



1956 - 2006

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
**50** NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯỜNG

# CƠ HỌC KẾT CẤU



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

PGS. TS. ĐẶNG VIỆT CƯƠNG

# CƠ HỌC KẾT CẤU



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT  
HÀ NỘI

## Lời nói đầu

*Cơ học kết cấu là một môn khoa học bán thực nghiệm thuộc khối kỹ thuật cơ sở trong các trường đại học kỹ thuật ở nước ta và trên thế giới. Mục đích của Cơ học kết cấu là tiếp tục cung cấp cho bạn đọc những kiến thức tính toán công trình về độ bền, độ cứng và độ ổn định trong và ngoài giới hạn đàn hồi trên nền các môn học cơ lý thuyết, sức bền vật liệu, lý thuyết đàn hồi và dẻo, để giải quyết những vấn đề của thực tiễn liên quan tới các khâu thiết kế, chế tạo và phục vụ cho việc nghiên cứu các môn học chuyên ngành kế tiếp trong lĩnh vực cơ khí và xây dựng.*

*Ngày nay sự bùng nổ thông tin trong kỹ thuật và đời sống đã làm nảy sinh những mâu thuẫn gay gắt giữa nội dung cần truyền đạt và quỹ thời gian cho phép giảng dạy môn học này. Vì vậy, một mặt, với mục đích hoàn thiện hơn nữa nội dung đào tạo ở bậc đại học và sau đại học, đồng thời khắc phục những mâu thuẫn nói trên, mặt khác, để giảm bớt khó khăn cho người học, giúp các kỹ sư thiết kế, chế tạo, các nhà khoa học trẻ đang hoạt động trong các lĩnh vực khác nhau của cơ học, chúng tôi thấy cần phải giới thiệu cuốn Cơ học kết cấu cùng các bạn.*

*Cuốn sách được biên soạn công phu, chặt chẽ với sự cập nhật chọn lọc các thông tin mới nhất. Giáo trình được biên soạn trong khuôn khổ phục vụ chương trình giảng dạy hiện hành của Trường Đại học Bách khoa Hà Nội mà tác giả là người trực tiếp thực hiện cho các hệ đại học và sau đại học thuộc các chuyên ngành khác nhau của cơ học. Giáo trình này còn là tài liệu rất tốt giúp cho việc học tập, nghiên cứu của sinh viên, kỹ sư, các cán bộ khoa học trẻ thuộc các ngành: xây dựng công nghiệp và dân dụng, xây dựng cảng, cầu đường, thủy lợi, kỹ thuật đóng tàu, kỹ thuật hàng không v.v...*

*Giáo trình được biên soạn trong một khuôn khổ được quy định sẵn về thời lượng giảng dạy nên không tham vọng trình bày được đầy đủ mọi khía cạnh vốn rất phong phú và đa dạng của Cơ học kết cấu. Mặc dù rất cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Chúng tôi rất*

*mong và cảm ơn sự đóng góp ý kiến trao đổi của các chuyên gia, các thầy giáo và tất cả các bạn sử dụng và đọc cuốn sách này để cuốn sách được hoàn chỉnh hơn trong lần tái bản sau.*

*Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, các bạn đồng nghiệp đã tận tình giúp đỡ và khích lệ để cuốn sách được hoàn thành.*

*Hà Nội ngày 15 tháng 12 năm 2003*

**Tác giả**



# MỤC LỤC

|                       |   |
|-----------------------|---|
| Lời nói đầu . . . . . | 3 |
|-----------------------|---|

## Chương 1.

### MỞ ĐẦU

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| I. Khái niệm chung về cơ hệ . . . . .                        | 9  |
| §1. Tái trọng và sơ đồ hóa kết cấu . . . . .                 | 9  |
| §2. Khái niệm về phân loại cơ hệ . . . . .                   | 14 |
| §3. Khái niệm về cấu tạo hệ bất biến hình hình học . . . . . | 15 |
| §4. Hệ biến hình tức thời . . . . .                          | 17 |
| §5. Liên kết thừa và bậc siêu tĩnh . . . . .                 | 18 |

## Chương 2.

### CÁC NGUYÊN LÝ, CÁC ĐỊNH LÝ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TRONG CƠ HỌC KẾT CẤU

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. Nguyên lý biến phân . . . . .                                                      | 24 |
| §1. Biến phân và phiếm hàm . . . . .                                                  | 24 |
| §2. Nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học . . . . .                                    | 25 |
| §3. Năng lượng biến dạng và năng lượng bù . . . . .                                   | 26 |
| II. Nguyên lý công khả dĩ của LAGRANGE . . . . .                                      | 28 |
| §1. Nguyên lý công khả dĩ đối với một chất điểm . . . . .                             | 28 |
| §2. Công khả dĩ của LAGRANGE đối với hệ thanh đàn hồi . . . . .                       | 29 |
| §3. Tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính bằng công thức<br>MAXWELL-MORH . . . . . | 33 |
| III. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi . . . . .                                  | 36 |
| §1. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực . . . . .                           | 36 |
| §2. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị . . . . .                                | 37 |
| §3. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị . . . . .                                 | 37 |
| §4. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị<br>và phản lực đơn vị . . . . .          | 38 |
| IV. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với vật thể đàn hồi ba chiều . . . . .             | 39 |

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| §1. Phương trình biến phân của Lagrange . . . . .             | 41 |
| §2. Nguyên lý năng lượng bù của Castigliano . . . . .         | 44 |
| §3. Ví dụ áp dụng . . . . .                                   | 45 |
| V. Phương pháp Rayleigh-Ritz . . . . .                        | 50 |
| §1. Nội dung của phương pháp . . . . .                        | 50 |
| §2. Công khả dĩ của ngoại lực và thế năng biến dạng . . . . . | 50 |
| §3. Các ví dụ . . . . .                                       | 56 |
| VI. Phương pháp Bubnov-Galoorkin . . . . .                    | 59 |
| §1. Nội dung của phương pháp . . . . .                        | 59 |
| §2. Ví dụ . . . . .                                           | 62 |

### **Chương 3.**

#### **PHƯƠNG PHÁP LỰC**

|                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| §1. Thực chất của phương pháp lực. Phương trình chính tắc . . . . .                  | 64 |
| §2. Các ví dụ đối với hệ chịu tải trọng . . . . .                                    | 67 |
| §3. Tính hệ siêu tĩnh chịu nhiệt độ thay đổi . . . . .                               | 72 |
| §4. Các ví dụ áp dụng . . . . .                                                      | 73 |
| §5. Tính hệ siêu tĩnh có các liên kết chịu chuyển vị cưỡng bức . . . . .             | 77 |
| §6. Sử dụng tính đối xứng và phản xứng khi tính hệ bằng<br>phương pháp lực . . . . . | 79 |
| §7. Ví dụ áp dụng . . . . .                                                          | 83 |

### **Chương 4.**

#### **CÁC PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH CÁC CẤU KIỆN SIÊU TÍNH**

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Phương pháp vạn năng . . . . .                                                | 85  |
| §1. Trường hợp tổng quát của chuyển vị và nội lực . . . . .                      | 85  |
| §2. Các trường hợp chất tải cụ thể . . . . .                                     | 88  |
| §3. Công thức tổng quát xác định các đại lượng cần tính . . . . .                | 92  |
| §4. Các bài toán cơ bản . . . . .                                                | 93  |
| §5. Sơ đồ thuật toán chương trình BK45 và cách sử dụng<br>chương trình . . . . . | 98  |
| §6. Các ví dụ áp dụng . . . . .                                                  | 100 |
| II. Tính dầm liên tục trên các gối tựa cứng và dầm hồi . . . . .                 | 115 |
| §1. Dầm liên tục đơn giản trên các gối tựa cứng . . . . .                        | 115 |
| §2. Dầm liên tục có đầu thừa và có đầu ngàm . . . . .                            | 119 |
| §3. Mômen uốn và lực cắt tại một mặt cắt bất kỳ trong dầm . . . . .              | 120 |
| §4. Ví dụ . . . . .                                                              | 121 |

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §5. Dầm liên tục trên các gối tựa đàn hồi . . . . .                                    | 124 |
| III. Phương pháp tiêu cự mômen . . . . .                                               | 129 |
| §1. Các nhận xét và các định nghĩa . . . . .                                           | 129 |
| §2. Thiết lập công thức tính các tỷ số tiêu cự . . . . .                               | 131 |
| §3. Các trường hợp liên kết thường gặp ở hai đầu dầm . . . . .                         | 132 |
| §4. Thiết lập công thức tính mômen uốn trên các gối tựa<br>của nhịp chịu tải . . . . . | 134 |
| §5. Ví dụ . . . . .                                                                    | 136 |
| IV. Tính dầm liên tục bằng phương pháp ma trận . . . . .                               | 139 |
| §1. Phương pháp nhân biểu đồ Verechtchaguine bằng ma trận . . . . .                    | 139 |
| §2. Phương pháp ma trận . . . . .                                                      | 143 |

#### Chương 5.

### PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §1. Thực chất của phương pháp chuyển vị . . . . .                                              | 147 |
| §2. Phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị . . . . .                                 | 151 |
| §3. Cách xác định các phần tử trong ma trận $K$ và $R_p$ . . . . .                             | 153 |
| §4. Sử dụng tính đối xứng khi tính hệ bằng<br>phương pháp chuyển vị . . . . .                  | 164 |
| §5. Tính hệ chịu sự thay đổi của nhiệt độ . . . . .                                            | 166 |
| §6. Cách tính hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của chuyển vị<br>cường bậc tại các liên kết . . . . . | 169 |
| §7. Ví dụ minh họa . . . . .                                                                   | 171 |

#### Chương 6.

### PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §1. Nội dung tổng quát của phương pháp phần tử hữu hạn . . . . .               | 173 |
| §2. Phương pháp phần tử hữu hạn trong bài toán uốn một chiều . . . . .         | 180 |
| §3. Tải trọng tập trung tương đương . . . . .                                  | 189 |
| §4. Phương pháp phần tử hữu hạn trong bài toán kết cấu<br>dạng khung . . . . . | 193 |

#### Chương 7.

### TÍNH TOÁN HỆ CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG TRÊN CÔNG TRÌNH

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| §1. Khái niệm về đường ảnh hưởng . . . . .                                 | 206 |
| §2. Các đường ảnh hưởng của dầm tĩnh định . . . . .                        | 208 |
| §3. Phương pháp động để vẽ đường ảnh hưởng<br>trong dầm công xôn . . . . . | 212 |
| §4. Đường ảnh hưởng đối với dầm nhiều khớp . . . . .                       | 215 |

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| §5. Đường ảnh hưởng của hệ có nút truyền lực . . . . .                                    | 219 |
| §6. Các phương pháp vẽ đường ảnh hưởng của các dàn<br>thường gặp trong kỹ thuật . . . . . | 220 |
| §7. Xác định giá trị cực trị của đại lượng cần tính<br>bằng đường ảnh hưởng . . . . .     | 224 |
| §8. Vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động đối với công trình . . . . .                | 226 |
| §9. Cách tính dầm liên tục chịu tải trọng di động . . . . .                               | 228 |

### **Chương 8.**

### **ĐỘNG LỰC HỌC KẾT CẤU**

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| I. Hệ một bậc tự do . . . . .              | 239 |
| §1. Dao động tự do . . . . .               | 240 |
| §2. Dao động cưỡng bức không cản . . . . . | 247 |
| II. Hệ nhiều bậc tự do . . . . .           | 252 |
| §1. Dao động tự do . . . . .               | 252 |
| §2. Dao động cưỡng bức . . . . .           | 262 |
| §3. Các ví dụ minh họa . . . . .           | 269 |

### **Chương 9.**

### **TÍNH KẾT CẤU NGOÀI GIỚI HẠN DÀN HỒI**

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Phân tích dàn dẹt dầm chịu uốn thuần túy . . . . .                                     | 280 |
| §1. Trường hợp tổng quát của biểu đồ biến dạng . . . . .                                  | 280 |
| §2. Biểu đồ kéo có cùng cơ tuyến tính không thêm chày . . . . .                           | 285 |
| §3. Uốn thuần túy dầm làm bằng vật liệu dàn dẹt lý tưởng . . . . .                        | 286 |
| §4. Mômen giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ<br>có một trục đối xứng . . . . .               | 290 |
| §5. Phân tích dàn dẹt lý tưởng dầm chịu uốn ngang . . . . .                               | 291 |
| §6. Phân tích dàn dẹt lý tưởng thanh mặt cắt tròn chịu xoắn . . . . .                     | 295 |
| II. Nghiên cứu khả năng chịu tải của các cấu<br>kiện làm bằng vật liệu cứng dẻo . . . . . | 298 |
| §1. Định lý tĩnh . . . . .                                                                | 299 |
| §2. Định lý động . . . . .                                                                | 301 |
| §3. Uốn dầm cứng dẻo . . . . .                                                            | 304 |
| §4. Uốn và cắt đồng thời . . . . .                                                        | 307 |
| §5. Uốn và kéo đồng thời . . . . .                                                        | 310 |
| §6. Xoắn và kéo đồng thời các trục tròn . . . . .                                         | 313 |
| §7. Các ví dụ . . . . .                                                                   | 316 |
| TÀI LIỆU THAM KHẢO . . . . .                                                              | 329 |

## Chương 1

# MỞ ĐẦU

## 1. KHÁI NIỆM CHUNG VỀ CƠ HỆ

Cơ kết cấu theo nghĩa rộng của từ này là một khoa học bán thực nghiệm nghiên cứu những nguyên lý và những phương pháp tính toán kết cấu hình dạng bất kỳ về độ bền, độ cứng và độ ổn định. Mục đích tính toán kết cấu về độ bền là nhằm đảm bảo độ tin cậy cần thiết nhưng không gây lãng phí vật liệu khi công trình làm việc lâu dài mà không bị phá hủy. Mục đích của việc tính toán kết cấu về độ cứng là nhằm hạn chế những biến dạng và chuyển vị để đảm bảo chế độ làm việc bình thường do các quy trình công nghệ quy định cho các thiết bị và công trình. Tính toán công trình về ổn định là xác định khả năng duy trì hình dáng và vị trí ban đầu của công trình dưới dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng. Do những yêu cầu ứng dụng khác nhau trong kỹ thuật mà khoa học này theo truyền thống được chia ra thành những môn học khác nhau như : sức bền vật liệu, lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo và từ biến, lý thuyết ổn định, lý thuyết dao động và sóng, lý thuyết tấm và vỏ và cơ học kết cấu hệ thanh. Cơ học kết cấu hệ thanh là đối tượng nghiên cứu chủ yếu của giáo trình này. Cơ học kết cấu theo nghĩa đó chỉ nghiên cứu cách xác định các loại nội lực và chuyển vị phát sinh trong các hệ thanh phức tạp do những tác dụng ngoài (tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các liên kết, sự chế tạo các kích thước hình học không chính xác, v.v...) gây ra. Cơ học kết cấu được xây dựng trên những giả thiết đã được giới thiệu rất kỹ trong sức bền vật liệu.

### §1. TẢI TRỌNG VÀ SƠ ĐỒ HÓA KẾT CẤU

Việc tính toán công trình được bắt đầu từ việc xác định các tác dụng ngoài tác động lên nó. Cụ thể là độ lớn, phương chiều, thời gian và đặc trưng tác dụng của chúng. Tải trọng tác dụng lên hệ được phân ra thành :

Tải trọng hữu ích : là tải trọng mà công trình sinh ra để tiếp thu chúng.

Trọng lượng bản thân của công trình.

Tải trọng thiên nhiên như tải trọng gió bão, tải trọng động đất. Tải trọng có thể là tải trọng di động và tải trọng cố định, tải trọng tĩnh và tải trọng động.

Tải trọng tĩnh là tải trọng được tăng rất chậm từ không đến một độ lớn nào đó, còn giá trị, vị trí của nó được xem là không phụ thuộc thời gian hoặc là có thay đổi nhưng rất chậm để có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực quán tính trong quá trình tính toán.

Tải trọng động là tải trọng mà độ lớn, vị trí và phương chiều của chúng thay đổi nhanh theo thời gian và gây ra lực quán tính ở mỗi chất điểm của kết cấu. Các cơ hệ được khảo sát chủ yếu trong giáo trình này là những hệ phẳng bất động và bất biến hình hình học khi chịu tác dụng ngoài, nếu không kể đến biến dạng của chúng.

Khi tính toán các thiết bị máy móc hay công trình, ngoài việc phải xác định đủ chính xác các tác dụng lên chúng, còn cần phải sơ đồ hóa chúng để có một sơ đồ tính phản ánh tốt điều kiện làm việc của công trình thực cần thiết kế. Quá trình này là một bước đặc biệt quan trọng khi tính toán công trình, bởi vì, mọi phương pháp toán học được sử dụng dù chính xác đến đâu chẳng nữa cũng đều vô nghĩa khi mà sơ đồ tính không đúng. Trong thực tế kỹ thuật việc chuyển từ công trình thực về sơ đồ tính là một việc làm rất phức tạp và đa dạng đòi hỏi người thiết kế phải có một trình độ tốt về lý thuyết và thực tiễn kỹ thuật.

Có thể tóm tắt các bước của quá trình sơ đồ hóa kết cấu như sau :

*Bước 1* : Thay các thanh bằng trục hình học của chúng, thay các tấm hoặc vỏ bằng các mặt trung bình.

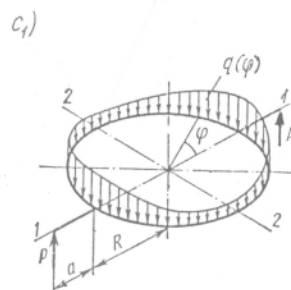
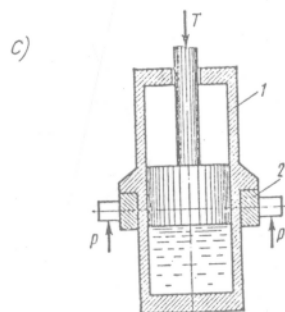
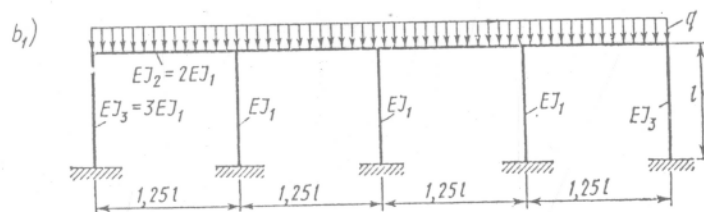
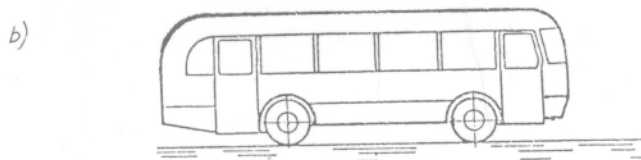
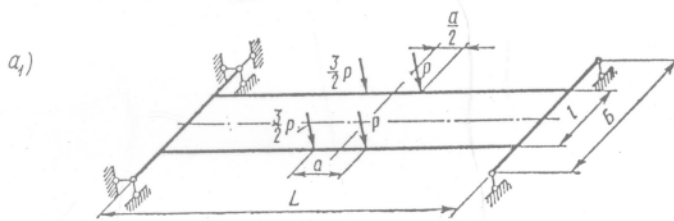
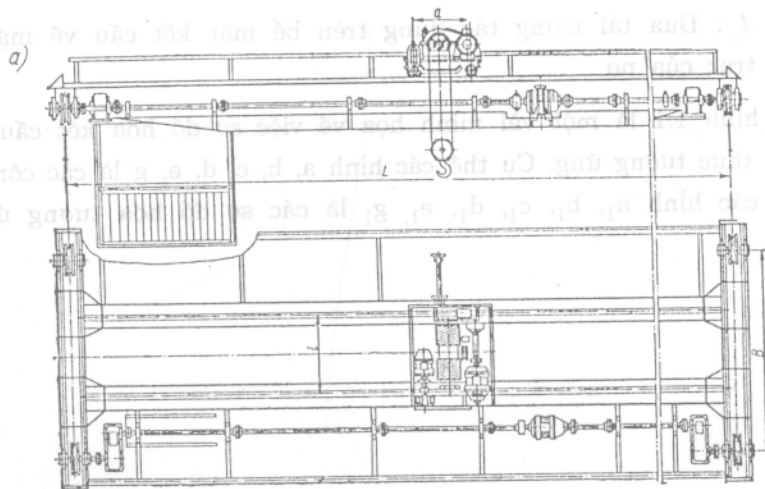
*Bước 2* : Thay các mặt cắt bằng các đặc trưng hình học (như diện tích, mômen quán tính của mặt cắt v.v.) và bằng các đặc trưng độ cứng của mặt cắt (như  $EF$ ,  $EJ$ , v.v.).

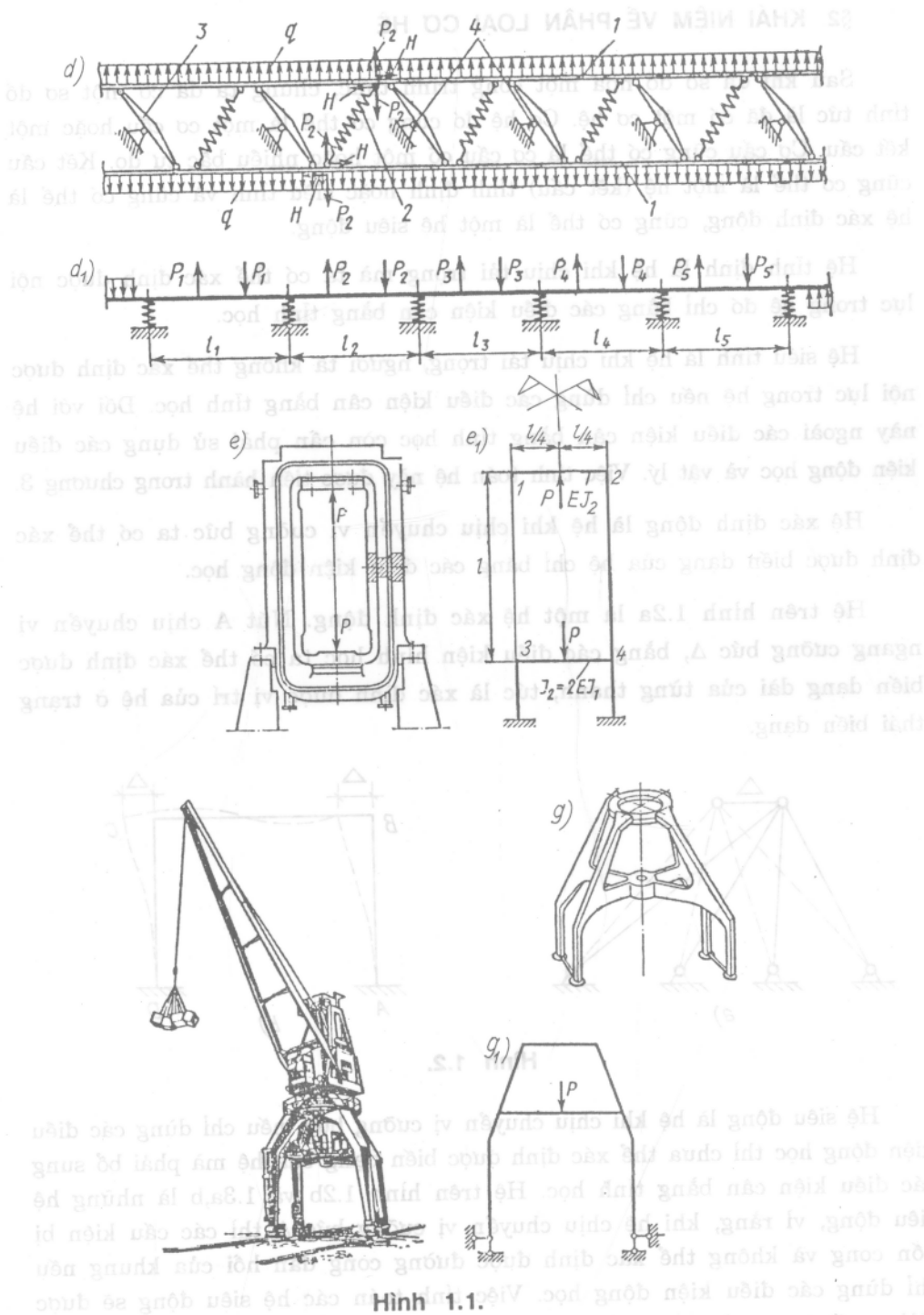
*Bước 3* : Thay các đối tượng gây liên kết bằng các liên kết lý tưởng (không ma sát).



*Bước 4* : Đưa tải trọng tác dụng trên bề mặt kết cấu về mặt trung bình hoặc trục của nó.

Trên hình 1.1 là một vài minh họa về việc sơ đồ hóa kết cấu từ các công trình thực tương ứng. Cụ thể các hình a, b, c, d, e, g là các công trình thực, còn các hình  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ ,  $e_1$ ,  $g_1$  là các sơ đồ hóa tương ứng của chúng.





Hình 1.1.

## §2. KHÁI NIỆM VỀ PHÂN LOẠI CƠ HỆ

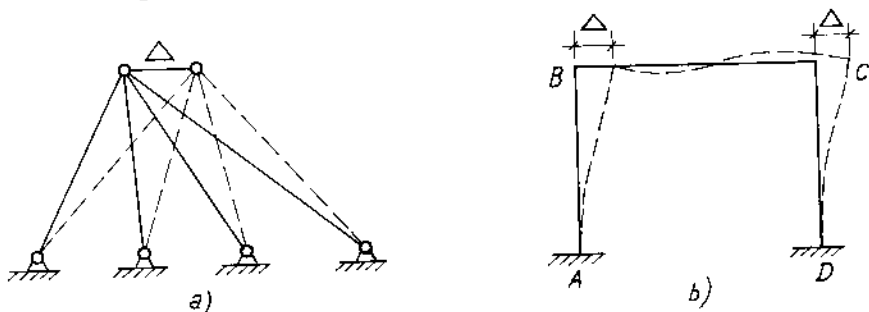
Sau khi đã sơ đồ hóa một công trình thực, chúng ta đã có một sơ đồ tĩnh tức là đã có một cơ hệ. Cơ hệ đó cũng có thể là một cơ cấu hoặc một kết cấu. Cơ cấu cũng có thể là cơ cấu có một hoặc nhiều bậc tự do. Kết cấu cũng có thể là một hệ (kết cấu) tĩnh định hoặc siêu tĩnh và cũng có thể là hệ xác định động, cũng có thể là một hệ siêu động.

Hệ tĩnh định là hệ khi chịu tải trọng mà ta có thể xác định được nội lực trong hệ đó chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Hệ siêu tĩnh là hệ khi chịu tải trọng, người ta không thể xác định được nội lực trong hệ nếu chỉ dùng các điều kiện cân bằng tĩnh học. Đối với hệ này ngoài các điều kiện cân bằng tĩnh học còn cần phải sử dụng các điều kiện động học và vật lý. Việc tính toán hệ này được tiến hành trong chương 3.

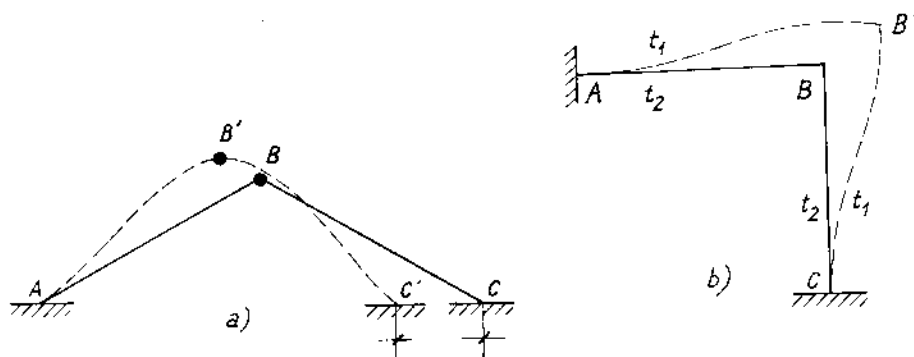
Hệ xác định động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học.

Hệ trên hình 1.2a là một hệ xác định động. Nút A chịu chuyển vị ngang cưỡng bức  $\Delta$ , bằng các điều kiện hình học ta có thể xác định được biến dạng dài của từng thanh, tức là xác định được vị trí của hệ ở trạng thái biến dạng.



Hình 1.2.

Hệ siêu động là hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà phải bổ sung các điều kiện cân bằng tĩnh học. Hệ trên hình 1.2b và 1.3a,b là những hệ siêu động, vì rằng, khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức  $\Delta$  thì các cấu kiện bị uốn cong và không thể xác định được đường cong đàn hồi của khung nếu chỉ dùng các điều kiện động học. Việc tính toán các hệ siêu động sẽ được giải quyết trong chương 5.



Hình 1.3.

Kết cấu là một cơ hệ gồm nhiều cấu kiện (các thanh thẳng hoặc các thanh cong) được nối lại với nhau theo một cách nào đó, sao cho hệ thu được là một hệ bất động và bất biến hình hình học. Nghĩa là, khi xem các cấu kiện là cứng tuyệt đối thì chuyển vị tương đối giữa chúng với nhau và với các liên kết tựa là không thể tồn tại. Nếu các cấu kiện đó của hệ có thể chuyển vị tương đối đối với nhau và đối với các liên kết tựa thì hệ đó là hệ biến hình hình học. Nói khác đi, nếu gọi  $W$  là bậc tự do của một cơ hệ thì nếu  $W > 0$  ta gọi cơ hệ đó là một cơ cấu (hệ biến hình hình học),  $W \leq 0$  ta gọi cơ hệ đó là một kết cấu tĩnh định ( $W = 0$ ) hoặc siêu tĩnh ( $W < 0$ ). Tùy thuộc vào đặc điểm liên kết giữa các cấu kiện với nhau và tải trọng tác dụng lên chúng mà kết cấu được chia ra thành :

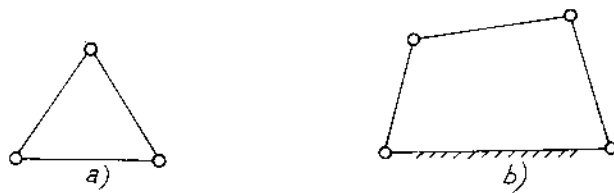
Dàn là một cơ hệ bất biến hình hình học gồm nhiều khâu (cấu kiện) được nối động với nhau bằng các khớp và tải trọng chỉ tác dụng lên các nút của chúng.

Khung là một cơ hệ bất biến hình hình học gồm nhiều cấu kiện thẳng và cong được nối cứng (nối tĩnh) với nhau và tải trọng tác dụng lên khung là bất kỳ. Tổ hợp dàn và khung ta có kết cấu hỗn hợp.

### §3. KHÁI NIỆM VỀ CẤU TẠO HỆ BẤT BIẾN HÌNH HÌNH HỌC

Như đã rõ, ba đoạn thẳng chỉ dựng được duy nhất một tam giác. Do đó, một hệ gồm ba thanh nối khớp với nhau là hệ bất biến hình hình học và được gọi là một miếng cứng có  $W = 0$  (hình 1.4a). Một tứ giác khớp (hình 1.4b) là một hệ biến hình hình học (cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng  $W = 1$ ).

Như vậy, một hệ được gọi là bất biến hình hình học nếu hình dạng hình học của nó không bị thay đổi dưới các tác dụng ngoài, khi xem các cấu kiện của hệ là rắn tuyệt đối.

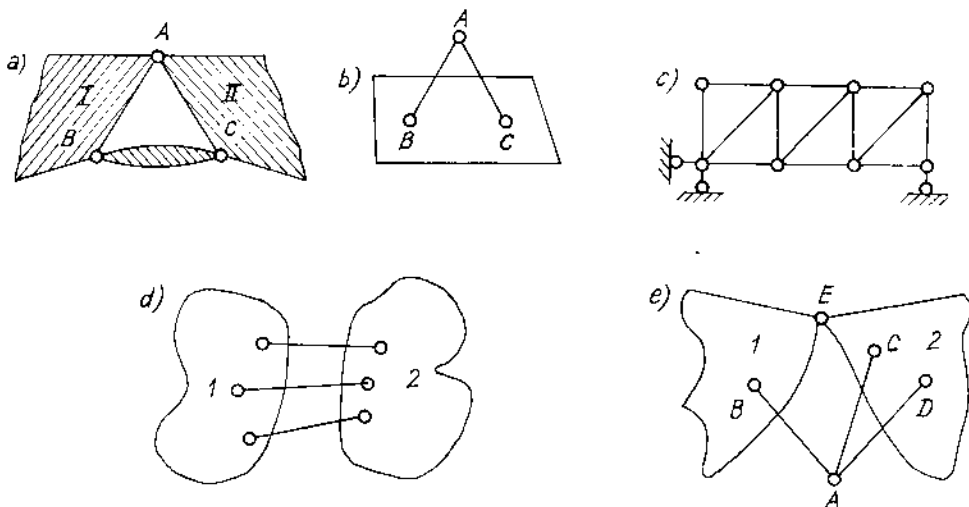


**Hình 1.4.**

Trên hình 1.5 là một số phương án cơ tính nguyên tắc định hướng cách cấu tạo hệ bất biến hình hình học.

Nếu hai khối I và II nối khớp với nhau tại A, lại được nối với khâu BC thì đường tâm BC không được đi qua A (hình 1.5a). Khi nối nút A (hình 1.5b) với một khối bằng hai thanh AB và AC, muốn có một hệ bất biến hình thì các điểm A, B, C không được thẳng hàng. Cặp thanh BAC được gọi là một bộ đôi, nghĩa là hệ hai thanh AB và AC không được thẳng hàng.

Nếu hai khối 1 và 2 (hình 1.5d) được nối với nhau bằng ba thanh thì đường tâm của chúng không được giao nhau ở 1 điểm.



**Hình 1.5**

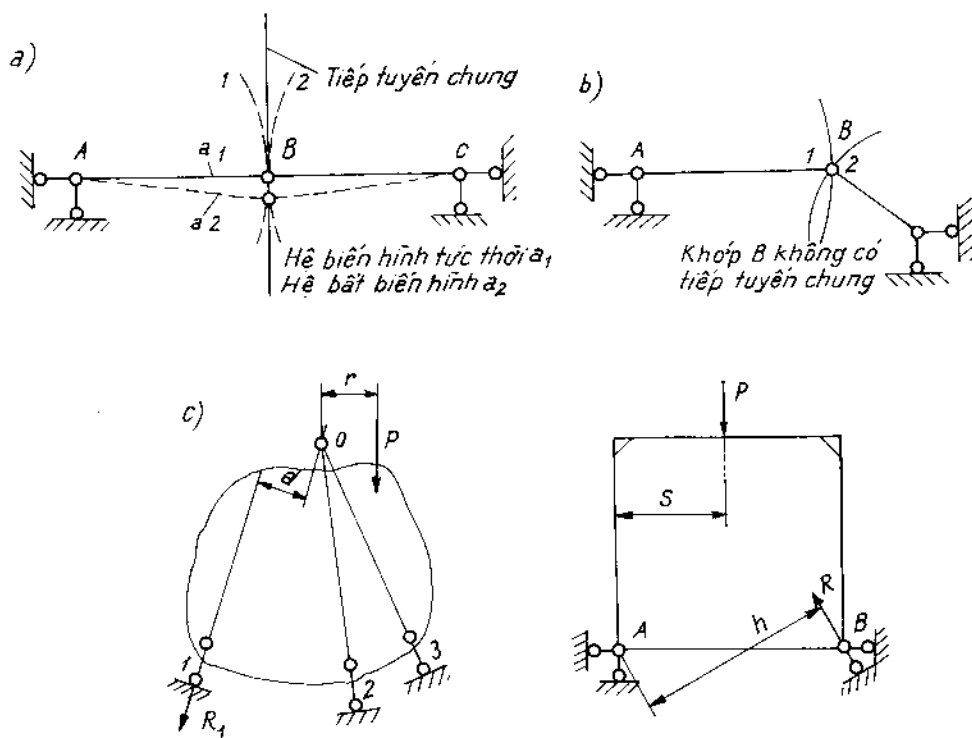
Trên hình 1.5c là một dàn bất biến hình được cấu tạo từ lý luận bộ đôi và miếng cứng. Hệ 1 bậc tự do 1-2 có khớp E được nối với nút A bằng ba thanh như hình 1.5e là hệ bất biến hình hình học.

#### §4. HỆ BIẾN HÌNH TỨC THỜI

Hệ biến hình tức thời là hệ khi chịu tác dụng ngoài, hệ bị thay đổi vô cùng nhỏ về hình dáng hình học và ngay sau đó hệ trở thành bất biến hình mặc dù trong quá trình ấy các cấu kiện của hệ được xem là rắn tuyệt đối (hình 1.6a). Đối với những hệ biến hình tức thời thì dưới tác dụng của ngoại lực chúng không có trạng thái cân bằng. Vì thế, các phương trình cân bằng tĩnh không được thỏa mãn. Do đó, các yếu tố lực trong hệ biến hình tức thời được xác định bằng các phương trình tĩnh cho giá trị hoặc là vô cùng lớn hoặc là không xác định (hình 1.6c,d).

Trên hình 1.6a là hệ biến hình tức thời ( $a_1$ ) và hệ bất biến hình sau khi thực hiện một chuyển vị vô cùng bé ( $a_2$ ).

Trên hình 1.6b là hệ bất biến hình khi cấu tạo lại hệ trên hình 1.6a để khớp B không có tiếp tuyến chung như khớp B trên hình 1.6a.



Hình 1.6

Như đã nói ở trên về tính chất bất thường của các phản lực liên kết trong các hệ biến hình tức thời, ta sẽ làm rõ điều này qua các ví dụ sau đây :

Ví dụ 1 : Xác định phản lực  $R_1$  trên hình 1.6c với thanh gối 1 có phương bất kỳ?

$$\sum m_0(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow R_1 = Pr/d.$$

Nếu  $d \rightarrow 0$  (thanh 1 qua điểm O) thì  $R_1 \rightarrow \infty$ . Nếu  $d \rightarrow 0$  và  $r \rightarrow 0$  thì  $R_1 = 0/0$  nghĩa là  $R_1$  không xác định.

Ví dụ 2 : Xác định phản lực  $R$  (hình 1.6d) theo vị trí của thanh gối đơn B ?

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow R = P.s/h$$

Khi  $h \rightarrow 0$  thì  $R \rightarrow \infty$

Khi  $h \neq 0$  thì  $R \neq \infty$

Các kết quả trên cho thấy hệ biến hình tức thời và các hệ gắn với nó là rất nguy hiểm, cần phải đặc biệt quan tâm trong công tác thiết kế.

## §5. LIÊN KẾT VÀ BẬC SIÊU TÍNH

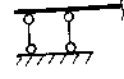
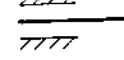
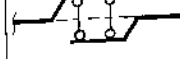
### 1. Liên kết và phản lực liên kết

Liên kết là những điều kiện hình học hay động học ràng buộc chuyển vị tự do của vật khảo sát.

Trong tập hợp các vật rắn (khâu, cấu kiện) nếu ta quan tâm tới vật nào thì vật ấy gọi là vật khảo sát. Các vật nối với vật khảo sát làm cản trở chuyển vị của vật khảo sát gọi là vật gây liên kết. Tác dụng tương hỗ giữa vật khảo sát và vật gây liên kết gọi là lực liên kết. Lực mà vật gây liên kết đặt vào vật khảo sát gọi là phản lực liên kết. Như vậy, phản lực liên kết chỉ xảy ra ở vùng tiếp xúc giữa vật khảo sát và vật gây liên kết. Phản lực liên kết cùng phương, trái chiều với chiều chuyển vị bị cản trở. Cường độ của phản lực liên kết phụ thuộc vào lực tác dụng lên vật khảo sát. Trong bảng 1.1 dưới đây là một số liên kết thường gặp trong kỹ thuật mà ta đã làm quen trong sức bền vật liệu.



**Bảng 1.1**

| Tên gọi của liên kết | Gối tựa di động                                                                                                                                                        | Gối tựa cố định                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Ngàm trượt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Ngàm cứng                                                                           |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Các ký hiệu          | <br> | <br><br><br> | <br><br><br> |  |
| Số lượng phản lực    | 1                                                                                                                                                                      | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 3                                                                                   |

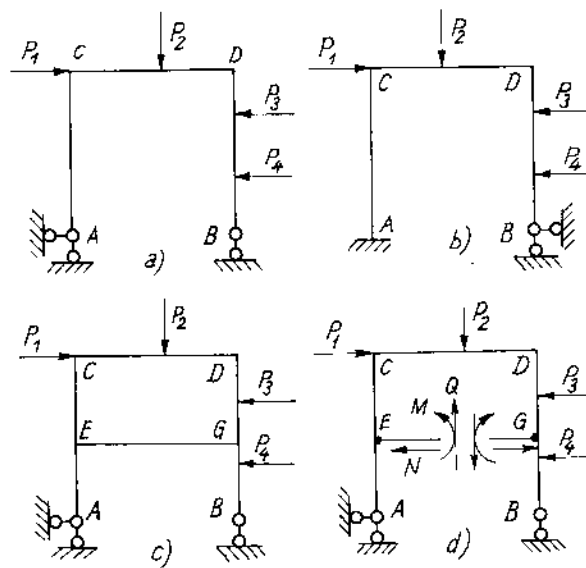
## 2. Liên kết thừa

Ta hãy xét một hệ bất biến hình—một khung tĩnh định—chịu lực cân bằng như trên hình 1.7a.

Khi bổ sung vào A một liên kết chống xoay và vào B một liên kết chống chuyển vị thẳng ngang thì khung 1.7a có dạng hình 1.7b. Những liên kết được bổ sung vào mặc dù làm tăng độ cứng của hệ, nhưng về phương diện hình học và tĩnh học thì chúng là "thừa" bởi vì có chúng hay không có chúng thì hệ vẫn cân bằng và bất biến hình. Ngược lại, nếu ta loại đi một liên kết bất kỳ trong khung (hình 1.7a) thì khung trở thành hệ biến hình hình học (một cơ cấu). Do đó, tất cả các liên kết đặt vào khung (hình 1.7a) là cần thiết để đảm bảo cho hệ cân bằng và bất biến hình hình học.

Nếu ta thêm vào khung (hình 1.7a) một thanh ngang EG và hàn cứng vào các thanh đứng thì độ cứng của khung tăng, nhưng về phương diện đảm bảo tính bất biến hình học thì thanh này là "thừa" (cũng như những liên kết thừa ngoài). Các nội lực trong thanh "thừa" này (hình 1.7d) không thể được xác định chỉ từ các điều kiện cân bằng. Sự có mặt của liên kết "thanh thừa" EG trong khung (hình 1.7c) đã tạo ra ba ẩn số thừa tương ứng. Đối với khung phẳng (hình 1.7c) để có thể xác định được nội lực trên tất cả các mặt

cắt của khung thì trước hết cần phải xác định phản lực ở các liên kết "cần thiết" A, B và ba phản lực thừa (tức là các nội lực trên các mặt cắt ngang của liên kết "thừa" nội GE) hoặc CD hình 1.8b. Nghĩa là, mỗi chu vi kín CDGE có ba phản lực "thừa". Số liên kết "thừa" xác định bậc siêu tĩnh của kết cấu. Nếu mỗi chu vi kín có một khớp thì số bậc siêu tĩnh của chu vi này bằng 2. Khớp này gọi là khớp đơn. Mỗi khớp đơn làm triệt tiêu một ẩn số là mômen. Nếu có  $s$  thanh nối với nhau bằng một khớp thì khớp này tương đương với  $s-1$  khớp đơn (hình 1.8).



Hình 1.7

### 3. Bậc siêu tĩnh

Để xác định bậc siêu tĩnh  $n$  của kết cấu, ta có thể dùng các công thức đơn giản sau đây :

$n$  = số phản lực liên kết ngoại và nội cần xác định trừ số phương trình cân bằng cần thiết.

Ví dụ đối với hệ trên hình 1.7c :  $n = (3 + 3) - 3 = 3$ .

Ngoài ra có thể tính bậc siêu tĩnh của hệ như sau :

- 1) Tính số liên kết đơn "thừa" ngoại (số thanh gối đơn "thừa" nối kết cấu với nền) :  $T$
- 2) Tính số chu vi kín :  $K$
- 3) Tính số khớp đơn trong khung :  $D$

Đối với hệ phẳng :

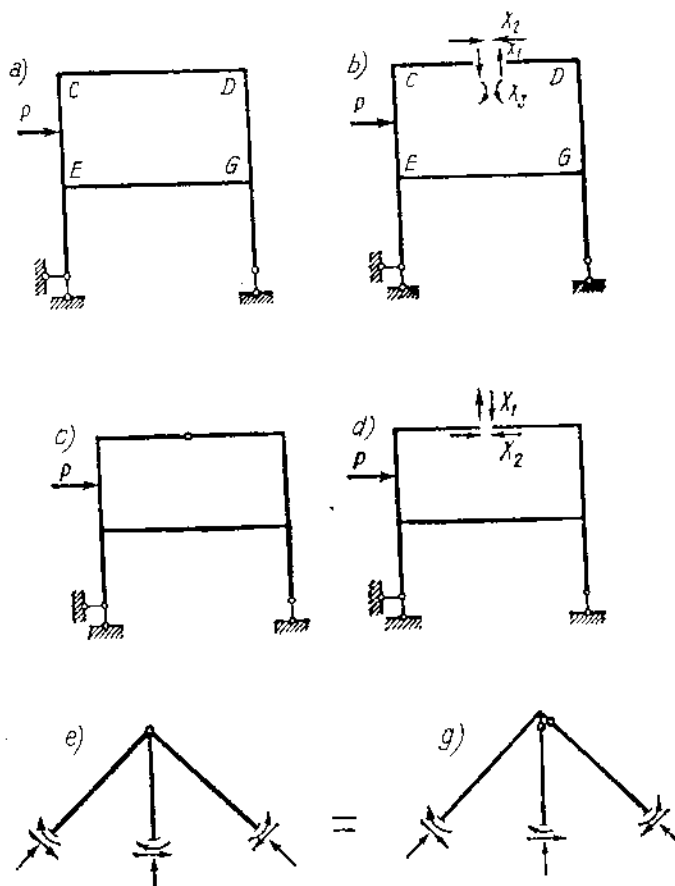
$$n = 3K + T - D \quad (1)$$

Ví dụ, hệ trên hình 1.7c có :

$$K = 1 : T = D = 0$$

$$\Rightarrow n = 3 \times 1 + 0 - 0 = 3$$

Đối với hệ không gian mỗi chu vi kín có sáu bậc siêu tĩnh. Bởi vì, mỗi



Hình 1.8

mặt cắt có sáu ẩn số là sáu thành phần nội lực gồm 2 mômen uốn, 1 mômen xoắn, 2 lực cắt và 1 lực dọc. Do đó, bậc siêu tĩnh của hệ không gian được tính như sau :

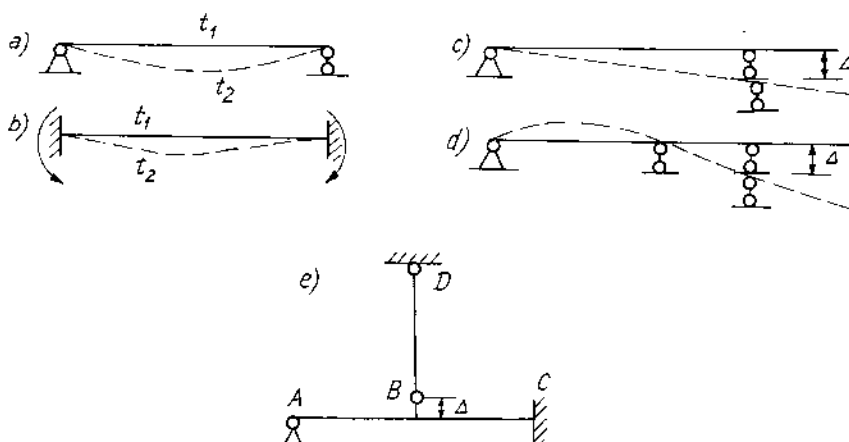
$$n = 6K + T - D \quad (2)$$

Từ các phân tích trên ta thấy liên kết "thừa" cũng có thể là những liên kết ngoại hoặc những liên kết nội. Ta gọi những hệ có những liên kết ngoại "thừa" là những hệ siêu tĩnh ngoại và gọi hệ có liên kết "thừa" nội là những hệ siêu tĩnh nội (hình 1.8a,c). Cần phải hiểu rằng thuật ngữ "liên kết thừa" chỉ có tính chất quy ước. Bởi vì, chỉ để đảm bảo cho hệ bất biến hình hình học thì chúng là "thừa", nhưng sự có mặt của chúng sẽ tạo cho hệ làm việc tốt hơn rất nhiều so với hệ tĩnh định cùng loại.

#### 4. Đặc điểm làm việc của hệ siêu tĩnh

Tất cả các hệ siêu tĩnh mà khung chỉ là trường hợp riêng đều có những thuộc tính chung sau đây :

- 1) Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào quan hệ độ cứng của các cấu kiện.
- 2) Các liên kết thừa được cấu tạo thích hợp sẽ tạo ra sự phân bố nội lực hợp lý trong các cấu kiện kết cấu.
- 3) Chuyển vị gây ra do tải trọng ngoài ở trong hệ siêu tĩnh nhỏ hơn so với trong hệ tĩnh định tương ứng, bởi vì các liên kết thừa làm tăng độ cứng của hệ.



Hình 1.9

- 4) Dưới tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ của môi trường xung quanh hoặc do sự nung nóng các cấu kiện của kết cấu, cũng như sự có mặt các chuyển vị cưỡng bức do lắp ráp hoặc chế tạo không chính xác v.v. trong các hệ siêu tĩnh sẽ xuất hiện các nội lực. Điều này không xảy ra trong các hệ tĩnh định. Trên hình 1.9a,c là các hệ tĩnh định, còn trên các hình 1.9b,d là các hệ siêu tĩnh tương ứng. Trên hình 1.9e mô tả chuyển vị cưỡng bức do chế tạo không chính xác ở mối nối B.
- 5) Khi các liên kết "thừa" vì một lý do nào đó bị loại bỏ thì kết cấu vẫn không thể bị phá hủy, bởi vì khi đó kết cấu vẫn là hệ bất biến hình.

## Chương 2

# CÁC NGUYÊN LÝ, CÁC ĐỊNH LÝ VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN TRONG CƠ HỌC KẾT CẤU

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu trước một số nội dung cơ bản để phục vụ cho các chương tiếp theo.

## I. NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN

### §1. BIẾN PHÂN VÀ PHIẾM HÀM

Ta hãy xét hai đường cong  $y(x)$  và  $y_1(x)$  cùng đi qua hai điểm A và B trong mặt phẳng  $xOy$  (hình 2.1a). Hiệu giữa  $y(x)$  và  $y_1(x)$  là vô cùng bé được gọi là biến phân (chính xác là biến phân loại 1) và ký hiệu là  $\delta y$ . Biến phân  $\delta y$  biểu thị sự thay đổi vô cùng bé của hàm tại một giá trị biến  $x$  cố định.

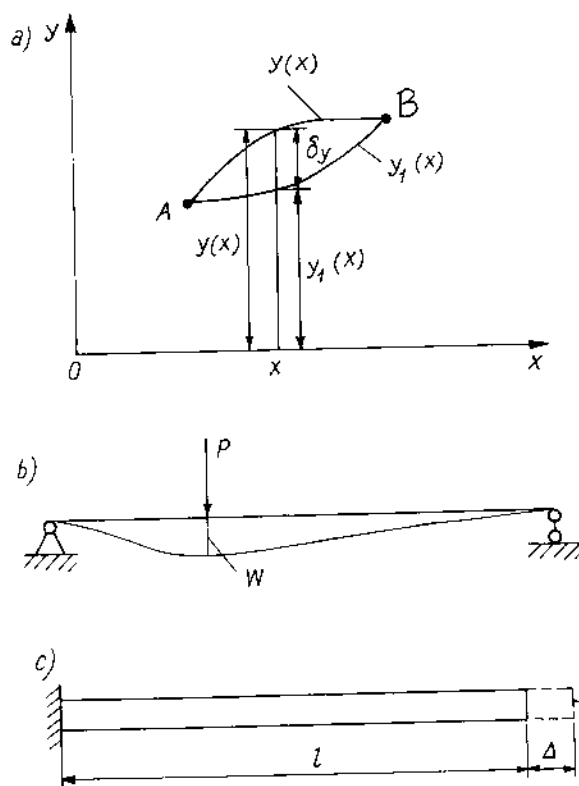
Khi ký hiệu độ dài của đường cong  $y(x)$  là  $L$  thì đường cong  $y_1(x)$  sẽ có chiều dài khác. Vì vậy, nói chung có thể nói rằng :

$$L = L[y(x)] \quad (2.1)$$

hay là

$$\Pi = \Pi[y(x)] \quad (2.2)$$

Đại lượng biến đổi  $\Pi$  được gọi là phiếm hàm. Nó là hàm của hàm  $y(x)$  và ứng với mỗi hàm  $y(x)$  ta có  $\Pi$  là một số xác định. Về sau chúng ta hiểu  $\Pi$  là một đại lượng năng lượng nào đó (một tích phân xác định) và được gọi là thế năng toàn phần. Thế năng này có thể được biểu diễn qua chuyển vị hoặc ứng suất. Chúng là những hàm của 1, 2 hoặc 3 biến tùy thuộc vào dạng bài toán. Việc tìm nghiệm của các bài toán về sau ta sẽ thấy, liên quan



Hình 2.1

đến việc tìm cực tiểu (chính xác hơn là giá trị bình ổn) của một phiếm hàm nào đó. Bài toán của phép tính biến phân chính là ở đó. Chính vì vậy mà những phương pháp giải các bài toán trong cơ học có dùng đến phép tính biến phân được gọi là phương pháp biến phân.

## §2. NGUYÊN LÝ BẢO TOÀN NĂNG LƯỢNG CƠ HỌC

Nếu một kết cấu chịu tác dụng của ngoại lực thì nó bị biến dạng.

Giả sử dầm AB (hình 2.1b) chịu một lực đặt tĩnh (tăng dần từ 0 đến  $P$ ). Độ võng của dầm ở điểm đặt lực là  $w$ . Trong quá trình biến dạng  $P$  thực hiện một công :

$$A_c = \frac{1}{2} Pw \quad (2.3)$$

Dưới tác dụng của ngoại lực, vật thể đàn hồi bị biến dạng và trong lòng nó sẽ xuất hiện các thành phần nội lực. Công do các nội lực này được ký hiệu là  $A_i$ . Khi xem lực là bảo toàn, nghĩa là sau khi bỏ tải thì kết cấu hoàn toàn trở về trạng thái và vị trí ban đầu, thì công cũng như biến dạng là thuận nghịch (không có sự mất mát nào về năng lượng xảy ra). Năng lượng mà kết cấu tích lũy được trong quá trình bị biến dạng để đưa kết cấu từ trạng thái biến dạng về trạng thái hoàn toàn ban đầu gọi là thế năng. Thế năng này phụ thuộc vào vị trí của các chất điểm, nghĩa là phụ thuộc vào biến dạng. Thế năng của các nội lực được gọi là thế năng biến dạng và được ký hiệu là  $U$ . Nó bằng công của nội lực với dấu ngược lại :

$$U = -A_i \quad (2.4)$$

Theo định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$A_c = -A_i \quad (2.5)$$

hay

$$A_c + A_i = 0 \quad (2.6)$$

Đây chính là nội dung của nguyên lý bảo toàn năng lượng cơ học.

### §3. NĂNG LƯỢNG BIẾN DẠNG VÀ NĂNG LƯỢNG BÙ

Chúng ta hãy tưởng tượng một thanh chịu kéo bởi lực  $P$  (hình 2.1c), được tăng dần từ 0 đến  $P_1$  (hình 2.2a), độ dãn dài khi ấy là  $\Delta_1$ . Một cách tổng quát biến dạng đó trong miền đàn hồi là phi tuyến. Công mà lực  $P$  sinh ra là :

$$A = \int_0^{\Delta_1} Pd\Delta \quad (2.7)$$

Tích phân này tương ứng với diện tích Oac trên hình 2.2a. Công này được lưu trữ lại trong thanh dưới dạng thế năng biến dạng :

$$A = U \quad (2.8)$$

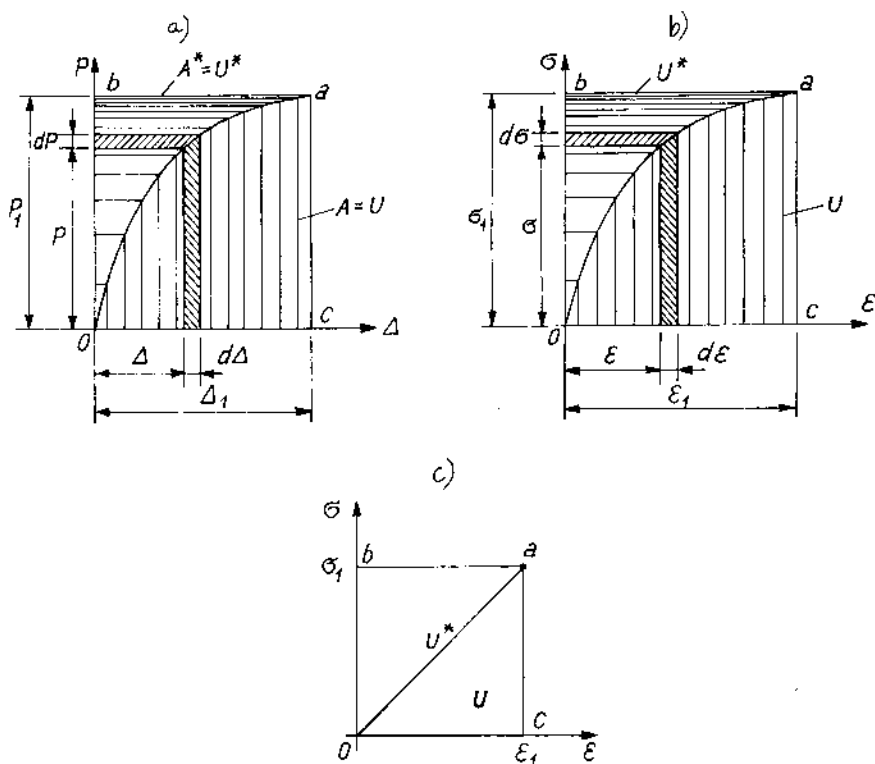
Tương tự ta có năng lượng riêng (hình 2.2b) :



$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma d\varepsilon \quad (2.9)$$

Do đó, năng lượng toàn phần là :

$$U = \int_V u dV \quad (2.10)$$



**Hình 2.2**

Trong trường hợp biến dạng là tuyến tính (hình 2.2c) :

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} \quad (2.11)$$

Bây giờ chúng ta khảo sát phần diện tích  $Oab$  (hình 2.2a). Diện tích này được gọi là công bù và ký hiệu là  $A^*$  và được xác định bởi tích phân :

$$A^* = \int_0^{P_1} \Delta dP \quad (2.12)$$

Chúng ta gọi độ lớn của công bù  $A^*$  là năng lượng bù và ký hiệu là  $U^*$ .  
Cụ thể là :

$$U^* = A^* \quad (2.13)$$

Vì rằng :

$$A + A^* = P_1 \cdot \Delta_1 \quad (2.14)$$

Năng lượng bù riêng và năng lượng bù toàn phần tương ứng có biểu thức :

$$u^* = \int_0^{\sigma_1} \varepsilon d\sigma \quad (2.15)$$

và

$$U = \int_V u^* dV \quad (2.16)$$

Trường hợp các quan hệ  $P = P(\Delta)$  và  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  là tuyến tính thì :

$$A = A^* ; \quad U = U^* ; \quad u = u^* \quad (2.17)$$

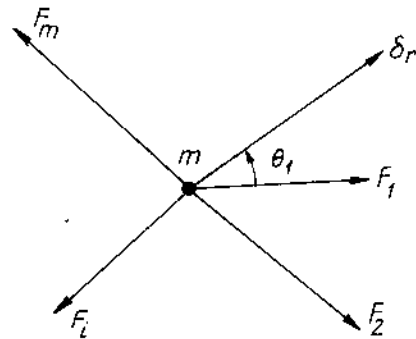
## II. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ CỦA LAGRANGE

### §1. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ ĐỐI VỚI MỘT CHẤT ĐIỂM

Giả sử có một chất điểm tự do  $m$  chịu tác dụng của một hệ lực cân bằng (hình 2.3).

Chúng ta ký hiệu  $\delta_r$  là chuyển vị khả dĩ của chất điểm  $m$  không do các lực  $F_i$  này mà do một nguyên nhân nào đó gây ra, còn độ lớn cũng như phương chiều của các lực được xem là không đổi.

Khi đó, công khả dĩ của lực  $F_1$  được tính :



Hình 2.3.

$$F_1 \delta_1 \cos \theta_1 = F_{1r} \delta r \quad (2.18)$$

Ở đây,  $F_{1r}$  là hình chiếu của  $F_1$  lên phương  $\delta r$ . Vì vậy, công nguyên tố của tất cả các lực có dạng :

$$\delta A = F_{1r} \delta r + F_{2r} \delta r + \dots + F_{nr} \delta r = \left( \sum_{i=1}^n F_{ir} \right) \delta r \quad (2.19)$$

Vì chất điểm ở trạng thái cân bằng cho nên  $\sum_{i=1}^n F_{ir} = 0$ . Do đó :

$$\delta A = 0 \quad (2.20)$$

Nguyên lý công khả dĩ (nguyên lý Larange) được phát biểu như sau :  
*"Nếu một chất điểm ở trạng thái cân bằng thì tổng công của các lực trên các chuyển vị khả dĩ bằng không"*

Nhân tiện, ta cũng có thể chứng minh điều kiện cân bằng của hệ lực như sau : Vì  $\delta r$  là chuyển vị khả dĩ tùy ý nên  $\delta r \neq 0$ , do vậy từ (2.19) ta

$$\text{rút ra : } \sum_{i=1}^n F_{ir} = 0.$$

Đây là điều kiện cân bằng của hệ lực  $F_i$  đặt vào điểm m.

## §2. NGUYÊN LÝ CÔNG KHẢ DĨ CỦA LAGRANGE ĐỐI VỚI HỆ THANH DÀN HỒI

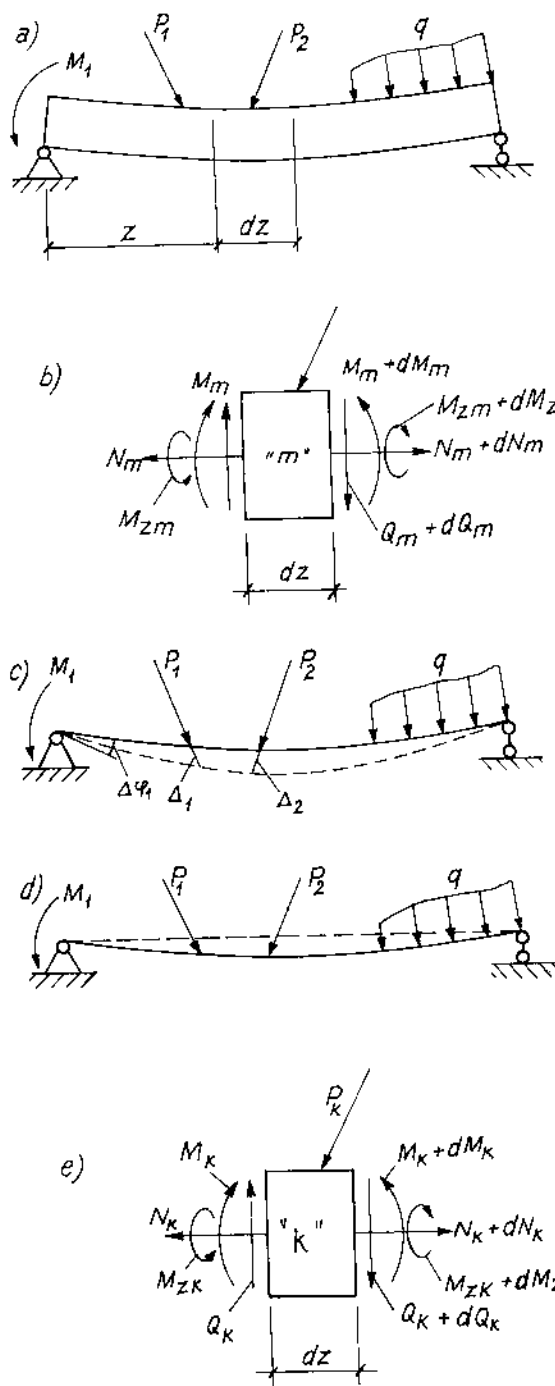
### 1. Công khả dĩ của ngoại lực

Bởi vì, công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ do một nguyên nhân bất kỳ nào đó không phải do các lực này gây ra, cho nên để tính công khả dĩ đối với hệ thanh dàn hồi ta cần tạo ra trạng thái "k" và trạng thái "m" và được hiểu như sau :

- Trạng thái "k" là trạng thái chịu các lực  $P_k$ .

- Trạng thái "m" là trạng thái chịu các nguyên nhân "m". Các nguyên nhân này có thể là tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và có thể là các chuyển vị cưỡng bức của các liên kết v.v.

Giả sử dưới tác dụng của ngoại lực (hình 2.4a) dầm bị biến dạng và nằm ở trạng thái cân bằng.



Hình 2.4

Ta tách từ dầm bị biến dạng một phân tố có chiều dài  $dz$ , trên các mặt cắt ngang của nó có các thành phần nội lực như hình 2.4b. Bây giờ chúng ta truyền cho dầm ở trạng thái biến dạng một chuyển vị khả dĩ (đường nét đứt trên hình 2.4c) khi không phá hủy các liên kết nội và ngoại của dầm. Ngoại lực và nội lực tác dụng lên phân tố khảo sát khi chịu các chuyển vị khả dĩ đều có trị số và phương chiều không đổi. Cũng có thể tạo ra các chuyển vị khả dĩ bằng cách khác như trên hình 2.4d. Ở đây các chuyển vị khả dĩ được thừa nhận là các chuyển vị từ trạng thái biến dạng về trạng thái không biến dạng (trạng thái ban đầu). Với tư cách của các chuyển vị khả dĩ ta có thể lấy các chuyển vị được sinh ra bởi tác dụng của trọng tải, nhiệt độ, độ lún gối tựa bất kỳ. Ví dụ lấy các chuyển vị do các giá trị cuối cùng của lực tác dụng làm chuyển vị khả dĩ  $\Delta_k$ . Khi đó công khả dĩ của các ngoại lực  $P_m$  ở trạng thái thực "m" (hình 2.4a) trên các chuyển vị  $\Delta_k$  là :

$$\delta\Delta_{me} = P_1\Delta_1 + M_1\Delta_{\varphi_1} + P_2\Delta_2 + \dots \quad (2.21)$$

Khác với công thức trong công thức (2.3), ở đây không có thừa số  $1/2$  vì lực sinh công trong quá trình thực hiện các chuyển vị khả dĩ là bất biến về độ lớn và phương. Hoàn toàn tương tự, nếu gọi  $\Delta_{km}$  là các chuyển vị ở trạng thái "m" do các nguyên nhân "m" gây ra tương ứng với các lực  $P_k$  ở trạng thái "k", ta có thể mở rộng định nghĩa công khả dĩ như sau :

$$\delta A_{ke} = \sum P_{ik}\Delta_{km} \quad (2.21a)$$

Nghĩa là công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m" bằng tổng các tích giữa các ngoại lực tác dụng ở trạng thái "k" với những chuyển vị tương ứng ở trạng thái "m".

## 2. Công khả dĩ của nội lực

Công của nội lực có thể được xác định qua các thành phần nội lực, ứng suất và biến dạng. Đối với dầm (hình 2.4a), ta có thể lấy chuyển vị do một hệ lực mới bất kỳ  $P_k$  nào đó gây ra làm chuyển vị khả dĩ. Giả sử dưới tác dụng của hệ ngoại lực mới này, trên các mặt cắt của phân tố (hình 2.4e) có các thành phần nội lực là :  $M_k$ ,  $Q_k$ ,  $M_{zk}$  và  $N_k$ . Khi đó, ví dụ biến dạng góc

do  $M_k$  gây ra là :  $\frac{M_k dz}{EJ}$ . Biến dạng này có thể xem như một chuyển vị khả dĩ đối với  $M_m$  v.v... Tương tự như vậy, ta có thể viết công khả dĩ của các nội lực như sau :

$$\begin{aligned} \delta A_i = & \sum \int_{l_j} \frac{M_m M_k dz}{EJ} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q_m Q_k dz}{GF} + \\ & + \sum \int_{l_j} \frac{N_m N_k dz}{EF} + \sum \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk} dz}{GJ_p} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Để thấy rằng công thức của các nội lực  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  được viết như công thức (2.22) nhưng có thừa số  $1/2$ . Cụ thể là :

$$\begin{aligned} A_i = & \sum \int_{l_j} \frac{M^2 dz}{2EJ} + \sum \int_{l_j} \gamma \frac{Q^2 dz}{2GF} + \\ & + \sum \int_{l_j} \frac{N^2 dz}{2EF} + \sum \int_{l_j} \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Các tích phân trong (2.22) và (2.23) là những tích phân xác định được lấy trên tất cả các đoạn  $l_j$  của hệ.

Bây giờ ta xác định công khả dĩ khi hệ chịu sự biến thiên của nhiệt độ. Ta gọi  $t_{1m}$  và  $t_{2m}$  là sự thay đổi nhiệt độ ở thớ trên và thớ dưới của thanh.

Giả sử rằng quy luật biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao mặt cắt là luật bậc nhất thì biểu đồ biến thiên nhiệt độ có dạng như trên hình 2.5a.

Từ hình 2.5a, ta xác định được độ biến thiên nhiệt độ ở trục thanh :

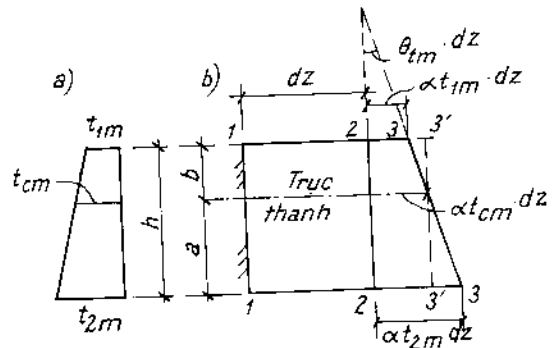
$$t_{cm} = \frac{at_{1m} + bt_{2m}}{h}$$

Nếu  $a = b = h/2$  ; ta

có :

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$$

Để lập các công thức ta giả thiết  $t_{1m} > 0$  và  $t_{2m} > t_{1m}$  mặt cắt 1-1 ở đầu trái của phần tử là cố định. Gọi  $\alpha$  là hệ số dẫn nở vì nhiệt của vật liệu ta có : thớ trên của



Hình 2.5

phần tử sẽ giãn dài bằng  $\alpha t_{1m} dz$ , trục phần tử sẽ giãn dài là  $\alpha t_{cm} dz$  và thớ dưới phần tử sẽ giãn dài là  $\alpha t_{2m} dz$  (hình 2.5b). Như vậy phần tử có hai thành phần biến dạng vì nhiệt như sau :

Độ giãn dài dọc trục  $\delta z$  do nhiệt độ  $t_{cm}$  gây ra :

$$\delta z = \varepsilon_{tm} dz = \alpha t_{cm} dz \quad (b)$$

Góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt 1-1 và 2-2 là  $\delta\varphi$  :

$$\delta\varphi = \theta_{tm} dz = \frac{\alpha t_{2m} dz - \alpha t_{1m} dz}{h} = \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz \quad (c)$$

Vậy công khả dĩ  $\delta A_{it}$  của các nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" do sự biến thiên nhiệt độ gây ra bằng :

$$\delta A_{it} = \sum_j \int M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_j \int N_k \cdot \alpha t_{cm} dz \quad (2.24)$$

Trong trường hợp hệ đàn hồi là một hệ chịu lực phức tạp như trên hình 2.4 thì ngoài công khả dĩ của các ngoại lực còn phải kể đến công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng khả dĩ tương ứng. Năm 1833, S. D. Poisson đã phát biểu nguyên lý công khả dĩ của Lagrange đối với hệ đàn hồi như sau :

*Nếu một cơ hệ biến dạng đàn hồi có lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ  $\delta A_e$  của các ngoại lực trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng và công khả dĩ của các nội lực  $\delta A_i$  trên biến dạng khả dĩ tương ứng phải bằng không.*

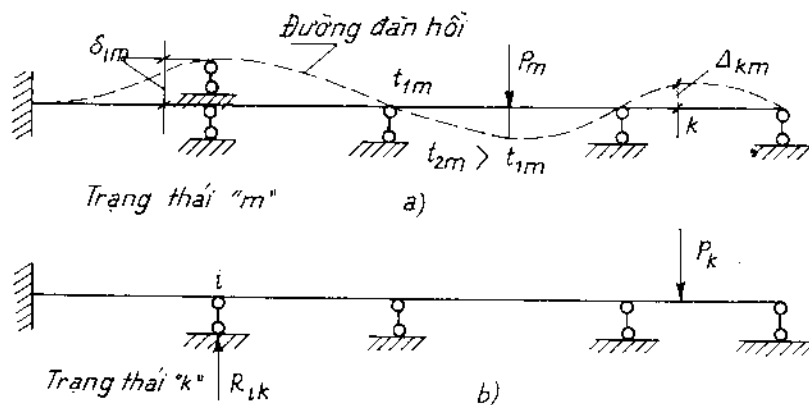
Cụ thể là :

$$\delta A_e + \delta A_i = 0 \text{ hay } \delta A_e = -\delta A_i \quad (2.25)$$

### §3. TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH BẰNG CÔNG THỨC MAXWELL-MORH

Trong mục này ta sẽ áp dụng nguyên lý công khả dĩ vào việc xây dựng một công thức tổng quát nhất để tính những chuyển vị bất kỳ của các hệ đàn hồi bất kỳ dạng hệ thanh. Giả sử có một hệ đàn hồi bất kỳ ở trạng thái "m" chịu đồng thời các tác dụng ngoài cho trước như : tải trọng  $P_m$  : các

chuyển vị cường bậc  $\delta_{im}$  tại liên kết "i" ; sự thay đổi nhiệt độ  $t_{2m}, t_{1m}$  (hình 2.6a).



Hình 2.6

Yêu cầu tính chuyển vị  $\Delta_{km}$  bất kỳ tại mặt cắt k bất kỳ ?

Ví dụ, tính chuyển vị thẳng đứng tại k? Để có công khả dĩ ta cần tạo ra một trạng thái khả dĩ "k" suy ra từ trạng thái thực "m", trên đó hệ chỉ chịu một lực  $P_k$  đặt tại k theo phương cần tính chuyển vị (hình 2.6b). Theo công thức (2.25) về công khả dĩ của nội lực và ngoại lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị và biến dạng ở trạng thái "m", ta có thể viết :

$$\begin{aligned}
 P_k \Delta_{km} + \sum_{i=1}^n R_{ik} \delta_{im} &= \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_k M_m}{EJ} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{N_k N_m}{EF} dz + \\
 &\sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{\gamma Q_k Q_m}{GF} dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_{zm} M_{zk}}{GJ_p} dz + \\
 &\sum_{j=1}^n \int_{l_j} M_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{j=1}^n \int_{l_j} N_k \alpha t_{cm} dz
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Khi ký hiệu :

$$\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k} ; \bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k} ; \bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k} ; \bar{M}_{kz} = \frac{M_{kz}}{P_k} ; \bar{R}_{ik} = \frac{R_{ik}}{P_k} ,$$



(chúng là những nội lực và phản lực do lực  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k"), ta có công thức tính chuyển vị của hệ đàn hồi tuyến tính trong trường hợp tổng quát như sau :

$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & - \sum_i^n \bar{R}_{ik} \delta_{im} + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_k M_m}{EJ} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{N}_k N_m}{EF} dz + \\ & \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\gamma \bar{Q}_k Q_m}{GF} dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm}}{GJ_p} dz + \\ & \sum_{j=1} \int_{l_j} \bar{M}_k \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) dz + \sum_{j=1} \int_{l_j} \bar{N}_k \alpha t_{cm} dz \end{aligned} \quad (2.27)$$

Công thức (2.27) chỉ đúng với các hệ thanh thẳng và thanh cong có độ cong bé, trong đó :

- Lực  $P_k = 1$  được chọn chiều tùy ý, còn phương thì phụ thuộc vào phương chuyển vị cần tìm. Nếu kết quả tính ra  $\Delta_{km} > 0$  thì chiều chuyển vị cần tính là chiều của lực  $P_k = 1$  đã chọn. Nếu  $\Delta_{km} < 0$  thì chiều chuyển vị cần tính là chiều ngược với chiều  $P_k = 1$  đã chọn.
- Dấu tổng trong số hạng thứ nhất ở vế phải được lấy theo "i" (số liên kết có chuyển vị cưỡng bức  $i = \overline{1, n}$ ).  $\bar{R}_{ik}$  là phản lực ở liên kết "i" do  $P_k = 1$  gây ra ở trạng thái "k".  $\delta_{im}$  là chuyển vị cưỡng bức ở liên kết "i" của trạng thái "m" do các nguyên nhân ở trạng thái "m" gây ra. Khi  $\bar{R}_{ik}$  cùng chiều với  $\delta_{im}$  thì  $\bar{R}_{ik} \cdot \delta_{im} > 0$ .
- Các tích phân trong (2.27) là những tích phân xác định trong đoạn thanh thứ j có chiều dài  $l_j$ , trên đó hàm dưới dấu tích phân là liên tục. Dấu tổng  $\left( \sum_{j=1} \int_{l_j} \dots \right)$  được áp dụng cho tất cả các đoạn thanh của hệ. Các đại lượng  $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{M}_{zk}, M_m, N_m, Q_m, M_{zk}$  lần lượt là các biểu thức của nội lực trong đoạn  $l_j$  ở trạng thái "k" và trạng thái "m".

### III. CÁC ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ TRONG HỆ ĐÀN HỒI

#### §1. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÔNG KHẢ DĨ CỦA NGOẠI LỰC

Ta hãy khảo sát một hệ đàn hồi tuyến tính ở trạng thái "k" và trạng thái "m", chịu các ngoại lực tương ứng  $P_{ik}$  và  $P_{im}$ . Theo công thức (2.25) và (2.21a), (2.22) ta có thể viết :

Công khả dĩ của các ngoại lực  $P_{ik}$  ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m" như sau :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} P_{ik} \Delta_{km} &= \sum_j \int_{l_j} \frac{M_m M_k}{EJ} dz + \sum_j \int_{l_j} \frac{N_m N_k}{EF} dz + \\ &+ \sum_j \int_{l_j} \gamma \frac{Q_m Q_k}{GF} dz + \sum_j \int_{l_j} \frac{M_{zm} \bar{M}_{zk}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác, công khả dĩ của các ngoại lực  $P_{im}$  ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k" bằng :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1} P_{im} \Delta_{mk} &= \sum_j \int_{l_j} \frac{M_k M_m}{EJ} dz + \sum_j \int_{l_j} \frac{N_k N_m}{EF} dz + \\ &+ \sum_j \int_{l_j} \gamma \frac{Q_k Q_m}{GF} dz + \sum_j \int_{l_j} \frac{M_{zk} M_{zm}}{GJ_p} dz \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta rút ra :

$$\sum_{i=1} P_{ik} \Delta_{km} = \sum_{i=1} P_{im} \Delta_{mk} \quad (2.28)$$

Công thức này do E. Betti đề xuất năm 1872 và được phát biểu dưới dạng một định lý sau đây :

**Định lý :** Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k".

## §2. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÁC CHUYỂN VỊ ĐƠN VỊ

Giả sử có một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái "m" và "k" như hình 2.7. Ở mỗi trạng thái hệ chỉ chịu một lực tập trung suy rộng tương ứng là  $P_m$  và  $P_k$ .

Theo định lý Betti ta có thể viết :

$$P_k \cdot \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk}$$

hay

$$\Delta_{km}/P_m = \Delta_{mk}/P_k \quad (a)$$

Tỷ số  $\Delta_{km}/P_m = \delta_{mk}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m = 1$  gây ra.

Tương tự như vậy ta có

$$\delta_{km} = \frac{\Delta_{mk}}{P_k} \text{ là chuyển vị tương}$$

ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k = 1$  gây ra.

Từ (a) rút ra :

$$\delta_{mk} = \delta_{km} \quad (2.29)$$

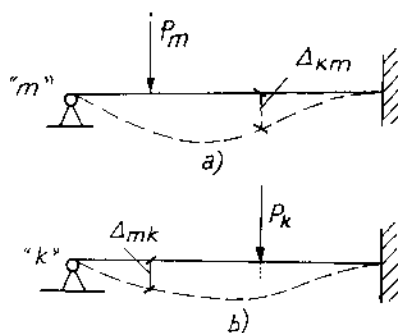
Kết quả này do J. Maxwell đề xuất năm 1834 cho thấy nếu ở mỗi trạng thái chỉ chịu một lực bằng đơn vị thì các chuyển vị theo phương của lực này do lực kia gây ra sẽ bằng nhau.

**Định lý :** Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do lực  $P_k$  gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_k$  do lực  $P_m$  gây ra.

## §3. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ VỀ CÁC PHẢN LỰC ĐƠN VỊ

Chúng ta hãy xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái "m" và "k" chịu các chuyển vị cưỡng bức ở các liên kết m và k (hình 2.8).

Theo định lý về công tương hỗ của ngoại lực (2.28) ta có :



Hình 2.7

$$R_{mk}\Delta_m = M_{km}\Delta_k$$

hay

$$R_{mk}/\Delta_k = M_{km}/\Delta_m \quad (b)$$

Tỷ số  $\frac{R_{mk}}{\Delta_k} = r_{mk}$  là phản lực "đơn vị" tại liên kết m do chuyển vị cưỡng

bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra.

Tương tự tỷ số  $\frac{M_{km}}{\Delta_m} = r_{km}$  là phản lực

"đơn vị" tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra.

Theo (b) ta có :

$$r_{mk} = r_{km} \quad (2.30)$$

Kết quả (2.30) do

L. Rayleigh đề xuất năm 1875 và được phát biểu như sau :

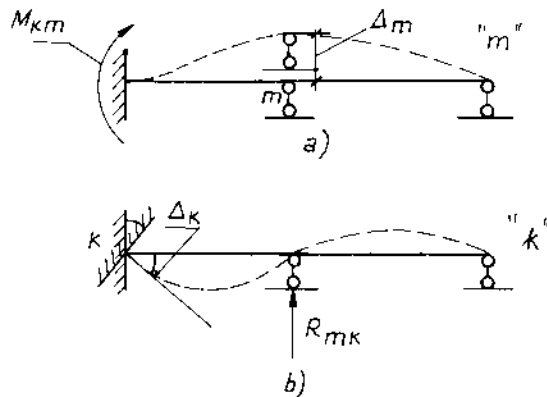
**Định lý :** Đối với hệ đàn hồi tuyến tính phản lực "đơn vị" tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.

Cần chú ý rằng thuật ngữ phản lực "đơn vị" ở đây là do nguyên nhân bằng đơn vị gây ra chứ không phải nó bằng đơn vị.

#### §4. ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỖ VỀ CÁC CHUYỂN VỊ ĐƠN VỊ VÀ PHẢN LỰC ĐƠN VỊ

Ta lại khảo sát một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái "m" và "k" (hình 2.9).

Ở trạng thái "m" hệ chịu một lực  $P_m$ , còn ở trạng thái "k" hệ chịu một chuyển vị cưỡng bức  $\Delta_k$  tại liên kết k.

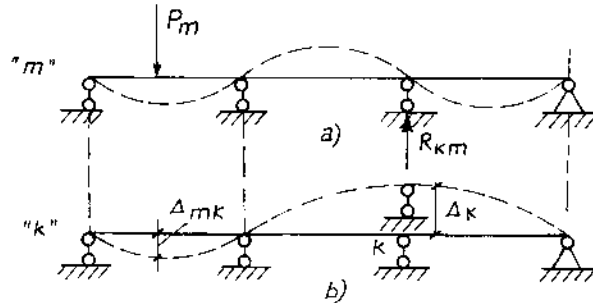


Hình 2.8

Nếu gọi  $\delta A_e^k$  là công khả dĩ của các phản lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị tương ứng của hệ ở trạng thái "m" ta có :

$$\delta A_e^k = 0$$

Theo định lý Betti (2.28) thì :



Hình 2.9

$$P_m \cdot \Delta_{mk} + R_{km} \cdot \Delta_k = \delta A_e^k = 0$$

hay

$$R_{km}/P_m = -\Delta_{mk}/\Delta_k$$

Tỷ số  $R_{km}/P_m = \tilde{r}_{km}$  là phản lực tại liên kết k do lực  $\bar{P}_m = 1$  gây ra.

Tỷ số  $\Delta_{mk}/\Delta_k = \tilde{\delta}_{mk}$  là chuyển vị tương ứng với vị trí đặt lực  $P_m$  nhưng do chuyển vị cưỡng bức  $\bar{\Delta}_k = 1$  gây ra.

Do đó với ký hiệu trên ta có :

$$\tilde{r}_{km} = -\tilde{\delta}_{mk} \quad (2.31)$$

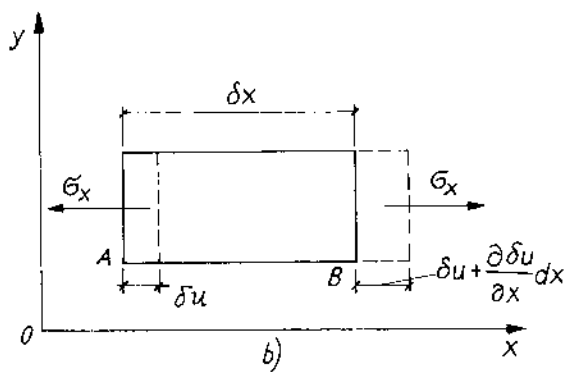
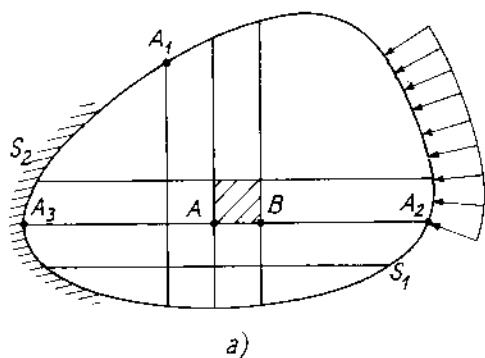
Đây là công thức của định lý Rayleigh thứ hai.

**Định lý :** Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do lực  $\bar{P}_m = 1$  gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực  $P_m$  do chuyển vị cưỡng bức  $\bar{\Delta}_k = 1$  tại liên kết k gây ra nhưng ngược dấu.

#### IV. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ ĐỐI VỚI VẬT THỂ ĐÀN HỒI BA CHIỀU

Có thể xem vật thể đàn hồi như một hệ chất điểm (hình 2.10). Giả sử rằng mỗi chất điểm của vật chịu một chuyển vị khả dĩ và công khả dĩ của các lực đặt vào chất điểm đó bằng không. Vì vậy công khả dĩ tổng cộng

cũng phải bằng không. Bạn đọc hãy chú ý đến một đặc điểm quan trọng của chất điểm thuộc vật (ví dụ, điểm A) so với chất điểm tự do. Tất cả các chất điểm của vật đều được ràng buộc với nhau để tạo thành vật. Liên kết này không bị phá hủy mỗi khi có chuyển vị khả dĩ nào đó. Nói khác đi, điều kiện liên tục phải luôn được bảo đảm. Điều kiện này sẽ luôn được thực hiện nếu chuyển vị khả dĩ được biểu diễn qua những hàm liên tục. Chuyển vị của điểm A không được cố định và ở đây việc lấy biến phân là được phép. Hoàn toàn như vậy có thể lấy biến phân của chuyển vị trên phần bề mặt tự do  $S_1$  (ví dụ, điểm  $A_1$  hoặc điểm  $A_2$ ). Nếu điểm (ví dụ, điểm  $A_3$ ) thuộc phần bề mặt ngàm chặt  $S_2$  (các chuyển vị được cố định và bằng không) thì biến phân của chuyển vị bằng không.



Hình 2.10

## §1. PHƯƠNG TRÌNH BIẾN PHÂN CỦA LAGRANGE

Ta hãy xét một phân tố được tách ra từ vật (hình 2.10a). Gọi các chuyển vị thực của điểm A là  $u, v, w$  và các chuyển vị khả dĩ tương ứng là  $\delta u, \delta v, \delta w$ . Chúng là những hàm liên tục của các tọa độ  $x, y, z$  phù hợp các điều kiện biên.

Chúng ta hãy khảo sát chuyển vị và công theo phương  $x$ . Nếu cho chuyển vị  $u$  một số giá  $\delta u$ , thì phân tố có vị trí mới khi điểm A có chuyển vị  $\delta u$ , còn điểm B nhận chuyển vị  $\delta u + \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx$  (hình 2.10b). Công khả dĩ của các lực tác dụng lên phân tố sẽ là :

$$\delta dA = \sigma_x \left( \delta u + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x \delta u dydz = \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dydz \quad (2.32)$$

Số gia của biến dạng :

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$\text{Nhưng với } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ thì } \delta \varepsilon_x = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.34)$$

Từ đó :

$$\delta \varepsilon_x = \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \quad (2.35)$$

Chú ý đến (2.35) thì biểu thức (2.32) được viết :

$$\delta dA = \sigma_x \delta \varepsilon_x dx dydz = E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dx dydz \quad (2.36)$$

Năng lượng biến dạng phân tố :

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dydz = \frac{E}{2} \varepsilon_x^2 dx dydz \quad (2.37)$$

Khi lấy biến phân theo  $\varepsilon_x$ , ta có số gia của thế năng phân tố :

$$\delta dU = E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dx dydz \quad (2.38)$$

Từ đó theo (2.36) và (2.38) ta có :

$$d\delta A = d\delta U \quad (2.39)$$

Khi tích phân (2.39) ta nhận được công toàn phần  $\delta A$  của các lực tác dụng tương hỗ giữa các phần tử và bằng số gia của thế năng  $\delta U$ . Cụ thể là :

$$\delta A = \delta U \quad (2.40)$$

hoặc là :

$$\delta U - \delta A = 0 ; \delta(U - A) = \delta \Pi = 0 \quad (2.41)$$

Ở đây ta đã đặt :

$$\Pi = U - A \quad (2.42)$$

là thế năng toàn phần của hệ.

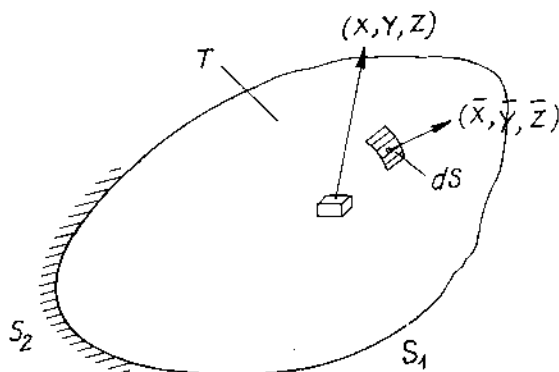
Đó là nguyên lý thế năng hay là nguyên lý biến phân của Lagrange

Nguyên lý được diễn đạt như sau : *"Trong số tập hợp các chuyển vị khả dĩ phù hợp các điều kiện biên thì những chuyển vị thỏa mãn điều kiện cân bằng sẽ cho thế năng của hệ một giá trị bình ổn. Ở trạng thái cân bằng ổn định đại lượng  $\Pi$  có giá trị cực tiểu".*

Phương trình biến phân của Lagrange là cơ sở để xây dựng các phương trình cân bằng và điều kiện biên. Nó còn là cơ sở của phương pháp chuyển vị trong cơ học kết cấu.

Trong trường hợp tổng quát của bài toán đàn hồi không gian thì (2.41) viết như thế nào?

Giả sử vật  $T$  có thể tích  $V$  chịu các lực thể tích đơn vị  $X, Y, Z$ , lực bề mặt đơn vị trên phần bề mặt  $S_1$ , và phần bề mặt  $S_2$  được ngàm chặt (hình 2.11). Khi lấy biến phân các chuyển vị, ta viết biểu thức  $\delta A$  như sau :



Hình 2.11



$$\delta A = \iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS \quad (2.43)$$

Trên cơ sở (2.43) biểu thức (2.41) được viết :

$$\iiint_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS - \delta U = 0 \quad (2.44)$$

Bởi vì khi lấy biến phân các chuyển vị thì các thành phần lực  $X, Y, Z$  và  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  không thay đổi, cho nên dấu  $\delta$  có thể đưa ra ngoài tích phân như một thừa số. Khi đó :

$$\delta \left[ \iiint_V (Xu + Yv + Zw) dV + \iint_{S_1} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS - U \right] = 0 \quad (2.45)$$

Trong dấu móc vuông là hiệu giữa công của các lực thể tích, lực bề mặt trên các chuyển vị khả dĩ và thế năng (năng lượng biến dạng với dấu ngược lại).

Năng lượng biến dạng riêng :

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (2.46)$$

Khi sử dụng định luật Hooke dạng thuận và dạng ngược, biểu thức  $u$  có dạng :

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (2.47)$$

Và dạng ngược của  $u$  theo biến dạng :

$$u = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_0 + G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (2.48)$$

trong đó :

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z ; \lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad (2.49)$$

Đôi khi năng lượng biến dạng riêng  $u$  thường được viết qua các thành phần chuyển vị. Đối với dầm và tấm các thành phần chuyển vị chỉ có một, cụ thể là độ võng  $w$ .

Con đường giải bài toán được mô tả ở trên khi các chuyển vị được lấy biến phân, tương đương với phương pháp chuyển vị. Có thể giải bài toán bằng con đường khác khi không phải chuyển vị được lấy biến phân mà các lực hoặc ứng suất được lấy biến phân. Quá trình này tương đương với phương pháp lực. Khi đó cần phải thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong cũng như trên biên  $S_1$  của vật thể.

## §2. NGUYÊN LÝ NĂNG LƯỢNG BÙ

Đối với vật thể  $T$  (hình 2.11) lực thể tích  $X, Y, Z$  ở trong toàn bộ vật thể và lực bề mặt  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  cố định trên phần  $S_1$ , vì vậy không thể lấy biến phân. Trên phần mặt  $S_2$  chuyển vị được cho trước, lực bề mặt chưa biết, vì vậy có thể lấy biến phân. Do đó, tương tự (2.44) ta có :

$$\iint_{S_2} (u\delta\bar{X} + v\delta\bar{Y} + w\delta\bar{Z}) dS - \delta U = 0 \quad (2.50)$$

Vì khi lấy biến phân các lực bề mặt thì các chuyển vị không đổi, nên dấu  $\delta$  được đưa ra ngoài dấu tích phân :

$$\delta \left[ \iint_{S_2} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dS - U \right] = 0 \quad (2.51)$$

Người ta gọi đại lượng :

$$A^* = \iint_{S_2} (u\bar{X} + v\bar{Y} + w\bar{Z}) dS = 0 \quad (2.52)$$

là công bù, còn

$$U - A^* = \Pi^* \quad (2.53)$$

là năng lượng bù.

Từ đó nguyên lý mới được rút ra :

$$\delta \Pi^* = 0 \quad (2.54)$$

được gọi là nguyên lý Castigliano hay nguyên lý năng lượng bù.

Nguyên lý được phát biểu như sau :

*"Trong tập hợp các ứng suất tĩnh thỏa mãn điều kiện cân bằng bên trong vật thể và trên phần bề mặt có ngoại lực cho trước thì các ứng suất*

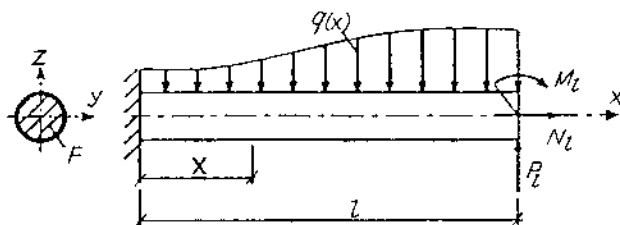
thỏa mãn điều kiện liên tục sẽ cho năng lượng bù giá trị bình ổn. Trong điều kiện cân bằng ổn định đại lượng  $\Pi^*$  có giá trị cực tiểu".

Đôi khi có thể sử dụng quá trình hỗn hợp, khi một phần được lấy biến phân theo chuyển vị, một phần lấy biến phân theo ứng suất.

Chúng ta sẽ chỉ ra các phương trình cơ bản và điều kiện biên được xây dựng như thế nào trên cơ sở của nguyên lý biến phân theo chuyển vị (2.41).

### §3. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Một dầm chịu lực như hình 2.12. Hãy thiết lập các phương trình vi phân cân bằng cơ bản và điều kiện biên theo 2 phương án khi chỉ kể đến ứng suất pháp?



Hình 2.12

- Biến dạng bé (tuyến tính)?
- Biến dạng lớn (phi tuyến hình học)?

**Giải**

- Biến dạng bé

Biến dạng do chỉ lực dọc :

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_1(x)}{dx} = u'_1(x)$$

$$\text{Do uốn :} \quad u_2(x) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

$$\text{và vì thế :} \quad u'_2(x) = -zw''(x) \quad (2)$$

$$\text{Biến dạng tổng cộng : } \varepsilon(x) = u'_1(x) - zw''(x) \quad (3)$$

$$\text{Khi lấy biến phân, ta có : } \delta\varepsilon = \delta u' - z\delta w'' \quad (4)$$

$$\text{Lực dọc :} \quad N(x) = \iint_F \sigma_x dydz \quad (5)$$

Mômen uốn : 
$$M(x) = \iint_F \sigma_x z dydz \quad (6)$$

Trên cơ sở của (2.41) ta viết :

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dx dy dz - \int_0^l q(x) \delta w(x) dx - \\ & - N_l \delta u(l) - Q_l \delta w(l) + M_l \delta w'(l) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ta viết lại (7) khi kể đến (4) :

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sigma_x (\delta u' - z \delta w'') dx dy dz - \int_0^l q \delta w dx - \\ & - N_l \delta u(l) - Q_l \delta w(l) + M_l \delta w'(l) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Ta hãy xét số hạng thứ nhất của (8) và kể đến các biểu thức (5) và (6), khi đó :

$$\begin{aligned} \iiint_V \sigma_x (\delta u' - z \delta w'') dx dy dz &= \int_0^l \left[ \iint_F \sigma_x \delta u' dy dz - \iint_F \sigma_x z \delta w'' dy dz \right] dx \\ &= \int_0^l N \delta u' dx - \int_0^l M \delta w'' dx \end{aligned} \quad (9)$$

Tích phân từng phần số hạng thứ nhất của (9) :

$$\int_0^l N \delta u' dx = N \delta u \Big|_0^l - \int_0^l \delta u N' dx \quad (10)$$

Tương tự đối với số hạng thứ hai của (9) :

$$\int_0^l M \delta w'' dx = M \delta w' \Big|_0^l - \int_0^l M' \delta w' dx \quad (11)$$

Tích phân từng phần số hạng thứ hai ở vế phải của (11) :

$$\int_0^l M' \delta w' dx = M' \delta w \Big|_0^l - \int_0^l M'' \delta w dx \quad (12)$$

Khi chú ý từ (9) đến (12) thì biểu thức (8) có dạng mới :

$$N \delta u_l - N \delta u_0 - \int_0^l \delta u N' dx + M \delta w'_l - M \delta w'_0 - M' \delta w_l + M' \delta w_0$$

$$-\int_0^l M'' \delta w dx - \int_0^l q \delta w dx - N_l \delta u(l) - Q_l \delta w(l) - M_l \delta w'(l) = 0 \quad (13)$$

Cuối cùng sau khi nhóm lại, ta có :

$$-\int_0^l \left[ N' \delta u + (M'' - q) \delta w \right] dx + (N - N_l) \delta u_l + \\ (-M' - Q_l) \delta w_l + (M - M_l) \delta w'_l = 0 \quad (14)$$

Bởi vì tổng (14) phải bằng không với biến phân bất kỳ thì mỗi số hạng phân biệt phải bằng không. Ở trong khoảng  $0 \leq x \leq l$ ,  $\delta u \neq 0$ , do đó :

$$N' = 0 \quad (15)$$

Tương tự ở trong khoảng này :

$$M'' - q = 0 \quad (16)$$

Khi  $x = l$  :

$$N - N_l = 0 \quad (17)$$

$$M' - Q_l = 0 \quad (18)$$

$$M - M_l = 0 \quad (19)$$

Quan hệ (15) và (16) là những phương trình vi phân, còn từ (17) đến 19) là những điều kiện biên tĩnh.

b) Biến dạng lớn (bài toán phi tuyến)

Biến dạng tổng cộng được viết như sau :

$$\varepsilon = u' - zw'' + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (20)$$

Khi lấy biến phân (20) theo chuyển vị, ta có :

$$\delta \varepsilon = \delta u' - z \delta w'' + w'' \delta w' \quad (21)$$

Trên cơ sở của (2.41) và (7) của bài toán trước, ta có :

$$\delta \Pi = \int_0^l \left[ \int_F^A \sigma_x \delta u' dydz - \int_F^B \sigma_x z \delta w'' dydz + \int_F^C \sigma_x w' \delta w' dydz \right] dx - \\ - \int_0^l q \delta w dx - N_l \delta u(l) - Q_l \delta w(l) + M_l \delta w'(l) = 0 \quad (22)$$

Các biểu thức trong móc ngoặc vuông được ký hiệu là A, B và C. Kể đến các biểu thức (5), (6) ta có :

$$A = \int_0^l \left[ \iint_F \sigma_x \delta u' dydz \right] dx = \int_0^l N \delta u' dx \quad (23)$$

$$B = \int_0^l \left[ \iint_F \sigma_x z \delta w'' dydz \right] dx = \int_0^l M \delta w'' dx \quad (24)$$

$$C = \int_0^l \left[ \iint_F \sigma_x w' \delta w' dydz \right] dx = \int_0^l N w' \delta w' dx \quad (25)$$

Tích phân A từng phần ta được :

$$A = N \delta u \Big|_0^l - \int_0^l N' \delta u dx \quad (26)$$

Tương tự đối với B :

$$B = M \delta w' \Big|_0^l - \int_0^l M' \delta w' dx \quad (27)$$

Khi tích phân số hạng thứ hai của (27) từng phần, ta có :

$$\int M' \delta w' dx = M' \delta w \Big|_0^l - \int_0^l M'' \delta w dx \quad (28)$$

Cuối cùng đối với B :

$$B = M \delta w' \Big|_0^l - M' \delta w \Big|_0^l + \int_0^l M'' \delta w dx \quad (29)$$

Tương tự đối với C :

$$C = \int_0^l N w' \delta w' dx = \int_0^l u dv = uv \Big|_0^l - \int_0^l v du \quad (30)$$

$$\text{trong đó : } u = N w', \quad dv = \delta w' dx \quad (31)$$

Bởi vì  $dv = \delta \frac{dw}{dx} dx = \delta dw$ , nên  $v = \delta \int dw = \delta w$ . Vì phân biểu thức  $u = N w'$  theo quy tắc tích hai hàm, ta được :

$$du = (N'w' + Nw'') dx$$

Cuối cùng C có dạng :

$$C = Nw'\delta w \Big|_0^l - \int_0^l (N'w' + Nw'') \delta w dx \quad (32)$$

Bây giờ ta viết lại biểu thức (22) khi kể đến các kết quả A, B và C :

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & N\delta u(l) - N\delta u(0) - \int_0^l N'\delta u dx - M\delta w'(l) + M\delta w'(0) + \\ & + M'\delta w(l) - M'\delta w(0) - \int_0^l M''\delta w dx + Nw'\delta w(l) - \\ & - Nw'\delta w(0) - \int_0^l (N'w' + Nw'') \delta w dx - \int_0^l q\delta w dx - \\ & - N_l\delta u(l) - Q_l\delta w(l) + M_l\delta w'(l) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Chúng ta nhóm các số hạng tích phân lại và so sánh với 0 :

$$- \left[ \int_0^l N'\delta u dx + \int_0^l (M'' + N'w' + Nw'' + q) \delta w dx \right] = 0$$

$$\text{Vì } \delta u \neq 0 \text{ nên : } N' = 0 \quad (34)$$

Vì  $\delta w \neq 0$ , nên từ tích phân thứ hai, ta có :

$$M'' + N'w' + Nw'' + q = 0 \quad (35)$$

$$\text{hay } M'' + (Nw')' + q = 0 \quad (36)$$

Các quan hệ (34) và (35) hoặc (36) là những phương trình vi phân của bài toán. Nhóm các số hạng còn lại trong (33) và cho bằng không :

$$(N - N_l) \delta u(l) = 0$$

Vì  $\delta u(l) \neq 0$ , cho nên :

$$N = N_l \quad (37)$$

$$\begin{aligned} N\delta u(0) = 0 \text{ vì } \delta u(0) = 0. \text{ Và vì } \delta w'_1 \neq 0, \text{ nên từ biểu thức} \\ (-M + M_l) \delta w'(l) = 0, \text{ rút ra : } M = M_l \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned}
M\delta w'(0) &= 0 \text{ vì } \delta w'(0) = 0. \text{ Vì } \delta w_l \neq 0, \text{ nên từ biểu thức} \\
(M' + Nw' - Q_l), \delta w_l &= 0, \text{ suy ra : } M' + Nw' - Q_l = 0 \\
(-M' + Nw') \delta w(0) &= 0 \text{ vì } \delta w(0) = 0
\end{aligned} \tag{39}$$

Vì vậy, các biểu thức (37) đến (39) là những điều kiện biên tĩnh học của bài toán phi tuyến được đặt ra ở trên.

## V. PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH-RITS

### §1. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp biến phân được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học là phương pháp dựa trên nguyên lý cực tiểu của thế năng toàn phần đã được nghiên cứu ở mục 10. Khi không làm giảm tính tổng quát của phương pháp chúng ta hãy minh họa nó qua bài toán uốn tấm. Ta biểu diễn mặt đàn hồi của tấm dưới dạng chuỗi :

$$w(x, y) = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x, y) \tag{2.55}$$

Ở đây  $f_i(x, y)$  là những hàm liên tục và được gọi là hàm tọa độ hay hàm cơ sở. Mỗi một hàm riêng biệt  $f_i(x, y)$  phải thỏa mãn các điều kiện biên động học và phản ánh tốt nhất mặt vồng thực của tấm :  $c_1, c_2, \dots, c_n$  là những thông số chưa biết được xác định từ điều kiện cực tiểu của thế năng toàn phần.

Điều kiện :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{2.56}$$

dẫn đến hệ phương trình đại số tuyến tính đối với các  $c_i$ . Giải hệ này ta được các hệ số  $c_i$  và thay chúng vào (2.55) để được mặt vồng cần tìm.

### §2. CÔNG KHẢ DỊ CỦA NGOẠI LỰC VÀ THẾ NĂNG BIẾN DẠNG

Nếu gọi  $u, v, w$  là các thành phần của chuyển vị thực;  $q_x, q_y, q_z$  là các thành phần của cường độ tải trọng phân bố,  $P_i$  là lực tập trung,  $\Delta_i$  là



chuyển vị của điểm đặt lực này,  $M_i^*$  là mômen tập trung,  $\theta_i$  là góc xoay tương ứng (hình 2.13), thì công khả dĩ của các ngoại lực này có biểu thức :

$$W_e = - \left[ \iint_F (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy + \sum_i P_i \Delta_i + \sum_i M_i \theta_i \right] \quad (2.57)$$

Nếu biên của tấm cho phép chuyển vị thì các lực biên  $\bar{v}_n, \bar{m}_n, \bar{m}_{nt}$  cũng sẽ sinh công khả dĩ :

$$W_l = - \int \left[ \bar{v}_n \cdot w + \bar{m}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{m}_{nt} \frac{\partial w}{\partial t} \right] dS \quad (2.58)$$

Trong trường hợp tổng quát năng lượng biến dạng gồm hai thành phần  $U_b$  do uốn và  $U_m$  do lực màng :

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_F \left( M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy} \right) dx dy \quad (2.59)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_F \left( N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} \right) dx dy \quad (2.60)$$

Trong hệ tọa độ Đêcac vuông góc đại lượng trong (2.59) như sau :

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) ; \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) ; \\ M_{xy} &= -D (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.61)$$

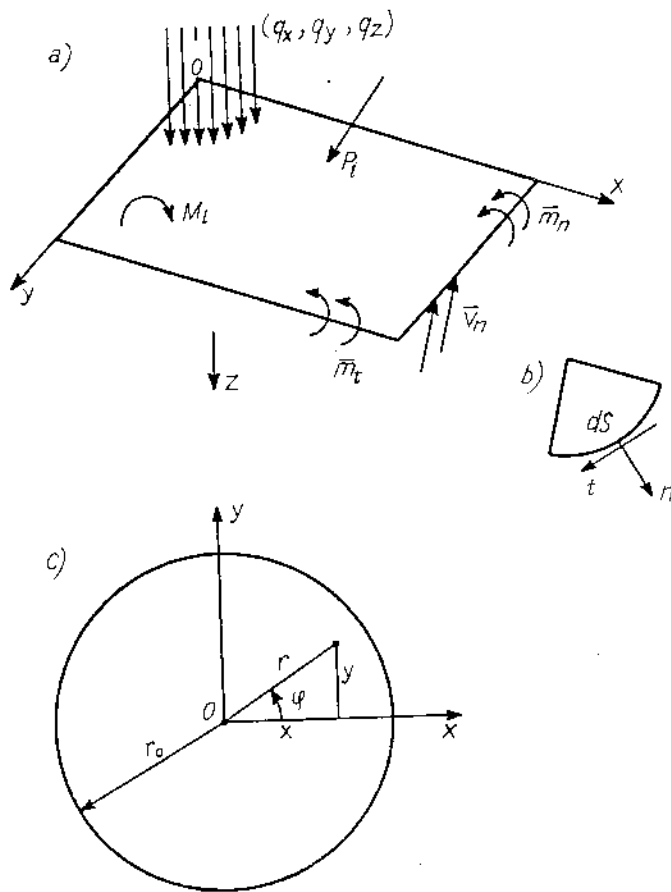
$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.62)$$

Thay biểu thức (2.61) và (2.62) vào (2.59) ta có :

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_F D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.63)$$

Đối với tấm đa giác có chu vi ngàm và tấm chữ nhật tựa trên chu vi, biểu thức (2.63) có dạng đơn giản :

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_F D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad (2.64)$$



Hình 2.13

Thế năng biến dạng đối với tấm tròn trong hệ tọa độ cực (hình 2.13c).  
Biểu thức  $U_b$  có dạng tổng quát :

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_F D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right]^2 \right. \\ \left. - 2(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} r dr d\varphi \quad (2.65)$$

Đối với tấm tròn ngàm trên chu vi :

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_F D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right)^2 r dr d\varphi \quad (2.66)$$

Đối với bài toán đối xứng trục, quan hệ (2.65) có dạng đơn giản hơn :

$$U_b = \pi \int_0^r D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] r dr \quad (2.67)$$

Tấm chữ nhật cạnh  $a \times b$  chịu tải trọng phân bố thẳng đứng đều, thì thế năng biến dạng  $\Pi$  là :

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \right. \\ \left. \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \int_0^a \int_0^b p_z w dx dy \end{aligned} \quad (2.68)$$

Nếu các lực trên biên (kể cả phản lực) có thể tích lũy hoặc mất thế trong quá trình biến dạng thì phương trình (2.68) cần được bổ sung bằng biểu thức (2.58). Ví dụ đối với biên tựa đàn hồi là một dầm chịu uốn :

$$U_{b,bx} = \frac{1}{2} \int w^2 B dS \quad (2.69)$$

$B$  là độ cứng của dầm đỡ (nghĩa là lực trên một đơn vị dài gây ra chuyển vị bằng đơn vị).

Trong trường hợp ngàm đàn hồi :

$$U_{b,bx} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 B^* dS \quad (2.70)$$

$B^*$  là độ cứng chống xoắn của (dầm) ngàm (nghĩa là mômen trên một đơn vị dài gây ra góc xoắn đơn vị).

**Hiệu ứng màng.** Phần năng lượng màng là :

$$\begin{aligned} U_m = \frac{1}{2} \iint_F (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma) dx dy \\ = \frac{1}{2} \iint_F \left[ N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.71)$$

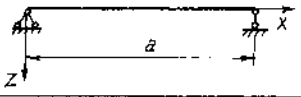
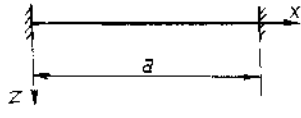
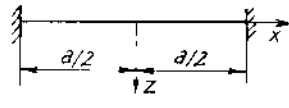
Biểu thức của  $U_m$  được viết qua chuyển vị có dạng :

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_F \left\{ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.72)$$

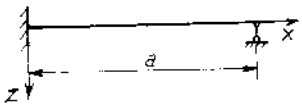
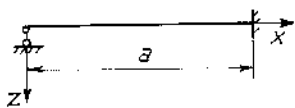
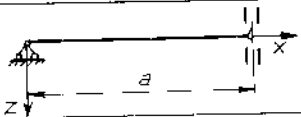
Cũng có thể viết  $U_m$  qua ứng suất hoặc hàm ứng suất :

$$U_m = \frac{h}{2E} \iint_F \left[ (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(1+\mu) (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] dx dy \quad (2.73) \\ = \frac{h}{2E} \iint_F \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\mu) \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

**Bảng 1**

| N <sup>o</sup> | Điều kiện biên                                                                      | Hàm tọa độ                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1              |  | $\sum_m X_m = \sum_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$                                                                                                                                                                                                                           |
| 2              |  | $\sum_m X_m = \sum_m \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \quad (m = 1, 3, 5, \dots)$<br>$\sum_m X_m = \frac{x}{a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \sum_m (-1)^m x$<br>$\times \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{x}{a} - 1 \right) - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$ |
| 3              |  | $\sum_m X_m = \sum_m \left( a^2 - 4x^2 \right)^2 x^m \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$<br>$\sum_m X_m = \sum_m \left[ 1 - (-1)^m \cos \frac{2m\pi x}{a} \right] \quad (m = 1, 3, 5)$                                                                                                                |

Tiếp bảng 1

| N <sup>o</sup> | Điều kiện biên                                                                    | Hàm tọa độ                                                                                                                              |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4              |  | $\sum_m X_m = \frac{x}{a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right) \left( \frac{x}{2a} - 1 \right) - \sum_m \frac{x}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$ |
| 5              |  | $\sum_m X_m = \sum_m \frac{x}{2a} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) (-1)^m - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$              |
| 6              |  | $\sum_m X_m = \sum_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2a}$                                                                                       |

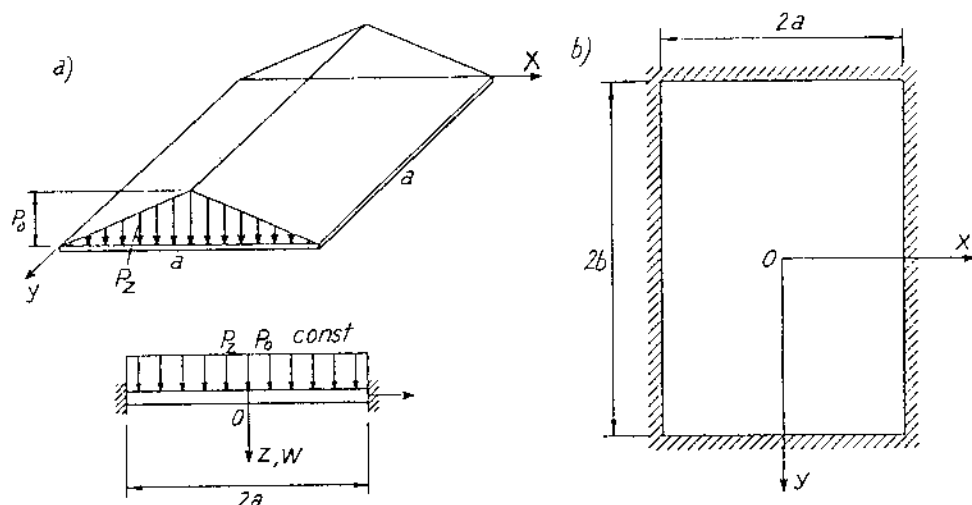
Đối với phương pháp Rayleigh-Ritz vấn đề quan trọng là chọn các hàm tọa độ thích hợp  $f_i(x)$  hoặc  $f_i(x,y)$  thỏa mãn các điều kiện biên động học và xấp xỉ tốt nhất dạng đường hoặc mặt đàn hồi của cấu kiện, mà không cần thỏa mãn phương trình vi phân. Độ chính xác của phương pháp này phụ thuộc rất nhiều vào việc chọn các hàm tọa độ có phản ánh được gần đúng đường hoặc mặt đàn hồi hay không? Đối với tấm, nghiệm có dạng dưới đây thường được sử dụng nhất :

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2.74)$$

trong đó  $X_m(x)$  và  $Y_n(y)$  là những hàm tọa độ dạng lượng giác hoặc đại số. Ý nghĩa của những hàm này trong một số trường hợp được cho sẵn trong bảng 1.

Ưu điểm của phương pháp này là ở tính đơn giản và cho kết quả tốt. Những tấm khác nhau có thể có hình dạng, chiều dày, v.v... khác nhau, nhưng thủ tục giải luôn luôn gắn liền với việc tính các tích phân xác định và giải hệ các phương trình. Cái khó của phương pháp này và ngay cả các phương pháp năng lượng khác là ở việc chọn hàm tọa độ. Khi xác định chuyển vị bằng phương pháp này dễ dàng đạt được độ chính xác cao, nhưng

khi xác định nội lực thì độ chính xác giảm, bởi vì nội lực liên quan đến các đạo hàm cấp cao của chuyển vị.



Hình 2.14

### §3. CÁC VÍ DỤ

*Ví dụ 1.* Tấm vuông ( $a \times a$ ) chiều dày không đổi tựa tự do chịu tải dạng mái nhà như hình 2.14a.

$$p_z = \frac{2p_0x}{a} \quad \text{khi } 0 < x < \frac{a}{2}$$

$$p_z = 2p_0 - \frac{2p_0x}{a} \quad \text{khi } \frac{a}{2} < x < a$$

Theo công thức (2.74) và bảng 1, ta chọn hàm tọa độ như sau :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

Công khả dĩ của ngoại lực :

$$\begin{aligned} \delta A_e &= - \iint_F \left[ p_z(x, y) w(x, y) \right] dF \\ &= - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a/2} \int_0^a \frac{2p_0x}{a} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \end{aligned}$$

$$\delta A_e = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} c_{mn} \sin \frac{m\pi}{2}$$

Thế năng biến dạng uốn  $U_b$  là :

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^a \sum_m \sum_n \left[ c_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 \\ &= \frac{D \pi^4 a^2}{8} \sum \sum c_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Khi làm cực tiểu năng lượng toàn phần, ta có :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{mn}} = \frac{\partial \delta A_e}{\partial c_{mn}} - \frac{\partial U_b}{\partial c_{mn}} = 0$$

hay là :

$$\frac{D \pi^4 a^2}{4} c_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2 - \frac{8p_0 a^2}{m^2 n \pi^3} \sin \frac{m\pi}{2} = 0$$

Từ đây ta rút ra :

$$c_{mn} = \frac{32p_0 a^4 \sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n \pi^7 D \left( m^2 + n^2 \right)^2}$$

Phương trình độ võng cần tìm sẽ là :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{32p_0 a^4}{D \pi^7} \sum \sum \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2 n \left( m^2 + n^2 \right)^2} \\ &\quad \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \left( \begin{matrix} m = 1, 3, 5, \dots \\ n = 1, 3, 5, \dots \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

Độ võng cực đại tại  $x = y = \frac{a}{2}$  với ba số hạng đầu tiên ( $m = 1 ; n = 1 ; m = 1 ; n = 3 ; m = 3 ; n = 1$ ) là :

$$w_{\max} = 0,002625 \frac{p_0 a^4}{D} \text{ với } p_0 = 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2, a = 400 \text{ cm}, \mu = 0,3, h = 10 \text{ thì}$$

$$w_{\max} = 3,6 \text{ cm.}$$

$$\text{Nghiệm chính xác hơn có giá trị : } w_{\max} = 0,00263 \frac{p_0 a^4}{D}.$$

**Ví dụ 2.** Tấm chữ nhật  $2a \times 2b$  với  $b = 1,5a$  hình 2.14b, chịu tải trọng phân bố đều  $q_z = q_0 = \text{const.}$  Tìm hàm độ võng và độ võng lớn nhất?

Trên cơ sở bảng 1, ta chọn hàm chuyển vị  $w(x,y)$  như sau :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{mn}}{4} \left[ 1 - (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{a} \right] \left[ 1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{b} \right]$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

Chuỗi này thỏa mãn điều kiện biên :

$$w_{x=\pm a} = 0; \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = 0; \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = 0$$

Tính với một số hạng của chuỗi :

$$w(x, y) = \frac{c_{11}}{4} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

Khi đó thế năng biến dạng có giá trị :

$$U_h = \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\nabla^2 w)^2 dx dy = \frac{D\pi^4 c_{11}^2}{32} \left( \frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab} \right)$$

Công khả dĩ của ngoại lực :

$$\delta A_e = -p_0 \int_{-a}^a \int_{-b}^b w(x, y) dx dy = -p_0 c_{11} ab$$

Khi làm cực tiểu thế năng, ta có :

$$c_{11} = \frac{16 p_0 a^4}{D\pi^4} \frac{1}{3 + 3\left(\frac{a^4}{b^4}\right) + 2\left(\frac{a^2}{b^2}\right)}$$

Nếu  $\frac{a}{b} = 1,5$  ;  $\mu = 0,3$  thì độ võng ở tâm của tấm là :



$$w_{\max} = 0,379 \frac{P_0 a^4}{Eh^3} \text{ với } P_0 = 0,40 \text{ kN/cm}^2 ; E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2 ;$$

$$\mu = 0,3 ; a = 200 \text{ cm, } h = 10 \text{ cm thì } w_{\max} = 3,032 \text{ cm.}$$

Nghiệm chính xác có giá trị :

$$w_{\max} = 0,386 \frac{P_0 a^4}{Eh^3}$$

## VI. PHƯƠNG PHÁP BUBNOV - GALOORKIN

### §1. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp Bubnov-Galoorkin là một phương pháp tổng quát rất mạnh được dùng để giải các bài toán tuyến tính cũng như phi tuyến, các bài toán dao động và ổn định cũng như các bài toán khác nhau của cơ học kết cấu, của lý thuyết đàn hồi, của vật lý toán.

Ví dụ, giả sử điều kiện cân bằng của vật thể theo chuyển vị trong trường hợp của bài toán không gian có dạng :

$$L_1(u, v, w) - q_x = 0$$

$$L_2(u, v, w) - q_y = 0$$

$$L_3(u, v, w) - q_z = 0$$

trong đó :  $L_1, L_2, L_3$  là các toán tử vi phân trên các hàm của các chuyển vị ;  $q_x, q_y, q_z$  là cường độ của tải trọng ngoài.

Chúng ta cho các chuyển vị những biến phân vô cùng bé  $\delta u, \delta v, \delta w$ . Mặc dù các chuyển vị  $u, v, w$  bị ràng buộc với nhau, nhưng các biến phân bất kỳ của chúng thì không bị ràng buộc với nhau. Các toán tử  $L_1, L_2, L_3$  được xem như những nội lực, vì thế có thể trực tiếp viết công khả dĩ của các ngoại lực và nội lực khi không cần xác định thế năng của hệ.

$$\iiint_V [L_1(u, v, w) - q_x] \delta u dV = 0$$

$$\iiint_V [L_2(u, v, w) - q_y] \delta v dV = 0 \quad (2.76)$$

$$\iiint_v \left[ L_3(u, v, w) - q_z \right] \delta w dV = 0$$

Một cách chặt chẽ mà nói, phương trình biến phân (2.76) chỉ đúng khi và chỉ khi các hàm  $u, v, w$  là nghiệm chính xác của bài toán. Tuy nhiên, cũng như phương pháp Rayleigh-Ritz, ở đây nghiệm chính xác được thay thế bằng nghiệm gần đúng dưới dạng :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^m a_i \beta_i(x, y, z) ; \quad v = \sum_{i=1}^n b_i \eta_i(x, y, z) ; \\ w &= \sum_{i=1}^r c_i \varphi_i(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.77)$$

trong đó :  $\beta_i(x, y, z), \eta_i(x, y, z), \varphi_i(x, y, z)$  là những hàm thỏa mãn đồng thời cả các điều kiện biên động học và tĩnh học.

$a_i, b_i, c_i$  là các thông số chưa biết.

Các hàm (2.77) phải có các đạo hàm phù hợp với các toán tử, mặc dù không đòi hỏi phải thỏa mãn phương trình (2.76).

Khi lấy biến phân các biểu thức (2.77), ta nhận được :

$$\begin{aligned} \delta u &= \sum \beta_i(x, y, z) \delta a_i ; \quad \delta v = \sum \eta_i(x, y, z) \delta b_i ; \\ \delta w &= \sum \varphi_i(x, y, z) \delta c_i \end{aligned} \quad (2.78)$$

Thay (2.78) vào phương trình biến phân (2.76) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \delta a_i \iiint_v \left[ L_1(u, v, w) - p_x \right] \beta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \delta b_i \iiint_v \left[ L_2(u, v, w) - p_y \right] \eta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \sum_{i=1}^r \delta c_i \iiint_v \left[ L_3(u, v, w) - p_z \right] \varphi_i(x, y, z) dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

Các phương trình này đúng đối với mọi  $\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i$ . Bởi vì  $\delta u_i \neq 0, \delta v_i \neq 0, \delta w_i \neq 0$ , thì do quan hệ (2.78),  $\delta a_i \neq 0, \delta b_i \neq 0, \delta c_i \neq 0$ , còn từ (2.79) rút ra :

$$\begin{aligned} \iiint_V \left[ L_1(u, v, w) - p_x \right] \beta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \iiint_V \left[ L_2(u, v, w) - p_y \right] \eta_i(x, y, z) dV &= 0 \\ \iiint_V \left[ L_3(u, v, w) - p_z \right] \varphi_i(x, y, z) dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Các biểu thức (2.80) cho một hệ  $m+n+r$  phương trình với cùng số các hệ số  $a_i, b_i, c_i$ . Chúng ta hãy áp dụng kết quả trên vào bài toán tẩm. Nghiệm của bài toán - chuyển vị  $w(x,y)$  được tìm dưới dạng :

$$w(\mathbf{x}, y) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\mathbf{x}, y) \quad (2.81)$$

Mỗi một số hạng của chuỗi đều phải thỏa mãn các điều kiện biên, nhưng không nhất thiết phải thỏa mãn phương trình vi phân bài toán :

$$D\nabla^2 \nabla^2 w = q_z(x, y) \quad (2.82)$$

Bởi vì phương trình (2.82) là phương trình cân bằng của các ngoại và nội lực theo phương z, công của các lực này trên các chuyển vị khả dĩ  $\delta w$  cho ta :

$$\iint \left[ D \nabla^4 w - q_z(x, y) \right] \delta w dx dy = 0 \quad (2.83)$$

Phương trình này là phương trình biến phân cơ bản của bài toán uốn tấm. Khi lập lại những điều vừa nói ta thu được một hệ phương trình đại số tuyến tính :

$$\left. \begin{aligned} & \iint (D \nabla^4 w - q_z) f_1(x, y) dx dy = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & \iint (D \nabla^4 w - q_z) f_n(x, y) dx dy = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Từ hệ n phương trình này các hệ số  $c_i$  được xác định và bài toán đã giải xong.

Ở đây, công khả dĩ của nội lực được tìm trực tiếp từ các phương trình vi phân mà không phải xác định năng lượng biến dạng, cho nên phương pháp Bubnov-Galoorkin tổng quát hơn nhiều so với phương pháp Rayleigh-Ritz. Hơn thế nữa phương pháp Bubnov-Galoorkin có thể giải

không khó khăn những bài toán không thể đặt được dưới dạng điều kiện dừng của phiếm hàm như trong phương pháp Rayleigh-Ritz.

Độ chính xác của phương pháp Bubnov-Galoorkin cũng như các phương pháp năng lượng khác phụ thuộc rất lớn vào việc chọn hàm xấp xỉ. Tuy nhiên, phương pháp Bubnov-Galoorkin đòi hỏi phải thỏa mãn điều kiện biên cứng hơn phương pháp Rayleigh-Ritz, nhưng có thể giải bài toán với sự thỏa mãn chỉ điều kiện biên động học, khi đó nghiệm sẽ hội tụ chậm hơn so với thỏa mãn tất cả các điều kiện biên động và tĩnh học.

## §2. VÍ DỤ

Một tấm vuông được ngâm trên chu vi, chịu tải trọng phân bố đều  $q_z = q_0 = \text{const}$  (hình 2.15). Theo bảng 1 ta chọn nghiệm dưới dạng :

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n c_{mn} \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \times \left( 1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right)$$

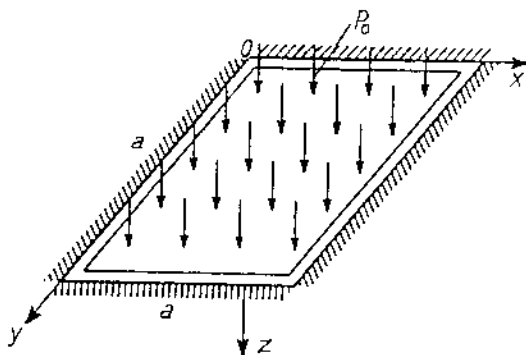
$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Chuỗi lượng giác này thỏa mãn các điều kiện biên động học :

$$\left( w \right)_{\substack{x=0 \\ x=a}} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0;$$

$$\left( w \right)_{\substack{y=0 \\ y=a}} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{\substack{y=0 \\ y=a}} = 0;$$

Khi giữ lại chỉ một số hạng của chuỗi ( $m = n = 1$ ) :



Hình 2.15

$$w(x, y) = c_{11} \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

Ta có phương trình biến phân sau đây :

$$\int_0^a \int_0^a \left[ D c_{11} \nabla^2 \nabla^2 f_1(x, y) - p_0 \right] f_1(x, y) dx dy = 0 \quad (a)$$

Ở đây :

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

Sau khi vi phân, chúng ta tìm được :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 f_1(x, y) = \frac{4\pi^4}{a^4} & \left[ \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \\ & \left. + \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \end{aligned}$$

Thay toán tử này vào (a), ta có phương trình :

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^a D c_{11} & \left\{ \frac{4\pi^4}{a^4} \left[ \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - p_0 \right\} \frac{1}{4} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dx dy = 0 \end{aligned}$$

$$\text{từ đó : } c_{11} = \frac{p_0 a^4}{8D\pi^4}$$

Độ võng lớn nhất tại tâm  $x = y = \frac{a}{2}$  là :

$$w_{\max} = c_{11} = \frac{p_0 a^4}{8D\pi^4} = 0,00128 \frac{p_0 a^4}{D}$$

Giá trị chính xác  $w_{\max} = 0,00126 \frac{p_0 a^4}{D}$  sai khác cỡ 1,6%.

### Chương 3

## PHƯƠNG PHÁP LỰC

### §1. THỰC CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

Để tính toán hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực người ta không trực tiếp tính trên hệ đã cho (hệ xuất phát) mà tính trên hệ tương đương với sự trợ giúp của hệ cơ bản, sao cho biến dạng của hệ tương đương phản ánh đúng biến dạng của hệ đã cho.

Hệ tương đương là hệ suy ra từ hệ đã cho sau khi đã loại đi các liên kết "thừa" và thay thế vào đó các phản lực "thừa".

Hệ cơ bản là hệ nhận được từ hệ tương đương sau khi đã bỏ đi tất cả các phản lực thừa và tải trọng ngoài.

Tất cả các hệ siêu tĩnh đều có những đặc điểm chung sau đây :

- a) Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào quan hệ độ cứng giữa các cấu kiện của hệ.
- b) Chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nhỏ hơn chuyển vị trong hệ định tĩnh suy ra từ hệ siêu tĩnh này với cùng một chế độ chịu tải, bởi vì các liên kết thừa làm tăng độ cứng của hệ.
- c) Khi có sự thay đổi nhiệt độ của môi trường hoặc khi nung nóng những cấu kiện của hệ cũng như khi chế tạo và lắp ghép không chính xác thì trong hệ siêu tĩnh sẽ phát sinh các nội lực.
- d) Khi những liên kết thừa bị hư hỏng thì hệ vẫn không bị phá hoại, vì khi đó hệ vẫn bất biến hình học.

Có thể tính các hệ siêu tĩnh bằng nhiều phương pháp khác nhau, ví dụ :

- 1) Phương pháp lực.
- 2) Phương pháp chuyển vị.
- 3) Phương pháp H. Cross, phương pháp G. Kani v.v...

Dưới đây ta giới thiệu cách tính hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực.

Để thấy rõ tư tưởng và trình tự tính toán của phương pháp ta hãy khảo sát một ví dụ cụ thể (hình 3.1a). Đó là một dầm liên tục có hai bậc siêu tĩnh. Một phương án có thể của hệ tương đương được cho trên (hình 3.1b). Đối với phương án này, phương trình biến dạng được viết như sau :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1x_1} + \Delta_{1x_2} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{2x_1} + \Delta_{2x_2} + \Delta_{2p} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Trong đó,  $\Delta_{1x_1}$  là chuyển vị theo phương của lực  $X_1$  do chính lực  $X_1$  gây ra trong hệ cơ bản ;  $\Delta_{1x_2}$  là chuyển vị theo phương lực  $X_1$  do lực  $X_2$  gây ra trong hệ cơ bản ;  $\Delta_{1p}$  là chuyển vị theo phương lực  $X_1$  do tải trọng đặt lên hệ gây ra trong hệ cơ bản. Các chuyển vị  $\Delta_{2x_1}$ ,  $\Delta_{2x_2}$ ,  $\Delta_{2p}$  cũng có ý nghĩa tương tự.

$\Delta_1$  là chuyển vị (góc xoay tại ngàm A) theo phương lực  $X_1$  (trong trường hợp này  $X_1$  là mômen) do các lực  $X_1$ ,  $X_2$  và tải trọng gây ra bằng không. Chuyển vị  $\Delta_2$  cũng có ý nghĩa tương tự. Từ điều kiện biến dạng tại những liên kết bị loại bỏ ta thấy rõ ý nghĩa của phương trình thứ hai của hệ (3.1) là chuyển vị thẳng  $\Delta_2$ , tại gối tựa C theo phương lực  $X_2$  do các lực  $X_1$ ,  $X_2$  và tải trọng gây ra phải bằng không.

Chuyển vị do các ẩn số  $X_1$ ,  $X_2$  gây ra có thể biểu diễn như sau :

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1x_1} &= \delta_{11}X_1 ; \Delta_{1x_2} = \delta_{12}X_2 \\ \Delta_{2x_1} &= \delta_{21}X_1 ; \Delta_{2x_2} = \delta_{22}X_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1a)$$

Khi thay (3.1a) vào (3.1) ta nhận được :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1b)$$

trong đó :





$$B = \begin{bmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \vdots \\ \Delta_{np} \end{bmatrix} \quad \text{là ma trận cột của các số hạng tự do của hệ các phương trình chính tắc.}$$

Các hệ số của hệ các phương trình chính tắc trên đường chéo chính được gọi là các hệ số chính hay các chuyển vị chính ; chúng luôn luôn dương.

Các hệ số còn lại của ma trận A gọi là các hệ số phụ. Chúng có thể có dấu âm, hoặc dương, hoặc bằng không và  $\delta_{JK} = \delta_{KJ}$ .

Nghiệm của hệ (3.3) viết dưới dạng ma trận như sau :

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (3.4)$$

trong đó :  $A^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của ma trận A. Việc giải hệ (3.2) hoặc việc tính ma trận nghịch đảo sẽ đơn giản đáng kể khi giải hệ (3.4), nếu có nhiều hệ số phụ  $\delta_{KJ}$  bằng không. Điều này phụ thuộc vào việc chọn hệ cơ bản.

Cần chú ý là tất cả những lập luận trong tiết 1 này chỉ đúng với hệ cho phép sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực.

## §2. CÁC VÍ DỤ ĐỐI VỚI HỆ CHỊU TẢI TRỌNG

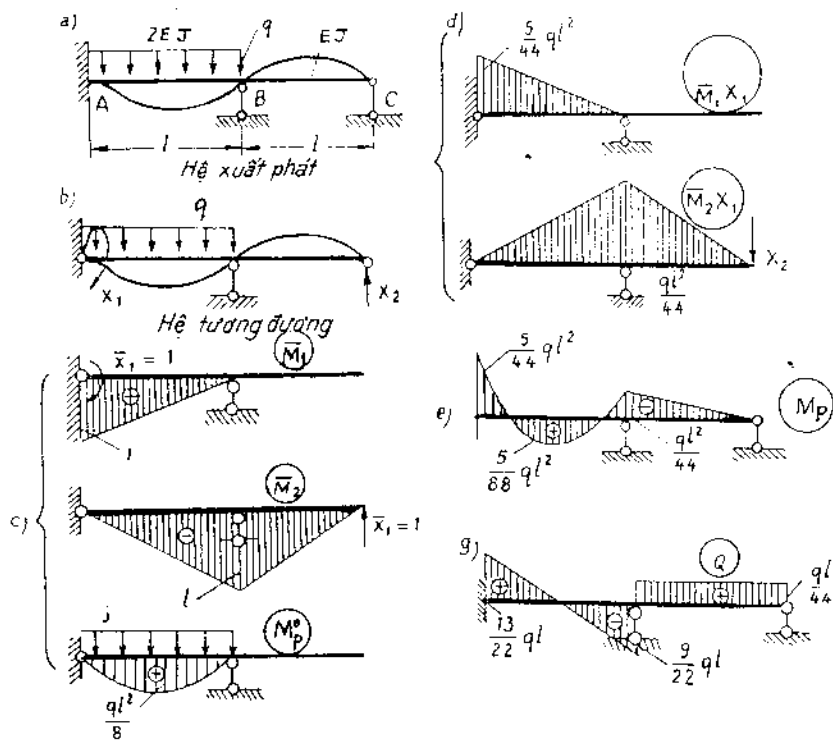
*Ví dụ 1 :* Hãy vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình 3.1a.

**Giải**

Ta chọn hệ tương đương như hình 3.1b. Biểu đồ mômen trong hệ cơ bản do các lực  $\bar{X}_1 = 1$ ,  $\bar{X}_2 = 1$  và tải trọng gây ra được cho trên hình vẽ (hình 3.1c). Bằng cách nhân biểu đồ ta sẽ xác định được các hệ số và số hạng tự do trong các phương trình chính tắc của hệ (3.1b) như sau :

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \left[ l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[ \frac{2}{3} \cdot 1 \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{l}{6EJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1 = \left[ l \cdot \frac{1}{2} \right] \left[ \frac{1}{3} \cdot l \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{l^2}{12EJ}$$



Hình 3.1

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 = \frac{l^3}{2EJ}$$

$$\Delta_{1P} = \left[ \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[ \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^3}{48EJ}$$

$$\Delta_{2P} = \left[ \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right] \left[ \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2EJ} = \frac{ql^4}{48EJ}$$

Thay các hệ số  $\delta_{mn}$  và các số hạng tự do  $\Delta_{KP}$  này vào hệ các phương trình chính tắc (3.1b) và giải nó ta tìm được :

$$X_1 = -\frac{5}{44} ql^2 \quad X_2 = -\frac{ql}{44}$$

Theo nguyên lý độc lập tác dụng của các lực, tung độ của biểu đồ mômen cuối cùng  $M_p$  đối với hệ siêu tĩnh đã cho được tính như sau :

$$M_p = M_p^0 + \overline{M}_1 \overline{X}_1 + \overline{M}_2 \overline{X}_2$$

Dấu âm (-) trong các biểu thức xác định  $X_1, X_2$  nói lên rằng chiều của  $X_1, X_2$  ngược với chiều đã chọn ban đầu. Trên hình vẽ (hình 3.1d) biểu diễn các biểu đồ mômen uốn  $\overline{M}_1 \overline{X}_1, \overline{M}_2 \overline{X}_2$  ứng với chiều đúng của  $X_1, X_2$ .

Biểu đồ mômen và lực cắt cuối cùng được cho trên hình (hình 3.1e,g).

*Ví dụ 2 :* Cho một hệ gồm ba thanh được nối với nhau bằng các khớp ở các đầu cuối. Hệ chịu tải trọng  $P$  như trên hình vẽ (hình 3.2a). Độ cứng của thanh giữa là  $EF \cdot \sqrt{2}$ , của mỗi thanh bên bằng  $EF$ .

### Giải

Bậc siêu tĩnh của hệ bằng 1. Một trong những phương án chọn hệ tương đương được cho trên hình (hình 3.2b). Khi đó phương trình chính tắc có dạng :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (a)$$

Biểu đồ lực dọc đơn vị  $\overline{N}_1$  và biểu đồ lực dọc  $N_p^0$  do các lực  $\overline{X}_1 = 1$  và  $P$  gây ra trong hệ cơ bản có dạng trên hình vẽ (hình 3.2c,d).

Các hệ số của phương trình chính tắc (a) được xác định theo phương pháp Mo :

$$\delta_{11} = \overline{N}_1 \cdot \overline{N}_1 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} l \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{1}{EF} + \left[ 1 \cdot l \sqrt{2} \right] \left[ 1 \right] \frac{1}{EF \sqrt{2}} = \frac{2l}{EF}$$

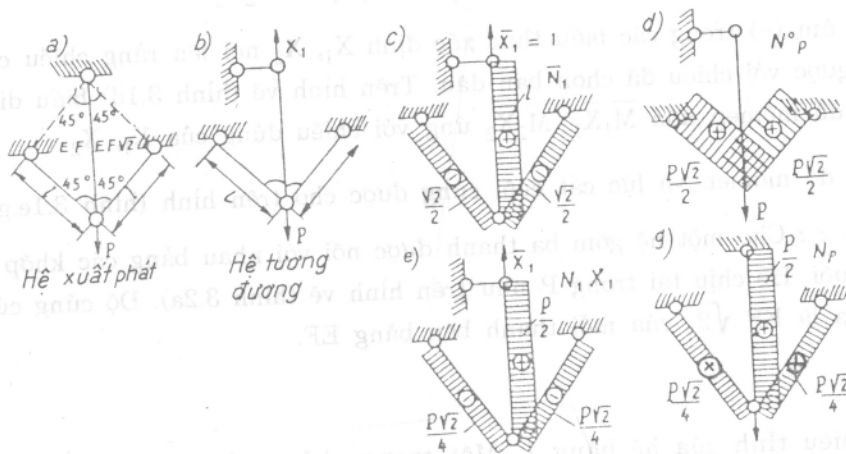
$$\Delta_{1P} = \overline{N}_1 \cdot N_p^0 = -2 \left[ \frac{P \cdot \sqrt{2}}{2} l \right] \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \frac{1}{EF} = -\frac{Pl}{EF}$$

Thay  $\delta_{11}$  và  $\Delta_{1P}$  vừa tìm được vào phương trình (a) và giải nó ta được  $X_1 = P/2$ .

Nguyên lý độc lập tác dụng của các lực cho phép ta viết :

$$N_p = N_p^0 + N_1 X_1$$

Biểu đồ  $\overline{N}_1 X_1$  nhận được từ biểu đồ  $\overline{N}_1$  sau khi nhân các tung độ của nó với  $X_1 = P/2$  (hình 3.2e). Biểu đồ lực dọc cuối cùng  $N_p$  được cho trên hình 3.2g.



Hình 3.2

Ví dụ 3 : Vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung siêu tĩnh (hình 3.3a).

**Giải**

Hệ tương đương và hệ cơ bản được chọn như trên hình 3.3b,c. Phương trình chính tắc có dạng :

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

Để xác định các hệ số và số hạng tự do trong hệ phương trình (a), cần phải vẽ được các biểu đồ  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  và  $M_P^0$  trong hệ cơ bản, các biểu đồ này được cho trên hình 3.3d,e,g. Bằng cách nhân biểu đồ thích hợp ta tìm được các hệ số và số hạng tự do sau đây :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + l^3 \right] = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{-1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} l^3 \right]$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{EJ} \left[ \frac{1}{2} l^3 \right], \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{ql^4}{6EJ}, \quad \Delta_{2P} = -\frac{ql^4}{8EJ}$$

Thay các kết quả này vào hệ (a) ta được :

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} X_1 - \frac{1}{2} X_2 + \frac{ql}{6} &= 0 \\ -\frac{1}{2} X_1 - \frac{1}{3} X_2 - \frac{ql}{8} &= 0\end{aligned}\quad (b)$$

Nghiệm của hệ (b) có dạng :

$$X_1 = \frac{ql}{28} \quad X_2 = \frac{3}{7} ql$$

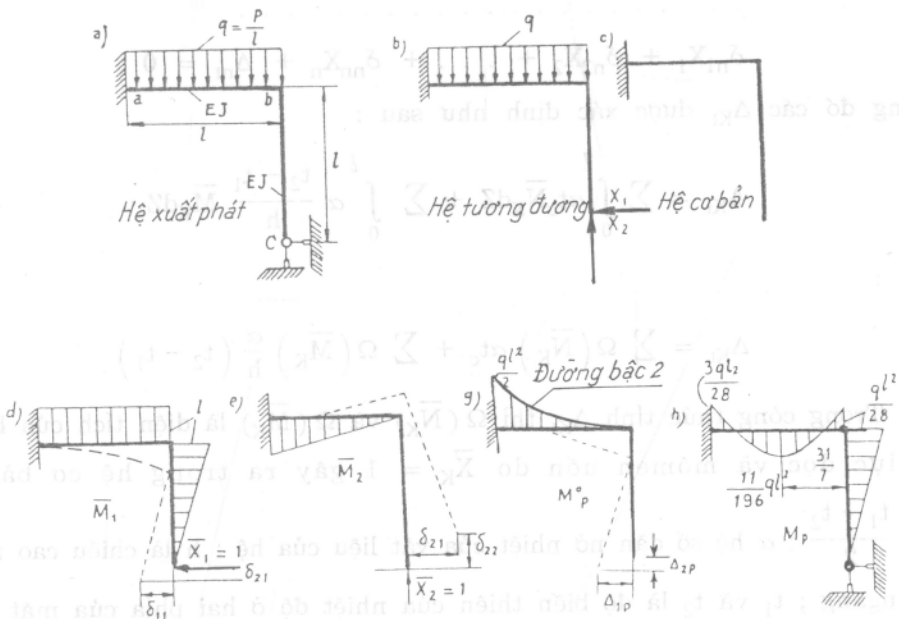
Mômen uốn ở một mặt cắt bất kì của khung được xác định như sau :

$$M_p = M_p^0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2$$

Biểu đồ mômen uốn cuối cùng  $M_p$  của khung được biểu diễn trên hình 3.3h. Mặt cắt mà tại đó trên thanh ngang lực cắt  $Q$  bằng không được tìm từ điều kiện :

$$Q = qZ - \frac{3}{7} ql = 0$$

Từ đây suy ra :  $Z = \frac{3}{7} l$  kể từ gối tựa phải.



Hình 3.3



Sau khi thiết lập và giải hệ phương trình chính tắc ta sẽ tìm được các ẩn số  $X_1, X_2, X_3, \dots$ . Việc vẽ các biểu đồ nội lực được tiến hành theo các phương pháp đã biết.

#### §4. CÁC VÍ DỤ ÁP DỤNG

*Ví dụ 1 :* Cho một dàn cân trục có dạng như hình 3.4a.

Hãy xác định các phản lực thừa và nội lực trong các thanh dàn trong hai trường hợp :

- a) Chịu tải trọng ;
- b) Chịu sự thay đổi của nhiệt độ.

a/ Dàn được cho trên hình 3.4a là hệ một bậc siêu tĩnh ngoại.

Hệ tương đương được chọn như hình 3.4b.

Phương trình chính tắc có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p}^0 = 0 \quad (a)$$

Phương trình này biểu thị điều kiện không có chuyển vị theo phương lực  $X_1$ .

Các chuyển vị  $\delta_{11}$  và  $\Delta_{1p}^0$  là các chuyển vị theo phương của lực  $X_1$ , lần lượt do lực  $\bar{X}_1 = 1$  và tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{i1}^2 l_i}{EF_i} ; \Delta_{1p}^0 = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{i1} N_{ip}^0 l_i}{EF_i} \quad (b)$$

trong đó :

$\bar{N}_{i1}$  là lực dọc trong thanh thứ  $i$  của dàn do lực  $\bar{X}_1 = 1$  gây ra trong hệ cơ bản ;

$N_{ip}$  là lực dọc trong thanh dàn thứ  $i$  do tải trọng ngoài cho trước gây ra trong hệ cơ bản ;

$l_i$  là chiều dài của thanh thứ  $i$  ;

$F_i$  là diện tích mặt cắt ngang của thanh  $i$  ;

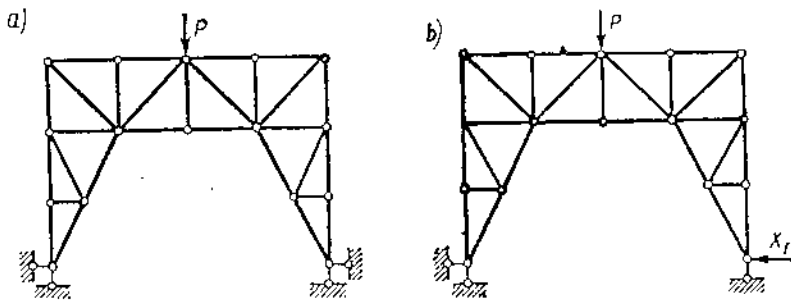
$E$  là môđun đàn hồi của vật liệu các thanh dàn ;

$n$  là số thanh trong dàn.

Các nội lực  $\bar{N}_{il}$  và  $N_{ip}^0$  được xác định bằng các phương pháp thông thường của "Sức bền vật liệu" như : Phương pháp tách nút, Phương pháp Pitter, Phương pháp hình chiếu.

Từ phương trình chính tắc (a) ta rút ra giá trị của phản lực thừa  $X_1$  :

$$X_1 = \frac{\Delta_{ip}^0}{\delta_{11}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\bar{N}_{il} N_{ip}^0 l_i) / (EF_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} (\bar{N}_{il}^2 l_i) / (EF_i)}$$



**Hình 3.4**

Lực dọc trong thanh thứ  $i$  của hệ siêu tĩnh khảo sát được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng như sau :

$$N_{i\Sigma} = N_{ip}^0 + X_1 \bar{N}_{il}$$

Một phương án thuận lợi nhất là tính toán dưới dạng bảng 1.

**Bảng 1**

|        | $\frac{l_i}{F_i}$ | $\bar{N}_{il}$ | $N_{ip}$ | $\frac{\bar{N}_{il}^2 l_i}{F_i}$ | $\frac{\bar{N}_{il} N_{ip}^0 l_i}{F_i}$ | $N_{ip} = N_{ip}^0 + x_1 \bar{N}_{il}$ |
|--------|-------------------|----------------|----------|----------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------|
| 1<br>2 |                   |                |          |                                  |                                         |                                        |
|        |                   |                |          | $\sum = \delta_{11} E$           | $\sum = \Delta_{ip}^0 E$                |                                        |



b/ Trường hợp dàn siêu tĩnh trên hình 3.4a chỉ chịu tác dụng của nhiệt độ thay đổi, khi ấy phương trình chính tắc để xác định ẩn số thừa  $X_1$  là :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t}^0 = 0 \quad (b)$$

trong đó :

$\delta_{11}$  được xác định như trường hợp chịu lực ở trên ;

$\Delta_{1t}^0$  là chuyển vị theo phương  $X_1$  do sự nung nóng gây ra.

Nếu gọi  $\alpha$  là hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu dàn và

$\Delta t$  là độ biến thiên nhiệt độ thì độ giãn dài của thanh thứ  $i$  là :

$$\Delta l_{it} = \alpha l_i \Delta t$$

Từ công thức tính  $\Delta_{1t}^0$  ở trên, dễ thấy rằng  $\Delta_{1t}^0$  được viết :

$$\Delta_{1t}^0 = \sum_{i=1}^n \bar{N}_{i1} \Delta l_{it} = \alpha \sum_{i=1}^n \bar{N}_{i1} l_i \Delta t$$

Nếu một thanh  $k$  nào đó không bị nung nóng thì  $\Delta_{kt}^0 = 0$ . Sau khi tính được  $X_1$  từ phương trình (b) thì có thể tính lực dọc trong tất cả các thanh của dàn :

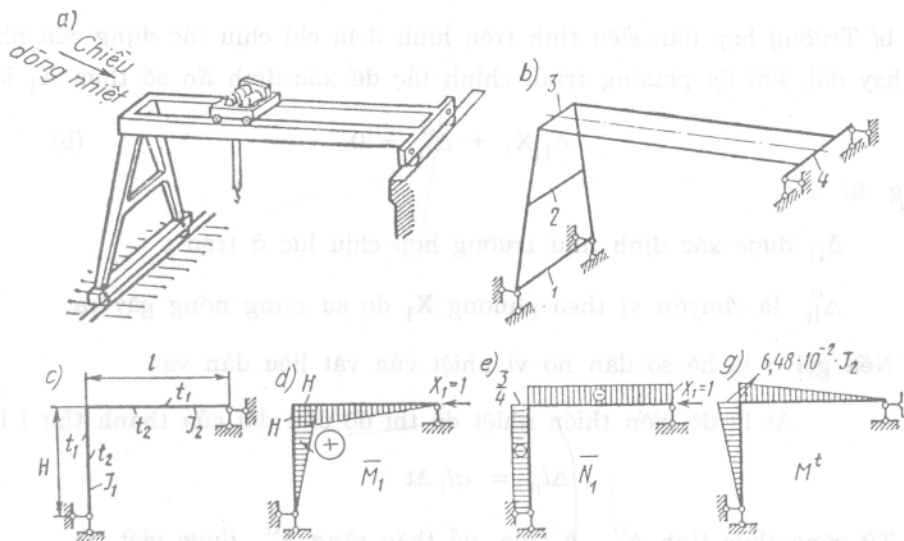
$$N_i = \bar{N}_{i1} \cdot X_1$$

Nếu dàn khảo sát chịu tác dụng đồng thời cả tải trọng  $P$  và sự thay đổi của nhiệt độ thì nội lực  $N_{itp}$  trong các thanh của dàn sẽ là tổng đại số  $N_{it}$  và  $N_{ip}$ .

**Ví dụ 2 :** Một khung thép của một cầu trục trượt (hình 3.5a) làm việc trong điều kiện nhiệt đới dưới tác dụng của các tia nắng Mặt Trời. Sơ đồ tính được cho trên hình 3.5b. Hãy vẽ biểu đồ nội lực trong trường hợp cầu trục bị nung nóng không đều nhưng đối xứng đối với trục dọc của nó?

Theo điều kiện nêu trên thì không có một nội lực nào sinh ra trong các thanh 1, 2, 3, 4 nhưng mỗi một nửa khung của cầu trục (phía trước và phía sau) bị biến dạng như nhau và có thể tính như một khung phẳng (hình 3.5c) với các số liệu như sau :

$$l = 8 \text{ m}, H = 6 \text{ m}, t_1 = 60^\circ ; t_2 = 40^\circ ; J_2 = 2J_1$$



Hình 3.5

Chiều cao mặt cắt chân cầu trục  $h_1 = 0,4$  m. Chiều cao mặt cắt của dầm chính  $h_2 = 1,5$ ,  $h_1 = 0,6$  m. Tất cả các mặt cắt đều có hai trục đối xứng. Các biểu đồ nội lực đơn vị  $\bar{M}_1$  và  $\bar{N}_1$  được cho trên hình 3.5d,e.

Trong trường hợp này hệ có một bậc siêu tĩnh và phương trình chính tắc tương ứng có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1t}^0 = 0 ;$$

trong đó :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_2} \left[ \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 600 \right] + \frac{1}{EJ_1} \left[ \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot 600 \right] =$$

$$= \frac{240 \cdot 10^8}{EJ_2} \text{ cm/kN}$$

$$\Delta_{1t}^0 = \alpha \frac{(t_1 + t_2)}{2} \Omega_{N_1} + \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{h} \Omega_{M_1} = -0,12 \cdot 10^{-8} \cdot 50.$$

$$\left( \frac{3}{4} \cdot 600 + 800 \right) + 0,12 \cdot 10^{-6} \frac{(60 - 40)}{60} \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 600 + 0,12 \cdot 10^{-6}$$

$$\cdot \frac{(60 - 40)}{40} \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 600 = 0,0129 \text{ cm}$$

Phương trình chính tắc với hệ số bằng số là :

$$\frac{240 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^6 J_2} X_1 + 0,0129 = 0$$

Do đó :

$$X_1 = -1,08 \cdot 10^{-6} J_2 \text{ (kN)}$$

Biểu đồ mômen uốn trong cầu trục do nung nóng không đều được cho trên hình 3.5g.

## §5. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CÓ CÁC LIÊN KẾT CHỊU CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

Để tính toán những hệ siêu tĩnh có các gối tựa chịu chuyển vị cường bức ta cũng sẽ sử dụng những lý luận vừa mô tả ở trên. Khác với các trường hợp trên trong trường hợp này nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ là do các gối tựa chịu các chuyển vị cường bức.

Để áp dụng hệ phương trình chính tắc (3.2) vào trường hợp này ta phải chú ý khi chọn hệ cơ bản không nên loại bỏ các liên kết có chuyển vị cường bức mà phải cắt các liên kết ấy.

Giả sử cho một dầm như hình 3.6a, nếu chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết tại gối tựa B có chuyển vị cường bức thì điều kiện biên dạng theo phương của ẩn số  $X_1$  do các ẩn số  $X_K$  nếu có (trên hình 3.6a không chỉ ra những ẩn số này) và chuyển vị cường bức gây ra sẽ không bằng 0. Cụ thể là :

$$\Delta_{X_1} (X_1, X_2, \dots, X_n) = \delta \neq 0$$

Bây giờ nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt liên kết có chuyển vị cường bức B thì điều kiện chuyển vị theo phương liên kết ấy vẫn bằng 0. Vì lúc này điều kiện vừa nói này là điều kiện mô tả chuyển vị tương đối của hai mặt cắt của liên kết vừa bị cắt.

$$\Delta_{X_1} (X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

Ngoài ra còn có thể chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết thừa không có chuyển vị cường bức. Nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết thừa có chuyển vị cường bức thì phương trình thứ K có dạng :

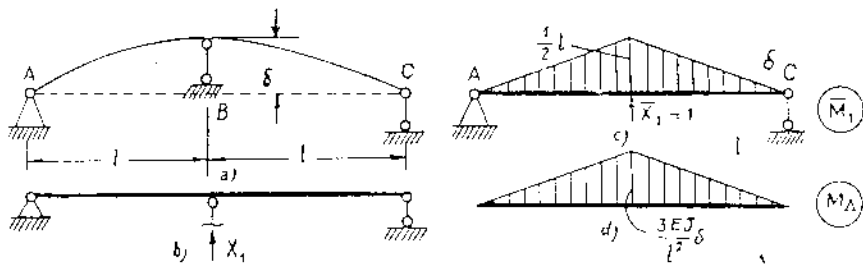
$$\delta_{K1}X_1 + \delta_{K2}X_2 + \dots + \delta_{KK}X_K + \dots + \delta_{Kn}X_n + \Delta_{K\Delta} = 0, \\ (K = \overline{1, n})$$

Các hệ số  $\delta_{Kl}$  tính như đối với trường hợp hệ chịu tải trọng.

$\Delta_{K\Delta}$  là chuyển vị theo phương của lực  $X_K$  do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản. Nó được xác định theo công thức sau đây :

$$\Delta_{K\Delta} = - \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \Delta_{i\Delta} - \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \theta_{i\Delta}$$

trong đó  $\bar{R}_i, \bar{M}_i$  là phản lực theo phương liên kết thứ  $i$  do lực  $\bar{X}_K = 1$  gây ra trong hệ cơ bản.  $\Delta_{i\Delta}$  là chuyển vị thẳng theo phương liên kết thứ  $i$  và  $\theta_{i\Delta}$  là góc xoay tại liên kết thứ  $i$  trong hệ siêu tĩnh đã cho.



Hình 3.6.

**Ví dụ :** Tính mômen uốn lớn nhất trong trục được cho trên hình 3.6a, nếu khi chế tạo tâm của ổ đỡ giữa bị lệch một đoạn  $\delta$ .

**Giải**

Hệ cơ bản chọn như hình 3.6b. Phương trình chính tắc có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Delta} = 0,$$

trong đó :

$$\Delta_{1\Delta} = - \bar{R}_1 \cdot \delta = -1 \cdot \delta = -\delta$$

Biểu đồ  $\bar{M}_1$  cho trên hình 3.6c và sau khi nhân biểu đồ này với chính nó ta có :

$$\delta_{11} = 2 \left( \frac{1}{2} l \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \right) = \frac{l^3}{6EJ}$$

Thay  $\Delta_{1\Delta}$  và  $\delta_{11}$  vừa tìm được vào phương trình (a) và giải nó ta đi đến :

$$X_1 = \frac{6EJ}{l^3} \delta$$

Biểu đồ mômen uốn và giá trị mômen uốn lớn nhất được cho trên hình 3.6d.

## §6. SỬ DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG KHI TÍNH HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

Với một hệ đối xứng hình học chịu tải trọng bất kỳ ta luôn luôn có thể phân tích thành hai hệ chịu tải trọng đối xứng và phản xứng. Biểu đồ nội lực của chúng được cho tương ứng trên hình 3.7a,b,c.

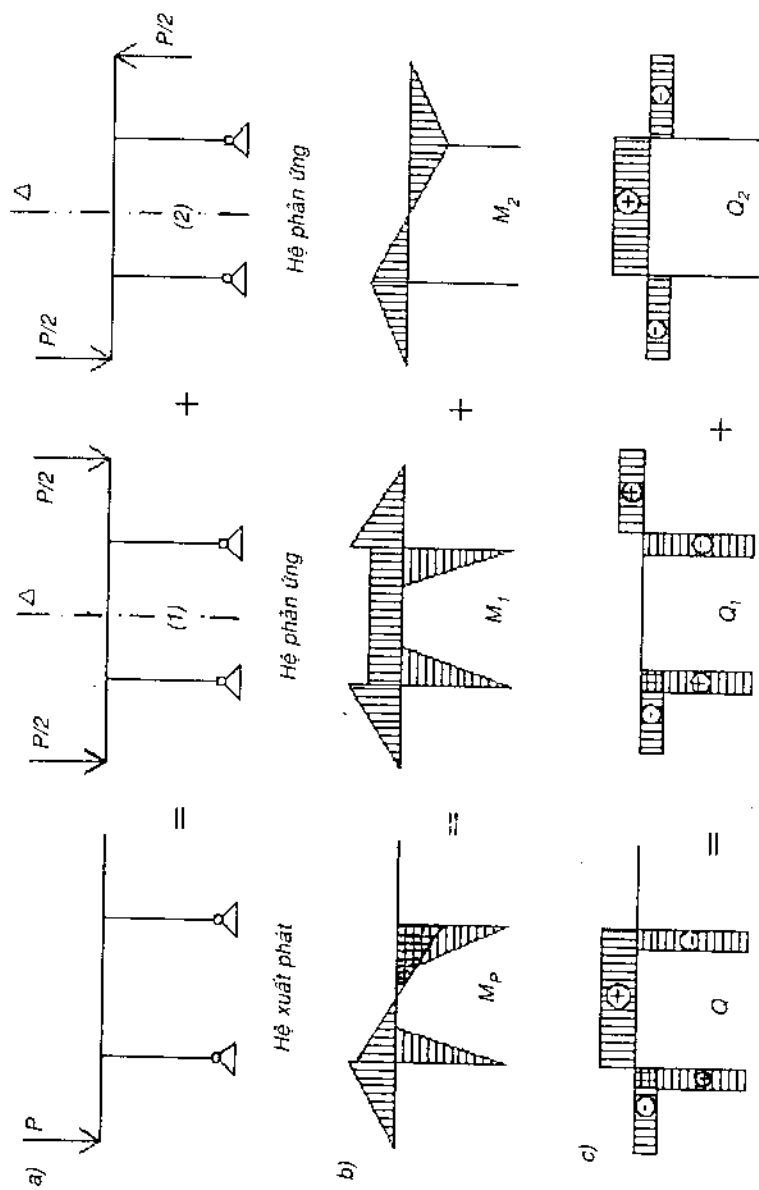
Hệ đối xứng chịu tải trọng cũng đối xứng thì các hàm nội lực mômen uốn, lực dọc và do đó là biểu đồ của chúng là đối xứng qua trục đối xứng  $\Delta$ . Ngược lại đối với hệ phản xứng, biểu đồ lực cắt là đối xứng qua trục đối xứng  $\Delta$ . Nghĩa là ở mặt cắt trên trục đối xứng đối với hệ đối xứng chịu tải đối xứng thì các nội lực đối xứng khác không, các nội lực phản xứng bằng không. Ngược lại đối với hệ đối xứng chịu tải trọng phản xứng thì trên trục đối xứng  $\Delta$  các nội lực đối xứng bằng không, các nội lực phản xứng khác không.

Các nhận xét đó cho phép giảm nhẹ rất nhiều việc tính toán hệ siêu tĩnh đối xứng và phản xứng. Ta hãy xét trường hợp trục đối xứng không trùng với một thanh nào và trục đối xứng trùng với một thanh của hệ. Khung trên hình 3.8a,b,c chỉ có một ẩn số cần tìm là  $X_1$ . Khung trên hình 3.8d với hệ tương đương như hình 3.8e và h, ta chỉ có ba ẩn số. Ngược lại với hệ tương đương như hình 3.8g ta cần giải hệ 6 phương trình với tất cả các hệ số đều khác không. Xét hệ đối xứng hình học chịu tải bất kỳ trên hình 3.8k, nếu ta chọn hệ tương đương như hình 3.8l thì các hệ số  $\delta_{13}$  và  $\delta_{23}$  đều bằng không. Do đó, hệ phương trình chính tắc trở nên rất đơn giản :

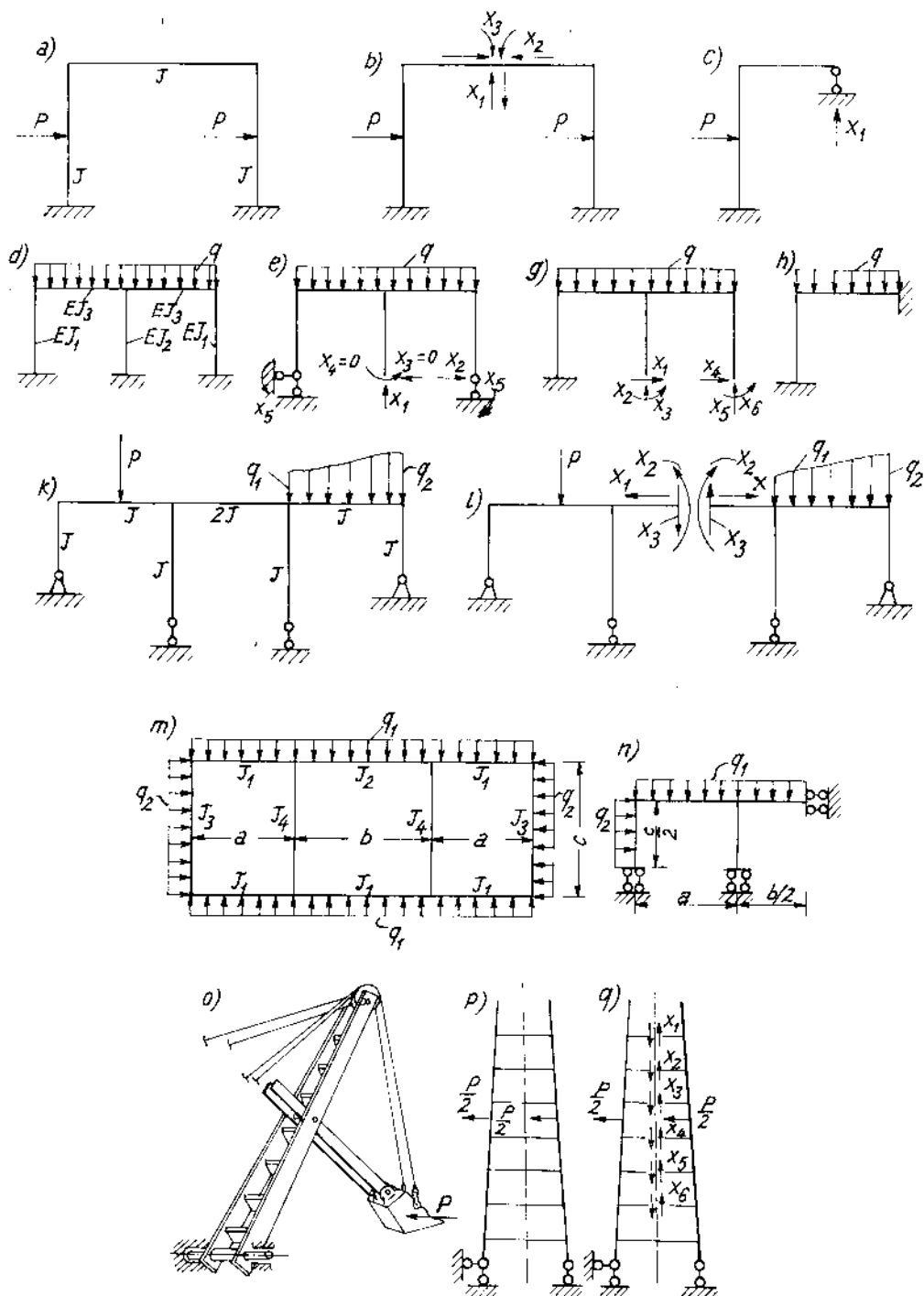
$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p}^0 = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p}^0 = 0$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3p}^0 = 0$$



Hình 3.7



Hình 3.8

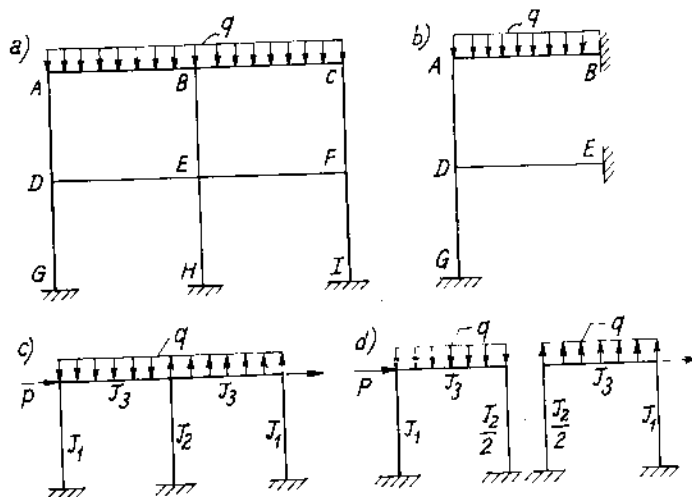
Bạn đọc tự tìm hiểu các hệ tương đương từ các hệ xuất phát cho trên hình 3.8m,n,o,p,a.

Hãy xét các trường hợp trục đối xứng hình học trùng với một thanh nào đó của hệ (hình 3.9a).

- Khi hệ chịu tải trọng đối xứng thì thanh trùng với trục đối xứng (BEH) không thể uốn được. Các mặt cắt B, E của nó không có chuyển vị xoay và thẳng. Do đó, hệ đã cho được thay bằng hệ trên hình 3.9b và việc tính toán được thực hiện trên hệ này. Cuối cùng, theo tính chất đối xứng suy ra kết quả của nửa còn lại.

- Khi hệ chịu tải trọng phản xứng (hình 3.9c) thì thanh trùng với trục đối xứng bị uốn, các biểu đồ lực cắt của hệ là đối xứng, còn các biểu đồ mômen uốn và lực dọc là phản xứng. Từ đây rút ra sơ đồ tính cho hệ loại này như trên hình 3.9d.

Để tính hệ đối xứng có một thanh trùng với trục đối xứng, hệ chịu tải trọng phản xứng ta có thể chia đôi hệ để tính cho một nửa. Khi ấy độ cứng của thanh trùng với trục đối xứng phải chia đôi (hình 3.9d). Theo tính chất phản xứng ta suy ra nội lực cho nửa còn lại với chú ý là mômen uốn trong thanh trùng với trục đối xứng phải nhân đôi.



Hình 3.9.



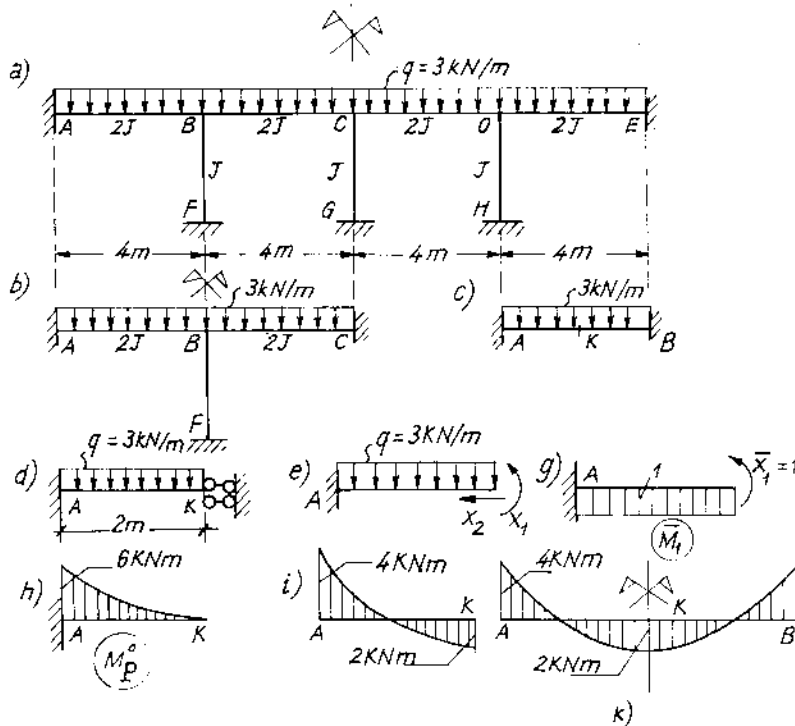
## §7. VÍ DỤ

Cho một khung có số liệu chịu lực như hình 3.10a.

Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn  $M$  sinh ra trong khung ?

### Giải

Ta nhận thấy khung đã cho là một khung đối xứng qua thanh CG cả về tải trọng và cả về hình học. Trong trường hợp này khung là một hệ siêu tĩnh bậc 12 và nếu không kể đến tính đối xứng ta cần phải thiết lập và giải một hệ gồm 12 phương trình chính tắc của phương pháp lực. Việc làm đó tốn rất nhiều công sức, cho nên trong ví dụ này ta triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ để giải quyết bài toán.



Hình 3.10

Ta thấy rằng mặt cắt c trên trục đối xứng sẽ không bị xoay, vì nếu xoay thanh CG bị cong và làm cho tính đối xứng không còn nữa. Mặt khác mặt cắt C cũng không có chuyển vị ngang bởi vì nếu có thì hệ sẽ mất tính đối xứng. Do mặt cắt C không thể xoay và cũng không có chuyển vị ngang

nên có thể thay liên kết nội tại C như một ngàm cứng (hình 3.10b). Hệ trên hình 3.10b cũng là một hệ đối xứng qua thanh BF cả về tải trọng và hình học. Do đó, thay cho các tính toán trên hệ hình 3.10b ta tính toán trên hệ tương đương được cho trên hình 3.10c. Một lần nữa hệ trên hình 3.10c cũng là đối xứng có trục đối xứng thẳng đứng qua trung điểm K của đoạn AB. Tại K lực cắt  $Q_K = 0$  còn  $M_K \neq 0$ ,  $N_K \neq 0$ , vì vậy sơ đồ tính cho nửa dầm AK có dạng như hình 3.10d.

Phương trình chính tắc của hệ hình 3.10e có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p}^o = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p}^o = 0$$

Do  $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$  ;  $\Delta_{2p}^o = 0$ , cho nên ta có :

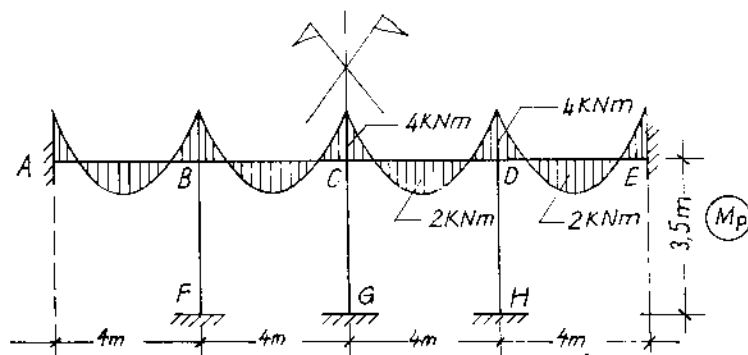
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p}^o = 0$$

trong đó,

$$\delta_{11} = \frac{1 \times 2}{2EJ} \cdot 1 = \frac{1}{EJ} ; \quad \Delta_{1p}^o = \frac{-6 \times 2 \times 1}{3 \times 2EJ} = \frac{-2}{EJ}$$

$$\text{Suy ra } X_1 = \frac{2 \cdot EJ}{EJ} = 2 \text{ kNm}$$

Biểu đồ mômen uốn trong hệ xuất phát hình 3.10a được cho trên hình 3.11. Bằng cách lấy đối xứng qua K ta có biểu đồ mômen hình 3.10k cho hệ trên hình 3.10c. Từ biểu đồ mômen hình 3.10k lấy đối xứng qua trục BF, sau đó lại lấy đối xứng qua trục CG ta có biểu đồ mômen uốn cuối cùng trong hệ đã cho.



Hình 3.11

## Chương 4

# CÁC PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH CÁC CẤU KIỆN SIÊU TÍNH

## I. PHƯƠNG PHÁP VẠN NĂNG

### §1. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT CỦA CHUYỂN VỊ VÀ NỘI LỰC

Chúng ta hãy khảo sát một thanh chiều dài  $l$  gồm  $n$  đoạn mặt cắt ngang khác nhau, chịu tác dụng của hệ ngoại lực bất kỳ, chịu liên kết bất kỳ (hình 4.1a,b,c,d).

Để thống nhất cách trình bày và tiện sử dụng các đại lượng cần tính, thanh được thiết lập trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz. Gốc tọa độ "O" được đặt cố định ở đầu trái của thanh, trục  $z$  trùng với trục thanh và hướng sang phải, các mặt cắt phân chia giữa các đoạn thanh được đánh số là "i" ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Tên gọi của mỗi đoạn sẽ mang tên gọi mút cuối phải của đoạn đó. Tất cả các ngoại lực có chiều dương tác dụng lên thanh được cho trên hình 4.1a,b,c (điều này là cần thiết trong khi tính toán thực hành và phù hợp với quy ước dấu của nội lực trong sức bền vật liệu). Đầu trái của mỗi đoạn được ký hiệu là "O<sub>i</sub>" như là gốc tọa độ địa phương của đoạn "i" có chiều dài  $l_i = a_i - a_{i-1}$ . Hoành độ các mặt cắt phân chia giữa các đoạn được ký hiệu là  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n$ .

Chúng ta gọi  $Y(z)$  là chuyển vị tổng quát nào đó của mặt cắt ngang tại hoành độ  $Z$  của thanh. Ví dụ, đối với các cấu kiện chịu kéo (nén) thì chuyển vị dọc trục thanh  $Y(z)$  là  $U(z)$ .

Đối với cấu kiện chịu biến dạng xoắn thuần túy thì chuyển vị góc (góc xoắn) của mặt cắt ngang  $Y(z)$  là  $\varphi_z(z)$ .

Đối với cấu kiện chịu biến dạng uốn thì chuyển vị thẳng vuông góc với trục thanh  $Y(z)$  là  $V(z)$ .

Bây giờ chúng ta hãy tìm cách xác định đại lượng cần tính  $Y(z)$  tổng quát thuộc đoạn thứ  $i$ , có chiều dài  $l_i = a_i - a_{i-1}$  và các đặc trưng của mặt cắt ngang  $E_i$ ,  $F_i$ ,  $J_{xi}$ ,  $J_{pi}$ . Để có được điều đó, chúng ta khảo sát phần thanh bên phải của mặt cắt "i-1".

Phần thanh này chịu tác dụng của hệ ngoại lực phân bố bất kỳ, các lực tập trung, mômen ngoại lực tập trung, các chuyển vị ở đầu trái "O<sub>i</sub>" của đoạn  $i$  và các nội lực, chuyển vị của phần thanh  $a_{i-1}$  đã được tưởng tượng cắt ra và bỏ đi tác dụng vào đầu trái "O<sub>i</sub>" của đoạn  $i$  này.

Dưới tác dụng của các yếu tố nói trên đoạn thanh khảo sát bị biến dạng và chuyển vị. Ta có thể bằng nhiều cách, tìm được chuyển vị này theo chuyển vị và các đạo hàm của nó tại đầu trái O<sub>i</sub> (khai triển Taylor là một trong những giải pháp như vậy) :

$$Y_i(z) = Y_{oi} + Y'_{oi}(Z - a_{i-1}) + Y''_{oi} \frac{(z - a_{i-1})^2}{2!} + Y'''_{oi} \frac{(Z - a_{i-1})^3}{3!} + \dots$$

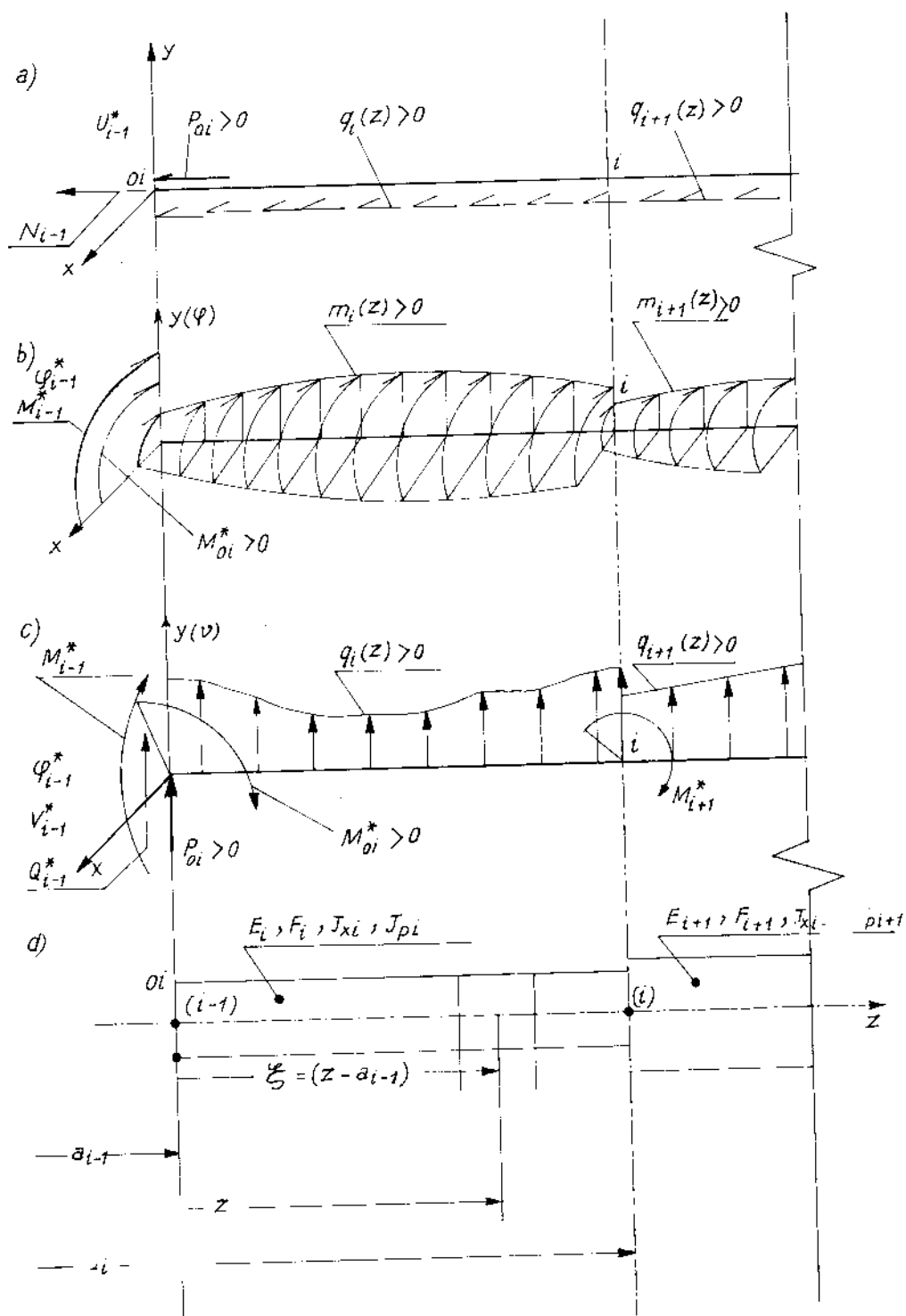
Khi ký hiệu

$$\Phi_K(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \frac{(z - a_{i-1})^k}{k!} & \text{với } \forall z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{với } \forall a_{i-1} > z \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

(  $k = \overline{1, n}$  )

ta có thể viết đại lượng  $Y(z)$  và các đạo hàm của nó tại hoành độ  $z$  như sau :

$$\left. \begin{aligned} Y_i(z) &= Y_{oi}\Phi_0 + Y'_{oi}\Phi_1 + Y''_{oi}\Phi_2 + Y'''_{oi}\Phi_3 + \dots \\ Y'_i(z) &= 0 + Y'_{oi}\Phi_0 + Y''_{oi}\Phi_1 + Y'''_{oi}\Phi_2 + \dots \\ Y''_i(z) &= 0 + 0 + Y''_{oi}\Phi_0 + Y'''_{oi}\Phi_1 + Y^{(IV)}_{oi}\Phi_2 + \dots \\ Y'''_i(z) &= 0 + 0 + 0 + Y'''_{oi}\Phi_0 + Y^{(IV)}_{oi}\Phi_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$



Hình 4.1

Dưới dạng ma trận hệ (4.2) sẽ là :

$$\vec{S}_i(z) = [\Phi_i] \vec{D}_{oi} \quad (4.3)$$

trong đó :

$$[\Phi_i] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \dots \end{vmatrix}$$

$\vec{S}_i(z) = (Y(z) \ Y'(z) \ Y''(z) \ Y'''(z))^T$  là vectơ các đại lượng cần tính tại hoành độ  $Z$  thuộc đoạn thứ "i". Phụ thuộc vào từng bài toán cụ thể mà  $\vec{S}_i(z)$  có dạng cụ thể, ví dụ :

Đối với bài toán kéo (nén) :

$$\vec{S}_i(z) = (U(z) \ N(z))^T$$

Đối với bài toán xoắn thuần túy :

$$\vec{S}_i(z) = (\varphi_z(z) \ M_x(z))^T$$

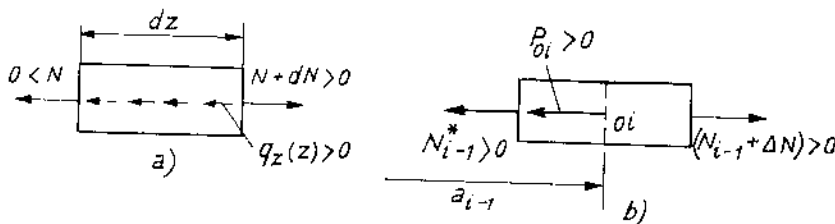
Đối với bài toán uốn ngang phẳng :

$$\vec{S}_i(z) = (V(z) \ \varphi(z) \ M_x(z) \ Q_y(z))^T$$

$\vec{D}_{oi} = (Y_{oi} \ Y'_{oi} \ Y''_{oi} \ Y'''_{oi} \ Y^{IV}_{oi} \ \dots)^T$  là vectơ mà các thành phần của nó là hàm và các đạo hàm của các đại lượng cần tính ở đầu trái đoạn "i". Vectơ  $\vec{D}_{oi}$  này được xác định nhờ các liên hệ vi phân giữa ngoại lực và nội lực, giữa chuyển vị và nội lực đã biết trong môn học sức bền vật liệu. Dưới đây ta sẽ nhắc lại các liên hệ vi phân đó đối với từng loại chất tải cụ thể và  $\vec{D}_{oi}$  tương ứng.

## §2. CÁC TRƯỜNG HỢP CHẤT TẢI CỤ THỂ

### 1. Bài toán kéo (nén)

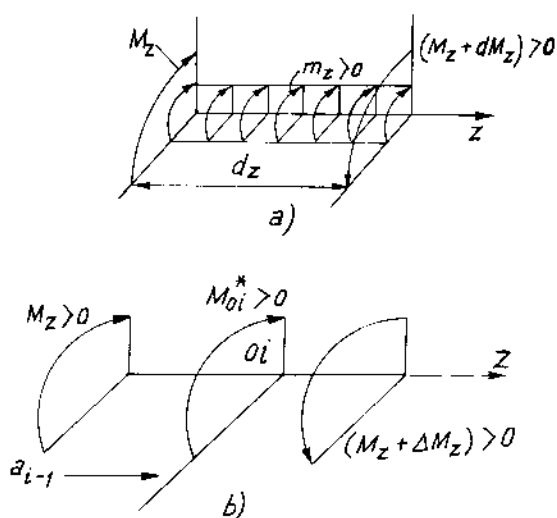


Hình 4.2

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_i &= P_{oi} & \frac{dU}{dz} &= \frac{N}{E_i F_i} \\ \frac{dN}{dz} &= q(z) & \frac{d^2 U}{dz^2} &= \frac{q(z)}{E_i F_i} \\ &\dots\dots\dots & & \\ \frac{d^n N}{dz^n} &= q^{(n-1)}(z) & \frac{d^n U}{dz^n} &= \frac{q^{(n-2)}(z)}{E_i F_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$\vec{D}_{oi} = \left( U_{oi} \quad \frac{N_{oi}}{E_i F_i} \quad \frac{q_{oi}}{E_i F_i} \quad \frac{q'_{oi}}{E_i F_i} \quad \dots \right)^T \quad (4.5)$$

## 2. Bài toán xoắn

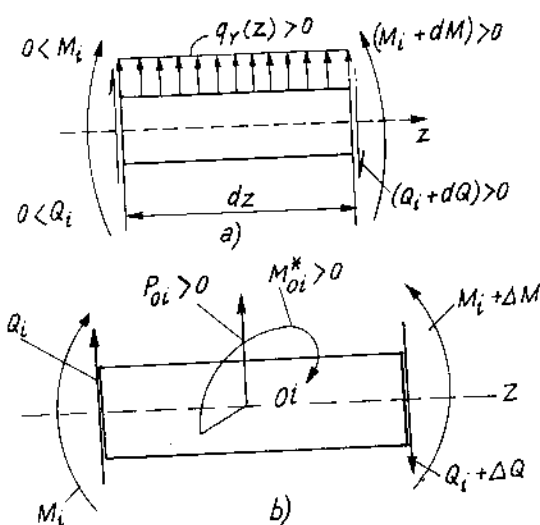


Hình 4.3

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_{iz} &= M_{oi}^* & \frac{d\varphi}{dz} &= \frac{M_z(z)}{G_i J_{pi}} \\ \frac{dM_z}{dz} &= m_z(z) & \frac{d^2 \varphi}{dz^2} &= \frac{m_z(z)}{G_i J_{pi}} \\ \frac{d^n M_z}{dz^n} &= m_z^{(n-1)}(z) & \frac{d^n \varphi}{dz^n} &= \frac{m_z^{(n-2)}(z)}{G_i J_{pi}} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\vec{D}_{oi} = \left( \varphi_{oi} \quad \frac{M_{oi}^*}{G_i J_{pi}} \quad \frac{m_{oi}}{G_i J_{pi}} \quad \frac{m'_{oi}}{G_i J_{pi}} \dots \right)^T \quad (4.7)$$

### 3. Bài toán uốn ngang phẳng



Hình 4.4

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{dV}{dz} = \varphi(z) \\ \Delta Q_i = P_{oi} & \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ} \\ \Delta M_i = M_{oi}^* & \frac{d^3V}{dz^3} = \frac{Q(z)}{EJ} \\ \frac{dQ}{dz} = q(z) & \frac{d^4V}{dz^4} = \frac{q(z)}{EJ} \\ \frac{dM}{dz} = Q(z) & \dots \dots \dots \\ \frac{d^2M_x}{dz^2} = q(z) & \frac{d^n V}{dz^n} = \frac{q^{(n-4)}(z)}{EJ} \end{array} \right\} \quad (4.8)$$



$$\vec{D}_{oi} = \left( V_{oi} \quad \varphi_{oi} \quad M_{oi}^*/E_i J_i \quad P_{oi}/E_i J_i \quad q_{oi}/E_i J_i \quad q'_{oi}/E_i J_i \dots \right)^T \quad (4.9)$$

Khi thay (4.5), (4.7), (4.9) vào (4.3) ta được :

$$\vec{S}_i(z) = [B_i] \vec{S}_{oi} \quad (4.10)$$

trong đó :

$[B_i]$  là ma trận biến đổi của đoạn "i" ;

$\vec{S}_{oi}$  là vectơ các thông số trạng thái ở đầu trái "Oi" của đoạn "i" ;

$\vec{S}_i(z)$  là vectơ các đại lượng cần tính tại hoành độ  $z$  thuộc đoạn "i"

a) Trường hợp thanh chịu kéo (nén)

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i F_i} & \frac{\Phi_2}{E_i F_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} & \frac{\Phi_4}{E_i F_i} & \frac{\Phi_5}{E_i F_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_{oi} = \left\{ U_{oi} \quad N_{oi} \quad q_{oi} \quad q'_{oi} \quad q''_{oi} \dots \right\}^T$$

$$\vec{S}_i(z) = \begin{bmatrix} U_i(z) \\ N_i(z) \end{bmatrix}$$

b) Trường hợp thanh chịu xoắn :

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_2}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_3}{G_i J_{pi}} & \dots & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\vec{S}_{oi} = \left[ \varphi_{oi} \quad M_{oi}^* \quad m_{oi} \quad m'_{oi} \quad m''_{oi} \dots \right]^T$$

$$\vec{S}_i(z) = \begin{bmatrix} \varphi_i(z) \\ N_i(z) \end{bmatrix}$$

c) Trường hợp thanh chịu uốn ngang phẳng

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1/E_i J_i & \Phi_2/E_i J_i & \Phi_3/E_i J_i & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \dots \end{bmatrix} ;$$

$$\vec{S}_{oi} = \left( V_{oi} \quad \varphi_{oi} \quad M_{oi}^* \quad P_{oi} \quad q_{oi} \quad q'_{oi} \quad q''_{oi} \quad \dots \right)^T$$

$$\vec{S}_i(z) = \begin{Bmatrix} V_i(z) \\ \varphi_i(z) \\ M_i(z) \\ Q_i(z) \end{Bmatrix}$$

### §3. CÔNG THỨC TỔNG QUÁT XÁC ĐỊNH CÁC ĐẠI LƯỢNG CẦN TÍNH

Khi thay  $(z - a_{i-1})$  bằng chiều dài  $l_i$  của đoạn "i" thì  $\vec{S}_i(z)$  trở thành  $\vec{S}_i^*(a_i)$ ,  $[B_i(z)]$  trở thành  $[B_i^*(l_i)]$  và quan hệ (4.10) sẽ là :

$$\vec{S}_i^* = [B_i^*] \cdot \vec{S}_{oi} \quad (4.11)$$

Khi ký hiệu  $\Delta \vec{S}_{oi}$  là vectơ các thông số trạng thái ở đầu trái "O<sub>i</sub>" nếu có của đoạn "i" sẽ được bổ sung vào cuối phải của đoạn "i-1" và  $\vec{S}_{i-1}^*$  là vectơ các thông số trạng thái của đại lượng cần tính tại cuối phải "i-1" thì ta có thể viết :

\* Đối với đoạn  $i = 1$

$$\begin{aligned} \vec{S}_1(z) &= [B_1] \Delta \vec{S}_{o1} \\ \vec{S}_{i-1}^* &= \vec{S}_o^* = 0 \\ \vec{S}_1^*(a_1) &= [B_1^*] \Delta \vec{S}_{o1} \end{aligned}$$

\* Đối với đoạn  $i = 2$

$$\begin{aligned} \vec{S}_2(z) &= [B_2] [B_1^*] \Delta \vec{S}_{o1} + [B_2] \Delta \vec{S}_{o2} \\ \vec{S}_2^*(a_2) &= [B_2^*] [B_1^*] \Delta \vec{S}_{o1} + [B_2^*] \Delta \vec{S}_{o2} \end{aligned}$$

Bằng cách thay thế liên tiếp như vậy, ta thiết lập được công thức tổng quát để xác định các đại lượng cần tính cho thanh có n đoạn độ cứng khác nhau dưới dạng :

Đối với đoạn thứ i :

$$\left. \begin{aligned} \vec{S}_i(z) &= [B_i] \left( \vec{S}_{i-1}^* + \Delta \vec{S}_{oi} \right) = [B_i] \vec{S}_{i-1}^* + [B_i] \Delta \vec{S}_{oi} \\ \vec{S}_i^*(a_i) &= [B_i^*] [B_{i-1}^*] \vec{S}_{i-2}^* + [B_i^*] [B_{i-1}^*] \Delta \vec{S}_{oi-1} + [B_i^*] \Delta \vec{S}_{oi} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Đối với đoạn thứ n :

$$\vec{S}_n(z) = \left[ \begin{matrix} [B_n] [B_{n-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \vec{S}_{o1} + [B_n] [B_{n-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \vec{S}_{o2} + \\ \dots + [B_n] \Delta \vec{S}_{on} \end{matrix} \right] \quad (4.13)$$

$$\vec{S}_n^*(a_n) = \left[ \begin{matrix} [B_n^*] [B_{n-1}^*] \dots [B_1^*] \Delta \vec{S}_{o1} + [B_n^*] [B_{n-1}^*] \dots [B_2^*] \Delta \vec{S}_{o2} + \\ \dots + [B_n^*] \Delta \vec{S}_{on} \end{matrix} \right] \quad (4.14)$$

Khi  $K_i = \text{const}$  và  $l_i = \text{const}$  với mọi "i", các phương trình (4.13) thu về :

$$\begin{aligned} \vec{S}_n(z) = & [B_n] [B^*]^{n-1} \cdot \Delta \vec{S}_{o1} + [B_n] [B^*]^{n-2} \cdot \Delta \vec{S}_{o2} + \dots \\ & + [B_n] [B^*] \Delta \vec{S}_{o,n-1} + [B_n] \cdot \Delta \vec{S}_{on} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_n^*(a_n) = & [B^*]^n \cdot \Delta \vec{S}_{o1} + [B^*]^{n-1} \cdot \Delta \vec{S}_{o2} + \\ & + \dots + [B^*] \cdot \Delta \vec{S}_{on} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$K_i$  là độ cứng của mặt cắt ngang thuộc đoạn "i".

Dưới đây chúng ta sẽ thực tế hóa các công thức tổng quát nêu trên vào các bài toán cơ bản.

#### §4. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN

##### 1. Bài toán kéo (nén)

###### a) Dạng ma trận

Trong bài toán này các đại lượng cần tính là chuyển vị dọc trục (độ dãn dài hoặc co ngắn)  $U(z)$  và lực pháp tuyến (lực dọc)  $N(z)$  được xác định theo các công thức từ (4.12) đến (4.16).

Trong đó :

$$K_i = E_i F_i ;$$

$$\Delta \vec{S}_{oi} = \left\{ \tilde{u}_{oi}, P_{oi}, q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi}, \dots \right\}^T ;$$

$$\vec{S}_i(z) = \{U(z), N(z)\}^T;$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i F_i} & \frac{\Phi_2}{E_i F_i} & \frac{\Phi_3}{E_i F_i} & \frac{\Phi_4}{E_i F_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \end{bmatrix}$$

Ở đây :

$E_i$  là môđun đàn hồi khi kéo (nén) của vật liệu của đoạn thanh thứ (i) ;

$F_i$  - diện tích mặt cắt ngang của đoạn này ;

$\tilde{u}_{oi}$  - chuyển vị dọc trục bổ sung ở đầu trái  $O_i$  của đoạn "i" ;

$P_{oi}$  - ngoại lực dọc trục tập trung ở đầu trái đoạn "i"

$q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi} \dots$  lần lượt là tải trọng phân bố dọc trục và các đạo hàm các cấp của hàm tải trọng phân bố  $q(z)$  tại đầu trái " $O_i$ " của đoạn "i".

#### b) Dạng biểu diễn tổng

Trong nhiều trường hợp các đại lượng cần tính được biểu diễn dưới dạng tổng lại tỏ ra thuận lợi hơn. Vì vậy, khi  $EF = \text{const}$  với mọi "i" và  $l_i \neq \text{const}$  thì phương trình (4.13) có dạng tổng quát như sau :

$$\left. \begin{aligned} U(z) &= \sum_{i=1}^n \left( \Delta U_{oi} \Phi_0 + P_{oi} \frac{\Phi_1}{EF} + \Delta q_{oi} \frac{\Phi_2}{EF} + \Delta q'_{oi} \frac{\Phi_3}{EF} + \dots \right) \\ N(z) &= \sum_{i=1}^n \left( P_{oi} \Phi_0 + \Delta q_{oi} \Phi_1 + \Delta q'_{oi} \Phi_2 + \Delta q''_{oi} \Phi_3 + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Đối với thanh có cấu tạo liên tục,  $\Delta U_i = 0$ , với  $\forall i > 1$ .

$\Delta u_{oi}$  là bước nhảy của chuyển vị dọc trục ở " $O_i$ " ;

$P_{oi}$  là lực tập trung dọc trục  $z$  ở " $O_i$ " ;

$\Delta q_{oi}, \Delta q'_{oi}, \Delta q''_{oi}$  lần lượt là bước nhảy của hàm tải trọng phân bố dọc trục tại " $O_i$ ".

## 2. Bài toán xoắn

#### a) Dạng ma trận

Vectơ các đại lượng cần tính  $\vec{S}_i(z)$  trong bài toán này gồm hai thành

phần là góc xoắn  $\varphi_z(z)$  và mômen xoắn  $M_z(z)$  được xác định theo các công thức từ (4.12) đến (4.16).

Trong đó :

$$[B_i] = \left\{ \begin{array}{l} K_i = G_i J_{pi} ; \\ \vec{\Delta S}_{oi} = \{ \tilde{\varphi}_{oi}, M_{oi}^*, m_{oi}, m'_{oi}, m''_{oi} \dots \}^T ; \\ \left[ \begin{array}{cccccc} \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_2}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_3}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_4}{G_i J_{pi}} & \frac{\Phi_5}{G_i J_{pi}} \\ 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \dots \\ \vec{S}_i(z) = \vec{S}_i = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(z) \\ M_i(z) \end{array} \right\} \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

ở đây

$G_i$  - môđun đàn hồi trượt của vật liệu của đoạn thanh  $i$  ;

$J_{pi}$  - mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang đối với trọng tâm mặt cắt ngang ;

$\tilde{\varphi}_{oi}$  - góc xoắn bổ xung ở đầu trái đoạn  $i$  ;

$M_{oi}^*$  - mômen xoắn ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn  $i$  ;

$m_{oi}, m'_{oi}, m''_{oi}, \dots$  - mômen xoắn ngoại lực phân bố và các đạo hàm các cấp của nó ở đầu trái đoạn  $i$ .

b) *Dạng biểu diễn tổng*

$$\left. \begin{array}{l} \text{a/ } \varphi_n(z) = \sum_{i=1}^n \left( \Delta\varphi_{oi}\Phi_0 + M_{oi}^* \frac{\Phi_1}{GJ_p} + \Delta m_{oi} \frac{\Phi_2}{GJ_p} + \Delta m'_{oi} \frac{\Phi_3}{GJ_p} + \dots \right) \\ \text{b/ } M_n(z) = \sum_{i=1}^n \left( M_{oi}^*\Phi_0 + \Delta m_{oi}\Phi_1 + \Delta m'_{oi}\Phi_2 + \Delta m''_{oi}\Phi_3 \dots \right) \end{array} \right\} \quad (4.19)$$

với  $l_i \neq \text{const}$  và  $G_i J_{pi} = \text{const}$  với  $\forall i$ . Nếu thanh có cấu tạo liên tục thì  $\Delta\varphi_{oi} = 0$  với  $\forall i > 1$ .

Trong (4.19)  $\Delta\varphi_{oi}$  là bước nhảy của góc xoắn ở đầu trái đoạn " $i$ ".

$M_{oi}^*$  là mômen xoắn ngoại lực tập trung ở " $O_i$ " ;

$\Delta m_{oi}, \Delta m'_{oi}, \Delta m''_{oi} \dots$  lần lượt là bước nhảy của mômen xoắn ngoại lực phân bố và của các đại hàm các cấp của nó ở " $O_i$ ".

### 3. Bài toán uốn

#### a) Dạng ma trận

Trong trường hợp này vectơ các đại lượng cần tìm  $\vec{S}_i(z)$  có bốn thành phần là chuyển vị thẳng  $V(z)$ , chuyển vị góc (góc xoay)  $\varphi_x(z)$ , mômen uốn  $M_x(z)$  và lực cắt  $Q_y(z)$ . Vectơ này được xác định theo công thức tổng quát từ (4.12) đến (4.16).

Trong đó :

$$\begin{aligned} K_i &= E_i J_i ; \\ \Delta \vec{S}_{oi} &= \left\{ \tilde{V}_{oi}, \tilde{\varphi}_{oi}, M_{oi}^*, P_{oi}, q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi} \dots \right\}^T \\ [B_i] &= \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \frac{\Phi_5}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & \Phi_0 & \frac{\Phi_1}{E_i J_i} & \frac{\Phi_2}{E_i J_i} & \frac{\Phi_3}{E_i J_i} & \frac{\Phi_4}{E_i J_i} & \dots \\ 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \dots \end{bmatrix} \\ \vec{S}_i(z) &= \begin{bmatrix} V_i(z) \\ \varphi_i(z) \\ M_i(z) \\ Q_i(z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.20)$$

#### b) Dạng biểu diễn tổng

Trong trường hợp  $l_i \neq \text{const}$  và  $E_i J_i = \text{const}$  với mọi "i" ta có dạng biểu diễn tổng của uốn ngang phẳng :

$$\begin{aligned} V_n(z) &= \sum_{i=1}^n \left( \Delta V_{oi} \Phi_0 + \Delta \varphi_{oi} \Phi_1 + M_{oi}^* \frac{\Phi_2}{EJ} + P_{oi} \frac{\Phi_3}{EJ} + \Delta q_{oi} \frac{\Phi_4}{EJ} + \right. \\ &\quad \left. \Delta q'_{oi} \frac{\Phi_5}{EJ} + \Delta q''_{oi} \frac{\Phi_6}{EJ} \dots \right); \\ \varphi_n(z) &= \sum_{i=1}^n \left( \Delta \varphi_{oi} \Phi_0 + M_{oi}^* \frac{\Phi_1}{EJ} + P_{oi} \frac{\Phi_2}{EJ} + \Delta q_{oi} \frac{\Phi_3}{EJ} + \right. \\ &\quad \left. \Delta q'_{oi} \frac{\Phi_4}{EJ} + \Delta q''_{oi} \frac{\Phi_5}{EJ} \dots \right); \\ M_n(z) &= \sum_{i=1}^n \left( M_{oi}^* \Phi_0 + P_{oi} \Phi_1 + \Delta q_{oi} \Phi_2 + \Delta q'_{oi} \Phi_3 + \Delta q''_{oi} \Phi_4 \dots \right) \\ Q_n(z) &= \sum_{i=1}^n \left( P_{oi} \Phi_0 + \Delta q_{oi} \Phi_1 + \Delta q'_{oi} \Phi_2 + \Delta q''_{oi} \Phi_3 \dots \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

ở đây, trong các công thức (4.20) và (4.21) :

$E_i$  - mômen đàn hồi kéo (nén) của vật liệu của đoạn thanh  $i$  ;

$J_i$  - mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa thuộc đoạn "i" ;

$\tilde{V}_{oi}$  - chuyển vị thẳng bổ xung ở đầu trái đoạn  $i$  ;

$\tilde{\varphi}_{oi}$  - góc xoay bổ xung ở đầu trái đoạn  $i$  .

Khi thanh có cấu tạo liên tục thì  $\tilde{V}_{oi} = \tilde{\varphi}_{oi} = 0$  với  $\forall i > 1$ .

$M^*_{oi}$  là mômen uốn ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn  $i$  ;

$P_{oi}$  là ngoại lực tập trung ở đầu trái đoạn  $i$  ;

$q_{oi}, q'_{oi}, q''_{oi}, \dots$  là tải trọng ngang phân bố và các đạo hàm các cấp của nó ở đầu trái đoạn  $i$  ;

$\Delta q_{oi}, \Delta q'_{oi}, \Delta q''_{oi}, \dots$  là bước nhảy của tải trọng ngang phân bố và bước nhảy của các đạo hàm các cấp của nó ở đầu trái đoạn  $i$ .

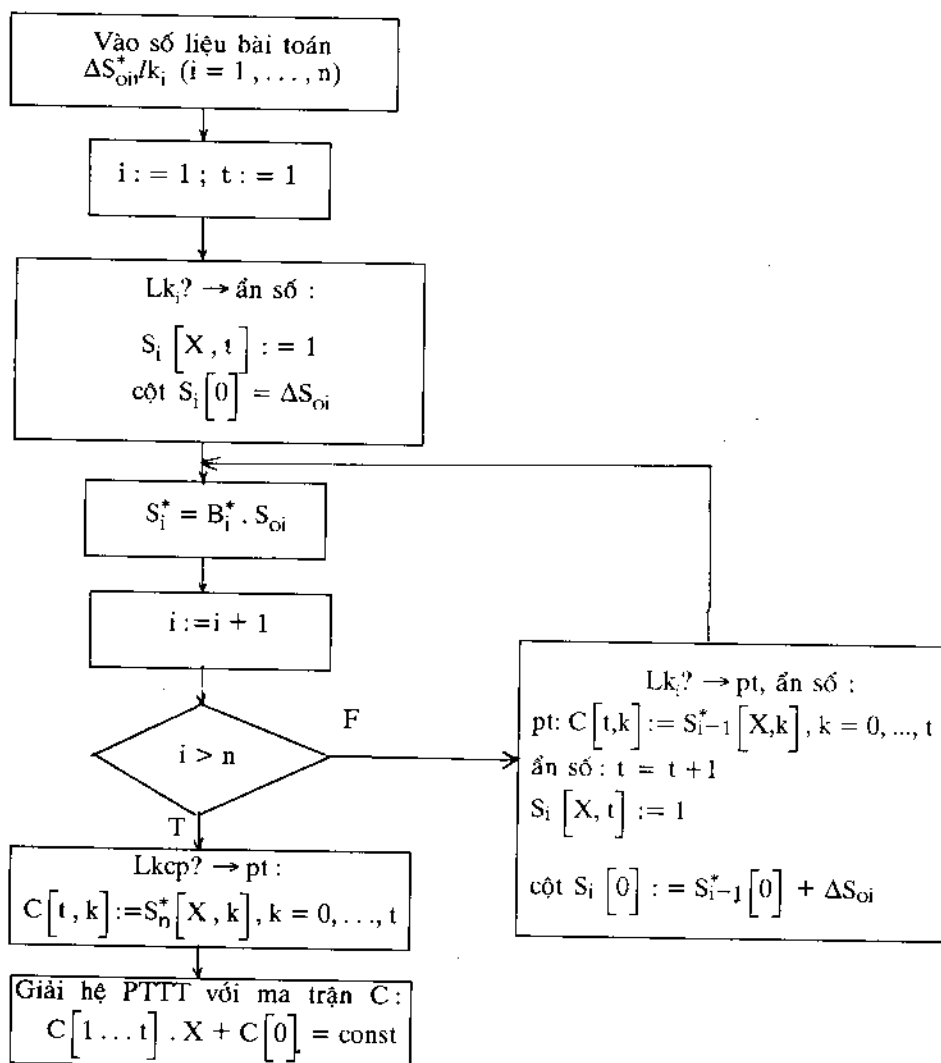
Phương pháp vạn năng và các công thức thuật toán của nó đã được giới thiệu và thiết lập cặn kẽ ở trên cho phép tính toán tất cả các loại thanh chịu biến dạng đàn hồi có mặt cắt thay đổi, chế độ chất tải và liên kết tùy ý cả về số lượng và thể loại. Nhiệm vụ của cơ học vật rắn biến dạng nói chung và cơ học kết cấu nói riêng là xác định trường chuyển vị và nội lực trong hệ do tác dụng ngoài gây ra.

Như đã giới thiệu ở các mục trên của chương này, để xác định chuyển vị và nội lực bằng phương pháp vạn năng đã xây dựng sẵn ở trên thì vấn đề còn lại đối với bài toán cơ bản của cơ học kết cấu là làm rõ các thành phần của vectơ  $\vec{\Delta S}_{oi}$ . Trong số đó các thành phần liên quan đến bước nhảy của tải trọng phân bố và các đạo hàm các cấp của nó được cho trước theo điều kiện chất tải lên thanh. Các thành phần còn lại của vectơ  $\vec{\Delta S}_{oi}$  dù là bài toán kéo hay nén, uốn hay xoắn, tĩnh định hay siêu tĩnh với bất kỳ số lượng và loại liên kết thừa như thế nào, đều có thể xác định được bằng các điều kiện biên nhờ sử dụng trực tiếp các phương trình vạn năng đã thiết lập sẵn dưới dạng ma trận hay dưới dạng biểu diễn tổng mà không cần thiết phải dùng đến các phương trình cân bằng tĩnh học. Đối với các bài toán tĩnh định bất kể số đoạn thanh có chế độ chất tải như thế nào, số các thành phần cần xác định trước trong  $\vec{\Delta S}_{oi}$  không quá hai đối với dầm chịu uốn, không quá một đối với thanh chịu kéo (nén) và xoắn. Trong nhiều trường hợp không cần phải xác

xác định một thành phần nào của  $\vec{\Delta S_{oi}}$  nếu chỉ muốn tính nội lực. Thuật toán xác định nội lực và chuyển vị vừa giới thiệu ở trên là điểm tựa vững chắc cho việc lập trình bằng ngôn ngữ nào mà bạn đọc ưa chuộng. Lời giải đối với một lớp rộng các bài toán với chương trình BK45 được viết bằng ngôn ngữ PASCAL 7.0 của thuật toán này sẽ được giới thiệu dưới đây. Chương trình được lưu trữ ở Bộ môn "Sức bền vật liệu" Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội.

## §5. SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN CHƯƠNG TRÌNH BK45 VÀ CÁCH SỬ DỤNG CHƯƠNG TRÌNH

### 1. Sơ đồ khối thuật toán tìm các ẩn số tại đầu trái của đoạn





## 2. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Chương trình gồm ba cửa sổ làm việc, dùng phím sang phải, sang trái hoặc kích chuột để chuyển đổi cửa sổ.

Cửa sổ thứ nhất để xác định bài toán cần tính (kéo, nén, uốn hay xoắn), số đoạn của thanh và các thông số tại cuối phải của thanh (lực tập trung, mômen tập trung, liên kết).

Cửa sổ thứ hai dùng để nhập thông số cho từng đoạn như sau :

- a/ Trên hộp thoại "đoạn thứ" khi chọn sẽ xuất hiện cửa sổ cho phép nhập số thứ tự của đoạn đang quan tâm.
- b/ Trên hộp thoại "chiều dài" khi chọn cho phép nhập chiều dài mỗi đoạn.
- c/ Trên hộp thoại "liên kết" khi chọn cho phép nhập liên kết đầu trái mỗi đoạn.
- d/ Trên hộp thoại "E, G" khi chọn cho phép nhập môđun đàn hồi E với bài toán kéo, nén và uốn hoặc G đối với bài toán xoắn của mỗi đoạn.
- e/ Trên hộp thoại "F, J" khi chọn cho phép nhập các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang đối với từng loại bài toán.
- g/ Trên hộp thoại "P, M" khi chọn cho phép nhập các thông số về lực tập trung trong vectơ  $\vec{\Delta S_{oi}}$  ở đầu trái mỗi đoạn thứ i đang quan tâm.
- h/ Trên hộp thoại "lực phân bố" khi chọn cho phép nhập bước nhảy của ngoại lực phân bố và các đạo hàm các cấp của nó nếu có trong vectơ  $\vec{\Delta S_{oi}}$  ở đầu trái đoạn i này.

Cửa sổ thứ ba dùng để xem kết quả của bài toán.

Nhấn nút "Tính" chương trình sẽ làm việc và xuất kết quả : dưới dạng bảng các giá trị max của hàm chuyển vị, nội lực và vị trí mặt cắt có giá trị max đó.

- dưới dạng đồ thị, bảng số đối với mỗi đoạn ;
- dưới dạng biểu thức giải tích của chuyển vị và nội lực.

## §6. BÀI TẬP ÁP DỤNG

*Ví dụ 1.* Cho một thanh chịu lực như trên hình 4.5. Bằng phương pháp vạn năng, hãy viết bằng tay các biểu thức, vẽ biểu đồ chuyển vị và nội lực, tính ứng suất và chuyển vị lớn nhất. Biết  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

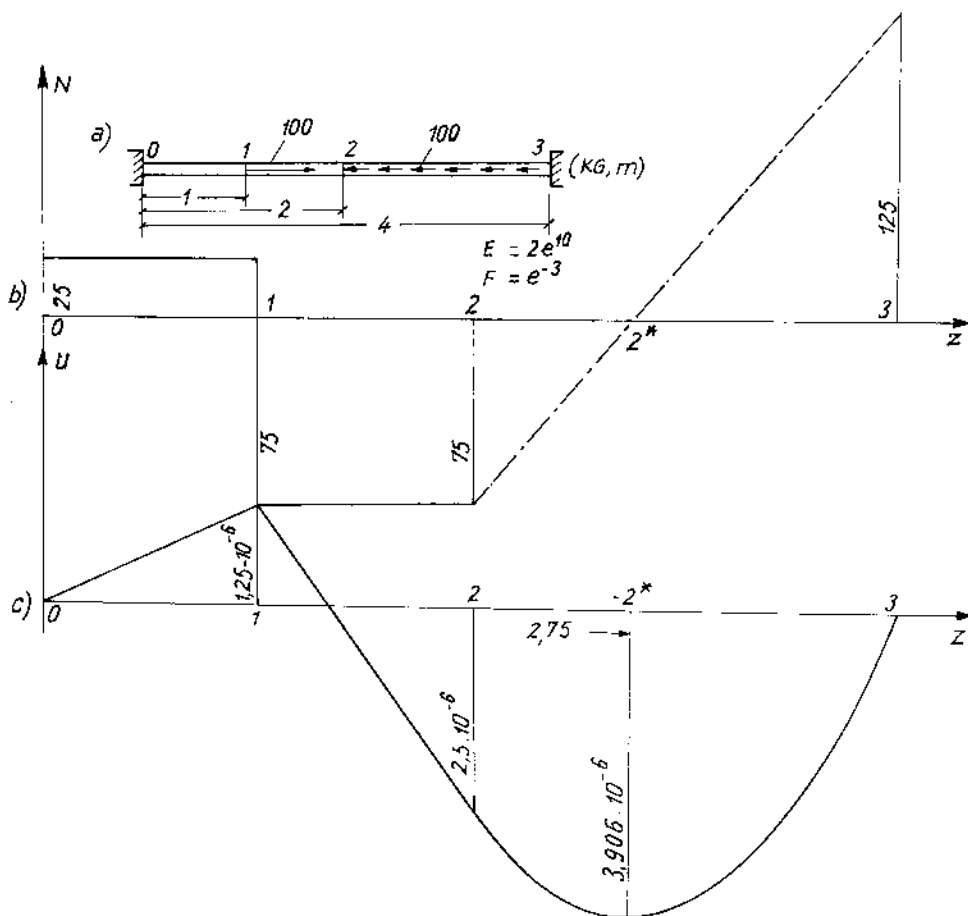
**Giải**

Trong trường hợp bài toán, thanh được chia làm 3 đoạn, biểu thức của  $U(z)$  và  $N(z)$  lần lượt là :

Đoạn I :

$$EFU_1(z) = R_0 z ;$$

$$N_1(z) = R_0$$



Hình 4.5

Đoạn II :

$$EFU_2(z) = R_0 z - 100 (z-1) ; N_2(z) = R_0 - 100$$

Đoạn III :

$$EFU_3(z) = EFU_2(z) + 100 (z-2)^2/2 ; N_3(z) = N_2(z) + 100 (z-2)$$

Phản lực  $R_0$  được xác định từ điều kiện  $U(z = 4m) = 0$ . Cụ thể là :

$$4R_0 - 3 \cdot 100 + 200 = 0 \Rightarrow R_0 = 25 \text{ kG}$$

Thay  $R_0$  vào  $U(z)$ ,  $N(z)$  và vẽ biểu đồ của chúng như trên hình 4.5b,c.

Ứng suất và chuyển vị lớn nhất lần lượt là :

$$\sigma_{\max} = 125/10^{-3} = 125 \cdot 10^3 \text{ kG/m}^2 ; U_{\max}(z = 2,75) = 3,91 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

**Ví dụ 2.** Vẽ biểu đồ chuyển vị  $U$  và lực dọc  $N$  đối với các thanh có khớp trung gian (hình 4.6) và thanh không có khớp trung gian (hình 4.7) bằng phương pháp vạn năng?

Lời giải của bài toán bằng chương trình BK45 được cho dưới dạng bảng và đồ thị trên các hình 4.6 và 4.7.

**Ví dụ 3.** Cho một thanh chịu xoắn như trên hình 4.8a. Hãy viết bằng tay biểu thức giải tích, vẽ biểu đồ chuyển vị và nội lực cho thanh?

**Giải**

$$\text{Đoạn I : } GJ_p \varphi_1 = M_0 Z + 500 Z^2/2 - 250 Z^3/6 ;$$

$$M_1(z) = M_0 + 500Z - 250 Z^2/2.$$

$$\text{Đoạn II : } GJ_p \varphi_2 = GJ_p \varphi_1 + 3000 \cdot (Z - 2) + 250 (Z - 2)^3/6 ;$$

$$M_2(z) = M_1(z) + 3000 + 250 (Z - 2)^2/2.$$

$$\text{Đoạn III : } GJ_p \varphi_3 = GJ_p \varphi_2 - 1000 (Z - 5) ;$$

$$M_3(z) = M_2(z) - 1000.$$

$$\text{Từ điều kiện } \varphi_3(z = 7,5) = 0 \Rightarrow M_0 = 2322,22 \text{ Nm.}$$

Biểu đồ chuyển vị  $\varphi_z(z)$  và mômen  $M_z(z)$  được cho trên hình 4.8b,c.

**Ví dụ 4.** Hãy viết bằng tay các phương trình độ võng, góc xoay và tính độ võng lớn nhất đối với dầm cho trên hình 4.9.

## Bài khác



P1=-2e3·P2=-1e3

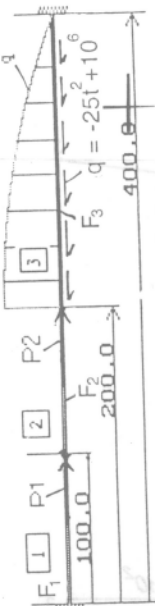
 $E1 = E2 = 5, E3 = 15$ 

—

Bài toán kéo nén với khớp trung gian

Hướng dẫn:

|                                           |       |
|-------------------------------------------|-------|
| Đồ thị                                    |       |
| Bước                                      | 0.001 |
| Xmax                                      | <- -> |
| Ymax                                      | <- -> |
| Đoạn                                      | 1     |
| <div>Bài khác</div> <div>Trở về DOS</div> |       |

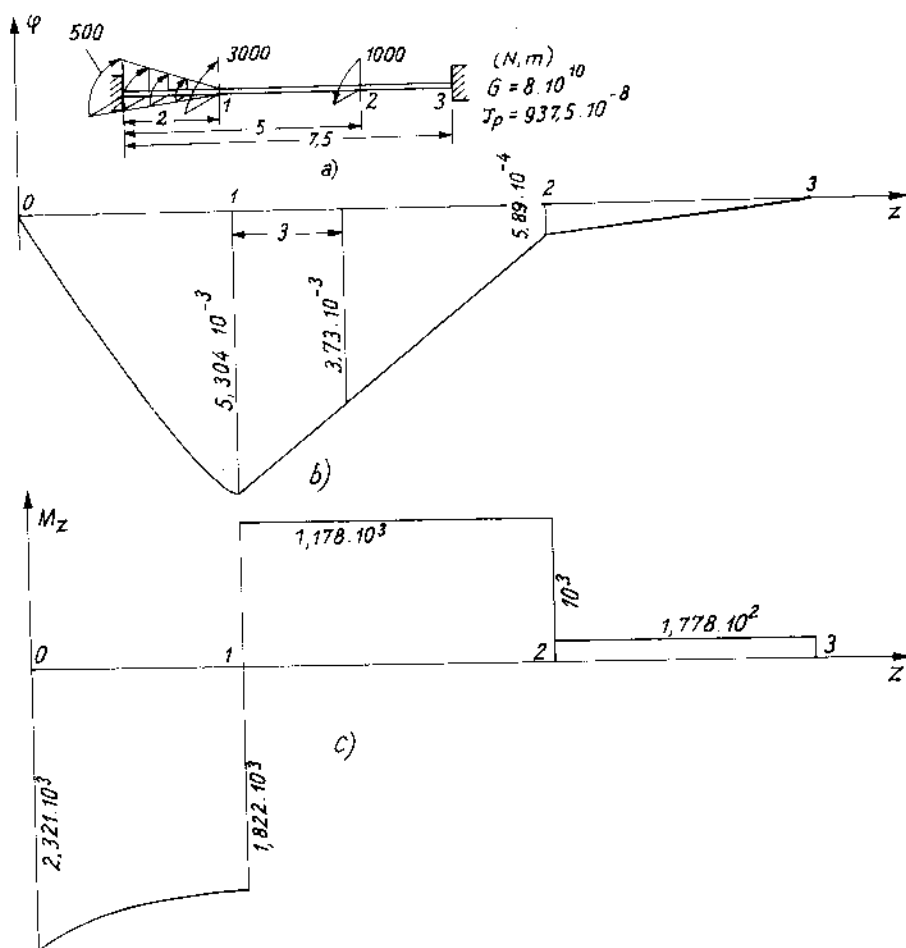


$E1=E2=E=2e6$ ;  $q=-25t+10e6$   
 $F2=F1=5$ ;  $P1=2e3$ ;  $P2=-1e3$   
 $F3=15$ ;  $I1=100$ ;  $I2=100$ ;  $I3=200$

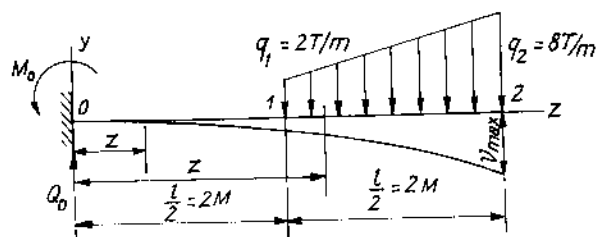
|   | T          | P          |
|---|------------|------------|
| 1 |            |            |
| U | 0.000E+00  | -2.082E+01 |
| N | -2.082E+06 | -2.082E+06 |
| 2 |            |            |
| U | -2.082E+01 | -4.166E+01 |
| N | -2.084E+06 | -2.084E+06 |



Bài toán kéo nén  
Hình 4.7



Hình 4.8



Hình 4.9

### Giải

Phản lực tại ngàm  $M_o = -32Tm$  ;  $Q_o = 10T$ .

Phương trình độ võng đoạn I là :

$$V_I = -\frac{32}{EJ} \frac{z^2}{2} + \frac{10}{EJ} \frac{z^3}{6}$$

$$\text{với} \quad 0 \leq Z \leq l/2$$

Các bước nhảy  $\Delta q_{oi}$ ,  $\Delta q'_{oi}$  ... được xác định như thường lệ, cụ thể là :

$$\Delta q_{o1} = (-q_1) - (0) = -q_1 = -2T/m$$

$$\Delta q'_{o1} = \left( \frac{q_2 - q_1}{\frac{l}{2}} \right) - 0 = \frac{-2(q_2 - q_1)}{l} = -3 \text{ T/m}$$

Do đó ta nhận được phương trình độ võng đoạn II là :

$$\begin{aligned} V_{II} &= V_I + \frac{\Delta q_1}{EJ} \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\Delta q'_1}{EJ} \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^5}{5!} = \\ &= -\frac{32}{EJ} \frac{z^2}{2} + \frac{10}{EJ} \frac{z^3}{6} - \frac{2}{EJ} \frac{(z-2)^4}{24} - \frac{3}{EJ} \frac{(z-2)^5}{120} ; \\ &\quad \frac{l}{2} \leq z \leq l \end{aligned}$$

Bằng cách đạo hàm phương trình độ võng ta nhận được các phương trình góc xoay của đoạn I và đoạn II như sau :

$$\varphi_I = \frac{dV_I}{dz} = -\frac{32}{EJ} z + \frac{10}{EJ} \frac{z^2}{2} ;$$

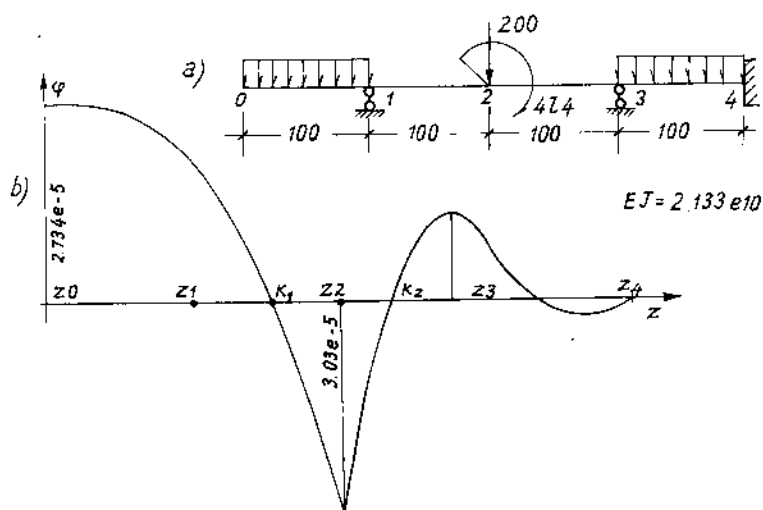
$$\varphi_{II} = \frac{dV_{II}}{dz} = -\frac{32}{EJ} z + \frac{10}{EJ} \frac{z^2}{2} - \frac{2(z-2)^3}{6EJ} - \frac{3}{EJ} \frac{(z-2)^4}{24}$$

Độ võng lớn nhất  $V_{\max}$  là :

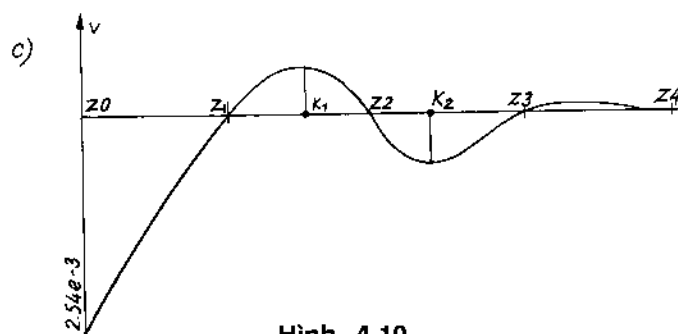
$$\left[ v_{\max} \right] = \frac{2272}{15EJ}$$

**Ví dụ 5.** Một dầm (hình 4.10a) siêu tĩnh với các gối tựa cứng trung gian. Hãy vẽ các biểu đồ góc xoay, chuyển vị thẳng đứng, lực cắt và mômen uốn bằng chương trình BK45?

| Tọa độ | Giá trị | Bước nhảy        | Biên trái         | Biên phải  |
|--------|---------|------------------|-------------------|------------|
| $z_0$  | 0.00000 | 27348023128E-05  | 0                 | 2.734E-05  |
| $z_1$  | 1.00000 | 00000000000E+00  | -1.9536646116E-05 | 1.953E-05  |
| $z_2$  | 2.00000 | 00000000000E+00  | -3.0270550350E-05 | -3.026E-05 |
| $z_3$  | 3.00000 | 00000000000E+00  | 7.8172363364E-06  | 7.810E-05  |
| $z_4$  | 4.00000 | 1.1720446835E-10 | -1.1719412107E-09 | 0          |



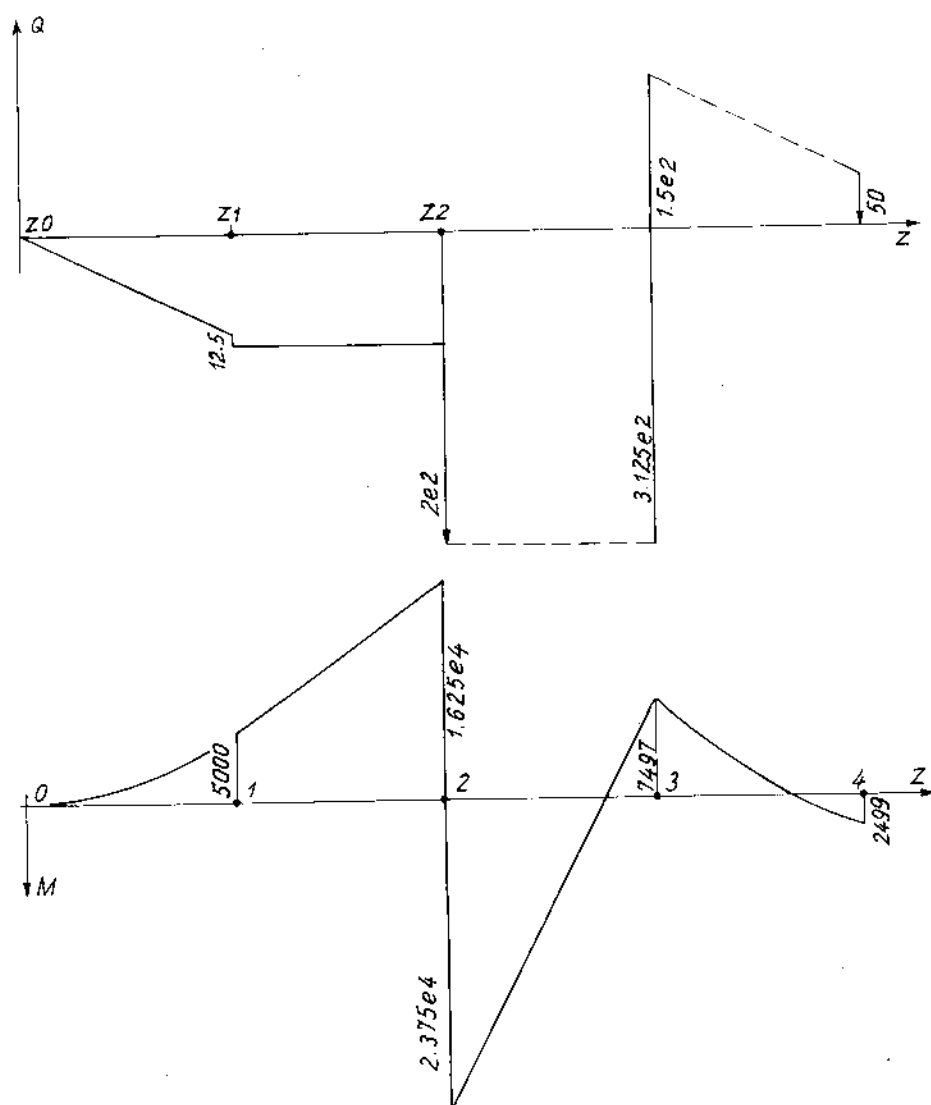
| Tọa độ | Giá trị | Bước nhảy         | Biên trái         | Biên phải  |
|--------|---------|-------------------|-------------------|------------|
| $z_0$  | 0.00000 | -25394592905E-03  | 0                 | -2.539E-03 |
| $z_1$  | 1.00000 | 00000000000E+00   | -1.9535474394E-07 | 1.953E-75  |
| $z_2$  | 2.00000 | 00000000000E+00   | -9.7368767605E-05 | -9.797E-05 |
| $z_3$  | 3.00000 | 00000000000E+00   | -7.8154798189E-08 | 7.811E-08  |
| $z_4$  | 4.00000 | -1.1013412405E-13 | -5.8619775700E-12 | 0          |



Hình 4.10



| Tọa độ | Giá trị | Bước nhảy        | Biên trái        | Biên phải  |
|--------|---------|------------------|------------------|------------|
| $z_0$  | 0.00000 | 00000000000E+00  | 0                | -1.000E-02 |
| $z_1$  | 1.00000 | -1.249999999E+01 | -9.999000000E+01 | -1.125E+02 |
| $z_2$  | 2.00000 | 2.000000000E+02  | -1.125000000E+02 | -3.125E+02 |
| $z_3$  | 3.00000 | 4.624999999E+02  | -3.125000000E+02 | 1.499E+02  |
| $z_4$  | 4.00000 | -5.000999995E-01 | 5.000999994E+01  | 0          |



Hình 4.10

### Giải

Khi sử dụng chương trình BK45, các biểu đồ  $\varphi$ ,  $V$ ,  $Q$ ,  $M$  được cho trên hình 4.10b,c,d,e.

Ví dụ 6. Bằng chương trình BK45 hãy viết biểu thức của chuyển vị và vẽ các biểu đồ  $V(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $M(z)$  và  $Q(z)$  đối với dầm liên tục mặt cắt thay đổi tựa trên các gối tựa đàn hồi (hình 4.11a).

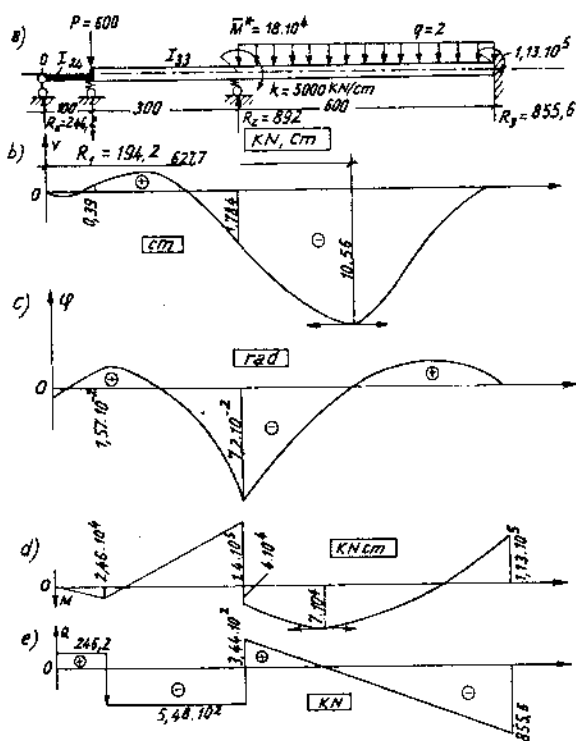
### Giải

|        | Max        | $z =$     |
|--------|------------|-----------|
| U      | -1.056E+01 | 6.277E+02 |
| $\Phi$ | -7.198E-02 | 4.000E+02 |
| M      | -1.397E+05 | 4.000E+02 |
| Q      | -8.556E+02 | 1.000E+03 |

$$V_1 = 5,93 \cdot 10^{-7} z^3 - 2,05 \cdot 10^{-3} z$$

$$V_2 = 4,64 \cdot 10^{-7} z^3 + 6,26 \cdot 10^{-5} z^2 + 1,57 \cdot 10^{-2} z + 3,88 \cdot 10^{-1}$$

$$V_3 = -4,23 \cdot 10^{-10} z^4 + 2,92 \cdot 10^{-7} z^3 + 1,02 \cdot 10^{-4} z^2 - 7,2 \cdot 10^{-2} z - 1,78$$



Hình 4.11

Ví dụ 7. Một dầm liên tục nhiều nhịp mặt cắt thay đổi có khớp trượt trung gian (hình 4.12a). Bằng phương pháp vạn năng, hãy vẽ các biểu đồ  $V(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $M(z)$  và  $Q(z)$ . Đơn vị tính toán (daN, cm).

### Giải

Các biểu đồ  $V$ ,  $\varphi$ ,  $M$ ,  $Q$  và các kết quả dưới dạng bảng số được cho trên các hình 4.12a,b,c.

Hướng dẫn:

|        |       |
|--------|-------|
| Đồ thị |       |
| Butt   | ?     |
| Xmax   | <- -> |
| Ymax   | <- -> |
| Điểm   | I     |

|   | Max        | z =       |
|---|------------|-----------|
| U | -3.504E-02 | 1.300E+03 |
| φ | 2.272E-04  | 1.381E+03 |
| M | 1.880E+05  | 6.000E+02 |
| Q | -1.522E+03 | 8.000E+02 |

|   | T          | P          |
|---|------------|------------|
| 1 |            |            |
| U | 0.000E+00  | -4.167E-03 |
| φ | -7.497E-05 | 1.840E-05  |
| M | 0.000E+00  | 7.858E+03  |
| Q | 1.119E+02  | 1.191E+01  |

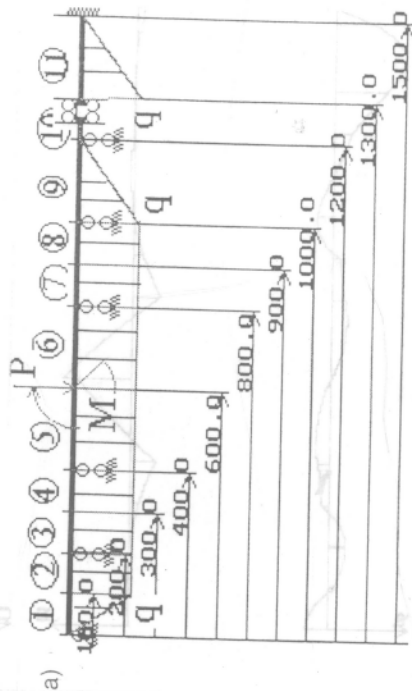
  

|   | T          | P          |
|---|------------|------------|
| 2 |            |            |
| U | -4.167E-03 | 0.000E+00  |
| φ | 1.840E-05  | 5.457E-05  |
| M | 7.858E+03  | -9.506E+02 |
| Q | 1.191E+01  | -1.881E+02 |

|   | T          | P          |
|---|------------|------------|
| 3 |            |            |
| U | 0.000E+00  | 2.964E-03  |
| φ | 5.457E-05  | -2.275E-05 |
| M | -9.506E+02 | -2.428E+04 |
| Q | -1.333E+02 | -3.333E+02 |

Bài khác  
Trở về D0S



## BÀI TOÁN DẦM LIÊN TỤC VỚI KHỚP TRƯỢT

$J1=J10=J11=2550$  ;  $J2=J3=J8=J9=7080$ ;  
 $J4=J5=J6=J7=134600$ ;  
 $q= -2$ ;  $P= -2e3$ ;  $M=4e4$  ;  $E=2e6$   
 $L1=L2=L3=L4=L7=L8=L10=100$ ;  
 $L5=L6=L9=L11=200$ ;

Hướng dẫn:

| Đồ thị |       |
|--------|-------|
| Bước   | 0.001 |
| Xmax   | <- -> |
| Ymax   | <- -> |
| Bảng   | 2     |

Bài khác  
Trở về DOS

| 4 | T            |            | P |
|---|--------------|------------|---|
|   | U            | M          |   |
|   | U 2.964E-03  | 0.000E+00  |   |
|   | φ -2.275E-05 | -3.920E-05 |   |
|   | M -2.428E+04 | -6.761E+04 |   |
|   | Q -3.333E+02 | -5.333E+02 |   |
| 5 | T            |            | P |
|   | U            | M          |   |
|   | U 0.000E+00  | -7.030E-03 |   |
|   | φ -3.920E-05 | -4.403E-06 |   |
|   | M -6.761E+04 | 1.480E+05  |   |
|   | Q 1.278E+03  | 8.778E+02  |   |
| 6 | T            |            | P |
|   | U            | M          |   |
|   | U -7.030E-03 | 0.000E+00  |   |
|   | φ -4.403E-06 | 4.195E-05  |   |
|   | M 1.880E+05  | -7.649E+04 |   |
|   | Q -1.122E+03 | -1.522E+03 |   |
| 7 | T            |            | P |
|   | U            | M          |   |
|   | U 0.000E+00  | 3.112E-03  |   |
|   | φ 4.195E-05  | 2.336E-05  |   |
|   | M -7.649E+04 | -2.695E+04 |   |
|   | Q 5.954E+02  | 3.954E+02  |   |



Hướng dẫn:

|                        |     |
|------------------------|-----|
| Đồ thị                 |     |
| Bước                   | 1   |
| Xmax                   | < > |
| Ymax                   | < > |
| Đoạn                   | 3   |
| Bài khác<br>Trở về DOS |     |

| 8 | T          | P          |
|---|------------|------------|
| U | 3.112E-03  | 0.000E+00  |
| ø | 2.336E-05  | -5.084E-05 |
| M | -2.695E+04 | 2.599E+03  |
| Q | 3.954E+02  | 1.954E+02  |

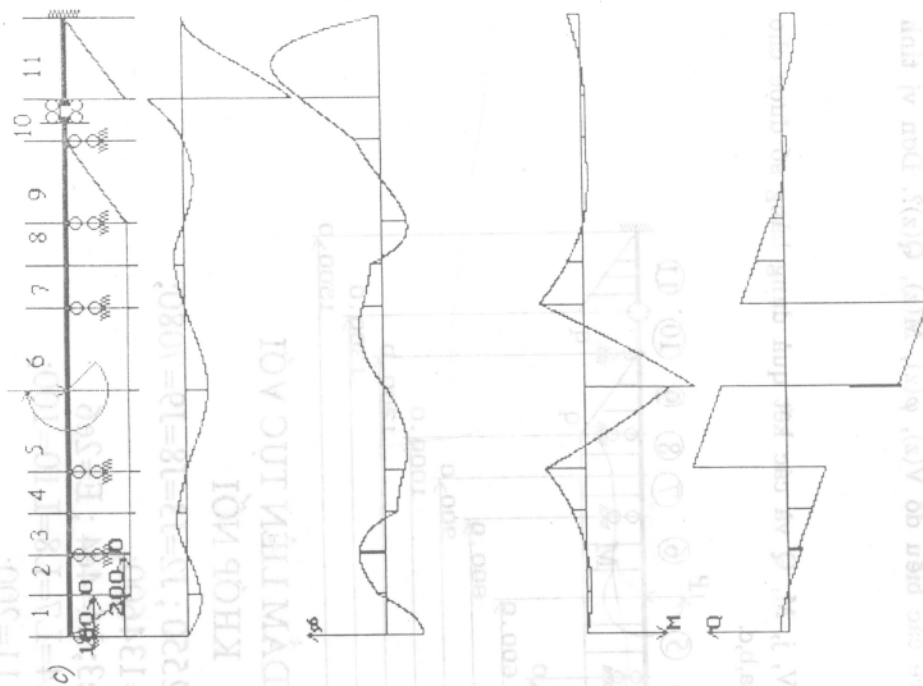
| 9 | T          | P          |
|---|------------|------------|
| U | 0.000E+00  | 0.000E+00  |
| ø | -5.084E-05 | 5.507E-05  |
| M | 2.599E+03  | 5.730E+03  |
| Q | 1.490E+02  | -5.101E+01 |

| 10 | T         | P         |
|----|-----------|-----------|
| U  | 0.000E+00 | 1.113E-02 |
| ø  | 5.507E-05 | 1.674E-04 |
| M  | 5.730E+03 | 5.730E+03 |
| Q  | 0.000E+00 | 0.000E+00 |

| 11 | T          | P          |
|----|------------|------------|
| U  | -3.504E-02 | 0.000E+00  |
| ø  | 1.674E-04  | 0.000E+00  |
| M  | 5.730E+03  | -2.094E+04 |
| Q  | 0.000E+00  | -2.000E+02 |



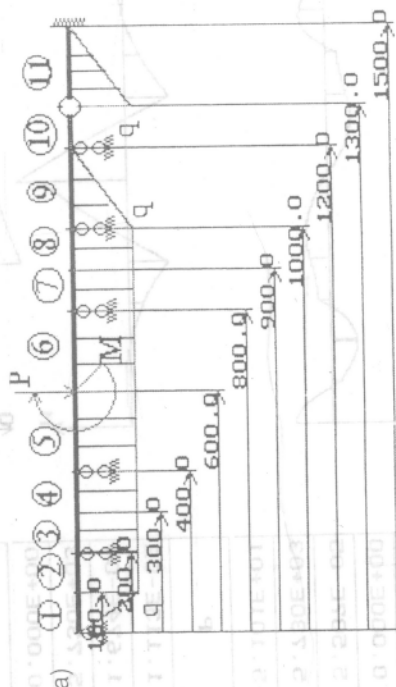
Hình 4.12

là các trục nội lực của một cấu trúc chịu tải trọng

Ví dụ 8. Một dầm liên tục nhiều nhịp mặt cắt thay đổi trong từng nhịp có khớp quay trung gian chịu lực như hình 4.13. Bằng chương trình BK45, hãy vẽ các biểu đồ  $V(z)$ ,  $\varphi(z)$ ,  $M(z)$ ,  $Q(z)$ ?. Đơn vị tính toán (daN, cm).

**Giải**

Các biểu đồ  $V$ ,  $M$ ,  $Q$  và các kết quả dạng bảng số được cho trên các hình 4.13a,b,c.



## BÀI TOÁN DẦM LIÊN TỤC VỚI KHỚP NỐI

$J1=J10=J11=2550$ ;  $J2=J3=J8=J9=7080$ ;

$J4=J5=J6=J7=134600$ ;

$q = -2$ ;  $P = -2e3$ ;  $M = 4e4$ ;  $E = 2e6$

$L1=L2=L3=L4=L7=L8=L10=100$ ;

$L5=L6=L9=L11=200$ ;

Xưởng dẫn:

| Đồ thị |            | Max        | z =       |
|--------|------------|------------|-----------|
| Bước   | ?          |            |           |
| Xmax   | <-         | -6.947E-03 | 1.300E+03 |
| Ymax   | <-         | -1.011E-04 | 1.300E+03 |
| Đoạn   | <-         | 1.861E+05  | 6.000E+02 |
|        |            | -1.537E+03 | 8.000E+02 |
| T      |            | P          |           |
| 1      |            |            |           |
| V      | 0.000E+00  | -4.131E-03 |           |
|        | -7.441E-05 | 1.835E-05  |           |
| M      | 0.000E+00  | 7.794E+03  |           |
| Q      | 1.113E+02  | 1.128E+01  |           |
| T      |            | P          |           |
| 2      |            |            |           |
| V      | -4.131E-03 | 0.000E+00  |           |
|        | 1.835E-05  | 5.383E-05  |           |
| M      | 7.794E+03  | -1.078E+03 |           |
| Q      | 1.128E+01  | -1.887E+02 |           |
| T      |            | P          |           |
| 3      |            |            |           |
| V      | 0.000E+00  | 2.913E-03  |           |
|        | 5.383E-05  | -2.236E-05 |           |
| M      | -1.078E+03 | -2.383E+04 |           |
| Q      | -1.275E+02 | -3.275E+02 |           |

Bài khác

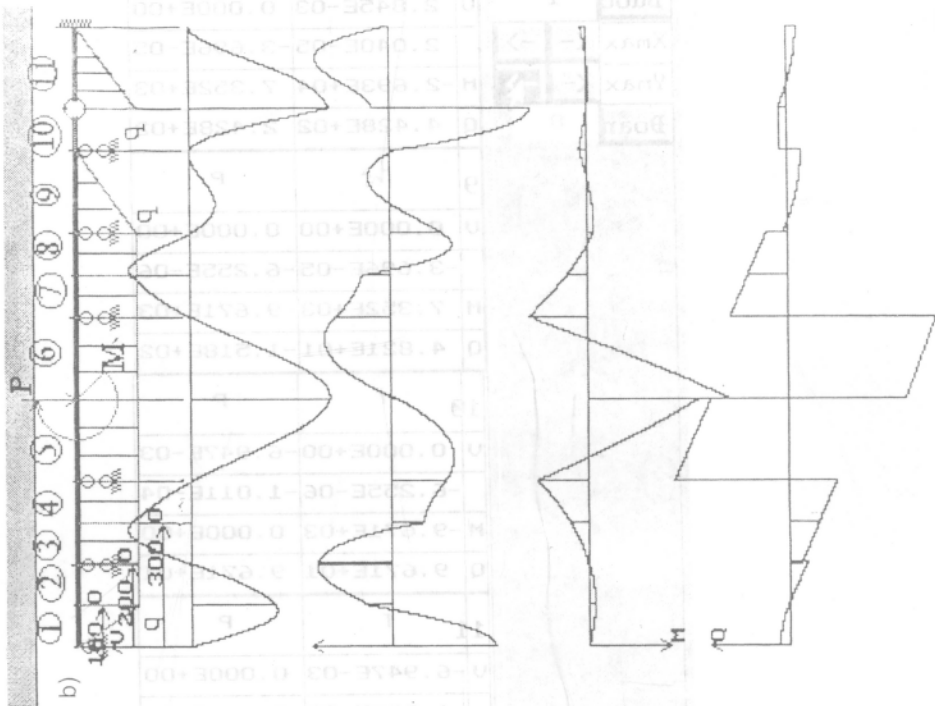
Trở về DOS

Hướng dẫn:

|        |       |
|--------|-------|
| Đồ thị |       |
| Bước   | 0.001 |
| Xmax   | <- -> |
| Ymax   | <- -> |
| Đoạn   | 4     |

|            |  |
|------------|--|
| Bài khác   |  |
| Trở về D0S |  |

|   |            |            |
|---|------------|------------|
| 4 | T          | P          |
| U | 2.913E-03  | 0.000E+00  |
|   | -2.236E-05 | -3.854E-05 |
| M | -2.383E+04 | -6.659E+04 |
| Q | -3.275E+02 | -5.275E+02 |
| 5 | T          | P          |
| U | 0.000E+00  | -6.892E-03 |
|   | -3.854E-05 | -4.047E-06 |
| M | -6.659E+04 | 1.461E+05  |
| Q | 1.263E+03  | 8.634E+02  |
| 6 | T          | P          |
| U | -6.892E-03 | 0.000E+00  |
|   | -4.047E-06 | 3.987E-05  |
| M | 1.861E+05  | -8.121E+04 |
| Q | -1.137E+03 | -1.537E+03 |
| 7 | T          | P          |
| U | 0.000E+00  | 2.845E-03  |
|   | 3.987E-05  | 2.040E-05  |
| M | -8.121E+04 | -2.693E+04 |
| Q | 6.428E+02  | 4.428E+02  |



c) Hướng dẫn:

| Đồ thị     |       | T            | P          |
|------------|-------|--------------|------------|
| Bước       | 1     | U 2.845E-03  | 0.000E+00  |
| Xmax       | <- -> | 2.040E-05    | -3.696E-05 |
| Ymax       | <- -> | M -2.693E+04 | 7.352E+03  |
| Đoạn       | 8     | Q 4.428E+02  | 2.428E+02  |
|            |       | 9            | P          |
|            |       | U 0.000E+00  | 0.000E+00  |
|            |       | -3.696E-05   | -6.255E-06 |
|            |       | M 7.352E+03  | -9.671E+03 |
|            |       | Q 4.821E+01  | -1.518E+02 |
|            |       | 10           | P          |
|            |       | U 0.000E+00  | -6.947E-03 |
|            |       | -6.255E-06   | -1.011E-04 |
|            |       | M -9.671E+03 | 0.000E+00  |
|            |       | Q 9.671E+01  | 9.671E+01  |
|            |       | 11           | P          |
|            |       | U -6.947E-03 | 0.000E+00  |
|            |       | 1.288E-05    | 0.000E+00  |
|            |       | M 0.000E+00  | -7.324E+03 |
|            |       | Q 9.671E+01  | -1.033E+02 |
| Bài khác   |       |              |            |
| Trở về DOS |       |              |            |

Hình 4.13



## II. TÍNH DẦM LIÊN TỤC TRÊN CÁC GỐI TỰA CỨNG VÀ ĐÀN HỒI

Phương pháp vạn năng được giới thiệu ở mục I của chương này cho phép tính toán tất cả các loại nội lực và chuyển vị đối với các loại thanh tĩnh định và siêu tĩnh chịu biến dạng đàn hồi bất kỳ. Ngoài phương pháp này còn có một số phương pháp khác cũng tỏ ra có hiệu quả và cũng thường được dùng để xác định các mômen uốn và lực cắt trong các dầm siêu tĩnh chịu tải trọng ngang. Phương pháp phương trình ba mômen và năm mômen là một trong các phương pháp đó.

Người ta gọi một dầm siêu tĩnh có ngoài các liên kết cần thiết còn có các gối tựa di động tăng cường là một dầm liên tục. Do đó cách xác định bậc siêu tĩnh của dầm liên tục được tiến hành như đã biết trong chương 3. Cụ thể là nếu dầm không có ngàm ở các đầu cuối thì bậc siêu tĩnh của dầm bằng số gối tựa trung gian. Do đó khi dầm chịu tải trọng vuông góc với trục dầm thì bậc siêu tĩnh  $n = \text{số gối tựa trung gian cộng với số ngàm}$ .

Vì dầm liên tục là một trong những trường hợp của hệ siêu tĩnh nói chung nên để tính loại dầm này ta có thể sử dụng phương pháp lực. Xét dầm liên tục có mặt cắt ngang không đổi trong từng nhịp chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, sự biến thiên nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa như hình 4.14a. Giả sử dầm có  $n$  gối tựa trung gian tức là có  $(n+1)$  nhịp, thứ tự các gối tựa và các nhịp được đánh số như hình 4.14a.

### §1. DẦM LIÊN TỤC ĐƠN GIẢN TRÊN CÁC GỐI TỰA CỨNG

Dầm liên tục đơn giản được hiểu là dầm liên tục có dạng như hình 4.14a không có đầu thừa, không có liên kết ngàm. Để tính dầm liên tục ta sẽ sử dụng phương pháp lực khi không giải phóng các liên kết "thừa" ngoại mà giải phóng các liên kết nội. Cụ thể xem hình 4.14b.

Chọn hệ cơ bản như hình 4.14b với các ẩn số  $X_i$  là các mômen uốn  $M_i$  tại gối tựa thứ  $i$ . Do đó hệ phương trình chính tắc sẽ biểu thị điều kiện các góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ở hai bên mỗi gối tựa trung gian bằng không. Dưới tác dụng của riêng  $\bar{M}_i = 1$ , biến dạng chỉ xảy ra trong 2 nhịp lân cận thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$  nên chỉ tồn tại các chuyển vị xoay tương đối giữa 2 mặt cắt ở hai bên gối tựa trung gian thứ  $(i-1)$ , thứ  $i$  và thứ  $(i+1)$ . Như vậy với hệ cơ bản đã chọn định lý Betti. III §1 chương 2 ta có :

$$\delta_{ki} = \delta_{ik} = 0 \text{ khi } k \neq (i-1), i, (i+1)$$

Khi đó, ta có thể viết phương trình thứ  $i$  của hệ phương trình chính tắc như sau :

$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \Delta_{ip}^o + \Delta_{i\Delta}^o + \Delta_{it}^o = 0$$

trong đó :

$\delta_{i(i-1)}, \delta_{ip}, \delta_{i(i+1)}$  lần lượt là các góc xoay tương đối giữa 2 mặt cắt ở 2 bên gối tựa thứ  $i$  do các mômen đơn vị  $\bar{M}_{i-1}, \bar{M}_i, \bar{M}_{i+1}$  gây ra trong hệ cơ bản ;

$\Delta_{ip}^o, \Delta_{i\Delta}^o, \Delta_{it}^o$  : góc xoay tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 bên gối tựa thứ  $i$  lần lượt do tải trọng, do chuyển vị cưỡng bức tại các gối và do sự biến thiên nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản.

Để tính các hệ số và số hạng tự do đối với phương trình này ta vẽ các biểu đồ mômen như hình 4.15.

Bằng cách nhân biểu đồ của thuật toán Verechtchaguine ta có :

$$\Delta_{ip}^o = (\bar{M}_i) (M_p^o) = \frac{\omega_i a_i}{EJ_i l_i} + \frac{\omega_{(i+1)} \cdot b_{(i+1)}}{EJ_{(i+1)} l_{(i+1)}}$$

$$\Delta_{i\Delta}^o = \frac{\Delta_{(i-1)} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{(i+1)} - \Delta_i}{l_{(i+1)}},$$

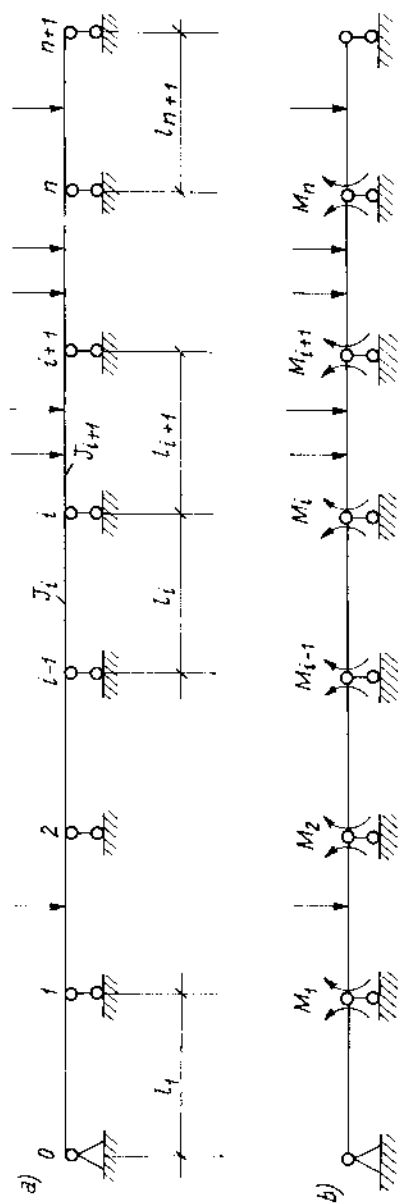
$$\begin{aligned} \Delta_{it}^o &= \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_i) = \frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \\ &+ \frac{\alpha}{h_{(i+1)}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_{(i+1)}}{2}, \end{aligned}$$

$$\delta_{i(i-1)} = (\bar{M}_i) (\bar{M}_{i-1}) = \frac{1}{EJ_i} \cdot 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

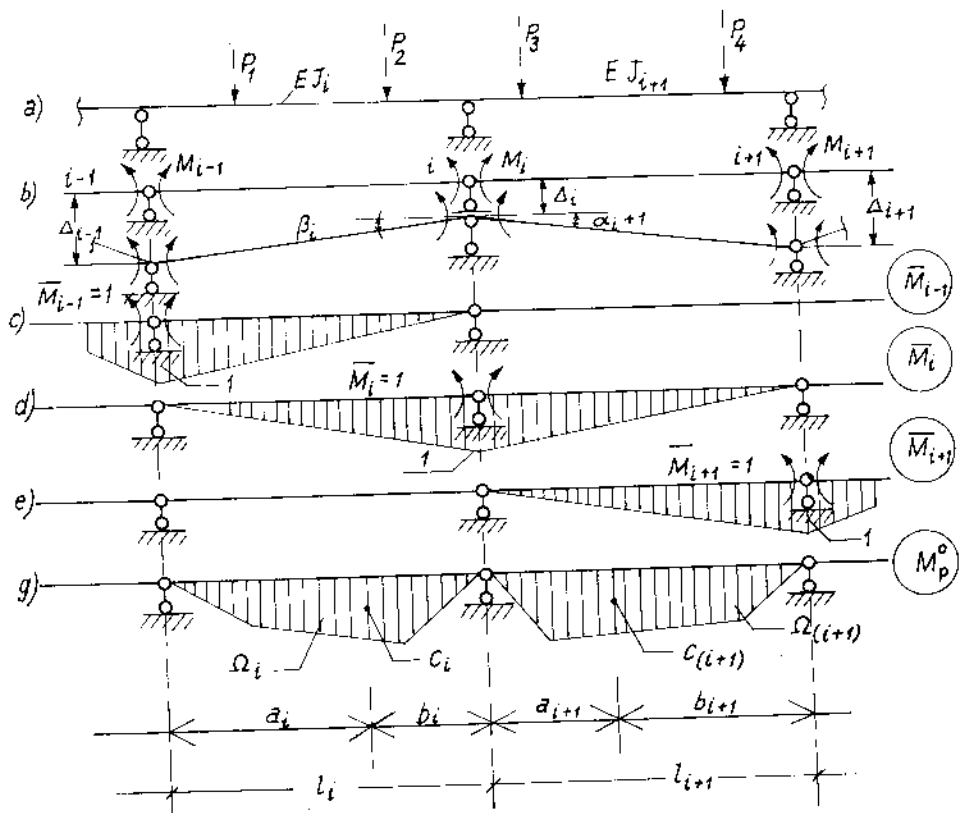
$$\delta_{ii} = (\bar{M}_i) (\bar{M}_i) = \frac{1}{EJ_i} \cdot 1 \cdot \frac{l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}};$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\bar{M}_i) (\bar{M}_{i+1}) = \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot 1 \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

Thay các giá trị này vào phương trình chính tắc trên ta đi đến :



Hình 4.14



Hình 4.15

$$\frac{l_i}{6EJ_i} M_{i-1} + \left[ \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \right] M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} M_{i+1} + \Delta_{ip}^o + \Delta_{i\Delta}^o + \Delta_{ii}^o = 0$$

Nhân 2 vế với  $6EJ_o$  với  $J_o$  là hằng số bất kỳ (thường lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó của dầm) ta được :

$$l_i \frac{J_o}{J_i} M_{i-1} + 2 \left[ l_i \frac{J_o}{J_i} + l_{i+1} \frac{J_o}{J_{i+1}} \right] M_i + l_{i+1} \frac{J_o}{J_{i+1}} M_{i+1} + 6EJ_o (\Delta_{ip}^o + \Delta_{i\Delta}^o + \Delta_{ii}^o) = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

Khi đặt :

$$\lambda_i = l_i \frac{J_o}{J_i}$$

và được gọi là chiều dài qui ước của nhịp thứ  $i$ , ta có :

$$\lambda_i M_{i-1} + 2[\lambda_i + \lambda_{i+1}] M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6EJ_o (\Delta_{ip}^o + \Delta_{i\Delta}^o + \Delta_{it}^o) = 0 \quad (4.22)$$

Phương trình trên được gọi là phương trình ba mômen biểu thị sự liên hệ giữa 3 mômen uốn chưa biết ở 3 gối tựa trung gian liên tiếp  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$ . Hệ có bao nhiêu gối trung gian ta sẽ có bấy nhiêu phương trình dạng (4.22) và mỗi phương trình sẽ có 3 ẩn số.

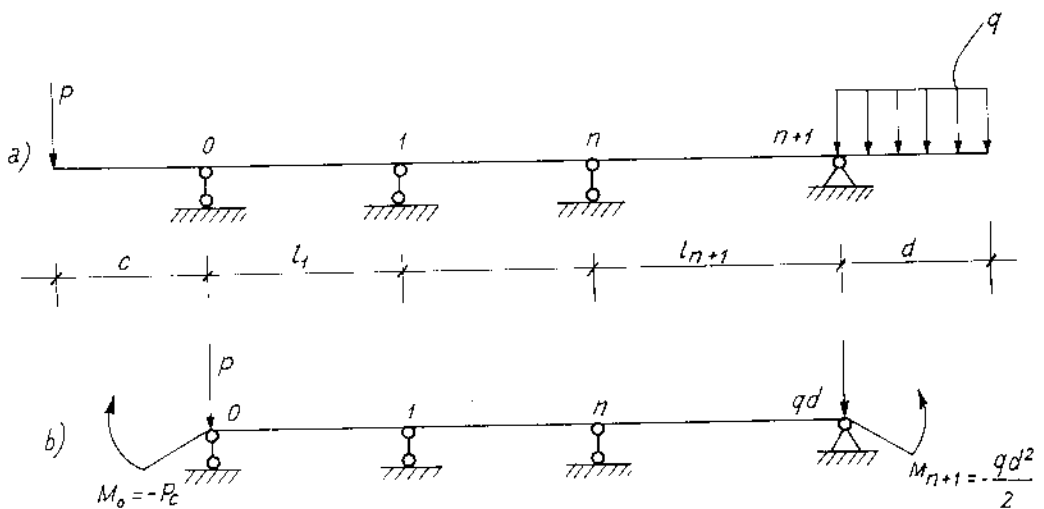
Dạng đầy đủ của hệ (4.22) là :

$$\begin{aligned} \lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1}) M_i + \lambda_{i+1} M_{i+1} + 6 \left[ \frac{\omega_i a_i}{\lambda_i} \cdot \frac{J_o}{J_i} + \frac{\omega_{i+1} l_{i+1}}{l_{i+1}} \cdot \frac{J_o}{J_{i+1}} \right] + \\ + 6EJ_o \left[ \frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_i} + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i+1}} \right] + \\ + 6EJ_o \left[ \frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \frac{l_{i+1}}{2} \right] = 0 \quad (4.23) \\ (i = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

## §2. DẦM LIÊN TỤC CÓ ĐẦU THỪA VÀ CÓ ĐẦU NGÀM

### 1. Dầm liên tục có đầu thừa

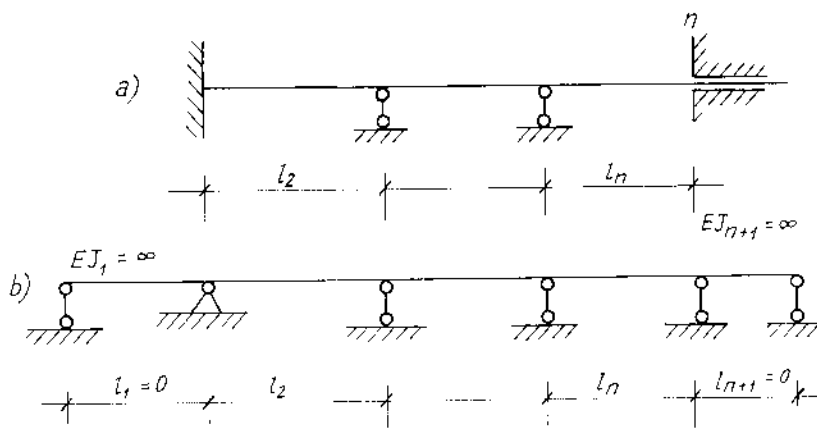
Để tính dầm loại này ta dẫn nó về dầm liên tục đơn giản (hình 4.16b) bằng cách thu gọn hệ lực tác dụng trên các côngxôn về các gối biên tương ứng (hình 4.16b), sau đó thực hiện mọi tính toán như mục §1.



Hình 4.16

## 2. Dầm liên tục có đầu ngàm

Trong trường hợp này ta thay các ngàm bằng các nhịp có chiều dài bằng không hoặc có độ cứng  $EJ = \infty$  và có số liên kết tương đương với ngàm như hình 4.17a,b.



Hình 4.17

## §3. MÔMEN UỐN VÀ LỰC CẮT TẠI MỘT MẶT CẮT BẤT KỲ TRONG DẦM

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có biểu thức mômen uốn tại tiết diện  $k$  bất kỳ có hoành độ  $z$  như sau :

$$M_k = M_k^d + \frac{l_i - z}{l_i} \cdot M_{i-1} + \frac{z}{l_i} \cdot M_i ; \quad (4.24)$$

Bằng phép tính đạo hàm ta có biểu thức của lực cắt :

$$Q_k = \frac{dM_k}{dz} = Q_k^d + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i}, \quad (4.25)$$

trong đó :

$Q_k^d$  và  $M_k^d$  là lực cắt và mômen uốn tại tiết diện  $k$  do tải trọng gây ra trong dầm đơn giản đặt tự do trên 2 gối tựa ở 2 đầu nhịp.

#### §4. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Xét bài toán xác định lực cắt cho phép khi tiện trục dài.

Ta sử dụng như phương trình 3 mômen để khảo sát 1 trục dài khi gia công tiện có sơ đồ hình 4.19. Đầu trái của trục được ngàm bởi mâm cặp 1. Đầu phải là ụ định tâm 3. Khi gia công trục dài, để đảm bảo độ đồng tâm người ta phải lắp vào những giá đỡ tâm 1 và 2, hay còn gọi là luynet. Giả sử rằng do lắp ghép không chính xác mà giá đỡ tâm thứ nhất (luynet 1) bị lệch đi so với đường tâm một đoạn là  $\Delta_1$ . Trên hình 4.19b là sơ đồ tính của trục dài này.

Để sử dụng được phương trình 3 mômen, chúng ta cần phải đưa vào 1 nhíp có chiều dài  $l_0 \rightarrow 0$  nơi có ngàm cứng.

Trên hình 4.19c là hệ tương đương của sơ đồ tính.

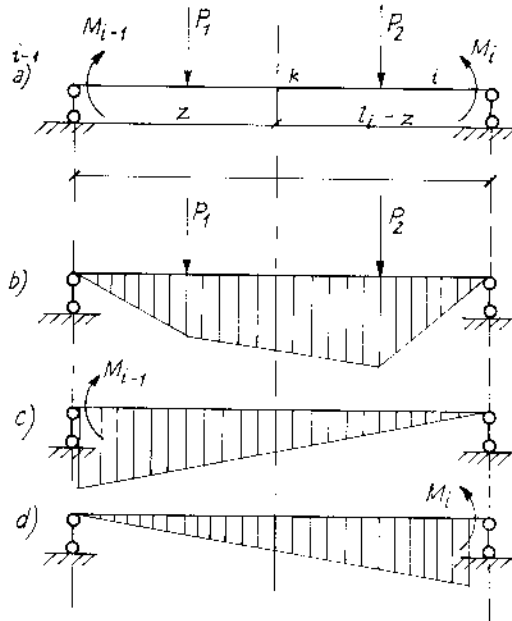
Mômen quán tính các mặt cắt ngang của trục là :

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi \cdot 6^4}{64} = 63,6 \text{ cm}^4$$

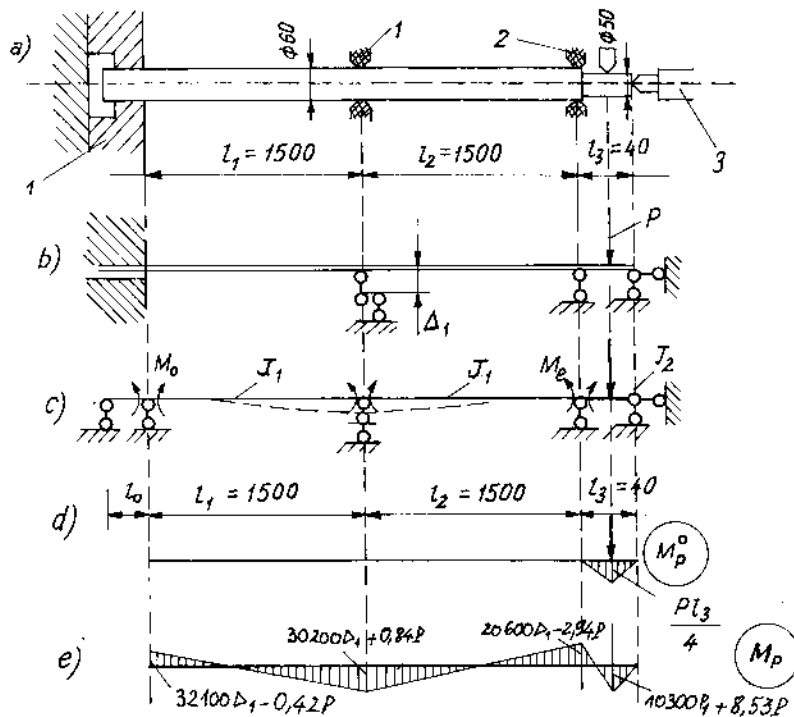
$$J_2 = \frac{\pi d_2^4}{64} = \frac{\pi \cdot 5^4}{64} = 30,7 \text{ cm}^4$$

Trên hình 4.19d là biểu đồ mômen  $(M_p^0)$  chỉ do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản. Diện tích của biểu đồ  $(M_p^0)$  trong các đoạn thứ 1 và thứ 2 là bằng không, còn trong đoạn thứ 3 là :

$$\omega_3 = 1/2 \cdot Pl_3/4l_3 = 1/2 (P \cdot 40)/4 \cdot 40 = 200P$$



Hình 4.18



Hình 4.19

Khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ này đến gối tựa phải của nhịp này là :

$$b_3 = l_3/2 = 20 \text{ cm}$$

Khi tính với các nhịp  $l_0, l_1$  chúng ta thấy rằng tải trọng ngoài trên các nhịp này là không có. Do đó phương trình 3 mômen có dạng như sau :

$$2(l_0 + l_1)M_0 + M_1 l_1 = 6EJ_1 \Delta_1 / l_1$$

Đối với 2 nhịp tiếp theo có chiều dài  $l_1, l_2$  các mômen gối  $M_0, M_1, M_2$  sẽ đi vào trong phương trình 3 mômen. Phương trình này không chứa các số hạng phụ thuộc tải trọng ngoài và có dạng :

$$l_1 M_0 + 2M_1(l_1 + l_2) + l_2 M_2 = 6EJ_1 \Delta_1 / l_1 + 6EJ_1 \Delta_1 / l_2$$

Phương trình cuối cùng đối với các nhịp  $l_2, l_3$  có dạng :

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) = -6EJ_1 \frac{\Delta_1}{l_2} - 6 \frac{\omega_3 b_3 J_1}{l_3 J_2}$$



Với :

$$\lambda_3 = l_3 J_1/J_2 = 40 \cdot 63,6/30,7 = 83 \text{ cm (khi thừa nhận rằng } J_0 = J_1)$$

Thay các giá trị bằng số vào 3 phương trình trên, ta nhận được hệ phương trình với các hệ số bằng số sau đây :

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot 150M_0 + 150M_1 &= -6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 63,6 \frac{\Delta_1}{150} \\ 150M_0 + 2M_1(150 + 150) + 150M_2 &= +6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 63,6 \frac{\Delta_1}{150} \cdot 2 \\ 150M_1 + 2M_2(150 + 83) &= -6 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 63,6 \frac{\Delta_1}{150} + \frac{6 \cdot 200P \cdot 20 \cdot 63,6}{40 \cdot 30,7} \end{aligned} \right\}$$

Sau khi giải hệ phương trình này chúng ta sẽ nhận được các ẩn số là các mômen ở các tiết diện gối theo  $\Delta_1$  và P. Cụ thể là :

$$M_0 = 32100\Delta_1 - 0,42P ;$$

$$M_1 = -30200\Delta_1 + 0,84P ; M_2 = 20600\Delta_1 - 2,94P$$

Trên hình 4.19e là các biểu đồ mômen uốn ( $M_p$ ) cuối cùng của trục khảo sát. Các tung độ của biểu đồ này nhận được bằng cách cộng các biểu đồ do mômen uốn ở các gối tựa tính toán được với biểu đồ ( $M_p^0$ ). Mômen ở tiết diện đặt dao là :

$$M = Pl_3/4 - M_2/2 = 10300\Delta_1 + 8,53P$$

Khi sử dụng biểu đồ mômen uốn tổng cộng và xuất phát từ độ chính xác yêu cầu của việc gia công ngồng trục (đoạn có  $d = 50 \text{ mm}$ ), chúng ta có thể giải quyết bài toán về việc xác định chuyển vị lớn nhất của trục ở tiết diện đặt dao (nơi đặt lực P). Chuyển vị này xác định độ sai số gia công ngồng trục. Tương ứng với quy tắc xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh, chúng ta xây dựng 1 hệ cơ bản. Với lực  $P = 1$  thay cho P trên hình vẽ 4.19d sau đó nhân biểu đồ ( $\bar{M}_1$ ) này với biểu đồ tổng cộng ( $M_p$ ) ta có độ lớn của chuyển vị thẳng khi gia công là :

$$\begin{aligned} \delta &= (\bar{M}_1) (\bar{M}_p) = \frac{1}{EJ_2} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{l_3}{4} \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl_3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{l_3}{4} \cdot \frac{l_3}{2} (20600\Delta_1 - 2,94P) \right] \\ &= \frac{1}{EJ_2} (1039P + 206 \cdot 10^4 \Delta_1) = 16,95 \cdot 10^{-6}P + 3,36 \cdot 10^{-2}\Delta_1 \leq [0,001d_2] \end{aligned}$$

Từ quan hệ này ta rút ra rằng khi lắp đặt luynet trái chính xác nghĩa là khi  $\Delta_1 = 0$  thì sai số gia công  $\delta = 0,001 d_2$  nếu lực ăn dao  $< 2,94$  kN. Nếu độ lệch của luynet trái ở phía trên với  $\Delta_1 = 0,1$  cm thì với độ chính xác như trên lực ăn dao cần phải  $< 1$  kN. Nếu khi lắp ráp phát sinh độ lệch của luynet theo chiều ngược lại thì lực ăn dao có thể đạt được đến  $P = 4,88$  kN.

## §5. DẦM LIÊN TỤC TRÊN GỐI TỰA ĐÀN HỒI

### 1. Thiết lập phương trình 5 mômen

Dầm liên tục mà các gối có thể thực hiện những chuyển vị đàn hồi theo phương vuông góc với trục của dầm được gọi là dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi. Gọi  $\delta_i$  là chuyển vị của gối tựa thứ  $i$  khi gối này chịu lực dọc bằng đơn vị. Ta có mối liên hệ giữa phản lực tại gối tựa thứ  $i$  là  $R_i$  và chuyển vị  $V_i$ .

$$V_i = \delta_i R_i \quad (4.26)$$

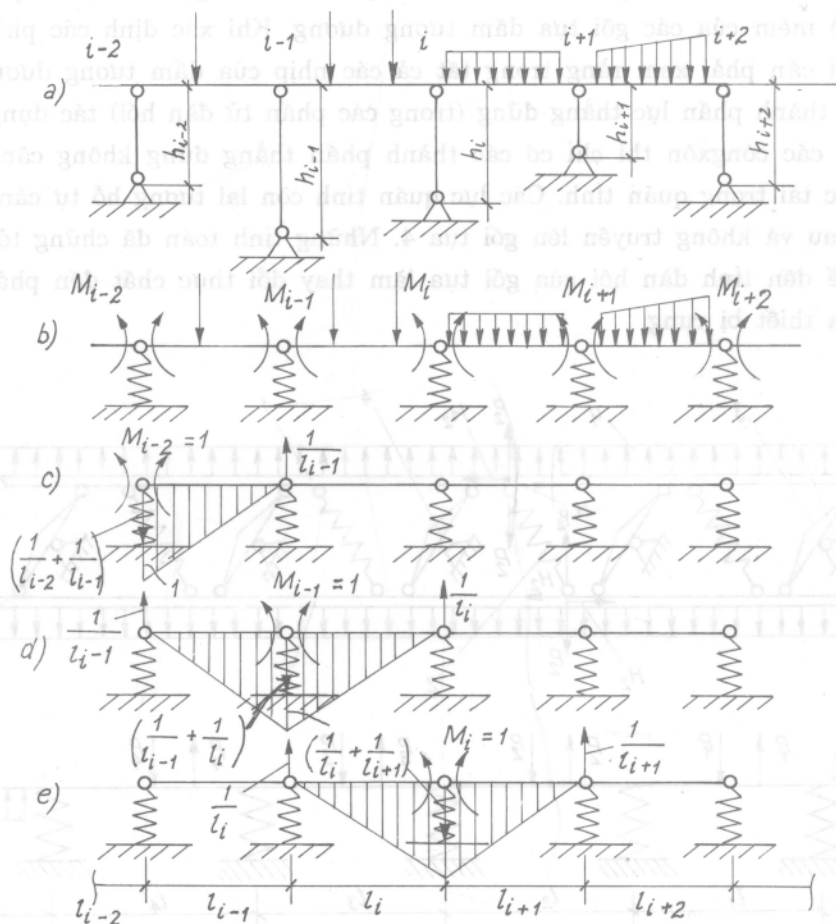
Dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi thường gặp trong thực tế có thể là dầm cầu phao, dầm liên tục đặt trên các cột chống, các dầm dọc đặt trên các dầm ngang v.v...

Trên hình 4.20 các cột chống đỡ dầm chịu tải trọng ngang được mô hình hóa bằng những lò xo có độ cứng như độ cứng của cột.

Kết cấu rung như trên hình (4.21a) được sơ đồ hóa thành dầm trên gối đàn hồi tương đương (hình 4.21b) là một ví dụ về dầm liên tục trên các gối tựa đàn hồi.

Kết cấu này có hai bộ phận làm việc (1) được đặt trên các gối tựa (4). Trên sơ đồ này  $q$  là cường độ của tải trọng phân bố do các thành phần thẳng đứng của lực quán tính của các khối lượng của các bộ phận làm việc chuyển động trong hệ gây ra. Những bộ phận làm việc này được nối với nhau bằng các phần tử đàn hồi 2 (lò xo 2). Ở chế độ cộng hưởng các thành phần thẳng đứng của lực quán tính được cân bằng bởi các lực phát sinh trong các phần tử đàn hồi 2 (lò xo 2) mà các thành phần của chúng, ví dụ trong nhịp thứ hai được ký hiệu là  $P_2, H_2$  (hình 4.21a).

Bởi vì ở trong kết cấu lực quán tính thẳng đứng là phân bố đều còn những liên kết đàn hồi là rời rạc cho nên hiện tượng uốn các cấu kiện chịu



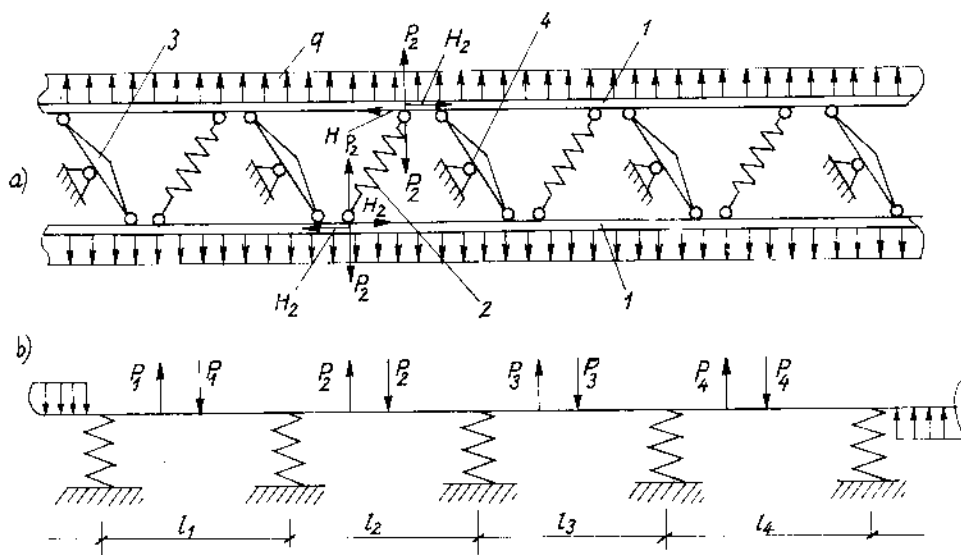
Hình 4.20

tải xảy ra, còn các tải trọng thực thì được truyền lên các gối của chúng. Các thành phần nằm ngang phát sinh đồng thời do các lực quán tính của các khối lượng chuyển động và do các lực trong các chi tiết đàn hồi tác dụng dọc ở mặt trên và mặt dưới của những chi tiết làm việc theo các phương ngược chiều nhau và vì thế chúng sẽ không gây ra các ứng lực trong các gối tựa.

Để xác định phản lực gối tựa có thể biểu diễn thiết bị này dưới dạng dầm nhiều gối tựa tương đương như trên (hình 4.21b).

Do sự có mặt của các khớp đàn hồi ở các mối nối giữa các bộ phận làm

việc 1 với các cánh tay đòn 3 và cánh tay đòn 3 với gối 4 mà cần phải kể đến độ mềm của các gối tựa dầm tương đương. Khi xác định các phản lực tựa thì cần phải xem rằng trong tất cả các nhịp của dầm tương đương chỉ có các thành phần lực thẳng đứng (trong các phần tử đàn hồi) tác dụng, còn ở trên các côngxôn thì chỉ có các thành phần thẳng đứng không cân bằng của các tải trọng quán tính. Các lực quán tính còn lại tương hỗ tự cân bằng với nhau và không truyền lên gối tựa 4. Những tính toán đã chứng tỏ rằng việc kể đến tính đàn hồi của gối tựa làm thay đổi thực chất đến phản lực gối của thiết bị rung.



Hình 4.21

Những gối tựa đàn hồi thường được mô hình hóa dưới dạng những lò xo xoắn hình trụ. Để tính toán những dầm liên tục trên gối tựa đàn hồi thì hệ cơ bản được chọn là dầm có liên kết khớp ở trên các gối tựa hình 4.20b. Những mômen uốn gối tựa là những ẩn số cần tìm. Những mômen này được xác định từ hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực. Bây giờ chúng ta sẽ khảo sát cấu trúc của một trong những phương trình đó và xác định chuyển vị theo phương tác dụng của các mômen  $M_i$ .

Với hệ cơ bản như vậy mômen  $M_i$  chỉ gây ra chuyển vị trong các nhịp  $(i - 1), i, (i + 1)$  và  $(i + 2)$ . Khi đó phương trình chính tắc viết cho gối tựa trung gian thứ  $i$  có dạng như sau :

$$\delta_{i(i-2)} M_{i-2} + \delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \delta_{i(i+2)} M_{i+2} + \Delta_{ip} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.27)$$

Phương trình trên được gọi là phương trình năm mômen.

- Xác định các hệ số và số hạng tự do của phương trình năm mômen.

Theo công thức của Morh ta có :

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ik} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} ds + \sum \delta_j R_{ji} R_{jk} \\ \Delta_{ip} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EJ} ds + \sum \delta_j R_{ji} R_{jp} \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

trong đó

$\bar{M}_i, \bar{M}_k$  - mômen uốn ở các mặt cắt của dầm tương ứng do các mômen  $\bar{M}_i = 1$  và  $\bar{M}_k = 1$  gây ra ;

$M_p$  là mômen uốn do tải trọng ngoài gây ra ;

$R_{ji}$  là phản lực của gối tựa thứ  $j$  do  $\bar{M}_i = 1$  gây ra trong hệ cơ bản ;

$R_{jp}$  là phản lực của gối tựa thứ  $j$  do tải trọng ngoài cho trước gây ra trong hệ cơ bản ;

$\delta_j$  hệ số độ mềm của gối tựa thứ  $j$ , cm/daN.

Ví dụ, nếu cột có chiều dài  $h_j$  đủ ngắn là gối tựa đàn hồi thứ  $j$ , có độ cứng  $EF$  thì  $\delta_j = h_j/EF$ .

Nếu gối tựa có dạng lò xo xoắn ốc hình trụ có đường kính  $D$  với số vòng làm việc là  $n$  được chế tạo từ 1 sợi thép có đường kính  $d$  và vật liệu có môđun đàn hồi trượt là  $G$  thì hệ số độ mềm

$$\delta_j = \frac{8D^3 n}{G \cdot d^4} \quad (4.29)$$

Trên hình 4.20 là các biểu đồ mômen uốn do  $\bar{M}_{i-2} = 1$  ;  $\bar{M}_{i-1} = 1$  ;  $\bar{M}_i = 1$  và các phản lực tựa do các mômen này gây ra.

Khi kể đến giá trị của phản lực này và thừa nhận rằng  $EJ_i = \text{const}$  với  $E$  và độ mềm của tất cả các gối tựa là như nhau thì trên cơ sở quan hệ (4.28) chúng ta có các công thức tương ứng sau đây :

$$\delta_{i(i-2)} = \frac{\delta}{l_i l_{i-1}}$$

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EJ_i} - \frac{\delta}{l_i} \left( \frac{2}{l_i} + \frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_{i+1}} \right)$$

$$\delta_{ii} = \frac{l_i + l_{i+1}}{3EJ} + 2\delta \left( \frac{1}{l_i^2} + \frac{2}{l_i l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+1}^2} \right)$$

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ} - \delta \left( \frac{1}{l_i} + \frac{2}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}} \right) \frac{1}{l_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+2)} = \delta \frac{1}{l_{i+1} l_{i+2}}$$

$$\delta_{ip} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) + \delta \left( \frac{R_{(i-1)p}}{l_i} - \frac{R_{ip}}{l_i} - \frac{R_{ip}}{l_{i+1}} + \frac{R_{(i+1)p}}{l_{i+1}} \right)$$

trong đó :

$\omega_i$  và  $\omega_{i+1}$  là những diện tích của các biểu đồ do tải trọng ngoài trong các nhịp thứ  $i$  và  $i+1$  gây ra trong hệ cơ bản;

$a_i$  là khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ  $M_p$  ở trong nhịp thứ  $i+1$  đến gối tựa  $i-1$ ;

$b_{i+1}$  là khoảng cách từ trọng tâm biểu đồ  $M_p$  ở trong nhịp thứ  $i+1$  đến gối tựa  $i+1$ .

Tất cả những gối tựa trung gian của dầm ký hiệu là  $i$  với  $i = 1, 2, 3, \dots$

Trường hợp dầm có độ cứng không đổi, chiều dài của các nhịp đều nhau, các gối có hệ số đàn hồi như nhau thì phương trình 5 mômen có dạng đơn giản như sau :

$$\alpha M_{i-2} + (1 - 4\alpha) M_{i-1} + (4 + 6\alpha) M_i + (1 - 4\alpha) M_{i+1} + \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2} (\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l (R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0$$

$$\text{với } \alpha = \frac{6EJ}{l^3} \delta \quad \text{và } i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.30)$$

Giải hệ (4.30) ta sẽ nhận được các mômen gối  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Việc vẽ các biểu đồ mômen và lực cắt được tiến hành như trong trường hợp dầm liên tục đặt trên các gối tựa cứng.

### III. PHƯƠNG PHÁP TIÊU CỤ MÔMEN

#### §1. CÁC NHẬN XÉT VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA

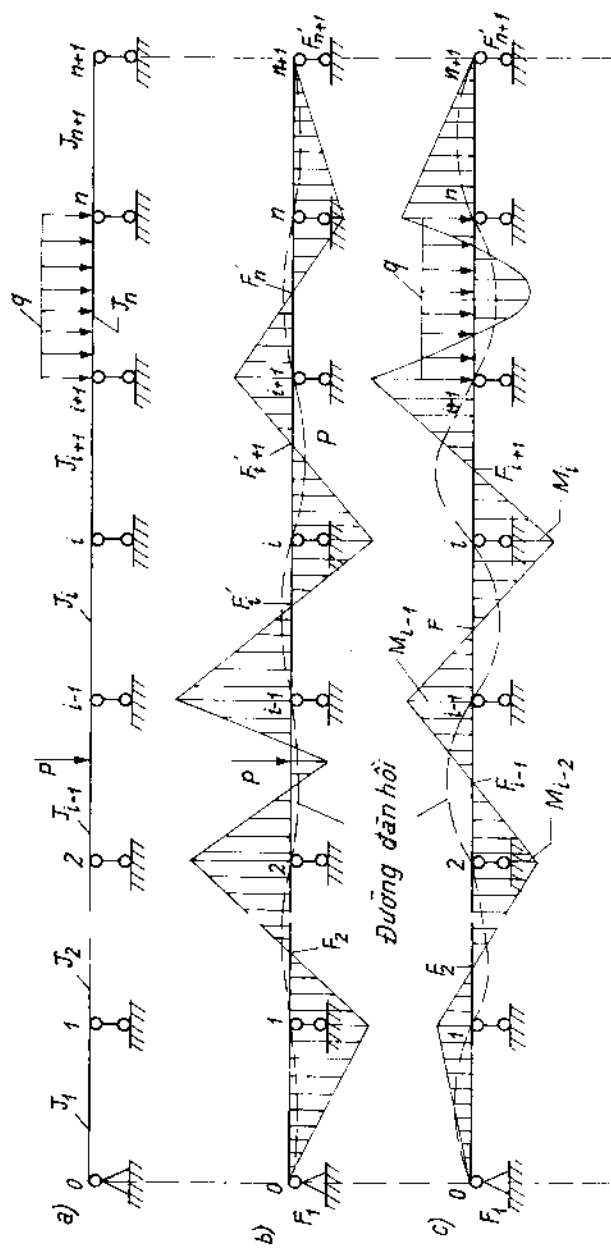
Như đã thấy ở mục trên, khi tính các dầm liên tục  $n$  nhịp bằng phương pháp lực với hệ cơ bản là các dầm đơn nối với nhau bằng các khớp ở các gối tựa trung gian đã dẫn đến việc phải thiết lập và giải một hệ  $n$  phương trình đại số tuyến tính khá cồng kềnh. Trong kỹ thuật, thường những dầm liên tục nhiều nhịp chỉ có một vài nhịp trong chúng là chịu tải. Vì vậy để giảm bớt khối lượng tính toán khi xác định các mômen tại các gối tựa, thuận tiện nhất, người ta sử dụng phương pháp tiêu cụ mômen. Phương pháp này không cần phải thiết lập và giải bất kỳ hệ phương trình nào và rất thuận tiện cho việc lập trình tin học.

Để minh họa tư tưởng của phương pháp và không làm mất tính tổng quát của quá trình lập luận, ta hãy xét một dầm chỉ chịu tác dụng ngoài là tải trọng tác dụng lên một nhịp (hình 4.22). Đối với dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng trên một số nhịp ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa dầm này về tổng các dầm chỉ chịu tải trọng tác dụng lên 1 nhịp.

Ta hãy quan sát một dầm liên tục, trên đó chỉ có nhịp thứ  $(i-1)$  và  $n$  là chịu tải. Giả sử bằng một phương pháp nào đó (phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp 3 mômen, phương pháp vụn năng...) ta đã vẽ được các biểu đồ mômen uốn và đường đàn hồi dưới tác dụng của tải trọng ở một nhịp. Các biểu đồ này có đặc điểm sau đây (hình 4.22b,c).

- + Đường đàn hồi của dầm lượn theo hình sóng kế tiếp nhau.

- + Mômen gối giảm liên tiếp về 2 phía của nhịp chịu tải. Trong tất cả các nhịp không chịu tải biểu đồ mômen có giá trị bằng 0 tại những điểm giao giữa biểu đồ và trục dầm. Những điểm đó được gọi là tiêu cụ mômen và ta ký hiệu chúng là  $F_i$  (vị trí của  $F_i$  cũng là hoành độ điểm uốn của đường đàn hồi) (hình 4.22). Tiêu cụ mômen trái là mặt cắt mà ở đó mômen uốn bằng 0, nếu nhịp chịu tải ở bên phải các nhịp được khảo sát. Tiêu cụ phải là mặt cắt mà ở đó mômen uốn bằng 0, nếu nhịp chịu tải ở bên trái các nhịp này.



Hình 4.22



## §2. THIẾT LẬP CÔNG THỨC TÍNH CÁC TỶ SỐ TIÊU CỰ

Các điểm  $F_i$  là những điểm cố định vì các mômen gối  $M_i, M_{i-1}$  cố định nên để tiện tính toán về sau, ta đưa ra những ký hiệu  $k_i, k'_i$  dưới đây, biểu thị những tỷ số của mômen uốn tại hai gối tựa ở hai đầu của mỗi nhịp không chịu tải trọng và được gọi là tỷ số tiêu cự mômen.

+ Nếu nhịp  $i$  nằm bên trái nhịp có tải trọng thì tỷ số tiêu cự trái được ký hiệu là  $k_i$  :

$$k_i = - \frac{M_i}{M_{i-1}} > 1 \quad (4.31)$$

+ Nếu nhịp  $i$  nằm bên phải nhịp có tải trọng thì tỷ số tiêu cự phải được ký hiệu là  $k'_i$  :

$$k'_i = - \frac{M_{i+1}}{M_i} > 1 \quad (4.32)$$

Với ký hiệu như vậy các tỷ số tiêu cự là luôn luôn dương. Bây giờ chúng ta hãy xây dựng công thức tính tỉ số tiêu cự.

Giả sử rằng tải trọng ngoài được đặt ở bên phải của nhịp thứ  $i$ , trong trường hợp này phương trình 3 mômen đối với gối thứ  $i-1$  có dạng :

$$\lambda_{i-2}M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)M_{i-1} + \lambda_iM_i = 0,$$

trong đó  $\lambda_{i-2}, \lambda_{i-1}, \lambda_i$  lần lượt là các chiều dài quy ước của nhịp thứ  $i-2, i-1, i$ .

$$\lambda_i = l_i \frac{J_0}{J_i}$$

Khi chia tất cả các số hạng của phương trình này cho  $M_{i-1}$  ta có :

$$\lambda_{i-2} \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0$$

Hoặc là, khi sử dụng các ký hiệu đã nêu ở trên đối với các tỷ số tiêu cự

$$- \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} = k_{i-1} ; k_i = - \frac{M_i}{M_{i-1}}$$

Phương trình trên được viết dưới dạng :

$$-\lambda_{i-1} \frac{1}{k_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) - \lambda_i k_i = 0 \quad (4.33)$$

Từ đó rút ra :

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[ 2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right] \quad (4.34)$$

### §3. CÁC TRƯỜNG HỢP LIÊN KẾT THƯỜNG GẶP Ở HAI ĐẦU DẦM

Công thức (4.34) là công thức truy hồi cho phép tính các tỷ số tiêu cự trái đối với nhíp bất kỳ thứ  $i$ , nếu tỷ số tiêu cự đối với nhíp trước nó  $k_{i-1}$  đã biết. Nếu gối tựa trái của nhíp 1 là khớp thì tỷ số tiêu cự trái đối với nhíp này :

$$k_1 = \frac{M_1}{0} = \infty$$

Khi thay giá trị này vào công thức (4.34) chúng ta sẽ có  $k_2$  như sau :

$$k_2 = \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_2} \quad (4.35)$$

Khi sử dụng giá trị bằng số của  $k_2$  theo (4.34) ta lại tính được  $k_3, k_4, \dots$

Nếu đầu cuối trái của dầm có liên kết ngàm thì khi thay thế ngàm bằng một nhíp ảo với chiều dài dẫn xuất  $\lambda \rightarrow 0$ , chúng ta có :

$$k_0 = -\frac{M_0}{M_{-1}} = \infty$$

$$k_1 = 2 + \left( \lambda_0 / \lambda_1 \right) \left( 2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2$$

Các tỷ số tiêu cự  $k_2, k_3, \dots$  được xác định hoàn toàn trực tiếp nhờ công thức 4.34.

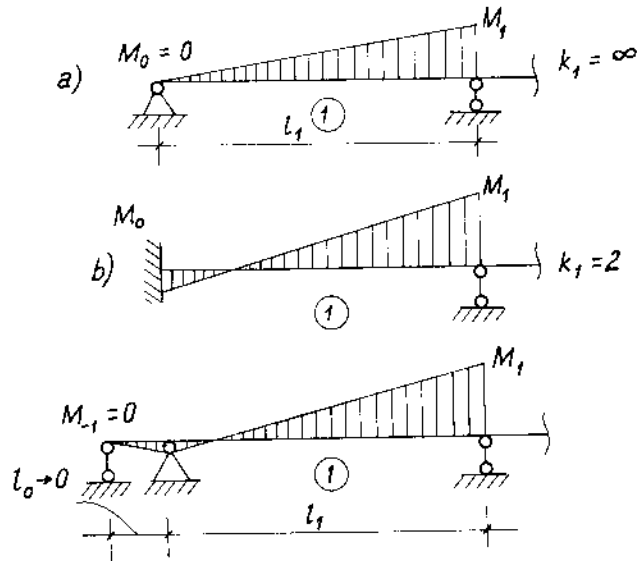
Ta có công thức cho  $k_1$  trong các trường hợp cụ thể như sau :

a/ Nhíp thứ nhất có đầu bên trái là khớp (hình 4.23a) :  $k_1 = \infty$

b/ Nhíp thứ nhất có đầu bên trái là ngàm (hình 4.23b) :  $k_1 = 2$

Tương tự như vậy chúng ta sẽ có một công thức để tính các tỷ số tiêu cự phải :

$$k'_i = 2 - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[ 2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right] \quad (4.36)$$

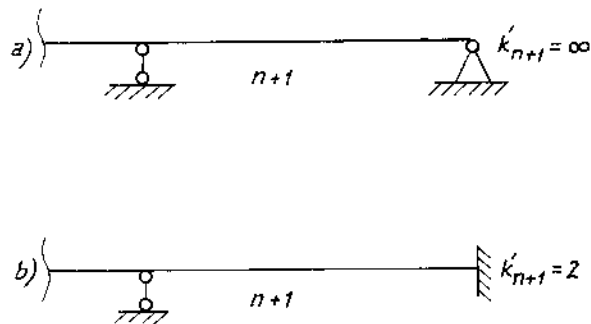


Hình 4.23

Theo công thức (4.36) chúng ta có thể xác định các tỷ số tiêu cự phải đối với tất cả các nhịp nếu biết tỷ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng :

a/ Nếu nhịp cuối cùng (n+1) có đầu bên phải là khớp (hình 4.24a) :  $k'_{n+1} = \infty$

b/ Nếu nhịp cuối cùng (n+1) có đầu bên phải là ngàm (hình 4.24b) :  $k'_{n+1} = 2$



Hình 4.24

#### §4. THIẾT LẬP CÔNG THỨC TÍNH MÔMEN UỐN TRÊN CÁC GỐI TỰA CỦA NHỊP CHỊU TẢI

##### 1. Trường hợp nhịp chịu tải không phải là các nhịp biên

Bây giờ ta sẽ khảo sát việc xác định các mômen uốn trên các mặt cắt gối tựa đối với nhịp chịu tải, ví dụ nhịp thứ  $n$  (hình 4.22a với  $P = 0$ ). Chúng ta sẽ viết các phương trình 3 mômen :

- Đối với gối thứ  $n-1$  và gối thứ  $n$  :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{n-1}M_{n-2} + 2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) M_{n-1} + \lambda_n M_n + 6 \frac{\omega_n b_n J_0}{l_n J_n} \\ \lambda_n M_{n-1} + 2(\lambda_n + \lambda_{n+1}) M_n + \lambda_{n+1} M_{n+1} + 6 \frac{\omega_n a_n J_0}{l_n J_n} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Theo các công thức (4.31) và (4.32), ta biểu diễn các  $M_{n-2}$ ,  $M_{n+1}$  qua tỷ số tiêu cự như sau :

$$\left| M_{n-2} \right| = - \frac{\left| M_{n-1} \right|}{k_{n-1}} ; \quad \left| M_{n+1} \right| = - \frac{\left| M_n \right|}{k'_{n+1}}$$

Khi đó phương trình (4.37) có dạng :

$$\begin{aligned} - \frac{\lambda_{n-1}}{k_{n-1}} M_{n-1} + 2(\lambda_{n-1} + \lambda_n) M_{n-1} + \lambda_n M_n + 6 \frac{\omega_n b_n J_0}{l_n J_n} &= 0 \\ \lambda_n M_{n-1} + 2(\lambda_n + \lambda_{n+1}) M_n + \lambda_{n+1} \frac{M_n}{k'_{n+1}} + 6 \frac{\omega_n a_n J_0}{l_n J_n} &= 0 \end{aligned}$$

hoặc là

$$\left. \begin{aligned} M_{n-1} \left[ 2 + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \left( 2 - \frac{1}{k_{n-1}} \right) \right] + M_n + 6 \frac{\omega_n b_n J_0}{l_n J_n} &= 0 \\ M_{n-1} + M_n \left[ 2 + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \left( 2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right) \right] + 6 \frac{\omega_n a_n J_0}{l_n J_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Khi  $n$  đóng vai trò của  $i$  trong (4.34) và (4.36) chúng ta có thể dẫn hệ (4.38) về dạng sau đây :

$$\begin{aligned} M_{n-1} + k'_n M_n &= - 6 \frac{\omega_n a_n J_0}{l_n J_n} \\ M_{n-1} k_n + M_n &= - 6 \frac{\omega_n b_n J_0}{l_n J_n} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Từ đó ta rút ra mômen uốn ở các mặt cắt trên hai gối tựa của nhịp thứ  $n$  chịu tải :

$$M_{n-1} = -6 \frac{J_0}{\lambda_n} \frac{\frac{\omega_n}{l_n J_n} (b_n k'_n - a_n)}{k_n k'_n - 1} ; \quad (4.40)$$

$$M_n = -\frac{6 J_0}{\lambda_n} \frac{\frac{\omega_n}{l_n J_n} (a_n k_n - b_n)}{k_n k'_n - 1}$$

## 2. Trường hợp nhịp biên là nhịp chịu tải

Nếu một trong các gối tựa biên nào đó của dầm liên tục là khớp thì tỷ số tiêu cự của nhịp nối với nó là bằng vô cùng. Khi ấy trong vế phải của một phương trình nào đó trong (4.40) sẽ có dạng bất định  $\infty/\infty$ . Ví dụ, đối với nhịp cuối cùng thứ  $m > n$  thì :  $k'_m = \infty$ . Khi đó tính bất định có mặt trong biểu thức xác định mômen  $M_{m-1}$ . Tuy nhiên, nếu chia trước tử số và mẫu số cho  $k'_m$  và sau đó đặt  $k'_m = \infty$  chúng ta sẽ nhận được mômen gối ở nhịp cuối cùng như sau :

$$M_{m-1} = \frac{-6J_0}{\lambda_m} \frac{\omega_m b_m}{l_m J_m k_m} \quad (4.41)$$

Tương tự như vậy nếu gối tựa "0" của dầm là khớp thì khi tiến hành khử tính bất định trong biểu thức của mômen uốn ta sẽ nhận được giá trị mômen của gối tựa 1.

$$M_1 = \frac{-6J_0}{\lambda_1} \frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1 k'_1} \quad (4.42)$$

Nếu dầm có mặt cắt ngang không đổi dọc theo chiều dài thì các công thức (4.34) và (4.36) có dạng :

$$\left. \begin{aligned} k_i &= 2 + \frac{l_{i-1}}{l_i} \left( 2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right) \\ k'_i &= 2 + \frac{l_{i+1}}{l_i} \left( 2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Khi ấy, các công thức (4.40) dùng để xác định các mômen gối tựa ở các nhịp chịu tải có dạng đơn giản hơn :

$$M_{n-1} = - \frac{6\omega_n}{l_n^2} \frac{(b_n k'_n - a_n)}{k_n k'_n - 1} ; M_n = - \frac{6\omega_n}{l_n^2} \frac{(a_n k_n - b_n)}{k_n k'_n - 1} \quad (4.44)$$

Vị trí của những tiêu cự ( $F_i$ ) không phụ thuộc vào quy luật của tải trọng trong những nhịp chịu tải và được xác định chỉ bởi các kích thước và độ cứng của dầm.

Phương pháp tiêu cự cho phép thiết lập một cách rất đơn giản giá trị của các tỷ số tiêu cự đối với tất cả các nhịp của dầm liên tục. Nhờ đó dễ dàng xác định được vị trí tiêu cự và vẽ nhanh các biểu đồ mômen uốn nếu như đã biết giá trị của các mômen ở các gối tựa của nhịp chịu tải, mà không cần thiết lập và giải hệ phương trình quá công kềnh như phương pháp 3 mômen và các phương pháp khác.

## §5. VÍ DỤ

Dưới đây chúng ta hãy thực hành tính toán các tung độ của biểu đồ mômen uốn được cho trên hình 4.25 bằng phương pháp tiêu cự được trình bày ở trên khi giả thiết rằng các gối tựa là các giá đỡ tâm của trục không có chuyển vị cưỡng bức. Theo các kích thước được cho trên hình 4.25 chúng ta tính giá trị của tất cả các tỷ số tiêu cự trái cụ thể là : (theo công thức 4.41)

$$k_0 = \infty$$

$$k_1 = 2 + (l_0/l_1) (2 - 1/\infty) = 2 ;$$

$$k_2 = 2 + (l_1/l_2) (2 - 1/k_1) = 2 + (150/150) (2 - 1/2) = 7/2$$

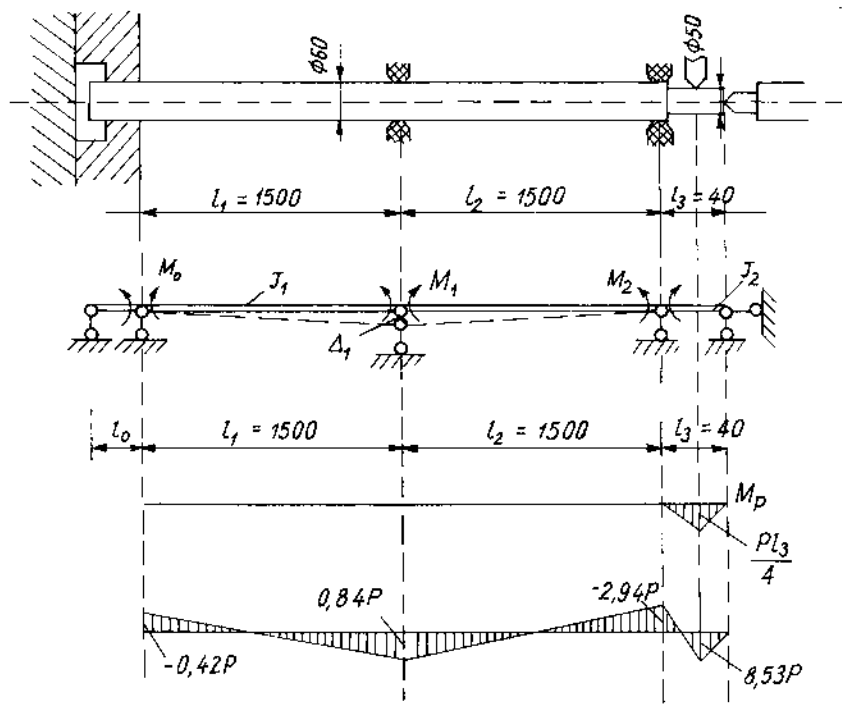
Để xác định  $k_3$ , trước hết ta tính các độ dài dẫn xuất  $\lambda_2, \lambda_3$ . Cụ thể là :

$$\lambda_2 = l_2 J_1 / J_1 = 150 ; \lambda_3 = l_3 J_1 / J_2 = 40.63,6/30,7 = 83$$

Sử dụng quan hệ (4.34) ta có :

$$k_3 = 2 + (\lambda_2/\lambda_3) (2 - 1/k_2) = 2 + (150/83) (2 - 2/7) = 5,1$$

Bởi vì gối tựa phải của nhịp thứ 3 là khớp nên  $k'_3 = \infty$ .



Hình 4.25

Chúng ta xác định mômen gối của nhịp chịu tải. Theo công thức (4.41), ta có

$$M_2 = -\frac{6J_1}{\lambda_3} \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_2 k_3} = \frac{6 \cdot 63,6 \cdot 200P \cdot 20}{83 \cdot 40 \cdot 30,7 \cdot 5,1} = -2,94P$$

trong đó, các đại lượng  $\omega_3$ ,  $b_3$ ,  $J_1$ ,  $J_2$  lần lượt có giá trị là :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl_3}{4} \cdot l_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot 40}{4} \cdot 40 = 200 P ;$$

$$b_3 = l_3/2 = 20 \text{ cm} ;$$

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = 63,6 \text{ cm}^4 ;$$



**Hình 4.26**



$$J_2 = \frac{\pi d_2^4}{64} = 30,7 \text{ cm}^4 ;$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{2,94P}{7/2} = 0,84P ;$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{0,84P}{2} = -0,42P.$$

Biểu đồ ( $M_p$ ) như trên hình 4.25.

Kết quả cho thấy 2 phương pháp cho cùng 1 kết quả và tính ưu việt của phương pháp tiêu cự là không cần phải giải bất kỳ một hệ phương trình đại số nào, dù đó là dầm có  $n$  bậc siêu tĩnh.

Bằng phương pháp vạn năng với chương trình BK45 cho kết quả của bài toán trên hình 4.25 khi  $\Delta_1 = 0,1 \text{ cm}$  ứng với lực ăn dao  $P = 100 \text{ daN}$  như hình 4.26.

#### IV. TÍNH DẦM LIÊN TỤC BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

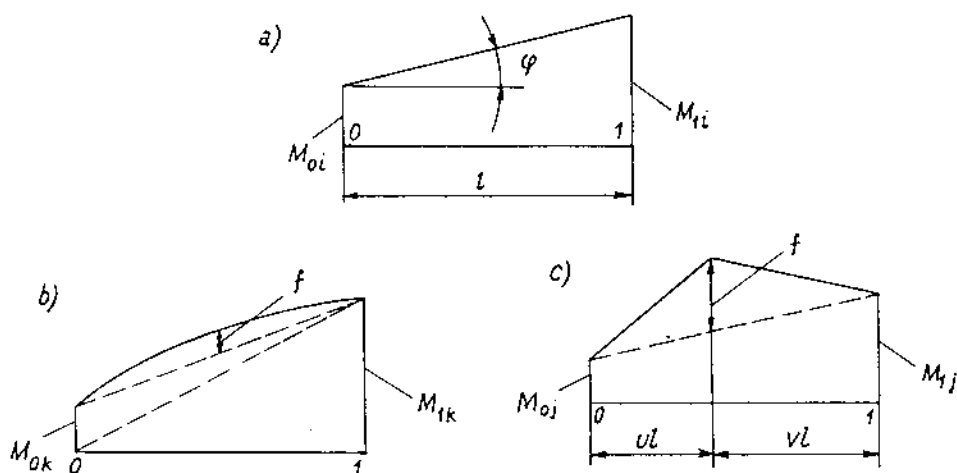
Việc tính các dầm nhiều bậc siêu tĩnh thuận tiện nhất là tính toán dưới dạng ma trận nhờ sự hỗ trợ của computer. Để đơn giản cách trình bày ta khảo sát dầm liên tục có độ cứng không đổi và không có các chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa. Trước tiên ta làm quen với phương pháp nhân biểu đồ Verechtchaguine bằng ma trận.

##### §1. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ VERECHTCHAGUINE BẰNG MA TRẬN

Khi tính chuyển vị trong các hệ dầm hồi người ta thường sử dụng phương pháp nhân biểu đồ của Verechtchaguine, đặc biệt khi tính các hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực. Tuy nhiên việc tính toán này bằng các thao tác truyền thống sơ cấp tốn rất nhiều công sức. Trong mục này chúng ta hãy làm quen với một thuật toán ma trận để nhân biểu đồ Verechtchaguine. Trên hình 4.27 là ba dạng biểu đồ mômen tương ứng là do tải trọng đơn vị, do tải trọng ngoài phân bố, do lực tập trung gây ra trong một đoạn nào đó có chiều dài  $l$ .

Cách tính chuyển vị bằng phương pháp nhân biểu đồ Verechtchaguine liên quan đến việc tính tích phân xác định sau đây :

$$\int_a^b \frac{f(z) (kz + c)}{EJ} dz$$



Hình 4.27

trong đó :  $f(z)$  là hàm biểu diễn quy luật biến thiên nội lực (mômen uốn) do tải trọng ngoài cho trước gây ra ( $M_k$  hoặc  $M_j$ ) ;

$kz + c$  là hàm biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực (mômen uốn  $M_i$ ) do tải trọng đơn vị đặt vào điểm và theo phương cần tính chuyển vị gây ra (hình 4.27a) ;

$c$  : nội lực (mômen uốn)  $M_{oi}$  trên biểu đồ  $M_i$  ;

$k$  là tang góc nghiêng  $\varphi$  trên biểu đồ  $M_i$ .

Bằng cách nhân thông thường các biểu đồ ( $M_k$ ) và ( $M_i$ ) ta hãy tính chuyển vị

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^l \frac{M_i M_k}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} M_{ok} l \left[ M_{oi} + \frac{1}{3} (M_{li} - M_{oi}) \right] + \\ &+ \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} fl \frac{M_{oi} + M_{li}}{2} + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} M_{lk} l \left[ M_{oi} + \frac{2}{3} (M_{li} - M_{oi}) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{2l}{6EJ} M_{oi} + \frac{1}{6EJ} M_{li} \right) M_{ok} + \left( \frac{2}{6} \frac{1}{EJ} M_{oi} + \frac{2l}{6EJ} M_{li} \right) f + \\
&+ \left( \frac{1}{6EJ} M_{oi} + \frac{2l}{6EJ} M_{li} \right) M_{ik}
\end{aligned} \quad (4.45)$$

Trong đó  $f$  là độ võng của biểu đồ  $M_k$  được xác định bởi viên phân parabol,  $f$  được coi là dương, nếu biểu đồ  $M_k$  là lồi,  $f < 0$  nếu biểu đồ  $M_k$  là lõm.

Biểu thức (4.45) có thể được dẫn về dạng ma trận như sau :

$$\int_0^l \frac{M_k M_i}{EJ} ds = \left[ \left( \frac{2l}{6EJ} M_{oi} + \frac{1}{6EJ} M_{li} \right) \left( \frac{2l}{6EJ} M_{oi} + \frac{2l}{6EJ} M_{li} \right) \right. \\
\left. \left( \frac{1}{6EJ} M_{oi} + \frac{2l}{6EJ} M_{li} \right) \right] \begin{bmatrix} M_{ok} \\ f \\ M_{ik} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

hoặc là

$$\int_0^l \frac{M_i M_k}{EJ} ds = \begin{bmatrix} M_{oi} & M_{li} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2l}{6EJ} & \frac{2l}{6EJ} & \frac{l}{6EJ} \\ \frac{l}{6EJ} & \frac{2l}{6EJ} & \frac{2l}{6EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ok} \\ f \\ M_{ik} \end{bmatrix} = M_i^T \delta M_k \quad (4.47)$$

trong đó :

$M_i^T$  là ma trận cột chuyển các mômen của biểu đồ  $M_i$  ;

$\delta$  là ma trận độ mềm của đoạn khảo sát ;

$M_k$  là ma trận cột các mômen của biểu đồ  $M_k$  ;

Nếu  $f = 0$  và biểu đồ  $M_k$  là tuyến tính thì

$$\int_0^l \frac{M_i M_k}{EJ} ds = \begin{bmatrix} M_{oi} & M_{li} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2l}{6EJ} & \frac{l}{6EJ} \\ \frac{l}{6EJ} & \frac{2l}{6EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ok} \\ M_{ik} \end{bmatrix} \quad (4.47a)$$

Nếu khi  $M_k$  có dạng của  $M_j$  (hình 4.27c) thì phép nhân của  $M_i$  với  $M_j$  có dạng :

$$\int_0^l \frac{M_i M_j}{EJ} ds = [M_{oi} M_{li}] \begin{bmatrix} \frac{2l}{6EJ} & (1+\nu) \frac{l}{6EJ} & \frac{l}{6EJ} \\ \frac{l}{6EJ} & (1+\nu) \frac{l}{6EJ} & \frac{2l}{6EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{oj} \\ f \\ M_{lj} \end{bmatrix} \quad (4.47b)$$

Nếu trong trường hợp hệ có nhiều đoạn thì chuyển vị cần tính sẽ là tổng các kết quả nhân biểu đồ của các đoạn đó, cụ thể là :

$$\Delta = \sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds = [M_{oi} M_{li} M_{2i} \dots] \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ & \delta_2 \\ & & \delta_3 \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{ok} \\ f_1 \\ M_{1k} \\ M_{2k} \\ f_2 \\ M_{3k} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = M_i^T \delta M_k \quad (4.48)$$

Trong công thức này,  $M_{2i}$ ,  $M_{3i}$  là giá trị các mômen biên của đoạn kế tiếp trên biểu đồ  $M_i$ ;  $M_{2k}$ ,  $M_{3k}$  cũng như vậy nhưng trên biểu đồ  $M_k$ ;  $f_1$ ,  $f_2$  ... là độ võng của các đoạn I, II... trên biểu đồ  $M_k$ ;  $\delta$  là ma trận độ mềm dạng đường chéo của các đoạn riêng biệt của kết cấu.

Nếu trên đoạn thứ  $j$  nào đó của  $M_k$  mà  $f = 0$  thì đối với đoạn này ma trận độ mềm có dạng :

$$\delta_j = \begin{bmatrix} \frac{2l_j}{6EJ_j} & \frac{l_j}{6EJ_j} \\ \frac{l_j}{6EJ_j} & \frac{2l_j}{6EJ_j} \end{bmatrix} = \frac{l_j}{6EJ_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Nếu  $M_{1j} = M_{2j}$  và  $M_{1k} = M_{2k}$  và nếu thay giá trị của các độ mềm  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ... vào (4.48) sau một vài biến đổi trên các ma trận trong (4.48) ta có :

$$\sum \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds = [M_{oi} M_{li} M_{3i} \dots] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{2l_1}{6EJ_1} & \frac{2l_1}{6EJ_1} & \frac{l_1}{6EJ_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_1}{6EJ_1} & \frac{2l_1}{6EJ_1} & \left( \frac{2l_1}{6EJ_1} + \frac{2l_2}{6EJ_2} \right) & \frac{2l_2}{6EJ_2} & \frac{l_2}{6EJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_2}{6EJ_2} & \frac{2l_2}{6EJ_2} & \left( \frac{2l_2}{6EJ_2} + \frac{2l_3}{6EJ_3} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{0k} \\ f_1 \\ M_{1k} \\ f_2 \\ M_{3k} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Trong trường hợp cần phải tính chuyển vị theo một vài phương thì cần phải nhân một vài biểu đồ đơn vị dạng  $M_i$  với biểu đồ  $M_k$  do tải trọng ngoài cho trước gây ra. Các thao tác sẽ đơn giản hơn nhiều khi sử dụng các ma trận. Chúng ta hãy thiết lập một ma trận chữ nhật, trong đó mỗi cột sẽ xác định những tung độ đặc trưng của biểu đồ mômen dưới tác dụng của tải trọng đơn vị.

$$M_i = \begin{bmatrix} M_{0i} & M_{02} & M_{03} & \dots & M_{0k} \\ M_{1i} & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1k} \\ M_{3i} & M_{32} & M_{33} & \dots & M_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} = [\vec{M}_1 \vec{M}_2 \vec{M}_3 \dots]$$

k - cột

ở đây k là số lượng chuyển vị cần tìm.

Khi tính những chuyển vị này thì ma trận độ mềm  $\delta$  và ma trận cột của các mômen do tải trọng ngoài  $M_p$  gây ra không đổi.

Sau khi thay vào (4.48)  $M_k$  bằng  $M_p$ , ta được :

$$\vec{\Delta} = M_i^T \delta M_p \quad (4.51)$$

Ma trận chuyển  $M_i^T$  là ma trận k dòng. Theo quy tắc nhân ma trận, quan hệ (4.51) cho phép nhận được ma trận cột  $\vec{\Delta}$  mà các phần tử của nó là những chuyển vị cần tìm.

## §2. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

Chúng ta sẽ đưa vào dưới dạng ma trận điều kiện không có chuyển vị góc tương hỗ của các mặt cắt trên các gối tựa trung gian

$$Z_{11}M + Z_{1p} = 0, \quad (4.52)$$

trong đó :

$Z_{11}$ : ma trận các chuyển vị góc tương hỗ của hai mặt cắt ở hai bên gối tựa khảo sát do tác dụng của các mômen gối bằng đơn vị gây ra ;

$Z_{1p}$ : ma trận cột các chuyển vị của những tiết diện này do tác dụng của các tải trọng ngoài gây ra.

Ma trận các mômen đơn vị đặt ở trên các gối được ký hiệu là  $M_1$  và có dạng :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Để xác định các chuyển vị góc  $Z_{11}$  theo (4.51) cần phải nhân những ma trận sau đây :

$$Z_{11} = M_1^T \delta M_1 \quad (4.54)$$

$M_1^T$  là ma trận chuyển của ma trận  $M_1$  ;

$\delta$  là ma trận độ mềm.

Chúng ta biểu diễn ma trận độ mềm  $\delta$  dưới dạng :

$$\delta = \frac{1}{6EJ} \begin{bmatrix} 2l_1 & l_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 2(l_1 + l_2) & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ma trận chúng ta có

$$Z_{11} = \begin{bmatrix} 2(l_1 + l_2) & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 2(l_3 + l_4) & l_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Các chuyển vị  $Z_{1p}$  dưới dạng ma trận cũng nhận được từ điều kiện

$$Z_{1p} = M_1^T \delta M_p$$

ở đây  $M_p$  là ma trận cột của các mômen uốn do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản. Tuy nhiên có thể nhận được  $Z_{1p}$  một cách đơn giản hơn bằng phép nhân thông thường các biểu đồ  $(M_i)$  với  $\left(M_p^0\right)$  như khi xây dựng phương trình 3 mômen :

$$Z_{1p} = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \\ \frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\omega_{m-1} a_{m-1}}{l_{m-1}} + \frac{\omega_m b_m}{l_m} \end{bmatrix}$$

Khi thay thế  $Z_{11}$ ,  $Z_{1p}$  vào (4.52) và khi đơn giản cho  $1/6EJ$  ta nhận lại được hệ phương trình (4.23) khi  $J_0 = J_1 = J_{i+1} = J$  và  $\Delta_{ii}^0 = \Delta_{i\Delta}^0 = 0$  như sau đối với dầm liên tục đơn giản :

$$\left. \begin{aligned} 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -6 \frac{\omega_1 a_1}{l_1} - 6 \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -6 \frac{\omega_2 a_2}{l_2} - 6 \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \\ \dots \dots \dots \\ M_{m-2} l_{m-1} + 2M_{m-1}(l_{m-1} + l_m) &= -6 \frac{\omega_{m-1} a_{m-1}}{l_{m-1}} - 6 \frac{\omega_m b_m}{l_m} \end{aligned} \right\}$$

Hoặc là dưới dạng ma trận

$$LM = \omega$$

trong đó :

$$L = \begin{bmatrix} 2(l_1 + l_2) & l_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 2(l_2 + l_3) & l_3 & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 2(l_3 + l_4) & l_4 & 0 \\ \dots \dots \dots \end{bmatrix}$$

là ma trận hệ số của các ẩn số, còn

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{m-1} \end{bmatrix}$$

là ma trận cột của các ẩn số là những mômen gối ;

$$\omega = 6 \begin{bmatrix} \frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \\ \frac{\omega_2 a_2}{l_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\omega_{m-1} a_{m-1}}{l_{m-1}} + \frac{\omega_m b_m}{l_m} \end{bmatrix}$$

là ma trận cột các số hạng tự do phụ thuộc tải trọng ngoài đặt trên dầm.

Hoàn toàn tương tự như vậy chúng ta có thể tính những dầm liên tục có gối tựa chịu chuyển vị cưỡng bức và độ cứng không đổi chỉ trong từng nhịp. Nếu dầm có đầu thừa bên phải hoặc bên trái thì các phần tử đầu tiên và cuối cùng trong ma trận  $\omega$  bị thay đổi. Nếu có côngxôn ở đầu trái thì cần phải bổ sung đại lượng  $M_0 \cdot l_1$  vào phần tử đầu tiên, nếu côngxôn ở đầu phải cần phải bổ sung  $M_m \cdot l_m$  vào phần tử cuối cùng.



## Chương 5

# PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

## §1. THỰC CHẤT CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

### 1. Các giả thiết, ẩn số và hệ tương đương

Việc tính toán các hệ khung siêu tĩnh trong rất nhiều trường hợp sẽ đơn giản đáng kể, nếu ta không chọn lực trong các liên kết thừa làm ẩn số như trong phương pháp lực mà chọn các chuyển vị ở các nút làm ẩn cơ bản và được tìm ra đầu tiên. Sau khi đã tìm được các ẩn cơ bản là những chuyển vị nút ta có thể dễ dàng tính được các nội lực và chuyển vị tại mặt cắt bất kỳ nhờ các liên hệ vi phân đã biết trong sức bền vật liệu.

$$M = EJ V''(z) ; \quad Q = EJ V'''(z)$$

Thực chất của phương pháp chuyển vị, cũng như phương pháp lực đều xuất phát từ ý tưởng giải bài toán của lý thuyết đàn hồi theo chuyển vị (phương pháp Lamé) và theo ứng suất (phương pháp Saintvenant). Vì chọn các chuyển vị nút làm ẩn cơ bản nên phương pháp được gọi là phương pháp chuyển vị hay phương pháp biến dạng. Phương pháp này cũng như phương pháp lực là những phương pháp chính xác, bởi vì chúng chỉ sử dụng những giả thiết thông thường của sức bền vật liệu.

Phương pháp chuyển vị để tính các hệ siêu động được xây dựng trên các giả thiết sau đây :

1. Các nút của hệ được xem là rắn tuyệt đối. Vì vậy, khi hệ bị biến dạng các thanh đồng quy tại một nút sẽ có chuyển vị góc như nhau (hình 5.1a). Đối với mỗi thanh, đó là góc  $\varphi_i$  (ở đây  $i = 1, 2, 3, 4$ ) giữa tiếp tuyến của đường đàn hồi ở vùng nút với phương ban đầu của cấu kiện. Do đó, số ẩn số là góc xoay bằng  $n_1$  (bằng số nút cứng không cố định của khung).

2. Khi xác định số ẩn là các chuyển vị thẳng ở các nút, biến dạng của các thanh do lực dọc và lực cắt gây ra là rất bé so với biến dạng uốn, do đó được phép bỏ qua.

Giả thiết này dẫn đến kết luận là độ dịch gần giữa các nút ở hai đầu một thanh lên phương ban đầu do ngoại lực gây ra là không đổi.

Do đó các nút của khung trên hình 5.1a chỉ có một chuyển vị thẳng theo phương ngang  $\Delta$ . Nghĩa là  $n_2 = 1$  và đối với khung này  $n = 4 + 1 = 5$ .

Số ẩn số tổng quát còn gọi là bậc siêu động của hệ siêu động của phương pháp chuyển vị là :

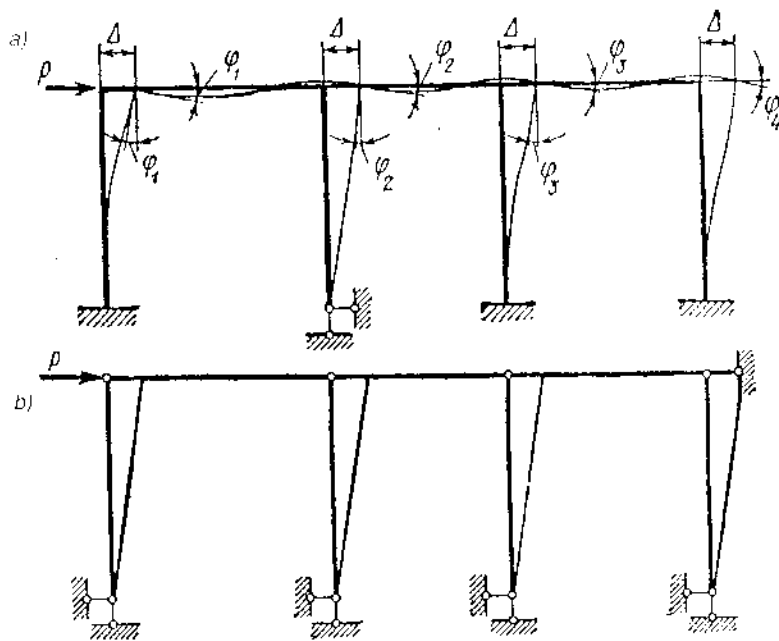
$$n = n_1 + n_2 ,$$

trong đó :

$n$  - số ẩn số tính theo phương pháp chuyển vị ;

$n_1$  - số chuyển vị góc cần xác định ở các nút cứng không cố định ;

$n_2$  - số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút.

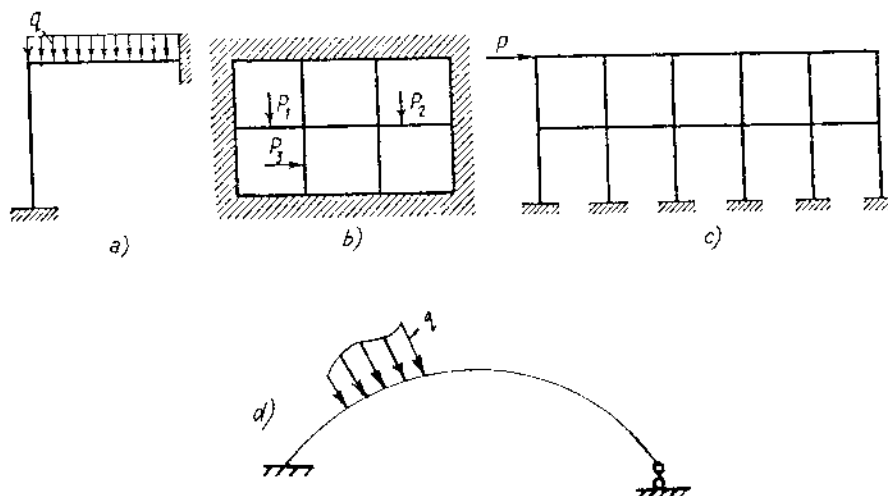


Hình 5.1

Trên cơ sở của giả thiết hai, ta đưa ra cách xác định thực hành các ẩn số  $n_2$  như sau :

Tương tượng thay thế tất cả các nút cứng và các liên kết với bên ngoài bằng các khớp bản lề, ta sẽ thu được một cơ cấu. Sơ đồ cơ cấu này cho ta thấy rõ chuyển vị thẳng độc lập  $n_2$  của các nút của hệ. Muốn cho các nút của hệ đứng yên ta phải thêm vào cơ cấu vừa nhận được những thanh gối đơn hợp lý sao cho tất cả các chuyển vị thẳng của các nút đều bị chặn. Số thanh ít nhất cần thiết phải thêm vào để vừa đủ làm cho cơ cấu trở thành kết cấu bất biến hình hình học, nghĩa là khi ấy bậc tự do của hệ bằng không ( $W = 0$ ), chính là số chuyển vị thẳng  $n_2$  của các nút trong hệ ban đầu (hình 5.1b).

Trên hình 5.2 và bảng 1 đã đưa ra các kết quả so sánh một số khung nếu tính toán chúng bằng phương pháp chuyển vị sẽ giảm rất nhiều sức lao động so với phương pháp lực. Tuy nhiên, có những hệ nếu dùng phương pháp lực thì ẩn số sẽ ít hơn rất nhiều so với khi dùng phương pháp chuyển vị. Ví dụ hệ trên hình 5.2d có số ẩn số theo phương pháp lực là 1, trong khi đó số ẩn số theo phương pháp chuyển vị bằng  $\infty$ . Vì vậy, trong tính toán đòi hỏi phải có tư duy sáng tạo, có kiến thức lý thuyết tốt và có kinh nghiệm tính toán mới có thể đưa ra một hệ cơ bản thích hợp, đặc biệt là khi sử dụng phương pháp lực, còn đối với phương pháp chuyển vị thì chỉ có một hệ cơ bản duy nhất, dù hệ xuất phát là như thế nào.

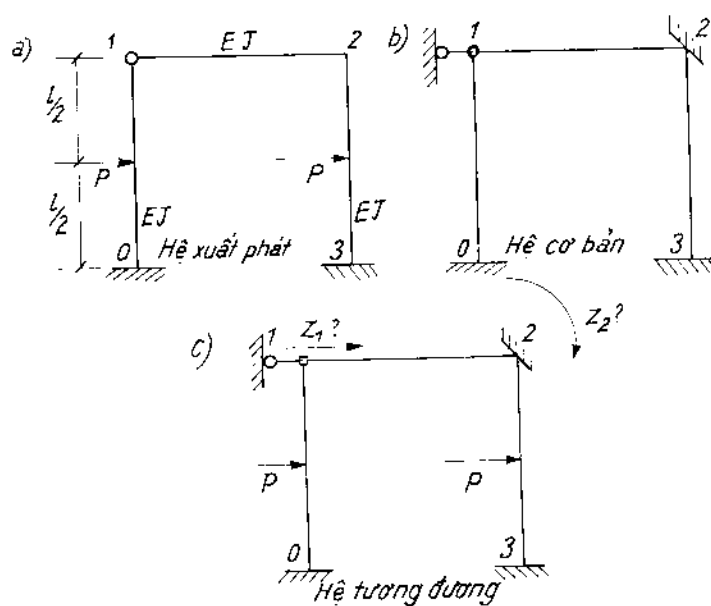


Hình 5.2

**Bảng 1**

| Dạng khung | Phương pháp chuyển vị |                    |          | Phương pháp lực. Số ẩn (bậc siêu tĩnh) |
|------------|-----------------------|--------------------|----------|----------------------------------------|
|            | Số chuyển vị góc      | Số chuyển vị thẳng | Số ẩn    |                                        |
| Hình 5a    | 1                     | 0                  | 1        | 3                                      |
| Hình 5b    | 2                     | 0                  | 2        | 15                                     |
| Hình 5c    | 12                    | 2                  | 14       | 30                                     |
| Hình 5d    | $\infty$              | $\infty$           | $\infty$ | 1                                      |

Để tính toán hệ bằng phương pháp chuyển vị, cũng như trong phương pháp lực, người ta không tính trên hệ đã cho mà trên hệ tương đương với sự trợ giúp của hệ cơ bản. Chúng được định nghĩa như sau :



**Hình 5.3**

Hệ tương đương là hệ suy ra từ hệ đã cho sau khi đã bổ sung vào đó các liên kết chống xoay  $Z_i$  và chống chuyển vị thẳng  $Z_k$  của các nút (hình 5.3c) ( $i = \overline{1, n_1}$ ,  $k = \overline{1, n_k}$ ). Hệ cơ bản là hệ suy ra từ hệ tương đương trên đó không có ngoại lực và các chuyển vị nút tác dụng (hình 5.3b).

Cần chú ý rằng các liên kết ngàm bổ sung vào hệ đã cho chỉ có tác dụng chống xoay mà không có tác dụng chống chuyển động thẳng của các nút. Trong những liên kết ngàm như thế chỉ có các phản lực mômen.

## §2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Tư tưởng chủ đạo để thiết lập phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị là sự phủ định sự có mặt của các mômen phản lực ở các ngàm bổ sung và các phản lực thẳng ở các thanh gối bổ sung. Bởi vì trong hệ xuất phát không có những liên kết này cho nên phản lực tại những vị trí có liên kết bổ sung phải bằng không.

Chúng ta sẽ minh họa nội dung này thông qua một ví dụ cụ thể đối với khung cho trên hình 5.3a với số ẩn  $n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$ . Hệ cơ bản (hình 5.3b) và hệ tương đương (hình 5.3c). Hệ tương đương này sẽ bị biến dạng hoàn toàn giống như hệ xuất phát (hình 5.3a).

Trong hệ tương đương phản lực  $R_1$  trong thanh gối 1 do tất cả các nguyên nhân gây ra phải bằng không, tương tự như vậy đối với phản lực  $R_2$ .

Cụ thể là :

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{11} + R_{12} + R_{1P} = 0 \\ R_2 &= R_{21} + R_{22} + R_{2P} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

trong đó :

$R_{11}$  là phản lực ở thanh gối 1 do chuyển vị thẳng  $z_1$  đặt vào nút 1 gây ra ;

$R_{12}$  là phản lực cũng trong thanh gối 1 do chuyển vị góc  $Z_2$  đặt vào nút 2 gây ra ;

$R_{1P}$  là phản lực trong thanh gối 1 do tải trọng ngoài cho trước gây ra. Tương tự như vậy đối với  $R_{21}$ ,  $R_{22}$  và  $R_{2P}$ .



$$R_p = \begin{Bmatrix} R_{1p} \\ R_{2p} \\ \dots \\ R_{np} \end{Bmatrix} \quad \text{là ma trận cột của các phân lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản}$$

Các ẩn số  $Z$  được xác định bởi công thức :

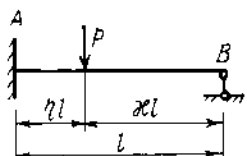
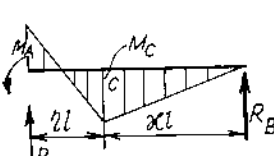
$$Z = -K^{-1} R_p, \quad (5.5)$$

trong đó  $K^{-1}$  là ma trận nghịch đảo của ma trận  $K$ .

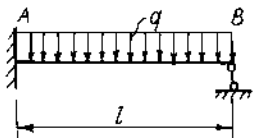
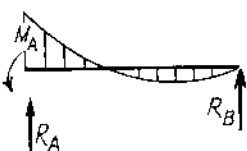
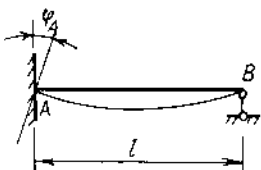
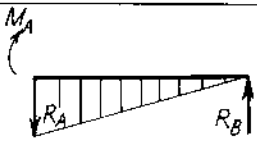
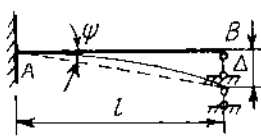
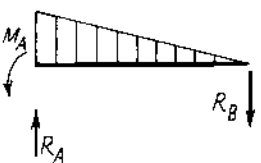
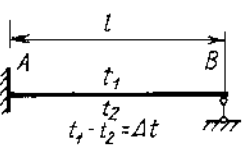
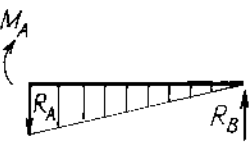
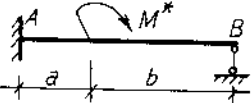
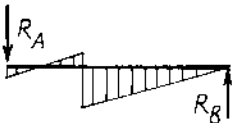
### §3. CÁCH XÁC ĐỊNH CÁC PHẦN TỬ TRONG CÁC MA TRẬN $K$ VÀ $R_p$

Trong mục này ta sẽ nghiên cứu cách xác định các phần tử trong các ma trận  $K$  và  $R_p$  nghĩa là xác định các hệ số  $r_{kj}$  và  $R_{kp}$  của hệ phương trình (5.4). Một lần nữa ta cần nhắc lại ý nghĩa vật lý của chúng. Cụ thể là : các hệ số  $r_{kj}$  và  $R_{kp}$  lần lượt là những phân lực liên kết trong hệ cơ bản chịu các chuyển vị cưỡng bức áp đặt đơn vị  $\bar{Z}_j = 1$  và do tải trọng ngoài gây ra. Có nhiều cách xác định chúng, nhưng đơn giản và thuận tiện nhất là sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học (phương pháp tĩnh). Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng nguyên lý công khả dĩ (phương pháp tổng quát) để xác định các hệ số này.

**Bảng 2**

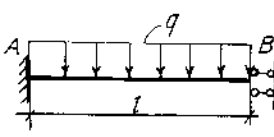
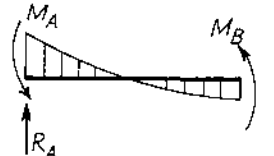
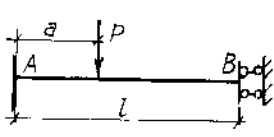
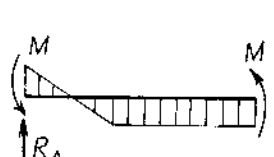
| Sơ đồ tính                                                                          | Biểu đồ M và phản lực                                                               | Công thức                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | $M_A = -\frac{Pl}{2} \chi^2 (1 - \chi^2);$ $M_C = \frac{Pl}{2} \eta^2 \chi (3 - \eta);$ $R_A = \frac{P\chi}{2} (3 - \chi^2);$ $R_B = \frac{P\eta^2}{2} (3 - \eta)$ |

Tiếp bảng 2

| Số đồ tính                                                                          | Biểu đồ M và phản lực                                                               | Công thức                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    | $M_A = -\frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8} ql;$ $R_B = \frac{3}{8} ql$                                                                 |
|    |    | $M_A = \frac{3EJ}{l} \varphi_A;$ $-R_A = +R_B = +\frac{3EJ}{l^2} \varphi_A$                                                             |
|   |   | $M_A = -\frac{3EJ}{l^2} \Delta =$ $= -\frac{3EJ}{l} \psi$ $R_A = -R_B = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \Delta =$ $= \frac{3EJ}{l^2} \cdot \psi$  |
|  |  | $M_A = \frac{3EJ (\Delta t) \alpha}{2h}$ <p>h—chiều cao của mặt cắt ngang</p> $-R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{EJ \alpha (\Delta)}{h l}$ |
|  |  | $M_A = \frac{M^*}{2l^2} (2l^2 + 3a^2 - 6ab)$ $M_B = 0$ $R_A = -\frac{3M^*}{2l} \left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)$ $= -R_B$               |



Tiếp bảng 2

| Sơ đồ tính                                                                        | Biểu đồ M và phản lực                                                             | Công thức                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | $M_A = -\frac{ql^2}{3} ; M_B = \frac{ql^2}{6}$ $R_A = ql ; R_B = 0$                              |
|  |  | $M_A = -\frac{Pa}{2} \left( 2 - \frac{a}{l} \right)$ $M_B = \frac{Pa^2}{2l}$ $R_A = P ; R_B = 0$ |

Với cách chọn hệ tương đương và hệ cơ bản như ở trên thì hệ siêu tĩnh xuất phát đã được chia ra thành các phần tử mà mỗi phần tử là một thanh có liên kết ở mỗi đầu có thể là: ngàm, khớp, ngàm trượt. Vì vậy tải trọng tác dụng lên hệ cơ bản cũng như các chuyển vị cưỡng bức ở các nút chỉ gây ra biến dạng trong phạm vi của mỗi thanh mà chúng tác dụng. Biểu đồ các đại lượng cần tính  $S_p$  trong hệ cơ bản do các tác dụng ngoài nói trên gây ra có thể được xây dựng bằng các phương pháp của sức bền vật liệu. Biểu đồ các đại lượng cần tính này được thiết lập sẵn và được cho ở các bảng 2 và 3.

Biểu đồ nội lực  $S_p$  do tải trọng gây ra trong hệ xuất phát chính là tổng biểu đồ nội lực  $S_p^0$  do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản và do các chuyển vị cưỡng bức áp đặt  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  (nghiệm của hệ (5.5)) gây ra. Nếu gọi  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$  lần lượt là biểu đồ nội lực do các các chuyển vị cưỡng bức đơn vị gây ra ở những liên kết bổ sung trong hệ cơ bản, theo nguyên lý cộng tác dụng ta có thể viết :

$$S_{Z_1} = \bar{S}_1 Z_1 ; S_{Z_2} = \bar{S}_2 Z_2 ; S_{Z_3} = \bar{S}_3 Z_3, \dots, S_{Z_n} = \bar{S}_n Z_n .$$

Và

$$S_p = S_p^0 + \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \bar{S}_3 Z_3 + \dots + \bar{S}_n Z_n$$

Như vậy, để có được biểu đồ  $S_p$  bằng phương pháp chuyển vị ta cần phải làm các việc sau đây :

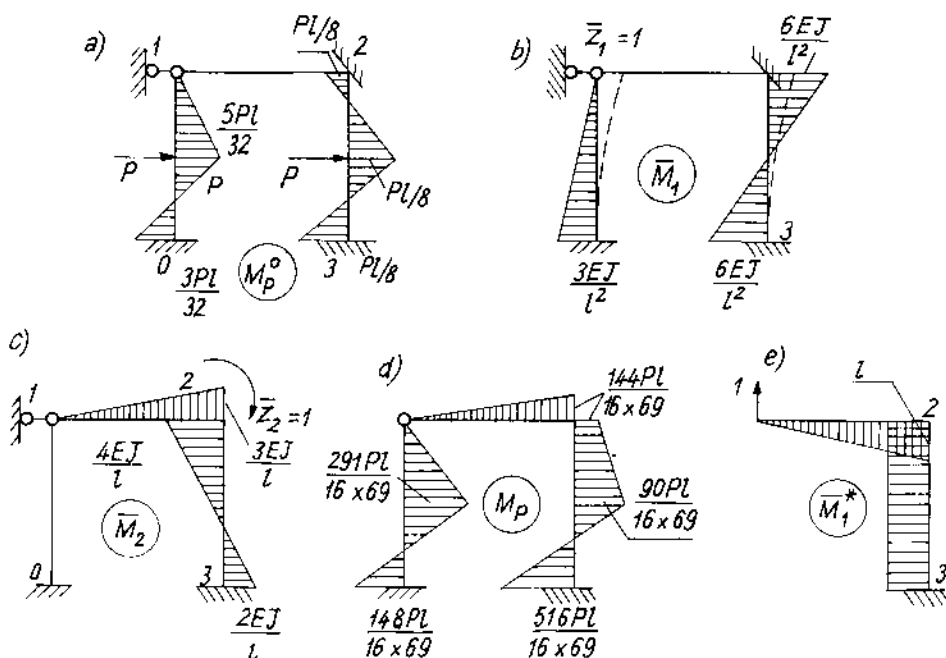
- a/ Vẽ biểu đồ  $S_p^0$  trong hệ cơ bản do tải trọng gây ra.
- b/ Vẽ các biểu đồ nội lực  $\bar{S}_k$  ( $K = 1, 2, 3, \dots$ ) do các chuyển vị áp đặt bằng đơn vị gây ra trong hệ cơ bản.
- c/ Giải hệ phương trình chính tắc (5.3) hoặc (5.4) để có các chuyển vị thực cần tìm tại các liên kết bổ xung.

Nội dung này sẽ được giải quyết trong các mục dưới đây :

### 1. Phương pháp tính xác định các phần tử trong $K$ và $R_p$

Để xác định các  $r_{kj}$  và  $R_{kp}$  ta cần phải xây dựng các biểu đồ mômen uốn trong các thanh của hệ cơ bản dưới tác dụng của ngoại lực và các chuyển vị đơn vị áp đặt. Các biểu đồ mômen tương ứng đối với khung trên hình 5.3 như sau (hình 5.4).

Khi vẽ các biểu đồ này ta sử dụng bảng 2 và 3, trên đó cho sẵn các biểu đồ mômen uốn đối với các dầm có hai đầu ngàm và dầm có một đầu

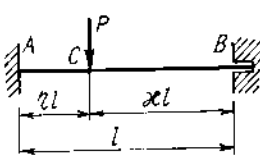
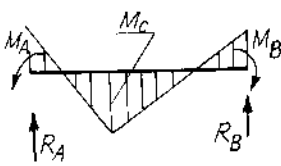
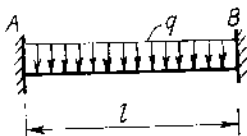
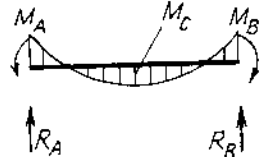
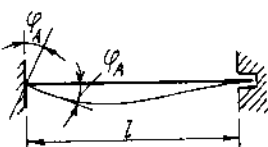
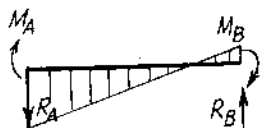
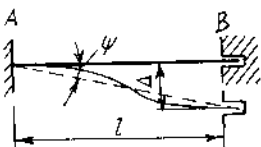
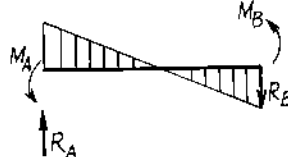


Hình 5.4

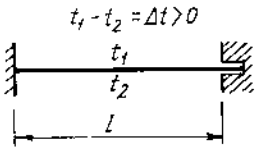
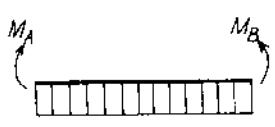
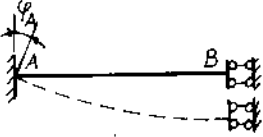
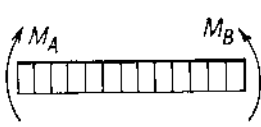
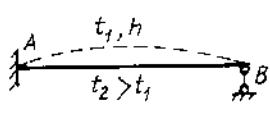
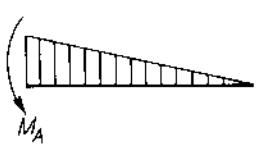
ngàm, một đầu còn lại là khớp. Chú ý rằng khi vẽ biểu đồ mômen uốn do chuyển vị thẳng của các nút cần phải xác định chuyển vị tương đối giữa các đầu cuối của mỗi thanh theo phương vuông góc với trục của nó.

Các hệ số trong phương trình thứ nhất của hệ phương trình (5.2) được xác định từ điều kiện cân bằng của từng bộ phận khung được tách ra.

**Bảng 3**

| Sơ đồ tính                                                                          | Biểu đồ M và phản lực                                                               | Công thức                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    | $M_A = -\eta\chi^2Pl$ $M_B = -\eta^2\chi Pl$ $M_C = 2\eta^2\chi^2Pl$ $R_A = \chi^2(1+2\eta)P$ $R_B = \eta^2(1+2\chi)P$                |
|   |   | $M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$ $R_A = R_B = +\frac{ql}{2}$ $M_C = +M_B = +\frac{ql^2}{24}$                                            |
|  |  | $M_A = \frac{4EJ}{l} \varphi_A$ $M_B = \frac{2EJ}{l} \varphi_A$ $R_B = -R_A = \frac{6EJ}{l^2} \varphi_A$                              |
|  |  | $M_B = -M_A = \frac{6EJ}{l^2} \Delta =$ $= \frac{6EJ}{l} \Psi ;$ $R_A = -R_B = \frac{12EJ}{l^2} \Delta =$ $= \frac{12EJ}{l^2} \Psi ;$ |

Tiếp bảng 3

| Sơ đồ tính                                                                        | Biểu đồ M và phản lực                                                             | Công thức                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | $M_A = M_B = + \frac{EJ(\Delta t) \alpha}{h}$ $R_A = R_B = 0$                                             |
|  |  | $M_A = \frac{EJ}{l} \varphi_A = M_B$ $R_A = R_B = 0$                                                      |
|  |  | $M_A = - \frac{3\alpha}{2h} \Delta t EJ ; M_B = 0$ $R_A = \frac{3\alpha}{2h} \Delta t \frac{EJ}{l} = R_B$ |

Ví dụ : Để xác định  $R_{1p}$ ,  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  ta tưởng tượng cắt các chân của khung và thay vào đó các mômen uốn và lực cắt được biết từ các biểu đồ đã vẽ trên hình 5.4a,b,c sau đó khảo sát các điều kiện cân bằng dưới dạng hình chiếu của các lực tác dụng lên phần khảo sát (phần khung) (hình 5.5a,b,c). Cụ thể là :

$$R_{1p} = \frac{11}{16} P + \frac{P}{2} - 2P = - \frac{13}{16} P \quad (\text{Hình 5.5a})$$

$$r_{11} = \frac{3E}{l^3} + \frac{12E}{l^3} = \frac{15E}{l^3} \quad (\text{Hình 5.5b})$$

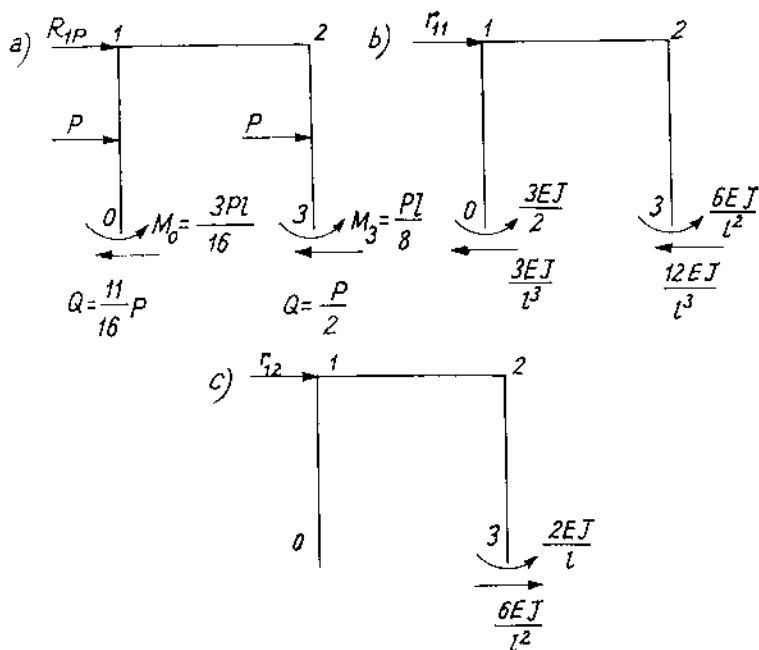
$$r_{12} = - \frac{6EJ}{l^2} \quad (\text{Hình 5.5c})$$

Các hệ số của phương trình thứ 2 trong (5.2) là các mômen phản lực trong các ngàm bổ sung, được xác định từ điều kiện cân bằng của các nút.

Để xác định  $R_{2p}$  ta tách nút 2 của biểu đồ  $M_p^0$  (hình 5.4a)

Xét sự cân bằng nút 2 (hình 5.6a, b, c) ta có lần lượt là :

$$R_{2p} - \frac{Pl}{8} = 0 \Rightarrow R_{2p} = \frac{Pl}{8}$$

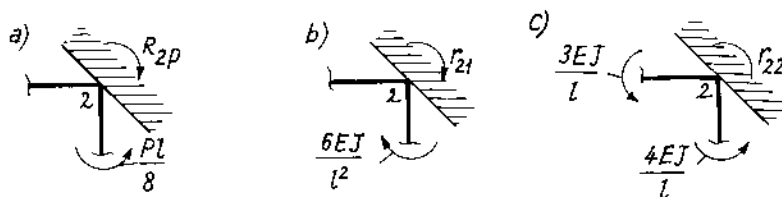


Hình 5.5

$$r_{21} + \frac{6EJ}{l^2} = 0 \Rightarrow r_{21} = -\frac{6EJ}{l^2}$$

$$r_{22} - \frac{4EJ}{l} - \frac{3EJ}{l} = 0 \Rightarrow r_{22} = \frac{7EJ}{l}$$

Chú ý dấu của các  $r_{kj}$  và  $R_{kp}$  trong hệ phương trình chính tắc là dương,



Hình 5.6

nếu chiều tác dụng của các phản lực trùng với chiều của các chuyển vị nút cần tìm.

Với các hệ số vừa xác định, hệ phương trình (5.2) có dạng cụ thể như sau :

$$\begin{aligned} \frac{15EJ}{l^3} Z_1 - \frac{6EJ}{l^2} Z_2 - \frac{13}{16} P &= 0 \\ -\frac{6EJ}{l^2} Z_1 + \frac{7EJ}{l} Z_2 + \frac{Pl}{8} &= 0 \end{aligned}$$

Giải hệ phương trình ta được các chuyển vị nút  $Z_1$  và  $Z_2$ .

$$Z_1 = \frac{79}{1104} \frac{Pl^3}{EJ} ; \quad Z_2 = \frac{1}{23} \frac{Pl^2}{EJ}$$

Biểu đồ mômen trong hệ siêu tĩnh đã cho  $M_p$  hình 5.4d được xây dựng trên cơ sở nguyên lý cộng tác dụng :

$$M_p = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p^0 \quad (5.6)$$

Một cách tổng quát ta có thể viết lại một lần nữa :

$$S_p = \bar{S}_1 Z_1 + \bar{S}_2 Z_2 + \bar{S}_3 Z_3 + \dots \bar{S}_n Z_n + S_p^0 \quad (5.6a)$$

Trong (5.6a) :

$S_p$  là biểu đồ nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ siêu tĩnh cần tính.  $S_p^0$  là biểu đồ nội lực do tải trọng ngoài gây ra trong hệ cơ bản của phương pháp này.  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$  lần lượt là biểu đồ nội lực do các chuyển vị cưỡng bức đơn vị  $Z_1 = 1$  tại từng liên kết áp đặt thứ  $j$  gây ra trong hệ cơ bản.

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  là các chuyển vị cần tìm thỏa mãn phương trình chính tắc (5.4).

Để kiểm tra tính đúng đắn của biểu đồ nội lực  $S_p$  đã vẽ, ta có thể nhân biểu đồ  $S_p$  với một biểu đồ đơn vị nào đó trên hệ cơ bản được tính bằng phương pháp lực. Ví dụ, biểu đồ  $M_p$  trên hình 5.4d và biểu đồ đơn vị trên hệ cơ bản theo phương pháp lực (hình 5.4e).

$$M_p \times \bar{M}_1^* = 0$$

Ngoài ra, để kết luận chính xác các biểu đồ nội lực trong hệ siêu tĩnh xuất phát có đúng không, ta có thể :

a) Khảo sát điều kiện cân bằng của các nút. Nếu kết quả vẽ là đúng thì các phương trình cân bằng của nút được tách ra phải thỏa mãn.

b) Nếu cắt hệ làm 2 phần bằng một mặt cắt vào đó và sau khi đặt các vectơ nội lực vào mặt cắt vừa thực hiện thì mỗi phần hệ đã được cắt ra phải thỏa mãn mọi điều kiện cân bằng tĩnh học.

## 2. Phương pháp tổng quát để xác định K và R<sub>p</sub>

Để thấy rõ cách xác định các phần tử trong các ma trận K và R<sub>p</sub> bằng phương pháp tổng quát, ta hãy thực hành đối với khung cho trên hình 5.7a với hệ tương đương (hình 5.7b).

Gọi  $\bar{M}_k$  là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị góc đơn vị cường độ  $\bar{Z}_k = 1$  gây ra (hình 5.7c), còn  $\bar{M}_i$  là biểu đồ mômen uốn do  $\bar{Z}_i = 1$  gây ra (hình 5.7d). Công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái k trên các chuyển vị tương ứng ở trạng thái i, theo định lý công khả dĩ bằng :

$$T_{ik} = T_{ki} = r_{ik} \cdot 1 = r_{ki} \cdot 1 ,$$

trong đó  $r_{ik}$  là phản lực ở trạng thái k theo phương của chuyển vị  $\bar{Z}_i = 1$  do  $\bar{Z}_k = 1$  gây ra.

Gọi  $A_{ik}$  là công của nội lực ở trạng thái k trên những biến dạng tương ứng ở trạng thái i ta có :

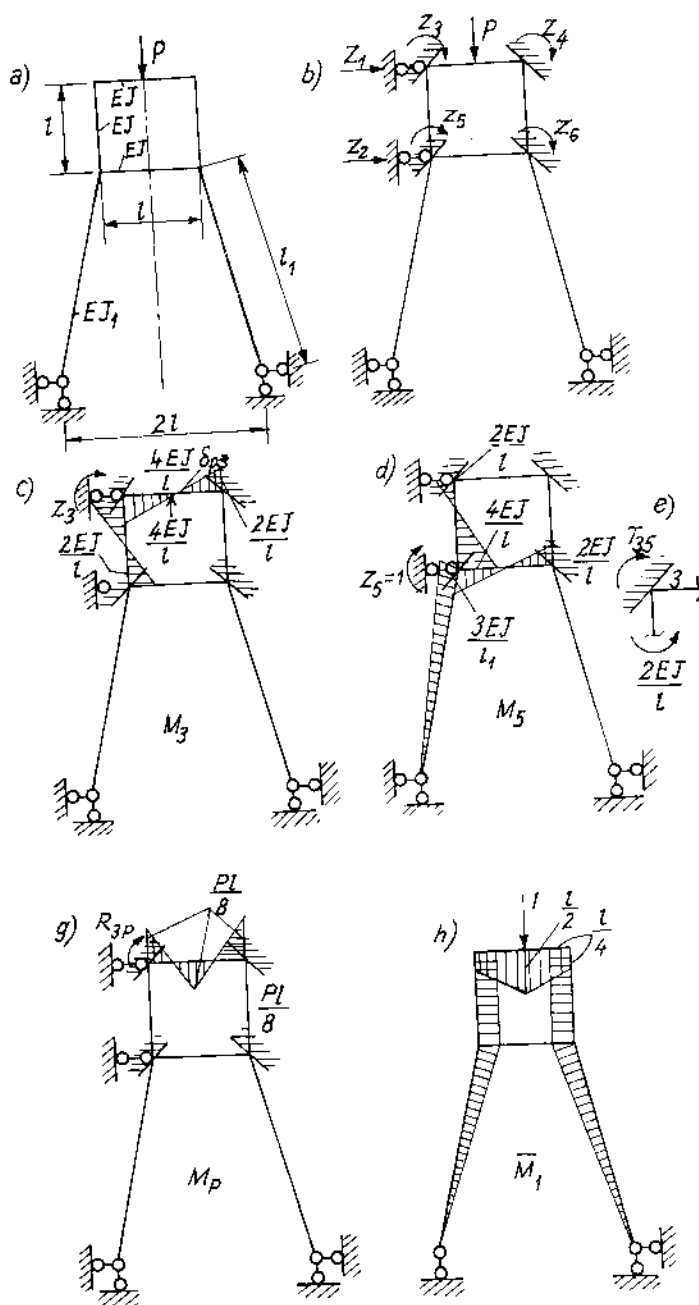
$$A_{ik} = \sum_n \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} dZ ,$$

trong đó,  $\bar{M}_i$  và  $\bar{M}_k$  lần lượt là mômen uốn ở trong khung do các chuyển vị  $\bar{Z}_i = 1$  và  $\bar{Z}_k = 1$  gây ra. Tổng được thực hiện trên tất cả n đoạn thanh.

Bởi vì theo nguyên lý công khả dĩ  $T_{ki} = A_{ik}$ , cho nên :

$$r_{ik} = \sum_n \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} dS \quad (5.7)$$

Tương tự như vậy ta xác định được phản lực  $r_{ki}$



Hình 5.7



$$r_{ki} = \sum_n \int_s \frac{\overline{M}_k \overline{M}_i}{EJ} dS \quad (5.8)$$

Các tích phân trong vế phải của (5.7) và (5.8) được tính dễ dàng bằng thuật toán Verechtaguine đã biết trong sức bền vật liệu. So sánh các quan hệ (5.7) (5.8) ta thấy

$$r_{ki} = r_{ik}$$

Đây là thuộc tính tương hỗ của các phân lực đơn vị và được gọi là định lý tương hỗ của các phân lực đơn vị của Oto Morh (xem chương 2).

Khi áp dụng những kết quả nhận được trong trường hợp tổng quát (5.7) ta hãy tính  $r_{35}$  trong khung cho trên hình 5.7.

Biểu đồ  $\overline{M}_3$  và  $\overline{M}_5$  biểu diễn trên hình 5.7c, d.

$$r_{35} = \sum_n \int_s \frac{\overline{M}_3 \overline{M}_5}{EJ} dS = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{4EJ}{l} \cdot \frac{l}{2} \left( \frac{1}{3} \frac{4EJ}{l} - \frac{2}{3} \frac{2EJ}{l} \right) + \frac{2EJ}{l} \cdot \frac{l}{2} \left( \frac{1}{3} \frac{2EJ}{l} - \frac{2}{3} \frac{4EJ}{l} \right) \right] = \frac{2EJ}{l}$$

Khi khảo sát sự cân bằng của nút 3 (hình 5.7c) bạn đọc sẽ lại nhận được kết quả trên. Để nhận được phân lực  $r_{kk}$  ta chỉ việc nhân biểu đồ  $\overline{M}_k$  với chính nó. Chúng ta sẽ xác định các phân lực  $R_{jp}$  ( $j = 1, 2, 3...$ ) do ngoại lực gây ra như sau :

Công của ngoại lực ở trạng thái thực trong hệ cơ bản (hình 5.7g) trên các chuyển vị ở trạng thái k bằng :

$$T_{p3} = P \cdot \delta_{p3} + R_{p3} \cdot 1$$

Công của ngoại lực ở trạng thái k trên những chuyển vị ở trạng thái "P" bằng không, vì ở đây không có ngoại lực sinh công cho nên ta có :

$$\begin{aligned} R_{3p} &= -P\delta_{p3} \text{ hoặc là một cách tổng quát} \\ R_{kp} &= -P\delta_{pk} \end{aligned} \quad (5.9)$$

trong đó  $\delta_{pk}$  là chuyển vị trong hệ cơ bản tương ứng ở trạng thái "k" theo phương của ngoại lực P tác dụng ở trạng thái "P". Khi  $P = 1$  thì quan hệ (5.9) có dạng :

$$r_{kp} = -\delta_{pk}$$

Đây là thuộc tính quan hệ giữa các phản lực đơn vị và chuyển vị đơn vị và được gọi là định lý tương hỗ của phản lực đơn vị và chuyển vị đơn vị của giáo sư Grôzdev.

Theo (5.9) và theo thuật toán Verechtchaguine, ta có :

$$R_{kp} = -P\delta_{pk} = -P \sum_n \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n}{EJ} dS \quad (5.10)$$

hoặc là khi đặt :  $P \bar{M}_1 = M_p^0$  :

$$R_{kp} = -\sum_n \int_s \frac{\bar{M}_n M_p^0}{EJ} dS \quad (5.11)$$

Trong (5.10), (5.11),  $\bar{M}_1$  và  $M_p^0$  lần lượt là biểu đồ mômen uốn do lực  $\bar{p} = 1$  (hình 5.7h) và  $P \neq 1$  đặt ở điểm cần tính chuyển vị trong hệ cơ bản tĩnh định, suy ra từ hệ đã cho sau khi đã loại đi tất cả các liên kết thừa.

Thực hiện phép nhân biểu đồ Verechtchaguine, ví dụ đối với  $R_{3p}$  ta có :

$$R_{3p} = \frac{-1}{EJ} \left[ \frac{Pl}{4} l \frac{EJ}{l} + \frac{1}{2} \frac{Pl}{4} l \frac{EJ}{l} \right] - \frac{1}{EJ} \left[ \frac{Pl}{4} l \frac{1}{2} \frac{2EJ}{l} - \frac{4EJ}{l} \right] = -\frac{Pl}{8}$$

Khi khảo sát điều kiện cân bằng nút 3 (hình 5.7g) bằng phương pháp tĩnh bản đọc sẽ nhận lại được kết quả này.

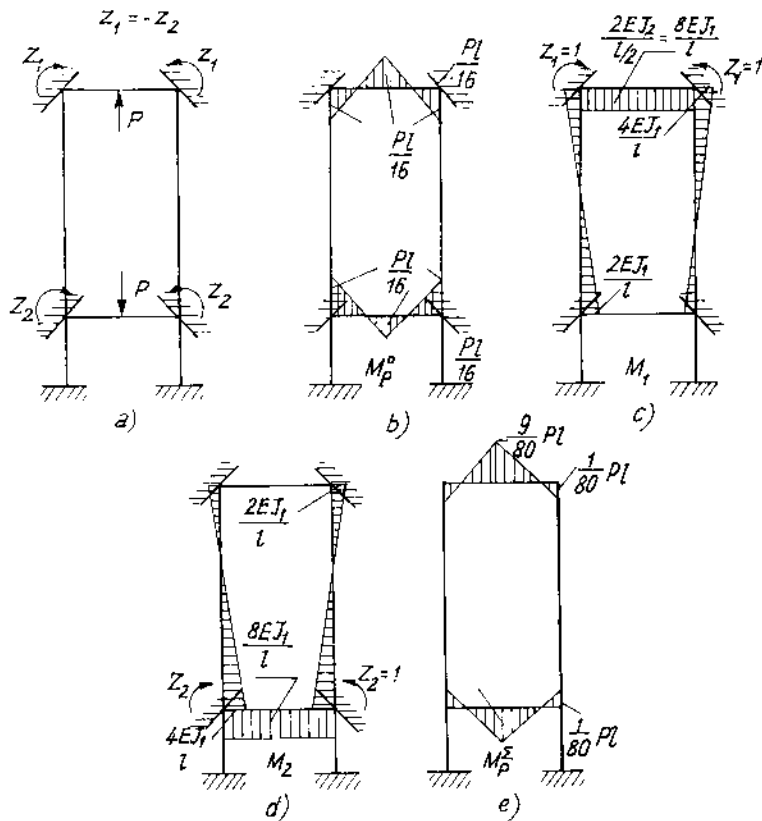
#### §4. SỬ DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG KHI TÍNH HỆ BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Ta sẽ minh họa cách sử dụng tính đối xứng qua một ví dụ cụ thể dưới đây đối với việc tính khung của một máy cán (hình 5.8a). Sơ đồ tĩnh và hệ tương đương được cho trên hình 5.8b, c. Vì hệ đối xứng chịu tải trọng cũng đối xứng cho nên các góc xoay của các nút đối xứng bằng nhau về độ lớn nhưng ngược chiều (hình 5.8c), còn các chuyển vị thẳng bằng không. Bởi vậy, đối với hệ này chỉ cần thiết lập hệ hai phương trình với hai ẩn là  $Z_1$  và  $Z_2$ .

$$\left. \begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1p} &= 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Các biểu đồ  $M_p^0$ ,  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  được vẽ trên hệ cơ bản hình 5.8a,c,g. Chúng ta sẽ xác định các hệ số của (a) dưới dạng trị số kép của các phản lực khi sử dụng các biểu đồ đã chỉ ra.

$$r_{11} = \frac{24EJ_1}{l} ; r_{21} = \frac{4EJ_1}{l} ; r_{22} = \frac{24EJ_1}{l} ; R_{1p} = \frac{Pl}{8} ; R_{2p} = \frac{-Pl}{8}$$



Hình 5.8

Thay các hệ số này vào hệ phương trình chính tắc (a) ta có :

$$\begin{aligned}\frac{24EJ_1}{l} Z_1 + \frac{4EJ_1}{l} Z_2 + \frac{Pl}{8} &= 0 \\ \frac{4EJ_1}{l} Z_1 + \frac{24EJ_1}{l} Z_2 - \frac{Pl}{8} &= 0\end{aligned}$$

Các chuyển vị góc cần tìm là như sau :

$$Z_1 = -\frac{Pl^2}{160EJ_1} ; \quad Z_2 = +\frac{Pl^2}{160EJ_1}$$

Biểu đồ mômen trong khung máy này (hình 5.8e) được tìm theo nguyên lý cộng tác dụng :

$$M_p = M_p^0 + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2$$

## §5. TÍNH HỆ CHỊU SỰ THAY ĐỔI CỦA NHIỆT ĐỘ

Giả sử rằng nhiệt độ thay đổi theo quy luật bậc nhất dọc theo chiều cao mặt cắt ngang của mỗi cấu kiện.

Việc tính toán hệ chịu sự thay đổi của nhiệt độ được tiến hành theo trình tự dưới đây qua một ví dụ cụ thể (hình 5.10) :

1. Từ hệ đã cho người ta xây dựng hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị.

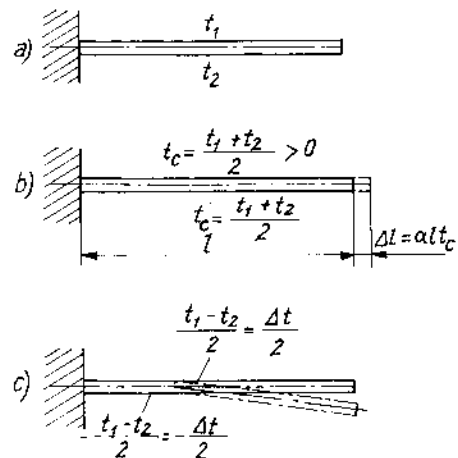
2. Đối với mỗi một cấu kiện chịu nhiệt độ biến thiên cho trước dẫn tới hai trường hợp sau đây (hình 5.9a, b, c).

Trường hợp đối xứng (hình 5.9b) :

$$\text{Khi } t_c = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

Trường hợp phản xứng (hình 5.9c) :

$$\Delta t = t_1 - t_2$$



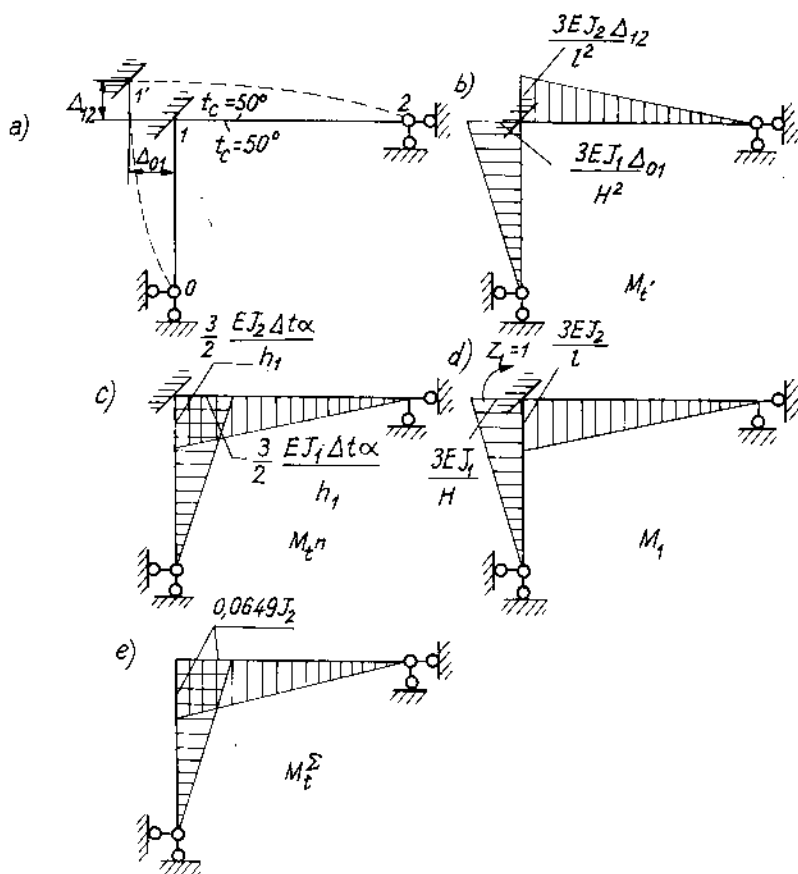
Hình 5.9

3. Tính chuyển vị thẳng tương đối giữa hai đầu của các cấu kiện khi chịu tác dụng đối xứng của nhiệt độ biến thiên (hình 5.10a).

4. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản (hình 5.10b) do các chuyển vị này gây ra và xác định phản lực ở các liên kết ngàm và thanh gối đỡ xoay  $R'_{ii}$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

5. Vẽ biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản do tác dụng phản xứng của nhiệt độ  $\Delta t$  gây ra và tìm phản lực tương ứng  $R''_{ii}$  (hình 5.10c).

6. Vẽ biểu đồ mômen uốn do các chuyển vị đơn vị  $\bar{Z}_i$  (hình 5.10d) gây ra và xác định các hệ số của các phương trình chính tắc.



Hình 5.10

7. Thiết lập phương trình chính tắc dưới dạng :

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R'_{1t} + R''_{1t} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R'_{2t} + R''_{2t} &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R'_{nt} + R''_{nt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

8. Giải hệ phương trình chính tắc để có các chuyển vị nút của hệ và biểu đồ mômen tổng cộng có được bằng phương pháp thông thường (hình 5.10e).

Cụ thể là :

$$M_z = \bar{M}_1Z_1 + \bar{M}_2Z_2 + \dots + \bar{M}_nZ_n + M'_t + M''_t \quad (5.13)$$

Ví dụ, bằng phương pháp chuyển vị vừa giới thiệu hãy vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung cần trục đã đề cập đến trong ví dụ của phần tính hệ bằng phương pháp lực (hình 3.5a).

Trên hình 5.10 là sơ đồ biến dạng của khung chịu sự biến thiên nhiệt độ đối xứng và các chuyển vị tương hỗ ở các đầu cuối của các cấu kiện  $\Delta_{01}$  và  $\Delta_{12}$  do sự giãn dài của chúng (hình 5.10a).

$$\Delta_{01} = \alpha . l . t_c = 0,12 . 10^{-6} . 800 . 50 = 0,48 . 10^{-2} \text{ cm}$$

$$\Delta_{12} = \alpha . H . t_c = 0,12 . 10^{-6} . 600 . 50 = 0,36 . 10^{-2} \text{ cm}$$

Trên cơ sở của bảng 2 và chuyển vị vừa tính ta vẽ biểu đồ các mômen uốn như hình 5.10b, c.

Phản lực ở ngàm do tác dụng nhiệt  $t_c$  là :

$$\begin{aligned} R'_{1t} &= \frac{3EJ}{H^2} \Delta_{01} - \frac{3EJ}{l^2} \Delta_{12} = 3 . 2 . 10^6 J_1 \\ &\quad \left( \frac{0,48 . 10^{-2}}{600^2} - \frac{2 . 0,36 . 10^{-2}}{800^2} \right) = 0,01182 J_1 \end{aligned}$$

Phản lực ở ngàm do tác dụng nhiệt  $\Delta t = t_1 - t_2 = 20^\circ$  là

$$\begin{aligned} R''_{1t} &= \frac{3}{2} \frac{EJ_2 \Delta t}{h_2} \alpha - \frac{3}{2} \frac{EJ_1 \Delta t}{h_1} \alpha = \frac{3}{2} . 2 . 10^6 . 0,12 . 10^{-6} . 20 \\ &\quad \left( \frac{2J_1}{1,5h_1} - \frac{J_1}{h_1} \right) = 2,4 \frac{J_1}{h_1} = 0,06 J_1 \end{aligned}$$

Từ biểu đồ  $\overline{M}_1$  (hình 5.10d) ta có như thường lệ :

$$r_{11} = \frac{3EJ_2}{l} + \frac{3EJ_1}{H} = 3 \cdot 2 \cdot 10^6 \left( \frac{2J_1}{800} + \frac{J_1}{600} \right) = 2,5 \cdot 10^4 J_1$$

Phương trình chính tắc trong trường hợp này là :

$$r_{11}Z_1 + R'_{11} + R''_{11} = 0$$

Hay là :

$$2,5 \cdot 10^4 \cdot J_1 Z_1 + 0,01182 J_1 + 0,06 J_1 = 0$$

Từ đây ta có :

$$Z_1 = - \frac{0,07182}{2,5 \cdot 10^4} = - 0,0287 \cdot 10^4 \text{ rad}$$

Biểu đồ mômen uốn tổng cộng (hình 5.10e) trong hệ siêu tĩnh chịu nhiệt độ biến thiên này được xác định từ điều kiện (5.13).

$$M_t = M'_t + M''_t + \overline{M}_1 Z_1 = \frac{3EJ_2 \Delta_{12}}{l^2} -$$

$$\frac{3}{2} \frac{EJ_2 \Delta t \alpha}{h_2} + 0,0287 \cdot 10^{-4} \frac{3EJ_2}{l} = - 0,06494 J_2$$

(căng trong)

Lực xô ngang  $R_o$  phát sinh trong khung do sự biến thiên nhiệt độ đã cho là

$$R_o = \frac{M_t}{H} = - \frac{0,06494 J_2}{600} = -1,08 \cdot 10^{-6} \text{ kN (hướng sang trái)}.$$

## §6. CÁCH TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU TÁC DỤNG CỦA CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC TẠI CÁC LIÊN KẾT

Khi tính hệ chịu tác dụng của chuyển vị cường bức ở các gối tựa, do nguyên nhân bên ngoài hoặc do chế tạo không chính xác gây ra v.v, phương trình chính tắc có dạng tương tự như trường hợp hệ chịu tải trọng và nhiệt độ như đã mô tả. Cụ thể là :

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1\Delta}^0 &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2\Delta}^0 &= 0 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{n\Delta}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

trong đó  $R_{k\Delta}^0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) là phản lực tại liên kết thứ  $k$  thêm vào do các chuyển vị cưỡng bức của các liên kết (gối tựa) gây ra trong hệ cơ bản. Nội lực (mômen uốn) được xác định theo nguyên lý cộng tác dụng như sau :

$$M_{\Delta} = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_{\Delta}^0 \quad (5.15)$$

trong đó :

$M_{\Delta}^0$  là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị cưỡng bức của gối tựa gây ra trong hệ cơ bản ;

$\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_n$  là các biểu đồ mômen do các chuyển vị đơn vị áp đặt  $\overline{Z}_1 = 1$  ;  $\overline{Z}_2 = 1 \dots$  riêng rẽ gây ra trong hệ cơ bản ;

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  là các chuyển vị nút được tìm từ việc giải hệ (5.14).

Để xác định  $R_{k\Delta}^0$  trong hệ (5.14) cần nắm vững ý nghĩa vật lý của chúng.  $R_{k\Delta}^0$  là phản lực ở liên kết bổ sung thứ  $k$  do tác dụng của chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trong hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị. Các chuyển vị này gồm hai thành phần : Góc xoay  $\varphi$  và chuyển vị thẳng  $\Delta$ , vì thế có thể viết  $R_{k\Delta}^0$  như sau :

$$R_{k\Delta}^0 = R_{k\varphi}^* + R_{k\Delta}^* \quad (5.16)$$

trong đó  $R_{k\varphi}^*$  là phản lực ở liên kết  $k$  chỉ do góc xoay cưỡng bức  $\varphi$  gây ra trong hệ cơ bản ;

$R_{k\Delta}^*$  là phản lực ở liên kết  $k$  chỉ do chuyển vị thẳng cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản.

Các phản lực  $R_{k\varphi}^*$  và  $R_{k\Delta}^*$  được xác định từ việc khảo sát các điều kiện cân bằng như đã làm trong mục trên, cụ thể là vẽ biểu đồ mômen  $M_{\varphi}^*$  và  $M_{\Delta}^*$  trong hệ cơ bản tương ứng bằng cách tra bảng



do riêng các chuyển vị cường bức  $\varphi$  và  $\Delta$  ở các gối tựa trong hệ cơ bản gây ra, sau đó xét điều kiện cân bằng để có  $R_{k\varphi}^*$  và  $R_{k\Delta}^*$ .

## §7. VÍ DỤ MINH HỌA

Chúng ta minh họa những chỉ dẫn ở trên qua ví dụ sau đây : Đó là một khung (hình 5.11a) khi ngàm B chịu chuyển vị thẳng cường bức  $\Delta$  theo phương ngang.

Khung này có một ẩn số  $n = n_1 = 1$ . Hệ tương đương như hình 5.11b. Phương trình chính tắc có dạng :

$$r_{11} Z_1 + R_{1\Delta}^0 = 0$$

Vì hệ chỉ chịu chuyển vị cường bức thẳng tại B nên không tồn tại  $M_\varphi^*$  mà chỉ có  $M_\Delta^*$ . Căn cứ vào các chuyển vị tương đối giữa các đầu thanh của hệ cơ bản (hình 5.11c) chịu  $\Delta$ , ta vẽ biểu đồ  $M_\Delta^*$  bằng cách tra bảng như đã làm ở các mục trên (hình 5.11e).

Biểu đồ  $\overline{M}_1$  do  $\overline{Z}_1$  gây ra trong hệ cơ bản được cho trên hình 5.11f. Các hệ số trong (a) được tìm từ các điều kiện cân bằng cụ thể là : Từ biểu đồ  $\overline{M}_1$  ta có :

$$r_{11} = \frac{8EJ}{l_1} ;$$

Số hạng tự do trong trường hợp này có dạng :

$$R_{1\Delta}^0 = R_{1\Delta}^* , \left( R_{1\varphi}^* = 0 \right)$$

Xét cân bằng nút 1 từ biểu đồ  $M_\Delta^*$  (hình 5.11e) ta có :

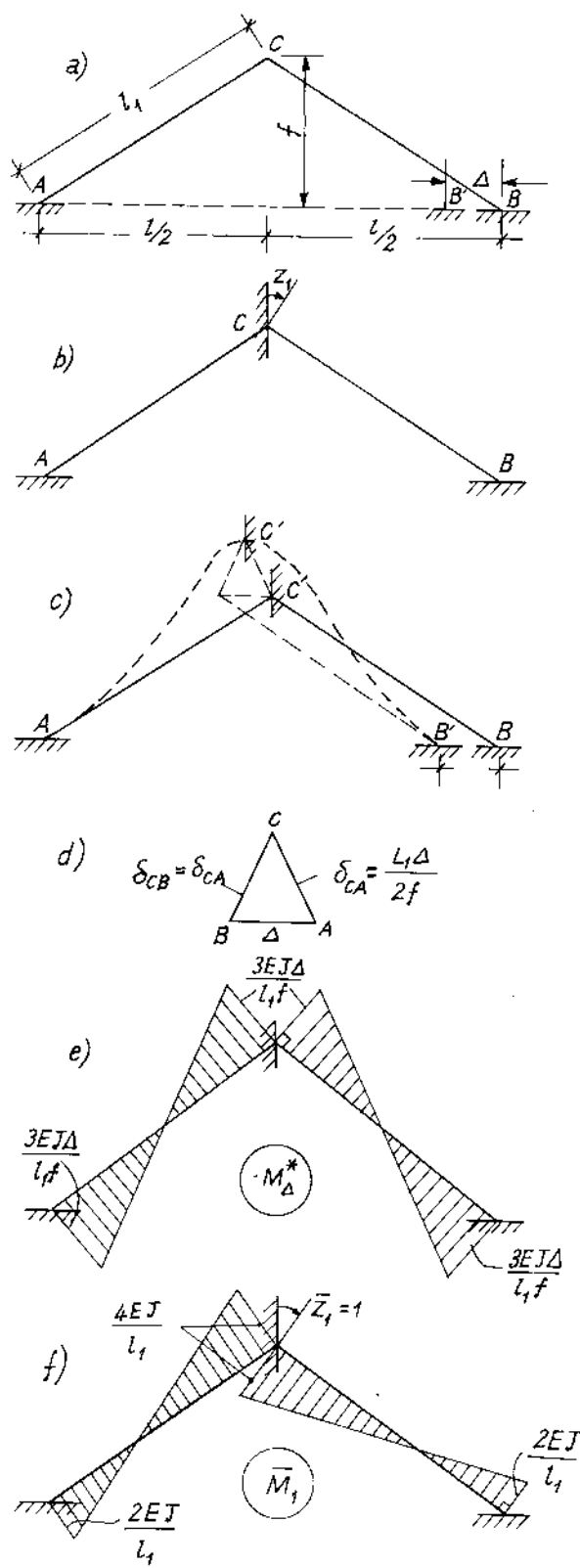
$$R_{1\Delta}^0 = R_{1\Delta}^* = 0$$

Phương trình (a) có dạng cụ thể :

$$\frac{8EJ}{l_1} Z_1 + 0 = 0$$

Do đó,  $Z_1 = 0$ . Biểu đồ mômen tổng cộng (hình 5.11e) :

$$M_\Delta = M_\Delta^0 + \overline{M}_1 Z_1 = M_\Delta^* + \overline{M}_1 Z_1 = M_\Delta^*$$



## Chương 6

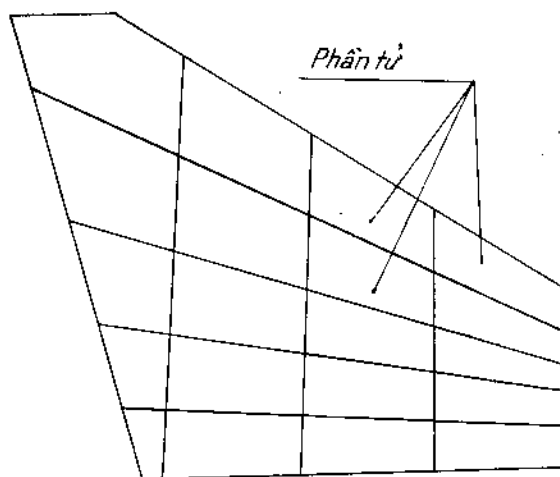
# PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Trong những năm gần đây, *phương pháp Phần tử hữu hạn* đã được xác nhận như một công cụ rất mạnh trong việc tính toán các kết cấu. Ngày nay trên thế giới nó đã được giảng dạy trong phần lớn các trường đại học và được nhiều kỹ sư thiết kế quan tâm và sử dụng. Do đó, sẽ rất là thiếu sót nếu phương pháp phần tử hữu hạn không được giảng dạy cho sinh viên nước ta - những người sẽ làm việc trong các lĩnh vực khác nhau của cơ học vật rắn biến dạng. Chương này chỉ nhằm mục đích trang bị cho người học những ý tưởng rất cơ bản của phương pháp.

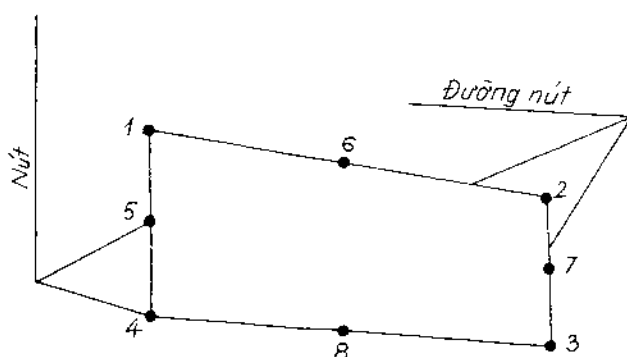
### §1. NỘI DUNG TỔNG QUÁT CỦA PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Để có thể xác định ứng suất hoặc chuyển vị trong kết cấu chịu tác dụng ngoài cho trước, người ta cần phải chia kết cấu đó thành một loạt các phần tử có kích thước hữu hạn (hình 6.1).

Tập hợp các phần tử này được nối với nhau bằng một số hữu hạn điểm được gọi là các điểm nút. Các nút này có thể nằm ở góc hoặc trên đường biên giữa các phần tử (hình 6.2).

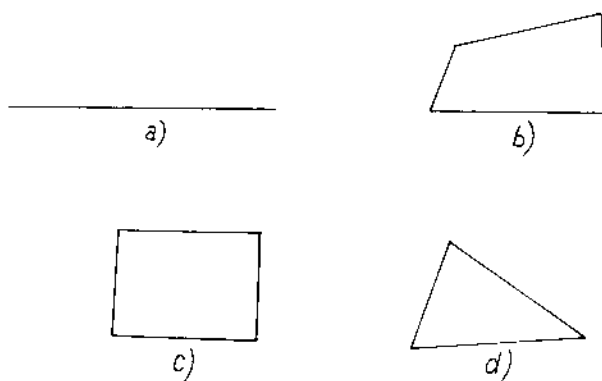


Hình 6.1

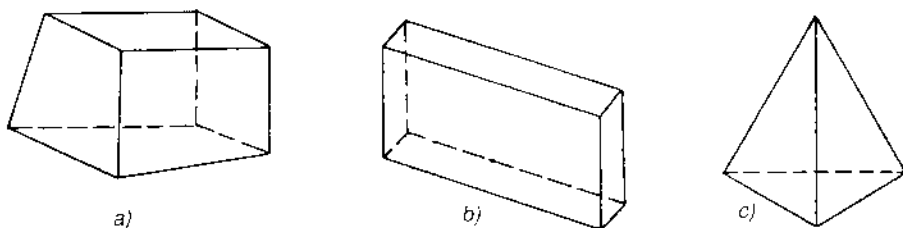


**Hình 6.2**

Hình dạng của các phần tử phụ thuộc vào hình dạng hình học của kết cấu khảo sát. Những dạng cơ bản của các phần tử tương ứng với các kết cấu một, hai hoặc ba chiều được cho trên các hình 6.3a,b,c,d và 6.4a,b,c.

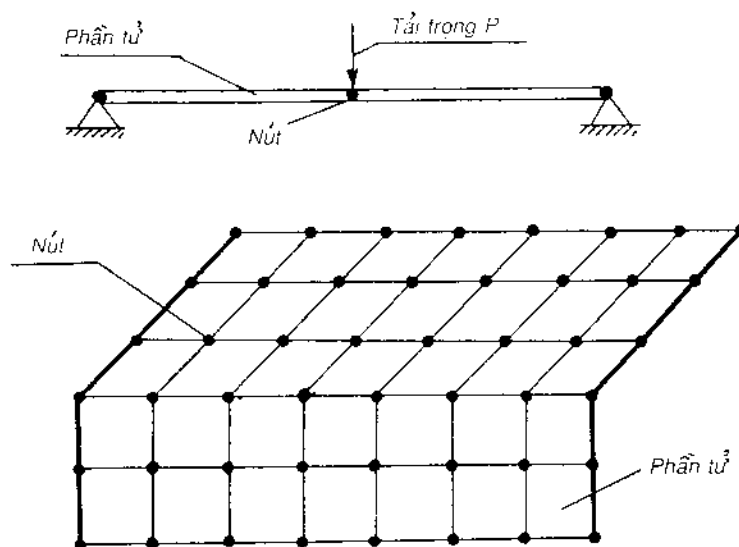


**Hình 6.3**



**Hình 6.4**

Ví dụ việc rời rạc hóa các kết cấu sau đây thành các phần tử (hình 6.5).



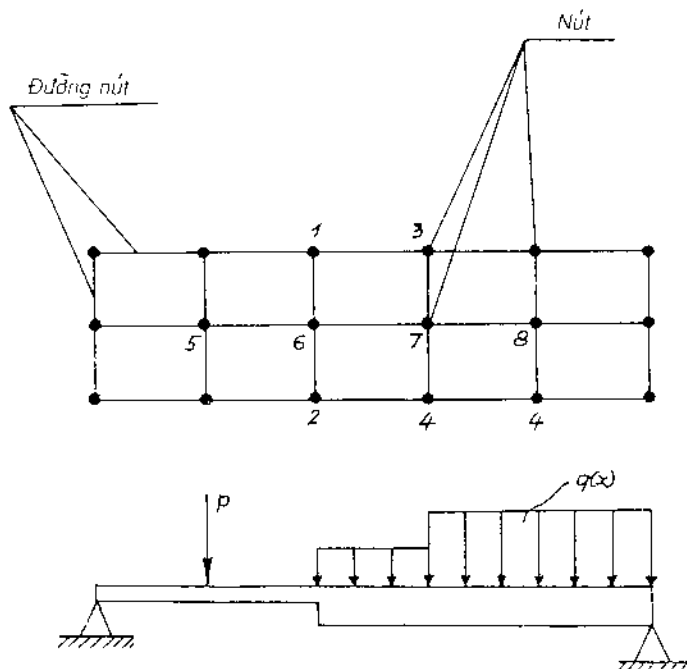
Hình 6.5

Vị trí của các đường nút (đường biên giữa các phần tử) của kết cấu phụ thuộc vào hai yếu tố cơ bản sau đây :

1. Đường nút của các phần tử phải trùng với vị trí gián đoạn của kết cấu.
2. Các điểm nút phải trùng với các điểm đặt của tải trọng tập trung. Biên (điểm hoặc đường) của phần tử phải trùng với vị trí (điểm hoặc đường) mà tại đó tải trọng phân bố có bước nhảy (gián đoạn về hàm số).

Những điều nói trên được minh họa trên hình 6.6.

Một đặc điểm của phương pháp phần tử hữu hạn là ở chỗ không nhất thiết phải dùng chỉ một loại phần tử trong khi cần nghiên cứu một kết cấu phức tạp gồm nhiều kết cấu con (một hoặc hai hoặc ba). Một kết cấu con có thể được rời rạc hóa thành những dạng phần tử thích hợp. Ví dụ : kết cấu trên (hình 6.7) gồm bốn kết cấu con 1, 2, 3, 4. Các cấu kiện 1 và 2 là những tấm phẳng. Chúng được rời rạc hóa bằng các phần tử hai chiều. Các cấu kiện 3 và 4 là những thanh. Ta sẽ chia chúng thành những phần tử một chiều.



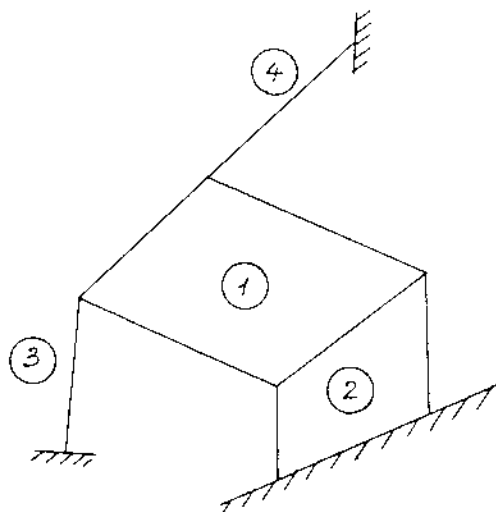
Hình 6.6

Khi một kết cấu đã được mô hình hóa dưới dạng một số hữu hạn các phần tử thì mọi sự cố gắng của chúng ta được tập trung vào chỉ một hoặc một vài phần tử mẫu (nếu có nhiều loại phần tử). Mục đích của chúng ta đối với mỗi loại phần tử là xác lập một quan hệ toán học giữa các lực  $\{P\}$  và chuyển vị  $\{\delta\}$  ở các nút thông qua một đại lượng trung gian gọi là ma trận độ cứng  $[k]$  :

Cụ thể là :

$$\{P\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (6.1)$$

Bước thứ nhất của việc nghiên cứu là chọn trước một hàm chuyển vị, sao cho trạng thái chuyển vị của tất cả các



Hình 6.7

điểm trong phần tử được xác định một cách duy nhất. Dạng thuận lợi nhất của hàm chuyển vị là một đa thức. Đa thức chuyển vị này phải có các tính chất sau :

- a. Đa thức phải liên tục trên toàn miền của các phần tử.
- b. Đa thức phải đầy đủ cho đến bậc  $n$ .

Ở đây  $n$  là bậc của đạo hàm cao nhất có trong biểu thức dưới dấu tích phân của năng lượng biến dạng.

c. Các đạo hàm bậc  $(n - 1)$  của đa thức phải liên tục qua biên các phần tử. Điều này có nghĩa rằng, biến dạng giữa các phần tử không có sự gián đoạn. Điều kiện này chỉ có thể thực hiện được nếu chuyển vị dọc theo biên của phần tử chỉ phụ thuộc vào chuyển vị của các nút nằm chính trên biên này (hình 6.8a).

d. Số các số hạng độc lập trong đa thức phải bằng số thành phần chuyển vị cần tính. Sau khi đã chọn được hàm chuyển vị, trong trường hợp tổng quát ba chiều, ta có thể viết đa thức chuyển vị này dưới dạng ma trận như sau :

$$\{S(x, y, z)\} = [\Phi(x, y, z)] \cdot \{\alpha\} \quad (6.2)$$

ở đây ;  $\alpha$  - vectơ hệ số hằng ;  $[\Phi(x, y, z)]$  - ma trận biến đổi với các phần tử phụ thuộc các biến  $x, y, z$ .

*Bước thứ hai của việc nghiên cứu* là sử dụng phương trình (6.2) để thiết lập quan hệ giữa các thành phần chuyển vị ở mỗi nút theo các toạ độ nút của nút khảo sát.

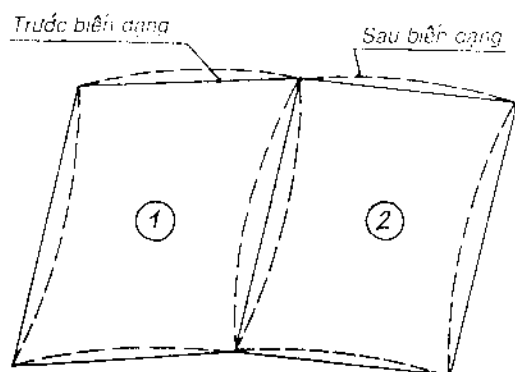
Giả sử khảo sát một phần tử có dạng một tứ diện (hình 6.8b) với các nút  $i, j, k$  và  $l$ .

Mỗi nút có ba chuyển vị  $u, v, w$  theo các phương tương ứng là  $x, y, z$ . Mỗi một thành phần chuyển vị được biểu diễn theo các toạ độ của nút khảo sát để có quan hệ :

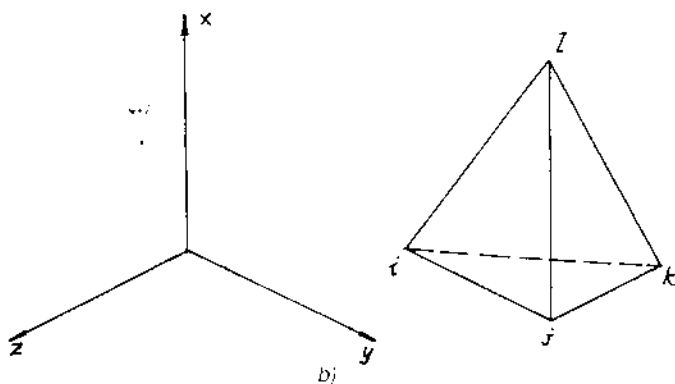
$$\{\delta\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (6.3)$$

trong đó  $[A]$  là ma trận vuông của các toạ độ nút.

Nhân trái cả hai vế phương trình này với  $[A^{-1}]$ , ta có :



a)



Hình 6.8

$$\{\alpha\} = [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.4)$$

Thay biểu thức này của  $\{\alpha\}$  vào (6.2) ta nhận được :

$$\{S(x, y, z)\} = [\Phi(x, y, z)] = [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.5)$$

Bước thứ ba của việc nghiên cứu là tìm quy luật biến dạng trong phần tử. Điều này không có gì khó khăn, bởi vì rằng các thành phần biến dạng là đạo hàm các thành phần chuyển vị. Do đó, nếu gọi  $[B(x, y, z)]$  là ma trận đạo hàm của ma trận  $[\Phi(x, y, z)]$ , ta phải có :

$$\{\epsilon(x, y, z)\} = [B(x, y, z)] \cdot \{\alpha\} \quad (6.6)$$

hoặc là :



$$\{\varepsilon(x, y, z)\} = [B(x, y, z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.7)$$

Các thành phần ứng suất trong phần tử liên hệ với các thành phần biến dạng theo định luật Húc :

$$\{\sigma(x, y, z)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(x, y, z)\} \quad (6.8)$$

ở đây,  $\{\sigma(x, y, z)\}$  là vectơ các thành phần ứng suất và  $\{D\}$  là ma trận các hệ số hằng phụ thuộc vào vật liệu khảo sát.

Chú ý đến (6.6), vectơ  $\{\sigma(x, y, z)\}$  có dạng :

$$\{\sigma(x, y, z)\} = [D] \cdot [B(x, y, z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.9)$$

Bước thứ tư của việc nghiên cứu là thiết lập ma trận độ cứng trong (6.1). Điều này có thể nhận được khi cân bằng công của ngoại lực  $A_e$  đặt vào các nút và công  $A_i$  của nội lực do chuyển vị khả dĩ  $\{d\delta\}$ .

Cụ thể là :

$$\begin{aligned} A_e &= \{d\delta\}^T \cdot \{P\} \\ \text{và :} \quad A_i &= - \int_V \{d\varepsilon(x, y, z)\}^T \cdot \{\sigma(x, y, z)\} \cdot dv \end{aligned}$$

Trên cơ sở của (6.7) và (6.8) ta viết lại công nội lực  $A_i$  như sau :

$$A_i = - \int_V \{d\delta\}^T \cdot [B(x, y, z)] \cdot [A^{-1}]^T \cdot \{D\} \cdot [B(x, y, z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \cdot dv$$

Nhưng :

$$A_e = -A_i$$

Do đó :

$$\{P\} = [A^{-1}]^T \int_V [B(x, y, z)]^T \cdot [D] \cdot [B(x, y, z)] \cdot dv [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.10)$$

Khi so sánh (6.10) và (6.1) ta thấy ngay ma trận độ cứng  $[k]$  có biểu thức :

$$[k] = [A^{-1}]^T \int_V [B(x, y, z)]^T \cdot [D] \cdot [B(x, y, z)] \cdot dv [A^{-1}] \dots \quad (6.11)$$

Khi ma trận độ cứng  $[k]$  đã được xác định đối với một phần tử mẫu

trong kết cấu thì các phương trình đối với tất cả các phần tử phải được ghép lại để có một phương trình dưới dạng :

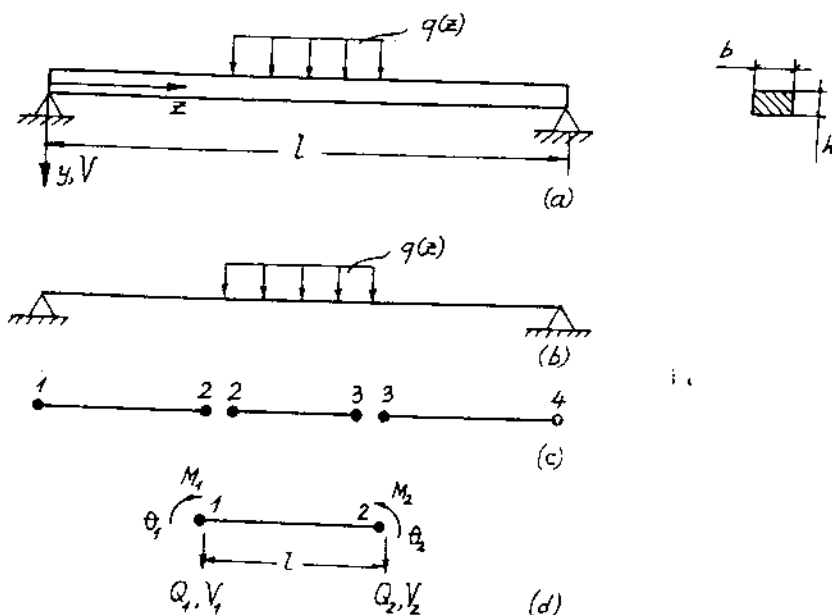
$$\{F\} = [k] \cdot \{\delta_h\} \quad (6.12)$$

Hệ thống này cho ta mối liên hệ giữa ngoại lực tác dụng lên các nút của kết cấu và chuyển vị ở các nút qua cầu nối là ma trận độ cứng  $[k]$ .

Trong phương trình (6.12),  $\{F\}$  là vectơ các ngoại lực đặt vào các điểm nút của kết cấu. Mỗi ngoại lực trong  $\{F\}$  là tổng của các lực đặt vào các nút kế nhau. Vectơ  $\{\delta_h\}$  biểu thị các chuyển vị ở các nút. Mỗi chuyển vị trong  $\{\delta_h\}$  có cùng giá trị như các chuyển vị của các nút được ghép lại. Các số hạng trong ma trận  $[k]$  là tổng các số hạng thích hợp trong ma trận độ cứng của các phần tử có chuyển vị chung.

## §2. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG BÀI TOÁN UỐN MỘT CHIỀU

Trong mục này, chúng ta sẽ triển khai cụ thể các bước tính toán của phương pháp phần tử hữu hạn vào bài toán uốn (kết cấu một chiều).



Hình 6.9

Giả sử, xét một dầm chịu uốn ngang phẳng dưới tác dụng của tải trọng ngoài  $q(x)$  (hình 6.9). Cũng như các chương trước, ta gọi  $E$  là môđun đàn hồi khi kéo (nén) của vật liệu,  $V(z)$  là chuyển vị thẳng đứng theo phương  $y$ ,  $J_x$  là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa  $x$ . Ta rời rạc dầm thành các phần tử một chiều. Một phần tử đại diện được cho trên hình 6.9d.

### 1. Lực và chuyển vị nút

Trong bài toán dầm chịu uốn này, mỗi một nút có hai bậc tự do, cụ thể là có một chuyển vị thẳng đứng  $V$  và một chuyển vị xoay  $\theta$  quanh trục  $x$ . Số bậc tự do tổng cộng (số chuyển vị) của một phần tử rõ ràng là một tích số giữa số lượng nút với số bậc tự do của mỗi nút. Trong trường hợp này tổng số bậc tự do của mỗi phần tử là bốn. Như vậy vectơ tải trọng nút và vectơ chuyển vị sẽ là :

$$\{ P \} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad \text{và} \quad \{ \delta \} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Theo (6.1) đối với phần tử này, ma trận độ cứng  $[k]$  được xác định từ phương trình :

$$\{ P \} = [k] \cdot \{ \delta \} \quad (6.13)$$

Ma trận  $[k]$  là ma trận vuông kích thước  $4 \times 4$ .

### 2. Hàm chuyển vị

Theo những điều kiện về đa thức chuyển vị đã nói ở trên, trong trường hợp này ta phải có :

$$V(z) = \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3$$

$$\theta(z) = \frac{dV}{dz} = \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot z + 3\alpha_4 \cdot z^2$$

Hai phương trình này dưới dạng ma trận có dạng :

$$\begin{Bmatrix} V(z) \\ \theta(z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 0 & 1 & 2z & 3z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

hoặc là :

$$\{S(z)\} = [\Phi(z)] \cdot \{\alpha\} \quad (6.14)$$

Điều kiện biên của phần tử trên hình 6.9d được viết :

$$\begin{aligned} \text{Nút 1 :} \quad & z = 0 \\ & V_1 = \alpha_1 \\ & \theta_1 = \alpha_2 \\ \text{Nút 2 :} \quad & z = l \\ & V_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot l + \alpha_3 \cdot l^2 + \alpha_4 \cdot l^3 \\ & \theta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 \cdot l + 3\alpha_3 \cdot l^2 \end{aligned}$$

Dưới dạng ma trận mới, ta có :

$$\{\delta\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (6.15)$$

ở đây :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 2 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}$$

Ma trận cột các hệ số  $\{\alpha\}$  có thể nhận được khi nhân trái hai vế của biểu thức (6.15) với  $A^{-1}$  :

$$\{\alpha\} = [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.16)$$

ở đây :

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Thay (6.16) vào (6.14) ta đi đến :

$$\{S(z)\} = [\Phi(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.17)$$

### 3. Quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng

Biến dạng  $\{\varepsilon(z)\}$  ở những điểm khác nhau của phần tử được xác định từ đạo hàm bậc nhất của  $\{S(z)\}$ , cụ thể là :

$$\begin{aligned}\{\varepsilon(z)\} &= \{\text{đạo hàm của } S(z)\} \\ \{\varepsilon(z)\} &= [B(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\}\end{aligned}\quad (6.18)$$

Khi nghiên cứu dầm chịu uốn, ta đã có :

$$\begin{aligned}M_x(z) &= -EJ_x \frac{d^2V}{dz^2} = -EJ \frac{d^2V}{dz^2} \\ \sigma(z) &= \frac{M_x(z) \cdot y}{J_x} = \frac{M(z) \cdot y}{J_x} \\ \varepsilon(z) &= -\frac{\sigma(z)}{E} = -y \cdot \frac{d^2V}{dz^2}\end{aligned}$$

Mặt khác :

$$-\frac{d^2V}{dz^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Từ đó ta thu được :

$$\{\varepsilon(z)\} = +y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Thay (6.16) vào đây ta có :

$$\{\varepsilon(z)\} = +y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-1}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{2}{l} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$= +y \cdot \left[ \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \right) \left( \frac{4}{l} - \frac{6z}{l^2} \right) \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \right) \left( \frac{2}{l} - \frac{6z}{l^2} \right) \right] \cdot \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Đối chiếu kết quả này với (6.18), ta thấy :

$$[B(z)] \cdot [A^{-1}] = +y \cdot \left[ \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \right) \left( \frac{4}{l} - \frac{6z}{l^2} \right) \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \right) \left( \frac{2}{l} - \frac{6z}{l^2} \right) \right]$$

#### 4. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

Trong miền đàn hồi tuyến tính, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng được mô tả bởi định luật Húc :

$$\{\sigma(z)\} = [D] \cdot \{\varepsilon(z)\}$$

ở đây,  $[D]$  là ma trận các đặc trưng đàn hồi của phần tử. Trong trường hợp khảo sát này  $D$  bằng mô đun đàn hồi  $E$ .

Chú ý đến vectơ  $\{\varepsilon(z)\}$  trong (6.18), biểu thức của  $\{\sigma(z)\}$  được viết :

$$\{\sigma(z)\} = +y \cdot [D] \cdot [B(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \quad (6.19)$$

#### 5. Thiết lập ma trận độ cứng $[k]$ của phần tử

Ta có thể thiết lập ma trận độ cứng  $[k]$  của phần tử từ điều kiện cân bằng công của nội lực và ngoại lực trên những chuyển vị và biến dạng khả dĩ tương ứng. Cụ thể là :

Công khả dĩ của ngoại lực bằng :

$$A_e = \sum_{i=1}^n \{d\delta_i\} \{P_i\} = \{d\delta\}^T \cdot \{P\}$$

Công khả dĩ của các nội lực trên một đơn vị thể tích cho bởi :

$$dA_i = \{d\varepsilon(z)\}^T \cdot \{\sigma(z)\}$$

Do đó :

$$A_i = \iiint_V \{d\varepsilon(z)\}^T \sigma(z) dv$$

Khi sử dụng các quan hệ (6.18) và (6.19) ta nhận được :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \iiint_V y^2 \left\{ [B(z)] [A^{-1}] \{d\delta\} \right\}^T [D] \cdot [B(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} dv \\
&= \iiint_V y^2 \left\{ [B(z)] [A^{-1}] \{d\delta\} \right\}^T [D] \cdot [B(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} dF dz
\end{aligned}$$

Thế nhưng :

$$\iint_F y^2 dF = J_x = J$$

Vì vậy :

$$A_1 = \int_0^1 J \cdot \left\{ [B(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{d\delta\} \right\}^T \cdot [D] \cdot [B(z)] \cdot [A^{-1}] \cdot \{\delta\} \cdot dz$$

Từ điều kiện cân bằng công nói trên ta có :

$$A_c = A_1$$

Và chú ý rằng :

$$\{P\} = [k] \cdot \{\delta\}$$

Ta có :

$$[k] = \int_0^1 J \left\{ [B(z)] \cdot [A^{-1}] \right\}^T \cdot [D] \cdot [B(z)] \cdot [A^{-1}] dz \quad (6.20)$$

Thay  $[B(z)] [A^{-1}]$  và  $\{[B(z)] [A^{-1}]\}^T$  vào (6.20), ta nhận được ma trận độ cứng của phần tử có mặt cắt thay đổi :

$$[k] = \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \\ \frac{4}{l} - \frac{6z}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \\ \frac{2}{l} - \frac{6z}{l^2} \end{bmatrix} EJ \cdot \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \right) \left( \frac{4}{l} - \frac{6z}{l^2} \right) \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \right) \left( \frac{2}{l} - \frac{6z}{l^2} \right) \cdot dz \quad (6.21)$$

Trong trường hợp  $EJ = \text{const}$  thì ma trận độ cứng  $[k]$  của phần tử loại này có dạng :

$$[k] = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

### 6. Nguyên tắc ghép ma trận độ cứng của các phần tử

Sau khi đã thiết lập được ma trận độ cứng của từng phần tử riêng biệt, ta cần phải ghép chúng lại để có được ma trận độ cứng  $[k]$  của toàn dầm.

Nguyên tắc của việc ghép này là : đối với mỗi nút chung nhận được bằng cách ghép hai nút thuộc hai phần tử kế nhau, lực là tổng các lực của hai nút, còn chuyển vị là chuyển vị của từng nút tạo thành nút chung.



Hình 6.10

Ta hãy xét hai phần tử 1 và 2 trên hình 6.10.

Hai phần tử này có nút 2 là nút chung.

Gọi  $[k^1]$  và  $[k^2]$  là ma trận độ cứng của phần tử 1 và 2, ta viết :

đối với phần tử 1 :

$$[k^1] = \frac{EJ}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix}$$

đối với phần tử 2 :

$$[k^2] = \frac{EJ}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix}$$



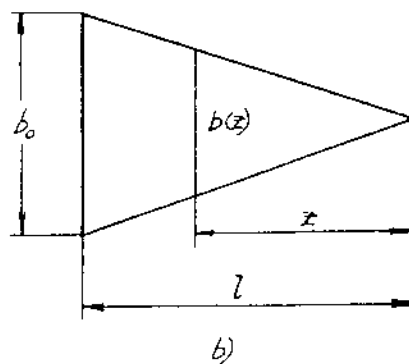
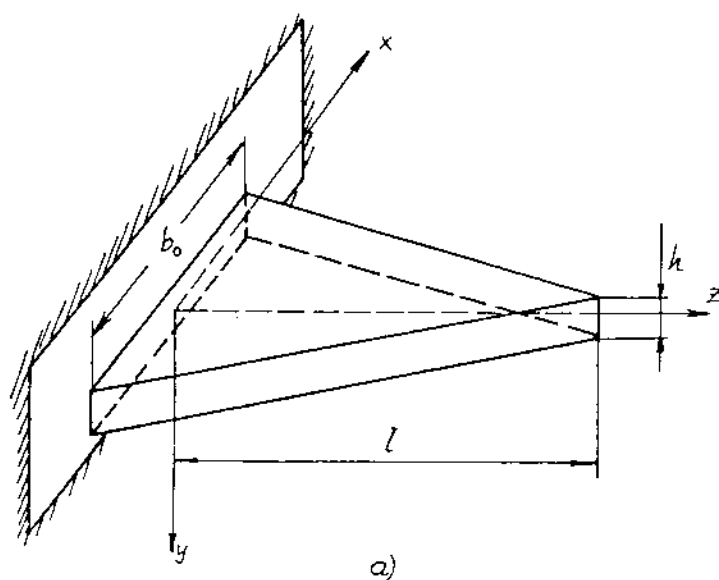
Khi áp dụng phương trình (6.1) hoặc (6.13) vào từng phần tử, ta được :

phần tử 1 :

$$Q_1^1 = \frac{EJ}{l_1^3} (12v_1 + 6l_1\theta_1 - 12v_2 + 6l_1\theta_2)$$

$$M_1^1 = \frac{EJ}{l_1^3} (6l_1v_1 + 4l_1^2\theta_1 - 6l_1v_2 + 2l_1^2\theta_2)$$

$$Q_2^1 = \frac{EJ}{l_1^3} (-12v_1 - 6l_1\theta_1 + 12v_2 - 6l_1\theta_2)$$



Hình 6.11

$$M_2^1 = \frac{EJ}{l_1^3} (6l_1 v_1 + 2l_1^2 \theta_2 - 6l_1 v_2 + 4l_1^2 \theta_2)$$

phần tử 2 :

$$Q_2^2 = \frac{EJ}{l_2^3} (12v_2 + 6l_2 \theta_2 - 12v_3 + 6l_2 \theta_3)$$

$$M_2^2 = \frac{EJ}{l_2^3} (6l_2 v_2 + 4l_2^2 \theta_2 - 6l_2 v_3 + 2l_2^2 \theta_3)$$

$$Q_3^2 = \frac{EJ}{l_2^3} (-12v_2 - 6l_2 \theta_2 + 12v_3 - 6l_2 \theta_3)$$

$$M_3^2 = \frac{EJ}{l_2^3} (6l_2 v_2 + 2l_2^2 \theta_2 - 6l_2 v_3 + 4l_2^2 \theta_3)$$

Vì nút 2 là nút chung của hai phần tử 1 và 2 nên ta có thể viết :

$$Q_2 = Q_2^1 + Q_2^2$$

và :

$$M_2 = M_2^1 + M_2^2$$

Vì vậy, ma trận độ cứng tổng thể của hai phần được nối sẽ là :

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{l_1^3} & \frac{6EJ}{l_1^2} & -\frac{12EJ}{l_1^3} & \frac{6EJ}{l_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{4EJ}{l_1} & -\frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{2EJ}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12EJ}{l_1^3} & -\frac{6EJ}{l_1^2} & \boxed{\frac{12EJ}{l_1^3} + \frac{12EJ}{l_2^3}} & \boxed{-\frac{6EJ}{l_1^2} + \frac{6EJ}{l_2^2}} & -\frac{12EJ}{l_2^3} & \frac{6EJ}{l_2^2} \\ \frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{2EJ}{l_1} & \boxed{-\frac{6EJ}{l_1^2} + \frac{6EJ}{l_2^2}} & \boxed{\frac{4EJ}{l_1} + \frac{4EJ}{l_2}} & -\frac{6EJ}{l_2^2} & \frac{2EJ}{l_2^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ}{l_2^3} & -\frac{6EJ}{l_2^2} & \frac{12EJ}{l_1^3} & \frac{6EJ}{l_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EJ}{l_2^2} & \frac{2EJ}{l_2} & -\frac{2EJ}{l_2^2} & \frac{4EJ}{l_2} \end{bmatrix}$$

Chú ý ma trận độ cứng  $[k]$  của hai phần tử là một ma trận đối xứng vuông cấp  $6 \times 6$ . Để ghép ba bốn phần tử hoặc nhiều hơn nữa, ta chỉ việc lặp lại nguyên tắc đã chỉ ra ở trên.

## 7. VÍ DỤ ÁP DỤNG

Hãy xác định ma trận độ cứng của dầm trên hình 6.11 khi xem dầm là một phần tử.

Sử dụng phương trình (6.21) và chú ý rằng trong trường hợp này :

$$b(z) = \frac{zb_0}{l}$$

$$J = \frac{b_0 z \cdot h^3}{12l} = \frac{b_0 h^3 z}{12l}$$

$$[k] = \frac{Eb_0 h^3}{12l} \int_0^l z \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \\ \frac{4}{l} - \frac{6z}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \\ \frac{2}{l} - \frac{6z}{l^2} \end{bmatrix} \left[ \frac{6}{l^2} - \frac{12z}{l^3} \quad \frac{4}{l} - \frac{6z}{l^2} \quad -\frac{6}{l^2} + \frac{12z}{l^3} \quad \frac{2}{l} - \frac{6z}{l^2} \right] dz$$

Sau khi tích phân ta có :

$$[k] = \frac{Eb_0 h^3}{12l} \begin{bmatrix} 6 & 2l & -6 & 2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \\ -6 & -2l & 6 & -4l \\ 2l & l^2 & -4l & 3l^2 \end{bmatrix}$$

## §3. TẢI TRỌNG TẬP TRUNG TƯƠNG ĐƯƠNG

Trong tất cả các mục trên đây, ta đã giả thiết tải trọng tác dụng lên kết cấu là những tải trọng tập trung. Thế nhưng, trong thực tế tính toán ta lại gặp nhiều trường hợp tải trọng tác dụng lên kết cấu là tải trọng phân bố. Vì thế, cần phải tìm cách thay thế tác dụng của tải trọng phân bố bằng tải

trọng tập trung tương đương. Để đạt được điều đó, ta có thể sử dụng điều kiện tương đương của hai hệ lực. Cụ thể là cần phải cân bằng công khả dĩ của hệ tải trọng phân bố và hệ tải trọng tập trung.

Các dạng tải trọng phân bố có thể gồm :

- Tải trọng phân bố thể tích
- Tải trọng phân bố trên bề mặt hoặc phân bố theo đường.

### 1. Tải trọng phân bố theo thể tích

Xét tải trọng phân bố  $q(x, y, z)$  trong miền  $V$ .

Gọi  $X, Y, Z$  là các thành phần tải trọng này. Công khả dĩ của tải trọng phân bố này sẽ là :

$$\begin{aligned} A_q &= \int_V (Xdu + Ydv + ZdW) dV \\ &= \int_V \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dW \end{bmatrix}^T q(x, y, z) dV \end{aligned}$$

Thế nhưng hàm chuyển vị là :

$$\{S(x, y, z)\} = \{\Phi(x, y, z)\} \cdot \{\alpha\}$$

và :

$$\{\alpha\} = [A^{-1}] \cdot \{\delta\}$$

Từ đó :

$$\begin{aligned} A_q &= \int_V \left\{ \left[ \Phi(x, y, z) \right] \cdot [A^{-1}] \cdot \{d\delta\} \right\}^T \{q(x, y, z)\} \cdot dV \\ &= \{d\delta\}^T [A^{-1}]^T \int_V \left[ \Phi(x, y, z) \right]^T \cdot \{q(x, y, z)\} \cdot dV \end{aligned} \quad (6.23)$$

Công khả dĩ của các lực tập trung tương đương  $A_p$  là :

$$A_p = \{d\delta\}^T \cdot \{P\}$$

Điều kiện cân bằng hai công  $A_q$  và  $A_p$  cho ta :

$$\{P\} = [A^{-1}] \cdot \int_V \left[ \Phi(x, y, z) \right]^T \cdot \{q(x, y, z)\} \cdot dV \quad (6.24)$$

## 2. Tải trọng phân bố theo bề mặt

Gọi  $S$  là bề mặt của vật thể mà trên đó có tải trọng phân bố  $q(x, y, z)$  tác dụng thì thay cho (6.23) ta có thể viết :

$$A_q = \{d\delta\}^T [A^{-1}]^T \cdot \int_S [\Phi(x, y, z)]^T \cdot \{q(x, y, z)\} \cdot dS$$

Công khả dĩ của các lực tập trung tương đương  $A_p$  vẫn là :

$$A_p = \{d\delta\}^T \cdot \{P\}$$

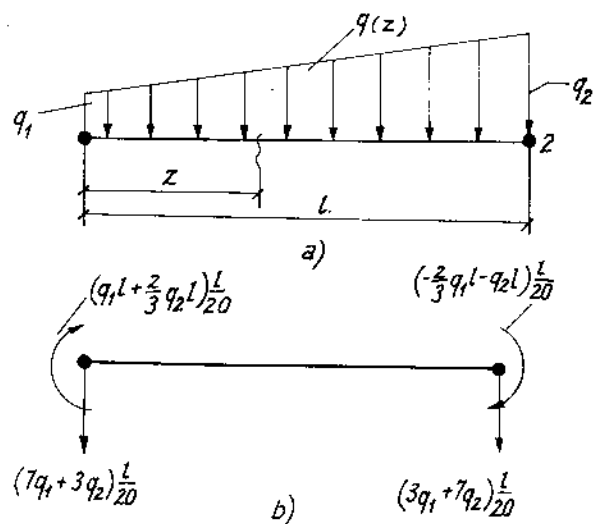
Cân bằng hai công này ta được :

$$\{P\} = [A^{-1}]^T \cdot \int_S [\Phi(x, y, z)]^T \cdot \{q(x, y, z)\} \cdot dS \quad (6.25)$$

## 3. Tải trọng phân bố theo đường

Giả sử có một phần tử một chiều (dầm chịu lực phân bố  $q(z)$ ) như trên hình 6.12a.

Hãy xác định tải trọng tập trung tương đương vào các nút của phần tử



Hình 6.12.

này.

Quy luật biến thiên của tải trọng phân bố là :

$$q(z) = (q_2 - q_1) \frac{z}{l} + q_1$$

Áp dụng phương trình (6.25) vào trường hợp một chiều này ta có :

$$\{P\} = [A^{-1}] \cdot \int_0^l [\Phi(z)]^T \cdot \{q(z)\} dz$$

Các quan hệ  $[A^{-1}]$  và  $\{\Phi(z)\}$  trong trường hợp này có dạng :

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix}$$

và :

$$[\Phi(z)] = [1 \quad z \quad z^2 \quad z^3]$$

Từ đó rút ra :

$$\begin{aligned} \{P\} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \int_0^l \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix} \cdot \left\{ (q_2 - q_1) \frac{z}{l} + q_1 \right\} \cdot dz \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (q_1 + q_2) \frac{l}{2} \\ (2q_2 + q_1) \frac{l^2}{6} \\ (3q_2 + q_1) \frac{l^3}{12} \\ (4q_2 + q_1) \frac{l^4}{20} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{l}{20} \cdot \begin{Bmatrix} 7q_1 + 3q_2 \\ q_1 l + 2q_2 \frac{l}{3} \\ 3q_1 + 7q_2 \\ -\frac{q_1 l}{3} - q_2 l \end{Bmatrix}$$

Phần tử chịu tải trọng tập trung tương đương cho trên hình 6.12b.

#### §4. PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRONG BÀI TOÁN KẾT CẤU DẠNG KHUNG

Khung là một kết cấu được chế tạo ra để chịu uốn và kéo (hoặc chịu nén). Ảnh hưởng của lực cắt đến sự làm việc của khung là rất bé, nên thường được bỏ qua trong các tính toán.

##### 1. Ma trận độ cứng của phần tử chịu kéo (nén)

Xét một đoạn thanh liên kết khớp tại i và j có các tọa độ nút  $(z_i, y_i)$  và  $(z_j, y_j)$ , chiều dài  $l_{ij}$ ; chuyển vị các nút i và j lần lượt là :  $U_i, V_i$  và  $U_j, V_j$  (hình 6.13).

Nếu gọi  $l_{ij}$ ,  $l'_{ij}$  và  $\Delta l_{ij}$  lần lượt là chiều dài của phần tử trước biến dạng và ở trạng thái biến dạng và biến dạng dài tuyệt đối của phần tử, ta có quan hệ :

$$\Delta l_{ij} = l'_{ij} - l_{ij} = \frac{(U_j - U_i)(z_j - z_i) + (V_j - V_i)(y_j - y_i)}{l_{ij}}$$

Mặt khác :

$$\Delta l_{ij} = -\frac{Pl_{ij}}{EF} = -\frac{P_{zi} l_{ij}}{\cos\theta EF}$$

Nếu ta đặt :

$$\gamma = \cos\theta = \frac{z_j - z_i}{l_{ij}} ; \quad m = \sin\theta = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}}$$

từ đó ta có :

$$P_{zi} = -\frac{EF\gamma\Delta l_{ij}}{l_{ij}} = -\frac{EF}{l_{ij}} \left( (U_j - U_i)\gamma^2 + \gamma m (V_j - V_i) \right) = -P_{zj} \quad (a)$$

Tương tự :





$$P = \frac{P_{yi}}{\sin\theta} = -\frac{P_{yj}}{\sin\theta}$$

Vì vậy :

$$P_{yi} = \frac{EF}{l_{ij}} \left[ (U_j - U_i)\gamma\mu + \mu^2(V_j - V_i) \right] = -P_{yj} \quad (b)$$

Khai triển các phương trình (a) và (b), ta nhận được quan hệ giữa các thành phần lực nút và các chuyển vị nút dưới dạng ma trận :

$$\begin{Bmatrix} P_{zi} \\ P_{yi} \\ P_{zj} \\ P_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EF}{l_{ij}} \begin{bmatrix} \gamma^2 & \gamma\mu & -\gamma^2 & -\gamma\mu \\ \gamma\mu & \mu^2 & -\gamma\mu & -\mu^2 \\ -\gamma^2 & -\gamma\mu & \gamma^2 & \gamma\mu \\ -\gamma\mu & -\mu^2 & \gamma\mu & \mu^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

hoặc là :

$$[P] = [k] \cdot \{U\},$$

trong đó :

- $[k]$  - ma trận độ cứng ;
- $\{U\}$  - vectơ chuyển vị nút ;
- $\{P\}$  - vectơ lực nút.

Trong trường hợp  $\theta = 0^\circ$  thì  $\gamma = 1$  và  $\mu = 0$  và ma trận  $[k]$  có dạng :

$$[k] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. Ma trận độ cứng của các phần tử chịu uốn và kéo (nén)

Giả sử ta có một phần tử khung chịu uốn và kéo như hình 6.14.

Quan hệ giữa các lực nút  $N_i^*$ ,  $N_j^*$ ,  $Q_i^*$ ,  $Q_j^*$ ,  $M_i$ ,  $M_j$  và các chuyển vị nút  $U_i^*$ ,  $U_j^*$ ,  $V_i^*$ ,  $V_j^*$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_j$ , như sau :

$$N_i^* = \frac{EF}{l} U_i^* + 0 + 0 - \frac{EF}{l} U_j^* + 0 + 0$$

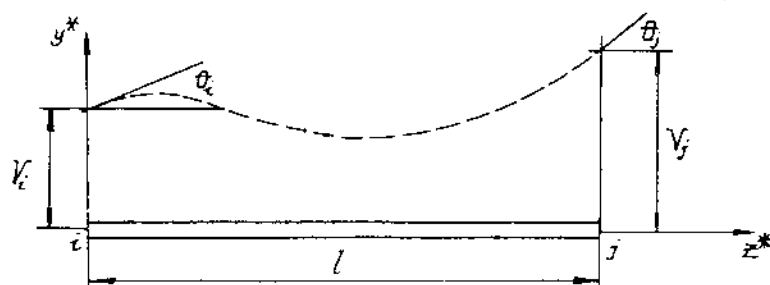
$$Q_i^* = 0 + \frac{12EJ}{l^3} V_i^* + \frac{6EJ}{l^2} \theta_i + 0 - \frac{12EJ}{l^3} V_j^* + \frac{6EJ}{l^2} \theta_j$$

$$M_i = 0 + \frac{6EJ}{l^2} V_i^* + \frac{4EJ}{l} \theta_i + 0 - \frac{6EJ}{l^2} V_j^* + \frac{2EJ}{l} \theta_j$$

$$N_j^* = -\frac{EF}{l} U_i^* + 0 + 0 + \frac{EF}{l} U_j^* + 0 + 0$$

$$Q_j^* = 0 - \frac{12EJ}{l^3} V_i^* - \frac{6EJ}{l^2} \theta_i + 0 + \frac{12EJ}{l^3} V_j^* - \frac{6EJ}{l^2} \theta_j$$

$$M_j = 0 + \frac{6EJ}{l^2} V_i^* + \frac{2EJ}{l} \theta_i + 0 - \frac{6EJ}{l^2} V_j^* + \frac{4EJ}{l} \theta_j$$



Hình 6.14

Dưới dạng ma trận ta có thể viết :

$$\{P^*\} = [k^*] \cdot \{U\} \quad (6.28)$$

trong đó :

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} N_i^* \\ Q_i^* \\ M_i^* \\ N_j^* \\ Q_j^* \\ M_j^* \end{Bmatrix} \quad \{U^*\} = \begin{Bmatrix} U_i^* \\ V_i^* \\ \theta_i \\ U_j^* \\ V_j^* \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

$$[k^*] = \begin{bmatrix} -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}$$

### 3. Biến đổi ma trận cục bộ $[k^*]$

Ma trận độ cứng cục bộ vừa nhận được ở trên được thiết lập trong hệ tọa độ  $z^*, y^*$ . Để có thể tính toán kết cấu, người ta cần phải xác định ma trận độ cứng theo các tọa độ xác định vị trí tổng quát (hệ tọa độ xác định vị trí của toàn bộ kết cấu). Vì vậy, phải chuyển ma trận độ cứng  $[k^*]$  từ các tọa độ cục bộ sang các tọa độ tổng quát.

Xét phần tử  $i, j$  nghiêng một góc  $\theta$  so với trục  $z$  của hệ tọa độ tổng quát (cố định). Gọi  $U_i, V_i, \theta_i$  và  $U_j, V_j, \theta_j$  là các chuyển vị của các đầu cuối  $i$  và  $j$  của phần tử so với hệ tọa độ tổng quát cố định  $zy$  (hình 6.15).

Nút  $j$  :

$$CD = V_j^* \tan \theta ; AC = AD - CD = U_j^* - V_j^* \tan \theta$$

$$AB = U_j = AC \cos \theta$$

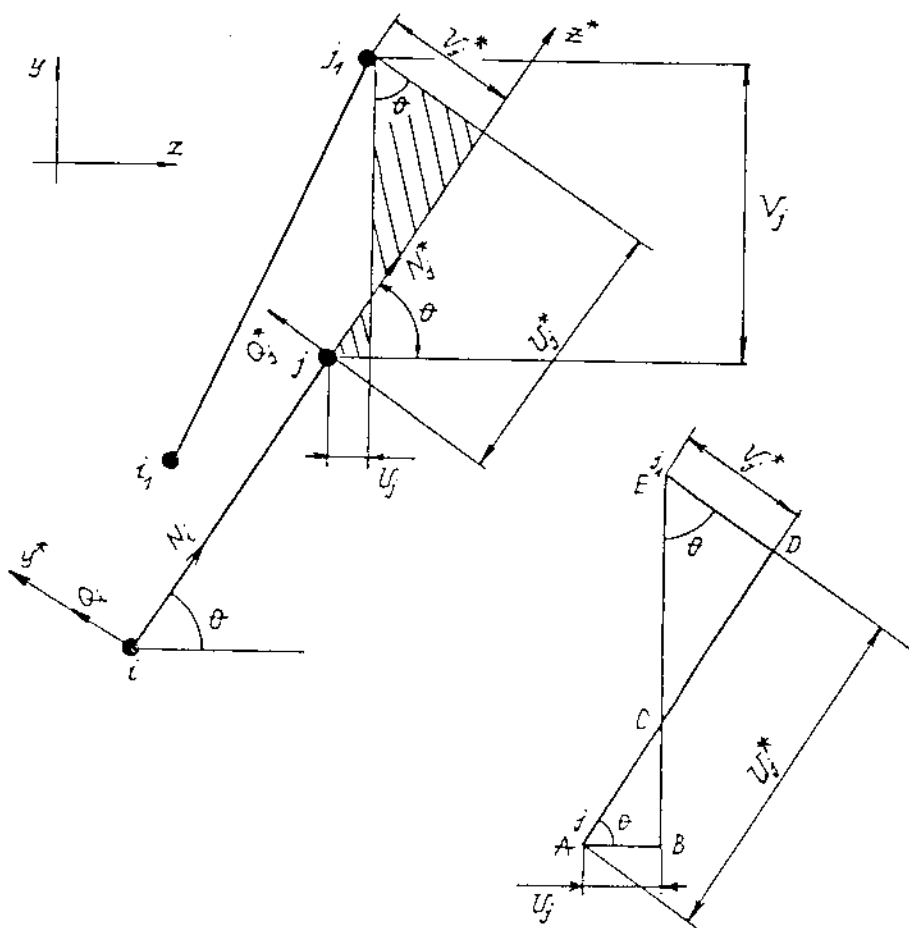
Từ đó :

$$U_j = U_j^* \cos \theta - V_j^* \sin \theta$$

$$V_j = BE = BC + CE = \frac{V_j^*}{\cos \theta} + U_j^* \sin \theta - V_j^* \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$= U_j^* \sin \theta + V_j^* \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = U_j^* \sin \theta + V_j^* \cos \theta \quad (b)$$

Nút  $i$  : tương tự như trên, nút  $i$  có các quan hệ sau đây :



Hình 6.15

$$U_i = U_i^* \cos\theta - V_i^* \sin\theta \quad (c)$$

$$V_i = U_i^* \sin\theta + V_i^* \cos\theta \quad (d)$$

Chú ý rằng góc xoay  $\theta$  quanh trục  $x$  không phụ thuộc vào quá trình chuyển từ toạ độ cục bộ sang toạ độ tổng quát. Các phương trình (a), (b), (c), (d) được viết gọn lại dưới dạng ma trận sau :

$$\{U\} = [M_T] \cdot \{U^*\} \quad (6.29)$$

trong đó :

$[M_T]$  - ma trận biến đổi ;

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \theta_i \\ U_j \\ V_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \{U^*\} = \begin{Bmatrix} U_i^* \\ V_i^* \\ \theta_i^* \\ U_j^* \\ V_j^* \\ \theta_j^* \end{Bmatrix}$$

$$[M_T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

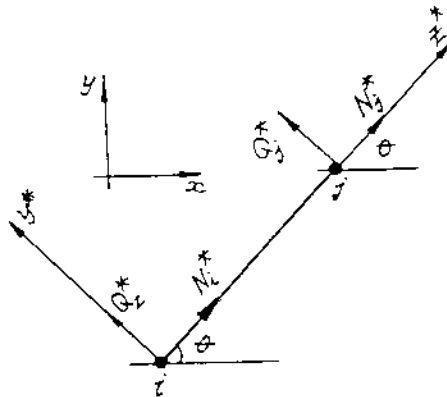
Phương trình (6.29) cho ta mối quan hệ giữa chuyển vị nút của phần tử trong hệ tọa độ tổng quát và các chuyển vị nút của những nút này trong hệ tọa độ cục bộ  $y^*z^*$ .

Quan hệ giữa các lực nút trong hệ tọa độ tổng quát và trong hệ tọa độ cục bộ cũng được thiết lập như trên hình 6.16.

$$N_j = N_j^* \cos\theta - Q_j^* \sin\theta$$

$$Q_j = N_j^* \sin\theta + Q_j^* \cos\theta$$

$$N_i = N_i^* \cos\theta - Q_i^* \sin\theta$$



Hình 6.16

$$Q_i = N_i^* \sin\theta + Q_i^* \cos\theta$$

Gọi  $\{P\}$ ,  $\{P^*\}$  là các vectơ lực nút trong hệ tọa độ tổng quát và trong hệ tọa độ cục bộ, ta có :

$$\{P\} = [M_T] \cdot \{P^*\} \quad (6.30)$$

Ở đây :

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} ; \quad \{P^*\} = \begin{Bmatrix} N_i^* \\ Q_i^* \\ M_i^* \\ N_j^* \\ Q_j^* \\ M_j^* \end{Bmatrix} ;$$

Bằng cách nhân trái cả hai vế của phương trình (6.29) và (6.30) với  $[M_T]$  ta có :

$$\{U^*\} = [M_T^{-1}] \cdot \{U\}$$

và

$$\{P^*\} = [M_T^{-1}] \cdot \{P\}$$

Thay các kết quả này vào phương trình (6.28) ta nhận được :

$$[M_T^{-1}] \cdot \{P\} = [k^*] \cdot [M_T^{-1}] \cdot \{U\}$$

Vì vậy :

$$\{P\} = [M_T] \cdot [k^*] \cdot [M_T^{-1}] \cdot \{U\}$$

Thế nhưng :

$$[M_T^{-1}] = [M_T]^T$$

Do đó :

$$\{P\} = [M_T] \cdot [k^*] \cdot [M_T]^T \cdot \{U\}$$

Đặt :

$$\{k\} = [M_r] \cdot \{k^*\} \cdot [M_T]^T \quad (6.31)$$

$\{k\}$  là ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ tổng quát. Dưới dạng khai triển, ma trận  $[k]$  được viết

$$[k] = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \gamma^2 + \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & \mu\gamma - \mu\gamma \frac{12m^2}{l^2} & \frac{12m^2}{l^2} & -\mu \frac{6m^2}{l} & -\gamma^2 - \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma\mu + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & -\mu \frac{6m^2}{l} \\ \mu\gamma - \mu\gamma \frac{12m^2}{l^2} & \mu^2 + \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & \gamma \frac{6m^2}{l} & -\gamma\mu + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & -\mu^2 - \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & \gamma \frac{6m^2}{l} \\ -\mu \frac{6m^2}{l} & \frac{6m^2}{l} & \gamma \frac{6m^2}{l} & 4m^2 & \mu \frac{6m^2}{l} & -\gamma \frac{6m^2}{l} & 2m^2 \\ -\gamma^2 - \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & \mu\gamma + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & \frac{12m^2}{l} & \frac{6m^2}{\mu} & \gamma^2 + \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma\mu - \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & \mu \frac{6m^2}{l} \\ \gamma\mu + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & -\mu^2 - \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma \frac{12m^2}{l} & \frac{6m^2}{\mu\gamma} & \mu\gamma - \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & \mu^2 + \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma \frac{6m^2}{l} \\ -\mu \frac{6m^2}{l} & \frac{6m^2}{\gamma} & \frac{6m^2}{\gamma} & 2m^2 & -\gamma \frac{6m^2}{l} & -\gamma \frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

trong đó :

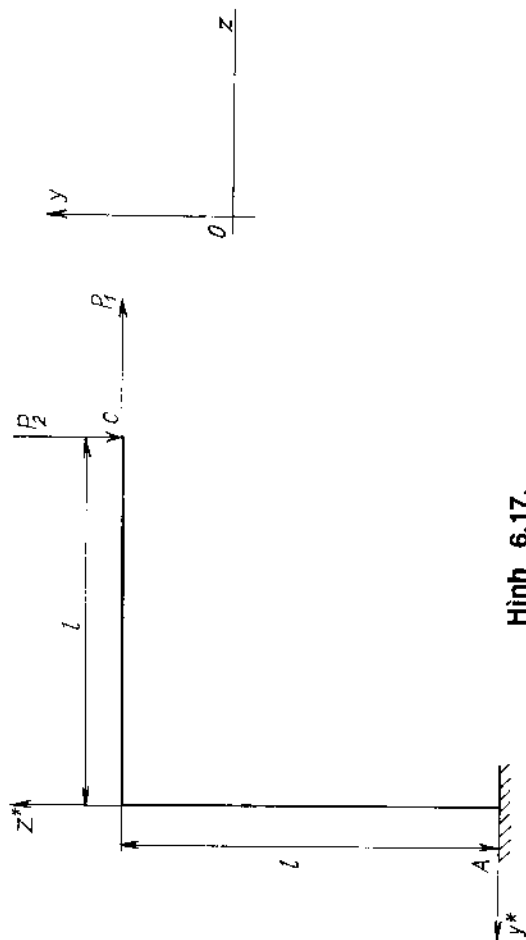
$$m^2 = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

Cuối cùng :

$$\{P\} = [k] \cdot \{U\} \quad (6.33)$$

#### 4. Ví dụ

Cho một khung như hình 6.17. Hãy thiết lập hệ phương trình để tính chuyển vị ở điểm đặt các lực  $P_1$  và  $P_2$ .  
Khung có diện tích mặt cắt là  $F$ , mômen đàn hồi  $E$  và mômen quán tính  $J$ .



Hình 6.17.

| Thanh | Chiều dài | $\theta$   | $\gamma$ | $\mu$ | $\gamma^2$ | $\mu^2$ | $\gamma\mu$ |
|-------|-----------|------------|----------|-------|------------|---------|-------------|
| AB    | $l$       | $90^\circ$ | 0        | 1     | 0          | 1       | 0           |
| BC    | $l$       | $0^\circ$  | 1        | 0     | 1          | 0       | 0           |



Tính ma trận độ cứng :

Theo quan hệ (6.32) ta có :

$$[k_{BC}] = \frac{AE}{l} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 4m^2 & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix}$$

$$[k_{AB}] = \frac{AE}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12m^2}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{6m^2}{l} & 0 & 4m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 \\ \frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} & \frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 4m^2 \end{bmatrix}$$

Khi ghép hai ma trận độ cứng  $[k_{BC}]$  và  $[k_{AB}]$ , ma trận độ cứng tổng cộng toàn hệ là :

$$[k] = \frac{AE}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} & \frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6m^2}{l} & 0 & 4m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} & \frac{12m^2}{l^2} + 1 & 0 & \frac{6m^2}{l} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{12m^2}{l^2} + 1 & \frac{6m^2}{l} & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ -\frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 & \frac{6m^2}{l} & \frac{6m^2}{l} & 8m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 2m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} & -\frac{6m^2}{l} & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix}$$

Sau khi đưa vào các điều kiện biên, ta nhận được hệ phương trình sau đây :

$$\begin{Bmatrix} N_B \\ Q_B \\ M_B \\ N_C \\ Q_C \\ M_C \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12m^2}{l^2} + 1 & 0 & \frac{6m^2}{l} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} + 1 & \frac{6m^2}{l} & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ \frac{6m^2}{l} & \frac{6m^2}{l} & 8m^2 & 0 & 0 & 2m^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_B \\ V_B \\ \theta_B \\ U_C \\ V_C \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

Chú ý rằng trong trường hợp của bài toán này  $N_B, Q_B, M_B$  và  $M_C$  bằng không, còn  $N_C = P_1, Q_C = -P_2$ . Do đó ta thu được hệ phương trình cần tìm sau đây :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \\ -P_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{l} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12m^2}{l^2} + 1 & 0 & \frac{6m^2}{l} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} + 1 & \frac{6m^2}{l} & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ \frac{6m^2}{l} & \frac{6m^2}{l} & 8m^2 & 0 & 0 & 2m^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_B \\ V_B \\ \theta_B \\ U_C \\ V_C \\ \theta_C \end{Bmatrix}$$

## Chương 7

# TÍNH TOÁN HỆ CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG TRÊN CÔNG TRÌNH

### §1. KHÁI NIỆM VỀ ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

Khi tính toán các cấu trúc, dầm đỡ cấu trúc, dầm cầu và rất nhiều công trình kỹ thuật khác, chúng ta thường gặp phải loại tải trọng di động trên công trình. Nội dung nghiên cứu cách tính toán công trình chịu tải trọng loại này bao gồm hai bài toán sau đây :

1. Xác định trị số của các đại lượng cần tính  $S$ , tương ứng với những vị trí bất kỳ của tải trọng di động.

2. Xác định vị trí bất lợi nhất của tải trọng mà với vị trí đó của tải trọng đại lượng cần tìm có giá trị tuyệt đối lớn nhất.

Hai nội dung này thường được giải quyết bằng phương pháp đường ảnh hưởng đối với hệ thanh phẳng hoặc mặt ảnh hưởng đối với hệ tấm và vỏ. Do hàm của các đại lượng cần tính  $S(z)$  thường không phải là những hàm liên tục, nhất là các đạo hàm của chúng, vì vậy, cách giải quyết bằng toán học thông thường không được áp dụng. Để tiện trình bày ta viết tắt đường ảnh hưởng là dah.

Vậy dah là gì?

Đường ảnh hưởng là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của đại lượng cần tính  $S$  tại một vị trí cố định chọn trước trên công trình theo vị trí của một lực đơn vị không thứ nguyên có phương chiều không đổi di động trên công trình.

Cần phải phân biệt bản chất các dah và bản chất các biểu đồ nội lực,

chuyển vị. Ví dụ đah  $M$  và biểu đồ  $M$  vẽ hình thức thì giống nhau nhưng tung độ của biểu đồ cho giá trị của  $M$  ở những mặt cắt khác nhau của dầm do tải trọng cố định gây ra trong khi đó tung độ đường ảnh hưởng lại cho giá trị của mômen  $M$  ở một mặt cắt cố định của dầm do tải trọng đơn vị di động trên dầm gây ra.

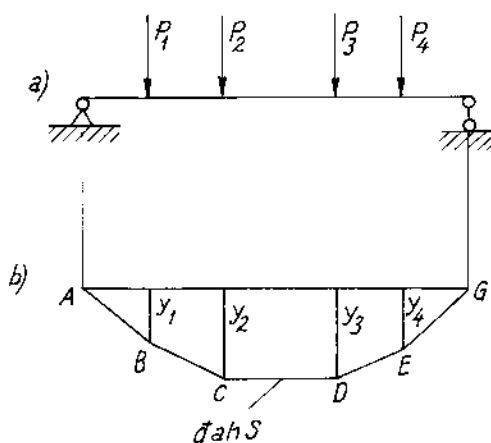
Mỗi một tung độ của đah cho một giá trị bằng số của đại lượng cần tính, nếu tải trọng đơn vị được đặt ở mặt cắt tương ứng với tung độ này. Khi đã có đah của  $S$  ta có thể dễ dàng xác định giá trị của nó dưới tác dụng của lực tập trung hoặc phân bố. Ví dụ, trên hình 1b là đah của đại

lượng cần tính  $S$  nào đó. Yêu cầu tìm giá trị của  $S$  dưới tác dụng của hệ lực tập trung cho trước trên hình 7.1a.

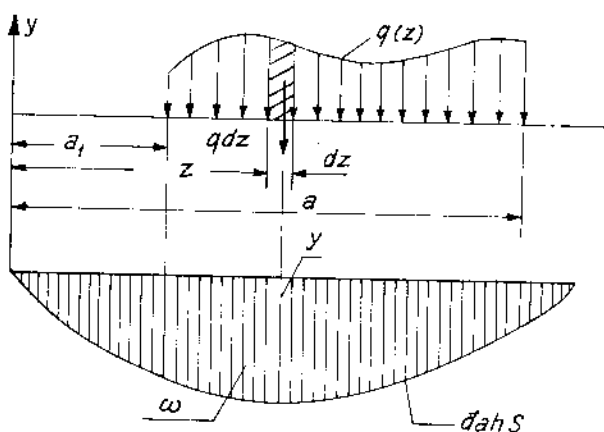
Theo nguyên lý cộng tác dụng và ý nghĩa đah  $S$  thì độ lớn của  $S$  do  $P_1$  gây ra là  $P_1 Y_1$ . Tương tự, do lực  $P_2$  là  $P_2 Y_2$ ... Dưới tác dụng đồng thời của hệ lực  $P_i$  thì giá trị của  $S$  là :

$$S = \sum_{i=1}^n P_i Y_i \quad (7.1)$$

Trong trường hợp tải trọng phân bố đều liên tục trên đoạn  $a_2 - a_1$  theo (7.1) ta có thể viết (hình 7.2a, b) :



Hình 7.1a,b



Hình 7.2a,b

$$S = \int_{a_1}^{a_2} q(z) y dz ; \text{ Khi } q = \text{const thì } S = q \int_{a_1}^{a_2} y dz \quad (7.2)$$

Tích phân  $\int_{a_1}^{a_2} y dz$  là diện tích  $\omega$  của phần đanh trong đoạn chất tải. Vì

vậy (7.2) được viết :

$$S = q\omega \quad (7.3)$$

## §2. CÁC ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA DẦM TÍNH ĐỊNH

Để vẽ các đanh ta có thể sử dụng giải pháp tĩnh và giải pháp động. Các phương trình cân bằng tĩnh học là cơ sở của giải pháp tĩnh, còn nguyên lý chuyển vị khả dĩ là cơ sở của giải pháp động.

### 1. Phương pháp tĩnh để vẽ đanh $S$ trong dầm đơn giản (hình 7.3a)

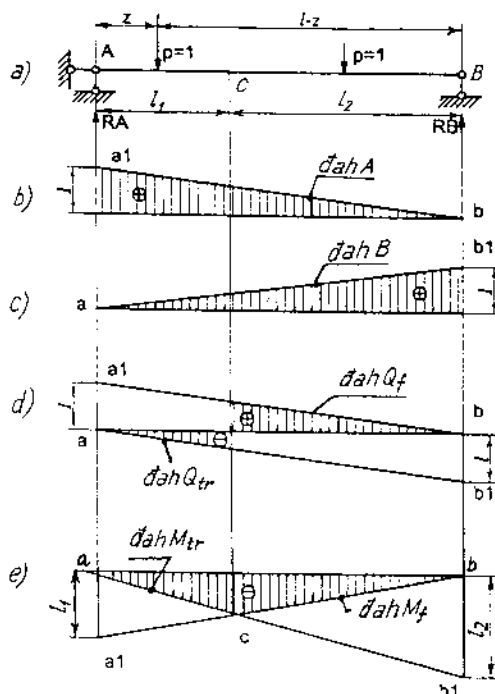
a/ Đường ảnh hưởng của các phản lực gối tựa A, B.

Ta đặt lực  $P = 1$  ở khoảng cách  $z$  kể từ gối tựa trái (hình 7.3).

Để xác định phản lực A do  $P = 1$  di động gây ra ta thiết lập phương trình mômen của tất cả các lực đối với gối tựa phải B :

$$\begin{aligned} \sum m_B(\vec{F}_k) &= A l - \\ P(l-z) &= 0 \Rightarrow A = \frac{1(l-z)}{l} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Đồ thị của  $A = 1(l-z)$  (hình 7.3b) là đanh A. Khi nhân tung độ của đanh ứng



Hình 7.3

với vị trí đặt tải trọng ta sẽ xác định được phản lực ở gối tựa A. Tương tự đối với phản lực B, ta có :

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = -Bl + 1 \cdot z = 0 \Rightarrow B = \frac{z}{l} \quad (7.5)$$

Theo phương trình này, đường ảnh hưởng B được cho trên hình 7.3c

*b/ Đường ảnh hưởng của lực cắt ở mặt cắt C*

Từ nay về sau, mọi quy ước dấu cũng như cách vẽ đồ thị của đại lượng cần tính S, nếu không nói gì thêm, thì ta vẫn sử dụng quy ước dấu của sức bền vật liệu [1].

Khi lực  $P = 1$  di động ở phần phải của mặt cắt c ta có đường ảnh hưởng phải của lực cắt  $Q_{cf}$

Lực cắt  $Q_c$  tại C là :

$$Q_c = A = \frac{1(l-z)}{l} \quad (7.6)$$

Phương trình này cho thấy phần phải của đồ thị A cũng chính là đồ thị của lực cắt ở phần phải của dầm : đồ thị  $Q_{cf}$  được cho trên hình 7.3d.

Khi lực  $P = 1$  di động ở bên trái C thì lực cắt  $Q_c$  có biểu thức :

$$Q = -B = -\frac{z}{l} \quad (7.7)$$

Từ (7.7) ta có nhận xét là phần trái của đường ảnh hưởng B với dấu ngược lại sẽ là đồ thị  $Q_{ctr}$  và hai đường  $ab_1$  và  $a_1b$  do cùng hệ số góc nên chúng song song nhau (hình 7.3d)

*c/ Đường ảnh hưởng của mômen uốn ở mặt cắt C*

Khi  $P = 1$  di động ở bên phải C thì mômen uốn tại c sẽ là (hình 7.3a) :

$$M_c = Al_1 = \frac{(l-z)}{l} l_1 > 0 \quad (7.8)$$

Phương trình (7.8) cho phép vẽ dễ dàng đồ thị  $M_{cf}$  khi tăng tung độ của đồ thị A lên  $l_1$  lần với dấu ngược lại.

Đường ảnh hưởng  $M_{cf}$  được cho trên hình 7.3e.

Khi  $P$  di động ở bên trái C thì mômen uốn tại C sẽ là (hình 7.3a)

$$M_c = Bl_2 = \frac{z}{l} l_2 > 0 \quad (7.9)$$

Như vậy, tung độ của đường ảnh hưởng  $M_{ctr}$  nhận được bằng cách tăng tung độ của đường ảnh hưởng B lên  $l_2$  lần. Cụ thể là ta đặt ở gối tựa B một đoạn  $l_2 = bb_1$  và nối  $b_1$  với a. Giao của  $ab_1$  và  $ba_1$  là điểm C. Đường ảnh hưởng  $M_{ctr}$  và đường ảnh hưởng  $M_{cf}$  được cho trên hình 7.3e. Trong thực hành ta có thể vẽ nhanh đường ảnh hưởng  $M_c$  như sau :

Vẽ đường  $a_1b$  và lấy trên nó điểm c ứng với mặt cắt C, nối điểm tìm được với a. Tung độ của đường ảnh hưởng M có thứ nguyên chiều dài, khi nhân tung độ này với tải trọng ta nhận được  $M_c$  có thứ nguyên [lực x chiều dài]

## 2. Phương pháp tính vẽ đah S trong dầm hai gối tựa có côngxôn (hình 7.4a)

Khảo sát dầm hai công xôn chịu tải trọng di động  $P = 1$  như trên hình 7.4a. Vị trí của  $P = 1$  được xác định bằng hoành độ  $z$  với gốc tọa độ đặt ở gối trái A.

a/ Đường ảnh hưởng của phản lực A và B

$$\sum m_B(\vec{F}_k) = 0 \Rightarrow A = \frac{(l-z)}{l}$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \Rightarrow B = \frac{z}{l}$$

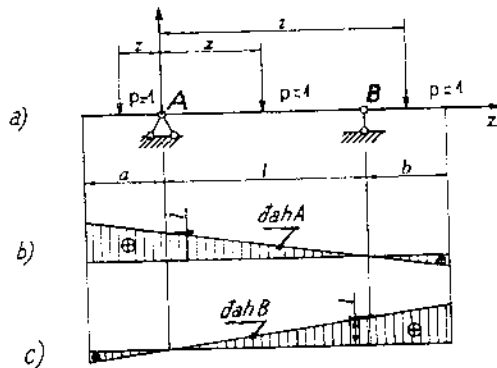
Nếu  $P = 1$  đứng ở đầu công xôn trái thì khi  $z = -a$  :

$$A = \frac{l+a}{l}, B = \frac{-a}{l}$$

tương tự khi  $z = l+b$  :

$$A = \frac{-b}{l}, B = \frac{l+b}{l}$$

Theo các phương trình này các đah A và đah B được vẽ trên hình 7.4b,c. Các phần âm của các đah cho biết khi  $P = 1$  di động trên các đoạn có tung độ đah âm thì các phản lực tương ứng hướng xuống.



Hình 7.4



b/ Đường ảnh hưởng của lực cắt

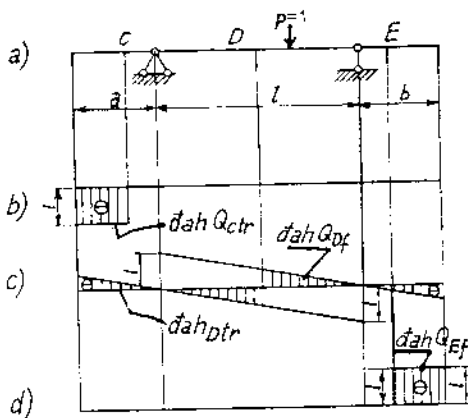
Trên hình 7.5 là các đah của lực cắt ở các mặt cắt C, D và E.

Đối với mặt cắt C : khi  $P = 1$  di động bên phải nó thì  $Q_{ct} = 0$  ; khi  $P = 1$  di động bên trái nó thì  $Q_{ct} = -1$  (hình 7.5b)

Đối với mặt cắt D đặt ở trong nhịp :

Khi  $P = 1$  ở bên phải D thì  $Q_{Dt} = A$ , nghĩa là đah  $Q_{Dt}$  trùng với đường ảnh hưởng A. Khi  $P = 1$  ở bên trái D thì  $Q_{Dt} = -B$ , nghĩa là đah  $Q_{Dt} = -\text{dah } B$  (hình 7.5c)

Đah  $Q_E$  được xây dựng tương tự như đah  $Q_C$  (hình 7.5d)



Hình 7.5

c/ Đường ảnh hưởng của mômen ở các mặt cắt C, D, E.

Xét mặt cắt C : khi  $P = 1$  di động ở phía phải C thì  $M_{ct} = 0$ , khi  $P = 1$  di động ở phía trái C thì  $M_{ct} = -1(z - c)$

Tại  $z = a$  thì  $M_c = -(a - c) < 0$

Tại  $z = c$  thì  $M_c = 0$

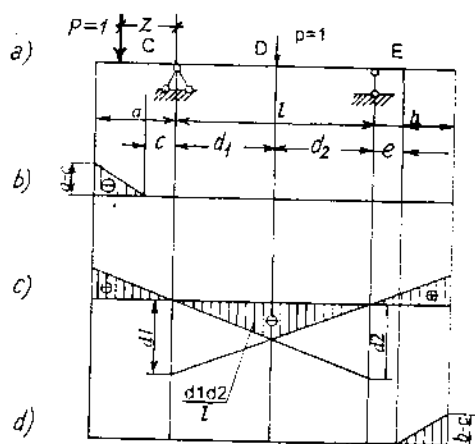
Trên hình 7.5b là đah  $M_{ct}$ .

Đối với mặt cắt D ở trong nhịp :

Khi  $P = 1$  di động bên phải D thì  $M_{Dt} = Ad_1 = \frac{l-z}{l} d_1 > 0$

Khi  $P = 1$  ở phía trái D thì  $M_{Dt} = Bd_2 = \frac{z}{l} d_2$

Các biểu thức này cho thấy đah  $M_D$  nhận được từ đah của các phản lực tương ứng khi tăng tung độ của đah A và đah B lên  $d_1$  và  $d_2$  lần ( $d_1, d_2$  là khoảng cách từ D đến các gối tựa). Đường ảnh hưởng của  $M_D$  được mô tả trên hình 7.6c. Đah  $M_E$  được xây dựng tương tự như đah  $M_C$  (hình 7.6d).

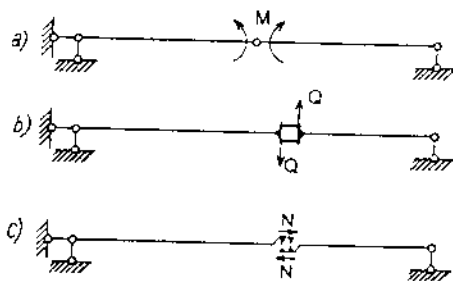


Hình 7.6

### §3. PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG ĐỂ VẼ ĐẠNH TRONG DẪM HAI GỖI TỰA CÓ CÔNG XÔN (HÌNH 7.8)

Phương pháp động được sử dụng để vẽ các đánh của các đại lượng cần tính là dựa trên nguyên lý chuyển vị khả dĩ. Sử dụng nguyên lý này cho phép chúng ta dẫn hệ bất biến hình hình học đã cho về hệ biến hình hình học. Cụ thể là cần loại đi những liên kết tương ứng với các đại lượng cần tính và thay vào đó các yếu tố cần tính (hình 7.7)

Ví dụ, nếu cần xây dựng đánh  $M$  ở mặt cắt nào đó thì ta đặt vào mặt cắt đó một khớp quay và thay thế cho liên kết chống quay vừa bị cắt bằng hai mômen ngược chiều cùng trị số (hình 7.7a). Trên hình 7.7b, c là sơ đồ để xây dựng đánh của lực cắt  $Q$  và lực dọc  $N$ .



Hình 7.7

a/ Đường ảnh hưởng của phản lực tựa A (hình 7.8)

Theo nguyên tắc mô tả ở trên, để xây dựng đánh A theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ ta làm như sau :

Loại liên kết gối A thay vào đó phản lực cần tính A do lực  $P = 1$  di động gây ra (hình 7.8a, b). Tạo cho hệ một chuyển vị khả dĩ (hình 7.8c). Viết phương trình của nguyên lý chuyển vị khả dĩ. Cụ thể là :

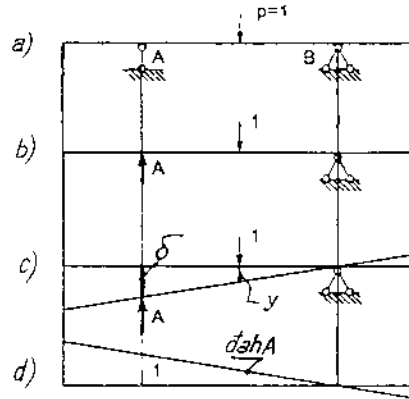
$$-A \cdot \delta + 1 \cdot y = 0 \Rightarrow A = \frac{y}{\delta} \quad (7.10)$$

Độ lớn của  $y$  phụ thuộc vị trí của lực di động  $P = 1$ , còn  $\delta$  là một hằng số. Điều này chỉ ra rằng biểu đồ chuyển vị (hình 7.8c) là mô hình của đanh A (hình 7.8d) có tung độ được xác định theo (7.10).

Khi  $P = 1$  đứng ở gối tựa A thì  $y = \delta$ . Và do đó tung độ đanh A tại gối A bằng :

$$A = \frac{\delta}{\delta} = 1 > 0$$

nghĩa là chiều của phản lực A trùng với chiều của nó đã được sử dụng trong phương trình (7.10).



Hình 7.8

b/ Đường ảnh hưởng của mômen uốn ở mặt cắt E (hình 7.9a)

Sơ đồ để thiết lập đanh M được cho trên hình 7.9b và biểu đồ của chuyển vị khá dễ tương ứng được cho trên hình 7.9c.

Phương trình công khá dễ :

$$M_E \delta \varphi_1 + M_E \delta \varphi_2 - 1 \cdot y = 0$$

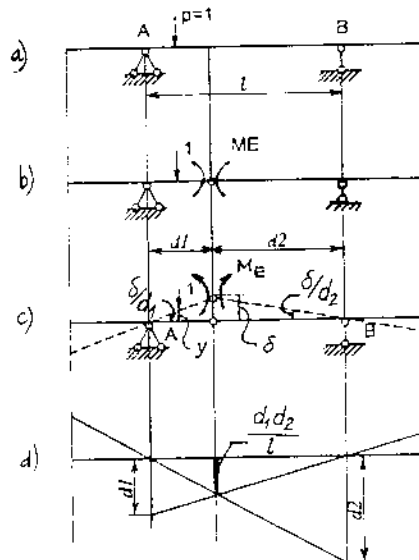
hay

$$M_E \frac{\delta}{d_1} + M_E \frac{\delta}{d_2} - 1 \cdot y = 0 \quad (7.11)$$

do đó :

$$M_E = \frac{y}{\delta} \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{y}{\delta} \frac{d_1 d_2}{l}$$

Tung độ của đanh  $M_E$  tỷ lệ với tung độ của biểu đồ chuyển vị.



Hình 7.9

Khi  $P = 1$  ở vị trí mặt cắt E thì  $y = \delta$ . Do đó, tung độ dãi  $M_E$  ở mặt cắt này bằng (hình 7.9d)

$$\frac{\delta}{\delta} \frac{d_1 d_2}{l} = \frac{d_1 d_2}{l}$$

Kết quả này ta đã nhận được khi sử dụng phương pháp tĩnh (hình 7.6c). Nếu mặt cắt khảo sát D nằm ở trên đoạn công xôn thì sơ đồ của hệ biến hình hình học và biểu đồ chuyển vị khá dễ có dạng như trên hình 7.10b,c.

Theo nguyên lý chuyển vị khả dĩ, ta có :

$$1 \cdot y + M_D \frac{\delta}{c} = 0$$

$$\Rightarrow M_D = -\frac{yc}{\delta} \quad (7.12)$$

Trong đó,  $\delta$  là chuyển vị thẳng ở đầu cuối của công xôn theo phương tác dụng của lực  $P = 1$ .

Khi  $P = 1$  đặt ở đầu cuối của công xôn thì  $y = \delta$  và do đó :

$$M = -\frac{c}{\delta} = -c < 0$$

Điều này nói lên là chiều  $M_D$  ngược với chiều của nó đã được thừa nhận trong khi thiết lập phương trình (7.12). Trên hình 7.10d là dãi  $M_D$ .

c/ Đường ảnh hưởng của lực cắt ở mặt cắt E

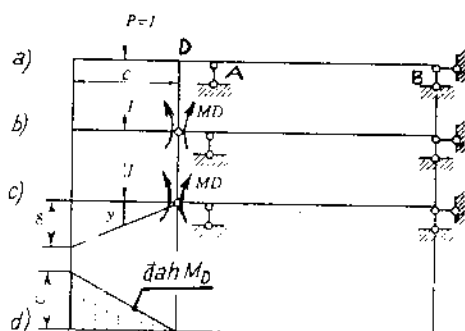
Sơ đồ để thiết lập dãi  $Q_E$  là một hệ biến hình hình học được cho trên hình 11b. Cho hệ này một chuyển vị khả dĩ  $\delta\varphi$  thì chuyển vị thẳng đứng tương đối của hai má ngàm trượt tại E bằng :

$$\delta\varphi (d_1 + d_2)$$

Công khả dĩ của hệ (hình 7.11c) là :

$$Q_E \cdot d_1 \delta\varphi + Q_E \cdot d_2 \delta\varphi = 1 \cdot y \quad (7.13)$$

từ đây rút ra là :



Hình 7.10

$$Q_E = \frac{y}{\delta\varphi \cdot (d_1 + d_2)}$$

Tung độ của đanh  $Q_E$  tỷ lệ với  $y$ . Khi xếp lực  $P = 1$  lần lượt vào phía trái và phải của  $E$  của các đoạn dầm đã được cắt ra ta sẽ có tung độ của đanh  $M_E$  như sau :

Khi  $P = 1$  ở phần trái :

$$\left| \frac{d_1 \cdot \delta\varphi}{\delta\varphi(d_1 + d_2)} \right|$$

Khi  $P = 1$  ở phần phải :

$$\left| \frac{d_2 \cdot \delta\varphi}{\delta\varphi(d_1 + d_2)} \right|$$

Do đó bước nhảy của đanh  $D_E$  là :

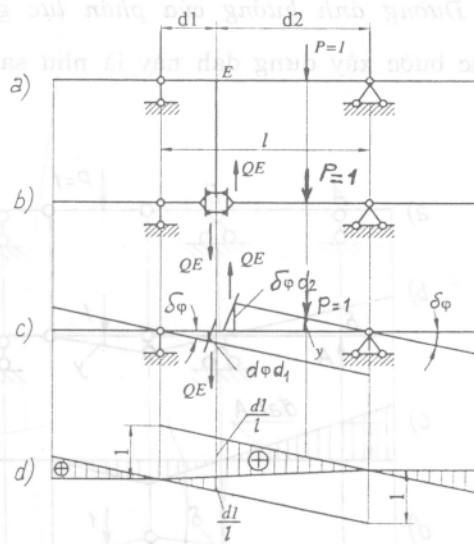
$$\left| \frac{d_1 \cdot \delta\varphi}{\delta\varphi(d_1 + d_2)} \right| + \left| \frac{d_2 \cdot \delta\varphi}{\delta\varphi(d_1 + d_2)} \right| = 1$$

Đanh  $Q_E$  được biểu diễn theo hình 7.11d. Đanh  $Q_D$  cũng được xây dựng tương tự (hình 7.12). Cụ thể là :

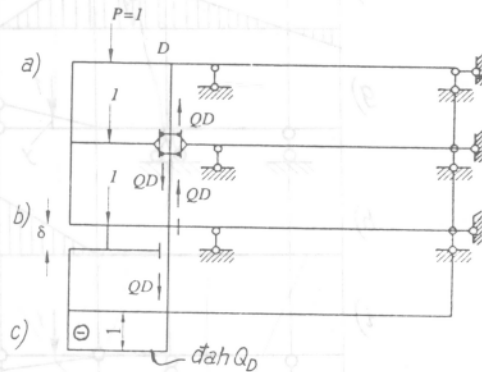
Khi  $P = 1$  đứng bên trái  $D$ , ta có :

$$1 \cdot \delta + Q_D \cdot \delta = 0 \Rightarrow Q_D = -\frac{\delta}{\delta} = -1 < 0$$

Khi  $P = 1$  di động trên phần còn lại thì  $Q_D = 0$



Hình 7.11



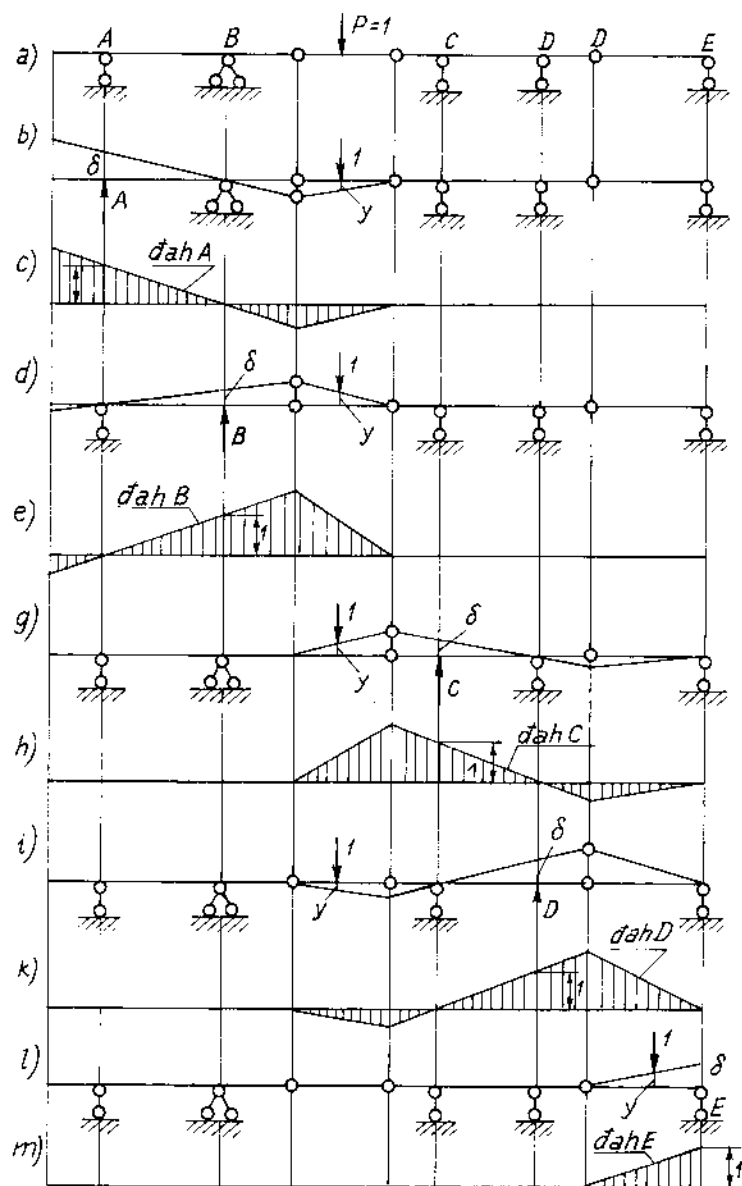
Hình 7.12

#### §4. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG ĐỐI VỚI DẦM NHIỀU KHỚP

Việc vẽ các đanh đối với dầm tĩnh định nhiều khớp, thuận lợi nhất là sử dụng phương pháp động. Chúng ta sẽ nghiên cứu cách vẽ đanh đối với dầm nhiều khớp trên hình 7.13.

a/ Đường ảnh hưởng của phản lực gối tựa A

Các bước xây dựng dah này là như sau :



Hình 7.13

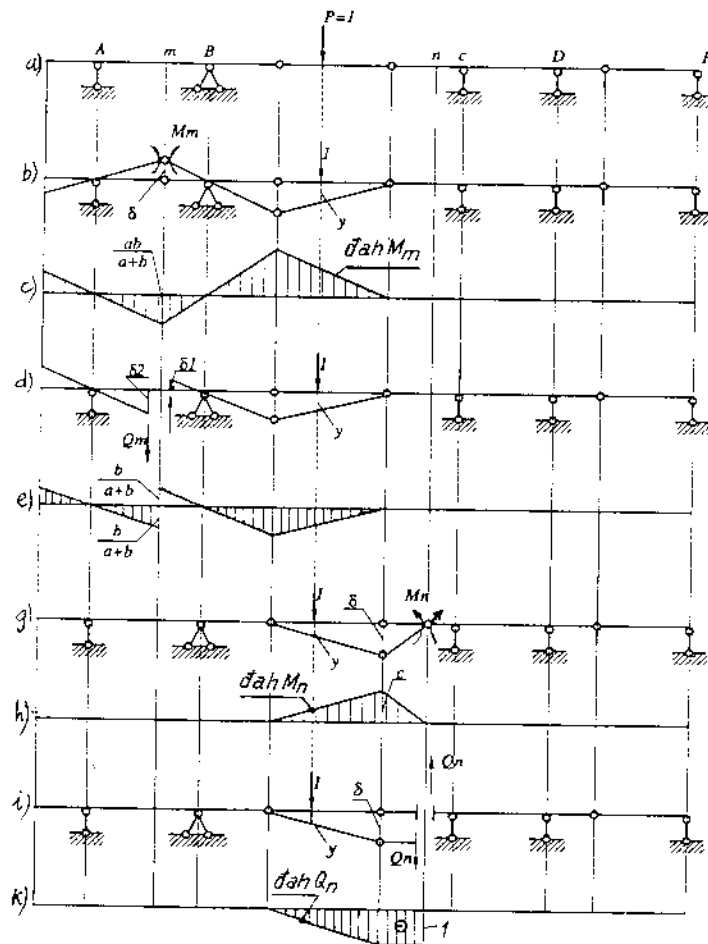
Bước 1 : Giải phóng liên kết gối A và thay vào đó phản lực liên kết A.

Bước 2 : Tạo cho hệ vừa nhận được một chuyển vị khả dĩ (hình 7.13b).

Bước 3 : Thiết lập phương trình công khả dĩ.

$$A \cdot \delta + 1 \cdot y = 0 \Rightarrow A = -\frac{y}{\delta}$$

Dấu (-) trong kết quả trên chứng tỏ rằng ứng với vị trí của  $P = 1$ , phản lực A ngược chiều với chiều của A đã được thừa nhận trong phương trình công. Khi  $P = 1$  đặt vào vị trí gối tựa A thì  $y = -\delta$  và  $A = -\frac{(-\delta)}{\delta} = 1$ . Nghĩa là, tung độ dãi A ở vị trí gối tựa này bằng đơn vị (hình 7.13c).



Hình 7.14

Tương tự như vậy ta có thể xây dựng đồ ảnh của phản lực gối B. Trên hình 7.13d, e tương ứng là biểu đồ chuyển vị khả dĩ và đồ ảnh B. Biểu đồ chuyển vị và đồ ảnh c đối với gối C được cho trên các hình 7.13g,h. Các hình 7.13i,k,l,m mô tả lần lượt biểu đồ chuyển vị và đồ ảnh của phản lực các gối tựa D, E.

b/ Đường ảnh hưởng của mômen uốn và lực cắt ở các mặt cắt m và n (hình 7.14a).

Để vẽ đồ ảnh của mômen uốn ở mặt cắt m ta thay vào mặt cắt này một khớp quay và hai mômen như hình 7.14b. Ta tạo cho hệ một chuyển vị khả dĩ và thiết lập phương trình công khả dĩ :

$$M_m \frac{\delta}{a} + M_m \cdot \frac{\delta}{b} + 1 \cdot y = 0$$

Từ đây rút ra :

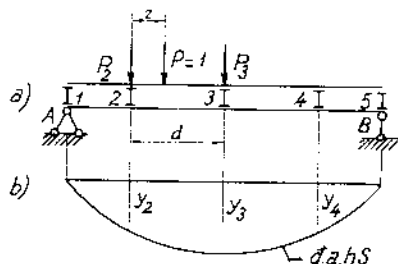
$$M_m = \frac{-y}{\delta} \left( \frac{ab}{a+b} \right)$$

Để xác định tung độ đồ ảnh của  $M_m$  ta đặt  $P = 1$  vào mặt cắt m, khi đó  $y = -\delta$  và

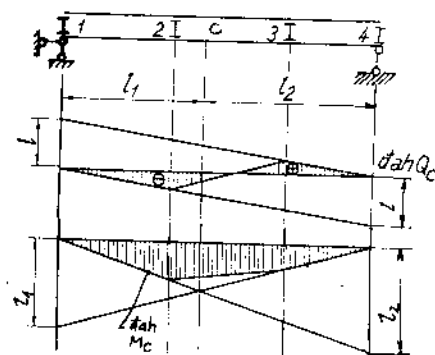
$$M_m = -\frac{-\delta}{\delta} \left( \frac{ab}{a+b} \right) = \frac{ab}{a+b}$$

Đồ ảnh  $M_m$  được cho trên hình 7.14c.

Hoàn toàn tương tự, các đồ ảnh  $Q_m$ ,  $M_n$ ,  $Q_n$  được vẽ trên các hình 7.14e,k.



Hình 7.15



Hình 7.16



## §5. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ CỎ NÚT TRUYỀN LỰC

Trong nhiều kết cấu dạng dầm và dàn, tải trọng không truyền trực tiếp lên dầm chính mà truyền lên các dầm phụ rồi từ dầm phụ truyền lên dầm chính. Trên hình 7.15a tải trọng  $P$  được đặt trực tiếp lên các dầm phụ một nhịp (1-2 ; 2-3 ; 3-4 và 4-5) còn dầm chính nhận tác dụng này qua các dầm ngang phụ 1, 2, 3, 4, 5. Phương án truyền tải như vậy lên dầm chính gọi là truyền tải nút, còn các mặt cắt của dầm chính nối dầm phụ ngang đặt vào gọi là nút. Phần dầm chính nằm giữa hai nút gọi là panen. Đối với phương án truyền tải này các đường ảnh hưởng của phản lực gối A và B không có gì thay đổi như khi truyền tải trực tiếp lên dầm chính (xem §2 của chương này). Vì vậy ở đây chúng ta chỉ nghiên cứu cách thiết lập các đường ảnh hưởng của các nội lực  $S$ .

Giả sử dầm  $S$  khi chất tải trực tiếp lên dầm chính có dạng cong như hình 7.15b.

Nếu  $P = 1$  đặt lên nút thì tung độ dầm  $S$  khi chất tải nút bằng tung độ dầm  $S$  khi chất tải lên dầm chính. Khi  $P = 1$  di động trong khoảng của panen nào đó thì tác dụng của  $P = 1$  lên dầm chính bằng phản lực của dầm phụ 2-3 (hình 7.15a).

$$P_2 = \frac{1 \cdot (d - z)}{d} ; \quad P_3 = \frac{1 \cdot z}{d},$$

trong đó :  $d$  là chiều dài panen.

Trong trường hợp này đại lượng  $S$  do  $P = 1$  gây ra sẽ là :

$$S = P_2 y_2 + P_3 y_3 = \frac{d - z}{d} y_2 + \frac{zy_3}{d} \quad (7.14)$$

trong đó :  $y_2, y_3$  là tung độ dầm  $S$  ở các nút 2 và 3.

Phương trình đường thẳng (7.14) cho thấy tại  $Z = 0$  và  $Z = d$  thì  $S = y_2$  và  $y_3$ . Do đó dầm  $S$  của dầm chính khi  $P = 1$  nằm giữa nút 2 và 3 là một đoạn thẳng nối đỉnh các tung độ nút  $y_2$  với  $y_3$ . Đoạn thẳng này gọi là đoạn chuyển tiếp. Các đoạn chuyển tiếp còn lại khi  $P = 1$  di động trên các panen cũng được làm tương tự.

Vì vậy để vẽ đường ảnh hưởng khi truyền tải nút ta tiến hành như sau :

Bước 1 : Vẽ đah S với giả thiết hệ không có các chi tiết truyền lực ( $P = 1$  di động trực tiếp trên chi tiết chịu lực chính).

Bước 2 : Xác định tung độ đah S vừa tìm được dưới các nút truyền lực và nối các tung độ này với nhau bằng các đoạn thẳng. Đa giác nhận được sau khi nối là đah S khi truyền tải nút cần tìm. Trên cơ sở đó các đah  $Q_c$ , đah  $M_c$  ở mặt cắt C của dầm đơn giản chịu truyền tải nút được cho ở các hình 7.16.

## §6. CÁC PHƯƠNG PHÁP VẼ ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA DÀN THƯỜNG GẶP TRONG KỸ THUẬT

Tương tự khi tính toán dầm chịu tải trọng bất động người ta chia cách vẽ đường ảnh hưởng bằng phương pháp tính thành ba phương pháp : mặt cắt, mômen và tách nút. Có thể xây dựng đường ảnh hưởng bằng phương pháp động, tuy nhiên trong trường hợp kết cấu dầm thì phương pháp tĩnh đơn giản và thuận lợi hơn.

### a/ Phương pháp mômen

Giả sử cần vẽ đah  $N_{7-9}$  trong thanh 7-9 của dàn trên hình 17a, khi tải trọng  $P = 1$  di động ở cánh trên và ở phía phải nút 8. Ta thực hiện mặt cắt 1-1 và xét cân bằng phần bên trái mặt cắt này (hình 7.17b)

$$\sum m_8 = A \cdot 4d - N_{7-9}h = 0$$

Do đó

$$N_{7-8} = 4A \frac{d}{h} = \frac{M_8}{h} \quad (a)$$

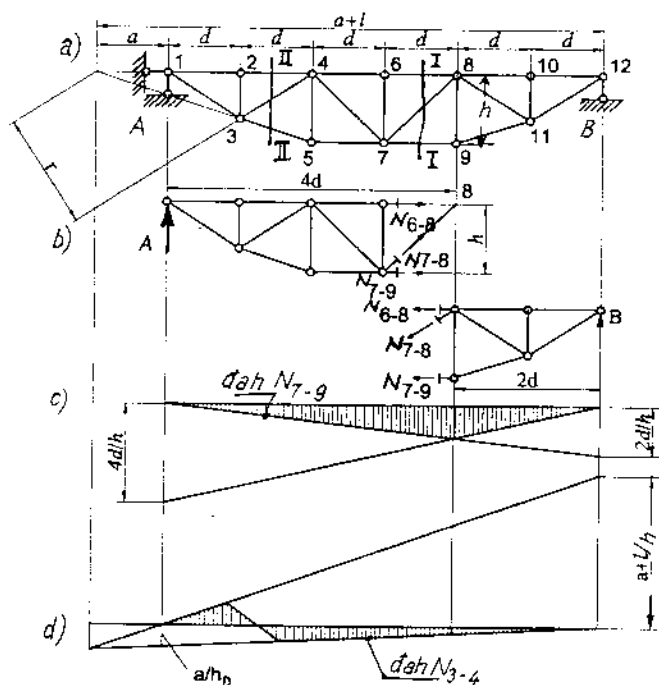
Trong đó  $M_8 = 4Ad$  là mômen uốn trong dầm trên hai gối tựa ở mặt cắt có cùng hoành độ với điểm 8 lấy mômen.

Khi  $P = 1$  di động bên trái nút 6 thì lực dọc  $N_{7-9}$  được tìm từ điều kiện (hình 17b) :

$$\sum M_8 = -B_2d + N_{7-9}h = 0$$

Hay

$$N_{7-9} = \frac{2B_2d}{h} = \frac{M_8}{h} \quad (b)$$



Hình 7.17

Có kết quả (a) và (b), ta có thể xây dựng đah N khi sử dụng ngay đường ảnh hưởng của mômen của dầm đơn giản mà đỉnh của đah  $N_{7-9}$  nằm ở điểm lấy mômen (điểm 8). Đah  $N_{7-9}$  khi  $P = 1$  di chuyển giữa hai nút của panen 6-8 trùng với đường ảnh hưởng trái của mômen  $M_8$ . Đah  $N_{7-9}$  được vẽ trên hình 7.17d.

Ta xét một ví dụ khác, cụ thể đah  $N_{3-4}$  được xây dựng như thế nào? Muốn vậy, hãy thực hiện mặt cắt II-II (hình 7.17a). Khi  $P = 1$  nằm ở bên phải panen bị cắt thì điều kiện cân bằng phần trái dầm là :

$$\sum m_o = A \cdot a + N_{3-4} \cdot r = 0$$

Hay

$$N_{3-4} = -A \frac{a}{r} \quad (a)$$

Khi  $P = 1$  nằm bên trái của panen bị cắt thì điều kiện cân bằng phần dầm bên phải cho ta :

$$\sum m_o = B(a + l) + N_{3-4} \cdot r = 0$$

Do đó

$$N_{3-4} = \frac{B(a + l)}{r} \quad (b)$$

Các đường thẳng (a) và (b) chỉ khác nhau A và B về tung độ và chúng giao nhau ở chính điểm lấy mômen (điểm O). Do tải trọng chất lên dàn thuộc loại truyền tải nút (xem mục §5 của chương này) cho nên khi  $P = 1$  di động trong giới hạn của panen bị cắt thì dầm  $N_{3-4}$  trong đoạn này là đoạn chuyển tiếp nối các tung độ dầm  $N_{3-4}$  ứng với các hoành độ các nút 2 và 4 (hình 7.17).

#### *b/ Phương pháp hình chiếu*

Trong trường hợp không thể tìm được điểm lấy mômen (đối với các đoạn dàn có cánh song song) ta phải sử dụng phương pháp hình chiếu. Giả sử cần xây dựng dầm  $N_{5-6}$  đối với dàn (hình 7.18a).

Ta xét 2 trường hợp tải trọng  $P = 1$  di chuyển ở cánh trên và ở cánh dưới. Trong cả hai trường hợp ta thực hiện mặt cắt 1-1. Khi  $P = 1$  nằm ở phía phải của phần dàn bị cắt thì điều kiện cân bằng phần trái là :

$$\sum Y = A + N_{5-6} = 0$$

$$\text{Từ đây rút ra : } N_{5-6} = -A$$

Tương tự khi  $P = 1$  nằm bên trái phần bị cắt thì điều kiện cân bằng phần phải sẽ là :

$$\sum Y = B - N_{5-6} = 0 \Rightarrow N_{5-6} = B \quad (b)$$

Chú ý khi  $P = 1$  di động ở cánh trên của dàn thì phần dàn bị cắt là đoạn 4-6. Do đó đoạn đường ảnh hưởng chuyển tiếp ở trong khoảng panen này (hình 7.18b). Khi  $P = 1$  di chuyển ở cánh dưới thì đoạn panen bị cắt là đoạn 5-7 và đoạn đường ảnh hưởng chuyển tiếp nằm trong giới hạn của đoạn này (hình 7.18c).

Nếu cần phải xây dựng dầm  $N_{6-7}$  ta thực hiện mặt cắt II-II và viết phương trình cân bằng dưới dạng hình chiếu, ta có :

Khi  $P = 1$  di động ở phần phải của dàn :

$$N_{6-7} \cos \alpha = A \quad (c)$$

Khi  $P = 1$  di động ở phần trái của dàn :

$$N_{6-7} \cos \alpha = -B \quad (d)$$

Từ các phương trình (c) và (d), đanh  $N_{6-7}$  được cho trên hình 7.18d. Đoạn chuyển tiếp của đanh  $N_{6-7}$  dưới panen 6-8 không phụ thuộc vào  $P = 1$  di động ở cánh trên hay cánh dưới.

c/ Phương pháp tách nút

Trong một số trường hợp hai phương pháp nói trên không thể sử dụng được bởi vì không thể thực hiện được một mặt cắt chỉ cắt 3 thanh. Ví dụ cần vẽ đanh  $N_{4-5}$  (hình 7.19a) thì các mặt cắt I-I và II-II cắt 4 thanh. Do đó từ điều kiện cân bằng của phần dàn đã cắt ra không đủ để xác định  $N_{4-5}$ . Tuy nhiên nếu tách nút 5 và thiết lập điều kiện cân bằng nút dưới dạng của các lực đồng quy tại 5 ta có :

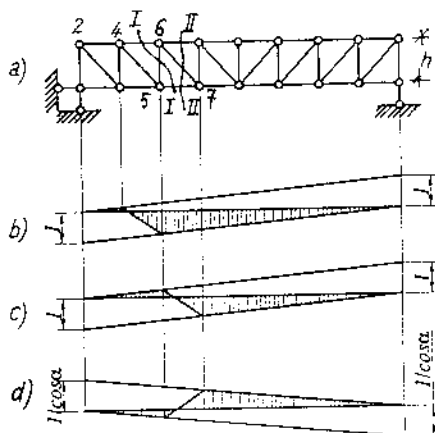
$$\sum Y = N_{4-5} + N_{3-5} \sin \beta = 0 ;$$

suy ra

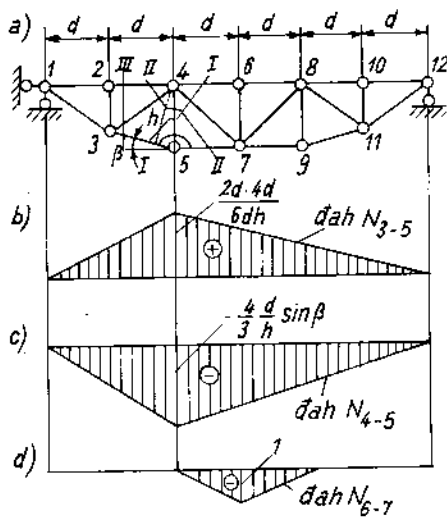
$$N_{4-5} = -N_{3-5} \sin \beta$$

Thực hiện mặt cắt III-III và lấy mômen với điểm 4 ta được  $N_{3-5}$ . Do đó đanh  $N_{4-5}$  có thể nhận được từ đanh  $N_{3-5}$  (hình 7.19b) bằng cách tăng tung độ của nó lên  $(-\sin \beta)$  lần. Trên hình 7.19c là đanh  $N_{4-5}$ .

Tương tự như trên để xây dựng đanh  $N_{6-7}$  ta phải tách nút 6 và xét điều kiện cân bằng nút này :



Hình 7.18



Hình 7.19

Khi  $P = 1$  đặt vào nút bất kỳ trừ nút 6 :

$$\sum Y = N_{6-7} = 0$$

Khi  $P = 1$  đặt vào nút 6 :

$$\sum Y = -N_{6-7} - P = 0 \Rightarrow N_{6-7} = -P = -1$$

Dah  $N_{6-7}$  là các đoạn chuyển tiếp nằm giữa các nút 4, 6, 8 (hình 7.19d)

## §7. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỰC TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG CẦN TÍNH BẰNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

Nhờ dah  $S$  và nguyên lý độc lập tác dụng người ta có thể xác định giá trị của đại lượng cần tính  $S$  do tải trọng tĩnh và di động ở những vị trí khác nhau gây ra như đã mô tả trong mục §1 của chương này. Tuy nhiên trong tính toán thiết kế cũng như kiểm tra ta cần biết giá trị cực trị của đại lượng này. Ví dụ khi tính toán dầm chịu tác dụng của tải trọng di động thì lực dọc trong từng thanh dầm luôn bị đổi dấu phụ thuộc vào vị trí đoàn tải trọng di động. Do đó để tính toán các thanh dầm về độ bền và ổn định cần phải biết được ở vị trí nào của tải trọng di động các lực dọc kéo và nén trong thanh là lớn nhất. Vị trí này của tải trọng di động được gọi là vị trí bất lợi nhất.

Khi tính toán các dầm (hoặc dàn) chịu tác dụng của tải trọng di động dưới dạng của một hệ lực tập trung song song (ví dụ áp lực của các bánh xe) ta có thể giải quyết bài toán về vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng như sau : Nếu tải trọng di động nằm trong phần dầm có các tung độ dương cực đại của dah  $S$  thì đại lượng  $S$  cần tìm được xác định theo công thức (7.1), (7.2) (7.3) sẽ cho giá trị dương cực đại. Trong trường hợp vị trí của tải trọng di động nằm trên đoạn dah  $S$  có tung độ âm lớn nhất (về trị tuyệt đối) thì đại lượng  $S$  tính theo công thức (7.1), (7.2), (7.3), sẽ cho giá trị cực tiểu theo trị đại số. Trong trường hợp khi dah  $S$  gồm nhiều đoạn thẳng thì giá trị lớn nhất của  $S$  có được nếu một trong các tải trọng tập trung được đặt vào vị trí tương ứng với điểm gãy (đỉnh) của đường ảnh hưởng của nó. Để tính toán nhanh các đại lượng cần tính  $S$  ta có thể giải quyết như sau :

Giả sử đoàn tải trọng di động đã ở vị trí bất lợi nhất khi dah  $S$  có dạng một hoặc nhiều đoạn thẳng ta có thể tính nhanh  $S$  dựa vào định lý Varignon trong cơ lý thuyết (hình 7.20a,b) cụ thể là :

Gọi  $R$  là hợp lực của các tải trọng tác dụng trên đoạn thẳng đanh  $S$  (hình 7.20a). Theo công thức 7.2 ta có :

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b q(z) y dz = \operatorname{tg} \alpha \int_a^b q(z) z dz = \\ &= R \cdot a_R \operatorname{tg} \alpha = R y_R \end{aligned} \quad (7.15)$$

trong đó :  $a_R$  là khoảng cách từ hợp lực  $R$  đến gốc tọa độ ;

$y_R$  là tung độ của đanh  $S$  ở vị trí hợp lực  $R$

Khi tải trọng phân bố có dạng bậc nhất (hình 7.20b) ta chia tải trọng thành 2 phần : chữ nhật và tam giác với các tung độ tương ứng  $q_2$  và  $q_1 - q_2$ , cũng như vậy đối với diện tích được giới hạn bởi đanh  $S$  với trục hoành và các tung độ đanh  $S$  tại  $Z_1 = a$  và  $Z_2 = b$ . Tích phân (7.15) cho thấy có thể tính nhanh đại lượng  $S$  bằng cách nhân biểu đồ Verechtchaguine. Cụ thể là :

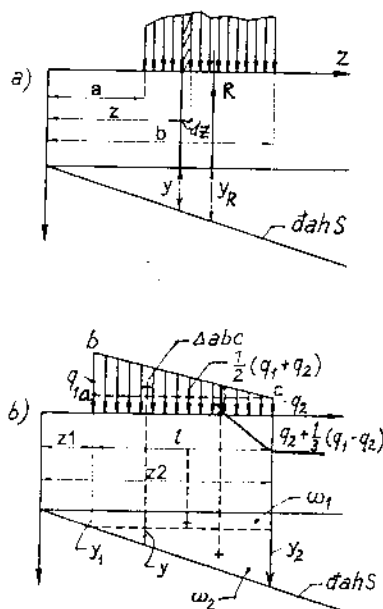
$$\begin{aligned} S &= \Omega_1 g_{c1} + \Omega_2 g_{c2} = y_1 l \left[ q_2 + \frac{1}{2} (q_1 - q_2) \right] + \frac{1}{2} (y_2 - y_1) l \\ &\quad \left[ q_2 + \frac{1}{3} (q_1 - q_2) \right] \end{aligned} \quad (7.16)$$

trong đó  $\Omega_1$  và  $\Omega_2$  lần lượt là diện tích biểu đồ đanh  $S$  dạng chữ nhật và tam giác ;

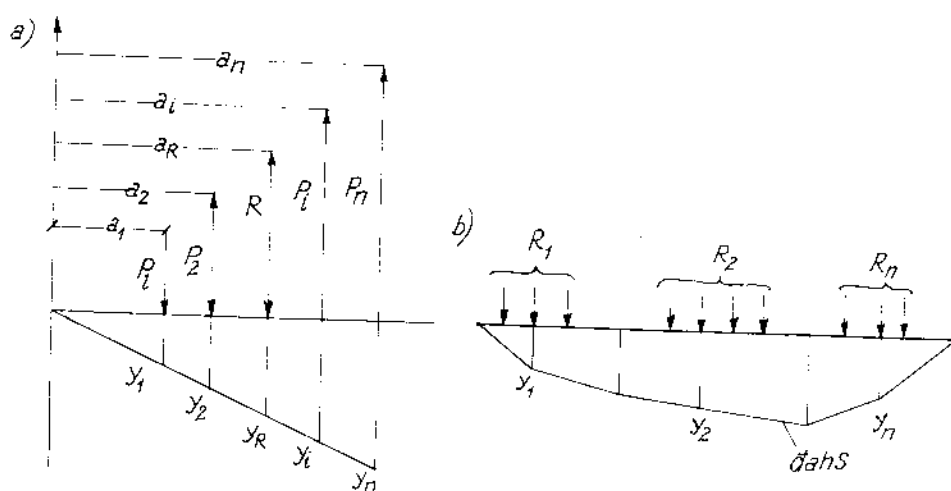
$g_{c1}$  và  $g_{c2}$  là tung độ của biểu đồ tải trọng ứng với hoành độ trọng tâm các diện tích  $\Omega_1$  và  $\Omega_2$ . Trong trường hợp này có thể thực hiện theo trình tự ngược lại.

Trường hợp nhiều lực tập trung trên đoạn thẳng đanh  $S$  thì (hình 7.21a) theo định lý Varignon ta có thể viết :

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^n P_i a_i = \operatorname{tg} \alpha R \cdot a_R = R \cdot y_R \quad (7.17)$$



Hình 7.20



Hình 7.21

Trong trường hợp đah S là một đa giác thì đại lượng S được xác định tương tự (7.17) cụ thể là :

$$S = \sum_{i=1}^n R_i y_i, \quad (7.18)$$

trong đó  $R_i$  và  $y_i$  lần lượt là hợp lực của nhóm lực thứ  $i$  và tung độ của đah S ứng với vị trí của  $R_i$ ,  $n$  là số đoạn đah S trên đó có lực tác dụng.

### §8. VỊ TRÍ BẤT LỢI NHẤT CỦA TẢI TRỌNG DI ĐỘNG ĐỐI VỚI CÔNG TRÌNH

Trong chế tạo máy, tải trọng di động thường là hệ gồm hai hoặc ba tải trọng tập trung. Trong trường hợp này việc tìm vị trí tải trọng bất lợi nhất được thực hiện bằng cách so sánh tổng các tích  $\sum P_i y_i$  với những vị trí có thể của  $P_i$ . Chúng ta sẽ minh họa những điều nói trên qua ví dụ sau đây: Hãy xác định lực dọc cực đại, cực tiểu trong thanh chéo D của dầm (hình 7.22a). Đường ảnh hưởng  $N_D$  được cho trên hình 7.22b. Trọng lượng bản thân được xem là phân bố đều  $q = 2\text{kN/m}$ . Tải trọng di động là hệ hai lực tập trung song song cách nhau một đoạn  $b = 2\text{m}$  với trị số  $P_1 = 30\text{ kN}$ ,  $P_2 = 40\text{ kN}$ . Các lực này là áp lực của bánh xe tác dụng lên cánh trên của dầm.



Lực dọc  $N_{Dq}$  do trọng lượng bản thân gây ra (theo 7.3) là :

$$N_{Dq} = \Omega_1 q - \Omega_2 q = \frac{1}{2} y_1 \left[ 6 + \frac{3}{4} \cdot 2 \right] q - \frac{1}{2} y_3 \left[ 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 \right] q = 5,6 \text{ kN}$$

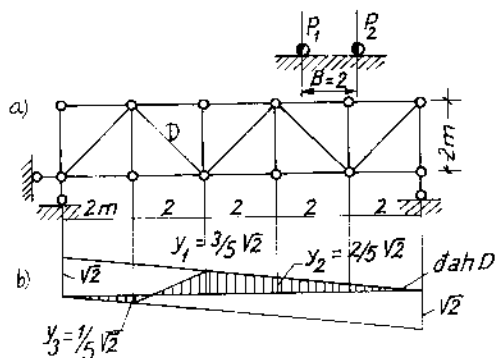
Khi các lực  $P_1$  và  $P_2$  đứng ở vị trí có tung độ  $y_1$  và  $y_2$  của đanh  $N_D$  thì độ lớn của  $N_D$  là :

$$N_{Dmax} = N_{Dq} + P_1 y_1 + P_2 y_2 = 5,6 + 30 \cdot \frac{3}{5} \sqrt{2} + 40 \cdot \frac{2}{5} \sqrt{2} = 53,6 \text{ kN}$$

Nếu  $P_2$  đứng ở vị trí có tung độ  $y_3$  thì  $N_D$  là cực tiểu theo trị đại số, cụ thể là :

$$N_{Dmin} = N_{Dq} - P_2 y_3 = 5,6 - \frac{40}{5} \sqrt{2} = -5,6 \text{ kN}$$

Từ những vấn đề đã giới thiệu ở trên rút ra là ta có thể tính được giá trị cực đại của đại lượng cần tính  $S$  theo một dạng đanh  $S$  xác định. Tuy nhiên vấn đề đặt ra là đanh  $S$  nào trong số tập hợp vô số những đanh  $S$  có thể xây dựng được để với đanh  $S$  đó sẽ cho giá trị lớn nhất về trị tuyệt đối của đại lượng cần tính trong số những giá trị lớn nhất ứng với những đanh  $S$  khác nhau. Ta hãy xét một ví dụ đơn giản thường gặp trong chế tạo máy. Đó là đoàn tải trọng gồm hai lực tập trung song song  $P_1$  và  $P_2$  có khoảng cách không đổi giữa chúng di động trên dầm hai gối tựa (hình 7.23).



Hình 7.22

Khi lực  $P_1$  cách gối tựa một đoạn  $Z$  biểu đồ mômen uốn có dạng trên hình 7.23b. Từ biểu đồ này ta thấy mômen uốn lớn nhất ở mặt cắt đặt lực  $P_1$  ( $P_1 > P_2$ ).

Khi gọi  $R$  là hợp lực của hệ lực  $P_1, P_2$  cách lực  $P_1$  một đoạn  $a$  thì phản lực gối  $A = \frac{R(l - z - a)}{l}$ .

Mômen ở mặt cắt đặt lực  $P_1$  là :

$$M_1 = A \cdot z = R(l - z - a) \cdot \frac{z}{l}$$

Điều kiện để  $M_1$  đạt được giá trị cực đại là :

$$\frac{dM_1}{dz} = \frac{R}{l}(l - 2z - a) = 0$$

$$\text{Suy ra : } z = z^* = \frac{l}{2} - \frac{a}{2}$$

Mặt cắt "K" có hoành độ  $Z^* = l/2 - a/2$  là mặt cắt nguy hiểm nhất của dầm. Đó là mặt cắt cần phải xây dựng dầm  $M_k$ . Kết quả trên cũng cho thấy lực  $P_1$  phải bố trí như thế nào đó để chiều dài nửa nhịp ( $l/2$ ) nằm giữa tải trọng lớn nhất  $P_1$  và hợp lực  $R$  (hình 7.23c).

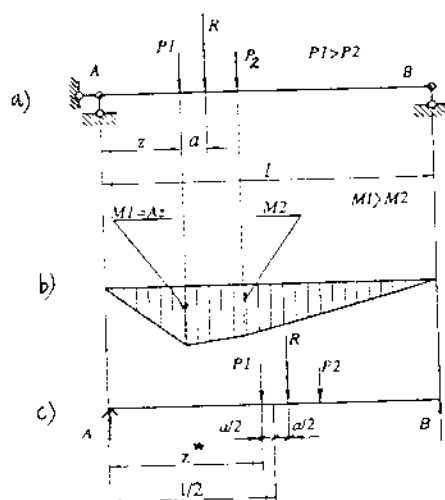
Bài toán về việc xác định vị trí nguy hiểm nhất của công trình khi chịu tải trọng di động mà với vị trí ấy cần phải xây dựng dầm  $S$  là một bài toán có ý nghĩa rất lớn.

Việc giải quyết mục tiêu này của bài toán đã được thực hiện tương đối thỏa mãn trong các công trình [11], [29], [22].

## §9. CÁCH TÍNH DẦM LIÊN TỤC CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

Nguyên tắc tính dầm liên tục chịu tải trọng di động (bằng đường ảnh hưởng) cũng tương tự như nguyên tắc tính hệ siêu tĩnh nói chung chịu tải trọng di động. Tuy nhiên khi tính toán cụ thể thì việc xây dựng đường ảnh hưởng của các đại lượng nghiên cứu trong dầm liên tục có phần đơn giản và dễ dàng hơn so với các hệ siêu tĩnh khác.

Muốn vẽ đường ảnh hưởng của một đại lượng bất kì trong dầm liên tục, trước tiên ta cần phải vẽ các đường ảnh hưởng cơ bản tức là các đường ảnh hưởng của các mômen tựa.



Hình 7.23

### 1. Đường ảnh hưởng của các mômen tựa

Lần lượt cho tải trọng  $P = 1$  di động trong từng nhịp dầm, thiết lập các phương trình đường ảnh hưởng của mômen tựa tương ứng với các vị trí của tải trọng, tiếp đó vẽ các đường ảnh hưởng của mômen tựa theo các phương trình vừa tìm được.

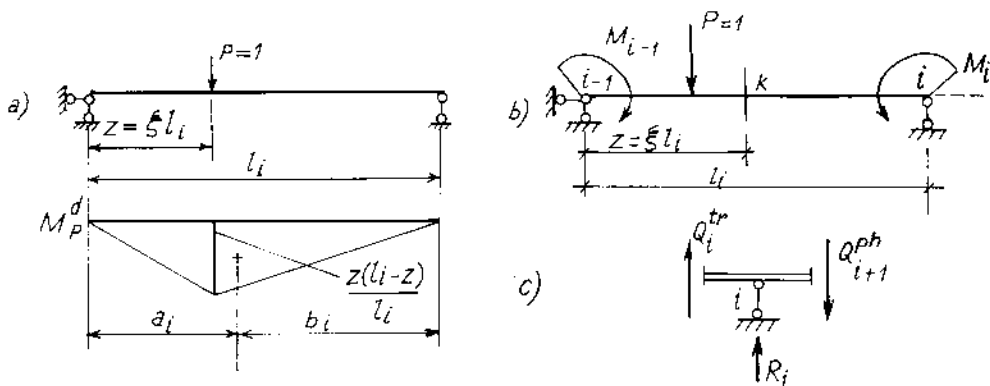
Để thiết lập phương trình đường ảnh hưởng ta có thể dùng một trong hai phương pháp sau : phương pháp ba mômen và phương pháp tiêu cự mômen. Sau đây ta sẽ sử dụng phương pháp tiêu cự mômen để thiết lập đường ảnh hưởng.

Khi tải trọng  $P = 1$  di động trên nhịp thứ  $i$  theo (4.40) ta có

$$M_{i-1} = - \frac{6J_0\omega_i}{\lambda_i l_i J_i} \cdot \frac{(b_i k'_i - a_i)}{k_i k'_i - 1}$$

$$M_i = - \frac{6J_0\omega_i}{\lambda_i l_i J_i} \cdot \frac{(a_i k_i - b_i)}{k_i k'_i - 1}$$

Giả sử rằng tải trọng  $P = 1$  đặt tại vị trí  $z = \xi l_i$  kể từ đầu trái của nhịp ( $\xi$  : hệ số không thứ nguyên, xác định 1 phần nhịp thứ  $i$  được đặt bên trái lực  $P = 1$ ). Trên hình 7.24a biểu diễn biểu đồ mômen uốn  $M_p^d$  đối với nhịp này.



Hình 7.24

$$\text{Diện tích của biểu đồ : } \omega_i = \frac{z(l_i - z)}{2}$$

Khoảng cách từ trọng tâm của biểu đồ đến gối trái và gối phải là :

$$a_i = \frac{1}{2} (l_i + z) \quad ; \quad b_i = \frac{1}{3} (2l_i - z)$$

Thay các giá trị của  $\omega_i$ ,  $a_i$  và  $b_i$  tìm được ở trên vào hệ phương trình (7.19) ta có :

$$M_{i-1} = - \frac{J_o}{\lambda_i J_i} l_i^2 \frac{f_1(\xi) k'_i - f_2(\xi)}{k_i k'_i - 1} \quad (7.20)$$

$$M_i = - \frac{J_o}{\lambda_i J_i} l_i^2 \frac{f_2(\xi) k_i - f_1(\xi)}{k_i k'_i - 1} \quad (7.21)$$

Trong đó :

$$\xi = \frac{z}{l_i}$$

$$f_1(\xi) = \xi(1 - \xi)(2 - \xi)$$

$$f_2(\xi) = \xi(1 - \xi^2)$$

Phương trình (7.20), (7.21) xác định tung độ đường ảnh hưởng mômen  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  phát sinh trong các mặt cắt gối của nhịp chịu tải.

Trong trường hợp dầm liên tục có khớp tựa ở đầu, các biểu thức (7.20) và (7.21) có dạng vô định. Sau khi khử dạng vô định ta được :

- Khi tải trọng  $P = 1$  di động trong nhịp đầu tiên (nhịp 1)

$$M_1 = - \frac{J_o}{\lambda_1 J_1} l_1^2 \frac{f_2(\xi)}{k'_1} \quad (7.22)$$

- Khi tải trọng  $P = 1$  di động trong nhịp cuối cùng  $n$  :

$$M_{n-1} = - \frac{J_o}{\lambda_n J_n} l_n^2 \frac{f_1(\xi)}{k_n} \quad (7.23)$$

Đường ảnh hưởng của các mômen tựa khác khi  $P = 1$  di động trong nhịp thứ  $i$  được xác định theo các mômen tựa  $M_{i-1}$  và  $M_i$  như sau :

- Đường ảnh hưởng của các mômen tựa ở bên trái gối  $i-1$  :

$$\text{đ.a.h.}M_{i-2} = -\frac{\text{đ.a.h.} \cdot M_{i-1}}{k_{i-1}} ; \text{đ.a.h.}M_{i-3} = -\frac{\text{đ.a.h.} \cdot M_{i-2}}{k_{i-2}} ; \text{v.v...} \quad (7.24)$$

- Đường ảnh hưởng của các mômen tựa ở bên phải gối  $i$  :

$$\text{đ.a.h.}M_{i+1} = -\frac{\text{đ.a.h.} \cdot M_i}{k'_{i+1}} ; \text{đ.a.h.}M_{i+2} = -\frac{\text{đ.a.h.} \cdot M_{i+1}}{k'_{i+2}} ; \text{v.v...} \quad (7.25)$$

Công thức (7.24), (7.25) cho phép tính toán tung độ đ.a.h của các mômen ở các tiết diện gối khi mà tải trọng  $P = 1$  nằm trong phạm vi nhịp thứ  $i$ . Để xây dựng đ.a.h các mômen gối trên tất cả các nhịp của dầm ta cho lực  $P = 1$  không thứ nguyên di động tuần tự từ nhịp này sang nhịp khác và khi ấy, cứ mỗi lần ta lại sử dụng các công thức từ (7.20) đến (7.25) để thiết lập các đường ảnh hưởng mômen gối tựa tương ứng.

Cụ thể cho  $P = 1$  di động trong các nhịp 1, 2,...,  $n$  ta sẽ xác định được các phương trình đường ảnh hưởng mômen tựa tương ứng. Căn cứ vào những phương trình này ta sẽ vẽ được các đường ảnh hưởng cần tìm.

## 2. Đường ảnh hưởng của mômen uốn và lực cắt trong nhịp

Theo (4.24) và (4.25) (hình 4.18 và 7.24b) ta có thể thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của mômen uốn và lực cắt tại tiết diện bất kì  $k$  thuộc nhịp thứ  $i$  nằm cách gối  $(i - 1)$  một khoảng là  $Z$  :

$$\text{đ.a.h.}M_k = \text{đ.a.h.}M_k^d + \left(\text{đ.a.h.}M_{i-1}\right)\frac{l_i - z_k}{l_i} + \left(\text{đ.a.h.}M_i\right)\frac{z_k}{l_i} \quad (7.26)$$

$$\text{đ.a.h.}Q_k = \text{đ.a.h.}Q_k^d + \left(\text{đ.a.h.}M_i - \text{đ.a.h.}M_{i-1}\right)\frac{1}{l_i} \quad (7.27)$$

Vậy đường ảnh hưởng của mômen uốn tại tiết diện  $k$  thuộc nhịp thứ  $i$  và nằm cách gối  $(i-1)$  một khoảng bằng  $z_k$  là tổ hợp của ba đường ảnh hưởng :

- Đường ảnh hưởng của mômen uốn tại tiết diện  $k$  đó trong hệ cơ bản, tức là trong dầm đơn giản có nhịp  $l_i$  (xem §2 và §3).

- Đường ảnh hưởng của mômen tựa  $M_{i-1}$  sau khi đã nhân các tung độ với thừa số  $\frac{(l_i - z_k)}{l_i}$ .

- Đường ảnh hưởng của mômen tựa  $M_i$  sau khi đã nhân các tung độ với

thừa số  $\frac{z_k}{l_i}$ .

Đường ảnh hưởng của lực cắt tại tiết diện k thuộc nhịp thứ i là tổ hợp của các đường ảnh hưởng :

- Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện k đó trong dầm đơn giản chỉ có nhịp  $l_i$ .

- Hiệu của hai đường ảnh hưởng mômen tựa  $M_i$  và  $M_{i+1}$  sau khi đã nhân với thừa số  $1/l_i$ .

### 3. Đường ảnh hưởng của các phản lực gối tựa

Theo công thức (4.25) và hình 7.24c, ta có thể xác định phản lực tại gối tựa i như sau :

$$R_i = Q_{i+1}^{lr} - Q_i^{ph} = R_i^d + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i}$$

Vậy :

$$\begin{aligned} \text{đ.a.h.} R_i &= \text{đ.a.h.} R_i^d + (\text{đ.a.h.} M_{i-1}) \frac{1}{l_i} - \\ &- (\text{đ.a.h.} M_i) \left( \frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) + (\text{đ.a.h.} M_{i+1}) \frac{1}{l_{i+1}} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Đường ảnh hưởng của phản lực tại gối i là tổng của các đường ảnh hưởng :

- Đường ảnh hưởng của phản lực tại gối i trong hệ cơ bản.

- Đường ảnh hưởng của mômen tựa  $M_{i-1}$  sau khi đã nhân với thừa số  $1/l_i$ .

- Đường ảnh hưởng của mômen tựa  $M_i$  sau khi đã nhân với thừa số :  $\left( \frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right)$ .

- Đường ảnh hưởng của mômen tựa  $M_{i+1}$  sau khi đã nhân với thừa số  $1/l_{i+1}$ .

4. Ví dụ. Vẽ các đ.a.h của mômen, lực cắt tại tiết diện k và của phản lực tại gối 1 trong dầm liên tục vẽ trên hình 7.25.

Cho biết  $J_1 = J_4 = 400 \text{ cm}^4$

$$J_2 = J_3 = 600 \text{ cm}^4$$

a. Đường ảnh hưởng của các mômen tựa (d.a.h cơ bản)

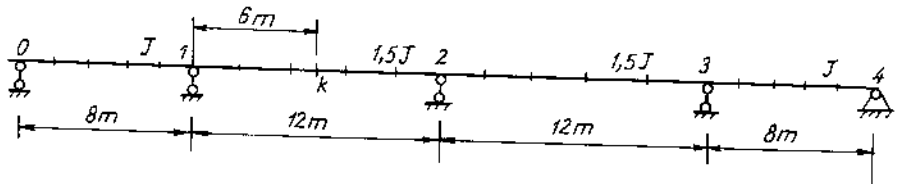
Chiều dài quy ước các nhịp :

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 8 \frac{J}{J} = 8 \text{ m} ; \lambda_2 = \lambda_3 = 12 \frac{J}{1,5J} = 8 \text{ m}$$

Xác định các tỷ số tiêu cự (theo 2.9 và 2.10)

$$k_1 = \infty ; k_2 = 4 ; k_3 = \frac{15}{4} ; k_4 = \frac{56}{15} ;$$

$$k'_4 = \infty, k'_3 = 4, k'_2 = \frac{15}{4}, k'_1 = \frac{56}{15}$$



Hình 7.25

Khi  $P = 1$  ở nhịp 1, theo (7.22) ta có :

$$M_1 = -\frac{J \cdot 8^2}{8J} \frac{f_2(\xi)}{\frac{56}{15}} = -\frac{15}{7} f_2(\xi)$$

Theo (7.25) ta có :

$$M_2 = -\frac{M_1}{k'_2} = \frac{4}{7} f_2(\xi) , \quad M_3 = -\frac{M_2}{k'_3} = \frac{1}{7} f_2(\xi)$$

- Khi  $P = 1$  ở nhịp 2, theo (7.20) và (7.21) ta có :

$$M_1 = -\frac{J}{8 \cdot 1,5J} 12^2 \frac{f_1(\xi) \frac{15}{4} - f_2(\xi)}{4 \cdot \frac{15}{4} - 1} = -\frac{45}{14} f_1(\xi) + \frac{6}{7} f_2(\xi)$$

$$M_2 = -\frac{J}{8 \cdot 1,5 J} 12^2 \frac{f_2(\xi) 4 - f_1(\xi)}{4 \cdot \frac{15}{4} - 1} = -\frac{24}{7} f_2(\xi) + \frac{6}{7} f_1(\xi)$$

Theo (7.25) ta có :

$$M_3 = -\frac{M_2}{k_3} = -\frac{3}{14} f_1(\xi) + \frac{6}{7} f_2(\xi)$$

- Khi  $P = 1$  ở nhịp 3 :

$$M_2 = -\frac{J}{8 \cdot 1,5 J} 12^2 \frac{f_1(\xi) 4 - f_2(\xi)}{4 \cdot \frac{15}{4} - 1} = -\frac{24}{7} f_1(\xi) + \frac{6}{7} f_2(\xi)$$

$$M_3 = -\frac{J}{8 \cdot 1,5 J} 12^2 \frac{f_2(\xi) \frac{15}{4} - f_1(\xi)}{4 \cdot \frac{15}{4} - 1} = -\frac{45}{14} f_2(\xi) + \frac{6}{7} f_1(\xi)$$

Theo (7.24) ta có :

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{3}{14} f_2(\xi) + \frac{6}{7} f_1(\xi)$$

Khi  $P = 1$  ở nhịp 4, theo (7.23) ta có :

$$M_3 = -\frac{J}{8J} 8^2 \frac{f_1(\xi)}{\frac{56}{15}} = -\frac{15}{7} f_1(\xi)$$

Theo (7.24)

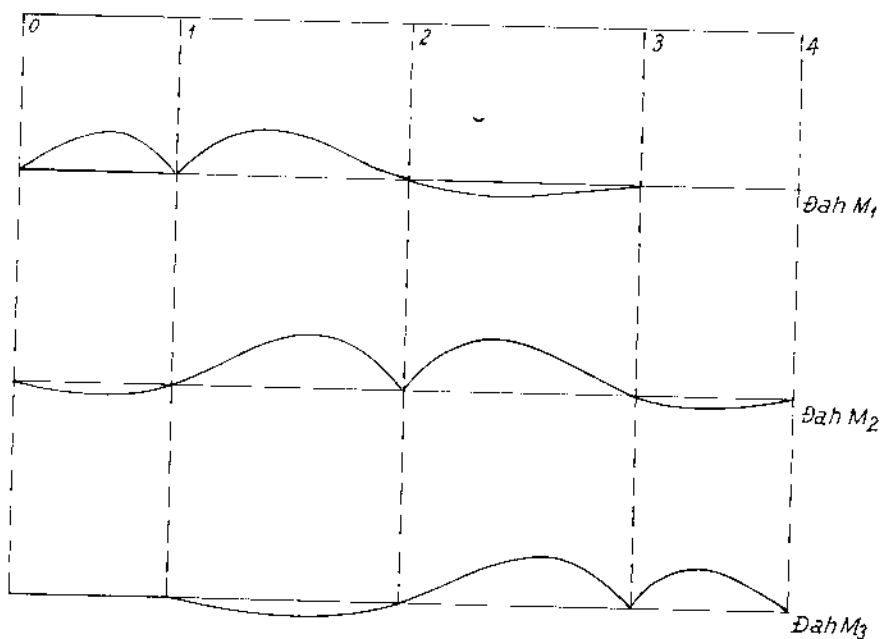
$$M_2 = -\frac{M_3}{k_3} = \frac{4}{7} f_1(\xi) , \quad M_1 = -\frac{M_2}{k_2} = -\frac{1}{7} f_1(\xi)$$

Lần lượt cho  $\xi = 0,0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; 0,8$  và  $1,0$  ta sẽ tính được giá trị tương ứng của các hàm  $f_1(\xi)$  và  $f_2(\xi)$ . Thay những giá trị này vào các phương trình đ.a.h. $M_1$ , đ.a.h. $M_2$  và đ.a.h. $M_3$  ta tính được các tung độ đường ảnh hưởng tại các giá trị  $\xi$  cho trước ở trên. Các tung độ của các đàh  $M_1$ , đàh  $M_2$ , đàh  $M_3$  được cho trong bảng 1. Trên cơ sở các số liệu trong bảng 1 các đường ảnh hưởng gối tựa  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  được cho trên hình 7.26.



b. Các đường ảnh hưởng của mômen uốn, lực cắt ở mặt cắt  $K$  và phản lực ở gối tựa 1

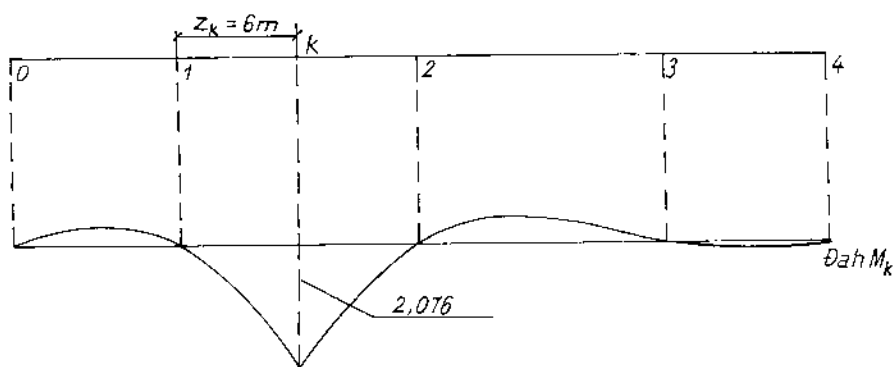
Theo các công thức (7.47), (7.48) và (7.49) ta tính các tung độ của các đường ảnh hưởng  $M_k$ ,  $Q_k$  và  $R_1$ . Các kết quả tính toán được liệt kê trong bảng 2. Các đường ảnh hưởng tương ứng được cho trên các hình (7.27), (7.28) và (7.29).



Hình 7.26. Các đường ảnh hưởng cơ bản  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$

**Bảng 1**

| Nhip | $\xi = z/l_i$ | Dah.M <sub>1</sub> | Dah.M <sub>2</sub> | Dah.M <sub>3</sub> |
|------|---------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1    | 0             | 0                  | 0                  | 0                  |
|      | 0,2           | -0,4114            | 0,1097             | -0,0274            |
|      | 0,4           | -0,7200            | 0,1920             | -0,0480            |
|      | 0,6           | -0,8228            | 0,2194             | -0,0549            |
|      | 0,8           | -0,6171            | 0,1646             | -0,0411            |
|      | 1             | 0                  | 0                  | 0                  |
| 2    | 0             | 0                  | 0                  | 0                  |
|      | 0,2           | -0,7611            | -0,4114            | 0,0128             |
|      | 0,4           | -0,9463            | -0,8229            | 0,2057             |
|      | 0,6           | -0,7508            | -1,0286            | 0,2571             |
|      | 0,8           | -0,3702            | -0,8228            | 0,2957             |
|      | 1             | 0                  | 0                  | 0                  |
| 3    | 0             | 0                  | 0                  | 0                  |
|      | 0,2           | 0,2057             | -0,8228            | -0,3703            |
|      | 0,4           | 0,2571             | -1,0286            | -0,7509            |
|      | 0,6           | 0,2057             | -0,8229            | -0,9463            |
|      | 0,8           | 0,1028             | -0,4114            | -0,7611            |
|      | 1             | 0                  | 0                  | 0                  |
| 4    | 0             | 0                  | 0                  | 0                  |
|      | 0,2           | -0,0411            | 0,1646             | -0,6171            |
|      | 0,4           | -0,0549            | 0,2194             | -0,8229            |
|      | 0,6           | -0,0480            | 0,1920             | -0,7200            |
|      | 0,8           | -0,0274            | 0,1097             | -0,4114            |
|      | 1             | 0                  | 0                  | 0                  |



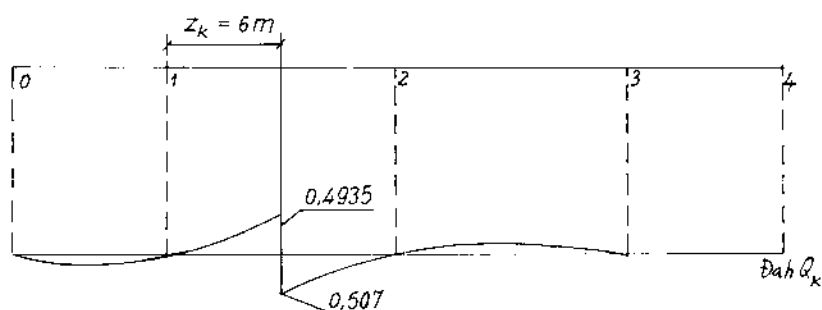
Hình 7.27. Đường ảnh hưởng mômen uốn  $M_k$  tại mặt cắt  $k$

Bảng 2

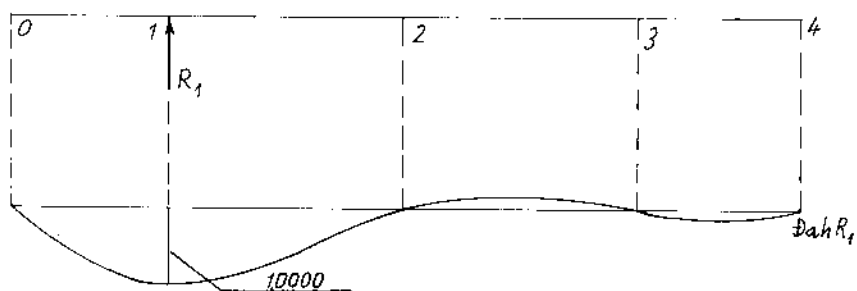
| Nhip | $\xi = z/l_i$ | Đah. $M_k$ | Đah. $Q_k$                                                        | Đah. $R_I$ |
|------|---------------|------------|-------------------------------------------------------------------|------------|
| 1    | 0             | 0          | 0                                                                 | 0          |
|      | 0,2           | -0,1509    | 0,0434                                                            | 0,2949     |
|      | 0,4           | -0,2640    | 0,0760                                                            | 0,5660     |
|      | 0,6           | -0,3017    | 0,0869                                                            | 0,7897     |
|      | 0,8           | -0,2263    | 0,0651                                                            | 0,9423     |
|      | 1             | 0          | 0                                                                 | 1          |
| 2    | 0             | 0          | 0                                                                 | 1          |
|      | 0,2           | 0,6137     | -0,1709                                                           | 0,9243     |
|      | 0,4           | 1,5154     | -0,3897                                                           | 0,7286     |
|      | 0,5           | 2,0760     | $\left\{ \begin{array}{l} +0,4935 \\ -0,5067 \end{array} \right.$ |            |
|      | 0,6           | 1,5103     |                                                                   | 0,4707     |
|      | 0,8           | 0,6034     | +0,1623                                                           | 0,2086     |
|      | 1             | 0          | 0                                                                 | 0          |

Tiếp bảng 2

| Nhip | $\xi = x/l_1$ | Đah. $M_k$ | Đah. $Q_k$ | Đah. $R_1$ |
|------|---------------|------------|------------|------------|
| 3    | 0             | 0          | 0          | 0          |
|      | 0,2           | -0,3087    | -0,0857    | -0,1114    |
|      | 0,4           | -0,3857    | -0,1071    | -0,1393    |
|      | 0,6           | -0,3086    | -0,0857    | -0,1114    |
|      | 0,8           | -0,1543    | -0,0429    | -0,0557    |
|      | 1             | 0          | 0          | 0          |
| 4    | 0             | 0          | 0          | 0          |
|      | 0,2           | 0,0617     | 0,0171     | 0,0223     |
|      | 0,4           | 0,0822     | 0,0229     | 0,0297     |
|      | 0,6           | 0,0720     | 0,0200     | 0,0260     |
|      | 0,8           | 0,0411     | 0,0114     | 0,0149     |
|      | 1             | 0          | 0          | 0          |



Hình 7.28. Đường ảnh hưởng lực cắt  $Q_k$



Hình 7.29. Đường ảnh hưởng phản lực  $R_1$

## **Chương 8**

# **ĐỘNG LỰC HỌC - KẾT CẤU**

### **I. HỆ MỘT BẬC TỰ DO**

Động lực học kết cấu là một phần quan trọng của cơ học ứng dụng, mục đích của nó là nghiên cứu sự làm việc của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng động đủ loại.

Kết cấu nói chung được đặc trưng bởi các đại lượng đặc trưng cho tính quán tính  $m$ ,  $J$  và thuộc tính đàn hồi để có thể thực hiện được các chuyển động tương đối dưới tác dụng của tải trọng động. Nếu những chuyển động này là chuyển động lặp lại thì ta gọi nó là những chuyển động dao động.

Thông thường người ta hiểu "ứng xử động" là các chuyển động sinh ra bởi các lực biến đổi khá nhanh theo thời gian và chúng sinh ra các lực quán tính trong từng chất điểm của kết cấu.

Giả thiết rằng quan hệ giữa các lực và chuyển động là quan hệ tuyến tính và do đó, các dao động được nghiên cứu là các dao động tuyến tính. Trong mục này ta sẽ nhắc lại một số khái niệm cơ bản về hệ dao động tuyến tính có một bậc tự do mà ta đã biết trong các môn cơ học cơ sở để tiện sử dụng.

Để mô tả sự ứng xử vật lý của một hệ như vậy, ta cần một mô hình toán học. Mỗi phần tử của mô hình toán học được đặc trưng bởi các tính chất vật lý của hệ dao động.

Trong quá trình chuyển động, xảy ra sự biến đổi liên tục về mật năng lượng : Thế năng biến dạng của hệ chuyển hóa thành động năng của vật dao động và ngược lại. Theo quan điểm cơ học, chuyển động được đặc trưng bởi sự biến thiên của chuyển vị  $x(t)$  và sự biến đổi của vận tốc  $v(t)$ . Chúng

là các hàm của thời gian mà từ đó người ta có thể xác định được thế năng và động năng của đối tượng dao động.

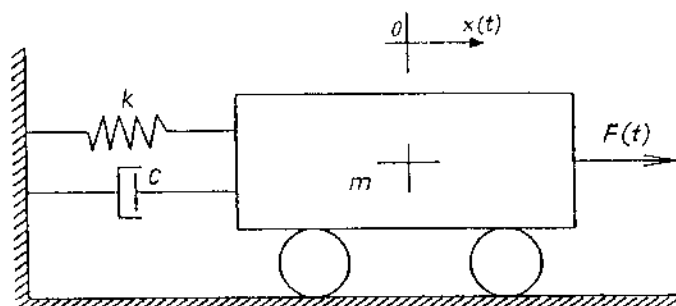
Các hệ dao động có năng lượng tổng không đổi được gọi là hệ bảo toàn, Chuyển động của chúng là những dao động tự do không cản.

Các hệ bị mất mát năng lượng do ma sát được gọi là các hệ không bảo toàn. Chúng thực hiện các chuyển động dao động tắt dần.

Khi một hệ liên tục nhận được kích động (năng lượng) từ bên ngoài, thì ta có các dao động cưỡng bức hoặc các dao động duy trì.

### §1. DAO ĐỘNG TỰ DO

Xét một hệ dao động có một bậc tự do được mô hình hóa từ một chiếc xe lăn như hình 8.1.



Hình 8.1

Khi đã xác định gốc tọa độ  $O$ , các yếu tố đặc trưng cho hệ (khối lượng, ma sát, độ cứng, ...) và lực kích động  $F(t)$ , phương trình tổng quát mô tả chuyển động sẽ có dạng sau :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (8.1)$$

trong đó :

$m$  - khối lượng của hệ dao động ;

$c$  - hệ số cản nhớt ;

$k$  - hệ số cứng của hệ đàn hồi, nghĩa là lực cần thiết phải đặt lên khối lượng  $m$  theo phương dao động để gây ra một chuyển vị bằng đơn vị :

$x(t)$  - tọa độ (li độ) xác định chuyển vị của khối lượng  $m$  theo chiều bậc tự do tại một thời điểm  $t$ .

Phương trình (8.1) có thể viết dưới dạng sau :

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t), \quad (8.2)$$

trong đó :  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , tính bằng radian/giây (rad/s) đại diện cho tần số góc của hệ dao động.

$$2\beta = \frac{c}{m} - \text{hệ số cản thu gọn ;}$$

$$C_{th} = 2m \cdot \omega = 2m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} - \text{hệ số cản tới hạn.}$$

Phương trình vi phân (8.2) có nghiệm tổng quát là :

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t), \quad (8.3)$$

trong đó :  $x_L(t)$  đặc trưng cho nghiệm của phương trình thuần nhất, tương ứng với các dao động riêng và  $x_F(t)$  là nghiệm của phương trình tương ứng với chế độ cưỡng bức.

Trong các phần sau, ta sẽ xét cụ thể từng trường hợp dao động : tự do, tắt dần và cưỡng bức.

### ***1. Các dao động tự do không cản (không tắt dần)***

Ta giả thiết là hệ dao động sẽ thực hiện các dao động tự do ngay sau khi bị một kích động ban đầu kết thúc trong một khoảng thời gian rất ngắn, Ta cũng thừa nhận trong trường hợp này, hệ là bảo toàn ( $c = 0$ ), nghĩa là không có sự mất mát năng lượng ra bên ngoài.

Phương trình (8.1) sẽ có dạng đơn giản nhất như sau :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (8.4)$$

và có nghiệm dưới dạng hàm điều hòa :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_L(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.5)$$

Trong đó hằng số tích phân  $A$  (biên độ của chuyển động) và  $\varphi$  (góc pha ban đầu, được tính thông qua các điều kiện ban đầu :

$$t = 0 ; x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = V_0$$

Đặc tính cơ bản của hệ dao động có một bậc tự do không cản là giá trị riêng đặc trưng bởi tần số vòng, tần số và chu kỳ. Biểu thức của các đại lượng đó như sau :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{X_T}} \approx \frac{31,32}{\sqrt{X_T}} , \text{ rad/s} ; \quad (8.6)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{X_T}} \approx \frac{5}{\sqrt{X_T}} , \text{ Hz} ; \quad (8.7)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{X_T}{g}} \approx 0,2 \sqrt{X_T} , \text{ s} ; \quad (8.8)$$

trong đó :  $m = Q/g$  - đặc trưng cho khối lượng của hệ dao động ( $Q$  là trọng lượng của khối lượng dao động ;

$\delta = \frac{1}{k}$  - hệ số độ mềm hay là chuyển vị đơn vị do một lực bằng một đơn vị đặt vào khối lượng  $m$  theo phương của bậc tự do gây ra ;

$x_T = Q \cdot \delta = Q/k$  - độ võng tĩnh, sinh ra do một lực bằng trọng lượng của  $m$  đặt vào  $m$  theo phương của bậc tự do gây ra.

Để giảm nhẹ việc tính toán chúng ta liệt kê trong bảng 8.1 các độ võng tĩnh, độ cứng và tần số vòng của một số dầm thường gặp.

## 2. Các dao động tự do có cản nhớt

Phương trình chuyển động trong trường hợp này có dạng :

$$\ddot{x}(t) + 2\beta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (8.9)$$

Để giải phương trình này, chúng ta cần xác định các nghiệm của phương trình đặc trưng :

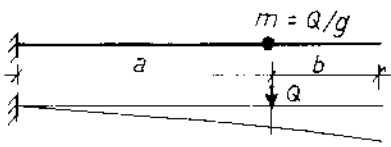
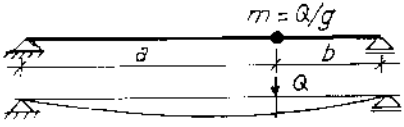
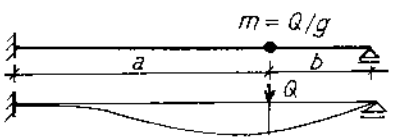
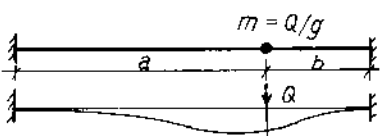
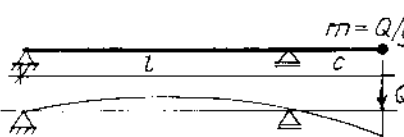
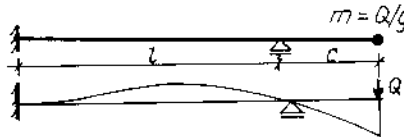
$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0, \quad (8.10)$$

$$\text{Cụ thể là : } r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \quad (8.11)$$



Tùy thuộc vào giá trị của nghiệm, ta có 3 trường hợp dẫn sau.

**Bảng 8.1**

| Sơ đồ                                                                               | Chuyển vị của<br>$m \times$          | Độ cứng $k$                          | $\omega$ (rad/s)                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------|
|    | $\frac{Qa^3}{3EI}$                   | $\frac{3}{a^3} EI$                   | $\sqrt{g \frac{3EI}{Qa^3}}$                   |
|    | $\frac{Qa^2b^2}{3(a+b)EI}$           | $\frac{3(a+b)}{a^2b^2} EI$           | $\sqrt{g \frac{3(a+b)EI}{Qa^2b^2}}$           |
|   | $\frac{Qa^3b^2(3a+4b)}{12(a+b)^3EI}$ | $\frac{12(a+b)^3}{a^3b^2(3a+4b)} EI$ | $\sqrt{g \frac{12(a+b)^3EI}{Qa^3b^2(3a+4b)}}$ |
|  | $\frac{Qa^3b^3}{(a+b)^3EI}$          | $\frac{(a+b)^3}{a^3b^3} EI$          | $\sqrt{g \frac{(a+b)^3EI}{Qa^3b^3}}$          |
|  | $\frac{Qc^2(l+c)}{3EI}$              | $\frac{3EI}{c^2(l+c)}$               | $\sqrt{g \frac{3EI}{Qc^2(l+c)}}$              |
|  | $\frac{Qc^2(3l+4c)}{12EI}$           | $\frac{12}{c^2(3l+4c)} EI$           | $\sqrt{g \frac{12EI}{Qc^2(3l+4c)}}$           |

### 3. Tắt dần tới hạn

Khi mà cân thức bằng không :

$$\beta^2 - \omega^2 = 0, \quad \text{ta có } \beta_{th} = \omega$$

$$\text{nên } \frac{C_{th}}{2m} = \omega \text{ từ đó } C_{th} = 2m\omega = 2\sqrt{mk} = \frac{2k}{\omega}$$

$C_{th}$  là hệ số cản tới hạn biểu diễn đặc tính riêng của hệ dao động.

Quan hệ giữa hệ số cản thực  $c$  và hệ số cản tới hạn  $C_{th}$  biểu thị mức cản tới hạn và có biểu thức như sau :

$$\nu = \frac{C}{C_{th}} = \frac{C}{2m\omega} = \frac{2m\beta}{2m\omega} = \frac{\beta}{\omega} \quad (8.12)$$

Mức cản tới hạn đặc trưng cho khả năng tắt dần bên trong của kết cấu khảo sát.

Trong trường hợp này :  $r_{1,2} = -\beta = -\nu\omega = -\omega$  ( $\nu$  có giá trị bằng đơn vị)

Nghiệm của phương trình (8.10) sẽ là :

$$x(t) = A \cdot e^{r_1 t} + B \cdot t \cdot e^{r_2 t} = e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t) \quad (8.13)$$

Khi thừa nhận rằng tại  $t = 0$  thì  $x(0) = x_0$  và  $\dot{x}(0) = V_0$ , ta có :

$$x(t) = e^{-\omega t} [X_0 + (V_0 + \omega X_0) \cdot t] \quad (8.14)$$

Ta nhận thấy chuyển động mô tả bởi phương trình (8.14) là chuyển động không điều hòa (đường cong 1, hình 8.2).

### 4. Tắt dần quá tới hạn

Trong trường hợp mà  $C > C_{th}$  ta nói độ tắt dần đã quá tới hạn, điều này dẫn đến  $\beta > \omega$  và  $\nu > 1$ . Do đó  $r_1$  và  $r_2$  là các số thực và đều âm. Nghiệm số của phương trình (8.10) sẽ là :

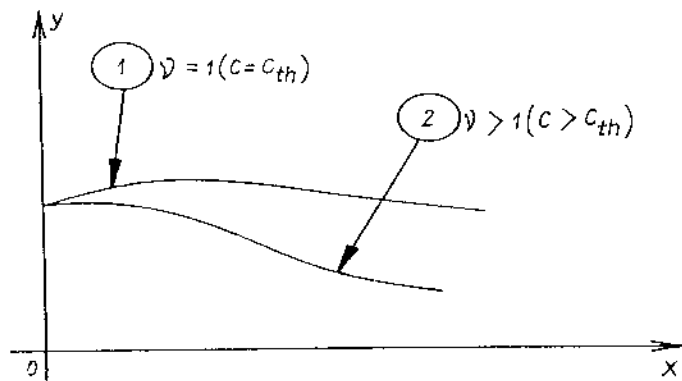
$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-\beta t} \left( Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \cdot t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2} \cdot t} \right) \quad (8.15)$$

Từ các điều kiện đầu ta có :

$$A = \frac{V_0 + x_0 (\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

$$B = -\frac{V_0 + x_0 (\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

Chuyển động này cũng là chuyển động không chu kỳ (đường cong 2, hình 8.2).



Hình 8.2

### 5. Tắt dần dưới tới hạn

Trong trường hợp này :  $C_{th} > C$ , do vậy  $\beta < \omega$  và các giá trị của căn thức sẽ là ảo :

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \quad (8.16)$$

hay là :  $r_{1,2} = -\beta \pm j\omega^*$

trong đó :  $\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$  đặc trưng cho tần số riêng của hệ khi ta kể tới ảnh hưởng của lực cản.

Phương trình mô tả chuyển động trong trường hợp này có dạng :

$$x(t) = e^{-\beta t} (A \cdot e^{j\omega^* t} + B e^{-j\omega^* t})$$

Hay là :  $x(t) = e^{-\beta t} (C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t)$  (8.17)

Từ đó có :  $x(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega^* t + \varphi) = A(t) \cdot \sin(\omega^* t + \varphi)$  (8.18)

với :  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  và  $\operatorname{tg} \varphi = C_2/C_1$ .

Từ các điều kiện đầu ta nhận được :

$$C_1 = \frac{V_0 + \beta x_0}{\omega} ; \quad C_2 = x_0$$

Cuối cùng ta có thể xác định được A và  $\varphi$ .

Trong trường hợp này các tần số vòng, tần số và chu kỳ khi dao động có cản được viết :

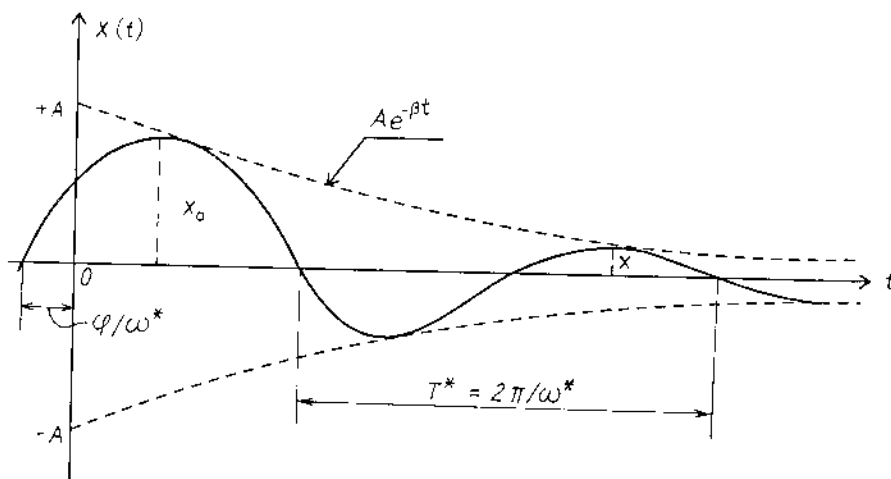
$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \nu^2} \approx \omega \quad (8.19)$$

$$f^* = f \sqrt{1 - \nu^2} \approx f \quad (8.20)$$

$$T^* = T \sqrt{1 - \nu^2} \approx T \quad (8.21)$$

Trong đa số các trường hợp người ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của sự cản bởi vì trong thực tế ta thường gặp :  $\nu < 0,1$ .

Đối với các hệ chỉ có một bậc tự do, ta còn tìm được một đặc tính cơ



Hình 8.3

bản nữa là độ cản tới hạn. Đặc tính này chỉ có thể được xác định theo thực nghiệm, bằng cách sử dụng gần đúng lượng giảm lôgarit của độ tắt dần  $\Delta$ .

Theo hình 8.3, trên đó ta miêu tả các nghiệm dao động riêng có cản (biểu thức 8.18). Sự tắt dần của dao động được xác định bởi lôgarit tự nhiên của tỷ số 2 biên độ liên tiếp nhau và có cùng dấu nghĩa là :

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \approx 2\pi\nu \quad (8.22)$$

Lúc này tỷ số tắt dần tới hạn sẽ là :

$$\nu = \frac{C}{C_{th}} = \frac{\Delta}{2\pi} \quad (8.23)$$

Giá trị của độ cản tới hạn phụ thuộc chủ yếu vào loại kết cấu và vật liệu được sử dụng. Dưới đây là một vài độ cản tới hạn :

Các kết cấu bằng bê tông cốt thép đổ toàn khối :

$$\nu = 0,02 \div 0,14.$$

Kết cấu là tường chịu lực (khối xây hoặc panel đúc sẵn trong nhà máy).

$$\nu = 0,06 \div 0,18.$$

Kết cấu kim loại :  $\nu = 0,02 \div 0,06$ .

- Các loại cầu bằng :
  - Bê tông cốt thép  $\nu = 0,03 \div 0,16$
  - Thép  $\nu = 0,02 \div 0,08$
- Kết cấu có cấu trúc lớn dạng khối  $\nu = 0,05 \div 0,10$
- Nền đất  $\nu = 0,06 \div 0,40$

## §2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC KHÔNG CẢN ( $\nu = 0$ )

Nếu khối lượng  $m$  bị kích thích bởi một ngoại lực có dạng  $F(t) = F_0 \cdot \sin \theta t$ , trong đó  $F_0$  là biên độ của lực kích động và  $\theta$  là tần số vòng của lực đó, phương trình chuyển động trở thành :

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \quad (8.24)$$

Bởi vì nghiệm ở chế độ bình ổn là rất trội nên người ta có thể bỏ qua

các nghiệm tự do, do đó nghiệm của phương trình (8.24) có dạng :

$$x(t) = x_0 \sin \theta t \quad (8.25)$$

Thay vào phương trình (8.24) và nhớ rằng :

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \theta^2 \sin \theta t$$

Ta nhận được :

$$-x_0 \theta^2 \sin \theta t + x_0 \omega^2 \sin \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t$$

hay là :

$$x_0 (\omega^2 - \theta^2) = \frac{F_0}{m}$$

$$\text{Từ đây rút ra : } x_0 = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{F_0/m}{k/m - \theta^2} = \frac{F_0}{k - m\theta^2}$$

Chia cả tử số và mẫu số cho k ta có :

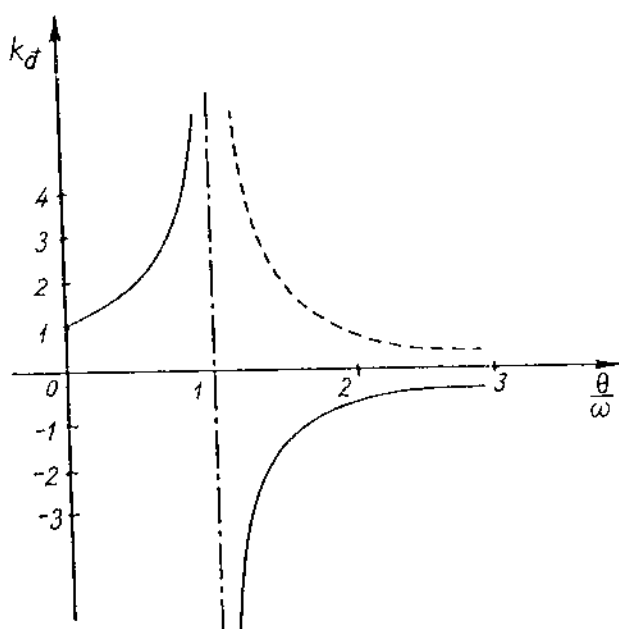
$$x_0 = \frac{F_0}{k - m\theta^2} = \frac{F_0/k}{1 - \frac{m}{k}\theta^2} = \frac{x_T}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \quad (8.26)$$

trong đó  $x_T$  là chuyển vị tĩnh do tác dụng tĩnh của lực  $F_0$  theo phương dao động gây ra. Tuy nhiên, điều mà ta quan tâm ở đây là quan hệ giữa  $x_0$  và  $x_T$ . Tỷ số giữa biên độ dao động và độ võng tĩnh  $x_T$  gọi là hệ số động lực. Khi xuất phát từ (8.26) ta có :

$$k_d = \frac{x_0}{x_T} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \quad (8.27)$$

Giá trị của hệ số này phụ thuộc chủ yếu vào quan hệ giữa tần số vòng của lực kích động với tần số riêng của hệ (tần số dao động tự do). Trên hình 8.4 chỉ ra sự thay đổi của hệ số động  $K_d$ , theo quan hệ  $\theta/\omega$ . Ta nhận thấy rằng với  $\theta/\omega < 1$ , biên độ của chuyển động có giá trị dương và cùng góc pha với lực kích động, còn với quan hệ  $\theta/\omega > 1$ , biên độ của chuyển động là âm và ngược pha so với lực kích động một góc là  $\Pi$ .

Đối với trường hợp chuyển động được sinh ra dưới tác dụng của lực kích động có  $\omega = \theta$ , thì các biên độ của dao động có thể tăng lên vô cùng (theo lý thuyết). Hiện tượng này gọi là hiện tượng cộng hưởng và tần số



Hình 8.4

riêng của hệ ( $\omega$ ) thường được gọi là "tần số cộng hưởng". Cũng chính vì lý do trên mà đường cong trên hình 8.4 được gọi là "đường cong cộng hưởng".

Cần nhấn mạnh rằng hệ số động  $K_d$  còn cho khả năng tính được lực tác động tĩnh tương đương với hiệu ứng động của  $F_0$ .

$$\text{Cụ thể là :} \quad F_d = F(t)_{\max} = \pm k_d \cdot F_0 \quad (8.28)$$

$$\text{Cũng như vậy :} \quad x(t)_{\max} = x_d = k_d \cdot x_T \quad (8.29)$$

### 1. Dao động cưỡng bức có cản nhớt

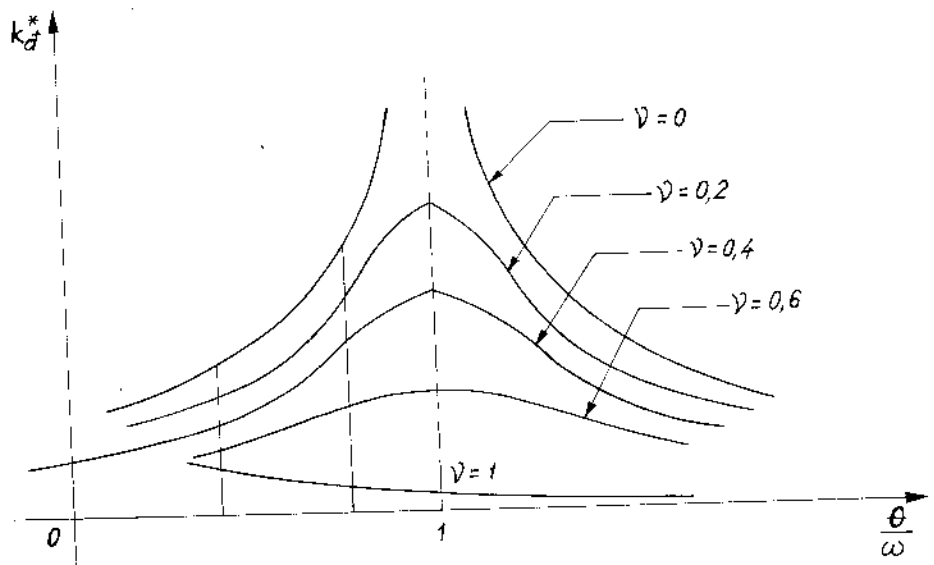
Trong trường hợp này, ta xét loại lực kích động có dạng  $F(t) = F_0 \sin \theta t$  đặt lên hệ dao động, phương trình của chuyển động sẽ trở thành :

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \sin \theta t \quad (8.30)$$

Nghiệm của (8.30) ở chế độ bình ổn có dạng :

$$x(t) = k_d^* \cdot x_T \sin \theta t \quad (8.31)$$

Hệ số động lực mới  $k_d^*$  kể đến tính tắt dần có biểu thức :



Hình 8.5

$$k_d^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}$$

Trong hình 8.5 ta chỉ ra sự biến thiên của hệ số động lực  $k_d^*$  theo tỷ số  $\theta/\omega$  và độ cản tới hạn  $\nu$ .

Các giá trị cực đại của nghiệm ở chế độ bình ổn sẽ là :

$$x(t)_{\max} = x_d = k_d^* x_T \quad (8.33)$$

$$F(t)_{\max} = F_d = k_d^* \cdot F_0 \quad (8.34)$$

## 2. Dao động cưỡng bức gây ra bởi các vật quay không cân bằng

Trong trường hợp dao động sinh ra bởi vật không cân bằng khi quay, biên độ của lực kích động có biểu thức như sau :

$$F(t) = m_0 \cdot e \cdot \theta^2 \sin \theta t \quad (8.35)$$

Trong đó  $\theta$  là vận tốc góc của trục quay,  $m_0$  là khối lượng mất cân bằng và  $e$  là độ lệch tâm của khối lượng  $m_0$ . Phương trình (8.30) có dạng :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = m_0 e \cdot \theta^2 \cdot \sin \theta t ; \quad (8.36)$$



hoặc là :

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{m_0}{m} \cdot e \cdot \theta^2 \cdot \sin \theta t, \quad (8.37)$$

trong đó :  $F_0 = m_0 \cdot e \cdot \theta^2$  đặc trưng cho giá trị biên độ của lực kích động biến đổi tuần hoàn.

Trong chế độ kích động duy trì, nghiệm của phương trình chuyển động trên có biểu thức :

$$x(t) = \frac{m_0}{m} \cdot e \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2 k_d^* \sin \theta t = \frac{Q_0}{Q} \cdot e \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_d^* \cdot \sin \theta t \quad (8.38)$$

trong đó  $Q = mg$ , thể hiện cho trọng lượng bản thân động cơ gây kích thích và  $Q_0 = m_0 \cdot g$  - trọng lượng của khối lượng mất cân bằng của rôto động cơ,  $e$  là độ lệch tâm.

\* Các giá trị của biên độ đối với các chuyển động có biểu thức như sau :

- Khi bỏ qua sự tắt dần :

$$x(t)_{\max} = x_d = \frac{Q_0}{Q} \cdot e \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_d^* \quad (8.39)$$

- Khi không bỏ qua sự tắt dần :

$$x(t)_{\max} = x_d = \frac{Q_0}{Q} \cdot e \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \cdot k_d^* \quad (8.40)$$

\* Các lực động cực đại sẽ có giá trị :

$$F(t)_{\max} = F_d = m \cdot x_d \cdot \omega^2 = m_0 \cdot e \cdot \theta^2 k_d^* = F_0 \cdot k_d^* \quad (8.41)$$

- Khi bỏ qua sự cản :

$$F(t)_{\max} = F_d = m_0 \cdot e \cdot \theta^2 \cdot k_d^* = F_0 \cdot k_d^* \quad (8.42)$$

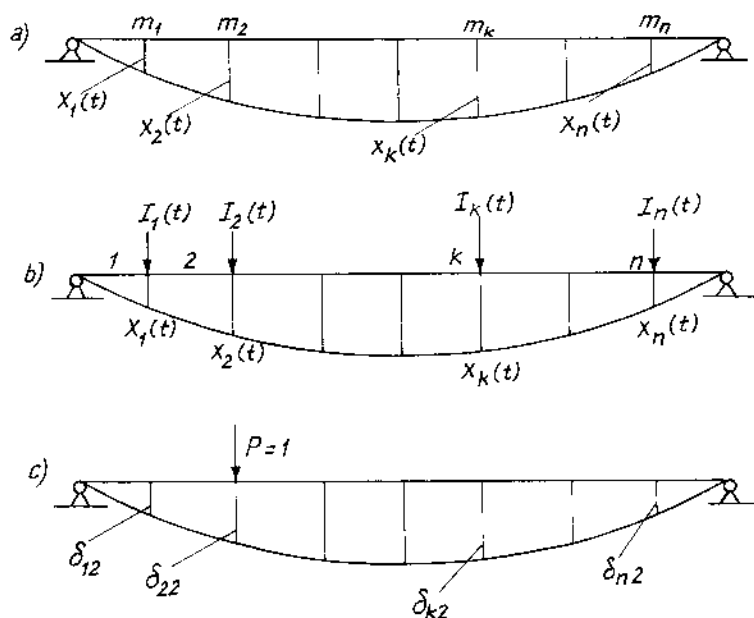
Khi xảy ra hiện tượng cộng hưởng thì  $\theta/\omega = 1$ , biên độ cực đại của chuyển động theo (8.33) và (8.40) trở thành :

$$x_{d\max} = \frac{x_T}{2\nu}$$

$$x_{d\max} = \frac{Q_0}{Q} \cdot \frac{e}{2\nu}$$



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12} + \dots + I_k \delta_{1k} + \dots + I_n \delta_{1n} \\ \mathbf{x}_2(t) &= I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22} + \dots + I_k \delta_{2k} + \dots + I_n \delta_{2n} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= I_1 \delta_{k1} + I_2 \delta_{k2} + \dots + I_k \delta_{kk} + \dots + I_n \delta_{kn} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n(t) &= I_1 \delta_{n1} + I_2 \delta_{n2} + \dots + I_k \delta_{nk} + \dots + I_n \delta_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$



Thay vào hệ phương trình (8.44) các lực quán tính có giá trị tương ứng trong (8.43), ta nhận được :

Nghiệm của hệ phương trình vi phân (8.45) được tìm dưới dạng :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ \mathbf{x}_2(t) &= A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_k(t) &= A_k \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n(t) &= A_n \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

Thay (8.46) với  $\ddot{\mathbf{x}}_i(t) = -A_i \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) vào hệ (8.45) ta đi đến hệ phương trình :

[illegible]

Hệ phương trình (8.47) đặc trưng cho chuyển động của hệ dao động nhiều bậc tự do. Trong các biểu thức trên ta đã ký hiệu :

$A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n$  là các biên độ dao động tự do của hệ ;

$\omega$  là tần số dao động tự do của hệ ;

$\delta_{ij}$  là các hệ số ảnh hưởng biểu thị chuyển vị theo phương  $i$  do lực bằng đơn vị đặt vào khối lượng  $m_j$  (hình 8.6c) theo phương dao động gây ra.

Theo định lý của J.Maxwell, ta luôn có :  $\delta_{ji} = \delta_{ij}$ .

Các ẩn số của hệ (8.47) là các biên độ  $A_i$ . Các nghiệm tầm thường  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$  không làm chúng ta quan tâm bởi vì chúng đặc trưng

cho trạng thái cân bằng tĩnh. Để hệ có thể thực hiện các dao động, ta phải có các biên độ  $A_j$  khác 0. Điều kiện cần và đủ là định thức chính của hệ (8.47) phải bằng 0 :

$$\Delta(\omega) = 0 \quad (8.48)$$

Sau khi khai triển định thức, ta nhận được phương trình đại số bậc  $n$  của  $\omega^2$ , được gọi là "phương trình đặc trưng" hay "phương trình tần số".

Giải phương trình (8.48) ta sẽ nhận được các nghiệm thực dương của  $\omega$  thể hiện các tần số dao động tự do  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) của hệ dao động.

Để đơn giản tính toán, ta đặt  $\lambda = 1/\omega^2$  : và định thức (8.48) có dạng :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \lambda) & m_2\delta_{12} & \dots & m_k\delta_{1k} & \dots & m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \lambda) & \dots & m_k\delta_{2k} & \dots & m_n\delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1\delta_{k1} & m_2\delta_{k2} & \dots & (m_k\delta_{kk} - \lambda) & \dots & m_n\delta_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots & m_k\delta_{nk} & \dots & (m_n\delta_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.49)$$

Khai triển định thức ta nhận được phương trình :

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (8.50)$$

Giá trị lớn nhất của  $\lambda$  (trong số các nghiệm) tương ứng với giá trị nhỏ nhất của  $\omega$  và được ký hiệu là  $\omega_1$ . Bất kỳ một nghiệm  $\omega_i$  nào khác cũng sẽ có giá trị  $\omega_i > \omega_1$ , được gọi là tần số dao động tự do ứng với một thứ  $i$ .

Nhờ có các tần số riêng  $\omega_i$  mà ta xác định được các tần số  $f_i = \omega_i/2\pi$  và các chu kỳ riêng  $T_i = 1/f_i = 2\pi/\omega_i$ . Số lượng các giá trị riêng sẽ tương ứng với số bậc tự do động lực. Do vậy quan hệ của các giá trị riêng được sắp xếp như sau :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_k > \dots > \lambda_n \\ \omega_1 &< \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_k < \dots < \omega_n \\ f_1 &< f_2 < f_3 < \dots < f_k < \dots < f_n \\ T_1 &> T_2 > T_3 > \dots > T_k > \dots > T_n \end{aligned}$$

Mỗi một giá trị riêng tương ứng với một dạng (mốt) dao động riêng.

Khi thay vào phương trình (8.47) lần lượt các giá trị  $\lambda_i$  tìm được từ phương trình (8.50) ta có :

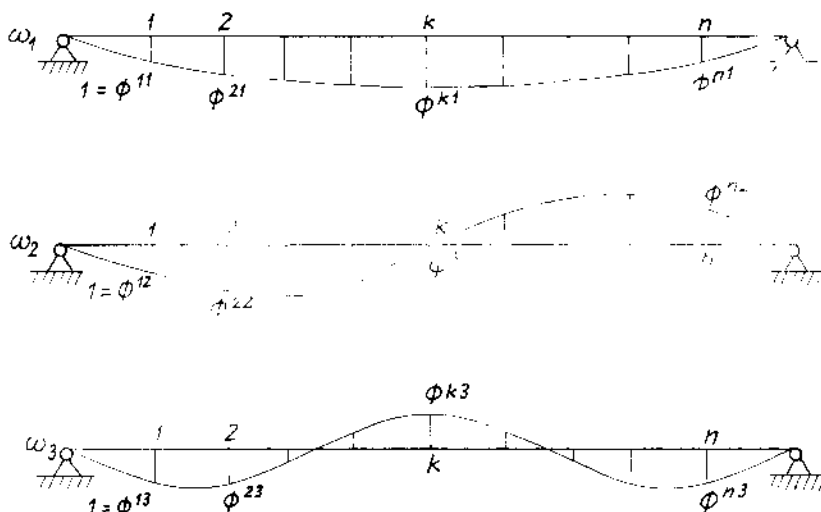
$$\left. \begin{aligned} (m_1\delta_{11} - \lambda_i)A_{1i} + m_2\delta_{12}A_{2i} + \dots + m_k\delta_{1k}A_{ki} + \dots + m_n\delta_{1n}A_{ni} &= 0 \\ m_1\delta_{21}A_{1i} + (m_2\delta_{22} - \lambda_i)A_{2i} + \dots + m_k\delta_{2k}A_{ki} + \dots + m_n\delta_{2n}A_{ni} &= 0 \\ \vdots & \\ m_1\delta_{k1}A_{1i} + m_2\delta_{k2}A_{2i} + \dots + (m_k\delta_{kk} - \lambda_i)A_{ki} + \dots + m_n\delta_{kn}A_{ni} &= 0 \\ \vdots & \\ m_1\delta_{n1}A_{1i} + m_2\delta_{n2}A_{2i} + \dots + m_k\delta_{nk}A_{ki} + \dots + (m_n\delta_{nn} - \lambda_i)A_{ni} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

Nếu ta ký hiệu  $\phi_{ki} = \frac{A_{ki}}{A_{1i}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) thì hệ (8.51) có dạng :

$$\left. \begin{aligned} m_2\delta_{12}\phi_{2i} + \dots + m_k\delta_{1k}\phi_{ki} + \dots + m_n\delta_{1n}\phi_{ni} &= -(m_1\delta_{11} - \lambda_i) \\ (m_2\delta_{22} - \lambda_i)\phi_{2i} + \dots + m_k\delta_{2k}\phi_{ki} + \dots + m_n\delta_{2n}\phi_{ni} &= -m_1\delta_{21} \\ \vdots & \\ m_2\delta_{k2}\phi_{2i} + \dots + (m_k\delta_{kk} - \lambda_i)\phi_{ki} + \dots + m_n\delta_{kn}\phi_{ni} &= -m_1\delta_{k1} \\ \vdots & \\ m_2\delta_{n2}\phi_{2i} + \dots + m_k\delta_{nk}\phi_{ki} + \dots + (m_n\delta_{nn} - \lambda_i)\phi_{ni} &= -m_1\delta_{ni} \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

Hệ phương trình (8.52) là hệ có  $n$  phương trình với  $(n-1)$  ẩn số là  $\phi_{2i}, \dots, \phi_{ni}$ . Các tọa độ tìm được bằng cách giải hệ phương trình với  $(n-1)$  phương trình đầu của hệ trên, còn phương trình cuối dùng để kiểm tra. Sau khi giải hệ này ứng với mỗi giá trị xác định của  $\omega_i$  hay  $\lambda_i$ , ta sẽ được một vectơ cột xác định dạng của một dao động tự do thứ  $i$  :

$$\{\Phi\}_i = \begin{Bmatrix} \Phi_{1,i} \\ \Phi_{2,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{k,i} \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi_{n,i} \end{Bmatrix}$$



Hình 8.7

$\{\phi\}_i$  - được gọi là vectơ riêng, nó mô tả một dạng riêng của dao động, nghĩa là mô tả cấu hình của hệ ứng với tần số thứ  $i$ , thường gọi là một thứ  $i$  của dao động. Trên hình 8.7 là ba một đầu tiên của dao động ứng với các tần số  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Dưới dạng ma trận các phương trình (8.47), (8.51) và (8.52) được viết tương ứng là :

$$(\omega^2 [D] [M] - [I]) [A] = [0]; \quad (8.53)$$

$$([D] [M] - \lambda [I]) [A] = [0]; \quad (8.54)$$

$$([D] [M] - \lambda [I]) [\Phi] = [0]; \quad (8.55)$$

trong đó:  $[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1k} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2k} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \dots & \delta_{kk} & \dots & \delta_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nk} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}; [\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_k \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix}$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}; [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ở đây :  $[D]$  - ma trận độ mềm ;

$[M]$  - ma trận khối lượng hay ma trận quán tính ;

$[I]$  - ma trận đơn vị ;

$[\Phi]$  - ma trận cột, biểu diễn một một dao động tự do.

Các trị riêng sẽ được tìm từ các phương trình đặc trưng sau đây :

$$\Delta(\omega) = |\omega^2 [D] [M] - [I]| = 0, \quad (8.56)$$

hoặc

$$\Delta(\lambda) = |[D] [M] - \lambda [I]| = 0 \quad (8.57)$$

Các vectơ riêng có thể tìm bằng cách thay thế mỗi một lần giá trị  $\lambda_i$  vào phương trình (8.55), từ đó ta xác định được :

$$[\Phi]_i = \{\Phi_{ki}\}_{k=1, n} \quad (8.58)$$

Đối với hệ 1 bậc tự do phương trình (8.55) và (8.56) cho ta :

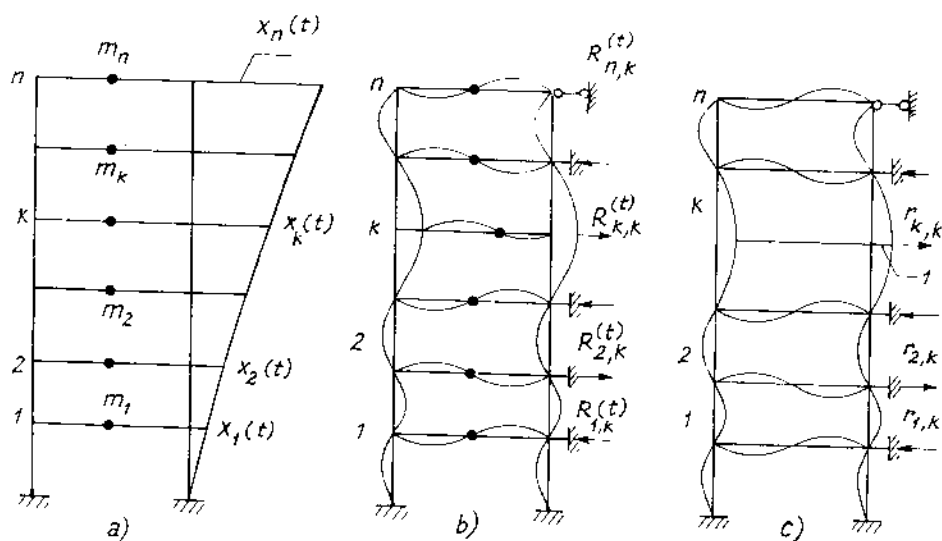
$$\Phi_{11} = +1 \text{ và } \omega^2 \delta_{11} m_1 - 1 = 0. \text{ Do đó : } \omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m_1} \text{ hay}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m_1}}.$$

## 2. Phương pháp ma trận độ cứng

Một hệ động lực được biểu diễn trên hình 8-8a như là một ví dụ, có  $n$  bậc tự do, có thể thực hiện một chuyển động dao động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh sau một kích động tức thời bên ngoài. Khi ấy các chuyển vị ngang của các khối lượng là  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ .





Hình 8.8

Nếu ta tưởng tượng rằng tất cả các bậc tự do đều bị chặn bởi các gối tựa đơn áp đặt theo phương các chuyển vị ngang  $x(t)$  trừ chuyển vị  $x_k(t)$ ,

tại đó hệ chỉ chịu một lực  $R_{kk}(t)$  và gây ra chuyển vị của  $m_k$ , thì ở các gối tựa áp đặt sẽ xuất hiện các phản lực  $R$ . Tương tự như vậy có thể lặp lại quá trình nói trên đối với mỗi mức đặt khối lượng và sẽ nhận được mỗi lần như thế một lực quán tính  $I_k(t)$  và các phản lực liên kết tương ứng  $R_j$  tại các gối đỡ áp đặt. Thực tế hệ là tự do chứ không có gối chặn các chuyển vị của các khối lượng, vì thế phản lực của các gối tựa do tất cả các nguyên nhân gây ra phải bằng 0. Cụ thể là :

$$R_k = -I_k(t) + \sum_{j=1}^n r_{kj} \cdot x_j(t) = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (8.59)$$

trong đó :

$$I_k = -m_k \ddot{x}_k(t) \text{ là lực quán tính đặt vào } m_k. \quad (8.60)$$

Dưới dạng khai triển, hệ phương trình (8.59) được viết :

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) + r_{11}x_1(t) + r_{12}x_2(t) + \dots + r_{1k}x_k(t) + \dots + r_{1n}x_n(t) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2(t) + r_{21}x_1(t) + r_{22}x_2(t) + \dots + r_{2k}x_k(t) + \dots + r_{2n}x_n(t) &= 0 \\ &\vdots \\ m_k \ddot{x}_k(t) + r_{k1}x_1(t) + r_{k2}x_2(t) + \dots + r_{kk}x_k(t) + \dots + r_{kn}x_n(t) &= 0 \\ &\vdots \\ m_n \ddot{x}_n(t) + r_{n1}x_1(t) + r_{n2}x_2(t) + \dots + r_{nk}x_k(t) + \dots + r_{nn}x_n(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.61)$$

Trong hệ phương trình này  $r_{ij}$  gọi là hệ số cứng của hệ tại gối tựa  $k$ . Nó là lực cần thiết để gây ra chuyển vị bằng đơn vị theo phương dao động. Nếu thừa nhận nghiệm riêng của hệ này dưới

$$\left. \begin{aligned} x_k(t) &= A_k \sin(\omega t + \varphi) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ \text{thì hệ (8.61) trở thành :} \\ (r_{11} - m_1\omega^2)A_1 + r_{12}A_2 + \dots + r_{1k}A_k + \dots + r_{1n}A_n &= 0 \\ r_{21}A_1 + (r_{22} - m_2\omega^2)A_2 + \dots + r_{2k}A_k + \dots + r_{2n}A_n &= 0 \\ &\vdots \\ r_{k1}A_1 + r_{k2}A_2 + \dots + (r_{kk} - m_k\omega^2)A_k + \dots + r_{kn}A_n &= 0 \\ &\vdots \\ r_{n1}A_1 + r_{n2}A_2 + \dots + r_{nk}A_k + \dots + (r_{nn} - m_n\omega^2)A_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.62)$$

trong đó  $r_{jk}$  biểu diễn các phản lực tìm được tại liên kết  $j$ , khi ta áp đặt một chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại gối  $k$  theo phương  $k$ . Theo định lý của L. Rayleigh ta luôn có :  $r_{jk} = r_{kj}$ .

Hệ (8.62) là hệ tuyến tính và thuần nhất. Do đó, để nó có nghiệm khác 0, thì định thức chính của nó phải bằng 0. Định thức này cho ta phương trình đặc trưng và các nghiệm của nó là các tần số dao động riêng của hệ ( $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_k < \dots < \omega_n$ ).

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1 \omega^2) & r_{12} & \dots & r_{1k} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2 \omega^2) & \dots & r_{2k} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & (r_{kk} - m_k \omega^2) & \dots & r_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nk} & \dots & (r_{nn} - m_n \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (8.63)$$

Nếu viết dưới dạng ma trận, hệ phương trình (8.62) sẽ có dạng :

$$([R] - \omega^2 [M]) [A] = [0] \quad (8.64)$$

$$\text{Tương tự ta có : } ([R] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [0] \quad (8.65)$$

Trong đó ma trận  $[R]$  gọi là ma trận độ cứng chứa các hệ số cứng  $r_{jk}$ , là ma trận vuông đối xứng cấp  $n \times n$ .

Các trị riêng  $\omega_i$  là các nghiệm của phương trình :

$$\Delta(\omega) = |[R] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (8.66)$$

Các vectơ riêng được tìm bằng cách thay thế lần lượt mỗi một lần các tần số riêng  $\omega_i$  vào trong hệ (8.62) hoặc (8.65) :

$$([R] - \omega_i^2 [M]) [\Phi]_i = [0] \quad (8.67)$$

Trường hợp hệ 1 bậc tự do, từ phương trình (8.65) ta rút ra :

$$\Phi_{11} = +1 \text{ và } \omega_1^2 = \frac{r_{11}}{m_1} \text{ hay } \omega_1 = \sqrt{\frac{r_{11}}{m_1}}.$$

### 3. Quan hệ giữa ma trận $[D]$ và $[R]$ :

Từ các phương trình (8.53) và (8.64), ta có thể tìm được mối liên hệ giữa hai ma trận  $[D]$  và  $[R]$ . Thật vậy từ (8.53) ta có :

$$([I] - \omega^2 [D] [M]) [\Phi] = [0] \quad (8.68)$$

Mặt khác từ phương trình (8.65) ta có :

$$([R] - \omega^2 [M]) [\Phi] = [0] \quad (8.69)$$

Nhân trái 2 vế của (8.69) với  $[R]^{-1}$  ta nhận được :

$$([R]^{-1}[R] - \omega^2[R]^{-1}[M])[ \Phi ] = [0] \quad (8.70)$$

Vì rằng  $[R]^{-1}[R] = [I]$ , nên ta có :

$$([I] - \omega^2[R]^{-1}[M])[ \Phi ] = [0] \quad (8.71)$$

So sánh 2 phương trình (8.68) và (8.71) ta rút ra :

$$[D] = [R]^{-1} \text{ hay } [D][R] = [I] \quad (8.72)$$

Vậy ma trận độ mềm chính là ma trận nghịch đảo của ma trận độ cứng. Từ đó các hệ số độ mềm cũng được xác định bằng cách lấy nghịch đảo của các hệ số cứng :

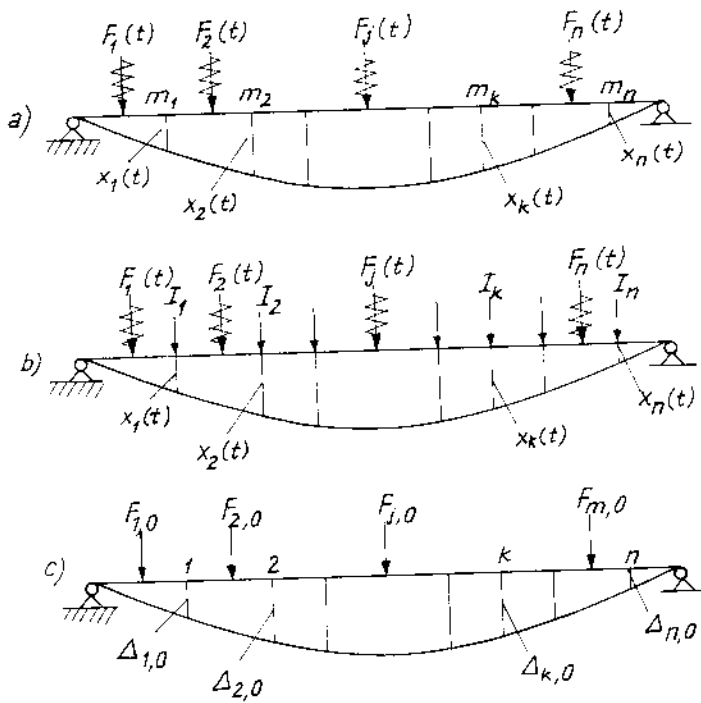
$$\delta = \frac{1}{k} \text{ hay } k = \frac{1}{\delta} . \text{ Do đó, ta có } k \cdot \delta = 1.$$

## §2. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

### 1. Phương pháp lực quán tính - ma trận độ mềm

Ta hãy xét một hệ dao động có  $n$  bậc tự do chịu các lực kích động có cùng tần số  $\theta$  :  $F_j(t) = F_{j,0} \cdot \sin \theta t$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) như trên hình 8.9a, trong đó các biên độ  $F_{j,0}$  và các tần số  $\theta$  cho trước. Tại mỗi thời điểm chuyển vị ngang của các khối lượng theo phương dao động là :  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ .

Dưới tác dụng đồng thời của các lực quán tính  $I_k$  và lực kích động  $F_j(t)$  (hình 8.9b) thì các chuyển vị này có thể được xác định qua các hệ số ảnh hưởng (độ mềm) theo nguyên lý cộng tác dụng :



Hình 8.9

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= I_1 \delta_{11} + I_2 \delta_{12} + \dots + I_k \delta_{1k} + \dots + I_n \delta_{1n} + \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{1j} \\
 x_2(t) &= I_1 \delta_{21} + I_2 \delta_{22} + \dots + I_k \delta_{2k} + \dots + I_n \delta_{2n} + \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{2j} \\
 &\vdots \\
 x_k(t) &= I_1 \delta_{k1} + I_2 \delta_{k2} + \dots + I_k \delta_{kk} + \dots + I_n \delta_{kn} + \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{kj} \\
 &\vdots \\
 x_n(t) &= I_1 \delta_{n1} + I_2 \delta_{n2} + \dots + I_k \delta_{nk} + \dots + I_n \delta_{nn} + \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{nj}
 \end{aligned}
 \tag{8.73}$$

$$\left. \begin{aligned} & x_1(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{11} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{12} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{1k} + \dots + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{1n} - \\ & \quad - \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{1j} = 0 \\ & x_2(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{21} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{22} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{2k} + \dots + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{2n} - \\ & \quad - \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{2j} = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & x_k(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{k1} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{k2} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{kk} + \dots + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{kn} - \\ & \quad - \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{kj} = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & x_n(t) + m_1 \ddot{x}_1(t) \delta_{n1} + m_2 \ddot{x}_2(t) \delta_{n2} + \dots + m_k \ddot{x}_k(t) \delta_{nk} + \dots + m_n \ddot{x}_n(t) \delta_{nn} - \\ & \quad - \sum_{j=1}^m F_j(t) \delta_{nj} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

trong đó :  $\delta_{kj}$  là chuyển vị theo phương dao động của khối lượng  $m_k$  do lực đơn vị đặt vào khối lượng  $m_j$  theo phương dao động của  $m_k$  gây ra. Nghiệm của hệ phương trình (8.74) trong trường hợp tổng quát có dạng :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_I(t) + \mathbf{x}_F(t)$$

trong đó :  $x_1(t)$  là nghiệm của hệ phương trình thuần nhất (nghiệm dao động tự do) ;

$x_F(t)$  là nghiệm riêng của hệ phương trình có vế phải (nghiệm dao động cưỡng bức).

Do tác dụng của lực cản mà các dao động tự do chỉ tồn tại trong giai đoạn chuyển tiếp. Sau một khoảng thời gian nào đó dao động này mất đi và chỉ còn lại chế độ bình ổn với những dao động cưỡng bức  $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_p(t)$ .



Để xác định các giá trị biên độ của lực quán tính, ta thay các biểu thức (8.78) vào hệ (8.76) :

$$\begin{aligned} & (\delta_{11} - 1/m_1\theta^2) J_1 + \delta_{12}J_2 + \dots + \delta_{1k}J_k + \dots + \delta_{1n}J_n + \Delta_{1,o} = 0 \\ & \delta_{21}J_1 + (\delta_{22} - 1/m_2\theta^2) J_2 + \dots + \delta_{2k}J_k + \dots + \delta_{2n}J_n + \Delta_{2,o} = 0 \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \delta_{k1}J_1 + \delta_{k2}J_2 + \dots + (\delta_{kk} - 1/m_k\theta^2) J_k + \dots + \delta_{kn}J_n + \Delta_{k,o} = 0 \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \delta_{n1}J_1 + \delta_{n2}J_2 + \dots + \delta_{nk}J_k + \dots + (\delta_{nn} - 1/m_n\theta^2)J_n + \Delta_{n,o} = 0 \end{aligned} \quad (8.79)$$

Sau khi đã xác định được biên độ lực quán tính đặt lên các khối lượng thì điều đó có nghĩa là ta đã dẫn bài toán động lực về bài toán hệ chịu các lực tác dụng tĩnh ở trạng thái bất lợi nhất sau đây : trọng lượng bản thân tương ứng với các khối lượng ( $Q_k = m_k g$ ), biên độ lực kích động  $F_{j,0}$  ( $j = 1, \dots, m$ ) và biên độ lực quán tính  $J_k$ . Các lực quán tính và lực kích động trong trường hợp khảo sát này là những lực có đặc trưng tuần hoàn và cùng pha.

Nếu ta ký hiệu

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \theta^2} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (8.80)$$

Hệ (8.79) trở thành :

$$\left. \begin{aligned} &\delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \dots + \delta_{1k} J_k + \dots + \delta_{1n} J_n + \Delta_{1,o} = 0 \\ &\delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \dots + \delta_{2k} J_k + \dots + \delta_{2n} J_n + \Delta_{2,o} = 0 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\delta_{k1} J_1 + \delta_{k2} J_2 + \dots + \delta_{kk}^* J_k + \dots + \delta_{kn} J_n + \Delta_{k,o} = 0 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &\delta_{n1} J_1 + \delta_{n2} J_2 + \dots + \delta_{nk} J_k + \dots + \delta_{nn}^* J_n + \Delta_{n,o} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.81)$$

Các nghiệm của hệ này được xác định theo công thức Cramere



$$J_k = - \left| \frac{D_k^*}{D^*} \right| \quad (k = \overline{1, n}) \quad (8.82)$$

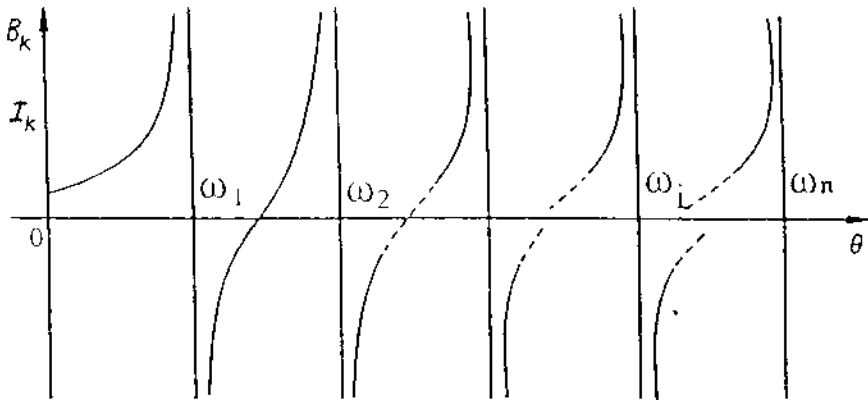
Trong đó  $|D^*|$  là định thức cơ sở của hệ (8.81) và  $|D_k^*|$  là định thức được xác định bằng cách thay thế cột  $k$  của  $|D^*|$  bởi cột các số hạng tự do  $[\Delta_{k,0}]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Để hệ phương trình (8.81) có nghiệm thì điều kiện cần là :

$$|D^*| \neq 0$$

Nếu  $|D^*| = 0$  thì các biên độ  $J_k$  dẫn tới vô cùng :  $J_k \rightarrow \infty$

Ta giả sử rằng :  $|D| = \Delta(\omega) = 0$ , khi đó xảy ra trường hợp cộng hưởng  $\theta = \omega_i$  ( $\omega_i$  là các tần số dao động riêng của hệ). Trường hợp này được mô tả trên hình (8.10) và các đường này được gọi là các đường cong cộng hưởng. Ở trong vùng cộng hưởng các giá trị của chuyển vị  $B_k$  và của lực quán tính  $J_k$  lớn vô cùng. Trên thực tế, do ma sát mà những giá trị này là rất lớn nhưng hữu hạn.



Hình 8.10

Hệ phương trình (8.76) có thể biểu diễn dưới dạng ma trận như sau :

$$(\theta^2 [D] [M] - [I]) \{B\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (8.83)$$

Để biểu diễn dao động cưỡng bức theo các lực quán tính, ta có thể viết phương trình (8.83) dưới dạng :

$$\theta^2 [D] [M] \{B\} - [I] \{B\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (8.84)$$

Ma trận cột các biên độ lực quán tính có biểu thức :

$$\{J\} = \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_k \\ \vdots \\ J_n \end{Bmatrix} = \theta^2 [M] \{B\} = \begin{Bmatrix} \theta^2 \cdot m_1 B_1 \\ \theta^2 \cdot m_2 B_2 \\ \vdots \\ \theta^2 \cdot m_k B_k \\ \vdots \\ \theta^2 \cdot m_n B_n \end{Bmatrix} \quad (8.85)$$

Ta nhân (8.85) với  $[M]^{-1}$  :  $[M]^{-1} \{J\} = \theta^2 [M]^{-1} [M] \{B\}$  (8.86)

Mặt khác ta lại có :  $[M]^{-1} [M] = [I]$

Phương trình (8.86) trở thành :  $[I] \{B\} = \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \{J\}$

Thay các kết quả (8.85) và (8.87) và phương trình (8.84) ta có :

$$[D] \{J\} - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \{J\} + \{\Delta\} = \{0\}$$

Hoặc là

$$\left( [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right) \{J\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (8.88)$$

Nếu ký hiệu :  $[D^*] = [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1}$  (8.89)

Phương trình (8.88) trở thành :

$$[D^*] \{J\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (8.90)$$

Đây là phương trình biểu diễn dưới dạng ma trận của hệ (8.81). Nó cho phép ta tìm được ma trận cột  $\{J\}$ .

Để dàng thấy rằng ma trận  $[D^*]$  nhận được bằng cách thay đường chéo chính của ma trận  $[D]$  bằng đường chéo chính với các phần tử :

$$\delta_{kk}^* = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \theta^2} \quad (k = \overline{1, n})$$

Để cho phương trình (8.90) có nghiệm khác không thì định thức của nó phải khác không.

Trong trường hợp đó ta có :

$$\theta^2 [D] [M] - [I] \neq 0. \quad (8.91)$$

$$\text{Hay là : } |D^*| = \left| [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right| \neq 0 \quad (8.92)$$

Nếu  $|D^*| = 0$  thì vector biên độ quán tính  $\{J\}$  và vector biên độ dao động cưỡng bức  $\{B\}$  có các giá trị tiến tới vô cùng, nghĩa là điều kiện cộng hưởng xảy ra :  $\theta = \omega_i$ .

## 2. Phương pháp chuyển vị - ma trận độ cứng

Giả sử rằng hệ khảo sát chịu tác dụng của các lực kích động điều hòa như mục trên. Khi ấy chuyển vị của các khối lượng theo phương dao động sẽ nhận được từ việc giải phương trình ma trận sau đây :

$$[R^*] \{B\} + \{R\} = \{0\} \quad (8.93)$$

Với :  $[R^*] = [R] - \theta^2 [M]$  là ma trận độ cứng thu gọn.

Sau khi giải hệ này, ma trận biên độ chuyển vị được xác định và do đó các lực tương đương tĩnh cực đại sẽ là :

$$\{P_d\} = [R] \{B\} \quad (8.94)$$

Để tránh cộng hưởng thì  $[R^*]$  cần phải khác không, cụ thể là :

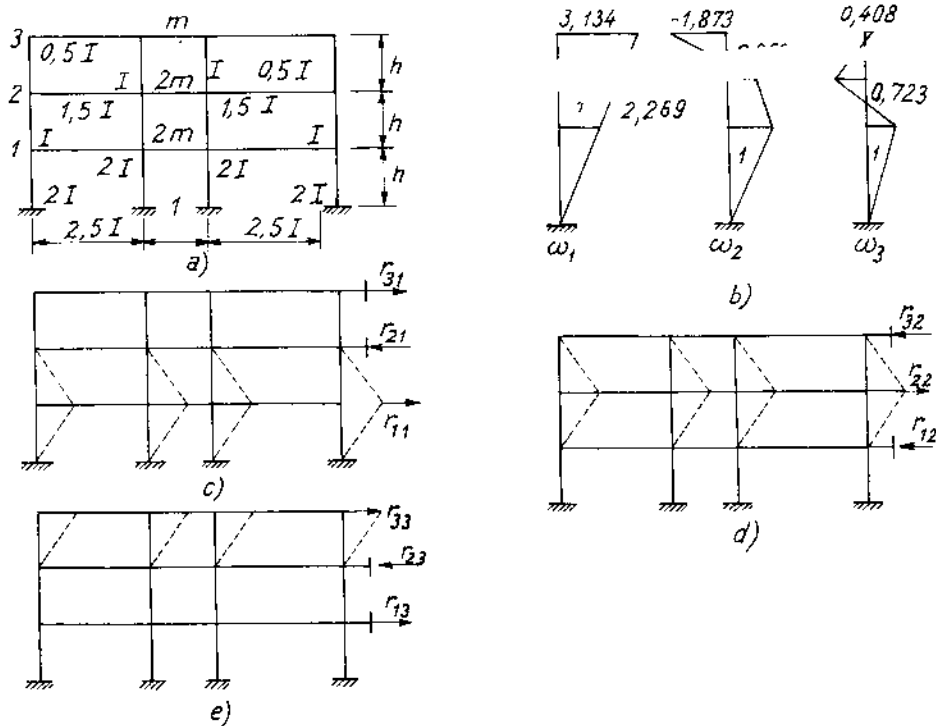
$$|[R] - \theta^2 [M]| \neq 0.$$

## §3. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 :

Đối với khung 3 tầng như trên hình 8.11a bị dao động ngang do động

đặt gây ra hãy xác định các giá trị riêng và vectơ riêng khi sử dụng phương pháp ma trận độ cứng. Giả thiết các dầm có độ cứng vô hạn.



Hình 8.11

**Lời giải :**

Khi nghiên cứu dao động ngang của khung, chúng ta có thể giả thiết các khối lượng tập trung trên từng tầng, vì vậy hệ có 3 bậc tự do. Việc tính toán các chu kỳ riêng của nó nhờ vào phương trình sau :

$$| [R] - \omega^2 [M] | = 0$$

Các hệ số cứng hay còn gọi là các phản lực đơn vị được xác định như trong chương 5. Các hệ số này có các giá trị như sau :

$$\begin{aligned} r_{11} &= 156EJ/h^3 ; & r_{12} &= -60EJ/h^3 ; & r_{13} &= 0 ; \\ r_{21} &= -60EJ/h^3 ; & r_{22} &= 96EJ/h^3 ; & r_{23} &= -36EJ/h^3 ; \\ r_{31} &= 0 ; & r_{32} &= -36EJ/h^3 ; & r_{33} &= 36EJ/h^3 ; \end{aligned}$$

Kế đến các giá trị đã chỉ ra ở trên và các khối lượng trên hình 8.11.c,d,e ta có các ma trận tương ứng :

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \frac{12EJ}{h^3} \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đưa vào ký hiệu :  $\alpha = \frac{mh^3}{12EJ} \omega^2$ , phương trình đặc trưng trở thành :

$$\left| \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (13-2\alpha) & -5 & 0 \\ -5 & (8-2\alpha) & -3 \\ 0 & -3 & (3-\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

Hoặc là ở dạng khai triển :

$$4\alpha^3 - 54\alpha^2 + 187\alpha - 120 = 0$$

Từ đó các nghiệm của phương trình này là :

$$\alpha_1 = 0,827 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_1^2 ; \alpha_2 = 4,366 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_2^2 ;$$

$$\alpha_3 = 8,307 = \frac{mh^3}{12EJ} \cdot \omega_3^2 ;$$

Từ các  $\alpha_i$ , các tần số riêng  $\omega_i$  được rút ra như sau :

$$\omega_1 = 3,150 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} ; \omega_2 = 7,238 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} ; \omega_3 = 9,984 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{mh^3}} .$$

Các vectơ riêng được xác định từ phương trình tổng quát (8.67). Đó là hệ ba phương trình 3 ẩn :

$$\left. \begin{aligned} (13 - 2\alpha_i)\phi_{1,i} - 5\phi_{2,i} &= 0 \\ -5\phi_{1,i} + (8 - 2\alpha_i)\phi_{2,i} - 3\phi_{3,i} &= 0 \\ -3\phi_{2,i} + (3 - \alpha_i)\phi_{3,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ứng với mỗi giá trị của  $i$  sẽ có một tần số, ta giả thiết :  $\phi_{1,1} = \phi_{1,2} = \phi_{1,3} = 1,000$ .

- Để tìm dạng riêng thứ nhất của dao động, chúng ta lấy :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0,827 \\ \phi_{1,1} = 1,000 \end{cases}$$

sau đó thay vào hệ phương trình tổng quát, ta được :

$$\begin{cases} (13 - 2 \cdot 0,827) \cdot 1 - 5\phi_{2,1} & = 0 \\ -5 \cdot 1 + (8 - 2 \cdot 0,827) \phi_{2,1} - 3\phi_{3,1} & = 0 \\ -3\phi_{2,1} + (3 - 0,827) \phi_{3,1} & = 0 \end{cases}$$

Từ đó chúng ta nhận được :  $\phi_{2,1} = 2,264$  và  $\phi_{3,1} = 3,134$ .

- Để tìm dạng riêng thứ hai của dao động, ta lấy :

$$\begin{cases} \alpha_2 = 4,366 \\ \phi_{1,2} = 1,000 \end{cases}$$

Tương tự như trên, ta có :  $\phi_{2,2} = 0,853$  ;  $\phi_{3,2} = -1,873$ .

- Để tìm dạng riêng thứ ba của dao động, ta lấy :

$$\begin{cases} \alpha_3 = 8,307 \\ \phi_{1,3} = 1,000 \end{cases}$$

Chúng ta tìm được :  $\phi_{2,3} = -0,723$  ;  $\phi_{3,3} = 0,408$ .

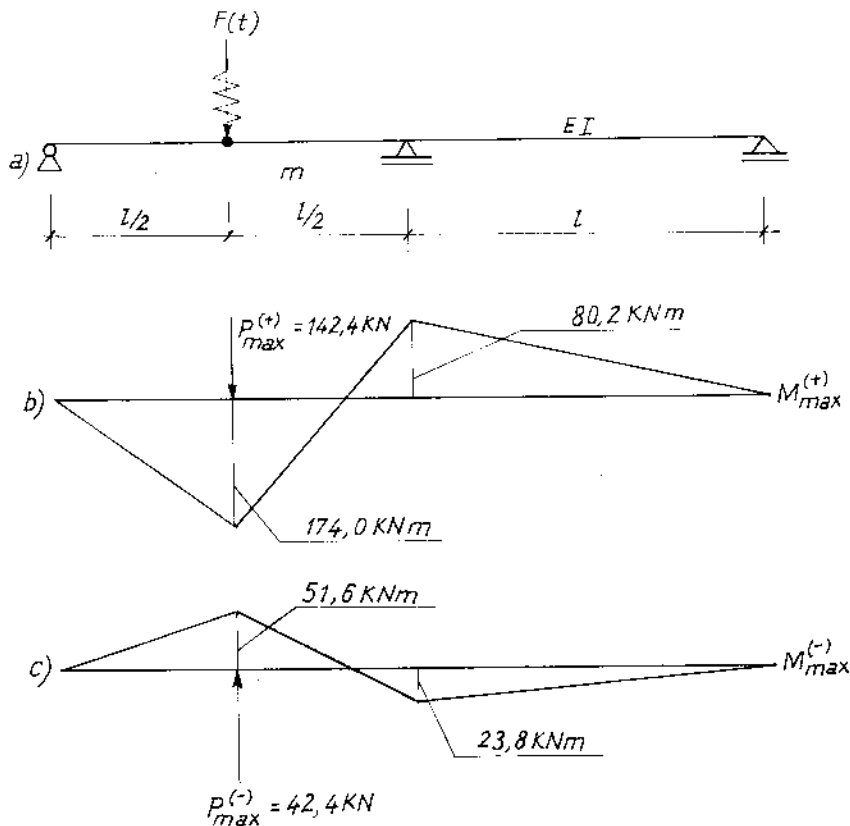
Với các giá trị vừa tìm được, chúng ta có thể biểu diễn các dạng dao động riêng như trên hình 8.11b.

Ta thấy rằng các dạng dao động riêng ở trên trực giao với nhau. Thật vậy :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,1} \cdot \phi_{k,2} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 2,269 \cdot 0,853 + m \cdot 3,134 \cdot (-1,873) \approx 0 \\ \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,2} \cdot \phi_{k,3} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot 0,853 \cdot (-0,723) + m \cdot (-1,873) \cdot 0,408 \approx 0 \\ \sum_{k=1}^3 m_k \cdot \phi_{k,1} \cdot \phi_{k,3} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + 2m \cdot (-0,723) \cdot 2,269 + m \cdot 0,408 \cdot 3,134 \approx 0 \end{cases}$$

### Ví dụ 2

Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn động lực, tính các độ võng động cực trị và kiểm tra bền đối với trục liên tục đường kính  $D$  cho trên hình 8.12a. Trục này chịu tác dụng đồng thời của tải trọng tĩnh  $Q = m.g = 50 \text{ kN}$  và lực kích động  $F(t) = F_0 \sin \theta t$ . Cho trước các giá trị :  $F_0 = 30 \text{ kN}$  ;  $\theta = 35 \text{ rad/s}$  ;  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$  ;  $l = 6,00 \text{ m}$  ;  $D = 19,68 \text{ cm}$ ,  $[\sigma] = 23 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 8.12

### Lời giải

Sau khi tính toán tĩnh, chúng ta thấy rằng dưới tác dụng của tải trọng  $Q$ , độ võng tĩnh của dầm siêu tĩnh này tại vị trí đặt khối lượng  $m$  có giá trị như sau :

$$x_T = \frac{23}{1536} \cdot \frac{Ql^3}{EI} = \frac{23}{1536} \cdot \frac{50 \cdot 6^3}{30000} = 0,0054 \text{ m} = 0,54 \text{ cm}$$

Vì vậy tần số riêng của hệ là :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_{ST}}} = \sqrt{\frac{981}{0,54}} = 42,6 \text{ rad/s}$$

và do đó hệ số động lực có giá trị :

$$k_d = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - (35/42,6)^2} = \frac{1}{1 - 0,675} = 3,08$$

Biên độ lớn nhất sẽ là :

$$\begin{aligned} x_d &= k_d x_T^* = k_d \cdot \frac{23}{1536} \cdot \frac{F_o l^3}{EI} = \pm 3,08 \cdot \frac{23}{1536} \cdot \frac{3 \cdot 6^3}{3000} = \\ &= \pm 0,0099 \text{ m} \approx \pm 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Giá trị lực tĩnh tương đương do ảnh hưởng động lực của lực kích động sẽ là :

$$F_d = \pm k_d F_o = \pm 3,08 \cdot 30 = \pm 92,4 \text{ kN}$$

Lực này có thể tác dụng theo chiều này hoặc chiều kia, theo chiều này lực tổng cộng có giá trị lớn nhất :

$$P_{\max}^{(+)} = Q + F_d = 50 + 92,4 = 142,4 \text{ kN}$$

còn theo chiều kia có giá trị nhỏ nhất :

$$P_{\max}^{(-)} = Q - F_d = 50 - 92,4 = -42,4 \text{ kN}$$

Các biểu đồ mômen uốn tương ứng được cho trên hình 8.12b và c.

Đối với độ võng, ta có 2 giá trị ngược dấu nhau :

$$X_{\max}^{(+)} = X_T + X_d = 0,54 + 0,99 = +1,53 \text{ cm}$$

$$X_{\max}^{(-)} = X_T - X_d = 0,50 - 0,99 = -0,45 \text{ cm}$$

Từ đó chúng ta tính được :

$$\sigma_{\max}^{(+)} = \frac{M_{\max}^{+}}{W} = \frac{174 \cdot 100}{762,2} = 22,83 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]$$

$$\sigma_{\max}^{(-)} = \frac{M_{\max}^{-}}{W} = \frac{51,6 \cdot 100}{762,2} = 6,77 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]$$

Thực làm việc an toàn về bền.



Ví dụ 3 :

Hãy nghiên cứu dao động tự do, cường bức và chỉ ra mặt cắt nguy hiểm nhất của khung như trên hình 8.13a. Trên đó khung chịu các lực kích động  $F_1(t)$  và  $F_2(t)$ .

Trọng lượng bản thân được tập trung ở các mức 1 và 2 là :

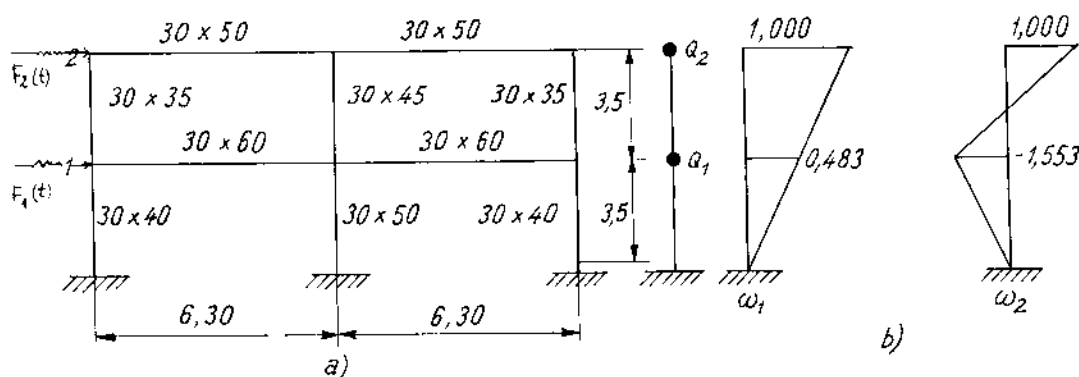
$$Q_1 = Q = mg = 600 \text{ kN và } Q_2 = 0,75.Q = 0,75 mg = 450 \text{ kN.}$$

Các lực kích động có đặc trưng điều hòa :

$$F_1(t) = F_{1,0} \sin \theta t \text{ và } F_2(t) = F_{2,0} \sin \theta t$$

ở đây :  $F_{1,0} = 20 \text{ kN và } F_{2,0} = 10 \text{ kN ; } \theta = 10 \text{ rad/s}$

Các đặc trưng đàn hồi của kết cấu với mặt cắt ngang là  $30 \times 40$ , có mômen quán tính tương ứng là  $I = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ . Khi lấy đối với bê tông mô đun đàn hồi  $E = 2900 \text{ kN/cm}^2$  (B250), độ cứng sẽ là :  $EI = 46400 \text{ kNm}^2$



Hình 8.13

**Lời giải**

### 1. Phương pháp ma trận độ mềm

Những chuyển vị đơn vị xác định ma trận độ mềm được thực hiện bằng các tính toán tĩnh đối với hệ siêu tĩnh.

Việc tính toán ấy tất nhiên sẽ đơn giản khi kể đến tính đối xứng của hệ và đặc trưng riêng của lực đơn vị theo phương ngang. Vì vậy tất cả các phép tính toán tĩnh đã được tiến hành trên một nửa kết cấu phản đối xứng. Sau khi thực hiện các tính toán tĩnh ta nhận được ma trận độ mềm :

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{100EJ} \begin{bmatrix} 2,619 & 3,209 \\ 3,209 & 8,068 \end{bmatrix}$$

Cần phải nhấn mạnh rằng đối với các tính toán tĩnh, chúng ta đã lấy chiều dài là 3,50m. Ma trận quán tính sẽ là :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng của các trị riêng là :

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0$$

$$\text{Nghĩa là : } \left| \begin{bmatrix} 2,619 & 3,209 \\ 3,209 & 8,068 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,75 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\text{hay : } \begin{vmatrix} (2,619 - \alpha) & 3,209 \\ 3,209 & (6,051 - \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển định thức ta có :  $\alpha^2 - 8,661\alpha + 8,121 = 0$

$$\text{Ở đây ta ký hiệu : } \alpha = \frac{100 EJ}{ml^3} \lambda$$

Sau khi giải phương trình đặc trưng chúng ta nhận được :

$$\alpha_1 = 7,59 = \frac{100 EJ}{ml^3} \lambda_1 \text{ và } \alpha_2 = 1,07 = \frac{100 EJ}{ml^3} \lambda_2$$

Nếu đưa vào các giá trị bằng số tương ứng chúng ta sẽ rút ra được các tần số vòng  $\omega_i$ , các tần số  $f_i$  và các chu kỳ riêng  $T_i$  như dưới đây :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{100EJ}{7,59 ml^3}} = 15,29 \text{ rad/s ; } f_1 = 2,430 \text{ Hz ; } T_1 = 0,411 \text{ s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{100EJ}{1,07 ml^3}} = 40,67 \text{ rad/s ; } f_2 = 6,473 \text{ Hz ; } T_2 = 0,154 \text{ s}$$

Từ đó các phương trình của các môđ dao động là :

$$\begin{cases} (2,619 - \alpha_i)\phi_{1,i} + 2,408\phi_{2,i} = 0 \\ 3,209\phi_{1,i} + (6,051 - \alpha_i)\phi_{2,i} = 0 \end{cases}$$

Khi thay các giá trị bằng số của  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$  rồi giải hai hệ phương trình này, chúng ta nhận được (hình 8.13b) :

$$\phi_{1,1} = 0,483 ; \phi_{1,2} = -1,553$$

$$\phi_{2,1} = 1,000 ; \phi_{2,2} = 1,000$$

Trong trường hợp dao động cưỡng bức, các lực quán tính cục bộ tác dụng ở trên mỗi nút sẽ tìm được khi giải hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} \delta_{11}^* \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1,0} = 0 \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \delta_{22}^* \cdot J_2 + \Delta_{2,0} = 0 \end{cases}$$

Khi kể đến các kết quả nhận được và số liệu bằng số của bài toán, ta tính được các hệ số và các số hạng tự do của hệ như sau :

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{2,169 l^3}{100EI} - \frac{1}{m \theta^2}$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{8,068 l^3}{100EI} - \frac{1}{0,75 m \theta^2}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{3,209 l^3}{100EI}$$

$$\Delta_{1,0} = F_{1,0} \cdot \delta_{11} + F_{2,0} \cdot \delta_{12} = \frac{8,447 l^3}{100EI}$$

$$\Delta_{2,0} = F_{1,0} \cdot \delta_{21} + F_{2,0} \cdot \delta_{22} = \frac{14,486 l^3}{100EI}$$

Khi nhân hệ phương trình với  $100 EI/l^3$  và khi thay thế các giá trị bằng số đã cho vào đây, ta có :

$$\frac{100EI}{m l^3 \theta^2} = 17,695 ; \frac{100EI}{0,75 m l^3 \theta^2} = 23,595$$

Hệ phương trình xác định biên độ của lực quán tính có dạng cuối cùng :

$$\begin{cases} -15,076 J_1 + 3,209 J_2 + 8,447 = 0 \\ 3,209 J_1 - 15,525 J_2 + 14,486 = 0 \end{cases}$$

Từ đây rút ra :  $J_1 = 7,94 \text{ kN}$  và  $J_2 = 10,97 \text{ kN}$ .

Độ lớn của các lực động lớn nhất có thể xem như là tác dụng tương đương tính lên kết cấu là :

$$F_{d,1} = F_{1,0} + J_1 = 27,94 \text{ kN}$$

$$F_{d,2} = F_{2,0} + J_2 = 20,97 \text{ kN}$$

Các chuyển vị ngang cực đại sẽ lần lượt được tính như sau :

$$X_1 = F_{d,1} \cdot \delta_{11} + F_{d,2} \cdot \delta_{12} = 0,130 \text{ cm}$$

$$X_2 = F_{d,1} \cdot \delta_{21} + F_{d,2} \cdot \delta_{22} = 0,239 \text{ cm}$$

Biểu đồ mômen uốn và sự biến thiên của các chuyển vị cực đại dưới tác dụng trực tiếp của các lực động  $F_1(t)$  và  $F_2(t)$  đặt vào các mức 1 và 2 của khung như trên hình 8.14a, b.

## 2. Phương pháp ma trận độ cứng

Ma trận độ cứng có thể được xác định bằng cách hoặc là xác định các hệ số cứng (khi sử dụng các giải pháp tĩnh tương ứng) hoặc là một cách trực tiếp, ta lấy nghịch đảo của ma trận độ mềm.

Bởi vì ma trận độ mềm đã biết, nên chúng ta thực hiện nghịch đảo ma trận này để có :

$$\begin{aligned} [R] &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12}^2} \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{21} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 74,479 & -29,620 \\ -29,620 & 24,175 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Phương trình đặc trưng :  $[R] - \omega^2 [M] = 0$  với các ma trận độ cứng và ma trận quán tính đã có, khi kể đến ký hiệu :  $\beta = \frac{ml^3}{EI} \cdot \omega^2$ , thì cuối cùng chúng ta nhận được :

$$\begin{vmatrix} (74,479 - \beta) & -29,620 \\ -29,620 & (24,175 - 0,75\beta) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Hoặc là : } \beta^2 - 106,71\beta + 1230,92 = 0$$

$$\text{Với các nghiệm : } \beta_1 = 13,16 = \frac{ml^3}{EI} \omega_1^2 ; \beta_2 = 93,55 = \frac{ml^3}{EI} \omega_2^2 ;$$

Khi thay các dữ liệu bằng số, hai tần số vòng  $\omega_1$  và  $\omega_2$  được rút ra hoàn toàn trùng với hai tần số đã rút ra từ phương pháp ma trận độ mềm. Cụ thể là :

$$\omega_1 = 15,27 \text{ rad/s} \quad \text{và} \quad \omega_2 = 40,67 \text{ rad/s}$$

Nếu trong các phương trình dao động của các mốt :

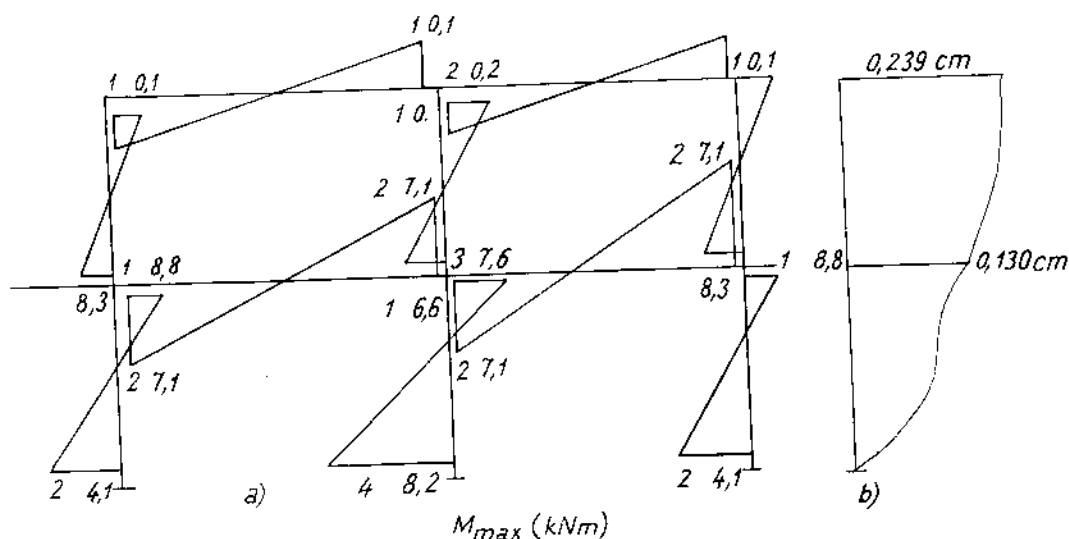
$$\begin{cases} (74,479 - \beta_1) \phi_{1,i} - 29,620 \phi_{2,i} = 0 \\ -29,620 \phi_{1,i} + (24,175 - 0,75 \beta_1) \phi_{2,i} = 0 \end{cases}$$

Chúng ta thay lần lượt các giá trị  $\beta_1$  và  $\beta_2$  vào đó và tìm được các tọa độ mốt của hệ dao động :

$$\phi_{1,1} = 0,483 ; \phi_{1,2} = -1,553$$

$$\phi_{2,1} = 1,000 ; \phi_{2,2} = 1,000$$

Ta thấy kết quả giống như phương pháp ma trận độ mềm.



Hình 8.14

Từ biểu đồ mômen uốn cực đại ( $M_{max}$ ) cho thấy mặt cắt tại chân cột giữa của khung là nguy hiểm nhất. Cụ thể là :

$$\max M_{max} = 4820 \text{ KNcm.}$$

## Chương 9

# TÍNH TOÁN KẾT CẤU NGOÀI GIỚI HẠN ĐÀN HỒI

Với mục đích giới thiệu cách triển khai các phương pháp tính toán các cấu kiện làm việc ngoài giới hạn đàn hồi, trong chương này ta hãy khảo sát những bài toán đơn giản nhất ngoài giới hạn đàn hồi đối với những chi tiết chịu trạng thái ứng suất đơn và phẳng với các biểu đồ biến dạng khác nhau.

## I. PHÂN TÍCH ĐÀN - ĐÈO DẦM CHỊU UỐN THUẦN TÚY

### §1. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT CỦA BIỂU ĐỒ BIẾN DẠNG

Xét một dầm chịu uốn thuần túy, mặt cắt ngang có hai trục đối xứng (hình 9.1). Biến dạng tỷ đối  $\varepsilon_z$  tại  $y$  với giả thiết mặt cắt ngang phẳng ta có :

$$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} \quad (a)$$

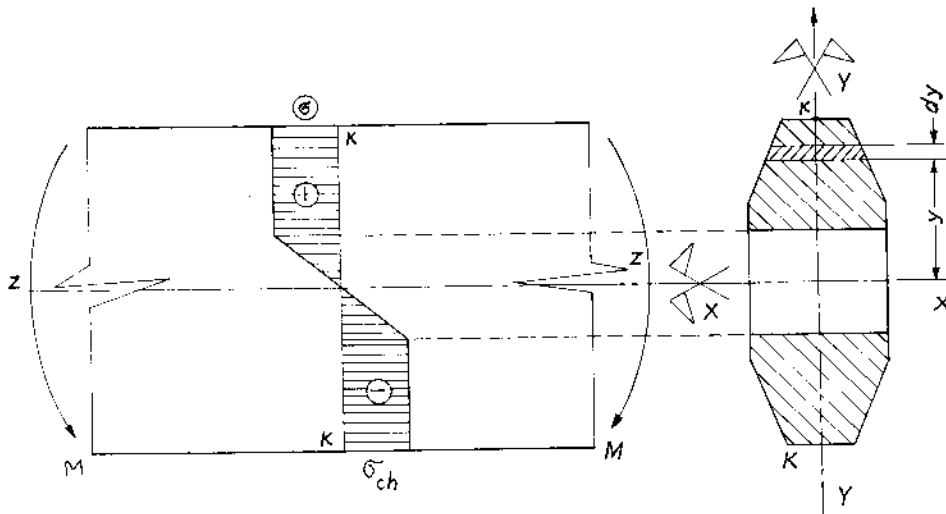
$\rho$  là bán kính cong của trục dầm.

$$\text{Tại } y = h/2 \text{ ta có : } \varepsilon_z = \varepsilon_{\max} = \frac{h}{2\rho} \quad (b)$$

Trạng thái ứng suất ở tất cả các điểm của dầm được xem là trạng thái ứng suất đơn kể cả trong và ngoài giới hạn đàn hồi.

Những kết quả nghiên cứu thí nghiệm về uốn thuần túy cho thấy chúng phù hợp tốt với những kết quả lý thuyết khi xem trạng thái ứng suất là đơn. Với giả thiết này  $\sigma$  là hàm của  $\varepsilon_z$ . Hàm này được xác định từ biểu đồ kéo của vật liệu (tính phức tạp hay đơn giản của việc tính toán ngoài giới

hạn đàn hồi phụ thuộc rất lớn vào dạng biểu đồ kéo  $\sigma(\varepsilon)$ . Biến dạng dẻo phát sinh ở một điểm nào đó khi  $\max|\sigma| = \sigma_{ch}$ .



Hình 9.1

Điểm bị dẻo đầu tiên là "K" với  $y_k = h/2$  (hình 9.1).

Tại thời điểm này :  $\varepsilon_z = \varepsilon_{ch}$  và

$$M_{ch} = \sigma_{ch} \cdot W_x \quad (9.1)$$

Khi  $M < M_{ch}$  thì 
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (9.2)$$

Gọi  $\rho_{ch}$  là bán kính cong lúc dầm bắt đầu hình thành biến dạng dẻo thì theo (b) ta có :

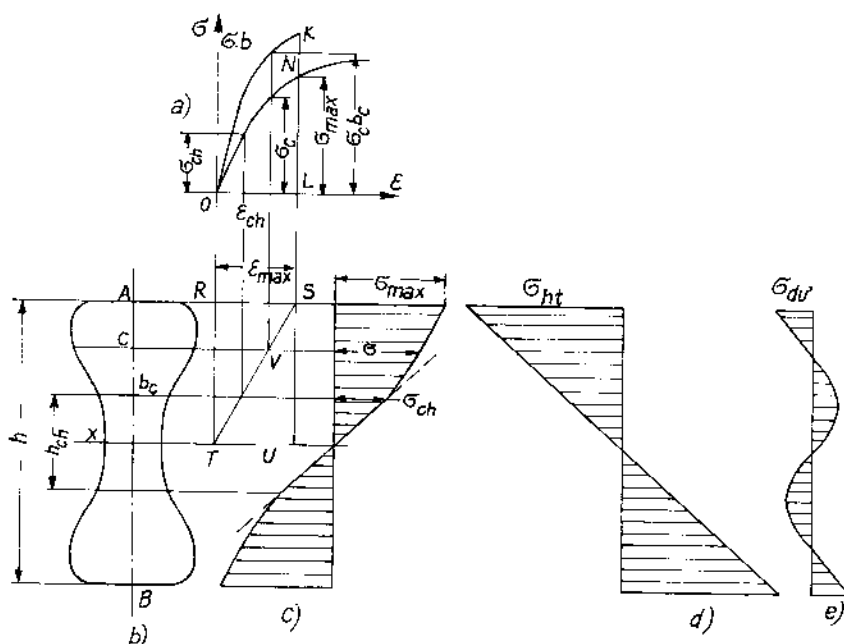
$$\frac{1}{\rho_{ch}} = \frac{M_{ch}}{EJ_x} = \frac{2\varepsilon_{ch}}{h} \quad (c)$$

Nếu như đã biết biểu đồ kéo  $\sigma(\varepsilon)$  thì khi biết được  $1/\rho$  có thể xây dựng được biểu đồ  $\sigma$  trên mặt cắt ngang và xác định được mômen uốn.

Ta hãy xét trường hợp tổng quát nhất của biểu đồ kéo  $\sigma(\varepsilon)$  hình 9.2), khi sử dụng giả thiết mặt cắt ngang phẳng :

Theo công thức (b) với  $1/\rho$  cho trước thì  $\varepsilon_{max}$  được tính và đặt nó lên trục hoành của biểu đồ  $\sigma(\varepsilon)$ , đoạn  $OL = \varepsilon_{max}$  từ O và L vẽ các đường thẳng

đứng OT và LU giao với trục x. Đường thẳng ngang vẽ từ A có giao điểm R và S với OT và LU. Dễ thấy là tam giác TRS là biểu đồ biến dạng của  $\varepsilon$  dọc theo chiều cao mặt cắt. Ví dụ tại C ( $y = y_c$ ) ta vẽ qua C đường nằm ngang để có giao điểm V. Qua V vẽ đường thẳng đứng và  $\sigma_c$  tại C được xác định trên biểu đồ kéo  $\sigma(\varepsilon)$ . Đặt  $\sigma_c$  qua điểm C vuông góc với trục y và lặp lại như vậy đối với các điểm khác dọc theo chiều cao h, ta sẽ có biểu đồ  $\sigma$  dọc theo chiều cao mặt cắt ngang.



Hình 9.2

Nếu  $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{ch}$  kể từ  $y \geq \frac{h_{ch}}{2} \neq 0$ , nào đó thì trên mặt cắt xuất hiện vùng đàn hồi và vùng dẻo. Trên biên giữa hai vùng này  $\varepsilon = \varepsilon_{ch}$ ,  $\sigma = \sigma_{ch}$  và chiều cao vùng đàn hồi chỉ còn là  $h_{ch}$ .

Theo (a) ta có thể viết : 
$$\varepsilon_{ch} = \frac{h}{2\rho_{ch}} \quad (d)$$

Chú ý đến (b) và (d) ta đi đến :

$$\frac{\varepsilon_{ch}}{\varepsilon_{\max}} = \frac{\rho}{\rho_{ch}} = \frac{h_{ch}}{h} \quad (e)$$



Công thức này cho ta giới hạn vùng đàn hồi  $h_{ch}$ . Với ứng suất  $\sigma$  được xác định ở trên mômen uốn có biểu thức :

$$M = \int_V \sigma y dF = 2 \int_0^{h/2} \sigma b y dy \quad (9.3)$$

Từ (a) ta có :  $d\varepsilon = \frac{dy}{\rho}$  (tại z xác định thì  $1/\rho = \text{const}$ ).

Chú ý đến :  $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$  ,  $\varepsilon_{\max} = \frac{h}{2\rho}$  ,  $d\varepsilon = \frac{dy}{\rho}$  ta đi đến :

$$M = 2 \int_0^{h/2} b \sigma y dy = \frac{h^2}{2\varepsilon_{\max}^2} \int_0^{\varepsilon_{\max}} b \sigma \varepsilon d\varepsilon \quad (9.4)$$

Đối với hình chữ nhật :

$$M = \frac{h^2 b}{2\varepsilon_{\max}^2} \int_0^{\varepsilon_{\max}} \sigma \varepsilon d\varepsilon \quad (9.5)$$

Tích phân trong (9.4) là mômen tĩnh của diện tích biểu đồ kéo OKL đối với trục O $\sigma$

Tích phân  $\int_0^{\varepsilon_{\max}} \sigma \varepsilon d\varepsilon = S_{\sigma\sigma} \text{ (ONL)}$  - mômen tĩnh của diện tích ONL đối với trục O $\sigma$ .

Theo (9.4) hoặc (9.5) khi sử dụng biểu đồ kéo  $\sigma(\varepsilon)$  có thể tính được M ứng với độ cong  $1/\rho$  chọn trước. Đó là nội dung bài toán thuận.

Bài toán ngược : tính ứng suất và độ cong khi biết  $M > M_{ch}$ . Ta dùng đồ thị  $M = M(1/\rho)$  gọi là biểu đồ uốn.

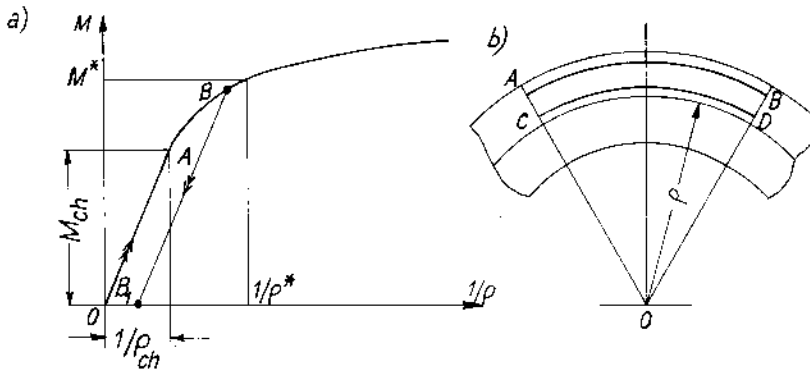
Dựng biểu đồ  $M = M(1/\rho)$  (hình 9.3a).

Khi  $M \leq M_{ch}$  thì  $\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{\rho_{ch}}$  , biểu đồ  $M(1/\rho)$  là một đoạn thẳng OA với

$$\text{phương trình } \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}$$

Khi  $M \geq M_{ch}$  biểu đồ  $M(1/\rho)$  được vẽ như sau :

Cho trước  $\{\rho_i\}$  theo (9.4) hoặc (9.5), tính  $\{M_i\}$  với việc sử dụng biểu đồ kéo của vật liệu khảo sát. Tính  $\sigma$  trong dầm khi đã có biểu đồ  $M(\rho)$ . Từ  $M^*$  trên mặt cắt nghiêng cứu, xác định  $1/\rho^*$  tương ứng. Theo (b) tính  $\varepsilon_{\max}$  và đặt  $\varepsilon_{\max}$  lên biểu đồ  $\sigma(\varepsilon)$  để xác định như đã làm ở trên hình 9.2.



Hình 9.3

Nếu  $M > M_{ch}$  mà ta hạ tải thì sau khi hạ tải mặt cắt ngang có ứng suất :  $\sigma_{du} = \sigma - \sigma_{ht}$  (hiệu giữa ứng suất chất và hạ tải).

Ứng suất hạ tải  $\sigma_{ht}$  (sự giảm  $\sigma$  do hạ tải diễn ra theo phần đường thẳng  $BB_1$ ) có dạng :

$$\sigma_{ht} = \frac{M.y}{J_x} \quad (9.6)$$

Biểu đồ  $\sigma_{ht}$  trên mặt cắt ngang là tuyến tính, có thể hình dung sự hạ tải như là quá trình chất tải trong miền đàn hồi với mômen  $M$  có dấu ngược lại lúc chất tải. Biểu đồ ứng suất dư  $\sigma_{du}$  (hình 9.2e) là tổng đại số  $\sigma + (-\sigma_{ht})$ .

Sau khi hạ tải dầm vẫn bị cong, độ cong dư của dầm  $1/\rho_{du}$  rõ ràng là hiệu độ cong chất và hạ tải :

$$\frac{1}{\rho_{du}} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{ht}} \quad (9.7)$$

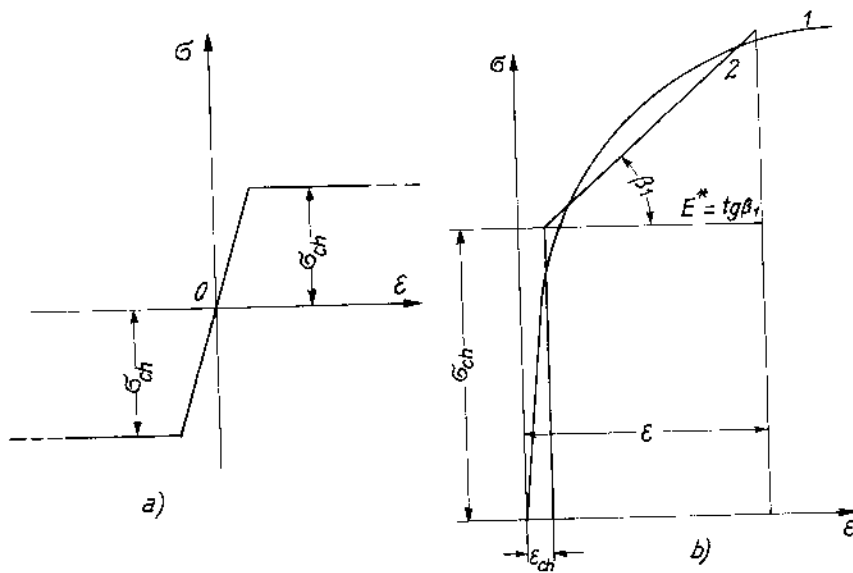
Sự giảm độ cong do hạ tải  $1/\rho_{ht}$  được xác định như trong sức bền vật liệu :

$$\frac{1}{\rho_{du}} = \frac{M}{EJ_x}$$

Vì vậy :

$$\frac{1}{\rho_{du}} = \frac{1}{\rho} - \frac{M}{EJ_x} \quad (9.8)$$

## §2. BIỂU ĐỒ KÉO CÓ CÙNG CỐ TUYẾN TÍNH KHÔNG THÊM CHẤY (HÌNH 9.4)



Hình 9.4

Khi  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{ch} \rightarrow \sigma = E\epsilon$  (a)

Khi  $\epsilon \geq \epsilon_{ch} \rightarrow \sigma = \sigma_{ch} + E^*(\epsilon - \epsilon_{ch})$  (b)

Thay các biểu thức (a) và (b) vào (9.4) hoặc (9.5) khi chú ý đến (b), (9.1) và (c) của mục 1 ta thu được đối với dầm cắt chữ nhật :

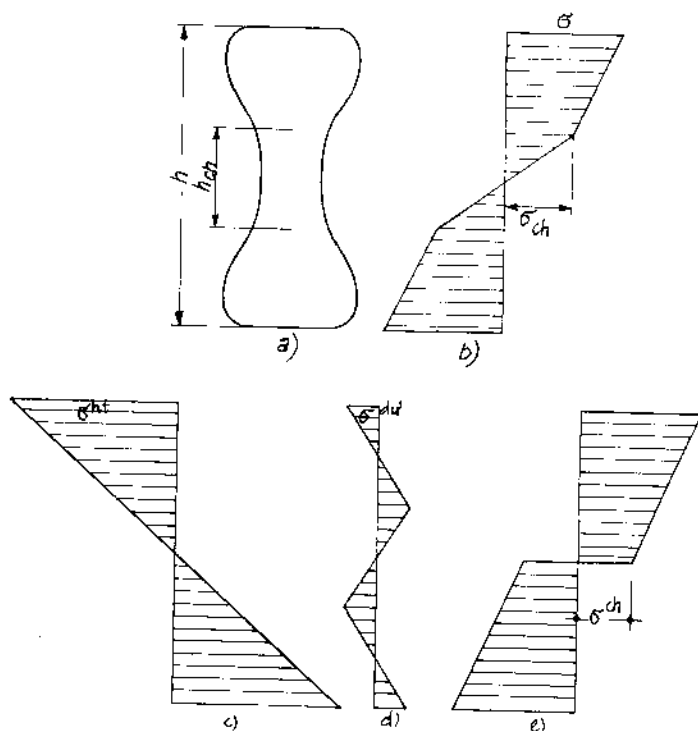
Khi  $M > M_{ch} = \sigma_{ch} W_x$  :

$$M = \frac{M_{ch}}{2} \left( 2 \frac{E^*}{E} \frac{\rho_{ch}}{\rho} + \left( 1 - \frac{E^*}{E} \right) \left( 3 - \frac{\rho^2}{\rho_{ch}^2} \right) \right) \quad (9.9)$$

Còn khi  $M \leq M_{ch}$ , thì

$$M = \frac{EJ_x}{\rho}.$$

Các biểu đồ ứng suất trong trường hợp này được cho trên hình 9.5b,c,d,e.



Hình 9.5

### §3. UỐN THUẦN TÚY DẦM LÀM BẰNG VẬT LIỆU ĐÀN DÉO LÝ TƯỢNG (HÌNH 9.4A)

Trong các mục trên của tiết này ta giải quyết bài toán bằng con đường trực tiếp. Từ những kết quả đã thu được có thể dễ dàng rút ra các kết quả cho bài toán của mục này. Tuy nhiên với mục đích cung cấp thêm thông tin cho bạn đọc về một phương pháp khác cũng thường được sử dụng trong bài toán dẻo, dưới đây chúng ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp ngược theo ứng suất.

Trong miền đàn hồi, nghiệm bài toán này là :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M_y}{J_x} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Trong miền dèo đối với vật liệu có  $\sigma_{ch}(k) = \sigma_{ch}(n)$ , thì điều kiện dèo

$$\sigma_i = |\sigma_{ch}|.$$

Cường độ ứng suất  $\sigma_i$  tương ứng với trạng thái ứng suất (a) có dạng :

$$\sigma_i = \sigma_z$$

Các ứng suất trong miền dèo bây giờ là :

$$|\sigma_z| = \sigma_{ch}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (b)$$

Trên hình 9.1 là biểu đồ ứng suất pháp  $\sigma_z$  dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang. Tương ứng với biểu đồ này các qui luật của ứng suất theo chiều cao như sau :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\sigma_{ch} && \text{khi } y \leq -\frac{h_{ch}}{2} \\ \sigma_z &= \sigma_{ch} \frac{2y}{h_{ch}} && \text{khi } -\frac{h_{ch}}{2} \leq y \leq \frac{h_{ch}}{2} \\ \sigma_z &= \sigma_{ch} && \text{khi } y \geq \frac{h_{ch}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

trong đó :

$h_{ch}/2$  là khoảng cách từ biên giữa vùng đàn hồi và dẻo đến lớp trung hòa.

Khi tăng dần mômen  $M$  thì quá trình chất tải của mỗi phần tử là giản đơn, do đó ta có thể giải bài toán như sau :

Do các ứng suất trong (c) không phụ thuộc  $z$ , cho nên qui luật này như nhau trên mọi mặt cắt ngang bất kỳ.

Điều kiện cân bằng giữa mômen ngoại lực  $M$  và mômen nội lực do các  $\sigma$ , tạo thành cho ta :

$$M = \int_F \sigma_z y dF = \int_{-\frac{h_{ch}}{2}}^{\frac{h_{ch}}{2}} \frac{2\sigma_{ch} y^2}{h_{ch}} b(y) dy + 2\sigma_{ch} \int_{\frac{h_{ch}}{2}}^{\frac{h}{2}} y b(y) dy \quad (d)$$

Khi đặt :

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{-\frac{h_{ch}}{2}}^{\frac{h_{ch}}{2}} y^2 b(y) dy \\ S_x &= 2 \int_{\frac{h_{ch}}{2}}^{\frac{h}{2}} y b(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

trong đó  $J_x$  là mômen quán tính của nhân đàn hồi của mặt cắt đối với trục X và  $S_{x/2}$  là giá trị tuyệt đối của mômen tĩnh của một trong hai miền dèo đối với trục này, công thức (d) có dạng thu gọn như sau :

$$M = \frac{2\sigma_{ch}}{h_{ch}} J_x + \sigma_{ch} S_x \quad (9.11)$$

Công thức này thiết lập mối quan hệ giữa chiều cao vùng đàn hồi  $h_{ch}$  và mômen uốn M. Khi tăng M thì giới hạn chảy  $h_{ch}$  dần tới giới hạn  $h_{ch} \Rightarrow 0$ . Mômen uốn khi ấy được gọi là mômen uốn giới hạn :

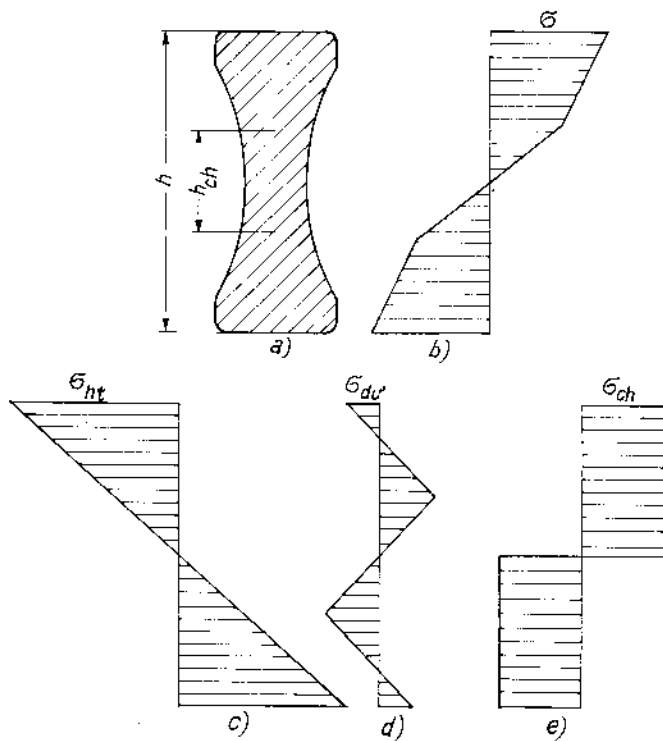
$$M_{gh} = \sigma_{ch} S_x \quad (9.12)$$

Khi đó, ứng suất đạt được giá trị giới hạn chảy ở mọi điểm trên mặt cắt. Các biểu đồ ứng suất trong trường hợp đàn dẻo lý tưởng vừa nghiên cứu được cho trên hình 9.6. Hình 9.6b là biểu đồ ứng suất khi biến dạng đàn hồi dẻo, hình 9.6c, d là biểu đồ ứng suất khi hạ tải và biểu đồ ứng suất dư.

Hình 9.6e là biểu đồ ứng suất ứng với trạng thái hoàn toàn dẻo. Từ biểu đồ này thấy rằng mặt phẳng trung hòa ở trạng thái giới hạn trở thành mặt phẳng gián đoạn của ứng suất. Trên thực tế không hình thành mặt phẳng gián đoạn này, bởi vì luôn còn một vùng đàn hồi chuyển tiếp rất nhỏ. Tuy nhiên khái niệm về mômen uốn giới hạn vẫn còn nguyên ý nghĩa, vì với

chiều cao vùng dẻo không lớn thì mômen uốn cũng đã gần bằng  $M_{gh}$ . Để khẳng định điều này ta hãy khảo sát mặt cắt hình chữ nhật có :

$$b(y) = b \quad J_x = \frac{bh^3}{12} \quad S_x = b \left( \frac{h^2}{4} - \frac{h_{ch}^2}{4} \right) \quad (d)$$



**Hình 9.6**

Thay các kết quả (b) vào biểu thức (9.11) ta tìm được :

$$M = \sigma_{ch} b \frac{h^2}{4} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{h_{ch}}{h} \right)^2 \right) \quad (đ)$$

Khi  $h_{ch} = 0$  thì  $M_{gh} = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4}$

Khi  $\frac{h_{ch}}{h} = \frac{1}{3}$  ta có tỷ số :  $\frac{M_{gh}}{M} = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{h_{ch}}{h} \right)^2 = 0,963 \quad (9.13)$

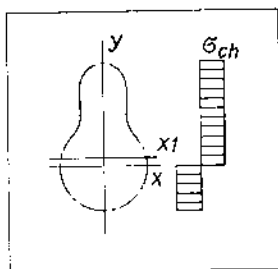
Điều này cho thấy khi chiều cao vùng đàn hồi mới đạt được 1/3 chiều cao tiết diện thì mômen uốn chỉ nhỏ hơn mômen giới hạn cỡ 4%.

#### §4. MÔMEN GIỚI HẠN ĐỐI VỚI MẶT CẮT BẤT KỲ CÓ MỘT TRỤC ĐỐI XỨNG (HÌNH 9.7B)

Điều kiện xác định vị trí trục trung hòa ở trạng thái dẻo là :

|                                                                                                                          |                        |                     |                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|---------------------|------------------------------|
|                                                                                                                          |                        |                     |                              |
| $2S_x = \frac{bh^2}{4}$                                                                                                  | $2S_x = \frac{d^3}{6}$ | $2S_x = D^2 \delta$ | $S_x^k + S_x^n = 0,0977bh^2$ |
|                                                                                                                          |                        |                     |                              |
| $S_x^k + S_x^n = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)} \left[ b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$ |                        |                     | $2S_x = (1,44 + 1,17) W_x$   |

a)



b)

Hình 9.7



$$N = \int_F \sigma dF = 0$$

Với  $F = F_k + F_n$ , ở vùng  $F_k$  thì  $\sigma = \sigma_{ch}$  còn ở vùng  $F_n$  thì  $\sigma = -\sigma_{ch}$  (chú ý đang xét ở trạng thái dẻo).

$$\int_{F_k} \sigma_{ch} dF - \int_{F_n} \sigma_{ch} dF = 0$$

Ta rút ra  $F_k = F_n$ , nghĩa là trục trung hòa  $X - X$  chia mặt cắt thành hai phần bằng nhau. Để thấy mặt cắt có hai trục đối xứng thì trục trung hòa  $X - X$  và  $x_1 - x_1$  đều đi qua trọng tâm mặt cắt và trùng nhau. Ở trạng thái dẻo giới hạn này, điều kiện tương đương tĩnh phải là :

$$\begin{aligned} M_{gh} &= \int_F \sigma_{ch} y dF = \int_{F_k} \sigma_{ch} (+y) dF - \int_{F_n} \sigma_{ch} (-y) dF = \sigma_{ch} \int_{F_k} y dF + \sigma_{ch} \int_{F_n} y dF = \\ &= \sigma_{ch} (S_x^k + S_x^n) \end{aligned} \quad (9.14)$$

$S_x^k$  và  $S_x^n$  là giá trị tuyệt đối của các mômen tĩnh của vùng  $F_k$  và  $F_n$  đối với trục trung hòa  $X - X$  (xem hình 9.7a, b).

## §5. PHÂN TÍCH ĐÀN DÉO LÝ TƯƠNG DẪM CHỊU UỐN NGANG

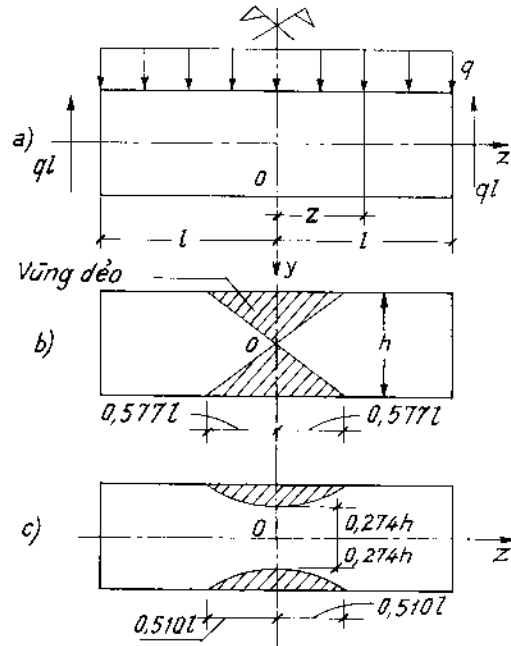
Chúng ta sẽ khảo sát những dầm dài mà mặt cắt ngang có hai trục đối xứng và bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp đến kết quả vì  $(\sigma_z \gg \tau_{zy})$ . Sự khác nhau cơ bản giữa uốn thuần túy và uốn ngang là ở chỗ trong uốn ngang mômen uốn thay đổi dọc trục  $z$  của dầm. Do đó, chiều cao vùng đàn hồi  $h_{ch}$  thay đổi theo  $z$ . Theo công thức (9.13) đối với dầm mặt cắt chữ nhật chúng ta tìm được quan hệ chiều cao vùng đàn hồi và mômen uốn.

$$\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{M}{M_{gh}}} \quad (a)$$

Phương trình (a) cho quan hệ giữa chiều cao vùng đàn hồi và hoành độ  $z$ . Để có một khái niệm cụ thể, chúng ta hãy khảo sát vấn đề tải trọng hợp chịu tải của dầm trên hai gối tựa.

### 1. Dầm chịu tải trọng phân bố đều (hình 9.8) :

$$\text{Mômen uốn ở mặt cắt } z \text{ bất kỳ : } M = \frac{q}{2} (l^2 - z^2) \quad (b)$$



Hình 9.8

Mômen giới hạn xuất hiện ở mặt cắt  $z = 0$  với giá trị :

$$M_{gh} = \frac{q_{gh} l^2}{2} \quad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta có :

$$\frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{q}{q_{gh}} \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)} \quad (d)$$

Kết quả này cho thấy :  $h_{ch} = f(q, z)$

Khi tải trọng đạt được giá trị giới hạn  $q_{gh}$  thì :  $\frac{h_{ch}}{h} = \frac{z\sqrt{3}}{l}$  (e)

Trên hình 9.8b là biên giới giữa vùng đàn hồi và vùng dẻo. Khác với uốn thuần túy trong trường hợp này chỉ xuất hiện ở một mặt cắt  $z = 0$ . Tại đây mômen uốn không thể tăng được nữa và bằng  $M_{gh}$ . Khi đó một khớp quay tại  $z = 0$  được hình thành. Khớp quay như thế được gọi là khớp dẻo.

$$\text{Với } q = 0,9 q_{gh} \text{ thì } \frac{h_{ch}}{h} = \sqrt{3} \sqrt{0,1 + 0,9 \frac{z^2}{l^2}}$$

Vùng dẻo hình thành trong trường hợp này được cho trên hình 9.8c.

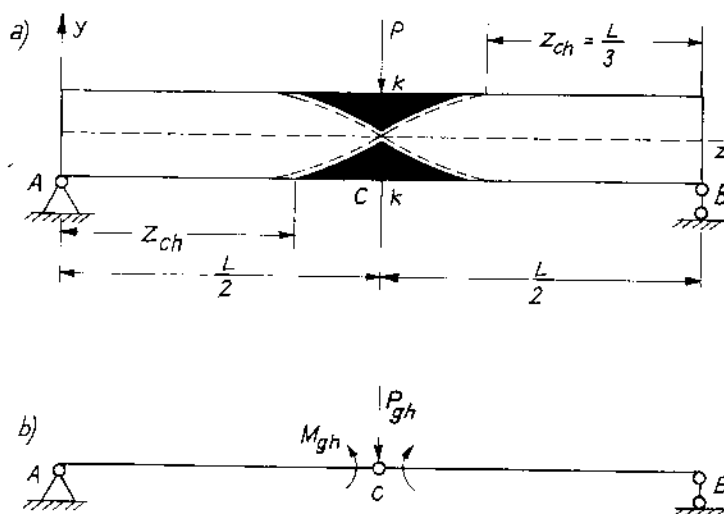
Khi  $q \leq \frac{2}{3} q_{gh}$  thì nói chung vùng dẻo không hình thành và dầm chỉ chịu biến dạng đàn hồi.

## 2. Dầm chịu một lực tập trung đặt ở giữa dầm (hình 9.9)

Trong mục trên chúng ta nghiên cứu dầm chịu tải trọng phân bố đều mà mặt cắt ngang có hai trục đối xứng và bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất tiếp đến kết quả (vì rất bé). Sự khác nhau cơ bản giữa uốn thuần túy và uốn ngang là trong uốn ngang  $M$  thay đổi dọc theo trục dầm.

Bây giờ ta khảo sát vấn đề trường hợp chịu tải của dầm mặt cắt chữ nhật mà biểu đồ kéo của vật liệu không có sự cứng cố (hình 9.4a) chịu lực tập trung.

Xét dầm trên hình 9.9a :



Hình 9.9

Giả sử  $P$  đã đạt được  $P_{ch}$ , với giá trị này thì chỉ điểm K ở mặt cắt giữa dầm đạt được  $\sigma_{ch}$ .

Tại  $z = L/2$ ,  $M = M_{max} = P.L/4$ , khi  $P = P_{ch}$  thì giá trị mô men uốn tương ứng với lúc bắt đầu biến dạng dẻo trên dầm là :

$$M_{ch} = P_{ch} \frac{L}{4} \quad \text{và} \quad P_{ch} = 4 \frac{M_{ch}}{L} \quad (e)$$

Khi  $P$  tăng lớn hơn  $P_{ch}$  thì một miền biến dạng dẻo được hình thành (nghĩa là trong đó  $\sigma = \sigma_{ch}$ ).

a) *Biên giới của các đoạn dầm đàn hồi và dẻo*

Biên giới này được xác định như sau :

$$M(z) = \frac{1}{2} P Z_{ch} = M_{ch} = \frac{1}{4} P_{ch} L ;$$

do đó : 
$$\frac{Z_{ch}}{L} = \frac{P_{ch}}{2P} ; Z_{ch} = L \frac{P_{ch}}{2P}$$

trong đó : khi  $0 \leq z \leq z_{ch}$  dầm ở trạng thái đàn hồi.

Khi  $z_{ch} \leq z \leq L/2$  : Dầm ở trạng thái đàn hồi và dẻo.

Biên giới giữa vùng đàn hồi và vùng dẻo trong đoạn dầm - dẻo được xác định như sau : Từ (9.9) với  $E^* = 0$  và

$$M = \frac{M_{ch}}{2} \left[ 3 - \left( \frac{\rho}{\rho_{ch}} \right)^2 \right], \quad \text{ta có :} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{ch} \sqrt{3 - 2 \frac{M}{M_{ch}}}}$$

Từ : 
$$M_{ch} = \frac{P_{ch} L}{4} ; \quad M(z) = \frac{P \cdot Z}{2} ; \quad \frac{h_{ch}}{h} = \frac{\rho}{\rho_{ch}}$$

Rút ra  $h_{ch}$  tại  $z > z_{ch}$  : 
$$h_{ch} = h \sqrt{3 - 4 \frac{PZ}{P_{ch} \cdot L}} \quad (h)$$

Khi  $P$  tăng thì miền dẻo (tô đen trên hình 9.9) lan dần ra toàn bộ chiều cao dầm nghĩa là :  $h_{ch} \rightarrow 0$ .

b) *Tải trọng giới hạn*

Ta gọi tải trọng giới hạn là giá trị của lực ứng với lúc mặt cắt  $z = L/2$  chiều cao vùng đàn hồi bị cạn kiệt, dầm không còn khả năng chịu tải nữa và nó trở thành một cơ cấu (3.9b).

Tại đây ( $z = L/2$ ) mômen uốn không tăng được nữa và bằng mômen giới hạn (ở đó hình thành một khớp quay, ta gọi là khớp dẻo).

$$P_{gh} = \frac{4 \cdot M_{gh}}{L}$$

Theo (9.9) đối với mặt cắt chữ nhật

$$M_{gh} = \frac{3}{2} M_{ch} = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4}$$

do đó :

$$P_{gh} = \frac{4 \cdot 3}{L \cdot 2} M_{ch} = \frac{4 \cdot 3}{L \cdot 2} P_{ch} \cdot \frac{L}{4} = \frac{3}{2} P_{ch}$$

$$P_{gh} = \frac{3}{2} P_{ch} \quad (i)$$

Khi  $P = P_{ch}$  thì  $z_{ch} = L/3$  (biên của đoạn đàn hồi bằng 1/3 chiều dài dầm) và theo (h) ta rút ra :

$$h_{ch} = \sqrt{3} \cdot h \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{z}{L}} \quad (k)$$

với  $z > L/3$ .

Đường nét đứt trên hình 9.9a là đồ thị của hàm (k).

## §6. PHÂN TÍCH ĐÀN ĐÉO LÝ TƯỜNG THANH MẶT CẮT TRÒN CHIỀU XOĂN

Chúng ta sẽ tìm nghiệm của bài toán về xoắn dầm dẻo của một thanh mặt cắt tròn với giả thiết rằng mặt cắt ngang vẫn luôn luôn phẳng ngay cả ngoài giới hạn đàn hồi và vật liệu của thanh dầm dẻo là lý tưởng (hình 9.4a).

Ở trạng thái đàn hồi ứng suất tiếp tại một mặt cắt ngang đã biết từ sức bền vật liệu :

$$\tau = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (a)$$

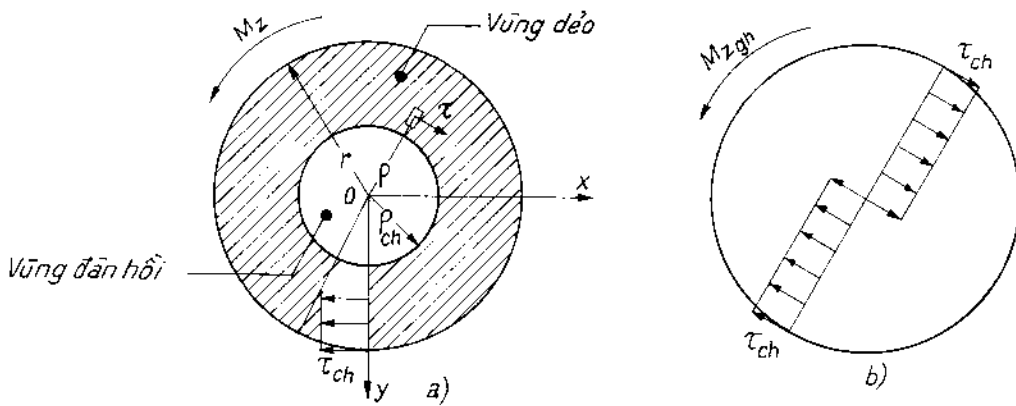
Hai thành phần của ứng suất này theo các trục  $x$  và  $y$  là :

$$\tau_{xz} = -\frac{M_z}{J_p} y ; \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p} x \quad (b)$$

Các thành phần còn lại bằng không. Điều kiện dẻo trong trường hợp này được viết :

$$\tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3}} = \tau_{ch} \quad (c)$$

Như vậy quy luật phân bố ứng suất trong miền đàn hồi là quan hệ (a) còn trong miền dẻo là (c). Biểu đồ biểu diễn sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang dọc theo bán kính được cho trên hình 9.10a.



Hình 9.10

Trạng thái ứng suất trong thanh có thể được mô tả như sau :

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\rho}{\rho_{ch}} \tau_{ch} \text{ khi } \rho \leq \rho_{ch} \\ \tau &= \tau_{ch} \text{ khi } \rho \geq \rho_{ch} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$\rho_{ch}$  là bán kính của nhân đàn hồi.

Đối với các ứng suất trong (d) các phương trình cân bằng, các phương trình liên tục đã được biểu diễn theo ứng suất, các phương trình cân bằng trên các mặt trụ ngoài bán kính  $r$ , ngay cả điều kiện liên tục trên biên giữa vùng đàn hồi và dẻo có  $\rho = \rho_{ch}$  đều được thỏa mãn. Các phương trình cơ bản này đã được cho trong lý thuyết đàn hồi.

Bây giờ chỉ còn điều kiện ở hai đầu cuối chúng ta cần giải quyết. Ở đây ứng suất tiếp  $\tau$  phải cân bằng với mômen xoắn ngoài :

$$M_z = \int_F \tau \rho dF = \frac{\tau_{ch}}{\rho_{ch}} \int_{F_d} \rho^2 dF + \tau_{ch} \int_{F_d} \rho dF \quad (d)$$

Để cho gọn ta đặt :

$$J_{pd} = \int_{F_d} \rho^2 dF = \frac{\pi \rho_{ch}^2}{2} \text{ là mômen quán tính độc cực của diện tích}$$

phần nhân đàn hồi ;

$$S_{pd} = \int_{F_d} \rho dF = \frac{2}{3} \pi (r^3 - \rho_{ch}^3) \text{ là mômen tĩnh độc cực của diện tích}$$

vùng dẻo.

$F_d$ ,  $F_d$  lần lượt là diện tích vùng đàn hồi và dẻo.

Với những ký hiệu này quan hệ (đ) có dạng :

$$M_z = \tau_{ch} \left( \frac{J_{pd}}{\rho_{ch}} + S_{pd} \right) \quad (9.14)$$

Thay các công thức  $J_{pd}$  và  $S_{pd}$  vào (9.14) và sau khi đơn giản ta được :

$$M_z = \tau_{ch} \frac{2}{3} \pi r^3 \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\rho_{ch}}{r} \right)^3 \right] \quad (e)$$

Khi  $\rho_{ch} = 0$  thì ứng suất tại mọi điểm trên mặt cắt ngang đều đạt được giới hạn chảy  $\tau_{ch}$ . Trạng thái này được gọi là trạng thái giới hạn. Mômen xoắn giới hạn tương ứng là :

$$M_{zgh} = \frac{2\tau_{ch}}{3} \pi r^3 \quad (g)$$

Công thức (e) và (g) cho ta tỷ số :

$$\frac{M_z}{M_{zgh}} = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\rho_{ch}}{r} \right)^3 \quad (9.15)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất ở trạng thái dẻo được biểu diễn trên hình 9.10b. Cũng như trong bài toán uốn với bán kính nhân đàn hồi đủ bé, ngay cả bằng một nửa bán kính mặt cắt ( $\rho_{ch} = r/2$ ), công thức (9.15) cho độ lớn  $M_z = 0,969 M_{zgh}$  nghĩa là nhỏ hơn mômen giới hạn 3%. Khi mà mômen xoắn  $M_z \leq 3M_{zgh}/4$  thì mặt cắt là đàn hồi.

## II. NGHIÊN CỨU KHẢ NĂNG CHỊU TẢI CỦA CÁC CẤU KIỆN LÀM BẰNG VẬT LIỆU CỨNG DẸO LÝ TƯỞNG (HÌNH 9.13d)

Những phương pháp nghiên cứu dựa trên cơ sở của định luật Húc chỉ đúng với ứng suất khi chưa vượt quá giới hạn tỷ lệ. Đối với những chi tiết hình dạng đơn giản có chu vi đủ trơn và không có sự thay đổi đột ngột về tải trọng thì những phương pháp này cho phép xác định chính xác quy luật phân bố của ứng suất đàn hồi. Thế nhưng ở những miền có sự tập trung ứng suất thì vấn đề xác định trường ứng suất ở những miền này là những bài toán rất khó. Tuy nhiên ở những vật liệu có tính đàn dẻo cao thì không cần tính đến hiện tượng tập trung ứng suất khi chi tiết chịu tải trọng tĩnh, bởi lẽ là sau khi đạt được giới hạn chảy, ứng suất lớn nhất ở những miền có tập trung ứng suất sẽ không tăng được nữa. Trong khi đó cùng với quá trình tăng tải hiện tượng chảy vẫn tiếp tục lan dần vào phần còn lại của vật thể. Điều này dẫn đến sự san bằng ứng suất ở những miền có tập trung ứng suất. Do đó chúng không có ảnh hưởng đáng kể đến biến dạng tổng thể của chi tiết. Sự san bằng ứng suất khi chi tiết làm việc ngoài miền đàn hồi xảy ra không những chỉ do sự tập trung ứng suất mà còn tất cả các trường hợp trong miền đàn hồi khi ứng suất phân bố không đều trên mặt cắt. Vì thế, trong điều kiện biến dạng dẻo lớn và chất tải tĩnh thì khả năng chịu tải của chi tiết được xác định không phải bởi ứng suất lớn nhất trong chúng mà bởi tải trọng giới hạn.

Khi tính toán kết cấu, ngoài giới hạn đàn hồi theo truyền thống, người ta thường bắt đầu bằng việc nghiên cứu trạng thái đàn hồi, sau đó là trạng thái đàn dẻo và cuối cùng là xác lập tải trọng giới hạn. Đó là tải trọng mà dưới tác dụng của nó kết cấu không thể tiếp tục làm việc được nữa, nghĩa là khả năng làm việc của kết cấu đã được khai thác hết.

Về phương diện lý thuyết, điều đáng nói ở cách giải này là nó cho ta một bức tranh đầy đủ về cách ứng xử của kết cấu trong suốt quá trình chịu lực. Tuy nhiên, cách giải như thế quá công kềnh và phức tạp mà thực tế kỹ thuật thường lại chỉ yêu cầu xác định khả năng chịu tải thực của kết cấu. Vì vậy mà phương pháp cân bằng giới hạn ra đời.

Trong phương pháp cân bằng giới hạn, trạng thái đàn hồi dẻo của kết cấu không được nghiên cứu trước như các phương pháp nói trên mà được



bắt đầu ngay vào việc xác định trạng thái ở đó kết cấu hết khả năng làm việc, gọi là trạng thái giới hạn.

Với mục đích đó, biểu đồ quan hệ  $\sigma = f(\epsilon)$  và  $\sigma_i = f(\epsilon_i)$  được xấp xỉ bởi biểu đồ kéo đối với vật liệu cứng dẻo không củng cố. Nghĩa là khi  $\sigma < \sigma_{ch}$  thì kết cấu không bị biến dạng, còn khi  $\sigma > \sigma_{ch}$  thì kết cấu có thể biến dạng không hạn chế. Phương pháp cân bằng giới hạn được xây dựng trên hai định lý tĩnh và động dưới đây. Hai định lý này cho phép đánh giá hai phía của tải trong giới hạn.

## §1. ĐỊNH LÝ TĨNH

### 1. Trạng thái khả dĩ tĩnh

Một trạng thái chịu ứng suất trong vật thể được gọi là trạng thái khả dĩ tĩnh, nếu đối với trạng thái ấy các điều kiện biên theo ứng suất và các phương trình cân bằng ở mỗi điểm của vật thể đều được thỏa mãn. Đồng thời những điểm biểu diễn trạng thái ứng suất trong không gian ứng suất  $\sigma_{ij}$  đối với những điểm khác nhau trong vật thể hoặc là nằm bên trong các mặt bất đầu chảy dẻo hoặc nằm trên chính mặt đó. Điều kiện khả dĩ tĩnh có thể không cần phù hợp với điều kiện khả dĩ động của hệ.

Chúng ta ký hiệu những điểm này là  $M^*$  tương ứng với tenxơ ứng suất  $\sigma_{ij}^*$  (hình 9.11). Vì thế những trạng thái ứng suất này thỏa mãn điều kiện :

$$f_{ch}(\sigma_{ij}^*) \leq 0.$$

Những điểm biểu diễn trạng thái thực của vật thể được ký hiệu bằng chữ  $M$  ứng với tenxơ ứng suất  $\sigma_{ij}$ .

### 2. Định lý tĩnh

*"Tải trọng tương ứng với trạng thái khả dĩ tĩnh luôn luôn bé hơn tải trọng phá hủy thực"*

Để đơn giản cách chứng minh, chúng ta giả thiết rằng lực khối bằng không và sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với các trạng thái thực và khả dĩ tĩnh. Với mục đích đó, ta ký hiệu  $V_i$  và  $\xi_{ij}$  là tốc độ chuyển vị của điểm đặt các ngoại lực và tốc độ biến dạng các điểm của vật thể ở trạng thái thực. Do đó đối với trạng thái thực ta có :

$$\int_S X_{vi} V_i ds = \int_V \sigma_{ij} \xi_{ij} dv \quad (9.16)$$

và đối với trạng thái khả dĩ tĩnh :

$$\int_S X_{vi}^* V_i ds = \int_V \sigma_{ij}^* \xi_{ij} dv \quad (9.17)$$

Trong các phương trình trên,  $X_{vi}$ ,  $X_{vi}^*$  là hình chiếu của tải trọng phân bố trên bề mặt vật thể lên phương các trục tọa độ. Thực hiện trừ quan hệ (9.16) và (9.17) ta được :

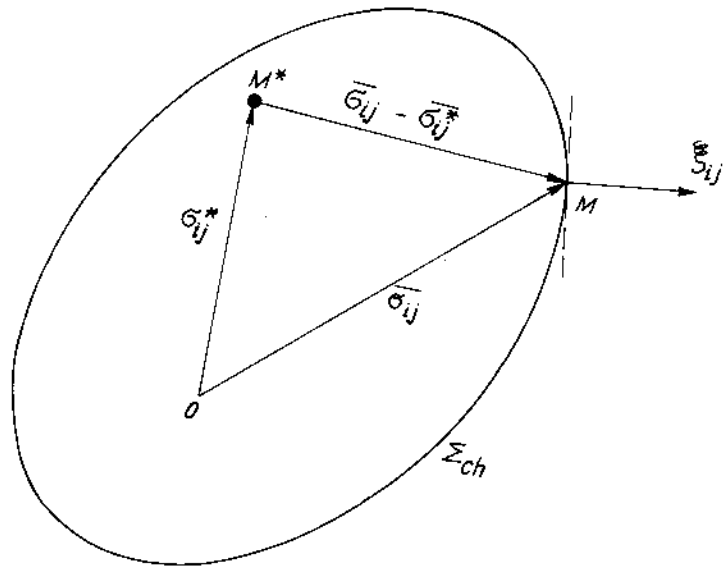
$$\int_S (X_{vi} - X_{vi}^*) V_i ds = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \xi_{ij} dv$$

Theo định đề Druke đã được chứng minh ở chương 2 của [5]

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} > 0,$$

do đó :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \xi_{ij} > 0 \text{ (xem hình 9.11).}$$



Hình 9.11

Vì vậy :

$$\int_S X_{vi}^* V_i ds < \int_S X_{vi} V_i ds \quad (9.18)$$

Kết quả này cho thấy công suất của tải trọng bề mặt ứng với trạng thái ứng suất khả dĩ tĩnh trên các tốc độ chuyển vị thực luôn nhỏ hơn công suất của tải trọng bề mặt ở trạng thái thực trên chính những tốc độ đó. Nếu ngoại lực là những lực tập trung suy rộng, theo (9.18) ta có :

$$\sum P_i^* V_i < \sum P_i V_i$$

Trường hợp  $i = 1$ , kết quả này là :

$$P^* < P \quad (9.19)$$

Đó là điều phải chứng minh.

Định lý tĩnh thiết lập giá trị gần đúng dưới của tải trọng giới hạn. Khi khảo sát những trạng thái khả dĩ tĩnh khác nhau ta sẽ có những tải trọng khác nhau nhỏ hơn tải trọng giới hạn thực. Tải trọng lớn nhất trong chúng sẽ gần nhất với tải trọng thực cần tìm. Vì lẽ đó phương pháp xác định tải trọng giới hạn bằng cách khảo sát các trạng thái khả dĩ tĩnh được gọi là *phương pháp tĩnh*.

## §2. ĐỊNH LÝ ĐỘNG

Trạng thái chịu lực của vật thể được gọi là trạng thái khả dĩ động, nếu các điều kiện bề mặt theo chuyển vị và các điều kiện liên tục của biến dạng ở mỗi điểm của vật thể được thỏa mãn. *Các phương trình cân bằng có thể không cần phải thỏa mãn*. Như vậy, các điểm biểu diễn trạng thái ứng suất ở các điểm của vật thể đối với trạng thái khả dĩ động phải nằm trên mặt bất đầu chảy dẻo.

Chúng ta ký hiệu những điểm này là  $\tilde{M}$  và tenxơ ứng suất tương ứng là  $\tilde{\sigma}_{ij}$  (hình 9.12).

Cũng như định lý tĩnh, ở đây ta giả thiết lực khối bằng không và sử dụng nguyên lý chuyển vị khả dĩ đối với trạng thái thực, khi thừa nhận các chuyển vị tỷ lệ với tốc độ  $\tilde{V}_i$  và  $\tilde{\xi}_{ij}$  của trạng thái khả dĩ động là các chuyển vị khả dĩ. Do đó ta nhận được :

$$\int_S X_{vi} \tilde{V}_i ds = \int_V \sigma_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv$$

hoặc là :



$$\int_S \tilde{X}_{vi} \tilde{V}_i ds > \int_S X_{vi} V_i ds \quad (9.22)$$

nghĩa là công suất của tải trọng bề mặt tương ứng với trạng thái khả dĩ động trên các tốc độ chuyển vị khả dĩ động luôn lớn hơn công suất của tải trọng thực bề mặt trên chính những tốc độ này.

Nếu ngoại lực là những lực tập trung suy rộng thì theo (9.22)

$$\sum \tilde{P}_i \tilde{V}_i > \sum P_i V_i$$

Đối với trường hợp một lực ( $i = 1$ ) thì :

$$\tilde{P} > P \quad (9.23)$$

trong đó theo (9.21) :

$$\tilde{P} = \frac{1}{V} \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\xi}_{ij} dv$$

Đó là điều cần chứng minh.

Định lý động được phát biểu như sau :

*"Tải trọng tương ứng với trạng thái khả dĩ động luôn lớn hơn tải trọng giới hạn phá hủy thực"*

Khác với định lý tĩnh, định lý động xác định giá trị gần đúng trên (giá trị giới hạn trên) của tải trọng giới hạn thực. Khi khảo sát những trạng thái khả dĩ động khác nhau, ta có thể xác định được những tải trọng khác nhau luôn lớn hơn tải trọng giới hạn thực. Tải trọng nhỏ nhất trong chúng cho ta giá trị giới hạn trên của tải trọng giới hạn thực. Phương pháp xác định tải trọng giới hạn như thế được gọi là *phương pháp động*.

Vì thế, các định lý tĩnh và động cho ta khả năng xác lập sự đánh giá về hai phía của tải trọng phá hủy thực. Để một trạng thái khả dĩ là trạng thái thực thì nó đồng thời phải là trạng thái khả dĩ động và ngược lại. Nếu tải trọng giới hạn được xác định bằng các phương pháp tĩnh và động trùng nhau thì điều đó có nghĩa là tải trọng giới hạn nhận được là thực và nghiệm nhận được của bài toán là đầy đủ.

### §3. UỐN DẦM CỨNG DẸO

Trước hết hãy xét một thanh chịu một lực kéo đã đạt được giá trị  $P_{ch} = F \cdot \sigma_{ch}$  ( $F$  là diện tích mặt cắt ngang). Với lực kéo này thì toàn thanh bị chảy dẻo và không có một điểm nào trong thanh có ứng suất lớn hơn  $\sigma_{ch}$ .

Vấn đề sẽ khác đi đối với thanh chịu uốn. Qui luật thay đổi ứng suất trên mặt cắt ngang từ lúc bắt đầu chất tải đến lúc đạt được trạng thái dẻo trên toàn bộ mặt cắt, tức là trạng thái giới hạn đã được nghiên cứu ở trên đối với biểu đồ biến dạng đàn hồi dẻo lý tưởng. Nếu bỏ qua biến dạng đàn hồi và chỉ kể đến biến dạng dẻo thì trong trường hợp này ta sẽ nhận được chỉ mômen giới hạn :

$$M_{gh} = \sigma_{ch} S_x = W_x \left( \frac{S_x}{W_x} \sigma_{ch} \right) = \sigma_{ch}^u W_x$$

Đại lượng  $\sigma_{ch}^u = \frac{S_x}{W_x} \sigma_{ch}$  gọi là giới hạn chảy khi uốn

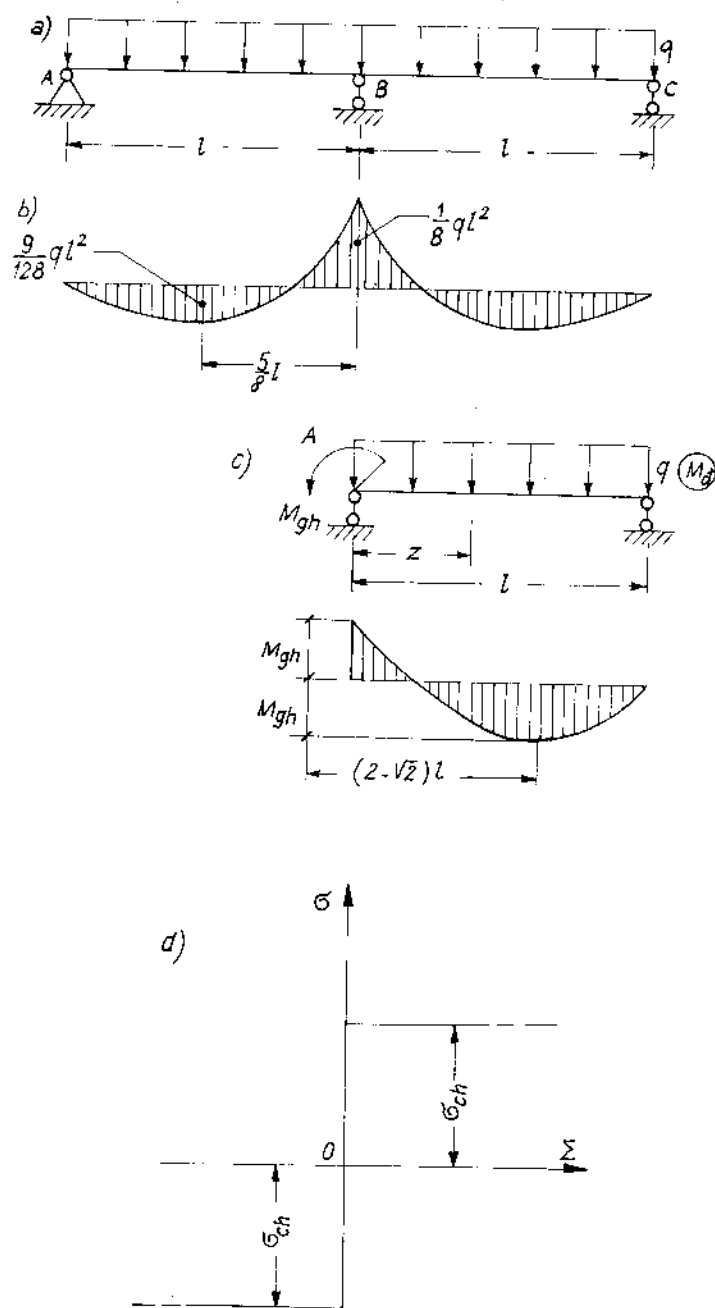
Tỷ số  $\frac{S_x}{W_x}$  bằng 1,5 đối với mặt cắt chữ nhật, bằng 1,7 đối với mặt cắt tròn, bằng 1,15 đối với mặt cắt chữ I.

Việc tính toán theo tải trọng giới hạn cho phép xác định chính xác độ an toàn thực của chi tiết làm bằng vật liệu cứng dẻo.

Hãy thực hành một ví dụ về việc xác định tải trọng giới hạn đối với dầm liên tục chịu tải trọng phân bố đều (hình 9.13a), với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt tới kết quả.

Hình 9.13b là biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi được vẽ theo lý thuyết thông thường của sức bền vật liệu. Mômen lớn nhất ở gối tựa giữa B là :  $M_B = ql^2/8$ .

Nếu mômen này đạt được giá trị  $M_{gh} = \sigma_{ch} S_x$  thì ở mặt cắt này xuất hiện một khớp dẻo. Khác với khớp thông thường, khớp dẻo có mômen khác không và bằng  $M_{gh}$ . Sự chảy dẻo ở mặt cắt này làm giảm một bậc siêu tĩnh trong hệ. Trong trường hợp của chúng ta dầm trở thành tĩnh định và khả năng làm việc của hệ chưa bị cạn kiệt. Khi tiếp tục tăng



Hình 9.13

tải trọng mỗi một nhịp của hệ làm việc như một dầm đơn giản trên hai gối tựa.

Mômen uốn ở mặt cắt  $z$  kể từ gối tựa giữa là :

$$M(z) = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \quad (a)$$

Khi  $M$  đạt được giá trị  $M_{gh}$  tại mặt cắt  $z = z_0$  nào đó, thì ở mặt cắt này hình thành khớp dẻo thứ hai và khả năng chịu tải của dầm bị cạn kiệt, vì khi ấy dầm đã biến thành một cơ cấu. Tải trọng gây ra trạng thái như thế được xác định bởi đẳng thức :

$$M_{gh} = \frac{q_{gh}l^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)$$

Kết quả cho ta :

$$q_{gh} = \frac{2M_{gh}}{l^2} \frac{2 - \frac{z}{l}}{\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}} \quad (b)$$

Từ điều kiện cực tiểu của  $q_{gh}$  ta có :

$$z_0 = l \left( 2 - \sqrt{2} \right) \text{ và } q = 11,7 \frac{M_{gh}}{l^2} = 11,7 \frac{\sigma_{ch} S_x}{l^2} \quad (c)$$

Nếu gọi  $q$  là tải trọng gây ra ứng suất lớn nhất ở một điểm trên mặt cắt và vừa bằng giới hạn chảy thì  $q_{ch}$  được xác định từ điều kiện :

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{q_{ch}l^2}{8} = \sigma_{ch} W_x \quad \text{nghĩa là} \quad q_{ch} = \frac{8\sigma_{ch} W_x}{l^2}$$

Tỷ số các tải trọng nhận được từ hai quan điểm tính là :

$$\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 1,46 \frac{S_x}{W_x} \quad (d)$$

Đối với mặt cắt chữ nhật :

$$\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 2,2$$



#### §4. UỐN VÀ CẮT ĐỒNG THỜI

Trong các mục trên ta đã nghiên cứu quá trình ứng xử của dầm chịu uốn khi bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt. Khi kể đến sự làm việc đồng thời của ứng suất pháp và ứng suất tiếp thì mômen giới hạn bị giảm. Vấn đề là cần phải thiết lập được quan hệ giữa các giá trị của mômen uốn và lực cắt ở trạng thái giới hạn  $f(M_{gh}, Q_{gh}) = 0$ . Biểu thức của  $M_{gh}$  và  $Q_{gh}$  như sau :

$$M_{gh} = \int_F y \sigma dF ; Q_{gh} = \int_F \tau dF, \quad (9.24)$$

trong đó :  $F$  là diện tích mặt cắt ngang ;

$y$  - tung độ tính từ trục chia mặt cắt thành hai phần bằng nhau.

Ở trạng thái giới hạn ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại mọi điểm trên mặt cắt phải tuân theo điều kiện chảy. Trong trường hợp riêng này của trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt điều kiện dẻo của Huber-Mises (trong sức bền vật liệu gọi là thuyết bền thứ tư) có dạng :

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_{ch}^2 = 3\tau_{ch}^2, \quad (a)$$

trong đó  $\tau_{ch}$  là giới hạn chảy khi trượt thuần túy.

Để xác định sự phân bố của ứng suất trên mặt cắt, từ (a) ta tìm ứng suất tiếp :

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} \quad (b)$$

Và đòi hỏi với ứng suất tiếp ấy lực cắt là lớn nhất với giá trị cho trước của mômen uốn :

$$Q_{gh} = \int_F \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} dF \quad (c)$$

Như đã chỉ rõ trong phép tính biến phân để có điều đó thì điều kiện sau đây phải được thực hiện :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \lambda y \sigma + \sqrt{\frac{\sigma_{ch}^2 - \sigma^2}{3}} \right] = 0 \quad (d)$$

Từ đây rút ra là :

$$\sigma = \sigma_{ch} \frac{\sqrt{3} \lambda y}{\sqrt{1 + 3\lambda^2 y^2}} \quad (d)$$

và theo (b) :

$$\tau = \frac{\sigma_{ch}}{\sqrt{3(1 + 3\lambda^2 y^2)}} \quad (e)$$

Ở đây  $\lambda$  là thông số đặc trưng cho tỉ số  $M_{gh}$  và  $Q_{gh}$ .

Từ (d) và (e) ta nhận được (9.24) dưới dạng :

$$\left. \begin{aligned} M_{gh} &= \sigma_{ch} \sqrt{3} \lambda \int_F \frac{y^2 dF}{\sqrt{1 + 3\lambda^2 y^2}} \\ Q_{gh} &= \tau_{ch} \int_F \frac{dF}{\sqrt{1 + 3\lambda^2 y^2}} \end{aligned} \right\} \quad (9.25)$$

Quan hệ (9.25) là phương trình đường cong giới hạn dưới dạng thông số.

Trường hợp mặt cắt ngang là hình chữ nhật ( $b \times h$ ) đường cong giới hạn này được xây dựng như sau :

- Khi không kể đến lực cắt thì mômen giới hạn là :

$$M_o = S_x \sigma_{ch} = \frac{bh^4}{4} \sigma_{ch}$$

- Ngược lại, khi không kể đến mômen thì lực cắt giới hạn là :

$$Q_o = F \tau_{ch} = bh \tau_{ch}$$

- Nếu ký hiệu :  $\xi = \frac{y}{h}$  ;  $m = \frac{M_{gh}}{M_o}$  ;  $q = \frac{Q_{gh}}{Q_o}$

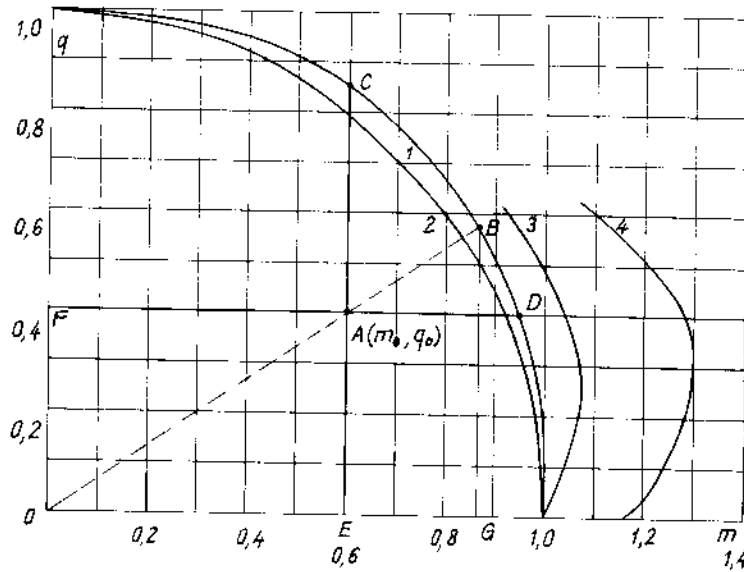
thì từ quan hệ (9.25) ta tìm được :

$$\left. \begin{aligned} m &= 8\lambda_1 \int_0^{1/2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \xi^2}} = \frac{\text{sh}2\mu - 2\mu}{2 \text{sh}^2 \mu} \\ q &= 2 \int_0^{1/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \lambda_1^2 \xi^2}} = \frac{\mu}{\text{sh} \mu} \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

trong đó :  $\lambda_1$  là thông số mới thay thế cho  $\lambda$ , cụ thể là :

$$\lambda_1 = 2\text{sh}\mu = \sqrt{3}\lambda h$$

Trên hình (9.14) là đường cong giới hạn được xây dựng từ phương trình (9.26).



Hình 9.14

Với mặt cắt hình chữ I lý tưởng (nghĩa là có thành rất mảnh còn chiều cao lớn hơn cánh nhiều lần) đường cong giới hạn là một vòng tròn hình (9.14) :

$$m^2 + q^2 = 1 \quad (9.27)$$

Các đường cong giới hạn đối với các mặt cắt I với các quan hệ khác nhau của kích thước mặt cắt sẽ nằm giữa đường cong 1 và 2.

Từ đồ thị hình (9.14) cho thấy với lực cắt cho trước thì mômen uốn có thể xác định theo phương trình (9.27). Khi đó, độ an toàn đảm bảo tới 13% với b/h bé và tới 40% với b/h lớn so với nghiệm chính xác của bài toán phẳng với vật liệu cứng dẻo. Sau khi đã xây dựng được đường cong giới hạn, ta có thể xác định được hệ số an toàn đối với trạng thái ứng suất của chi tiết chịu M và Q. Trước hết tính tỷ số  $m_0 = M/M_0$ ,  $q_0 = Q/Q_0$ , và định vị điểm A ( $m_0, q_0$ ) trong hệ tọa độ (m, q) (trên hình 9.14a) ta đã chọn  $m_0 = 0,6$ ;  $q_0 = 0,4$ .

Độ lớn của tải trọng giới hạn phụ thuộc vào quy luật tác dụng của M và Q. Khi Q là hằng số và M tăng thì điểm A di chuyển theo đường FD. Do đó, hệ số an toàn (đối với mặt cắt chữ nhật) :

$$k_1 = \frac{FD}{FA} = \frac{0,95}{0,60} = 1,58$$

Khi M = const thì hệ số an toàn theo lực cắt là :

$$k_2 = \frac{EC}{EA} = \frac{0,84}{0,40} = 2,10$$

Nếu M và Q cùng tăng theo một tỷ lệ thì :

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{0,87^2 + 0,58^2}}{\sqrt{0,60^2 + 0,40^2}} = 1,45$$

Trong trường hợp mặt cắt có hình dạng bất kỳ thì với một độ chính xác đầy đủ có thể lấy đường tròn (9.27) làm đường cong giới hạn. Khi ấy hệ số an toàn với sự tăng tỷ lệ của M và Q có thể xác định bằng giải tích như sau. Từ hình (9.14) ta có :

$$k = \frac{OB}{OA} = \frac{q}{q_0} = \frac{m}{m_0} ;$$

$$\text{do đó} \quad m = km_0 = k/k_m, \quad q = q/q_0 = k/k_q \quad (g)$$

Ở đây  $k_m$  và  $k_q$  là hệ số an toàn do tác dụng riêng rẽ của M và Q :

$$k_m = \frac{1}{m_0} = \frac{M_0}{M} ; \quad k = \frac{1}{q_0} = \frac{Q_0}{Q}$$

Thay (g) vào (9.27) ta tìm được hệ số an toàn tác dụng đồng thời của M và Q :

$$k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k_m^2} + \frac{1}{k_q^2}}} = \frac{k_m k_q}{\sqrt{k_m^2 + k_q^2}} \quad (9.28)$$

## §5. UỐN VÀ KÉO ĐỒNG THỜI

Đối với thanh chịu uốn và kéo đồng thời, ở trạng thái giới hạn biểu đồ ứng suất trên mặt cắt ngang của thanh là hai mảnh chữ nhật, phần chịu

kéo của mặt cắt ứng suất đạt giới hạn chảy kéo  $\sigma_{ch}^+$ , còn phần kia chịu nén đạt  $\sigma_{ch}^-$ . Hãy xét mặt cắt có một trục đối xứng - trục thẳng đứng chẳng hạn (hình 9.15).

Ta gọi phần diện tích chịu nén của mặt cắt là  $F_1$  và khoảng cách từ biên của phần này đến trục  $x$  là  $y_0$ . Trục  $x$  là đường phân chia hai vùng kéo và nén của mặt cắt khảo sát. Giả sử diện tích  $F_1$  nhỏ hơn diện tích vùng kéo và tách ra trong vùng kéo một diện tích định lượng  $F_2 = F_1$ . Khi đó phần diện tích còn lại của vùng kéo  $F_0 = F - (F_1 + F_2) = F - 2F_1$  và sẽ chịu lực kéo :

$$P_{gh} = F_0 \sigma_{ch} = (F - 2F_1) \sigma_{ch} \quad (a)$$

Còn mômen uốn nội lực tác dụng trong mặt phẳng thẳng đứng bằng :

$$M_{gh} = F_1 a \sigma_{ch}, \quad (b)$$

trong đó  $F$  - là diện tích của toàn bộ mặt cắt

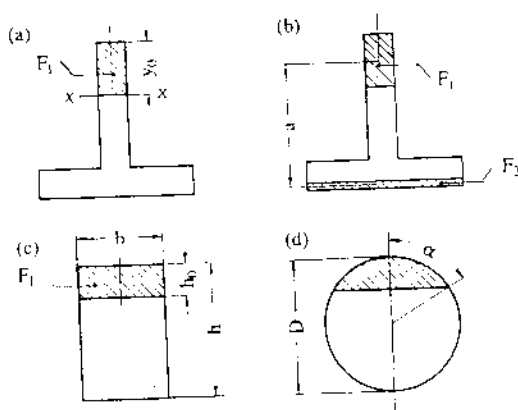
$a$  - là khoảng cách giữa trọng tâm các phần  $F_1$  và  $F_2$ .

Để có mômen uốn lớn nhất với một giá trị cho trước của  $P_{gh}$  thì diện tích  $F_2$  cần phải lấy sao cho  $a$  là lớn nhất. Nghĩa là phải lấy  $F_2$  ở biên của mặt cắt (hình 9.15).

Các đẳng thức (a) và (b) cho phương trình đường cong giới hạn đối với mặt cắt bất kỳ chứa trong đó đại lượng  $F_1$  như một thông số bất kỳ.

Ví dụ : Đối với mặt cắt ngang hình chữ nhật nếu ký hiệu chiều cao vùng nén là  $y_0 = h_0$  (hình 9.15c) thì

$$F_1 = F_2 = b h_0 ; \quad a = h - h_0 ;$$



Hình 9.15

$$P_{gh} = b(h - 2h_o) \sigma_{ch} = F \left(1 - 2 \frac{h_o}{h}\right) \sigma_{ch}$$

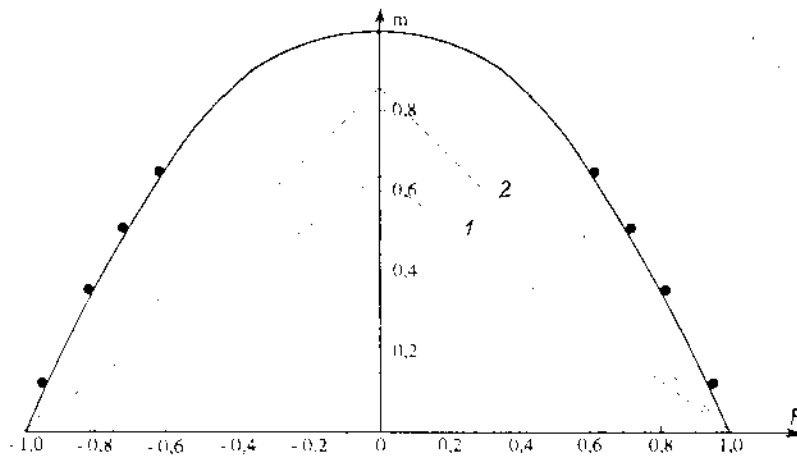
$$M_{gh} = bh_o(h - h_o) \sigma_{ch} = W_{ch} \frac{4h_o}{h} \left(1 - \frac{h_o}{h}\right) \sigma_{ch}$$

Ta gọi  $P_o = F \cdot \sigma_{ch}$  và  $M_o = W_{ch} \cdot \sigma_{ch}$  là lực tác dụng và mômen uốn giới hạn của mặt cắt khi chịu tác dụng riêng rẽ. Khi tỉ số  $h_o/h$  trong các phương trình trên ta đi đến phương trình đường cong giới hạn trong hệ tọa độ  $(m, p)$  :

$$m + p^2 = 1 \quad (9.29)$$

Trong đó  $m = \frac{M_{gh}}{M_o}$  và  $p = \frac{P_{gh}}{P_o}$

Parabol (9.29) là đường liên tục trên hình 9.16.



Hình 9.16

Đối với mặt cắt tròn đường kính  $D$  trên (hình 9.15d) với tư cách là thông số của vùng nén ta lấy góc  $\alpha$ , Khi đó  $F_1$  và hai lần mômen tĩnh  $F_1 a$  đối với đường kính nằm ngang bằng :

$$F_1 = \frac{D^2}{8} (2\alpha - \sin 2\alpha) ; F_1 a = \frac{1}{6} D^3 \sin^3 \alpha$$

$$\text{Mặt khác : } P_o = F\sigma_{ch} = \frac{\pi D^2}{4} \sigma_{ch} ; \quad M_o = W_{ch}\sigma_{ch} = \frac{1}{6} D^3 \sigma_{ch}$$

Theo các công thức (a) và (b) phương trình đường cong giới hạn trong trường hợp này là

$$\left. \begin{aligned} m &= \sin^3 \alpha \\ p &= 1 - \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\pi} \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

Một số điểm đen trên hình (9.16) là các giá trị được tính theo công thức (9.30), nhưng đối với mặt cắt chữ nhật với giá trị  $p$  cho trước,  $m$  giới hạn chỉ khác với giá trị của nó không lớn hơn 8%.

Nếu tính theo ứng suất pháp cực đại :  $\sigma_{max} = \frac{M}{W} + \frac{P}{F}$  thì từ điều kiện  $\sigma_{max} = \sigma_{ch}$  ta nhận được vùng tải trọng giới hạn bị chặn bởi đường :

$$\frac{M}{\sigma_{ch} W} + \frac{P}{F \sigma_{ch}} = 1$$

hoặc trong mặt phẳng  $(m, p)$  thì phương trình trên có dạng :

$$m \frac{S_x}{W} + p = 1$$

Những đường thẳng này được cho trên hình (9.16). Đường 1 đối với mặt cắt chữ nhật ( $S_x/W = 1,5$ ), đường 2 đối với mặt cắt chữ I có  $S_x/W = 1,25$ .

Để xác định hệ số an toàn theo tải trọng giới hạn ta sử dụng công thức (9.29) và thu được

$$k = \frac{k_p}{2k_m} \left( \sqrt{k_p^2 + 4k_m^2} - k_p \right) \quad (9.31)$$

$$\text{Ở đây } k_m = \frac{M_o}{M} ; \quad k_p = \frac{P_o}{P} ; \quad P_o = F \cdot \sigma_{ch} \text{ và } M_o = W_{ch} \cdot \sigma_{ch}$$

## §6. XOẢN VÀ KÉO ĐỒNG THỜI CÁC TRỤC TRÒN

Mômen xoắn giới hạn  $M_{gh}$  và lực kéo tới hạn  $P_{gh}$  được biểu diễn qua ứng suất tiếp  $\tau$  và ứng suất pháp  $\sigma$  như sau :

$$M_{gh} = 2\pi \int_a^b r^2 \tau dr ; \quad P_{gh} = 2\pi \int_a^b r \sigma dr,$$

trong đó  $a$  và  $b$  và bán kính trong và ngoài của trục,  $r$  là bán kính tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt. Ở trạng thái giới hạn các ứng suất  $\sigma$  và  $\tau$  phải tuân thủ điều kiện Huber Mises. Công thức (a) §4 và biểu thức của lực dọc  $P_{gh}$  được viết :

$$P_{gh} = 2\pi \int_a^b r \sqrt{\sigma_{ch}^2 - 3\tau^2} dr \quad (9.32)$$

Để  $P_{gh}$  đạt cực đại với giá trị cho trước của mômen xoắn như đã làm ở §4 ta phải có điều kiện :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( r^2 \tau + \lambda r \sqrt{\sigma_{ch}^2 - 3\tau^2} \right) = 0$$

Từ đây và từ điều kiện dẻo (a) của §4 ta tìm được sự phân bố ứng suất :

$$\tau = \frac{r \sigma_{ch}}{\sqrt{9\lambda^2 + 3r^2}} = \frac{r \tau_{ch}}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} ; \quad \sigma = \sigma_{ch} \frac{\sqrt{3\lambda}}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}}$$

còn mômen và lực dọc bằng :

$$\begin{aligned} M_{gh} &= 2\pi \tau_{ch} \int_a^b \frac{r^3 dr}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} ; \\ P_{gh} &= 2\pi \tau_{ch} \sqrt{3\lambda} \int_a^b \frac{r dr}{\sqrt{3\lambda^2 + r^2}} \end{aligned} \quad (9.33)$$

Khi  $\lambda = 0$  ta có  $P_{gh} = 0$  và mômen xoắn giới hạn :

$$M_{gh} = 2\pi \tau_{ch} \frac{b^3 - a^3}{3} = \tau_{ch} W_{pch}$$

Đối với trục đặc ( $a = 0$ ) mômen chống xoắn của mặt cắt  $W_{pch} = \frac{2\pi b^3}{3}$  ; trong khi đó mômen chống xoắn đàn hồi của mặt cắt  $W_p = \frac{\pi b^3}{2}$ ,

nghĩa là  $\frac{W_{pch}}{W_p} = 1,33$ . Khi  $\lambda \Rightarrow \infty$  thì mômen xoắn bằng không còn lực dọc trục giới hạn là :



$$P_o = \pi(b^2 - a^2)\sigma_{ch} = F\sigma_{ch} \quad (b)$$

Còn ứng suất kéo (khi  $\lambda = \infty$ ) thì phân bố đều trên mặt cắt.

Nếu ký hiệu :  $\alpha = \frac{a}{b}$  ,  $m = \frac{M_{gh}}{M_o}$  ,  $p = \frac{P_{gh}}{P_o}$  và sau khi tính các tích

phân (9.33) ta có phương trình giới hạn dưới dạng các thông số :

$$\left. \begin{aligned} p &= 2\mu \frac{\sqrt{\mu^2 + 1} - \sqrt{\mu^2 + \alpha^2}}{1 - \alpha^2} \quad \text{với } \mu = \frac{\lambda \sqrt{3}}{b} \\ m &= \frac{1}{1 - \alpha^3} \left[ (1 - 2\mu^2) \sqrt{\mu^2 + 1} - (\alpha^2 - 2\mu^2) \sqrt{\mu^2 + \alpha^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9.34)$$

Trong trường hợp (b - a) rất nhỏ thì sau khi khử dạng bất định trong (9.34) ta đi tới :

$$p = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} ; m = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} ; p^2 + m^2 = 1 \quad (9.35)$$

nghĩa là đường cong giới hạn đối với vỏ mỏng là đường tròn. Đối với trục đặc ( $\alpha = 0$ ) thì sau khi khử  $\mu$  từ (9.34) phương trình của m là :

$$m = \frac{2 + |p|}{2} \sqrt{1 - |p|} \quad (c)$$

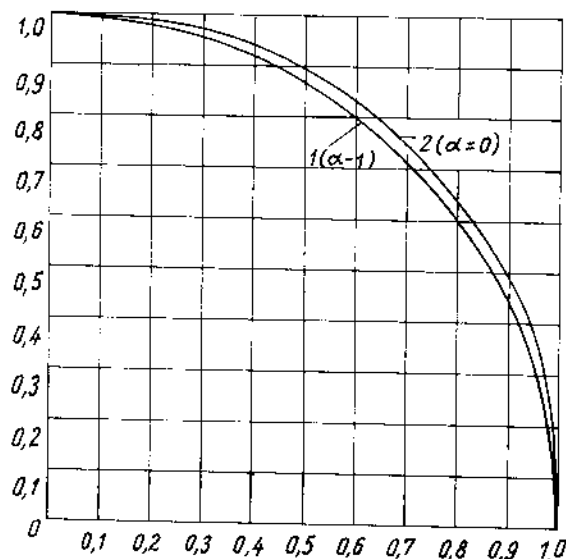
Trên hình (9.17) là những đường cong giới hạn đối với  $\alpha = 1$  (đường cong 1) và ( $\lambda = 0$ ) đối với đường cong 2. Những đường cong này xác định một vùng hẹp của các đường cong giới hạn đối với những giá trị trung gian của  $\alpha$ . Với mức độ an toàn thấp có thể thừa nhận đường tròn  $p^2 + m^2 = 1$  là đường cong giới hạn đối với chiều dày bất kỳ của thành ống, còn hệ số an toàn được tính theo công thức :

$$k = \frac{k_m k_p}{\sqrt{k_m^2 + k_p^2}} \quad (9.36)$$

Khi tác dụng riêng rẽ của lực dọc P và mômen M các hệ số an toàn riêng  $k_m$  và  $k_p$  là :

$$k_m = \frac{M_o}{M} \quad k_p = \frac{P_o}{P}$$

thêm vào đó các lượng  $M_o$  và  $P_o$  được tính theo công thức (a) và (b).



Hình 9.17

Dưới đây, ta sẽ khảo sát một vài ví dụ ứng dụng phương pháp cân bằng giới hạn, đồng thời đưa ra lời giải đầy đủ của một vài bài toán thực tế về việc xác định khả năng chịu tải của một kết cấu.

## §7. CÁC VÍ DỤ

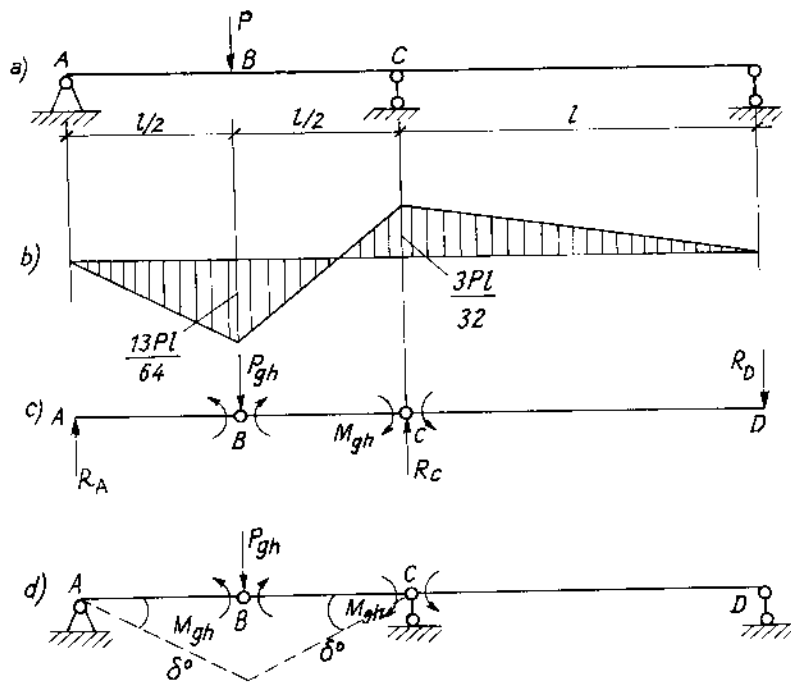
Ví dụ 1 : Dầm siêu tĩnh. Hình 9.18

Đối với các hệ tĩnh định, khi biểu đồ kéo của vật liệu là đàn dẻo lý tưởng thì khả năng chịu tải của nó bị cạn kiệt lúc có một khớp dẻo được hình thành.

Điều này lại không xảy ra đối với hệ siêu tĩnh khi mới có một khớp dẻo được hình thành.

Dưới đây chúng ta xét một ví dụ về dầm siêu tĩnh để minh họa cho những nhận xét ở trên.

Hãy xét dầm siêu tĩnh chịu tải như hình (9.18a) biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi cho trên hình 9.18b. Tại B :  $M_{max} = 13PL/64$ , trên mặt cắt này sẽ xuất hiện điểm đầu tiên đạt giới hạn chảy  $\sigma = \sigma_{ch}$  và mômen tương ứng lúc này là :



Hình 9.18

$$M_{ch} = \frac{13 P_{ch} L}{64} \text{ do đó } P_{ch} = \frac{64}{13} \frac{M_{ch}}{L}$$

Đối với dầm mặt cắt chữ nhật :

$$M_{ch} = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{6} \text{ do đó } P_{ch} = \frac{32}{39} \sigma_{ch} \frac{bh^2}{L}$$

Khi  $P$  tăng ( $P > P_{ch}$ ) thì miến dểo hình thành ở  $B$  sau đó ở  $C$ . Dầm trở thành cơ cấu khi các khớp dểo ở  $B$  và  $C$  đã được hình thành (hình 9.18c), chiếu các mômen tại các khớp dểo cho ta biết chiều mở của các khớp dểo.

Tải trọng giới hạn được xác định từ điều kiện cân bằng mômen giới hạn và mômen uốn tại các mặt cắt có khớp dểo và các phương trình cân bằng. Cụ thể là :

$$\sum m_c(F_k) = 0 = R_A \cdot L - P_{gh} \cdot L/2 + R_D \cdot L = 0 \quad (a)$$

Mặt khác :

$$M_{gh}^B = R_A L/2 \rightarrow R_A = 2M_{gh}/L$$

$$M_{gh}^B = R_D \cdot L \rightarrow R_D = M_{gh}/L$$

Phương trình (a) trở thành :

$$\frac{2 M_{gh} \cdot L}{L} - P_{gh} \frac{L}{2} + \frac{M_{gh}}{L} \cdot L = 0 \rightarrow P_{gh} = \frac{6M_{gh}}{L} \quad (b)$$

Đối với dầm mặt cắt chữ nhật :

$$M_{gh} = \sigma_{ch} \frac{bh^2}{4} \rightarrow P_{ch} = 1,5\sigma_{ch} \frac{bh^2}{L}$$

Ví dụ 2 : Có một dầm siêu tĩnh được cho như hình vẽ (hình 9.19)

Với phản lực  $R_B$  ta sẽ khảo sát tất cả các trạng thái khả dĩ tĩnh của dầm.

Điều kiện cân bằng tại Z bất kỳ cho ta :

$$M(Z) = R_B \cdot Z - q \cdot \frac{Z^2}{2}$$

Giá trị cực đại của M xuất hiện khi :

$$Z = Z_0 = \frac{R_B}{q}$$

và bằng :

$$M = M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B^2}{q}$$

Từ điều kiện  $M_{\max}$  không thể vượt quá mômen giới hạn của mặt cắt  $M_{gh}$

$$M_{l\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_B^2}{q} \leq M_{gh}$$

Ta rút ra điều kiện thứ nhất của tải trọng phá hủy :

$$q_{lt} \geq \frac{R_B^2}{2 M_{gh}} \quad (a)$$

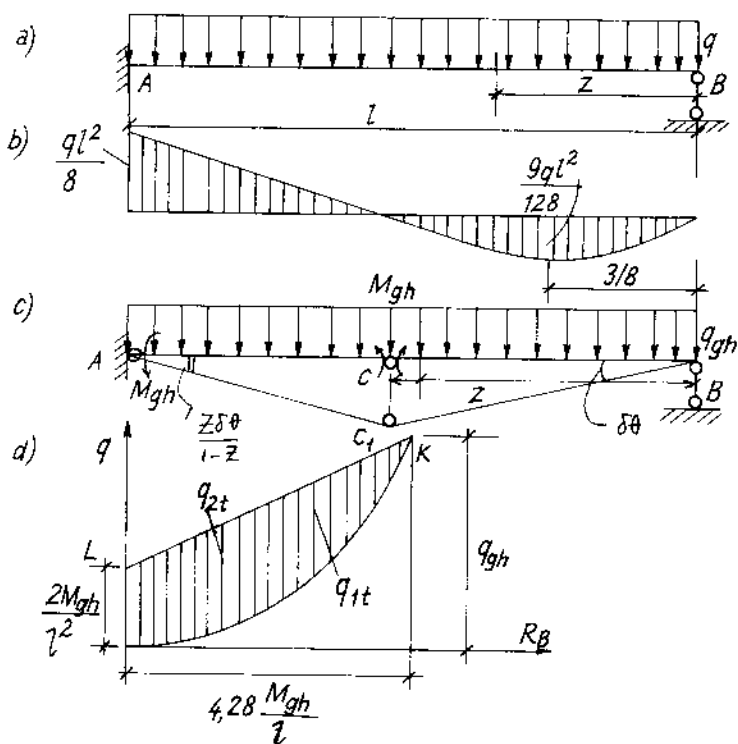
Mặt khác điều kiện cân bằng cho phép xác định giá trị mômen lớn nhất tại ngàm A.

$$M_{Amax} = -R_B \cdot l + \frac{ql^2}{2}$$

Tại đây  $M_{Amax} \leq M_{gh}$  ;

Điều này cho ta :

$$q_{2t} \leq \frac{2 M_{gh}}{l^2} + \frac{2 R_B}{l} \quad (b)$$



Hình 9.19

Đồ thị các hàm  $q_{1t}(R_B)$  và  $q_{2t}(R_B)$  được cho trên hình (9.19d). Các bất đẳng thức (a) và (b) được thỏa mãn trong miền gạch sọc giữa hai đồ thị này. Định lý tĩnh đã khẳng định rằng tải trọng phá hủy thực lớn hơn tất cả

các tải trọng được xác định bởi các điểm của miền gạch sọc. Điểm K là điểm của hai đồ thị thỏa mãn điều kiện này. Vì vậy  $R_B$  được tìm từ điều kiện :

$$q_{1t}(R_B) = q_{2t}(R_B)$$

Cụ thể là :

$$R_B = 2(\sqrt{2} + 1) \frac{M_{gh}}{l} = 4,82 \cdot \frac{M_{gh}}{l}$$

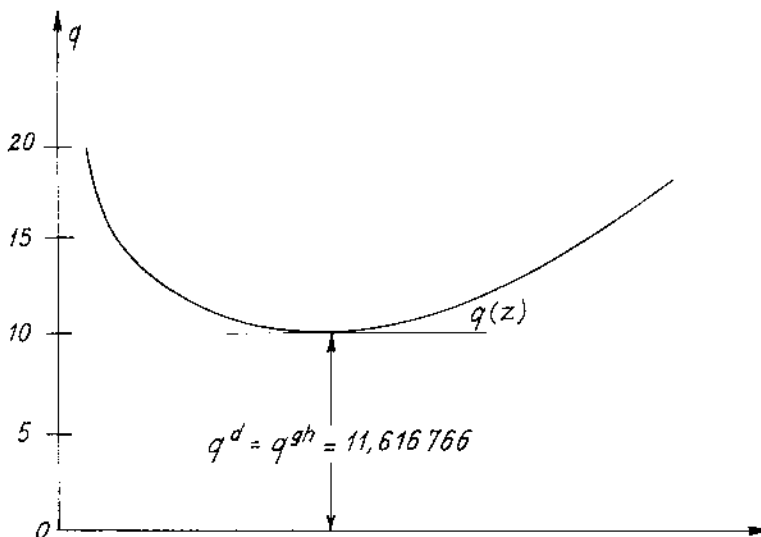
Khi thay  $R_B$  vào (b), ta nhận được tải trọng phá hủy (giới hạn) theo định lý tĩnh :

$$q_t = q_{gh} = 11,6 \frac{M_{gh}}{l^2} \quad (c)$$

Một trạng thái khả dĩ động được cho trên hình 9.19c bởi đường nét mảnh  $AC_1B$ . Định lý động cho ta phương trình công khả dĩ sau đây :

$$q \cdot S_{\Delta AC_1B} - \left( M_{gh} \cdot \delta\theta + 2 M_{gh} \frac{\delta\theta \cdot Z}{1 - Z} \right) = 0 ,$$

trong đó  $S_{\Delta AC_1B}$  là diện tích tam giác  $AC_1B$  ;



Hình 9.20

Do đó :

$$q = \frac{2 M_{gh}}{l} \cdot \frac{l + Z}{Z(l - Z)} \quad (d)$$

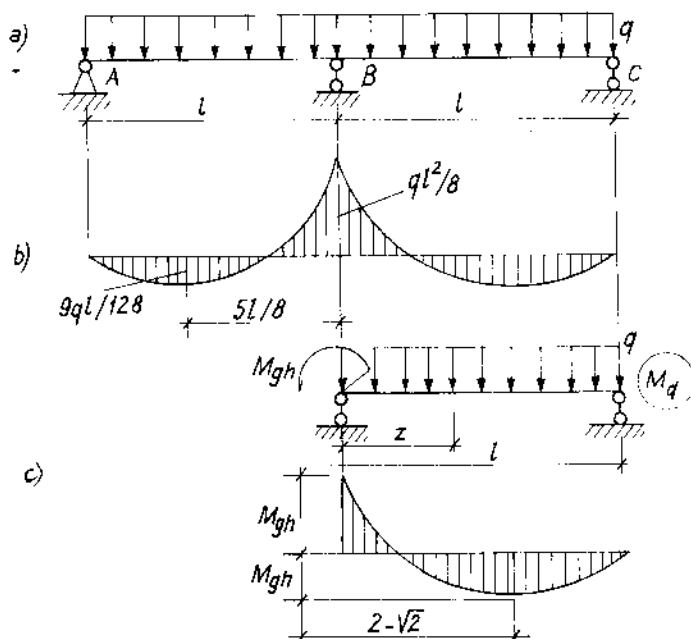
Tương ứng với định lý động thì cường độ tải trọng phá hủy là giá trị nhỏ nhất trong số các giá trị  $q$  trong (d). Để có  $q = q_{\sigma}$  nhỏ nhất ta phải tìm nghiệm của phương trình sau :

$$\frac{dq}{dz} = Z^2 + 2lZ - l^2 = 0$$

Nghiệm của phương trình này là  $Z = 0,414l$ . Khi khảo sát dấu của đạo hàm bậc hai cho thấy với  $Z = 0,414l$ , hàm (d) có giá trị cực tiểu và đúng bằng kết quả (c). Với  $M_{gh} = 1$  và  $l = 1$  thì  $q = q_{\sigma} = 11,616766$  xem đồ thị (hình 9.20).

Điều này nói lên rằng hai trạng thái khả dĩ tĩnh và động trùng nhau và trùng với trạng thái phá hủy thực.

**Ví dụ 3 :** Hãy thực hành một ví dụ về việc xác định tải trọng giới hạn với dầm liên tục chịu tải trọng phân bố đều (hình 9.21a). Với giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt tới kết quả.



Hình 9.21

Hình 9.21b là biểu đồ mômen uốn trong giới hạn đàn hồi được vẽ theo lý thuyết thông thường của sức bền vật liệu (đã giới thiệu ở chương 2 và 3). Mômen lớn nhất ở gối tựa giữa B là :  $M_B = ql^2/8$

Nếu mômen này đạt được giá trị  $M_{gh} = \sigma_{ch} S_x$  thì ở mặt cắt này xuất hiện một khớp dẻo. Khác với khớp thông thường, khớp dẻo có mômen khác không và bằng  $M_{gh}$ . Sự chảy dẻo ở mặt cắt này làm giảm một bậc siêu tĩnh trong hệ. Trong trường hợp của chúng ta dầm trở thành tĩnh định và khả năng làm việc của hệ chưa bị cạn kiệt. Khi tiếp tục tăng tải trọng mỗi một nhịp của hệ làm việc như một dầm đơn giản trên hai gối tựa.

Mômen uốn ở mặt cắt z kể từ gối giữa là :

$$M(z) = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left( 1 - \frac{z}{l} \right) \quad (a)$$

Khi M đạt được giá trị  $M_{gh}$  tại mặt cắt  $z = z_0$  nào đó, thì ở mặt cắt này hình thành khớp dẻo thứ hai và khả năng chịu tải của dầm bị cạn kiệt vì khi ấy dầm đã biến thành một cơ cấu. Tải trọng gây ra trạng thái như thế được xác định bởi đẳng thức :

$$M_{gh} = \frac{q_{gh}l^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} \right) - M_{gh} \left( 1 - \frac{z}{l} \right)$$

Kết quả cho ta :

$$q_{gh} = \frac{2 M_{gh}}{l^2} \cdot \frac{2 - \frac{z}{l}}{\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}} \quad (4.20)$$

Từ điều kiện cực tiểu của  $q_{gh}$  ta có :

$$z_0 = l(2 - \sqrt{2}) \quad \text{và} \quad q = 11,7 \frac{M_{gh}}{l^2} = 11,7 \frac{\sigma_{ch} S_x}{l^2} \quad (b)$$

Nếu gọi q là tải trọng gây ra ứng suất lớn nhất ở một điểm trên mặt cắt và vừa bằng giới hạn chảy thì  $q_{ch}$  được xác định từ điều kiện :

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{q_{gh}l^2}{8} = \sigma_{ch} W_x, \text{ nghĩa là } q_{ch} = \frac{\sigma_{ch} W_x}{l^2}$$



Tỷ số các tải trọng nhận được từ hai quan điểm tính là :

$$\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 1,46 \frac{S_x}{W_x} \quad (c)$$

Đối với mặt cắt chữ nhật :

$$\frac{q_{gh}}{q_{ch}} = 2,2$$

Ví dụ 4

Xác định khả năng chịu tải  $P_{gh}$  của dầm liên tục đã chịu trước tải trọng phân bố đều  $q = 3500 \text{ N/m}$ . Sơ đồ dầm, tải trọng và mômen uốn giới hạn được cho trên hình 9.22a, b.

Trong trường hợp này có thể xuất hiện bốn cơ cấu phá hủy :

Xét cơ cấu I : Phương trình công khả dĩ được viết :

$$q \left( \frac{1}{2} f_1 \cdot z \right) + \frac{1}{2} (1 - z) f_1 + P_{gh} \cdot z_p \cdot \delta\theta_3 - M_{gh4} \delta\theta_4 - M_{gh3} \delta\theta_3 - M_{gh5} \delta\theta_5 = 0$$

Nhưng  $M_3 = M_4 = M_5 = 38 \cdot 10^4$ , vì vậy :

$$\frac{q}{2} (z^2 \delta\theta_3 + (1 - z) z \delta\theta_3) + P_{gh} z_p \delta\theta_3 = M_{gh} (\delta\theta_3 + \delta\theta_4 + \delta\theta_5)$$

Khử các chuyển vị khả dĩ  $\delta\theta_j$  ( $j = 3, 4, 5$ ), nghĩa là :

$$f_1 = z \delta\theta_3 = (1 - z) \delta\theta_5 \Rightarrow \delta\theta_5 = \frac{z}{1 - z} \delta\theta_3$$

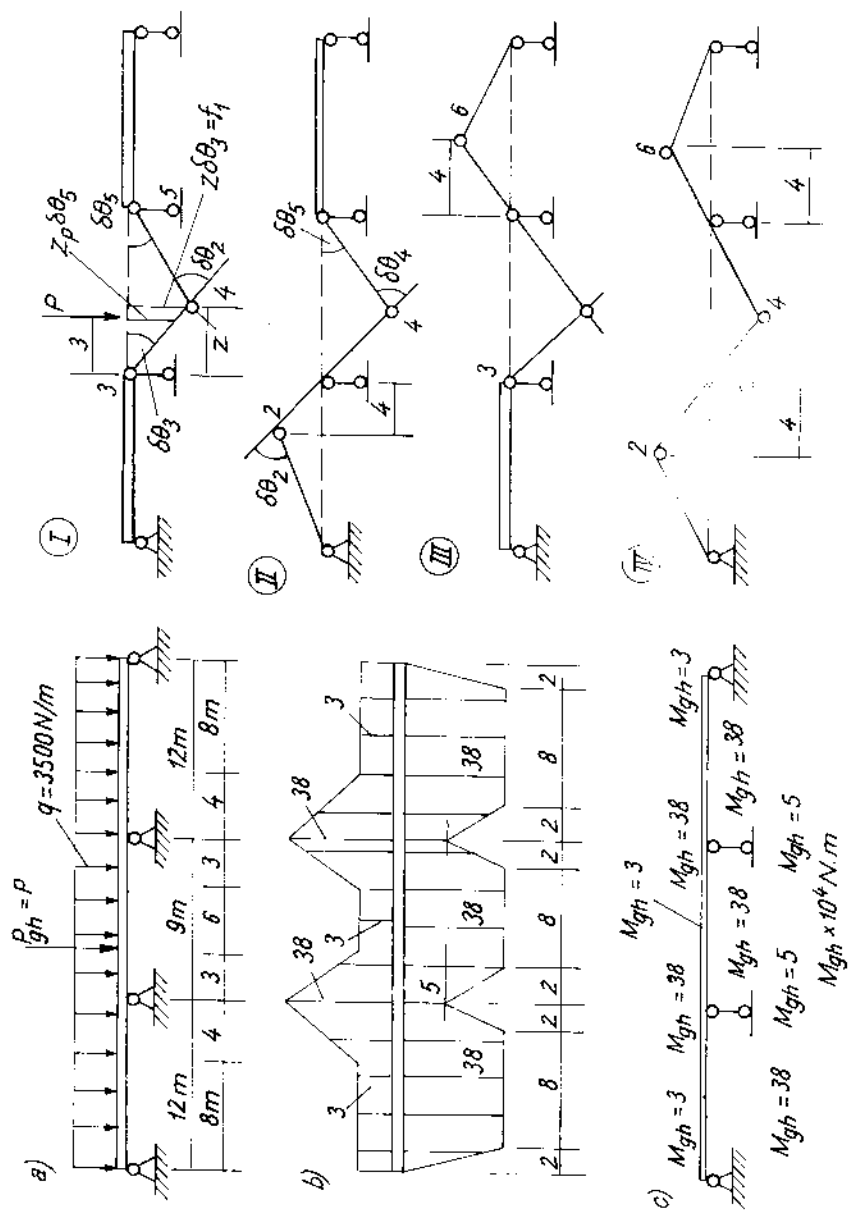
$$\delta\theta_4 = \delta\theta_3 + \delta\theta_5 = \delta\theta_3 \left( 1 + \frac{z}{1 - z} \right)$$

$$\text{Do đó : } \frac{1}{2} q (z^2 + (1 - z) z) + P_{gh} z_p = M_{gh} \left( 1 + 1 + \frac{z}{1 - z} + \frac{z}{1 - z} \right)$$

$$P_{gh1} = \frac{1}{3} M_{gh} \left( 2 + \frac{2z}{1 - z} \right) - \frac{1}{2} q (z^2 + (1 - z) z) = f_1(z) \quad (a)$$

Vị trí khớp dẻo 4, nghĩa là tọa độ của  $z$  được xác định từ điều kiện cực tiểu của  $P_{gh}$  (định lý động). Ta sẽ dùng phép tính lập :

Bước 1 : Xem khớp 4 được hình thành ở nơi đặt lực tập trung :



$Z = z_p = 3$ . Thay  $z = 3$  (m) vào (a) ta được  $P_{gh1} = 12,78 \cdot 10^4$  N.

Với  $P_{gh1}$ ,  $q$  đã có và nếu đúng thì  $z = 3$  (m) phải trùng với  $z_1$  tại đó lực cắt  $Q(z_1) = 0$ , ở đó  $M$  cực trị :

$$Q(z_1) = qz_1 + P_{gh1} - \frac{q \cdot l}{2} - P_{gh} \frac{l-3}{l} = 0 \quad (b)$$

$$qz_1 - \frac{q \cdot l}{2} - \frac{3P_{gh1}}{l} = 0$$

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{3P_{gh1}}{q \cdot l} = 5,09 \text{ (m)} > z_p$$

**Bước 2 :** Thay  $z = 5,09$  vào (a) để có  $P_{gh2} = 8,36 \cdot 10^4$  N. Thay  $P_{gh2}$  vào (b) ta có  $z = z_2 = 5,4$  (m). Tiếp tục như thế đến  $P_{gh3} = 8,44 \cdot 10^4$ . Như vậy  $P_{gh3}$  khác  $P_{gh2}$  chỉ  $0,08 \cdot 10^4$  N.

Đối với cơ cấu I, lực giới hạn là :

$$P_{gh1} = P_{gh3} = 8,44 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Ta có thể chứng minh rằng các cơ cấu II, II, VI không thể được hình thành. Bởi vì nếu như vậy thì  $M_2$  phải lớn hơn  $M_{gh2} = -3 \cdot 10^4$  Nm cách gối phải 4 m, (tương tự đối với  $M_6$ ) và  $M_{gối}$  ở gối tựa, phải ít nhất bằng  $M_{gối} = 71 \cdot 10^4$  Nm, nhưng ta lại chỉ có  $M_{gh3} = 38 \cdot 10^4$  Nm. Bạn đọc có thể tự thu được kết quả nói trên bằng cách xét điều kiện cân bằng của các đoạn dầm đối với mỗi cơ cấu II, III và VI.

**Ví dụ 5 :** Hãy xác định khả năng chịu tải của khung với hình dạng, kích thước, tải trọng tác dụng và mômen giới hạn được cho trên hình 9.23a.

Biết  $P = \alpha \cdot H = 3H$ .

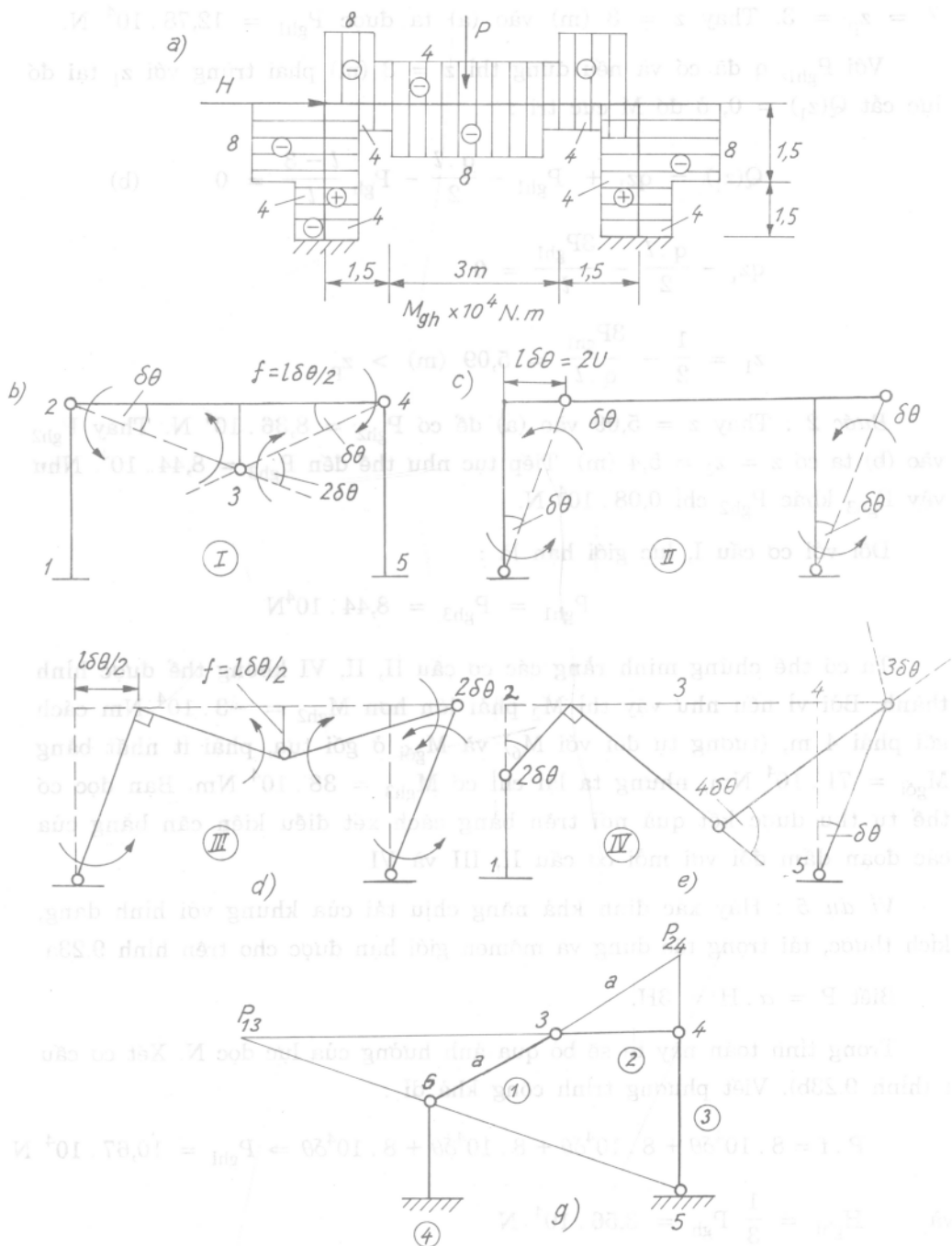
Trong tính toán này ta sẽ bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc  $N$ . Xét cơ cấu I (hình 9.23b). Viết phương trình công khả dĩ :

$$P \cdot f = 8 \cdot 10^4 \delta\theta + 8 \cdot 10^4 \delta\theta + 8 \cdot 10^4 \delta\theta + 8 \cdot 10^4 \delta\theta \Rightarrow P_{gh1} = 10,67 \cdot 10^4 \text{ N}$$

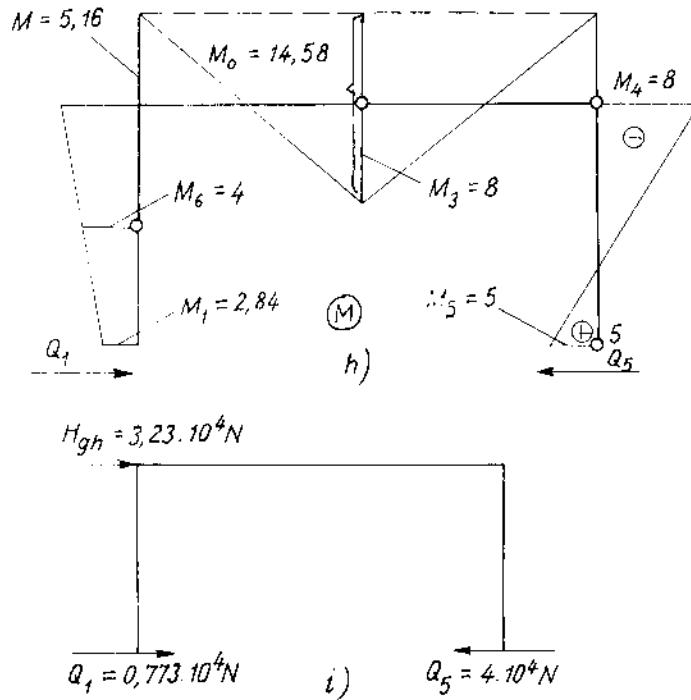
và 
$$H_{gh1} = \frac{1}{3} P_{gh} = 3,56 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Xét cơ cấu II (hình 9.23c) :

$$H \cdot u = (4\delta\theta + 4\delta\theta + 8\delta\theta + 4\delta\theta) \cdot 10^4$$



Hình 9.23



Hình 9.23 tiếp theo

$$\Rightarrow H_{ghII} = 6,67 \cdot 10^4 \text{ N} ; P_{ghII} = 20 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Xét cơ cấu III (hình 9.23d) :

$$H\delta\theta \frac{1}{2} + P\delta\theta \frac{1}{2} = (4\delta\theta + 8\delta\theta + 8\delta\theta + 8\delta\theta + 8\delta\theta + 4\delta\theta) \cdot 10^4$$

Vì  $P_{gh} = 3H_{gh}$  nên :

$$P_{ghIII} = 10 \cdot 10^4 \text{ N} ; H_{ghIII} = 3,33 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Xét cơ cấu IV (hình 9.23e) : Còn một khả năng phá hủy nữa có thể xảy ra, đó là cơ cấu có các khớp 6, 3, 4, 5.

Cơ cấu phá hủy này được sơ đồ hóa thành cơ cấu bốn khâu (hình 9.23g).

Để thấy theo định lý Ke-nơ-dy thì  $P_{24}$  và  $P_{13}$  là những tâm vận tốc tức thời của cơ cấu này. Vì vậy, nếu cho khớp 5 xoay một góc  $\delta\theta_3$  theo định lý Willis ta có :

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1 dt}{\omega_3 dt} = \frac{\delta\theta_1}{\delta\theta_3} = \frac{2b}{b} \Rightarrow \delta\theta_1 = 2\delta\theta_3$$

nghĩa là mặt cắt 6 sẽ quay một góc bằng  $2\delta\theta_3$  ; mặt cắt 4 quay một góc  $3\delta\theta_3$  ; mặt cắt 3 quay một góc  $4\delta\theta_3$  và mặt cắt quay góc  $\delta\theta$ .

Phương trình công khả dĩ là :

$$P \cdot 3 \times 2\delta\theta + H \cdot \frac{3}{2} 2\delta\theta = (4 \times 2\delta\theta + 8 \times 4\delta\theta + 8 \times 3\delta\theta + 4\delta\theta)$$

Vì  $P_{gh} = 3H_{gh}$  do đó :

$$P_{ghIV} = 9,71 \cdot 10^4 \text{ N} ; \quad H_{ghIV} = 3,23 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Cơ cấu IV diễn đạt khả năng chịu tải kém nhất của kết cấu. Đó là cơ cấu phá hủy thực của kết cấu.

Hãy kiểm tra lại kết luận nhờ định lý tĩnh. Để làm việc đó, vẽ M trong cơ cấu IV. Trong trường hợp này tại các mặt cắt 1 và 2 do các khớp dẻo chưa được hình thành nên chưa biết giá trị các mômen tại đó, nghĩa là các  $M_1$  và  $M_2$  cần xác định (hình 9.23h) :

$$M_O = \frac{P_{ghIV}l}{4} = M_3 + \frac{M_4 + M_2}{2} \Rightarrow \frac{9,71 \cdot 10^4 \times 6}{4} = 8 \cdot 10^4 + \frac{8 \cdot 10^4}{2} + \frac{M_2}{2} \Rightarrow M_2 = 5,16 \cdot 10^4 \text{ Nm}.$$

Đối với đoạn 1-2, tại  $z = 1,5 \text{ m}$ ,  $M_6 = 4 \cdot 10^4 \text{ Nm}$ . Vì thế :  $M_1 = 2,84 \cdot 10^4 \text{ Nm}$ . Hãy kiểm tra, chẳng hạn, sự cân bằng theo phương ngang của khung (hình 9.23i) :

$$Q_1 = \frac{5,16 - 2,84}{3} \cdot 10^4 = -0,773 \cdot 10^4 \text{ N} ;$$

$$Q_5 = 10^4 \cdot (8 + 4)/3 = +4 \cdot 10^4 \text{ N} ;$$

$$\sum X = H_{gh} + Q_1 - Q_2 = 3,23 \cdot 10^4 + 0,773 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4 = 0.$$

Các bài toán phức tạp hơn có dạng tấm và vỏ, bạn đọc có thể tìm thấy trong [5].

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Киселев В. А.** Строительная механика М., Госстройиздат, 1960.
2. **Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. Идр.**  
Расчеты на прочность в машиностроении Т. И. М. Машгиз, 1956.
3. **Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai**  
Sức bền vật liệu tập I, II NXBKHN và KT, 2003.
4. **O.C.Zienkiewicz.** The finite element method in engineering science,  
Mc.Graw-Hill, New York.
5. **Đặng Việt Cường, Lê Quang Minh**  
Lý thuyết dẻo ứng dụng NXBKHN&KT-2003.  
**Phan Kỳ Phùng, Đặng Việt Cường**  
Lý thuyết dẻo và từ biến NXB Giáo dục, 1997.
7. **Н. Н. Малинин**  
Прикладная теория пластичности и ползучести москва,  
Машиностроение, 1975.
8. **Ф. М. Детинко и другие**  
Прочность колебания электрических машин. Л., Энергия, 1969.
9. **М. Ш. Микеладзе.**  
Упругость и пластичность элементов конструкций и машин.  
Мецниереба - 1976.
10. **Serge Laroze**-Résistance des Matériaux et structures  
Tom II,III, Masson-1983.
11. **Lưu Thọ Trình -**  
Cơ học kết cấu, tập II, NXBKHN và KT, 2002.
12. **П. М. Варвак и другие.**  
Метод конечных элементов, Киев, Вища школа, 1981.
13. **А. А. Чирас.** Строительная механика, стройиздат, 1989.
14. **Đặng Việt Cường, Nguyễn Đức Trung**  
Về một giải pháp tiếp cận các bài toán sức bền sức bền vật liệu bằng  
tín học. Tuyển tập CTKH, tập 3, HNKH toàn quốc về cơ học kỹ thuật  
10/2001.
15. **Clough R. W, Penzien J.**  
Dynamics of Structures  
Mc. Graw-Hill, New-York, 1975.

# **CƠ HỌC KẾT CẤU**

**Tác giả : PGS.TS. DẶNG VIỆT CƯỜNG**

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*

**PGS.TS. TÔ ĐĂNG HẢI**

*Biên tập và sửa bài :*

**ThS. NGUYỄN HUY TIẾN,**

**NGỌC LINH**

*Trình bày bìa :*

**HƯƠNG LAN**

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT**

**70 TRẦN HƯNG ĐẠO - HÀ NỘI**



205369



Giá : 47.000 đ