

Nguyễn Văn Khang

Dao động kỹ thuật



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

DAO ĐỘNG KỸ THUẬT

(In lần thứ ba có sửa chữa và bổ sung)



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI 2004

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Chương 1. Mô tả động học các quá trình dao động	5
§1. Dao động điều hoà	5
§2. Dao động tuần hoàn	9
§3. Dao động không tuần hoàn	25
Chương 2. Dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do	34
§1. Dao động tự do không cản	34
§2. Dao động tự do có cản	48
§3. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động điều hoà.....	58
§4. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động đa tần và chịu kích động tuần hoàn	84
§5. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động không tuần hoàn.....	94
Chương 3. Dao động tuyến tính của hệ nhiều bậc tự do	116
§1. Thành lập các phương trình vi phân dao động	116
§2. Dao động tự do không cản	127
§3. Dao động tự do có cản	144
§4. Tính toán bằng số các tần số riêng và các dạng dao động riêng.....	151
§5. Dao động cưỡng bức	168
§6. Một vài bài toán áp dụng	187
§7. Tính điều khiển được và tính quan sát được của các hệ dao động...	201
Chương 4. Dao động tuyến tính của hệ vô hạn bậc tự do	210
§1. Dao động uốn của dây.....	210
§2. Dao động dọc và dao động xoắn của thanh thẳng.....	219
§3. Dao động uốn của dầm	239
§4. Phương pháp ma trận truyền	274
§5. Dao động của màng	294
§6. Dao động uốn của tấm	301
Tài liệu tham khảo	316

LỜI NÓI ĐẦU

Dao động là một hiện tượng phổ biến trong tự nhiên và trong kỹ thuật. Các máy, các phương tiện giao thông vận tải, các toà nhà cao tầng, những chiếc cầu bắc ngang qua các dòng sông, các mạch điện trong chiếc đài của bạn đang dùng, chiếc đồng hồ mà bạn đang đeo trên tay,... đó là các hệ dao động trong kỹ thuật. Bản thân mỗi người chúng ta cũng là một hệ dao động mà có lẽ ít người đã biết.

Vậy dao động là gì ? Một cách sơ lược, dao động là một quá trình trong đó một đại lượng vật lý (hoá học, sinh học,...) thay đổi theo thời gian mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất một lần. Dao động kỹ thuật là dao động của các hệ kỹ thuật (các máy, các phương tiện giao thông vận tải, các công trình,...).

Các quá trình dao động được phân loại tùy theo các quan điểm khác nhau. Căn cứ vào cơ cấu gây nên dao động người ta phân thành dao động tự do, dao động cưỡng bức, dao động tham số, tự dao động, dao động hỗn độn, dao động ngẫu nhiên. Căn cứ vào số bậc tự do người ta phân thành dao động hệ một bậc tự do, dao động hệ n bậc tự do, dao động hệ vô hạn bậc tự do. Căn cứ vào phương trình chuyển động người ta phân thành dao động tuyến tính, dao động phi tuyến. Căn cứ vào dạng chuyển động người ta phân thành dao động dọc, dao động xoắn, dao động uốn,...

Với sự phát triển như vũ bão của tin học, việc tính toán dao động, dù là dao động của hệ phức tạp, ngày nay đã trở thành khá đơn giản. Nhiều phần mềm tính toán dao động hoặc xử lý các tín hiệu đo đặc dao động đã và đang được đưa ra sử dụng nhằm góp phần nâng cao chất lượng các máy và công trình, nhằm đi sâu tìm hiểu các hiện tượng dao động phong phú quanh ta. Nhiều bài toán dao động trước đây chưa được nghiên cứu do quá công kềnh, phức tạp thì ngày nay đã và đang được giải quyết.

Các kiến thức về lý thuyết dao động ngày nay trở thành một bộ phận không thể thiếu được trong tổng thể các kiến thức cần phải trang bị cho người kỹ sư cơ khí, xây dựng, giao thông vận tải, vô tuyến điện tử, tự động hoá,... Môn học dao động kỹ thuật đã được đưa vào chương trình giảng dạy ở hầu hết các trường đại học kỹ thuật ở Hoa Kỳ, Đức, Anh, Pháp, Nga, Trung Quốc, ...

Cuốn sách này được viết trên cơ sở các bài giảng về dao động tuyến tính tiền định của tác giả ở Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Xây dựng Hà Nội và Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây. Do tính đặc thù riêng, các vấn đề về dao động phi tuyến, dao động ngẫu nhiên sẽ được trình bày trong các cuốn sách khác. Tác giả cố gắng trình bày nội dung cuốn sách với quan điểm và công cụ hiện đại của lý thuyết

dao động kỹ thuật. Cuốn sách này là giáo trình cho sinh viên Khoa Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Tuy nhiên đây cũng là tài liệu tham khảo bổ ích cho kỹ sư các ngành cơ khí, xây dựng, giao thông vận tải, vô tuyến điện tử, v.v... trong công tác chuyên môn của họ.

Trong bản in lần thứ hai chúng tôi đã cố gắng sửa chữa một số lỗi in ấn của bản in lần thứ nhất, bổ sung thêm một số đoạn trong các chương 3 và 4. Trong bản in lần thứ ba chúng tôi đã sửa chữa một số lỗi in ấn của bản in lần thứ hai, bổ sung thêm một số đoạn trong các chương 2 và 3.

Trong quá trình biên soạn, chúng tôi đã nhận được sự trợ giúp quý báu của nhiều bạn đồng nghiệp. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật và chị Nguyễn Thị Ngọc Khuê đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc in và tái bản cuốn sách này, cảm ơn TS. Vũ Văn Khiêm và GVC. Thái Mạnh Cầu đã đọc toàn bộ bản thảo, giúp tính toán kiểm tra nhiều đoạn. Chúng tôi cũng xin cảm ơn TS. Nguyễn Phong Điền, ThS. Nguyễn Quang Hoàng, ThS. Đỗ Thành Trung và ThS. Nguyễn Minh Phương đã giúp đánh máy bản thảo, sửa chữa bản thảo trong các lần tái bản và cố gắng đề nghị cải tiến bổ ích.

Nhà xuất bản và tác giả mong muốn nhận được sự góp ý của đồng nghiệp và bạn đọc để có điều kiện sửa chữa bổ sung, hoàn thiện hơn cho các lần tái bản sau. Các ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ:

GSTSKH. Nguyễn Văn Khang, Bộ môn Cơ học ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, E-mail: nvankhang@mail.hut.edu.vn, Tel. 04.8680469.

Hà Nội, tháng 12 năm 2003

Nguyễn Văn Khang

Chương 1

MÔ TẢ ĐỘNG HỌC CÁC QUÁ TRÌNH DAO ĐỘNG

Các quá trình dao động thường là các quá trình thay đổi đa dạng theo thời gian. Trong tính toán hoặc trong đo đạc các quá trình dao động người ta thường phân thành dao động tuần hoàn và dao động không tuần hoàn. Một dạng đặc biệt của các dao động tuần hoàn là dao động điều hoà. Trong chương này ta sẽ trình bày một số tính chất động học và cách biểu diễn các dao động tuần hoàn và không tuần hoàn. Phần động học các quá trình dao động ngẫu nhiên sẽ được trình bày ở giáo trình khác.

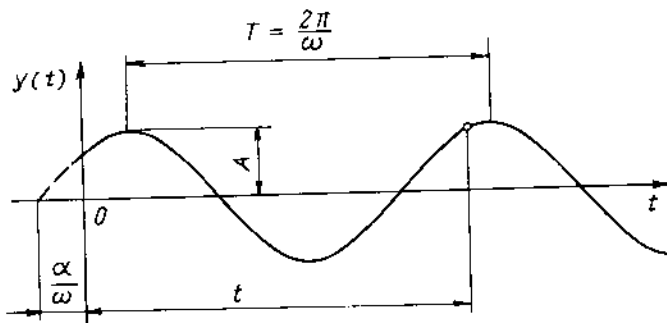
§1. DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

1.1 Các tham số động học của dao động điều hoà

Dao động điều hoà được mô tả về phương diện động học bởi hệ thức

$$y(t) = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \psi(t) \quad (1.1)$$

Dao động điều hoà còn được gọi là dao động hình sin. Đại lượng A không giảm tổng quát luôn có thể giả thiết là số dương và được gọi là biên độ dao động. Như thế biên độ dao động là giá trị tuyệt đối của độ lệch lớn nhất của đại lượng dao động $y(t)$ so với giá trị trung bình của nó (hình 1.1). Đại lượng $\psi(t) = \omega t + \alpha$ được gọi là góc pha, hay một cách vắn tắt là pha dao động. Góc α được gọi là pha ban đầu.



Hình 1.1

Đại lượng ω được gọi là tần số vòng của dao động điều hoà, đơn vị của ω là rad/s hoặc s^{-1} . Vì hàm sin có chu kỳ 2π nên dao động điều hoà có chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.2)$$

Điều đó được xác định bởi biến đổi sau

$$\begin{aligned} y(t + T) &= A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right] = A \sin(\omega t + \alpha + 2\pi) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha) = y(t) \end{aligned}$$

Như thế chu kỳ dao động là khoảng thời gian nhỏ nhất cần thiết để đại lượng dao động trở lại vị trí ban đầu.

Đại lượng

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

được gọi là tần số dao động. Đơn vị của tần số f là s^{-1} hoặc Hz (Hertz). Như thế, tần số là số lần dao động thực hiện trong một giây. Giữa tần số dao động f và tần số vòng ω có mối quan hệ sau

$$\omega = 2\pi f \quad (1.4)$$

Từ công thức (1.1) ta thấy : một dao động điều hoà được xác định khi biết ba đại lượng A , ω và α . Mặt khác, một dao động điều hoà cũng được xác định duy nhất khi biết tần số vòng ω và các điều kiện đầu. Giả sử các điều kiện đầu có dạng

$$t = 0 : \quad y(0) = y_0 ; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Khi đó từ phương trình (1.1) ta có

$$y_0 = A \sin \alpha ; \quad \dot{y}_0 = \omega A \cos \alpha$$

Từ đó suy ra

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}} \quad (1.5)$$

$$\alpha = \arctg \frac{\omega y_0}{\dot{y}_0} \quad (1.6)$$

Việc biểu diễn pha ban đầu α dưới dạng (1.6) có nhược điểm là trong khoảng từ 0 đến 2π pha ban đầu α không được xác định một cách duy nhất. Vì vậy để xác định α , ta cần chú ý đến cả hệ thức

$$\alpha = \arcsin \frac{y_0}{A} \quad (1.7)$$

Người ta cũng hay biểu diễn dao động điều hoà (1.1) dưới dạng sau

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (1.8)$$

So sánh biểu thức (1.8) với biểu thức (1.1) ta có các hệ thức

$$C_1 = A \sin \alpha; \quad C_2 = A \cos \alpha \quad (1.9)$$

Từ đó suy ra

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arcsin \frac{C_1}{A} \quad (1.10)$$

Các hằng số C_1 và C_2 cũng có thể xác định được từ các điều kiện đầu

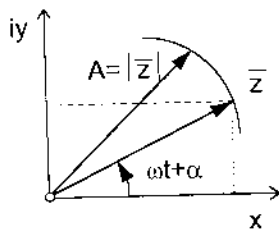
$$C_1 = y_0; \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

1.2 Biểu diễn phức dao động điều hoà

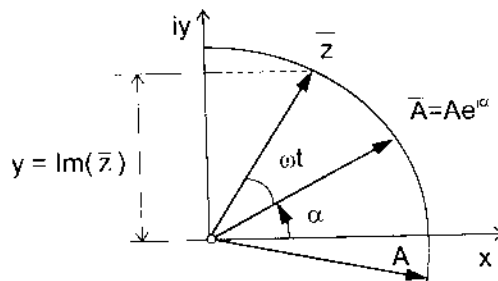
Một cách biểu diễn có hình ảnh dao động điều hoà là biểu diễn bằng véc tơ phức. Hàm điều hoà $y(t)$ có thể xem như là phần ảo của véc tơ phức $\bar{z}$ quay với vận tốc góc ω trong mặt phẳng số (hình 1.2)

$$\bar{z} = Ae^{i(\omega t + \alpha)} = Ae^{i\alpha} e^{i\omega t} = \bar{A} e^{i\omega t} \quad (1.11)$$

$$y(t) = \text{Im}(\bar{z}(t)) \quad (1.12)$$



Hình 1.2



Hình 1.3

Đại lượng $\bar{A} = Ae^{i\alpha}$ được gọi là biên độ phức. Như thế biên độ phức $\bar{A}$ biểu diễn vị trí của véc tơ phức $\bar{z}$ tại thời điểm $t = 0$. Véc tơ phức $\bar{z}$ còn được gọi là véc tơ quay.

Nhờ công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

ta có

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{Im}(\bar{Z}(t)) = A \text{Im}(e^{i(\omega t + \alpha)}) \\ &= A \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Trị tuyệt đối của véc tơ phức $|\bar{Z}|$ bằng biên độ của dao động điều hoà. Việc biểu diễn dao động điều hoà bằng véc tơ phức quay trong mặt phẳng số gọi là ảnh véc tơ phức của dao động điều hoà.

1.3 Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số

Cho hai dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1); \quad y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Tổng của hai dao động điều hoà trên được xác định bởi hệ thức

$$y(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$$

Sử dụng định lý cộng đối với hàm sin ta có

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 \sin \omega t \cos \alpha_1 + A_1 \cos \omega t \sin \alpha_1 \\ &\quad + A_2 \sin \omega t \cos \alpha_2 + A_2 \cos \omega t \sin \alpha_2 \\ &= (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t \end{aligned}$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2$$

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2$$

thì biểu thức trên có dạng

$$y(t) = A \sin \omega t \cos \alpha + A \cos \omega t \sin \alpha = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.13)$$

Như thế tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương và cùng tần số là dao động điều hoà với tần số là tần số của các dao động điều hoà thành phần, biên độ A và góc pha ban đầu α được xác định bởi các hệ thức sau

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\alpha = \arctg \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (1.15)$$

hoặc
$$\alpha = \arcsin \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A} \quad (1.16)$$

Nếu sử dụng cách biểu diễn phức dao động điều hoà, thì hai dao động điều hoà thành phần có dạng

$$\bar{z}_1 = A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)}; \quad \bar{z}_2 = A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}$$

Từ đó dao động tổng hợp có dạng

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}) e^{i\omega t} = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) e^{i\omega t} = \bar{A} e^{i\omega t} \quad (1.17)$$

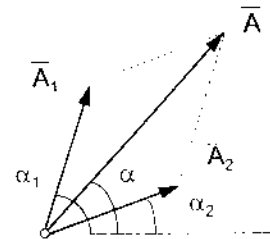
Trong đó $\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \quad (1.18)$

Công thức (1.18) được biểu diễn trên mặt phẳng số như hình 1.4. Sử dụng công thức Euler, từ (1.17) ta sẽ tìm được các công thức xác định biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp như các công thức (1.14) và (1.15).

Khi các pha ban đầu $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ thì ta có

$$A = A_1 + A_2$$

Hai dao động điều hoà $y_1(t)$ và $y_2(t)$ có cùng phương, cùng tần số và cùng biên độ được gọi là các dao động đồng bộ. Mặc dù rằng các biên độ A_1 và A_2 của chúng có thể biểu diễn các đại lượng vật lý khác nhau. Thí dụ như $y_1(t)$ biểu diễn lực thay đổi điều hoà, $y_2(t)$ biểu diễn biến dạng đàn hồi do lực đó gây ra. Chúng tạo nên một quá trình diễn biến đồng bộ.



Hình 1.4

§2. DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN

2.1 Các tham số động học của dao động tuần hoàn

Một hàm số $y(t)$ được gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại một hằng số $T > 0$, sao cho với mọi t ta có hệ thức

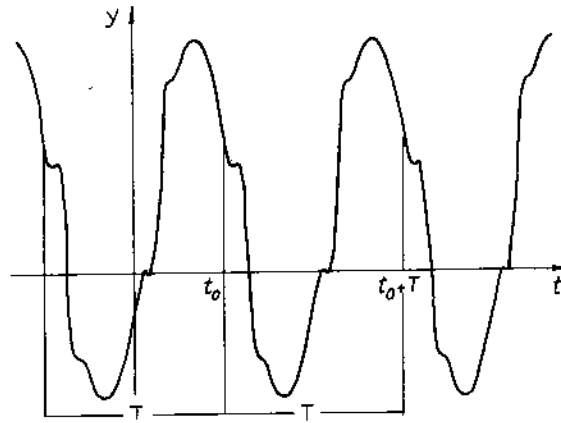
$$y(t + T) = y(t) \quad (2.1)$$

Một quá trình dao động được mô tả về mặt động học bởi một hàm tuần hoàn $y(t)$ được gọi là dao động tuần hoàn. Hằng số T nhỏ nhất để cho hệ thức (2.1) được

thoả mãn gọi là chu kỳ dao động. Hình vẽ 1.5 biểu diễn một quá trình diễn biến theo thời gian của một dao động tuần hoàn.

Chú ý rằng nếu hàm số $y(t)$ có chu kỳ T thì hàm số $u(t) = y(at)$ có chu kỳ là T/a . Thực vậy

$$u\left(t + \frac{T}{a}\right) = y\left[a\left(t + \frac{T}{a}\right)\right] = y(at + T) = y(at) = u(t)$$



Hình 1.5

Đại lượng nghịch đảo của chu kỳ dao động

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.2)$$

được gọi là tần số dao động. Như thế tần số dao động f là số dao động thực hiện trong một đơn vị thời gian. Nếu chu kỳ dao động T tính bằng giây (s) thì tần số dao động f tính bằng s^{-1} hoặc Hz (Hertz). Trong kỹ thuật người ta hay sử dụng khái niệm tần số vòng ω

$$\omega = 2\pi f \quad (2.3)$$

Khái niệm tần số vòng ω được dùng nhiều nên đôi khi người ta hay gọi tắt nó là tần số dao động. Cần chú ý đến cách gọi tắt này để khỏi nhầm lẫn với khái niệm tần số dao động f . Thứ nguyên của ω là rad/s hoặc 1/s.

Biên độ A của dao động tuần hoàn $y(t)$ được định nghĩa bởi hệ thức sau

$$A = \frac{1}{2} [\max y(t) - \min y(t)] \quad (2.4)$$

Đối với dao động tuần hoàn, ngoài các tham số động học đặc trưng như chu kỳ, tần số, biên độ người ta còn sử dụng các tham số giá trị trung bình theo thời gian của hàm $y(t)$ trong một chu kỳ. Ba loại giá trị trung bình hay được sử dụng là giá trị trung bình tuyến tính

$$y_{tt} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) dt \quad (2.5)$$

giá trị trung bình hiệu dụng

$$y_{hd} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t) dt} \quad (2.6)$$

và giá trị trung bình hiệu chỉnh

$$y_{hc} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)| dt \quad (2.7)$$

Trong các công thức (2.5), (2.6) và (2.7) khoảng lấy tích phân $[-T/2, T/2]$ có thể thay bằng khoảng $[t_0, t_0+T]$.

2.2 Tổng hợp hai dao động điều hoà có cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ

Cho hai dao động điều hoà thành phần

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad y_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\text{với} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \neq 1 \quad (p, q = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.8)$$

Tổng của hai dao động điều hoà trên được xác định bởi hàm

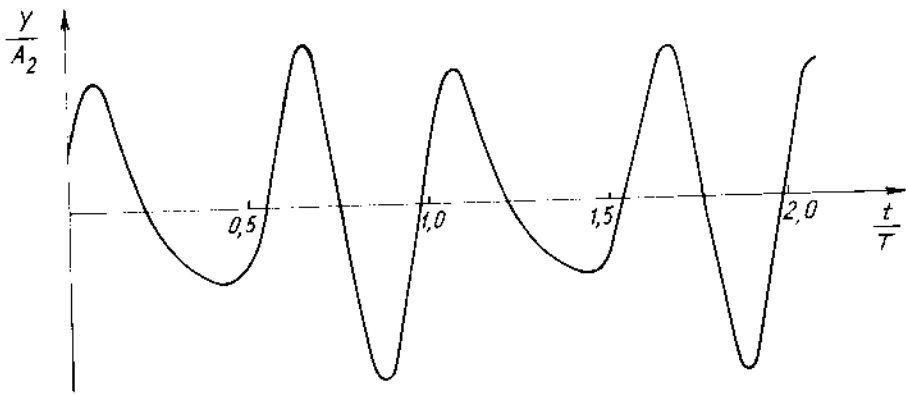
$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (2.9)$$

Chu kỳ của dao động thành phần $y_1(t)$ là $T_1 = 2\pi/\omega_1$, của dao động thành phần $y_2(t)$ là $T_2 = 2\pi/\omega_2$. Từ công thức (2.8) ta suy ra chu kỳ của dao động tổng hợp $y(t)$ là

$$T = pT_1 = qT_2 \quad (2.10)$$

Vậy tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ $\omega_1 : \omega_2 = p : q$ là một dao động tuần hoàn chu kỳ $T = pT_1 = qT_2$. Nếu p/q là phân số tối giản thì T là bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Hình 1.6 là đồ thị dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà với $A_1 : A_2 = 2 : 1$, $\omega_1 : \omega_2 = 2 : 3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/3$.



Hình 1.6

Nếu sử dụng các véc tơ phức ta có thể viết một cách hình thức như sau

$$\bar{z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = |\bar{z}_1|e^{i\psi_1} + |\bar{z}_2|e^{i\psi_2} = |\bar{z}|e^{i\psi} \quad (2.11)$$

Trong đó

$$|\bar{z}_1| = A_1; |\bar{z}_2| = A_2; \psi_1 = \omega_1 t + \alpha_1; \psi_2 = \omega_2 t + \alpha_2$$

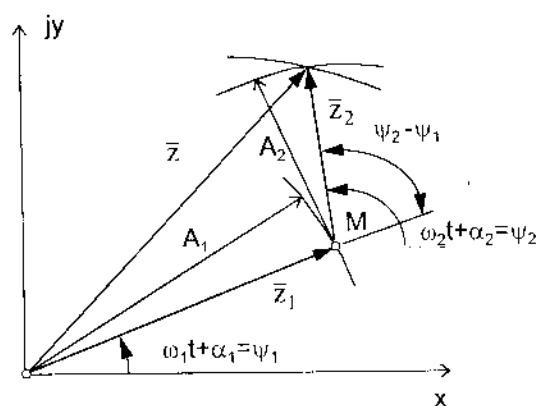
Từ hình vẽ 1.7 ta có thể xác định được môđun $|\bar{z}|$ và argument ψ của số phức $\bar{z}$.

$$\begin{aligned} |\bar{z}| &= \sqrt{|\bar{z}_1|^2 + |\bar{z}_2|^2 - 2|\bar{z}_1||\bar{z}_2|\cos[\pi - (\psi_2 - \psi_1)]} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \arcsin \frac{|\bar{z}_1|\sin\psi_1 + |\bar{z}_2|\sin\psi_2}{|\bar{z}|} \\ &= \arcsin \frac{A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)}{|\bar{z}|} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bây giờ ta xét một trường hợp riêng quan trọng. Đó là trường hợp hiệu $\omega_1 - \omega_2$ nhỏ và biên độ các dao động điều hoà thành phần bằng nhau $A_1 = A_2 = A$. Chú ý đến hệ thức lượng giác $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$, từ công thức (2.12) ta suy ra

$$\begin{aligned} |\vec{z}| &= A\sqrt{2\{1 + \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]\}} \\ &= 2A|\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1] / 2| \end{aligned} \quad (2.14)$$



Hình 1.7

Chú ý đến hệ thức lượng giác $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$ ta có thể biến đổi biểu thức (2.13) về dạng đơn giản hơn

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \arcsin \frac{2\sin\left[\frac{(\omega_2 + \omega_1)t + \alpha_2 + \alpha_1}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]}{2\cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1}{2}\right]} \\ &= \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha_2 + \alpha_1] \end{aligned} \quad (2.15)$$

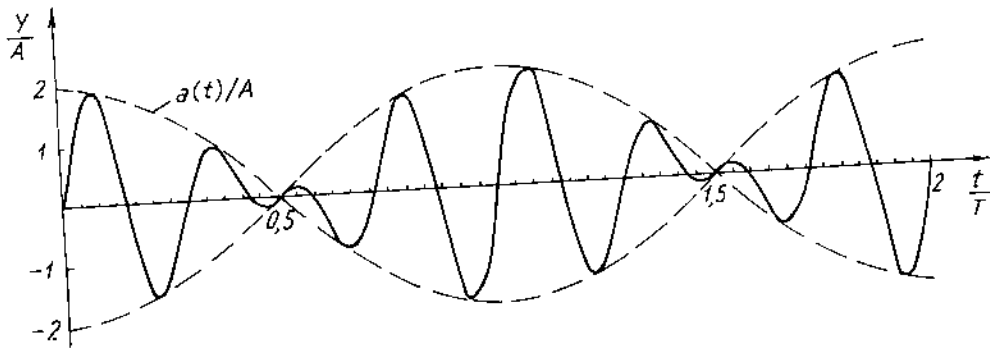
Để viết cho gọn ta đưa vào ký hiệu

$$a(t) = 2A\cos\frac{[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]}{2} \quad (2.16)$$

Chú ý đến (2.14), (2.15), (2.16) từ công thức (2.11) ta suy ra

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \text{Im}(\bar{z}) \\
 &= 2A \cos \frac{[(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1]}{2} \sin \frac{[(\omega_2 + \omega_1)t + \alpha_2 + \alpha_1]}{2} \quad (2.17) \\
 &= a(t) \sin \frac{[(\omega_2 + \omega_1)t + \alpha_2 + \alpha_1]}{2}
 \end{aligned}$$

Vậy khi ω_1 khá gần ω_2 và biên độ $A_1 = A_2$, dao động tổng hợp (2.17) là dao động hình sin với tần số vòng $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ và biên độ dao động $a(t)$ là hàm thay đổi chậm theo thời gian. Tần số vòng của biên độ $a(t)$ là $(\omega_1 - \omega_2)/2$. Quá trình dao động như thế được gọi là hiện tượng phách. Hình 1.8 là một thí dụ minh hoạ về dao động tổng hợp của hai dao động điều hoà tần số khá gần nhau.



Hình 1.8

2.3 Phân tích Fourier các hàm tuần hoàn

Trong thực tế ta ít gặp các dao động điều hoà thuần túy mà thường hay gặp các dao động phức tạp biểu diễn bằng hàm tuần hoàn. Một hàm tuần hoàn chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ với một số giả thiết mà trong thực tế luôn chấp nhận được có thể phân tích thành chuỗi Fourier

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (2.18)$$

Trong đó a_0, a_k, b_k được gọi là các hệ số Fourier và được xác định bởi các công thức

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t dt, \quad k = 1, 2, \dots \\
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t dt, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Chuỗi Fourier (2.18) có thể viết dưới dạng chuẩn của dao động

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \tag{2.20}$$

$$\text{với } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \alpha_k = \arctg \frac{a_k}{b_k} \tag{2.21}$$

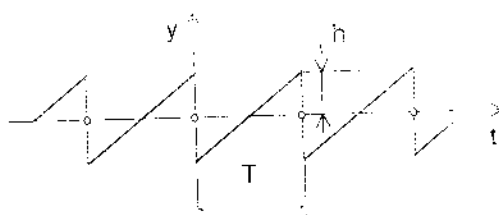
Việc phân tích một hàm tuần hoàn thành chuỗi Fourier được gọi là phân tích điều hoà. Hằng số a_0 được gọi là giá trị trung bình của dao động, số hạng $A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$ được gọi là dao động cơ bản, số hạng $A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$ được gọi là dao động bậc $k-1$ (với $k > 1$) hay gọi là các điều hoà.

Nếu một chuỗi Fourier hội tụ đều thì nó sẽ hội tụ đến giá trị của hàm $y(t)$. Đối với chuỗi Fourier hội tụ đều thì ta có thể tích phân, vi phân từng số hạng của chuỗi. Chú ý rằng một chuỗi Fourier nào đó hội tụ, nhưng chuỗi các đạo hàm các thành phần của nó có thể không hội tụ.

Ví dụ 1.1 : Phân tích Fourier hàm răng cưa như hình 1.9a. Biết rằng giá trị của hàm ở các vị trí nhảy bằng không.

Lời giải : Trong khoảng $0 < t < T$ hàm răng cưa tuân theo quy luật

$$y(t) = h \left(-1 + \frac{2t}{T} \right)$$



Hình 1.9a

Vậy $y(t)$ là hàm lẻ, $y(-t) = -y(t)$. Do đó các hệ số Fourier $a_k = 0$. Theo công thức (2.19) ta có

$$b_k = \frac{2h}{T} \int_0^T \left(-1 + \frac{2t}{T} \right) \sin \frac{2k\pi t}{T} dt = -\frac{2h}{k\pi}$$

Từ đó suy ra chuỗi Fourier của hàm răng cưa có dạng

$$y(t) = -\frac{2h}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{2k\pi t}{T}$$

Theo tiêu chuẩn hội tụ Abel chuỗi trên hội tụ.

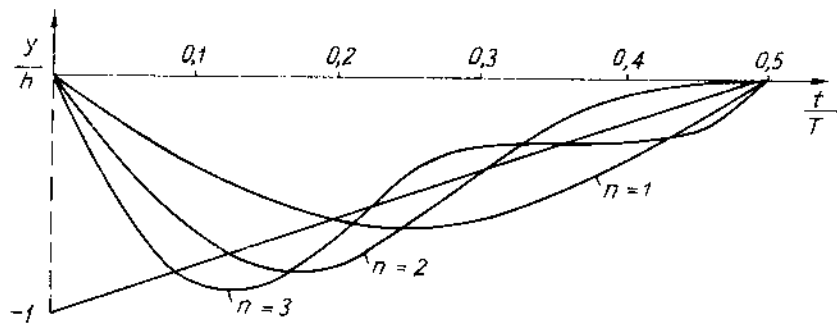
Ta xét các tổng bộ phận của chuỗi trên

$$y_n(t) = -\frac{2h}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \frac{2k\pi t}{T}$$

Trên hình 1.9b là đồ thị của đường cong $y_n(t)$ ($n = 1, 2, 3$) của chuỗi trong nửa chu kỳ. Khi n càng tăng thì $y_n(t)$ càng gần giống $y(t)$.

Trong nhiều bài toán thực tế hàm $y(t)$ thường cho dưới dạng đồ thị hoặc bảng số. Khi đó để xác định các hệ số Fourier a_0, a_k, b_k ta không thể sử dụng các công thức tích phân (2.19). Để phân tích điều hoà gần đúng, người ta thay chuỗi Fourier (2.18) của hàm $y(t)$ bằng một đa thức lượng giác

$$y_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right) \quad (2.22)$$



Hình 1.9b

Để xác định các hệ số Fourier a_0, a_k, b_k người ta chia khoảng tích phân $(0, T)$ thành m phần bằng nhau ($m \geq 2n+1$) và xác định giá trị của hàm $y(t)$ tại các điểm t_i

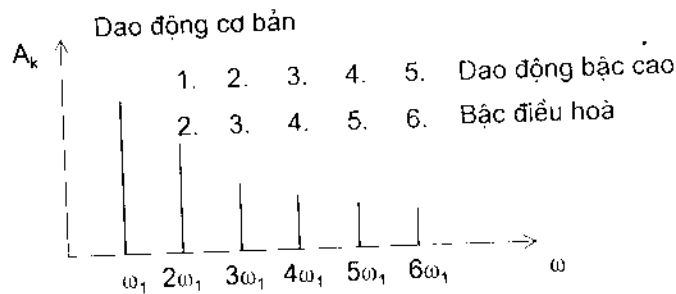
$$t_i = \frac{iT}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.23)$$

Các công thức (2.19) được thay bởi các công thức sau

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y(t_i) \\ a_k &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y(t_i) \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\ b_k &= \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y(t_i) \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.4 Biểu diễn các hàm tuần hoàn trong miền tần số

Ta chọn hệ toạ độ vuông góc, trục hoành biểu diễn tần số ω (hoặc tần số f), trục tung biểu diễn độ lớn các biên độ A của các điều hoà. Việc biểu diễn các biên độ A_k ứng với tần số $\omega_k = k\omega$ của điều hoà thứ k trong chuỗi Fourier của hàm tuần hoàn $y(t)$ trong mặt phẳng (ω, A) gọi là biểu diễn hàm tuần hoàn $y(t)$ trong miền tần số. Tập hợp các biên độ A_k trong khai triển Fourier (2.20) của hàm tuần hoàn $y(t)$ được gọi là phổ của hàm tuần hoàn $y(t)$. Trên hình 1.10 biểu diễn phổ của hàm răng cưa trong thí dụ 1.1.



Hình 1.10 Phổ của hàm răng cưa

Việc cho biết các biên độ A_k của các điều hoà chưa đủ các thông tin về hàm $y(t)$, bởi vì ta chưa biết được các pha ban đầu của các điều hoà đó. Tuy nhiên từ biểu đồ biên độ - tần số ta cũng có thể giải quyết được khá nhiều vấn đề của bài toán dao động cần nghiên cứu. Từ kết quả đo dao động, các máy phân tích tần số đơn giản cũng có thể xác định được biên độ của dao động cơ bản và các dao động bậc cao. Việc xác định các pha ban đầu đòi hỏi các thiết bị đo tương đối phức tạp.

Nếu muốn biểu diễn đầy đủ các thông tin về một hàm tuần hoàn trong miền tần số, ta sử dụng hai biểu đồ, một để vẽ các hệ số Fourier a_k , một để vẽ các hệ số b_k . Khi đó biên độ và pha ban đầu của các điều hoà sẽ được xác định bởi công thức (2.21).

2.5 Biểu diễn đồng thời hai đại lượng dao động điều hoà theo hai phương vuông góc với nhau

a. Hai dao động điều hoà có cùng tần số

Giả sử cho hai dao động điều hoà cùng tần số thực hiện chuyển động đồng thời theo hai phương vuông góc với nhau

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha_1); \quad y(t) = B \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (2.25)$$

Từ hai phương trình (2.25) khử biến thời gian t đi ta sẽ có phương trình quỹ đạo. Trước hết ta viết lại phương trình (2.25) dưới dạng sau

$$\frac{x}{A} = \sin \omega t \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \omega t \quad (2.26)$$

$$\frac{y}{B} = \sin \omega t \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \omega t \quad (2.27)$$

Nhân phương trình (2.26) với $-\cos \alpha_2$, phương trình (2.27) với $\cos \alpha_1$ rồi cộng lại ta được

$$-\frac{x}{A} \cos \alpha_2 + \frac{y}{B} \cos \alpha_1 = \cos \omega t \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.28)$$

Nhân phương trình (2.26) với $\sin \alpha_2$, phương trình (2.27) với $-\sin \alpha_1$ rồi cộng vế với vế

$$\frac{x}{A} \sin \alpha_2 - \frac{y}{B} \sin \alpha_1 = \sin \omega t \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.29)$$

Bình phương hai vế của các phương trình (2.28), (2.29) rồi cộng lại ta được phương trình

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{x}{A} \frac{y}{B} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.30)$$

Phương trình (2.30) là phương trình đường cong bậc hai với x, y theo (2.27) có giá trị giới nội. Vậy (2.30) là phương trình của đường elip. Dạng của elip này phụ thuộc vào các biên độ dao động điều hoà A, B và vào hiệu các góc pha $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Ta xét một số trường hợp đặc biệt sau đây

1) Trường hợp $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Phương trình (2.30) có dạng

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \rightarrow y = \frac{B}{A}x \quad (2.31)$$

Phương trình elip suy biến thành phương trình đường thẳng. Quỹ đạo là một đoạn thẳng ($-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$).

2) Trường hợp $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi$. Phương trình (2.30) có dạng

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \rightarrow y = -\frac{B}{A}x \quad (2.32)$$

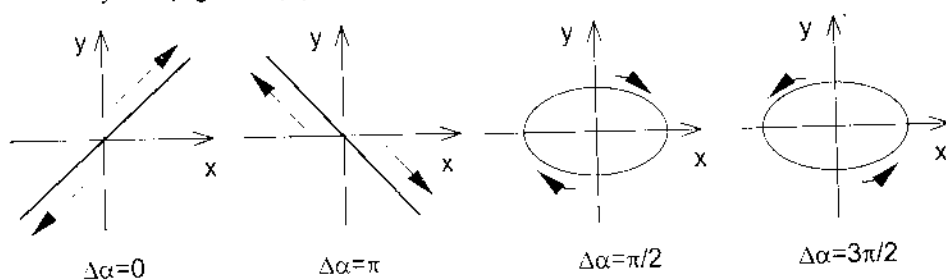
Phương trình elip suy biến thành phương trình đường thẳng. Quỹ đạo là một đoạn thẳng ($-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$).

3) Trường hợp $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$ hoặc $3\pi/2$. Phương trình (2.30) có dạng

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (2.33)$$

Phương trình này chứng tỏ quỹ đạo chuyển động là một elip lấy Ox, Oy làm trục và có hai bán trục là A và B.

Chú ý đến phương trình (2.25) ta xác định được chiều chuyển động của điểm ảnh P(x,y) trên quỹ đạo (hình 1.11). Chẳng hạn khi $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$ điểm ảnh P chuyển động trên quỹ đạo theo chiều kim đồng hồ, khi $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 3\pi/2$ điểm ảnh P chuyển động trên quỹ đạo theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.



Hình 1.11

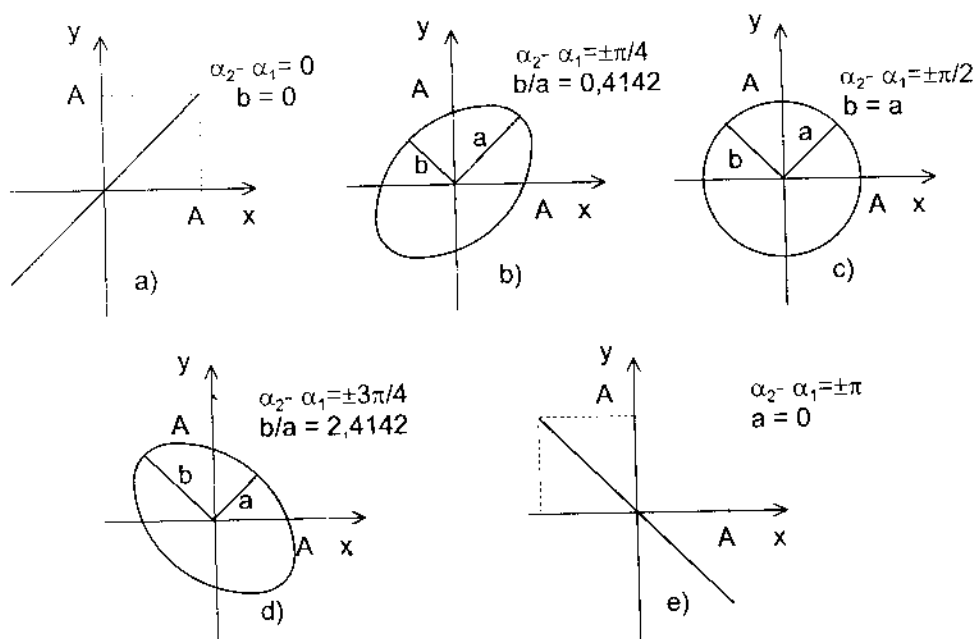
Bây giờ chuyển sang xét trường hợp biên độ của các đại lượng dao động có độ lớn như nhau $A = B$. Bằng phép biến đổi các trục chính của elip, ta sẽ được kết quả là các trục chính sẽ nghiêng một góc $\beta = 45^\circ$ đối với các trục toạ độ. Dạng của elip bây giờ chỉ phụ thuộc vào hiệu hai góc pha $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Từ phương trình (2.30) ta suy ra

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = A^2 \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Ký hiệu a, b là các bán trục của elip. Người ta chứng minh được

$$|\Delta\alpha| = 2 \arctg \frac{b}{a} \quad (2.34)$$

Trên hình 1.12 là một vài đường cong quỹ đạo của điểm ảnh với các $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ khác nhau.



Hình 1.12

b. Hai dao động điều hoà khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ

Cho hai dao động điều hoà thực hiện chuyển động dọc theo hai trục toạ độ vuông góc với nhau có dạng

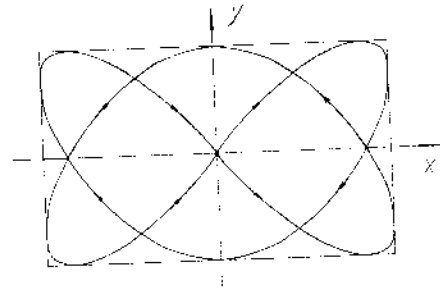
$$x(t) = A \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad y(t) = B \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (2.35)$$

với
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \neq 1 \quad (p, q = 1, 2, 3, \dots).$$

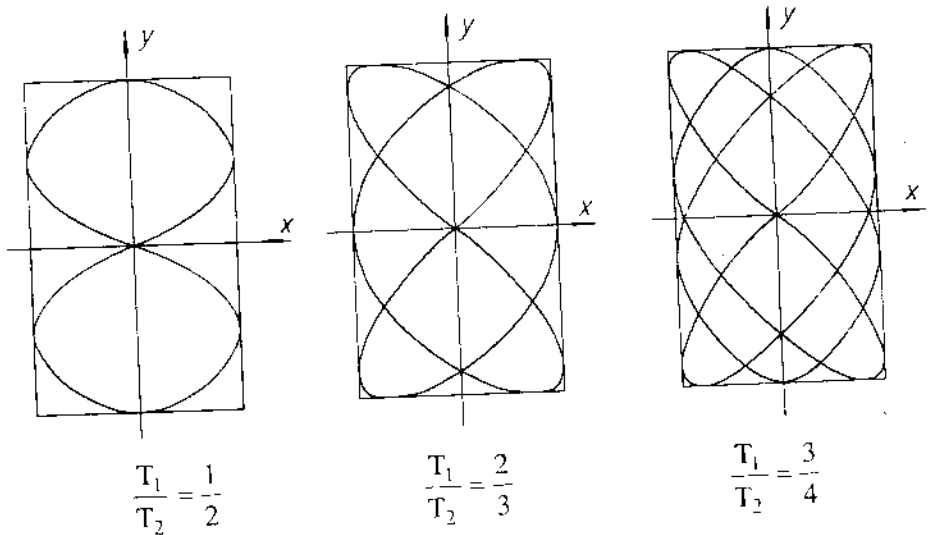
Trong trường hợp này quỹ đạo là những đường cong phức tạp nội tiếp trong một hình chữ nhật cạnh là $2A$ và $2B$ và được gọi là các đường cong Lissajou. Hình

dạng của chúng phụ thuộc vào tỷ số ω_1/ω_2 và hiệu số của các pha $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Trên hình 1.13 là đường cong Lissajou khi $\omega_1:\omega_2 = 2:3$ và $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$.

Người ta chứng minh được rằng tỷ số ω_1/ω_2 bằng tỷ số cực đại các mức của đường Lissajou dọc theo các trục Ox và Oy . Trên hình 1.14 là đồ thị các đường Lissajou với $\Delta\alpha = 0$, T_1/T_2 lần lượt là $1/2$, $2/3$ và $3/4$.



Hình 1.13



Hình 1.14

Dựa vào hình dạng các đường Lissajou ta có thể xác định được chu kỳ của một dao động thành phần khi biết chu kỳ dao động của thành phần kia. Các đường cong Lissajou được sử dụng nhiều trong kỹ thuật đo dao động.

2.6 Biểu diễn dao động tuần hoàn trên mặt phẳng pha

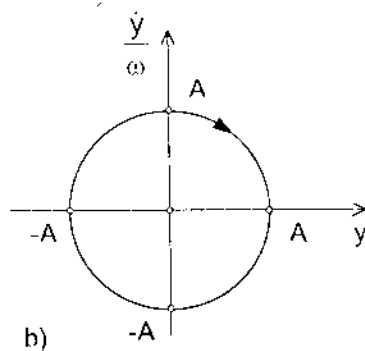
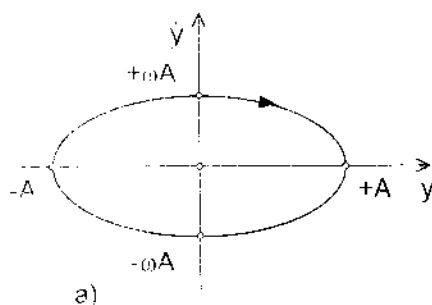
Giả sử $y(t)$ là một đại lượng dao động. Khi đó đạo hàm của $y(t)$ theo thời gian, ký hiệu là $\dot{y}(t)$, cũng là một đại lượng dao động. Ta có thể xem $y(t)$, $\dot{y}(t)$ là cách biểu diễn dạng tham số của hàm $y(y)$. Ta chọn hệ trục tọa độ vuông góc với trục

hoành là y , trục tung là $\dot{y}$. Đồ thị của hàm $\dot{y}(y)$ trong hệ toạ độ vuông góc đó được gọi là quỹ đạo pha hay đường cong pha. Mặt phẳng $(y, \dot{y})$ được gọi là mặt phẳng pha. Trong mặt phẳng pha, dao động được mô tả bởi sự di chuyển của điểm ảnh $P(y, \dot{y})$. Diễn diễn trên mặt phẳng pha ta không thấy được quá trình tiến triển của dao động theo thời gian. Để khắc phục nhược điểm này, người ta gắn vào vị trí của các điểm ảnh trên quỹ đạo pha một thông tin phụ về thời gian (hình 1.15).

Điểm ảnh $P(y, \dot{y})$ cho biết giá trị tức thời của đại lượng dao động y và đạo hàm của nó theo thời gian ở thời điểm t . Ưu điểm của sự biểu diễn dao động trên mặt phẳng pha là từ dạng hình học của quỹ đạo pha ta có thể rút ra những kết luận quan trọng về tính chất của đại lượng dao động. Nếu đại lượng dao động là tuần hoàn thì quỹ đạo pha là đường cong kín.

Trường hợp đơn giản của dao động tuần hoàn là dao động điều hoà. Từ phương trình dao động điều hoà

$$\begin{aligned} y &= A \sin(\omega t + \alpha) \\ \dot{y} &= \omega A \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$



Hình 1.16 Các quỹ đạo pha của dao động điều hoà

Khi ta được phương trình quỹ đạo pha dao động điều hoà

$$\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\omega A}\right)^2 = 1 \quad (2.36)$$

Phương trình (2.36) biểu diễn trên mặt phẳng pha một elip với các bán trục là A và ωA (hình 1.16a). Nếu chọn tỷ lệ xích trên các trục hoành và trục tung một cách thích hợp thì quỹ đạo pha của dao động điều hoà là đường tròn (hình 1.16b).

Đối với một số quá trình dao động tuần hoàn ta rất khó biểu diễn phương trình quỹ đạo pha $\dot{y} = f(y)$ dưới dạng giải tích. Trong trường hợp đó ta phải vẽ quỹ đạo pha bằng cách tính các trị số $y(t_k)$ và $\dot{y}(t_k)$ với $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Ngày nay với sự phát triển của tin học việc vẽ các quỹ đạo pha khá thuận tiện và đơn giản.

Để làm thí dụ ta vẽ quỹ đạo pha dao động răng cưa trong thí dụ 1.1 với các gần đúng $n = 1, 2, 3$. Từ thí dụ 1.1 ta có

$$y_n(t) = -\frac{2h}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \frac{2k\pi t}{T}; \quad \dot{y}_n(t) = -\frac{4h}{T} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi t}{T}$$

Từ đó ta vẽ được các quỹ đạo pha với $n = 1, 2, 3$ như trên hình 1.17. Với $n = 1$ ta có quỹ đạo pha dao động điều hoà. Với $n = 2$ và $n = 3$ ta có quỹ đạo pha dao động tuần hoàn.

Chú ý rằng ở nửa trên của mặt phẳng pha do $\dot{y} > 0$ nên hàm y tăng. Các điểm ảnh chuyển động trên quỹ đạo pha từ trái sang phải. Ở nửa dưới mặt phẳng pha do $\dot{y} < 0$ nên các điểm ảnh chuyển động từ phải qua trái.

Nếu biết được phương trình quỹ đạo pha $\dot{y} = f(y)$ thì ta tính được hàm ngược giữa t và y

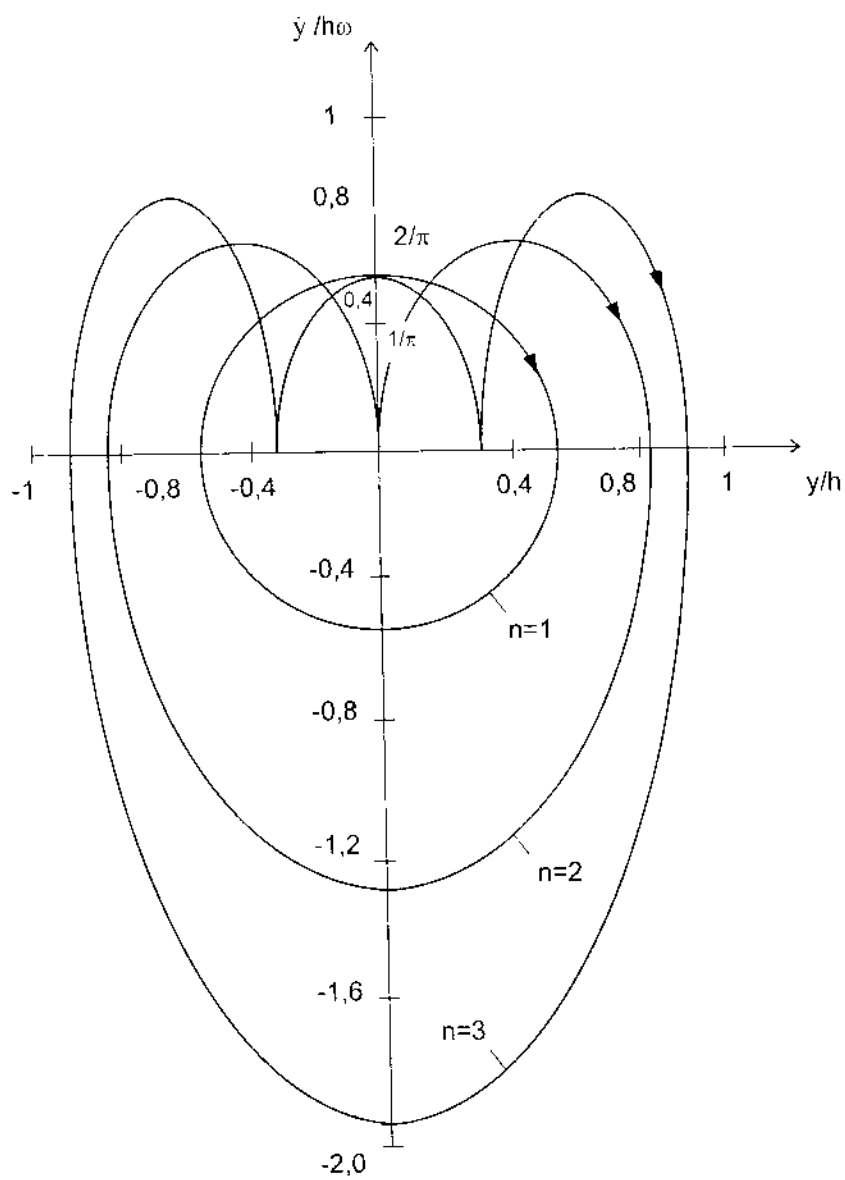
$$dt = \frac{dy}{f(y)} \rightarrow t = t_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} \quad (2.37)$$

Đối với các dao động tuần hoàn, ta có thể tìm được chu kỳ dao động T bằng cách tích phân theo hệ thức (2.37) trên toàn bộ quỹ đạo pha kín. Đối với dao động điều hoà thì từ phương trình (2.36) ta có

$$\dot{y} = \omega \sqrt{A^2 - y^2}$$

Do đó ta tính được chu kỳ dao động theo hình 1.16

$$T = 2 \int_{-A}^A \frac{dy}{\omega \sqrt{A^2 - y^2}} = \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{y}{A} \Big|_{-A}^A = \frac{2\pi}{\omega}$$



Hình 1.17 Các quỹ đạo pha của dao động mô tả bởi hàm răng cưa

§3. DAO ĐỘNG HẸU TUẦN HOÀN VÀ KHÔNG TUẦN HOÀN

3.1 Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số vô tỷ

Trong phần trên ta đã thấy tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ $\omega_1:\omega_2 = p:q$ là dao động tuần hoàn chu kỳ $T = pT_1 = qT_2$. Bây giờ ta xét bài toán

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (3.1)$$

Trong đó tỷ số $\omega_1:\omega_2$ là một số vô tỷ. Dao động tổng hợp $y(t)$ không phải là dao động tuần hoàn vì bội số chung nhỏ nhất của $T_1 = 2\pi/\omega_1$ và $T_2 = 2\pi/\omega_2$ không tồn tại. Tuy nhiên ta có thể biểu diễn

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} + \varepsilon \quad (3.2)$$

với ε bé tùy ý. Khi đó ta chọn $T \approx pT_1 \approx qT_2$, dao động tổng hợp là hàm hần tuần hoàn. Chú ý rằng hàm $y(t)$ gọi là hàm hần tuần hoàn nếu với $\eta > 0$ cho trước bé tùy ý tồn tại một hằng số T^* mà $|y(t + T^*) - y(t)| < \eta$. Vậy tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số vô tỷ ta được *dao động hần tuần hoàn*.

Thí dụ 1.2 : Tổng hợp hai dao động điều hoà cùng phương với tỷ lệ hai tần số là $\omega_1:\omega_2 = \sqrt{2}/2$, $A_1 = A_2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Lời giải : Dao động tổng hợp là

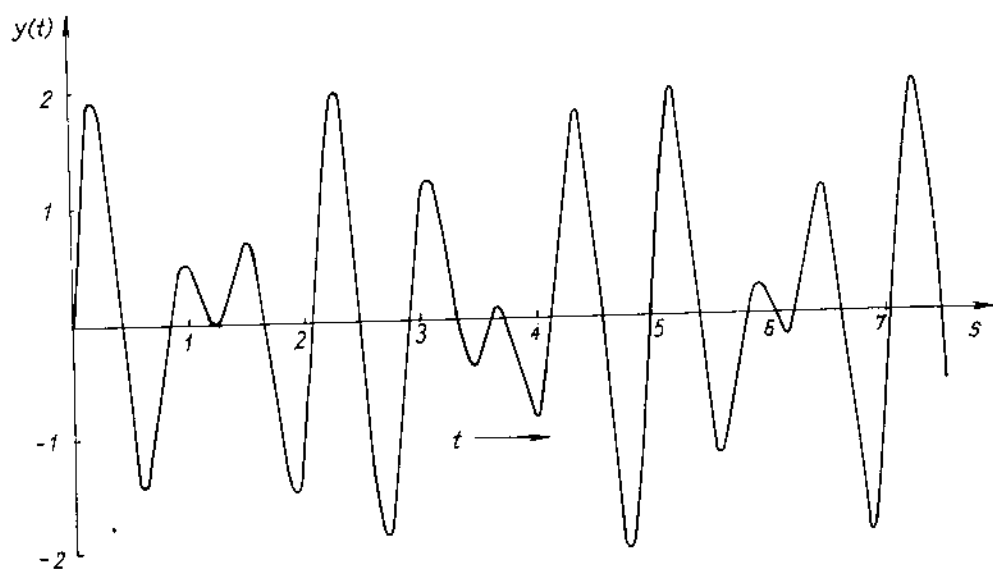
$$y(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \sqrt{2} \omega_1 t \quad (3.3)$$

Chú ý đến hệ thức lượng giác $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, biểu thức (3.3)

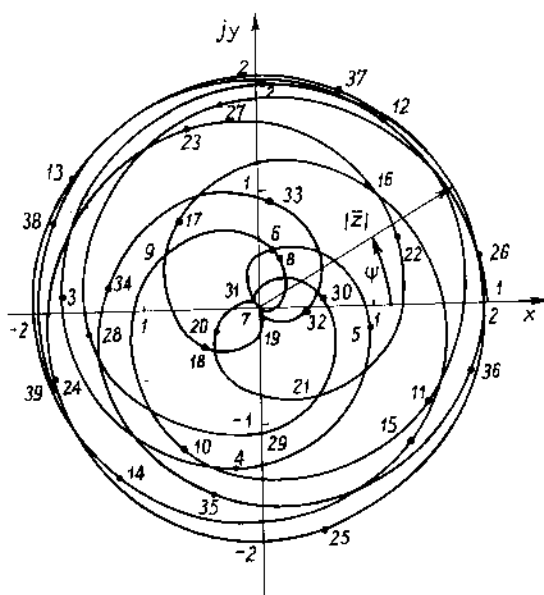
$$\text{có dạng} \quad y(t) = 2A \sin \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \omega_1 t \right) \cos \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \omega_1 t \right) \quad (3.4)$$

Trên hình 1.18a là quá trình diễn biến dao động theo thời gian với $A = 1$ và $\omega_1 = 2\pi \text{ s}^{-1}$. Chu kỳ của các dao động thành phần là $T_1 = 1 \text{ s}$, $T_2 = \sqrt{2}/2 \text{ s}$.

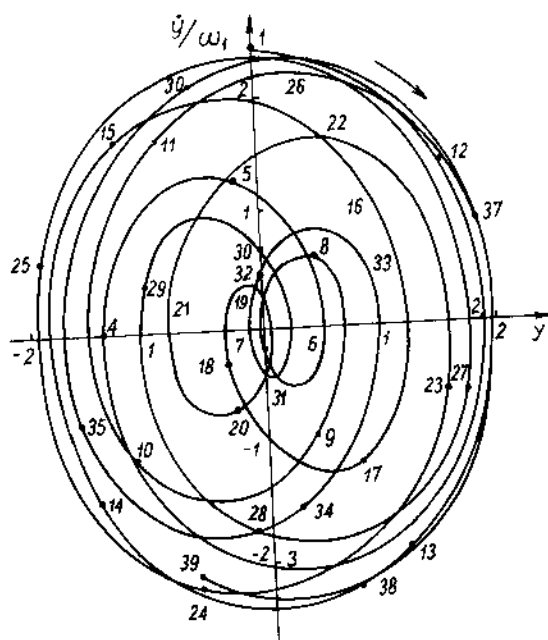
Trên hình 1.18b biểu diễn tiến trình dao động trên biểu đồ véc tơ phức, còn trên hình 1.18c là tiến trình dao động biểu diễn trên mặt phẳng pha. Trên các hình này, các đường cong biểu diễn dao động không tuần hoàn là các đường cong không kín. Quỹ đạo pha cho ta thấy tính không tuần hoàn của dao động rõ hơn trên đồ thị diễn biến dao động theo thời gian.



Hình 1.18a



Hình 1.18b



Hình 1.18c

3.2 Biểu diễn tích phân Fourier các hàm không tuần hoàn

Như chúng ta đã biết một hàm tuần hoàn có thể biểu diễn qua các hàm điều hoà bằng chuỗi Fourier. Vấn đề đặt ra ở đây là có thể biểu diễn hàm không tuần hoàn $y(t)$ qua các hàm điều hoà với một số khái niệm suy rộng nào đó về chuỗi Fourier được hay không ?

Giả sử $y(t)$ là một hàm xác định trên toàn bộ trục số, trong một đoạn hữu hạn hàm $y(t)$ liên tục hoặc có thể có một số hữu hạn điểm gián đoạn và hàm $y(t)$ tuyệt đối khả tích. Điều đó có nghĩa là tích phân suy rộng

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt \quad (3.5)$$

tồn tại và có giá trị hữu hạn. Khi đó trong toán học đã chứng minh được rằng hàm $y(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier như sau

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (3.6)$$

Trong đó các hàm $a(\omega)$ và $b(\omega)$ được xác định bởi các hệ thức

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cos \omega \tau d\tau \\ b(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \sin \omega \tau d\tau \end{aligned} \quad (3.7)$$

So sánh cách biểu diễn bằng chuỗi Fourier các hàm tuần hoàn với cách biểu diễn bằng tích phân Fourier các hàm không tuần hoàn ta thấy có sự tương tự giữa công thức (2.18) với (3.6), giữa công thức (2.19) với (3.7). Trong đó chu kỳ $T \rightarrow \infty$, mật độ phổ rời rạc xác định bởi hệ thức (2.19) thay bằng mật độ phổ liên tục xác định bởi (3.7). Tuy nhiên trong (2.19) các đại lượng a_k và b_k là các biên độ của các thành phần cosin và sin ứng với tần số $\omega_k = k\omega$ của điều hoà thứ k . Đơn vị của chúng trùng với đơn vị của đại lượng dao động $y(t)$. Trong (3.7) các hàm $a(\omega)$ và $b(\omega)$ là các thành phần biên độ ứng với dải tần số vô cùng bé $d\omega$. Các hàm $a(\omega)$, $b(\omega)$ được gọi là mật độ phổ, hay gọi tắt là mật độ. Đơn vị của chúng bằng đơn vị của đại lượng dao động $y(t)$ nhân với đơn vị thời gian.

Biểu thức

$$A(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)} \quad (3.8)$$

được gọi là phổ mật độ biên độ hay gọi tắt là mật độ biên độ. Bình phương của mật độ biên độ

$$A^2(\omega) = a^2(\omega) + b^2(\omega) \quad (3.9)$$

được gọi là phổ mật độ công suất hay gọi tắt là mật độ công suất. Chú ý rằng cách gọi này trong một số tài liệu không được thống nhất. Có tài liệu gọi $A(\omega)$ và $A^2(\omega)$ là phổ biên độ và phổ công suất. Cách gọi ấy thật ra không được chính xác.

Nếu $y(t)$ là hàm chẵn hoặc hàm lẻ, thì biểu diễn tích phân Fourier của $y(t)$ sẽ đơn giản hơn nhiều. Nếu $y(t)$ là hàm chẵn, do $y(-t) = y(t)$ nên $b(\omega) = 0$ và

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} y(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (3.10)$$

Biểu thức (3.8) có dạng

$$A(\omega) = |a(\omega)| \quad (3.11)$$

Nếu $y(t)$ là hàm lẻ, $y(-t) = -y(t)$, ta có $a(\omega) = 0$ và

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} y(\tau) \sin \omega \tau d\tau \quad (3.12)$$

Từ đó suy ra

$$A(\omega) = |b(\omega)| \quad (3.13)$$

Trong nhiều bài toán ứng dụng người ta cũng hay sử dụng cách biểu diễn tích phân Fourier dạng phức. Từ hệ thức

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \quad (3.14)$$

ta suy ra

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.15)$$

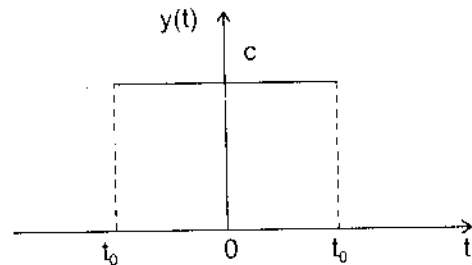
Trong đó

$$\begin{aligned} \bar{A}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= a(\omega) - ib(\omega) = |\bar{A}(\omega)| e^{-i\varphi(\omega)} = A(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Đại lượng $\bar{A}(\omega)$ gọi là phổ mật độ biên độ phức, $A(\omega)$ như trên đã gọi là mật độ biên độ thực, $\varphi(\omega) = \arctg[b(\omega)/a(\omega)]$ là phổ pha.

Thí dụ 1.3: Cho $y(t)$ là hàm va chạm lý tưởng, được biểu diễn bởi phương trình sau (hình 1.19a)

$$y(t) = \begin{cases} c & \text{khi } |t| < t_0 \\ 0 & \text{khi } |t| \geq t_0 \end{cases}$$



Hình 1.19a

Hãy xác định mật độ biên độ phức $\bar{A}(\omega)$, mật độ công suất $A^2(\omega)$ và cách biểu diễn tích phân của hàm $y(t)$.

Lời giải : Hàm $y(t)$ là hàm thoả mãn các điều kiện về hàm khả tích tuyệt đối. Vì vậy ta có thể biểu diễn hàm này dưới dạng tích phân Fourier.

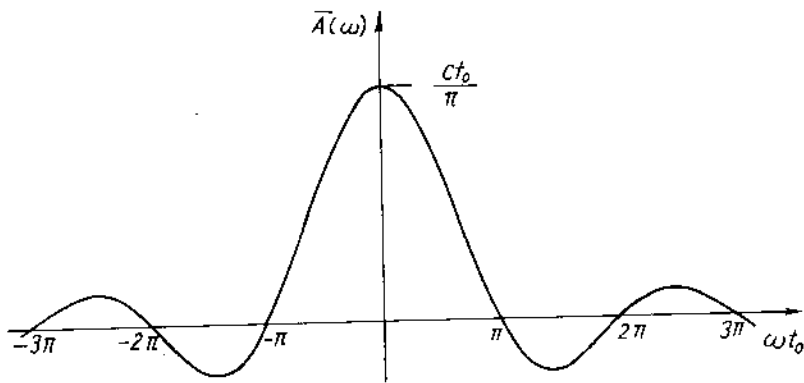
Do $y(t)$ là hàm chẵn nên $b(\omega) = 0$, ta có

$$a(\omega) = \frac{c}{\pi} \int_0^{\omega t_0} \cos \omega \tau d\tau = \frac{c}{\pi} \int_0^{\omega t_0} \cos \omega \tau d\tau = \frac{ct_0}{\pi} \frac{\sin \omega t_0}{\omega t_0}$$

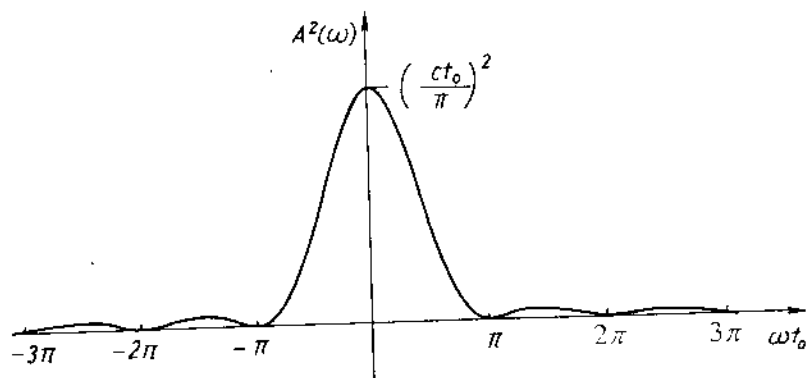
Do $\operatorname{tg} \varphi(\omega) = 0$ nên có thể lấy $\varphi(\omega) = 0$. Từ đó suy ra

$$\bar{A}(\omega) = a(\omega)$$

$$A^2(\omega) = a^2(\omega) = \frac{c^2 t_0^2}{\pi^2} \left(\frac{\sin \omega t_0}{\omega t_0} \right)^2$$



Hình 1.19b



Hình 1.19c

Trên hình (1.19b) và (1.19c) là đồ thị các hàm $\bar{A}(\omega)$ và $A^2(\omega)$.

Biểu diễn tích phân Fourier của hàm $y(t)$ theo công thức (3.6) có dạng

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{c}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t_0 \cos \omega t}{\omega} d\omega$$

3.3 Dao động họ hình sin

Dao động họ hình sin được mô tả về phương diện động học bởi hệ thức

$$y(t) = A(t) \sin[\omega(t)t + \alpha(t)] \quad (3.17)$$

Trong đó $A(t)$, $\omega(t)$ và $\alpha(t)$ là các đại lượng dao động thay đổi chậm theo thời gian. Nếu chỉ có $A(t)$ thay đổi thì dao động được gọi là dao động với biên độ biến đổi. Tương tự ta có dao động với tần số biến đổi khi chỉ có $\omega(t)$ thay đổi, dao động với pha biến đổi khi chỉ có $\alpha(t)$ biến đổi. Dao động với pha biến đổi thì tần số của nó cũng biến đổi, bởi vì tần số của dao động họ hình sin được xác định bởi hệ thức

$$\omega_a = \frac{d}{dt}[\omega(t)t + \alpha(t)] \quad (3.18)$$

Giả sử ta có dao động mà $A(t) = A_0$, $\omega = \omega_0 + g(t)$, $\alpha = \alpha_0 + h(t)$. Khi đó áp dụng các biến đổi lượng giác ta có

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin[\omega_0 t + \alpha_0 + g(t)t + h(t)] \\ &= A_0 \{ \sin(\omega_0 t + \alpha_0) \cos[g(t)t + h(t)] + \sin[g(t)t + h(t)] \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \} \\ &= A_1(t) \sin(\omega_0 t + \alpha_0) + A_2(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \end{aligned}$$

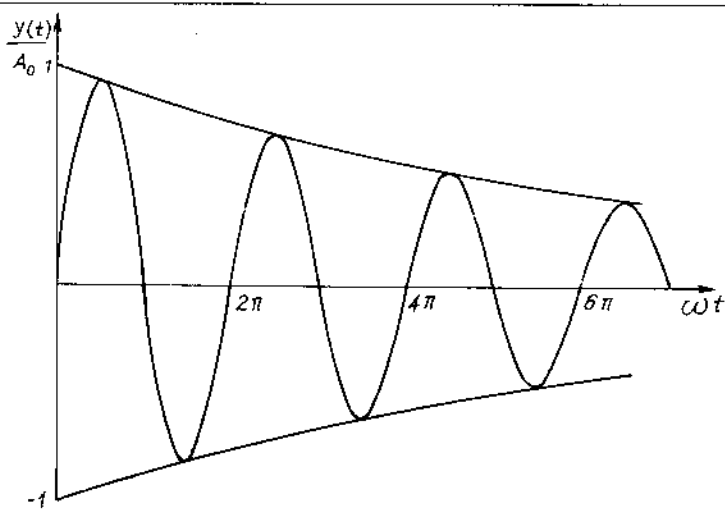
Như thế dao động với tần số hoặc pha biến đổi có thể xem như là tổng hợp của hai dao động với biên độ biến đổi.

Dao động với biên độ biến đổi theo quy luật

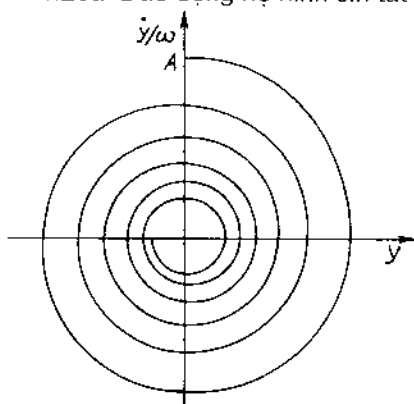
$$A(t) = A_0 e^{\beta t}$$

có một vai trò quan trọng trong lý thuyết dao động. Nếu $\beta < 0$ thì dao động tắt dần, nếu $\beta > 0$ dao động tăng dần. Trên hình 1.20a biểu diễn dao động tắt dần trong miền thời gian, còn hình 1.21 biểu diễn dao động tăng dần trong miền thời gian ($\beta = +0,046\omega$). Hình 1.20b biểu diễn dao động tắt dần trên mặt phẳng pha.

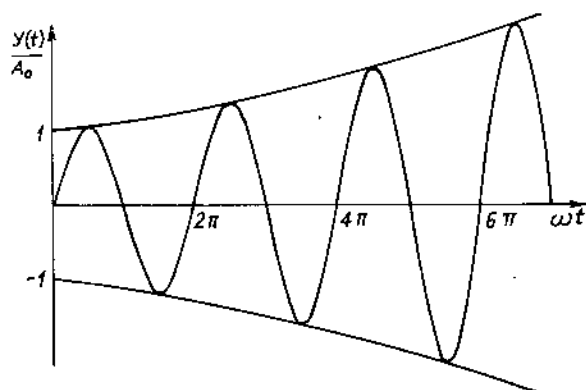
Dao động mà biên độ thay đổi luân phiên được gọi là dao động biến điệu (hình 1.22). Trong các loại dao động tần số thay đổi, người ta phân biệt dao động tần số thay đổi đơn điệu (hình 1.23) và dao động tần số thay đổi biến điệu (hình 1.24). Các dao động biến điệu có một vai trò quan trọng trong kỹ thuật vô tuyến điện.



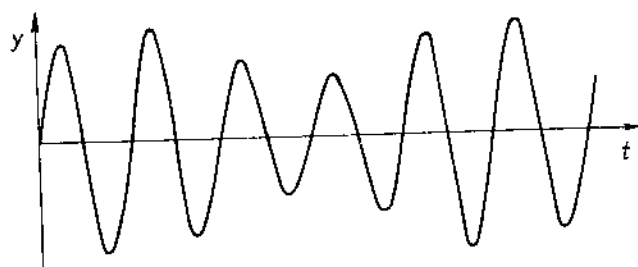
Hình 1.20a Dao động họ hình sin tắt dần



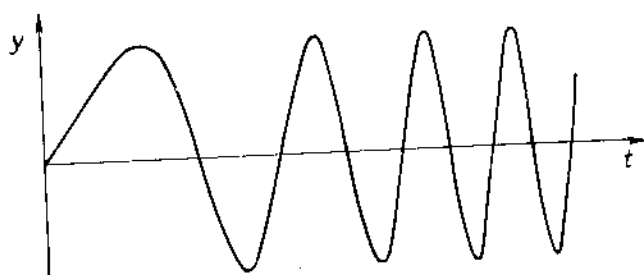
Hình 1.20b Dao động tắt dần trên mặt phẳng pha



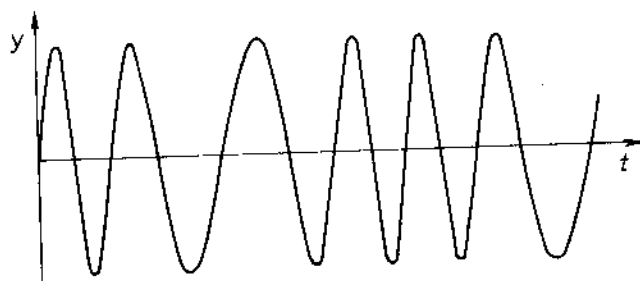
Hình 1.21 Dao động họ hình sin tăng dần



Hình 1.22 Dao động biên độ biến điệu



Hình 1.23 Dao động tần số thay đổi đơn điệu



Hình 1.24 Dao động tần số thay đổi biến điệu

Chương 2

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Hệ cơ học holo-nôm một bậc tự do là cơ hệ mà vị trí của nó trong không gian được xác định bởi một toạ độ suy rộng. Chuyển động của hệ được xác định bởi qui luật thay đổi của toạ độ suy rộng đó theo thời gian.

Trong chương này ta xét dao động nhỏ của hệ một bậc tự do quanh vị trí cân bằng ổn định. Khi đó phương trình vi phân mô tả dao động của hệ sẽ là phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.

§1. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN

1.1 Các thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động

Trước hết chúng ta xét một vài thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do.

Thí dụ 2.1 : Dao động của một vật nặng treo vào lò xo.

Xét một vật nặng khối lượng m treo vào lò xo có hệ số cứng c . Bỏ qua khối lượng lò xo (hình 2.1).

Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c x^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại hai

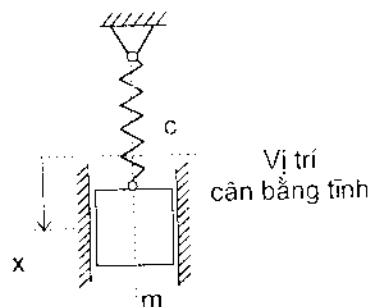
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

ta nhận được phương trình dao động của hệ

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (1.1)$$

Chú ý rằng ta có thể nhận được phương trình dao động (1.1) bằng nhiều phương pháp khác nhau. Chẳng hạn, nếu sử dụng định luật Newton ta có

$$m\ddot{x} = P - c(x_0 + x)$$



Hình 2.1

trong đó x_0 là độ dãn tĩnh của lò xo $P = cx_0$, còn biểu thức của lực đàn hồi tuyến tính của lò xo $F_{dh} = c(x_0 + x)$, lực đàn hồi hướng ngược chiều trục x . Từ phương trình trên ta suy ra

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Thí dụ 2.2 : Dao động con lắc toán học.

Con lắc toán học là một hệ dao động gồm một chất điểm có khối lượng m treo vào một điểm O cố định bằng một sợi dây nhẹ, không dãn chiều dài là l (hình 2.2). Gọi tọa độ của chất điểm là x, y . Từ hình vẽ ta có $x = l \sin \varphi, y = l \cos \varphi$. Từ đó dễ dàng tính được các biểu thức động năng của chất điểm

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = -mgy = -mgl \cos \varphi$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại hai ta được

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$$

$$\text{hay} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

Trong trường hợp con lắc dao động nhỏ, ta có thể lấy xấp xỉ $\sin \varphi \approx \varphi$. Khi đó phương trình dao động nhỏ của con lắc toán học có dạng

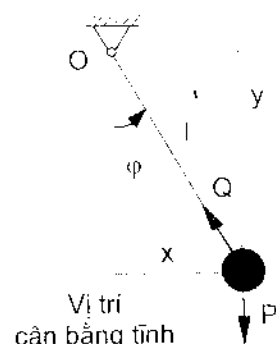
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (1.2)$$

Thí dụ 2.3 : Dao động con lắc vật lý.

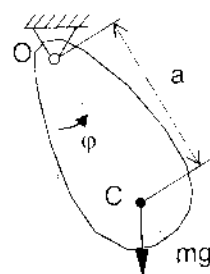
Con lắc vật lý là một hệ dao động gồm có một vật rắn có thể quay quanh một trục cố định đi qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa khối tâm C của vật (hình 2.3). Khoảng cách từ điểm O đến khối tâm C của vật là a , mômen quán tính của vật rắn với trục quay là J_0 . Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mga \cos \varphi$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại hai ta được



Hình 2.2



Vị trí
cân bằng tĩnh

Hình 2.3

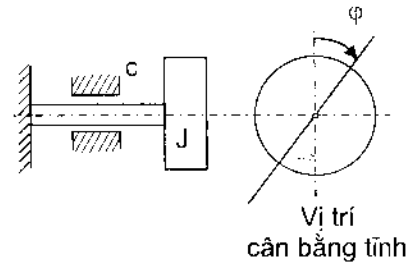
$$J_0 \ddot{\varphi} + mga \sin \varphi = 0$$

Trong trường hợp con lắc vật lý dao động nhỏ, ta lấy $\sin \varphi \approx \varphi$, phương trình vi phân dao động có dạng

$$J_0 \ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \quad (1.3)$$

Thí dụ 2.4 : Dao động xoắn.

Xét dao động xoắn của một vật nặng (chẳng hạn một đĩa hình tròn) gắn chặt vào một trục đàn hồi. Đầu kia của trục đàn hồi ngàm chặt vào tường cố định (hình 2.4). Cho biết mô men quán tính của vật nặng đối với trục quay là J , độ cứng xoắn của trục đàn hồi là c . Giả thiết mô men quán tính của trục đàn hồi đối với trục quay nhỏ hơn nhiều so với mô men quán tính của vật nặng đối với trục quay. Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng



Hình 2.4

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c \varphi^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại hai ta nhận được phương trình dao động xoắn tuyến tính của vật nặng

$$J \ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (1.4)$$

Gọi q là toạ độ suy rộng. Từ các phương trình (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) ta thấy dạng của phương trình dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do có dạng chung là

$$m \ddot{q} + cq = 0 \quad (1.5)$$

1.2 Tính toán dao động tự do không cản

Nếu ta sử dụng ký hiệu

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} \quad (1.6)$$

thì phương trình dao động tự do không cản có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1.7)$$

Như đã biết từ lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm của phương trình vi phân (1.7) có dạng như sau

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad (1.8)$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Các hằng số này được xác định từ các điều kiện đầu

$$t = 0 : \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Để xác định các hằng số C_1, C_2 ta đạo hàm biểu thức (1.8) theo thời gian

$$\dot{q} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t \quad (1.9)$$

Thế các điều kiện đầu vào các biểu thức (1.8) và (1.9) ta xác định được

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \quad (1.10)$$

Chú ý rằng nghiệm (1.8) của phương trình vi phân (1.7) có thể viết dưới dạng

$$q = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.11)$$

Trong đó A và α là các hằng số tùy ý. Do hệ thức

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sin \omega_0 t \cos \alpha + \sin \alpha \cos \omega_0 t$$

nên từ (1.8), (1.10) và (1.11) dễ dàng tính được

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2} = \omega_0 \frac{q_0}{\dot{q}_0} \quad (1.12)$$

Từ biểu thức (1.11) ta thấy dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do được mô tả bởi hàm điều hoà. Vì vậy dao động tự do không cản còn được gọi là dao động điều hoà.

Theo chương 1, trong biểu thức (1.11), A được gọi là biên độ dao động, ω_0 được gọi là tần số riêng, $\omega_0 t + \alpha$ được gọi là pha dao động, α là pha ban đầu. Đại lượng $T = 2\pi / \omega_0$ được gọi là chu kỳ dao động.

Qua khảo sát trên, dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do là dao động điều hoà và có các tính chất sau :

- Tần số riêng và chu kỳ dao động không phụ thuộc vào các điều kiện đầu mà chỉ phụ thuộc vào các tham số của hệ.

- Biên độ dao động là hằng số. Biên độ dao động và pha ban đầu của dao động tự do không cản phụ thuộc vào các điều kiện đầu và các tham số của hệ.

Việc xác định tần số dao động riêng theo công thức (1.6) là nhiệm vụ quan trọng nhất của bài toán dao động tự do. Bảng 2.1 thống kê một số công thức tính tần số riêng của một số hệ dao động đơn giản.

Thí dụ 2.5: Tay biên khối lượng m , dài l . Tìm tọa độ trọng tâm và mômen quán tính của tay biên đối với trục qua trọng tâm và vuông góc với mặt phẳng tay biên. Các kích thước cho trên hình vẽ.

Lời giải : Ta sẽ xác định các đại lượng trên bằng thực nghiệm (hình 2.5). Gọi vị trí trọng tâm là C . Các khoảng cách a, b trên hình là các đại lượng cần tìm, với $a = l - b$. Ký hiệu J_A, J_B là mômen quán tính của tay biên lần lượt đối với các trục đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. J_C, J_B là các đại lượng chưa biết. Ta làm hai thí nghiệm xem tay biên là con lắc vật lý, lần lượt có các điểm treo là A rồi B .

Phương trình dao động nhỏ quanh A , theo (1.3) là

$$J_A \ddot{\varphi}_A + mga\varphi_A = 0$$

Từ đó suy ra chu kỳ dao động quanh A

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mga}} \quad (1.13)$$

Tương tự, phương trình dao động nhỏ của tay biên quanh B là

$$J_B \ddot{\varphi}_B + mgb\varphi_B = 0$$

Từ đó suy ra chu kỳ dao động

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = 2\pi \sqrt{\frac{J_B}{mgb}} \quad (1.14)$$

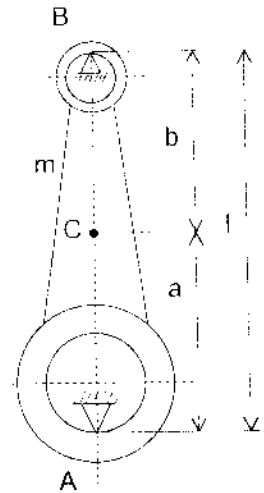
Các đại lượng T_A, T_B ở trên được xác định bằng thực nghiệm (chẳng hạn sử dụng đồng hồ bấm giây). Ngoài ra, ta còn có ba phương trình

$$a + b = l, \quad J_A = J_C + ma^2, \quad J_B = J_C + mb^2 \quad (1.15)$$

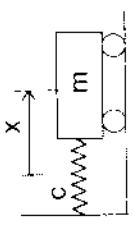
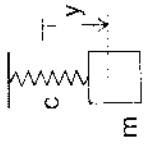
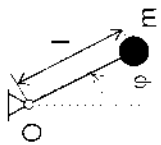
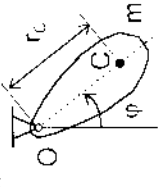
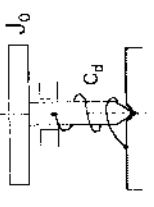
Như thế ta có năm phương trình để xác định năm ẩn là J_A, J_B, J_C, a, b . Giải các phương trình trên ta được

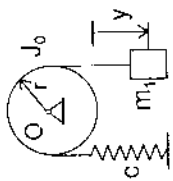
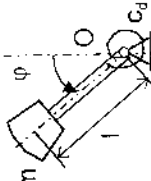
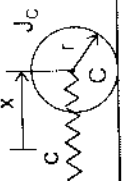
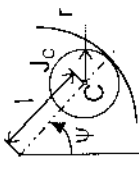
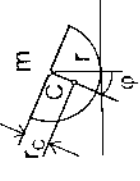
$$b = l \frac{gT_A^2 - 4\pi^2 l}{g(T_A^2 + T_B^2) - 8\pi^2 l}$$

$$J_C = \frac{T_B^2}{4\pi^2} mgb - mb^2$$



Hình 2.5

Số TT	Mô hình dao động	Phương trình	ω_0^2
1	Hệ khối lượng - lò xo đơn giản 	$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$	$\frac{c}{m}$
2	Hệ khối lượng - lò xo trong trọng trường 	$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0$	$\frac{c}{m}$
3	Con lắc toán học 	$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$	$\frac{g}{l}$
4	Con lắc vật lý 	$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_C}{J_0}\varphi = 0$	$\frac{mgr_C}{J_0} = \frac{g}{J_{red}}$
5	Bàn quay 	$\ddot{\varphi} + \frac{c_d}{J_0}\varphi = 0$	$\frac{c_d}{J_0}$

6	Hệ khối lượng vật qua ròng rọc		$\ddot{y} + \frac{1}{1 + \frac{J_0}{m_1 r^2}} y = 0$	$-\frac{1}{1 + \frac{J_0}{m_1 r^2}} \frac{c}{m_1 r^2}$
7	Cơ cấu gõ nhịp		$\ddot{\varphi} + \frac{c_d - mgl}{J_0} \varphi = 0$	$\frac{c_d - mgl}{J_0}$
8	Hệ con lăn-lò xo		$\ddot{x} + \frac{1}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} \frac{c}{m} x = 0$	$-\frac{1}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} \frac{c}{m}$
9	Con lăn trên quỹ đạo tròn		$\ddot{\psi} + \frac{1}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} \frac{g}{R} \psi = 0$	$-\frac{1}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} \frac{g}{R}$
10	Nửa đĩa tròn trên mặt phẳng		$\ddot{\varphi} + \frac{mgr_C}{J_C + m(r - r_C)^2} \varphi = 0$	$-\frac{mgr_C}{J_C + m(r - r_C)^2}$

Bảng 2.1 Tần số riêng của một vài mô hình dao động

1.3 Xác định các tham số độ cứng của hệ dao động

Các phần tử đàn hồi trong các hệ dao động hữu hạn bậc tự do thường được giả thiết bỏ qua khối lượng. Đại lượng đặc trưng cho phần tử đàn hồi tuyến tính có độ cứng và ký hiệu là c . Vì hệ có thể thực hiện được dao động thẳng, dao động uốn, dao động xoắn,... nên thứ nguyên của độ cứng c nói chung khác nhau. Phần tử đàn hồi có nhiều dạng và nhiều kết cấu tùy theo sự sử dụng và cách chịu lực của chúng. Dưới đây trình bày một số công thức tính toán hệ số cứng c qui đổi.

a. Tính toán hệ số cứng qui đổi của thanh đàn hồi

Nếu lò xo là các thanh đàn hồi không trọng lượng, ta có thể tính toán hệ số cứng qui đổi tương đối đơn giản. Trong trường hợp thanh đàn hồi (lò xo) chịu kéo nén (hình 2.6), từ giáo trình Sức bền vật liệu [37,49] ta có

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

Trong đó E là mô đun đàn hồi, A là diện tích mặt cắt ngang. Từ đó ta suy ra

$$F = \frac{EA}{l} \Delta l = c \Delta l$$

Vậy độ cứng qui đổi được xác định bởi công thức

$$c = \frac{EA}{l} \quad (1.16)$$

Trong trường hợp thanh đàn hồi (lò xo) chịu xoắn (hình 2.7) từ giáo trình Sức bền vật liệu ta có công thức

$$\Delta \varphi = \frac{M_x l}{GI_p}$$

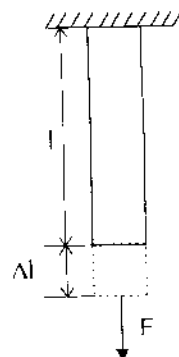
Trong đó G là mô đun trượt, I_p là mô men quán tính cực của mặt cắt ngang.

Từ công thức trên dễ dàng suy ra

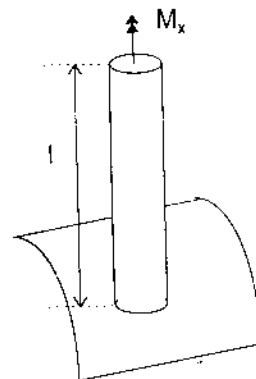
$$M_x = \frac{GI_p}{l} \Delta \varphi = c \Delta \varphi$$

Vậy độ cứng qui đổi trong trường hợp thanh xoắn có dạng

$$c = \frac{GI_p}{l} \quad (1.17)$$



Hình 2.6



Hình 2.7

Trường hợp thanh đàn hồi (lò xo) bị uốn, hệ số cứng qui đổi c còn phụ thuộc vào các điều kiện biên. Để làm thí dụ ta xét dầm chịu uốn như hình 2.8. Từ giáo trình Sức bền vật liệu, ta tính được độ võng f [37,49]

$$f = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI}$$

Hình 2.8

Trong đó EI là độ cứng chống uốn. Từ đó ta suy ra

$$F = \frac{3EI}{l^3} f = cf$$

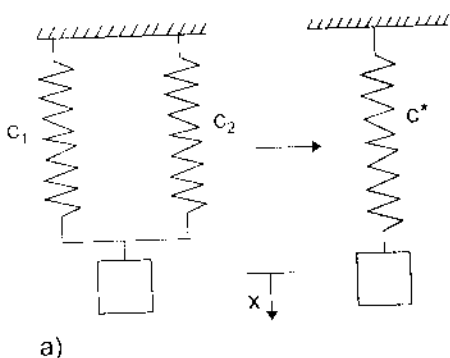
Vậy độ cứng qui đổi c được xác định bởi công thức

$$c = 3 \frac{EI}{l^3} \quad (1.18)$$

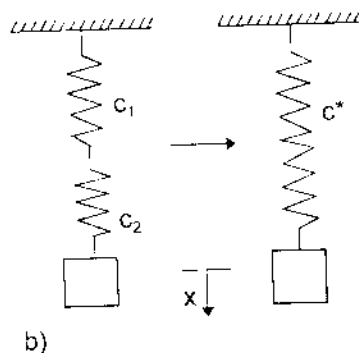
b. Tính toán lò xo thay thế tương đương của các hệ các lò xo mắc song song và mắc nối tiếp

Đối với hệ có hai lò xo mắc song song như hình 2.9, ta có thể thay thế tương đương bằng hệ có một lò xo. Từ biểu thức lực đàn hồi lò xo, ta suy ra công thức tính hệ số cứng lò xo tương đương

$$F = c_1 x + c_2 x = c^* x \rightarrow c^* = c_1 + c_2$$



Hình 2.9



Hình 2.10

Nếu hệ có n lò xo mắc song song, tính toán tương tự ta có

$$c^* = \sum_{j=1}^n c_j \quad (1.19)$$

Đối với hệ có hai lò xo mắc nối tiếp như hình 2.10, nếu ở hệ thay thế lò xo dẫn ra một đoạn x bằng tổng hai độ dẫn x_1 và x_2 của hệ ban đầu thì ta có

$$F = c_1 x_1 = c_2 x_2, \quad x_1 + x_2 = x, \quad F = c^* x$$

Từ đó ta suy ra

$$x = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} = \frac{F}{c^*} \rightarrow \frac{1}{c^*} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Nếu hệ có n lò xo mắc nối tiếp thì công thức tính hệ số cứng lò xo thay thế có dạng

$$\frac{1}{c^*} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_j} \quad (1.20)$$

Thí dụ 2.6 : Cho hệ dao động gồm khối lượng và các lò xo mắc như hình 2.11. Hãy tính tần số riêng của hệ.

Lời giải: Ở đây ta có bốn lò xo mắc song song. Do đó

$$c^* = c_1 + c_2 + c_3 + c_4, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}}$$

Thí dụ 2.7 : Cho hai hệ dao động như hình 2.12. Mỗi hệ gồm một dầm không trọng lượng có độ cứng chống uốn là EI , một lò xo có độ cứng c và một khối lượng m . Hãy tính các tần số riêng của chúng.

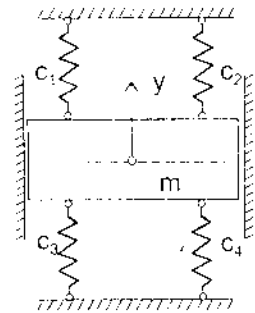
Lời giải : Cả hai hệ đã cho đều có thể thay bằng một mô hình thay thế tương đương (hình 2.12c).

Trên hình 2.12a dầm và lò xo là hai lò xo mắc song song. Lò xo thay thế dầm (xem bảng 2.2) có độ cứng quy đổi là

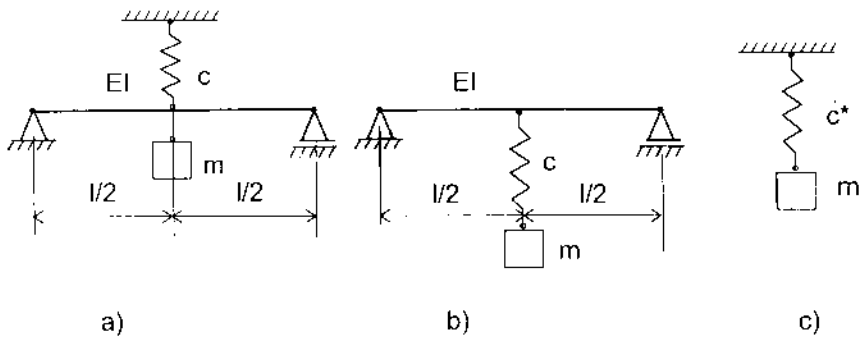
$$c_1 = \frac{48EI}{l^3}$$

Từ đó dễ dàng tính được lò xo thay thế tương đương của hệ

$$c^* = c + c_1 = c + \frac{48EI}{l^3}$$



Hình 2.11



Hình 2.12

Tần số riêng của hệ trên hình 2.12a là

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{cl^3 + 48EI}{ml^3}}$$

Trên hình 2.12b, dầm và lò xo là hai lò xo mắc nối tiếp. Do đó

$$\frac{1}{c^*} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c_1} \rightarrow c^* = \frac{cc_1}{c + c_1}$$

Tần số riêng của hệ là

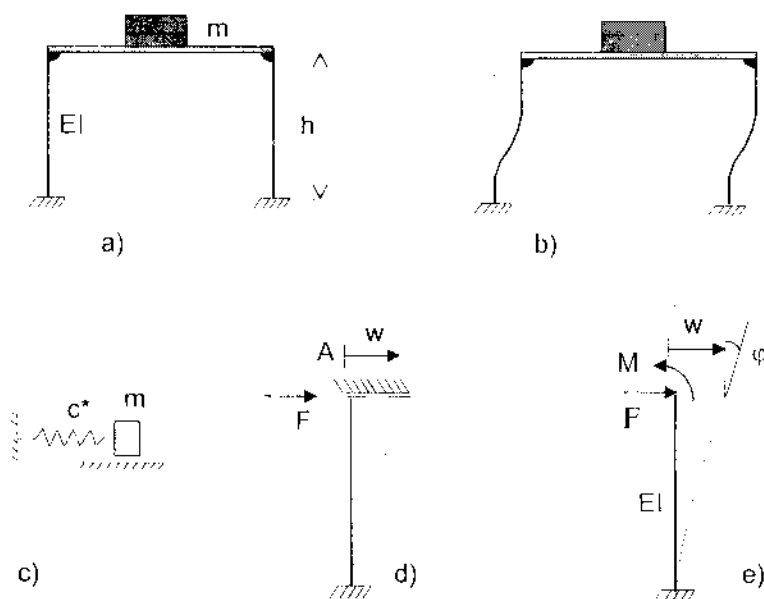
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{48cEI}{(cl^3 + 48EI)m}}$$

Như thế tần số riêng của hệ b nhỏ hơn tần số riêng của hệ a. Nói cách khác, hệ b có lò xo thay thế mềm hơn.

Cuối cùng ta thống kê ra một số công thức hay dùng để tính toán các hệ số cứng của lò xo thay thế trong bảng 2.2.

Thí dụ 2.8 : Một khung hình chữ nhật gồm một thanh ngang cứng và hai thanh chống đàn hồi (\$h = 3\$ m, \$E = 2,1 \cdot 10^5\$ N/mm², \$I = 3500\$ cm⁴) như hình 2.13. Trên thanh ngang gắn chặt một vật rắn có khối lượng \$m = 10^3\$ kg. Bỏ qua khối lượng các thanh của khung. Xác định tần số riêng của hệ.

Lời giải : Khung có khả năng dao động ngang như hình 2.13b, mô hình thay thế tương đương là hình 2.13c. Để tính \$c^*\$ ta phải tính các lò xo tương đương của các thanh chống đàn hồi.



Hình 2.13

Hệ trên hình 2.13d là một hệ siêu tĩnh đơn giản. Nếu ta giải phóng liên kết tại A và thay bằng ngẫu lực có mômen chưa biết M thì độ võng và góc xoay ở đầu A có thể xác định theo các công thức (xem [37])

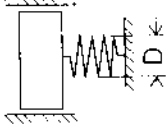
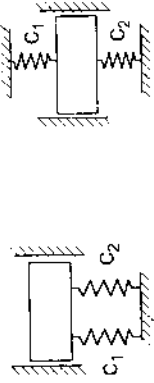
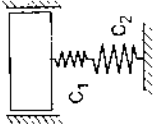
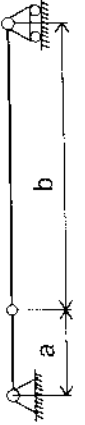
$$w = \frac{Fh^3}{3EI} - \frac{Mh^2}{2EI}, \quad \varphi = \frac{Fh^2}{2EI} - \frac{Mh}{EI}$$

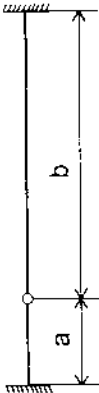
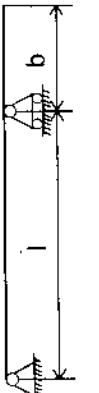
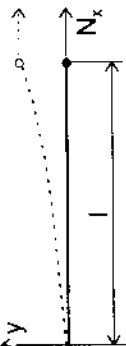
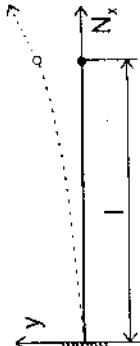
Từ điều kiện bổ sung góc xoay ở A bằng không ta suy ra

$$M = \frac{Fh}{2} \rightarrow w = \frac{Fh^3}{12EI} \rightarrow c^* = 2c = \frac{2F}{w} = \frac{24EI}{h^3}$$

Tần số riêng của hệ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{24EI}{h^3 m}} \rightarrow \omega_0 = 8,1 \text{ s}^{-1} \rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,3 \text{ Hz}.$$

Số TT	Sơ đồ	Hệ số c
1		$\frac{Gd^4}{8nD^3}$ d- Đường kính thiết diện D-Đường kính lò xo G-Môđun trượt; n- Số vòng lò xo
2		$c_1 + c_2$
3		$\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$
4		$\frac{3EI}{l^3}$
5		$\frac{3EI(a+b)}{a^2 b^2}$

6		$\frac{12EI(a+b)^3}{a^3b^2(3a+4b)}$
7		$\frac{3EI(a+b)^3}{a^3b^3}$
8		$\frac{3EI}{(b+l)b^2}$
9		$\frac{12EI}{(4b+3l)b^2}$
10		$\frac{\alpha^2 EI}{\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_x}{EI}}$
11		$\frac{\alpha^2 EI \operatorname{sh} \alpha l}{l(\alpha l \operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l)} \quad \alpha = \sqrt{\frac{N_x}{EI}}$

Bảng 2.2 Công thức xác định các hệ số cứng tương đương

§2. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ CẢN

Quan sát các hệ dao động, ta thấy dao động tự do nói chung tắt dần theo thời gian. Tính chất này của hệ dao động lý giải bởi ảnh hưởng của lực cản. Hai loại lực cản phổ biến nhất là lực ma sát nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc và lực ma sát khô.

2.1 Tính toán dao động tự do có ma sát nhớt

Xét dao động của hệ mô tả trên hình 2.14. Do có thêm lực cản nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, nên phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

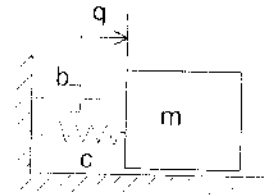
$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \quad (2.1)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = 2\delta \quad (2.2)$$

thì phương trình (2.1) có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2.3)$$



Hình 2.14

Theo lý thuyết phương trình vi phân tuyến tính [1], phương trình đặc trưng của (2.3) là

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.4)$$

Tùy theo quan hệ giữa δ và ω_0 , có thể xảy ra các trường hợp sau

$$\delta < \omega_0 \text{ (lực cản nhỏ)} : \lambda_{1,2} = -\delta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\delta \geq \omega_0 \text{ (lực cản lớn)} : \lambda_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

a. Trường hợp thứ nhất : $\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ)

Trong trường hợp này λ có giá trị phức. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.3) có dạng

$$q = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (2.5)$$

trong đó

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (2.6)$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu

$$t = 0 : \quad q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Từ các điều kiện đầu đã cho, dễ dàng xác định các hằng số C_1, C_2

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{\omega} \quad (2.7)$$

Để biến đổi biểu thức (2.5) ta đưa vào các hằng số A và β xác định theo hệ thức

$$C_1 = A \sin \beta, \quad C_2 = A \cos \beta$$

Từ đó suy ra

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \beta = \frac{C_1}{C_2}$$

Biểu thức nghiệm (2.5) bây giờ có thể viết dưới dạng

$$q = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) \quad (2.8)$$

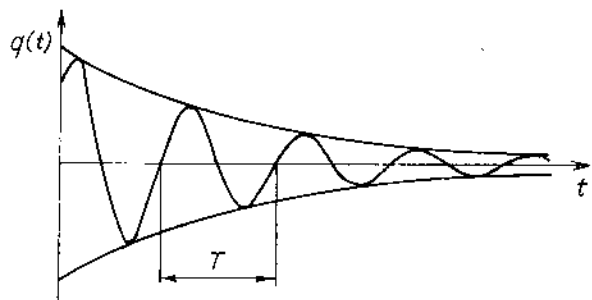
Từ biểu thức nghiệm (2.8) ta thấy: Khi lực cản đủ nhỏ, hệ thực hiện dao động tắt dần. Độ lệch $Ae^{-\delta t}$ giảm theo luật số mũ, tiệm cận tới không (hình 2.15). Dao động được mô tả bởi phương trình (2.8) là dao động họ hình sin.

Tuy chuyển động của hệ được mô tả bởi qui luật không tuần hoàn, nhưng tọa độ q lại đối dấu một cách tuần hoàn. Vì thế người ta qui ước gọi ω là "tần số riêng", $T = 2\pi/\omega$ là "chu kỳ", còn $Ae^{-\delta t}$ là "biên độ" của dao động tắt dần.

Để đặc trưng cho độ tắt dần của dao động tự do có cản nhớt, ta đưa vào khái niệm độ tắt lôga. Độ tắt lôga Λ được xác định bởi hệ thức

$$\Lambda = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T \quad (2.9)$$

Độ tắt lôga đặc trưng cho độ giảm "biên độ" dao động tắt dần. Trong thực tế ta thường xác định tỷ số hai biên độ dao động sau k chu kỳ



Hình 2.15

$$\frac{q(t)}{q(t+kT)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+kT)}} = e^{\delta kT}$$

Từ đó ta suy ra

$$\Lambda = \delta T = \frac{1}{k} \ln \frac{q(t)}{q(t+kT)} \quad (2.10)$$

b. Trường hợp thứ hai : $\delta > \omega_0$ (lực cản lớn)

Khi $\delta > \omega_0$ hai nghiệm λ_1 và λ_2 của phương trình đặc trưng là các số thực và âm. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.3) có dạng

$$q = Ae^{-\delta t} \text{sh}(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t + \beta) \quad (2.11)$$

Đường biểu diễn $q = q(t)$ cắt trục t không quá một lần (hình 2.16). Do đó chuyển động của hệ là chuyển động tắt dần, không dao động.

c. Trường hợp thứ ba : $\delta = \omega_0$ (lực cản tới hạn)

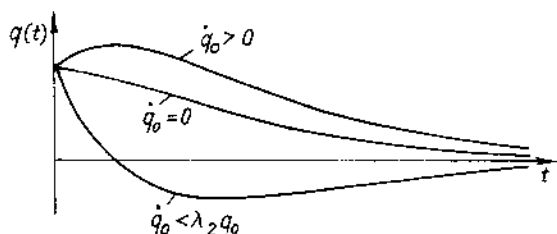
Trong trường hợp này hai nghiệm λ_1 và λ_2 là các số thực âm và bằng nhau. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.3) có dạng

$$q = e^{-\delta t} (C_1 t + C_2) \quad (2.12)$$

Chuyển động của hệ là tắt dần, không dao động.

Trong một số tài liệu viết về dao động trong kỹ thuật, người ta còn sử dụng khái niệm độ cản Lehr. Độ cản Lehr (ký hiệu bằng chữ D) được xác định bởi hệ thức

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}} \quad (2.13)$$



Hình 2.16

Phương trình vi phân dao động tự do có cản nhớt (2.3) có thể viết dưới dạng

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2.14)$$

Do hệ thức $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ chuyển động của hệ được phân thành ba trường hợp sau :

$D < 1$ ($\delta < \omega_0$) : độ cản nhỏ

$D = 1$ ($\delta = \omega_0$) : độ cản tới hạn

$D > 1$ ($\delta > \omega_0$) : độ cản lớn

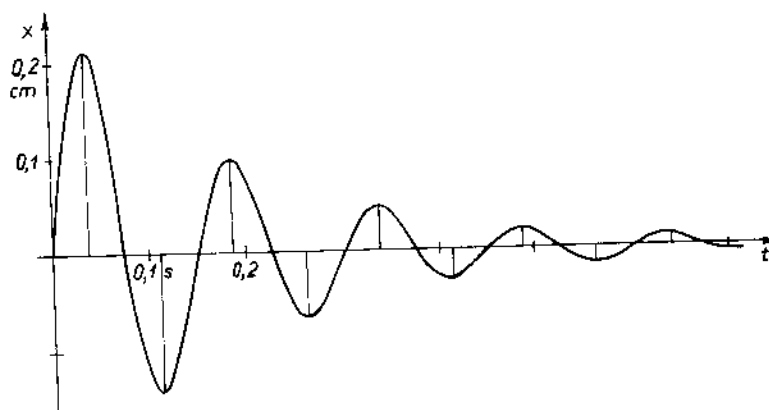
Căn cứ vào độ cản Lehr ta có kết luận : Khi $D < 1$ chuyển động của hệ là dao động tắt dần, khi $D \geq 1$ chuyển động của hệ tắt dần, không dao động.

Từ công thức định nghĩa độ cản Lehr, ta dễ dàng xác định được hệ thức liên hệ giữa độ tắt lôga và độ cản Lehr

$$\Lambda = \delta T = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \quad (2.15)$$

Thí dụ 2.9 : Trên hình 2.17 là đồ thị dao động tịnh tiến thẳng của một vật điểm có khối lượng $m = 0,5$ kg. Từ đồ thị dao động hãy xác định

- Chu kỳ và tần số dao động tắt dần
- Độ tắt lôga Λ
- Hệ số cản b và hệ số cứng c
- Các điều kiện đầu và qui luật dao động của vật điểm.



Hình 2.17

Lời giải : Từ đồ thị dao động ta thấy dao động của hệ là dao động tự do tắt dần với lực cản nhỏ. Thời gian thực hiện bốn chu kỳ dao động là 0,6 s. Từ đó suy ra :

Chu kỳ dao động tắt dần $T = \frac{0,6}{4} \text{ s} = 0,15 \text{ s}$

Tần số dao động tắt dần $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,15} \text{ s}^{-1} = 41,9 \text{ s}^{-1}$

Theo công thức (2.10) ta xác định độ tắt lôga

$$\lambda = \delta T = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+4T)} \right) = \frac{1}{4} \ln 18,5 = 0,729$$

Từ đó suy ra $\delta = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,729}{0,15} = 4,86 \text{ s}^{-1}$

Hệ số cản b của hệ có giá trị là

$$b = 2\delta m = 2 \cdot 4,86 \cdot 0,5 = 4,86 \text{ kg/s}$$

Từ công thức $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ta tính được tần số dao động riêng của hệ

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = 42,18 \text{ s}^{-1}$$

Từ đó dễ dàng tính được hệ số cứng c

$$c = m\omega_0^2 = 889,6 \text{ kg/s}^2$$

Từ đó thì ta có ngay $x(0) = 0$. Với ký hiệu m_x , m_1 là các tỷ lệ xích, $\text{tg}\alpha$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại $t = 0$, ta có vận tốc ban đầu

$$\dot{x}(0) = \frac{m_x}{m_1} \text{tg}\alpha = 10,5 \text{ cm/s}$$

Qui luật dao động họ hình sin của hệ được xác định bởi công thức (2.8)

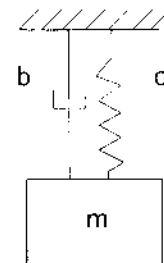
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t = 0,25 e^{-4,86t} \sin(41,9t)$$

Thí dụ 2.10 : Cho biết các điều kiện đầu cho một hệ dao động trên hình 2.18 là $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$. Hãy xác định năng lượng hao tán trong một chu kỳ. Cho biết $D = 0,01$.

Lời giải: Tại thời điểm đầu ($t = 0$), năng lượng của hệ dao động là

$$E_0 = \Pi_0 = \frac{1}{2} c x_0^2 \quad (\text{do } T_0 = 0)$$

Sau một chu kỳ năng lượng của hệ là



Hình 2.18

$$E_1 = \Pi_1 = \frac{1}{2} c x_1^2 \quad (\text{do } T_1 = 0)$$

Từ biểu thức dao động tự do tắt dần ta có

$$\frac{x_0}{x_1} = e^{\delta t} \rightarrow x_1 = x_0 e^{-\delta t}$$

Do
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}$$

ta suy ra
$$x_1 = x_0 e^{-\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}}$$

Như thế, năng lượng hao tán trong một chu kỳ là

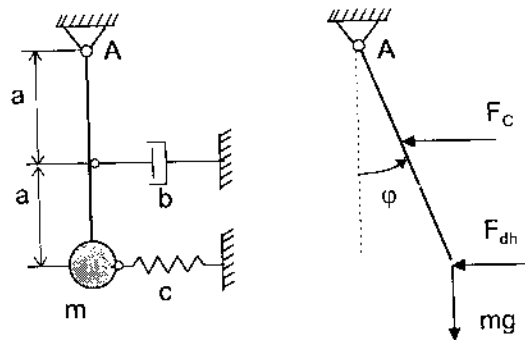
$$\Delta E = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} c x_0^2 - \frac{1}{2} c x_0^2 e^{-\frac{4\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} = \frac{1}{2} c x_0^2 (1 - e^{-\frac{4\pi D}{\sqrt{1-D^2}}})$$

Khi cho $D = 0,01$ thì $\Delta E = 0,13 \cdot \frac{1}{2} c x_0^2$. Vậy sau chu kỳ đầu, năng lượng của hệ bị hao tán mất 13%.

Thí dụ 2.11: Gắn một khối lượng m vào đầu thanh. Gắn vào thanh các phần tử cản và đàn hồi như hình 2.19. Bỏ qua khối lượng của thanh.

- Phải chọn độ lớn của hệ số cản b như thế nào để hệ có khả năng dao động nhỏ?

- Xác định độ cản Lehr D cần thiết để sau mười dao động, biên độ giảm còn 1/10 biên độ của chu kỳ đầu, sau đó xác định chu kỳ dao động.



Hình 2.19

Lời giải : Áp dụng định lý biến thiên mô men động lượng đối với trục đi qua A và do φ nhỏ lấy xấp xỉ $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{4m} \dot{\varphi} + \left(\frac{c}{m} + \frac{g}{2a} \right) \varphi = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} + 2\delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Trong đó $2\delta = \frac{b}{4m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{2a}$

Để hệ có khả năng dao động nhỏ thì $\delta < \omega_0$. Từ đó suy ra

$$\frac{b}{8m} < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{g}{2a}} \rightarrow b < 8\sqrt{cm + \frac{gm^2}{2a}}$$

Từ các công thức (2.10) và (2.15) ta có

$$10 - \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln \frac{q_n}{q_{n+10}} = \ln 10 \rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{20\pi}{\ln 10} \right)^2 + 1}} = 0,037$$

Chu kỳ dao động

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2am}{2ac + gm}}$$

2.2 Tính toán dao động tự do có ma sát khô

Xét dao động của hệ mô tả trên hình 2.20. Lực ma sát khô (hay ma sát Coulomb) có hướng phụ thuộc vào vận tốc của vật thể m

$$F_{ms} = \begin{cases} -\mu mg & \text{khi } \dot{q} > 0 \\ \mu mg & \text{khi } \dot{q} < 0 \end{cases}$$

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

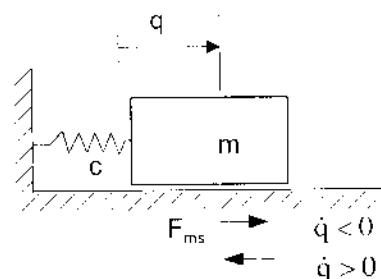
$$m\ddot{q} + c\dot{q} - \mu mg = 0 \quad \text{khi } \dot{q} < 0 \quad (2.16)$$

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + \mu mg = 0 \quad \text{khi } \dot{q} > 0 \quad (2.17)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{\mu mg}{c} = s$$

thì các phương trình (2.16) và (2.17) có dạng



Hình 2.20

$$(q - s)'' + \omega_0^2 (q - s) = 0 \quad \text{khi } \dot{q} < 0 \quad (2.18)$$

$$(q + s)'' + \omega_0^2 (q + s) = 0 \quad \text{khi } \dot{q} > 0 \quad (2.19)$$

Dễ dàng tính được nghiệm tổng quát của các phương trình trên

$$q = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + s \quad \text{khi } \dot{q} < 0 \quad (2.20)$$

$$q = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) - s \quad \text{khi } \dot{q} > 0 \quad (2.21)$$

Chu kỳ dao động của hệ là

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (2.22)$$

Để xác định biểu thức nghiệm, cần phải biết các điều kiện đầu. Giả sử tại thời điểm đầu $t = 0$: $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = 0$. Trong nửa chu kỳ đầu ($\dot{q} < 0$) ta có

$$q(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + s$$

Các hằng số A_1 và α_1 được xác định từ các điều kiện đầu. Ta có các phương trình

$$q(0) = A_1 \cos \alpha_1 + s = q_0$$

$$\dot{q}(0) = -\omega_0 A_1 \sin \alpha_1 = 0$$

Giải hai phương trình trên ta được $\alpha_1 = 0$, $A_1 = q_0 - s$. Như thế trong nửa chu kỳ đầu ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0}$) vật điểm dao động theo qui luật

$$q(t) = (q_0 - s) \cos \omega_0 t + s \quad (2.23)$$

Từ biểu thức (2.23) ta xác định được điều kiện đầu cho dao động ở nửa sau của chu kỳ đầu $t_0 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$q\left(\frac{T}{2}\right) = (q_0 - s) \cos \pi + s = 2s - q_0$$

$$\dot{q}\left(\frac{T}{2}\right) = 0$$

Trong nửa sau của chu kỳ đầu ($\dot{q} > 0$) ta có

$$q(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2) - s$$

Các hằng số A_2 và α_2 được xác định từ các điều kiện đầu. Ta có các phương trình

$$q\left(\frac{T}{2}\right) = q\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = A_2 \cos(\pi + \alpha_2) - s = 2s - q_0$$

$$\dot{q}\left(\frac{T}{2}\right) = \dot{q}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) = -\omega_0 A_2 \sin(\pi + \alpha_2) = 0$$

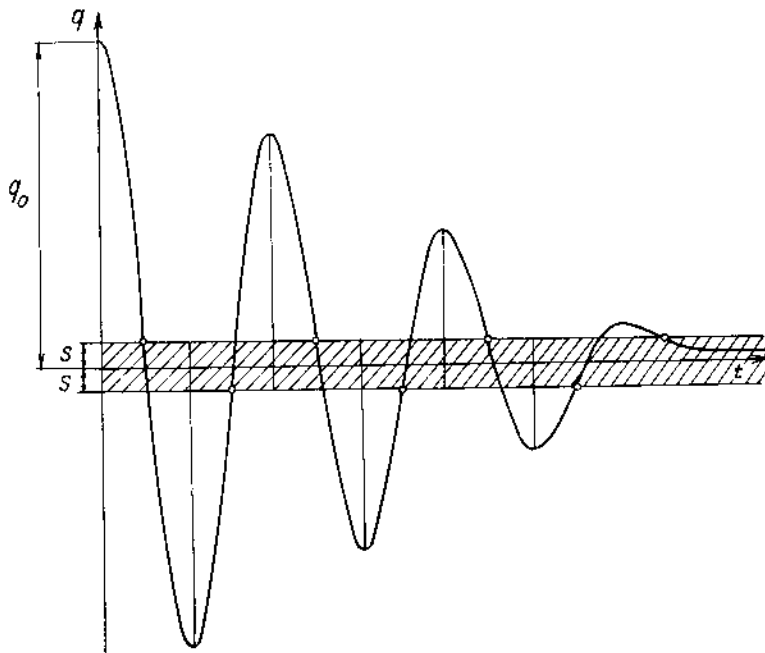
Từ hai phương trình trên suy ra $\alpha_2 = 0$, $A_2 = q_0 - 3s$. Như thế trong nửa thứ hai của chu kỳ đầu ($\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}$) vật điểm dao động theo qui luật

$$q(t) = (q_0 - 3s) \cos \omega_0 t - s \quad (2.24)$$

Từ biểu thức (2.24) ta xác định được các điều kiện đầu cho dao động ở nửa đầu chu kỳ thứ hai

$$q(T) = q_0 - 4s, \quad \dot{q}(T) = 0$$

Sau đó tiếp tục tính toán tương tự như trên. Đồ thị dao động tự do có ma sát không ứng với điều kiện đầu $t = 0$: $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = 0$ có dạng như hình 2.21a.



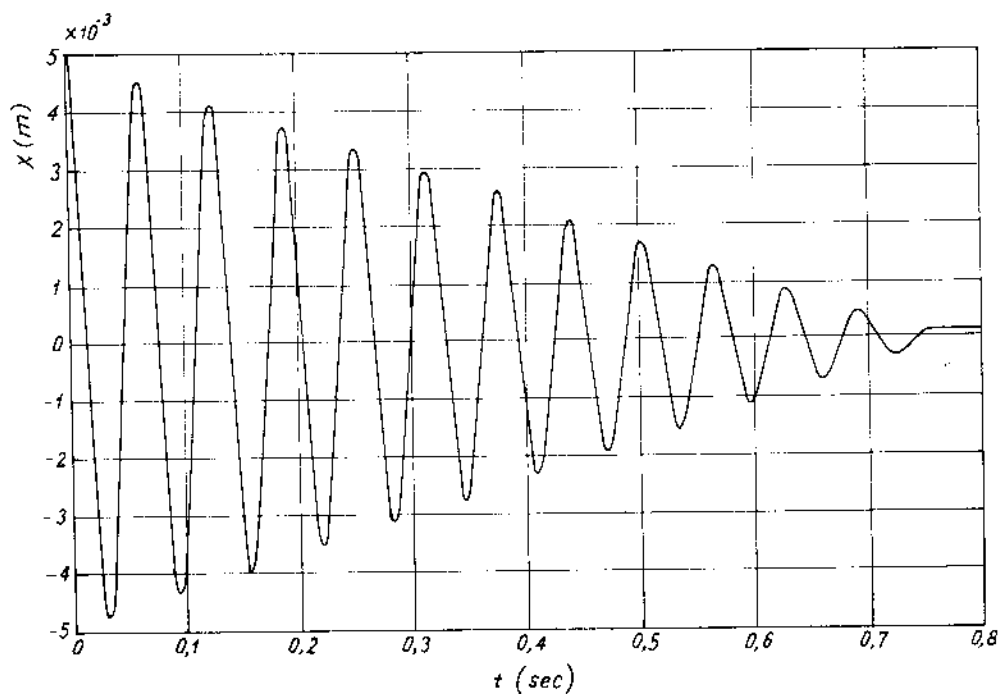
Hình 2.21a

Ngày nay việc tính toán dao động có thể thực hiện khá đơn giản trên máy tính điện tử. Hai phương trình (2.16) và (2.17) có thể viết lại dưới dạng

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\mu g \text{sign}(\dot{x}) \quad (2.25)$$

Trong đó $\text{sign}(\dot{x}) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \dot{x} > 0 \\ -1 & \text{khi } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2.26)$

Cho biết $\omega_0 = \sqrt{c/m} = 100 \text{ s}^{-1}$; $\mu = 0,1$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Với các điều kiện đầu $x(0) = 0,005 \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$, sử dụng hệ chương trình MATLAB [15], ta dễ dàng tính được nghiệm của phương trình (2.25). Đồ thị biểu diễn kết quả tính toán có dạng như hình 2.21b.



Hình 2.21b Dao động tự do có tính đến ma sát khô

§3. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ CHỊU KÍCH ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

3.1 Các dạng kích động và phương trình vi phân dao động

a) Kích động lực

Trên hình 2.22a là mô hình dao động khối lượng - lò xo chịu kích động lực. Giả sử $F(t) = \hat{F} \sin \Omega t$, trong đó $\hat{F}$ là giá trị cực đại của hàm $F(t)$. Đối với mô hình này ta có

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c y^2, \quad \Phi = \frac{1}{2} b \dot{y}^2, \quad Q^* = F(t).$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại 2

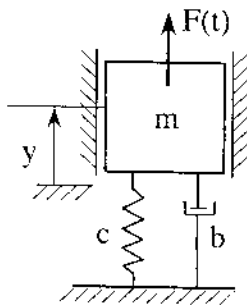
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + Q^*$$

ta được

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + c y = \hat{F} \sin \Omega t \quad (3.1)$$

Chia hai vế của (3.1) cho m và đưa vào ký hiệu $\hat{y} = \hat{F}/c$, ta biến đổi (3.1) về dạng

$$\ddot{y} + 2\delta \dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{y} \sin \Omega t \quad (3.1a)$$



Hình 2.22a

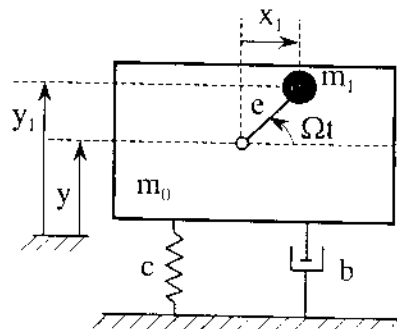
b) Kích động bởi khối lượng lệch tâm

Mô hình dao động của hệ chịu kích động bởi khối lượng lệch tâm cho trên hình 2.22b. Rôto có khối lượng lệch tâm m_1 , quay đều với vận tốc góc Ω . Biểu thức động năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Do

$$x_1 = c \cos \Omega t, \quad \dot{x}_1 = -c \Omega \sin \Omega t,$$



Hình 2.22b

$$y_1 = y + e \sin \Omega t, \quad \dot{y}_1 = \dot{y} + e \Omega \cos \Omega t$$

nên ta có

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{y}^2 + 2\dot{y}e\Omega \cos \Omega t + e^2\Omega^2$$

Từ đó ta suy ra

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + m_1\dot{y}e\Omega \cos \Omega t + \frac{1}{2}m_1e^2\Omega^2$$

Trong đó $m = m_0 + m_1$.

Các biểu thức thế năng Π và hàm hao tán Φ có dạng như các thí dụ trước

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2, \quad \Phi = \frac{1}{2}by^2$$

Thế các biểu thức T, Π, Φ vào phương trình Lagrange loại 2, ta được

$$m\ddot{y} + by + cy = m_1e\Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.2)$$

Biến đổi tương tự như trên ta được

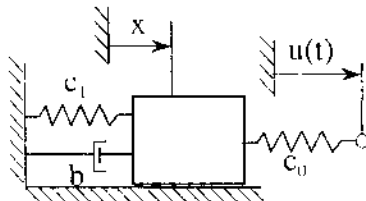
$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \Omega^2 \hat{y} \sin \Omega t \quad (3.2a)$$

trong đó

$$\hat{y} = \frac{m_1}{m_0 + m_1} e.$$

c) Kích động bằng lực đàn hồi

Trên hình 2.22c là mô hình hệ chịu kích động lực đàn hồi tuyến tính. Bỏ qua ma sát trượt động ($\mu=0$). Cho biết $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$.



Hình 2.22c

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + c_1x + c_0[x - u(t)] = 0$$

Đa $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$ nên ta có

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c_0\hat{u} \sin \Omega t \quad (3.3)$$

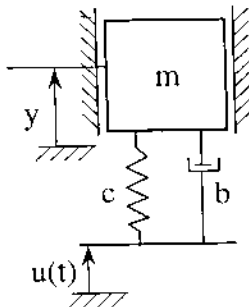
trong đó $c = c_1 + c_0$.

Nếu sử dụng ký hiệu $\hat{x} = \frac{c_0}{c_1 + c_0} \hat{u}$ thì phương trình (3.3) biến đổi được về dạng

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \hat{x} \sin \Omega t \quad (3.3a)$$

d) Kích động động học

Trên hình 2.22d là mô hình hệ chịu kích động động học. Giả sử điểm chân của bộ lò xo và cản nhớt chuyển động theo qui luật điều hoà $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng



Hình 2.22d

$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + c(y - u) = 0$$

Thế $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$, $\dot{u}(t) = \hat{u} \Omega \cos \Omega t$ vào phương trình trên ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{u}(c \sin \Omega t + b\Omega \cos \Omega t) \quad (3.4)$$

Chia hai vế của phương trình (3.4) cho m ta được

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{y} (\omega_0 \sin \Omega t + 2\delta \frac{\Omega}{\omega_0} \cos \Omega t) \quad (3.4a)$$

trong đó $\hat{y} = \hat{u}$.

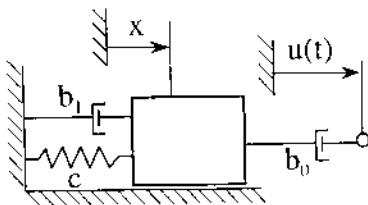
e) Kích động bằng lực cản nhớt

Trên hình 2.22e là mô hình hệ chịu kích động bằng lực cản nhớt. Mặt trượt nhẵn tuyệt đối ($\mu=0$). Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b_1\dot{x} + cx + b_0[\dot{x} - \dot{u}(t)] = 0$$

Cho biết $u(t) = \hat{u} \sin \Omega t$, $\dot{u}(t) = \hat{u} \Omega \cos \Omega t$, khi đó phương trình trên có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b_0 \hat{u} \Omega \cos \Omega t \quad (3.5)$$



Hình 2.22e

với $b = b_1 + b_0$.

Chia hai vế của (3.5) cho m, ta được

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\delta \Omega \hat{x} \cos \Omega t \quad (3.5a)$$

trong đó $\hat{x} = \frac{b_0}{b} \hat{u}$.

Qua các thí dụ trên ta thấy: Phương trình vi phân dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do chịu kích động điều hoà có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H_1 \sin \Omega t + H_2 \cos \Omega t \quad (3.6)$$

hoặc

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1 \sin \Omega t + h_2 \cos \Omega t \quad (3.7)$$

Chú ý, nếu ta sử dụng độ cản Lehr D thì phương trình (3.1a) có dạng như sau

$$\ddot{y} + 2D\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{y} \sin \Omega t \quad (3.8)$$

trong đó

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{cm}}.$$

Ta có thể biến đổi các phương trình (3.2a), (3.3a), (3.4a), (3.5a) về dạng tương ứng.

3.2 Tính toán dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức không cản của hệ một bậc tự do có dạng

$$m\ddot{q} + cq = H \sin \Omega t \quad (3.9)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \quad h = \frac{H}{m}$$

thì phương trình (3.9) có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h \sin \Omega t \quad (3.10)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.10) bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng và một nghiệm riêng của phương trình có vế phải. Để giải phương trình vi phân (3.10) ta xét hai trường hợp $\Omega \neq \omega_0$ (xa cộng hưởng) và $\Omega \approx \omega_0$ (gần cộng hưởng).

Khi $\Omega \neq \omega_0$ ta tìm nghiệm riêng của phương trình (3.10) dưới dạng

$$q^* = A \sin \Omega t \quad (3.11)$$

Trong đó A là hằng số chưa xác định. Thế biểu thức (3.11) vào phương trình (3.10), so sánh với các hệ số của $\sin \Omega t$, ta rút ra biểu thức xác định A

$$A = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (\text{với } \Omega \neq \omega_0)$$

Theo lý thuyết phương trình vi phân, nghiệm tổng quát của phương trình (3.10) có dạng

$$q(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (3.12)$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện đầu. Giả sử khi $t = 0$ thì $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$. Thế các điều kiện đầu này vào biểu thức (3.12) và đạo hàm của nó, ta có

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Như thế, biểu thức nghiệm (3.12) có dạng

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin \omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (3.13)$$

Nghiem (3.13) gồm hai phần: Ba số hạng đầu biểu thị dao động tự do với tần số là tần số riêng của hệ, số hạng thứ tư biểu thị dao động cưỡng bức với tần số là tần số của lực kích động. Chú ý rằng khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ chỉ có hai số hạng đầu của dao động tự do triệt tiêu. Vì vậy số hạng thứ ba được gọi là thành phần dao động tự do kéo theo. Giai đoạn tồn tại cả các thành phần dao động với tần số lực kích động và các thành phần dao động với tần số riêng được gọi là giai đoạn chuyển tiếp. Giai đoạn chỉ tồn tại thành phần dao động với tần số của lực kích động được gọi là giai đoạn bình ổn.

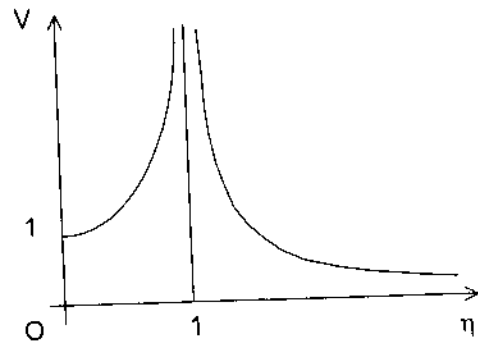
Nếu bỏ qua các thành phần dao động tự do trong (3.13) ta có biểu thức xác định trạng thái bình ổn của dao động cưỡng bức

$$q^*(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t = \frac{H}{c(1 - \eta^2)} \sin \Omega t \quad (3.14)$$

Chú ý rằng thừa số H/c là dịch chuyển gây ra bởi lực tĩnh H đặt vào vật rắn dao động. Trong đó $\eta = \Omega/\omega_0$. Đại lượng

$$V(\eta) = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \quad (3.15)$$

biểu thị tác dụng động lực của lực kích động, và được gọi là hàm khuếch đại (hoặc hệ số động lực). Trên hình 2.23 biểu diễn sự phụ thuộc của V vào η .



Hình 2.23

Khi tỷ số Ω/ω_0 dần đến 1 thì hàm khuếch đại (hệ số động lực) và do đó biên độ dao động cường bức tăng lên nhanh chóng và tiến tới vô cùng khi $\Omega = \omega_0$. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng. Như vậy hiện tượng cộng hưởng là hiện tượng biên độ dao động cường bức tăng lên rất lớn do tần số của lực kích động trùng với tần số dao động tự do. Trong thực tế không có trường hợp nào biên độ dao động tăng lên vô cùng vì trong các hệ thực bao giờ cũng tồn tại lực cản. Vấn đề này sẽ được xét ở sau.

Trở lại biểu thức tổng quát (3.13) của nghiệm. Khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$, biểu thức nghiệm (3.13) có dạng

$$q(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \left(\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (3.16)$$

Ta xét trường hợp khi tần số Ω của lực kích động rất gần với tần số dao động tự do ω_0 . Đặt vào ký hiệu

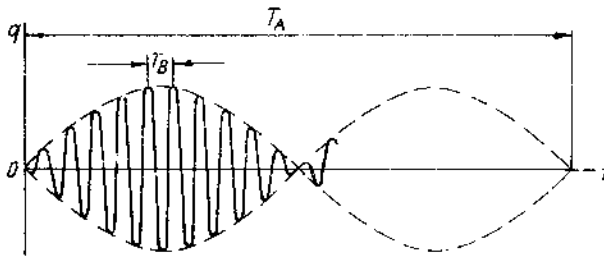
$$\Omega - \omega_0 = 2\varepsilon$$

trong đó ε là một đại lượng vô cùng bé. Bỏ qua các số hạng bé cỡ ε trong biểu thức của q ta có

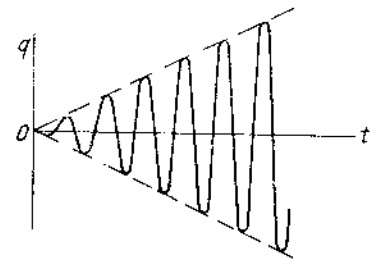
$$\begin{aligned} q &\approx \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} (\sin \Omega t - \sin \omega_0 t) = \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \sin \frac{\Omega - \omega_0}{2} t \\ &= \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \varepsilon t \cos \frac{\Omega + \omega_0}{2} t \approx -\frac{h \sin \varepsilon t}{2\Omega \varepsilon} \cos \Omega t \end{aligned} \quad (3.17)$$

Do ε là một vô cùng bé nên hàm $\sin \varepsilon t$ biến thiên chậm, còn chu kỳ của nó $2\pi/\varepsilon$ rất lớn. Trong trường hợp này có thể xem biểu thức (3.17) là qui luật dao động với chu

kỳ $2\pi/\Omega$ và biên độ biến đổi $(h/2\Omega\varepsilon) \sin \varepsilon t$. Dạng dao động này được biểu diễn trên hình 2.24. Hiện tượng dao động này gọi là hiện tượng phách.



Hình 2.24



Hình 2.25

Xét trường hợp $\Omega \rightarrow \omega_0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Khi đó, ta có thể thay $\sin \varepsilon t$ bằng εt trong biểu thức (3.17) và ta có hệ thức

$$q = -\frac{ht}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \quad (3.18)$$

Biên độ $ht/2\omega_0$ tăng lên vô hạn khi thời gian t tăng như hình 2.25. Như thế, ngay trong phạm vi lý thuyết dao động tuyến tính không cản, sự tăng biên độ lên vô hạn ở vùng cộng hưởng cũng đòi hỏi phải có thời gian. Đối với các máy được thiết kế làm việc ở trên vùng cộng hưởng, khi tăng vận tốc của máy qua vùng cộng hưởng, cần phải khẩn trương cho vượt qua đủ nhanh.

Như thế khi tính toán dao động cưỡng bức không cản ta phân ra hai trường hợp:

- Trường hợp xa cộng hưởng ($\Omega \neq \omega_0$)

- Trường hợp gần cộng hưởng ($\Omega \approx \omega_0$). Trong trường hợp này khi $\Omega = \omega_0 + 2\varepsilon$ ta có hiện tượng phách, khi $\Omega = \omega_0$ ta có hiện tượng cộng hưởng.

Thí dụ 2.12 : Bánh xe O lăn không trượt trên mặt đường gỗ ghề lượn sóng. Vận tốc tâm O của bánh xe luôn không đổi là $v = 60 \text{ km/h}$. Mặt đường lượn sóng có phương trình là $s = \hat{s} \sin(\frac{\pi x}{L})$ với $\hat{s} = 2 \text{ cm}$, $L = 100 \text{ cm}$. Xác định biên độ dao động cưỡng bức thẳng đứng của vật thể M có khối lượng m , nối với trục bánh xe bằng lò

xo có độ cứng là c . Biết rằng biến dạng tĩnh của lò xo dưới tác dụng của vật thể là $\delta_0 = 10 \text{ cm}$.

Lời giải : Từ điều kiện cân bằng tĩnh $c\delta_0 = mg$ ta suy ra

$$c = \frac{mg}{\delta_0}$$

Phương trình vi phân chuyển động của vật thể M có dạng

$$m\ddot{y} + c(y - s) = 0$$

Nếu đưa vào ký hiệu $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$,
phương trình vi phân dao động được đưa về dạng

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{s} \sin \frac{\pi x}{L}$$

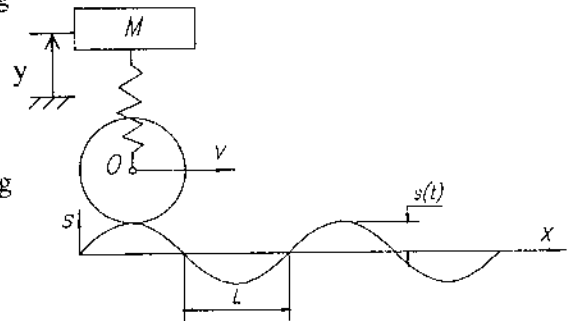
$$\text{Biến đổi} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{mg}{m\delta_0} = \frac{g}{\delta_0} = 98,1 \quad 1/s^2 \quad (5.25)$$

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi vt}{L} = \Omega t, \text{ với } \Omega = \frac{\pi v}{L} = \frac{16,6\pi}{1} = 16,6\pi$$

Khi đó nghiệm riêng của phương trình trên là

$$y = A \sin \Omega t$$

$$\text{với} \quad A = \frac{\omega_0^2 \hat{s}}{|\omega_0^2 - \Omega^2|} = \frac{\hat{s}}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{2}{\left|1 - \frac{(16,6\pi)^2}{98,1}\right|} = 0,075 \text{ cm}.$$



Hình 2.26

3.3 Tính toán dao động cưỡng bức có ma sát nhớt

Các phương trình vi phân dao động tuyến tính chịu kích động điều hoà của hệ một bậc tự do có ma sát nhớt (3.6), (3.7) và (3.8) có thể viết dưới dạng như sau

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1 \sin \Omega t + h_2 \cos \Omega t \quad (3.19)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng

$$q^*(t) = M \sin \Omega t + N \cos \Omega t \quad (3.20)$$

Trong đó M, N là các hằng số cần xác định. Thế biểu thức (3.20) vào phương trình (3.19) rồi so sánh các hệ số của $\sin \Omega t$ và $\cos \Omega t$, ta rút ra hệ hai phương trình đại số tuyến tính để xác định M và N

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega^2)M - 2\delta\Omega N &= h_1 \\ 2\delta\Omega M + (\omega_0^2 - \Omega^2)N &= h_2 \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\begin{aligned} M &= \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)h_1 + 2\delta\Omega h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \\ N &= \frac{-2\delta\Omega h_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.19) là tổng của nghiệm riêng (3.20) và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất (2.28)

$$q(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) + M \sin \Omega t + N \cos \Omega t \quad (3.22)$$

Số hạng thứ nhất của biểu thức nghiệm (3.22) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau có tần số Ω của ngoại lực biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức của hệ.

Thành phần dao động cưỡng bức (3.20) có thể biểu diễn dưới dạng

$$q^*(t) = \hat{q} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (3.23)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \\ &= \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_0^2 \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{N}{M} \quad (3.25)$$

Ở đây, cũng như các đoạn trước, ta dùng ký hiệu $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$, $D = \frac{\delta}{\omega_0}$. So sánh phương trình vi phân (3.19) với các phương trình vi phân (3.6), (3.7) và (3.8) ta rút ra các hệ thức sau :

- Trường hợp kích động lực hoặc kích động qua lò xo

$$\hat{q} = V_1(\eta, D)\hat{y}; \quad V_1 = \left[(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

- Trường hợp kích động động học

$$\hat{q} = V_2(\eta, D)\hat{y}; \quad V_2 = \sqrt{1 + 4D^2\eta^2} \quad V_1 \quad (3.27)$$

- Trường hợp kích động bởi khối lượng lệch tâm

$$\hat{q} = V_3(\eta, D)\hat{y}; \quad V_3 = \eta^2 V_1 \quad (3.28)$$

Các hàm V_1 , V_2 , V_3 được gọi là các hàm khuếch đại (hay các hệ số động lực). Đồ thị của các hàm khuếch đại V_1 , V_2 , V_3 ứng với một vài giá trị của độ cản D cho trên hình 2.27.

Khi ta cố định độ cản D (xem như đã cho), các hàm V_1 , V_2 , V_3 đạt cực đại tại các giá trị sau của η :

$$V_1 \text{ đạt cực đại khi } \eta = \sqrt{1 - 2D^2}$$

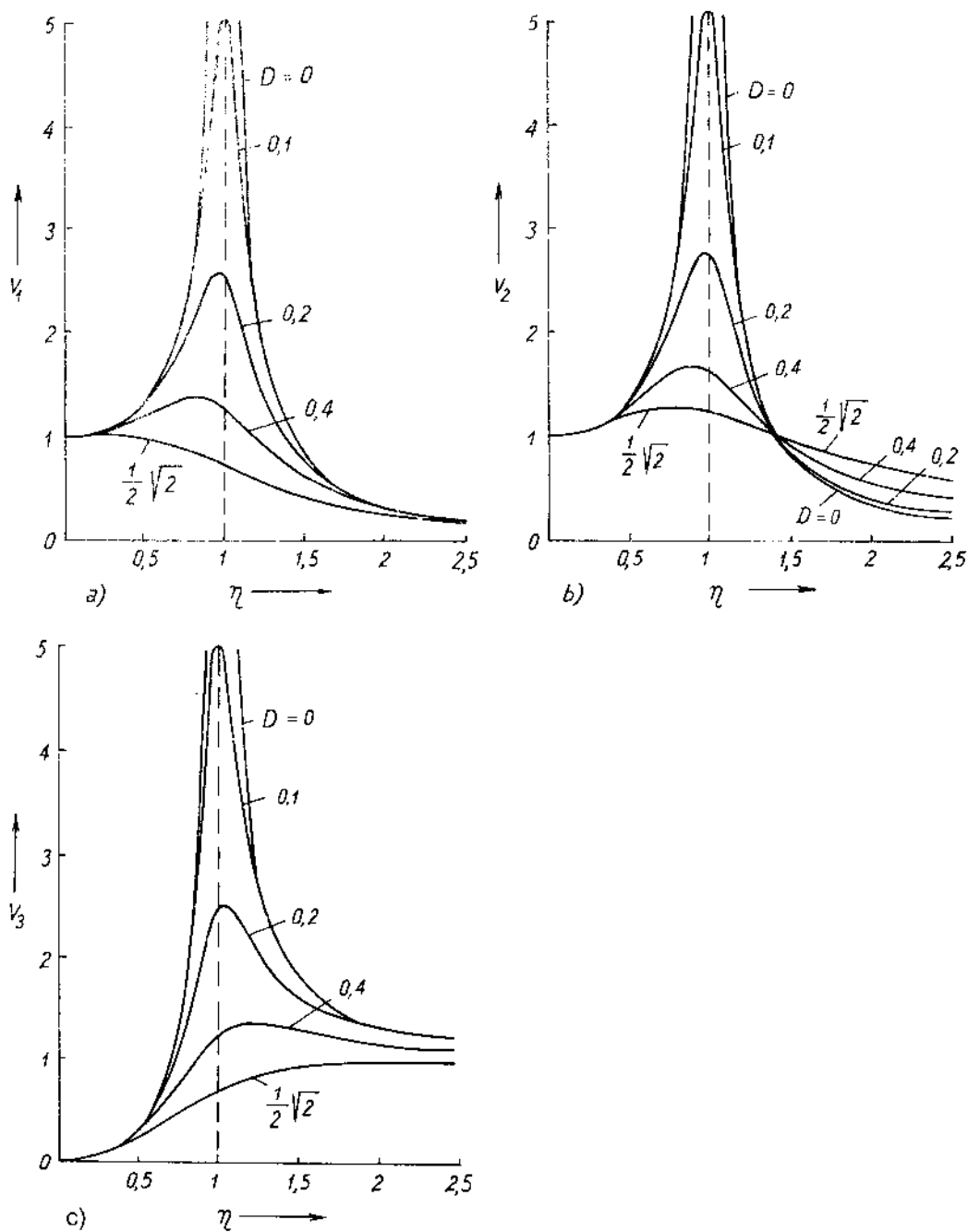
$$V_2 \text{ đạt cực đại khi } \eta = \sqrt{\sqrt{1 + 8D^2} - \frac{1}{2D}} \approx \sqrt{1 - 2D^2} \text{ nếu } D \ll 1$$

$$V_3 \text{ đạt cực đại khi } \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - 2D^2}}$$

Ta có thể tính được các giá trị cực đại này

$$\max_{\eta} V_1 = \max_{\eta} V_3 = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

$$\max_{\eta} V_2 \approx \frac{1}{2D} \left(1 + \frac{5}{2} D^2 \right) \text{ khi } D \text{ nhỏ}$$



Hình 2.27

Góc pha ban đầu φ được xác định bởi hệ thức (3.25)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\delta\Omega h_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)h_1 + 2\delta\Omega h_2}$$

Trường hợp kích động lực và kích động bởi khối lượng lệch tâm

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{-2D\eta}{1 - \eta^2} \rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

Trường hợp kích động động học, ta có

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\delta\Omega^3}{(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_0^2 + 4\delta^2\Omega^2} = \frac{-2D\eta^3}{1 - \eta^2 + 4D^2\eta^2}$$

$$\rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2D\eta^3}{1 - \eta^2 + 4D^2\eta^2}$$

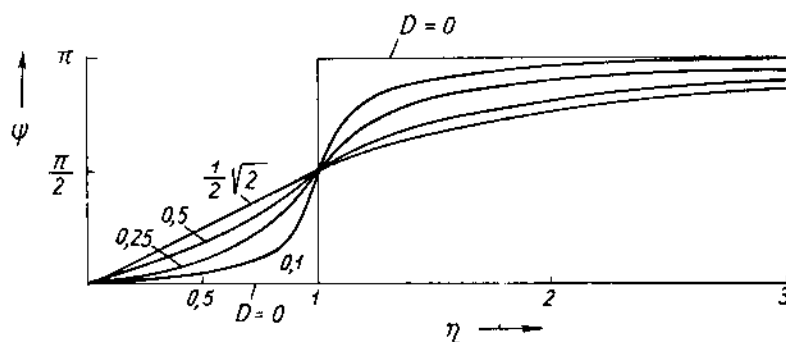
Nếu ta ký hiệu $\psi = -\varphi$ thì ta có ba hệ thức sau

$\psi = 0$ khi $\eta \rightarrow 0$: Dao động cùng pha

$\psi = \pi/2$ khi $\eta = 1$: Cộng hưởng

$\psi = \pi$ khi $\eta \rightarrow \infty$: Dao động ngược pha

Trường hợp kích động lực hoặc kích động bởi khối lượng lệch tâm sự phụ thuộc của góc ψ vào η ứng với một vài giá trị của D được biểu diễn trên hình 2.28.



Hình 2.28

Để tìm nghiệm của phương trình vi phân mô tả dao động cưỡng bức người ta cũng hay sử dụng phương pháp biên độ phức. Muốn vậy ta đưa vào các ký hiệu sau

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{y} \sin \Omega t = \operatorname{Im} \bar{y}(t) \quad : \quad \bar{y}(t) = \hat{y} e^{i\Omega t} \\ x(t) &= \hat{x} \sin(\Omega t + \varphi) = \operatorname{Im} \bar{x}(t) \quad : \quad \bar{x}(t) = \hat{x} e^{i(\Omega t + \varphi)} \\ \bar{x}(t) &= \hat{x} e^{i(\Omega t + \varphi)} = \hat{x} e^{i\varphi} e^{i\Omega t} = \bar{x} e^{i\Omega t} \quad : \quad \bar{x} = \hat{x} e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Sử dụng cách biểu diễn phức như trên ta có thể tìm được nghiệm các phương trình (3.6), (3.7) và (3.8) dưới dạng phức.

Thế $\bar{y} = \hat{y} e^{i\Omega t}$ cho $\hat{y} \sin \Omega t$ và $\bar{x} = \tilde{x} e^{i\Omega t}$ cho $x(t)$ trong phương trình (3.6) ta nhận được phương trình

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega^2 + i2D\omega_0\Omega)\tilde{x} &= \omega_0^2 \hat{y} \\ \rightarrow \tilde{x} = \hat{x} e^{i\varphi} &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2D\omega_0\Omega} \hat{y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Nhân cả tử số và mẫu số hệ thức (3.29) với số phức liên hợp của số phức ở mẫu số và sau một vài phép biến đổi ta được

$$\tilde{x} = \hat{x} e^{i\varphi} = \frac{1 - \eta^2 - i2D\eta}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \hat{y} \quad (3.30)$$

Tính toán tương tự đối với các phương trình (3.7), (3.8). Từ phương trình (3.8) ta có

$$\tilde{x} = \hat{x} e^{i\varphi} = \frac{1 - \eta^2 + 4D^2\eta^2 - i2D\eta^3}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \hat{y} \quad (3.31)$$

Từ phương trình (3.7) ta có

$$\tilde{x} = \hat{x} e^{i\varphi} = \frac{1 - \eta^2 - i2D\eta}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} \eta^2 \hat{y} \quad (3.32)$$

Thí dụ 2.13 : Sơ đồ một thiết bị đo dao động được biểu diễn trên hình 2.29a. Vỏ ngoài thiết bị đo bị rung theo qui luật $x_m = x_0 \cos \Omega t$. Phải chọn các tham số khối lượng m và độ cứng c như thế nào để với hệ số cản tùy ý kim chỉ đúng biên độ kích động x_0 trong một dải tần số đo đủ rộng.

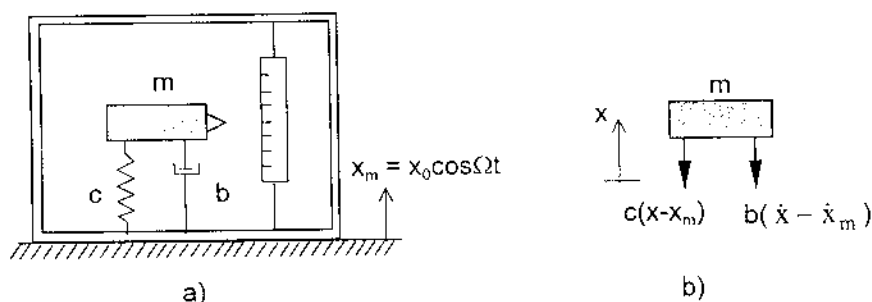
Lời giải : Ta chọn toạ độ x là dịch chuyển của khối lượng m so với nền cố định (hình 2.29b). Dịch chuyển, vận tốc của khối lượng m đối với vỏ ngoài thiết bị là $x - x_m$, $\dot{x} - \dot{x}_m$.

Phương trình vi phân chuyển động của khối lượng m là

$$m\ddot{x} = -c(x - x_m) - b(\dot{x} - \dot{x}_m)$$

Kim của thiết bị đo chỉ độ lệch tương đối $x_r = x - x_m$. Từ đầu bài ta có $\ddot{x}_m = -x_0\Omega^2 \cos \Omega t$. Thế vào phương trình trên ta nhận được phương trình dao động

$$m\ddot{x}_r + b\dot{x}_r + cx_r = m\Omega^2 x_0 \cos \Omega t$$



Hình 2.29

Chia cả hai vế phương trình trên cho m và sử dụng các ký hiệu quen biết ta được

$$\ddot{x}_r + 2\delta\dot{x}_r + \omega_0^2 x_r = \Omega^2 x_0 \cos \Omega t$$

Nghiệm riêng của phương trình trên có dạng

$$x_r = x_0 V_3 \cos(\Omega t - \varphi)$$

Biên độ đo được và biên độ kích động sẽ trùng nhau khi $V_3 = 1$. Theo hình 2.27c kết quả đo sẽ không phụ thuộc vào độ cản D khi $\eta \gg 1$. Từ đó suy ra

$$\omega_0^2 \ll \Omega^2 \rightarrow \frac{c}{m} \ll \Omega^2$$

Như vậy phải chọn c và m sao cho tần số riêng của hệ dao động không gần bằng tần số của kích động.

Thí dụ 2.14 : Để xác định độ cản của hệ như hình 2.30, ta lắp vào khối lượng rung hai mô tơ lệch tâm. Cho biết $2\Delta mc = 130 \text{ kgcm}$. Khối lượng của hệ là $M = 1800 \text{ kg}$, tổng các hệ số cứng của các lò xo là $c^* = 7200 \text{ N/cm}$. Các mô tơ lệch tâm quay với vận tốc góc $\Omega = 20 \text{ s}^{-1}$. Biên độ dao động của hệ đo được là $\hat{y} = 0,2 \text{ cm}$. Hãy xác định các hệ số cản D , δ , b .

Lời giải : Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + c^*y = 2\Delta m e \Omega^2 \sin \Omega t$$

Chia hai vế cho M ta được

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \Omega^2 y_0 \sin \Omega t$$

với $y_0 = \frac{2\Delta m e}{M}$.

Nghiệm của phương trình trên có dạng

$$y(t) = \hat{y} \sin(\Omega t + \varphi)$$

Trong đó $\hat{y} = V_3(\eta, D)y_0 = y_0 \eta^2 V_1$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = \frac{\hat{y}}{y_0 \eta^2} \\ \rightarrow \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} &= \frac{y_0 \eta^2}{\hat{y}} \\ \rightarrow (1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2 &= \frac{y_0^2 \eta^4}{\hat{y}^2} \end{aligned}$$

Từ công thức cuối ta giải ra

$$D = \frac{1}{2\eta} \sqrt{\left(\frac{y_0}{\hat{y}}\right)^2 \eta^4 - (1-\eta^2)^2}$$

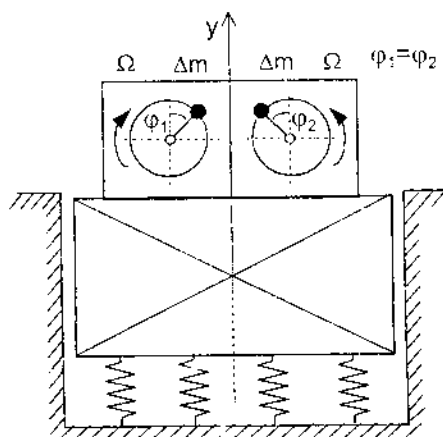
Theo các số liệu ở đầu bài ta có

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{M}} = \sqrt{\frac{7200 \cdot 10^2}{1800}} = 20 \text{ s}^{-1} = \Omega$$

$$y_0 = \frac{2\Delta m e}{M} = \frac{130}{1800} = 0,072 \text{ cm}$$

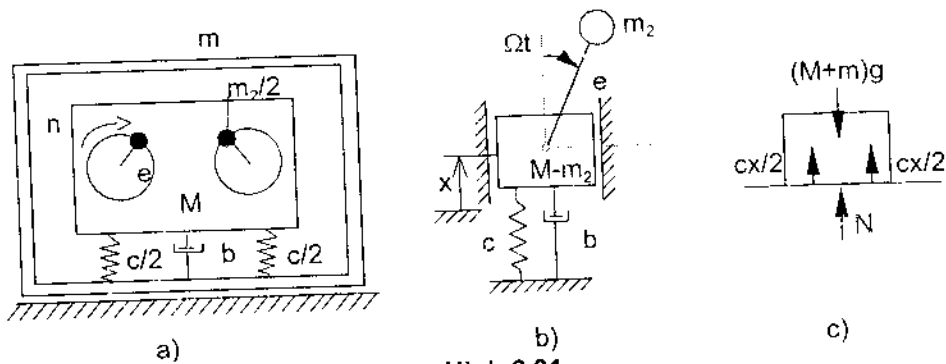
Vậy ta có $D = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{0,072}{0,2}\right)^2 - 0} = 0,1806$

Từ đó suy ra $\delta = D\omega_0 = 3,611 \text{ 1/s}$, $b = 2M\delta = 13000 \text{ kg/s}$.



Hình 2.30

Thí dụ 2.15 : Bộ phận làm việc của máy đầm đất có khối lượng M tựa trên các lò xo như hình 2.31a. Khối lượng vỏ máy là m . Ở bộ phận làm việc có hai khối lượng lệch tâm (mỗi khối lượng là $m_2/2$) quay với số vòng quay là n . Hãy chọn các tham số của máy sao cho máy làm việc ở vùng cộng hưởng và trong quá trình làm việc vỏ máy không nảy lên khỏi đất.



Hình 2.31

Lời giải : Mô hình cơ học của bộ phận làm việc của máy như hình 2.31b. Bộ phận này dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh. Toạ độ của m_2 là

$$x_2 = x + e \cos \Omega t$$

Phương trình vi phân chuyển động của mô hình máy làm đất là

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + b\dot{x} + cx &= \Omega^2 m_2 e \cos \Omega t \\ \rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x &= \Omega^2 x_0 \cos \Omega t \end{aligned}$$

với $x_0 = m_2 e / M$.

Nghiệm của phương trình này theo (3.23) có dạng

$$x = x_0 V_3 \cos(\Omega t - \varphi)$$

với
$$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}$$

Khi cản nhỏ, hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\eta \approx 1$

$$\Omega \approx \omega_0 \rightarrow \frac{\pi n}{30} \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \rightarrow c \approx \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 M$$

Khi cộng hưởng $V_3 \approx \frac{1}{2D}$

Để đơn giản ta bỏ qua lực cản. Khi đó phản lực pháp tuyến của nền tác dụng lên vỏ máy (hình 2.31c)

$$N = (M + m)g - cx$$

Do $V_3 \approx \frac{1}{2D}$ nên ta có

$$N_{\min} = (M + m)g - cx_{\max} = (M + m)g - \frac{cx_0}{2D}$$

Điều kiện để vỏ máy không nhảy khỏi nền

$$N_{\min} \geq 0 \rightarrow (M + m)g \geq \frac{cx_0}{2D} \rightarrow D \geq \frac{cx_0}{2(M + m)g}$$

3.4 Tính toán dao động cưỡng bức bằng hàm đáp ứng tần số

Xét phương trình dao động của hệ tuyến tính một bậc tự do có cản và lực kích động điều hoà

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = x(t) \quad (3.33)$$

Trong đó kích động được biểu diễn dưới dạng hàm số phức

$$x(t) = X(\Omega)e^{i\Omega t} \quad (3.34)$$

Ta sẽ tìm nghiệm của phương trình (3.33) dưới dạng

$$y(t) = Y(\Omega)e^{i\Omega t} \quad (3.35)$$

Với $Y(\Omega)$ là hàm biên độ phức cần xác định. Đạo hàm bậc một và bậc hai của hàm $y(t)$ theo thời gian t rồi thay vào phương trình (3.33) ta được

$$-m\Omega^2 Y(\Omega)e^{i\Omega t} + ib\Omega Y(\Omega)e^{i\Omega t} + cY(\Omega)e^{i\Omega t} = X(\Omega)e^{i\Omega t}$$

Khử $e^{i\Omega t}$ ở hai vế phương trình trên và nhóm theo $Y(\Omega)$ ta được

$$(c - m\Omega^2 + ib\Omega)Y(\Omega) = X(\Omega)$$

Từ đó suy ra

$$Y(\Omega) = \left(\frac{1}{c - m\Omega^2 + ib\Omega} \right) X(\Omega) \quad (3.36)$$

Nếu ta đặt

$$H(\Omega) = \frac{1}{c - m\Omega^2 + ib\Omega} \quad (3.37)$$

thì biểu thức (3.36) có dạng

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) \quad (3.38)$$

Định nghĩa. Hàm $H(\Omega)$ được xác định bởi công thức (3.37) được gọi là hàm đáp ứng tần số.

Nhân tử số và mẫu số của biểu thức (3.37) với $c - m\Omega^2 - ib\Omega$ ta được

$$H(\Omega) = \frac{c - m\Omega^2 - ib\Omega}{(c - m\Omega^2 + ib\Omega)(c - m\Omega^2 - ib\Omega)} = a + id$$

$$\text{Với: } a = \frac{c - m\Omega^2}{(c - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2}; \quad d = -\frac{b\Omega}{(c - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2}$$

Từ đó suy ra môđun $|H(\Omega)|$ và argumen φ của hàm đáp ứng tần số $H(\Omega)$

$$|H(\Omega)| = \sqrt{a^2 + d^2} = \frac{1}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2}} \quad (3.39)$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{d}{a}\right) = \arctg\left(\frac{-b\Omega}{c - m\Omega^2}\right) \quad (3.40)$$

Từ công thức (3.38) ta suy ra

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)X(\Omega)| = \frac{|X(\Omega)|}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2}} \quad (3.41)$$

Biến đổi công thức (3.37) ta được

$$H(\Omega) = \frac{1}{c - m\Omega^2 + ib\Omega} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - \eta^2 + i2D\eta}$$

Hàm $Z(\Omega) = \frac{1}{i\Omega H(\Omega)}$ được gọi là trở kháng cơ học.

3.5 Đệm đàn hồi của máy

Để giảm lực truyền xuống nền móng người ta dùng đệm đàn hồi. Giả sử máy có khối lượng m , đệm đàn hồi qui đổi thành lò xo có hệ số cứng c và giảm chấn có hệ số b . Nếu trên máy chịu tác dụng một lực điều hoà $F(t) = \hat{F}\sin\Omega t$ (hình 2.22a) thì lực truyền xuống nền được xác định bởi hệ thức

$$F_{\text{tt}} = cx + b\dot{x} \quad (3.42)$$

Như đã biết, phương trình vi phân mô tả dao động của mô hình 2.22a có dạng

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \frac{\hat{F}}{c} \sin \Omega t \quad (3.43)$$

Trong quá trình chuyển động bình ổn, nghiệm của phương trình trên có dạng

$$x = \frac{\hat{F}}{c} V_1(\eta, D) \sin(\Omega t - \psi) \quad (3.44)$$

Thế biểu thức (3.44) vào phương trình (3.42) ta được

$$\begin{aligned} F_{\text{td}} &= \frac{\hat{F}}{c} V_1(\eta, D) [c \sin(\Omega t - \psi) + b\Omega \cos(\Omega t - \psi)] \\ &= \frac{\hat{F}}{c} V_1(\eta, D) \sqrt{c^2 + b^2 \Omega^2} \sin(\Omega t - \psi + \gamma) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Với
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b\Omega}{c} = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2}$$

và do
$$\sqrt{c^2 + b^2 \Omega^2} = c \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \Omega^2} = c \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2}$$

ta có
$$F_{\text{td}} = \hat{F} V_2(\eta, D) \sin(\Omega t - \psi + \gamma) \quad (3.46)$$

Từ công thức (3.46) ta suy ra : Để cho lực truyền xuống nền móng nhỏ ta phải chọn các tham số của hệ sao cho hàm khuếch đại V_2 đạt cực tiểu.

Nếu trên máy có bộ phận quay chưa được cân bằng sẽ sinh ra các lực ly tâm (hình 2.22b). Nhờ có đệm đàn hồi ta có thể giảm được lực truyền xuống móng máy. Như đã biết phương trình vi phân dao động của mô hình 2.22b có dạng

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} \Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.47)$$

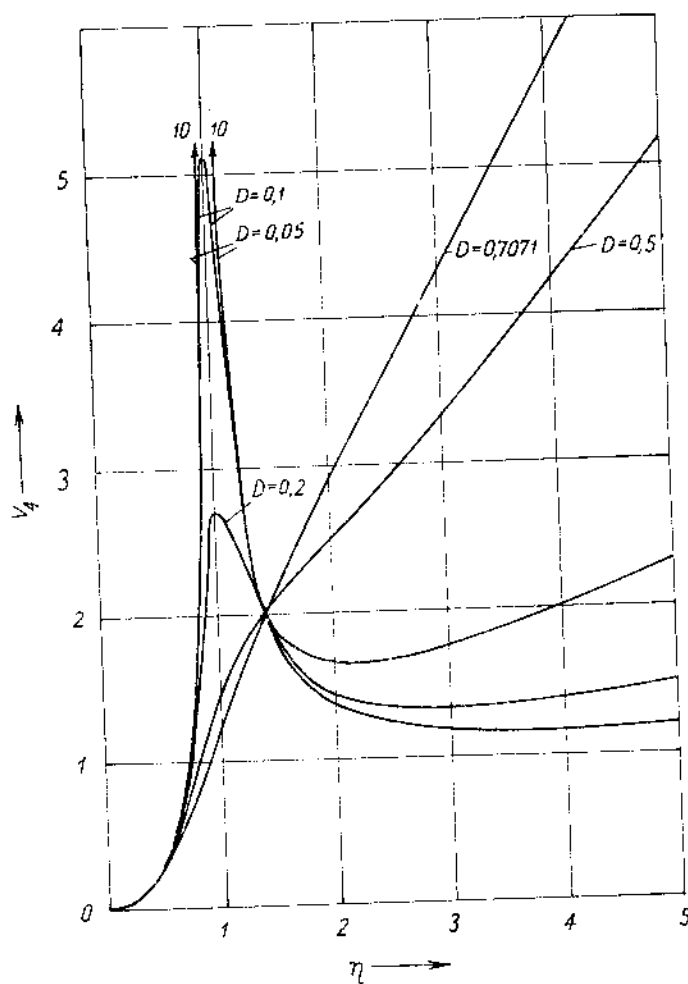
Nghiệm riêng của phương trình (3.47) có dạng

$$x = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_3(\eta, D) \sin(\Omega t - \psi) \quad (3.48)$$

Thế (3.48) vào biểu thức (3.42) ta được

$$F_{\text{td}} = \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_3(\eta, D) [c \sin(\Omega t - \psi) + b\Omega \cos(\Omega t - \psi)]$$

$$\begin{aligned}
 F_{td} &= \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_3(\eta, D) \sqrt{c^2 + b^2 \Omega^2} \sin(\Omega t - \psi + \gamma) \\
 &= c \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} \eta^2 V_2(\eta, D) \sin(\Omega t - \psi + \gamma)
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

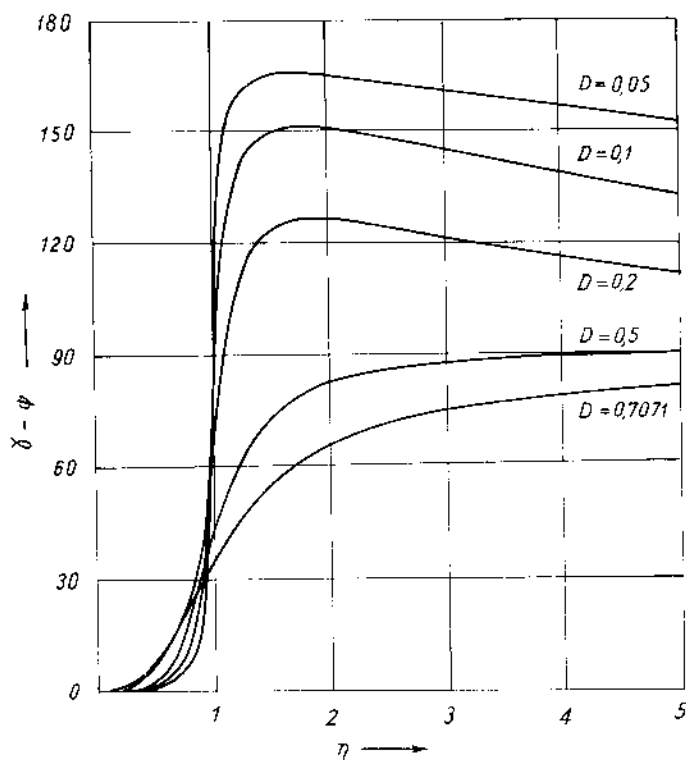


Hình 2.32a

Nếu ta đưa vào hàm khuếch đại $V_4(\eta, D) = \eta^2 V_2(\eta, D)$ thì lực truyền xuống đất có dạng

$$F_{td} = c \frac{m_1 r}{m_0 + m_1} V_4(\eta, D) \sin(\Omega t - \psi + \gamma) \quad (3.50)$$

Sự phụ thuộc của hàm khuếch đại $V_4(\eta, D)$ và góc $(\gamma - \psi)$ vào η khi cho biết giá trị của D cho trên hình 2.32a và 2.32b.



Hình 2.32b

Trong kỹ thuật ta cũng hay gặp bài toán đo ảnh hưởng rung của nền các thiết bị trên nền móng làm việc sẽ kém chính xác. Trong trường hợp này ta sử dụng mô hình 2.22d. Nhờ có đệm đàn hồi sẽ làm giảm ảnh hưởng rung của nền móng lên các thiết bị đặt trên đó.

Thí dụ 2.16 : Một máy gắn chặt vào móng và được đặt trên nền bằng một hệ lò xo song song. Khối lượng của máy và móng là 1000 kg. Trong quá trình máy làm việc xuất hiện một lực điều hoà tác dụng theo phương thẳng đứng với biên độ

$\hat{F} = 1000 \text{ N}$ và tần số $f = 10 \text{ Hz}$. Dưới ảnh hưởng của lực này móng dao động theo phương thẳng đứng. Hãy xác định hệ số cứng của lò xo sao cho chỉ có 5% lực tác dụng lên móng truyền xuống nền. Sau đó xác định độ lún tĩnh của móng và biên độ dao động của nó.

Lời giải : Mô hình cơ học của bài toán cho trên hình 2.33. Phương trình dao động của hệ là

$$m\ddot{x} + cx = \hat{F} \sin \Omega t$$

$$\rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hat{F}}{m} \sin \Omega t$$

Nghiệm dừng là

$$x = \frac{\hat{F}}{c} \frac{1}{1 - \eta^2} \sin \Omega t$$

Thế biểu thức nghiệm vào biểu thức tính lực truyền xuống nền ta được

$$F_{td} = cx = \hat{F} \frac{1}{1 - \eta^2} \sin \Omega t$$

Từ điều kiện $\frac{\hat{F}_{td}}{\hat{F}} = \frac{1}{|1 - \eta^2|} = 0,05$

ta suy ra $\eta = \sqrt{21} = 4,58$

Hệ số cứng của lò xo tổng là

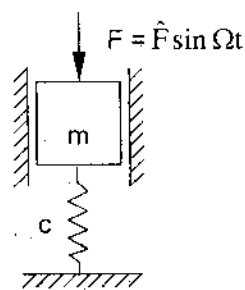
$$c = m\omega_0^2 = m \frac{\Omega^2}{\eta^2} = m \frac{(2\pi f)^2}{\eta^2} = 1000 \cdot \frac{(2\pi \cdot 10)^2}{21} = 188 \text{ N/mm}$$

Với hệ số cứng đó, độ nén tĩnh của móng máy là

$$\frac{mg}{c} = \frac{1000 \cdot 9,81}{188} = 52,2 \text{ mm}$$

Biên độ dao động dừng của móng máy là

$$\hat{x} = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \frac{\hat{F}}{c} = \frac{1000}{20 \cdot 188} = 0,266 \text{ mm}$$



Hình 2.33

3.6 Tính toán dao động cưỡng bức có ma sát khô

Phương trình vi phân mô tả dao động cưỡng bức của hệ có ma sát khô được viết dưới dạng

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + \mu mg \text{sign}(\dot{q}) = \hat{F} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (3.51)$$

Giả thiết ở các thời điểm $t = 0, \frac{2\pi}{\Omega}, \frac{4\pi}{\Omega}, \dots$ độ lệch q đạt cực đại ($\dot{q} = 0$), còn ở các thời điểm $t = \frac{\pi}{\Omega}, \frac{3\pi}{\Omega}, \frac{5\pi}{\Omega}, \dots$ thì $q = -A, \dot{q} = 0$. Như thế góc α là góc lệch pha giữa lực cực đại và độ lệch cực đại.

Giả sử trong nửa chu kỳ đầu $0 \leq t \leq \pi/\Omega$ vận tốc $\dot{q}$ âm. Phương trình vi phân dao động trong nửa chu kỳ này là

$$m\ddot{q} + c\dot{q} = \mu mg + \hat{F} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (3.52)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình trên có dạng

$$q = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + a + \frac{h}{1 - \eta^2} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (3.53)$$

Trong đó $\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad a = \frac{\mu mg}{c}, \quad h = \frac{\hat{F}}{c}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

Từ điều kiện $q(0) = A, \dot{q}(0) = 0$ ta có

$$C_1 + a + \frac{h}{1 - \eta^2} \cos \alpha = A \quad (3.54)$$

$$C_2 \omega_0 - \frac{h\Omega}{1 - \eta^2} \sin \alpha = 0 \quad (3.55)$$

Từ điều kiện $q\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = -A, \dot{q}\left(\frac{\pi}{\Omega}\right) = 0$ ta suy ra

$$C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + a - \frac{h}{1 - \eta^2} \cos \alpha = -A \quad (3.56)$$

$$-C_1 \Omega \sin \lambda + C_2 \Omega \cos \lambda + \frac{h\Omega}{1 - \eta^2} \sin \alpha = 0 \quad (3.57)$$

trong đó $\lambda = \frac{\pi\omega_0}{\Omega}$

Như thế ta có hệ bốn phương trình (3.54) - (3.57) để xác định bốn ẩn C_1, C_2, A, α .

Cộng các phương trình (3.54) và (3.56), (3.55) và (3.57) ta nhận được hệ hai phương trình để xác định C_1 và C_2

$$\begin{aligned} C_1(1 + \cos \lambda) + C_2 \sin \lambda + 2a &= 0 \\ -C_1 \sin \lambda + C_2(1 + \cos \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $C_1 = -a$; $C_2 = -a \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}$

Thế các kết quả này vào các phương trình (3.54) và (3.55) ta dẫn đến các phương trình

$$\begin{aligned} A &= \frac{h}{1 - \eta^2} \cos \alpha \\ -a \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_0}{2\Omega} &= \frac{h\eta}{1 - \eta^2} \sin \alpha \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra công thức xác định biên độ

$$A = \frac{\sqrt{h^2 - \left[a(1 - \eta^2) \frac{1}{\eta} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega_0}{2\Omega} \right]^2}}{|1 - \eta^2|} \quad (3.58)$$

Chú ý rằng khi $\Omega \rightarrow \omega_0$ ($\eta \rightarrow 1$) ta có

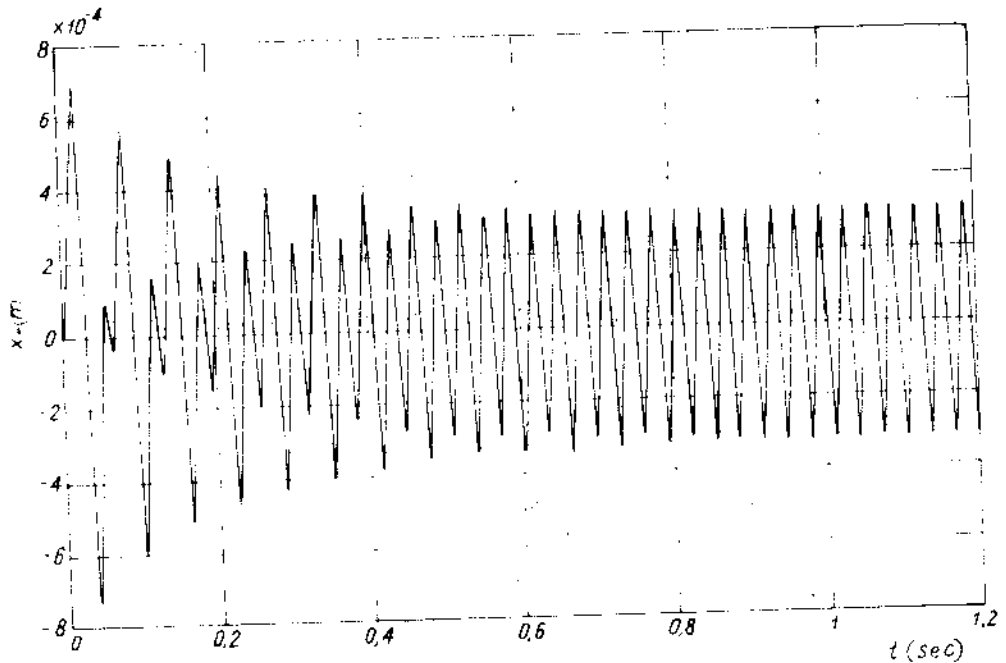
$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{\eta} (1 - \eta^2) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\eta} = -\frac{4}{\pi}$$

$$\text{Do đó} \quad A = \frac{\sqrt{h^2 - \left(\frac{4a}{\pi} \right)^2}}{|1 - \eta^2|} \quad (3.59)$$

Với sự phát triển của tin học, việc tính toán dao động cưỡng bức có ma sát khô sẽ trở nên đơn giản hơn nhiều, nếu ta sử dụng phương pháp số.

Ta xét phương trình dao động cưỡng bức có ma sát khô dạng

$$m\ddot{q} + c\dot{q} = -\mu mg \operatorname{sign}(\dot{q}) + \hat{F} \sin \Omega t \quad (3.60)$$



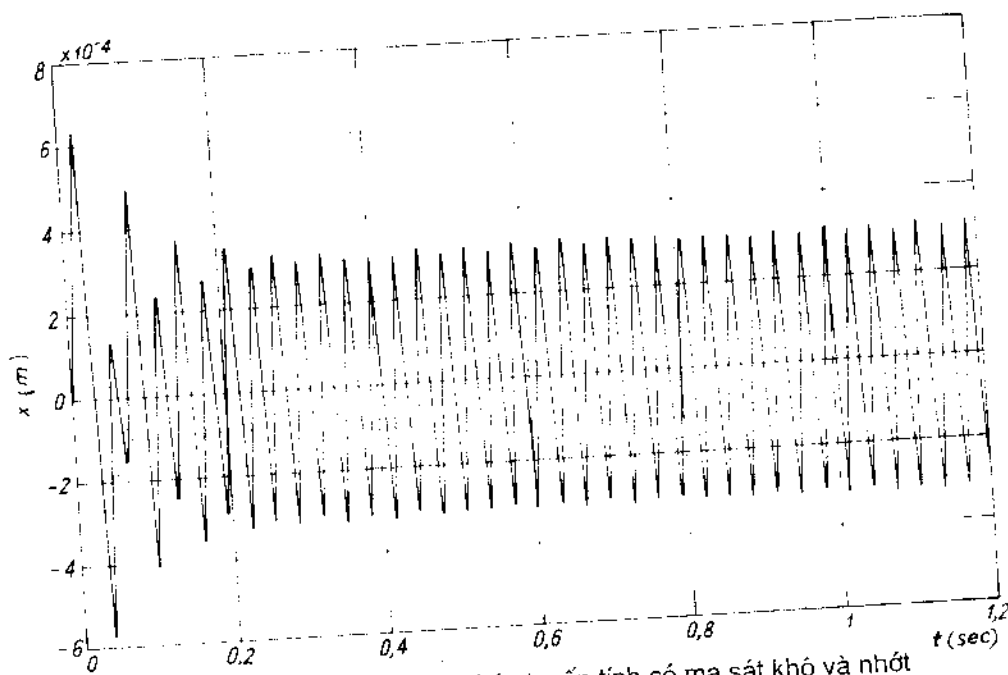
Hình 2.34 Dao động cưỡng bức tuyến tính có ma sát khô

Với các số liệu $m = 100 \text{ kg}$, $\mu = 0,1$, $\omega_0 = \sqrt{c/m} = 100 \text{ s}^{-1}$, $\Omega = 200 \text{ s}^{-1}$, $\hat{F} = 981 \text{ N}$ và các điều kiện đầu $q(0) = \dot{q}(0) = 0$ ta dễ dàng tìm nghiệm của phương trình (3.60) bằng hệ chương trình tính MATLAB [15]. Kết quả lấy ra dưới dạng đồ thị như hình 2.34.

Nếu ta quan tâm đến ma sát nhớt thì phương trình vi phân dao động có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = -\mu g \text{sign}(\dot{q}) + \frac{\hat{F}}{m} \sin \Omega t \quad (3.61)$$

Với các số liệu như trên và cho thêm $\delta = 8$, kết quả tính toán cho trên hình 2.35.



Hình 2.35 Dao động cưỡng bức tuyến tính có ma sát khô và nhớt

3.7 Một vài nhận xét về tính chất dao động cưỡng bức khi có ma sát

Qua các tính toán ở trên ta có thể rút ra một số nhận xét về tính chất của dao động tuyến tính có cản nhớt chịu kích động điều hoà ở trạng thái bình ổn như sau:

- Dao động cưỡng bức khi có cản xảy ra với tần số của lực kích động.
- Biên độ dao động cưỡng bức không phụ thuộc vào các điều kiện đầu và thời gian. Do đó khác với dao động tự do có cản, dao động cưỡng bức không tắt dần vì lực cản.

- Khi $\Omega = \omega_0$ biên độ dao động cưỡng bức tuy khá lớn, nhưng vẫn là đại lượng hữu hạn. Nó chưa phải là giá trị lớn nhất trong các giá trị của biên độ.

Khi hệ chịu tác dụng lực điều hoà $F = \hat{F} \sin \Omega t$, biên độ dao động cưỡng bức có dạng

$$A = \hat{q} = \frac{\hat{F}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

Từ điều kiện $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$ ta suy ra $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$. Vậy $A = A_{\max}$ khi $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$. Biên độ dao động cưỡng bức đạt cực đại khi Ω nhỏ hơn ω_0 một chút.

- Trong dao động cưỡng bức có cản nhớt luôn xảy ra sự lệch pha giữa pha dao động và pha của lực kích động. Độ lệch pha đó được xác định bởi công thức

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Khi $\Omega = \omega_0$ thì $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ do đó $\alpha = \pi/2$. Vậy dao động cưỡng bức khi cộng hưởng có pha lệch một góc $\pi/2$ so với pha của ngoại lực.

- Ở xa vùng cộng hưởng, biên độ dao động cưỡng bức với lực cản nhỏ không khác mấy so với biên độ dao động cưỡng bức không cản. Ở gần vùng cộng hưởng lực cản có một vai trò rất quan trọng. Trong vùng cộng hưởng độ lớn biên độ dao động cưỡng bức phụ thuộc rõ rệt vào hệ số cản.

§4. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ CHỊU KÍCH ĐỘNG ĐA TẦN VÀ CHỊU KÍCH ĐỘNG TUẦN HOÀN

4.1 Tính toán dao động của hệ chịu kích động đa tần

Trong thực tế ta cũng hay gặp dao động của hệ chịu kích động của tổ hợp các lực ngoài với các tần số khác nhau. Phương trình chuyển động của hệ có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = \sum_{i=1}^n \hat{F}_i \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \quad (4.1)$$

Chia hai vế của phương trình (4.1) cho m và sử dụng các ký hiệu quen biết ta được

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{F}_i}{m} \sin(\Omega_i t + \alpha_i) \quad (4.2)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (4.2) dưới dạng

$$q = \sum_{i=1}^n \hat{q}_i \sin(\Omega_i t + \alpha_i - \beta_i) \quad (4.3)$$

Thế biểu thức (4.3) vào phương trình (4.2) ta dẫn đến hệ phương trình để xác định $\hat{q}_i$ và β_i

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega_i^2) \hat{q}_i \cos \beta_i + 2\delta\Omega_i \hat{q}_i \sin \beta_i &= \frac{\hat{F}_i}{m} \\ 2\delta\Omega_i \hat{q}_i \cos \beta_i - (\omega_0^2 - \Omega_i^2) \hat{q}_i \sin \beta_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hệ phương trình (4.4) là hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với hai ẩn là $\hat{q}_i \cos \beta_i$ và $\hat{q}_i \sin \beta_i$. Giải ra ta được

$$\hat{q}_i \cos \beta_i = \frac{\hat{F}_i (\omega_0^2 - \Omega_i^2)}{m \left[(\omega_0^2 - \Omega_i^2)^2 + 4\delta^2 \Omega_i^2 \right]} \quad (4.5)$$

$$\hat{q}_i \sin \beta_i = \frac{\hat{F}_i 2\delta\Omega_i}{m \left[(\omega_0^2 - \Omega_i^2)^2 + 4\delta^2 \Omega_i^2 \right]} \quad (4.6)$$

Chia biểu thức (4.6) cho (4.5) ta được

$$\operatorname{tg} \beta_i = \frac{2\delta\Omega_i}{\omega_0^2 - \Omega_i^2} = \frac{2D\eta_i}{1 - \eta_i^2} \quad (4.7)$$

$$\text{Với } \eta_i = \frac{\Omega_i}{\omega_0}$$

Bình phương các biểu thức (4.5) và (4.6) rồi cộng lại ta rút ra

$$\hat{q}_i = \frac{\hat{F}_i}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta_i^2)^2 + 4D^2 \eta_i^2}} = \frac{\hat{F}_i}{c} V_i(\eta_i, D) \quad (4.8)$$

Thí dụ 2.17 : Trên hệ dao động khối lượng - lò xo - cản nhớt tác dụng lực $F(t)$ có dạng

$$F(t) = F_0 (\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t)$$

Cho biết ω_0 là tần số riêng của hệ, độ cản $D = 0,2$ và tần số kích động $\Omega = \omega_0 / 2$. Hãy xác định dao động $x(t)$ của hệ.

Lời giải : Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t \right)$$

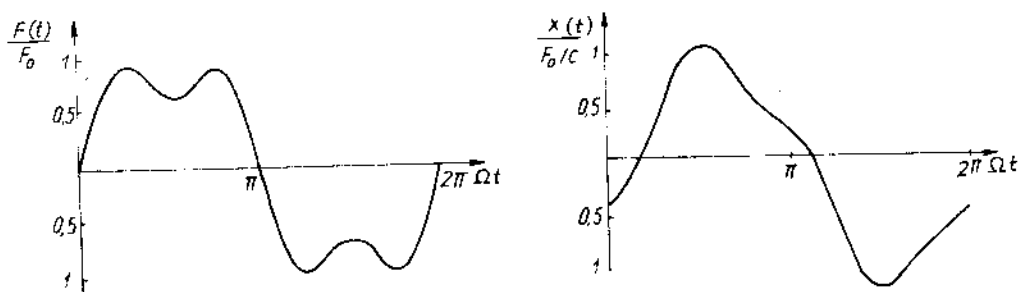
Chia hai vế cho khối lượng m ta được

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{c} \omega_0^2 \left(\sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t \right)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng của phương trình vi phân tuyến tính ta đưa việc giải phương trình trên về việc tìm nghiệm của hai phương trình vi phân sau

$$\ddot{x}_1 + 2\delta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_0}{c} \omega_0^2 \sin \Omega t$$

$$\ddot{x}_3 + 2\delta\dot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 = \frac{F_0}{3c} \omega_0^2 \sin 3\Omega t$$



Hình 2.36

Theo kết quả tính toán ở phần trên ta có

$$x(t) = \hat{x}_1 \sin(\Omega t - \beta_1) + \hat{x}_3 \sin(3\Omega t - \beta_3)$$

với
$$\hat{x}_1 = \frac{F_0}{c} V_1(\eta_1, D); \quad \beta_1 = \arctg\left(\frac{2D\eta_1}{1 - \eta_1^2}\right)$$

$$\hat{x}_3 = \frac{F_0}{3c} V_1(\eta_3, D); \quad \beta_3 = \arctg\left(\frac{2D\eta_3}{1 - \eta_3^2}\right)$$

Theo các số liệu của đầu bài ta có

$$\eta_1 = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}; \quad \eta_3 = \frac{3\Omega}{\omega_0} = \frac{3}{2}; \quad D = 0,2$$

Từ đó ta tính toán được

$$V_1(0,5; 0,2) = 1,2883; \quad V_1(1,5; 0,2) = 0,2404 \times 3$$

$$\beta_1 = 0,0830 \pi; \quad \beta_3 = 0,8576 \pi$$

Vậy nghiệm của phương trình dao động có dạng

$$x(t) = \frac{F_0}{c} [1,2883 \sin(\Omega t - 0,0830\pi) + 0,2404 \sin(3\Omega t - 0,8576\pi)]$$

Trên hình 2.36 là đồ thị của hàm kích động $F(t)$ và nghiệm phương trình dao động $x(t)$.

4.2 Tính toán dao động khi hai kích động điều hoà có tần số gần nhau

Phương trình vi phân của hệ dao động một bậc tự do không cản chịu tác dụng của hai lực điều hoà với các tần số Ω_1 và Ω_2 có dạng

$$m\ddot{q} + c\dot{q} = \hat{F}_1 \sin \Omega_1 t + \hat{F}_2 \sin \Omega_2 t \quad (4.9)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, dao động cưỡng bức của hệ có dạng

$$q(t) = A_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \sin \Omega_2 t \quad (4.10)$$

$$\text{với} \quad A_1 = \frac{\hat{F}_1}{c} \frac{1}{1 - \eta_1^2}; \quad A_2 = \frac{\hat{F}_2}{c} \frac{1}{1 - \eta_2^2} \quad (4.11)$$

Xét trường hợp Ω_1 và Ω_2 khá gần nhau. Do đặc điểm này ta sẽ biểu diễn nghiệm (4.10) dưới dạng

$$\begin{aligned} q(t) &= A_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \sin \Omega_2 t \\ &= \frac{A_1 + A_2}{2} (\sin \Omega_1 t + \sin \Omega_2 t) + \frac{A_1 - A_2}{2} (\sin \Omega_1 t - \sin \Omega_2 t) \\ &= (A_1 + A_2) \sin \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t \cos \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + (A_1 - A_2) \cos \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t \sin \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \end{aligned}$$

Ta đưa vào ký hiệu

$$B_1(t) = (A_1 + A_2) \cos \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t$$

$$B_2(t) = (A_1 - A_2) \sin \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t$$

$$\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$$

Do Ω_1 gần Ω_2 nên $B_1(t)$, $B_2(t)$ là các hàm thay đổi chậm theo t .

Nghiệm phương trình (4.9) được viết dưới dạng

$$q(t) = A \sin(\Omega t + \alpha) = B_1 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t \quad (4.12)$$

Trong đó

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} : \text{Biên độ thay đổi chậm theo thời gian}$$

$$\Omega = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} : \text{Giá trị trung bình của hai tần số}$$

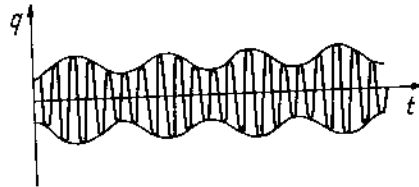
$$\alpha = \arctg\left(\frac{B_1}{B_2}\right) : \text{Pha thay đổi chậm theo thời gian}$$

Như thế chuyển động của hệ có tính chất điều hoà với biên độ dao động A là hàm thay đổi theo thời gian. Chu kỳ thay đổi theo thời gian là

$$T_a = \frac{4\pi}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

Vì hiệu số $\Omega_1 - \Omega_2$ nhỏ nên chu kỳ T_a có giá trị lớn hơn nhiều so với chu kỳ dao động của hệ

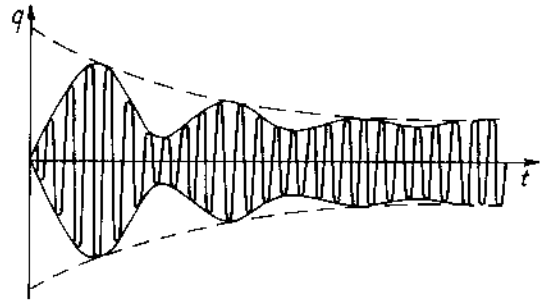
$$T = \frac{4\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}$$



Hình 2.37

Đồ thị dao động biểu thị như trên hình 2.37. Hiện tượng dao động như hình vẽ này được gọi là hiện tượng phách. Như vậy hiện tượng phách là hiện tượng biên độ dao động thay đổi tuần hoàn chậm theo thời gian.

Hiện tượng phách ở đây xuất hiện khi tần số kích động Ω_1 khá gần tần số kích động Ω_2 . Trong mục 3 của chương này ta cũng thấy hiện tượng phách xuất hiện khi tần số của lực kích động Ω khá gần tần số riêng ω_0 của hệ. Tuy nhiên nếu quan tâm đến lực cản thì dao động tự do sẽ tắt dần, và do đó với thời gian hiện tượng phách sẽ mất đi (hình 2.38). Còn trong trường hợp xét ở trên, dao động phách là dao động bình ổn.



Hình 2.38

4.3 Tính toán dao động của hệ chịu kích động tuần hoàn

Trong thực tế ta hay gặp các lực kích động tuần hoàn. Như đã biết từ giải tích toán, hàm $f(t)$ tuần hoàn chu kỳ T bao giờ cũng có thể khai triển thành chuỗi Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t) \quad (4.13)$$

trong đó $\Omega = 2\pi/T$ là tần số cơ bản của lực kích động. Các hệ số Fourier a_0, a_j, b_j ($j=1, \dots, \infty$) được xác định theo công thức sau

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_j &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos j\Omega t dt \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin j\Omega t dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

Từ các công thức (4.14) ta thấy, nếu $f(t)$ là hàm chẵn thì $b_j = 0$, nếu $f(t)$ là hàm lẻ thì $a_0 = a_j = 0$.

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của lực tuần hoàn có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} \left[a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t) \right] \quad (4.15)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (4.15) dưới dạng

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t) \quad (4.16)$$

Thế biểu thức (4.16) vào phương trình (4.15) và so sánh các hệ số của $\sin j\Omega t$ và $\cos j\Omega t$, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các hằng số chưa biết A_0, A_j, B_j

$$\begin{aligned} \omega_0^2 A_0 &= \frac{a_0}{m} \\ \left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2 \right] A_j + 2\delta j\Omega B_j &= \frac{a_j}{m} \\ -2\delta j\Omega A_j + \left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2 \right] B_j &= \frac{b_j}{m} \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên ta nhận được

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{m\omega_0^2} \\ A_j &= \frac{\left[\omega_0^2 - j^2\Omega^2 \right] a_j - 2\delta j\Omega b_j}{m \left[\left(\omega_0^2 - j^2\Omega^2 \right)^2 + 4\delta^2 j^2\Omega^2 \right]} \\ B_j &= \frac{\left[\omega_0^2 - j^2\Omega^2 \right] b_j + 2\delta j\Omega a_j}{m \left[\left(\omega_0^2 - j^2\Omega^2 \right)^2 + 4\delta^2 j^2\Omega^2 \right]} \end{aligned}$$

Như thế dao động cưỡng bức mạnh phát sinh khi $\Omega = \omega_0 / j$. Cộng hưởng loại này được gọi là cộng hưởng cấp j .

Do hệ thức lượng giác

$$A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t = C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j)$$

với $C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$, $\text{tg}\alpha_j = A_j / B_j$, biểu thức nghiệm (4.16) có thể viết dưới dạng

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \quad (4.17)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (4.15) khi $\delta < \omega_0$ có dạng

$$q(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta) + A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \quad (4.18)$$

Số hạng thứ nhất của (4.18) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Với t đủ lớn, ta chỉ cần quan tâm tới thành phần thứ hai của (4.18), biểu thị dao động cưỡng bức của hệ.

4.4 Tính toán dao động của hệ chịu kích động xung tuần hoàn

Ta xét trường hợp kích động lên hệ dao động khối lượng - lò xo - cản nhớt là các xung tuần hoàn. Giả sử cho một xung tuần hoàn như hình 2-39.

Khai triển Fourier hàm $f(t)$ ta được

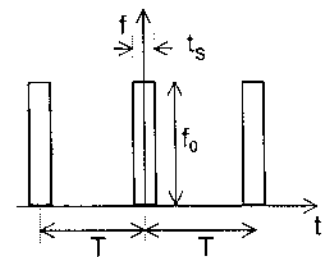
$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(a_j \cos j \frac{2\pi}{T} t + b_j \sin j \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (4.19)$$

Trong đó các hệ số Fourier được xác định bởi các hệ thức sau

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} f_0 dt = \frac{1}{T} f_0 t_s$$

$$a_j = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} f_0 \cos\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

$$= \frac{f_0}{j\pi} \int_{-\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} \cos\left(j \frac{2\pi t}{T}\right) d\left(j \frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{2f_0}{j\pi} \sin \frac{j\pi t_s}{T}$$



Hình 2.39

$$b_j = \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} f_0 \sin\left(j \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{f_0}{j\pi} \int_{-\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} \sin\left(j \frac{2\pi t}{T}\right) d\left(j \frac{2\pi t}{T}\right) = 0$$

Phương trình vi phân dao động có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} \left(a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\Omega t \right) \quad (4.20)$$

Trong đó $\Omega = \frac{2\pi}{T}$.

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình (4.20) dưới dạng

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t) \quad (4.21)$$

Thế biểu thức nghiệm (4.21) vào phương trình (4.20) rồi so sánh các hệ số của $\sin j\Omega t$ và $\cos j\Omega t$ ta nhận được hệ phương trình để xác định A_0 , A_j , B_j

$$\begin{aligned} \omega_0^2 A_0 &= \frac{a_0}{m} \\ \left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2 \right] A_j + 2\delta j\Omega B_j &= \frac{a_j}{m} \\ -2\delta j\Omega A_j + \left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2 \right] B_j &= 0 \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{f_0 t_s}{cT} \\ A_j &= \frac{\left[\omega_0^2 - j^2 \Omega^2 \right] \frac{2f_0}{j\pi} \sin \frac{j\pi t_s}{T}}{m \left[\left(\omega_0^2 - j^2 \Omega^2 \right)^2 + 4\delta^2 j^2 \Omega^2 \right]} \\ B_j &= \frac{2\delta j\Omega \frac{2f_0}{j\pi} \sin \frac{j\pi t_s}{T}}{m \left[\left(\omega_0^2 - j^2 \Omega^2 \right)^2 + 4\delta^2 j^2 \Omega^2 \right]} \end{aligned}$$

Áp dụng biến đổi lượng giác

$$A_j \cos j\Omega t + B_j \sin j\Omega t = C_j \cos(j\Omega t - \beta_j)$$

$$C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}, \quad \operatorname{tg} \beta_j = \frac{2j\delta\Omega}{\omega_0^2 - j^2\Omega^2}$$

biểu thức nghiệm (4.21) được viết dưới dạng

$$q^* = \frac{f_0 t_s}{cT} + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos(j\Omega t - \beta_j) \quad (4.22)$$

Trong đó

$$C_j = \frac{2f_0 \sin \frac{j\pi t_s}{T}}{cj\pi \sqrt{\left(1 - j^2 \eta^2\right)^2 + 4j^2 D^2 \eta^2}}$$

Chú ý rằng a_j tỷ lệ với $1/j$ còn C_j tỷ lệ với $1/j^3$ cho nên chuỗi (4.22) hội tụ tốt hơn chuỗi (4.19).

Bây giờ ta xét trường hợp đặc biệt. Giả sử $t_s \rightarrow 0$ thì $f_0 \rightarrow \infty$ và tích $f_0 t_s = I$ (hằng số hữu hạn). Khi đó ta có

$$a_0^* = \lim_{\substack{t_s \rightarrow 0 \\ f_0 \rightarrow \infty}} a_0 = \lim_{\substack{t_s \rightarrow 0 \\ f_0 \rightarrow \infty}} \frac{f_0 t_s}{T} = \frac{I}{T}$$

$$a_j^* = \lim_{\substack{t_s \rightarrow 0 \\ f_0 \rightarrow \infty}} a_j = \lim_{\substack{t_s \rightarrow 0 \\ f_0 \rightarrow \infty}} \frac{2f_0}{j\pi} \sin \frac{j\pi t_s}{T}$$

Giới hạn này có dạng $0 \cdot \infty$. Ta khai triển Taylor hàm $\sin \frac{j\pi t_s}{T}$ và bỏ qua các số hạng bậc cao, rồi lấy giới hạn. Ta được

$$a_j^* = \lim_{\substack{t_s \rightarrow 0 \\ f_0 \rightarrow \infty}} a_j = \frac{2I}{T}$$

Khi đó chuỗi Fourier của hàm $f(t)$ sẽ phân kỳ. Còn chuỗi Fourier của nghiệm q^*

$$q^*(t) = \frac{1}{cT} + \frac{2I}{cT} \sum_{j=1}^s \frac{\cos\left(\frac{j2\pi}{T}t - \beta_j\right)}{\sqrt{\left(1 - j^2\eta^2\right)^2 + 4j^2D^2\eta^2}}$$

hội tụ.

§5. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC CỦA HỆ CHỊU KÍCH ĐỘNG KHÔNG TUẦN HOÀN

5.1 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t) \quad (5.1)$$

Tương tự như trong §3, phương trình (5.1) có thể biến đổi về dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = g(t) \quad (5.2)$$

Để tìm nghiệm của phương trình vi phân (5.2) trước hết ta tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (5.3)$$

Trong trường hợp lực cản nhỏ ($\delta < \omega_0$), nghiệm tổng quát của phương trình (5.3) có dạng

$$q(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha) = e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \quad (5.4)$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số, còn $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$. Nếu ta đặt $q_1 = e^{-\delta t} \cos \omega t$, $q_2 = e^{-\delta t} \sin \omega t$, thì biểu thức nghiệm (5.4) được viết lại dưới dạng

$$q(t) = C_1 q_1 + C_2 q_2 \quad (5.5)$$

Theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrange ta tìm nghiệm của phương trình vi phân có vế phải (5.2) dưới dạng tương tự như (5.5) với C_1 và C_2 là các hàm của thời gian

$$q(t) = C_1(t) q_1 + C_2(t) q_2 \quad (5.6)$$

Đạo hàm biểu thức (5.6) theo t ta được

$$\dot{q}(t) = \dot{C}_1 q_1 + \dot{C}_2 q_2 + C_1 \dot{q}_1 + C_2 \dot{q}_2$$

Nếu ta đưa vào điều kiện

$$\dot{C}_1 q_1 + \dot{C}_2 q_2 = 0 \quad (5.7)$$

thì biểu thức đối với $\dot{q}(t)$ có dạng

$$\dot{q}(t) = C_1 \dot{q}_1 + C_2 \dot{q}_2 \quad (5.8)$$

Đạo hàm biểu thức (5.8) theo t

$$\ddot{q}(t) = \dot{C}_1 \dot{q}_1 + \dot{C}_2 \dot{q}_2 + C_1 \ddot{q}_1 + C_2 \ddot{q}_2 \quad (5.9)$$

Thế các biểu thức (5.6), (5.8) và (5.9) vào phương trình vi phân (5.2) ta nhận được phương trình

$$\dot{C}_1 \dot{q}_1 + \dot{C}_2 \dot{q}_2 = g(t) \quad (5.10)$$

Từ hai phương trình (5.7) và (5.10) ta giải ra được

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -\frac{q_2}{q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2} g(t) \\ \dot{C}_2 &= \frac{q_1}{q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2} g(t) \end{aligned}$$

Thế các biểu thức $q_1 = e^{-\delta t} \cos \omega t$, $q_2 = e^{-\delta t} \sin \omega t$ vào hai phương trình trên ta nhận được các phương trình vi phân cấp một để xác định các hàm $C_1(t)$ và $C_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -\frac{1}{\omega} e^{\delta t} \sin \omega t. g(t) \\ \dot{C}_2 &= \frac{1}{\omega} e^{\delta t} \cos \omega t. g(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Tích phân các phương trình (5.11) ta được

$$\begin{aligned} C_1(t) &= A - \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{\delta \tau} \sin \omega \tau. g(\tau) d\tau \\ C_2(t) &= B + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{\delta \tau} \cos \omega \tau. g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.12)$$

Thế (5.12) vào (5.6) ta được biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình (5.2)

$$q(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (5.13)$$

Biểu thức nghiệm (5.13) gồm hai thành phần. Thành phần

$$q_h(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (5.14)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng (5.3). Thành phần

$$q_r(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (5.15)$$

là nghiệm riêng của phương trình (5.2).

Chú ý đến các điều kiện đầu

$$q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

ta xác định được các hằng số tích phân

$$A = q_0; \quad B = \frac{1}{\omega} (\dot{q}_0 + \delta q_0)$$

Biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (5.2) với các điều kiện đầu $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ bây giờ có dạng

$$q(t) = e^{-\delta t} \left[q_0 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} (\dot{q}_0 + \delta q_0) \sin \omega t \right] + \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (5.16)$$

Thí dụ 2.18 : Cho hệ dao động tuyến tính với các tham số (m, b, c) chịu tác dụng của lực (hình 2.40a) có dạng

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \leq 0 \\ \frac{F_0}{t_0} t & \text{khi } 0 < t \leq t_0 \\ 0 & \text{khi } t > t_0 \end{cases}$$

Hãy xác định dao động của hệ, biết rằng khi $t \leq 0$ hệ đứng yên.

Lời giải : Phương trình dao động của hệ có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{f(t)}{m} = g(t)$$

Khi $t \leq 0$ hệ đứng yên. Do đó $q(t) = 0$ và $\dot{q}(t) = 0$ khi $t \leq 0$. Khi $0 < t \leq t_0$, áp dụng công thức (5.16), dao động cưỡng bức của hệ có dạng

$$q(t) = \frac{F_0}{m\omega t_0} \int_0^t \tau e^{-\delta(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Sử dụng phép đổi biến $u = t - \tau$ ta biến đổi biểu thức nghiệm ở trên về dạng

$$\begin{aligned} q(t) &= -\frac{F_0}{m\omega t_0} \int_t^0 (t-u) e^{-\delta u} \sin \omega u du = \\ &= \frac{F_0}{m\omega t_0} \left\{ \int_0^t t e^{-\delta u} \sin \omega u du - \int_0^t u e^{-\delta u} \sin \omega u du \right\} \end{aligned}$$

Thực hiện tích phân từng phần ta được

$$q(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2 t_0} \left[\omega_0 t - 2D + e^{-\delta t} \left(2D \cos \omega t - \frac{1-2D^2}{\sqrt{1-D^2}} \sin \omega t \right) \right]$$

Trong đó ta đã sử dụng các ký hiệu $\delta = \omega_0 D$, $\omega = \omega_0 \sqrt{1-D^2}$.

Từ biểu thức trên ta dễ dàng xác định được độ lệch và vận tốc tại thời điểm $t = t_0$

$$\begin{aligned} q(t_0) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2 t_0} \left[\omega_0 t_0 - 2D + e^{-\delta t_0} \left(2D \cos \omega t_0 - \frac{1-2D^2}{\sqrt{1-D^2}} \sin \omega t_0 \right) \right] \\ \dot{q}(t_0) &= \frac{F_0}{m\omega_0^2 t_0} \left[1 - \frac{e^{-\delta t_0}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega t_0 - \alpha) \right], \quad \alpha = \arcsin D \end{aligned}$$

Đó chính là điều kiện đầu cho quá trình dao động trong khoảng $t > t_0$. Trong khoảng này hệ thực hiện dao động tự do có cản. Biểu thức nghiệm có dạng

$$q(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad t > t_0$$

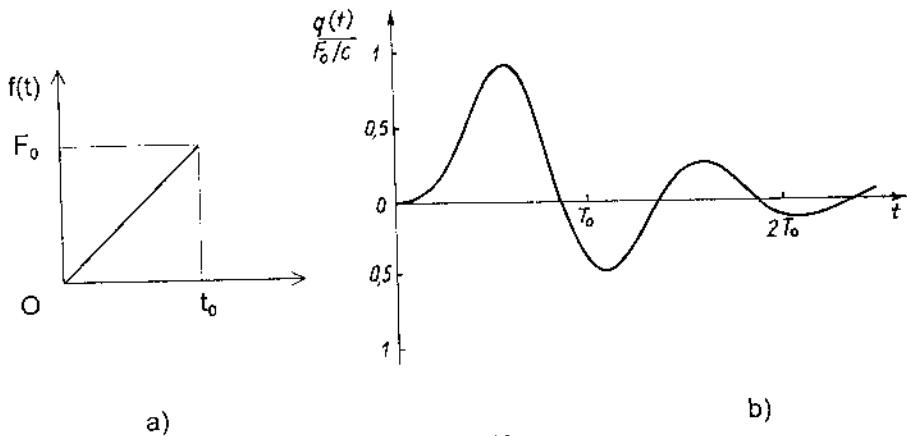
Các hằng số A và B được xác định từ các điều kiện đầu

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{\delta t_0}}{\omega} [q(t_0)(\omega \cos \omega t_0 - \delta \sin \omega t_0) - \dot{q}(t_0) \sin \omega t_0] \\ B &= \frac{e^{\delta t_0}}{\omega} [q(t_0)(\delta \cos \omega t_0 + \omega \sin \omega t_0) + \dot{q}(t_0) \cos \omega t_0] \end{aligned}$$

Vậy khi $t > t_0$ hệ thực hiện dao động theo qui luật

$$q(t) = \frac{e^{-\delta(t-t_0)}}{\sqrt{1-D^2}} \left\{ q(t_0) \cos[\omega(t-t_0) - \alpha] + \frac{\dot{q}(t_0)}{\omega_0} \sin \omega(t-t_0) \right\}$$

Với $\frac{t_0}{T_0} = 0,5$, $(T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0})$ và $D = 0,2$ đồ thị dao động vẽ trên hình 2.40b.



Hình 2.40

5.2 Tìm nghiệm bằng hàm va chạm

Xét phương trình vi phân dao động dạng

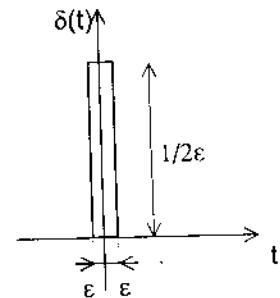
$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t) = I\delta(t) \quad (5.17)$$

Trong đó $\delta(t)$ là hàm Delta Dirac, xác định bởi hệ thức

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \neq 0 \\ \infty & \text{khi } t = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (5.19)$$

Trong phương trình (5.17) hằng số I là cường độ của một va chạm tùy ý trong một khoảng thời gian rất bé. Thứ nguyên của I là lực x thời gian (Ns). Phương trình dao động (5.17) có thể viết lại dưới dạng



Hình 2.41

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = g(t) = \frac{I}{m} \delta(t) \quad (5.20)$$

Giả sử khi $t < 0$ hệ ở trạng thái tĩnh. Do đó tại thời điểm ngay trước lúc va chạm (ta ký hiệu là $t = -0$), ta có các điều kiện đầu

$$q(-0) = 0; \dot{q}(-0) = 0$$

Tại thời điểm $t = 0$ xảy ra hiện tượng va chạm. Thời gian va chạm rất ngắn. Tại thời điểm ngay sau va chạm (ký hiệu là $t = +0$), ta có các điều kiện đầu

$$q(+0) = 0; \dot{q}(+0) = \dot{q}_0 = v_0 \quad (5.21)$$

Do hàm $g(t) = 0$ với $t \neq 0$, nên phương trình vi phân dao động ứng với $t \neq 0$ có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (5.22)$$

Nghiệm của phương trình vi phân (5.22) như đã biết có dạng

$$q(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\dot{q}(t) = e^{-\delta t} [(\omega B - \delta A) \cos \omega t - (\omega A + \delta B) \sin \omega t]$$

Các hằng số tích phân A và B được xác định từ các điều kiện đầu (5.21)

$$A = 0; B = \frac{v_0}{\omega}$$

Do đó biểu thức nghiệm sau va chạm có dạng

$$q(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t \quad (5.23)$$

Để xác định hằng số vận tốc v_0 ta tiến hành tích phân phương trình vi phân (5.20). Nhân hai vế phương trình (5.20) với dt rồi lấy tích phân từ $-\varepsilon$ đến ε ta được

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\dot{q} + 2\delta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dq + \omega_0^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q dt = \frac{I}{m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt$$

Do trong quá trình va chạm chỉ có bước nhảy về vận tốc, còn $q(+0) = q(-0) = 0$, nên từ phương trình trên ta suy ra

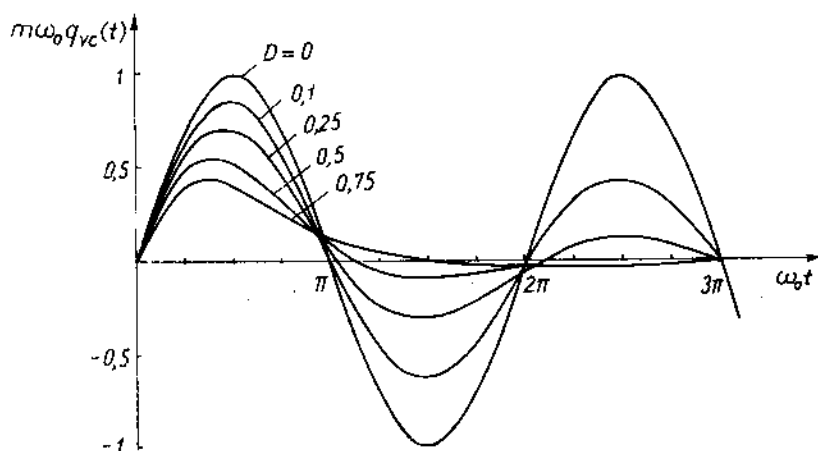
$$\dot{q}(+0) - \dot{q}(-0) = \dot{q}(+0) = \frac{I}{m} = v_0$$

Thế giá trị v_0 vừa tính được vào (5.23) và chú ý đến quan hệ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ ta nhận được nghiệm phương trình dao động

$$q(t) = \frac{Ie^{-\delta t}}{m\omega_0\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-D^2}t) \quad (5.24)$$

Hàm (5.24) được gọi là hàm truyền va chạm, trong đó I là cường độ va chạm. Đối với va chạm đơn vị, hàm truyền va chạm đơn vị có dạng

$$q_{vc} = \frac{q(t)}{I} = \frac{e^{-\delta t}}{m\omega_0\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_0\sqrt{1-D^2}t) \quad (5.25)$$



Hình 2.42

Hàm $q_{vc}(t)$ trong lý thuyết điều khiển được gọi là hàm trọng lượng. Đồ thị của hàm này dưới dạng không thứ nguyên $m\omega_0 q_{vc}$ với một số giá trị của độ cản Lehr D được vẽ trên hình 2.42.

Nếu va chạm không xảy ra ở thời điểm $t = 0$ mà ở thời điểm $t = t^*$ bất kỳ, thì ta có thể nhận được hàm va chạm bằng một phép dịch chuyển trục thời gian một cách đơn giản. Từ phương trình (5.24) ta suy ra

$$q(t - t^*) = \frac{I}{m\omega} e^{-\delta(t-t^*)} \sin \omega(t - t^*) \quad (5.26)$$

Từ phương trình (5.25) ta nhận được

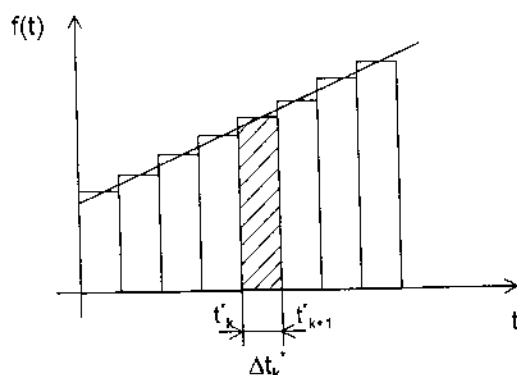
$$q_{vc}(t - t^*) = \frac{e^{-\delta(t-t^*)}}{m\omega} \sin \omega(t - t^*) \quad (5.27)$$

Nhờ phương trình (5.27) ta có thể thiết lập công thức xác định dao động cưỡng bức (5.15). Muốn thế ta tưởng tượng thay thế hàm kích động $f(t)$ bằng một dãy các va chạm đơn vị như hình 2.43. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có

$$q(t) \approx \sum_{k=1}^n \Delta f(t_k^*) q_{vc}(t - t_k^*) = \sum_{k=1}^n f(t_k^*) \Delta t_k^* q_{vc}(t - t_k^*)$$

Chuyển qua giới hạn theo nghĩa của định nghĩa tích phân Riemann ta nhận được công thức nghiệm (5.15)

$$q(t) = \int_0^t f(t^*) q_{vc}(t - t^*) dt^* = \frac{1}{\omega} \int_0^t e^{-\delta(t-t^*)} \sin \omega(t - t^*) g(t^*) dt^* \quad (5.28)$$

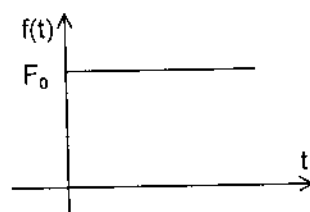


Hình 2.43

5.3 Tìm nghiệm bằng hàm bước nhảy

Giả sử tại thời điểm $t = 0$ ta tác dụng lực hằng $F = F_0$ lên hệ dao động (hình 2.22a), trước đó ($t < 0$) hệ đứng yên. Về mặt toán học ta có thể biểu diễn lực như sau

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \leq 0 \\ F_0 & \text{khi } t > 0 \end{cases} \quad (5.29)$$



Hình 2.44

(xem hình 2.44).

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = g(t) = \frac{F_0}{m} \quad (t > 0) \quad (5.30)$$

Hàm $f(t)$ có dạng (5.29) được gọi là hàm bước nhảy. Biểu thức nghiệm (5.15) bây giờ có dạng

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t e^{-\delta(t-t^*)} \sin \omega(t-t^*) dt^* \\ &= \frac{F_0}{m\omega} \frac{\delta}{\omega_0^2} \left\{ e^{-\delta(t-t^*)} \left[\sin \omega(t-t^*) + \frac{\omega}{\delta} \cos \omega(t-t^*) \right] \right\} \Big|_{t^*=0} \quad (5.31) \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left\{ 1 - e^{-\delta t} \left[\frac{\delta}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right] \right\} \end{aligned}$$

Sử dụng các ký hiệu quen biết

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1-D^2}; \quad \delta = \omega_0 D; \quad D = \sin \theta; \quad \sqrt{1-D^2} = \cos \theta$$

ta nhận được từ (5.31) biểu thức nghiệm dạng

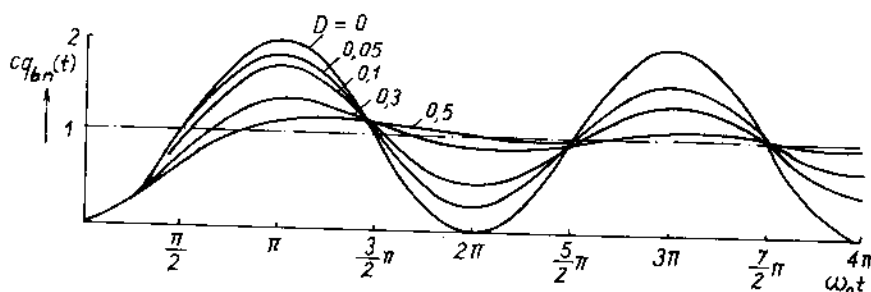
$$q(t) = \frac{F_0}{c} \left[1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega t - \theta) \right] \quad (5.32)$$

Biểu thức (5.32) được gọi là hàm truyền bước nhảy (trong lý thuyết điều khiển gọi là hàm truyền). Đối với bước nhảy đơn vị ta có biểu thức

$$q_{bn}(t) = \frac{q(t)}{F_0} = \frac{1}{c} \left[1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega t - \theta) \right] \quad (5.33)$$

Hình 2.45 biểu diễn hàm truyền bước nhảy dưới dạng không thứ nguyên

$cq_{bn}(t) = m\omega_0^2 q_{bn}(t)$ với một số giá trị của D .



Hình 2.45

So sánh giữa hàm truyền và chạm đơn vị (5.25) và hàm truyền bước nhảy đơn vị (5.33) ta rút ra hệ thức

$$q_{bn}(t) = \int_0^t q_{vc}(t-t^*) dt^* \quad (5.34)$$

Nếu bước nhảy không xảy ra ở thời điểm $t = 0$ mà xảy ra ở thời điểm $t = t^*$ thì từ các công thức (5.33) và (5.34) ta suy ra

$$q_{bn}(t-t^*) = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \frac{e^{-\delta(t-t^*)}}{\sqrt{1-D^2}} \cos[\omega(t-t^*) - \theta] \right\}$$

$$q_{bn}(t-t^*) = \int_{t^*}^t q_{vc}(t-t^*) dt^* \quad (5.35)$$

Bây giờ dựa trên biểu thức (5.35) ta tìm công thức biểu diễn nghiệm của phương trình vi phân (5.30). Đạo hàm theo thời gian biểu thức (5.35) ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_{bn}(t-t^*) &= \frac{d}{dt} \int_{t^*}^t q_{vc}(t-t^*) dt^* = q_{vc}(0) - q_{vc}(t-t^*) = \\ &= -q_{vc}(t-t^*) \end{aligned}$$

Thế biểu thức trên vào biểu thức (5.28) và tiến hành tích phân ta được

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_0^t f(t^*) q_{vc}(t-t^*) dt^* = - \int_0^t f(t^*) \frac{d}{dt^*} q_{bn}(t-t^*) dt^* \\ &= -[f(t) q_{bn}(0) - f(0) q_{bn}(t)] + \int_0^t \frac{df(t^*)}{dt^*} q_{bn}(t-t^*) dt^* \end{aligned}$$

Theo biểu thức (5.33) thì $q_{bn}(0) = 0$, do đó ta có công thức nghiệm phương trình vi phân (5.30)

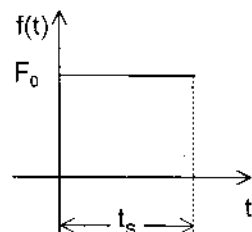
$$q(t) = f(0) q_{bn}(t) + \int_0^t \frac{df(t^*)}{dt^*} q_{bn}(t-t^*) dt^* \quad (5.36a)$$

Khi $f(0) = 0$ thì

$$q(t) = \int_0^t \frac{df(t^*)}{dt^*} q_{bn}(t-t^*) dt^* \quad (5.36b)$$

Tích phân (5.36b) được gọi là tích phân Duhamel. Biểu thức (5.36a) được gọi là công thức biểu diễn nghiệm phương trình vi phân dưới dạng tích phân Duhamel. Chú ý rằng khi xây dựng công thức nghiệm ta đã sử dụng giả thiết $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$.

Thí dụ 2.19 : Tại thời điểm $t = 0$ tác dụng lên hệ dao động một bậc tự do như hình vẽ 2.22a một lực bằng $F = F_0$ trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq t_s$ (hình 2.46). Trước đó hệ ở trạng thái tĩnh. Hãy xác định quá trình dao động của hệ



Hình 2.46

Lời giải : Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq t_s$ có thể xem hàm $f(t) = F_0$ như là hàm bước nhảy. Do $\frac{df(t^*)}{dt^*} = 0$, áp dụng công thức nghiệm (5.36a) ta có

$$q(t) = f(0)q_{bn}(t) = F_0 q_{bn}(t) = \frac{F_0}{c} \left[1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega t - \theta) \right]$$

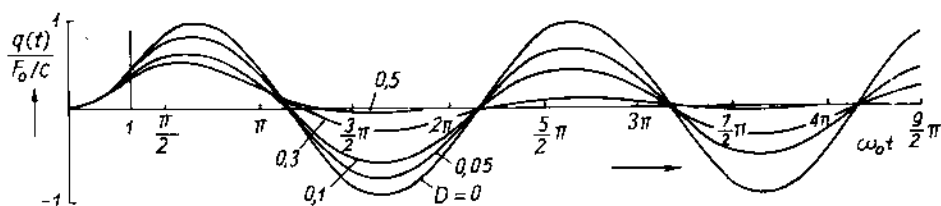
Khi $t > t_s$ hệ thực hiện dao động tự do với các điều kiện đầu

$$q(t_s) = \frac{F_0}{c} \left[1 - \frac{e^{-\delta t_s}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega t_s - \theta) \right]$$

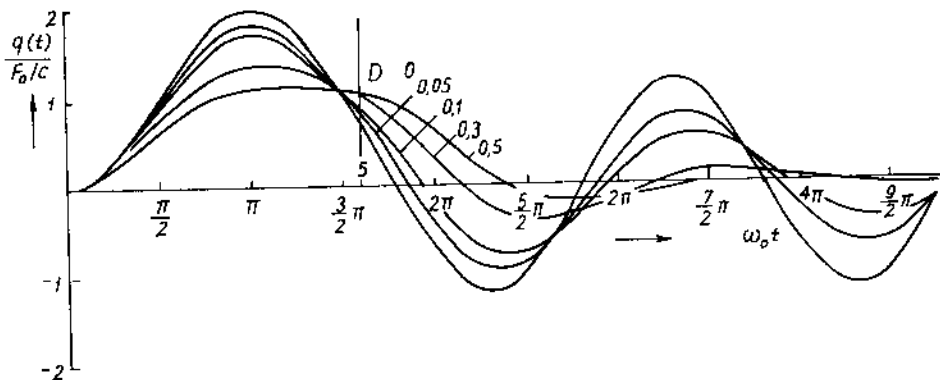
$$\dot{q}(t_s) = \frac{F_0 \omega_0}{c \sqrt{1-D^2}} e^{-\delta t_s} \sin \omega t_s$$

Nghiệm của bài toán dao động tự do có dạng

$$q(t) = e^{-\delta t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad t > t_s$$



Hình 2.47



Hình 2.48

Các hằng số A và B được xác định từ các điều kiện đầu trên. Tính toán tiếp tương tự như thí dụ 2.18, kết quả ta được biểu thức nghiệm như sau

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ \frac{F_0}{c} \left[1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-D^2}} \cos(\omega t - \theta) \right] & \text{khi } 0 \leq t \leq t_s \\ \frac{e^{-\delta(t-t_s)}}{\sqrt{1-D^2}} \left\{ q(t_s) \cos[\omega(t-t_s) - \theta] + \frac{\dot{q}(t_s)}{\omega_0} \sin \omega(t-t_s) \right\} & \text{khi } t > t_s \end{cases}$$

Các hình vẽ 2.47 và 2.48 là đồ thị nghiệm dưới dạng không thứ nguyên khi $\omega_0 t_s = 1$ và $\omega_0 t_s = 5$ với một số giá trị của D.

5.4 Tìm nghiệm bằng phép biến đổi Laplace

a. Định nghĩa phép biến đổi Laplace

Trong kỹ thuật điện và trong lý thuyết điều khiển tự động người ta hay sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng số có vế phải. Ở đây, ta trình bày việc sử dụng phép biến đổi Laplace (1749-1827) để tìm nghiệm bài toán dao động cưỡng bức. Phép biến đổi Laplace là một dạng của các phép biến đổi tích phân. Giả sử $f(t)$ là hàm liên tục từng khúc trên $[0, +\infty)$.

Định nghĩa : Phép biến đổi Laplace là một phép biến đổi tích phân, biến đổi hàm gốc $f(t)$ thành hàm ảnh $F(s)$ nhờ hệ thức

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[f(t)] \quad (5.37)$$

Trong đó ký hiệu $\mathcal{L}$ được gọi là toán tử Laplace.

Phép biến đổi Laplace ngược, ký hiệu bằng toán tử $\mathcal{L}^{-1}$, được xác định bởi hệ thức

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad (5.38)$$

Toán tử Laplace $\mathcal{L}$ và Toán tử Laplace ngược $\mathcal{L}^{-1}$ có tính chất sau

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\} = f(t) \quad (5.39)$$

Một số hàm $f(t)$ thông dụng và hàm ảnh $F(s)$ của nó được cho trong bảng 2.3.

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	Ghi chú
1	$\frac{1}{s}$	
t	$\frac{1}{s^2}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	n nguyên
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$	n nguyên
$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$	
$\frac{e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}$	$\frac{1}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}$	
$\frac{1}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)$	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$	

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	Ghi chú
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$	
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	
$\sin^2 \omega t$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$	
$\cos^2 \omega t$	$\frac{s^2 + 2\omega^2}{s(s^2 + 4\omega^2)}$	
$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	
$\cosh \beta t$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	
$t \sinh \beta t$	$\frac{2\beta s}{(s^2 - \beta^2)^2}$	
$t \cosh \beta t$	$\frac{s^2 + \beta^2}{(s^2 - \beta^2)^2}$	

Bảng 2.3 Hàm $f(t)$ và hàm ảnh $F(s)$ qua phép biến đổi Laplace

Thí dụ 2.20 : Tìm các hàm ảnh của các hàm gốc $f(t) = 1$, $f(t) = e^{\alpha t}$ bằng phép biến đổi Laplace.

Lời giải : Theo công thức (5.37) ta có

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = - \left. \frac{e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s} = F(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = - \left. \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \quad (s > 0)$$

b. Các tính chất của phép biến đổi Laplace

Dưới đây ta nêu ra một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace. Việc chứng minh các tính chất này tương đối đơn giản nên ta trình bày luôn ở đây.

1. Định lý vi phân : Nếu $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ thì

$$\mathcal{L} [y^{(n)}(t)] = s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} \dot{y}_0 - \cdots - s y_{(n-2)} - y_{(n-1)} \quad (5.40)$$

Trong đó ta sử dụng ký hiệu $y^{(k)}(t)$ là đạo hàm bậc k của hàm $y(t)$ theo t,

$$y_0 = y(+0) \text{ với } y^{(k)}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} y^{(k)}(t).$$

Chứng minh : Ta áp dụng phương pháp qui nạp để chứng minh định lý này. Với $n = 1$ ta có

$$\mathcal{L} [\dot{y}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{y}(t) dt$$

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần ta tính được

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \dot{y}(t) dt &= \left. e^{-st} y(t) \right|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt \\ &= sY(s) - y(+0) = sY(s) - y_0. \end{aligned}$$

Vậy định lý đúng khi $n = 1$. Giả sử định lý đúng với $n-1$, ta phải chứng minh định lý đúng với n . Áp dụng tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [y^{(n)}(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} y^{(n)}(t) dt = \left. e^{-st} y^{(n-1)}(t) \right|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} y^{(n-1)}(t) dt \\ &= s \mathcal{L} [y^{(n-1)}(t)] - y_{(n-1)} \end{aligned}$$

Theo giả định, định lý đúng với $n-1$, tức là

$$\mathcal{L} [y^{(n-1)}(t)] = s^{(n-1)} Y(s) - s^{n-2} y_0 - s^{n-3} \dot{y}_0 - \dots - s^{(n-3)} y_0^{(n-2)}$$

Thế vào trên ta được

$$\mathcal{L} [y^{(n)}(t)] = s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} \dot{y}_0 - \dots - s^{(n-2)} y_0^{(n-1)}$$

Như vậy định lý đã được chứng minh.

Từ định lý vi phân (5.40) ta suy ra

$$\mathcal{L} [y(t)] = Y(s)$$

$$\mathcal{L} [\dot{y}(t)] = sY(s) - y_0$$

$$\mathcal{L} [\ddot{y}(t)] = s^2 Y(s) - sy_0 - \dot{y}_0$$

$$\mathcal{L} [\ddot{\ddot{y}}(t)] = s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s \dot{y}_0 - \ddot{y}_0$$

$$\mathcal{L} [y^{(n)}(t)] = s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} \dot{y}_0 - \dots - s^{(n-2)} y_0^{(n-1)}$$

Trong các định lý tiếp theo ta xem a là hằng số dương tùy ý.

2. *Định lý đồng dạng* : Nếu $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ thì

$$\mathcal{L} [f(\frac{t}{a})] = aF(as) \quad (5.41)$$

Chứng minh : Theo định nghĩa (5.37) ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(\frac{t}{a})] &= \int_0^\infty e^{-st} f(\frac{t}{a}) dt = a \int_0^\infty e^{-sa(\frac{t}{a})} f(\frac{t}{a}) d(\frac{t}{a}) \\ &= a \int_0^\infty e^{-(sa)u} f(u) du = aF(as) \end{aligned}$$

3. *Định lý cân* : Nếu $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ thì

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (5.42)$$

Chứng minh : Theo định nghĩa (5.37) ta có

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt = F(s+a)$$

4. *Định lý trễ* : Nếu $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ thì

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (5.43)$$

Chứng minh : Theo định nghĩa (5.37) của biến đổi Laplace

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) dt = \int_0^{\infty} e^{-as} e^{-(t-a)s} f(t-a) d(t)$$

Từ đó suy ra

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-as} F(s)$$

5. *Định lý cộng tác dụng*: Nếu $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ thì

$$\mathcal{L}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) \quad (5.44)$$

với C_1, C_2 là các hằng số.

Chứng minh : Theo định nghĩa (5.37) ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt \\ &= C_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + C_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt = C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s) \end{aligned}$$

Hệ quả : $\mathcal{L}[\sum_{i=1}^n C_i f_i(t)] = \sum_{i=1}^n C_i F_i(s)$ với C_i là các hằng số.

c. Áp dụng phép biến đổi Laplace tính dao động cưỡng bức

Cho phương trình vi phân dao động cưỡng bức dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t) \quad (5.45)$$

Chia cả hai vế của phương trình trên cho m và sử dụng các ký hiệu quen biết ta đưa phương trình (5.45) về dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} f(t) \quad (5.46)$$

Tìm nghiệm phương trình (5.46) với các điều kiện đầu $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = \dot{q}_0$ bằng phép biến đổi Laplace.

Trước hết ta thiết lập phương trình ảnh của phương trình (5.46)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{q}(t) + 2\delta\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t)] &= \frac{1}{m} \mathcal{L}[f(t)] \\ \rightarrow \mathcal{L}[\ddot{q}(t)] + 2\delta\mathcal{L}[\dot{q}(t)] + \omega_0^2 \mathcal{L}[q(t)] &= \frac{1}{m} \mathcal{L}[f(t)] \\ \rightarrow [s^2 Q(s) + sq_0 - \dot{q}_0] + 2\delta[sQ(s) - q_0] + \omega_0^2 Q(s) &= \frac{1}{m} F(s) \\ \rightarrow (s^2 + 2\delta s + \omega_0^2)Q(s) = sq_0 + 2\delta q_0 + \dot{q}_0 + \frac{F(s)}{m} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$D(s) = (s^2 + 2\delta s + \omega_0^2); N_0(s) = sq_0 + 2\delta q_0 + \dot{q}_0 \quad (5.48)$$

thì nghiệm của phương trình ảnh có dạng

$$Q(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} + \frac{F(s)}{mD(s)} \quad (5.49)$$

Dạng nghiệm (5.49) là tổng của hai số hạng. Số hạng thứ nhất $N_0(s)/D(s)$ phụ thuộc vào các điều kiện đầu và tương ứng với nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất. Số hạng thứ hai $F(s)/mD(s)$ phụ thuộc vào hàm kích động $f(t)$ và tương ứng với nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính có vế phải.

Nghiệm của phương trình vi phân gốc (5.46) có dạng

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N_0(s)}{D(s)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{mD(s)}\right]$$

Trong nhiều trường hợp ta có thể sử dụng bảng 2.3 tìm ảnh ngược và biết được biểu thức nghiệm $q(t)$. Ở đây ta phân tích các phân thức ở vế phải của biểu thức (5.49) để có thể đi tới biểu thức nghiệm của phương trình (5.46) gọn hơn. Giả sử hàm $F(s)$ là một phân thức có dạng

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)} \quad (5.50)$$

Khi đó nghiệm của phương trình ảnh có dạng

$$Q(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{mM(s)D(s)} = \frac{N_0(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{m\bar{D}(s)} \quad (5.51)$$

$$\text{Trong đó } \bar{D}(s) = M(s)D(s). \quad (5.52)$$

Giả sử $D(s)$ và $\bar{D}(s)$ là các đa thức chỉ có nghiệm đơn. Ta ký hiệu s_k là nghiệm của $D(s) = 0$, $\bar{s}_j$ là nghiệm của $\bar{D}(s) = 0$. Khi đó ta có thể phân tích các phân thức $N_0(s)/D(s)$ và $N(s)/\bar{D}(s)$ thành các phân thức tối giản [1]

$$\begin{aligned} \frac{N_0(s)}{D(s)} &= \sum_{k=1}^K \frac{N_0(s_k)}{D'(s_k)} \frac{1}{s - s_k} \\ \frac{N(s)}{\bar{D}(s)} &= \sum_{j=1}^J \frac{N(\bar{s}_j)}{\bar{D}'(\bar{s}_j)} \frac{1}{s - \bar{s}_j} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Trong đó $D'(s)$ và $\bar{D}'(s)$ là các đạo hàm của các hàm $D(s)$ và $\bar{D}(s)$ theo biến s . Vậy nghiệm phương trình ảnh bây giờ có dạng

$$Q(s) = \sum_{k=1}^K \frac{N_0(s_k)}{D'(s_k)} \frac{1}{s - s_k} + \sum_{j=1}^J \frac{N(\bar{s}_j)}{m\bar{D}'(\bar{s}_j)} \frac{1}{s - \bar{s}_j}$$

Áp dụng bảng 2.3 ta tìm được nghiệm phương trình gốc

$$q(t) = \sum_{k=1}^K \frac{N_0(s_k)}{D'(s_k)} e^{s_k t} + \sum_{j=1}^J \frac{N(\bar{s}_j)}{m\bar{D}'(\bar{s}_j)} e^{\bar{s}_j t} \quad (5.54)$$

Chú ý rằng khi $D(s)$ hoặc $\bar{D}(s)$ có nghiệm bội, ta không áp dụng được công thức (5.54). Trong trường hợp đó ta phải xuất phát từ phương trình (5.49) để tìm hàm gốc $q(t)$. Để tính toán thuận tiện, ta nhắc lại một cách tóm tắt việc phân tích một phân thức thực sự $P(x)/Q(x)$ thành tổng của các phân thức tối giản.

Các phân thức tối giản là các phân thức thuộc một trong bốn dạng sau

$$\frac{A}{x - a}; \frac{A}{(x - a)^k}; \frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}; \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^m} \quad (k, m = 2, 3, \dots)$$

Trong đó A, B, C, a, b, c là các hằng số thực, tam thức $x^2 + bx + c$ không có nghiệm thực ($b^2 - 4c < 0$).

Trong đại số có định lý sau: *Mỗi phân thức thực sự $P(x)/Q(x)$ có thể phân tích thành tổng một số hữu hạn các phân thức đơn giản.*

Người ta cũng đã chứng minh được các tính chất sau:

1. Mỗi thừa số dạng $(x-a)^k$ trong khai triển của mẫu số $Q(x)$ của phân thức thực sự $P(x)/Q(x)$ ứng với một nhóm k phân thức tối giản dạng

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \quad (5.55)$$

2. Mỗi thừa số dạng $(x^2 + bx + c)^m$ trong khai triển của mẫu số $Q(x)$ của phân thức thực sự $P(x)/Q(x)$ ứng với một nhóm m phân thức tối giản dạng

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + bx + c)^m} \quad (5.56)$$

Thí dụ 2.21 : Tìm nghiệm phương trình vi phân dao động

$$\ddot{q} + 2\dot{q} + q = -11 \cos 2t + 2 \sin 2t$$

với điều kiện đầu $t = 0$: $q(0) = 1$, $\dot{q}(0) = 0$

Lời giải : Trước hết sử dụng bảng 2.3 tìm ảnh của các hàm ở vế phải

$$F(s) = \mathcal{L}[-11 \cos 2t] + \mathcal{L}[2 \sin 2t] = -11 \mathcal{L}[\cos 2t] + 2 \mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{-11s + 4}{s^2 + 4}$$

Áp dụng biểu thức (5.49) ta tính được biểu thức nghiệm của phương trình ảnh

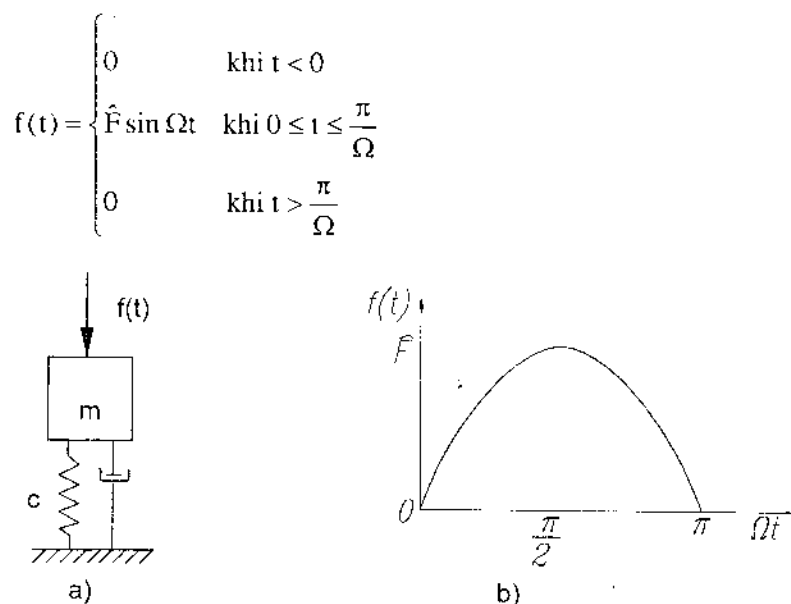
$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{-11s+4}{(s^2+4)(s+1)^2} = \frac{s^3+2s^2-7s+12}{(s^2+4)(s+1)^2} \\ &= \frac{s}{s^2+2^2} - 2 \frac{2}{s^2+2^2} + 4 \frac{1!}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

Tra bảng 2.3 ta tìm được nghiệm phương trình vi phân

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}[Q(s)] = \cos 2t - 2 \sin 2t + 4t e^{-t}$$

Chú ý rằng trong thí dụ này đa thức đặc trưng $D(s) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$ có nghiệm $s = -1$ bội 2. Cho nên ta không sử dụng công thức (5.54) được.

Thí dụ 2.22 : Trên một hệ dao động tuyến tính có cản (hình 2.49a) tác dụng một lực va chạm hình sin (hình 2.49b).



Hình 2.49

Hãy xác định dao động của hệ khi $t > 0$ bằng phép biến đổi Laplace. Biết rằng khi $t \leq 0$ hệ đứng yên.

Lời giải : Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{m} f(t)$$

với $2\delta = \frac{b}{m}, \omega_0^2 = \frac{c}{m}$.

Theo đầu bài khi $t = 0$: $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$. Do đó theo công thức (5.48) $N_0(s) = 0$.

Trong miền $0 \leq t \leq \pi/\Omega$ nghiệm của phương trình ảnh theo (5.49) có dạng

$$Q(s) = \frac{f(s)}{mD(s)}$$

Trong đó $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \hat{F} \mathcal{L}[\sin \Omega t] = \frac{\hat{F}\Omega}{s^2 + \Omega^2}$, $D(s) = s^2 + 2\delta s + \omega_0^2$.

Chú ý đến (5.50) ta có

$$N(s) = \hat{F}\Omega; \quad M(s) = s^2 + \Omega^2$$

Từ đó theo (5.52) suy ra

$$\overline{D}(s) = M(s)D(s) = (s^2 + \Omega^2)(s^2 + 2\delta s + \omega_0^2)$$

Phương trình $\overline{D}(s) = 0$ có bốn nghiệm

$$\overline{s}_{1,2} = \pm i\Omega; \quad \overline{s}_{3,4} = -(\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})$$

Biểu thức nghiệm $q(t)$ theo (5.54) có dạng

$$q(t) = \frac{\hat{F}\Omega}{m} \sum_{j=1}^4 \frac{e^{\overline{s}_j t}}{\overline{D}'(\overline{s}_j)}$$

Thế các giá trị $\overline{s}_j$ ($j=1, \dots, 4$) ở trên vào biểu thức $q(t)$. Sau một vài phép tính toán trung gian, ta được

$$q(t) = \frac{\hat{F}}{c} \left[\frac{-(1 - \eta^2) \sin \Omega t - 2D\eta \cos \Omega t}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} + \frac{2D\eta \cos \omega t - (1 - \eta^2 - 2D^2)(1 - D^2)^{-\frac{1}{2}} \eta \sin \omega t}{(1 - \eta^2 - 2D^2)^2 + 4D^2(1 - D^2)} e^{-\delta t} \right]$$

$$\text{với } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

Trong miền $t > \pi/\Omega$ hệ thực hiện dao động tự do có cản với các điều kiện đầu $q(t_0) = q(\frac{\pi}{\Omega})$, $\dot{q}(t_0) = \dot{q}(\frac{\pi}{\Omega})$ tính từ biểu thức trên. Trong miền này ta có

$$N_0(s) = sq(\frac{\pi}{\Omega}) + 2\delta q(\frac{\pi}{\Omega}) + \dot{q}(\frac{\pi}{\Omega})$$

$$N(s) = 0$$

Biểu thức nghiệm (5.54) bây giờ có dạng

$$q(t) = \frac{e^{-\delta(t - \frac{\pi}{\Omega})}}{\sqrt{1 - D^2}} \left\{ q(\frac{\pi}{\Omega}) \cos \left[\omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) - \alpha \right] + \omega^{-1} \dot{q}(\frac{\pi}{\Omega}) \sin \omega(t - \frac{\pi}{\Omega}) \right\}$$

$$\text{với } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{\omega}.$$

Chương 3

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

Cũng như trong chương 2, ở đây ta chỉ xét dao động của các hệ cơ học holo-nôm. Một hệ n bậc tự do là một hệ mà vị trí của nó trong không gian được xác định bởi n tọa độ suy rộng : $q_1, q_2, \dots, q_n$. Dưới tác dụng của lực, chuyển động của hệ được xác định bởi sự biến đổi của các tọa độ suy rộng này theo thời gian.

Trong chương này ta xét bài toán dao động nhỏ của hệ n bậc tự do quanh vị trí cân bằng tĩnh. Khi đó hệ các phương trình vi phân mô tả dao động của hệ là hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.

Trong các bài toán kỹ thuật, ta thường gặp bốn mô hình cơ học sau : hệ các vật rắn, hệ các phần tử hữu hạn, hệ liên tục, hệ nhiều vật hỗn hợp. Các phương trình toán học mô tả dao động của hệ các vật rắn là các phương trình vi phân thường, loại phương trình chúng ta xét trong chương này. Đối với hệ các phần tử hữu hạn, sau một số phép biến đổi ta cũng nhận được hệ các phương trình vi phân thường. Các phương trình toán học mô tả dao động của hệ liên tục (môi trường liên tục) là các phương trình đạo hàm riêng. Các phương trình toán học mô tả dao động của hệ nhiều vật hỗn hợp là các phương trình vi phân thường và các phương trình đạo hàm riêng. Tuy nhiên, khi tính toán dao động của các hệ phức tạp, người ta thường cố gắng biến đổi tương đương gần đúng về hệ n bậc tự do, với n là số bé nhất có thể chấp nhận được.

§1. THÀNH LẬP CÁC PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Việc lựa chọn các phương pháp để thành lập các phương trình vi phân dao động của hệ nhiều bậc tự do phụ thuộc vào mô hình cơ học của các máy và các công trình. Đối với các cơ hệ gồm các chất điểm, các vật rắn, các phần tử lò xo bỏ qua trọng lượng, các phần tử cản, người ta thường dùng phương trình Lagrange loại hai để thiết lập các phương trình dao động. Đối với các kết cấu đàn hồi, người ta thường sử dụng các phương pháp lực, phương pháp biến dạng, phương pháp phần tử hữu hạn. Đối với các cơ hệ phức tạp người ta còn sử dụng phương pháp các hệ con (phương pháp tách cấu trúc) để thiết lập các phương trình vi phân dao động. Dưới đây ta trình bày việc áp dụng phương pháp sử dụng phương trình Lagrange loại hai và phương pháp lực thiết lập phương trình vi phân dao động của một số mô hình dao động cụ thể.

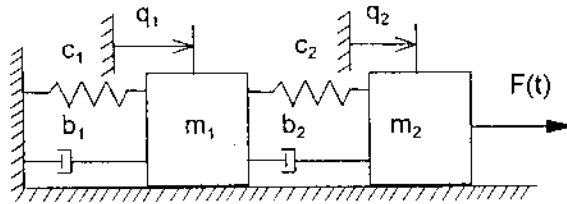
1.1 Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange loại II

Các phương trình Lagrange loại II được áp dụng để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ holo-nôm có dạng tổng quát như sau

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

trong đó : q_i là toạ độ suy rộng, Q_i là lực suy rộng, T là biểu thức động năng, n là số bậc tự do của hệ.

a. *Thí dụ 3.1* : Cho mô hình dao động như hình vẽ 3.1. Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.



Hình 3.1

Lời giải : Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 q_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - q_1)^2$$

Biểu thức hàm hao tán có dạng

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^*$$

ta nhận được hệ phương trình dao động

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (b_1 + b_2) \dot{q}_1 - b_2 \dot{q}_2 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{q}_2 - b_2 \dot{q}_1 + b_2 \dot{q}_2 - c_1 q_1 + c_2 q_2 &= F(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Các phương trình (1.2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (1.3)$$

Trong đó

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

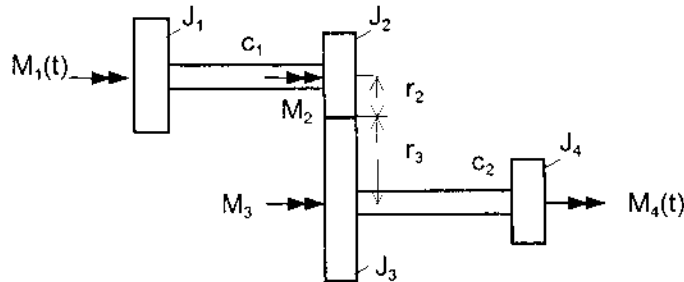
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Khi trên hệ không có lực kích động và không có phần tử cản, phương trình dao động tự do không cản có dạng

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

b. Thí dụ 3.2 : Thiết lập phương trình dao động xoắn của một mô hình truyền động như hình 3.2. Cho biết các mômen $M_1(t)$, $M_4(t)$. Các mômen M_2 và M_3 tỷ lệ với vận tốc

$$M_2 = -b_2 \dot{\varphi}_2, \quad M_3 = -b_3 \dot{\varphi}_3$$



Hình 3.2

Lời giải : Cơ cấu truyền động như hình 3.2 là một hệ dao động ba bậc tự do. Trong bốn đại lượng định vị $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ có một điều kiện ràng buộc $r_2 \varphi_2 = -r_3 \varphi_3$. Ta chọn các tọa độ suy rộng : $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2, q_3 = \varphi_4$. Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + J_3 \dot{\varphi}_3^2 + J_4 \dot{\varphi}_4^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 (\varphi_4 - \varphi_3)^2$$

Thế điều kiện ràng buộc $\varphi_3 = -\frac{r_2}{r_3} \varphi_2$ vào các biểu thức trên, ta có

$$T = \frac{1}{2} \left\{ J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \left[J_2 + \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 J_3 \right] \dot{\varphi}_2^2 + J_4 \dot{\varphi}_4^2 \right\}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(\varphi_4 + \frac{r_2}{r_3} \varphi_2 \right)^2$$

Để xác định các lực suy rộng ứng với các lực không thế, ta tính công khả dĩ của hệ

$$\begin{aligned} \delta A &= M_1(t) \delta \varphi_1 + M_2 \delta \varphi_2 + M_3 \delta \varphi_3 + M_4(t) \delta \varphi_4 \\ &= M_1(t) \delta \varphi_1 - b_2 \dot{\varphi}_2 \delta \varphi_2 - b_3 \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \dot{\varphi}_2 \delta \varphi_2 + M_4(t) \delta \varphi_4 \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$Q_1^* = M_1(t), \quad Q_2^* = - \left[b_2 + b_3 \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 \right] \dot{\varphi}_2, \quad Q_3^* = M_4(t)$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng và lực suy rộng ứng với các lực không có thế vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + Q_k^*$$

ta nhận được hệ phương trình vi phân dao động của cơ cấu truyền động

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 - c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_1(t) \\ \left[J_2 + (r_2 / r_3)^2 J_3 \right] \ddot{\varphi}_2 + \left[b_2 + b_3 (r_2 / r_3)^2 \right] \dot{\varphi}_2 \\ &\quad + c_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + c_2 \frac{r_2}{r_3} \left(\varphi_4 + \frac{r_2}{r_3} \varphi_2 \right) = 0 \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 + c_2 \left(\varphi_4 + \frac{r_2}{r_3} \varphi_2 \right) &= M_4(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Hệ phương trình (1.5) có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (1.6)$$

Trong đó

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 + (r_2 / r_3)^2 J_3 & 0 \\ 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 + (r_2 / r_3)^2 b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

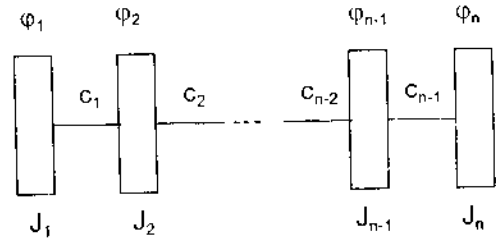
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + (r_2 / r_3)^2 c_2 & \frac{r_2}{r_3} c_2 \\ 0 & (r_2 / r_3) c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ 0 \\ M_4(t) \end{bmatrix}$$

Thí dụ 3.3 : Thiết lập phương trình vi phân dao động tự do của hệ dao động xoắn gồm n đĩa như hình 3.3.

Lời giải : Biểu thức động năng và biểu thức thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J_i \dot{\varphi}_i^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} c_i (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2$$



Hình 3.3

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i}$$

ta được hệ phương trình dao động tự do của mô hình khảo sát

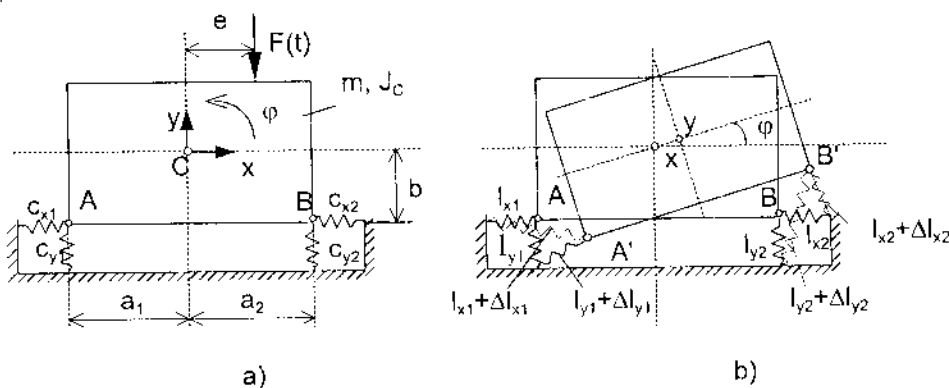
$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - c_{n-2} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) &= 0 \\ J_n \ddot{\varphi}_n - c_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Hệ phương trình (1.7) có thể viết dưới dạng ma trận

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = 0$$

Thí dụ 3.4 : Một móng khối phẳng có khối lượng m tựa trên các lò xo theo hai phương thẳng đứng và nằm ngang, chịu tác dụng của lực $F(t)$ thẳng đứng (hình 3.4a). Hãy thiết lập phương trình dao động nhỏ của móng khối phẳng quanh vị trí cân bằng tĩnh. Giả thiết rằng móng chỉ chuyển động trong mặt phẳng hình vẽ và ở vị trí như hình vẽ 3.4a các lò xo chưa bị kéo, nén.

Lời giải : Vị trí của móng được xác định bởi vị trí trọng tâm của nó x, y và góc xoay φ . Hệ toạ độ được chọn sao cho ở thời điểm ban đầu $t = 0$ thì $x = 0, y = 0$ và $\varphi = 0$.



Hình 3.4

Biểu thức động năng của móng máy

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 \quad (1.8)$$

Khi móng máy dao động trong mặt phẳng, biến dạng dài của các lò xo là $\Delta l_{x1}, \Delta l_{x2}, \Delta l_{y1}, \Delta l_{y2}$ (hình 3.4b). Thế năng của hệ có dạng

$$\Pi = mgy + \frac{1}{2} (c_{x1} \Delta l_{x1}^2 + c_{x2} \Delta l_{x2}^2 + c_{y1} \Delta l_{y1}^2 + c_{y2} \Delta l_{y2}^2) \quad (1.9)$$

Chúng ta ký hiệu các thành phần dịch chuyển của điểm A (từ A đến A') là u_1 và v_1 , các thành phần dịch chuyển của điểm B (từ B đến B') là u_2 và v_2 . Theo hình vẽ 3.4b ta có

$$\begin{aligned} u_1 &= x + a_1(1 - \cos \varphi) + b \sin \varphi; & v_1 &= y - a_1 \sin \varphi + b(1 - \cos \varphi) \\ u_2 &= x - a_2(1 - \cos \varphi) + b \sin \varphi; & v_2 &= y + a_2 \sin \varphi + b(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

Từ định lý hàm cosin trong lượng giác ta tính được

$$\Delta l_{x1}^2 = l_{x1}^2 \left[\sqrt{1 + (u_1^2 + v_1^2 + 2l_{x1}u_1)/l_{x1}^2} - 1 \right]^2$$

$$\Delta l_{y1}^2 = l_{y1}^2 \left[\sqrt{1 + (u_1^2 + v_1^2 - 2l_{y1}v_1)/l_{y1}^2} - 1 \right]^2$$

$$\Delta l_{x2}^2 = l_{x2}^2 \left[\sqrt{1 + (u_2^2 + v_2^2 - 2l_{x2}u_2)/l_{x2}^2} - 1 \right]^2$$

$$\Delta l_{y2}^2 = l_{y2}^2 \left[\sqrt{1 + (u_2^2 + v_2^2 + 2l_{y2}v_2)/l_{y2}^2} - 1 \right]^2$$

Các đại lượng l_{x1} , l_{x2} , l_{y1} , l_{y2} là độ dài của các lò xo ở trạng thái chưa biến dạng. Do chúng ta chỉ xét dao động nhỏ xung quanh vị trí cân bằng nên có thể sử dụng các xấp xỉ sau

$$\Delta l_{x1}^2 \approx u_1^2; \quad \Delta l_{x2}^2 \approx u_2^2; \quad \Delta l_{y1}^2 \approx v_1^2; \quad \Delta l_{y2}^2 \approx v_2^2$$

Do góc φ nhỏ, ta lấy xấp xỉ $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Từ đó ta tính được

$$\begin{aligned} \Delta l_{x1}^2 &\approx (x + b\varphi)^2; & \Delta l_{y1}^2 &\approx (y - a_1\varphi)^2 \\ \Delta l_{x2}^2 &\approx (x + b\varphi)^2; & \Delta l_{y2}^2 &\approx (y + a_2\varphi)^2 \end{aligned}$$

Biểu thức gần đúng của thế năng Π có dạng

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[c_{x1}(x + b\varphi)^2 + c_{x2}(x + b\varphi)^2 + c_{y1}(y - a_1\varphi)^2 + c_{y2}(y + a_2\varphi)^2 \right] + mgy$$

Để xác định các lực suy rộng ứng với lực $F(t)$ ta tính công khả dĩ của hệ

$$\delta A = -F(t)\delta y - F(t)e\delta\varphi$$

Từ đó ta suy ra

$$Q_x^* = 0; \quad Q_y^* = -F(t); \quad Q_\varphi^* = -F(t)e$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng, lực suy rộng ứng với lực không có thế vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^*$$

ta có các phương trình vi phân dao động của móng máy khảo sát

$$M \ddot{\mathbf{q}} + C \mathbf{\dot{q}} = \mathbf{f}(t) \quad (1.10)$$

với

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_C \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg + F \\ eF \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{x1} + c_{x2} & 0 & (c_{x1} + c_{x2})b \\ 0 & c_{y1} + c_{y2} & a_2 c_{y2} - a_1 c_{y1} \\ (c_{x1} + c_{x2})b & a_2 c_{y2} - a_1 c_{y1} & [(c_{x1} + c_{x2})b^2 + a_1^2 c_{y1} + a_2^2 c_{y2}] \end{bmatrix}$$

1.2 Phương pháp lực

Phương pháp lực hay được sử dụng để thiết lập các phương trình dao động của các hệ thanh có khối lượng tập trung. Để thấy rõ nội dung của phương pháp này, trước hết ta xét một thí dụ. Sau đó trình bày qui trình tổng quát áp dụng phương pháp lực thiết lập phương trình vi phân dao động.

Thí dụ 3.5 : Thiết lập hệ phương trình vi phân dao động của dầm không trọng lượng mang hai khối lượng tập trung m_1, m_2 và chịu các lực tác dụng F_1, F_2 như hình vẽ 3.5. Cho biết $m_1 = 2m, m_2 = m$.

Lời giải : Theo định luật Hooke suy rộng ta có các hệ thức liên hệ giữa dịch chuyển và lực (hình 3.5)

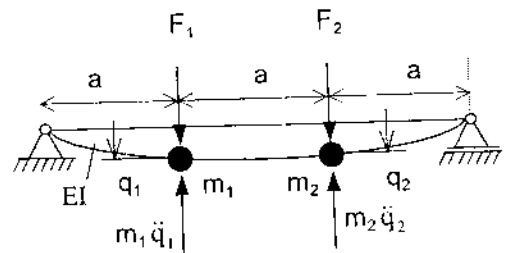
$$q_1 = d_{11}F_1^* + d_{12}F_2^* \quad (1.11)$$

$$q_2 = d_{21}F_1^* + d_{22}F_2^*$$

trong đó

$$F_1^* = F_1 - m_1 \ddot{q}_1,$$

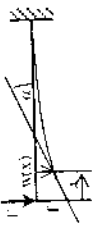
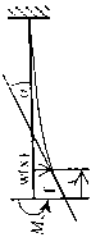
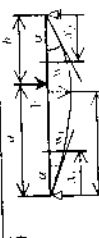
$$F_2^* = F_2 - m_2 \ddot{q}_2$$

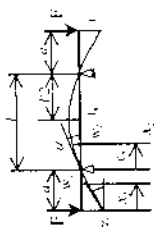
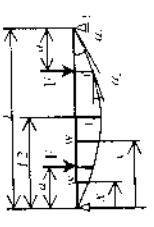
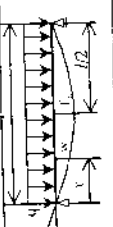
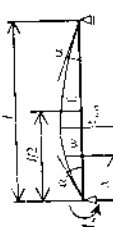


Hình 3.5

Trong (1.11) $d_{ij} = d_{ji}$ là các hệ số ảnh hưởng. Trong giáo trình Sức bền vật liệu [37,49] người ta đã đưa ra định nghĩa và cách xác định các hệ số này. Bảng 3.1 cho ta cách tính độ võng của một số loại dầm thẳng chịu tác dụng của các dạng lực cơ bản. Từ đó dễ dàng xác định các hệ số ảnh hưởng d_{ij} .

Bảng 3.1: Độ võng và góc xoay của đường đàn hồi của các dầm thẳng có tiết diện không đổi

Tải trọng	Phương trình đường đàn hồi	Độ võng	Độ xoay ($\text{tg}\alpha$)
1 	$w(x) = \frac{Pl^3}{3EI} \left[1 - \frac{3x}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]$	$f = \frac{Pl^3}{3EI}$	$\text{tg}\alpha = \frac{Pl^2}{2EI}$
2 	$w(x) = \frac{M_b l^2}{2EI} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2$	$f = \frac{M_b l^2}{2EI}$	$\text{tg}\alpha = \frac{M_b l}{EI}$
3 	$w(x) = \frac{Pl^3}{16EI} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right], x \leq l/2$	$f = \frac{Pl^3}{48EI}$	$\text{tg}\alpha = \frac{Pl^2}{16EI}$
4  $x_1 = \sqrt{(1-b)/3}$ khi $a > b$, hoán vị a và b khi $a < b$.	$w_1(x_1) = \frac{Pl^3}{16EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \left(\frac{b}{l} \right)^2 \cdot \frac{x_1}{l} \cdot \left(1 + \frac{x_1^2}{b} - \frac{x_1^2}{ab} \right)$ $w_2(x_2) = \frac{Pl^3}{16EI} \cdot \frac{b}{l} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \cdot \frac{x_2}{l} \cdot \left(1 + \frac{x_2^2}{a} - \frac{x_2^2}{ab} \right)$	$f = \frac{Pl^3}{3EI} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{b}{l} \right)^2$ $f_{\max} = f \cdot \frac{l+b}{3b} \sqrt{\frac{l+b}{3a}}$	$\text{tg}\alpha_1 = f \cdot \frac{1}{2a} \left(1 + \frac{1}{b} \right)$ $\text{tg}\alpha_2 = f \cdot \frac{1}{2b} \left(1 + \frac{1}{a} \right)$
5 	$w_1(x_1) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{x_1}{l} \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2} \right)$ $w_2(x_2) = \frac{Pl^3}{6EI} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{x_2}{l} \cdot \left(1 - \frac{x_2^2}{l^2} \right)$	$f = \frac{Pl^3}{3EI} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{b}{l} \right)^2$ $f_{\max} = \frac{Pl^3}{9\sqrt{3EI}} \cdot \frac{a}{l}$	$\text{tg}\alpha_1 = \frac{Pl^2}{6EI} \cdot \frac{a}{l}$ $\text{tg}\alpha_2 = 2\text{tg}\alpha_1$ $\text{tg}\alpha = \frac{Pl^2}{6EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot (2 + 3a/l)$

6		$w_1(x_1) = \frac{Fl^3}{2EI} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x_1}{l} \right)^3 - \frac{a}{l} \left(1 + \frac{a}{l} \right) \frac{x_1}{l} \right. \\ \left. + \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{2a}{3l} \right) \right] \quad x_1 \leq a$ $w_2(x_2) = \frac{Fl^3}{2EI} \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{x_2}{l} \left(1 - \frac{x_2}{l} \right) \quad x_2 \leq l$	$f = \frac{Fl^3}{2EI} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(1 + \frac{2a}{3l} \right)$ $f_m = \frac{Fl^3}{8EI} \cdot \frac{a}{l}$	$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Fl^2}{2EI} \cdot \frac{a}{l} \left(1 + \frac{a}{l} \right)$ $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Fl^2}{2EI} \cdot \frac{a}{l}$
7		$w(x) = \frac{Fl^3}{2EI} \cdot \frac{x}{l} \left[\frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad x \leq a < l/2$ $w(x) = \frac{Fl^3}{2EI} \cdot \frac{a}{l} \left[\frac{x}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \quad a \leq x < l/2$	$f = \frac{Fl^3}{2EI} \cdot \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{4a}{3l} \right)$ $f_m = \frac{Fl^3}{8EI} \cdot \frac{a}{l} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]$	$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Fl^2}{2EI} \cdot \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l} \right)$ $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Fl^2}{2EI} \cdot \frac{a}{l} \left(1 - 2 \frac{a}{l} \right)$
8		$w(x) = \frac{ql^4}{8EI} \left[1 - \frac{4x}{3l} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right]$	$f = \frac{ql^4}{8EI}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ql^3}{6EI}$
9		$w(x) = \frac{ql^4}{24EI} \cdot \frac{x}{l} \left[1 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad , 0 \leq x \leq l$	$f = \frac{5ql^4}{384EI}$	$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{ql^3}{24EI}$
10		$w(x) = \frac{M_b l^2}{6EI} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \left(2 - \frac{x}{l} \right)$ $\zeta_{\max} = h\sqrt{3} - l)/\sqrt{3}$	$f_m = \frac{M_b l^2}{16EI}$ $f_{\max} = \frac{M_b l^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{M_b l}{3EI}$ $\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_1$

Các hệ số ảnh hưởng d_{ij} lập thành một ma trận gọi là ma trận hệ số ảnh hưởng hoặc ma trận độ mềm xác định như sau

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Từ bảng 3.1 dễ dàng tính được độ lớn của các hệ số ảnh hưởng đối với dầm trên hình 3.5. Phương trình (1.11) bây giờ có dạng

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{a^3}{18EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Khi dầm dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh, các lực tác dụng F_i^* bao gồm lực quán tính $-m_i \ddot{q}_i$ và ngoại lực $F_i(t)$. Ta có hệ thức

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} F_1^* \\ F_2^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Thế biểu thức (1.13) vào (1.12) ta nhận được phương trình dao động uốn của dầm

$$\frac{ma^3}{18EI} \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 14 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{a^3}{18EI} \begin{bmatrix} 8F_1 + 7F_2 \\ 7F_1 + 8F_2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Từ thí dụ trên ta có thể đưa ra một nguyên tắc chung áp dụng phương pháp lực để thiết lập phương trình vi phân dao động. Đầu tiên ta viết định luật Hook suy rộng

$$\mathbf{q} = \mathbf{D} \mathbf{f}^* \quad (1.15)$$

Sau đó sử dụng quan hệ giữa lực và gia tốc

$$\mathbf{f}^* = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f} \quad (1.16)$$

Thế (1.16) vào phương trình (1.15) ta nhận được phương trình vi phân dao động

$$\mathbf{D} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{D} \mathbf{f} \quad (1.17)$$

Chú ý rằng ma trận độ cứng $\mathbf{C}$ và ma trận độ mềm $\mathbf{D}$ của một hệ dao động có quan hệ như sau

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D} \quad (1.18)$$

Đối với hệ cơ học phức tạp, ngày nay ngoài hai phương pháp trên người ta còn sử dụng phương pháp tách cấu trúc để thiết lập các phương trình vi phân dao động.

§2. DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN

Phương trình vi phân mô tả dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

Trong đó $\mathbf{M}$ và $\mathbf{C}$ là các ma trận vuông cấp n có các phần tử là hằng số. Trong nhiều bài toán thực tế, chúng là các ma trận thực đối xứng.

2.1 Các tần số riêng và các dạng dao động riêng

Ta tìm nghiệm của phương trình (2.1) dưới dạng

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.2)$$

Thế biểu thức (2.2) vào phương trình (2.1) rồi đơn giản đi biểu thức $\sin(\omega t + \alpha)$ ta nhận được phương trình

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Để cho phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (2.3) có nghiệm không tầm thường, điều kiện cần là

$$|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (2.4)$$

Phương trình (2.4) là một phương trình đại số bậc n đối với ω^2 và được gọi là phương trình tần số hoặc phương trình đặc trưng. Các nghiệm ω_k ($k = 1, \dots, n$) của phương trình tần số được gọi là các tần số riêng. Thay lần lượt các giá trị của ω_k ($k = 1, \dots, n$) vào phương trình (2.3) ta nhận được các hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của véc tơ $\mathbf{a}_k$

$$(\mathbf{C} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Các véc tơ $\mathbf{a}_k$ này được gọi là các véc tơ riêng.

Do phương trình (2.5) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có định thức hệ số bằng không nên các thành phần của véc tơ $\mathbf{a}_k$ được xác định sai khác một hằng số nhân. Chẳng hạn ta có thể chọn a_{1k} một cách tùy ý.

Ta đưa vào ký hiệu

$$v_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{1k}} \quad \text{hoặc} \quad v_i^{(k)} = \frac{a_i^{(k)}}{a_1^{(k)}} \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

Thay lần lượt các $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ vào phương trình (2.5) ta xác định được ma trận

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Mỗi vectơ cột của ma trận (2.7)

$$\mathbf{v}_k = [v_{1k} \ v_{2k} \ \dots \ v_{nk}]^T = [v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \dots, v_n^{(k)}]^T$$

cho ta biết một dạng dao động riêng của hệ dao động (2.1). Ma trận $\mathbf{V}$ được gọi là ma trận dạng riêng (Modalmatrix). Như thế ma trận dạng riêng cho ta biết tất cả các dạng dao động riêng có thể có của hệ dao động.

Xét trường hợp hệ hai bậc tự do. Khi đó các phương trình vi phân dao động tự do không cần có dạng

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Phương trình tần số (2.4) đối với trường hợp này có dạng

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 m_{11} & c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ c_{21} - \omega^2 m_{21} & c_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển định thức cấp hai trên ta được

$$(c_{11} - \omega^2 m_{11})(c_{22} - \omega^2 m_{22}) - (c_{12} - \omega^2 m_{12})(c_{21} - \omega^2 m_{21}) = 0 \quad (2.9)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu $v_i = a_2^{(i)} / a_1^{(i)}$ thì từ phương trình (2.5) ta suy ra các phương trình xác định các phần tử của ma trận dạng riêng

$$(c_{11} - \omega_i^2 m_{11}) + v_i (c_{12} - \omega_i^2 m_{12}) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.10a)$$

hoặc

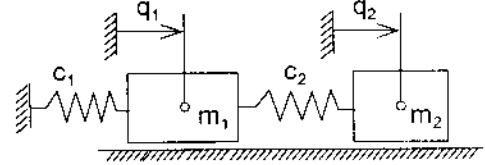
$$(c_{21} - \omega_i^2 m_{21}) + v_i (c_{22} - \omega_i^2 m_{22}) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2.10b)$$

Ma trận dạng riêng của hệ hai bậc tự do trên có dạng

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

Thí dụ 3.6 : Cho mô hình dao động như hình vẽ 3.6a. Hãy xác định ma trận dạng riêng khi $c_1 = c_2 = c$, $m_1 = m_2 = m$, sau đó vẽ các dạng dao động riêng của hệ.

Lời giải: Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng



Hình 3.6a

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 q_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - q_1)^2$$

Sử dụng phương trình Lagrange loại II, ta dễ dàng thiết lập được phương trình vi phân dao động tự do của hệ

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Tương ứng với phương trình (2.3) ta có

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Từ đó ta suy ra phương trình tần số

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \omega^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

Khai triển định thức (2.13) ta được phương trình

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0$$

Từ đó ta tính được các tần số riêng

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \quad (2.14)$$

Thế các biểu thức của ω_1 và ω_2 vào phương trình (2.12) ta có

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2) / c_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 / (c_2 - m_2 \omega_1^2) \end{bmatrix} \mathbf{a}_{11}$$

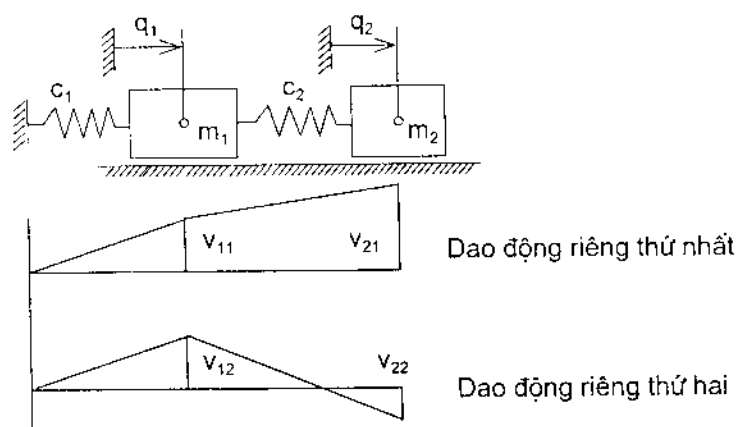
$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (c_1 + c_2 - m_1 \omega_2^2) / c_2 \end{bmatrix} \mathbf{a}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 / (c_2 - m_2 \omega_2^2) \end{bmatrix} \mathbf{a}_{12}$$

Trong đó các đại lượng a_{11} và a_{12} là các hằng số chọn tùy ý.

Khi $c_1 = c_2 = c$ và $m_1 = m_2 = m$, ta dễ dàng tính được

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,62 & -0,62 \end{bmatrix}$$

Trên hình 3.6b cho ta các dạng dao động riêng thứ nhất và thứ hai



Hình 3.6b

2.2 Tính chất trực giao của các véc tơ riêng

Xét phương trình dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

Nếu các ma trận khối lượng $\mathbf{M}$ và ma trận độ cứng $\mathbf{C}$ là các ma trận thực đối xứng thì các véc tơ riêng $\mathbf{v}_k$ tương ứng với các tần số riêng ω_k sẽ trực giao với ma trận khối lượng $\mathbf{M}$ và ma trận độ cứng $\mathbf{C}$. Ta có các hệ thức

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 0; \quad \mathbf{v}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i = 0 \quad \text{khí } \omega_i \neq \omega_j \quad (2.16)$$

Ta sẽ chứng minh tính chất trên. Chú ý đến ký hiệu (2.6), từ phương trình (2.5) ta suy ra

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (2.17)$$

$$\omega_j^2 \mathbf{M} \mathbf{v}_j = \mathbf{C} \mathbf{v}_j \quad (2.18)$$

Nhân bên trái phương trình (2.17) với $\mathbf{v}_j^T$ phương trình (2.18) với $\mathbf{v}_i^T$ ta được

$$\omega_i^2 \mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (2.19)$$

$$\omega_j^2 \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_j \quad (2.20)$$

Do tính chất đối xứng của các ma trận $\mathbf{M}$ và $\mathbf{C}$ ta có

$$\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_j; \quad \mathbf{v}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_j \quad (2.21)$$

Đem phương trình (2.19) trừ đi phương trình (2.20) và chú ý đến tính chất (2.21) ta suy ra

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 0 \quad (2.22)$$

Do đó $\mathbf{v}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i = 0$ khi $\omega_i \neq \omega_j$. Từ (2.19) ta suy ra $\mathbf{v}_j^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i = 0$ khi $\omega_i \neq \omega_j$.

Chú ý rằng nếu $\omega_i^2 = \omega_j^2$ thì từ (2.22) ta không thể suy ra tính chất trực giao của các véc tơ riêng tương ứng.

Giả sử ω_i^2 là một nghiệm bội k của phương trình đặc trưng. Do $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ nên ứng với ω_i^2 ta sẽ có k véc tơ riêng độc lập tuyến tính. Các véc tơ này trực giao với $(n - k)$ véc tơ riêng còn lại. Mỗi tổ hợp tuyến tính của k véc tơ riêng này lại là một véc tơ riêng ứng với ω_i^2 . Như thế từ k véc tơ riêng này ta có thể xây dựng một cơ sở trực giao đối với $\mathbf{M}$ của không gian con của $\mathbb{R}^n$. Xây dựng tương tự đối với các trị riêng bội khác của phương trình đặc trưng, kết quả ta được n véc tơ riêng trực giao với $\mathbf{M}$.

2.3 Các tọa độ chính

Như trên đã trình bày, phương trình vi phân dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Nếu ta có thể chọn được các tọa độ suy rộng đặc biệt sao cho với các tọa độ đó, các ma trận khối lượng và ma trận độ cứng đều có dạng đường chéo, thì các tọa độ suy rộng đó được gọi là các tọa độ chính. Ta ký hiệu các tọa độ chính bởi $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Thực hiện phép đổi biến

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{p} \quad (2.24)$$

Trong đó $\mathbf{V}$ là ma trận dạng riêng. Thế (2.24) vào phương trình (2.23) ta có

$$\mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C} \mathbf{V} \dot{\mathbf{p}} = 0$$

Nhân bên trái phương trình trên với $\mathbf{V}^T$ ta được

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \dot{\mathbf{p}} = 0 \quad (2.25)$$

Do tính chất (2.16) các ma trận $\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ và $\mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ là các ma trận đường chéo

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \mu_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Vì vậy các phương trình (2.25) có dạng

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

Trong đó

$$\mu_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i; \quad \gamma_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (2.28)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i} \quad (2.29)$$

thì các phương trình (2.27) xác định các dạng dao động chính có dạng

$$\ddot{p}_i + \omega_i^2 p_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.30)$$

Việc giải các phương trình (2.30) đã được bàn kỹ trong chương 2.

Thí dụ 3.7 : Một hệ hai con lắc có chiều dài mỗi thanh là l , khối lượng mỗi vật điểm là m . Hai thanh được nối với nhau bằng lò xo có hệ số cứng là c , ở vị trí cách trục quay một đoạn là d (xem hình 3.7). Độ dài của lò xo ở trạng thái không biến dạng bằng khoảng cách giữa hai trục con lắc. Bỏ qua khối lượng các thanh, khối lượng lò xo và lực cản

a. Xác định các tọa độ chính của hệ.

b. Xác định dao động tự do của hệ với các điều kiện đầu $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Lời giải : Trước hết ta thiết lập phương trình vi phân dao động tự do của hệ hai con lắc trên hình 3.7. Biểu thức động năng và thế năng có dạng

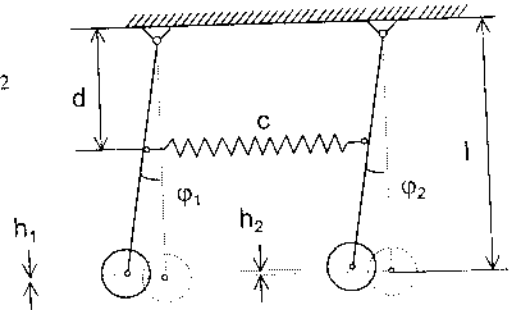
$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

$$\Pi = mgh_1 + mgh_2 + \frac{1}{2} cd^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Do

$$h_1 = l(1 - \cos \varphi_1) \approx \frac{1}{2} l\varphi_1^2$$

$$h_2 = l(1 - \cos \varphi_2) \approx \frac{1}{2} l\varphi_2^2$$



Hình 3.7

nên ta có

$$\Pi = \frac{1}{2} [(mgl + cd^2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 2cd^2 \varphi_1 \varphi_2]$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng vào phương trình Lagrange loại II ta được các phương trình dao động tự do của hệ hai con lắc

$$ml^2 \ddot{\varphi}_1 + (mgl + cd^2) \varphi_1 - cd^2 \varphi_2 = 0$$

$$ml^2 \ddot{\varphi}_2 - cd^2 \varphi_1 + (mgl + cd^2) \varphi_2 = 0$$

Ở thí dụ này ta có $m_{11} = m_{22} = ml^2$, $m_{12} = 0$, $m_{21} = 0$, $c_{11} = c_{22} = mgl + cd^2$, $c_{12} = c_{21} = -cd^2$. Do đó phương trình tần số có dạng

$$(mgl + cd^2 - ml^2 \omega^2)^2 - c^2 d^4 = 0$$

Từ đó suy ra

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}$$

Bây giờ ta xác định các phần tử của ma trận dạng riêng. Từ phương trình (2.10a) ta suy ra

$$v_1 = -\frac{c_{11} - m_{11}\omega_1^2}{c_{12} - m_{12}\omega_1^2} = -\frac{mgl + cd^2 - ml^2 \frac{g}{l}}{-cd^2} = 1$$

$$v_2 = -\frac{c_{11} - m_{11}\omega_2^2}{c_{12} - m_{12}\omega_2^2} = -\frac{mgl + cd^2 - ml^2\left(\frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}\right)}{-cd^2} = -1$$

Vậy ma trận dạng riêng là

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= p_1 + p_2 & \rightarrow & p_1 = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2 \\ \varphi_2 &= p_1 - p_2 & & p_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) / 2 \end{aligned}$$

Phương trình dao động dạng toạ độ chính

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 &= 0 \\ \ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 &= 0 \end{aligned}$$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các dạng dao động chính

$$p_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1); \quad p_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Trở lại toạ độ suy rộng φ_1, φ_2 ta có

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \varphi_2(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Các hằng số $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ được xác định từ các điều kiện đầu $\varphi_1(0) = \varphi_0, \varphi_2(0) = 0, \dot{\varphi}_1(0) = 0, \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Đạo hàm theo thời gian các hàm φ_1, φ_2 ta được

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) &= \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \dot{\varphi}_2(t) &= \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Từ các điều kiện đầu đã cho ta được hệ bốn phương trình xác định $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$

$$\begin{aligned} C_1 \sin \alpha_1 + C_2 \sin \alpha_2 &= \varphi_0 \\ C_1 \sin \alpha_1 - C_2 \sin \alpha_2 &= 0 \\ \omega_1 C_1 \cos \alpha_1 + \omega_2 C_2 \cos \alpha_2 &= 0 \\ \omega_1 C_1 \cos \alpha_1 - \omega_2 C_2 \cos \alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Từ hai phương trình thứ ba và thứ tư ta suy ra

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Từ hai phương trình đầu ta có

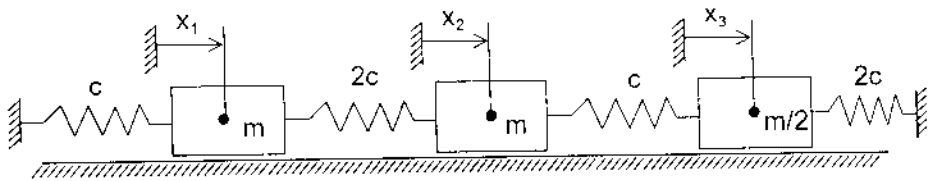
$$2C_1 \sin \alpha_1 = 2C_2 \sin \alpha_2 = \varphi_0 \quad \rightarrow \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \varphi_0$$

Vậy dao động tự do của hệ hai con lắc có dạng

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$

Thí dụ 3.8 : Tính toán các tần số riêng và dạng dao động riêng của mô hình dao động 3 bậc tự do như hình 3.8.



Hình 3.8

Lời giải : Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}_3^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c x_1^2 + c (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} c (x_3 - x_2)^2 + c x_3^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được hệ phương trình vi phân dao động

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & 0 \\ -2c & 3c & -c \\ 0 & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số (phương trình đặc trưng) có dạng

$$\begin{vmatrix} 3c - \omega^2 m & -2c & 0 \\ -2c & 3c - \omega^2 m & -c \\ 0 & -c & 3c - \frac{1}{2}\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu $\lambda = \omega^2 \frac{m}{c}$ thì phương trình đặc trưng có dạng

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 24 = 0$$

Giải ra ta được

$$\lambda_1 = 0,7985 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 0,8936 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\lambda_2 = 4,4549 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = 2,1107 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\lambda_3 = 6,7466 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = 2,5974 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Phương trình xác định các véc tơ riêng có dạng

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Từ phương trình thứ nhất ta suy ra

$$(3 - \lambda_i)a_1^{(i)} - 2a_2^{(i)} = 0 \quad \rightarrow \quad a_1^{(i)} = \frac{2}{3 - \lambda_i} a_2^{(i)}$$

Từ phương trình thứ ba ta có

$$(6 - \lambda_i)a_3^{(i)} - 2a_2^{(i)} = 0 \quad \rightarrow \quad a_3^{(i)} = \frac{2}{6 - \lambda_i} a_2^{(i)}$$

Cho $a_2^{(i)} = 1$ ($i = 1, 2, 3$) và thế các giá trị của λ_i vào các biểu thức trên ta nhận được ma trận dạng riêng

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,9085 & -1,3747 & -0,5338 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,3845 & 1,2944 & -2,6789 \end{bmatrix}$$

2.4 Các tọa độ chuẩn

Như đã biết bằng phép thế $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$ ($\mathbf{V}$ là ma trận dạng riêng, $\mathbf{p}$ là véc tơ các tọa độ chính) ta có thể đưa phương trình vi phân dao động

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

về dạng vế trái tách rời nhau

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó μ_i và γ_i được xác định bởi các hệ thức

$$\mu_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i; \quad \gamma_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i$$

Do các phần tử của véc tơ $\mathbf{v}_i$ của ma trận dạng riêng $\mathbf{V}$ được xác định sai khác một hằng số nhân, cho nên ta có thể chọn các véc tơ $\mathbf{v}_i$ một cách thích hợp sao cho

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \quad (2.31)$$

Ma trận dạng riêng được chọn như thế được gọi là ma trận dạng riêng chuẩn. Ta ký hiệu ma trận dạng riêng chuẩn bằng $\mathbf{V}_n$. Như thế nếu $\mathbf{V}_n$ là ma trận dạng riêng chuẩn thì ta có các hệ thức

$$\mathbf{V}_n^T \mathbf{M} \mathbf{V}_n = \mathbf{E}; \quad \mathbf{V}_n^T \mathbf{C} \mathbf{V}_n = \mathbf{D}_\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Bằng phép thế $\mathbf{q} = \mathbf{V}_n \mathbf{p}$ ta có thể đưa phương trình

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

về dạng

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{D}_\omega \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$$

Các tọa độ chính $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ trong phép thế $\mathbf{q} = \mathbf{V}_n \mathbf{p}$ được gọi là các tọa độ chuẩn. Chú ý rằng các tọa độ chuẩn là các tọa độ chính đặc biệt. Ta vẫn sử dụng các ký hiệu p_i để chỉ các tọa độ chuẩn. Bạn đọc cần chú ý đến chú giải trên để tránh nhầm lẫn sau này.

Nếu ta biết được ma trận dạng riêng

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (2.32)$$

thì ma trận dạng riêng chuẩn được xác định bởi hệ thức

$$\mathbf{V}_n = \left[\frac{1}{\alpha_1} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{v}_2, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \mathbf{v}_n \right] \quad (2.33)$$

Trong đó các hằng số α_i được xác định bởi công thức

$$\alpha_i = \pm \sqrt{\mu_i} = \pm \sqrt{\mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i} \quad (2.34)$$

Thí dụ 3.9 : Hãy tính ma trận dạng riêng chuẩn của thí dụ 3.8. Cho biết $m = 10 \text{ kg}$, $c = 1000 \text{ N/m}$.

Lời giải : Từ ma trận dạng riêng $\mathbf{V}$ đã biết trong thí dụ 3.8 ta dễ dàng tính được

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\mathbf{v}_1^T \mathbf{M} \mathbf{v}_1} = \pm 4,3581 \text{ (kg)}^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_2 = \pm \sqrt{\mathbf{v}_2^T \mathbf{M} \mathbf{v}_2} = \pm 6,1054 \text{ (kg)}^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_3 = \pm \sqrt{\mathbf{v}_3^T \mathbf{M} \mathbf{v}_3} = \pm 6,9808 \text{ (kg)}^{\frac{1}{2}}$$

Nếu chọn $\alpha_1 = 4,3581$; $\alpha_2 = 6,1054$; $\alpha_3 = 6,9808$ thì ta có

$$\mathbf{V}_n = \left[\frac{1}{\alpha_1} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{v}_2, \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{v}_3 \right] = \begin{bmatrix} 0,2085 & -0,2252 & -0,0765 \\ 0,2295 & 0,1630 & 0,1432 \\ 0,0882 & 0,2120 & -0,3838 \end{bmatrix}$$

Nếu chọn $\alpha_1 = 4,3581$; $\alpha_2 = -6,1054$; $\alpha_3 = -6,9808$ thì

$$\mathbf{V}_n = \left[\frac{1}{\alpha_1} \mathbf{v}_1, \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{v}_2, \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{v}_3 \right] = \begin{bmatrix} 0,2085 & 0,2252 & 0,0765 \\ 0,2295 & -0,1630 & -0,1432 \\ 0,0882 & -0,2120 & 0,3838 \end{bmatrix}$$

2.5 Một vài trường hợp đặc biệt

Trong đoạn này giới hạn xét dao động tự do hệ hai bậc tự do. Phương trình vi phân dao động có dạng

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= 0 \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Khi sử dụng các toạ độ chính hệ phương trình (2.35) đưa được về dạng

$$\begin{aligned}\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 &= 0 \\ \ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 &= 0\end{aligned}\quad (2.36)$$

a) Trường hợp 1 : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Khi đó nghiệm hệ phương trình (2.36) có dạng

$$p_1 = C_1 \sin(\omega t + \alpha_1); \quad p_2 = C_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \quad (2.37)$$

Cả hai toạ độ chính đều dao động điều hoà với cùng tần số ω . Từ hệ thức

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{p}$$

ta suy ra

$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \beta_1); \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \beta_2)$$

Trong trường hợp này cả hai toạ độ suy rộng đều thực hiện dao động điều hoà với cùng tần số ω . Nếu ta chọn toạ độ q_1, q_2 bất kỳ thì chúng cũng dao động điều hoà với tần số ω chung đó. Do đó phương trình dao động có dạng

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0; \quad \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \quad (2.38)$$

b) Trường hợp 2 : $\omega_1 \neq 0, \omega_2 = 0$. Khi đó hệ phương trình (2.36) có dạng

$$\begin{aligned}\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 &= 0 \\ \ddot{p}_2 &= 0\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}p_1 &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ p_2 &= C_2 t + C_3\end{aligned}$$

Như thế trong trường hợp $\omega_1 \neq 0, \omega_2 = 0$ thì toạ độ chính p_1 thực hiện dao động điều hoà với tần số ω_1 còn toạ độ chính p_2 hoặc luôn là hằng số (nếu $C_2 = 0$) hoặc tăng lên vô cùng khi thời gian t tăng. Khả năng nào xảy ra phụ thuộc vào các điều kiện đầu.

Nếu như ta chọn q_1, q_2 một cách tùy ý, thì từ các phương trình (2.10a) và (2.10b) ta có

$$\begin{aligned}(c_{11} - m_{11}\omega_2^2) + v_2(c_{12} - m_{12}\omega_2^2) &= 0 \\ (c_{12} - m_{21}\omega_2^2) + v_2(c_{22} - m_{22}\omega_2^2) &= 0\end{aligned}$$

Khi $\omega_2 = 0$, từ hai phương trình trên ta suy ra

$$v_2 = -\frac{c_{11}}{c_{12}} = -\frac{c_{12}}{c_{22}} \quad \rightarrow \quad c_{12} = \pm \sqrt{c_{11}c_{22}}$$

Bây giờ ta xét hệ cơ học thoả mãn điều kiện trên. Ngoài ra ta còn giả thiết thêm

$$c_{11} \neq 0; \quad c_{22} = 0; \quad c_{12} = 0$$

Động năng và thế năng của hệ khảo sát có dạng

$$T = \frac{1}{2} (m_{11} \dot{q}_1^2 + 2m_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{22} \dot{q}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2} c_{11} q_1^2$$

Thế vào phương trình Lagrange loại II ta được hệ phương trình vi phân

$$m_{11} \ddot{q}_1 + m_{12} \ddot{q}_2 + c_{11} q_1 = 0$$

$$m_{12} \ddot{q}_1 + m_{22} \ddot{q}_2 = 0$$

Hai phương trình này có thể viết lại dưới dạng như sau

$$\ddot{q}_2 = -\frac{m_{12}}{m_{22}} \ddot{q}_1$$

$$\left(m_{11} - \frac{m_{12}^2}{m_{22}} \right) \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 = 0$$

Từ đó giải ra được

$$q_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1); \quad q_2 = -\frac{m_{12}}{m_{22}} q_1 + C_2 t + C_3 \quad (2.39)$$

Thế biểu thức q_1 vào q_2 ta được

$$q_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1)$$

$$q_2 = -\frac{m_{12}}{m_{22}} C_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + C_2 t + C_3 \quad (2.40)$$

Như thế khi $C_2 \neq 0$ tọa độ suy rộng q_2 sẽ tăng lên vô hạn khi t tăng. Chú ý rằng trong trường hợp này tọa độ q_2 là tọa độ xyclic. Trạng thái cân bằng của hệ không thể thiết lập được đối với tọa độ xyclic.

Trong trường hợp tổng quát ta có

$$q_1 = p_1 + p_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 t + C_3 \quad (2.41)$$

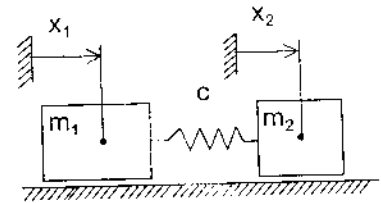
$$q_2 = v_1 p_1 + v_2 p_2 = v_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1) + v_2 C_2 t + v_2 C_3$$

Thí dụ 3.10 : Cho hệ gồm hai khối lượng m_1 và m_2 nối với nhau bằng lò xo có độ cứng c như hình 3.9. Hãy tìm biểu thức nghiệm tổng quát và một tích phân đầu của hệ.

Lời giải : Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c (x_2 - x_1)^2$$



Hình 3.9

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại II ta được

$$m_1 \ddot{x}_1 + cx_1 - cx_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0$$

Phương trình đặc trưng của hệ

$$|C - \omega^2 M| = \begin{vmatrix} c - \omega^2 m_1 & -c \\ -c & c - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow m_1 m_2 \omega^4 - c(m_1 + m_2) \omega^2 = 0$$

Từ đó suy ra

$$\omega_1^2 = \frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}; \quad \omega_2^2 = 0$$

Ma trận dạng riêng có dạng

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

Trong đó v_i được xác định từ phương trình

$$c - \omega_1^2 m_1 - c v_1 = 0 \rightarrow v_1 = -\frac{m_1}{m_2}, \quad v_2 = 1$$

Vậy ta có

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -m_1/m_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Các phương trình chuyển động của hệ trong dạng toạ độ chính

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 &= 0 \rightarrow p_1 = A \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ \ddot{p}_2 &= 0 \rightarrow p_2 = B_1 + B_2 t \end{aligned}$$

Trở lại toạ độ x_1, x_2 ta có

$$x_1(t) = p_1(t) + p_2(t) = B_1 + B_2 t + A \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

$$x_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} p_1(t) + p_2(t) = B_1 + B_2 t - \frac{m_1}{m_2} A \cos(\omega_1 t + \alpha)$$

Các hằng số A, α, B_1, B_2 được xác định từ các điều kiện đầu.

Gọi x_C là toạ độ khối tâm cơ hệ, theo định nghĩa khối tâm ta có

$$(m_1 + m_2)x_C = m_1 x_1 + m_2 (l + x_2)$$

Từ định lý bảo toàn động lượng ta có

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_C = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = \text{const} \quad (2.42)$$

Biểu thức (2.42) là một tích phân đầu của hệ.

c) Trường hợp 3: $\omega_1 \approx \omega_2$

Phương trình dao động ở dạng toạ độ chính

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad p_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad p_2(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Trong đó $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ là các hằng số.

Trở lại toạ độ q_1, q_2 theo (2.24) ta có

$$q_1 = p_1 + p_2 = C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (2.43)$$

$$q_2 = v_1 p_1 + v_2 p_2 = v_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + v_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (2.44)$$

Do $\omega_1 \approx \omega_2$ nên $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$. Nếu ta đặt

$$\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (2.45)$$

thì $\varphi(t)$ thay đổi chậm theo thời gian. Từ (2.43) ta suy ra

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin(\omega_1 t + \alpha_1 + \varphi) \\ &= C_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 [\sin(\omega_1 t + \alpha_1) \cos \varphi + \sin \varphi \cos(\omega_1 t + \alpha_1)] \\ &= (C_1 + C_2 \cos \varphi) \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 \sin \varphi \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \end{aligned}$$

Tính toán tương tự ta được

$$q_2 = (v_1 C_1 + v_2 C_2 \cos \varphi) \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + v_2 C_2 \sin \varphi \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$$

Nếu ta đặt

$$C_1 + C_2 \cos \varphi = A_1 \cos \theta_1; \quad C_2 \sin \varphi = A_1 \sin \theta_1$$

$$v_1 C_1 + v_2 C_2 \cos \varphi = A_2 \cos \theta_2; \quad v_2 C_2 \sin \varphi = A_2 \sin \theta_2$$

thì các biểu thức $q_1(t)$, $q_2(t)$ có dạng

$$\begin{aligned} q_1(t) &= A_1(t) \sin(\omega_1 t + \alpha_1 + \theta_1) \\ q_2(t) &= A_2(t) \sin(\omega_1 t + \alpha_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

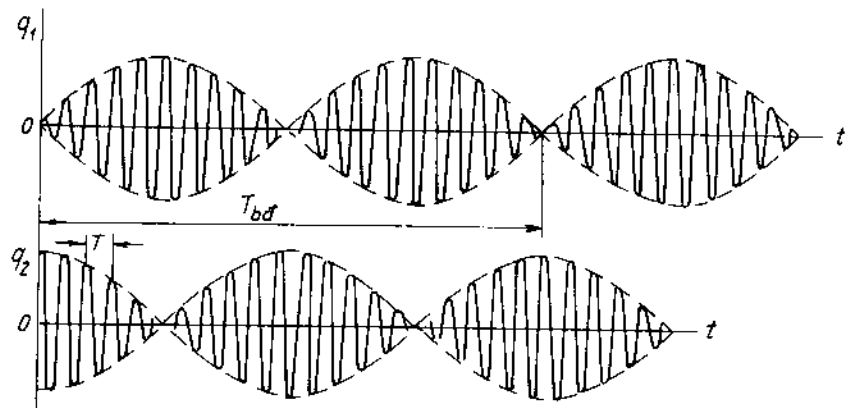
Trong đó

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2 \cos \varphi}; \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{C_2 \sin \varphi}{C_1 + C_2 \cos \varphi} \\ A_2 &= \sqrt{v_1^2 C_1^2 + v_2^2 C_2^2 + 2v_1 v_2 C_1 C_2 \cos \varphi}; \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{v_2 C_2 \sin \varphi}{v_1 C_1 + v_2 C_2 \cos \varphi} \end{aligned}$$

Do góc $\varphi(t)$ thay đổi chậm theo thời gian nên các hàm A_1 , A_2 , θ_1 , θ_2 thay đổi chậm theo thời gian. Từ (2.46) ta thấy chu kỳ thay đổi biên độ

$$T_{bd} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

rất lớn so với chu kỳ $T = 2\pi/\omega_1$. Hiện tượng dao động như thế gọi là hiện tượng phách. Đồ thị dao động có dạng như hình 3.10



Hình 3.10

Thí dụ 3.11 : Tìm điều kiện xuất hiện hiện tượng phách đối với mô hình dao động trong thí dụ 3.7.

Lời giải : Theo thí dụ 3.7 ta có

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}$$

Hiện tượng phách xuất hiện khi

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 \rightarrow \omega_2^2 - \omega_1^2 \ll \omega_1^2$$

Từ các công thức trên ta suy ra điều kiện xuất hiện hiện tượng phách

$$\frac{2cd^2}{ml^2} \ll \frac{g}{l} \rightarrow \frac{2cd^2}{ml} \ll g.$$

§3. DAO ĐỘNG TỰ DO CÓ CẢN

Phương trình vi phân dao động tự do có lực cản tỷ lệ với vận tốc của hệ n bậc tự do có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0 \quad (3.1)$$

Trong đó $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ là các ma trận vuông cấp n với các phần tử là các hằng số. Cũng giống như ở hệ một bậc tự do, tùy theo cấu trúc của ma trận cản $\mathbf{B}$, hệ có thể thực hiện dao động tự do tắt dần và cũng có thể thực hiện chuyển động không dao động. Về phương diện dao động, ta quan tâm chủ yếu đến trường hợp hệ thực hiện dao động tự do tắt dần. Như thế bài toán quan trọng hàng đầu trong đoạn này là xác định khi nào hệ thực hiện dao động tự do tắt dần, sau đó mới đến thuật toán tìm nghiệm.

3.1 Phương pháp giải trực tiếp (ma trận cản tùy ý)

a) Phương trình xác định trị riêng

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.1) dưới dạng

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}}e^{\lambda t}, \quad \hat{\mathbf{q}} \text{ là véc tơ hằng} \quad (3.2)$$

Thế biểu thức nghiệm (3.2) vào phương trình (3.1) rồi đơn giản đi thừa số $e^{\lambda t}$, ta nhận được phương trình của bài toán giá trị riêng tổng quát

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.3)$$

Điều kiện cần để cho các phần tử của véc tơ $\hat{\mathbf{q}}$ không đồng thời triệt tiêu là

$$P(\lambda) = \det(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{B} + \mathbf{C}) = 0 \quad (3.4)$$

Phương trình (3.4) được gọi là phương trình đặc trưng. Khi $\mathbf{M}$ là ma trận chính qui, $\det \mathbf{M} \neq 0$, thì $P(\lambda)$ là đa thức bậc $2n$ của λ với hệ số thực. Giải phương trình (3.4) ta có được $2n$ nghiệm thực hoặc phức liên hợp. Trong đó nếu λ_i là nghiệm bội m thì xem là m nghiệm. Các trị riêng phức và thực của (3.3) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -\delta_k + i\omega_k, \quad \lambda_{k+s} = -\delta_k - i\omega_k, \quad k=1, \dots, s \leq n \\ \lambda_k &= -\bar{\delta}_k, \quad k=2s+1, \dots, 2n \end{aligned}$$

b) Phân tích các khả năng dao động theo các trị riêng

- Trường hợp trị riêng có phần thực âm khác không

Định nghĩa: Khi $\delta_k > 0$ ($k=1, \dots, s$), $\bar{\delta}_k > 0$ ($k=2s+1, \dots, 2n$) thì cần được gọi là đạt yêu cầu.

Khi cần đạt yêu cầu thì hệ thực hiện dao động tự do tắt dần. Hệ dao động là ổn định tiệm cận. Tùy theo tính chất của chuyển động của hệ, ta có thể phân ra thành ba trường hợp sau:

Cần yếu: $s=n$, $\omega_k \neq 0$ ($k=1, \dots, n$),

Cần mạnh: $\lambda_k = -\bar{\delta}_k < 0$, ($k=1, \dots, 2n$),

Cần hỗn hợp: Trường hợp còn lại.

Trong trường hợp cần yếu, hệ thực hiện chuyển động dao động. Trong trường hợp cần mạnh, hệ thực hiện chuyển động tắt dần.

- Các trường hợp khác

Khi trị riêng λ_k có $\delta_k = 0$ hoặc $\bar{\delta}_k = 0$, nghiệm riêng tương ứng với λ_k sẽ bị chặn. Hệ (3.1) ổn định giới hạn.

Khi phương trình (3.3) có trị riêng λ_k có phần thực dương thì nghiệm riêng tương ứng với λ_k sẽ tăng lên vô cùng khi t tăng. Hệ không dao động. Ta không xét trường hợp này.

c) Các véc tơ riêng

Ứng với trị riêng λ_k , từ hệ phương trình (3.3) ta có:

$$(\lambda_k^2 \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{B} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{q}}_k = 0 \quad (3.5)$$

Từ (3.5) ta xác định được các véc tơ riêng $\hat{\mathbf{q}}_k$. Như đã biết từ đại số tuyến tính, nếu nghiệm của phương trình (3.4) là nghiệm đơn hoặc nếu là nghiệm bội mà bội đại số bằng bội hình học, thì các véc tơ riêng tương ứng sẽ độc lập tuyến tính. Ta có thể sắp xếp $2n$ trị riêng λ_k ứng với $2n$ véc tơ riêng. Các véc tơ riêng được xác định sai khác một hằng số nhân. Chú ý rằng các véc tơ riêng ứng với các trị riêng phức liên hợp là các véc tơ phức, còn các véc tơ riêng ứng với các trị riêng thực là các véc tơ thực.

Các véc tơ riêng của hệ dao động tự do có cần nói chung không trực giao với ma trận khối lượng $\mathbf{M}$, ma trận cản $\mathbf{B}$ và ma trận độ cứng $\mathbf{C}$. Tuy nhiên nếu giả sử có tồn tại một trị riêng λ_k mà $\delta_k = 0$. Khi đó ta có

$$\lambda_k = i\omega_k, \quad \lambda_{k+n} = -i\omega_k \quad (3.6)$$

Thế (3.6) vào phương trình (3.5) ta được

$$\begin{aligned} (-\omega_k^2 \mathbf{M} + i \omega_k \mathbf{B} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{q}}_k &= 0 \\ (-\omega_k^2 \mathbf{M} - i \omega_k \mathbf{B} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{q}}_k &= 0 \end{aligned}$$

Cộng hai phương trình trên ta được

$$(-\omega_k^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \hat{\mathbf{q}}_k = 0, \quad \omega_k \mathbf{B} \hat{\mathbf{q}}_k = 0 \quad (3.7)$$

Từ (3.7) ta suy ra $\hat{\mathbf{q}}_k$ là véc tơ riêng của hệ dao động tự do không cản. Khi $\mathbf{M}$ và $\mathbf{C}$ là các ma trận đối xứng thì $\hat{\mathbf{q}}_k$ trực giao với $\mathbf{M}$ và $\mathbf{C}$.

d) Nghiệm tổng quát của bài toán dao động tự do có cản yếu

Trong trường hợp hệ có cản yếu, ta có

$$\lambda_k = -\delta_k + i\omega_k, \quad \lambda_{k+n} = -\delta_k - i\omega_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Trong trường hợp này ta đặt

$$\hat{\mathbf{q}}_k = \hat{\mathbf{u}}_k + i\hat{\mathbf{v}}_k, \quad \hat{\mathbf{q}}_{k+n} = \hat{\mathbf{u}}_k - i\hat{\mathbf{v}}_k$$

Nghiệm riêng tương ứng với cặp trị riêng λ_k và λ_{k+n} có dạng

$$\mathbf{q}_k(t) = \bar{C}_k e^{i\omega_k t} (\hat{\mathbf{u}}_k + i\hat{\mathbf{v}}_k) + \bar{D}_k e^{-i\omega_k t} (\hat{\mathbf{u}}_k - i\hat{\mathbf{v}}_k) \quad (3.8)$$

với $\bar{C}_k, \bar{D}_k$ là các hằng số phức. Nếu ta đưa vào các hằng số tích phân mới

$$C_k = \bar{C}_k + \bar{D}_k, \quad D_k = i(\bar{C}_k - \bar{D}_k)$$

thì biểu thức (3.8) có dạng

$$\mathbf{q}_k(t) = e^{-i\delta_k t} [(C_k \hat{\mathbf{u}}_k + D_k \hat{\mathbf{v}}_k) \cos \omega_k t + (D_k \hat{\mathbf{u}}_k - C_k \hat{\mathbf{v}}_k) \sin \omega_k t] \quad (3.9)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình dao động tự do có cản (3.1) có dạng

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{q}_k(t)$$

Chú ý: Do $\hat{\mathbf{u}}_k$ và $\hat{\mathbf{v}}_k$ nói chung không tỷ lệ với nhau nên các tọa độ của véc tơ $\mathbf{q}_k$ có pha khác nhau.

3.2 Phương pháp ma trận dạng riêng (ma trận cản đặc biệt)

Trong một số bài toán kỹ thuật ma trận cản $\mathbf{B}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \delta \mathbf{C} \quad (3.10)$$

Trong đó α và δ là các hằng số. Ma trận (3.10) được gọi là ma trận cản Rayleigh.

Biểu thức (3.10) có khi được viết dưới dạng

$$\mathbf{B} = \alpha \bar{\omega} \mathbf{M} + \frac{\beta}{\bar{\omega}} \mathbf{C}$$

Trong đó $\bar{\omega}$ là một tần số qui chiếu tùy ý được đưa vào để α và β là các đại lượng không thứ nguyên. Công thức cản Rayleigh có vai trò quan trọng trong động lực học công trình.

Khi đó bằng phép biến đổi $\mathbf{q} = \mathbf{Vp}$, với $\mathbf{V}$ là ma trận dạng riêng, ta đưa được phương trình (3.1) về dạng

$$\mu_i \ddot{p}_i + \beta_i \dot{p}_i + \gamma_i p_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.11)$$

Trong đó

$$\mu_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i; \quad \beta_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \mathbf{v}_i; \quad \gamma_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i \quad (3.12)$$

Nghiệm của các phương trình dạng (3.11) đã được khảo sát kỹ trong chương 2.

Chú ý. Việc đưa phương trình (3.1) về dạng (3.11) tương đương với việc đưa đồng thời 3 ma trận $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ về dạng đường chéo. Người ta đã chứng minh được định lý sau.

Định lý. Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình (3.1) đưa được về dạng về trái tách rời nhau (3.11) là điều kiện hoán vị vị trí như sau

$$\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$$

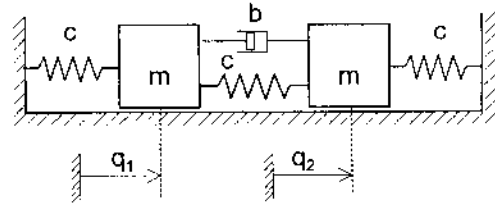
Khi $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, và $\mathbf{C}$ là các ma trận đối xứng, điều kiện trên có thể viết dưới dạng

$$\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} = (\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C})^T$$

Trong một vài tài liệu người ta cũng đưa ra một vài dạng khác về điều kiện chéo hoá đồng thời ba ma trận $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, và $\mathbf{C}$. Tuy nhiên những kết quả này thường mang nặng ý nghĩa lý thuyết hơn thực hành.

Thí dụ 3.12: Cho mô hình dao động hệ hai bậc tự do như hình 3.11. Hãy tìm nghiệm của hệ bằng phương pháp ma trận dạng riêng.

Lời giải : Các biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ có dạng



Hình 3.11

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c q_1^2 + \frac{1}{2} c (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2} c q_2^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$$

Thế các biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được phương trình vi phân dao động tự do có cản của hệ

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chia phương trình trên cho m và sử dụng các ký hiệu

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad \delta = \frac{b}{2m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + 2\omega_0 D \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nếu chọn

$$\alpha = -2\omega_0 D, \quad \delta = \frac{2D}{\omega_0}$$

thì từ phương trình trên ta có

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \delta \mathbf{C}$$

Do đó ta có thể áp dụng phương pháp ma trận dạng riêng tìm nghiệm của phương trình dao động ở trên. Phương trình đặc trưng của hệ

$$\begin{aligned} |\mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{M}| &= \begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \lambda^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \lambda^4 - 4\omega_0^2 \lambda^2 + 3\omega_0^4 &= 0 \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$\lambda_1^2 = 3\omega_0^2, \quad \lambda_2^2 = \omega_0^2$$

Phương trình xác định các vectơ riêng

$$(\lambda_i^2 - 2\omega_0^2) \mathbf{a}_1^{(i)} + \omega_0^2 \mathbf{a}_2^{(i)} = 0$$

Chọn $\mathbf{a}_1^{(i)} = 1$, ta có

$$\mathbf{a}_2^{(i)} = \frac{2\omega_0^2 - \lambda_i^2}{\omega_0^2}$$

$$\text{Khi } \lambda_1^2 = 3\omega_0^2 \Rightarrow \mathbf{a}_2^{(1)} = -1, \text{ khi } \lambda_2^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \mathbf{a}_2^{(2)} = 1.$$

Vậy ma trận dạng riêng là

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó dễ dàng tính được

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} = \omega_0^2 \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = 2\omega_0 D \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình dao động của hệ dưới dạng tọa độ chính

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + 4\omega_0 D \dot{p}_1 + 3\omega_0^2 p_1 &= 0 \\ \ddot{p}_2 + \omega_0^2 p_2 &= 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra các biểu thức nghiệm dạng tọa độ chính

$$\begin{aligned} p_1(t) &= e^{-2D\omega_0 t} [C_{11} \cos(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t) + C_{12} \sin(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t)] \\ p_2(t) &= C_{21} \cos \omega_0 t + C_{22} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Trở lại tọa độ suy rộng ban đầu ta có

$$\begin{aligned} q_1(t) = p_1(t) + p_2(t) &= e^{-2D\omega_0 t} [C_{11} \cos(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t) \\ &\quad + C_{12} \sin(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t)] + C_{21} \cos \omega_0 t + C_{22} \sin \omega_0 t \\ q_2(t) = -p_1(t) + p_2(t) &= -e^{-2D\omega_0 t} [C_{11} \cos(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t) \\ &\quad + C_{12} \sin(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t)] + C_{21} \cos \omega_0 t + C_{22} \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Giả sử cho biết điều kiện đầu

$$q_1(0) = q_2(0) = 0, \quad \dot{q}_1(0) = v, \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

Với các điều kiện đầu đó ta dễ dàng tính được

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{21} = 0 \\ C_{12} &= \frac{v}{2\omega_0} \frac{1}{\sqrt{3-4D^2}}, \quad C_{22} = \frac{v}{2\omega_0} \end{aligned}$$

Nghiệm riêng ứng với các điều kiện đầu trên có dạng

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{v}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\sqrt{3-4D^2}} e^{-2D\omega_0 t} \sin(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t) + \sin \omega_0 t \right] \\ q_2(t) &= -\frac{v}{2\omega_0} \left[\frac{1}{\sqrt{3-4D^2}} e^{-2D\omega_0 t} \sin(\sqrt{3-4D^2} \omega_0 t) - \sin \omega_0 t \right] \end{aligned}$$

§4. TÍNH TOÁN BẰNG SỐ CÁC TẦN SỐ RIÊNG VÀ CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG

4.1 Bài toán giá trị riêng

Phương trình vi phân dao động tự do không cản có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (4.1) dưới dạng

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} \sin(\omega t + \alpha) \quad (4.2)$$

Thế biểu thức (4.2) vào phương trình (4.1) rồi đơn giản đi biểu thức $\sin(\omega t + \alpha)$ ta nhận được phương trình

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

Trong đó ω^2 là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (4.4)$$

Nếu gọi $\lambda = \omega^2$ thì phương trình (4.3) có dạng

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Khi $\mathbf{M}$ là ma trận chính quy, từ phương trình (4.3) suy ra

$$(\mathbf{C}^* - \lambda \mathbf{E})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (4.6)$$

Khi $\mathbf{C}$ là ma trận chính quy, nếu ký hiệu $\lambda = 1/\omega^2$ từ phương trình (4.3) ta suy ra

$$(\mathbf{M}^* - \lambda \mathbf{E})\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M} \quad (4.7)$$

ở trên ta ký hiệu $\mathbf{E}$ là ma trận đơn vị.

Như thế việc tính toán các tần số riêng và dạng dao động riêng dẫn đến bài toán giá trị riêng tổng quát

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

hoặc có thể biến đổi về bài toán giá trị riêng đặc biệt

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Khi $\mathbf{M}$ và $\mathbf{C}$ là các ma trận đối xứng, tích các ma trận $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ hoặc $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}$ có thể không phải là ma trận đối xứng nữa. Do đó ta ít sử dụng phương trình (4.6) và

(4.7). Giả sử $\mathbf{M}$ là ma trận đối xứng. Khi đó theo Cholesky, ta có thể phân tích $\mathbf{M}$ thành tích của hai ma trận tam giác

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \quad (4.10)$$

Thay (4.10) vào phương trình (4.5) ta được

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{L} \mathbf{L}^T) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Nhân bên trái phương trình trên với ma trận $\mathbf{L}^{-1}$ ta được

$$[\mathbf{L}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{L}^T - \lambda \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}^T] \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow (\mathbf{C}^* - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$$

Trong đó ta ký hiệu

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{L}^{-1})^T, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{L}^T \mathbf{x}.$$

Người ta có thể chứng minh được $\mathbf{C}^*$ cũng là ma trận đối xứng.

Khi $\mathbf{A}$ là một ma trận thực vuông cấp n thì bài toán giá trị riêng (4.9) có nghiệm không tầm thường $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ khi và chỉ khi λ là nghiệm của phương trình đặc trưng

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4.11)$$

Như đã biết từ đại số phương trình đặc trưng (4.11) có n nghiệm trên trường số phức, trong đó nếu λ_j là nghiệm bội k_j thì ta xem phương trình (4.11) có k_j nghiệm λ_j . Ở đây ta đưa ra hai khái niệm *bội đại số* và *bội hình học* của trị riêng λ_j . Bội đại số của trị riêng λ_j , ký hiệu là k_j , là số bội của λ_j với tư cách là nghiệm của phương trình đặc trưng (4.11). Bội hình học của trị riêng λ_j , ký hiệu là γ_j , là số chiều của không gian riêng ứng với trị riêng λ_j của ma trận $\mathbf{A}$. Người ta chứng minh được rằng bội hình học γ_j của trị riêng λ_j được xác định bởi công thức sau

$$\gamma_j = n - \text{Rank}(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) \quad (4.12)$$

Chú ý rằng, ta luôn có hệ thức $1 \leq \gamma_j \leq k_j$. Trong một số tài liệu người ta gọi bội hình học γ_j là số khuyết của ma trận $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})$.

Từ đại số tuyến tính chúng ta đã biết:

- Nếu ma trận $\mathbf{A}$ thực vuông cấp n có n trị riêng khác nhau từng đôi một thì có thể biến đổi đồng dạng về dạng đường chéo $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$.
- Nếu ma trận $\mathbf{A}$ thực vuông cấp n có trị riêng bội λ_j mà bội đại số bằng bội hình học ($k_j = \gamma_j$) thì có thể biến đổi đồng dạng về dạng đường chéo $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$.

- Nếu ma trận $\mathbf{A}$ thực vuông cấp n có ít nhất một trị riêng λ_j mà bội đại số khác bội hình học ($k_j \neq \gamma_j$) thì ta chỉ có thể biến đổi đồng dạng ma trận $\mathbf{A}$ về dạng chuẩn Jordan $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Trong hai trường hợp đầu ứng với mỗi trị riêng λ_j ta có thể tìm được k_j vectơ riêng độc lập tuyến tính. Chúng tạo thành một hệ đầy đủ n vectơ riêng độc lập tuyến tính. Từ đó ta có thể xây dựng ma trận $\mathbf{P}$ là ma trận mà mỗi cột của nó là một vectơ riêng. Trong trường hợp thứ ba, do $\gamma_j < k_j$, nên ứng với λ_j ta chỉ có thể tìm được γ_j vectơ riêng độc lập tuyến tính. Trong trường hợp này ta phải tính thêm $(k_j - \gamma_j)$ vectơ chính. Tập các vectơ riêng và vectơ chính của ma trận $\mathbf{A}$ tạo thành hệ n vectơ độc lập tuyến tính. Từ đó ta xây dựng ma trận $\mathbf{T}$ là ma trận mà mỗi cột của nó hoặc là vectơ riêng hoặc là vectơ chính của ma trận $\mathbf{A}$.

Trong trường hợp $\mathbf{A}$ là ma trận vuông cấp n , thực và đối xứng thì tất cả các trị riêng của $\mathbf{A}$ đều là số thực. Ứng với mỗi trị riêng λ_j của ma trận thực đối xứng, bội đại số và bội hình học của nó luôn luôn bằng nhau. Do đó ma trận thực đối xứng luôn luôn có thể chéo hoá được.

4.2 Phương pháp Rayleigh

Trước khi trình bày các phương pháp số, ta nêu ra một cách ngắn gọn công thức Rayleigh xác định gần đúng tần số dao động riêng.

Các biểu thức động năng và thế năng của hệ dao động n bậc tự do có dạng [26]

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (4.13)$$

Giả sử nghiệm của phương trình dao động tự do có dạng (4.2). Khi đó các biểu thức động năng và thế năng có dạng

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} \omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$\text{Từ đó ta có } T_{\max} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a} \omega^2, \quad \Pi_{\max} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a} \quad (4.14)$$

Ý tưởng cơ bản của phương pháp Rayleigh là trong hệ bảo toàn ta có hệ thức

$$T_{\max} = \Pi_{\max}$$

Thế biểu thức (4.14) vào hệ thức $T_{\max} = \Pi_{\max}$ suy ra công thức Rayleigh để xác định gần đúng tần số dao động riêng

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{M} \mathbf{a}} \quad (4.15)$$

4.3 Phương pháp Jacobi

Phương pháp lặp Jacobi, tên của nhà toán học Carl Gustav Jacobi (1804-1851), cho phép xác định tất cả các trị riêng của ma trận thực đối xứng. Cơ sở toán học của phương pháp này là định lý sau đây của đại số tuyến tính.

Định lý: Nếu A là ma trận thực đối xứng thì sẽ tồn tại một ma trận trực giao Q mà $Q^{-1}AQ = D$, với D là ma trận đường chéo. Các trị riêng của ma trận đường chéo D cũng chính là các trị riêng của ma trận A .

Do Q là ma trận trực giao nên $Q^{-1} = Q^T$. Do đó ta có

$$Q^T A Q = D \quad (4.16)$$

Nội dung của phương pháp lặp Jacobi là tìm cách xây dựng một dãy các ma trận trực giao $S^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ sao cho

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S^{(1)} S^{(2)} \dots S^{(k)}) = Q$$

Các ma trận $S^{(k)}$ được xây dựng như sau

$$s_{pp}^{(k)} = s_{qq}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad |\varphi_k| \leq \pi$$

$$s_{ii}^{(k)} = 1 \quad \text{khi } i \neq p \text{ và } i \neq q$$

$$s_{pq}^{(k)} = -s_{qp}^{(k)} = \sin \varphi_k, \quad |\varphi_k| \leq \pi$$

$$s_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{với mọi } i, j \text{ còn lại.}$$

Như thế ma trận $S^{(k)}$ có dạng như sau

$$S^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & \cos \varphi_k & 0 & .. & 0 & -\sin \varphi_k & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & \sin \varphi_k & 0 & .. & 0 & \cos \varphi_k & 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 cột p cột q

← hàng p
 ← hàng q

Ma trận $S^{(k)}$ được xây dựng như trên được gọi là ma trận quay Jacobi.

Hệ thức (4.16) bây giờ có dạng

$$(S^{(\infty)})^T \dots (S^{(k)})^T \dots (S^{(1)})^T A S^{(1)} \dots S^{(k)} \dots S^{(\infty)} = D$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$T^{(k)} = (S^{(k)})^T \dots (S^{(1)})^T A S^{(1)} \dots S^{(k)}, \quad k=1, 2, \dots \quad (4.17)$$

$$T^{(0)} = A$$

thì quá trình lặp Jacobi có thể biểu diễn dưới dạng

$$T^{(k)} = (S^{(k)})^T T^{(k-1)} S^{(k)} \quad (4.18)$$

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{(k)} \quad (4.19)$$

Các giá trị của φ_k được chọn sao cho sau bước lặp thứ k phần tử t_{ij} trong ma trận $T^{(k)}$ sẽ triệt tiêu. Điều này sẽ đạt được nếu ta chọn φ_k theo công thức

$$\operatorname{tg} 2\varphi_k = \frac{2t_{ij}^{(k-1)}}{t_{ii}^{(k-1)} - t_{jj}^{(k-1)}} \quad \text{khí } t_{ii}^{(k-1)} \neq t_{jj}^{(k-1)} \quad (4.20)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{4} \quad \text{khí } t_{ii}^{(k-1)} = t_{jj}^{(k-1)} \quad (4.21)$$

Trong đó $t_{ij}^{(k-1)}$ là các phần tử của ma trận $T^{(k-1)}$.

Chú ý rằng ở các bước lặp tiếp theo, phần tử ở vị trí (i, j) có thể lại có giá trị khác không. Tuy nhiên có thể chứng minh được rằng với cách lặp như trên tổng các bình phương của các phần tử không nằm trên đường chéo chính của ma trận $T^{(k)}$ sẽ tiến dần tới không. Sự hội tụ của phương pháp lặp Jacobi đã được chứng minh một cách chặt chẽ về mặt toán học. Trong trường hợp sử dụng máy tính điện tử ta có thể tiến hành như sau:

Ta tìm tất cả các phần tử không nằm trên đường chéo chính của ma trận $T^{(k)}$, nếu gặp phần tử t_{ij} mà $|t_{ij}| > \varepsilon$, với ε là số dương nhỏ cho trước, ta thực hiện phép quay Jacobi. Các phép quay dừng lại khi mọi t_{ij} đều có trị tuyệt đối nhỏ thua ε .

Thí dụ 3.13. Cho biết ma trận A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm tất cả các trị riêng của ma trận **A** bằng phương pháp lập Jacobi.

Lời giải : Lấy $\mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{A}$. Tìm tất cả các phần tử không nằm trên đường chéo chính của $\mathbf{T}^{(0)}$ mà có trị tuyệt đối lớn nhất. Đó là phần tử $t_{44}^{(0)} = 9$. Theo các công thức (4.20) và (4.21) ta chọn φ_1 như sau

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2t_{34}^{(0)}}{t_{33}^{(0)} - t_{44}^{(0)}} = \frac{18}{10 - 10} = \infty \Rightarrow 2\varphi_1 = 90^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 45^\circ$$

Ma trận $\mathbf{S}^{(1)}$ có dạng

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ 0 & 0 & \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Theo công thức (4.18) ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 15\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 7 & 5 & 11\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 8 & 6 & 19\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 7 & 5 & 19\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 7 & 15\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 7 & 5 & 11\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 15\sqrt{2}/2 & 11\sqrt{2}/2 & 19 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Phần tử lớn nhất trong các phần tử không nằm trên đường chéo chính của ma trận $\mathbf{T}^{(1)}$ là $t_{13}^{(1)} = 15\sqrt{2}/2$. Ta chọn φ_2 như sau

$$\operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2t_{13}^{(1)}}{t_{11}^{(0)} - t_{33}^{(0)}} = \frac{15\sqrt{2}}{10 - 19} \Rightarrow \varphi_2 = 56^\circ 49' 49''$$

Ma trận $S^{(2)}$ có dạng

$$S^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ đó theo (4.18) ta tính được

$$T^{(2)} = \begin{bmatrix} 26,021718 & 10,349806 & 0 & -0,390331 \\ 10,349806 & 5 & -1,543214 & -0,707107 \\ 0 & -1,543214 & 2,978282 & 0,589611 \\ -0,390331 & -0,707107 & 0,589611 & 1 \end{bmatrix}$$

Sau 14 phép quay ta được

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0,010150 \\ \lambda_2 &= 0,843110 \\ \lambda_3 &= 3,858054 \\ \lambda_4 &= 30,288686 \end{aligned}$$

Chú ý rằng, bằng phương pháp Jacobi ta nhận được ma trận đường chéo D mà các phần tử trên đường chéo chính có thể không sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Theo lý thuyết biến đổi ma trận, vị trí của các trị riêng trên đường chéo chính không quan trọng mà ta chỉ quan tâm đến trị số của chúng mà thôi.

4.4 Phương pháp QR

Để tính toán các trị riêng của ma trận thực tổng quát A (có thể đối xứng hoặc không đối xứng) người ta thường sử dụng phương pháp QR. Phương pháp QR do nhà toán học J.G.F. Francis người Anh đề xuất năm 1961. Trong các hệ chương trình MATLAB, MAPLE,... ta thấy có lệnh $\text{eig}(A)$ để tính trị riêng và vectơ riêng của ma trận A dựa trên việc phân tích ma trận A thành tích của ma trận trực giao Q và ma trận tam giác trên R . Để sử dụng có hiệu quả các chương trình tính trị riêng và vectơ riêng bằng phương pháp QR, dưới đây giới thiệu sơ lược về nội dung của phương pháp này.

a) Ma trận Householder

Định nghĩa. Một ma trận vuông cấp n trên trường số thực có dạng

$$H = E - 2uu^T, \text{ với } \|u\| = 1, u \in \mathbb{R}^n \quad (4.22)$$

được gọi là ma trận Householder.

Tính chất. Ma trận Householder là ma trận đối xứng, trực giao và có định thức bằng -1.

Chứng minh. Do $\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ là ma trận đối xứng, nên $(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$. Từ đó ta suy ra:

$$\mathbf{H}^T = (\mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{E} - (2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \mathbf{H}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\mathbf{H}^T &= \mathbf{H}\mathbf{H} = (\mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)(\mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T) \\ &= \mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{u})\mathbf{u}^T = \mathbf{E}\end{aligned}$$

Vậy ma trận Householder là ma trận trực giao, đối xứng:

$$\mathbf{H}^T = \mathbf{H} = \mathbf{H}^{-1} \quad (4.23)$$

Để chứng minh tính chất $\det(\mathbf{H}) = -1$, ta chọn một ma trận trực giao $\mathbf{C}$ cùng cấp với ma trận $\mathbf{H}$, cột thứ nhất của ma trận $\mathbf{C}$ là vectơ $\mathbf{u}$. Như vậy $\mathbf{C}\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}$. Từ đó suy ra $\mathbf{e}_1 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{C}^T\mathbf{u}$.

Ta tính tích ba ma trận $\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C} = \mathbf{C}^T\mathbf{E}\mathbf{C} - 2\mathbf{C}^T\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{C} = \mathbf{E} - 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T$$

$$\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy $\det(\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C}) = -1$. Mặt khác ta có

$$\det(\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^T)\det(\mathbf{H})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{H}) = -1.$$

b) Biến đổi ma trận A về dạng Hessenberg bằng ma trận Householder

Ma trận *Hessenberg* là ma trận á tam giác có dạng

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3,n-1} & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sử dụng các ma trận Householder ta đưa ma trận vuông A về ma trận Hessenberg theo sơ đồ sau:

$$\begin{aligned} B_1 &= A \\ B_{m+1} &= H_m B_m H_m^T; \quad m = 1, 2, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Trong đó các ma trận Householder có dạng

$$H_m = E - 2u_m u_m^T \quad (4.26)$$

Sau $n-2$ bước ta đưa được ma trận A về dạng B

$$B = B_{n-1}$$

Ma trận A sẽ đồng dạng với ma trận B nếu như các vectơ u_m của ma trận H_m được xây dựng từ ma trận A . Có nhiều cách xây dựng ma trận H . Dưới đây ta nêu ra một phương án.

Khi $m = 1$, vectơ u_1 được chọn như sau

$$u_1^T = \mu_1 [0, a_{21} - s_1, a_{31}, \dots, a_{n1}] \quad (4.27)$$

Trong đó các tham số μ_1 và s_1 được xác định bởi các công thức:

$$s_1 = \text{sign}(-a_{21}) \sqrt{\sum_{i=2}^n a_{i1}^2}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2s_1(s_1 - a_{21})}} \quad (4.28)$$

Với cách chọn như thế thì ma trận

$$H_1 = E - 2u_1 u_1^T$$

sẽ là ma trận Householder. Cột thứ nhất của ma trận

$$B_2 = H_1 B_1 H_1^T (= H_1 A H_1^T)$$

có $n-2$ phần tử từ dưới lên bằng 0.

Tương tự như vậy, khi $m = 2$, ta chọn vectơ u_2 theo các phần tử của ma trận B_2

$$u_2^T = \mu_2 [0, 0, b_{32}^{(2)} - s_2, b_{42}^{(2)}, \dots, b_{n2}^{(2)}]$$

$$s_2 = \text{sign}(-b_{32}^{(2)}) \sqrt{\sum_{i=3}^n (b_{i2}^{(2)})^2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{2s_2(s_2 - b_{32}^{(2)})}}$$

$$H_2 = E - 2u_2 u_2^T,$$

$$B_3 = H_2 B_2 H_2^T$$

Khi đó cột thứ hai của ma trận B_3 có $n-3$ phần tử từ dưới lên bằng 0, cột thứ nhất của nó vẫn giữ nguyên các phần tử không như lần thứ nhất.

Tiếp tục quá trình trên $n-2$ bước ta được ma trận $\mathbf{B}_{n-1}$ là ma trận Hessenberg. Do công thức (4.25) ta dễ dàng thấy $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n-1}$ là hai ma trận đồng dạng.

Để thấy cụ thể các bước tính ở trên ta đưa ra một thí dụ minh họa như sau.

Cho ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm ma trận $\mathbf{B}$ đồng dạng với $\mathbf{A}$ và có dạng Hessenberg.

Theo công thức (4.27) và (4.28) ta có

$$s_1 = \text{sign}(-a_{21}) \sqrt{\sum_{i=2}^3 a_{i1}^2} = -\sqrt{3^2 + (-4)^2} = -5$$

$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2s_1(s_1 - a_{21})}} = \frac{1}{\sqrt{2(-5)(-5-3)}} = \frac{1}{4\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{u}_1^T = \mu[0, a_{21} - s_1, a_{31}] = \frac{1}{4\sqrt{5}}[0, 8, -4]$$

Ma trận Householder có dạng:

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

$$2\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,6 & -0,8 \\ 0 & -0,8 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0,8 \\ 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{HA} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -5 & -0,8 & 2 \\ 0 & -0,6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{HAH} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -5 & 2,08 & 0,56 \\ 0 & -0,44 & -1,05 \end{bmatrix}$$

Do $\mathbf{A}$ là ma trận vuông cấp 3 nên chỉ cần một bước lặp là đưa được về dạng Hessenberg.

c) Biến đổi ma trận Hessenberg về dạng tam giác trên bằng ma trận Givens

Ma trận Givens là ma trận có dạng

$$G_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & s & c & \\ & & & -c & s & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{hàng } i \\ \\ \\ \downarrow \\ \text{cột } i \end{matrix} \quad (4.29)$$

Trong đó $s^2 + c^2 = 1$.

Sử dụng ma trận Givens ta đưa ma trận B về dạng tam giác trên. Chọn $A_1 = B$, sau đó tính tích hai ma trận $B_1 = G_1 A_1 = G_1 B$:

$$B_1 = G_1 B = \begin{bmatrix} s & c & 0 & \dots & 0 \\ -c & s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sb_{11} + cb_{21} & sb_{12} + cb_{22} & sb_{13} + cb_{23} & \dots & sb_{1n} + cb_{2n} \\ -cb_{11} + sb_{21} & -cb_{12} + sb_{22} & -cb_{13} + sb_{23} & \dots & -cb_{1n} + sb_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Để cho $-cb_{11} + sb_{21} = 0$ ta phải có $b_{11} \cos \theta = b_{21} \sin \theta$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \theta = b_{11} / b_{21}$$

(4.30)

Nếu chọn $\operatorname{tg} \theta$ theo công thức (4.30) thì các phần tử trong cột thứ nhất ở dưới đường chéo chính của ma trận B_1 đều bằng 0. Tương tự như thế ta thực hiện phép quay

$$B_2 = G_2 B_1$$

Trong đó ma trận Givens G_2 nhận được từ ma trận G_1 bằng cách chuyển ma trận

con $\begin{bmatrix} s & c \\ -c & s \end{bmatrix}$ đi một hàng sang phải và một cột xuống dưới.

Để cho $b_{32}^{(2)} = -cb_{22}^{(1)} + sb_{32}^{(1)} = 0$ ta phải có $\operatorname{tg}\theta = b_{22}^{(1)} / b_{32}^{(1)}$.

Thực hiện liên tiếp các phép quay Givens ta được ma trận tam giác trên

$$B_{n-1} = G_{n-1} G_{n-2} \dots G_2 G_1 B \quad (4.31)$$

Nhân bên trái phương trình ma trận trên với ma trận $(G_{n-1} G_{n-2} \dots G_2 G_1)^{-1}$ ta được

$$B = (G_{n-1} G_{n-2} \dots G_2 G_1)^{-1} B_{n-1}$$

Nếu ta ký hiệu

$$Q_1 = (G_{n-1} G_{n-2} \dots G_2 G_1)^{-1}, \quad R_1 = B_{n-1} \quad (4.32)$$

thì

$$A_1 = B = Q_1 R_1 \quad (4.33)$$

trong đó R_1 là ma trận tam giác trên, Q_1 là ma trận trực giao, vì G_i là ma trận trực giao.

Như thế ma trận

$$A_2 = R_1 Q_1 = (G_{n-1} G_{n-2} \dots G_2 G_1) B (G_{n-1} G_{n-2} \dots G_2 G_1)^{-1} \quad (4.34)$$

là kết quả của bước 1 của thuật toán QR, áp dụng vào ma trận B . Người ta chứng minh được ma trận A_2 là ma trận Hessenberg.

Ta lại áp dụng quá trình trên cho ma trận A_2 , ta được

$$A_2 = Q_2 R_2; \quad A_3 = Q_3 R_3$$

Tiếp tục quá trình đó cuối cùng ta được ma trận A_n là ma trận tam giác trên. Do A_2 là ma trận đồng dạng với ma trận B nên dễ dàng thấy A_n cũng đồng dạng với ma trận B , do đó đồng dạng với ma trận A .

Từ hệ thức

$$A_k = Q_k R_k; \quad A_{k+1} = R_k Q_k \quad (4.35)$$

ta suy ra :

$$A = (Q_1 Q_2 \dots Q_k) A_{k+1} (Q_1 Q_2 \dots Q_k)^{-1}.$$

d) Tóm tắt sơ đồ thuật toán phân tích QR

Cho A là ma trận vuông tổng quát. Ta xác định trị riêng và vectơ riêng của ma trận A theo sơ đồ sau:

1. Đưa ma trận A về dạng Hessenberg bằng ma trận Householder H ($A_1 = HAH$, A_1 là ma trận Hessenberg).
2. Áp dụng ma trận quay Givens, biến đổi ma trận Hessenberg A_1 thành tích của ma trận trực giao Q_1 và ma trận tam giác trên R_1 ($A_1 = Q_1 R_1$).
3. Xây dựng ma trận $A_2 = R_1 Q_1$, A_2 là ma trận Hessenberg đồng dạng với ma trận A_1 , do đó đồng dạng với ma trận A .
4. Lập lại các bước 2 và 3 cho đến khi A_n là ma trận tam giác trên.
5. Các trị riêng của ma trận A chính là các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A_n .
6. Tính các vectơ riêng của ma trận A_n .
7. Nhân bên trái các vectơ riêng của ma trận A_n với ma trận $HQ_1 Q_2 \dots Q_n$ ta được các vectơ riêng của ma trận A .

4.5 Phương pháp lặp Mises

Phương pháp lặp thừa để tính các trị riêng do Richard Edler von Mises (1883-1953) đưa ra năm 1929 ngày nay được gọi là phương pháp lặp Mises. Giả sử A là ma trận vuông cấp n mà các phần tử là số thực hoặc phức có thể chéo hoá được. Nếu ta chỉ quan tâm đến việc xác định trị riêng của ma trận A có giá trị tuyệt đối lớn nhất hoặc trị riêng có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất thì việc sử dụng phương pháp lặp Mises rất đơn giản.

Xét bài toán trị riêng đặc biệt

$$(A - \lambda E)x = 0 \quad (4.36)$$

Trước hết ta xác định trị riêng λ_1 và vectơ riêng tương ứng $x^{(1)}$. Phương trình (4.36) có thể viết lại dưới dạng

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)} \quad (4.37)$$

Chọn một vectơ ban đầu $a^{(0)}$ tùy ý. Khai triển nó theo các vectơ riêng $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$

$$a^{(0)} = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \dots + \alpha_n x^{(n)} \quad (4.38)$$

Từ các phương trình (4.37) và (4.38) ta suy ra hệ các biểu thức sau

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(1)} &= \mathbf{A}\mathbf{a}^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}^{(n)} \\ \mathbf{a}^{(2)} &= \mathbf{A}\mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{A}^2 \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{x}^{(n)} \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{a}^{(k)} &= \mathbf{A}\mathbf{a}^{(k-1)} = \mathbf{A}^k \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{x}^{(n)} \\ \mathbf{a}^{(k+1)} &= \mathbf{A}\mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^{k+1} \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2^{k+1} \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k+1} \mathbf{x}^{(n)} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Không giảm tính tổng quát ta giả sử rằng

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

Với k đủ lớn từ các biểu thức trên ta suy ra các xấp xỉ

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(k)} &\approx \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(k+1)} &\approx \alpha_1 \lambda_1^{k+1} \mathbf{x}^{(1)} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\lambda_1 \approx \frac{a_j^{(k+1)}}{a_j^{(k)}}, \quad (j = 1, \dots, n)$$

Nếu sử dụng công thức Rayleigh (4.15) đối với các vectơ riêng $\mathbf{x}^{(k)}$ xác định như trên ta có xấp xỉ tốt hơn

$$\lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{a}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{a}^{(k)}}{(\mathbf{a}^{(k)})^T \mathbf{a}^{(k)}}$$

Ứng với giá trị riêng λ_1 ta có vectơ riêng $\mathbf{x}^{(1)}$ đã chuẩn hoá tính theo công thức

$$\mathbf{x}^{(1)} = \frac{\mathbf{a}^{(k)}}{\sqrt{(\mathbf{a}^{(k)})^T \mathbf{a}^{(k)}}}$$

Sau khi đã tính xong λ_1 và $\mathbf{x}^{(1)}$, ta tính tiếp λ_2 và $\mathbf{x}^{(2)}$. Trước hết ta chọn một vectơ $\mathbf{a}^{(0)}$ ban đầu sao cho $\mathbf{a}^{(0)}$ không chứa $\mathbf{x}^{(1)}$ trong khai triển của nó theo các vectơ riêng

$$\mathbf{a}^{(0)} = \alpha_2 \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_3 \mathbf{x}^{(3)} + \dots + \alpha_n \mathbf{x}^{(n)}$$

Muốn thế ta chọn một vectơ $\mathbf{x}$ tùy ý, xây dựng vectơ $\mathbf{a}^{(0)}$ như sau

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(1)}) \mathbf{x}^{(1)} \quad (4.39)$$

Với cách chọn vectơ $\mathbf{a}^{(0)}$ như thế ta có

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{a}^{(0)} &= (\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(1)}) (\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{x}^{(1)} \\ &= (\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T (\mathbf{x}^{(1)} (\mathbf{x}^{(1)})^T) \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

Do $\mathbf{x}^{(1)}$ là vectơ đã được chuẩn hoá nên $\mathbf{x}^{(1)} (\mathbf{x}^{(1)})^T$ là ma trận đơn vị. Như thế vectơ $\mathbf{a}^{(0)}$ chọn theo công thức (4.39) trực giao với vectơ $\mathbf{x}^{(1)}$.

Ta xây dựng sơ đồ lặp như tương tự như khi tính λ_1 và $\mathbf{x}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(1)} &= \mathbf{A} \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_3 \lambda_3 \mathbf{x}^{(3)} + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}^{(n)} \\ \mathbf{a}^{(2)} &= \mathbf{A} \mathbf{a}^{(1)} = \mathbf{A}^2 \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_3 \lambda_3^2 \mathbf{x}^{(3)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{x}^{(n)} \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{a}^{(k)} &= \mathbf{A} \mathbf{a}^{(k-1)} = \mathbf{A}^k \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_3 \lambda_3^k \mathbf{x}^{(3)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{x}^{(n)} \\ \mathbf{a}^{(k+1)} &= \mathbf{A} \mathbf{a}^{(k)} = \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{a}^{(0)} = \alpha_2 \lambda_2^{k+1} \mathbf{x}^{(2)} + \alpha_3 \lambda_3^{k+1} \mathbf{x}^{(3)} + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k+1} \mathbf{x}^{(n)} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Khi $\lambda_2 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$, với k đủ lớn ta có các xấp xỉ

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(k)} &\approx \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(k+1)} &\approx \alpha_2 \lambda_2^{k+1} \mathbf{x}^{(1)} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\lambda_2 \approx \frac{a_j^{(k+1)}}{a_j^{(k)}}, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (4.40)$$

Nếu sử dụng công thức Rayleigh ta có xấp xỉ tốt hơn

$$\lambda_2 \approx \frac{(\mathbf{a}^{(k)})^T \mathbf{A} \mathbf{a}^{(k)}}{(\mathbf{a}^{(k)})^T \mathbf{a}^{(k)}} \quad (4.41)$$

Ứng với giá trị λ_2 , ta có vectơ riêng $\mathbf{x}^{(2)}$ đã chuẩn hoá theo công thức

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{\mathbf{a}^{(k)}}{\sqrt{(\mathbf{a}^{(k)})^T \mathbf{a}^{(k)}}}$$

Khi tính λ_2 ta chọn vector ban đầu $\mathbf{a}^{(0)}$ như sau

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{x} - (\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(1)})\mathbf{x}^{(1)} - (\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(2)})\mathbf{x}^{(2)} \quad (4.42)$$

với $\mathbf{x}$ là véc tơ chọn tùy ý. Chọn $\mathbf{a}^{(0)}$ theo (4.42) thì $\mathbf{a}^{(0)}$ sẽ trực giao với $\mathbf{x}^{(1)}$ và $\mathbf{x}^{(2)}$. Tổng quát khi tính λ_k , ta chọn vector ban đầu theo công thức

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(i)})\mathbf{x}^{(i)} \quad (4.43)$$

Trong đó $\mathbf{x}$ là vector chọn tùy ý. Các bước lặp hoàn toàn tương tự như khi tính các trị riêng λ_1 và λ_2 .

Trường hợp $\lambda_i \approx \lambda_{i+1}$, người ta đã đưa ra sơ đồ tính toán, nhưng do công kênh nên không trình bày ở đây.

Thí dụ 3.14: Cho biết ma trận $\mathbf{A}$ và vector riêng $\mathbf{x}^{(1)}$ đã chuẩn hoá

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & 39 & 17 \\ 39 & 81 & 39 \\ 17 & 39 & 25 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,40825 \\ 0,81650 \\ 0,40825 \end{bmatrix}$$

Hãy tìm các trị riêng λ_2, λ_3 và các vector riêng $\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$ của ma trận $\mathbf{A}$ bằng phương pháp lặp Mises.

Lời giải: Để tính vector $\mathbf{a}^{(0)}$ theo công thức (4.39) ta chọn vector $\mathbf{x}$ như sau

$$\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 0]^T$$

Từ đó ta có

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(1)} = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0,40825 \\ 0,81650 \\ 0,40825 \end{bmatrix} = 0,40825$$

Theo công thức (4.39) ta tính được

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0,40825 \begin{bmatrix} 0,40825 \\ 0,81650 \\ 0,40825 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,83333 \\ -0,33334 \\ -0,16667 \end{bmatrix}$$

Quá trình lặp được ghi trong bảng sau

A	$\mathbf{a}^{(0)}$	$\mathbf{a}^{(1)}$	$\mathbf{a}^{(2)}$	$\mathbf{a}^{(2)}$	$\mathbf{a}^{(3)}$
25 39 17	0,83333	4,9996	34,9000	35,0000	265,0000
39 81 39	-0,33334	-1,0008	-3,0960	-3,0000	-9,0000
17 39 25	-0,16667	-3,0004	-29,0480	-29,0000	-247,0000
$(\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{a}^{(k)}$	0	0,00098	-0,11757	0	0

Trong bảng trên dòng cuối cùng dùng để kiểm tra tính chất trực giao của vector $\mathbf{a}^{(k)}$ với vector $\mathbf{x}^{(1)}$. Sau khi tính được ba bước lặp, trong chương trình tính tự động kiểm tra thấy tính chất trực giao $(\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{a}^{(2)}$ không được thỏa mãn

$$(\mathbf{x}^{(1)})^T \mathbf{a}^{(2)} = [0,40825 \quad 0,81650 \quad 0,40825] \begin{bmatrix} 34,952 \\ -3,096 \\ -29,048 \end{bmatrix} = -0,11758$$

Khi đó chương trình tính tự động tìm kiếm vector $\mathbf{a}^{(2)}$ mới tốt hơn theo công thức (4.39)

$$\mathbf{a}^{(2)} = \mathbf{a}^{(2)} - [(\mathbf{a}^{(2)})^T \mathbf{x}^{(1)}] \mathbf{x}^{(1)}$$

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 34,952 \\ -3,096 \\ -29,048 \end{bmatrix} - 0,11758 \begin{bmatrix} 0,40825 \\ 0,81650 \\ 0,40825 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35,000 \\ -3,000 \\ -29,000 \end{bmatrix}$$

Sau đó quá trình lặp lại được tiếp tục. Từ vector $\mathbf{a}^{(3)}$ áp dụng công thức (4.41) ta tính được giá trị gần đúng của λ_2

$$\lambda_2 = \frac{\begin{bmatrix} 265 & -9 & -247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 39 & 17 \\ 39 & 81 & 39 \\ 17 & 39 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 265 \\ -9 \\ -247 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 265 & -9 & -247 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 265 \\ -9 \\ -247 \end{bmatrix}} = 7,99075$$

Chú ý rằng giá trị chính xác của λ_2 là 8.

Ứng với λ_2 có vector riêng $\mathbf{x}^{(2)}$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \frac{\mathbf{a}^{(3)}}{\sqrt{(\mathbf{a}^{(3)})^T \mathbf{a}^{(3)}}} = \begin{bmatrix} 0,70313 \\ -0,02483 \\ -0,68000 \end{bmatrix}$$

Để tính λ_3 , ta xây dựng vector $\mathbf{a}^{(0)}$ theo công thức (4.42). Trước hết ta tính

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x}^{(2)} = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0,70313 \\ -0,02483 \\ -0,68000 \end{bmatrix} = 0,70313$$

Từ đó ta tính $\mathbf{a}^{(0)}$

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0,40825 \begin{bmatrix} 0,40825 \\ 0,81650 \\ 0,40825 \end{bmatrix} - 0,70313 \begin{bmatrix} 0,70313 \\ -0,02483 \\ -0,68000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,34095 \\ -0,31598 \\ -0,31146 \end{bmatrix}$$

Quá trình lặp tiếp tục tương tự như phần trên.

§5. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

5.1 Phương pháp giải trực tiếp

a) Dao động cưỡng bức không cản chịu kích động điều hoà

Dao động tuyến tính cưỡng bức không cản của hệ n bậc tự do chịu kích động điều hoà có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{f}} \sin \Omega t \quad (5.1)$$

Ở chế độ chuyển động bình ổn, ta tìm nghiệm phương trình (5.1) dưới dạng

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{u} \sin \Omega t \quad (5.2)$$

Thế (5.2) vào (5.1) ta suy ra

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C})\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{H}(\Omega)\hat{\mathbf{f}} \quad (5.3)$$

Trong đó

$$\mathbf{H}(\Omega) = (-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C})^{-1}$$

và được gọi là ma trận truyền.

Giải hệ phương trình đại số (5.3) ta được

$$u_k(\Omega) = \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)} \quad (5.4)$$

Trong đó

$$\Delta(\Omega) = \det(-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \quad (5.5)$$

$\Delta_k(\Omega)$ có được bằng cách thay vectơ $\hat{\mathbf{f}}$ vào cột thứ k của Δ . So sánh (5.5) với (2.4) trong cùng chương này ta thấy $\Delta(\Omega) = 0$ khi $\Omega = \omega_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Ta phân biệt ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta(\Omega) = 0, \Delta_k(\Omega) \neq 0$

Khi đó tần số lực kích động Ω trùng với một trong các tần số dao động riêng. Biên độ dao động tăng lên vô cùng. Trường hợp này được gọi là trường hợp cộng hưởng.

Trường hợp 2: $\Delta(\Omega) = 0, \Omega = \omega_j$

$$\Delta_k(\Omega) = 0 \text{ với mọi } k \text{ và } \lim_{\Omega \rightarrow \omega_j} \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)} < \infty$$

Trong trường hợp này mặc dù tần số lực kích động trùng với tần số riêng nhưng biên độ dao động vẫn bị giới nội. Trường hợp này được gọi là trường hợp giả cộng hưởng.

Trường hợp 3: $\Delta(\Omega) \neq 0, \Delta_k(\Omega) = 0$ với k xác định.

Trong trường hợp này $u_k = 0$. Dao động ứng với toạ độ thứ k bị dập tắt.

b) Dao động cưỡng bức có cản chịu kích động tuần hoàn

Về mặt toán học dao động cưỡng bức có cản nhớt của hệ tuyến tính n bậc tự do được mô tả bởi phương trình vi phân dạng ma trận như sau

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (5.6)$$

Trong đó $\mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ là các ma trận hằng số, $\mathbf{f}(t)$ là vectơ cột các ngoại lực tác dụng. Giả sử $\mathbf{f}(t)$ là vectơ tuần hoàn theo thời gian và có thể khai triển thành chuỗi Fourier-một cách gần đúng

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^m (\mathbf{a}_k \cos k\Omega t + \mathbf{b}_k \sin k\Omega t) \quad (5.7)$$

Ta sử dụng nguyên lý cộng tác dụng trong lý thuyết hệ phương trình vi phân tuyến tính để tìm nghiệm phương trình (5.6). Trước hết ta tìm nghiệm phương trình

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_0 + \mathbf{C}\mathbf{q}_0 = \mathbf{a}_0$$

dưới dạng $\mathbf{q}_0 = \mathbf{v}_0$.

Từ hai phương trình trên ta nhận được hệ phương trình xác định $\mathbf{v}_0$

$$\mathbf{C}\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \quad (5.8)$$

Sau đó ta tìm nghiệm của phương trình

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{C}\mathbf{q}_k = \mathbf{a}_k \cos k\Omega t + \mathbf{b}_k \sin k\Omega t \quad (5.9)$$

Nghiệm của phương trình (5.9) được tìm dưới dạng

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{u}_k \sin k\Omega t + \mathbf{v}_k \cos k\Omega t$$

Đạo hàm vector $\mathbf{q}_k$ theo t

$$\dot{\mathbf{q}}_k = k\Omega(\mathbf{u}_k \cos k\Omega t - \mathbf{v}_k \sin k\Omega t)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_k = -k^2\Omega^2(\mathbf{u}_k \sin k\Omega t + \mathbf{v}_k \cos k\Omega t)$$

Thế các biểu thức của $\mathbf{q}_k, \dot{\mathbf{q}}_k, \ddot{\mathbf{q}}_k$ vào phương trình (5.9) rồi so sánh các hệ số, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các vector $\mathbf{u}_k$ và $\mathbf{v}_k$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} - k^2\Omega^2\mathbf{M} & -k\Omega\mathbf{B} \\ k\Omega\mathbf{B} & \mathbf{C} - k^2\Omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Khi định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình trên khác không, thì các vector $\mathbf{u}_k$ và $\mathbf{v}_k$ được xác định duy nhất. Như thế nghiệm của phương trình dao động cưỡng bức (5.6) khi $f(t)$ tuần hoàn được tính theo biểu thức

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}_0 + \sum_{k=1}^m (\mathbf{u}_k \sin k\Omega t + \mathbf{v}_k \cos k\Omega t) \quad (5.11)$$

trong đó $\mathbf{v}_0$ được xác định từ phương trình (5.8), còn $\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$ được xác định từ phương trình (5.10).

Thí dụ 3.15: Cho mô hình cơ học của một thiết bị làm việc theo nguyên lý rung như hình 3.12. Cho biết kích động lệch tâm ở khối lượng thứ nhất là $2.\Delta m.e = 2.20 \text{ kg}.0,1 \text{ m} = 4 \text{ kgm}$. Khối lượng các vật và độ cứng lò xo có trị số như sau

$$m_1 = m_0 + 2.\Delta m = 1500 \text{ kg}; m_2 = 1000 \text{ kg}; c_1 = 10^8 \text{ kg/s}^2; c_{12} = 10^7 \text{ kg/s}^2.$$

Hai mô tơ quay đều ngược chiều nhau với vận tốc góc Ω . Hãy xác định các tần số riêng của hệ, tính và vẽ đồ thị dao động cưỡng bức.

Lời giải : Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_{12} (x_2 - x_1)^2$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng trên vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được các phương trình vi phân dao động của hệ

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_{12}) x_1 - c_{12} x_2 = 2 \Delta m e \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_{12} x_1 + c_{12} x_2 = 0$$

Chia hai vế của phương trình đầu cho m_1 , hai vế của phương trình hai cho m_2 ta được

$$\ddot{x}_1 + \frac{c_1 + c_{12}}{m_1} x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} x_2 = 2 \frac{\Delta m}{m_1} e \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{c_{12}}{m_2} x_1 + \frac{c_{12}}{m_2} x_2 = 0$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\gamma_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_{12}}{m_2}, \quad \hat{F}_1 = 2 \Delta m e \Omega^2$$

thì hai phương trình vi phân trên có dạng

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} x_2 = \frac{\hat{F}_1}{m_1} \sin \Omega t \quad (5.12)$$

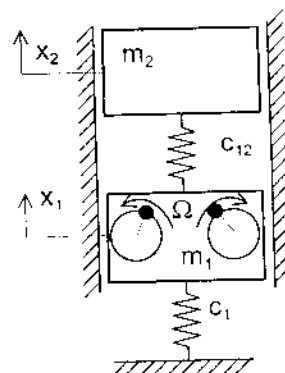
$$\ddot{x}_2 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{c_{12}}{m_2} x_1 = 0$$

a) Xác định các tần số riêng

Để xác định các tần số riêng, ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với hệ phương trình trên

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2^2 x_2 - \frac{c_{12}}{m_2} x_1 = 0$$



Hình 3.12

Phương trình tần số

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1^2 - \omega^2 & -\frac{c_{12}}{m_1} \\ -\frac{c_{12}}{m_2} & \gamma_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = (\gamma_1^2 - \omega^2)(\gamma_2^2 - \omega^2) - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} = 0 \quad (5.13)$$

$$\omega^4 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\omega^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} = 0$$

Giải phương trình bậc hai ở trên đối với ω^2

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2}{4} - \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2}}$$

Thay số vào biểu thức của ω_1 và ω_2 ta xác định được

$$\omega_1 = 94,7 \text{ 1/s}; \quad \omega_2 = 272,7 \text{ 1/s}$$

b) *Tính toán dao động cưỡng bức*

Do không có cản ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$) nên xuất phát từ biểu thức (5.11) ta có thể tìm nghiệm của hệ phương trình (5.12) dưới dạng

$$x_1 = A_1 \sin \Omega t; \quad x_2 = A_2 \sin \Omega t \quad (5.14)$$

Thế các biểu thức (5.14) vào phương trình (5.12) ta dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{aligned} (\gamma_1^2 - \Omega^2) A_1 - \frac{c_{12}}{m_1} A_2 &= \frac{\hat{F}_1}{m_1} \\ -\frac{c_{12}}{m_2} A_1 + (\gamma_2^2 - \Omega^2) A_2 &= 0 \end{aligned}$$

Giải ra ta được

$$A_1 = \frac{\hat{F}_1 (\gamma_2^2 - \Omega^2)}{m_1 \Delta^*}, \quad A_2 = \frac{\hat{F}_1 c_{12}}{m_1 m_2 \Delta^*}$$

trong đó

$$\Delta^* = (\gamma_1^2 - \Omega^2)(\gamma_2^2 - \Omega^2) - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} \quad (5.15)$$

So sánh các biểu thức (5.13) và (5.15) ta rút ra kết luận: khi $\Omega = \omega_1$ hoặc khi $\Omega = \omega_2$ thì $\Delta^* = 0$, do đó $A_1 \rightarrow \infty$, $A_2 \rightarrow \infty$. Hệ xảy ra hiện tượng cộng hưởng.

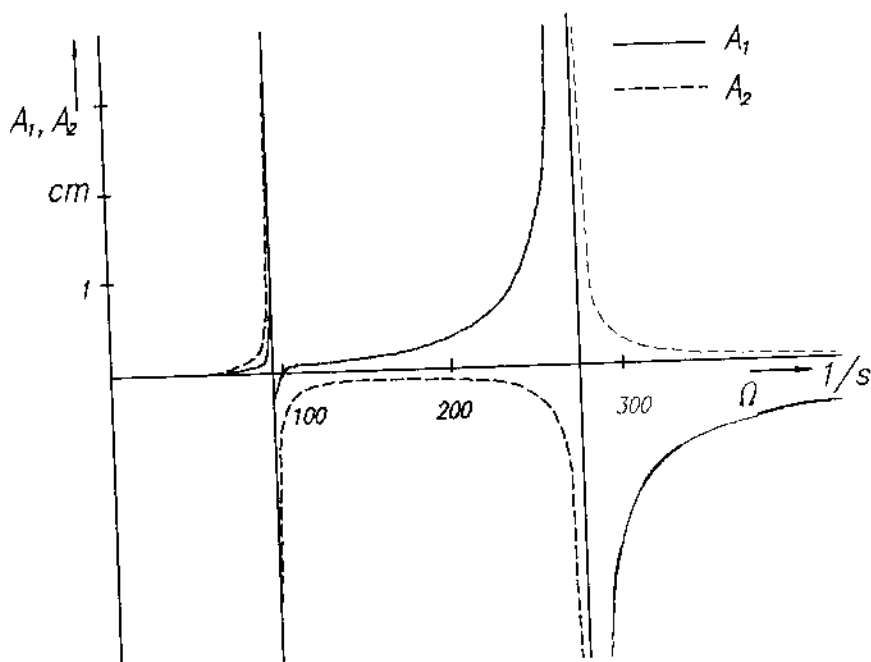
Để vẽ các đường cong biên độ tần số, trước hết ta nhắc lại một số kiến thức quen thuộc về tam thức bậc hai. Nếu x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì ta có thể phân tích tam thức bậc hai thành các thừa số như sau

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Từ biểu thức (5.15) ta có

$$\Delta^* = \Omega^4 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\Omega^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} = (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$$

Từ các nhận xét trên ta có thể dễ dàng vẽ các đường cong biên độ tần số như hình 3.13.



Hình 3.13

Thí dụ 3.16: Cho hệ cơ học gồm hai ròng rọc và hệ thống dây mềm không dẫn như hình 3.14. Các ròng rọc được xem là đĩa tròn đồng chất bán kính r , khối lượng m . Buộc vào ròng rọc 2 một vật nặng khối lượng m bằng dây đàn hồi hệ số cứng là c . ở đầu A cũng là dây đàn hồi hệ số cứng là c .

- Xác định các tần số riêng dao động thẳng đứng của hệ.

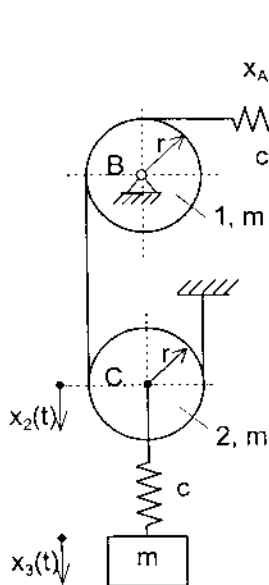
- Cho biết điểm A chuyển động theo phương nằm ngang theo qui luật $x_A(t) = x_0 \cos \Omega t$ hãy xác định các thành phần dao động cưỡng bức thẳng đứng $x_2(t)$ của ròng rọc 2 và $x_3(t)$ của vật nặng m . Khi dao động tự do đã tắt, chỉ còn lại dao động cưỡng bức, hãy xác định độ lớn của Ω sao cho ròng rọc 2 đứng yên.

Lời giải : Dịch chuyển của điểm A, của ròng rọc 2 và vật nặng m được tính toán đối với hệ qui chiếu quán tính như hình 3.14. Biểu thức động năng của hệ có dạng

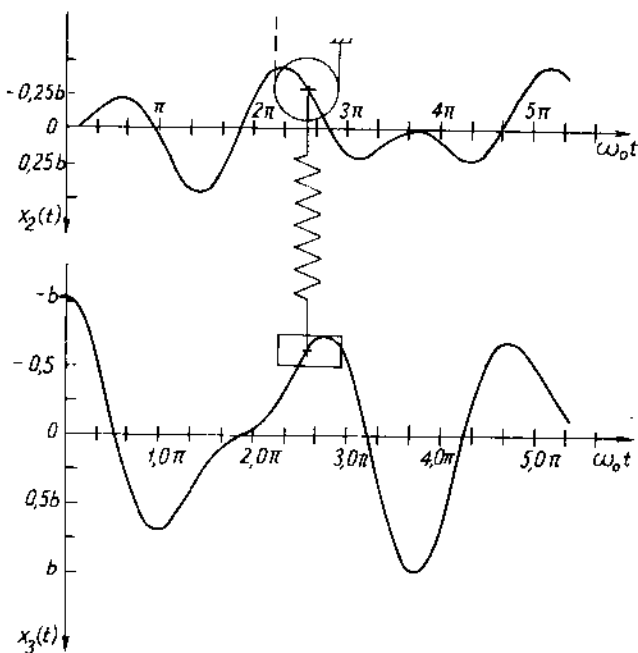
$$T = \frac{1}{2} J_B \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2$$

Chú ý đến các điều kiện ràng buộc động học

$$r\varphi_2 = x_2 ; \quad 2r\varphi_1 = r\varphi_2$$



Hình 3.14



Hình 3.15a

và biểu thức mômen quán tính khối $J_B = J_C = \frac{1}{2}mr^2$ ta nhận được biểu thức động năng T phụ thuộc vào hai tọa độ suy rộng độc lập x_2 và x_3

$$T = \frac{7}{4}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$$

Để xác định các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng x_2 và x_3 ta tính công khả dĩ

$$\begin{aligned}\delta A &= mg\delta x_2 - c(x_3 - x_2 + d_2)(\delta x_3 - \delta x_2) \\ &\quad + mg\delta x_3 - c(\varphi_1 r - x_A + d_1)2\delta x_2\end{aligned}$$

Trong đó d_1 và d_2 là các độ dãn tĩnh của lò xo $d_1 = d_2 = mg/c$. Các tọa độ x_1 , x_2 được tính từ vị trí cân bằng tĩnh. Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\delta A &= (2cx_A + cx_3 - 5cx_2)\delta x_2 + (cx_2 - cx_3)\delta x_3 \\ &= Q_2\delta x_2 + Q_3\delta x_3\end{aligned}$$

So sánh các hệ số của δx_2 và δx_3 ta suy ra

$$Q_2 = 2cx_A + cx_3 - 5cx_2$$

$$Q_3 = cx_2 - cx_3$$

Thế các biểu thức động năng T và lực suy rộng Q_2 , Q_3 vào phương trình Lagrange

loại II
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

ta nhận được các phương trình vi phân chuyển động của hệ

$$\begin{aligned}7m\ddot{x}_2 + 10cx_2 - 2cx_3 &= 4cx_A \\ m\ddot{x}_3 + cx_3 - cx_2 &= 0\end{aligned}\tag{5.16}$$

Để xác định các tần số riêng ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (cho $x_A = 0$)

$$\begin{aligned}7m\ddot{x}_2 + 10cx_2 - 2cx_3 &= 0 \\ m\ddot{x}_3 - cx_2 + cx_3 &= 0\end{aligned}\tag{5.17}$$

Ta tìm nghiệm của hệ phương trình trên dưới dạng

$$x_2 = Ae^{\lambda t}; \quad x_3 = Be^{\lambda t}$$

Thế các biểu thức nghiệm này vào hệ phương trình vi phân thuần nhất ở trên và sử dụng ký hiệu $\omega_0^2 = c/m$ ta có

$$\begin{aligned}(\lambda^2 + \omega_0^2)B - \omega_0^2 A &= 0 \\ -2\omega_0^2 B + (7\lambda^2 + 10\omega_0^2)A &= 0\end{aligned}\quad (5.18)$$

Từ điều kiện cần để A và B không đồng thời triệt tiêu, ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -2\omega_0^2 & 7\lambda^2 + 10\omega_0^2 \end{vmatrix} = 7\lambda^4 + 17\omega_0^2\lambda^2 + 8\omega_0^4 = 0$$

Các nghiệm của phương trình đặc trưng là

$$\lambda_{1,2} = \pm 0,799\omega_0 i \quad ; \quad \lambda_{3,4} = \pm 1,338\omega_0 i$$

Từ đó suy ra các tần số riêng của hệ

$$\omega_1 = 0,799 \omega_0 \quad ; \quad \omega_2 = 1,338 \omega_0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình dao động tự do có dạng

$$\begin{aligned}x_2(t) &= A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \sin \omega_1 t + A_{21} \cos \omega_2 t + A_{22} \sin \omega_2 t \\ x_3(t) &= B_{11} \cos \omega_1 t + B_{12} \sin \omega_1 t + B_{21} \cos \omega_2 t + B_{22} \sin \omega_2 t\end{aligned}\quad (5.19)$$

Từ các phương trình (5.18) ta suy ra

$$\frac{B}{A}(\omega_1) = 2,765; \quad \frac{B}{A}(\omega_2) = -1,266$$

Từ đó các biểu thức (5.19) có dạng

$$\begin{aligned}x_2(t) &= A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \sin \omega_1 t + A_{21} \cos \omega_2 t + A_{22} \sin \omega_2 t \\ x_3(t) &= 2,765(A_{11} \cos \omega_1 t + A_{12} \sin \omega_1 t) - 1,266(A_{21} \cos \omega_2 t + A_{22} \sin \omega_2 t)\end{aligned}\quad (5.20)$$

Bốn hằng số A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} được xác định từ các điều kiện đầu. Giả sử cho biết

$$x_2(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = 0; \quad x_3(0) = -b; \quad \dot{x}_3(0) = 0$$

Khi đó từ (5.20) suy ra

$$A_{11} = -A_{21} = -0,2481b; \quad A_{12} = A_{22} = 0$$

Đồ thị dao động tự do của hệ ứng với các điều kiện trên cho trên hình 3.15a.

Để tính toán dao động cưỡng bức bình ổn (khi dao động tự do đã tắt) ta tìm nghiệm hệ phương trình (5.16) với $x_A = x_0 \cos \Omega t$ dưới dạng

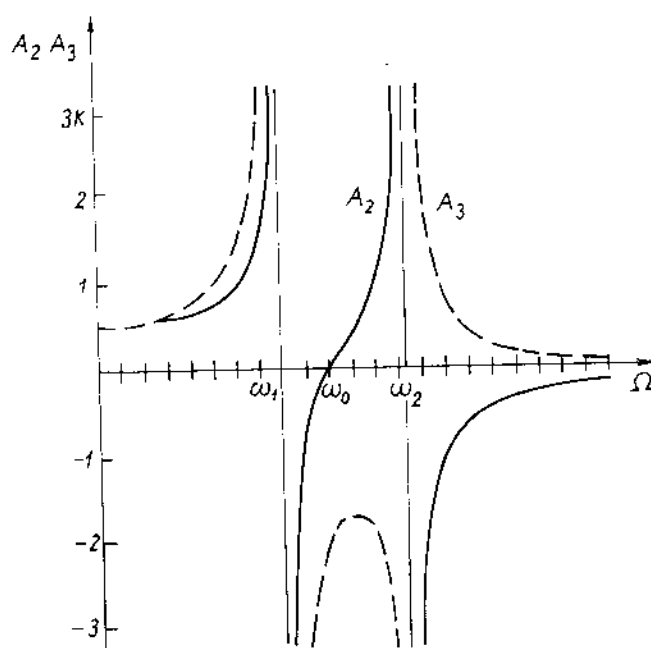
$$x_2(t) = A_2 \cos \Omega t; \quad x_3(t) = A_3 \cos \Omega t \quad (5.21)$$

Thế (5.21) vào hệ phương trình (5.16) ta dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính đối với A_2 và A_3 . Giải ra ta được

$$A_2 = \frac{4x_0 [1 - (\Omega / \omega_0)^2]}{\left[10 - 7(\Omega / \omega_0)^2\right] \left[1 - (\Omega / \omega_0)^2\right] - 2} \quad (5.22)$$

$$A_3 = \frac{4x_0}{\left[10 - 7(\Omega / \omega_0)^2\right] \left[1 - (\Omega / \omega_0)^2\right] - 2} \quad (5.23)$$

Từ biểu thức (5.22) ta thấy : khi $\Omega = \omega_0 = \sqrt{c/m}$ thì ròng rọc 2 đứng yên. Khối lượng m dao động với biên độ $A_1 = -2x_0$. Khối lượng m dao động ngược chiều kích động và có biên độ lớn gấp đôi biên độ kích động. Các đường cong cộng hưởng $A_2(\Omega)$ và $A_3(\Omega)$ được vẽ trên hình 3.15b.



Hình 3.15b

5.2 Phương pháp ma trận dạng riêng

Phương pháp ma trận dạng riêng (Modalmatrix) được áp dụng thuận tiện đối với hệ tuyến tính không cản

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(t) \quad (5.24)$$

trong đó $\mathbf{M}$ và $\mathbf{C}$ là các ma trận thực, đối xứng.

Áp dụng phép biến đổi tọa độ

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p} \quad (5.25)$$

với $\mathbf{V}$ là ma trận dạng riêng, $\mathbf{p}$ là vectơ các tọa độ chính, ta đưa được phương trình (5.24) về dạng

$$\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}(t)$$

Nhân bên trái phương trình trên với ma trận chuyển vị $\mathbf{V}^T$ của ma trận dạng riêng ta được

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{V}^T\mathbf{f}(t) \quad (5.26)$$

Các ma trận $\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V}$ và $\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V}$ là các ma trận đường chéo và có dạng như (2.26).

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{f} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.27)$$

thì phương trình (5.26) viết được dưới dạng hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.28)$$

Trong đó μ_i, γ_i được xác định bởi công thức (2.28).

Nghiệm của mỗi phương trình của hệ (5.28) ứng với điều kiện đầu

$$p_i(0) = p_{i0}; \quad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0},$$

theo công thức (5.16) chương 2 có dạng

$$p_i(t) = p_{i0} \cos \omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i} \sin \omega_i t + \frac{1}{\mu_i \omega_i} \int_0^t h_i(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \quad (5.29)$$

Trong đó

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i}$$

Đối với trường hợp kích động điều hoà $f_i(t) = \hat{f}_i \sin \Omega t$, theo công thức (5.27) ta có

$$h_i(t) = \left(\sum_{k=1}^n v_{ki} \hat{f}_k \right) \sin \Omega t = \hat{h}_i \sin \Omega t$$

Các phương trình (5.28) đối với trường hợp này có dạng

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i \dot{p}_i = \hat{h}_i \sin \Omega t, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.30)$$

Nghiệm của các phương trình (5.28) trong giai đoạn bình ổn là

$$p_i = \frac{\hat{h}_i}{\gamma_i \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_i^2}\right)} \sin \Omega t$$

Trở về tọa độ ban đầu q_k ta có

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^n v_{ki} p_i = \sum_{i=1}^n \frac{v_{ki} \hat{h}_i}{\gamma_i \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_i^2}\right)} \sin \Omega t \quad (5.31)$$

Như thế, khi chịu kích động điều hòa, hệ dao động với tần số của lực kích động và dạng dao động phụ thuộc vào các tham số của hệ và tần số của kích động ngoài. Từ công thức (5.31) ta thấy: khi tần số kích động Ω bằng tần số riêng ω_i của hệ, biên độ dao động cường bức tăng lên vô hạn. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng.

Nếu kể đến lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, phương trình vi phân dao động cường bức có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (5.32)$$

Trong kỹ thuật ta hay gặp trường hợp

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \delta \mathbf{C}$$

với α, δ là các hằng số thực. Tương tự như các mục trước, bằng phép biến đổi (5.25) phương trình (5.32) đưa được về dạng

$$\mu_i \ddot{p}_i + \beta_i \dot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.33)$$

Trong đó μ_i, γ_i, β_i được xác định bởi công thức (2.28) và (3.12) còn h_i tính theo công thức (5.27). Việc tìm nghiệm của phương trình (5.33) đã được trình bày trong chương 2.

Thí dụ 3.17: Xét mô hình dao động trong thí dụ 3.12. Giả sử trên vật thứ hai tác dụng một lực $F_2(t) = \hat{F}_2 \sin \Omega t$ theo chiều q_2 . Hãy viết phương trình vi phân dao động dạng tọa độ chính. Tìm dao động cường bức bình ổn.

Lời giải: Phương trình vi phân dao động cường bức có dạng

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \sin \Omega t \end{bmatrix}$$

Chia hai vế của hệ phương trình trên cho m và sử dụng các ký hiệu như ở thí dụ 3.12 ta được

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + 2\omega_0 D \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \omega_0^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \sin \Omega t / m \end{bmatrix}$$

Trong thí dụ 3.12 ta đã tính được ma trận dạng riêng

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó

$$\mathbf{V}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \sin \Omega t / m \end{bmatrix} = \frac{\hat{F}_2}{m} \begin{bmatrix} -\sin \Omega t \\ \sin \Omega t \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình vi phân dao động cưỡng bức dạng tọa độ chính

$$\ddot{p}_1 + 4\omega_0 D \dot{p}_1 + 3\omega_0^2 p_1 = -\frac{\hat{F}_2}{2m} \sin \Omega t \quad (5.34)$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_0^2 p_2 = \frac{\hat{F}_2}{2m} \sin \Omega t \quad (5.35)$$

Ở trạng thái chuyển động bình ổn (bỏ qua thành phần dao động tự do) nghiệm của các phương trình (5.34) và (5.35) có dạng

$$p_1(t) = M_1 \sin \Omega t + N_1 \cos \Omega t$$

$$p_2(t) = \frac{\hat{F}_2}{2m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin \Omega t = M_2 \sin \Omega t \quad (\Omega \neq \omega_0)$$

Trong đó

$$M_1 = -\frac{(3\omega_0^2 - \Omega^2)\hat{F}_2}{2m[(3\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 16\omega_0^2 D^2 \Omega^2]}$$

$$N_1 = \frac{4\omega_0 D \Omega \hat{F}_2}{2m[(3\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 16\omega_0^2 D^2 \Omega^2]}$$

Từ hệ thức $\mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{p}$ ta suy ra các biểu thức đối với các tọa độ q_1, q_2 ban đầu

$$\begin{aligned} q_1(t) &= (M_1 + M_2) \sin \Omega t + N_1 \cos \Omega t \\ q_2(t) &= (M_2 - M_1) \sin \Omega t - N_1 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (5.36)$$

Thí dụ 3.18: Cho cơ hệ gồm 3 khối lượng nối ghép nhau bằng các lò xo như hình vẽ trong thí dụ 3.8. Trên khối lượng thứ 3 tác dụng lực F_3 theo chiều x_3 . Lực này có dạng

$$F_3 = 4000[1 - u(t - 1, 2)] \text{ N}$$

với
$$u = \begin{cases} 0 & \text{khí } t \leq 1, 2\text{s} \\ u_0 & \text{khí } t > 1, 2\text{s} \end{cases}$$

Cho $m = 10 \text{ kg}$, $c = 1000 \text{ N/m}$. Hãy xác định dao động cưỡng bức (bỏ qua dao động riêng) của hệ.

Lời giải : Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c & -2c & 0 \\ -2c & 3c & -c \\ 0 & -c & 3c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Áp dụng phép thế $\mathbf{x} = \mathbf{V}_n \mathbf{p}$, trong đó $\mathbf{V}_n$ là ma trận dạng riêng chuẩn, theo thí dụ 3.9 có dạng

$$\mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} 0,2085 & 0,2252 & 0,0765 \\ 0,2295 & -0,1638 & -0,1432 \\ 0,0882 & -0,2120 & 0,3838 \end{bmatrix}$$

Vectơ $\mathbf{h}$ có dạng

$$\mathbf{h} = \mathbf{V}_n^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 352,8 \\ -848,0 \\ 1535,2 \end{bmatrix} [1 - u(t - 1, 2)]$$

Phương trình vi phân dao động dạng tọa độ chuẩn

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + 79,8528 p_1 &= 352,8 [1 - u(t - 1, 2)] \\ \ddot{p}_2 + 445,4904 p_2 &= -848,0 [1 - u(t - 1, 2)] \\ \ddot{p}_3 + 674,6568 p_3 &= 1535,2 [1 - u(t - 1, 2)] \end{aligned}$$

Nghiệm của các phương trình trên theo chương 2 có dạng

$$p_1(t) = \frac{1}{8,936} \int_0^t 352,2[1 - u(\tau - 1,2)] \sin 8,936(t - \tau) d\tau$$

$$p_1(t) = 4,418\{\cos 8,936t - 1 + u(t - 1,2)[1 - \cos 8,936(t - 1,2)]\}$$

Tính toán tương tự ta được

$$p_2(t) = -1,903\{\cos 21,107t - 1 + u(t - 1,2)[1 - \cos 21,107(t - 1,2)]\}$$

$$p_3(t) = 2,276\{\cos 25,974t - 1 + u(t - 1,2)[1 - \cos 25,974(t - 1,2)]\}$$

Trở lại tọa độ ban đầu ta có

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2085 & 0,2252 & 0,0765 \\ 0,2295 & -0,1638 & -0,1432 \\ 0,0882 & -0,2120 & 0,3838 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix}$$

Tính toán chi tiết ta được

$$x_1(t) = 0,921g_1(t) - 0,429g_2(t) + 0,174g_3(t)$$

$$x_2(t) = 1,014g_1(t) + 0,312g_2(t) - 0,326g_3(t)$$

$$x_3(t) = 0,390g_1(t) + 0,403g_2(t) + 0,874g_3(t)$$

với

$$g_1(t) = \cos 8,936t - 1 + u(t - 1,2)[1 - \cos 8,936(t - 1,2)]$$

$$g_2(t) = \cos 21,107t - 1 + u(t - 1,2)[1 - \cos 21,107(t - 1,2)]$$

$$g_3(t) = \cos 25,974t - 1 + u(t - 1,2)[1 - \cos 25,974(t - 1,2)]$$

5.3 Phương pháp khai triển theo một số dạng riêng

Áp dụng phương pháp ma trận dạng riêng (hay còn gọi là phương pháp khai triển theo các dạng riêng) ta nhận được số phương trình vi phân của các tọa độ chính đúng bằng bậc tự do của cơ hệ. Trong một số bài toán thực tế không phải mọi dạng riêng đều có vai trò như nhau, nên người ta chỉ khai triển theo một số dạng riêng quan trọng. Khi đó ta nhận được số phương trình vi phân dạng tọa độ chính nhỏ hơn bậc tự do của cơ hệ.

Phương trình vi phân dao động tuyến tính có cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (5.37)$$

Giả sử ma trận $\mathbf{B}$ là ma trận cản Rayleigh. Nếu biết được ma trận dạng riêng

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$$

thì bằng phép thế $\mathbf{q} = \mathbf{V} \mathbf{p}$ ta có thể đưa phương trình (5.37) về dạng

$$\mu_i \ddot{p}_i + \beta_i \dot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i(t), (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.38)$$

trong đó: $\mu_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{M} \mathbf{v}_i, \quad \beta_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{B} \mathbf{v}_i, \quad \gamma_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{C} \mathbf{v}_i, \quad h_i(t) = \mathbf{v}_i^T \mathbf{f}(t) \quad (5.39)$

Như thế ta nhận được n phương trình về trái tách rời nhau (5.38). Trong nhiều bài toán thực tế, đặc biệt trong bài toán dao động của hệ đàn hồi rời rạc hoá, các dạng riêng đầu tiên có một vai trò quan trọng. Để giảm bớt số phương trình của hệ (5.38) ta có thể dùng phép thế

$$\mathbf{q} = \mathbf{V}^* \mathbf{p} \quad (5.40)$$

với

$$\mathbf{V}^* = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m], \quad \mathbf{p}^* = [p_1, p_2, \dots, p_m]^T, \quad m < n.$$

Thế biểu thức (5.40) vào phương trình (5.37) sau đó nhân bên trái với ma trận $\mathbf{V}^{*T}$ ta được phương trình

$$\mathbf{V}^{*T} \mathbf{M} \mathbf{V}^* \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{V}^* \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{V}^{*T} \mathbf{C} \mathbf{V}^* \mathbf{p} = \mathbf{V}^{*T} \mathbf{f}(t) \quad (5.41)$$

Do $\mathbf{V}^{*T} \mathbf{M} \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^{*T} \mathbf{B} \mathbf{V}^*, \mathbf{V}^{*T} \mathbf{C} \mathbf{V}^*$ là các ma trận đường chéo, từ (5.41) ta có

$$\mu_i \ddot{p}_i + \beta_i \dot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.42)$$

trong đó $\mu_i, \beta_i, \gamma_i, h_i(t)$ được xác định bởi các công thức (5.39). Như thế bằng phương pháp khai triển theo một số dạng riêng (*Mode summation method*)

$$q_i(t) = v_1^{(i)} p_1(t) + v_2^{(i)} p_2(t) + \dots + v_m^{(i)} p_m(t), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.43)$$

ta đưa việc tính toán dao động của hệ n bậc tự do (5.37) về tính toán m phương trình vi phân dao động (5.42), với $m < n$. Phương pháp này thực chất là phương pháp khai triển theo một số dạng riêng quen thuộc trong lý thuyết dao động đàn hồi. Do thuật ngữ tiếng Anh là "Mode summation method", nên có thể dịch là Phương pháp khai triển theo một số dạng riêng hoặc phương pháp cộng một số dạng riêng. Trong một vài tài liệu có tác giả gọi phương pháp này là phương pháp nén tọa độ.

Để minh họa ta xét dao động uốn theo phương song song với mặt đất của một toà nhà 50 tầng, với mô hình cơ học hệ 50 bậc tự do. Giả sử bằng đo đạc hoặc bằng tính toán, ta xác định được ba dạng riêng ứng với ba tần số riêng thấp nhất là $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Theo phương pháp khai triển theo ba dạng riêng, bằng phép thế

$$x_i(t) = v_1^{(i)} p_1(t) + v_2^{(i)} p_2(t) + v_3^{(i)} p_3(t), \quad (i = 1, \dots, 50)$$

ta đưa hệ 50 phương trình vi phân cấp hai về hệ 3 phương trình vi phân

$$\mu_k \ddot{p}_k + \beta_k \dot{p}_k + \gamma_k p_k = h_k(t), \quad (k = 1, 2, 3)$$

Giải ra ta được $p_1(t)$, $p_2(t)$ và $p_3(t)$. Thế vào biểu thức trên xác định được $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, 50$).

5.4 Phương pháp biên độ phức

Hệ phương trình vi phân mô tả dao động cưỡng bức của hệ tuyến tính n bậc tự do có dạng

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (5.44)$$

Xét trường hợp các phân tử $f_k(t)$ của vectơ $\mathbf{f}(t)$ có dạng

$$f_k(t) = \hat{f}_k \cos(\Omega t + \alpha_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.45)$$

trong đó Ω là tần số kích động. Trong trường hợp này, như đã biết, nghiệm dừng của hệ (5.44) có dạng

$$q_k(t) = \hat{q}_k \cos(\Omega t + \alpha_k + \beta_k) \quad (5.46)$$

Trong đó $\hat{q}_k$, β_k ($k = 1, 2, \dots, n$) là các đại lượng cần xác định.

Sử dụng phương pháp biên độ phức ta viết hàm $f_k(t)$ dưới dạng

$$f_k(t) = \hat{f}_k \cos(\Omega t + \alpha_k) = \operatorname{Re}(\hat{f}_k e^{i(\Omega t + \alpha_k)}) = \operatorname{Re}(\hat{f}_k e^{i\alpha_k} e^{i\Omega t}) = \operatorname{Re}(\tilde{f}_k e^{i\Omega t}) \quad (5.47)$$

trong đó $\tilde{f}_k = \hat{f}_k e^{i\alpha_k}$ được gọi là biên độ phức. Ta tìm nghiệm của phương trình (5.44) với vế phải $\mathbf{f}(t)$ thay bằng $\tilde{\mathbf{f}} e^{i\Omega t}$ dưới dạng

$$\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{q}} e^{i\Omega t} \quad (5.48)$$

Thế (5.48) vào phương trình

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{f}} e^{i\Omega t} \quad (5.49)$$

ta được phương trình

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{B} + \mathbf{C})\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (5.50)$$

Khi $\tilde{\Lambda}(\Omega) = \det(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{B} + \mathbf{C}) \neq 0$, thì phương trình (5.50) có nghiệm duy nhất

$$\tilde{\mathbf{q}} = (-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1} \tilde{\mathbf{f}} \quad (5.51)$$

Nếu đưa vào ký hiệu

$$\hat{\mathbf{H}}(i\Omega) = (-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1} \quad (5.52)$$

thì hệ thức (5.51) có dạng

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{H}}(\Omega)\tilde{\mathbf{f}}$$

Ma trận $\tilde{\mathbf{H}}(\Omega)$ được gọi là ma trận truyền tần số phức. Áp dụng quy tắc Cramer ta có

$$\tilde{q}_k = \frac{\tilde{\Delta}_k(\Omega)}{\tilde{\Delta}(\Omega)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.53)$$

trong đó $\tilde{\Delta}_k(\Omega)$ là định thức có được bằng cách thay cột thứ k của ma trận $(-\Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{B} + \mathbf{C})$ bằng các phần tử của véc tơ $\tilde{\mathbf{f}}$.

Để người đọc dễ dàng áp dụng phương pháp này, ta xét kỹ hệ hai bậc tự do

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + b_{11}\dot{q}_1 + b_{12}\dot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= f_1(t) \\ m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + b_{21}\dot{q}_1 + b_{22}\dot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= f_2(t) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Giả sử các hàm $f_1(t), f_2(t)$ có dạng

$$f_1(t) = \hat{f}_1 \cos \Omega t; \quad f_2(t) = \hat{f}_2 \cos \Omega t$$

Ta đưa vào các hàm phức

$$f_1(t) = \tilde{f}_1 e^{i\Omega t}; \quad f_2(t) = \tilde{f}_2 e^{i\Omega t} \quad (5.55)$$

Ta tìm nghiệm phương trình (5.54) dưới dạng

$$q_1(t) = \tilde{q}_1 e^{i\Omega t}; \quad q_2(t) = \tilde{q}_2 e^{i\Omega t} \quad (5.56)$$

Trong đó $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ là các biên độ phức cần tìm. Thế (5.56) vào phương trình (5.54) và khử $e^{i\Omega t}$ ta nhận được hệ hai phương trình đại số tuyến tính hai ẩn $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2$

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 m_{11} + c_{11} + i\Omega b_{11})\tilde{q}_1 + (-\Omega^2 m_{12} + c_{12} + i\Omega b_{12})\tilde{q}_2 &= \tilde{f}_1 \\ (-\Omega^2 m_{21} + c_{21} + i\Omega b_{21})\tilde{q}_1 + (-\Omega^2 m_{22} + c_{22} + i\Omega b_{22})\tilde{q}_2 &= \tilde{f}_2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Nghiệm của hệ (5.57) có dạng

$$\tilde{q}_1 = \frac{\tilde{\Delta}_1}{\tilde{\Delta}}; \quad \tilde{q}_2 = \frac{\tilde{\Delta}_2}{\tilde{\Delta}}$$

trong đó

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} (-\Omega^2 m_{11} + c_{11} + i\Omega b_{11}) & (-\Omega^2 m_{12} + c_{12} + i\Omega b_{12}) \\ (-\Omega^2 m_{21} + c_{21} + i\Omega b_{21}) & (-\Omega^2 m_{22} + c_{22} + i\Omega b_{22}) \end{vmatrix}$$

$$\bar{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \tilde{f}_1 & (-\Omega^2 m_{12} + c_{12} + i\Omega b_{12}) \\ \tilde{f}_2 & (-\Omega^2 m_{22} + c_{22} + i\Omega b_{22}) \end{vmatrix} \quad (5.58)$$

$$\tilde{\Lambda}_2 = \begin{vmatrix} (-\Omega^2 m_{11} + c_{11} + i\Omega b_{11}) & \tilde{f}_1 \\ (-\Omega^2 m_{21} + c_{21} + i\Omega b_{21}) & \tilde{f}_2 \end{vmatrix}$$

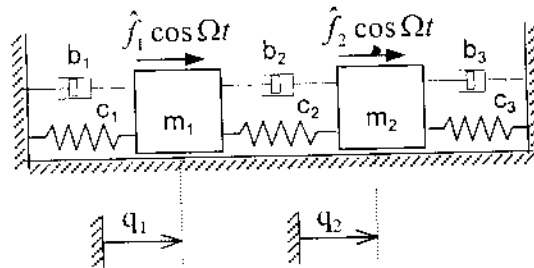
Thí dụ 3.19: Xét mô hình dao động như hình 3.16.

Các biểu thức động năng, thế năng, hàm hao tán có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 q_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 q_2^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2} b_3 \dot{q}_2^2$$



Hình 3.16

Để dàng tính được các lực suy rộng $Q_1 = f_1 \cos \Omega t$; $Q_2 = f_2 \cos \Omega t$. Thế các biểu thức T , Π , Φ và các lực suy rộng vào phương trình Lagrange loại 2 ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ

$$m_1 \ddot{q}_1 + (b_1 + b_2) \dot{q}_1 - b_2 \dot{q}_2 + (c_1 + c_2) q_1 - c_2 q_2 = \hat{f}_1 \cos \Omega t$$

$$m_2 \ddot{q}_2 - b_2 \dot{q}_1 + (b_2 + b_3) \dot{q}_2 - c_2 q_1 + (c_2 + c_3) q_2 = \hat{f}_2 \cos \Omega t$$

Xét trường hợp $m_1 = m_2 = m$, $c_1 = c_2 = c_3 = c$, $b_1 = b$, $b_2 = b_3 = 0$, khi đó hệ phương trình dao động trên có dạng đơn giản như sau

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + b\dot{q}_1 + 2cq_1 - cq_2 &= \hat{f}_1 \cos \Omega t \\ m_2\ddot{q}_2 - cq_1 + 2cq_2 &= \hat{f}_2 \cos \Omega t \end{aligned}$$

Tìm nghiệm phương trình trên dưới dạng $q_1(t) = \tilde{q}_1 e^{i\Omega t}$; $q_2(t) = \tilde{q}_2 e^{i\Omega t}$. Các công thức (5.58) bây giờ có dạng:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \begin{vmatrix} -\Omega^2 m + 2c + i\Omega b & -c \\ -c & -\Omega^2 m + 2c \end{vmatrix} \\ &= \Omega^4 m^2 - 4\Omega^2 mc + 3c^2 - i\Omega^3 bm^2 + i2\Omega bc \\ &= c^2[\eta^4 - i2D\eta^3 - 4\eta^2 + i4D\eta + 3] \\ \tilde{\Delta}_1 &= (-\Omega^2 m + 2c)\tilde{f}_1 + c\tilde{f}_2 = c[(2 - \eta^2)\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2] \\ \tilde{\Delta}_2 &= (-\Omega^2 m + 2c + i\Omega b)\tilde{f}_2 + c\tilde{f}_1 = c[\tilde{f}_1 + (2 - \eta^2 + 2iD\eta)\tilde{f}_2] \end{aligned}$$

trong đó: $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$; $D = \frac{b}{2\sqrt{cm}}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \frac{1}{c} \frac{[(2 - \eta^2)\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2]}{\eta^4 - i2D\eta^3 - 4\eta^2 + i4D\eta + 3} \\ \tilde{q}_2 &= \frac{1}{c} \frac{\tilde{f}_1 + (2 - \eta^2 + i2D\eta)\tilde{f}_2}{\eta^4 - i2D\eta^3 - 4\eta^2 + i4D\eta + 3} \end{aligned}$$

§6. MỘT VÀI BÀI TOÁN ÁP DỤNG

6.1 Bộ tắt chấn động lực không tính đến ma sát

a) *Lý thuyết*: Xét phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ hai bậc tự do không cản

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Giả sử các lực kích động có dạng

$$f_1(t) = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha), \quad f_2(t) = \hat{f}_2 \sin(\Omega t + \alpha) \quad (6.2)$$

Ta tìm nghiệm của hệ phương trình (6.1) dưới dạng

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \sin(\Omega t + \alpha), \quad (6.3)$$

trong đó A_1, A_2 là các hằng số cần xác định.

Thế các biểu thức (6.3) vào phương trình (6.1) ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định A_1 và A_2

$$\begin{aligned} (c_{11} - m_{11}\Omega^2)A_1 + (c_{12} - m_{12}\Omega^2)A_2 &= \hat{f}_1 \\ (c_{21} - m_{21}\Omega^2)A_1 + (c_{22} - m_{22}\Omega^2)A_2 &= \hat{f}_2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (6.4) ta được

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(c_{22} - m_{22}\Omega^2)\hat{f}_1 - (c_{12} - m_{12}\Omega^2)\hat{f}_2}{\Delta} \\ A_2 &= \frac{(c_{11} - m_{11}\Omega^2)\hat{f}_2 - (c_{21} - m_{21}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Trong đó

$$\Delta = (c_{11} - m_{11}\Omega^2)(c_{22} - m_{22}\Omega^2) - (c_{12} - m_{12}\Omega^2)(c_{21} - m_{21}\Omega^2) \quad (6.6)$$

Xét trường hợp $\hat{f}_2 = 0$. Khi đó từ công thức (6.5) ta suy ra

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(c_{22} - m_{22}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \\ A_2 &= \frac{-(c_{21} - m_{21}\Omega^2)\hat{f}_1}{\Delta} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Khi $\Delta \neq 0$, nếu ta chọn các tham số của hệ sao cho $c_{22} - m_{22}\Omega^2 = 0$ thì

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{\hat{f}_1}{c_{12} - m_{12}\Omega^2} \quad (6.8)$$

Vậy khi $\Omega^2 = c_{22} / m_{22}$ thì dao động cưỡng bức ứng với tọa độ suy rộng thứ nhất được hoàn toàn dập tắt.

b) *Nguyên lý thiết kế bộ tắt chấn động lực*: Dựa trên lý thuyết ở trên, người ta chế tạo các thiết bị tắt dao động gọi là bộ tắt chấn động lực (Absorber). Giả sử ta có

mô hình dao động xoắn như hình 3.17a. Để dàng tính được biểu thức động năng và thế năng

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2, \quad U = \frac{1}{2} c_1 \varphi_1^2$$

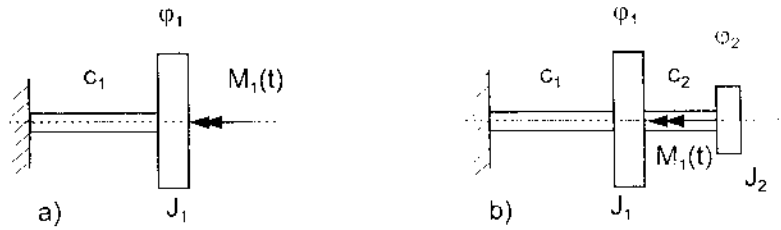
và lực suy rộng $Q = M_1(t) = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha)$. Phương trình vi phân dao động của hệ trên hình 3.17a có dạng

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 = \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha) \quad (6.9)$$

Ở chế độ chuyển động bình ổn, dao động cưỡng bức của hệ có dạng

$$\varphi_1 = \frac{\hat{f}_1}{J_1(\omega_1^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t + \alpha) \quad (6.10)$$

trong đó $\omega_1^2 = c_1 / J_1$.



Hình 3.17

Gắn vào mô hình 3.17a một hệ phụ như hình 3.17b. Mô hình 3.17b là một hệ cơ học gồm hai bậc tự do. Hệ phương trình vi phân dao động của hệ này có dạng

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 + c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) &= \hat{f}_1 \sin(\Omega t + \alpha) \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Điều kiện dập tắt dao động φ_1 là $\Omega^2 = c_2 / J_2$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= -\frac{\hat{f}_1}{c_2} \sin(\Omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Hệ phụ lắp thêm vào hệ 3.17a như trên hình 3.17b được gọi là bộ tắt chấn động lực. Khi thiết kế bộ tắt chấn động lực trong thí dụ trên ta phải chú ý đến hai điều sau:

- Chọn hệ số cứng c_2 sao cho biên độ dao động cưỡng bức của góc $\varphi_2(t)$ là $\hat{f}_1 / c_2$ có thể chấp nhận được.

- Chọn mômen quán tính khối J_2 sao cho $\Omega^2 = c_2 / J_2$.

6.2 Bộ tắt chấn động lực có tính đến ma sát nhớt

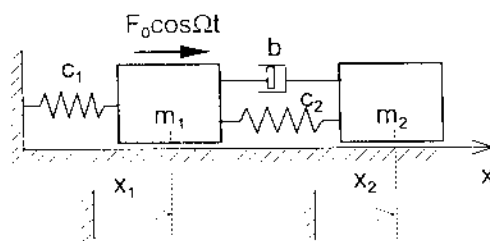
Ở đoạn trên ta đã trình bày lý thuyết bộ tắt chấn động lực không tính đến ma sát. Dao động của vật thể thứ nhất hoàn toàn được dập tắt khi ta lắp vào hệ bộ tắt chấn động lực. Khi lắp vào hệ bộ tắt chấn động lực thì hệ sẽ có hai tần số riêng. Nếu tần số của lực kích động Ω trùng với một trong các tần số riêng thì không thể sử dụng bộ tắt chấn động lực không có ma sát nhớt được. Dưới đây ta trình bày lý thuyết bộ tắt chấn động lực có ma sát nhớt.

Xét mô hình dao động như hình 3.18a. Các biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$II = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$



Hình 3.18a

Giả sử trên vật thể m_1 ta tác dụng một lực tuần hoàn $F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

Thế các biểu thức động năng, thế năng, hàm hao tán và lực suy rộng vào phương trình Lagrange loại II ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Để tìm nghiệm phương trình vi phân (6.13) ta áp dụng phương pháp biên độ phức. Ta đặt

$$F(t) = F_0 e^{i\Omega t}, \quad x_1 = \tilde{u}_1 e^{i\Omega t}, \quad x_2 = \tilde{u}_2 e^{i\Omega t} \quad (6.14)$$

trong đó $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ là các hệ số phức cần xác định. Thế các biểu thức (6.14) vào hệ phương trình vi phân (6.13) và ước lượng số hạng $e^{i\Omega t}$ ta nhận được hệ hai phương trình đại số tuyến tính đối với hai ẩn là hai biên độ phức $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 - m_1\Omega^2 + ib\Omega)\tilde{u}_1 - (c_2 + ib\Omega)\tilde{u}_2 &= F_0 \\ -(c_2 + ib\Omega)\tilde{u}_1 + (c_2 - m_2\Omega^2 + ib\Omega)\tilde{u}_2 &= 0\end{aligned}\quad (6.15)$$

Giải hệ hai phương trình đại số (6.15) ta được

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= \frac{F_0}{\Delta} (c_2 - m_2\Omega^2 + ib\Omega) \\ \tilde{u}_2 &= \frac{F_0}{\Delta} (c_2 + ib\Omega)\end{aligned}\quad (6.16)$$

với $\Delta = (c_1 - m_1\Omega^2)(c_2 - m_2\Omega^2) - m_2c_2\Omega^2 + ib\Omega(c_1 - m_1\Omega^2 - m_2\Omega^2)$

Ký hiệu u_1 và u_2 tương ứng là trị tuyệt đối của các biên độ phức $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$. Từ các phương trình (6.16) ta tìm được

$$u_1 = \frac{F_0 \sqrt{(c_2 - m_2\Omega^2)^2 + b^2\Omega^2}}{\sqrt{[(c_1 - m_1\Omega^2)(c_2 - m_2\Omega^2) - m_2c_2\Omega^2]^2 + b^2\Omega^2(c_1 - m_1\Omega^2 - m_2\Omega^2)^2}}\quad (6.17)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{F_0}{c_1}; \quad \omega_1^{(0)} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}; \quad \omega_2^{(0)} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \\ \eta &= \frac{\Omega}{\omega_1^{(0)}}; \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}; \quad \xi = \frac{\omega_2^{(0)}}{\omega_1^{(0)}}; \quad D = \frac{b}{2m_2\omega_1^{(0)}}\end{aligned}\quad (6.18)$$

Thì từ (6.17) ta suy ra biểu thức độ lệch tương đối của khối lượng m_1 (hay hàm khuếch đại)

$$V_1 = \frac{u_1}{u_0} = \sqrt{\frac{(\xi^2 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}{[(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \mu\xi^2\eta^2]^2 + 4D^2\eta^2(1 - \eta^2 - \mu\eta^2)^2}}\quad (6.19)$$

Tính toán tương tự ta được hàm khuếch đại V_2

$$V_2 = \frac{u_2}{u_0} = \sqrt{\frac{\xi^2 + 4D^2\eta^2}{[(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \mu\xi^2\eta^2]^2 + 4D^2\eta^2(1 - \eta^2 - \mu\eta^2)^2}}\quad (6.20)$$

Hiệu quả làm việc của bộ tắt chấn động lực có ma sát nhớt phụ thuộc vào việc chọn các tham số μ, η, D . Trước hết ta xét sự phụ thuộc của V_1 vào tham số D .

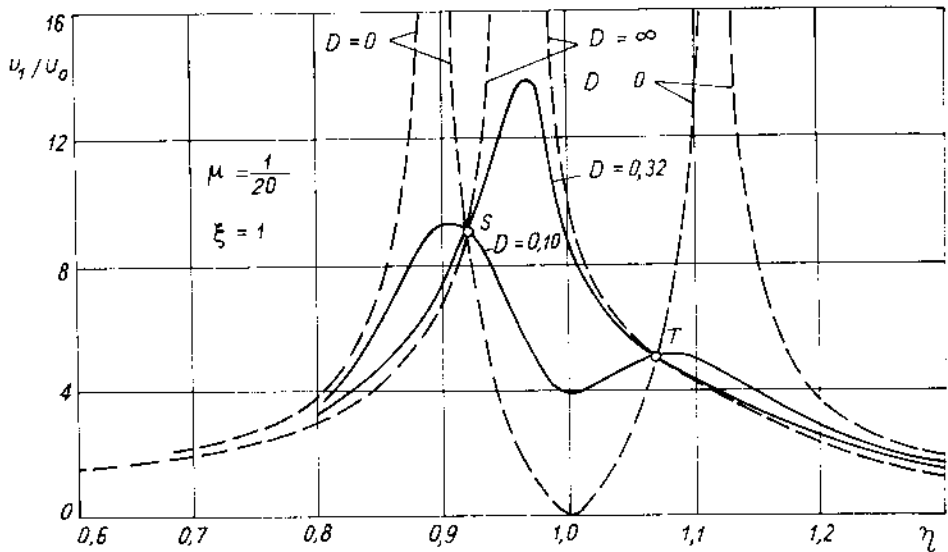
Khi $D = 0$ từ (6.19) ta có

$$V_1 = \left| \frac{\xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \mu \xi^2 \eta^2} \right| \quad (6.21)$$

Khi $D \rightarrow \infty$ từ (6.19) ta suy ra

$$V_1 = \left| \frac{1}{1 - (1 + \mu)\eta^2} \right| \quad (6.22)$$

Trên hình 3.18b là đồ thị của sự phụ thuộc độ lệch tương đối V_1 vào η (đồ thị biên độ - tần số) với $D = 0$; $D = 0,10$; $D = 0,32$ còn $\mu = 1/20$; $\xi = 1$ [12].



Hình 3.18b

Các đường cong trên hình 3.18b đều đi qua hai điểm S và T. Điều đó có nghĩa là tồn tại hai trị số của η mà tại đó biên độ dao động của khối lượng m_1 không phụ thuộc vào các hệ số cản b. Từ các biểu thức (6.21) và (6.22) ta suy ra phương trình xác định các trị số đó của η

$$\frac{\xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \mu \xi^2 \eta^2} = \frac{1}{1 - (1 + \mu)\eta^2}$$

hay

$$(\xi^2 - \eta^2)(1 - \eta^2 - \mu\eta^2) = (1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) - \mu\xi^2\eta^2$$

Rút gọn phương trình trên ta được

$$\eta^4 - 2\eta^2 \frac{1 + \xi^2 + \mu\xi^2}{2 + \mu} + \frac{2\xi^2}{2 + \mu} = 0 \quad (6.23)$$

Phương trình (6.23) là phương trình đại số bậc hai đối với η^2 . Nghiệm của phương trình này là

$$\eta_{1,2}^2 = \frac{1}{2 + \mu} \left[1 + (1 + \mu)\xi^2 \mp \sqrt{(1 + \mu)^2 \xi^4 - 2\xi^2 + 1} \right] \quad (6.24)$$

Trong đó η_1 là hoành độ điểm S, η_2 là hoành độ điểm T. Thế các biểu thức của η_1 và η_2 vào (6.22) ta nhận được các biểu thức xác định tung độ của các điểm S và T. Do $\eta_2 > \eta_1$ nên từ (6.22) ta suy ra

$$\frac{(u_1)_S}{u_0} = \frac{1}{1 - (1 + \mu)\eta_1^2} \quad (6.25)$$

$$\frac{(u_1)_T}{u_0} = -\frac{1}{1 - (1 + \mu)\eta_2^2} \quad (6.26)$$

Theo (6.24) η_1 và η_2 là hàm của các tham số μ và ξ nên các tung độ của các điểm S và T phụ thuộc vào μ và ξ . Theo các công thức (6.18) thì μ và ξ phụ thuộc vào các khối lượng m_1 và m_2 và các hệ số cứng c_1 và c_2 .

Nếu ta chọn trước m_2 thì chế độ làm việc của bộ tắt chấn động lực có cản nhớt sẽ đạt tối ưu khi tung độ các điểm S và T là như nhau và hệ số cản sẽ được chọn sao cho ở các điểm này đường cong biên độ tần số đạt cực đại. Từ điều kiện tung độ các điểm S và T bằng nhau ta suy ra

$$\frac{1}{1 - (1 + \mu)\eta_1^2} = -\frac{1}{1 - (1 + \mu)\eta_2^2}$$

Giải ra ta được

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \frac{2}{1 + \mu}$$

Do η_1^2, η_2^2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai (6.23) nên theo định lý Vieta ta có

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 2 \frac{1 + \mu \xi^2 + \xi^2}{2 + \mu} = \frac{2}{1 + \mu}$$

Từ đó giải ra $\xi = \frac{1}{1 + \mu}$ (6.27)

Thế biểu thức (6.27) vào phương trình (6.24) ta được

$$\eta_{1,2}^2 = \frac{1}{1 + \mu} \left(1 \mp \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right) \quad (6.28)$$

Thế η_2^2 này vào biểu thức (6.26) ta được

$$\frac{(u_1)_T}{u_0} = \sqrt{\frac{2 + \mu}{\mu}} = \frac{(u_1)_S}{u_0} \quad (6.29)$$

Vị trí của các điểm S và T không phụ thuộc vào các hệ số cản nhưng các giá trị cực đại tung độ của đường cong biên độ tần số thì phụ thuộc vào hệ số cản (xem hình 3.18b). Để cho đường cong biên độ tần số đạt cực đại tại các điểm S và T thì đạo hàm $dV_1 / d\eta = 0$ khi $\eta = \eta_1$ và $\eta = \eta_2$. Thế các biểu thức của ξ theo (6.27) và của η theo (6.28) vào phương trình $dV_1 / d\eta = 0$ và thực hiện một vài phép biến đổi ta nhận được hệ thức giữa tham số D và μ

$$\text{Tại S} \quad D^2 = \frac{\mu(3 - \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}})}{8(1 + \mu)^3}$$

$$\text{Tại T} \quad D^2 = \frac{\mu(3 + \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}})}{8(1 + \mu)^3}$$

Trong [12], [54] để làm giá trị trung bình khi thiết kế, người ta đề nghị lấy

$$D_{optimal}^2 = \frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3} \quad (6.30)$$

6.3 Dao động của mô hình ô tô hai bậc tự do

Một ô tô đang chạy với vận tốc v không đổi trên mặt đường không bằng phẳng (hình 3.19a). Trong trường hợp nghiên cứu sơ bộ ta có thể xây dựng mô hình cơ học của ô tô bằng hệ hai bậc tự do như hình 3.19b.

Ta ký hiệu m là khối lượng ô tô, J_C là mômen quán tính khối của ô tô đối với trục đi qua khối tâm ô tô và vuông góc mặt phẳng hình vẽ, c_1 và c_2 là độ cứng lò xo, s_1 và s_2 là khoảng cách giữa hai bánh xe ($l = s_1 + s_2$).

Giả sử qui luật nhấp nhô của mặt đường được xác định bởi hàm tuần hoàn (xem hình 3.19b)

$$y^* = \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x^*}{L} \right)$$

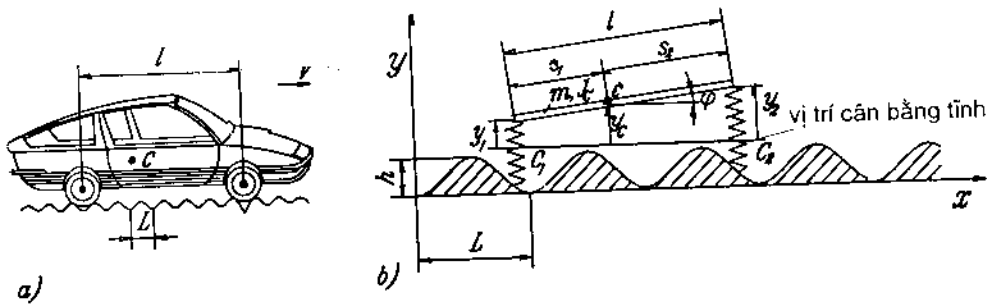
Ta chọn các tọa độ suy rộng $q_1 = y_C$, $q_2 = \varphi$. Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\varphi}^2 \quad (6.31)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 \Delta y_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \Delta y_2^2 \quad (6.32)$$

Trong đó Δy_1 , Δy_2 là biến dạng của các lò xo

$$\Delta y_1 = y_C - y_1^* - s_1 \varphi; \quad \Delta y_2 = y_C - y_2^* + s_2 \varphi \quad (6.33)$$



Hình 3.19

Tọa độ của các điểm tiếp xúc giữa lò xo và mặt đường là

$$\begin{aligned} x_1^* &= vt, & y_1^* &= \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x_1^*}{L} \right) = \frac{h}{2} (1 - \cos \Omega t) \\ x_2^* &= vt + l, & y_2^* &= \frac{h}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x_2^*}{L} \right) = \frac{h}{2} \left[1 - \cos \left(\Omega t + 2\pi \frac{l}{L} \right) \right] \end{aligned}$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\Omega = \frac{2\pi v}{L} \quad (6.34)$$

Thế các biểu thức (6.33) vào (6.32) ta được

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1(y_C - y_1^* - s_1\varphi)^2 + \frac{1}{2}c_2(y_C - y_2^* + s_2\varphi)^2 \quad (6.35)$$

Thế các biểu thức động năng và thế năng vào phương trình Lagrange loại II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

ta nhận được phương trình vi phân dao động của ô tô

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_C + c_{11}y_C + c_{12}\varphi &= \frac{h}{2}(c_{11} - c_{13}\cos\Omega t + c_{14}\sin\Omega t) \\ J_C\ddot{\varphi} + c_{21}y_C + c_{22}\varphi &= \frac{h}{2}(c_{21} - c_{23}\cos\Omega t + c_{24}\sin\Omega t) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Trong các phương trình (6.36) ta ký hiệu

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_1 + c_2 & c_{21} &= c_{12} \\ c_{12} &= c_2s_2 - c_1s_1 & c_{22} &= c_1s_1^2 + c_2s_2^2 \\ c_{13} &= c_1 + c_2\cos\frac{2\pi l}{L} & c_{23} &= -c_1s_1 + c_2s_2\cos\frac{2\pi l}{L} \\ c_{14} &= c_2\sin\frac{2\pi l}{L} & c_{24} &= c_2s_2\sin\frac{2\pi l}{L} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Để tìm các tần số riêng ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với (6.36)

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_C \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_C \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số có dạng

$$|C - \omega^2 M| = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 m & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \omega^2 J_C \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó suy ra

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{c_{22}m + c_{11}J_C}{mJ_C} + \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{mJ_C} = 0$$

Giải ra ta được

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c_{22}m + c_{11}J_C \mp \sqrt{(c_{22}m + c_{11}J_C)^2 - 4mJ_C(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2mJ_C} \quad (6.38)$$

Ta tìm nghiệm riêng của hệ phương trình (6.36) dưới dạng

$$\begin{aligned} y_C &= A_0 + A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t \\ \varphi &= B_0 + B_1 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t \end{aligned} \quad (6.39)$$

Thế các biểu thức nghiệm (6.39) vào hệ phương trình vi phân (6.36) rồi so sánh cân bằng các hệ số ta nhận được các phương trình đại số tuyến tính để xác định các hằng số $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$

$$\begin{aligned} c_{11}A_0 + c_{12}B_0 &= hc_{11} / 2 \\ c_{21}A_0 + c_{22}B_0 &= hc_{21} / 2 \\ (c_{11} - m\Omega^2)A_1 + c_{12}B_1 &= -hc_{13} / 2 \\ c_{21}A_1 + (c_{22} - J_C\Omega^2)B_1 &= -hc_{23} / 2 \\ (c_{11} - m\Omega^2)A_2 + c_{12}B_2 &= hc_{14} / 2 \\ c_{21}A_2 + (c_{22} - J_C\Omega^2)B_2 &= hc_{24} / 2 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Giải ra ta được

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{h}{2}; & B_0 &= 0 \\ A_1 &= \frac{h}{2} \frac{c_{23}c_{12} - c_{13}(c_{22} - J_C\Omega^2)}{\Delta}; & B_1 &= \frac{h}{2} \frac{c_{13}c_{12} - c_{23}(c_{11} - m\Omega^2)}{\Delta} \\ A_2 &= \frac{h}{2} \frac{-c_{24}c_{12} + c_{14}(c_{22} - J_C\Omega^2)}{\Delta}; & B_2 &= \frac{h}{2} \frac{-c_{14}c_{12} + c_{24}(c_{11} - m\Omega^2)}{\Delta} \end{aligned}$$

với $\Delta = (c_{11} - m\Omega^2)(c_{22} - J_C\Omega^2) - c_{12}^2$.

Thế các hằng số $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ tìm được vào biểu thức nghiệm (6.39) ta được các biểu thức xác định dao động cưỡng bức của ô tô

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{h}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta} [c_{23}c_{12} - c_{13}(c_{22} - J_C\Omega^2)] \cos \Omega t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta} [-c_{24}c_{12} + c_{14}(c_{22} - J_C\Omega^2)] \sin \Omega t \right\} \end{aligned} \quad (6.41)$$

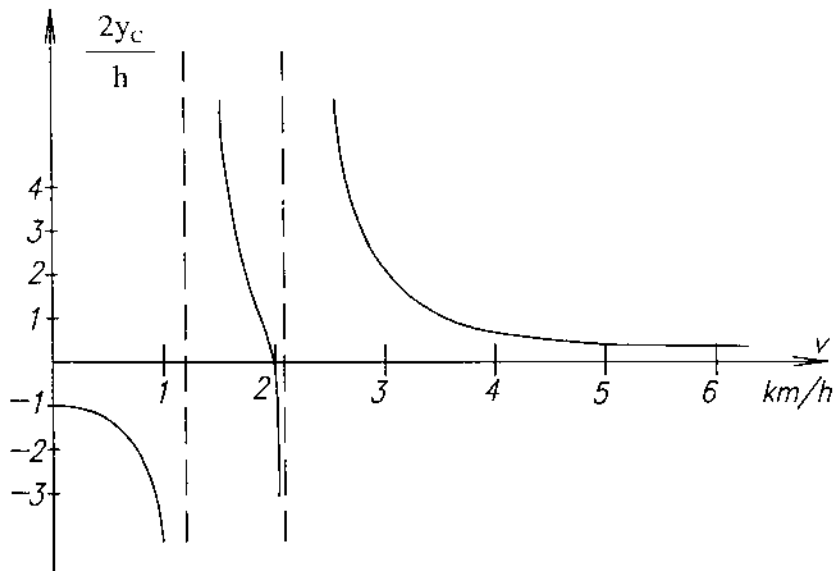
$$\varphi = \frac{h}{2A} \left\{ [c_{13}c_{12} - c_{23}(c_{11} - m\Omega^2)] \cos \Omega t + [-c_{14}c_{12} + c_{24}(c_{11} - m\Omega^2)] \sin \Omega t \right\} \quad (6.42)$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\Omega = \omega_i$ ($i = 1, 2$). Từ biểu thức (6.34) ta suy ra vận tốc giới hạn của ôtô

$$v_i^* = \frac{L}{2\pi} \omega_i \quad (i = 1, 2) \quad (6.43)$$

Để minh họa bằng số ta lấy $L = 0,15$ m; $h = 0,05$ m; $s_1 = 1,6$ m; $s_2 = 2$ m; $c_1 = 245,1662$ N/cm; $c_2 = 294,1995$ N/cm; $m = 600$ kg; $J_c = 600$ kgm². Từ các số liệu trên ta có

$$\frac{1}{L} = 24 \Rightarrow c_{14} = c_{24} = 0; \quad c_{13} = c_1 + c_2 = c_{11}; \quad c_{23} = c_2 s_2 - c_1 s_1 = c_{12}$$



Hình 3.19c

Từ các công thức (6.38)

Vận tốc tối hạn của ô tô là

$$v_1^* = \frac{L}{2\pi} \omega_1 = 0,22 \text{ m/s} = 0,7 \text{ km/h}$$

$$v_2^* = \frac{L}{2\pi} \omega_2 = 0,43 \text{ m/s} = 1,5 \text{ km/h}$$

Biểu thức nghiệm (6.41) bây giờ có dạng

$$y_C = \frac{h}{2} \left[1 + \frac{c_{12}^2 - c_{11}c_{22} + c_{11}J_C\Omega^2}{(c_{11} - m\Omega^2)(c_{22} - J_C\Omega^2) - c_{12}^2} \cos \Omega t \right] = \frac{h}{2} + y_0 \cos \Omega t$$

Đường cong cộng hưởng có dạng định tính như hình 3.19c.

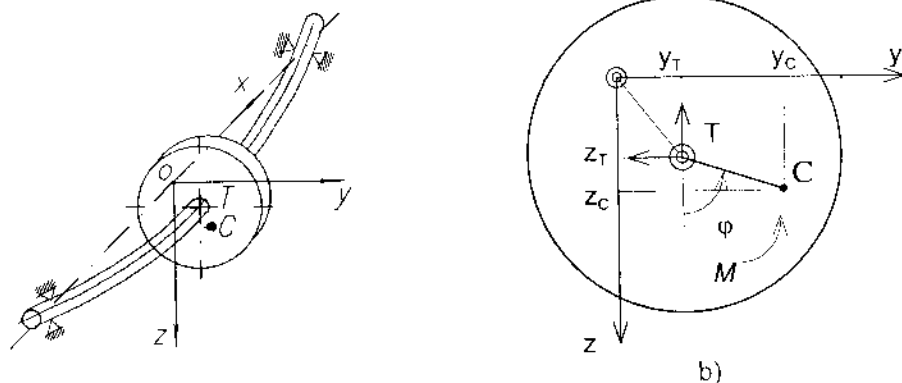
6.4 Dao động uốn của trục Laval

Mô hình dao động uốn của trục quay đơn giản nhất là mô hình dao động uốn của trục Laval. Mô hình gồm một trục không khối lượng mang một đĩa ở giữa trục. Ta ký hiệu tâm trục là T, trọng tâm của đĩa là C. Khoảng cách giữa T và C gọi là độ lệch tâm và ký hiệu là e. Khi trục chưa bị uốn điểm T trùng với điểm O của gốc tọa độ (hình 3.20a). Ta ký hiệu tọa độ của điểm T và C trong mặt phẳng Oyz tương ứng là y_T, z_T và y_C, z_C . Như thế y_T và z_T là độ võng của trục quay. Gọi φ là góc quay của đĩa quanh trục đi qua T và song song với trục x. Từ hình (3.20b) ta có các hệ thức liên hệ

$$y_C = y_T + e \sin \varphi \quad (6.44)$$

$$z_C = z_T + e \cos \varphi$$

Như thế vị trí của đĩa được xác định bởi ba tham số y_T, z_T và φ .



Ta ký hiệu m là khối lượng của đĩa, $P = mg$ là trọng lượng của đĩa, b là hệ số cản tuyến tính, c là hệ số cứng tuyến tính. Ta chọn vị trí ban đầu của trục z ứng với vị trí cân bằng tĩnh. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm ta có (xem hình 3.20b)

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_C &= -cy_T - b\dot{y}_T \\ m\ddot{z}_C &= -cz_T - b\dot{z}_T \end{aligned} \quad (6.45)$$

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục đi qua trọng tâm C và song song với trục x

$$J\dot{\varphi} = (cy_T + b\dot{y}_T)e\cos\varphi - (cz_T + b\dot{z}_T)e\sin\varphi + M(t) \quad (6.46)$$

Trong đó J là mômen quán tính của đĩa đối với trục đi qua khối tâm C và vuông góc với mặt phẳng yz , $M(t)$ là mômen ngoại lực.

Trong thực tế độ lệch tâm e và độ vồng của trục là nhỏ cho nên ở trạng thái chuyển động bình ổn ta có thể xem vận tốc góc của trục là hằng số ($\dot{\varphi} = \Omega$). Khi đó ta có

$$\varphi = \Omega t + \varphi_0; \quad y_C = y_T + e\sin(\Omega t + \varphi_0); \quad z_C = z_T + e\cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (6.47)$$

Thế các biểu thức (6.47) vào các phương trình (6.45) ta nhận được hệ phương trình vi phân dao động uốn của trục Laval

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_T + b\dot{y}_T + cy_T &= m\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ m\ddot{z}_T + b\dot{z}_T + cz_T &= m\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Với các giả thiết đã nêu trên dao động uốn của trục Laval được xem như dao động phẳng đơn giản không có liên hệ giữa các dịch chuyển theo hai phương y và z vuông góc với nhau. Việc tìm nghiệm của từng phương trình trong hệ (6.48) đã được xét kỹ trong chương 2.

Khi $b = 0$ các phương trình (6.48) có dạng

$$\begin{aligned} \ddot{y}_T + \omega_0^2 y_T &= e\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ \ddot{z}_T + \omega_0^2 z_T &= e\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (6.49)$$

Trong đó

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Khi $\Omega = \omega_0$ biên độ dao động cưỡng bức của hệ sẽ tăng lên vô cùng. Hiện tượng này được gọi là hiện tượng cộng hưởng. Số vòng quay của trục Laval ứng với $\Omega = \omega_0$ được gọi là số vòng quay tới hạn và được tính theo công thức

$$n_{th} = \frac{30}{\pi} \omega_0 = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Chú ý rằng nếu đĩa không được lắp ở chính giữa của trục quay, hoặc nếu độ cứng của trục đối với các ổ đỡ không đối xứng đối với mặt phẳng giữa đĩa thì khi trục quay đĩa sẽ bị nghiêng. Khi đó các tần số riêng của hệ không những phụ thuộc vào các tham số của hệ như độ cứng, momen quán tính khối mà còn phụ thuộc cả vào số vòng quay của trục [26,42].

§7. TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ TÍNH QUAN SÁT ĐƯỢC CỦA CÁC HỆ DAO ĐỘNG

Tính điều khiển được (controllability) và tính quan sát được (observability) là hai khái niệm mới quan trọng trong lý thuyết các hệ động lực. Các tính chất này có một vai trò quan trọng trong việc tổng hợp các hệ điều khiển tự động và mở ra một triển vọng mới trong việc nghiên cứu các hệ dao động. Dưới đây trình bày một cách tóm tắt về tính điều khiển được và tính quan sát được của các hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số.

7.1 Các định nghĩa

Xét mô hình toán học của một hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số gồm hai loại phương trình sau:

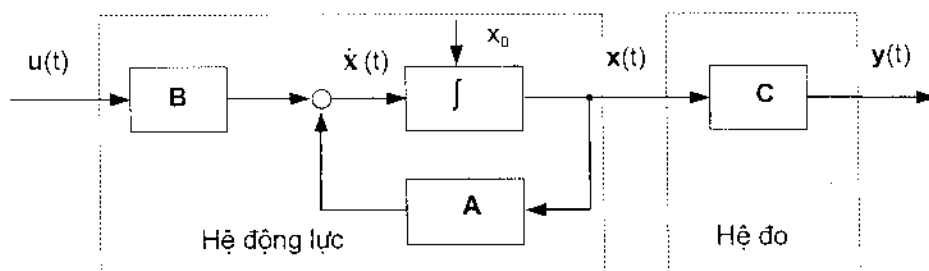
- Phương trình trạng thái

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.1)$$

- Phương trình đo

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7.2)$$

Trong đó : $\mathbf{u}$ là vectơ điều khiển có r phần tử, $\mathbf{x}$ - vectơ trạng thái có n phần tử, $\mathbf{y}$ - vectơ đo có m phần tử, $\mathbf{A}$ - ma trận hệ cỡ n,n , $\mathbf{B}$ - ma trận điều khiển cỡ n,r , $\mathbf{C}$ - ma trận đo cỡ m,n .



Hình 3.21

Sơ đồ hệ động lực có điều khiển cho trên hình 3.21.

Bây giờ ta nêu ra các định nghĩa về tính điều khiển được và tính quan sát được của các hệ động lực [34].

Định nghĩa 1. Hệ động lực (7.1) là điều khiển được hoàn toàn, nếu cho trước một trạng thái đầu $x(0) = x_0$ tùy ý và một trạng thái x_1 nào đó, thì sẽ tồn tại một thời điểm $t_1 > 0$ hữu hạn và một hàm điều khiển $u(t)$ xác định trong khoảng thời gian $[0, t_1]$ sao cho quỹ đạo của hệ (7.1) xuất phát từ x_0 ở thời điểm $t = 0$ sẽ đến x_1 tại thời điểm $t = t_1$.

Định nghĩa 2. Hệ động lực (7.1) và (7.2) là quan sát được hoàn toàn, nếu với trạng thái ban đầu $x(0) = x_0$ nào đó, sẽ tồn tại một thời điểm $t_1 > 0$ hữu hạn sao cho từ các thông tin về hàm điều khiển $u(t)$ và hàm đo $y(t)$ trong khoảng thời gian $[0, t_1]$ ta có thể xác định được trạng thái đầu x_0 nêu trên của hệ.

7.2 Các tiêu chuẩn Kalman về tính điều khiển được và tính quan sát được

Các tiêu chuẩn về tính điều khiển được và tính quan sát được của các hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số đã được Kalman nghiên cứu vào những năm 1959-1960. Dưới đây nêu ra các tiêu chuẩn này dưới dạng định lý và không chứng minh [34].

Tiêu chuẩn Kalman 1. Hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số mô tả bởi phương trình trạng thái cấp n

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(0) = x_0 \quad (7.3)$$

là điều khiển được hoàn toàn khi và chỉ khi

$$\text{Rank } Q_c = \text{Rank} [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] = n \quad (7.4)$$

Thí dụ 3.20: Cho hệ động lực mô tả bởi phương trình

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

Hãy khảo sát tính điều khiển được của hệ .

Lời giải : Ma trận Q_c có dạng

$$Q_c = [B \mid AB] = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & -5 \end{bmatrix}$$

Tính định thức ma trận Q_c

Chú ý rằng nếu đĩa không được lắp ở chính giữa của trục quay, hoặc nếu độ cứng của trục đối với các ổ đỡ không đối xứng đối với mặt phẳng giữa đĩa thì khi trục quay đĩa sẽ bị nghiêng. Khi đó các tần số riêng của hệ không những phụ thuộc vào các tham số của hệ như độ cứng, momen quán tính khối mà còn phụ thuộc cả vào số vòng quay của trục [26,42].

§7. TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC VÀ TÍNH QUAN SÁT ĐƯỢC CỦA CÁC HỆ DAO ĐỘNG

Tính điều khiển được (controllability) và tính quan sát được (observability) là hai khái niệm mới quan trọng trong lý thuyết các hệ động lực. Các tính chất này có một vai trò quan trọng trong việc tổng hợp các hệ điều khiển tự động và mở ra một triển vọng mới trong việc nghiên cứu các hệ dao động. Dưới đây trình bày một cách tóm tắt về tính điều khiển được và tính quan sát được của các hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số.

7.1 Các định nghĩa

Xét mô hình toán học của một hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số gồm hai loại phương trình sau:

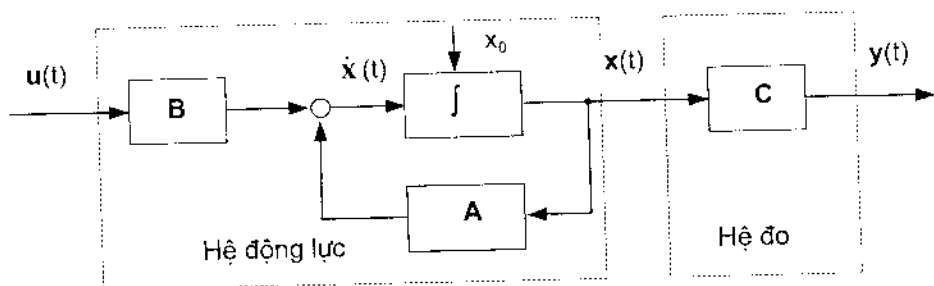
- Phương trình trạng thái

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.1)$$

- Phương trình đo

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7.2)$$

Trong đó : $\mathbf{u}$ là vectơ điều khiển có r phần tử, $\mathbf{x}$ - vectơ trạng thái có n phần tử, $\mathbf{y}$ - vectơ đo có m phần tử, $\mathbf{A}$ - ma trận hệ cỡ $n \times n$, $\mathbf{B}$ - ma trận điều khiển cỡ $n \times r$, $\mathbf{C}$ - ma trận đo cỡ $m \times n$.



Hình 3.21

$$\det(\mathbf{Q}_C) = -100 \neq 0 \rightarrow \text{Rank } \mathbf{Q}_C = 2 = n.$$

Vậy hệ cấp hai ở trên là điều khiển được hoàn toàn.

Tiêu chuẩn Kalman 2. Hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số mô tả bởi phương trình trạng thái cấp n và phương trình đo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7.6)$$

là quan sát được hoàn toàn khi và chỉ khi

$$\text{Rank } \mathbf{Q}_O = \text{Rank}[\mathbf{C}^T | \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T | (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T | \dots | (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] = n \quad (7.7)$$

Thí dụ 3.21: Cho hệ động lực mô tả bởi phương trình trạng thái và phương trình đo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Hãy khảo sát tính điều khiển được và tính quan sát được của hệ.

Lời giải: Ma trận $\mathbf{Q}_C$ có dạng

$$\mathbf{Q}_C = [\mathbf{B} | \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

Do $\det(\mathbf{Q}_C) = 0$ nên $\text{Rank } \mathbf{Q}_C < 2 = n$. Vậy hệ động lực trên không điều khiển được. Ma trận $\mathbf{Q}_O$ có dạng

$$\mathbf{Q}_O = [\mathbf{C}^T | \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Từ $\det(\mathbf{Q}_O) = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rank } \mathbf{Q}_O = 2 = n$.

Vậy hệ động lực trên là quan sát được.

7.3 Các tiêu chuẩn Hautus về tính điều khiển được và tính quan sát được

Dưới đây sẽ nêu lên các tiêu chuẩn Hautus về tính điều khiển được và tính quan sát được của các hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số. Do tính phức tạp, không nêu các chứng minh ở đây [34].

Tiêu chuẩn Hautus 1. Hệ động lực tuyến tính hệ số hằng số mô tả bởi phương trình trạng thái cấp n

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.8)$$

là điều khiển được hoàn toàn khi và chỉ khi mọi vectơ riêng $\mathbf{v}_i$ của ma trận hệ chuyển vị $\mathbf{A}^T$ không trực giao với tất cả các vectơ cột của ma trận điều khiển

$$(\mathbf{A}^T - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{B}^T \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.9)$$

Tiêu chuẩn Hautus 2. Hệ động lực tuyến tính hệ số hằng mô tả bởi phương trình trạng thái cấp n và phương trình đo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (7.11)$$

là quan sát được hoàn toàn, khi và chỉ khi mọi vectơ riêng $\mathbf{v}_i$ của ma trận hệ $\mathbf{A}$ không trực giao với tất cả các vectơ hàng của ma trận đo

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{C}\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.12)$$

So sánh các tiêu chuẩn Kalman và các tiêu chuẩn Hautus ta thấy các tiêu chuẩn Kalman cho ta câu trả lời khẳng định hay phủ định về tính điều khiển được hoặc tính quan sát được của hệ động lực dựa trên việc tính hạng của ma trận $\mathbf{Q}_C$ hoặc ma trận $\mathbf{Q}_O$. Các tiêu chuẩn Hautus cho ta kết luận về tính không điều khiển được hoặc không quan sát được của mô hình cơ học một cách tương đối đơn giản. Chẳng hạn nếu tồn tại một vectơ riêng $\mathbf{v}_k$ nào đó của ma trận $\mathbf{A}^T$ mà $\mathbf{B}^T \mathbf{v}_k = 0$ thì hệ là không điều khiển được. Tương tự nếu tồn tại một vectơ riêng $\mathbf{v}_j$ nào đó của ma trận $\mathbf{A}$ mà $\mathbf{C} \mathbf{v}_j = 0$ thì hệ là không quan sát được.

Thí dụ 3.22: Khảo sát tính điều khiển được và tính quan sát được của hệ động lực mô tả bởi phương trình trong thí dụ 3.21 bằng tiêu chuẩn Hautus.

Lời giải: Trước hết ta xác định các trị riêng của ma trận $\mathbf{A}^T$

$$\left| \mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{E} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

Các vectơ riêng được xác định bởi phương trình

$$(\mathbf{A}^T - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Từ hệ thức

$$\mathbf{B}^T \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ta suy ra hệ động lực khảo sát là không điều khiển được.

Bây giờ ta chuyển sang xác định các giá trị riêng của ma trận $\mathbf{A}$. Dễ dàng thấy được ma trận $\mathbf{A}$ có hai trị riêng $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$.

Thế λ_1 vào phương trình

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{v}_1 = 0$$

ta tính được

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Từ đó dễ dàng kiểm tra các điều kiện quan sát được theo tiêu chuẩn Hautus

$$\mathbf{C} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0, \quad \mathbf{C} \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

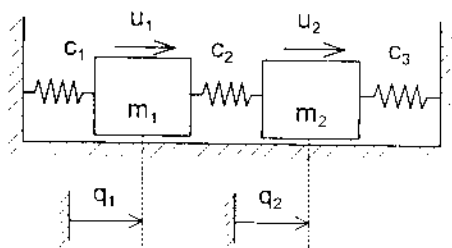
Vậy hệ động lực khảo sát là quan sát được hoàn toàn.

7.4 Thí dụ áp dụng

Xét mô hình dao động hai bậc tự do như hình 3.22. Trong đó u_1, u_2 là các kích động ngoài. Hãy thiết lập phương trình trạng thái, phương trình đo của hệ. Sau đó khảo sát tính quan sát được và tính điều khiển được của hệ.

Để dàng thiết lập được hệ phương trình vi phân dao động của hệ khảo sát

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + c_1 q_1 - c_2 (q_2 - q_1) &= u_1 \\ m_2 \ddot{q}_2 + c_2 (q_2 - q_1) + c_3 q_2 &= u_2 \end{aligned} \quad (7.13)$$



Hình 3.22

Ta đưa vào biến mới $s = \overline{\omega}t$ và ký hiệu $(\)' = \frac{d}{ds}$. Đối với biến s hệ phương trình vi phân (7.13) có dạng

$$\begin{aligned} q_1'' &= -\frac{c_1 + c_2}{m_1 \bar{\omega}^2} q_1 + \frac{c_2}{m_1 \bar{\omega}^2} q_2 + \frac{u_1(s)}{m_1 \bar{\omega}^2} \\ q_2'' &= \frac{c_2}{m_2 \bar{\omega}^2} q_1 - \frac{c_2 + c_3}{m_2 \bar{\omega}^2} q_2 + \frac{u_2(s)}{m_2 \bar{\omega}^2} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nếu ta chọn vector trạng thái dạng

$$\mathbf{x}^T = [q_1(s), q_2(s), q_1'(s), q_2'(s)]$$

và sử dụng các ký hiệu không thứ nguyên

$$\begin{aligned} k_{11} &= -\frac{c_1 + c_2}{m_1 \bar{\omega}^2}; & k_{12} &= \frac{c_2}{m_1 \bar{\omega}^2} \\ k_{21} &= \frac{c_2}{m_2 \bar{\omega}^2}; & k_{22} &= -\frac{c_2 + c_3}{m_2 \bar{\omega}^2} \end{aligned}$$

thì từ (7.14) ta suy ra phương trình trạng thái của hệ

$$\begin{bmatrix} x_1'(s) \\ x_2'(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 u_1(s) \\ b_4 u_2(s) \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

Trong đó

$$b_3 = \frac{1}{m_1 \bar{\omega}^2}; \quad b_4 = \frac{1}{m_2 \bar{\omega}^2}$$

Phương trình đo của hệ dao động trên hình 3.22 có dạng

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Dạng của ma trận $\mathbf{C}$ phụ thuộc vào các đại lượng ta sẽ đo.

Nếu các đại lượng đo là dịch chuyển tuyệt đối $q_1(s)$ và $q_2(s)$ thì

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu các đại lượng đo là dịch chuyển tuyệt đối $q_1(s)$ và $q'_1(s)$ thì

$$C_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu các đại lượng đo là dịch chuyển tương đối $q_1(s) - q_2(s)$, ta có

$$C_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nếu các đại lượng đo là dịch chuyển tương đối $q_1(s) - q_2(s)$ và vận tốc tương đối $(q'_1 - q'_2)$ thì $C_4 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Từ các phương trình trạng thái (7.15) và phương trình đo (7.16) ta suy ra dạng của ma trận A và ma trận đo C như sau

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [C_1 \quad C_2]$$

Trong đó E là ma trận đơn vị cấp hai, K , C_1 , C_2 là các ma trận vuông cấp hai.

Trong bài toán này A là ma trận vuông cấp bốn ($n = 4$). Do đó ma trận Q_0 theo tiêu chuẩn Kalman 2 có dạng

$$Q_0 = [C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid (A^T)^3 C^T]$$

Do

$$(A^T)^2 = \begin{bmatrix} K^T & 0 \\ 0 & K^T \end{bmatrix}; \quad (A^T)^3 = \begin{bmatrix} 0 & (K^T)^2 \\ K^T & 0 \end{bmatrix}$$

nên ta có

$$A^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & K^T \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^T C_2^T \\ C_1^T \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^2 C^T = \begin{bmatrix} K^T & 0 \\ 0 & K^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^T C_1^T \\ K^T C_2^T \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^3 C^T = \begin{bmatrix} 0 & K^T \\ K^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K^T)^2 C_2^T \\ K^T C_1^T \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận Q_0 có dạng

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C_1^T & K^T C_2^T & K^T C_1^T & (K^T)^2 C_2^T \\ C_2^T & C_1^T & K^T C_2^T & K^T C_1^T \end{bmatrix}$$

Nếu ta chọn phương án đo thứ nhất thì các ma trận C_1 và C_2 có dạng

$$C_1 = E, \quad C_2 = 0$$

Từ đó ma trận Q_0 có dạng khá đơn giản

$$Q_0 = \begin{bmatrix} E & 0 & K^T & 0 \\ 0 & E & 0 & K^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k_{12} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & k_{11} & k_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Dễ dàng tính được hạng của ma trận Q_0

$$\text{Rank } Q_0 = 4 = n$$

Vậy theo tiêu chuẩn Kalman 2, hệ dao động khảo sát là một hệ quan sát được hoàn toàn. Bằng cách tương tự ta có thể khảo sát các phương án đo khác.

Để kiểm tra tính điều khiển được hoàn toàn của hệ, ta viết lại phương trình (7.15) dưới dạng

$$\frac{dx}{ds} = Ax + Bu$$

Trong đó

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ B_1 \end{bmatrix} \quad \text{với} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

Dễ dàng tính được

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ KB_1 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ KB_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KB_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận Q_C theo tiêu chuẩn Kalman có dạng

$$Q_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{KB}_1 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{KB}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Từ đó tính được

$$Q_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & k_{11}b_3 & k_{12}b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & k_{21}b_3 & k_{22}b_4 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & k_{11}b_3 & k_{12}b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & 0 & k_{21}b_3 & k_{22}b_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Do đó ta có $\det Q_C = b_3^2 b_4^2 \neq 0$

Vậy $\text{Rank } Q_C = 4 = n$. Hệ dao động khảo sát là điều khiển được hoàn toàn.

Chương 4

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Các hệ liên tục còn được gọi là các hệ vô hạn bậc tự do. Trong chương này, ta xét dao động của một số hệ liên tục đơn giản nhưng hay gặp trong kỹ thuật. Đó là dao động của dây, dao động của thanh và dầm, dao động của màng và dao động của tấm. Các đại lượng vật lý đặc trưng cho dao động của hệ vô hạn bậc tự do như khối lượng, độ cứng phân bố một cách liên tục.

Phương trình mô tả dao động của hệ liên tục là các phương trình đạo hàm riêng. Ở các hệ liên tục, ta nhận được vô số các tần số riêng, các dạng dao động riêng, vv...

§1. DAO ĐỘNG UỐN CỦA DÂY

Dây là một môi trường liên tục dạng hình sợi dây. Giả sử dây có ứng suất trước và không bị uốn. Về mặt kỹ thuật, hiện tượng dao động của dây ít có ý nghĩa. Tuy nhiên, đây là một hệ liên tục đơn giản nhất mà ta có thể nghiên cứu các hiện tượng cơ bản một cách khá đơn giản. Ta giới hạn ở tiết này, chỉ nghiên cứu dao động tự do của dây.

1.1 Thiết lập phương trình sóng của dây

Ta xét một dây có khối lượng dọc theo đơn vị độ dài (μ) không đổi và chịu lực kéo $\vec{S}$ ở đầu dây (hình 4.1a). Nếu ta kéo dây lệch khỏi vị trí cân bằng, sau đó bỏ ra thì dây sẽ thực hiện dao động tự do. Độ võng w của dây theo phương z thông thường là hàm của vị trí x và thời gian t : $w = w(x, t)$. Dịch chuyển u theo phương x có thể bỏ qua khi độ võng w và góc xoay $\tan \alpha = \partial w / \partial x = w'$ đủ nhỏ. Để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của dây ta tách ra xét một đoạn dây ds rất ngắn như hình 4.1b.

Do giả thiết $w' \ll 1$, ta có các xấp xỉ sau

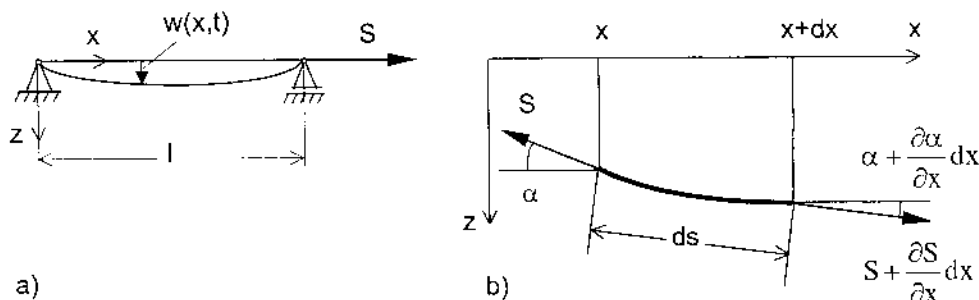
$$\alpha \approx \sin \alpha \approx w', \quad (\alpha + d\alpha) \approx \sin(\alpha + d\alpha) \approx w' + w''dx, \\ \cos \alpha \approx 1, \quad \cos(\alpha + d\alpha) \approx 1, \quad ds \approx dx$$

Với các xấp xỉ trên và sử dụng ký hiệu $dm = \mu ds \approx \mu dx$ ta nhận được phương trình chuyển động của phần tử dây như hình 4.1b từ các định lý quen biết trong cơ học

$$\rightarrow : 0 = -S + (S + \frac{\partial S}{\partial x} dx) \quad (1.1)$$

$$\downarrow : \mu dx \ddot{w} = -Sw' + (S + \frac{\partial S}{\partial x} dx)(w' + w''dx) \quad (1.2)$$

Trong đó $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ là gia tốc của phần tử dây theo hướng z.



Hình 4.1

Từ phương trình (1.1) ta có

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \rightarrow S = \text{const}$$

Thế biểu thức $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ vào phương trình (1.2), ta nhận được phương trình

$$\mu \ddot{w} = S w''$$

Sử dụng ký hiệu $c^2 = \frac{S}{\mu}$, phương trình trên có dạng

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Phương trình đạo hàm riêng (1.3) được gọi là phương trình sóng một thứ nguyên. Hằng số \$c\$ có thứ nguyên vận tốc và được gọi là vận tốc lan truyền sóng.

Nếu ta gọi diện tích thiết diện mặt cắt là \$A\$, mật độ khối là \$\rho\$, ứng suất của dây là \$\sigma\$, thì ta có

$$\mu = \rho A, \quad S = \sigma A$$

Từ đó tốc độ lan truyền sóng có biểu thức

$$c = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (1.4)$$

Để giải phương trình sóng (1.3) ta còn phải biết các điều kiện đầu và các điều kiện biên. Các điều kiện đầu là độ võng và vận tốc của các điểm của dây ở thời điểm đầu (ở đây ta lấy $t_0 = 0$)

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x) \quad (1.5)$$

Các điều kiện biên là các điều kiện về biến dạng và lực ở các biên. Thí dụ như trên hình 4.1a, dịch chuyển ở hai gối đỡ hai đầu dây bằng không. Từ đó ta có

$$w(0, t) = 0 \quad \text{và} \quad w(l, t) = 0 \quad (1.6)$$

1.2 Phương pháp d'Alembert, các sóng lan truyền

Để giải phương trình sóng (1.3) bằng phương pháp d'Alembert, trước hết ta thực hiện phép biến đổi như sau

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct \quad (1.7)$$

Do

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

ta nhận được từ (1.3) phương trình

$$4 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.8)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.8) có dạng

$$w(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta) \quad (1.9)$$

Trong đó f_1 và f_2 là các hàm nào đó. Chú ý đến phép đổi biến (1.7), biểu thức nghiệm (1.9) có dạng

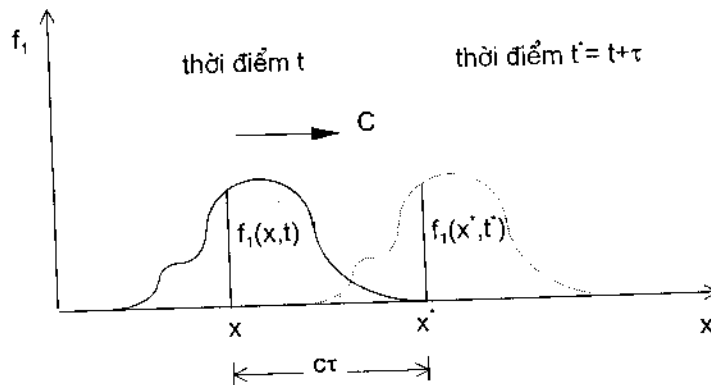
$$w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (1.10)$$

Nghiệm (1.10) được gọi là nghiệm d'Alembert của phương trình sóng (1.3)

Nếu ta thay đổi số $x - ct$ của hàm f_1 bằng đối số mới, trong đó thời gian t thay bằng $t^* = t + \tau$, vị trí x thay bằng $x^* = x + c\tau$, thì ta có

$$f_1(x - ct) = f_1(x^* - c\tau - ct^* + c\tau) = f_1(x^* - ct^*)$$

Như thế hàm $f_1(x-ct)$ mô tả một sóng lan truyền theo chiều x dương với vận tốc c không đổi và không làm dạng sóng thay đổi (hình 4.2).



Hình 4.2

Tính toán tương tự, ta có kết luận : hàm $f_2(x+ct)$ mô tả một sóng lan truyền theo hướng âm của trục x với vận tốc c không đổi. Dao động của dây có thể xem như là cộng tác dụng của hai sóng lan truyền ngược chiều nhau.

Bây giờ ta xác định dạng các hàm f_1 và f_2 từ các điều kiện đầu (1.5). Từ biểu thức nghiệm (1.10) ta có

$$f_1(x) + f_2(x) = w_0(x); \quad -cf_1'(x) + cf_2'(x) = v_0(x)$$

Tích phân phương trình thứ hai ta được

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(u) du + A$$

với A là một hằng số tích phân. Từ hai phương trình

$$f_1(x) + f_2(x) = w_0(x)$$

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(u) du + A$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \left[w_0(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(u) du \right] - \frac{A}{2} \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \left[w_0(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x v_0(u) du \right] + \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Thế biểu thức (1.11) vào (1.10) ta được

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \left[w_0(x - ct) + w_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(u) du \right] \quad (1.12)$$

Xét trường hợp đặc biệt $v_0(x) \equiv 0$. Khi đó từ các biểu thức (1.11) và (1.12) ta nhận được các kết quả rất đơn giản

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} w_0(x) \quad (1.13)$$

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [w_0(x - ct) + w_0(x + ct)] \quad (1.14)$$

Các biểu thức nghiệm (1.12) hoặc (1.14) mô tả độ võng của dây khi sóng chưa truyền đến các biên. Nếu dây có độ dài hữu hạn, thì các sóng phải thoả mãn các điều kiện biên.

1.3 Phương pháp Bernoulli, dao động

Trong phần trên ta đã nghiên cứu dao động của dây có chiều dài hữu hạn bằng phương pháp d'Alembert. Bây giờ ta trình bày cách giải phương trình (1.3) bằng phương pháp Bernoulli. Ta tìm nghiệm (1.3) dưới dạng

$$w(x, t) = X(x) T(t) \quad (1.15)$$

Thế biểu thức (1.15) vào phương trình (1.3) ta nhận được

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

Do vế trái của phương trình trên chỉ phụ thuộc vào x , còn vế phải chỉ phụ thuộc vào t , cho nên hai vế phải bằng hằng số. Với mục đích định trước, ta ký hiệu hằng số đó là $-\omega^2$. Ta có

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

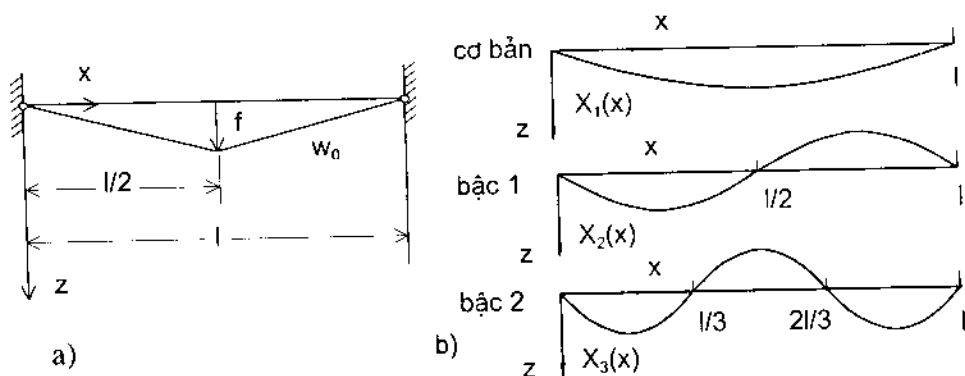
Từ đó ta nhận được hai phương trình vi phân thường

$$\begin{aligned} X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) &= 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nghiệm tổng quát của các phương trình này có dạng

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \\ T(t) &= C \cos \omega t + D \sin \omega t \end{aligned} \quad (1.17)$$

Trong đó A, B, C, D và ω là các đại lượng được xác định từ các điều kiện biên và các điều kiện đầu.



Hình 4.3

Để làm thí dụ ta xét dao động uốn của dây có hai đầu gắn chặt (hình 4.3a). Các điều kiện biên có dạng

$$\begin{aligned} w(0, t) = 0 &\rightarrow X(0) = 0 : A = 0 \\ w(l, t) = 0 &\rightarrow X(l) = 0 : B \sin \frac{\omega}{c} l = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Để cho nghiệm $X(x)$ không đồng nhất bằng không, thì $B \neq 0$, do đó ta có

$$\sin \frac{\omega}{c} l = 0 \rightarrow \frac{\omega}{c} l = k\pi \rightarrow \omega_k = k\pi \frac{c}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Phương trình $\sin \frac{\omega}{c} l = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng, còn các đại lượng ω_k (được xác định từ phương trình đặc trưng) được gọi là các tần số riêng. Ở đây ta đã bỏ đi nghiệm tầm thường $\omega_0 = 0$ và các nghiệm không có ý nghĩa vật lý $\omega_k < 0$, với $k = -1, -2, \dots$ của phương trình đặc trưng.

Ứng với mỗi tần số riêng ω_k ta có một hàm riêng (dạng dao động riêng)

$$X_k(x) = B_k \sin \frac{\omega_k}{c} x = B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (1.20)$$

Thế các biểu thức (1.20) và (1.17) vào (1.15) ta được

$$w_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \sin \frac{k\pi x}{l} (C_k \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t) \quad (1.21)$$

Trong đó không giảm tính chất tổng quát, ta chọn $B_k = 1$.

Biểu thức (1.21) mô tả một dao động riêng của dây với tần số riêng ω_k và dạng dao động riêng $X_k(x)$. Từ hệ thức (1.19) ta thấy có vô số các dạng dao động riêng của dây ($k = 1, 2, \dots$). Tần số riêng ω_1 ứng với $k = 1$, được gọi là tần số cơ bản, còn dao động riêng tương ứng được gọi là dao động riêng cơ bản. Chu kỳ dao động của nó là $T = 2\pi/\omega_1 = 2l/c$. Các tần số riêng $\omega_2, \omega_3, \dots$ được gọi là các tần số riêng bậc cao, các dao động riêng tương ứng được gọi là các dao động riêng bậc cao. Hình 4.3b biểu thị các dạng dao động riêng cơ bản và dao động riêng bậc một và bậc hai. Các vị trí của x ($0 < x < l$) mà $X_k(x) = 0$ được gọi là các điểm nút. Trên hình 4.3b, dây thực hiện dao động riêng cơ bản thì không có điểm nút nào. Ở dao động riêng bậc một có 1 điểm nút, ở dao động riêng bậc hai có 2 điểm nút.

Các dao động riêng (1.21) là các nghiệm riêng của phương trình (1.3). Vì phương trình (1.3) là phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, áp dụng phương pháp cộng nghiệm, ta nhận được nghiệm tổng quát của thí dụ này

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} (C_k \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t) \quad (1.22)$$

Trong đó các tần số riêng ω_k được xác định từ hệ thức (1.19).

Các hằng số C_k , D_k được xác định từ các điều kiện đầu (1.5)

$$\begin{aligned} w(x,0) = w_0(x) &: \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi x}{l} = w_0(x) \\ \dot{w}(x,0) = v_0(x) &: \sum_{k=1}^{\infty} D_k \omega_k \sin \frac{k\pi x}{l} = v_0(x) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Để xác định các hằng số C_k , D_k ta nhân phương trình (1.23) với $X_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}$ rồi lấy tích phân theo chiều dài của dây. Với chú ý

$$\int_0^l X_i(x) X_k(x) dx = \int_0^l \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq k \\ \frac{l}{2} & \text{khi } i = k \end{cases} \quad (1.24)$$

ta nhận được

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \\ D_k &= \frac{2}{\omega_k l} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \end{aligned} \quad (1.25)$$

Như thế, nghiệm (1.22) được xác định một cách duy nhất. Điều kiện (1.24) được gọi là điều kiện trực giao của các hàm riêng.

Để minh hoạ ta xét trường hợp $v_0(x) = 0$, còn $w_0(x)$ có dạng hình tam giác như hình 4.3a. Theo (1.25) ta có $D_k = 0$ còn C_k được tính với hàm $w_0(x)$ có dạng

$$w_0(x) = \begin{cases} \frac{2fx}{l} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2f(1 - \frac{x}{l}) & \text{khi } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Ta dễ dàng tính được

$$C_k = \frac{4f}{l} \left[\int_0^{l/2} \frac{x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx - \int_{l/2}^l \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right] = \frac{8f}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}$$

Thế các C_k , D_k vào biểu thức (1.22) ta được

$$w(x, t) = f \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \omega_k t \quad (1.26)$$

Chú ý rằng trong nhiều vấn đề thực tế người ta chỉ quan tâm đến việc xác định các tần số riêng và dạng dao động riêng. Trong bài toán này, chúng ta chưa cần quan tâm đến các điều kiện đầu. Trong bài toán dao động cưỡng bức, hiện tượng cộng hưởng là hiện tượng khi tần số của lực kích động trùng với một trong các tần số dao động riêng của hệ. Vì vậy để tránh hiện tượng cộng hưởng, ta cần phải biết các tần số riêng.

Trong các hệ kỹ thuật, bao giờ cũng có phần tử cản. Hệ số cản càng lớn, khi tần số riêng càng cao. Vì vậy các dao động cao tần được kích động một cách yếu ớt và tắt khá nhanh. Trong thực tế chỉ các dao động riêng cơ bản và các dao động riêng bậc một là có ý nghĩa quan trọng.

Thí dụ 4.1: Hãy xác định các tần số riêng và các hàm riêng của dây một đầu ngàm chặt, một đầu tự do (hình 4.4a). Tần số riêng cơ bản sẽ thay đổi như thế nào khi lực kéo S ở dây tăng gấp đôi?

Lời giải: Theo công thức (1.17), nghiệm của $X(x)$ có dạng

$$X(x) = A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x$$

Các điều kiện biên có dạng

$$X(0) = 0 \quad : \quad A = 0$$

$$X'(l) = 0 \quad : \quad B \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} l = 0$$

Từ phương trình thứ hai khi $B \neq 0$ ta có phương trình đặc trưng

$$\cos \frac{\omega}{c} l = 0$$

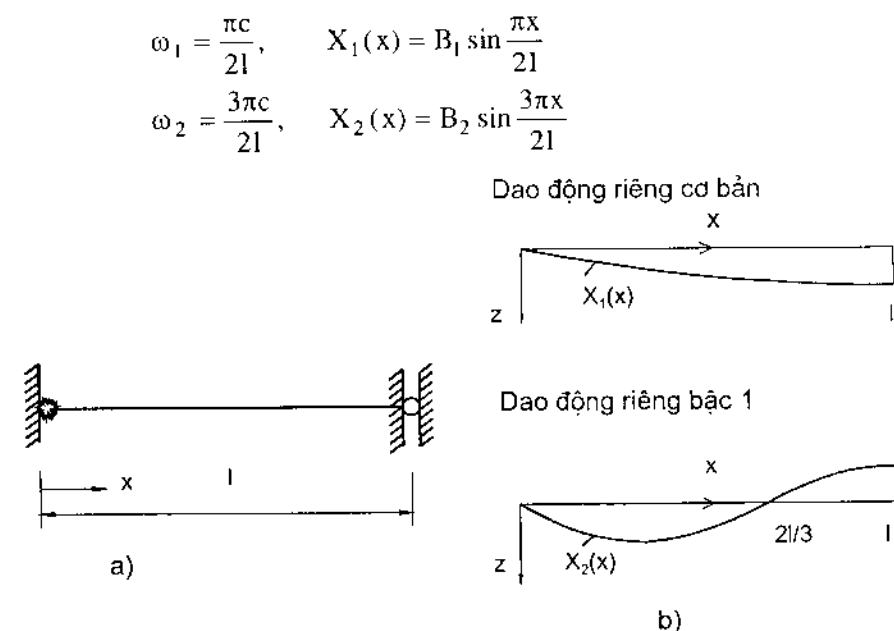
Từ phương trình này, khi $\omega > 0$, ta tìm được các tần số riêng

$$\frac{\omega}{c} l = \frac{2k-1}{2} \pi \rightarrow \omega_k = \frac{2k-1}{2} \frac{\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Từ đó suy ra các hàm riêng

$$X_k(x) = B_k \sin \left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{l} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Dao động riêng cơ bản và dao động riêng bậc 1 có dạng



Hình 4.4

Các dạng dao động riêng tương ứng được biểu diễn trên hình 4.4b.

Chú ý đến công thức (1.4), tần số dao động riêng cơ bản có dạng

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{S}{\mu l^2}}$$

Khi lực kéo S tăng gấp đôi, thì ω_1 được nhân với $\sqrt{2}$.

§2 DAO ĐỘNG DỌC VÀ DAO ĐỘNG XOẮN CỦA THANH THẲNG

2.1 Dao động dọc tự do của thanh đồng chất thiết diện không đổi

Xét một thanh thẳng (hình 4.5a) có mật độ khối là $\rho(x)$, thiết diện là $A(x)$, môđun đàn hồi là E . Thanh thực hiện dao động $u(x,t)$ dọc trục x . Áp dụng nguyên lý d'Alembert, xét một phần tử của thanh chịu lực như hình 4.5b. Phương trình chuyển động theo trục x của phần tử thanh có dạng

$$\begin{aligned}\rho(x)A(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -N + \left(N + \frac{\partial N}{\partial x} dx\right) \\ \rightarrow \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Từ giáo trình sức bền vật liệu [37, 49] ta có

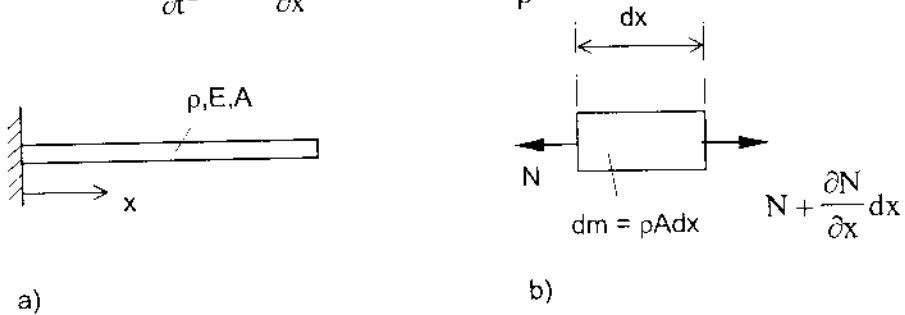
$$N = EA(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Thế biểu thức trên vào phương trình (2.1) ta nhận được phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng

$$\rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Khi $\rho(x)$ và $A(x)$ đều là các hằng số, từ phương trình (2.2) ta suy ra phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.3)$$



Hình 4.5

Như thế phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng là phương trình đạo hàm riêng cấp hai có dạng giống như phương trình (1.3). Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình (2.3) dưới dạng

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.4)$$

Thế biểu thức nghiệm (2.4) vào phương trình (2.3) ta có

$$\begin{aligned}X(x)\ddot{T}(t) - c^2 X''(x)T(t) &= 0 \\ \rightarrow c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}\end{aligned}$$

Do vế trái của phương trình trên chỉ phụ thuộc vào x , còn vế phải chỉ phụ thuộc vào t , cho nên hai vế đó phải bằng hằng số. Với mục đích định trước, ta ký hiệu hằng số đó là $-\omega^2$. Ta có

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

Từ đó ta nhận được hai phương trình vi phân thường

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (2.5)$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.6)$$

Nghiệm tổng quát của các phương trình này có dạng

$$X(x) = A^* \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \quad (2.7)$$

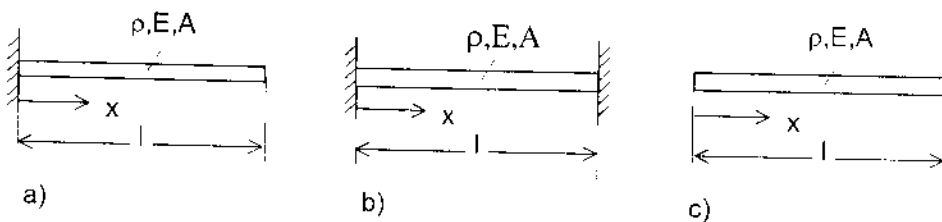
$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t \quad (2.8)$$

Các hằng số A^* , B được xác định từ các điều kiện biên, còn các hằng số C , D được xác định từ các điều kiện đầu.

Đối với thanh một đầu ngàm chặt, một đầu tự do (hình 4.6a), các điều kiện biên có dạng

$$u(0, t) = 0 \quad \rightarrow \quad X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A^* = 0$$

$$N(l, t) = EA \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad X'(l) = 0 \quad \rightarrow \quad B \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} l = 0$$



Hình 4.6

Với các giả thiết $B \neq 0$, $\omega > 0$, ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\cos \frac{\omega}{c} l = 0 \quad (2.9)$$

Từ đó suy ra các tần số riêng và các hàm riêng

$$\begin{aligned}\omega_k &= \frac{2k-1}{2} \frac{\pi c}{l} = \frac{2k-1}{2} \pi \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}, \quad k=1, 2, \dots \\ X_k(x) &= B_k \sin\left(\frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{l}\right), \quad k=1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.10)$$

Đối với thanh hai đầu bị ngàm chặt (hình 4.6b), các điều kiện biên có dạng

$$X(0) = 0 \rightarrow A^* = 0; \quad X(l) = 0 \rightarrow \sin \frac{\omega}{c} l = 0$$

Từ đó ta có các tần số riêng và các hàm riêng

$$\omega_k = k \frac{\pi c}{l} = k\pi \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \quad X_k(x) = B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (2.11)$$

Đối với thanh hai đầu tự do (hình 4.6c), các điều kiện biên có dạng

$$X'(0) = 0 \rightarrow B = 0; \quad X'(l) = 0 \rightarrow \sin \frac{\omega}{c} l = 0$$

Từ đó ta nhận được

$$\omega_k = k \frac{\pi c}{l} = k\pi \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \quad X_k(x) = A_k^* \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (2.12)$$

Như thế, từ các điều kiện biên, chúng ta xác định được các tần số riêng và các hàm riêng. Bảng 4.1 thống kê một số dạng cơ bản các điều kiện biên bài toán dao động dọc của thanh.

Thí dụ 4.2: Hãy xác định các tần số riêng và các hàm riêng của thanh một đầu bị ngàm chặt, một đầu mang khối lượng điểm m như hình 4.7a.

Lời giải: Điều kiện biên bên trái

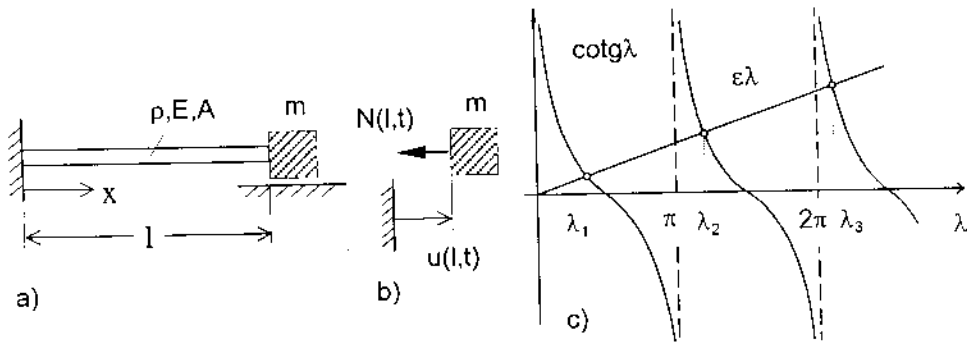
$$u(0, t) = 0 \rightarrow X(0) = 0 \rightarrow A^* = 0$$

Điều kiện biên bên phải

$$EA \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} \rightarrow EAX'(l) = m\omega^2 X(l)$$

$$\rightarrow EAB \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} l = m\omega^2 B \sin \frac{\omega}{c} l$$

$$\rightarrow \cotg \frac{\omega}{c} l = \frac{m\omega c}{EA}$$



Hình 4.7

Ta đưa vào các ký hiệu

$$\lambda = \frac{\omega l}{c}; \quad \varepsilon = \frac{m}{\rho A l}$$

và chú ý đến $c^2 = \frac{E}{\rho}$, từ phương trình trên ta suy ra

$$\cotg\lambda = \varepsilon\lambda \quad (2.13)$$

Phương trình đặc trưng (2.13) là một phương trình siêu việt. Giải phương trình này bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị (hình 4.7c), ta nhận được một tập vô hạn các giá trị riêng λ_k . Từ đó suy ra các tần số riêng và các hàm riêng

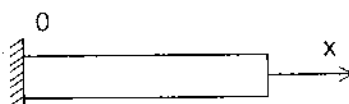
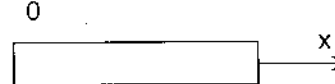
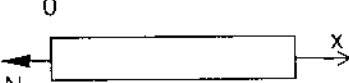
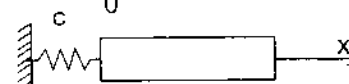
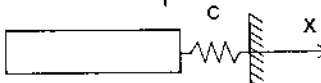
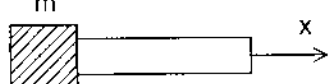
$$\omega_k = \lambda_k \frac{c}{l} = \lambda_k \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \quad k = 1, 2, \dots$$

$$X_k(x) = B_k \sin \lambda_k \frac{x}{l}$$

Nếu ta chọn $\varepsilon = 1$, thì ta có

$$\lambda_1 = 0,860 \rightarrow \omega_1 = \lambda_1 \frac{c}{l} = 0,860 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

$$\lambda_2 = 3,425 \rightarrow \omega_2 = \lambda_2 \frac{c}{l} = 3,425 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

Sơ đồ	Dạng liên kết	Điều kiện biên
	Ngàm	$u(0, t) = 0$
	Đầu tự do	$EA \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$
	Lực dọc	$EA \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = N$
	Liên kết đàn hồi tuyến tính	$EA \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = cu$
		$EA \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -cu$
	Đầu thanh gắn khối lượng	$EA \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
		$EA \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

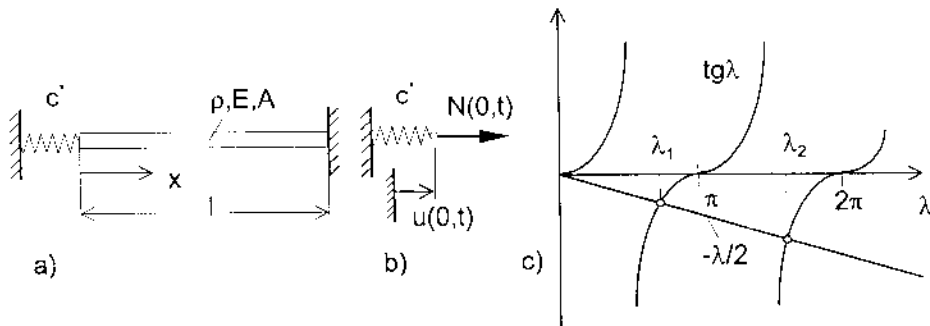
Bảng 4.1 Các điều kiện biên của một vài dạng liên kết

Thí dụ 4.3 : Một thanh thẳng bên phải bị ngàm chặt, bên trái gắn vào lò xo như hình 4.8a. Hãy xác định tần số riêng cơ bản khi $c^* = 2EA/l$.

Lời giải : Các điều kiện biên có dạng

$$EA \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = c^* u(0, t) \rightarrow EAX'(0) = c^* X(0); \quad EAB \frac{\omega}{c} = c^* A^*$$

$$u(l, t) = 0 \rightarrow X(l) = 0 : A^* \cos \frac{\omega}{c} l + B \sin \frac{\omega}{c} l = 0$$



Hình 4.8

Như thế ta nhận được hệ hai phương trình để xác định A^* và B

$$c^* A^* - EA \frac{\omega}{c} B = 0$$

$$A^* \cos \frac{\omega}{c} l + B \sin \frac{\omega}{c} l = 0$$

Điều kiện cần để A^* và B không đồng thời triệt tiêu là định thức hệ số bằng không. Từ đó ta suy ra phương trình đặc trưng

$$c^* \sin \frac{\omega}{c} l + EA \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} l = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \lambda + \frac{\lambda}{2} = 0 \quad (2.14)$$

với $\lambda = \frac{\omega l}{c}$.

Phương trình đặc trưng (2.14) là phương trình siêu việt. Ta có thể giải phương trình này bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị (hình 4.8c). Ta có tần số riêng cơ bản

$$\lambda_1 = 2,29 \rightarrow \omega_1 = \lambda_1 \frac{c}{l} = 2,29 \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

Chú ý rằng ứng với mỗi ω_k ta có một hàm riêng $X_k(x)$. Nghiệm tổng quát của phương trình (2.3) có dạng

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$$

Khi xét tới lực cản ngoài tỷ lệ bậc nhất với vận tốc $\partial u / \partial t$, phương trình vi phân dao động dọc tự do của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi (2.3) bây giờ có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.15)$$

trong đó 2δ là hệ số cản.

Áp dụng phương pháp Bernoulli khai triển theo các hàm riêng ta tìm nghiệm phương trình (2.15) dưới dạng

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) \quad (2.16)$$

Trong đó $X_k(x)$ là các hàm riêng, được xác định từ phương trình

$$\frac{d^2 X_k}{dx^2} + \left(\frac{\omega_k}{c}\right)^2 X_k = 0 \quad (2.17)$$

Thế biểu thức (2.16) vào phương trình (2.15) ta được

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t) X_k(x) + 2\delta \dot{T}_k(t) X_k(x) - c^2 T_k(t) X_k''(x)] = 0 \quad (2.18)$$

Chú ý đến (2.17) $c^2 X_k''(x) = -\omega_k^2 X_k(x)$, phương trình (2.18) có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\ddot{T}_k(t) + 2\delta \dot{T}_k(t) + \omega_k^2 T_k(t)] X_k(x) = 0$$

Do tính chất của các hàm riêng

$$\int_0^l X_j(x) X_k(x) dx = \begin{cases} = 0 & \text{ khi } k \neq j \\ \neq 0 & \text{ khi } k = j \end{cases}$$

Ta suy ra

$$\ddot{T}_k(t) + 2\delta \dot{T}_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Việc tìm nghiệm của phương trình (2.19) đã được xét kỹ trong chương 2. Khi $\delta < \omega_k$ ta có dao động tắt dần

$$T_k(t) = e^{-\delta t} (C_k \cos \omega_k^* t + D_k \sin \omega_k^* t)$$

Trong đó

$$\omega_k^* = \sqrt{\omega_k^2 - \delta^2}.$$

Biểu thức nghiệm (2.16) bây giờ có dạng

$$u(x, t) = e^{-\delta t} \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos \omega_k^* t + D_k \sin \omega_k^* t) X_k(x) \quad (2.20)$$

Các hằng số C_k, D_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Lực cản trong của thanh là lực cản chiếm ưu thế. Về thực chất loại lực này tuân theo quy luật phi tuyến. Trong phạm vi lý thuyết dao động tuyến tính, để đơn giản ta thừa nhận hệ thức

$$F_{ct} \sim \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$$

Điều đó có nghĩa quan hệ giữa ứng suất biến dạng có dạng

$$\sigma = E \left(u + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.21)$$

Khi đó phương trình dao động dọc tự do của thanh có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta_c \frac{\partial u}{\partial t} - 2\delta_l \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.22)$$

Trong đó $2\delta_c$ là hệ số cản ngoài, $2\delta_l$ là hệ số cản trong.

2.2 Dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi

Ở đoạn này ta xét bài toán dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi. Để làm thí dụ ta khảo sát dao động của thanh một đầu ngàm, một đầu tự do. Tại đầu tự do tác dụng một lực dọc thay đổi tuần hoàn theo t là $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ (hình 4.9a).

Phương trình vi phân dao động dọc của thanh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.23)$$

Các điều kiện biên bây giờ có dạng

$$u(0, t) = 0; \quad N(l, t) = EAu'(l, t) = F_0 \cos \Omega t \quad (2.24)$$

Sự khác nhau giữa bài toán này và bài toán dao động tự do là điều kiện ở biên tự do. Bài toán này được gọi là bài toán có điều kiện biên không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất bao gồm nghiệm tổng quát

của phương trình vi phân thuần nhất $u_h(x,t)$ và một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất $u_p(x,t)$

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t) \quad (2.25)$$

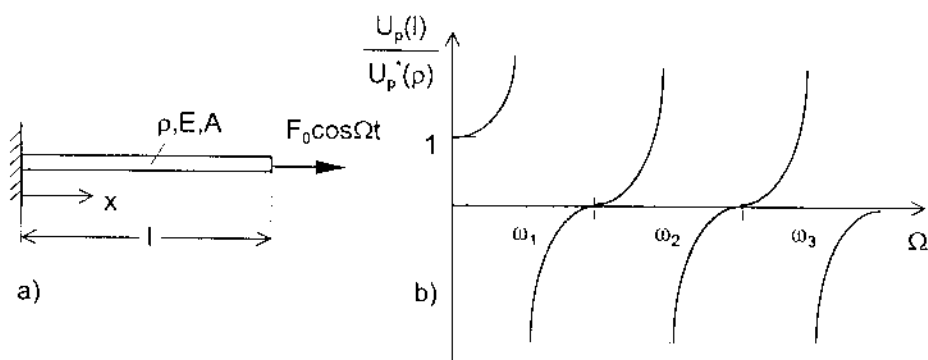
Nghiem tổng quát của bài toán tuyến tính thuần nhất có dạng

$$u_h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos \omega_k t + D_k \sin \omega_k t) X_k(x) \quad (2.26)$$

Trong đó ω_k là các tần số riêng, $X_k(x)$ là các hàm riêng.

Ta tìm nghiệm riêng bài toán tuyến tính không thuần nhất dưới dạng

$$u_p(x,t) = U_p(x) \cos \Omega t \quad (2.27)$$



Hình 4.9

Thế biểu thức (2.27) vào phương trình (2.23) ta nhận được phương trình vi phân thường

$$\frac{d^2 U_p}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} U_p = 0 \quad (2.28)$$

Nghiem tổng quát của phương trình (2.28) có dạng

$$U_p(x) = B_1 \cos \frac{\Omega}{c} x + B_2 \sin \frac{\Omega}{c} x$$

Vậy ta có
$$u_p(x,t) = \left(B_1 \cos \frac{\Omega}{c} x + B_2 \sin \frac{\Omega}{c} x \right) \cos \Omega t \quad (2.29)$$

Các hằng số B_1 và B_2 được xác định từ các điều kiện biên (2.24)

$$u_p(0, t) = 0 \quad : \quad B_1 = 0$$

$$EAu_p'(l, t) = F_0 \cos \Omega t \quad : \quad EAB_2 \frac{\Omega}{c} \cos \frac{\Omega}{c} l = F_0$$

$$\rightarrow B_2 = \frac{F_0}{EA \frac{\Omega}{c} \cos \frac{\Omega}{c} l}$$

Nghiệm riêng (2.27) bây giờ có dạng

$$u_p(x, t) = \frac{F_0 c}{EA \Omega} \frac{\sin \frac{\Omega}{c} x}{\cos \frac{\Omega}{c} l} \cos \Omega t \quad (2.30)$$

Nghiệm tổng quát (2.25) là tổng của hai nghiệm (2.26) và (2.30). Các hằng số C_k và D_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Trong các hệ kỹ thuật, thường tồn tại thành phần cản. Do đó với t đủ lớn, nghiệm của bài toán thuần nhất sẽ dẫn tới không. Ta chỉ cần quan tâm đến nghiệm riêng (2.30).

Trên hình (4.9b) biểu diễn đồ thị biên độ dao động dọc của điểm cuối thanh ($x = l$) theo tần số Ω . Trong đó ký hiệu

$$U_p(l) = \frac{F_0 l}{EA} \frac{\sin \frac{\Omega}{c} l}{\frac{\Omega}{c} l \cos \frac{\Omega}{c} l}; \quad U_p^*(l) = \frac{F_0 l}{EA}$$

Khi $\Omega \rightarrow 0$, do $\sin \frac{\Omega}{c} l \rightarrow \frac{\Omega}{c} l$, $\cos \frac{\Omega}{c} l \rightarrow 1$ nên $\frac{U_p(l)}{U_p^*(l)} \rightarrow 1$, với $U_p^*(l) = \frac{F_0 l}{EA}$ là

độ dãn tĩnh của thanh. Do phương trình đặc trưng dao động dọc tự do là $\cos \frac{\omega}{c} l = 0$, xem phương trình (2.9), nên khi $\Omega \rightarrow \omega_k$ (tần số riêng) thì biên độ

dao động cường bức tăng lên vô cùng (do $\cos \frac{\Omega}{c} l \rightarrow 0$). Vậy hiện tượng cộng

hưởng xảy ra khi $\Omega = \omega_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Chú ý rằng biểu thức nghiệm riêng (2.30) chỉ sử dụng được khi $\Omega \neq \omega_k$. Khi $\Omega \rightarrow \omega_k$, biểu thức nghiệm riêng có dạng

$$u_p(x, t) = U_p(x) t \cos \Omega t \quad (2.31)$$

Việc tìm nghiệm riêng trong trường hợp này đã được xét trong chương 2.

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi, trên thanh chịu tác dụng của lực dọc trục cường độ $p(x,t)$. Khi đó phương trình vi phân dao động dọc cưỡng bức không cản của thanh có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{p(x,t)}{\mu} \quad (2.32)$$

Áp dụng phương pháp khai triển theo các hàm riêng, ta tìm nghiệm riêng của phương trình (2.32) dưới dạng

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) X_i(x) \quad (2.33)$$

Trong đó $X_i(x)$ là các hàm riêng, được xác định từ phương trình

$$X_i''(x) + \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 X_i(x) = 0 \quad (2.34)$$

Thế biểu thức nghiệm (2.33) vào phương trình (2.32) ta có

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) X_i(x) - c^2 q_i(t) X_i''(x) \right] = \frac{1}{\mu} p(x,t)$$

Chú ý đến (2.34) phương trình trên có dạng

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) \right] X_i(x) = \frac{1}{\mu} p(x,t) \quad (2.35)$$

Nhân hai vế của phương trình (2.35) với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân theo chiều dài của thanh

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) \right] \int_0^l X_i(x) X_k(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^l p(x,t) X_k(x) dx$$

Do tính chất trực giao của các hàm riêng, từ phương trình trên ta suy ra hệ phương trình vi phân thường

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{\int_0^l p(x,t) X_k(x) dx}{\mu \int_0^l X_k^2(x) dx} = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.36)$$

Giải hệ phương trình dạng toạ độ chính(2.36) ta xác định được các hàm $q_k(t)$. Sau đó thế vào biểu thức (2.33) ta tìm được nghiệm riêng của phương trình (2.32).

2.3 Dao động dọc tự do của thanh có thiết diện thay đổi

Phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng đồng chất thiết diện biến đổi chính là phương trình (2.2)

$$\mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.37)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (2.37) dưới dạng

$$u(x, t) = X(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.38)$$

Thế biểu thức (2.38) vào phương trình (2.37) ta nhận được phương trình vi phân thường đối với $X(x)$

$$\omega^2 \mu(x) X(x) + E \frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{dX}{dx} \right] = 0 \quad (2.39)$$

Thực hiện phép đổi biến

$$x = l\xi \rightarrow X'(\xi) = \frac{dX}{d\xi} = l \frac{dX}{dx} \quad (2.40)$$

$$\text{Giả sử } A(\xi) = A_0 f(\xi) \rightarrow \mu = \rho A = \rho A_0 f(\xi) \quad (2.41)$$

Chú ý đến các hệ thức (2.40) và (2.41), phương trình (2.39) được viết gọn lại dưới dạng

$$\left[f(\xi) X' \right]' + \lambda^2 f(\xi) X = 0 \quad (2.42)$$

Trong đó ta sử dụng ký hiệu

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2 l^2}{c^2}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.43)$$

Cùng với các điều kiện biên, từ phương trình (2.42) ta có thể tìm được các hàm riêng $X_i(\xi)$ và các trị riêng λ_i ($i = 1, 2, \dots$).

Bây giờ ta xây dựng một phiếm hàm mà phương trình vi phân (2.42) là phương trình Euler của bài toán biến phân tương ứng. Phiếm hàm có dạng

$$\Phi(\xi, X, X') = \int_0^1 [f(\xi)X'^2 - \lambda^2 f(\xi)X^2] d\xi = \int_0^1 F d\xi \quad (2.44)$$

Điều kiện cần để phiếm hàm (2.44) đạt cực trị là

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial F}{\partial X'} \right) - \frac{\partial F}{\partial X} = 0$$

Ở đây ta có $\frac{\partial F}{\partial X'} = 2f(\xi)X'$, $\frac{\partial F}{\partial X} = -2\lambda^2 f(\xi)X$.

Phương trình vi phân Euler có dạng

$$[f(\xi)X']' + \lambda^2 f(\xi)X = 0.$$

Như thế ta đã chuyển bài toán tìm nghiệm phương trình vi phân (2.42) về bài toán tìm cực trị của phiếm hàm (2.44).

Bây giờ ta áp dụng phương pháp Ritz để tính các tần số riêng dao động dọc của thanh có thiết diện biến đổi. Theo phương pháp Ritz, các hàm riêng $X(\xi)$ được chọn một cách gần đúng dưới dạng

$$X(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k X_k(\xi) \quad (2.45)$$

Trong đó : a_k là các hằng số, $X_k(\xi)$ là các hàm tọa độ được chọn một cách tùy ý, miễn sao thỏa mãn các điều kiện biên hình học. Các hằng số a_k được chọn sao cho phiếm hàm

$$\Phi(\xi, X, X') = \int_0^1 f(\xi) [X'^2 - \lambda^2 X^2] d\xi \quad (2.46)$$

đạt cực trị.

Thế biểu thức (2.45) vào (2.46) ta được

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_0^1 f(\xi) \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k X'_k \right)^2 - \lambda^2 \left(\sum_{k=1}^n a_k X_k \right)^2 \right] d\xi$$

[illegible]

Thực chất của phương pháp Ritz là chuyển bài toán tìm cực trị của phiếm hàm (2.44) về bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến (2.47). Điều kiện cần để hàm $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ đạt cực trị là

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.48)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\begin{aligned}\alpha_{ik} &= \alpha_{ki} = \int_0^1 f(\xi) X_i'(\xi) X_k'(\xi) d\xi \\ \beta_{ik} &= \beta_{ki} = \int_0^1 f(\xi) X_i(\xi) X_k(\xi) d\xi\end{aligned}\quad (2.49)$$

thì từ các điều kiện (2.48) ta nhận được hệ phương trình

$$(\mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{B}) \mathbf{a} = 0 \quad (2.50)$$

Trong đó

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Để cho véc tơ $\mathbf{a}$ không đồng thời triệt tiêu, điều kiện cần là

$$|\mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{B}| = 0 \quad (2.52)$$

Giải hệ phương trình (2.52) ta xác định được các λ_k ($k=1, 2, \dots, n$). Từ công thức (2.43) ta tính được các tần số riêng

$$\omega_k^2 = \frac{c^2}{l^2} \lambda_k^2$$

Nếu ta lấy $n = 1$ thì từ phương trình (2.52) ta có

$$\alpha_{11} - \lambda^2 \beta_{11} = 0 \rightarrow \int_0^l f(\xi) X'^2 d\xi = \lambda^2 \int_0^l f(\xi) X^2 d\xi$$

$$\rightarrow \lambda^2 = \frac{\int_0^l f(\xi) X'^2 d\xi}{\int_0^l f(\xi) X^2 d\xi} \quad (2.53)$$

Trở lại biến x , công thức (2.53) có dạng

$$\omega^2 = c^2 \frac{\int_0^l A(x) X'^2(x) dx}{\int_0^l A(x) X^2(x) dx} \quad (2.54)$$

Công thức (2.54) được gọi là tỷ số Rayleigh, dùng để xác định tần số riêng thấp nhất dao động tự do của thanh thẳng.

Thí dụ 4.4 : Sử dụng tỷ số Rayleigh tìm trị riêng bé nhất của nêm hình nón như hình 4.10.

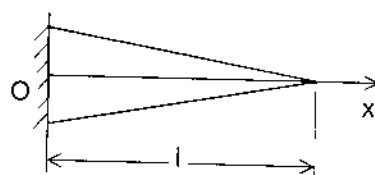
Lời giải: Phương trình thiết diện

$$A(x) = A_0 f(x)$$

$$f(\xi) = (1 - \xi)^2$$

Ta chọn hàm $X(\xi)$ dạng

$$X(\xi) = \sin \frac{\pi}{2} \xi$$



Hình 4.10

Hàm $X(\xi)$ chọn như trên, thoả mãn các điều kiện biên. Thật vậy

$$u(0, t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

$$EA \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \rightarrow X'(l) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Ta tính các tích phân ở tử số và mẫu số của hệ thức (2.53)

$$\int_0^l f(\xi) X'^2(\xi) d\xi = \frac{\pi^2}{4} \int_0^l (1 - \xi)^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} \xi d\xi = \frac{\pi^2 + 6}{24}$$

$$\int_0^1 f(\xi) X^2(\xi) d\xi = \int_0^1 (1-\xi)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} \xi d\xi = \frac{\pi^2 - 6}{6\pi^2}$$

Từ đó suy ra

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\pi^2 + 6}{\pi^2 - 6} = 1,025 \pi^2 \rightarrow \lambda = 1,0125 \pi$$

Thí dụ 4.5 : Tính hai trị riêng đầu tiên của nêm hình nón như hình 4.10.

Lời giải : Áp dụng phương pháp Ritz tính hai trị riêng đầu tiên. Ta chọn các hàm $X_1(\xi)$, $X_2(\xi)$ có dạng như sau

$$X_1(\xi) = \sin \frac{\pi \xi}{2}, \quad X_2(\xi) = \sin \frac{3\pi \xi}{2}$$

Dễ dàng kiểm tra lại các hàm $X_1(\xi)$, $X_2(\xi)$ chọn như thế thoả mãn các điều kiện biên của bài toán. Tương tự như trong thí dụ 4.4 hàm $f(\xi) = (1-\xi)^2$. Theo công thức (2.49) ta tính được

$$\alpha_{11} = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 (1-\xi)^2 \cos^2 \frac{\pi \xi}{2} d\xi = \frac{\pi^2 + 6}{24}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{3\pi^2}{4} \int_0^1 (1-\xi)^2 \cos \frac{\pi \xi}{2} \cos \frac{3\pi \xi}{2} d\xi = \frac{15}{16}$$

$$\alpha_{22} = \frac{9\pi^2}{4} \int_0^1 (1-\xi)^2 \cos^2 \frac{3\pi \xi}{2} d\xi = \frac{3\pi^2 + 2}{8}$$

$$\beta_{11} = \int_0^1 (1-\xi)^2 \sin^2 \frac{\pi \xi}{2} d\xi = \frac{\pi^2 - 6}{6\pi^2}$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \int_0^1 (1-\xi)^2 \sin \frac{\pi \xi}{2} \sin \frac{3\pi \xi}{2} d\xi = \frac{3}{4\pi^2}$$

$$\beta_{22} = \int_0^1 (1-\xi)^2 \sin^2 \frac{3\pi \xi}{2} d\xi = \frac{3\pi^2 - 2}{18\pi^2}$$

Phương trình xác định các trị riêng (2.52) có dạng

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^2 + 6}{24} - \lambda^2 \frac{\pi^2 - 6}{6\pi^2} & \frac{15}{16} - \lambda^2 \frac{3}{4\pi^2} \\ \frac{15}{16} - \lambda^2 \frac{3}{4\pi^2} & \frac{3\pi^2 + 2}{8} - \lambda^2 \frac{3\pi^2 - 2}{18\pi^2} \end{vmatrix} = 0$$

Giải ra ta được

$$\lambda_1^2 = 9,902 \rightarrow \lambda_1 = 3,147$$

$$\lambda_2^2 = 39,969 \rightarrow \lambda_2 = 6,322$$

Các trị riêng chính xác của bài toán này $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = 2\pi$. Như thế sai số khi xác định λ_1 bằng phương pháp Ritz là 0,2%, khi xác định λ_2 là 0,6%.

Việc tính toán các hệ số α_{ij} , β_{ij} khá mất thì giờ. Ta có thể sử dụng các hệ chương trình đại số computer (chẳng hạn MAPLE [18]) để tính α_{ij} , β_{ij} cũng như tính λ_1 , λ_2 khá thuận tiện.

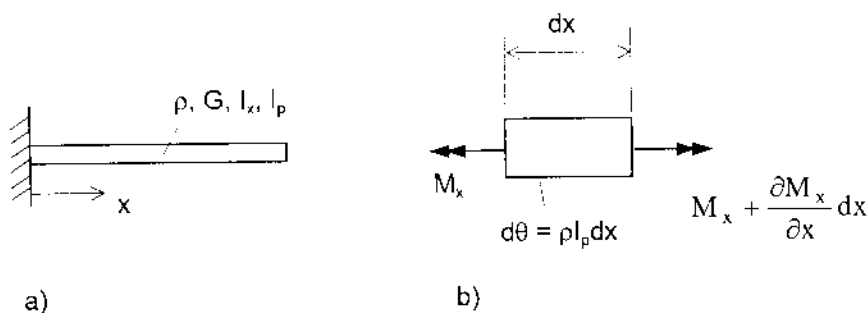
2.4 Dao động xoắn của thanh thẳng

Trước hết ta thiết lập phương trình vi phân dao động xoắn của thanh đồng chất thiết diện biến đổi (hình 4.11a). Ta tách ra xét một phần tử nhỏ như hình 4.11b. Mômen quán tính là $d\theta = \rho dx \int_A r^2 dA = \rho I_p dx$, với I_p là mômen quán tính thiết diện

cực. Áp dụng định lý mômen động lượng ta có

$$d\theta \ddot{\varphi} = -M_x + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) + q(x, t) dx \quad (2.55)$$

$$\rightarrow \rho I_p(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial M_x}{\partial x} = q(x, t)$$



Hình 4.11

Trong đó ρ là mật độ khối lượng, $q(x,t)$ là cường độ mômen ngoại lực tác dụng lên thanh. Theo định luật Hook đối với thanh xoắn [37, 49] ta có hệ thức

$$M_x = GI_d(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.56)$$

Trong đó G là môđun cắt, I_d là mômen quán tính thiết diện xoắn, $GI_d(x)$ là độ cứng chống xoắn. Đối với mặt cắt hình tròn $I_d = I_p$. Nói chung I_d khác I_p .

Thế biểu thức (2.56) vào phương trình (2.55) ta nhận được phương trình vi phân dao động xoắn của thanh thẳng thiết diện biến đổi

$$\rho I_p(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[GI_d(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = q(x,t) \quad (2.57)$$

Khi thanh có thiết diện không đổi, I_p và I_d là các hằng số. Nếu ta đưa vào các ký hiệu

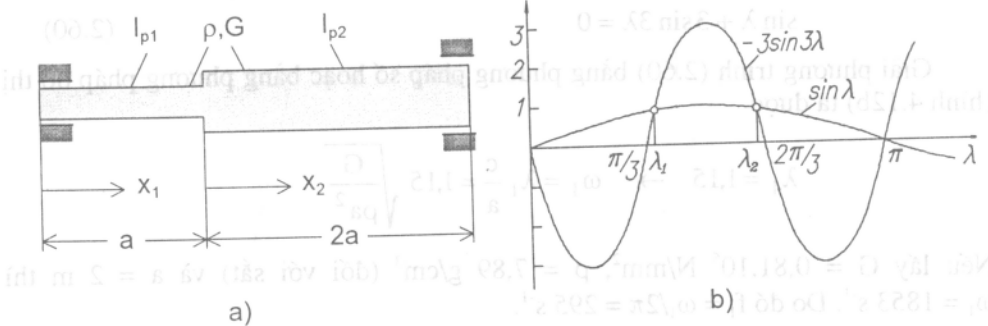
$$c^2 = \frac{GI_d}{\rho I_p}, \quad \mu = \rho I_p \quad (2.58)$$

thì từ phương trình (2.57) ta nhận được phương trình dao động xoắn của thanh có thiết diện không đổi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{q(x,t)}{\mu} \quad (2.59)$$

Phương trình dao động xoắn của thanh thẳng có dạng giống như phương trình dao động uốn của dây và phương trình dao động dọc của thanh. Cách giải phương trình này đã được trình bày chi tiết ở trên.

Thí dụ 4.6 : Trục đồng chất hình trụ tròn đặt trên hai ổ đỡ như hình 4.12. Cho biết $I_{p1}/I_{p2} = 1/2$. Hãy xác định tần số riêng cơ bản dao động xoắn của trục.



Hình 4.12

Lời giải : Ta chọn trên mỗi đoạn của trục tọa độ x_1 và x_2 như hình vẽ 4.12a. Theo cách tìm nghiệm ở trên (xem công thức 2.7) ta có

$$X_1(x_1) = A_1 \cos \frac{\omega}{c} x_1 + B_1 \sin \frac{\omega}{c} x_1$$

$$X_2(x_2) = A_2 \cos \frac{\omega}{c} x_2 + B_2 \sin \frac{\omega}{c} x_2$$

Các điều kiện biên và điều kiện chuyển tiếp có dạng

$$M_x^{(1)}(0, t) = 0 \rightarrow X_1'(0) = 0 : B_1 = 0$$

$$M_x^{(2)}(2a, t) = 0 \rightarrow X_2'(2a) = 0 : -A_2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega}{c} 2a + B_2 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} 2a = 0$$

$$\varphi_1(a, t) = \varphi_2(0, t) \rightarrow X_1(a) = X_2(0) : A_1 \cos \frac{\omega}{c} a = A_2$$

$$M_x^{(1)}(a, t) = M_x^{(2)}(0, t) \rightarrow I_{p1} X_1'(a) = I_{p2} X_2'(0) : -I_{p1} A_1 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega}{c} a = I_{p2} B_2 \frac{\omega}{c}$$

Từ ba phương trình cuối ta nhận được phương trình đặc trưng

$$\cos \lambda \sin 2\lambda + \frac{1}{2} \sin \lambda \cos 2\lambda = 0$$

Trong đó $\lambda = \frac{\omega a}{c}$.

Chú ý đến hệ thức lượng giác

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

phương trình đặc trưng có dạng

$$\sin \lambda + 3 \sin 3\lambda = 0 \quad (2.60)$$

Giải phương trình (2.60) bằng phương pháp số hoặc bằng phương pháp đồ thị (hình 4.12b) ta được

$$\lambda_1 = 1,15 \rightarrow \omega_1 = \lambda_1 \frac{c}{a} = 1,15 \sqrt{\frac{G}{\rho a^2}}$$

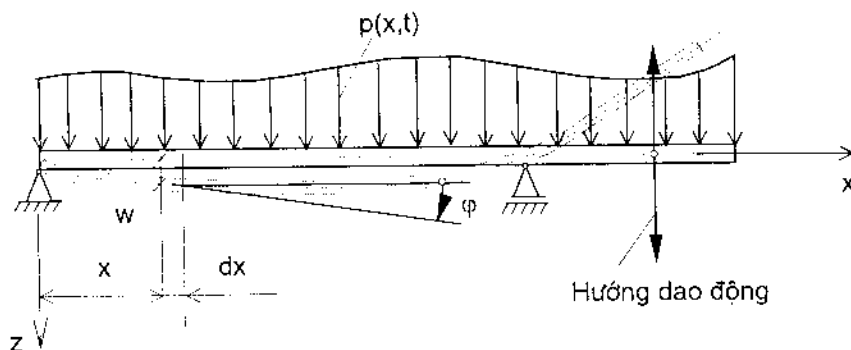
Nếu lấy $G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 7,89 \text{ g/cm}^3$ (đối với sắt) và $a = 2 \text{ m}$ thì $\omega_1 = 1853 \text{ s}^{-1}$. Do đó $f_1 = \omega_1 / 2\pi = 295 \text{ s}^{-1}$.

§3. DAO ĐỘNG UỐN CỦA DẪM

Khi nghiên cứu dao động dọc và dao động xoắn của thanh ta giả thiết chiều dài của thanh khá lớn so với các kích thước khác của thanh. Cũng như thế, khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, ta giả thiết chiều dài của dầm đủ lớn so với các kích thước khác.

Khi thiết lập phương trình vi phân mô tả dao động uốn của dầm, Rayleigh (1842-1919) là người đầu tiên đã quan tâm đến tính quán tính quay của thiết diện, còn Timoshenko (1879-1972) là người đầu tiên quan tâm đến biến dạng trượt của trục dầm. Khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, ta giả thiết rằng mặt cắt của dầm đối xứng qua hai trục. Chẳng hạn mặt cắt của dầm có dạng hình tròn, hình chữ nhật, hình chữ I. Khi mặt cắt của dầm không đối xứng qua hai trục thì dầm sẽ thực hiện dao động uốn và xoắn đồng thời. Bài toán đó ta không xét ở đây.

3.1 Thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của dầm



Hình 4.13

Giả sử các mặt cắt của dầm luôn luôn phẳng và vuông góc với trục vòng của dầm. Trục hình học của dầm khi chưa biến dạng thì thẳng. Ta lấy đường thẳng này làm trục x , còn trục z chọn vuông góc với trục x (hình 4.13). Bỏ qua dao động xoắn và dao động dọc trục. Dầm chỉ thực hiện dao động uốn theo phương z .

Khác với bài toán tĩnh, ở đây độ võng w , góc xoay φ , mômen uốn M và lực cắt Q là các hàm của tọa độ x và thời gian t

$$w(x,t); \quad \varphi(x,t); \quad M(x,t); \quad Q(x,t)$$

Như đã biết [41, 49] quan hệ giữa độ võng và góc xoay có dạng

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \approx \varphi(x,t) \quad (3.1)$$

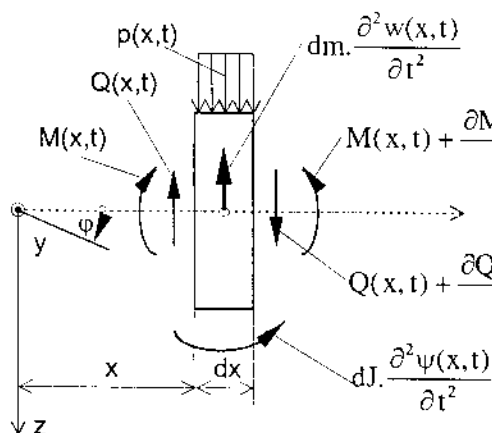
Bây giờ, để thiết lập các phương trình vi phân dao động uốn, ta tưởng tượng tách một phần tử nhỏ của dầm có chiều dài dx như hình 4.14. Trong đó góc xoay φ bằng tổng góc xoay ψ (do mômen uốn M gây nên) và góc trượt θ (do lực cắt Q gây ra)

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \theta \quad (3.2)$$

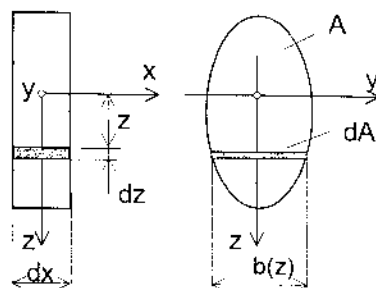
Để thiết lập các phương trình vi phân dao động uốn của dầm, ta áp dụng nguyên lý d'Alembert. Từ điều kiện cân bằng các lực theo phương z ta có

$$-dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + p(x, t)dx = 0 \quad (3.3)$$

trong đó $dm = \mu(x)dx$, với $\mu(x)$ là khối lượng một đơn vị dài của dầm.



Hình 4.14



Hình 4.15

Từ điều kiện cân bằng mômen các lực, ta nhận được phương trình

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M - Q \frac{dx}{2} - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} + dJ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

Trong đó dJ là mômen quán tính khối của phần tử đối với trục y (hình 4.15)

$$dJ = \int z^2 dm^*$$

Nếu dầm là thanh đồng chất thì do $dm^* = \rho dA dx$, ta có hệ thức

$$dJ = \rho dx \int_A z^2 dA = \rho I(x) dx$$

Trong đó $I(x) = \int_A z^2 dA$ là mômen quán tính mặt đối với trục y.

Từ các phương trình (3.3) và (3.4) ta suy ra

$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + p(x, t) \quad (3.5)$$

$$\rho I(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = Q - \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.6)$$

Từ giáo trình Sức bền vật liệu [23,37, 49] ta có các hệ thức sau

$$M = -E I(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$Q = k^* G A(x) \theta = k^* G A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (3.8)$$

Trong đó : G môđun trượt, k^* là hệ số phân bố trượt.

Như thế ta có hệ bốn phương trình vi phân với bốn hàm chưa biết là M, Q, w, ψ . Khi xây dựng các phương trình đạo hàm riêng trên, ta đã xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt và mômen quán tính quay. Lý thuyết dao động uốn của dầm dựa trên các phương trình (3.5) đến (3.8) được gọi là lý thuyết dao động uốn của dầm Timoshenko. Thế các biểu thức (3.7) và (3.8) vào các phương trình (3.5) và (3.6) ta nhận được hệ hai phương trình đạo hàm riêng cấp hai đối với độ võng $w(x,t)$ và góc xoay $\psi(x,t)$

$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k^* G \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + p(x, t) \quad (3.9)$$

$$\rho I(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = k^* G A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + E \frac{\partial}{\partial x} \left[I(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \quad (3.10)$$

Để giải hệ hai phương trình này ta cần biết các điều kiện biên và các điều kiện đầu.

Đối với dầm đồng chất thiết diện không đổi, do $A(x)$ và $I(x)$ là các hằng số, từ các phương trình vi phân cơ bản ta suy ra các phương trình đơn giản hơn. Từ các phương trình (3.9) và (3.10) ta có

$$G k^* A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, t) \quad (3.11)$$

$$-G k^* A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = E I \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.12)$$

Đạo hàm phương trình (3.12) theo x rồi cộng vào phương trình (3.11) ta được

$$0 = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, t) + E I \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial x} \quad (3.13)$$

Mặt khác từ phương trình (3.11) ta rút ra

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu}{G k^* A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{G k^* A} p(x, t)$$

Đạo hàm riêng phương trình trên theo x, rồi theo t hai lần ta được

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\mu}{G k^* A} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{1}{G k^* A} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} &= \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\mu}{G k^* A} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{G k^* A} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình (3.13) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, t) + E I \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\mu}{G k^* A} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{1}{G k^* A} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \right] \\ &\quad - \rho I \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\mu}{G k^* A} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{G k^* A} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Với chú ý $\mu = \rho A$, từ phương trình trên ta rút ra được phương trình vi phân cơ bản dao động uốn của dầm Timoshenko đồng chất thiết diện không đổi

$$\begin{aligned} E I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k^* G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k^* G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ = p(x, t) - \frac{E I}{k^* G A} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{k^* G A} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nếu thanh đủ mảnh thì có thể bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt do lực cắt. Cho $k^* G \rightarrow \infty$, từ phương trình (3.16) ta suy ra phương trình

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (3.17)$$

Trong phương trình (3.17) ta vẫn còn chú ý đến ảnh hưởng của ngẫu lực quán tính quay. Theo các nghiên cứu của Rayleigh thành phần quán tính quay (ρI) chỉ có ảnh hưởng lớn đến các tần số dao động bậc cao. Đối với các vùng tần số thấp ta có thể bỏ qua thành phần quán tính quay. Cho $\rho I \rightarrow 0$, ta nhận được phương trình vi phân dao động uốn của dầm Euler-Bernoulli

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (3.18)$$

Chú ý rằng trong trường hợp dầm Euler-Bernoulli ta có quan hệ $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$.

3.2 Dao động uốn tự do của dầm Euler-Bernoulli đồng chất thiết diện không đổi

Trước hết ta xét dao động uốn tự do của dầm đồng chất thiết diện không đổi theo mô hình Euler-Bernoulli. Từ phương trình vi phân (3.18) ta có phương trình dao động uốn tự do

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.19)$$

Áp dụng phương pháp Bernoulli, ta tìm nghiệm của phương trình (3.19) dưới dạng

$$w(x, t) = X(x) T(t) \quad (3.20)$$

Thế biểu thức (3.20) vào phương trình (3.19) ta được

$$T(t) X^{(IV)}(x) + \frac{\mu}{EI} \ddot{T}(t) X(x) = 0$$

Từ đó suy ra

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{EI}{\mu} \frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} \quad (3.21)$$

Do vế phải của phương trình (3.21) là hàm chỉ phụ thuộc vào x , còn vế trái là hàm chỉ phụ thuộc vào t , cho nên cả hai vế bằng một hằng số. Do có chủ định trước, ta gọi hằng số đó là ω^2 . Từ đó suy ra

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2 \quad \rightarrow \quad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{EI}{\mu} \frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} = \omega^2 \rightarrow X^{(IV)}(x) - \frac{\mu\omega^2}{EI} X(x) = 0 \quad (3.23)$$

Nghiệm của phương trình (3.22) có dạng

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.24)$$

Trong phạm vi bài toán xác định các tần số dao động riêng, ta phải tìm nghiệm phương trình (3.23). Để biểu diễn nghiệm một cách gọn gàng, ta đưa vào đại lượng không thứ nguyên λ

$$\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI} l^4 \quad (3.25)$$

Khi đó, phương trình (3.23) có dạng

$$X^{(IV)}(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 X(x) = 0 \quad (3.26)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.26) dưới dạng

$$X(x) = C_1 \cos\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_2 \sin\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda \frac{x}{l}\right) \quad (3.27)$$

Trong đó các hàm lượng giác $\cos x$, $\sin x$ chúng ta quen biết từ học phổ thông, các hàm hyperbol $\cosh x$, $\sinh x$ chúng ta cũng đã quen biết trong giáo trình toán cao cấp. Ở đây nhắc lại một ít về định nghĩa và các tính chất sơ cấp của các hàm hyperbol.

Theo định nghĩa

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \operatorname{tgh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cotgh} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

Đồ thị các hàm hyperbol có dạng như hình 4.16. Từ định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra

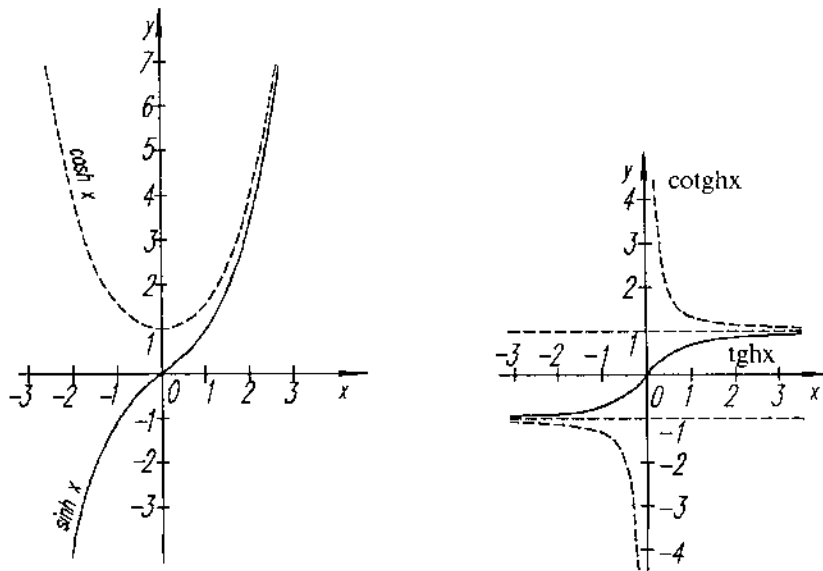
$$\sinh 0 = 0; \quad \cosh 0 = 1; \quad \operatorname{tgh} 0 = 0; \quad \operatorname{cotgh} 0 = \pm \infty$$

Các hàm $\cosh x$, $\sinh x$ tuần hoàn chu kỳ $2\pi i$ (i là đơn vị ảo)

$$\sinh(x + 2k\pi i) = \sinh(x), \quad \cosh(x + 2k\pi i) = \cosh(x),$$

còn các hàm $\operatorname{tgh} x$ và $\operatorname{cotgh} x$ tuần hoàn chu kỳ π

$$\operatorname{tgh}(x + k\pi) = \operatorname{tgh}(x), \quad \operatorname{cotgh}(x + k\pi) = \operatorname{cotgh}(x)$$



Hình 4.16

Đạo hàm các hàm $\sinh x$, $\cosh x$ có tính chất đặc biệt như sau

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x$$

Các hằng số C_1 , C_2 , C_3 , C_4 trong biểu thức (3.27) được xác định từ các điều kiện biên.

Ở đầu dầm có gối tựa bản lề, độ võng và mômen uốn đều bằng không, do đó ta có

$$X = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad (3.28a)$$

Ở đầu dầm bị ngàm chặt, độ võng và góc xoay đều bằng không, ta có

$$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0 \quad (3.28b)$$

Ở đầu dầm tự do, mômen uốn và lực cắt đều bằng không, do đó

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = 0 \quad (3.28c)$$

Ở hai đầu dầm, bao giờ cũng có bốn điều kiện biên. Từ các điều kiện biên, ta có thể xác định được các hằng số trong hệ thức (3.27). Trong quá trình đó, chúng ta sẽ nhận được phương trình đặc trưng. Giải phương trình đặc trưng ta nhận được các tần số riêng ω_j . Ứng với mỗi tần số riêng ω_j ta có một trị riêng λ_j , và theo (3.27) ta có một hàm riêng $X_j(x)$. Ta sẽ xét tính chất trực giao của các hàm riêng này. Giả sử $X_j(x)$, $X_k(x)$ là hai hàm riêng tương ứng với ω_j , ω_k . Từ phương trình (3.26) ta suy ra

$$\frac{d^4 X_j(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_j}{l} \right)^4 X_j(x)$$

$$\frac{d^4 X_k(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_k}{l} \right)^4 X_k(x)$$

Nhân phương trình thứ nhất với $X_k(x)$, phương trình thứ hai với $X_j(x)$, trừ đi nhau rồi lấy tích phân theo x , ta được

$$\frac{\lambda_j^4 - \lambda_k^4}{l^4} \int_0^l X_j(x) X_k(x) dx + \int_0^l \left(X_j(x) \frac{d^4 X_k}{dx^4} - X_k(x) \frac{d^4 X_j}{dx^4} \right) dx = 0$$

Bằng cách tích phân từng phần, ta có

$$\frac{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}{l^4} \int_0^l X_j(x) X_k(x) dx = \left(X_j \frac{d^3 X_k}{dx^3} - X_k \frac{d^3 X_j}{dx^3} + \frac{dX_k}{dx} \frac{d^2 X_j}{dx^2} - \frac{dX_j}{dx} \frac{d^2 X_k}{dx^2} \right) \bigg|_0^l$$

Chú ý đến các điều kiện biên (3.28a), (3.28b), (3.28c) ta có vế phải của phương trình trên luôn bằng không. Vậy ta có điều kiện trực giao

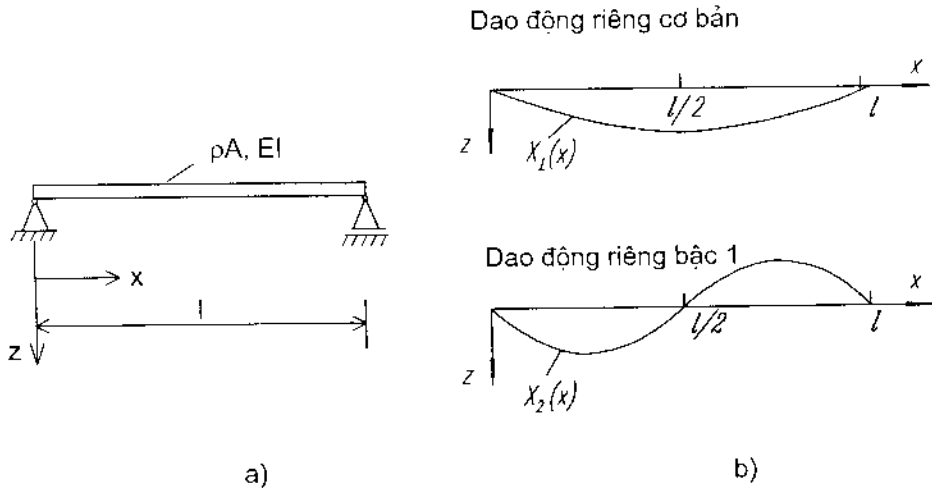
$$\int_0^l X_j(x) X_k(x) dx = 0 \quad \text{khi } j \neq k$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.19) có dạng

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \quad (3.29)$$

Các hằng số A_k, B_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Để làm thí dụ ta xét dao động uốn tự do của dầm hai đầu tựa bản lề như hình 4.17a.



Hình 4.17

Các điều kiện biên trong bài toán này là độ võng $w(x,t)$ và mômen uốn $M(x,t)$ triệt tiêu ở hai biên $x = 0$ và $x = l$

$$\begin{aligned} w(0,t) = 0, \quad M(0,t) = -EI w''(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0, \quad M(l,t) = -EI w''(l,t) = 0 \end{aligned}$$

Với các điều kiện biên này, từ biểu thức nghiệm (3.27) ta suy ra 4 phương trình để xác định các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &: C_1 + C_3 = 0 \\ X(l) = 0 &: C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0 \\ X''(0) = 0 &: -C_1 + C_3 = 0 \\ X''(l) = 0 &: -C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0 \end{aligned}$$

Từ các phương trình trên và do $\sinh \lambda \neq 0$ nên $C_1 = C_3 = C_4 = 0$. Mặt khác để cho $C_2 \neq 0$, ta có phương trình đặc trưng

$$\sin \lambda = 0$$

Giải ra ta được

$$\lambda_k = k\pi \rightarrow \omega_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.30)$$

Các hàm riêng (3.27) bây giờ có dạng

$$X_k(x) = C_2^{(k)} \sin \lambda_k \frac{x}{l} = C_2^{(k)} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.31)$$

Khi $k = 1, 2$ ta có

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad X_1(x) = C_2^{(1)} \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad X_2(x) = C_2^{(2)} \sin \frac{2\pi x}{l}$$

Các dạng dao động riêng cơ bản và dao động riêng bậc 1 vẽ trên hình 4.17b. Biểu thức nghiệm tổng quát (3.29) trong thí dụ này có dạng

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \quad (3.32)$$

trong đó ta lấy $C_2^{(k)} = 1$. Từ các điều kiện đầu

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = v_0(x)$$

ta có các biểu thức để xác định A_k và B_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} = w_0(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \omega_k \sin \frac{k\pi x}{l} = v_0(x)$$

Chú ý đến tính chất trực giao của các hàm riêng (3.27), từ các biểu thức trên ta suy ra

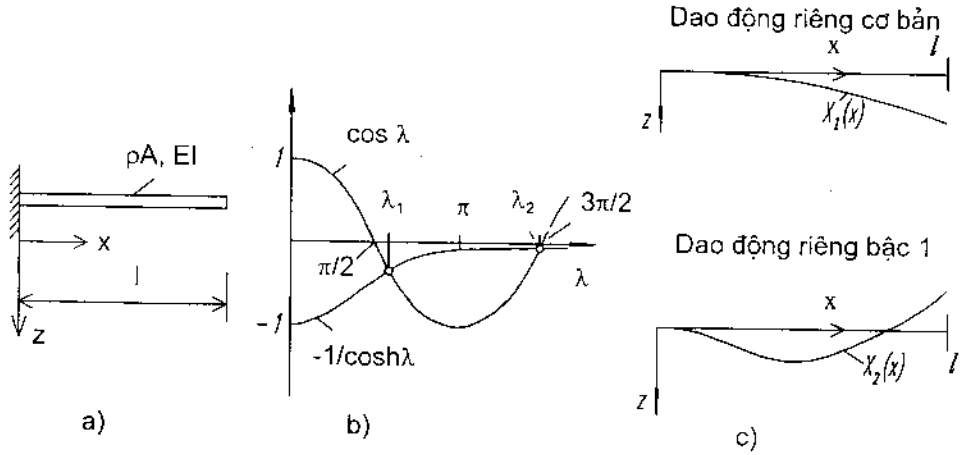
$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l w_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

$$B_k = \frac{2}{\omega_k l} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định các tần số riêng và các hàm riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do như hình 4.18a. Các điều kiện biên có dạng

$$w(0, t) = 0, \quad M(l, t) = -EI w''(l, t) = 0$$

$$w'(0, t) = 0, \quad Q(l, t) = -EI w'''(l, t) = 0$$



Hình 4.18

Với các điều kiện biên trên từ biểu thức nghiệm (3.27) ta suy ra hệ bốn phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{aligned} X(0) = 0 & : C_1 + C_3 = 0 \\ X'(0) = 0 & : C_2 + C_4 = 0 \\ X''(l) = 0 & : -C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda = 0 \\ X'''(l) = 0 & : C_1 \sin \lambda - C_2 \cos \lambda + C_3 \sinh \lambda + C_4 \cosh \lambda = 0 \end{aligned}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ bốn phương trình trên ta suy ra $C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$. Sau đó thế vào hai phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} C_1 (\cos \lambda + \cosh \lambda) + C_2 (\sin \lambda + \sinh \lambda) &= 0 \\ C_1 (\sin \lambda - \sinh \lambda) - C_2 (\cos \lambda + \cosh \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Điều kiện cần để cho C_1 , C_2 không đồng nhất triệt tiêu là định thức các hệ số phải bằng không

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \lambda + \cosh \lambda & \sin \lambda + \sinh \lambda \\ \sin \lambda - \sinh \lambda & -(\cos \lambda + \cosh \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó ta nhận được phương trình đặc trưng

$$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0 \quad (3.34)$$

Giải phương trình (3.34) bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị ta nhận được tập vô hạn nghiệm $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots$) (hình 4.18b). Khi biết được các giá trị riêng λ_i , từ công thức (3.24) ta xác định được các tần số riêng

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (3.35)$$

Ứng với mỗi trị riêng λ_i , theo (3.27) ta có một hàm riêng

$$X_i(x) = C_1^{(i)} \cos \frac{\lambda_i x}{l} + C_2^{(i)} \sin \frac{\lambda_i x}{l} + C_3^{(i)} \cosh \frac{\lambda_i x}{l} + C_4^{(i)} \sinh \frac{\lambda_i x}{l} \quad (3.36)$$

Từ hệ phương trình (3.33) ta suy ra

$$C_2^{(i)} = -\frac{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i} C_1^{(i)}$$

Do đó

$$C_4^{(i)} = -C_2^{(i)} = \frac{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i} C_1^{(i)}$$

Mặt khác, như trên đã chỉ ra $C_3^{(i)} = -C_1^{(i)}$.

Thế $C_2^{(i)}$, $C_3^{(i)}$, $C_4^{(i)}$ xác định theo $C_1^{(i)}$ vào biểu thức (3.36) ta được dạng cụ thể của hàm riêng $X_i(x)$

$$X_i(x) = C_1^{(i)} \left[\cos \frac{\lambda_i x}{l} - \cosh \frac{\lambda_i x}{l} + \frac{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i} \left(-\sin \frac{\lambda_i x}{l} + \sinh \frac{\lambda_i x}{l} \right) \right]$$

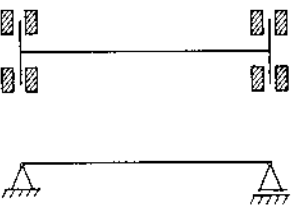
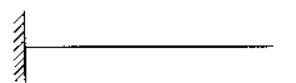
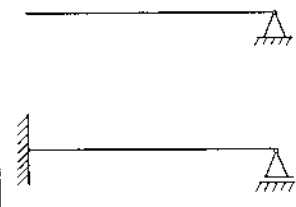
Trên hình 4.18c cho ta dạng dao động riêng cơ bản và dạng dao động riêng bậc 1.

Giải bằng số phương trình đặc trưng (3.34) ta được

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1,875 &\rightarrow \omega_1 = 3,516 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \\ \lambda_2 = 4,694 &\rightarrow \omega_2 = 22,034 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Biểu thức nghiệm tổng quát (3.29) trong trường hợp này có dạng

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (3.38)$$

$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$	Phương trình đặc trưng	k	λ_k
	$\cos \lambda \cosh \lambda - 1 = 0$	1 2 3 n	4,730 7,853 10,996 $\approx (2n+1) \pi/2$
	$\sin \lambda = 0$	1 2 3 n	π 2π 3π $n\pi$
	$\cos \lambda \cosh \lambda + 1 = 0$	1 2 3 n	1,875 4,694 7,855 $\approx (2n-1) \pi/2$
	$\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tgh} \lambda = 0$	1 2 3 n	3,927 7,069 10,210 $\approx (4n+1) \pi/4$

Bảng 4.2 Các phương trình đặc trưng và các trị riêng của một số dầm

Các hằng số A_i , B_i được xác định từ các điều kiện đầu

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$$

Như thế, ta có

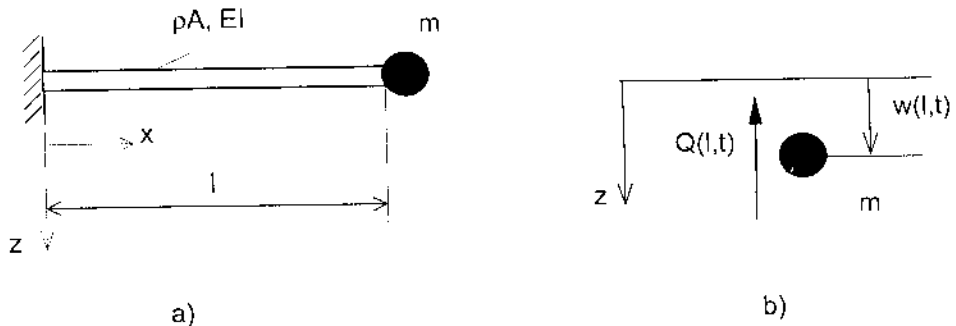
$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) A_i = w_0(x), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i X_i(x) B_i = v_0(x)$$

Nhân hai vế của các phương trình trên với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân theo x từ 0 đến l . Chú ý đến tính chất trực giao của các hàm riêng, ta được

$$A_k = \frac{\int_0^l w_0(x) X_k(x) dx}{\int_0^l X_k^2(x) dx}; \quad B_k = \frac{\int_0^l v_0(x) X_k(x) dx}{\omega_k \int_0^l X_k^2(x) dx}$$

Tiến hành tính toán tương tự, ta xác định được các phương trình đặc trưng, các tần số riêng và các hàm riêng của bài toán dao động uốn tự do của dầm với các điều kiện biên khác nhau. Bảng 4.2 cho ta biết phương trình đặc trưng, các trị riêng của một số mô hình dao động uốn của dầm hay gập.

Thí dụ 4.7 : Cho dầm đồng chất, thiết diện không đổi, đầu bên trái ngàm chặt, đầu bên phải tự do mang khối lượng m . Cho biết $\varepsilon = m/\rho l = 3/4$. Hãy xác định các tần số riêng cơ bản và các tần số riêng bậc 1 (hình 4.19).



Hình 4.19

Lời giải : Cũng giống như trường hợp dầm bị ngàm chặt một đầu, một đầu tự do ở trên, ta có ba điều kiện biên

$$w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0, \quad M(l, t) = -EI w''(l, t) = 0$$

Để tìm điều kiện biên thứ tư, ta tưởng tượng tách khối lượng m khỏi dầm (hình 4.19b). từ định luật Newton II đối với khối lượng m ta có

$$m\ddot{w}(l, t) = -Q(l, t) \rightarrow EI w'''(l, t) - m\ddot{w}(l, t) = 0$$

Với các điều kiện biên trên, từ biểu thức nghiệm (3.20), (3.24), (3.27) ta có

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 &= 0 \\ C_2 + C_4 &= 0 \\ -C_1 \cos \lambda - C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda &= 0 \\ C_1 \sin \lambda - C_2 \cos \lambda + C_3 \sinh \lambda + C_4 \cosh \lambda \\ + \varepsilon \lambda (C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + C_3 \cosh \lambda + C_4 \sinh \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Từ hai phương trình đầu ta suy ra $C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$. Thế vào hai phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} -C_1 (\cos \lambda + \cosh \lambda) - C_2 (\sin \lambda + \sinh \lambda) &= 0 \\ C_1 (\sin \lambda + \varepsilon \lambda \cos \lambda - \sinh \lambda - \varepsilon \lambda \cosh \lambda) \\ -C_2 (\cos \lambda - \varepsilon \lambda \sin \lambda + \cosh \lambda + \varepsilon \lambda \sinh \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Từ điều kiện cần để cho C_1 , C_2 không đồng nhất triệt tiêu, ta nhận được phương trình đặc trưng

$$1 + \cosh \lambda \cos \lambda + \varepsilon \lambda (\sinh \lambda \cos \lambda - \cosh \lambda \sin \lambda) = 0 \quad (3.39)$$

Khi $\varepsilon = 3/4$, giải phương trình trên bằng phương pháp số ta có

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1,320 \rightarrow \omega_1 &= 1,742 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \\ \lambda_2 = 4,060 \rightarrow \omega_2 &= 16,48 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

So sánh với kết quả (3.37) về các tần số riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do ta thấy với khối lượng phụ m hai tần số riêng đầu tiên giảm đáng kể.

3.3 Dao động uốn cưỡng bức của dầm Euler-Bernoulli đồng chất thiết diện không đổi

Đoạn này ta xét bài toán dao động uốn cưỡng bức dầm đồng chất thiết diện không đổi theo mô hình Euler-Bernoulli, chịu tác dụng của ngoại lực theo phương vuông góc với trục của dầm. Phương trình vi phân dao động uốn cưỡng bức của dầm Euler-Bernoulli có dạng (xem phương trình 3.18)

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (3.41)$$

a. Biến đổi phương trình đạo hàm riêng (3.41) về hệ phương trình vi phân thường

Áp dụng phương pháp Bernoulli, ta tìm nghiệm phương trình (3.41) dưới dạng

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t) \quad (3.42)$$

Trong đó $X_i(x)$ là các hàm riêng.

Thế biểu thức (3.42) vào phương trình (3.41) ta được

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[EI X_i^{(IV)}(x) q_i(t) + \mu X_i(x) \ddot{q}_i(t) \right] = p(x, t)$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) + \frac{EI}{\mu} \frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)} q_i(t) \right] X_i(x) = \frac{p(x, t)}{\mu}$$

Chú ý đến các biểu thức (3.23) ta có

$$\frac{EI}{\mu} \frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)} = \omega_i^2 \quad (3.43)$$

Thế (3.43) vào phương trình trên ta được

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) \right] X_i(x) = \frac{p(x, t)}{\mu}$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân dọc theo chiều dài của thanh

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) \right] \int_0^l X_i(x) X_k(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^l p(x, t) X_k(x) dx$$

Do điều kiện trực giao của các hàm riêng ta suy ra

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{\int_0^l p(x, t) X_k(x) dx}{\mu \int_0^l X_k^2(x) dx} = h_k(t) \quad (3.44)$$

Như thế ta đưa việc giải phương trình đạo hàm riêng (3.41) về việc giải hệ phương trình vi phân thường (3.44). Dưới đây ta xét một số dạng cụ thể của hàm kích động $p(x,t)$.

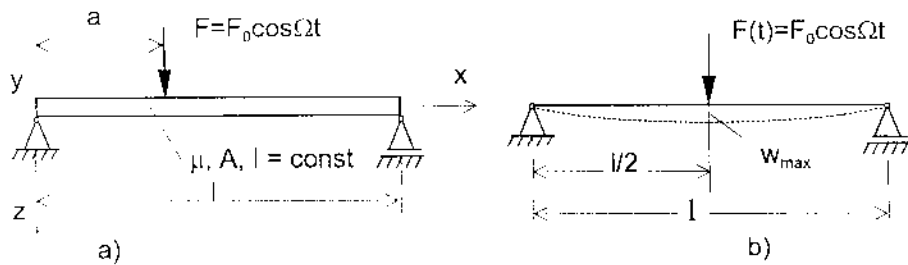
b. Lực kích động tập trung điều hoà

Xét dao động uốn của dầm chịu lực kích động tập trung điều hoà $F_0 \cos \Omega t$ như hình 4.20a. Theo công thức (3.31) hàm riêng $X_k(x)$ có dạng

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Trước hết ta tính tích phân

$$\int_0^l X_k^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{k\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{k\pi x}{l} \right) - \frac{1}{4} \sin \left(2 \cdot \frac{k\pi x}{l} \right) \right] \Bigg|_0^l = \frac{l}{2}$$



Hình 4.20

Để tính tích phân $\int_0^l p(x,t) X_k(x) dx$ trong trường hợp này ta sử dụng khái niệm hàm

Delta-Dirac. Theo định nghĩa hàm Delta-Dirac được xác định bởi hệ thức

$$\delta(x-a) = 0 \text{ khi } x \neq a \quad \text{và} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) dx = 1 \quad (3.45)$$

Hàm này có tính chất

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (3.46)$$

Áp dụng vào bài toán của ta. Từ biểu thức

$$p(x,t) = F_0 \cos \Omega t \delta(x-a)$$

ta suy ra

$$\begin{aligned} \int_0^l F_0 \cos \Omega t \delta(x-a) X_k(x) dx &= F_0 \cos \Omega t \int_0^l X_k(x) \delta(x-a) dx \\ &= F_0 \cos \Omega t \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \delta(x-a) dx = F_0 \cos \Omega t \sin \frac{k\pi a}{l} \end{aligned}$$

Phương trình (3.44) bây giờ có dạng

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{F_0 \cos \Omega t \sin \frac{k\pi a}{l}}{\mu \frac{l}{2}} = \frac{2F_0 \sin \frac{k\pi a}{l}}{\mu l} \cos \Omega t \quad (3.47)$$

Nghiệm dừng của phương trình (3.47) theo chương 2 có dạng

$$q_k(t) = \frac{2F_0 \sin \frac{k\pi a}{l}}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t \quad (3.48)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.41) trong trường hợp này có dạng

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) q_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2F_0 \sin \frac{k\pi a}{l}}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega^2)} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \Omega t \\ w(x, t) &= \frac{2F_0 \cos \Omega t}{\mu l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a}{l}}{\omega_k^2 - \Omega^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Công thức (3.49) là biểu thức tính độ võng ở vị trí x bất kỳ của dầm tại thời điểm t .

Khi $a = l/2$, ta có

$$w(x, t) = \frac{2F_0 \cos \Omega t}{\mu l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{\omega_k^2 - \Omega^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.50)$$

Chú ý rằng

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\eta = k^2 \frac{\Omega}{\omega_k} = \frac{\Omega l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu}{EI}}$$

thì công thức nghiệm (3.49) có dạng

$$w(x, t) = \frac{2F_0 l^3 \cos \Omega t}{\pi^4 EI} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi a}{l}}{k^4 - \eta^2} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Để minh hoạ ta lấy $a = \frac{l}{2}$ và $\eta = \frac{\Omega l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\mu}{EI}} = 0,7$. Khi đó ta có thể tính độ võng ở giữa dầm một cách tương đối đơn giản (hình 4.20b)

$$w\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{2F_0 l^3 \cos \Omega t}{\pi^4 EI} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k^4 - 0,49}$$

Chú ý rằng

$$\sum_{k=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{k^4 - 0,49} = \frac{1}{0,51} + \frac{1}{80,51} + \frac{1}{624,51} + \frac{1}{1295,51} + \dots \approx 1,975$$

Do đó

$$w\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{F_0 l^3}{24,65 EI} \cos \Omega t$$

Biên độ dao động ở giữa dầm là

$$w_{\max} = \frac{F_0 l^3}{24,65 EI}$$

Nếu dầm chịu tác dụng của lực $F(t) = F_0 = \text{const}$ ở giữa dầm, theo Sức bền vật liệu [37,49] độ võng tĩnh ở giữa dầm là

$$w_1 = \frac{F_0 l^3}{48 EI}$$

Như thế độ võng động cực đại ở giữa dầm lớn gần gấp đôi độ võng tĩnh tại đó. Ngoài ra chú ý rằng khi

$$\eta = k^2 \rightarrow \Omega = \omega_k$$

thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng. Do có lực cản và do liên kết hình học nên biên độ dao động ở vùng cộng hưởng tăng lên khá lớn, tuy nhiên không tiến tới vô cùng như khi giả thiết bỏ qua lực cản.

c. Lực di động có trị số không đổi

Xét bài toán dao động uốn của dầm hai đầu bản lề dưới tác dụng của lực $F_0 = \text{const}$ di chuyển với tốc độ v không đổi (hình 4.21).

Ta đã biết các hàm riêng của dầm hai đầu chịu liên kết bản lề

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\text{Do đó} \quad \int_0^l X_k^2(x) dx = \frac{l}{2}.$$

Sử dụng hàm Delta-Dirac, tải trọng $p(x,t)$ trong bài toán này có dạng

$$p(x,t) = F_0 \delta(x - vt)$$

Do tính chất của hàm Delta-Dirac (công thức 3.46) ta có

$$\int_0^l F_0 \sin \frac{k\pi x}{l} \delta(x - vt) dx = F_0 \sin \left(\frac{k\pi v}{l} t \right)$$

Phương trình (3.44) đối với bài toán này có dạng

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sin \Omega_k t \quad (3.51)$$

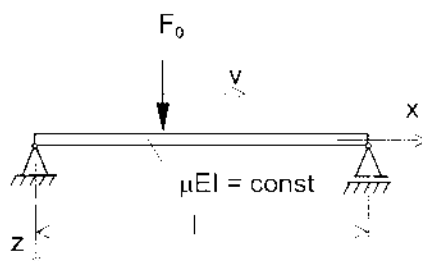
Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\Omega_k = \frac{k\pi v}{l} \quad (3.52)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.51) đã được tính toán kỹ trong chương 2 có dạng

$$q_k(t) = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t + \frac{2F_0}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \sin \Omega_k t \quad (3.53)$$

Các hằng số A_k, B_k được xác định từ các điều kiện đầu. Giả sử cho biết điều kiện đầu



Hình 4.21

$$\begin{aligned} w_0(x) = w(x, 0) &= \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(0) = 0 \\ v_0(x) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) \dot{q}_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Do tính chất trực giao của các hàm riêng, từ các điều kiện đầu (3.54) ta suy ra

$$q_k(0) = 0, \quad \dot{q}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

Với các điều kiện đầu (3.55), từ (3.53) ta dễ dàng xác định được các hằng số A_k, B_k

$$A_k = 0, \quad B_k = -\frac{2F_0\Omega_k}{\mu l \omega_k (\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \quad (3.56)$$

Thế (3.56) vào biểu thức (3.53) ta được

$$q_k(t) = -\frac{2F_0\Omega_k}{\mu l \omega_k (\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \sin \omega_k t + \frac{2F_0}{\mu l (\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \sin \Omega_k t \quad (3.57)$$

Theo công thức (3.42) biểu thức tính độ võng của dầm có dạng

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) q_k(t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} \left[\sin \Omega_k t - \frac{\Omega_k}{\omega_k} \sin \omega_k t \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.58)$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\eta_k = \frac{\Omega_k}{\omega_k} \quad (3.59)$$

thì

$$\frac{2F_0}{\mu l} \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} = \frac{2F_0}{\mu l \omega_k^2} \frac{1}{1 - \eta_k^2} = \frac{2F_0 l^3}{k^4 \pi^4 EI} \frac{1}{1 - \eta_k^2}$$

Biểu thức (3.58) bây giờ có thể viết lại dưới dạng như sau

$$w(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 (1 - \eta_k^2)} (\sin \Omega_k t - \eta_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (3.60)$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\Omega_k = \omega_k$. Chú ý đến các biểu thức (3.30) và (3.52) ta dễ dàng xác định được vận tốc tối hạn v_{kh}

$$\Omega_k = \omega_k \rightarrow v_{kth} = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (3.61)$$

Ở cùng công hưởng, độ võng của dầm sẽ đạt giá trị lớn nhất. Ta xác định độ võng của dầm khi $v = v_{th}$. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $\Omega_1 = \omega_1$. Khi đó trong tổng (3.60) ta chỉ cần giữ lại số hạng ứng với $k = 1$. Để đơn giản cách viết ta bỏ chỉ số 1 ở Ω_1 và ω_1 đi. Vậy ta có

$$w_{th}(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l} \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega} \sin \omega t}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

Ở đây biểu thức cần tính giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$. Áp dụng qui tắc Lôpital (L'Hospital) ta tính được

$$w_{th}(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l} \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \frac{t \cos \Omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t}{-2 \frac{\Omega}{\omega^2}} = \frac{F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l} (\sin \omega t - t \omega \cos \omega t)$$

Thay $\omega = \Omega = \frac{\pi}{l} v_{th}$ (biểu thức 3.52) vào biểu thức trên ta được

$$w_{th}(x, t) = \frac{F_0 l^3}{\pi^4 EI} \left[\sin \left(\frac{\pi v_{th}}{l} t \right) - \frac{\pi v_{th}}{l} t \cos \left(\frac{\pi v_{th}}{l} t \right) \right] \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3.62)$$

Tìm cực trị của hàm (3.62) theo t . Muốn vậy ta tính đạo hàm riêng theo t và cho bằng không

$$\frac{\partial w_{th}(x, t)}{\partial t} = 0 \rightarrow t = \frac{1}{v_{th}}$$

Từ đó ta có

$$w_{th \max}(x) = \frac{1}{\pi^3} \frac{F_0 l^3}{EI} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (3.63)$$

Khi $x = l/2$, độ võng cực đại ở điểm giữa dầm là

$$w_{th \max} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{1}{\pi^3} \frac{F_0 l^3}{EI} \quad (3.64)$$

Từ giáo trình Sức bền vật liệu, người ta tính được độ võng tĩnh ở điểm giữa dầm khi có lực $F_0 = \text{const}$ tác dụng ở giữa dầm là [37.49]

$$w_1 = \frac{F_0 l^3}{48 EI}$$

Như thế độ võng cực đại (3.64) lớn gần gấp rưỡi độ võng tĩnh.

Khi $v \ll v_{\text{th}}$, tức là $\eta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_1} \ll 1$, từ biểu thức (3.60) ta suy ra công thức gần

dùng xác định độ võng

$$w(x, t) \approx \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} vt\right) \quad (3.65)$$

Đó là biểu thức xác định độ võng tĩnh của dầm chịu tác dụng của lực F_0 đặt ở điểm cách xa đầu bên trái dầm một đoạn vt mà chúng ta đã biết trong giáo trình Sức bền vật liệu.

3.4 Dao động uốn tự do của dầm Timoshenko thiết diện không đổi

Từ phương trình (3.16), cho $p(x, t) = 0$, ta nhận được phương trình dao động tự do của dầm Timoshenko

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \left(1 + \frac{E}{k^* G}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k^* G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (3.66)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.66) dưới dạng

$$w(x, t) = X(x) \cos(\omega t + \beta) \quad (3.67)$$

Thế biểu thức (3.67) vào phương trình (3.66) và thực hiện một vài phép biến đổi sơ cấp ta nhận được phương trình vi phân thường

$$\frac{d^4 X}{dx^4} + \gamma^4 i^2 (1 + \alpha) \frac{d^2 X}{dx^2} - \gamma^4 (1 - \gamma^4 i^4 \alpha) X = 0 \quad (3.68)$$

Trong đó ta đưa vào các ký hiệu

$$\gamma^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI}, \quad i^2 = \frac{I}{A}, \quad \alpha = -\frac{E}{k^* G} \quad (3.69)$$

Xét trường hợp dầm hai đầu có liên kết bản lề (hình 4.17a). Khi đó ta tìm nghiệm của phương trình (3.68) thỏa mãn các điều kiện biên dưới dạng

$$X_k(x) = B_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

Thế biểu thức (3.70) vào phương trình (3.68) ta nhận được phương trình đặc trưng để xác định γ

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - \gamma^4 i^2 (1 + \alpha) \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \gamma^4 (1 - \gamma^4 i^4 \alpha) = 0 \quad (3.71)$$

Phương trình (3.71) là phương trình bậc hai đối với hàm γ^4 . Giải ra ta được

$$\begin{aligned} \gamma_{kl,k2}^4 &= \omega_{kl,k2}^2 \frac{\rho A}{EI} \\ &= \frac{1}{2i^4 \alpha} \left[1 + (1 + \alpha) \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 \pm \sqrt{1 + 2(1 + \alpha) \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 + (1 - \alpha)^2 \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^4} \right] \end{aligned} \quad (3.72)$$

Khác với lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, ở đây ứng với mỗi giá trị của k ta có hai trị riêng khác nhau $\gamma_{k1} > \gamma_{k2}$. Như thế ứng với mỗi hàm riêng $X_k(x)$ ta có hai tần số riêng $\omega_{k1} > \omega_{k2}$. Sở dĩ có hiện tượng đó là vì trong lý thuyết dầm Euler-Bernoulli độ võng w và góc xoay φ có liên quan với nhau $w' = \varphi$, còn trong lý thuyết dầm Timoshenko chúng là hai đại lượng độc lập với nhau.

Về mặt kỹ thuật người ta ít quan tâm đến các tần số cao (ứng với dấu cộng trước căn trong (3.72)). Ta xét trường hợp ứng với dấu trừ trước căn. Trong trường hợp $k\pi/l \ll 1$, áp dụng khai triển

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots \quad \text{với } |x| \leq 1$$

ta có công thức gần đúng với căn thức trong (3.72)

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2(1 + \alpha) \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 + (1 - \alpha)^2 \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^4} &= 1 + (1 + \alpha) \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 \\ &- 2\alpha \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^4 \left[1 - 2(1 + \alpha) \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Từ đó ta nhận được biểu thức gần đúng xác định các tần số riêng

$$\omega_k = k^2 \pi^2 \left[1 - (1 + \alpha) \left(\frac{k\pi i}{l}\right)^2 \right] \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \quad (3.73)$$

Chú ý rằng, tần số riêng của dầm Euler-Bernoulli được xác định bởi công thức (3.30)

$$\omega_k = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \quad (3.74)$$

Như thế số hạng thứ hai trong dấu ngoặc vuông của công thức (3.73) thể hiện sự khác nhau giữa các tần số riêng tính theo lý thuyết Timoshenko và lý thuyết Euler-Bernoulli. Độ lớn của số hạng này phụ thuộc vào độ mảnh $\lambda = l/i$ của dầm, vào chỉ số k và vào hệ số $1 + \alpha$. Đối với dầm có thiết diện hình chữ nhật, chiều cao h , nếu $k^* = 5/6$, $E/G = 8/3$ thì số hạng $(1 + \alpha)(k\pi i / l)^2$ sẽ bằng $3,45(kh / l)^2$. Nếu $l/h = 10$ thì độ chênh lệch tần số riêng cơ bản ($k = 1$) giữa lý thuyết Timoshenko và lý thuyết Euler-Bernoulli là 3%, độ chênh lệch tần số riêng bậc 1 ($k = 2$) là 14%. Qua kinh nghiệm người ta thấy khi $l/k > 5h$ thì các kết quả tính toán theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli khá tốt. Ta sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko khi tỷ số l/k lớn hơn hoặc xấp xỉ bằng h [23,25].

3.5 Dao động uốn tự do của dầm Euler-Bernoulli có thiết diện thay đổi

Đối với dầm có thiết diện biến đổi việc tìm chính xác các tần số dao động riêng là bài toán khá cồng kềnh, phức tạp. Vì vậy người ta thường hay sử dụng các phương pháp gần đúng để xác định chúng. Dưới đây chúng ta trình bày một vài phương pháp gần đúng thông dụng để tính các tần số riêng của dầm Euler-Bernoulli.

a. Phương pháp Rayleigh

Trong số các phương pháp gần đúng xác định tần số riêng, phương pháp năng lượng Rayleigh là phương pháp tương đối đơn giản và thuận tiện. Trong các hệ bảo toàn người ta có hệ thức

$$T_{\max} = \Pi_{\max} \quad (3.75)$$

Biểu thức thế năng biến dạng của dầm [38]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.76)$$

Biểu thức động năng của dầm mà trên dầm có mang các khối lượng điểm m , ở vị trí x , có dạng [38]

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{\partial w(x_i, t)}{\partial t} \right]^2 \quad (3.77)$$

Giả sử dầm thực hiện dao động uốn không cản với tần số cơ bản ω . Khi đó nghiệm riêng tương ứng có dạng

$$w(x, t) = X(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = f(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.78)$$

Trong đó $X(x)$ là hàm riêng ứng với tần số riêng ω .

Thế (3.78) vào biểu thức (3.76) ta được

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) f''^2(x) \sin^2(\omega t + \alpha) dx$$

Từ đó suy ra

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) f''^2(x) dx \quad (3.79)$$

Mặt khác, thế (3.78) vào biểu thức (3.77) ta có

$$T = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \mu(x) f^2(x) \cos^2(\omega t + \alpha) dx + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i f^2(x_i) \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Do đó

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \left[\int_0^l \mu(x) f^2(x) dx + \sum_{i=1}^n m_i f^2(x_i) \right] \quad (3.80)$$

Thế các biểu thức (3.79), (3.80) vào hệ thức (3.75) rồi giải ra ω^2 ta nhận được công thức Rayleigh để xác định tần số riêng cơ bản dao động uốn của dầm

$$\omega_R^2 = \frac{\int_0^l EI(x) f''^2(x) dx}{\int_0^l \mu(x) f^2(x) dx + \sum_{i=1}^n m_i f^2(x_i)} \quad (3.81)$$

Trong đó : E là môđun đàn hồi, $I(x)$ - mômen quán tính mặt, $\mu(x)$ - khối lượng trên một đơn vị dài của dầm.

Đối với dầm có thiết diện biến đổi rất khó xác định chính xác các hàm riêng $X(x)$. Vì vậy độ chính xác của phương pháp Rayleigh phụ thuộc vào việc chọn dạng của hàm $f(x)$. Thông thường người ta chọn $f(x)$ là một hàm nào đó thoả mãn các điều kiện biên của bài toán. Việc chọn dạng xác định của hàm $f(x)$ tương đương với việc đưa vào các liên kết phụ để chuyển cơ hệ đã cho thành cơ hệ một bậc tự do. Những liên kết phụ đó nói chung làm tăng độ cứng của hệ. Do đó tần số riêng tính theo công thức Rayleigh thường lớn hơn giá trị chính xác của nó một ít.

Thí dụ 4.8 : Xác định tần số dao động riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do, trên dầm tự do có mang vật nặng khối lượng m (hình 4.22).

Lời giải : Ta chọn đường cong uốn của trục dao động như sau

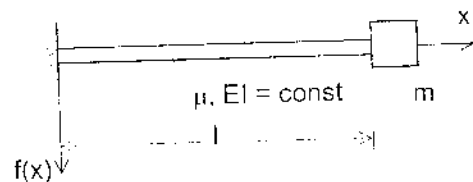
$$f(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 + a_3\left(\frac{x}{l}\right)^3 + a_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + a_1\left(\frac{x}{l}\right) + a_0$$

Trong đó các hằng số a_i được chọn sao cho $f(x)$ thoả mãn các điều kiện biên.

Các điều kiện biên có dạng

$$x = 0 : f(0) = 0, \quad f'(0) = 0$$

$$x = l : f''(l) = 0, \quad f'''(l) = 0$$



Hình 4.22

Từ các điều kiện biên trên ta dễ dàng xác định các hằng số a_i

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = -4$$

Vậy hàm $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2$$

Thế $f(x)$ vào tử số và mẫu số của công thức (3.81) ta có

$$\int_0^l EI f''^2(x) dx = EI \int_0^l \left[\frac{12}{l^2} \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^2 \right]^2 dx = \frac{144EI}{l^4} \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1 \right)^4 dx = \frac{144}{5} \frac{EI}{l^3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \mu(x) f^2(x) dx + m f^2(l) &= \mu \int_0^l \left[\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 4\left(\frac{x}{l} \right)^3 + 6\left(\frac{x}{l} \right)^2 \right]^2 dx + 9m \\ &= \mu l \frac{104}{45} + 9m = \frac{1}{45} (104\mu l + 405m) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\omega_R^2 = \frac{(144 \times 45)EI}{5l^3(104\mu l + 405m)} = \frac{1296EI}{l^3(104\mu l + 405m)}$$

Để kiểm tra độ chính xác của công thức Rayleigh, ta xét trường hợp $m = 0,75\mu l$. Khi đó

$$\omega_R^2 = \frac{1296EI}{l^3(104\mu l + 405 \cdot 0,75\mu l)} = \frac{1296}{407,75} \frac{EI}{\mu l^4} = 3,1784 \frac{EI}{\mu l^4}$$

Do đó

$$\omega_R = 1,7828 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \quad -$$

Trong thí dụ 4.7 ta tính được $\omega_1 = 1,742 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$. Vậy sai số là 2,3%.

Trường hợp $m = 0$, ta có

$$\omega_R^2 = \frac{1296}{104} \frac{EI}{\mu l^4} \approx 12,46 \frac{EI}{\mu l^4} \rightarrow \omega_R = 3,53 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Giá trị chính xác của tần số riêng cơ bản theo công thức (3.37) là

$$\omega_1^2 = 12,36 \frac{EI}{\mu l^4} \rightarrow \omega_1 = 3,516 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Vậy sai số là 0,4%.

Như vậy tần số riêng cơ bản theo công thức Rayleigh khá gần với tần số riêng tính chính xác.

b. Phương pháp Ritz

Tương tự như tính toán ở phần trên, ta có biểu thức động năng cực đại và thế năng cực đại của dầm dao động uốn như sau

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \mu(x) X^2(x) dx, \quad \Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) X''^2(x) dx,$$

trong đó $X(x)$ là hàm riêng.

Nếu ta thay gần đúng hàm riêng bằng hàm $f(x)$

$$X(x) = f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) \quad (3.82)$$

thì từ đẳng thức $T_{\max} - H_{\max} = 0$ ta suy ra

$$\int_0^1 \left[I(x) f''^2(x) - \frac{\omega^2}{E} \mu(x) f^2(x) \right] dx = \varepsilon$$

trong đó ε là một hằng số.

Theo phương pháp Ritz ta chọn các hàm $f_1(x), f_2(x), \dots$ thoả mãn các điều kiện biên, còn các hằng số $a_1, a_2, \dots$ được chọn sao cho hằng số ε là bé nhất. Như thế bài toán dẫn đến tìm các hằng số $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho phiếm hàm

$$\Phi = \int_0^1 \left[I(x) f''^2(x) - \frac{\omega^2}{E} \mu(x) f^2(x) \right] dx \quad (3.83)$$

đạt cực trị. Thế biểu thức (3.82) vào (3.83) ta được

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_0^1 \left\{ I(x) \left[\sum_{k=1}^n a_k f_k''(x) \right]^2 - \frac{\omega^2}{E} \mu(x) \left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right]^2 \right\} dx$$

Điều kiện cần để hàm $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ đạt cực trị là

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.84)$$

Chú ý đến biểu thức (3.83) hệ phương trình (3.84) có thể viết dưới dạng

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_0^1 \left[I(x) f''^2(x) - \frac{\omega^2}{E} \mu(x) f^2(x) \right] dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.85)$$

Do hàm $f(x)$ có dạng như biểu thức (3.82) nên hệ phương trình (3.85) là một hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với các ẩn $a_1, a_2, \dots, a_n$. Từ điều kiện cần để cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ không đồng nhất bằng không, ta suy ra phương trình đặc trưng để xác định các tần số riêng của hệ.

Thí dụ 4.9 : Cho dầm công xôn có bề dày $b = b_0$ không đổi, một đầu ngàm chặt, một đầu tự do (hình 4.23). Hãy xác định tần số riêng cơ bản bằng phương pháp Rayleigh và phương pháp Ritz, tần số riêng bậc một bằng phương pháp Ritz.

Lời giải : Từ hình vẽ 4.23 ta dễ dàng tính được diện tích thiết diện $A(x)$ và mômen quán tính mặt $I(x)$

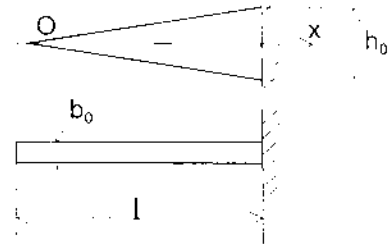
$$A(x) = bh_0 \frac{x}{l}, \quad I(x) = \frac{1}{12} bh_0^3 \left(\frac{x}{l} \right)^3$$

Các điều kiện biên có dạng

$x = 0$:

$$EI \frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 X}{dx^2} \right) = 0 \quad (3.86)$$

$$x = l : X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0 \quad (3.87)$$



Hình 4.23

Để thoả mãn các điều kiện biên ta chọn dạng đường cong uốn như sau

$$X(x) \approx f(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + \dots \quad (3.88)$$

Dễ dàng nhận thấy rằng các số hạng của chuỗi (3.88) và đạo hàm của nó đối với x bằng không khi $x = l$. Do đó các điều kiện biên (3.87) được thoả mãn. Các điều kiện biên (3.86) cũng được thoả mãn vì $I(x)$ và $dI(x)/dx$ bằng không khi $x = 0$.

Trước hết ta tính tần số riêng cơ bản dao động uốn của dầm công xôn bằng phương pháp Rayleigh. Ta lấy xấp xỉ

$$X(x) \approx f(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \quad (3.89)$$

Từ đó suy ra

$$f''(x) = \frac{2a_1}{l^2}$$

Bây giờ ta tính các tích phân ở tử số và mẫu số của công thức Rayleigh (3.81)

$$\int_0^l EI(x) f''^2(x) dx = \frac{E b h_0^3 a_1^2}{3l^7} \int_0^l x^3 dx = \frac{E b h_0^3 a_1^2}{12l^3}$$

$$\int_0^l \mu(x) f^2(x) dx = \rho b h_0 a_l^2 \int_0^l \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^4 dx = \frac{\rho b h_0 a_l^2}{l^5} \int_0^l x(x-l)^4 dx = \frac{\rho b h_0 a_l^2 l}{30}$$

$$\text{Từ đó suy ra} \quad \omega_R^2 = \frac{5Eh_0^2}{2\rho l^4} \rightarrow \omega_R = \frac{1,581 h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Người ta tính được giá trị chính xác của ω_1 là

$$\omega_1 = \frac{1.534 h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sai số của ω_k là 3% .

Để áp dụng phương pháp Ritz ta chọn

$$X(x) \approx f(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (3.90)$$

Từ đó suy ra

$$f''(x) = \frac{2}{l^2} \left[a_1 + a_2 \left(3 \frac{x}{l} - 2 \right) \right]$$

Thế vào biểu thức (3.83) ta được

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^l \left\{ \frac{1}{12} b h_0^3 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \frac{4}{l^4} \left[a_1 + a_2 \left(3 \frac{x}{l} - 2 \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega^2 \rho}{E} b h_0 \frac{x}{l} \left[a_1 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right]^2 \right\} dx \\ &= \frac{b h_0^3}{l^3} \left[a_1^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{30} \frac{l^4 \rho}{E h_0^2} \omega^2 \right) + a_2^2 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{280} \frac{l^4 \rho}{E h_0^2} \omega^2 \right) + a_1 a_2 \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{105} \frac{l^4 \rho}{E h_0^2} \omega^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Từ điều kiện

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0$$

ta nhận được hệ hai phương trình đại số tuyến tính thuần nhất

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15} \lambda \right) a_1 + \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{105} \lambda \right) a_2 &= 0 \\ \left(\frac{1}{15} - \frac{2}{105} \lambda \right) a_1 + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{140} \lambda \right) a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

với $\lambda = \frac{l^4 \rho}{E h_0^3} \omega^2$.

Từ điều kiện định thức của hệ phương trình (3.91) bằng không, ta nhận được phương trình đặc trưng

$$\lambda^3 - 27,3\lambda - 58,8 = 0.$$

Từ đó suy ra

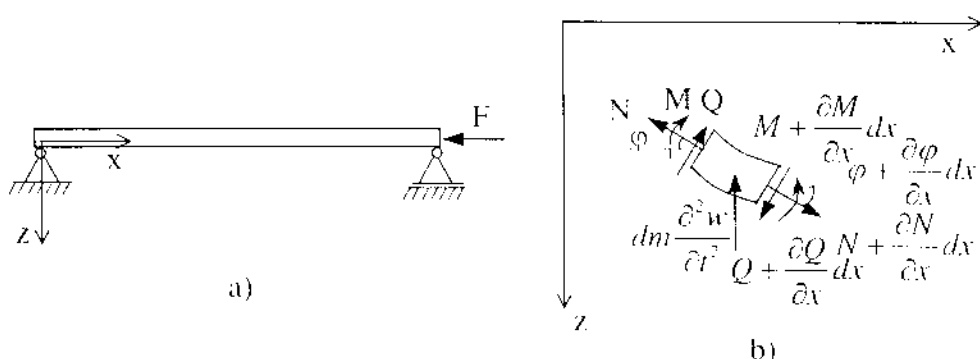
$$\omega_1 = \frac{1,536 h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \omega_2 = \frac{5,00 h_0}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Sơ với nghiệm chính xác, sai số của ω_1 là 0,13%, sai số của ω_2 là 14%. Muốn nhận được giá trị của ω_2 chính xác hơn ta cần chọn xấp xỉ (3.90) với nhiều số hạng hơn.

3.6 Một số bài toán mở rộng về dao động uốn của dầm Euler-Bernoulli

a) Dao động uốn của dầm chịu tác dụng của lực dọc

Trước hết xét bài toán dao động uốn của dầm chịu tác dụng của lực dọc $\vec{F}$. Giả thiết dầm bị lực dọc nén như hình vẽ. Cho biết độ cứng chống uốn là $EI(x)$, khối lượng trên một đơn vị dài của dầm là $\mu(x) = \rho A(x)$, $A(x)$ là diện tích mặt cắt ngang của dầm.



Hình 4.24

Xét một phần tử thanh dài dx chịu tác dụng của các lực như hình 4.24b. Để thiết lập phương trình dao động uốn của dầm ta áp dụng nguyên lý d'Alembert. Từ phương điều kiện cân bằng các lực theo phương z ta có

$$\begin{aligned} -Q \cos \varphi + (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) \cos(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) \\ -N \sin \varphi + (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) \sin(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) - \mu(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

Do φ nhỏ thay $\cos \varphi \approx 1$, $\cos(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$, $\sin(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) \approx \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ vào (3.92) ta được

$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (N\varphi) \quad (3.93)$$

Trong các tài liệu về sức bền vật liệu [23, 49] ta có các hệ thức

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [EI(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x}], \quad \varphi = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.94)$$

Thế (3.94) vào (3.93) ta được phương trình vi phân dao động uốn của dầm chịu tác dụng của lực dọc nén ở đầu dầm

$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}] - \frac{\partial}{\partial x} [N(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}] = 0 \quad (3.95)$$

Do độ võng của dầm nhỏ, ta có thể sử dụng giả thiết gần đúng lực dọc trục không thay đổi dọc theo chiều dài của dầm. Với giả thiết đó ta có $N(x, t) = -F$.

Nếu dầm là đồng chất, thiết diện không đổi và bỏ qua ngoại lực $p(x, t)$ ta có phương trình dao động uốn tự do của dầm chịu tác dụng của lực nén ở đầu dầm

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.96)$$

Áp dụng phương pháp khai triển theo các dạng riêng ta tìm nghiệm phương trình (3.96) dưới dạng

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k \frac{\pi x}{l}) T_k(t) \quad (3.97)$$

Thế biểu thức (3.97) vào phương trình (3.96) và chú ý đến tính trực giao của các hàm riêng ta được hệ các phương trình vi phân thường

$$\ddot{T}_k + \left[\left(k \frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{EI}{\mu} - \frac{F}{\mu} \left(k \frac{\pi}{l} \right)^2 \right] T_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.98)$$

Từ đó suy ra biểu thức xác định các tần số riêng

$$\omega_k = \sqrt{\left(k \frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} - \frac{F}{\mu} \left(k \frac{\pi}{l}\right)^2} \quad (3.99)$$

Nếu đưa vào ký hiệu $F_k = (k\pi)^2 \frac{EI}{l^2}$ thì biểu thức (3.99) có dạng

$$\omega_k = (k\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4} \left(1 - \frac{F}{F_k}\right)} \quad (3.100)$$

Như đã biết $F_1 = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ là lực tới hạn tĩnh [49]. Ta nêu ra một vài nhận xét từ phương trình (3.98) và (3.100). Khi lực dọc tăng trong khoảng $0 < F < F_1$ thì các tần số riêng sẽ giảm. Khi $F = F_1$ thì $\omega_1 = 0$. Khi $F > F_1$ nghiệm sẽ tăng theo luật số mũ và vị trí cân bằng của dầm sẽ không ổn định. Ta có thể sử dụng điều kiện $\omega_1 = 0$ làm tiêu chuẩn ổn định động lực đối với dầm bị uốn chịu tác dụng của lực dọc. Khi lực nén ở đầu dầm không phải là hằng số mà là hàm của thời gian $F(t) = F_0 + \hat{F} \cos(\Omega t)$, với tần số lực kích động Ω nhỏ hơn nhiều so với tần số riêng đầu tiên dao động dọc của dầm (do đó có thể bỏ ảnh hưởng dao động dọc), ta có thể thay $N(x,t) = -F(t)$. Phương trình (3.95) bây giờ có dạng

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (F_0 + \hat{F} \cos(\Omega t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.101)$$

Ta tìm nghiệm phương trình (3.101) dưới dạng

$$w_k(x,t) = \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot q_k(t) \quad (3.102)$$

Thế (3.102) vào (3.101) ta nhận được phương trình vi phân xác định $q_k(t)$

$$\mu \ddot{q}_k + \left(k \frac{\pi}{l}\right)^2 \left[F_k - F_0 - \hat{F} \cos(\Omega t)\right] q_k = 0 \quad (3.103)$$

trong đó
$$F_k = (k\pi)^2 \frac{EI}{l^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Nếu dầm đặt trên nền đàn hồi tuyến tính với hệ số cứng k và chịu tác dụng của lực dọc trục thì phương trình dao động uốn của dầm có dạng

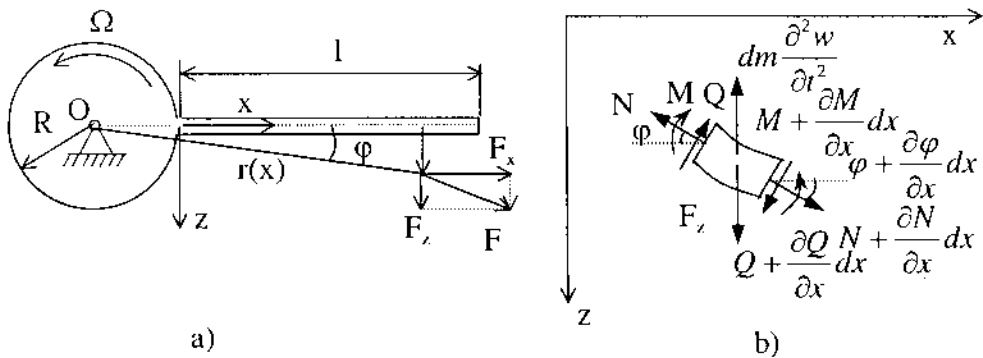
$$\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x,t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + kw = 0 \quad (3.104)$$

b) Dao động uốn tương đối của dầm gắn trên đĩa quay

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán dao động uốn tương đối của dầm quay đều. Đây là lớp bài toán hay gặp trong thực tế: Dao động uốn của cánh tua bin, dao động uốn của các cánh rôto của máy bay trực thăng. Ký hiệu chiều dài dầm là l , độ cứng chống uốn $EI = \text{const}$, khối lượng đơn vị dài của dầm $\mu = \rho A = \text{const}$. Xét dao động uốn tương đối trong mặt phẳng vuông góc với trục quay. Trục rôto quay đều với vận tốc góc Ω . Giả thiết biến dạng góc nhỏ $w'(x, l) \ll 1$. Do đó có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực quán tính Coriolis, chỉ quan tâm đến ảnh hưởng của lực quán tính theo (lực ly tâm). Xét mô hình dao động như hình 4.25.

Áp dụng nguyên lý d'Alembert, từ điều kiện cân bằng các lực theo trục z ta có

$$\begin{aligned} -\mu dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_z - Q \cos \varphi + (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) \cos(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) \\ - N \sin \varphi + (N + \frac{\partial N}{\partial x} dx) \sin(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) = 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$



Hình 4.25

Lực quán tính ly tâm của phần tử dầm dx là $F(x) = \mu dx r(x) \Omega^2$. Từ đó ta suy ra (hình 4.25a)

$$F_z(x) = F(x) \sin \varphi = \mu \Omega^2 w dx \quad (3.106)$$

Thế biểu thức (3.106) vào (3.105) và thay thế $\cos \varphi \approx 1$, $\cos(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) \approx 1$,

$\sin \varphi \approx \varphi$, $\sin(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx) \approx \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ ta được

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} [N(x,t) \frac{\partial w}{\partial x}] - \mu \Omega^2 w = 0 \quad (3.107)$$

Lực pháp tuyến $N(x,t)$ có thể tính theo đoạn dầm từ mặt cắt x đến mặt cắt l

$$N(x,t) = \int_x^l \mu(R+x)\Omega^2 dx = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 (1-x)(2R+1+x) \quad (3.108)$$

Thế (3.108) vào (3.107) ta nhận được phương trình vi phân dao động uốn tương đối của dầm quay đều

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \mu \Omega^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [(1-x)(2R+1+x)] \frac{\partial w}{\partial x} - w \right\} = 0 \quad (3.109)$$

Việc giải các phương trình vi phân dao động uốn của dầm chịu tác dụng của lực dọc trục và phương trình vi phân dao động uốn tương đối của dầm gắn trên đĩa quay đều được xét một cách chi tiết trong cuốn *Bài tập dao động kỹ thuật* [48]. Trong đó ta thấy các tần số riêng của dầm quay đều lớn hơn so với tần số riêng của dầm không quay. Hiệu ứng này được gọi là hiệu ứng gia cố độ cứng động lực.

§4. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN TRUYỀN

Để tính các tần số riêng của các dầm và hệ dầm phức tạp không rẽ nhánh ta có thể sử dụng phương pháp ma trận truyền (có tài liệu gọi là phương pháp ma trận chuyển tiếp). Ngày nay đã có nhiều hệ chương trình tính toán dao động của dầm và hệ dầm trên máy tính điện tử. Ở đây giới thiệu ý tưởng của phương pháp tìm các tần số riêng để bạn đọc có cơ sở tìm hiểu và sử dụng các hệ chương trình tính. Người ta cũng có thể sử dụng phương pháp ma trận truyền để tính dao động cưỡng bức của dầm và hệ dầm [21].

4.1 Phương trình ma trận đối với dao động uốn của dầm

Xét dao động uốn tự do của dầm đồng chất, thiết diện không đổi. Theo mục 3.2 hàm riêng $X(x)$ có dạng

$$X(x) = C_1 \cos\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_2 \sin\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda \frac{x}{l}\right) \quad (4.1)$$

trong đó

$$\lambda^4 = \frac{\mu l^4}{EI} \omega^2. \quad (4.2)$$

Ta có thể viết biểu thức (4.1) dưới dạng khác như sau

$$X(x) = A \frac{1}{2} \left[\cosh \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + \cos \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] + B \frac{1}{2} \left[\sinh \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + \sin \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] + D \frac{1}{2} \left[\cosh \left(\lambda \frac{x}{l} \right) - \cos \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] + F \frac{1}{2} \left[\sinh \left(\lambda \frac{x}{l} \right) - \sin \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] \quad (4.3)$$

Để biến đổi tiếp ta sử dụng các hàm Crulôp (hoặc còn gọi là hàm Rayleigh). Các hàm Crulôp $S_i(x)$ được xác định bởi các hệ thức sau

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \frac{1}{2} (\cosh x + \cos x) = 1 + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^8}{8!} + \dots \\ S_2(x) &= \frac{1}{2} (\sinh x + \sin x) = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \dots \\ S_3(x) &= \frac{1}{2} (\cosh x - \cos x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots \\ S_4(x) &= \frac{1}{2} (\sinh x - \sin x) = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Từ định nghĩa các hàm Crulôp (4.4) ta thấy chúng có tính chất

$$S_1(x) = S_2'(x), \quad S_2(x) = S_3'(x), \quad S_3(x) = S_4'(x), \quad S_4(x) = S_1'(x)$$

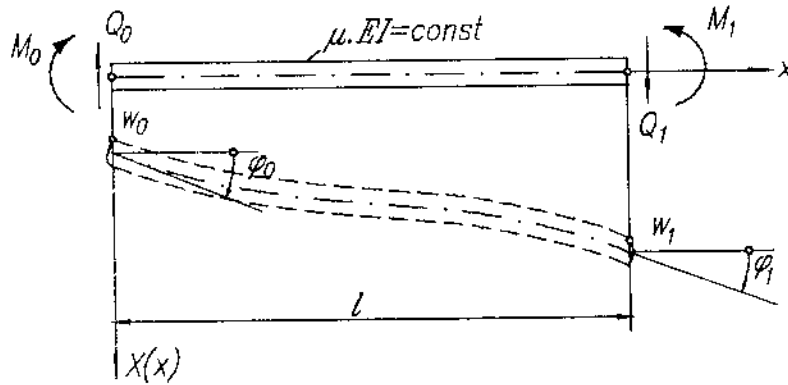
Dễ dàng tính được

$$S_1(0) = 1, \quad S_2(0) = 0, \quad S_3(0) = 0, \quad S_4(0) = 0$$

Với các hàm Crulôp, hàm riêng $X(x)$ theo (4.3) và các đạo hàm của nó theo x có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} X(x) &= AS_1 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + BS_2 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + DS_3 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + FS_4 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \\ X'(x) &= \frac{\lambda}{l} \left[AS_4 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + BS_1 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + DS_2 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + FS_3 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] \\ X''(x) &= \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \left[AS_3 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + BS_4 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + DS_1 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + FS_2 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] \\ X'''(x) &= \left(\frac{\lambda}{l} \right)^3 \left[AS_2 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + BS_3 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + DS_4 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) + FS_1 \left(\lambda \frac{x}{l} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Các hằng số A, B, D, F được xác định từ các điều kiện biên về độ võng w , góc xoay $\varphi = w'$, mômen uốn $M = -EI w''$ và lực cắt $Q = -EI w'''$ (hình 4.26).



Hình 4.26

Từ các phương trình (4.5) và hình 4.26 ta suy ra

$$\begin{aligned} X(0) = w_0 = A, \quad X'(0) = \varphi_0 = B \frac{\lambda}{1} \\ X''(0) = -\frac{M_0}{EI} = D \frac{\lambda^2}{1^2}, \quad X'''(0) = -\frac{Q_0}{EI} = F \frac{\lambda^3}{1^3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Từ (4.6) ta có

$$A = w_0, \quad B = \frac{1}{\lambda} \varphi_0, \quad D = -\frac{1^2}{\lambda^2} \frac{M_0}{EI}, \quad F = -\frac{1^3}{\lambda^3} \frac{Q_0}{EI} \quad (4.7)$$

Thế các biểu thức (4.7) vào (4.5) ta có

$$\begin{aligned} X(l) = w_1 &= S_1(\lambda)w_0 + S_2(\lambda)\frac{1}{\lambda}\varphi_0 - S_3(\lambda)\frac{1^2}{\lambda^2EI}M_0 - S_4(\lambda)\frac{1^3}{\lambda^3EI}Q_0 \\ 1X'(l) = 1\varphi_1 &= \lambda S_4(\lambda)w_0 + S_1(\lambda)1\varphi_0 - S_2(\lambda)\frac{1^2}{\lambda EI}M_0 - S_3(\lambda)\frac{1^3}{\lambda^2EI}Q_0 \\ -1^2X''(l) = \frac{1^2M_1}{EI} &= -S_3(\lambda)\lambda^2w_0 - S_4(\lambda)1\lambda\varphi_0 + S_1(\lambda)\frac{1^2}{EI}M_0 + S_2(\lambda)\frac{1^3}{\lambda EI}Q_0 \\ -1^3X'''(l) = \frac{1^3Q_1}{EI} &= -S_2(\lambda)\lambda^3w_0 - S_3(\lambda)1\lambda^2\varphi_0 + S_4(\lambda)\frac{1^2\lambda}{EI}M_0 + S_1(\lambda)\frac{1^3}{EI}Q_0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Đối với dầm gồm nhiều đoạn, người ta thường đưa vào các đại lượng để so sánh : độ dài l_0 , độ cứng chống uốn EI_0 , khối lượng đơn vị dài μ_0 . Các đại lượng so sánh này có thể chọn một cách tùy ý. Trên cơ sở các đại lượng so sánh trên ta đưa vào

các đại lượng $\bar{w}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{M}_i, \bar{Q}_i$ có cùng thứ nguyên. Chúng được xác định bởi các hệ thức sau

$$\bar{w}_i = w_i, \quad \bar{\varphi}_i = l_0 \varphi_i, \quad \bar{M}_i = \frac{l_0^2 M_i}{EI_0}, \quad \bar{Q}_i = \frac{l_0^3 Q_i}{EI_0} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

Ngoài ra ta đưa vào các đại lượng không thứ nguyên

$$\beta = \frac{l}{l_0}, \quad \alpha = \frac{EI}{EI_0}, \quad \gamma = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \bar{\lambda}^4 = \frac{\mu_0 \omega^2 l_0^4}{EI_0} \quad (4.10)$$

Do đó

$$\lambda^4 = \frac{\mu \omega^2 l^4}{EI} = \frac{\gamma \beta^4}{\alpha} \bar{\lambda}^4.$$

Từ đó ta có các hệ thức

$$\begin{aligned} l\varphi_0 &= l \frac{\bar{\varphi}_0}{l_0} = \beta \bar{\varphi}_0, & l\varphi_1 &= \beta \bar{\varphi}_1 \\ \frac{l^2}{EI} M_0 &= \frac{l^2}{EI} \frac{EI_0}{l_0^2} \bar{M}_0 = \frac{\beta^2}{\alpha} \bar{M}_0, & \frac{l^2}{EI} M_1 &= \frac{\beta^2}{\alpha} \bar{M}_1 \\ \frac{l^3}{EI} Q_0 &= \frac{l^3}{EI} \frac{EI_0}{l_0^3} \bar{Q}_0 = \frac{\beta^3}{\alpha} \bar{Q}_0, & \frac{l^3}{EI} Q_1 &= \frac{\beta^3}{\alpha} \bar{Q}_1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Chú ý đến (4.11) hệ phương trình (4.8) bây giờ có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= S_1 \bar{w}_0 + S_2 \frac{\beta}{\lambda} \bar{\varphi}_0 - S_3 \frac{\beta^2}{\lambda^2 \alpha} \bar{M}_0 - S_4 \frac{\beta^3}{\lambda^3 \alpha} \bar{Q}_0 \\ \bar{\varphi}_1 &= S_4 \frac{\lambda}{\beta} \bar{w}_0 + S_1 \bar{\varphi}_0 - S_2 \frac{\beta}{\lambda \alpha} \bar{M}_0 - S_3 \frac{\beta^2}{\lambda^2 \alpha} \bar{Q}_0 \\ \bar{M}_1 &= -S_3 \frac{\lambda^2 \alpha}{\beta^2} \bar{w}_0 - S_4 \frac{\lambda \alpha}{\beta} \bar{\varphi}_0 + S_1 \bar{M}_0 + S_2 \frac{\beta}{\lambda} \bar{Q}_0 \\ \bar{Q}_1 &= -S_2 \frac{\lambda^3 \alpha}{\beta^3} \bar{w}_0 - S_3 \frac{\lambda^2 \alpha}{\beta^2} \bar{\varphi}_0 + S_4 \frac{\lambda}{\beta} \bar{M}_0 + S_1 \bar{Q}_0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ta sắp xếp các đại lượng cùng thứ nguyên $\bar{w}_0, \bar{\varphi}_0, \bar{M}_0, \bar{Q}_0$ cũng như $\bar{w}_1, \bar{\varphi}_1, \bar{M}_1, \bar{Q}_1$ vào một véc tơ gọi là véc tơ trạng thái

$$z_0 = \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{Q}_0 \end{bmatrix}, \quad z_1 = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Hệ phương trình (4.12) được viết gọn lại dưới dạng ma trận

$$z_1 = \mathbf{U} z_0 \quad (4.14)$$

Trong đó ma trận $\mathbf{U}$ có dạng

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2\beta/\lambda & -S_3\beta^2/\alpha\lambda^2 & -S_4\beta^3/\alpha\lambda^3 \\ S_4\lambda/\beta & S_1 & -S_2\beta/\lambda\alpha & -S_3\beta^2/\alpha\lambda^2 \\ -S_1\alpha\lambda^2/\beta^2 & -S_2\alpha\lambda/\beta & S_1 & S_2\beta/\lambda \\ -S_2\alpha\lambda^3/\beta^3 & -S_3\alpha\lambda^2/\beta^2 & S_4\lambda/\beta & S_1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Ma trận $\mathbf{U}$ được gọi là ma trận truyền. Từ dạng (4.15) ta thấy $\mathbf{U}$ là ma trận đối xứng qua đường chéo phụ. Bây giờ ta đi chứng minh một tính chất quan trọng của ma trận truyền. Đó là

$$\det \mathbf{U} = 1 \quad (4.16)$$

Để viết một cách sáng sủa ta ký hiệu $\lambda/\beta = a$. Khi đó định thức của ma trận $\mathbf{U}$ có dạng

$$\det \mathbf{U} = \begin{vmatrix} S_1 & \frac{1}{a}S_2 & -\frac{1}{\alpha a^2}S_3 & -\frac{1}{\alpha a^3}S_4 \\ aS_4 & S_1 & -\frac{1}{a\alpha}S_2 & -\frac{1}{\alpha a^2}S_3 \\ -\alpha a^2S_3 & -\alpha aS_4 & S_1 & \frac{1}{a}S_2 \\ -\alpha a^3S_2 & -\alpha a^2S_3 & aS_4 & S_1 \end{vmatrix}$$

Nhân hàng thứ nhất của định thức trên với αa^3 , hàng thứ hai với αa^2 , hàng thứ ba với a . Sau đó chia cột thứ nhất cho αa^3 , cột thứ hai cho αa^2 , cột thứ ba cho a . Ta được

$$\det \mathbf{U} = \begin{vmatrix} S_1 & S_2 & -S_3 & -S_4 \\ S_4 & S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_3 & -S_4 & S_1 & S_2 \\ -S_2 & -S_3 & S_4 & S_1 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức trên theo các phần tử của hàng thứ nhất

$$\det \mathbf{U} = S_1 \begin{vmatrix} S_1 & -S_2 & -S_3 \\ -S_4 & S_1 & S_2 \\ -S_3 & S_4 & S_1 \end{vmatrix} - S_2 \begin{vmatrix} S_4 & -S_2 & -S_3 \\ -S_2 & S_1 & S_2 \\ -S_2 & S_4 & S_1 \end{vmatrix} \\ - S_3 \begin{vmatrix} S_4 & S_1 & -S_3 \\ -S_3 & -S_4 & S_2 \\ -S_2 & -S_3 & S_1 \end{vmatrix} + S_4 \begin{vmatrix} S_4 & S_1 & -S_2 \\ -S_3 & -S_4 & S_1 \\ -S_2 & -S_3 & S_4 \end{vmatrix}$$

Áp dụng quy tắc Sarrus tính các định thức cấp ba ta được

$$\det \mathbf{U} = S_1^4 - S_2^4 + S_3^4 - S_4^4 + 2(S_2^2 S_4^2 - S_1^2 S_3^2) \\ + 4(S_1 S_3 S_2^2 + S_1 S_3 S_4^2 - S_1^2 S_2 S_4 - S_3^2 S_2 S_4)$$

Chú ý rằng

$$S_1^4 - S_2^4 + S_3^4 - S_4^4 = \frac{1}{8} \cosh^4 \lambda + \frac{3}{4} \cosh^2 \lambda \cos^2 \lambda + \frac{1}{8} \cos^4 \lambda - \frac{1}{8} \sinh^4 \lambda \\ - \frac{3}{4} \sinh^2 \lambda \sin^2 \lambda - \frac{1}{8} \sin^4 \lambda$$

$$2(S_2^2 S_4^2 - S_1^2 S_3^2) = -\frac{1}{8} \cosh^4 \lambda + \frac{1}{4} \cosh^2 \lambda \cos^2 \lambda - \frac{1}{8} \cos^4 \lambda + \frac{1}{8} \sinh^4 \lambda \\ - \frac{1}{4} \sinh^2 \lambda \sin^2 \lambda + \frac{1}{8} \sin^4 \lambda$$

$$4(S_1 S_3 S_2^2 + S_1 S_3 S_4^2 - S_1^2 S_2 S_4 - S_3^2 S_2 S_4) = \cosh^2 \lambda \sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda \sinh^2 \lambda$$

Vậy

$$\det \mathbf{U} = \cosh^2 \lambda \cos^2 \lambda - \sinh^2 \lambda \sin^2 \lambda + \cosh^2 \lambda \sin^2 \lambda - \sinh^2 \lambda \cos^2 \lambda \\ = \cosh^2 \lambda - \sinh^2 \lambda = 1$$

4.2 Dầm gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có độ cứng không đổi

Đối với dầm gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có độ cứng không đổi, ta phân đoạn như hình 4.27. Mỗi đoạn được ngăn cách bởi hai tiết diện. Véc tơ trạng thái ở mỗi tiết diện gồm bốn thành phần là độ võng w , góc xoay φ , mômen uốn M và lực cắt

Q_i . Mỗi liên hệ giữa các véc tơ trạng thái ở hai đầu của một đoạn được biểu diễn bởi công thức (4.14)

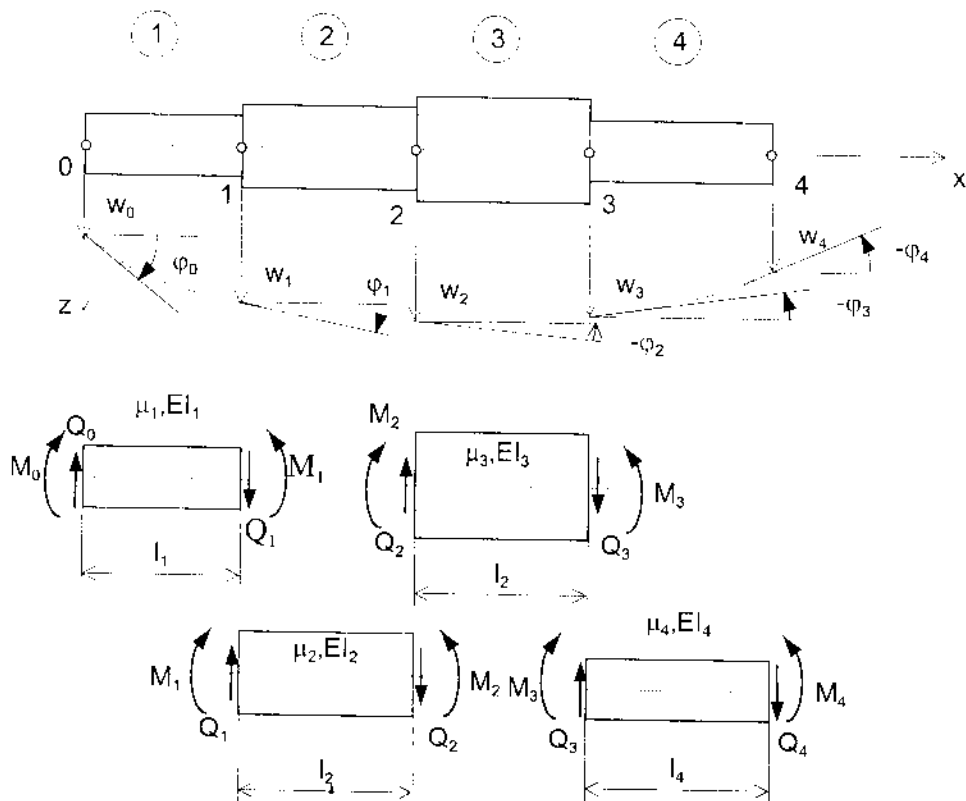
$$z_i = U_i z_{i-1} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (4.17)$$

Đối với mô hình dầm gồm bốn đoạn như hình 4.25, ta có

$$\begin{aligned} z_1 &= U_1 z_0 \\ z_2 &= U_2 z_1 = U_2 U_1 z_0 \\ z_3 &= U_3 z_2 = U_3 U_2 U_1 z_0 \\ z_4 &= U_4 z_3 = U_4 U_3 U_2 U_1 z_0 \end{aligned}$$

Một cách tổng quát, nếu dầm gồm n đoạn, mỗi đoạn có độ cứng không đổi, thì mối liên hệ giữa hai véc tơ trạng thái ở hai đầu dầm có dạng

$$z_n = U_n U_{n-1} \dots U_2 U_1 z_0 \quad (4.18)$$



Hình 4.27

Ma trận

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_{n-1} \dots \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1 \quad (4.19)$$

được gọi là ma trận truyền của toàn dầm.

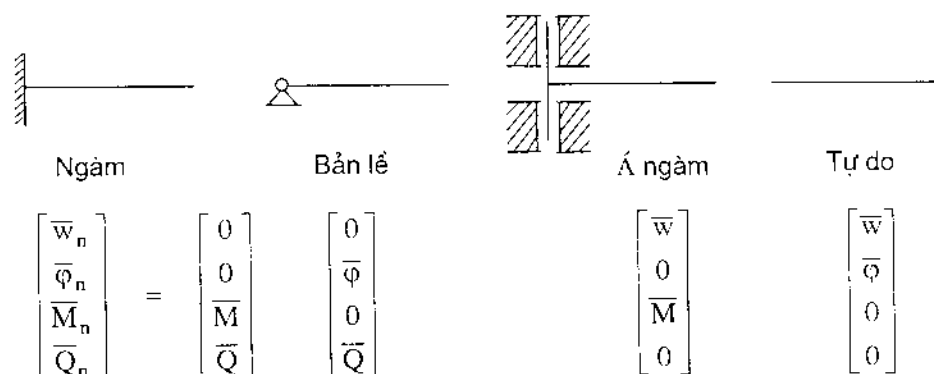
Khi đó hệ thức (4.18) có dạng

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{A} \mathbf{z}_0, \quad (4.20)$$

hay viết rõ ra

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_n \\ \bar{\varphi}_n \\ \bar{M}_n \\ \bar{Q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{Q}_0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Trong phương trình (4.21) các phần tử a_{ij} của ma trận truyền của toàn dầm được xác định từ các phần tử của các ma trận truyền của từng đoạn $\mathbf{U}_i$. Do các điều kiện biên nên trong bốn thành phần của véc tơ trạng thái $\mathbf{z}_0$ cũng như bốn thành phần của véc tơ trạng thái $\mathbf{z}_n$ có hai thành phần hoàn toàn xác định. Thí dụ như



Hình 4.28

Để làm thí dụ ta xét bài toán tìm phương trình đối với dao động uốn tự do của dầm trên hình 4.29.

Trong bài toán này phương trình (4.21) có dạng

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_n \\ \bar{Q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ 0 \\ \bar{Q}_0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Từ phương trình (4.22) ta suy ra

$$a_{12} \bar{\varphi}_0 + a_{14} \bar{Q}_0 = 0$$

$$a_{22} \bar{\varphi}_0 + a_{24} \bar{Q}_0 = 0$$

Điều kiện để cho $\bar{\varphi}_0, \bar{Q}_0$ không đồng thời triệt tiêu dẫn đến phương trình

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

Giải phương trình (4.23) ta xác định được các tần số riêng.

Thí dụ 4.10 : Tìm phương trình đặc trưng của dầm có thiết diện không đổi, đầu bên trái tựa bản lề, đầu bên phải ngàm chặt (hình 4.30).

Lời giải : Phương trình (4.14) đối với thí dụ này có dạng khá đơn giản. Nếu ta chọn $l_0 = l, EI_0 = EI$ thì α và β đều bằng 1. Do đó

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2/\lambda & -S_3/\lambda^2 & -S_4/\lambda^3 \\ \lambda S_4 & S_1 & -S_2/\lambda & -S_3/\lambda^2 \\ -\lambda^2 S_3 & -\lambda S_4 & S_1 & S_2/\lambda \\ -\lambda^3 S_2 & -\lambda^2 S_3 & \lambda S_4 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\varphi}_0 \\ 0 \\ \bar{Q}_0 \end{bmatrix}$$

Phương trình (4.23) trong thí dụ này có dạng

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda} S_2 & -\frac{1}{\lambda^3} S_4 \\ S_1 & -\frac{1}{\lambda^2} S_3 \end{vmatrix} = 0$$

Giải ra ta được

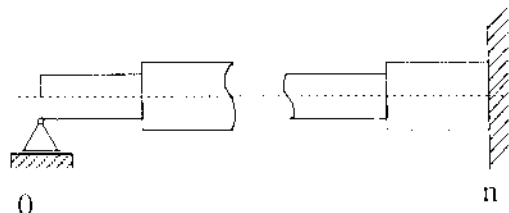
$$-S_2 S_3 + S_1 S_4 = 0$$

hay viết rõ ra

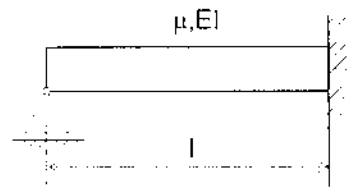
$$-(\sinh \lambda + \sin \lambda)(\cosh \lambda - \cos \lambda) + (\cosh \lambda + \cos \lambda)(\sinh \lambda - \sin \lambda) = 0$$

Từ đó ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tgh} \lambda = 0 \quad (4.24)$$



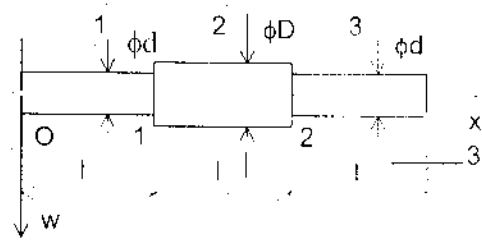
Hình 4.29



Hình 4.30

Như thế ta nhận được phương trình đặc trưng (4.24) bằng phương pháp ma trận truyền. Phương trình này có thể nhận được bằng phương pháp Bernoulli (xem bảng 4.2).

Thí dụ 4.11 : Cho dầm ba đoạn như hình vẽ 4.31. Cho biết $l = 200$ mm, các đường kính $d = 10$ mm, $D = 15$ mm, mật độ khối $\rho = 7,85 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³, môđun đàn hồi $E = 2,1 \cdot 10^4$ N/cm². Hãy xác định các ma trận truyền của từng đoạn U_i ($i=1, 2, 3$).



Hình 4.31

Trên đoạn 1 ta chọn $l_0 = l$, $I_0 = \frac{\pi d^4}{64}$, $\mu_0 = \rho \frac{\pi d^2}{4}$.

Ta có $\beta_1 = \frac{l_1}{l_0} = 1$, $\alpha_1 = \frac{EI_1}{EI_0} = 1$, $\gamma_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0} = 1$

$$\lambda_1^4 = \frac{\gamma_1 \beta_1^4}{\alpha_1} \bar{\lambda}^4 \rightarrow \lambda_1 = \bar{\lambda}$$

Với ký hiệu $\bar{\lambda}^4 = \frac{\mu_0 l_0^4}{EI_0} \omega^2 = \frac{16 \rho l^4}{E d^2} \omega^2$, ta có thể tính được U_i từ công thức (4.15)

$$U_i = \begin{bmatrix} S_1^{(1)} & \frac{1}{\lambda_1} S_2^{(1)} & -\frac{1}{\lambda_1^2} S_3^{(1)} & -\frac{1}{\lambda_1^3} S_4^{(1)} \\ \lambda_1 S_4^{(1)} & S_1^{(1)} & -\frac{1}{\lambda_1} S_2^{(1)} & -\frac{1}{\lambda_1^2} S_3^{(1)} \\ -\lambda_1^2 S_3^{(1)} & -\lambda_1 S_4^{(1)} & S_1^{(1)} & \frac{1}{\lambda_1} S_2^{(1)} \\ -\lambda_1^3 S_2^{(1)} & -\lambda_1^2 S_3^{(1)} & \lambda_1 S_4^{(1)} & S_1^{(1)} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$S_1^{(1)} = \frac{1}{2}(\cosh \lambda_1 + \cos \lambda_1), \quad S_2^{(1)} = \frac{1}{2}(\sinh \lambda_1 + \sin \lambda_1)$$

$$S_3^{(1)} = \frac{1}{2}(\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_1), \quad S_4^{(1)} = \frac{1}{2}(\sinh \lambda_1 - \sin \lambda_1)$$

Trên đoạn 2 ta có $I_2 = \frac{\pi D^4}{64}, \quad \mu_2 = \rho \frac{\pi D^2}{4}.$

Do đó

$$\beta_2 = \frac{I_2}{I_0} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{EI_2}{EI_0} = \frac{D^4}{d^4} = \frac{1,5^4}{1} = 5,0625$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} = \frac{D^2}{d^2} = \frac{1,5^2}{1} = 2,25$$

$$\lambda_2^4 = \frac{\gamma_2 \beta_2^4}{\alpha_2} \lambda^4 = \frac{2,25 \cdot 1}{5,0625} \lambda^4 = \frac{1}{2,25} \lambda^4 \rightarrow \lambda_2 = 0,8165 \bar{\lambda}$$

Từ công thức (4.15) ta suy ra

$$U_2 = \begin{bmatrix} S_1^{(2)} & \frac{1}{\lambda_2} S_2^{(2)} & -\frac{1}{5,0625 \lambda_2^2} S_3^{(2)} & -\frac{1}{5,0625 \lambda_2^3} S_4^{(2)} \\ \lambda_2 S_4^{(2)} & S_1^{(2)} & -\frac{1}{5,0625 \lambda_2} S_2^{(2)} & -\frac{1}{5,0625 \lambda_2^2} S_3^{(2)} \\ -5,0625 \lambda_2^2 S_3^{(2)} & -5,0625 \lambda_2 S_4^{(2)} & S_1^{(2)} & \frac{1}{\lambda_2} S_2^{(2)} \\ -5,0625 \lambda_2^3 S_2^{(2)} & -5,0625 \lambda_2^2 S_3^{(2)} & \lambda_2 S_4^{(2)} & S_1^{(2)} \end{bmatrix}$$

Trong đó

$$S_1^{(2)} = \frac{1}{2}(\cosh \lambda_2 + \cos \lambda_2), \quad S_2^{(2)} = \frac{1}{2}(\sinh \lambda_2 + \sin \lambda_2)$$

$$S_3^{(2)} = \frac{1}{2}(\cosh \lambda_2 - \cos \lambda_2), \quad S_4^{(2)} = \frac{1}{2}(\sinh \lambda_2 - \sin \lambda_2)$$

Các kích thước của đoạn 3 giống như đoạn 1, nên

$$U_3 = U_1$$

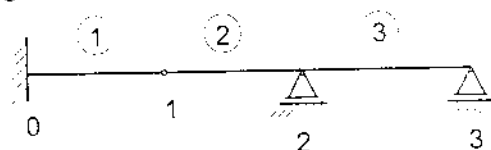
Mà trận truyền của toàn dầm là

$$A = U_1 U_2 U_1$$

4.3 Dầm có gối đỡ và khớp nối trung gian

Tìm các tần số riêng dao động uốn tự do của dầm có gối đỡ và khớp nối trung gian bằng các phương pháp cổ điển rất khó khăn. Với phương pháp ma trận truyền chúng ta có thể giải bài toán này tương đối dễ dàng.

Để thấy rõ ý tưởng của phương pháp ta xét dao động uốn của dầm có một khớp nối và một gối đỡ trung gian như hình 4.32. Ta phân dầm thành ba đoạn như hình vẽ.



Hình 4.32

Ở khớp nối 1 có bước nhảy về góc xoay nên véc tơ trạng thái ở cuối đoạn 1, ký hiệu z_1 , khác với véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 2, ký hiệu là z'_1

$$z_1 = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix}, \quad z'_1 = \begin{bmatrix} \bar{w}_1' \\ \bar{\varphi}_1' \\ \bar{M}_1' \\ \bar{Q}_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\varphi}_1 + \Delta\bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Véc tơ trạng thái ở cuối đoạn 2 và véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 3 khác nhau do lực cắt có bước nhảy tại gối đỡ trung gian 2. Ta có

$$z_2 = \begin{bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad z'_2 = \begin{bmatrix} \bar{w}_2' \\ \bar{\varphi}_2' \\ \bar{M}_2' \\ \bar{Q}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{Q}_2 + \Delta\bar{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Như thế, ở khớp nối trung gian, khớp 1, ta có thêm một ẩn mới là $\Delta\bar{\varphi}_1$, nhưng ta lại có thêm một điều kiện là $\bar{M}_1 = 0$. Ở gối đỡ trung gian, gối 2, ta có thêm một ẩn mới là $\Delta\bar{Q}_2$, nhưng ta lại có thêm một điều kiện là độ võng ở đó triệt tiêu $\bar{w}_2 = 0$. Với những nhận xét đó ta có thể áp dụng phương pháp ma trận truyền để tính tần số riêng của dầm có khớp nối và gối đỡ trung gian.

Theo công thức (4.14) ta có

$$z_1 = U_1 z_0 \quad (4.27)$$

Do các điều kiện biên

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{M}_0 & \overline{Q}_0 \end{bmatrix}^T$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} \overline{w}_1 & \overline{\varphi}_1 & 0 & \overline{Q}_1 \end{bmatrix}^T$$

nên từ phương trình (4.27) ta có

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= a_1 \overline{M}_0 + b_1 \overline{Q}_0 \\ \overline{\varphi}_1 &= a_2 \overline{M}_0 + b_2 \overline{Q}_0 \\ 0 &= a_3 \overline{M}_0 + b_3 \overline{Q}_0 \\ \overline{Q}_1 &= a_4 \overline{M}_0 + b_4 \overline{Q}_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Trong đó a_i là các phần tử của cột thứ 3, b_i là các phần tử của cột thứ 4 của ma trận U_1 xác định bởi công thức (4.15). Chú ý rằng a_i, b_i nói chung phụ thuộc vào ω^2 .

Giả sử $|b_3| > |a_3|$. Nếu ta đặt $\alpha = a_3 / b_3$ thì từ phương trình thứ ba của (4.28) suy ra

$$\overline{Q}_0 = -\alpha \overline{M}_0$$

Hệ phương trình (4.28) bây giờ có dạng

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= (a_1 - b_1 \alpha) \overline{M}_0 \\ \overline{\varphi}_1 &= (a_2 - b_2 \alpha) \overline{M}_0 \\ \overline{M}_1 &= 0 \\ \overline{Q}_1 &= (a_4 - b_4 \alpha) \overline{M}_0 \end{aligned}$$

Nếu ta ký hiệu

$$a'_1 = a_1 - b_1 \alpha, \quad a'_2 = a_2 - b_2 \alpha, \quad a'_4 = a_4 - b_4 \alpha$$

thì hệ phương trình trên có dạng

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= a'_1 \overline{M}_0, & \overline{\varphi}_1 &= a'_2 \overline{M}_0 \\ \overline{M}_1 &= 0, & \overline{Q}_1 &= a'_4 \overline{M}_0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

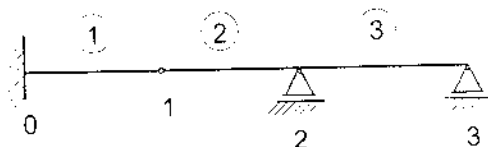
Các thành phần của véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 2, theo (4.25) có dạng

$$\begin{aligned} \overline{w}_1' &= \overline{w}_1 = a'_1 \overline{M}_0 + 0. \Delta \overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi}_1' &= \overline{\varphi}_1 + \Delta \overline{\varphi}_1 = a'_2 \overline{M}_0 + 1. \Delta \overline{\varphi}_1 \\ \overline{M}_1' &= \overline{M}_1 = 0. \overline{M}_0 + 0. \Delta \overline{\varphi}_1 \\ \overline{Q}_1' &= \overline{Q}_1 = a'_4 \overline{M}_0 + 0. \Delta \overline{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

4.3 Dầm có gối đỡ và khớp nối trung gian

Tìm các tần số riêng dao động uốn tự do của dầm có gối đỡ và khớp nối trung gian bằng các phương pháp cổ điển rất khó khăn. Với phương pháp ma trận truyền chúng ta có thể giải bài toán này tương đối dễ dàng.

Để thấy rõ ý tưởng của phương pháp ta xét dao động uốn của dầm có một khớp nối và một gối đỡ trung gian như hình 4.32. Ta phân dầm thành ba đoạn như hình vẽ.



Hình 4.32

Ở khớp nối 1 có bước nhảy về góc xoay nên véc tơ trạng thái ở cuối đoạn 1, ký hiệu z_1 , khác với véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 2, ký hiệu là z'_1 ,

$$z_1 = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix}, \quad z'_1 = \begin{bmatrix} \bar{w}_1' \\ \bar{\varphi}_1' \\ \bar{M}_1' \\ \bar{Q}_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\varphi}_1 + \Delta\bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Véc tơ trạng thái ở cuối đoạn 2 và véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 3 khác nhau do lực cắt có bước nhảy tại gối đỡ trung gian 2. Ta có

$$z_2 = \begin{bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad z'_2 = \begin{bmatrix} \bar{w}_2' \\ \bar{\varphi}_2' \\ \bar{M}_2' \\ \bar{Q}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{Q}_2 + \Delta\bar{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Như thế, ở khớp nối trung gian, khớp 1, ta có thêm một ẩn mới là $\Delta\bar{\varphi}_1$, nhưng ta lại có thêm một điều kiện là $\bar{M}_1 = 0$. Ở gối đỡ trung gian, gối 2, ta có thêm một ẩn mới là $\Delta\bar{Q}_2$, nhưng ta lại có thêm một điều kiện là độ võng ở đó triệt tiêu $\bar{w}_2 = 0$. Với những nhận xét đó ta có thể áp dụng phương pháp ma trận truyền để tính tần số riêng của dầm có khớp nối và gối đỡ trung gian.

Theo công thức (4.14) ta có

$$z_1 = U_1 z_0 \quad (4.27)$$

Do các điều kiện biên

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{M}_0 & \overline{Q}_0 \end{bmatrix}^T$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} \overline{w}_1 & \overline{\varphi}_1 & 0 & \overline{Q}_1 \end{bmatrix}^T$$

nên từ phương trình (4.27) ta có

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= a_1 \overline{M}_0 + b_1 \overline{Q}_0 \\ \overline{\varphi}_1 &= a_2 \overline{M}_0 + b_2 \overline{Q}_0 \\ 0 &= a_3 \overline{M}_0 + b_3 \overline{Q}_0 \\ \overline{Q}_1 &= a_4 \overline{M}_0 + b_4 \overline{Q}_0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Trong đó a_i là các phần tử của cột thứ 3, b_i là các phần tử của cột thứ 4 của ma trận U_1 xác định bởi công thức (4.15). Chú ý rằng a_i, b_i nói chung phụ thuộc vào ω^2 .

Giả sử $|b_3| > |a_3|$. Nếu ta đặt $\alpha = a_3 / b_3$ thì từ phương trình thứ ba của (4.28) suy ra

$$\overline{Q}_0 = -\alpha \overline{M}_0$$

Hệ phương trình (4.28) bây giờ có dạng

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= (a_1 - b_1 \alpha) \overline{M}_0 \\ \overline{\varphi}_1 &= (a_2 - b_2 \alpha) \overline{M}_0 \\ \overline{M}_1 &= 0 \\ \overline{Q}_1 &= (a_4 - b_4 \alpha) \overline{M}_0 \end{aligned}$$

Nếu ta ký hiệu

$$a'_1 = a_1 - b_1 \alpha, \quad a'_2 = a_2 - b_2 \alpha, \quad a'_4 = a_4 - b_4 \alpha$$

thì hệ phương trình trên có dạng

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= a'_1 \overline{M}_0, & \overline{\varphi}_1 &= a'_2 \overline{M}_0 \\ \overline{M}_1 &= 0, & \overline{Q}_1 &= a'_4 \overline{M}_0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Các thành phần của véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 2, theo (4.25) có dạng

$$\begin{aligned} \overline{w}_1' &= \overline{w}_1 = a'_1 \overline{M}_0 + 0 \cdot \Delta \overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi}_1' &= \overline{\varphi}_1 + \Delta \overline{\varphi}_1 = a'_2 \overline{M}_0 + 1 \cdot \Delta \overline{\varphi}_1 \\ \overline{M}_1' &= \overline{M}_1 = 0 \cdot \overline{M}_0 + 0 \cdot \Delta \overline{\varphi}_1 \\ \overline{Q}_1' &= \overline{Q}_1 = a'_4 \overline{M}_0 + 0 \cdot \Delta \overline{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Véc tơ trạng thái ở cuối đoạn 2 được xác định bởi hệ thức

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{z}_1' \quad (4.31)$$

Từ (4.30) và (4.31) ta suy ra

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= \bar{b}_1 \bar{M}_0 + \bar{a}_1 \Delta \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 &= \bar{b}_2 \bar{M}_0 + \bar{a}_2 \Delta \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_2 &= \bar{b}_3 \bar{M}_0 + \bar{a}_3 \Delta \bar{\varphi}_1 \\ \bar{Q}_2 &= \bar{b}_4 \bar{M}_0 + \bar{a}_4 \Delta \bar{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Giả sử $|\bar{b}_1| \geq |\bar{a}_1|$. Ta ký hiệu

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}$$

Do $\bar{w}_2 = 0$ nên từ phương trình đầu của hệ (4.32) ta có

$$\bar{M}_0 = -\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1} \Delta \bar{\varphi}_1 = -\bar{\alpha} \Delta \bar{\varphi}_1 \quad (4.33)$$

Thế (4.33) vào hệ phương trình (4.32) ta được

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= 0 \\ \bar{\varphi}_2 &= (\bar{a}_2 - \bar{b}_2 \bar{\alpha}) \Delta \bar{\varphi}_1 = \bar{a}_2' \Delta \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_2 &= (\bar{a}_3 - \bar{b}_3 \bar{\alpha}) \Delta \bar{\varphi}_1 = \bar{a}_3' \Delta \bar{\varphi}_1 \\ \bar{Q}_2 &= (\bar{a}_4 - \bar{b}_4 \bar{\alpha}) \Delta \bar{\varphi}_1 = \bar{a}_4' \Delta \bar{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\bar{a}_i' = \bar{a}_i - \bar{b}_i \bar{\alpha} \quad (i = 2, 3, 4) \quad (4.35)$$

Chú ý đến (4.26) véc tơ trạng thái ở đầu đoạn 3 có dạng

$$\begin{aligned} \bar{w}_2' &= \bar{w}_2 = 0 \cdot \Delta \bar{\varphi}_1 + 0 \cdot \Delta \bar{Q}_2 \\ \bar{\varphi}_2' &= \bar{\varphi}_2 = \bar{a}_2' \Delta \bar{\varphi}_1 + 0 \cdot \Delta \bar{Q}_2 \\ \bar{M}_2' &= \bar{M}_2 = \bar{a}_3' \Delta \bar{\varphi}_1 + 0 \cdot \Delta \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_2' &= \bar{Q}_2 + \Delta \bar{Q}_2 = \bar{a}_4' \Delta \bar{\varphi}_1 + 1 \cdot \Delta \bar{Q}_2 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Véc tơ trạng thái ở cuối đoạn 3 xác định bởi hệ thức

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{U}_3 \mathbf{z}_2' \quad (4.37)$$

Kết hợp (4.37) và (4.36) ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \bar{w}_3 &= a_1^* \Delta \bar{\varphi}_1 + b_1^* \Delta \bar{Q}_2 \\ \bar{\varphi}_3 &= a_2^* \Delta \bar{\varphi}_1 + b_2^* \Delta \bar{Q}_2 \\ \bar{M}_3 &= a_3^* \Delta \bar{\varphi}_1 + b_3^* \Delta \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 &= a_4^* \Delta \bar{\varphi}_1 + b_4^* \Delta \bar{Q}_2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Do điều kiện biên ở gối đỡ 3

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_3 & \bar{\varphi}_3 & \bar{M}_3 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\varphi}_3 & 0 & \bar{Q}_3 \end{bmatrix}^T$$

nên từ (4.38) ta suy ra

$$a_1^* \Delta \bar{\varphi}_1 + b_1^* \Delta \bar{Q}_2 = 0$$

$$a_3^* \Delta \bar{\varphi}_1 + b_3^* \Delta \bar{Q}_2 = 0$$

Để cho $\Delta \bar{\varphi}_1$, $\Delta \bar{Q}_2$ không đồng thời triệt tiêu, ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} a_1^* & b_1^* \\ a_3^* & b_3^* \end{vmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

Phương trình (4.39) nói chung là phương trình phi tuyến đối với ω . Sử dụng phương pháp số ta xác định được các ω .

Thí dụ 4.12 : Cho một dầm liên tục tựa trên ba gối đỡ như hình 4.33. Cho khối lượng trên một đơn vị dài μ và độ cứng chống uốn là EI là những đại lượng không đổi. Hãy xác định tần số dao động uốn riêng đầu tiên của dầm.

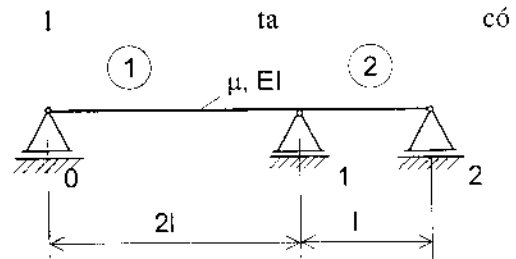
Lời giải : Ta phân dầm thành hai đoạn như hình vẽ và chọn $l_0 = l$, $I_0 = I$, $\mu_0 = \mu$.

Trên

$$\beta_1 = \frac{l_1}{l_0} = \frac{2l}{l} = 2$$

$$\alpha_1 = \frac{EI_1}{EI_0} = \frac{EI}{EI} = 1$$

$$\gamma_1 = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{\mu}{\mu} = 1$$



Hình 4.33

$$\lambda_1^4 = \frac{\gamma_1 \beta_1^4}{\alpha_1} \bar{\lambda}^4 = 16 \bar{\lambda}^4 \rightarrow \lambda_1 = 2 \bar{\lambda}$$

với
$$\bar{\lambda}^4 = \frac{\mu_0 l_0^4}{EI_0} \omega^2 = \frac{\mu l^4}{EI} \omega^2. \quad (4.40)$$

Theo (4.15) ma trận truyền của đoạn 1 có dạng

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} S_1^{(1)} & 2 \frac{1}{\lambda_1} S_2^{(1)} & -4 \frac{1}{\lambda_1^2} S_3^{(1)} & -8 \frac{1}{\lambda_1^3} S_4^{(1)} \\ \frac{1}{2} \lambda_1 S_4^{(1)} & S_1^{(1)} & -2 \frac{1}{\lambda_1} S_2^{(1)} & -4 \frac{1}{\lambda_1^2} S_3^{(1)} \\ -\frac{1}{4} \lambda_1^2 S_3^{(1)} & -\frac{1}{2} \lambda_1 S_4^{(1)} & S_1^{(1)} & 2 \frac{1}{\lambda_1} S_2^{(1)} \\ -\frac{1}{8} \lambda_1^3 S_2^{(1)} & -\frac{1}{4} \lambda_1^2 S_3^{(1)} & \lambda_1 S_4^{(1)} & S_1^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Trong đó $S_i^{(1)} = S_i(\lambda_1)$.

Trên đoạn 2 ta có $\beta_2 = 1, \alpha_2 = 1, \gamma_2 = 1, \lambda_2 = \bar{\lambda}$. Do đó

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} S_1^{(2)} & \frac{1}{\lambda_2} S_2^{(2)} & -\frac{1}{\lambda_2^2} S_3^{(2)} & -\frac{1}{\lambda_2^3} S_4^{(2)} \\ \lambda_2 S_4^{(2)} & S_1^{(2)} & -\frac{1}{\lambda_2} S_2^{(2)} & -\frac{1}{\lambda_2^2} S_3^{(2)} \\ -\lambda_2^2 S_3^{(2)} & -\lambda_2 S_4^{(2)} & S_1^{(2)} & \frac{1}{\lambda_2} S_2^{(2)} \\ -\lambda_2^3 S_2^{(2)} & -\lambda_2^2 S_3^{(2)} & \lambda_2 S_4^{(2)} & S_1^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Trong đó $S_i^{(2)} = S_i(\lambda_2)$.

Để thuận tiện cách viết ta ký hiệu $\mathbf{U}_k = \{u_{ij}^{(k)}\}$ ($k = 1, 2$), ($i, j = 1, \dots, 4$). Ta có

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{z}_0 \quad (4.43)$$

Do $\mathbf{z}_0 = [0 \quad \bar{\varphi}_0 \quad 0 \quad \bar{Q}_0]^T$ nên ta suy ra từ (4.43)

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= u_{12}^{(1)} \bar{\varphi}_0 + u_{14}^{(1)} \bar{Q}_0 \\
\bar{\varphi}_1 &= u_{22}^{(1)} \bar{\varphi}_0 + u_{24}^{(1)} \bar{Q}_0 \\
\bar{M}_1 &= u_{32}^{(1)} \bar{\varphi}_0 + u_{34}^{(1)} \bar{Q}_0 \\
\bar{Q}_1 &= u_{42}^{(1)} \bar{\varphi}_0 + u_{44}^{(1)} \bar{Q}_0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\text{Do } \bar{w}_1 = 0 \text{ nên ta có } \bar{Q}_0 = -\frac{u_{12}^{(1)}}{u_{14}^{(1)}} \bar{\varphi}_0 = -\alpha \bar{\varphi}_0 \tag{4.45}$$

Thế (4.45) vào (4.44) ta tính được $\mathbf{z}_1'$

$$\mathbf{z}_1' = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{Q}_1 + \Delta \bar{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \bar{\varphi}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \bar{Q}_1 \tag{4.46}$$

Trong đó

$$\begin{aligned}
a_2 &= \left(u_{22}^{(1)} - \alpha u_{24}^{(1)} \right) \\
a_3 &= \left(u_{32}^{(1)} - \alpha u_{34}^{(1)} \right) \\
a_4 &= \left(u_{42}^{(1)} - \alpha u_{44}^{(1)} \right)
\end{aligned}$$

Thực hiện phép biến đổi $\mathbf{z}_2 = \mathbf{U}_2 \mathbf{z}_1'$

trong đó $\mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\varphi}_2 & 0 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix}^T$ còn $\mathbf{z}_1'$ được xác định từ (4.46). Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
u_{12}^{(2)} \bar{\varphi}_1 + u_{13}^{(2)} \bar{M}_1 + u_{14}^{(2)} \bar{Q}_1 + u_{14}^{(2)} \Delta \bar{Q}_1 &= 0 \\
u_{32}^{(2)} \bar{\varphi}_1 + u_{33}^{(2)} \bar{M}_1 + u_{34}^{(2)} \bar{Q}_1 + u_{34}^{(2)} \Delta \bar{Q}_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Chú ý đến (4.46) hệ phương trình (4.47) có dạng

$$\begin{aligned}
a_1^* \bar{\varphi}_0 + b_1^* \Delta \bar{Q}_1 &= 0 \\
a_3^* \bar{\varphi}_0 + b_3^* \Delta \bar{Q}_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Trong đó

$$\begin{aligned}
a_1^* &= u_{12}^{(2)} a_2 + u_{13}^{(2)} a_3 + u_{14}^{(2)} a_4 \\
b_1^* &= u_{14}^{(2)}
\end{aligned}$$

$$a_3^* = u_{32}^{(2)} a_2 + u_{33}^{(2)} a_3 + u_{34}^{(2)} a_4$$

$$b_3^* = u_{34}^{(2)}$$

Để cho $\bar{\varphi}_0$ và $\Delta \bar{Q}_0$ không đồng thời triệt tiêu nên ta nhận được phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} a_1^* & b_1^* \\ a_3^* & b_3^* \end{vmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

Phương trình (4.49) là phương trình đại số phi tuyến đối với $\bar{\lambda}$. Giải phương trình này bằng phương pháp lặp Newton. Để làm giá trị ban đầu của phép lặp ta làm như sau. Với thanh hai đầu bản lề dài 3l, ta có $\lambda_1 = \pi$. Với thanh một đầu bản lề, một đầu ngàm chặt dài 2l, ta có $\lambda_1 = 3,927$. Như thế giá trị của λ_1 của dầm như hình 4.33 sẽ nằm giữa hai giá trị đó. Do đó để làm xấp xỉ ban đầu ta lấy

$$\lambda_1^* = 3,6 \rightarrow \bar{\lambda}_1^* = \frac{1}{2} \lambda_1^* = 1,8$$

Với xấp xỉ ban đầu $\bar{\lambda}_1^* = 1,8$ ta giải phương trình (4.49) bằng phương pháp lặp Newton. Sau một vài bước lặp ta có $\bar{\lambda}_1 = 1,7783$. Từ đó suy ra

$$\omega_1 = \bar{\lambda}_1^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} = 3,16235 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

4.4 Dầm có gối đỡ đàn hồi và có khối lượng tập trung

Giả sử tại vị trí i của dầm có vật điểm có khối lượng m_i và có gối đỡ đàn hồi tuyến tính với hệ số cứng c_i (hình 4.34a).

Qua điểm i lực cắt có bước nhảy

$$\Delta Q_i = Q_i' - Q_i \quad (4.50)$$

Trong đó : Q_i là lực cắt trước vật điểm m_i , Q_i' là lực cắt sau vật điểm m_i . Đặt vào vật điểm m_i các lực cắt Q_i , Q_i' , lực đàn hồi lò xo và lực quán tính của điểm như hình 4.34b. Theo nguyên lý d'Alembert, ta có phương trình

$$Q_i' - Q_i - c_i w_i - m_i \ddot{w}_i = 0 \quad (4.51)$$

Giả sử

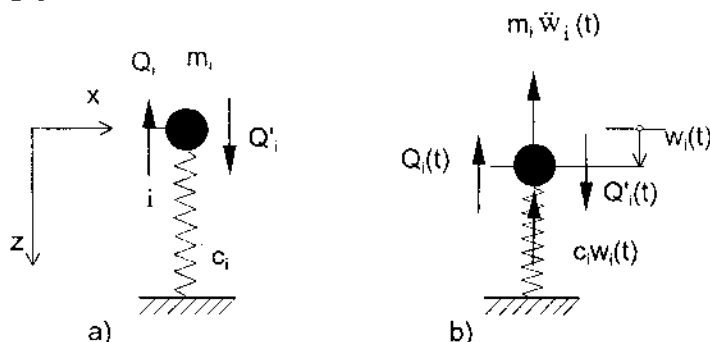
$$w_i(t) = \hat{w}_i \cos \omega t$$

$$\ddot{w}_i(t) = -\omega^2 \hat{w}_i \cos \omega t$$

Thế vào phương trình (4.51) ta suy ra

$$\Delta Q_i = Q'_i - Q_i = (c_i - m_i \omega^2) w_i(t) \quad (4.52)$$

Biểu thức (4.52) cho ta biết bước nhảy về lực cắt do khối lượng tập trung và gối đỡ đàn hồi gây ra.

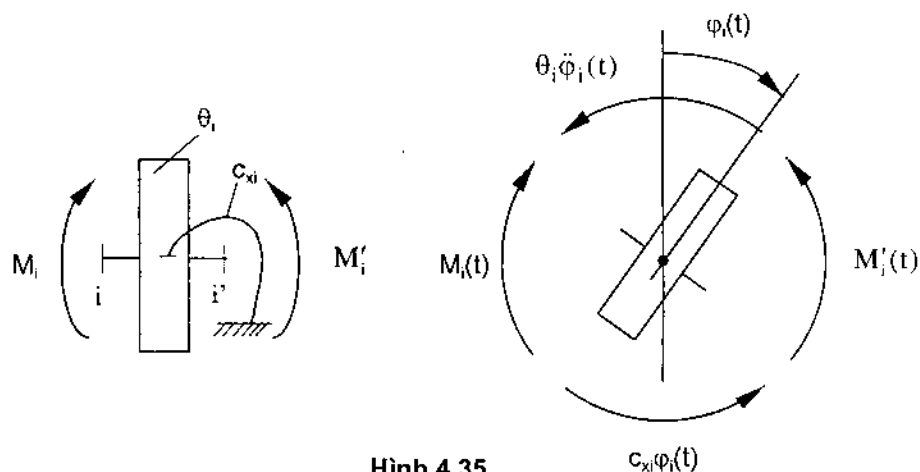


Hình 4.34

Giả sử tại điểm i có khối lượng quay với mômen quán tính khối là θ_i và lò xo xoắn với hệ số cứng là c_{xi} (hình 4.35).

Khi đó qua điểm i mômen uốn có bước nhảy

$$\Delta M_i = M'_i - M_i \quad (4.53)$$



Hình 4.35

Thực hiện các bước tương tự như khi xác định ΔQ_i , ta có phương trình cân bằng mômen

$$M_i' - M_i + \theta_i \ddot{\varphi}_i + c_{xi} \dot{\varphi}_i = 0 \quad (4.54)$$

Giả sử $w_i(x,t) = X_i(x) \cos \omega t$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{\partial w_i}{\partial x} = \frac{dX_i(x)}{dx} \cos \omega t = \Phi_i(x) \cos \omega t \\ \ddot{\varphi}_i &= -\omega^2 \Phi_i(x) \cos \omega t = -\omega^2 \varphi_i \end{aligned}$$

Từ phương trình (4.54) ta suy ra

$$\Delta M_i = M_i' - M_i = -(c_{xi} - \theta_i \omega^2) \varphi_i \quad (4.55)$$

Phương trình (4.55) cho ta biết bước nhảy về mômen uốn do khối lượng quay và lò xo xoắn gây ra. Đưa vào các đại lượng không thứ nguyên

$$\gamma_i = \frac{c_i l_0^3}{EI_0}, \quad \sigma_i = \frac{m_i}{\mu_0 l_0}, \quad \Gamma_i = \frac{c_{xi} l_0}{EI_0}, \quad \tau_i = \frac{\theta_i}{\mu_0 l_0^3} \quad (4.56)$$

và ký hiệu

$$\bar{w}_i = w_i, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i l_0, \quad \Delta \bar{M}_i = \frac{\Delta M_i l_0^2}{EI_0}, \quad \Delta \bar{Q}_i = \frac{\Delta Q_i l_0^3}{EI_0}, \quad \bar{\lambda}^4 = \frac{\mu_0 l_0^4}{EI_0} \omega^2$$

Trong đó l_0, μ_0, I_0 là các đại lượng so sánh được chọn tùy ý. Khi đó các phương trình (4.52) và (4.55) có dạng

$$\Delta \bar{Q}_i = (\gamma_i - \sigma_i \bar{\lambda}^4) \bar{w}_i = k_i \bar{w}_i \quad (4.57)$$

$$\Delta \bar{M}_i = -(\Gamma_i - \tau_i \bar{\lambda}^4) \bar{\varphi}_i = -K_i \bar{\varphi}_i \quad (4.58)$$

Trong đó

$$k_i = \gamma_i - \sigma_i \bar{\lambda}^4, \quad K_i = \Gamma_i - \tau_i \bar{\lambda}^4 \quad (4.59)$$

Nếu tại vị trí i có cả khối lượng điểm, lò xo tựa, khối lượng quay, lò xo xoắn thì véc tơ trạng thái ở phía phải và phía trái của điểm i có liên hệ với nhau như sau

$$\begin{aligned} \bar{w}_i' &= \bar{w}_i \\ \bar{\varphi}_i' &= \bar{\varphi}_i \\ \bar{M}_i' &= \bar{M}_i + \Delta \bar{M}_i = \bar{M}_i - K_i \bar{\varphi}_i \\ \bar{Q}_i' &= \bar{Q}_i + \Delta \bar{Q}_i = \bar{Q}_i + k_i \bar{w}_i \end{aligned} \quad (4.60)$$

Phương trình (4.60) có thể viết dưới dạng véc tơ như sau

$$\mathbf{z}_i' = \mathbf{P}_i \mathbf{z}_i \quad (4.61)$$

Trong đó

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_i & 1 & 0 \\ k_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Ma trận truyền $\mathbf{P}_i$ được gọi là ma trận điểm.

Xét đoạn dầm thứ i trước bước nhảy, theo (4.17) véc tơ trạng thái có dạng

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad (4.63)$$

Thế (4.63) vào (4.61) ta được liên hệ giữa véc tơ trạng thái sau bước nhảy và véc tơ trạng thái ở đầu $i-1$

$$\mathbf{z}_i' = (\mathbf{P}_i \mathbf{U}_i) \mathbf{z}_{i-1} \quad (4.64)$$

Với hệ thức (4.64) ta tiến hành thiết lập phương trình đặc trưng của dầm có gối đỡ đàn hồi và khối lượng tập trung tương tự như các đoạn trên.

§5. DAO ĐỘNG CỦA MÀNG

Màng là phần tử kết cấu có dạng mặt phẳng hoàn toàn đàn hồi và rất mỏng. Ngoài ra ta còn giả thiết màng bị căng đều trên mọi hướng và sức căng đủ lớn để có thể bỏ qua sự thay đổi của nó do độ uốn nhỏ gây ra. Dưới đây giới hạn xét dao động uốn tự do của màng đồng chất, bề dày không đổi. Ký hiệu bề dày của màng là h , mật độ khối là ρ .

5.1 Thiết lập phương trình vi phân dao động của màng

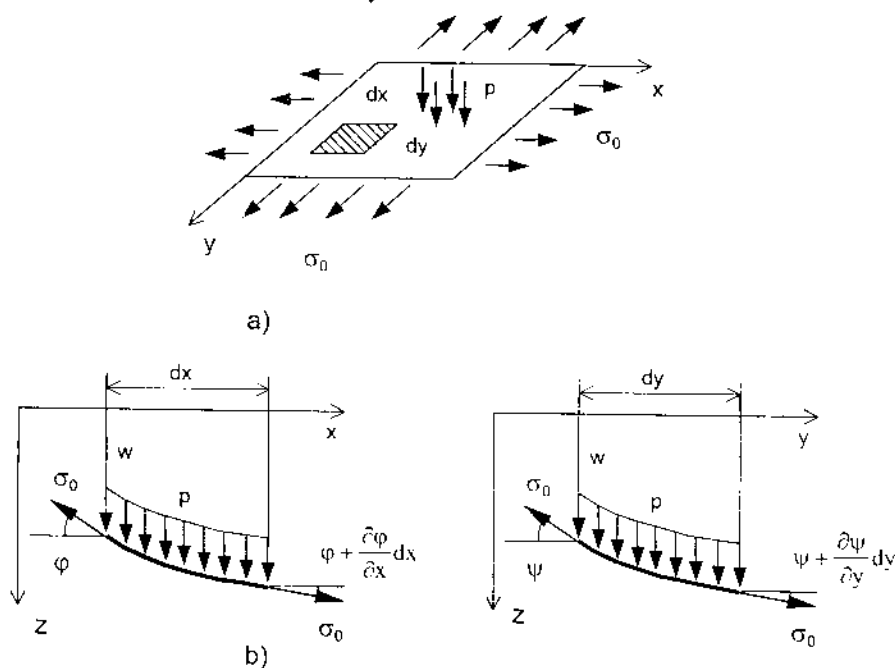
Ta chọn mặt phẳng trùng với mặt phẳng của màng khi chưa biến dạng làm mặt phẳng toạ độ xy , trục z được chọn vuông góc với mặt phẳng xy và hướng xuống phía dưới. Ta gọi $w(x,y,t)$ là độ dịch chuyển của điểm $M(x,y)$ của màng theo phương z . Lực tác dụng lên một đơn vị diện tích của màng theo phương z là $p(x,y,t)$, lực quán tính là $-\rho h \partial^2 w / \partial t^2$ (hình 4.36a). Để thiết lập phương trình dao động của màng ta tách ra từ màng một phần tử hình chữ nhật và đặt lực như hình

4.36b. Áp dụng nguyên lý d'Alembert. Từ điều kiện cân bằng lực theo phương z ta có

$$\left(\sigma_0 h \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) dy + \left(\sigma_0 h \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) dx + \left(p - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx dy = 0 \quad (5.1)$$

Trong đó theo giả thiết σ_0 là ứng suất căng ban đầu. Với giả thiết các góc xoay nhỏ ta có

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.2)$$



Hình 4.36

Thế (5.2) vào phương trình (5.1) ta được

$$\sigma_0 h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(x, y, t) \quad (5.3)$$

Phương trình (5.3) là phương trình vi phân dao động uốn của màng.

Đối với bài toán dao động tự do ($p = 0$) từ (5.3) ta suy ra phương trình

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\sigma_0} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Nếu ký hiệu $c^2 = \sigma_0 / \rho$ thì phương trình dao động uốn tự do của màng có dạng

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4)$$

Phương trình (5.4) còn được gọi là phương trình sóng hai chiều. Ta tìm nghiệm phương trình này dưới dạng

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.5)$$

Thế biểu thức nghiệm (5.5) vào phương trình (5.4) ta được

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W = 0 \quad (5.6)$$

Nếu ta sử dụng ký hiệu toán tử Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (5.7)$$

thì phương trình (5.6) có dạng

$$\Delta W + \chi^2 W = 0 \quad (5.8)$$

trong đó $\chi = \frac{\omega}{c}$.

Nếu sử dụng hệ tọa độ cực (r, φ)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

thì sau một vài biến đổi toán tử Laplace Δ có dạng

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (5.9)$$

Phương trình (5.8) có dạng

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \chi^2 W = 0 \quad (5.10)$$

5.2 Dao động tự do của màng hình chữ nhật

Ta tìm nghiệm của phương trình (5.6) dưới dạng

$$W(x,y) = X(x) Y(y) \quad (5.11)$$

Thế (5.11) vào (5.6) ta có

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y + \frac{d^2 Y}{dy^2} X + \chi^2 XY = 0 \rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \chi^2 \quad (5.12)$$

Vế phải của phương trình (5.12) chỉ phụ thuộc vào y , vế trái chỉ phụ thuộc x , do đó chúng phải bằng hằng số. Ta chọn là $-\alpha^2$. Ta có hệ phương trình

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0, \quad (\beta^2 = \chi^2 - \alpha^2) \quad (5.14)$$

Nghiệm của các phương trình (5.13) và (5.14) có dạng

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$$

$$Y(y) = C \cos \beta y + D \sin \beta y$$

Từ đó nghiệm (5.11) của phương trình (5.6) có dạng

$$W(x,y) = (A \cos \alpha x + B \sin \alpha x)(C \cos \beta y + D \sin \beta y) \quad (5.15)$$

Các hằng số A, B, C, D được xác định từ các điều kiện biên.

Đối với màng hình chữ nhật bốn biên gắn chặt (hình 4.37) ta có các điều kiện biên

$$W(0, y) = 0 \rightarrow X(0) = 0 : A = 0$$

$$W(a, y) = 0 \rightarrow X(a) = 0 : B \sin \alpha a = 0$$

$$W(x, 0) = 0 \rightarrow Y(0) = 0 : C = 0$$

$$W(x, b) = 0 \rightarrow Y(b) = 0 : D \sin \beta b = 0$$

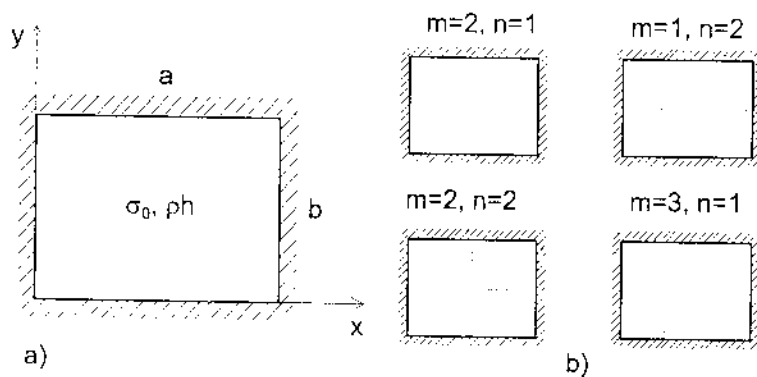
Để cho $X(x)$ và $Y(y)$ không đồng nhất bằng không thì $B \neq 0, D \neq 0$. Do đó ta có

$$\sin \alpha a = 0 \rightarrow \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\sin \beta b = 0 \quad \rightarrow \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Từ đó ta suy ra các tần số riêng của màng hình chữ nhật bốn biên gắn chặt

$$\omega_{mn} = c\chi_{mn} = c\sqrt{\alpha_m^2 + \beta_n^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho}} \quad (5.16)$$



Hình 4.37

Các hàm riêng tương ứng là

$$W_{mn} = F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.17)$$

Trong đó $F_{mn} = B_m D_n$.

Như thế ứng với mỗi cặp m, n ta có một tần số riêng ω_{mn} và một hàm riêng $W_{mn}(x, y)$. Tần số riêng cơ bản là tần số ứng với $m = n = 1$. Còn hàm riêng tương ứng

$$W_{11}(x, y) = F_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

là tích của hai nửa sóng hình sin theo phương x và theo phương y . Dao động riêng bậc cao ứng với $m = 2$ và $n = 1$ là tích của một sóng hình sin theo phương x và nửa sóng hình sin theo phương y . Trong trường hợp này hàm riêng $W(x, y)$ triệt tiêu không chỉ ở trên các biên của màng mà còn triệt tiêu ở trên đường thẳng $x = a/2$. Người ta gọi đường thẳng này là đường nút. Trên hình 4.37b cho ta biết các đường nút (đường gạch gạch) của một số dạng dao động riêng bậc cao. Chú ý rằng với các cặp giá trị m, n khác nhau có thể cho ta cùng tần số riêng, nhưng các hàm riêng tương ứng lại khác nhau.

Chỉ trong một vài trường hợp đặc biệt ta mới có thể tìm được nghiệm giải tích của phương trình (5.6). Người ta thường tìm nghiệm của phương trình này bằng phương pháp số.

5.3 Dao động tự do của màng hình tròn

Để tính toán dao động tự do của màng hình tròn ta sử dụng phương trình dao động dưới dạng tọa độ cực (5.10). Ta tìm nghiệm của phương trình (5.10) dưới dạng

$$W(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi) \quad (5.18)$$

Thế (5.18) vào phương trình (5.10) ta được

$$\left[\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right] \Phi(\varphi) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \chi^2 R(r) \Phi(\varphi) = 0$$

Từ đó suy ra

$$\frac{r^2}{R(r)} \left[\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \chi^2 R(r) \right] = - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} \quad (5.19)$$

Do vế phải của phương trình (5.19) chỉ phụ thuộc vào φ , vế trái chỉ phụ thuộc vào r cho nên hai vế phải cùng bằng một hằng số, ta ký hiệu là m^2 . Như thế từ (5.19) ta nhận được hai hệ phương trình vi phân thường

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (5.20)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\chi^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (5.21)$$

Phương trình vi phân (5.20) có dạng quen biết. Nghiệm của nó có dạng

$$\Phi(\varphi) = C_1 \sin m\varphi + C_2 \cos m\varphi \quad (5.22)$$

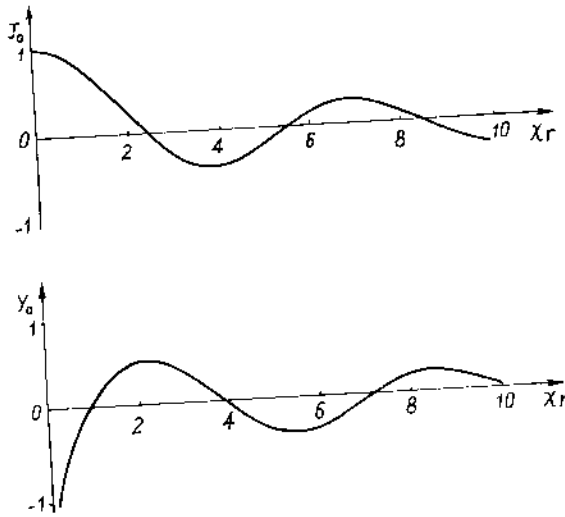
Do độ võng $W(r, \varphi)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π đối với góc quay φ , nên hàm $\Phi(\varphi)$ phải là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π . Do đó m chỉ có thể lấy các giá trị nguyên ($m = 1, 2, \dots$). Từ suy luận đó ta suy ra

$$\Phi_m(\varphi) = C_{1,m} \sin m\varphi + C_{2,m} \cos m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

Phương trình vi phân thường (5.21) là phương trình vi phân Bessel. Nghiệm tổng quát của nó có dạng [1]

$$R_m(r) = C_{3,m} J_m(\chi r) + C_{4,m} Y_m(\chi r), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

Các hàm $J_m(\chi r)$, $Y_m(\chi r)$ được gọi tương ứng là các hàm Bessel loại I và loại II với chỉ số m . Khi $m = 0$ các hàm này được biểu diễn trên hình 4.38.



Hình 4.38

Do hàm Bessel loại hai có tính chất là $Y_m(\chi r) \rightarrow -\infty$ khi $\chi r \rightarrow 0$ cho nên để cho $R(r)$ luôn hữu hạn thì $C_{4,m} = 0$. Vậy

$$R_m(r) = C_{3,m} J_m(\chi r) \quad (5.25)$$

Đối với màng hình tròn bán kính a , biên gắn chặt (hình 4.39a) ta có điều kiện biên

$$W(a, \varphi) = 0 \rightarrow R_m(a) = 0$$

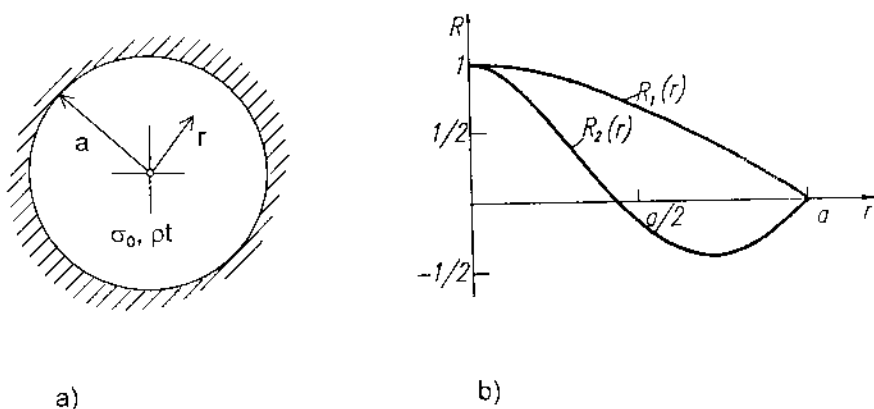
Để cho hệ có nghiệm không tầm thường ($C_{3,m} \neq 0$) thì

$$J_m(\chi a) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Phương trình (5.26) là phương trình đặc trưng của màng tròn bán kính a biên gắn chặt. Từ hình vẽ 4.39a ứng với $m = 0$ ta có

$$\chi_1 a = 2,41 \rightarrow \omega_1 = \chi_1 c = 2,41 \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho a^2}}$$

$$\chi_2 a = 5,52 \rightarrow \omega_2 = \chi_2 c = 5,52 \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho a^2}}$$



Hình 4.39

Các hàm riêng tương ứng được vẽ trên hình 4.39b.

Cuối cùng chú ý rằng người đầu tiên tìm ra phương trình (5.6) là H.Helmholz (1821-1894). Vì vậy phương trình (5.6) được gọi là phương trình sóng H.Helmholz.

§6. DAO ĐỘNG UỐN CỦA TẤM

Tấm là phần tử kết cấu có dạng mặt phẳng mà bề dày của nó nhỏ so với các kích thước khác. Cũng như khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, khi tính toán dao động uốn của tấm người ta sử dụng nhiều mô hình cơ học khác nhau, tùy theo cách đặt bài toán.

Đặc điểm của tấm	rất mỏng	mỏng	trung bình	dày
Chú ý đến các ứng suất vuông góc với mặt phẳng giữa	0	0	0	1
Chú ý đến biến dạng trượt	0	0	1	1
Mặt cắt phẳng	1	1	1	0
Chú ý đến các ứng suất căng màng	1	0	0	0
Chú ý đến quán tính quay	0	0	1	1

Bảng 4.3 Sự phân loại các tấm

Tiêu chuẩn phân biệt quan trọng nhất là tỷ số giữa bề dày h của tấm với các kích thước bề mặt của tấm. Người ta thường phân ra bốn loại tấm: tấm rất mỏng,

tấm mỏng, tấm trung bình, tấm dày. Bảng 4.3 cho ta một tổng quan về những ảnh hưởng có thể bỏ qua khi sử dụng các mô hình khác nhau của tấm.

Lý thuyết tấm mỏng còn được gọi là lý thuyết tấm Kirchhoff, còn lý thuyết tấm trung bình còn được gọi là lý thuyết tấm Mindlin. Trong tài liệu này ta chỉ nghiên cứu dao động uốn của tấm mỏng theo lý thuyết của Kirchhoff (1824-1887).

6.1 Thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của tấm mỏng

Xét dao động uốn của tấm mỏng đồng chất bề dày h , mật độ khối ρ không đổi. Để thiết lập các phương trình dao động của tấm, ta thừa nhận các giả thiết của lý thuyết tấm mỏng cổ điển như sau:

1. Biến dạng uốn của tấm khi dao động là những biến dạng nhỏ tuân theo định luật Hooke.
2. Trong tấm luôn tồn tại một lớp trung hoà mà khoảng cách giữa các điểm của nó không thay đổi. Khi tấm đồng chất bị uốn ít, lớp trung hoà trùng với mặt cong trung bình chia đôi bề dày của tấm. Ta gọi mặt này là mặt trung hoà.
3. Các phần tử của tấm nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt trung hoà, khi tấm bị uốn vẫn nằm trên đường thẳng đó và đường thẳng đó vẫn vuông góc với mặt trung hoà.
4. Không xét đến các ứng suất vuông góc với mặt trung hoà.
5. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và quán tính quay.

Ta chọn mặt phẳng trùng với mặt trung hoà ở trạng thái chưa biến dạng làm mặt phẳng toạ độ xy , trục z được chọn vuông góc với mặt phẳng xy và hướng về phía dưới (hình 4.40). Ta ký hiệu u, v, w là các thành phần dịch chuyển của điểm $M(x, y, z)$ của tấm tương ứng theo các trục x, y và z . Ký hiệu u_0, v_0, w_0 là các thành phần dịch chuyển tương ứng của điểm A thuộc mặt trung hoà mà MA vuông góc với mặt trung hoà. Từ các giả thiết trên ta có

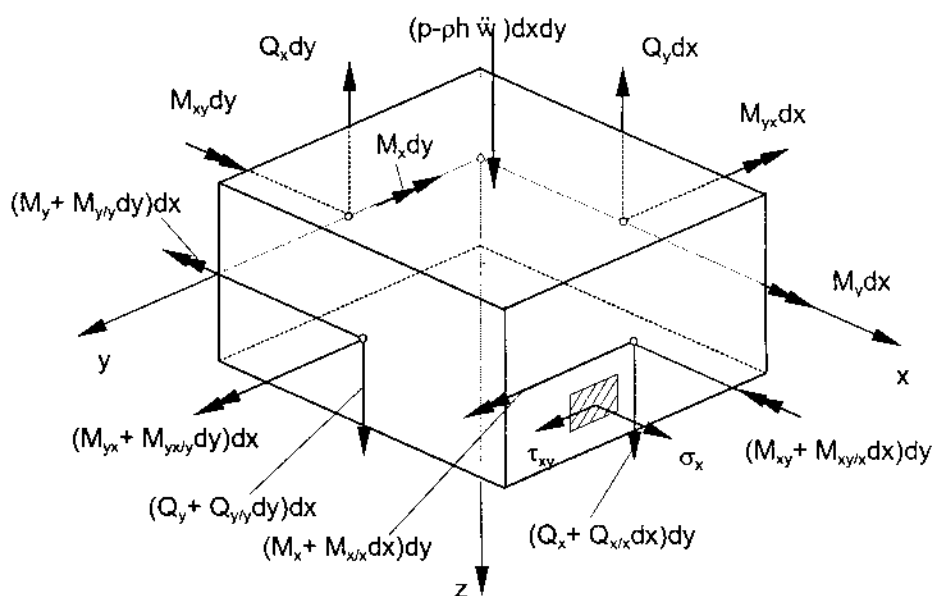
$$\begin{aligned} u_0 &= v_0 = 0, & w_0 &= w(x, y, t) \\ u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, & v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Với các lực và các mômen đã vẽ trên hình 4.40, áp dụng nguyên lý d'Alembert ta nhận được các phương trình sau

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(x, y, t) = 0 \quad (6.2)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (6.3)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (6.4)$$



Hình 4.40

Thế các biểu thức (6.3) và (6.4) vào phương trình (6.2) ta được

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(x, y, t) \quad (6.5)$$

Trong các phương trình trên ta sử dụng các ký hiệu :

Q_x, Q_y : Lực cắt trên một đơn vị dài ở các mặt cắt $x = \text{const}, y = \text{const}$ theo hướng z .

M_x, M_y : Mômen uốn trên một đơn vị dài ở các mặt cắt $x = \text{const}, y = \text{const}$.

M_{xy}, M_{yx} : Mômen xoắn trên một đơn vị dài, vuông góc với các mặt cắt $x = \text{const}, y = \text{const}, (M_{xy} = M_{yx})$

$p(x, y, t)$: Tải trọng ngoài trên một đơn vị diện tích, vuông góc với mặt trung hòa

$w(x, y, t)$: Dịch chuyển của các điểm thuộc mặt trung hòa theo hướng z .

Từ các công thức Cauchy quen thuộc trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính ta có các mối quan hệ hình học [37,49]

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.6)$$

Từ các định luật Hooke đối với trạng thái ứng suất phẳng [37,49] ta có

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\gamma^2} (\varepsilon_x + \gamma \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\gamma^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\gamma^2} (\varepsilon_y + \gamma \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\gamma^2} \left(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{E}{2(1+\gamma)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\gamma} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Từ đó ta tính được các mômen mặt cắt [49]

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -D \left(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -(1-\gamma) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Trong đó

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)} \quad (6.9)$$

gọi là độ cứng trụ của tấm, còn γ là hệ số Poisson.

Thế các biểu thức (6.8) vào phương trình (6.5) ta nhận được phương trình dao động uốn của tấm mỏng theo lý thuyết Kirchhoff

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (6.10)$$

Phương trình (6.10) là phương trình dao động uốn của tấm mỏng.

Nếu ta sử dụng toán tử

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (6.11)$$

thì phương trình (6.10) có dạng

$$D \Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (6.12)$$

Nếu chỉ xét dao động uốn tự do của tấm, ta lấy $p(x, y, t) = 0$, từ phương trình (6.12) ta suy ra

$$D \Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.13)$$

Ta tìm nghiệm phương trình (6.13) dưới dạng

$$w(x, y, t) = W(x, y) \sin(\omega t + \delta) \quad (6.14)$$

Thế (6.14) vào phương trình (6.13) ta có

$$\Delta^2 W(x, y) - \beta^4 W(x, y) = 0 \quad (6.15)$$

Trong đó ta ký hiệu

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho h}{D} \quad (6.16)$$

Phương trình (6.15) có thể viết dưới dạng

$$(\Delta - \beta^2)(\Delta + \beta^2)W(x, y) = 0 \quad (6.17)$$

Trong đó toán tử Δ có dạng

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Nghiem của phương trình (6.17) có thể tìm dưới dạng

$$W(x, y) = W_1(x, y) + W_2(x, y)$$

Trong đó W_1, W_2 tương ứng là nghiệm của các phương trình

$$\Delta W_1 + \beta^2 W_1 = 0 \quad (6.18a)$$

$$\Delta W_2 - \beta^2 W_2 = 0 \quad (6.18b)$$

Nếu xét bài toán dao động tự do của tấm trên nền đàn hồi, thì phương trình dao động tự do của tấm có dạng

$$D \Delta^2 w + cw + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Phương trình này có thể đưa về dạng (6.15), nếu ta ký hiệu

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho h - c}{D}$$

6.2 Dao động uốn của tấm mỏng hình chữ nhật

a. Dao động tự do

Phương trình vi phân đối với các dạng dao động riêng của tấm

$$\Delta^2 W - \beta^4 W = 0 \quad (6.19)$$

Trong hệ tọa độ Đề các vuông góc, phương trình (6.19) có dạng

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) W - \beta^4 W = 0 \quad (6.20)$$

Ta tìm nghiệm phương trình trên dưới dạng $W = W_1 + W_2$. Trong đó W_1, W_2 là nghiệm của các phương trình

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] W_1 + \beta^2 W_1 = 0 \quad (6.21)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] W_2 - \beta^2 W_2 = 0 \quad (6.22)$$

Phương trình (6.21) có dạng giống hệt như dạng phương trình dao động của màng (5.6). Vì vậy biểu thức nghiệm của phương trình này có dạng

$$W_1(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + A_2 \sin \alpha x \cos \gamma y + A_3 \cos \alpha x \sin \gamma y + A_4 \cos \alpha x \cos \gamma y \quad (6.23)$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2$$

Cũng áp dụng phương pháp tách biến, ta tìm nghiệm phương trình (6.22) dưới dạng

$$W_2(x, y) = X(x) Y(y) \quad (6.24)$$

Thế biểu thức (6.24) vào phương trình (6.22) ta được

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} - \beta^2 XY = 0 \rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 \quad (6.25)$$

Từ đó suy ra

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \bar{\alpha}^2 X = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \bar{\gamma}^2 Y = 0 \quad (6.27)$$

$$\bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2 = \beta^2 \quad (6.28)$$

Nghiệm của các phương trình (6.26), (6.27) có dạng

$$X(x) = C_1 \sinh \bar{\alpha} x + C_2 \cosh \bar{\alpha} x \quad (6.29a)$$

$$Y(y) = C_3 \sinh \bar{\gamma} y + C_4 \cosh \bar{\gamma} y \quad (6.29b)$$

Nghiệm của phương trình (6.19) bây giờ có dạng

$$\begin{aligned} W(x, y) = & A_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + A_2 \sin \alpha x \cos \gamma y \\ & + A_3 \cos \alpha x \sin \gamma y + A_4 \cos \alpha x \cos \gamma y \\ & + A_5 \sinh \bar{\alpha} x \sinh \bar{\gamma} y + A_6 \sinh \bar{\alpha} x \cosh \bar{\gamma} y \\ & + A_7 \cosh \bar{\alpha} x \sinh \bar{\gamma} y + A_8 \cosh \bar{\alpha} x \cosh \bar{\gamma} y \end{aligned} \quad (6.30)$$

Trong đó

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \bar{\alpha}^2 + \bar{\gamma}^2 = \beta^2 \quad (6.31)$$

Các giá trị của α , γ , $\bar{\alpha}$, $\bar{\gamma}$ và do đó của β và ω được xác định từ các điều kiện biên.

Thí dụ 4.13 : Tìm tần số riêng và dạng dao động riêng của tấm hình chữ nhật tựa bản lề trên bốn cạnh biên $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.

Lời giải : Do liên kết ở trên biên là tựa bản lề, nên chuyển vị và mômen uốn ở trên biên đều bằng không, Ta có

$$\text{Trên biên } x = 0, x = a : \quad w = 0, \quad M_x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Trên biên $y = 0, y = b$: $w = 0, M_y = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

Ở trên các biên $x = 0, x = a$ từ điều kiện $w = 0$ ta suy ra $\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. Tương tự như vậy, ở trên các biên $y = 0, y = b$ do $w = 0$ nên ta có $\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Kết hợp với các điều kiện biên ở trên ta suy ra

$$x = 0, x = a : W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (6.32)$$

$$y = 0, y = b : W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (6.33)$$

Từ các điều kiện biên ở trên, các hằng số $A_2, \dots, A_8$ trong biểu thức (6.30) đều bằng không. Vậy ta còn

$$W(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \gamma y \quad (6.34)$$

Để cho $A_1 \neq 0$ ta suy ra

$$\sin \alpha a = 0 \rightarrow \alpha_m a = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\sin \gamma b = 0 \rightarrow \gamma_n b = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Từ đó ta có $\beta_{m,n} = \sqrt{\alpha_m^2 + \gamma_n^2}$.

Các tần số riêng của tấm hình chữ nhật tựa bản lề trên bốn cạnh có dạng

$$\omega_{m,n} = \beta_{m,n}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (6.35)$$

Từ biểu thức dạng dao động riêng (6.34) và tần số riêng (6.35) ta suy ra nghiệm của bài toán dao động tự do của tấm hình chữ nhật tựa bản lề trên bốn cạnh biên

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \left\{ \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] t + \delta_{m,n} \right\} \quad (6.36)$$

Trong đó các hằng số $A_{m,n}$ và $\delta_{m,n}$ được xác định từ các điều kiện đầu.

Thí dụ 4.14 : Xác định phương trình đặc trưng và các tần số riêng của tấm hình chữ nhật hai biên $x = 0, x = a$ tựa bản lề, hai biên $y = 0, y = b$ ngàm chặt (hình 4.41).

Lời giải : Tìm nghiệm dưới dạng (6.30) không thuận tiện. Ta tìm nghiệm phương trình (6.19) dưới dạng

$$W(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} Y(y) \quad (6.37)$$

Rõ ràng với $m = 1, 2, \dots$ biểu thức nghiệm này sẽ thoả mãn tự động điều kiện biên

$$x = 0, x = a : W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

Thế biểu thức nghiệm (6.37) vào phương trình (6.19) ta nhận được phương trình vi phân thường

$$Y^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y'' + \left(\frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \beta^4 \right) Y = 0 \quad (6.38)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp bốn (6.38) có dạng [25]

$$Y(y) = C_1 \cosh \lambda y + C_2 \sinh \lambda y + C_3 \cos \bar{\lambda} y + C_4 \sin \bar{\lambda} y \quad (6.39)$$

trong đó

$$\lambda = \sqrt{\beta^2 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}, \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\beta^2 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}} \quad (6.40)$$

Do các biên $y = 0, y = b$ ngàm chặt, các điều kiện biên có dạng

$$y = 0, y = b : w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \rightarrow Y = 0, \quad Y' = 0$$

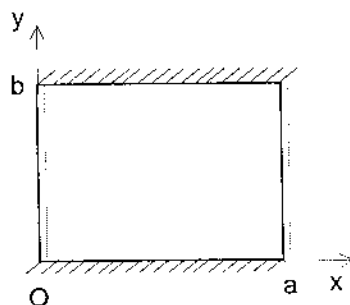
Vậy nghiệm (6.39) phải thoả mãn các điều kiện biên sau

$$(Y)_{y=0} = C_1 + C_3 = 0 \quad (6.41a)$$

$$(Y')_{y=0} = \lambda C_2 + \bar{\lambda} C_4 = 0 \quad (6.41b)$$

$$(Y)_{y=b} = C_1 \cosh \lambda b + C_2 \sinh \lambda b + C_3 \cos \bar{\lambda} b + C_4 \sin \bar{\lambda} b \quad (6.41c)$$

$$(Y')_{y=b} = \lambda C_1 \sinh \lambda b + \lambda C_2 \cosh \lambda b - \bar{\lambda} C_3 \sin \bar{\lambda} b + \bar{\lambda} C_4 \cos \bar{\lambda} b \quad (6.41d)$$



Hình 4.41

Để cho C_1, C_2, C_3, C_4 không đồng thời triệt tiêu, ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \bar{\lambda} \\ \cosh \lambda b & \sinh \lambda b & \cos \bar{\lambda} b & \sin \bar{\lambda} b \\ \lambda \sinh \lambda b & \lambda \cosh \lambda b & -\bar{\lambda} \sin \bar{\lambda} b & \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} b \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó suy ra

$$2\lambda\bar{\lambda}(\cos \bar{\lambda} b \cosh \lambda b - 1) + (\bar{\lambda}^2 - \lambda^2)\sin \bar{\lambda} b \sinh \lambda b = 0 \quad (6.42)$$

Chú ý đến các ký hiệu (6.40), từ (6.42) ta giải ra các nghiệm $(\beta a)_{m,n}$. Sau đó chú ý đến hệ thức (6.16) ta tính được tần số riêng ω

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{(\beta a)^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (6.43)$$

Đối với tấm hình vuông ($a = b$) ta có

$$(\beta a)_{1,1}^2 = 28,946; \quad (\beta a)_{2,1}^2 = 54,743; \quad (\beta a)_{1,2}^2 = 69,320; \dots$$

Cuối cùng chú ý rằng biểu thức nghiệm (6.30) không phải luôn luôn thuận tiện biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình (6.19).

b. Dao động cưỡng bức

Dao động uốn cưỡng bức không cản của tấm hình chữ nhật được biểu diễn bởi phương trình vi phân

$$D \Delta^2 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (6.44)$$

Để tìm nghiệm riêng của phương trình (6.44) ta có nhiều phương pháp khác nhau. Nếu đã biết được các hàm riêng của bài toán dao động tự do $W_{m,n}(x, y)$, ta có thể tìm một nghiệm riêng của phương trình (6.44) dưới dạng

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m,n}(x, y) q_{m,n}(t) \quad (6.45)$$

trong đó $q_{m,n}(t)$ là các hàm cần tìm. Dựa trên tính chất trực giao của các hàm riêng, ta có thể tìm phương trình vi phân đối với hàm $q_{m,n}(t)$ tương tự như trong tính toán dao động uốn của dầm.

Thế biểu thức (6.45) vào phương trình (6.44) ta được

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D \Delta^2 W_{m,n}(x, y) q_{m,n}(t) + \rho h W_{m,n}(x, y) \ddot{q}_{m,n}(t) \right] = p(x, y, t) \quad (6.46)$$

Do $W_{m,n}(x, y)$ là các hàm riêng nên theo phương trình (6.15) ta có

$$D \Delta^2 W_{m,n} = \omega_{m,n}^2 \rho h W_{m,n} \quad (6.47)$$

Thế biểu thức (6.47) vào phương trình (6.46) ta suy ra

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\rho h \ddot{q}_{m,n}(t) + \omega_{m,n}^2 \rho h q_{m,n}(t) \right] W_{m,n}(x, y) = p(x, y, t) \quad (6.48)$$

Nhân hai vế của phương trình (6.48) với hàm riêng $W_{i,j}(x, y)$ rồi lấy tích phân trên diện tích mặt tấm, chú ý đến tính chất trực giao của hàm riêng

$$\iint_A W_{m,n} W_{i,j} dx dy \begin{cases} = 0 & \text{khi } i \neq m \text{ hoặc } j \neq n \\ \neq 0 & \text{khi } i = m \text{ và } j = n \end{cases}$$

ta nhận được hệ phương trình vi phân thường đối với $q_{m,n}(t)$

$$\ddot{q}_{m,n}(t) + \omega_{m,n}^2 q_{m,n}(t) = \frac{1}{\rho h} f_{m,n}(t) \quad (6.49)$$

$$\text{với } f_{m,n}(t) = \frac{\iint_A p(x, y, t) W_{m,n}(x, y) dx dy}{\iint_A W_{m,n}^2(x, y) dx dy} \quad (6.50)$$

Việc giải phương trình (6.49) đã được xét kỹ trong chương 2.

Nếu không biết trước các hàm riêng $W_{m,n}(x, y)$ ta áp dụng phương pháp Ritz-Galerkin tìm nghiệm phương trình (6.44) dưới dạng

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i,j}(x, y) q_{i,j}(t) \quad (6.51)$$

trong đó $\varphi_{i,j}(x, y)$ được chọn sao cho thoả mãn các điều kiện biên.

6.3 Dao động uốn của tấm mỏng hình tròn

a. Dao động tự do

Nghiên cứu dao động của tấm hình tròn ta nên sử dụng các tọa độ cực. Khi đó phương trình vi phân dao động tự do của tấm có dạng

$$\Delta^2 W(r, \varphi) - \beta^4 W(r, \varphi) = 0 \quad (6.52)$$

$$\text{với} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6.53)$$

Do $W(r, \varphi)$ là hàm tuần hoàn với φ , nên ta có thể tìm nghiệm phương trình (6.52) dưới dạng

$$W_m(r, \varphi) = R_m(r) \sin(m\varphi + \gamma_m) \quad (6.54)$$

Thế biểu thức (6.54) vào phương trình (6.52) ta nhận được phương trình vi phân thường đối với $R_m(r)$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} - \beta^2 \right) \right] \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \beta^2 \right) \right] R_m = 0 \quad (6.55)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (6.55) dưới dạng

$$R_m(r) = R_m^{(1)}(r) + R_m^{(2)}(r) \quad (6.56)$$

Trong đó $R_m^{(1)}, R_m^{(2)}$ là các nghiệm của các phương trình

$$\frac{d^2 R_m^{(1)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m^{(1)}}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} - \beta^2 \right) R_m^{(1)} = 0 \quad (6.57)$$

$$\frac{d^2 R_m^{(2)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m^{(2)}}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + \beta^2 \right) R_m^{(2)} = 0 \quad (6.58)$$

Phương trình vi phân (6.57) là phương trình Bessel. Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng [1, 25]

$$R_m^{(1)}(r) = C_1 J_m(\beta r) + C_2 Y_m(\beta r) \quad (6.59)$$

trong đó J_m và Y_m là các hàm Bessel loại một và loại hai với chỉ số m . Phương trình vi phân (6.58) là phương trình Bessel biến thể. Nghiệm của phương trình này có dạng

$$R_m^{(2)}(r) = C_3 I_m(\beta r) + C_4 K_m(\beta r) \quad (6.60)$$

với I_m và K_m là các hàm Bessel biến thể loại một và loại hai.

Do nghiệm $R_m(r) = R_m^{(1)}(r) + R_m^{(2)}(r)$ khi $r = 0$ phải có trị số giới nội nên $C_2 = C_4 = 0$, vì Y_m và K_m có giá trị vô cùng lớn khi $r = 0$. Để xác định β rồi từ đó suy ra ω ta phải xét tới các điều kiện biên.

Thí dụ 4.15 : Tìm tần số riêng của tấm mỏng hình tròn bán kính a , chung quanh ngàm chặt.

Lời giải : Các điều kiện biên có dạng

$$W(a, \varphi) = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (6.61)$$

Từ điều kiện biên thứ nhất ta suy ra

$$R_m(a) = C_1 J_m(\beta a) + C_3 I_m(\beta a) = 0 \quad (6.62)$$

Từ đó ta có

$$C_3 = -\frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)} C_1 \quad (6.63)$$

$$R_m(r) = C_1 \left[J_m(\beta r) - \frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)} I_m(\beta r) \right] \quad (6.64)$$

Chú ý đến điều kiện biên thứ hai, ta nhận được phương trình đặc trưng

$$\left[\frac{d}{dr} J_m(\beta r) - \frac{J_m(\beta a)}{I_m(\beta a)} \frac{d}{dr} I_m(\beta r) \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (6.65)$$

Từ lý thuyết hàm Bessel ta có

$$\frac{d}{dr} J_m(\beta r) = \beta \left[J_{m-1}(\beta r) - \frac{m}{\beta r} J_m(\beta r) \right] \quad (6.66)$$

$$\frac{d}{dr} I_m(\beta r) = \beta \left[I_{m-1}(\beta r) - \frac{m}{\beta r} I_m(\beta r) \right] \quad (6.67)$$

Thế các hệ thức (6.66) và (6.67) vào phương trình (6.65), ta thu được phương trình đặc trưng có dạng

$$I_m(\beta a) J_{m-1}(\beta a) - J_m(\beta a) I_{m-1}(\beta a) = 0 \quad (6.68)$$

Ứng với mỗi giá trị của m , phương trình này cho ta một tập vô hạn các nghiệm $(\beta a)_{m,n}$, $n = 1, 2, \dots$. Từ đó ta có các tần số riêng

$$\omega_{m,n} = \beta_{m,n}^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (6.69)$$

Dạng dao động riêng tương ứng là

$$W_{m,n}(r, \varphi) = A_{m,n} \left[I_m(\beta_{m,n} a) J_m(\beta_{m,n} r) - J_m(\beta_{m,n} a) I_m(\beta_{m,n} r) \right] \cos(m\varphi + \gamma_{m,n}) \quad (6.70)$$

Người ta chứng minh được khi n đủ lớn thì

$$a\beta_{m,n} \rightarrow \left(\frac{m}{2} + n\right)\pi \quad (6.71)$$

$$\text{Do đó} \quad \omega_{m,n} \rightarrow \left(\frac{m}{2} + n\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (6.72)$$

Việc khảo sát chi tiết bài toán dao động riêng của tấm tròn với các điều kiện biên khác nhau, được trình bày khá chi tiết trong [25, 57].

b. Dao động cưỡng bức

Phương pháp giải bài toán dao động cưỡng bức của tấm mỏng hình tròn về cơ bản tương tự như phương pháp giải bài toán dao động cưỡng bức của tấm hình chữ nhật. Để minh họa ta xét dao động uốn của tấm hình vành khuyên. Vành tròn bên ngoài ($r = a_2$) của tấm được ngàm chặt, vành trong ($r = a_1$) chịu tác dụng của hệ lực điều hoà chu kỳ $T = 2\pi/\Omega$. Phương trình dao động của tấm có dạng

$$D\Delta^2 w(r, \varphi, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7.73)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình này dưới dạng

$$w(r, \varphi, t) = W(r, \varphi) \sin(\Omega t) \quad (6.74)$$

Thế (6.74) vào phương trình (6.73) và đơn giản đi $\sin(\Omega t)$ ta được phương trình

$$\Delta^2 W(r, \varphi) - \beta^4 W(r, \varphi) = 0 \quad (7.75)$$

$$\text{trong đó} \quad \beta^4 = \frac{\Omega^2 \rho h}{D}$$

Tính toán tương tự như trong phần dao động tự do, nghiệm của phương trình (6.75) có dạng

$$W(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_m(\beta r) + B_m Y_m(\beta r) + C_m I_m(\beta r) + D_m K_m(\beta r)] \cos(m\varphi + \gamma_m) \quad (6.77)$$

Trong đó $A_m, B_m, C_m, D_m, \gamma_m$ là các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên. $J_m(\beta r), Y_m(\beta r)$ là các hàm Bessel loại 1 và loại 2. $I_m(\beta r), K_m(\beta r)$ là các hàm Bessel biến thể loại 1 và loại 2. Bạn đọc nào quan tâm đến bài toán này có thể xem các tài liệu chuyên khảo, chẳng hạn như các tài liệu [25, 38, 52, 57, 59].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Forlow, S.J.: An Introduction to Differential Equations and Their Applications. Mc Graw-Hill, New York 1994.
2. Genta, G. : Vibration of Structures and Machines. Springer-Verlag, New York 1993.
3. Harris, C.M. (Editor in Chief): Shock and Vibration Handbook. 4. Edition. McGraw-Hill, New York 1996.
4. Inman, D.J. : Engineering Vibration (2.Edition). Upper Saddle River, New Jersey 2001.
5. Kelly, S.G. : Fundamentals of Mechanical Vibrations. Mc Graw-Hill, New York 1993.
6. Meirovith, L. : Analytical Methods in Vibrations. Macmillan, New York 1967.
7. Mitropolskii, Yu. A. : Nguyen Van Dao : Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1997.
8. Nayfeh, A.H. : Introduction to Perturbation Techniques. John Wiley and Sons, New York 1981
9. Rao, S.S. : Mechanical Vibrations, 3. Edition. Addison-Wesley, Massachusetts 1995.
10. Shabana, A.A. : Theory of Vibration, Vol.1 and Vol.2. Springer-Verlag, New York 1991.
11. Thomson, W.T.; Dahleh, M.D.: Theory of Vibration with Applications, 5. Edition. Prentice Hall Inc. , Englewood Cliffs, New Jersey 1998.
12. Timoshenko, S.P. ; Young, D.H. ; Weaver, W. : Vibration Problems in Engineering. 4. Edition. John Wiley and Sons, New York 1974.
13. Troger, H. ; Steindl, A. : Nonlinear Stability and Bifurcation Theory. Springer-Verlag, Wien 1991.
14. Wiggins, S. : Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag, New York 1990.
15. Biran, A. ; Breiner, M. : MATLAB für Ingenieure. Addison-Wesley Publishing Company, Bonn 1995.
16. Bremer, H. : Dynamik und Regelung mechanischer Systeme. Teubner-Verlag, Stuttgart 1988.
17. Dresig, H. ; Vulfson, J.I. : Dynamik der Mechanismen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989.

18. Ellis, W. ; Johnson, E. ; Lodi, Ed ; Schwable, D. : MAPLE V in der mathematischen Anwendung. Thomson Publ., Bonn 1994.
19. Fischer, U. ; Stephan, W. : Mechanische Schwingungen, 3. Auflage. Fachbuchverlag, Leipzig-Köln 1993.
20. Gasch, R. ; Knothe, K. : Strukturdynamik, Band 1. Springer-Verlag, Berlin 1987.
21. Gasch, R. ; Knothe, K. : Strukturdynamik, Band 2. Springer-Verlag, Berlin 1989.
22. Gocke, H. : Angewandte Mechanik / Dynamik. Lehrbriefe der TH Magdeburg 1966.
23. Gross, D. ; Hauger, W. ; Schnell, W. ; Wriggers, P. : Technische Mechanik, Band 4. Springer-Verlag, Berlin 1993.
24. Hagedorn, P. ; Otterbein, S. : Technische Schwingungslehre, Band 1. Springer-Verlag, Berlin 1987.
25. Hagedorn, P. : Technische Schwingungslehre, Band 2. Springer-Verlag, Berlin 1989.
26. Holzweißig, F. ; Dresig, H. : Lehrbuch der Maschinendynamik, 4. Auflage. Fachbuchverlag, Leipzig-Köln 1994.
27. Knaebel, M. : Technische Schwingungslehre, 5. Auflage. Teubner-Verlag, Stuttgart 1992.
28. Kreuzer, E. : Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme. Springer-Verlag, Berlin 1987.
29. Magnus, K.; Popp, K : Schwingungen, 5. Auflage. Teubner-Verlag, Stuttgart 1997.
30. Magnus, K. ; Müller, H.H. : Grundlagen der Technischen Mechanik, 6. Auflage. Teubner-Verlag, Stuttgart 1990.
31. Makhult, M. : Schwingungstechnische Bemessungen von Maschinenlagerungen. Akademiai Kiado, Budapest 1970.
32. Pfeiffer, F. : Einführung in die Dynamik, 2. Auflage. Teubner-Verlag, Stuttgart 1992.
33. Riener, M. ; Wauer, J. ; Wedig, W. : Mathematische Methoden der Technischen Mechanik. Springer-Verlag, Berlin 1993.
34. Schiehlen, W.O. ; Müller, P.C. : Lineare Schwingungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1976.
35. Schiehlen, W. : Technische Dynamik. Teubner-Verlag, Stuttgart 1986.

36. Schmidt, G. : Parametererregte Schwingungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
37. Schnell, W. ; Gross, D. ; Hauger, W. : Technische Mechanik, Band 2, 4. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 1992.
38. Stephan, W. ; Postl, R. : Schwingungen elastischer Kontinua. Teubner-Verlag, Stuttgart 1995.
39. Waller, H. ; Schmidt, R. : Schwingungslehre für Ingenieure. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim 1989.
40. Weigand, A. : Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, 3 Bände. Fachbuchverlag, Leipzig (1.Bd, 3.Aufl. : 1965; 2.Bd : 1958; 3.Bd : 1962).
41. Wittenburg, J. : Schwingungslehre. Springer-Verlag, Berlin 1996.
42. Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang : Tính toán dao động máy. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1991.
43. Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang, Đỗ Sanh : Ổn định chuyển động trong kỹ thuật. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1986.
44. Nguyễn Văn Đạo : Những phương pháp cơ bản của lý thuyết dao động phi tuyến. NXB Đại học và THCN, Hà Nội 1971.
45. Nguyễn Xuân Hùng: Tính toán chính xác kết cấu trên máy tính. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2002.
46. Nguyễn Văn Khang, Đỗ Sanh, Triệu Quốc Lộc, Nguyễn Sĩ : Dao động trong bảo hộ lao động. Viện KIIKT Bảo hộ lao động, Hà Nội 1990.
47. Nguyễn Văn Khang : Cơ sở Cơ học kỹ thuật, Tập I và Tập II. NXB Đại học quốc gia, Hà Nội 2003.
48. Nguyễn Văn Khang, Thái Mạnh Cầu, Vũ Văn Khiêm, Nguyễn Nhật Lệ: Bài tập dao động kỹ thuật. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2002.
49. Lê Quang Minh, Nguyễn Văn Vượng : Sức bền vật liệu. NXB Giáo dục, Hà Nội (Tập 1: 1994, Tập 2 : 1994, Tập 3 : 1997).
50. Đỗ Sanh : Cơ học, Tập 2. NXB Giáo dục, Hà Nội 1992.
51. Trần Doãn Tiến : Cơ sở dao động trong kỹ thuật. NXB Đại học và THCN, Hà Nội 1981.
52. Nguyễn Văn Tính : Cơ sở tính dao động công trình. NXB Xây dựng, Hà Nội 1987.
53. Arnold, V.I.: Các phương pháp toán học của cơ học cổ điển (Tiếng Nga). NXB Khoa học, Moskva 1974.

54. Biderman, V.L.: Lý thuyết ứng dụng dao động cơ học (Tiếng Nga). NXB Cao đẳng, Moskva 1972.
55. Bogoliubov, N.N. : Mitropolskii, Yu. A. : Các phương pháp tiệm cận trong lý thuyết dao động phi tuyến, in lần 4 (Tiếng Nga). NXB Khoa học, Moskva 1974.
56. Panovko, Ya.G.: Cơ sở lý thuyết ứng dụng dao động đàn hồi, in lần 2 (Tiếng Nga). NXB Chế tạo máy, Moskva 1967.
57. Filipov, A.P.: Dao động của các hệ đàn hồi (Tiếng Nga). NXB Chế tạo máy, Moskva 1970.
58. Frolov, K.V. : Furman, F.A.: Lý thuyết ứng dụng các hệ chống rung (Tiếng Nga). NXB Chế tạo máy, Moskva 1980.
59. Tschelomei, V.I. (Chủ biên): Dao động trong kỹ thuật, 6 tập (Tiếng Nga). NXB Chế tạo máy, Moskva (Tập 1: 1978, Tập 2: 1979, Tập 3: 1980, Tập 4: 1981, Tập 5: 1981, Tập 6: 1981).
60. Yablonskii, A.A. : Noreiko, S.S.: Giáo trình lý thuyết dao động (Tiếng Nga). NXB Cao đẳng, Moskva 1975.

Chịu trách nhiệm xuất bản : PGs. TS. Tô Đăng Hải
Biên tập : Nguyễn Năng Quốc
Nguyễn Thị Ngọc Khuê
Trình bày và chế bản : Nguyễn Quang
Vẽ bìa : Trần Thắng

In 800 cuốn khuôn khổ 16x 24cm. tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc.
Giấy phép xuất bản số: 787-3-3/7/2003.
In xong và nộp lưu chiểu Quý 1/ 2004.

