức chẵn và đường Euler trở thành mạch Euler. Như vậy điều kiện cần đã được chứng minh.

Để chứng minh điều kiện đủ ta thiết lập một đường Euler bắt đầu từ 1 trong hai đỉnh có mức lẻ sao cho đường không đi

qua cạnh nào quá 1 lần. Đối với các đỉnh có mức chẵn thì đường đi vào đỉnh bằng một cạnh và đi ra bằng một cạnh khác mà đường chưa đi qua. Do vậy khi đường này kết thúc thì ta bắt gặp đỉnh thứ 2 có mức lẻ. Nếu tất cả các cạnh của đồ thị đã được đi qua thì tất nhiên ta có một đường Euler. Nếu không phải tất cả các cạnh đã được đi qua thì ta dồn tất cả các cạnh đã đi qua lại và ta lại có một đồ thị con của các cạnh chưa đi qua. Tất nhiên tất cả các đỉnh của đồ thị con này đều có mức chẵn và đồ thị con này gặp đường đi thiết lập ở 1 hoặc nhiều đỉnh vì rằng giả thiết đồ thị ban đầu là liên thông. Bắt đầu từ 1 trong các đỉnh của đồ thị con ta lại thiết lập một đường qua các cạnh của nó. Vì các đỉnh của đồ thị con đều có mức chẵn nên đường này lại quay trở về đỉnh xuất phát. Lúc này ta hoàn toàn có thể nối liền đường này (trong đồ thị con) với đường đã thiết lập ban đầu để tạo nên một đường mới sao cho bắt đầu và kết thúc bằng các đỉnh có mức lẻ. Nếu cần thiết thì thuật toán này được lặp lại cho đến khi ta nhận được đường Euler qua tất cả các cạnh của đồ thị ban đầu. Như vậy điều kiện đủ cũng được chứng minh xong.

Hệ quả 4.3.1. Đồ thị vô hướng có một mạch Euler nếu và chỉ nếu nó là liên thông và tất cả các đỉnh của nó đều có mức chẵn.

Ví dụ đồ thị vẽ ở hình 4.3.2a có một đường Euler nhưng không phải là mạch Euler vì đồ thị có đúng hai đỉnh với mức lẻ và là đồ thị liên thông.

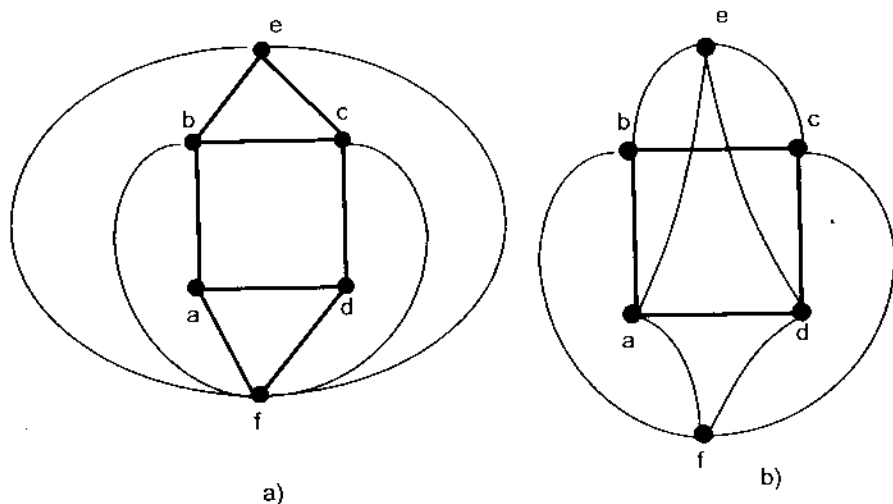
Đồ thị ở hình 4.3.2b có một mạch Euler vì nó là liên thông và tất cả các đỉnh đều có mức chẵn.

Các kết quả trên đây có thể mở rộng trực tiếp cho đồ thị có hướng. Trong trường hợp này người ta đưa ra hai khái niệm mới

là **mức vào** và **mức ra** của đỉnh. Mức vào của đỉnh là số lượng các cạnh đi vào đỉnh (chiều vectơ đâm vào đỉnh), còn mức ra của đỉnh là số lượng các cạnh đi ra khỏi đỉnh (chiều vectơ hướng ra ngoài đỉnh). Do vậy ta có định lí sau:

Định lí 4.3.2. Đồ thị có hướng có một mạch Euler nếu và chỉ nếu nó là liên thông và mức vào của mỗi đỉnh bằng mức ra của nó.

Đồ thị có hướng có một đường Euler nếu và chỉ nếu nó là liên thông và mức vào của mỗi đỉnh bằng mức ra của nó trừ hai đỉnh. Một trong hai đỉnh đó có mức vào lớn hơn mức ra một đơn vị, còn đỉnh kia lại có mức vào bé hơn mức ra một đơn vị.



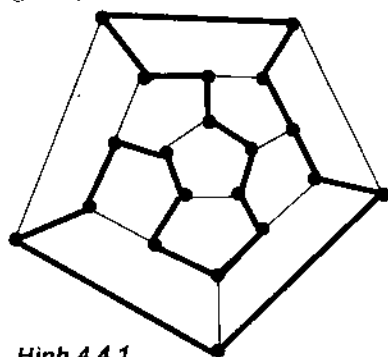
Hình 4.3.2

4.4. ĐƯỜNG HAMILTON

Tương tự như bài toán về đường và mạch Euler, ở đây ta có bài toán đường và mạch Hamilton đi qua tất cả các đỉnh của đồ

thị, nhưng mỗi đỉnh chỉ một lần mà thôi. Bài toán này được đặt ra từ trò chơi của ngài William Hamilton, gọi là trò chơi “tất cả vòng quanh thế giới”. Người chơi phải tìm ra một hành trình (con đường) dọc theo một hình 12 mặt ngũ giác sao cho qua mỗi góc chỉ 1 lần mà thôi. Bài toán này cũng tương tự như bài toán sắp xếp chỗ ngồi cho khách xung quanh một bàn tiệc sao cho mỗi người có hai người bạn tương ứng ở hai phía.

Hình 4.4.1 cho ta ví dụ về một mạch Hamilton trong đồ thị vô hướng (đường Hamilton do các cạnh in đậm tạo nên). Sau đây ta sẽ xét đến điều kiện để tồn tại đường hoặc mạch Hamilton.

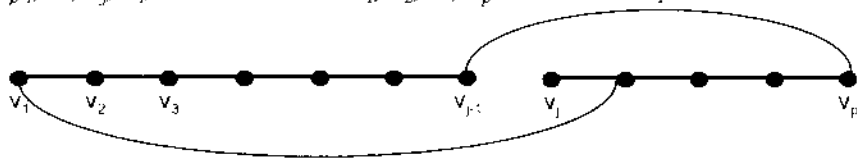


Hình 4.4.1

Định lý 4.1.1. Cho G là đồ thị vô hướng n đỉnh. Nếu tổng các mức của mỗi cặp đỉnh trong G bằng hoặc lớn hơn $n - 1$ thì tồn tại một đường Hamilton ở trong G .

Chứng minh: Trước hết ta hãy chứng minh rằng G là một đồ thị liên thông. Giả sử G có hai (hay nhiều) phần không liên thông với nhau, gọi G_1 là phần thứ nhất có n_1 đỉnh và G_2 là phần thứ hai có n_2 đỉnh ($n_1 + n_2 = n$). Giả sử đỉnh $v_1 \in G_1$ và đỉnh $v_2 \in G_2$. Vì mức của v_1 nhiều nhất là $n_1 - 1$ và mức của v_2 nhiều nhất là $n_2 - 1$. Như vậy tổng các mức của cặp v_1, v_2 nhiều nhất là $(n_1 + n_2 - 2) = (n - 2) < n - 1$. Điều này trái với giả thiết và vì vậy G phải là liên thông. Bây giờ chúng ta chứng minh bằng cách nào để thiết lập được đường Hamilton. Xuất phát từ một cạnh của đồ thị và từng bước ta thiết lập đường qua các

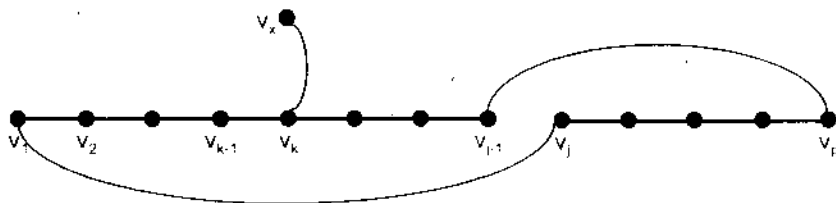
đỉnh. Giả sử ta đã thiết lập được một đường giữa $p - 1$ cạnh, $p < n$, trong G . Đường này đi qua một dãy các đỉnh là $(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Nếu v_1 hoặc v_p là kề với 1 đỉnh không thuộc đường đã thiết lập thì lập tức ta kéo dài đường này đến đỉnh đó và ta lại có một đường gồm p cạnh (tức $p + 1$ đỉnh). Ngược lại, tức hai đỉnh v_1 và v_p là kề đối với các đỉnh thuộc đường đã thiết lập. Trong trường hợp có một mạch chứa đúng các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_p$, nếu giả sử v_1 là kề với v_p thì mạch $(v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ là đủ. Giả sử v_1 chỉ kề với $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$, gọi tất cả các đỉnh kề với v_1 (trong đó $2 \leq i_j \leq p - 1$) và v_p lại kề với $v_{j_1-1}, v_{j_2-1}, \dots, v_{j_l-1}$, gọi là v_{j_l} . thì mạch $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{j_l-1}, v_{j_l}, v_{j_l+1}, \dots, v_p, v_1)$ chứa các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_p$ như minh họa ở hình 4.4.2.



Hình 4.4.2

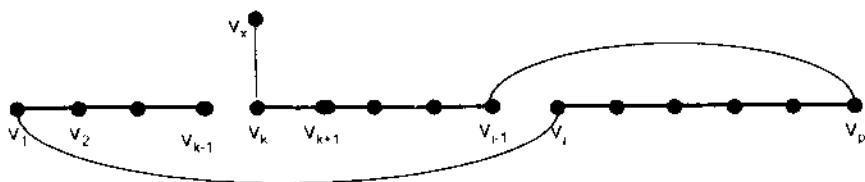
Nếu v_p không kề với một đỉnh nào của $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \dots, v_{i_k-1}$ thì v_p sẽ kề với nhiều nhất là $p - k - 1$ đỉnh. Như vậy tổng các mức của v_1 và v_p nhiều nhất là $n - 2$, điều này trái với giả thiết.

Bây giờ chúng ta có mạch chứa tất cả các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_p$ và giả thiết có một đỉnh v_x không nằm trong mạch. Vì G là liên thông nên phải có một cạnh nối liền v_x với $v_k \in \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ như minh họa ở hình 4.4.3.



Hình 4.4.3

Như vậy ta có một đường $(v_x, v_k, v_{k+1}, \dots, v_j, v_p, v_{p+1}, \dots, v_p, v_p, v_{p+1}, \dots, v_p, v_p)$ chứa p cạnh như minh hoạ ở hình 4.4.4.

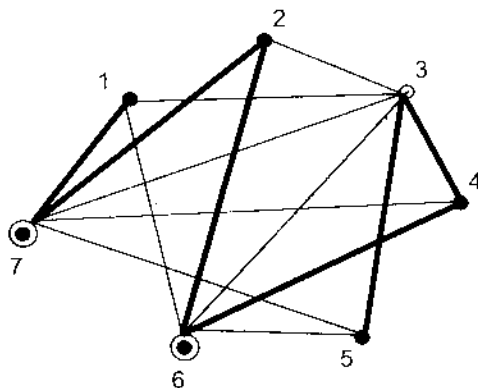


Hình 4.4.4

Chúng ta sẽ lặp lại thuật toán trên cho đến khi nhận được đường chứa đúng $n - 1$ cạnh.

Định lí 4.4.1 chỉ mới cho ta điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần.

Ví dụ 4.2. Dùng phương pháp đồ thị để lập biểu bố trí lịch thi cho sinh viên với 7 môn thi trong 7 ngày. Yêu cầu phải bố trí lịch sao cho hai môn thi của cùng một thầy giáo không được rơi vào hai ngày liên tiếp nhau. Biết rằng không có thầy giáo nào cùng có nhiều hơn 4 môn thi.



Hình 4.4.5

Ta xây dựng một đồ thị G như ở hình 4.4.5. Trong đó các đỉnh là các môn thi còn giữa hai đỉnh có một cạnh nối nếu hai đỉnh đó ứng với 2 môn thi của hai thầy giáo khác nhau. Mức của mỗi đỉnh ít nhất là 3 vì thầy giáo nhiều nhất có 4 môn thi. Do vậy hai đỉnh bất kì nào cũng có tổng mức ít nhất là 6. Theo định

lí 4.4.1 ta có thể xác định được đường Hamilton đi qua các đỉnh chỉ một lần mà thôi. Căn cứ vào sự liên tục đi qua các đỉnh của đường Hamilton để lập lịch thi. Trên hình 4.4.5 các đỉnh có cùng một kí hiệu như nhau sẽ do cùng một thầy giáo phụ trách. Đường Hamilton có được là đường tô đậm trên hình vẽ.

Trong ví dụ này ta giả thiết 1 thầy giáo có 4 môn thi ứng với 4 đỉnh 1, 2, 4 và 5; thầy giáo thứ 2 có hai môn thi ứng với hai đỉnh 6 và 7; thầy giáo thứ ba có một môn thi ứng với đỉnh 3. Tất nhiên có thể có nhiều đường Hamilton khác nhau.

Định lí 4.4.2. Đồ thị có hướng đầy đủ luôn luôn có đường Hamilton.

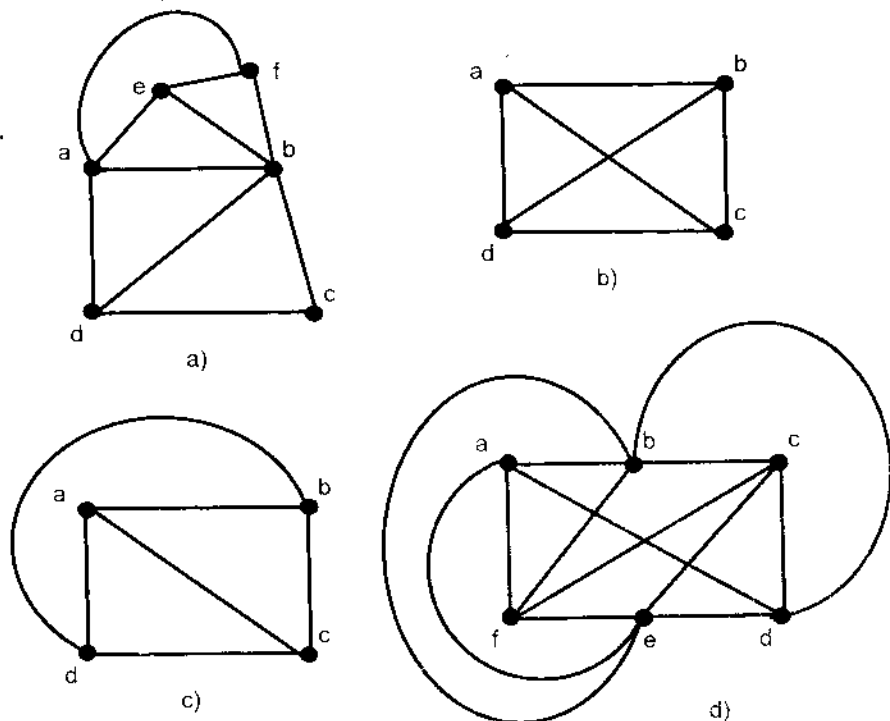
Ví dụ 4.3. Ta hãy nghiên cứu bài toán bố trí thứ tự đóng sách và in sách một cách hợp lí sao cho tận dụng hết công suất của máy in và máy đóng (không để máy chờ). Giả sử ta cần phải in và đóng n cuốn sách. Ta gọi p_i và b_i là thời gian in và thời gian đóng tương ứng của cuốn sách thứ i . Nếu ta biết rằng mỗi một cặp sách i và j hoặc là $b_i \geq p_j$ hoặc là $b_j > p_i$, hãy xác định một thứ tự in sách để sao cho máy đóng sách luôn luôn ở trạng thái bận cho đến khi tất cả các sách đã đóng xong. Tất nhiên trừ khi cuốn sách đầu tiên đang in thì máy đóng phải chờ.

Ta hãy cấu tạo một đồ thị có hướng mà n đỉnh tương ứng với n cuốn sách. Cạnh nối từ đỉnh i đến đỉnh j tồn tại (tức là máy đóng luôn ở trạng thái bận) nếu và chỉ nếu $b_i \geq p_j$. Rõ ràng đây là một đồ thị có hướng đầy đủ và do đó đường Hamilton của nó cho ta thứ tự in và đóng sách hợp lí nhất.

4.5. ĐỒ THỊ PHẪNG

Trong phần này ta nghiên cứu một lớp đặc trưng của đồ thị: đó là *đồ thị phẳng*.

Định nghĩa 4.5.1. Một đồ thị được gọi là *đồ thị phẳng* nếu như ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau, trừ tại các đỉnh chung.



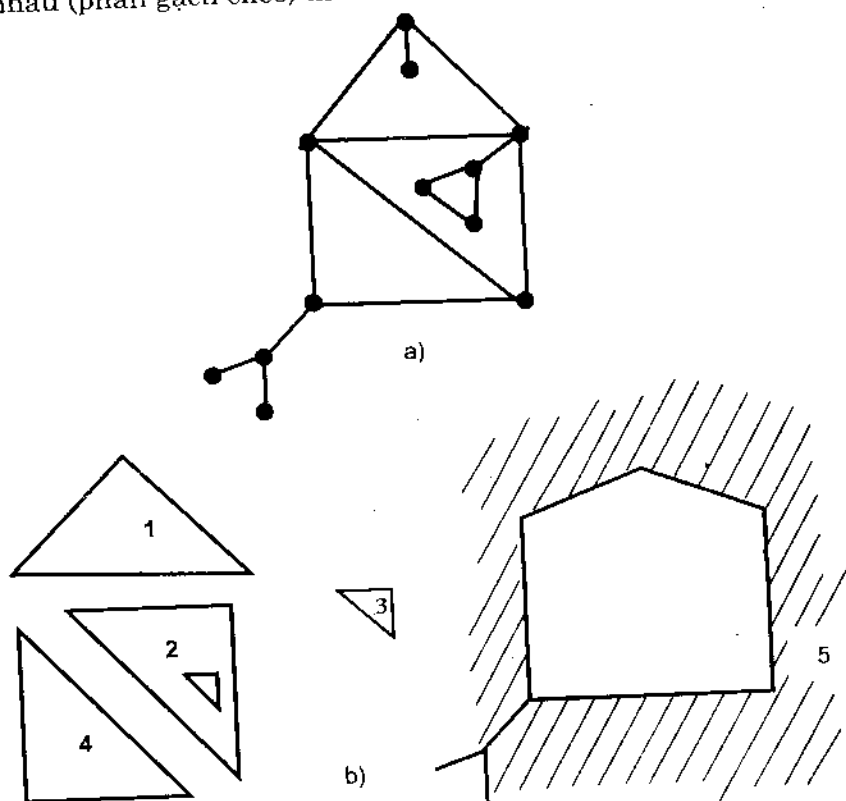
Hình 4.5.1

Ví dụ hình 4.5.1a là một đồ thị phẳng, hình 4.5.1b và hình 4.5.1c là tương đương với nhau và là đồ thị phẳng. Hình 4.5.1d không phải là đồ thị phẳng.

Lớp đồ thị phẳng có nhiều tính chất đặc trưng và nhiều ứng dụng trong thực tiễn.

Nếu ta “cắt” đồ thị theo các cạnh thì ta có những phần khác nhau gọi là *các miền*. Chính xác hơn, *miền của đồ thị phẳng* là

phần mặt phẳng được giới hạn bởi các cạnh và không thể chia nhỏ hơn được nữa. Ví dụ đồ thị cho ở hình 4.5.2a có 5 miền khác nhau (phần gạch chéo) như ở hình 4.5.2b.



Hình 4.5.2

Miền được gọi là hữu hạn nếu phần mặt phẳng tương ứng với nó là hữu hạn, ngược lại ta sẽ có miền vô hạn. Mỗi đồ thị phẳng có đúng một miền vô hạn.

Định lý 4.5.1. Đối với mỗi đồ thị phẳng liên thông ta có:

$$v - e + r = 2, \quad (4.3)$$

trong đó, v , e và r là số lượng các đỉnh, cạnh và miền tương ứng.

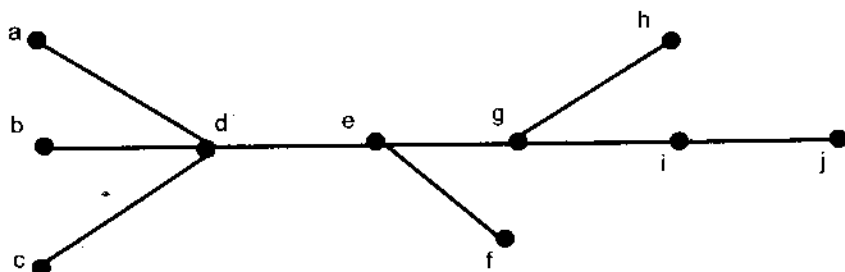
Đẳng thức (4.3) được gọi là **công thức Euler** của đồ thị phẳng. Công thức Euler có nhiều ứng dụng trong thực tế, nhưng vì giới hạn nhất định của khuôn khổ cuốn sách nên chúng ta không đi sâu hơn nữa.

Trên cơ sở những khái niệm cơ bản ở trên độc giả có thể tìm hiểu thêm khi cần thiết ở những cuốn sách chuyên đề về đồ thị.

4.6. KHÁI NIỆM VỀ CÂY VÀ CÂY CÓ GỐC

Một lớp đặc biệt của đồ thị được gọi là cây. Khái niệm về cây được dùng nhiều trong các lĩnh vực khác nhau như trong lý thuyết ô tômat, lý thuyết lập trình, lý thuyết mã, lý thuyết mạch, thông tin, v.v... Trước khi định nghĩa thế nào là một cây ta hãy xét một ví dụ về các trận đấu vật để giành danh hiệu vô địch. Nguyên tắc thi đấu là loại trực tiếp, nghĩa là đô vật nào bị thua trong một trận đấu sẽ bị loại ngay tức khắc khỏi giải. Giả sử ta gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng, trong đó các đỉnh thuộc V biểu diễn các đô vật còn các cạnh trong E biểu diễn các trận đấu giữa 2 đô vật. Như vậy với $x, y \in V$ sẽ tồn tại cạnh $\{x, y\} \in E$ nếu có trận đấu giữa x và y . Giả sử $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ và đô vật d đang là đương kim vô địch. Đô vật d đánh thắng a, b và c nhưng lại mất danh hiệu vô địch sau trận đấu với e . Đô vật e đánh bại f nhưng lại thua g , v.v... và cuối cùng đô vật j dành được danh hiệu vô địch. Quá trình đấu loại này được mô tả bằng đồ thị vẽ ở hình 4.6.1. Đồ thị này có những đặc tính nhất định liên quan đến khái niệm cây mà ta sẽ nghiên cứu sau đây.

Định nghĩa 4.6.1. Một đồ thị liên thông (vô hướng) không chứa một mạch đơn giản nào cả gọi là *một cây*.



Hình 4.6.1

Đồ thị ở hình 4.6.1 là một cây.

Tập hợp một số cây khác biệt nhau tạo thành một *rừng*. Đỉnh có mức bằng 1 trong một cây được gọi là *lá* hay *nút đầu cuối* của cây. Đỉnh có mức lớn hơn 1 được gọi là *nút nhánh* hay *nút bên trong*. Ví dụ trên hình 4.6.1 các nút *a, b, c, f, h, j* là lá còn các nút *d, e, g* và *i* là các nút bên trong.

Sau đây là một số tính chất đặc trưng của cây:

- Giữa hai nút bất kỳ trong cây tồn tại một đường duy nhất.
- Số lượng các đỉnh (hay các nút) lớn hơn số lượng các cạnh trong cây một đơn vị.
- Cây với hai đỉnh hoặc nhiều hơn có ít nhất là 2 lá.

Các tính chất trên đây hoàn toàn có thể chứng minh được trên cơ sở định nghĩa của cây và các tính chất của đồ thị. Phần chứng minh này dành cho các độc giả.

Từ 3 tính chất trên của cây ta có thể suy ra một số hệ quả sau đây:

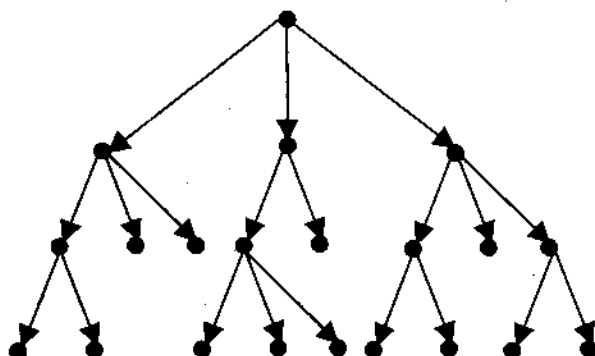
a. Một đồ thị mà trong đó tồn tại một đường duy nhất giữa hai cặp đỉnh bất kỳ là một cây.

b. Một đồ thị liên thông có $e = v - 1$ là một cây (ở đây e là tổng số cạnh còn v là tổng số đỉnh).

c. Một đồ thị với $e = v - 1$ và không có mạch là một cây. Trong một cây người ta thường gọi cạnh là *cạnh*.

Định nghĩa 4.6.2. Một đồ thị có hướng được gọi là *cây có hướng* nếu như đồ thị vô hướng tương ứng với nó (khi ta không để ý đến hướng) là một cây.

Cây có hướng được gọi là *cây có gốc* nếu như cây đó có đúng một đỉnh với mức vào bằng không còn tất cả các đỉnh khác đều có mức vào bằng 1. Đỉnh với mức vào bằng không được gọi là *gốc của cây*. Hình 4.6.2 minh họa một cây có gốc.



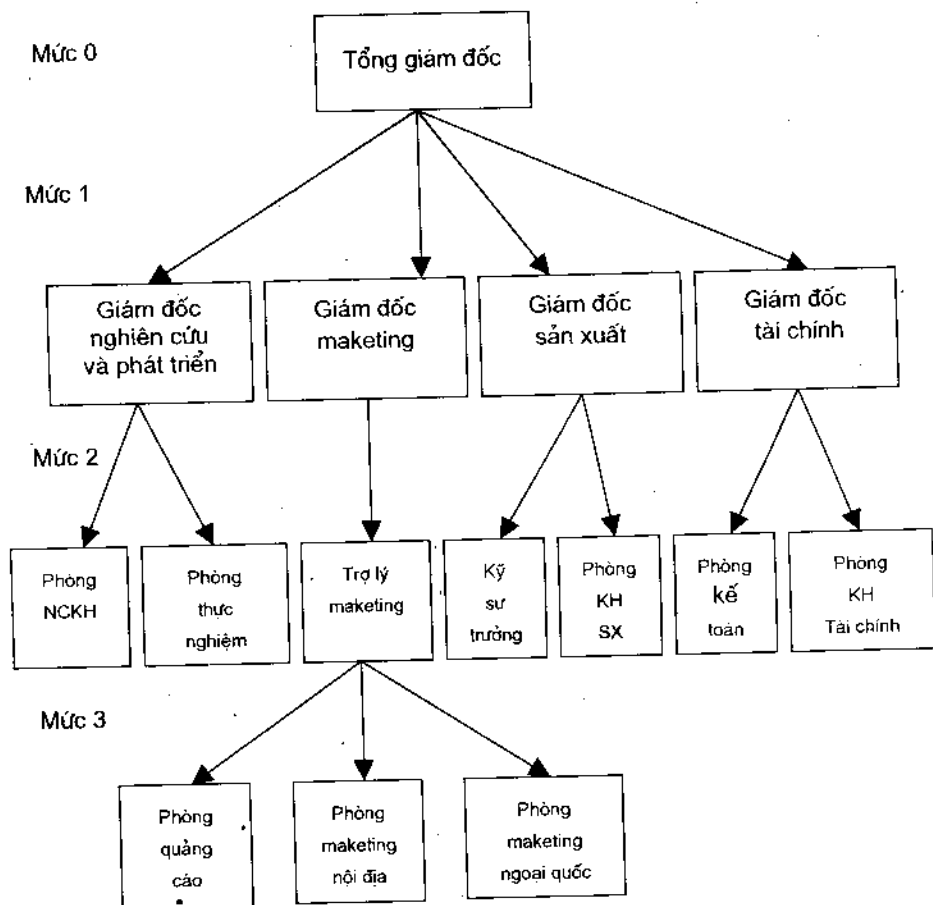
Hình 4.6.2

Nhiều mô hình kinh tế và kỹ thuật có thể được mô tả dưới dạng cây có gốc. Ví dụ mô hình quản lý ở một xí nghiệp như ở hình 4.6.3 chính là một cây có gốc.

Giả sử α là một nút bên trong (hay nút nhánh) của cây T . Một đồ thị con $T' = (V', E')$ của T sao cho V' chứa α và tất cả các

nút nhánh tiếp theo nó, còn E' chứa tất cả các cành của tất cả các đường bắt đầu từ a được gọi là *một cây con có gốc a* .

Trong cây có gốc người ta thường phân chia các nút và các cành theo từng mức.



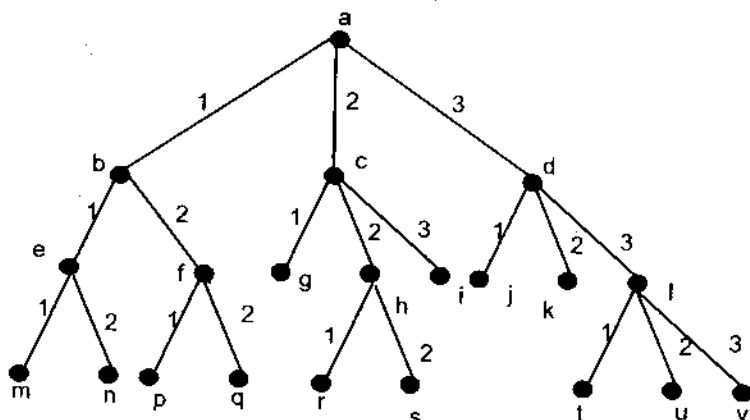
Hình 4.6.3

Mức 0 ứng với gốc. Mức 1 bao gồm các cành và các nút nối trực tiếp với gốc. Mức 2 bao gồm các cành và các nút nối trực tiếp với gốc.

tiếp với các nút ở mức 1, v.v... Tổng quát, mức n bao gồm các cành và các nút nối trực tiếp với các nút của mức $n - 1$, (xem hình 4.6.3). Thường ở mỗi mức người ta dùng các số tự nhiên để đánh số cho các cành xuất phát từ các nút nhánh (như minh hoạ ở hình 4.6.4).

Cây có gốc với các cành được đánh số theo từng nút nhánh gọi là **cây sắp xếp**.

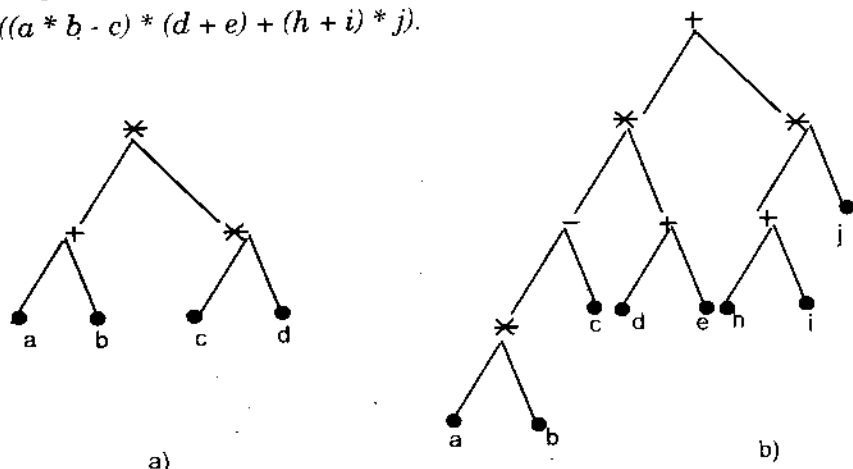
Số cành lớn nhất có thể có được xuất phát từ một nút nhánh ở trong cây xác định bậc của cây. Cây sắp xếp bậc m có nghĩa là số cành nhiều nhất xuất phát từ một nút nhánh là m . Ví dụ ở hình 4.6.4 ta có cây bậc 3. Cây sắp xếp bậc m được gọi là **chính quy** nếu mọi nút nhánh (kể cả gốc) đều có đúng m cành.



Hình 4.6.4

Một lớp cây sắp xếp quan trọng, về sau chúng ta sẽ đề cập kỹ hơn, là **cây nhị phân** (mỗi nút có hai nhánh). Cây nhị phân có nhiều ứng dụng, ví dụ ta có thể dùng để biểu diễn các phép toán số học trong một thuật toán nào đó. Ví dụ hình 4.6.5a mô

tả phép toán $(a + b)(c \cdot d)$ còn hình 4.6.5b mô tả phép toán $((a * b - c) * (d + e) + (h + i) * j)$.



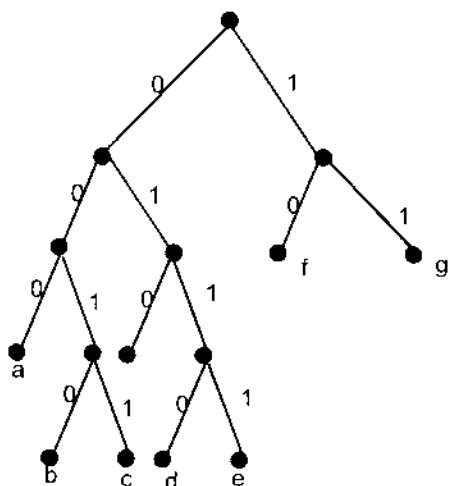
Hình 4.6.5

4.7. CÂY NHỊ PHÂN VÀ MÃ HUFFMAN

Như ta đã định nghĩa sơ bộ ở trên, cây nhị phân là cây sắp xếp mà mỗi nút có hai nhánh hay là hai cành. Các cành này thường được mã hoá là 0 (cành bên trái) và 1 (cành bên phải). Cây con được tạo nên từ cành 0 được gọi là cây con bên trái và cây con được tạo nên từ cành 1 được gọi là cây con bên phải.

Hình 4.7.1 cho ta ví dụ về cây nhị phân. Người ta căn cứ vào cây nhị phân để xác định đường từ gốc đến lá của cây dưới dạng các dãy mã nhị phân. Ví dụ trên hình 4.7.1 đường từ gốc đến các lá a, b, c, d, e, j và g tương ứng là các dãy mã nhị phân: 000, 0010, 0011, 0110, 0111, 10, 11. Các dãy mã này còn được gọi là các từ mã.

Tùy theo mục đích xây dựng cây nhị phân người ta còn có thể gán cho mỗi cành của cây những giá trị đặc trưng của chúng gọi là **trọng lượng** W của cành. Chẳng hạn W là xác suất xuất hiện hiện tượng tương ứng với cành, hiện tượng đó có thể là một trạng thái của ô tômat. Trong giao thông thì W có thể là khả năng lưu thoát của đoạn đường tương ứng với cành đang xét, v.v...



Hình 4.7.1

Trọng lượng của đường từ gốc đến lá bằng tổng trọng lượng của các cành nằm trên đường đó:

$$W_i(l_i) = \sum_{b_{ij} \in l_i} W_{ij}(b_{ij}), \quad (4.4)$$

ở đây, $W_i(l_i)$ là trọng lượng của đường l_i từ gốc đến lá i ;

$W_{ij}(b_{ij})$ là trọng lượng của của cành b_{ij} thuộc đường l_i ;

$b_{ij} \in l_i$ có nghĩa là: với mọi cành b_{ij} thuộc l_i

Thực ra khái niệm trọng lượng ở đây hoàn toàn tương tự với khái niệm trọng số mà ta đã đề cập đến trong phần đồ thị có trọng số (hay trọng đồ) ở phần trước.

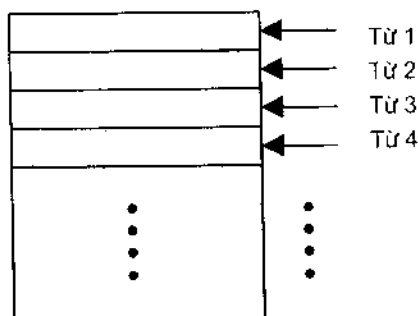
Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu hai ví dụ về ứng dụng điển hình của cây nhị phân.

Ví dụ thứ nhất ứng dụng cây nhị phân trong ngành máy tính. Giả sử chúng ta phải ghi vào bộ nhớ máy tính một tập hợp lớn các từ theo các quy luật sao cho:

- Dễ dàng xác định một từ nào đó có thuộc về tập hợp đã cho hay không.

- Nếu từ đó không thuộc về tập đã cho thì có thể cộng thêm vào tập hợp đó một cách dễ dàng.

Luật thứ nhất có thể thực hiện được chẳng hạn bằng cách đưa các từ vào bộ nhớ theo thứ tự của bộ chữ cái ứng với các vị trí kế tiếp trong bộ nhớ như ở hình 4.7.2.



Hình 4.7.2

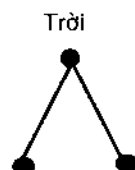
Làm như vậy chắc chắn có thể biết được một từ có thuộc về tập đã cho hay không. Tuy nhiên bằng cách này thì việc cộng thêm từ mới vào tập đã cho sẽ khó khăn vì phải xáo trộn toàn bộ cấu trúc của bộ nhớ.

Ngược lại nếu bằng cách khác ta sắp xếp bộ nhớ sao cho dễ dàng bổ sung từ mới vào tập đã cho thì việc nhận dạng một từ có thuộc về tập đã cho hay không sẽ rất khó khăn vì có thể phải so sánh từ đó với tất cả các phần tử của tập đã cho. Để giải quyết vấn đề này người ta có thể dùng cây nhị phân như sau.

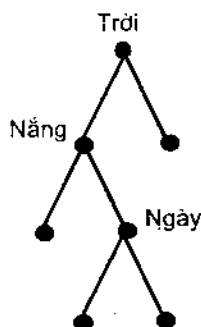
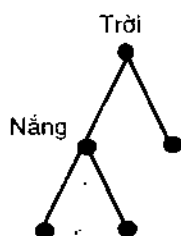
Giả sử ta phải ghi tập từ sau đây vào bộ nhớ:

“Ngày mai trời sẽ nắng”

Trước hết ta chọn một từ bất kỳ nào đó trong câu đã cho, chẳng hạn từ “Trời” và gán từ này cho một đỉnh và tạo thành cây nhị phân với hai đỉnh còn trống (chưa gán từ) như hình 4.7.3. Sau đó ta chọn từ tiếp theo, ví dụ “Nắng”. Theo vần chữ cái thì từ “Nắng” đứng trước từ “Trời” nên ta gán từ “Nắng” cho đỉnh bên trái của cây nhị phân và ta lại tạo nên hai đỉnh trống mới của cây nhị phân như hình 4.7.4a.

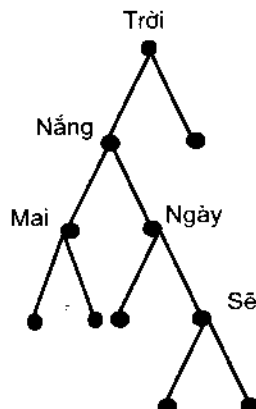


Hình 4.7.3



a)

b)



c)

Hình 4.7.4

Tiếp theo ta lại chọn từ mới còn lại của tập đã cho, ví dụ “Ngày”. Từ này so với từ “Trời” thì nó đứng trước (trong vần chữ cái) nên phải xếp nó vào một trong các đỉnh ở nhánh bên trái. Mặt khác “Ngày” lại đứng sau từ “Nắng” nên nó phải ở bên phải

của từ “Năng” như Hình 4.7.4b. Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ có cây nhị phân như Hình 4.7.4c.

Việc nhô các từ vào đỉnh của các cây nhị phân rất thuận lợi cho 2 mức đỉnh chúng ta đã nêu ở trên kia. Thật vậy, cho một từ nào đó chúng ta có thể xác định ngay nó có thuộc về tập đã cho hay không và nếu không ta có thể biết ngay phải ghi từ đó vào đâu.

Ví dụ thứ 2 về ứng dụng cây nhị phân trong mã hoá thông tin. Như chúng ta đã biết các ký tự được đưa vào máy tính nhờ các mã ký tự, chẳng hạn mã ASCII. Trong mã ASCII mỗi ký tự được mã hoá bằng một từ 7 bit, bit thứ 8 thường được dùng cho các ký tự đặc biệt. Phần lớn người ta dùng loại mã ký tự có cùng một độ dài như nhau đối với mỗi ký tự. Loại mã như vậy được gọi là “*mã ký tự có độ dài cố định*”. Ưu điểm của loại mã này là không cần phải thêm vào một ký tự đặc biệt nào để phân biệt các ký tự. Ví dụ trong mã ASCII ta có thể nhận biết ngay từ mã 1010100101001010001011000101 có nghĩa là “TREE”.

Tuy nhiên nhược điểm của loại mã này là tốc độ truyền tin và hiệu quả kinh tế thấp vì tất cả các ký tự đều có chiều dài 7 bit nên không có phép ưu tiên cho các ký tự thường gặp có độ dài mã ngắn hơn để tăng tốc độ xử lý thông tin.

Do vậy người ta phải đi tới khái niệm *mã ký tự có độ dài thay đổi*. Nhờ vậy đối với các ký tự hay xuất hiện người ta dùng mã có ký tự ngắn hơn so với các ký tự ít dùng. Ví dụ, chúng ta có một tập ký tự {a, b, c, d, e, f}, trong đó a và b là hay xuất hiện nhất. Do vậy ta có thể dùng mã hoá ký tự như sau:

$a \leftrightarrow 0$	$c \leftrightarrow 00$	$e \leftrightarrow 10$
$b \leftrightarrow 1$	$d \leftrightarrow 01$	$f \leftrightarrow 11$

Tuy nhiên việc nhận dạng các ký tự sẽ phức tạp hơn, ví dụ từ mã 010011 có nghĩa gì, vì rằng theo bộ mã hoá ở trên nó có thể là “*abaabb*” hay “*dcf*” hay “*abadb*” v.v... Do đó người ta phải bổ sung ký tự đặc biệt để ngăn cách các ký tự riêng rẽ với nhau. Ví dụ từ mã 01/0/0/11 chỉ có một nghĩa duy nhất là “*daaf*” nhờ có ký tự ngăn cách “/”.

Nhưng như vậy sẽ làm cho từ mã dài hơn và có thể tạo ra mâu thuẫn với mục tiêu đã đặt ra là tăng tốc độ xử lý thông tin.

Sau đây chúng ta sẽ xem xét một trong những phương pháp để giải quyết vấn đề các mâu thuẫn kể trên của mã ký tự có độ dài thay đổi.

Trước hết chúng ta hãy xem xét một vài khái niệm mới như sau. Một từ w được gọi là tiền tố của từ u nếu từ u có dạng $u = wx$, ở đây x là một từ khác. Ví dụ từ 110 là tiền tố của từ 11001100.

Một vấn đề cần phải lưu ý là trong một bộ mã ký tự sẽ không có một ký tự nào có mã là tiền tố của mã một ký tự khác.

Người ta gọi tiền tố xuất hiện của một ký tự trong một tập ký tự cho trước là *tần xuất* của ký tự đó. Từ khái niệm này chúng ta có định nghĩa như sau:

Định nghĩa 4.7.1. Cho $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là một tập ký tự với các tần xuất tương ứng là $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$. Giả sử chúng ta có bộ mã tương ứng với tập C , trong đó độ dài của mỗi mã ký tự tương ứng là $l(a_i)$. Trọng lượng của bộ mã ký tự được định nghĩa như sau:

$$\sum_{i=1}^n f(a_i)l(a_i) \quad (4.5)$$

Rõ ràng trọng lượng của bộ mã ký tự càng thấp càng ưu việt.

Một trong những phương pháp để xác định bộ mã ký tự có hiệu quả (với trọng lượng bé) là dùng lý thuyết về cây. Mã xây dựng theo nguyên lý trên gọi là mã Huffman. Sau đây chúng ta sẽ giới thiệu thuật toán tiền mã Huffman thông qua một ví dụ cụ thể.

Giả sử chúng ta có bộ mã ký tự $C = \{a, b, c, d, +, -\}$ với các tần số tương ứng như sau:

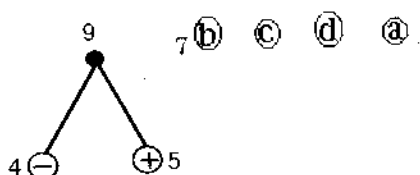
$$\begin{array}{lll} f(a) = 32 & f(c) = 9 & f(+) = 5 \\ f(b) = 7 & f(d) = 25 & f(-) = 4 \end{array}$$

Thuật toán xây dựng mã Huffman bao gồm các bước sau:

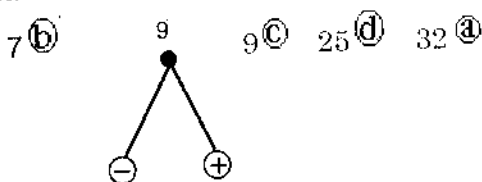
Bước 1: Ta thanh toán và xếp thứ tự các ký tự từ trái qua phải ứng với tần xuất của ký tự tăng dần theo hàng ngang (ta gọi là **hàng đầu**) như sau:

$$4(-) \quad 5(+) \quad 7(b) \quad 9(c) \quad 25(d) \quad 32(a)$$

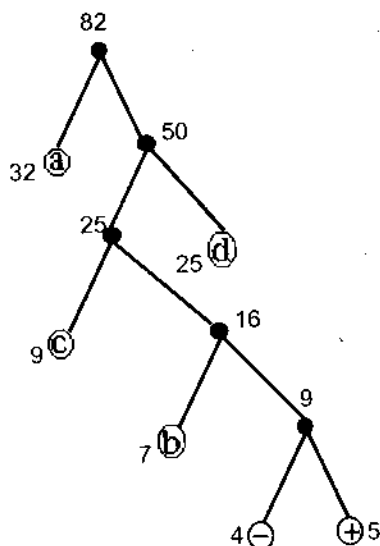
Bước 2: Tạo một đỉnh mới từ 2 đỉnh tận cùng bên trái sao cho đỉnh mới nằm ở hàng đầu của bước 1. Ta gán cho đỉnh mới một giá trị bằng tổng các tần xuất của 2 đỉnh tạo ra nó như sau:



Bước 3: Sắp xếp lại các đỉnh của đồ thị (hàng đầu) theo thứ tự tăng dần của tần xuất từ trái qua phải.

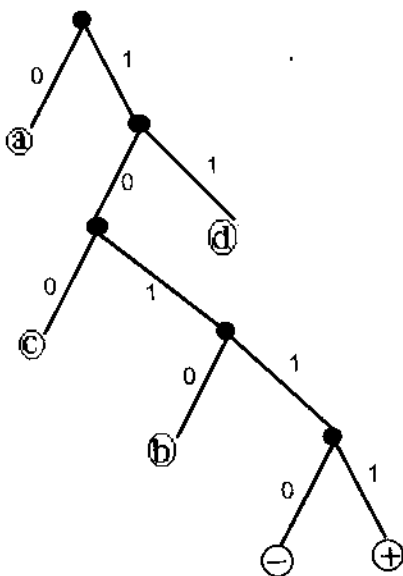


Bước 4: Lặp lại bước 1, 2, và 3 nhiều lần sao cho ở hàng đầu chỉ còn 1 đỉnh. Cuối cùng ta có đồ thị như ở Hình 4.7.5.



Hình 4.7.5

Bước 5: Xoá tất cả các số ghi tần xuất tại các đỉnh và mã hoá các cạnh của cây theo nguyên tắc mã nhị phân, nghĩa là cạnh bên trái có giá trị không, cạnh bên phải có giá trị 1 (hai cạnh xuất phát từ 1 đỉnh) như ở Hình 4.7.6.



Hình 4.7.6

Đồ thị nhận được ở Hình 4.7.6 gọi là *cây Huffman*. Để tìm mã Huffman cho một ký tự nào đó ta bắt đầu đi từ đỉnh của cây qua các cạnh cho đến ký tự đích đã cho. Dãy các chữ số 0 và 1 tạo ra theo đường đi đó chính là mã Huffman của ký tự đã cho. Trong ví dụ trên chúng ta có bảng 4.7.1.

Bảng 4.7.1

Ký tự	Tần xuất	Mã Huffman	Trọng lượng
a	32	0	$32 \times 1 = 32$
b	7	1010	$7 \times 4 = 28$
c	9	100	$9 \times 3 = 27$
d	25	11	$25 \times 2 = 50$
+	5	10111	$5 \times 5 = 25$
-	4	10110	$4 \times 5 = 20$
			$\Sigma = 182$

Với cách mã hoá như trên thì tần xuất càng cao thì độ dài của mã ký tự tương ứng càng bé.

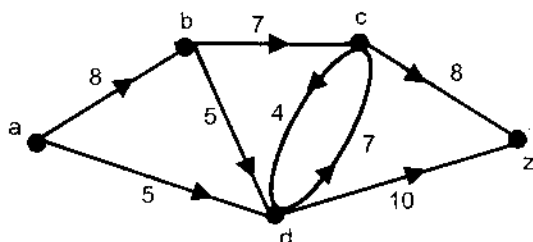
Mã Huffman là loại mã có tổng trọng lượng Σ bé nhất trong tất cả các loại mã có tính chất tiền tố (tức là không một từ mã nào là tiền tố của một từ mã khác).

4.8. CÁC MẠNG GIAO THÔNG

Một trọng đồ có hướng được gọi là một *mạng giao thông* nếu thoả mãn các điều kiện sau đây:

1. Đồ thị là liên thông và không chứa một mạch phản hồi (trên cùng 1 đỉnh).

2. Chỉ có một đỉnh trong đồ thị là không có cạnh vào.
3. Chỉ có một đỉnh trong đồ thị không có cạnh ra.
4. Trọng số (hay trọng lượng) của mỗi cạnh là một số thực không âm.



Hình 4.8.1

Đỉnh không có cạnh vào của mạng giao thông gọi là **nguồn** và được ký hiệu bằng a , còn đỉnh không có cạnh ra được gọi là **đích** và ký hiệu là z . Trọng số của mỗi cạnh chính là công suất của cạnh đó (năng lực giao thông). $W(i, j)$ là công suất của cạnh (i, j) . Hình 4.8.1 là một ví dụ mạng giao thông.

Bên cạnh khái niệm về công suất của cạnh người ta còn đưa ra khái niệm lưu lượng $\Phi(i, j)$ của cạnh (i, j) trong mạng giao thông.

Lưu lượng trong mạng giao thông có thể hiểu là lưu lượng vận tải hàng hoá hoặc lưu lượng xe trong mạng. Lưu lượng $\Phi(i, j)$ của mỗi cạnh (i, j) phải là một số không âm thoả mãn các điều kiện sau đây:

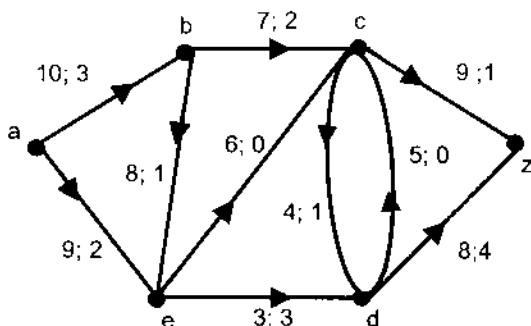
- a) $\Phi(i, j) \leq W(i, j)$ đối với mỗi cạnh (i, j) ;
- b) $\sum_{\Delta i} \Phi(i, j) = \sum_{\Delta k} \Phi(j, k)$ đối với mọi đỉnh j , trừ đỉnh nguồn và đích.

Điều kiện thứ nhất chứng tỏ rằng lưu lượng phải luôn luôn không được vượt quá trọng số của mỗi cạnh, vì trọng số chính là khả năng, là công suất thiết kế của mỗi cạnh.

Điều kiện thứ 2 cho chúng ta biết tổng lưu lượng vào của một đỉnh phải bằng tổng lưu lượng ra của nó, trừ đỉnh nguồn và đỉnh đích.

Hình 4.8.2 mô tả một mạng giao thông, trong đó trên mỗi cạnh (i, j) đều có ghi hai con số. Số thứ nhất là trọng số $W(i, j)$ còn số thứ 2 là lưu lượng $\Phi(i, j)$. Từ ví dụ trên chúng ta thấy rõ mối quan hệ sau đây:

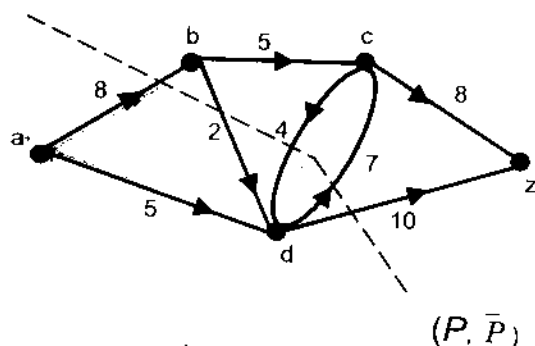
$$\Phi = \sum_{\wedge i} \Phi(a, i) = \sum_{\wedge k} \Phi(k, z) \quad (4.6)$$



Hình 4.8.2

ở đây, Φ là lưu lượng chung của toàn mạng. Rõ ràng lưu lượng Φ bằng tổng số lưu lượng rời khỏi nguồn đồng thời bằng tổng số lưu lượng đến đích (tất nhiên với giả thiết mạng không có tiêu hao). Đối với mỗi cạnh (i, j) ta nói rằng **lưu lượng bão hòa** nếu $\Phi(i, j) = W(i, j)$, còn nếu thì $\Phi(i, j) < W(i, j)$ thì ta có lưu lượng chưa bão hòa. Lưu lượng có khả năng đạt được lớn nhất của

mạng gọi là **lưu lượng cực đại**. Bài toán quan trọng được đặt ra là phải thiết kế hệ thống vận tải sao cho lưu lượng qua mạng từ nguồn đến đích là đạt được trị số lớn nhất, tức là đạt được lưu lượng cực đại. Chúng ta sẽ nghiên cứu thuật toán để có được lưu lượng cực đại này.



Hình 4.8.3

Giả sử ta cắt mạng giao thông thành hai phần P và $\bar{P}$, sao cho đỉnh nguồn thuộc P và đỉnh đích thuộc $\bar{P}$. Người ta đặc trưng cho phép cắt này bằng ký hiệu $(P, \bar{P})$. **Công suất của phép cắt** được định nghĩa là tổng $W(P, \bar{P})$ các công suất của tất cả các cạnh nối từ các đỉnh của P sang các đỉnh của $\bar{P}$, nghĩa là:

$$W(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P, j \in \bar{P}} W(i, j) \quad (4.7)$$

Hình 4.8.3 minh hoạ một phép cắt $(P, \bar{P})$. Trong đó $P = \{a, d\}$ và $\bar{P} = \{b, c, z\}$ và ta có:

$$W(P, \bar{P}) = W(a, b) + W(d, c) + W(d, z) = 8 + 7 + 10 = 25$$

Định lý 4.8.1. Giá trị lưu lượng của một mạng giao thông thì bé hơn hoặc bằng công suất của một phép cắt (bất kỳ) trong mạng.

Chứng minh: Giả sử Φ là hàm lưu lượng, $(P, \bar{P})$ là phép cắt trong mạng giao thông và Φ_0 là giá trị lưu lượng của mạng, ta có:

$$\Phi_0 = \sum_{i \in I} \Phi(a, i) \quad (4.8)$$

Đối với mỗi đỉnh p bất kỳ khác a thuộc P ta có tổng lưu lượng vào bằng tổng lưu lượng ra, nghĩa là:

$$\sum_{i \in I} \Phi(p, i) = \sum_{j \in J} \Phi(j, p) \quad (4.9)$$

Lưu lượng của mạng chạy qua tất cả các đỉnh đồng thời chạy trọn vẹn qua mặt cắt $(P, \bar{P})$. Do vậy quan sát lưu lượng từ mặt cắt của mạng ta có quan hệ sau đây:

$$\Phi_0 = \sum_{p \in P, i \in P} \Phi(p, i) - \sum_{p \in P, j \in \bar{P}} \Phi(j, p) \quad (4.10)$$

Biểu thức (4.10) có nghĩa rằng giá trị lưu lượng của mạng đi từ nguồn đến đích bằng hiệu của tổng số lưu lượng qua mặt cắt hướng về đích và tổng số lưu lượng qua mặt cắt hướng về nguồn. Vì $\sum_{p \in P, j \in \bar{P}} \Phi(j, p)$ luôn luôn là một số không âm nếu ta có:

$$\Phi_0 \leq \sum_{p \in P, i \in P} \Phi(p, i) \leq \sum_{p \in P, i \in \bar{P}} W(p, i) = W(P, \bar{P}) \quad (4.11)$$

Như vậy định lí đã được chứng minh xong.

Từ định lí 4.8.1 có thể xây dựng được thuật toán tìm giá trị lưu lượng cực đại cho một mạng giao thông trên cơ sở sử dụng các phép cắt. Tuy vậy chúng ta sẽ không đi sâu vào vấn đề này ở đây do mục tiêu giới hạn của cuốn sách.

4.9. ÔTÔMAT HỮU HẠN

Một trong những ứng dụng quan trọng và thường gặp của lý thuyết đồ thị và cây là trong lĩnh vực lý thuyết ô tômat. Để có thể giới thiệu sơ lược về ứng dụng lý thuyết đồ thị trong lĩnh vực này chúng ta xét đến một số định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 4.9.1. Ô tômat hữu hạn (hay còn gọi là máy hữu hạn) được đặc trưng như sau:

1. Tập trạng thái S của ô tômat là hữu hạn.
2. Trạng thái ban đầu của ô tômat là trạng thái $s_0 \in S$.
3. Tập các trạng thái cuối cùng của ô tômat F là một tập con của S , nghĩa là $F \subset S$.
4. Tập hữu hạn các đầu vào (hoặc các bộ chữ vào) của ô tômat là Σ .
5. Ánh xạ δ được định nghĩa như sau:

$$S \times \Sigma \rightarrow S$$

Nói cách khác δ là ánh xạ từ tập các cặp sắp xếp $S \times \Sigma$ vào tập S .

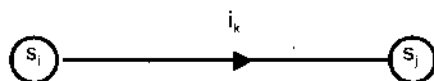
δ còn được gọi là hàm chuyển trạng thái của ô tômat nghĩa là nếu ô tômat đang ở trạng thái s nào đó, dưới tác động của đầu vào i thì nó sẽ chuyển đến trạng thái $\delta(s, i)$. Có hai phương pháp để biểu diễn một ô tômat hữu hạn là dùng bảng trạng thái và đồ thị trạng thái.

• **Phương pháp dùng bảng trạng thái:** giả sử $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ và $\Sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Ô tômat được mô tả dưới dạng bảng trạng thái như sau (Bảng 4.9.1):

Đầu vào					
Trạng thái	i	i_1	i_2		i_m
	s				
	s_1	$\delta(s_1, i_1)$	$\delta(s_1, i_2)$		$\delta(s_1, i_m)$
	s_2	$\delta(s_2, i_1)$	$\delta(s_2, i_2)$		$\delta(s_2, i_m)$
	.				
	.				
	.				
	s_n	$\delta(s_n, i_1)$	$\delta(s_n, i_2)$		$\delta(s_n, i_m)$

Bảng trạng thái như trên mô tả hoạt động của 1 ô tômat hữu hạn. Bảng trạng thái cùng với trạng thái ban đầu của ô tômat so với tập trạng thái cuối cùng của ô tômat F hoàn toàn xác định một ô tômat hữu hạn bất kỳ.

• **Phương pháp dùng đồ thị trạng thái:** Mỗi đỉnh của đồ thị biểu diễn một trạng thái của ô tômat còn cạnh của đồ thị biểu diễn sự thay đổi trạng thái:



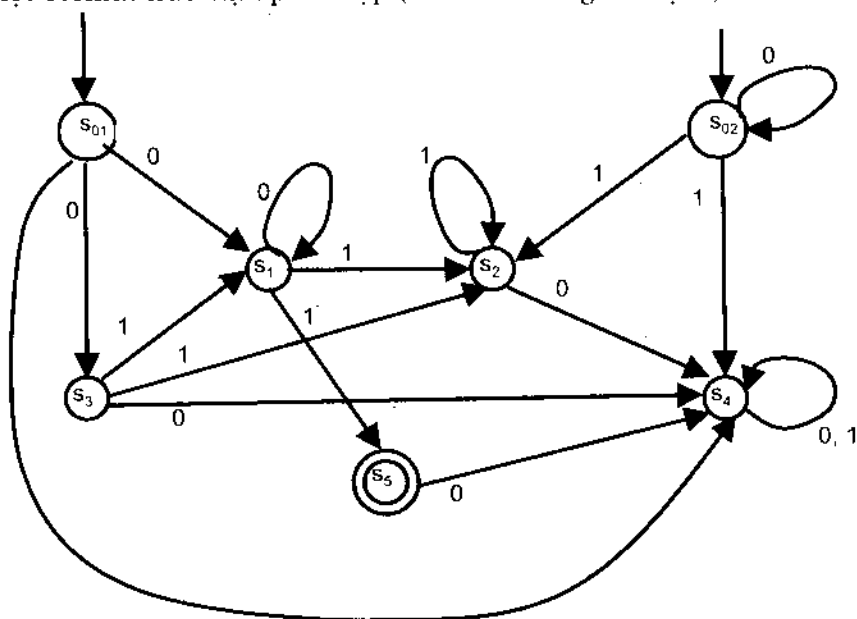
Hình 4.9.1

Hình 4.9.1 mô tả sự dịch chuyển trạng thái của ô tômat từ trạng thái s_i sang trạng thái s_j (ký hiệu $s_i \rightarrow s_j$) khi có tác động của i_k ở đầu vào. Ngoài ra để chỉ trạng thái cuối cùng s_f nào đó người ta dùng hai khuyên tròn tại đỉnh tương ứng của đồ thị như ở Hình 4.9.2 và trạng thái ban đầu s_o cũng có ký hiệu riêng.



Hình 4.9.2

Hình 4.9.3 cho ta một ví dụ dùng đồ thị trạng thái để mô tả một ô tômat hữu hạn phức tạp (ô tômat không tất định).



Hình 4.9.3

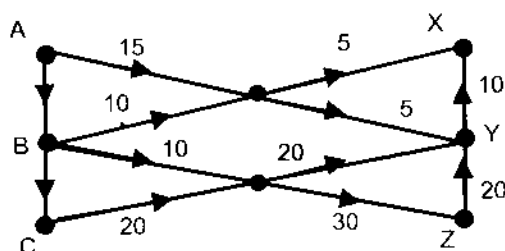
BÀI TẬP

- Giả sử n thành phố được nối với nhau bởi một mạng giao thông gồm K đường cao tốc (đường cao tốc ở đây có nghĩa là đường nối thẳng giữa hai thành phố mà không qua một

thành phố trung gian nào cả). Chứng minh rằng, nếu $K > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ thì ta luôn luôn có thể đi lại giữa hai thành phố bất kì bằng đường cao tốc.

2. Chứng minh rằng tổng các mức vào của tất cả các đỉnh bằng tổng các mức ra của chúng trong bất kì một đồ thị có hướng nào.
3. Mười một sinh viên có kế hoạch ăn trưa cùng nhau trong một số ngày. Khi ăn trưa họ ngồi xung quanh một bàn tròn. Hãy lập kế hoạch để sao cho mỗi sinh viên trong mỗi bữa ăn có hai người bạn mới ở bên cạnh. Kế hoạch đó có thể kéo dài trong bao lâu.
4. Chứng minh rằng trong một đồ thị phẳng tuyến tính liên thông với 6 đỉnh và 12 cạnh thì mỗi một miền được giới hạn bởi 3 cạnh. Ở đây đồ thị phẳng tuyến tính là đồ thị phẳng mà giữa hai đỉnh bất kì chỉ có một đường nối duy nhất mà thôi.
5. Cho G là một đồ thị có số đỉnh bằng 11 hoặc nhiều hơn. Chứng minh rằng G hoặc $\overline{G}$ không phải là đồ thị phẳng.
6. Chứng minh rằng một đồ thị phẳng tuyến tính có một đỉnh mức 5 hoặc bé hơn.
7. Một cây có hai đỉnh mức 2, một đỉnh mức 3, và 3 đỉnh mức 4. Hỏi cây đã cho có đỉnh ở mức 1 không? Nếu có thì bao nhiêu?
8. Cây có n_2 đỉnh mức 2, n_3 đỉnh mức 3, v.v.... và n_k đỉnh mức k . Hỏi có bao nhiêu đỉnh mức 1?
9. Chứng minh rằng cây nhị phân chính quy có một số lẻ các đỉnh.

10. Các thiết bị sản xuất tại 3 nhà máy A, B, C phải chuyển đến 3 địa phương X, Y, Z qua mạng giao thông vẽ ở hình 4.10.1. Giả sử nhà máy A có thể sản xuất được nhiều nhất 40 máy, nhà máy B có thể sản xuất được nhiều nhất 20 máy và nhà máy C có thể sản xuất được nhiều nhất 10 máy. Hỏi mỗi nhà máy có thể sản xuất bao nhiêu máy để có thể vận tải ngay đến các địa phương thông qua mạng giao thông đã cho?



Hình 4.10.1

Chương V

ĐẠI SỐ CHUYỂN MẠCH VECTƠ VÀ HÀM CHUYỂN MẠCH VECTƠ

Trong chương III chúng ta đã nghiên cứu đại số Boole một cách tổng quát thông qua việc nghiên cứu các cấu trúc đại số. Đại số Boole được định nghĩa từ dàn Boole hay dàn phân bố bù cùng với hai phép toán cộng (OR), nhân (AND) và phép phủ định (NOT). Cần lưu ý rằng phép cộng ở đây chính là giới hạn trên bé nhất, còn phép nhân chính là giới hạn dưới lớn nhất mà chúng ta đã xét trong đại số Boole tổng quát. Đại số Boole tổng quát n nguyên tử B_{2^n} đẳng cấu với đại số Boole xây dựng từ tích trực tiếp của n đại số Boole hai phần tử B_2 . Nói một cách khác, chúng ta có thể nghiên cứu đại số Boole B_{2^n} thông qua đại số Boole B_2 . Do vậy mục đích của chương này là nghiên cứu đại số Boole hai phần tử B_2 và các ánh xạ từ B_2 vào chính bản thân nó. Đại số Boole hai phần tử B_2 còn được gọi là *đại số chuyển mạch*. Đại số chuyển mạch có nhiều ứng dụng trực tiếp trong kỹ thuật số, tự động điều khiển và cụ thể là trong việc thực hiện các ô-tô-mat hữu hạn. Nếu chúng ta xét đại số chuyển mạch trong trường hợp tổng quát, nghĩa là khi ta thay mỗi phần tử nhị phân bằng một vectơ nhị phân thì ta có *đại số chuyển mạch vectơ*. Các ánh xạ Boole từ đại số chuyển mạch vectơ vào chính bản thân nó gọi là *hàm chuyển mạch vectơ*. Ngoài các phép toán OR, AND và NOT chúng ta còn đưa vào *phép toán quay* và *phép toán*

bù tổng hợp. Toán tử quay được xây dựng trên cơ sở quay theo chiều trái và quay theo chiều phải các thành phần của vectơ nhị phân. Phép toán bù tổng hợp được xây dựng trên cơ sở phủ định các thành phần của các vectơ trong trường hợp tổng quát. Do tính chất tổng quát như vậy cho nên các tính chất, các định lí, chẳng hạn như định lí De Morgan, định lí Shannon, v.v... trong đại số Boole được nghiên cứu một cách tổng quát hơn.

Trước hết chúng ta nghiên cứu đại số chuyển mạch, nghĩa là đại số Boole hai phần tử, rồi sau đó nghiên cứu đại số chuyển mạch vectơ.

5.1. ĐẠI SỐ CHUYỂN MẠCH VÀ HÀM CHUYỂN MẠCH VECTƠ

Đại số chuyển mạch và các ánh xạ từ đó đến chính bản thân nó là cơ sở để tổng hợp và phân tích các mạch số và các hệ thống rời rạc. Đại số chuyển mạch hay đại số Boole hai phần tử có 2 cực trị là 1 và 0 đồng thời thỏa mãn các tiên đề từ D_1 đến D_4 và D_6, D_7 (trong phần lý thuyết dàn ở chương III).

Trước hết chúng ta hãy đề cập đến các định lí và các tính chất cơ bản nhất của đại số chuyển mạch.

Định lí 5.1.1. Cho $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ là các biến nhị phân thuộc B_2 , ta có:

$$a) \quad \overline{(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1})} = \overline{x_0} \overline{x_1} \dots \overline{x_{n-1}} \quad (5.1)$$

$$b) \quad \overline{(x_0 x_1 \dots x_{n-1})} = \overline{x_0} + \overline{x_1} + \dots + \overline{x_{n-1}} \quad (5.2)$$

Định lí này còn gọi là định lí De Morgan tổng quát. Định lí này có thể được chứng minh một cách dễ dàng bằng phương pháp truy chứng toán học và chúng tôi để dành cho bạn đọc.

Định lí 5.1.2. Định lí Shannon:

$$\overline{f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, +, \dots)} = f(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \dots, +) \quad (5.3)$$

Nói một cách khác, bù của một hàm số nhận được bằng cách thay thế mỗi phân tử bằng phân tử bù của nó đồng thời thay đổi các phép toán AND và OR cho nhau.

Ví dụ: $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} + x_2)x_3 + \overline{x_1 x_2 x_3}$
 $\overline{f(x_1, x_2, x_3)} = [\overline{x_1 x_2 + x_3}] \cdot [\overline{(\overline{x_1} + x_2) + x_3}]$

Định lí 5.1.2 có thể chứng minh trên cơ sở áp dụng dần từng bước định lí De Morgan cho đến tận từng biến x_i . Bây giờ chúng ta xét đến vấn đề khai triển các hàm Boole.

Định lí 5.1.3.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= x_i f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) + \overline{x_i} f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \\ \text{b) } f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= x_i f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus \overline{x_i} f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \quad (5.4) \\ \text{c) } f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= [x_i + f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1})] \cdot [\overline{x_i} + f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1})] \end{aligned}$$

Định lí này có thể chứng minh bằng cách thay thế vào hai vế của các phương trình trên các cặp giá trị của x_i và $\overline{x_i}$ (1 hoặc 0).

Ví dụ: Hàm số $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1 x_2})x_3 + x_1(x_2 + \overline{x_3})$ có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1(\overline{x_2 x_3} + x_2 + \overline{x_3}) + \overline{x_1}(x_3) \\ \text{hoặc } f(x_1, x_2, x_3) &= [x_1 + x_3] \cdot [\overline{x_1} + (\overline{x_2 x_3} + x_2 + \overline{x_3})] \end{aligned}$$

Từ định lí khai triển ở trên chúng ta có hệ quả sau:

Hệ quả 5.1.3.

$$\begin{aligned} \text{a) } x_i \cdot f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= x_i \cdot f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \\ \text{b) } \overline{x_i} + f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= \overline{x_i} + f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \\ \text{c) } \overline{x_i} \cdot f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= \overline{x_i} \cdot f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \\ \text{d) } \overline{x_i} + f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= \overline{x_i} + f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Áp dụng các tiên đề của đại số chuyển mạch (D_1 đến D_4 và D_6, D_7 trong phần lý thuyết dàn ở chương III) cùng với các định lý trên chúng ta có thể đơn giản được các hàm số Boole trong dạng tuyến chính quy. Như chúng ta đã biết số lượng hàm Boole n biến là 2^{2^n} .

Bây giờ chúng ta nghiên cứu các dạng chính quy của hàm chuyển mạch vectơ, nghĩa là hàm chỉ lấy một trong hai giá trị 0 và 1.

Định lý 5.1.4. Một hàm chuyển mạch bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng tuyến chính quy.

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_{n-1}^{e_{n-1}} \quad (5.6)$$

$$\wedge (e_0 e_1 \dots e_{n-1}) \text{ mà } f(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = 1$$

hoặc dưới dạng hội chính quy:

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod (x_0^{e_0} + x_1^{e_1} + \dots + x_{n-1}^{e_{n-1}}) \quad (5.7)$$

$$\wedge (e_0 e_1 \dots e_{n-1}) \text{ mà } f(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = 0$$

$$\text{ở đây, } x_i^{e_i} = \begin{cases} x_i, & \text{nếu } e_i = 1 \\ \overline{x_i}, & \text{nếu } e_i = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Ví dụ hàm số $f(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1 + x_1 \overline{x_2} + \overline{x_0} x_1 \overline{x_2}$ có thể viết dưới các dạng chính quy như sau:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= x_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 \overline{x_2} + \overline{x_0} x_1 \overline{x_2} \\ &= (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1 + \overline{x_2})(x_0 + \overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_0} + x_1 + x_2)(\overline{x_0} + x_1 + \overline{x_2}) \end{aligned}$$

Mỗi số hạng trong dạng tuyến chính quy được gọi là một cực tiểu và có ký hiệu m_i .

Mỗi thừa số trong dạng hội chính quy được gọi là một cực đại và có ký hiệu M_j .

Ở đây i và j là các số thập phân biểu thị giá trị nhị phân của các cực tiểu và cực đại tương ứng, chẳng hạn $m_7 \leftrightarrow 111$, $M_5 \leftrightarrow 101$, (ký hiệu " $\leftrightarrow$ " chỉ sự tương ứng).

Cần lưu ý phân biệt rằng trong dạng tuyển chính quy thì con số 1 biểu thị biến số Boole còn con số 0 biểu thị phần bù của biến tương ứng. Ngược lại, trong dạng hội chính quy thì con số 0 biểu thị biến số Boole còn con số 1 biểu thị phần bù của biến tương ứng.

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ: } m_4 &= x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \leftrightarrow 100 & M_5 &= (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3}) \leftrightarrow 101 \\ m_6 &= x_1 x_2 \overline{x_3} \leftrightarrow 110 & M_3 &= (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \leftrightarrow 011 \end{aligned}$$

Do vậy chúng ta có thể biểu diễn hàm Boole dưới các dạng chính quy như sau:

$$f = \sum m_i \text{ hoặc } f = \prod M_j \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ: } f &= \sum(4, 6, 2, 5) = m_4 + m_6 + m_2 + m_5 \\ f &= \prod(0, 1, 3, 7) = M_0 \cdot M_1 \cdot M_3 \cdot M_7 \end{aligned}$$

5.2. PHÉP TOÁN BÙ TỔNG HỢP VÀ PHÉP TOÁN QUAY

Giả sử vectơ biến Boole X có n thành phần $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

Trong đại số Boole chúng ta đã biết đến **phép toán bù thành phần** $\overline{X}$ trên cơ sở phủ định từng thành phần của X . Chẳng hạn trong B_2 , bù toàn phần của 00 là 11, của 01 là 10 v.v...

Trong đại số chuyển mạch vectơ thì phép bù toàn phần được tổng quát hóa và được gọi là **phép bù tổng hợp**.

Định nghĩa 5.2.1. Trong đại số Boole n phần tử B_n , phần tử bù tổng hợp X^p của biến X là một phần tử nhận được bằng cách bù các thành phần của X theo các giá trị thành phần tương

ứng của P . Thành phần $x_i \in X$ được bù nếu $p_i = 0$ và không được bù nếu $p_i = 1$. Ở đây p_i đánh dấu phần tử thứ i của $P \in B_2^n$.

Ví dụ trong đại số Boole 3 phần tử B_3 , với $P = 101$ thì X^P được xác định như ở bảng 5.2.1.

Bảng 5.2.1

X	X^P
000	010
001	011
010	000
011	001
100	110
101	111
110	100
111	101

Bây giờ chúng ta xét đến một toán tử mới gọi là *toán tử quay*.

Định nghĩa 5.2.2. Cho $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là vectơ biến trong B_2^n . *Phép toán quay phải và quay trái* X được định nghĩa tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} \Rightarrow X &= (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0) \\ \Leftarrow X &= (x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nếu không tính đến chiều quay thì ta có thể viết $\tilde{X}$.

Định nghĩa 5.2.3.

$$\underbrace{(n)}_X \quad \underbrace{\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}}_{((X))} \quad (5.11)$$

Toán tử quay định nghĩa trên đây là toán tử quay cùng chiều, nghĩa là hoặc tất cả theo chiều trái hoặc tất cả theo chiều phải.

Dựa vào khái niệm phép toán bù tổng hợp và phép toán quay chúng ta có thể định nghĩa một cách đầy đủ đại số chuyển mạch vectơ như sau:

Định nghĩa 5.2.4. Tích trực tiếp B_2^n với 3 phép toán $+$, $\cdot$, $-$ và hai phép toán bù tổng hợp và quay định nghĩa trên nó gọi là *đại số chuyển mạch vectơ*.

Phép toán bù tổng hợp và phép toán quay có một số tính chất cơ bản như sau:

1. $X^0 = \bar{X}$, $X^1 = X$, ở đây $O = (0, 0, \dots, 0)$; $I = (1, 1, \dots, 1)$
2. $P^P = I$, $\overline{P^P} = P^P = \overline{\bar{P}}^P = O$
3. $X^P = X \oplus \bar{P}$
4. $P_1 = P_2$ nếu và chỉ nếu $X^{P_1} = X^{P_2}$
5. $X^{P^P} = (X^P)^P = X^{(P^P)} = X$
6. $X^{P^{2n+1}} = X^P$ đối với mỗi số nguyên dương n .

$$\text{Ở đây } X^{P^n} = \overbrace{\left(\dots \left(X^P \right)^P \dots \right)^P}^n$$

$$7.a) P^{P^n} = \begin{cases} I, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ P, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$b) P^{\bar{P}^n} = \begin{cases} O, & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ P, & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$8.a) \overline{(X_1^{P_1} + X_2^{P_2})} = \overline{X_1^{P_1}} \cdot \overline{X_2^{P_2}} = \bar{X}_1^{\bar{P}_1} \cdot \bar{X}_2^{\bar{P}_2} = \overline{X_1^{\bar{P}_1}} \cdot \overline{X_2^{\bar{P}_2}}$$

$$b) \overline{(X_1^{\bar{P}_1} \cdot X_2^{\bar{P}_2})} = \overline{X_1^{\bar{P}_1}} + \overline{X_2^{\bar{P}_2}} = \bar{X}_1^{P_1} + \bar{X}_2^{P_2} = \overline{X_1^{P_1}} + \overline{X_2^{P_2}} \quad (5.12)$$

$$9.a) (X_1 + X_2)^P = (\bar{X}_1 \bar{X}_2)^P$$

$$b) (X_1 \cdot X_2)^P = (\bar{X}_1 + \bar{X}_2)^{\bar{P}}$$

$$10.a) (X_1^{P_1} + X_2^{P_2})^{P_3} = (X_1^{\bar{P}_1} \cdot X_2^{\bar{P}_2})^{P_3}$$

$$b) (X_1^{\bar{P}_1} \cdot X_2^{\bar{P}_2})^{P_3} = (X_1^{P_1} + X_2^{P_2})^{P_3}$$

$$11. \text{ Nếu } X \subset B_{2^n} \Rightarrow \overset{(n)}{\widetilde{X}} = X$$

$$12.a) \widetilde{(X_1 X_2)} = (\widetilde{X_1} \cdot \widetilde{X_2})$$

$$b) \widetilde{(X_1 + X_2)} = (\widetilde{X_1} + \widetilde{X_2})$$

$$13. \widetilde{X^P} = \widetilde{X}^P$$

$$14.a) (X^P) \widetilde{(X^P)} \dots \widetilde{(X^P)}^{(n-1)} = \begin{cases} I, & \text{nếu } X=P \\ 0, & \text{nếu } X \neq P \end{cases}$$

$$b) (X^P) + \widetilde{(X^P)} + \dots + \widetilde{(X^P)}^{(n-1)} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } X=P \\ I, & \text{nếu } X \neq P \end{cases}$$

5.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ĐẠI SỐ CHUYỂN MẠCH VECTƠ VÀ HÀM CHUYỂN MẠCH VECTƠ

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa hàm chuyển mạch vectơ một cách tổng quát trên cơ sở những thuật toán mới được bổ sung trong phần trước. Tương tự như đại số Boole nói chung, đại số chuyển mạch vectơ cũng được định nghĩa theo phương pháp đệ quy, chỉ khác ở đây chúng ta dùng các khái niệm tổng quát về vectơ và hàm vectơ.

Định nghĩa 5.3.1. Giả sử $X_1, X_2, \dots, X_m$ là các biến vectơ, *hàm chuyển mạch vectơ* được định nghĩa như sau:

1. Cho A là vectơ hằng số trong B_{2^n} . Hàm vectơ hằng số $F_1(X_1, X_2, \dots, X_m) = A$ và hàm vectơ chiếu $F_2(X_1, X_2, \dots, X_m) = X_i$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, là các hàm chuyển mạch vectơ.

2. Nếu $F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ là hàm chuyển mạch vectơ thì $F^P(X_1^{P_1}, X_2^{P_2}, \dots, X_m^{P_m})$ cũng là hàm chuyển mạch vectơ đối với các giá trị bất kì của P_i .

3. Nếu $F(X_1, X_2, \dots, X_m)$ là hàm chuyển mạch vectơ thì $F(\widetilde{X_1}^{n_1}, \widetilde{X_2}^{n_2}, \dots, \widetilde{X_m}^{n_m})$ cũng là hàm chuyển mạch vectơ.

4. Nếu $F_1(X_1, X_2, \dots, X_m)$ và $F_2(X_1, X_2, \dots, X_m)$ là hàm chuyển mạch vectơ thì $F_1 + F_2$ và $F_1 \cdot F_2$ cũng là các hàm chuyển mạch vectơ.

5. Mỗi một hàm số được tạo ra bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các quy luật kể trên cũng là hàm chuyển mạch vectơ.

Bây giờ chúng ta xét đến sự thay đổi của các định luật cơ bản của đại số Boole trong trường hợp đại số chuyển mạch vectơ. Nói một cách khác, chúng ta giới thiệu dạng tổng quát của các định luật đó dùng cho tất cả các trường hợp (trong đại số Boole thông thường và trong đại số chuyển mạch vectơ).

Định lí 5.3.1. Định lí De Morgan tổng quát

$$a) (X_1^{P_1} \cdot X_2^{P_2} \cdot \dots \cdot X_m^{P_m})^P = (X_1^{P_1} + X_2^{P_2} + \dots + X_m^{P_m})^{\bar{P}} \quad (5.13)$$

$$b) (X_1^{P_1} + X_2^{P_2} + \dots + X_m^{P_m})^P = (X_1^{P_1} \cdot X_2^{P_2} \cdot \dots \cdot X_m^{P_m})^{\bar{P}} \quad (5.14)$$

Định lí 5.3.2. Định lí Shannon tổng quát

$$F^P(X_1^{P_1}, X_2^{P_2}, \dots, X_m^{P_m}, +, \cdot) = F^{\bar{P}}(X_1^{\bar{P}_1}, X_2^{\bar{P}_2}, \dots, X_m^{\bar{P}_m}, \cdot, +) \quad (5.15)$$

Chúng ta hãy nghiên cứu dạng chính quy của hàm chuyển mạch vectơ. Giả sử các biến vào được đặc trưng bằng tập hợp $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$. Mỗi biến vectơ X_i có n thành phần $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$; ở đây x_{ij} là các biến nhị phân, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tương tự như vậy, hàm chuyển mạch vectơ F cũng có n thành phần $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Mỗi thành phần f_k là một hàm nhị phân (nghĩa là tập giá trị của nó là $\{0, 1\}$).

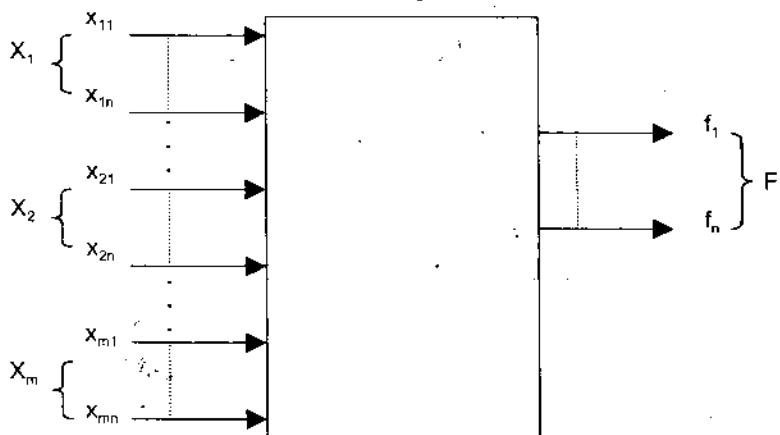
$$f_k = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

ở đây, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Do vậy f có thể lấy giá trị 1 hoặc 0 tùy theo tổ hợp giá trị khác nhau của các biến vào. Ở đây chúng ta có 2^{mn} tổ hợp các giá

trị biến vào khác nhau nên chúng ta cũng có các giá trị tương ứng của f_k là $f_{k1}, f_{k2}, \dots, f_{k2^m}$.

Do vậy, mạch logic thực hiện các hàm trên được gọi là **mạch logic tổ hợp** và nó có thể được biểu thị bằng hình 5.3.1 hoặc bảng thật 5.3.1.



Hình 5.3.1

Bảng 5.3.1

$\overbrace{x_1}^{x_1} \quad \overbrace{x_2}^{x_2} \quad \dots \quad \overbrace{x_m}^{x_m}$ $x_{11}x_{12}\dots x_{1n} \quad x_{21}x_{22}\dots x_{2n} \quad \dots \quad x_{m1}x_{m2}\dots x_{mn}$				$\overbrace{f_1f_2\dots f_n}^F$
0 0... 0	0 0... 0	...	0 0... 0	$f_{10} \quad f_{20} \quad \dots \quad f_{n0}$
0 0... 0	0 0... 0	...	0 0... 1	$f_{11} \quad f_{21} \quad \dots \quad f_{n1}$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1 1... 1	1 1... 1	...	1 1... 1	$f_{12^m} \quad f_{22^m} \quad \dots \quad f_{n2^m}$

Định lí 5.3.3. Cho F là hàm chuyển mạch vectơ của m biến nhị phân $X_1, X_2, \dots, X_m$. Ta có:

a) Dạng tuyến tính quy của hàm F :

$$F(X_1, \dots, X_m) = \sum \{ F(P_1, \dots, P_m) [\widetilde{X_1^{P_1}} (\widetilde{X_1^{P_1}})^{(n-1)} \dots (\widetilde{X_1^{P_1}})^{(n-1)}] \dots [\widetilde{X_m^{P_m}} (\widetilde{X_m^{P_m}})^{(n-1)} \dots (\widetilde{X_m^{P_m}})^{(n-1)}] \} \quad (5.16)$$

b) Dạng hội chính quy của hàm F :

$$F(X_1, \dots, X_m) = \prod \{ F(P_1, \dots, P_m) + [\widetilde{X_1^{P_1}} + (\widetilde{X_1^{P_1}})^{(n-1)} + \dots + (\widetilde{X_1^{P_1}})^{(n-1)}] + \dots + [\widetilde{X_m^{P_m}} + (\widetilde{X_m^{P_m}})^{(n-1)} + \dots + (\widetilde{X_m^{P_m}})^{(n-1)}] \} \quad (5.17)$$

Ví dụ 5.1. Hàm chuyển mạch vectơ cho ở bảng 5.3.2 có thể được biểu diễn dưới dạng tuyến tính quy như sau:

Bảng 5.3.2

X_1	X_2	F
0 0 0	0 0 1	1 0 1
0 0 1	0 1 1	0 1 0
1 0 0	1 0 1	0 0 1
1 0 1	1 1 0	1 1 1
Các giá trị khác		0 0 0

$$\begin{aligned}
F(X_1, X_2) = & (101) X_1^{000} (\widetilde{X_1^{000}})(\widetilde{X_1^{000}}) X_2^{001} (\widetilde{X_2^{001}})(\widetilde{X_2^{001}}) + \\
& + (010) X_1^{001} (\widetilde{X_1^{001}})(\widetilde{X_1^{001}}) X_2^{011} (\widetilde{X_2^{011}})(\widetilde{X_2^{011}}) + \\
& + (001) X_1^{100} (\widetilde{X_1^{100}})(\widetilde{X_1^{100}}) X_2^{101} (\widetilde{X_2^{101}})(\widetilde{X_2^{101}}) + \\
& + (111) X_1^{101} (\widetilde{X_1^{101}})(\widetilde{X_1^{101}}) X_2^{110} (\widetilde{X_2^{110}})(\widetilde{X_2^{110}})
\end{aligned}$$

Định lý 5.3.4. Hàm chuyển mạch vectơ $F(X_1, \dots, X_m)$ có thể khai triển theo biến vectơ $X_i \in \{X_1, \dots, X_m\}$ như sau:

$$\text{a) } F(X_1, \dots, X_m) = \sum_{a \in B_2^n} X_i^a \widetilde{X_i^a} \dots \widetilde{X_i^a} F(X_1, \dots, X_i = a, \dots, X_m) \quad (5.18)$$

$$\text{b) } F(X_1, \dots, X_m) = \prod_{a \in B_2^n} [X_i^a + \widetilde{X_i^a} + \dots + \widetilde{X_i^a} + F(X_1, \dots, X_i = a, \dots, X_m)] \quad (5.19)$$

Ví dụ 5.2. Khai triển hàm F ở ví dụ 6.1 theo X_1 .

$$\begin{aligned}
F(X_1, X_2) = & X_1^{000} (\widetilde{X_1^{000}})(\widetilde{X_1^{000}}) F(000, X_2) + \\
& + X_1^{001} (\widetilde{X_1^{001}})(\widetilde{X_1^{001}}) F(001, X_2) + \\
& + X_1^{100} (\widetilde{X_1^{100}})(\widetilde{X_1^{100}}) F(100, X_2) + \\
& + X_1^{101} (\widetilde{X_1^{101}})(\widetilde{X_1^{101}}) F(101, X_2)
\end{aligned}$$

Bên cạnh các dạng chính quy đã mô tả ở trên chúng ta sẽ giới thiệu một số dạng triển khai quan trọng khác.

Từ bảng thật của hàm số (bảng 5.3.1) chúng ta có thể suy ra định nghĩa sau.

Định nghĩa 5.3.2.

$$F_l(X_1, \dots, X_m) = \sum_{\wedge (a_1 a_2 \dots a_m) \text{ mà } f_{ij}(a_1 a_2 \dots a_m) = 1} (X^{E_{i1}} \widetilde{X^{E_{i2}}} \dots \widetilde{X^{E_{in}}}) \dots (X^{E_{m1}} \widetilde{X^{E_{m2}}} \dots \widetilde{X^{E_{mn}}}) \quad (5.20)$$

ở đây $k \in \{1, \dots, n\}$, $l \in \{0, 1, \dots, 2^{mn} - 1\}$, $(a_1 a_2 \dots a_m)$ là các tổ hợp giá trị của $X_1, X_2, \dots, X_m$.

$$E_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x_{ij} = 0 \\ 1, & \text{nếu } x_{ij} = 1 \end{cases};$$

$$X_i^{E_{ij}} = \begin{cases} \bar{X}_i, & \text{nếu } E_{ij} = 0 \\ X_i, & \text{nếu } E_{ij} = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 5.3. Từ hàm $F(X_1, X_2)$ cho ở ví dụ 5.1 chúng ta có

$$F_1 = \bar{X}_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2 + X_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2$$

$$F_2 = \bar{X}_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2 + X_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2$$

$$F_3 = \bar{X}_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2 + X_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2 + X_1 \widetilde{X}_1 \widetilde{X}_1 \bar{X}_2 \widetilde{X}_2 \widetilde{X}_2$$

Định lý 5.3.5. Đối với mỗi tập các X_t , $t \in \{1, \dots, m\}$ mà $f_{kl}(X_1, X_2, \dots, X_m) = 1$ thì:

$$(X_1^{E_{11}} \widetilde{X_1^{E_{12}}} \dots \widetilde{X_1^{E_{1n}}}) \dots (X_m^{E_{m1}} \widetilde{X_m^{E_{m2}}} \dots \widetilde{X_m^{E_{mn}}}) =$$

$$= \begin{cases} (1, 1, \dots, 1), & \text{nếu tất cả } X_k \text{ bằng 0 hoặc 1} \\ (0, 0, \dots, 0), & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases}$$

Ví dụ 5.4. Từ bảng 5.3.2 chúng ta suy ra bảng 5.3.3 sau đây:

Bảng 5.3.3

X_1	X_2	f_{kl}	$(X_1^{E_{11}} \widetilde{X_1^{E_{12}}} \dots \widetilde{X_1^{E_{1n}}}) \dots (X_m^{E_{m1}} \widetilde{X_m^{E_{m2}}} \dots \widetilde{X_m^{E_{mn}}})$
000	001	$f_{10} = 1$	$(\overline{(000)} \overline{(000)} \overline{(000)} \overline{(001)} \overline{(001)} \overline{(001)}) = (110)$
101	110	$f_{13} = 1$	$(101) \overline{(101)} \overline{(101)} (110) \overline{(110)} \overline{(110)} = (100)$
001	011	$f_{21} = 1$	$(\overline{(001)} \overline{(001)} \overline{(001)} \overline{(011)} \overline{(011)} \overline{(011)}) = (101)$
101	110	$f_{23} = 1$	$(101) \overline{(101)} \overline{(101)} (110) \overline{(110)} \overline{(110)} = (100)$
000	001	$f_{30} = 1$	$(\overline{(000)} \overline{(000)} \overline{(000)} \overline{(001)} \overline{(001)} \overline{(001)}) = (110)$
100	101	$f_{32} = 1$	$(100) \overline{(100)} \overline{(100)} (101) \overline{(101)} \overline{(101)} = (110)$
101	110	$f_{33} = 1$	$(101) \overline{(101)} \overline{(101)} (110) \overline{(110)} \overline{(110)} = (100)$

Gọi δ_i là **nguyên tử thứ i** của B_2^n , nghĩa là:

$\delta_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, ta sẽ có các định lí sau đây:

Định lí 5.3.6

$$\widetilde{\delta_i F_1^{(i-1)}} = \begin{cases} \delta_i, & \text{đối với tất cả mọi } f_{ij} = 1 \\ 0, & \forall f_{ij} = 0 \text{ (có một } f_{ij} = 0) \end{cases} \quad (5.21)$$

Định lí 5.3.7. Nếu $F(X_1, \dots, X_m) = (f(X_1, \dots, X_m), \dots, f_n(X_1, \dots, X_m))$ là hàm chuyển mạch vectơ thì:

$$\delta f_i = \widetilde{\delta f_i}^{(i-1)} \quad (5.22)$$

$i \in \{1, \dots, n\}$

Từ định lí trên có thể suy ra dạng chính quy sau đây của một hàm chuyển mạch vectơ.

Định lí 5.3.8. Mỗi hàm chuyển mạch vectơ có thể biểu diễn dưới dạng sau đây:

$$F(X_1, \dots, X_m) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n \delta_i f_i = \sum_{i=1}^n \widetilde{\delta_i F_i}^{(i-1)} \\ \bigoplus_{i=1}^n \delta_i f_i = \bigoplus_{i=1}^n \widetilde{\delta_i F_i}^{(i-1)} \end{cases} \quad (5.23)$$

Ở đây kí hiệu $\bigoplus$ là tổng modul 2.

Ví dụ 5.5. Từ hàm chuyển mạch vectơ cho ở bảng 6.3.2 chúng ta có dạng chính quy sau đây:

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) = & \delta_1 \left(\overline{X_1} \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} + X_1 \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} \right)^2 + \\ & + \delta_2 \left(\overline{X_1} \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} + X_1 \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} \right)^2 + \\ & + \delta_3 \left(\overline{X_1} \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} + X_1 \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} + X_1 \widetilde{\overline{X_1}} \widetilde{\overline{X_1}} \overline{X_2} \widetilde{\overline{X_2}} \widetilde{\overline{X_2}} \right)^2 \end{aligned}$$

5.4. NHỮNG VẤN ĐỀ TỐI THIỂU HÓA CÁC BIỂU THỨC BOOLE

Trước đây khi kĩ thuật vi điện tử chưa phát triển, tối thiểu hóa các biểu thức Boole là một trong những vấn đề cơ bản của lí thuyết tổng hợp các mạch logic. Khi kĩ thuật vi điện tử ra đời, đặc biệt là các mạch vi điện tử quy mô lớn LSI, thì vấn đề tối thiểu hóa các biểu thức Boole không còn có ý nghĩa như trước nữa vì việc tổng hợp các mạch logic dựa trên cơ sở các modul có sẵn chứ không phải trên cơ sở từng phần tử chức năng riêng rẽ. Hơn nữa, giá thành của mạch vi điện tử ngày càng giảm tới mức mà việc thêm hoặc bớt đi một số phần tử hoặc thậm chí hàng chục phần tử hoặc hơn thế nữa cũng không còn ý nghĩa lắm. Lúc bấy giờ yếu tố quyết định tính kinh tế của thành phẩm là những vấn đề khác như độ tin cậy, tính sẵn sàng làm việc, tiêu hao năng lượng v.v... Tuy nhiên trong quá trình phân tích và tổng hợp lí thuyết các mạch logic người ta phải dùng đến một số khái niệm có liên quan đến vấn đề tối thiểu hóa các biểu thức Boole. Do vậy ở đây chúng ta sẽ giới thiệu một số thuật toán cơ bản nhất để tối thiểu hóa các biểu thức Boole.

Như chúng ta đã biết, một hàm Boole nói chung có thể biểu diễn theo nhiều biểu thức Boole khác nhau với độ phức tạp nhiều ít cũng khác nhau. Thực chất của vấn đề tối thiểu hóa là tìm dạng biểu diễn đơn giản nhất cho một biểu thức Boole. Như vậy bài toán tối thiểu hóa các biểu thức Boole trở thành bài toán so sánh mức độ phức tạp của các biểu thức tương đương.

Nói chung có hai nhóm phương pháp để tối thiểu hóa các biểu thức Boole. Nhóm thứ nhất bao gồm các phương pháp biến đổi đại số các biểu thức Boole dựa trên cơ sở các đẳng thức đã

giới thiệu trong phần các tính chất của đại số Boole và đại số chuyển mạch. Các phương pháp này không tiện lợi, đòi hỏi nhiều thời gian, đặc biệt trong trường hợp có nhiều biến. Nhóm thứ 2 bao gồm các phương pháp thuật toán, các phương pháp này cho phép dễ dàng tự động hóa quá trình tối thiểu hóa các biểu thức Boole.

5.4.1. Phương pháp Quine - Mc. Cluskey

Chúng ta giới thiệu thuật toán này thông qua ví dụ sau đây:

Ví dụ 5.6. Tối thiểu hóa biểu thức Boole sau đây:

$$F_1 = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \\ + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 x_4$$

Thuật toán bao gồm những bước sau:

1. Viết các tổ hợp 0 và 1 cho các số hạng của biểu thức F_1 (Bảng 5.4.1a) theo nguyên tắc: biến x_i tương ứng với 1 còn phần bù của nó ($\overline{x_i}$) tương ứng với 0. Do vậy mỗi số hạng biểu thị một số nhị phân nhất định có giá trị tương ứng theo hệ đếm 10 ghi ở bên phải.

2. Sắp xếp các tổ hợp trên theo số lượng chữ số 1 trong chúng. Do vậy chúng ta có được các nhóm với lượng chữ số bằng 0, 1, 2, ... (Bảng 5.4.1 b)

3. So sánh mỗi một tổ hợp thuộc nhóm thứ i với mỗi một tổ hợp thuộc nhóm $i + 1$. Nếu hai tổ hợp như vậy chỉ khác nhau ở một vị trí (một cột số) thì chúng ta nối liền các tổ hợp đó lại với nhau thành một tổ hợp mới trong đó đã thay thế vị trí khác nhau giữa chúng bằng một gạch ngang (-). Ở đây chúng ta sử

dụng tính chất $XY + X\bar{Y} = X$. Bằng cách như vậy chúng ta có một bảng mới (Bảng 5.4.1 c). Chúng ta đánh dấu các tổ hợp trong mỗi cặp có tính chất kể trên bằng kí hiệu V (tức là những cặp được nối với nhau).

4. Tiếp tục thuật toán trên bằng cách loại trừ bớt các tổ hợp lặp lại và nối các tổ hợp chỉ khác nhau ở một vị trí lại với nhau.

5. Quá trình trên được kết thúc nếu hết khả năng nối các tổ hợp với nhau. Kết quả chúng ta có bảng mới (Bảng 5.4.1 d).

6. Thiết lập tập hợp các tổ hợp nằm trong bảng cuối cùng và các tổ hợp không thể áp dụng thuật toán nói trên đây (không có đánh dấu V). Bước này kết thúc giai đoạn 1 của quá trình tối thiểu hoá.

Bảng 5.4.1

a)	2	0010	b)	2	0010 V	c)	2,3	001- V	d)	2, 3, 6, 7	0 - 1 -
	3	0011		3	0011 V		2,6	0-10 V		6, 7, 14, 15	- 1 1 -
	6	0110		6	0110 V		3,7	0-11 V		12, 13, 14, 15	1 1 - -
	7	0111		12	1100 V		6,7	011- V			
	12	1100		7	0111 V		6,14	-110 V			
	13	1101		13	1101 V		12,13	11-0 V			
	14	1110		14	1110 V		12,14	110- V			
	15	1111		15	1111		7,15	-111 V			
							13,15	11-1 V			
							14,15	111- V			

Trước khi giới thiệu tiếp giai đoạn 2 của thuật toán chúng ta đưa vào một số định nghĩa như sau:

Định nghĩa 5.4.1. Biểu thức f gọi là *implicant* của biểu thức F nếu: $(f \rightarrow F) = 1$ hoặc $f + \bar{F} = 1$.

Định nghĩa 5.4.2. Biểu thức f gọi là *implicant nguyên tố* của biểu thức F nếu nó là implicant của F mà không tồn tại một biểu thức f_i nào khác mà:

$$(f_i \rightarrow f_j) = 1 \text{ đồng thời } (f_j \rightarrow F) = 1.$$

Ví dụ biểu thức $ABC + ABC + \overline{ABC}$ có 3 implicant là 3 số hạng của nó nhưng chỉ có 2 implicant nguyên tố là AB và $\overline{ABC}$.

Tất cả các tổ hợp nhận được từ bước thứ 6 ở trên chính là các implicant nguyên tố. Giai đoạn 2 của thuật toán tối thiểu hóa là tìm một số lượng bé nhất các implicant nguyên tố phủ tất cả các số hạng của F , nghĩa là tất cả các số hạng của F phải được biểu diễn qua các implicant nguyên tố đã chọn. Nếu tồn tại nhiều nhóm implicant nguyên tố có tính chất như thế thì chúng ta chọn nhóm nào có ít chữ nhất. Muốn làm như vậy chúng ta phải thành lập một bảng mà các cột của nó là các số hạng của biểu thức Boole đã cho (hay là của dạng tuyến tính quy của hàm Boole), còn các hàng là các implicant nguyên tố. Như vậy chúng ta chỉ được chọn các implicant nguyên tố (với số lượng ít nhất có thể có được) phủ tất cả các cột của bảng. Trong ví dụ đang xét chúng ta có các implicant nguyên tố như sau:

$$f_1(2, 3, 6, 7) = \overline{x_1} x_3; \quad f_2(6, 7, 14, 15) = x_2 x_3;$$

$$f_3(12, 13, 14, 15) = x_1 x_2;$$

Từ đó chúng ta có kết quả ở bảng 5.4.2.

Bảng 5.4.2

	2	3	6	7	12	13	14	15	
$x_1 x_2$					*	*	*	*	(12, 13, 14, 15)
$x_2 x_3$			⊙	⊙			⊙	⊙	(6, 7, 14, 15)
$\overline{x_1} x_3$	*	*	*	*					(2, 3, 6, 7)

Từ bảng 5.4.2 ta tìm được nhóm implicant nguyên tố $\overline{x_1}x_3$, x_1x_2 phủ tất cả các cột của bảng. Điều này có nghĩa rằng biểu thức Boole $F_2 = \overline{x_1}x_3 + x_1x_2$ bằng biểu thức Boole F_1 đã cho và là dạng tối thiểu.

Từ thuật toán trên chúng ta nhận xét rằng, giai đoạn 1 của thuật toán cho chúng ta lời giải duy nhất (tập hợp các implicant nguyên tố), còn giai đoạn 2 có thể cho chúng ta nhiều lời giải khác nhau.

Thuật toán trên đây áp dụng cho dạng tuyến chính quy của các biểu thức Boole nhưng cũng có thể áp dụng cho dạng bất kì, miễn là trước khi tối thiểu hóa chúng ta chuyển dạng biểu thức Boole đã cho về dạng tuyến chính quy.

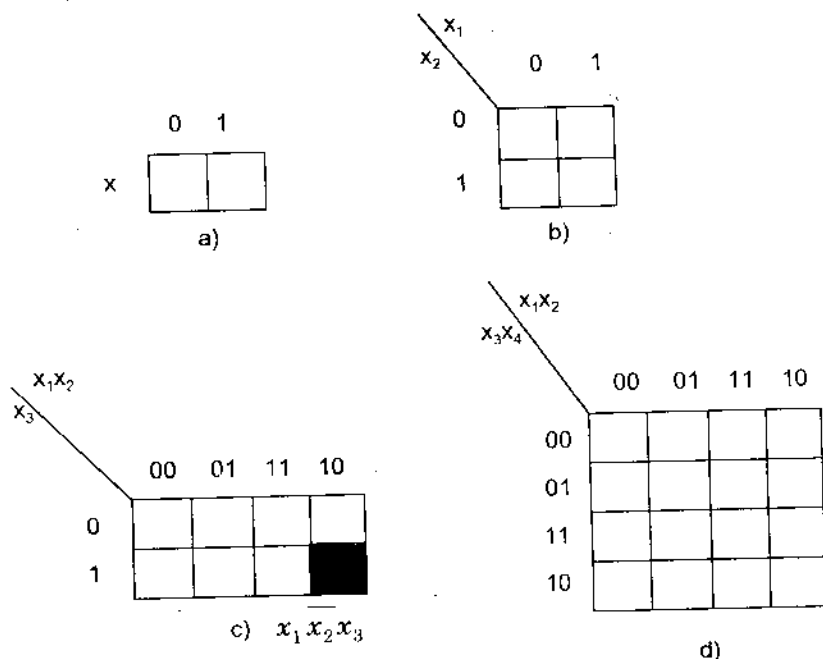
5.4.2. Phương pháp đồ thị hay là phương pháp bảng Các-nâu (Karnaugh)

Phương pháp bảng Các-nâu là phương pháp biểu diễn đồ thị các hàm Boole. Về nguyên tắc đồ thị như vậy tương ứng với dạng chính quy, nhưng nó cũng có thể áp dụng cho các dạng không chính quy. Nguyên tắc thành lập bảng Các-nâu như sau:

1. Tổng các số hạng của dạng tuyến chính quy hay tích của các thừa số của dạng hội chính quy tương ứng với toàn bộ diện tích của bảng hình vuông.

2. Một nửa mặt phẳng tương ứng với một biến (đánh dấu bằng chữ số 1 ở ngoài bảng) và nửa mặt phẳng còn lại ứng với phần bù của biến (đánh dấu bằng chữ số 0 ở ngoài bảng). Bề mặt của các phần bảng tương ứng với hai biến khác nhau không được trùng nhau hoàn toàn. Các hình 6.4.1 a, b, c tương ứng với các trường hợp 1, 2, 3 và 4 biến.

3. Mỗi một ô vuông của bảng ứng với một số hạng của dạng tuyến chính quy hay một thừa số của dạng hội chính quy. Chẳng hạn tích số $x_1 \bar{x}_2 x_3$ (hình 5.4.1 c) tương ứng với ô vuông là phần chung của “nửa mặt phẳng x_1 ”, “nửa mặt phẳng $\bar{x}_2$ ” “nửa mặt phẳng x_3 ”.



Hình 5.4.1

4. Một biểu thức Boole hay một hàm Boole viết dưới dạng chính quy bao gồm một số các số hạng (hoặc một số các thừa số). Mỗi một số hạng chiếm 1 ô vuông nhất định và ô vuông đó được đánh dấu bằng chữ số 1. Các ô vuông ứng với các tổ hợp các biến mà đối với chúng hàm số không xác định thì được đánh dấu chéo (x).

Ví dụ biểu thức Boole

$$F = \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}x_5x_6 + \overline{x_1}x_2x_3x_4x_5x_6 + \overline{x_1}x_2x_3x_4x_5\overline{x_6} + \overline{x_1}x_2x_3x_4x_5x_6$$

có đồ thị biểu diễn như ở hình 5.4.2.

$x_1x_2x_3$		$x_4x_5x_6$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
000									
001			1						
010								1	
110									
111	1					1			
101									
100									

Hình 5.4.2

Đối với dạng hội chính quy thì mỗi thừa số tương ứng với một ô vuông mà tại đó hàm nhận giá trị 0 nên được đánh dấu bằng chữ số 0.

Một biểu thức Boole cho dưới dạng bảng Cánhân có thể được biểu diễn ngược lại dưới dạng giải tích (dạng tuyến hoặc dạng hội). Khi đó chúng ta chỉ chú ý đến các ô vuông có chữ số 1 (hoặc chữ số 0 trong trường hợp dạng hội), còn các ô vuông có đánh dấu x thì chúng ta có thể sử dụng sao cho có được biểu thức Boole đơn giản nhất.

Bảng Cánhân có những ứng dụng chính như sau:

1. Biểu diễn các biểu thức và các hàm Boole;
2. Tính phủ định;

3. Đưa các biểu thức Boole về dạng chính quy;
4. Kiểm tra tính tương đương của đại số Boole;
5. Đơn giản các biểu thức Boole.

Thuật toán tối thiểu hóa các biểu thức Boole cho dưới dạng tổng các tích có thể mô tả như sau:

1. Biểu diễn biểu thức Boole dưới dạng bảng Cánhân.
2. Xác định các implicant nguyên tố bằng cách dùng phép dán các ô vuông có thể dán được với nhau, tức là các ô vuông có đánh dấu "1" hoặc "x" kề nhau thì được ghép lại với nhau sao cho có được nhóm lớn nhất các ô vuông.

3. Chọn các nhóm và các ô vuông riêng lẻ (các ô vuông không thể dán được với nhau) theo quy luật sau đây:

- Mỗi chữ số 1 được chứa ít nhất một lần trong các nhóm đã cho.

- Số lượng nhóm được chọn sao cho phải là ít nhất.

Tổng các tích tương đương với các nhóm đã chọn chính là dạng tối thiểu của biểu thức Boole đã cho.

Bước 3 của thuật toán này tương tự như phần hai của thuật toán Quine - Mc. Cluskey mà chúng ta đã biết. Chính vì vậy mà có khi phần đầu người ta dùng phương pháp bảng Cánhân còn phần sau dùng phương pháp Quine - Mc. Cluskey.

Ví dụ 5.7. Tìm dạng tối thiểu của biểu thức Boole F_1 cho ở hình 5.4.3. Theo bảng Cánhân chúng ta có thể phân biệt được 4 nhóm sau đây:

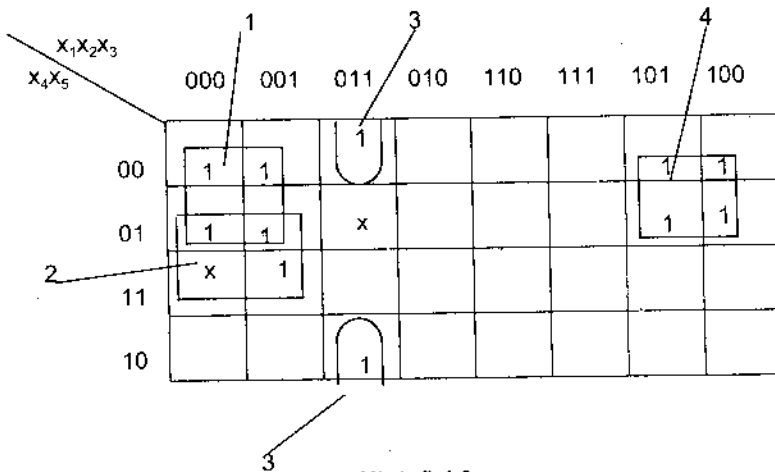
- | | |
|---|-------------------------------------|
| Nhóm 1: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$, | Nhóm 2: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_5$, |
| Nhóm 3: $\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_5$, | Nhóm 4: $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$. |

Ngoài ra chúng ta nhận xét rằng

$$\text{Nhóm 1} + \text{Nhóm 4} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 = \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

Vậy dạng tối thiểu hóa của biểu thức Boole đã cho là:

$$F_{\min} = \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_5$$



Hình 5.4.3

BÀI TẬP

1. Người ta định nghĩa phép toán trùng nhau như sau:

$$x_1 \odot x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2}$$

Hãy mở rộng định lý Shannon cho các phép toán $\odot$ và $\oplus$ đồng thời áp dụng nó cho các hàm số sau đây:

$$f_1 = (x_1 x_2 \oplus \bar{x}_2 x_3) \odot \bar{x}_1 \bar{x}_3$$

$$f_2 = [(x_1 + x_2) + (x_3 \oplus x_4)] \odot [(x_1 + \bar{x}_3) \oplus (\bar{x}_2 + \bar{x}_4)]$$

2. Tìm cực tiểu và cực đại cho mỗi hàm số sau đây:

$$f_1 = x_1 x_3 + x_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_2 x_3 x_4$$

$$f_2 = (x_1 + x_4)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 + x_4)$$

$$f_3 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \oplus x_2 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$$

3. Tìm bù tổng quát cho mỗi hàm chuyển mạch vectơ sau đây:

$$F_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^{P_1} X_2^{P_2} (X_3 + X_4) + X_3^{P_3} X_4^{P_4} (X_1 + X_2)$$

$$F_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_3^{P_3} + X_4 (X_2^{P_2} X_3^{P_3} + X_1^{P_1} X_4^{P_4})$$

4. Tìm bảng thật của hàm chuyển mạch vectơ sau đây:

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, X_3) = & \delta_1 \left(\widetilde{X_1} \widetilde{X_1} \widetilde{X_1} \cdot X_2 \widetilde{X_2} \widetilde{X_2} \cdot \overline{X_3} \widetilde{X_3} \widetilde{X_3} \right) \oplus \\ & \oplus \delta_2 \left(X_1 \widetilde{X_1} \widetilde{X_1} \cdot X_2 \widetilde{X_2} \widetilde{X_2} \cdot X_3 \widetilde{X_3} \widetilde{X_3} \right) \oplus \\ & \oplus \delta_3 \left(\overline{X_1} \widetilde{X_1} \widetilde{X_1} \cdot \overline{X_2} \widetilde{X_2} \widetilde{X_2} \cdot \overline{X_3} \widetilde{X_3} \widetilde{X_3} \right) \end{aligned}$$

5. Đơn giản các biểu thức Boole sau đây bằng phương pháp Quine - Mc. Cluskey và phương pháp bảng Cánhau:

a) $f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10)$

b) $f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(0, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$

c) $f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0, 5, 6, 7, 10)$

và với điều kiện hàm không xác định đối với các tổ hợp tích (2, 3, 11, 12)

d) $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(0, 4, 7, 11, 14)$ với các điều kiện hàm không xác định đối với các tổ hợp tổng (6, 8, 9, 13), chẳng hạn tổ hợp tổng của 6 ở đây sẽ là $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$.

Chương VI

CÁC PHÉP TÍNH ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN BOOLE

Năm 1954, Reed lần đầu tiên đã đưa ra khái niệm về đạo hàm Boole và sau đó vấn đề này đã được Akers nghiên cứu một cách kỹ lưỡng hơn. Năm 1959, trong bài báo của mình Akers đã nêu lên các tính chất đại số của đạo hàm Boole và đã chỉ ra các điều kiện để sự thay đổi của biến số Boole gây ra sự thay đổi tương ứng của hàm số. Điều này đã dẫn đến việc phát minh ra một loạt các quan hệ, các định lý cho các hàm chuyển mạch tương tự như các quan hệ và các định lý của các vi phân hữu hạn và các phép tính vi phân trong lý thuyết hàm số thực, chẳng hạn như các khai triển Taylor - Maclaurin, biến đổi Fourie v.v... Trong những năm gần đây các phép tính về đạo hàm Boole, vi phân Boole, v.v... đã được nghiên cứu và phát triển một cách mạnh mẽ cả về lý thuyết và cả về ứng dụng thực tiễn. Chẳng hạn các ứng dụng của đạo hàm Boole trong kỹ thuật chẩn đoán sai, trong đánh giá độ tin cậy, trong lý thuyết nhận dạng, trong lý thuyết phân giải các hàm Boole. Đạo hàm Boole cũng được ứng dụng trong việc xây dựng các ô-tô-mát tự động chẩn đoán sai và các ô-tô-mát tự động sửa sai.

Trong chương này chúng ta đề cập đến khái niệm về đạo hàm riêng, đạo hàm toàn phần, vi phân toàn phần và các thuật toán để tính đạo hàm. Một trong những ứng dụng của đạo hàm

Boole sẽ được đề cập đến trong chương tiếp theo, khi nghiên cứu về phân giải các hàm Boole.

6.1. ĐẠO HÀM RIÊNG

Như chúng ta đã biết, bước tiến quan trọng nhất trong lịch sử toán học mở đầu cho kỷ nguyên của toán học hiện đại là phát minh ra toán tính của Newton Leibnitz. Khái niệm cơ bản quan trọng nhất trong toán tính là phép tính đạo hàm của một hàm số

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Một câu hỏi được đặt ra là có thể đưa khái niệm về phép tính đạo hàm vào các hàm rời rạc nói chung và hàm Boole nói riêng được không? Nếu được thì các tính chất cơ bản cũng như các ứng dụng của chúng sẽ ra sao? Trong phần này chúng ta sẽ đề cập lần lượt đến các vấn đề đó. Trước hết chúng ta đề cập đến một số định nghĩa cơ bản.

Định nghĩa 6.1.1. Cho $f(x)$ là một hàm Boole của biến số Boole x , đạo hàm của hàm số $f(x)$ đối với biến x được định nghĩa như sau:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x) \oplus f(\bar{x}) \quad (6.1)$$

Như vậy trong định nghĩa này chúng ta đã giả thiết rằng biến số x thay đổi từ x đến $\bar{x}$, nghĩa là:

$$dx = \Delta x = x + \bar{x} = 1 \quad (6.2)$$

và do đó $df(x) = \Delta f(x) = f(x) \oplus f(\bar{x})$

Cũng cần phải lưu ý rằng trong toán học rời rạc, chẳng hạn trong đại số Boole, thì khái niệm về giới hạn không tồn tại và do đó $dx = \Delta x$.

Ví dụ 6.1. Cho $f(x) = ax + b\bar{x}$, trong đó

$$a, b \in B_2 = \{0, 1\}, \text{ ở đây } a = \bar{b}$$

Vậy
$$\frac{df(x)}{dx} = (ax + b\bar{x}) \oplus (a\bar{x} + bx) = 1$$

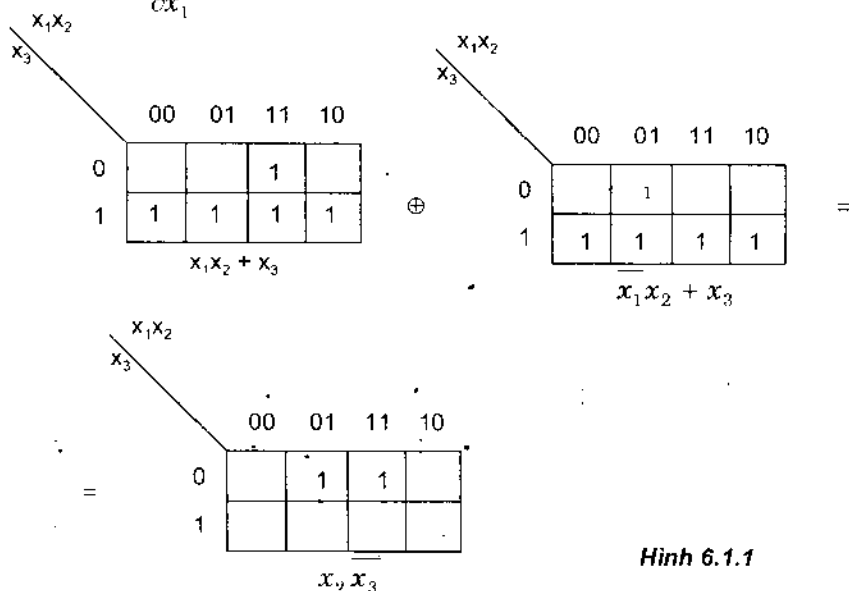
Bây giờ chúng ta định nghĩa đạo hàm Boole trong trường hợp tổng quát, nghĩa là trong trường hợp hàm nhiều biến.

Định nghĩa 6.1.2. Cho $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ là một hàm Boole của n biến $x_0, \dots, x_{n-1}$. Đạo hàm riêng của f đối với biến x_i ($0 \leq i \leq n-1$) được định nghĩa như sau:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) \oplus f(x_0, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_{n-1}) \quad (6.3)$$

Ví dụ 6.2. Cho $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$ tính đạo hàm riêng của f đối với x_1 .

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_1x_2 + x_3) \oplus (\bar{x}_1x_2 + x_3) = x_2\bar{x}_3$$



Hình 6.1.1

Có thể tính đạo hàm riêng ở trên theo bảng Cánhau, tức là biểu diễn hàm f dưới dạng đồ thị cho hai trường hợp x_i và $\overline{x_i}$, sau đó thực hiện phép toán trên đồ thị. Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra kết quả trên ở hình 6.1.1.

Sau đây là một số định lý quan trọng cho chúng ta thuật toán để tính đạo hàm riêng bằng máy tính.

Định lý 6.1.1. Đạo hàm riêng của hàm $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ đối với biến x_i có thể được tính theo công thức:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \quad (6.4)$$

Chứng minh: Theo định lý 5.13 chúng ta có :

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) &= x_i f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus \overline{x_i} f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \\ &= x_i f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus \overline{x_i} f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Áp dụng kết quả này vào (6.3) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= [x_i f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus \overline{x_i} f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1})] \oplus \\ &\quad \oplus [\overline{x_i} f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus x_i f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1})] = \\ &= (x_i + \overline{x_i}) [f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1})] = \\ &= f(x_0, \dots, 1, \dots, x_{n-1}) \oplus f(x_0, \dots, 0, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Ví dụ 6.3. Cho $f = x_1 x_2 + x_3$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (1x_2 + x_3) \oplus (0x_2 + x_3) = x_2 \overline{x_3}$$

Bây giờ chúng ta xét đến đạo hàm riêng bậc cao của hàm số Boole. Thường người ta đưa ra hai loại đạo hàm Boole bậc cao. mỗi loại có một ý nghĩa vật lý và có một phạm vi ứng dụng riêng nhất định.

Định nghĩa 6.1.3. Đạo hàm riêng bậc cao loại I của hàm $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ đối với m biến $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}$ được định nghĩa như sau:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i \partial x_{i+1} \dots \partial x_{i+m-1}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i+m-1}} \right) \dots \right) \right), \quad (6.5)$$

ở đây, m gọi là bậc của đạo hàm. Nếu chúng ta đặt:

$X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $X_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}$ thì biểu thức (6.5) có thể viết như sau:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i \partial x_{i+1} \dots \partial x_{i+m-1}} = \frac{\partial^m f(X)}{\partial^m X_i} \quad (6.6)$$

Định nghĩa 6.1.4. Đạo hàm riêng bậc cao loại II của hàm $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ đối với m biến trong X_i được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial (x_i x_{i+1} \dots x_{i+m-1})} &= f(x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}, x_{i+m}, \dots, x_{n-1}) \oplus \\ &\oplus f(x_0, \dots, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_{i+m-1}, x_{i+m}, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ở đây m gọi là bậc của đạo hàm, $0 \leq m \leq n$.

Ví dụ 6.4. Cho $f(X) = x_1 x_2 + x_3$, đặt $X_1 = \{x_1, x_2\}$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(X)}{\partial^2 X_1} = \bar{x}_3$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial (x_1 x_2)} = \frac{\partial f(X)}{\partial X_1} = (x_1 x_2 + x_3) \oplus (x_1 \bar{x}_2 + x_3) = \bar{x}_3 (x_1 x_2 + x_1 x_2)$$

Đạo hàm riêng bậc cao loại II cho chúng ta biết sự thay đổi của hàm f xảy ra như thế nào khi có sự thay đổi đồng thời của tất cả các biến thuộc X_i .

Sau đây là một số tính chất cơ bản của đạo hàm riêng. Giả sử $f(X)$ và $g(X)$ là các hàm Boole n biến, $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$

$$\begin{aligned}
1. \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \\
2. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} &= 0 \\
3. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\
4. \quad \frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x_i} &= f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \oplus g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \\
5. \quad \frac{\partial (f + g)}{\partial x_i} &= f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \oplus g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \\
6. \quad \frac{\partial (f \oplus g)}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \frac{\partial g}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Các tính chất trên có thể được chứng minh một cách dễ dàng trên cơ sở các định nghĩa về đạo hàm.

6.2. KHAI TRIỂN CHUỖI CÁC HÀM BOOLE

Cũng tương tự như trong lý thuyết các hàm số thực, trên cơ sở các định nghĩa về đạo hàm riêng cho các hàm Boole chúng ta có thể khai triển một hàm Boole bất kỳ thành dạng chuỗi. Đó là khai triển hàm Boole tại điểm 0 hay là khai triển Maclaurin và khai triển hàm Boole tại điểm khác 0 hay là khai triển Taylor.

Trong phần này chúng ta sử dụng một số ký hiệu như sau:

$$\begin{aligned}
X &= \{x_0, \dots, x_{n-1}\} = \{X_1, X_2\} \\
X_1 &= \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}; \quad X_2 = \{x_m, \dots, x_{n-1}\} \\
e &= (e_0, e_1, \dots, e_{n-1}); \quad X_1^e = x_0^{e_0} x_1^{e_1} \dots x_{m-1}^{e_{m-1}}
\end{aligned}$$

ở đây, $e_i \in \{0, 1\}$;

$$x_i^e = \begin{cases} 1, & \text{nếu } e_i = 0 \\ x_i, & \text{nếu } e_i = 1 \end{cases}$$

Định lý 6.2.1. Một hàm Boole bất kỳ $f(X_1, X_2)$ có thể được khai triển dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) &= \frac{\partial f}{\partial X_1^0} \Big|_{X_1=0} X_1^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1} \Big|_{X_1=0} X_1^1 \oplus \dots \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^{2^m-1}} \Big|_{X_1=0} X_1^{2^m-1} = \\ &= \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right) \Big|_{X_1=0} X_1^e \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ở đây chúng ta định nghĩa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X_1^0} &= f; \quad 2^m - 1 = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_m; \quad 0 = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_m \\ 0 \leq e &\leq 2^m - 1 \end{aligned}$$

Chứng minh: Chúng ta dùng phương pháp truy chứng toán học để chứng minh định lý này, nghĩa là quá trình chứng minh bao gồm 2 bước:

Bước 1. Chúng ta chứng minh rằng định lý đúng với $m = 1$, tức là khi $X_1 = (x_1)$. Theo định lý mở rộng hàm Boole ta có:

$$f(X_1, X_2) = X_1 f(X_1, X_2)_{X_1=1} \oplus \bar{X}_1 f(X_1, X_2)_{X_1=0} \quad (6.10)$$

Vì X_1 chỉ bao gồm 1 biến nên chúng ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = f(X_1, X_2)_{X_1=0} \oplus f(X_1, X_2)_{X_1=1} \quad (6.11)$$

Thêm vào hai vế của (6.11) biểu thức $f(X_1, X_2)_{X_1=0}$ chúng ta nhận được biểu thức sau:

$$f(X_1, X_2)_{X_1=0} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1} = f(X_1, X_2)_{X_1=0} \oplus f(X_1, X_2)_{X_1=0} \oplus f(X_1, X_2)_{X_1=1}$$

Vậy:

$$f(X_1, X_2)|_{X_1=1} = f(X_1, X_2)|_{X_1=0} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1} \quad (6.12)$$

Thay (6.12) vào (6.10) ta có:

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) &= X_1 \left[f(X_1, X_2)|_{X_1=0} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1} \right] \oplus \bar{X}_1 f(X_1, X_2)|_{X_1=0} \\ &= (X_1 + X_1) f(X_1, X_2)|_{X_1=0} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1} \cdot X_1 \\ &= f(X_1, X_2)|_{X_1=0} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1} X_1 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Vì X_1 chỉ có một biến x_1 nên $\frac{\partial f}{\partial X_1}$ không phụ thuộc vào X_1 và

do vậy ta có thể viết:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = \frac{\partial f}{\partial X_1^1}|_{X_1=0} \quad (6.14)$$

Mặt khác cũng vì X_1 chỉ có 1 biến nên:

$$X_1^0 = 1$$

và theo định nghĩa thì

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^0} = f \quad (6.15)$$

Thay (6.15), (6.14) vào (6.13) ta có:

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_1^0}|_{X_1=0} X_1^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1}|_{X_1=0} X_1^1 \quad (6.16)$$

Kết thúc bước 1.

Bước 2. Giả thiết rằng đẳng thức (6.9) đúng với $m = M$, chúng ta có thể chứng minh rằng đẳng thức đó đúng cho $m=M+1$.

Giả sử hàm f có thể viết như sau:

$$f = f(Z, X_1, X_2)$$

trong đó X_1 chứa m biến còn Z là một biến độc lập, nghĩa là $Z = (z)$.

Khai triển hàm f đối với X_1 và đối với Z chúng ta có:

$$f = \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right)_{X_1=0} X_1^e \quad (6.17)$$

$$\text{và } f = \frac{\partial f}{\partial Z^0} \Big|_{Z=0} Z^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial Z^1} \Big|_{Z=0} Z^1 \quad (6.18)$$

Thay (6.17) vào (6.18) ta có:

$$f = \frac{\partial}{\partial Z^0} \left[\sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right)_{X_1=0} X_1^e \right]_{Z=0} Z^0 \oplus \frac{\partial}{\partial Z^1} \left[\sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right)_{X_1=0} X_1^e \right]_{Z=0} Z^1 \quad (6.19)$$

Số hạng thứ nhất của (6.19) có thể viết lại như sau:

$$\frac{\partial}{\partial Z^0} \left[\sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right)_{X_1=0} X_1^e \right]_{Z=0} Z^0 = \left[\sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right)_{X_1=0} X_1^e \right]_{Z=0} = \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^{*e}} \right)_{X_1^*=0} X_1^{*e} \quad (6.20)$$

Ở đây $e = (e_0, e_1, \dots, e_{m-1})$ hay là $0 \leq e \leq 2^M - 1$

$$X_1^* = Z \cdot X_1$$

Biểu thức (6.20) chính là 2^M số hạng đầu tiên của khai triển $f(X_1^*, X_2)$, chẳng hạn $X_1^* = 0 \cdot X_1$ (vì $Z = 0$).

Số hạng thứ hai của (6.19) có thể viết lại như sau:

$$\frac{\partial}{\partial Z^1} \left[\sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^e} \right)_{X_1=0} X_1^e \right]_{Z=0} Z^1 = \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^{*e}} \right)_{X_1^*=0} X_1^{*e} \quad (6.21)$$

Vì ở đây chúng ta có Z^1 chứ không phải Z^0 như ở (6.20) nếu thành phần X_1^{*e} nằm trong khoảng 2^M và $2^{M+1}-1$.

Kết hợp (6.20) và (6.21) chúng ta có:

$$f(X_1^*, X_2) = \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X_1^{*e}} \right)_{X_1^{*e}=0} X_1^{*e} \quad (6.22)$$

với $0 \leq e \leq 2^{M+1}-1$.

Như vậy định lí đã được chứng minh xong.

Bây giờ chúng ta xét đến khai triển hàm Boole theo đạo hàm riêng tại điểm khác không hay là khai triển Taylor.

Định lí 6.2.2. Một hàm số Boole bất kỳ $f(X_1, X_2)$ có thể khai triển dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) &= \frac{\partial f}{\partial X_1^0} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^1 \oplus \dots \\ &\dots \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^{2^m-1}} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^{2^m-1} = \sum_e \frac{\partial f}{\partial X_1^e} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^e \end{aligned} \quad (6.23)$$

ở đây $0 \leq e \leq 2^m-1$ và H_1 là một hằng số Boole có số lượng thành phần như X_1 , nghĩa là $H_1 = (h_0, h_1, \dots, h_{m-1})$.

Để chứng minh định lí này chúng ta phải dùng đến các bổ đề sau đây:

Bổ đề 6.2.1. Đối với mỗi hàm Boole $f(X_1)$ chúng ta có quan hệ sau đây:

$$\frac{\partial f(X_1 \oplus H_1)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=0} = \frac{\partial f(X_1)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=H_1} \quad (6.24)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa đạo hàm riêng ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(X_1 \oplus H_1)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=0} &= \left[f(X_1 \oplus H_1) \oplus f(\bar{X}_1 \oplus H_1) \right]_{X_1=0} \\ &= \left[f(X_1) \oplus f(\bar{X}_1) \right]_{X_1=H_1} = \frac{\partial f(X_1)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=H_1} \end{aligned}$$

Bổ đề 6.2.2. Cho $X_1 = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$, ta có:

$$\frac{\partial f(X_1 \oplus H_1, X_2)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=0} = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=H_1} \quad (6.25)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa về đạo hàm bậc cao ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(X_1 \oplus H_1, X_2)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=0} &= \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \frac{\partial}{\partial x_{m-2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_0} \\ &= [f(x_0 \oplus h_0, x_1 \oplus h_1, \dots, x_{m-1} \oplus h_{m-1}, x_2)]_{x_0=0, x_1=0, \dots, x_{m-1}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \frac{\partial}{\partial x_{m-2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial}{\partial x_0} f(x_0, x_1 \oplus h_1, \dots, x_{m-1} \oplus h_{m-1}, X_2) \right]_{x_0=h_0, x_1=0, \dots, x_{m-1}=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \left[\frac{\partial}{\partial x_{m-2}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} f(x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, X_2) \right) \dots \right) \right) \right]_{x_0=h_0, x_1=h_1, \dots, x_{m-1}=h_{m-1}} \\ &= \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} \Big|_{X_1=H_1} \end{aligned}$$

Bổ đề 6.2.3.

$$\frac{\partial f(X_1 \oplus H_1, X_2)}{\partial X_1^e} \Big|_{X_1=0} = \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1^e} \Big|_{X_1=H_1} \quad (6.26)$$

ở đây $0 \leq e \leq 2^m - 1$. Bổ đề này có thể chứng minh dễ dàng bằng cách dựa vào hai bổ đề trên.

Bây giờ chúng ta trở lại chứng minh định lý 6.2.2.

Trước hết ta triển khai Maclaurin cho hàm số $f(X_1 \oplus H_1, X_2)$.

$$f(X_1 \oplus H_1, X_2) = \sum_e \left[\frac{\partial f(X_1 \oplus H_1, X_2)}{\partial X_1^e} \right]_{X_1=0} X_1^e \quad (6.27)$$

Theo bổ đề 6.2.3 thì biểu thức (6.27) có thể viết lại như sau:

$$f(X_1 \oplus H_1, X_2) = \sum_e \left[\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1^e} \right]_{X_1=H_1} X_1^e \quad (6.28)$$

Thay X_i ở (6.28) bằng $X_i \oplus H_i$ chúng ta có:

$$f(X_1, X_2) = \sum_e \left[\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1^e} \right]_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^e$$

Sở dĩ có thể viết được như vậy là vì: $X_i \oplus H_i \oplus H_i = X_i$ và:
 $\left[\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1^e} \right]_{X_1=H_1}$ không phụ thuộc vào X_i nữa (ở biểu thức (6.28)).

Như vậy định lí đã được chứng minh.

Để làm sáng tỏ khai triển trên chúng ta hãy xét đến hai ví dụ sau đây:

Ví dụ 6.5. Khai triển Maclaurin hàm chuyển mạch

$$f = x_1 x_2 + x_3$$

Giả sử $X_1 = (x_1, x_2)$; $X_2 = (x_3)$, do vậy $m = 2$.

$$f(X_1, X_2) = \frac{\partial f}{\partial X_1^0} X_1^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1} X_1^1 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^2} X_1^2 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^3} X_1^3$$

Vì X_i có 2 thành phần nên e cũng có 2 thành phần tương ứng. Do vậy chúng ta có:

$$f(X_1, X_2) = f_{X_1=00} X_1^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^{01}} X_1^{01} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^{10}} X_1^{10} \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^{11}} X_1^{11}$$

$$f_{X_1=00} = x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^{01}} \Big|_{X_1=00} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^0 \partial x_2^1} \Big|_{X_1=00} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=0, x_2=0} = (x_1 \overline{x_3})_{x_1=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^{10}} \Big|_{X_1=00} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^0} \Big|_{X_1=00} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0, x_2=0} = (x_1 \overline{x_3})_{x_2=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^{11}} \Big|_{X_1=00} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} \Big|_{X_1=00} = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 \overline{x_3})_{x_1=0} = \overline{x_3}$$

Vậy $f(X_1, X_2) = x_3 x_1^0 x_2^0 \oplus 0.x_1^0 x_2^1 \oplus 0.x_1^1 x_2^0 \oplus \overline{x_3}.x_1^1 x_2^1$

Cần lưu ý rằng $x_i^0 = 1$ và $x_i^1 = x_i$

Ví dụ 6.6. Khai triển Taylor hàm chuyển mạch cho ở ví dụ 6.5 tại điểm $H_1 = (h_1, h_2)$.

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) = & \frac{\partial f}{\partial X_1^0} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^0 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^1} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^1 \\ & \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^2} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^2 \oplus \frac{\partial f}{\partial X_1^3} \Big|_{X_1=H_1} (X_1 \oplus H_1)^3 \end{aligned}$$

ở đây:

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^0} \Big|_{X_1=H_1} = f_{X_1=H_1} = f_{\substack{x_1=h_1 \\ x_2=h_2}} = h_1 h_2 + x_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^1} \Big|_{X_1=H_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} \Big|_{X_1=H_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\substack{x_1=h_1 \\ x_2=h_2}} = (x_1 \overline{x_3})_{x_1=h_1} = h_1 \overline{x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^2} \Big|_{X_1=H_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^0} \Big|_{X_1=H_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{X_1=H_1} = (x_2 \overline{x_3})_{x_2=h_2} = h_2 \overline{x_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_1^3} \Big|_{X_1=H_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} \Big|_{X_1=H_1} = \overline{x_3}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) = & \left[(h_1 h_2 + x_3) (x_1 \oplus h_1)^0 (x_2 \oplus h_2)^0 \right] \oplus \left[h_1 \overline{x_3} (x_1 \oplus h_1)^0 (x_2 \oplus h_2)^1 \right] \\ & \oplus \left[h_2 \overline{x_3} (x_1 \oplus h_1)^1 (x_2 \oplus h_2)^0 \right] \oplus \left[\overline{x_3} (x_1 \oplus h_1)^1 (x_2 \oplus h_2)^1 \right] \end{aligned}$$

Sau đây chúng ta hãy xét một số dạng khai triển khác của hàm Boole.

Định lý 6.2.3. Hàm Boole $f(X)$ có thể khai triển dưới dạng sau đây:

$$f(X) = f(H) \oplus \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{(h_i)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_j} = h_j \quad (6.29)$$

ở đây $H = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$, $j > i$.

$$x_i^{(h_i)} = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{nếu } \bar{h}_i = 0 \\ x_i, & \text{nếu } \bar{h}_i = 1 \end{cases}$$

Để sáng tỏ chúng ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 6.7. $f(x) = x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_3$; $H = (h_1, h_2, h_3)$

$$f(X) = f(H) \oplus \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_2=h_2, x_3=h_3} x_1^{(h_1)} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=h_1, x_3=h_3} x_2^{(h_2)} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{x_1=h_1, x_2=h_2} x_3^{(h_3)}$$

$$f(H) = h_1 \bar{h}_2 + h_1 h_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_2=h_2, x_3=h_3} = (\bar{x}_2 + x_3) \Big|_{x_2=h_2, x_3=h_3} = \bar{h}_2 + h_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=h_1, x_3=h_3} = x_1 \bar{x}_3 \Big|_{x_1=h_1, x_3=h_3} = h_1 \bar{h}_3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2$$

Vậy

$$f(X) = (h_1 \bar{h}_2 + h_1 h_3) \oplus (\bar{h}_2 + h_3) x_1^{(h_1)} \oplus (h_1 \bar{h}_3) x_2^{(h_2)} \oplus (x_1 x_2) x_3^{(h_3)}$$

Nếu chúng ta chọn $h_1 = h_2 = 1$ và $h_3 = 0$ thì chúng ta có dạng ban đầu của hàm $f(x)$:

$$f(X) = (x_1 \bar{x}_2) + (x_1 x_2 x_3) = x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_3$$

Để chứng minh định lý trên chúng ta phải dùng đến các bổ đề sau:

Bổ đề 6.2.4. Khai triển Maclaurin cho hàm Boole trong trường hợp X_i chỉ gồm một biến.

$$f(x_1, X_2) = f(x_1, X_2)_{|x_1=1} \oplus \bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1^0} \oplus (x_1)^1 \frac{\partial f}{\partial x_1^1} \quad (6.30)$$

Chứng minh: Từ phương trình (6.11) chúng ta suy ra:

$$f(x_1, X_2)_{|x_1=0} = f(x_1, X_2)_{|x_1=1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (6.31)$$

Thay (6.31) vào (6.10) ta có:

$$\begin{aligned} f(x_1, X_2) &= x_1 f(x_1, X_2)_{|x_1=1} \oplus \bar{x}_1 \left[f(x_1, X_2)_{|x_1=1} \oplus \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] = \\ &= f(x_1, X_2)_{|x_1=1} (x_1 \oplus \bar{x}_1) \oplus \bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ &= f(x_1, X_2)_{|x_1=1} \oplus \bar{x}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Phần chứng minh định lí 6.2.3 dựa vào bổ đề trên dành cho bạn đọc.

Định lí 6.2.3 cho chúng ta thấy rằng một hàm Boole hoàn toàn được xác định nếu chúng ta biết tập hợp của tất cả các đạo hàm riêng đối với mỗi một biến thuộc X .

Sau đây chúng ta giới thiệu một quan hệ có thể suy ra từ định lí 6.2.2 và bổ đề 6.2.1.

Định lí 6.2.4. Cho H là số gia của X , chúng ta có quan hệ sau đây:

$$f(X) \oplus f(X \oplus H) = \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X^e} \right) H^e \quad (6.32)$$

ở đây $\vec{X} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$H = (h_0, h_1, \dots, h_n)$$

$$0 \leq e \leq 2^n - 1; e = (e_0, e_1, \dots, e_n).$$

6.3. ĐẠO HÀM TOÀN PHẦN VÀ VI PHÂN TOÀN PHẦN

Trong phần này, chúng ta giới thiệu những khái niệm cơ bản về đạo hàm toàn phần và vi phân toàn phần của ánh xạ Boole từ đại số Boole n nguyên tử do tích trực tiếp $B_2^n = B_2 \times B_2 \times \dots \times B_2$ tạo nên vào đại số Boole 2 phần tử B_2 .

Như chúng ta đã biết, đối với các hàm số ánh xạ từ B_2^n vào B_2 thì khái niệm về đạo hàm và vi phân tương tự như nhau. Tính tương tự đó cũng có thể thấy được giữa các khái niệm về vi phân và số gia. Vì vậy người ta gọi vi phân d_{x_i} của một biến Boole x_i là số gia của x_i . Vi phân đó cũng chính là một biến Boole, các giá trị của nó cũng là các phần tử của $B_2 = \{0, 1\}$.

Định nghĩa 6.3.1. Vi phân riêng phần $d_{x_i}f$ của hàm $f(x)$ đối với biến $x_i \in X$ là số gia của hàm $f(X)$ theo giá trị của x_i :

$$d_{x_i}f = f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_0, \dots, x_i \oplus dx_i, \dots, x_n) \quad (6.33)$$

Định lý 6.3.1.

$$d_{x_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad (6.34)$$

Để chứng minh định lý này chúng ta chỉ việc cho dx_i những giá trị khác nhau thuộc B_2 và so sánh các giá trị của đạo hàm riêng theo x_i và vi phân riêng với nhau. Các giá trị đó được xác định dựa theo các định nghĩa tương ứng của đạo hàm riêng và vi phân riêng.

Ví dụ 6.8. Cho $f = x_1x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} d_{x_1}f &= f(x_1, x_2, x_3) \oplus f(x_1 \oplus dx_1, x_2, x_3) \\ &= (x_1x_2 + x_3) \oplus [(x_1 \oplus dx_1)x_2 + x_3] \\ &= (x_1x_2 + x_3) \oplus [x_1x_2(dx_1) \oplus \overline{x_1}x_2dx_3 + x_3] \\ &= x_2\overline{x_3}dx_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 \end{aligned}$$

Định nghĩa 6.3.2. Vi phân riêng phần bậc cao của hàm f đối với m biến trong X_I là hàm số sau đây:

$$\begin{aligned} d_{X_I} f &= dx_o(dx_1(\dots(dx_{m-1}f)\dots)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \prod dx_i \quad x_i \in X_I = \{x_0, x_1, \dots, x_m\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Định nghĩa 6.3.3. Vi phân toàn phần df của hàm $f(X)$ là số gia của hàm số đó theo số gia dX của X , nghĩa là:

$$df = f(X) \oplus f(X \oplus dX) \quad (6.36)$$

Định lý 6.3.2.

$$df = \sum_e \frac{\partial f}{\partial X^e} (dX)^e = \sum_e dX^e f \quad (6.37)$$

ở đây $0 \leq e \leq 2^n - 1$;

Sau đây là một số tính chất cơ bản của vi phân toàn phần:

1. $da = 0$
2. $d(af) = a df$
3. $d(df) = 0$
4. $d(fg) = fdg \oplus gdf \oplus df.dg$
5. $d(f + g) = \bar{f} dg \oplus \bar{g} df \oplus df.dg$
6. $d(f \oplus g) = df \oplus dg$

Bây giờ chúng ta xét đến vi phân toàn phần của một phiếm hàm.

Định nghĩa 6.3.4. Cho $f[X, y(X)]$ là hàm chuyển mạch vectơ, ở đây X và y là các vectơ n và m thứ nguyên tương ứng. Đạo hàm toàn phần của hàm số f đối với biến x_i được định nghĩa như sau:

$$\frac{df}{dx_i} = f[x_i, y(x_i)] \oplus f[\bar{x}_i, y(\bar{x}_i)] \quad (6.38)$$

Định nghĩa 6.3.5. Cho $X = (X_1, X_2)$. Đạo hàm toàn phần cấp cao của hàm số f đối với m biến trong X_I được định nghĩa như sau:

$$\frac{df}{dX_1} = \frac{d}{dx_0} \left(\frac{d}{dx_1} \left(\dots \left(\frac{df}{dx_{m-1}} \right) \dots \right) \right) \quad (6.39)$$

ở đây $X_I = (x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$.

Định nghĩa 6.3.6. Biến phân ∂x_i của biến độc lập x_i là số gia của x_i , nghĩa là $\partial x_i = dx_i$.

Định nghĩa 6.3.7. Biến phân toàn phần δf của hàm $f(X)$ là số gia cực đại của hàm số đó theo biến phân toàn phần δX của X .

Sau đây là quan hệ giữa biến phân δX và biến phân toàn phần δf .

Định lý 6.3.3. Cho $f(X)$ là hàm số của biến vectơ độc lập X , chúng ta có mối quan hệ sau đây:

$$\delta f = \sum_e \left(\frac{\partial f}{\partial X^e} \right) (\delta f)^e \quad (6.40)$$

ở đây $0 \leq e \leq 2^n - 1$.

Chứng minh: Theo định nghĩa về biến phân toàn phần chúng ta có:

$$\delta f = \sum_{e_1} [f(X) \oplus f(X \oplus e_1) \delta X] \quad (6.41)$$

$$0 \leq e \leq 2^n - 1$$

Từ định lý 6.2.4 chúng ta nhận được:

$$\delta f = \sum_{e_1} \left[\sum_e \frac{\partial f}{\partial X^e} (e_1 \delta X)^e \right] = \sum_e \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X^e} \right) (\delta X)^e \right] \quad (6.42)$$

$$0 \leq e \leq 2^n - 1$$

Định nghĩa 6.3.8. Toán tử Δ của hàm số $f(X_1, X_2)$ đối với m biến trong X_1 được định nghĩa như sau:

$$\frac{\Delta f}{\Delta X_1} = \sum_e \frac{\partial f}{\partial X_1^e} \quad (6.43)$$

$$0 \leq e \leq 2^n - 1$$

Từ định nghĩa trên chúng ta có thể suy ra:

$$\frac{\Delta f}{\Delta X_1} = (\delta f)_{\delta X_1=1, \delta X_2=0} \quad (6.44)$$

Định lý 6.3.4.

$$\frac{\Delta f(X_1, X_2)}{\Delta X_1} \text{ không phụ thuộc vào } X_1.$$

Định lý này có thể chứng minh bằng phương pháp truy chứng toán học và chúng tôi dành cho độc giả.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của toán tử biến phân:

1. $\delta a = 0$, a là một hằng số Boole.

$$2. \delta(af) = a\delta f$$

$$3. \delta(fg) = f\delta g + g\delta f + \delta f \cdot \delta g$$

$$4. \delta(f + g) = \bar{f}\delta g + \bar{g}\delta f + \delta f\delta g$$

$$5. \delta(f \oplus g) = \delta f \oplus \delta g$$

$$6. \delta f = \sum_e \frac{\partial f}{\partial (X.Y)^e} [\delta(X.Y)^e],$$

ở đây: $f = f[X, Y(X)]$ và $0 \leq e \leq 2^{m+n} - 1$;

m và n là số lượng biến của X và Y tương ứng.

Cũng tương tự như trên ta có các tính chất sau đây của toán tử Δ .

$$1. \frac{\Delta a}{\Delta X_1} = 0$$

$$2. \frac{\Delta(af)}{\Delta X_1} = a \frac{\Delta f}{\Delta X_1}$$

$$3. \quad \frac{\Delta}{\Delta X_1} \left(\frac{\Delta f}{\Delta X_1} \right) = 0$$

$$4. \quad \frac{\mathcal{N}}{\Delta X_1} = \frac{\Delta \bar{f}}{\Delta X_1}$$

$$5. \quad \frac{\Delta}{\Delta X_1} (fg) = f \frac{\Delta g}{\Delta X_1} + g \frac{\Delta f}{\Delta X_1} + \frac{\Delta f}{\Delta X_1} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta X_1}$$

$$6. \quad \frac{\Delta}{\Delta X_1} (f + g) = \bar{f} \frac{\Delta g}{\Delta X_1} + \bar{g} \frac{\Delta f}{\Delta X_1} + \frac{\Delta f}{\Delta X_1} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta X_1}$$

$$7. \quad \frac{\Delta}{\Delta X_1} (f \oplus g) = \frac{\Delta f}{\Delta X_1} \oplus \frac{\Delta g}{\Delta X_1}$$

$$8. \quad \delta f = \sum_e \left(\frac{\Delta f}{\Delta X^e} \right) (\delta X)^e$$

ở đây $0 \leq e \leq 2^n - 1$.

6.4. PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP THUẬT TOÁN ĐỂ TÍNH ĐẠO HÀM BOOLE

Trong trường hợp số lượng biến ít chúng ta có thể tính đạo hàm Boole bằng phương pháp đồ thị. Cơ sở của phương pháp này là phép quay bảng Cánhân theo các trục của biến số lấy đạo hàm. Giả sử chúng ta phải tính:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}, \quad x_i \in X.$$

Thuật toán này có thể được mô tả như sau:

1. Biểu diễn hàm Boole đã cho dưới dạng bảng Cánhân.
2. Xác định trục x_i trên bảng Cánhân.
3. Quay bảng Cánhân đối với trục x_i . Các ô có chữ số 1 (gọi tắt là ô 1) mới sẽ được tạo ra hoặc các ô số 1 cũ bị loại trừ đi, tùy

theo tình trạng của từng ô trước lúc quay. Ô 1 mới được tạo ra nếu trước đó ô 1 chỉ có ở một trong hai ô đối xứng của bảng, ngược lại ô 1 bị loại trừ nếu trước đó ở cả hai ô đối xứng đều có chữ số 1 (đối xứng qua trục x_i). Ô 1 mới được tạo ra do phép quay được đánh dấu bằng số thứ i (tương ứng với biến x_i).

4. Xác định đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ theo bảng Căcnâu như một hàm

số mới được tạo ra từ các ô 1 còn lại và các ô 1 mới được tạo ra.

Để làm sáng tỏ thuật toán này chúng ta hãy xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 6.9. Cho $f = x_1x_2 + x_3$, các đạo hàm riêng được xác định ở hình 6.4.1. Sau khi xác định được các đạo hàm riêng chúng ta có thể xác định được đạo hàm và vi phân toàn phần như sau:

$$df = x_2x_3dx_1 \oplus x_1x_3dx_2 \oplus x_1x_2dx_3 \oplus x_3dx_1dx_2 \oplus x_2dx_1dx_3 \oplus x_1dx_2dx_3 \oplus dx_1dx_2dx_3$$

$$\partial f = x_2x_3\partial x_1 + x_1x_3\partial x_2 + x_1x_2\partial x_3 + x_3\partial x_1\partial x_2 + x_2\partial x_1\partial x_3 + x_1\partial x_2\partial x_3 + \partial x_1\partial x_2\partial x_3$$

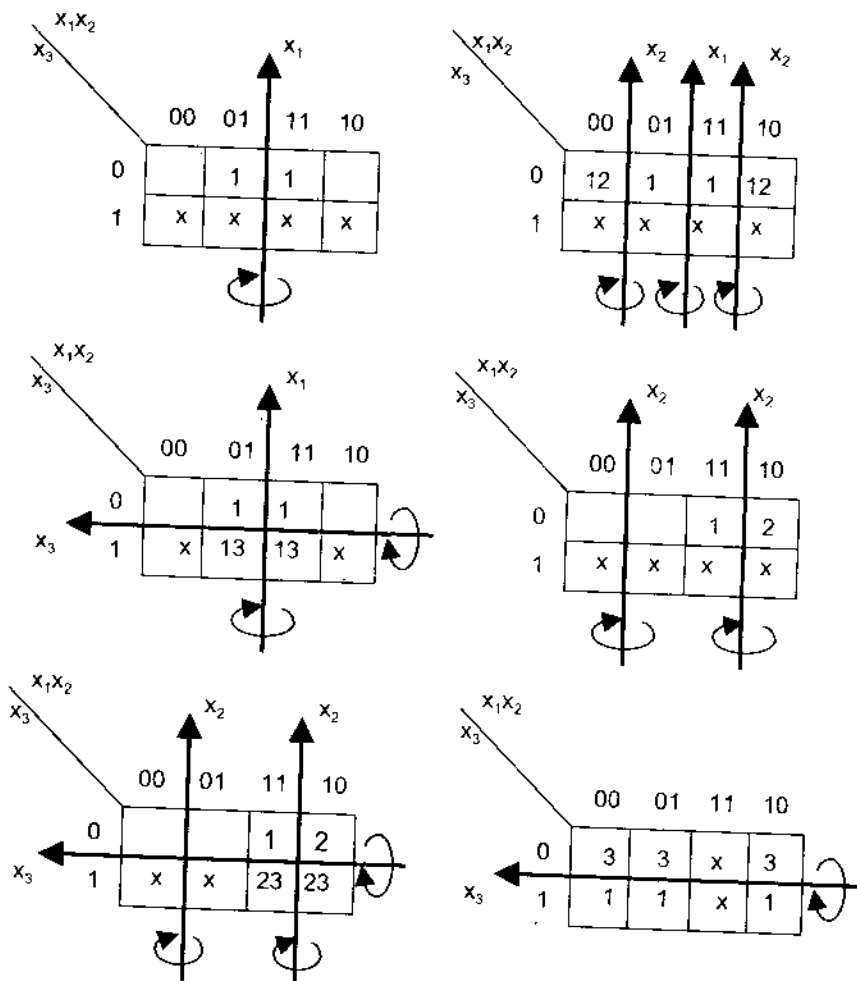
Trường hợp hàm f có nhiều biến thì chúng ta không thể áp dụng phương pháp đồ thị như trên được mà phải dùng phương pháp thuật toán trên máy tính. Thuật toán đó có thể được mô tả như sau:

1. Biểu diễn các số hạng của dạng tuyến chính quy dưới dạng nhị phân.

2. Tạo các số hạng mới bằng cách thay x_i bằng $\overline{x_i}$. Loại trừ các số hạng xuất hiện 2 lần (trong dạng nguyên thủy của f và trong các số hạng mới được tạo thành).

3. Tìm dạng tối thiểu của $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bằng phương pháp Quine -

Mac Cluskey hoặc bằng một phương pháp nào khác để tối thiểu hóa các hàm Boole.



Hình 6.4.1

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một hàm số $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ không phụ thuộc vào biến x_i là $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$.

2. Chúng ta định nghĩa 2 phép toán sau:

$$\frac{qf}{qx_i} = f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) + f(x_0, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_{n-1})$$

$$\frac{pf}{px_i} = f(x_0, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}) \cdot f(x_0, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_{n-1})$$

và giả sử $X, X_0 \subset X$ và chúng ta lại định nghĩa

$$\frac{qf}{qX_0} = \frac{q}{qx_0} \left(\frac{q}{qx_1} \left(\dots \left(\frac{qf}{qx_{m-1}} \right) \dots \right) \right)$$

$$\frac{pf}{pX_0} = \frac{p}{px_0} \left(\frac{p}{px_1} \left(\dots \left(\frac{pf}{px_{m-1}} \right) \dots \right) \right)$$

Chúng minh các đẳng thức sau đây:

$$\frac{qf}{qX_0} = \sum_{e_0} f(e_0, X_1)$$

$$\frac{pf}{pX_0} = \prod_{e_0} f(e_0, X_1)$$

với $0 \leq e_0 \leq 2^n - 1$

3. Khai triển Maclaurin và Taylor hàm chuyển mạch

$$f(X_1, X_2) = \overline{x_1 x_3 x_4} + \overline{x_2 x_1} + \overline{x_3 x_4}$$

cho các trường hợp sau đây:

$$\begin{cases} X_1 = (x_1); \\ X_2 = (x_2, x_3, x_4) \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = (x_1, x_2); \\ X_2 = (x_3, x_4) \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = (x_1, x_2, x_3) \\ X_2 = (x_4) \end{cases}$$

4. Chúng minh rằng

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \sum_{\epsilon} \left(\frac{\partial f}{\partial Y^{\epsilon}} \oplus \frac{\partial f}{\partial (x_i Y^{\epsilon})} \right) \left(\frac{\partial Y}{\partial x_i} \right)^{\epsilon}$$

$$\text{Ở đây } \frac{\partial y}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial y_0}{\partial x_i}, \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i} \right)$$

$$\text{và } 0 \leq e \leq 2^m - 1.$$

5. Tính đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bằng phương pháp đồ thị và phương

pháp thuật toán máy tính cho các trường hợp sau đây:

$$f_1 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

$$f_2 = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3$$

Chương VII

PHÂN GIẢI CÁC HÀM CHUYỂN MẠCH

Khi xem xét các hàm chuyển mạch thường người ta quan tâm đến *tính phân giải được* của chúng. Sở dĩ như vậy vì một trong những vấn đề quan trọng của lý thuyết tổng hợp và phân tích các hệ thống rời rạc là việc phân giải các hàm chuyển mạch thành các hàm chuyển mạch thành phần. Như chúng ta đã biết, sự phát triển nhanh chóng của kỹ thuật điện tử, đặc biệt là sự ra đời của các bộ vi xử lý (microprocessor) đơn mảnh (one chip) đã làm thay đổi hoàn toàn phương pháp luận tổng hợp các hệ thống rời rạc. Một trong những cơ sở cho phương pháp tổng hợp mới là vấn đề phân giải các hàm chuyển mạch. Chúng ta hãy xét một ví dụ, hàm f có thể phân giải dưới dạng sau:

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = F[y(x_0, \dots, x_{p-1}), x_p, \dots, x_{n-1}] \quad (7.1)$$

ở đây F và y là các hàm chuyển mạch. Như vậy để định nghĩa hàm f chúng ta dùng bảng thật có 2^{n-p+1} hàng (ứng với hàm F) và bảng thật có 2^p hàng (ứng với hàm y). Do đó hàm f được xác định bằng bảng thật có $2^{n-p+1} + 2^p$ hàng thay cho bảng thật có 2^n hàng, nghĩa là số lượng bit thông tin dùng để nhớ giảm đi rõ rệt. Nếu người ta thực hiện hàm f nhờ các mạch nhớ cố định (ROM) thì số lượng bit cần thiết để xác định hàm f cũng tương ứng với số lượng để thực hiện nó.

Bài toán về phân giải các hàm chuyển mạch có thể được đặt ra một cách tổng quát như sau:

Giả sử $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là không gian Boole n chiều
 $R = (r_0, r_1, \dots, r_{N-1})$ là không gian Boole N chiều
 f là một ánh xạ từ không gian X vào không gian R

$$X \xrightarrow{f} R$$

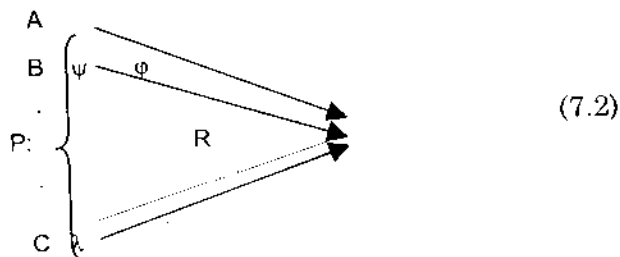
P là họ của các tập con không trống khác nhau của tập X .

P được gọi là **phân hoạch của không gian X** .

Nói một cách khác, phân hoạch P được định nghĩa một cách tổng quát như sau:

$$P = \{A, B, \dots, C\} \text{ sao cho } \begin{aligned} A \cup B \cup \dots \cup C &= X \\ A \cap B \cap \dots \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

Người ta nói rằng hàm $f(x)$ là phân giải được, nếu tồn tại phân hoạch P sao cho:



ở đây, $\phi, \psi, \dots, \lambda$ là các ánh xạ con tương ứng từ các tập con $A, B, \dots, C$ vào tập R .

Lí thuyết về phân giải các hàm chuyển mạch được R. L. Ashenhurt đề ra năm 1959 và sau đó H. A. Curtis hoàn chỉnh năm 1962. Nội dung của các công trình nghiên cứu này là xét xem hàm chuyển mạch đã cho có thể được biểu diễn bằng một trong các dạng biểu thức sau đây hay không:

- **Phân giải đơn giản**

$$f(X) = F[\varphi(A), B] \quad (7.3)$$

ở đây A được gọi là tập con phụ thuộc của tập X ,

B được gọi là tập con độc lập của tập X ,

$$A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$$

F và φ là các hàm chuyển mạch.

- **Phân giải lập:**

$$f(X) = F[\eta[\varphi(A), B], C] \quad (7.4)$$

- **Phân giải phức:**

$$f(X) = F[\varphi(A), \lambda(B), \dots, C] \quad (7.5)$$

- **Phân giải hỗn hợp:**

$$f(X) = F[\eta[\varphi(A), B], \lambda(C), D, \dots] \quad (7.6)$$

Chương này đề cập chủ yếu đến phân giải đơn giản và các điều kiện để nhận dạng một hàm chuyển mạch có thể phân giải được. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ trình bày những ứng dụng của đạo hàm Boole trong lý thuyết nhận dạng các hàm chuyển mạch phân giải được.

7.1. PHÂN GIẢI ĐƠN TÁCH BIỆT

Định nghĩa 7.1.1. Cho hàm chuyển mạch $f(X)$ xác định trên tập $X = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$.

Nếu $f(X)$ có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$f(X) = F[\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1}), z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}] \quad (7.7)$$

thì hàm $F[\varphi, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}]$ và $\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$ biểu diễn một **phân giải đơn tách biệt**.

ở đây $y_0, y_1, \dots, y_{s-1}, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}$ chính là các biến $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ nhưng được sắp xếp theo một nguyên tắc khác nào đó.

Hàm $f(X)$ có tính chất như trên được gọi là **hàm phân giải được**. Sở dĩ chúng ta gọi dạng (7.7) là **phân giải đơn tách biệt** vì hàm F chỉ chứa một hàm số khác (φ) trong nó mà mỗi phần tử $x_i \in X$ hoặc nằm trong tập hợp $\{y_0, y_1, \dots, y_{s-1}\}$ hoặc trong tập hợp $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}\}$ chứ không thể nằm đồng thời trong cả hai tập hợp đó. Nói cách khác hai tập hợp biến số ở trên là tách biệt nhau.

Ví dụ 7.1. Cho hàm chuyển mạch 4 biến

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(0, 3, 4, 7, 12, 15) \quad (7.8)$$

Dạng thu gọn của $f(X)$ như sau:

$$f(X) = \overline{x_1 x_3 x_4} + \overline{x_2 x_3 x_4} + \overline{x_1 x_3 x_4} + \overline{x_2 x_3 x_4} \quad (7.9)$$

Chúng ta có thể biểu diễn $f(X)$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} f(X) &= F[\varphi(y_1, y_2), z_1, z_2] \\ F(\varphi, z_1, z_2) &= (\overline{z_1 z_2} + z_1 z_2) \varphi \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\text{ở đây } \varphi = \overline{y_1} + y_2, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad z_1 = x_3, \quad z_2 = x_4$$

7.1.1. Ma trận phân hoạch

Trước hết chúng ta hãy định nghĩa phân hoạch của tập X .

Định nghĩa 7.1.2. Cho $f(X)$ là hàm chuyển mạch xác định trên tập $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Phân hoạch của tập X là một cặp tập con $\{y_0, y_1, \dots, y_{s-1}\}$ và $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}\}$ mà trên đó hàm số sau đây được xác định.

$$f(X) = F[\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1}), z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}]$$

Người ta **đánh dấu phân hoạch** như sau:

$$z_0 z_1 \dots z_{n-s-1} \mid y_0 y_1 \dots y_{s-1} \quad (7.11)$$

Tập $\{y_0, y_1, \dots, y_{s-1}\}$ gọi là **tập các biến phụ thuộc** còn tập $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}\}$ gọi là **tập các biến tự do**.

Định lý 7.1.1. Nếu tập X có n phần tử thì nó có 2^n phân hoạch.

Thật vậy, giả sử tập các biến phụ thuộc $\{y_0, y_1, \dots, y_{s-1}\}$ có i phần tử. Như vậy chúng ta sẽ có C_i^n phân hoạch i phần tử (các phần tử phụ thuộc). Do đó số lượng phân hoạch được xác định như sau:

$$\sum_{i=0}^n C_i^n = 2^n \quad (7.12)$$

Các trường hợp $i = 0$, $i = 1$ và $i = n$ được gọi là các trường hợp tầm thường và các phân hoạch tương ứng với chúng gọi là các **phân hoạch tầm thường**. Hàm chuyển mạch cho ở ví dụ 7.1 có phân hoạch không tầm thường là $x_3 x_4 | x_1 x_2$ nên nó có thể phân giải đơn tách biệt được.

Định lý 7.1.2. Tập biến $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ có $2^n - n - 2$ phân hoạch không tầm thường.

Định lý này có thể chứng minh đơn giản trên cơ sở định lý 7.1.1.

Bây giờ chúng ta hãy định nghĩa ma trận phân hoạch. Như chúng ta đã biết, có thể cho một hàm chuyển mạch dưới dạng bảng giá trị thật. Theo bảng đó, hàm chuyển mạch f có 2^n trường hợp giá trị ứng với 2^n tổ hợp khác nhau của các biến. Nói cách khác, lúc đó giá trị f được xác định bằng một **ma trận cột** hoặc một **ma trận hàng**:

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{2^n-1} \end{pmatrix} \quad \text{hoặc} \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_{2^n-1}) \quad (7.13)$$

Mặt khác, hàm f cũng có thể biểu diễn qua ma trận phân hoạch.

Định nghĩa 7.1.3. *Ma trận phân hoạch* là ma trận gồm 2^s cột ứng với tập các giá trị của $\{y_0, y_1, \dots, y_{s-1}\}$ và 2^{n-s} hàng ứng với tập các giá trị của $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}\}$. Mỗi phần tử của ma trận là một giá trị của hàm số tương ứng ở vị trí đã cho. Như vậy chúng ta có thể biểu diễn ma trận phân hoạch như ở bảng 7.1.1.

Bảng 7.1.1.

$y_0 y_1 \dots y_{s-1}$ $z_0 z_1 \dots z_{n-s-1}$	0	1	.	.	.	.	2 ^{n-s} -1
0	f_0	f_1	.	.	.	.	$f_{2^{n-s}-1}$
1	f_{2^s}	f_{2^s+1}	.	.	.	.	$f_{2^{s+1}-2}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
2 ^{n-s-1}	$f_{2^n-2^n}$	$f_{2^n-2^s+1}$	.	.	.	.	f_{2^n-1}

Ví dụ 7.2. Hàm $f(X)$ được xác định trên tập $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ thông qua phân hoạch $x_2 | x_1 x_3 x_4$ và ma trận phân hoạch cho ở bảng 7.1.2.

Bảng 7.1.2

$x_1 x_3 x_4$ x_2	000	001	010	100	101	110	111
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0

7.1.2. Ứng dụng của ma trận phân hoạch

Người ta có thể dùng ma trận phân hoạch để xét xem một phân hoạch đã cho có dẫn đến phân hoạch đơn tách biệt hay không? Ngoài ra, ma trận phân hoạch cũng được dùng để nhận dạng các hàm số F và φ .

Bảng 7.1.3

$x_1 x_3 \backslash x_2 x_4$	00	01	10	11
00	1	0	1	0
01	0	1	0	1
10	0	0	1	0
11	1	0	0	0

Định nghĩa 7.1.4. *Độ phân biệt hàng μ của ma trận phân hoạch là số lượng vectơ hàng khác nhau của ma trận đó. Độ phân biệt cột ν của ma trận phân hoạch cũng được định nghĩa như vậy.*

Ma trận phân hoạch cho ở bảng 7.1.2. có $\mu = 2$ và $\nu = 2$. Ma trận phân hoạch ở bảng 7.1.3. có $\mu = 4$ và $\nu = 3$.

Các giá trị μ và ν có những mối liên hệ nhất định trong quan hệ phân giải đơn tách biệt. Các mối liên hệ đó được mô tả bằng các định lý sau (Định lý 7.1.3, và 7.1.4).

Cho $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là hàm chuyển mạch, chúng ta đặt:

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})_{x_0=\alpha_0, x_1=\alpha_1, \dots, x_{n-s-1}=\alpha_{n-s-1}} \quad (7.14)$$

trong đó $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-s-1}$ là các hằng số Boole.

Ví dụ 7.3. Hàm chuyển mạch (7.8) cho ở ví dụ 7.1 có ma trận phân hoạch tương ứng ở bảng 7.1.4.

Bảng 7.1.4 có thể thu gọn thành bảng 7.1.5, trong đó các cột giống nhau được ghép lại với nhau và trên đầu mỗi cột của ma trận mới chúng ta ghi tổng các dấu hiệu của các cột hợp thành. Chẳng hạn cột 00 và 11 giống nhau thì khi gấp lại ta có cột 00 + 11.

Bảng 7.1.4

$x_3 x_4 \backslash x_1 x_2$	00	01	10	11
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
10	0	0	0	0
11	1	0	0	1

Bảng 7.1.5

$x_3 x_4 \backslash x_1 x_2$	00 + 11	01 + 10
00	1	0
01	1	0
10	0	0
11	1	0

Từ bảng 7.1.4, ta có thể xác định:

$$f_Q(00) = \overline{x_3 x_4} + x_3 x_4$$

$$f_Q(01) = \overline{x_3 x_4} + x_3 x_4$$

$$f_Q(10) = 0$$

$$f_Q(11) = \overline{x_3 x_4} + x_3 x_4$$

Định lý 7.1.3. Trong ma trận phân hoạch thì $v = 2$ nếu và chỉ nếu:

$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = 1, \varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1}), \overline{\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})}$ hoặc 0 đối với tất cả mọi dấu hiệu cột.

Chứng minh: Trước hết chúng ta giả thiết $v = 2$, nghĩa là ma trận phân hoạch thu gọn có hai cột khác nhau. Do đó ma trận phân hoạch thu gọn có nhiều nhất là 4 loại hàng khác nhau ứng

với các tổ hợp 00, 01, 10, và 11. Mỗi hàng (trong số 2^{n-s} hàng) là một trong các loại hàng kể trên, trong số đó ít nhất một hàng ứng với tổ hợp 01 hoặc 10 vì chỉ có như vậy chúng ta mới có $v = 2$. Giả sử chúng ta chọn $\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$ ứng với cột thứ nhất thì khi đó chúng ta nhận được:

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = \varphi \text{ cho tất cả các hàng ứng với 10,}$$

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = \bar{\varphi} \text{ cho tất cả các hàng ứng với 01,}$$

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = 0 \text{ cho tất cả các hàng ứng với 00,}$$

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = 1 \text{ cho tất cả các hàng ứng với 11.}$$

Điều kiện đủ của định lí có thể nhận thấy một cách dễ dàng vì nếu chúng ta giả thiết $f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1})$ bằng 0, 1, $\bar{\varphi}$ hoặc φ thì rõ ràng chúng ta cấu tạo được ma trận thu gọn có 2 cột khác nhau, nghĩa là $v = 2$.

Hệ quả 7.1.3. Ma trận phân hoạch có $v = 1$ nếu và chỉ nếu $f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = 0$ hoặc 1.

Từ định lí 7.1.3 và hệ quả 7.1.3 chúng ta có thể chứng minh được định lí quan trọng sau đây.

Định lí 7.1.4. Hàm chuyển mạch n biến $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ có phân giải đơn tách biệt với phân hoạch:

$$z_0 z_1 \dots z_{n-s-1} | y_0 y_1 \dots y_{s-1}$$

nếu và chỉ nếu ma trận phân hoạch tương ứng có $v \leq 2$.

Chứng minh:

Điều kiện cần: Giả thiết $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ có phân giải đơn tách biệt với phân hoạch $z_0 z_1 \dots z_{n-s-1} | y_0 y_1 \dots y_{s-1}$, nghĩa là chúng ta có thể biểu diễn f dưới dạng sau:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = F[\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1}), z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}] \quad (7.15)$$

Bây giờ chúng ta khai triển hàm f theo $z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}$

$$F[\varphi, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}] = \bar{z}_0 \bar{z}_1 \dots \bar{z}_{n-s-1} F[\varphi, 0, 0, \dots, 0] + \\ + \bar{z}_0 \bar{z}_1 \dots \bar{z}_{n-s-1} F[\varphi, 0, 0, \dots, 1] + \dots + z_0 z_1 \dots z_{n-s-1} F[\varphi, 1, 1, \dots, 1] \quad (7.16)$$

Từ các biểu thức (7.14) và (7.16) chúng ta suy ra:

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = F[\varphi, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-s-1}]$$

ở đây $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Vì $F[\varphi, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-s-1}]$ là một hàm số riêng của φ do đó chúng ta có thể kết luận rằng:

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = \varphi, \bar{\varphi}, 1 \text{ hoặc } 0.$$

Theo định lý 7.1.3 và hệ quả 7.1.3 thì $v \leq 2$.

Điều kiện đủ: Giả sử ma trận phân hoạch với phân hoạch $z_0 z_1 \dots z_{n-s-1} | y_0 y_1 \dots y_{s-1}$ có $v \leq 2$. Theo định lý 7.1.3 và hệ quả 7.1.3 chúng ta có:

$$f_Q(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n-s-1}) = \varphi, \bar{\varphi}, 1 \text{ hoặc } 0. \quad (7.17)$$

Ở đây f_Q theo đúng định nghĩa (7.14). Mặt khác hàm chuyển mạch f có thể được khai triển như sau:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \bar{z}_0 \bar{z}_1 \dots \bar{z}_{n-s-1} f_Q(0, 0, \dots, 0) + \\ + \bar{z}_0 \bar{z}_1 \dots \bar{z}_{n-s-1} f_Q(0, 0, \dots, 1) + \dots + z_0 z_1 \dots z_{n-s-1} f_Q(1, 1, \dots, 1) \quad (7.18)$$

Từ (7.17) và (7.18) chúng ta có thể suy ra:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = F[\varphi, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1}] \quad (7.19)$$

Nói cách khác f là phân giải đơn tách biệt được và định lý đã được chứng minh xong.

Ví dụ 7.4. Ma trận phân hoạch ứng với $x_1 x_2 | x_3 x_4$ cho ở bảng 7.1.4 có $v = 2$ nên hàm f tương ứng có phân giải đơn tách biệt.

Thật vậy, từ ma trận phân hoạch thu gọn ở bảng 7.1.5 chúng ta có:

$$\varphi = \overline{x_3 x_4} + x_3 \overline{x_4}$$

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = F[\varphi(x_3, x_4), x_1, x_2] \quad (7.20)$$

Ở đây $F(\varphi, x_1, x_2) = \overline{x_1} \overline{x_2} \varphi + \overline{x_1} x_2 \varphi + x_1 \overline{x_2} \varphi + x_1 x_2 \varphi = \varphi(\overline{x_1} + x_2)$

Nếu ta chọn $\varphi = \overline{x_3 x_4} + x_3 x_4$ (ứng với cột thứ nhất của bảng 7.15) thì chúng ta có dạng phân giải như sau:

$$F(\varphi, x_1, x_2) = \overline{x_1} \overline{x_2} \varphi + \overline{x_1} x_2 \varphi + x_1 \overline{x_2} \varphi + x_1 x_2 \varphi = \varphi(\overline{x_1} + x_2) \quad (7.21)$$

Như vậy hàm f không phải chỉ có một phân giải mà có thể có nhiều hơn.

Từ định lý 7.1.4 chúng ta suy ra một số hệ quả sau đây:

Hệ quả 7.1.4a. Nếu ma trận phân hoạch của hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ có độ phân biệt cột $v = 2$, thì tồn tại hai và chỉ hai phân giải đơn tách biệt - liên quan đến phân hoạch đã cho. Nếu một phân giải ứng với cặp $F(\varphi, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1})$ và $\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$ thì phân giải thứ hai ứng với cặp $G(\overline{\varphi}, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1})$ và $\overline{\varphi}(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$.

Hệ quả 7.1.4b. Nếu hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ có phân giải đơn tách biệt ứng với cặp $F(\varphi, z_0, z_1, \dots, z_{n-s-1})$ và $\varphi(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$ thì hàm $\overline{f}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ có phân giải đơn tách biệt ứng với cặp $\overline{F}(\varphi, z_1, z_2, \dots, z_{n-s-1})$ và $\overline{\varphi}(y_0, y_1, \dots, y_{s-1})$.

Ví dụ 7.4b. Cho hàm chuyển mạch $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ có phân giải đơn tách biệt với phân hoạch $x_1 x_3 | x_2 x_4 x_5$. Ma trận phân hoạch tương ứng với f và $\overline{f}$ cho ở các bảng 7.1.6a, b.

Từ ma trận phân hoạch chúng ta có $v = 2$ và do đó có thể suy ra :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F[\varphi(x_2, x_4, x_5), x_1, x_3]$$

$$\begin{aligned}\text{ở đây, } \varphi(x_2, x_4, x_5) &= \overline{x_2 x_4 x_5} + \overline{x_2 x_4 x_5} + \overline{x_2 x_4 x_5} \\ &= \overline{x_4 x_5} + \overline{x_2 x_4 x_5} \\ &= \overline{x_4} (x_2 + x_5)\end{aligned}$$

$$F[\varphi, x_1, x_3] = \overline{x_1 x_2 \varphi} + x_1 \varphi + x_1 x_3$$

Từ bảng 7.1.6b ta có:

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_5) = G[\varphi(x_2, x_4, x_5), x_1, x_3]$$

$$\varphi = \overline{x_4} (x_2 + x_5)$$

$$\begin{aligned}G[\varphi, x_1, x_3] &= \overline{x_1 \varphi} + \overline{x_1 x_3} + \overline{x_1 x_3 \varphi} \\ &= \bar{F}[\varphi, x_1, x_3]\end{aligned}$$

Bảng 7.1.6a

$x_2 x_4 x_5$ $x_1 x_3$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	1	0	1	1	0	0	1	1
01	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	0	1	1	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1

Bảng 7.1.6b

$x_2 x_4 x_5$ $x_1 x_3$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	0	1	0	0	1	1	0	0
01	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	0	1	1	0	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0

7.1.3. Bảng phân hoạch và ứng dụng

Từ các kết quả nghiên cứu ở trên chúng ta thấy rằng phương pháp ma trận phân hoạch cho phép xác định được các phân giải tách biệt nếu chúng tồn tại. Tuy vậy khi số lượng biến vào n tăng lên thì số lượng ma trận cũng tăng lên rất nhanh vì số lượng ma trận phân hoạch khác nhau là 2^{2^n} . Do vậy H. Alen Curtis đã đề ra nguyên tắc xây dựng các ma trận có cùng một cấu trúc như nhau cho tất cả các hàm chuyển mạch có thể có. Các ma trận như vậy được gọi là **bảng phân hoạch**. Bảng phân hoạch được xây dựng theo nguyên tắc sau đây. Mỗi vị trí của bảng phân hoạch được qui định một con số thập phân gọi là **số cấu trúc** tương ứng với tổ hợp nhị phân của các biến vào tại vị trí đó.

Ví dụ 7.5. Bảng phân hoạch 7.1.7 có vị trí ứng với hàng 2, cột 3 được qui định con số 11 vì vị trí đó ứng với tổ hợp $x_1 x_2 x_3 x_4 = (1011)$. Ở những vị trí (những tổ hợp biến vào) của bảng phân hoạch mà hàm số nhận giá trị 1 thì các con số tương ứng được in trong dấu ngoặc đơn (hoặc khoanh tròn). Ở những vị trí khác hàm số sẽ nhận giá trị 0.

Bảng 7.1.7 có $\mu = \nu = 2$ nên ứng với các phân giải đơn tách biệt như sau:

$$f = F_1[\varphi_1(x_3, x_4), x_1, x_2] = F_2[\varphi_2(x_1, x_2), x_3, x_4]$$

$$\text{Ở đây } F_1 = (\overline{x_1 x_2} + \overline{x_1 x_2 + x_1 x_2}) \varphi_1;$$

$$F_2 = (\overline{x_3 x_4} + \overline{x_3 x_4}) \varphi_2$$

$$\text{trong đó } \varphi_1 = \overline{x_3 x_4} + \overline{x_3 x_4}; \varphi_2 = \overline{x_1 x_2} + \overline{x_1 x_2 + x_1 x_2}$$

Bảng 7.1.7

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	0	1	2	3
0	(0)	1	2	(3)
1	(4)	5	6	(7)
2	8	9	10	11
3	(12)	13	14	(15)

Như vậy từ bảng phân hoạch nếu chúng ta thay đổi cách sắp xếp của các số cấu trúc chúng ta sẽ có các bảng phân hoạch khác nhau. Chẳng hạn từ hàm số $f = \Sigma(0, 3, 4, 7, 12, 15)$ cho ở bảng 7.1.7 chúng ta có thể suy ra bảng 7.1.8. Bảng phân hoạch 7.1.8 không cho ta phân giải đơn tách biệt vì $v = 4 > 2$.

Bảng 7.1.8

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	0	1	2	3
0	(0)	1	5	5
1	2	(3)	(6)	(7)
2	8	9	(12)	13
3	10	11	14	(15)

Ví dụ 7.6. Cho $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma m(0, 5, 7, 9, 11, 12)$. Bảng phân hoạch ứng với $x_3x_4 | x_1x_2$ cho ở bảng 7.1.9. Trong trường hợp này $v = 2$ nên chúng ta nhận được:

$$f(x) = F[\varphi(x_1, x_2), x_3, x_4]$$

Giả sử ta chọn φ ứng với hàng thứ 2 của bảng, nghĩa là:

$$\varphi = (0, 1, 1, 0) \text{ hay } \varphi = (\overline{x_1}x_2 + x_1x_2)$$

$$F = \overline{\varphi} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{\varphi} \overline{x_3} x_4 + \varphi x_3 \overline{x_4}$$

Bảng 7.1.9

x_1, x_2 x_3, x_4	0	1	2	3
0	(0)	4	8	(12)
1	1	(5)	(9)	13
2	2	6	19	14
3	3	(7)	(11)	15

7.2. CÁC DẠNG PHÂN GIẢI KHÁC

Phân giải đơn tách biệt là mức độ đầu tiên để tổng hợp các mạch logic một cách kinh tế. Mức độ tổng hợp các mạch logic kinh tế ở cấp cao hơn có thể nhận được trên cơ sở phân giải phức hợp các hàm logic. Cơ sở toán học của các dạng phân giải phức hợp là lý thuyết đại số hiện đại, mà trước hết là lý thuyết tập hợp. Sau đây chúng ta thử xét một vài ví dụ.

Ví dụ 7.7. Cho hàm số chuyển mạch sau đây:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(0, 3, 4, 7, 12, 15) \quad (7.22)$$

Hàm số (7.22) có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$f(X) = F[\varphi(x_1, x_2), \psi(x_3, x_4)] = \varphi\psi \quad (7.23)$$

ở đây $\varphi = \overline{x_1} + x_2$, $\psi = \overline{x_3 x_4} + x_3 x_4$

Đó là dạng **phân giải tách biệt** vì mỗi biến chỉ nằm trong một hàm số con thành phần nhất định.

Ví dụ 7.8. Cho $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(0, 2, 7, 8, 11, 14)$ (7.24)

Có thể phân giải hàm (7.24) như sau:

$$f(x) = F[\varphi, x_1, x_3] = \overline{\varphi} x_1 x_3 + \varphi (\overline{x_1} + \overline{x_3}) \quad (7.25)$$

ở đây $\varphi = \overline{x_2 x_4} + x_2 x_3 x_4$

Dạng (7.25) là phân giải đơn không tách biệt vì x_3 thuộc cả trong F và cả trong φ .

Hàm (7.24) có thể phân giải phức không tách biệt được như sau:

$$f(X) = F[\varphi(x_2, x_3, x_4), \psi(x_1, x_3)] = \varphi \bar{\psi} + \bar{\varphi} \psi \quad (7.26)$$

$$\text{Ở đây } \varphi = \overline{x_2 x_4} + x_2 x_3 x_4$$

$$\psi = x_1 x_3$$

Bây giờ chúng ta hãy phân loại các dạng phân giải phức hợp. Giả sử $A, B, \dots, C, D$ là các tập con của tập hợp X , nghĩa là $X = \{A, B, \dots, C, D\}$.

Hàm chuyển mạch $f(X)$ gọi là **phân giải lập được** nếu có thể viết nó dưới dạng sau:

$$f(A, B, C) = F[\xi(A), B, C] \quad (7.27)$$

Một cách tổng quát chúng ta có thể biểu diễn dạng phân giải lập như sau:

$$f(A, B, \dots, C, D) = F[\rho[\lambda[\dots \xi(A), B], \dots], C, D] \quad (7.28)$$

Nếu có thể biểu diễn hàm $f(X)$ dưới dạng:

$$f(A, B, \dots, C, D) = F[\Phi(A), \chi(B), \dots, \psi(C), D] \quad (7.29)$$

thì chúng ta có **phân giải phức**.

Hỗn hợp của hai phân giải trên được gọi là **phân giải hỗn hợp**:

$$f(A, B, \dots, C, D) = F[\xi(A), B, \dots, \lambda(C), D] \quad (7.30)$$

Nếu các tập con $A, B, \dots, C, D$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup \dots \cup C \cup D &= X \\ A \cap B \cap \dots \cap C \cap D &= \emptyset \end{aligned} \quad (7.31)$$

thì chúng ta có phân giải tách biệt. Trong các trường hợp khác chúng ta có phân giải không tách biệt.

7.3. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM BOOLE

Trong phần này chúng ta sẽ giới thiệu các định lý về nhận dạng các hàm chuyển mạch phân giải đơn được trên cơ sở lý thuyết đạo hàm Boole. Từ các định lý đó chúng ta có thể dễ dàng xây dựng các thuật toán tương ứng để xác định các hàm số F và φ cho các hàm phân giải đơn được.

Định lý 7.3.1. Cho X_0, X_1, X_2 là các tập con của tập hợp các biến X . Hàm chuyển mạch $f(X)$ có thể phân giải đơn được như sau:

$$f(X) = F[X_1, X_2, \varphi(X_0, X_2)] \quad (7.32)$$

nếu và chỉ nếu đối với mỗi $x_i \in X_0$ tồn tại hàm chuyển mạch g_i , chỉ phụ thuộc vào các biến thuộc X_0 và X_2 , thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{\delta f}{\delta X_0} g_i(X_0, X_2) \quad (7.33)$$

Chứng minh: Trước hết chúng ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử $f(X)$ là phân giải đơn được, nghĩa là:

$$f(X) = F[X_1, X_2, \varphi(X_0, X_2)]$$

do đó chúng ta có các quan hệ sau đây:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{\Delta F}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_i} \quad \wedge x_i \in X_0 \quad (7.34)$$

$$\frac{\delta f}{\delta X_0} = \frac{\Delta F}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta X_0} \quad (7.35)$$

Từ định nghĩa về các toán tử δ và Δ chúng ta có thể suy ra:

$$\frac{\delta \varphi}{\delta X_0} \geq \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_i} \quad (7.36)$$

Bởi vậy, đối với mỗi $x_i \in X_0$ chúng ta có:

$$\frac{\Delta F}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_i} = \frac{\Delta F}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_i} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta X_0} = \frac{\delta f}{\delta X_0} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_i} \quad (7.37)$$

Do đó:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{\delta f}{\delta X_0} g_i(X_0, X_2) \quad (7.38)$$

$$\text{ở đây, } g_i(X_0, X_2) = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x_i} \quad (7.39)$$

Để chứng minh điều kiện đủ chúng ta giả thiết có đẳng thức (7.33). Vì biến phân của hàm $f(X)$ đối với X_0 là hàm số không phụ thuộc vào X_0 nên từ (7.33) chúng ta có thể suy ra đẳng thức sau đây:

$$\frac{\Delta f}{\Delta X_0^{e_0}} = \frac{\delta f}{\delta X_0} g_{e_0}(X_0, X_2) \quad (7.40)$$

đối với mọi $e_0 = (0, 0, \dots, 0)$, (e_0 có số lượng thành phần như X_0). Do vậy từ khai triển Maclaurin của hàm f đối với X_0 chúng ta có thể nhận được:

$$f(X) = f(X_0, X_1, X_2)|_{X_0=0} \oplus \frac{\delta f}{\delta X_0} \varphi(X_0, X_2) \quad (7.41)$$

$$\text{ở đây, } \varphi(X_0, X_2) = \left[\sum_{e_0} g_{e_0}(X_0, X_2) \right]_{|X=0} X_0^{e_0}$$

(7.41) chính là dạng phân giải đơn của $f(X)$, và như vậy định lý đã được chứng minh.

Định lý 7.3.2. Hàm chuyển mạch $f(X)$ có phân giải đơn như sau:

$$f(X) = F[X_1, X_2, \varphi(X_0, X_2)]$$

nếu và chỉ nếu:

$$\frac{\delta}{\delta X_1} \left[\frac{\delta f}{\delta X_0} \right] \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{\delta f}{\delta X_0} \cdot \frac{\delta}{\delta X_1} \left[\frac{\Delta f}{\Delta x_i} \right] \quad (7.43)$$

đối với mọi $x_i \in X_0$

Cách chứng minh định lí 7.3.2 cũng tương tự như cách chứng minh định lí 7.3.1.

Định lí 7.3.3. Hàm $f(X)$ có phân giải đơn như sau:

$$f(X) = F[X_1, X_2, \varphi(X_0, X_2)] \quad (7.44)$$

nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm chuyển mạch $A(X_1, X_2)$ và $B(X_0, X_2)$:

$$f(X_0, X_1, X_2) \oplus f(0, X_1, X_2) = A(X_1, X_2) B(X_0, X_2) \quad (7.45)$$

Chứng minh: Điều kiện đủ của định lí là đương nhiên, do đó ta chỉ chứng minh điều kiện cần. Khai triển hàm F đối với φ theo chuỗi Taylor tại điểm $\varphi(0, X_2)$:

$$F(\varphi, X_1, X_2) = F[\varphi(0, X_2), X_1, X_2] \oplus [\varphi \oplus \varphi(0, X_2)] \frac{\Delta F}{\Delta \varphi} \quad (7.46)$$

Từ (7.46) chúng ta chọn:

$$A = \frac{\Delta F}{\Delta \varphi} \text{ và } B(X_0, X_2) = \varphi(X_0, X_2) \oplus \varphi(0, X_2) \quad (4.47)$$

Như vậy điều kiện cần đã được chứng minh.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng đối với mỗi ma trận phân hoạch $\mu \leq 2v$ và $v \leq 2\mu$. Ở đây v và μ là độ phân biệt cột và độ phân biệt hàng tương ứng.
2. Xây dựng tập hợp các bảng phân hoạch cho các hàm ba biến.
3. Tìm các phân giải đơn tách biệt cho các hàm số sau đây:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(0, 3, 4, 7, 13, 14)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(4, 7, 8, 11)$$

Hàm f_2 có thể có các phân giải phức hay không?

Chương VIII

CÁC HÀM CHUYỂN MẠCH ĐẶC BIỆT

Trong chương V chúng ta đã nghiên cứu hàm chuyển mạch vectơ trong trường hợp tổng quát. Trong chương này chúng ta sẽ đề cập đến các hàm chuyển mạch đặc biệt như các lớp hàm đơn điệu, hàm ngưỡng, hàm đối xứng và các hệ hàm đầy đủ. Chúng ta sẽ nghiên cứu các tính chất cơ bản của các lớp hàm đó và từ đấy đề ra các phương pháp và các thuật toán để nhận dạng chúng. Ngoài ra, chúng ta cũng sẽ đề cập đến một số ứng dụng của các lớp hàm đặc biệt kể trên

8.1. CÁC HÀM ĐƠN ĐIỆU

Trước khi định nghĩa các hàm đơn điệu chúng ta hãy đề cập đến quan hệ sắp xếp giữa các phần tử của tích trực tiếp các đại số Boole hai phần tử:

$$B_2^n = \underbrace{B_2 \times B_2 \times \dots \times B_2}_n$$

Giả sử $X, Y \in B_2^n$ có thể được biểu diễn như sau:

$$X = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$Y = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

trong đó $a_i, b_i \in B_2 = \{0, 1\}$.

Chúng ta nói rằng X bé hơn hoặc bằng Y ($X \leq Y$), nếu và chỉ nếu a_i bé hơn hoặc bằng b_i ($a_i \leq b_i$). Trong các trường hợp khác

giữa X và Y không có quan hệ sắp xếp. Chẳng hạn $X = (0, 0, 1, 0)$, $Y = (1, 0, 1, 0)$, $Z = (0, 1, 1, 0)$, theo định nghĩa chúng ta có $X \leq Y$, $X \leq Z$ nhưng giữa Y và Z không có quan hệ sắp xếp, nghĩa là $Y \not\leq Z$, $Z \not\leq Y$

Định nghĩa 8.1.1. Cho X và Y là các số hạng của dạng tuyến tính quy của hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Hàm f là một hàm *đơn điệu tăng* nếu và chỉ nếu:

$$X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y) \quad (8.1)$$

hoặc là hàm *đơn điệu giảm* nếu và chỉ nếu:

$$X \leq Y \Rightarrow f(X) \geq f(Y) \quad (8.2)$$

Ví dụ chúng ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng các hàm số $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = x_1 + x_2$ là các hàm đơn điệu tăng còn các hàm số $f_3 = x_1 x_2$, $f_4 = x_1 + x_2$ là các hàm đơn điệu giảm.

Định nghĩa 8.1.2. Cho $X = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ và $f(X)$ là hàm đơn điệu tăng. Đặt $U = \{X \mid f(X) = 1\}$, phần tử $X^i \in U$ gọi là *phần tử cực tiểu* trong U nếu không tồn tại phần tử X^j trong U mà $X^j < X^i$.

Như vậy U có thể có một hoặc nhiều phần tử cực tiểu. Ở đây cần phân biệt phần tử cực tiểu và phần tử bé nhất như trong trường hợp tập sắp xếp riêng mà chúng ta đã xét trong chương III.

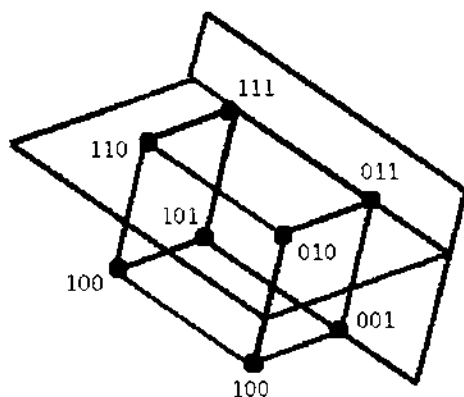
Định lý 8.1.1. Cho X^i là một phần tử cực tiểu trong U của hàm đơn điệu tăng $f(X)$. Tập U_i được định nghĩa như sau:

$$U_i = \{X \mid X \geq X^i \text{ và } f(X) = 1\} \quad (8.3)$$

là một dàn con của dàn 2^n phần tử.

Chứng minh: Từ các giả thiết trên, rõ ràng U là tập sắp xếp riêng. Xét hai phần tử bất kì X^i và X^j thuộc U_i , nghĩa là $f(X^i) = f(X^j) = 1$. Theo các tính chất của tập sắp xếp riêng chúng ta có thể suy ra tích và tổng của X^i và X^j lớn hơn hoặc bằng X^i ,

nghĩa là nằm trong U . Do vậy U_i là dàn con của dàn 2^n phần tử (X có n phần tử).



Hình 8.1.1

Ví dụ 8.1. Cho $U = \{010, 001, 110, 011, 101, 111\}$, như vậy U có hai phần tử cực tiểu là 010 và 001 . Do đó chúng ta có hai tập con U_i như sau:

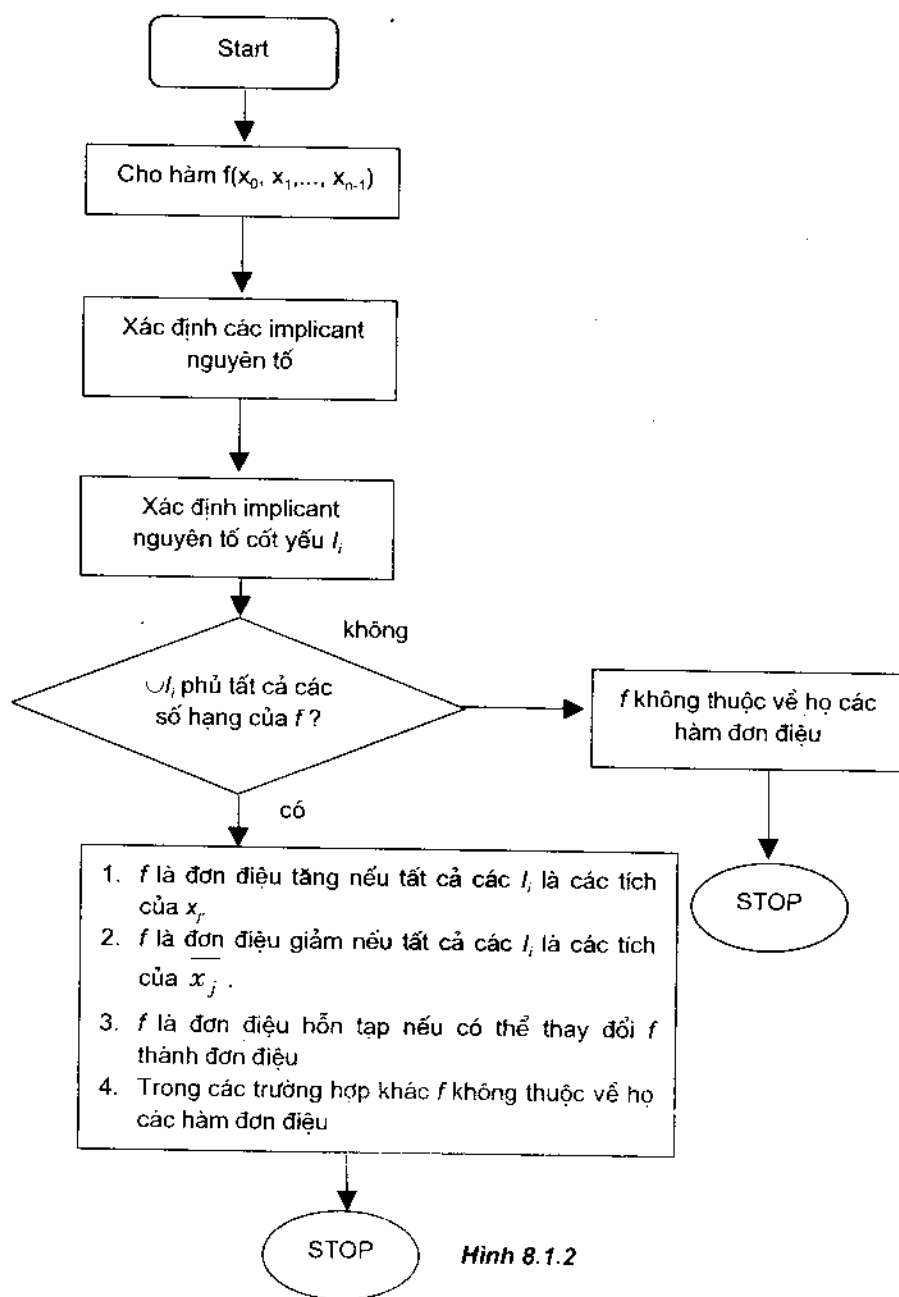
$$U_1 = \{001, 101, 011, 111\}$$

$$U_2 = \{010, 110, 011, 111\}$$

Các dàn con ứng với các mặt phẳng vẽ ở hình 8.1.1.

Định lí 8.1.2. Hàm $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là *đơn điệu tăng* (hay giảm) nếu và chỉ nếu có thể biểu diễn nó dưới dạng tổng của các tích của x_i (hoặc $\bar{x}_i$).

Định nghĩa 8.1.3. Hàm $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là *đơn điệu hỗn tạp* nếu tồn tại một tập con $S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ của tập hợp $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ sao cho khi chúng ta thay thế tất cả x_{ij} bằng $\bar{x}_{ij}$ hoặc tất cả x_{ij} bằng x_{ij} trong biểu thức của f thì f trở thành đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm. Ví dụ hàm $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + \bar{x}_1 x_3$ là hàm đơn điệu hỗn tạp vì nếu ta thay $\bar{x}_1$ bằng x_1 thì hàm f trở thành hàm đơn điệu tăng còn nếu ta thay x_1, x_2, x_3 bằng $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ thì hàm f trở thành hàm đơn điệu giảm.



Hình 8.1.2

Vấn đề được đặt ra là làm thế nào để nhận dạng các hàm đơn điệu.

Định lý 8.1.3. Điều kiện cần để hàm chuyển mạch f là hàm đơn điệu (tăng, giảm hay hỗn tạp) là hàm f được phủ bởi các implicant nguyên tố cốt yếu.

Từ định lý 8.1.3 ta có thể xây dựng được thuật toán nhận dạng các hàm đơn điệu như ở hình 8.1.2.

Ví dụ 8.2. Cho hàm f như sau:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) = \sum m(4, 20, 21, 36, 52, 53, 54, 55)$$

Hàm f có các implicant nguyên tố sau đây:

$$f = \overline{x_3}x_4\overline{x_5}x_6 + x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3x_4$$

Đó cũng chính là các implicant nguyên tố cốt yếu. Khi chúng ta thay $\overline{x_3}$, $\overline{x_5}$, $\overline{x_6}$ bằng các phần tử bù tương ứng của chúng thì f trở thành hàm f_i không có các biến bù (nghĩa là f_i là hàm đơn điệu tăng). Vậy theo định nghĩa thì f là hàm đơn điệu hỗn tạp.

8.2. CÁC HÀM NGUỒNG

Định nghĩa 8.2.1. Hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là hàm ngưỡng nếu và chỉ nếu tồn tại một tập hợp các số thực $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ và T sao cho:

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i x_i \geq T, \quad \text{nếu } f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 \quad (8.4)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} w_i x_i < T, \quad \text{nếu } f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \quad (8.5)$$

Ở đây $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ là *trọng lượng của các biến* $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, còn T là *ngưỡng của hàm số đã cho*.

Ví dụ hàm $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_3 + x_2 \bar{x}_3$ là hàm ngưỡng với tổ hợp giá trị $G(w_1, w_2, w_3; T) = (1, 1, -2; 1)$

Ngược lại người ta cũng có thể xác định được hàm ngưỡng trên cơ sở bộ giá trị G . Ví dụ $G = (1, 1, 1; 2)$ thì chúng ta có thể xác định được bảng giá trị 8.2.1 và do đó có thể biểu diễn hàm ngưỡng như sau:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

Bảng 8.2.1

x_1	x_2	x_3	$\sum_{i=1}^3 w_i x_i$	f
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	2	1
1	0	0	1	0
1	0	1	2	1
1	1	0	2	1
1	1	1	3	1

Bảng 8.2.2

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Nếu cho trước hàm f thì chúng ta có thể tìm được bộ giá trị G trong trường hợp f là hàm ngưỡng.

Ví dụ 8.3. Cho $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_3$. Bảng giá trị thật của hàm số đó là bảng 8.2.2.

Từ bảng 8.2.2 chúng ta suy ra hệ các bất phương trình xác định điều kiện để hàm đã cho là hàm ngưỡng.

$$\left. \begin{array}{l} w_1 + w_2 \\ w_1 + w_2 + w_3 \\ w_3 \\ w_1 + w_3 \\ w_2 + w_3 \end{array} \right\} \geq T > \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Giải hệ bất phương trình (8.6) ta nhận được $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = 2$ và $T = 2$. Vậy hàm đã cho là hàm ngưỡng với $G = (1, 1, 2; 2)$. Bây giờ chúng ta hãy tìm điều kiện để hàm Boole là hàm ngưỡng.

Đặt $F = \sum_{i=0}^{n-1} x_i w_i$ và $\Delta F = F_{\min}^1 - F_{\max}^0$, trong đó $F_{\min}^1$ là giá trị bé nhất của F theo các giá trị thật của f (theo các giá trị $f = 1$), nghĩa là:

$$F_{\min}^1 = \min_i \{F_i(w_0, \dots, w_{n-1})\} \quad (8.7)$$

$$\wedge i | f_i = 1$$

$F_{\max}^0$ là giá trị lớn nhất của F theo giá trị sai của f (theo các giá trị $f = 0$), nghĩa là:

$$F_{\max}^0 = \max_j \{F_j(w_0, \dots, w_{n-1})\} \quad (8.8)$$

$$\wedge j | f_j = 0$$

Định lý 8.2.1. Hàm chuyển mạch là hàm ngưỡng nếu tồn tại tập trọng lượng $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ sao cho $\Delta F > 0$.

Chứng minh: Như chúng ta đã biết, từ bảng thật của hàm số f có thể lập hệ các bất đẳng thức sau:

$$F_i^1(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \geq T > F_j^0(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \quad (8.9)$$

$$\wedge i | f_i = 1$$

$$\wedge j | f_j = 0$$

Như vậy nếu tồn tại tập $W_0 = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ sao cho:

$$\Delta F = [\min F_i^1(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) - \max F_j^0(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})] > 0$$

và T lấy một giá trị bất kì trong khoảng:

$$[\min F_i^1(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), \max F_j^0(w_0, w_1, \dots, w_{n-1})],$$

thì rõ ràng theo định nghĩa f là hàm ngưỡng.

Bây giờ chúng ta xét đến một số tính chất khác của hàm ngưỡng.

Định lí 8.2.2. Hàm ngưỡng là hàm đơn điệu hỗn tạp.

Định lí này chỉ là điều kiện cần cho hàm ngưỡng chứ chưa phải là điều kiện đủ, vì không phải mọi hàm đơn điệu hỗn tạp đều là hàm ngưỡng, chẳng hạn hàm $f = x_1 x_2 + x_3 x_4$ không phải là hàm ngưỡng vì không thể tìm được bộ giá trị $G = (w_1, w_2, w_3, w_4; T)$ thỏa mãn tính chất của hàm ngưỡng.

Định lí 8.2.3. Nếu tập $G = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}; T\}$ thực hiện ngưỡng cho hàm số $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ thì tập $G = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}; T - w_j\}$ thực hiện ngưỡng cho hàm $f(x_0, x_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, x_{n-1})$.

Chứng minh: Tập $G = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}; T)$ thực hiện ngưỡng cho hàm số $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ có nghĩa là điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = 1$ nếu và chỉ nếu:

$$w_0 x_0 + \dots + w_i x_i + \dots + w_{n-1} x_{n-1} \geq T \quad (8.10)$$

Thay $\bar{x}_i = 1 - x_i$ và do đó điều kiện (8.10) có thể viết như sau:

$f(x_0, x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_{n-1}) = 1$ nếu và chỉ nếu:

$$w_0 x_0 + \dots + w_i (1 - x_i) + \dots + w_{n-1} x_{n-1} \geq T \quad (8.11)$$

hay $w_0 x_0 + \dots - w_i x_i + \dots + w_{n-1} x_{n-1} \geq T - w_i$

Như vậy định lí đã được chứng minh.

8.3. CÁC HÀM ĐỐI XỨNG

Định nghĩa 8.3.1. Hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_n)$ là *hàm đối xứng bộ phận* đối với x_i và x_j , $i \neq j$, nếu:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_p, \dots, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \quad (8.12)$$

Ví dụ hàm $f = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4 x_5)$ là hàm đối xứng bộ phận đối với x_1 và x_2 .

Định nghĩa 8.3.2. Hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_n)$ gọi là *hàm đối xứng toàn phần*, hay gọi đơn giản là đối xứng, nếu đó là hàm đối xứng bộ phận đối với x_i và x_j bất kì.

Ví dụ các hàm sau đây là đối xứng:

$$f_1 = (\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_3} + \overline{x_1})$$

$$f_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

Bây giờ chúng ta hãy xét đến các tính chất cơ bản của hàm đối xứng.

Định lý 8.3.1. Nếu hàm chuyển mạch $f(x_0, x_1, \dots, x_p, \dots, x_n)$ là đối xứng đối với:

$$\begin{aligned} x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = 1; x_k = x_{k+1} = \dots = x_{n-1} = 0 \\ \text{và } f(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-k}) = 1 \end{aligned} \quad (8.13)$$

thì $f = 1$ với k bất kì, các $x_i = 1$ và $n - k$ các x_i còn lại bằng 0.

Định lý này có thể suy ra trực tiếp từ định nghĩa các hàm đối xứng.

Đối với hàm đối xứng $f(x_0, \dots, x_n)$, chúng ta định nghĩa một tập đặc trưng A như sau:

$$A = \{a \mid a: \text{số lượng con số mã hóa cho các } x_i \text{ bằng } 1 \text{ đủ để } f = 1\}.$$

Người ta cũng dùng kí hiệu $S_A(x_0, \dots, x_{n-1})$ để đặc trưng cho hàm đối xứng $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ để chỉ số lượng mã hóa 1 cho các x_i đủ để bảo đảm cho $f = 1$. Ví dụ các hàm đối xứng và các S_A tương ứng như sau:

$$f_1 = (\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_3} + \overline{x_4}) \rightarrow S_{\{0,1\}}(x_1, x_2, x_3)$$

$$f_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 \rightarrow S_{\{2,3\}}(x_1, x_2, x_3)$$

$$f_3(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \rightarrow S_{\{\emptyset\}}(x_0, \dots, x_{n-1})$$

$$f_4(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 \rightarrow S_{\{0,1,\dots,n\}}(x_0, \dots, x_{n-1})$$

Sau đây là hệ quả suy ra từ định lí 8.3.1

Hệ quả 8.3.1.1. Hàm đối xứng $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ hoàn toàn được đặc trưng bởi $S_A(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Hệ quả 8.3.1.2. Có 2^{n+1} hàm chuyển mạch đối xứng n biến.

Hệ quả 8.3.1.3. Có $2^{3 \times 2^{n-2}}$ hàm đối xứng bộ phận n biến đối với cặp x_i và x_j .

Hệ quả 8.3.1.4. Có $n + 2$ hàm đối xứng n biến là hàm đơn điệu giảm và $n + 2$ hàm đối xứng n biến là hàm đơn điệu tăng.

Thật vậy, theo tính chất của các hàm đơn điệu thì một hàm số là đơn điệu nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của các tích chỉ chứa $\overline{x_i}$ hoặc x_i (tùy thuộc vào loại đơn điệu). Do vậy chúng ta có thể có các hàm đơn điệu tăng n biến tương ứng sau đây:

$$S_{\{\emptyset\}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0;$$

$$S_{\{0,1,\dots,n\}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = 1;$$

$$S_{\{1,\dots,n\}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \dots;$$

$$S_{\{n\}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_0x_1 \dots x_{n-1}$$

nghĩa là tất cả có $n + 2$ hàm số. Cũng tương tự như vậy chúng ta có $n + 2$ hàm đối xứng đơn điệu giảm.

Bây giờ chúng ta chứng minh một định lí quan trọng về tính chất của hàm số đối xứng.

Định lí 8.3.2. Cho $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm đối xứng. Hàm f là đơn điệu nếu và chỉ nếu nó là hàm ngưỡng.

Chứng minh: Nếu f là hàm hằng số thì định lí là đương nhiên. Do vậy chúng ta chỉ chứng minh định lí trong trường hợp hàm f khác hằng số.

Điều kiện cần: Chúng ta phải chứng minh nếu f là hàm đối xứng và đơn điệu thì nó cũng là hàm ngưỡng. Giả sử f là hàm đối xứng đơn điệu tăng:

$$S_{[k, k+1, \dots, n]}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (8.14)$$

Nếu ta lấy $w_i = \frac{1}{k}$ đối với $i = 1, 2, \dots, n$ và $T = 1$ thì:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n x_i \geq T = 1, \quad (8.15)$$

nếu và chỉ nếu có ít nhất k chữ số 1 trong mã số của x_i . Bây giờ chúng ta lại xét trường hợp f là hàm đối xứng đơn điệu giảm, nghĩa là:

$$S_{[0, 1, \dots, n-k]}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (8.16)$$

Nếu ta lấy $w_i = -\frac{1}{n-k}$ đối với $i = 1, 2, \dots, n$ và $T = -1$ thì:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i = \frac{-1}{n-k} \sum_{i=1}^n x_i \geq T = -1 \quad (8.17)$$

nếu và chỉ nếu có ít nhất k chữ số 1 trong mã số của x_i . Tóm lại f là hàm ngưỡng.

Điều kiện đủ: Chúng ta phải chứng minh nếu f là hàm ngưỡng và đối xứng thì nó cũng là hàm đơn điệu. Theo định lí 8.2.2, nếu f là hàm ngưỡng thì nó cũng là hàm đơn điệu hỗn tạp. Giả sử f là hàm đơn điệu hỗn tạp, nghĩa là f đơn điệu tăng đối với $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ và đơn điệu giảm trong $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}$. Thay đổi các biến số x_i và $x_{i_{k+1}}$ cho nhau. Vì f là hàm đối xứng nên f là đơn điệu tăng đối với $x_{i_{k+1}}$ và đơn điệu giảm đối với x_i . Điều này trái với giả thiết. Do vậy định lí đã được chứng minh.

Do tính chất đối xứng nên việc phân tích và thực hiện các hàm đối xứng đơn giản và kinh tế hơn. Vì thế việc nhận dạng các hàm đối xứng có ý nghĩa quan trọng trong thực tế kĩ thuật. Tổng hợp các hàm đối xứng yêu cầu một số lượng bé hơn các thành phần tổ hợp. Nói chung có 3 phương pháp nhận dạng các hàm đối xứng, đó là phương pháp giao hoán đơn giản, phương pháp Mc.Cluskey và phương pháp đồ thị. Phương pháp đồ thị dựa trên tính chất đối xứng hình học trong bảng Các nân của hàm đối xứng. Do vậy chúng ta sẽ không đề cập đến phương pháp này. Ở đây chúng ta chỉ xét đến hai phương pháp phức tạp hơn nhưng lại có thể xây dựng thuật toán trên máy tính một cách dễ dàng.

8.3.1. Phương pháp giao hoán đơn giản

Phương pháp này được xây dựng trên cơ sở định lí sau:

Định lí 8.3.3. Hàm chuyển mạch $f(x_1, \dots, x_n)$ là đối xứng nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn hai tính chất sau đây:

- 1) f là hàm đối xứng bộ phận đối với x_1 và x_2 , nghĩa là:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n) \quad (8.18)$$

$$2) \quad f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_3, \dots, x_n, x_2) \quad (8.19)$$

Chứng minh: Điều kiện cần của định lý là đương nhiên, vì ta có thể suy ra từ định nghĩa các hàm đối xứng. Do vậy ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Trước hết chúng ta chứng minh rằng với x_i và x_j bất kì, hàm f đối xứng với các cặp x_1 và x_2 , x_2 và x_j . Thật vậy, áp dụng $i - 2$ -lần đẳng thức (8.19) cho hàm f ta có phương trình sau:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}) \quad (8.20)$$

Áp dụng tính chất (1) (đẳng thức 8.18) ta có:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_{i-1}, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}) \quad (8.21)$$

Bây giờ ta dùng tính chất (2) (đẳng thức 8.19) cho đẳng thức (8.21) cho đến khi x_2 nằm tiếp theo x_1 , lúc đó ta nhận được:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_{i-1}, x_n) \quad (8.22)$$

Như vậy là hàm f đối xứng với x_1 và x_i . Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh rằng hàm f đối xứng đối với x_2 và x_j bất kì. Do vậy hàm f là đối xứng.

Thuật toán để nhận dạng hàm đối xứng theo phương pháp này được xây dựng dựa trên hai bước mô tả ở các tính chất (1) và (2) của định lý 8.3.3.

8.3.2. Phương pháp Mc. Cluskey

Phương pháp này dựa vào tính chất của định lý 8.3.1. Từ định lý này chúng ta có thể suy ra rằng các số hạng của hàm số f (dạng tuyến chính quy) có cùng một số đặc trưng α bằng C''_α . Do vậy phương pháp Mc. Cluskey có hai bước như sau:

1. Lập bảng giá trị thật nhưng có thêm một cột ghi số đặc trưng α .

2. Kiểm tra xem tổng số các số hạng có cùng 1 số đặc trưng a có tuân theo công thức C_a^n hay không?

Bây giờ ta hãy xét một số ví dụ.

Ví dụ 8.4. Cho hàm chuyển mạch sau đây:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \Sigma(1, 2, 4, 8, 16, 31, 32, 47, 55, 59, 61, 62, 63)$$

Từ hàm chuyển mạch trên ta xây dựng bảng thật 8.3.1. Từ bảng 8.3.1 ta kiểm tra số các số hạng có cùng đặc trưng a .

Bảng 8.3.1

Số thập phân	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Số a
1		0	0	0	0	1	1
2			0	0	1	0	1
4	0	0	0	1	0	0	1
8	0	0	1	0	0	0	1
16	0	1	0	0	0	0	1
31	0	1	1	1	1	1	5
32	1	0	0	0	0	0	1
47	1	0	1	1	1	1	5
55	1	1	0	1	1	1	5
59	1	1	1	0	1	1	5
61	1	1	1	1	0	1	5
62	1	1	1	1	1	0	5
63	1	1	1	1	1	1	6

Các số hạng có $a = 1$ $C_1^6 = 6$

Các số hạng có $a = 5$ $C_5^6 = 6$

Các số hạng có $a = 6$ $C_6^6 = 1$

Như vậy hàm chuyển mạch đã cho là hàm đối xứng.

8.4. CÁC HỆ HÀM ĐẦY ĐỦ

Một khái niệm quan trọng trong lý thuyết các hàm chuyển mạch là tính đầy đủ hàm số của các hệ hàm. Vậy thế nào là tính đầy đủ hàm số?

Định nghĩa 8.4.1. Cho $\psi = (\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n))$ là tập hợp các hàm chuyển mạch n biến trên B_2 . Tập ψ gọi là **hệ đầy đủ hàm số** (hay là hệ hàm đầy đủ), nếu một hàm chuyển mạch bất kỳ trên B_2 có thể biểu diễn được dưới dạng hợp thành hữu hạn các ϕ_i .

Như chúng ta đã biết, mọi hàm chuyển mạch n biến có thể biểu diễn qua các hàm AND, OR và phủ định, nói cách khác $\psi = \{+, \cdot, -\}$ là một hệ hàm đầy đủ. Áp dụng định lý De Morgan chúng ta còn thấy rằng các tập hợp sau đây cũng là các hệ hàm đầy đủ:

$$\psi_1 = \{+, -\}; \psi_2 = \{., -\} \quad (8.23)$$

Như vậy muốn chứng minh một hệ hàm đầy đủ chúng ta chỉ cần chứng minh rằng hệ hàm đó có thể biểu diễn được ψ_1 hoặc ψ_2 . Ví dụ hệ $\{\supset, \varphi\}$ là một hệ hàm đầy đủ, thật vậy:

$$x_1 \supset (x_1 \varphi x_2) = \overline{x_1} \text{ và } \overline{x_1} \subset x_2 = x_1 + x_2$$

$$\text{hoặc } \overline{\overline{x_1} \varphi x_2} = x_1 x_2$$

Định lý 8.4.1. Các hệ hàm sau đây là đầy đủ

$$\begin{aligned} &\{\supset, \varphi\}; \{\supset, \nabla\}; \{\subset, \nabla\}; \{\subset, \varphi\} \\ &\{\supset, \oplus\}; \{\subset, \oplus\}; \{\equiv, \varphi\}; \{\equiv, \nabla\} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Chứng minh định lý này tương tự như ví dụ ở trên.

Định lý 8.4.2. Hàm NOR (còn gọi là hàm Pierce) có tính đầy đủ hàm số.

Chứng minh: Hàm NOR có tính đầy đủ hàm số vì nó thực hiện được ψ_2 (hoặc ψ_1), thật vậy:

$$\begin{aligned}x_1 \downarrow x_1 &= \overline{x_1 \cdot x_1} = \overline{x_1} \\(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) &= (\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}) = x_1 x_2\end{aligned}\tag{8.25}$$

Định lý 8.4.3. Hàm NAND (còn gọi là hàm Sheffer) có tính đầy đủ hàm số.

Định lý này cũng được chứng minh tương tự như định lý 8.4.2.

Định nghĩa 8.4.2. *Đối ngẫu* của hàm số $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm số được định nghĩa như sau:

$$f_d(x_1, \dots, x_n) = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})\tag{8.26}$$

Đối ngẫu bù của hàm số $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm số sau đây:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \overline{f_d(x_1, \dots, x_n)} = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}\tag{8.27}$$

Định lý 8.4.4. Nếu hàm n biến $f(x_1, \dots, x_n)$ có các tính chất sau:

a) $f(0, \dots, 0) = 1$;

b) $f(1, \dots, 1) = 0$;

c) f không phải là hàm đối ngẫu bù với chính bản thân nó, thì f có tính đầy đủ hàm số.

Chứng minh: Hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ thỏa mãn các điều kiện (a) và (b) có nghĩa là f đối ngẫu với chính bản thân nó. Do vậy nó thực hiện phép toán bù. Điều kiện (c) kéo theo việc tồn tại ít nhất một tập các giá trị của $(x_1, \dots, x_n)$, chẳng hạn $(a_1, \dots, a_n)$, sao cho:

$$\overline{f_d(a_1, \dots, a_n)} \neq \overline{f(a_1, \dots, a_n)}\tag{8.28}$$

Tính tổng quát không thay đổi nếu chúng ta giả thiết:

$$\overline{f_d(a_1, \dots, a_n)} = 1 \Rightarrow f_d(a_1, \dots, a_n) = 0\tag{8.29}$$

$$\overline{f(a_1, \dots, a_n)} = 0 \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 1 \quad (8.30)$$

Từ các điều kiện (a), (b) chúng ta biết được tồn tại ít nhất một $a_i = 0$ và một $a_j = 1$. Giả sử chúng ta có:

$$a_{i_1} = a_{i_2} = \dots = a_{i_s} = 0$$

$$\text{và} \quad a_{j_1} = a_{j_2} = \dots = a_{j_p} = 1$$

$$\text{Chẳng hạn:} \quad f_d(1, 1, \dots, 0, 0, \dots, 1, 1, 1) = 0$$

$$f(0, 0, \dots, 1, 1, \dots, 0, 0, 0) = 1$$

Do vậy hàm f có thể được rút gọn thành hàm hai biến x và y như sau:

$$\phi(x, y) = f(x, x, \dots, y, y, \dots, x, x, x) \quad (8.31)$$

Bảng thật của hàm (8.31) cho ở bảng 8.4.1a. Các điều kiện (a) và (b) kéo theo $\phi(1, 1) = 0$ và $\phi(0, 0) = 1$. Có hai khả năng gán cho β_1 và β_2 những giá trị khác nhau:

$\beta_1 = \beta_2 = 1$ và $\beta_1 = \beta_2 = 0$ như mô tả ở bảng 8.4.1b và c.

Cần lưu ý rằng chúng ta không thể chọn cặp giá trị $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ hoặc $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ được vì như vậy sẽ trái với điều kiện (c) của định lí.

Bảng 8.4.1

x	y	$\phi(x, y)$	x	y	$\phi(x, y)$	x	y	$\phi(x, y)$
1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	β_1	1	0	1	1	0	0
0	1	β_2	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
a)			b)			c)		

Các bảng 8.4.1b và 8.4.1c ứng với các hàm Sheffer và Pierce. Do vậy f là hàm có tính đầy đủ hàm số.

Định lí 8.4.4 cho chúng ta tiêu chuẩn để kiểm tra xem một hàm số cho trước có tính đầy đủ hàm số hay không.

BÀI TẬP

1. Tìm tổng cực tiểu của các hàm sau đây và xét xem chúng có phải là các hàm đơn điệu hay không?

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma m(1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 15, 19, 23)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma m(8, 9, 10, 14, 26, 45, 68, 80, 84, 96)$$

2. Chứng minh rằng tập hợp các hàm đơn điệu tăng tạo thành một dãy chứa 0 và 1. Có phải đây là một dàn bù, một dàn phân bố hay không?

3. Cho x là biến nhị phân, chứng minh rằng nếu $f(x_1, \dots, x_n)$ là hàm ngưỡng thì $x + f$, xf , $\bar{x} + f$, $\bar{x}f$ cũng là các hàm ngưỡng.

4. Kiểm tra xem các hàm sau đây có phải là hàm ngưỡng hay không?

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \Sigma m(1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma m(2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 13, 14)$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \Sigma m(0, 1, 2, 5, 6, 7)$$

5. Hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ gọi là phản đối xứng đối với x_1 và x_2 nếu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, x_n)$. Có bao nhiêu hàm phản đối xứng n biến đối với x_1 và x_2 ?

6. Dùng phương pháp Mc. Cluskey xác định xem hàm số nào dưới đây là đối xứng và đối xứng trộn:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma m(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma m(0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, \\ 17, 20, 23, 27)$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Sigma m(1, 3, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 21, 23, 28, 30)$$

7. Chứng minh các tập hợp sau đây có tính đầy đủ hàm số.

a) $\{x_1 \oplus x_2, \bar{x}\}, \{x_1 \oplus x_2, I\}$

b) Các tập $\{\oplus, +\}, \{\oplus, .\}$ cùng với các hằng số 0 và 1 có sẵn.

Chương IX

CÁC HÀM LOGIC ĐA TRỊ

Từ trước đến nay chúng ta chỉ nghiên cứu các hàm logic hai trị, nghĩa là các biến và các hàm chỉ nhận một trong các giá trị của $\{0, 1\}$. Tuy nhiên, về một ý nghĩa nào đó, chúng ta cũng đã nghiên cứu đến hệ thống logic nhiều giá trị (gọi tắt là **logic đa trị**). Khi chúng ta nghiên cứu đại số chuyển mạch vectơ, vì mỗi vectơ nhị phân n thứ nguyên có thể lấy 1 trong các giá trị từ 0 đến $2^n - 1$. Nói cách khác, đây là hệ thống logic 2^n giá trị.

Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các hệ thống logic m trị. Nhiều định nghĩa và định lý của hệ thống logic hai trị cũng được ứng dụng và mở rộng cho hệ thống logic đa trị. Nhưng số lượng các hàm logic n biến m trị là rất lớn, do đó việc phân tích và tổng hợp các hàm logic đa trị là hết sức phức tạp, trừ trường hợp hàm logic đối xứng. Do tính chất đối xứng nên việc phân tích và tổng hợp các hàm logic đối xứng m trị đơn giản hơn. Vì vậy trong chương này chúng ta chỉ hạn chế ở các hàm logic đa trị đối xứng. Phần tiếp theo trong chương này sẽ đề cập đến những khái niệm cơ bản của **logic mờ** (Fuzzy logic) và các hàm logic m lớp. Để nghiên cứu đại số logic mờ chúng ta sẽ đưa ra các định nghĩa về các phép toán max (cực đại) và min (cực tiểu) thay cho các phép toán AND và OR.

9.1. CÁC HÀM LOGIC M TRỊ

Cũng như các hàm logic hai trị (nhị phân), hàm logic đa trị cũng có thể được biểu diễn bằng bảng thật hoặc bằng bảng hợp thành

của các hàm cơ bản. Bảng thật mô tả hàm logic m trị phải có m^n hàng. Số lượng hàm số có thể có là m^{m^n} , ví dụ chỉ có $2^{2^2} = 16$ hàm logic hai biến 2 trị, nhưng lại có tới $3^{3^2} = 19683$ hàm logic hai biến 3 trị. Như vậy hàm logic đa trị không những chỉ nhiều về số lượng, mà chúng còn nằm trong một cấu trúc đại số phức tạp hơn nhiều. Đó chính là lý do tại sao việc phân tích các hàm logic đa trị rất khó khăn, trừ hàm đối xứng.

Định nghĩa 9.1.1. Hàm logic n biến, m trị $f(x_1, \dots, x_n)$ là đối xứng nếu $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ đối với mọi x_i và x_j .

Định lý 9.1.1. Hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ là đối xứng nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$$a) f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

$$b) f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_3, x_2, \dots, x_n)$$

Định lý này đã được chứng minh trong chương trước.

Định nghĩa 9.1.2. Đối với mỗi tổ hợp giá trị các biến x_i chúng ta định nghĩa vectơ $a = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$, trong đó a_i là số lượng giá trị i của biến. Ví dụ xét hàm 3 biến với 3 trị là 0, 1, 2 với tổ hợp giá trị $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ chúng ta có vectơ $a = (1, 2, 0)$ vì $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ và $a_2 = 0$.

Định lý 9.1.2. Hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ là đối xứng nếu và chỉ nếu giá trị của hàm số đối với tất cả các tổ hợp giá trị của biến có cùng vectơ a là như nhau.

Chứng minh: Giả sử hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ với m trị là đối xứng. Xét một tổ hợp giá trị biến vào và hàm tương ứng sau:

$$f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{a_0}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{a_1}, \underbrace{(m-1), (m-1), \dots, (m-1)}_{a_{m-1}}) = t, \quad (9.1)$$

ở đây, $\sum_{i=0}^{m-1} a_i = n$. Theo định nghĩa, giá trị của hàm đối xứng

không thay đổi khi ta thay đổi vị trí của các biến x_i và x_j . Điều

đó có nghĩa rằng giá trị của hàm số không thay đổi đối với tất cả các tổ hợp giá trị biến vào có cùng một vectơ a . Ngược lại, chúng ta giả thiết rằng hàm f có giá trị như nhau đối với tất cả tổ hợp giá trị biến vào có cùng vectơ a . Giả sử ta thay đổi vị trí của 2 biến x_i và x_j cho nhau. Vì vectơ a của các tổ hợp giá trị biến vào tương ứng với $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ và $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ là như nhau và vì giá trị của f không thay đổi khi tổ hợp biến vào có cùng vectơ a nên:

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

đối với tất cả x_i và x_j .

Vậy theo định nghĩa thì hàm f là hàm đối xứng.

Ví dụ 9.1. Cho hàm đối xứng 2 biến, 3 trị:

$$f(x_1, x_2) = \Sigma_1(1, 3) \cup \Sigma_2(2, 5, 6, 7)$$

trong đó Σ_1 chỉ tổng của các hội sơ cấp mà hàm f nhận giá trị 1 còn Σ_2 là tổng của các hội sơ cấp mà hàm f nhận giá trị 2. Hàm f có thể được biểu diễn như ở bảng 9.1.1.

Bảng 9.1.1

Số thập phân	x_1	x_2	Véc tơ a	Giá trị hàm số f
0	0	0	(2, 0, 0)	Nhóm 0
1	0	1	(1, 1, 0)	
2	0	2	(1, 0, 1)	
3	1	0	(1, 1, 0)	Nhóm 1
4	1	1	(0, 2, 0)	
5	1	2	(0, 1, 1)	Nhóm 2
6	2	0	(1, 0, 1)	
7	2	1	(0, 1, 1)	
8	2	2	(0, 0, 2)	

Định lý 9.1.3. Có $m^{C_{m-1}^{n+1}}$ hàm đối xứng n biến m trị.

Say đây ta sẽ giới thiệu thuật toán nhận dạng các hàm đối xứng nhiều trị. Trước hết chúng ta giới thiệu một số định nghĩa mới.

Định nghĩa 9.1.2. Toán tử $\sim x$ được định nghĩa như sau:

Ta ký hiệu:

$$\underbrace{\sim = \sim (\sim (\dots (\sim x) \dots))}_{k \text{ lần}} \quad (9.2)$$

x	$\sim x$
0	1
1	2
2	3
.	.
.	.
.	.
m - 2	m - 1
m - 1	0

Định nghĩa 9.1.3. Hàm $f(x_1, \dots, x_n)$ gọi là **hàm đối xứng trơn** nếu tồn tại một tập hợp các số nguyên $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ sao cho hàm số sau đây là đối xứng:

$$f(\underbrace{\sim x_1}_{(k_1)}, \underbrace{\sim x_2}_{(k_2)}, \dots, \underbrace{\sim x_n}_{(k_n)}) \quad (9.3)$$

trong đó $0 \leq k_i \leq m - 1$ và không phải tất cả các $k_i = 0$.

Định nghĩa 9.1.4. Nhóm j là tập hợp tất cả các hàng của bảng thật được ánh xạ vào giá trị j , ở đây $0 \leq j \leq m - 1$

Trong trường hợp hàm đối xứng thì tập này tương ứng với tập tất cả các hàng có cùng vectơ a .

Định nghĩa 9.1.5. Đối với mỗi cột i của mỗi nhóm j trong bảng thật chúng ta định nghĩa một **vector tỷ lệ** (ratio) như sau:

$$r_i^{(j)} = (r_{i_0}^{(j)}, r_{i_1}^{(j)}, \dots, r_{i_{m-1}}^{(j)}) \quad (9.4)$$

trong đó $r_{i_l}^{(j)}$ là số lượng l trong cột i của nhóm j , $0 \leq l \leq m - 1$.

Định nghĩa 9.1.6. Chúng ta đánh dấu $M_{a_i}^{(j)}$ là số lượng hàng của bảng thật trong nhóm j có cùng vectơ $a_i^{(j)}$.

Từ các khái niệm trên chúng ta có thể giới thiệu thuật toán nhận dạng hàm đối xứng và đối xứng trộn m trị như sau:

1! Đối với mỗi nhóm xác định vectơ tỷ lệ r cho n cột.

2. Đối với mỗi nhóm j ($j = 0, 1, \dots, m - 1$) lấy một vectơ r bất kỳ, chẳng hạn $r_1^{(j)}$, nếu $r_1^{(j)} = r_i^{(j)}$ với $i = 2, 3, \dots, n$ thì hàm đã cho có thể là hàm đối xứng.

3. Xác định $M_{a_i}^{(j)}$ theo định nghĩa 9.1.6 cho tất cả các nhóm.

4. Tính $M_{a_i}^{(j)}$ theo công thức sau:

$$M_{a_i}^{(j)} = C_{a_0^{(j)}}^n C_{a_1^{(j)}}^{n-a_0^{(j)}} \dots C_{a_{m-1}^{(j)}}^{n-\sum_{k=0}^{m-2} a_k^{(j)}} \quad (9.5)$$

5. So sánh kết quả nhận được ở bước (3) với kết quả tương ứng ở bước (4). Nếu tất cả các kết quả trùng nhau đối với mọi $a_i^{(j)}$, ở đây $j = 0, 1, \dots, m - 1$, thì hàm đã cho là đối xứng

6. Nếu bước (5) không thỏa mãn (các kết quả không đồng nhất) thì giữ cố định cột thứ nhất, thay cột thứ 2 bằng $\sim x_2$ và lặp lại các bước từ (1) đến (5).

7. Lặp lại bước (5) cho tất cả các tổ hợp $\overset{(k_2)}{\sim} x_2, \overset{(k_3)}{\sim} x_3, \dots, \overset{(k_n)}{\sim} x_n$ với $0 \leq k_i \leq m - 1$.

Nếu tồn tại một tập hợp $\{x_1 \sim x_2, \overset{(k_3)}{\sim} x_3, \dots, \overset{(k_n)}{\sim} x_n\}$ thỏa mãn các bước (2) và (5) thì hàm đã cho là đối xứng trộn.

Ví dụ 9.2. Áp dụng thuật toán đã nêu ra ở trên cho hàm $f(x_1, x_2)$ ở ví dụ 9.1. Kết quả tính toán theo các bước cho ở bảng 9.1.3.

Bảng 9.1.3

Biểu diễn thập phân	Hệ đếm 3		$a_i^{(j)} = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)})$	$M_{a_i}^{(j)}$ theo định nghĩa	$M_{a_i}^{(j)} = C_{a_1^{(j)}}^n \cdot C_{a_2^{(j)}}^{n-a_1^{(j)}} \cdot C_{a_3^{(j)}}^{n-a_1^{(j)}-a_2^{(j)}}$
	x_1	x_2			
Nhóm 0	0	0	$a_1^{(0)} = (2, 0, 0)$	1	$C_2^3 \cdot C_0^{3-2} \cdot C_0^{3-2} = 1$
	4	1	$a_2^{(0)} = (0, 2, 0)$	1	$C_0^3 \cdot C_2^{3-0} \cdot C_0^{3-2} = 1$
	8	2	$a_3^{(0)} = (0, 0, 2)$	1	$C_0^3 \cdot C_0^3 \cdot C_2^3 = 1$
vectơ r	(1,1,1)	(1,1,1)			
Nhóm 1	1	0	$a_1^{(1)} = (1, 1, 0)$	2	$C_1^3 \cdot C_1^{3-1} \cdot C_0^{3-1-1} = 2$
	3	1	$a_2^{(1)} = (1, 1, 0)$		
vectơ r	(1,1,0)	(1,1,0)			
Nhóm 2	2	0	$a_1^{(2)} = (1, 0, 1)$	2	$C_1^3 \cdot C_0^{3-1} \cdot C_1^{3-1} = 2$ $C_0^3 \cdot C_1^{3-0} \cdot C_1^{3-1} = 2$
	5	1	$a_2^{(2)} = (0, 1, 1)$		
	6	2	$a_3^{(2)} = (1, 0, 1)$		
	7	2	$a_4^{(2)} = (0, 1, 1)$		
vectơ r	(1,1,2)	(1,1,2)			

Từ các kết quả nhận được ở bảng 9.1.3 chúng ta thấy ngay rằng hàm $f(x_1, x_2)$ là đối xứng.

Ví dụ 9.3. Xét hàm $f(x_1, x_2) = \Sigma_1(2, 4) \cup \Sigma_2(0, 3, 7, 8)$. Các kết quả tính toán cho ở bảng 9.1.4. Trước hết là các vectơ trong mỗi nhóm 1 và 2 không như nhau. Do vậy chúng ta giữ nguyên x_1 và xác định $\sim x_2$. Một lần nữa vectơ ở nhóm trên cũng không như nhau và do đó chúng ta lại tìm $\sim(\sim x_2)$. Lần này chúng ta nhận được các kết quả như ở ví dụ 10.2, nghĩa là hàm $f[x_1, \sim(\sim x_2)]$ đối xứng. Điều này có nghĩa rằng hàm $f(x_1, x_2)$ đã cho ở trên là đối xứng trộn. Trên cơ sở các tính chất của vectơ a và

tính chất của hàm đối xứng chúng ta có thể thu gọn bảng thật mô tả hàm đối xứng từ m^n hàng còn C_{m-1}^{n-m+1} hàng. Nói cách khác, chúng ta đã gạch bớt những hàng có vectơ a lặp lại trong bảng thật ban đầu. Khi đó ta có hệ số thu gọn K , như sau:

$$K_r = \frac{C_{m-1}^{n+m-1}}{m^n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!m^n} \quad (9.6)$$

Từ công thức (9.6) ta có thể suy ra rằng với giá trị cố định $n = N$, $\lim_{m \rightarrow \infty} K_r = 0$ và với giá trị cố định $m = M$, $\lim_{n \rightarrow \infty} K_r = 0$. Nói cách khác là K_r giảm khi m và n tăng lên. Bảng 9.1.5 cho ta một số giá trị mà K_r ứng với các cặp giá trị khác nhau của m và n . Rõ ràng bảng thật biểu diễn hàm logic được thu gọn rất nhiều khi số lượng biến (n) và số lượng giá trị (m) tăng lên.

Bảng 9.1.4

$x_1 x_2$	a	x_1	$\sim x_2$	a	x_1	$\sim(\sim x_2)$	a
Nhóm 0	0 1	(1, 1, 0)	0	2	(1, 0, 1)	0	(2, 0, 0)
	1 2	(0, 1, 1)	1	0	(1, 1, 0)	1	(0, 2, 0)
	2 0	(1, 0, 1)	2	1	(0, 1, 1)	2	(0, 0, 2)
vectơ r (1,1,1)(1,1,1)		(1, 1, 1)	(1, 1, 1)		(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	
Nhóm 1	0 2	(1, 0, 1)	0	0	(2, 0, 0)	0	(1, 1, 0)
	1 1	(0, 2, 0)	1	2	(0, 1, 1)	1	(1, 1, 0)
vectơ r (1,1,0)(0,1,1)		(1, 1, 0)	(1, 0, 2)		(1, 1, 0)	(1, 1, 0)	
Nhóm 2	0 0	(2, 0, 0)	0	1	(1, 1, 0)	0	(1, 1, 0)
	1 0	(1, 1, 0)	1	1	(0, 2, 0)	1	(0, 1, 1)
	2 1	(0, 1, 1)	2	2	(0, 2, 2)	2	(1, 0, 1)
	2 2	(0, 0, 2)	2	0	(1, 0, 1)	2	(0, 1, 1)
vectơ r (1,1,2)(2,1,1)		(1, 1, 2)	(1, 2, 1)		(1, 1, 2)	(1, 1, 2)	

9.2. LOGIC MỜ VÀ LOGIC M LỚP

Trước khi tìm hiểu logic mờ (hay Fuzzy logic) và logic m lớp chúng ta nghiên cứu tập mờ và logic mờ. Như chúng ta đã biết tập hợp là kết hợp của một số phần tử có cùng một số tính chất chung nào đó, chẳng hạn tập các sinh viên:

$$T = \{t \mid t \text{ là một sinh viên}\}$$

Bảng 9.15

m	n	$K_r(m, n)$
3	2	0,67
3	3	0,37
4	3	0,31
3	4	0,19
4	4	0,14
4	5	0,055
5	5	0,044

Ngoài ra không cần phải có một sự giải thích thêm đặc biệt hay giả thiết nào về các đối tượng là các phần tử của tập hợp. Nói một cách khác, các phần tử của tập hợp được định nghĩa một cách chính xác và do đó một đối tượng nghiên cứu chỉ có thể thuộc về hoặc không thuộc về một tập đã cho.

Trong thực tế cuộc sống cũng như trong khoa học kỹ thuật có nhiều khái niệm không được định nghĩa một cách rõ ràng, dứt khoát như vậy. Ví dụ chúng ta nói về một “nhóm sinh viên khá”. Vậy thế nào là khá? Khái niệm về khá không rõ ràng vì có thể sinh viên có điểm thi trung bình bằng 8,4 là khá nhưng

cũng có thể điểm thi trung bình bằng 6,6 cũng là khá (dải điểm khá có thể từ 6,4 đến 8,5), v.v... Nói cách khác, “nhóm sinh viên khá” không được định nghĩa một cách rõ ràng như khái niệm thông thường về tập hợp. Khi chúng ta nói về một “lớp các số lớn hơn 10” hoặc “một đồng sắt vụn” v.v... là chúng ta đã đụng đến những khái niệm “mờ”, hay là những khái niệm không được định nghĩa một cách rõ ràng. Các phần tử của các nhóm trên không có một tiêu chuẩn rõ ràng về tính “thuộc về” (thuộc về một tập nào đó) của chúng. Đó chính là những khái niệm về **tập mờ** hay **tập Fuzzy**. Trong đối thoại hàng ngày chúng ta dùng rất nhiều khái niệm “mờ” này, ví dụ một Ông Giám đốc nào đó nói: “Năm qua chúng ta đã đạt được một số thành tích cơ bản nhưng năm tới phải cố gắng thêm một bước” v.v..., đây là một câu chứa rất nhiều khái niệm mờ.

Định nghĩa 9.2.1. *Tập hợp mờ T trong không gian đối tượng X được đặc trưng bằng hàm “thuộc về” (hoặc hàm đặc tính) đối với những tính chất chủ yếu của x : $p_1, p_2, \dots, p_n$ và có ký hiệu là $f(x) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Hàm f_T là ánh xạ từ không gian các tính chất định nghĩa cho không gian các đối tượng X vào khoảng $[0, 1]$. Giá trị của hàm f_T chỉ mức độ “thuộc về” của x trong T .*

Khoảng xác định của $f_T(x)$ là khoảng $[0, 1]$, trong đó giá trị 0 chỉ mức độ không thuộc về, còn giá trị 1 chỉ mức độ thuộc về hoàn toàn.

Từ định nghĩa trên chúng ta có thể suy ra tập hợp mờ là trống nếu và chỉ nếu hàm thuộc về $f_T(x) = 0$ ở trên X . Một tập hợp mờ là toàn phần nếu và chỉ nếu $f_T(x) = 1$ ở trên X . Hai tập mờ A và B bằng nhau nếu và chỉ nếu $f_A(x) = f_B(x)$ với mọi x trong X .

Định nghĩa 9.2.2. Hợp của hai tập mờ T và S , có các hàm thuộc về tương ứng là $f_T(x)$ và $f_S(x)$ là tập mờ C (ký hiệu $C=T \cup S$) có hàm thuộc về được xác định như sau:

$$f_C(x) = \max[f_T(x), f_S(x)], \quad x \in X \quad (9.7)$$

Giao của hai tập mờ T và S là tập mờ D (ký hiệu $D = T \cap S$) có hàm thuộc về được xác định như sau:

$$f_D(x) = \min[f_T(x), f_S(x)], \quad x \in X \quad (9.8a)$$

Bù của tập mờ T là tập mờ $\bar{T}$ có hàm thuộc về được định nghĩa như sau:

$$f_{\bar{T}}(x) = 1 - f_T(x), \quad x \in X \quad (9.8b)$$

Trên cơ sở lý thuyết tập hợp cổ điển người ta đưa ra logic hai giá trị mô tả các trạng thái “có” hoặc “không”, “làm việc” hoặc “không làm việc”, v.v... Tuy nhiên, trong thực tiễn, các quá trình vật lý, các quá trình kỹ thuật không phải lúc nào cũng diễn ra đúng với những giả thiết trên, mà ngược lại thường các giả thiết đó không thỏa mãn, các giá trị của các biến hệ thống được định nghĩa một cách chủ quan và không rõ ràng. Những hiện tượng như vậy ngày một nhiều hơn, ví dụ trong các lĩnh vực xử lý tin, điều khiển tối ưu, nhận dạng hệ thống, trí tuệ nhân tạo, và nói chung là trong các quá trình quyết định nhằm giải các bài toán với các dữ liệu không đầy đủ, hoặc định nghĩa không rõ ràng (giải các bài toán trong điều kiện thiếu thông tin).

Trong logic nguyên thủy (hai hoặc nhiều trị) mỗi một đại lượng được gán cho một giá trị khách quan xác định hoặc xác suất, còn trong logic mờ thì mỗi đại lượng được gán một giá trị chủ quan giữa đúng và sai. Chính vì vậy mà việc tổng hợp và phân tích mờ phức tạp hơn nhiều.

Định nghĩa 9.2.3. Đại số mờ hay đại số Fuzzy là hệ thống đại số $(B, +, \cdot, -)$, trong đó:

- B tập hợp mờ chỉ mức độ “thuộc về” của các thành phần của B giữa 0 và 1.

- Hai phép toán “+” và “ $\cdot$ ” được định nghĩa như sau:

Nếu $x, y \in B$ thì $x + y = \max(x, y)$; $x \cdot y = \min(x, y)$

- Phép toán phủ định “-” được định nghĩa là: nếu $x \in B$ thì $\bar{x} = 1 - x$.

Từ định nghĩa trên chúng ta có thể suy ra một số tính chất sau đây: Giả sử $x_1, x_2, x_3 \in B$.

$$\begin{array}{ll} x + x = x; & x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3 \\ x \cdot x = x; & x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \\ x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3; & \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2} \\ \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}; & (x + \bar{x}) = \max(x, \bar{x}); \\ (x \cdot \bar{x}) = \min(x, \bar{x}); & x_1(x_1 + x_2) = x_1; \end{array} \quad (9.9)$$

Định nghĩa 9.2.4. Cho đại số mờ $(B, +, \cdot, -)$. Hàm logic mờ (gọi tắt là hàm mờ) là ánh xạ từ B vào B .

Ví dụ ta có hàm mờ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + \overline{x_1}x_1x_2x_3 + \overline{x_1}\overline{x_2}x_2 = x_2(x_1x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2})$$

Cần chú ý rằng không thể rút gọn các biểu thức $\overline{x_1}x_1x_2x_3$ và $\overline{x_1}\overline{x_2}x_2$ thành 0, cũng như không thể rút gọn $x_1 + \overline{x_1}$ và $x_2 + \overline{x_2}$ thành 1 được. Tuy vậy đối với một biến mờ bất kỳ nào chúng ta cũng có thể nhận được các quan hệ sau đây:

$$\begin{array}{l} x + \bar{x} \geq 0,5 \\ x \cdot \bar{x} \leq 0,5 \end{array} \quad (9.10)$$

Áp dụng quan hệ (9.10) chúng ta có thể đơn giản hàm mờ tương tự như hàm logic hai trị trước đây, chẳng hạn:

$$f = x_2 \overline{x_2} (x_3 + \overline{x_3}) = x_2 \overline{x_2}$$

Như chúng ta đã biết, giá trị của mỗi hàm mờ hay mỗi biến mờ chỉ mức độ “thuộc về” của chúng trong khoảng $[0, 1]$. Giả thiết khoảng giá trị đó là liên tục và chúng ta có thể phân khoảng giá trị đó thành các đoạn. Mỗi đoạn chia như vậy tương ứng với một lớp giá trị của các biến và hàm mờ:

Lớp thứ nhất: $\alpha_1 < x \leq 1$

Lớp thứ hai: $\alpha_2 < x \leq \alpha_1$ (9.11)

.....

Lớp thứ m : $0 \leq x \leq \alpha_{m-1}$

Trong đó $1 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{m-1} > 0$. Nhờ sự phân chia như vậy mà chúng ta có thể nhận dạng được một hàm mờ hay một biến mờ theo một trong các lớp trên. Mặt khác, việc chia khoảng $[0, 1]$ thành các lớp cho phép chúng ta nghiên cứu các hệ thống logic mờ như logic đa trị trước đây. Khi đó ta có thể gán cho các lớp những ý nghĩa khác nhau. Ví dụ như $m = 3$, chúng ta có thể giả thiết đối tượng x thuộc về một tập nào đó nếu như nó ở trong lớp 1, không thuộc về tập nào đó nếu như nó ở trong lớp 3 và đối tượng x không xác định nếu nó nằm trong lớp thứ 2. Sự phân khoảng $[0, 1]$ thành m lớp khác nhau dẫn đến khái niệm về đại số logic m lớp và hàm logic m lớp.

Định nghĩa 9.2.5. Đại số m lớp là đại số mờ nhưng các giá trị của biến được xác định bằng các lớp chứ không phải bằng các giá trị cố định. Cũng tương tự như vậy, **hàm logic m lớp** là hàm mờ nhưng các giá trị của biến và của hàm được xác định bằng các lớp chứ không phải bằng các giá trị cố định.

Bây giờ chúng ta xét đến vấn đề phân tích các hàm logic m lớp.

9.3. PHÂN TÍCH CÁC HÀM LOGIC M LỚP

Phân tích các hàm logic m lớp thực chất là tìm các điều kiện của các biến mờ $x_i \in X$ để cho hàm số thuộc về một lớp M nào đấy. Chúng ta hãy xét đến hai dạng biểu diễn cơ bản của một hàm logic mờ, đó là dạng tổng của các tích và dạng tích của các tổng. Thủ tục phân tích hàm logic mờ theo hai dạng đó tương tự như nhau, do đó ở đây chúng ta chỉ xét đến một trong hai dạng mà thôi. Để đơn giản chúng ta xét đến một ví dụ cụ thể.

Ví dụ 9.4. Xét hàm logic mờ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} + x_2 \overline{x_3}$. Chúng ta hãy tìm các điều kiện của các biến mờ x_1, x_2, x_3 để hàm $f(x_1, x_2, x_3)$ thuộc về lớp M . Nói cách khác chúng ta tìm điều kiện để:

$$a_M \leq f(x_1, x_2, x_3) < a_{M+1} \text{ hay } a_M \leq x_1 \overline{x_2} + x_2 \overline{x_3} < a_{M+1}$$

Chúng ta chia các điều kiện trên thành hai nhóm khác nhau:

$$\text{Nhóm 1: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq a_M \\ \text{và} \\ x_2 \leq 1 - a_M \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} x_2 \geq a_M \\ \text{và} \\ x_3 \leq 1 - a_M \end{array} \right\}$$

$$\text{Nhóm 2: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 < a_{M+1} \\ \text{và} \\ x_2 > 1 - a_{M+1} \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} x_2 < a_{M+1} \\ \text{và} \\ x_3 > 1 - a_{M+1} \end{array} \right\}$$

Do vậy việc phân tích hàm logic m lớp chỉ còn là việc giải hệ thống các bất phương trình ở trên.

Ví dụ 9.5. Tìm các điều kiện của biến mờ để hàm số $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} + x_2 \overline{x_3}$ thuộc lớp M , nghĩa là điều kiện:

$$\text{Nhóm 1: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq a_M \\ \text{và} \\ x_2 \leq 1 - a_M \\ x_3 \geq a_M \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq 1 - a_M \\ \text{và} \\ x_3 \geq 1 - a_M \end{array} \right\}$$

$$\text{Nhóm 2: } \left\{ \begin{array}{l} x_1 < a_{M-1} \\ \text{và} \\ x_2 > 1 - a_{M-1} \\ x_3 < a_{M-1} \end{array} \right\} \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} x_1 > 1 - a_{M-1} \\ \text{và} \\ x_3 > 1 - a_{M-1} \end{array} \right\}$$

Trên cơ sở các kết quả phân tích ở trên người ta có thể dùng các hệ logic để thực hiện các hàm mờ. Vấn đề này vượt ra ngoài khuôn khổ của cuốn sách nên chúng ta không đi xa hơn nữa.

BÀI TẬP

1. Những hàm số nào trong các hàm số hai biến ba trị sau đây là đối xứng, đối xứng trộn?
 - a) $\Sigma_1(1, 3) \cup \Sigma_2(2, 5, 6, 7)$
 - b) $\Sigma_1(0, 2, 6) \cup \Sigma_2(1, 3)$
 - c) $\Sigma_1(2, 4, 6) \cup \Sigma_2(5, 7, 8)$
 - d) $\Sigma_1(0, 2, 4, 5, 7) \cup \Sigma_2(3, 6, 8)$
 - e) $\Sigma_1(0, 1, 5, 8) \cup \Sigma_2(4, 6)$
 - f) $\Sigma_1(0, 2, 5) \cup \Sigma_2(6, 8)$
2. Những hàm số nào trong các hàm số 3 biến ba trị sau đây là đối xứng, đối xứng trộn?
 - a) $\Sigma_1(0, 4, 12, 13, 14, 16, 22, 26) \cup \Sigma_2(1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 25)$
 - b) $\Sigma_1(1, 3, 4, 5, 7, 13, 17, 18, 22) \cup \Sigma_2(0, 1, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 21, 23, 25)$

3. Tối thiểu hóa các hàm logic m lớp sau đây:

$$a) f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3$$

$$b) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_1 + x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_4 + x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_4 + x_1 x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_4}$$

4. Tìm các tập điều kiện của các biến để các hàm logic m lớp sau đây nằm trong lớp M : $a_M \leq f < a_{M-1}$

$$a) f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \overline{x_2} + x_2 \overline{x_3} + x_3 \overline{x_1})$$

$$b) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \overline{x_4} (x_1 + \overline{x_2} \overline{x_3} + x_4 \overline{x_4}) (\overline{x_1} + \overline{x_2} x_3 x_4)$$

Chương X

LÍ THUYẾT NHÓM, VÀNH, TRƯỜNG

Trong các chương trước chúng ta đã làm quen với những khái niệm cơ bản nhất của toán học rời rạc và từ đó xây dựng cấu trúc đại số tổng quát và cấu trúc của đại số Boole. Từ cấu trúc đại số Boole chúng ta đã tìm hiểu các tính chất đặc trưng của các hàm rời rạc như các hàm chuyển mạch, hàm chuyển mạch vectơ, hàm logic đa trị v.v... Để cung cấp cho bạn đọc “công cụ” cơ bản nhằm tiếp tục đi sâu nghiên cứu toán học rời rạc cũng như giúp bạn đọc tổng quát hóa những vấn đề đã tìm hiểu trong các chương trước trên quan điểm của toán học hiện đại chúng tôi dành chương này để giới thiệu những vấn đề cốt lõi nhất của lý thuyết nhóm, vành và trường. Đây là những khái niệm quan trọng nhất và cơ bản nhất của toán học hiện đại mà mỗi người có trình độ đại học trở lên cần phải biết. Đối với những bạn đọc ít có thời gian đi sâu nghiên cứu thì Chương X có thể xem như một phụ lục và không phải băn khoăn khi xem lướt qua nó.

10.1. NHÓM VÀ NỬA NHÓM

Cho $(A, *)$ là một hệ thống đại số, ở đây $*$ là phép toán nhị phân trên tập A . $(A, *)$ được gọi là **nửa nhóm** nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

a) $*$ là một phép toán đóng trong tập A .

b) $*$ có tính kết hợp, nghĩa là:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in A \quad (10.1)$$

Ví dụ, cho A là tập các số nguyên, dương và chẵn $\{2, 4, 6, \dots\}$ và $+$ là phép toán cộng các số nguyên. Rõ ràng hệ thống $(A, +)$ là một nửa nhóm.

Định nghĩa 10.1.1. Cho $(A, *)$ là một hệ thống đại số, trong đó $*$ là một phép toán nhị phân trên tập A . Một phần tử e trong A được gọi là *đơn vị trái* nếu đối với mọi $x \in A$ ta có $e * x = x$. Phần tử $e \in A$ được gọi là *đơn vị phải* nếu đối với mọi $x \in A$ ta có: $x * e = x$.

Ví dụ hệ thống đại số cho ở hình 10.1.1 có β và δ là các đơn vị trái, còn hệ thống đại số cho ở hình 10.1.2 có α là đơn vị phải.

$*$	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	α	β	γ	γ
δ	α	β	γ	δ

Hình 10.1.1

$*$	α	β	γ	δ
α	α	β	δ	γ
β	β	α	γ	δ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	δ	β	γ

Hình 10.1.2

Phần tử $e \in A$ được gọi là *phần tử đơn vị* nếu nó vừa là đơn vị phải vừa là đơn vị trái.

Định lý 10.1.1. Nếu tồn tại phần tử đơn vị e đối với phép toán hai ngôi $*$ trên tập A thì phần tử đó là duy nhất.

Phần tử đơn vị có khi còn được gọi là *phần tử trung lập*; chẳng hạn cho một hệ thống đại số $(N, +)$, trong đó N là tập hợp các số

tự nhiên còn $+$ là phép toán cộng đại số thông thường. Trong trường hợp này phần tử 0 là phần tử đơn vị. Cho $(A, *)$ là một hệ thống đại số, trong đó A là tập hợp các ánh sáng màu, còn $*$ là phép toán hai ngôi, sao cho $a * b$ là ánh sáng màu kết quả khi ta trộn hai ánh sáng màu a và b với nhau. Rõ ràng trong trường hợp này ánh sáng trắng là phần tử đơn vị của hệ thống đại số đã cho.

Định nghĩa 10.1.2. Nửa nhóm có một phần tử đơn vị được gọi là *vị nhóm* (monoid)

Ví dụ 10.1. Cho A là một tập sinh viên có chiều cao khác nhau, o là một phép toán hai ngôi được định nghĩa như sau:

$$\wedge a, b \in A, a o b = \text{phần tử cao hơn của } a \text{ và } b.$$

Như vậy hệ thống đại số (A, o) là một vị nhóm với phần tử đơn vị là sinh viên có chiều cao bé nhất.

Định nghĩa 10.1.3. Cho tập hợp A và phép toán hai ngôi $*$ trên A với phần tử đơn vị là e . Phần tử x' được gọi là *phần tử nghịch đảo* của $x \in A$, nếu:

$$x * x' = x' * x = e \quad (10.2)$$

Định lý 10.1.2. Trong một vị nhóm $(A, *, e)$, phần tử nghịch đảo của một phần tử nếu tồn tại thì nó là duy nhất.

Thật vậy, giả sử x có hai phần tử nghịch đảo là x' và x'' , theo định nghĩa chúng ta có:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

Định nghĩa 10.1.4. Một vị nhóm mà trong đó mỗi phần tử của nó có phần tử nghịch đảo tương ứng gọi là một *nhóm*.

Chẳng hạn cho I là tập hợp của tất cả các số nguyên và $+$ là phép toán cộng đại số thông thường các số nguyên. Rõ ràng hệ

thống đại số $(I, +)$ là một nhóm với phần tử đơn vị là 0 và phần tử nghịch đảo của phần tử n là $-n$.

$\oplus$	Chẵn	Lẻ
Chẵn	Chẵn	Lẻ
Lẻ	Lẻ	Chẵn

Hình 10.1.3

Ví dụ 10.2. Cho $G = \{\text{chẵn, lẻ}\}$ và một phép toán nhị phân $\oplus$ được định nghĩa như ở hình 10.1.3.

Chúng ta có thể kiểm tra dễ dàng rằng $(G, \oplus)$ là một nhóm với phần tử đơn vị là “chẵn” và cả hai phần tử “chẵn” và “lẻ” đều có phần tử nghịch đảo là chính bản thân chúng.

Ví dụ 10.3. Cho $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, còn $+$ là phép toán hai ngôi trên Z_p sao cho đối với $a, b \in Z_p$ chúng ta có:

$$a + b = \begin{cases} a + b, & \text{nếu } (a + b) < p \\ a + b - p, & \text{nếu } (a + b) \geq p \end{cases} \quad (10.3)$$

Hệ thống đại số $(Z_p, +)$ là một nhóm đối với giá trị bất kì của p , phần tử đơn vị là 0 và phần tử nghịch đảo của phần tử $x \in Z_p$ là phần tử $p - x$. Nhóm này có tên gọi là **nhóm các số nguyên modul p** .

Định nghĩa 10.1.5. Nhóm $(A, *)$ gọi là **nhóm giao hoán** hay **nhóm Abel** (tên gọi của nhà toán học Naui N. H. Abel, 1802 - 1829) nếu phép toán $*$ có tính chất giao hoán, nghĩa là

$$a, b \in A, a * b = b * a \quad (10.4)$$

Ví dụ $(Z_p, +)$ là một nhóm giao hoán. Nhóm $(A, *)$ là một **nhóm hữu hạn** nếu tập hợp A là hữu hạn; là **nhóm vô hạn** nếu A là vô hạn. Số phần tử của tập hợp A xác định **bậc của nhóm**.

Định nghĩa 10.1.6. Cho $(A, *)$ là một nhóm, B là một tập con của A . Hệ thống $(B, *)$ cũng là một nhóm.

Tập hợp của tất cả các số nguyên I với phép cộng đại số thông thường các số nguyên tạo thành nhóm $(I, +)$. Có thể kiểm

tra dễ dàng rằng $(E, +)$ là nhóm con của nhóm $(I, +)$, trong đó E là tập hợp của tất cả các số nguyên chẵn.

Định lý 10.1.3. Cho $(A, *)$ là một nhóm, B là tập con của A . Nếu B là tập hữu hạn và phép toán $*$ là khép kín trong B thì $(B, *)$ là một nhóm con của $(A, *)$.

Chứng minh: Cho a là một phần tử trong B . Nếu $*$ là phép toán đóng trong B thì tất cả các phần tử $a, a^2, a^3, \dots$ đều nằm trong B . Ở đây ta kí hiệu

$$a^2 = a * a, \quad a^3 = a * a * a \text{ và } a^m = \underbrace{a * a * \dots * a}_{m \text{ lần}} \quad (10.5)$$

Vì B là một tập hữu hạn nên theo nguyên lý xếp chồng thì ta phải có các giá trị i và j nào đó ($i < j$) mà $a^i = a^j$. Điều này có nghĩa rằng $a^i = a^i * a^{j-i}$. Do vậy a^{j-i} là phần tử đơn vị của $(A, *)$ và nằm trong B . Nếu $j - i > 1$ thì $a^{j-i} = a * a^{j-i-1}$, nghĩa là a^{j-i-1} là phần tử nghịch đảo (phần tử bù) của a và cũng nằm trong B . Nếu $j-i = 1$ thì ta có $a^i = a^i * a$. Trong trường hợp này thì a là phần tử đơn vị và là phần tử đảo của chính bản thân nó. Như vậy là phép toán $*$ khép kín trong B bảo đảm rằng $(B, *)$ là một nhóm con của $(A, *)$.

Thông thường, người ta dùng kí hiệu $(+)$ và $(\bullet)$ để thay thế cho kí hiệu chung $(*)$. Trong kí hiệu cộng thì $x * y$ được thay bằng $x + y$, phần tử bù của x là $-x$ và phần tử đơn vị là 0 . Trong kí hiệu nhân thì $x * y$ được thay bằng $x.y$, phần tử bù của x là x^{-1} và phần tử đơn vị là 1 .

10.2. CÁC PHẦN TỬ SINH

Cho $(A, *)$ là một hệ thống đại số, trong đó A là tập của các màu và phép toán nhị phân $*$ cho ta màu tổ hợp của hai màu, ví dụ đỏ $*$ vàng = da cam.

Giả sử ta có tập các màu trong A , vậy ta có thể biết được tất cả các màu nhận được do các phép tổ hợp các cặp màu sinh ra hay không.

Giả sử $(A, *)$ là một hệ thống đại số, và $B = \{a_1, a_2, \dots\}$ là một tập con của A . Ta gọi B_1 là một tập con của A chứa tập B cũng như tất cả các phần tử sinh ra do phép toán $a_i * a_j$ đối với a_i, a_j trong B ; B_1 được gọi là tập được sinh ra, trực tiếp bởi tập B . Tương tự như vậy, B_2 là tập do B_1 trực tiếp sinh ra, v.v... và B_{i+1} là tập do B_i trực tiếp sinh ra. Ta đặt $B^* = B \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots$. Hệ thống đại số $(B^*, *)$ được gọi là **hệ thống con** được sinh ra bởi tập B và một phần tử được gọi là sinh ra bởi tập B nếu nó thuộc B^* . Cần lưu ý rằng phép toán $*$ là khép kín trong B^* . Như vậy đối với nhóm $(A, *)$ nếu B^* là hữu hạn, thì $(B^*, *)$ là một nhóm con. Nếu $B^* = A$ thì B được gọi là **tập sinh** hoặc **tập của các phần tử sinh** của hệ thống đại số $(A, *)$. Trong ví dụ về tổ hợp các màu thì tập sinh là tập con của tập màu mà các tổ hợp của chúng sẽ sinh ra tất cả các màu của tập ban đầu.

Định nghĩa 10.2.1. Nhóm có tập sinh chỉ có một phần tử được gọi là **nhóm tuần hoàn**. Nói một cách khác, nhóm tuần hoàn chứa phần tử a sao cho mọi phần tử của nó đều có dạng $a_i = a^k$, trong đó k là một số nguyên nào đó. Ví dụ **nhóm cộng tính** (nhóm mà phép toán $*$ là phép cộng) các số nguyên là một **nhóm tuần hoàn**.

Ví dụ 10.4. Nhóm cho ở hình 10.2.1 là nhóm tuần hoàn.

$*$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	γ

Hình 10.2.1

$*$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

Hình 10.2.2

Vì từ hình 10.2.1 ta có:

$$\gamma = \beta * \beta = \beta^2$$

$$\delta = \gamma * \beta = \beta * \beta * \beta = \beta^3$$

$$\alpha = \delta * \beta = \beta * \beta * \beta * \beta = \beta^4$$

Độc giả có thể kiểm tra dễ dàng để thấy nhóm cho ở hình 10.2.2 không phải là nhóm tuần hoàn. Từ hình 10.1.2 ta rút ra $\langle \beta \rangle$ là tập sinh và cả $\langle \delta \rangle$ cũng là tập sinh.

Giả sử $\langle A, * \rangle$ là một nhóm tuần hoàn và $\langle a \rangle$ là tập sinh của $\langle A, * \rangle$. Như vậy các phần tử của tập A có thể được biểu diễn dưới dạng: $a, a^2, a^3, \dots$. Vì tính kết hợp của nhóm nên ta có:

$$a^i * a^j = a^j * a^i = a^{i+j}$$

Do vậy nhóm tuần hoàn có *tính giao hoán*.

Giả sử B là tập sinh của nhóm $\langle A, * \rangle$. Vấn đề được đặt ra ở đây là có bao nhiêu con đường để tạo nên phần tử $a \in A$ thông qua các phần tử của tập sinh B . Rõ ràng có nhiều con đường khác nhau và vấn đề là ở chỗ phải tìm được con đường ngắn nhất để tạo nên phần tử a từ các phần tử của tập sinh B và cả các phần tử được sinh ra trước đó. Chẳng hạn một con đường để tạo nên phần tử a là ứng dụng r lần phép toán $*$ đối với các phần tử sinh và cả các phần tử được tạo ra trước đó:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_r$$

sao cho $a_r = a$ và mỗi a_i với $1 \leq i \leq r$ có thể được biểu diễn dưới dạng $a_i = a_j * a_k$

Ở đây a_j và a_k là các phần tử thuộc tập sinh B hoặc các phần tử được tạo ra trước phần tử a .

Ví dụ chúng ta xét hệ thống đại số $(I, +)$, ở đây I là tập các số nguyên dương, $+$ là phép toán cộng số nguyên. Rõ ràng tập

$B = \{1\}$ là tập sinh của nhóm tuần hoàn này. Như vậy một số nguyên n bất kì có thể được tạo ra bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn với $n = 9$ ta có một số con đường như sau:

2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	9			
2	4	8	9				
2	7	9					

Dãy các phân tử trong I để tạo nên số nguyên n được gọi là **chuỗi cộng đối với n** . Bài toán được đặt ra là xác định chuỗi cộng ngắn nhất đối với số nguyên n cho trước. Đây là một bài toán rất lí thú nhưng nằm ngoài khuôn khổ của cuốn sách này. Tuy vậy để minh hoạ chúng ta giới thiệu hai thuật toán đơn giản để xác định chuỗi cộng đối với n .

Thuật toán 1: Ta phân tích n thành tích của hai thừa số p và q . Trước hết ta xác định các chuỗi cộng đối với p và q và sau đó tổ hợp chúng để có được chuỗi cộng đối với pq .

Giả sử các chuỗi cộng đối với p và q như sau:

$$p_1 p_2 \dots p_{i-1} p$$

$$q_1 q_2 \dots q_{j-1} q$$

Rõ ràng chuỗi cộng đối với $n = pq$ sẽ là:

$$q_1 q_2 \dots q_{j-1} q p_1 p_2 \dots p_{i-1} pq$$

Ví dụ với $n = 45$ ta có $n = 5 \times 9$. Chuỗi cộng đối với 5 và 9 tương ứng là:

2	3	5	
2	4	8	9

Do đó chuỗi cộng đối với n là:

2	4	8	9	18	27	45
---	---	---	---	----	----	----

Mặt khác ta cũng có thể lấy dạng chuỗi cộng khác của 9 như sau:

$$2 \quad 3 \quad 6 \quad 9$$

Do vậy chuỗi cộng đôi với $n = 45$ sẽ là:

$$2 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 18 \quad 27 \quad 45$$

Thuật toán 2: Đây là thuật toán đệ quy để tìm chuỗi cộng. Nếu n chẵn ta có thể xác định chuỗi cộng đôi với $n/2$ và sau đó cộng thêm $n/2$ để có chuỗi cộng đôi với n . Thật vậy, nếu chuỗi cộng đôi với $n/2$ là:

$$a_1, a_2, \dots, \frac{n}{2},$$

thì chuỗi cộng đôi với n sẽ là:

$$a_1, a_2, \dots, \frac{n}{2}, n.$$

Nếu n là lẻ thì trước hết ta xác định chuỗi cộng đôi với $\frac{(n-1)}{2}$ sau đó thêm $\frac{(n-1)}{2}$ để có chuỗi cộng đôi với $(n-1)$ và cuối cùng thêm 1 để có n :

$$a_1, a_2, \dots, \frac{(n-1)}{2}, (n-1)n.$$

Áp dụng thuật toán này cho nhóm cộng tính các số nguyên ở trên với $n = 45$ ta có chuỗi cộng sau đây:

$$2 \quad 4 \quad 5 \quad 10 \quad 11 \quad 22 \quad 44 \quad 45$$

10.3. TẬP KẾ VÀ ĐỊNH LÝ LA GRANGE

Cho $(A, *)$ là một hệ thống đại số, $*$ là phép toán nhị phân. Cho a là một phần tử thuộc A và H là một tập con của A .

Định nghĩa 10.3.1. *Tập kề bên trái của H đối với phần tử a , ký hiệu là $a * H$, là tập có các phần tử được xác định như sau:*

$$a * H = \{a * x \mid x \in H\} \quad (10.6)$$

Tương tự như vậy ta có *tập kề bên phải của H đối với phần tử a , ký hiệu $H * a$, là tập có các phần tử như sau:*

$$H * a = \{x * a \mid x \in H\} \quad (10.7)$$

Có rất nhiều vấn đề lý thú xung quanh các tập kề nhưng ở đây chúng ta chỉ giới hạn nghiên cứu tập kề trong lý thuyết nhóm.

Cho $(A, *)$ là một nhóm và $(H, *)$ là một nhóm con của $(A, *)$, ta có các định lý quan trọng sau đây.

Định lý 10.3.1. Cho $a * H$ và $b * H$ là hai tập kề của H . Hai tập kề $a * H$ và $b * H$ hoặc là tách biệt nhau hoàn toàn hoặc là giống hệt nhau hoàn toàn.

Chứng minh: Giả thiết $a * H$ và $b * H$ là không tách biệt nhau hoàn toàn và f là một phần tử chung của chúng. Như vậy có nghĩa rằng tồn tại hai phần tử h_1 và h_2 trong H sao cho $f = a * h_1 = b * h_2$. Ta có thể viết lại là $a = b * h_2 * h_1^{-1}$. Giả sử x là một phần tử thuộc $a * H$, nghĩa là ta có một phần tử h_3 nào đó trong H mà $x = a * h_3$. Thay giá trị a ở trên vào biểu thức của x ta có:

$$x = a * h_3 = (b * h_2 * h_1^{-1}) * h_3 = b * (h_2 * h_1^{-1} * h_3) \quad (10.8)$$

Vì $(h_2 * h_1^{-1} * h_3)$ trong biểu thức (10.8) là một phần tử nào đó thuộc H . Vậy $x * h_3 \in (b * H)$, nghĩa là một phần tử bất kỳ thuộc $(a * H)$ cũng lại thuộc về $(b * H)$. Bằng cách tương tự ta suy ra một phần tử bất kỳ nào thuộc $(b * H)$ cũng thuộc về $(a * H)$. Do đó $(b * H) = (a * H)$.

Ta trở lại phân tích trường hợp $(A, *)$ là một nhóm và $(H, *)$ là nhóm con của $(A, *)$. Vì $(A, *)$ là một nhóm nên ta có:

$$a * h_1 \neq a * h_2$$

Ở đây a là một phần tử bất kỳ thuộc A và $h_1, h_2 \in H$ với $h_1 \neq h_2$. Điều này chính tỏ lực lượng của tập kể bất kỳ nào của H cũng chính là lực lượng của tập H . Ngoài ra, vì H chứa phần tử đơn vị của nhóm nên nếu ta tính tất cả các tập kể bên trái (hay bên phải) của H thì sẽ được một tập hợp của các tập kể bên trái (hay bên phải). Tập các tập kể này có số lượng phần tử bằng số lượng phần tử của tập A . Như vậy các tập kể bên trái (hoặc phải) của H đã tạo nên một phân hoạch của tập A , trong đó tất cả các khối của phân hoạch có cùng một số lượng phần tử như nhau. Đồng thời ta nhận xét rằng bậc của một nhóm hữu hạn chia hết cho bậc của mỗi nhóm con của nó.

Định lý 10.3.2. Bậc của mỗi nhóm con của một nhóm hữu hạn là ước số của bậc của chính nhóm đó. *Định lý này còn gọi là định lý La Grange.*

Có một số hệ quả suy ra trực tiếp từ định lý La Grange:

- Nhóm có bậc là một số nguyên tố (gọi tắt là **nhóm bậc nguyên tố**) không có một nhóm con tầm thường nào. Ở đây, ta hiểu **nhóm con tầm thường** là nhóm con chứa tất cả các phần tử trong nhóm hoặc chỉ chứa phần tử đơn vị.

- Nhóm bậc nguyên tố phải là nhóm tuần hoàn và tập bất kỳ nào chỉ chứa một phần tử khác với phần tử đơn vị là tập sinh của nhóm tuần hoàn này.

10.4. NHÓM HOÁN VỊ VÀ ĐỊNH LÝ BURNSIDE

Khi nghiên cứu về chỉnh hợp và tổ hợp chúng ta đã biết đến khái niệm hoán vị trong việc tạo ra các tập hợp mới. Bây giờ chúng ta xét đến khái niệm này trên quan điểm lý thuyết nhóm.

Định nghĩa 10.4.1. Ánh xạ một - một từ một tập S vào chính bản thân nó được gọi là phép **hoán vị**.

Chúng ta dùng ký hiệu $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$ để chỉ hoán vị của tập

$\{a, b, c, d\}$, phép hoán vị ánh xạ a vào b , b vào d , c vào c và d vào a .

Giả sử tập S có n phần tử, A là tập của $n!$ các hoán vị của S và “ $\circ$ ” là **phép toán hợp thành** (ta đã xét đến phép toán này khi nghiên cứu quan hệ và hàm số). Rõ ràng “ $\circ$ ” là phép toán nhị phân khép kín trong A . Cho π_1 và π_2 là hai hoán vị của tập $S = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$.

Định lý 10.4.1. Nếu π_1 và π_2 là hai hoán vị của S thì $\pi_1 \circ \pi_2$ cũng là một hoán vị của S .

Chứng minh: Giả sử π_2 ánh xạ a vào b còn π_1 ánh xạ b vào c , như vậy $\pi_1 \circ \pi_2$ sẽ ánh xạ a vào c . Cho x là một phần tử nào đó thuộc S nhưng khác a , π_2 sẽ ánh xạ x vào một phần tử y nào đó khác b . Tương tự như vậy, π_1 sẽ ánh xạ y vào một phần tử z nào đó khác với c (sở dĩ như vậy vì π_1 và π_2 đều là các hoán vị của S). Như vậy $\pi_1 \circ \pi_2$ luôn luôn ánh xạ hai phần tử khác biệt (chẳng hạn a và x) vào hai phần tử khác biệt khác (ví dụ c và z). Nói cách khác $\pi_1 \circ \pi_2$ là một hoán vị của S .

Ví dụ $\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$ và $\pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

Điều này có nghĩa rằng $(A, \circ)$ là một nhóm, trong đó phần tử đơn vị là hoán vị tương ứng với ánh xạ mỗi phần tử vào chính

bản thân nó. Chẳng hạn $S = \langle a, b, c, d \rangle$ thì đơn vị của (A, o) sẽ là hoán vị: $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

Đảo của một hoán vị π là một hoán vị tương ứng với ánh xạ $\pi(a)$ vào a đối với tất cả mọi phần tử $a \in S$.

Ví dụ đảo của $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$ là hoán vị $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & a & b & d \end{pmatrix}$

Nhóm (A, o) được gọi là nhóm hoán vị của tập S .

Định nghĩa 10.4.2. Cho (G, o) là một nhóm hoán vị của tập $S = \langle a, b, \dots \rangle$. Một quan hệ nhị phân trên tập S được gọi là **quan hệ nhị phân suy ra từ (G, o)** nếu quan hệ đó được định nghĩa như sau: phần tử a có quan hệ với phần tử b nếu và chỉ nếu tồn tại một hoán vị trong G ánh xạ a vào b .

Ví dụ:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \right\} \quad (10.8)$$

Quan hệ nhị phân suy ra từ G được minh hoạ ở hình 10.4.1.

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

Hình 10.4.1

Định lí 10.4.2. Quan hệ nhị phân trên tập S suy ra từ một nhóm hoán vị (G, o) là một quan hệ tương đương.

Chúng minh định lí 10.4.2 rất đơn giản vì ta có thể thấy ngay quan hệ nhị phân suy ra từ (G, o) có tính **phản xạ**, tính **đối xứng** và tính **bắc cầu**.

Nhờ định lí này mà ta có thể phân chia tập S thành các lớp tương đương trên cơ sở quan hệ tương đương suy ra từ nhóm hoán vị (G, o) .

Định nghĩa 10.4.3. Một phần tử được gọi là *bất biến* trong một phép hoán vị nếu phép hoán vị này ánh xạ phần tử đó vào chính bản thân nó.

Định lí 10.4.3. Số lượng các lớp tương đương được tạo ra trên tập S do quan hệ tương đương suy ra từ nhóm hoán vị (G, o) được xác định như sau:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \psi(\pi) \quad (10.9)$$

ở đây, $\psi(\pi)$ là số lượng các phần tử bất biến trong phép hoán vị π .

Định lí này gọi là *định lí Burnside*.

Ví dụ ta trở lại nhóm hoán vị G cho ở (10.8), trong đó các phép hoán vị tương ứng là:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, & \pi_2 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \\ \pi_3 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, & \pi_4 &= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Như vậy $\psi(\pi_1) = 4$, $\psi(\pi_2) = 2$, $\psi(\pi_3) = 2$, $\psi(\pi_4) = 0$.

Do đó:

$$N = \frac{1}{4} (4 + 2 + 2 + 0) = 2$$

Rõ ràng số lớp tương đương bằng 2 và điều này có thể kiểm tra lại ở hình 10.4.1, trong đó 2 lớp tương đương là $\{a, b\}$ và $\{c, d\}$.

10.5. ĐẲNG CẤU VÀ ĐỒNG CẤU

Cho $(A, *)$ là một hệ thống đại số, trong đó $A = \{a, b, c, d\}$ và $*$ là phép toán hai ngôi mô tả ở hình 10.5.1a. Tương tự như vậy $(B, \star)$ cũng là một hệ thống đại số với $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ và $\star$ là phép toán 2 ngôi mô tả ở hình 10.5.1b.

$*$	a	b	c	d	$\star$	α	β	γ	δ
a	a	b	c	d	α	α	β	γ	δ
b	b	a	a	c	β	β	α	α	γ
c	b	d	d	c	γ	β	δ	δ	γ
d	a	b	c	d	δ	α	β	γ	δ

a)

b)

Hình 10.5.1

Ta nhận thấy hai hệ thống đại số $(A, *)$ và $(B, \star)$ hoàn toàn giống nhau hay thực chất là một nếu ta đặt tên lại cho các phần tử và các phép toán trong chúng. Trong trường hợp này người ta nói rằng $(A, *)$ đẳng cấu $(B, \star)$.

Định nghĩa 10.5.1. Hệ thống đại số $(B, \star)$ là **đẳng cấu** với hệ thống đại số $(A, *)$ nếu tồn tại ánh xạ một - một f từ A đến B sao cho tất cả các phần tử a_i và a_j ($j \neq i$) trong A thỏa mãn:

$$f(a_i * a_j) = f(a_i) \star f(a_j) \quad (10.10)$$

f được gọi là **một đẳng cấu** từ $(A, *)$ đến $(B, \star)$. Ví dụ hàm f như sau:

$$\begin{aligned} f(a) &= \alpha \\ f(b) &= \beta \\ f(c) &= \gamma \\ f(d) &= \delta \end{aligned} \quad (10.11)$$

là một đẳng cấu từ $(A, *)$ vào $(B, \star)$ ở hình 10.5.1.

Định nghĩa 10.5.2. Một đẳng cấu từ hệ thống đại số $(A, *)$ vào chính bản thân nó được gọi là một *tự đẳng cấu*. Chẳng hạn hàm g sau đây là một tự đẳng cấu trên hệ thống đại số $(A, *)$ ở hình 10.5.1a.

$$g(a) = d$$

$$g(b) = c$$

$$g(c) = b$$

$$g(d) = a$$

Như vậy hai hệ thống đại số đẳng cấu với nhau thì chúng không khác biệt gì nhau về phương diện các tính chất được mô tả. Thực chất đó là hai mô hình cụ thể khác nhau của cùng một khái niệm toán học trừu tượng.

Từ khái niệm đẳng cấu ta có thể tổng quát hóa thành một khái niệm khác, đó là khái niệm *đồng cấu*. Trong phép đẳng cấu thì ánh xạ f vừa là một toàn ánh vừa là một đơn ánh (song ánh). Nếu f chỉ là toàn ánh (ánh xạ lên trên) từ $(A, *)$ vào $(B, \star)$ thì ta có một đồng cấu.

Ví dụ $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi\}$, $B = \{1, 0, -1\}$ và các phép toán 2 ngôi $*$ và $\star$ tương ứng được mô tả ở hình 10.5.2a, b.

$*$	α	β	γ	δ	η	ξ
α	α	β	α	α	γ	δ
β	β	α	γ	β	γ	η
γ	α	γ	α	β	γ	η
δ	α	β	β	δ	η	ξ
η	γ	γ	γ	η	η	ξ
ξ	δ	η	η	ξ	ξ	ξ

a)

$\star$	1	0	-1
1	1	1	0
0	1	0	-1
-1	0	-1	-1

b)

Hình 10.5.2

Ánh xạ f sau đây từ $(A, *)$ vào $(B, \oplus)$ là một đồng cấu:

$$f(\alpha) = 1 \quad f(\delta) = 0$$

$$f(\beta) = 1 \quad f(\eta) = 0$$

$$f(\gamma) = 1 \quad f(\xi) = -1$$

Ta hãy xét một ví dụ khác về khái niệm đồng cấu. Xét hệ thống đại số $(I, \cdot)$, trong đó I là tập hợp tất cả các số nguyên, còn $\cdot$ là phép nhân các số nguyên. Ta lại xét hệ thống đại số $(B, \odot)$ cho ở hình 10.5.3.

$\odot$	Dương	Âm	Không
Dương	Dương	Âm	Không
Âm	Âm	Dương	Không
Không	Không	Không	Không

Hình 10.5.3

Nếu như trong tập các số nguyên I ta chỉ quan tâm phân biệt các số nguyên dương, các số nguyên âm và số không chứ không quan tâm đến giá trị của từng số nguyên, thì rõ ràng hệ thống đại số $(I, \cdot)$ đồng cấu với hệ thống đại số $(B, \odot)$. Trong đó ánh xạ f được xác định như sau:

$$f(n) = \begin{cases} \text{dương,} & \text{nếu } n \text{ là số nguyên dương} \\ \text{âm,} & \text{nếu } n \text{ là số nguyên âm} \\ \text{không,} & \text{nếu } n = 0 \end{cases}$$

Hệ thống $(B, \odot)$ là **ảnh đồng cấu** của $(I, \cdot)$.

Định nghĩa 10.5.3. Cho H là một nhóm con của G . H được gọi là **nhóm con chuẩn** nếu đối với mọi phần tử a trong G , tập kể

bên trái $a \star H$ bằng tập kế bên phải $H \star a$. Ví dụ đối với nhóm $(A, \star)$ cho ở hình 10.5.4. thì $(H, \star)$ là một nhóm con chuẩn, trong đó $H = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

$\star$	α	β	γ	δ	η	ξ	
α	α	β	γ	β	η	ξ	Chẳng hạn ta có thể thấy ngay các tập kế bên trái và bên phải đối với mỗi phần tử của A là như nhau:
β	β	γ	α	η	ξ	δ	
γ	γ	α	β	ξ	δ	η	
δ	δ	ξ	η	α	γ	β	
η	η	δ	ξ	β	α	γ	
ξ	ξ	η	δ	γ	β	α	

Hình 10.5.4

$$\delta \star H = \{\delta \star \alpha, \delta \star \beta, \delta \star \gamma\} = \{\delta, \xi, \eta\}$$

$$H \star \delta = \{\alpha \star \delta, \beta \star \delta, \gamma \star \delta\} = \{\delta, \eta, \xi\}$$

10.6. VÀNH, MIỀN NGUYÊN VÀ TRƯỜNG

Cho đến nay chúng ta đã nghiên cứu kỹ về các hệ thống đại số với một phép toán hai ngôi, bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ một số lớp của các hệ thống đại số với hai phép toán 2 ngôi. Chẳng hạn cho hai hệ thống đại số $(A, *)$ và $(A, \star)$, ta có thể tổ hợp thành một hệ thống đại số với hai phép toán $(A, *, \star)$. Hệ thống đại số mới sẽ có những đặc tính mới nếu bản thân hai phép toán $\star$ và $*$ có các mối quan hệ nào đó với nhau chẳng hạn chúng quan hệ với nhau qua phép hoán vị:

$$a \star b = a * b \quad (a, b \in A)$$

$$\text{hoặc} \quad a * (b \star c) = (a * b) \star (a * c)$$

$$(b \star c) * a = (b * a) \star (c * a)$$

$\star$	α	β	$*$	α	β	
α	α	β	α	α	α	Ví dụ hệ thống đại số $(\{\alpha, \beta\}, \star, *)$ có các phép toán hai ngôi mô tả ở hình 10.6.1.
β	β	α	β	α	β	

Hình 10.6.1

Trong hệ thống đại số này thì phép toán $*$ có tính phân bố qua phép toán $\star$, nhưng ngược lại phép toán $\star$ không có tính phân bố qua phép toán $*$. Chúng ta nghiên cứu các tính chất của các hệ thống đại số với 2 phép toán 2 ngôi như vậy chính là chúng ta đã đề cập đến các tính chất của *vành*, *miền nguyên*, và *trường*. Sau đây chúng ta sẽ định nghĩa các khái niệm này.

Định nghĩa 10.6.1. Hệ thống đại số $(A, +, \cdot)$ được gọi là một *vành* nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $(A, +)$ là một nhóm Abel.
2. $(A, \cdot)$ là một nửa nhóm.
3. Phép toán $\cdot$ có tính phân bố trên phép toán $+$.

Ví dụ xét hệ thống đại số $(Z_n, \oplus, \odot)$, trong đó Z_n là các số nguyên $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Các phép toán trên $\oplus$ và $\odot$ trên tập Z_n được định nghĩa như sau:

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b, & \text{nếu } a + b < n \\ a + b - n, & \text{nếu } a + b \geq n \end{cases}$$

$$a \odot b = \text{số dư của } ab \text{ chia cho } n.$$

Như chúng ta đã xét trong ví dụ 10.3, $(Z_n, \oplus)$ là một nhóm Abel. Dễ dàng thấy rằng phép toán $\odot$ đóng trong Z_n và là một phép toán có tính kết hợp. Do vậy $(Z_n, \odot)$ là một nửa nhóm. Ta có thể chứng minh một cách đơn giản là $\odot$ có tính phân bố trên $\oplus$. Như vậy hệ thống đại số $(Z_n, \oplus, \odot)$ là một *vành*.

Định nghĩa 10.6.2. Hệ thống đại số $(A, +, \cdot)$ được gọi là một *miền nguyên* nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $(A, +)$ là một nhóm Abel.
2. Phép toán $\cdot$ có tính giao hoán và nếu $c \neq 0$ và $c \cdot a = c \cdot b$ thì $a = b$, ở đây 0 là phần tử đơn vị cộng (tức là phần tử đơn vị trong nhóm cộng Abel).

3. Phép toán $\cdot$ có tính phân bố trên phép toán $+$. Ví dụ cho A là tập tất cả các số nguyên, $+$ và $\cdot$ là các phép toán cộng và nhân số nguyên thông thường. Rõ ràng $(A, +)$ là một nhóm Abel với phần tử đơn vị là 0, phần tử nghịch đảo của n là $-n$. Phép toán $\cdot$ có tính hoán vị và nếu c là một số nguyên khác không thì $c \cdot a = c \cdot b$ kéo theo $a = b$. Vì phép toán $\cdot$ có tính phân bố trên phép toán $+$, nên $(A, +, \cdot)$ là một miền nguyên.

Định nghĩa 10.6.3. Hệ thống đại số $(A, +, \cdot)$ được gọi là một trường nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

1. $(A, +)$ là một nhóm Abel.
2. $(A - \{0\}, \cdot)$ cũng là một nhóm Abel.
3. Phép toán $\cdot$ có tính phân bố trên phép toán $+$.

Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra các hệ thống đại số sau đây là các trường:

- $(F, +, \cdot)$, trong đó F là tập hợp của tất cả các số hữu tỷ, $+$ và $\cdot$ là các phép toán cộng và nhân thông thường các số hữu tỷ.

- $(R, +, \cdot)$, trong đó R là tập hợp của tất cả các số thực, $+$ và $\cdot$ là các phép toán cộng và nhân thông thường các số thực.

- $(C, +, \cdot)$, trong đó C là tập hợp của tất cả các số phức, $+$ và $\cdot$ là các phép toán cộng và nhân thông thường các số phức.

Ví dụ 10.4. Chúng ta trở lại xem xét hệ thống đại số $(Z_n, \oplus, \odot)$ có phải là một trường hay không? Hệ thống $(Z_n, \oplus, \odot)$ là một trường nếu và chỉ nếu n là một số nguyên tố. Nếu n không phải là số nguyên tố thì chúng ta có thể viết $n = ab$ đối với các giá trị a, b nào đó trong tập $\{Z_n - \{0\}\}$. Nếu phép toán $a \odot b = 0$ thì rõ ràng phép toán $a \odot b$ không đóng trong $\{Z_n - \{0\}\}$. Các tính chất khác của trường chúng ta cũng có thể kiểm tra tương tự như vậy. Trường $(Z_n, \oplus, \odot)$ gọi là trường các

số nguyên modul n , hoặc *trường Galois* với n phần tử. Khi ta viết $GF(n)$ hay $GF(p)$ thì có thể hiểu đây là các trường Galois tương ứng n phần tử và p phần tử. Trong đó n và p là các số nguyên tố.

10.7. VÀNH ĐỒNG CẤU

Chúng ta đã nghiên cứu tính đồng cấu trên các hệ thống đại số với 1 phép toán, bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu tính đồng cấu trên các hệ thống đại số với 2 phép toán và cụ thể hơn là tính đồng cấu trên vành.

Xét hai hệ thống đại số $(A, +, \cdot)$ và $(B, \oplus, \odot)$. Một ánh xạ lên trên f từ A đến B được gọi là một phép đồng cấu từ $(A, +, \cdot)$ đến $(B, \oplus, \odot)$ nếu đối với mọi phần tử $a, b \in A$ ta có:

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b) \quad (10.12)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$$

$(B, \oplus, \odot)$ được gọi là ảnh đồng cấu của $(A, +, \cdot)$.

Định nghĩa 10.7.1. Cho $(A, \star)$ là một hệ thống đại số và R là một quan hệ tương đương trên A ; R được gọi là một *quan hệ đồng dư* trên A (đối với phép toán $\star$) nếu (a_1, a_2) và (b_1, b_2) thuộc R thì $(a_1 \star b_1, a_2 \star b_2)$ cũng thuộc R .

$\star$	a	b	c	d
a	a	a	d	c
b	b	a	c	d
c	c	d	a	b
d	d	d	b	a

Hình 10.7.1

	a	b	c	d
a	✓	✓		
b	✓	✓		
c			✓	✓
d			✓	✓

Hình 10.7.2

Ví dụ đối với hệ thống đại số cho ở hình 10.7.1 thì quan hệ tương đương R cho ở hình 10.7.2 là một quan hệ đồng dư.

Quan hệ đồng dư trên hệ thống đại số với hai phép toán hai ngôi cũng được định nghĩa tương tự.

Định nghĩa 10.7.2. Cho $(A, +, \cdot)$ là một vành. H là một tập con của A ; H được gọi là một **đồng nhất** nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1. $(H, +)$ là một nhóm con của $(A, +)$.
2. Đối với mỗi $a \in A$ và $h \in H$ thì $a \cdot h$ và $h \cdot a$ đều thuộc về H .
3. Từ định nghĩa này ta có thể thấy ngay rằng một đồng nhất của vành $(A, +, \cdot)$ kéo theo một quan hệ đồng dư trên A với cả hai phép toán $+$ và $\cdot$, và đồng nhất này xác định ảnh đồng cấu của $(A, +, \cdot)$.

Mặt khác ta có thể chứng minh rằng mỗi đồng cấu của vành tương ứng với một đồng nhất của vành. Ví dụ xét vành $(I, +, \cdot)$, trong đó I là tập tất cả các số nguyên, còn $+$ và $\cdot$ là các phép cộng và nhân thông thường các số nguyên. Cho H là tập tất cả các bội số của n : $\{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$ trong đó n là một số nguyên bất kỳ, rõ ràng H là một đồng nhất và ảnh đồng cấu chính là vành $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ mà ta đã biết trong các ví dụ trước.

10.8. VÀNH ĐA THỨC

Cho $(A, \star, *)$ là một hệ thống đại số, ở đây $\star$ là phép toán m cột và $*$ là phép toán n cột. Chúng ta định nghĩa các biểu thức đại số trong $(A, \star, *)$ theo các quy luật sau:

1. Mỗi hằng số là một biểu thức đại số.
2. Mỗi một biến là một biểu thức đại số.

3. Nếu $e_1, e_2, \dots, e_m$ là các biểu thức đại số thì $\star(e_1, e_2, \dots, e_m)$ cũng là một biểu thức đại số.

4. Nếu $e_1, e_2, \dots, e_n$ là các biểu thức đại số thì $\star(e_1, e_2, \dots, e_n)$ cũng là một biểu thức đại số.

Ở đây hằng số là các phần tử của tập A còn biến số là tên gọi tượng trưng chứ không phải tên gọi của một phần tử nào trong A cả.

Ví dụ nếu x, y là các biến số thì các biểu thức sau đây là các biểu thức đại số trong $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$.

$$2$$

$$2 \oplus x$$

$$3 \odot (x \oplus x) \odot (x \oplus y)$$

Định nghĩa 10.8.1. Cho $(A, +, \cdot)$ là một vành. Một biểu thức đại số trong $(A, +, \cdot)$ có dạng sau đây được gọi là một đa thức:

$$a_0 + (a_1 \cdot x) + (a_2 \cdot x^2) + \dots + (a_{n-1} \cdot x^{n-1}) + (a_n \cdot x^n)$$

ở đây, $n \geq 0$ và $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{k \text{ lần}}$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ là các hằng số, còn x là biến số.

Ta sẽ dùng các ký hiệu $A(x)$ và $B(x)$ để chỉ các đa thức. Bậc của đa thức ứng với số n lớn nhất mà $a_n \neq 0$.

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu cấu trúc của các *vành đa thức*.

Cho $(F, +, \cdot)$ là một trường và $F[x]$ là tập tất cả các đa thức trong $(F, +, \cdot)$ với biến x . Chúng ta định nghĩa một hệ thống đại số $(F[x], \boxed{+}, \boxed{\cdot})$ trong đó $\boxed{+}$ và $\boxed{\cdot}$ là hai phép toán 2 ngôi được xác định như sau:

Đối với: $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$$

Chúng ta có: $A(x) \boxplus B(x) = C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$

ở đây $c_i = a_i + b_i$, với điều kiện $a_i = 0$ khi $i > n$ và $b_i = 0$ khi $i > m$.

$$A(x) \boxdot B(x) = D(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n$$

trong đó: $d_i = (a_0, b_0) + (a_1, b_1) + \dots + (a_i, b_i)$

Dễ dàng kiểm tra rằng $(F[x], \boxplus, \boxdot)$ là một vành và vành này có tên gọi là **vành đa thức**.

Tương tự như vậy, ta xét trường $(F, \boxplus, \boxdot)$. Gọi $F_n[x]$ là tập các đa thức có bậc bé hơn n trong tập $F[x]$. Cho $G(x)$ là một đa thức bậc n trong $F[x]$. Hệ thống đại số $(F_n[x], \triangle, \triangle)$ với các phép toán 2 ngôi $\triangle$ và $\triangle$ được định nghĩa như sau:

Đối với:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$$

Ta có: $A(x) \triangle B(x) = A(x) \boxplus B(x)$

và: $A(x) \triangle B(x) = \text{số dư của } A(x) \boxdot B(x) \text{ chia cho đa thức } G(x).$

Có thể kiểm tra dễ dàng rằng $(F_n[x], \triangle, \triangle)$ là một vành và được gọi là **vành đa thức modul $G(x)$** .

Vi dụ 10.5. Cho $(F, +, \cdot)$ là trường các số nguyên modul 2. Có 4 đa thức trong $F_2[x]$, chẳng hạn như: 0, 1, x , $x + 1$. Giả sử $G(x) = 1 + x^2$. Các phép toán $\triangle$ và $\triangle$ được định nghĩa như ở hình 10.8.1.

$\triangle$	0	1	x	1+x	$\triangle$	0	1	x	1+x
0	0	1	x	1+x	0	0	0	0	0
1	1	0	1+x	x	1	0	1	x	1+x
x	x	1+x	0	1	x	0	x	1	1+x
1+x	1+x	x	1	0	1+x	0	1+x	1+x	0

Hình 10.8.1

BÀI TẬP

- Cho $(A, \star)$ là một hệ thống đại số và $\star$ là phép toán nhị phân sao cho đối với mỗi a và b trong A , $a \star b = a$.
 - Chứng minh rằng phép toán $\star$ có tính kết hợp.
 - Có thể có khi nào đó phép toán $\star$ có tính hoán vị không?
- Cho $(A, \star)$ là một hệ thống đại số sao cho đối với tất cả $a, b, c, d \in A$ ta có:

$$a \star a = a$$

$$(a \star b) \star (c \star d) = (a \star c) \star (b \star d)$$

Chứng minh rằng:

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star (a \star c)$$

- Cho Z_n là tập tất cả các số nguyên $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. $\odot$ là một phép toán nhị phân trên Z_n sao cho:

$$a \odot b = \text{số dư của tích } ab \text{ chia cho } n.$$

- Cấu tạo bảng đối với phép toán $\odot$ khi $n = 4$.
- Chứng minh rằng $(Z_n, \odot)$ là một nửa nhóm đối với mỗi n .

4. Cho $(A, *)$ là một nửa nhóm. Chứng minh rằng đối với a, b, c trong A , nếu $a * c = c * a$ và $b * c = c * b$ thì:

$$(a * b) * c = c * (a * b)$$

5. Cho $(A, \star)$ là một nhóm. Chứng minh rằng đối với $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ trong A , nếu: $a \star c = a_1 \star c_1$, $a \star d = a_1 \star d_1$, $b \star c = b_1 \star c_1$ thì:

$$b \star d = b_1 \star d_1$$

6. Cho $(A, \star)$ và $(B, *)$ là các hệ thống đại số. Tích đề-các của $(A, \star)$ và $(B, *)$ là một hệ thống đại số $(A \times B, \square)$, ở đây $\square$ là một phép toán nhị phân sao cho đối với mỗi (a_1, b_1) và (a_2, b_2) trong $A \times B$ thì:

$$(a_1, b_1) \square (a_2, b_2) = (a_1 \star a_2, b_1 * b_2).$$

Chứng minh rằng tích đề-các của hai nhóm là một nhóm.

7. Chứng minh rằng $(A, \star)$ là một nhóm Abel nếu và chỉ nếu:

$$a^2 \star b^2 = (a \star b)^2 \text{ đối với mọi } a, b \in A.$$

Ở đây $(A, \star)$ là một nhóm.

8. Cho $(H, \star)$ và $(K, \star)$ là các nhóm con của nhóm $(G, \star)$. Chứng minh rằng ánh xạ f từ $H \times K$ đến G sao cho $f(h, k) = h \star k$ đối với mọi $h \in H$ và $k \in K$ là một đẳng cấu từ tích đề-các của $(H, \star)$ và $(K, \star)$ đến $(G, \star)$, nếu và chỉ nếu:

a) H và K là các nhóm con bình thường.

b) $\{h \star k \mid h \in H, k \in K\} = G$.

c) $H \cap K = \{e\}$, ở đây e là phần tử đơn vị.

9. Cho f và g là các đồng cấu từ nhóm $(G, \star)$ đến nhóm $(H, *)$. Chứng minh rằng $(C, \star)$ là một nhóm con của $(G, \star)$. Trong đó:

$$C = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\}$$

10. Chứng minh rằng một miền nguyên có một số lượng hữu hạn các phần tử là một trường.

11. Cho $(A, +, \cdot)$ là một vành sao cho $a \cdot a = a$ đối với mọi $a \in A$

a) Chứng minh rằng $a + a = 0$ đối với mọi a , ở đây 0 là phần tử đơn vị cộng.

b) Chứng minh rằng phép toán $\cdot$ là phép toán hoán vị.

12. Cho $(F, +, \cdot)$ là trường của các số nguyên modul 2 và $(F[x], \oplus, \otimes)$ là vành đa thức tương ứng. Hãy cấu tạo vành đa thức modul $1 + x + x^2$.

13. Cho $(R, +, \cdot)$ là trường của các số thực. Cho $(R[x], \oplus, \otimes)$ là vành đa thức tương ứng, $(R_2[x], \triangle_+, \triangle_-)$ là vành đa thức modul $1 + x^2$.

a) Đối với $a + bx$ và $c + dx$ trong $R_2[x]$ xác định các biểu thức:

$$(a + bx) \triangle_+ (c + dx) \text{ và } (a + bx) \triangle_- (c + dx)$$

b) Vành đa thức $(R_2, \triangle_+, \triangle_-)$ và trường các số phức có những điểm tương tự gì không?

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Abbott, J.C. Setx, Lattices, and Boolean Algebras, Boston 1969.
2. Akers, S.B. On a Theory of Boolean Functions. J.Soc., Iudust. Appl. Math. Vol.7, No.4, December 1959.
3. Arnold, O.A. Probability, Statistics and Queueing Theory. Academic Press, INC., New York 1990.
4. Birkoff, G. Lattice. Theory, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
5. Birkoff, G., and T.C. Bartee. Modern Applied Algebra. Mc Graw - Hill Book Company, New York 1970.
6. Berztiss, A.T. Data Structures - Theory and Practice. Academic Press, New York 1975.
7. Bérge, C., Principles of Combinatorics, Academic Press, New York 1971.
8. Berunan, G., and K.D. Fryer. Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley and Sons, Inc., New York 1958.
9. Berge, C., The Theory of Graphs and Its Applications. John Wiley and Sons, Inc., New York 1962.

10. Boole G., An Investgation into the Laws of Thought, Open Court. Chicago, 1854/1940.
11. Busacker, R.G., T.L. Saaty. Finite Graphs and Networks - An Introduction with Applications. Mc Graw - Hill Book Company, New York 1965.
12. Carr, W.N., J.P. Mize. MOS/LSI Design and Application. Mc Graw - Hill, New York 1972.
13. Chung, K.L. Elementary Probability Theory with Stochastic Processes. Springer - Verlag, New York 1974.
14. Date, C.J. An Introduction to Database Systems. Addison - Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1975.
15. Gill, A., Applied Algebra for the Computer Science, Brentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1976.
16. Golomb, S.W., Poliminoes Scribner's. New York 1965.
17. Hopcroft, J.E., and J.D. Ullman. Formal Languages and Their Relation to Automata. Addison - Wesley Publishing Company, Read., Mass, 1969.
18. Hu, T.C., Integer Programming and Network Flows. Addison - Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1960.
19. Hu, T.C., and A.C. Tucker, Optimum computer Search Trees. SIAM Journal on Applied Mathematics, 21, 1971.

20. Kamenda, T., and P. Weiner, On the State Minimization of Nondeterministic Finite Automata. IEEE Trans. Comp. No 7/1970.
21. Kain, R.Y., Automata Theory - Machines and Languages. Mc. Graw - Hill Book Company, New York, 1972.
22. Kemeny, J.G., H. Mirkil, J.L. Snell and G.L. Thompson, Finite Mathematical Structure. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1958.
23. Kemeny, J.G., J.L. Snell and G.L. Thompson, Introduction to Finite Mathematics. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1966.
24. Knuth, D.E., The Art of Computer Programming, Vol. 1. Addison - Wesley Publishing Company, Read, Mass., 1973.
25. Lee, S.C., and E.T.Lee, On Multivalued Symmetric Functions. IEEE Trans. Comp., March 1972, pp. 312-317.
26. Lee, S.C., Vector Boolean Algebra and Calculus. IEEE Trans. Comp., September 1976, pp. 865-874.
27. Lew, S.C. Digital Circuits and Logic Design. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1976.
28. Lawler, E., Combinatorial Optimization. New York 1976.
29. Liu, C.L. Introduction to Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill Book Company New York 1968.
30. MacLane, S., and G. Birkhoff. Algebra. Macmillan, New York, 1967.

31. Paley, H., and P.H. Weichsel, A First Course in Abstract Algebra. Holt, Rinechart and Winston, New York 1966.
32. Peterson, W.W., and E.J. Welson. Error - Correcting Codes. MIT. Press, Cambridge, Mass. 1972.
33. Quine, W.V.O., Set Theory and Its Logic, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1963.
34. Rine, D.C., Computer Science and Multiple - Valued Logic, Theory and Applications, North - Holand, Amsterdam 1977.
35. Rubin, J.E., Set Theory for the Mathematician, Holden-Day, San Francisco 1967.
36. Sheng, C.L, Threshold Logic, Academic Press, New York 1969.
37. Sikorski, R., Boolean Algebras, Springer - Verlag, New York 1964.
38. Skerniakov, L.A. Complemented Modular Lattices and Regular Rings, Goz. Izd., Mat., Lit., Moscow 1961.
39. Stone, H.S., Discrete Mathematical Structures and their Application, Science Research Associates, Inc., Palo Alto, Calif., 1973.
40. Taylor, A.E., Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York 1958.
41. Thayse, A., and M. Davido, Boolean differential Calculus and Its Application to Switching Theory. IEEE Trans., Comp., C-22, 1973, pp. 409-420.

42. Tremblay, J.P., and R.D. Manohar, Discrete Mathematical Structure with Applications to Computer Science. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1975.
43. Wilson, R.J., Introduction to Graph Theory, Academic Press, New York 1992.
44. Wood, P.E. Switching Theory, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1968.
45. Xuan Quynh N., The Automation of Process of Fault Detection in Logical Networks, Third European Meeting on Cybernetics and System Research, Vienna, April 1976.
46. Xuan Quynh N., An Algorithm for Fault Detection in Logical Combinational Many - Level Fault Network. Elektronische Informations Verarbeitung und Kybernetyk, EIK12, No 10, 1976.
47. Xuan Quynh N., Fault Identification in Logical Sequential Networks and Design of Fault - Self detectable Asynchronous Networks, R.N. No. 20, Printed in Poland 1979.
48. Xuan Quynh N., On Method of Designing the Fault Self - Detecting Asynchronous Sequential Networks. "Mathematics" Nr. 13, Printed in Poland 1979.
49. Xuan Quynh N., and Kacki. On an Algorithm for Hazard Detection in Logical Networks. Elektronische Informations. Verarbeitung und Kybernetyk, EIK 15, 5-6/1979.

50. Xuan Quynh N., Generation of Fault-Test Sequences for Logical Asynchronous Networks. Pospety Cybernetyki No.1, 1980, pp. 5-19, Polish Academy of Science Press.
51. Xuan Quynh N., Lí thuyết mạch logic và kỹ thuật số. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, 1991.
52. Yar S.S., and Y.S. Tang., Transformation of an Arbitrary Switching Function to a Totally Symmetric Function. IEEE Trans., Comp., December 1971, pp. 1606-1609.
53. Zadeh L.A. Fuzzy Sets, Information and Control, Vol.8, 1965, pp. 338-353.
54. Arnold O.A. Probability, Statistics and Queueing Theory, Academic Press, INC., New York 1990.
55. Nguyễn Xuân Quỳnh, Lý thuyết mạch logic và kỹ thuật số. NXB Tổng cục Bưu điện 1984.
56. Nguyễn Xuân Quỳnh, Lí thuyết mạch logic và kỹ thuật số. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, 1992.
57. Nguyễn Xuân Quỳnh, Cơ sở toán rời rạc và ứng dụng, NXB Giáo dục 1993.

GS.TSKH. NGUYỄN XUÂN QUỲNH

TOÁN RỜI RẠC CHO KỸ THUẬT SỐ

Chịu trách nhiệm xuất bản : PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI

Biên tập : ĐỖ THỊ CẢNH

Sửa bản in : LÊ MINH

Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HƯNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1.000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 cm, tại Xí nghiệp in 19 - 8 số 3
đường Nguyễn Phong Sắc - Nghĩa Tân - Cầu Giấy - Hà Nội.

Giấy phép số: 442 - 1/CXB cấp ngày 5-4-2001

In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2002.

201281



Giá: 23.000đ