

NGUYỄN TRỌNG (CHỦ BIÊN)
TỔNG DANH ĐẠO - LÊ THỊ HOÀNG YẾN

Cơ học lý thuyết

TẬP 1. PHẦN TĨNH HỌC, ĐỘNG HỌC



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

NGUYỄN TRỌNG (chủ biên)
TỔNG DANH ĐẠO - LÊ THỊ HOÀNG YẾN

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

TẬP I

PHÂN TĨNH HỌC, ĐỘNG HỌC



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2006

Lời nói đầu

Nhằm đáp ứng nhu cầu giảng dạy, học tập và nghiên cứu Cơ học lý thuyết, cuốn sách “Cơ học cơ sở” được xuất bản lần đầu tiên năm 1997 và đã được tái bản nhiều lần vào các năm tiếp theo.

Bám sát chương trình của Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định cho khối các ngành Kỹ thuật: xây dựng dân dụng và công nghiệp, giao thông vận tải, thủy lợi và một số ngành khác, các tác giả đã tiến hành biên soạn lại cuốn sách và có nhiều bổ sung, sửa chữa với phương châm ngắn gọn và sát với trình độ chung của bạn đọc.

Lần in này cuốn sách mang tên “Cơ học lý thuyết” và có ba phần được bố trí làm hai tập:

- Tập 1 gồm hai phần: Tĩnh học và động học.
- Tập 2: Phần Động lực học.

Để bạn đọc nắm được những kiến thức cơ bản về cơ học, sau phần lý thuyết có các câu hỏi ôn tập. Cuối mỗi phần có trình bày cách giải một số bài toán. Sau đó là các bài tập được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp.

Trong quá trình biên soạn, cuốn sách không tránh khỏi khiếm khuyết. Các tác giả vui mừng nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN MỘT

TĨNH HỌC

Tĩnh học là phần thứ nhất của Cơ học lý thuyết, mà trong đó nghiên cứu về lực và điều kiện để vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực.

Trong tĩnh học đối tượng khảo sát là vật rắn chịu tác dụng của các lực. Hệ lực tác dụng lên vật rắn phải thỏa mãn điều kiện sao cho vật rắn cân bằng, để đi tới kết luận chính xác về vấn đề đó, ta phải giải quyết hai bài toán cơ bản của tĩnh học:

- Bài toán thu gọn hệ lực về hệ lực đơn giản hơn.*
- Tìm điều kiện để hệ lực tác dụng lên vật rắn cân bằng.*

CHƯƠNG 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN HỆ TIỀN ĐỀ TĨNH HỌC

§1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1.1. VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

Vật rắn tuyệt đối là vật mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ của nó không đổi khi có lực tác dụng.

Trong thực tế không có vật rắn tuyệt đối, bởi vì khi có lực tác dụng thì các vật đều bị biến dạng. Nếu biến dạng lớn thì mắt thường quan sát được, còn biến dạng quá nhỏ thì mắt thường không quan sát được. Mặt khác trong tính toán kỹ thuật có một số trường hợp sự biến dạng của vật không ảnh hưởng nhiều đến kết quả tính toán, và để đơn giản bớt quá trình tính toán ta có thể coi như vật không biến dạng, nghĩa là coi như vật rắn tuyệt đối.

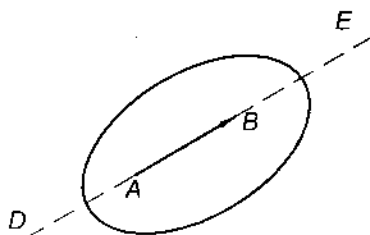
Trong Cơ học lý thuyết ta chỉ khảo sát lực tác dụng lên vật rắn tuyệt đối, nói gọn là vật rắn.

1.1.2. LỰC

Lực là số đo sự tác dụng tương hỗ giữa các vật thể. Lực là một đại lượng có hướng và bằng thực nghiệm người ta thấy lực được xác định bởi ba yếu tố:

- Điểm đặt của lực;
- Phương, chiều của lực;
- Cường độ của lực.

Lực được biểu diễn bằng một vectơ như trên hình 1.1.



Hình 1.1

- Gốc A của vectơ $\overrightarrow{AB}$ biểu diễn điểm đặt của lực.
- Phương, chiều của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là phương, chiều của lực.
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là cường độ của lực.

Đường thẳng DE mang vectơ $\overrightarrow{AB}$ gọi là đường tác dụng của lực. Ký hiệu lực là $\vec{F}$.

1.1.3. TRẠNG THÁI CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN VÀ MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA KHÁC

- **Cân bằng** là sự đứng yên của vật đối với hệ quy chiếu đã chọn. Nếu vật đứng yên đối với hệ quy chiếu cố định thì cân bằng ấy gọi là cân bằng tuyệt đối, còn nếu vật đứng yên đối với hệ quy chiếu chuyển động thì đó là cân bằng tương đối. Ta có thể coi vật cân bằng đối với mặt đất là cân bằng tuyệt đối (như vậy là ta đã bỏ qua sự chuyển động của Trái Đất). Trong tĩnh học ta chỉ xét đến sự cân bằng tuyệt đối.
- **Hệ lực** là tập hợp của nhiều lực cùng tác dụng lên một vật rắn. Ký hiệu $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$

- **Hai hệ lực tương đương** là hai hệ lực có cùng tác dụng cơ học như nhau (nghĩa là nếu đem hai hệ lực lần lượt tác dụng lên một vật rắn thì trạng thái cơ học của vật rắn ấy trong hai trường hợp sẽ y như nhau).

Ký hiệu hai hệ lực tương đương $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$

- **Hợp lực của một hệ lực** là một lực tương đương với một hệ lực.

Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ thì ta có thể viết hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$.

- **Hệ lực cân bằng** là hệ lực mà khi tác dụng lên vật rắn sẽ không làm thay đổi trạng thái chuyển động cơ học mà vật đang có.

Hệ lực cân bằng còn được gọi là hệ lực tương đương không.

Ta viết $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$.

§1.2. MÔMEN CỦA LỰC

1.2.1. MÔMEN CỦA LỰC ĐỐI VỚI MỘT ĐIỂM

Cho lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn đặt tại điểm A, lấy một điểm O bất kỳ và gọi $\vec{OA} = \vec{r}$ là vectơ định vị điểm đặt A của lực $\vec{F}$ đối với điểm O. Khoảng cách d từ điểm O đến đường tác dụng của lực $\vec{F}$ gọi là cánh tay đòn của lực $\vec{F}$ đối với điểm O (hình 1.2).

Dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ vật rắn sẽ quay quanh điểm O. Ta có:

Định nghĩa: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O là một vectơ $\vec{m}_O(\vec{F})$ đặt tại O:

- Có phương vuông góc với mặt phẳng chứa lực $\vec{F}$ và điểm O .
- Có chiều sao cho từ ngọn của vectơ ấy ta nhìn thấy lực $\vec{F}$ hướng quanh O ngược chiều kim đồng hồ.
- Có trị số bằng tích số cường độ của lực với cánh tay đòn của nó đối với điểm O .

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = F.d = F.r.\sin\alpha$$

$$\text{hay} \quad \vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (1.1)$$

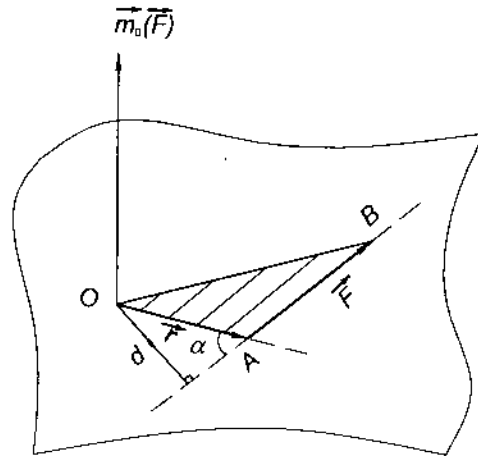
$$\begin{aligned} \vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = m_{ox}\vec{i} + m_{oy}\vec{j} + m_{oz}\vec{k}$$

trong đó: x, y, z - hình chiếu của vectơ $\vec{r}$;

F_x, F_y, F_z - hình chiếu của vectơ $\vec{F}$;

m_{ox}, m_{oy}, m_{oz} - hình chiếu của $\vec{m}_o(\vec{F})$ lên các trục tọa độ.



Hình 1.2

Ý nghĩa của vector $\vec{m}_o(\vec{F})$

- *Ý nghĩa cơ học:* Mômen của lực đối với một điểm đặc trưng cho tác dụng quay của lực quanh điểm đó. Tác dụng quay này phụ thuộc ba yếu tố:
 - + Vị trí của mặt phẳng chứa lực và điểm lấy mômen.
 - + Chiều quay của mômen trong mặt phẳng ấy.
 - + Cường độ của lực và cánh tay đòn của lực đối với điểm đó.
- *Ý nghĩa hình học:* Theo định nghĩa thì độ dài của vector mômen bằng hai lần diện tích tam giác OAB (hình 1.2).

$$|\vec{m}_o(\vec{F})| = F.d = 2S_{OAB}$$

$\vec{m}_o(\vec{F}) = 0$ khi $d = 0$, nghĩa là đường tác dụng của lực $\vec{F}$ đi qua O .

Chú ý: Nếu xét hệ các lực nằm trong cùng một mặt phẳng thì mômen của các lực đối với một điểm trong mặt phẳng ấy chỉ cần tính như một lượng đại số (vì trong trường hợp này các vector mômen đều vuông góc với cùng mặt phẳng chứa lực và điểm lấy mômen). Phép so sánh các vector cùng phương có thể đưa về phép so sánh bằng đại số.

Khi đó ta có thể viết

$$m_o(\vec{F}) = \pm F.d \quad (1.2)$$

trong đó: dấu (+) với trường hợp dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ vật quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ và lấy dấu (-) với trường hợp ngược lại.

1.2.2. SỰ BIẾN THIÊN MÔMEN CỦA LỰC ĐỐI VỚI O VÀ O_1

Giả sử lực $\vec{F}$ đặt tại A thì mômen đối với O là $\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$ và đối với O_1 sẽ có $\vec{m}_{o1}(\vec{F}) = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}$ (hình 1.3).

Định nghĩa: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục z là lượng đại số và bằng mômen của lực $\vec{F}_{xy}$ đối với điểm O . Ký hiệu $m_z(\vec{F})$.

$$m_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} d_1 \quad (1.4)$$

trong đó: d_1 - cánh tay đòn của lực $\vec{F}_{xy}$ đối với điểm O :

$m_z(\vec{F})$ có dấu (+) nếu từ chiều dương trục z nhìn thấy lực $\vec{F}$ hay lực $\vec{F}_{xy}$ quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ.
dấu (-) trong trường hợp ngược lại.

Ý nghĩa của $m_z(\vec{F})$

- Ý nghĩa cơ học: $m_z(\vec{F})$ đặc trưng cho tác dụng quay của lực $\vec{F}$ quanh trục z
- Ý nghĩa hình học: $m_z(\vec{F}) = 2S_{OA_1B_1}$.

Từ (1.4) ta thấy mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục z bằng 0 khi:

- Lực $\vec{F}$ song song với trục z (vì $F_{xy} = 0$).
- Đường tác dụng của lực $\vec{F}$ cắt trục z (vì $d_1 = 0$)

Trong cả hai trường hợp này thì lực $\vec{F}$ và trục z cùng trong một mặt phẳng.

1.2.4. ĐỊNH LÝ LIÊN HỆ GIỮA MÔMEN CỦA LỰC ĐỐI VỚI MỘT ĐIỂM VÀ MÔMEN CỦA LỰC ĐỐI VỚI MỘT TRỤC

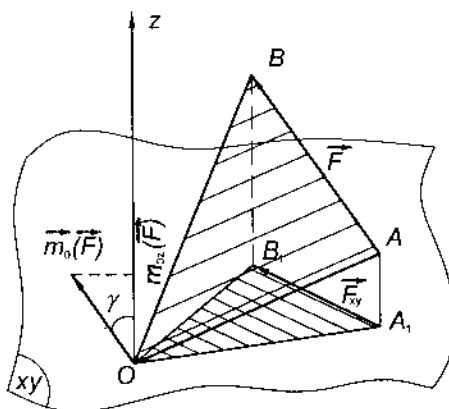
Định lý: Mômen của lực đối với một trục bằng hình chiếu lên trục ấy của vectơ mômen của lực đối với một điểm bất kỳ trên trục.

$$m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_o(\vec{F})| \cos \gamma = m_{oz}(\vec{F})$$

trong đó: γ - góc giữa trục Oz và vectơ $\vec{m}_o(\vec{F})$ (hình 1.5).

Chứng minh: Cho lực $\vec{F}$ và trục z . Ta vẽ mặt phẳng xy vuông góc với trục z và cắt trục z tại O (hình 1.5). γ là góc giữa trục Oz và

vecto $\vec{m}_o(\vec{F})$ hay là góc giữa hai mặt phẳng chứa tam giác OAB và OA_1B_1 . Ta biết $S_{OA_1B_1} = S_{OAB} \cos \gamma$.



Hình 1.5

Nhưng $m_z(\vec{F}) = 2S_{OA_1B_1}$ và $|\vec{m}_o(\vec{F})| = 2S_{OAB}$.

Do đó $m_z(\vec{F}) = |\vec{m}_o(\vec{F})| \cos \gamma = m_{oz}(\vec{F})$

Tương tự đối với các trục Ox và Oy :

$$m_y(\vec{F}) = m_{oy}(\vec{F})$$

$$m_x(\vec{F}) = m_{ox}(\vec{F})$$

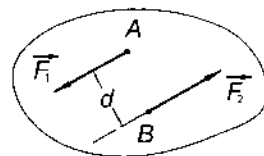
§1.3. NGẪU LỰC

1.3.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC YẾU TỐ CỦA NGẪU LỰC

a) **Định nghĩa 1:** Ngẫu lực là một hệ gồm hai lực song song cùng cường độ và ngược chiều. Ký hiệu $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ (hình 1.6).

b) Các yếu tố của ngẫu lực

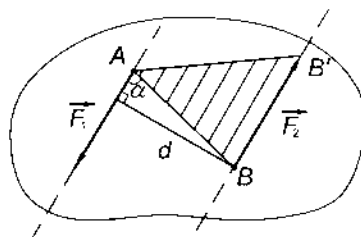
- Mặt phẳng chứa hai lực của ngẫu lực gọi là mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.
- Khoảng cách d giữa hai đường tác dụng của hai lực tạo thành ngẫu lực gọi là cánh tay đòn của ngẫu lực.
- Tác dụng của ngẫu lực làm cho vật rắn chuyển động quay. Để biểu diễn tác dụng quay của ngẫu lực ta có khái niệm vectơ mômen của ngẫu lực.



Hình 1.6

c) **Định nghĩa 2:** vectơ mômen của ngẫu lực là một vectơ tự do $\vec{m}$ có:

- Phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực;
- Chiều sao cho từ ngọn của vectơ ấy ta thấy ngẫu lực có hướng quay ngược chiều kim đồng hồ;
- Trị số bằng tích số cường độ của lực với cánh tay đòn d của nó (hình 1.7)



Hình 1.7

$$|\vec{m}| = F_1 d = F_1 BA \sin \alpha.$$

$$\vec{m} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}_1 = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_2 \quad (1.5)$$

Ý nghĩa mômen của ngẫu lực

- **Ý nghĩa cơ học:** Mômen $\vec{m}$ của ngẫu lực đặc trưng cho tác dụng quay của ngẫu lực.
- **Ý nghĩa hình học:** $|\vec{m}| = 2S_{ABB'}$

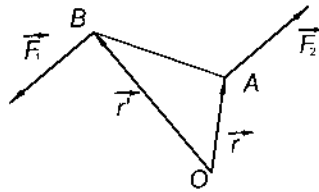
Từ việc biểu diễn ngẫu lực bằng vectơ mômen ngẫu lực, nên dễ nhận thấy rằng: hai ngẫu lực bằng nhau khi hai vectơ mômen ngẫu lực bằng nhau.

Chú ý: Nếu các ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng thì mômen của ngẫu lực chỉ cần tính như lượng đại số (xem mục 1.2.1).

$$m = \pm Fd$$

d) Định lý: Tổng mômen các lực của ngẫu lực đối với một điểm O bất kỳ nào đó bằng vectơ mômen của ngẫu lực ấy:

$$\vec{m} = \vec{m}_o(\vec{F}_1) + \vec{m}_o(\vec{F}_2)$$



Hình 1.8

Chứng minh (hình 1.8): Theo định nghĩa:

$$\vec{m}_o(\vec{F}_2) = \vec{r} \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{m}_o(\vec{F}_1) = \vec{r}' \wedge \vec{F}_1 \text{ với } \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$\vec{m}_o(\vec{F}_1) + \vec{m}_o(\vec{F}_2) = \vec{r}' \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 = (\vec{r}' - \vec{r}) \wedge \vec{F}_1 = \vec{AB} \wedge \vec{F}_1 = \vec{m}$$

$$\vec{m} = \vec{m}_o(\vec{F}_1) + \vec{m}_o(\vec{F}_2)$$

1.3.2. TÍNH CHẤT TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA NGẪU LỰC

Định lý 1: Hai ngẫu lực có cùng mặt phẳng tác dụng cùng chiều quay và trị số mômen thì tương đương nhau.

Các hệ quả của định lý 1:

- *Hệ quả 1:* Tác dụng của ngẫu lực lên vật rắn không thay đổi khi thay đổi vị trí của ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của nó.
- *Hệ quả 2:* Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi ta thay đổi tùy ý cường độ của lực và cánh tay đòn nhưng giữ nguyên trị số mômen.

Định lý 2: Tác dụng của ngẫu lực lên vật rắn không thay đổi khi rời ngẫu lực đến mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng của nó.

1.3.3. HỢP HỆ NGẪU LỰC

Hệ ngẫu lực bất kỳ trong không gian tương đương với một ngẫu lực có vectơ mômen bằng tổng hình học các vectơ mômen của tất cả các ngẫu lực thành phần:

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k \quad (1.6)$$

Chú ý: Nếu hệ ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng thì tương đương với một ngẫu lực có mômen bằng tổng đại số mômen của tất cả các ngẫu lực thành phần:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k \quad (1.7)$$

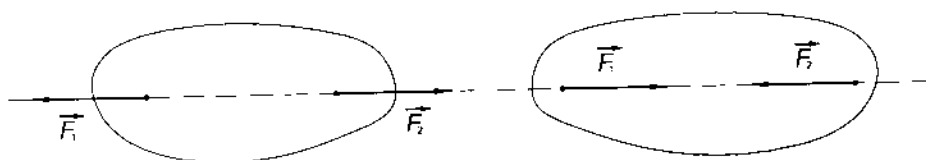
§1.4. HỆ TIÊN ĐỀ TÍNH HỌC

1.4.1. TIÊN ĐỀ 1 (Về hai lực cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hai lực là hai lực đó có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều. Ký hiệu $(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2) \sim 0$ (hình 1.9).

Như vậy ta nhận thấy:

- Một vật rắn dưới tác dụng của một lực thì không thể cân bằng được.
- Ngẫu lực là một hệ lực không cân bằng.



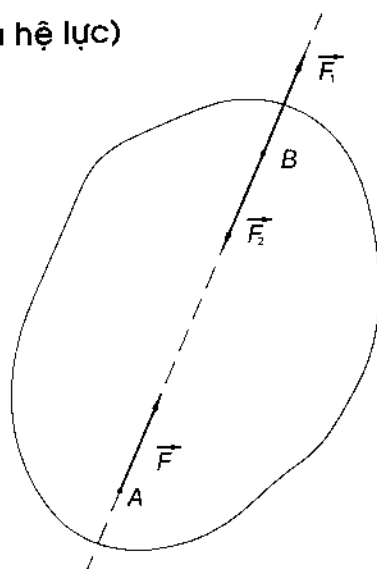
Hình 1.9

1.4.2. TIÊN ĐỀ 2 (Về sự tương đương của hệ lực)

Tác dụng của một hệ lực lên vật rắn không thay đổi nếu ta thêm vào hay bớt đi từ hệ lực đó một hệ lực cân bằng.

Như vậy nếu hai hệ lực khác nhau bởi một hệ lực cân bằng thì tương đương nhau.

Hệ quả của tiên đề 1 và 2: Tác dụng của một lực lên vật rắn sẽ không đổi nếu ta trượt lực đi trên đường tác dụng của nó.



Hình 1.10

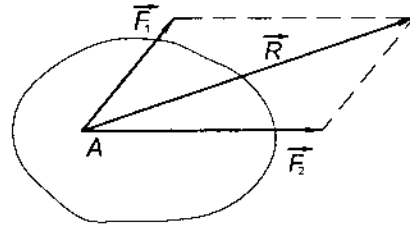
Chứng minh: Cho lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn đặt tại điểm A. Lấy điểm B trên đường tác dụng của nó và đặt tại B hai lực cân bằng $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (hình 1.10) sao cho $\vec{F}_1 = \vec{F} = -\vec{F}_2$

Theo tiên đề 2 thì $\vec{F} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F})$.

Mặt khác theo tiên đề 1 thì hai lực $(\vec{F}, \vec{F}_2) \sim 0$ nên khi bớt đi hai lực $\vec{F}, \vec{F}_2$ chỉ còn lại $\vec{F}_1$ hay $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}) \sim \vec{F}_1$. Như vậy tác dụng của lực $\vec{F}_1$ giống như tác dụng của lực $\vec{F}$ chỉ khác là lực $\vec{F}_1$ đặt tại B còn lực $\vec{F}$ đặt tại A.

1.4.3. TIÊN ĐỀ 3 (Quy tắc hình bình hành)

Hai lực đặt tại một điểm bao giờ cũng có hợp lực đặt tại điểm đó. Hợp lực ấy được xác định bởi đường chéo của hình bình hành có hai cạnh là hai lực đã cho.



Hình 1.11

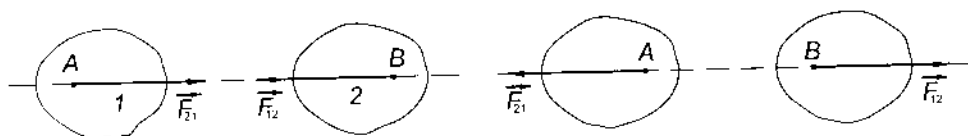
Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (hình 1.11) thì $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$. Về mặt toán học thì $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Chú ý:

- Tiên đề này vẫn đúng với trường hợp hai lực có đường tác dụng cắt nhau. Khi đó theo hệ quả của tiên đề 2 ta dời điểm đặt các lực về điểm cắt nhau này.
- Từ tiên đề này ta có thể suy ra cách tìm hợp lực của hệ n lực có đường tác dụng cắt nhau tại một điểm (gọi là hệ lực đồng quy). Khi đó dời điểm đặt của tất cả các lực về điểm cắt nhau rồi áp dụng tiên đề 3 cho từng cặp lực từ lực $\vec{F}_1$ đến lực $\vec{F}_n$.
- Từ một lực có thể phân tích được thành hai lực hay ba lực theo các phương cho trước.

1.4.4. TIÊN ĐỀ 4 (về lực tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai vật là những lực có cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều.



Hình 1.12

Tiên đề này cho ta thấy lực bao giờ cũng xuất hiện từ hai phía. Nếu vật thứ nhất tác dụng lên vật thứ hai một lực $\overrightarrow{F_{12}}$ thì vật thứ hai cũng tác dụng lên vật thứ nhất một lực $\overrightarrow{F_{21}}$. Về toán học có thể viết $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$. Hai lực này không cân bằng nhau vì chúng đặt lên hai vật khác nhau (hình 1.12).

1.4.5. TIÊN ĐỀ 5 (Nguyên lý hóa rắn)

Một vật biến dạng cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực thì khi hóa rắn nó vẫn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực đó.

§1.5. LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

1.5.1. KHÁI NIỆM VỀ VẬT RẮN TỰ DO, VẬT RẮN KHÔNG TỰ DO, LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

Vật rắn tự do là vật có thể di chuyển tự do trong không gian mà không bị ràng buộc bởi các vật khác.

Vật rắn không tự do là vật bị ngăn cản di chuyển bởi các vật khác. Vật rắn không tự do được gọi là vật bị liên kết còn vật ngăn cản di chuyển của vật bị liên kết được gọi là vật gây liên kết.

Điều kiện cản trở sự di chuyển tự do của vật được gọi là liên kết.

Ví dụ:

- Quả khinh khí cầu bay lơ lửng trong không gian là vật tự do.
- Vật đặt trên bàn là vật không tự do. Mặt bàn là vật gây liên kết.

Ta cần hiểu bản chất của liên kết là vật gây liên kết sinh ra lực ngăn cản chuyển động của vật bị liên kết. Lực này gọi là phản lực liên kết. Còn lực mà vật bị liên kết tác dụng lên vật gây liên kết gọi là áp lực. Áp lực và phản lực liên kết tuân theo tiên đề 4 của tĩnh học.

Cần chú ý là chiều của phản lực liên kết ngược với chiều di chuyển bị cản trở. Trong thực tế hầu hết các vật rắn đều ở trạng thái không tự do. Vì vậy việc xác định các phản lực liên kết là bài toán quan trọng trong tĩnh học. Ta sẽ khảo sát phản lực của một số liên kết sau đây với giả thiết các vật là vật rắn và nhẵn tuyệt đối.

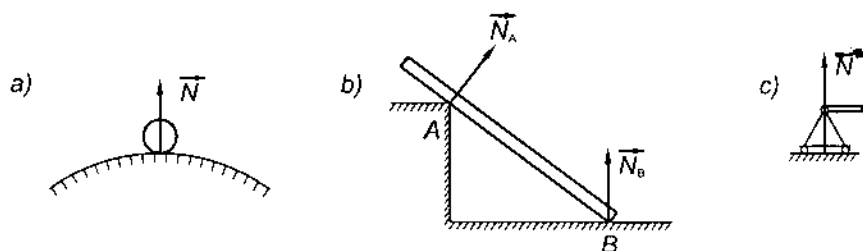
1.5.2. MỘT SỐ LIÊN KẾT THƯỜNG GẶP VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

a) Liên kết tựa

Khi vật tựa lên mặt một vật khác, chuyển động của vật chỉ bị cản trở theo phương pháp tuyến. Phản lực hướng theo phương pháp tuyến chung giữa hai mặt tiếp xúc và đặt tại tiếp điểm. Ký hiệu $\vec{N}$ (hình 1.13a).

Chú ý:

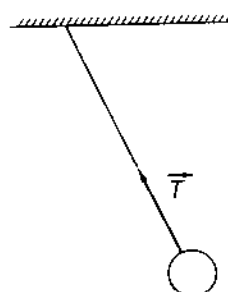
- Trường hợp một trong hai mặt tiếp xúc là một điểm thì phản lực hướng theo pháp tuyến của mặt còn lại (hình 1.13b).
- Gối tựa di động cũng là dạng liên kết tựa (hình 1.13c).



Hình 1.13

b) Liên kết dây mềm

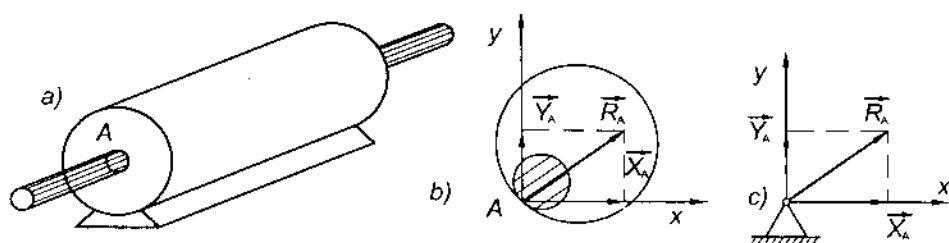
Dây mềm không giãn bị kéo căng. Phản lực liên kết dây gọi là sức căng của dây có phương dọc theo dây, chiều đi ra khỏi vật bị liên kết. Ký hiệu $\vec{T}$ (hình 1.14).



Hình 1.14

c) Liên kết bản lề trụ

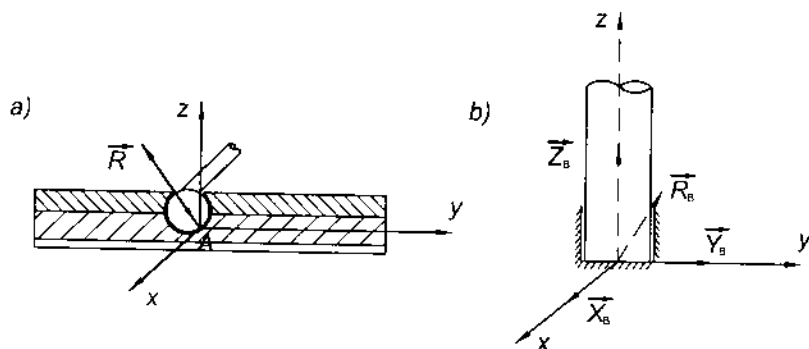
Bản lề trụ gồm một lõi trụ tròn còn gọi là trục bản lề và một vỏ trụ bao ngoài lõi trụ ấy (hình 1.15a). Hai vật rắn được nối với nhau bằng bản lề trụ. Chuyển động của vật bị liên kết không bị ngăn cản dọc theo trục bản lề, do đó phản lực theo phương này bằng không. Cho nên phản lực chỉ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục bản lề, có phương bất kỳ và ký hiệu $\vec{R}$. Ta phân tích vectơ $\vec{R}$ thành hai thành phần theo hai trục tọa độ trong mặt phẳng ấy (hình 1.15b). Gối tựa cố định cũng là dạng của bản lề trụ (hình 1.15c).



Hình 1.15

d) Liên kết bản lề cầu

Vật bị liên kết được nối với một quả cầu A xoay được trong một hốc hình cầu. Phản lực $\vec{R}$ đi qua tâm quả cầu A có phương, chiều bất kỳ trong không gian. Ta xác định được $\vec{R}$ qua ba thành phần của nó theo ba trục tọa độ (hình 1.16a).



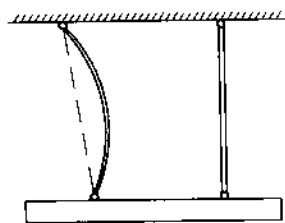
Hình 1.16

Liên kết cố cứng thuộc dạng bản lề cầu, phản lực $\vec{R}$ có phương bất kỳ và được phân làm ba thành phần theo ba trục tọa độ (hình 1.16b).

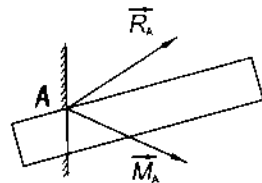
c) Liên kết thanh

Hai vật được nối với nhau bằng thanh cứng (có thể thẳng hay cong) không có lực tác dụng lên thanh (trọng lượng của thanh

không đáng kể). Ở hai đầu thanh có liên kết bản lề (hình 1.17). Phản lực có đường tác dụng đi qua hai đầu thanh. Ta có thể chứng minh kết luận này theo tiên đề 1. Nếu thanh chịu kéo thì phản lực hướng ra khỏi vật khảo sát, còn phản lực đi vào vật khảo sát thì thanh chịu nén.



Hình 1.17



Hình 1.18

f) Liên kết ngàm

Khi vật bị liên kết và vật gây liên kết được gắn cứng với nhau thì đó là liên kết ngàm (chẳng hạn, đinh đóng cứng vào tường). Phản lực liên kết gồm một lực $\vec{R}_A$ và một ngẫu lực có vectơ mômen $\vec{M}_A$ (hình 1.18). Nếu là ngàm trong không gian thì $\vec{R}_A$ được xác định bởi ba thành phần X_A, Y_A, Z_A theo ba trục tọa độ. Còn vectơ $\vec{M}_A$ cũng được xác định bởi M_{AX}, M_{AY}, M_{AZ} theo ba trục tọa độ đó. Nếu ngàm trong mặt phẳng thì $\vec{R}_A$ được xác định bởi hai thành phần X_A, Y_A theo hai trục tọa độ trong mặt phẳng. Còn M_A được xác định trong mặt phẳng ngàm.

1.5.3. TIÊN ĐỀ 6 (Về giải phóng liên kết)

Một vật rắn không tự do cân bằng có thể coi là vật rắn tự do cân bằng nếu ta thay thế các liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng.

Trong trường hợp này hệ lực tác dụng lên vật rắn cân bằng bao gồm cả lực chủ động và phản lực liên kết.

Tiên đề này giúp ta giải bài toán cân bằng đối với các vật rắn không tự do, tức là vật rắn chịu liên kết.

CHƯƠNG 2

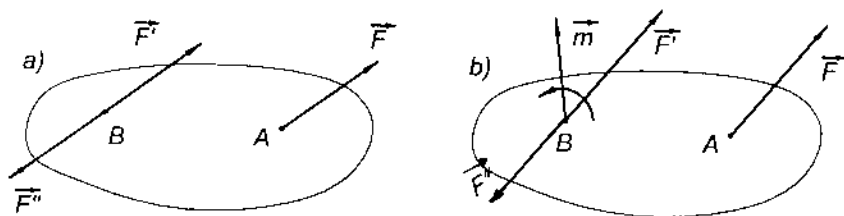
HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA TĨNH HỌC

§2.1. BÀI TOÁN THU GỌN HỆ LỰC

2.1.1. ĐỊNH LÝ DỜI LỰC SONG SONG

Định lý: Khi dời song song một lực $\vec{F}$ từ điểm A đến điểm B tác dụng của lực lên vật rắn không đổi nếu ta thêm vào một ngẫu lực có mômen bằng mômen của lực $\vec{F}$ đặt tại điểm A đối với điểm B.

Chứng minh: Cho một lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn đặt tại điểm A cần dời lực $\vec{F}$ đến điểm B thì tại B ta thêm vào hai lực cân bằng $\vec{F}'$ và $\vec{F}''$ sao cho $\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}''$. Theo tiên đề 2 thì $\vec{F} \sim (\vec{F}', \vec{F}'', \vec{F})$ (hình 2.1a).



Hình 2.1

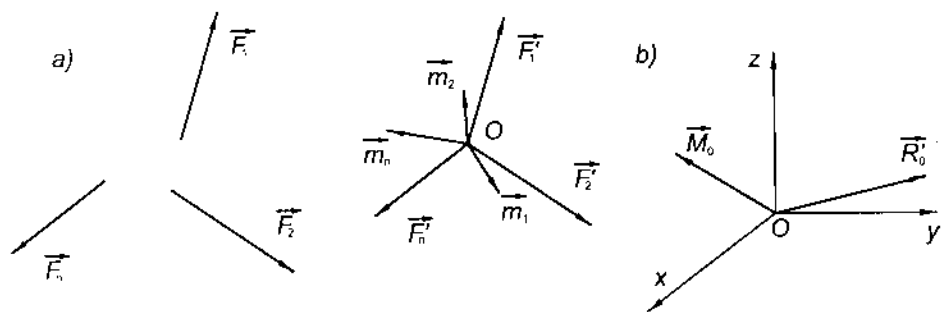
Như vậy $(\vec{F}', \vec{F}'', \vec{F})$ là một hệ gồm một lực $\vec{F}'$ và một ngẫu lực $(\vec{F}'', \vec{F})$. Ngẫu lực này có mômen $\vec{m} = \vec{m}_B(\vec{F}_A)$. Định lý được chứng minh (hình 2.1b).

2.1.2. THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN VỀ MỘT TÂM - VECTO CHÍNH VÀ VECTO MÔMEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC

Định nghĩa: Hệ lực không gian là một hệ lực mà đường tác dụng của các lực nằm bất kỳ trong không gian.

a) Phương pháp thu gọn

Cho một hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Ta lấy O làm tâm thu gọn. Thu gọn hệ lực này về tâm O . Áp dụng định lý dời lực song song ta dời song song lực $\vec{F}_1$ về O , ta được $\vec{F}_1' = \vec{F}_1$ và mômen $\vec{m}_1 = \vec{m}_o(\vec{F}_1)$. Dời song song lực $\vec{F}_2$ về O , ta được $\vec{F}_2' = \vec{F}_2$ và mômen $\vec{m}_2 = \vec{m}_o(\vec{F}_2)$. Tương tự dời lực $\vec{F}_n$ về O , ta được $\vec{F}_n' = \vec{F}_n$ và mômen $\vec{m}_n = \vec{m}_o(\vec{F}_n)$. Sau khi dời song song hệ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ về O thì ta được một hệ lực đồng quy $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$ và hệ ngẫu lực có các vectơ mômen $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n$ (hình 2.2a).



Hình 2.2

Theo tiên đề 3 thay hệ lực đặt tại O $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \dots, \vec{F}_n')$ bằng một lực $\vec{R}_o'$ đặt tại O

$$\vec{R}_o' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k' = \sum \vec{F}_k \quad (2.1)$$

Theo phép hợp ngẫu lực (1.6) thay hệ ngẫu lực bằng một ngẫu lực tổng hợp có vectơ mômen $\overrightarrow{M}_o$ (hình 2.2b)

$$\overrightarrow{M}_o = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{m}_k = \sum \overrightarrow{m}_o(\overrightarrow{F}_k) \quad (2.2)$$

b) Vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực

- $\overrightarrow{R}_o = \sum \overrightarrow{F}_k$ là vectơ chính của hệ lực $(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, \dots, \overrightarrow{F}_n)$
- $\overrightarrow{M}_o = \sum \overrightarrow{m}_o(\overrightarrow{F}_k)$ là vectơ mômen chính của hệ lực đối với tâm O

Chú ý:

- $\overrightarrow{R}_o$ không phụ thuộc vào tâm thu gọn O (vì bằng tổng hình học của các lực đã cho). $\overrightarrow{R}_o$ là hợp lực của hệ lực $(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, \dots, \overrightarrow{F}_n)$ đặt tại O chứ không phải là hợp lực của hệ lực $(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, \dots, \overrightarrow{F}_n)$ (giải thích theo định nghĩa hợp lực).
- $\overrightarrow{M}_o$ nói chung phụ thuộc vào tâm thu gọn O (có thể chứng minh theo mục 1.2.2).

c) Kết quả thu gọn

Định lý: Khi thu gọn hệ lực không gian về một tâm, ta được một lực và một ngẫu lực. Lực ấy được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đã cho, còn ngẫu lực có mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

2.1.3. XÁC ĐỊNH VECTƠ CHÍNH VÀ VECTƠ MÔMEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC

a) Xác định $\overrightarrow{R}_o$ và $\overrightarrow{M}_o$ bằng phương pháp giải tích

Theo định nghĩa $\overrightarrow{R}_o = \sum \overrightarrow{F}_k$ ta có:

$$R_{ox} = \sum F_{kx} = \sum X_k$$

$$R'_{oy} = \sum F_{ky} = \sum Y_k$$

$$R'_{oz} = \sum F_{kz} = \sum Z_k$$

R'_{ox} , R'_{oy} , R'_{oz} là hình chiếu của $\overrightarrow{R'_o}$, F_{kx} , F_{ky} , F_{kz} hay X_k , Y_k , Z_k là hình chiếu của $\overrightarrow{F_k}$ lên các trục tọa độ.

Ta có:

$$\begin{aligned} R'_o &= \sqrt{(R'_{ox})^2 + (R'_{oy})^2 + (R'_{oz})^2} \\ R'_o &= \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Gọi α, β, γ là góc mà vectơ $\overrightarrow{R'_o}$ tạo với các trục Ox , Oy , Oz thì cosin của các góc này được xác định như sau:

$$\cos \alpha = \frac{R'_{ox}}{R'_o}; \cos \beta = \frac{R'_{oy}}{R'_o}; \cos \gamma = \frac{R'_{oz}}{R'_o} \quad (2.4)$$

Sử dụng định lý liên hệ giữa mômen của một lực đối với một điểm và mômen của một lực đối với một trục, ta sẽ xác định được $\overrightarrow{M_o}$

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \sum [\overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_k})]_x = \sum m_x(\overrightarrow{F_k}) \\ M_{oy} &= \sum [\overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_k})]_y = \sum m_y(\overrightarrow{F_k}) \\ M_{oz} &= \sum [\overrightarrow{m_o}(\overrightarrow{F_k})]_z = \sum m_z(\overrightarrow{F_k}) \\ M_o &= \sqrt{(\sum m_x(\overrightarrow{F_k}))^2 + (\sum m_y(\overrightarrow{F_k}))^2 + (\sum m_z(\overrightarrow{F_k}))^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Gọi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ là góc mà vectơ $\overrightarrow{M_o}$ tạo với các trục Ox , Oy , Oz thì cosin của các góc này được xác định như sau:

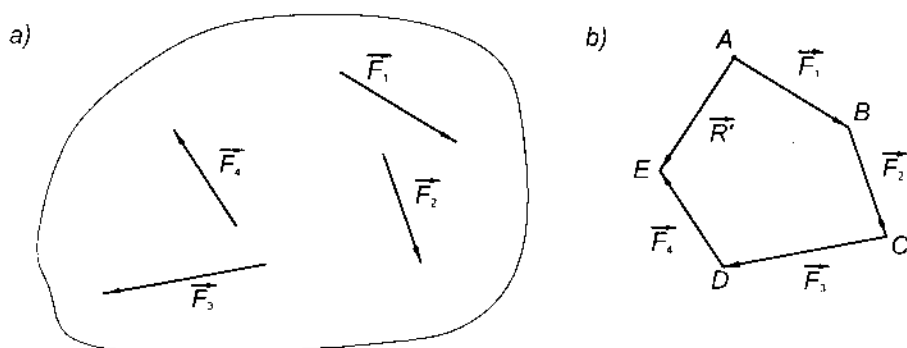
$$\cos \alpha_1 = \frac{M_{ox}}{M_o}; \cos \beta_1 = \frac{M_{oy}}{M_o}; \cos \gamma_1 = \frac{M_{oz}}{M_o} \quad (2.6)$$

b) Xác định $\vec{R}_0'$ bằng phương pháp hình học (dùng đa giác lực)

Xét hệ có 4 lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ (hình 2.3a). Từ một điểm A bất kỳ, ta lần lượt vẽ nối tiếp các vectơ tương ứng song song cùng chiều với các vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ dài chính bằng độ dài các vectơ ấy. Đường gãy khúc ABCDEA được tạo thành gọi là đa giác lực của hệ lực đã cho (hình 2.3b)

Vectơ $\vec{AE}$ gọi là cạnh đóng kín đa giác lực và là vectơ chính $\vec{R}'$ của hệ lực đã cho. Nếu hệ các lực nằm trong không gian thì đa giác lực là đa giác gập. Nếu hệ các lực nằm trong mặt phẳng thì đa giác lực sẽ là đa giác phẳng

Đối với hệ có n lực mà $n > 4$ thì ta vẽ tương tự như hệ bốn lực cho đến lực $\vec{F}_n$.



Hình 2.3

2.1.4. CÁC DẠNG CHUẨN KHI THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Thu hệ lực không gian về một tâm ta được một lực và một ngẫu lực. Lực và ngẫu lực này được biểu diễn qua vectơ chính và mômen chính của hệ đối với tâm thu gọn. Để hiểu rõ hơn thực chất tác

dụng của hệ lực không gian, ta xét dạng chuẩn của nó qua các trường hợp có thể gặp của vectơ chính và mômen chính của hệ lực:

- a) Hệ lực cân bằng: nếu hệ lực đã cho có $\vec{R}_o = 0$ và $\vec{M}_o = 0$.
- b) Hệ thu về ngẫu lực nếu $\vec{R}_o = 0$ và $\vec{M}_o \neq 0$. Lúc này $\vec{M}_o$ không phụ thuộc tâm thu gọn O .
- c) Hệ thu về hợp lực khi thỏa mãn một trong hai trường hợp sau đây:

- $\vec{R}_o \neq 0$ và $\vec{M}_o = 0$: hệ thu về một lực $\vec{R}_o$, vì thế $\vec{R}_o$ chính là hợp lực của hệ đi qua O .
- $\vec{R}_o \neq 0$ và $\vec{M}_o \neq 0$ và $\vec{M}_o \perp \vec{R}_o$: nghĩa là $\vec{R}_o \cdot \vec{M}_o = 0$, hệ sẽ thu về một lực không đi qua O mà đi qua O' . Ta có thể chứng minh điều này và xác định O' như sau.

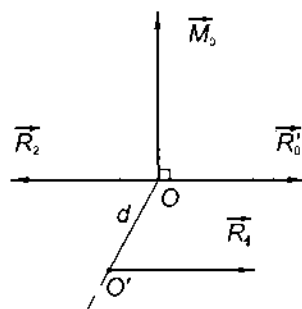
Vectơ $\vec{M}_o$ được biểu diễn bởi ngẫu lực $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ cùng nằm trong mặt phẳng với $\vec{R}_o$ sao cho

$$\vec{R}_o = \vec{R}_1 = -\vec{R}_2.$$

Như vậy cánh tay đòn sẽ là

$$OO' = d = \frac{M_o}{R_o}.$$

$(\vec{R}_o, \vec{R}_1, \vec{R}_2)$ cùng trong một mặt phẳng và có $(\vec{R}_o, \vec{R}_2) \sim 0$ nên ta có thể bớt đi hệ lực cân bằng $(\vec{R}_o, \vec{R}_2)$ này. Lúc đó hệ chỉ còn lại một lực $\vec{R}_1$ đi qua O' (hình 2.4).

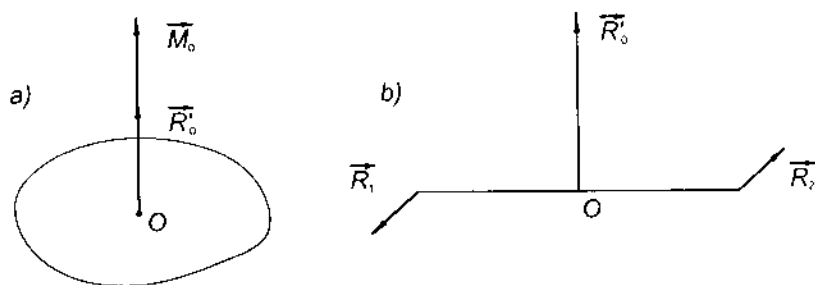


Hình 2.4

- d) Hệ lực thu về hệ xoắn: nếu $\vec{R}_o \neq 0$ và $\vec{M}_o \neq 0$ thì có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau đây:

- $\vec{M}_o \parallel \vec{R}_o$: ngẫu lực có vectơ $\vec{M}_o$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\vec{R}_o$. Tập hợp gồm lực $\vec{R}_o$ và ngẫu lực $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ gọi là hệ

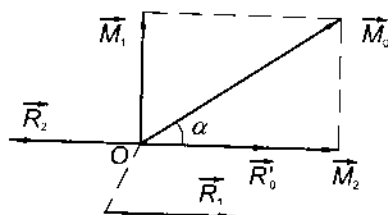
xoắn (hình 2.5b). Như vậy khi $\vec{M}_o \parallel \vec{R}_o'$ thì hệ lực thu về một hệ xoắn. Đoạn thẳng đi qua O mang hai vectơ $\vec{M}_o$ và $\vec{R}_o'$ gọi là trục xoắn (hình 2.5a)



Hình 2.5

Tác dụng của hệ lực này làm cho vật rắn vừa quay vừa tịnh tiến theo trục xoắn (còn gọi là chuyển động xoắn ốc).

- $\vec{M}_o$ và $\vec{R}_o'$ tạo với nhau một góc α nào đó, khi đó ta phân tích $\vec{M}_o$ ra hai thành phần: $\vec{M}_1 \perp \vec{R}_o'$ và $\vec{M}_2 \parallel \vec{R}_o'$.



Hình 2.6

Với $\vec{M}_1 \perp \vec{R}_o'$ ta thay $\vec{M}_1 \sim (\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ sao cho $\vec{R}_o' = \vec{R}_1 = -\vec{R}_2$. Lúc này $(\vec{R}_o', \vec{M}_1) \sim (\vec{R}_o', \vec{R}_1, \vec{R}_2) \sim \vec{R}_1$ đặt tại O' cách O một đoạn $d = OO' = \frac{M_1}{R_o'}$. Lúc này hệ thu về hệ xoắn có trục xoắn đi qua O' .

Như vậy còn $\overline{M}_z$ song song với $\overline{R}_1$ và hệ thu về hệ xoắn có trục xoắn không đi qua O mà đi qua O' (hình 2.6).

2.1.5. ĐỊNH LÝ VARINHÔNG

Nếu hệ lực có hợp lực thì vectơ mômen của hợp lực đối với một điểm nào đó bằng tổng hình học các vectơ mômen các lực của hệ đối với điểm ấy.

$$\overline{M}_o(\overline{R}) = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k) \quad (2.7)$$

Chứng minh: Giả sử hệ lực $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n)$ có hợp lực $\overline{R}$ đặt tại A . Nghĩa là $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \sim \overline{R}$. Khi đó $\overline{M}_A(\overline{R}) = 0$. Lấy điểm O bất kỳ làm tâm thu gọn ta có $\overline{M}_o = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k)$. Theo định lý về sự biến thiên mômen của lực

$$\overline{M}_o - \overline{M}_A = \overline{M}_o(\overline{R}) \rightarrow \overline{M}_o = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k) = \overline{M}_o(\overline{R}) \quad (2.8)$$

Chiếu đẳng thức (2.8) lên trục z ta có $M_z(\overline{R}) = \sum m_z(\overline{F}_k)$.

Định lý được chứng minh.

2.1.6. THU GỌN HỆ CÁC LỰC ĐẶC BIỆT

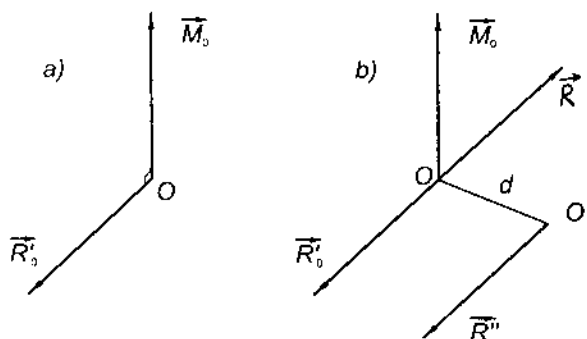
a) Hệ lực phẳng

Hệ lực phẳng là hệ lực có đường tác dụng của các lực cùng nằm trong một mặt phẳng.

Rõ ràng thấy rằng $\overline{R}_o = \sum \overline{F}_k$ nằm trong mặt phẳng chứa các lực. còn $\overline{M}_o$ vuông góc với mặt phẳng chứa các lực. Do đó khi thu gọn hệ lực phẳng chỉ có thể xảy ra một trong các trường hợp sau đây:

- $\overline{R}_o = 0$, $M_o = 0$ thu được về hệ lực cân bằng.
- $\overline{R}_o = 0$, $M_o \neq 0$ hệ thu về ngẫu lực có M_o không phụ thuộc vào tâm thu gọn O .

- $\vec{R}_o \neq 0, M_o = 0$ hệ thu về hợp lực đặt tại O , còn nếu $\vec{R}_o \neq 0, M_o \neq 0$ (hình 2.7a) hệ thu về hợp lực đặt tại O' cách O một đoạn $d = OO' = \frac{M_o}{R_o}$ (hình 2.7b).



Hình 2.7

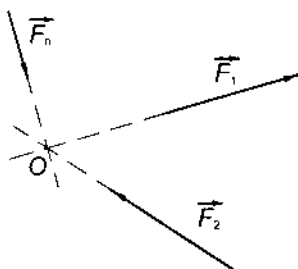
b) Hệ lực đồng quy

Hệ lực đồng quy là hệ lực có đường tác dụng của các lực đi qua cùng một điểm. Khi thu gọn hệ lực đồng quy về điểm đồng quy O ta được một lực $\vec{R}_o$ đi qua O (hình 2.8). Ta có:

$$\vec{R}_o = \sum \vec{F}_k \quad (2.9)$$

Nếu: $\vec{R}_o = 0$, ta có hệ lực cân bằng;

$\vec{R}_o \neq 0$, ta có hợp lực đặt tại O .



Hình 2.8

2.1.7. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Ví dụ 1: Tại các đỉnh của hình lập phương có cạnh là a , có các lực tác dụng như hình 2.9. Cường độ các lực cho như sau:

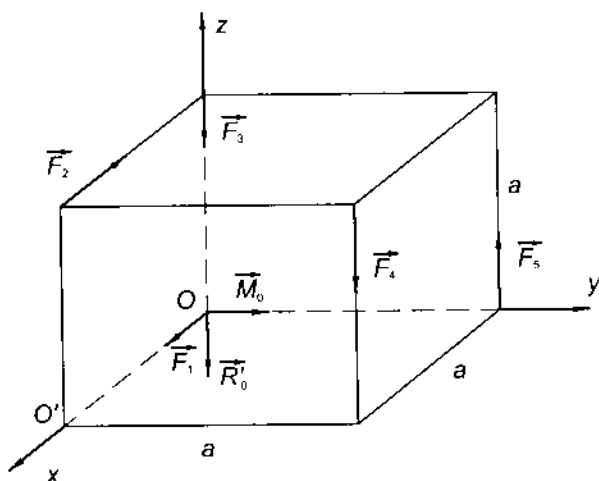
$$F_1 = F_2 = F_3 = F$$

$$F_4 = F_5 = 2F$$

Thu gọn hệ lực này về tâm O .

Bài giải: Thu gọn hệ lực về tâm O là tìm vectơ chính và mômen chính của hệ đối với tâm O .

Chọn hệ trục như ở hình 2.9.



Hình 2.9

$$R_x' = \sum X_k = F_1 - F_2 = 0$$

$$R_y' = \sum Y_k = 0$$

$$R_z' = \sum Z_k = F_5 - F_4 - F_3 = -F$$

$$M_{ox} = \sum m_x(\vec{F}_k) = aF_5 - aF_4 = 0$$

$$M_{oy} = \sum m_y(\vec{F}_k) = aF_1 - aF_2 = aF$$

$$M_{oz} = \sum m_z(\vec{F}_k) = 0$$

Như vậy khi thu gọn hệ lực ở trên về O ta được một lực $\vec{R}_o$ song song và ngược chiều với trục z , một ngẫu lực có $\vec{M}_o$ song song cùng chiều với trục y

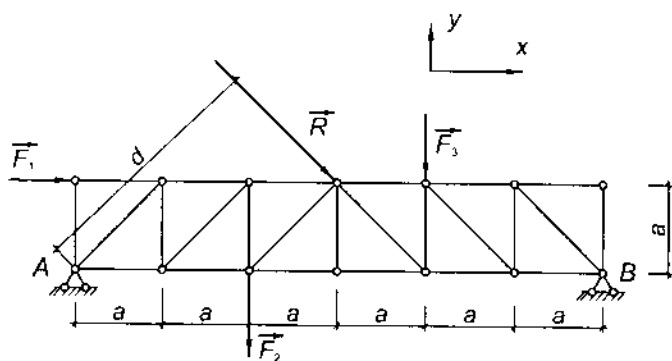
$$|\vec{R}_o| = F; |\vec{M}_o| = aF$$

Vì $\vec{M}_o \perp \vec{R}$ nên hệ thu được về hợp lực đi qua O' .

Ví dụ 2 (hệ lực phẳng): Cho dàn chịu lực như ở hình 2.10. Ta có:

Với $F_1 = 2F; F_2 = F_3 = F$.

Thu gọn hệ lực về dạng tối giản.



Hình 2.10

Bài giải: Chọn hệ trục như ở hình 2.10.

$$R_x = F_1 = 2F$$

$$R_y = -F_2 - F_3 = -2F$$

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = 2\sqrt{2}F$$

Nêu gọi α, β là góc giữa $\vec{R}$ tạo với các trục Ox, Oy thì cosin của các góc này được xác định như sau:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (a)$$

Hệ lực phẳng có $\vec{R} \neq 0$ nên thu được về hợp lực. Áp dụng định lý Varinhông ta có thể tìm được đường tác dụng của hợp lực $\vec{R}$. Ta thấy dễ dàng:

$$m_A(\vec{R}) = \sum m_A(\vec{F}_k) = -aF_1 - 2aF_2 - 4aF_3 = -8aF$$

Mặt khác nếu gọi d là cánh tay đòn của $\vec{R}$ đối với A, ta có

$$m_A(\vec{R}) = -dR$$

$$\text{Như vậy} \quad d = 2\sqrt{2}a \quad (b)$$

Kết hợp (a) và (b) ta có đường tác dụng của $\vec{R}$ cách A một khoảng d . Mômen của $\vec{R}$ đối với A có dấu (-).

§2.2. BÀI TOÁN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

2.2.1. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

a) **Định lý 1:** Điều kiện cân và đủ để hệ lực không gian cân bằng là vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực đối với một điểm O bất kỳ kỳ nào đó bằng 0:

$$\vec{R}_O = 0 \quad \text{và} \quad \vec{M}_O = 0$$

Chứng minh:

- Điều kiện cân:

$$\text{Giả thiết } (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$$

$$\text{Kết luận } \overline{R'_o} = \sum \overline{F_k} = 0 \text{ và } \overline{M_o} = \sum \overline{m_{o_k}(\overline{F_k})} = 0$$

Ta chứng minh điều kiện cần dựa vào các dạng chuẩn khi thu gọn hệ lực không gian. Thực vậy, nếu điều kiện trên không thỏa mãn thì hệ lực không gian sẽ tương đương với một ngẫu lực, hợp lực hoặc hệ xoắn, nghĩa là không thỏa mãn tiên đề 1. Vậy $\overline{R'_o} = 0$ và $\overline{M_o} = 0$ hay hệ cân bằng.

- Điều kiện đủ:

$$\text{Giả thiết } \overline{R'_o} = \sum \overline{F_k} = 0 \text{ và } \overline{M_o} = \sum \overline{m_{o_k}(\overline{F_k})} = 0$$

$$\text{Kết luận } (\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}) \sim 0$$

Điều kiện đủ là hiển nhiên vì vectơ chính của hệ lực bằng không, khi thu gọn hệ lực về một điểm bất kỳ ta được một ngẫu lực thu gọn có mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với điểm O (định lý biến thiên mômen) tức là bằng 0. Do đó ngẫu lực thu gọn là hai lực cân bằng theo tiên đề 1. Vậy hệ lực đã cho cân bằng.

b) Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Định lý 2: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian cân bằng là tổng hình chiếu của tất cả các lực và tổng mômen của chúng đối với ba trục tọa độ đồng thời bằng 0:

$$\left. \begin{array}{l} \sum X_k = 0 \\ \sum Y_k = 0 \\ \sum Z_k = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum m_x(\overline{F_k}) = 0 \\ \sum m_y(\overline{F_k}) = 0 \\ \sum m_z(\overline{F_k}) = 0 \end{array} \quad (2.10)$$

Chứng minh: Từ (2.3) và (2.5) ta có:

$$R' = \sqrt{(\sum X_k)^2 + (\sum Y_k)^2 + (\sum Z_k)^2} = 0$$

$$M_o = \sqrt{(\sum m_x(\overline{F_k}))^2 + (\sum m_y(\overline{F_k}))^2 + (\sum m_z(\overline{F_k}))^2} = 0$$

Như vậy muốn $\vec{R} = 0$ và $\vec{M}_O = 0$ thì các số hạng trong cân phải đồng thời bằng 0.

Ba phương trình đầu của (2.10) bảo đảm để vật rắn dưới tác dụng của hệ lực trên không chuyển dời dọc theo các trục tọa độ và ba phương trình sau bảo đảm để vật rắn không quay quanh các trục tọa độ. Nghĩa là vật rắn cân bằng

Chú ý: Nếu ngoài hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ còn có hệ s ngẫu lực với các vectơ mômen $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_s)$ tác dụng lên vật rắn thì khi thiết lập phương trình cân bằng ta cần lưu ý:

- Các phương trình hình chiếu lên các trục tọa độ vẫn giữ nguyên.
- Trong các phương trình mômen đối với các trục tọa độ ta phải cộng đại số thêm hình chiếu của các vectơ mômen lên các trục tọa độ.

$$\begin{aligned}\sum m_x(\vec{F}_k) + \sum m_{ix} &= 0 \\ \sum m_y(\vec{F}_k) + \sum m_{iy} &= 0 \\ \sum m_z(\vec{F}_k) + \sum m_{iz} &= 0\end{aligned}\tag{2.11}$$

trong đó m_{ix}, m_{iy}, m_{iz} là hình chiếu của vectơ $\vec{m}_i$ lên các trục tọa độ.

2.2.2. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA CÁC HỆ LỰC KHÁC

a) Hệ lực phẳng

Ta chọn mặt phẳng chứa các lực làm mặt phẳng Oxy và trục Oz vuông góc với mặt phẳng chứa các lực. Từ (2.10) rõ ràng là:

$$\sum Z_k = 0; \quad \sum m_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \text{ luôn tự thỏa mãn.}$$

Khi đó điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng còn lại

$$\sum X_k = 0; \quad \sum Y_k = 0; \quad \sum m_z(\vec{F}_k) = \sum m_o(\vec{F}_k) = 0$$

Do đó định lý được phát biểu như sau:

- *Dạng cân bằng thứ nhất:*

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng hình chiếu tất cả các lực lên hai trục tọa độ và tổng mômen của chúng đối với một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực bằng 0:

$$\sum X_k = 0; \sum Y_k = 0; \sum m_o(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.12)$$

- *Dạng cân bằng thứ hai:*

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen của các lực đối với hai điểm A, B bất kỳ và tổng hình chiếu của các lực lên trục Ox không vuông góc với AB bằng 0:

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0; \sum m_B(\vec{F}_k) = 0; \sum X_k = 0 \quad (2.13)$$

Chứng minh:

- Điều kiện cần: Chứng minh như dạng tổng quát.
- Điều kiện đủ: Nếu hai phương trình đầu của (2.13) thỏa mãn thì hệ có thể thu về hợp lực $\vec{R}$ đi qua cả hai điểm A, B. Trục Ox không vuông góc với AB thì phương trình thứ 3 thỏa mãn khi và chỉ khi chính bản thân vectơ $\vec{R} = 0$. Như vậy hệ sẽ cân bằng.
- *Dạng cân bằng thứ ba:*

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen tất cả các lực đối với ba điểm A, B, C không thẳng hàng đồng thời bằng 0:

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0; \sum m_B(\vec{F}_k) = 0; \sum m_C(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.14)$$

Chứng minh: Tương tự dạng thứ hai.

b) Hệ lực không gian song song

Hệ lực không gian song song là hệ lực có các lực song song trong không gian.

Chọn hệ trục Oxyz có trục Oz song song với các lực. Khi đó từ (2.10) ta có các phương trình sau tự nghiệm:

$$\sum X_k = 0; \sum Y_k = 0; \sum m_z(\vec{F}_k) = 0$$

Do đó điều kiện để hệ lực không gian song song cân bằng sẽ là:

$$\sum Z_k = 0; \sum m_x(\vec{F}_k) = 0; \sum m_y(\vec{F}_k) = 0$$

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian song song cân bằng là tổng hình chiếu các lực lên trục song song với chúng và tổng mômen các lực đối với hai trục còn lại bằng 0:

$$\sum Z_k = 0; \sum m_x(\vec{F}_k) = 0; \sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \quad (2.15)$$

(nếu trục Oz song song với các lực)

c) Hệ lực không gian đồng quy

Hệ lực không gian đồng quy tại O. Khi đó lấy O làm tâm mômen và là gốc của hệ tọa độ Oxyz thì ba phương trình mômen của (2.10) tự thỏa mãn. Ta có định lý sau:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian đồng quy cân bằng là tổng hình chiếu tất cả các lực lên ba trục tọa độ đều bằng 0:

$$\sum X_k = 0; \sum Y_k = 0; \sum Z_k = 0 \quad (2.16)$$

2.2.3. TRÌNH TỰ GIẢI BÀI TOÁN TÍNH HỌC VÀ CÁC VÍ DỤ

Một vật rắn sẽ cân bằng khi nó chịu tác dụng của hệ lực cân bằng. Giải bài toán về sự cân bằng của hệ lực là ta tìm các phản lực liên kết trong các phương trình cân bằng của hệ lực.

Các bước cần thiết để giải bài toán tĩnh học:

- 1) Chọn vật xét cân bằng.
- 2) Thay tất cả các liên kết bằng phản lực liên kết tương ứng. Lúc đó vật xét cân bằng sẽ chịu tác dụng của các lực đã biết và phản lực liên kết.
- 3) Thiết lập các phương trình cân bằng của hệ lực tác dụng lên vật.

- 4) Giải các phương trình để xác định các đại lượng cần tìm và kiểm tra lại kết quả.

Ví dụ 1 (đối với hệ lực không gian): Một tấm mỏng đồng chất hình chữ nhật nặng 200N liên kết với tường thẳng đứng bằng bản lề cầu A , bản lề trụ B và được giữ nằm ngang nhờ sợi dây CE : A và E cùng nằm trên một đường thẳng đứng. Cho biết góc ECA và BAC đều bằng 30° . Cho $AB = CD = a$; $AD = BC = b$. Tìm phản lực tại A , B và sức căng T của dây CE (hình 2.11).

Bài giải: Khảo sát tấm mỏng $ABCD$ cân bằng.

Giải phóng liên kết và đặt các phản lực liên kết tương ứng.

Hệ lực tác dụng lên tấm $ABCD$: $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B) \sim 0$.

Hệ tọa độ được chọn như ở hình 2.11. $\vec{T}$ là lực có phương, chiều như ở hình 2.11. Phân tích $\vec{T}$ ra ba thành phần:

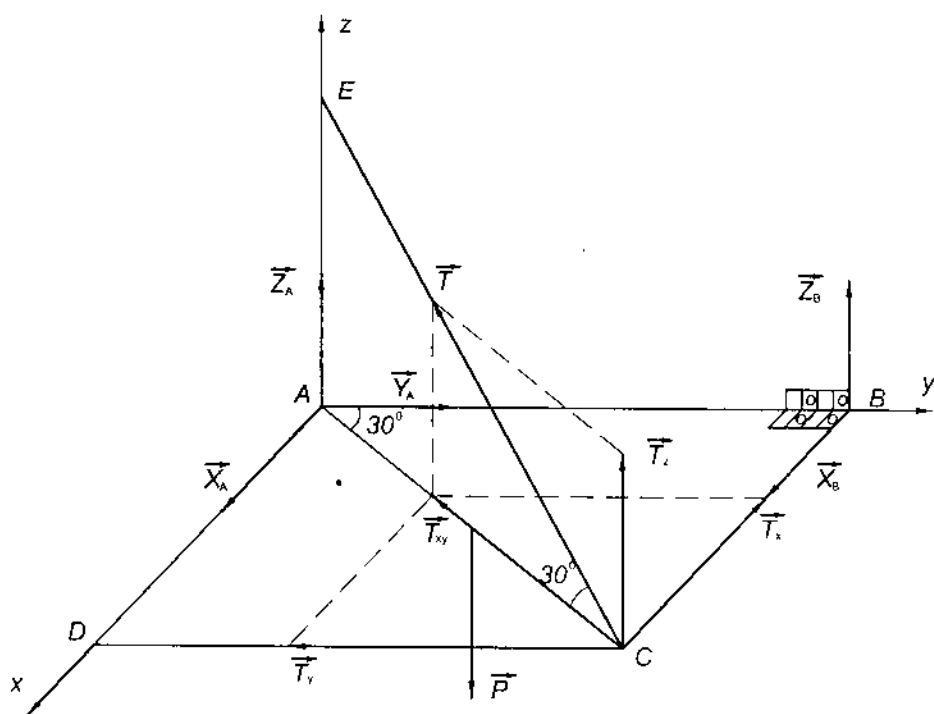
$$T_x = T \cos 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} T$$

$$T_y = T \cos 30^\circ \cos 30^\circ = \frac{3}{4} T$$

$$T_z = T \sin 30^\circ = \frac{1}{2} T$$

Lập các phương trình cân bằng của hệ lực:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= X_A + X_B - T_x = 0 \\ \sum Y_k &= Y_A - T_y = 0 \\ \sum Z_k &= Z_A + Z_B - P + T_z = 0 \\ \sum m_x(\vec{F}_k) &= aZ_B - \frac{a}{2}P + aT_z = 0 \\ \sum m_y(\vec{F}_k) &= \frac{b}{2}P - bT_z = 0 \\ \sum m_z(\vec{F}_k) &= -aX_B = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Hình 2.11

Giải hệ phương trình (a), ta tính ra được:

$$T = 200N; X_B = Z_B = 0; X_A = 86,5N; Y_A = 150N; Z_A = 100N.$$

Chú ý: Khi lấy mômen của một lực đối với một trục phải để ý đến trường hợp khi mômen của lực đối với trục bằng 0.

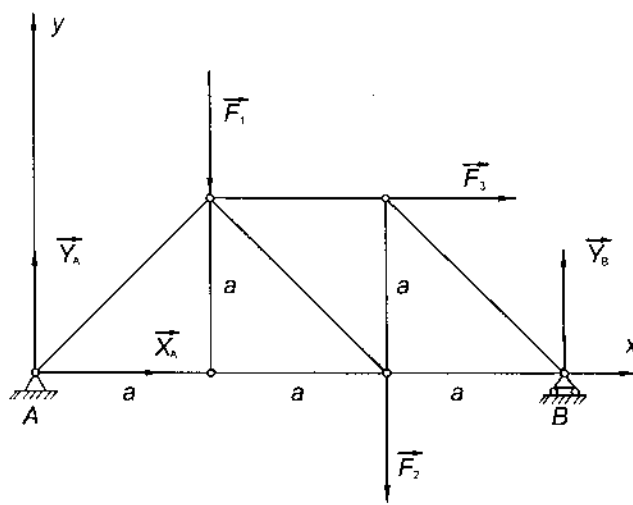
Ví dụ 2 (hệ lực phẳng): Cho dầm chịu lực và có liên kết như ở hình 2.12. Cường độ các lực $F_1 = F_2 = F_3 = F$. Xác định phản lực tại A và B.

Bài giải: Khảo sát dầm cân bằng.

Lực tác dụng lên dầm: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B)$.

Lập ba phương trình cân bằng:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}_k) &= 3aY_B - aF_1 - 2aF_2 - aF_3 = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= -3aY_A + 2aF_1 + aF_2 - aF_3 = 0 \\ \sum X_k &= X_A + F_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$



Hình 2.12

Giải hệ phương trình (b) ta nhận được:

$$X_A = -F; Y_A = \frac{2}{3}F; Y_B = \frac{4}{3}F$$

Nhận xét: Kết quả X_A mang dấu (-), chứng tỏ chiều thực tế của X_A ngược với chiều ta giả thiết.

Ví dụ 3 (hệ lực song song): Một cần trục có trọng lượng $Q = 50\text{kN}$ và trọng tâm ở C như ở hình 2.13; tải trọng $P = 10\text{kN}$. Hãy xác định phản lực tại A và B.

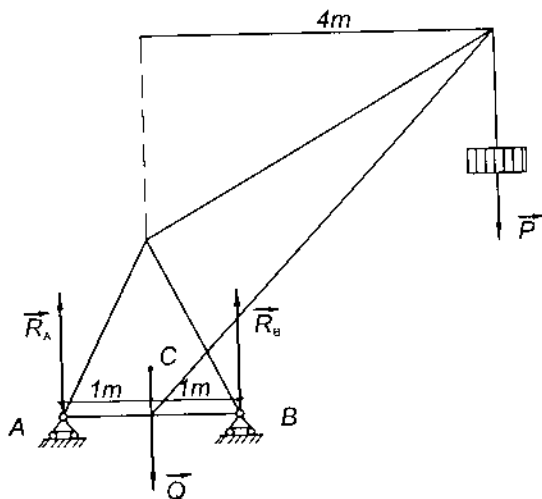
Bài giải: Khảo sát cần trục cân bằng.

Các lực tác dụng ($\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}_A, \vec{R}_B$) (đây là hệ lực phẳng song song).

Các phương trình cân bằng:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}_k) &= 2R_B - 1Q - 5P = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= -2R_A + 1Q - 3P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Giải hệ phương trình (c) ta tìm được: $R_A = 10kN$; $R_B = 50kN$.



Hình 2.13

Nhận xét: Nếu giữ nguyên Q mà tăng tải trọng P lên thì sức nặng dồn về B , phản lực R_B tăng lên, còn R_A giảm cho đến lúc $R_A = 0$ và khi đó cần trục có khả năng quay quanh B .

Bài toán cần giải quyết là cần trục phải cân bằng. Để giải quyết vấn đề này, ta cần xét đến bài toán đòn và vật lật.

Chương 3

BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT CỦA TĨNH HỌC

§3.1. BÀI TOÁN VỀ SỰ CÂN BẰNG CỦA ĐÒN VÀ VẬT LẬT

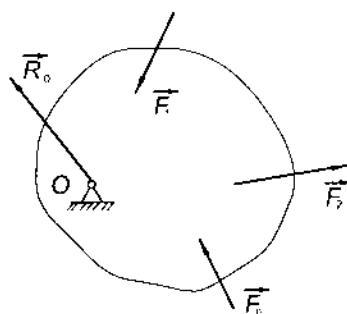
3.1.1. SỰ CÂN BẰNG CỦA ĐÒN

Đòn là vật rắn có thể quay được quanh một trục cố định, chịu tác dụng của hệ lực phẳng vuông góc với trục quay (hình 3.1).

Khi hệ lực tác dụng lên đòn thì ở ổ trục O có phản lực liên kết $\vec{R}_o$ cũng nằm trong mặt phẳng với hệ lực. Điều kiện để cho đòn cân bằng là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}_o) \sim 0$. Như vậy hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ có hợp lực $\vec{Q}$ cân bằng với phản lực $\vec{R}_o$. Theo định lý Varinhông ta có:

$$m_o(\vec{Q}) = \sum m_o(\vec{F}_k) = -m_o(\vec{R}_o)$$

Mà $m_o(\vec{R}_o) = 0$.



Hình 3.1

Như vậy $\sum m_o(\vec{F}_k) = 0.$

Gọi Oz là trục quay, thì:

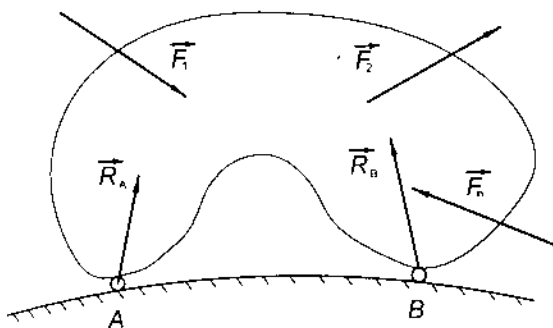
$$\sum m_o(\vec{F}_k) = \sum m_z(\vec{F}_k)$$

Ta có định lý: *Điều kiện cần và đủ để đòn cân bằng là tổng mômen của các lực tác dụng lên nó đối với trục quay bằng không.*

3.1.2. SỰ CÂN BẰNG CỦA VẬT LẬT

Vật lặt là vật chịu tác dụng của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ và liên kết với mặt cố định tại một số vị trí nào đó.

Ta xét trường hợp vật chịu liên kết (hình 3.2) với mặt cố định tại hai điểm A, B .



Hình 3.2

Tại A, B sẽ có các phản lực liên kết $\vec{R}_A, \vec{R}_B$.

Điều kiện để vật cân bằng là: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}_A, \vec{R}_B) \sim 0.$

Do sự thay đổi của hệ lực nêu trên, có thể xảy ra sự mất liên kết tại A hoặc B , nghĩa là $R_A = 0$ hoặc $R_B = 0$ và vật có thể quay được

quanh B hoặc A . Điều kiện để vật cân bằng (nghĩa là vật không thể quay được quanh A hoặc quanh B) là tổng mômen của các lực đối với A hoặc B đều bằng không.

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}_k) &= 0 : \text{để vật không lật quanh } A \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= 0 : \text{để vật không lật quanh } B \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Nếu phân tích các lực tác dụng lên vật ra hai loại: lực lật và lực giữ đối với từng điểm và gọi tổng mômen của các lực lật đối với từng điểm là mômen lật; của các lực giữ là mômen giữ thì điều kiện cân bằng của vật lật đối với từng điểm là:

$$M_{\text{giữ}} \geq M_{\text{lật}} \quad (3.2)$$

Dấu bằng tương đương với trường hợp cân bằng giới hạn. Trong trường hợp vật có khả năng lật quanh nhiều điểm khác nhau thì (3.2) phải thỏa mãn đối với tất cả các điểm.

Vi dụ: Một cần trục được bắt chặt trên xe ô tô vận tải. Trọng lượng của đối trọng B là $P_2 = 20\text{kN}$. Trọng lượng của ô tô và cần trục không kể đối trọng là $P_1 = 30\text{kN}$ đặt tại điểm C .

Xác định khoảng cách ngắn nhất giữa hai trục bánh xe D, E và giá trị lớn nhất của tải trọng P_3 mà cần trục có thể nâng được để ô tô không bị lật khi có tải trọng cũng như khi không có tải trọng P_3 . Kích thước cho trên hình 3.3.

Bài giải

- Xét trường hợp có vật nâng P_3 , cần trục bị lật quanh D :

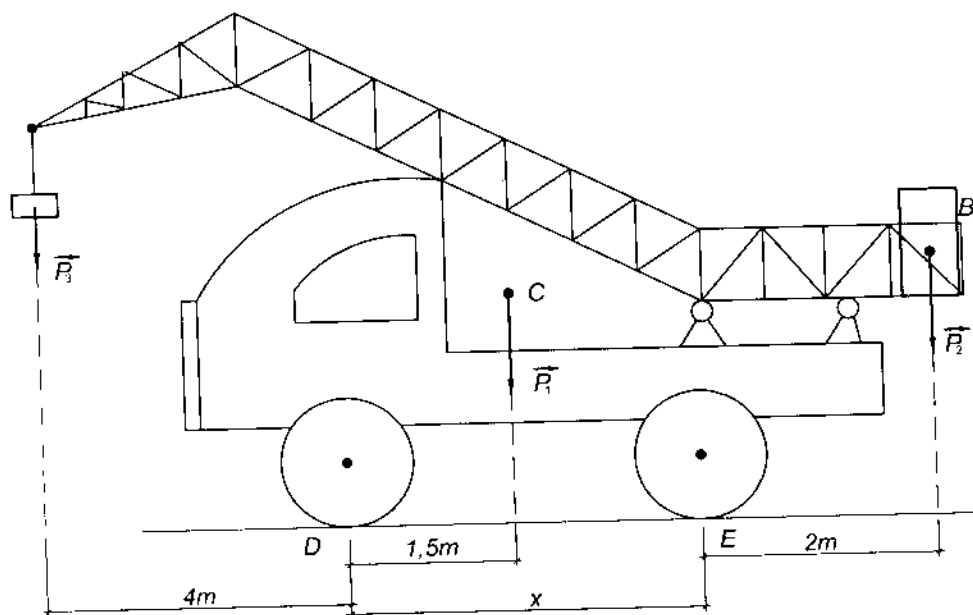
$$M_l = 4P_3; M_g = (2 + x)P_2 + 1,5P_1 = 40 + 20x + 45 = 85 + 20x$$

Muốn không lật quanh D thì

$$M_g \geq M_l \rightarrow 85 + 20x \geq 4P_3 \quad (*)$$

- Xét trường hợp không có vật nâng P_3 , cần trục bị lật quanh E :

$$M_l = 2P_2 = 40; M_g = (x - 1,5)P_1 = 30x - 45$$



Hình 3.3

Muốn không lật quanh E thì $M_g \geq M_l \rightarrow 30x - 45 \geq 40$

$$30x \geq 40 + 45 \rightarrow x \geq \frac{85}{30} = 2,83\text{m}$$

Thay vào (*) ta có $85 + 20 \frac{85}{30} \geq 4P_3 \rightarrow P_3 \leq \frac{425}{12} = 35,4\text{kN}$.

Vậy $x_{\min} = 2,83\text{m}$ và $P_{\max} = 35,4\text{kN}$.

§3.2. BÀI TOÁN VỀ LỰC TẬP TRUNG VÀ LỰC PHÂN BỐ

Lực tác dụng lên vật có thể đặt tại một điểm cũng có thể phân bố trên một đoạn dài hoặc trên một diện tích... Để hiểu rõ và biểu diễn các loại lực ấy người ta đưa ra khái niệm lực tập trung và lực phân bố.

- Lực tập trung là lực đặt tại một điểm nào đó của vật rắn.

Lực phân bố là lực đặt trên một phần nào đó của vật như trên một phần bề mặt, một đoạn thẳng nào đó của công trình.

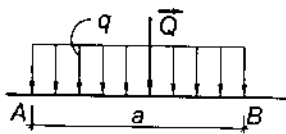
Lực phân bố được đặc trưng bằng cường độ của nó, là số lượng lực đặt trên một đơn vị chiều dài có cường độ q (N/m) hay số lượng lực đặt trên một đơn vị diện tích có cường độ q (N/m²)...

Để tiện tính toán các phản lực, người ta thay thế lực phân bố bằng lực tập trung. Ta hãy xét một vài trường hợp lực phân bố đơn giản.

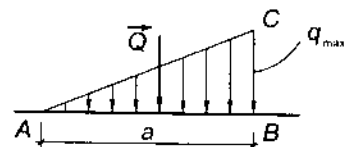
1. Lực phân bố đều trên đoạn thẳng $AB = a$ với cường độ $q = \text{const}$ (N/m) (hình 3.4).

Hệ lực phân bố đều được thay thế bằng lực $\bar{Q}$ đặt tại điểm giữa của AB có cường độ $Q = aq$.

Về ý nghĩa: Cường độ Q chính là diện tích hình chữ nhật có các cạnh là a và q .



Hình 3.4



Hình 3.5

2. Lực phân bố tam giác trên đoạn AB (phân bố tuyến tính). Cường độ q (N/m) của lực phân bố biến đổi từ 0 đến giá trị cực đại $q_{\max}$ (hình 3.5).

Hệ lực này được thay thế bằng lực $\bar{Q}$ đặt tại trọng tâm của tam giác ABC . Cường độ $Q = \frac{1}{2} a q_{\max}$ (Q chính là diện tích tam giác ABC).

§3.3. BÀI TOÁN MA SÁT

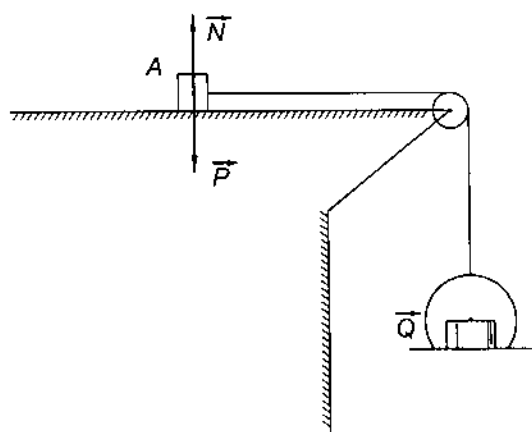
Trong thực tế kỹ thuật, ma sát là một hiện tượng rất quan trọng. Bài toán ma sát rất phức tạp và nói chung người ta nghiên cứu chủ yếu bằng thực nghiệm. Lực ma sát là phản lực liên kết xuất hiện khi một vật có xu hướng chuyển động hay chuyển động trên mặt một vật khác. Trong mục này, chúng ta chỉ đề cập đến một số vấn đề cơ bản nhất về ma sát đã được nghiên cứu kỹ bằng thực nghiệm

3.3.1. MA SÁT TRƯỢT

a) Thí nghiệm

Đặt vật A trọng lượng $\bar{P}$ lên mặt phẳng nằm ngang. Lực tác dụng lên vật A là $\bar{P}, \bar{N}$ (hình 3.6). Như vậy $\bar{P}, \bar{N} \sim 0$. Buộc vật A vào sợi dây vắt qua ròng rọc và đầu kia của dây buộc vào đĩa cân. Khi đặt vào đĩa, quả cân có trọng lượng $\bar{Q}$, vật A có xu hướng bị kéo sang phải. Nếu ở ổ trục ròng rọc O ma sát bỏ qua thì sức căng của dây bằng cường độ lực $\bar{Q}$. Tuy nhiên thực nghiệm cho thấy rằng: nếu lực $\bar{Q}$ khá nhỏ thì vật A đứng yên. Tăng Q đến giá trị Q^* thì vật A bắt đầu trượt. Như vậy khi Q nhỏ hơn Q^* thì vật A cân bằng. Điều đó cho phép ta kết luận rằng phải có lực tác dụng theo phương

ngang để cân bằng với lực $\vec{Q}$. Lực đó được gọi là lực ma sát trượt. Lực ma sát trượt phụ thuộc độ gồ ghề của mặt trượt. Như vậy nguyên nhân xuất hiện ma sát trượt là sự gồ ghề giữa các mặt tiếp xúc.



Hình 3.6

b) Các quy luật của ma sát trượt

- Lực ma sát trượt nằm trong mặt phẳng tiếp xúc chung giữa mặt tựa và vật khảo sát, có hướng ngược với chiều chuyển động hay xu hướng chuyển động của vật. Lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ nhận các giá trị từ 0 đến giá trị giới hạn gọi là lực ma sát giới hạn $\vec{F}_{gh}$:

$$0 \leq \vec{F}_{ms} \leq \vec{F}_{gh} \quad (3.3)$$

- Cường độ của lực ma sát giới hạn tỷ lệ với phản lực pháp tuyến $\vec{N}$:

$$F_{gh} = fN, \quad (3.4)$$

trong đó: f - hệ số ma sát trượt tĩnh, được xác định bằng thực nghiệm và không có thứ nguyên, phụ thuộc vào vật liệu và tính chất vật lý của bề mặt tiếp xúc chứ không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc.

- Khi vật còn cân bằng thì $F_{ms} \leq F_{gh} = fN$.

Khi $F_{ms} = F_{gh} = fN$ thì vật bắt đầu chuyển động và f là hệ số ma sát trượt tĩnh. Khi vật chuyển động với vận tốc càng tăng, hệ số ma sát nói chung giảm đến một giá trị ổn định. Hệ số f lúc vật đang chuyển động gọi là hệ số ma sát trượt động.

c) Phản lực toàn phần - Góc ma sát

Trong một số trường hợp dùng phương pháp hình học để giải bài toán ma sát sẽ tiện lợi hơn. Vì vậy ta cần biết khái niệm về góc ma sát. Trên hình 3.7 nếu

gọi $\vec{R} = \vec{F}_{ms} + \vec{N}$ là hợp

lực của phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và $\vec{F}_{ms}$ vuông

góc với $\vec{N}$. Thực chất

phản lực $\vec{R}$ là phản lực

toàn phần của liên kết

tựa. Như vậy $\vec{R}$ nghiêng

với pháp tuyến một góc φ

mà $\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{ms}}{N}$. Khi $\vec{F}_{ms}$

biến thiên từ 0 đến $\vec{F}_{gh}$

thì góc φ giữa $\vec{R}$ và $\vec{N}$ biến thiên từ 0 đến φ_0 . Giá trị φ_0 lớn nhất

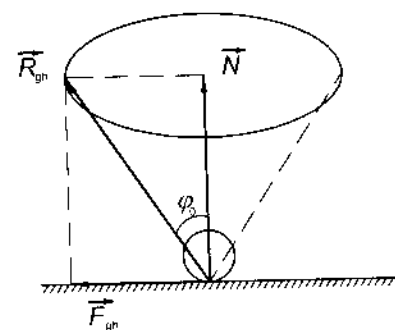
mà phản lực toàn phần $\vec{R}$ tạo với pháp tuyến được gọi là góc ma

sát và khi đó $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{gh}}{N} = \frac{fN}{N} = f$. Khi vật cân bằng thì phản lực

$\vec{R}$ ở trong góc ma sát, còn khi vật ở trạng thái cân bằng giới hạn

thì $\vec{R}$ tạo với $\vec{N}$ góc φ_0 .

Vật A có xu hướng trượt theo các hướng khác nhau trên mặt ngang. Nếu hệ số ma sát trượt f theo các hướng đều bằng nhau thì phản lực toàn phần $\vec{R}$ tạo thành một mặt nón tròn xoay gọi là hình nón ma sát.



Hình 3.7

d) Bài toán cân bằng khi có ma sát trượt

Vật rắn muốn cân bằng thì hệ lực tác dụng lên nó, kể cả lực ma sát trượt phải thỏa mãn điều kiện cân bằng như ở tĩnh học. Ngoài ra lực ma sát còn phải thỏa mãn điều kiện:

$$0 \leq F_{ms} \leq fN$$

Nếu xét phản lực toàn phần $\vec{R}$ thì nó phải nằm trong góc ma sát. Khi $F_{ms} = fN$ thì vật vẫn còn ở trạng thái cân bằng nhưng đó là vị trí cân bằng giới hạn.

Với các giá trị F_{ms} thỏa mãn $0 \leq F_{ms} \leq fN$ thì vật vẫn còn cân bằng. Như vậy trong bài toán khi có kể đến ma sát thì ta tìm được nhiều vị trí cân bằng gọi là miền cân bằng. Để xác định được miền cân bằng này ta chỉ cần xác định được vị trí cân bằng giới hạn, tức là khi $F_{ms} = fN$ và ứng với các vị trí cân bằng khác là $F_{ms} < fN$. Muốn giảm fN thì ta giảm hệ số f .

Ví dụ: Một vật có trọng lượng $P = 100\text{N}$ nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Tìm lực $\vec{Q}$ nghiêng góc $\alpha = 30^\circ$ với phương ngang tác dụng lên vật và làm vật chuyển động. Hệ số ma sát trượt tĩnh là $f_s = 0,6$ (hình 3.8).

Bài giải: Xét vật ở vị trí cân bằng giới hạn.

Các lực tác dụng lên vật $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \sim 0$.

Đây là hệ lực đồng quy phẳng nên ta lập hai phương trình cân bằng:

$$\sum X_h = Q \cos \alpha - F_{ms} = 0 \quad (a)$$

$$\sum Y_h = N - P + Q \sin \alpha = 0 \quad (b)$$

Từ (b) ta có $N = P - Q \sin \alpha$

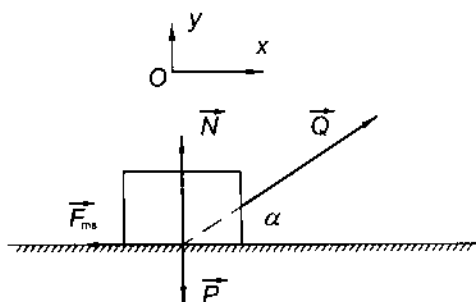
Từ (a) ta có $F_{ms} = Q \cos \alpha \leq F_{\max} = fN$

$$Q \cos \alpha \leq f(P - Q \sin \alpha)$$

$$Q(\cos \alpha + f \sin \alpha) \leq fP$$

$$\rightarrow Q \leq \frac{fP}{(\cos \alpha + f \sin \alpha)} = 52\text{N}$$

Vậy mọi giá trị $Q \leq 52\text{N}$ thì vật cân bằng, với $Q > 52\text{N}$ vật sẽ chuyển động.



Hình 3.8

3.3.2. MA SÁT LĂN

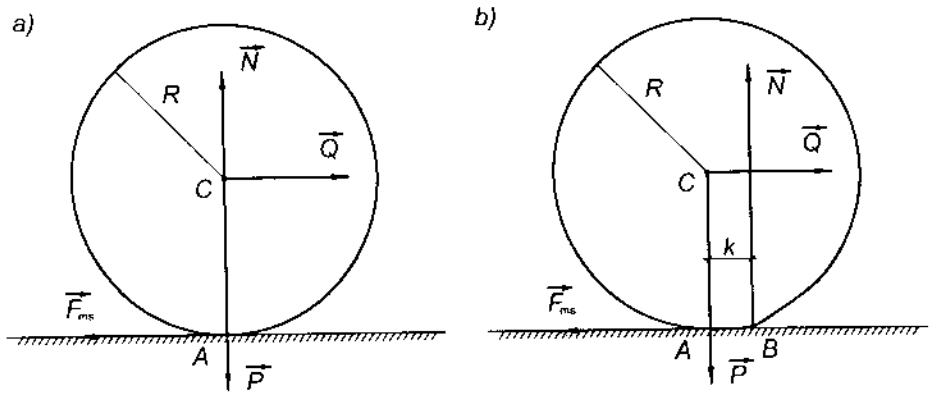
a) Thí nghiệm

Con lăn hình trụ trọng lượng P , bán kính R nằm trên mặt phẳng ngang gỗ ghe. Đặt vào trục C của con lăn một lực $\vec{Q}$ nhỏ hơn $\vec{F}_{gh}$. Tại A xuất hiện lực ma sát $\vec{F}_{ms}$ có cường độ bằng Q cản trở sự chuyển động của con lăn trên mặt phẳng ngang. Nếu xem phản lực $\vec{N}$ cũng đặt tại A thì $\vec{N}$ sẽ cân bằng với $\vec{P}$. Còn $\vec{Q}$ và $\vec{F}_{ms}$ tạo thành một ngẫu lực gây chuyển động cho con lăn, với $\vec{Q}$ dù rất nhỏ (hình 3.9a).

Trong thực tế, các vật không rắn tuyệt đối nên sẽ bị biến dạng và tiếp xúc với nhau không phải tại một điểm mà cả một miền AB . Với sự tăng dần của Q , áp lực của con lăn lên nền ngang sẽ giảm dần ở A và tăng lên ở B , kết quả là $\vec{N}$ sẽ chuyển dời về phía tác dụng của lực Q . Nếu Q tăng, độ chuyển dời sẽ tăng cho đến giá trị

giới hạn k . Như vậy ở vị trí giới hạn sẽ có hai ngẫu lực tác dụng lên con lăn:

- Ngẫu lực $(\vec{Q}, \vec{F}_{ms})$ có mômen $Q_{gh} R$;
- Ngẫu lực $(\vec{N}, \vec{P})$ có mômen kN .



Hình 3.9

Hai ngẫu lực này cân bằng nhau (hình 3.9b):

$$Q_{gh} R = kN \rightarrow Q_{gh} = \frac{k}{R} N.$$

Do đó nếu $Q < Q_{gh}$ thì con lăn cân bằng. Khi $Q = Q_{gh}$ con lăn ở vị trí cân bằng giới hạn (hay gọi con lăn bắt đầu chuyển động). k gọi là hệ số ma sát lăn, có đơn vị của độ dài và được xác định bằng thực nghiệm.

b) Các quy luật của ma sát lăn

- Trong trường hợp có ma sát lăn, tại liên kết xuất hiện một ngẫu lực ma sát lăn, cản trở sự lăn của con lăn.
- Mômen M của ngẫu lực nhận các giá trị từ 0 đến M_{gh} :

$$0 \leq M \leq M_{gh} \quad (3.5)$$

- M_{gh} tỷ lệ với N :

$$M_{gh} = kN \quad (3.6)$$

Thực nghiệm đã cho thấy, tỷ số $\frac{k}{R}$ rất nhỏ so với f nên người ta thường thay thế chuyển động trượt của vật bằng chuyển động lăn của nó.

c) Bài toán cân bằng khi kể đến ma sát lăn

Khi tác dụng một lực lên con lăn thì xuất hiện hiện tượng lăn. Như vậy ngoài xu hướng lăn, vật còn có xu hướng trượt, do đó, tại liên kết có phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ và ngẫu lực ma sát lăn có mômen M .

Điều kiện để cho vật cân bằng là hệ lực tác dụng lên vật (kể cả ma sát trượt và ma sát lăn) cân bằng, đồng thời $\vec{F}_{ms}$ và mômen của ngẫu lực ma sát lăn phải thỏa mãn:

$$\left. \begin{aligned} F &\leq F_{gh} = fN \\ M &\leq M_{gh} = kN \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Nếu một trong hai điều kiện trên không thỏa mãn thì sẽ có chuyển động tương ứng. Nếu cả hai điều kiện không thỏa mãn thì vật sẽ vừa lăn vừa trượt.

Ví dụ: Con lăn trọng lượng $P = 500\text{N}$, bán kính $R = 40\text{cm}$ được đặt trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. Hệ số ma sát lăn giữa con lăn và mặt phẳng nghiêng $k = 0,02\text{cm}$. Xác định lực Q để giữ cho con lăn cân bằng (hình 3.10a).

Bài giải: Vì lực $\vec{Q}$ chưa biết nên có thể xét hai trường hợp:

1. Lực $\vec{Q}$ nhỏ: Con lăn có xu hướng lăn xuống dưới. Tại điểm tiếp xúc I xuất hiện lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ và ngẫu lực ma sát lăn M_l . Lực tác dụng lên con lăn là $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{Q}, M_l$. Ta có:

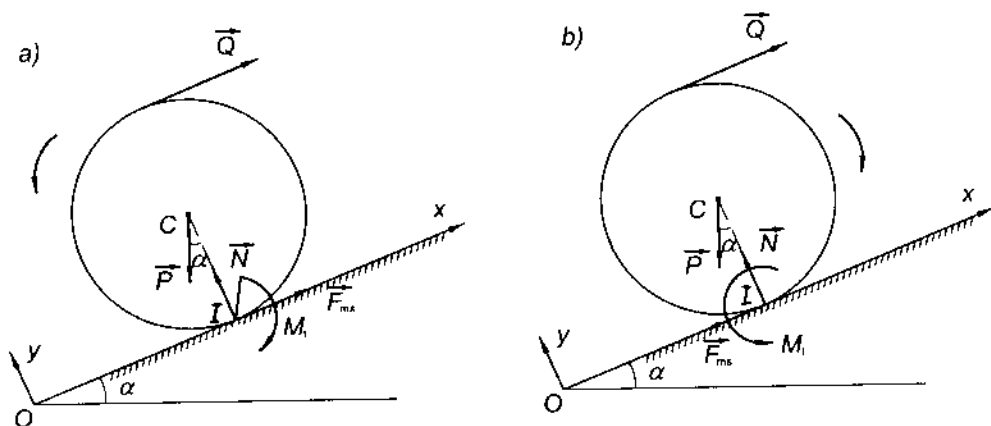
$$\sum X = Q + F_{ms} - P \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = N - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_I(\vec{F}) = PR \sin \alpha - 2RQ - M_l = 0 \quad (3)$$

$$M_l = PR \sin \alpha - 2RQ \leq M_{gh} = k \times N = kP \cos \alpha$$

$$Q_1 \geq \frac{P}{2R} (R \sin \alpha - k \cos \alpha) = 124,9N$$



Hình 3.10

2. Lực $\vec{Q}$ lớn: Con lăn có xu hướng chuyển động lên. Lúc này $\vec{F}_{ms}$ và ngẫu lực ma sát lăn có chiều ngược lại với trường hợp lực $\vec{Q}$ nhỏ. Tương tự như trên ta xét con lăn. Từ phương trình chiếu lên trục y ta có $N = P \cos \alpha$. Lập phương trình mômen đối với điểm I (hình 3.10b):

$$\sum m_I(\vec{F}) = M_l + PR \sin \alpha - 2RQ = 0$$

$$M_l = -PR \sin \alpha + 2RQ \leq M_{gh} = k \times N = kP \cos \alpha$$

$$-PR \sin \alpha + 2RQ \leq kP \cos \alpha$$

$$P(R \sin \alpha + k \cos \alpha) \geq 2RQ$$

$$Q_2 \leq \frac{P}{2R} (R \sin \alpha + k \cos \alpha) = 125,1N$$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có:

$$\rightarrow Q_1 \leq Q \leq Q_2 \rightarrow 124,9N \leq Q \leq 125,1N$$

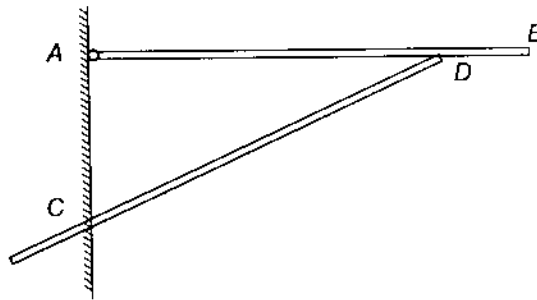
thì con lăn cân bằng trên mặt phẳng nghiêng.

§3.4. BÀI TOÁN VỀ SỰ CÂN BẰNG CỦA HỆ VẬT

3.4.1. HỆ VẬT

Hệ vật là tập hợp của nhiều vật, được nối với nhau bằng các liên kết.

Ví dụ: Hai thanh AB và CD được nối với nhau bằng liên kết tựa tại D và chúng nối với tường thẳng đứng bằng bản lề A , ngàm C . Tập hợp này là một hệ vật (hình 3.11).



Hình 3.11

3.4.2. PHÂN LOẠI LỰC TÁC DỤNG LÊN HỆ VẬT

- **Ngoại lực** là lực do các vật ngoài hệ tác dụng lên các vật thuộc hệ. Ký hiệu $\overrightarrow{F}_e$.
- **Nội lực** là lực do các vật trong cùng hệ tác dụng lên nhau. Ký hiệu $\overrightarrow{F}_i$.

Các nội lực tuân theo tiên đề 4, chúng có từng đôi một cùng đường tác dụng, cùng cường độ và ngược chiều nhau. Nội lực có tính chất quan trọng sau đây: *Tổng hình học của các nội lực và tổng mômen của chúng đối với một điểm hay một trục nào đó đều bằng không:*

$$\sum \vec{F}_k^i = 0; \quad \sum \vec{m}_o(\vec{F}_k^i) = 0; \quad \sum m_z(\vec{F}_k^i) = 0$$

3.4.3. CÁC CÁCH GIẢI BÀI TOÁN HỆ VẬT

Từ tiên đề 5 ta có thể rút ra kết luận cho sự cân bằng của hệ vật: *Khi hệ vật cân bằng thì các vật thuộc hệ sẽ cân bằng.* Có hai phương pháp giải bài toán hệ vật

a) Phương pháp tách vật

Tách ra xét cân bằng từng vật một. Lúc này mỗi vật chịu tác dụng của ngoại lực và nội lực. Vì các lực tác dụng lên mỗi vật là hệ lực phẳng. Do đó mỗi vật ta lập 3 phương trình cân bằng. Nếu hệ có n vật ta có $3n$ phương trình cân bằng.

b) Phương pháp hóa rắn

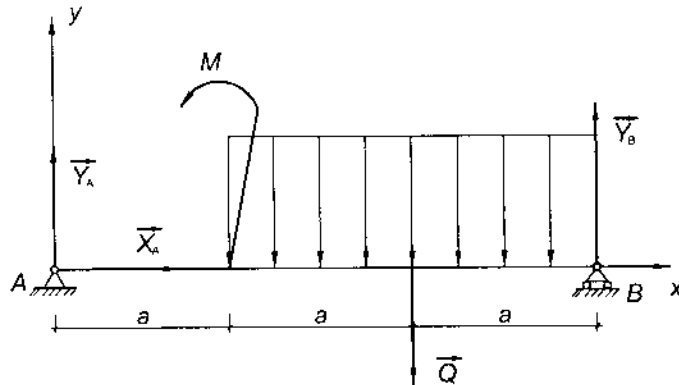
Đầu tiên ta coi toàn hệ là một vật rắn, lúc này hệ chỉ chịu tác dụng của ngoại lực và ta lập được 3 phương trình cân bằng. Với bài toán hệ vật, số ẩn số lớn hơn 3 cho nên ta phải tách ra xét cân bằng một số vật nữa. Nếu hệ có n vật thì sau khi hóa rắn ta sẽ tách ra xét cân bằng tối đa $(n - 1)$ vật và ta có $3(n - 1)$ phương trình, cùng với 3 phương trình ban đầu ta có $3n$ phương trình cân bằng cho ta xác định được $3n$ ẩn số.

Khi giải bài toán hệ vật, nếu số ẩn số ít hơn hay bằng số phương trình cân bằng thì đó là bài toán tĩnh định. Nếu số ẩn số nhiều hơn số phương trình cân bằng được gọi là bài toán siêu tĩnh.

Trong Cơ học lý thuyết ta chỉ xét giải bài toán tĩnh định.

c) Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Một dầm có liên kết và chịu lực tác dụng như ở hình 3.12. Biết $M = 18\text{kNm}$, $a = 3\text{m}$, $q = 1,5\text{kN/m}$. Xác định phản lực tại A và B.



Hình 3.12

Bài giải: Vật khảo sát là dầm AB.

Lực tác dụng lên dầm:

$$(\vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, M) \sim 0.$$

$$Q = 2aq = 9\text{kN}$$

Hệ lực tác dụng lên dầm là hệ lực phẳng. Ta lập 3 phương trình cân bằng:

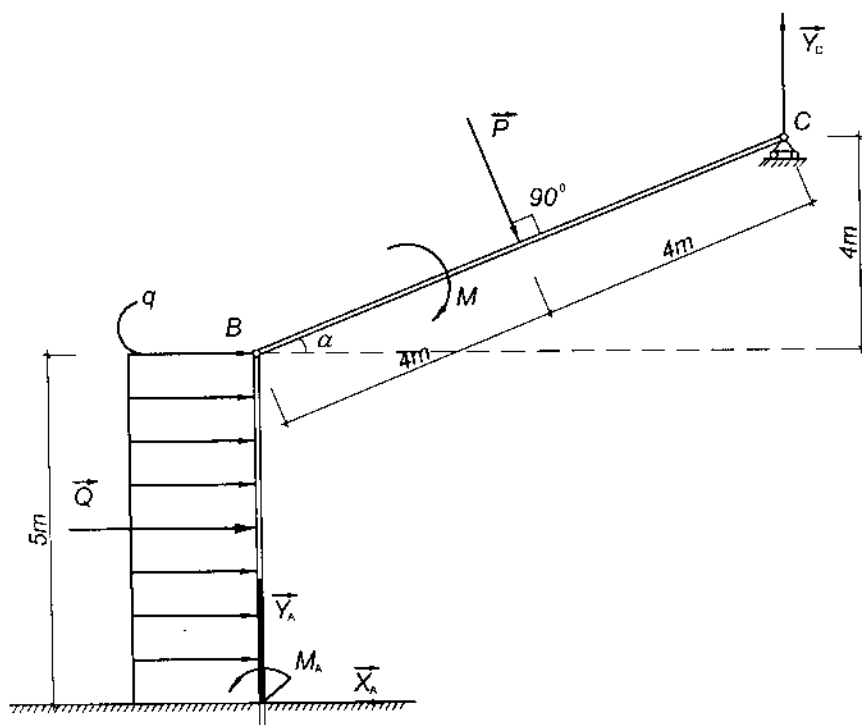
$$\left. \begin{aligned} \sum m_A(\vec{F}_k) &= M - 2aq + 3aY_B = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= M + aQ - 3aY_A = 0 \\ \sum X_k &= X_A = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Giải hệ phương trình (a) ta có:

$$X_A = 0; Y_A = 5\text{kN}; Y_B = 4\text{kN}$$

Ví dụ 2 (bài toán hệ vật): Một hệ vật có liên kết và chịu lực như hình 3.13. Cho $P = 5\text{kN}$, $M = 30\text{kNm}$, $q = 0,9\text{kN/m}$. Tìm phản lực tại A , B , C .

Kết quả bài toán sẽ thay đổi như thế nào khi thay đổi vị trí của ngẫu lực có mômen M trên cơ hệ.



Hình 3.13

Bài giải: Khảo sát hệ gồm hai thanh AB và BC .

Ngoại lực tác dụng lên hệ: $(\vec{P}, \vec{Q}, M, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{Y}_C) \sim 0$.

- Tách vật BC (hình 3.14). Vì $BC = 2CE$ nên $\alpha = 30^\circ$.

Lực tác dụng lên BC : $(\vec{P}, M, \vec{Y}_C, \vec{X}_B, \vec{Y}_B) \sim 0$.

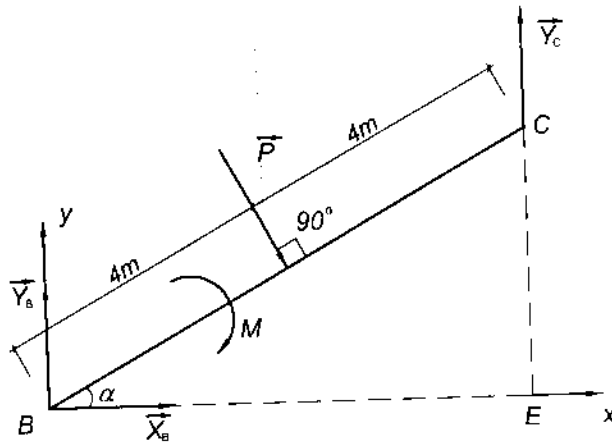
Tính $BE = 4\sqrt{3}\text{m}$.

Các phương trình cân bằng:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= X_B + P \sin 30^\circ = 0 \\ \sum Y_k &= Y_B + Y_C - P \cos 30^\circ = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_k) &= -M - 4P + BEY_C = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Giải hệ phương trình (b) ta thu được:

$$X_B = -2,5kN; Y_C = \frac{25\sqrt{3}}{6} kN; Y_B = -\frac{5\sqrt{3}}{3} kN$$



Hình 3.14

- Tách thanh AB (hình 3.15). Các lực tác dụng lên AB:

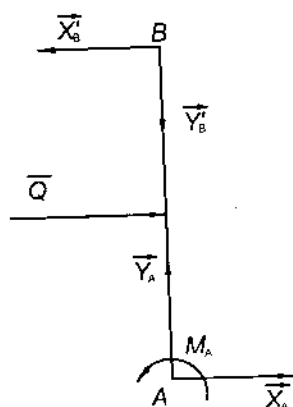
$$(\vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, M_A, \vec{X}'_B, \vec{Y}'_B) \sim 0.$$

Chú ý: $\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B$ có chiều ngược với chiều của $\vec{X}_B$ và $\vec{Y}_B$ và về cường độ thì:

$$X'_B = X_B; Y'_B = Y_B.$$

Các phương trình cân bằng:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= X_A + Q - X'_B = 0 \\ \sum Y_k &= Y_A - Y'_B = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_k) &= M_A - 2,5Q + 5X'_B = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$



Hình 3.15

Giải hệ phương trình (c) ta thu được:

$$X_A = -7kN ; Y_A = -\frac{5\sqrt{3}}{3}kN ; M_A = 23,75kNm .$$

Chương 4

TÍNH ĐỒ DÀN

Trong chương 2 ta giải bài toán hệ lực phẳng bằng phương pháp giải tích. Chương này ta dùng phương pháp vẽ, để giải bài toán hệ lực phẳng. Phương pháp này gọi là phương pháp tính đồ. Phương pháp tính đồ có ưu điểm: tiện lợi, nhanh chóng và dễ nhìn nhận được kết quả nhưng có nhược điểm là kết quả bài toán lại phụ thuộc vào cách vẽ của ta có chính xác hay không.

§4.1. ĐA GIÁC LỰC VÀ ĐA GIÁC DÂY

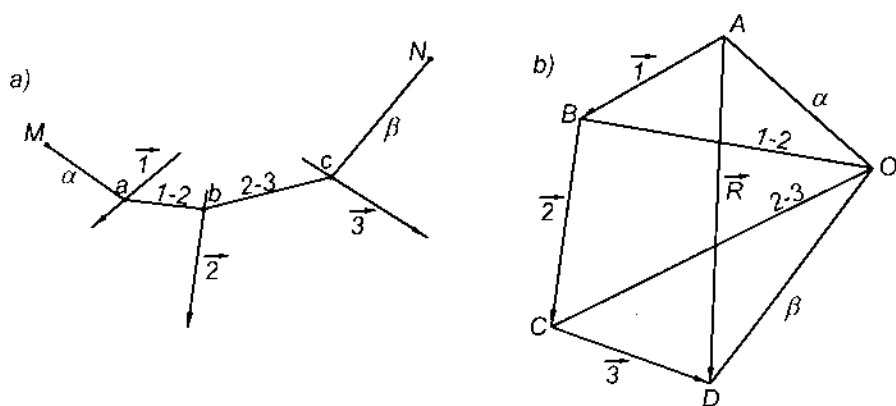
4.1.1. ĐA GIÁC LỰC

Để đơn giản ta vẽ đa giác lực của hệ lực phẳng gồm ba lực. Đánh dấu các lực $\vec{1}, \vec{2}, \vec{3}$ (hình 4.1a). Chọn một điểm A tùy ý, từ A ta vẽ đường gãy khúc $ABCD$ tạo bởi các lực $\vec{1}, \vec{2}, \vec{3}$ ta có đa giác lực của hệ (xem cách vẽ ở mục §2.1) (hình 4.1b).

4.1.2. ĐA GIÁC DÂY

Chọn điểm O tùy ý làm cực. Nối O với các đỉnh A, B, C và D của đa giác lực. Gọi tia OA là tia α ; tia OB là tia 1-2; tia OC là tia 2-3 và tia OD là tia β .

· Cách vẽ đa giác dây: Ta chọn điểm M . Từ M vẽ đường song song với tia α cắt đường tác dụng của lực $\vec{1}$ tại a . Từ a vẽ đường song song với tia $1-2$ và cắt đường tác dụng lực $\vec{2}$ ở b . Từ b vẽ đường song song với tia $2-3$ và cắt đường tác dụng của lực $\vec{3}$ tại c . Từ c vẽ đường song song với tia β . Trên đường này ta lấy một điểm bất kỳ N . Đường gãy khúc $MabcN$ gọi là đa giác dây có các cạnh α , $1-2$, $2-3$, β (hình 4.1a).



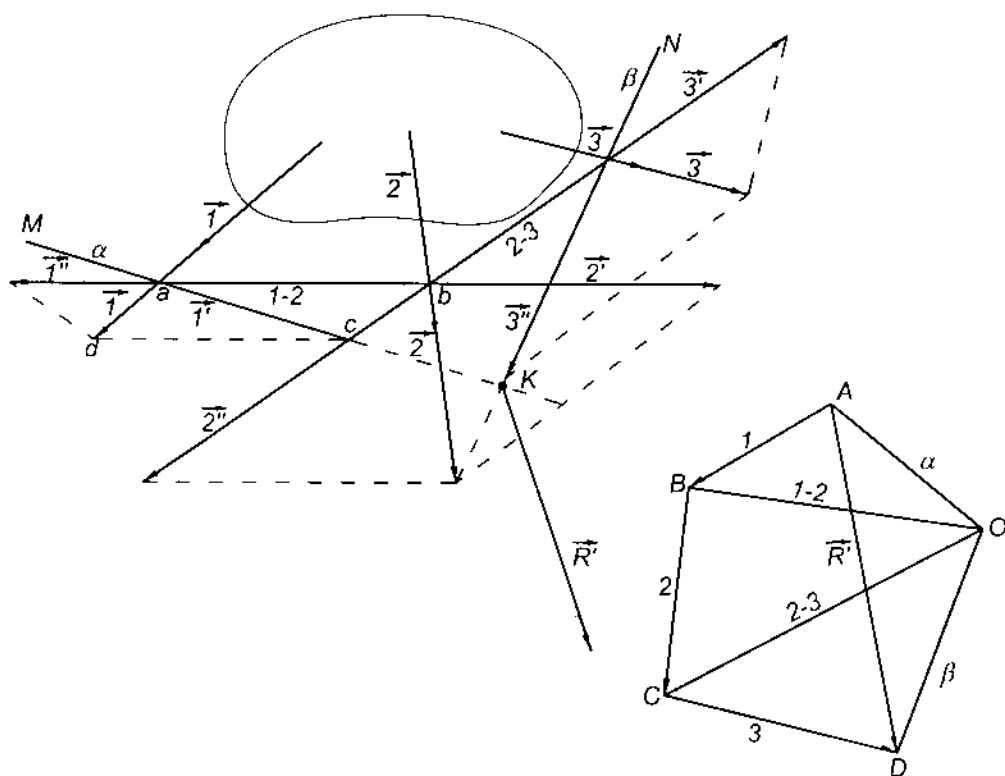
Hình 4.1

§4.2. THU GỌN HỆ LỰC VÀ ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC

Trong phần thu gọn hệ lực, ta đã biết hệ lực phẳng có thể cân bằng hoặc có thể thu về hợp lực hay ngẫu lực tùy theo $\vec{R}_o$ và $\vec{M}_o$. Bằng phương pháp vẽ đa giác lực và đa giác dây ta có thể rút ra kết quả tương tự.

4.2.1. HỆ LỰC THU VỀ MỘT HỢP LỰC

Hệ lực thu về một hợp lực nếu đa giác lực hở. Hợp lực được xác định bởi cạnh đóng kín đa giác lực và có đường tác dụng đi qua K là giao điểm của hai cạnh ngoài cùng của đa giác dây và song song với $\vec{R}$ của đa giác lực (hình 4.2).



Hình 4.2

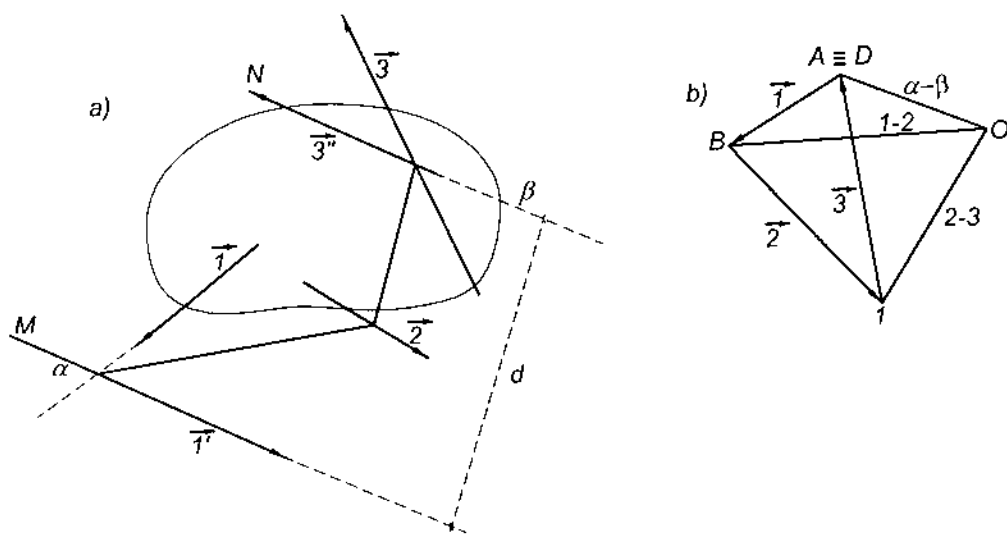
Thật vậy, trượt các lực đã cho về các đỉnh của đa giác dây và phân tích mỗi lực thành hai thành phần theo hai cạnh của đa giác dây. Lực $\vec{1}$ thành lực $\vec{1'}$ và $\vec{1''}$. Theo định lý về sự bằng nhau của hai tam giác, ta có $\triangle abc = \triangle ABO$, do đó $\vec{1'} = \vec{AO}$ và $\vec{1''} = \vec{OB}$. Tương tự với lực $\vec{2}$ và lực $\vec{3}$ ta có $\vec{2'} = \vec{BO}$ và $\vec{2''} = \vec{OC}$; $\vec{3'} = \vec{CO}$ và $\vec{3''} = \vec{OD}$.

Từ hệ 3 lực $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ ta có hệ 6 lực $\bar{1}', \bar{1}'', \bar{2}', \bar{2}'', \bar{3}', \bar{3}''$. Các lực $\bar{1}''$ và $\bar{2}'$, $\bar{2}''$ và $\bar{3}'$ triệt tiêu nhau từng đôi một (theo tiên đề 1). Như vậy còn lại hai lực $\bar{1}'$ và $\bar{3}''$. Hai lực này đồng quy tại K nên chúng có hợp lực $\vec{R}$ đặt tại K . K chính là giao điểm của hai cạnh α và β của đa giác dây với $\vec{R} = \vec{AD}$ (hình 4.2a).

Vectơ $\vec{AD}$ là vectơ đóng kín của đa giác lực được xác định bởi hai lực $\bar{1}'$ và $\bar{3}''$, đồng thời nó cũng chính là cạnh đóng kín của đa giác lực biểu diễn hệ lực $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ (hình 4.2b).

4.2.2. HỆ LỰC THU VỀ MỘT NGẪU LỰC

Hệ lực thu về một ngẫu lực nếu đa giác lực tự đóng kín và đa giác dây hở. Các lực của ngẫu lực nằm trên các cạnh α và β . Chúng được xác định bằng tia $\alpha - \beta$ (hình 4.3a).



Hình 4.3

Theo cách làm như trên thì $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}) \sim (\bar{1}', \bar{3}'')$ và $\bar{1}' = \vec{AO}$, $\bar{3}'' = \vec{OD}$. Khi đa giác lực đóng kín thì điểm D trùng với A , do đó $\vec{OD} = \vec{OA} = -\vec{AO}$, nghĩa là $\bar{3}'' = -\bar{1}'$ (hình 4.3b).

Hai lực này tạo thành một ngẫu lực, chúng được xác định bằng tia $\alpha - \beta$. Khoảng cách d giữa hai cạnh α và β của đa giác dây là cánh tay đòn của ngẫu lực.

4.2.3. HỆ LỰC CÂN BẰNG

Điều kiện cân và đủ để hệ lực cân bằng là đa giác lực đóng kín và đa giác dây cũng đóng kín

Như ở trên đã trình bày, nếu đa giác lực đóng kín mà đa giác dây hở thì hệ thu về một ngẫu lực. Như vậy nếu đa giác dây cũng kín (nghĩa là hai cạnh α và β trùng nhau), thì hai lực của ngẫu lực cùng nằm trên một đường thẳng, nên chúng triệt tiêu. Do đó hệ lực cân bằng.

Ví dụ: Cho dàn chịu lực như ở hình 4.4a. Hãy xác định phản lực tại A và B .

Bài giải: Các lực tác dụng lên dàn: $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{R_A}$. Lực $\overrightarrow{Y_B}$ hướng lên trên, còn $\overrightarrow{R_A}$ chưa biết phương, chiều. Vì xét dàn cân bằng nên $(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{R_A}) \sim 0$. Như vậy cả đa giác lực và đa giác dây của hệ đều đóng kín.

Ta đánh số lần lượt các lực $\overrightarrow{F_1} = \overline{1}$, $\overrightarrow{F_2} = \overline{2}$, $\overrightarrow{Y_B} = \overline{3}$ và $\overrightarrow{R_A} = \overline{4}$.

Vẽ đa giác lực: Lấy điểm G bất kỳ vẽ $\overrightarrow{F_1} = \overline{1} = \overrightarrow{GH}$. Từ H vẽ $\overrightarrow{F_2} = \overline{2} = \overrightarrow{HI}$. Từ điểm I kẻ đường Iz song song với $\overrightarrow{Y_B} = \overline{3}$. Nhưng điểm ngọn của $\overline{3} = \overrightarrow{Y_B}$ và điểm gốc của lực $\overline{4} = \overrightarrow{R_A}$ chưa biết nên chưa xác định $\overrightarrow{Y_B} = \overline{3}$ và $\overrightarrow{R_A} = \overline{4}$.

Vì hệ lực cân bằng nên đa giác lực tự đóng kín, nghĩa là điểm ngọn của $\overline{4} = \overrightarrow{R_A}$ trùng với điểm gốc của lực $\overrightarrow{F_1} = \overline{1}$.

Vẽ đa giác dây: Lấy điểm O làm cực. Nối O với các đỉnh của đa giác ta có các tia $1 - 2$, $2 - 3$, $4 - 1$. Vì điểm K chưa biết nên không xác định được tia $3 - 4$. Ta cần xác định tia $3 - 4$. Muốn vậy, từ điểm A

Khi nghiên cứu dàn người ta bỏ qua trọng lượng các thanh, ma sát ở bản lề và lực tác dụng lên dàn chỉ đặt tại các nút.

Ta chỉ khảo sát dàn phẳng (các thanh cùng nằm trong một mặt phẳng) và dàn đủ thanh, tức là dàn mà lấy đi bất kỳ thanh nào thì nó không còn là kết cấu cứng

Người ta xây dựng dàn đủ thanh bằng cách lập một tam giác cơ sở, sau đó ghép dần hai thanh khác để có một tam giác mới. Đối với dàn này nếu có m thanh và n nút thì sự liên hệ giữa số thanh và số nút là:

$$m = 2n - 3$$

Mỗi thanh của dàn chỉ chịu tác dụng của các lực đặt ở đầu nút và cân bằng nên chúng chỉ chịu lực kéo hay nén.

Nội dung chính của bài toán dàn là tìm lực kéo hay nén. Do tính chất cấu tạo, khi giải bài toán dàn ta coi như đã tìm được phản lực ở các gối tựa.

Chú ý: Để tìm lực kéo hay nén tác dụng lên thanh ta tìm ứng lực $\vec{S}$ của thanh (tức là phản lực của thanh đặt lên các nút). Ứng lực $\vec{S}$ đi ra khỏi nút khi thanh chịu kéo và đi vào nút khi thanh chịu nén.

4.3.2. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN DÀN

a) Phương pháp tách nút

Nguyên tắc của phương pháp này là xét cân bằng các nút. Mỗi nút chịu tác dụng của hệ lực phẳng đồng quy, ta có được hai phương trình cân bằng, nên ta chỉ tìm được hai ẩn số tại mỗi nút. Do đó đầu tiên ta xét nút chỉ có 2 ẩn số.

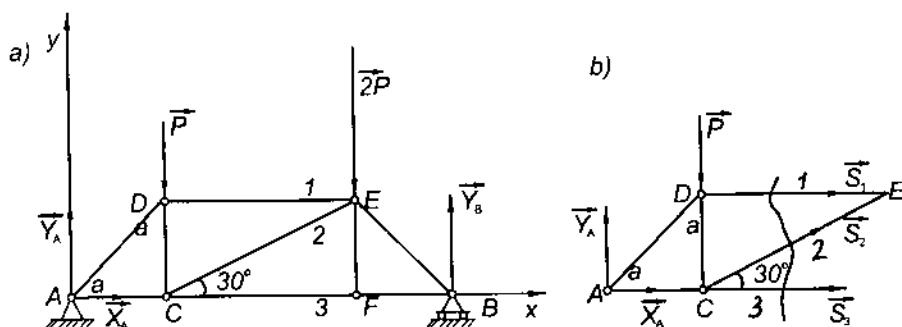
b) Phương pháp mặt cắt

Ta tưởng tượng cắt dàn làm hai phần bởi một mặt cắt đi qua ba thanh cần tìm ứng lực và xét cân bằng của một trong hai phần ấy.

Vì các ứng lực chưa biết chiều nên ta giả thiết chiều của ứng lực hướng ra khỏi vật khảo sát (coi như các thanh đều chịu kéo). Lập các phương trình cân bằng và giải để tìm ứng lực. Bằng các mặt cắt khác nhau ta sẽ tìm được ứng lực trong tất cả các thanh của dàn.

Cần lưu ý rằng vì hệ lực phẳng chỉ có 3 phương trình cân bằng nên mặt cắt không được chứa quá 3 thanh phải tìm ứng lực (quá 3 ẩn số).

Ví dụ: Cho dàn có liên kết và chịu lực như ở hình 4.5a. Tìm ứng lực trong các thanh 1, 2, 3.



Hình 4.5

Bài giải: Các lực tác dụng lên dàn (ngoại lực):

$$(\vec{P}, \vec{2P}, \vec{Y}_B, \vec{X}_A, \vec{Y}_A) \sim 0.$$

Trước hết tìm phản lực tại A và B.

$$\left. \begin{aligned} \sum X_k &= X_A = 0 \\ \sum Y_k &= Y_A + Y_B - P - 2P = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_k) &= -aP - (a + a \cotg 30^\circ)2P + (2a + a \cotg 30^\circ)Y_B = 0 \end{aligned} \right\} (a)$$

Giải hệ phương trình (a) ta có:

$$X_A = 0; Y_A = 1,27P; Y_B = 1,73P.$$

Cắt dần bằng mặt cắt đi qua ba thanh 1, 2, 3. Xét phần bên trái. Giả thiết các thanh đều chịu kéo. Có các lực tác dụng: $(\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3) \sim 0$ (hình 4.5b).

Lập hệ phương trình cân bằng:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_C(\vec{F}_k) &= -aY_A - aS_1 = 0 \\ \sum m_E(\vec{F}_k) &= aS_3 + a\cotg 30^\circ P - (a + a\cotg 30^\circ)Y_A = 0 \\ \sum Y_k &= Y_A - P + S_2 \sin 30^\circ = 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Giải hệ phương trình (b) ta thu được:

$$S_1 = -1,27P; S_2 = -0,54P; S_3 = 1,73P.$$

Như vậy các thanh 1, 2 bị nén; thanh 3 chịu kéo.

CHƯƠNG 5

HỆ LỰC SONG SONG VÀ TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Trong thực tế, ta thường gặp hệ lực song song. Mọi vật thể trong trường trọng lực được xem như chịu tác dụng của một hệ lực song song là lực hút của Trái Đất (vì tâm Trái Đất ở rất xa). Trong chương này, ta tìm cách thu gọn hệ lực song song và ứng dụng nó để tìm trọng tâm của vật rắn.

§5.1. THU GỌN HỆ LỰC SONG SONG

5.1.1. THU GỌN HAI LỰC SONG SONG CÙNG CHIỀU

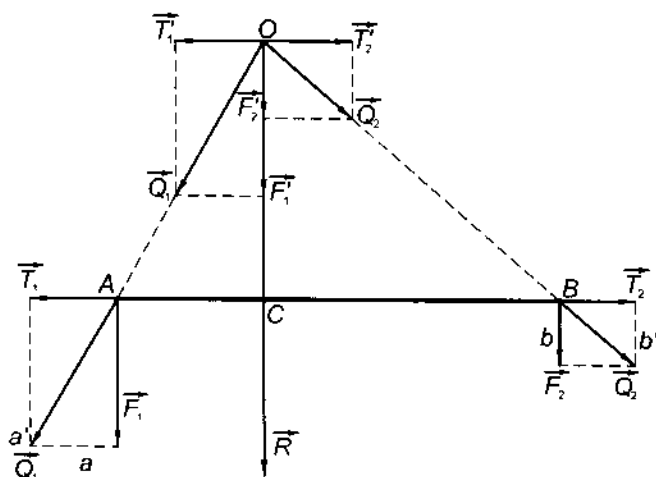
Định lý: Thu gọn hai lực song song cùng chiều, ta được một hợp lực cũng song song và cùng chiều, có cường độ bằng tổng cường độ của hai lực và đặt tại điểm chia trong đoạn thẳng nối hai điểm đặt thành đoạn tỷ lệ nghịch với cường độ hai lực đó.

Chứng minh: Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ song song, cùng chiều đặt tại A, B như ở hình 5.1. Đầu tiên ta phải chứng minh rằng hai lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$

có hợp lực. Theo tiên đề 2 tại A, B đặt thêm hai lực $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ dọc theo AB và cân bằng nhau. Hợp các lực, ta được $\vec{Q}_1$ là hợp lực của $\vec{F}_1$ và $\vec{T}_1$; $\vec{Q}_2$ là hợp lực của $\vec{F}_2$ và $\vec{T}_2$. Như vậy:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$$

$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ đồng quy nên có hợp lực, do đó $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cũng có hợp lực.



Hình 5.1

Cách tìm hợp lực: Trượt lực $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ về điểm đồng quy O và phân mỗi lực ra hai thành phần như cũ.

Hai lực $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ cân bằng nên triệt tiêu nhau. Như vậy hợp lực của $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$ cũng chính là hợp lực của hai lực $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2$. Hợp lực $\vec{R}$ đặt tại O và $\vec{R} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2$, nhưng vì $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$; $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$ nên $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Trượt lực $\vec{R}$ để nó có điểm đặt tại C nằm trên AB . Xác định vị trí điểm C trên AB . Tam giác OAC đồng dạng với tam giác $Aa'a$ nên ta có:

$$\frac{CA}{CO} = \frac{T_1}{F_1} \quad (1)$$

Tam giác OBC đồng dạng với tam giác Bbb' nên:

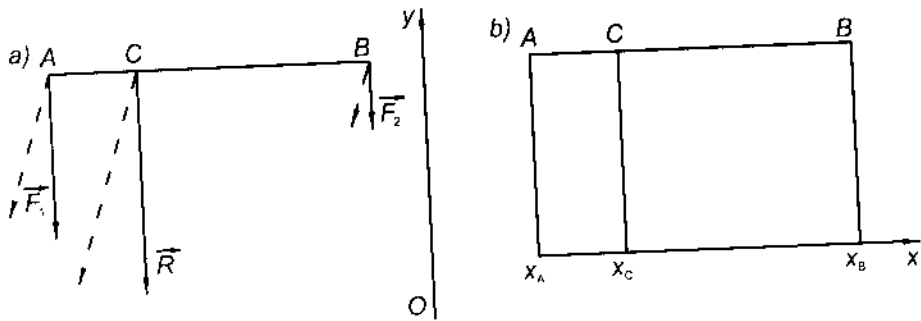
$$\frac{CB}{CO} = \frac{T_2}{F_2} \quad (2)$$

Chia (1) cho (2) (chú ý $T_1 = T_2$) ta có:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$$

Như vậy C là điểm chia trong đoạn thẳng AB thành hai đoạn tỷ lệ nghịch với cường độ của hai lực.

Chú ý: Vị trí của C trên AB không phụ thuộc vào phương của $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Nếu quay $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ quanh A, B thì theo cách làm như trên, hợp lực $\vec{R}$ vẫn đặt tại C (hình 5.2a).



Hình 5.2

Có thể xác định C bằng giải tích: Vì C là điểm chia trong của đoạn AB theo tỷ lệ $\lambda = \frac{F_2}{F_1}$ nên theo hình 5.2b:

$$\frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = -\lambda = -\frac{F_2}{F_1}$$

Tính ra, ta nhận được:

$$x_C = \frac{x_A F_1 + x_B F_2}{F_1 + F_2}$$

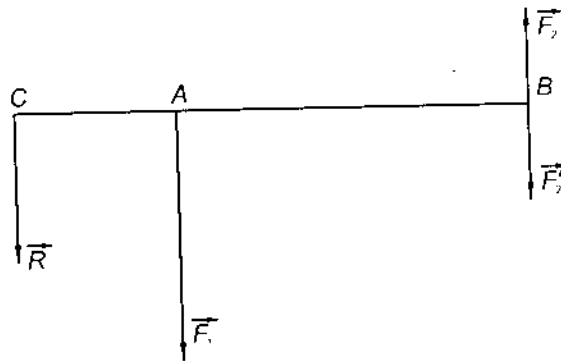
Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{y_A F_1 + y_B F_2}{F_1 + F_2} \\ z_C &= \frac{z_A F_1 + z_B F_2}{F_1 + F_2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.1.2. THU GỌN HAI LỰC SONG SONG NGƯỢC CHIỀU NHAU

Định lý: Thu gọn hai lực song song ngược chiều và khác cường độ, được một hợp lực có cùng phương, chiều với lực lớn hơn có cường độ bằng hiệu các cường độ và đặt tại điểm chia ngoài đoạn thẳng nối các điểm đặt của các lực thành những đoạn tỷ lệ nghịch với cường độ các lực.

Chứng minh (hình 5.3): $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ song song, ngược chiều, đặt tại A, B . Cho $F_1 > F_2$. Tại B đặt thêm $\vec{F}'_2 = -\vec{F}_2$. Theo mục 5.1.1, có thể tìm được một lực $\vec{R}$ sao cho $\vec{F}_1$ là hợp lực của $\vec{R}$ và $\vec{F}'_2$, tức là $\vec{F}_1 \sim (\vec{R}, \vec{F}'_2)$.



Hình 5.3

Theo tiên đề 1 thì $\vec{F}_2$ và $\vec{F}'_2$ cân bằng nhau, do đó:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{R}, \vec{F}'_2, \vec{F}_2) \sim \vec{R}$$

Hệ lực đã cho thu về một hợp lực $\vec{R}$ (hình 5.3)

Vì $\vec{F}_1$ là hợp lực của $\vec{R}$ và $\vec{F}'_2$ nên ta có:

$$F_1 = R + F'_2; \quad \frac{AC}{AB} = \frac{F'_2}{R}$$

Biến đổi tiếp ta có:

$$\frac{AC}{AB + AC} = \frac{F'_2}{R + F'_2}$$

Vì $F'_2 = F_2$ còn $AB + AC = CB$ nên:

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$$

Điểm C nằm ngoài đoạn AB .

Tương tự như trên, ta xác định được vị trí của C (chú ý $\lambda = \frac{F_2}{F_1}$ là

tỷ lệ ngoài):

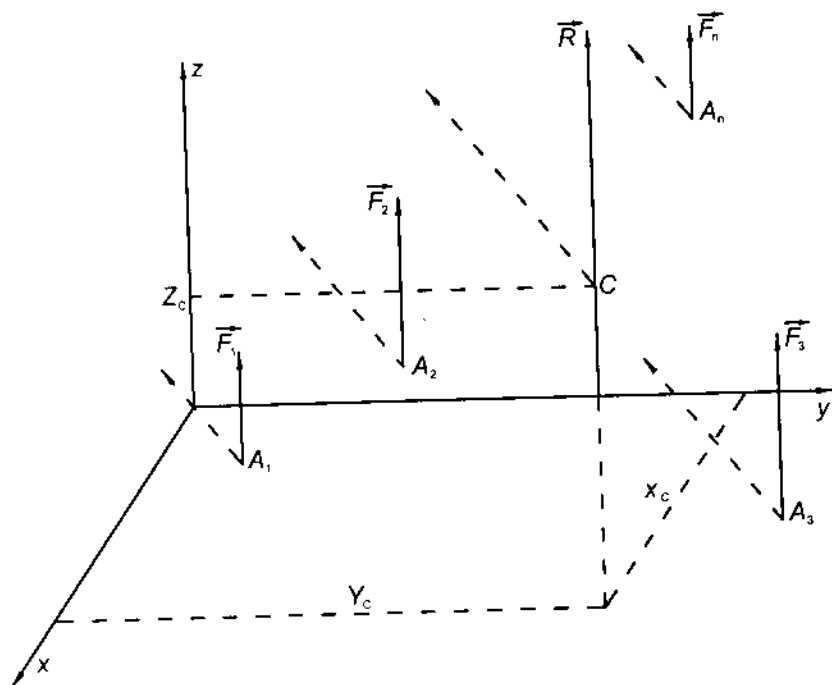
$$x_C = \frac{x_A F_1 - x_B F_2}{F_1 - F_2} \quad (5.2)$$

Chú ý: Nếu hai lực song song, ngược chiều và có cường độ bằng nhau thì tạo thành một ngẫu lực, mà ngẫu lực thì không có hợp lực.

5.1.3. THU GỌN NHIỀU LỰC SONG SONG

Ta có hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ song song, cùng chiều trong không gian.

Tương tự như đối với hai lực, ta có kết luận: hệ lực song song cùng chiều có hợp lực song song, cùng chiều với các lực, đặt tại tâm của hệ lực và có cường độ bằng tổng cường độ các lực (hình 5.4).



Hình 5.4

Tọa độ tâm C của hệ lực được xác định như sau:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum x_k F_k}{\sum F_k} \\ y_C &= \frac{\sum y_k F_k}{\sum F_k} \\ z_C &= \frac{\sum z_k F_k}{\sum F_k} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Cường độ của hợp lực $R = \sum F_k$

Chú ý:

- Điểm đặt C của hợp lực $\bar{R}$ không phụ thuộc vào phương của hệ lực song song.

- Nếu hệ lực song song, có chiều bất kỳ thì sẽ có hợp lực khi $\sum F_k \neq 0$. Tọa độ C cũng được xác định theo (5.3) nhưng tổng là tổng đại số.
- Nếu điểm đặt của các lực cùng ở trên một mặt phẳng thì tâm C cũng nằm trên mặt phẳng ấy.

§5.2. TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

5.2.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÔNG THỨC TỔNG QUÁT ĐỂ XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

Trọng tâm vật rắn là điểm đặt C của trọng lượng $\vec{P}$ của vật. Tọa độ C được xác định:

$$x_C = \frac{\sum x_k P_k}{Q}; \quad y_C = \frac{\sum y_k P_k}{Q}; \quad z_C = \frac{\sum z_k P_k}{Q} \quad (5.4)$$

Điều này có thể giải thích như (5.3). Mỗi phần tử của vật rắn đều bị Trái Đất hút về tâm bằng trọng lượng của phần tử ấy $\vec{P}_k$. Thu hệ các lực $\vec{P}_k$ song song cùng chiều ta được hợp lực $\vec{Q}$ cũng song song, cùng chiều và có cường độ:

$$Q = \sum P_k$$

Hợp lực $\vec{Q}$ không phụ thuộc vào vị trí vật, được đặt tại tâm C của hệ lực. Vì vậy vật rắn chịu lực hút của Trái Đất bằng một lực duy nhất là trọng lượng của vật và luôn luôn đặt tại C .

5.2.2. TRỌNG TÂM CỦA CÁC VẬT ĐỒNG CHẤT

a) Khối đồng chất

Trọng lượng của mỗi phần tử $P_k = \gamma V_k$, do đó:

$$Q = \gamma V$$

trong đó: γ - trọng lượng riêng của chất tạo thành vật;

V_k - thể tích của phần tử k ;

V - thể tích của cả vật.

Đưa các giá trị vào (5.4), ta có:

$$x_C = \frac{\sum x_k V_k}{V}; \quad y_C = \frac{\sum y_k V_k}{V}; \quad z_C = \frac{\sum z_k V_k}{V} \quad (5.5)$$

b) Mặt đồng chất

$$x_C = \frac{\sum x_k S_k}{S}; \quad y_C = \frac{\sum y_k S_k}{S}; \quad z_C = \frac{\sum z_k S_k}{S} \quad (5.6)$$

trong đó: S_k - diện tích của phần tử k ;

S - diện tích của cả mặt mà ta khảo sát.

c) Đoạn đồng chất

$$x_C = \frac{\sum x_k L_k}{L}; \quad y_C = \frac{\sum y_k L_k}{L}; \quad z_C = \frac{\sum z_k L_k}{L} \quad (5.7)$$

Thường các vế phải được tính bằng tích phân.

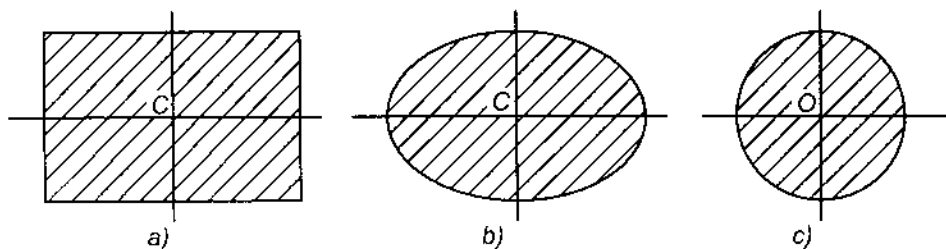
5.2.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN ĐỒNG CHẤT

a) Phương pháp đối xứng

Nếu vật đồng chất có một điểm, một trục hay một mặt đối xứng thì trọng tâm của vật ở tại điểm hay trên trục, trên mặt đối xứng ấy.

Chứng minh: Coi (π) là mặt phẳng đối xứng của vật. Chia vật thành những cặp phần tử đối xứng qua (π) . Hợp trọng lượng từng cặp đó ta được một hệ lực mà điểm đặt của chúng nằm trên mặt phẳng (π) . Hợp lực của hệ lực này là trọng lượng Q của vật, cũng có điểm đặt nằm trên mặt phẳng (π) . Trường hợp vật có trục đối xứng

ta cũng chứng minh tương tự. Ta nhận xét rằng hình chữ nhật, hình elip, hình tròn... có hai trục đối xứng (hình 5.5). Trọng tâm của các hình này sẽ là giao điểm của hai trục đối xứng. Ví dụ trọng tâm của hình tròn ở tâm O .



Hình 5.5

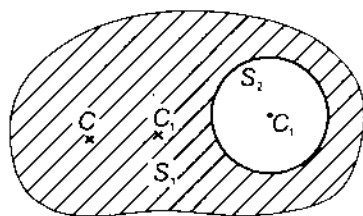
b) Phương pháp phân chia

Có một hình phẳng. Phân chia hình thành nhiều hình nhỏ có trọng lượng ta đã biết, như vậy:

$$x_C = \frac{\sum x_k S_k}{\sum S_k}; y_C = \frac{\sum y_k S_k}{\sum S_k} \quad (5.8)$$

trong đó: x_k, y_k, S_k - tọa độ trọng tâm và diện tích của hình phẳng thứ k .

Đối với hình khuyết ta có thể xem là được ghép bởi hình nguyên vẹn và mảnh bỏ đi để áp dụng các công thức đã biết (hình 5.6). Với mảnh bỏ đi, ta coi như diện tích của nó có giá trị âm.



Hình 5.6

Áp dụng (5.8) để tính tọa độ trọng tâm của hình:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 + x_2 (-S_2)}{S_1 + (-S_2)} \quad (5.9)$$

trong đó: x_1, S_1 - tọa độ trọng tâm và diện tích hình nguyên;
 x_2, S_2 - tọa độ trọng tâm và diện tích hình bỏ đi.

Gọi x_C, S là tọa độ trọng tâm và diện tích hình khuyết, ta có:

$$x_C = \frac{x_C S + x_2 S_2}{S + S_2} = \frac{x_C S + x_2 S_2}{S_1}$$

$$x_1 S_1 = x_C S + x_2 S_2$$

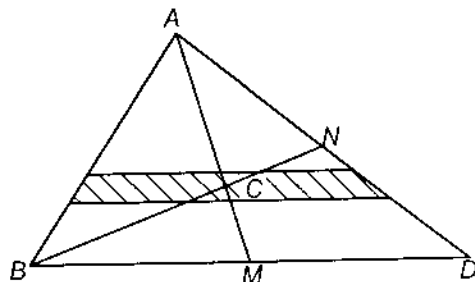
Như vậy:

$$x_C = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S} = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2} \quad (5.10)$$

5.2.4. TRỌNG TÂM MỘT SỐ VẬT THƯỜNG GẶP

a) Tam giác

Chia tam giác (hình 5.7) làm nhiều băng song song với cạnh BD . Trọng tâm của mỗi băng nằm trên trung điểm của nó, tức là trên trung tuyến AM . Vậy trọng tâm của cả tam giác sẽ nằm trên đường AM . Tương tự nếu ta chia tam giác thành



Hình 5.7

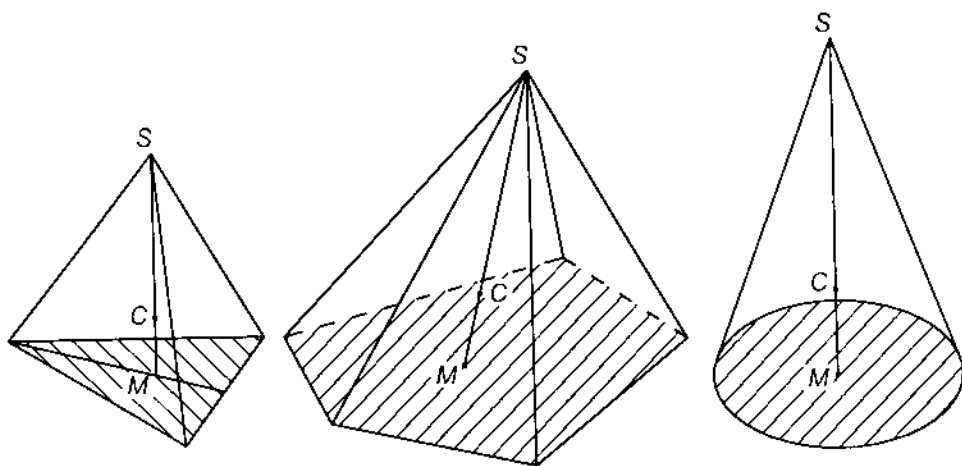
những băng song song với AD , thì trọng tâm của tam giác sẽ nằm trên trung tuyến BN . Như vậy trọng tâm của tam giác sẽ là giao điểm của các đường trung tuyến. Theo hình học ta tính được:

$$CM = \frac{1}{3} AM \quad (5.11)$$

b) Hình chóp

Cũng bằng phương pháp tương tự, đối với hình chóp, có trọng tâm nằm trên đường SM nối đỉnh và trọng tâm của đáy (hình 5.8):

$$CM = \frac{1}{4} SM \quad (5.12)$$



Hình 5.8

c) Cung tròn

Cung tròn tâm O, bán kính R có độ dài cung $AB = L$ và góc ở tâm 2α . Trục x vuông góc với dây cung AB (hình 5.9). Như vậy trục x là trục đối xứng nên trọng tâm C phải nằm trên trục x.

Phân $\widehat{AB}$ thành những cung nhỏ $\widehat{ab}$.

Gọi Δl là độ dài của cung $\widehat{ab}$. Theo công thức trọng tâm của đường đồng chất, ta có:

$$x_C = \frac{\sum x \Delta l}{L} \quad (5.13)$$

trong đó: $L = 2R\alpha$, x - tọa độ trọng tâm của cung $\widehat{ab}$;
 $x = R \cos \varphi$; $\Delta l = R \Delta \varphi$ với $\Delta \varphi$ là góc tâm của $\widehat{ab}$.

Thay giá trị vào (5.13) ta được:

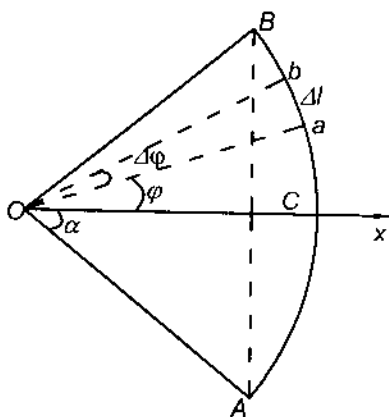
$$x_C = \frac{\sum R^2 \cos \varphi \Delta \varphi}{2R\alpha} = \frac{R}{2\alpha} \sum \cos \varphi \Delta \varphi$$

Với $\widehat{ab}$ nhỏ thì x_C được tính bằng tích phân:

$$x_C = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} \quad (5.14)$$

Nếu $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tức là AB bằng nửa đường tròn thì:

$$x_C = \frac{2R}{\pi}$$



Hình 5.9

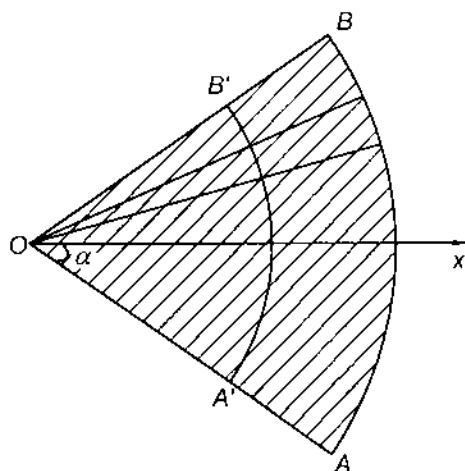
d) Hình quạt

Chia hình quạt ra thành những hình quạt nhỏ và có thể xem đó là những tam giác mà trọng tâm của chúng phân bố trên cung $A'B'$ có bán kính $R' = \frac{2}{3}R$ (hình 5.10).

Áp dụng công thức (5.14) của cung tròn ta có:

$$x_C = \frac{R' \sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} \times \frac{\sin \alpha}{\alpha} R \quad (5.15)$$

Nếu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì $x_C = \frac{4R}{3\pi}$.



Hình 5.10

CÂU HỎI ÔN TẬP PHẦN TĨNH HỌC

1. Trình bày khái niệm lực (định nghĩa, các yếu tố xác định và cách biểu diễn lực).
Chứng tỏ rằng lực tác dụng lên vật rắn được biểu diễn bằng vectơ trượt.
2. Định nghĩa hệ lực tương đương, hệ lực cân bằng, hợp lực của hệ lực.
3. Trình bày tiên đề 1 (Về hệ hai lực cân bằng) và tiên đề 4 (Về lực tác dụng và phản tác dụng).
Phát biểu tiên đề 2 (Về sự tương đương của hệ lực) và tiên đề 5 (Nguyên lý hóa rắn).
4. Trình bày tiên đề 3 (Quy tắc hình bình hành). Phát biểu tiên đề 6 (Về giải phóng liên kết).
5. Định nghĩa vật tự do, vật không tự do, liên kết và phản lực liên kết.
Nêu cách xác định phản lực liên kết trong một số liên kết thường gặp.
6. Định nghĩa mômen của lực đối với một tâm và mômen của lực đối với một trục. Viết công thức biểu thị $\overline{m_o}(\vec{F})$ và $m_z(\vec{F})$. Trình bày các tính chất của chúng.
7. Viết công thức giải tích xác định mômen của lực đối với một tâm. Phát biểu và chứng minh định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một tâm và mômen của lực đối với một trục đi qua tâm đó. Công thức xác định mômen của lực đối với các trục tọa độ.

8. Định nghĩa ngẫu lực và các yếu tố của ngẫu lực. Ngẫu lực có phải là hệ lực cân bằng không? Có hợp lực không?
9. Trình bày khái niệm vectơ mômen ngẫu lực. Phân biệt với vectơ biểu diễn lực. Định nghĩa sự tương đương của ngẫu lực. Nêu các tính chất.
10. Phát biểu và chứng minh định lý hợp hệ ngẫu lực. Phát biểu và chứng minh định lý dời lực song song.
11. Trình bày vectơ chính và mômen chính của hệ lực không gian khi thu gọn về một tâm.
12. Phát biểu và chứng minh định lý biến thiên mômen chính.
13. Trình bày các trường hợp xảy ra khi thu gọn hệ lực không gian về dạng tối giản.
14. Phát biểu và chứng minh định lý điều kiện cân bằng của hệ lực không gian. Viết các phương trình cân bằng của hệ lực không gian. Từ đó suy ra các phương trình cân bằng của hệ lực không gian song song; hệ lực không gian đồng quy, hệ lực phẳng, hệ lực phẳng song song.
15. Trình bày bài toán cân bằng của đòn phẳng và vật lật.
16. Nêu hai phương pháp giải bài toán hệ vật. Trình bày bài toán siêu tĩnh và tĩnh định.
17. Phát biểu định luật ma sát trượt và ma sát lăn. Cách giải bài toán cân bằng khi có ma sát trượt, ma sát lăn.
18. Định nghĩa trọng tâm của vật.

VÍ DỤ TÍNH TOÁN, BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP PHẦN TĨNH HỌC

I. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Ví dụ I.1: Cho hệ gồm các lực $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ tác dụng lên hình lập phương có cạnh là a như ở hình 1.1, biết $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 4 \text{ kN}$; $P_3 = 4 \text{ kN}$; $P_4 = 11 \text{ kN}$ với $\alpha = 30^\circ = 0,3 \text{ m}$.

1. Thu gọn hệ lực trên về O .
2. Hệ lực này thu về được hợp lực hay hệ xoắn?

Bài giải:

1. Ta tính $\vec{R}'$ và $\vec{M}_o$

$$R'_x = \sum X_k = P_3 + P_4 \cos 45^\circ = 4 + 11 \frac{\sqrt{2}}{2} = 11,76 \text{ kN}$$

$$R'_y = \sum Y_k = P_1 = 10 \text{ kN}$$

$$R'_z = \sum Z_k = -P_2 - P_4 \sin 45^\circ = -4 - 11 \frac{\sqrt{2}}{2} = -11,76 \text{ kN}$$

$$R'_o = \sqrt{(11,76)^2 + 10^2 + (-11,76)^2}$$

$$R'_o = 19,4 \text{ kN.}$$

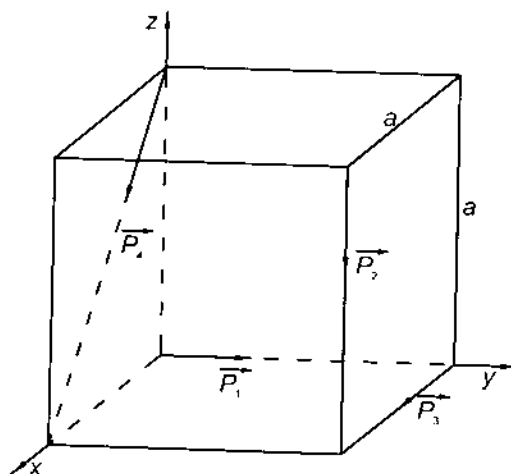
$$M_{ox} = \sum m_x(\vec{F}_k) = -aP_2 = -0,34 = -1,2 \text{ kNm}$$

$$M_{oy} = \sum m_y(\vec{F}_k) = -aP_2 + aP_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,3 \left(P_2 + P_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ = 0,3 \left(4 + 11 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3,52 \text{ kNm.}$$

$$M_{oz} = \sum m_z(\vec{F}_k) = -aP_3 = -0,3.4 = -1,2 \text{ kNm}$$

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{(-1,2)^2 + (3,52)^2 + (-1,2)^2}$$

$$M_o = 3,9 \text{ kNm.}$$



Hình 1.1

$$2. \quad \text{Ta tính } \vec{R}'_o \cdot \vec{M}_o = R'_x M_{ox} + R'_y M_{oy} + R'_z M_{oz} \\ = 11,76.(-1,2) + 10.3,52 + (-11,76).(-1,2) = 35,2 \neq 0$$

Như vậy ta thấy $\vec{R}'_o \neq 0$; $\vec{M}_o \neq 0$ mà $\vec{R}'_o \cdot \vec{M}_o \neq 0$, nên hệ lực nêu trên không thu được về hợp lực mà thu được về hệ xoắn.

Ví dụ I.2: Một tấm hình vuông $ABCD$ đồng chất nặng Q (N) được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ sáu thanh chống.

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = aS_5 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

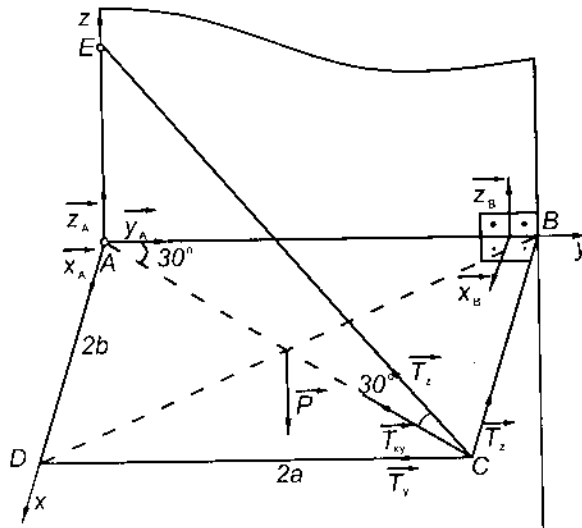
Từ (6) ta có $S_5 = 0$ và từ (2) ta được $S_3 = 0$.

Thay $S_5 = 0$ vào (1) ta được $S_1 = 0$.

Từ (5) ta được $S_6 = \frac{Q}{2}$.

Thay các giá trị tìm được vào (4) ta có $S_1 = 0$. Từ (3) ta tìm được $S_2 = Q/2$.

Ví dụ 1.3: Một hình chữ nhật đồng chất nặng 20 N gắn vào tường nhờ bản lề cầu tại A và bản lề trụ tại B và được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ dây CE buộc từ điểm C của khung đến điểm E đóng vào tường trên đường thẳng đứng qua A , trong đó $\widehat{ECA} = \widehat{BAC} = 30^\circ$. Hãy xác định sức căng của dây CE và phản lực ở A và B (hình 1.3).



Hình 1.3

Bài giải: Vật xét cân bằng là khung chữ nhật $ABCD$.

Các lực tác dụng lên vật gồm: trọng lượng khung $\vec{P}$, sức căng của dây $\vec{T}$, phản lực tại A là $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ và phản lực tại B là $\vec{X}_B,$

$\vec{Z}_B$. Đối với lực xiên $\vec{T}$ ta phân tích thành ba lực thành phần theo ba trục tọa độ là $\vec{T}_x, \vec{T}_y, \vec{T}_z$.

Hệ các lực tác dụng lên vật cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{T}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_B - T_x = X_A + X_B - T \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - \bar{T}_y = Y_A - T \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = Z_A + Z_B - P + \bar{T}_z + Z_A + Z_B - P + T \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 2aT_z + 2aZ_B - aP = 2aT \sin 30^\circ + 2aZ_B - AP = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = bP - 2b\bar{T}_z = bP - 2bT \sin 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = -2aX_B = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có $X_B = 0$. Từ (5) có $T = P = 20 \text{ N}$

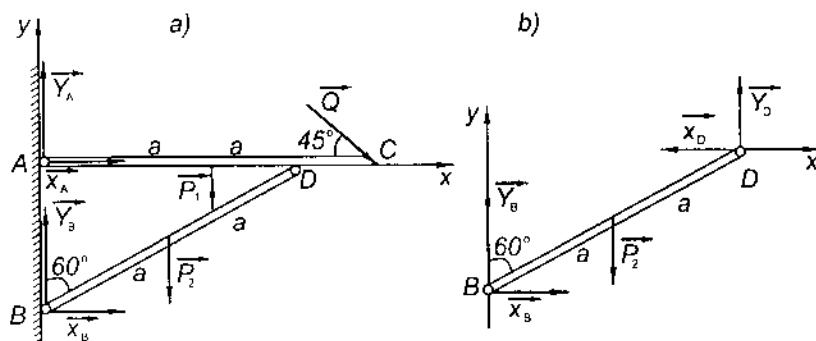
Từ (4) ta được $Z_B = 0$. Thay vào (3) ta có:

$$Z_A = \frac{P}{2} = 10 \text{ N}$$

Từ (2) ta có $Y_A = T \cos^2 30^\circ = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15 \text{ N}$

Từ (1): $X_A = T \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 5\sqrt{3} \text{ N}$

Ví dụ I.4: Cho hai thanh AC và BD có trọng lượng P_1 và P_2 được nối với nhau bằng bản lề ở D . Chúng được liên kết với tường bằng bản lề tại A và B . Tại C tác dụng một lực $\vec{Q}$ nghiêng với trục dầm AC một góc 45° với $P_1 = P_2 = 40 \text{ kN}$ và $Q = 100 \text{ kN}$ (hình I.4a).
Hãy xác định phản lực tại các bản lề A, B và D . Nếu độ dài thanh $AC = BD = 2a$.



Hình 1.4

Bài giải: Đây là bài toán hệ vật nên có thể áp dụng một trong hai phương pháp giải. Nếu áp dụng phương pháp hóa rắn để giải thì coi toàn hệ như một vật rắn và thay các liên kết bản lề A và B bằng các phản lực liên kết $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}$. Khi đó các lực tác dụng lên hệ gồm $(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_B + Q \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B - Q \sin 45^\circ - P_1 - P_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = aX_B - aP_2 \sin 60^\circ - aP_1 - 2aQ \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

Ở đây có ba phương trình chứa bốn ẩn số nên ta phải lập thêm phương trình cân bằng.

Ta xét cân bằng BD. Các lực tác dụng (hình 1.4b).

$$(\overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{X_D}, \overrightarrow{Y_D}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_B - X_D = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_H + Y_D - P_2 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_D(\vec{F}_k) = P_2 a \sin 60^\circ - Y_B 2a \sin 60^\circ + X_B 2a \cos 60^\circ = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình này.

Từ (3) ta có:

$$X_B = P_1 + P_2 \sin 60^\circ + 2Q \sin 45^\circ$$

$$X_B = 40 + 40 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 100 \frac{\sqrt{2}}{2} = 216 \text{ kN}$$

Thay X_B vào (1) ta có:

$$X_A = -Q \cos 45^\circ - X_B = -100 \frac{\sqrt{2}}{2} - 216$$

$$X_A = -286,7 \text{ kN.}$$

Thay X_B vào (6) ta có:

$$Y_B = \frac{P_2}{2} + \frac{X_B \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 144,7 \text{ kN}$$

$$\text{Từ (2) ta có } Y_A = Q \sin 45^\circ + P_1 + P_2 - Y_B = 6 \text{ kN}$$

Từ (4)

$$X_D = X_B = 246 \text{ kN}$$

Từ (5)

$$Y_D = P_2 - Y_B = 40 - 144,7 = -104,7 \text{ kN}$$

Ví dụ I.5: Cho hai thanh AB và BC liên kết với nhau và với tường bằng bản lề tại A , B và C . Tại B tác dụng tải trọng $Q = 10 \text{ kN}$ (hình I.5).

Xác định ứng lực trong các thanh, nếu bỏ qua trọng lượng các thanh, biết $\alpha = 60^\circ$ và $\beta = 30^\circ$.

Bài giải: Vì bỏ qua trọng lượng các thanh và đầu thanh là các bản lề nên ứng lực hướng dọc theo trục thanh. Xét cân bằng nút B ta có:

Các lực tác dụng $(\vec{Q}, \vec{S}_{AB}, \vec{S}_{BC}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

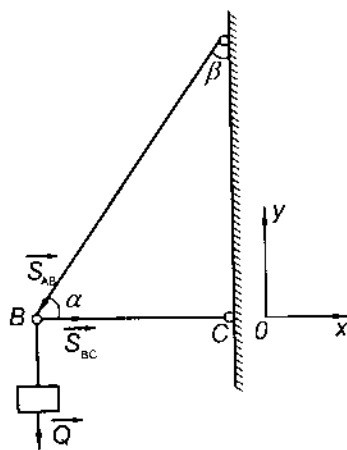
$$\sum X_k = S_{BC} - S_{AB} \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = -Q - S_{AB} \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

Giải các phương trình (1) và (2) ta có:

$$\text{Từ (2)} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} S_{AB} = -Q = -10 \text{ kN}; S_{AB} = -\frac{20}{\sqrt{3}} \text{ kN}$$

$$\text{Từ (1) ta có } S_{BC} = S_{AB} \cos 60^\circ = \frac{-20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{10}{\sqrt{3}} \text{ kN}$$



Hình 1.5

Các ứng lực có dấu (-) chứng tỏ chiều của ứng lực phải lấy ngược lại. Theo quan điểm xét kéo nén thì nếu ta quy ước thanh chịu nén thì ứng lực có dấu (-), còn thanh chịu kéo thì ứng lực lấy dấu (+).

Ví dụ 1.6: Cho hệ sáu thanh được nối với nhau bằng bản lề ở đầu các thanh. Các lực $\vec{P}$, $\vec{F}$ được đặt tại các nút A và B.

Hãy xác định ứng lực trong các thanh nếu ta bỏ qua trọng lượng các thanh và kích thước cho ở trên hình 1.6.

Bài giải:

1. Xét cân bằng nút A:

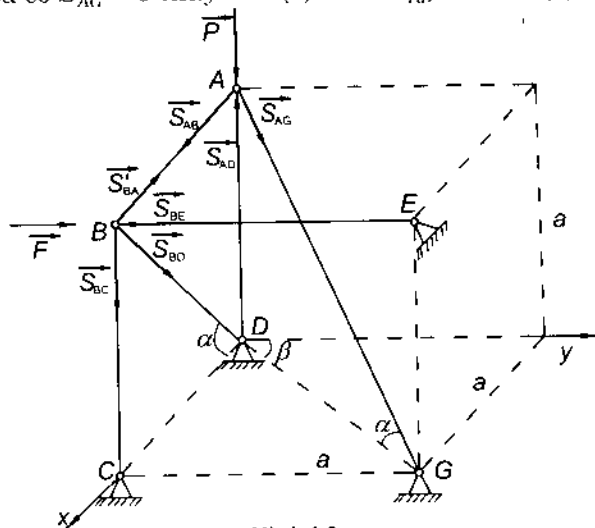
Các lực tác dụng lên nút A $(\vec{P}, \vec{S}_{AB}, \vec{S}_{AD}, \vec{S}_{AG}) \sim 0$. Chọn hệ trục như ở hình 1.6 và lập các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = S_{AB} + S_{AG} \cos \alpha \cdot \sin \beta = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = S_{AG} \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = S_{AD} - P - S_{AB} \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Từ (2) ta có $S_{AG} = 0$ thay vào (1) ta có $S_{AB} = 0$. Từ (3) ta có $S_{AD} = P$.



Hình 1.6

2. Xét cân bằng nút B:

Các lực tác dụng lên nút B:

$$(\vec{F}, \vec{S}_{BC}, \vec{S}_{BD}, \vec{S}_{BE}, \vec{S}'_{BA}) \sim 0 \text{ mà } S'_{BA} = S_{AB}.$$

Chọn hệ trục như hình 1.11.6 và lập các phương trình cân bằng

$$\sum X_k = -S'_{BA} - S_{BD} \cos \gamma = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = F - S_{BF} = 0 \quad (5)$$

$$\sum Z_k = -S_{BC} - S_{BD}\sin\gamma = 0 \quad (6)$$

$$\text{Từ (4) ta có } S_{BD}\cos\gamma = -S'_{AB} = S_{AB} = 0 : S_{BD} = 0$$

Thay vào (6) $S_{BC} = 0$.

Từ (5) ta có $S_{BE} = F$.

Ví dụ I.7: Xác định các phản lực của gối tựa và ứng lực trong các thanh 1, 2, 3 và 4 của dàn nếu $F = 4 \text{ N}$ và $P = 1 \text{ N}$ (hình I.7a).

Bài giải: Trước tiên ta xác định phản lực ở các gối tựa. Ta xét cân bằng của toàn bộ dàn, và thay các liên kết tại các gối tựa A và B bằng các phản lực liên kết.

Hệ các lực tác dụng lên dàn

$$(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{Y_B}, \overline{F}, \overline{P}) \sim 0$$

Chọn hệ trục như hình I.7a và lập các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + P = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 3aY_B + aP - aF = 0 \quad (3)$$

Từ (1) ta có $X_A = -P = -1 \text{ N}$.

Từ (3) ta có $Y_B = \frac{1}{3}(F - P) = 1 \text{ N}$.

Thay Y_B vào (2) ta có $Y_A = 4 - 1 = 3 \text{ N}$.

Muốn xác định ứng lực trong các thanh 1 và 2 ta xét cân bằng nút B khi chịu tác dụng của $\overline{Y_B}$ và các ứng lực trong các thanh 1 và 2 là $\overline{S_1}$ và $\overline{S_2}$. Khi đó ta có: $(\overline{Y_B}, \overline{S_1}, \overline{S_2}) \sim 0$.

Chọn hệ trục như hình I.7b ta có:

$$\sum X_k = -S_1 - S_2\cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

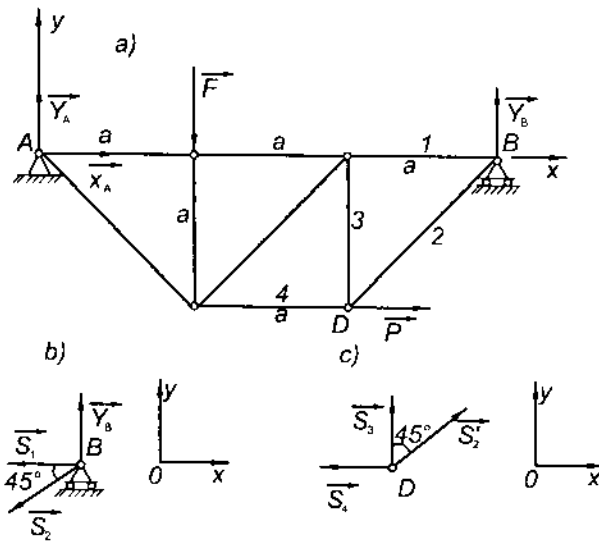
$$\sum Y_k = Y_B - S_2 \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

Từ (5) ta có $Y_B = S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow S_2 = \sqrt{2} Y_B = \sqrt{2} N$

Thay S_2 vào (4) ta được $S_1 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 N$

Để tính được ứng lực trong các thanh 3 và 4 ta xét cân bằng tại nút D .

Các lực tác dụng $(\vec{S}'_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4) \sim 0$.



Hình 1.7

Chiếu lên các trục tọa độ đã chọn (hình 1.7c):

$$\sum X = S'_2 \sin 40^\circ - S_4 = 0 \quad (6)$$

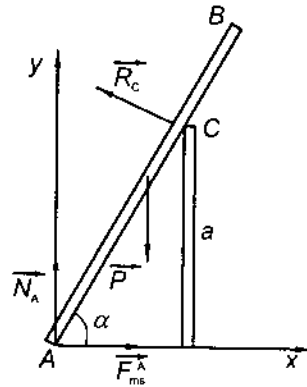
$$\sum Y = S_3 + S'_2 \cos 45^\circ = 0 \quad (7)$$

Từ (6) ta có $S_1 = S'_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ N}$ vì $S_2 = S'_2 = \sqrt{2} \text{ N}$

Thay vào (7) ta được $S_3 = -S'_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \text{ N}$.

Ví dụ I.8: Một thanh thẳng AB chiều dài l trọng lượng P . Đầu A tựa lên mặt phẳng nằm ngang, còn điểm C tựa lên bức tường thẳng đứng có chiều cao $a = \frac{l}{2}$ (hình I.8).

Tìm giá trị nhỏ nhất của hệ số ma sát trượt giữa thanh AB và mặt phẳng ngang khi cân bằng, nếu góc nghiêng giữa thanh và mặt phẳng ngang là $\alpha = 60^\circ$.



Hình I.8

Bài giải:

- Xét cân bằng của thanh AB .
- Các lực tác dụng:

Lực đã biết : trọng lượng $\vec{P}$ của thanh.

Các phản lực: tại C là $\vec{R}_C$ có phương vuông góc với AB và phản lực pháp tuyến $\vec{N}_A$, lực ma sát tại A là $\vec{F}_{ms}^A$. Khi đó ta có $(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{F}_{ms}^A, \vec{R}_C) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng:

Chọn hệ trục tọa độ như ở hình I.8.

$$\sum X_k = F_{ms}^A - R_C \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N_A - P + R_C \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = -P \frac{l}{2} \cos \alpha + AC \cdot R_C = 0 \quad (3)$$

Điều kiện cân bằng khi có ma sát

$$F_{ms} \leq F_{ms}^{\max} = fN_A$$

$$\text{Do đó } F_{ms}^A = R_C \sin \alpha \leq F_{ms}^{\max} = fN_A = f(P - R_C \cos \alpha)$$

$$\text{Từ (3) ta có } R_C = P \frac{l}{2} \cos \alpha \frac{1}{AC},$$

$$\text{mà } AC = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{l}{2 \sin \alpha} \text{ nên } R_C = \frac{Pl \cos \alpha}{2 \cdot \frac{l}{2 \sin \alpha}} = P \cos \alpha \sin \alpha$$

$$R_C \sin \alpha \leq f(P - R_C \cos \alpha)$$

$$P \cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha \leq (P - P \cos \alpha \sin \alpha \cos \alpha) f$$

$$P \cos \alpha \sin^2 \alpha \leq fP(1 - \cos^2 \alpha \sin \alpha)$$

$$f \geq \frac{\cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha \sin \alpha}$$

Khi thay $\alpha = 60^\circ$ thì $f \geq 0,48$.

Ví dụ I.9: Tìm góc nghiêng α giữa mặt phẳng nghiêng không nhẵn với phương ngang để khối trụ trọng lượng P bán kính R không lăn xuống dưới (hình I.9). Cho hệ số ma sát lăn bằng k .

Bài giải:

Xét cân bằng khối trụ.

Các lực tác dụng:

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, M_1) \sim 0$$

Chọn hệ trục O, xy như hình I.9.

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = P \sin \alpha - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = M_1 - R.P \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

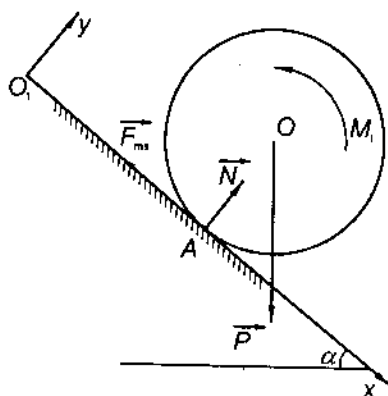
Điều kiện cân bằng khi có ma sát lăn:

$$M_1 \leq M_l^{\max} = kN \quad (*)$$

Từ (2) ta có $N = P \cos \alpha$. Từ (3) ta có:

$$M_1 = R.P \sin \alpha \leq M_l^{\max} = kN = kP \cos \alpha,$$

nghĩa là $R.P \sin \alpha \leq kP \cos \alpha$ hay $\tan \alpha \leq \frac{k}{R}$.



Hình 1.9

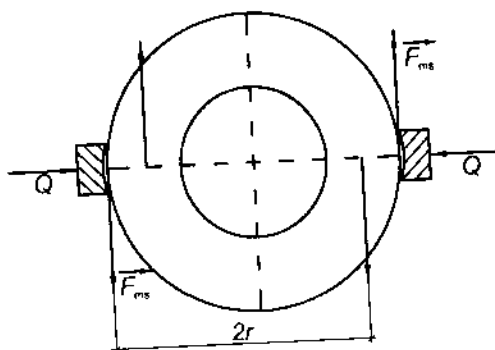
Ví dụ I.10: Trục van chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen $M = 100 \text{ Nm}$.

Người ta lắp bánh hãm bán kính $r = 25 \text{ cm}$ vào trục. Hãy tìm xem má phanh cần phải ép lên bánh hãm một lực Q (hình 1.10) bằng bao nhiêu để nó nằm yên, biết rằng hệ số ma sát tĩnh f giữa má phanh và bánh hãm bằng 0,25.

Bài giải: Xét cân bằng bánh hãm.

Vì đối xứng nên lực ma sát ở má phanh hai bên bằng nhau

$$F_{ms} = f.N, \text{ mà } N = Q.$$



Hình 1.10

Các lực ma sát tạo thành ngẫu lực.

Để bánh hãm nằm yên thì:

$$\sum m_k = 2r \cdot F_{ms} - M = 0$$

$$\text{hay } 2rfQ = M$$

$$Q = \frac{M}{2rf} = \frac{100}{2 \cdot 0,25 \cdot 0,25} = 800 \text{ N.}$$

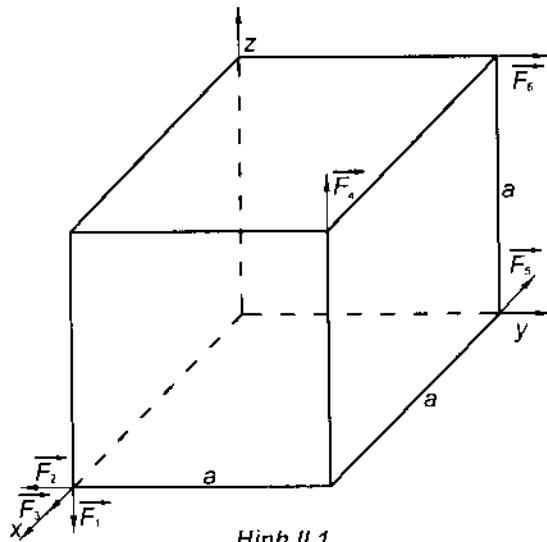
$$Q = 800 \text{ N.}$$

II. ĐỀ BÀI TẬP

HỆ LỰC KHÔNG GIAN

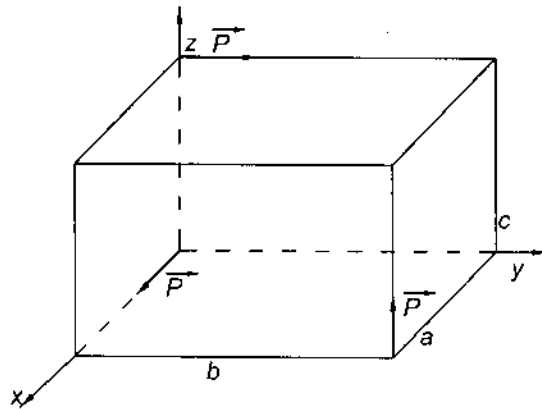
Thu gọn hệ lực không gian

Bài II.1: Tại các đỉnh của hình lập phương ta đặt các lực theo phương của các cạnh ở như hình II.1. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5, \vec{F}_6$ phải thỏa mãn điều kiện nào để chúng cân bằng.



Hình II.1

Bài II.2: Theo ba cạnh không cắt nhau và không song song với nhau của một hình hộp chữ nhật tác dụng ba lực $\vec{P}$ bằng nhau (hình II.2). Phải có hệ thức nào giữa các cạnh a , b , c để hệ thu về hợp lực.

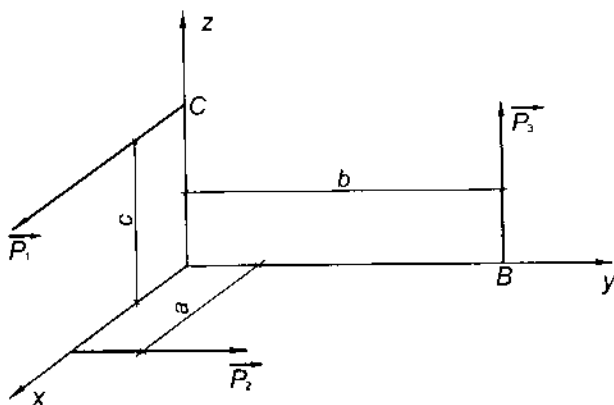


Hình II.2

Bài II.3: Ba lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ nằm trong các mặt phẳng tọa độ và song song với các trục tọa độ, nhưng có thể hướng theo phía này

hay phía kia. Những điểm đặt lực A , B và C nằm cách gốc tọa độ những khoảng cho trước a , b và c (hình II.3).

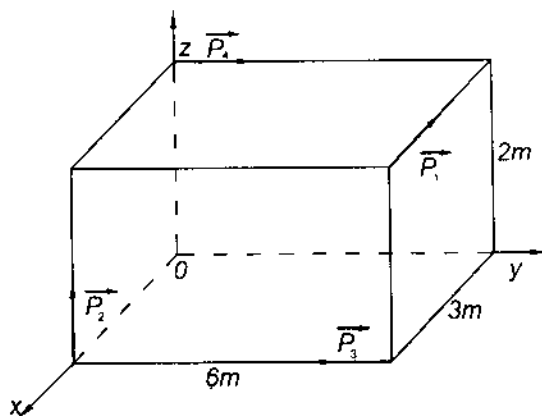
Giá trị của các lực này phải thỏa mãn điều kiện gì để chúng thu về hợp lực? Các giá trị của lực phải thỏa mãn điều kiện gì để tồn tại trục xoắn đi qua gốc tọa độ.



Hình II.3

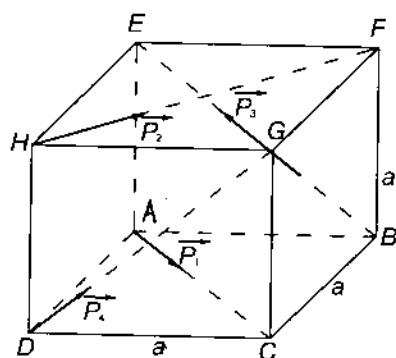
Bài II.4: Cho các lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ tác dụng lên các cạnh của một hình hộp chữ nhật có các cạnh bằng 3m, 6m, và 2m (hình II.4). Biết $P_1 = 2 \text{ kN}$, $P_2 = 3 \text{ kN}$, $P_3 = 4 \text{ kN}$, $P_4 = 5 \text{ kN}$. Hãy thu gọn hệ lực này về tâm O .

Hệ lực này có thu được về hệ xoắn hay không?

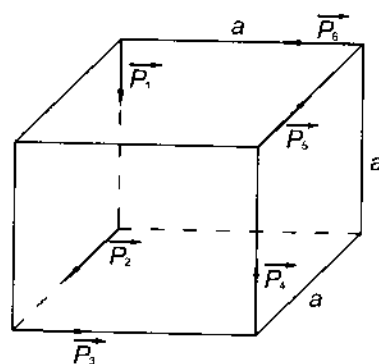


Hình II.4

Bài II.5: Tại bốn đỉnh A, H, B và D của một hình lập phương ta đặt bốn lực bằng nhau $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ trong đó lực P_1 hướng theo AC , P_2 hướng theo HF , P_3 theo BE và P_4 theo DG (hình II.5). Hãy rút gọn hệ lực đó về dạng đơn giản.



Hình II.5

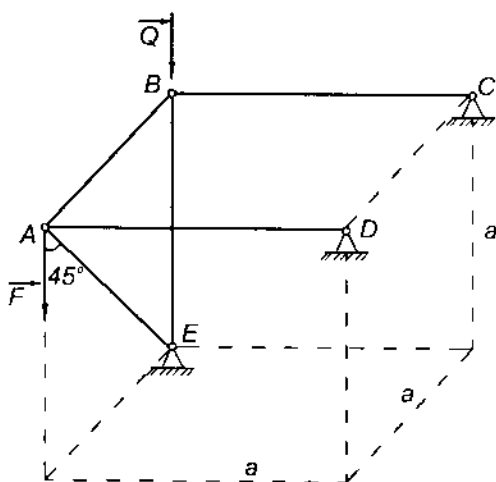


Hình II.6

Bài II.6: Tại các đỉnh của hình lập phương có cạnh $a = 5\text{cm}$ ta đặt 6 lực bằng nhau như trên hình II.6, mỗi lực bằng 2 kN. Hãy thu gọn hệ lực này về dạng đơn giản.

Cân bằng của hệ lực không gian

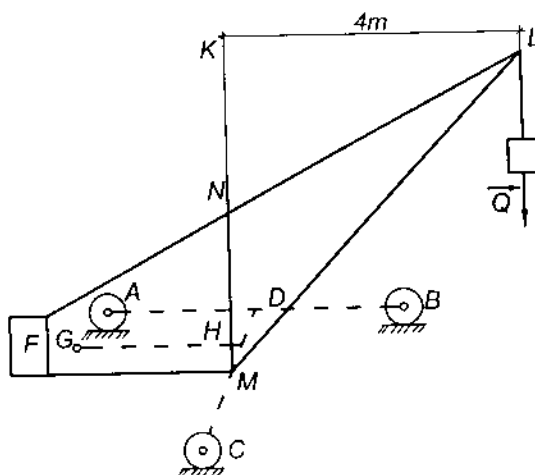
Bài II.7: Cho hai lực $\vec{F}$ và $\vec{Q}$ tác dụng lên hai nút A và B của hệ khung có kích thước và liên kết như ở hình II.7. Các nút A, B, C, D và E đều là bản lề. Hãy xác định ứng lực trong các thanh nếu bỏ qua trọng lượng của thanh.



Hình II.7

Bài II.8: Một cần trục đặt trên xe tời 3 bánh A, B, C . Cho $AD = DB = CM = 1\text{m}$; $CD = 1,5\text{m}$, $KL = 4\text{m}$. Cần trục được giữ cân bằng nhờ đối tượng F . Trọng lượng cần trục cùng đối trọng bằng 10 kN đặt tại điểm G trong mặt phẳng $LMNF$ cách trục MN một khoảng $GH = 0,5\text{m}$. Vật nặng Q nặng 3 kN (hình II.8).

Hãy xác định áp lực của các bánh xe lên đường ray trong trường hợp mặt phẳng LMN của cần trục song song với AB .



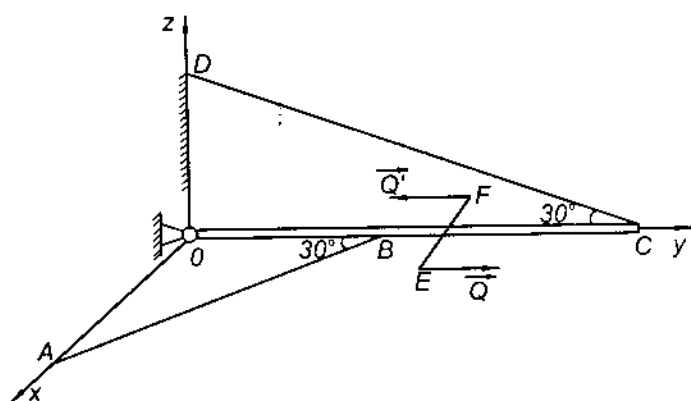
Hình II.8

Bài II.9: Thanh ngang OC có trọng lượng $P = 100\text{ N}$, dài 2m , chịu tác dụng của ngẫu lực $(\vec{Q}, \vec{Q}')$ nằm trong mặt phẳng nằm ngang.

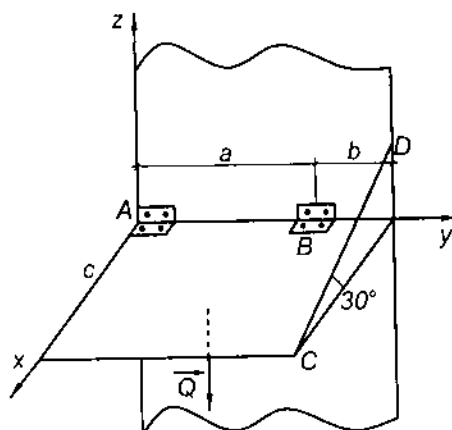
Lực $Q = 100\text{ N}$, cánh tay đòn $EF = 20\text{ cm}$. Thanh được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ bản lề cầu tại O với hai dây AB và CD . Biết $OB = 0,5\text{m}$. Hãy xác định phản lực tại O và sức căng của các dây khi thanh cân bằng (hình II.9).

Bài II.10: Một tấm phẳng hình chữ nhật đồng chất trọng lượng Q được giữ cân bằng trong mặt phẳng nằm ngang nhờ hai bản lề trụ A, B và dây treo CD (hình II.10).

Xác định phản lực tại A, B và sức căng dây CD , nếu $a = 60\text{ cm}$; $b = 40\text{ cm}$; $c = 50\text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$ và $Q = 4\text{ kN}$.

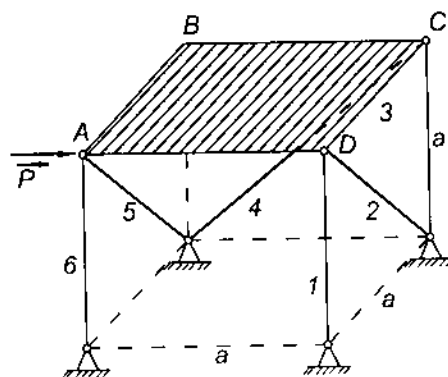


Hình II.9



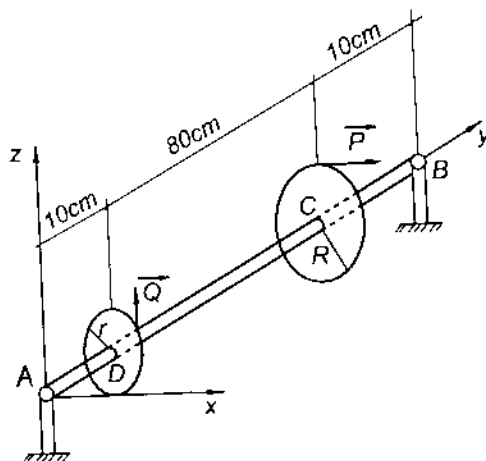
Hình II.10

Bài II.11: Xác định ứng lực trong 6 thanh đỡ tấm phẳng hình vuông $ABCD$ khi tác dụng lực $\vec{P}$ nằm ngang theo cạnh AD . Kích thước cho trên hình II.11. Bỏ qua trọng lượng tấm.



Hình II.11

Bài II.12: Trên trục AB nằm ngang người ta gắn vào bánh răng C bán kính $R = 1\text{m}$ và bánh răng nhỏ D bán kính $r = 10\text{cm}$. Các kích thước khác cho trên hình II.12.



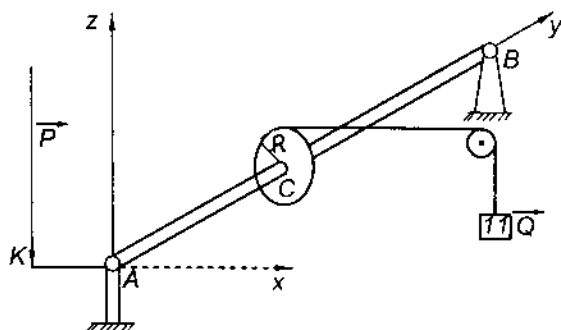
Hình II.12

Theo chiều tiếp tuyến của bánh răng C ta đặt lực nằm ngang $P = 10\text{kN}$; còn tại bánh răng D cũng theo chiều tiếp tuyến ta đặt lực thẳng đứng Q . Xác định lực Q và phản lực tại các ổ đỡ A và B khi hệ cân bằng.

Bài II.13: Người công nhân nâng đều tải trọng $Q = 80\text{ kN}$ nhờ một cái tời như trên hình II.13.

Bán kính của tay quay $R = 5\text{ cm}$; độ dài tay quay $AK = 40\text{ cm}$; $AC = CB = 50\text{ cm}$.

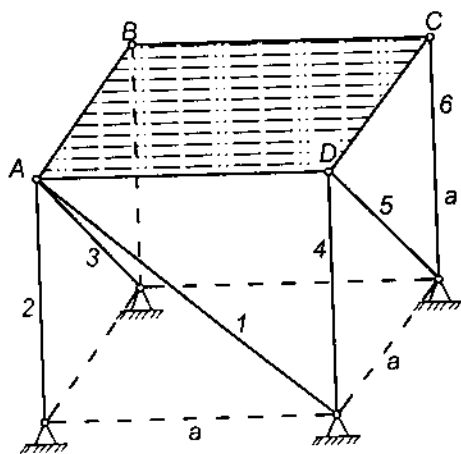
Xác định áp lực P lên tay quay và áp lực của trục giá lên gối tựa A và B trong trường hợp tay quay AK nằm ngang, lực P thẳng đứng.



Hình II.13

Bài II.14. Một tấm phẳng đồng chất $ABCD$ trọng lượng $P(N)$ có dạng hình lập phương gắn chặt xuống đất nhờ 6 thanh (hình II.14).

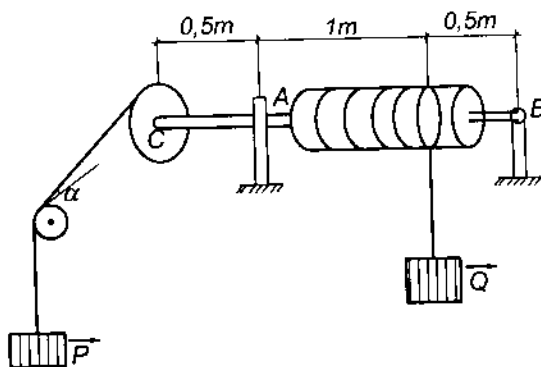
Xác định ứng lực trong các thanh gây ra bởi trọng lượng của tấm nếu các đầu thanh gắn vào tấm và vào các cột biên cố định nhờ khớp cầu.



Hình II.14

Bài II.15: Người ta quấn sợi dây giữ tải trọng Q vào trục AB của một cái giá. Bán kính của bánh xe C gắn vào trục lớn gấp 6 lần bán kính của trục. Các kích thước khác nêu ở hình II.15. Một sợi dây khác quấn quanh vòng tròn bánh xe kéo căng bởi tải trọng $P = 6 \text{ kN}$ và dời khỏi bánh xe theo tiếp tuyến nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 30^\circ$.

Xác định trọng lượng Q và phản lực ở ổ trục A và B khi giá cân bằng. Bỏ qua trọng lượng của trục và ma sát ở ròng rọc D .



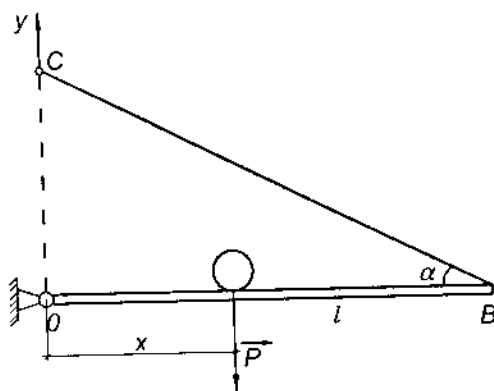
Hình II.15

HỆ LỰC PHẪNG BẤT KỲ

Cân bằng của một vật

Bài II.16: Dầm nằm ngang của một cần cầu có độ dài l được gắn khớp ở một đầu A , còn đầu B được treo vào tường nhờ dây BC . Góc nghiêng giữa dây BC và dầm là α . Tải trọng P có thể di chuyển theo dầm, vị trí của nó được xác định bằng khoảng cách biến thiên, từ nó đến khớp A (hình II.16).

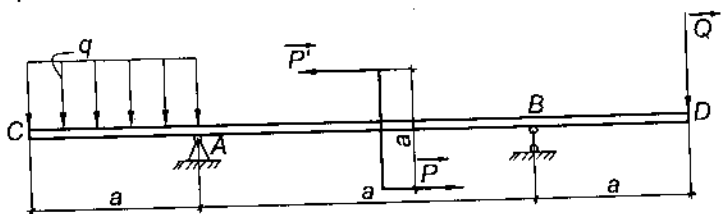
Tìm sức căng của dây BC phụ thuộc vào vị trí của tải trọng. Bỏ qua trọng lượng của dầm.



Hình II.16

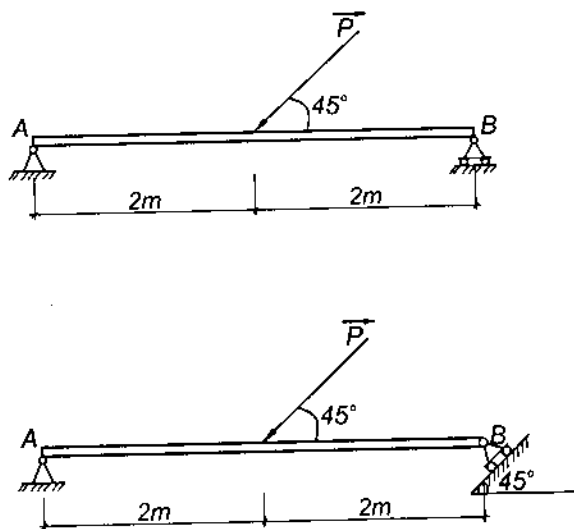
Bài II.17: Ngẫu lực $(\vec{P}, \vec{P}')$ tác dụng lên dầm côngxon hai đầu nằm

ngang. Tải trọng phân bố đều lên đầu côngxon bên trái và tải trọng thẳng đứng $\vec{Q}$ tác dụng tại điểm D của mút thừa bên phải của dầm (hình II.17). Hãy xác định phản lực tại các gối tựa A và B , nếu $P = 1 \text{ kN}$; $Q = 2 \text{ kN}$; $q = 2 \text{ kN/m}$ và $a = 0,8 \text{ m}$.



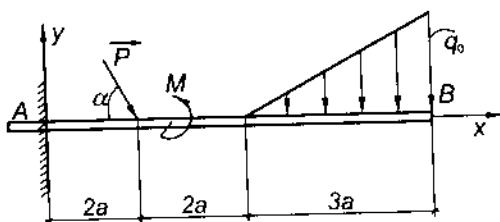
Hình II.17

Bài II.18: Dầm AB gắn bản lề tại gối tựa A và đặt trên con lăn tại đầu B . Tại điểm giữa của dầm tác dụng lực $P = 2 \text{ kN}$ nghiêng 45° với trục dầm. Tìm phản lực ở các gối tựa trong các trường hợp (a) và (b). Các kích thước cho trên hình II.18. Bỏ qua trọng lượng dầm.



Hình II.18

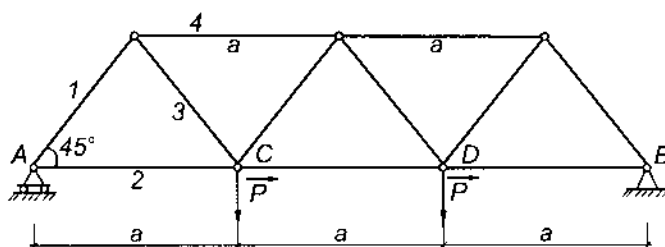
Bài II.19: Một dầm côngxon chịu tác dụng của lực P_1 ngẫu lực có mômen M và tải trọng phân bố tuyến tính với cường độ cực đại là q_0 (hình II.19). Hãy xác định phản lực của ngàm A , nếu $a = 1 \text{ m}$; $P = 8 \text{ N}$; $M = 16 \text{ Nm}$; $q_0 = 2 \text{ N/m}$; $\alpha = 60^\circ$.



Hình II.19

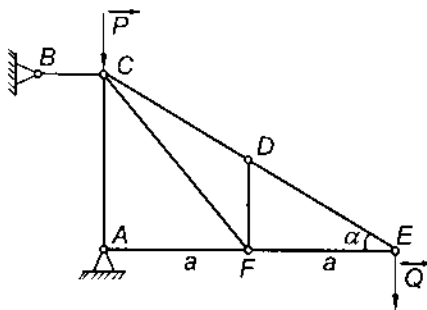
Bài II.20: Hai tải trọng thẳng đứng như nhau $P = 100 \text{ kN}$ đặt tại các nút C và D của dàn cầu như trên hình II.20. Các thanh

ngiêng đều lập với phương ngang góc 45° . Hãy tìm ứng lực trong các thanh 1, 2, 3 và 4 do các tải trọng gây ra.



Hình II.20

Bài II.21: Các lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ hướng thẳng đứng xuống dưới tác dụng lên các nút C và E của một dàn (hình II.21).

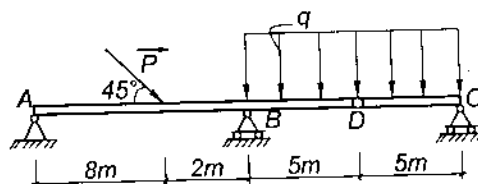


Hình II.21

Xác định phản lực liên kết tại A , B và ứng lực trong các thanh, bỏ qua trọng lượng các thanh, Nếu $\widehat{CAF} = 90^\circ$ và $\widehat{DEF} = \alpha$; $AF = EF = a$.

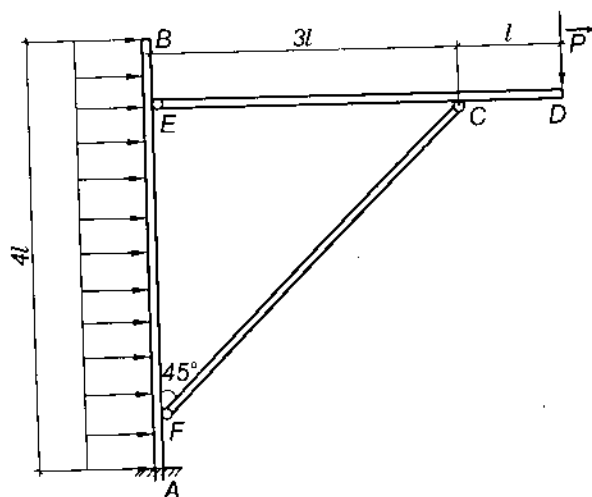
Cân bằng của hệ vật

Bài II.22: Xác định phản lực tại A , B , C và D của hệ dầm chịu tải có kích thước cho trên hình II.22. Cho biết $P = 4 \text{ kN}$; $q = 2 \text{ kN/m}$.



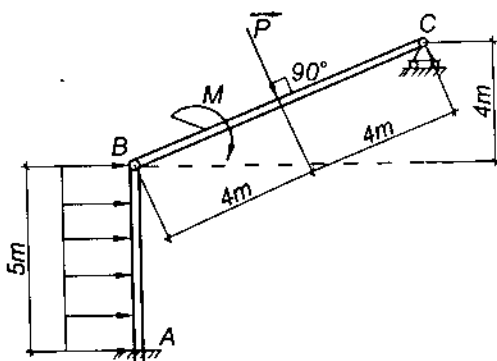
Hình II.22

Bài II.23: Hai thanh DE và FC nối với nhau bằng bản lề và nối với thanh AB bằng bản lề tại E và F . Thanh AB có liên kết ngàm tại A . Hệ thanh chịu tải như trên hình II.23. Hãy xác định phản lực tại C và mômen của ngẫu lực tại ngàm A . Cho $q = 0,5P/L$.



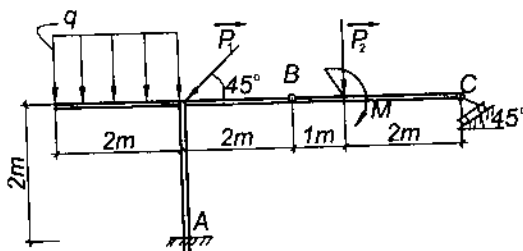
Hình II.23

Bài II.24: Cho hệ thanh có liên kết như hình II.24. Xác định phản lực tại A , B và C , nếu $P = 5 \text{ kN}$; $M = 30 \text{ kNm}$; $q = 0,9 \text{ kN/m}$.



Hình II.24

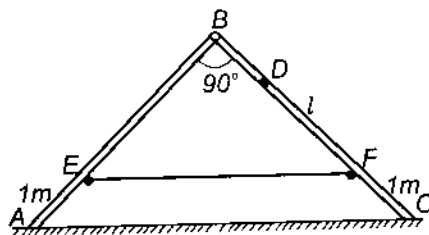
Bài II.25: Cho hệ thanh có liên kết như trên hình II.25. Xác định phản lực liên kết tại A, B và C, nếu $P_1 = 14 \text{ kN}$; $P_2 = 12 \text{ kN}$; $q = 0,9 \text{ kN/m}$; $M = 20 \text{ kNm}$.



Hình II.25

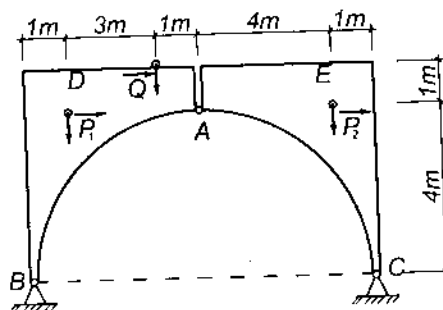
Bài II.26: Trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn người ta dựng một thang kép gồm 2 thanh AB và BC nối với nhau bằng bản lề B và sợi dây EF. Mỗi thanh có trọng lượng $P = 120 \text{ kN}$ và chiều dài $l = 3 \text{ m}$. Tại điểm D cách B là 0,6 m có một người trọng lượng $Q = 720 \text{ N}$ đứng (hình II.26).

Xác định phản lực ở A, B, C và sức căng của dây EF, biết $AE = CF = 1 \text{ m}$.



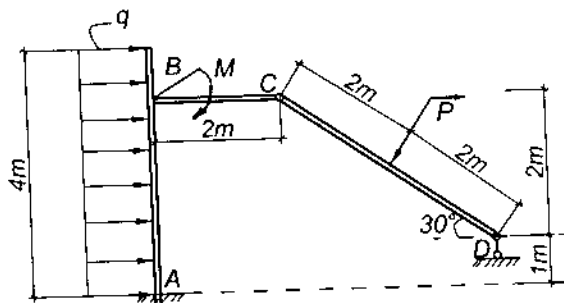
Hình II.26

Bài II.27: Một chiếc cầu gồm hai phần nối với nhau bằng bản lề A. Trọng lượng mỗi phần là $P = 40 \text{ kN}$ và trọng tâm của chúng là D và E. Trọng tải đặt trên cầu là $Q = 20 \text{ kN}$. Kích thước xem trên hình II.27. Xác định các phản lực tại A, B, C.



Hình II.27

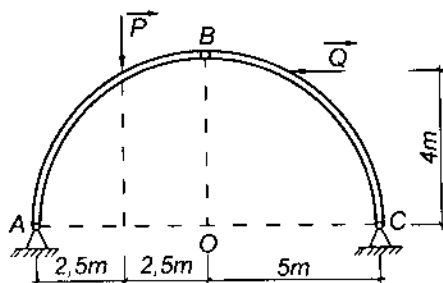
Bài II.28: Thanh ABC và CD liên kết với nhau bằng bản lề ở C. Tại A là liên kết ngàm, còn tại D là gối tựa di động. Phần AB chịu tải trọng phân bố đều có cường độ q và ngẫu lực có mômen M . Tại điểm giữa của CD có lực $\vec{P}$ tác dụng vuông góc với thanh (hình II.28). Xác định phản lực A và D, biết $P = 500 \text{ N}$; $q = 200 \text{ N/m}$ và $M = 400 \text{ Nm}$.



Hình II.28

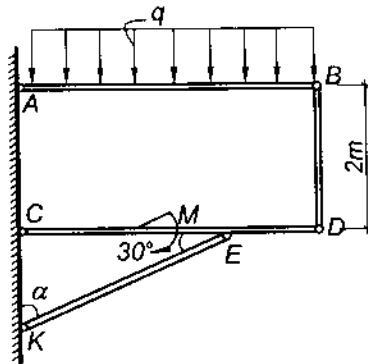
Bài II.29: Cho vòm 3 khớp ABC có liên kết và chịu tác dụng của các lực như trên hình II.29.

Xác định phản lực liên kết tại A , B và C , biết $P = 12 \text{ kN}$; $Q = 7 \text{ kN}$.



Hình II.29

Bài II.30: Cho ba thanh AB , CD và KE không trọng lượng liên kết với nhau bằng bản lề E và thanh BD (hình II.30).

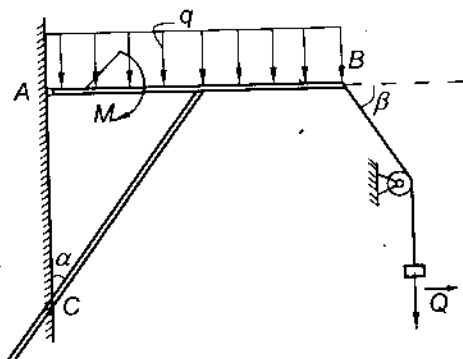


Hình II.30

Xác định phản lực tại A , C và nội lực trong các thanh BD và KE , biết $M = 10 \text{ kNm}$; $q = 2 \text{ kN/m}$; $ED = 1 \text{ m}$; $AB = CD = 4 \text{ m}$; $AC = BD = 2 \text{ m}$; $\widehat{CEK} = 30^\circ$.

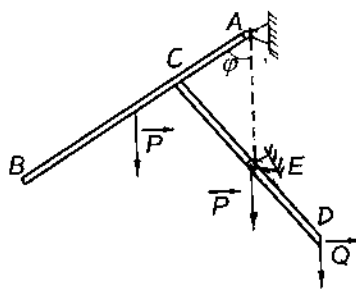
Bài II.31: Thanh CD ngàm với tường thẳng đứng tại C và đỡ thanh AB nằm ngang. Hệ chịu tác dụng của các lực và có kích thước như trên hình II.31. Bỏ qua trọng lượng các thanh.

Xác định phản lực tại A và C , biết $Q = 8 \text{ kN}$; $M = 10 \text{ kNm}$;
 $q = 2 \text{ kN/m}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $AB = CD = 4 \text{ m}$.



Hình II.31

Bài II.32: Thanh đồng chất $AB = 2l$ trọng lượng P có thể quay quanh A . Thanh này tựa lên thanh đồng chất $CD = 2l$ trọng lượng P và quay quanh trục E đi qua điểm giữa của CD . Tại nút D treo vật nặng có trọng lượng $Q = 2P$. Điểm A và E cùng nằm trên đường thẳng đứng và $AE = l$ (hình II.32).

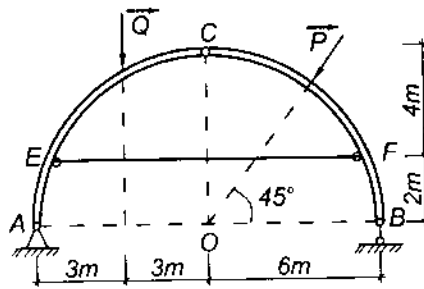


Hình II.32

Xác định góc φ giữa thanh AB và AE khi cân bằng. Bỏ qua ma sát giữa các thanh.

Bài II.33: Cho vòm 3 khớp ABC có liên kết và chịu tác dụng của các lực như trên hình II.33.

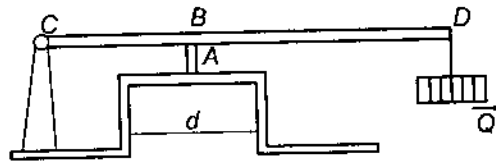
Xác định phản lực ở A , B , C và ứng lực của EF , biết $P = 20 \text{ kN}$;
 $Q = 18 \text{ kN}$.



Hình II.33

Cân bằng của đòn và vật lật

Bài II.34: Nắp bảo hiểm A của nồi hơi được nối với đòn bẩy đồng chất $CD = 50$ cm, nặng 1 N và có thể quay quanh trục cố định C. Đường kính của nắp $d = 6$ cm, cánh tay đòn $BC = 7$ cm (hình II.34).

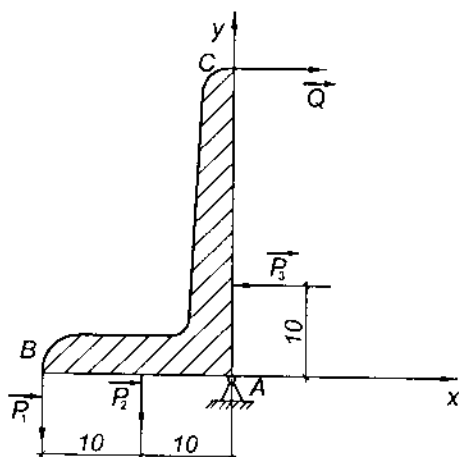


Hình II.34

Cần phải treo vào đầu mút D của đòn bẩy một tải trọng Q bằng bao nhiêu để nắp tự mở ra khi áp lực trong nồi hơi bằng 11 at (coi 1 at = 10 N/cm²).

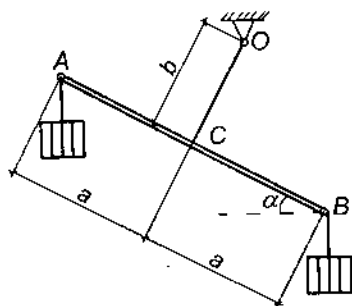
Bài II.35: Một chiếc đòn ABC, có thể quay quanh A dưới tác dụng của các lực $P_1 = 100$ N; $P_2 = 150$ N; $P_3 = 200$ N (kích thước xem trên hình II.35).

Hãy xác định lực Q cần thiết để đòn cân bằng và giá trị của phản lực tại bản lề A. Bỏ qua trọng lượng đòn.



Hình II.35

Bài II.36: Hai thanh AB và OC có trọng lượng $2p$ trên một đơn vị dài được gắn chặt với nhau dưới một góc vuông tại điểm C . Thanh OC có thể quay quanh trục nằm ngang qua O với $AC = CB = a$; $OC = b$ (hình II.36). Tại các điểm A và B treo các vật nặng có trọng lượng P_1 và P_2 với $P_2 > P_1$.

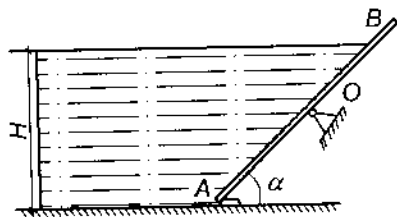


Hình II.36

Xác định góc nghiêng α của thanh AB với phương nằm ngang tại vị trí cân bằng.

Bài II.37: Tấm chắn chữ nhật AB của kênh tưới ruộng có thể quay quanh trục O . Khi mực nước không cao tấm chắn đóng lại. Nhưng khi mực nước đạt tới độ cao H thì tấm chắn quay quanh trục O và mở kênh (hình II.37). Bỏ qua ma sát và trọng lượng tấm chắn.

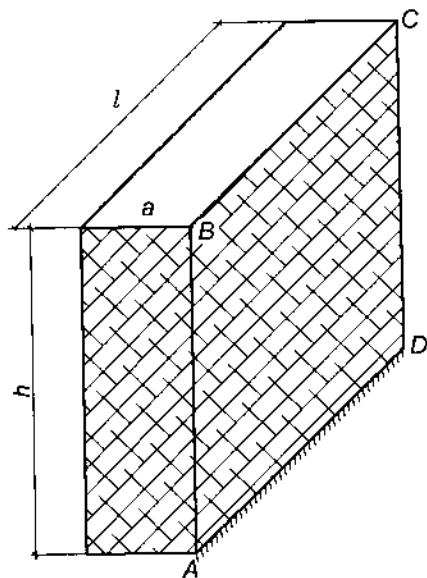
Xác định độ cao H để kênh mở được.



Hình II.37

Bài II.38: Một ụ đất tựa vào bức tường đá thẳng đứng AB . Giả thiết áp lực của đất lên tường hướng nằm ngang đặt tại $1/3$ chiều cao của nó và bằng 60 kN/m (trên một mét chiều dài tường). Trọng lượng riêng của tường đá bằng 20 kN/m^3 . Tìm bề dày cần thiết của tường (hình II.38).

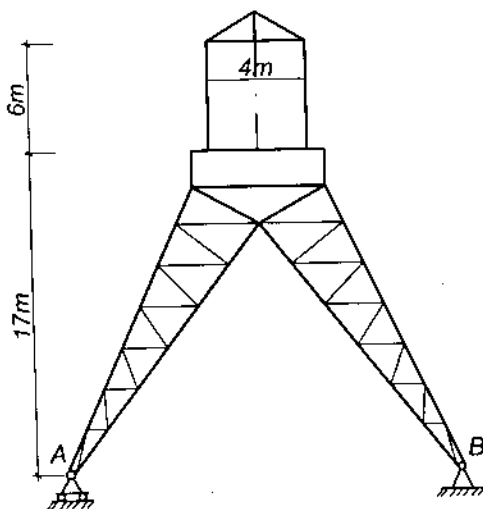
Ghi chú: Cần dự tính tường lật nhào quanh mép AD .



Hình II.38

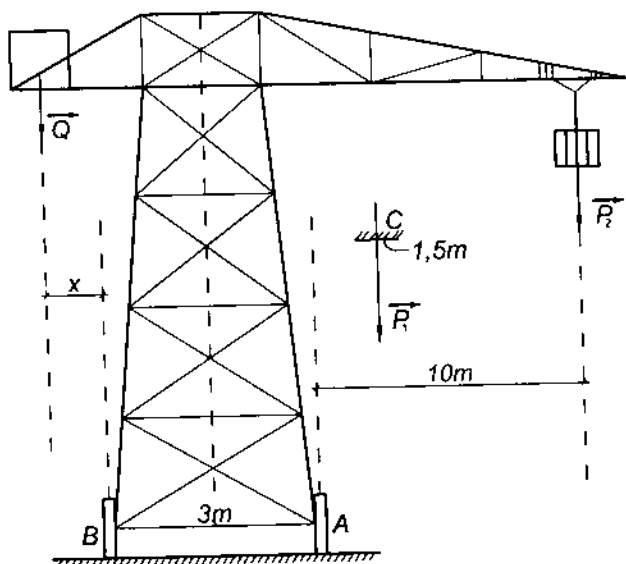
Bài II.39: Một tháp nước gồm một bể chứa hình trụ cao 6 m đường kính 4 m gắn trên bốn cột đặt đối xứng và nghiêng so với phương nằm ngang. Đáy bể nằm ở độ cao 17 m trên mức các gối tựa. Trọng lượng của tháp là 80 kN; áp lực gió được tính trên diện tích hình chiếu của mặt bể lên mặt phẳng vuông góc với hướng gió, trong đó áp lực riêng của gió bằng $1,25 \text{ kN/m}^2$. Hãy xác định khoảng cách cần thiết AB giữa các chân cột.

Ghi chú: Khoảng cách AB cần được dự tính khi tháp lật nhào do áp lực gió theo hướng nằm ngang (hình II.39).



Hình II.39

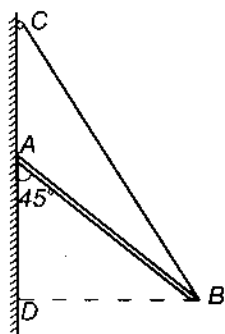
Bài II.40: Trọng lượng của cần cầu di động, không kể đối trọng là $P_1 = 500 \text{ kN}$ tác dụng theo hướng thẳng đứng cách đường thẳng qua ray bên phải A là 1,5 m. Tải trọng cầu $P_2 = 250 \text{ kN}$ mắc vào xe tời. Tâm vươn tính từ đường thẳng đứng qua ray phải là 10 m. Hãy xác định trọng lượng nhỏ nhất Q và khoảng cách lớn nhất x từ trọng tâm đối trọng đến đường thẳng đứng đi qua ray trái B để cho cần cầu không bị lật với mọi vị trí của xe tời khi đã chịu tải cũng như chưa chịu tải. Bỏ qua trọng lượng riêng của xe tời (hình II.40).



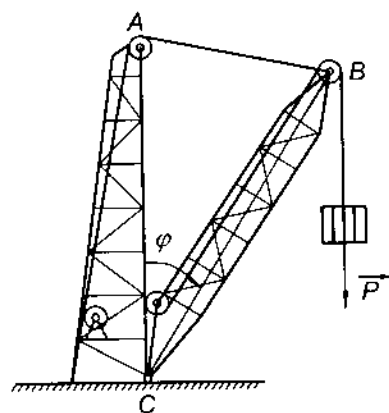
Hình II.40

Hệ lực phẳng đồng quy

Bài II.41: Xà đồng chất AB dài 2 m, nặng 5 N, tựa đầu trên A vào tường trơn thẳng đứng. Dây BC buộc vào đầu dưới B của xà (hình II.41). Tìm xem cần phải buộc dây vào tường ở khoảng cách AC bằng bao nhiêu để xà tạo thành $\widehat{BAD} = 45^\circ$ ở trạng thái cân bằng? Tìm sức căng T của dây và phản lực R của tường tại điểm A .



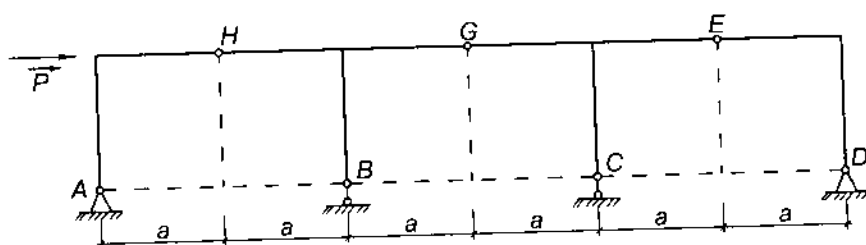
Hình II.41



Hình II.42

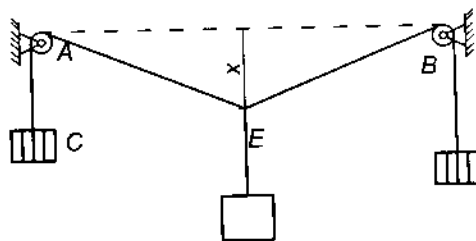
Bài II.42: Một cần cầu gồm có tháp cố định AB và dầm động BC . Dầm có khớp bản lề C và được giữ bằng dây cáp AB (hình II.42). Tải trọng $P = 40 \text{ kN}$ treo trên dây xích vắt qua ròng rọc tại điểm B và ràng vào tời theo đường thẳng BC . Độ dài $AC = BC$. Bỏ qua trọng lượng dầm và ma sát ở ròng rọc. Xác định sức căng T của dây cáp phụ thuộc vào $\widehat{ACB} = \varphi$.

Bài II.43: Cho một hệ gồm 3 vòm 3 khớp, các kích thước của chúng cho trên hình II.43. Hãy xác định phản lực của các gối tựa A, B, C và D xuất hiện khi tác dụng lực ngang P .



Hình II.43

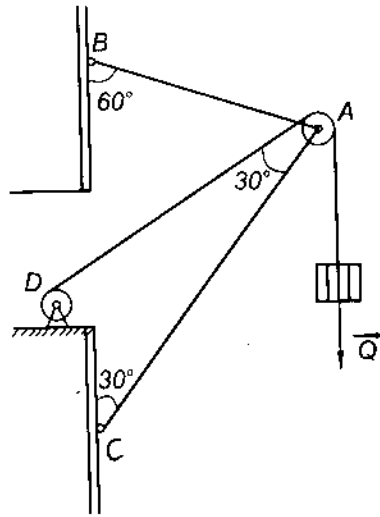
Bài II.44: Một sợi dây $CAEBD$ vắt qua hai ròng rọc nhỏ không đáng kể A và B nằm trên một đường thẳng nằm ngang $AB = l$ (hình II.44). Tại các đầu mút C và D của sợi dây có treo các quả cân, trọng lượng mỗi quả cân là P , tại điểm E treo quả cân có trọng lượng Q . Bỏ qua ma sát tại ròng rọc và trọng lượng dây. Xác định khoảng cách x từ điểm E đến đường thẳng AB tại vị trí cân bằng.



Hình II.44

Bài II.45: Cầu cầu hàng BAC nâng vật nặng $Q = 2 \text{ kN}$ bằng dây xích vắt qua các ròng rọc A và D . Ròng rọc D gắn chặt vào tường sao cho $\widehat{CAD} = 30^\circ$ (hình II.45). Góc giữa các thanh của cầu $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Xác định ứng lực S_1 và S_2 trong các thanh AB và AC .

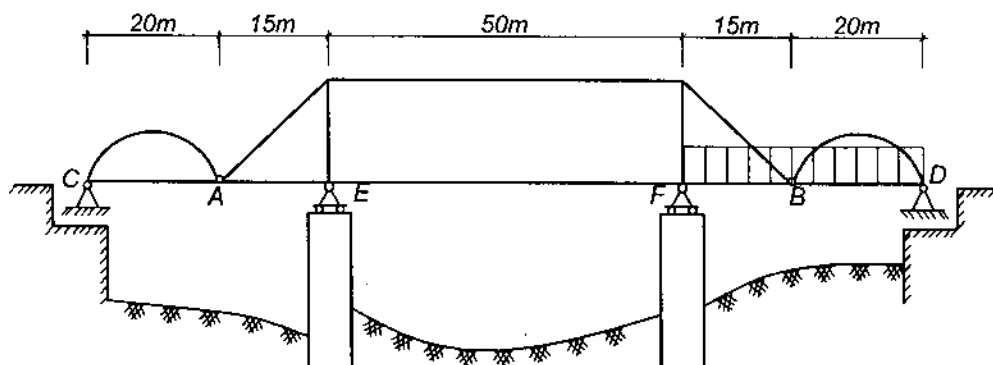


Hình II.45

Hệ lực phẳng song song

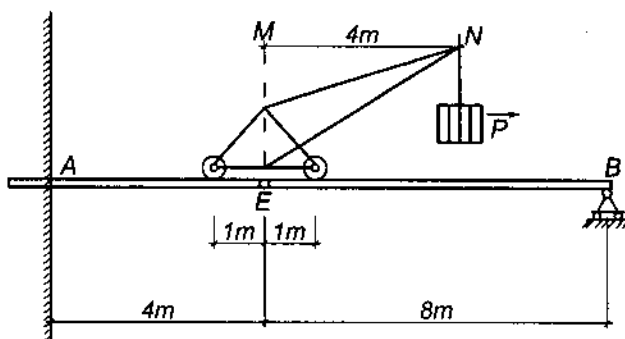
Bài II.46: Một cầu côngxon gồm dầm chính AB và hai dầm bên AC và BD . Trọng lượng riêng ứng với một mét dài của dầm AB bằng $1,5 \text{ kN}$, còn đối với dầm AC và BD bằng 1 kN (hình II.46).

Xác định phản lực của gối tựa tại thời điểm khi toàn bộ nhịp bên phải FD chịu tải của đoàn tàu có trọng lượng 3 kN trên một mét dài, các kích thước tương ứng bằng $AC = BD = 20 \text{ m}$; $AE = FB = 15 \text{ m}$; $EF = 50 \text{ m}$.



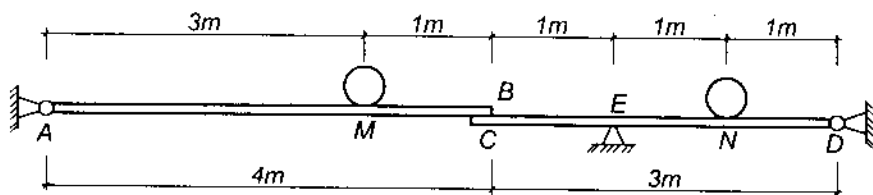
Hình II.46

Bài II.47: Dầm AE và EB nối với nhau bằng bản lề tại E . Đầu A được ngàm vào tường, còn đầu B tựa trên gối di động. Dầm chịu tải của cần cầu nặng $Q = 5 \text{ kN}$ mang thêm tải trọng $P = 1 \text{ kN}$ tâm vươn $MN = 4 \text{ m}$. Trọng tâm của cần cầu nằm trên đường thẳng đứng EM , các kích thước cho trên hình II.47. Bỏ qua trọng lượng của dầm. Xác định các phản lực tại các điểm A và B khi cần cầu cân bằng nằm trong cùng mặt phẳng thẳng đứng với dầm AB .



Hình II.47

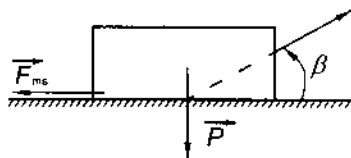
Bài II.48: Dầm AB dài 4 m, nặng 2 kN có thể quay quanh trục nằm ngang A và tựa đầu B lên dầm CD dài 3 m, nặng 1,6 kN. Dầm CD tựa lên điểm tựa E và nối với tường nhờ khớp bản lề D (hình II.48). Tại các điểm M và N đặt các tải trọng, mỗi tải trọng nặng 0,8 kN. Khoảng cách $AM = 3$ m; $ED = 2$ m; $ND = 1$ m. Hãy xác định phản lực tại các gối tựa.



Hình II.48

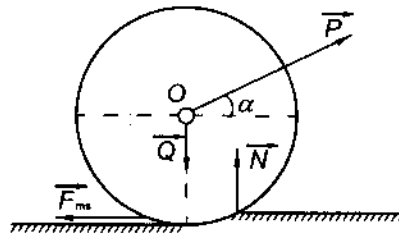
MA SÁT

Bài II.49: Một thùng hàng trọng lượng P đặt trên mặt phẳng nằm ngang không nhẵn với hệ số ma sát f (hình II.49). Xác định lực $\vec{Q}$ nhỏ nhất cần phải đặt vào thùng và góc β nghiêng với phương ngang bằng bao nhiêu để thùng dịch chuyển được.



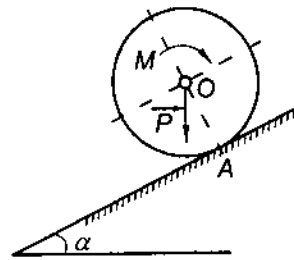
Hình II.49

Bài II.50: Xác định lực P để con lăn hình trụ bán kính $R = 60$ cm, nặng 3000 N lăn đều trên mặt phẳng ngang (hình II.50). Biết hệ số ma sát lăn $k = 0,5$ cm. lực P hợp với phương ngang góc $\alpha = 30^\circ$.



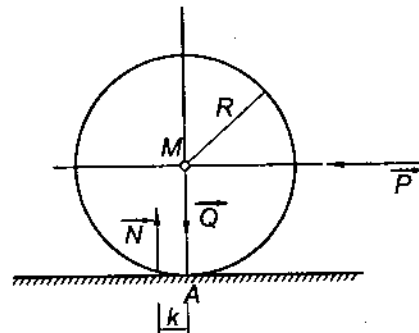
Hình II.50

Bài II.51: Một khối trụ trọng lượng P , bán kính R nằm trên mặt phẳng nghiêng gỗ gồ ghề (hình II.51). Hệ số ma sát trượt của khối trụ với mặt phẳng nghiêng là f . Cần phải tác dụng vào khối trụ ngẫu lực có mômen M bằng bao nhiêu và góc nghiêng α như thế nào để khối trụ ở trạng thái cân bằng. Bỏ qua ma sát lăn.



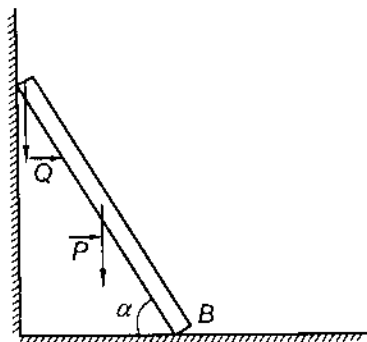
Hình II.51

Bài II.52: Một quả cầu bán kính R trọng lượng Q , đặt trên mặt phẳng nằm ngang (hình II.52). Hệ số ma sát trượt của quả cầu với mặt phẳng bằng μ , hệ số ma sát lăn là k . Lực ngang P tác dụng vào tâm quả cầu phải thỏa mãn điều kiện nào để quả cầu lăn đều.

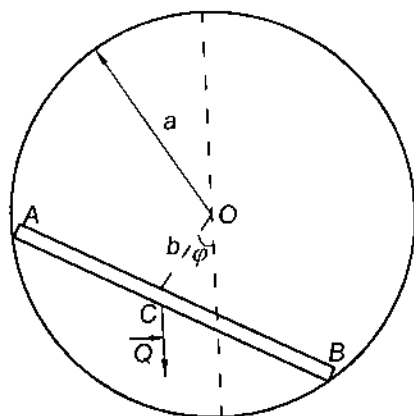


Hình II.52

Bài II.53: Một cái thang AB trọng lượng P tựa vào bức tường thẳng đứng trơn và tựa lên sàn không nhẵn nằm ngang (hình II.53). Lực ma sát tại điểm B không lớn hơn μN , trong đó μ là hệ số ma sát tĩnh, còn N là phản lực pháp tuyến của sàn. Cần phải đặt thang nghiêng một góc α với sàn bằng bao nhiêu để một người có trọng lượng Q có thể trèo lên đến tận đỉnh thang.



Hình II.53



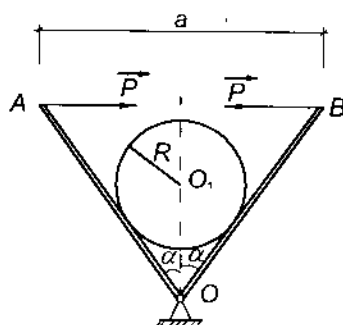
Hình II.54

Bài II.54: Các đầu mút A và B của thanh đồng chất $AB = l$ trọng lượng Q có thể trượt theo vòng tròn không nhẵn bán kính a nằm trong mặt phẳng thẳng đứng (hình II.54). Khoảng cách OC từ tâm của vòng tròn đến thanh AB bằng b . Hệ số ma sát giữa thanh và vòng tròn μ .

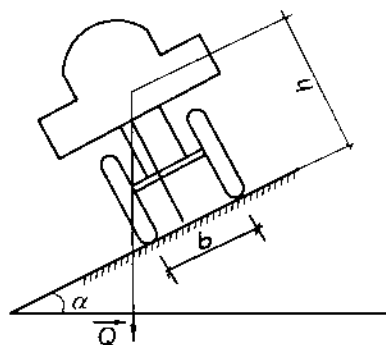
Xác định góc φ lập bởi đường thẳng OC với đường kính thẳng đứng của vòng tròn khi thanh AB ở vị trí cân bằng.

Bài II.55: Một hình trụ đồng chất đặt giữa hai tấm OA và OB nối với nhau bằng bản lề tại O . Trục O_1 của hình trụ và trục bản lề O song song với nhau đều nằm ngang và cùng trong một mặt phẳng thẳng đứng. Dưới tác dụng của hai lực trực đối nằm ngang $\vec{P}$ đặt tại A và B làm hai tấm này ép hình trụ lại. Hình trụ có trọng lượng Q , bán kính R , hệ số ma sát trượt giữa hình trụ và tấm bằng μ . $\widehat{AOB} = 2\alpha$ và khoảng cách $AB = a$ (hình II.55).

Độ lớn của lực P cần thỏa mãn điều kiện gì để hình trụ cân bằng.



Hình II.55



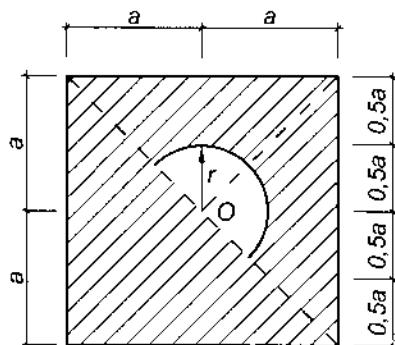
Hình II.56

Bài II.56: Xe ô tô trọng lượng Q đỗ trên đoạn đường nghiêng (hình II.56). Chiều cao của trọng tâm cách mặt nghiêng một đoạn h , khoảng cách giữa hai tâm bánh xe là b . Hệ số ma sát trượt của các bánh xe và mặt đường là f .

Góc nghiêng α của đường với phương ngang thế nào để ô tô có thể bị lật, và khi nào ô tô có thể bắt đầu trượt.

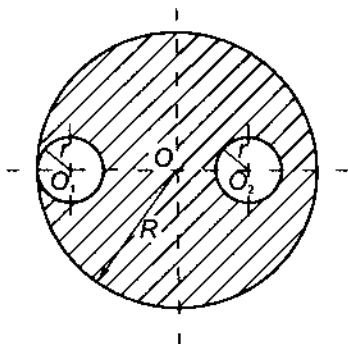
TRỌNG TÂM

Bài II.57. Tìm tọa độ trọng tâm của bản hình vuông có cạnh là $2a$ bị khoét nửa hình tròn bán kính $r = 0,5a$. Biết $a = 3\pi$ (hình II.57).

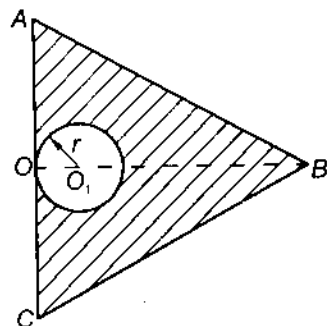


Hình II.57

Bài II.58: Tìm tọa độ trọng tâm của hình tròn có bán kính $R = 40$ cm, bị khoét 2 lỗ tròn bán kính $r = 10$ cm, nếu $O_1O = 30$ cm và $O_2O = 20$ cm (hình II.58).



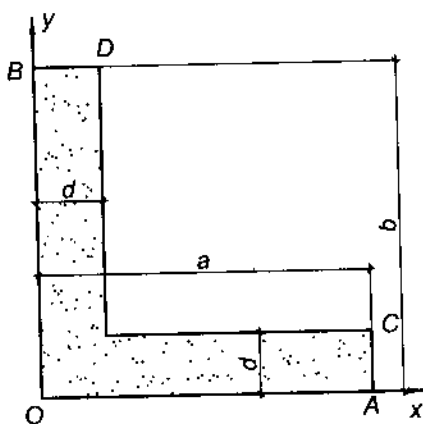
Hình II.58



Hình II.59

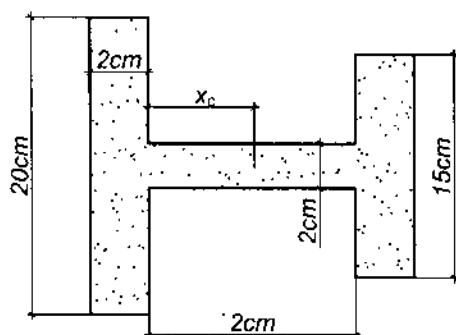
Bài II.59: Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác đều ABC , có cạnh $a = 40$ cm, có khoét lỗ tròn bán kính $r = 10$ cm (hình II.59).

Bài II.60: Tìm trọng tâm của tiết diện ngang hình thước thợ có kích thước $OA = a$; $OB = b$ và độ dày $AC = BD = d$ (hình II.60).



Hình II.60

Bài II.61: Tìm trọng tâm của tiết diện chữ T. Kích thước như trong hình II.61.



Hình II.61

III. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Bài II.1 (hình III.1):

Điều kiện cân bằng:

$$\sum X_k = F_3 - F_5 = 0$$

$$\sum Y_k = F_6 - F_2 = 0$$

$$\sum Z_k = F_4 - F_1 = 0$$

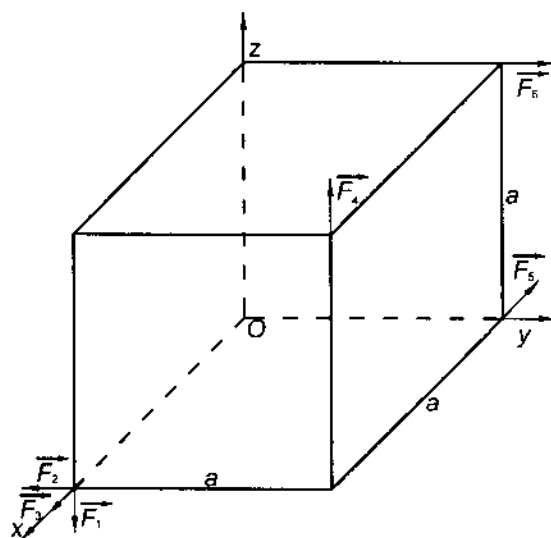
$$\sum m_x(\overrightarrow{F_k}) = aF_4 - aF_6 = 0$$

$$\sum m_y(\overrightarrow{F_k}) = aF_1 - aF_4 = 0$$

$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k}) = -aF_2 + aF_5 = 0$$

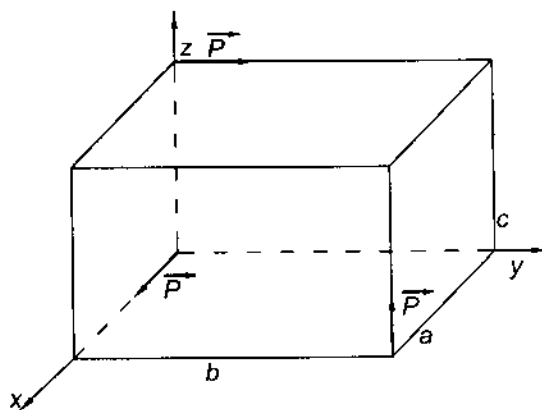
Từ các đẳng thức trên ta suy ra:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = F_6$$



Hình III.1

Bài II.2 (hình III.2):



Hình III.2

Muốn thu gọn hệ lực trước hết ta cần tính:

$$\sum X_k = P$$

$$\sum Y_k = P$$

$$\sum z_k = P$$

$$M_x = bP - cP$$

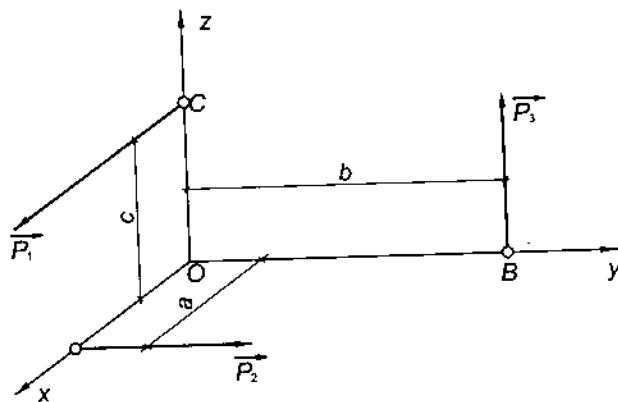
$$M_y = -aP$$

$$M_z = 0$$

Để thu về hợp lực thì $\vec{R} \cdot \vec{M} = 0$ hay $R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 0$.

Do đó ta có: $a = b - c$.

Bài II.3 (hình III.3):



Hình 11.3

Ta hãy tính:

$$R'_x = P_1; \quad R'_y = P_2; \quad R'_z = P_3$$

$$M_x = bP_3; \quad M_y = cP_1; \quad M_z = aP_2$$

Để thu về hợp lực thì $\vec{R}' \cdot \vec{M} = 0$, hay

$$R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z = 0$$

$$P_1 b P_3 + P_2 c P_1 + P_3 a P_2 = 0$$

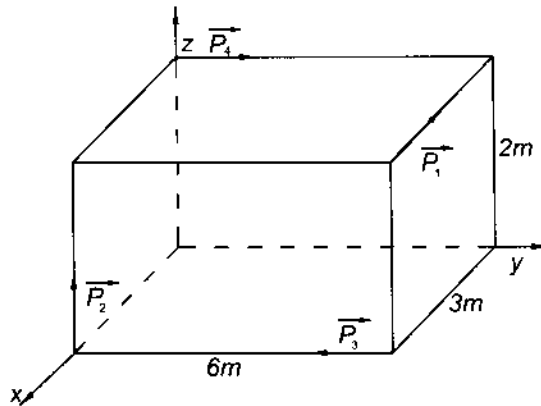
hay:
$$\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0.$$

Để thu về xoắn có trục xoắn qua gốc O thì $\vec{R}' \parallel \vec{M}$, hay:

$$\frac{R'_x}{M_x} = \frac{R'_y}{M_y} = \frac{R'_z}{M_z}$$

hay:
$$\frac{P_1}{bP_3} = \frac{P_2}{cP_1} = \frac{P_3}{aP_2}$$

Bài II.4 (hình III.4):



Hình III.4

Ta tính $R_x = -P_1 = -2 \text{ kN}$.

$$R_y = P_4 - P_3 = 5 - 4 = 1 \text{ kN}$$

$$R_z = P_2 = 3 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3,74 \text{ N}$$

$$M_x = -2P_4 = -2.5 = -10 \text{ kNm}$$

$$M_y = -2P_1 - 3P_2 = -2.2 - 3.3 = -13 \text{ kNm}$$

$$M_z = -3P_3 + 6P_4 = 6.2 - 3.4 = 0$$

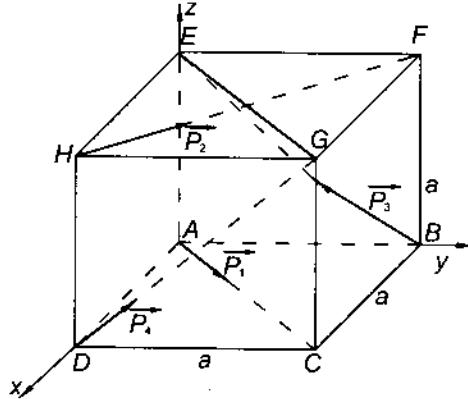
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{10^2 + 13^2} = 16,4 \text{ kNm}$$

Muốn thu được về hệ xoắn thì $\vec{R} \cdot \vec{M}_o \neq 0$. Ta có:

$$R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = -2.(-10) + 1.(-13) + 3.0 = 20 - 13 = 7 \neq 0$$

Vậy thu được về hệ xoắn.

Bài II.5 (hình III.5):



Hình III.5

Để thu gọn hệ lực trước hết ta tìm:

$$R_x = \sum X_k = P_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$R_y = \sum Y_k = P_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + P_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + P_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - P_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2P \frac{\sqrt{2}}{2} = P\sqrt{2}.$$

$$R_z = \sum Z_k = P_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + P_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = P\sqrt{2}$$

$$M_x = \sum m_x(\vec{F}_k) = aP_3 \frac{\sqrt{2}}{2} - aP_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$M_y = \sum m_y(\vec{F}_k) = -aP_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - aP_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -aP\sqrt{2}$$

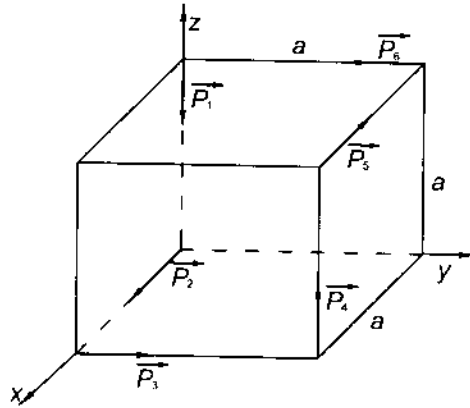
$$M_z = \sum m_z(\vec{F}_k) = aP_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + aP_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = aP\sqrt{2}.$$

Ta có:

$$\vec{R} \cdot \vec{M} = R'_x M_x + R'_y M_y + R'_z M_z = 0, \vec{R} \perp \vec{M}$$

Hệ thu về hợp lực có cường độ $2P$ nằm trên đường DG hướng từ D đến G.

Bài II.6 (hình III.6):



Hình III.6

Có $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 2 \text{ kN}$; $a = 5 \text{ cm}$.

Ta có:

$$R'_x = \sum F_{kx} = P_2 - P_3 = 0$$

$$R'_y = \sum F_{ky} = P_3 - P_6 = 0$$

$$R'_z = \sum F_{kz} = P_4 - P_1 = 0$$

$$R' = 0$$

$$M_x = \sum m_x(\overrightarrow{F_k}) = aP_4 + aP_6 = 2aP$$

$$M_y = \sum m_y(\overrightarrow{F_k}) = -aP_4 - aP_5 = -2aP$$

$$M_z = aP_3 + a_5 = 2aP$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{4a^2P^2 + 4a^2P^2 + 4a^2P^2} = 2aP\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{2aP}{2aP\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{-2aP}{2aP\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = \frac{2aP}{2aP\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Bài II.7 (hình III.7):

- Xét cân bằng tại nút A:

$$\sum X_k = -S'_{AB} + S_{AE} \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = S_{AD} = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = S_{Ak} \cos 45^\circ - F = 0 \quad (3)$$

- Xét cân bằng tại nút B:

$$\sum X_k = S_{AB} + S_{BD} \cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

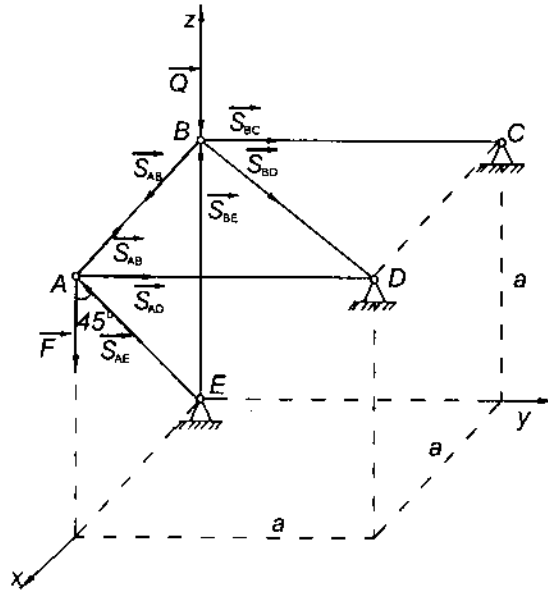
$$\sum Y_k = S_{BC} + S_{BD} \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum Z_k = S_{BE} - Q = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$S_{BE} = Q; S_{AD} = 0; S_{AF} = \sqrt{2} F;$$

$$S'_{AB} = F = S_{BA}; S_{BD} = \sqrt{2} F; S_{BC} = F.$$



Hình III.7

Bài II.8 (hình III.8):

Hệ lực tác dụng:

$$(\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_C, \vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$$

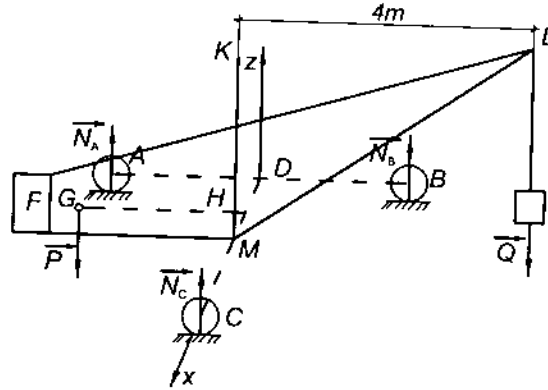
$$\sum Z_k = N_A + N_B + N_C - P - Q = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = DB \cdot N_B + CH \cdot P - KL \cdot Q - AD \cdot N_A = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = (P + Q) MD - CD \cdot N_C = 0 \quad (3)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$N_A = \frac{5}{6} kN; N_B = 7 \frac{5}{6} kN; N_C = 4 \frac{1}{3} kN.$$



Hình III.8

Bài II.9 (hình III.9):

Hệ lực: $(\vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{Z}_o, \vec{T}_{AB}, \vec{T}_{CD}, \vec{M}, \vec{P}) \sim 0$

$$\sum X_k = X_o + T_{AB} \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_o - T_{AB} \cos 30^\circ - T_{CD} \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = Z_o + T_{CD} \sin 30^\circ - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = -1P + 2T_{CD} \sin 30^\circ = 0 \quad (4)$$

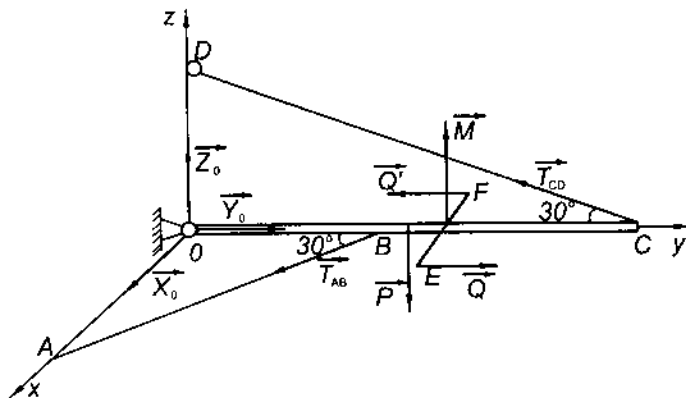
$$\sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = M - 0,5T_{AB} \sin 30^\circ = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$T_{AB} = 80 \text{ N}; T_{CD} = 1000 \text{ N}.$$

$$X_o = -40 \text{ N}; Y_o = 540\sqrt{3} \text{ N}; Z_o = 500 \text{ N}.$$



Hình III.9

Bài II.10 (hình III.10):

Hệ lực cân bằng:

$$(\overline{X_A}, \overline{Z_A}, \overline{X_B}, \overline{Z_B}, \overline{Q}, \overline{T_{CD}}) \sim 0 \quad (1)$$

$$\sum X_k = X_A + X_B - T_{CD}\cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum Y_k = 0 \quad (3)$$

$$\sum Z_k = Z_A + Z_B + T_{CD}\sin 30^\circ - Q = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_x(\overline{F_k}) = aZ_B + (a+b)T_{CD}\sin 30^\circ - \frac{a+b}{2}Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_y(\overline{F_k}) = Q - C.T_{CD}\sin 30^\circ = 0$$

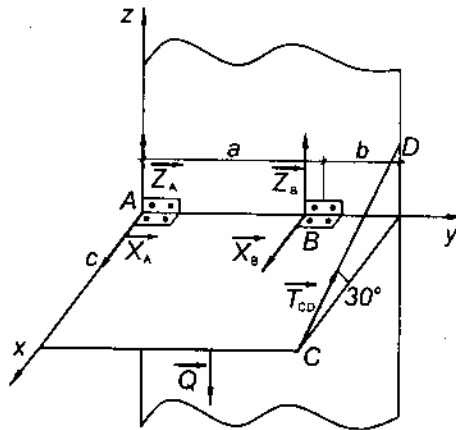
$$\sum m_z(\vec{F}_k) = (a + b) T_{CD} \sin 30^\circ - a X_B = 0 \quad (6)$$

Từ (5) ta có $T_{CD} = Q = 4 \text{ kN}$.

Giải các phương trình này ta được:

$$Z_B = 0; X_A = 4 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ kN};$$

$$X_B = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ kN và } Z_A = 2 \text{ kN}.$$



Hình III.10

Bài II.11 (hình III.11):

Hệ lực:

$$(\vec{P}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6) \sim 0$$

$$\sum X_k = S_5 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = P + S_4 \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = S_6 - S_1 - S_3 + S_4 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0 \quad (3)$$

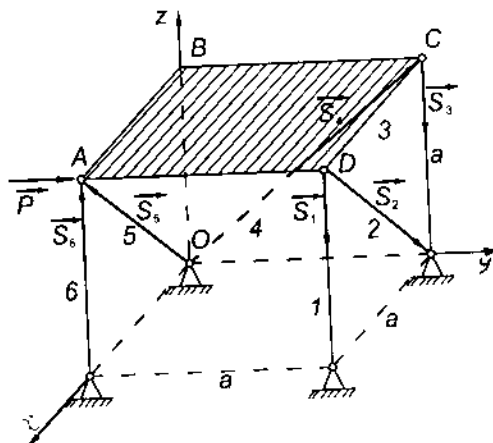
$$\sum m_x(\vec{F}_k) = -aP - aS_1 - aS_3 - aS_2 \sin 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = aS_1 - aS_6 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = aP + aS_2 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$S_1 = S_6 = -P; S_3 = P; S_5 = S_2 = S_4 = -P\sqrt{2}.$$



Hình III.11

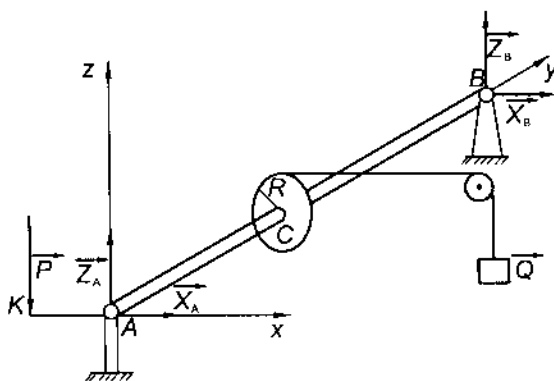
Bài II.12 (hình III.12):

Xét cân bằng trục AB.

Các lực tác dụng $(\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_B + P = 0 \quad (1)$$



Hình III.13

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_B + Q = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = Z_A + Z_B - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = 100Z_B = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = AK.P - R.Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = -100X_B - 50Q = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình (6), (5), (4), (3) và (1) ta được:

$$X_B = -40 \text{ kN} ; P = 10 \text{ kN} ; Z_B = 0;$$

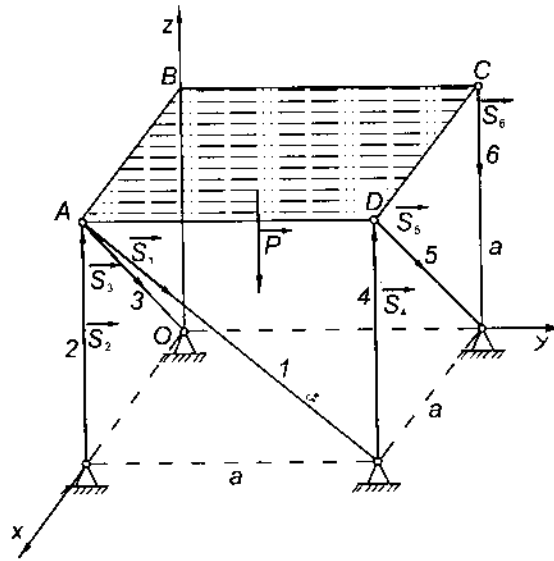
$$Z_A = 10 \text{ kN và } X_A = -40 \text{ kN.}$$

Bài II.14 (hình III.14):

Xét cân bằng tấm ABCD.

Các lực tác dụng:

$$(\vec{P}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6) \sim 0$$



Hình III.14

Chọn hệ trục như ở hình III.14, ta có:

$$\sum X_k = -S_3 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = S_1 \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$S_1 = 0.$$

$$\sum Z_k = S_2 + S_4 - S_6 - S_3 \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = aS_4 - aS_6 - aS_5 \sin 45^\circ - \frac{a}{2}P - aS_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = aS_1 \sin 45^\circ - aS_4 - aS_2 + \frac{a}{2}P = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = aS_3 \cos 45^\circ + aS_1 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

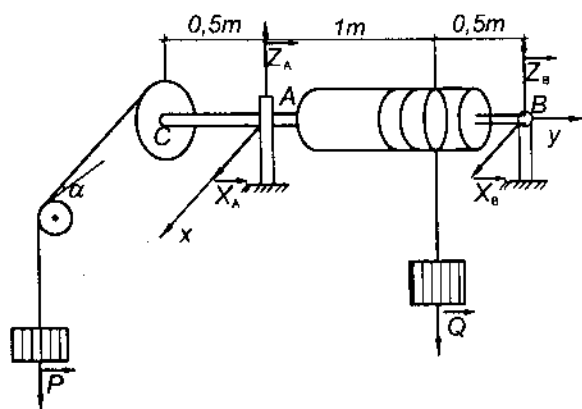
Giải các phương trình cân bằng này ta được:

$$S_1 = S_3 = S_5 = S_4 = 0; S_2 = \frac{P}{2}; S_6 = -\frac{P}{2}.$$

Bài II.15 (hình III.15):

Xét cân bằng trục quay AB .

Chọn hệ trục như ở hình III.15.



Hình III.15

Các lực tác dụng: $(\overline{Z_A}, \overline{X_A}, \overline{Z_B}, \overline{X_B}, \overline{T}, \overline{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_B + P \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = 0 \quad (2)$$

$$\sum Z_k = Z_A + Z_B - Q - P \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x(\overline{F_k}) = 1,5Z_B + 0,5P \sin \alpha - 1Q = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_k) = P.R - r.Q = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = 0,5P.\cos\alpha - 1,5X_B = 0 \quad (6)$$

Từ (5) và với $R = 6r$ ta có:

$$6r.P - r.Q = 0 \text{ hay } Q = 6P = 36 \text{ kN}$$

Từ (6) ta có
$$X_B = \frac{0,5 \cos 30^\circ}{1,5} = 1,73 \text{ kN}$$

Giải phương trình (4) ta được:

$$Z_B = 23 \text{ kN.}$$

Thay Z_B vào (2) ta tìm được $Z_A = 16 \text{ kN.}$

HỆ LỰC PHẪNG BẤT KỲ

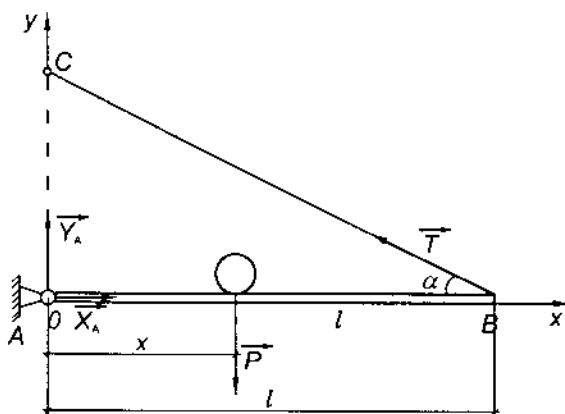
Cân bằng của một vật

Bài II.16 (hình III.16):

Xét cân bằng dầm $AB = l$.

Thay liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng. Ta có:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{P}, \vec{T}) \sim 0.$$



Hình III.16

Đây là hệ lực phẳng bất kỳ:

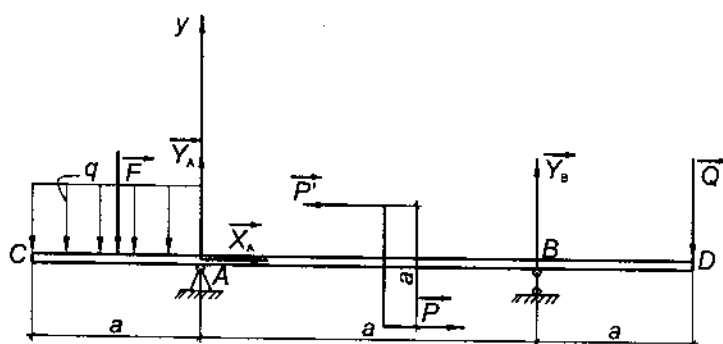
$$\sum X_k = X_A - T \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + T \sin \alpha - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = l T \sin \alpha - P x = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có $T = \frac{Px}{l \sin \alpha}$.

Bài II.17 (hình III.17):



Hình III.17

Xét cân bằng dầm CD.

Các lực tác dụng: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B, \vec{Q}, \vec{F}, M) \sim 0$, trong đó: $F = aq$ và $M = aP$.

$$\sum X_k = X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B - Q - F = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = aP + 2aY_B - 3aQ + \frac{1}{2}aF = 0 \quad (3)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$Y_B = 2,1 \text{ kN}; Y_A = 1,5 \text{ kN}; X_A = 0.$$

Bài II.18 (hình III.18):

a) Xét cân bằng dầm AB.

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N_B}) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng (hình III.18a):

$$\sum X_k = X_A - P \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + N_B - P \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = 4N_B - 2P \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

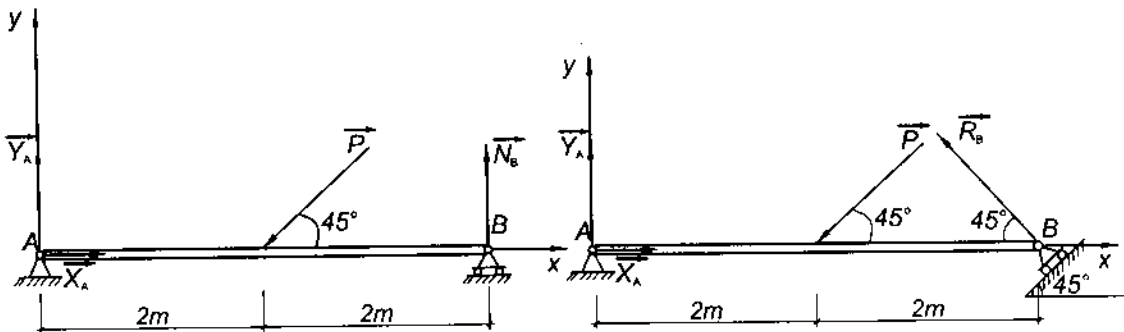
$$\rightarrow N_B = \frac{P}{2} \sin 45^\circ$$

$$N_B = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.71 \text{ kN.}$$

Từ (1) $\rightarrow X_A = P \cos 45^\circ$ và từ (2) $\rightarrow Y_A = P \sin 45^\circ = \frac{1}{2} P \sin 45^\circ$

$$Y_A = \frac{1}{2} P \sin 45^\circ$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{2,5} = 1,58 \text{ kN.}$$



Hình III.18

b) Tương tự bài a) ta có (hình III.18b):

$$\sum X_k = X_A - P \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + R_B \sin 45^\circ - P \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = 4R_B \sin 45^\circ - 2P \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$R_B = 1 \text{ kN}; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 2,24 \text{ kN}.$$

Bài II.19 (hình III.19):

$$Q = \frac{1}{2} a q_0 = 3 \text{ N}.$$

Xét cân bằng dầm: $(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, M_A, \overline{P}, \overline{Q}) \sim 0$

$$\sum X_k = X_A + P \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - P \sin \alpha - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = M_A + M - 2aP \sin \alpha - 6aQ = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có:

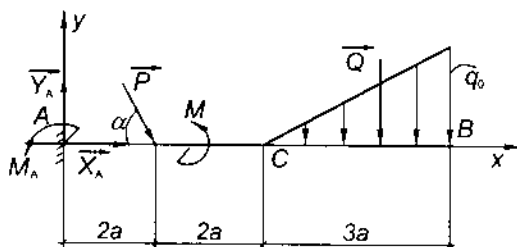
$$M_A = 15,86 \text{ Nm}.$$

Từ (2) ta có:

$$Y_A = Q + P \sin \alpha = 9,92 \text{ N}.$$

Từ (1) ta tính được:

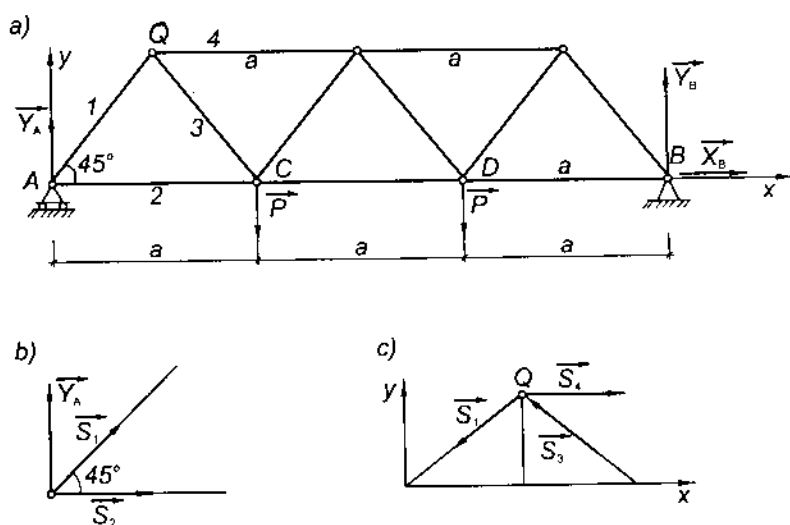
$$X_A = -4 \text{ N} \text{ (} X_A \text{ có chiều ngược lại).}$$



Hình III.19

Bài II.20 (hình III.20):

- Xét toàn bộ dầm, ta có: $(\overline{Y_A}, \overline{Y_B}, \overline{X_B}, \overline{P}, \overline{P}) \sim 0$ (hình III.20a).



Hình III.20

Chọn hệ trục tọa độ như ở hình III.20 ta có các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B - P - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = aP + 2aP - 3aY_A = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có $Y_A = P = 100 \text{ kN}$.

Xét cân bằng tại nút A.

Các lực tác dụng: $(\vec{Y}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_2) \sim 0$ (hình III.20b).

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = S_2 + S_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

Từ (5) ta được:

$$S_1 = -\sqrt{2} Y_A = -\sqrt{2} \cdot 100 = -141 \text{ kN}$$

$$S_2 = -S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 100\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 100 \text{ kN}.$$

- Xét cân bằng tại nút Q (hình III.20c).

Các lực cân bằng:

$$(\overrightarrow{S'_1}, \overrightarrow{S_3}, \overrightarrow{S_4}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = S_4 - S_3 \cos 45^\circ - S'_1 \cos 45^\circ = 0 \quad (6)$$

$$\sum Y_k = S_3 \sin 45^\circ - S'_1 \sin 45^\circ = 0 \quad (7)$$

Từ (7) ta có:

$$S_3 = S'_1 = -141 \text{ kN}$$

và $S'_1 = S_1$

Từ (6) ta được: $S_4 = -200 \text{ kN}$.

Bài II.21 (hình III.21):

Trước hết thay các liên kết thanh BC và bản lề A bằng các phản lực liên kết tương ứng $\overrightarrow{S_{BC}}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}$. Các lực tác dụng lên dàn $(\overrightarrow{S_{BC}}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$ (hình III.21a).

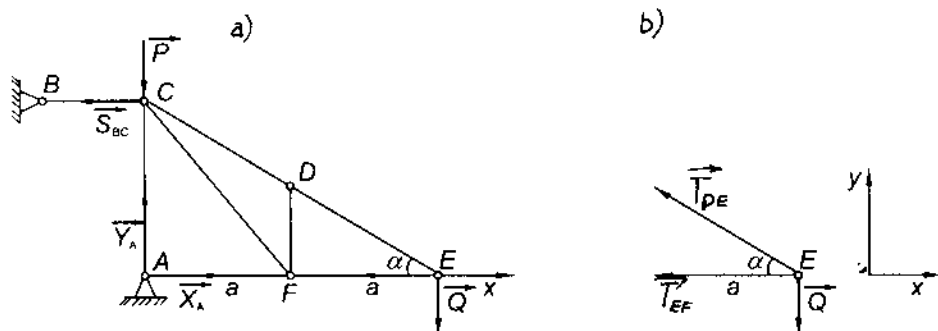
Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A - S_{BC} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - P - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = 2a \tan \alpha \cdot S_{BC} - 2aQ = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có $S_{BC} = \frac{Q}{\tan \alpha} = Q \cot \alpha$.



Hình III.21

Từ (2) ta có $Y_A = P + Q$. Thay S_{BC} vào (1) ta được:

$$X_A = S_{BC} = Q \cot \alpha.$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(P + Q)^2 + Q^2 \cot^2 \alpha}$$

Muốn tính T_{DE} và T_{PE} ta xét cân bằng nút E . Khi đó nút E chịu tác dụng các lực $(\vec{T}_{EF}, \vec{T}_{DE}, \vec{Q}) \sim 0$. Ta có (hình III.21b):

$$\sum X_k = -T_{EF} - T_{DE} \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = T_{DE} \sin \alpha - Q = 0 \rightarrow T_{DE} = \frac{Q}{\sin \alpha}$$

Vậy:

$$T_{EF} = -T_{DE} \cos \alpha = -\frac{Q \cos \alpha}{\sin \alpha} = -Q \cot \alpha.$$

Dấu (-) chứng tỏ T_{EF} có chiều ngược lại.

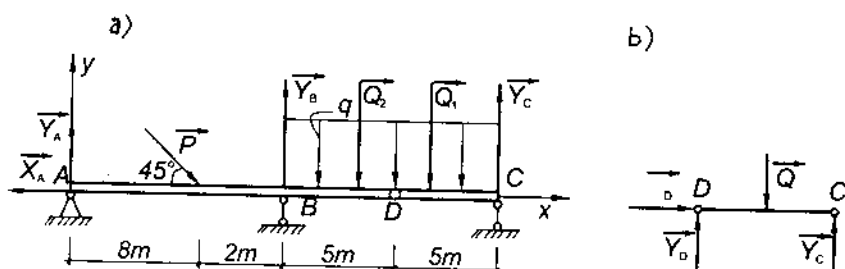
Tương tự xét cân bằng các nút A, C, D và F ta được

$$T_{CF} = T_{DF} = 0; T_{AF} = T_{EF} = -Q \cot \alpha; T_{AC} = -(Q + P);$$

$$T_{CD} = T_{DE} = \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Cân bằng của hệ vật

Bài II.22 (hình III.22):



Hình III.22

- Hóa rắn và xét cân bằng toàn hệ (hình III.22a):

$$(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{P}, \overline{Y_B}, \overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{Y_C}) \sim 0.$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = P \cos 45^\circ - X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B + Y_C - Q_2 - Q_1 - P \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 10Y_B + 20Y_C - 8P \sin 45^\circ - 12,5Q_2 - 17,5Q_1 = 0 \quad (3)$$

Tính $Q_1 = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kN} = Q_2$.

- Tách, xét cân bằng phần DC: $(\overline{X_D}, \overline{Y_D}, \overline{Q_1}, \overline{Y_C}) \sim 0$ (hình III.22b):

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_D = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_C + Y_D - Q_1 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_D(\overline{F_k}) = 5Y_C - 2,5Q_1 = 0 \quad (6)$$

Giải các phương trình này ta tìm được:

$$\begin{array}{lll} Y_C = 5 \text{ kN}; & Y_D = 5 \text{ kN}; & X_D = 0; \\ Y_B = 22,26 \text{ kN}; & Y_A = -4,4 \text{ kN}; & X_A = 2,8 \text{ kN}; \end{array}$$

Bài II.23 (hình III.23):

- Hóa rắn và xét toàn hệ ta có (hình III.23a):

$$(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{M_A}, \overline{P}, \overline{Q}) \sim 0$$

$$\sum X_k = X_A + Q = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = M_A - 4lP - 2lQ = 0 \quad (3)$$

với $Q = 4lq = 4l \frac{1P}{2l} = 2P$.

- Tách và xét cân bằng thanh DE :

$$(\overline{X_E}, \overline{Y_E}, \overline{R_C}, \overline{P}) \sim 0 \text{ (hình III.23b).}$$

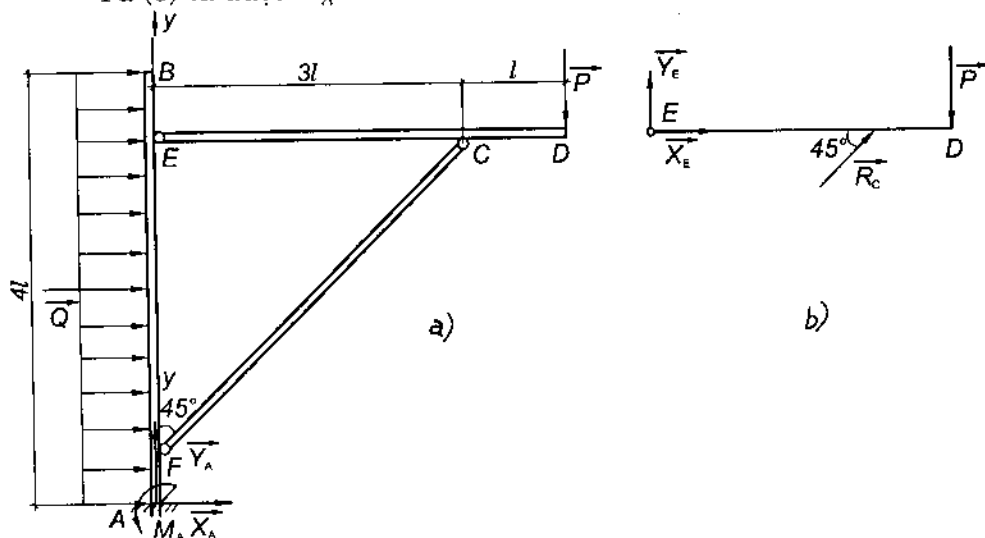
$$\sum X_k = X_E + R_C \cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_E - R_C \sin 45^\circ - P = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_E(\overline{F_k}) = 3lR_C \sin 45^\circ - 4lP = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có $R_C = 1,88P$.

Từ (3) ta được $M_A = 8Pl$.



Hình III.23

Bài II.24 (hình III.24):

- Áp dụng nguyên lý hóa rắn. Xét toàn hệ AB và BC (hình III.24a).

Các lực tác dụng:

$$(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, M_A, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P}, M, \overrightarrow{N_C}) \sim 0, \text{ với } Q = 5q = 5 \cdot 0,9 = 4,5 \text{ kN.}$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + Q + P \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

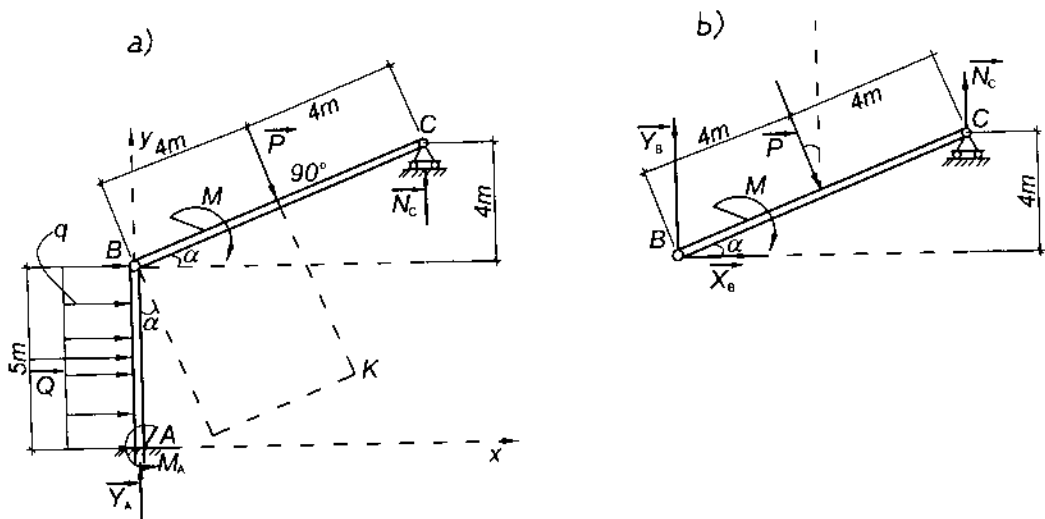
$$\sum Y_k = Y_A + N_C - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = M_A - 2,5Q - M + 8N_C \cos \alpha - AK \cdot P = 0 \quad (3)$$

$$AK = 4 + 5 \sin \alpha = 4 + 5 \sin 30^\circ = 6,5 \text{ m.}$$

- Tách ra, xét cân bằng thanh BC (hình III.24b).

$$\text{Các lực tác dụng: } (\overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, M, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N_C}) \sim 0.$$



Hình III.24

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = P \sin \alpha + X_B = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = N_C + Y_B - P \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_B(\overline{F_k}) = 8N_C \cos \alpha - 4P - M = 0 \quad (6)$$

$$\text{Từ (6) ta có } N_C = \frac{4P + M}{8 \cos \alpha} = \frac{20 + 30}{\frac{8\sqrt{3}}{2}} = \frac{50}{2.1,73} = 7,21 \text{ kN}$$

với $\alpha = 30^\circ$, vì cạnh góc vuông của tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền.

$$\text{Thay } N_C \text{ vào (5) ta có } Y_B = P \frac{\sqrt{3}}{2} - N_C = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7,21 = -2,88 \text{ kN.}$$

$$\text{Từ (4) ta có: } X_B = -P \sin \alpha = -5 \cdot \frac{1}{2} = -2,5 \text{ kN.}$$

$$\text{Từ (2) ta có: } Y_A = P \cos \alpha - N_C = -2,88 \text{ kN.}$$

$$\text{Từ (1) ta có: } X_A = -Q - P \sin \alpha = -4,5 - 5 \cdot \frac{1}{2} = -7 \text{ kN.}$$

Từ (3) ta được:

$$M_A = M + 2,5Q - 8N_C \cos \alpha + 6,5P = 24,5 \text{ kNm.}$$

Bài II.25 (hình III.25):

Cho $P_1 = 14 \text{ kN}$; $P_2 = 12 \text{ kN}$;

$q = 0,9 \text{ kN}$; $M = 20 \text{ kNm}$;

$Q = 2.0,9 = 1,8 \text{ kN}$.

- Hệ xét cân bằng gồm ADB và BC (hình III.25a).

Áp dụng phương pháp hóa rắn.

Các lực tác dụng lên hệ:

$$(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{M_A}, \overline{Q}, \overline{P_2}, \overline{P_1}, \overline{M}, \overline{N_C}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A - P_1 \cos 45^\circ - N_C \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - Q - P_2 - P_1 \sin 45^\circ + N_C \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = M_A - M - 3P_2 + 1Q + 2P_1 \cos 45^\circ - 2N_C \cos 45^\circ - 5N_C \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

- Tách ra, xét cân bằng thanh BC. Các lực tác dụng (hình III.25b):

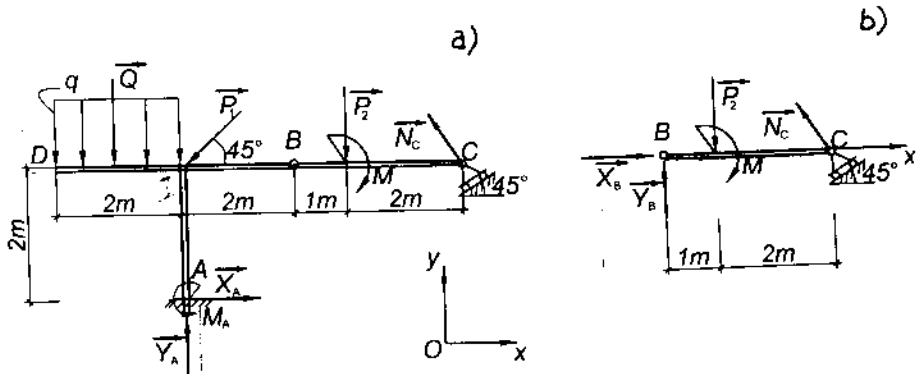
$$(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{P}_2, \vec{N}_C, M) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_B - N_C \cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_B - P_2 + N_C \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 3.N_C \sin 45^\circ - 1.P_2 - M = 0 \quad (6)$$



Hình III.25

Giải các phương trình (6), (5), (4) ta được:

$$N_C = 15,13 \text{ kN} ; Y_B = 1,34 \text{ kN} ; X_C = 10,66 \text{ kN}.$$

Thay N_C vào các phương trình (1), (2) và (3) ta tìm được:

$$X_A = (P_1 + N_C) \frac{\sqrt{2}}{2} = (14 + 15,13) 0,7 = 20,4 \text{ kN}$$

$$Y_A = Q + P_2(P_1 - N_C) \sin 45^\circ = 13,01 \text{ kN}$$

$$M_A = 108,73 \text{ kNm.}$$

Bài II.26 (hình III.26):

- Xét cân bằng toàn hệ (hình III.26a).

Các lực tác dụng $(\overline{N_A}, \overline{N_C}, \overline{2P}, \overline{Q}) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng:

$$\sum Y_k = N_A + N_C - Q - P - P = 0 \quad (1)$$

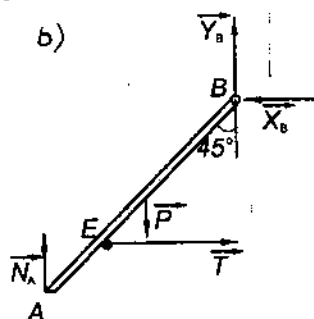
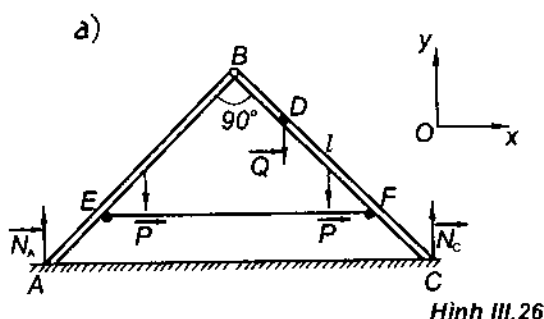
$$\sum m_A(\overline{F}) = N_C 3 \times 2 \sin 45^\circ - \frac{3P \sin 45^\circ}{2} - Q(3 + 0,6) \sin 45^\circ - P(3 + 1,5) \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta có: $N_C = 552 \text{ kN}$

Từ (1) ta có: $N_A = 408 \text{ kN}$

- Xét cân bằng phần AB (hình III.26b).

Các lực tác dụng $(\overline{N_A}, \overline{P}, \overline{T}, \overline{X_B}, \overline{Y_B}) \sim 0$



Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = T - X_B = 0 \quad (3)$$

$$\sum Y_k = N_A + Y_B - P = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_B(\overline{F}) = \frac{3P \sin 45^\circ}{2} + 2T \sin 45^\circ - 3N_A \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

Từ (5) ta có: $T = 522 \text{ kN}$

Từ (3) ta có: $X_B = 522 \text{ kN}$

Từ (4) ta có: $Y_B = -288 \text{ kN}$.

ĐS: $N_A = 408 \text{ kN}$; $X_B = 522 \text{ kN}$; $Y_B = -288 \text{ kN}$;

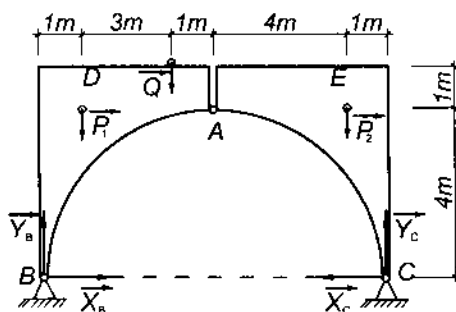
$N_C = 552 \text{ kN}$; $T = 522 \text{ kN}$.

Bài II.27 (hình III.27):

Xét cân bằng toàn hệ:

Các lực tác dụng:

$$(\overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}) \sim 0 \text{ với } \overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P}$$



Hình III.27

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_B - X_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_B + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B(\vec{F}) = 10Y_C - P_1 - 4Q - 9P_2 = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có: $Y_C = 48 \text{ kN}$

Từ (2) ta có: $X_B = 52 \text{ kN}$

Xét cân bằng phần AEC:

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}, \overrightarrow{P_2}) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A - X_C = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_C - Y_A - P_2 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 5Y_C - 4X_C - 4P_2 = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có: $X_C = 20 \text{ kN}$

Từ (4) ta có: $X_A = X_C = 20 \text{ kN}$

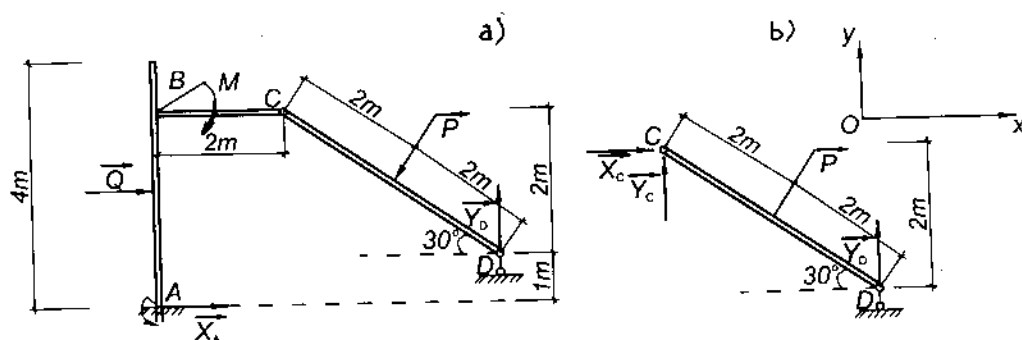
Từ (5) ta có: $Y_A = 8 \text{ kN}$

Từ (1) ta có: $X_B = X_C = 20 \text{ kN}$

ĐS: $X_A = 20 \text{ kN}$; $Y_A = 8 \text{ kN}$; $X_B = X_C = 20 \text{ kN}$;

$Y_B = 52 \text{ kN}$; $Y_C = 48 \text{ kN}$.

Bài II.28 (hình III.28):



Hình III.28

Xét cân bằng toàn hệ có $Q = 4q = 800 \text{ N}$:

Các lực tác dụng:

$$(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{M_A}, \overline{Y_D}, \overline{M}, \overline{P}, \overline{Q}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + Q - P \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_D - P \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = M_A - 2Q - M + Y_D(2 + 4\cos 30^\circ - P\cos 30^\circ(2 + 2\cos 30^\circ) + 2P\sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

Từ (1) ta có: $X_A = 550 \text{ N}$

Xét cân bằng thanh CD:

Các lực tác dụng $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Y}_D, \vec{P}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_C - P\sin 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_D + Y_C - P\cos 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = -2P + 4Y_D\cos 30^\circ = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có: $Y_D = 289 \text{ N}$

Từ (5) ta có: $Y_C = 144,3 \text{ N} = 144,3 \text{ N}$

Từ (2) ta có: $Y_A = 144,3 \text{ N}$

Từ (3) ta có: $M_A = 2288,68 \text{ Nm}$

$$Y_D = 289 \text{ N}$$

ĐS: $X_A = 550 \text{ N}$; $Y_A = 144,3 \text{ N}$; $M_A = 2288,68 \text{ Nm}$;

$Y_D = 289 \text{ N}$; $Y_C = 144,3 \text{ N}$; $M_A = 2288,68 \text{ Nm}$.

Bài II.29 (hình III.29):

Xét cân bằng toàn vòm:

Các lực tác dụng $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{P}, \vec{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

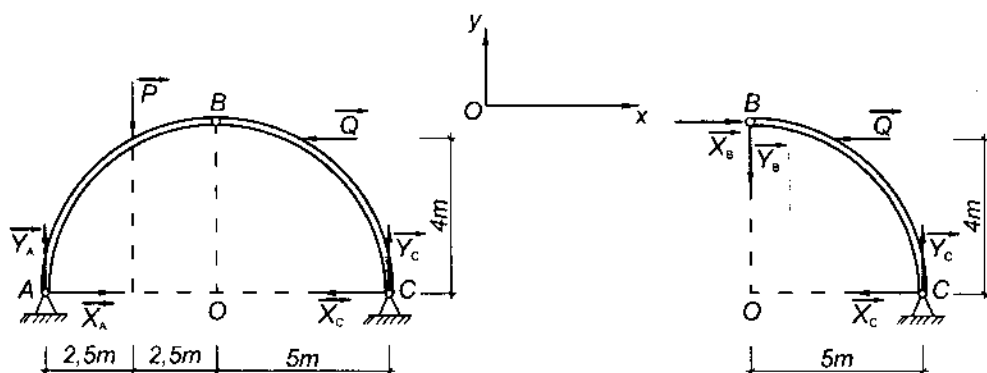
$$\sum X_k = X_A - X_C - Q = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_C - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 10Y_C + 4Q - 2,5P = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có: $Y_C = 0,2 \text{ kN}$

Từ (2) ta có: $Y_A = 11,8 \text{ kN}$



Hình III.29

Xét cân bằng phần BC :

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X = X_B - X_C - Q = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y = Y_C - Y_B = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_B(\overrightarrow{F}) = 5Y_C - Q - 5X_C = 0 \quad (6)$$

Từ (5) ta có: $Y_B = Y_C = 0,2 \text{ kN}$

Từ (6) ta có: $X_C = -1,2 \text{ kN}$

Từ (1) ta có: $X_A = 5,8 \text{ kN}$

Từ (4) ta có: $X_B = 5,8 \text{ kN}$

ĐS: $X_A = 5,8 \text{ kN}$; $Y_A = 11,8 \text{ kN}$.

Bài II.30 (hình III.30):

Xét cân bằng thanh AB với $Q = 4q = 8 \text{ kN}$ (hình III.30b).

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{S_{BD}}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

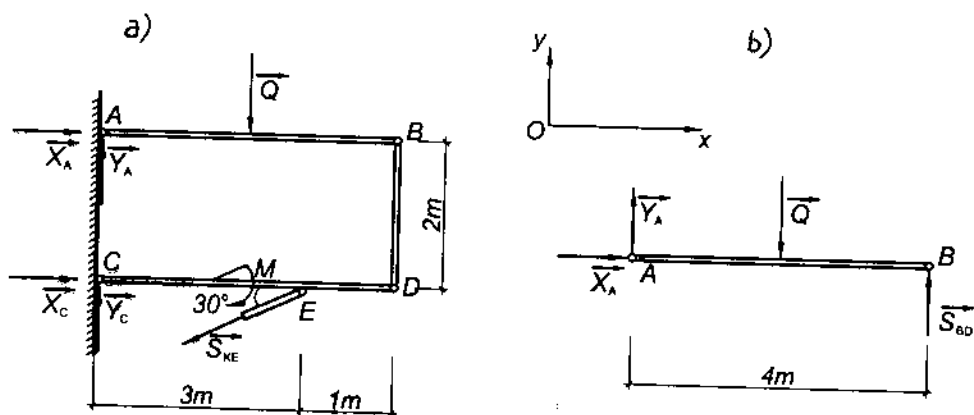
$$\sum X_k = X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A - Q + S_{BD} = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 4S_{BD} - 2Q = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có: $S_{BD} = \frac{Q}{2} = 4 \text{ kN}$

Từ (2) ta có: $Y_A = Q - S_{BD} = 8 - 4 = 4 \text{ kN}$.



Hình III.30

Xét cân bằng hệ gồm $AB + CD$:

Các lực tác dụng $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{S}_{KE}, M, \vec{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_C - S_{KE} \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_C - Q - S_{KE} \sin 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = -2X_A - 2Q - M + 3S_{KE} \sin 30^\circ = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có: $S_{KE} = 17,3 \text{ kN}$

Từ (5) ta có: $Y_C = -4,7 \text{ kN}$

Từ (4) ta có: $X_C = -15 \text{ kN}$

ĐS: $X_A = 0 \text{ kN}$; $Y_A = 4 \text{ kN}$; $X_C = -15 \text{ kN}$; $Y_C = -4,7 \text{ kN}$;
 $S_{BD} = 4 \text{ kN}$; $S_{KE} = 17,3 \text{ kN}$.

Bài II.31 (hình III.31):

Xét cân bằng toàn hệ với $P = 4q = 8 \text{ kN}$ (hình III.31a).

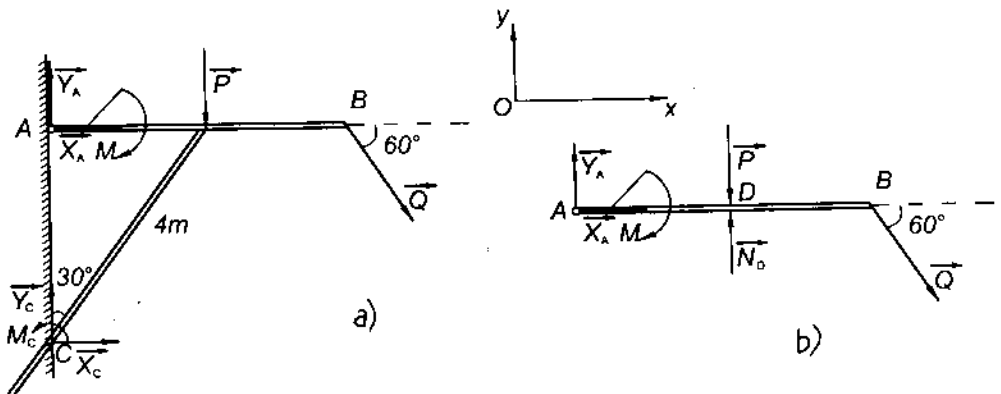
Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{X_C}, \overrightarrow{Y_C}, \overrightarrow{M_C}, \overrightarrow{M}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + X_C + Q \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_C - P - Q \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F}) = -M + M_C - 2P - 4Q \sin 60^\circ + 4X_C \cos 30^\circ = 0 \quad (3)$$



Hình III.31

Xét cân bằng thanh AB:

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{N_D}, \overrightarrow{M}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + Q \cos 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_A + N_D - P - Q \sin 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F}) = -4Q \sin 60^\circ + 2N_D - M - 2P = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có: $N_D = 26,85 \text{ kN}$

Từ (5) ta có: $Y_A = -11,93 \text{ kN}$

Từ (4) ta có: $X_A = -4 \text{ kN}$

Từ (1) ta có: $X_C = 0$

Từ (2) ta có: $Y_C = 26,86 \text{ kN}$

Từ (3) ta có: $M_C = 53,72 \text{ kNm}$

ĐS: $X_A = -4 \text{ kN}$; $Y_A = -11,93 \text{ kN}$; $N_D = 26,85 \text{ kN}$;

$X_C = 0$; $Y_C = 26,86 \text{ kN}$; $M_C = 53,72 \text{ kNm}$.

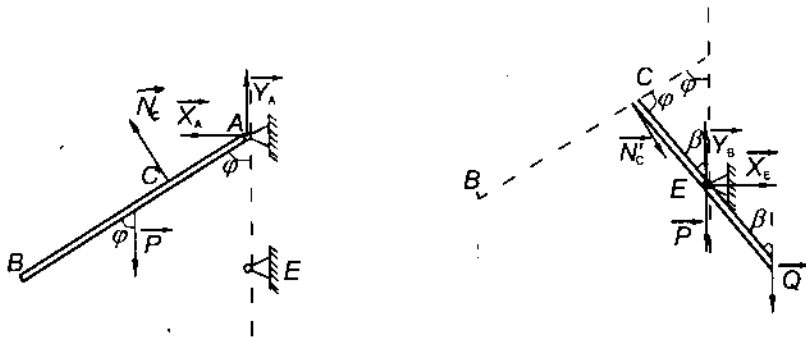
Bài II.32 (hình III.32).

Xét cân bằng thanh AB .

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{N_C}, \overrightarrow{P}) \sim 0$

Phương trình cân bằng:

$$\sum m_A(\overrightarrow{F}) = lP \sin \varphi - N_C 2l \cos \varphi = 0 \quad (1)$$



Hình III.32

Xét cân bằng thanh CD :

Các lực tác dụng $(\overrightarrow{X_E}, \overrightarrow{Y_E}, \overrightarrow{N'_C}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}) \sim 0$

Phương trình cân bằng:

$$\sum m_E(\overrightarrow{F}) = N'_C l \cos \varphi - Q l \sin \beta = 0 \quad (2)$$

$$\beta = 180 - 2\varphi \rightarrow \sin \beta = \sin (180 - 2\varphi) = \sin 2\varphi$$

Từ (2) ta có: $N'_C l \cos \varphi = Q l \sin \beta = Q l \sin 2\varphi$

Từ (1) ta có: $N_C = \frac{P \sin \varphi}{2 \cos \varphi} = N'_C$

$$\frac{P \sin \varphi}{2 \cos \varphi} \cos \varphi = Q \sin 2\varphi = 2P \times 2 \times \sin \varphi \times \cos \varphi$$

$$\rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{8} \rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{8} = 82^{\circ}50'.$$

$$\text{ĐS: } \varphi = 82^{\circ}50'$$

Bài II.33 (hình III.33):

Xét cân bằng toàn vòm (hình III.33a):

Các lực tác dụng $(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{Y_B}, \overline{P}, \overline{Q}) \sim 0$

Phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A - P \cos 45^{\circ} = 0 \quad (1)$$

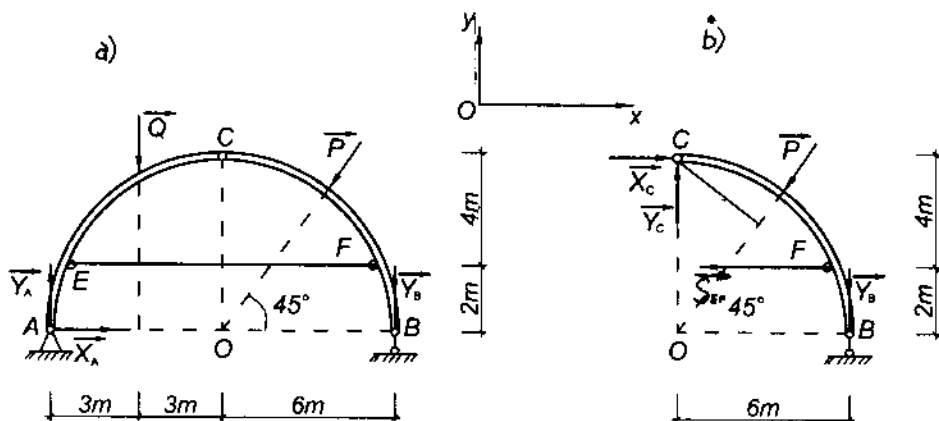
$$\sum Y_k = Y_A + Y_B - Q - P \sin 45^{\circ} = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}) = 12Y_B - 3Q - P6 \sin 45^{\circ} = 0 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) ta có: } X_A = 10\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\text{Từ (3) ta có: } Y_B = 11,57 \text{ kN}$$

$$\text{Từ (2) ta có: } Y_A = 20,43 \text{ kN.}$$



Hình III.33

Xét cân bằng phần BC (hình III.33b):

Các lực tác dụng $(\overline{Y_B}, \overline{X_C}, \overline{Y_C}, \overline{S_{EF}}, \overline{P}) \sim 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_C - S_{EF} - P \cos 45^{\circ} = 0 \quad (4)$$

$$\sum Y_k = Y_C + Y_B - P \sin 45^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_C(\vec{F}) = -6Y_B - 4S_{EF} - P6 \sin 45^\circ = 0 \quad (6)$$

Từ (6) ta có: $S_{EF} = -3,65 \text{ kN}$

Từ (4) ta có: $X_C = 10,5 \text{ kN}$

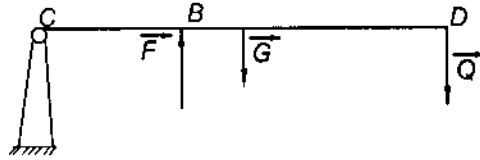
Từ (5) ta có: $Y_C = 2,57 \text{ kN}$

ĐS: $X_A = 10\sqrt{2} \text{ kN}$; $Y_A = 20,43 \text{ kN}$; $Y_B = 11,57 \text{ kN}$;

$X_C = 10,5 \text{ kN}$; $Y_C = 2,57 \text{ kN}$; $S_{EF} = -3,65 \text{ kNm}$.

Cân bằng của đòn và vật lật

Bài II.34 (hình III.34):



Hình III.34

Xét cân bằng nắp bảo hiểm.

Lực tác dụng lên nắp là $\vec{F}$:

$$F = s.p = \pi \frac{d^2}{4} p$$

Điều kiện cân bằng:

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = -50Q + 7F - 25G = 0$$

Giải phương trình này ta được:

$$Q = \frac{7F}{50} - \frac{25G}{50} = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{7 \cdot 11 \cdot 10}{50} - \frac{25 \cdot 10}{50} = 430 \text{ N}$$

$$Q = 430 \text{ N.}$$

Bài II.35 (hình III.35):

Xét cân bằng đòn ABC.

Các lực tác dụng $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Q}) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A + Q - P_3 = 0 \quad (1)$$

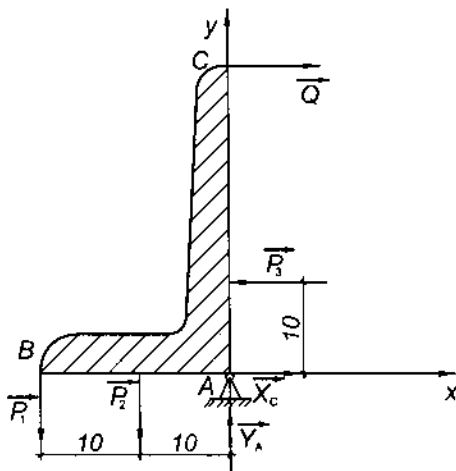
$$\sum Y_k = Y_A - P_1 - P_2 = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = 20P_1 + 10P_2 + 10P_3 - 50Q = 0 \quad (3)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$Q = 110 \text{ N}; X_A = 90 \text{ N}; Y_A = 250 \text{ N}.$$

$$\text{Nên } R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 266 \text{ N}.$$



Hình III.35

Bài II.36 (hình III.36):

Xét cân bằng OC và AB.

Bài II.37 (hình III.37):

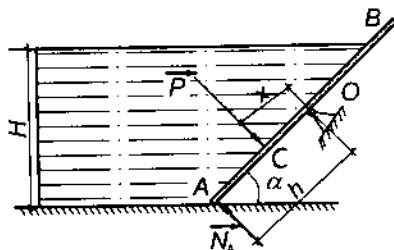
Xét tấm chắn AB :

Khi cánh cửa AB mở thì $N_A = 0$.

Ta có $\sum m_o(\vec{F}) = Px - hN_A = 0$.

Vì $N_A = 0$ nên $Px = 0 \rightarrow x = 0$. Lực P đặt tại $\frac{AC}{3}$.

Ta có $AC = \frac{H}{\sin \alpha}$. Nên $h - \frac{1}{3} \frac{H}{\sin \alpha} = x = 0 \rightarrow H = 3h \sin \alpha$.



Hình III.37

Bài II.38 (hình III.38):

Ta xét sự cân bằng của tường đá (vẽ tiết diện giữa tường).

Gọi áp lực của đất lên tường là $P = 60.l$.

Gọi Q là trọng lượng toàn phần bộ tường đá: $Q = 20.a.h.l$.

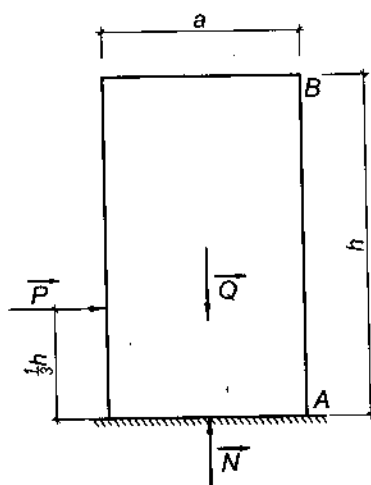
Khi tường bị lật quay quanh A thì lúc đó $\vec{N} = 0$. Ta xét lực gây lật quanh A là P nên:

$$M_l = \frac{1}{3} h.P = \frac{1}{3} h.60l = 20 h.l$$

$$\text{Lực giữ} \quad M_k = Q \cdot \frac{a}{2} = 20a.h.l \frac{a}{2} = 10a^2.h.l.$$

Điều kiện cân bằng $M_g \geq M_l$ hay:

$$10a^2hl \geq 20hl \rightarrow a \geq \sqrt{2} = 1,41 \text{ m.}$$



Hình III.38

Bài II.39 (hình III.39):

Xét cân bằng của tháp nước.

Các lực tác dụng là $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}_A$.

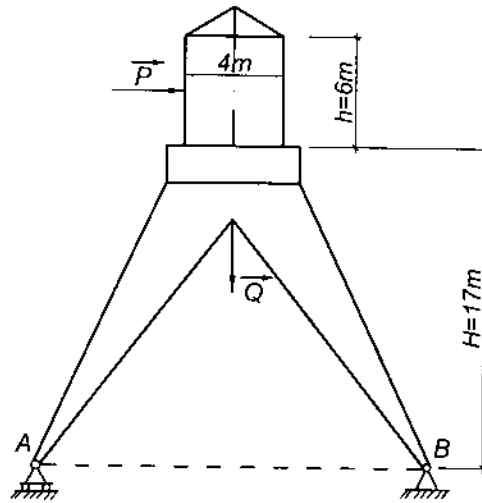
$$M_l = P \left(H + \frac{h}{2} \right)$$

$$M_g = Q \frac{AB}{2}$$

Khi mất cân bằng thì $\vec{N}_A = 0$.

Điều kiện cân bằng: $M_g \geq M_l$

$$\frac{Q}{2} AB \geq P \left(H + \frac{h}{2} \right) \rightarrow AB \geq 15 \text{ m}$$



Hình III.39

Bài II.40 (hình III.40):

- Xét khi có vật nặng $\vec{P}$:

$$M_l = 1,5 \cdot 50 + 10 \cdot 25$$

$$M_l = 325 \text{ kNm}$$

$$M_g = Q(3 + x).$$

Điều kiện cân bằng:

$$M_g \geq M_l$$

$$Q(3 + x) \geq 325$$

(a)

- Xét khi không có vật nặng ($\vec{P} = 0$):

$$M_l = Qx$$

$$M_g = (3 + 1,5) \cdot 50 = 225 \text{ kN}.$$

Điều kiện cân bằng:

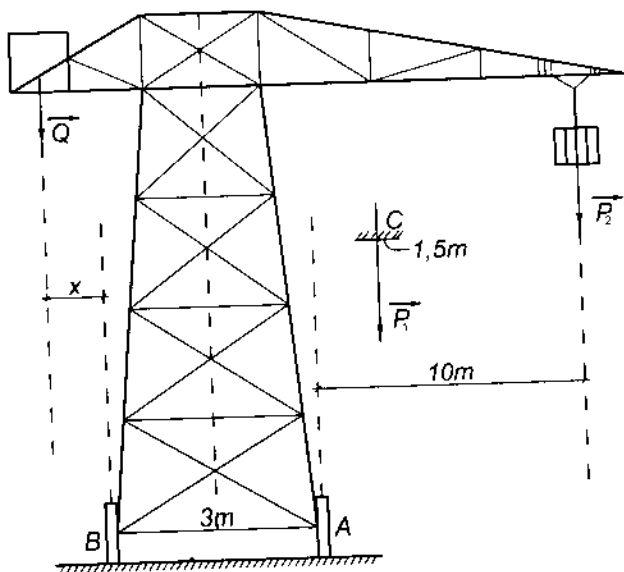
$$M_g \geq M_l$$

$$225 \geq Qx$$

(b)

Giải hai bất đẳng thức (a) và (b) ta được:

$$Q_{\min} = \frac{100}{3} \text{ kN và } x_{\max} = 6,75 \text{ m.}$$



Hình III.40

Hệ lực phẳng đồng quy

Bài II.41 (hình III.41):

Xét cân bằng thanh AB .

Các lực tác dụng $(\vec{Q}, \vec{N}_A, \vec{T}) \sim 0$. Các lực này phải đồng quy tại I nếu $AC = AD = 2\sin 45^\circ$.

$$AC = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ m.}$$

Các phương trình cân bằng:

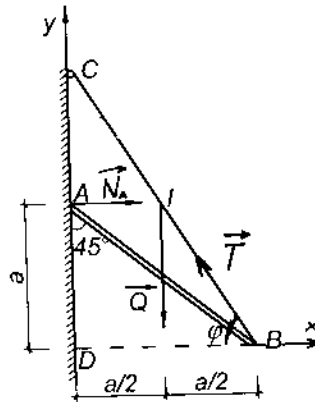
$$\sum X_k = N_A - T \cos \varphi = 0$$

(1)

$$\sum Y_k = T \sin \varphi - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = \frac{a}{2} Q - a \cdot N_A = 0 \quad (3)$$

$$N_A = \frac{Q}{2}.$$



Hình III.41

Thay vào (1) ta có:

$$T \cos \varphi = \frac{Q}{2}.$$

Từ (2) ta được:

$$T \sin \varphi = Q.$$

$$T^2 \cos^2 \varphi + T^2 \sin^2 \varphi = T^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{Q^2}{4} + Q^2 = 5 \frac{Q^2}{4}$$

$$T = \sqrt{\frac{5Q^2}{4}} = \frac{Q}{2} \sqrt{5} = 5,59 \text{ kN}.$$

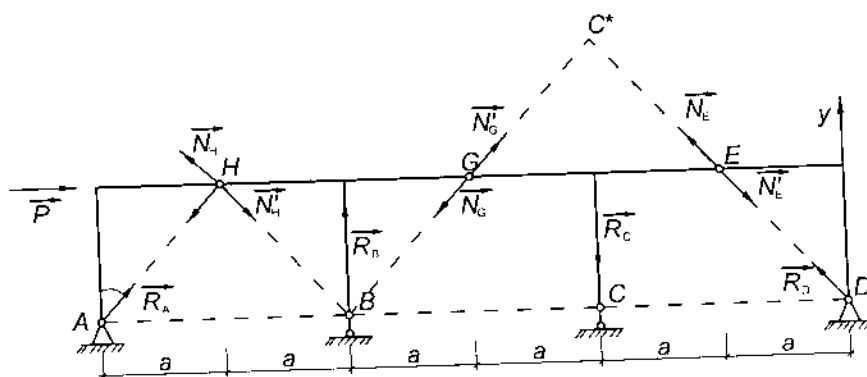
- Xét cân bằng của vật AH

Các lực $(\vec{R}_A, \vec{P}, \vec{N}_H) \sim 0$. Đây là hệ ba lực phẳng đồng quy ta có:

$$\sum X_k = P - R_A \cos 45^\circ - N_H \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N_H \sin 45^\circ - R_A \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\text{Suy ra } R_A = N_H = P \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Hình III.43

- Xét cân bằng của HBG . Tương tự như trên $(\vec{N}'_H, \vec{N}_G, \vec{R}_B) \sim 0$ và đồng quy tại B . Ta có:

$$\sum X_k = N'_H \sin 45^\circ - N_G \sin 45^\circ = 0 \quad (3)$$

$$\sum Y_k = R_B - N'_H \cos 45^\circ - N_G \cos 45^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\text{Suy ra } N'_H = N_G \text{ và } R_B = P.$$

- Xét cân bằng của GCE . Tương tự như trên $(\vec{N}'_G, \vec{R}_C, \vec{N}_E) \sim 0$ và đồng quy tại C^* , đối xứng với C qua GE .

$$\sum X_k = N'_G \cos 45^\circ - N_E \cos 45^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum Y_k = N'_G \sin 45^\circ + N_E \sin 45^\circ - R_C = 0 \quad (6)$$

$$\text{Suy ra } N'_G = N_E \text{ và } R_C = P.$$

- Xét cân bằng của ED chỉ có R_D và $\overrightarrow{N'_E}$ cân bằng:

$$R_D = N'_E = P \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài II.44. (hình III.44):

Xét cân bằng tại nút E .

Các lực tác dụng: $(\vec{Q}, \vec{T}_1, \vec{T}_2) \sim 0$

$$\sum X_k = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \alpha - Q = 0 \quad (2)$$

Từ (1) ta có: $T_1 = T_2 = T = P$

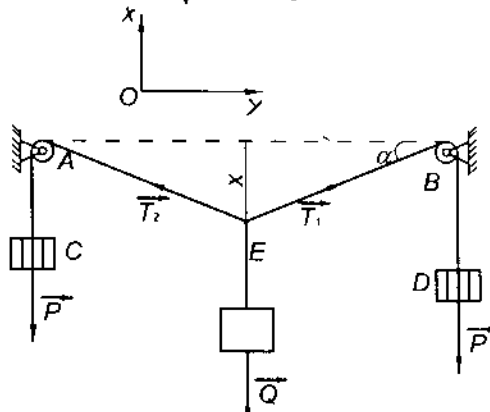
$$2T \sin \alpha = Q \text{ hay } \sin \alpha = \frac{Q}{2T} = \frac{Q}{2P}$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{EB} = \frac{x}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + x^2}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{l^2}{4} + x^2}} = \frac{Q}{2P}$$

Hay

$$x = \frac{Ql}{2\sqrt{4P^2 - Q^2}}$$



Hình III.44

Bài II.45 (hình III.45):

Xét cân bằng ròng rọc A.

Các lực tác dụng: $(\vec{Q}, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{T}_{AD}) \sim 0$.

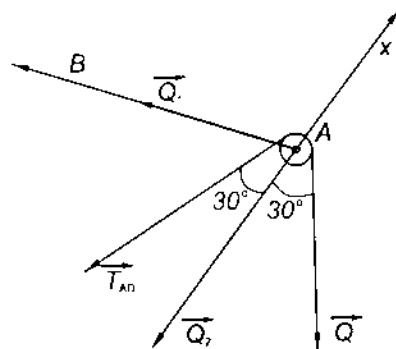
Chọn hệ trục như hình III.45

$$\sum X_k = -Q_2 - T_{AD}\cos 30^\circ - Q\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y_k = Q_1 - Q\sin 30^\circ + T_{AD}\sin 30^\circ = 0.$$

Vì $T_{AD} = Q$ nên $Q_1 = 0$ và $Q_2 = -2Q\cos 30^\circ$

$$Q_2 = -3,46 \text{ kN}.$$



Hình III.45

Hệ lực phẳng song song

Bài II.46 (hình III.46):

Ta có:

$$Q_1 = 20 \text{ m.1 kN/m} = 20 \text{ kN}; \quad P_1 = 20.3 = 60 \text{ kN}.$$

$$Q_2 = 80 \text{ m.1.5 kN/m} = 120 \text{ kN}; \quad P_2 = 15.3 = 45 \text{ kN}.$$

$$Q_3 = 20 \text{ m.1 kN/m} = 20 \text{ kN};$$

- Xét toàn hệ CD (hình III.46a).

Áp dụng phương pháp hóa rắn.

Các lực tác dụng lên hệ:

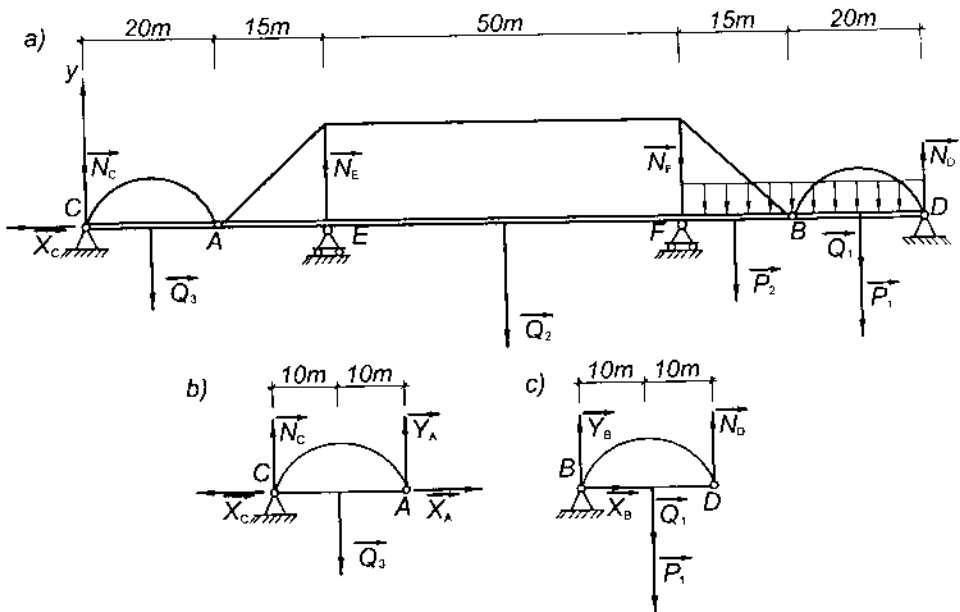
$$(\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{Q_3}, \overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{N_C}, \overline{X_C}, \overline{N_E}, \overline{N_F}, \overline{N_D}) \sim 0.$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_C = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N_C + N_E + N_F + N_D - Q_1 - Q_2 - Q_3 - P_1 - P_2 = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum m_C(\overline{F_k}) = 35N_E + 85N_F + 120N_D - 10Q_3 - 60Q_2 - \\ - 92,5P_2 - 110(Q_1 + P_1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$



Hình III.46

- Xét cân bằng dầm phụ AC (hình III.46b).

Các lực tác dụng: $(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{X_C}, \overline{N_C}, \overline{Q_3}) \sim 0.$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A - X_C = 0 \quad (4)$$

Vì $X_C = 0 \rightarrow X_A = 0$

$$\sum Y_k = N_C + Y_A - Q_3 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_A(\overrightarrow{F_k}) = 10Q_3 - 20N_C = 0 \quad (6)$$

- Xét cân bằng dàn phụ BD (hình III.46c). Các lực tác dụng:

$$(\overrightarrow{X_B}, \overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{N_D}) \sim 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_B = 0 \rightarrow X_B = 0 \quad (7)$$

$$\sum Y_k = Y_B + N_D - Q_1 - P_1 = 0 \quad (8)$$

$$\sum m_B(\overrightarrow{F_k}) = 20N_D - 10(P_1 + Q_1) = 0 \quad (9)$$

Từ (9) ta có:

$$N_D = \frac{10(P_1 + Q_1)}{20} = \frac{60 + 20}{2} = 40 \text{ kN}$$

Từ (6) ta có:

$$N_C = \frac{10Q_3}{20} = \frac{20}{2} = 10 \text{ kN}$$

Từ (2) ta có:

$$N_E + N_F = Q_1 + Q_2 + Q_3 + P_1 + P_2 - N_C - N_D = 215 \text{ kN} \quad (a)$$

Từ (3) ta có:

$$\begin{aligned} 35N_E + 85N_F &= 10Q_3 + 60Q_2 + 92,5P_2 + 110(Q_1 + P_1) - 120N_D \\ 35N_E + 85N_F &= 15562,5 \rightarrow 7N_E + 17N_F = 3112,5 \text{ kN} \end{aligned} \quad (b)$$

Giải hệ hai phương trình (a) và (b) ta được:

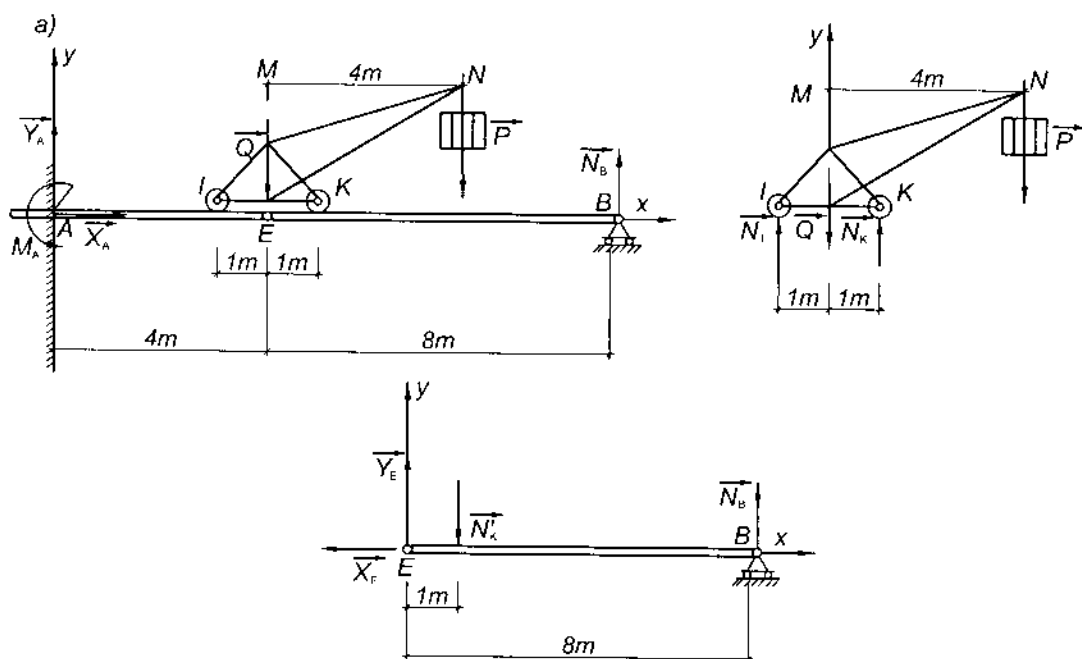
$$\begin{cases} 7N_E + 17N_F = 3112,5 \\ 7N_E + 7N_F = 1505,0 \end{cases}$$

$$10N_F = 1607,5 \rightarrow N_F = \frac{1607,5}{10} = 160,7 \text{ kN.}$$

$$N_E = 215 - N_F = 215 - 160,7 = 54,3 \text{ kN.}$$

$$\text{Vậy: } N_C = 10 \text{ kN; } N_D = 40 \text{ kN; } N_E = 54,3 \text{ kN; } N_F = 160,7 \text{ kN.}$$

Bài II.47 (hình III.47):



Hình III.47

- Xét toàn hệ AE, EB và cân trục (hình III.47a).

Các lực tác dụng lên hệ: $(\overline{X_A}, \overline{Y_A}, \overline{M_A}, \overline{N_B}, \overline{P}, \overline{Q}) \sim 0$.

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = Y_A + N_B - Q - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A (\overrightarrow{F_k}) = M_A + 12 N_B - 4Q - 8P = 0 \quad (3)$$

- Tách ra xét cân bằng cần trục.

Các lực tác dụng:

$$(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_K}) \sim 0.$$

Các phương trình cân bằng (hình III.47b):

$$\sum Y_k = N_I + N_K - P - Q = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_I (\overrightarrow{F_k}) = 2N_K - 1Q - 5P = 0 \quad (5)$$

- Ta xét cân bằng dầm CB.

Các lực tác dụng:

$$(\overrightarrow{N_B}, \overrightarrow{N'_K}, \overrightarrow{X_E}, \overrightarrow{Y_E}) \sim 0.$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum Y_k = Y_E + N_B - N'_K = 0 \quad (6)$$

$$\sum X_k = -X_E = 0$$

$$\sum m_C (\overrightarrow{F_k}) = 8N_B - 1.N'_K = 0 \quad (7)$$

Từ (7) ta có: $N_B = \frac{1}{8} N'_K = \frac{1}{8} \cdot 5 = 0,625 \text{ kN}$

Thay vào (2) ta có $Y_A = Q + P - N_B = 5 + 1 - 0,625$

$$Y_A = 5,375 \text{ kN}$$

Từ (3) ta có

$$M_A = 4Q + 8P - 12N_B = 4,5 + 8,1 - 12 \cdot 0,625$$

$$M_A = 20,5 \text{ kNm.}$$

Bài II.48 (hình III.48):

Xét toàn hệ cân bằng $(\overrightarrow{N_A}, \overrightarrow{Q_1}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N_E}, \overrightarrow{Q_2}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N_D}) \sim 0$ (hình III.48a).

$$\sum Y_k = N_A + N_E + N_D - Q_1 - Q_2 - P - P = 0. \quad (1)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 5N_E + 7N_D - 6P - 5,5Q_2 - 3P - 2Q_1 = 0 \quad (2)$$

- Tách ra, xét thanh AB (hình III.48b):

$$(\vec{N}_A, \vec{Q}_1, \vec{P}, \vec{N}_B) \sim 0$$

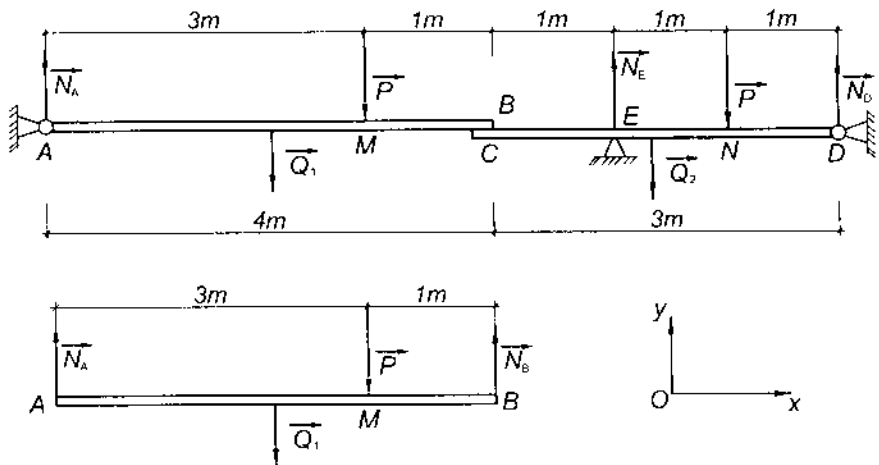
$$\sum Y_k = N_A + N_B - Q_1 - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = P + 2Q_1 - 4N_A = 0 \quad (4)$$

Từ (4) ta có: $N_A = 1,2 \text{ kN}$.

Từ (1) và (2) ta có: $N_E = 4 \text{ kN}$

$N_D = 0$ và $N_B = N_C = 1,6 \text{ kN}$.



Hình III.48

MA SẮT

Bài II.49 (hình III.49):

Xét các lực tác dụng:

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{Q}, \vec{F}_{ms}) \sim 0$$

$$\sum X_k = Q \cos \beta - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

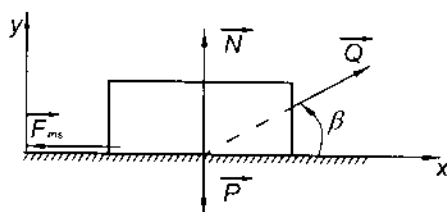
$$\sum Y_k = N + Q \sin \beta - P = 0 \quad (2)$$

Từ (2) ta có $N = P - Q \sin \beta$, mà $F_{ms} = fN = f(P - Q \sin \beta)$.

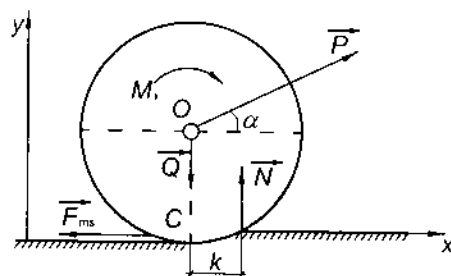
Để thùng có thể chuyển động được thì góc ma sát cực đại $\varphi_0 = \beta$.

$$\text{hay } \tan \beta = \frac{F_{ms}}{N} = f, \text{ hay } \beta = \arctan f.$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } Q_{\min} = \frac{fP}{\sqrt{1+f^2}}.$$



Hình III.49



Hình III.50

Bài II.50 (hình III.50):

Ta xét cân bằng con lăn:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, M_l) \sim 0$$

$$\sum X_k = P \cos \alpha - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N + P \sin \alpha - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = kN - M_l - RP \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Từ (2) ta có: $N = Q - P \sin \alpha$.

Từ (3) ta có: $M_l = kN - RP \cos \alpha = 0$ vì con lăn lăn đều.

Vậy $kN = RP \cos \alpha + kP \sin \alpha = P(R \cos \alpha + k \sin \alpha)$

$$P = \frac{kQ}{R \cos \alpha + k \sin \alpha} = 57,2 \text{ N.}$$

Bài II.51 (hình III.51):

Xét cân bằng khối trụ

$$\left(\overline{M}_l, \overline{P}, \overline{N}, \overline{F}_{ms} \right) \sim 0, \text{ với } F_{\max} = fN.$$

$$\sum X_k = F_{ms} - P \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N - P \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

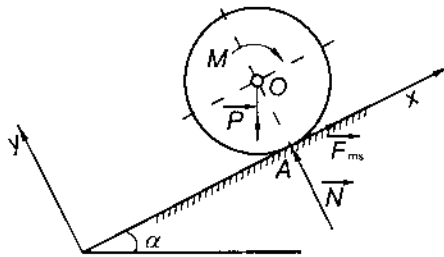
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = -M_l + RP \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

Từ (3) ta có: $M_l = RP \sin \alpha$.

Từ (1) và (2) ta có: $\operatorname{tg} \alpha = f$.

Từ (1) ta có: $F_{ms} = P \sin \alpha \leq F_{\max} = fN$.

Do đó $\operatorname{tg} \alpha \leq f$. Vậy $\alpha \leq \operatorname{arctg} f$.



Hình III.51

Bài II.52 (hình III.52):

Xét cân bằng quả cầu, ta có:

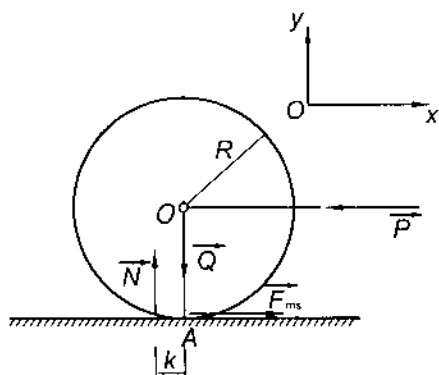
$$\sum Y_k = N - Q = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_o(\overline{F}_k) = RF_{ms} - kN = 0 \quad (2)$$

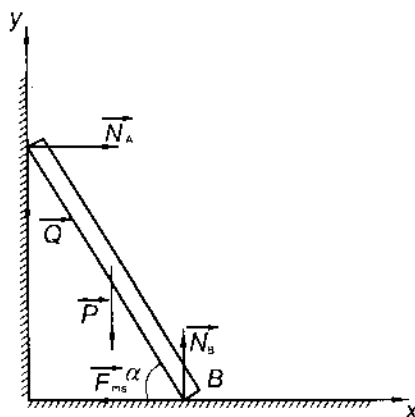
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = R.P - kN = 0, \quad (3)$$

trong đó: $F_{ms} = \mu N = \mu Q$ vì $N = Q$.

Cho nên $\mu > \frac{k}{R}$ và $P = Q \cdot \frac{k}{R}$.



Hình III.52



Hình III.53

Bài II.53 (hình III.53):

Xét cân bằng thang $AB = l$

Các lực tác dụng:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{F}_{ms}) \sim 0$$

Chọn hệ trục như hình III.53

$$\sum X_k = N_A - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N_B - P - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = l \cdot N_B \cos \alpha - F_{ms} \cdot l \cdot \sin \alpha - P \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

Từ (2) ta có: $N_B = P + Q$

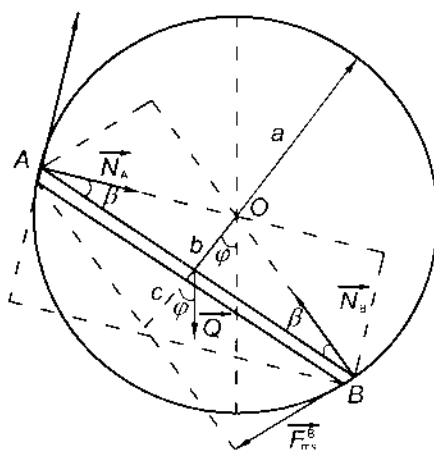
Từ (3) ta có: $N_B - F_{ms} \operatorname{tg} \alpha - \frac{P}{2} = 0$ hay

$$F_{ms} \operatorname{tg} \alpha = N_B - \frac{P}{2} = P + Q - \frac{P}{2} = \frac{P}{2} + Q = \frac{2Q + P}{2}$$

$$\frac{2Q + P}{2 \operatorname{tg} \alpha} = F_{ms} \leq F_{\max} = \mu N_B = \mu (P + Q)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2Q + P}{2\mu(P + Q)}$$

Bài II.54 (hình III.54):



Hình III.54

Gọi $AB = l$.

Xét cân bằng thanh AB .

Các lực tác dụng:

$$\left(\overline{N_A}, \overline{F_{ms}^A}, \overline{N_B}, \overline{F_{ms}^B}, \overline{Q} \right) \sim 0$$

Ta có:

$$F_{\max}^A = \mu N_A; \quad F_{\max}^B = \mu N_B.$$

Từ điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng ta có dạng cân bằng sau đây:

Tổng mômen các lực tác dụng lên hệ đối với ba điểm A, B, C không thẳng hàng bằng không:

$$\sum m_A(\overline{F_k}) = 0; \quad \sum m_B(\overline{F_k}) = 0 \text{ và } \sum m_C(\overline{F_k}) = 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum m_o(\vec{F}_k) = Q.b \sin \varphi - a F_{ms}^A - a F_{ms}^B = 0 \quad (1)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = N_B l \sin \beta - F_{ms}^B l \cos \beta - Q \frac{l}{2} \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = -N_A l \sin \beta - l F_{ms}^A \cos \beta + Q \frac{l}{2} \cos \varphi = 0 \quad (3)$$

Từ (1) ta có: $Qb \sin \varphi = a(F_{ms}^A + F_{ms}^B) = a\mu(N_A + N_B)$
 $\mu(N_A + N_B) = \frac{b}{a} Q \sin \varphi.$

Từ (2) ta có: $N_B(\sin \beta - \mu \cos \beta) = \frac{Q}{2} \cos \varphi$

Từ (3) ta có: $N_A(\sin \beta + \mu \cos \beta) = \frac{Q}{2} \cos \varphi$

$$N_B = \frac{Q \cos \varphi}{2(\sin \beta - \mu \cos \beta)} \quad \text{và} \quad N_A = \frac{Q \cos \varphi}{2(\sin \beta + \mu \cos \beta)}.$$

Thay vào (*):

$$\mu \left[\frac{Q \cos \varphi}{2(\sin \beta + \mu \cos \beta)} + \frac{Q \cos \varphi}{2(\sin \beta - \mu \cos \beta)} \right] = \frac{b}{a} Q \sin \varphi$$

$$\mu \frac{Q \cos \varphi}{2} \left[\frac{1}{\sin \beta + \mu \cos \beta} + \frac{1}{\sin \beta - \mu \cos \beta} \right] = \frac{b}{a} Q \sin \varphi$$

$$\mu \frac{\cos \varphi}{2} \left[\frac{\sin \beta - \mu \cos \beta + \sin \beta + \mu \cos \beta}{\sin^2 \beta - \mu^2 \cos^2 \beta} \right] = \frac{b}{a} \sin \varphi$$

$$\mu \frac{\cos \varphi}{2} \frac{2 \sin \beta}{\sin^2 \beta - \mu^2 \cos^2 \beta} = \frac{b}{a} \sin \varphi$$

Ta có: $\sin \beta = \frac{b}{a}$

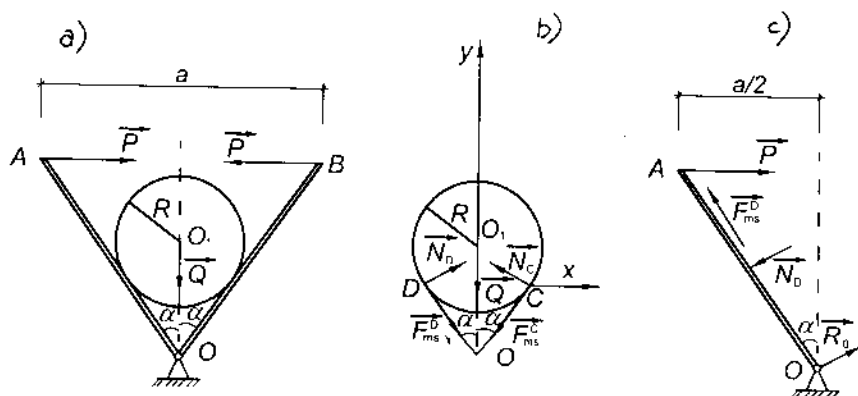
$$\mu \cos \varphi \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \mu^2(1 - \sin^2 \beta)} = \sin \varphi$$

$$\cot \varphi = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \mu^2 \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right]}{\mu} = \frac{\frac{b^2}{a^2} + \mu^2 \frac{b^2}{a^2} - \mu^2}{\mu}$$

$$\cot \varphi = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1 + \mu^2}{\mu} \right) - \mu.$$

Bài 11.55 (hình III.55):

Hệ khảo sát gồm các thanh OA , OB và hình trụ trục O_1 . Vì hệ đối xứng nên ta chỉ cần xét thanh OA . Đối với thanh OB ta có kết quả tương tự.



Hình III.55

- Tách xét riêng hình trụ (hình III.55b).

Giả sử hình trụ chuyển động đi lên. Khi đó các lực tác dụng P đủ lớn

$$(\vec{Q}, \vec{N}_C, \vec{N}_D, \vec{F}_{ms}^C, \vec{F}_{ms}^D) \sim 0.$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = N_D \cos \alpha - N_C \cos \alpha + F_{ms}^D \sin \alpha - F_{ms}^C \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y_k = N_D \sin \alpha + N_C \sin \alpha - Q - F_{ms}^C \cos \alpha - F_{ms}^D \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_{(1)}(\overrightarrow{F_k}) = RF_{ms}^D - RF_{ms}^C = 0 \quad (3)$$

Giải các phương trình này ta được:

$$Q = 2N_C (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

- Tách xét riêng thanh OA (hình III.55c).

Các lực tác dụng: $(\overrightarrow{R_o}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{N'_D}, \overrightarrow{F_{ms}^D}) \sim 0$

$$\sum m_o(\overrightarrow{F_k}) = -P \frac{a}{2} \cot\alpha + N_D R \cot\alpha = 0 \quad (4)$$

$$N_D = \frac{aP}{2R} = N'_C$$

$$Q = 2N_C (\sin\alpha - f\cos\alpha) = \frac{aP}{R} (\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$P_1 = \frac{QR}{a} \times \frac{1}{\sin\alpha - f\cos\alpha}$$

Khi lực P không đủ lớn thì hình trụ rời xuống, các lực ma sát có chiều ngược lại, lúc đó:

$$P_2 = \frac{QR}{a} \times \frac{1}{\sin\alpha + f\cos\alpha}$$

Vì $P_1 > P_2$, như vậy lực P phải thỏa mãn $P_2 \leq P \leq P_1$ khi $\tan\alpha > f$, do đó $\sin\alpha > f\cos\alpha$. Ta có:

$$\frac{QR}{a} \times \frac{1}{\sin\alpha + f\cos\alpha} \leq P \leq \frac{QR}{a} \times \frac{1}{\sin\alpha - f\cos\alpha}$$

Khi $\tan\alpha \leq f$ thì

$$\sin\alpha \leq f\cos\alpha$$

$$P \geq \frac{QR}{a} \times \frac{1}{\sin\alpha + f\cos\alpha}$$

Bài II.56 (hình III.56):

Xét cân bằng ô tô:

- Các lực tác dụng: $(\overrightarrow{Q}, \overrightarrow{N_A}, \overrightarrow{F_{ms}^A}, \overrightarrow{N_B}, \overrightarrow{F_{ms}^B}) \sim 0$

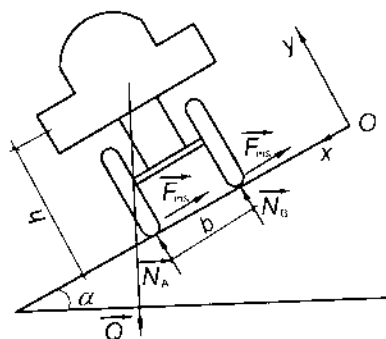
$$F_{ms}^A = fN_A; \quad F_{ms}^B = fN_B \quad (1)$$

$$\sum X = Q \sin \alpha - F_{ms}^A - F_{ms}^B = 0 \quad (2)$$

$$\sum Y = N_A + N_B - Q \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = hQ \sin \alpha - \frac{b}{2} Q \cos \alpha = 0$$

Khi ở trạng thái tới hạn thì $N_B = 0$.



Hình III.56

Từ (1) ta có: $Q \sin \alpha = F_{ms}^A + F_{ms}^B \leq f(N_A + N_B)$ sẽ không trượt.

Từ (2) ta có: $Q \cos \alpha = N_A + N_B$

$$\rightarrow Q \sin \alpha \leq f(N_A + N_B) = fQ \cos \alpha$$

$\tan \alpha \leq f$ không trượt

$\tan \alpha = f$ bắt đầu trượt

$\tan \alpha > f$ trượt

Khi lật quanh A thì $M_l = hQ \sin \alpha$: $M_g = \frac{b}{2} Q \cos \alpha$

Muốn cho không lật thì:

$$M_g \geq M_l \rightarrow \frac{b}{2} Q \cos \alpha > hQ \sin \alpha, \text{ hay } \tan \alpha \leq \frac{b}{2h}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{2h} \text{ bắt đầu lật và } \operatorname{tg} \alpha > \frac{b}{2h} \text{ thì lật.}$$

Do đó sẽ trượt mà không lật khi $f < \operatorname{tg} \alpha < \frac{b}{2h}$ sẽ lật mà không

trượt khi $\frac{b}{2h} < \operatorname{tg} \alpha < f$.

Bài II.57 (hình II.57):

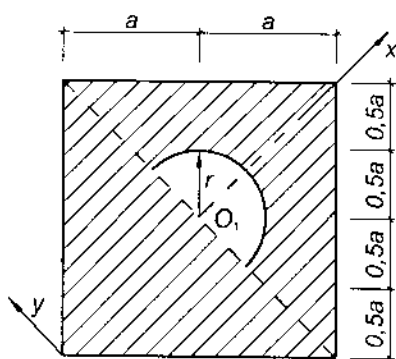
$$a = 3\pi \text{ và } r = 0,5a$$

Chọn hệ trục Oxy như ở hình III.57. Ta có:

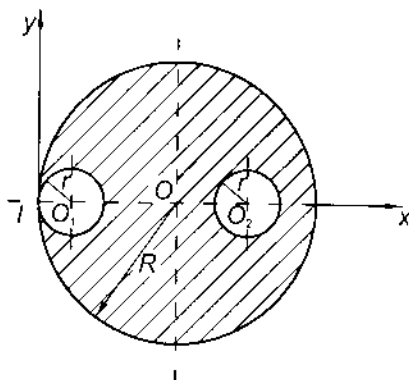
$$S_1 = 4a^2 \quad x_1 = a\sqrt{2}$$

$$S_2 = \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi a^2 \quad x_2 = 2$$

$$x_G = \frac{x_1 S_1 - x_2 S_2}{S_1 - S_2} = 16,1 \text{ cm.}$$



Hình III.57



Hình III.58

Bài II.58 (hình III.58):

Chọn hệ trục Ixy như ở hình III.58.

Với $R = 40\text{cm}$, $r = 10\text{cm}$

$$S = \pi R^2 = \pi 40^2 = 1600\pi \quad x = 40 \text{ cm}$$

$$S_1 = S_2 = \pi r^2 = \pi 10^2 = 100\pi$$

$$x_1 = 10 \text{ cm và } x_2 = 60 \text{ cm}$$

Ta có:
$$x_C = \frac{xS - x_1S_1 - x_2S_2}{S - S_1 - S_2} = 40,7 \text{ cm}$$

Bài II.59 (hình III.59):

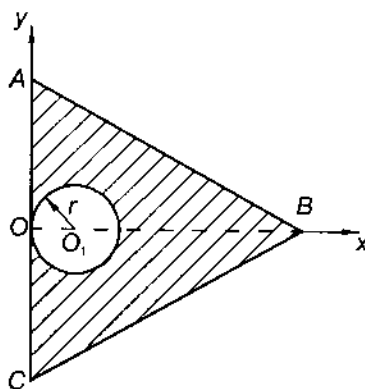
Cho cạnh $a = 40 \text{ cm}$ và $r = 10 \text{ cm}$.

Chọn hệ Oxy như ở hình III.59. Ta có:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{và} \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ cm}$$

$$S_1 = \pi r^2 \quad x_1 = 10 \text{ cm}$$

$$x_C = \frac{xS - x_1S_1}{S - S_1} = 12,84 \text{ cm}$$



Hình III.59

Bài II.60 (hình III.60):

Chia tiết diện thành hai hình chữ nhật $OBDF$ và $ACEF$ và ký hiệu là hình (1) và (2).

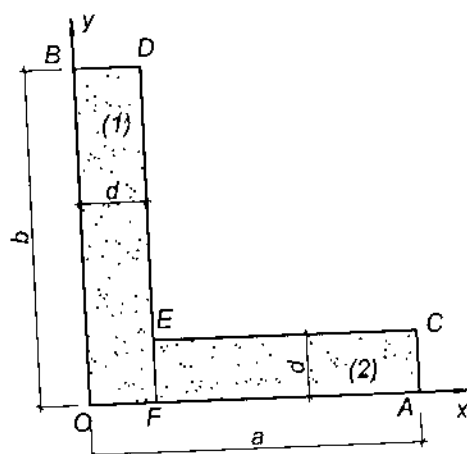
Ta có:
$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{\sum S_k}$$

$$y_C = \frac{\sum S_k y_k}{\sum S_k}$$

Diện tích $S_1 = db$.

Trọng tâm hình (1) là $x_1 = \frac{d}{2}$ và $y_1 = \frac{b}{2}$.

Diện tích $S_2 = (a - d)d$.



Hình III.60

Trọng tâm hình (2):

$$x_2 = d + \frac{a-d}{2} \text{ và } y_2 = \frac{d}{2}$$

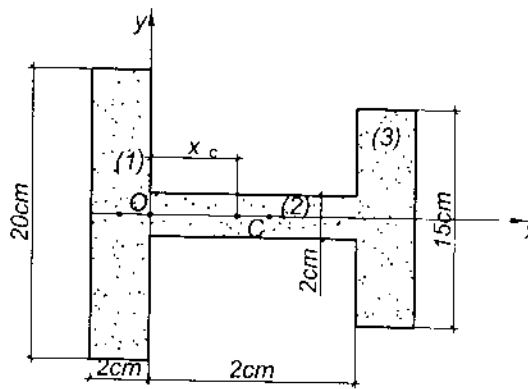
$$x_C = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2} = \frac{a.d.\frac{d}{2} + \frac{(a-d)^2 d}{2}}{bd + ad - d^2} + (a-d)d^2$$

$$x_C = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a + b - d)}$$

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2} = \frac{b.d.\frac{b}{2} + (a-b)d.\frac{d}{2}}{(a+b-d)d}$$

$$y_c = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

Bài II.61 (hình III.61):



Hình III.61

Chia tiết diện thành ba hình chữ nhật (1), (2) và (3).

Chọn tọa độ như ở hình II.61. Ta có:

$$S_1 = 20.2 = 40 \text{ cm}^2$$

$$x_1 = -1 \text{ cm}$$

$$S_2 = 20.2 = 40 \text{ cm}^2$$

$$x_2 = 10 \text{ cm}$$

$$S_3 = 15.2 = 30 \text{ cm}^2 \quad (x_3 = 21 \text{ cm})$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 40 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2 + 30 \text{ cm}^2 = 110 \text{ cm}^2$$

$$x_c = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{-40 + 400 + 630}{110} = 9 \text{ cm}.$$

PHẦN HAI

ĐỘNG HỌC

A. MỞ ĐẦU

Động học là phần thứ hai của Cơ học lý thuyết, mà trong đó nghiên cứu chuyển động của vật thể nhưng không quan tâm đến khối lượng và lực tác dụng, tức là chỉ nghiên cứu chuyển động về mặt hình học. Kết quả nhận được trong phần này là vô cùng quan trọng vì:

- Nó là cơ sở chính xác và cần thiết phục vụ cho các nghiên cứu hoàn chỉnh về chuyển động trong phần động lực học
- Nó phục vụ cho các bài toán kỹ thuật và công nghệ khi chỉ cần thiết lập các mối quan hệ thuần túy về động học

Do vật thể quanh ta vô cùng đa dạng về hình học nên để thuận tiện người ta phải mô hình hóa đối tượng nghiên cứu. Hai mô hình động học được sử dụng trong phần này là:

- Động điểm** là điểm hình học chuyển động trong không gian theo thời gian. Nó là mô hình được sử dụng để nghiên cứu chuyển động của các vật thể có kích thước nhỏ so với phạm vi khảo sát
- Vật rắn chuyển động** là tập hợp vô số động điểm có khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ không đổi trong suốt quá trình chuyển động. Để đơn giản khi trình bày ta thường gọi tắt động điểm là điểm và vật rắn chuyển động là vật rắn.

Chuyển động là sự thay đổi vị trí trong không gian theo thời gian. Không gian và thời gian lại là hai khái niệm rất rộng và phong phú. Vì

vậy trong phần này ta hạn chế quan niệm để hiểu các chuyển động cần khảo sát là:

- Nghiên cứu chuyển động là xác định vị trí và các đặc trưng động học của điểm hay vật rắn so với vật chọn làm hệ quy chiếu. Trong đó hệ quy chiếu gắn chặt vào mặt đất là quan trọng và thường được sử dụng.
- Hệ trục tọa độ là hệ tọa độ nào đó được gắn vào hệ quy chiếu để thuận tiện khi tính toán.
- Thời gian được quan niệm là thời gian trôi đều và tại một lúc xác định nào đó gọi là thời điểm.

B. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG ĐỘNG HỌC

Để xác định vị trí của điểm hay vật cần phải có các thông số xác định vị trí gọi là thông số định vị. Các thông số này thay đổi theo thời gian và mối liên hệ giữa các thông số ấy được gọi là phương trình chuyển động. Chẳng hạn: một điểm chuyển động trong mặt phẳng cần biết hai thông số (x, y) và phương trình chuyển động là mối liên hệ:

$$x = x(t); y = y(t)$$

- Vận tốc thường ký hiệu là $\vec{V}$ là đại lượng nói lên hướng và tốc độ chuyển động của điểm. Khi vật chuyển động quay ta có khái niệm vận tốc góc ký hiệu là $\vec{\omega}$.
- Gia tốc là đại lượng đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc, thường ký hiệu là $\vec{W}$ cho điểm và $\vec{\epsilon}$ là gia tốc góc của vật chuyển động quay.
- Quỹ đạo chuyển động của điểm là quỹ tích các vị trí của động điểm trong một hệ quy chiếu xác định nào đó.

Xác định các đặc trưng động học của điểm hay vật là nội dung cơ bản nhất trong phần động học mà chúng ta lần lượt nghiên cứu trong các chương (từ chương 6 đến chương 9).

Chương 6

ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Trong chương này chúng ta nghiên cứu chuyển động của điểm trong hệ quy chiếu đã xác định. Có nhiều phương pháp khác nhau để khảo sát chuyển động của điểm, song ba phương pháp thường được sử dụng là: *phương pháp vectơ, phương pháp tọa độ Đề các và phương pháp tọa độ tự nhiên.*

§6.1. PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

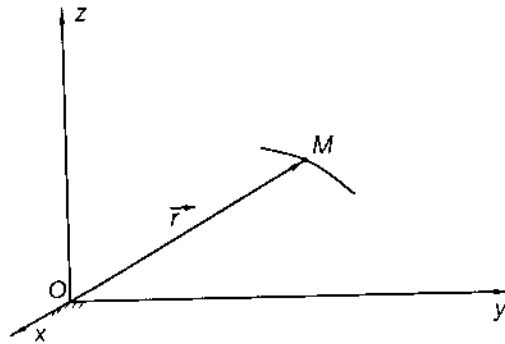
Phương pháp vectơ là phương pháp tổng quát nhất để khảo sát chuyển động. Tính ưu việt nổi bật của phương pháp này là: các đặc trưng động học được biểu diễn đơn giản, dễ hiểu và chính xác dưới dạng vectơ. Vì vậy phương pháp này thường xuyên được sử dụng để nghiên cứu về mặt lý thuyết cho cả chương này cũng như các chương sau:

6.1.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Ta hãy khảo sát chuyển động của điểm M trong hệ quy chiếu cố định $Oxyz$ (hình 6.1). Tại mỗi thời điểm vị trí của điểm M sẽ hoàn toàn được xác định bởi vectơ $\vec{r} = \overline{OM}$. Vectơ $\vec{r}$ được gọi là vectơ định vị của điểm M trong hệ quy chiếu $Oxyz$. Khi điểm M chuyển

động, vectơ $\vec{r}$ sẽ biến thiên liên tục theo thời gian cả về hướng và độ dài. Nó là hàm số của thời gian t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (6.1)$$



Hình 6.1

Phương trình (6.1) là phương trình chuyển động của điểm M viết dưới dạng vectơ. Đồng thời phương trình (6.1) cũng là phương trình quỹ đạo của điểm M trong hệ $Oxyz$ viết dưới dạng tham số. Quỹ tích các điểm ngọn của vectơ định vị $\vec{r}$ trong hệ $Oxyz$ chính là quỹ đạo của điểm M .

6.1.2. VẬN TỐC CỦA ĐIỂM

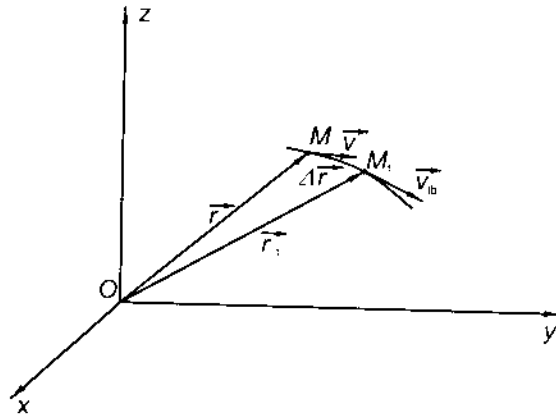
Vectơ vận tốc của điểm là đại lượng đặc trưng cho sự biến đổi của vectơ định vị $\vec{r}$ theo thời gian. Do vậy để xác định vectơ vận tốc chúng ta cần khảo sát sự thay đổi của $\vec{r}$ ở lân cận thời điểm t nào đó.

Giả sử tại thời điểm t , động điểm ở vị trí M được xác định bởi vectơ định vị $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Tại thời điểm lân cận $t_1 = t + \Delta t$ động điểm ở vị trí lân cận M_1 được xác định bởi vectơ định vị $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1}$ (hình 6.2)

Vectơ $\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \overrightarrow{\Delta r}$ mô tả gần đúng hướng đi và quãng đường đi của điểm M trong khoảng thời gian nhỏ Δt và được gọi là vectơ dịch chuyển. Tỷ số $\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ ký hiệu là $\overrightarrow{V_{tb}}$, gọi là vận tốc trung bình của điểm M trong khoảng thời gian Δt . Khi Δt càng nhỏ thì $\overrightarrow{V_{tb}}$ càng biểu diễn chính xác vectơ vận tốc trong khoảng Δt và khi $\Delta t \rightarrow 0$, $\overrightarrow{V_{tb}}$ sẽ tiến đến vận tốc tức thời của điểm M tại thời điểm t . Ký hiệu là $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6.2)$$



Hình 6.2

Như vậy, vectơ vận tốc tức thời của điểm M bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vectơ định vị $\vec{r}$.

Để biểu diễn gọn hơn người ta dùng dấu chấm thay cho ký hiệu đạo hàm theo thời gian:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \dots \text{ Khi đó } \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

Từ (6.2) ta nhận thấy đơn vị đo vận tốc của điểm M là: $\frac{\text{Độ dài}}{\text{Thời gian}}$,

chẳng hạn mét/giây (ký hiệu m/s) hoặc (km/h).

Từ hình 6.2 ta nhận thấy $\overrightarrow{\Delta r}$ và $\overrightarrow{V_{tb}}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MM_1}$, khi M_1 dần đến M : cát tuyến $\overrightarrow{MM_1}$ dần đến tiếp tuyến tại M , vì vậy vận tốc tức thời của điểm M luôn hướng theo tiếp tuyến với quỹ đạo tại M .

6.1.3. GIA TỐC CỦA ĐIỂM

Vecto gia tốc của động điểm M đặc trưng cho sự biến đổi của vectơ vận tốc $\vec{V}$. Do vậy tương tự như đối với vận tốc, để xác định gia tốc, chúng ta khảo sát sự biến đổi của vận tốc tại lân cận thời điểm t .

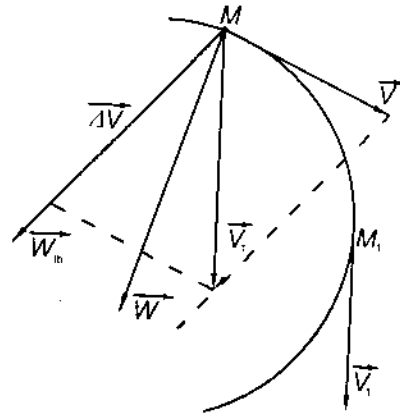
Giả sử tại thời điểm t điểm ở vị trí M , vận tốc được xác định là $\vec{V}$.

Ở thời điểm lân cận $t_1 = t + \Delta t$ động điểm tại vị trí M_1 , vận tốc là $\vec{V}_1$ (hình 6.3).

$\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$ đặc trưng cho biến đổi vận tốc trong khoảng thời gian nhỏ Δt . Tỷ số $\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ ký

hiệu là $\overrightarrow{W_{tb}}$, gọi là gia

tốc trung bình của điểm M trong khoảng thời gian Δt . Và khi Δt dần đến không $\overrightarrow{W_{tb}}$ sẽ dần tới gia tốc tức thời tại thời điểm t và ký hiệu là $\vec{W}$.



Hình 6.3

$$\overline{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \dot{\overline{V}}$$

$$\text{hay} \quad \overline{W} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = \ddot{\overline{r}} \quad (6.3)$$

Đơn vị để đo gia tốc là độ dài/(thời gian)². Chẳng hạn: m/s² hay km/h².

Về mặt hình học: Từ hình 6.3 ta nhận thấy $\Delta \overline{V}$ và $\overline{W}_{tb}$ luôn hướng về phía lõm của đường cong quỹ đạo. Do vậy gia tốc tức thời của điểm M trong trường hợp tổng quát cũng có hướng như vậy.

Trên đây chúng ta đã sử dụng vectơ và đạo hàm vectơ để biểu diễn các đặc trưng động học của điểm M . Căn cứ vào $\overline{V}$ và $\overline{W}$ có thể xác định được tính chất chuyển động của điểm M là nhanh dần, chậm dần hay đều.

Nếu điểm chuyển động nhanh dần thì $\overline{V}$ tăng, do đó $\overline{V}^2 = \overline{V} \cdot \overline{V}$ tăng dần theo thời gian. Từ đó suy ra $\frac{d}{dt}(\overline{V})^2 = 2\overline{V} \cdot \overline{W} > 0$. Vậy:

- Nếu $\overline{V} \cdot \overline{W} > 0$ thì M chuyển động nhanh dần;
- Nếu $\overline{V} \cdot \overline{W} < 0$ thì M chuyển động chậm dần;
- Nếu $\overline{V} \cdot \overline{W} = 0$ thì M chuyển động đều (vận tốc không đổi).

§6.2. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

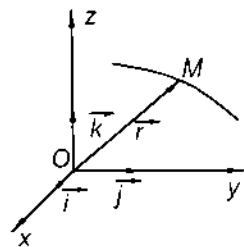
Với phương pháp này người ta khảo sát chuyển động của điểm M trong hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ (hình 6.4). Tính ưu việt nổi bật của phương pháp này là dễ dàng xác định được các đặc trưng động học của điểm M về định tính và định lượng. Do vậy phương pháp này được sử dụng cho cả nghiên cứu lý thuyết cũng như giải các bài toán cụ thể.

6.2.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Vị trí của điểm M trong hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ sẽ hoàn toàn xác định nếu biết ba tọa độ x, y, z . Khi điểm M chuyển động các tọa độ này sẽ thay đổi liên tục theo thời gian và là các hàm vô hướng của t :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Phương trình (6.4) là phương trình chuyển động của điểm M trong tọa độ Đề các $Oxyz$. Đồng thời phương trình này cũng là phương trình quỹ đạo viết dưới dạng tham số của thời gian t . Khi khử t từ (6.4) ta nhận được phương trình quỹ đạo dưới dạng thông thường.



Hình 6.4

6.2.2. VẬN TỐC

Ta gọi vận tốc tức thời của động điểm M là $\vec{V}$ và hình chiếu của vectơ vận tốc lên ba trục tọa độ Đề các là V_x, V_y, V_z . Với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị của ba trục tọa độ. Ta đã biết

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (a)$$

Mặt khác

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (b)$$

Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ hằng số. Chiếu hai vế của (b) lên các trục tọa độ Đề các ta có:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (6.5)$$

Vậy hình chiếu vectơ vận tốc của điểm lên một trục tọa độ nào đó bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của tọa độ tương ứng. Biết hình chiếu của vectơ vận tốc $\vec{V}$ ta tìm được giá trị của $\vec{V}$ theo công thức:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (6.6)$$

Gọi α, β, γ là góc hợp bởi $\vec{V}$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz thì :

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}; \quad \cos \beta = \frac{V_y}{V}; \quad \cos \gamma = \frac{V_z}{V} \quad (6.7)$$

Các giá trị này còn gọi là cosin chỉ phương của vectơ vận tốc.

6.2.3. GIA TỐC

Hoàn toàn tương tự như xác định vận tốc. Gọi hình chiếu của vectơ gia tốc tức thời lên các trục tọa độ là W_x, W_y, W_z và sử dụng kết

quả của phân thức $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ ta nhận được:

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ W_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ W_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Vậy hình chiếu vectơ gia tốc của điểm lên một trục tọa độ nào đó bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian hình chiếu vectơ vận tốc lên trục ấy hay đạo hàm bậc hai theo thời gian của tọa độ tương ứng

Giá trị và hướng của vectơ gia tốc được xác định theo công thức:

$$|\vec{W}| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (6.9)$$

Gọi $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ là góc hợp bởi $\vec{W}$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz thì :

$$\cos \alpha_1 = \frac{W_x}{W}; \cos \beta_1 = \frac{W_y}{W}; \cos \gamma_1 = \frac{W_z}{W} \quad (6.10)$$

§6.3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TỰ NHIÊN

Phương pháp tọa độ tự nhiên được sử dụng để nghiên cứu chuyển động của điểm khi đã biết đường cong quỹ đạo của nó. Bằng phương pháp này các đặc trưng động học được mô tả bởi các đại lượng có liên quan mật thiết với các tính chất hình học của đường cong quỹ đạo. Do vậy nó giúp ta quan sát chuyển động của điểm một cách dễ dàng nếu ta tưởng tượng đứng tại điểm chuyển động trên đường cong quỹ đạo đã biết

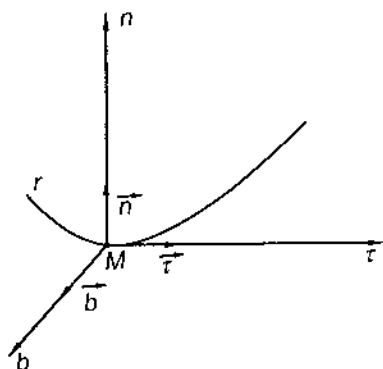
Dựa vào hình học vi phân ta lập hệ tọa độ tự nhiên có gốc tọa độ ở M với các trục tiếp tuyến thuận, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến. Các vectơ đơn vị trên các trục này lần lượt ký hiệu là $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ (hình 6.5). Chúng lập thành tam diện thuận $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$. Mặt phẳng chứa các vectơ đơn vị $\vec{\tau}, \vec{n}$ được gọi là mặt phẳng tiếp.

6.3.1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Trên đường cong quỹ đạo ta chọn điểm O cố định làm gốc và định chiều dương cho quỹ đạo về một phía của gốc O . Vị trí của M trên quỹ đạo sẽ hoàn toàn xác định khi biết cung $OM = S$. Do đó S được gọi là tọa độ cong hay hoành độ cong của M . Khi M chuyển động thì S biến đổi liên tục theo thời gian t :

$$S = S(t) \quad (6.11)$$

Phương trình (6.11) là phương trình chuyển động của điểm M trong tọa độ tự nhiên.

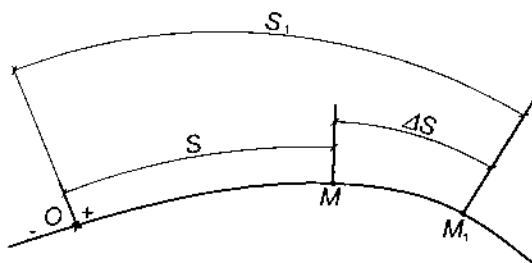


Hình 6.5

6.3.2. VẬN TỐC CỦA ĐIỂM

Để xác định vận tốc ta xét sự biến thiên của tọa độ cong S .

Giả sử tại thời điểm t động điểm ở M , vị trí được xác định bởi cung $OM = S$. Tại thời điểm lân cận $t_1 = t + \Delta t$ động điểm ở tại M_1 , vị trí được xác định bởi cung $OM_1 = S_1 = S + \Delta S$ (hình 6.6).



Hình 6.6

Tỷ số $\frac{\Delta S}{\Delta t} = V_{tb}$ là giá trị trung bình của vận tốc trong khoảng thời gian Δt . Giá trị của vận tốc tức thời tại thời điểm t được xác định:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \quad (6.12)$$

Vậy giá trị vận tốc của điểm tại thời điểm t nào đó bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của tọa độ cong S trên quỹ đạo.

Như đã biết ở trên, phương của vectơ vận tốc $\vec{V}$ luôn luôn tiếp tuyến với đường cong quỹ đạo tại M . Do đó chiều của vectơ vận tốc $\vec{V}$ phụ thuộc vào dấu của giá trị $V = \dot{S}$:

- Nếu $\dot{S} > 0$ thì $\vec{V}$ hướng theo chiều dương của quỹ đạo;
- Nếu $\dot{S} < 0$ thì $\vec{V}$ hướng theo chiều âm của quỹ đạo.

$$\text{Nên} \quad \vec{V} = \dot{S} \vec{\tau} \quad (6.13)$$

6.3.3. GIA TỐC CỦA ĐIỂM

Từ biểu thức $\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, nên khi đạo hàm biểu thức (6.13) theo t ta được:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{S}\vec{\tau}) = \frac{d\dot{S}}{dt}\vec{\tau} + \dot{S}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Trong hệ tọa độ tự nhiên người ta đã chứng minh được

$$\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \frac{1}{\rho} \vec{n},$$

ở đây: ρ – bán kính cong của quỹ đạo.

Vì vậy:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dS}{dt} \times \frac{d\vec{\tau}}{dS} = \dot{S} \frac{1}{\rho} \vec{n}$$

$$\rightarrow \vec{W} = \frac{d\dot{S}}{dt} \vec{\tau} + \dot{S} \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{S} \vec{\tau} + \dot{S} \times \dot{S} \frac{1}{\rho} \vec{n} = \ddot{S} \vec{\tau} + \frac{\dot{S}^2}{\rho} \vec{n}$$

$$\rightarrow \vec{W} = \ddot{S} \vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n} = W_{\tau} \vec{\tau} + W_n \vec{n}$$

Với

$$W_{\tau} = \ddot{S} = \frac{dV}{dt}; \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}$$

Vậy gia tốc của điểm trong hệ tọa độ tự nhiên gồm hai thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến chính:

- $W_t = \frac{dV}{dt}$ gọi là gia tốc tiếp, nằm trên tiếp tuyến của quỹ đạo, đặc trưng cho sự biến đổi giá trị của vận tốc theo thời gian;
- $W_n = \frac{V^2}{\rho}$ luôn luôn dương nằm trên pháp tuyến chính, gọi là gia tốc pháp tuyến, đặc trưng cho sự thay đổi phương của vận tốc.

Vì trục tiếp tuyến và pháp tuyến chính vuông góc với nhau, mà

$$\vec{W} = \vec{W}_t + \vec{W}_n \text{ và } \vec{W}_t \perp \vec{W}_n, \text{ nên } W = \sqrt{W_t^2 + W_n^2} = \sqrt{\dot{S}^2 + \left(\frac{\dot{S}^2}{\rho}\right)^2} \quad (6.14)$$

6.3.4. CÁC CHUYỂN ĐỘNG ĐẶC BIỆT

Các chuyển động đặc biệt được phân tích trên cơ sở các dạng đặc biệt của đường cong quỹ đạo và giá trị của vận tốc, gia tốc mà ta thường gặp trong đời sống kỹ thuật.

a) Chuyển động thẳng

Chuyển động thẳng là chuyển động có quỹ đạo là một đường thẳng. Hai trường hợp đặc biệt thường gặp trong chuyển động thẳng:

- Chuyển động thẳng đều là chuyển động thẳng có vận tốc là hằng số ($V = \text{const}$). Quãng đường đi S được xác định theo công thức:

$$S = S_0 + Vt, \quad (6.15)$$

trong đó: S_0 - tọa độ ban đầu khi $t = 0$.

- Chuyển động thẳng biến đổi đều là chuyển động thẳng có giá trị gia tốc không đổi ($W = \text{const}$). Nếu giá trị của gia tốc dương thì

ta có chuyển động nhanh dần đều, ngược lại ta có chuyển động chậm dần đều. Trong trường hợp này ta có công thức xác định vận tốc và quãng đường đi được tại thời gian t nào đó:

$$V = V_0 + Wt; S = S_0 + V_0 t + W \frac{t^2}{2} \quad (6.16)$$

b) Chuyển động cong phẳng

Chuyển động cong phẳng là chuyển động có quỹ đạo là đường cong phẳng. Ta có hai dạng chuyển động cong phẳng thường gặp:

- Chuyển động cong đều là chuyển động cong có giá trị vận tốc không đổi ($V = \text{const}$). Trường hợp này quãng đường đi được tính theo công thức:

$$S = S_0 + Vt \quad (6.17)$$

- Chuyển động cong biến đổi đều (có thể là nhanh dần đều hay chậm dần đều) là chuyển động cong có giá trị gia tốc tiếp không đổi ($W_t = \text{const}$). Trong trường hợp này vận tốc và quãng đường đi được tính theo công thức:

$$V = V_0 + W_t t; S = S_0 + V_0 t \pm W_t \frac{t^2}{2} \quad (6.15a)$$

Quãng đường S mang dấu (+) nếu điểm chuyển động nhanh dần đều và mang dấu (-) khi điểm chuyển động chậm dần đều (S_0 và V_0 là quãng đường và vận tốc ban đầu khi $t = 0$).

Ngoài ra, về mặt các đặc trưng hình học của quỹ đạo người ta còn quan tâm đến một vài dạng đặc biệt của quỹ đạo cong phẳng thường gặp như sau:

- Quỹ đạo là đường tròn bán kính R . Khi đó độ cong $k = \frac{1}{R}$, bán

kính cong là hằng số $\rho = \frac{1}{k} = R$ và $W_n = \frac{V^2}{R}$.

- Quỹ đạo cong là đường elíp có hai bán trục a và b được mô tả bởi phương trình quỹ đạo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

§6.4. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Một điểm chuyển động theo hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} x &= 6t^2 + 1 \\ y &= 3t^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

(x tính bằng mét, t tính bằng giây)

Hãy xác định:

- Quỹ đạo chuyển động của điểm;
- Giá trị và hướng của vectơ vận tốc;
- Giá trị và hướng của vectơ gia tốc.

Bài giải:

- Khử t từ hệ phương trình chuyển động (a) ta nhận được phương trình quỹ đạo:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

Quỹ đạo là một phần của đường thẳng được mô tả trên hình (hình 6.7). Động điểm xuất phát từ $M_0(1, -1)$ (ứng với thời điểm xuất phát $t = 0$) và chuyển động theo hướng M_0P đi dần ra xa vô tận khi thời gian t tăng dần.

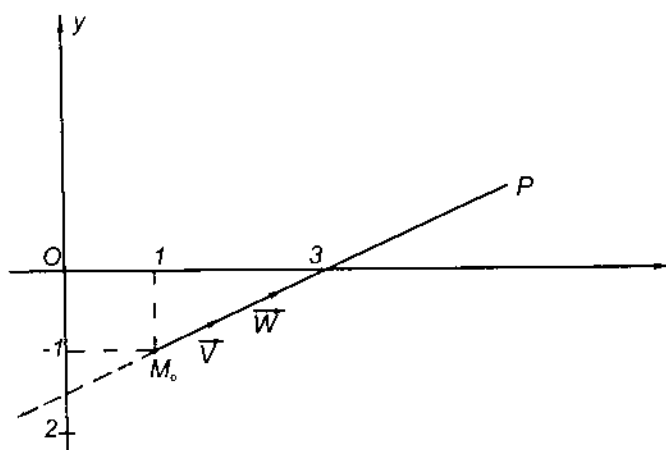
- Vận tốc được xác định:

$$V_x = \dot{x} = 12t ;$$

$$V_y = \dot{y} = 6t ;$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 6\sqrt{5} \cdot t \text{ (m/s)}.$$

Với $t > 0$, V_x và $V_y > 0$ do vậy $\vec{V}$ luôn có chiều như trên hình (hình 6.7).



Hình 6.7

c) Gia tốc được xác định:

$$W_x = \ddot{x} = 12 \text{ m/s}^2;$$

$$W_y = \ddot{y} = 6 \text{ m/s}^2.$$

Do vậy $|\vec{W}| = 6\sqrt{5} \text{ m/s}^2$. Do W_x và W_y luôn mang dấu dương nên chiều của vectơ gia tốc luôn có chiều mô tả như trên hình 6.7.

Ví dụ 2: Chuyển động của điểm theo đường xoắn ốc mô tả bởi hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -2t^2 + 1 \\ z &= t^2 - t \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

(x, y, z tính bằng mét; t tính bằng giây). Hãy xác định các thành phần gia tốc và bán kính cong ρ theo thời gian t .

Bài giải: Từ hệ phương trình chuyển động (b) ta nhận được:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = -4t \\ \dot{z} = 2t - 1 \end{cases}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{20t^2 - 4t + 5} \quad (\text{m/s})$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -4 \\ \ddot{z} = 2 \end{cases}$$

$$|\vec{W}| = 2\sqrt{5} \quad (\text{m/s}^2)$$

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{2(10t - 1)}{\sqrt{20t^2 - 4t + 5}}$$

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \frac{dV}{dt} = \sqrt{\frac{96}{20t^2 - 4t + 5}}$$

Bán kính cong

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{(20t^2 - 4t + 5)^{3/2}}{\sqrt{96}}$$

Như vậy điểm chuyển động với giá trị gia tốc toàn phần là hằng số nhưng vận tốc, gia tốc tiếp tuyến, gia tốc pháp tuyến và bán kính cong quỹ đạo phụ thuộc vào thời gian t .

Ví dụ 3: Một điểm chuyển động trong mặt phẳng theo hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = a \sin t \\ y = 2a \cos 2t \end{cases} \quad (c)$$

(a là hằng số, t là thời gian).

Xác định quỹ đạo và phân tích chuyển động trên quỹ đạo

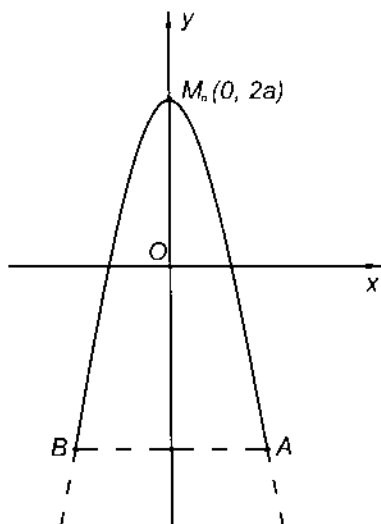
Bài giải: Từ hệ phương trình chuyển động (c) ta có:

$$y = 2a \cos 2t = 2a(1 - 2\sin^2 t) = 2a - \frac{4}{a}x^2$$

Quỹ đạo chuyển động là một phần của parabol mô tả trên hình 6.8. Giới hạn của parabol được xác định từ phương trình chuyển động đã cho:

$$|x| \leq a; |y| \leq 2a$$

Ban đầu động điểm xuất phát từ $M_0(0, 2a)$ sau đó chuyển động về phía điểm A và tới A lúc $t_1 = \frac{\pi}{2}$. Tiếp đó điểm chuyển động ngược lại qua M_0 lúc $t_2 = \pi$ và tới điểm B lúc $t_3 = \frac{3\pi}{2}$ rồi lại quay lại M_0 lúc $t_4 = 2\pi$. Quá trình chuyển động tiếp theo được lặp lại như đã nêu và điểm chuyển động tuần hoàn với chu kỳ 2π .



Hình 6.8

Ví dụ 4: Vật A chuyển động theo phương thẳng đứng nhờ lỏng vào thanh đứng cố định và nối với sợi dây mềm vắt qua ròng rọc O . Sau đó truyền cho đầu dây B một vận tốc u (u là hằng số). Hãy xác định vận tốc, gia tốc của A theo u và x (hình 6.9).

Bài giải: Xét tam giác vuông OAH ta có:

$$x = \sqrt{OA^2 - a^2}; OA = AB - ut \quad (a)$$

Do vậy:

$$x = \sqrt{(AB - ut)^2 - a^2} \quad (b)$$

Vận tốc điểm A :

$$V = \frac{dx}{dt} = -\frac{u(AB - ut)}{\sqrt{(AB - ut)^2 - a^2}}$$

Từ (b) ta suy ra:

$$AB = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Do vậy:

$$V_A = V = -\frac{u}{x} \sqrt{a^2 + x^2}$$

Gia tốc điểm A:

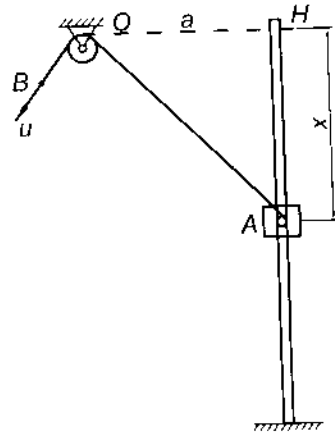
$$W = \frac{dV}{dt} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{u}{x} \sqrt{a^2 + x^2} \right]$$

Tính đạo hàm và chú ý:

$$\dot{x} = V = -\frac{u}{x} \sqrt{a^2 + x^2}$$

Ta nhận kết quả:

$$W_A = W = \frac{dV}{dt} = -\frac{u^2 a^2}{x^3}$$



Hình 6.9

Chương 7

CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

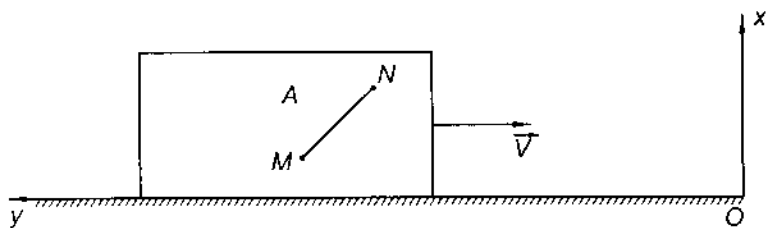
Trong chương này chúng ta khảo sát hai dạng chuyển động cơ bản nhất của vật rắn: *chuyển động tịnh tiến* và *chuyển động quay quanh trục cố định*. Hai chuyển động này thường hay gặp trong thực tế, trong các ngành kỹ thuật, công nghệ. Những kết quả nghiên cứu trong chương này là cơ sở để khảo sát các dạng chuyển động phức tạp hơn của vật rắn, đồng thời sử dụng để phân tích chuyển động phức tạp thành các dạng chuyển động cơ bản của vật rắn.

§7.1. CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

7.1.1. ĐỊNH NGHĨA

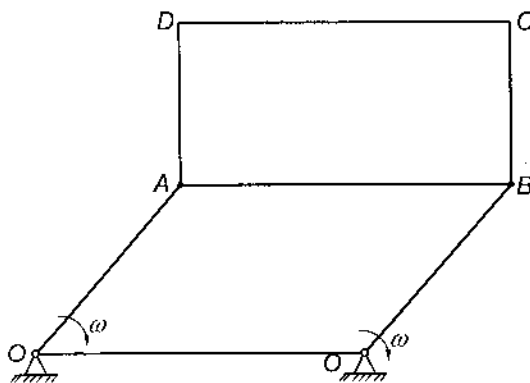
Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động sao cho một đoạn thẳng bất kỳ thuộc vật luôn luôn chuyển động song song với chính nó.

Ví dụ 1: Tấm bảng chữ nhật A trượt trên đường thẳng nằm trong mặt phẳng (xOy). A chuyển động tịnh tiến, vì mọi đoạn thẳng MN bất kỳ luôn chuyển động song song với chính nó (hình 7.1).



Hình 7.1

Ví dụ 2: Tấm phẳng $ABCD$ chuyển động nhờ cơ cấu tay quay 4 khâu (hình 7.2). Tấm $ABCD$ chuyển động tịnh tiến.



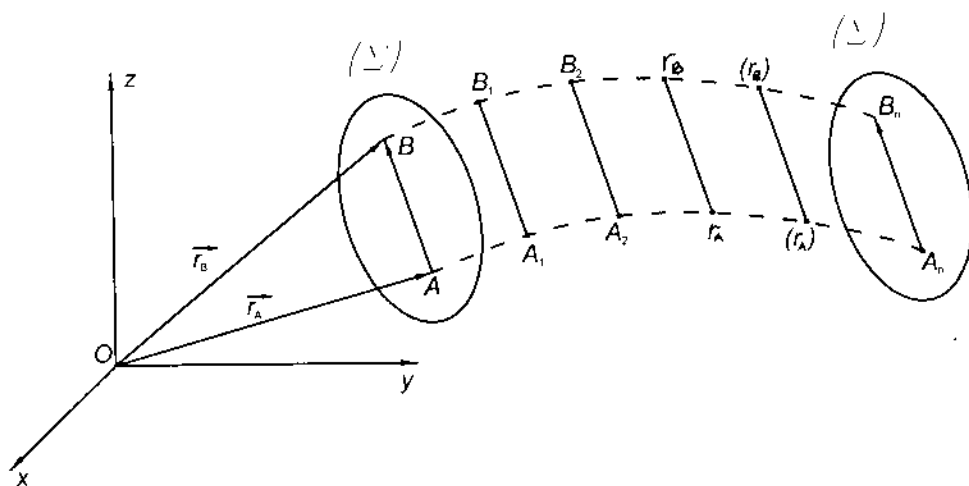
Hình 7.2

7.1.2. TÍNH CHẤT CỦA CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

Định lý: Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi điểm thuộc vật chuyển động giống hệt nhau, nghĩa là tại mỗi thời điểm vận tốc và gia tốc của mọi điểm thuộc vật đều bằng nhau, quỹ đạo của mọi điểm có thể tịnh tiến để trùng khít lên nhau.

Chứng minh: Giả sử vật rắn (Σ) chuyển động tịnh tiến so với hệ quy chiếu ($Oxyz$). Nếu lấy trên vật hai điểm A, B bất kỳ thì $\overline{AB}$ luôn chuyển động song song với chính nó, do vậy $\overline{AB} = \text{const}$. Theo (hình 7.3):

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (a)$$



Hình 7.3

Lần lượt đạo hàm bậc nhất và bậc hai đẳng thức (a) theo thời gian và chú ý $\overrightarrow{AB} = \text{const}$ ta nhận được:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A}; \quad \overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A}. \quad (7.1)$$

Do AB luôn song song với chính nó ($AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \dots$) nên nếu ta tịnh tiến quỹ đạo (Γ) của A sao cho $A \equiv B$ thì $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2, \dots, A_n \equiv B_n$, tức là (Γ_A) trùng khít lên (Γ_B) là quỹ đạo của B .

7.1.3. NHẬN XÉT

Từ các tính chất đặc biệt của chuyển động tịnh tiến ta đi đến kết luận:

- Khảo sát chuyển động tịnh tiến của vật rắn chỉ cần khảo sát chuyển động của một điểm bất kỳ thuộc vật.
- Chuyển động tịnh tiến của vật rắn có thể coi như một điểm chuyển động mà thôi.

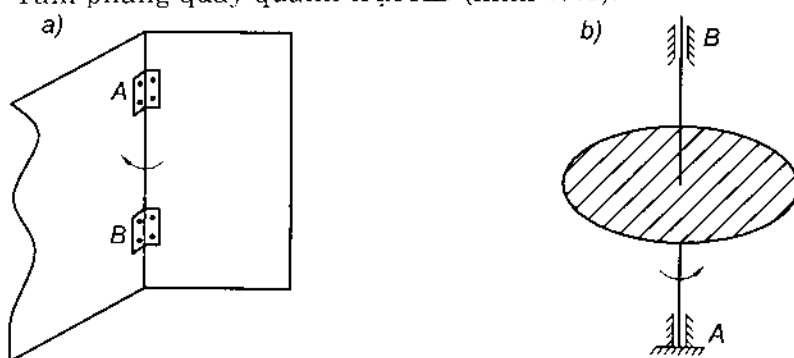
§7.2. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

7.2.1. ĐỊNH NGHĨA

Chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định là một chuyển động mà trong suốt quá trình chuyển động trên vật có 2 điểm luôn luôn đứng yên.

Ví dụ:

- Cánh cửa quay quanh trục đi qua 2 bản lề (hình 7.4a);
- Tấm phẳng quay quanh trục AB (hình 7.4b).



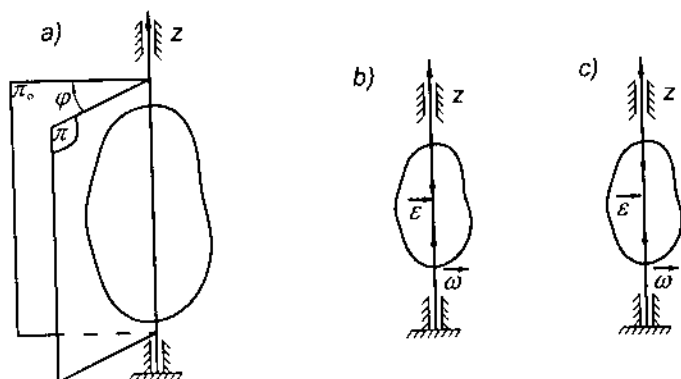
Hình 7.4

7.2.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN

a) Phương trình chuyển động

Giả sử vật rắn quay quanh trục Az (hình 7.5a). Để xác định vị trí của vật tại thời điểm t ta chọn mặt phẳng (π_0) cố định và chứa trục quay làm mặt phẳng gốc. Đồng thời gắn vào vật mặt phẳng (π) chứa trục quay. Khi vật quay mặt phẳng (π) cũng quay theo và vị trí của nó xác định vị trí của vật. Góc nhị diện giữa (π) và (π_0) là góc quay φ của vật. Khi vật quay thì φ biến đổi liên tục theo thời gian t :

$$\varphi = \varphi(t) \quad (7.2)$$



Hình 7.5

Biểu thức (7.2) là phương trình chuyển động quay của vật rắn quanh trục cố định. Góc quay φ thường tính bằng rad hay số vòng quay. Để xác định chiều quay của vật, người ta quy ước góc $\varphi > 0$ nếu từ điểm ngọn của trục quay ta thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ và $\varphi < 0$ khi ngược lại.

b) Vận tốc góc của vật

Để đặc trưng cho chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định người ta đưa vào khái niệm vận tốc góc và gia tốc góc. Sau khoảng thời gian $\Delta t = t_1 - t$ góc quay φ của vật biến đổi một lượng $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$. Ta gọi tỷ số $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{tb}$ là vận tốc góc trung bình của vật trong khoảng thời gian Δt . Khi $\Delta t \rightarrow 0$ thì $\omega_{tb} \rightarrow \omega$ là vận tốc góc của vật tại thời điểm t

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{tb} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (7.3)$$

Vậy vận tốc góc của vật quay quanh trục cố định có giá trị bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của góc quay φ .

Đơn vị để tính vận tốc góc là rad/s hay 1/s hoặc s⁻¹.

Từ (7.3) ta thấy:

- Nếu $\omega > 0$ thì $\dot{\varphi} > 0$ vật quay ngược chiều kim đồng hồ;
- Nếu $\omega < 0$ thì vật quay thuận chiều kim đồng hồ.

Để biểu thị độ nhanh chậm, chiều quay và trục quay (ngay cả khi trục quay di động) người ta biểu diễn vận tốc góc ω bằng vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ (hình 7.5). Đó là vectơ có:

- Phương ở trên trục quay;
- Chiều sao cho từ điểm ngọn của vectơ ấy ta thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ;
- Giá trị bằng $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

Trong kỹ thuật người ta còn biểu diễn vận tốc góc bằng số vòng quay trong một phút, ký hiệu bằng n vòng/phút. Ta có biểu thức liên hệ giữa vận tốc góc ω với n :

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ rad/s}$$

c) Gia tốc góc

Để đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc góc theo thời gian ta có khái niệm gia tốc góc. Ký hiệu ε . Tương tự như đối với vận tốc góc:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad (7.4)$$

Vậy gia tốc góc của vật quay quanh trục cố định có giá trị bằng đạo hàm bậc nhất theo thời gian của vận tốc góc hay đạo hàm bậc hai theo thời gian của góc quay φ .

Đơn vị tính gia tốc góc là rad/s^2 hay $1/\text{s}^2$ hoặc s^{-2} .

Tương tự như vận tốc góc, ta biểu diễn gia tốc góc bằng vectơ $\vec{\varepsilon}$.

Nếu gọi $\vec{k}$ là vectơ đơn vị của trục quay z thì ta có $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Khi đó $\vec{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \varepsilon \vec{k}$. Vậy vectơ gia tốc góc nằm trên trục quay, chiều và giá trị của nó được xác định bởi dấu và giá trị của ε (hình 7.5b).

Để có dấu hiệu nhận biết tính chất của chuyển động quay ta xét dấu $\frac{d}{dt}(\omega^2)$. Vì $\frac{d}{dt}(\omega^2) = 2\omega\varepsilon$ nên ta có kết luận:

- Khi $\varepsilon = 0$ vật rắn quay đều;
- Khi $\omega\varepsilon > 0$ vật rắn quay nhanh dần và khi đó $\vec{\varepsilon}$ cùng chiều với $\vec{\omega}$ (hình 7.5b);
- Khi $\omega\varepsilon < 0$ vật rắn quay chậm dần và $\vec{\varepsilon}$ ngược chiều với $\vec{\omega}$ (hình 7.5c);

d) Các chuyển động quay đặc biệt

- Chuyển động quay đều là chuyển động quay mà vận tốc góc có giá trị không đổi ($\omega_0 = \text{const}$). Vì $\omega = \omega_0 = \text{const}$ cho nên:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (7.5)$$

(φ_0 là góc ban đầu khi $t = 0$)

- Chuyển động quay biến đổi đều là chuyển động quay có gia tốc góc không đổi ($\varepsilon = \text{const}$). Khi đó:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Góc quay φ mang dấu (+) nếu vật quay nhanh dần đều và mang dấu (-) khi vật quay chậm dần đều (ω_0 và φ_0 là vận tốc góc và góc quay ban đầu khi $t = 0$).

7.2.3. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM THUỘC VẬT

Giả sử có vật rắn chuyển động quay quanh trục z cố định. Ta lấy một điểm M bất kỳ trên vật cách trục quay một đoạn $CM = h$. Khi vật quay quanh trục z cố định thì điểm M vạch nên quỹ đạo là một đường tròn tâm C bán kính h nằm trên mặt phẳng đi qua C và vuông góc với trục quay. Vì biết trước dạng quỹ đạo của điểm M

nên ta sử dụng phương pháp tọa độ tự nhiên để phân tích chuyển động của điểm M .

a) Phương trình chuyển động

Chọn một điểm O trên đường tròn tâm C bán kính h làm gốc tọa độ và chọn chiều quay ngược chiều kim đồng hồ làm chiều dương. Vị trí của điểm M được xác định bởi cung

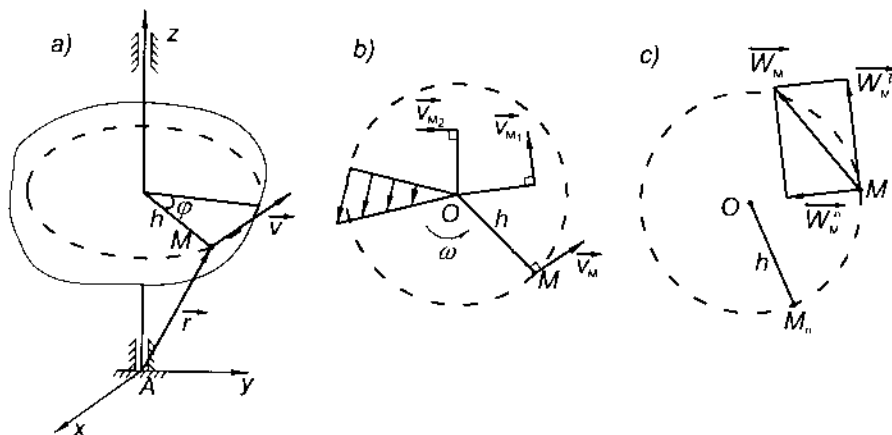
$$OM = S = h\varphi(t) \quad (7.7)$$

b) Vận tốc của điểm

Ta có:

$$V = \dot{S} = h\dot{\varphi} = h\omega \quad (7.8)$$

Vậy vận tốc của điểm bất kỳ trên vật rắn chuyển động quay quanh trục cố định có giá trị bằng tích số vận tốc góc của vật với khoảng cách từ điểm đó đến trục quay.



Hình 7.6

Trên hình 7.6b biểu diễn sự phân bố vận tốc các điểm trên mặt phẳng vuông góc với trục quay Az . Giá trị của vận tốc tỷ lệ với khoảng cách h từ điểm khảo sát đến trục quay.

c) Gia tốc của điểm

Điểm M chuyển động trên đường tròn tâm C bán kính h nên trong trường hợp tổng quát gia tốc của điểm M có hai thành phần:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_M^{\tau} + \vec{W}_M^n$$

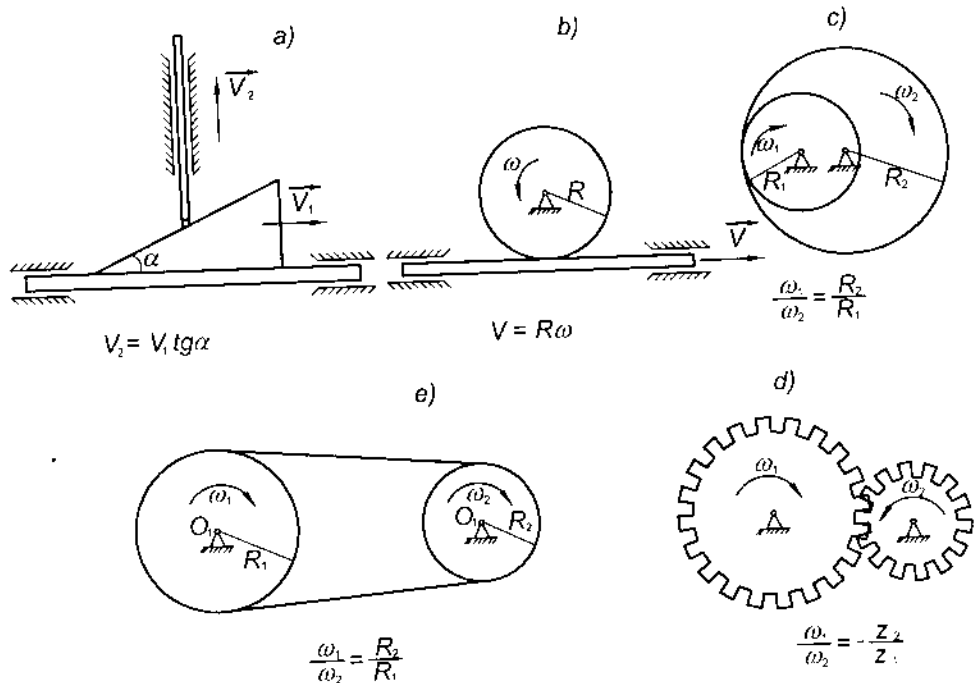
$$W_M^{\tau} = h\varepsilon;$$

$$W_M^n = h\omega^2$$

$$\text{nên} \quad W_M = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (7.9)$$

Từ điểm A trên trục quay ta vẽ vectơ $\vec{AM} = \vec{r}$. Ta có:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r}; \quad \vec{W}_M^{\tau} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} \quad \text{và} \quad \vec{W}_M^n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

7.2.4. KHÁI NIỆM VỀ TRUYỀN CHUYỂN ĐỘNG

Hình 7.7

Chúng ta đã nghiên cứu hai chuyển động cơ bản là chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định. Do nhu cầu của kỹ thuật và công nghệ người ta phải dùng một số cơ cấu để truyền chuyển động. Truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến (hình 7.7a). Truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động quay (hình 7.7b). Truyền chuyển động quay thành chuyển động quay bằng tiếp xúc (hình 7.7c), bằng dây cưa (hình 7.7e), bằng bánh răng (hình 7.7d).

Công thức truyền chuyển động:

$$R_1 \omega_1 = R_2 \omega_2 \rightarrow K_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{R_2}{R_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1} \quad (7.10)$$

trong đó: R_1, R_2 - bán kính;

Z_1, Z_2 - số răng của các bánh răng 1 và 2;

K_{12} - hệ số truyền chuyển động, mang dấu (+) nếu hai bánh răng quay cùng chiều (tiếp xúc trong) và mang dấu (-) nếu hai bánh răng quay ngược chiều (tiếp xúc ngoài).

Ví dụ: Vật A chuyển động trượt theo mặt nghiêng, nhờ sợi dây không giãn truyền chuyển động quay cho bánh xe kép (I), bánh xe kép (I) truyền chuyển động quay cho bánh xe (II) bằng tiếp xúc ngoài (hình 7.8). Tại thời điểm t vật A có vận tốc và gia tốc V_A, W_A . Hãy xác định vận tốc góc của bánh xe (III) và vận tốc, gia tốc của điểm M.

Theo các công thức về truyền chuyển động ta có:

$$\omega_1 = \frac{V_A}{R}; \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{W_A}{R} \quad (a)$$

Chiều của ω_1 và ε_1 thuận theo chiều V_A và W_A

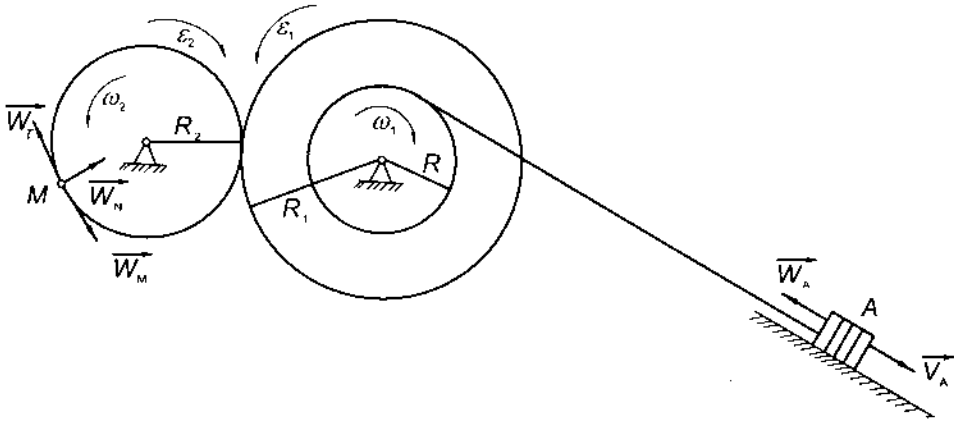
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

$$\text{do đó} \quad \omega_2 = -\frac{\omega_1 R_1}{R_2} \quad \text{và} \quad \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1 R_1}{R_2} \quad (b)$$

Dấu (-) thể hiện các chiều quay ngược nhau.

Từ (a) và (b) ta nhận được giá trị của ω_2 và ε_2

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \frac{V_A}{R}; \quad \varepsilon_2 = \frac{R_1}{R_2} \frac{W_A}{R}$$



Hình 7.8

Vận tốc và gia tốc của M được xác định theo các công thức cơ bản:

$$V_M = R_2 \omega_2 = \frac{R_1}{R} V_A$$

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_\tau} + \overrightarrow{W_n}$$

$$W_\tau = R_2 \varepsilon_2 = \frac{R_1}{R} W_A;$$

$$W_n = R_2 \omega_2^2 = \frac{R_1^2 V_A^2}{R_2 R^2}$$

$$|\overrightarrow{W_M}| = \sqrt{\left(\frac{R_1}{R} W_A\right)^2 + \left(\frac{R_1^2 V_A^2}{R_2 R^2}\right)^2}$$

Như vậy tại mỗi thời điểm các đặc trưng động học của các bánh xe (I) và (II) đều xác định được theo vận tốc và gia tốc của vật A .

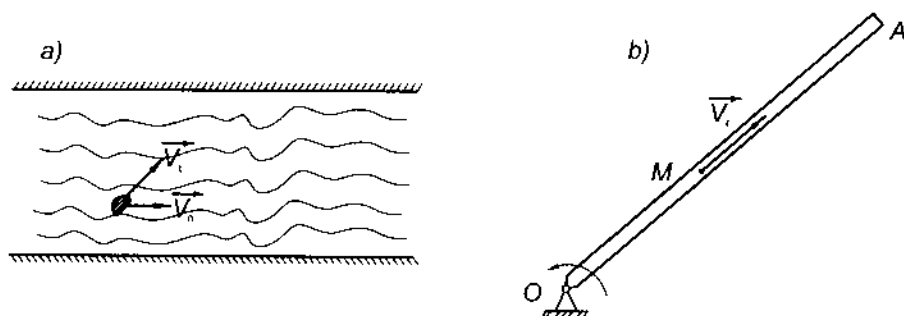
Chương 8

HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Trong chương 6 chúng ta đã khảo sát chuyển động của điểm đối với một hệ quy chiếu cố định. Chương này chúng ta khảo sát chuyển động của điểm đối với một hệ quy chiếu mà hệ quy chiếu này lại chuyển động đối với hệ quy chiếu cố định khác. Trong chương này ta sẽ thiết lập mối quan hệ giữa các đặc trưng động học $\vec{V}, \vec{W}$ của điểm đối với các hệ tọa độ khác nhau. Có thể nêu một vài ví dụ định tính như sau:

Ví dụ 1: Một chiếc thuyền chuyển động so với mặt nước sông, trong khi đó mặt nước lại chuyển động so với bờ sông (hình 8.1a).

Ví dụ 2: Động điểm M chuyển động dọc thanh OA trong khi thanh OA quay quanh điểm O cố định (hình 8.1b).

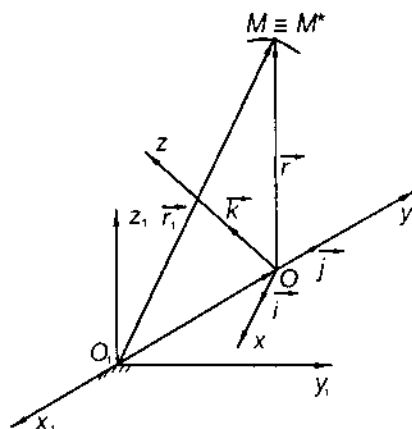


Hình 8.1

§8.1. KHÁI NIỆM VÀ ĐỊNH NGHĨA VỀ CÁC LOẠI CHUYỂN ĐỘNG

Xét chuyển động của điểm M đối với hệ động $Oxyz$, đồng thời hệ tọa độ này cùng với điểm M lại chuyển động đối với hệ tọa độ cố định $O_1x_1y_1z_1$ (hình 8.2).

Định nghĩa 1: Chuyển động của điểm M đối với hệ tọa độ cố định $O_1x_1y_1z_1$ gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động tuyệt đối gọi là vận tốc và gia tốc tuyệt đối. Ký hiệu $\overline{V}_a, \overline{W}_a$.



Hình 8.2

$$\overline{V}_a = \frac{d}{dt}(\overline{O_1M}) = \frac{d\overline{r}_1}{dt} = \dot{\overline{r}}_1 \quad (8.1)$$

$$\overline{W}_a = \frac{d^2(\overline{O_1M})}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_1}{dt^2} = \ddot{\overline{r}}_1 \quad (8.2)$$

Định nghĩa 2: Chuyển động của điểm M đối với hệ tọa độ động $Oxyz$ gọi là chuyển động tương đối. Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động tương đối gọi là vận tốc và gia tốc tương đối. Ký hiệu $\overline{V}_r, \overline{W}_r$.

Ta ký hiệu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị của các trục Ox, Oy, Oz của hệ tọa độ động $Oxyz$. Tọa độ của điểm M trong hệ tọa độ này là x, y, z . Khi đó vectơ xác định vị trí của điểm M trong hệ tọa độ động là:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \overrightarrow{V_r} &= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\end{aligned}\quad (8.3)$$

Các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ hằng

$$\overrightarrow{W_r} = \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (8.4)$$

Định nghĩa 3: Chuyển động của hệ tọa độ động (gọi tắt là hệ động) đối với hệ tọa độ cố định (gọi tắt là hệ cố định) gọi là chuyển động theo. Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động theo gọi là vận tốc và gia tốc theo. Ký hiệu $\overrightarrow{V_e}, \overrightarrow{W_e}$.

Để thiết lập được công thức tính vận tốc theo và gia tốc theo ta đưa vào khái niệm trùng điểm M^* .

Vậy trùng điểm M^* là một điểm cố định nào đó thuộc hệ động mà tại thời điểm khảo sát động điểm M chuyển động đến trùng với nó. Vận tốc và gia tốc của trùng điểm M^* đối với hệ cố định tại thời điểm khảo sát là vận tốc và gia tốc theo:

$$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_{M^*}}; \quad \overrightarrow{W_e} = \overrightarrow{W_{M^*}}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{O_1M^*} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{O_1O} + x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_{M^*}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1O}) + x^*\frac{d\vec{i}}{dt} + y^*\frac{d\vec{j}}{dt} + z^*\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Do:

$x(t) = x^*(t); y(t) = y^*(t); z(t) = z^*(t)$ nên ta có:

$$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_{M^*}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1O}) + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \quad (8.5)$$

$$\overrightarrow{W_e} = \overrightarrow{W_{M^*}} = \frac{d^2}{dt^2}(\overrightarrow{O_1O}) + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \quad (8.6)$$

Khi giải các bài toán áp dụng ta thường dùng chuyển động tương đối của điểm M lại trên hệ động, sau đó tính vận tốc và gia tốc của điểm M do hệ động chuyển động đối với hệ cố định gây ra.

Phân tích các ví dụ:

Trong ví dụ 1 (hình 8.1a):

- Vận tốc và gia tốc của thuyền so với bờ sông là vận tốc và gia tốc tuyệt đối $\vec{V}_a, \vec{W}_a$
- Vận tốc và gia tốc của thuyền so với mặt nước là vận tốc và gia tốc tương đối $\vec{V}_r, \vec{W}_r$
- Vận tốc và gia tốc của nước so với bờ sông là vận tốc và gia tốc theo $\vec{V}_e, \vec{W}_e$

Trong ví dụ 2 (hình 8.1b):

- Quỹ đạo tương đối là đoạn thẳng OA (quỹ tích của các vị trí mà điểm M vẽ trên thanh OA)
- Trùng điểm M^* là điểm cố định thuộc thanh OA mà tại thời điểm khảo sát điểm M chuyển động đến trùng với nó. Trùng điểm luôn luôn thay đổi trên OA .
- Quỹ đạo tuyệt đối là đường xoắn ốc trong mặt phẳng cố định chứa OA .

§8.2. ĐỊNH LÝ HỢP VẬN TỐC

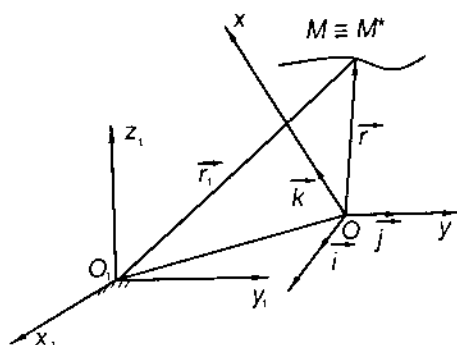
8.2.1. ĐỊNH LÝ

Tại mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học vận tốc tương đối và vận tốc theo:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

Chứng minh: Từ hình 8.3, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1M} &= \vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{O_1M} &= \overrightarrow{O_1O} + \vec{r} = \overrightarrow{O_1O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}\quad (8.7)$$



Hình 8.3

Đạo hàm biểu thức (8.7) theo t ta được:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_1O}) + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Theo (8.1), (8.3) và (8.5) ta được:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad (8.8)$$

Định lý được chứng minh.

8.2.2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ: Dòng sông chảy với vận tốc $\vec{V}$ có giá trị không đổi. Hai bờ sông song song nhau và cách nhau một khoảng h (hình 8.4). Người ta lái một con thuyền qua sông với vận tốc tương đối $\vec{u}$.

Xác định hướng của vận tốc $\vec{u}$ để thời gian sang sông là ngắn nhất. Với điều kiện đó xác định vị trí cập bến của thuyền.

Bài giải: Xét chuyển động của thuyền: hệ cố định Ox_1y_1 . Hệ động là dòng nước. Chuyển động của thuyền đối với bờ sông là chuyển

động tuyệt đối. Chuyển động của thuyền đối với dòng nước là chuyển động tương đối và $\vec{V}_r = \vec{u}$ và $\vec{V}_e = \vec{V}$.

Theo định lý hợp vận tốc

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e = \vec{u} + \vec{V} \quad (*)$$

Chiếu đẳng thức (*) lên các trục O_1x_1 và O_1y_1 , ta có:

$$V_{ax} = u \sin \alpha + V \text{ và } V_{ay} = u \cos \alpha$$

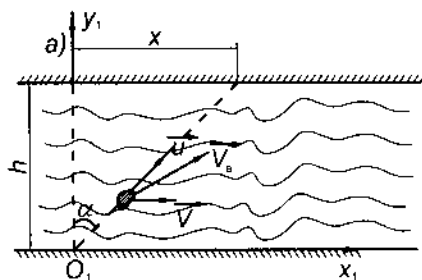
Ta tích phân lên với điều kiện ban đầu:

Khi $t = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ ta được :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = u \sin \alpha + V \rightarrow x = (u \sin \alpha + V)t$$

$$y = (u \cos \alpha)t$$

$$\text{Khi thuyền cập bến thì } y = h = (u \cos \alpha)t \rightarrow t = \frac{h}{u \cos \alpha}$$



Hình 8.4

$$\text{Nếu } \alpha = 0 \text{ thì } \cos \alpha = 1 \rightarrow t_{\min} = \frac{h}{u}$$

Vị trí cập bến của thuyền sẽ lùi xuống phía hạ lưu một đoạn so với vị trí xuất phát là $x = \frac{V}{u} h$.

§8.3. ĐỊNH LÝ HỢP GIA TỐC

8.3.1. ĐỊNH LÝ 1

Tại mỗi thời điểm gia tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học gia tốc tương đối, gia tốc theo và gia tốc Kôriôlit:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_K \quad (8.9)$$

Chứng minh: Theo hình 8.3, ta có:

$$\overline{O_1 M} = \overline{O_1 O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (8.10)$$

Đạo hàm biểu thức (8.10) theo t hai lần. Lúc này x, y, z và $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đều biến đổi. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\overline{O_1 M}) &= \frac{d^2}{dt^2}(\overline{O_1 O}) + x \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} + \\ &\quad + 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right) \end{aligned}$$

Gọi $\overline{W}_K = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\vec{k}}{dt} \right)$ và theo (8.9), (8.10) và (8.6) ta

có điều phải chứng minh:

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_K \quad (8.9)$$

8.3.2. CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH $\overline{W}_K$

Khi hệ động $Oxyz$ chuyển động quay quanh một trục với vận tốc góc $\overline{\omega}_e$ thì ta có:

$$\overline{W}_K = 2\overline{\omega}_e \wedge \overline{V}_r \quad (8.11)$$

Từ (8.11) ta thấy nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thì $\overline{W}_K = 0$.

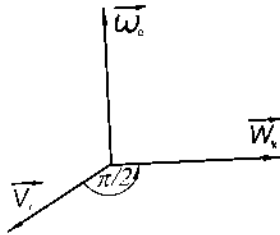
Khi đó: $\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e$ (8.12)

8.3.3. ĐỊNH LÝ 2

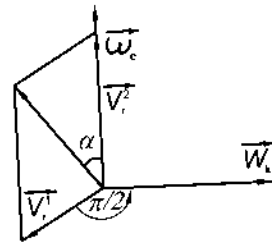
Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thì gia tốc tuyệt đối của điểm tại mỗi thời điểm bằng tổng hình học gia tốc tương đối và gia tốc theo.

Từ (8.11) ta thấy $\overline{W_K} = 0$ khi:

- $\overline{\omega_e} = 0$ hệ động chuyển động tịnh tiến;
- $\overline{V_r} \parallel \overline{\omega_e}$



Hình 8.5



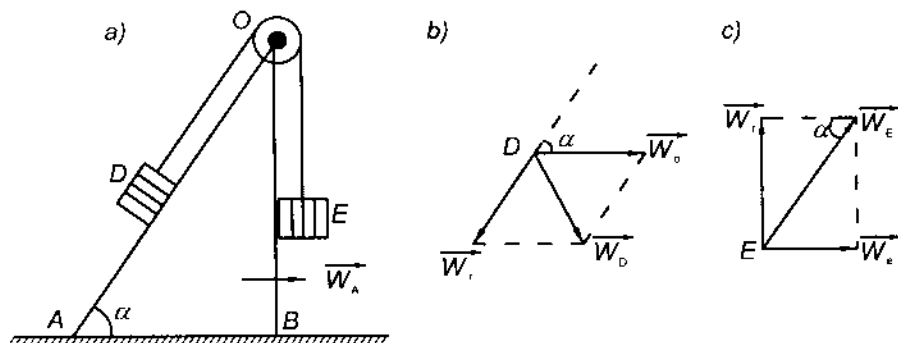
Hình 8.6

Quy tắc thực hành xác định $\overline{W_K}$:

- Trường hợp $\overline{V_r} \perp \overline{\omega_e}$ (hình 8.5). Ta quay vectơ $\overline{V_r}$ quanh vectơ $\overline{\omega_e}$ theo chiều quay của ω_e đi một góc $\frac{\pi}{2}$ ta có phương chiều của $\overline{W_K}$.
- Trường hợp $\overline{V_r}$ và $\overline{\omega_e}$ hợp với nhau một góc $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (hình 8.6) ta phân tích vectơ $\overline{V_r}$ thành $\overline{V_r^1}$ và $\overline{V_r^2}$ sao cho $\overline{V_r^1} \perp \overline{\omega_e}$ còn $\overline{V_r^2} \parallel \overline{\omega_e}$. Sau đó quay $\overline{V_r^1}$ quanh ω_e theo chiều quay của nó đi một góc $\frac{\pi}{2}$ ta có phương chiều của $\overline{W_K}$.

8.3.4. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Lăng trụ tam giác OAB chuyển động tịnh tiến trên mặt ngang với gia tốc $W_A = 3 \text{ m/s}^2$. Dọc theo mặt nghiêng, vật D trượt xuống theo luật $s = 2t^2$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây), nhờ liên kết dây vắt qua ròng rọc O làm vật E chuyển động theo phương thẳng đứng (hình 8.7a). Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của D và E tại $t = 2\text{s}$, cho $\alpha = 60^\circ$.



Hình 8.7

Bài giải: Hệ động là lăng trụ OAB chuyển động tịnh tiến. D và E là hai điểm chuyển động phức hợp. Áp dụng công thức:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r,$$

ở đây: $W_r = \ddot{s} = 4 \text{ m/s}^2$; $W_D^r = W_E^r = W_r$

$$W_e = W_A = 3 \text{ m/s}^2; W_D^e = W_E^e = W_e.$$

Do vậy ta nhận được kết quả theo hình 8.7b và hình 8.7c tương ứng là:

$$W_D = \sqrt{W_e^2 + W_r^2 - 2W_e W_r \cos 60^\circ} = 3,6 \text{ m/s}^2$$

$$W_E = \sqrt{W_e^2 + W_r^2} = 5 \text{ m/s}^2$$

Ví dụ 2: Xe con A của cần cầu chuyển động với vận tốc không đổi $V_r = 2 \text{ m/s}$. Cần cầu quay quanh trục Oz với vận tốc góc không đổi

$n = \frac{30}{\pi}$ vg/ph (hình 8.8). Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của xe A khi $OA = 2$ m.

Bài giải: Hệ động là cần cầu chuyển động quay. Áp dụng công thức hợp gia tốc:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r + \vec{W}_K$$

trong đó: $\vec{W}_e = \vec{W}_e^n$; $W_e^n = OA\omega_c^2$, còn $W_e^t = 0$ do $\omega = \text{const}$

$$\vec{W}_r = 0 \text{ (vì } V_r \text{ là hằng số)}$$

$$|\vec{W}_K| = |2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r| = 2\omega_e V_r.$$

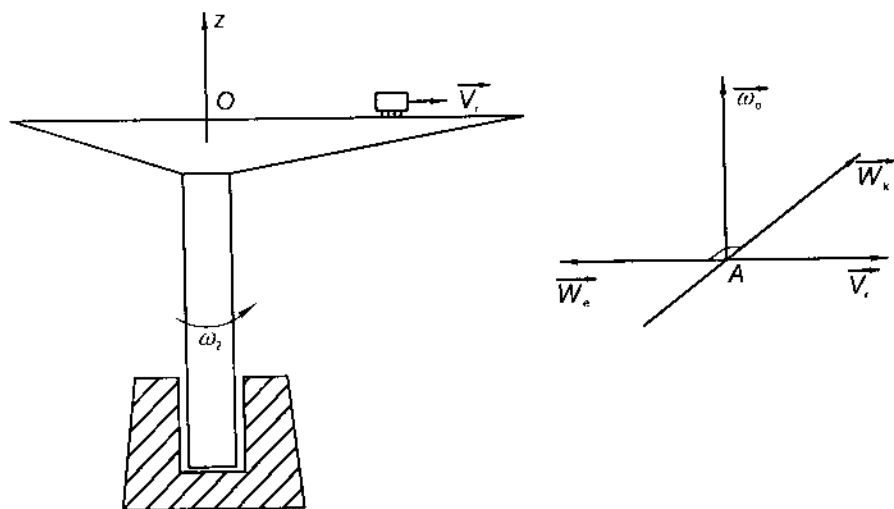
Theo (3.8):

$$\vec{W}_a = \vec{W}_A + \vec{W}_e^n + \vec{W}_K$$

$$|\vec{W}_a| = \sqrt{(OA.\omega_c^2)^2 + 2(\omega_c.V_r)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ m/s}^2$$

.Thay $OA = 2$ m, $V_r = 2$ m/s, $\omega_c = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{60} = 1$ rad/s, ta nhận được

kết quả: $|\vec{W}_a| = |\vec{W}_A| = 4,47 \text{ m/s}^2$.



Hình 8.8

Chương 9

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

Trong chương 7 ta đã khảo sát hai dạng chuyển động cơ bản của vật rắn. Chương này chúng ta khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn là dạng chuyển động thường gặp trong đời sống và kỹ thuật.

§9.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

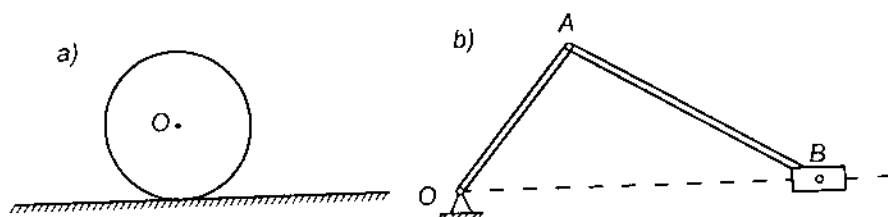
9.1.1. ĐỊNH NGHĨA

Chuyển động song phẳng của vật rắn là một chuyển động mà trong đó mỗi điểm thuộc vật luôn luôn chuyển động trên một mặt phẳng song song với mặt phẳng π_0 cố định cho trước.

9.1.2. VÍ DỤ MINH HỌA

- Một bánh xe chuyển động lăn không trượt trên một đường thẳng nằm ngang. Chuyển động của bánh xe này là chuyển động song phẳng (hình 9.1a).

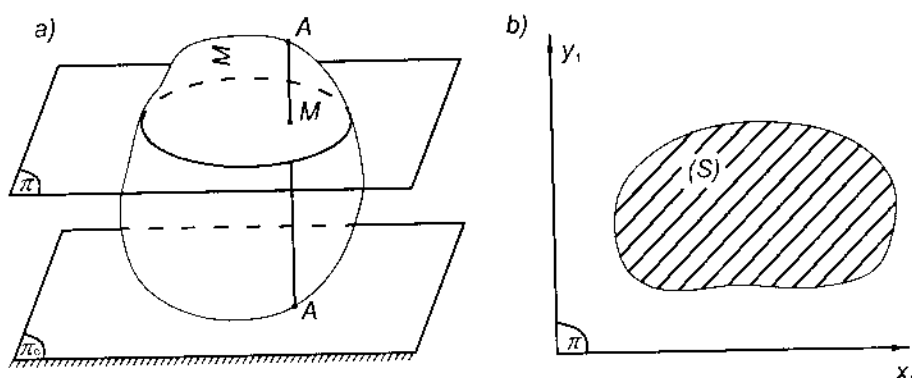
2. Cơ cấu thanh truyền tay quay có thanh truyền AB chuyển động song phẳng (hình 9.1b).



Hình 9.1

9.1.3. MÔ HÌNH CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG

Xét một vật rắn Σ chuyển động song phẳng. Lấy đoạn thẳng AB bất kỳ thuộc vật rắn Σ sao cho $AB \perp \pi_0$ cố định. Vì Σ là vật rắn nên $AB = \text{const}$. Mặt khác vật Σ chuyển động song phẳng nên các điểm A và B luôn luôn di chuyển trong hai mặt phẳng song song nhau. Vì vậy AB luôn luôn song song với vị trí ban đầu của nó, cho nên chuyển động của AB là chuyển động tịnh tiến, do đó chuyển động của đoạn AB được đặc trưng bởi chuyển động của điểm M là giao điểm của AB với mặt phẳng π song song với mặt phẳng π_0 cố định (hình 9.2a). Ta coi vật Σ là tập hợp của các đoạn AB cho nên chuyển động song phẳng của vật Σ được đặc trưng bởi chuyển động của hình phẳng (S) là tiết diện của vật Σ với mặt phẳng π . Như vậy việc khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa về khảo sát chuyển động phẳng của hình phẳng (S) trong mặt phẳng π (hình 9.2).

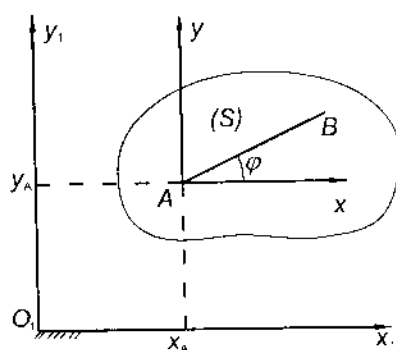


Hình 9.2

§9.2. KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN

9.2.1. PHÂN TÍCH CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG THÀNH CÁC CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN

Xét chuyển động của hình phẳng (S) trong mặt phẳng π (hình 9.3). Chọn hệ cố định $O_1x_1y_1$ và gắn vào hình phẳng (S) đoạn AB . Vị trí đoạn AB xác định vị trí hình phẳng (S) đối với hệ $O_1x_1y_1$. Mặt khác vị trí đoạn AB được xác định bởi tọa độ điểm A (x_A, y_A) và góc φ . Bây giờ ta gắn vào A hệ tọa độ động Axy sao cho $Ax \parallel O_1x_1, Ay \parallel O_1y_1$.



Hình 9.3

Chuyển động của hình phẳng (S) được phân tích thành hai chuyển động thành phần:

- Chuyển động tịnh tiến cùng với hệ động Axy so với hệ cố định O, x, y .
- Chuyển động quay quanh A của hình phẳng (S) đối với hệ động Axy.

Như vậy chuyển động song phẳng của vật rắn bao giờ cũng có thể phân tích được thành hai chuyển động cơ bản: chuyển động quay tương đối quanh cực A thuộc vật đối với hệ động Axy và chuyển động tịnh tiến của hệ động Axy cùng với cực A đối với hệ cố định O, x, y .

9.2.2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Từ sự phân tích ở trên thì vị trí của hình phẳng (S) đối với hệ cố định O, x, y , được xác định bởi 3 thông số định vị. Đó là góc φ để xác định vị trí của hình phẳng (S) hay đoạn AB trong chuyển động tương đối quay quanh A và các tọa độ (x_A, y_A) để xác định vị trí của hệ động Axy đối với hệ cố định O, x, y . Khi hình phẳng (S) chuyển động thì các thông số định vị này biến đổi liên tục theo thời gian t . Vậy phương trình chuyển động song phẳng của vật rắn là:

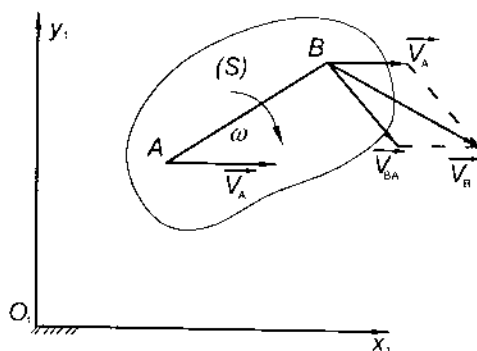
$$x_A = x_A(t); y_A = y_A(t); \varphi = \varphi(t) \quad (9.1)$$

§9.3. KHẢO SÁT CÁC ĐIỂM THUỘC VẬT

Xét chuyển động của điểm B bất kỳ thuộc hình phẳng (S). Ta lấy điểm A nào đó làm cực rồi biểu diễn các đặc trưng động học của B theo cực A. Điểm cực A có thể chọn bất kỳ song tốt nhất nên chọn điểm đã biết được một vài đặc trưng động học.

9.3.1. XÁC ĐỊNH VẬN TỐC ĐIỂM

Như ở trên ta đã phân tích chuyển động song phẳng của hình phẳng (S) thành hai chuyển động thành phần: chuyển động quay tương đối cùng với hình phẳng (S) quanh cực A và chuyển động tịnh tiến theo cùng với cực A. Khi đó vận tốc của điểm B đối với hệ cố định $O_1x_1y_1$ (hình 9.4) là vận tốc tuyệt đối $\vec{V}_a$. Vận tốc của điểm B cùng với hình phẳng (S) quay quanh cực A là vận tốc tương đối $\vec{V}_r = \vec{V}_{BA}$.



Hình 9.4

Do chuyển động theo là chuyển động tịnh tiến cùng với cực A nên $\vec{V}_e = \vec{V}_A$. Theo định lý hợp vận tốc:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \text{ hay } \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (9.2)$$

Giá trị, phương chiều của $\vec{V}_{BA}$ được xác định như sau. Vectơ $\vec{V}_{BA}$ có phương vuông góc với BA, có chiều theo chiều của ω và giá trị bằng $BA \times \omega$.

Vậy vận tốc của điểm B bất kỳ thuộc hình phẳng (S) bằng tổng hình học của vận tốc cực A và vận tốc của điểm B trong chuyển động quay của hình phẳng (S) quanh cực A.

Như vậy khi biết vận tốc góc của hình phẳng (S) là ω và vận tốc của cực A thì có thể xác định được vận tốc của điểm B bất kỳ theo công thức (9.2).

9.3.2. ĐỊNH LÝ HÌNH CHIẾU VẬN TỐC CỦA HAI ĐIỂM

Định lý: Hình chiếu vận tốc hai điểm bất kỳ thuộc hình phẳng lên đoạn thẳng nối hai điểm đó thì bằng nhau.

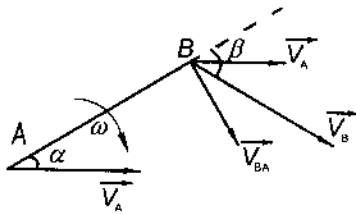
Chứng minh: Với hai điểm A và B bất kỳ thuộc hình phẳng có vận tốc $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$. Theo công thức (9.2) ta có:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

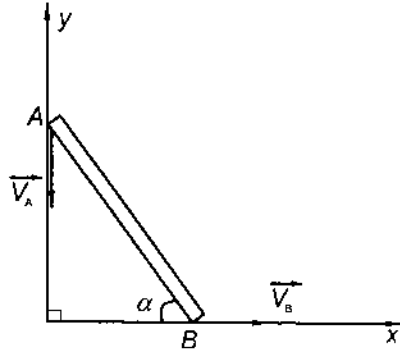
Chiếu đẳng thức này lên AB ta có:

$$hc_{AB} \vec{V}_B = hc_{AB} \vec{V}_A + hc_{AB} \vec{V}_{BA}.$$

Do $\vec{V}_{BA} \perp AB$ nên $hc_{AB} \vec{V}_{BA} = 0$ (hình 9.5).



Hình 9.5



Hình 9.6

Vậy $hc_{AB} \vec{V}_B = hc_{AB} \vec{V}_A$ hay $V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha$ (9.3)

Định lý hình chiếu vận tốc biểu diễn bởi (9.3) cho ta xác định được vận tốc của điểm B bất kỳ khi biết phương vận tốc của nó và biết vận tốc cực A (hình 9.6):

$$V_A \sin \alpha = V_B \cos \alpha \rightarrow V_B = V_A \operatorname{tg} \alpha$$

9.3.3. TÂM VẬN TỐC TỨC THỜI

a) Định nghĩa: Tâm vận tốc tức thời là một điểm P nào đó thuộc hình phẳng (S) mà tại thời điểm khảo sát có vận tốc bằng 0 ($\vec{V}_P = 0$).

b) Chứng minh sự tồn tại của tâm vận tốc tức thời

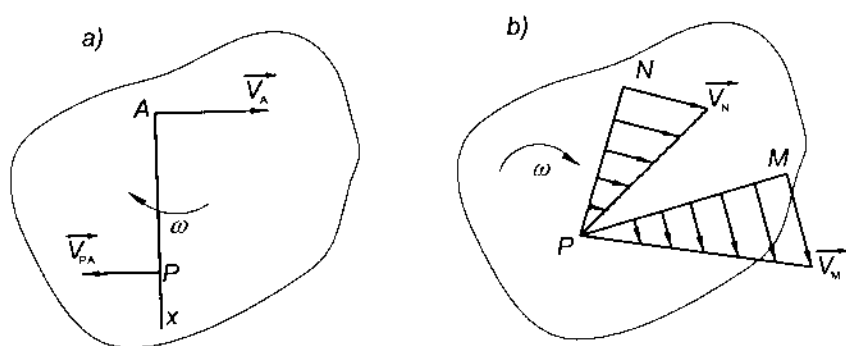
Giả sử tại thời điểm t nào đó ta có vận tốc của cực A là $\vec{V}_A$ và vận tốc góc của hình phẳng (S) là ω . Quay quanh cực A nửa đường thẳng chứa vectơ $\vec{V}_A$ theo chiều quay của ω đi một góc $\frac{\pi}{2}$ ta có Ax ,

trên Ax lấy điểm P sao cho $AP = \frac{|\vec{V}_A|}{\omega}$. Dễ dàng nhận thấy rằng

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA} = \vec{V}_A - \vec{V}_A = 0 \quad (\text{hình 9.7a}).$$

Như vậy tại mỗi thời điểm trên hình phẳng (S) tồn tại duy nhất tâm vận tốc tức thời P . Nếu chọn P làm cực thì vận tốc của điểm M bất kỳ trên hình phẳng tại thời điểm đó được xác định theo công thức

$$\vec{V}_M = \vec{V}_P + \vec{V}_{MP} \quad \text{nhưng } \vec{V}_P = 0 \quad \text{nên } \vec{V}_M = \vec{V}_{MP} \quad (9.4)$$



Hình 9.7

Do

$$\vec{V}_M \perp MP \text{ và } V_M = V_{MP} = MP \times \omega \quad (a)$$

Đối với điểm N ta có $\overrightarrow{V_N} = \overrightarrow{V_{NP}}$ mà $\overrightarrow{V_N} \perp NP$ nên giá trị

$$V_N = V_{NP} = NP \times \omega \quad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có:

$$\omega = \frac{V_M}{MP} = \frac{V_N}{NP} \quad (9.5)$$

Nghĩa là vận tốc các điểm trên hình phẳng (S) tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến tâm vận tốc tức thời P (hình 9.7b).

Theo công thức (9.4) thì vận tốc các điểm trên hình phẳng được xác định giống như vận tốc các điểm thuộc vật rắn chuyển động quay quanh trục tức thời đi qua tâm vận tốc tức thời P .

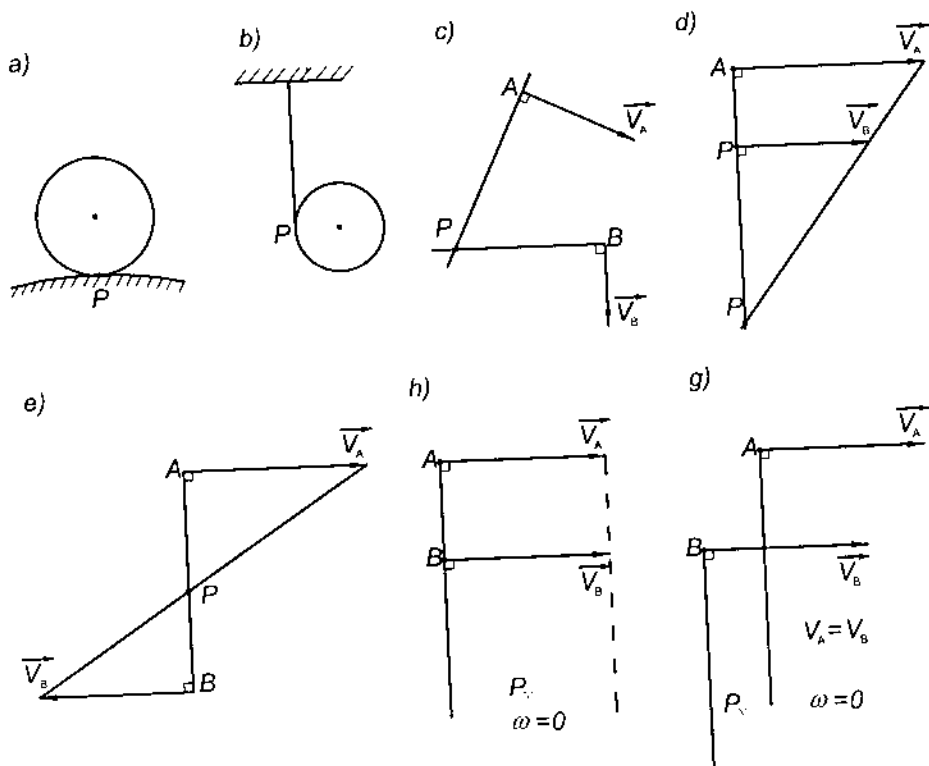
c) Xác định tâm vận tốc tức thời P

Từ các kết quả nhận được ở trên ta thấy vai trò quan trọng của việc xác định tâm vận tốc tức thời là: khi đã biết tâm vận tốc tức thời P và vận tốc góc ω của hình phẳng (S) thì vận tốc các điểm được tìm thấy dễ dàng theo công thức (9.4) mà không cần phải sử dụng công thức vectơ (9.2). Quy tắc thực hành xác định tâm vận tốc tức thời P dựa trên tính chất cơ bản là: điểm P phải nằm trên đường thẳng vuông góc với phương vận tốc của điểm thuộc hình phẳng và giá trị vận tốc tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến tâm vận tốc tức thời P . Do đó có thể tìm tâm vận tốc tức thời P theo quy tắc thực hành như sau:

- *Trường hợp 1:* Biết một điểm trên hình phẳng có vận tốc bằng 0. Khi hình phẳng chuyển động lăn không trượt trên một đường hay mặt cố định thì điểm tiếp xúc có vận tốc tức thời bằng 0 (vì các tiếp điểm của hai vật khi không trượt trên nhau phải có cùng vận tốc mà vật thứ 2 lại cố định), vậy điểm tiếp xúc của vật với mặt tựa là tâm vận tốc tức thời P (hình 9.8a, b).
- *Trường hợp 2:* Biết vận tốc điểm A và phương vận tốc của điểm B . Phương vận tốc của A và B không song song nhau (hình 9.8c).

Dựa vào tính chất $\vec{V}_A \perp AP$ và $\vec{V}_B \perp BP$. Từ A và B ta kẻ các đường vuông góc với $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$. Giao điểm của chúng là tâm vận tốc P .

- *Trường hợp 3:* Biết vận tốc các điểm A và B có phương song song nhau. Do tính chất $\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}$ ta thấy P là giao điểm của đường AB với đoạn nối các đầu mút các vectơ $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$ (hình 9.8d, e). Nếu giao điểm P ở vô cùng, hình phẳng chuyển động tịnh tiến tức thời $\omega = 0$ và $V_A = V_B$ (hình 9.8g, h).

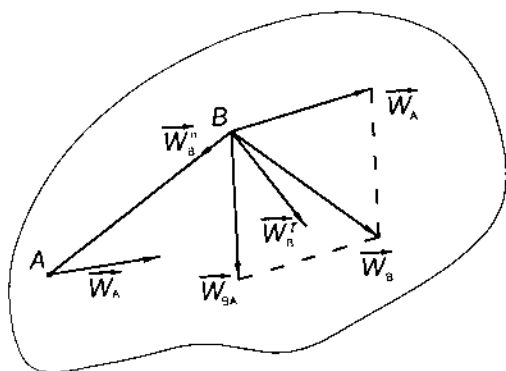


Hình 9.8

9.3.4. XÁC ĐỊNH GIA TỐC CỦA ĐIỂM

Xác định gia tốc của điểm B bất kỳ trên hình phẳng (S) theo gia tốc cực A ta dựa trên cơ sở phân tích chuyển động của điểm B trên hình 9.9. Lúc này điểm B đồng thời tham gia hai chuyển động:

- Chuyển động tịnh tiến theo hệ động Axy (có cực A);
- Chuyển động cùng hình phẳng (S) trong chuyển động quay tương đối quanh hệ động Axy (có cực A) với vận tốc góc ω và gia tốc góc ε .



Hình 9.9

Theo công thức hợp gia tốc $\vec{W}_B = \vec{W}_a + \vec{W}_e + \vec{W}_K$ trong đó vai trò của $\vec{W}_a$ là $\vec{W}_B$, $\vec{W}_e$ là $\vec{W}_A$ (hệ động chuyển động tịnh tiến và ta chọn A làm cực). Vai trò $\vec{W}_r$ là gia tốc của điểm B trong chuyển động tương đối của hình phẳng (S) quay quanh cực A . Ký hiệu $\vec{W}_{BA}$. Còn $\vec{W}_K = 0$ vì hệ động chuyển động tịnh tiến.

Ta có:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA} = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^n + \vec{W}_{BA}^t \quad (9.6)$$

Trên hình 9.9 vẽ và minh họa các thành phần gia tốc:

$$W_{BA}^n = BA\omega^2 \text{ và } W_{BA}^t = BA\varepsilon$$

Kết luận: Theo công thức (9.6) và các minh họa trên hình 9.9 ta thấy muốn tìm gia tốc điểm B bất kỳ trên hình phẳng ta cần phải biết các yếu tố:

- Gia tốc cực A ($\overrightarrow{W_A}$);
- Gia tốc góc ε và vận tốc ω của hình phẳng;
- Khoảng cách AB .

Khi đã biết các yếu tố nêu trên, việc xác định gia tốc điểm B bất kỳ được xác định theo công thức vectơ thông thường. Trường hợp không thể xác định trực tiếp được gia tốc góc ε nhưng lại biết được phương của gia tốc $\overrightarrow{W_B}$ của điểm. Khi đó ta có thể chiếu đẳng thức vectơ (9.6) lên hai phương nào đó để được hai phương trình đại số xác định hai ẩn số là ε và $\overrightarrow{W_B}$.

9.3.5. TÂM GIA TỐC TỨC THỜI

a) Định nghĩa: Tâm gia tốc tức thời là một điểm Q nào đó thuộc hình phẳng (S) mà tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng 0 ($\overrightarrow{W_Q} = 0$).

Nếu Q là tâm gia tốc tức thời, ta lấy Q làm cực, khi đó:

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_Q} + \overrightarrow{W_{MQ}^n} + \overrightarrow{W_{MQ}^t} = \overrightarrow{W_{MQ}^n} + \overrightarrow{W_{MQ}^t} \quad (\text{do } \overrightarrow{W_Q} = 0)$$

$$W_{MQ}^n = MQ\omega^2; \quad W_{MQ}^t = MQ\varepsilon$$

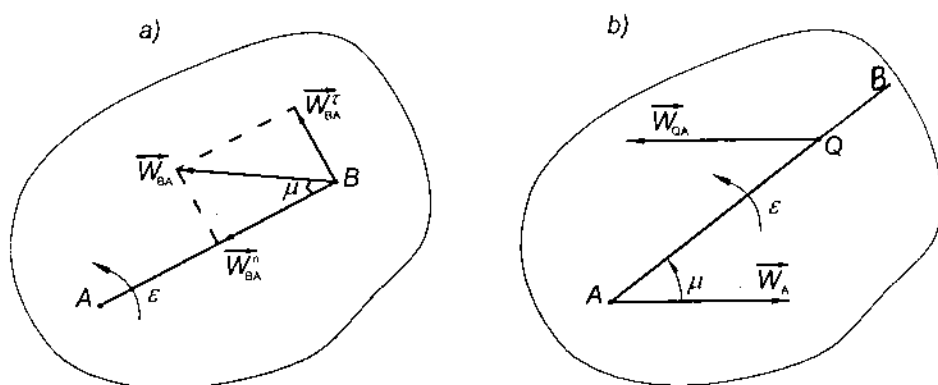
Nên
$$W_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

Vậy gia tốc của điểm trên hình phẳng bằng gia tốc của nó khi hình phẳng quay quanh tâm gia tốc tức thời Q .

Giá trị gia tốc các điểm trên hình phẳng tỷ lệ với khoảng cách từ chúng đến tâm gia tốc tức thời Q :

$$\frac{W_M}{MQ} = \frac{W_N}{NQ} = \frac{W_I}{IQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



Hình 9.10

b) Cách xác định tâm gia tốc tức thời Q

Nếu biết gia tốc $\overline{W}_A$ của một điểm A nào đó thuộc hình phẳng, vận tốc góc ω và gia tốc góc ϵ ta có thể tìm được tâm Q như sau:

- Xác định góc μ theo công thức $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$ (hình 9.10a).
- Quay vectơ $\overline{W}_A$ quanh A theo chiều ϵ đi một góc μ ta được nửa đường thẳng AB. Trên AB lấy một điểm Q sao cho

$$QA = \frac{W_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}$$

Như vậy $\overline{W}_{QA} = -\overline{W}_A$. Ta có

$$\overline{W}_Q = \overline{W}_A + \overline{W}_{QA} = \overline{W}_A - \overline{W}_A = 0 \text{ (hình 9.10b).}$$

Cần lưu ý rằng, việc xác định gia tốc của điểm trên hình phẳng qua tâm gia tốc tức thời Q phức tạp hơn nhiều so với cách xác định vận tốc qua tâm vận tốc tức thời P, do vậy phương pháp này ít được sử dụng.

Kết luận: Nhìn chung các bài tập trong chương này là đa dạng và phức tạp. Tuy nhiên nếu chú ý đến các nội dung cơ bản, các công

thức cơ bản ta sẽ thấy dễ hiểu và dễ vận dụng để giải các bài toán đó. Cụ thể là:

- Muốn xác định vận tốc của điểm trên hình phẳng, bước đầu tiên là cần xác định tâm vận tốc tức thời P . Từ đó dễ dàng xác định vận tốc của điểm bất kỳ và vận tốc góc của hình phẳng.
- Muốn xác định gia tốc của điểm B bất kỳ cần dựa vào công thức (9.6). Nếu có thể xác định ngay được gia tốc góc của hình phẳng (S) thì chỉ cần cộng vectơ. Trường hợp không xác định trực tiếp được ε thì phải chiếu đẳng thức vectơ (9.6) lên hai phương nào đó để có hai phương trình đại số rồi từ đó ta xác định được hai ẩn số cần tìm.
- Luôn luôn nhớ rằng, trong chuyển động song phẳng mọi yếu tố cần xác định đều mang tính chất tức thời (nghĩa là xét tại một thời điểm và tại một vị trí nào đó).

§9.4. VÍ DỤ MINH HỌA

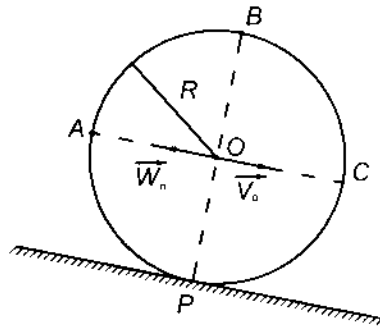
Ví dụ 1: Bánh xe tâm O có bán kính R chuyển động lăn không trượt trên mặt nghiêng. Tại một thời điểm nào đó ta biết vận tốc và gia tốc của tâm O là $\vec{V}_O$, $\vec{W}_O$. Hãy xác định vận tốc, gia tốc các điểm A, B, C, P trên hình 9.11.

Bài giải: Vận tốc của các điểm A, B, C, P được mô tả trên hình (hình 9.12a):

$$\omega = \frac{V_O}{R}; \quad V_P = 0; \quad V_B = 2V_O; \quad V_A = V_C = \sqrt{2}V_O$$

Gia tốc của các điểm A, B, C, P được mô tả trên hình 9.12b. Trong trường hợp này xác định trực tiếp được gia tốc góc:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_O}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{dV_O}{dt} = \frac{W_O}{R}$$



Hình 9.11

Do vậy gia tốc của các điểm xác định theo công thức cộng vectơ (9.6):

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{AO}^r} + \overrightarrow{W_{AO}^n};$$

$$W_{AO}^n = R\omega^2 = \frac{V_O^2}{R};$$

$$W_{AO}^r = AO\varepsilon = R \frac{W_O}{R} = W_O.$$

Cho nên:

$$|\overrightarrow{W_A}| = \sqrt{W_O^2 + \left(W_O - \frac{V_O^2}{R}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{BO}^r} + \overrightarrow{W_{BO}^n};$$

$$W_{BO}^n = \frac{V_O^2}{R};$$

$$W_{BO}^r = W_O$$

Vậy:
$$|\overrightarrow{W_B}| = \sqrt{4W_O^2 + \frac{V_O^4}{R^2}}$$

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{CO}^r} + \overrightarrow{W_{CO}^n};$$

$$W_{CO}^n = \frac{V_O^2}{R};$$

$$W_{CO}^t = W_O$$

$$W_c = \sqrt{W_o^2 + \left(W_o + \frac{V_o^2}{R}\right)^2}$$

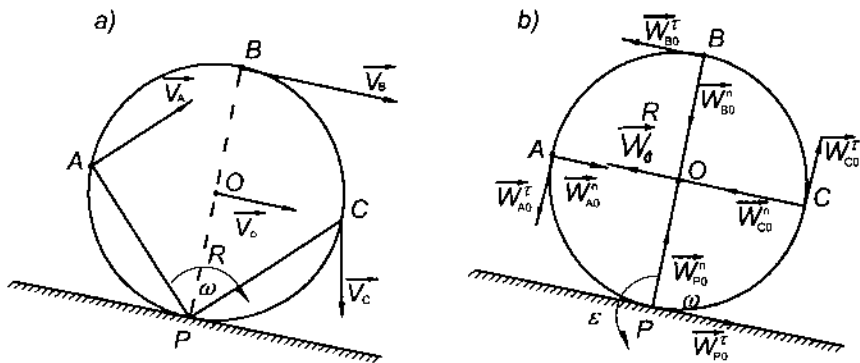
$$\overrightarrow{W_P} = \overrightarrow{W_O} + \overrightarrow{W_{PO}^t} + \overrightarrow{W_{PO}^n};$$

$$W_{PO}^n = \frac{V_O^2}{R};$$

$$W_{PO}^t = W_O$$

Do đó:

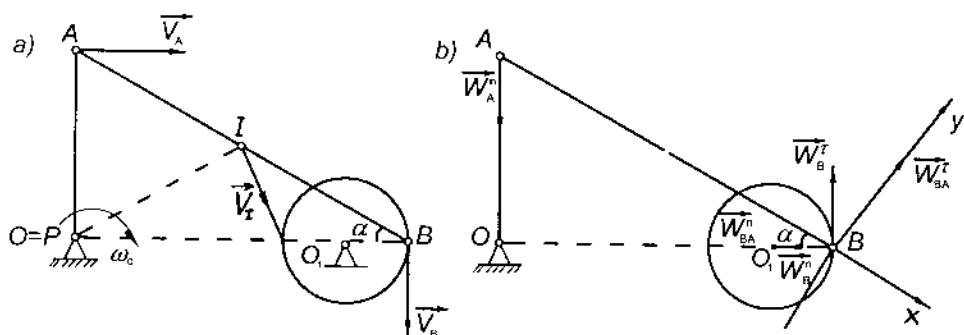
$$|\overrightarrow{W_P}| = \sqrt{(W_O - W_O)^2 + \frac{V_O^4}{R^2}} = \frac{V_O^2}{R}$$



Hình 9.12

Ví dụ 2: Tay quay OA dài 0,2m quay đều quanh O với vận tốc góc $\omega_o = 2 \text{ rad/s}$. Nhờ thanh truyền AB làm cho bánh xe O_1 bán kính $r_1 = 0,1\text{m}$ quay quanh O_1 (hình 9.13).

- a) Hãy xác định vận tốc điểm B , điểm I là trung điểm (hình 9.13a) của AB với $AB = 2OA = 0,4\text{m}$ tại thời điểm mô tả trên hình 9.13.
- b) Xác định gia tốc góc của thanh AB và gia tốc điểm B .



Hình 9.13

Bài giải:

Chuyển động của thanh AB là chuyển động song phẳng. Phương và chiều vận tốc của các điểm được mô tả trên hình 9.13a. Tâm vận tốc tức thời là O , do vậy vận tốc góc của thanh AB là

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = \omega_o = 2 \text{ rad/s.}$$

Dễ thấy rằng $\sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ$. Do vậy ta nhanh chóng xác định được vận tốc của điểm B và điểm I :

$$V_B = AB\omega_{AB} \cos \alpha = AB\omega_o \cos 30^\circ = 0,693\text{m/s}$$

$$V_I = OI\omega_{AB} = \frac{1}{2}AB\omega_o = 0,4\text{m/s}$$

Vận tốc góc của bánh xe O_1 được xác định

$$\omega_1 = \frac{V_B}{r_1} = \frac{0,693}{0,1} = 6,93 \text{ rad/s}$$

b) Gia tốc của điểm B được tính theo cực A :

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} \quad (a)$$

$$\text{hay} \quad \overrightarrow{W_B^t} + \overrightarrow{W_B^n} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} \quad (b)$$

Trong biểu thức (b') đã biết:

$$W_B^n = \frac{V_B^2}{r_1} = \frac{0,693^2}{0,1} = 4,8 m/s^2;$$

$$W_A^n = OA\omega_o^2 = 0,8 m/s^2$$

$$\text{Ta có:} \quad W_A^t = 0 \text{ do } \omega_o = \text{const}$$

$$W_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2 = 1,6 m/s^2$$

Còn hai đại lượng chưa biết là $W_{BA}^t = AB\varepsilon_{AB}$ và W_B^t .

Chiếu đẳng thức vectơ (b) lên hai phương x, y trên hình 9.13b để được hai phương trình đại số xác định W_{BA}^t và W_B^t .

Chiếu (b) lên Bx :

$$-W_B^n \cos \alpha - W_B^t \sin \alpha = W_A^n \sin \alpha - W_{BA}^n$$

$$W_B^t = -5,914 m/s^2$$

Chiếu (b) lên By :

$$-W_B^n \sin \alpha + W_B^t \cos \alpha = -W_A^n \cos \alpha + W_{BA}^t$$

$$W_{BA}^t = 5,121 m/s^2$$

$$\text{Mà } W_{BA}^t = AB\varepsilon_{AB} = 5,121 m/s^2 \rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^t}{AB} = \frac{5,121}{0,4} = 12,8 s^{-2}$$

$$W_B = \sqrt{(W_B^t)^2 + (W_B^n)^2} = \sqrt{(5,914)^2 + (4,8)^2} = 7,62 m/s^2.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP PHẦN II

1. Nêu mục đích nghiên cứu của phần động học và đặc trưng động học của động điểm.
2. Trình bày tóm tắt ba phương pháp nghiên cứu chuyển động của điểm, so sánh các phương pháp đó.
3. Nêu các công thức xác định vận tốc và gia tốc của động điểm mà ta thường sử dụng trong các bài tập
4. Định nghĩa chuyển động tịnh tiến của vật rắn; tính chất cơ bản của chuyển động tịnh tiến; cho ví dụ minh họa.
5. Định nghĩa chuyển động của vật rắn quay quanh trục cố định. khái niệm về vận tốc góc, gia tốc góc và cách biểu diễn bằng vectơ.
6. Nêu các công thức xác định vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật rắn khi vật chuyển động quay quanh trục cố định.
7. Khái niệm về chuyển động phức hợp của điểm, các định nghĩa phân loại, cho ví dụ minh họa.
8. Khái niệm về trùng điểm của động điểm, tại sao cần đưa ra khái niệm này, cho ví dụ minh họa.
9. Định lý hợp vận tốc và ví dụ áp dụng
10. Định lý hợp gia tốc, ý nghĩa của các thành phần gia tốc.
11. Định nghĩa chuyển động song phẳng của vật rắn, nêu ví dụ minh họa, so sánh chuyển động song phẳng với hai dạng chuyển động cơ bản đã học trong chương 7.

12. Phương pháp phân tích chuyển động song phẳng thành hai chuyển động cơ bản, nêu áp dụng của phương pháp này.
13. Công thức xác định vận tốc của điểm thuộc hình phẳng, định lý hình chiếu vận tốc của hai điểm.
14. Định nghĩa tâm vận tốc tức thời và nêu các phương pháp xác định.
15. Nêu công thức xác định gia tốc của điểm thuộc hình phẳng và cách vận dụng nó để giải các bài toán cụ thể.

VÍ DỤ TÍNH TOÁN, BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP PHẦN ĐỘNG HỌC

IV. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Ví dụ IV.1: Phương trình chuyển động của điểm:

$$x = 3t - 1,5t^2$$

và $y = 6t - 3t^2 - 2$

(với t tính bằng giây; x, y tính bằng cm).

Tìm phương trình quỹ đạo, vận tốc và gia tốc của điểm khi $t = 1s$.

Bài giải (hình IV.1)

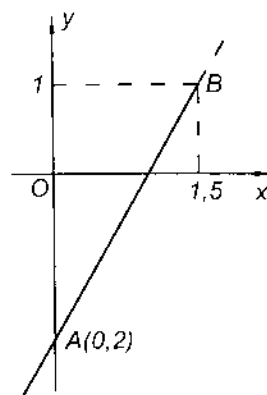
Khử biến số thời gian t trong các phương trình chuyển động ta có phương trình quỹ đạo:

$$2x = 6t - 3t^2$$

$$y = 6t - 3t^2 - 2$$

Trừ hai phương trình này cho nhau ta được:

$$2x - y = 2$$



Hình IV.1

Đây là đường thẳng không qua gốc tọa độ O .

Điểm bắt đầu xuất phát (khi $t = 0$) tại điểm $A(0, -2)$.

Ta có:

$$\dot{x} = 3 - 3t = 3(1 - t) \rightarrow \ddot{x} = -3$$

$$\dot{y} = 6 - 6t = 6(1 - t) \rightarrow \ddot{y} = -6$$

Ta thấy trong khoảng $0 \leq t < 1$ thì $\dot{x} > 0$ và $\dot{y} > 0$ nên x và y tăng theo t . Khi $t = 1$ thì $\dot{x} = 0$ và $\dot{y} = 0$, nên $V = 0$, còn $W \neq 0$. Do đó điểm xuất phát từ A chuyển động về phía B . Sau đó lại chuyển động về phía A .

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{3^2(1-t)^2 + 6^2(1-t)^2} = \sqrt{45} (1-t) \text{ cm/s}$$

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \text{ cm/s}^2$$

Ví dụ IV.2: Từ các phương trình chuyển động của điểm:

$$x = 3 + 4\cos t$$

và $y = 2 + 4\sin t$

Tìm phương trình quỹ đạo và quy luật chuyển động của điểm trên quỹ đạo đó.

Bài giải (hình IV.2)

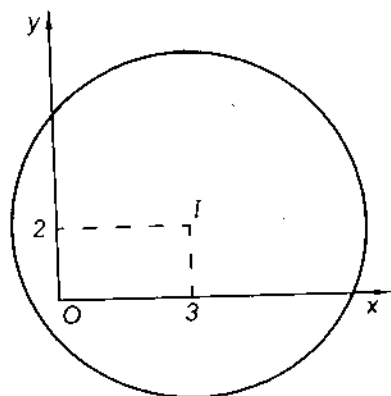
Từ các phương trình chuyển động ta có:

$$x - 3 = 4\cos t \text{ và } y - 2 = 4\sin t$$

Bình phương hai vế rồi cộng lại ta được:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4^2 = 16$$

Đây là phương trình đường tròn bán kính $R = 4$ và tọa độ tâm I là $I(3, 2)$. Muốn tìm quy luật chuyển động của điểm trên quỹ đạo ta sử dụng công thức:



Hình IV.2

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$s = \int_0^s ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Ta có:

$$x = -4\sin t \text{ và } y = 4\cos t$$

$$ds = \sqrt{4^2 \sin^2 t + 4^2 \cos^2 t} dt = \sqrt{4^2} dt = 4 dt$$

$$s = \int_0^t 4 dt = 4t.$$

Ví dụ IV.3: Một viên đạn chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng theo phương trình:

$$x = 25t;$$

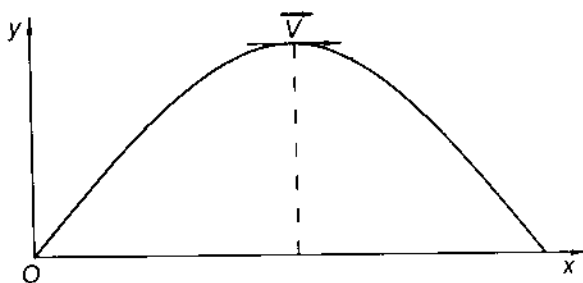
$$y = 230t - 5t^2$$

(t tính bằng giây; x, y tính bằng mét).

Hãy tìm:

- Quỹ đạo, vận tốc và gia tốc tại thời điểm ban đầu.
- Độ cao và tầm xa của đường đạn.
- Bán kính cong của quỹ đạo tại điểm cao nhất.

Bài giải (hình IV.3)



Hình IV.3

a) Ta có $t = \frac{x}{25}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$y = 230 \frac{x}{25} - 5 \frac{x^2}{25^2}$$

Quỹ đạo là một đường parabol đối xứng.

- Vận tốc:

$$\dot{x} = 25$$

$$\dot{y} = 230 - 10t$$

$$V = \sqrt{25^2 + (230 - 10t)^2}$$

Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ thì $V = 231,35 \text{ m/s}$.

- Gia tốc:

$$W = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} \text{ mà } \ddot{x} = 0 \text{ và } \ddot{y} = -10$$

$$W = 10 \text{ m/s}^2.$$

b) Để tìm độ cao ta nhận xét thấy tại đỉnh parabol thì vectơ vận tốc của viên đạn song song với trục Ox nên hình chiếu vectơ vận tốc lên trục Oy bằng 0.

Vì vậy $V_y = \dot{y} = 230 - 10t = 0$, nên $t = 23 \text{ s}$.

Độ cao nhất của đường đạn là:

$$H = y_{\max} = 230.23 - 5.23^2 = 23^2.5 = 2645 \text{ m}$$

$$H = 2645 \text{ m}$$

Tầm xa nhất của đường đạn là

$$s = x_{\max} = 25.23.2 = 1150 \text{ m}$$

$$s = 1150 \text{ m}$$

c) Bán kính cong của quỹ đạo:

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} \rightarrow \rho = \frac{V^2}{W_n}$$

Ta có:
$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}$$

$$W_t = \frac{dV}{dt} = 2 \frac{(-10)(230 - 10t)}{2\sqrt{25^2 + (230 - 10t)^2}}; \quad W = 10 \text{ m/s}^2$$

$$W_n = \sqrt{10^2 - \frac{10^2(230 - 10t)^2}{25^2 + (230 - 10t)^2}} = \frac{10 \cdot 25}{V} = \frac{250}{V}$$

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{V^3}{250} = \frac{[25^2 + (230 - 10t)^2]^{3/2}}{250}$$

Tại điểm cao nhất của quỹ đạo $t = 23 \text{ s}$, nên:

$$\rho = \frac{(25^2)^{3/2}}{250} = \frac{25^3}{25 \cdot 10} = 62,5 \text{ m}.$$

Ví dụ IV.4: Một đoàn tàu bắt đầu chuyển động nhanh dần đều trên đoạn đường cong bán kính $R = 800 \text{ m}$ và khi đi được đoạn đường $s_1 = 600 \text{ m}$ thì đạt vận tốc 36 km/h .

Tìm vận tốc và gia tốc của đoàn tàu tại điểm giữa đoạn đường s_1 .

Bài giải: Ta chọn gốc tọa độ cong tại vị trí đoàn tàu bắt đầu chuyển động nên $s_0 = 0$ và $V_0 = 0$. Vì đoàn tàu chuyển động nhanh dần đều nên quãng đường đi được:

$$s = s_0 + V_0 t + \frac{1}{2} W_t t^2 = \frac{1}{2} W_t t^2 \text{ m}$$

mà
$$W_t = \frac{V}{t} \quad \text{nên} \quad t = \frac{V}{W_t}$$

Do đó
$$s = \frac{1}{2} W_t \frac{V^2}{W_t^2}$$

hay
$$V^2 = 2sW_t.$$

Tại cuối đoạn đường s_1 thì $V_1^2 = 2s_1 W_t$, còn ở giữa đoạn đường s_1 là

$s_2 = \frac{s_1}{2}$ thì

$$V_2^2 = 2s_2 W_t = 2 \frac{s_1 W_t}{2} = \frac{V_1^2}{2}$$

Gia tốc pháp tuyến tại giữa đoạn đường s_1 :

$$W_{n_2} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{V_1^2}{2R} \text{ còn } W_r = \frac{V_1^2}{2s_1}$$

Gia tốc toàn phần:

$$W = \sqrt{W_r^2 + W_{n_2}^2} = \frac{V_1^2}{2} \sqrt{\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{R^2}} = 0,1 \text{ m/s}^2 = 0,1 \text{ m/s}^2$$

$$W = 0,1 \text{ m/s}^2.$$

Ví dụ IV.5: Một cơ cấu culit OA quay quanh trục đi qua O được mô tả bằng phương trình $\varphi = 5t - \frac{1}{2}t^2$. Một con chạy M chuyển động dọc theo rãnh của culit với phương trình $s_r = OM = \frac{1}{2}t^3$ (s_r tính bằng cm, còn t tính bằng giây).

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con chạy M tại thời điểm $t = 2\text{s}$.

Bài giải (hình IV.4): Phân tích chuyển động của con chạy M :

- Chuyển động của con chạy M dọc theo OA là chuyển động tương đối và là chuyển động thẳng.
- Chuyển động của M cùng với OA quay quanh O là chuyển động kéo theo.

Hợp hai chuyển động này ta có chuyển động tuyệt đối của M .

Tính V_r và W_r khi $t = 2\text{ s}$.

$$\text{Ta có: } V_r = \dot{s} = \frac{3}{2}t^2 = 6 \text{ cm/s}$$

$$W_r = \ddot{s} = 3t = 6 \text{ cm/s}^2$$

Ta thấy V_r và W_r đều dương nên cùng hướng từ O đến A .

Để tìm $\vec{V}_c$ và $\vec{W}_c$ ta phải tìm trùng điểm M^* .

$$\text{Khi } t = 2\text{ s thì } OM^* = s_r = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4 \text{ cm.}$$

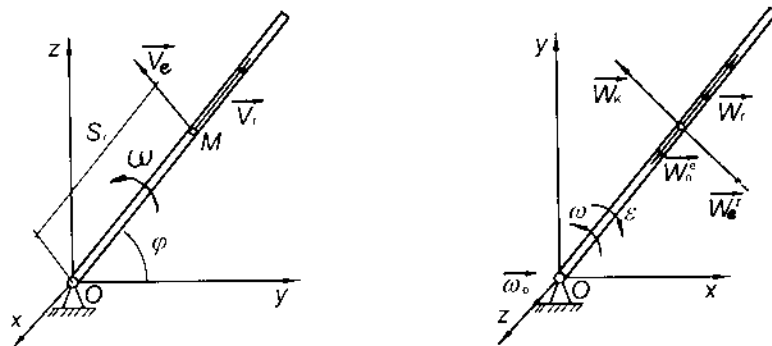
Vậy $V_e = OM^* \omega$ và $W_e^r = OM^* \varepsilon$; $W_e^n = OM^* \omega^2$

$$\dot{\varphi} = \omega = 5 - t = 5 - 2 = 3 \text{ rad/s}; \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = -1 \text{ rad/s}^2,$$

nên $V_e = 4.3 = 12 \text{ cm/s}$; $W_e^r = 4 \text{ cm/s}^2$

$$W_e^n = 4.3^2 = 36 \text{ cm/s}^2$$

Phương chiều các vectơ vận tốc và gia tốc biểu diễn trên hình IV.4.



Hình IV.4

Vì $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$ nên theo $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ thì ta có:

$$V_a \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13.4 \text{ cm/s}$$

Tính $\vec{W}_K = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$; $W_K = 2\omega_e \cdot V_r = 2.3.6 = 36 \text{ cm/s}^2$.

Do hệ động chuyển động quay nên:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_K = \vec{W}_r + \vec{W}_e^r + \vec{W}_e^n + \vec{W}_K$$

Các vectơ có phương chiều như ở hình IV.4. Ta có:

$$W_a = \sqrt{(W_c^n - W_r)^2 + (W_K - W_c^r)^2}$$

$$W_a = \sqrt{(36 - 6)^2 + (36 - 4)^2}$$

$$W_a = \sqrt{30^2 + 32^2} = 43,86 \text{ cm/s}^2.$$

Ví dụ IV.6: Tấm chữ nhật $ABCD$ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng nhờ hai tay quay O_1A và O_2B có độ dài bằng nhau $R = 30\text{cm}$ quay quanh hai trục O_1 và O_2 vuông góc với mặt phẳng nằm ngang theo quy luật $\varphi_r = \frac{8}{3}\pi t^3$. Dọc theo đường chéo AC có điểm M (hình IV.5) chuyển động theo phương trình:

$$CM = S_r = 16t^2 - 2t + 2$$

Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm M khi

$$t = \frac{1}{2} \text{ s.}$$

Bài giải: Phân tích chuyển động: Chọn CA làm hệ động có gốc tọa độ là C . Chọn O_1O_2 làm hệ cố định.

Chuyển động của điểm M dọc CA là chuyển động tương đối. Chuyển động của $ABCD$ quay quanh O_1A và O_2B là chuyển động theo và là chuyển động tịnh tiến. Chuyển động của M đối với O_1 , O_2 là chuyển động tuyệt đối.

Ta có:

$$V_r = \dot{s}_r = 32t - 2 = 14 \text{ cm/s khi } t = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$W_r = \ddot{s} = 32 \text{ cm/s}^2$$

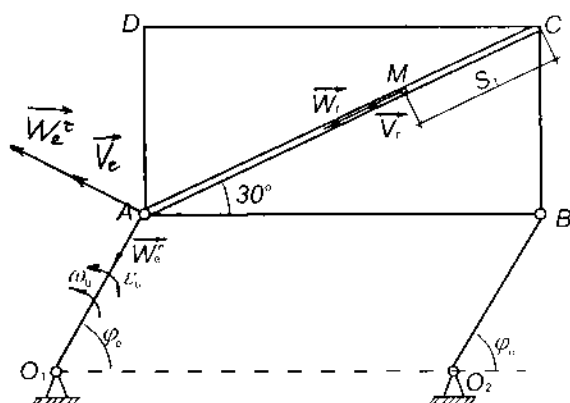
$$\text{Khi } t = \frac{1}{2} \text{ s thì } \varphi_r = \frac{8}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\text{Ta có: } \omega = \dot{\varphi} = \frac{8}{3}\pi \cdot 3t^2 = 8\pi t^2 = 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 16\pi t = 16\pi \frac{1}{2} = 8\pi \text{ rad/s}^2$$

Tính V_e : $V_e = R.\omega = 30.2\pi = 60\pi \text{ cm/s}$

Ta thấy $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$, nên $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{14^2 + (60\pi)^2}$
 $V_a = \sqrt{196 + 35.494,56} = \sqrt{35690,56} = 188,91 \text{ cm/s}.$



Hình IV.5

Vì hệ động chuyển động tịnh tiến nên:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e = \vec{W}_r + \vec{W}_e^n + \vec{W}_e^t \text{ mà}$$

$$W_e^n = R.\omega^2 = 30 (2\pi)^2 = 120\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

$$W_e^t = R\varepsilon = 30.8\pi = 240\pi \text{ cm/s}^2$$

và $W_r = 32 \text{ cm/s}^2$. Vì $\vec{W}_r \perp \vec{W}_e^t \perp \vec{W}_e^n$ nên:

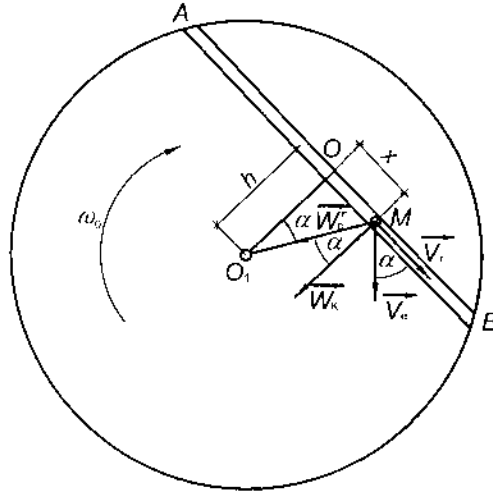
$$W_a = \sqrt{W_r^2 + (W_e^t)^2 + (W_e^n)^2} = \sqrt{32^2 + (240\pi)^2 + (120\pi^2)^2}$$

$$W_a = \sqrt{1024 + 567912.96 + 1399846,2} = 1403,2 \text{ cm/s}^2.$$

Ví dụ IV.7: Một đĩa tròn bán kính R quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = \text{const}$ quanh trục đi qua tâm O_1 của đĩa và trục giao với mặt phẳng của đĩa. Trên dây cung AB cách trục quay một đoạn h có một điểm M chuyển động từ giữa dây cung với vận tốc $V_0 = \text{const}$.

Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M theo khoảng cách $OM = x$ trên dây cung (hình IV.6).

Bài giải: Chọn trục O_1z đi qua tâm O_1 làm trục cố định và là trục quay của tấm, trục OB làm trục tọa độ động.



Hình IV.6

Khi đó ta thấy:

- Chuyển động của M dọc theo OB là chuyển động tương đối và là chuyển động thẳng, đều.
- Chuyển động của điểm M cùng đĩa tròn quay quanh O_1z là chuyển động theo.
- Chuyển động của điểm M đối với O_1z là chuyển động tuyệt đối.

Vậy vận tốc tương đối của M là $\vec{V}_r = \vec{V}_o$.

$$V_r = r\omega \quad \text{với} \quad r = \sqrt{h^2 + x^2}$$

Ta có:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_o^2 + 2V_rV_o \cos \alpha} = \sqrt{V_o^2 + r^2\omega_o^2 + 2V_or\omega_o \frac{h}{r}}$$

$$V_a = \sqrt{V_o^2 + (h^2 + x^2)\omega_o^2 + 2V_oh\omega_o}$$

$$\text{do} \quad \cos \alpha = \frac{h}{r}.$$

Vì hệ động chuyển động quay quanh O, z nên theo định lý hợp gia tốc ta có:

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_K} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_e^c} + \overrightarrow{W_K}$$

Do chuyển động tương đối là thẳng đều nên $\overrightarrow{W_r} = 0$

$$W_e^c = r\varepsilon = 0 \text{ vì } \omega_o = \text{const còn } W_e^n = r\omega_o^2$$

$$W_K = 2\omega_o V_r = 2\omega_o V_o$$

có phương chiều như hình IV.6, nên $\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_K}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{(W_e^n)^2 + (W_K)^2 + 2W_e^n \cdot W_K \cos \alpha} \\ &= \sqrt{r^2 \omega_o^4 + 4\omega_o^2 V_o^2 + 2r\omega_o^2 2\omega_o V_o \cos \alpha} \\ W_a &= \sqrt{(h^2 + x^2) \omega_o^4 + 4\omega_o^2 V_o^2 + 4\omega_o^3 V_o h}. \end{aligned}$$

Ví dụ IV.8: Bánh xe của toa tàu điện chuyển động trên đoạn thẳng nằm ngang với gia tốc tâm O là $W_o = 2 \text{ m/s}^2$. Tại thời điểm đang xét có vận tốc $V_o = 1 \text{ m/s}$. Bánh xe lăn không trượt trên đường ray.

Xác định gia tốc của các điểm đầu mút của các đường kính rôto tạo với đường thẳng đứng một góc 45° , biết rằng bán kính bánh xe là $R = 0,5 \text{ m}$, còn bán kính rôto là $r = 0,25 \text{ m}$ (hình IV.7).

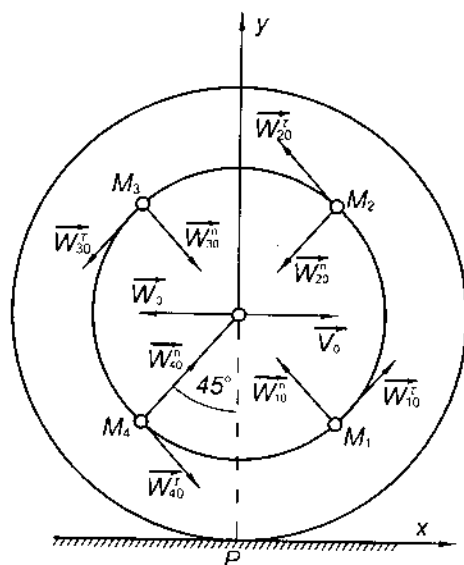
Bài giải: Xét chuyển động song phẳng của bánh xe tâm O .

Theo công thức xác định gia tốc một điểm thuộc hình phẳng:

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{MO}^c} + \overrightarrow{W_{MO}^n},$$

ta có: $W_{MO}^c = MO \cdot \varepsilon = r\varepsilon_o$

$$W_{MO}^n = MO\omega^2 = r\omega_o^2$$



Hình IV.7

Ta tính ω_o và ϵ_o . Vì P là tâm vận tốc tức thời của bánh xe nên:

$$\omega_o = \frac{V_o}{R} \text{ vì } \epsilon_o = \frac{d\omega_o}{dt} \text{ nên } \epsilon_o = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_o}{R} \right) = \frac{1}{R} W_o$$

Vậy: $W_{MO}^r = r\epsilon_o = r \frac{W_o}{R} = 0,25 \frac{2}{0,5} = 1 \text{ m/s}^2$

$$W_{MO}^n = r\omega_o^2 = r \frac{V_o^2}{R^2} = 0,25 \frac{1^2}{0,5^2} = 1 \text{ m/s}^2$$

Xét điểm M_1 :

$$\vec{W}_{M_1} = \vec{W}_o + \vec{W}_{M_1O}^r + \vec{W}_{M_1O}^n$$

Chiếu cả hai vế đẳng thức này lên các trục x và y , ta có:

$$W_{M_1X} = -W_o + W_{M_1O}^r \cos 45^\circ - W_{M_1O}^n \cos 45^\circ$$

$$\approx -2 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_1y} = W_{M_1O}^n \sin 45^\circ + W_{M_1O}^t \sin 45^\circ = 1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_1} = \sqrt{W_{M_1x}^2 + W_{M_1y}^2} = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6} = 2,449 \text{ m/s}^2.$$

Đối với điểm M_3 tính tương tự ta có:

$$W_{M_3} = W_{M_1} = 2,449 \text{ m/s}^2.$$

Với điểm M_2 : $\overrightarrow{W_{M_2}} = \overrightarrow{W_{M_2O}^t} + \overrightarrow{W_{M_2O}^n} + \overrightarrow{W_o}$,

ta có: $W_{M_2x} = -W_o - W_{M_2O}^t \cos 45^\circ - W_{M_2O}^n \cos 45^\circ$

$$= -2 - 1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -(2 + \sqrt{2}) = -3,414 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_2y} = W_{M_2O}^t \sin 45^\circ - W_{M_2O}^n \sin 45^\circ = 1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$W_{M_2} = \sqrt{W_{M_2x}^2 + W_{M_2y}^2} = 3,414 \text{ m/s}^2$$

Với điểm M_4 :

$$\overrightarrow{W_{M_4}} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{M_4O}^t} + \overrightarrow{W_{M_4O}^n}$$

$$W_{M_4x} = -W_o + W_{M_4O}^n \cos 45^\circ + W_{M_4O}^t \cos 45^\circ$$

$$= -2 + 1 \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 + 1,414 = -0,586 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_4y} = W_{M_4O}^n \sin 45^\circ - W_{M_4O}^t \sin 45^\circ = 0$$

$$W_{M_4} = \sqrt{W_{M_4x}^2 + W_{M_4y}^2} = 0,586 \text{ m/s}^2.$$

Ví dụ IV.9: Một con lăn hình trụ tròn bán kính r lăn không trượt trong ống trụ cố định sao cho vận tốc của tâm C hình trụ có giá trị không đổi bằng V . Xác định gia tốc của điểm tiếp xúc giữa con lăn và ống trụ A và của điểm B đối xứng đường kính với A (hình IV.8).

Bài giải: Ta nhận thấy tâm C của trụ tròn vạch ra quỹ đạo là đường tròn bán kính $R - r$.

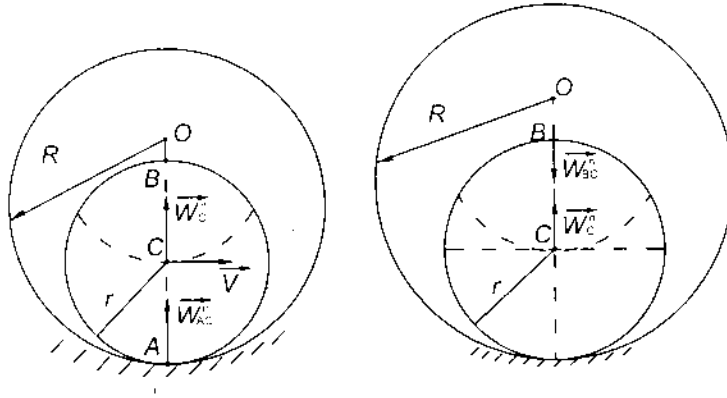
Trụ tròn chuyển động song phẳng và điểm A là tâm vận tốc tức thời.

Ta có: $\omega = \frac{V}{r}$ và $\varepsilon = 0$, vì $V = \text{const.}$

Vì tâm C chuyển động trên đường tròn nên:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_C^t} + \overrightarrow{W_C^n}$$

Nhưng $W_C^t = \frac{dV}{dt} = 0$, còn $W_C^n = \frac{V^2}{R-r}$



Hình IV.8

Theo công thức:

$$\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_C} + \overrightarrow{W_{AC}} = \overrightarrow{W_C^t} + \overrightarrow{W_C^n} + \overrightarrow{W_{AC}^t} \quad , \quad \overrightarrow{W_{AC}} = \overrightarrow{W_C^n} + \overrightarrow{W_{AC}^n}$$

do $\overrightarrow{W_C^t} = 0$ và $\overrightarrow{W_{AC}^t} = 0$ vì $\varepsilon = 0$,

vậy: $\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_C^n} + \overrightarrow{W_{AC}^n}$.

Ta có: $W_{AC}^n = \frac{V^2}{r}$.

Ta thấy $\overrightarrow{W_C^n}$ và $\overrightarrow{W_{AC}^n}$ cùng phương, chiều nên:

$$W_A = W_C^n + W_{AC}^n = \frac{V^2}{R-r} + \frac{V^2}{r}$$

$$W_A = \frac{R}{r(R-r)} V^2$$

Tính đối với điểm B :

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_C^n} + \overrightarrow{W_{BC}^n},$$

mà
$$W_C^n = \frac{V^2}{R-r}$$

và
$$W_{BC}^n = \frac{V^2}{r}.$$

Hai vectơ $\overrightarrow{W_C^n}$ và $\overrightarrow{W_{BC}^n}$ cùng phương, ngược chiều, nên:

$$W_B = W_C^n - W_{BC}^n = \frac{V^2}{R-r} - \frac{V^2}{r} = \frac{(2r-R)V^2}{r(R-r)}$$

$$W_B = \frac{2r-R}{r(R-r)} V^2.$$

V. ĐỀ BÀI TẬP

ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Bài V.1: Một điểm chuyển động theo phương trình cho trước. Tìm phương trình quỹ đạo và chỉ ra hướng chuyển động:

- | | |
|------------------------|---------------------|
| a) $x = 3t - 5$ | $y = 4 - 2t$ |
| b) $x = 2t$ | $y = 8t^2$ |
| c) $x = 5\sin 10t - 5$ | $y = 3\cos 10t$ |
| d) $x = 2 - 3\cos 5t$ | $y = 4\sin 5t - 1.$ |

Bài V.2: Theo các phương trình chuyển động điểm cho trước, hãy xác định phương trình quỹ đạo của điểm:

- | | |
|----------------------|--------------------|
| a) $x = 20t^2 + 5$ | b) $x = 4t - 2t^2$ |
| $y = 15t^2 + 3$ | $y = 3t - 1,5t^2$ |
| c) $x = 3\cos t + 5$ | d) $x = at^2$ |
| $y = 4\sin t$ | $y = bt$ |
| e) $x = 3 + 4\cos t$ | f) $x = 5\cos t$ |
| $y = 2 + 5\sin t$ | $y = 3 - 5\sin t$ |

Bài V.3: Theo các phương trình chuyển động của điểm cho trước, tìm quỹ đạo của điểm và chỉ ra quy luật chuyển động của điểm trên quỹ đạo, trong đó khoảng cách tính từ điểm ban đầu:

- | | |
|---------------------|-------------------|
| a) $x = 3t^2$ | $y = 4t^2$ |
| b) $x = 3 \sin t$ | $y = 3\cos t$ |
| c) $x = a\cos^2 t$ | $y = a\sin^2 t$ |
| d) $x = 5\cos 5t^2$ | $y = -5\sin 5t^2$ |

Bài V.4: Hãy tìm quỹ đạo của chuyển động điểm nhận được bằng cách hợp hai dao động trực giao khác tần số:

- | | |
|--------------------------|----------------------|
| a) $x = a\sin 2\omega t$ | $y = a\sin \omega t$ |
| b) $x = a\cos 2\omega t$ | $y = a\cos \omega t$ |

Bài V.5: Một đầu búa đập vào cọc, sau đó chuyển động cùng với cọc trong thời gian 0,02 giây mới dừng hẳn; cọc đã nhún sâu xuống đất được 6 cm. Hãy xác định vận tốc ban đầu của cọc, coi rằng nó chuyển động chậm dần đều.

Bài V.6: Một tàu điện chuyển động theo đường thẳng, trong thời gian tăng tốc quãng đường đi tỷ lệ bậc ba với thời gian. Trong một phút đầu tàu điện đi được 90 m.

Tìm vận tốc, gia tốc tại thời điểm $t = 0$, $t = 5s$ và thiết lập đường cong của khoảng cách, vận tốc, gia tốc.

Bài V.7: Một tàu hỏa có vận tốc ban đầu 54 km/h trong khoảng 30 giây đầu nó đi được 600 m. Ta coi chuyển động của tàu là biến đổi

đều. Xác định vận tốc và gia tốc tại cuối giây thứ 30 nếu tàu chuyển động trên đường vòng bán kính $r = 1000$ m.

Bài V.8: Một tàu hỏa chuyển động chậm dần đều trên cung tròn bán kính $r = 800$ m và đi được quãng đường $s = 800$ m với vận tốc ban đầu $V_0 = 54$ km/h và vận tốc cuối cùng $V = 18$ km/h.

Hãy xác định gia tốc của tàu tại điểm đầu và điểm cuối quãng đường, cũng như thời gian đi hết đoạn đường ấy.

Bài V.9: Một tàu hỏa rời ga có vận tốc nhanh dần đều sau 3 phút đạt vận tốc 72 km/h, đường tàu đặt trên một đoạn đường cong có bán kính $R = 800$ m.

Tìm gia tốc tiếp tuyến, gia tốc pháp tuyến, gia tốc toàn phần của tàu sau khi rời ga 2 phút.

Bài V.10: Một quả đạn chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng theo phương trình :

$$x = 300t; \quad y = 400t - 5t^2 \quad (t \text{ tính bằng giây; } x, y \text{ tính bằng mét}).$$

Hãy xác định:

a) Vận tốc, gia tốc tại thời điểm ban đầu.

b) Độ cao và tầm xa.

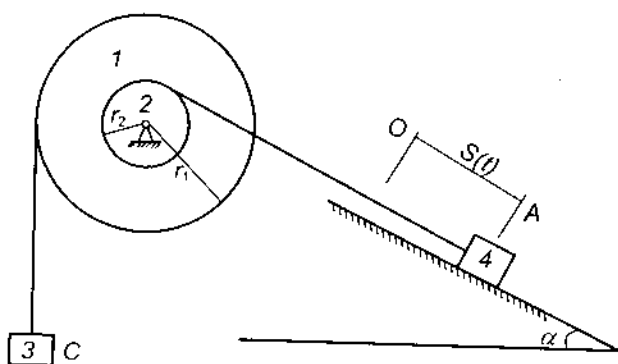
c) Bán kính cong của quỹ đạo tại điểm ban đầu và điểm cao nhất.

Bài V.11: Bom rơi từ máy bay chuyển động theo phương trình $x = 40t; y = 4,9t^2$ (x, y tính theo mét; t tính theo giây). Chọn gốc tọa độ tại điểm bom bắt đầu rơi, trục Ox nằm ngang, trục Oy hướng xuống dưới.

Hãy tìm phương trình quỹ đạo của bom và xác định thời gian rơi, tầm bay xa của bom theo phương ngang. Biết rằng máy bay bay ở độ cao $h = 3000$ m.

Bài V.12: Cho cơ cấu nâng vật nặng như hình V.12. Người ta cuốn dây vào ròng rọc 1 bán kính r_1 và ròng rọc 2 bán kính r_2 . Tại đầu C của dây treo vật nặng 3 và tại đầu A của dây buộc vật nặng 4.

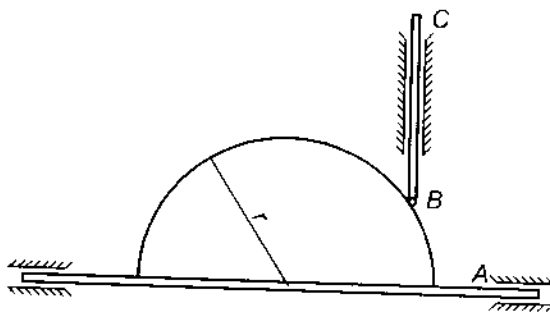
Vật nặng 4 chuyển động xuống theo mặt phẳng nghiêng làm cho ròng rọc kép quay và vật nặng 3 được nâng lên.



Hình V.12

Coi dây không giãn, tìm vận tốc và gia tốc của vật nặng 3 nếu vật nặng 4 chuyển động theo quy luật $S = at^2$. Lúc đầu hệ đứng yên.

Bài V.13: Hãy tìm xem thanh BC đã hạ xuống một đoạn bằng bao nhiêu khi đầu B của nó tựa lên nửa đường tròn bán kính $r = 30$ cm. Nếu vấu chuyển động thuận nghịch với vận tốc $V = 5$ cm/s. Thời gian thanh hạ xuống $t = 3$ s. Tại thời điểm ban đầu thanh ở vị trí cao nhất (hình V.13).



Hình V.13

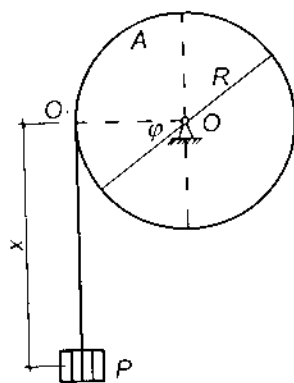
Bài V.14: Một bánh đà bắt đầu rời khỏi vị trí yên tĩnh quay với gia tốc góc không đổi. Qua 10 phút đầu, sau khi bắt đầu chuyển động nó có vận tốc góc bằng 120 vg/ph.

Hỏi bánh đà đó quay được bao nhiêu vòng trong 10 phút đó?

Bài V.15: Khi tắt động cơ, cánh quạt của máy bay có vận tốc góc là $n = 1200$ vg/ph quay được 80 vòng thì dừng. Hỏi từ thời điểm tắt động cơ đến khi dừng hết bao nhiêu thời gian? Ta coi như cánh quạt quay chậm dần đều.

Bài V.16: Đầu búa đóng cọc rơi từ độ cao $h = 2,5$ m thời gian nâng búa lên độ cao đó gấp ba thời gian búa rơi. Trong một phút búa đập bao nhiêu lần nếu ta xem rằng búa rơi tự do với gia tốc $9,81 \text{ m/s}^2$.

Bài V.17: Trục A có bán kính $R = 10$ cm quay được nhờ quả cân P treo vào bằng một sợi dây. Quả cân chuyển động theo phương trình $x = 100t^2$, trong đó x là khoảng cách từ quả cân đến đường nằm ngang cố định OO_1 (x tính bằng cm; t tính bằng giây).



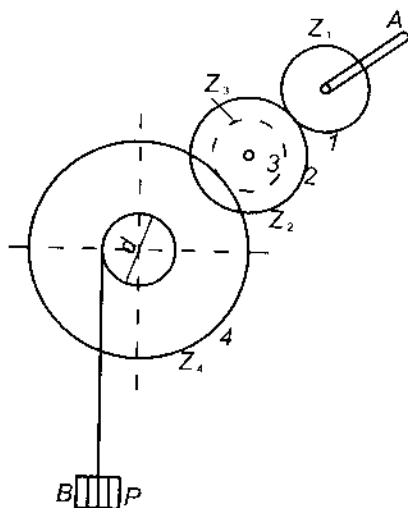
Hình V.17

Hãy xác định vận tốc góc ω và gia tốc góc ε của trục cũng như gia tốc toàn phần W của điểm trên bề mặt của trục tại thời điểm t bất kỳ (hình V.17).

Bài V.18: Cơ cấu của xe tời (như trong hình V.18), làm cho tải trọng P chuyển động thẳng đứng, khi quay tay quay a . Do bộ phận hãm bị hỏng, tải trọng bất thành linh rơi xuống. Phương trình

chuyển động của tải trọng $x = 5t^2$ cm (t tính bằng giây). Trục Ox hướng theo dây xuống phía dưới. Đường kính của trống $d = 200$ mm. Số răng của cơ cấu tời như sau: $Z_1 = 13$; $Z_2 = 39$; $Z_3 = 11$; $Z_4 = 77$.

Hãy xác định vận tốc và gia tốc của điểm đầu tay quay có độ dài $a = 400$ mm sau khi chuyển động được 2 giây.



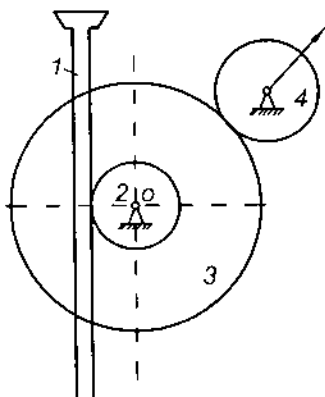
Hình V.18

Bài V.19: Chất điểm chuyển động theo hình xoắn ốc cho bởi phương trình $x = 2\cos 4t$; $y = 2\sin 4t$; $z = 2t$, trong đó độ dài đo bằng mét.

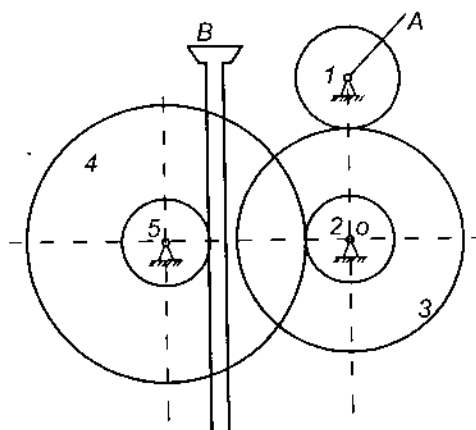
Xác định bán kính cong ρ của quỹ đạo.

Bài V.20: Trong cơ cấu đồng hồ chỉ kim chuyển động của cột đo (1) truyền cho bánh răng (2) trên trục của bánh răng này gắn vào bánh răng (3) ăn khớp với bánh răng (4) mang kim đồng hồ chỉ (hình V.20).

Hãy xác định vận tốc góc của kim nếu chuyển động của cột đo được cho bởi phương trình $x = a\sin kt$ (a , k là hằng số), còn bán kính của các bánh răng tương ứng là r_2 , r_3 , r_4 .



Hình V.20

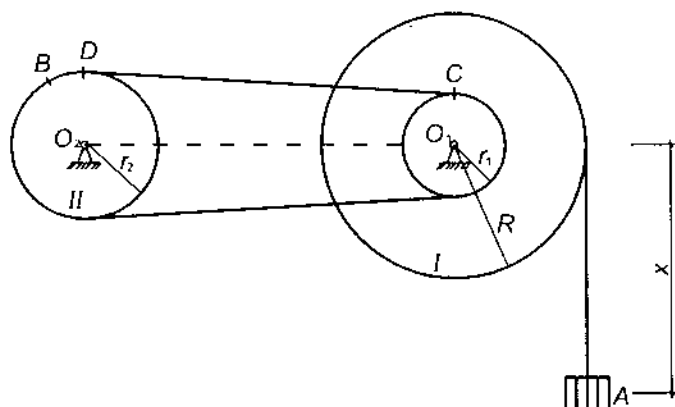


Hình V.21

Bài V.21: Trong cơ cấu của cái kích khí ta quay tay quay A thì các bánh răng (1), (2), (3), (4) và (5) sẽ quay, chúng làm cho cột B có khắc răng của kích chuyển động (hình V.21).

Xác định vận tốc của cột nếu tay quay A quay 30.vg/ph. Số răng của các bánh $Z_1 = 6$, $Z_2 = 24$; $Z_3 = 8$; $Z_4 = 32$. Bán kính bánh răng (5) là $r_5 = 4$ cm.

Bài V.22: Một sợi dây không giãn cuốn vào tầng ngoài của ròng rọc kép I. Đầu kia của dây buộc vào vật A . Ròng rọc I truyền chuyển động cho ròng rọc II (hình V.22) nhờ đai truyền.



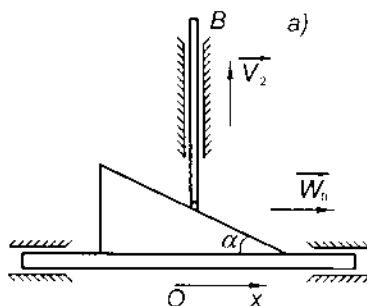
Hình V.22

Tìm:

- Vận tốc góc và gia tốc góc của ròng rọc II khi vật A chuyển động thẳng đứng xuống dưới theo phương trình $x = \frac{1}{2}t^2$.
- Vận tốc và gia tốc của điểm B trên mặt của ròng rọc II.

CHUYỂN ĐỘNG PHỨC HỢP CỦA ĐIỂM

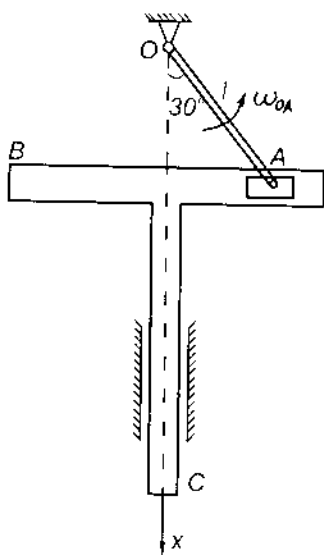
Bài V.23: Vấu tam giác chuyển động tịnh tiến, mặt dẫn của nó nghiêng với trục Ox một góc α . Hãy xác định gia tốc của thanh tựa trên vấu và trượt tự do trong các ổ đỡ, biết rằng vấu chuyển động với gia tốc không đổi W_0 và thanh tựa luôn luôn vuông góc với Ox (hình V.23).



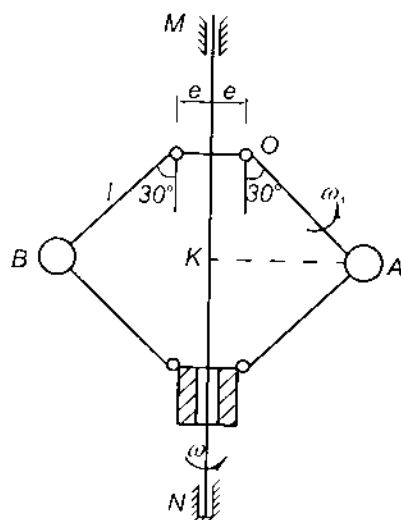
Hình V.23

Bài V.24: Trong cơ cấu thanh trượt tay quay, thanh trượt BC chuyển động tịnh tiến, còn tay OA có độ dài $l = 200$ mm quay với vận tốc góc không đổi $n = 90$ vg/ph. Đầu A gắn bản lề với con chạy trượt trong rãnh của thanh trượt. Con chạy làm cho thanh trượt BC chuyển động tịnh tiến thuận nghịch (hình V.24).

Hãy xác định vận tốc V của thanh trượt khi tay quay tạo với trục thanh trượt một góc $\angle xOA = 30^\circ$.



Hình V.24



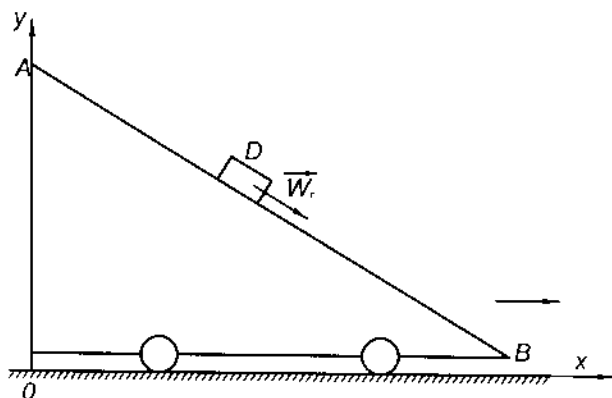
Hình V.25

Bài V.25: Một máy tiết chế ly tâm Oát quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc tiết chế $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Do thay đổi lực đặt vào máy các quả cầu tách khỏi trục và làm cho các thanh gắn với chúng có vận tốc góc $\omega_1 = 1,2 \text{ rad/s}$ tại vị trí đang xét (hình V.25).

Hãy xác định vận tốc tuyệt đối của các quả cầu tại thời điểm đang xét, biết độ dài của các thanh là $l = 50 \text{ cm}$, khoảng cách giữa các trục đi qua các điểm treo của chúng là $2e = 10 \text{ cm}$. Các góc tạo bởi các thanh với trục máy tiết chế:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30^\circ.$$

Bài V.26: Mặt phẳng AB nghiêng với mặt phẳng nằm ngang một góc 45° và chuyển động thẳng song song trục Ox với gia tốc không đổi 1 dm/s^2 . Trên mặt phẳng AB , một vật D chuyển động xuống với gia tốc tương đối không đổi $\sqrt{2} \text{ dm/s}^2$. Vận tốc ban đầu của mặt phẳng nghiêng và vật bằng không; vị trí ban đầu của vật có tọa độ $x = 0, y = h$ (hình V.26).

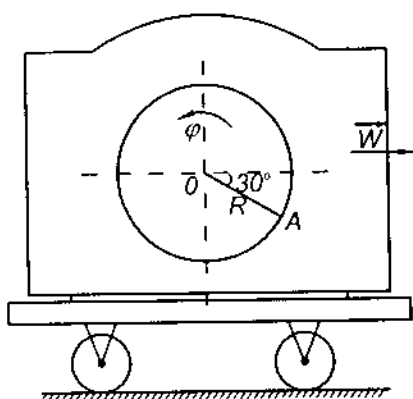


Hình V.26

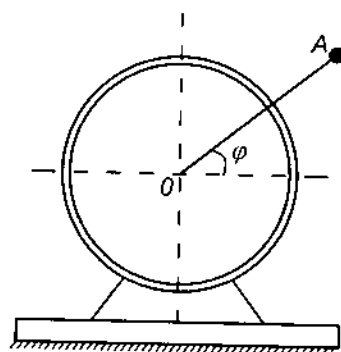
Xác định quỹ đạo vận tốc và gia tốc của chuyển động tuyệt đối của vật.

Bài V.27: Trên xe tời đang chuyển động theo phương nằm ngang về phía bên phải với gia tốc $W = 49,2 \text{ cm/s}^2$, người ta đặt một động cơ điện có rôto khi hoạt động quay theo phương trình $\varphi = t^2$, góc φ đo bằng radian, bán kính rôto bằng 20 cm (hình V.27).

Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm A nằm trên vành của rôto khi $t = 1 \text{ s}$. Nếu thời điểm đó điểm ở tại vị trí như trên hình V.27.



Hình V.27



Hình V.28

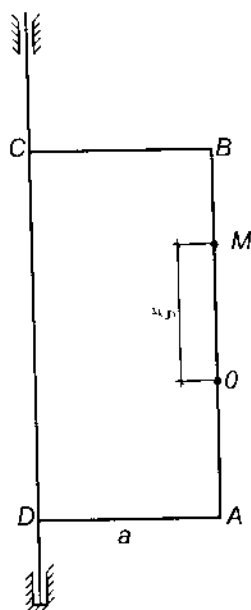
Bài V.28: Một động cơ điện quay theo quy luật $\varphi = \omega t$ (ω là hằng số). Người ta gắn thanh OA có độ dài l vuông góc với trục của nó. Trong khi đó động cơ được đặt tự do nên thực hiện dao động điều hòa theo phương nằm ngang trên bộ máy theo quy luật $x = a \sin \omega t$ (hình V.28).

Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm A tại thời điểm

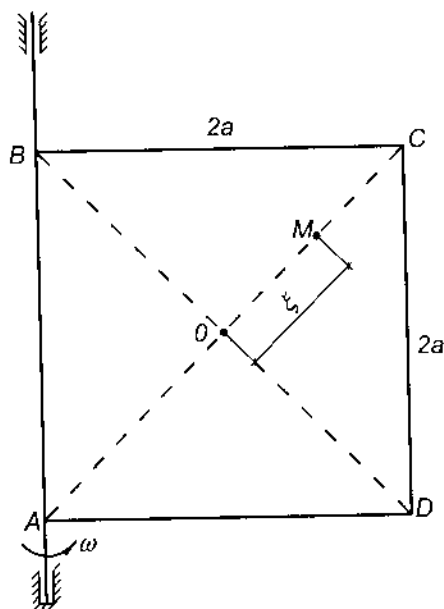
$$t = \frac{\pi}{2\omega} \text{ s.}$$

Bài V.29: Hình chữ nhật $ABCD$ quay quanh cạnh CD với vận tốc $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} = \text{const}$. Dọc theo cạnh AB điểm M chuyển động theo quy luật $\xi = a \sin \frac{\pi}{2} t$ (cm). Cho biết $DA = CB = a$ cm (hình V.29).

Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm tại thời điểm $t = 1$ s.



Hình V.29

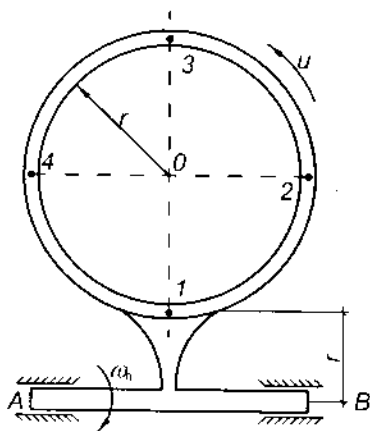


Hình V.30

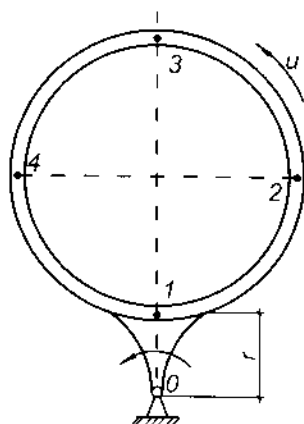
Bài V.30: Hình vuông $ABCD$ có cạnh $2a$ quay xung quanh cạnh AB với vận tốc góc không đổi $\omega = \pi\sqrt{2}$ rad/s. Dọc theo đường chéo AC điểm M dao động theo quy luật $\xi = a \cos \frac{\pi}{2} t$ (cm) (hình V.30).

Hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm M khi $t = 1$ s và khi $t = 2$ s.

Bài V.31: Hình xuyên rỗng bán kính r gắn chặt vào trục AB sao cho tim của trục nằm trong mặt phẳng của trục hình xuyên. Hình xuyên đựng đầy nước chuyển động theo chiều mũi tên với vận tốc tương đối không đổi u . Trục AB quay theo chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ A đến B . Vận tốc góc của trục là $\omega = \text{const}$. Hãy xác định giá trị gia tốc tuyệt đối của các điểm 1, 2, 3 và 4 (hình V.31).



Hình V.31



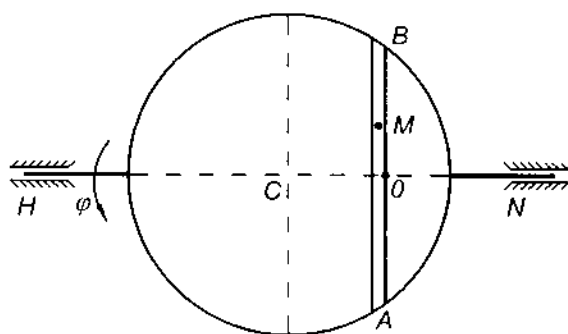
Hình V.32

Bài V.32: Theo các điều kiện của bài V.31, chỉ thay đổi ở chỗ mặt phẳng của trục hình xuyên vuông góc với trục AB (hình V.32). Hãy xác định các giá trị như ở bài V.31 trong hai trường hợp:

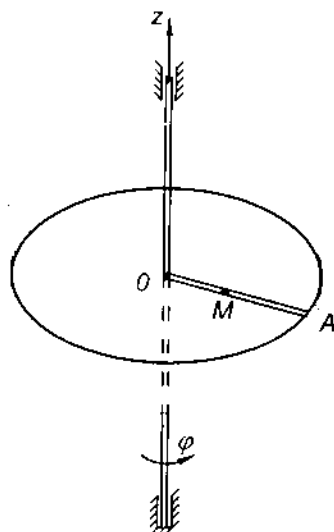
- Chuyển động kéo theo và chuyển động tương đối cùng hướng;
- Các chuyển động thành phần ngược hướng nhau.

Bài V.33: Quả cầu M chuyển động từ điểm O trên dây cung AB của đĩa tròn quay quanh đường kính vuông góc với dây cung AB theo quy luật $\varphi = 3t - 0,5t^2$ rad (nếu nhìn từ N về H ta thấy đĩa tròn quay quanh đường kính ngược chiều kim đồng hồ). Trong lúc đó điểm M chuyển động từ O (hình V.33) theo quy luật $OM = S_r = 4\sin\frac{\pi}{2}t$ (cm, s).

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M khi $t = 0$ và $t = 1$ s.



Hình V.33

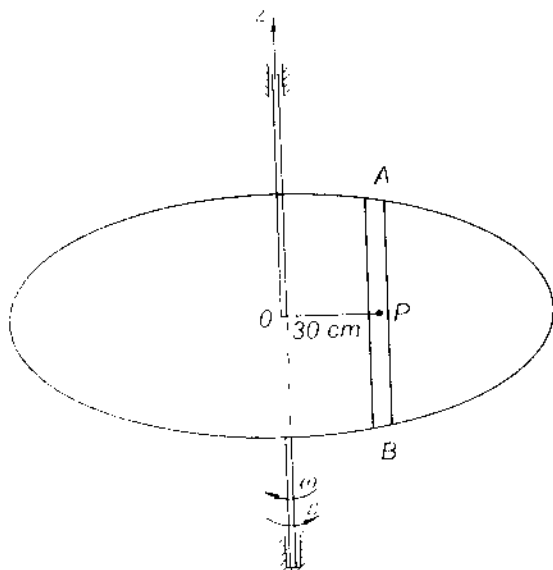


Hình V.34

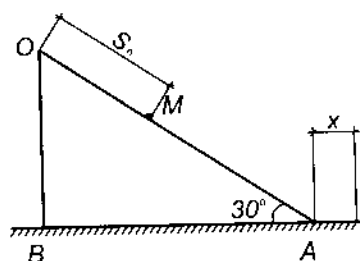
Bài V.34: Một đĩa tròn quay quanh trục đi qua tâm O và vuông góc với mặt phẳng của đĩa theo luật $\varphi = \frac{2}{3}t^3$. Điểm M bắt đầu chuyển động dọc bán kính OA theo quy luật $OM = S_r = 4t^2 - 10t + 8$ (cm). Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của M (hình V.34) khi $t = 1$ s.

Bài V.35: Quả cầu P chuyển động với vận tốc $V = 1,2$ m/s từ A đến B dọc theo dây cung AB của đĩa tròn quay quanh trục z đi qua tâm O của nó và vuông góc với mặt phẳng của đĩa (hình V.35).

Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của quả cầu khi nó ở cách tâm O một khoảng ngắn nhất là 30 cm. Tại thời điểm này vận tốc góc của đĩa là $\omega = 3$ rad/s, và gia tốc góc chậm dần bằng 8 rad/s².



Hình V.35



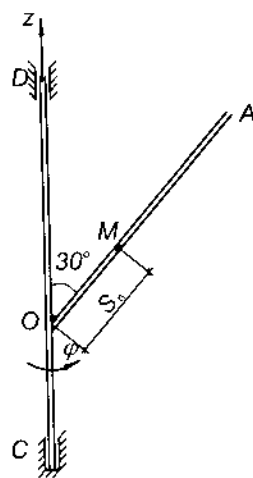
Hình V.36

Bài V.36: Lăng trụ tam giác OAB trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang theo phương trình $x = t^3$ (m, s). Trong khi đó một điểm M chuyển động dọc mặt nghiêng OA theo quy luật $OM = S_r = 5t - t^3$ (m, s). Góc $OAB = 30^\circ$ (hình V.36).

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của M khi $t = 1$ s.

Bài V.37: Thanh OA gắn vào trục CD tạo thành góc 30° . Một điểm M chuyển động dọc OA theo quy luật $OM = S_r = 2t^3$ (m, s). Khi đó trục CD (hình V.37) quay với quy luật $\varphi = 8t - t^3$ (rad).

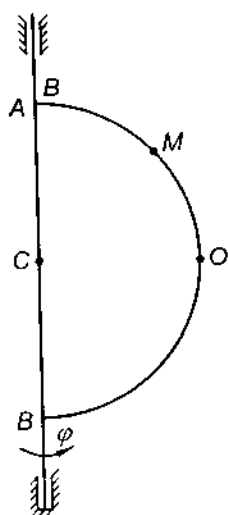
Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M khi $t = 1$ s.



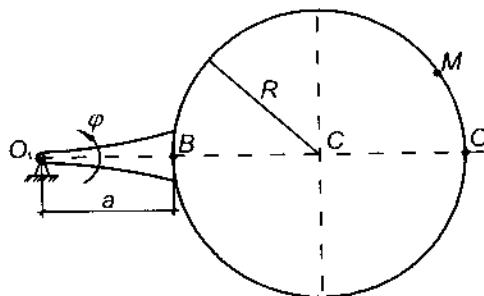
Hình V.37

Bài V.38: Nửa đường tròn bán kính R quay quanh đường kính thẳng đứng AB theo quy luật $\varphi = 4t - 0,2t^2$ (rad). Khi đó điểm M (hình V.38) chuyển động trên nửa đường tròn này với phương trình: $OM = S_r = 10\pi \sin \frac{\pi}{4} t$ (cm/s).

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M khi $t = \frac{2}{3}$ (s) nếu $R = 30\text{cm}$.



Hình V.38



Hình V.39

Bài V.39: Hình xuyến rộng bán kính R tâm C quay quanh trục O_1z theo quy luật $\varphi = 5t - 4t^2$ (rad) sao cho mặt phẳng hình xuyến vuông góc với trục quay O_1z . Điểm M (hình V.39) chuyển động trong hình xuyến theo phương trình

$$OM = S_r = \frac{15}{8} \pi t^3 \text{ (cm/s)}.$$

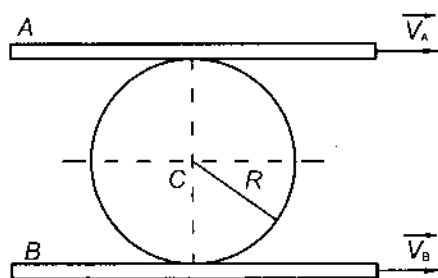
Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của M khi $t = 2\text{s}$, nếu $R = a = 30\text{cm}$.

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

Bài V.40: Hai thanh A và B song song cùng chuyển động về một phía với vận tốc $V_A \neq V_B$. Giữa hai thanh có một đĩa tròn tâm C bán kính R chuyển động lăn không trượt theo các thanh (hình V.40).

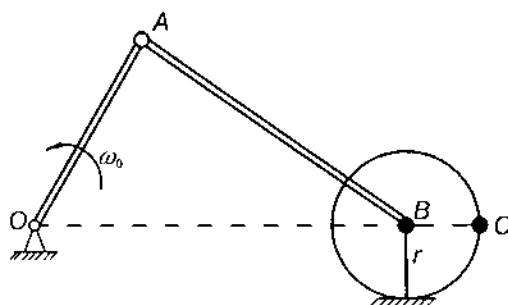
Hãy xác định:

- Vận tốc tâm C và vận tốc góc của đĩa theo V_A, V_B ;
- Từ đó suy ra kết quả khi các thanh cùng chuyển động về hai phía khác nhau.



Hình V.40

Bài V.41: Tay quay $OA = 30$ cm quay quanh trục O với vận tốc góc $\omega_0 = 2,5$ rad/s truyền chuyển động cho bánh xe bán kính $r = 10$ cm nhờ thanh $AB = 30\sqrt{3}$ cm. Cho bánh xe lăn không trượt trên đường nằm ngang (hình V.41).

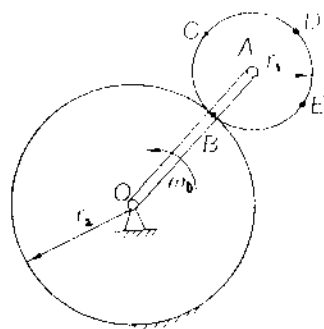


Hình V.41

Hãy xác định vận tốc góc bánh xe BC , vận tốc các điểm B và C khi OA vuông góc với AB .

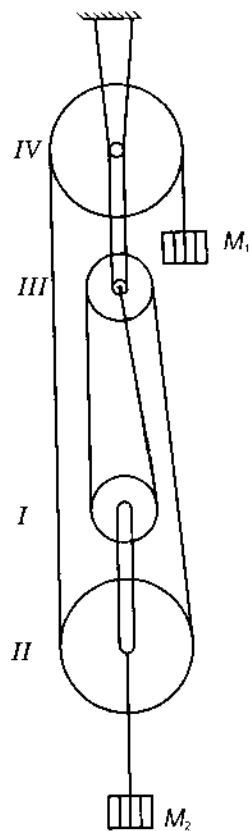
Bài V.42: Tay quay OA quay với vận tốc góc $\omega_0 = 2,5 \text{ rad/s}$ quanh trục O của bánh xe cố định bán kính $r_2 = 15 \text{ cm}$ và làm cho bánh xe bán kính $r_1 = 5 \text{ cm}$ gắn trên đầu A của nó chuyển động lăn không trượt trên bánh xe cố định (hình V.42).

Hãy xác định vận tốc các điểm A, B, C, D và E của bánh xe động nếu CE vuông góc với BD .



Hình V.42

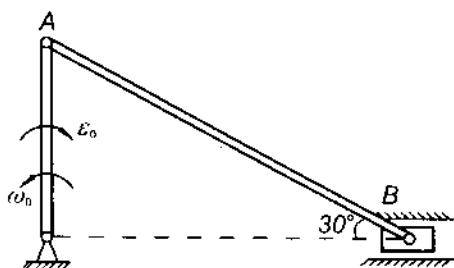
Bài V.43: Hai vật nặng M_1 và M_2 buộc vào hệ puli bốn ròng rọc. hãy xác định vận tốc của các điểm thấp nhất của các ròng rọc I và II thuộc cụm di động, vận tốc góc của các ròng rọc đó và vận tốc V_2 của vật nặng M_2 nếu vật M_1 hạ xuống với vận tốc $V_1 = 12 \text{ cm/s}$; $r_1 = 6 \text{ cm}$; $r_2 = 9 \text{ cm}$ (hình V.43).



Hình V.43

Bài V.44: Tay quay $OA = 35 \text{ cm}$ quay quanh O làm thành AB và con chạy B chuyển động (hình V.44).

Tìm vận tốc, gia tốc con chạy B , vận tốc góc, gia tốc góc thanh AB tại thời điểm OA ở vị trí thẳng đứng, nếu $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$; $\epsilon_0 = 8 \text{ rad/s}^2$ và $\alpha = 30^\circ$.



Hình V.44

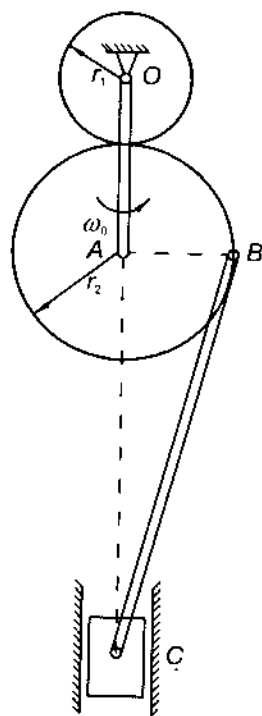
Bài V.45: Tay quay $OA = 30$ cm quay quanh trục O với vận tốc góc $\omega_0 = 0,5$ rad/s. Bánh xe bán kính $r_2 = 20$ cm lăn không trượt trên bánh xe cố định bán kính $r_1 = 10$ cm làm cho thanh truyền $CB = 20\sqrt{26}$ cm gắn với nó chuyển động (hình V.45).

Hãy xác định vận tốc góc của thanh truyền CB và vận tốc các điểm B và C khi bán kính AB trực giao với tay quay OA .

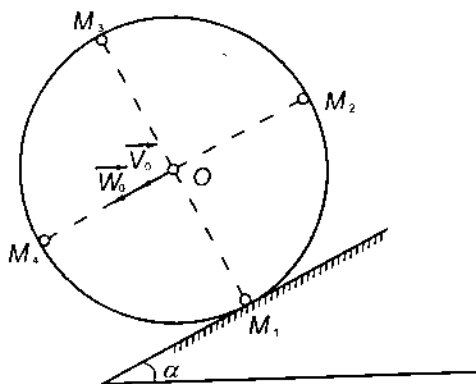
Bài V.46: Bánh xe tâm O lăn không trượt trong mặt phẳng thẳng đứng theo một đường thẳng nghiêng với phương ngang một góc α .

Xác định gia tốc các điểm đầu

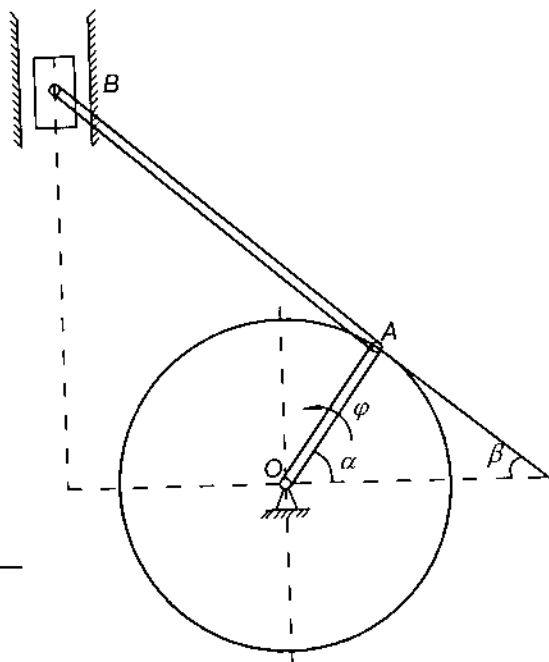
mút của hai đường kính vuông góc với nhau mà một trong hai đường kính của bánh xe song song với đường ray. Biết rằng tại thời điểm đang xét vận tốc tâm O của bánh xe là $V_o = 1$ m/s, gia tốc của tâm này là $W_o = 3$ m/s² bán kính bánh xe là $R = 0,5$ m (hình V.46).



Hình V.45



Hình V.46



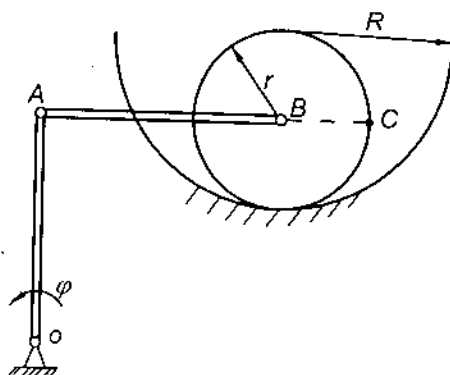
Hình V.47

Bài V.47: Tay quay $OA = 20$ cm quay quanh O theo quy luật $\varphi = 10t$ rad (t tính theo giây) và làm cho thanh $AB = 100$ cm chuyển động. Con chạy B chuyển động theo đường thẳng đứng.

Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của thanh AB cũng như gia tốc con chạy B khi thanh biên AB và tay quay OA vuông góc với nhau và hợp với trục nằm ngang những góc $\alpha = \beta = 45^\circ$ (hình V.47).

Bài V.48: Tay quay OA quay quanh trục cố định O theo quy luật $\varphi(t) = t^2 - t$ (rad) làm bánh xe bán kính r lăn không trượt trong ống trụ cố định bán kính R nhờ thanh truyền AB . Tại thời điểm $t = 1$ s cơ cấu ở vị trí như ở hình V.48.

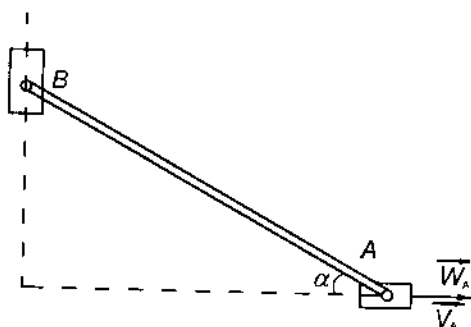
Hãy xác định vận tốc và gia tốc của các điểm B, C và xác định gia tốc góc thanh AB và gia tốc góc bánh xe, nếu $OA = AB = R = 2r = 1$ m.



Hình V.48

Bài V.49: Thanh AB chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng với đầu A chuyển động theo phương nằm ngang, đầu B chuyển động thẳng đứng. Tại thời điểm khảo sát đầu A có $V_A = 10 \text{ cm/s}$, $W_A = 20 \text{ cm/s}^2$. Biết $AB = 20 \text{ cm}$ và $\alpha = 30^\circ$ (hình V.49).

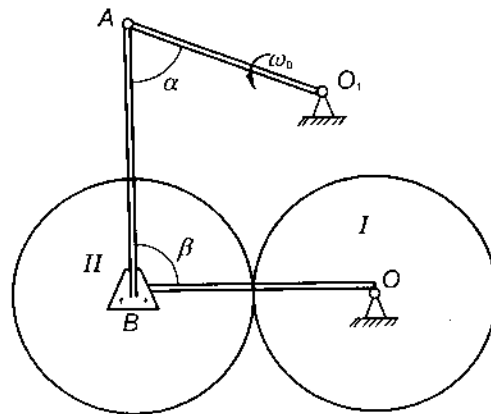
Tìm gia tốc điểm B và gia tốc góc thanh AB .



Hình V.49

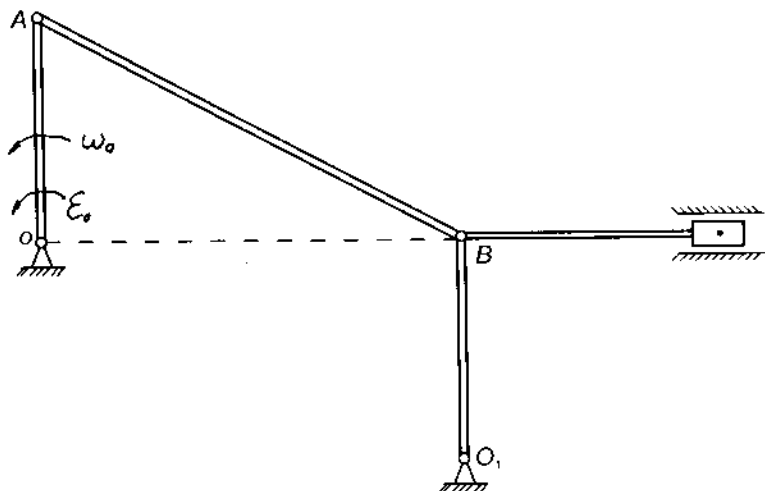
Bài V.50: Trong cơ cấu Oát tay đòn O_1A quay quanh trục O_1 và nhờ thanh biên AB truyền chuyển động cho tay quay OB đặt tự do trên trục O . Bánh xe I cũng được đặt lên trục O . Một đầu của thanh truyền AB gắn vào bánh xe II (hình V.50)."

Hãy xác định vận tốc góc của tay quay OB và bánh xe I khi $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Biết $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ cm; $O_1A = 75$ cm, $AB = 150$ cm và vận tốc góc của tay đòn $\omega_0 = 6$ rad/s.



Hình V.50

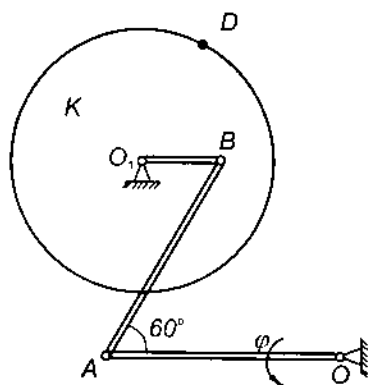
Bài V.51: Xác định vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp của điểm B của cơ cấu truyền chuyển động (hình V.51) khi OA ở vị trí thẳng đứng. Cho tay quay OA quay quanh O với gia tốc góc không đổi $\varepsilon_0 = 5\text{ s}^{-2}$ và tại thời điểm khảo sát có vận tốc góc $\omega_0 = 10\text{ s}^{-1}$. Biết $OA = 20$ cm, $O_1B = 100$ cm và $AB = 120$ cm.



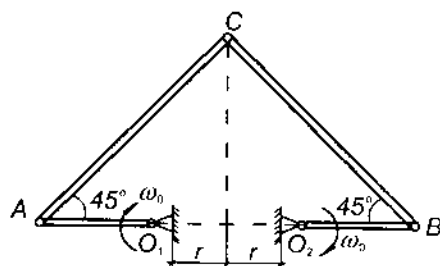
Hình V.51

Bài V.52: Máy mài chuyển động nhờ bàn đạp $OA = 24$ cm, dao động quanh O theo quy luật $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} t$ (rad). Góc φ tính từ đường nằm ngang. Viên đá mài K chuyển động quay quanh O_1 nhờ thanh truyền AB . Trục O và O_1 cùng vuông góc với mặt phẳng hình V.52. Tại thời điểm $t = 0$ thì OA và O_1B nằm ngang. Góc $OAB = 60^\circ$. Xác định:

- Vận tốc điểm D trên bề mặt viên đá mài K
- Gia tốc điểm B của viên đá mài K nếu $O_1B = 0,5R = 12$ cm.



Hình V.52



Hình V.53

Bài V.53: Hai thanh CA và CB nối với nhau bằng bản lề C . Tay quay $O_1A = O_2B = r$ quay cùng chiều nhau với vận tốc góc không đổi ω_0 .

Xác định vận tốc và gia tốc điểm C khi tay quay O_1A và O_2B nằm ngang trên cùng một đường thẳng (hình V.53). Nếu tại thời điểm đó góc $CAO_1 = CBO_2 = 45^\circ$ và khoảng cách $O_1O_2 = 2r$.

VI. HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

Bài V.1: Từ các phương trình chuyển động ta biến đổi

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x &= 3t - 5; & 2x &= 6t - 10 \\ y &= -2t + 4; & 3y &= -6t + 12 \\ & \Rightarrow 2x + 3y - 2 = 0 \end{aligned}$$

Đường thẳng $3y + 2x - 2 = 0$ bắt đầu tại $x = -5$ và $y = 4$.

$$\text{b)} \quad x = 2t; \quad y = 8t^2 = 2x^2$$

Nhánh phải của parabol $y = 2x^2$ và bắt đầu tại gốc tọa độ $x = 0$, $y = 0$.

$$\text{c)} \quad \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1. \text{ Elip } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ và bắt đầu tại } x = 0; y = 3.$$

$$\text{d)} \quad \frac{x-2}{3} = -\cos 5t \text{ và } \frac{y+1}{4} = \sin 5t. \text{ Elip } \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

Điểm bắt đầu chuyển động tại vị trí:

$$x = 2 \text{ và } y = -1.$$

Bài V.2 (hình VI.2):

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x = 20t^2 + 5 \\ y = 15t^2 + 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3x = 60t^2 + 15 \\ 4y = 60t^2 + 12 \\ \hline 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

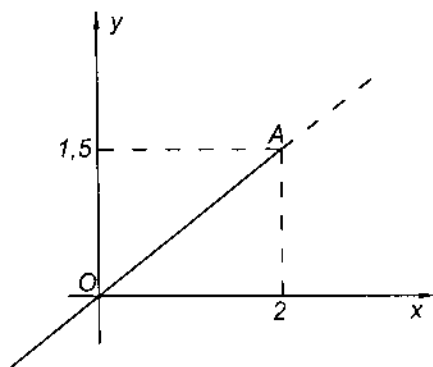
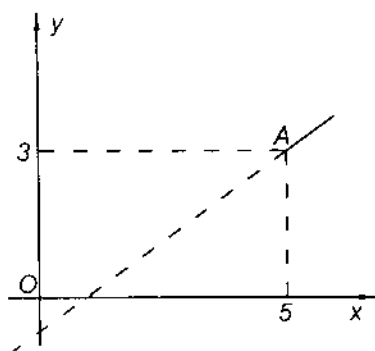
Đây là phương trình đường thẳng không đi qua gốc tọa độ. Điểm xuất phát từ $A(5, 3)$. Quỹ đạo là nửa đường thẳng (hình VI.2a).

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x = 4t - 2t^2 \\ y = 3t - 1,5t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 12t - 6t^2 \\ 4y = 12t - 6t^2 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

Đây là phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ (hình VI.2b), quỹ đạo là nửa đường thẳng:

$$-\infty < x \leq 2 \text{ và } -\infty < y \leq 1,5$$



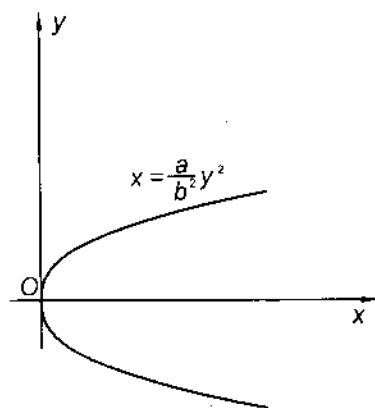
Ta có:
$$\begin{cases} x = 5 + 3 \cos t \\ y = 4 \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x-5}{3}\right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2 t \end{cases}$$

Cộng hai vế ta được:

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Quỹ đạo là đường elip.



Hình VI.2

$$d) \quad \begin{cases} x = at^2 \\ y = bt \end{cases}$$

Ta có: $t = \frac{y}{b}$. Thay vào ta được:

$$x = a \frac{y^2}{b^2} = \frac{a}{b^2} y^2$$

Quỹ đạo là parabol (hình VI.2c):

$$x = \frac{a}{b^2} y^2 \text{ hay } ay^2 = b^2 x \rightarrow ay^2 - b^2 x = 0.$$

$$e) \quad \begin{cases} x = 3 + 4 \cos t \\ y = 2 + 5 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x-3}{4} \right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y-2}{5} \right)^2 = \sin^2 t \end{cases}$$

Vậy quỹ đạo là elip có phương trình:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

$$f) \quad \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 3 - 5 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{5} \right)^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y-3}{5} \right)^2 = \sin^2 t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1, \text{ hay } x^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Quỹ đạo là đường tròn bán kính bằng 5 với tâm $O(0, 3)$.

Bài V.3:

$$a) \quad x = 3t^2; \quad y = 4t^2 \Rightarrow 4x - 3y = 0$$

$$dx = 6tdt; \quad dy = 8tdt$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(36t^2 + 64t^2) \cdot (dt)^2} = 10tdt$$

$$s = \int_0^s ds = \int_0^t 10t dt = 5t^2.$$

$$b) \quad x = 3\sin t; \quad y = 3\cos t \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

$$dx = 3\cos t dt; \quad dy = -3\sin t dt$$

$$ds = \sqrt{9(\cos^2 t + \sin^2 t)(dt)^2} = 3dt; \quad s = 3t.$$

$$c) \quad x = a\cos^2 t; \quad y = a\sin^2 t \Rightarrow x + y = a$$

$$dx = -2a\cos t \sin t dt; \quad dy = 2a\cos t \sin t dt$$

$$ds = \sqrt{2a} \cdot 2\sin t \cos t dt; \quad s = a\sqrt{2} \sin^2 t.$$

$$d) \quad x = 5\cos 5t^2; \quad y = 5\sin 5t^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$dx = -50t \cdot \sin 5t^2 dt$$

$$dy = 50t \cdot \cos 5t^2 dt; \quad s = 25t^2.$$

Bài V.4:

a) Theo bài ra

$$x = a\sin 2\omega t \text{ và } y = a\sin \omega t.$$

Ta biến đổi:

$$x = 2a\sin \omega t \cdot \cos \omega t = 2a\sin \omega t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$$

Thay $\sin \omega t = \frac{y}{a}$, ta có:

$$x = 2y \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2} = \frac{2y}{a} \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$a^2 x^2 = 4y^2 (a^2 - y^2).$$

b) Ta có:

$$x = a\cos 2\omega t; \quad y = a\cos \omega t$$

Thay $\cos 2\omega t = 2\cos^2 \omega t - 1$, do đó:

$$x = a(2\cos^2 \omega t - 1) = 2a\cos^2 \omega t - a$$

$$x = 2 \frac{a^2}{a} \cos^2 \omega t - a = \frac{2y^2}{a} - a$$

$$ax = 2y^2 - a^2 \Rightarrow 2y^2 - ax - a^2 = 0.$$

Bài V.5: Áp dụng công thức

$$s = V_o t + \frac{1}{2} W_o t^2 \text{ mà } W_o = \frac{V - V_o}{t}$$

$$\Rightarrow s = V_o t + \frac{1}{2} \left(\frac{V - V_o}{t} \right) t^2 = \frac{1}{2} (V + V_o) t$$

Khi dừng lại thì $V = 0$ nên $s = \frac{1}{2} V_o t$. Vậy:

$$V_o = \frac{2s}{t} = 6 \text{ m/s.}$$

Bài V.6 (hình VI.6):

Theo bài ra ta có:

$$s = kt^2 \text{ ; khi } t = 1 \text{ ph}$$

thì $s = 90 \text{ m}$, vậy $k = 90 \text{ m/ph}^2$,

$$s = 90t^2 \Rightarrow \dot{s} = 270t = V$$

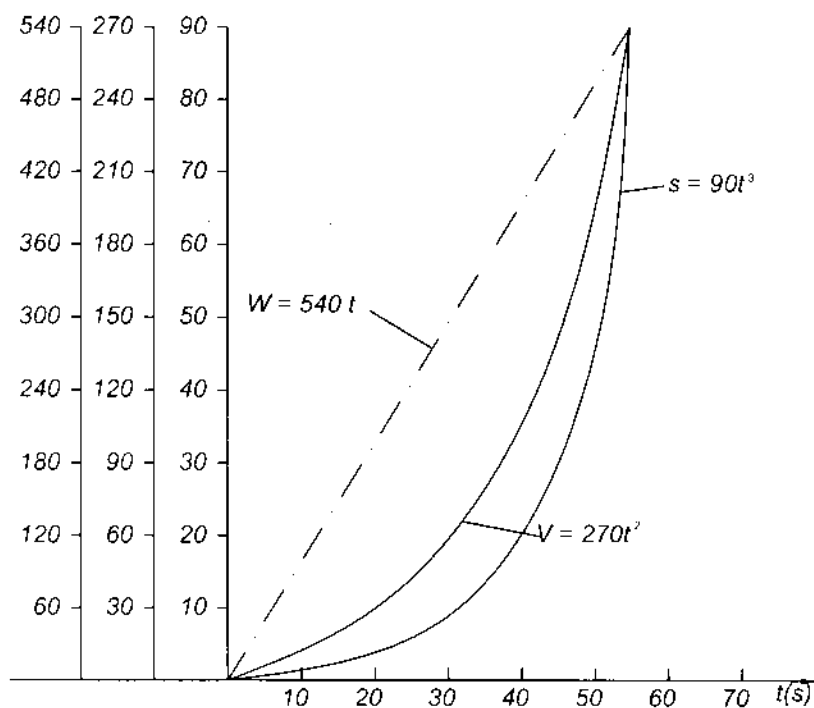
$$\ddot{s} = 540t = W$$

$$\text{Khi } t = 0 \Rightarrow V_o = 0; W_o = 0.$$

$$\text{Khi } t = 5 \text{ s} = \frac{1}{12} \text{ ph}$$

$$V_5 = 270 \left(\frac{1}{12} \right)^2 = 1,88 \text{ m/ph ;}$$

$$W_5 = 540 \times \frac{1}{12} = 45 \text{ m/ph}^2.$$



Hình VI.6

Bài V.7: Theo công thức

$$s = V_0 t + \frac{1}{2} W_t t^2, \text{ mà } W_t = \frac{V - V_0}{t}$$

Vậy:
$$s = V_0 t + \frac{1}{2} \frac{V - V_0}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2} (V_0 + V) t$$

$$V = \frac{2s}{t} - V_0 = 25 \text{ m/s}$$

$$W_t = \frac{25 - 15}{30} = 0,33 \text{ m/s}^2$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{25^2}{1000} = 0,625 \text{ m/s}^2$$

$$W = \sqrt{W_{\tau}^2 + W_n^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2}$$

$$W = 0,708 \text{ m/s}^2.$$

Bài V.8: Ta đổi $54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$ và $V = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}$.

$$\text{Ta có } s = V_o t + \frac{1}{2} W_{\tau} t^2,$$

$$\text{mà: } W_{\tau} = \frac{V - V_o}{t},$$

$$\text{cho nên: } s = V_o t + \frac{1}{2} \frac{V - V_o}{t} t^2 = \frac{1}{2} (V + V_o) t$$

$$t = \frac{2s}{V + V_o} = \frac{2.800}{5 + 15} = 80 \text{ s}$$

$$\text{Do đó: } W_{\tau} = \frac{V - V_o}{t} = \frac{5 - 15}{80} = -0,125 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{Gia tốc toàn phần } W = \sqrt{W_n^2 + W_{\tau}^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{R}\right)^2 + (-0,125)^2}.$$

$$\text{Tại điểm đầu } W_o = \sqrt{\left(\frac{15^2}{800}\right)^2 + (-0,125)^2} = 0,308 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{Tại điểm cuối } W = \sqrt{\left(\frac{5^2}{800}\right)^2 + (-0,125)^2} = 0,129 \text{ m/s}^2.$$

Bài V.9: Ta có:

$$V_o = 0; \quad V = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

$$W_{\tau} = \frac{V - V_o}{t} = \frac{V}{t} = \frac{20}{3.60} = \frac{1}{9} \text{ m/s}^2$$

$$V = W_{\tau} t = \frac{1}{9} 2.60 = \frac{40}{3} \text{ m/s}$$

$$W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{40^2}{9.800} = \frac{2}{9} \text{ m/s}^2$$

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\frac{1}{9^2} + \frac{4}{9^2}} = 0,25 \text{ m/s}^2.$$

Bài V.10: Từ các phương trình chuyển động ta biến đổi được:

$$x = 300t; \quad y = 400t - 5t^2; \quad y = \frac{400}{300}x - \frac{5x^2}{300^2}$$

$$V_x = \dot{x} = 300; \quad V_y = \dot{y} = 400 - 10t$$

$$W_x = \ddot{x} = 0; \quad W_y = \ddot{y} = -10$$

$$V = \sqrt{300^2 + (400 - 10t)^2}; \quad t = 0: \quad V = 500 \text{ m/s}$$

$$W = 10 \text{ m/s}^2$$

$$s_{\max} = x_{\max} \text{ khi } y = 0 \text{ thì } t = 0 \text{ và } t = 80 \text{ s}$$

$$s = x_{\max} = 300.80 = 24000 \text{ m} = 24 \text{ km}$$

$$y_{\max} \text{ khi } y = 400 - 10t = 0; \quad t = \frac{400}{10} = 40 \text{ s}$$

$$H = y_{\max} = 400.40 - 5.40^2 = 8000 \text{ m} = 8 \text{ km}$$

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{300^2 + (400 - 10t)^2} \right] = \frac{-10(400 - 10t)}{V}$$

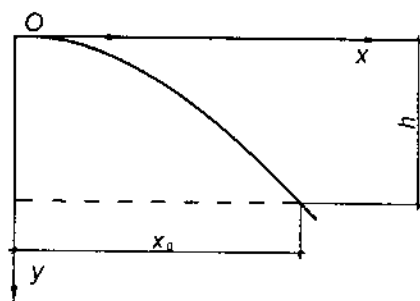
$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{10^2 - \frac{10^2(400 - 10t)^2}{V^2}} = \frac{3000}{V}$$

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{V^3}{3000} = \frac{[300^2 + (400 - 10t)^2]^{3/2}}{3000}.$$

Khi $t = 0$ thì $\rho_0 = 41,67 \text{ km}$

Khi $t = 40 \text{ s}$ thì $\rho = 9000 \text{ m} = 9 \text{ km}$.

Bài V.11 (hình VI.11):



Hình VI.11

Ta có:
$$\begin{cases} x = 40t \\ y = 4,9t^2 \end{cases}$$

Phương trình quỹ đạo là:

$$\begin{cases} y = 4,9t^2 = 4,9 \frac{x^2}{40^2} \\ y = 0,00306x^2 \end{cases}$$

Tầm bay xa của bom theo phương ngang:

$$\frac{4,9}{40^2} x^2 = y = h.$$

Do đó:
$$x = \sqrt{\frac{40^2 h}{4,9}}$$

$$L = x = 40 \sqrt{\frac{3000}{4,9}} = 989,74 \text{ m}$$

Thời gian rơi:
$$t = \frac{x}{40} = \frac{989,74}{40} = 24,74 \text{ s.}$$

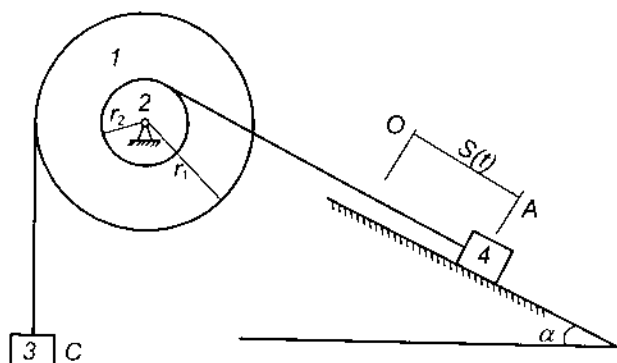
Bài V.12 (hình V.12):

$$V_A = \dot{S} = 2at.$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{V_A}{r_2}$$

$$V_C = r_1 \omega_1 = r_1 \frac{V_A}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} 2at$$

$$W_C = 2a \frac{r_1}{r_2}$$



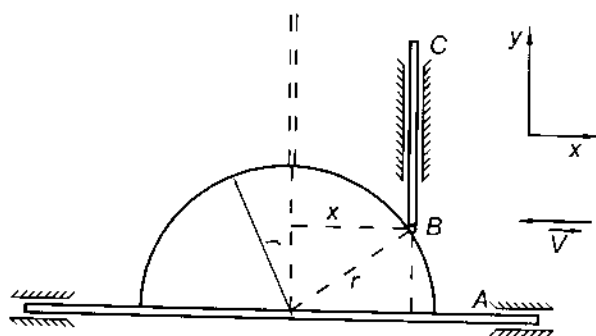
Hình VI.12

Bài V.13 (hình VI.13):

Ta có $x = vt = 5 \times 3 = 15$ cm

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y^2 = r^2 - x^2 = 30^2 - 15^2 \rightarrow y = 15\sqrt{3} = 25,98 \text{ cm}$$

$$h = r - y = 30 - 25,98 = 4,02 \text{ cm}$$



Hình VI.13

Bài V.14: Theo phương trình

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \text{ mà } \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

Ta có:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{t} t^2 = \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) t ; \omega_0 = 0 ; \quad \varphi = \frac{1}{2} \omega \cdot t$$

$$2\pi N = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi n}{30} \cdot 10,60 = \frac{120\pi \cdot 10,60}{2 \cdot 30}$$

$$N = 600 \text{ vòng.}$$

Bài V.15: Số vòng quay là Z.

$$\text{Ta có: } Z = \frac{nt}{2}$$

$$t = \frac{2Z}{n} = \frac{160}{1200} \text{ ph} = 8 \text{ s.}$$

Bài V.16: Áp dụng công thức $s = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$.

$$\text{Do } V_0 = 0, \text{ nên } s = \frac{1}{2} g t^2 = h.$$

$$t_{\text{rơi}} = \sqrt{\frac{2s}{g}} ; t_{\text{nâng}} = 3t_{\text{rơi}} = 3\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t_{\text{tổng cộng}} = t_{\text{rơi}} + t_{\text{nâng}} = \sqrt{\frac{2s}{g}} + 3\sqrt{\frac{2s}{g}} = 4\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$t_{\text{tổng cộng}} = 4\sqrt{\frac{2s}{g}} = 4\sqrt{\frac{2 \cdot 2,5}{9,81}} = 2,8 \text{ s.}$$

Số lần va đập trong một phút là:

$$Z = \frac{60}{2,8} = 21 \text{ lần.}$$

Bài V.17 (hình VI.17):

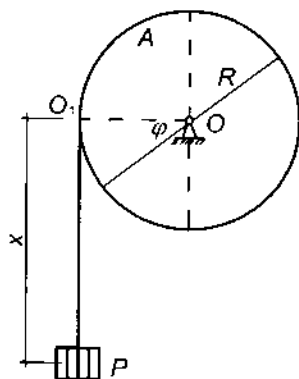
$$\text{Ta có } \varphi = \frac{x}{R} = 10t^2$$

$$\omega = \dot{\varphi} = 20t \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 20 \text{ rad/s}^2$$

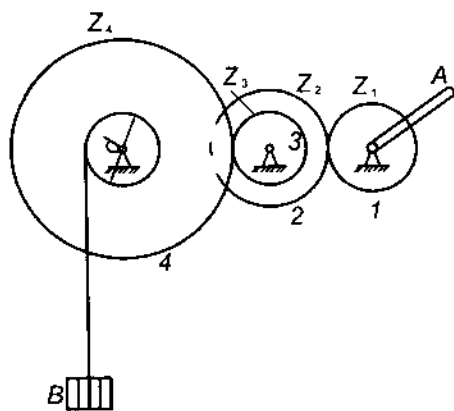
$$W_n = R\omega^2; \quad W_\tau = R\varepsilon$$

$$W = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ cm/s}^2.$$



Hình VI.17

Bài V.18 (hình VI.18):



Hình VI.18

Từ quan hệ: $V_B = \dot{x} = 10t,$

ta có: $r = \frac{d}{2} = 10 \text{ cm}$

$$\omega_4 = \frac{V_B}{r} = \frac{10t}{10} \Rightarrow \omega_4 = t$$

$$\omega_3 = \frac{Z_4}{Z_3} \omega_4 = \omega_2$$

$$\omega_1 = \frac{Z_2}{Z_1} \omega_2 = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_4}{Z_3} \omega_4 = \frac{77.39}{13.11} t = 21t$$

$$V_A = 16,8 \text{ m/s}$$

$$\omega_1 = 21t ; \quad \varepsilon_1 = 21 \text{ rad/s}^2$$

$$W_A = a \sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 40 \sqrt{21^2 + (21t)^4}$$

$$\text{Khi } t = 2s: \quad W_A = 40 \sqrt{21^2 + (42)^4} = 705,9 \text{ m/s}^2.$$

Bài V.19: Dạng chuẩn của chuyển động theo đường xoắn ốc có phương trình chuyển động là:

$$x = a \cos t ; \quad y = a \sin t ; \quad z = ct$$

thì khi đó ta có độ cong k :

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{a}{a^2 + c^2} \quad (\rho - \text{bán kính cong})$$

Áp dụng vào bài toán:

$$x = 2 \cos 4t ; \quad y = 2 \sin 4t ; \quad z = \frac{1}{2} 4t$$

$$\text{Vậy:} \quad a = 2 \text{ và } c = \frac{1}{2}.$$

Do đó:

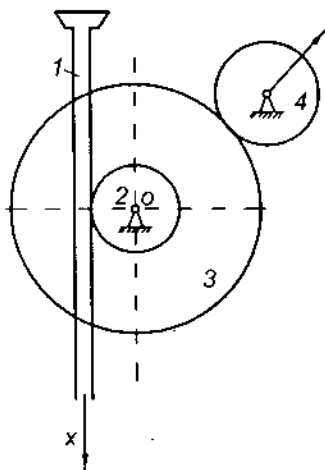
$$\rho = \frac{a^2 + c^2}{a} = \frac{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8} \text{ m}$$

Bài V.20 (hình VI.20):

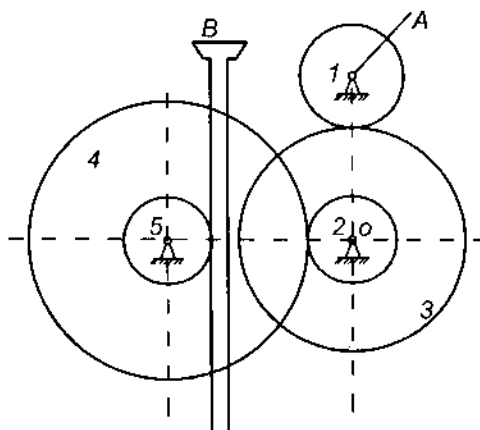
Ta có vận tốc của cột:

$$\dot{x} = ak \cos kt \quad \omega_4 = \frac{r_3 \omega_3}{r_4} = \frac{r_3 \dot{x}}{r_4 r_2}$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} = \omega_3 \quad \omega_4 = \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{ak}{r_2} \cos kt$$



Hình VI.20



Hình VI.21

Bài V.21 (hình VI.21):

Ta có:
$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{30\pi}{30} = \pi ;$$

$$\omega_2 = \frac{Z_1 \omega_1}{Z_2} = \omega_3$$

$$\omega_5 = \omega_4 = \frac{Z_3}{Z_4} \omega_3 = \frac{Z_3}{Z_4} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \omega_1$$

$$V_B = r_5 \omega_5 = r_5 \frac{Z_3}{Z_4} \cdot \frac{Z_1}{Z_2} \omega_1$$

$$V_B = \frac{4B6\pi}{32.24} = 0,785 \text{ cm/s.}$$

Bài V.22 (hình VI.22):

Ta có:
$$V_A = \dot{x} = t$$

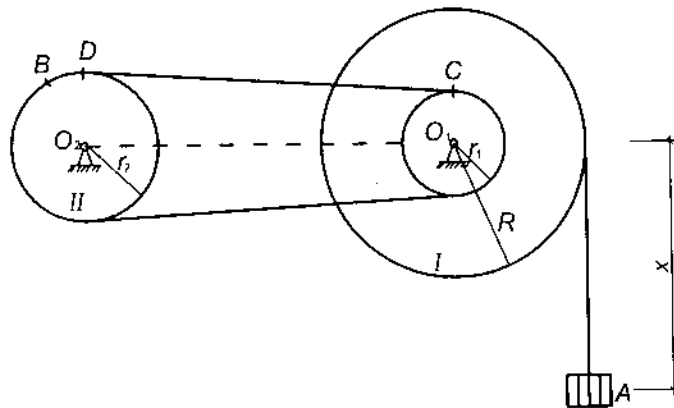
$$\omega = \frac{V_A}{R}$$

$$V_C = r_1 \omega = \frac{r_1}{R} V_A = \frac{r_1}{R} t$$

$$V_B = V_D = V_C = \frac{r_1}{R} t \quad \text{và} \quad \omega_2 = \frac{V_D}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \frac{t}{R}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2} \frac{1}{R}$$

$$\begin{aligned} W_B &= r_2 \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = r_2 \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2} R\right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{t}{R}\right)^4} = \\ &= r_1 \sqrt{R^2 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{t^4}{R^4}} \end{aligned}$$



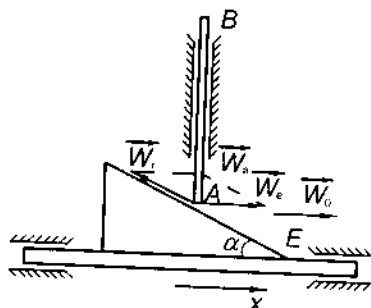
Hình VI.22

CHUYỂN ĐỘNG PHỨC HỢP CỦA ĐIỂM

Bài V.23: Thanh AB chuyển động tịnh tiến đi lên nên $\overline{W_A}$ đi lên là gia tốc tuyệt đối. $\overline{W_A}$ dọc theo cạnh DE (hình VI.23) là gia tốc tương đối. W_u là gia tốc theo. Ta có

$$\overline{W_A^a} = W_e \operatorname{tg} \alpha = W_u \operatorname{tg} \alpha$$

$$W_r = W_e \cos \alpha = W_u \cos \alpha$$



Hình VI.23

Bài V.24 (hình VI.24):

Ta có:

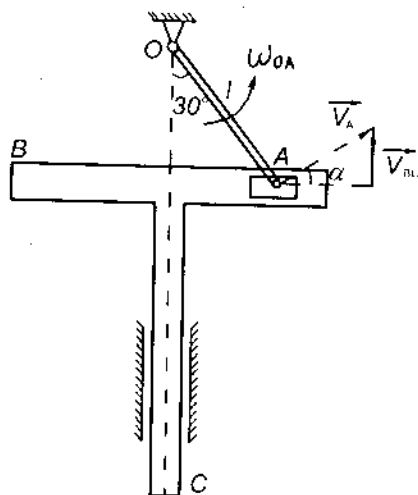
$$\omega_{OA} = \frac{\pi n}{30} = \frac{90\pi}{30} = 3\pi$$

$$l = 200 \text{ mm} = 20 \text{ cm};$$

$$V_A = l\omega$$

$$V_{BC} = V_A \sin 30^\circ = \frac{1}{2} l\omega = \frac{1}{2} 20 \cdot 3\pi$$

$$= 30\pi = 94,2 \text{ cm/s} = 0,942 \text{ m/s}.$$



Hình VI.24

Bài V.25 (hình VI.25):

Ta có quả cầu A quay quanh O là chuyển động tương đối $V_r = l\omega_1$ có phương vuông góc với OA khung cũng OA quay quanh MN là chuyển động theo:

$$V_e = (e + l \sin 30^\circ) \omega$$

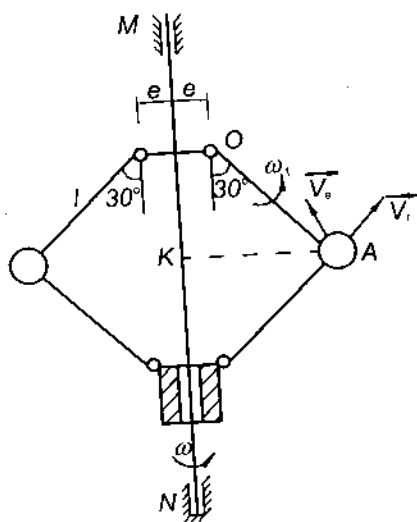
Vi $\vec{V}_r \perp \vec{V}_e$

mà $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

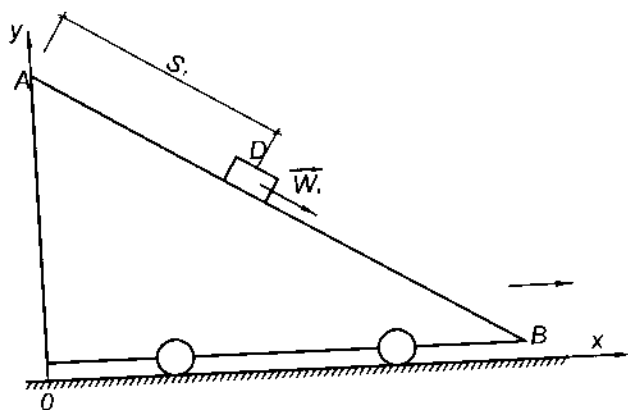
nên
$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}$$

Vậy:
$$V_a = \sqrt{(l\omega_1)^2 + [(e + l \sin 30^\circ)\omega]^2}$$

$$V_a = 3,06 \text{ m/s} = 306 \text{ cm/s.}$$



Hình VI.25



Hình VI.26

Bài V.26 (hình VI.26):

Chuyển động của vật D dọc theo AB là chuyển động tương đối có $W_r = \sqrt{2} \text{ dm/s}^2$.

Chuyển động AB cùng vật D theo phương nằm ngang là chuyển động theo (tịnh tiến) với $W_e = 1 \text{ dm/s}^2 = \text{const.}$

Ta có:
$$s_r = \frac{1}{2} W_r t^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2$$

$$x_r = s_r \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 = \frac{1}{2} t^2$$

$$x_r = s_r \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 = \frac{1}{2} t^2$$

$$x_c = \frac{1}{2} W_e t^2 = \frac{1}{2} t^2$$

$$x_a = x_r + x_c = \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t^2 = t^2$$

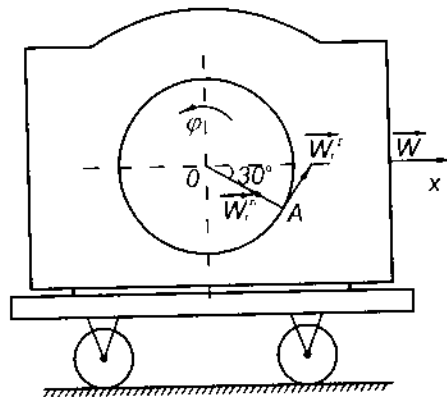
$$y_a = h - y_r = h - \frac{1}{2} t^2$$

$$y_a = h - \frac{x_a}{2}$$

$$V_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{(2t)^2 + (-t)^2} = t\sqrt{5} \text{ dm/s}$$

$$W_a = \sqrt{5} \text{ dm/s}^2.$$

Bài V.27 (hình VI.27):



Hình VI.27

Điểm A chuyển động quay quanh O là chuyển động tương đối. Điểm A chuyển động cùng với xe theo phương nằm ngang là chuyển động theo. Vì vậy ta có:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_e + \vec{W}_r = \vec{W}_e + \vec{W}_r^i + \vec{W}_r^n,$$

$$\text{mà } W_r^t = R\varepsilon \text{ và } W_r^n = R\omega^2$$

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t = 2 \text{ rad/s}^2$$

Khi $t = 1\text{s}$, ta có:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = 2 \text{ rad/s}^2$$

$$R = 0,2 \text{ m}$$

$$W_r^t = R\omega^2 = 0,2 \cdot 2^2 = 0,8 \text{ m/s}^2$$

$$W = W_c = 0,492 \text{ m/s}^2$$

Chiếu lên các trục x và y , ta có:

$$W_{ax} = W_c + W_r^t \sin 30^\circ - W_r^n \cos 30^\circ$$

$$= 0,492 + \frac{1}{2} 0,4 - 0,8 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0,492 + 0,2 - 0,692 = 0$$

$$W_{ay} = W_r^t \sin 60^\circ + W_r^n \cos 30^\circ = 0,4 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,8 \frac{1}{2}$$

$$= 0,346 + 0,4 = 0,746 \text{ m/s}^2 = W_A.$$

Bài V.28 (hình VI.28):

Khi $t = \frac{\pi}{\omega}$ thì $OA \perp Ox$.

Chuyển động của A quay quanh O là chuyển động tương đối, chuyển động của động cơ cùng hệ động Oxy là chuyển động theo.

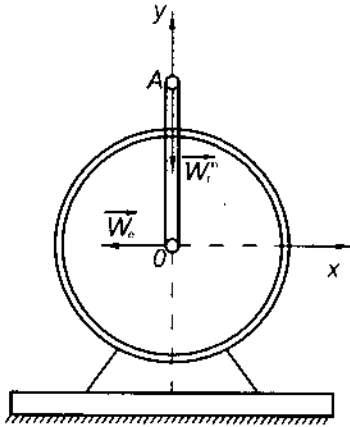
Ta có:

$$W_r^n = OA\omega^2 = l\omega^2$$

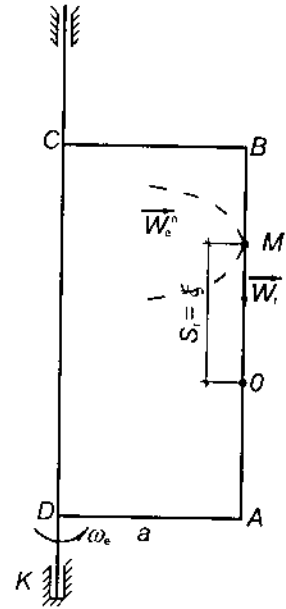
$$W_c = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t$$

$$W_c = -a\omega^2 \text{ khi } t = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$W_a = \sqrt{(W_r^n)^2 + W_c^2} = \omega^2 \sqrt{l^2 + a^2}.$$



Hình VI.28



Hình VI.29

Bài V.29 (hình VI.29):

- Chuyển động của M dọc AB là chuyển động tương đối và thẳng.
- Chuyển động của $ABCD$ quay quanh Kz là chuyển động theo.
- Chuyển động của M đối với Kz là chuyển động tuyệt đối.

Ta có:

$$\omega = \dot{\varphi}_e = \frac{\pi}{2} = \text{const}$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0$$

$$V_r = \dot{s}_r = a \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t = 0 \text{ khi } t = 1 \text{ s}$$

$$W_r = \ddot{s}_r = -a \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} t = -a \frac{\pi^2}{4} \text{ khi } t = 1 \text{ s}$$

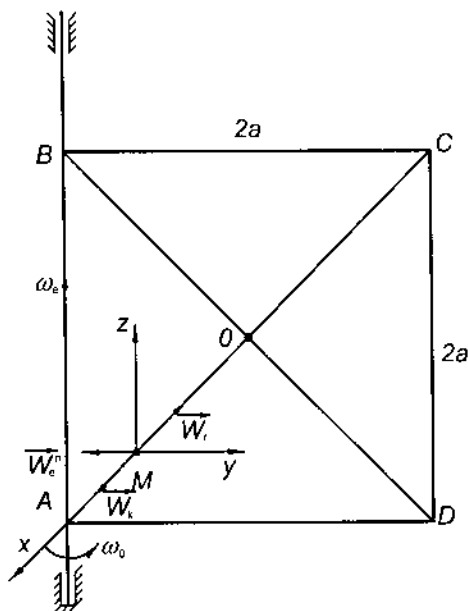
$$\vec{V}_r // \vec{\omega}_e \text{ nên } \vec{W}_K = 0$$

$$V_a = V_r = a \frac{\pi}{2} \text{ cm/s}$$

$$V_a = V_e = a \frac{\pi}{2} \text{ cm/s}$$

$$W_e^n = a \frac{\pi^2}{4} ; \quad W_a = \frac{a\pi^2}{4} \sqrt{2} .$$

Bài V.30 (hình VI.30):



Hình VI.30

a) Khi $t = 1 \text{ s}$

$$s_r = \xi = 0$$

$$\omega_0 = \pi\sqrt{2} \text{ rad/s} = \text{const}$$

$$\varepsilon_0 = 0$$

$$V_r = \dot{s}_r = -a \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$V_r = -a \frac{\pi}{2}; \quad W_r = 0$$

$$W_e^n = a\omega_o^2 = 2a\pi^2$$

$$W_K = 2\omega_o V_r \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\pi\sqrt{2} a \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\pi^2$$

$$W_a = \sqrt{(W_e^n)^2 + W_K^2} = a\pi^2 \sqrt{5} \text{ cm/s}^2$$

b) Khi $t = 2 \text{ s}$ thì $OM = s_r = -a$

$$V_r = s = 0$$

$$W_r = \ddot{s} = a \frac{\pi^2}{4}$$

$$AM = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1) = 0,41a$$

$$d = AM \sin 45^\circ = 0,41a \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,2a\sqrt{2}$$

$$W_e^n = d\omega_o^2 = 0,2a\sqrt{2} \cdot 2\pi^2.$$

Khi $t = 2 \text{ s}$ thì $V_r = 0$, nên $\overrightarrow{W_K} = 0$ và hướng vuông góc với mặt phẳng hình vẽ ra ngoài.

Ta có:

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_K} \quad (*)$$

Chiếu (*) lên các trục của hệ $Mxyz$ (hình VI.30), ta có:

$$W_{ax} = W_K = 0$$

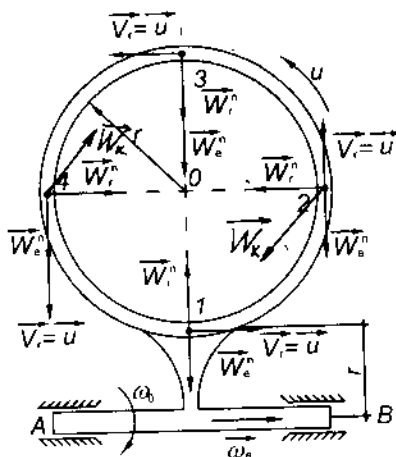
$$W_{ay} = W_r \sin 45^\circ - W_e^n = -0,39 a\pi^2$$

$$W_{az} = W_r \cos 45^\circ = 0,17 a\pi^2$$

$$W_a = 0,44 a\pi^2 \text{ cm/s}^2.$$

Bài V.31 (hình VI.31):

Ta chọn hệ cố định là trục AB .



Hình VI.31

Hệ động có gốc tại tâm O của hình xuyến. Chuyển động của hạt lỏng trong hình xuyến quanh O là chuyển động tương đối. Chuyển động của hình xuyến quanh AB là chuyển động theo. Chuyển động của hạt lỏng đối với AB là chuyển động tuyệt đối.

Ta có:
$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_K,$$

hay
$$\overline{W}_a = \overline{W}_r^n + \overline{W}_r^t + \overline{W}_e^n + \overline{W}_e^t + \overline{W}_K.$$

Nhưng
$$W_r^t = 0 \text{ vì } u = \text{const và } W_e^t = 0, \text{ vì } \omega_0 = \text{const},$$

nên
$$\overline{W}_a = \overline{W}_r^n + \overline{W}_e^n + \overline{W}_K$$

$$W_r^n = \frac{u^2}{r} \text{ còn } W_{e_1}^n = r\omega_0^2; W_{e_2}^n = W_{e_4}^n = 2r\omega_0^2$$

và
$$W_{e_3}^n = 3r\omega_0^2$$

Tại (1) ta có:
$$\overline{W}_K = 0,$$

nên
$$W_{a_1} = W_{e_1}^n - W_r^n = r\omega_o^2 - \frac{u^2}{r}$$

Tại (3) ta có:
$$\overrightarrow{W_K} = 0,$$

nên
$$W_{a_3} = W_{e_3}^n - W_r^n = 3r\omega_o^2 + \frac{u^2}{r}$$

Tại (2) và (4) ta có:

$W_h = 2\omega_o u$, có phương vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, hướng ra ngoài. Như vậy:

$$\overrightarrow{W_r^n} \perp \overrightarrow{W_o^n} \perp \overrightarrow{W_K}$$

$$W_{a_2} = W_{a_4} = \sqrt{(W_r^n)^2 + (W_e^n)^2 + (W_K)^2}$$

$$W_{a_2} = W_{a_4} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r}\right)^2 + (2r\omega_o^2)^2 + (2u\omega_o)^2} = \left(\frac{u^2}{r} + 2r\omega_o^2\right)$$

Bài V.32 (hình VI.32):

Chọn trục Oz đi qua O và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ làm hệ cố định.

Hệ tọa độ O_1xy làm hệ động. Hệ động chuyển động quay nên có $\overrightarrow{W_K}$.

a) Các chuyển động thành phần cùng hướng:

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_K} = \overrightarrow{W_r^t} + \overrightarrow{W_r^n} + \overrightarrow{W_2^t} + \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_K}$$

Nhưng $\dot{u} = V_r = \text{const}$, nên $\overrightarrow{W_r^t} = 0$ và $\omega_o = \text{const}$ nên $\overrightarrow{W_2^t} = 0$

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r^n} + \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_K}$$

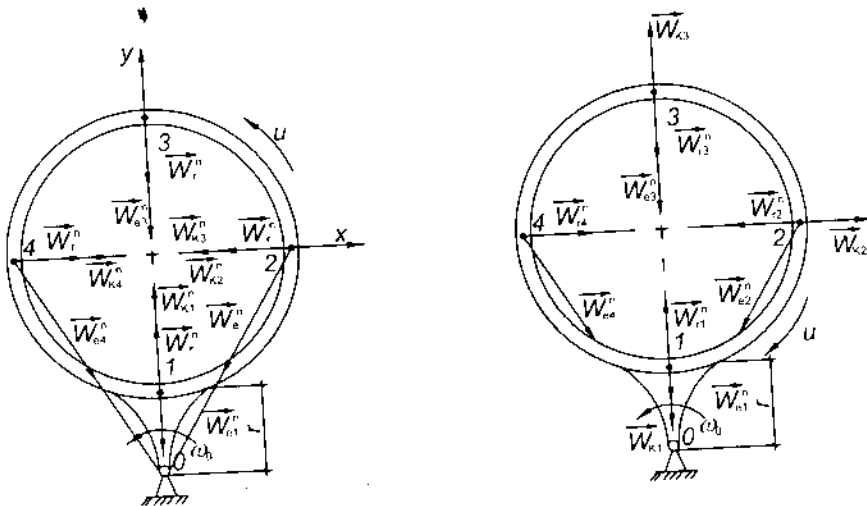
Ta có: $W_r^n = \frac{u^2}{r}$ còn $W_{e_2}^n = W_{e_4}^n = r\sqrt{5}\omega_o^2$

Tại điểm (1) ta có:

$$W_{a_1} = W_{e_1}^n - W_r^n - W_{K_1} = r\omega_o^2 - \frac{u^2}{r} - 2u\omega_o$$

Tại điểm (3) ta có:

$$W_{a_3} = W_{e_3}^n - W_r^n - W_{K_3} = 3r\omega_o^2 + \frac{u^2}{r} + 2u\omega_o$$



Hình VI.32

Ta thấy gia tốc tại điểm (2) bằng tại điểm (4).

Ta có: $\vec{W}_{a_1} = \vec{W}_{r_1}^n + \vec{W}_{e_1}^n + \vec{W}_{K_1}$.

Chiếu đẳng thức này lên các trục O_1x và O_1y ta được:

$$\begin{aligned} W_{a_{1x}} &= W_{r_1}^n \cos \alpha + W_{K_1} \text{ mà } \cos \alpha = \frac{R}{R\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{u^2}{R} + R\sqrt{5}\omega_o^2 \frac{1}{\sqrt{5}} + 2u\omega_o = \frac{u^2}{R} + R\omega_o^2 + 2u\omega_o \end{aligned}$$

$$W_{a_{1y}} = -W_{c_4}^n \sin \alpha \quad \text{mà} \quad \sin \alpha = \frac{2R}{\sqrt{5} \cdot R} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= -R\sqrt{5}\omega_o^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -2R\omega_o^2$$

$$W_{a_1} = \sqrt{(W_{a_{1x}})^2 + (W_{a_{1y}})^2} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{R} + R\omega_o^2 + 2u\omega_o\right)^2 + 4R^2\omega_o^4}$$

$$W_{a_2} = W_{a_4}.$$

b) Trường hợp các chuyển động thành phần có hướng ngược nhau. Khi đó ta thay $u = -u$ của W_K .

Tại điểm (1) ta có:

$$\overrightarrow{W_{a_1}} = \overrightarrow{W_{r_1}^n} + \overrightarrow{W_{e_1}^n} + \overrightarrow{W_{K_1}}$$

$$W_{a_1} = R\omega_o^2 - \frac{u^2}{R} + 2u\omega_o$$

Tại điểm (3) ta có:

$$\overrightarrow{W_{a_3}} = \overrightarrow{W_{r_3}^n} + \overrightarrow{W_{e_3}^n} + \overrightarrow{W_{K_3}}$$

$$W_{a_3} = R\omega_o^2 + \frac{u^2}{R} - 2u\omega_o$$

Tại điểm (2) và điểm (4) ta có:

$$W_{a_2} = W_{a_4}$$

$$W_{a_2} = W_{a_4} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{R} + R\omega_o^2 - 2u\omega_o\right)^2 + 4R\omega_o^4}$$

Bài V.33 (hình VI.33):

a) Khi $t = 0$ (hình VI.33a), ta có:

$$\omega = \dot{\phi} = 3 - t = 3 \text{ (rad/s)}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -1 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

$$OM^* = OM = 0$$

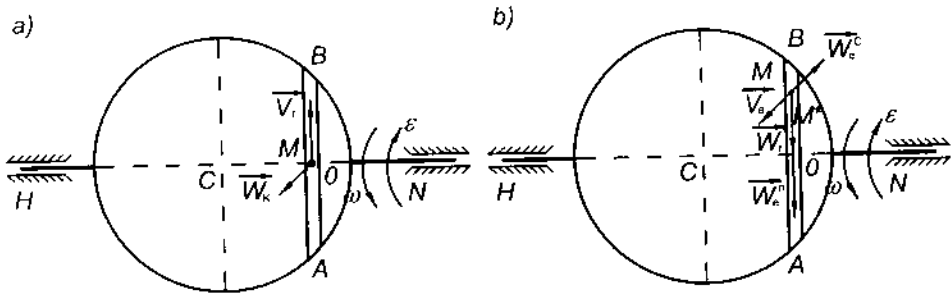
$$V_e = 0; \quad V_r = 4 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t = 2\pi$$

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e} \rightarrow V_a = V_r = 2\pi$$

$$W_e = 0 \quad W_r = -2\pi \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t = 0$$

$$W_k = 2\omega_e V_r = 2 \times 3 \times 2\pi = 12\pi$$

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_k} \rightarrow W_a = W_k = 12\pi \text{ (cm/s}^2\text{)}$$



Hình VI.33

b) Khi $t = 1$ (hình VI.33b), ta có:

$$\omega = \dot{\varphi} = 3 - t = 2 \text{ (rad/s)}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -1 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

$$OM^* = OM = 4 \text{ cm}; \quad V_e = OM^* \cdot \omega$$

$$V_e = 8 \text{ cm/s}; \quad V_r = 4 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t = 0$$

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e} \rightarrow V_a = V_e = 8 \text{ cm/s}$$

$$W_e^n = 4\omega^2 = 16 \quad W_e^t = 4$$

$$W_r = -2\pi \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t = -\pi^2$$

$$W_k = 0$$

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_e^t} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_k}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow W_a &= \sqrt{(W_e^t)^2 + (W_e^n + W_r)^2} = \sqrt{(4)^2 + (16 + \pi^2)^2} = \\ &= \sqrt{685,2} = 26,2 \text{ cm/s}^2 \end{aligned}$$

Bài V.34 (hình VI.34):

Khi $t = 1$ thì $OM^* = 2 \text{ cm}$.

Ta có:

$$\dot{\phi} = 2t^2 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{\phi} = 4t = 4 \text{ rad/s}^2$$

$$V_r = \dot{S} = 8t - 10 = -2 \text{ cm/s}$$

$$V_e = OM^* \times \dot{\phi} = 2 \times 2 = 4 \text{ cm/s}$$

Từ $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e}$, nhưng $\overrightarrow{V_r} \perp \overrightarrow{V_e}$ nên

$$V_a = \sqrt{(V_r)^2 + (V_e)^2} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5} \text{ cm/s}$$

$$W_r = \ddot{S} = 8 \text{ cm/s}^2$$

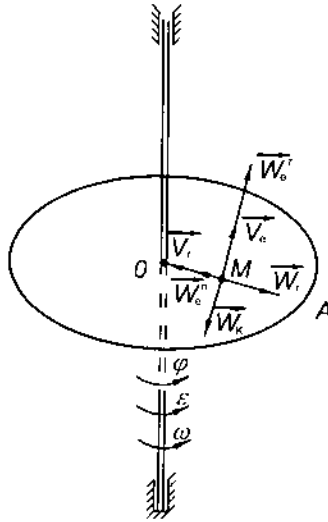
$$W_e^n = OM^* \times \omega^2 = 2 \times 4 = 8 \text{ cm/s}^2$$

$$W_e^t = OM^* \times \varepsilon^2 = 2 \times 4 = 8 \text{ cm/s}^2$$

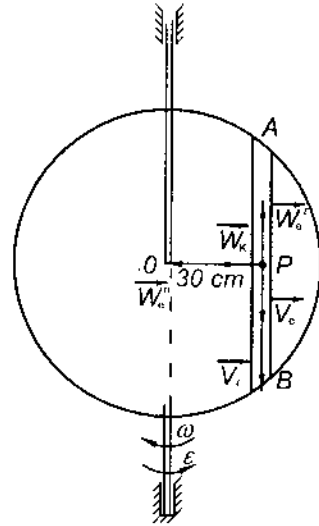
$$W_k = 2\omega V_r = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ cm/s}^2$$

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_e^t} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_k}$$

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{(W_e^n - W_r)^2 + (W_k - W_e^t)^2} \\ &= \sqrt{(8 - 8)^2 + (8 - 8)^2} = 0 \end{aligned}$$



Hình VI.34



Hình VI.35

Bài V.35 (hình VI.35):

Ta có:

$$V_e = OP\omega_n = 0,3 \times 3 = 0,9 \text{ m/s}$$

$$V_r = 1,2 \text{ m/s}$$

Từ $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$, mà $\vec{V}_e \parallel \vec{V}_r$ cùng chiều

$$\rightarrow V_a = V_r + V_e = 1,2 + 0,9 = 2,1 \text{ m/s}$$

$$V_r = 1,2 \text{ m/s} = \text{const} \rightarrow W_r = 0$$

$$W_e^n = 0,3 \times \omega_n^2 = 0,3 \times 9 = 2,7 \text{ m/s}^2$$

$$W_e^\tau = 0,3 \times 8 = 2,4 \text{ m/s}^2$$

$$W_K = 2\omega_n \times V_r = 2 \times 3 \times 1,2 = 7,2 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{(W_e^\tau)^2 + (W_K + W_e^n)^2} \\ &= \sqrt{2,4^2 + (7,2 + 2,7)^2} = 10,186 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Bài V.36: Tính V_a (hình VI.36a)

$$V_r = \dot{S}_r = 5 - 3t^2 = 2 \text{ m/s}$$

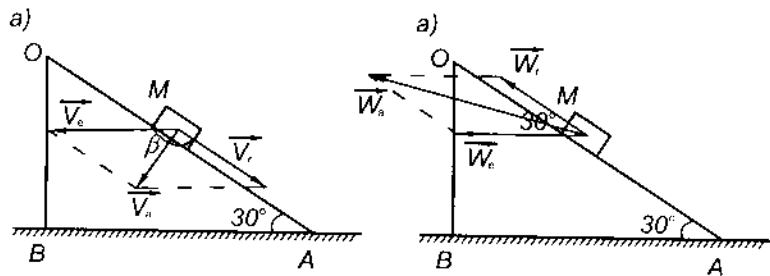
$$V_e = \dot{x}_e = 3t^2 = 3 \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r \times V_e \times \cos \beta}$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 - 2V_r \times V_e \times \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,6 \text{ m/s.}$$



Hình VI.36

Tính W_a (hình VI.36b):

$$W_r = \ddot{S}_r = -6t^2 = -6 \text{ m/s}^2$$

$$W_e = \ddot{x} = 6t = 6 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e$$

$$W_a = \sqrt{W_r^2 + W_e^2 + 2W_r \times W_e \times \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{6^2 + 6^2 + 2 \times 6 \times 6 \frac{\sqrt{3}}{2}} = 11,6 \text{ m/s}^2.$$

Bài V.37 (hình VI.37):

Ta có:

$$V_r = \dot{S}_r = 6t^2 = 6 \text{ m/s}$$

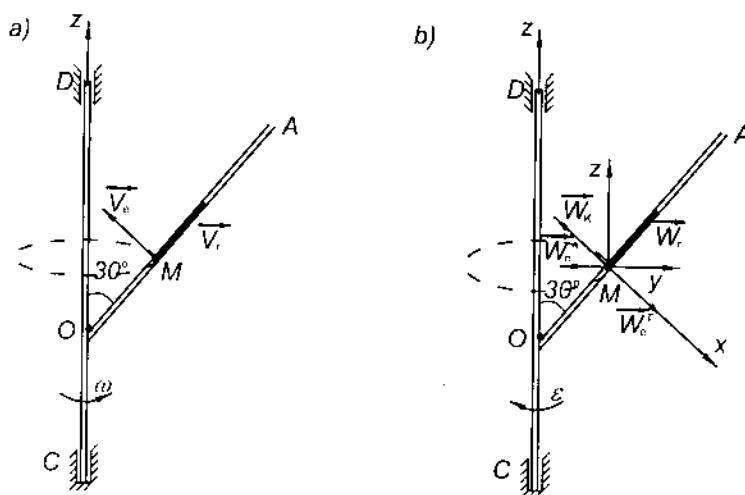
$$W_r = \ddot{S}_r = 12t = 12 \text{ m/s}^2$$

$$\omega = \dot{\phi} = 8 - 3t^2 = 5 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \ddot{\phi} = -6t = -6 \text{ rad/s}^2$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$OM^* = 2 \text{ m.}$$



Hình VI.37

Tính V_a (hình VI.37a):

$$V_e = \omega \times OM^* \times \sin 30^\circ = 5 \times 2 \frac{1}{2} = 5 \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \text{ mà } \vec{V}_r \perp \vec{V}_e$$

Nên $V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} = 7,81 \text{ m/s}$

Tính W_a :

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e^n + \vec{W}_z^n + \vec{W}_{OA}^n \quad (a)$$

$$W_r = \ddot{S}_r = 12t = 12 \text{ m/s}^2 \text{ (hình VI.37b)}$$

$$W_e^n = \omega^2 \times OM^* \times \sin 30^\circ = 5^2 \times 2 \frac{1}{2} = 25 \text{ m/s}^2$$

$$W_e^r = \omega \times OM^* \times \sin 30^\circ = 6 \times 2 \frac{1}{2} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$\overrightarrow{W_k} = 2\overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{V_r} \rightarrow W_k = 2\omega_e \times V_r \times \sin 30^\circ$$

$$W_k = 2 \times 5 \times 6 \frac{1}{2} = 30 \text{ m/s}^2$$

Chiếu (a) lên các trục của $Mxyz$, ta có:

$$W_{ax} = W_e^r - W_k = 6 - 30 = -24 \text{ m/s}^2$$

$$W_{ay} = W_r \cos 60^\circ - W_e^n = 12 \frac{1}{2} - 25 = -19 \text{ m/s}^2$$

$$W_{az} = W_r \sin 60^\circ = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{W_{ax}^2 + W_{ay}^2 + W_{az}^2} \\ &= \sqrt{24^2 + 19^2 + (6\sqrt{3})^2} = 32,32 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Bài V.38 (hình VI.38):

Khi $t = \frac{2}{3}$ (s) thì $M \equiv O$ (hình VI.38a)

$$\omega = \dot{\phi} = 4 - 0,4t = 4 - \frac{1}{3}0,8 = 3,73 \text{ (rad/s)}$$

$$\varepsilon = \ddot{\phi} = -0,4 \text{ (rad/s}^2\text{)}$$

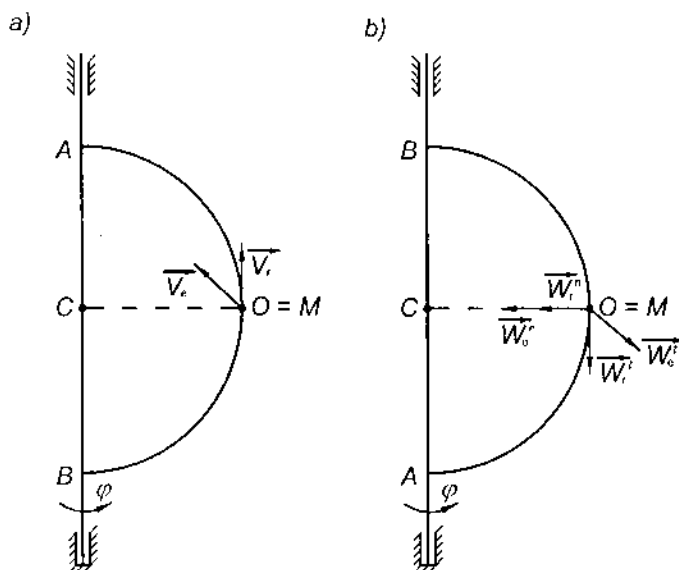
$$V_e = V_{M^*} = R\omega = 112 \text{ cm/s} = 1,12 \text{ m/s}$$

$$V_r = \dot{S} = 10\pi \frac{\pi}{4} \cos t \frac{\pi}{4} t = \frac{5}{2} \pi^2 \cos \frac{\pi}{6}$$

$$V_r = \frac{5}{4} \pi^2 \sqrt{3} = 21,36 \text{ cm/s} = 0,21 \text{ m/s}$$

$$\overrightarrow{V_r} \perp \overrightarrow{V_e}, \text{ nên } V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 1,12 \text{ m/s}$$

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_k}, \text{ do } V_r // \omega_e \text{ nên } \overrightarrow{W_k} = 0$$



Hình VI.38

$$\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r^n} + \overrightarrow{W_r^t} + \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_e^t} \quad (\text{hình VI.38b})$$

$$W_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{0,21^2}{0,3} = 1,47 \text{ m/s}^2$$

$$W_r^t = \ddot{S} = -\frac{5}{2} \pi^2 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} t = -\frac{5}{8} \pi^3 \sin \frac{\pi}{6} = -0,1 \text{ m/s}^2$$

$$W_e^n = R\omega^2 = 0,3 \times 3,73^2 = 4,2 \text{ m/s}^2$$

$$W_e^t = R\varepsilon = 0,3 \times 4 = 1,2 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{(W_r^n + W_e^n)^2 + (W_r^t)^2 + (W_e^t)^2} \\ &= \sqrt{(1,47 + 4,2)^2 + (0,1)^2 + (1,2)^2} \end{aligned}$$

$$W_a = \sqrt{32,15 + 0,01 + 1,44} = \sqrt{33,6} = 5,8 \text{ m/s}^2$$

Bài V.39 (hình VI.39):

Khi $t = 2$ (s) thì $M \equiv B$

$$V_r = \dot{S} = \frac{15}{8} \pi 3t^2 = \frac{45}{8} \pi t^2$$

$$t = 2 \text{ (s)} \text{ thì } V_r = \dot{S} = \frac{45}{2} \pi$$

$$V_r = 70,7 \text{ cm/s} = 0,7 \text{ m/s}$$

$$V_e = a\omega \text{ mà } \omega = \dot{\phi} = 5 - 8t = -11 \text{ (rad/s)}$$

$$V_e = 0,3 \times 11 = 3,3 \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \rightarrow V_a = V_r + V_e = 3,3 + 0,7 = 4 \text{ m/s}$$

$$W_r^n = \frac{V_r^2}{R} = \frac{0,7^2}{0,3} = 1,63 \text{ m/s}^2$$

$$W_r^t = \dot{S} = \frac{45}{8} \pi 2t = \frac{45}{4} \pi t = \frac{45}{2} \pi = 0,7 \text{ m/s}^2$$

$$W_e^n = a\omega^2 = 0,3 \times 11^2 = 36,3 \text{ m/s}^2$$

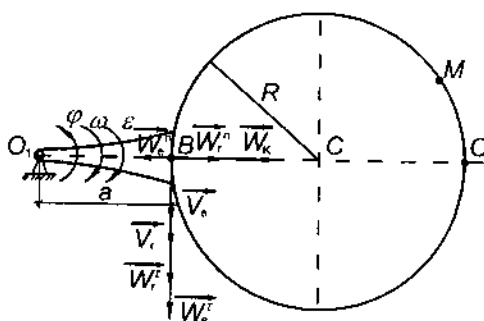
$$W_e^t = a\varepsilon = 0,3 \times 8 = 2,4 \text{ m/s}^2$$

$$W_k = 2\omega V_r = 2 \times 11 \times 0,7 = 15,4 \text{ m/s}^2$$

$$W_a = \sqrt{(W_r^n + W_k - W_e^n)^2 + (W_r^t + W_e^t)^2}$$

$$W_a = \sqrt{(1,63 + 15,4 - 36,3)^2 + (0,7 + 2,4)^2}$$

$$W_a = 19,51 \text{ m/s}^2$$



Hình VI.39

CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG

Bài V.40 (hình VI.40):

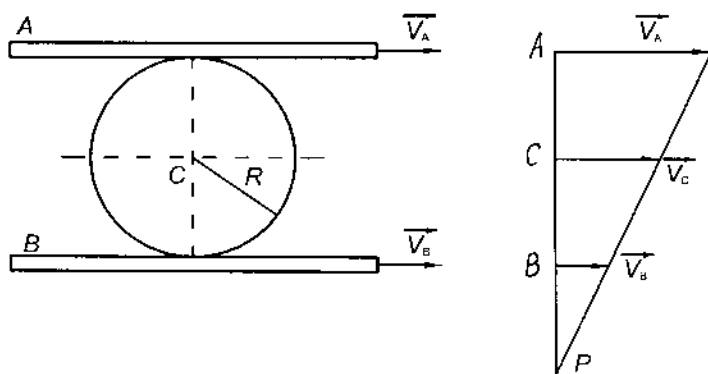
a) Hai thanh chuyển động cùng phía.

Từ công thức: $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}$

Ta có: $V_C = \frac{V_A + V_B}{2}$ và $\omega = \frac{V_A - V_B}{2R}$.

b) Hai thanh chuyển động hai phía khác nhau.

Ta có: $V_C = \frac{V_A - V_B}{2}$ và $\omega = \frac{V_A + V_B}{2R}$.



Hình VI.40

Bài V.41 (hình VI.41):

Ta có OA chuyển động quay quanh O . Thanh OA và bánh xe chuyển động song phẳng. Ta tính:

$$V_A = OA\omega_o = 30.2,5 = 75 \text{ cm/s}$$

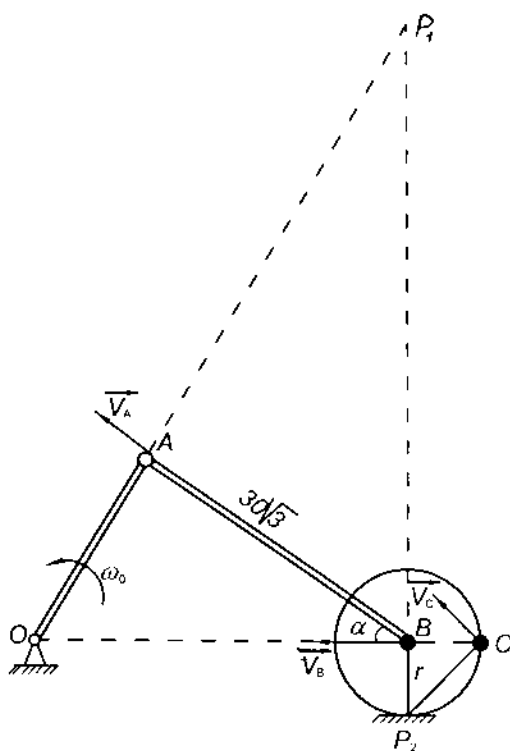
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{AB} = \frac{30}{30\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Do đó: $\alpha = 30^\circ$

$$V_A = V_B \cos \alpha = V_B \cos 30^\circ.$$

Vậy:
$$V_B = \frac{V_A}{\cos 30^\circ}$$

$$V_B = \frac{75}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{150}{\sqrt{3}} = 86,5 \text{ cm/s}$$



Hình VI.41

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{75}{90} = 0,83 \text{ rad/s. Vì } AP_1 = 90 \text{ cm;}$$

P_2 là tâm vận tốc tức thời của bánh xe, nên

$$\omega_{bx} = \frac{V_B}{r} = \frac{150}{\sqrt{3} \cdot 10} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ rad/s}$$

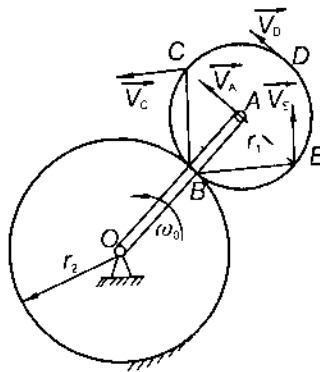
Ta tính: $V_C = V_B \sqrt{2} = 86,5 \sqrt{2}$
 $V_C = 122,47 \text{ cm/s.}$

Bài V.42 (hình VI.42):

Tay quay OA quanh O ta có.

$$V_A = OA\omega_o = (r_1 + r_2) \omega_o = (15 + 5) 2,5$$

$$V_A = 50 \text{ cm/s.}$$



Hình VI.42

Điểm B là tâm vận tốc tức thời của bánh xe nên $V_B = 0$. Ta có:

$$V_D = 2V_A - 2 \times 50 = 100 \text{ cm/s}$$

$$V_C = V_E = V_A \sqrt{2} = 50 \sqrt{2}$$

$$V_C = V_E = 70,7 \text{ cm/s}$$

Bài V.43 (hình VI.43):

Ta xét ròng rọc I. P_1 là tâm vận tốc tức thời của ròng rọc I nên $V = 2V_{\omega_1}$ (hình VI.43b).

Điểm thấp nhất của ròng rọc I là E thì $V_E = \sqrt{2} V_{O_1}$.

Xét ròng rọc II, P_2 là tâm vận tốc tức thời của ròng rọc II (hình VI.43c).

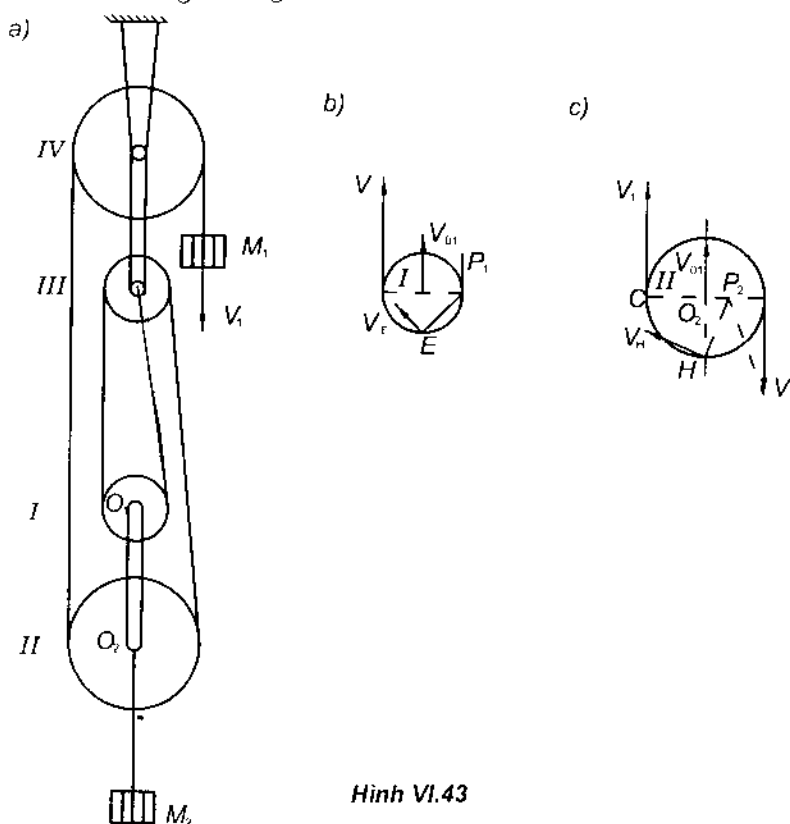
Ta có: $\frac{V_1}{CP_2} = \frac{V_{O_1}}{O_2P_2} \rightarrow \frac{V_1}{4/3r_2} = \frac{V_{O_1}}{1/3r_2}$

$$V_1 = 4V_{O_1},$$

do đó: $V_{O_1} = \frac{V_1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ cm/s}$

$$\omega_1 = \frac{V_{O_1}}{r_1} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{II} = \frac{V_{O_1}}{\frac{1}{3}r_2} = \frac{3}{\frac{1}{3}9} = 1 \text{ rad/s}$$



Hình VI.43

Vận tốc điểm thấp nhất của ròng rọc II là V_H sẽ là:

$$\begin{aligned} V_H &= H.P_2\omega_2 = \sqrt{O_2H^2 + O_2P_2^2} \omega_2 \\ &= \omega_2 \sqrt{\left(\frac{1}{3}r_2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}r_2\right)^2} = \omega_2 \frac{r_2}{3} \sqrt{10} = \frac{9}{3} \sqrt{10} \omega_2 = 3\omega_2 \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$V_H = 9,48 \text{ cm/s.}$$

Thay $V_{O_1} = 3 \text{ cm/s}$ vào trên ta có:

$$\omega_x = 0,5 \text{ rad/s và } V_E = \sqrt{2}V_{O_1} = 3\sqrt{2}$$

$$V_E = 4,23 \text{ cm/s}$$

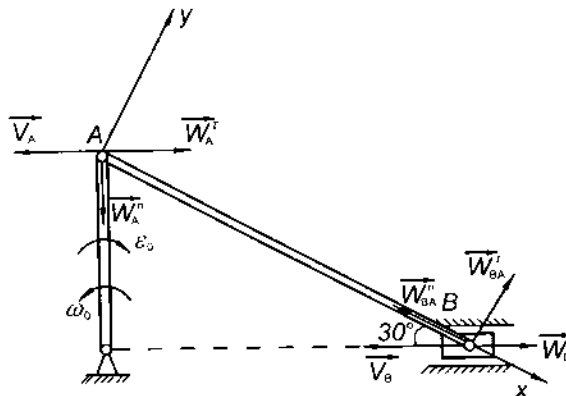
$$V_{O_1} = V_2 = 3 \text{ cm/s.}$$

Bài V.44 (hình VI.44):

Tay quay OA chuyển động quay quanh O , còn OB chuyển động song phẳng.

$$\text{Ta có: } V_A = OA\omega_0 = 35 \times 4$$

$$V_A = 140 \text{ cm/s}$$



Hình VI.44

Tâm vận tốc tức thời P_∞ nên $\omega_{AB} = 0$

và $V_B = V_A = 140 \text{ cm/s}$.

Chọn điểm A làm cực, ta có:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}} = \overrightarrow{W_A^t} + \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} \quad (1)$$

Ta có $W_A^t = OA \cdot \varepsilon_0 = 35.8 = 280 \text{ cm/s}^2$

$$W_A^n = OA \cdot \omega_0^2 = 35.4^2 = 560 \text{ cm/s}^2$$

$$W_{BA}^t = BA \cdot \varepsilon_{AB} ; W_{BA}^n = 0 \text{ vì } \omega_{AB} = 0$$

Chiếu (1) lên phương AB ta có:

$$W_B \cos 30^\circ = W_A^t \cos 30^\circ + W_A^n \sin 30^\circ$$

$$W_B = W_A^t + W_A^n \tan 30^\circ = 280 + 560 \frac{1}{\sqrt{3}} = 603,4 \text{ cm/s}^2$$

$$W_B = 603,4 \text{ cm/s}^2.$$

Chiếu (1) lên phương vuông góc AB ta có:

$$W_B \sin 30^\circ = W_{BA}^t + W_A^t \sin 30^\circ - W_A^n \cos 30^\circ$$

$$\begin{aligned} W_{BA}^t &= W_B \sin 30^\circ + W_A^n \cos 30^\circ - W_A^t \sin 30^\circ \\ &= 603,4 \cdot \frac{1}{2} + 560 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 280 \frac{1}{2} = 646,66 \end{aligned}$$

$$W_{BA}^t = BA \cdot \varepsilon_{AB} \text{ nên } \varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^t}{BA} = \frac{646,66}{70}$$

$$\varepsilon_{AB} = 9,24 \text{ rad/s}^2.$$

Bài V.45 (hình VI.45):

Ta thấy OA quay quanh O cố định. Bánh xe II lăn không trượt trên bánh xe I cố định và là chuyển động song phẳng.

Thanh BC chuyển động song phẳng.

Ta có: $V_A = OA \cdot \omega_0 = 30.0,5 = 15 \text{ cm/s}$

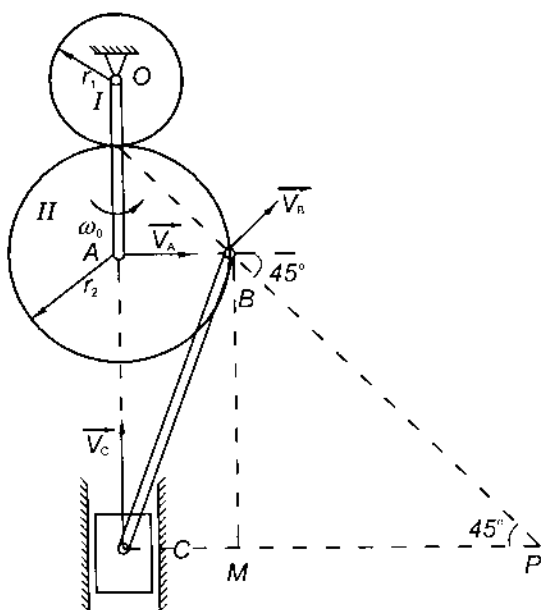
$$V_B \cos 45^\circ = V_A \text{ nên}$$

$$V_B = \sqrt{2} V_A = 15\sqrt{2} \text{ cm/s}$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

$$\text{Ta có: } AC = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 \cdot 26 - 20^2}$$

$$AC = 20.5 = 100 \text{ cm}$$



Hình VI.45

Mặt khác, $AC = BM = MP = 100 \text{ cm}$, nên $CP = CM + MP$.

Vậy $CP = 20 + 100 = 120 \text{ cm}$ và $BP = BM \sqrt{2} = 100\sqrt{2} \text{ cm}$, cho nên:

$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}; \quad V_C = \frac{CP}{BP} V_B = \frac{120}{100\sqrt{2}} \cdot 15\sqrt{2}$$

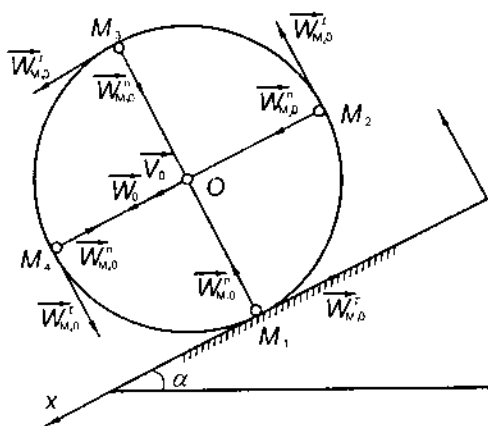
$$V_C = \frac{1800}{100} = 18 \text{ cm/s} \text{ và } \omega_{BC} = \frac{V_C}{CP} = \frac{18}{120} = 0,15 \text{ rad/s.}$$

Bài V.46 (hình VI.46):

Bánh xe chuyển động song phẳng lăn không trượt trên mặt nghiêng cố định, nên:

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{MO}}$$

$$\overrightarrow{W_M} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{MO}^r} + \overrightarrow{W_{MO}^n}$$



Hình VI.46

Ta có: $W_{MO}^n = MO\omega^2 = R\omega^2$,

mà $\omega = \frac{V_o}{R}$,

cho nên: $W_{MO}^n = R\omega^2 = R \cdot \frac{V_o^2}{R^2} = \frac{V_o^2}{R} = 2 \text{ m/s}^2$

$$W_{MO}^r = R\varepsilon$$

mà $\omega = \varepsilon = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_o}{R} \right) = \frac{W_o}{R}$

Vậy:
$$W_{MO}^t = R \cdot \varepsilon = R \frac{W_o}{R} = W_o = 3 \text{ m/s}^2.$$

- Ta xét điểm M_1 , ta có:

$$\overrightarrow{W_{M_1}} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{M_1O}^n} + \overrightarrow{W_{M_1O}^t}$$

chiếu đẳng thức này lên các trục O_1x và O_1y (hình VI.46), ta có:

$$W_{M_1x} = W_o - W_{M_1O}^t = 3 - 3 = 0$$

$$W_{M_1y} = W_{M_1O}^n = 2 \text{ m/s}^2.$$

Vậy: $W_{M_1} = 2 \text{ m/s}^2$

- Ta xét điểm M_2 , ta có:

$$\overrightarrow{W_{M_2}} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{M_2O}^t} + \overrightarrow{W_{M_2O}^n}$$

$$W_{M_2x} = W_o + W_{M_2O}^n = 3 + 2 = 5 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_2y} = W_{M_2O}^t = 3 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_2} = \sqrt{W_{M_2x}^2 + W_{M_2y}^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} = 5,83 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_2} = 5,83 \text{ m/s}^2.$$

- Ta xét điểm M_3 , ta có:

$$\overrightarrow{W_{M_3}} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{M_3O}^n} + \overrightarrow{W_{M_3O}^t}$$

$$W_{M_3x} = W_o + W_{M_3O}^t = 3 + 3 = 6 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_3y} = -W_{M_3O}^n = -2 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_3} = 6,32 \text{ m/s}^2.$$

- Ta xét điểm M_4 , ta có:

$$\overrightarrow{W_{M_4}} = \overrightarrow{W_o} + \overrightarrow{W_{M_4O}^n} + \overrightarrow{W_{M_4O}^t}$$

$$W_{M_4x} = W_o - W_{M_4O}^n = 3 - 2 = 1 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_4y} = -W_{M_4O}^t = -3 \text{ m/s}^2$$

$$W_{M_4} = \sqrt{W_{M_4x}^2 + W_{M_4y}^2} = \sqrt{1 + 3^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ m/s}^2$$

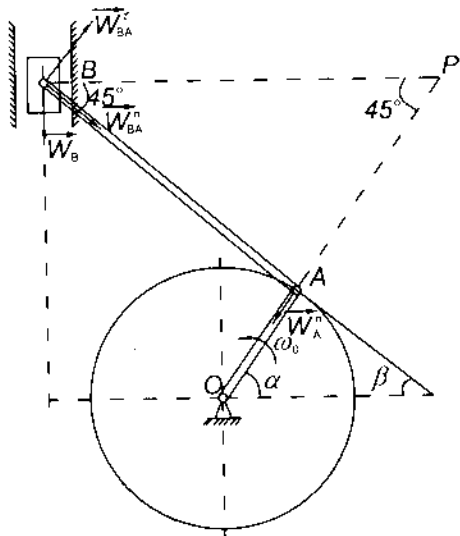
$$W_{M_4} = 3,16 \text{ m/s}^2.$$

Bài V.47 (hình VI.47):

Từ $\varphi = 10t$, ta có:

$$\omega_o = \dot{\varphi} = 10 \text{ rad/s.}$$

$$V_A = OA \cdot \omega_o = 20 \cdot 10 = 200 \text{ cm/s.}$$



Hình VI.47

Ta có:

$$AB = AP = 100 \text{ cm}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{200}{100} = 2 \text{ rad/s}$$

Theo công thức:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_A^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^t}, \quad (*)$$

mà $W_A^n = OA\omega_o^2 = 2000 \text{ cm/s}^2$

còn $W_A^t = 0$ vì $\varepsilon = 0$ do $\omega_o = \text{const}$

$$W_{BA}^n = BA.\omega_{AB}^2 = 100.2^2 = 400 \text{ cm/s}^2 \text{ và } W_{BA}^t = BA\varepsilon_{AB}.$$

Chiếu (*) lên trục BA , ta có:

$$W_B \cos 45^\circ = W_{BA}^n = 400 \text{ cm/s}^2. \text{ Do đó } W_B = 400\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$$

$$W_B = 400\sqrt{2} \text{ cm/s}^2 = 565,6 \text{ cm/s}^2.$$

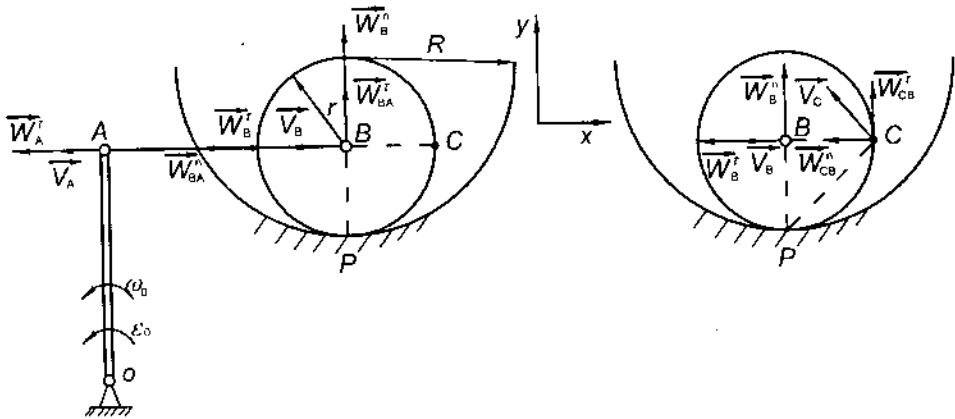
Chiếu (*) lên AP ta có:

$$-W_B \sin 45^\circ = -W_A^n + W_{BA}^t$$

$$W_{BA}^t = W_A^n - W_B \sin 45^\circ = 2000 - 400\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1600 \text{ cm/s}^2$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^t}{BA} = \frac{1600}{100} = 16 \text{ rad/s}^2.$$

Bài V.48 (hình VI.48):



Hình VI.48

Ta có:

$$\varphi = t^2 - t$$

$$\omega_o = \dot{\varphi} = 2t - 1$$

Khi $t = 1$ s thì $\omega_0 = 1$ rad/s

$$\ddot{\phi} = \epsilon_0 = 2 \text{ rad/s}^2$$

Ta tìm V_A

$$V_A = OA\omega_0 = 1 \text{ m/s}$$

$$W_A^n = OA\omega_0^2 = 1 \text{ m/s}^2$$

$$W_A^t = OA\epsilon_0 = 2 \text{ m/s}^2$$

Thanh AB chuyển động song phẳng. Tại thời điểm khảo sát có tâm vận tốc tức thời ở vô cực nên $\omega_{AB} = 0$ và $V_B = V_A = 1$ m/s. Lúc này thanh AB chuyển động tịnh tiến tức thời.

Chọn điểm A làm cực, ta có:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}}$$

Nhưng quỹ đạo của điểm B và điểm A là quỹ đạo cong nên:

$$\overrightarrow{W_B^t} + \overrightarrow{W_B^n} = \overrightarrow{W_A^t} + \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} \quad (a)$$

Ta biết
$$W_B^n = \frac{V_B^2}{r} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m/s}^2$$

Chọn hệ trục Oxy như ở hình VI.48. Chiếu biểu thức (a) lên các trục Ox và Oy , ta có:

$$-W_B^t = -W_A^t$$

Cho nên:
$$W_B^t = W_A^t = 2 \text{ m/s}^2$$

còn
$$W_{BA}^n = 0 \text{ do } \omega_{AB} = 0$$

$$W_B^n = -W_A^n + W_{BA}^n$$

Do đó:
$$W_{BA}^t = W_B^n + W_A^n$$

$$W_{BA}^t = BA \cdot \epsilon_{AB} = 2 + 1 = 3 \text{ m/s}^2$$

Vậy:
$$\epsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^t}{BA} = \frac{3}{1} = 3 \text{ rad/s}^2$$

Ta có:

$$W_B^t = 2 \text{ m/s}^2 \text{ và } W_B^n = 2 \text{ m/s}^2, \text{ nên}$$

$$W_B = \sqrt{(W_B^t)^2 + (W_B^n)^2} = 2\sqrt{2} \text{ m/s}^2.$$

Tính W_C .

Muốn tính W_C ta xét chuyển động song phẳng của bánh xe. Điểm P là tâm vận tốc tức thời của bánh xe.

Ta có:

$$V_C = V_B \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\omega_{bx} = \frac{V_B}{r} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon_{bx} = \frac{d}{dt}(\omega_{bx}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_B}{r}\right) = \frac{1}{r} W_B^t = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ rad/s}^2$$

Chọn điểm B làm cực ta có:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_B^t} + \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_{CB}^t} + \overrightarrow{W_{CB}^n} \quad (\text{b})$$

Ta biết:

$$W_B^t = 2 \text{ m/s}^2 ; \quad W_B^n = 2 \text{ m/s}^2 ; \quad W_{CB}^n = CB\omega_{bx}^2$$

$$W_{CB}^n = r\omega_{bx}^2 = 0,5.4 = 2 \text{ m/s}^2 ; \quad W_{CB}^t = CB\varepsilon_{bx}$$

$$W_{CB}^n = r\omega_{bx}^2 = 0,5.4 = 2 \text{ m/s}^2 ;$$

$$W_{CB}^t = CB.\varepsilon_{bx} = 0,5.4 = 2 \text{ m/s}^2.$$

Chiếu đẳng thức (b) lên các trục Ox , Oy đã chọn, ta có:

$$W_{Cx} = -W_B^t - W_{CB}^n = -2 - 2 = -4 \text{ m/s}^2$$

$$W_{Cy} = W_B^n + W_{CB}^t = 2 + 2 = 4 \text{ m/s}^2$$

Do đó:

$$W_C = \sqrt{W_{Cx}^2 + W_{Cy}^2} = 4\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

Bài V.49 (hình VI.49):

Ta có:

$$\frac{AB}{2} = AP = 10 \text{ cm}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{40}{10} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^t} \quad (a)$$

mà $W_{BA}^n = BA \cdot \omega_{AB}^2 = 20 \cdot 4^2$

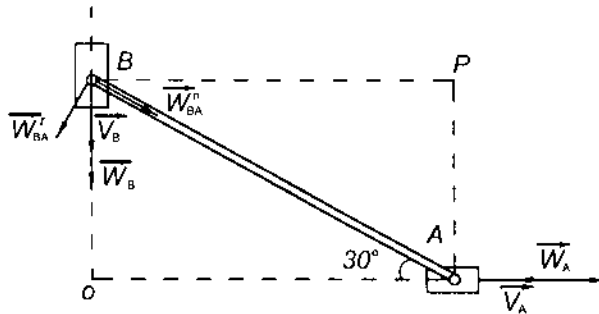
$$W_{BA}^n = 320 \text{ cm/s}^2;$$

$$W_{BA}^t = AB \cdot \varepsilon_{AB}$$

Chiếu (a) lên BA , ta có:

$$W_B \sin 30^\circ = W_A \cos 30^\circ + W_{BA}^n$$

$$W_B = 674,64 \text{ cm/s}^2$$



Hình VI.49

Chiếu (a) lên phương vuông góc AB , ta có:

$$W_B \cos 30^\circ = -W_A \sin 30^\circ + W_{BA}^i$$

$$W_{BA}^i = W_B \cos 30^\circ + W_A \sin 30^\circ = 674,6 \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_{AB} \cdot BA = W_{BA}^i = 594,2$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{594,2}{20} = 29,7 \text{ rad/s}^2.$$

Bài V.50 (hình VI.50):

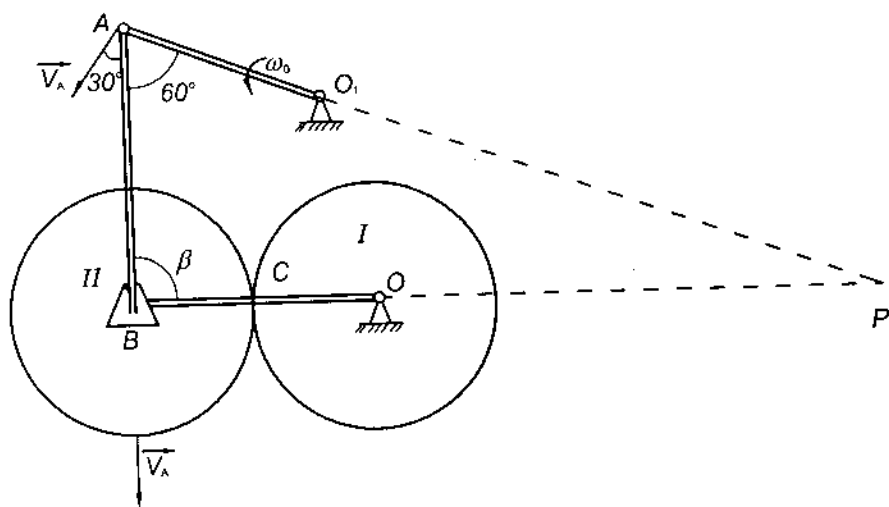
Tay quay O_1A chuyển động quay quanh O_1 . Thanh AB chuyển động song phẳng. BO chuyển động quay quanh O . Ta có:

$$V_A = O_1A \cdot \omega_0 = 75,6 = 450 \text{ cm/s}$$

Chiếu lên đoạn thẳng AB , ta được:

$$V_B = V_A \cos 30^\circ = 450 \frac{\sqrt{3}}{2} = 225\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

$$\omega_{OB} = \frac{V_B}{BO} = \frac{225\sqrt{3}}{60\sqrt{3}} = 3,75 \text{ rad/s.}$$



Hình VI.50

Tiếp điểm C của hai bánh xe, còn P là tâm vận tốc tức thời của hình phẳng AB .

$$\frac{V_C}{CP} = \frac{V_B}{BP}$$

Do đó:

$$V_C = \frac{CP}{BP} V_B$$

$$BP = AB \tan 60^\circ = 150\sqrt{3} \text{ còn } CP = 150\sqrt{3} - 30\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$$

$$V_C = \frac{CP}{BP} V_B = \frac{120\sqrt{3}}{150\sqrt{3}} V_B = \frac{4}{5} 225\sqrt{3} = 180\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

$$\omega_1 = \frac{V_C}{r_1} = \frac{180\sqrt{3}}{30\sqrt{3}} = 6 \text{ rad/s.}$$

Bài V.51 (hình VI.51):

OA quay quanh O cố định. O_1B quay quanh O_1 cố định AB chuyển động song phẳng. Ta có P_{ω} , nên $\omega_{AB} = 0$ thành AB chuyển động tịnh tiến tức thời.

$$V_B = V_A = OA\omega_o = 20 \times 10 = 200 \text{ cm/s}$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}} \rightarrow \overrightarrow{W_B^n} + \overrightarrow{W_B^t} = \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_A^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^t} \quad (*)$$

$$W_B^n = \frac{V_B^2}{O_1B} = \frac{200^2}{100} = 400 \text{ cm/s}^2$$

$$W_A^n = OA\omega_o^2 = 20 \times 10^2 = 2000 \text{ cm/s}^2$$

$$W_A^t = OA\varepsilon_o = 20 \times 5 = 100 \text{ cm/s}^2$$

$$W_{BA}^n = BA\omega_{AB}^2 = 0 \text{ do } \omega_{AB} = 0.$$

Chiếu hai vế của (*) lên Ax , ta có:

$$W_B^n \sin \alpha + W_B^t \cos \alpha = W_A^n \sin \alpha + W_A^t \cos \alpha$$

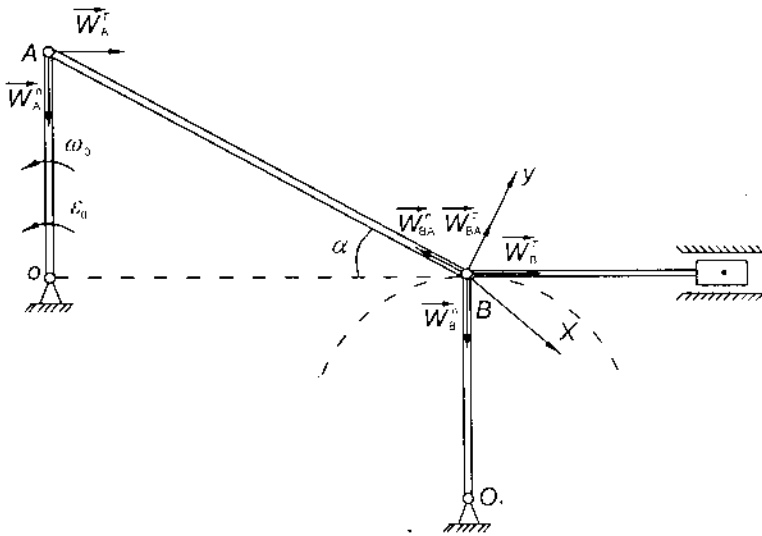
$$W_B^r = W_A^n \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + W_A^r - W_B^n \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Ta tính:

$$\sin \alpha = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \text{ và } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{36-1}{36}} = \frac{5,9}{6}$$

$$W_B^r = 100 + \frac{2000 \cdot 1}{6 \cdot \frac{5,9}{6}} - \frac{400}{5,9} = 370 \text{ cm/s}^2$$

$$W_B^n = 400 \text{ cm/s}^2 \text{ và } V_B = 200 \text{ cm/s.}$$



Hình VI.51

Bài V.52 (hình VI.52):

$$\omega_{OA} = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{6} \times \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} t = \frac{\pi^2}{12} \text{ (với } t = 0)$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{\pi^2}{12} \times \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t = 0$$

$$V_A = OA\omega = 24 \frac{\pi^2}{12} = 2\pi^2$$

Vì P_∞ , nên $\omega_{AB} = 0$

$$V_A = V_B = 2\pi^2$$

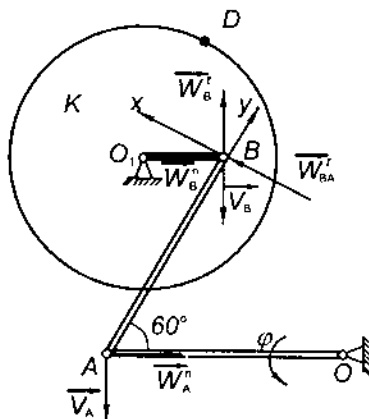
$$V_D = R\omega = R \frac{V_B}{0,5R} = 2V_B = 4\pi^2$$

Tính W_B :

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}} \text{ hay } \overrightarrow{W_B^t} + \overrightarrow{W_B^n} = \overrightarrow{W_A^t} + \overrightarrow{W_A^n} + \overrightarrow{W_{BA}^t} + \overrightarrow{W_{BA}^n} \quad (*)$$

$$W_B^n = \frac{V_B^2}{O_1B} = \frac{(2\pi^2)^2}{12} = \frac{\pi^4}{3} \text{ cm/s}^2 \quad W_{BA}^n = 0$$

$$W_A^n = OA\omega_{OA}^2 = 24 \left(\frac{\pi^2}{12} \right)^2 = \frac{\pi^4}{6} \text{ cm/s}^2 \quad W_A^t = 0$$



Hình VI.52

Chiếu hai vế của (*) lên By , ta có:

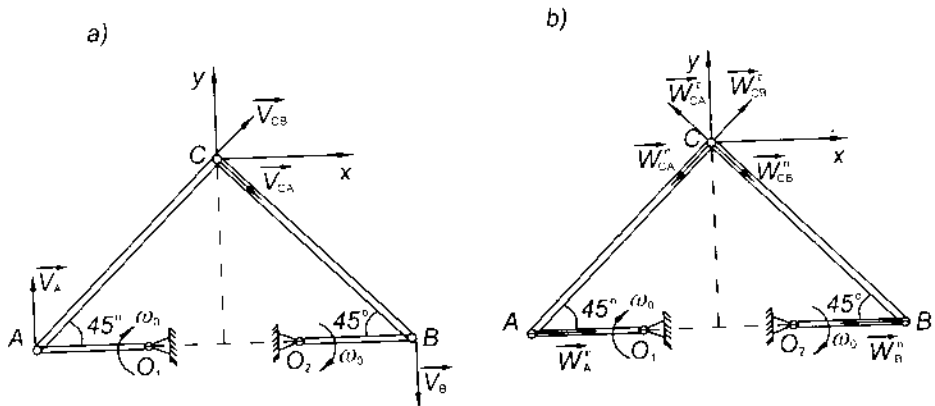
$$W_B^t \cos 30^\circ - W_B^n \sin 30^\circ = W_A^n \cos 60^\circ$$

$$W_B^t \frac{\sqrt{3}}{2} = W_A^n \frac{1}{2} + W_B^n \frac{1}{2} \rightarrow W_B^t = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi^4$$

$$W_B = \sqrt{(W_B^t)^2 + (W_B^n)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} \pi^4\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \pi^4\right)^2}$$

$$W_B = \frac{1}{6} \pi^4 \sqrt{7} = 42,9 \text{ cm/s}^2.$$

Bài V.53 (hình VI.53):



Hình VI.53

a) Tính $\overline{V_C}$ (hình VI.53a).

Xét chuyển động song phẳng của thanh AC, lấy A làm cực, ta có:

$$\overline{V_C} = \overline{V_A} + \overline{V_{CA}} \quad (a)$$

Tương tự với thanh BC:

$$\overline{V_C} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}} \quad (b)$$

Cho (a) bằng (b) ta có:

$$\overline{V_A} + \overline{V_{CA}} = \overline{V_B} + \overline{V_{CB}} \quad (c)$$

Chiếu (c) lên trục Cx, ta có: $V_{CA} = V_{CB}$

Chiều (c) lên trục Cy , ta có:

$$V_A - V_{CA} \frac{\sqrt{2}}{2} = -V_B + V_{CB} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mà $V_A = V_B = r\omega_o \rightarrow V_A = 2V_{CA} \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\rightarrow V_A = V_{CA} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} 2\sqrt{2} r\omega_{AC} = r\omega_o \rightarrow \omega_{AC} = \frac{\omega_o}{2}$$

Chiều (a) lên trục Cx , ta có:

$$V_{Cx} = V_{CA} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} 2\sqrt{2} r \frac{\omega_o}{2} = r\omega_o$$

Chiều (a) lên trục Cy , ta có:

$$V_{Cy} = 0$$

Vậy: $V_C = V_{Cx} = r\omega_o$

$$\overrightarrow{V_C} // O_1O_2$$

b) Tính $\overrightarrow{W_C}$ (hình VI.53b)

Lấy A làm cực, ta có:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}^r} + \overrightarrow{W_{CA}^n} \quad (1)$$

Lấy B làm cực, ta có:

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{CB}^r} + \overrightarrow{W_{CB}^n} \quad (2)$$

Cho (1) bằng (2), ta có:

$$\overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}^r} + \overrightarrow{W_{CA}^n} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{CB}^r} + \overrightarrow{W_{CB}^n} \quad (3)$$

Chiều (3) lên AC , ta có:

$$W_A^n \frac{\sqrt{2}}{2} - W_{CA}^n = -W_B^n \frac{\sqrt{2}}{2} + W_{CB}^r$$

$$\rightarrow W_{CB}^t = W_A^n \frac{\sqrt{2}}{2} - W_{CA}^n + W_B^n \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$W_{CB}^t = CB\varepsilon_{CB} = r\omega_o^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - r \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o^2 + r\omega_o^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o^2$$

$$2r\sqrt{2} \varepsilon_{CB} = r \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o^2 \rightarrow \varepsilon_{CB} = \frac{\omega_o^2}{4}$$

Tương tự, ta có:

$$\varepsilon_{CA} = \frac{\omega_o^2}{4}$$

$$\omega_{AC} = \omega_{BC} = \frac{\omega_o}{2}$$

Ta có:

$$W_A^n = r\omega_o^2 \text{ và } W_{CA}^n = r \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o^2$$

$$W_{CB}^t = W_{CA}^t = r \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_o^2$$

Chiếu (1) lên Cx và Cy, ta có:

$$W_{Cx} = W_A^n - W_{CA}^n \cos 45^\circ - W_{CA}^t \cos 45^\circ = 0$$

$$W_{Cy} = W_{CA}^t \sin 45^\circ - W_{CA}^n \sin 45^\circ = 0$$

Vậy: $\overline{W_C} = 0$.

MỤC LỤC

	Trang
LỜI NÓI ĐẦU.....	3
Phần một	
TĨNH HỌC	
Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN - HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC	7
§1.1. Các khái niệm cơ bản.....	7
1.1.1. Vật rắn tuyệt đối	7
1.1.2. Lực	7
1.1.3. Trạng thái cân bằng của vật rắn và một số định nghĩa khác.....	8
§1.2. Mômen của lực.....	9
1.2.1. Mômen của lực đối với một điểm.....	9
1.2.2. Sự biến thiên mômen của lực đối với O và O_1	11
1.2.3. Mômen của lực đối với một trục.....	12
1.2.4. Định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục	13
§1.3. Ngẫu lực.....	14
1.3.1. Định nghĩa và các yếu tố của ngẫu lực	14
1.3.2. Tính chất tương đương của ngẫu lực	16
1.3.3. Hợp hệ ngẫu lực	17
§1.4. Hệ tiên đề tĩnh học	17
1.4.1. Tiên đề 1 (Về hai lực cân bằng).....	17
1.4.2. Tiên đề 2 (Về sự tương đương của hệ lực)	18
1.4.3. Tiên đề 3 (Quy tắc hình bình hành).....	19
1.4.4. Tiên đề 4 (Quy luật về lực tác dụng và phản tác dụng).....	20
1.4.5. Tiên đề 5 (Nguyên lý hóa rắn)	20

§1.5. Liên kết và phản lực liên kết.....	20
1.5.1. Khái niệm về vật rắn tự do, vật rắn không tự do, liên kết và phản lực liên kết	20
1.5.2. Một số liên kết thường gặp và phản lực liên kết	21
1.5.3. Tiên đề 6 (Về giải phóng liên kết).....	24
Chương 2. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA TĨNH HỌC	25
§2.1. Bài toán thu gọn hệ lực	25
2.1.1. Định lý dời lực song song	25
2.1.2. Thu gọn hệ lực không gian về một tâm - vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực	26
2.1.3. Xác định vectơ chính và vectơ mômen chính của hệ lực.....	27
2.1.4. Các dạng chuẩn khi thu gọn hệ lực không gian	29
2.1.5. Định lý Varinhông.....	32
2.1.6. Thu gọn hệ các lực đặc biệt	32
2.1.7. Ví dụ tính toán	34
§2.2. Bài toán cân bằng của hệ lực.....	36
2.2.1. Điều kiện cân bằng của hệ lực không gian	36
2.2.2. Điều kiện cân bằng của các hệ lực khác	38
2.2.3. Trình tự giải bài toán tĩnh học và các ví dụ.....	40
Chương 3. BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT CỦA TĨNH HỌC	45
§3.1. Bài toán về sự cân bằng của đòn và vật lật.....	45
3.1.1. Sự cân bằng của đòn	45
3.1.2. Sự cân bằng của vật lật.....	46
§3.2. Bài toán về lực tập trung và lực phân bố.....	49
§3.3. Bài toán ma sát.....	50
3.3.1. Ma sát trượt.....	50
3.3.2. Ma sát lăn.....	54
§3.4. Bài toán về sự cân bằng của hệ vật.....	58
3.4.1. Hệ vật.....	58
3.4.2. Phân loại lực tác dụng lên hệ vật	58
3.4.3. Các cách giải bài toán hệ vật	59
Chương 4. TĨNH ĐỒ DÀN.....	65
§4.1. Đa giác lực và đa giác dây	65

4.1.1. Đa giác lực	65
4.1.2. Đa giác dây	65
§4.2. Thu gọn hệ lực và điều kiện cân bằng của hệ lực	66
4.2.1. Hệ lực thu về một hợp lực	67
4.2.2. Hệ lực thu về một ngẫu lực	68
4.2.3. Hệ lực cân bằng	69
§4.3. Dàn	70
4.3.1. Định nghĩa dàn	71
4.3.2. Các phương pháp giải bài toán dàn	71
Chương 5. HỆ LỰC SONG SONG VÀ TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN ..	75
§5.1. Thu gọn hệ lực song song	75
5.1.1. Thu gọn hai lực song song cùng chiều	75
5.1.2. Thu gọn hai lực song song ngược chiều nhau	78
5.1.3. Thu gọn nhiều lực song song	79
§5.2. Trọng tâm của vật rắn	81
5.2.1. Định nghĩa và công thức tổng quát để xác định trọng tâm của vật rắn	81
5.2.2. Trọng tâm của các vật đồng chất	81
5.2.3. Các phương pháp xác định trọng tâm của vật rắn đồng chất	82
5.2.4. Trọng tâm một số vật thường gặp	84
CÂU HỎI ÔN TẬP PHẦN TĨNH HỌC	89
VÍ DỤ TÍNH TOÁN, BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP PHẦN TĨNH HỌC	91
I. Ví dụ tính toán	91
II. Đề bài tập	105
Hệ lực không gian	105
Hệ lực phẳng bất kỳ	114
Ma sát	130
Trọng tâm	133
III. Hướng dẫn giải bài tập	135
Hệ lực không gian	135
Hệ lực phẳng bất kỳ	151
Ma sát	188

Phần hai ĐỘNG HỌC

<i>Chương 6. ĐỘNG HỌC ĐIỂM</i>	203
§6.1. Phương pháp vectơ.....	203
6.1.1. Phương trình chuyển động.....	203
6.1.2. Vận tốc của điểm.....	204
6.1.3. Gia tốc của điểm.....	206
§6.2. Phương pháp tọa độ đề các.....	207
6.2.1. Phương trình chuyển động.....	208
6.2.2. Vận tốc.....	208
6.2.3. Gia tốc.....	209
§6.3. Phương pháp tọa độ tự nhiên.....	210
6.3.1. Phương trình chuyển động.....	210
6.3.2. Vận tốc của điểm.....	211
6.3.3. Gia tốc của điểm.....	212
6.3.4. Các chuyển động đặc biệt.....	213
§6.4. Ví dụ minh họa.....	215
<i>Chương 7. CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN</i>	221
§7.1. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn.....	221
7.1.1. Định nghĩa.....	221
7.1.2. Tính chất của chuyển động tịnh tiến.....	222
7.1.3. Nhận xét.....	223
§7.2. Chuyển động của vật rắn quay quanh trục cố định.....	224
7.2.1. Định nghĩa.....	224
7.2.2. Khảo sát chuyển động quay của vật rắn.....	224
7.2.3. Khảo sát chuyển động của điểm thuộc vật.....	227
7.2.4. Khái niệm về truyền chuyển động.....	229
<i>Chương 8. HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM</i>	233
§7.1. Khái niệm và định nghĩa về các loại chuyển động.....	234
§8.2. Định lý hợp vận tốc.....	236
8.2.1. Định lý.....	236
8.2.2. Ví dụ minh họa.....	237

§8.3. Định lý hợp gia tốc.....	239
8.3.1. Định lý 1.....	239
8.3.2. Công thức xác định $\vec{W}_K$	239
8.3.3. Định lý 2.....	240
8.3.4. Ví dụ minh họa.....	241
Chương 9. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN	243
§9.1. Định nghĩa và ví dụ.....	243
9.1.1. Định nghĩa.....	243
9.1.2. Ví dụ minh họa.....	243
9.1.3. Mô hình chuyển động song phẳng.....	244
§9.2. Khảo sát chuyển động của vật rắn.....	245
9.2.1. Phân tích chuyển động song phẳng thành các chuyển động cơ bản.....	245
9.2.2. Phương trình chuyển động.....	246
§9.3. Khảo sát các điểm thuộc vật.....	246
9.3.1. Xác định vận tốc điểm.....	247
9.3.2. Định lý hình chiếu vận tốc của hai điểm.....	248
9.3.3. Tâm vận tốc tức thời.....	249
9.3.4. Xác định gia tốc của điểm.....	252
9.3.5. Tâm gia tốc tức thời.....	253
§9.4. Ví dụ minh họa.....	255
CÂU HỎI ÔN TẬP PHẦN II	261
VÍ DỤ TÍNH TOÁN, BÀI TẬP VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP PHẦN ĐỘNG HỌC	263
IV. Ví dụ tính toán.....	263
V. Đề Bài tập.....	277
Động học điểm.....	277
Chuyển động phức hợp của điểm.....	284
Chuyển động song phẳng của vật rắn.....	292
VI. Hướng dẫn giải bài tập.....	299
Chuyển động phức hợp của điểm.....	313
Chuyển động song phẳng.....	333

NGUYỄN TRỌNG (chủ biên)
TỔNG DANH ĐẠO — LÊ THỊ HOÀNG YẾN

CƠ HỌC LÝ THUYẾT

TẬP 1

PHÂN TÍNH HỌC, ĐỘNG HỌC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Pgs.Ts. Tô Đăng Hải
Biên tập : Thanh Định, Bá Đô
Sửa bản in : Thanh Nga
Kỹ mỹ thuật : Đỗ Phú
Trình bày bìa : Hương Lan

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 - Trần Hưng Đạo, Hà Nội

In 700 bản, khổ 16 x 24 cm tại Nhà in KH&CN
Giấy phép xuất bản số 546 - 5.1 cấp ngày 21/4/2005
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2006.

206007



Giá: 49.000 đ