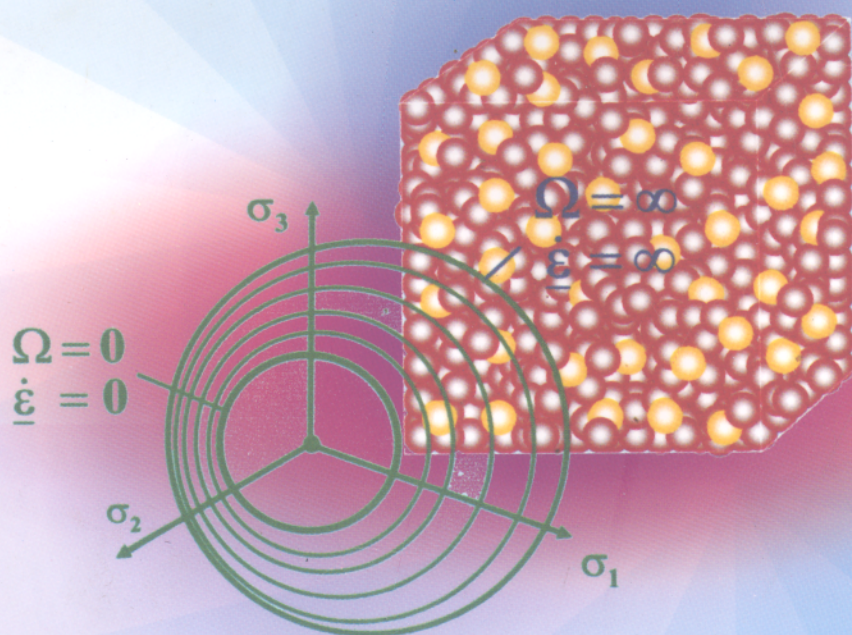


TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
NGUYỄN TRỌNG GIẢNG

THUỘC TÍNH CƠ HỌC CỦA VẬT RẮN



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

NGUYỄN TRỌNG GIẢNG

THUỘC TÍNH CƠ HỌC CỦA VẬT RẮN



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

60-605-531 113-35-03
KHKT-04

LỜI NÓI ĐẦU

Xây dựng cơ sở hạ tầng và phát triển kinh tế - xã hội nói chung đòi hỏi cung cấp nhiều loại vật liệu khác nhau với những tính năng sử dụng thích hợp. Do vậy, trong quá khứ và tương lai vật liệu bao giờ cũng là một trong những yếu tố thiết yếu, quyết định sự phát triển của công nghiệp đối với mọi quốc gia. Hiện nay tại các nước phát triển, vật liệu vẫn luôn là hướng nghiên cứu ưu tiên, bởi lẽ nó có khả năng tạo đột phá mang tính chất cách mạng cho công nghiệp. Chiến lược khoa học và công nghệ của nước ta từ nay cho đến những thập niên đầu của thế kỷ 21 cũng đã xác định rõ công nghệ vật liệu là một trong những định hướng ưu tiên phát triển.

Bất kỳ một vật liệu nào được ứng dụng trong thực tế sản xuất và đời sống cũng là kết quả của quá trình nghiên cứu trên cơ sở liên kết chặt chẽ giữa Hoá học (công nghệ chế tạo) vật liệu, Vật lý vật liệu và Cơ học vật liệu. Tính năng sử dụng và tuổi thọ của chi tiết máy, công trình, ... không chỉ phụ thuộc vào công nghệ chế tạo vật liệu mà còn được quyết định bởi quá trình xử lý cơ, nhiệt nhằm tối ưu cấu trúc, cơ-lý tính.

Cơ học vật rắn biến dạng nghiên cứu mối quan hệ giữa ứng xử của vật liệu và tác động cơ học từ bên ngoài lên nó, cũng như sự biến đổi hành vi của vật liệu trong quá trình tác động cơ học. Mối quan hệ nêu trên được thể hiện cụ thể dưới dạng các phương trình toán lý biểu diễn sự tương tác giữa ứng suất (tác động) và biến dạng (hành vi). Mối tương tác này lại được chi phối bởi sự biến đổi cấu trúc vi mô của vật liệu trong quá trình biến dạng thông qua các biến nội.

Cuốn sách **“Thuộc tính cơ học của vật rắn”** có nội dung đề cập đến các vấn đề nêu trên theo phương pháp tiếp cận “vi mô”, dựa trên các nguyên lý cơ bản của cơ học và nhiệt động học của môi trường liên tục. Đây cũng là phương pháp tiếp cận được áp dụng phổ biến trong mô hình hoá thuộc tính cơ học của vật liệu. Các mô hình ứng xử của vật liệu thiết lập theo phương pháp tiếp cận này đang được áp dụng rộng rãi trong tính toán kết cấu và mô phỏng số các quá trình biến dạng tạo hình trong thực tế.

Sách được kết cấu thành sáu chương. Chương 1 trình bày khái quát về cấu trúc của vật liệu và cơ chế vật lý của biến dạng dẻo. Chương 2 nhắc lại các khái niệm cơ bản của cơ học môi trường liên tục và nhiệt động học của các quá trình không thuận nghịch, là phương tiện lý thuyết giúp cho bạn đọc dễ dàng theo dõi các chương tiếp theo. Chương 3 trình bày phân loại thuộc tính của vật rắn, xác định trên cơ sở thực nghiệm nhận dạng và được minh hoạ bởi các mô hình tương tự. Các chương tiếp theo dành cho mô hình hoá các dạng thuộc tính lưu biến của vật rắn. Các chương này được kết cấu tương tự như nhau, gồm : miễn ý nghĩa và ứng dụng, khái quát về hiện tượng quan sát được từ thực nghiệm, phương pháp tổng quát thiết lập mô hình thuộc tính dựa trên cơ sở nhiệt động học, xác định và nhận dạng các mô hình thuộc tính riêng. Theo sơ đồ kết cấu này, chương 4 đề cập đến các thuộc tính đàn hồi, đàn nhiệt và đàn nhớt tuyến tính. Chương 5 trình bày thuộc tính dẻo tức thời, với các mô hình được thiết lập xuất phát từ hàm thế năng tiêu hao liên kết với điều kiện dẻo. Chương này cũng nhấn mạnh đến dẻo hoá bền dị hướng, cho phép mô tả ứng xử của vật liệu trong trường hợp chất tải chu kỳ, có vai trò quan trọng trong việc tính toán dự báo phá hủy của vật liệu do mỏi. Chương 6 xử lý các vấn đề tương tự chương 5, nhưng áp dụng cho kim loại và hợp kim chịu tải ở nhiệt độ trung bình và nhiệt độ cao. Ở miền nhiệt độ này, vật liệu biểu hiện thuộc tính dẻo nhớt (dẻo phụ thuộc thời gian).

Với kết cấu và nội dung nêu trên cuốn sách có thể sử dụng đồng thời (theo trình độ yêu cầu) làm tài liệu giảng dạy cho các đối tượng là sinh viên đại học, sinh viên cao học thuộc hoặc liên quan đến lĩnh vực cơ học vật liệu, sau khi đã được trang bị một cách cơ bản kiến thức về cơ học môi trường liên tục. Cuốn sách cũng có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho nghiên cứu sinh và nghiên cứu viên trong lĩnh vực cơ học vật liệu nói chung.

Đây là lần đầu tiên cuốn sách "**Thuộc tính cơ học của vật rắn**" ra mắt bạn đọc, do đó khó có thể tránh khỏi có những khiếm khuyết nhất định. Tác giả xin chân thành cảm ơn mọi ý kiến nhận xét, góp ý gửi về địa chỉ : Bộ môn Cơ học biến dạng và Cán, Kéo kim loại, Khoa Luyện kim và Công nghệ vật liệu, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

Tác giả

MỤC LỤC

	Trang
Lời nói đầu	3
Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ CHẾ VẬT LÝ CỦA BIẾN DẠNG ĐỀO	
1.1. Kim loại và hợp kim	13
1.1.1. Cấu trúc	13
1.1.1.1. Các khái niệm về tinh thể học	13
1.1.1.2. Khuyết tật mạng tinh thể	18
1.1.2. Cơ chế vật lý của biến dạng	22
1.1.2.1. Biến dạng đàn hồi	22
1.1.2.2. Biến dạng dư	22
1.1.2.3. Giới hạn đàn hồi	26
1.1.2.4. Biến dạng của đa tinh thể	28
1.1.2.5. Tính không ổn định cấu trúc tổ chức vi mô	31
1.2. Một số vật liệu phi kim	32
1.2.1. Polime	32
1.2.1.1. Cấu trúc	32
1.2.1.2. Cơ chế vật lý của biến dạng	36
1.2.2. Vật liệu hạt : bê tông	37
1.2.2.1. Cấu tạo của bê tông	37
1.2.2.2. Cơ chế vật lý của biến dạng và phá hủy	39
Chương 2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ SỞ CỦA CƠ HỌC VÀ NHIỆT ĐỘNG HỌC CỦA MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC	
2.1. Nguyên lý công ảo	41
2.1.1. Chuyển động ảo và công suất ảo	41
2.1.2. Hệ toạ độ qui chiếu và đạo hàm vật chất	42

2.1.3. Nguyên lý công suất ảo	43
2.2. Phương pháp công ảo	43
2.2.1. Công suất ảo	43
2.2.1.1. Chọn chuyển động ảo-Lý thuyết gradient bậc một	43
2.2.1.2. Công suất ảo của nội lực	44
2.2.1.3. Công suất ảo của ngoại lực	46
2.2.1.4. Công suất ảo động lượng	46
2.2.2. Phương trình cân bằng	46
2.2.3. Chuyển vị và biến dạng	47
2.2.3.1. Giả thiết chuyển vị nhỏ và biến dạng nhỏ	47
2.2.3.2. Giả thiết chuyển vị lớn và biến dạng lớn	49
2.2.4. Bất biến của tenxơ	52
2.3. Các yếu tố cơ bản của nhiệt động học	55
2.3.1. Các định luật bảo toàn - Nguyên lý nhiệt động học thứ nhất	55
2.3.2. Entropy - Nguyên lý nhiệt động học thứ hai	57
2.4. Phương pháp trạng thái cục bộ	58
2.4.1. Biến trạng thái	58
2.4.1.1. Các biến quan sát được	58
2.4.1.2. Các biến nội	59
2.4.2. Thế năng nhiệt động học - Các định luật trạng thái	60
2.4.3. Năng lượng tiêu hao - Các định luật bổ sung	62
2.4.3.1. Tiêu hao cơ năng và tiêu hao nhiệt năng	62
2.4.3.2. Thế năng tiêu hao	62
2.4.3.3. Quan hệ đối xứng Onsager	66
2.4.3.4. Phân tách năng lượng tiêu hao	66
2.4.3.5. Các hiện tượng tiêu hao tức thời	67
2.5. Một số khái niệm trong nhiệt động học	67
2.5.1. Định luật Fourier	67
2.5.2. Phương trình nhiệt	68
2.5.2.1. Truyền nhiệt	69
2.5.2.2. Nung đoạn nhiệt	69

Chương 3. NHẬN DẠNG VÀ PHÂN LOẠI THUỘC TÍNH LƯU BIẾN CỦA VẬT RẮN THỰC

3.1. Phương pháp hiện tượng tổng thể	71
3.2. Kỹ thuật thực nghiệm và nhận dạng mô hình thuộc tính	73
3.2.1. Các thí nghiệm đặc trưng	73
3.2.1.1. Thí nghiệm biến cứng kéo và nén đơn	74
3.2.1.2. Thí nghiệm rão kéo và nén	74
3.2.1.3. Thí nghiệm nối tăng suất kéo và nén	75
3.2.1.4. Thí nghiệm lặp hoá bền - mỏi	75
3.2.1.5. Thí nghiệm chu kỳ	76
3.2.1.6. Thí nghiệm phá huỷ	77
3.2.1.7. Thí nghiệm đa chiều	77
3.2.2. Kỹ thuật thực nghiệm	77
3.2.2.1. Thiết bị thử nghiệm	80
3.2.2.2. Kỹ thuật đo các biến đặc trưng	84
3.2.2.3. Mẫu thử nghiệm	86
3.2.3. Phương pháp nhận dạng mô hình thuộc tính	87
3.2.3.1. Thiết lập mô hình dưới dạng phương trình giải tích	90
3.2.3.2. Các phương pháp số nhận dạng mô hình	92
3.3. Sơ đồ hoá các thuộc tính lưu biến thực	92
3.3.1. Mô hình tương tự	94
3.3.2. Chất lỏng nhớt	95
3.3.3. Vật rắn đàn hồi	95
3.3.3.1. Đàn hồi lý tưởng	96
3.3.3.2. Đàn hồi nhớt	97
3.3.4. Vật rắn dẻo tức thời	97
3.3.4.1. Vật rắn cứng-dẻo lý tưởng	97
3.3.4.2. Vật rắn đàn dẻo lý tưởng	98
3.3.4.3. Vật rắn đàn-dẻo biến cứng	100
3.3.5. Vật rắn dẻo nhớt	100
3.3.5.1. Dẻo nhớt lý tưởng	100
3.3.5.2. Đàn-dẻo nhớt lý tưởng	101
3.3.5.3. Đàn-dẻo nhớt biến cứng	101

3.3.6. Đặc trưng hoá bền	102
3.3.6.1. Biến cứng đẳng hướng	102
3.3.6.2. Biến cứng động	103
3.3.6.3. Hiệu ứng Bauschinger	104
3.3.6.4. Hiệu ứng chất tải chu kỳ	104
3.4. Mô hình hoá lực ma sát	108
3.4.1. Mô hình Coulomb	108
3.4.1. Mô hình màng giới hạn	109

Chương 4. ĐÀN HỒI, ĐÀN NHIỆT VÀ ĐÀN NHỚT TUYẾN TÍNH

4.1. Đàn hồi	111
4.1.1. Miền ý nghĩa và ứng dụng	111
4.1.2. Thiết lập mô hình	112
4.1.2.1. Thế năng nhiệt động học	112
4.1.2.2. Đàn hồi tuyến tính đẳng hướng	113
4.1.2.3. Đàn hồi đối xứng trục giao	114
4.1.2.4. Đàn hồi đẳng hướng ngang	116
4.1.3. Nhận dạng mô hình	118
4.1.3.1. Các phương pháp tĩnh	118
4.1.3.2. Phương pháp động	120
4.2. Đàn nhiệt	121
4.2.1. Thiết lập mô hình thuộc tính	121
4.2.2. Nhận dạng mô hình thuộc tính	122
4.2.2.1. Phương pháp so sánh độ cứng	122
4.2.2.2. Phương pháp ứng suất nhiệt	123
4.3. Đàn nhớt	125
4.3.1. Miền ý nghĩa và ứng dụng	125
4.3.2. Phương pháp thiết lập nhiệt động học	126
4.3.2.1. Vật rắn Kenvin-Voigt	126
4.3.2.2. Vật rắn Maxwell	128
4.3.3. Thiết lập mô hình theo phương pháp phiếm hàm	131
4.3.3.1. Hàm dao	131
4.3.3.2. Hàm nở	133

4.3.3.3. Mô hình thuộc tính ba chiều	134
4.3.3.4. Nhận dạng	134

Chương 5. DÈO TỨC THỜI

5.1. Miên ý nghĩa và ứng dụng	137
5.2. Khái quát về hiện tượng	138
5.2.1. Hành vi một chiều	138
5.2.1.1. Giới hạn đàn hồi	139
5.2.1.2. Chảy dẻo, biến cứng và ngưỡng dẻo	141
5.2.1.3. Các quan hệ thuộc tính	144
5.2.2. Hành vi ba chiều	146
5.2.2.1. Điều kiện dẻo đẳng hướng	150
5.2.2.2. Điều kiện dẻo dị hướng	152
5.3. Phương pháp tổng quát thiết lập các mô hình thuộc tính	152
5.3.1. Giả thiết phân chia biến dạng	153
5.3.2. Chọn biến nhiệt động học	155
5.3.3. Mật chất tải và thế năng tiêu hao	155
5.3.3.1. Mật chất tải và điều kiện chất tải-dỡ tải	158
5.3.3.2. Dẻo không liên kết	160
5.3.3.3. Điều kiện tương thích - Biểu thức của hệ số nhân dẻo	161
5.3.3.4. Dẻo liên kết - Vật liệu tiêu chuẩn mở rộng	162
5.4. Các định luật chảy dẻo	162
5.4.1. Các định luật khác nhau của điều kiện dẻo và định luật chảy dẻo	163
5.4.2. Mô hình hoá bền đẳng hướng	164
5.4.2.1. Mô hình Prandtl-Reuss	169
5.4.2.2. Các mô hình chảy dẻo biến cứng đẳng hướng khác	170
5.4.3. Mô hình biến cứng động tuyến tính	170
5.4.3.1. Biến cứng động Prager	175
5.4.3.2. Mô hình Prager-Ziegler	177
5.4.4. Mô hình chảy dẻo cho chất tải chu kỳ hay bất kỳ	177
5.4.4.1. Mô hình hoá với các hệ số đặc trưng cập nhật	179
5.4.4.2. Mô hình đa lớp và phương pháp thiết lập Mroz	182
5.4.4.3. Mô hình hoá bền phi tuyến	

5.4.4.4. Mô hình hoá bền hỗn hợp	189
5.4.5. Xếp loại mô hình	198
5.5. Chất tải hướng tâm	199
5.5.1. Định nghĩa	199
5.5.2. Định luật tích phân Hencky-Mises - ứng suất và biến dạng tương đương	199
5.5.3. Định lý về sự tồn tại chất tải hướng tâm	201
5.6. Ví dụ tham khảo	203
5.6.1. Xây dựng mô hình ứng xử của hỗn hợp bột kim loại biến dạng ở trạng thái nguội	203
5.6.1.1. Xây dựng mô hình	203
5.6.1.2. Phương pháp nhận dạng mô hình	208
5.6.2. Mô hình hoá ứng xử đàn-dẻo dị hướng trong biến dạng lớn	210
5.6.2.1. Động học của quá trình chuyển đổi đàn-dẻo lớn	211
5.6.2.2. Mô hình ứng xử đàn-dẻo dị hướng trục giao với hoá bền động và đẳng hướng	213

Chương 6. ĐÈO NHỚT

6.1. Miên ý nghĩa và ứng dụng	219
6.2. Khái quát về hiện tượng	220
6.2.1. Thí nghiệm hoá bền	220
6.2.2. Thí nghiệm chảy dẻo	221
6.2.3. Thí nghiệm nới	225
6.2.4. Mô hình nhót-hoá bền	227
6.2.5. ảnh hưởng của nhiệt độ	229
6.2.6. Thí nghiệm chu kỳ	230
6.3. Phương pháp thiết lập tổng quát mô hình thuộc tính	235
6.3.1. Phân chia biến dạng	235
6.3.2. Chọn các biến nhiệt động học	236
6.3.3. Thế năng tiêu hao	237
6.4. Các mô hình thuộc tính riêng	240
6.4.1. Mô hình dẻo nhót lý tưởng	240
6.4.1.1. Phương pháp thiết lập ba chiều	240
6.4.1.2. Nhận dạng mô hình bằng thí nghiệm kéo đơn	242

6.4.2. Mô hình dẻo nhớt hoá bền đẳng hướng	245
6.4.2.1. Phương pháp thiết lập ba chiều	245
6.4.2.2. Nhận dạng mô hình bằng thí nghiệm kéo	250
6.4.2.3. Trường hợp chất tải chu kỳ	257
6.4.2.4. Phương pháp ngoại suy- Thí nghiệm "nối-dẻo"	259
6.4.3. Mô hình dẻo nhớt hoá bền động	263
6.4.3.1. Phương pháp thiết lập tổng quát	263
6.4.3.2. Nhận dạng mô hình bằng thí nghiệm kéo - nén đơn	270
6.4.4. Mô hình hoá các ảnh hưởng đặc thù	276
6.4.4.1. Ảnh hưởng của lịch sử nhiệt độ	276
6.4.4.2. Hiệu ứng hồi biến dạng và phục hồi	279
6.4.4.3. Ảnh hưởng của hoá già	284
6.4.4.4. Hỗn hợp dẻo tức thời và dẻo nhớt	286
6.5. Ví dụ tham khảo : xây dựng mô hình ứng xử của kim loại và hợp kim	
biến dạng ở trạng thái nóng	290
6.5.1. Các giả thiết cơ bản	290
6.5.2. Phương trình thuộc tính	291
6.5.3. Nhận dạng mô hình	292
Tài liệu tham khảo	297

CHƯƠNG 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ CƠ CHẾ VẬT LÝ CỦA BIẾN DẠNG DẸO

Nội dung của chương này nhằm cung cấp cho bạn đọc không chuyên về luyện kim và vật lý vật liệu những khái niệm cơ bản về cấu trúc và cơ chế của quá trình biến dạng đối với các loại vật liệu kết cấu phổ biến.

Mặc dù về bản chất và cấu trúc, các loại vật liệu như kim loại và hợp kim, polime, composite, bê tông, gỗ, ... rất khác nhau, song ta lại quan sát thấy một sự đồng điệu mang tính duy nhất phổ biến về thuộc tính vĩ mô của chúng.

Nắm vững cơ chế vật lý của quá trình biến dạng rất cần thiết cho việc thiết lập các giả thiết, làm cơ sở cho các lý thuyết mô tả hiện tượng vĩ mô về biến dạng nói chung và biến dạng dẻo nói riêng.

1.1. KIM LOẠI VÀ HỢP KIM

1.1.1. Cấu trúc

1.1.1.1. Các khái niệm về tinh thể học

Kim loại và hợp kim được cấu tạo từ các nguyên tử, liên kết với nhau bởi các lực điện từ sinh ra do tương tác giữa các điện tử của các nguyên tử kề nhau. Nguyên tử có “bán kính” khoảng $(10^{-7} \div 10^{-6})$ mm, tức khoảng $(1 \div 10) \text{Å}$.

Sự phân bố ổn định của các nguyên tử được xác định bởi điều kiện năng lượng tập hợp nhỏ nhất. Các mối liên kết kim loại được hình thành trên cơ sở các nguyên tử kề nhau có chung điện tử ở lớp ngoài cùng.

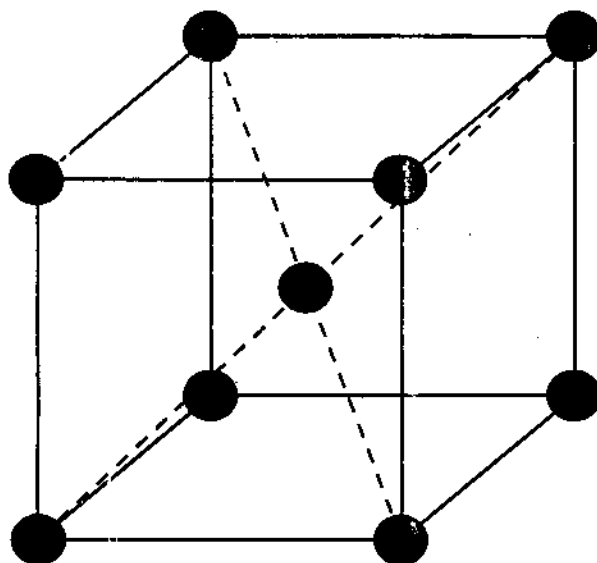
Các kim loại và hợp kim thường có cấu trúc tinh thể. Trạng thái vô định hình đối với kim loại và hợp kim chỉ có thể nhận được bằng các phương pháp công nghệ phức tạp với quá trình làm nguội cực nhanh.

Trạng thái tinh thể của kim loại và hợp kim được đặc trưng bởi qui luật phân bố của các nguyên tử. Qui luật này lặp lại một cách chu kỳ trong không gian ba chiều tạo thành mạng cấu trúc tinh thể.

Đa số mạng cấu trúc tinh thể tương ứng với một trong ba dạng sau đây :

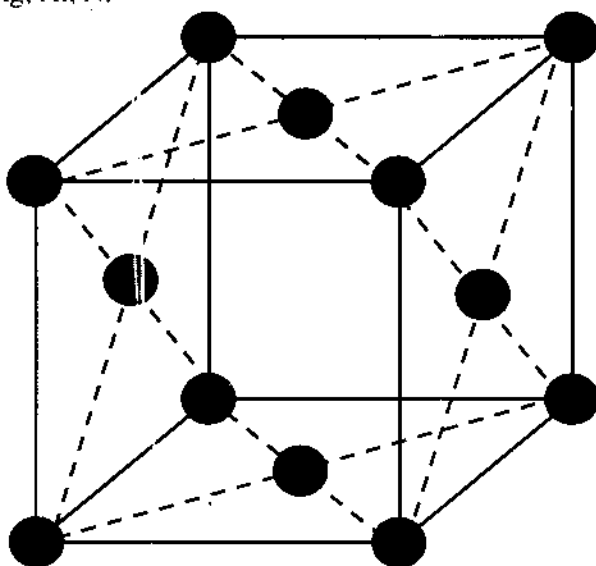
- Lập phương tâm khối (C.C.) :

Ví dụ : Fe α , Cr, Mo



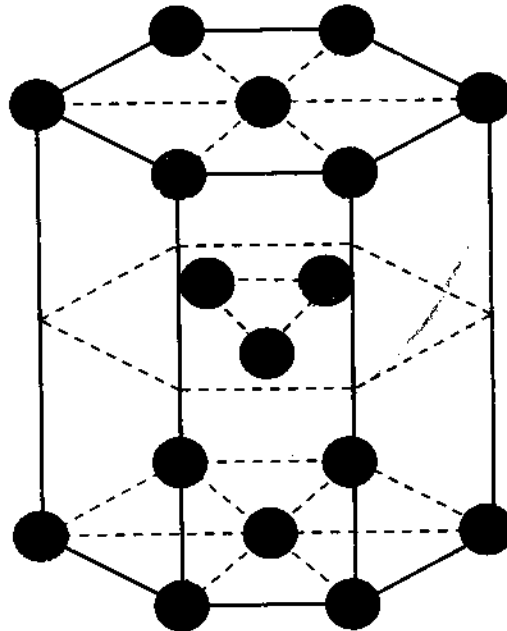
- Lập phương tâm diện (C.F.C.) :

Ví dụ : Cu, Ag, Al, Ni



- Lục phương xếp chặt (H.C.) :

Ví dụ : Mg, Zn, Ti α , Co α



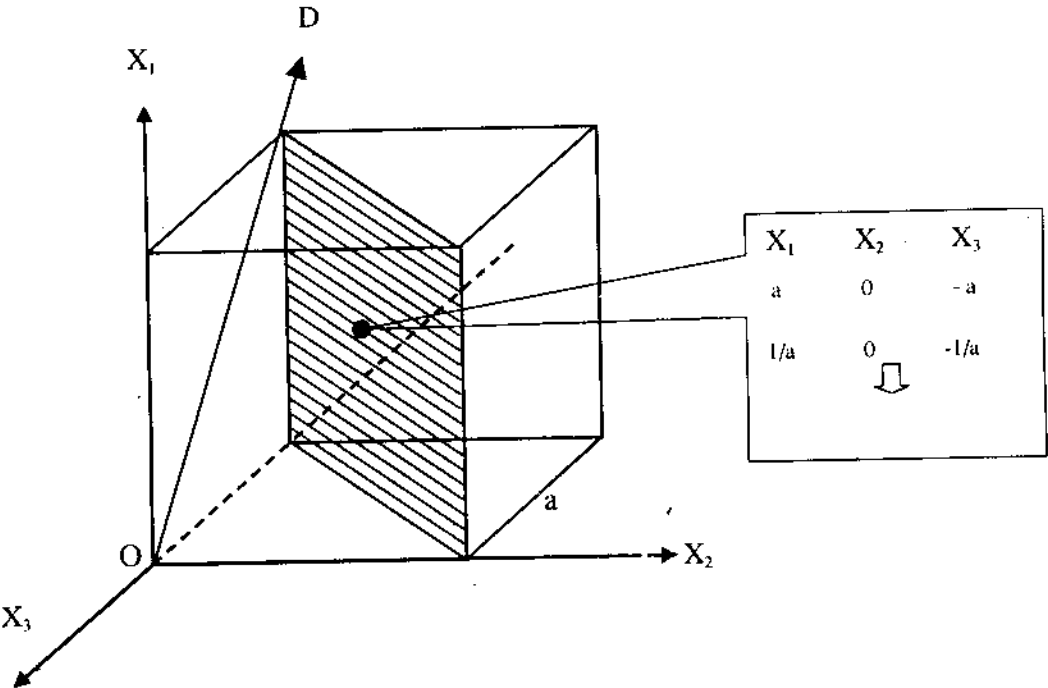
Mạng tinh thể có các trục và các mặt đối xứng. Mặt đối xứng của mạng tinh thể thường là các mặt có mật độ nguyên tử lớn nhất. Những mặt này còn gọi là mặt trượt, vì trở kháng trượt (cắt) trên đó có giá trị nhỏ nhất. Theo qui ước, các mặt trượt được định vị bởi các chỉ số Miller : một mặt trượt bất kỳ luôn được định vị bởi tọa độ các giao điểm của nó với các trục của hệ tọa độ qui chiếu. Nếu ta lấy nghịch đảo của các tọa độ này và qui kết quả về ba số nguyên nhỏ nhất có cùng tỷ lệ, ta sẽ nhận được các chỉ số Miller (hình 1.1).

Hướng tinh thể được đặc trưng bởi một đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ và đi qua vị trí của một nguyên tử. Hướng tinh thể được xác định bởi tọa độ của nguyên tử này, biểu thị thông qua số lượng khoảng cách giữa các nguyên tử. Ví dụ, hướng OD trên hình 1.1 được xác định bởi $\langle 0 \ 1 \ \bar{1} \rangle$:

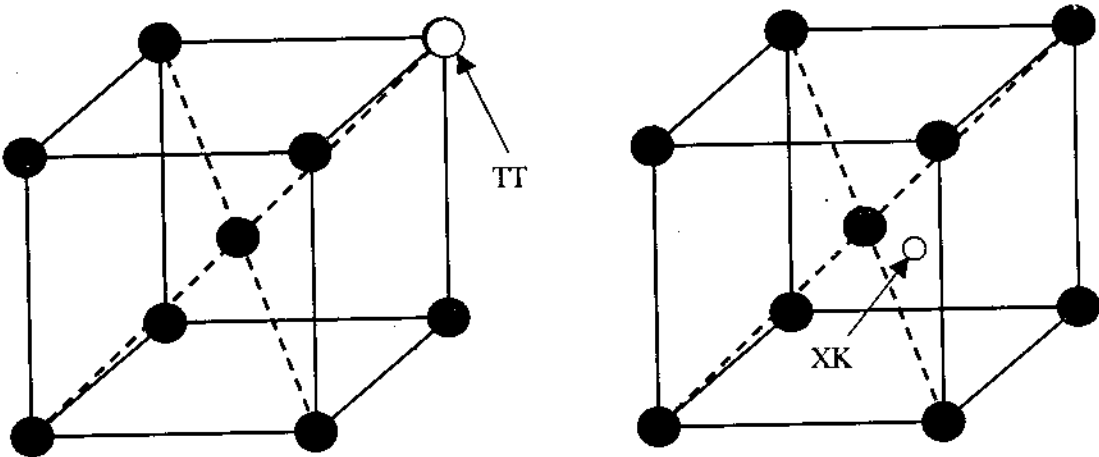
Cấu trúc tinh thể của hợp kim có thể là một trong các dạng nêu trên hay một dạng khác.

Đối với dung dịch rắn, có thể xảy ra trường hợp thay thế một nguyên tử trong mạng của nguyên tố này bằng một nguyên tử của nguyên tố khác (ví dụ Al trong Fe) hay xen kẽ

một nguyên tử có “thể tích” nhỏ hơn vào mạng của nguyên tố hoà tan (ví dụ : C trong Fe đối với thép austenit (hình 1.2)).

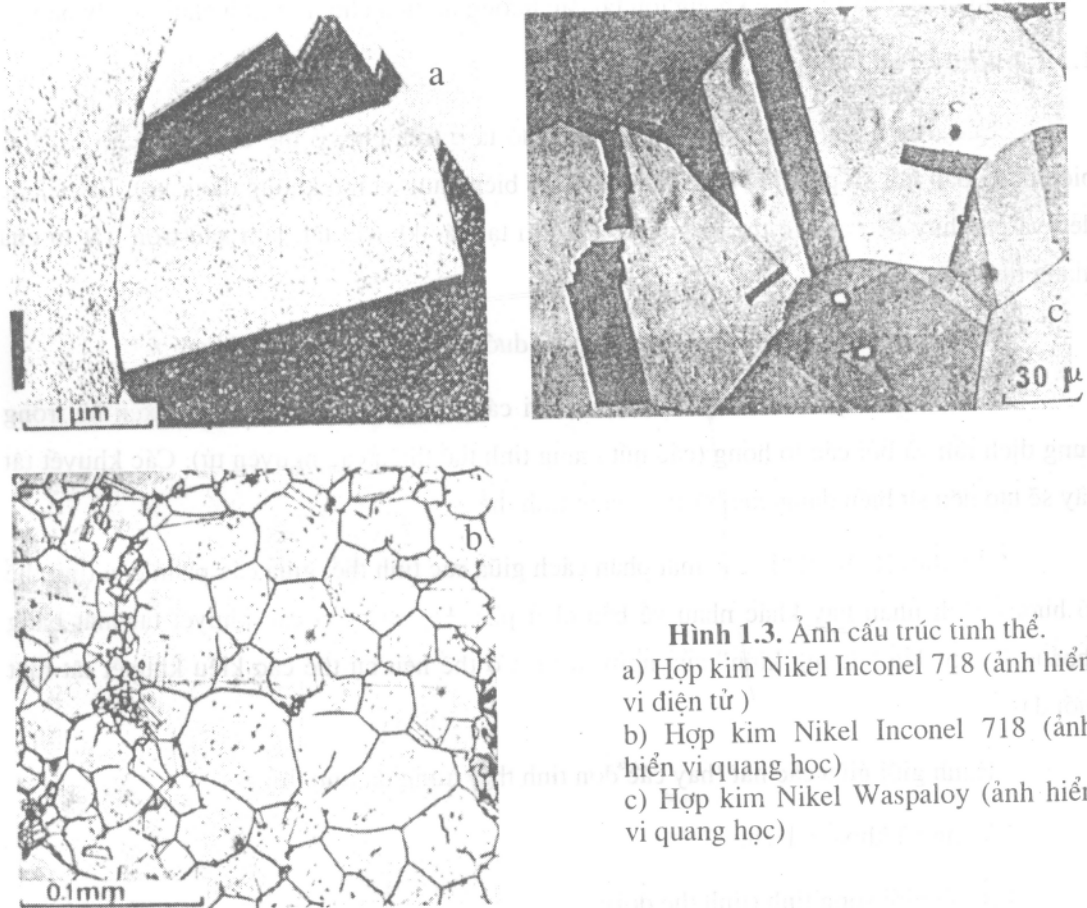


Hình 1.1. Chỉ số Miler.



Hình 1.2. Cấu trúc mạng dung dịch rắn thay thế (TT) và xen kẽ (XK).

Phụ thuộc vào nhiệt độ, trong kim loại có thể xảy ra quá trình biến đổi pha. Các pha thường thấy phổ biến trong thép là γ và α (tương ứng C.F.C. đối với austenit và C.C. đối với ferit của hệ sắt – cacbon). Các pha thứ sinh bền vững hay không bền vững cũng có thể tồn tại (ví dụ: các pha β , δ , ϵ , σ). Đối với cùng một pha, người ta cũng nhận thấy có trường hợp các nguyên tử được thay thế một cách hỗn độn (ví dụ pha γ) hoặc theo một trình tự nhất định (ví dụ pha γ').



Hình 1.3. Ảnh cấu trúc tinh thể.

- a) Hợp kim Nikel Inconel 718 (ảnh hiển vi điện tử)
- b) Hợp kim Nikel Inconel 718 (ảnh hiển vi quang học)
- c) Hợp kim Nikel Waspaloy (ảnh hiển vi quang học)

Kim loại và hợp kim thường được chế tạo ở trạng thái lỏng, cấu trúc của chúng được hình thành do kết tinh trong quá trình làm nguội. Khi nhiệt độ của kim loại loại giảm đi, khoảng cách giữa các nguyên tử cũng giảm; khoảng cách tới hạn để các mối liên kết có thể hình thành sẽ đạt được tại một số điểm phân bố ngẫu nhiên, tạo thành những mầm tinh thể đầu tiên và tiếp tục phát triển thành các tinh thể. Như vậy, mạng tinh thể được hình thành và phát triển theo một cấu trúc nhất định (thuộc một hệ) nhưng theo các hướng phân bố ngẫu nhiên trong không gian. Mỗi mầm sẽ phát triển thành một đơn tinh thể độc lập, có kích thước

hạn chế bởi các đơn tinh thể lân cận. Tập hợp các đơn tinh thể phân bố ngẫu nhiên tạo thành đa tinh thể. Kích thước trung bình của đơn tinh thể trong một đa tinh thể biến đổi từ vài micron (10^{-3} mm) đến vài milimét tùy theo bản chất của các thành phần cấu thành kim loại và phương pháp xử lý cơ, nhiệt (hình 1.3). Như vậy, ta hiểu rằng, một đa tinh thể được tạo thành từ vô số đơn tinh thể có bản chất dị hướng. Tuy nhiên, vì các đơn tinh thể phân bố ngẫu nhiên nên, xét về mặt vĩ mô, một đa tinh thể thường được xem là đẳng hướng. Hay nói một cách khác, đối với một đa tinh thể không tồn tại các hướng ưu tiên cho một tính chất cơ - lý nào.

1.1.1.2. Khuyết tật mạng tinh thể

Cấu trúc mạng tinh thể lý tưởng như mô tả ở trên chỉ có thể đảm bảo cho vật liệu biến dạng đàn hồi và phá hủy giòn (phá hủy với biến dạng vĩ mô không đáng kể). Biến dạng dẻo và phá hủy dẻo chỉ có thể lý giải bởi sự tồn tại các khuyết tật, làm xáo trộn trật tự của mạng tinh thể.

Các khuyết tật của mạng tinh thể tồn tại dưới dạng điểm, mặt và đường.

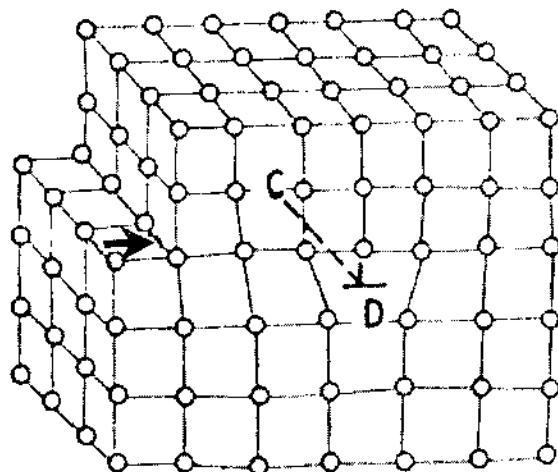
Các khuyết tật điểm được tạo thành bởi các nguyên tử thay thế hoặc xen kẽ trong dung dịch rắn và bởi các lỗ hổng (các nút mạng tinh thể thiếu các nguyên tử). Các khuyết tật này sẽ tạo nên sự biến dạng cục bộ của mạng tinh thể.

Các khuyết tật mặt là các mặt phân cách giữa các tinh thể, giữa các phần của tinh thể có hướng lệch nhau hay khác nhau về bản chất pha. Độ dày của các khuyết tật mặt bằng khoảng $4 \div 5$ lần “đường kính” của nguyên tử. Có thể nêu cụ thể các kiểu khuyết tật mặt dưới đây :

- Ranh giới giữa các hạt (hay các đơn tinh thể) trong đa tinh thể;
- Vòng và khoang lệch;
- Ranh giới song tinh (tinh thể đôi);
- Ranh giới giữa các pha.

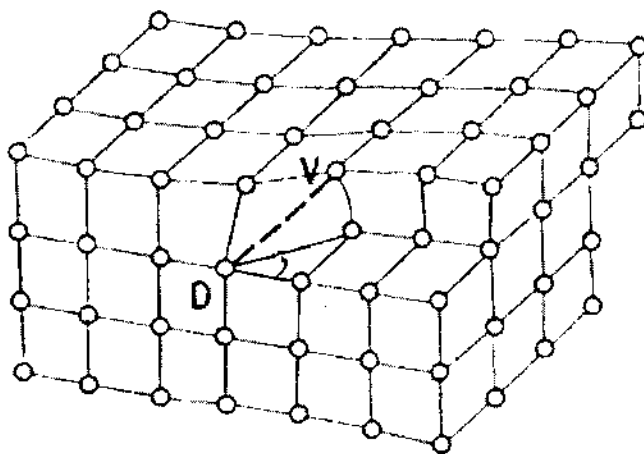
Khuyết tật đường (còn gọi là lệch - dislocation) là dạng khuyết tật có vai trò quyết định gây nên biến dạng dẻo của kim loại. Một đường lệch được tạo nên bởi sự lặp lại một cách chu kỳ sai lệch sắp xếp các nguyên tử. Đường lệch cũng biểu thị trạng thái cân bằng của các nguyên tử có trường điện từ hơi khác nhau. Ta có thể minh họa một cách trực quan đường lệch trong trường hợp mạng tinh thể lập phương đơn giản như sau :

Lệch biên : khuyết tật gây nên bởi sự tịnh tiến của phần tinh thể phía trên so với phần phía dưới (hình 1.4).



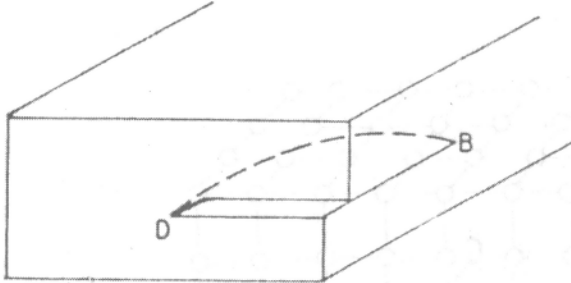
Hình 1.4. Lệch biên (đường lệch biên CD).

Lệch xoắn : khuyết tật gây nên bởi sự xoay của phần tinh thể phía trên so với phần phía dưới (hình 1.5).

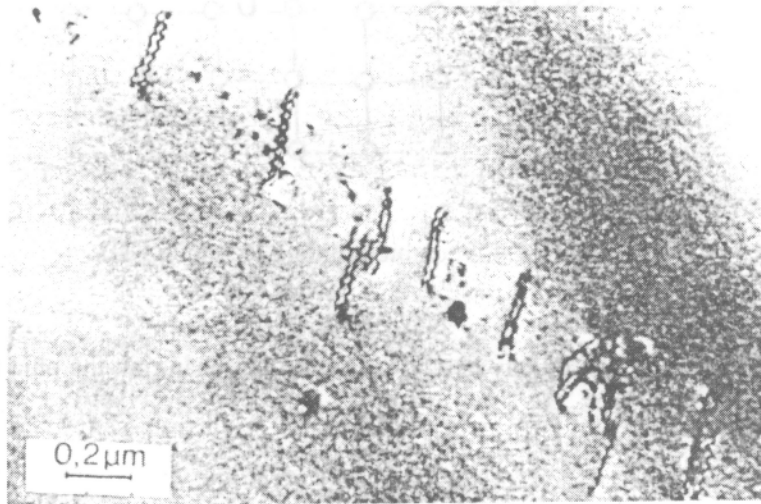


Hình 1.5. Lệch xoắn (đường lệch xoắn DV).

Vòng lệch (lệch hỗn hợp): là đường lệch nối một lệch biên thuần túy với một lệch xoắn thuần túy (hình 1.6).



Hình 1.6. Vòng lệch.
(lệch hỗn hợp - đường DB).

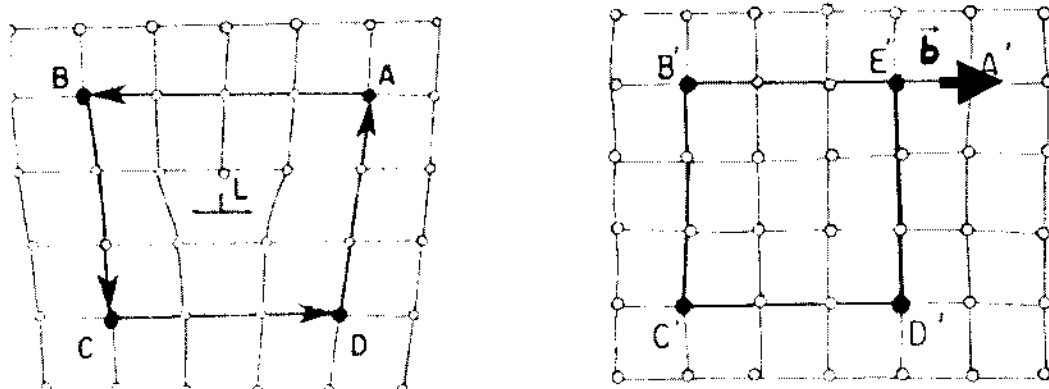


Hình 1.7. Lệch trong thép không gỉ Fe 20 Cr-Ni-Al.

Các lệch được sinh ra ngay từ khi tinh thể hình thành; trong hầu hết các kim loại, mật độ của lệch rất cao, dao động trong khoảng từ 10^8 km/cm^3 (đối với các tinh thể sau khi ủ mềm triệt để) đến 10^7 km/cm^3 (đối với các tinh thể sau khi biến cứng tối đa). Trên hình 1.7 trình bày ảnh của lệch trên hiển vi điện tử quét.

Xử lý nhiệt kéo dài sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho các lệch tập hợp, sắp xếp, cấu trúc lại thành các khoang (cellule) lệch có kích thước và hình dạng gần như đồng đều trong không gian ba chiều, tạo thành mạng gồm các mặt và các nút (mạng Frank).

Ta có thể đặc trưng một lệch bởi vector “đóng” của đường bao xung quanh đường lệch đó.



Hình 1.8. Vectơ Burgers.

Xét hai trường hợp : tinh thể lập phương đơn giản lý tưởng và tinh thể lập phương đơn giản với một lệch biên L (hình 1.8). Trong trường hợp thứ hai, xét tương đối với một hệ toạ độ qui chiếu, ta dựng đường bao kín ABCD xung quanh “vết” lệch L . Trong tinh thể lý tưởng ta dựng lại đường bao này cũng với số lượng khoảng cách giữa các nguyên tử như trong trường hợp thứ hai : $A'B'C'D'E'$. Để đóng kín đường bao này ta cần bổ sung thêm vectơ $\overrightarrow{E'A'}$, còn gọi là vectơ Burgers $\vec{b}$. Vectơ Burgers có các tính chất sau :

- Độc lập với đường bao;
- Modul của vectơ Burgers xác định khoảng dịch chuyển cần thiết để tạo được một lệch;
- Đặt $\vec{\tau}$ là vectơ đơn vị của đường lệch và α là góc tạo bởi $\vec{\tau}$ và $\vec{b}$, nếu :

$$\alpha = 90^\circ (\vec{\tau} \perp \vec{b}) : \text{ta có lệch biên};$$

$$\alpha = 0^\circ (\vec{\tau} \parallel \vec{b}) : \text{ta có lệch xoắn};$$

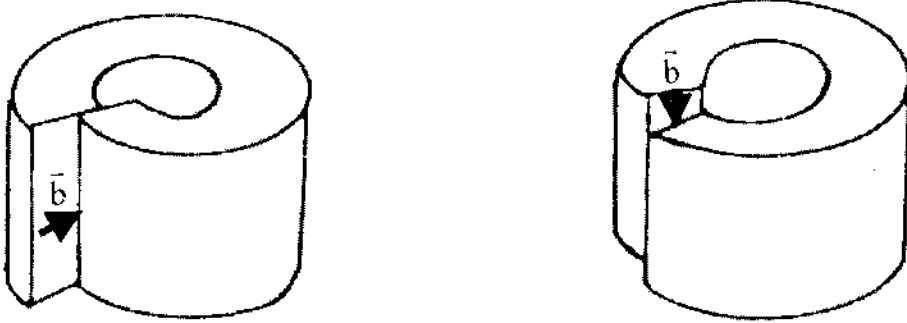
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ : \text{ta có lệch hỗn hợp}.$$

Vectơ đóng của đường bao xung quanh nhiều lệch sẽ bằng tổng các vectơ Burgers của các lệch.

Nếu xem rằng các lệch chỉ tạo nên biến dạng thuần túy đàn hồi của mạng và coi lân cận của một lệch như môi trường liên tục đàn hồi tuyến tính, ta có thể tính được năng lượng đàn hồi w “giảm giữ” trong vật liệu dưới dạng ứng suất và biến dạng nội. Cho một lệch biên hay lệch xoắn có chiều dài một đơn vị (hình 1.9) và có vectơ Burgers với Modul là b , ta có thể tính w theo biểu thức sau :

$$w^c = \mu b^2, \text{ J/m}$$

trong đó, μ là modun cắt đàn hồi của môi trường.



Hình 1.9. Sơ đồ minh họa lệch biên (a) và lệch xoắn (b).

Tương tự, nếu biết trường ứng suất trong lân cận của lệch (giả thiết là đồng đều) biểu thị bởi tenxơ $\underline{\sigma}$, ta có thể tính được lực hữu hiệu $\vec{F}_L$ tác động lên một lệch có vector đơn vị là $\vec{t}$ và vector Burgers là $\vec{b}$:

$$\vec{F}_L = (\underline{\sigma} \cdot \vec{b}) \wedge \vec{t}.$$

Biểu thức trên còn gọi là quan hệ Peach - Koehler.

1.1.2. Cơ chế vật lý của biến dạng

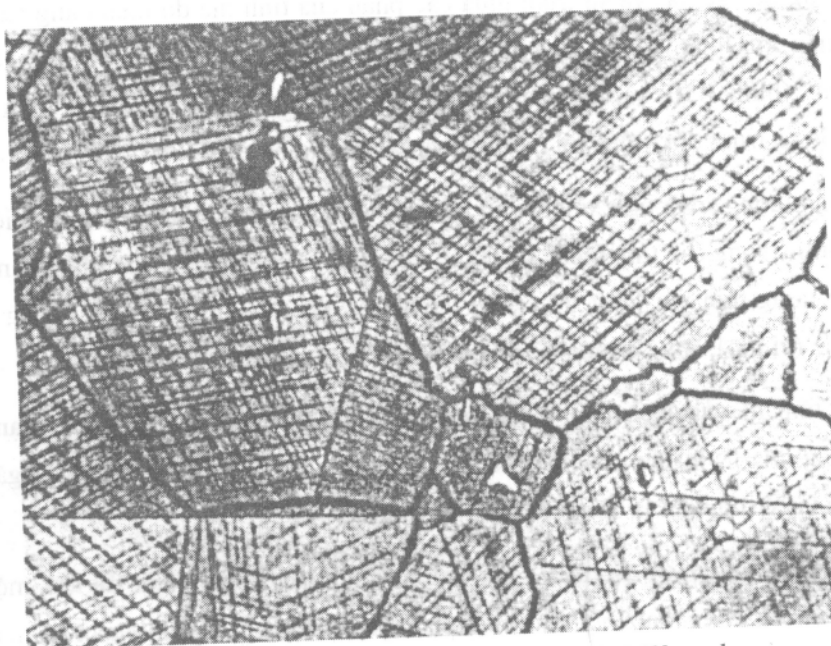
1.1.2.1. Biến dạng đàn hồi

Biến dạng đàn hồi xảy ra ở mức độ khoảng cách giữa các nguyên tử. Hiệu ứng đàn hồi vĩ mô là tổng những biến đổi khoảng cách giữa các nguyên tử, cần thiết để đảm bảo sự cân bằng với tác động bên ngoài. Mọi sự biến đổi hình học của vật thể đều mang tính thuận nghịch. Trong biến dạng đàn hồi thuần túy, các nguyên tử quay trở lại vị trí cân bằng trong hình thái sắp xếp ban đầu ngay sau khi ngừng tác động của ngoại lực. Chuyển động của lệch, trong trường hợp này, đương nhiên cũng mang tính thuận nghịch.

1.1.2.2. Biến dạng dư

Biến dạng dư (biến dạng dẻo tức thời hay dẻo nhớt) xảy ra ở mức các đơn tinh thể (các hạt). Biến dạng dư tương ứng với chuyển động tương đối không thuận nghịch của các nguyên tử (các nguyên tử sẽ ổn định ở vị trí mới sau khi tác động được dỡ bỏ). Tùy theo điều kiện và mức độ tác động mà biến dạng dư có thể xảy ra thuần túy bên trong các hạt hay ở qui

mô liên hạt. Tỷ lệ giữa mức độ biến dạng trên biên giới hạt (các hạt trượt tương đối với nhau) và mức độ biến dạng của hạt thường rất nhỏ. Tỷ lệ này gia tăng cùng với sự gia tăng của nhiệt độ và sự giảm đi của tốc độ biến dạng.



Hình 1.10. Băng trượt trong hợp kim Nikel Waspaloy.



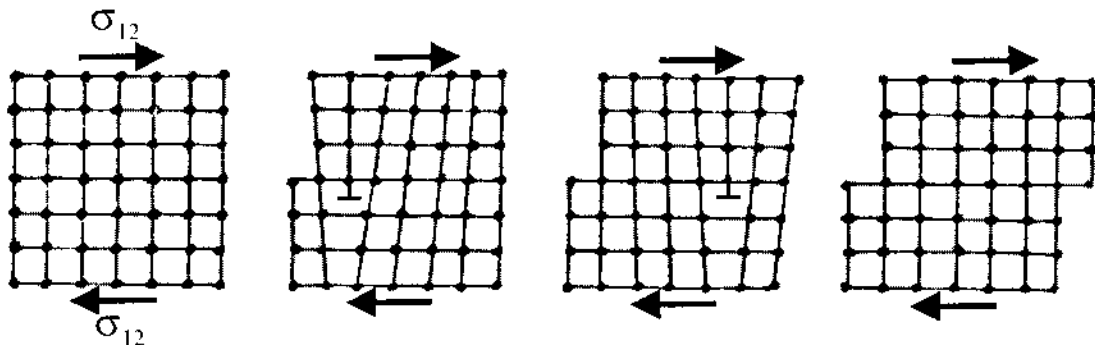
Hình 1.11. Biến dạng song tinh trong kẽm .

Các mặt đối xứng của mạng tinh thể (các mặt trên đó có mật độ nguyên tử lớn nhất) song song với nhau. Khoảng cách giữa các mặt đối xứng cũng tương ứng với khoảng cách lớn nhất có thể có giữa các mặt tinh thể song song. Dưới tác động cơ học từ bên ngoài, trên các mặt đối xứng này sẽ xảy ra sự trượt giữa các phần của tinh thể do biến dạng cắt theo hướng ứng suất tiếp lớn nhất. Chính sự trượt trên các mặt đối xứng song song này đã tạo ra các “băng trượt” (hình 1.10) và các bậc nhìn thấy được trên bề mặt ngoài của mẫu thử hay các song tinh do sự trượt đối xứng với một bề mặt tạo ra (hình 1.11)

Hiện tượng song tinh xảy ra chủ yếu đối với kim loại khi biến dạng ở nhiệt độ thường và trung bình. Trong các tinh thể C.C. , H.C. và C.F.C ta có thể quan sát thấy hiện tượng song tinh xảy ra đồng thời với trượt. Hai hiện tượng này cấu thành biến dạng không đồng đều ở mức tinh thể (vi mô), song ở mức vĩ mô có thể coi là đồng đều.

Sự tồn tại của lệch làm giảm một cách đáng kể độ ổn định của mạng tinh thể. Chuyển động của lệch theo cơ chế “trượt” và “trèo” là nguyên nhân chủ yếu gây nên biến dạng dư mà ta có thể xem là đồng đều ở mức vĩ mô.

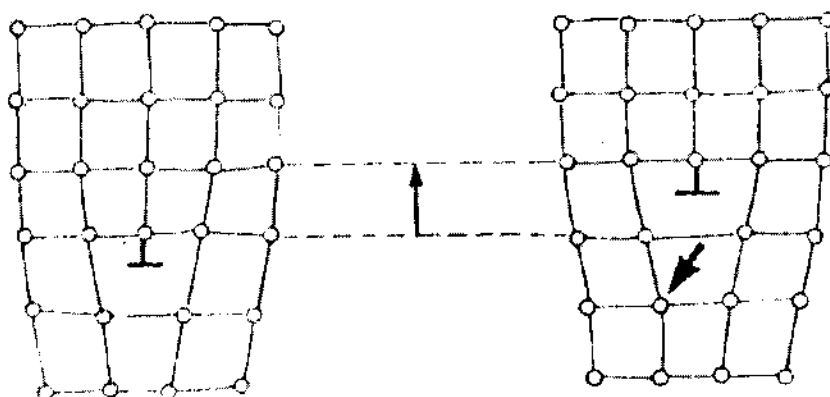
Chuyển động trượt của lệch : khi tinh thể chịu tác động cơ học đủ lớn, một lệch biên hoặc xoắn chuyển động theo một mặt trượt, kéo theo chuyển vị không thuận nghịch của vector có giá trị bằng vector Burgers. Hình 1.12 minh họa chuyển động của một lệch biên trong tinh thể lập phương dưới tác động của ứng suất tiếp σ_{12} . Mặt trượt là mặt được tạo bởi vector đơn vị của đường lệch $\vec{l}$ và vector Burgers $\vec{b}$. Cơ chế chuyển động này của lệch đòi hỏi sự phá huỷ lẫn lượt từng mối liên kết nguyên tử trong lân cận đường lệch. Trong trường hợp lệch hỗn hợp, vòng lệch đang chuyển động (phát triển mở rộng) trên mặt phẳng này, nếu gặp chướng ngại, có thể rẽ sang mặt phẳng khác (vuông góc với mặt phẳng ban đầu chẳng hạn) để trượt tiếp. Chuyển động trượt rẽ nhánh này chỉ có thể xảy ra đối với vòng lệch và sự rẽ nhánh chỉ có thể xảy ra tại điểm “xoắn thuận tủy” của vòng lệch.



Hình 1.12. Chuyển động của lệch theo cơ chế trượt.

Chuyển động trèo của lệch : Một lệch biên có thể dịch chuyển, kèm theo chuyển chất, vuông góc với mặt trượt của nó. Chuyển động này chỉ có thể xảy ra khi có các lỗ hổng ở gần đường lệch và mức độ biến dạng của mạng tinh thể, gây nên bởi tác động từ bên ngoài, đủ để có thể tạo ra sự “nhảy” của các nguyên tử từ mặt phẳng tinh thể khuyết (có biên là đường lệch) vào vị trí của các lỗ hổng. Theo cơ chế này, nếu toàn bộ hàng nguyên tử (trên đường lệch biên) được đổi chỗ thì lệch sẽ chuyển động được một khoảng cách giữa các nguyên tử (hình 1.13).

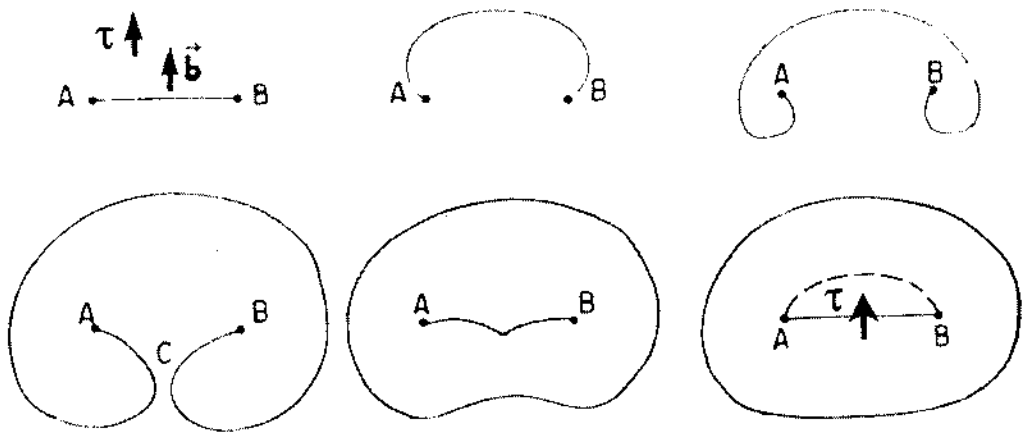
Cơ chế chuyển động nêu trên của lệch liên quan trực tiếp đến khuếch tán của các lỗ hổng hoặc các nguyên tử ngoại lai. Do đó, chuyển động trèo của lệch là một quá trình nhiệt hoạt và chủ yếu chỉ xảy ra ở nhiệt độ cao ($T > 1/3 T_f$, với T_f là nhiệt độ nóng chảy).



Hình 1.13. Chuyển động của lệch theo cơ chế trèo.

Vận tốc chuyển động của lệch theo cơ chế trượt hay trèo có thể rất nhỏ hay rất lớn tùy theo ứng suất tác động, nhưng không bao giờ vượt quá tốc độ âm thanh trong môi trường tương ứng.

Chuyển động của lệch tạo nên biến dạng dư, ngược lại, biến dạng dẻo lớn sẽ làm tăng mật độ lệch. Trong những điều kiện nhất định, mật độ lệch gia tăng sẽ gây nên sự nghẽn tắc, đôn ứ và là nguyên nhân trực tiếp làm cho vật liệu hoá bền (hoá bền do biến dạng). Cơ chế sinh lệch phổ biến và quan trọng nhất có tên gọi là cơ chế Frank-Read. Xét một đoạn lệch bị neo chặt hai đầu A và B do tương tác với các lệch khác hay với các phần tử ngoại lai. Đoạn lệch có vector Burgers $\vec{b}$ vuông góc với AB và chịu tác động của ứng suất tiếp τ (hình 1.14) cùng hướng với $\vec{b}$.



Hình 1.14. Nguồn sinh lệch theo cơ chế Frank – Read.

Ứng suất tác động bắt buộc lệch bị uốn cong và chuyển động cho đến vị trí bao kín A và B. Khi hai nhánh lệch giao nhau tại C, chúng có cùng vectơ Burgers nhưng vectơ đơn vị lại đối nhau (lệch trái dấu), do vậy chúng sẽ kết hợp với nhau để tạo ra một vòng lệch lớn khép kín và một đoạn lệch AB mới. Từ AB, một vòng lệch mới sẽ lại được hình thành. Tiếp tục như vậy, các vòng lệch sẽ liên tục được sinh ra.

1.1.2.3. Giới hạn đàn hồi

Ta có thể xác định một cách dễ dàng giới hạn đàn hồi của một trật tự sắp xếp nguyên tử lý tưởng (không có khuyết tật), với giả thiết rằng ứng suất tiếp cần thiết để một tập hợp các nguyên tử nằm trên mặt phẳng này có thể trượt trên mặt phẳng khác, có dạng hàm sin của khoảng cách giữa các nguyên tử. Trong lân cận vị trí cân bằng, ứng suất tiếp này có quan hệ tuyến tính với biến dạng, thông qua modun cắt μ . Ta thấy rằng giá trị cực đại τ_y của ứng suất tiếp, tương ứng với giới hạn thuận nghịch của chuyển động trượt có dạng :

$$\tau_y = \frac{\mu}{2\pi}.$$

Giá trị trên của ứng suất tiếp lớn hơn giới hạn cắt đàn hồi của các kim loại thông dụng khoảng 100 lần và rất gần với các giá trị đo được trên “wiskers” hay các sợi mảnh có cấu trúc sắp xếp nguyên tử lý tưởng.

Giới hạn đàn hồi của một đa tinh thể thực rất khó xác định, bởi lẽ có nhiều cơ chế khác nhau có thể tham gia vào quá trình biến dạng :

- Các vòng lệch, sinh ra theo cơ chế Frank – Read, thoát ra ngoài bề mặt tự do của các tinh thể và tạo nên một biến dạng dư nào đó. Ứng suất tiếp cần thiết để kích hoạt cơ chế này được tính theo công thức :

$$\tau_y = 2\mu \frac{b}{2L},$$

với L là độ dài của nguồn lệch. Giá trị này thấp hơn nhiều so với giới hạn đàn hồi đã được xác định ở trên.

- Do mối liên kết giữa các nguyên tử bị phá huỷ tại tâm của lệch, nên các lực, có tên gọi là lực Peierls- Nabarro, tác động ngược với hướng trượt, cản trở chuyển động của lệch, làm gia tăng giới hạn đàn hồi;

- Theo cơ chế Frank – Read, các vòng lệch (lệch hỗn hợp) sinh ra liên tục từ nguồn lệch (lệch biên), sự phân chia này của lệch cũng dẫn đến sự “bao vây” làm cản trở chuyển động trượt của chính chúng;

- Mạng Frank cũng gây những trở kháng nhất định cho biến dạng cắt. Giá trị cực đại của ứng suất tiếp, tương ứng giới hạn cắt đàn hồi, trong trường hợp này có thể tính theo công thức :

$$\tau_y = \frac{\mu b}{2\pi D},$$

với D là kích thước của các khoang (cellule) mạng Frank.

- Đối với hợp kim, các nguyên tử xen kẽ trong dung dịch rắn hay các pha phân tán cũng góp phần làm gia tăng trở kháng chuyển động của lệch.

Các cơ chế nêu trên có thể tham gia đồng thời vào việc xác định giá trị của giới hạn đàn hồi vĩ mô. Trong trường hợp đa tinh thể, sự định hướng ngẫu nhiên giữa các đơn tinh thể và các biên giới hạt cũng gây cản trở cho sự phát triển của biến dạng dư. Do vậy, ngoài các cơ chế đã nêu còn có thêm cơ chế vượt qua ranh giới các hạt. Nếu coi giới hạn cắt đàn hồi τ_y là ứng suất cụm lệch (pile-up stress) trong một tinh thể có thể kích hoạt một nguồn lệch từ khoảng cách r trong một tinh thể kề cạnh có kích thước trung bình là d , khi thiết lập quan

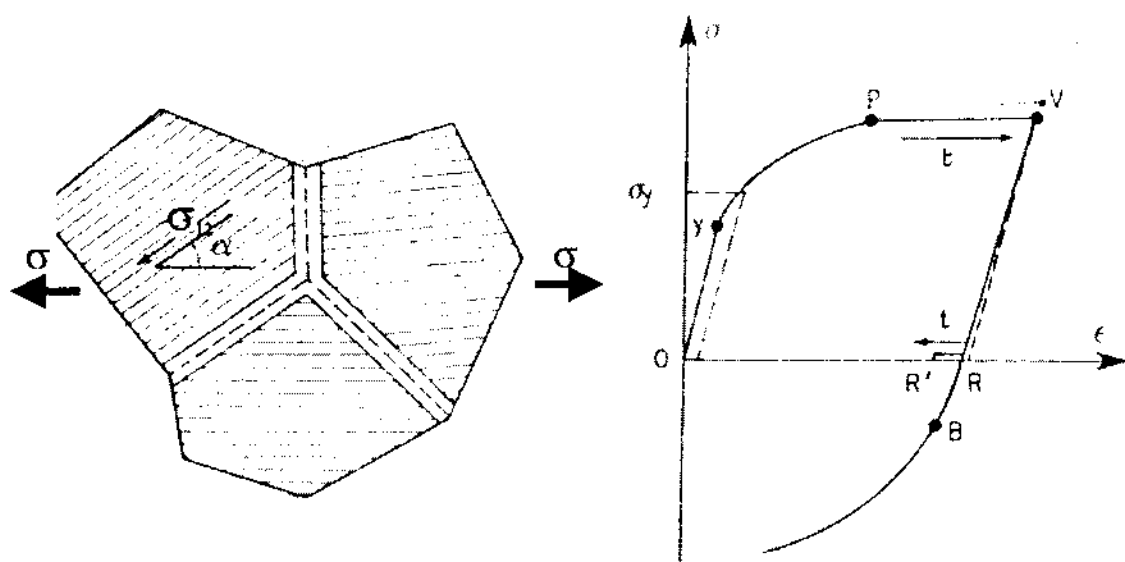
hệ cân bằng giữa các ứng lực trong cụm lệch bị cản trở bởi biên giới hạt và ứng lực tác dụng, ta sẽ có phương trình Petch :

$$\tau_y = \tau_0 + \tau^* \left(\frac{r}{d} \right)^{\frac{1}{2}},$$

với τ_0 và τ^* là các hệ số đặc trưng cho mỗi kim loại và hợp kim. Phương trình trên cho thấy giới hạn đàn hồi tỷ lệ thuận với căn bậc hai của khoảng cách r và tỷ lệ nghịch với căn bậc hai của kích thước trung bình của tinh thể d .

1.1.2.4. Biến dạng của đa tinh thể

Để có thể nắm vững các giả thiết cơ bản làm cơ sở cho mô hình hoá thuộc tính cơ học của vật liệu, ta cần xem xét một cách khái quát các cơ chế xảy ra trong quá trình biến dạng một đa tinh thể dưới tác động của ứng suất một chiều (hình 1.15) :



Hình 1.15. Biến dạng đa tinh thể.

Biến dạng đàn hồi

Biến dạng đàn hồi là tổng hợp của các chuyển động tương đối thuận nghịch của các nguyên tử. Biến dạng đàn hồi đa tinh thể được xem như độc lập với biến dạng dư, nếu như không kể đến ứng suất dư vì mô gây nên bởi sự trượt tinh thể không thuận nghịch, làm cho

biến dạng đàn hồi vĩ mô không phải chính xác là tổng của các biến dạng đàn hồi vĩ mô. Trên hình 1.15 biến dạng đàn hồi được mô tả bởi đoạn thẳng OY.

Giới hạn đàn hồi

Giới hạn đàn hồi được mô tả bởi trạng thái ứng suất gây nên biến dạng kèm theo các chuyển động ban đầu không thuận nghịch của lệch. Vì rất khó xác định được giới hạn đàn hồi theo định nghĩa trên, nên trong thực tế người ta đưa ra giới hạn đàn hồi qui ước σ_y tương ứng với một giá trị nhất định của biến dạng dư vĩ mô : $\epsilon^p = 0,02\%$ hoặc $0,05\%$ hoặc $0,2\%$, tùy theo độ chính xác mong muốn. Trên hình 1.15 giới hạn đàn hồi được biểu thị bởi điểm Y.

Biến dạng dẻo

Sự trượt của lệch xuất hiện đầu tiên trong các tinh thể có các mặt trượt hướng một góc $\alpha = 45^\circ$ so với hướng tác động của σ . Trên các mặt trượt này, ứng suất tiếp σ_{12} có giá trị cực đại (hình 1.15). Do các tinh thể định hướng ngẫu nhiên trong không gian, nên biến dạng dẻo sẽ không thể đồng thời bắt đầu xảy ra trong tất cả các tinh thể. Để đảm bảo sự tương thích biến dạng và kích hoạt các hệ trượt khác, các tinh thể (chưa biến dạng dẻo) sẽ định hướng lại, xoay về vị trí thuận lợi cho sự trượt của lệch. Biến dạng sẽ trở nên đồng đều, xét về mặt vĩ mô, khi tất cả các tinh thể đều biến dạng dẻo. Khi đó, biến dạng sẽ ổn định và mỗi trạng thái biến dạng sẽ là một trạng thái cân bằng đàn – dẻo. Trên hình 1.15, đoạn YP mô tả quá trình biến dạng dẻo.

Hoá bền hay biến cứng

Khi ứng suất gia tăng, mật độ lệch cũng tăng theo nhưng, đồng thời, số lượng điểm cản trở chuyển động của lệch cũng tăng thêm, làm gia tăng trở kháng biến dạng dẻo của đa tinh thể. Hiện tượng này gọi là hoá bền hay biến cứng. Trong trường hợp này, biến dạng dẻo chỉ có thể tiếp tục phát triển nếu ứng suất tác động tiếp tục tăng. Hoá bền cũng có thể xảy ra do sự tồn tại ứng suất vĩ mô liên tinh thể, gây nên bởi sự không tương thích biến dạng giữa các tinh thể. Đoạn YP trên hình 1.15 mô tả biến dạng dẻo với hoá bền (hay biến cứng).

Biến dạng dẻo nhớt

Nếu ứng suất tác động tiếp tục gia tăng, trượt có thể thoát qua biên giới hạt. Trượt liên tinh thể là một quá trình nhiệt hoạt và đặc biệt nhạy cảm với nhiệt độ trong khoảng cao hơn $1/3$ nhiệt độ nóng chảy tuyệt đối (K). Ở nhiệt độ cao, phần lớn biến dạng dẻo là biến dạng liên tinh thể với chuyển động trượt và trèo của lệch. Với ứng suất không đổi, biến dạng có thể tiếp tục gia tăng, khả năng cân bằng không còn nữa. Biến dạng trong trường hợp này

là một quá trình chảy dẻo với tốc độ phụ thuộc vào ứng suất tác động. Đó chính là miền biến dạng dẻo nhất được mô tả bằng đoạn PV trên hình 1.15

Hồi phục

Những biến đổi trong các tinh thể gây nên bởi biến dạng dẻo tạo ra một sự chênh lệch năng lượng nhất định so với cân bằng nhiệt động học. Độ chênh lệch này có xu hướng giảm đi khi tác động bằng không hoặc có chiều ngược lại. Sở dĩ như vậy là do : mật độ lỗ hổng hay các nguyên tử xen kẽ giảm đi; các lệch ngược dấu triệt tiêu nhau; kết tinh lại có thể xảy ra. Những cơ chế nêu trên là nguyên nhân trực tiếp gây nên hiện tượng hồi phục. Hồi phục xảy ra theo thời gian và là một quá trình nhiệt hoạt. Về phương diện vi mô, hồi phục biểu hiện hoặc qua hiện tượng giảm mức độ hoá bền hoặc qua hiện tượng phục hồi một phần biến dạng (đoạn R'R trên hình 1.15). Các nhận xét trên chỉ đúng đối với vật liệu bền vững về mặt cấu trúc tổ chức vi mô. Hiện tượng hoá già của vật liệu, trong đó sự mất ổn định về tổ chức vi mô hoặc sự phân huỷ hoá học có thể xảy ra trong một thời gian ngắn hay rất dài (ví dụ: hoá già của một số hợp kim sau nhiệt luyện), không thuộc phạm vi khái niệm hồi phục.

Tính không nén được (trong biến dạng dẻo hoặc dẻo nhất)

Sự trượt không làm biến đổi cấu trúc tinh thể, thể tích của tập hợp tinh thể do vậy không thay đổi. Chỉ có biến đổi thể tích do biến dạng đàn hồi là có thể ghi nhận được, còn sự biến đổi thể tích do sự gia tăng của mật độ lệch luôn rất nhỏ, khó có thể ghi nhận. Như vậy cũng có nghĩa là, ứng suất tác động theo hướng pháp tuyến với mặt trượt (ứng suất pháp) hoặc trạng thái ứng suất thuỷ tĩnh ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) hoàn toàn không gây nên một hiệu quả nào đối với biến dạng dư. Điều này đã được thực nghiệm kiểm chứng với áp suất lên tới 30 000 atm (3000 Mpa).

Tính dị hướng gây nên bởi biến dạng dư

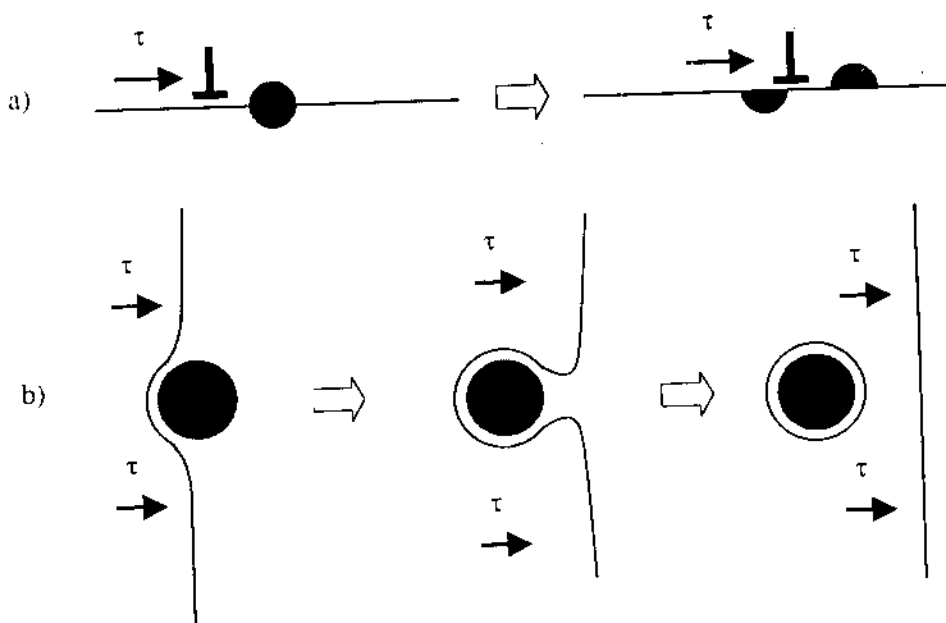
Do các tinh thể định hướng một cách ngẫu nhiên trong không gian, nên biến dạng dư cũng không đồng đều giữa các tinh thể. Sự tương thích biến dạng tại các miền ranh giới hạt chỉ có thể được đảm bảo bởi biến dạng đàn hồi vi mô, mà một phần sau khi dỡ tải sẽ vẫn còn tồn tại. Chính phần biến dạng đàn hồi vi mô còn tồn tại này đã gây nên ứng suất dư vi mô, tự cân bằng trong đa tinh thể. Về phần mình, các ứng suất dư vi mô tác động lên các tinh thể ở trạng thái trung tính (về mặt cơ học) và có thể làm tăng hoặc giảm tác động cần thiết từ bên ngoài để tiếp tục tạo ra biến dạng dư mới, cũng không đồng đều giữa các tinh thể. Đó chính là tính dị hướng gây nên bởi biến dạng dư mà biểu hiện đơn giản nhất là hiệu ứng

Bauschingers, có thể dễ dàng nhận biết khi thử kéo và nén kế tiếp trên một mẫu : giá trị tuyệt đối của giới hạn đàn hồi khi nén thấp hơn so với giới hạn đàn hồi khi kéo (điểm B trên hình 1.15).

1.1.2.5. Tính không ổn định cấu trúc tổ chức vi mô

Hiện tượng không ổn định cấu trúc tổ chức vi mô thể hiện theo thời gian bởi sự biến đổi độ bền của vật liệu và thường do sự biến đổi của nhiệt độ gây nên.

Sự chuyển biến pha và sự biến đổi cấu trúc thường xảy ra khi nhiệt độ biến đổi. Ví dụ, ở giới hạn trên của nhiệt độ biến dạng nóng, trong tổ chức của thép xuất hiện pha δ (lập phương tâm khối); ở nhiệt độ thấp hơn xuất hiện pha γ (lập phương tâm diện); ở nhiệt độ giới hạn dưới của biến dạng nóng xuất hiện pha α (lập phương tâm khối).



Hình 1.16. Cơ chế vượt qua hạt pha phân tán bằng phá huỷ cắt (a) và vòng qua (b).

Sự tiết pha phân tán, ví dụ pha phân tán γ' trong pha γ , xảy ra trong quá trình giảm nhiệt, sau khi phân rã một phần pha γ' ở nhiệt độ cao hơn. Hạt pha phân tán γ' mới tạo thành này có kích thước siêu mịn, làm cho vật liệu biến cứng mạnh (trở kháng biến dạng cao nhất).

Ở nhiệt độ ổn định, sự phát triển kích thước hạt của pha phân tán xảy ra khi tổ chức vi mô ở trạng thái ban đầu không ổn định. Quá trình lớn lên của hạt pha phân tán là một quá

trình nhiệt hoạt và có ảnh hưởng rõ rệt đến trở kháng biến dạng của vật liệu. Trong miền kích thước hạt pha phân tán đủ mịn mà lệch có thể vượt qua chúng bằng cơ chế phá huỷ cắt (hình 1.16 a), ta nhận thấy có sự gia tăng đáng kể của trở kháng biến dạng dẻo. Trong miền kích thước hạt pha phân tán lớn hơn, ta sẽ nhận thấy có sự giảm đi của trở kháng biến dạng do lệch có thể tương đối dễ dàng vượt qua chúng bằng cơ chế vòng qua, để lại một vòng lệch khép kín bao quanh hạt pha phân tán (hình 1.16 b).

Hiện tượng hoá già của kim loại và hợp kim, trong điều kiện cơ tải cơ học hoặc không, tương ứng với sự mất ổn định của cấu trúc vi mô xảy ra ở nhiệt độ không đổi (ví dụ, quá trình tiết pha phân tán cacbua M_2C_6 trên ranh giới hạt trong thép không gỉ austenit). Quá trình hoá già thường kéo theo sự gia tăng của trở kháng biến dạng. Hiện tượng này có thể chứng minh bằng thí nghiệm hoá bền hay chảy dẻo (xem mục 3.2.) đối với các mẫu đã qua hoá già ở nhiệt độ thích hợp trong một khoảng thời gian nhất định.

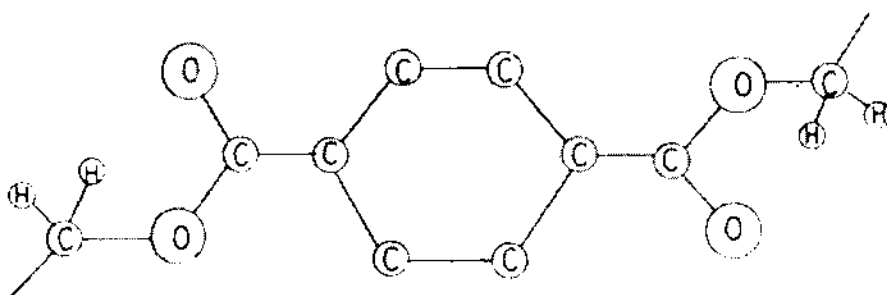
1.2. MỘT SỐ VẬT LIỆU PHI KIM

1.2.1. Polime

1.2.1.1. Cấu trúc

a) Các phân tử polime

Các polime cao ở thể rắn được cấu thành từ các phân tử liên kết xích với nhau. Khung của mạch xích được tạo thành từ các nguyên tử cacbon, kết hợp chủ yếu với nhau bằng liên kết đồng hoá trị cacbon – cacbon. Mỗi liên kết này có năng lượng phá huỷ khoảng 300 kJ/mol. Các nguyên tử khác như hydro, oxy, nitơ, ... liên kết với các nguyên tử cacbon trong mạch xích hoặc đôi khi với các nguyên tử của các phân tử lân cận bởi liên kết cực hay liên kết dạng Van der Waals. Kiểu liên kết này có năng lượng phá huỷ khoảng 10 kJ/mol (hình 1.17).



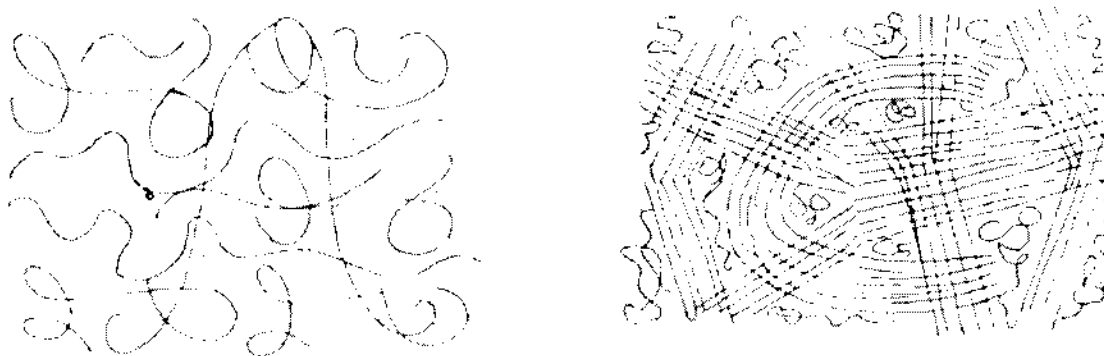
Hình 1.17. Phân tử polyethylen terephthalat.

b) Cấu trúc vô định hình và bán tinh thể

Sự mềm dẻo của các phân tử polime cho phép nhiều kiểu tổ chức khác nhau không có tính qui luật cao như đối với các tinh thể kim loại.

Trong cấu trúc vô định hình, các xích chồng chất lên nhau một cách ngẫu nhiên ở qui mô một tập hợp phân tử, nhưng với một trật tự nhất định nào đó ở qui mô nhỏ hơn (hình 1.18). Ở mức vĩ mô, vật liệu vô định hình có tính đẳng hướng và thường trong suốt (ví dụ : thủy tinh plexi, polystyren).

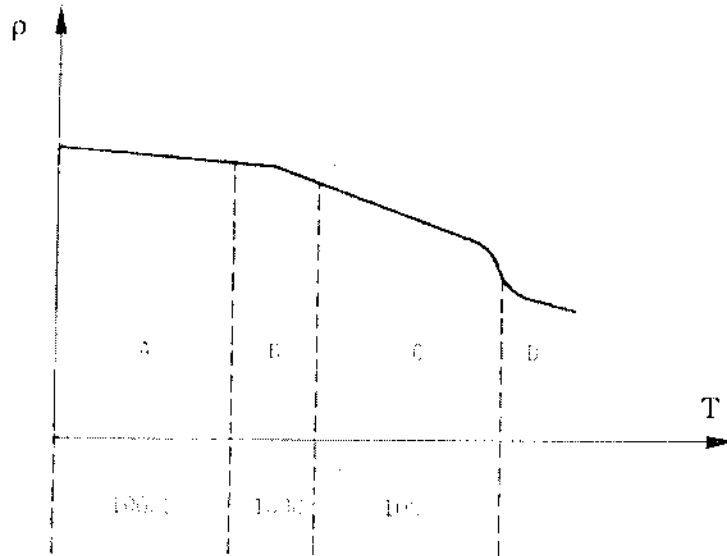
Trong quá trình polime hoá, dưới tác động của các điều kiện cơ - nhiệt nhất định, các phân tử có cấu trúc xích dài của một số polime có xu hướng phân bố theo từng "tập" để tạo thành các mầm tinh, phân cách nhau bởi các miền vô định hình. Các "lát" mầm tinh thể này tạo thành một siêu cấu trúc với kích cỡ mạng trung bình khoảng $1\mu\text{m}$ (hình 1.18), có độ bền cao hơn so với miền vô định hình và cũng chứa các khuyết tật mạng. Các polime kết tinh một phần như trên thường có màu trong đục (ví dụ : nylon, polythen).



Hình 1.18. Sơ đồ cấu trúc vô định hình (a) và bán tinh thể (b) của polime.

c) Các loại polime khác nhau

Phụ thuộc vào nhiệt độ, một polime có thể biểu hiện 4 trạng thái khác nhau. Mỗi trạng thái tương ứng với một mức độ gia tăng thể tích tự do giữa các phân tử và một mức độ thuyên giảm lực liên kết nhất định. Ta có thể nhận biết các trạng thái trên theo biểu đồ mô tả, ví dụ, sự biến đổi theo nhiệt độ của mật độ ρ hay của modun đàn hồi E chẳng hạn (hình 1.19).



Hình 1.19. Các trạng thái của polime.

Trạng thái thủy tinh (A)

Thủy tinh hữu cơ chỉ có chịu được biến dạng rất nhỏ.

Trạng thái chuyển tiếp (B)

Ta có thể gặp trong thực tế một số polime có thuộc tính nhiệt dẻo tuyến tính (xeluloza, polyamit, polyeste, polyvinyl) và một số polime mạch mạng có quá trình phân huỷ hoá học xảy ra trước khi hoá lỏng (phenoplast, aminoplast).

Trạng thái cao su (C)

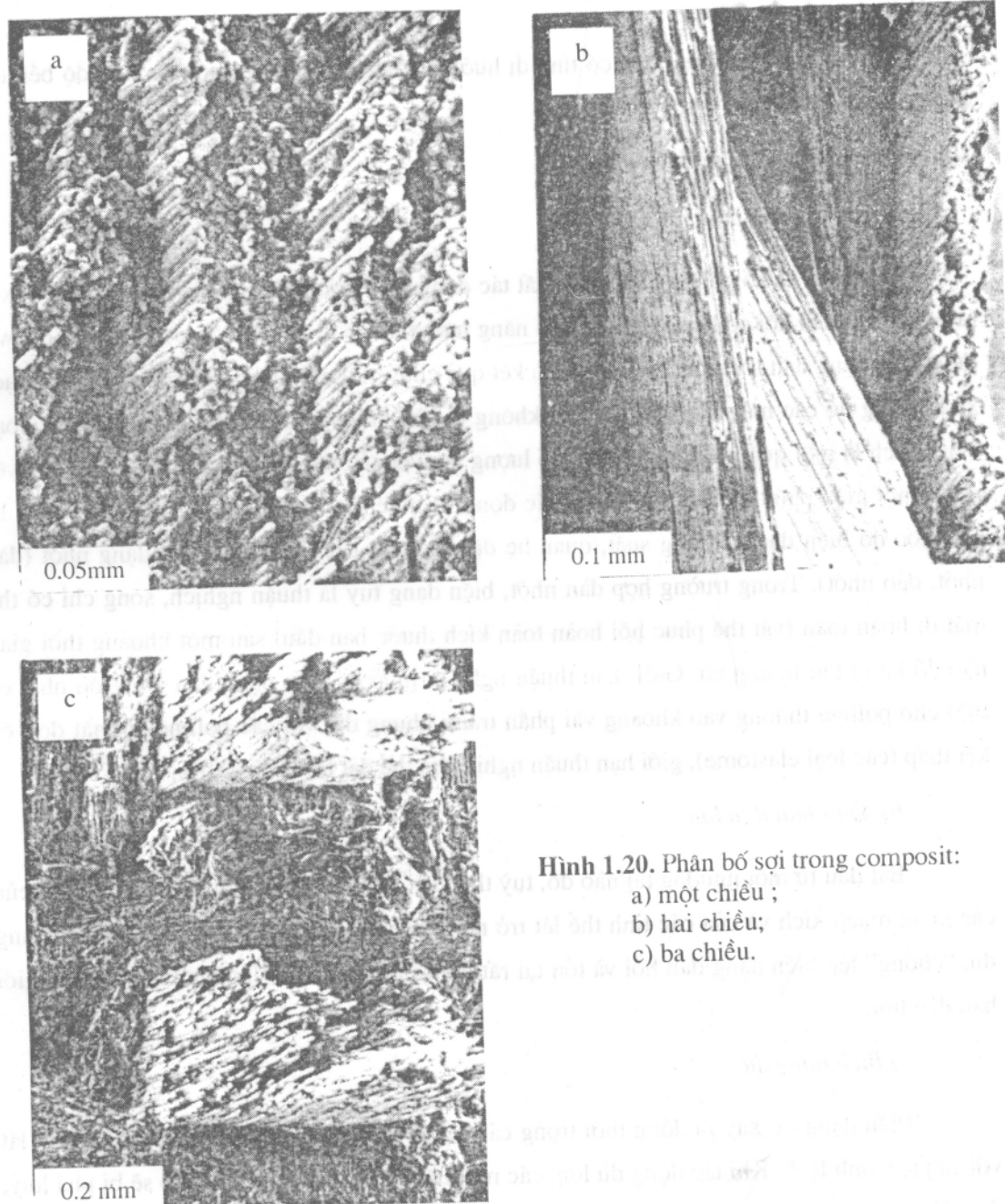
Các loại nhựa đàn hồi (elastome) được tạo thành từ các phân tử rất dài, liên kết với nhau tại một số điểm tương đối thưa.

Trạng thái lỏng (D)

d) Composit sợi – chất dẻo

Liên kết giữa các sợi nhúng trong chất dẻo cho ta vật liệu composit có độ bền riêng có thể cao hơn độ bền riêng của một số vật liệu truyền thống. Các loại sợi dùng phổ biến là sợi thủy tinh, sợi cacbon, sợi bo, sợi kevlar. Đường kính của sợi có thể biến đổi từ vài phần trăm đến vài phần chục milimet. Chất dẻo thường dùng làm vật liệu dính kết là epoxy. Vùng

ranh giới sợi-nền chính là vùng yếu nhất xét về mặt biến dạng và phá huỷ. Tùy theo kiểu phân bố, tỷ lệ thể tích của sợi trong composit dao động trong khoảng $(50 \div 70)\%$. Các kiểu phân bố sợi có thể là (xem hình 1.20):



Hình 1.20. Phân bố sợi trong composit:

- a) một chiều ;
- b) hai chiều;
- c) ba chiều.

Một chiều: composit được tạo thành từ các sợi liên kết song song (hình 1.20 a);

Hai chiều: xếp chồng các lớp sợi một chiều theo phương vuông góc với nhau hoặc dán chồng các lớp vải dệt vuông góc thấm dẫm chất dẻo (hình 1.20 b).

Ba chiều : sợi được phân bố trong nền nhựa theo ba hướng vuông góc với nhau (hình 1.20 c).

Tất cả các composit đều có tính dị hướng mạnh. Độ bền của sợi lớn hơn độ bền của nền nhựa khoảng từ 50 đến 100 lần.

1.2.1.2. Cơ chế vật lý của biến dạng

a) Biến dạng đàn hồi nhớt

Đối với đa số polime, khi ứng suất tác động thấp hơn một ngưỡng nào đó, sẽ chỉ xảy ra biến dạng đàn hồi có kèm theo tổn hao năng lượng, được lý giải bởi thuộc tính nhớt của vật liệu. Biến dạng đàn hồi nhớt (đàn nhớt) là kết quả chuyển động tương đối của các đoạn mạch xích, trong đó các mối liên kết hầu như không bị phá huỷ và quá trình sắp xếp lại các đoạn mạch xích là một quá trình nhiệt hoạt. Số lượng nguyên tử có thể thực hiện bước dịch chuyển trong một giây phụ thuộc vào ứng suất tác động và nhiệt độ. Do vậy, sẽ tồn tại mối quan hệ giữa tốc độ biến dạng và ứng suất, quan hệ đặc thù cho các quá trình biến dạng nhớt (đàn nhớt, dẻo nhớt). Trong trường hợp đàn nhớt, biến dạng tuy là thuận nghịch, song chỉ có thể mất đi hoàn toàn (vật thể phục hồi hoàn toàn kích thước ban đầu) sau một khoảng thời gian nào đó kể từ khi ngừng tải. Giới hạn thuận nghịch (mức độ biến dạng đàn nhớt lớn nhất có thể) cho polime thường vào khoảng vài phần trăm, nhưng đối với các polime có mật độ liên kết thấp (các loại elastome), giới hạn thuận nghịch có thể đạt tới (50+100)%.

b) Giới hạn đàn hồi

Bắt đầu từ một ngưỡng tải nào đó, tùy theo vật liệu, sự định hướng và sắp xếp lại của các đoạn mạch xích và của các tinh thể lát trở nên không thuận nghịch, xuất hiện biến dạng dư, “chồng” lên biến dạng đàn hồi và tồn tại rất lâu sau khi dỡ tải. Ngưỡng tải đó gọi là giới hạn đàn hồi.

c) Biến dạng dư

Biến dạng dư xảy ra đồng thời trong các miền vô định hình và trong các tinh thể lát với sự phát sinh lệch. Khi tác động đủ lớn, các mối liên kết có năng lượng thấp sẽ bị phá huỷ, dẫn đến sự phá huỷ các phân cấu trúc. Trong khi đó, các mối liên kết mới cũng đồng thời được tạo thành từ các phân tử có hoạt tính cao khi chúng tiến lại gần nhau.

Sự định hướng lại của các đoạn mạch xích tạo điều kiện thuận lợi cho sự hình thành các mầm tinh mới, có vai trò gia cường. Như vậy, tồn tại quá trình hoá bền theo thời gian với cân bằng dẻo tiệm cận, trong điều kiện ứng suất tác động không đổi (chảy dẻo với đặc điểm logarit).

Khi mất độ mầm tinh ổn định, có thể xảy ra biến dạng chảy dẻo ở ứng suất không đổi.

Cuối cùng, cũng như đối với kim loại, biến dạng dẻo lớn sẽ dẫn đến tính dị hướng của vật liệu, gây nên bởi quá trình hoá bền định hướng.

Tất cả các cơ chế biến dạng nêu trên chỉ xảy ra trong miền biến dạng rất lớn (từ vài chục đến vài trăm phần trăm).

1.2.2. Vật liệu hạt : bê tông

1.2.2.1. Cấu tạo của bê tông

Bê tông xây dựng được cấu tạo từ sỏi, cát, xi măng và nước. Sỏi và cát tự nhiên được tạo ra từ trầm tích bồi hay từ các loại đá nghiền khác nhau. Để đánh giá kích thước sỏi và cát, người ta đưa ra đường cong đặc trưng cho phép xác định tỷ lệ (%) hạt có kích thước nhỏ hơn một giá trị nào đó.

Để tạo vữa, người ta chỉ dùng cát với kích thước hạt nhỏ hơn 5 mm. Để tạo bê tông, người ta dùng sỏi nhỏ với kích thước đến 25mm. Trong một số trường hợp đặc biệt như xây dựng đập, người ta sử dụng đá cuội (kích thước đến 100 mm) và đá xây (kích thước đến 160 mm và hơn).

Kích cỡ lớn nhất d của sỏi sử dụng chế tạo bê tông phụ thuộc vào kích thước đặc trưng của công trình. Nếu h là kích thước nhỏ nhất của công trình và e là khoảng cách giữa hai thanh cốt thép bê tông ta có :

$$d \leq \frac{h}{4} \quad \text{hay} \quad d \leq \frac{3}{4}e$$

Xi măng Portland tạo thành từ silicat tricanxic ($\approx 60\%$), silicat bicanxic ($\approx 20\%$), thạch cao ($\approx 3\%$), aluminat tricanxic ($\approx 10\%$), và aluminoforit tetracanic ($\approx 7\%$). Bột xi măng có kích thước hạt cỡ từ 10 đến 50 μm .

Hỗn hợp 66% bột xi măng và 33% nước tạo thành một dạng bột nhão, đông cứng dần theo thời gian và trở thành một dạng đá nhân tạo. Khi gặp nước, các thành phần khan

(anhydre) trong bột xi măng bắt đầu hoà tan cho đến khi bão hoà và tạo thành các hydrat, kết tủa bao bọc xung quanh các hạt anhydre. Các tinh thể được tạo thành là các hydrat silicat canxi, hydroxit canxi và các loại aluminat khác nhau. Hỗn hợp xi măng và nước tồn tại dưới dạng bột nhão trong vài giờ, sau đó đông cứng do sự tạo thành các tinh thể tobermorit và portlandit xuất xứ từ silicat. Sự ngậm nước của bột xi măng sẽ kéo theo các hiện tượng sau :

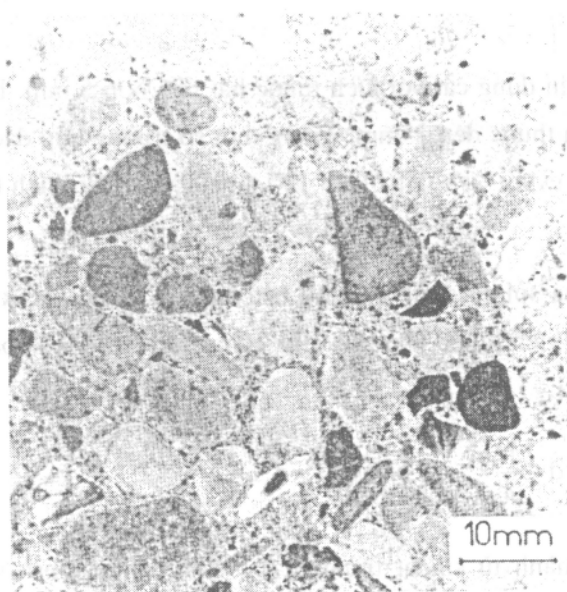
Diện tích bề mặt riêng của các hạt có thể tăng đến 100 lần;

Co ngót khoảng 0,3 mm/m;

Toả nhiệt (khoảng 100 calo/g xi măng);

Đông cứng theo thời gian : trở kháng phá huỷ nén qui chuẩn về 1 (sau 7 ngày đông cứng) biến đổi như sau : 0,35 sau ngày thứ 2 ; 1,5 sau 28 ngày ; 1,8 sau một năm và 2,2 sau mười năm.

Trên hình 1.21 trình bày ảnh cấu trúc của bê tông sau khi đông cứng. Sỏi có kích cỡ khác nhau liên kết chặt với nền xi măng. Các khuyết tật liên kết giữa nền và sỏi biểu hiện qua các vết nứt tế vi được tạo thành do co ngót hoặc do các bọt khí bị giam giữ trong bê tông khi đúc.



Hình 1.21. Cấu trúc của bê tông.

1.2.2.2. Cơ chế vật lý của biến dạng và phá huỷ

Đối với bê tông, khó có thể phân tách giữa biến dạng và phá huỷ, bởi lẽ ở trạng thái không chịu tải, trong bê tông đã tồn tại các vết nứt tế vi. Khi có tải, các vết nứt này sẽ phát triển theo cơ chế phá huỷ, tạo nên biến dạng dư.

Dưới một ngưỡng tải nhất định nào đó, hiện tượng nêu trên xảy ra không đáng kể. Biến dạng trong giai đoạn đầu tiên này là kết quả của chuyển động gần như thuận nghịch của các nguyên tử và có thể được xem như biến dạng đàn hồi với độ nhớt nhỏ.

Phá huỷ dòn với sự tách liên kết giữa nền và sỏi chính là hiện tượng biến dạng dư và phá huỷ của bê tông trong giai đoạn hai. Quá trình này chịu ảnh hưởng đáng kể của trạng thái ứng suất (hay bản chất của tải). Giới hạn đàn hồi (hay trở kháng phá huỷ) của bê tông khi nén lớn hơn khi kéo khoảng 12 lần, do vậy bê tông chủ yếu được sử dụng trong trường hợp chịu tải nén. Khi tải vượt quá giới hạn đàn hồi, các vết nứt tế vi tại liên kết giữa nền và sỏi có kích cỡ lớn nhất bắt đầu phát triển theo chu vi của sỏi, dẫn đến biến dạng dư “chồng” lên biến dạng đàn hồi, xét trên phương diện vĩ mô.

Trong giai đoạn ba, khi tải tiếp tục gia tăng cao hơn, các vết nứt tế vi sẽ lan truyền sang nền và có xu hướng tiến tới phân bố song song với ứng suất tác động (trong trường hợp nén). Sự trượt bắt đầu xuất hiện trong các tinh thể sỏi, góp phần làm gia tăng biến dạng dư xảy ra trong điều kiện thể tích không đổi.

Giai đoạn thứ tư là giai đoạn phá huỷ. Các vết nứt vĩ mô bắt đầu xuất hiện, ứng suất cần thiết để tiếp tục gia tăng biến dạng giảm đi, thể tích riêng của bê tông cũng gia tăng. Sự phá huỷ hoàn toàn xảy ra khi các vết nứt vĩ mô liên thông với nhau, tạo ra mặt phân cách phát triển xuyên suốt tiết diện vật thể.

CHƯƠNG 2

CÁC KHÁI NIỆM CƠ SỞ VỀ CƠ HỌC VÀ NHIỆT ĐỘNG HỌC CỦA MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC

Để mô hình hoá các hiện tượng vật lý xảy ra trong quá trình biến dạng vật rắn, cần phải có một phương pháp dựa trên các nguyên lý tổng quát, điều khiển các biến đặc trưng cho trạng thái của môi trường vật chất. Chương này trình bày một cách khái quát các khái niệm cơ sở về cơ học và nhiệt động học của môi trường liên tục, cần thiết cho việc thiết lập các mô hình thuộc tính của vật liệu và mô hình hoá các quá trình biến dạng trong thực tế.

2.1. NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO

2.1.1. Chuyển động ảo và công suất ảo

Để xét các lực cơ học tham gia vào các hiện tượng cần nghiên cứu, ta tưởng tượng các chuyển động ảo của môi trường dưới tác dụng của lực và phân tích công hay công suất do các lực tác động sinh ra.

Ví dụ :

- Để nghiên cứu trọng lực tác dụng lên một chiếc ôtô, ta có thể nâng tưởng tượng nó khỏi mặt đường theo phương thẳng đứng (chuyển vị ảo từ dưới lên trên).

- Để nghiên cứu lực ma sát trượt tác dụng lên ôtô trên đường, ta tưởng tượng kéo nó với các bánh xe được phanh chết (chuyển động ảo theo phương ngang).

-

Một cách tổng quát, tại một thời điểm cho trước, chuyển động ảo của một môi trường vật chất được xác định bởi một trường vectơ vận tốc phụ thuộc vào chất điểm (M): $\vec{v}(M)$. Chính bằng sự chọn trường vectơ $\vec{v}(M)$ mà ta có thể định được mức độ chi tiết khi nghiên cứu các hiện tượng cơ học.

Công suất ảo của một hệ lực đối với chuyển động ảo cho trước là một hàm tuyến tính, liên tục và vô hướng của $\vec{v}(M) : \hat{P}[\vec{v}(M)]$.

2.1.2. Hệ tọa độ qui chiếu và đạo hàm vật chất

Chuyển động của một chất điểm có thể được mô tả, hoặc thông qua các biến Oler, hoặc thông qua các biến Lagrange.

- Các biến Oler là thời gian t và tọa độ của chất điểm M ở thời điểm t , hay nói một cách khác là vị trí của chất điểm trong hình thái hiện thời. Tốc độ của chất điểm được biểu diễn bởi :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}[x_1(t), x_2(t), x_3(t), t] .$$

- Mô tả Lagrange sử dụng các biến là thời gian t và tọa độ vị trí ban đầu của chất điểm M : X_1, X_2, X_3 (vị trí của chất điểm trong hình thái ban đầu). Tốc độ của chất điểm được biểu diễn bởi :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(X_1, X_2, X_3, t).$$

Trong mô tả Lagrange, đạo hàm toàn phần của một đại lượng bất kỳ theo thời gian cũng chính bằng đạo hàm riêng của nó theo thời gian, vì các tọa độ ban đầu của chất điểm M (còn gọi là tọa độ vật chất) không phụ thuộc vào t :

$$\bar{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} .$$

Ngược lại, trong mô tả Oler, đạo hàm toàn phần và đạo hàm riêng theo thời gian không bằng nhau, bởi lẽ tọa độ hiện thời của chất điểm M (tọa độ không gian) phụ thuộc vào t , ta có:

$$\bar{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) ,$$

hay viết dưới dạng chỉ số :

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j} v_j .$$

Đạo hàm toàn phần theo thời gian, trong mô tả Oler, còn gọi là đạo hàm vật chất. Nguyên tắc lấy đạo hàm vật chất nêu trên áp dụng cho mọi đại lượng vô hướng, vector và tenxơ :

$$\frac{d(*)}{dt} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + \frac{\partial(*)}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \frac{\partial(*)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} (*) .$$

2.1.3. Nguyên lý công suất ảo

Đối với một môi trường vật chất cách biệt cho trước, ta có thể phân biệt các ngoại lực tác dụng lên nó và các nội lực, thể hiện mối liên kết giữa các thành phần cấu thành môi trường.

Tiên đề về tính khách quan :

Công suất ảo của ngoại lực cho mọi chuyển động "cứng" của môi trường vật chất (chuyển động của vật rắn tuyệt đối) bằng 0.

Tiên đề cân bằng (tĩnh hoặc động) :

Đối với mọi môi trường vật chất, xác định trong một hệ qui chiếu tuyệt đối, tại mỗi thời điểm và cho mọi chuyển động ảo, công suất ảo động lượng, $\hat{P}_{(a)}$, bằng tổng công suất ảo của nội lực, $\hat{P}_{(i)}$, và ngoại lực, $\hat{P}_{(x)}$

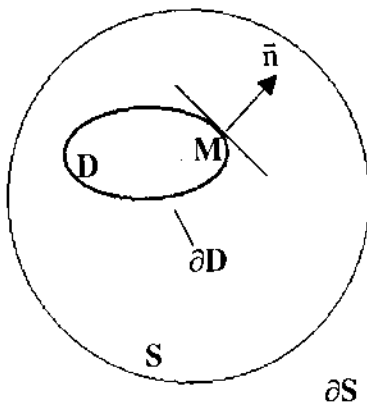
$$\hat{P}_{(i)} + \hat{P}_{(x)} = \hat{P}_{(a)} .$$

Hai định đề nêu trên tạo nên định luật cơ bản của động học môi trường liên tục.

2.2. PHƯƠNG PHÁP CÔNG ẢO

2.2.1. Công suất ảo

2.2.1.1. Chọn chuyển động ảo - Lý thuyết gradient bậc một



Hình 2.1. Môi trường vật chất cách biệt.

Trong hệ qui chiếu trục chuẩn (O, x_1, x_2, x_3) , xét miền D, bao bởi biên ∂D , nằm trong thể tích S với biên ∂S , $\vec{n}$ là pháp tuyến tại điểm M trên biên ∂D (hình 2.1). Việc áp dụng nguyên lý công ảo cho miền D sẽ trực tiếp dẫn đến các phương trình của cơ học môi trường liên tục.

Trước hết ta cần xác định không gian vận tốc ảo. Nếu bỏ qua các môi trường phân cực (không tính đến vi xoay), ta chỉ cần xét trường vector vận

tốc ảo $\vec{v}(M)$. Tiếp theo, ta cần chọn các thành phần xác định chuyển động ảo, tức là các

thành phần tham gia sinh công. Nếu chỉ xét thành phần chứa $\vec{v}(M)$ thì chưa đủ để mô tả ứng xử cơ học của vật thể có độ cứng nhất định. Ý tưởng đơn giản nhất là đưa thêm vào trường gradient vận tốc $\text{grad}\vec{v}$ (hay $\hat{v}_{i,j}$). Trong lý thuyết gradient bậc một, chuyển động ảo được đặc trưng bởi $\vec{v}(M)$ và $\text{grad}\vec{v}$. Phân tích $\text{grad}\vec{v}$ thành hai thành phần đối xứng và không đối xứng ta nhận được hai tenxơ bậc hai tương ứng là tỷ suất biến dạng $\underline{\hat{D}}$ và tỷ suất xoay $\underline{\hat{W}}$

$$\text{grad}\vec{v} = \frac{1}{2} \left[\text{grad}\vec{v} + (\text{grad}\vec{v})^T \right] + \frac{1}{2} \left[\text{grad}\vec{v} - (\text{grad}\vec{v})^T \right]$$

$$\underline{\hat{D}} = \frac{1}{2} \left[\text{grad}\vec{v} + (\text{grad}\vec{v})^T \right],$$

$$\underline{\hat{W}} = \frac{1}{2} \left[\text{grad}\vec{v} - (\text{grad}\vec{v})^T \right],$$

trong đó $(*)^T$ là ký hiệu chuyển vị. Dưới dạng chỉ số ta có thể viết :

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{v}_{i,j} + \hat{v}_{j,i}),$$

$$\hat{W}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{v}_{i,j} - \hat{v}_{j,i}).$$

2.2.1.2. Công suất ảo của nội lực

Giả thiết công suất ảo của nội lực được xác định bởi tích phân trên toàn bộ miền D của mật độ công suất gồm ba thành phần chứa $\vec{v}, \underline{\hat{D}}$ và $\underline{\hat{W}}$, liên kết tương ứng với vectơ $\vec{f}^*$ và hai tenxơ bậc hai, $\underline{\sigma}$ đối xứng và $\underline{\Gamma}$ phản đối xứng :

$$\hat{P}_{(i)} = - \int_D (\vec{f}^* \cdot \vec{v} + \underline{\sigma} : \underline{\hat{D}} + \underline{\Gamma} : \underline{\hat{W}}) dV,$$

với dấu (:) biểu thị phép nhân vô hướng hai tenxơ. Dấu trừ trước ký hiệu tích phân theo qui ước, sẽ được áp dụng tiếp theo đây trong nhiệt động học.

Tiên đề thứ nhất của nguyên lý công ảo bắt buộc, đối mọi chuyển động tịnh tiến ($\vec{v} \neq 0, \underline{\hat{D}} = 0, \underline{\hat{W}} = 0$) và chuyển động xoay ($\vec{v} = 0, \underline{\hat{D}} = 0, \underline{\hat{W}} \neq 0$) của vật rắn, công suất bằng 0.

Theo bổ đề cơ bản của vật lý môi trường liên tục : đối với mọi hàm $f(M)$ xác định và liên tục trong miền D :

$$\int_D f(M) dV = 0 \quad \forall D \quad \text{trong } S \Rightarrow f(M) = 0 \quad \text{trong } D,$$

điều đó dẫn đến $\vec{f}^* \cdot \vec{v} = 0$ và $\underline{\Gamma} : \underline{\dot{W}} = 0$ với mọi $\vec{v}$ và $\underline{\dot{W}}$. Từ đó :

$$\vec{f}^* = 0, \quad \underline{\Gamma} = 0,$$

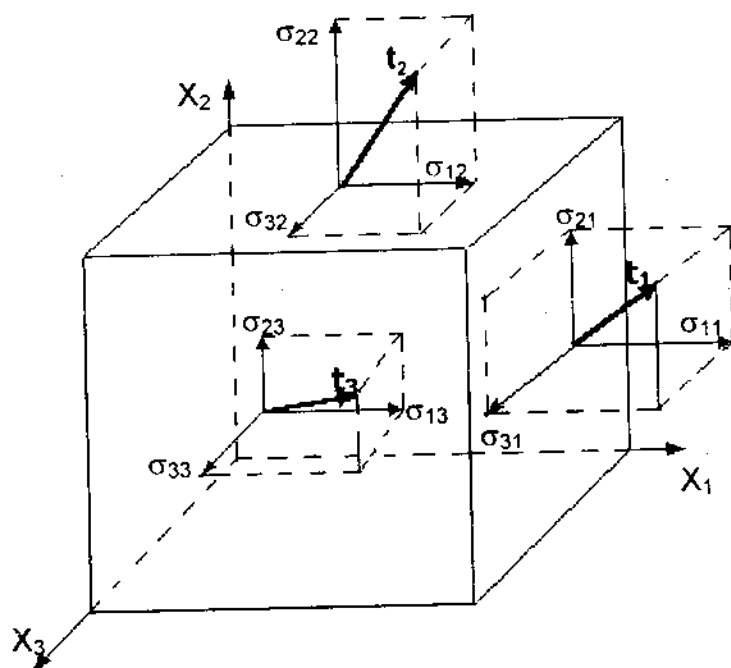
và

$$\hat{P}_{(i)} = - \int_D \underline{\sigma} : \underline{\dot{D}} dV.$$

Ta thấy rằng, tenxơ ứng suất $\underline{\sigma}$ nêu trên là tenxơ Cauchy (tác động trên hình thái hiện thời).

Tiền đề thứ nhất của nguyên lý công ảo và việc chọn chuyển động ảo trong lý thuyết gradient bậc một, tương đương với giả thiết thường được chấp nhận đối với tenxơ ứng suất. Giả thiết đó cho rằng, các nội lực có thể được biểu thị bởi mật độ diện tích của lực liên kết $\vec{t}$ (lực tác dụng ở khoảng cách rất ngắn). Chính trên cơ sở giả thiết này, ta xác định vectơ ứng suất phụ thuộc vào chất điểm M, thời gian t, và phụ thuộc tuyến tính vào pháp tuyến $\vec{n}$ tại M trên ∂D :

$$\vec{t}(M, t, \vec{n}).$$



Hình 2.2. Các thành phần của vectơ ứng suất và của ma trận đặc trưng của tenxơ ứng suất.

Tenxơ ứng suất được suy ra từ quan hệ (biểu thức Nanson):

$$\vec{t}(M, t, \vec{n}) = \underline{\sigma}(M, t) \vec{n} \quad ,$$

hay viết dưới dạng chỉ số :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad .$$

Các thành phần của tenxơ ứng suất được sơ đồ hoá trên hình 2.2. Trên mỗi mặt, vectơ ứng suất được phân tích thành một thành phần ứng suất pháp và hai thành phần ứng suất tiếp .

2.2.1.3. Công suất ảo của ngoại lực

Ngoại lực bao gồm :

- Lực tác dụng từ xa bởi các hệ bên ngoài miền S , xác định bởi mật độ lực thể tích $\vec{f}$.
- Lực tiếp xúc, xác định bởi mật độ lực bề mặt $\vec{t}$ (định đề Cauchy).

$$\hat{P}_{(x)} = \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial D} \vec{t} \cdot \vec{v} dS \quad .$$

2.2.1.4. Công suất ảo động lượng

Nếu $\vec{\gamma}$ là vectơ gia tốc tại mỗi điểm M và ρ khối lượng riêng của vật liệu, công suất ảo động lượng xác định như sau :

$$\hat{P}_{(x)} = \int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \rho dV$$

2.2.2. Phương trình cân bằng

Áp dụng tiên đề cân bằng của nguyên lý công ảo cho miền D , ta có phương trình cân bằng sau :

$$- \int_D \underline{\sigma} : \hat{D} dV + \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial D} \vec{t} \cdot \vec{v} dS = \int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \rho dV$$

hay

$$- \int_D \sigma_{ij} \hat{D}_{ij} dV + \int_D f_i \cdot \hat{v}_i dV + \int_{\partial D} t_i \cdot \hat{v}_i dS = \int_D \gamma_i \cdot \hat{v}_i \rho dV \quad .$$

Áp dụng định lý phân kỳ (hay tích phân từng phần) cho số hạng thứ nhất của vế trái, ta có :

$$\begin{aligned} - \int_D \underline{\sigma} : \hat{D} dV &= - \int_D \underline{\sigma} : \text{grad} \vec{v} dV \\ &= \int_{\partial D} \underline{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_D \text{div} \underline{\sigma} \vec{v} dV \end{aligned}$$

$\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài trên biên ∂D của miền D . Phương trình cân bằng trở thành :

$$- \int_{\partial D} \underline{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_D \text{div} \underline{\sigma} \vec{v} dV + \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial D} \vec{t} \cdot \vec{v} dS = \int_D \vec{\gamma} \cdot \vec{v} \rho dV$$

hay

$$\int_D (\text{div} \underline{\sigma} + \vec{f} - \vec{\gamma} \rho) \vec{v} dV + \int_{\partial D} (\vec{t} - \underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = 0 \quad \forall \vec{v}.$$

Trong miền D , biểu thức trên chỉ đúng với mọi $\vec{v}$ khi :

$$\text{div} \underline{\sigma} + \vec{f} - \vec{\gamma} \rho = 0 \quad \text{hay} \quad \sigma_{ij,j} + f_i - \gamma_i \rho = 0$$

và

$$\vec{t} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n} \quad \text{hay} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j.$$

Biểu thức thứ nhất chính là điều kiện cân bằng tĩnh hay cân bằng động cục bộ. Biểu thức thứ hai xác định ý nghĩa vectơ ứng suất của mật độ lực bề mặt. Nó cho ta thấy $\underline{\sigma}$ là tenxơ ứng suất Cauchy (bậc hai và đối xứng), đồng thời cũng xác định điều kiện biên ngoại lực nếu ta áp dụng tiên đề cân bằng công suất ảo cho toàn bộ miền S .

2.2.3. Chuyển vị và biến dạng

Phương pháp công ảo đã đưa vào các biến động học là tốc độ chuyển vị $\vec{v}$ và tỷ suất biến dạng $\underline{D}$, xác định tại mỗi thời điểm t . Ngoài việc mô tả chuyển động, để nghiên cứu môi trường rắn biến dạng, cần phải xét trạng thái hiện thời của vật thể trong mối tương quan với một hình thái qui chiếu chọn trước, có thể là hình thái ban đầu hoặc một hình thái nối (khi hiện tượng đàn hồi và phi đàn hồi xảy ra đồng thời). Như vậy, cần phải đưa vào vectơ chuyển vị và tenxơ biến dạng.

2.2.3.1. Giả thiết chuyển vị nhỏ và biến dạng nhỏ

Trong trường hợp chuyển đổi cực nhỏ, ta có thể coi biến Ole trùng với biến Lagrange ($\bar{x} \equiv \bar{X}$).

Cho $\underline{\dot{u}}$ là vectơ chuyển vị được xác định bởi :

$$\underline{\dot{u}} = \int_0^t \underline{\dot{v}} dt \quad \text{hay} \quad \underline{\dot{v}} = \underline{\dot{u}} ,$$

$t = 0$ tương ứng hình thái qui chiếu.

Cho $\underline{\varepsilon}$ là tenxơ biến dạng được xác định bởi :

$$\underline{\varepsilon} = \int_0^t \underline{D} dt \quad \text{hay} \quad \underline{D} = \dot{\underline{\varepsilon}} .$$

Từ định nghĩa tenxơ $\underline{D}$ ta có thể viết :

$$\underline{\varepsilon} = \int_0^t \frac{1}{2} [\text{grad} \underline{\dot{v}} + (\text{grad} \underline{\dot{v}})^T] dt .$$

Giả thiết biến dạng nhỏ dẫn đến sự tương đương giữa biến Oie và biến Lagrange, đạo hàm toàn phần bằng đạo hàm riêng, và ta có thể tráo chỗ toán tử gradient và tích phân :

$$\int_0^t \text{grad} \underline{\dot{v}} dt = \text{grad} \left(\int_0^t \underline{\dot{v}} dt \right) = \text{grad} \underline{\dot{u}} ,$$

từ đó :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad} \underline{\dot{u}} + (\text{grad} \underline{\dot{u}})^T] .$$

Như vậy, biến dạng $\underline{\varepsilon}$ xác định từ $\underline{D}$ là phần đối xứng của gradient chuyển vị $\underline{\dot{u}}$, xác định từ tốc độ $\underline{\dot{v}}$.

Các phương trình của cơ học môi trường liên tục trong chuyển vị nhỏ và biến dạng nhỏ có thể tóm tắt như sau :

$$\begin{aligned} \text{div} \underline{\sigma} + \underline{\vec{f}} &= \rho \underline{\vec{\gamma}} & \text{hay} & \quad \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \\ \underline{\varepsilon} &= \frac{1}{2} [\text{grad} \underline{\dot{u}} + (\text{grad} \underline{\dot{u}})^T] & \text{hay} & \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned}$$

Để giải một bài toán trong cơ học vật rắn biến dạng, ta cần phải thêm :

- Điều kiện biên ứng suất $\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\vec{t}}^*$ trên biên ∂S_σ , điều kiện biên chuyển vị $\underline{\dot{u}} = \underline{\vec{u}}^*$ trên biên ∂S_u ,

- Định luật thuộc tính (ứng xử), thể hiện tính chất vật lý của môi trường thông qua mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng.

2.2.3.2. Giả thiết chuyển vị lớn và biến dạng lớn

Giả sử M là một chất điểm của môi trường trong hình thái hiện thời tại thời điểm t , xác định so với hình thái ban đầu của nó là M_0 ở thời điểm t_0 thông qua các biến Lagrange (biến vật chất) X_1, X_2, X_3 (hình 2.3).

$$M = M(M_0, t_0, t).$$

Giả sử $\mathfrak{R}$ là chuyển đổi cho phép chuyển từ M_0 đến M đối với vectơ $\bar{x}$

$$\bar{x}(M) = \mathfrak{R}[\bar{x}(M_0), t_0, t] \quad (\bar{x} = \bar{x}(\bar{X}, t)).$$

Biến dạng có thể xác định từ chuyển đổi tuyến tính tiếp tuyến, biểu diễn chuyển đổi trong lân cận điểm M_0 và M

$$d\bar{x} = \underline{F}.d\bar{x}(M_0) \quad (d\bar{x} = \underline{F}.d\bar{X}),$$

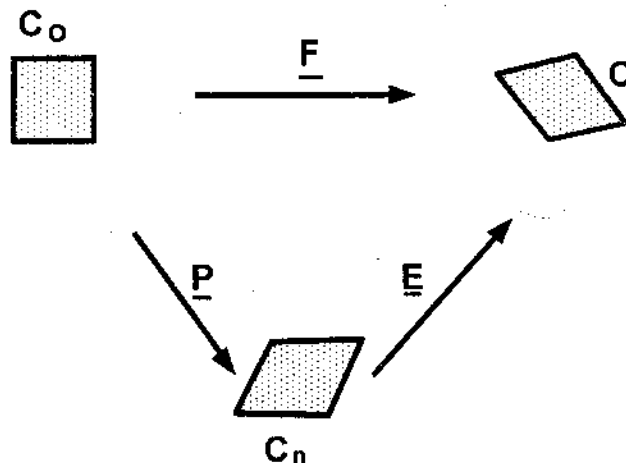
trong đó, $\underline{F}$ là gradient của $\mathfrak{R}$ (hay gradient biến dạng):

$$\underline{F} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \bar{x}(M_0)} \quad \left(\underline{F} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{X}} \right).$$

Nếu trạng thái qui chuẩn được chọn tại điểm M , biến dạng sẽ được đặc trưng bởi tenxơ biến dạng Almansi-Ole. Nếu ta chọn trạng thái qui chuẩn tại M_0 , tenxơ biến dạng sẽ là tenxơ Green-Lagrange $\underline{\Delta}$, xác định bởi :

$$\underline{\Delta} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I}),$$

trong đó $\underline{I}$ là tenxơ đơn vị bậc 2.



Hình 2.3. Hình thái ban đầu, hiện thời và nối trong biến dạng lớn.

Trong biến dạng lớn, cần lưu ý khi viết các định luật thuộc tính đàn-dẻo (hay đàn-dẻo nhất) của vật liệu có liên quan đến việc phân chia biến dạng tổng thành biến dạng đàn hồi (thuận nghịch) và biến dạng phi đàn hồi (không thuận nghịch). Nguyên tắc phân chia biến dạng trong biến dạng nhỏ $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$ không còn đúng cho biến dạng lớn. Trên hình 2.3 trình bày sơ đồ phân chia chuyển đổi $\underline{F}$ thành chuyển đổi phi đàn hồi $\underline{P}$ (giữa hình thái ban đầu C_0 và hình thái nối trung gian C_n , trong trường hợp giữa hai hình thái này không tồn tại chuyển đổi đàn hồi do ứng suất dư gây nên) và chuyển đổi đàn hồi $\underline{E}$ (giữa hình thái nối trung gian và hình thái hiện thời C) :

$$\underline{F} = \underline{E}\underline{P} .$$

Tỷ suất biến dạng được xác định trong hình thái hiện thời bởi

$$\underline{D} = \frac{1}{2} \left[\text{grad} \underline{v} + (\text{grad} \underline{v})^T \right] ,$$

trong đó $\underline{v}$ là vectơ tốc độ chuyển vị của chất điểm, và có thể phân chia thành tổng của tenxơ tỷ suất biến dạng đàn hồi $\underline{D}^e$ và tenxơ tỷ suất biến dạng phi đàn hồi $\underline{D}^p$:

$$\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p .$$

Ngược lại, biến dạng toàn phần $\underline{\Delta}$ không thể phân chia một cách đơn giản thành tổng của biến dạng đàn hồi (xác định so với hình thái nối)

$$\underline{\Delta}^e = \frac{1}{2} (\underline{E}^T \underline{E} - 1)$$

và biến dạng phi đàn hồi (xác định so với hình thái ban đầu)

$$\underline{\Delta}^p = \frac{1}{2} (\underline{P}^T \underline{P} - 1) .$$

Để đơn giản cho việc trình bày và dễ dàng hiểu rõ bản chất của hiện tượng, giáo trình này không xét biến dạng lớn về phương diện hình học mà, chỉ đề cập đến các định luật và mô hình vật lý có thể mở rộng cho các trường hợp biến dạng lớn . Trong bảng 2.1 trình bày tóm tắt sự tương ứng tồn tại giữa các biến và các phương trình trong biến dạng nhỏ và biến dạng lớn, được mô tả thông qua tốc độ. Ta dễ dàng nhận thấy sự giống nhau đáng kể giữa cột thứ nhất và cột thứ hai. Một số đại lượng trong cột thứ nhất chính là đạo hàm theo thời gian của các đại lượng tương ứng trong cột thứ hai.

Bảng 2.1. Sự tương đương giữa các biến và phương trình trong các dạng mô tả khác nhau

Mô tả thông qua vận tốc	Mô tả trong biến dạng nhỏ	Mô tả trong biến dạng lớn
Biến Ole $M = M(\bar{x}, t)$	Biến Ole $\equiv$ Biến Lagrange	Biến Lagrange $M = M(M_o, t_o, t)$
Hình thái hiện thời	Hình thái hiện thời $\equiv$ Hình thái ban đầu	Hình thái ban đầu
Tốc độ $\bar{v}$	Chuyển vị $\bar{u}$	Chuyển đổi $\bar{x}(M) = \mathfrak{R}[\bar{x}(M_o), t_o, t]$
Gradient tốc độ grad $\bar{v}$	Gradient chuyển vị grad $\bar{u}$	Gradient chuyển đổi tuyến tính $\underline{F} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \bar{x}(M_o)}$
Tenxơ tỷ suất biến dạng $\underline{D} = \frac{1}{2} [\text{grad} \bar{v} + (\text{grad} \bar{v})^T]$	Tenxơ biến dạng $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad} \bar{u} + (\text{grad} \bar{u})^T]$	Tenxơ Green-Lagrange $\underline{\Delta} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I})$
Tenxơ tỷ suất biến dạng đàn hồi $\underline{D}^e$	Tenxơ biến dạng đàn hồi $\underline{\varepsilon}^e$	Chuyển đổi đàn hồi so với hình thái nối $\underline{E}$ Tenxơ biến dạng đàn hồi $\underline{\Delta}^e = \frac{1}{2} (\underline{E}^T \underline{E} - \underline{I})$
Tenxơ tỷ suất biến dạng phi đàn hồi $\underline{D}^p$	Tenxơ biến dạng phi đàn hồi $\underline{\varepsilon}^p$	Chuyển đổi phi đàn hồi $\underline{P}$ Tenxơ biến dạng phi đàn hồi $\underline{\Delta}^p = \frac{1}{2} (\underline{P}^T \underline{P} - \underline{I})$
Phân chia $\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p$	Phân chia $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$ $\underline{\dot{\varepsilon}} = \underline{D}, \underline{\dot{\varepsilon}}^e = \underline{D}^e, \underline{\dot{\varepsilon}}^p = \underline{D}^p$	Phân chia $\underline{F} = \underline{E} \underline{P}$ $(\underline{\Delta} \neq \underline{\Delta}^e + \underline{\Delta}^p)$ $\underline{\dot{\Delta}} \neq \underline{D}, \underline{\dot{\Delta}}^e \neq \underline{D}^e, \underline{\dot{\Delta}}^p \neq \underline{D}^p$
Tenxơ ứng suất Cauchy $\underline{\sigma}$	Tenxơ ứng suất Cauchy $\underline{\sigma}$	Tenxơ ứng suất Piola-Kirchhoff I $\underline{\Pi} = \det(\underline{F}) \underline{\sigma} (\underline{F}^T)^{-1}$ Tenxơ ứng suất Piola-Kirchhoff II $\underline{\Pi}^* = \underline{F}^{-1} \underline{\Pi}$

Ngoài ra, ta cũng thấy rằng, việc xử lý các bài toán biến dạng lớn đòi hỏi phải sử dụng các tenxơ ứng suất khác tenxơ ứng suất Cauchy (xác định trong hình thái hiện thời). Các phương trình chuyển động và cân bằng đã trình bày với các biến Ole, vẫn có nghĩa về mặt vật lý, tuy nhiên ta cần biểu diễn chúng với các biến Lagrange, đưa thêm vào khối lượng riêng ban đầu của vật liệu và tenxơ Piola-Kirchhoff II. Ngoài ra, ta cũng thấy rằng, việc xử lý

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}' &= \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} \quad \text{hay} \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ \underline{\varepsilon}' &= \underline{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{1} \quad \text{hay} \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Các tenxơ bậc hai có 3 bất biến cơ sở được biểu thị bởi 3 hàm vô hướng độc lập. Ba bất biến này, về mặt toán học, chính là các hệ số của phương trình đặc trưng :

$$\det(\underline{\sigma} - x \underline{1}) = 0,$$

hay các đại lượng vô hướng sau :

$$\begin{aligned}\text{I} &= \text{tr}(\underline{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ \text{II} &= \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\underline{\sigma}))^2 - \text{tr}(\underline{\sigma}^2) \right] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \\ &= \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 - \sigma_{12}^2 \\ \text{III} &= \det(\underline{\sigma}).\end{aligned}$$

Tuy nhiên, trong thực tế, người ta thường dùng các bất biến ứng suất sau :

$$\begin{aligned}\sigma_I &= \text{I} = \text{tr}(\underline{\sigma}) \\ \sigma_{II} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\sigma}^2) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \\ \sigma_{III} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}^3) = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta có các bất biến của tenxơ biến dạng :

$$\begin{aligned}\varepsilon_I &= \text{I} = \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \\ \varepsilon_{II} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\varepsilon}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{III} &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\varepsilon}^3) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}.\end{aligned}$$

Để thuận tiện cho việc viết các biểu thức của các định luật thuộc tính, người ta cũng thường sử dụng các bất biến đặc trưng cho các đại lượng vật lý cụ thể. Đó là các bất biến đồng nhất, xác định như sau :

- Cho ứng suất :
- Ứng suất thủy tĩnh

$$J_1(\underline{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_I = \sigma_m$$

- Ứng suất tương đương Von-Mises, σ_{eq}

$$J_2(\underline{\sigma}) = (3\sigma_{II})^{1/2} = \left(\frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right)^{1/2} = \sigma_{eq}$$

- Bất biến đồng nhất bậc 3

$$J_3(\underline{\sigma}) = \left(\frac{27}{2} \sigma_{III} \right)^{1/3} = \left(\frac{27}{6} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \right)^{1/3}.$$

▪ Cho biến dạng

- Biến dạng thể tích

$$J_1(\underline{\varepsilon}) = \frac{1}{3} \varepsilon_{II} = \varepsilon_v$$

- Biến dạng phi đàn hồi tương đương Von-Mises

$$I_2(\underline{\varepsilon}^p) = \left(\frac{4}{3} \varepsilon_{pII} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \right)^{1/2} = \varepsilon_{eq}^p$$

Các bất biến nêu trên chỉ đủ để ta thể hiện định luật thuộc tính của vật liệu đẳng hướng. Trong trường hợp vật liệu dị hướng, ta cần phải sử dụng các đại lượng tenxơ đặc trưng cho tính dị hướng : ví dụ, hàm $\underline{f}$ liên kết tenxơ ứng suất $\underline{\sigma}$ với tenxơ biến dạng $\underline{\varepsilon}$ trong trường hợp tổng quát :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{f}(\underline{\sigma}).$$

Nếu $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ là các vectơ cơ sở của hệ toạ độ qui chiếu trực giao, ta có thể viết :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{f}(\underline{\sigma}) = \underline{g}(\underline{\sigma}, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3).$$

Với mọi sự xoay bất kỳ của hệ toạ độ qui chiếu $\underline{q}\underline{a}_1, \underline{q}\underline{a}_2, \underline{q}\underline{a}_3$, ta có thể liên kết các chuyển đổi:

$$\underline{q} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{q}^T \quad \text{và} \quad \underline{q} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{q}^T,$$

điều đó cho thấy $\underline{g}$ là một hàm đẳng hướng và ta có thể viết :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{C}_p \underline{G}_p,$$

trong đó, $\underline{G}_p$ là tenxơ sinh, $\underline{C}_p$ là các hệ số, hàm của các bất biến liên kết với tenxơ ứng suất $\underline{\sigma}$ và các vectơ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

2.3. CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA NHIỆT ĐỘNG HỌC

2.3.1. Các định luật bảo toàn - Nguyên lý nhiệt động học thứ nhất

Phương trình cân bằng trình bày trong phần trước có thể xem là một dạng của định luật bảo toàn động lượng :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \vec{v} dV - \int_{\partial D} \vec{t} dS = \int_D \vec{f} dV .$$

Định luật thứ hai là định luật bảo toàn khối lượng, được viết như sau :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho dV = 0 .$$

Định luật bảo toàn thứ ba là định luật bảo toàn năng lượng. Định luật hết sức quan trọng này cấu thành nguyên lý nhiệt động học thứ nhất.

Xét miền D với biên ∂D , nằm trong môi trường vật chất S :

- Giả sử E là nội năng toàn phần và e là nội năng riêng của miền D , ta có :

$$E = \int_D \rho e dV$$

- Động năng, K , của miền D được tính như sau :

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho \vec{v} \cdot \vec{v} dV$$

- Giả sử Q là nhiệt lượng mà miền D nhận được, nó sẽ bao gồm hai thành phần : nhiệt lượng sinh ra trong miền D do tác động từ ngoài (ví dụ: nung cảm ứng) và nhiệt lượng nhận được bằng truyền nhiệt qua biên ∂D :

$$Q = \int_D r dV - \int_{\partial D} \vec{q} \cdot \vec{n} dS ,$$

trong đó r là mật độ nội sinh nhiệt thể tích do tác động từ bên ngoài miền D , $\vec{q}$ là vectơ dòng nhiệt, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của biên ∂D .

Gọi $P_{(x)}$ là công suất thực của ngoại lực, ta có :

$$P_{(x)} = \int_D \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\partial D} \vec{t} \cdot \vec{v} dS .$$

Nguyên lý nhiệt động học thứ nhất được viết như sau :

$$\frac{d}{dt}(E + K) = P_{(x)} + Q \quad \forall D$$

hay :

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \left(e + \frac{1}{2} \bar{v} \cdot \bar{v} \right) dV = \int_D (\tilde{f} \cdot \bar{v} + r) dV + \int_{\partial D} (\tilde{t} \cdot \bar{v} - \bar{q} \cdot \bar{n}) dS .$$

Từ biểu thức trên ta có thể suy ra biểu thức cục bộ chỉ gồm công suất ngoại lực và nhiệt năng thu nhận, bằng cách áp dụng tiên đề thứ hai của nguyên lý công ảo cho chuyển động thực :

$$P_{(x)} = P_{(a)} - P_{(i)} ,$$

với

$$P_{(a)} = \int_D \rho \tilde{f} \cdot \bar{v} dV = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_D \rho \bar{v} \cdot \bar{v} dV = \frac{dK}{dt} ,$$

Từ đó ta có :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt} - P_{(i)} + Q ,$$

với

$$Q = \int_D r dV - \int_{\partial D} \bar{q} \cdot \bar{n} dS = \int_D r dV - \int_D \text{div} \bar{q} dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e dV = \int_D \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} dV + \int_D r dV - \text{div} \bar{q} dV ,$$

hay

$$\int_D \rho \frac{de}{dt} dV = \int_D (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + r - \text{div} \bar{q}) dV .$$

Biểu thức trên đúng với mọi miền D. Từ đó ta có :

$$\rho \frac{de}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + r - \text{div} \bar{q} .$$

Trong trường hợp biến dạng nhỏ :

$$\rho e = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + r - \text{div} \bar{q} \quad \text{hay} \quad \rho e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + r - q_{i,i}$$

2.3.2. Entropy - Nguyên lý nhiệt động học thứ hai

Ngoài nội năng và nhiệt năng, cần phải đưa thêm hai biến nữa là nhiệt độ và entropy.

Giả thiết có thể định được nhiệt độ thông qua một trường vô hướng xác định dương tại mỗi thời điểm và tại mọi điểm của miền $D : T(M, t)$.

Entropy biểu thị biến đổi của năng lượng liên quan đến biến đổi của nhiệt độ. Ta có thể tính entropy, S , cho miền D khi biết entropy riêng (mật độ entropy), s , như sau :

$$S = \int_D \rho s dV .$$

Nguyên lý nhiệt động học thứ hai cho rằng tỷ suất sinh entropy luôn lớn hơn hoặc bằng tỷ suất nhiệt năng thu nhận chia cho nhiệt độ.

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_D \frac{r}{T} dV - \int_{\partial D} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dS \quad \forall D .$$

Áp dụng định lý phân kỳ (tích phân từng phần) cho biểu thức trên, ta có :

$$\int_D \left(\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \right) dV \geq 0 ,$$

bất đẳng thức này đúng với mọi miền D , dẫn đến dạng cục bộ biểu thị tỷ suất sinh entropy không thuận nghịch dưới đây :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 .$$

Thay r , rút ra từ phương trình bảo toàn năng lượng, vào biểu thức trên, ta nhận được bất đẳng thức cơ bản, bao hàm cả hai nguyên lý nhiệt động học :

$$\rho \frac{ds}{dt} + \text{div} \frac{\vec{q}}{T} - \frac{1}{T} \left(\rho \frac{de}{dt} - \underline{\sigma} : \underline{D} + \text{div} \vec{q} \right) \geq 0 .$$

Thay

$$\text{div} \frac{\vec{q}}{T} = \frac{\text{div} \vec{q}}{T} - \frac{\vec{q} \cdot \text{grad} T}{T^2}$$

và nhân với $T > 0$, ta có :

$$\rho \left(T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} \right) + \underline{\sigma} : \underline{D} - \vec{q} \cdot \frac{\text{grad} T}{T} \geq 0 .$$

Bất đẳng thức Clausius-Duhem nhận được bằng cách đưa thêm vào một biến mới là năng lượng riêng tự do, Ψ , xác định bởi :

$$\Psi = e - Ts .$$

Đạo hàm theo thời gian, ta có :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{de}{dt} - T \frac{ds}{dt} - s \frac{dT}{dt}$$

hay

$$T \frac{ds}{dt} - \frac{de}{dt} = - \left(\frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) .$$

Thay vào bất đẳng thức cơ bản, ta có :

$$\underline{\sigma} : \underline{D} - \rho \left(\frac{d\Psi}{dt} + s \frac{dT}{dt} \right) - \bar{q} \cdot \frac{\text{grad} T}{T} \geq 0$$

hay

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \left(\dot{\Psi} + s \dot{T} \right) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0$$

2.4. PHƯƠNG PHÁP TRẠNG THÁI CỤC BỘ

2.4.1. Biến trạng thái

Phương pháp trạng thái cục bộ cho rằng, tại một thời điểm cho trước, trạng thái nhiệt động học của môi trường vật chất tại một điểm sẽ hoàn toàn xác định nếu biết được giá trị, tại thời điểm đang xét, của các biến chỉ phụ thuộc vào điểm đó. Đạo hàm theo thời gian của các biến này không tham gia xác định trạng thái. Giả thiết này cho thấy, mọi biến đổi của môi trường có thể xem như một sự kế tiếp của các trạng thái cân bằng. Mức độ chính xác khi mô tả các hiện tượng vật lý phụ thuộc vào việc xác định bản chất và sự lựa chọn số lượng các biến trạng thái. Các quá trình được mô tả chỉ đúng về mặt nhiệt động học nếu tại mỗi thời điểm thoả mãn bất đẳng thức Clausius-Duhem. Các biến trạng thái, còn gọi là các biến nhiệt động học hay biến độc lập, bao gồm các biến quan sát được và các biến nội (không quan sát được).

2.4.1.1 Các biến quan sát được

Ta hạn chế ở hai biến quan sát được là :

- Nhiệt độ, T ,

- Biến dạng tổng, $\underline{\varepsilon}$ (trong biến dạng nhỏ).

Đó là hai biến tham gia vào tất cả các hiện tượng đàn hồi, đàn-nhớt, dẻo, dẻo nhớt, hư hại và phá hủy.

Đối với các hiện tượng thuận nghịch (hay đàn hồi), tại mỗi thời điểm, trạng thái chỉ phụ thuộc vào các biến quan sát được. Ví dụ, công suất biến dạng đàn hồi, P_e , được xác định nhờ ứng suất $\underline{\sigma}$ liên kết với biến dạng đàn hồi $\underline{\varepsilon}^e$:

$$P_e = \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e.$$

2.4.1.2. Các biến nội

Đối với các hiện tượng không thuận nghịch, trạng thái hiện thời của vật liệu còn phụ thuộc vào cả quá khứ (lịch sử), đặc trưng (trong phương pháp trạng thái cục bộ) bởi trị số của các biến nội tại từng thời điểm.

Trong biến dạng dẻo và dẻo nhớt, ta cần phải đưa vào biến biểu thị mức độ biến dạng (dẻo hay dẻo nhớt). Đối với trường hợp biến dạng nhỏ, mức độ biến dạng dẻo, $\underline{\varepsilon}^p$, chính là biến dạng dư (không phục hồi) xét trong hình thái nói. $\underline{\varepsilon}^p$ nhận được từ biến dạng tổng sau khi loại bỏ biến dạng đàn hồi (dỡ tải đàn hồi):

$$\underline{\varepsilon}^p = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^e.$$

Hai biến nội được xác định một cách hình thức trên cơ sở phương pháp phân chia biến dạng nêu trên là biến dạng dẻo, $\underline{\varepsilon}^p$, và biến dạng đàn-nhiệt, $\underline{\varepsilon}^e$ (có thể bao gồm cả giãn nở nhiệt). Đối với các hiện tượng như biến cứng, hư hại và phá hủy, cần có thêm các biến nội khác, đặc trưng cho ảnh hưởng của trạng thái bên trong vật liệu, như mật độ lệch, cấu trúc tinh thể, Các biến nội này có bản chất ẩn và không thể đo được bằng các quan sát trực tiếp. Chúng cũng không tham gia một cách trực tiếp vào các định luật bảo toàn cũng như nguyên lý nhiệt động học thứ hai. Chúng mang đặc điểm của biến nội nhưng sẽ được xử lý tương tự như các biến quan sát được.

Không có một phương pháp khách quan nào để chọn các biến nội ẩn thích hợp hơn cho hiện tượng này hay hiện tượng khác. Ở đây, chính bản chất vật lý của hiện tượng, dạng ứng dụng và kinh nghiệm của người nghiên cứu giữ vai trò quan trọng trong việc chọn chính xác các biến này. Để xét một cách tổng quát, ta ký hiệu các biến nội ẩn (biến vô hướng hoặc biến tenxơ) là $V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, \dots$.

2.4.2. Thế năng nhiệt động học - Các định luật trạng thái

Sau khi xác định các biến trạng thái, ta giả thiết tồn tại một thế năng nhiệt động học mà từ đó ta có thể thiết lập các định luật trạng thái. Hàm thế năng này (lỗm đối với biến nhiệt độ và lõm đối với các biến trạng thái khác) cho phép kiểm định các điều kiện ổn định nhiệt động học áp đặt bởi các bất đẳng thức suy ra từ nguyên lý nhiệt động học thứ hai.

Ta chọn hàm thế năng nhiệt động học là hàm năng lượng riêng tự do Ψ , phụ thuộc vào các biến trạng thái quan sát được và các biến nội :

$$\Psi = \Psi(\underline{\varepsilon}, T, \underline{\varepsilon}^c, \underline{\varepsilon}^p, V_k) .$$

Trong đàn-dẻo (hay dẻo nhớt), biến dạng chỉ tham gia vào hàm năng lượng riêng tự do dưới dạng phân chia $\underline{\varepsilon}^c = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p$, ta có :

$$\Psi = \Psi\left[(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p), T, V_k\right] = \Psi[\underline{\varepsilon}^c, T, V_k] .$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^c} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^p} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} .$$

Áp dụng bất đẳng thức Clausius-Duhem với :

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^c} : \dot{\underline{\varepsilon}}^c + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \dot{V}_k ,$$

ta có :

$$\left(\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^c} \right) : \dot{\underline{\varepsilon}}^c + \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k - \frac{\dot{q}}{T} \cdot \text{grad}T - \rho \left(s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0 .$$

Trước hết, ta có thể tưởng tượng một sự chuyển đổi đàn hồi ở nhiệt độ cố định ($\dot{T} = 0$) và đồng đều ($\text{grad}T = 0$), không làm thay đổi biến dạng dẻo ($\dot{\underline{\varepsilon}} = 0$) cũng như các biến nội ($\dot{V}_k = 0$). Bất đẳng thức Clausius-Duhem phải thoả mãn với mọi $\dot{\underline{\varepsilon}}^c$, hay bắt buộc :

$$\underline{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^c} = 0 .$$

Tiếp theo, ta cũng có thể tưởng tượng một sự chuyển đổi nhiệt độ sao cho $\dot{\underline{\varepsilon}} = 0$, $\dot{V}_k = 0$ và $\text{grad}T = 0$. Điều này bắt buộc bất đẳng thức Clausius-Duhem chỉ thoả mãn khi :

$$s + \frac{\partial \Psi}{\partial T} = 0 .$$

Hai biểu thức nêu trên xác định các định luật đàn nhiệt của vật liệu :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^c} ,$$

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} .$$

Ta có thể viết :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^c} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^p}$$

điều đó cho thấy ứng suất tác dụng liên kết đồng thời với biến dạng đàn hồi, biến dạng toàn phần và biến dạng dẻo (với dấu trừ).

Tương tự, ta cũng có thể xác định các biến lực nhiệt động học liên kết với các biến nội ẩn bởi :

$$A_k = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial V_k} .$$

Các quan hệ trên là các định luật trạng thái. Entropy s , tenxơ ứng suất $\underline{\sigma}$ và các lực nhiệt động học $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ cấu thành tập hợp các biến liên kết. Vectơ tạo thành bởi các biến này là gradient của hàm Ψ trong không gian của các biến $T, \underline{\varepsilon}^c, V_k$. Vectơ này vuông góc với mặt Ψ .

Bảng 2.2. Các biến nhiệt động học và các biến liên kết tương ứng.

Biến trạng thái		Biến liên kết
Biến quan sát được	Biến nội	
$\underline{\varepsilon}$	-	$\underline{\sigma}$
T	-	s
-	$\underline{\varepsilon}^c$	$\underline{\sigma}$
-	$\underline{\varepsilon}^p$	$-\underline{\sigma}$
-	V_k	A_k

Trong bảng 2.2 trình bày tập hợp các biến liên kết, đối tượng ứng với các biến trạng thái quan sát được và không quan sát được (biến nội) .

2.4.3. Năng lượng tiêu hao - Các định luật bổ sung

Thế năng nhiệt động học, như ta thấy, cho phép thiết lập các định luật trạng thái biểu thị quan hệ giữa các biến quan sát được và các biến liên kết với chúng, nhưng đối với các biến nội, nó chỉ cho phép xác định các biến lực nhiệt động học liên kết với chúng mà thôi. Để mô tả các quá trình không thuận nghịch nói chung và sự biến đổi của các biến nội nói riêng, cần phải có các quan hệ bổ sung, thiết lập trên cơ sở một hàm thế năng tiêu hao.

2.4.3.1. Tiêu hao cơ năng và tiêu hao nhiệt

Đặt $\bar{g} = \text{grad}T$ và tính tới các định luật trạng thái, bất đẳng thức Clausius-Duhem cho ta biểu thức của năng lượng tiêu hao luôn dương :

$$\Phi = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k - \bar{g} \cdot \frac{\bar{q}}{T} \geq 0 .$$

Ta thấy, Φ là tổng của các tích giữa các biến lực nhiệt động học (hay các biến đổi) $\underline{\sigma}, A_k, \bar{g}$ và các biến dòng tương ứng $\underline{\dot{\varepsilon}}^p, -\dot{V}_k, -\bar{q}/T$. Tổng của hai thành phần đầu tiên :

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k$$

gọi là tiêu hao cơ năng. Thành phần cuối :

$$\Phi_2 = -\bar{g} \cdot \frac{\bar{q}}{T} = -\frac{\bar{q}}{T} \text{grad}T$$

là tiêu hao nhiệt năng do truyền nhiệt.

2.4.3.2. Thế năng tiêu hao

Để xác định các định luật bổ sung liên quan đến các quá trình không thuận nghịch (các quá trình tiêu hao năng lượng), ta giả thiết tồn tại một thế năng tiêu hao (hay giả thế năng) là hàm vô hướng, liên tục của các biến dòng. Các biến trạng thái cũng có thể tham gia vào hàm này dưới dạng tham số :

$$\Phi \left(\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\bar{q}}{T} \right) .$$

Hàm thế năng tiêu hao trên là một hàm lồi, dương và bằng 0 tại gốc tọa độ trong không gian của các biến dòng $\underline{\dot{e}}^p, \dot{V}_k, \frac{\bar{q}}{T}$. Các định luật bổ sung được suy ra từ hàm thế năng tiêu hao bởi nguyên lý pháp tuyến (nguyên lý trực giao), có nghĩa là các lực nhiệt động học là các thành phần của vectơ $\text{grad } \varphi$, vuông góc với mặt φ trong không gian các biến dòng $\underline{\dot{e}}^p, \dot{V}_k, \frac{\bar{q}}{T}$:

$$\underline{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{e}}^p} \quad A_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} \quad \bar{g} = \frac{\partial \varphi}{\partial (\bar{q}/T)}.$$

Trong thực tế, sẽ thuận lợi hơn nếu biểu diễn các định luật bổ sung dưới dạng định luật biến đổi của các biến dòng, là hàm của các biến đối hay các lực nhiệt động học. Để thiết lập được dạng đó, ta cần xác định hàm thế năng $\varphi^*(\underline{\sigma}, A_k, \bar{g})$, là hàm đối của hàm φ và được suy ra từ φ bằng phép chuyển đổi Legendre-Fenchel như sau:

Ta xét một hàm nhiều biến (tất nhiên là đồng đều như ta mong muốn), lồi: $f(x_i)$.

Nhắc lại rằng, ta có thể xác định độ lồi của hàm $f(x_i)$ thông qua ma trận Hessian $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ của

nó. Để $f(x_i)$ lồi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ phải xác định dương tại mọi điểm thuộc miền xác định của f .

Tiếp theo ta xét hàm $y_j x_j - f(x_i)$. Đối với một tập hợp y_j cho trước, hàm này nhận một giá trị cực đại duy nhất, phụ thuộc đương nhiên vào y_j . Hàm mà với mọi tập hợp y_j làm cho giá trị cực đại nêu trên tương ứng gọi là chuyển đổi Legendre - Fenchel của f , ký hiệu là f^* . Ta có thể thấy trên hình 2.4 minh họa hình học của định nghĩa này. Ta cũng có thể thấy chuyển đổi Legendre - Fenchel được xem như một sự mô tả phương trình siêu bề mặt $z = f(x_i)$ với sự trợ giúp của các siêu mặt phẳng tiếp tuyến của nó.

Đối với các giá trị của x_i , hàm $f^*(y_i) = y_j x_j - f(x_i)$ cho giá trị cực đại $y_j x_j - f(x_i)$, do vậy ta phải có:

$$\frac{\partial (y_j x_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

hay:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i.$$

Căn cứ vào định nghĩa, ta có thể tính :

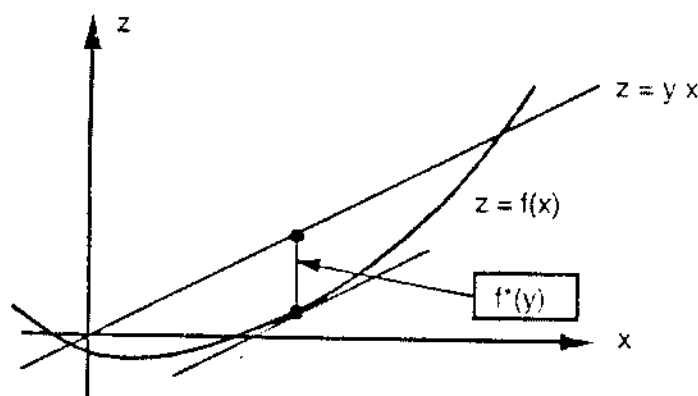
$$\frac{\partial f^*}{\partial y_j} = x_j + y_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = x_j,$$

Căn cứ vào định nghĩa, ta có thể tính :

$$\frac{\partial f^*}{\partial y_j} = x_j + y_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = x_j,$$

nói một cách khác, vì x_j được xác định duy nhất theo y_i , nên ta có hàm $x_j = \frac{\partial f^*}{\partial y_j}$ là hàm đối

của hàm $y_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.



Hình 2.4. Minh hoạ phép chuyển đổi Legendre-Fenchel.

Chuyển đổi Legendre - Fenchel có tính chất tiến hoá. Nói một cách khác, nếu f^* là chuyển đổi Legendre của f thì chính f cũng là chuyển đổi Legendre - Fenchel của f^* .

Thực vậy, $f(x_i) = y_j x_j - f^*(y_i)$, với y_i sao cho $x_j = \frac{\partial f}{\partial y_j}$ như ta đã thấy ở trên, ta có thể chứng minh rằng f chính chuyển đổi Legendre của f^* .

Từ định nghĩa và tính chất của phép chuyển đổi Legendre - Fenchel, ta có thể viết biểu thức xác định hàm thế năng $\varphi^*(\underline{\sigma}, A_k, \underline{g})$, suy ra từ φ bằng phép chuyển đổi Legendre-Fenchel như sau :

$$\varphi^*(\underline{\sigma}, A_k, \underline{g}) = \sup_{\left(\underline{\dot{e}}^p, \underline{\dot{V}}_k, \underline{\dot{q}} \right)} \left[\left(\underline{\sigma} : \underline{\dot{e}}^p - A_k \underline{\dot{V}}_k - \frac{\underline{g} \cdot \underline{\dot{q}}}{T} \right) - \varphi \left(\underline{\dot{e}}^p, \underline{\dot{V}}_k, \frac{\underline{\dot{q}}}{T} \right) \right].$$

Nếu hàm φ^* đạo hàm được thì nguyên lý pháp tuyến vẫn dùng đối với các biến $\underline{\dot{e}}^p, \underline{\dot{V}}_k, -\frac{\dot{q}}{T}$. Khi đó, các định luật bổ sung dưới dạng phương trình biên đối của các biến dòng sẽ được viết như sau :

$$\underline{\dot{e}}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\sigma}}, \quad -\underline{\dot{V}}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\Lambda}_k}, \quad -\frac{\dot{q}}{T} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{g}}.$$

Quan hệ đầu tiên dẫn đến định luật chảy dẻo và dẻo nhớt, quan hệ thứ hai là định luật biến đổi của các biến nội, quan hệ thứ ba dẫn đến định luật Fourier trong tình nhiệt học.

Lưu ý rằng, để nguyên lý nhiệt động học thứ hai thoả mãn một cách tự động, hàm thế năng φ^* cũng cần phải thoả mãn điều kiện là một hàm lồi, không âm và bằng 0 tại gốc toạ độ ($\underline{\sigma} = \underline{\Lambda}_k = \underline{g} = 0$). Trong các phần tiếp theo, ta thường sử dụng thế năng φ^* và các quan hệ biểu diễn sự biến đổi theo thời gian của các biến dòng, xác định trên cơ sở nguyên lý pháp tuyến.

Mọi vấn đề trong mô hình hoá hiện tượng được quy về việc xác định biểu thức tường minh của thế năng nhiệt động học Ψ , của thế năng tiêu hao φ hay hàm đối của nó φ^* và nhận dạng chúng bởi các thí nghiệm đặc trưng. Bằng thực nghiệm, giá trị của φ và φ^* hầu như không thể xác định được, bởi lẽ đó là năng lượng thương tiêu hao một phần dưới dạng nhiệt năng. Trong khi đó, các biến dòng và các biến đối (bảng 2.3) có thể đo được. Chính vì vậy, việc mô hình hoá và nhận dạng được dựa trên quan hệ giữa các biến này. Các định luật bổ sung được nhận dạng một cách trực tiếp còn thế năng tiêu hao giữ vai trò định hướng cho việc thiết lập chúng.

Bảng 2.3. Các biến dòng và biến đối

Biến dòng	Biến đối
$\underline{\dot{e}}^p$	$\underline{\sigma}$
$-\underline{\dot{V}}_k$	$\underline{\Lambda}_k$
$-\frac{\dot{q}}{T}$	$\underline{g} = \text{grad}T$

Lưu ý rằng, biểu thức của hàm thế năng tiêu hao có thể được mở rộng bằng cách đưa thêm vào các biến trạng thái với vai trò là các tham số mà không làm thay đổi dạng tổng quát của các định luật bổ sung. Trong trường hợp này, ta có :

$$\varphi = \varphi\left(\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \dot{V}_k, \frac{\bar{q}}{T}; \underline{\varepsilon}^e, T, V_k\right)$$

$$\varphi^* = \varphi^*\left(\underline{\sigma}, A_k, \bar{g}; \underline{\varepsilon}^e, T, V_k\right).$$

2.4.3.3. Quan hệ đối xứng Onsager

Cách đơn giản hoá đầu tiên là giả thiết hàm φ^* có dạng bình phương xác định dương đối với các biến đối. Nếu ký hiệu $\dot{V}_\alpha$ là các biến dòng và A_α là các biến đối, ta có thể viết thế năng tiêu hao dưới dạng :

$$\varphi^* = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta}(\underline{\varepsilon}^e, V_k, T) A_\alpha A_\beta.$$

Mỗi định luật bổ sung tuyến tính so với biến đối tương ứng, ta có :

$$\dot{V}_\alpha = C_{\alpha\beta} A_\beta,$$

trong đó, $C_{\alpha\beta}$ là ma trận đối xứng. Đặc điểm này còn có tên gọi là đối xứng Onsager.

2.4.3.4. Phân tách năng lượng tiêu hao

Cách đơn giản hoá thứ hai là giả thiết năng lượng tiêu hao có thể phân tách thành tiêu hao cơ học (tiêu hao nội) và tiêu hao nhiệt. Hay nói một cách khác, thế năng tiêu hao là tổng của hai thành phần, một phụ thuộc vào các biến đối $\underline{\sigma}, A_k$ và một phụ thuộc vào biến $\bar{g}$

$$\varphi^* = \varphi_1^*(\underline{\sigma}, A_k) + \varphi_2^*(\bar{g}).$$

Nguyên lý nhiệt động học thứ hai thoả mãn bởi các bất đẳng thức sau :

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}^p - A_k \dot{V}_k = \underline{\sigma} : \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \underline{\sigma}} + A_k \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial A_k} \geq 0$$

$$\Phi_2 = -\bar{g} \cdot \frac{\bar{q}}{T} = \bar{g} \cdot \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \bar{g}} \geq 0.$$

Bất đẳng thức đầu tiên thoả mãn một cách đương nhiên bởi lẽ φ_1^* là hàm lồi đối với $\underline{\sigma}, A_k$ và bao gốc toạ độ. Khi đó ta có :

$$\underline{\sigma} : \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \underline{\sigma}} + A_k \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial A_k} \geq \varphi_1^* \geq 0$$

2.4.3.5. Các hiện tượng tiêu hao tức thời

Khi hành vi của vật liệu không phụ thuộc vào thời gian, $\varphi(\underline{\dot{\epsilon}}^p, \dot{V}_k)$ sẽ là hàm thuần nhất bậc 1. Khi đó φ^* trở thành hàm chỉ thị lỗi $f \leq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= 0 & \text{nếu} & \quad f(\underline{\sigma}, A_k) \leq 0 \\ \varphi^* &= +\infty & \text{nếu} & \quad f(\underline{\sigma}, A_k) > 0. \end{aligned}$$

Như vậy hàm f giữ vai trò của hàm chất tải và các phương trình mô tả nguyên lý chảy dẻo pháp tuyến cần thay bởi :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\epsilon}}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \\ -\dot{V}_k &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_k} \end{aligned}$$

$\dot{\lambda}$ là hệ số nhân, xác định từ điều kiện $f = 0$ trong quá trình chảy dẻo, có nghĩa là $f = 0$ và $\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\epsilon}} > 0$ (xem chương 5).

2.5. MỘT SỐ KHÁI NIỆM TRONG NHIỆT HỌC

2.5.1. Định luật Fourier

Định luật truyền nhiệt, hay định luật Fourier, quan hệ tuyến tính giữa dòng nhiệt $\bar{q}$ và biến đổi của nó $\bar{g}$, là hệ quả trực tiếp của hai phương pháp đơn giản hoá trình bày ở trên đối với hàm thế năng tiêu hao. Đặt :

$$\varphi_2^* = \frac{1}{2} \underline{C} \cdot \bar{g} \cdot \bar{g},$$

ta có :

$$-\frac{\bar{q}}{T} = \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \bar{g}} = \underline{C} \cdot \bar{g} = \underline{C} \cdot \text{grad} T.$$

Với giả thiết truyền nhiệt đẳng hướng, tenxơ $\underline{C}$ trở thành đại lượng vô hướng. Coi đại lượng vô hướng đó biến đổi như nghịch đảo của nhiệt độ, ta có :

$$q = -k \text{ grad} T \quad \text{hay} \quad q_i = -k T_{,i},$$

k là hệ truyền nhiệt của môi trường .

2.5.2. Phương trình nhiệt

Ta viết lại phương trình bảo toàn năng lượng (nguyên lý nhiệt động học thứ nhất)

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} + r - \text{div} \vec{q}$$

và thay ρe bằng biểu thức của nó rút ra từ $e = \psi - s'T$:

$$\rho \dot{e} = \rho \dot{\psi} + \rho T \dot{s} + \rho \dot{T} s \; ,$$

sau đó thay $\dot{\psi}$, bằng biểu thức với các biến trạng thái, vào biểu thức trên, ta có :

$$\rho \dot{e} = \rho \left(\frac{1}{\rho} \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^e - s \dot{T} + \frac{1}{\rho} A_k \dot{V}_k \right) + \rho T \dot{s} + \rho \dot{T} s \; .$$

Phương trình bảo toàn năng lượng, cuối cùng, có dạng :

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^p + A_k \dot{V}_k + \rho T \dot{s} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} + r - \text{div} \vec{q} \; .$$

Với $s = \frac{\partial \psi}{\partial T} \left(\underline{\epsilon}^e, T, V_k \right)$, ta có :

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\epsilon}^e \partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^e - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial V_k \partial T} \dot{V}_k \\ &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^e + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \; . \end{aligned}$$

Đưa vào nhiệt dung riêng, xác định bởi :

$$C = T \frac{\partial s}{\partial T}$$

và tính tới định luật truyền nhiệt Fourier:

$$\vec{q} = -k \; \text{grad} \; T \; ,$$

hay

$$\text{div} \vec{q} = -k \; \text{div}(\text{grad} T) = -k \nabla T \; ,$$

với $\underline{\dot{\epsilon}}^p = \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\dot{\epsilon}}^e$, ta có :

$$k \nabla T = \rho C \dot{T} - \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^p + A_k \dot{V}_k - r - T \left(\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right) \; .$$

Biểu thức trên chính là phương trình nhiệt đầy đủ, trong đó ∇ là toán tử Laplace.

2.5.2.1. Truyền nhiệt

Phương trình truyền nhiệt cổ điển tương ứng quá trình :

Biến dạng phi đàn hồi không thay đổi : $\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^n = 0$,

Không có sự biến đổi của các biến nội : $A_k \dot{V}_k = 0$,

Không có nhiệt năng nội sinh do tác động từ nguồn bên ngoài : $r = 0$,

Không có sự kết hợp cơ - nhiệt : $\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^c = 0, \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k = 0$.

Hai thành phần $\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^c, \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k$ có thể bỏ qua trong nhiều ứng dụng thực tế. Khi đó, nhiệt dung riêng có giá trị xác định với biến dạng là hằng số :

$$C = C_e = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_e ,$$

và

$$k \nabla T = \rho C_e \dot{T}$$

2.5.2.2. Nung đoạn nhiệt

Phương trình nhiệt đầy đủ cho phép xác định sự gia tăng nhiệt độ của môi trường do tiêu hao cơ năng gây nên. Để thực hiện điều đó, chỉ cần giải phương trình :

$$\rho C \dot{T} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^n - A_k \dot{V}_k + r + T \left(\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^c + \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right)$$

Ví dụ, để tính toán sự gia tăng nhiệt độ của vật liệu kim loại trong quá trình tạo hình bằng biến dạng dẻo, ta có thể giải phương trình nhiệt đầy đủ với các giả thiết sau :

- $k \nabla T = 0$, biến đổi đoạn nhiệt,
- $r = 0$, không có nội sinh nhiệt gây ra bởi nguồn tác động từ bên ngoài,
- $\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial T} : \underline{\dot{\epsilon}}^c = 0, \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k = 0$, không tồn tại quá trình kết hợp cơ nhiệt.

Thành phần $A_k \dot{V}_k$ biểu thị năng lượng bị giam giữ trong vật liệu. Đối với vật liệu kim loại, năng lượng này chính là năng lượng của trường vi ứng suất dư (chiếm khoảng 5 đến 10% của $\underline{\sigma} : \underline{\epsilon}$), liên quan đến sự gia tăng mật độ lệch và thường có thể bỏ qua.

Với các giả thiết trên, phương trình truyền nhiệt cho quá trình nung đoạn nhiệt có dạng :

$$\rho C \dot{T} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^n .$$

CHƯƠNG 3

NHẬN DẠNG VÀ PHÂN LOẠI THUỘC TÍNH LƯU BIẾN CỦA VẬT RẮN THỰC

Cơ học và nhiệt động học của môi trường liên tục đã trang bị cho chúng ta các phương tiện lý thuyết cơ sở, cho phép mô tả các hiện tượng vật lý xảy ra trong quá trình biến dạng một vật rắn. Trong nghiên cứu cơ bản cũng như nghiên cứu ứng dụng thuộc lĩnh vực cơ học vật liệu, ta thường phải phân biệt rõ và thiết lập mô hình cho từng nhóm lớn các hiện tượng vật lý. Đối tượng của chương này là bằng phương pháp hiện tượng, dựa trên cơ sở những quan sát thực nghiệm, phân biệt một cách định tính và nhận dạng các dạng thuộc tính cơ bản của vật rắn.

3.1. PHƯƠNG PHÁP HIỆN TƯỢNG TỔNG THỂ

Ta thường phân biệt ba phương pháp cơ bản thiết lập các định luật thuộc tính của vật liệu sau đây :

- *Phương pháp vĩ mô* : mô hình hoá các cơ chế biến dạng hoặc phá huỷ của vật liệu ở mức nguyên tử, phân tử hay tinh thể. Thuộc tính vĩ mô sẽ được xác định bằng cách tích phân hay trung bình hoá các biến vĩ mô cho một phân tử thể tích đặc trưng;

- *Phương pháp nhiệt động học* : sử dụng khái niệm về môi trường liên tục đồng nhất hoá, tương đương với môi trường thực, để mô tả các hiện tượng vật lý vĩ mô bằng các "biến nội" vĩ mô;

- *Phương pháp phiếm hàm* : thiết lập các định luật thuộc tính dưới dạng tích phân có chứa các hàm đặc trưng cho vật liệu với các biến vĩ mô.

Cần chú ý rằng, không một phương pháp nào trong ba phương pháp kể trên cho phép ta nhận dạng mô hình một cách trực tiếp. Bởi lẽ, các biến vĩ mô (mật độ lệch, mật độ lỗ hổng, vân tinh thể, ...) khó có thể đo được và cũng khó sử dụng trong các tính toán thực tế; các thế năng nhiệt động học không thể đo bằng thực nghiệm; các biến nội, theo định nghĩa,

cũng không thể đo được một cách trực tiếp; để thiết lập được phiến hàm cần phải biết rõ lịch sử biến đổi của các biến quan sát được (tham gia vào các hàm đặc trưng của vật liệu) mà cả về mặt lý thuyết lẫn thực nghiệm đều rất khó xác định.

Phương pháp hiện tượng tổng quát nghiên cứu một phân tố thể tích đặc trưng của vật liệu qua các mối quan hệ nhân quả, tồn tại giữa các biến vật lý cấu thành "đầu vào" và "đầu ra" của một quá trình. Có nghĩa là ta xác định ứng xử của vật liệu đối với những tác động "đầu vào" nhất định. Tuy nhiên, cần chú ý rằng những ứng xử quan sát được, mặc dù đủ để đặc trưng vật liệu một cách định lượng, song không phải lúc nào cũng cho phép ta thiết lập được các định luật thuộc tính của chúng (trừ trường hợp các hiện tượng tuyến tính).

Phân tố thể tích đặc trưng, theo nghĩa của cơ học vật liệu, được hiểu là một thể tích đủ lớn so với độ không đồng nhất của vật liệu và đủ nhỏ để các đạo hàm riêng, tham gia vào các phương trình của cơ học môi trường liên tục, có ý nghĩa. Trong bảng 3.1 dưới đây trình bày kích thước hợp lý của phân tố thể tích đặc trưng đối với một số vật liệu. Nếu kích thước của phân tố thể tích nhỏ hơn các giá trị trong bảng thì tính chất trung bình của ứng suất, biến dạng và của các đại lượng vật lý khác sẽ không còn có nghĩa, bởi lẽ phân tố thể tích khi đó không còn có thể được xem là một phân tố thể tích đồng nhất.

Bảng 3.1. Kích thước hợp lý của một phân tố thể tích đặc trưng

Vật liệu	Độ không đồng nhất	Phân tố thể tích
Kim loại và hợp kim	tinh thể 1 μm đến 0,1 mm	(0,5 $\times$ 0,5 $\times$ 0,5) mm
Polyme	phân tử 10 μm đến 0,05 mm	(1 $\times$ 1 $\times$ 1) mm
Gỗ	thớ 0,1 mm đến 1 mm	(1 $\times$ 1 $\times$ 1) cm
Bê tông	sỏi $\langle d \rangle \approx 1$ cm	(10 $\times$ 10 $\times$ 10) cm

Đối với một phân tố thể tích, các biến có thể có chính là các biến mà ta có thể suy ra một cách dễ dàng từ 4 đại lượng đo được của cơ học là : chuyển vị, lực, thời gian và nhiệt độ.

• Biến dạng và tốc độ biến dạng :

- biến dạng tổng ba chiều $\underline{\epsilon}$ hay một chiều ϵ với biểu thức viết cho biến dạng lớn :

$$\epsilon_T = \ln(1 + \epsilon);$$

- biến dạng đàn hồi $\underline{\epsilon}^e$ hay ϵ^e ;

- biến dạng dư $\underline{\epsilon}^p$ hay ϵ^p .

- Ứng suất ba chiều $\underline{\sigma}$ hay một chiều σ với biểu thức gần đúng viết cho biến dạng lớn : $\sigma_T \approx \sigma(1 + \varepsilon)$.

- Nhiệt độ T .

- Thời gian t hoặc số chu kỳ chất tải dễ phá huỷ t_R hay N_R .

Sự phân loại thuộc tính trên cơ sở phương pháp hiện tượng tổng quát không được coi là thực chất, bởi lẽ đó chỉ là những qui ước về đặc tính của tập hợp vật liệu. Thuộc tính của một vật liệu chỉ được biểu diễn bằng một mô hình đơn giản theo chức năng sử dụng và độ chính xác mong muốn. Ví dụ, thép ở nhiệt độ thường có thể coi là :

- Đàn hồi tuyến tính cho các tính toán biến dạng một kết cấu nào đó,
- Đàn nhớt cho một bài toán giảm dao động,
- Cứng-ẻo lý tưởng cho các tính toán giới hạn chất tải,
- Đàn-ẻo biến cứng cho các tính toán chính xác biến dạng dư,
- Đàn-ẻo nhớt trong các bài toán nối ứng suất,
- Phá huỷ do biến dạng trong các tính toán về giới hạn tạo hình,
- Phá huỷ do mỏi trong các tính toán tuổi thọ,
- v.v. ...

3.2. KỸ THUẬT THỰC NGHIỆM VÀ NHẬN DẠNG MÔ HÌNH THUỘC TÍNH

3.2.1. Các thí nghiệm đặc trưng

Các thí nghiệm truyền thống đặc trưng chủ yếu là thử kéo hoặc kéo-nén đơn (một chiều) ở nhiệt độ nhất định. Bằng các thí nghiệm đơn giản này ta có thể phân loại các vật rắn thực. Trạng thái ứng suất hoặc biến dạng đồng đều trong toàn bộ thể tích hữu ích của mẫu, gây nên bởi tác động của ngoại lực hoặc chuyển vị áp đặt, cho phép ta coi thể tích đó như một phần tử đặc trưng (đương nhiên, giả thiết này chỉ áp dụng cho các vật liệu đẳng hướng).

Trạng thái đơn (một chiều) được định nghĩa bởi trạng thái một chiều của ứng suất và ba chiều của biến dạng :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{bmatrix}$$

trong đó ν^* là hệ số co (bằng hệ số Poisson ν trong trường hợp đàn hồi).

Trong đàn-dẻo hay đàn-dẻo nhớt, giả thiết về sự phân chia biến dạng ($\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$) và giả thiết không nén được, $\text{Tr}(\epsilon^p) = 0$, cho phép xác định hệ số co ν^* :

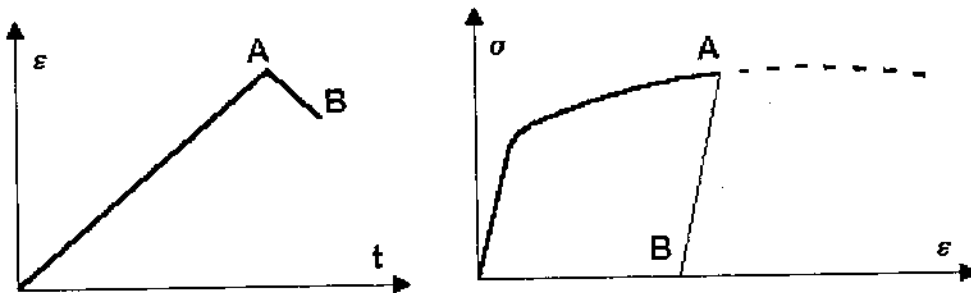
$$\begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^e & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \epsilon^e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \epsilon^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon^p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \epsilon^p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \epsilon^p \end{bmatrix}$$

$$\nu^* = \nu \frac{\epsilon^e}{\epsilon} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon^p}{\epsilon}$$

hoặc với định luật đàn hồi tuyến tính: $\epsilon^e = \frac{\sigma}{E}$

$$\nu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{E\epsilon} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

3.2.1.1. Thí nghiệm biến cứng kéo và nén đơn

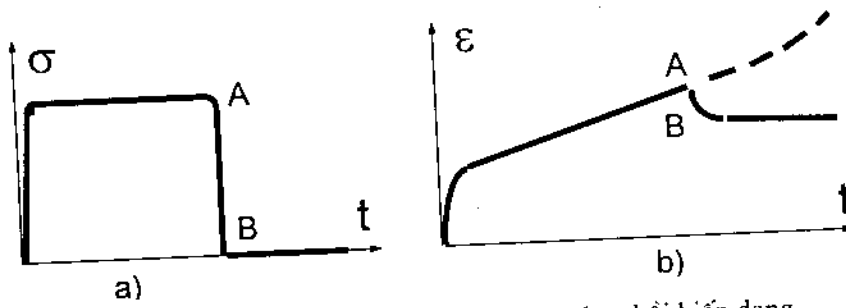


Hình 3.1. Dạng đồ thị thử kéo hoá bền.

Dạng thí nghiệm này phổ biến nhất. Mẫu được biến dạng với tốc độ không đổi. Quan hệ giữa ứng suất σ và biến dạng ϵ cho thấy sự hoá bền của vật liệu (hình 3.1).

3.2.1.2. Thí nghiệm đảo kéo và nén

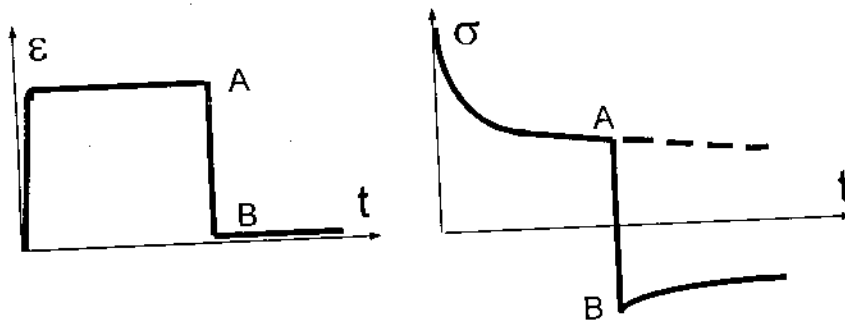
Để nghiên cứu sự hoá bền do biến dạng và xác định độ nhớt của vật liệu, ta thường tiến hành các thí nghiệm chảy đảo kéo hoặc nén. Dưới tác dụng của ứng suất không đổi, ta xét sự biến đổi của biến dạng ϵ theo thời gian t (hình 3.2 a, b). Điểm B (ứng suất bằng 0) tương ứng với thời điểm biến dạng bắt đầu phục hồi (thí nghiệm biến dạng phục hồi). Sự phục hồi biến dạng kế tiếp giai đoạn chảy đảo được trình bày trên hình 3.2.b.



Hình 3.2. Đồ thị thí nghiệm chảy dẻo và phục hồi biến dạng.

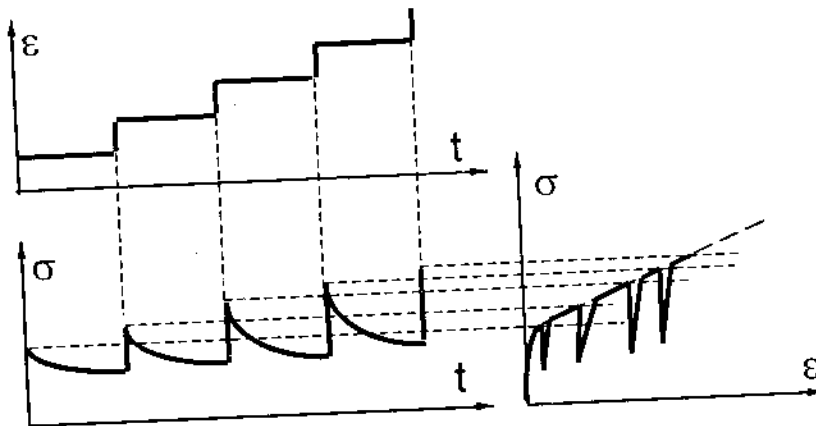
3.2.1.3. Thí nghiệm nối ứng suất kéo và nén

Ngược lại với thí nghiệm dẻo, với thí nghiệm nối ta xét sự biến đổi của ứng suất trong điều kiện biến dạng không đổi. Quá trình này được chi phối chủ yếu bởi độ nhớt của vật liệu và phụ thuộc vào mức độ biến cứng gây nên bởi biến dạng ban đầu (hình 3.3).



Hình 3.3. Đồ thị thí nghiệm nối ứng suất.

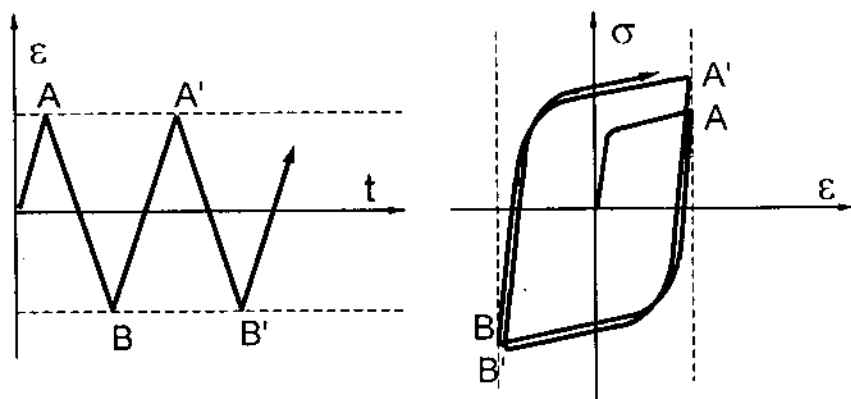
3.2.1.4. Thí nghiệm lặp biến cứng-nối



Hình 3.4. Thí nghiệm lặp biến cứng-nối.

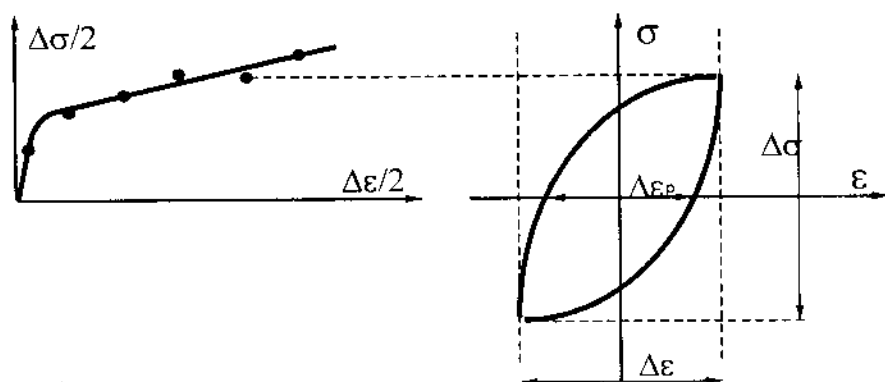
Bằng cách kết hợp hai dạng thí nghiệm, chỉ dùng một mẫu, ta có thể nghiên cứu đồng thời sự hoá bền và độ nhớt của vật liệu một cách liên tục với nhiều mức độ biến dạng khác nhau (hình 3.4).

3.2.1.5. Thí nghiệm chu kỳ



Hình 3.5. Thí nghiệm chu kỳ với biến dạng không chế.

Thí nghiệm này cho phép nghiên cứu sự biến đổi của các chu kỳ ứng xử của vật liệu qua đồ thị (σ, ϵ) (hình 3.5). Mẫu thử nghiệm chịu tác dụng của tải (ứng suất hay biến dạng) chu kỳ. Ứng xử của vật liệu thường tiến tới ổn định sau một số chu kỳ chất tải nhất định. Ta sử dụng đường cong chu kỳ, biểu diễn các đỉnh của các vòng ổn định, tương ứng các mức khác nhau của ứng suất và biến dạng, để phân tích hành vi của vật liệu (hình 3.6). Trong trường hợp vật liệu polime, hay tổng quát hơn, vật liệu dẻo nhớt, đỉnh của các vòng thường khó xác định. Khi đó người ta dùng thuật ngữ thí nghiệm "điều hoà" thay cho thuật ngữ thí nghiệm chu kỳ.



Hình 3.6. Đường cong biến cứng chu kỳ.

3.2.1.6. Thí nghiệm phá huỷ

Ta có thể dùng 4 dạng thí nghiệm nêu trên để xác định các điều kiện tương ứng với thời điểm phá huỷ mẫu :

- ứng suất và biến dạng phá huỷ;
- thời gian và số chu kỳ đến phá huỷ;
- năng lượng tiêu cho phá huỷ.

3.2.1.7. Các thí nghiệm đa chiều

Do khó khăn và phức tạp, các thí nghiệm đa chiều ít được sử dụng. Trong số các thí nghiệm đa chiều có thể tiến hành (kéo-cắt (hoặc nén-cắt), kéo hai chiều, nén ba chiều), dạng kéo-xoắn mẫu dạng ống được dùng phổ biến hơn cả, đặc biệt trong trường hợp nghiên cứu vật liệu dị hướng. Lực kéo và momen xoắn có thể tác dụng đồng thời hoặc kế tiếp. Biến dạng xoắn và biến dạng giãn dài tương ứng được đo độc lập nhau.

3.2.2. Kỹ thuật thực nghiệm

3.2.2.1. Thiết bị thử nghiệm

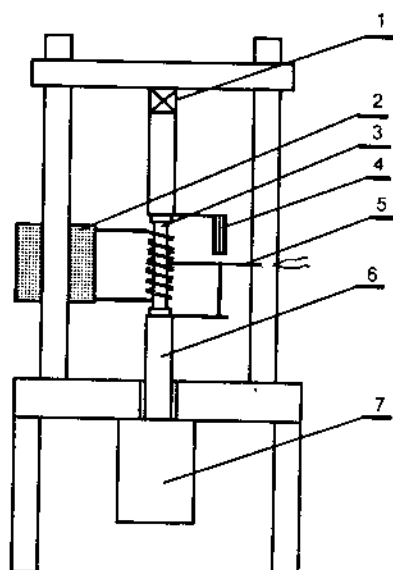
Để áp dụng phương pháp hiện tượng, cần tiến hành các thực nghiệm cho một thể tích nào đó của vật liệu. Trong khả năng cho phép, phải tạo được các trường ứng suất, biến dạng và nhiệt độ đồng đều trong phần thể tích hữu ích của mẫu thí nghiệm. Đây cũng là một trong những khó khăn khi tiến hành các thí nghiệm xác định thuộc tính cơ học.

a) Các thí nghiệm một chiều đơn điệu và chu kỳ

Dạng thí nghiệm được áp dụng phổ biến nhất là kéo đơn, trong đó phần hữu ích của mẫu chịu tác dụng của trường ứng suất một chiều. Trên hình 3.7 trình bày sơ đồ nguyên lý của thiết bị thử kéo-nén hiện đại, bao gồm các bộ phận chính sau :

- Hệ thống dầm kẹp mẫu;
- Lực kế đo lực tác dụng lên mẫu;
- Máy đo biến dạng dài;
- Hệ thống nung mẫu;
- Hệ thống tạo lực;
- Thân máy với độ cứng vững cao.

Tuỳ theo dạng thí nghiệm, lực tác dụng lên mẫu được tạo bằng nhiều cách khác nhau : trọng lượng treo cho thiết bị thử dãn, hệ écu-vít vô tận truyền động bằng động cơ, hệ thuỷ lực với bộ điều khiển trợ động.



Hình 3.7. Sơ đồ nguyên lý máy thử kéo-nén:

1- lực kế; 2- lò nung; 3- mẫu;
4- cơ cấu đo giãn dài; 5- cặp nhiệt;
6- đầu cặp mẫu; 7- bộ phận tạo lực.

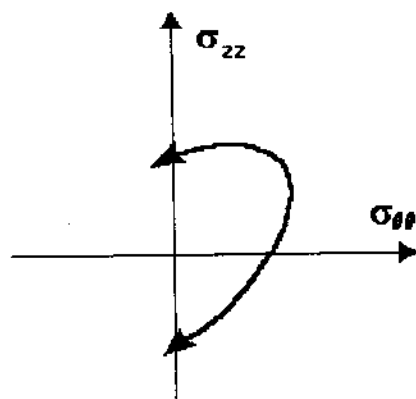
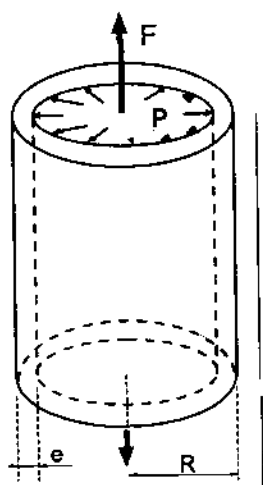
Đối với các thí nghiệm ở nhiệt độ cao, để nung mẫu, ta có thể dùng lò điện trở, lò đèn bức xạ, nung mẫu nhờ hiệu ứng Jul (nung nhờ điện trở của mẫu) hoặc nung bằng cảm ứng cao tần (một giải pháp nung đặc biệt hiệu quả cho các thí nghiệm với thời gian ngắn và trung bình). Việc chọn phương pháp nung phụ thuộc vào dạng thử nghiệm (đơn điệu hay chu kỳ), yêu cầu về nhiệt độ cần đạt (nhiệt độ đồng đều và cố định hay biến đổi).

b) Thí nghiệm đa chiều

Thực chất của thí nghiệm đa chiều là tạo ra trong một phần tử thể tích vật liệu, có thể coi là đẳng tĩnh, các trạng thái ứng suất phức tạp. Trạng thái ứng suất phải được xác định bởi các phương trình cân bằng tổng quát độc lập với thuộc tính của vật liệu. Để thực hiện được điều đó ta có thể áp dụng những kỹ thuật sau đây :

Thí nghiệm kéo-nén mẫu trụ rỗng với áp suất trong hoặc ngoài

Kỹ thuật thí nghiệm này tương đối dễ dàng vì không đòi hỏi máy thử nghiệm chuyên dùng. Thiết bị tạo áp suất thuỷ lực (cho nhiệt độ thường) hoặc áp suất khí (cho nhiệt độ cao) có thể dùng với đại đa số các máy thử kéo-nén thông thường. Nếu độ dày e của thành mẫu đủ nhỏ so với bán kính mẫu R , ta sẽ thu được trạng thái ứng suất hai chiều bất kỳ. Ta còn có thể tạo trạng thái ứng suất cắt thuần thuỷ ($\sigma_2 = -\sigma_1$) với các hướng ứng suất chính không đổi (hình 3.8).

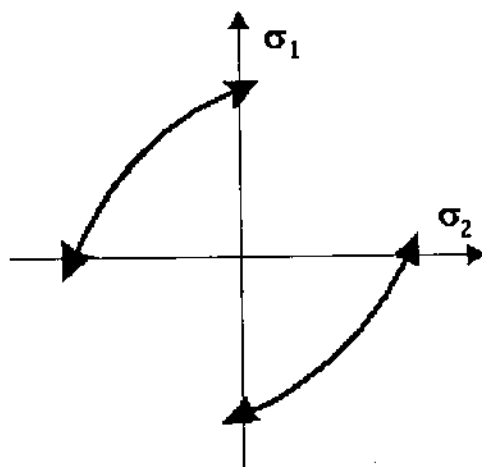
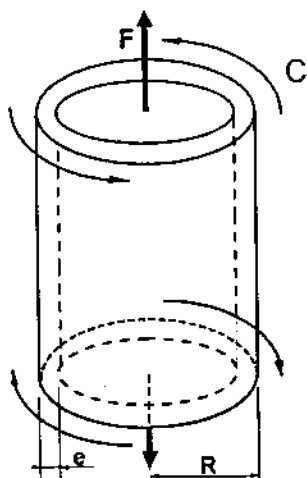


Hình 3.8. Trường hợp kéo-nén-áp suất trong và miền ứng suất có thể tồn tại.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} = \frac{P}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} = \frac{PR}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} = \frac{PR}{2e} + \frac{F}{S} \end{bmatrix}$$

Trong cơ học đất và đá, người ta áp dụng phổ biến dạng thí nghiệm này cho các mẫu trụ đặc với áp suất ngoài.

Thí nghiệm kéo-nén-xoắn mẫu trụ rỗng



Hình 3.9. Trường hợp kéo-nén-xoắn và miền ứng suất có thể tồn tại (C- momen xoắn, J- momen quán tính xoắn của mẫu).

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} = \frac{C}{J} \\ 0 & \sigma_{\theta z} = \frac{C}{J} & \sigma_{zz} = \frac{F}{S} \end{bmatrix}$$

Các trạng thái ứng suất có thể tạo được bị hạn chế hơn, nhưng thí nghiệm này cho phép ta nghiên cứu hành trình chất tải với sự biến đổi hướng của ứng suất chính (hình 3.9). Bộ phận tạo lực của máy thử nghiệm gồm hai kích thủy lực : một tạo chuyển động tịnh tiến, một tạo chuyển động xoay có thể hoạt động đồng thời hoặc kế tiếp nhau. Các máy thử nghiệm hiện đại đều được điều khiển bằng máy tính.

3.2.2.2. Kỹ thuật đo các biến đặc trưng

a) Lực và ứng suất

Ứng suất được suy ra từ lực tác dụng bằng các phương trình tĩnh cho các trường hợp đẳng tĩnh. Lực hay ngẫu lực tác dụng lên mẫu được đo bằng lực kế đặt nối tiếp với mẫu. Lực kế cảm biến điện trở được dùng phổ biến hơn cả và cho phép đạt độ chính xác cỡ 10^{-1} . Đối với các thí nghiệm trong cơ học vật liệu, độ chính xác nêu trên hoàn toàn thỏa mãn.

b) Chuyển vị và biến dạng

Việc đo chuyển vị tương đối giữa hai điểm trên mẫu trong quá trình biến dạng phức tạp hơn so với việc đo lực tác dụng. Bởi lẽ, các cảm biến đo chuyển vị phải mắc "song - song" với mẫu chứ không mắc nối tiếp như đo lực. Người ta thường áp dụng hai phương pháp đo chủ yếu : đo biến dạng cục bộ bằng các cảm biến điện trở và đo chuyển vị tổng bằng giãn kế.

Cảm biến điện trở được cấu tạo bởi một sợi điện trở mảnh, dán chặt lên mẫu và biến dạng cùng mẫu. Đo biến đổi trở kháng của dây tỷ lệ thuận với biến dạng ϵ . Nếu áp dụng sơ đồ cầu Wheastone, ta có thể đo được biến dạng cỡ $\epsilon = 10^{-7}$. Tuy nhiên, mặc dù rất tiện lợi, phương pháp đo này không được sử dụng rộng rãi do khó đảm bảo được chất lượng dán. Mặt khác, các loại keo dán hiện tại không chịu được nhiệt độ cao, nên kỹ thuật đo bằng cảm biến điện trở chỉ có thể áp dụng để đo biến dạng ở nhiệt độ không vượt quá $200 - 400^{\circ}\text{C}$.

Giãn kế đo chuyển vị của hai điểm định dọc theo trục của mẫu. Từ các kết quả đo chuyển vị, bằng các phương trình của cơ học môi trường liên tục, ta có thể tính được biến dạng. Ta cũng có thể đo độ thay đổi tiết diện ngang của mẫu trong quá trình biến dạng nhờ giãn kế. Tuỳ theo cấu tạo và nguyên lý làm việc, các giãn kế có thể đo chuyển vị với độ chính xác từ 0,2 đến 1 μm . Các giãn kế cảm ứng và cảm biến điện trở được dùng phổ biến hơn cả. Các giãn kế quang học có độ chính xác rất cao, song do khó sử dụng và đắt nên được dùng hạn chế hơn.

c) *Biến dạng dẻo*

Dưới tác dụng của ngoại lực, F , chiều dài hữu ích L_0 của mẫu trở thành L . Độ biến dạng dài tổng, ε , của mẫu được tính theo quan hệ đơn giản sau

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} .$$

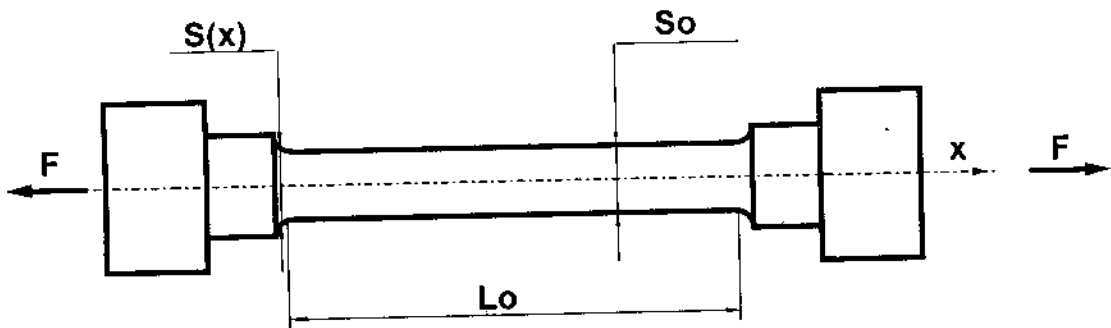
Biến dạng dẻo, ε^p , được xác định bằng cách loại phần biến dạng đàn hồi, ε^e , khỏi biến dạng tổng. Trong thử kéo (hoặc nén) ta có

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \varepsilon - \frac{F}{SE} ,$$

trong đó E , S - tương ứng modun đàn hồi và tiết diện ngang của mẫu.

Modun đàn hồi được xác định tại giai đoạn đầu của quá trình thử, khi lực tác dụng còn đủ nhỏ để mẫu chỉ biến dạng đàn hồi. Ta có

$$E = \frac{F}{S\varepsilon^e} .$$



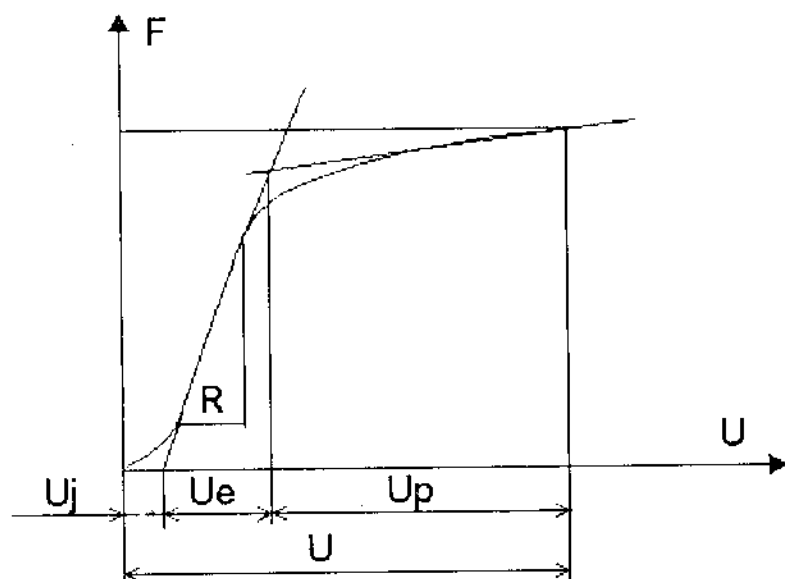
Hình 3.10. Mẫu thử kéo.

Trong trường hợp giãn kế không thể đặt trực tiếp lên mẫu, ta có thể dùng khái niệm về độ dài hữu ích tương đương L_p , nhằm tính tới ảnh hưởng của biến dạng ở phần chuyển tiếp giữa hai tiết diện mẫu (hình 3.10). L_p được xác định như sau :

$$L_p = \frac{u_p}{\varepsilon^p(0)} = 2 \int_0^{L/2} \frac{\varepsilon^p(x)}{\varepsilon^p(0)} dx .$$

Ta sẽ thấy trong chương 5, biến dạng dẻo có thể được biểu diễn bởi một hàm lũy thừa của ứng suất $\epsilon^p = (\sigma/K)^{1/M}$. Nếu bỏ qua hiệu ứng ba chiều trong vùng chuyển tiếp giữa hai tiết diện, ta có thể chứng minh dễ dàng :

$$L_p = 2 \int_0^{1/2} \left(\frac{S(0)}{S(x)} \right)^{M/2} dx$$



Hình 3.11. Quan hệ lực-chuyển vị của thí nghiệm biến cứng.

Ta thấy rằng, chiều dài hữu ích dẻo được xác định từ hình học của mẫu và lũy thừa đặc trưng cho hoá bền M (lũy thừa hoá bền). Để đo biến dạng dẻo, ta có thể tiến hành theo các bước sau :

- Xây dựng quan hệ lực-chuyển vị từ số liệu thực nghiệm đo trực tiếp (kéo hoặc nén),
- Xác định chuyển vị dẻo u_p bằng cách loại chuyển vị đàn hồi u_e và độ rơ u_g (tổng độ rơ của máy và độ rơ giữa mẫu và các đầu kẹp) (hình 3.11).

$$u_p = u - u_e - \frac{F}{R} ,$$

trong đó R là độ cứng của cả hệ mẫu-đầu kẹp nằm trong phần đo của giãn kế.

- Tương tự $\sigma = K(\epsilon^p)^M$ ta có $F = K'u_p^M$. Quan hệ $F(u_p)$ cho phép ta xác định một cách gần đúng luật thừa hoá bên M. Vì $\sigma = F/S$ và $\epsilon^p = u_p/L_p$, ta có thể suy ra L_p và xác định được biến dạng dẻo $\epsilon^p = u_p/L_p$.

Như vậy, đối với mỗi loại vật liệu ở nhiệt độ cho trước, ta có thể xác định chiều dài hữu ích tương đương bằng cách tiến hành thí nghiệm trước chỉ trên một mẫu. Vì ở đây chỉ đề cập đến vấn đề hiệu chỉnh chiều dài hữu ích so với chiều dài phần hình trụ của mẫu, nên mặc dù các giả thiết đặt ra cho việc xác định L_p chưa thực sự chặt chẽ, song cũng đủ độ tin cậy để ta có thể áp dụng khi tính toán biến dạng dẻo trong thử kéo.

d) Nhiệt độ

Đối với các thí nghiệm biến dạng ở trạng thái nóng, vấn đề đo nhiệt độ hết sức quan trọng. Độ chính xác tuyệt đối khi đo nhiệt độ của mẫu đòi hỏi không vượt quá $\pm 0,1 \div \pm 0,5$ °C. Kết quả tính toán dựa trên phương trình Dorn (trình bày trong chương 6), biểu diễn mối quan hệ giữa tốc độ biến dạng và nhiệt độ :

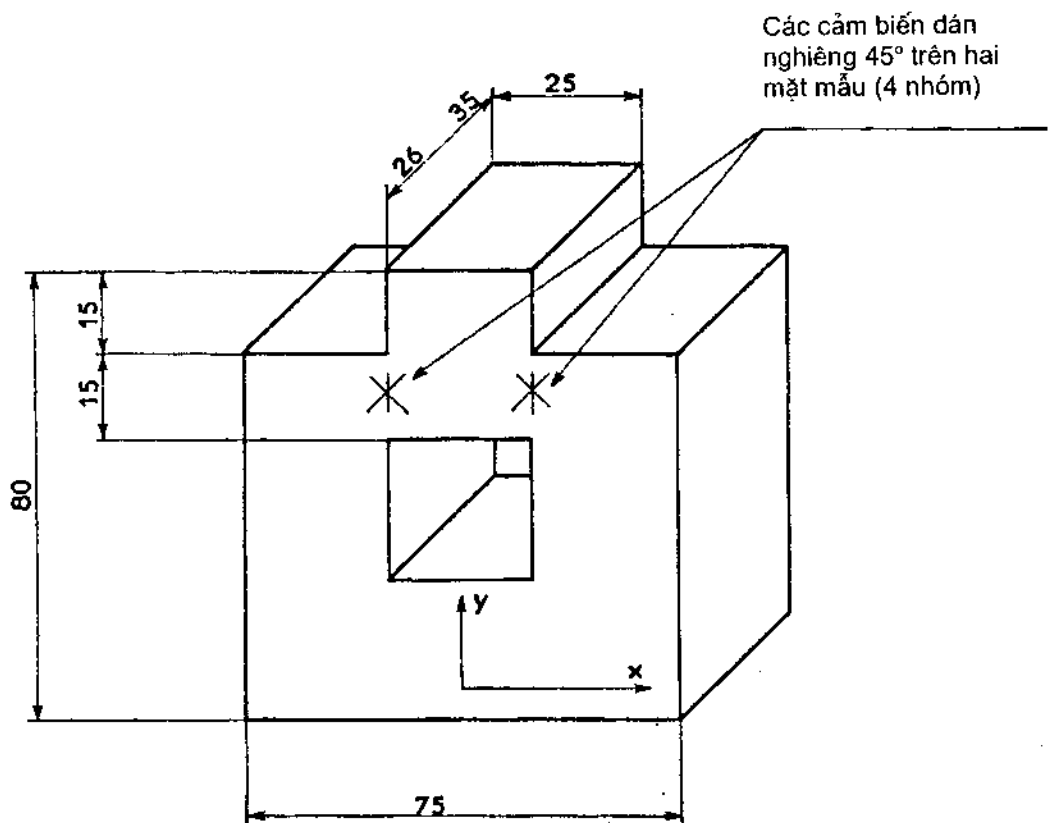
$$\dot{\epsilon}^p = f(\sigma, \dots) \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right),$$

cho phép chứng minh được rằng, độ chính xác tương đối cần có đối với nhiệt độ phải cao hơn độ chính xác tương đối cần đạt đối với biến dạng từ 15 đến 70 lần

$$\frac{\delta \epsilon^p}{\epsilon^p} \approx (15 \div 70) \frac{\delta T}{T}.$$

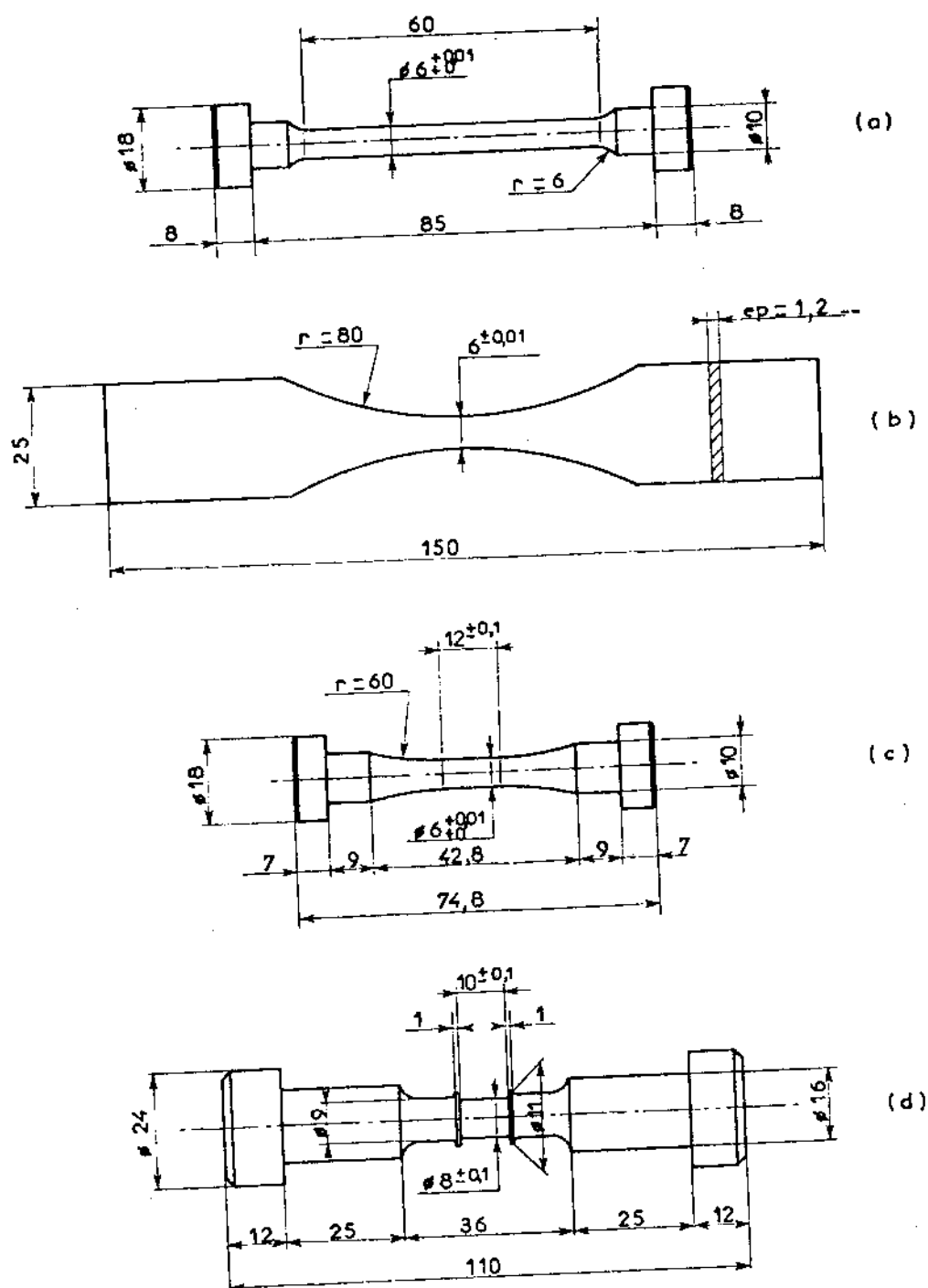
Nếu ở 500 °C ta muốn có độ chính xác khi đo biến dạng là 2 %, thì độ đồng đều của nhiệt độ trong thể tích của mẫu cũng như quá trình đo và khống chế nhiệt độ phải đạt độ chính xác khoảng $\pm(0,1 \div 0,5)$ °C. Để có độ chính xác như vậy, cặp nhiệt cần phải được hàn vào bề mặt mẫu. Phương pháp đặt cặp nhiệt này chỉ có thể áp dụng cho các thí nghiệm nghiền cứu về biến dạng. Đối với các thí nghiệm phá hủy tĩnh hoặc mỏi, mối hàn giữa cặp nhiệt và mẫu sẽ tạo nên điểm khởi đầu cho phá hủy. Do vậy, đối với các thí nghiệm phá hủy, người ta thường áp dụng phương pháp xác định nhiệt độ bằng cảm biến quang học thông qua việc đo bức xạ hồng ngoại của mẫu. Tuy nhiên, phương pháp này cũng có những hạn chế, bởi lẽ khả năng bức xạ hồng ngoại của mẫu sẽ bị thay đổi cùng với sự biến đổi của trạng thái phá hủy vì mô trước khi phá hủy vĩ mô xảy ra.

3.2.2.3. Mẫu thử nghiệm



Hình 3.12. Mẫu thử cắt thuần túy bằng nén.

Việc xác định hình hình học và chế tạo mẫu thử nghiệm luôn là khâu quan trọng, đòi hỏi sự tinh tế và khéo léo. Khi xác định hình dạng của mẫu, ta thường phải chấp nhận sự dung hoà giữa tính năng kỹ thuật của thiết bị thử nghiệm (kiểu chất tải, lực lớn nhất, độ cứng vững, hệ thống nung và khống chế nhiệt độ, ...) và phương pháp xác định các đại lượng cần đo (độ chính xác của lực kế, cách đặt đầu đo của giãn kế : trên phần chiều dài hữu ích của mẫu hay trên các đầu kẹp,...). Một vài dạng mẫu được dùng phổ biến cho một số thí nghiệm đặc trưng (kéo, nén, cắt, xoắn) được trình bày ở trên.

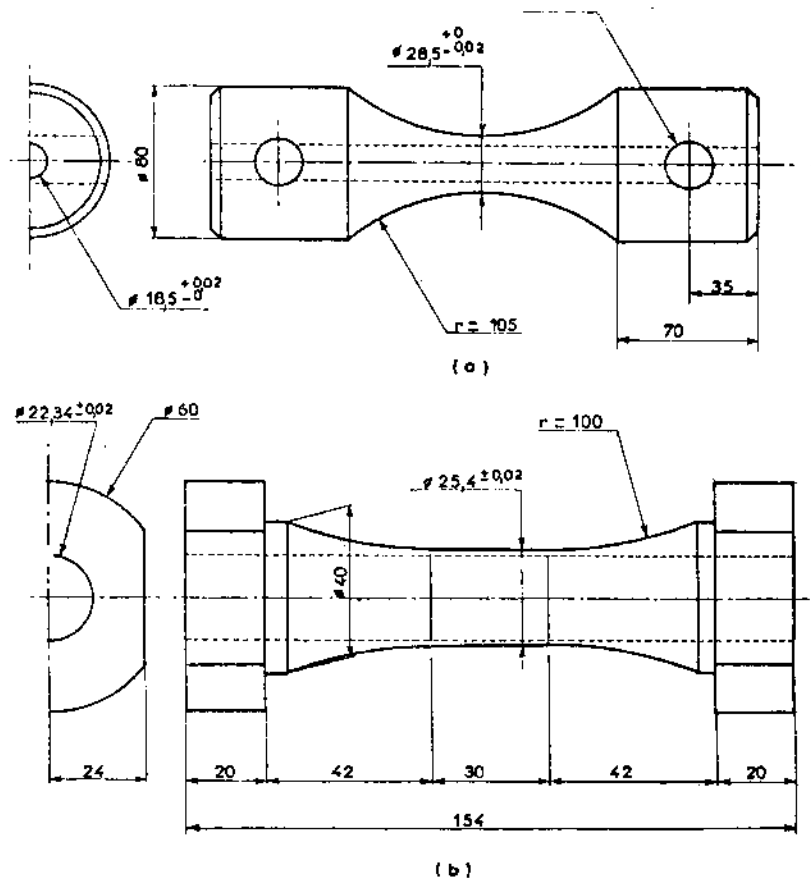


Hình 3.13. Mẫu thử kéo

- tiết diện tròn (a)
- mẫu phẳng (b)

Mẫu thử kéo-nén

- với giãn kế đặt ngoài hoặc cảm biến điện trở dán (c)
- với giãn kế đặt cục bộ hoặc cảm biến quang học (d)



Hình 3.14. Mẫu thử kéo-xoắn:
a) định vị bằng chốt; b) định vị bằng kẹp.

3.2.3. Phương pháp nhận dạng mô hình thuộc tính

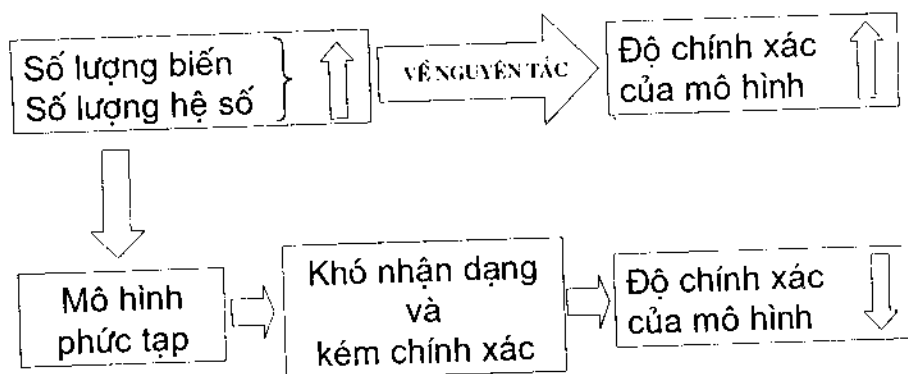
Lý thuyết nhiệt động học chỉ cho phép ta thiết lập các mô hình thuộc tính tổng quát mà không đưa ra các mô hình dưới dạng phương trình giải tích cụ thể với các hệ số xác định. Bằng các thí nghiệm đặc trưng, tiến hành đối với mỗi vật liệu cụ thể, ta mới có thể có được các quan hệ định lượng về các hiện tượng cần nghiên cứu mà mô hình tổng quát phải thoả mãn. Nhận dạng mô hình chính là công việc xác định các hàm cụ thể tham gia vào mô hình và tìm các giá trị số của các hệ số đặc thù cho mỗi vật liệu. Đây là công đoạn phức tạp và khó khăn. Đôi khi không phải là những nguyên tắc chặt chẽ cần tuân thủ sẽ quyết định sự thành công mà chính là kinh nghiệm của "nghệ thuật" xây dựng mô hình mới giữ vai trò quan trọng trong việc phát triển mối quan hệ giữa lý thuyết và thực nghiệm.

3.2.3.1. Thiết lập các mô hình dưới dạng phương trình giải tích

a) Quan hệ giữa chất lượng và số lượng các hệ số của mô hình

Với một tập hợp các kết quả thực nghiệm, bao giờ ta cũng có thể xác định được một hàm có khả năng mô tả được hiện tượng nghiên cứu với độ chính xác không thấp hơn giới hạn cho phép nào đó. Tuy nhiên, một mô hình muốn trở thành một quy tắc, một định luật thì phải mang tính tổng quát. Có nghĩa là mô hình không chỉ thoả mãn một số dạng thí nghiệm tiến hành để nhận dạng nó mà phải đúng cho cả các trường hợp khác. Tổng hợp các "tính hướng" mà mô hình có thể thoả mãn xác định *miền ý nghĩa* của nó. Miền ý nghĩa đặc trưng cho chất lượng của mô hình và được biểu thị một cách định lượng bởi tập hợp các tính hướng, lịch sử biến đổi cũng như miền biến đổi có thể của các biến trong mô hình. Ví dụ, định luật dẻo Hencky-Mise chỉ đúng cho vật liệu đẳng hướng với chất tải hướng tâm trong miền biến dạng dưới ngưỡng phá huỷ.

Quan hệ chất lượng – số lượng



Khi thiết lập mô hình dưới dạng giải tích ta cần phải chú ý đến số lượng các hệ số (hay số lượng các biến) tham gia vào phương trình. Bởi lẽ, số lượng hệ số thường quyết định mức độ chính xác của mô hình, nhưng đồng thời cũng quyết định mức độ khó khăn khi nhận dạng chúng. Nhận dạng hai hệ số có thể tiến hành bằng tính toán thông thường, nhận dạng nhiều hệ số trong một mô hình đòi hỏi phải áp dụng các thủ thuật số và cần thiết phải có sự tham gia của máy tính. Do vậy, khi xây dựng một mô hình, ta cần phải xem xét một cách sáng suốt để đảm bảo sự dung hoà trong quan hệ giữa chất lượng và cái "giá phải trả", hay nói một cách khác giữa ý nghĩa (độ chính xác) của mô hình và số lượng hệ số cần thiết, như mô tả trên sơ đồ nêu trên.

b) Mô hình hoá các đặc tính phi tuyến

Phần lớn các hiện tượng vật lý trình bày trong tài liệu này mang nặng tính phi tuyến. Có nghĩa là việc tuyến tính hoá bằng phương pháp khai triển Taylo giới hạn ở bậc một chỉ có thể mô tả được hiện tượng với sự biến thiên rất nhỏ của các biến.

Trong số các khả năng biểu diễn tính phi tuyến, người ta thường áp dụng chủ yếu :

- Hàm exponent, $\exp(aX)$, hay logarit, $\ln(aX)$,
- Hàm lũy thừa, aX^N , trong đó N có thể là hằng số hoặc là một hàm của biến X ($aX^{N(X)}$).

Khi lấy logarit, các hàm nêu trên sẽ cho các quan hệ tuyến tính, tạo thuận lợi cho quá trình nhận dạng mô hình, và có thể, trong một số trường hợp, tiện cho việc giải lý thuyết các mô hình khi nghiên cứu các đặc tính của chúng.

c) Quy tắc lũy tích tuyến tính

Thoả mãn quy tắc lũy tích tuyến tính là một đặc tính quan trọng của tất cả các phương trình vi phân tuyến tính hoặc phi tuyến với các biến riêng rẽ. Một mô hình cũng có thể thoả mãn hay không thoả mãn quy tắc quan trọng này.

Các mô hình xây dựng trên cơ sở thế năng tiêu hao đều có dạng tổng quát sau:

$$\dot{X} = f[X, V(t)]$$

trong đó X là biến của hiện tượng, biến đổi theo thời gian và là hàm của các biến nguyên nhân V (để đơn giản, ở đây ta chỉ đưa vào một biến V).

Ta sẽ chứng minh rằng, nếu phương trình vi phân trên có các biến riêng rẽ (các biến có thể tách riêng được), tức là ta có thể viết

$$\dot{X} = g(X)h(V) ,$$

(g và h có thể là các hàm phi tuyến) thì nó sẽ phải thoả mãn quy tắc lũy tích tuyến tính. Với điều kiện ban đầu : $t = 0 \rightarrow X = 0$, phương trình trên có nghiệm biểu diễn bởi :

$$[g(X)]^{-1} dX = h(V) dt ,$$

hay

$$\int_0^X [g(X)]^{-1} dX = \int_0^t h(V) dt .$$

Trước tiên ta xét trường hợp $V = \text{const} = V_0$, và giả thiết $t(X, V_0)$, ta có nghiệm tương ứng :

$$t(X, V_0) = [h(V_0)]^{-1} \int_0^X [g(X)]^{-1} dX.$$

Tiếp theo ta xét trường hợp V biến đổi theo thời gian, ta có

$$\tau(X, V) = [h(V)]^{-1} \int_0^X [g(X)]^{-1} dX$$

là hàm của X và thời gian, được suy ra từ $t(X, V_0)$ bằng cách thay V_0 bằng $V(t)$. dt biểu diễn bởi : $dt = [h(V)]^{-1} [g(X)]^{-1} dX$.

Ta tính :

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau[X^*, V(t)]}$$

trong đó t^* là thời gian tương ứng với X^* , $X^* = X(t^*)$

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau[X^*, V(t)]} = \int_0^{X^*} \frac{[h(V)]^{-1} [g(X)]^{-1} dX}{[h(V)]^{-1} \int_0^{X^*} [g(X)]^{-1} dX} = \int_0^{X^*} \frac{[g(X)]^{-1} dX}{\int_0^{X^*} [g(X)]^{-1} dX}$$

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau[X^*, V(t)]} = 1$$

Quan hệ trên cho thấy lũy tích của thời gian thu nhỏ dt/τ bằng 1. Đây chính là quy tắc lũy tích tuyến tính mà mọi phương trình vi phân với các biến riêng rẽ đều phải thỏa mãn.

d) Sự phân tán và các hệ số ngẫu nhiên

Sự phân tán của các kết quả thực nghiệm có thể do các yếu tố sau gây nên :

- Bản chất của hiện tượng, sự không đồng nhất, biến đổi ngẫu nhiên, tải không ổn định,....,

- Sự khác nhau giữa các mẫu đo gia công, do xử lý nhiệt,

Độ phân tán của các kết quả thực nghiệm có thể đến khoảng 1-5% đối với biến dạng đàn hồi và khoảng 10-50 % đối với biến dạng dẻo tức thời hoặc dẻo nhớt. Thực tế cho thấy,

tính phi tuyến của hiện tượng có ảnh hưởng đáng kể tới độ phân tán. Tính phi tuyến càng cao thì độ phân tán của kết quả thực nghiệm càng lớn. Một phương pháp đơn giản và hiệu quả cho phép tính tới ảnh hưởng của độ phân tán là đưa thêm vào mô hình hệ số nhân mang tính thống kê. Ví dụ hệ số A trong mô hình sau :

$$\dot{X} = AX^m V^n .$$

Với các số liệu thực nghiệm đầy đủ, ta có thể xác định hệ số A thông qua mật độ xác suất, đường cong phân bố hoặc, hay dùng hơn, giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của nó.

3.2.3.2. Các phương pháp số nhận dạng mô hình

Khi có một mô hình biểu diễn dưới dạng giải tích và một tập hợp các số liệu thực nghiệm phản ánh ảnh hưởng của tất cả các biến trong mô hình, ta có thể xác định được trị số của các hệ số ẩn sao cho mô hình có thể mô tả một cách trung thực nhất các thực nghiệm.

Tuỳ theo mô hình nghiên cứu và các thí nghiệm có thể tiến hành được, vấn đề nhận dạng các hệ số có thể được đặt ra theo nhiều cách khác nhau. Ta phân biệt hai trường hợp sau đây :

- Nhận dạng trực tiếp mô hình thuộc tính, hay nói một cách khác, nhận dạng hàm truyền đặc trưng cho thuộc tính của vật liệu cho trước. Ví dụ, qui luật ứng xử trong đó có biến X và tốc độ (đạo hàm vật chất) của nó, $\dot{X}$, tham gia :

$$H(X, \dot{X}, Y) = 0 .$$

Nếu ta có thể đo một cách đồng thời trị số của cả ba đại lượng $(X, \dot{X}, Y)$, thì, từ các số liệu thực nghiệm, ta có thể tìm được các hệ số xác định hàm H một cách trực tiếp bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính hoặc phi tuyến.

- Nhận dạng theo hành vi của vật liệu, có nghĩa là ta tìm các hệ số đặc trưng của hàm H bằng cách làm cho phương trình thuộc tính, đối với tác động ngoại lực cho trước, tương hợp một cách tốt nhất với ứng xử của vật liệu quan sát được bằng thực nghiệm với cùng tác động ngoại lực. Trong trường hợp này, người ta áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất phi tuyến.

Cần lưu ý rằng :

- Một mô hình chỉ có thể được nhận dạng tốt nếu ta có một số lượng kết quả thực nghiệm đầy đủ với khoảng biến thiên đủ rộng của các biến. Trong trường hợp ngược lại, một hay vài hệ số của mô hình có thể sẽ có giá trị không xác thực,

- Cho cùng một vật liệu và cho cùng một mô hình, ta có thể xác định được vài giá trị khác nhau cho mỗi hệ số. Mỗi giá trị phù hợp với một miền biến thiên hoặc một dạng chất tải nhất định, ví dụ : chất tải chuyển tiếp nhanh, chất tải ổn định,

a) Phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính

Thực chất của phương pháp là giảm thiểu độ chênh lệch giữa các giá trị thực nghiệm và các giá trị tính toán theo mô hình. Để đánh giá sai số ta có thể áp dụng nhiều tiêu chuẩn khác nhau, và cuối cùng thường đưa đến việc tối thiểu hoá hàm chênh lệch $h(a)$ phụ thuộc vào các hệ số đặc trưng ẩn a_i ($i=1,2,...,n$).

Có nhiều phương pháp cực tiểu hoá với mức độ hiệu quả khác nhau. Dưới đây chỉ trình bày phương pháp bình phương nhỏ nhất, áp dụng khi hàm chênh lệch được chọn là tổng các bình phương của các sai số :

$$h(a) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m E_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [y_j^c(a, x_j) - y_j^E(x_j)]^2,$$

trong đó y_j^c và y_j^E tương ứng các giá trị tính toán và thực nghiệm của một trong các thông số, biểu diễn dưới dạng hàm của các thông số khác x_j (j là chỉ số cho biết điểm tính toán hoặc thực nghiệm). Trên hình 3.15 trình bày sơ đồ cách xác định hàm số đó.

Phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính chỉ áp dụng khi biểu thức của y_j^c tuyến tính đối với các hệ số a_i

$$y_j^c = A_0(X_j) + A_1(X_j)a_1 + \dots + A_n(X_j)a_n$$

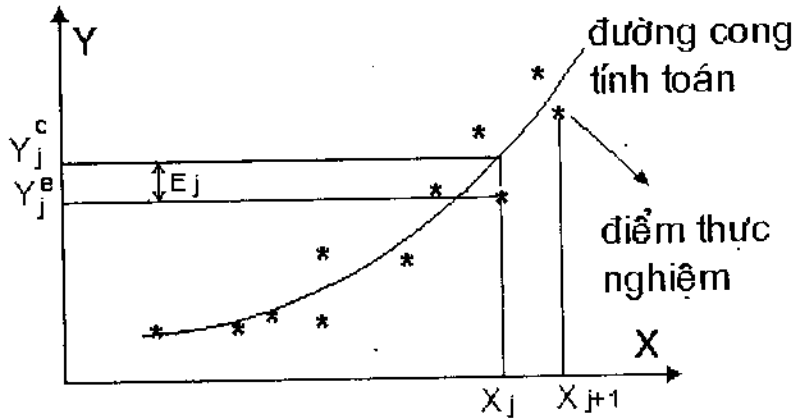
Để cực tiểu hoá hàm h ta chỉ cần viết :

$$\frac{\partial h}{\partial a_k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Nhờ đặc điểm tuyến tính, ta có thể tìm thấy ngay với $A_{ij} = A_i(X_j)$:

$$\sum_i \left(\sum_j A_{jk} A_{ji} \right) a_i = \sum_j A_{jk} (y_j^E - A_{j0}).$$

Giải hệ phương trình tuyến tính trên (ma trận $\sum_j A_{jk} A_{j\mu}$ đối xứng), ta nhận được các hệ số a_i .



Hình 3.15. Sơ đồ nhận dạng bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính.

b) Phương pháp Gauss-Newton

Phương pháp Gauss-Newton là phương pháp mở rộng của phương pháp trên, áp dụng khi biểu thức của y_j^C phi tuyến. Để tuyến tính hoá y_j^C ta dùng khai triển :

$$y_j^C(a) = y_j^C(a^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j^C}{\partial a_i}(a^0) \Delta a_i$$

Cho mỗi lượng gia tăng của các hệ số a^0 cho trước, ta tính lần lượt hàm chênh lệch tại mỗi điểm y_j^C và các đạo hàm (gradient) của nó theo từng hệ số (các gradient này hiếm khi có thể xác lập một cách tường minh, do vậy ta cần phải bắt đầu bằng một lượng gia tăng đủ nhỏ của mỗi hệ số). Biểu thức này, về hình thức, giống như biểu thức ở mục trước, ta chỉ cần thay thế các hệ số trong mỗi lần lặp bởi $a_i^1 = a_i^0 + \Delta a_i$ để có được lời giải a^1 tốt hơn. Phương pháp lặp này không phải khi nào cũng hội tụ, song nếu hội tụ thì sẽ hội tụ tương đối nhanh và đặc biệt tiện lợi, hiệu quả cho việc nhận dạng các mô hình với số lượng các hệ số không quá lớn.

3.3. SƠ ĐỒ HOÁ CÁC THUỘC TÍNH LƯU BIẾN THỰC

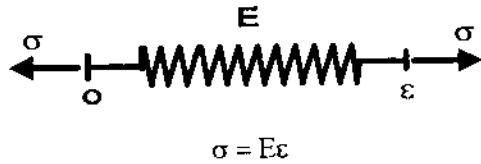
3.3.1. Mô hình tương tự

Các mô hình tương tự được cấu tạo bởi các phân tử hoặc nhóm phân tử cơ khí, có ứng xử tương tự hành vi của vật liệu khi chịu tác dụng của ngoại lực. Chúng chỉ được dùng

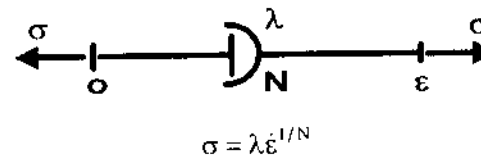
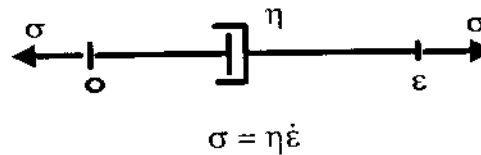
với mục đích cung cấp một hình ảnh cụ thể, giúp ta có các khái niệm ban đầu về thuộc tính của vật liệu mà không mang bất kỳ một ý nghĩa nào về cơ chế vật lý của quá trình hay hiện tượng cần mô tả.

Các phần tử cơ khí thường dùng là :

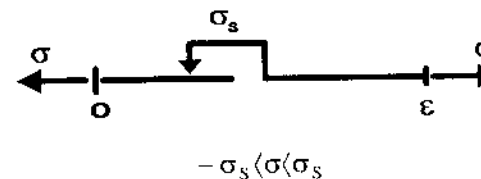
- Lò xo : mô tả đàn hồi tuyến tính



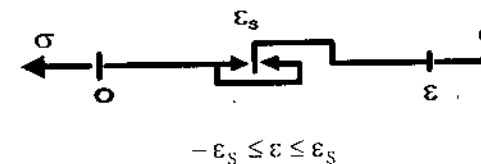
- Giảm sóc thủy lực : mô tả nhớt tuyến tính hoặc phi tuyến



- Má trượt : mô tả ngưỡng ứng suất



- Mố chặn : mô tả ngưỡng biến dạng



Các phần tử khác nhau (biểu thị qua chỉ số i) nêu trên có thể liên kết :

- Hoặc nối tiếp :

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \quad \sigma = \sigma_i$$

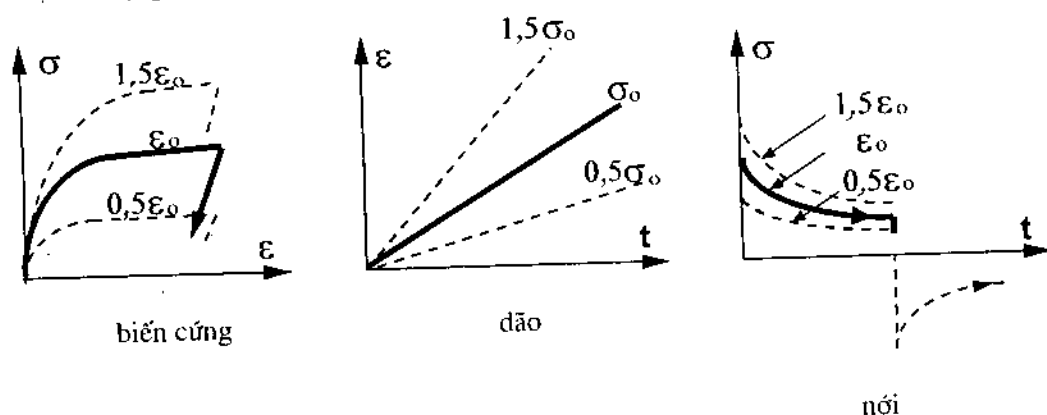
- Hoặc song song :

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad \varepsilon = \varepsilon_i$$

Các nguyên lý tương tự giữa cơ và điện trình bày ở trên, cho phép ta xây dựng các mô hình tương tự kiểu mạng điện nhằm mô tả các thuộc tính của vật liệu.

3.3.2. Chất lỏng nhớt

Vật liệu được gọi là "chất lỏng nhớt" nếu trong các thí nghiệm đặc trưng, ứng xử của vật liệu có dạng sau :



Hình 3.16. Chất lỏng nhớt.

Biến dạng của vật liệu xảy ra với mọi giá trị của ứng suất : $\varepsilon = f(\sigma)$. Mô hình tương tự đơn giản bao gồm một lò xo và một giảm xóc thủy lực tuyến tính mắc nối tiếp (mô hình Maxwell) :



$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Trong thí nghiệm nới, $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t)$ với hàm Heaviside $H(t) = 0$ khi $t < 0$ và $H = 1$ khi $t \geq 0$, ứng xử của vật liệu có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\sigma = E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right).$$

Mô hình trên có thể áp dụng cho các trường hợp sau :

- Polyme nhiệt dẻo ở nhiệt độ gần điểm nóng chảy;
- Bê tông ướt (bỏ qua hoá cứng);
- Đa số kim loại và hợp kim ở nhiệt độ gần điểm nóng chảy.

3.3.3. Vật rắn đàn hồi

3.3.3.1. Đàn hồi lý tưởng

Dạng ứng xử đàn hồi lý tưởng của vật liệu trong các thí nghiệm đặc trưng được trình bày một cách định tính trên hình 3.17.

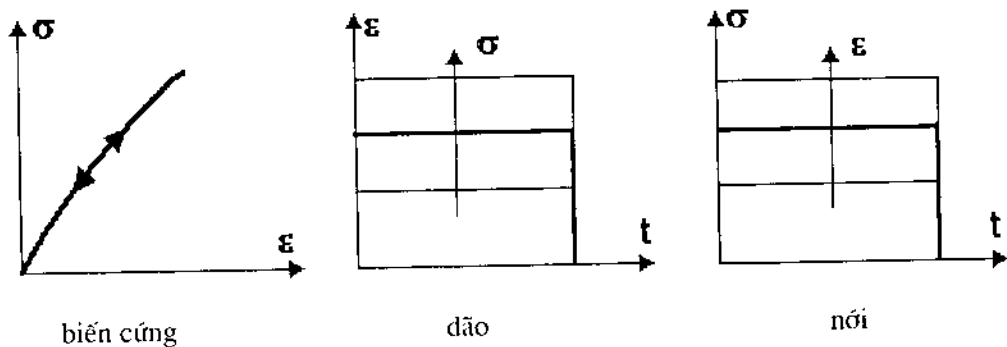
- Vật liệu có tính phục hồi tức thời. Quan hệ ứng suất - biến dạng có dạng đơn giản sau :

$$\sigma = f(\varepsilon).$$

- Mô hình tương tự đàn hồi tuyến tính được biểu diễn bởi lò xo

$$\sigma = E\varepsilon.$$

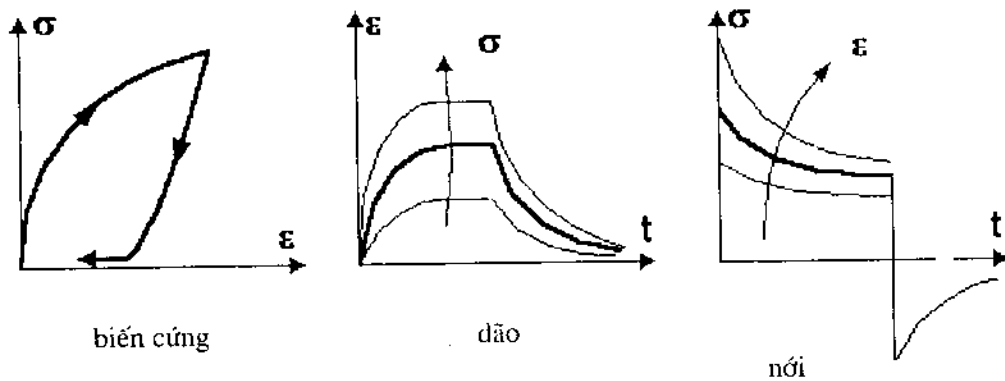
- Áp dụng đối với kim loại và hợp kim, bê tông, đá chịu tải dưới giới hạn đàn hồi.



Hình 3.17. Vật rắn đàn hồi lý tưởng.

3.3.3.1. Đàn hồi nhớt

Dạng ứng xử của vật liệu trong các thí nghiệm đặc trưng trình bày một cách định tính trên hình 3.18.

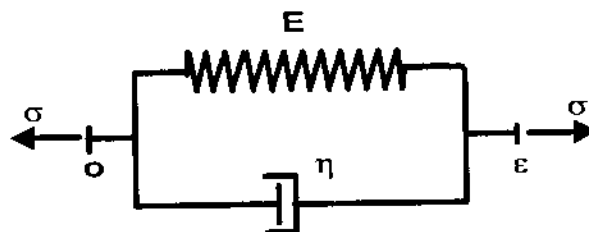


Hình 3.18. Vật rắn đàn hồi nhớt.

Vật liệu có tính phục hồi chậm (sau một khoảng thời gian nhất định) :

$$\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon}).$$

Mô hình tương tự cấu tạo bởi một lò xo và một giảm xóc thuỷ lực tuyến tính mắc song song (mô hình Kelvin-Voigt) :



Ứng xử của vật liệu trong thử đảo, $\sigma = \sigma_0 H(t)$, có dạng :

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right].$$

Mô hình áp dụng cho polime, cao su, gỗ trong trường hợp chất tải không quá lớn.

3.3.4. Vật rắn dẻo tức thời

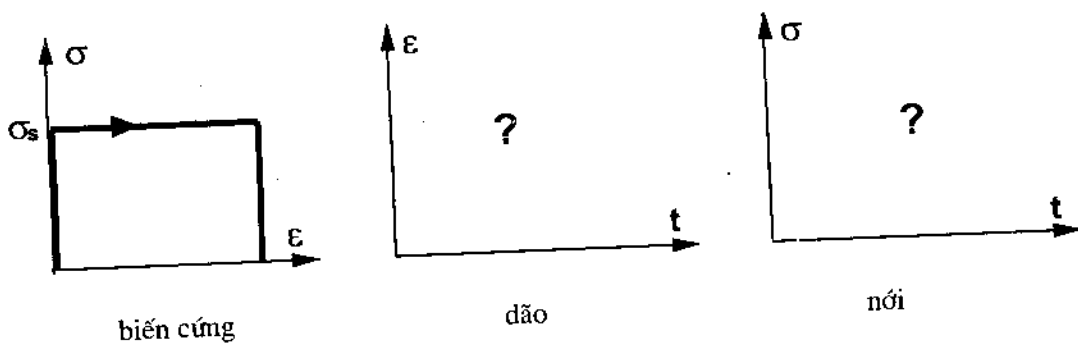
Thuộc tính của vật rắn dẻo tức thời không phụ thuộc một cách tường minh vào thời gian. Theo định nghĩa, biến dạng dẻo ε^p tương ứng với trạng thái nổi (dỡ tải) : $\varepsilon^p = \varepsilon(\sigma = 0)$.

3.3.4.1. Vật rắn cứng-dẻo lý tưởng

Biến dạng không tồn tại hoặc không đáng kể khi ứng suất tác dụng nhỏ hơn ngưỡng σ_s . Ở giá trị σ_s của ứng suất, biến dạng là vô định với bất kỳ tốc độ biến dạng nào trong thí nghiệm biến cứng và với bất kỳ thời gian nào trong thí nghiệm đảo hoặc nổi :

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\sigma = \sigma_s \text{Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^p \text{ (vô định)}$$



Hình 3.19. Vật rắn cứng-dẻo lý tưởng.

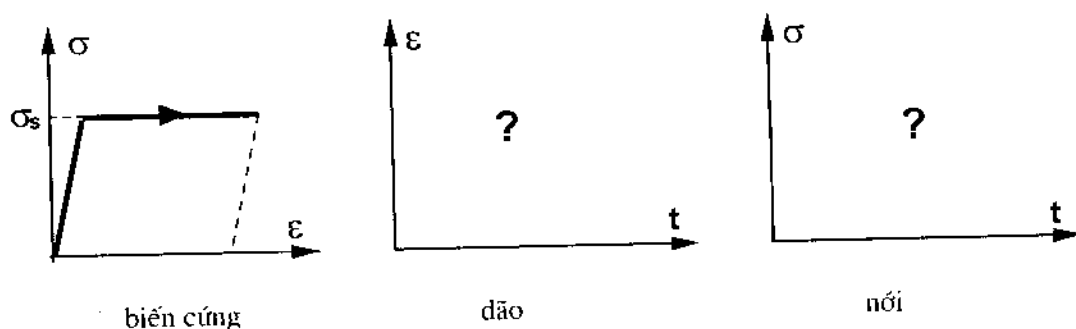
Mô hình tương tự của thuộc tính cứng-dẻo lý tưởng là má trượt và được ứng dụng phổ biến trong cơ học đất và trong tạo hình kim loại ở trạng thái nóng.

3.3.4.2. Vật rắn đàn-dẻo lý tưởng

Biến dạng đàn hồi tuyến tính khi ứng suất tác dụng dưới ngưỡng σ_s . Ở giá trị σ_s , biến dạng vô định và không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng :

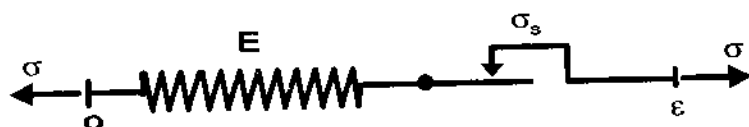
$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \sigma_s \text{Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p \text{ (vô định)}$$



Hình 3.20. Vật rắn đàn-dẻo lý tưởng.

Mô hình tương tự của thuộc tính đàn-dẻo lý tưởng là mô hình Saint-Venant : lò xo mắc nối tiếp với má trượt :



Mô hình áp dụng cho các trường hợp sau :

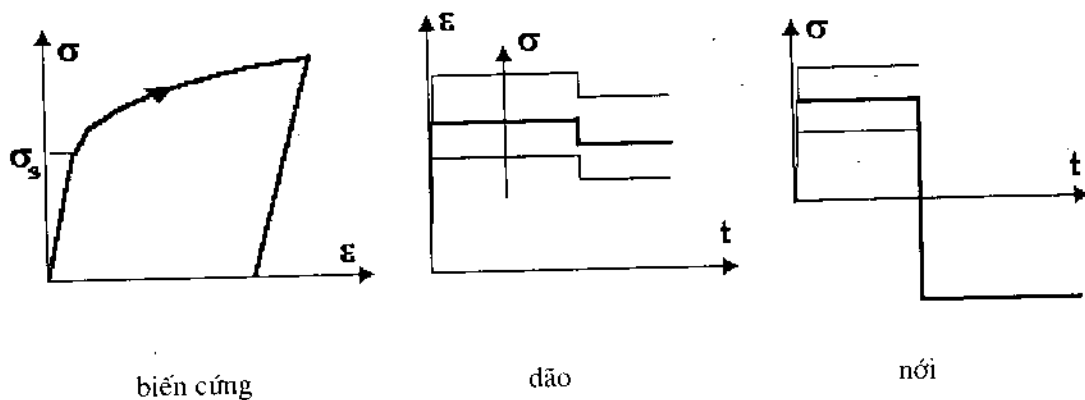
- Thép carbon thấp với $\varepsilon < 2 \cdot 10^{-2}$ và $T < \frac{1}{4} T_M$ (T_M là nhiệt độ nóng chảy, K),
- Phân tích trạng thái tối hạn trong tính toán các kết cấu.

3.3.4.3. Vật rắn đàn-dẻo biến cứng

Biến dạng toàn phần bằng tổng của biến dạng đàn hồi tuyến tính và biến dạng dư :

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma \geq \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma).$$



Hình 3.21. Vật rắn đàn-dẻo biến cứng.

Đường cong đỡ tải sau khi kéo được xuy ra từ đường cong biến cứng khi thử nén theo phương pháp Masing trình bày trên hình 3.22 (điểm P' đối xứng với điểm đỡ tải P qua tâm O).

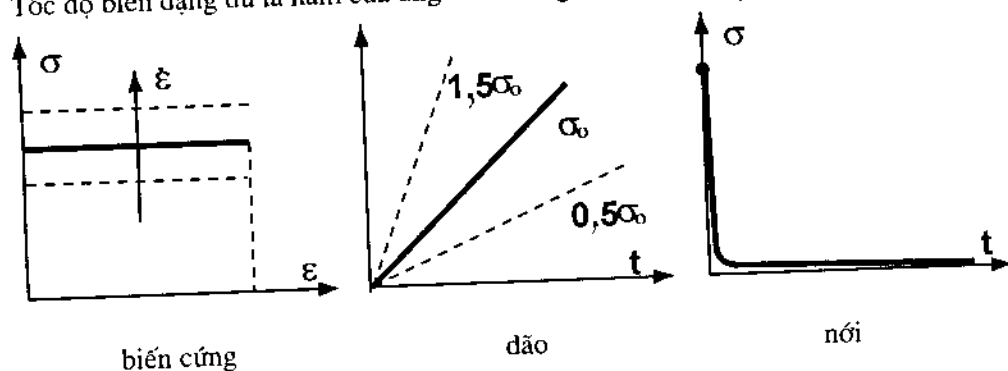
Mô hình áp dụng cho kim loại và hợp kim ở nhiệt độ biến dạng nguội ($T < \frac{1}{4}T_M$, T_M là nhiệt độ nóng chảy, K).

3.3.5. Vật rắn dẻo nhớt

Điểm khác biệt cơ bản so với vật liệu dẻo tức thời là dưới tác dụng của ngoại lực, vật liệu dẻo nhớt chịu biến dạng chảy dẻo, phụ thuộc vào thời gian (không tồn tại trạng thái cân bằng).

3.3.5.1. Dẻo nhớt lý tưởng

Tốc độ biến dạng dư là hàm của ứng suất tương tự chất lỏng nhớt: $\dot{\epsilon}(\sigma)$.



Hình 3.23. Vật rắn dẻo nhớt lý tưởng.

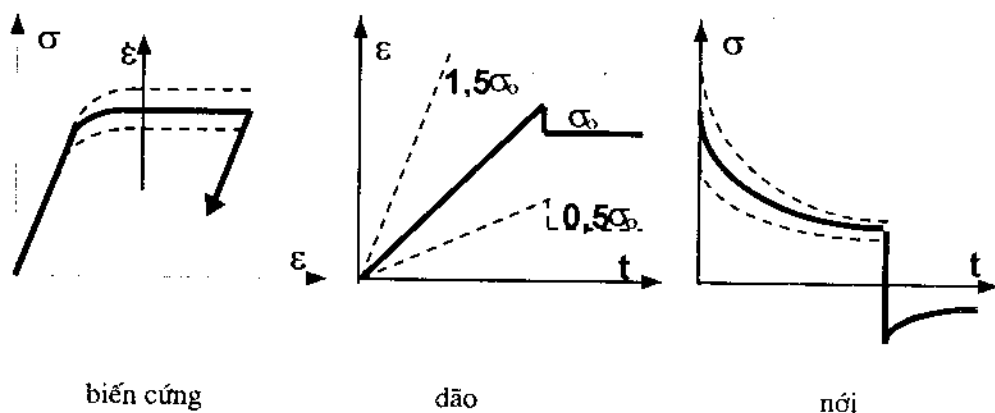
Thuộc tính dẻo nhớt có thể biểu diễn bởi mô hình Norton: $\sigma = \lambda \dot{\epsilon}^{1/N}$, và thường được áp dụng cho kim loại và hợp kim ở nhiệt độ biến dạng nóng ($T > \frac{1}{3}T_M$, T_M là nhiệt độ nóng chảy, K).

3.3.5.2. Đàn-dẻo nhớt lý tưởng

Biến dạng đàn hồi không thể bỏ qua nhưng tốc độ biến dạng dẻo chỉ phụ thuộc vào ứng suất. Không có ảnh hưởng của biến cứng

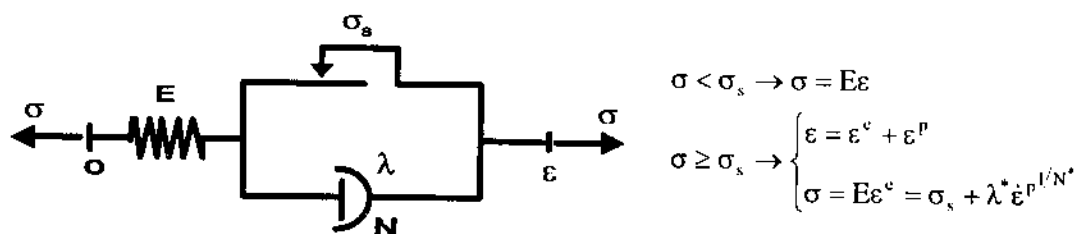
$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \epsilon = \epsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

$$|\sigma| \geq \sigma_s \rightarrow \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma)$$



Hình 3.24. Vật rắn đàn-dẻo nhớt.

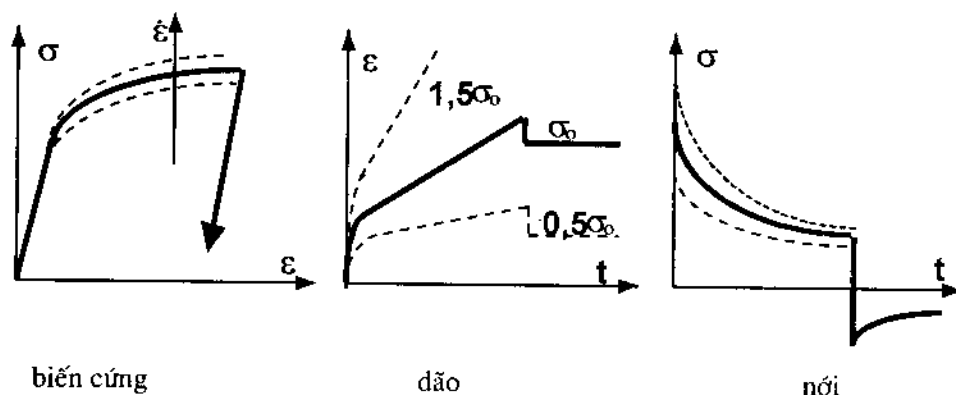
Thuộc tính đàn-dẻo nhớt lý tưởng có thể biểu diễn bởi mô hình tương tự Bingham-Norton:



Trong thí nghiệm nới, ứng xử của vật liệu có thể được biểu diễn bởi :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t) \rightarrow \sigma = \sigma_s + \frac{E\varepsilon_0 - \sigma_s}{\left[1 + \frac{(N-1)E}{\lambda^N} (E\varepsilon_0 - \sigma_s)^{N-1} t\right]^{\frac{1}{N-1}}}$$

3.3.5.3. Đàn-dẻo nhớt biến cứng



Hình 3.25. Vật rắn đàn-dẻo nhớt biến cứng.

Thuộc tính đàn-dẻo nhất biến cứng là thuộc tính phức tạp nhất, bởi lẽ ứng suất không chỉ phụ thuộc vào tốc độ biến dạng mà còn phụ thuộc vào chính biến dạng hoặc các biến gây hoá bền khác

$$|\sigma| < \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$$

$$|\sigma| \geq \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = f(\varepsilon^p, \dot{\varepsilon}^p).$$

Áp dụng cho các trường hợp sau :

- Kim loại và hợp kim ở nhiệt độ trung bình và cao,
- Gỗ chịu tải trọng lớn.

3.3.6. Đặc trưng hoá bền

Có nhiều phương pháp đặc trưng sự biến cứng (hoá bền) của vật liệu gây nên bởi biến dạng dẻo.

3.3.6.1. Biến cứng đẳng hướng

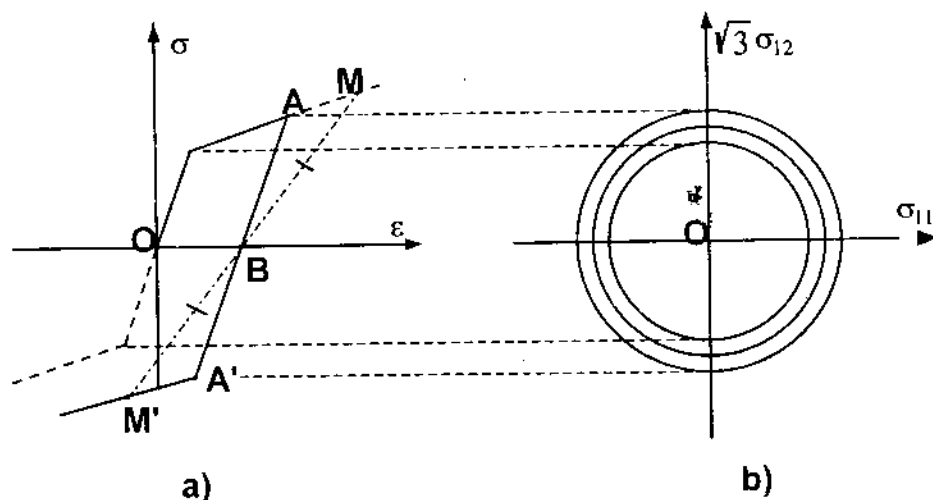
Mặc dù đa số vật liệu có tính dị hướng đáng kể, song sơ đồ biến cứng đẳng hướng vẫn được ứng dụng rộng rãi bởi tính đơn giản và khả năng đặc trưng hữu hiệu của nó trong trường hợp chất tải hướng tâm, nghĩa là khi vectơ chất tải trong không gian ứng suất không thay đổi hướng.

Muốn biết vật liệu dị hướng hoặc đẳng hướng ta cần phải tiến hành các thí nghiệm thử kéo, nén hoặc xoắn với các mẫu được lấy từ vật liệu theo các hướng khác nhau.

Ta nói vật liệu thoả mãn giả thiết biến cứng đẳng hướng nếu biên giới miền đàn hồi chỉ phụ thuộc vào một thông số vô hướng (hình 3.26)

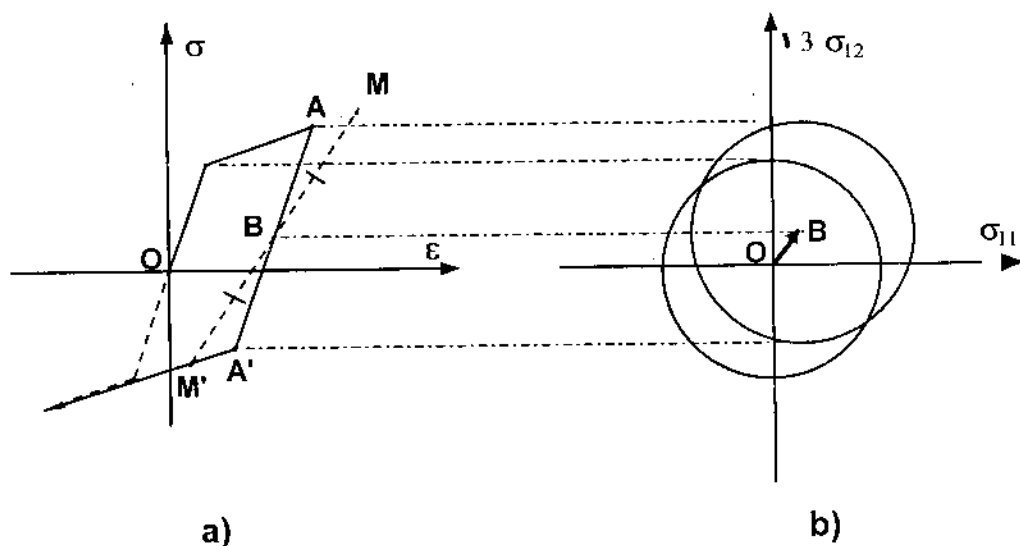
Đường cong thử nén tiếp theo thử kéo được suy ra từ đường cong kéo đơn điệu bởi phép đồng dạng tỷ lệ 1, qua điểm ứng suất bằng 0 (điểm B trên hình 3.26-a).

Các đường chất tải (tập hợp các điểm giới hạn đàn hồi) trong không gian hai chiều : ứng suất pháp và ứng suất tiếp (thí nghiệm kéo-xoắn ống tuýp rỗng với các mức độ biến cứng khác nhau) là các đường đồng dạng và đồng tâm O (hình 3.26-b).



Hình 3.26. Thí nghiệm kéo-nén (a) và thí nghiệm kéo-xoắn (b) với biến cứng đẳng hướng.

3.3.6.2. Biến cứng động



Hình 3.27. Thí nghiệm kéo-nén (a) và thí nghiệm kéo-xoắn (b) với biến cứng động.

Biến cứng động tuyến tính là một dạng đặc trưng phổ biến của biến cứng dị hướng. Miền đàn hồi giữ nguyên độ lớn và hình dạng nhưng dịch chuyển trong không gian ứng suất. Vectơ xác định tâm của miền đàn hồi (điểm B trên hình 3.27) biểu diễn ứng suất nội (dư) ở trạng thái trung hoà.

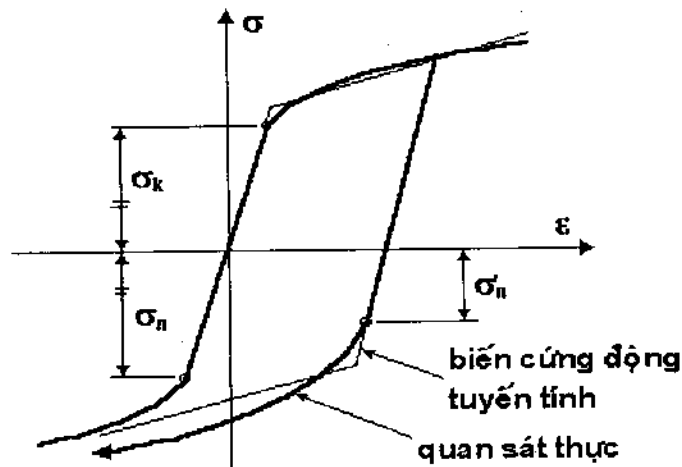
Đường cong nén một chiều được suy ra từ đường cong kéo mới bởi phép đồng dạng với tỷ lệ 1, qua tâm B (hình 3.27-a).

Trong thí nghiệm kéo-xoắn, các đường chất tải tương ứng các mức biến cứng khác nhau được suy ra một cách đơn giản bằng cách tịnh tiến vectơ xác định tâm miền đàn hồi $\overline{OB}$ (hình 3.27-b).

3.3.6.3. Hiệu ứng Bauschinger

Trong thí nghiệm kéo và nén kế tiếp trên cùng một mẫu, ta quan sát thấy giới hạn đàn hồi trong trường hợp nén (sau) nhỏ hơn giới hạn đàn hồi trong trường hợp kéo (trước). Hiện tượng đó gọi là hiệu ứng Bauschinger (hình 3.28).

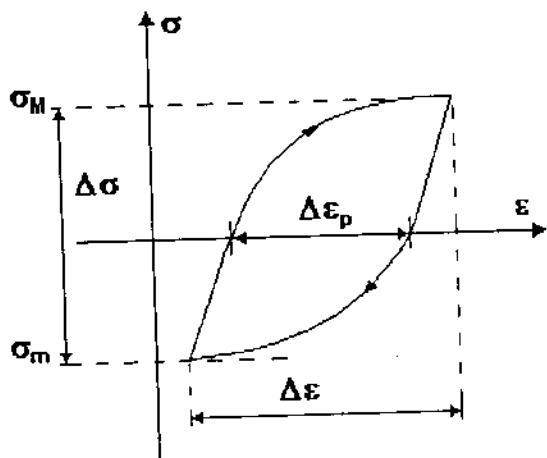
Trong hai sơ đồ đặc trưng hiện tượng biến cứng đơn giản trình bày ở trên, sơ đồ biến cứng động gần hơn với các trường hợp thường gặp trong thực tế và cho ta một sự phản ánh gần đúng của hiệu ứng Bauschinger.



Hình 3.28. Hiệu ứng Bauschinger.

3.3.6.4. Hiệu ứng chất tải chu kỳ

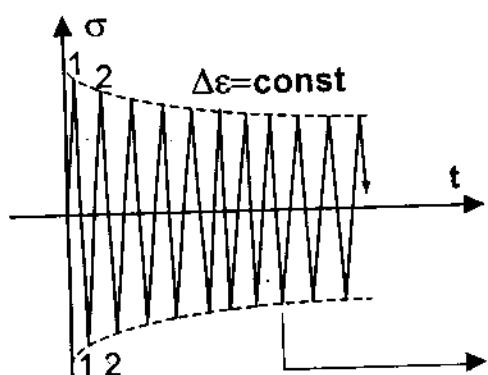
Khi chất tải chu kỳ kéo-nén, đối với đa số kim loại và hợp kim, ta quan sát thấy biến cứng thay đổi trong các chu kỳ. Phụ thuộc vào vật liệu, trạng thái ban đầu và nhiệt độ, có thể xảy ra hoá mềm hoặc biến cứng. Trên hình 3.29, trình bày các đại lượng thường dùng để phân tích các kết quả trong các thí nghiệm chất tải chu kỳ (khi chu kỳ ổn định).



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_M + \sigma_m}{2}$$

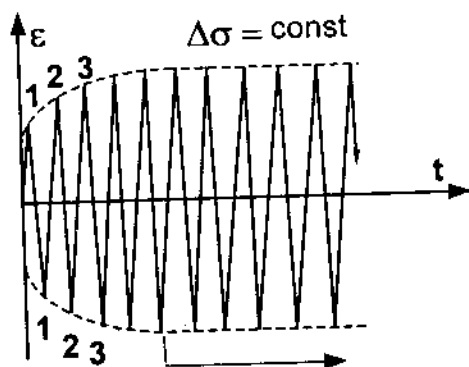
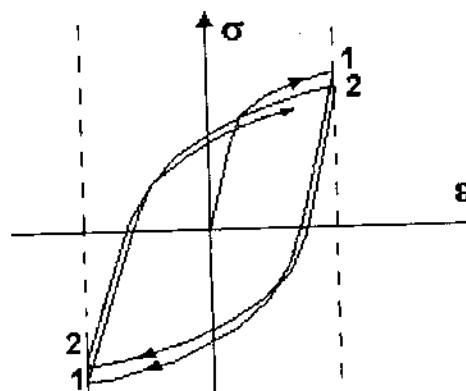
$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p = \frac{\Delta \sigma}{E} + \Delta \varepsilon^p$$

Hình 3.29. Chu kỳ ứng suất-biến dạng



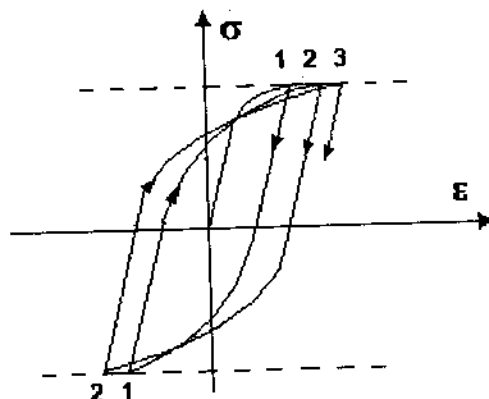
ổn định

a)



ổn định

b)

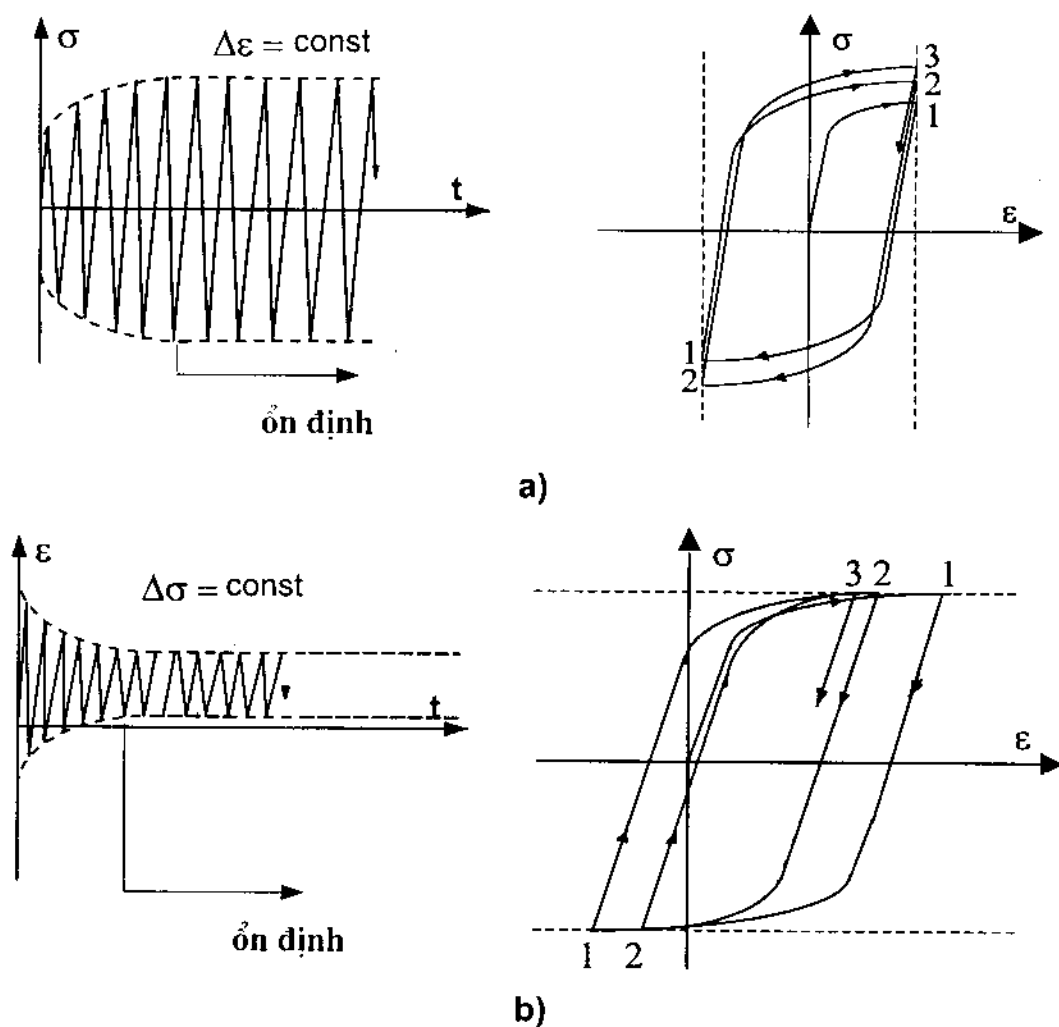


Hình 3.30. Hiện tượng hoá mềm chu kỳ.

Sự hoá mềm biểu hiện khi biên độ ứng suất $\Delta\sigma$ giảm đi ở các chu kỳ tiếp theo trong trường hợp biến dạng không chế (hình 3.30-a) hoặc khi biên độ biến dạng $\Delta\varepsilon$ tăng lên trong thí nghiệm với ứng suất không đổi (hình 3.30.b).

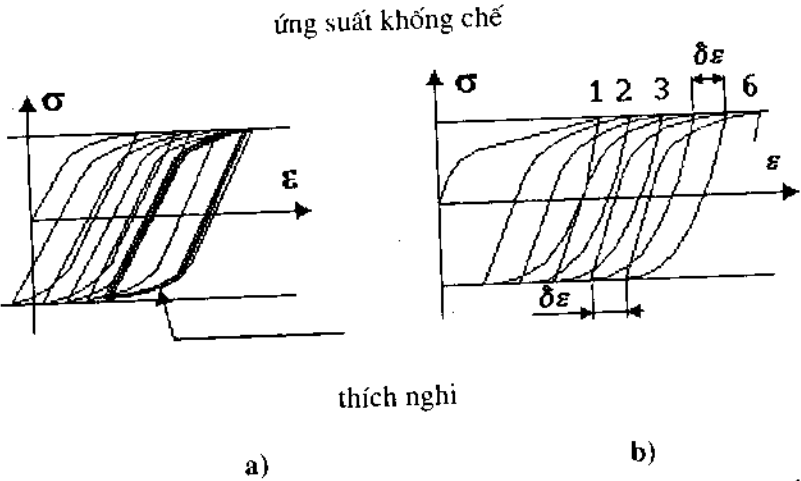
Hiện tượng biến cứng biểu hiện khi, với biến dạng không chế, biên độ ứng suất tăng lên ở các chu kỳ tiếp theo (hình 3.31-a) hoặc khi biên độ biến dạng giảm đi trong trường hợp ứng suất không đổi (hình 3.31-b).

Khi ứng với mỗi tác động chu kỳ của ngoại lực, chu kỳ ứng xử của vật liệu không thay đổi, ta nói rằng ứng xử của vật liệu đã ở trạng thái ổn định (chu kỳ ứng xử ổn định).

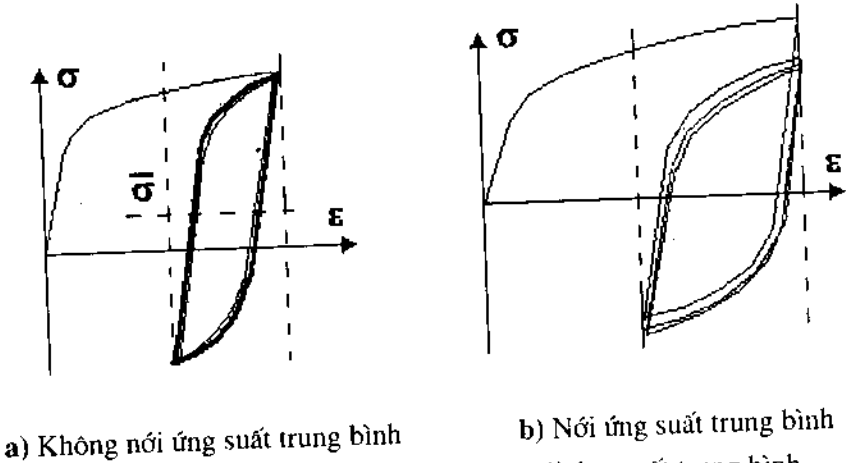


Hình 3.31. Hiện tượng biến cứng chu kỳ.

Nếu tải đối dấu không đối xứng, ta có thể quan sát thấy những hiệu ứng bổ sung như trình bày trên hình 3.32- a và b. Với ứng suất khống chế không đối xứng, có thể có hiện tượng *thích nghi* hoặc, thường thấy hơn, hiện tượng dịch chuyển đều của vòng chu kỳ (biến dạng tăng dần ở mỗi chu kỳ, ngay cả trong chế độ ổn định). Với biến dạng khống chế, hai hiện tượng nêu trên tương ứng với sự nổi và không nổi ứng suất (hình 3.33-a và b). Nếu tải đối dấu không đối xứng, ta có thể quan sát thấy những hiệu ứng bổ sung như trình bày trên hình 3.32- a và b. Với ứng suất khống chế không đối xứng, có thể có hiện tượng *thích nghi* hoặc, thường thấy hơn, hiện tượng dịch chuyển đều của vòng chu kỳ (biến dạng tăng dần ở mỗi chu kỳ, ngay cả trong chế độ ổn định). Với biến dạng khống chế, hai hiện tượng nêu trên tương ứng với sự nổi và không nổi ứng suất (hình 3.33-a và b).



Hình 3.32. Hiện tượng thích nghi (a) và dịch chuyển đều của vòng chu kỳ (b).
 Biến dạng khống chế



Hình 3.33. Hiện tượng không nổi và nổi ứng suất trung bình.

3.4. MÔ HÌNH HOÁ LỰC MA SÁT

Trong các bài toán liên quan đến tạo hình vật liệu bằng biến dạng dẻo, ta thường phải mô hình hoá lực ma sát tác dụng trên bề mặt tiếp xúc giữa vật liệu biến dạng và dụng cụ.

Sự tương tác giữa các bề mặt bị ảnh hưởng bởi độ nhám của chúng. Do tồn tại độ nhám mà bề mặt tiếp xúc thực chỉ còn là một phần nhỏ của bề mặt hiện hữu. Xét ở góc độ vi mô, các bề mặt chỉ tiếp xúc với nhau tại các "điểm", do vậy mọi lực tác dụng pháp tuyến đều gây nên ứng suất cục bộ vượt quá trị số của giới hạn đàn hồi.

3.4.1. Mô hình Coulomb

Mô hình Coulomb được đưa ra trên cơ sở lý thuyết ma sát dính. Hệ số ma sát f được xác định bởi tỷ số giữa lực tiếp tuyến và lực pháp tuyến tác dụng lên bề mặt tiếp xúc.

Lực tiếp tuyến bằng tích của diện tích tiếp xúc thực và ứng suất phá huỷ cắt τ_r của vật liệu mềm hơn. Lực pháp tuyến có thể xác định bằng tích của diện tích tiếp xúc thực và độ cứng Brinel H của vật liệu. Khi đó hệ số ma sát có thể được tính bởi: $f = \tau_r / H$.

Mô hình Coulomb biểu thị ứng suất σ_{12} , ngược với hướng của chuyển động tương đối giữa hai bề mặt tiếp xúc, dưới tác dụng của ứng suất pháp σ_{11} :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= f\sigma_{11} & \text{nếu} & \quad f\sigma_{11} < \tau_r \\ \sigma_{12} &= \tau_r & \text{nếu} & \quad \{ \sigma_{11} \geq \tau_r\end{aligned}$$

Trong bảng 3.2. trình bày một số giá trị của hệ số ma sát f đối với một số cặp vật liệu.

Bảng 3.2. Các giá trị gần đúng của hệ số ma sát

Kim loại	Nhiệt độ (°C)	Bôi trơn	f	$\bar{m}$
Thép cacbon thấp	20	Khô	0,25	0,5
Thép cacbon thấp	950	Khô	0,45	0,3÷1,0
Thép cacbon thấp	20	Dầu lynn	0,03	0,05
Các loại thép khác	20	Xà phòng	0,05	0,07
Nhôm	20	Dầu lynn	0,05	0,15
Đồng	20	Khô	0,1	0,9
Đồng	850	Graphit	0,25	0,2

3.4.2. Mô hình màng giới hạn

Trên ranh giới tiếp xúc giữa vật liệu biến dạng và dụng cụ thường có màng mỏng vật liệu bôi trơn hoặc oxit bám dính vào hai bề mặt. Ta giả thiết rằng, dịch chuyển tương đối giữa kim loại và dụng cụ chỉ có thể xảy ra khi có biến dạng cắt của màng này, với ứng suất tiếp :

$$\sigma_{12} = \bar{m}\tau_r ,$$

trong đó :

$\bar{m}$ là hệ số ma sát của màng giới hạn, $0 \leq \bar{m} \leq 1$;

$\bar{m} = 0$ đặc trưng cho tiếp xúc không ma sát;

$\bar{m} = 1$ đặc trưng cho tiếp xúc dính giữa hai bề mặt vật liệu ở nhiệt độ cao;

Trong bảng 3.2. trình bày một số giá trị của $\bar{m}$.

CHƯƠNG 4

ĐÀN HỒI, ĐÀN NHIỆT VÀ ĐÀN NHỐT TUYẾN TÍNH

Chương này sẽ đề cập một cách chi tiết các thuộc tính đàn hồi của vật liệu dưới dạng các công thức và đặc biệt chú ý đến đàn hồi dị hướng, một vấn đề hết sức quan trọng và phổ biến đối với các vật liệu tổ hợp (composit). Thuật ngữ *đàn hồi* được dùng ở đây chỉ theo nghĩa phục hồi biến dạng như đã trình bày ở chương 3, chứ không theo nghĩa thu hồi năng lượng. Bởi lẽ, ta vẫn phải tính đến năng lượng tiêu hao : nhiệt năng trong trường hợp đàn nhiệt hoặc cơ năng trong trường hợp đàn nhớt.

Trong trường hợp đàn nhiệt, ta cần đưa thêm vào mô hình thuộc tính các hệ số bổ sung, ví dụ như hệ số giãn nở nhiệt, để giải quyết các bài toán liên quan đến ứng suất nhiệt.

Lý thuyết về đàn nhớt đã được phát triển đáng kể trong những năm 60. Trong chương này ta chỉ giới hạn ở trường hợp đàn nhớt tuyến tính, chủ yếu để xử lý các bài toán liên quan đến thuộc tính cơ học của một số polime phổ biến.

Lý thuyết trình bày trong chương này là lý thuyết của cơ học các môi trường liên tục. Độ không đồng nhất của vật liệu được giả thiết đủ nhỏ so với kích thước của phần tử thể tích đặc trưng, sao cho các kết quả thực nghiệm có thể phản ánh một cách chính xác thuộc tính vĩ mô trung bình của vật liệu. Lý thuyết này có thể áp dụng cho cả các vật liệu tổ hợp và bê tông. Tuy nhiên, ngày nay ta có thể mô phỏng ứng xử của các vật liệu này một cách chính xác hơn nhờ kỹ thuật đồng nhất hoá.

4.1. ĐÀN HỒI

4.1.1. Miên ý nghĩa và ứng dụng

Mọi vật rắn đều có miên không gian ứng suất giới hạn mà trong đó mỗi biến đổi của ứng suất chỉ gây nên sự biến đổi tương ứng của biến dạng đàn hồi. Như ta đã biết, biến dạng đàn hồi chỉ liên quan đến chuyển động phục hồi của các nguyên tử, phân tử hay phần tử vi

mô tương ứng với biến dạng không quá $0,2+0,5 \times 10^{-2}$ đối với các vật liệu kim loại, bê tông, vật liệu tổ hợp, gỗ và thoả mãn giả thiết biến dạng nhỏ. Năng lượng tiêu hao bằng 0.

Giới hạn của miền đàn hồi phụ thuộc vào nhiệt độ và tác động cơ học quá khứ (trong quá trình gia công hay trong quá trình sử dụng của chi tiết). Nhiệt độ tăng tạo điều kiện thuận lợi cho các chuyển động không phục hồi và làm giảm kích thước của miền đàn hồi (đến 0 ở nhiệt độ nóng chảy). Ngược lại, tác động cơ học làm tăng kích thước của nó bởi hiện tượng hoá bền.

Trước khi áp dụng lý thuyết đàn hồi cho một ứng dụng nào đó, ta cần biết rõ trị số của ứng suất tác dụng có nằm trong miền đàn hồi đối với vật liệu đang xét hay không.

Giả thiết về đàn hồi đẳng hướng thoả mãn tốt cho mọi vật liệu kim loại, song kém hơn đối với bê tông. Đối với vật liệu tổ hợp và gỗ, ta cần sử dụng lý thuyết đàn hồi dị hướng.

4.1.2. Thiết lập mô hình

Căn cứ vào các mô hình tương tự của vật rắn đàn hồi trình bày trong chương 3, ta thấy rằng, ở thời điểm bất kỳ cho trước, trạng thái nhiệt động học của vật liệu tại một điểm sẽ được hoàn toàn xác định nếu biết biến dạng đàn hồi và nhiệt độ tại điểm đó. Hay nói một cách khác, biến dạng đàn hồi và nhiệt độ là hai biến trạng thái của quá trình. Nếu ta hạn chế trong trường hợp đẳng nhiệt, thì chỉ có biến dạng đàn hồi, bằng biến dạng tổng $\underline{\underline{\epsilon}}$, là biến trạng thái sẽ tham gia vào mô hình còn nhiệt độ chỉ là một thông số ảnh hưởng đến các hệ số đàn hồi. Mô hình thuộc tính được viết cho biến dạng nhỏ; hình thái ban đầu và hình thái hiện tại trùng nhau.

4.1.2.1. Thế năng nhiệt động học

Để đảm bảo đặc tính tuyến tính, ta chỉ việc chọn hàm thế năng nhiệt động học Ψ dưới dạng xác định dương bậc hai của các thành phần tenxơ biến dạng :

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}}$$

trong đó ρ là mật độ (khối lượng riêng); $\underline{\underline{a}}$ là tenxơ bậc 4 có các thành phần là các hệ số đàn hồi đẳng nhiệt (có thể là hàm của nhiệt độ).

Theo định nghĩa biến liên kết, tenxơ ứng suất $\underline{\underline{\sigma}}$ xác định từ thế năng Ψ theo định luật trạng thái :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{a} : \underline{\varepsilon} .$$

Tenxơ $\underline{a}$ thoả mãn điều kiện đối xứng. Thực vậy :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{và} \quad \sigma_{kl} = a_{kl ij} \varepsilon_{ij}$$

Đạo hàm tiếp tục ta có :

$$a_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{kl ij} .$$

$\underline{\sigma} = \underline{a} : \underline{\varepsilon}$ là định luật Hooke tổng quát cho vật liệu đàn hồi tuyến tính, phụ thuộc vào 21 hệ số là các thành phần độc lập của tenxơ cứng đàn hồi $\underline{a}$ (đối xứng).

Nếu áp dụng khái niệm thế năng đối :

$$\Psi^* = \frac{1}{2\rho} \underline{A} : \underline{\sigma} : \underline{\sigma} ,$$

trong đó $\underline{A}$ là tenxơ mềm đối xứng, ta có :

$$\underline{\varepsilon} = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{A} : \underline{\sigma}$$

Trong trường hợp đàn hồi phi tuyến, ta có thể chọn các dạng khác cho hàm thế năng Ψ , tuy nhiên phải đảm bảo tính chất lồi.

4.1.2.2. Đàn hồi tuyến tính đẳng hướng

Tính đẳng hướng và tuyến tính bất buộc thế năng Ψ phải là một bất biến bậc 2 của tenxơ biến dạng, có nghĩa là một tổ hợp tuyến tính của bình phương bất biến bậc 1,

$$\varepsilon_I^2 = [\text{tr}(\underline{\varepsilon})]^2, \text{ và bất biến bậc 2, } \varepsilon_{II} = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\varepsilon}^2) :$$

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} (\lambda \varepsilon_I^2 + 4\mu \varepsilon_{II})$$

ta có :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \lambda \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} ,$$

hay :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} ,$$

trong đó λ và μ là các hệ số Lamé, $\underline{1}$ là tenxơ đơn vị.

Nếu dùng dạng đối :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{A} : \underline{\sigma}$$

ta có :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}$$

hay :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

trong đó E là modun Young và ν là hệ số Poisson.

Áp dụng biểu thức của các thành phần cầu $\sigma_c = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma})$, $\varepsilon_c = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\varepsilon})$ và của các tenxơ lệch $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \sigma_c \underline{1}$, $\underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon} - \varepsilon_c \underline{1}$ để phân tích các biểu thức nhận được, ta có :

$$\sigma_c = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_c, \quad \underline{\sigma}' = 2\mu \underline{\varepsilon}'$$

$$\varepsilon_c = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_c, \quad \underline{\varepsilon}' = \frac{1+\nu}{E} \underline{\sigma}'$$

Lý thuyết đàn hồi cho ta các quan hệ sau đây giữa các hệ số Lamé, modun Young, hệ số Poisson, modun cắt (G) và modun nén thủy tĩnh (K) :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

4.1.2.3. Đàn hồi đối xứng trục giao

Một môi trường được gọi là đối xứng trục giao đối với một đặc tính cho trước, nếu đặc tính đó bất biến với sự thay đổi hướng bởi phép lấy đối xứng qua hai mặt phẳng vuông góc với nhau (đương nhiên sẽ dẫn đến đối xứng qua mặt phẳng thứ ba vuông góc với hai mặt phẳng này). Nói một cách khác, vật liệu có tính đối xứng trục giao qua các mặt phẳng trục giao P_1 , P_2 và P_3 , nếu các mẫu cắt theo các trục đối xứng nhau qua mặt phẳng P_1 , sau đó qua mặt phẳng P_2 và P_3 , có đặc tính đàn hồi không thay đổi (hình 4.1). Giao tuyến của ba mặt

phẳng trên xác định các trục đối xứng trục giao chính. Sơ đồ này thường áp dụng cho việc mô tả vật liệu tổ hợp sợi thẳng, gỗ, thép cán nguội.

Ma trận mềm của vật liệu đối xứng trục giao chỉ chứa 9 hệ số độc lập. Ta có thể các quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong hệ toạ độ mà trục 1 tạo một góc α hoặc $-\alpha$ với một trong các trục đối xứng trục giao chính :

$$\{\epsilon\}^{(\alpha)} = [A]^{(\alpha)} \{\sigma\}^{(\alpha)}$$

$$\{\epsilon\}^{(-\alpha)} = [A]^{(-\alpha)} \{\sigma\}^{(-\alpha)}$$

Ma trận $[A]^{(\alpha)}$ và $[A]^{(-\alpha)}$ chỉ khác nhau bởi phép xoay một góc α . Từ định nghĩa đối xứng trục giao ta sẽ có $\{\epsilon\}^{(\alpha)} = \{\epsilon\}^{(-\alpha)}$ nếu ta tác dụng các ứng suất như nhau theo các trục (α) và $(-\alpha)$: $\{\sigma\}^{(\alpha)} = \{\sigma\}^{(-\alpha)}$. Điều này đúng với mọi α và sáu thành phần độc lập bất kỳ của ứng suất. Như vậy, ta thu được sáu quan hệ giữa các hệ số đàn hồi. Với cách tương tự, ta có sáu quan hệ khác xét tương đối với trục đối xứng trục giao chính thứ hai (các quan hệ xét tương đối với trục thứ ba sẽ tự động thoả mãn). Số hệ số độc lập chỉ còn lại : $21 - 6 - 6 = 9$.

Trong hệ trục đối xứng trục giao chính, định luật $\underline{\epsilon} = \underline{A} : \underline{\sigma}$ có thể triển khai dưới dạng :

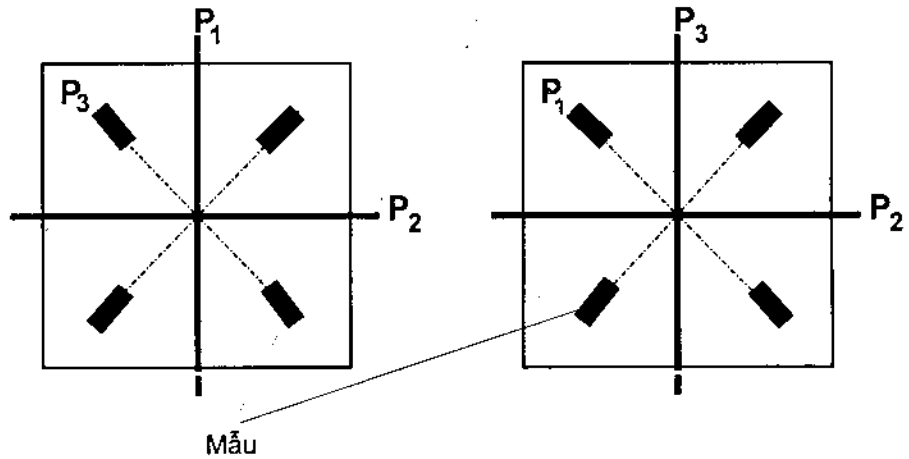
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

với điều kiện đối xứng :

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

Vật liệu được đặc trưng bởi 9 hệ số độc lập :

- 3 modun kéo theo các hướng đối xứng trục giao chính : E_1, E_2, E_3 ,
- 3 modun cắt : G_{12}, G_{23}, G_{31} ,
- 3 hệ số co Poisson : $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$.



Hình 4.1. Sơ đồ lấy mẫu vật liệu đối xứng trục giao.

Để đảm bảo cho hàm thế năng nhiệt động học $\Psi = \frac{1}{2\rho} \underline{a} : \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\Lambda} : \underline{\sigma}$

có dạng bậc hai xác định dương, các hệ số nêu trên phải thoả mãn các bất đẳng thức sau :

Vì môđun kéo và môđun cắt là các đại lượng luôn dương, nên Ψ sẽ xác định dương nếu các giá trị riêng của ma trận các hệ số co Poisson dương. Điều đó dẫn đến :

$$1 - v_{12}v_{21} > 0, \quad 1 - v_{23}v_{32} > 0, \quad 1 - v_{13}v_{31} > 0$$

$$1 - v_{12}v_{23}v_{31} - v_{21}v_{13}v_{32} - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{13}v_{31}^{\wedge} > 0,$$

4.1.2.4. Đàn hồi đẳng hướng ngang

Vật liệu được gọi là đàn hồi đẳng hướng ngang nếu các đặc trưng đàn hồi của nó như nhau cho mọi cặp hướng đối xứng qua một trục.

Nếu trục đẳng hướng ngang là trục $\bar{X}_3$, vật liệu sẽ đẳng hướng trong tất cả các mặt vuông góc với $\bar{X}_3$.

Vật liệu tổ hợp chế tạo bằng cách dán các lớp gồm các sợi thẳng phân bố theo các hướng khác nhau và các kim loại, hợp kim kết tinh định hướng đều có thể coi là vật liệu đẳng hướng ngang.

Trong trường hợp đàn hồi đẳng hướng ngang, chỉ có 5 hệ số của ma trận đàn hồi độc lập nhau. Điều kiện đẳng hướng trong các mặt vuông góc với $\bar{X}_3$ dẫn đến :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}$$

Ta có các đẳng thức sau :

$E_1 = E_2$ modun kéo theo các hướng 1 và 2 như nhau.

$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$ khi kéo theo hướng 3, độ co theo các hướng 1 và 2 như nhau.

$G_{13} = G_{23}$ modun cắt xung quanh các hướng 1 và 2 như nhau.

$2G_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}}$ modun cắt xung quanh hướng 3.

Vật liệu được đặc trưng bởi 5 hệ số độc lập :

- 2 modun kéo E_1, E_2
- 1 modun cắt G_{13}
- 2 hệ số co ν_{12}, ν_{13}

4.1.3. Nhận dạng mô hình

Nhận dạng các hệ số đặc trưng cho các mô hình thuộc tính đàn hồi dựa trên việc đánh giá độ cứng của vật liệu trong các thí nghiệm đặc trưng như kéo-nén, rung hoặc truyền sóng. Ba dạng thí nghiệm này không cho các kết quả hoàn toàn giống nhau đối với cùng một vật liệu, bởi lẽ các thí nghiệm động (rung, truyền sóng) không tính tới ảnh hưởng của một số dạng chuyển động "nhớt" của các nguyên tử hay phân tử và do vậy các phương pháp thử nghiệm này thường cho độ cứng cao hơn.

4.1.3.1. Các phương pháp tĩnh

Phương pháp này được khuyến dùng cho các trường hợp tính toán biến dạng và sức bền của các kết cấu. Đặc trưng của vật liệu được xác định nhờ các thí nghiệm kéo, nén một chiều ở nhiệt độ thường hoặc thấp hơn 200 - 300 °C. Các biến dạng hướng trục ϵ_{11} và các biến dạng ngang ϵ_{22} , ϵ_{33} được đo bằng cảm biến điện trở.

a) Trường hợp đàn hồi đẳng hướng :

Với ứng suất hướng trục σ_{11} xác định từ lực đo được, ta có :

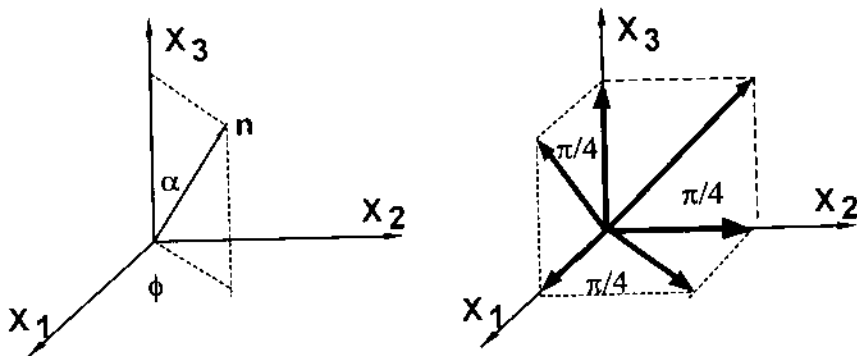
$$E = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}} \quad \nu = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}}$$

Độ chính xác tương đối của phương pháp đạt cỡ 1%.

b) Trường hợp đàn hồi đối xứng trục giao :

Ta có thể xác định 9 hệ số đặc trưng bằng các thí nghiệm kéo hoặc nén các mẫu lấy theo 3 hướng đối xứng trục giao và 3 hướng tạo một góc $\pi/4$ với 3 hướng đó như trình bày trên hình 4.2.

$$\vec{n} = \vec{x}_1 \sin \alpha \cos \phi + \vec{x}_2 \sin \alpha \sin \phi + \vec{x}_3 \cos \alpha$$



Hình 4.2. Các hướng lấy mẫu đặc trưng trong trường hợp vật liệu đàn hồi đối xứng trục giao.

Quan hệ giữa ứng suất $\sigma^{(n)}$ và biến dạng $\varepsilon^{(n)}$ phải được xác định căn cứ vào định luật ứng xử đối xứng trục giao, theo hướng $\vec{n}$ bất kỳ so với các trục trục giao (hình 4.2).

Ứng suất một chiều trong hệ toạ độ với $\vec{n}$ là véc tơ cơ sở, có các thành phần biểu diễn trong hệ toạ độ đối xứng trục giao $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ như sau :

$$[\sigma] = \sigma \cdot \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha \cos^2 \phi & \sin^2 \alpha \sin \phi \cos \phi & \sin \alpha \cos \alpha \cos \phi \\ \sin^2 \alpha \sin \phi \cos \phi & \sin^2 \alpha \sin^2 \phi & \sin \alpha \cos \alpha \sin \phi \\ \sin \alpha \cos \alpha \cos \phi & \sin \alpha \cos \alpha \sin \phi & \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Biến dạng tương ứng $\underline{\varepsilon}$ được tính từ định luật ứng xử đối xứng trục giao :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{A} : \underline{\sigma} .$$

Từ đó ta suy ra các biểu thức sau đây, phụ thuộc vào các kết quả đo $\sigma^{(n)}, \varepsilon_{11}^{(n)}, \varepsilon_{22}^{(n)}, \varepsilon_{33}^{(n)}$, cho 6 thí nghiệm kéo theo 6 hướng riêng biệt:

$$\vec{n} = \vec{x}_1 \rightarrow E_1 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \quad \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}$$

$$\vec{n} = \vec{x}_2 \rightarrow E_2 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}, \quad \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}, \quad \nu_{23} = -\frac{\varepsilon_{33}^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}$$

$$\vec{n} = \vec{x}_3 \rightarrow E_3 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}, \quad \nu_{31} = -\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}, \quad \nu_{32} = -\frac{\varepsilon_{22}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \rightarrow \frac{1}{G_{12}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1 - \nu_{21}}{E_2} - \frac{1 - \nu_{13}}{E_1}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_2 + \vec{x}_3) \rightarrow \frac{1}{G_{23}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1 - \nu_{23}}{E_2} - \frac{1 - \nu_{32}}{E_3}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_3 + \vec{x}_1) \rightarrow \frac{1}{G_{31}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1 - \nu_{13}}{E_1} - \frac{1 - \nu_{31}}{E_3}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \rightarrow \frac{1}{G_{12}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1 - \nu_{21}}{E_2} - \frac{1 - \nu_{13}}{E_1}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_2 + \vec{x}_3) \rightarrow \frac{1}{G_{23}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1 - \nu_{23}}{E_2} - \frac{1 - \nu_{32}}{E_3}$$

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_3 + \vec{x}_1) \rightarrow \frac{1}{G_{31}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1 - \nu_{13}}{E_1} - \frac{1 - \nu_{31}}{E_3}$$

4.1.3.2. Phương pháp động

Trong miền tần số thấp và trung bình (từ 10 đến 100 Hz), ta có thể xác định modun Young từ kết quả đo tần số dao động riêng đầu tiên của dầm chịu uốn rung.

Đối với dầm kẹp chặt một đầu, tần số dao động riêng f đầu tiên được tính bởi:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3,5156}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}},$$

từ đó

$$E = \omega^2 \frac{\rho S L^4}{12,35961},$$

trong đó, S, L - tương ứng tiết diện (const) và chiều dài của dầm;

I - mô men quán tính uốn của dầm;

ρ - khối lượng riêng của vật liệu dầm;

ω - xung động riêng đầu tiên đo được.

Trong miền tần số cao (> 200 Hz), ta có thể dùng phương pháp đo thời gian truyền sóng siêu âm. Ví dụ, trong môi trường đàn hồi tuyến tính đẳng hướng, có hệ số đàn hồi E , hệ số Poisson ν và khối lượng riêng ρ , vận tốc truyền sóng dọc v_L và truyền sóng ngang v_N có thể tính như sau:

$$v_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad v_N^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1}{(1+\nu)}.$$

Từ đó ta có:

$$E = \rho v_N^2 \frac{3v_L^2 - 4v_N^2}{v_L^2 - v_N^2} \quad \text{và} \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{v_L^2 - 2v_N^2}{v_L^2 - v_N^2}.$$

Kỹ thuật siêu âm cho phép đo thời gian truyền sóng với độ chính xác tương đối cỡ 10^{-4} . Như vậy, độ chính xác tương đối của E và ν xác định theo phương pháp này đạt cỡ khoảng 10^{-3} .

4.2. ĐÀN NHIỆT

4.2.1. Thiết lập mô hình thuộc tính

Cho T_0 là nhiệt độ ban đầu của một phân tử thể tích vật liệu và T là nhiệt độ của nó tại thời điểm tiếp theo, sao cho $\Delta T = T - T_0 \ll T_0$ để các hệ số đàn hồi đặc trưng và khối lượng riêng ρ của vật liệu có thể coi là hằng số.

Hàm thế năng nhiệt động học vẫn có thể chọn dưới dạng bình phương xác định dương của biến dạng và có thêm biến nhiệt độ tham gia. Với giả thiết biến dạng và giãn nở nhiệt đẳng hướng, ta có :

$$\Psi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2} (\lambda \varepsilon_I^2 + 4\mu \varepsilon_{II}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T \varepsilon_I \right] - \frac{C_\varepsilon}{2T_0} \Delta T^2.$$

Ý nghĩa của các hệ số α và C_ε được xác định trên cơ sở phân tích các định luật trạng thái suy ra từ Ψ :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \lambda \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{1} + 2\mu \underline{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T \underline{1}$$

hay

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

$$s = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta T} = \frac{1}{\rho} (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{tr}(\underline{\varepsilon}) + \frac{C_\varepsilon}{T_0} \Delta T.$$

Từ phương trình cuối, ta có thể tính $\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\varepsilon = \text{const}}$:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_{\varepsilon = \text{const}} = \left(\frac{\partial s}{\partial \Delta T} \right)_{\text{const}} = \frac{C_\varepsilon}{T_0}.$$

Kết quả cho thấy $\Psi = \frac{1}{2\rho} \underline{a} : \underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon}$ chính là nhiệt dung riêng của vật liệu ở biến dạng không đổi.

Sử dụng hàm thế năng nhiệt động học đối, $\Psi^*(\underline{\sigma}, \Delta T)$, trên cơ sở biến đổi định luật trạng thái thứ nhất, ta có thể biểu diễn biến dạng dưới dạng hàm của ứng suất và nhiệt độ như sau :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1+\gamma}{E} \underline{\sigma} - \frac{\gamma}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} + \alpha \Delta T \underline{1},$$

hay

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\gamma}{E} \sigma_{ij} - \frac{\gamma}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \Delta T \delta_{ij}.$$

Biểu thức trên chính là mô hình thuộc tính đàn nhiệt đẳng hướng tuyến tính. Nếu ta xét nhiệt độ biến thiên khi biến dạng bằng 0, ta có :

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \Delta T \delta_{ij}.$$

Kết quả cho thấy α chính là hệ số giãn nở nhiệt đẳng hướng.

Với biến đổi đủ nhỏ của nhiệt độ ($\Delta T/T_0 \ll 1$), các hệ số λ, μ, α và C_e được coi là hằng số. Trong thực tế chúng thay đổi khi nhiệt độ biến thiên, nhưng không đáng kể.

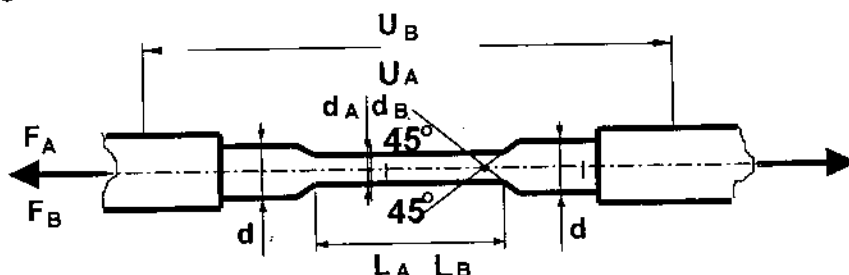
Mô hình thuộc tính đàn nhiệt cho phép tính toán, với trường nhiệt độ cho trước, biến dạng và ứng suất có tính tới hiệu ứng nhiệt. Để xử lý bài toán đàn nhiệt trong đó không phải là nhiệt độ mà là dòng nhiệt được cho trước, ta phải sử dụng định luật truyền nhiệt Fourier và phương trình truyền nhiệt (xem chương 1).

4.2.2. Nhận dạng mô hình thuộc tính

Mô hình thuộc tính đàn nhiệt được đề xuất với giả thiết biến đổi nhiệt độ đủ nhỏ. Trường hợp ngược lại, ta phải áp dụng phương pháp tính từng bước với các hệ số E, γ và α biến đổi, có nghĩa là ta phải biết được qui luật biến thiên của các hệ số đó theo nhiệt độ.

4.2.2.1. Phương pháp so sánh độ cứng

Trong phương pháp này ta sử dụng hai mẫu thử kéo cùng vật liệu, có đầu kẹp như nhau nhưng tiết diện phần làm việc khác nhau. Các đại lượng cần đo là lực tác dụng F và chuyển vị u , bao gồm cả biến dạng của đầu mẫu và phần gá kẹp mẫu. Cơ cấu đo chuyển vị được đặt ngoài thiết bị nung.



Hình 4.3. Mẫu thử kéo dùng trong phương pháp so sánh độ cứng.

Giả sử ta có hai mẫu A và B với các kích thước xác định trên hình 4.3, R_A, R_B là độ cứng đo được của các mẫu, phụ thuộc vào E (chưa biết) và kích thước hình học của chúng :

$$R_A = \frac{\delta F}{\delta u_A}, \quad R_B = \frac{\delta F}{\delta u_B}.$$

Độ cứng của phần mẫu hữu ích có thể tính như sau :

$$R_A^h = \frac{ES_A}{L_A}, \quad R_B^h = \frac{ES_B}{L_B} \quad \text{với } S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Đại lượng chưa biết thứ hai là độ cứng chung của đầu mẫu và gá kẹp, R_K (như nhau cho cả hai mẫu). Bỏ qua ảnh hưởng của hiệu ứng tập trung ứng suất, ta có hệ phương trình :

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_A^h} + \frac{1}{R_K}$$

$$\frac{1}{R_B} = \frac{1}{R_B^h} + \frac{1}{R_K}.$$

Từ đó ta có thể dễ dàng tính được E :

$$E = \frac{(L_A/S_A) - (L_B/S_B)}{(1/R_A) - (1/R_B)}.$$

Độ chính xác của phương pháp phụ thuộc vào việc chọn tỷ lệ L/S cho các mẫu. Với $(L_A/S_A) = 2 \div 4 (L_B/S_B)$, ta có thể đạt độ chính xác $\pm 2\%$.

Với phương pháp tương tự, ta có thể thực hiện thí nghiệm xoắn để xác định mô đun cắt G.

$$G = \frac{32}{\pi} \frac{(L_A/d_A^4) - (L_B/d_B^4)}{(1/R_A^*) - (1/R_B^*)},$$

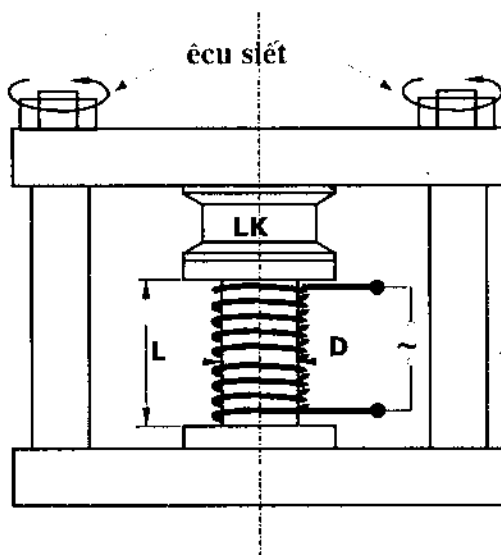
với R^* là độ cứng xoắn (tỷ số giữa ngẫu lực tác dụng và góc xoắn).

Biết G và E ta có thể tính được hệ số Poisson γ .

4.2.2.2. Phương pháp ứng suất nhiệt

Phương pháp này cho phép xác định một cách trực tiếp sự biến thiên của E và α phụ thuộc vào nhiệt độ mà không cần đo chuyển vị. Sơ đồ thiết bị và nguyên lý thí nghiệm trình bày trên hình 4.4.

Mẫu thử nén dạng trụ ($L/d \approx 1,5$) được đặt nối tiếp với lực kế, giữa hai bàn ép song song, ở thời điểm và nhiệt độ ban đầu, mẫu chịu một lực nén trước nhờ các êcu siết. Trong quá trình thí nghiệm, khoảng cách giữa hai bàn ép không thay đổi (hoặc gần như không thay đổi). Khi nhiệt độ của mẫu được nâng dần nhờ một cơ cấu nung (cảm ứng chẳng hạn), hiệu ứng giãn nở nhiệt sẽ gây một lực tác dụng lên bàn ép và được ghi nhận bởi lực kế.



Hình 4.4. Sơ đồ thiết bị và nguyên lý thí nghiệm nén nhiệt với chuyển vị bằng 0.

Cho S và L là diện tích tiết diện ngang và chiều dài của mẫu; T_1 , F_1 tương ứng nhiệt độ ban đầu và lực nén trước tác dụng lên mẫu. Nếu E_1 là modun đàn hồi đã biết ở nhiệt độ T_1 , biến dạng của mẫu ở thời điểm ban đầu sẽ là :

$$\varepsilon_1 = \frac{F_1}{E_1 S}.$$

Ở nhiệt độ T_2 , nếu R_K là độ cứng chung của hệ thống thiết bị-lực kế, biến dạng của mẫu sẽ là :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{F_2 - F_1}{R_K L}.$$

Định luật đàn nhiệt tuyến tính $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$, áp dụng giữa hai trạng thái $(T_1, F = 0)$ và (T_2, F_2) , cho :

$$\varepsilon_2 = \frac{F_2}{E_2 S} + \alpha_{21}(T_2 - T_1),$$

trong đó : E_2, α_{21} tương ứng mô đun đàn hồi và hệ số giãn nở nhiệt ở khoảng nhiệt độ giữa T_1 và T_2 . Từ hai biểu thức trên ta có :

$$F_2 = F_1 \frac{(1/E_1 S) + (1/R_K L)}{(1/E_2 S) + (1/R_K L)} - \alpha_{21} \frac{T_2 - T_1}{(1/E_2 S) + (1/R_K L)}.$$

Kết quả nhận được cho thấy F_2 và F_1 có quan hệ tuyến tính dạng :

$$F_2 = aF_1 + b.$$

Lập lại thí nghiệm nhiều lần với F_1 khác nhau và T_1, T_2 như nhau, ta có thể xác định dễ dàng các hằng số a, b theo các giá trị F_1 và F_2 đo được. Từ đó ta có :

$$E_2 = \frac{E_1 R_K L a}{R_K L + E_1 S(1 - a)},$$

$$\alpha_{21} = -\frac{b(E_2 S + R_K L)}{E_2 S R_K L (T_2 - T_1)}.$$

Biết E ở nhiệt độ T_1 , thí nghiệm đầu tiên cho phép xác định E_2 ở T_2 và α_{12} , thí nghiệm tiếp theo ta sẽ xác định được E_3 ở T_3 và α_{23} , và cứ như vậy tiếp tục. Độ cứng R_K có thể xác định trước một cách dễ dàng bằng cách thay mẫu bằng một khối có độ cứng cao hơn nhiều so với độ cứng của hệ thống thiết bị-lực kế.

4.3. ĐÀN NHÓT

4.3.1. Miên ý nghĩa và ứng dụng

Quan sát biến dạng đàn hồi của các loại polime và, trong một giới hạn nhất định, của bê tông và gỗ, ta thấy một phần năng lượng biến dạng đàn hồi bị tiêu hao. Hiện tượng này được gọi một cách tổng quát là hiện tượng đàn nhót. Nếu chỉ xét quá trình đẳng nhiệt, ta thấy tiêu hao nhiệt năng bằng 0 còn tiêu hao cơ năng khác 0. Tốc độ biến dạng $\dot{\varepsilon}$ tham gia vào quá trình như một biến nhiệt động học độc lập.

Lý thuyết đàn nhót cho phép xem xét tiến triển của quá trình phục hồi biến dạng, phụ thuộc vào thời gian, của các vật liệu có thuộc tính đàn nhót xác định ở chương 2. Trong động học, hiệu ứng đàn nhót được mô phỏng bởi sự hoàn dân của giảm chấn, hết sức nhỏ đối với kim loại ở nhiệt độ thường (10^{-4}), nhưng có thể đạt từ 10^{-2} đến 1 đối với các polime.

Các mô hình của Kelvin-Voigt và Maxwell trình bày dưới đây như một áp dụng trực tiếp của lý thuyết nhiệt động học với các biến nội. Tuy nhiên, trong trường hợp đàn nhớt tuyến tính, mô tả quá trình bằng phương pháp phiếm hàm tỏ ra đơn giản và tiện lợi hơn. Cần chú ý rằng, các phương pháp thiết lập mô hình dưới đây chỉ áp dụng cho các vật liệu có thuộc tính ổn định, có nghĩa là không xét đến các hiện tượng biến đổi cơ - lý tính của vật liệu theo thời gian (hoá già).

4.3.2. Phương pháp thiết lập nhiệt động học

4.3.2.1. Vật rắn Kelvin-Voigt

Ứng suất toàn phần $\underline{\sigma}$, liên kết với biến quan sát được là biến dạng tổng $\underline{\varepsilon}$, được phân chia thành hai thành phần: ứng suất đàn hồi $\underline{\sigma}^e$ và ứng suất phi đàn hồi $\underline{\sigma}^{ae}$:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^e + \underline{\sigma}^{ae}$$

Sự phân chia này tương ứng mô hình tương tự của Kelvin-Voigt, gồm một lò xo và một giảm chấn mắc song song (chương 1).

$\underline{\sigma}^e$: $\underline{\dot{\varepsilon}}$ là công suất phục hồi riêng (cho một đơn vị thể tích),

$\underline{\sigma}^{ae}$: $\underline{\dot{\varepsilon}}$ là cơ năng tiêu hao riêng.

Hàm thế năng nhiệt động học được chọn tương tự cho trường hợp đàn hồi tuyến tính:

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} (\lambda \varepsilon_I^2 + 4\mu \varepsilon_{II}) .$$

Để biểu diễn ứng suất phi đàn hồi $\underline{\sigma}^{ae}$ cần phải xuất phát từ hàm thế năng tiêu hao $\varphi(\underline{\dot{\varepsilon}})$. Ta có thể chọn hàm thế năng tiêu hao dạng bình phương xác định dương của tốc độ biến dạng sau đây:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\lambda \theta_\lambda \dot{\varepsilon}_I^2 + 4\mu \theta_\mu \dot{\varepsilon}_{II}) ,$$

trong đó, $\dot{\varepsilon}_I, \dot{\varepsilon}_{II}$ tương ứng bất biến bậc I và bậc II của tenxơ tốc độ biến dạng, $\theta_\lambda, \theta_\mu$ là các hệ số đặc trưng bổ sung của độ nhớt nén và độ nhớt cắt của vật liệu.

Áp dụng phương pháp trạng thái cục bộ, ta thu được phương trình trạng thái:

$$\underline{\sigma}^e = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \lambda \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \underline{\varepsilon} ,$$

và phương trình bổ sung:

$$\underline{\sigma}^{ae} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\dot{\varepsilon}}} = \lambda \theta_{\lambda} \text{tr}(\underline{\dot{\varepsilon}}) \underline{1} + 2\mu \theta_{\mu} \underline{\dot{\varepsilon}}.$$

Cộng hai phương trình trên, ta có mô hình thuộc tính Kelvin-Voigt :

$$\underline{\sigma} = \lambda [\text{tr}(\underline{\varepsilon}) + \theta_{\lambda} \text{tr}(\underline{\dot{\varepsilon}})] \underline{1} + 2\mu [\underline{\varepsilon} + \theta_{\mu} \underline{\dot{\varepsilon}}],$$

hay :

$$\sigma_{ij} = \lambda (\varepsilon_{kk} + \theta_{\lambda} \dot{\varepsilon}_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu (\varepsilon_{ij} + \theta_{\mu} \dot{\varepsilon}_{ij}),$$

$\theta_{\lambda}, \theta_{\mu}$ là thời gian đặc trưng cho sự trễ của biến dạng, có thể được nhận dạng bằng các thí nghiệm cắt (xoắn các mẫu dạng ống) và kéo đơn.

Với thí nghiệm cắt, ta có :

$$\sigma_{12} = 2\mu (\varepsilon_{12} + \theta_{\mu} \dot{\varepsilon}_{12}).$$

Biến dạng chảy đảo cắt $\varepsilon_{12}(t)$, dưới tác dụng của ứng suất $\sigma_{12} = \text{const}$, nhận được bằng cách giải phương trình vi phân trên với điều kiện ban đầu $t = 0 \rightarrow \varepsilon = 0$:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta_{\mu}}\right) \right].$$

Phương trình trên cho phép ta nhận dạng hai hệ số μ và θ_{μ} .

Với thí nghiệm kéo đơn, ta có :

$$\sigma_{11} = [\lambda(1 - 2\gamma) + 2\mu] \varepsilon_{11} + [\lambda(1 - 2\gamma)\theta_{\lambda} + 2\mu\theta_{\mu}] \dot{\varepsilon}_{11}.$$

Đặt $E = \lambda(1 - 2\gamma) + 2\mu$ và $\eta = \lambda(1 - 2\gamma)\theta_{\lambda} + 2\mu\theta_{\mu}$, ta có :

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} + \eta \dot{\varepsilon}_{11}.$$

Giải phương trình vi phân trên, với điều kiện ban đầu $t = 0 \rightarrow \varepsilon = 0$, ta thu được biến dạng chảy đảo kéo ε_{11} :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right],$$

từ đó ta có thể nhận dạng các hệ số E, η . Sau khi xác định được μ, θ_{μ} , ta có thể nhận dạng λ và θ_{λ} . Hệ số Poisson γ xác định bằng cách đo biến dạng ngang : $\varepsilon_{22} = -\gamma \varepsilon_{11}$.

4.3.2.2. Vật rắn Maxwell

Để xác định công suất phục hồi và công suất tiêu hao, đối với mô hình Maxwell, biến dạng được phân chia thành biến dạng đàn hồi $\underline{\varepsilon}^e$ và biến dạng phi đàn hồi $\underline{\varepsilon}^{ae}$:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{ae}$$

$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^e$ xác định công suất phục hồi,

$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^{ae}$ xác định cơ năng tiêu hao.

Phương trình trạng thái được suy ra từ hàm thế năng nhiệt động học $\Psi(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{ae})$:

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} ,$$

và phương trình bổ sung, từ hàm đối của thế năng tiêu hao $\varphi^*(\underline{\sigma})$:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^{ae} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\sigma}} .$$

Để biểu diễn tốc độ biến dạng dưới dạng tổng của $\underline{\dot{\varepsilon}}^e$ và $\underline{\dot{\varepsilon}}^{ae}$, ta nên dùng hàm đối thế năng nhiệt động học $\Psi^*(\underline{\sigma})$ và, để có được đặc tính tuyến tính, ta có thể chọn hàm đối dạng bình phương xác định dương của ứng suất như sau :

$$\Psi^* = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{1+\gamma}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}^2) - \frac{\gamma}{E} \text{tr}^2(\underline{\sigma}) \right] ,$$

với

$$\underline{\varepsilon}^e = \rho \frac{\partial \Psi^*}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1+\gamma}{E} \underline{\sigma} - \frac{\gamma}{E} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} .$$

Từ đó ta có :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^e = \frac{1+\gamma}{E} \underline{\dot{\sigma}} - \frac{\gamma}{E} \text{tr}(\underline{\dot{\sigma}}) \underline{1} .$$

Tương tự, hàm đối thế năng tiêu hao cũng có dạng bình phương xác định dương với hai hệ số τ_1 và τ_2 đặc trưng cho tính nhớt của vật liệu (có thể nhận dạng bằng các thí nghiệm kéo đơn và cắt) :

$$\varphi^* = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\gamma}{E\tau_1} \text{tr}(\underline{\sigma}^2) - \frac{\gamma}{E\tau_2} \text{tr}^2(\underline{\sigma}) \right] .$$

Từ phương trình trên ta có :

$$\dot{\varepsilon}^{ae} = \frac{\partial \varphi'}{\partial \sigma} = \frac{1+\gamma}{E\tau_1} \underline{\sigma} - \frac{\gamma}{E\tau_2} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}.$$

Mô hình Maxwell biểu diễn dưới dạng tổng của $\dot{\varepsilon}^v$ và $\dot{\varepsilon}^{ae}$ như sau :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1+\gamma}{E} \left[\dot{\underline{\sigma}} + \frac{\underline{\sigma}}{\tau_1} \right] - \frac{\gamma}{E} \left[\text{tr}(\dot{\underline{\sigma}}) + \frac{\text{tr}(\underline{\sigma})}{\tau_2} \right] \underline{1}$$

hay

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\gamma}{E} \left[\dot{\sigma}_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\tau_1} \right] - \frac{\gamma}{E} \left[\dot{\sigma}_{kk} + \frac{\sigma_{kk}}{\tau_2} \right] \delta_{ij}.$$

Áp dụng cho trường hợp một chiều, mô hình Maxwell tương ứng mô hình tương tự gồm một lò xo và một giảm chấn mắc nối tiếp mô tả ở chương 3 :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left[\frac{1+\gamma}{E\tau_1} - \frac{\gamma}{E\tau_2} \right] \sigma,$$

đặt $\left[\frac{1+\gamma}{E\tau_1} - \frac{\gamma}{E\tau_2} \right] = \frac{1}{\eta}$, ta có :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

Phương trình trên chính là mô hình của chất lỏng, bởi lẽ không tồn tại khả năng cân bằng với ứng suất ổn định khác 0.

Mô hình Maxwell mở rộng

Khả năng cân bằng trong điều kiện ứng suất ổn định khác 0 có thể tồn tại nếu ta thêm một lò xo mắc song song với tổ hợp lò - giảm chấn. Ta cũng có thể biểu diễn thuộc tính đàn nhớt phức tạp hơn bằng cách mắc song song thêm các phần tử mô hình Maxwell đơn giản như trình bày trên hình 4.5.

Phương trình thuộc tính một chiều của mô hình trên như sau :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \dots + \sigma_j + \dots$$

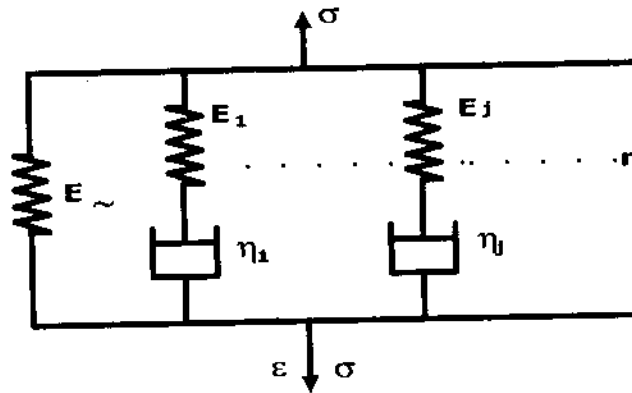
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1}$$

.....

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}_j}{E_j} + \frac{\sigma_j}{\eta_j}$$

.....



Hình 4.5. Mô hình tương tự Maxwell mở rộng.

Căn cứ vào mô hình, ta cũng có thể phân chia tốc độ biến dạng nội tổng thành hai thành phần : tốc độ biến dạng đàn hồi và tốc độ biến dạng phi đàn hồi

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_j^e + \dot{\epsilon}_j^{ac}.$$

Đối với mô hình Maxwell phân tử, ứng suất trong lò xo và trong giảm chấn bằng nhau. Từ đó ta có phương trình biến đổi của biến dạng nội phi đàn hồi :

$$\dot{\epsilon}_j^{ac} = \frac{E_j}{\eta_j} (\epsilon - \epsilon_j^{ac}),$$

và phương trình thuộc tính của mô hình Maxwell mở rộng có thể viết dưới dạng khác như sau:

$$\sigma = E\epsilon + \sum_{j=1}^n \eta_j \dot{\epsilon}_j^{ac},$$

với :

$$\dot{\epsilon}_1^{ac} = \frac{E_1}{\eta_1} (\epsilon - \epsilon_1^{ac})$$

.....

$$\dot{\epsilon}_j^{ac} = \frac{E_j}{\eta_j} (\epsilon - \epsilon_j^{ac})$$

.....

Biến dạng ϵ_j^{ac} giữ vai trò các biến nội theo nghĩa nhiệt động học ($\sum_{j=1}^n \sigma_j \epsilon_j^{ac}$ là cơ năng tiêu hao).

Như vậy, mô hình Maxwell mở rộng cho vật liệu có thuộc tính đàn nhớt bao gồm phương trình cơ bản chứa các biến nội và các phương trình vi phân biểu diễn qui luật biến đổi của các biến nội đó (số lượng phương trình vi phân bằng số lượng các biến nội).

4.3.3. Thiết lập mô hình theo phương pháp phiếm hàm

4.3.3.1. Hàm dẫn

Xét bài toán một chiều, ta có thể thiết lập quan hệ giữa biến dạng $\epsilon(t)$ và ứng suất $\sigma(t)$ trong trường hợp vật liệu đàn nhớt trên cơ sở các giả thiết sau :

- Biến dạng $\epsilon(t)$ là một phiếm hàm của toàn bộ lịch sử biến đổi của ứng suất

$$\epsilon(t) = \mathfrak{I}[\sigma(\tau)], \quad -\infty < \tau \leq t,$$

- Vật liệu không hoá già,
- Phiếm hàm $\mathfrak{I}$ tuyến tính.

Xét quá trình chảy dẻo dưới tác dụng của ứng suất :

$$\sigma = \sigma_0 H(t - \tau),$$

trong đó σ_0 là hằng số, τ là thời gian chuẩn (qui chiếu) và H là hàm Heaviside :

$$H = 0 \quad \text{nếu} \quad t - \tau < 0$$

$$H = 1 \quad \text{nếu} \quad t - \tau \geq 0.$$

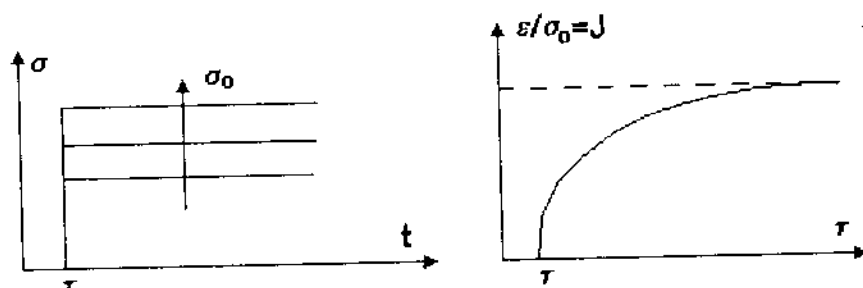
Với các giả thiết đã cho, ta có :

$$\epsilon = J(t - \tau)\sigma_0,$$

trong đó, theo định nghĩa, $J(t - \tau)$ là hàm dẫn đặc trưng cho thuộc tính đàn nhớt một chiều của vật liệu (hình 4.6), độc lập với thời điểm ban đầu τ .

Xét trường hợp ứng suất là một hàm tăng (hình 4.7)

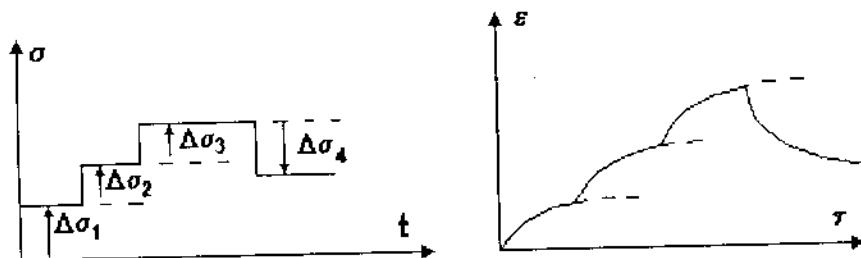
$$\sigma = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i H(t - t_i).$$



Hình 4.6. Hàm chảy dẻo.

Đặc tính tuyến tính cho phép ta viết :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n J(t - t_i) \Delta \sigma_i .$$



Hình 4.7. Hàm tăng.

Cuối cùng ta xét trường hợp ứng suất là một hàm liên tục (hoặc liên tục từng đoạn) và có thể đạo hàm được. Một hàm như vậy có thể coi là giới hạn của hàm tăng. Khi đó, biến dạng $\varepsilon(t)$ được viết dưới dạng tích phân Riemann, với phần thêm mô tả sự không liên tục có thể có:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\tau}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n J(t - t_j) \Delta \sigma_j .$$

Biểu thức trên cũng có thể viết gọn dưới dạng :

$$\varepsilon(t) = J \otimes \frac{D\sigma}{D\tau} ,$$

với $\frac{D\sigma}{D\tau}$ là đạo hàm theo nghĩa phân bố của các biến đổi không liên tục, $\otimes$ biểu thị phép nhân chập.

4.3.3.2. Hàm nối

Cũng với các giả thiết đã trình bày ở trên, ta xác định $\sigma(t)$ trong trường hợp biến dạng đơn $\varepsilon(t)$ cho trước. Ngược lại với hàm dãn, ta định nghĩa hàm nối $R(t - \tau)$ cho mối quan hệ :

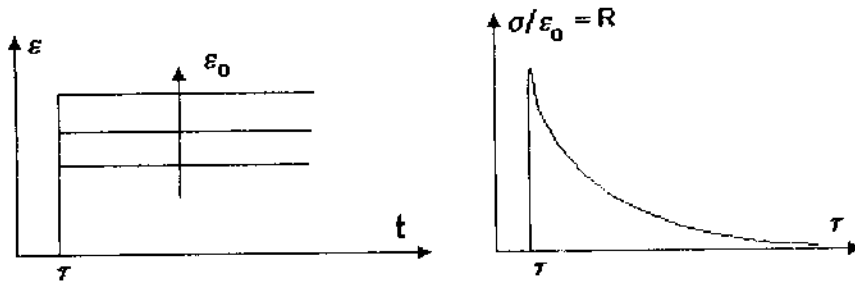
$$\sigma(t) = R(t - \tau) \varepsilon_0 ,$$

với biến dạng cố định $\varepsilon = \varepsilon_0 H(t - \tau)$ (hình 4.8), hay cho biến dạng $\varepsilon(t)$ bất kỳ :

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^n R(t - t_j) \Delta \varepsilon_j$$

hoặc :

$$\sigma(t) = R \otimes \frac{D\varepsilon}{D\tau} .$$



Hình 4.8. Hàm nối.

Trong trường hợp một chiều, hàm nối có thể suy ra từ hàm dãn và ngược lại :

Cho trường hợp chảy dẻo ta có :

$$\sigma = \sigma_0 H \rightarrow \varepsilon = J \cdot \sigma_0 ,$$

nhưng

$$\sigma = \sigma_0 H = R \otimes \frac{d\varepsilon}{d\tau} = R \frac{dJ}{d\tau} \sigma_0 .$$

Tương tự, cho trường hợp thí nghiệm nối :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H = J \otimes \frac{dR}{d\tau} \varepsilon_0 .$$

Từ các kết quả trên ta rút ra :

$$R \otimes \frac{dJ}{d\tau} = J \otimes \frac{dR}{d\tau} = H$$

4.3.3.3. Mô hình thuộc tính ba chiều

Với các giả thiết đã cho, trong trường hợp ba chiều ta cần xác định :

- Ma trận của các hàm dẫn $[J]$ sao cho :

$$\sigma_{ij} = \text{const} = \sigma_{ij}^0 \rightarrow \varepsilon_{ij} = J_{ijkl}(t - \tau)\sigma_{kl}^0 ,$$

- Ma trận của các hàm nối $[R]$ sao cho :

$$\varepsilon_{ij} = \text{const} = \varepsilon_{ij}^0 \rightarrow \sigma_{ij} = R_{ijkl}(t - \tau)\varepsilon_{kl}^0 ,$$

- Các quan hệ cho các tác động $\underline{\sigma}(t)$ hoặc $\underline{\varepsilon}(t)$ bất kỳ :

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijkl} \otimes \frac{D\sigma_{kl}}{D\tau} \quad \text{hoặc} \quad \sigma_{ij}(t) = R_{ijkl} \otimes \frac{D\varepsilon_{kl}}{D\tau} .$$

Nếu giả thiết vật liệu đẳng hướng, với cách diễn giải tương tự trong 4.1.2.2 , ta có thể rút số lượng thành phần của các ma trận $[J]$ và $[R]$ xuống chỉ còn 2 hàm độc lập nhau.

Ta có thể chọn :

- Hai hàm $I(\tau)$ và $K(\tau)$ với vai trò tương đương các hệ số $1/E$ và ν/E trong mô hình đàn hồi tuyến tính đẳng hướng :

$$\underline{\varepsilon} = (I + K) \otimes \frac{D\underline{\sigma}}{D\tau} - K \otimes \frac{D[\text{tr}(\underline{\sigma})]}{D\tau} \underline{1} ,$$

- Hai hàm $L(\tau)$ và $M(\tau)$ với vai trò tương đương các hệ số Lamé :

$$\underline{\sigma} = L \otimes \frac{D[\text{tr}(\underline{\varepsilon})]}{D\tau} \underline{1} + 2M \otimes \frac{D\underline{\varepsilon}}{D\tau} .$$

4.3.3.4. Nhận dạng

Các hàm $I(\tau)$ và $K(\tau)$ hay $L(\tau)$ và $M(\tau)$ có thể nhận dạng bằng các thí nghiệm kéo dãn (hoặc nối) đơn và cắt dãn (hoặc nối) đơn :

- Nhận dạng $I(\tau)$ và $K(\tau)$:

- Đối với các thí nghiệm kéo dãn đơn $\sigma_{11} = \text{const}$:

$$\varepsilon_{11} = [I(\tau) + K(\tau)]\sigma_{11} - K(\tau)\sigma_{11}$$

$$I(\tau) = \frac{\varepsilon_{11}(\tau)}{\sigma_{11}} = J(\tau)$$

- Đối với các thí nghiệm cắt đảo đơn $\sigma_{12} = \text{const}$:

$$\varepsilon_{12} = [I(\tau) + K(\tau)]\sigma_{12}$$

$$K(\tau) = \frac{\varepsilon_{12}(\tau)}{\sigma_{12}} - I(\tau)$$

• Nhận dạng $L(\tau)$ và $M(\tau)$:

- Đối với các thí nghiệm cắt nối đơn $\varepsilon_{12} = \text{const}$:

$$\sigma_{12} = 2M(\tau)\varepsilon_{12}$$

$$M(\tau) = \frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}}$$

- Đối với các thí nghiệm kéo nối đơn $\varepsilon_{11} = \text{const}$:

$$\sigma_{11} = L(\tau)\varepsilon_{11}(1 - 2\nu) + 2M(\tau)\varepsilon_{11}$$

Hệ số Poisson ν được biểu diễn dưới dạng hàm của L và M như sau :

Tương ứng với thành phần ứng suất $\sigma_{22} = 0$ ta có $\varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{11}$

$$0 = L(\tau)\varepsilon_{11}(1 - 2\nu) - 2M\nu\varepsilon_{11}$$

$$\nu = \frac{L}{2(L + M)}$$

Từ các kết quả trên và các số liệu đo $\sigma_{11} = R(\tau)\varepsilon_{11}$ ta suy ra :

$$L(\tau) = \frac{M(R - 2M)}{3M - R}$$

Ta thấy rằng, việc nhận dạng có thể thực hiện nhờ các thí nghiệm đơn giản có tính tới biến đổi của cơ tính vật liệu theo thời gian thông qua các hàm đảo hoặc nối.

CHƯƠNG 5

ĐÈO TỨC THỜI

Chương này trình bày phương pháp mô hình hoá thuộc tính cơ học của vật liệu dẻo tức thời, đã được mô tả một cách trực quan qua các mô hình tương tự trình bày trong chương 2, bao gồm :

Vật rắn cứng-dẻo lý tưởng;

Vật rắn đàn-dẻo lý tưởng;

Vật rắn đàn-dẻo biến cứng.

5.1. MIỄN Ý NGHĨA VÀ ỨNG DỤNG

Lý thuyết biến dạng dẻo tức thời là lý thuyết về các biến dạng không phục hồi, độc lập với thời gian. Đối với kim loại và hợp kim, về mặt vi mô, biến dạng dẻo tức thời liên quan trực tiếp đến chuyển động trượt của lệch, không tính tới ảnh hưởng của các hiện tượng nhớt và hư hại. Do vậy, miễn ý nghĩa của lý thuyết dẻo tức thời cũng hạn chế, thường chỉ áp dụng :

Trong miền nhiệt độ thấp, dưới $1/4$ nhiệt độ nóng chảy tuyệt đối (K),

- Trong trường hợp biến dạng dưới miền hư hại : đối với tải trọng đơn điệu, biến dạng chỉ hạn chế ở $1/2$ hoặc $3/4$ biến dạng phá huỷ. Đối với tải trọng đổi dấu, giới hạn được xác định căn cứ vào điều kiện ổn định. Trường hợp tải trọng chu kỳ - chỉ có thể áp dụng ở giai đoạn trước khi đạt chu kỳ ổn định.

Lý thuyết dẻo tức thời có thể được áp dụng cho các trường hợp :

- Tính toán biến dạng dư trong các kết cấu;
- Tính toán ổn định;
- Tính toán lực tác dụng cần thiết trong các nguyên công tạo hình;
- ...

Ta cũng có thể áp dụng sơ đồ dẻo không phụ thuộc thời gian cho kim loại ở nhiệt độ cao để xác định trạng thái tiệm cận tương ứng với tải trọng cố định hay với tốc độ biến dạng rất lớn.

5.2. KHÁI QUÁT VỀ HIỆN TƯỢNG

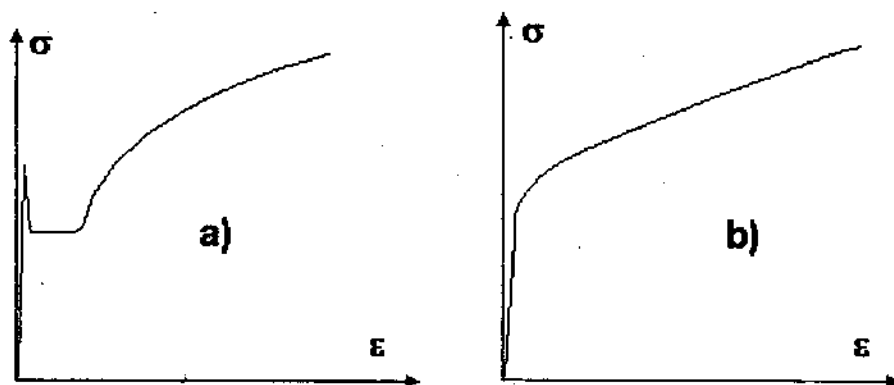
5.2.1. Hành vi một chiều

Hành vi một chiều của vật liệu được mô tả bởi các đường cong biến cứng kéo-nén. Có thể có hai dạng đường cong như trình bày trên hình 5.1.

5.2.1.1. Giới hạn đàn hồi

Giới hạn đàn hồi (σ_Y) chính là giá trị giới hạn của ứng suất tác dụng mà vượt qua nó sẽ xảy ra biến dạng dư. Xác định giới hạn này là một việc khó khăn về phương diện thực nghiệm. Để đảm bảo tính khách quan của số liệu đo, người ta chấp nhận qui định có tính chất qui ước sau đây:

Giới hạn đàn hồi qui ước là ứng suất tương ứng với một giá trị biến dạng dư cho trước nào đó. Để kiểm tra chất lượng vật liệu, người ta thường nhận giá trị biến dạng dư bằng 0,2%. Về phương diện thực nghiệm, giá trị biến dạng dư nêu trên là quá lớn, cùng bậc với biến dạng đàn hồi đồng thời. Để đảm bảo tính chính xác của số liệu đo, trong từng trường hợp cụ thể, người ta nhận giá trị biến dạng dư bằng 0,02%. Trong nhiều trường hợp khác, biến dạng dư thoả thuận có thể nhận bằng 10% của biến dạng đàn hồi đồng thời.



Hình 5.1. Dạng đường cong hoá bền kéo-nén:
a) có khoảng dẻo phẳng; b) không có khoảng dẻo phẳng.

Như vậy, trừ trường hợp đối với một số loại thép có khoảng dẻo phẳng (hình 5.1-a), giới hạn đàn hồi trong thực tế luôn là một giá trị thoả thuận, kể cả khi khái niệm về miền đàn hồi được lý giải một cách rõ ràng về phương diện lý thuyết.

5.2.1.2. Chảy dẻo, biến cứng và ngưỡng dẻo

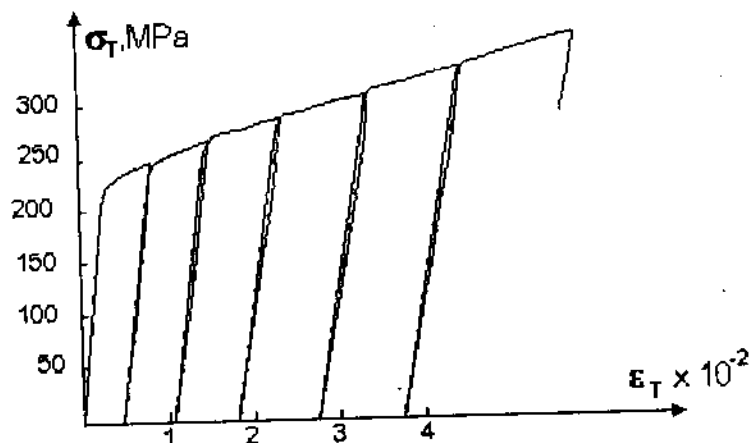
Nhiệt động học, hoá - lý vật liệu và thực nghiệm (mang tính chất hiện tượng) đã lý giải việc phân tách giữa các hiệu ứng đàn hồi và dẻo, có nghĩa là :

- Biến dạng tổng ϵ có thể phân chia thành biến dạng đàn hồi (phục hồi) ϵ^e và biến dạng phi đàn hồi (không phục hồi) ϵ^{ae} , dù cho biến dạng phi đàn hồi có thể là dẻo tức thời hay dẻo nhớt, Sự phân chia này được lý giải bởi các hiện tượng vật lý : biến dạng đàn hồi chỉ tương ứng với sự biến đổi khoảng cách giữa các nguyên tử mà không làm thay đổi các mối liên kết giữa chúng, còn biến dạng dẻo là kết quả của sự "chuyển động" của các mối liên kết đó. Trong trường hợp đàn-dẻo ta có thể viết :

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p .$$

- Tồn tại các quan hệ riêng rẽ cho biến dạng đàn hồi ϵ^e và biến dạng dẻo ϵ^p :

$$\begin{aligned} \epsilon^e &= A(\sigma) \quad \forall \sigma \\ \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon^p = g(\sigma) & \text{cho } |\sigma| \geq \sigma_Y \\ \epsilon^p = 0 & \text{khi } |\sigma| < \sigma_Y \end{array} \right. \end{aligned}$$



Hình 5.2. Đường cong hoá bền với các chu kỳ dỡ tải-chất tải (hợp kim nhôm AU4G, T=20°C).

Quan hệ thứ hai chỉ đúng trong trường hợp biến dạng dẻo được duy trì (không dỡ tải). Hình 5.2 mô tả hai đặc tính nêu trên và cho thấy, ngay cả trong miền biến dạng dẻo lớn, modun đàn hồi của vật liệu có thể xem như không thay đổi.

Quá trình chảy dẻo lý tưởng (không có biến cứng) xảy ra khi ứng suất là hằng số và không phụ thuộc vào biến dạng (trường hợp phổ biến đối với thép các bon thấp trong miền dẻo phẳng). Sự biến cứng (hoá bền) do biến dạng thường thể hiện qua hai hiện tượng sau :

- Biến dạng dẻo chỉ có thể tiếp tục duy trì khi gia tăng ứng suất tác dụng,
- Giới hạn đàn hồi gia tăng cùng biến dạng (hình 5.2).

Trong trường hợp tải trọng đơn điệu, giới hạn đàn hồi hiện thời của vật liệu, còn được gọi là ngưỡng dẻo σ_s , có giá trị bằng ứng suất lớn nhất đạt ở thời điểm trước đó. Như vậy, có thể xem ngưỡng dẻo là một hàm của quỹ đạo (lịch sử) biến dạng. Đối với các vật liệu hoá bền, $\frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} > 0$, giới hạn đàn hồi "tự nhiên", σ_Y , chính là giá trị nhỏ nhất của ngưỡng dẻo.

Bất kỳ điểm nào trên đường cong biến cứng đơn điệu cũng đều được coi là điểm đặc trưng cho ngưỡng dẻo, vì vậy qui luật đặc trưng cho quá trình biến cứng có thể viết như sau:

$$\sigma_s = g^{-1}(\varepsilon^p).$$

Biến dạng dẻo chỉ xuất hiện khi $\sigma = \sigma_s$

$$\sigma < \sigma_s \rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0$$

$$\sigma = \sigma_s \rightarrow \exists \dot{\varepsilon}^p \neq 0$$

Nhiều mô hình toán-lý đã được đề xuất nhằm mô tả hiện tượng biến cứng. Mô hình được xây dựng trên cơ sở lý thuyết lệch trình bày dưới đây cho thấy, ngưỡng ứng suất tỷ lệ với căn bậc hai của mật độ lệch ρ_l :

$$\sigma_s = k b \rho_l^{1/2}.$$

Trong thực tế, ở trạng thái ban đầu mật độ lệch không bao giờ bằng 0. Gọi ρ_{l0} là mật độ lệch tương ứng với giới hạn đàn hồi σ_Y , ta có :

$$\sigma_s = \sigma_Y + kb(\rho_l - \rho_{l0})^{1/2}.$$

Trên phương diện vĩ mô, tương tự, ta có thể viết :

$$\sigma_s = \sigma_Y + K_Y (\epsilon^p)^{1/M_Y}.$$

Từ biểu thức trên, thường gọi là phương trình Ramberg-Osgood, ta suy ra :

$$\epsilon^p = g(\sigma_s) = \left\langle \frac{\sigma_s - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y},$$

trong đó, K_Y là hệ số trở kháng dẻo, M_Y là lũy thừa hoá bền, ký hiệu $\langle x \rangle$ cho biết $\langle x \rangle = x$ nếu $x > 0$ và $\langle x \rangle = 0$ nếu $x \leq 0$.

Các hệ số σ_Y , K_Y và M_Y được xác định cho từng vật liệu cụ thể trên cơ sở các số liệu thí nghiệm hoá bền. σ_Y xác định trên đường cong thực nghiệm, phương trình đường thẳng tương hợp tốt nhất với các điểm thực nghiệm trên đồ thị $(\ln(\sigma_s - \sigma_Y), \ln \epsilon^p)$ cho phép ta xác định các hệ số K_Y và M_Y theo phương trình :

$$\ln(\sigma_s - \sigma_Y) = \ln K_Y + \frac{1}{M_Y} \ln \epsilon^p$$

Cần lưu ý rằng, các đại lượng trong mô hình $\epsilon^p = g(\sigma_s)$ mang giá trị biểu kiến trong trường hợp áp dụng cho biến dạng nhỏ, còn trong trường hợp biến dạng lớn chúng phải được viết với giá trị thực ($\sigma_T = \sigma(1 + \epsilon)$, $\epsilon_T = \ln(1 + \epsilon)$).

5.2.1.3. Các quan hệ thuộc tính

a- Vật liệu dẻo lý tưởng

Trong thí nghiệm kéo và nén, ngưỡng dẻo σ_s đều như nhau và là một hằng số. Tùy thuộc yêu cầu và phương pháp tính toán (theo giới hạn trên hoặc giới hạn dưới) mà ta nhận σ_s bằng giới hạn đàn hồi hay bằng ứng suất cuối σ_u (ứng suất cực đại đạt được đối với vật liệu cho trước, hình 5.3).

Ta có các quan hệ sau đối với vật liệu dẻo lý tưởng :

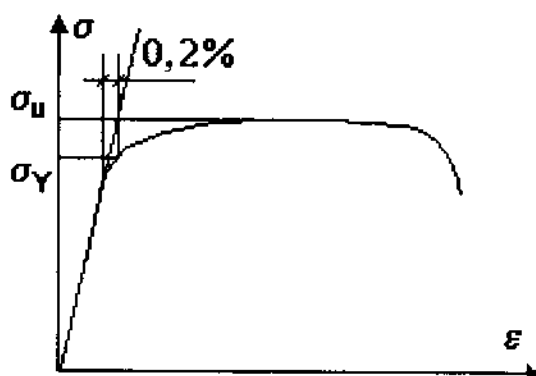
$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \epsilon = \epsilon^e = \begin{cases} 0 & (1) \\ \sigma/E & (2) \end{cases}$$

$$|\sigma| = \sigma_s \rightarrow \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (3)$$

(1)- cứng lý tưởng

(2)- đàn hồi lý tưởng

(3)- đàn-dẻo lý tưởng, ε^p nhận giá trị bất kỳ và phụ thuộc vào dấu của σ .



Hình 5.3. Giới hạn đàn hồi σ_Y và ứng suất cuối σ_u .

b- Vật liệu dẻo biến cứng

Mô hình thuộc tính một chiều cho vật liệu đàn-dẻo biến cứng, ban đầu đẳng hướng, chịu tải trọng đơn điệu, được viết như sau :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \varepsilon^e &= \frac{\sigma}{E} \\ \varepsilon^p &= \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y} \text{sgn}(\sigma) \end{aligned} \right\} \quad \text{với } \sigma = \sigma_s$$

Trong trường hợp cứng - dẻo hoá bền, ta có thể chấp nhận hai giả thiết hợp lý là biến dạng đàn hồi coi bằng 0 và giới hạn đàn hồi không tồn tại. Mô hình do vậy trở nên đơn giản hơn :

$$\varepsilon = \varepsilon^p = \left(\frac{|\sigma|}{K} \right) \text{sgn}(\sigma).$$

c- Trường hợp tải chu kỳ

Ta cần thiết lập quan hệ giữa biên độ biến dạng $\Delta\varepsilon$ và biên độ ứng suất $\Delta\sigma$ của chu kỳ ổn định. Trong trường hợp chu kỳ đối xứng qua gốc toạ độ (hình 5.4), áp dụng mô hình biến cứng đơn điệu $\varepsilon^p = g(\sigma)$, ta có thể dễ dàng xác định quan hệ trên :

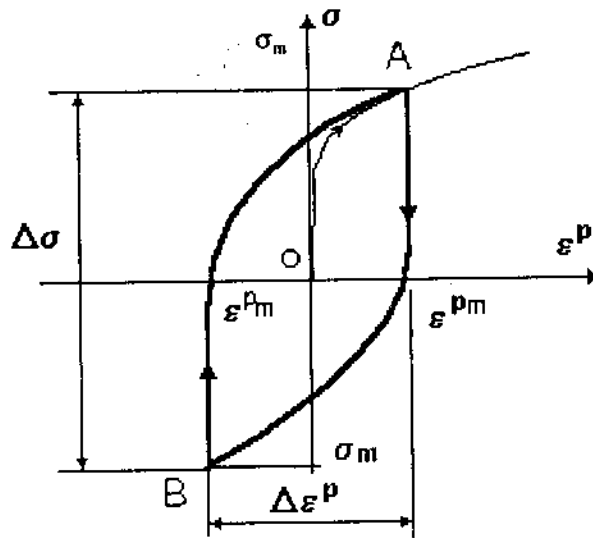
$$\frac{\Delta \varepsilon^p}{2} = g\left(\frac{\Delta \sigma}{2}\right).$$

Trong trường hợp hàm biến cứng khác với hàm g do vật liệu chịu ảnh hưởng của hiệu ứng tăng bền chu kỳ, ta nên tiến hành các thí nghiệm kéo-nén với các biên độ khác nhau và xác định quan hệ trên theo các biên độ đo được :

$$\Delta \varepsilon^p = g_c(\Delta \sigma).$$

Hàm g_c có thể có dạng sau :

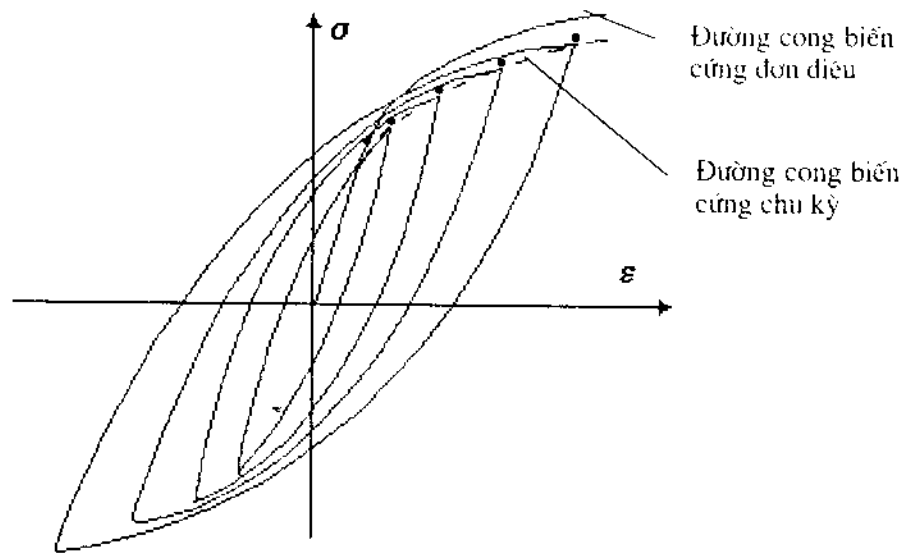
$$g_c = \left(\frac{\Delta \sigma}{K_c}\right)^{M_c} = \Delta \varepsilon^p.$$



Hình 5.4. Chu kỳ ổn định.

Biểu thức trên xác định *đường cong biến cứng chu kỳ ổn định* - là tập hợp đỉnh của các chu kỳ đối xứng ổn định $(\sigma_m, \varepsilon^p_m)$ trong hệ toạ độ (σ, ε^p) (hình 5.5).

Đường cong biến cứng chu kỳ có thể nằm trên (hoá bền chu kỳ) hoặc nằm dưới (hoá mềm chu kỳ) đường cong biến cứng đơn điệu. Nhận dạng biểu thức trên thường gặp khó khăn liên quan đến ảnh hưởng của quỹ đạo (lịch sử) biến dạng. Thực vậy, đường cong có thể không hoàn toàn như nhau mặc dù ta sử dụng các mẫu thí nghiệm giống nhau, hay khi biên độ ứng suất (hoặc biến dạng) được biến đổi một cách liên tục hoặc phân đoạn.

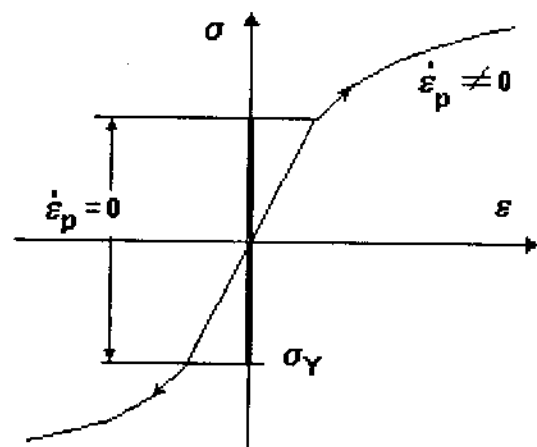


Hình 5.5. Đường cong biến cứng chu kỳ.

Trong trường hợp ảnh hưởng của quỹ đạo biến dạng đến sự biến đổi cơ tính của vật liệu không thể bỏ qua, ta nên xây dựng mô hình phức tạp hơn có tính tới ảnh hưởng của yếu tố này.

5.2.2. Hành vi ba chiều

Trong không gian ứng suất một chiều, ngưỡng dẻo xác định miền đàn hồi như trình bày trên hình 5.6. Mở rộng khái niệm này cho trường hợp ba chiều sẽ cho ta điều kiện dẻo, xác định miền đàn hồi trong không gian ứng suất 3 chiều hoặc 6 chiều.



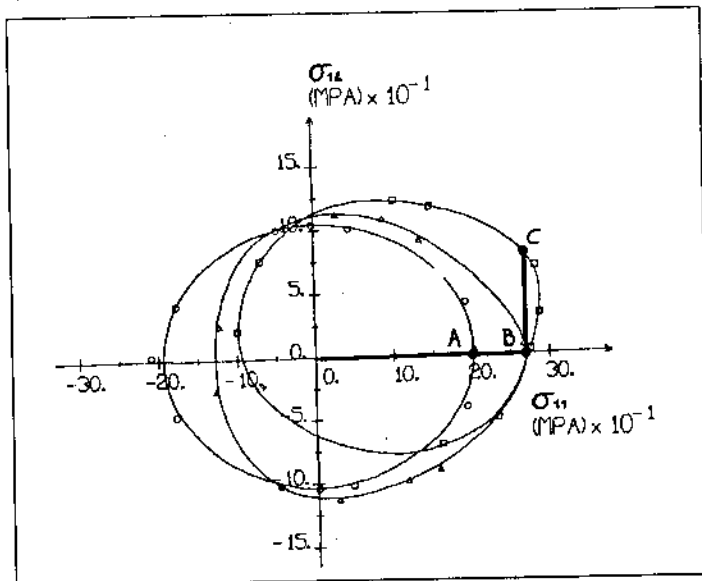
Hình 5.6. Miền đàn hồi một chiều.

Trong không gian ứng suất 2 chiều, để thấy rõ miền đàn hồi, phương pháp đơn giản nhất là dùng thí nghiệm kéo (hoặc nén)-xoắn các mẫu dạng ống mỏng. Mẫu chịu tác dụng của các tải trọng hướng tâm xác định bởi lực dọc trục $\vec{F}$ và ngẫu lực $\vec{C} = \alpha \vec{F}$. Mỗi lần chất tải, tương ứng với một giá trị nhất định của hằng số vô hướng α ($-\infty < \alpha < +\infty$), ta ghi nhận các giá trị tương ứng của $\vec{F}$ và $\vec{C}$ tại thời điểm biến dạng dẻo có thể cảm nhận rõ rệt (nằm trong khoảng $10^{-6} + 10^{-4}$ tùy thuộc độ chính xác của thiết bị đo). Đường cong nhận được trong không gian ứng suất pháp σ_{11} và ứng suất tiếp σ_{12} chính là biên giới của miền đàn hồi.

Trên hình 5.7 trình bày các dạng điển hình của miền đàn hồi cho cùng một vật liệu ở trạng thái ban đầu chưa hoá bền và đẳng hướng (A), được biến cứng trước bởi biến dạng kéo (B) sau đó bởi biến dạng kéo-cắt (C).

Việc mô hình hoá miền đàn hồi và sự biến đổi của nó trong quá trình biến dạng là đối tượng của nhiều công trình nghiên cứu. Trước khi xem xét một cách chi tiết hành vi ba chiều của vật liệu, cần thống nhất một số khái niệm cơ bản thường dùng sau đây :

- Thuật ngữ đẳng hướng hoặc dị hướng chỉ áp dụng cho một trạng thái cố định. Ngược lại, sự hoá bền của vật liệu trong quá trình biến dạng dẻo bao hàm ý nghĩa biến đổi;



Hình 5.7. Miền đàn hồi trong không gian ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

- Biến cứng đẳng hướng khi sự biến đổi của miền đàn hồi (hay bề mặt dẻo) chỉ là sự giãn nở đồng dạng mà không thay đổi vị trí ;
- Biến cứng động khi miền dẻo chỉ thay đổi vị trí, còn kích thước miền không thay đổi;
- Biến cứng hỗn hợp (kết hợp giữa biến cứng đẳng hướng và biến cứng động);

- Biến cứng dị hướng khi miền đàn hồi biến đổi bất kỳ.

5.2.2.1. Điều kiện dẻo đẳng hướng

Đó là điều kiện dẻo tương ứng với các trạng thái biến cứng đẳng hướng. Phương trình của mặt bao miền đàn hồi chứa các biến là tất cả các thành phần của tenxơ ứng suất và biến hoá bền. Trong trường hợp đẳng hướng biến hoá bền được chọn là đại lượng vô hướng σ_s (ngưỡng dẻo).

$$f(\underline{\sigma}, \sigma_s) = 0.$$

Tính đẳng hướng bắt buộc biên của miền đàn hồi phải bất biến với mọi biến đổi của hệ toạ độ, do đó hàm f chỉ phụ thuộc vào các bất biến của tenxơ ứng suất:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}, \sigma_s) = 0.$$

Đối với vật liệu kim loại, ta thường chấp nhận giả thiết về sự bất biến của thể tích trong quá trình biến dạng dẻo (vật liệu không nén được), có nghĩa là thuộc tính của vật liệu không phụ thuộc vào ứng suất thuỷ tĩnh. Khi đó ta chỉ cần đưa vào hàm f các thành phần của tenxơ ứng suất lệch, $\underline{\sigma}'$:

$$\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \sigma_I \underline{1}.$$

Nói một cách khác, ta chỉ cần dùng các bất biến của tenxơ ứng suất lệch : $S_{II} = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\sigma}'^2)$, $S_{III} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}'^3)$ và quan hệ $f(S_{II}, S_{III}, \sigma_s) = 0$ chính là biểu thức tổng quát của điều kiện dẻo đẳng hướng không nén được. Trong không gian ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, hàm f có dạng hình trụ với trục là đường phân giác cách đều ba trục toạ độ. Thay vì S_{II}, S_{III} ta cũng có thể dùng các bất biến liên hợp thuận nhất:

$$J_2(\underline{\sigma}) = (3S_{II})^{1/2} = \left(\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{1/2}$$

$$J_3(\underline{\sigma}) = \left(\frac{27}{2} S_{III} \right)^{1/3} = \left(\frac{9}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} \right)^{1/3}$$

a) Điều kiện dẻo Von Mises

Biến dạng dẻo của kim loại và hợp kim là kết quả của biến dạng cắt trong các tinh thể và sự trượt giữa chúng, gây nên bởi ứng suất tiếp. Trong điều kiện dẻo Von Mises, ngưỡng dẻo được xem chỉ liên quan đến năng lượng cắt đàn hồi. Điều đó có nghĩa là bỏ qua ảnh hưởng của hạt biến bậc ba J_2 và thiết lập biểu thức tuyến tính cho hàm f .

Năng lượng biến dạng đàn hồi

$$W^e = \int_0^{\epsilon^e} \underline{\sigma} : d\underline{\epsilon}^e$$

có thể viết dưới dạng tổng của năng lượng biến dạng cắt W^e và năng lượng biến dạng thể tích W^v :

$$W^e = \int_0^{\epsilon^e} \left[\underline{\sigma}' + \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) I \right] : d\underline{\epsilon}^e + \frac{1}{3} \text{tr}(d\underline{\epsilon}^e) I$$

$$W^e = \int_0^{\epsilon^e} \underline{\sigma}' : d\underline{\epsilon}^e + \int_0^{\text{tr}(\epsilon^e)} \frac{1}{9} \text{tr}(\underline{\sigma}) (d\text{tr} \epsilon^e)$$

Áp dụng định luật đàn hồi tuyến tính :

$$d\underline{\epsilon}^e = \frac{1}{2\mu} d\underline{\sigma}'$$

ta có :

$$W^e = \int_0^{\underline{\sigma}'} \frac{1}{2\mu} \underline{\sigma}' : d\underline{\sigma}' = \frac{1}{4\mu} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}'.$$

Nếu ta cho năng lượng của trạng thái ứng suất ba chiều bằng năng lượng của trạng thái ứng suất kéo đơn tương đương $\sigma = \sigma_s$. Với :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} 2/3\sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & -1/3\sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\sigma_s \end{bmatrix}$$

ta có :

$$\frac{1}{4\mu} \underline{\sigma'} : \underline{\sigma'} = \frac{1}{6\mu} \sigma_s^2$$

hay

$$\frac{1}{2\mu} \underline{\sigma'} : \underline{\sigma'} - \frac{1}{3\mu} \sigma_s^2 = 0 .$$

Như vậy, hàm $f(S_{II}, \sigma_s) = 0$ có thể viết dưới dạng :

$$S_{II} - \frac{1}{3} \sigma_s^2 = 0 ,$$

hay, với ứng suất tương đương $\sigma_{eq} = J_2(\underline{\sigma}) = \sqrt{3S_{II}} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma'} : \underline{\sigma'}}$,

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_s = 0 .$$

Điều kiện giới hạn đàn hồi ban đầu (điều kiện dẻo ban đầu) được biểu thị bởi :

$$\sigma_{eq} - \sigma_Y = 0 .$$

Xét theo nghĩa Von Mises, mọi trạng thái ứng suất ba chiều có $\sigma_{eq} = \sigma_s$ đều tương đương với trạng thái ứng suất đơn xác định bởi ngưỡng dẻo σ_s .

Trong không gian ứng suất chính ba chiều, điều kiện dẻo Von Mises có dạng triển khai :

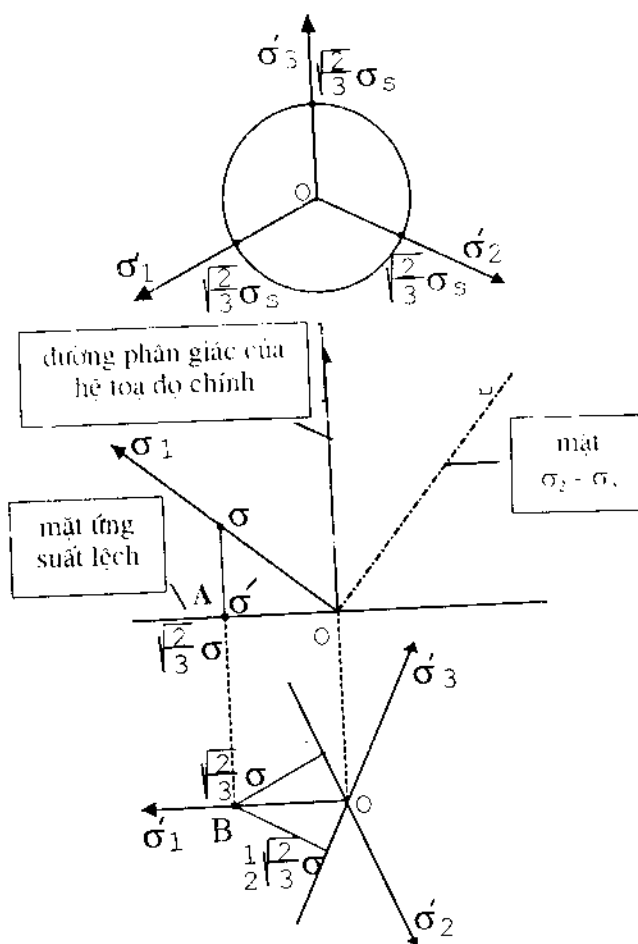
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} = \sigma_s .$$

Đó chính là phương trình của hình trụ có trục tâm là đường phân giác cách đều ba trục toạ độ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s$ (hình 5.8).

Mặt tenxơ ứng suất lệch là mặt đi qua gốc toạ độ và vuông góc với đường phân giác của hệ trục chính. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(\sigma_s, 0, 0)$ trên mặt phẳng đó cho điểm B tương ứng $\sigma'_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s$, $\sigma'_2 = \sigma'_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s$. Ngược lại, toạ độ trong hệ trục chính của điểm

đặc trưng B của tenxơ ứng suất lệch (suy ra từ tenxơ ứng suất một chiều) là : $\frac{2}{3}\sigma_s, -\frac{1}{3}\sigma_s$ và

$$-\frac{1}{3}\sigma_s.$$



Hình 5.8. Mô tả hình học điều kiện dẻo Von Mises trong mặt phẳng tenxơ ứng suất lệch.

b) Điều kiện dẻo Tresca

Ngưỡng dẻo không còn liên kết với năng lượng mà với ứng suất cắt hay ứng suất tiếp

cực đại, được biểu thị bởi $\frac{1}{2} \sup_{i \neq j} (\sigma_i - \sigma_j)$.

Qui về trạng thái ứng suất đơn tương đương ứng với σ_s , ta có biểu thức của điều kiện dẻo Tresca :

$$\frac{1}{2} \sup_{i \neq j} (\sigma_i - \sigma_j) = \frac{1}{2} \sigma_s$$

hay

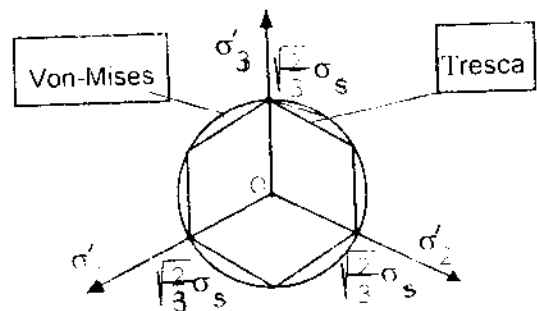
$$f = \sup_{i \neq j} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_s = 0$$

Giới hạn đàn hồi tam đầu theo điều kiện dẻo Tresca được biểu diễn bởi :

$$\sup_{i \neq j} (\sigma_i - \sigma_j) - \sigma_Y = 0$$

Trong không gian ứng suất chính, điều kiện dẻo Tresca được mô tả bởi hình lăng trụ sáu mặt với trục là đường phân giác cách đều ba trục toạ độ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (hình 5.9) và nội tiếp hình trụ Von Mises.

Hình 5.9. Biểu diễn hình học của điều kiện dẻo Tresca trong mặt phẳng tenxơ ứng suất lệch.



5.2.2.2. Điều kiện dẻo dị hướng

Đối với vật liệu dị hướng, cơ tính không như nhau theo các hướng khác nhau. Do vậy, biểu thức của các điều kiện dẻo dị hướng không thể viết dưới dạng hàm của các bất biến tenxơ ứng suất. Trong trường hợp vật liệu không nền được, người ta thường đưa thêm vào các điều kiện dẻo dị hướng cổ điển sự xoay trong không gian ứng suất. Bằng cách đó, điều kiện dẻo Von-Mises được mở rộng cho vật liệu dị hướng như sau :

$$\left(\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\sigma}}' \right) : \underline{\underline{\sigma}}' = 1,$$

trong đó $\underline{\underline{C}}$ là tenxơ bậc 4 đối xứng và phụ thuộc vào vật liệu

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{iljk} \dots$$

Tương tự, với tenxơ ứng suất, ta có :

$$\left(\underline{\underline{C}}' : \underline{\underline{\sigma}} \right) : \underline{\underline{\sigma}} = 1,$$

với $C'_{ijkk} = C'_{nnkl} = 0$.

a) Điều kiện dẻo dị hướng Hill

Điều kiện dẻo Hill áp dụng cho trường hợp dị hướng riêng, trong đó vật liệu vẫn giữ nguyên được 3 mặt phẳng đối xứng ở trạng thái hoá bền. Giao tuyến của ba mặt chính là các trục dị hướng chính và được coi là hệ toạ độ, (O, x_1, x_2, x_3) để biểu diễn điều kiện dẻo. Từ biểu thức tổng quát nêu trên, với :

$$C_{1111} = F + H \quad C_{2222} = F + G \quad C_{3333} = G + H$$

$$C_{1122} = -F \quad C_{2233} = -G \quad C_{3311} = -H$$

$$C_{1212} = L/2 \quad C_{2323} = M/2 \quad C_{3131} = N/2,$$

và các thành phần khác nhận được qua tính đối xứng của $\underline{\underline{C}}$, ta có điều kiện dẻo dị hướng Hill dưới đây :

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \\ + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2 = 1,$$

trong đó, F, G, H, L, M, N là các hệ số vô hướng đặc trưng cho trạng thái hoá bền của vật liệu. Ta có thể nhận dạng 6 hệ số đó bằng 3 thí nghiệm kéo đơn và 3 thí nghiệm cắt đơn.

Ngưỡng dẻo kéo σ_{s1} theo hướng $x_1 \rightarrow F + H = 1/\sigma_{s1}^2$,

Ngưỡng dẻo kéo σ_{s2} theo hướng $x_2 \rightarrow F + G = 1/\sigma_{s2}^2$,

Ngưỡng dẻo kéo σ_{s3} theo hướng $x_3 \rightarrow G + H = 1/\sigma_{s3}^2$,

Ngưỡng dẻo cắt σ_{s12} trong mặt $(O, x_1, x_2) \rightarrow L = 1/2\sigma_{s12}^2$,

Ngưỡng dẻo cắt σ_{s23} trong mặt $(O, x_2, x_3) \rightarrow M = 1/2\sigma_{s23}^2$,

Ngưỡng dẻo cắt σ_{s31} trong mặt $(O, x_3, x_1) \rightarrow N = 1/2\sigma_{s31}^2$.

Cần lưu ý rằng điều kiện dẻo dị hướng Hill không tính tới ảnh hưởng của hiệu ứng Bauschinger : ngưỡng dẻo kéo được coi bằng ngưỡng dẻo nén.

b) Điều kiện dẻo Tsai

Điều kiện dẻo Tsai cho phép tính tới ảnh hưởng của sự khác nhau (nếu có) giữa các trạng thái biến cứng bởi biến dạng nén và biến dạng kéo. Ở dạng tổng quát nhất, điều kiện dẻo Tsai được viết dưới dạng tổng của các tổ hợp bậc hai và bậc một của 6 thành phần ứng suất, ký hiệu là σ_α ($\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$, $\sigma_4 = \sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sigma_{31}$, $\sigma_6 = \sigma_{12}$)

$$F_\alpha \sigma_\alpha + F_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta = 1.$$

Các giả thiết về tính đối xứng trục giao và tính không nén được của vật liệu (không có ảnh hưởng của ứng suất thuỷ tĩnh) cho phép giảm số lượng các hệ số đặc trưng cho vật liệu, F_α và $F_{\alpha\beta}$, từ 27 xuống còn 8. Do đó, ta có thể viết điều kiện dẻo Tsai dưới dạng đơn giản, tương tự điều kiện dẻo Hill, sau đây :

$$F'(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G'(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H'(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \\ + 2L'\sigma_{12}^2 + 2M'\sigma_{23}^2 + 2N'\sigma_{31}^2 + P\sigma_{11} + Q\sigma_{22} - (P + Q)\sigma_{33} = 1$$

Đối với vật liệu cho trước, để xác định bằng thực nghiệm 8 hệ số trong biểu thức trên, cần tiến hành các thí nghiệm kéo, nén, cắt theo các hướng khác nhau.

Điều kiện dẻo Tsai tương đối phù hợp cho vật liệu composit sợi-polime, gỗ và được áp dụng khá phổ biến.

5.3. PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT THIẾT LẬP CÁC ĐỊNH LUẬT THUỘC TÍNH

5.3.1. Giả thiết về sự phân chia biến dạng

Sự phân chia biến dạng tổng thành biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo, đề cập trong phần trước, được lý giải bởi bản chất của các hiện tượng vật lý xảy ra. Giả thiết về sự phân chia biến dạng không nhất định phải có khi thiết lập các mô hình thuộc tính, bởi lẽ, ta không áp dụng các lý thuyết kế thừa xây dựng trên cơ sở nhiệt động học của các quá trình phụ thuộc quỹ đạo (lịch sử) biến dạng, nhưng nó lại rất cần thiết cho việc đơn giản hoá các quá trình nhận dạng mô hình và các tính toán số.

Trong khuôn khổ của lý thuyết biến dạng lớn, giả thiết về sự phân chia biến dạng có liên quan đến sự tồn tại của một hình thái trung gian - *hình thái nhỏ*, mà ta đã đề cập đến trong chương 2. Ở chương này, các vấn đề sẽ trình bày chỉ hạn chế cho trường hợp biến dạng nhỏ với thuộc tính đàn hồi tuyến tính. Tuy nhiên, việc mở rộng chúng cho trường hợp biến dạng lớn sẽ không gặp trở ngại đáng kể nào khi biến dạng đàn hồi nhỏ so với biến dạng tổng.

Ta cũng chấp nhận ở đây giả thiết về tính độc lập nhau và tính phân tách được giữa thuộc tính đàn hồi và thuộc tính dẻo.

Biến dạng dẻo $\underline{\varepsilon}^p$, được xem như hiệu giữa biến dạng tổng $\underline{\varepsilon}$, và biến dạng đàn hồi $\underline{\varepsilon}^e$:

$$\underline{\varepsilon}^p = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^e,$$

trong đó $\underline{\varepsilon}^e$ phụ thuộc tuyến tính vào ứng suất tác dụng $\underline{\sigma}$. Trong lý thuyết biến dạng nhỏ, biến dạng tổng $\underline{\varepsilon}$ là phản đối xứng của gradient chuyển vị :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad} \underline{u} + (\text{grad} \underline{u})^T].$$

5.3.2. Chọn biến nhiệt động học

Như đã trình bày trong chương 2, các biến trạng thái hay các biến độc lập, bao gồm các biến quan sát được : biến dạng tổng $\underline{\varepsilon}$, nhiệt độ T và các biến nội (không quan sát được) : biến dạng dẻo $\underline{\varepsilon}^p$, V_k . Giả thiết về sự phân chia biến dạng và bất đẳng thức Clausius-Duhem trong trường hợp biến dạng đàn-dẻo tức thời (không phụ thuộc thời gian) cho phép ta viết các biến nhiệt động học $\underline{\sigma}$ và entropic s , liên kết tương ứng với $\underline{\varepsilon}^e$ và T , dưới dạng sau (xem chương 2) :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e}, s = - \frac{\partial \psi}{\partial T},$$

trong đó, ρ là khối lượng riêng và ψ là năng lượng tự do riêng, phụ thuộc vào các biến quan sát được và các biến nội :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p, T, V_k) = \psi(\underline{\varepsilon}^e, T, V_k).$$

Bất đẳng thức Clausius-Duhem được rút gọn lại như sau :

$$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{1}{T} \dot{q} \cdot \text{grad}(T) \geq 0.$$

Các biến nội V_k có thể là đại lượng vô hướng hoặc tenxơ, biểu thị trạng thái hiện tại (trạng thái hoá bền) của vật liệu. Với mục đích đó, người ta thường dùng một trong các biến vô hướng (biến hoá bền đẳng hướng) sau :

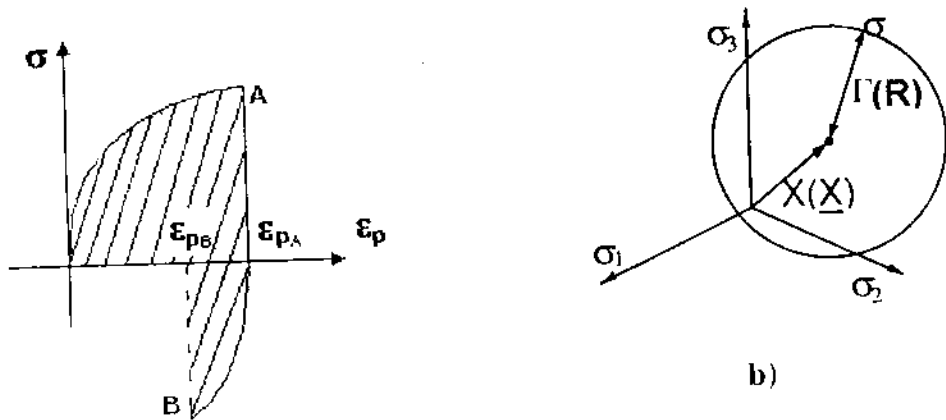
- Biến dạng dẻo tích lũy :

$$p = \int_0^t \left[\frac{2}{3} \dot{\underline{\epsilon}}^p(\tau) : \dot{\underline{\epsilon}}^p(\tau) \right]^{\frac{1}{2}} d\tau ,$$

- Công tiêu hao cho biến dạng dẻo :

$$w_p = \int_0^t \underline{\sigma}(\tau) : \dot{\underline{\epsilon}}^p(\tau) d\tau ,$$

và một hoặc nhiều biến tensor hay biến hoá bền động. Tiếp theo đây, ta chỉ dùng một biến hoá bền động học ký hiệu α . Ý nghĩa của các biến p và w_p được mô tả trên hình 5.10-a cho trường hợp biến dạng kéo nén.



Hình 5.10.

a) biến dạng dẻo tích lũy p và công tiêu hao cho biến dạng dẻo w_p .

b) miền đàn hồi xác định bởi các biến R và $\underline{X}$.

$$p(\alpha) = \epsilon_{pa} - [\epsilon_{pb} + \epsilon_{pa}]$$

$w_p =$ (miền gạch chéo)
a)

Các biến vô hướng liên quan tới mật độ lệch hiện thời trong vật liệu, trong khi đó các biến tensor (biến động học) lại liên quan tới sự không tương hợp của biến dạng trong đa tinh thể. Thường thì các đại lượng p và w_p gia tăng trong quá trình biến dạng, trừ trường hợp có quá trình phục hồi cấu trúc tinh thể xảy ra đồng thời. Tuy nhiên, các biến này không cho phép tính tới ảnh hưởng của quá trình hoá bền quan sát được trong trường hợp chất tải chu kỳ. Ngược lại, các biến động học có liên quan trực tiếp tới trạng thái biến dạng hiện thời. Trong trường hợp chất tải chu kỳ, các biến này có thể phản ánh hành vi thực của vật liệu thông qua sự biến đổi của chúng qua mỗi chu kỳ chất tải, kể cả trong chế độ ổn định.

Biến động học thường dùng là biến dạng dẻo ($\underline{\alpha} = \underline{\varepsilon}^p$), tương tự trong các mô hình hoá bền Prager (biến cứng động tuyến tính).

Sự phân tách giữa hành vi đàn hồi và hành vi dẻo (hoá bền) của vật liệu đòi hỏi biểu thức của năng lượng tự do riêng có dạng sau :

$$\Psi = \Psi_e(\underline{\varepsilon}^e, T) + \Psi_p(p, \underline{\alpha}, T).$$

Các biến lực nhiệt động học liên kết sẽ là :

$$\underline{R} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p}, \quad \underline{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}}.$$

Hình 5.10-b cho thấy vai trò của 2 biến $\underline{R}$ và $\underline{X}$ trong việc mô tả trạng thái hoá bền của vật liệu. Kích thước của miền đàn hồi phụ thuộc vào biến $\underline{R}$, trong khi đó tâm của nó được xác định bởi biến $\underline{X}$.

Với các biến nêu trên, bất đẳng thức Clausius-Duhem sẽ cho hai thành phần năng lượng tiêu hao dương : tiêu hao cơ năng và tiêu hao nhiệt năng

$$\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^p - \underline{R}p - \underline{X} : \underline{\dot{\alpha}} \geq 0, \quad -\frac{1}{T} \bar{q} \cdot \text{grad} T \geq 0.$$

Cơ năng tiêu hao chính là hiệu giữa năng lượng tiêu hao cho quá trình biến dạng dẻo và năng lượng bị giữ lại trong phần tử thể tích vật liệu, ví dụ trong mạng lệch chẳng hạn.

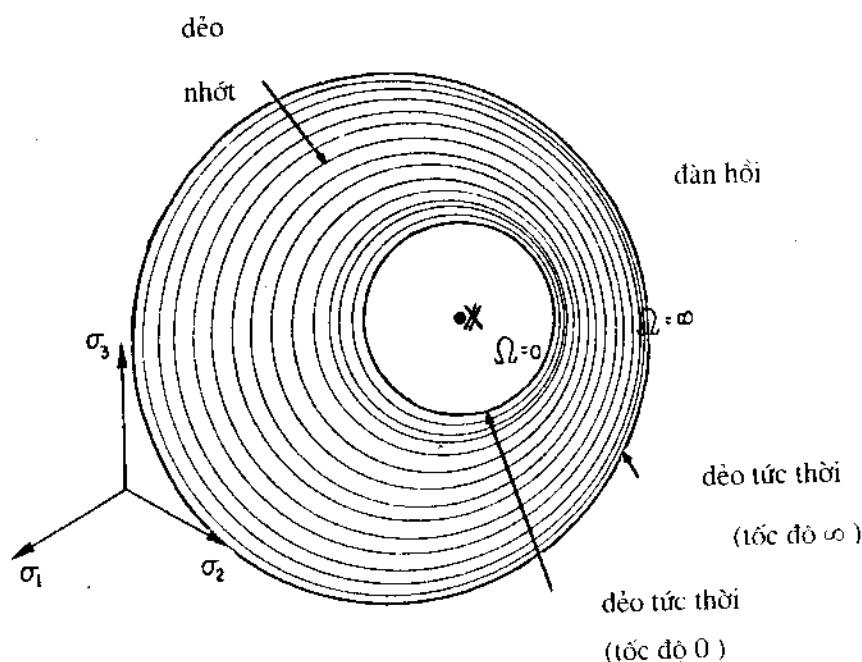
5.3.3. Mật chất tải và thế năng tiêu hao

5.3.3.1. Mật chất tải và điều kiện chất tải- dờ tải

Thuộc tính dẻo không phụ thuộc thời gian được xem như trường hợp riêng của dẻo nhớt mà ta sẽ xét trong chương sau. Ta có thể tưởng tượng trong không gian ứng suất các mặt chảy dẻo đồng thể năng (mặt đồng thể năng (tiêu hao) tạo nên một họ bề mặt lồng vào nhau (hình 5.11). Đối với một trạng thái hoá bền nhất định được đặc trưng bởi tâm $\underline{X}$ và kích thước của bề mặt Ω , tốc độ chảy dẻo càng lớn khi trạng thái ứng suất càng xa tâm $\underline{X}$.

Trên bề mặt gần tâm nhất, $\Omega = 0$, ta có tốc độ chảy dẻo bằng 0, trên bề mặt ngoài cùng, $\Omega = \infty$, ta có tốc độ chảy dẻo bằng ∞ . Giữa hai bề mặt biên đó là miền dẻo nhớt, miền đàn hồi được đặc trưng dương nhiên bởi $\Omega < 0$.

Như vậy, thuộc tính dẻo tức thời (không phụ thuộc thời gian) sẽ được áp dụng hoặc trong trường hợp chất tải vô cùng chậm hay quá trình tiến tới trạng thái tiệm cận dưới tải trọng cố định, hoặc trong trường hợp chất tải vô cùng nhanh.



Hình 5.11. Mặt chảy dẻo đồng thể năng tiêu hao.

Hành vi của vật liệu trong hai trường hợp biến có thể khác nhau ít nhiều. Đối với kim loại biến dạng ở nhiệt độ thấp hơn 1/4 nhiệt độ nóng chảy tuyệt đối, hai trường hợp trên rất gần nhau. Trong trường hợp thứ hai, với tốc độ vô cùng lớn, biến dạng dẻo nhớt được xem như không đáng kể bởi lẽ không có đủ thời gian để có thể xảy ra. Như vậy, trong bất kỳ trường hợp nào, luôn tồn tại một bề mặt xác định trong không gian ứng suất để có thể xảy ra quá trình chảy dẻo. Đối với trạng thái ứng suất nằm trong bề mặt này, biến dạng hoàn toàn là đàn hồi. Bề mặt đó gọi là mặt chất tải hay mặt chảy dẻo, $f = 0$. Ở điều kiện ban đầu, mặt này trùng với mặt biểu diễn giới hạn đàn hồi.

Để mô tả một cách chọn vẹn khả năng xảy ra chảy dẻo, ta cần có thêm điều kiện *chất tải-dỡ tải*. Chảy dẻo chỉ xảy ra khi hội tụ đầy đủ đồng thời hai điều kiện (hình 5.12):

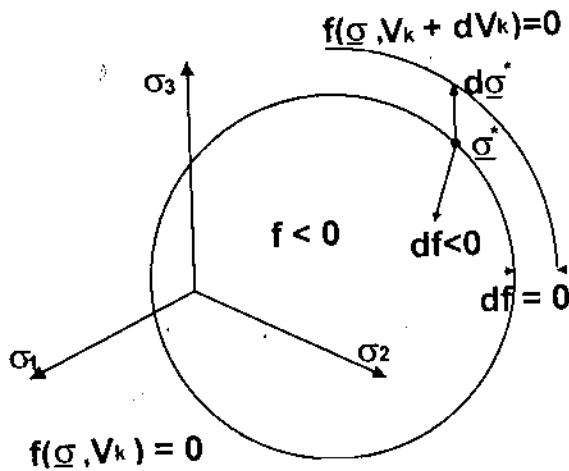
- Điểm đặc trưng cho trạng thái ứng suất σ nằm trên mặt chất tải

$$f(\underline{\sigma}^*, V_k) = 0.$$

- Biến dạng dẻo có diễn bất buộc điểm đặc trưng của trạng thái ứng suất không thể thoát khỏi bề mặt $f = 0$ (không thể có $f > 0$). Do vậy, để quá trình chảy dẻo duy trì liên tục, ta cần có thêm điều kiện tương thích :

$$df(\underline{\sigma}^*) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}^*} : d\underline{\sigma}^* + \frac{\partial f}{\partial V_k} dV_k = 0.$$

Như vậy, điểm đặc trưng của trạng thái ứng suất $(\underline{\sigma}^* + d\underline{\sigma}^*)$ sẽ luôn nằm trên mặt chất tải.



Hình 5.12. Điều kiện chất tải-dỡ tải trong trường hợp hoá bền dương.

Đương nhiên, sự biến thiên của ứng suất cũng có thể tạo cho điểm đặc trưng biến đổi hướng vào trong bề mặt dẻo. Đó là trường hợp dỡ tải, đặc trưng bởi $df(\underline{\sigma}^*) < 0$. Trong điều kiện như vậy, chảy dẻo không thể tiếp tục xảy ra, hành vi của vật liệu lập tức trở thành đàn hồi. Tóm lại :

- | | | |
|---------------------|---------------|----------------|
| $f < 0$ | $\Rightarrow$ | đàn hồi |
| $f = 0$ và $df = 0$ | $\Rightarrow$ | chảy dẻo |
| $f = 0$ và $df < 0$ | $\Rightarrow$ | dỡ tải đàn hồi |

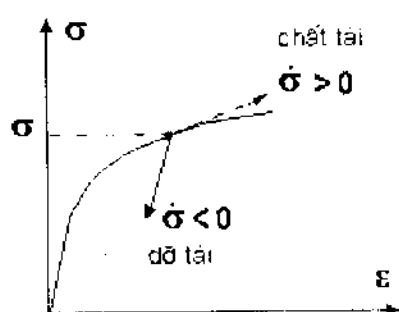
Đối với vật liệu hoá bền dương, mật chất tải được biểu diễn dưới dạng hàm của các thành phần tenxơ ứng suất và phụ thuộc vào trạng thái hoá bền thông qua các biến nội, thường là các lực nhiệt động học R và $\underline{X}$. Đôi khi mật chất tải cũng phụ thuộc vào nhiệt độ ,

$$f = f(\sigma, R, \underline{X}, T).$$

Đối với vật liệu hoá bền âm, sẽ thuận tiện hơn nếu biểu diễn mật chất tải dưới dạng hàm của biến dạng :

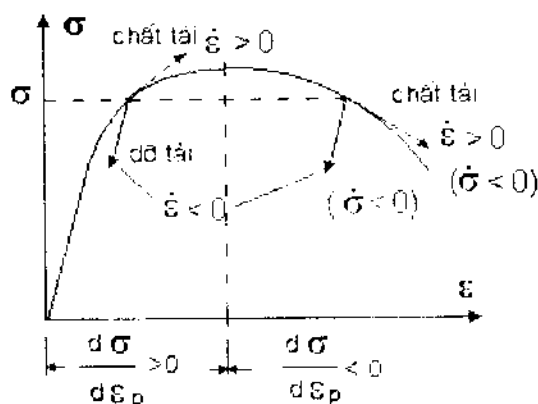
$$f = f(\underline{\varepsilon}, p, \underline{\alpha}, T).$$

Hình 5.12. cho thấy, trong trường hợp kéo đơn, điều kiện chất tải $\dot{\sigma} > 0$ không còn có nghĩa khi hoá bền trở nên âm $\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} < 0 \right)$.



$$f = f(\sigma, \text{hóa bền})$$

Hoá bền dương



$$f = f(\varepsilon, \text{hóa bền})$$

Hoá bền bất kỳ

Hình 5.12. Điều kiện chất tải-đỡ tải trong thí nghiệm kéo đơn cho các trường hợp hoá bền dương và âm.

5.3.3.2. Dẻo không liên kết

Nhiệt động học giả thiết tồn tại hàm thế năng tiêu hao mà từ đó ta có thể xác định các qui luật biến đổi của biến dạng dẻo và của các biến nội. Trong lý thuyết biến dạng dẻo, việc sử dụng hàm thế năng này dẫn đến sơ đồ "dẻo liên kết", có nghĩa là sơ đồ mà theo đó

mặt giới hạn đàn hồi (hay mặt chất tải, hay mặt chảy dẻo) được xem như trùng với "mặt đồng thế năng". "Dẻo không liên kết" là sơ đồ tổng quát hơn, tiện lợi cho việc mô tả một số loại vật liệu hay hiện tượng và đặc biệt cần thiết trong cơ học đất.

Trong sơ đồ dẻo không liên kết ta cần sử dụng ba thế năng :

- Năng lượng tự do riêng Ψ : cho phép xác định các định luật trạng thái đàn hồi;
- Mặt giới hạn đàn hồi $f = 0$: cho phép xác định điều kiện chảy dẻo;

Mặt thế năng $F = \text{const}$, cho phép xác định hướng chảy dẻo trong không gian của các biến lực nhiệt động học mở rộng (các định luật trạng thái chảy dẻo). Hàm F phụ thuộc vào các biến trạng thái và có thể vào nhiệt độ ,

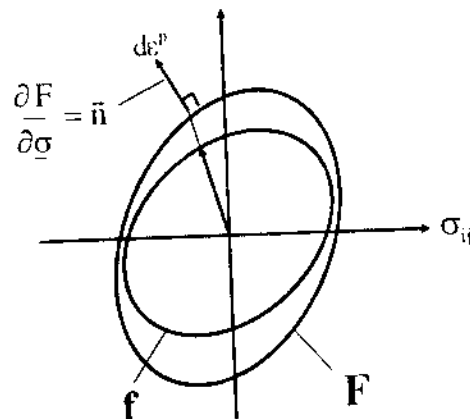
$$F = F(\underline{\sigma}, R, \underline{X}, T) .$$

Giả thiết chảy dẻo pháp tuyến mở rộng cho phép ta viết (hình 5.13):

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} ,$$

$$-\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R} ,$$

$$-\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} ,$$



Hình 5.13. Dẻo không liên kết.

trong đó $\dot{\lambda}$ là hệ số nhân dèo tức thời, bằng 0 khi

$$f < 0 \quad \text{hay} \quad f = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \leq 0 \quad (\text{không có chảy dèo}).$$

Với các phân tích nêu trên, bất đẳng thức Clausius-Duhem có dạng :

$$\Phi = \left[\underline{\sigma} : \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} + R \frac{\partial F}{\partial R} + \underline{X} : \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} \right] \dot{\lambda} \geq 0 .$$

Để đảm bảo điều kiện trên, F phải là một hàm lồi, xác định dương ngay từ khi chảy dèo xảy ra và bao gốc toạ độ ($F \geq f = 0, \quad F(0,0,0;T) = 0 \quad \forall T$).

5.3.3.3. Điều kiện tương thích - Biểu thức của hệ số nhân dèo

Ta đã thấy điều kiện chất tải-dỡ tải đòi hỏi $f = 0$ và $\dot{f} = 0$ trong quá trình chảy dèo. Yêu cầu thứ hai thoả mãn khi :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : \underline{\dot{X}} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} = 0 .$$

Áp dụng quan hệ giữa các biến nội và lực nhiệt động học liên kết với chúng, ta có :

$$\begin{aligned} \dot{R} &= N_{pp} \dot{p} + N_{\alpha p} : \underline{\dot{\alpha}} + N_{pT} \dot{T} \\ \underline{\dot{X}} &= N_{\alpha p} \dot{p} + N_{\alpha \alpha} : \underline{\dot{\alpha}} + N_{\alpha T} \dot{T} \end{aligned}$$

trong đó toán tử N được tính từ năng lượng tự do riêng Ψ như sau :

$$N_{pp} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p^2}, \quad N_{\alpha T} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\alpha} \partial T}, \quad N_{pT} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial p \partial T}, \quad N_{\alpha p} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\alpha} \partial p}, \quad N_{\alpha \alpha} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \underline{\alpha} \partial \underline{\alpha}} .$$

Thế các biểu thức trên vào $\dot{f} = 0$ và sử dụng các quan hệ chảy dèo pháp tuyến, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : N_{\alpha T} + \frac{\partial f}{\partial R} N_{pT} \right) \dot{T} - \\ & - \dot{\lambda} \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : N_{\alpha \alpha} : \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} \right) : N_{\alpha p} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial F}{\partial R} N_{pp} \right] = 0. \end{aligned}$$

từ đó rút ra $\dot{\lambda}$ đối với các thế năng, các tốc độ ứng suất và nhiệt độ khác nhau.

Cần lưu ý rằng, phương pháp trên chỉ áp dụng cho các vật liệu hoá bền dương. Đối với các vật liệu hoá bền âm, cần phải xây dựng lý thuyết chảy dèo xuất phát từ hàm chất tải

biểu diễn thông qua biến dạng. Nói quá trình hoá bền dương có nghĩa là coi modul hoá bền, h, không âm :

$$h = \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : N_{\alpha\alpha} : \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \frac{\partial F}{\partial \underline{R}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{R}} \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} \right) : N_{\alpha\beta} + \frac{\partial f}{\partial \underline{R}} \frac{\partial F}{\partial \underline{R}} N_{\beta\beta} \right] \geq 0$$

Nếu h dương, biểu thức của hệ số nhân dẻo sẽ trở thành :

$$\dot{\lambda} = \frac{H(f)}{h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : N_{\alpha T} + \frac{\partial f}{\partial \underline{R}} N_{\beta T} \right) \dot{T} \right\rangle ,$$

trong đó, H là hàm Heaviside : $H(f) = 0$ khi $f < 0$, $H(f) = 1$ khi $f = 0$, ký hiệu $\langle x \rangle = 0$ khi $x < 0$, $\langle x \rangle = x$ khi $x \geq 0$. Ta dễ dàng nhận thấy, với hai ký hiệu trên, điều kiện $\lambda = 0$ được đảm bảo khi $f < 0$ hoặc khi quá trình dỡ tải xảy ra ($\dot{f} < 0$).

5.3.3.4. Dẻo liên kết - Vật liệu tiêu chuẩn mở rộng

Lý thuyết dẻo liên kết coi hàm thế năng F trùng với hàm chất tải f, là hàm giữ vai trò của hàm chỉ thị lỗi $\varphi^* = \varphi^*(\underline{\sigma}, R, \underline{X}; T)$, được suy ra từ hàm thế năng tiêu hao $\varphi = \varphi(\underline{\dot{\epsilon}}^p, \dot{p}, \underline{\dot{\alpha}}; T)$ bằng phép biến đổi Legendre-Fenchel.

Trong lý thuyết dẻo không phụ thuộc thời gian, thế năng φ^* bằng 0 ở trong miền đàn hồi, $f < 0$, và bằng vô cùng ở ngoài miền này.

Nhiều định luật chảy dẻo đã được đề xuất trên cơ sở lý thuyết nêu trên cho vật liệu tiêu chuẩn mở rộng. Biểu thức của modul hoá bền trong trường hợp này trở thành :

$$h = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{R}} \right)^2 N_{\beta\beta} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : L_{\alpha\alpha} : \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} + 2 \frac{\partial f}{\partial \underline{R}} \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : L_{\alpha\beta} ,$$

và các định luật chảy dẻo có dạng :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} , \quad -\dot{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} , \quad -\underline{\dot{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} .$$

Biểu thức của hệ số nhân dẻo không thay đổi khi thay F bằng f .

5.4. CÁC ĐỊNH LUẬT CHẢY DÈO

5.4.1. Các dạng khác nhau của điều kiện dẻo và định luật chảy dẻo

Trước khi đề cập đến các mô hình riêng, ta cần khẳng định ý nghĩa của các thuật ngữ *dạng hướng*, *động*, *dị hướng*. Ta phân biệt hai trường hợp : trường hợp liên quan tới điều kiện chảy dẻo và trường hợp liên quan đến quá trình hoá bền, hay nói một cách khác đến sự biến đổi của điều kiện dẻo. Các thuật ngữ *dạng hướng* và *dị hướng* áp dụng trong cả hai trường hợp, còn thuật ngữ *động* chỉ dùng với ý tưởng về sự biến đổi. Ta có thể đưa ra 6 mức mô tả lý thuyết dưới đây:

1- *Điều kiện dẻo dạng hướng - Hoá bền dạng hướng* : chỉ cần sử dụng bất biến $J(\sigma)$ và một biến vô hướng p (J có thể là bất biến bậc hai, $J = J_2$)

2- *Điều kiện dẻo dạng hướng - Hoá bền động* : trong quá trình biến dạng chỉ có sự dịch chuyển của bề mặt dẻo gây nên bởi tenxơ $\underline{X}$.

3- *Điều kiện dẻo dị hướng - Hoá bền dạng hướng* : điều kiện dẻo được biểu diễn dưới dạng phức tạp hơn, ví dụ $(\underline{C} : \underline{\sigma}') : \underline{\sigma}'$ trong đó $\underline{C}$ phụ thuộc vào vật liệu. Trong quá trình hoá bền, dạng của điều kiện dẻo vẫn giữ nguyên, chỉ có sự giãn nở đồng đều của mặt dẻo gây nên bởi biến vô hướng p .

4- *Điều kiện dẻo dị hướng - Hoá bền động* : dạng của điều kiện dẻo giữ nguyên trong quá trình hoá bền, nhưng mặt dẻo bị dịch chuyển bởi tenxơ $\underline{X}$.

5- *Điều kiện dẻo dạng hướng - Hoá bền dị hướng* : trong quá trình hoá bền, bất biến bậc hai $J_2(\sigma)$ trong điều kiện dẻo (ban đầu) chuyển thành một biểu thức phức tạp hơn, có thể gồm cả hiệu ứng động, trong đó $\underline{C}^*(\underline{\varepsilon}^p)$ biểu thị mức độ dị hướng phụ thuộc vào trạng thái biến dạng hiện thời của vật liệu .

6- *Điều kiện dẻo dị hướng - Hoá bền dị hướng* : đây là trường hợp tổng quát hơn của trường hợp trên. $\underline{C}$ mô tả độ dị hướng ban đầu (trạng thái biến dạng bằng 0).

Cần lưu ý rằng sự phân biệt giữa "trạng thái ban đầu" và "trạng thái hoá bền" chỉ là tương đối, bởi lẽ trạng thái hoá bền tại thời điểm nào đó có thể được xem như trạng thái ban đầu cho thời điểm tiếp theo.

Sự dị hướng được đưa vào bởi toán tử $\underline{C}$ không mang tính tổng quát mà chỉ tạo nên sự xoay của điều kiện dẻo. Thực nghiệm cho thấy, ngoài sự xoay và sự nở (hay co) đều, bề mặt dẻo còn có thể bị biến dạng với sự tạo thành các "góc". Việc mô hình hoá hiện tượng dị

hướng như vậy rất phức tạp, do đó dưới đây ta chỉ xét hạn chế ở các trường hợp hoá bền đẳng hướng và hoá bền động (từ trường hợp 1 đến 4).

Trường hợp	Điều kiện dẻo ban đầu	Biến hoá bền	Điều kiện dẻo bị biến đổi bởi hoá bền
1	$f[J(\underline{\sigma})]$ - đẳng hướng	p	$f[J(\underline{\sigma})] - R(p)$ - đẳng hướng
2	$f[J(\underline{\sigma})]$ - đẳng hướng	$\underline{X}$	$f[J(\underline{\sigma} - \underline{X})]$ - động
3	$f(\underline{C} : \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}')$ - dị hướng	p	$f(\underline{C} : \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}') - R(p)$ - đẳng hướng
4	$f(\underline{C} : \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}')$ - dị hướng	$\underline{X}$	$f[\underline{C} : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : (\underline{\sigma}' - \underline{X}')] -$ động
5	$f[J(\underline{\sigma})]$ - đẳng hướng	$p, \underline{X}, \underline{\varepsilon}^p$	$f[\underline{C}^* : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : (\underline{\sigma}' - \underline{X}')] - R(p)$ đẳng hướng + động + dị hướng
6	$f(\underline{C} : \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}')$ - dị hướng	$p, \underline{X}, \underline{\varepsilon}^p$	$f[\underline{C}^* : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : (\underline{\sigma}' - \underline{X}')] - R(p)$ đẳng hướng + động + dị hướng

5.4.2. Mô hình hoá bền đẳng hướng

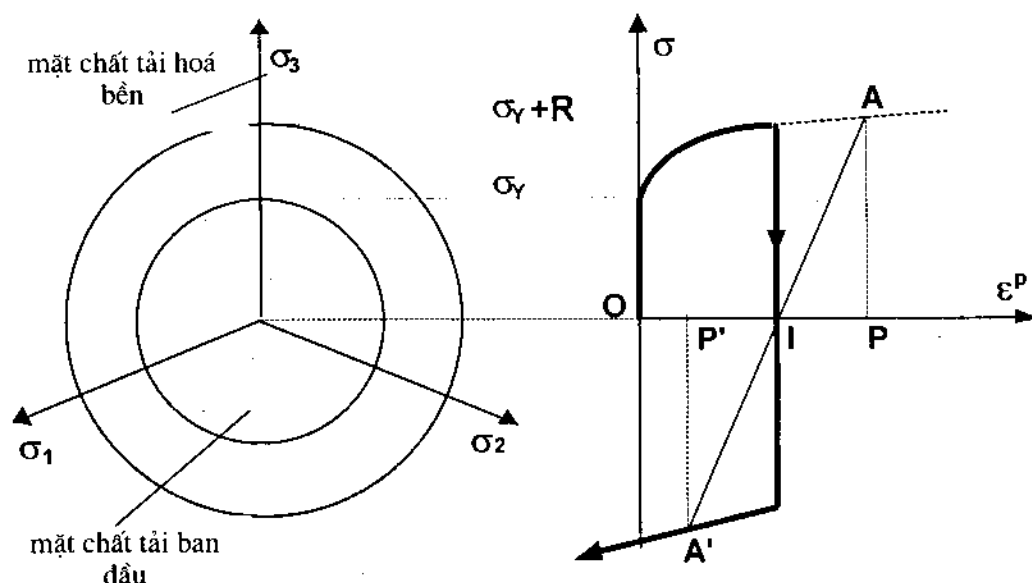
Trong các mô hình hoá bền đẳng hướng, sự biến đổi của bề mặt dẻo được khống chế chỉ bởi một biến vô hướng, hoặc là công tiêu hao cho biến dạng dẻo, hoặc là biến dạng dẻo tích lũy p (hay lực nhiệt động học R - biến liên kết với p). Các mô hình này có thể thiết lập một cách dễ dàng trong khuôn khổ lý thuyết dẻo liên kết với giả thiết về sự trùng hợp giữa thế hàm thế năng tiêu hao và hàm chất tải. Để đơn giản mô hình, ta giả thiết nhiệt độ không đổi, hoặc sử dụng các điều kiện dẻo không phụ thuộc vào nhiệt độ (việc mở rộng cho trường hợp không đẳng nhiệt sẽ không gặp khó khăn khi tiến hành theo phương pháp trình bày trong mục 5.3.3.4) :

$$f = f(\underline{\sigma}, R) \text{ .}$$

Giả thiết về hoá bền đẳng hướng đơn giản đáng kể việc thiết lập và nhận dạng mô hình chảy dẻo. Trong trường hợp này, hàm chất tải thường được biểu diễn dưới dạng :

$$f = f_v(\underline{\sigma}) - \Gamma(R) \text{ ,}$$

trong đó hàm f_Y cho biết dạng của miền giới hạn đàn hồi và hàm Γ biểu thị sự hoá bền của vật liệu thông qua quan hệ giữa lực nhiệt động học R và biến hoá bền được chọn (là p hoặc w_p). Trong trường hợp vật liệu đẳng hướng (miền đàn hồi ban đầu đẳng hướng), hàm f_Y phụ thuộc trực tiếp vào các bất biến của tenxơ ứng suất.



Hình 5.14. Hoá bền đẳng hướng (biến dạng kéo-nén) .

Hoá bền đẳng hướng tương ứng với sự nở (hoặc co) đều của mặt chất tải ban đầu. Hình 5.14 biểu diễn sự biến đổi của mặt chất tải trong không gian ứng suất, tương quan với đường cong ứng suất-biến dạng trong trường hợp thử kéo-nén. Hình vẽ cũng cho thấy tại sao biến dạng dẻo tích lũy lại có thể dùng như một biến hoá bền đẳng hướng : các điểm A và A' có cùng trạng thái và cùng biến dạng dẻo tích lũy $OI + IP = OI + IP'$.

5.4.2.1. Mô hình Prandtl-Reuss

a) Thiết lập mô hình

Mô hình, áp dụng cho đàn-dẻo biến cứng đẳng hướng, được thiết lập trên cơ sở các giả thiết sau đây :

- Vật liệu không nén được : biến dạng dẻo với thể tích không đổi và không phụ thuộc vào ứng suất thủy tĩnh $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma})$. Hàm chất tải chỉ phụ thuộc tenxơ ứng suất lệch và các biến nội ($\partial f / \partial \sigma_m = 0$).

- Vật liệu ban đầu đẳng hướng và biến cứng đẳng hướng trong quá trình biến dạng dẻo: hàm chất tải chỉ phụ thuộc vào bất biến bậc 2 (J_2), và bậc 3 (J_3) của tenxơ ứng suất lệch:

$$J_2(\underline{\sigma}) = \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$J_3(\underline{\sigma}) = \left(\frac{9}{2} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' \right)^{\frac{1}{3}}$$

- Dẻo liên kết tuân theo định luật chảy dẻo pháp tuyến :

$$d\underline{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$dp = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R}$$

- Hàm chất tải Von-Mises, không phụ thuộc vào J_3 , có dạng sau :

$$f = \sigma_{eq} - R - \sigma_Y = 0,$$

trong đó, σ_Y là giới hạn đàn hồi kéo ban đầu.

Đường cong biến cứng được biểu diễn bởi quan hệ :

$$R = k(p) = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p},$$

với $R(0) = k(0) = 0$.

Áp dụng lý thuyết trình bày trong mục 5.3.3, ta có thể viết :

$$d\underline{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\underline{\sigma}'}{\sigma_{eq}},$$

$$dp = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} = d\lambda = \left(\frac{2}{3} d\varepsilon^p : d\varepsilon^p \right)^{\frac{1}{2}},$$

biểu thức trên chính là sự gia tăng của biến dạng dẻo tích lũy.

Điều kiện tương thích khi xuất hiện biến dạng dẻo ($df = 0$ khi $f = 0$) cho :

$$df = d\sigma_{eq} - k'(p)dp = 0.$$

Từ đó ta có thể rút ra biểu thức của hệ số nhân dẻo :

$$d\lambda = dp = H(f) \frac{d\sigma_{eq}}{k'(p)}.$$

Đối với vật liệu hoá bền dương, $k'(p) > 0$, biến dạng dẻo chỉ xảy ra khi $d\sigma_{eq} > 0$ (ứng suất tương đương gia tăng). Trong trường hợp ngược lại ($d\sigma_{eq} < 0$), hệ số nhân dẻo bằng 0. Để biểu thị điều đó, ta dùng ký hiệu $\langle x \rangle$:

$$d\lambda = dp = H(f) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{k'(p)}.$$

Như vậy, định luật chảy dẻo có thể viết như sau :

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} H(f) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{k'(p)} \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\sigma_{eq}}.$$

Hàm $k'(p)$ có thể được thay thế bởi hàm ứng suất $g'(\sigma_{eq})$:

$$\text{ta có :} \quad p = k^{-1}(R) = k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_Y),$$

từ đó :

$$g'(\sigma_{eq}) = \left[k'(k^{-1}(\sigma_{eq} - \sigma_Y)) \right]^{-1}.$$

Cuối cùng, mô hình dẻo dẻo Prandtl-Reuss có dạng như sau :

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e &= \frac{1+\nu}{E} d\sigma + \frac{\nu}{E} d[\text{tr}(\sigma)] \underline{\underline{1}} \\ d\varepsilon^p &= \frac{3}{2} H(f) g'(\sigma_{eq}) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned}$$

Cần lưu ý rằng, biểu thức $d\varepsilon^p$ nêu trên chỉ áp dụng khi $f = \sigma_{eq} - R - \sigma_Y = 0$. Nếu bỏ qua biến dạng đàn hồi, quan hệ

$$d\varepsilon = \frac{3}{2} H(f) g'(\sigma_{eq}) \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \underline{\sigma}$$

còn được gọi là phương trình Levy-Mises.

b) Nhận dạng mô hình

Thí nghiệm kéo đơn hoá bền sẽ làm rõ ý nghĩa của các biến R , p và cho phép nhận dạng hàm $g(\sigma_{eq})$. Trong trường hợp chỉ có một thành phần của tenxơ ứng suất $\sigma_1 = \sigma \neq 0$, các thành phần khác 0 của tenxơ ứng suất lệch sẽ là: $\sigma'_{11} = 2/3\sigma$, $\sigma'_{22} = \sigma'_{33} = -1/3\sigma$. đồng thời ta cũng có $p = \varepsilon^p$ và $J_2 = \sigma_{eq} = \sigma$. Phương trình chảy dẻo trở thành:

$$d\varepsilon_{11}^p = d\varepsilon^p = g'(\sigma) d\sigma.$$

Hàm $[g'(\sigma)]^{-1}$ giữ vai trò mô đun tiếp tuyến của đường cong hoá bền:

$$\frac{1}{g'(\sigma)} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p}.$$

Ta cũng tìm thấy ý nghĩa của biến R :

$$R = k(p) = \int_0^p k'(\varepsilon^p) d\varepsilon^p = \int_{\sigma_Y}^{\sigma} \frac{1}{g'(\sigma)} d\varepsilon^p(\sigma) = \int_{\sigma_Y}^{\sigma} d\sigma = \sigma - \sigma_Y$$

phù hợp với biểu thức của hàm chất tải trong trường hợp kéo đơn:

$$f = |\sigma| - R - \sigma_Y = 0.$$

Hình 5.15 mô tả nội dung nhận dạng mô hình trong trường hợp đơn giản nêu trên.

Trường hợp biểu thức của đường cong hoá bền có dạng như trình bày trong mục 5.2.1.3- b), biến R được viết như sau:

$$R = k(p) = \sigma_{eq} - \sigma_Y = K_Y p^{1+M_Y}.$$

Từ đó ta có:

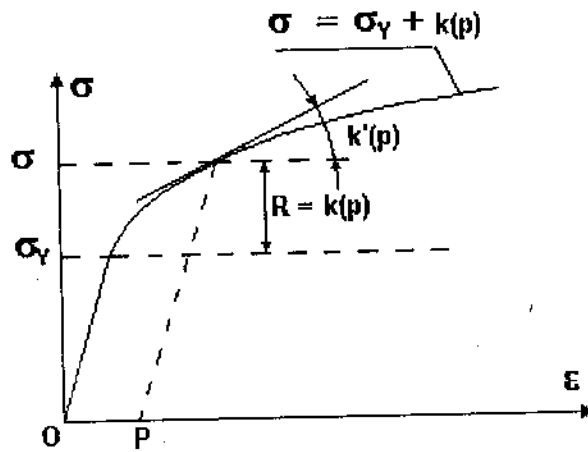
$$k'(p) = \frac{K_Y}{M_Y} p^{1+M_Y} = \frac{K_Y}{M_Y} \left(\frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K_Y} \right)^{1+M_Y}.$$

Phương trình chảy dẻo Prandtl-Reuss có dạng :

$$d\bar{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \frac{M_Y}{K_Y} p^{M_Y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \underline{\underline{\sigma}}' = \frac{3}{2} \frac{M_Y}{K_Y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \underline{\underline{\sigma}}' ,$$

hay

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{M_Y}{K_Y} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y-1} \frac{\langle d\sigma_{eq} \rangle}{\sigma_{eq}} \sigma'_{ij} .$$



Hình 5.15. Đường cong thử kéo với hoá bền đẳng hướng lý giải nội dung nhận dạng mô hình .

Trong trường hợp kéo đơn, biểu thức trên trở thành :

$$d\epsilon^p = \frac{M_Y}{K_Y} \left\langle \frac{\sigma - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y-1} d\sigma .$$

Lấy tích phân với $\sigma \geq \sigma_Y$, ta có :

$$\epsilon^p = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y} .$$

c) Trường hợp dẻo lý tưởng

Biến cứng không tồn tại, $R = 0$:

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_Y = 0.$$

Điều kiện tương thích $df = d\sigma_{eq} = 0$ không còn có thể cho phép xác định $d\lambda$. Điều đó giải thích tại sao trong trường hợp này biến dạng dẻo bất định:

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\sigma}{\sigma_{eq}}, \quad d\lambda - \text{bất định dương.}$$

5.4.2.2. Các mô hình chảy dẻo biến cứng đẳng hướng khác

a) Mô hình dẻo đẳng hướng Tresca

Để đơn giản, ta xét các thành phần của $d\varepsilon^p$ trong hệ trục chính với $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$. Điều kiện dẻo Tresca trong trường hợp điểm chất tải nằm trên một mặt của lăng trụ được biểu diễn bởi:

$$f = \text{Sup}(|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_s = 0$$

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s = 0$$

Áp dụng định luật chảy dẻo pháp tuyến ta có:

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = d\lambda$$

$$d\varepsilon_2^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = 0$$

$$d\varepsilon_3^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = -d\lambda$$

Trong trường hợp hai thành phần ứng suất chính bằng nhau ($\sigma_1 = \sigma_2$), điểm chất tải sẽ nằm trên cạnh của lăng trụ Tresca. Trường hợp này cần có phương pháp xử lý đặc biệt nhằm khắc phục sự bất định của pháp tuyến với mặt chất tải.

Hệ số nhân dẻo được nhận dạng bằng thí nghiệm kéo đơn tương tự đối với mô hình Prandtl-Reuss:

$$d\lambda = d\varepsilon_1^p = g'(\sigma_s) d\sigma_s,$$

từ đó:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= g'(\sigma_1 - \sigma_3)d(\sigma_1 - \sigma_3) \\ d\varepsilon_2^p &= 0 \\ d\varepsilon_3^p &= -g'(\sigma_1 - \sigma_3)d(\sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad \text{nếu } \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 0$$

Nếu đường cong biến cứng được biểu diễn bởi $\varepsilon^p = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^M$, ta có

$$g'(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{M}{K} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{K} \right)^{M-1}.$$

b) Mô hình chảy dẻo đẳng hướng sử dụng điều kiện dẻo dị hướng

Nếu điều kiện dẻo dị hướng có dạng :

$$f = \left(\underline{C} : \underline{\sigma}' \right) : \underline{\sigma}' - R - \sigma_Y = 0$$

ta có định luật chảy dẻo

$$d\varepsilon^p = \frac{H(f)}{k'(p)} \left\langle \underline{C} : \underline{\sigma}' : d\underline{\sigma}' \right\rangle \frac{\underline{C} : \underline{\sigma}'}{R + \sigma_Y}.$$

hay

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{H(f)}{k'(p)} \left\langle C_{pqrs} \sigma'_{pq} : d\sigma'_{rs} \right\rangle \frac{C_{ijkl} \sigma'_{kl}}{R + \sigma_Y}.$$

Mô hình trên có thể ứng dụng cho vật liệu có dị hướng ban đầu đáng kể : dị hướng do chế tạo vật liệu, dị hướng do tạo hình (cán, ép chảy,...), vật liệu composit, ...

5.4.3. Mô hình biến cứng động tuyến tính

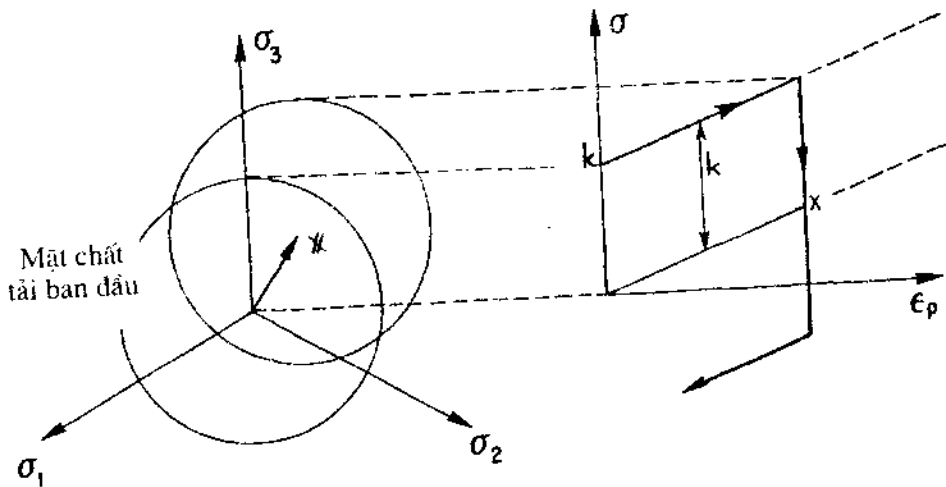
5.4.3.1. Biến cứng động Prager

a) Dạng tổng quát

Biến cứng động tạo nên sự tịnh tiến của mặt chất tải. Biến hoá bền, tenxơ $\underline{X}$, cho biết vị trí hiện thời của bề mặt này :

$$f = f_Y (\underline{\sigma} - \underline{X}) - k.$$

Hình 5.16 trình bày sơ đồ dịch chuyển của mặt chất tải trong không gian ứng suất và mô phỏng tương ứng trong biến dạng kéo-nén. Xét tổng quát, giá trị của giới hạn đàn hồi k thường khác với σ_Y .



Hình 5.16. Biến cứng động biểu diễn trong không gian ứng suất và trong biến dạng kéo-nén đơn tương ứng.

Thường ta xét sự đẳng hướng xung quanh trạng thái trung tính biểu diễn bởi $\underline{X}$ với giả thiết biến dạng dẻo xảy ra trong điều kiện thể tích không đổi. Như vậy, trong hàm f_Y chỉ có các biến biến $J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})$ và $J_3(\underline{\sigma} - \underline{X})$ của các tenxơ ứng suất lệch, tách ra từ $\underline{\sigma}$ và $\underline{X}$, tham gia. Giả thiết về định luật chảy dẻo pháp tuyến mở rộng dẫn đến biến cứng động tuyến tính (biến hoá bên $\underline{\alpha}$ nhận bằng biến dạng dẻo hiện thời) :

$$d\underline{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$d\underline{\alpha} = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = d\underline{\varepsilon}^p.$$

Sử dụng hàm năng lượng riêng tự do dưới dạng bình phương của $\underline{\alpha}$, ta có :

$$\underline{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} = C_0 \underline{\alpha}.$$

Mô hình biến cứng động Prager tổng quát, theo sơ đồ nêu trên, có dạng :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$d\underline{X} = C_o d\varepsilon^p.$$

Khi xảy ra biến dạng dẻo, điều kiện tương thích cho phép ta viết :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : d\underline{X} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} - C_o \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\varepsilon^p \\ &= \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} - C_o \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Từ đó ta rút ra biểu thức của hệ số nhân dẻo :

$$d\lambda = \frac{H(f)}{C_o} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}}.$$

Biểu thức xác định độ gia tăng của biến dạng dẻo sẽ có dạng :

$$d\varepsilon^p = \frac{H(f)}{C_o} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}.$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng $d\varepsilon^p$ có giá trị bằng hình chiếu của độ gia tăng $d\underline{\sigma}/C_o$ lên pháp tuyến của mặt chất tải. Thực vậy :

$$d\varepsilon^p : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1}{C_o} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle.$$

b) Trường hợp điều kiện dẻo Von-Mises

Trong trường hợp mặt chất tải được mô tả bởi điều kiện dẻo Von-Mises, hàm f_Y chỉ phụ thuộc vào bất biến bậc hai :

$$J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) = \left[\frac{3}{2} (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Khi đó ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma}' - \underline{X}')}$$

Trong trường hợp này, ta viết phương trình biến cứng động dưới dạng :

$$d\underline{X} = \frac{2}{3} C d\underline{\varepsilon}^p.$$

Với các biểu thức trên, hệ số nhân dẻo và độ gia tăng biến dạng được xác định như

sau :

$$d\lambda = \frac{3H(f)}{2C} \frac{\left\langle (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : d\underline{\sigma} \right\rangle}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})},$$

$$d\underline{\varepsilon}^p = \frac{9H(f)}{4C} \left\langle \frac{(\underline{\sigma}' - \underline{X}') : d\underline{\sigma}}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})} \right\rangle \frac{(\underline{\sigma}' - \underline{X}')}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}.$$

Từ điều kiện $f = 0$, ta có thể thay $J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})$ bằng k . Khi đó, mô hình biến cứng động Prager áp dụng cho vật liệu Von-Mises có dạng :

$$f = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - k = 0$$

$$d\underline{\varepsilon}^p = \frac{9H(f)}{4Ck^2} \left\langle (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : d\underline{\sigma} \right\rangle \frac{(\underline{\sigma}' - \underline{X}')}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}$$

$$d\underline{X} = \frac{2}{3} C d\underline{\varepsilon}^p,$$

hay dưới dạng chỉ số :

$$f = J_2(\sigma_{ij} - X_{ij}) - k = 0$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{9H(f)}{4Ck^2} \left\langle (\sigma_{kl}' - X_{kl}') d\sigma_{kl} \right\rangle \frac{(\sigma_{ij}' - X_{ij}')}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}$$

$$dX_{ij} = \frac{2}{3} C d\varepsilon_{ij}^p.$$

c) Nhận dạng mô hình

Nhận dạng mô hình biến cứng động tuyến tính Prager có thể tiến hành nhờ thí nghiệm kéo đơn. Tương tự tenxơ ứng suất lệch tác dụng, tenxơ ứng suất lệch nội có dạng :

$$\begin{bmatrix} \underline{X'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}X \end{bmatrix}.$$

Điều kiện dẻo và phương trình chảy dẻo trong trường hợp này sẽ là :

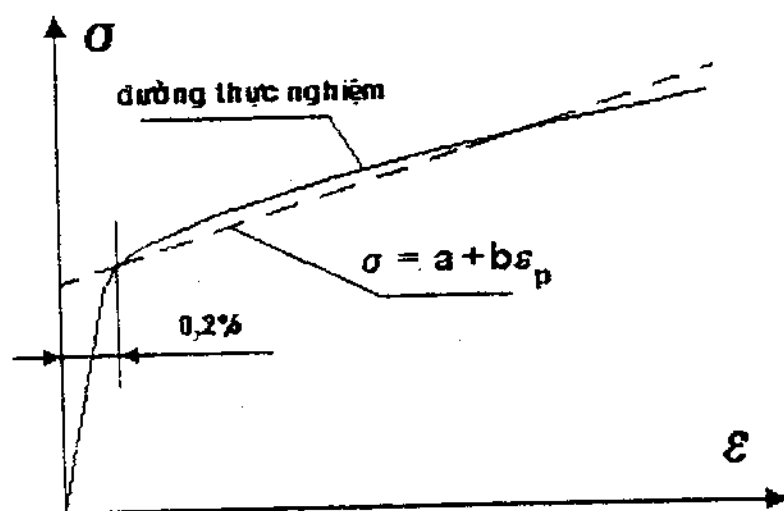
$$f = |\sigma - X| - k = 0$$

$$d\epsilon_{11}^p = d\epsilon^p = \frac{1}{C} \langle d\sigma \rangle.$$

Ta thấy rằng modul biến cứng là một hằng số và bằng C, như đã thấy trực tiếp qua quan hệ $dX = C d\epsilon^p$ (hình 5.17). Tại mỗi thời điểm của quá trình biến dạng ta có thể viết :

$$\sigma = X \pm k = C\epsilon^p \pm k,$$

trong đó, dấu + hay - phụ thuộc vào chiều chảy dẻo.



Hình 5.17. Nhận dạng mô hình biến cứng động tuyến tính qua đồ thị thử kéo.

Đối với vật liệu cho trước, việc nhận dạng mô hình biến cứng động tuyến tính hết sức đơn giản. Ta có thể chọn một đường thẳng trùng hợp tốt nhất với đồ thị thử kéo và xác định các đặc trưng của nó (hình 5.17). Một cách đơn giản hơn nữa là căn cứ vào các đặc tính

thường được biết trước đối với mỗi vật liệu như giới hạn đàn hồi (ứng với 0,2% biến dạng dẻo) $\sigma_{0,2}$, ứng suất phá huỷ σ_b và biến dạng phá huỷ ϵ_b :

$$C \equiv \frac{\sigma_b - \sigma_{0,2}}{\epsilon_b}.$$

Mô hình biến cứng động tuyến tính rất thuận lợi khi áp dụng trong các tính toán số (thời gian tính ngắn, ổn định). Tuy nhiên, trong trường hợp chất tải chu kỳ, mô hình tuyến tính không cho phép ta mô phỏng một cách định lượng hiệu ứng Bauschinger.

5.4.3.2. Mô hình Prager-Ziegler

Trong mô hình Prager-Ziegler định luật biến cứng được thay thế bởi:

$$d\underline{X} = (\underline{\sigma} - \underline{X})d\vartheta.$$

Việc sử dụng tenxơ ứng suất $(\underline{\sigma} - \underline{X})$ thay cho tenxơ ứng suất lệch $(\underline{\sigma}' - \underline{X}')$ cho phép tính tới ảnh hưởng của ứng suất thủy tĩnh đến sự biến đổi của biến nội động. Dưới tác dụng của tải phức tạp, biến dạng dẻo theo mô hình Prager-Ziegler sẽ khác so với mô hình Prager. Trong trường hợp dẻo không nén được, hai mô hình cho kết quả như nhau. Hệ số nhân $d\vartheta$ xác định từ điều kiện tương thích $df = 0$.

$$d\vartheta = H(f) \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle}{(\underline{\sigma} - \underline{X}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}}.$$

Hệ số nhân dẻo $d\lambda$ có thể có giá trị bất kỳ phụ thuộc vào các bất biến hoặc của $\underline{\sigma}$ hoặc của $\underline{X}$. Điều này cho phép ta đưa vào mô hình khả năng mô tả biến cứng động phi tuyến với $d\lambda$ có dạng ví dụ như:

$$d\lambda = \frac{H(f)}{C(\underline{\sigma})} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}}.$$

Theo mô hình này, $C(\underline{\sigma})d\epsilon^p$ là hình chiếu của $d\underline{\sigma}$ và cũng là của $d\underline{X}$ lên pháp tuyến với bề mặt dẻo tại điểm chất tải (hình 5.18). Tuy nhiên, việc chọn hàm $C(\underline{\sigma})$, nhằm mô

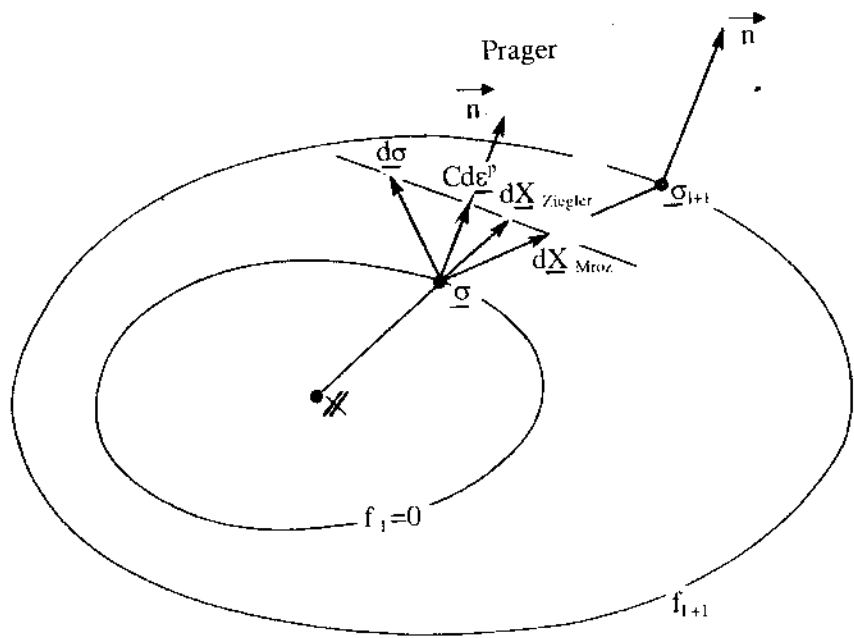
tả sự biến đổi của modun biến cứng và sự chảy dẻo phi tuyến, cũng sẽ không mô tả được một cách chính xác hiện tượng biến cứng động trong một số trường hợp chất tải chu kỳ.

Biến cứng động cũng có thể xảy ra đối với các vật liệu đã có tính dị hướng ban đầu. Giả sử miền đàn hồi (mặt chất tải) ban đầu có dạng :

$$f = f_Y(\underline{C};\underline{\sigma};\underline{\sigma}) - k = 0 ,$$

biến cứng động, trong trường hợp các hướng dị hướng chính không đổi, có thể mô tả một cách đơn giản bằng điều kiện dẻo sau :

$$f = f_Y[\underline{C};(\underline{\sigma}'-\underline{X}')(\underline{\sigma}'-\underline{X}')] - k = 0 .$$



Hình 5.18. Các dạng biến cứng động khác nhau.

Phương pháp xử lý đã đề cập nhiều lần trong các phần trước có thể được áp dụng để xác định hệ số nhân dẻo dλ. Mô hình chảy dẻo trong trường hợp này có dạng :

$$d \underline{\epsilon}^p = f_Y' \underline{C} \left(\underline{\sigma}' - \underline{X}' \right) d \lambda$$

$$d \underline{X} = C f_Y' \underline{C} \left(\underline{\sigma}' - \underline{X}' \right) d \lambda .$$

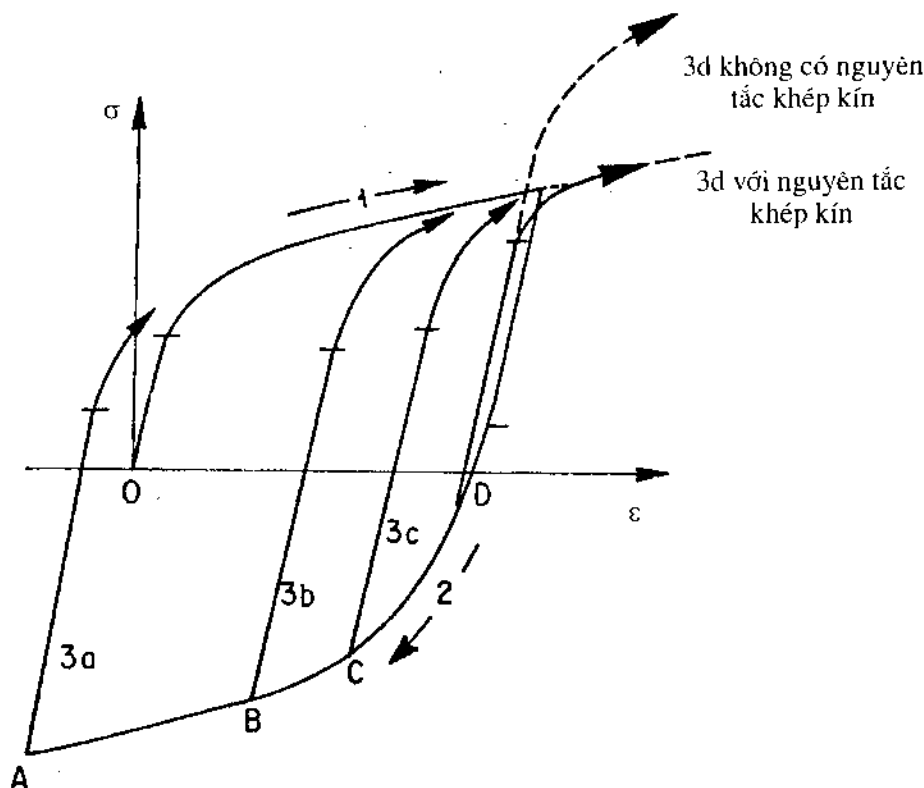
trong đó, các hệ số đặc trưng mô hình trong chu kỳ thứ n (σ_{yn}, K_n, M_n) phụ thuộc vào lịch sử chất tải, cụ thể : biến dạng dẻo tích lũy (p), trạng thái tại thời điểm đầu chu kỳ (σ_n, ϵ_n^p):

$$\sigma_{yn} = F_y(p, \sigma_n, \epsilon_n^p)$$

$$K_n = F_k(p, \sigma_n, \epsilon_n^p)$$

$$M_n = F_m(p, \sigma_n, \epsilon_n^p)$$

Ta thấy dạng mô hình này, ngoài biến nội là biến dạng dẻo tích lũy, còn nhận thêm các biến nội khác là các giá trị đặc biệt của trạng thái ứng suất hoặc biến dạng. Bằng cách đó ta đã đưa vào các biến nhớ rời rạc của mỗi điểm ứng suất lớn nhất, đồng thời có thể áp dụng các khái niệm của lý thuyết nhiệt động học với các biến nội.



Hình 5.20. Nguyên tắc khép kín và mô hình với các hệ số đặc trưng cập nhật.

Phương pháp mô hình hoá với các hệ số đặc trưng cập nhật được áp dụng tương đối rộng rãi, kể cả trong biến dạng dẻo nhớt. Mô hình và lưu đồ tính toán đã được áp dụng trong nhiều chương trình tính toán kết cấu.

Tuy nhiên, mô hình với các hệ số đặc trưng cập nhật có nhược điểm là cho một quá trình chất tải bất kỳ, ngay cả trong trường hợp kéo-nén, cần phải nhớ một số lượng lớn các trạng thái đã qua và cần phải xác định được nguyên tắc để kiểm tra điểm khép kín của mỗi vòng trễ (nguyên tắc khép kín) như trình bày trên hình 5.20.

5.4.4.2. Mô hình đa lớp và phương pháp thiết lập Mroz

Biến cứng động thường do ứng suất nội, sinh ra trong đa tinh thể bởi sự không tương đồng biến dạng giữa các hạt, gây nên. Do vậy, sẽ là hợp lý nếu ta hoàn thiện mô hình biến cứng động tuyến tính Prager bằng cách "xếp chồng" các mô hình đơn giản, tương ứng cho các hạt khác nhau. Đó chính là ý tưởng của mô hình đa lớp.

Ta đã xét trong chương 3 một ví dụ về phương pháp tiếp cận này với mô hình Saint - Venant mở rộng: sự kết hợp giữa các phần tử đàn-dẻo lý tưởng có modun đàn hồi và ngưỡng dẻo khác nhau đã cho phép mô tả sự hoá bền động phi tuyến. Hơn nữa, với phương pháp gần đúng Masing (hình 3.22) độ cong của đồ thị thử kéo và nén cũng như vòng trễ đã được thể hiện một cách hợp lý. Một mô hình như vậy rõ ràng có thể mở rộng bằng cách đưa vào biến cứng động tuyến tính và (hoặc) đẳng hướng cho mỗi phần tử.

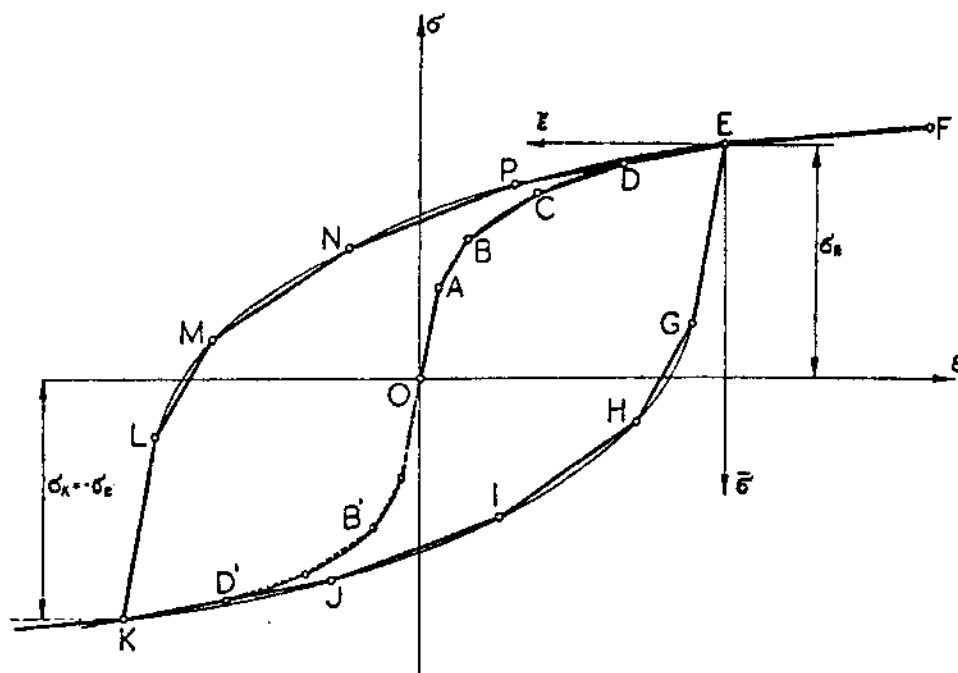
Phương pháp thiết lập Mroz là sự mở rộng của mô hình đa lớp cho trường hợp 3 chiều. Theo phương pháp này, ta xét một tập hợp các mặt dẻo lồng nhau trong không gian ứng suất. Biến đổi của mỗi mặt có thể là động (tuyến tính) và (hay) đẳng hướng. Ký hiệu $\underline{X}_1$ và R_1 tương ứng tâm và kích thước hiện tại của mặt 1 (hình 5.21), và giả sử các mặt đều tuân theo điều kiện dẻo Von-Mises, ta có:

$$f_1 = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}_1) - R_1 = 0$$

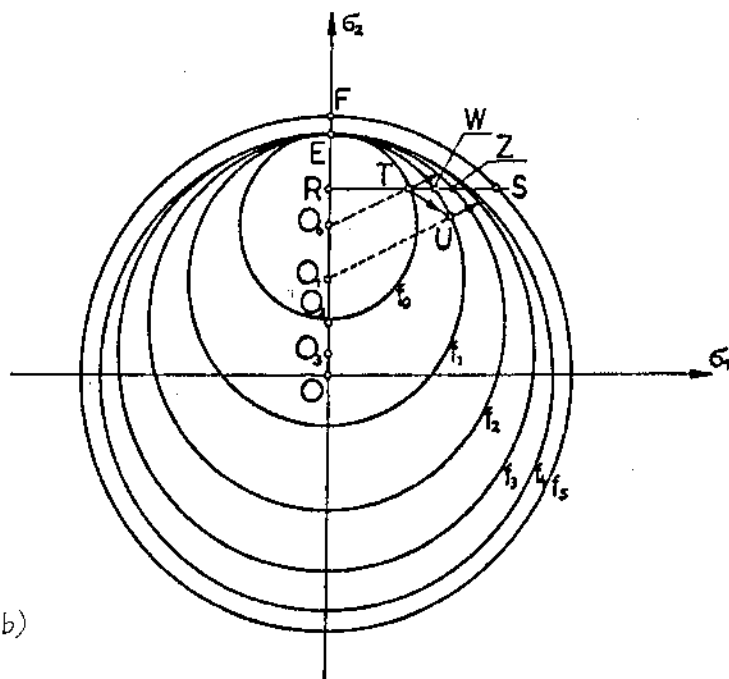
Xuất phát từ trạng thái ứng suất nằm trong miền đàn hồi (trong mặt nhỏ nhất), ta sẽ có biến dạng dẻo lần lượt với các mặt bao ngoài. Mỗi mặt, tương ứng với một modun biến cứng nhất định, cho phép ta xác định các điều kiện của mô hình đa lớp. Mặt ngoài cùng là mặt chịu tải với giả thiết biến dạng dẻo tuân theo định luật pháp tuyến :

$$d\underline{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \underline{\sigma}}.$$

Sẽ không có biến dạng dẻo ($d\lambda = 0$) khi trạng thái ứng suất nằm trong mặt nhỏ nhất : $f_1 < f_{1,1} < \dots < f_1 < f_{1,n} < 0$. Dưới đây ta giả thiết có biến dạng dẻo với $f_1 = 0$. Như vậy, bắt buộc các mặt $f_j = 0$ với $j < 1$ phải "đi theo" ứng suất tác dụng. Ta có:



a)



b)

Hình 5.21. Biểu diễn mô hình Mroz:
a) kéo-nén đơn; b) chất tải 2 chiều.

$$f_0 = f_1 = \dots = f_{l-1} = f_l = 0$$

$$d\varepsilon^p = d\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial \underline{\sigma}} = \dots = d\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \underline{\sigma}}.$$

Biểu thức trên cho thấy, bất buộc pháp tuyến với các mặt tại điểm ứng suất tác dụng phải như nhau và các hệ số nhân dẻo đều bằng nhau: $d\lambda_0 = d\lambda_1 = \dots = d\lambda_l = d\lambda$. Từ điều kiện tương thích ($df_0 < \dots < df_l = 0$) ta có thể suy ra độ dịch chuyển tâm của các mặt là như nhau:

$$d\underline{X}_0 = d\underline{X}_{l-1} = \dots = d\underline{X}_l.$$

Sự chảy dẻo và hoá bền, giữa trạng thái ứng suất hiện thời (trên mặt l) và mặt tiếp theo $f_{l+1} = 0$, sẽ xảy ra sao cho các mặt đó chỉ gặp nhau tại điểm ứng suất tác dụng, có pháp tuyến giống nhau. Với mục đích đó, Mroz đã xác định nguyên tắc sau đây: biến cứng động sẽ xảy ra theo hướng $\underline{\sigma}_{l+1} - \underline{\sigma}$, trong đó $\underline{\sigma}_{l+1}$ là ứng suất trên mặt l+1 sao cho pháp tuyến tại điểm ứng suất đó giống pháp tuyến tại điểm ứng suất hiện thời $\underline{\sigma}$ trên mặt l. Hình 5.18. trình bày giả thiết hoá bền nêu trên biểu diễn dưới dạng sau:

$$d\underline{X}_l = (\underline{\sigma}_{l+1} - \underline{\sigma})d\vartheta.$$

Hệ số nhân $d\vartheta$ được xác định từ điều kiện tương thích $df_l = 0$:

$$d\vartheta = H(f_l) \frac{\langle (\partial f_l / \partial \underline{\sigma}) : d\underline{\sigma} \rangle}{\partial f_l / \partial \underline{\sigma} : (\underline{\sigma}_{l+1} - \underline{\sigma})}.$$

Hệ số $d\lambda$ trong phương trình chảy dẻo có thể là hàm bất kỳ của $\underline{\sigma}$ hay $\underline{X}_l$, tuân theo biểu thức:

$$d\lambda = \frac{H(f_l)}{C_l(\underline{\sigma})} \cdot \frac{\left\langle \frac{\partial f_l}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle}{\frac{\partial f_l}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f_l}{\partial \underline{\sigma}}}.$$

Quan hệ trên cho thấy $C_l d\varepsilon^p$ là hình chiếu của $d\underline{\sigma}$ lên bề mặt pháp tuyến với mặt $f_l = 0$. Như trong phương pháp thiết lập Ziegler, modun biến cứng có thể phụ thuộc vào $\underline{\sigma}$, hay cũng chính vào $\underline{X}_l$.

5.4.4.3. Mô hình hoá bên phi tuyến

a) Phương pháp thiết lập

Trong mục này, ta chỉ trình bày phương pháp thiết lập cho trường hợp điều kiện dẻo Von-Mises. Việc mở rộng cho điều kiện dẻo khác sẽ không gặp bất kỳ trở ngại nào.

Điều kiện dẻo Von-Mises luôn có dạng sau :

$$f = J_2 (\underline{\sigma} - \underline{X}) - k.$$

Điểm hạn chế của mô hình Prager (tỷ lệ thuận giữa $d\varepsilon^p$ và $d\underline{X}$) được khắc phục bằng cách đưa thêm vào một thành phần, cho phép tính tới ảnh hưởng mờ dần của quỹ đạo biến dạng:

$$d\underline{X} = \frac{2}{3} C d\varepsilon^p - \gamma \underline{X} dp,$$

trong đó, dp là lượng gia tăng của biến dạng dẻo tích lũy, C và γ là các hệ số đặc trưng cho mỗi vật liệu. Ta thường giả thiết rằng tenxơ $\underline{X}$ không tồn tại ở trạng thái ban đầu. Định luật chảy dẻo pháp tuyến và điều kiện $df = 0$ dẫn đến biểu thức sau:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{H(f)}{h} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : d\underline{\sigma} \right\rangle \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}},$$

trong đó, modun biến cứng h phụ thuộc vào ứng suất động $\underline{X}$:

$$h = \frac{2}{3} C \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} - \gamma \underline{X} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Trong trường hợp điều kiện dẻo Von-Mises, ta có $dp = d\lambda$, modun biến cứng h trở thành:

$$h = C - \frac{2}{3} \gamma \underline{X} : \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{k}.$$

Ta thấy rõ ràng, khi biến cứng động (thể hiện bởi $\underline{X}$) tăng, modun biến cứng h sẽ giảm. Điều này có thể thấy rõ hơn trong trường hợp biến dạng kéo-nén, modun cứng khi đó được biểu diễn bởi (xem mục sau):

$$h = C - \gamma C \operatorname{Sgn} (\sigma - X).$$

Trong trường hợp này, sự giảm đi của modun biến cứng sẽ tạo nên độ cong của đường cong kéo-nén (cong hướng dưới - kéo, cong hướng trên - nén) (hình 5.22).

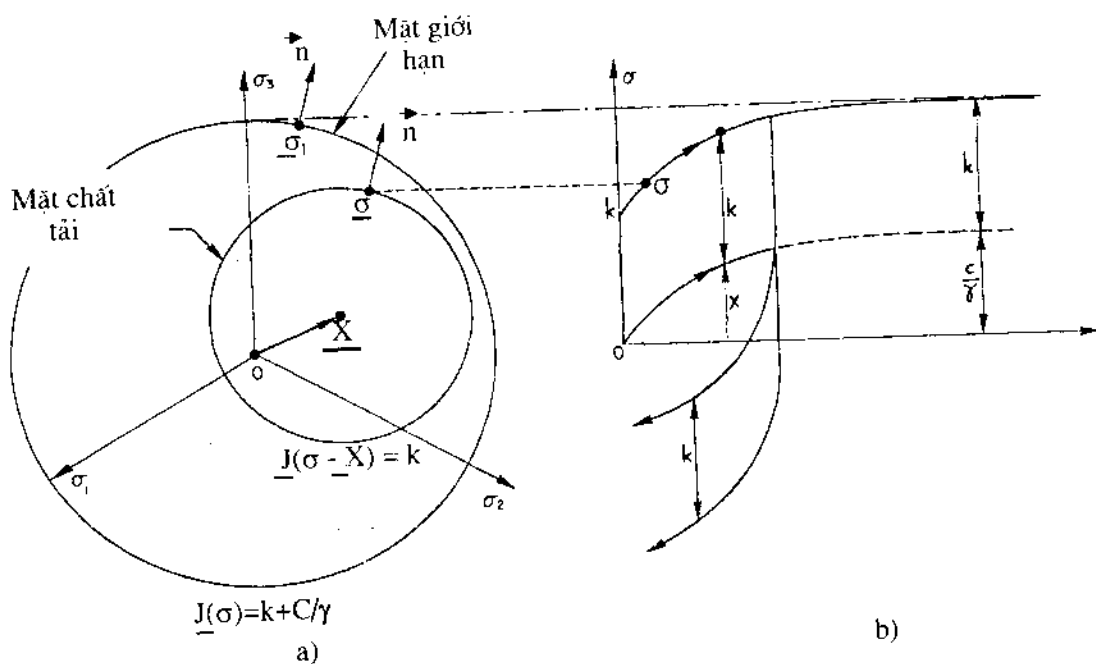
Để áp dụng lý thuyết tổng quát trình bày trong mục 5.3.3.2 (chảy dẻo pháp tuyến mở rộng) cho mô hình hoá quá trình biến cứng động phi tuyến nêu trên, ta cần ra khỏi lĩnh vực dẻo liên kết và chọn một hàm thế năng biến dạng dẻo F , khác với biểu thức của mật dẻo f . ở đây ta chọn F có dạng:

$$F = J_2 (\underline{\sigma} - \underline{X}) + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{C} \underline{X} : \underline{X} - k = f + \frac{3}{4} \frac{\gamma}{C} \underline{X} : \underline{X}$$

Đối với trường hợp vật liệu Von-Mises, theo định luật chảy dẻo pháp tuyến mở rộng, ta có:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2} dp$$

$$d\underline{\alpha} = -d\lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{X}} = d\varepsilon^p - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \underline{X} dp$$



Hình 5.22. Mô hình biến cứng phi tuyến:
a) 3 chiều; b) kéo - nén đơn.

Sử dụng hàm thế năng nhiệt động học (năng lượng riêng tự do) có dạng như trong mô hình Prager, ta dễ dàng tìm lại được:

$$\underline{X} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha}$$

$$d\underline{X} = \frac{2}{3} C d\underline{\alpha} = \frac{2}{3} C d\underline{\epsilon}^p - \gamma \underline{X} d\rho.$$

Khi biến dạng dẻo xảy ra ($f = 0$), thế năng tiêu hao vẫn khác 0, trừ trường hợp $\underline{X} = 0$:

$$f = 0 \Rightarrow F = \frac{4}{3} \frac{\gamma}{C} \underline{X} : \underline{X}.$$

b) Trường hợp kéo-nén

Các tenxơ viết tương tự như trong trường hợp biến cứng động tuyến tính (5.4.3.1-c).

Điều kiện dẻo, các phương trình chảy dẻo và biến cứng có dạng sau:

$$f = |\sigma - X| - \sigma_y = 0$$

$$d\underline{\epsilon}^p = \frac{1}{h} \left\langle \frac{\sigma - X}{k} d\sigma \right\rangle \frac{\sigma - X}{k} = \frac{d\sigma}{h} \text{Sgn}(\sigma - X) \quad \text{nếu} \quad (\sigma - X)d\sigma > 0$$

$$dX = C d\underline{\epsilon}^p - \gamma X |d\underline{\epsilon}^p|$$

$$h = C - \gamma X \text{Sgn}(\sigma - X)$$

Trong biến dạng kéo-nén, hay tổng quát hơn, trong chất tài tỷ lệ thuận, có thể tích phân phương trình biến đổi của biến cứng để có:

$$X = v \frac{C}{\gamma} + \left(X_0 - v \frac{C}{\gamma} \right) \exp \left[-v\gamma(\epsilon^p - \epsilon_0^p) \right],$$

$v = \pm 1$ tùy theo chiều của biến dạng, ϵ_0^p và X_0 là các giá trị ban đầu.

Cần chú ý rằng, ở đây không cần thiết áp dụng phương pháp cập nhật các biến: trạng thái (ϵ_0^p , X_0) là kết quả của quá trình biến dạng trước (nếu có). Tại mỗi thời điểm, ứng suất được tính bởi:

$$\sigma = X + vk,$$

như trình bày trên hình 5.22-b.

c) Đặc điểm

Ta thấy rằng, mô hình biến cứng động phi tuyến tương ứng phương pháp thiết lập với hai bề mặt:

- Mặt giới hạn đàn hồi, trùng với mặt chất tải,
- Mặt giới hạn được xây dựng trên cơ sở giá trị giới hạn của modul $J_2(\underline{X})$.

Khi $d(\underline{X}) = 0$, ta có thể tính được giá trị lớn nhất của $J_2(\underline{X})$:

$$J_2(\underline{X}) = \left(\frac{3}{2} \underline{X}' : \underline{X}' \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\gamma}$$

Từ đó ta có thể dễ dàng chứng minh điều kiện:

$$J_2(\underline{\sigma}) = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X} + \underline{X}) \leq J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) + J_2(\underline{X}) = k + J_2(\underline{X}),$$

hay:
$$J_2(\underline{\sigma}) \leq k + \frac{C}{\gamma}$$

Đặc điểm này được mô tả trên hình 5.22 cho trường hợp ba chiều và cho trường hợp kéo-nén đơn. Ngoài ra, mô hình biến cứng động phi tuyến cũng tuân theo các giả thiết cơ bản của phương pháp thiết lập Mroz. Có thể coi mô hình biến cứng động phi tuyến là trường hợp mở rộng của mô hình Mroz với hai bề mặt và sự biến đổi liên tục của modul biến cứng.

Ta ký hiệu $\underline{\sigma}_1$ là trạng thái ứng suất trên mặt giới hạn tại điểm tương ứng với pháp tuyến ngoài, cùng hướng với pháp tuyến $\vec{n}$ (hướng chảy dẻo) tại điểm $\underline{\sigma}$ trên mặt chất tải (hình 5.22-a). Theo mô hình biến cứng động phi tuyến, vị trí của mặt giới hạn không thay đổi. Ta có:

$$\frac{\underline{\sigma}_1}{k + \frac{C}{\gamma}} = \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{k}.$$

Thay $d\varepsilon^p$ trong phương trình biến đổi của $\underline{X}$, ta nhận được:

$$d\underline{X} = \left(C \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{k} - \gamma \underline{X}' \right) d\rho$$

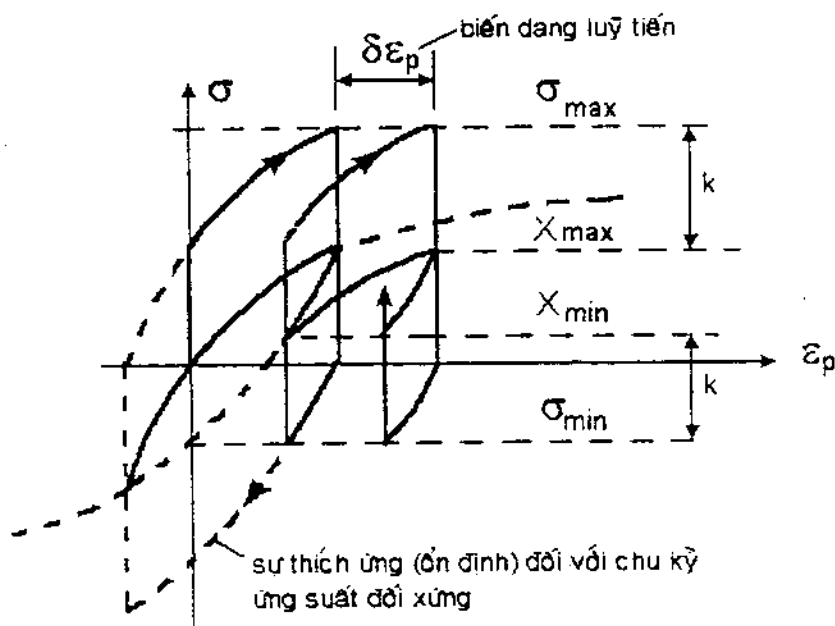
Kết hợp hai biểu thức trên, ta có:

$$d\underline{X} = \gamma (\underline{\sigma}_1' - \underline{\sigma}') d\rho.$$

Phương trình này tương tự giả thiết của Mroz (mục 5.4.4.2) đối với vật liệu Von-Mises. Điểm khác biệt cơ bản trong lý thuyết của Mroz là hệ số nhân dẻo được chọn bằng hằng số.

Ưu điểm của phương pháp mô hình hoá nêu trên là chỉ với hai bề mặt ta có thể mô tả được tính phi tuyến của quá trình hoá bền một cách liên tục. Hơn nữa, sự tồn tại của mặt giới hạn còn cho phép ta mô tả hiệu ứng rochet trong biến dạng kéo-nén đơn (ứng suất không đối xứng) cũng như trong biến dạng kéo-xoắn (kéo cố định và xoắn chu kỳ). Hình 5.23 cho thấy sự hình thành của hiệu ứng nói trên trong trường hợp kéo-nén. Đường cong $X(\epsilon^p)$ được xác định bởi sự tịnh tiến gần (ϵ_0^p), từ giá trị ban đầu X_0 . Có thể có các khả năng sau đây:

- Với ứng suất tác dụng cố định (khống chế); mô hình ổn định sau một chu kỳ;
- Chu kỳ chỉ ổn định khi ứng suất (kéo, nén) đối xứng, trong trường hợp ngược lại, sẽ xảy ra hiệu ứng rochet (hình 5.23);



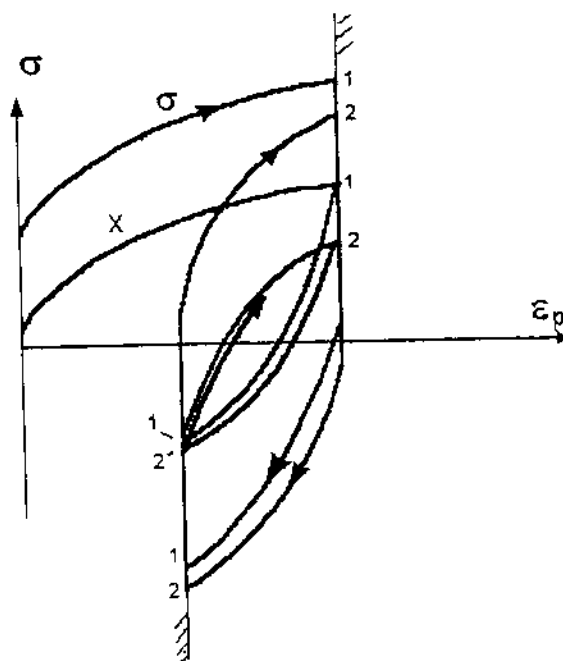
Hình 5.23. Sự hình thành hiệu ứng rochet trong biến dạng kéo-nén.

- Ở chu kỳ ổn định, quan hệ giữa biên độ ứng suất và biên độ biến dạng có thể nhận được dễ dàng bằng cách tích phân hai nửa chu kỳ (kéo và nén);

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = X_M + k = \frac{C}{2} \cdot \text{th} \left(\gamma \frac{\Delta\epsilon^p}{2} \right) + k ;$$

- Với biến dạng không chế, khi biến dạng trung bình khác 0, sự không đối xứng ban đầu của ứng suất sẽ mất dần. Đó chính là hiệu ứng nổi ứng suất trung bình, thường xảy ra đối với nhiều vật liệu (hình 5.24). Trong trường hợp này, quá trình ổn định của chu kỳ xảy ra chậm hơn so với trường hợp biến dạng với ứng suất không chế;

- Biến dạng lũy tiến (hiệu ứng rochet) trong kéo-nén với ứng suất không chế chỉ xảy ra khi ứng suất trung bình khác 0 (và khi $\Delta\sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \geq 2k$).

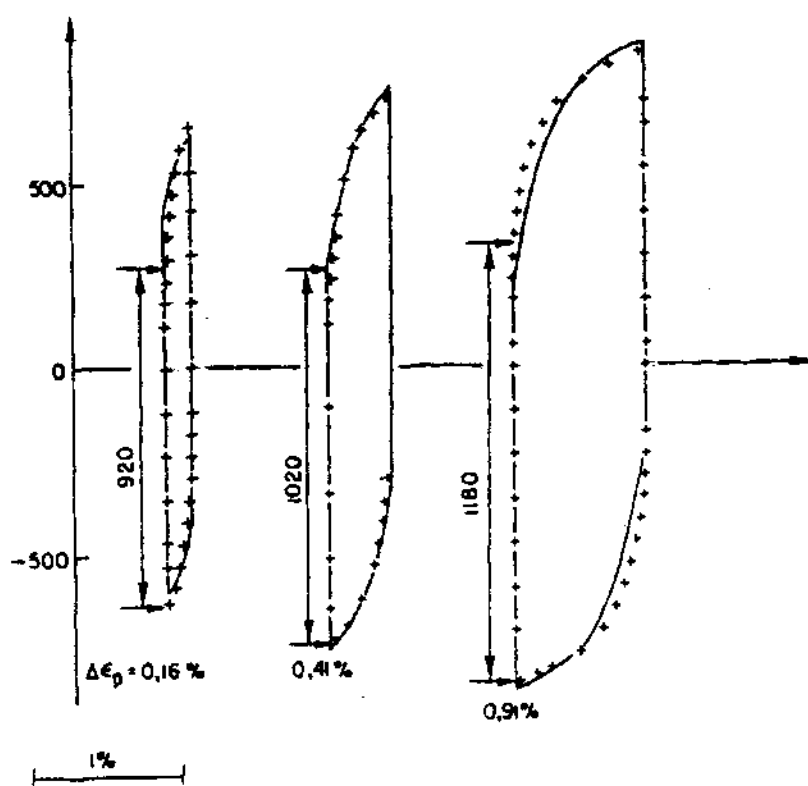


Hình 5.24. Sự nổi ứng suất trung bình.

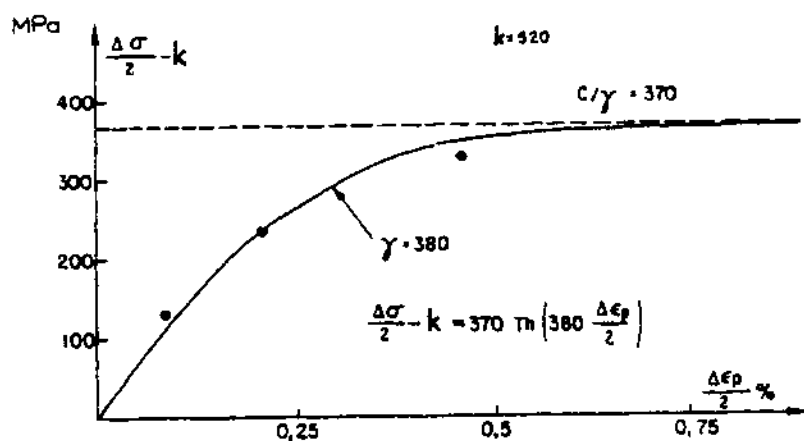
Lượng biến dạng lũy tiến trong mỗi chu kỳ được tính theo biểu thức sau:

$$\delta\epsilon^p = \frac{1}{\gamma} \log \left[\frac{\left(\frac{C}{\gamma} \right)^2 - (\sigma_{\min} + k)^2}{\left(\frac{C}{\gamma} \right)^2 - (\sigma_{\max} - k)^2} \right].$$

Với ứng suất lớn nhất ($\sigma_{\max}$) không chế, biến dạng lũy tiến sẽ lớn nhất khi $\sigma_{\min} = -k$ (hình 5.23).



Hình 5.25. Xác định hệ số k từ các vòng chu kỳ thực nghiệm và kiểm tra mô hình (Hợp kim INCO 718, ở nhiệt độ 550°C).



Hình 5.26. Xác định các hệ số C và γ (hợp kim INCO 718, $T = 550^{\circ}\text{C}$).

d) Nhận dạng mô hình

Nhận dạng các hệ số đặc trưng của vật liệu, k , C , γ , có thể tiến hành căn cứ vào các vòng trễ ổn định với các biên độ biến dạng khác nhau trong thí nghiệm kéo-nén (mô hình tương ứng chế độ ổn định). Từ số liệu thực nghiệm ta có thể dùng phương pháp số hay phương pháp chỉnh chuẩn đồ thị để nhận dạng các hệ số:

- Xác định gần đúng hệ số k từ miền đàn hồi;
- Xác định C/γ như đại lượng tiệm cận của các giá trị $\frac{\Delta\sigma}{2} - k$ đo được khi $\Delta\epsilon^p$ tăng;
- Tìm hệ số C bằng phương pháp chỉnh chuẩn đường cong

$$\frac{\Delta\sigma}{2} - k = \frac{C}{\gamma} \text{ th } \left(\gamma \frac{\Delta\epsilon^p}{2} \right) \text{ qua các điểm } \left(\frac{\Delta\epsilon^p}{2}, \frac{\Delta\sigma}{2} - k \right).$$

Hình 5.25 - 5.26 trình bày ví dụ nhận dạng các hệ số đặc trưng, từ 3 chu kỳ kéo-nén ổn định, cho hợp kim INCO 718 ở nhiệt độ 550°C. Vật liệu có thuộc tính dẻo, chịu tải với biên độ biến dạng không chế. Hình 5.25 cho phép xác định hệ số k từ các vòng chu kỳ thực nghiệm. Hình 5.26 mô tả phương pháp xác định các hệ số C và γ . Trên hình 5.25 trình bày các vòng trễ chu kỳ được tính toán với các giá trị hệ số xác định được.

5.4.4.4. Mô hình hoá bền hỗn hợp

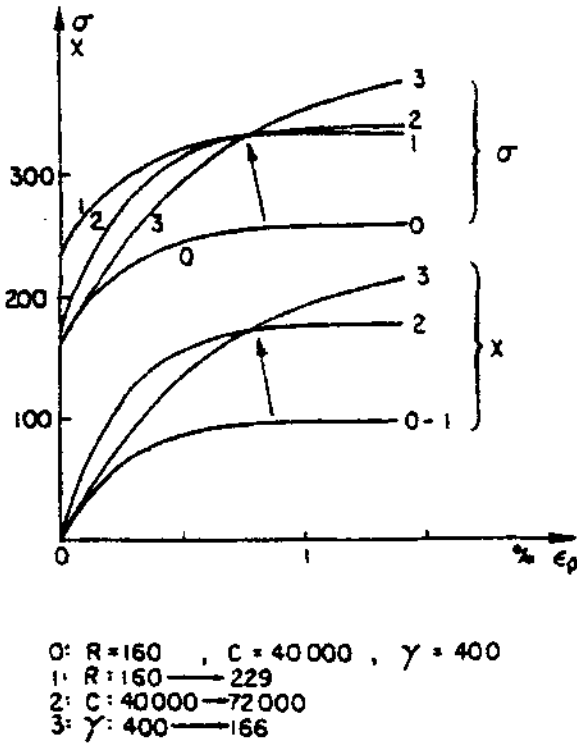
a) Biến cứng động phi tuyến và biến cứng đẳng hướng

Thực chất đây là sự "xếp chồng" biến cứng đẳng hướng lên biến cứng động phi tuyến. Miền đàn hồi sẽ thay đổi cả về vị trí lẫn kích thước. Các biến trạng thái được sử dụng để mô tả dạng biến cứng này là biến dạng dẻo tích lũy p và biến R (R là lực nhiệt động học liên kết, mô tả sự biến đổi kích thước của miền đàn hồi, xem 5.4.2). Miền đàn hồi trong trường hợp này, được mô tả bởi phương trình sau:

$$f = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k \leq 0,$$

trong đó k là giới hạn đàn hồi kéo.

Biến đổi của R phụ thuộc vào p dẫn đến sự hoá bền dần dần. Đối với biến dạng chu kỳ, sự hoá bền đó chậm và có thể dương (tăng: biến cứng chu kỳ) hoặc âm (giảm: biến mềm chu kỳ). Trường hợp thứ hai, mô hình trình bày ở đây chỉ phù hợp trong miền biến dạng với sự xếp chồng giữa biến cứng động phi tuyến và biến mềm đẳng hướng, và nhìn chung, dẫn đến sự hoá bền dương trong mỗi chu kỳ.



Hình 5.27. Đường cong ứng suất biến dạng với hoá bền đẳng hướng được đưa vào thông qua biến: R(1), C(2), γ (3).

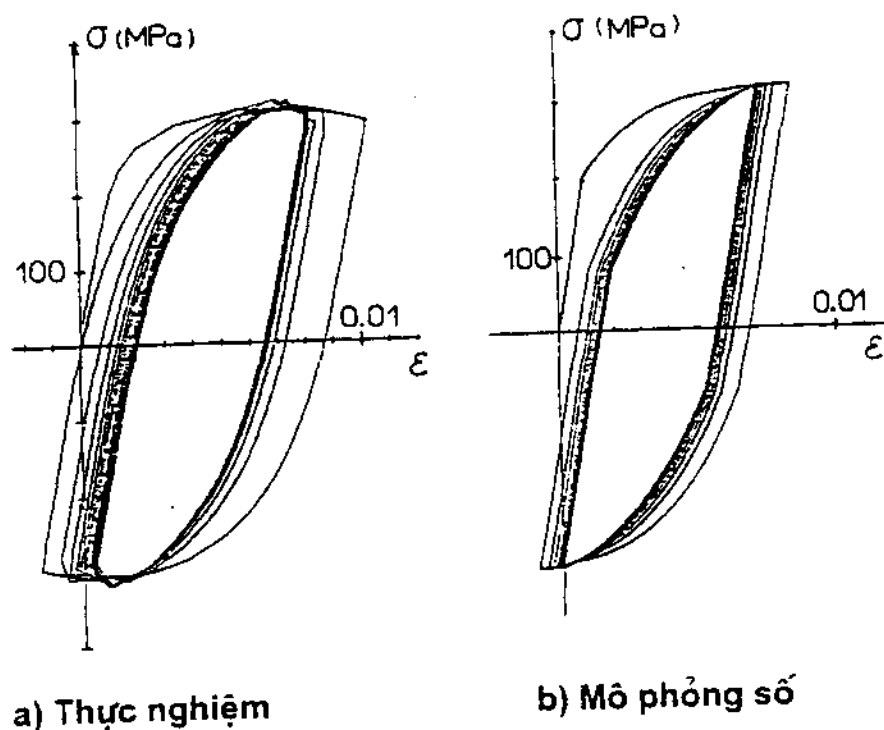
Sự biến đổi của R có thể được mô tả bởi phương trình tương tự phương trình đã sử dụng trong mô hình biến cứng động:

$$dR = b(\Pi - R) dp ,$$

trong đó, b là hằng số cho biết quá trình ổn định của chu kỳ xảy ra nhanh hay chậm, Π là hằng số biểu thị giá trị tiệm cận của R tương ứng với chu kỳ ổn định. Giá trị ban đầu của R

có thể bằng hay khác 0 : $R(0) = R_0$. Tích phân phương trình này và áp dụng điều kiện dẻo nêu trên đối với mỗi chu kỳ chất tải một chiều, ta có:

$$\sigma_M = X_M + k + \Pi [1 - \exp(-bp)] .$$



Hình 5.28. Thí nghiệm kéo - nén với ứng suất không chế (300 MPa), thép 316 L, ở nhiệt độ 20°C.

Giả thiết X_M và biên độ biến dạng (biến dạng không chế) $\Delta\epsilon^p$ là hằng số, đối với chu kỳ thứ N ta có:

$$\frac{\sigma_M - \sigma_{M0}}{\sigma_{Ms} - \sigma_{M0}} = 1 - \exp(-2b\Delta\epsilon^p N) ,$$

trong đó, σ_{M0} và σ_{Ms} tương ứng ứng suất lớn nhất trong chu kỳ đầu và trong chu kỳ ổn định.

Hoá bền đẳng hướng cũng như hiệu ứng biến cứng chu kỳ có thể mô tả thông qua biến $\underline{X}$ bằng cách đưa vào các hàm của biến dạng dẻo tích lũy, ví dụ:

$$d\underline{X} = \frac{2}{3} C(p) d\underline{\varepsilon}^p - \gamma(p) \underline{X} dp.$$

Sự biến cứng chu kỳ có thể được đưa vào hoặc bởi hàm $C(p)$ tăng hoặc bởi hàm $\gamma(p)$ giảm. Hai hình thức mô tả này, cùng với trường hợp R biến đổi, được thể hiện trên hình 5.27. Qua đó ta có thể thấy sự khác nhau của mô hình ảnh hưởng đến dạng đường cong ứng suất - biến dạng.

So sánh giữa chu kỳ đầu tiên và chu kỳ ổn định (thí nghiệm với độ biến dạng không chế), ta thấy biến cứng chu kỳ thể hiện đồng thời qua biên độ ứng suất và modul hoá bền ($d\sigma / d\varepsilon^p$) tại điểm cực đại của vòng trễ.

Hình 5.28-a trình bày đường cong thực nghiệm kéo-nén chu kỳ với ứng suất không chế. Ta thấy, hiệu ứng rochet không tồn tại sau khi chu kỳ ổn định. Cùng một mô hình, với cùng giá trị của các hệ số xác định được, có thể mô tả tương đối tốt chu kỳ đầu tiên, hiệu ứng biến cứng dần và chu kỳ ổn định (hình 5.28-b).

Tóm lại, ta có tập hợp các phương trình của mô hình hỗn hợp (hoá bền đẳng hướng và biến cứng động phi tuyến) đối với vật liệu Von-Mises như sau:

$$d\underline{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} d\lambda \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}$$

$$d\underline{X} = \frac{2}{3} C(p) d\underline{\varepsilon}^p - \gamma(p) \underline{X} dp$$

$$dR = b(\Pi - R) dp$$

$$f = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k$$

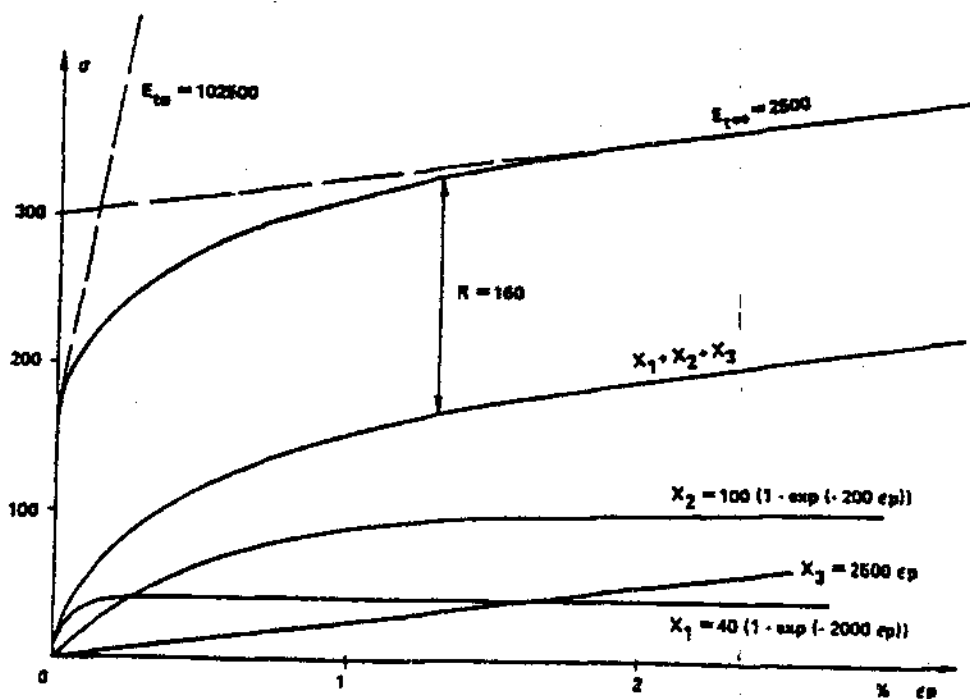
$$d\lambda = \frac{1}{h} H(f) \left\langle \frac{3}{2} (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : d\underline{\sigma} \right\rangle$$

$$h = C - \frac{3}{2} \gamma \underline{X} : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') + b(\Pi - R)$$

b) *Hỗn hợp nhiều mô hình biến cứng động*

Mặc dù so với mô hình hoá bền động tuyến tính, mô hình phi tuyến đã có những tiến bộ rõ rệt, song vẫn chưa đủ để mô tả quá trình hoá bền của vật liệu khi biến dạng dẻo biến đổi trong một miền rộng. Đối với biến dạng quá nhỏ, ta thấy lại trường hợp tuyến tính với khả năng mô tả rất hạn chế quá trình chuyển tiếp *đàn hồi - dẻo*. Ngược lại, trong trường hợp biến dạng lớn, giá trị giới hạn lại đạt được quá nhanh. Nhược điểm trên có thể khắc phục một cách dễ dàng bằng phương pháp kết hợp ("xếp chồng") nhiều mô hình tương tự với nhau. Điều kiện dẻo luôn được biểu diễn bởi $f = J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k = 0$ với:

$$X = \sum X_i.$$



Hình 5.29. Kết hợp nhiều mô hình biến cứng động.

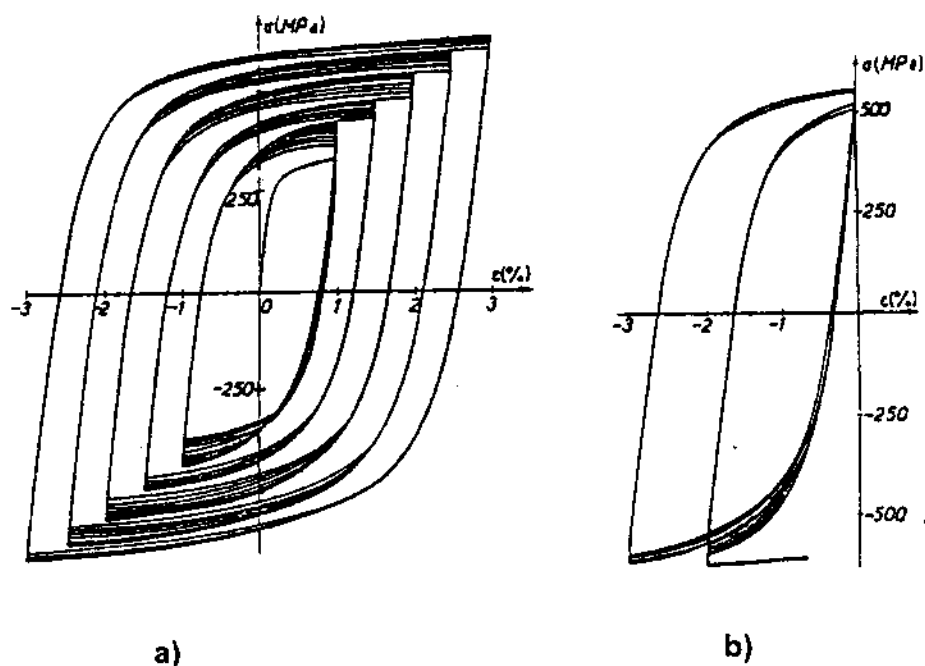
Mỗi biến độc lập $\underline{X}_i$ tuân theo phương trình biến đổi:

$$d\underline{X}_i = \frac{2}{3} C_i d\varepsilon^p - \gamma_i \underline{X}_i dp$$

Với phương pháp trên, ta có thể mở rộng miền ứng dụng của mô hình như trình bày trên hình 5.29. Ba biến $\underline{X}_i$ hoàn toàn đủ để khắc phục nhược điểm nêu trên (mỗi biến "bao" một miền biến dạng nhất định). Nếu ta muốn giữ quá trình hoá bền tuyến tính cho biến dạng lớn, thành phần thứ hai trong phương trình biến đổi của một trong các biến có thể bỏ qua (ví dụ, $\gamma_3 = 0 \rightarrow d\underline{X}_3 = \frac{2}{3} C_3 d\varepsilon^p$ trên hình 5.29).

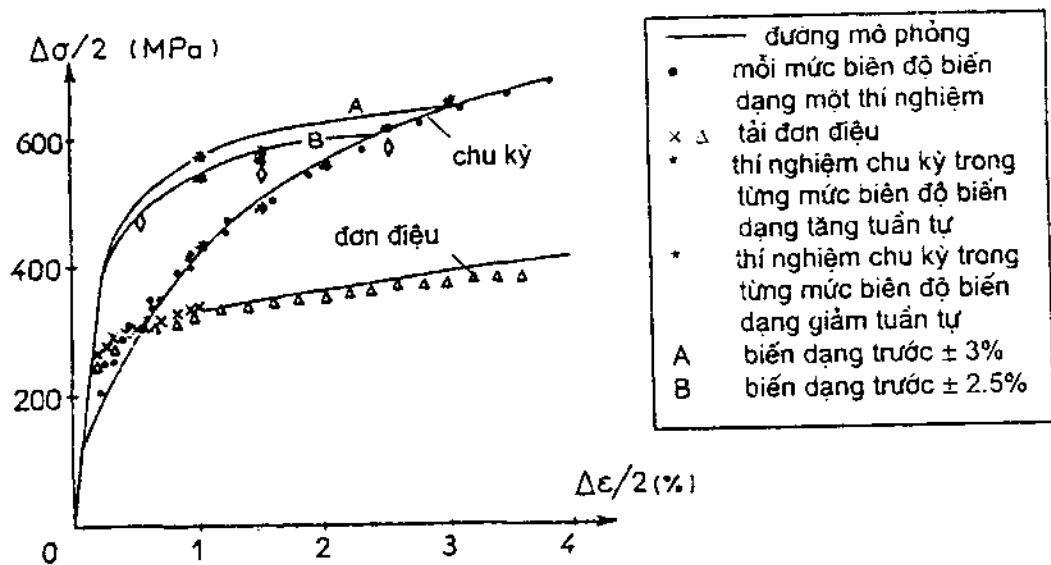
Một ưu điểm khác của phương pháp kết hợp nhiều mô hình biến cứng động là khả năng mô tả chính xác hơn hiệu ứng rochet. Mô hình cơ sở thường cho hiệu ứng rochet lớn hơn so với thực nghiệm. Sự kết hợp các mô hình hoá bền động phi tuyến với một mô hình tuyến tính có thể khắc phục được nhược điểm trên.

c) Tính tới hiệu ứng nhớ hoá bền



Hình 5.30. Thí nghiệm kéo-nén chu kỳ trong từng mức biên độ biến dạng tăng tuần tự (a) sau đó giảm tuần tự (b). Thép inox 316 L, biên độ biến dạng tuần tự 2%, 3%, 4%, 5%, 6%, 2%, 3%.

Mô hình biến cứng động phi tuyến mô tả quá trình hoá bền với sự nhớ mờ dần qui đạo biến dạng theo sự gia tăng của biến dạng dẻo tích lũy. Với lịch sử biến dạng bất kỳ, mỗi quá trình chất tải chu kỳ sẽ cho một chu kỳ ổn định duy nhất. Tính chất này đôi khi không đúng đối với một số mác thép. Để đảm bảo tính chất đó cần phải đưa thêm vào một biến trạng thái bổ sung.



Hình 5.31. Mô phỏng các đường cong $\Delta\sigma(\Delta\epsilon^n)$ trong trường hợp tải đơn điệu và chu kỳ. Thép inox 316 L. $T = 20^\circ\text{C}$.

Quan sát các chu kỳ dưới tác dụng của tải tuần tự (thí nghiệm chu kỳ trong từng khoảng biên độ biến dạng tăng dần (hình 5.30)) ta thấy, hiệu ứng nhớ có thể xảy ra trong kéo - nén thể hiện qua biên độ biến dạng dẻo cực đại. So sánh đường cong $\Delta\sigma(\Delta\epsilon^n)$ trong trường hợp tải đơn điệu và chu kỳ (hình 5.31) cho thấy, biến cứng chu kỳ càng lớn khi biên độ biến dạng không chế càng tăng. Nói một cách khác, giá trị tiệm cận Π của biến dạng hướng R (gây nên biến cứng chu kỳ), không còn là hằng số mà biến đổi phụ thuộc vào biên độ biến dạng.

Biến trạng thái bổ sung, đảm bảo sự nhớ các giá trị biến dạng dẻo cực đại, có thể đưa vào mô hình nhờ một hàm bề mặt trong không gian biến dạng dẻo (hình 5.32):

$$F = \frac{2}{3} J_2 (\underline{\epsilon}^p - \underline{\zeta}) - q = 0.$$

Chuyển động của bề mặt bao trong không gian biến dạng để cập ở trên chỉ xảy ra khi trạng thái biến dạng hiện thời nằm trên bề mặt này ($F = 0$) và sự chảy dẻo hướng ra phía ngoài bề mặt. Sử dụng điều kiện chất tải - dỡ tải tương tự như trong lý thuyết dẻo cổ điển, phương trình biến đổi của các biến sẽ có dạng :

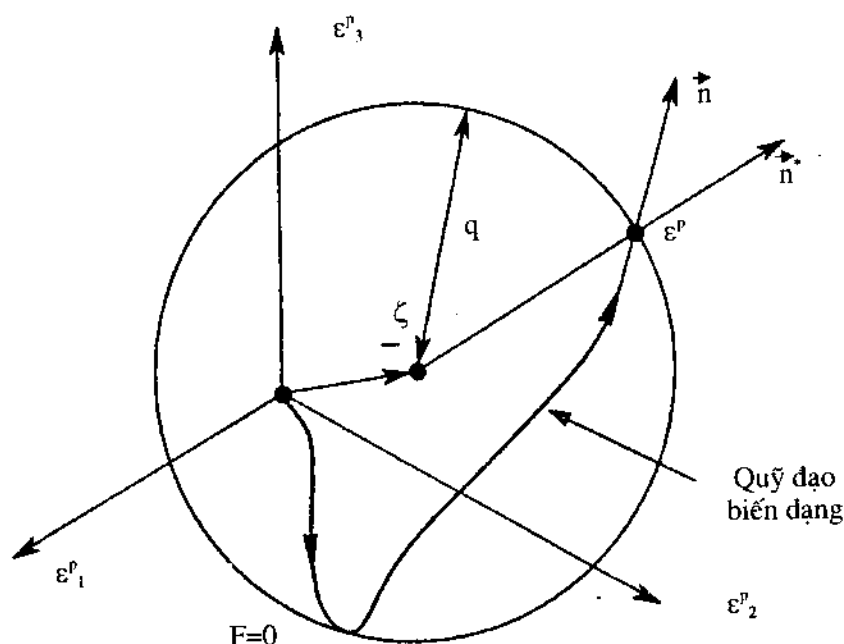
$$d\zeta = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}}^* : d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \bar{\mathbf{n}}^* H(F),$$

$$dq = \eta dp H(F),$$

trong đó η xác định từ điều kiện $dF = 0$:

$$\eta = \frac{1}{2} \langle \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}}^* \rangle,$$

$\bar{\mathbf{n}}$ và $\bar{\mathbf{n}}^*$ là pháp tuyến tương ứng tại điểm trạng thái ứng suất $\boldsymbol{\sigma}$ và biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ trên bề mặt $f = 0$ và $F = 0$.



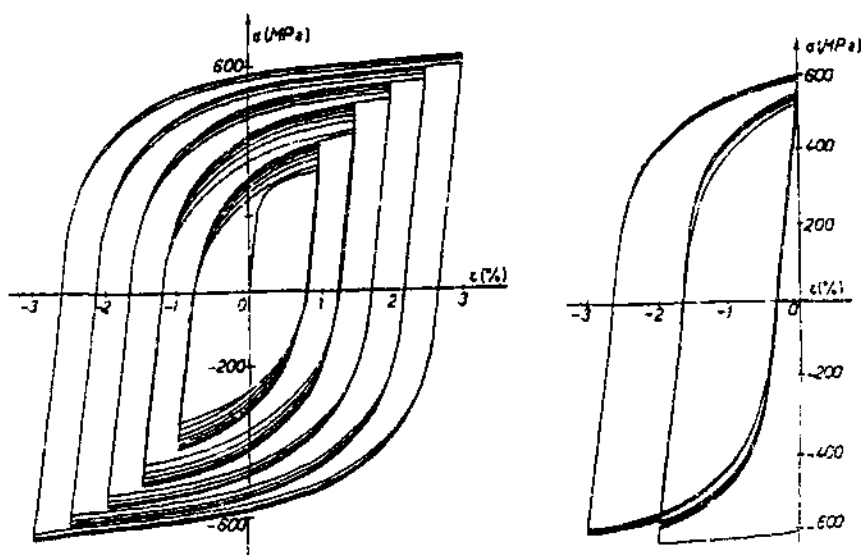
Hình 5.32. Mặt xác định sự nhớt trong không gian biến dạng dẻo.

Kích thước q của bề mặt bao cho ta hiệu ứng nhớt biến dạng. Ví dụ trong biến dạng kéo - nén, ta có thể kiểm tra một cách dễ dàng $q = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{\max}^p$. Để hoàn chỉnh mô hình, ta cần

lựa chọn quan hệ giữa giá trị tiệm cận Π của hoá bền đẳng hướng và biến q . Một trong những dạng của mối quan hệ đó có thể như sau:

$$\Pi = \Pi_M - (\Pi_M - \Pi_0) \exp(-2\mu q).$$

trong đó Π_0 , Π_M và μ là các hằng số.



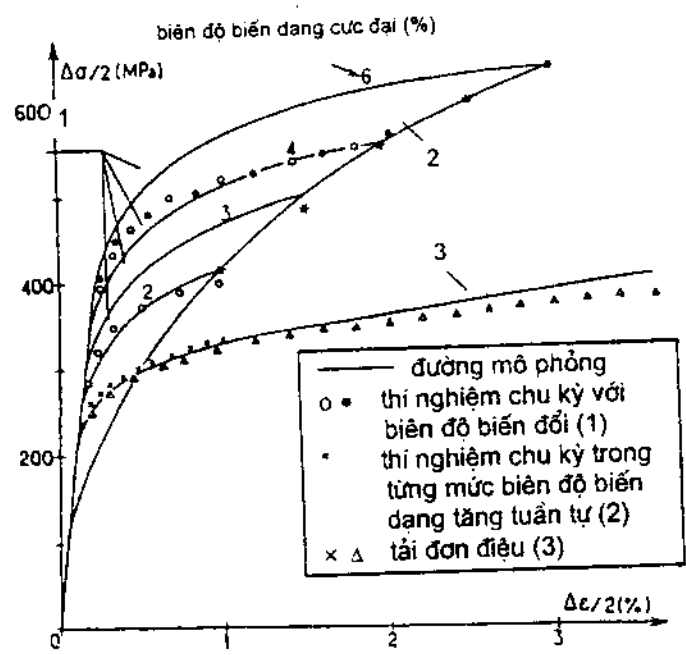
Hình 5.33. Mô phỏng thí nghiệm kéo-nén chu kỳ với từng mức biên độ biến dạng tăng tuần tự (a) sau đó giảm (b) (thép inox 316 L, hình 5.30).

Việc đưa vào thêm hiệu ứng nhớ biến dạng cho phép mở rộng đáng kể khả năng mô hình hoá. Ví dụ đối với thép inox 316 L, ta có thể mô tả đúng các hiện tượng sau (với tổng cộng 13 hệ số):

- Biến cứng dần (trong khoảng 10 chu kỳ chất tải) cho mỗi mức biên độ biến dạng tăng tuần tự (so sánh hình 5.30 và 5.33);
- Biến cứng dư trong chu kỳ biến dạng ở mức thấp ($\pm 1\%$ và $\pm 1,5\%$) sau khi biến dạng chu kỳ ở mức cao ($\pm 3\%$);
- Sự khác nhau giữa các đường cong $\Delta\sigma(\Delta\epsilon^P)$ trong trường hợp chất tải đơn điệu và chu kỳ (mỗi mức thí nghiệm một mẫu). Biến dạng không chế càng tăng thì sự khác nhau càng lớn (hình 5.31);

Sự khác nhau giữa các đường cong $\Delta\sigma(\Delta\epsilon^P)$ phụ thuộc vào biên độ biến dạng ($\Delta\epsilon^P$) trong biến dạng chu kỳ với $\Delta\epsilon^P$ biến đổi (trong trường hợp này, ta áp dụng trên một mẫu nhiều chu kỳ biến dạng với biên độ (cho mỗi chu kỳ) tăng dần sau đó giảm dần cho đến khi

đạt chu kỳ ổn định. Đường cong $\Delta\sigma(\Delta\epsilon^n)$ được xác định bởi vị trí đỉnh của các vòng chu kỳ ổn định (hình 5.34).



Hình 5.34. Mô phỏng đường cong $\Delta\sigma(\Delta\epsilon^n)$ cho biến dạng chu kỳ với biên độ biến dạng biến đổi.

5.4.5. Xếp loại mô hình

Để xác định một cách tương đối miền ứng dụng của các mô hình đã xét, ta có thể đưa ra bảng xếp hạng, theo các hiện tượng mà mô hình cho phép mô tả, dưới đây.

Hiện tượng Mô hình	Hoá bền đơn điệu	Hiệu ứng Bau- schinger	Biến cứng hay biến mềm chu kỳ	Hiệu ứng rochet	Hiệu ứng nhớ
Prandtl Reuss	*		*		
Động tuyến tính	*	*			
Mroz	*	*	*		
Động phi tuyến	*	*		*	
Động + đẳng hướng	*	*	*	*	
Động+đẳng hướng+ nhớ	*	*	*	*	*

5.5. CHẤT TẢI HƯỚNG TÂM

5.5.1. Định nghĩa

Trong biến dạng dẻo, biến dạng hiện thời phụ thuộc vào quỹ đạo chất tải. Ảnh hưởng của lịch sử biến dạng được thể hiện trong các định luật chảy dẻo với đặc điểm biến đổi vi phân. Khi tích phân chúng cần căn cứ vào từng trường hợp chất tải cụ thể. Tuy nhiên, có một ngoại lệ cho trường hợp chất tải hướng tâm (hay còn gọi là tải tỷ lệ thuận hoặc tải đơn). Đối với trường hợp này, tích phân chỉ phụ thuộc vào một đại lượng vô hướng, do đó chỉ cần lấy tích phân một lần.

Quá trình chất tải được gọi là hướng tâm nếu tại mọi điểm M của vật thể, tenxơ ứng suất $\underline{\sigma}(M,t)$ tỷ lệ thuận với một tenxơ ứng suất không phụ thuộc thời gian $\underline{S}(M)$. Hệ số tỷ lệ là một hàm đơn điệu của thời gian $\alpha(t)$, sao cho $\alpha(0) = 0$ và :

$$\underline{\sigma}(M,t) = \alpha(t) \underline{S}(M).$$

Trong quá trình chất tải, các hướng chính của tenxơ ứng suất (biến đổi tại mỗi điểm) bất biến theo thời gian.

Ta có thể suy ra một cách dễ dàng, các hướng chính của tenxơ ứng suất lệch cũng không phụ thuộc vào thời gian:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}'(M,t) &= \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} \\ &= \alpha(t) \left[\underline{S}(M) - \frac{1}{3} \text{tr}\{\underline{S}(M)\} \underline{1} \right] \\ \underline{\sigma}'(M,t) &= \alpha(t) \underline{S}'(M). \end{aligned}$$

5.5.2. Định luật tích phân Hencky-Mises - Ứng suất và biến dạng tương đương

Ta ký hiệu σ_{eq} là ứng suất tương đương Von-Mises:

$$\sigma_{eq} = J_2(\underline{\sigma}) = \left(\frac{3}{2} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}}$$

Điều kiện chất tải hướng tâm cho phép tích phân quan hệ vi phân của định luật chảy dẻo Prandtl-Reuss, với giả thiết vật liệu không hoá bền trước $\underline{\varepsilon}^p(t=0) = 0$:

$$d\underline{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} g'(\sigma_{eq}) \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}} \underline{\sigma}',$$

$$\underline{\varepsilon}^p = \int_0^1 \frac{3}{2} g'(\sigma_{eq}) \alpha(t) \underline{S}' \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}}.$$

Để tích phân biểu thức trên theo σ_{eq} , ta biểu diễn α dưới dạng hàm của σ_{eq} :

$$\alpha = \frac{\alpha \left(\frac{3}{2} \underline{S}' : \underline{S}' \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{2} \underline{S}' : \underline{S}' \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left\{ \frac{3}{2} (\alpha \underline{S}') : (\alpha \underline{S}') \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{3}{2} \underline{S}' : \underline{S}' \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma_{eq}}{\left(\frac{3}{2} \underline{S}' : \underline{S}' \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sigma_{eq}}{J_2(\underline{S})}.$$

Khi đó:

$$\underline{\varepsilon}^p = \frac{\underline{S}'}{J_2(\underline{S})} \int_0^1 \frac{3}{2} g'(\sigma_{eq}) d\sigma_{eq}.$$

Sau khi lấy tích phân, nhân cả tử số và mẫu số với α , ta nhận được quan hệ Hencky - Mises:

$$\underline{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} g'(\sigma_{eq}) \frac{\underline{\sigma}'}{\sigma_{eq}}.$$

Quan hệ trên dẫn đến khái niệm về ứng suất và biến dạng tương đương, hiểu theo nghĩa tương đương với trường hợp kéo hoặc nén một chiều.

Điều kiện dẻo Von - Mises $\sigma_{eq} - \sigma_s = 0$ cho thấy bất kỳ một trạng thái ứng suất ba chiều nào qui về σ_{eq} cũng đều tương đương với trường hợp một chiều biểu thị bởi σ_s . Chính vì vậy σ_{eq} thường được gọi là ứng suất tương đương theo nghĩa Von - Mises. Ta cũng có thể xác định khái niệm tương tự đối với biến dạng bằng cách biểu diễn định luật Hencky - Mises dưới dạng vô hướng, thông qua bất biến bậc hai của tenxơ biến dạng:

$$\left(\frac{2}{3} \underline{\varepsilon}^p : \underline{\varepsilon}^p \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{g(\sigma_{eq})}{\sigma_{eq}} \left(\frac{2}{3} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}} = g(\sigma_{eq})$$

Đại lượng $\varepsilon_{eq}^p = \left(\frac{2}{3} \underline{\varepsilon}^p : \underline{\varepsilon}^p \right)^{\frac{1}{2}}$, cho phép biểu diễn mọi biến dạng đa chiều (trong trường hợp chất tải hướng tâm) dưới dạng tương đương với trường hợp một chiều, gọi là biến dạng tương đương theo nghĩa Von - Mises:

$$\varepsilon_{eq}^p = g(\sigma_{eq})$$

$$\text{với } \varepsilon_{eq}^p = \left(\frac{2}{3} \underline{\varepsilon}^p : \underline{\varepsilon}^p \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{và} \quad \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \underline{\sigma} : \underline{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Như vậy, mọi trạng thái ba chiều, trong trường hợp chất tải hướng tâm, đều có thể biểu diễn được một cách duy nhất trong không gian ứng suất và biến dạng tương đương.

5.5.3. Định lý về sự tồn tại chất tải hướng tâm

Đối với một vật thể trong một quá trình chất tải cho trước, các điều kiện đủ để tồn tại chất tải hướng tâm như sau:

- Ngoại lực tác dụng tăng tỷ lệ thuận chỉ với một thông số;
- Vật liệu ở trạng thái ban đầu không có biến dạng và hoá bền;
- Ứng xử của vật liệu tuân theo định luật Prandtl - Reuss ;
- Định luật hoá bền có dạng hàm lũy thừa ;
- Bỏ qua biến dạng đàn hồi .

Để chứng minh, ta giả sử vật rắn với thể tích V chịu tác dụng của:

- Mật độ lực thể tích $\overline{f}(M,t)$ trong V ,
- Mật độ lực bề mặt $\overline{F}(M,t)$ trên biên của V ,

ta sẽ tìm các điều kiện để nghiệm ứng suất của bài toán ở mọi thời điểm, $\underline{\sigma}(M,t)$, có thể biểu diễn dưới dạng hàm vô hướng của nghiệm $\underline{\sigma}^*(M,t^*)$ đã biết tại thời điểm cho trước t^* :

$$\underline{\sigma}(M,t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha^*} \underline{\sigma}^*(M,t^*),$$

trong đó $\alpha(t)$ là hàm vô hướng của thời gian, sao cho:

$$\alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{và} \quad \alpha(t^*) = \alpha^*$$

Phương trình cân bằng tĩnh và điều kiện biên thoả mãn tại thời điểm t^* :

$$\text{div } \underline{\sigma} + \overline{f} = 0$$

$$\underline{\sigma} \cdot \overline{n} = \overline{F},$$

cũng sẽ thoả mãn tại mọi thời điểm bất kỳ, nếu:

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \overline{\mathbf{f}}^*(t^*)$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \overline{\mathbf{F}}^*(t^*)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^*} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\alpha}{\alpha^*} \overline{\mathbf{f}}^* = 0$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^*} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = \frac{\alpha}{\alpha^*} \overline{\mathbf{F}}^*$$

Nếu chọn định luật chảy dẻo Prandtl - Reuss, để nhận được biểu thức Hencky - Mises sau khi tích phân, ta cần có điều kiện:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t=0) = 0 \text{ .}$$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} g \left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \sigma_{eq}^* \right) \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{*'}}{\sigma_{eq}^*} \text{ .}$$

Nếu g có dạng $g(\sigma_{eq}) = \left[\frac{\sigma_{eq}}{K} \right]^M$, ta có:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \right)^M \underline{\underline{\varepsilon}}^{p*}(t^*) \text{ .}$$

Định luật biến dạng đàn hồi cho thấy một cách dễ dàng:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \right)^M \underline{\underline{\varepsilon}}^{e*}(t^*) \text{ .}$$

Cuối cùng ta cần kiểm tra quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị :

Biểu thức

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2} \left[\operatorname{grad} \overline{\mathbf{u}}^* + \left(\operatorname{grad} \overline{\mathbf{u}}^* \right)^T \right]$$

chỉ có thể dẫn đến

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p = \frac{1}{2} \left[\text{grad } \overline{u} + (\text{grad } \overline{u})^T \right]$$

khi $\underline{\varepsilon}^e = 0$ với mọi t .

Các điều kiện tồn tại chất tải hướng tâm, tuy tương đối chặt chẽ, song cũng thường tự hội đầy đủ đối với các quá trình chất tải trong thực tế (chất tải gần tỷ lệ thuận hay chất tải gần hướng tâm).

5.6. VÍ DỤ THAM KHẢO

5.6.1. Xây dựng mô hình ứng xử của hỗn hợp bột kim loại biến dạng ở trạng thái nguội

Công nghệ tạo hình chi tiết máy từ bột kim loại được sử dụng rộng rãi trong công nghiệp chế tạo máy. Vật liệu bột có cấu trúc như môi trường xốp rời rạc. Trong quá trình biến dạng, các hạt bột tự sắp xếp về vị trí có cấu trúc chặt chẽ và biến dạng, làm thay đổi độ xốp, cho phép định hình chi tiết.

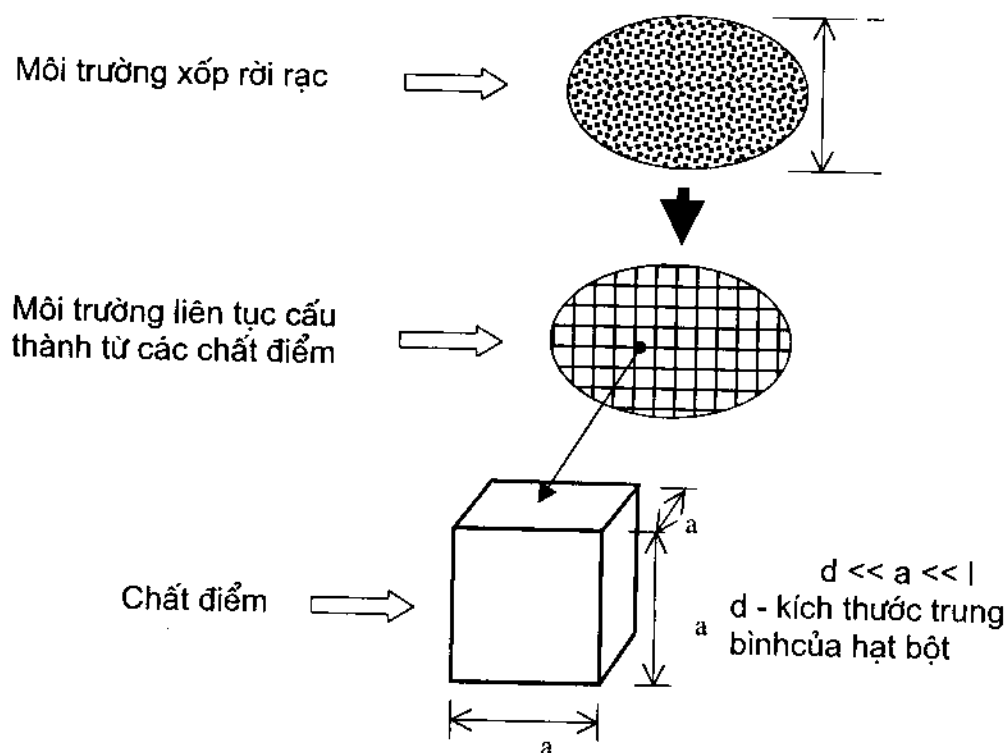
Trong công nghệ tạo hình vật liệu bột, độ xốp của bán sản phẩm (phôi sau khi ép định hình) có ảnh hưởng quyết định đến cơ tính và tính năng sử dụng của sản phẩm sau khi thiêu kết. Vấn đề xác định phân bố độ xốp trong thể tích của vật liệu trong quá trình ép tạo hình, đặc biệt đối với các chi tiết có hình dạng phức tạp, đòi hỏi giải bài toán tối ưu ảnh hưởng của các thông số công nghệ đến sự phân bố ứng suất và biến dạng trong vật thể. Trong tạo hình công nghiệp, đây là bài toán phức tạp, dung lượng tính toán lớn, cần được thực hiện với sự trợ giúp của các máy tính mạnh trên cơ sở ứng dụng các mô hình có khả năng mô tả đầy đủ các hiện tượng vật lý xảy ra trong thể tích vật liệu khi biến dạng. Độ chính xác của mô hình cũng như độ chính xác của kết quả mô phỏng số một quá trình công nghệ cụ thể được quyết định chủ yếu bởi phương trình thuộc tính của vật liệu, biểu diễn mối quan hệ giữa biến dạng và ứng suất.

5.6.1.1. Xây dựng mô hình

Ví dụ trình bày một phương pháp xây dựng mô hình ứng xử của hỗn hợp bột kim loại gồm hai câu từ dựa trên cơ sở các khái niệm và nguyên lý của cơ học môi trường liên tục.

Ta có thể coi hỗn hợp bột (môi trường xốp rời rạc) là một môi trường liên tục cấu thành từ các phân tử thể tích đặc trưng, được xem như các chất điểm có kích thước đủ nhỏ so với thang đo biến dạng và đủ lớn so với kích thước hạt bột. Các đại lượng như ứng suất ($\underline{\sigma}$),

biến dạng (ε), hàm lượng cấu tử (f_i), độ xốp (γ), ... được coi là bình quân cho mỗi chất điểm (hình 5.35).



Hình 5.34. Phương pháp tiếp cận trên cơ sở cơ học môi trường liên tục áp dụng cho môi trường xốp rời rạc.

Đặt V , V_x , V_i tương ứng là thể tích của hỗn hợp bột, thể tích khoang xốp và thể tích của cấu tử i , ta có :

$$V = V_x + \sum_{i=1}^n V_i .$$

Hàm lượng thể tích cấu tử i và độ xốp được xác định như sau :

$$f_i = \frac{V_i}{V} \quad , \quad \gamma = \frac{V_x}{V} .$$

Các biến nội của hệ là độ xốp (γ) và tỉ lệ hàm lượng cấu tử (α). Đối với trường hợp hỗn hợp bột gồm hai cấu tử, ta có :

$$\alpha = \frac{f_1}{f_2} = \frac{V_1}{V_2} .$$

Ta dễ dàng nhận thấy γ , α là hai biến độc lập nhau và cùng với biến dạng $\underline{\varepsilon}$ tạo thành tập hợp các biến xác định trạng thái của hệ (các biến trạng thái). Dưới đây, để tiện cho việc viết các phương trình, ta ký hiệu các biến nội là η_i .

Trên cơ sở các số liệu thực nghiệm nhận dạng thuộc tính và các thông tin từ các kết quả nghiên cứu của nhiều tác giả, ta có thể chấp nhận các giả thiết cơ bản sau đây đối với vật liệu bột kim loại biến dạng ở trạng thái nguội :

- Có thuộc tính dẻo tức thời, $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon})$;
- Đẳng hướng ban đầu và trong suốt quá trình biến dạng;
- Nén được, $\text{div}(\underline{\tilde{v}}) \neq 0$ ($\underline{\tilde{v}}$ là tốc độ chuyển vị);
- Bỏ qua biến dạng đàn hồi (biến dạng dẻo $\underline{\varepsilon}^p$ bằng biến dạng tổng $\underline{\varepsilon}$).

Mô hình ứng xử (hay phương trình quan hệ giữa ứng suất và biến dạng) của vật liệu bột phải bao hàm tính nén được và ở điều kiện tới hạn, khi độ xốp bằng 0, phải thể hiện được thuộc tính của vật liệu đặc, $\text{div}(\underline{\tilde{v}}) = 0$.

Hàm chất tải (mật dẻo) f có dạng tổng quát sau:

$$f = f(\sigma, \eta_i, R),$$

trong đó R là biến liên kết biểu thị sự hoá bền đẳng hướng của vật liệu, phụ thuộc vào các biến nội, $R = K(\eta_i)$.

Với giả thiết đẳng hướng, hàm chất tải dạng Von-Mises (bỏ qua ảnh hưởng không đáng kể của bất biến bậc 3 của tenxơ ứng suất J_3) có thể có dạng sau:

$$f = \sigma_{\text{eq}}(\eta_i) - K(\eta_i) = 0,$$

trong đó $\sigma_{\text{eq}}(\eta_i)$ là ứng suất tương đương, phụ thuộc vào các biến nội, có dạng :

$$\sigma_{\text{eq}} = \left[A(\eta_i) J_2' + B(\eta_i) J_1^2 \right]^{1/2} \quad (1.1)$$

với A và B là các hệ số phụ thuộc vào vật liệu và các biến trạng thái η_i , $A = A(\eta_i)$, $B = B(\eta_i)$; J_1 là bất biến bậc một của tenxơ ứng suất, $J_1 = \text{tr}(\underline{\sigma}) = \sigma_{ii}$; J_2' là bất biến bậc

hai của tenxơ ứng suất lệch, $J'_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_i \cdot \sigma_i + \frac{1}{6} \sigma_{kk} \cdot \sigma_{kk}$, hay dưới dạng tenxơ

$$J'_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}' = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}) + \frac{1}{6} [\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})]^2, \text{ trong đó } \underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}.$$

Thay các biểu thức trên vào (1.1) ta nhận được:

$$\sigma_{eq} = \left\{ \frac{A(\eta_i)}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}) + \frac{6B(\eta_i) - A(\eta_i)}{6} [\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Theo định luật chảy dẻo pháp tuyến, ta có :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \quad (1.3)$$

trong đó $d\lambda$ là độ gia tăng của hệ số nhân dẻo λ . Với (1.2), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} &= \frac{\partial \left\{ \frac{A(\eta_i)}{2} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}) + \frac{6B(\eta_i) - A(\eta_i)}{6} [\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \\ &= \frac{1}{\sigma_{eq}} \left[\frac{A(\eta_i)}{2} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{6B(\eta_i) - A(\eta_i)}{6} [\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})] \underline{\underline{1}} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Thay biểu thức trên vào vào (1.3) ta nhận được:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{1}{\sigma_{eq}} \left[\frac{A(\eta_i)}{2} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{6B(\eta_i) - A(\eta_i)}{6} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \right]. \quad (1.5)$$

Biểu thức (1.5) có thể viết lại dưới dạng sau :

$$d\varepsilon^p = \frac{d\lambda}{\sigma_{eq}} \left[\frac{A(\eta_i)}{2} \underline{\underline{\sigma}} + \frac{A(\eta_i)}{2} \cdot \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} + \frac{6B(\eta_i) - A(\eta_i)}{6} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \right] \quad (1.6)$$

hay :

$$d\varepsilon^p = \frac{d\lambda}{\sigma_{eq}} \left[\frac{A(\eta_i)}{2} \underline{\underline{\sigma}} + B(\eta_i) \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}} \right]. \quad (1.7)$$

Phương trình (1.7) có thể phân tách thành hai thành phần tương ứng biến dạng thể tích ($d\varepsilon^{vp}$) và biến dạng hình dạng ($d\varepsilon'^p$)

$$d\varepsilon^{vp} = d\lambda \frac{B(\eta_i)}{\sigma_{eq}} \text{Tr}(\underline{\sigma}), \quad (1.8. a)$$

và:

$$d\varepsilon'^p = d\lambda \frac{A(\eta_i)}{2\sigma_{eq}} (\underline{\sigma}) . \quad (1.8. b)$$

Các biểu thức (1.8. a,b) cho thấy biến dạng thể tích chỉ phụ thuộc trực tiếp vào hệ số $B(\eta_i)$ và ứng suất thủy tĩnh $\text{Tr}(\underline{\sigma})$, còn biến dạng hình dạng chỉ phụ thuộc trực tiếp vào hệ số $A(\eta_i)$ và ứng suất lệch. Tuy nhiên, trong quá trình biến dạng phức tạp, luôn tồn tại mối quan hệ tương hỗ giữa hai loại biến dạng trên, hay nói một cách khác ứng suất thủy tĩnh cũng có ảnh hưởng nhất định đến biến dạng hình dạng và, ngược lại, ứng suất lệch cũng có ảnh hưởng nhất định đến biến dạng thể tích. Mối quan hệ ảnh hưởng tương hỗ đó được thể hiện gián tiếp qua σ_{eq} .

Mức độ gia tăng hệ số nhân dẻo $d\lambda$ được xác định từ điều kiện tương thích :

$$df = 0 \rightarrow d\sigma_{eq} - dK(\eta_i) = 0 . \quad (1.9)$$

Trong quá trình tạo hình một chi tiết, tỉ lệ hàm lượng các cấu tử không thay đổi ($\alpha = \text{const}$). Sự thay đổi ứng suất chỉ phụ thuộc vào độ xoắn γ của vật liệu. Do vậy ta có:

$$d\sigma_{eq} - K'(\eta_i) \cdot d\gamma = 0. \quad (1.10)$$

Từ (1.10) ta có:

$$d\gamma = \frac{d\sigma_{eq}}{K'(\eta_i)} . \quad (1.11)$$

Mặt khác, vì $R=K(\eta_i)$ là lực nhiệt động học liên kết với biến nội γ , theo định luật chày dẻo pháp tuyến ta cũng có:

$$d\gamma = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial K(\eta_i)} = d\lambda . \quad (1.12)$$

Từ (1.11) và (1.12) ta có :

$$d\lambda = \frac{d\sigma_{eq}}{K'(\eta_i)} \quad (1.13)$$

Thay (1.13) vào phương trình (1.5) ta nhận được:

$$d\varepsilon^p = \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq} \cdot K'(\eta_i)} \left[\frac{A(\eta_i)}{2} \underline{\sigma} + \frac{6B(\eta_i) - A(\eta_i)}{6} \text{Tr}(\underline{\sigma}) \underline{1} \right] \quad (1.14)$$

Biểu thức (1.14) chính là mô hình ứng xử của hỗn hợp bột gồm hai cấu tử biến dạng ở trạng thái nguội. Hệ số $K'(\eta_i)$ có vai trò của modun hoá bền do sự giảm dần của độ xoắn trong quá trình biến dạng gây nên. Hệ số này cùng với các hệ số $A(\eta_i)$, $B(\eta_i)$ được xác định cho từng vật liệu cụ thể theo phương pháp nhận dạng trình bày dưới đây.

5.6.1.2. Phương pháp nhận dạng mô hình

Khi áp dụng mô hình cho một hỗn hợp bột cụ thể, các hệ số phụ thuộc vào vật liệu và các biến nội (η_i) trong biểu thức (1.14) là $A(\eta_i)$, $B(\eta_i)$ và $K'(\eta_i)$ có thể xác định (hay nhận dạng) bằng cách kết hợp hai dạng thí nghiệm sau đây :

a) Thí nghiệm ép một chiều trong khuôn trụ

Đối với quá trình ép bột trong khuôn hình trụ, với ma sát thành khuôn không đáng kể, tenxơ ứng suất ($\underline{\sigma}$) và tenxơ biến dạng ($\underline{\varepsilon}$) có dạng sau :

$$\underline{\sigma}_{ZZ} = \begin{vmatrix} \sigma_{ZZ} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{\sigma}_{ZZ} = \begin{vmatrix} \underline{\sigma}_{ZZ} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\sigma}_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\sigma}_{\theta\theta} \end{vmatrix}, \quad (1.15)$$

$$\underline{\varepsilon}_{ZZ} = \begin{vmatrix} \varepsilon_Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{\varepsilon}_{ZZ} = \begin{vmatrix} \varepsilon_Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

Với (1.15, 1.16), từ (1.14) ta suy ra:

$$\sigma_{ZZ} = \sigma_{\theta\theta} \frac{A - 6B}{A + 12B} \cdot \sigma_{ZZ}$$

Các thành phần của tenxơ ứng suất lệch được xác định như sau:

$$\sigma'_{//} = \sigma_{//} - \frac{\Lambda}{\Lambda + 12B} \sigma_{//} = \frac{12B}{\Lambda + 12B} \sigma_{//}$$

Biết các tenxơ ứng suất và tenxơ ứng suất lệch ta có thể xác định giá trị của ứng suất tương đương theo biểu thức (1.1) với J_1 là bất biến bậc 1 của tenxơ ứng suất,

$J_1 = \text{Tr}(\underline{\sigma}) = \frac{3\Lambda}{\Lambda + 12B} \sigma_{//}$, và J_2 là bất biến bậc hai của tenxơ ứng suất lệch,

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' = \frac{108B^2}{(\Lambda + 12B)^2} \sigma_{//}^2$$

$$\sigma_{\text{eq}} = 3 \left| \sigma_{//} \right| \sqrt{\frac{\Lambda B}{\Lambda + 12B}} \Rightarrow d\sigma_{\text{eq}} = 3 d\sigma_{//} \sqrt{\frac{\Lambda B}{\Lambda + 12B}} \quad (1.17)$$

Với (1.17), từ phương trình (1.14) ta có:

$$d\varepsilon_{//} = \frac{d\sigma_{//}}{K'} \sqrt{\frac{9\Lambda B}{\Lambda + 12B}} \quad (1.18)$$

b) Thí nghiệm ép thủy tĩnh

Tenxơ ứng suất có dạng sau :

$$\underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix}$$

Dưới tác dụng của trạng thái ứng suất trên, mẫu chỉ biến dạng thể tích mà không có sự thay đổi hình dạng, vì :

$$J_1 = \text{Tr}(\underline{\sigma}) = 3\sigma, \quad \sigma' = 0 \Rightarrow J_2 = 0 \quad (1.19)$$

Với (1.19) ứng suất tương đương có dạng sau:

$$\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3} \sigma \Rightarrow d\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{3} d\sigma \quad (1.20)$$

Thế (1.19, 1.20) vào (1.8.a), ta có:

$$d\varepsilon^{\text{sp}} = d\sqrt{\frac{3}{B}} = d\sqrt{\frac{3}{B}} = \frac{d\sigma_{\text{eq}}}{K'} \sqrt{\frac{3}{B}} \quad (1.21)$$

Từ (1.20, 1.21), suy ra :

$$B = \left(\frac{d\varepsilon^{\text{sp}}}{d\gamma} \right)^2 \quad (1.22)$$

$$K' = \frac{3d\sigma}{d\varepsilon^{vp}} B. \quad (1.23)$$

Như vậy, bằng ép thủy tĩnh, ta có thể xác định được các hệ số B và K' ($d\varepsilon^{vp}$, $d\gamma$, $d\sigma$ là các giá trị đo được từ thực nghiệm).

Bằng cách kết hợp hai dạng thí nghiệm, đối với từng cặp giá trị $d\varepsilon^{vp} = d\varepsilon_{zz}$, biết B, ta có thể xác định A như sau :

$$\frac{3d\sigma}{K'} B = \frac{9ABd\sigma_{zz}}{K'(A+12B)} \Rightarrow A = \frac{12d\sigma.B}{3d\sigma_{zz} - d\sigma}, \quad (1.24)$$

với $d\sigma_{zz}$, $d\sigma$ tương ứng là các giá trị đo được từ thí nghiệm ép một chiều trong khuôn trụ và ép thủy tĩnh.

5.6.2. Mô hình hoá ứng xử đàn-dẻo dị hướng trong biến dạng lớn

Tạo hình kim loại và hợp kim bằng biến dạng dẻo ở trạng thái nguội được xem là quá trình biến dạng đàn-dẻo lớn của vật liệu có thuộc tính dẻo tức thời. Mô phỏng số các quá trình này thường được thực hiện với thiết lập Lagrange hoặc Lagrange cập nhật. Hoá bền do biến dạng là đặc điểm biến đổi cơ tính quan trọng của vật liệu trong quá trình biến dạng nguội. Tùy thuộc vào vật liệu, trạng thái cơ-lý của phôi và công nghệ tạo hình, ... mà quá trình hoá bền có thể là đẳng hướng, động hoặc hỗn hợp.

Phần lớn phôi cho tạo hình nguội là kim loại và hợp kim dạng tấm (sản phẩm cán nguội) thường có cơ tính dị hướng trục giao ban đầu nhất định và hoá bền trong quá trình biến dạng. Đặc điểm dị hướng trục giao và hoá bền có thể được mô tả bởi điều kiện dẻo dị hướng Hill, Barlat, ... và định luật chảy dẻo pháp tuyến.

Trên cơ sở phân tích động học của quá trình biến dạng đàn-dẻo, ta xét một phương pháp tiếp cận tổng quát nhằm thiết lập mô hình ứng xử của vật liệu có thuộc tính đàn-dẻo tức thời dị hướng trục giao chịu biến dạng lớn với hoá bền động và đẳng hướng. Đối với các quá trình tạo hình vật liệu kim loại dạng tấm cán nguội, để đảm bảo chất lượng, đặc biệt là độ chính xác về kích thước của sản phẩm, cần thiết phải tính tới không chỉ ảnh hưởng của sự dị hướng cơ tính mà còn phải tính tới ảnh hưởng đáng kể của thành phần biến dạng đàn hồi. Trong quá trình dập, uốn hình, ... vật liệu thường được giả thiết chịu tác động của trạng thái ứng suất phẳng và, để đơn giản, chỉ tính tới hoá bền đẳng hướng là dạng hoá bền có ảnh hưởng quan trọng hơn cả. Trên cơ sở phương pháp tiếp cận tổng quát và các giả thiết nêu

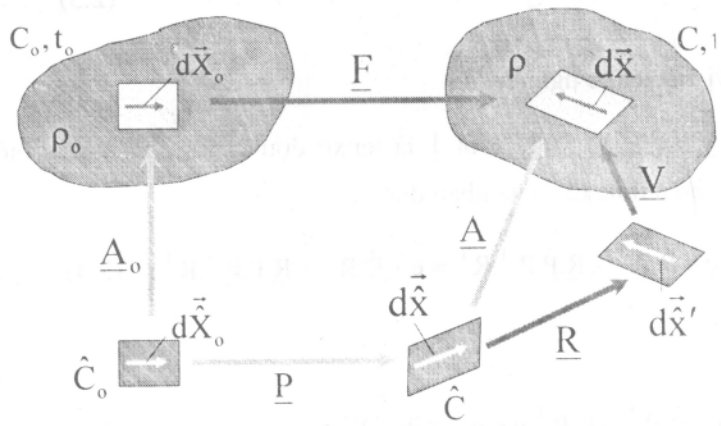
trên, ta sẽ xét một mô hình ứng xử cho vật liệu dạng tấm có cơ tính dị hướng trục giao ban đầu và hoá bền đẳng hướng trong quá trình biến dạng.

5.6.2.1. Động học của quá trình chuyển đổi đàn-dẻo lớn

Xét một vật thể biến dạng, với C_0 được xem là hình thái ban đầu tại thời điểm t_0 (phôi chưa biến dạng) và C là hình thái biến dạng hiện thời tại thời điểm t , như trình bày trên sơ đồ phân tích động học của quá trình chuyển đổi đàn-dẻo lớn (hình 5.36). Quá trình chuyển đổi đàn-dẻo từ C_0 đến C được thực hiện bởi gradient biến dạng $\underline{F}$, xác định bởi $\underline{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$, với

$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ là phương trình chuyển động của chất điểm theo phương pháp thiết lập Lagrange.

Để phân tích các thành phần chuyển đổi cấu thành $\underline{F}$, ta có thể tưởng tượng tách ra từ hình thái C_0 một phân tố (a) được đặc trưng bởi đại lượng véc-tơ $d\vec{X}_0$. Khi đó, $\hat{C}_0$ được coi là hình thái nối tại thời điểm t_0 và $d\vec{X}_0$ chính là $d\vec{X}_0$ trong hình thái nối. Để đưa $\hat{C}_0$ trở lại vị trí của nó trong C_0 cần sự tác động của gradient biến dạng đàn hồi thuần túy $\underline{A}_0$ (sinh ra do sự nối phân tố (a) khỏi các lực liên kết giàng buộc nó với phần còn lại của vật thể).



Hình 5.35. Sơ đồ phân tích động học quá trình chuyển đổi đàn-dẻo lớn.

Dưới tác động của gradient biến dạng $\underline{F}$, phân tố (a) trở thành phân tố (b) trong hình thái biến dạng hiện thời C . Tương tự, ta cũng có thể tưởng tượng tách (b) khỏi C . Khi đó, ta có $\hat{C}$ sẽ là hình thái nối tại thời điểm t và $d\vec{x}$ chính là $d\vec{x}$ trong hình thái nối hiện thời. $\hat{C}$ chỉ có thể trở lại vị trí của nó trong C sau khi

xoay bởi biến dạng xoay thuần túy $\underline{R}$ và chịu tác động của biến dạng đàn hồi thuần túy $\underline{V}$ (sinh ra do sự nối phân tố (b) khỏi các lực liên kết ràng buộc nó với phần còn lại của vật thể). Như vậy, từ hình 5.36 ta thấy rõ ràng $\underline{R}$ và $\underline{V}$ là hai thành phần cấu thành gradient biến dạng $\underline{A}$. Sự biến đổi hình dạng của phân tố từ hình thái nối ban đầu $\hat{C}_0$ sang hình thái nối hiện thời $\hat{C}$ được thực hiện bởi gradient biến dạng dẻo thuần túy $\underline{P}$.

Từ sự phân tích nêu trên ta thấy rằng, $\underline{F}$ được cấu thành từ các thành phần $\underline{V}$, $\underline{R}$, $\underline{P}$ và $\underline{A}_0$. Ta có thể viết :

$$d\tilde{\mathbf{x}} = \underline{F} d\dot{\mathbf{X}}_0 = \underline{A} d\tilde{\mathbf{X}} = \underline{A} \left(\underline{P} d\dot{\mathbf{X}}_0 \right) = \underline{A} \cdot \underline{P} \cdot \underline{A}_0^{-1} d\dot{\mathbf{X}}_0,$$

từ đó ta có :

$$\underline{F} = \underline{A} \cdot \underline{P} \cdot \underline{A}_0^{-1}. \quad (2.1)$$

Với (2.1), biểu thức xác định gradient tốc độ (hay tốc độ biến dạng đàn-dẻo hữu hạn) có thể viết được như sau :

$$\underline{L} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{\mathbf{X}}} = \text{grad}(\tilde{\mathbf{v}}) = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1} = \dot{\underline{A}} \cdot \underline{A}^{-1} + \underline{A} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{A}^{-1}, \quad (2.2)$$

trong đó, $(*)$ và $(*)^{-1}$ là các ký hiệu biểu thị tương ứng đạo hàm vật chất (đạo hàm theo thời gian với tọa độ vật chất không đổi) và nghịch đảo của tenxơ.

Thế $\underline{A} = \underline{V} \cdot \underline{R}$ vào (2.2), có tính tới tính chất trực giao của tenxơ xoay $\underline{R}$ ($\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T$), với $(*)^T$ biểu thị tenxơ chuyển vị, ta có :

$$\underline{L} = \dot{\underline{V}} \cdot \underline{V}^{-1} + \underline{V} \cdot \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{V}^{-1} + \underline{V} \cdot \underline{R} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{R}^{-T} \cdot \underline{V}^{-1}, \quad (2.3)$$

với $(*)^{-1}$ là ký hiệu chuyển vị của tenxơ nghịch đảo.

Thế $\underline{V} = \underline{I} + \underline{e} \Rightarrow \dot{\underline{V}} = \dot{\underline{e}}$, $\underline{V}^{-1} \approx \underline{I}$ (với $\underline{I}$ là tenxơ đơn vị và $\underline{e}$ là tenxơ biến dạng đàn hồi nhỏ, $\underline{e} \ll 1$), vào biểu thức (2.3), ta nhận được :

$$\underline{L} = \dot{\underline{e}} + \underline{e} \cdot \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^{-1} - \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{e} + \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{R}^T = \dot{\underline{e}} + \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^T + \underline{R} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{R}^T, \quad (2.4)$$

với :

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}} + \underline{e} \cdot \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^T - \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{e} = \dot{\underline{e}} + \underline{e} \cdot \underline{W} - \underline{W} \cdot \underline{e} \quad (2.5)$$

là đạo hàm Jauman của tenxơ biến dạng đàn hồi nhỏ; $\underline{W}$ - tenxơ tỷ suất xoay (spin), $\underline{W} = \dot{\underline{R}} \cdot \underline{R}^T$.

Mặt khác ta có :

$$\underline{L} = \underline{D} + \underline{W} = \underline{D}^s + \underline{D}^p + \underline{W}, \quad (2.6)$$

trong đó, $\underline{D}$, $\underline{D}^e$, $\underline{D}^p$ tương ứng là các tenxơ tốc độ biến dạng toàn phần, tốc độ biến dạng đàn hồi và tốc độ biến dạng dẻo.

So sánh (2.4) và (2.6) ta có :

$$\underline{D} = \overset{0}{\underline{e}} + \underline{R} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{R}^T \Rightarrow \underline{D}^e = \overset{0}{\underline{e}}, \quad \underline{D}^p = \underline{R} \cdot \dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \cdot \underline{R}^T.$$

Từ đó ta có thể dễ dàng suy ra theo định luật chảy dẻo pháp tuyến :

$$\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} = \left(\dot{\underline{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \right)^{\text{sym}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \Pi}, \quad (2.7)$$

hay :

$$\underline{D}^p = \dot{\lambda} \underline{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Pi} \cdot \underline{R}^T = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{T}}, \quad (2.8)$$

trong đó, $\dot{\lambda}$ - đạo hàm theo thời gian của hệ số nhân dẻo; f - hàm thế năng tiêu hao cho biến dạng dẻo (trùng với hàm chất tải trong trường hợp dẻo liên kết); Π - tenxơ ứng suất Piola - Kirchhof II (tác động trên hình thái ban đầu C_0); $\underline{T}$ - tenxơ ứng suất Cauchy (tác động trên hình thái hiện thời C).

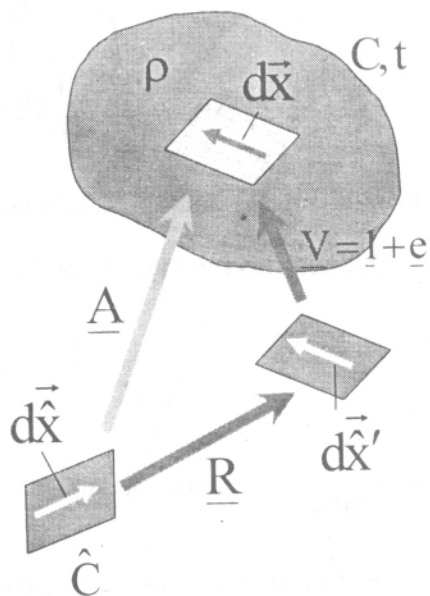
5.6.2.2. Mô hình ứng xử đàn-dẻo dị hướng trực giao với hoá bền động và đẳng hướng

Mô hình được trình bày với giả thiết vật liệu có thuộc tính dẻo tức thời, không nén được và quá trình biến dạng xảy ra ở nhiệt độ không đổi.

Trong trường hợp tổng quát, mô hình ứng xử đàn-dẻo phải được cấu thành từ các thành phần : định luật đàn hồi (đẳng hướng); hàm chất tải (hay điều kiện dẻo, phụ thuộc vào trạng thái ứng suất hiện thời và các biến hoá bền); qui luật biến đổi của các biến hoá bền; hàm thế năng tiêu hao (trùng với hàm chất tải trong trường hợp dẻo liên kết).

a) Ứng xử đàn hồi

Biến dạng đàn hồi được giả thiết là nhỏ,



Hình 5.36. Sơ đồ phân tích động học quá trình chuyển đổi đàn hồi.

tuy nhiên có thể chịu tác động xoay lớn. Định luật biến dạng đàn hồi, trong tiếp cận biến dạng lớn, phản ánh mối quan hệ giữa $\overset{\circ}{\underline{\underline{e}}}$ và $\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}$ (đạo hàm Jauman của tenxơ ứng suất Cauchy $\underline{\underline{T}}$) trong chuyển đổi đàn hồi $\hat{C} \Rightarrow C$ (hình 5.37).

Trong trường hợp đẳng nhiệt, biến dạng đàn hồi có thể xác định bởi phương trình sau:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{E} \{ (1 + \nu) \underline{\underline{T}} - \nu (\text{Tr} \underline{\underline{T}}) \underline{\underline{I}} \}, \quad (2.9)$$

hay :

$$\dot{\underline{\underline{e}}} = \frac{1}{E} \{ (1 + \nu) \dot{\underline{\underline{T}}} - \nu (\text{Tr} \dot{\underline{\underline{T}}}) \underline{\underline{I}} \}, \quad (2.10)$$

trong đó, ν - hệ số Poisson; E - modun đàn hồi đẳng hướng ; $\text{Tr} \underline{\underline{T}} = T_{mm}$.

Thế (2.9, 2.10) vào (2.5), có tính đến :

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} = \dot{\underline{\underline{T}}} + \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{T}} \quad \text{và} \quad \text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} = \dot{T}_{mm} = \dot{T}_{mm} + T_{mp} W_{pm} - W_{mp} T_{pm} = \dot{T}_{mm} = \text{Tr} \dot{\underline{\underline{T}}},$$

ta nhận được :

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{e}}} = \frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} - \nu \left(\text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} \right) \underline{\underline{I}} \right\}. \quad (2.11)$$

Từ (2.11) ta có : $\text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{e}}} = \frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} - 3\nu \text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} \right\} = \frac{1 - 2\nu}{E} \text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}$. Thế kết quả này vào

(2.11) và giải tương đối với $\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}$, ta nhận được biểu thức quan hệ giữa $\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}$ và $\overset{\circ}{\underline{\underline{e}}}$ trong chuyển đổi đàn hồi giữa hai hình thái $\hat{C}$ và C :

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}} = 2G \left\{ \overset{\circ}{\underline{\underline{e}}} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\text{Tr} \overset{\circ}{\underline{\underline{e}}} \right) \underline{\underline{I}} \right\}, \quad (2.12)$$

với $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ - modun cắt đàn hồi.

b) Ứng xử dẻo dị hướng trục giao với hoá bền động và đẳng hướng

Hàm chất tải (hay điều kiện dẻo) có dạng :

$$f(\underline{\underline{T}}, \underline{\underline{X}}, Y) = \bar{\sigma} - Y(\bar{\epsilon}^p) = 0, \quad (2.13)$$

với $\underline{Y}$ – giới hạn đàn hồi (phụ thuộc vào biến dạng tích lũy $\bar{\epsilon}^p$ trong trường hợp hoá bền đẳng hướng) ; $\bar{\sigma}$ – ứng suất tương đương (hay cường độ ứng suất), có thể được xác định bởi biểu thức bậc hai trục giao dạng Hill sau :

$$\sigma^2 = \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) : \underline{M} : \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) = \left(\underline{\hat{T}}' - \underline{\hat{X}} \right) : \underline{\hat{M}} : \left(\underline{\hat{T}}' - \underline{\hat{X}} \right), \tag{2.14}$$

trong đó, $\underline{X}, \underline{T}'$ - tương ứng tenxơ ứng suất dư tồn tại trong vật liệu (yếu tố gây nên hoá bền động hay sự chuyển dịch của mặt chất tải) và tenxơ ứng suất lệch Cauchy, $\underline{T}' = \underline{T} - \frac{1}{3} (\text{Tr} \underline{T}) \underline{I}$; $\left(\hat{\cdot} \right)$ - ký hiệu biểu thị các tenxơ được biểu diễn trên hình thái mới $\hat{C}$, các ten xơ này được chuyển sang hình thái hiện thời C nhờ tác động xoay bởi $\underline{R}$:

$$\underline{\hat{T}} = \underline{R}^T . \underline{T} . \underline{R} \quad , \quad \underline{\hat{X}} = \underline{R}^T . \underline{X} . \underline{R} \quad , \tag{2.15}$$

$\underline{M}$ - là tenxơ bậc 4, có các thành phần là các hằng số dẻo biểu kiến, phụ thuộc vào $\underline{R}$ và có tính chất sau :

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{klij} \quad , \quad M_{iikl} = 0 \quad ,$$

Thế (2.15) vào (2.14), ta có :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) : \underline{M} : \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) = \left(\underline{R}^T . \underline{T}' . \underline{R} - \underline{R}^T . \underline{X} . \underline{R} \right) : \underline{\hat{M}} : \left(\underline{R}^T . \underline{T}' . \underline{R} - \underline{R}^T . \underline{X} . \underline{R} \right) \\ &= \underline{R}^T \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) \underline{R} : \underline{\hat{M}} : \underline{R}^T \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) \underline{R} . \end{aligned}$$

Từ biểu thức trên suy ra :

$$M_{ijkl} = R_{im} R_{nj} R_{pk} R_{ql} \hat{M}_{mnpq} . \tag{2.16}$$

$\underline{\hat{M}}$ là hằng số, ngoài các tính chất như $\underline{M}$, $\underline{\hat{M}}$ còn có tính chất suy ra từ tính đối xứng trục giao của điều kiện dẻo : $\hat{M}_{ijkl} = 0$ trừ khi $i = j$, hoặc $i = k$ và $j = l$, hoặc $i = l$ và $j = k$. $\underline{R}$ phụ thuộc vào thời gian, $\underline{R}(t = 0) = \underline{I}$, $\dot{\underline{R}} = \underline{W} . \underline{R}$.

Với (2.14), theo định luật chảy dẻo liên kết (2.8), ta có :

$$\underline{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{T}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{T}'} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{T}'} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma} \underline{M} : \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) . \tag{2.17}$$

Giả thiết tồn tại tốc độ biến dạng dẻo tương đương $\bar{\epsilon}^p$ (đối cặp với $\bar{\sigma}$), $\bar{\epsilon}^p$ phải thoả mãn điều kiện tương đương về năng lượng tiêu hao:

$$\bar{\sigma}:\bar{\epsilon}^p = \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) : \underline{D}^p.$$

Thế giá trị của $\underline{D}^p$ (2.17) vào biểu thức trên, ta nhận được :

$$\bar{\epsilon}^p \frac{\dot{\lambda} \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) : \underline{M} : \left(\underline{T}' - \underline{X} \right)}{\bar{\sigma}.\bar{\sigma}} = \dot{\lambda}. \tag{2.18}$$

Từ điều kiện liên kết $\dot{f} \left(\underline{T}', \underline{X} \right) = 0$, ta có :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{T}} : \underline{T}' + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : \underline{X} - Y' \bar{\epsilon}^p = \frac{\partial f}{\partial \underline{T}} : \underline{T}' + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} : \underline{X} - Y' \dot{\lambda} = 0. \tag{2.19}$$

Vì $\underline{X}$ là lực nhiệt động học liên kết với biến trạng thái (biến nhiệt động học) $\alpha = \bar{\epsilon}^p$, với $\bar{\epsilon}^p$ là biến dạng dẻo hiện thời), ta có :

$$\bar{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{T}} = - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{T}} = - \frac{\partial f}{\partial \underline{X}}.$$

Thế kết quả trên vào (2.19), ta nhận được biểu thức xác định $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{Y' \bar{\sigma}} \left\langle \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) : \underline{M} : \left(\underline{T}' - \underline{X} \right) \right\rangle, \tag{2.20}$$

trong đó Y' giữ vai trò của modul hoá bền (đẳng hướng), $Y' = \frac{dY}{d\bar{\epsilon}^p}$ (giả thiết luôn dương) ;

ký hiệu $\langle x \rangle$ biểu thị $\langle x \rangle = x$ khi $x \geq 0$ và $\langle x \rangle = 0$ khi $x < 0$.

Đối với kim loại và hợp kim biến dạng ở trạng thái nguội, định luật Prager và Swift thường được áp dụng để mô tả tương ứng sự biến đổi của $\underline{X}$ và Y :

$$\underline{X} = k \underline{D}^p, \tag{2.21}$$

$$Y = C \left(\epsilon_o + \bar{\epsilon}^p \right)^n, \tag{2.22}$$

với $\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \dot{\epsilon}^p dt$, $\dot{\epsilon}^p = \underline{T} : \underline{D}^p / \bar{\sigma}$ và ϵ_0 , C , n , k – là các thông số phụ thuộc vật liệu.

Các biểu thức (2.12), (2.17), (2.20), (2.21) và (2.22) cấu thành mô hình tổng quát mô tả ứng xử đàn-dẻo dị hướng trục giao với hoá bền động và đẳng hướng.

Lưu ý rằng, trong trường hợp $R = \text{const}$ ($\dot{R} = 0$), các đạo hàm Jauman sẽ trùng với đạo hàm vật chất, $\left(\frac{d}{dt} \right) = (\dot{})$.

c) *Áp dụng cho vật liệu kim loại dạng tấm dị hướng trục giao với hoá bền đẳng hướng*

Phương pháp tiếp cận tổng quát nêu trên được áp dụng nhằm mô tả ứng xử đàn – dẻo tức thời của kim loại và hợp kim dạng tấm cán nguội trong các quá trình tạo hình bằng biến dạng dẻo ở nhiệt độ không đổi. Trong trường hợp này, ta có thể áp dụng điều kiện dẻo dị hướng đối xứng trục giao của Hill với hoá bền đẳng hướng, được mô tả bởi biểu thức sau:

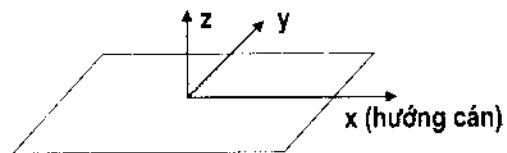
$$f(\underline{T}, Y) = \bar{\sigma} - Y(\bar{\epsilon}^p) = 0, \quad (2.23)$$

trong đó, quan hệ $Y(\bar{\epsilon}^p)$ được mô tả bởi định luật Swift (2.22); ứng suất tương đương $\bar{\sigma}$ được xác định bởi biểu thức:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 = M_{ijkl} T'_{ij} T'_{kl} = & Q(T_{yy} - T_{zz})^2 + K(T_{zz} - T_{xx})^2 + H(T_{xx} - T_{yy})^2 + \\ & + 2LT_{yz}^2 + 2MT_{xz}^2 + 2NT_{xy}^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

với Q, K, H, L, M, N là các hệ số phụ thuộc vật liệu, xác định bằng thực nghiệm.

Trong quá trình biến dạng, ta cần tính tới sự biến đổi của $\underline{M}$. Giả thiết vật liệu ban đầu dị hướng trục giao và giữ nguyên tính chất dị hướng đó trong quá trình biến dạng. Các trục dị hướng trục giao ban đầu cũng được giả thiết trùng với hệ trục Đêcac x_i (hình 5.37) và chịu tác động của $\underline{R}$. Khi đó, $\hat{\underline{M}}$ sẽ là tenxơ dị hướng ban đầu tương ứng với điều kiện dẻo Hill (2.24) và sự biến đổi của $\underline{M}$ sẽ tuân theo phương trình (2.16).



Hình 5.37. Các trục dị hướng ban đầu trùng với các trục Đêcac x_i .

Với (2.24) biểu thức (2.17) trở thành :

$$\underline{D}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{T}'} = \frac{\dot{\lambda}}{\bar{\sigma}} \underline{M} : \underline{T}' . \quad (2.25)$$

Điều kiện liên kết (2.19) cho :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{Y' \bar{\sigma}} \underline{T}' : \underline{M} : \underline{\overset{\circ}{T}}' , \quad (2.26)$$

trong đó, modun đàn hồi Y' được xác định từ (2.22) : $Y' = nC(\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon}^p)^{n-1}$.

Thế $\underline{\overset{\circ}{e}} = \underline{D} - \underline{D}^p$, với $\underline{D}^p$ xác định từ (2.25) và (2.26), vào (2.12), sau khi biến đổi ta nhận được :

$$\begin{aligned} \underline{\overset{\circ}{T}} &= 2G \left\{ \underline{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr} \underline{D} \underline{1} - \frac{1}{f_0} \underline{Z} (\underline{Z} : \underline{D}) \right\} , \\ \left(\underline{\overset{\circ}{T}}_{ij} &= 2G \left\{ D_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} D_{mm} \delta_{ij} - \frac{1}{f_0} Z_{ij} Z_{pq} D_{pq} \right\} \right) . \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{Trong đó, } Z_{ij} = M_{ijk} T_{km} , \quad f_0 = Z_{rs} Z_{rs} + \frac{Y' \sigma^2}{2G} .$$

Biểu thức (2.27) chính là mô hình ứng xử đàn-dẻo dị hướng trục giao với hoá bền đẳng hướng.

Trong trường hợp tạo hình bằng phương pháp dập phôi kim loại và hợp kim dạng tấm có cơ tính dị hướng trục giao ban đầu, vật liệu thường được giả thiết chịu tác động của trạng thái ứng suất phẳng, $T_{yz} = T_{zx} = T_{zz} = 0$, biểu thức (2.24) trở thành:

$$\bar{\sigma}^2 = (K+H)T_{xx}^2 + (Q+H)T_{yy}^2 - 2HT_{xx}T_{yy} + 2NT_{xy}^2 . \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{T}} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \underline{M} : \underline{T} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} (K+H)T_{xx} - HT_{yy} & NT_{xy} & 0 \\ NT_{yx} & (Q+H)T_{yy} - HT_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ số nhân dẻo xác định từ biểu thức sau :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{1}{Y'} \frac{\partial f}{\partial \underline{T}} : \underline{\overset{\circ}{T}} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{T}} : \underline{\overset{\circ}{T}} \\ &= \frac{1}{Y' \bar{\sigma}} \left\{ (K+H)T_{xx} \cdot \underline{\overset{\circ}{T}}_{xx} + (Q+H)T_{yy} \cdot \underline{\overset{\circ}{T}}_{yy} - HT_{yy} \cdot \underline{\overset{\circ}{T}}_{xx} - HT_{xx} \cdot \underline{\overset{\circ}{T}}_{yy} + 2NT_{xx} \cdot \underline{\overset{\circ}{T}}_{xy} \right\} . \end{aligned}$$

ĐÈO NHỚT

Chương này đề cập đến các mô hình thuộc tính dẻo nhớt lý tưởng, đàn-dẻo nhớt lý tưởng và đàn-dẻo nhớt hoá bền. Xét về mặt hiện tượng, các mô hình thuộc tính nêu trên được thiết lập theo phương pháp nhiệt động học áp dụng cho các quá trình không thuận nghịch. Để đơn giản, các vấn đề được xem xét và phát triển trong khuôn khổ giả thiết biến dạng nhỏ, song sẽ không có bất cứ trở ngại đáng kể nào khi mở rộng cho các bài toán biến dạng lớn.

6.1. MIỄN Ý NGHĨA VÀ ỨNG DỤNG

Khác với trường hợp dẻo tức thời, lý thuyết dẻo nhớt mô tả biến dạng của vật liệu như một quá trình chảy dẻo (biến dạng từ biến), phụ thuộc vào thời gian.

Đối với kim loại và hợp kim, biến dạng dẻo nhớt tương ứng với các cơ chế liên quan đến chuyển động của lệch (trèo, rẽ, đa giác hoá cấu trúc lệch,...) cùng với sự trượt giữa các hạt tinh thể. Các cơ chế này xảy ra khi nhiệt độ vượt quá khoảng $1/3$ nhiệt độ nóng chảy tuyệt đối (K), đối với đa số kim loại và hợp kim. Trong thực tế, một số hợp kim biểu hiện thuộc tính dẻo nhớt ở nhiệt độ thường (300K), trong khi đó điểm nóng chảy của chúng lại vượt quá 1400K.

Đối với polime, gỗ, bitum, ... lý thuyết dẻo nhớt cần được áp dụng ngay khi ứng suất tác dụng vượt quá giới hạn đàn hồi hay giới hạn đàn nhớt.

Tương tự đối với trường hợp dẻo tức thời, ở đây ta chỉ quan tâm đến vùng chất tải không hư hại, tương ứng với biến dạng không vượt quá khoảng một nửa biến dạng phá huỷ hay với số chu kỳ chất tải chưa đạt tới chu kỳ ổn định của quá trình biến cứng hay hoá mềm chu kỳ.

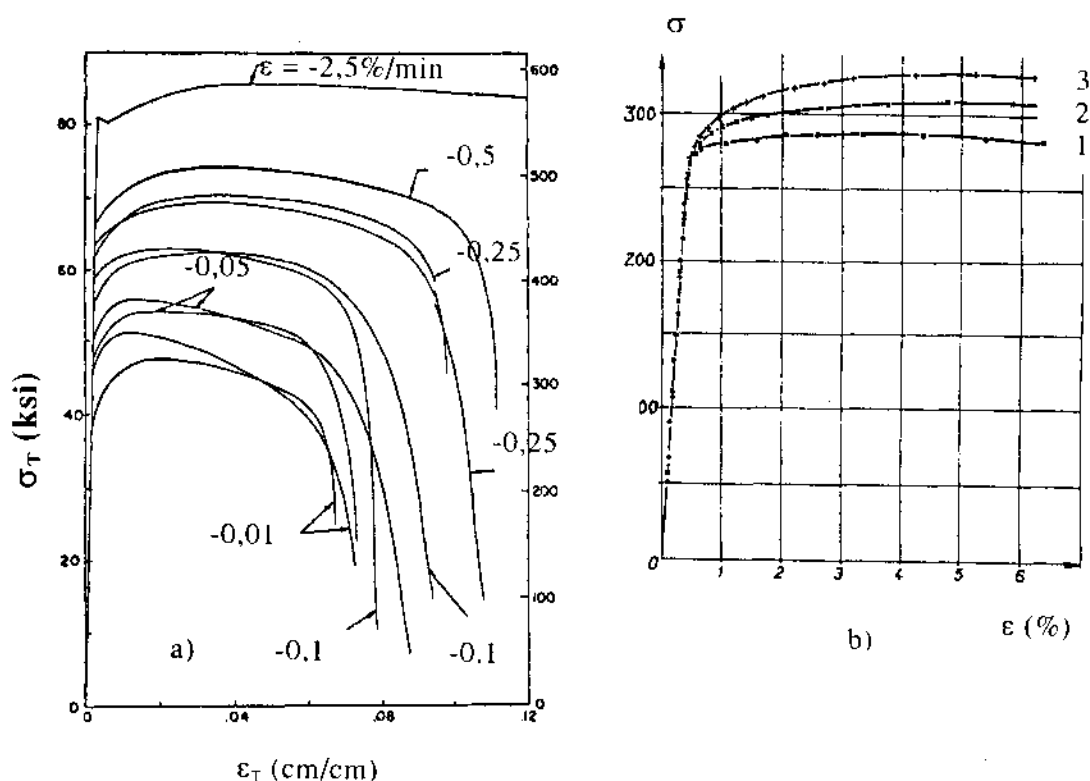
6.2. KHÁI QUÁT VỀ HIỆN TƯỢNG

6.2.1. Thí nghiệm hoá bền

So với trường hợp dẻo tức thời, đường cong hoá bền của vật liệu có thuộc tính dẻo nhớt có ba điểm khác biệt cơ bản sau đây:

- Chịu ảnh hưởng của tốc độ biến dạng : với biến dạng như nhau, ứng suất tăng khi tốc độ biến dạng tăng (hình 6.1).

- Khi tốc độ biến dạng thay đổi, đường cong thử kéo cũng tức thời thay đổi theo và có xu hướng hội nhập với đường cong thử kéo đơn điệu với tốc độ biến dạng tương ứng (hình 6.2).



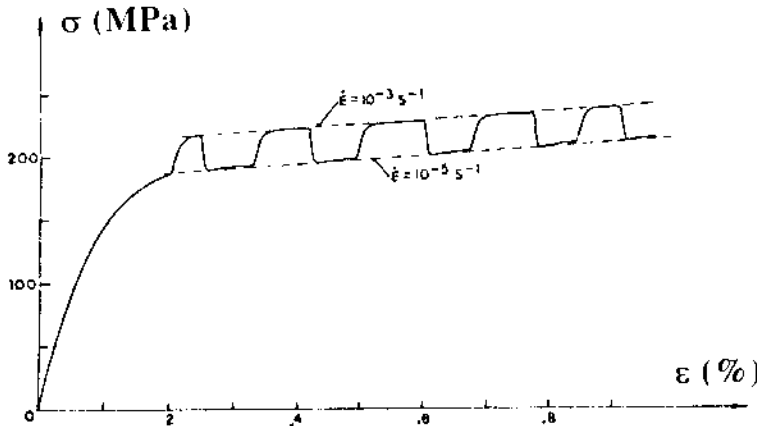
Hình 6.1. Thí nghiệm hoá bền với các tốc độ biến dạng khác nhau :

a) hợp kim Udimet 700 rèn, 927°C ;

b) hợp kim AU4G sau khi tôi và hoá già, 200°C.

1) $\dot{\epsilon} = 0,032 \times 10^{-2} \text{s}^{-1}$; 2) $\dot{\epsilon} = 0,63 \times 10^{-2} \text{s}^{-1}$; 3) $\dot{\epsilon} = 1,72 \times 10^{-2} \text{s}^{-1}$

- Khái niệm về ngưỡng dẻo không tồn tại, biến dạng vẫn có thể xảy ra khi ứng suất tác dụng thấp hơn ứng suất tác dụng trước đó. Giới hạn đàn hồi (hay ngưỡng dẻo ban đầu) rất khó xác định. Ở nhiệt độ cao, giới hạn đàn hồi thường được coi bằng 0 và thuộc tính dẻo nhớt được mô tả bởi các mô hình của chất lỏng "rất" nhớt.



Hình 6.2. Đường cong hoá bền kéo với tốc độ biến dạng khác nhau (thép inox 304, ở nhiệt độ thường).

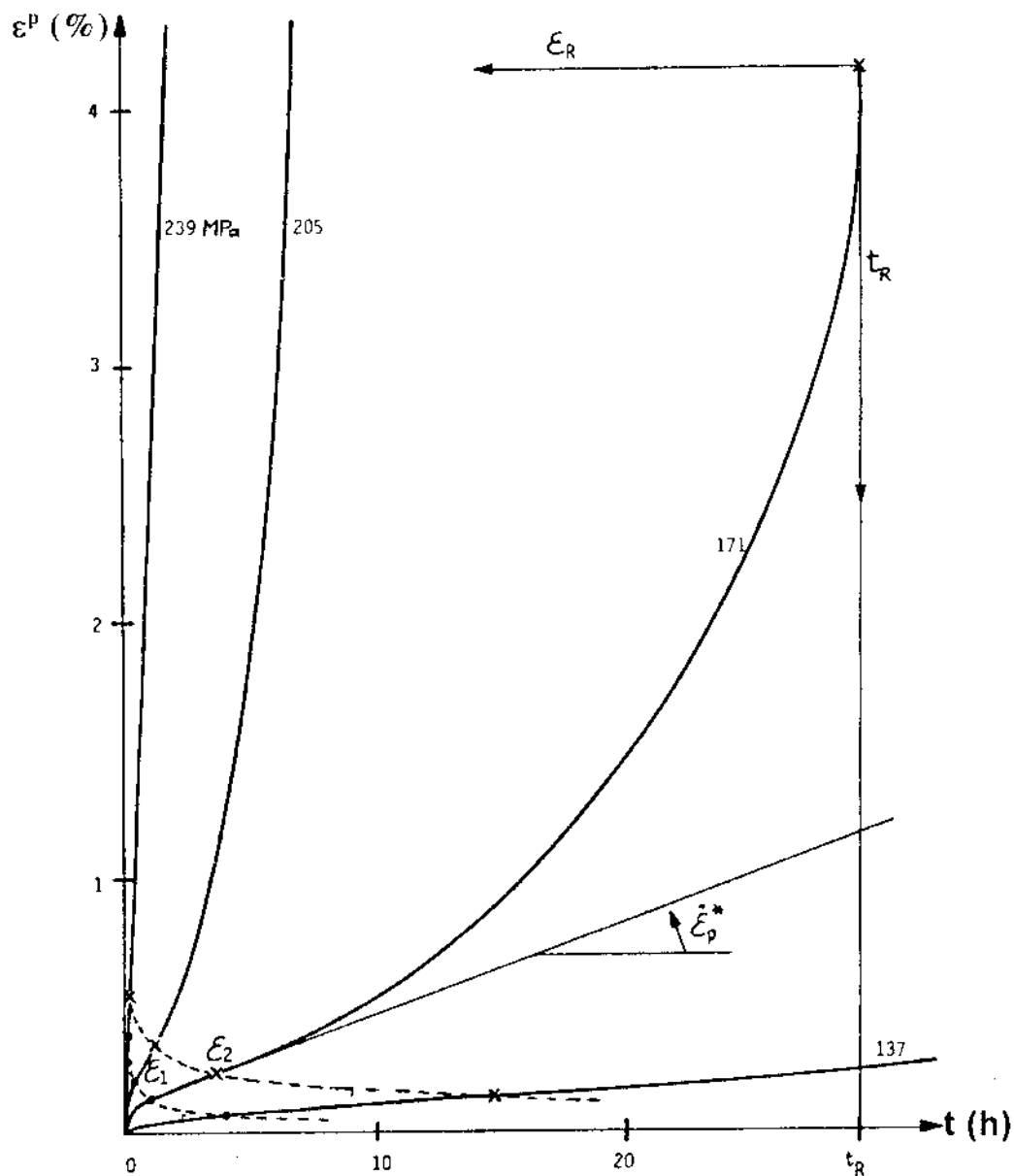
Nếu quá trình dỡ tải tiến hành với tốc độ tương đối cao ($\dot{\epsilon} > 0,1 \times 10^{-2} s^{-1}$), ta nhận thấy hành vi đàn hồi của vật liệu không bị thay đổi bởi biến dạng dẻo nhớt. Do đó giả thiết về phân chia biến dạng, trong phần lớn trường hợp (biến dạng nhỏ), vẫn có thể được áp dụng:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p,$$

trong đó, ϵ^e là biến dạng đàn hồi tuyến tính và ϵ^p là biến dạng dẻo nhớt. Trong một số ít trường hợp ta cần đưa thêm vào thành phần biến dạng dẻo tức thời (trường hợp dẻo hỗn hợp). Tuy nhiên, đây không phải là trường hợp được xem xét một cách chi tiết trong chương này. Ở đây ta chỉ quan tâm đến một dạng kết hợp giữa sự hoá bền do biến dạng và hoá bền do thời gian để tính tới sự kết hợp giữa biến dạng dẻo tức thời và biến dạng dẻo nhớt.

6.2.2. Thí nghiệm chảy dẻo

Đường cong chảy dẻo mô tả sự biến đổi của biến dạng theo thời gian ở nhiệt độ cho trước, dưới tác dụng của ứng suất không đổi. Hình 6.3 trình bày đường cong chảy dẻo của siêu hợp kim IN 100 ở 1000°C, ta có thể thấy rõ ba giai đoạn sau:



Hình 6.3. Đường cong chảy dẻo dưới tác dụng của các ứng suất khác nhau (siêu hợp kim IN 100, ở nhiệt độ 1000°C).

- Giai đoạn chảy dẻo đầu tiên ($0 \leq \epsilon < \epsilon_1$): sự hoá bền của vật liệu dẫn đến sự giảm dần của tốc độ chảy dẻo (có giá trị ban đầu rất lớn);
- Giai đoạn chảy dẻo thứ hai ($\epsilon_1 \leq \epsilon < \epsilon_2$): tốc độ chảy dẻo không đổi;

- Giai đoạn chảy dẻo thứ ba ($(\epsilon_2 \leq \epsilon < \epsilon_R)$): tốc độ chảy dẻo gia tăng cho đến khi vật liệu phá hủy (ϵ_R). Hiện tượng này được giải thích bởi sự giảm tiết diện ngang của mẫu dưới tác dụng của lực không đổi và sự phát triển của quá trình hư hại làm giảm đáng kể trở kháng biến dạng của vật liệu.

Giai đoạn chảy dẻo đầu tiên của đa số kim loại và hợp kim có thể được mô tả bởi định luật Andrade:

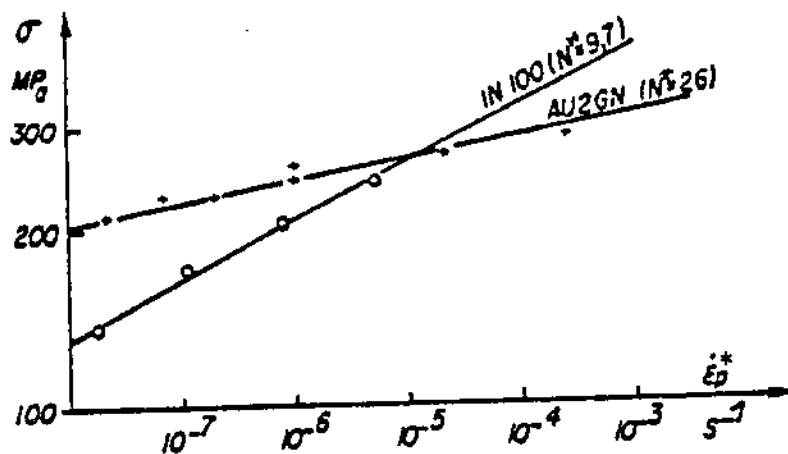
$$\dot{\epsilon} = A t^{1/q},$$

trong đó, A và q là các hệ số phụ thuộc vào vật liệu và nhiệt độ.

Các thí nghiệm chảy dẻo ở nhiệt độ không đổi với ứng suất tác dụng khác nhau, cho phép ta xác định quan hệ giữa tốc độ chảy dẻo và ứng suất trong giai đoạn hai:

$$\dot{\epsilon}_p^* = \left(\frac{\sigma}{\lambda^*} \right)^{N^*}$$

trong đó, λ^* và N^* là các hệ số đặc trưng của vật liệu, phụ thuộc vào nhiệt độ (hình 6.4). Biểu thức trên được gọi là định luật Norton.



Hình 6.4. Biểu đồ Norton :

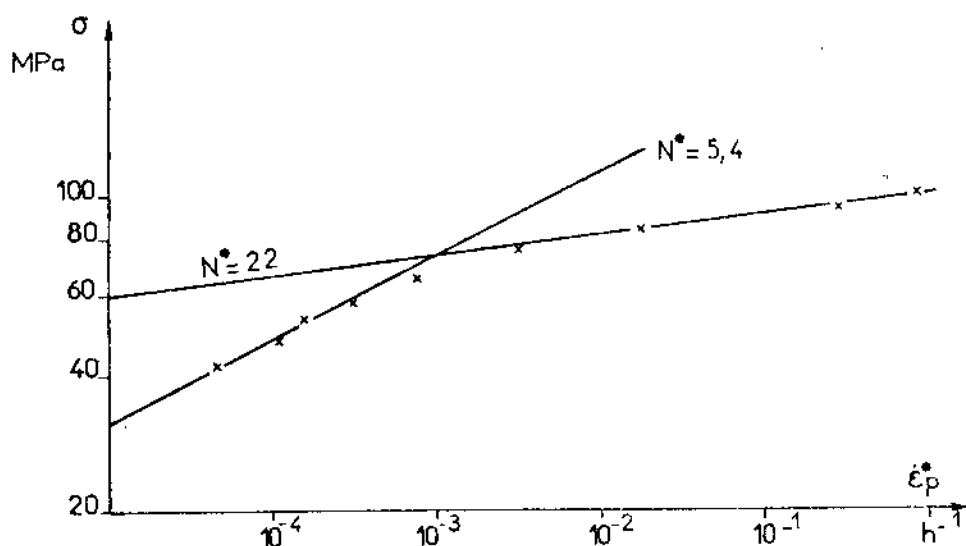
- siêu hợp kim IN 100, nhiệt độ 1000°C ($N^* = 9,7$) ;
- hợp kim AU 2 GNT 6, nhiệt độ 180°C ($N^* = 26$).

Giá trị của hệ số N^* thường phụ thuộc vào miền tốc độ biến dạng: với tốc độ biến dạng lớn, hiệu ứng hình học (co của tiết diện mẫu) trở nên có ảnh hưởng trội hơn và do đó, giá trị của N^* thường lớn hơn. Ngược lại, đối với các tốc độ biến dạng thấp, hệ số N^* có xu hướng giảm đi (hình 6.5). Để tính tới hiện tượng này, ta có thể sử dụng một dạng sửa đổi của định luật Norton dưới đây:

$$\dot{\epsilon}_p^* = \left(\frac{\sigma}{\lambda_0} \right)^{N_0} \exp(\alpha \sigma^{N_0+1})$$

Biểu thức này tương đương với hàm mũ, trong đó lũy thừa của ứng suất bằng $N_0 + \alpha(N_0 + 1)\sigma^{N_0+1}$ và có thể nhận giá trị giữa N_0 (với σ nhỏ) và ∞ (với σ lớn). Mô hình trên tương hợp tương đối tốt với kết quả thực nghiệm (hình 6.5).

Trong quan hệ với nhiệt độ, lũy thừa Norton giảm đi khi nhiệt độ tăng. Thực nghiệm cho thấy, vật liệu chịu ảnh hưởng tăng dần của độ nhớt (các giá trị cao của N^* tương ứng với ảnh hưởng yếu của tốc độ biến dạng).

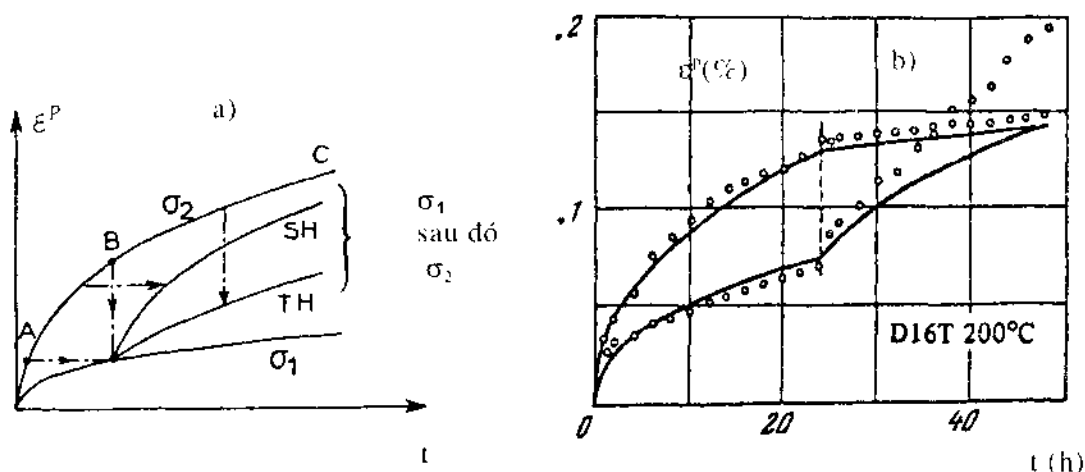


Hình 6.5. Biến đổi của lũy thừa Norton (N^{**}) phụ thuộc vào ứng suất (hợp kim Mg, nhiệt độ 260°C).

Ta có thể rút ra những kết luận khác nữa từ các thí nghiệm chảy dẻo nhiều mức. Hình 6.6 cho thấy một cách khái quát sự kết hợp giữa hai giả thiết hoá bền (đơn

giản nhất), được chấp nhận một cách phổ biến nhằm giải thích giai đoạn chảy dẻo thứ nhất:

- Hoá bền do biến dạng: đường cong chảy dẻo (có hoá bền do biến dạng) ở mức thứ hai (σ_2) được suy ra từ đường cong chảy dẻo chuẩn AC với ứng suất tác dụng σ_2 bằng cách tịnh tiến AC theo trục thời gian (biến dạng không đổi);
- Hoá bền do thời gian: đường cong BC tịnh tiến song song trục biến dạng (thời gian không đổi).



Hình 6.6. Thí nghiệm chảy dẻo hai mức: hoá bền do biến dạng và hoá bền do thời gian (a), thí nghiệm đối với hợp kim nhôm D16T ở 200°C(b).

Trong giai đoạn chảy dẻo thứ nhất, hai giả thiết này dẫn đến các kết quả rất khác nhau, đặc biệt khi $\sigma_2 > \sigma_1$. Các thí nghiệm tiến hành với nhiều loại vật liệu khác nhau thường cho thấy, hoặc giả thiết hoá bền do biến dạng đúng, hoặc giả thiết hóa bền do biến dạng kết hợp với sự ảnh hưởng phần nào của giả thiết thứ hai.

6.2.3. Thí nghiệm nới

Thí nghiệm nới cho phép xem xét quá trình giảm ứng suất tác dụng trong một phân tố thể tích vật liệu, khi giữ biến dạng ở một giá trị cố định (hình 6.7).

Thí nghiệm nới là thí nghiệm đặc trưng, cho thấy ảnh hưởng của độ nhớt đến hành vi của vật liệu và cho phép xác định quan hệ giữa ứng suất và tốc độ biến dạng dẻo nhớt. Quan hệ phân chia biến dạng có thể viết dưới dạng tốc độ như sau:

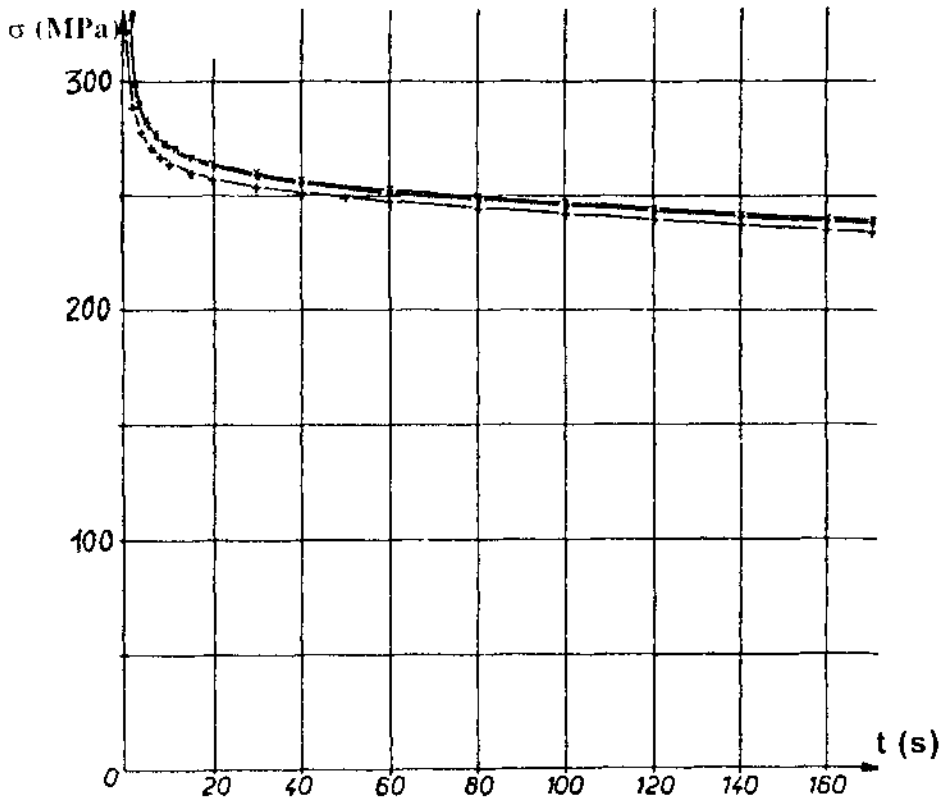
$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p.$$

Với định luật đàn hồi tuyến tính $\dot{\epsilon}^e = \dot{\sigma}/E$ và điều kiện $\dot{\epsilon} = 0$ ($\epsilon = \text{const}$ trong thí nghiệm nối), ta có:

$$\dot{\epsilon}^p = -\frac{\dot{\sigma}}{E}.$$

Như vậy, mỗi điểm của đường cong nối $\sigma(t)$ cho ta biết ứng suất và tốc độ biến dạng dẻo nhất $\dot{\epsilon}^p = -\frac{\dot{\sigma}}{E}$.

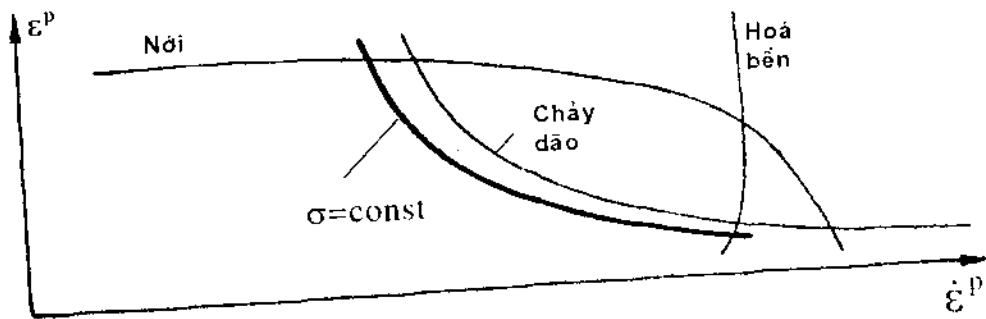
Thực nghiệm cho thấy, ta có thể đạt được tốc độ biến dạng dẻo nhất rất nhỏ ($\dot{\epsilon}^p \approx 10^{-10} \div 10^{-12} \text{ s}^{-1}$) trong khoảng thời gian tương đối ngắn. Đặc điểm này được sử dụng trong phương pháp "nối - cháy dẻo" trình bày ở 6.4.2.4.



Hình 6.7. Thí nghiệm nối. Hợp kim AU4G sau khi tôi và hoá già.

6.2.4. Mô hình quá trình dẻo nhớt hoá bền

Các kết quả khác nhau trình bày ở trên có thể qui tụ trong mô hình thuộc tính một chiều với ba thông số, có khả năng mô tả tương đối tốt các hiện tượng xảy ra trong quá trình biến dạng dẻo nhớt đơn điệu tăng dần ($\dot{\epsilon} > 0$).



Hình 6.8. Biểu đồ trình bày ba dạng thí nghiệm đặc trưng trong không gian các biến ϵ^p và $\dot{\epsilon}^p$.

Cho mỗi dạng thí nghiệm, ta có thể tính toán biến đổi của ϵ^p và $\dot{\epsilon}^p$ và trình bày các giá trị tính được trên biểu đồ $(\epsilon^p, \dot{\epsilon}^p)$ (hình 6.8). Ở nhiệt độ không đổi, đối với đa số vật liệu, tập hợp các thí nghiệm hoá bền, chảy dẻo và nới xác định trong mặt phẳng $(\epsilon^p, \dot{\epsilon}^p)$ các đường đẳng ứng suất. Điều đó chứng minh một cách thực nghiệm rằng, có thể xác định định luật trạng thái $\sigma = f(\epsilon^p, \dot{\epsilon}^p)$ trong miền biến đổi của các biến ϵ^p và $\dot{\epsilon}^p$.

Với định luật Norton và sự giống nhau giữa các đường cong hoá bền trong trường hợp dẻo tức thời và dẻo nhớt, ta có thể biểu diễn thuộc tính hỗn hợp của vật liệu bằng một mô hình dưới dạng tích của hai hàm lũy thừa. Nếu tính tới biến dạng đàn hồi (tuyến tính), mô hình hoá bền-nhớt có thể viết như sau:

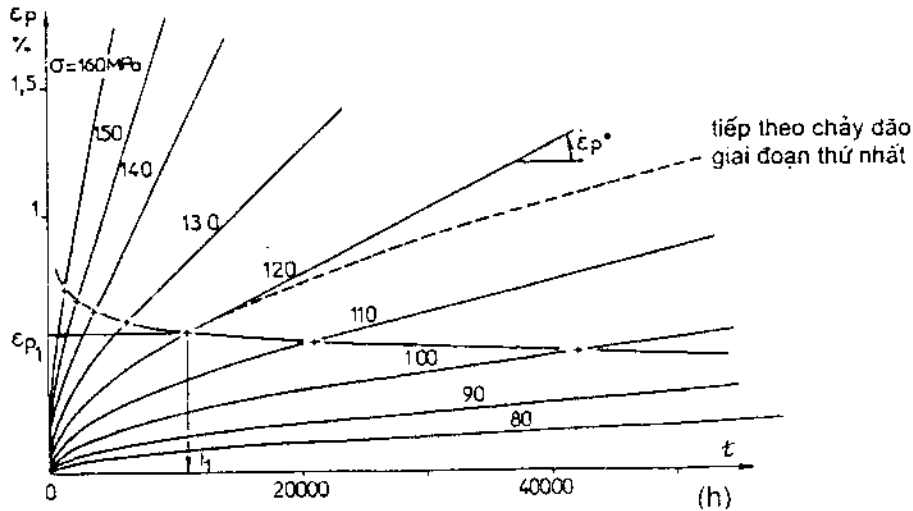
$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$$

$$\sigma = E\epsilon^e$$

$$\sigma = K(\epsilon^p)^{L,M}(\dot{\epsilon}^p)^{N},$$

trong đó, M, N, K là các thông số phụ thuộc vào vật liệu và là hàm của nhiệt độ :

- N là lũy thừa nhớt, có thể nhận giá trị từ 2 (đối với vật liệu “rất” nhớt) đến 100 (đối với vật liệu có độ nhớt thấp);
- M là lũy thừa hoá bền, có thể biến đổi trong khoảng từ 2 đến 50;
- K là hệ số trở kháng, có thể biến đổi trong khoảng từ 100 đến 10 000 MPa.s.



$$t < t_1 = 1,767 \cdot 10^{19} \sigma^{-2,311} \rightarrow \varepsilon_p = 1,025 \cdot 10^{-14} \sigma^{4,642} t^{0,513}$$

$$t > t_1 \rightarrow \varepsilon_p = 2,268 \cdot 10^{-24} \sigma^{8,2} (t - t_1) + 7,666 \cdot 10^{-5} \sigma^{-2,669}$$

$$N^* = 8,2 \quad \lambda^* = 764,6 \quad N = 9,04 \quad M = 9,54 \quad K = 1\,111,3$$

Hình 6.9. Mạng đường cong chảy dẻo tính toán.

(Thép inox 316 SPH, nhiệt độ 550°C).

Vì được viết dưới dạng tích của hai hàm lũy thừa, mô hình trên bao hàm các trường hợp riêng sau:

- Hoá bền trong trường hợp dẻo tức thời như đã trình bày trong chương 5 (với $\sigma_Y = 0$): tương ứng với giá trị N đủ lớn;
- Định luật Andrade cho biến dạng chảy dẻo giai đoạn thứ nhất: tích phân phương trình $\dot{\sigma} = K(\varepsilon^p)^M (\dot{\varepsilon}^p)^N$ với ứng suất không đổi và điều kiện ban đầu $\varepsilon^p(0) = 0$, ta nhận được :

$$\varepsilon^p = \left[q \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N \right]^{1/q} t^{1/q} = A t^{1/q},$$

với $q = \frac{N+M}{M}$.

- Định luật Norton cho biến dạng chảy dẻo giai đoạn hai không thể nhận được một cách trực tiếp, nhưng ta có thể tìm thấy một cách gián tiếp như một trường hợp giới hạn, khi đặt (hình 6.9)

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^{p*} = \text{const} \quad \text{cho} \quad t \geq t_1 \quad \text{hay} \quad \varepsilon^p \geq \varepsilon_1^p,$$

trong đó t_1 phụ thuộc vào ứng suất tác dụng. Ta có thể áp dụng quan hệ lũy thừa giữa t_1 và biến dạng tại thời điểm bắt đầu giai đoạn chảy dẻo thứ hai, ε_1^p :

$$\varepsilon_1^p = A^* t_1^{-\alpha}$$

Kết hợp các quan hệ nêu trên cho phép xác định $\dot{\varepsilon}^{p*} = \dot{\varepsilon}^p(\varepsilon_1^p)$, với quan hệ Norton, ta tìm được α và A^* :

$$\alpha = -\frac{1 - \frac{N^*}{N}}{\frac{N^*}{N} \frac{N+M}{NM} - 1}, \quad A^* = \left[\left(\frac{N+M}{NM} \right)^{1-\frac{N^*}{N}} \left(\frac{K}{\lambda^*} \right)^{N^*} \right]^{\frac{1}{N^* \frac{N+M}{NM}}}$$

Biến dạng tại thời điểm bắt đầu giai đoạn chảy dẻo thứ hai càng nhỏ khi ứng suất tác dụng càng nhỏ, điều đó dẫn đến lũy thừa Norton thoả mãn:

$$\frac{NM}{N+M} < N^* < N.$$

6.2.5. Ảnh hưởng của nhiệt độ

Đối với kim loại và hợp kim, các cơ chế gây nên biến dạng dẻo nhớt xảy ra trong các hạt và trên ranh giới giữa chúng. Các cơ chế này chịu ảnh hưởng rõ rệt của nhiệt độ.

Để tính tới ảnh hưởng của nhiệt độ, một trong phương pháp thường được sử dụng là coi biến dạng chảy dẻo như một quá trình nhiệt hoạt. Tốc độ chảy dẻo được giả thiết tỷ lệ thuận với số lượng nguồn kích hoạt, xác định theo định luật xác suất

Maxwell. Nếu h là năng lượng liên kết với một nguồn và ΔH là hoạt năng của mỗi nguồn, ta có:

$$\dot{\epsilon}^p \propto \int_{\Delta H}^{\infty} \frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{h}{kT}\right) dh = \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right).$$

Như vậy, ta có thể định nghĩa một đại lượng gọi là tốc độ nhiệt-đảo tương đương (hay tham số Dorn):

$$\dot{\epsilon}^p \exp\left(\frac{\Delta H}{kT}\right).$$

Với tham số này, mô hình hoá bền-nhớt có tính tới ảnh hưởng của nhiệt độ sẽ có dạng:

$$\sigma = K' (\dot{\epsilon}^p)^{1/M} \left[\dot{\epsilon}^p \exp\left(\frac{\Delta H}{kT}\right) \right]^{1/N}.$$

Điều bất lợi là hoạt năng ΔH lại phụ thuộc vào ứng suất và nhiệt độ. Vì thế, cách viết trên cũng không đem lại sự đơn giản hơn so với việc coi các hệ số K , M , N là các hàm của nhiệt độ, trừ trường hợp nhiệt độ thay đổi trong một khoảng hẹp. Mô hình trên có thể áp dụng cho quá trình biến dạng dẻo nhớt hoá bền ở bất kỳ nhiệt độ nào giữa T_0 và T_1 nếu $\left| \frac{T_1 - T_0}{T_1} \right| \leq 5\%$, với các hệ số K_0 , M_0 , N_0 xác định ở nhiệt độ T_0 và K_1 xác định ở nhiệt độ T_1 :

$$K = \frac{K_0^{T_0/T_1}}{K_1^{1/(T_1-T_0)}}.$$

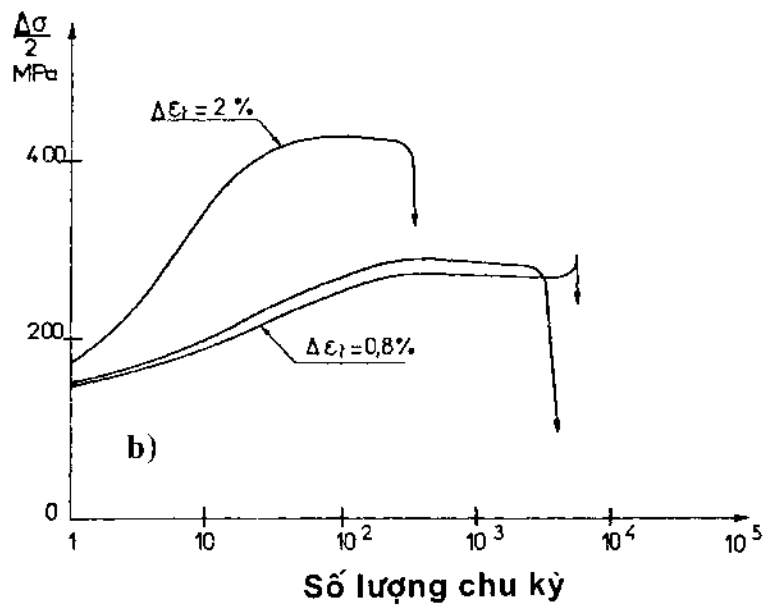
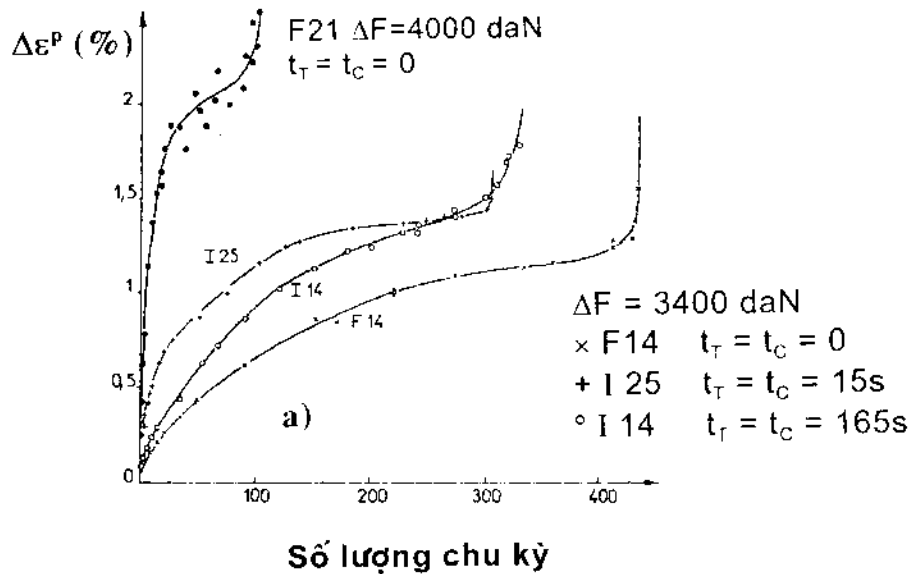
Nếu $\left| \frac{T_1 - T_0}{T_1} \right| > 5\%$, ta cần đưa vào mô hình $\sigma = K(\dot{\epsilon}^p)^{1/M} (\dot{\epsilon}^p)^{1/N}$ các hệ số K ,

M , N dưới dạng hàm của nhiệt độ, xác định bằng thực nghiệm: $K(T)$, $M(T)$, $N(T)$.

6.2.6. Thí nghiệm chu kỳ

Đối với kim loại và hợp kim ở nhiệt độ có biểu hiện rõ rệt của chảy dẻo, kết quả thí nghiệm chu kỳ với biên độ ứng suất hay biên độ biến dạng không chế cũng

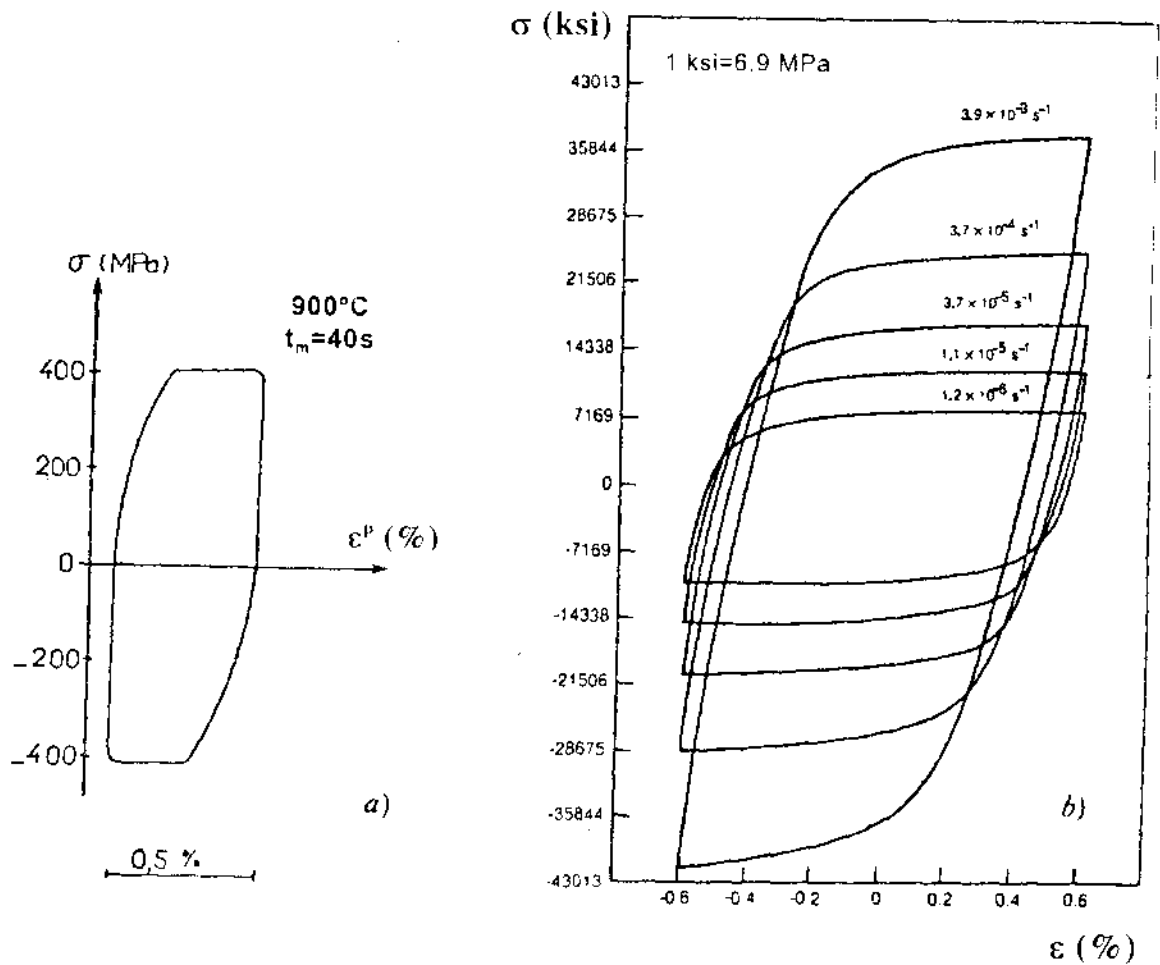
cho thấy rõ các hiện tượng biến cứng hay hoá mềm chu kỳ như trong dẻo tức thời. Hình 6.10-a trình bày ví dụ về sự biến đổi của biến độ biến dạng phụ thuộc vào số lượng chu kỳ với ứng suất không chế (vật liệu biến mềm một cách chu kỳ). Vật liệu biến cứng chu kỳ ở nhiệt độ thường cũng cho hiệu ứng tương tự ở nhiệt độ cao (hình 6.10-b, chu kỳ với biến dạng không chế).



Hình 6.10. Biến mềm chu kỳ với ứng suất không chế (a) (Hợp kim INCO 718 ở nhiệt độ 550°C) và biến cứng chu kỳ với biến dạng không chế (b) (Thép inox 316 ở nhiệt độ 550°C).

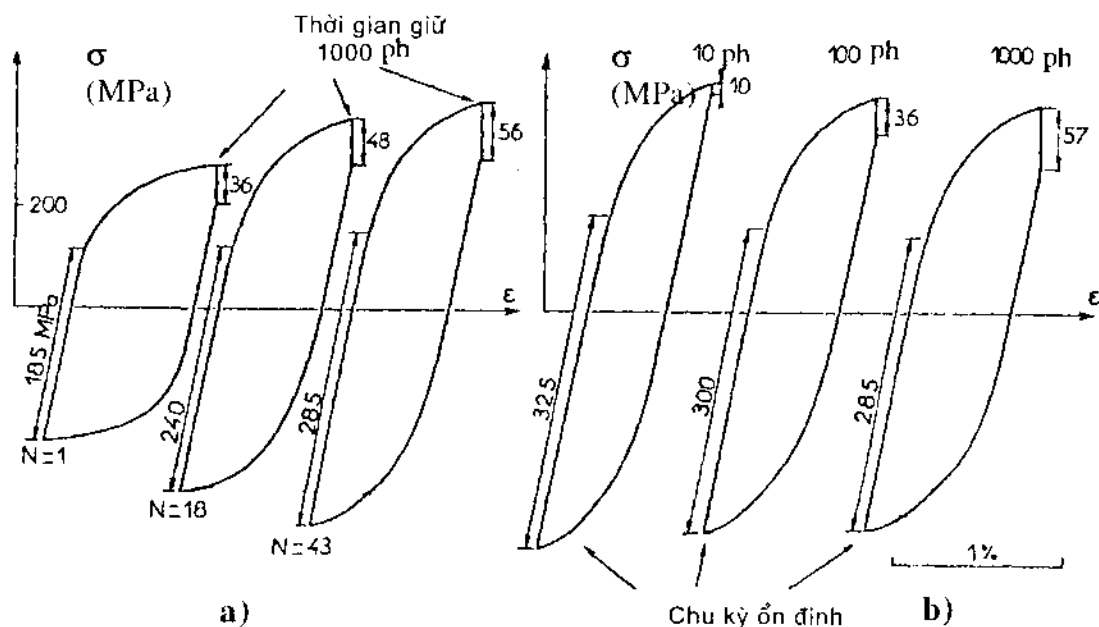
Hai dạng ảnh hưởng của thời gian có thể được làm rõ bằng các thí nghiệm chu kỳ:

- Ảnh hưởng của độ nhớt có thể thấy rõ qua các thí nghiệm chảy dẻo chu kỳ với ứng suất khống chế với thời gian giữ tải khi kéo và nén bằng nhau (hình 6.11-a là ví dụ cho một chu kỳ ổn định), thí nghiệm với biên độ biến dạng kéo không đổi (hình 6.12) và thí nghiệm với tốc độ biến dạng (tần số chu kỳ) khác nhau (hình 6.11-b).



Hình 6.11. Chu kỳ ổn định trong biến dạng chảy dẻo chu kỳ (hợp kim IN 100 ở 800°C) (a) và ảnh hưởng của tốc độ biến dạng đến chu kỳ ổn định (hợp kim Hastelloys-X ở 871°C) (b).

Đường cong chu kỳ (biên độ ứng suất - biên độ biến dạng) không còn là duy nhất như trong trường hợp dẻo tức thời, mà phụ thuộc vào thời gian giữ (ở biến dạng không đổi) và tần số chu kỳ (tốc độ biến dạng) (hình 6.13).



Hình 6.12. Thí nghiệm nới chu kỳ (thép inox 316 ở nhiệt độ 600°C):

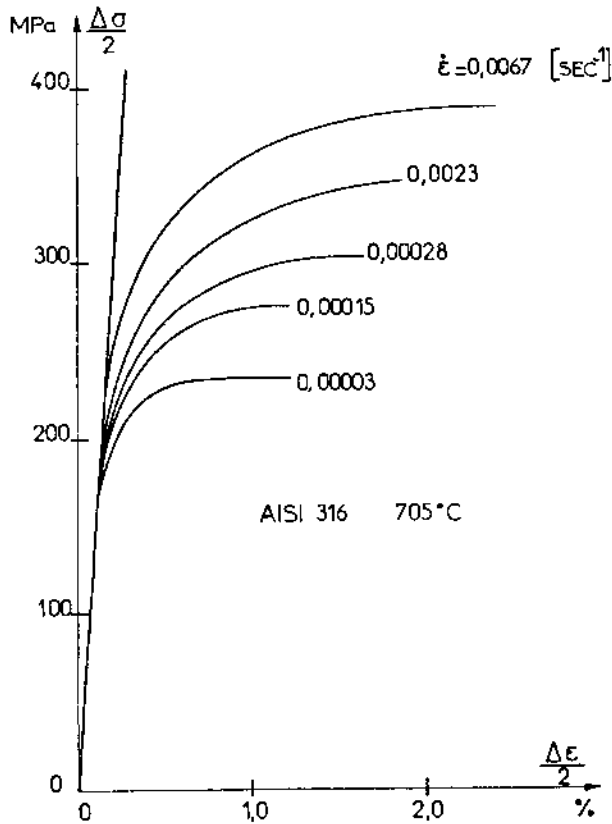
- a) biến đổi giữa chu kỳ đầu và chu kỳ ổn định ;
b) ảnh hưởng của thời gian giữ đến chu kỳ ổn định.

Đối với vật liệu biến cứng chu kỳ mạnh, ta có thể quan sát thấy sự gia tăng của ứng suất cực đại tương ứng với sự gia tăng của miền đàn hồi biểu kiến và sự gia tăng của ứng suất nối trong thời gian giữ (hình 6.12-a). Đối với vật liệu biến cứng chu kỳ mạnh, ta có thể quan sát thấy sự gia tăng của ứng suất cực đại tương ứng với sự gia tăng của miền đàn hồi biểu kiến và sự gia tăng của ứng suất nối trong thời gian giữ (hình 6.12-a).

- Ảnh hưởng của sự hồi phục và hồi biến dạng có thể quan sát một cách gián tiếp, hoặc bằng cách dỡ tải trong thí nghiệm đảo, hoặc ngay trong các thí nghiệm chu kỳ. Trong trường hợp đầu, sau khi dỡ tải hoàn toàn một thời gian đủ dài, ta có thể đo được phần hồi lại, ε_r , của biến dạng dẻo nhất (hình 6.14-a). Khi dỡ một phần tải, $\delta\sigma$

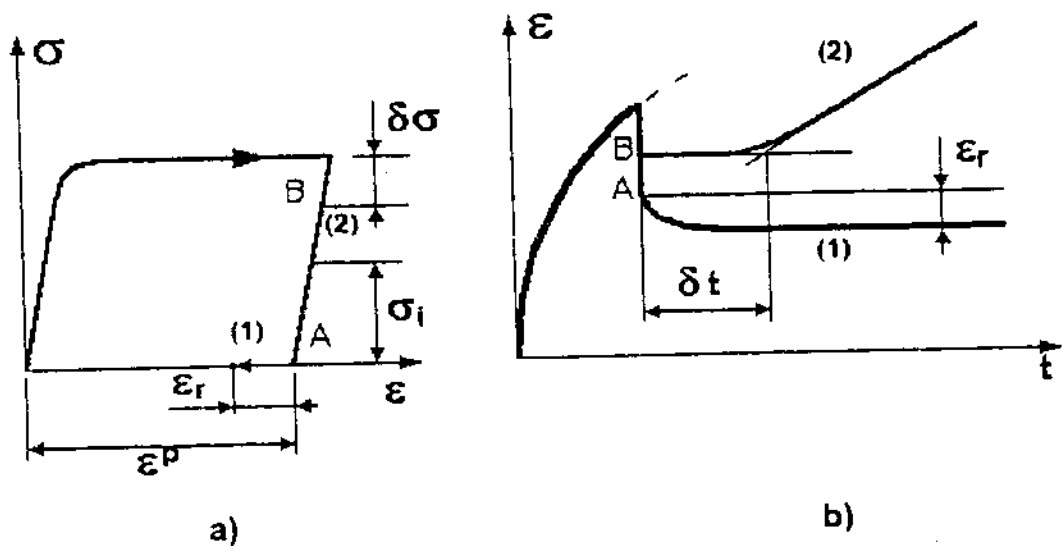
, ta có thể quan sát thấy hiện tượng như mô tả một cách tượng trưng trên hình 6.14-b: tốc độ biến dạng bằng 0 trong khoảng thời gian dt nào đó, sau đó tăng dần đến giá trị ổn định (dưới tác dụng của ứng suất $\sigma - \delta\sigma$). Điều này cho phép chứng minh sự tồn tại của ứng suất nội σ_i , sao cho tốc độ chảy dẻo tỷ lệ thuận với $\sigma - \sigma_i$:

$$\dot{\epsilon}^p = f(\sigma, \dots) (\sigma - \sigma_i),$$



Hình 6.13. Ảnh hưởng của tốc độ đến đường cong chu kỳ (thép inox 316 ở nhiệt độ 705°C).

và định lượng ảnh hưởng của sự phục hồi ứng suất nội, tương ứng với sự phục hồi chậm của cấu trúc tinh thể. Trong trường hợp thí nghiệm chu kỳ với biến dạng không chế, hiệu ứng phục hồi sẽ dẫn đến sự giảm biên độ ứng suất ở chu kỳ ổn định (hình 6.12-b). Hiệu ứng phục hồi (càng lớn khi thời gian thí nghiệm càng dài) bù lại một phần hiệu ứng hoá bền chu kỳ do biến dạng.



Hình 6.14. Hiệu ứng hồi biến dạng sau khi dỡ tải hoàn toàn (a) và sự chảy dẻo của vật liệu sau khi dỡ tải một phần (b).

6.3. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP TỔNG QUÁT MÔ HÌNH THUỘC TÍNH

6.3.1. Phân chia biến dạng

Ta chấp nhận giả thiết phân chia biến dạng tổng thành hai thành phần: biến dạng đàn hồi $\underline{\epsilon}^e$ và biến dạng phi đàn hồi $\underline{\epsilon}^{ae}$. Trong biến dạng nhỏ, ta có:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^{ae}.$$

Biến dạng phi đàn hồi (không phục hồi tức thời) tương ứng với các hiện tượng vật lý sau:

- Biến dạng dẻo tức thời (không phụ thuộc thời gian);
- Biến dạng dẻo nhớt (biến dạng dẻo);
- Biến dạng đàn nhớt (đàn hồi chậm).

Biến dạng phi đàn hồi dạng thứ nhất (đề cập ở chương 4) được giả thiết không tồn tại trong phương pháp thiết lập sẽ đề cập trong phần này. Phương pháp tổng quát thiết lập mô hình thuộc tính trong trường hợp kết hợp giữa dẻo tức thời và dẻo nhớt (dẻo hỗn hợp) sẽ được trình bày khái quát trong 6.4.4.4, mặc dù đối với phần lớn vật

liệu và trong một miền nhiệt độ tương đối rộng, chỉ riêng lý thuyết dẻo nhớt cũng đủ để mô tả các hiện tượng quan sát thấy qua các thực nghiệm.

Đối với kim loại và hợp kim, biến dạng đàn nhớt thường không tồn tại. Do đó, ở đây ta cũng sẽ không đề cập đến loại biến dạng dạng này. Tuy nhiên, hiệu ứng phục hồi một phần biến dạng dẻo (minh chứng cho sự tồn tại của tính đàn nhớt) có thể được mô tả thông qua các biến nội thích hợp.

Từ các nhận xét trên, giả thiết phân chia biến dạng được viết lại như sau:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p ,$$

trong đó, ε^p là biến dạng dẻo nhớt.

6.3.2. Chọn các biến nhiệt động học

Các biến nhiệt động học hay các biến độc lập gồm các biến quan sát được (ε , T) và các biến nội mô tả trạng thái hiện thời của vật liệu (ε^p , V_k). Lý thuyết nhiệt động học đã chứng minh năng lượng riêng tự do phụ thuộc vào biến dạng đàn hồi, nhiệt độ và các biến nội V_k :

$$\psi = \psi(\underline{\varepsilon}^e, T, V_k) .$$

Ứng suất, $\underline{\sigma}$, và entropy, s , là các biến nhiệt động học liên kết tương ứng với $\underline{\varepsilon}^e$ và T :

$$\underline{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\varepsilon}^e} , \quad s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} .$$

Tương tự đối với trường hợp dẻo không phụ thuộc thời gian, ta cũng dùng một biến nội vô hướng r để mô tả hiện tượng hoá bền của vật liệu trong quá trình biến dạng. Trong trường không đồng thời xảy ra quá trình hồi phục, ta có thể sử dụng biến dạng dẻo tích lũy $p = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}(\tau) : \dot{\underline{\varepsilon}}(\tau) \right)^{\frac{1}{2}} d\tau$. Ta cũng có thể sử dụng các biến tenxơ hoá bền (hay các biến động học) như biến $\underline{\alpha}$ đã trình bày ở chương trước.

Xét về mặt vật lý, các biến hoá bền nêu trên liên quan chặt chẽ, một mặt, với mật độ lệch (mang tính đẳng hướng) và, mặt khác, với sự không tương thích của biến dạng dẻo nhớt trong đa tinh thể. Biến hoá bền đẳng hướng r thường gia tăng trong quá

trình biến dạng, trừ trường hợp xảy ra quá trình hồi phục đồng thời (trong trường hợp này biến r không còn chính xác là biến dạng dẻo tích lũy p). Còn biến $\underline{\alpha}$, trong trường hợp chất tải chu kỳ, không biến đổi một cách đơn điệu.

Ngoài các biến hoá bền nêu trên, còn có thể có thêm các biến nội khác, m_k , cho phép mô tả trạng thái hiện thời của cấu trúc vật liệu. Các biến này đưa vào sự khác nhau giữa trạng thái cấu trúc bình thường của vật liệu và trạng thái cấu trúc không ổn định hiện thời. Trong trường hợp vật liệu ổn định về mặt hoá lý, các biến này đương nhiên sẽ không tham gia.

Với giả thiết phân chia giữa thuộc tính đàn hồi và hoá bền, năng lượng riêng tự do có thể phân tách thành hai thành phần như sau:

$$\psi = \psi_e(\underline{\varepsilon}^e, T) + \psi_p(\underline{\alpha}, r, m_k, T).$$

Các biến nhiệt động học liên kết với các biến hoá bền

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \underline{X} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}}$$

biểu diễn kích thước và vị trí tâm của miền đàn hồi (hay của các mặt đồng thế năng tiêu hao) hiện thời.

Ngoài hai biến nhiệt động học nêu trên, có thể ta còn có:

$$M_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial m_k}.$$

Tương tự đối với dẻo không phụ thuộc thời gian, với giả thiết phân chia giữa tiêu hao nhiệt năng và tiêu hao cơ năng, nguyên lý nhiệt động học thứ hai trở thành:

$$\Phi_I = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{X} : \dot{\underline{\alpha}} - R\dot{r} - M_k \dot{m}_k \geq 0.$$

6.3.3. Thế năng tiêu hao

Trong biến dạng dẻo nhớt, khái niệm về mật chất tải - dỡ tải không còn cần thiết như trong dẻo tức thời. Mật chất tải sẽ được thay thế bởi một tập hợp các mặt đồng thế năng biểu diễn trong không gian ứng suất. Tại mọi điểm trên mỗi mặt, modun tốc độ biến dạng đều như nhau (tiêu hao cơ năng như nhau). Mặt thế năng tiêu

hao bằng 0 là mật giới hạn miền đàn hồi. Mật thế năng tiêu hao bằng vô cùng được qui về tốc độ biến dạng vô cùng (hình 5.11). Biến dạng dẻo tức thời không đáng kể.

Áp dụng khái niệm mở rộng đối với tất cả các biến tham gia hàm của các mật đồng thế năng, ta có thể định nghĩa thế năng tiêu hao dưới dạng hàm đối như sau:

$$\varphi^* = \varphi^*(\underline{\sigma}, \underline{X}, R, M_k : T, \underline{\alpha}, r, m_k) \text{ ,}$$

trong đó, các biến trạng thái (biến độc lập): $T, \underline{\alpha}, r, m_k$, chỉ giữ vai trò các tham số. Từ đó ta có thể suy ra các định luật pháp tuyến của vật liệu tiêu chuẩn mở rộng như trình bày trong chương 2:

$$\underline{\varepsilon}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\sigma}} \text{ ,}$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{X}} \text{ ,}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial R} \text{ ,}$$

$$m_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial M_k} \text{ .}$$

Tiêu hao cơ năng được viết như sau:

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\sigma}} + \underline{X} : \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{X}} + R \frac{\partial \varphi^*}{\partial R} + M_k \frac{\partial \varphi^*}{\partial M_k} \text{ .}$$

Ta giả thiết thế năng tiêu hao φ^* thỏa mãn các điều kiện sau:

- Là hàm lồi đối với mỗi biến phụ thuộc $\underline{\sigma}, \underline{X}, R, M_k$;
- Luôn dương và chứa gốc toạ độ (sẽ bằng 0 khi $\sigma_{ij} = X_{ij} = R = M_k = 0$):

$$\varphi^* = \varphi^*(0,0,0,0; T, \underline{\alpha}, r, m_k) = 0 \quad \forall T, r, m_k, \underline{\alpha} \text{ .}$$

Với hai điều kiện trên, ta sẽ có $\Phi_1 \geq \varphi^* \geq 0$, điều này cho phép ta kiểm tra điều kiện nhiệt động học thứ hai.

Trong thực tế, biến dạng dẻo nhớt có thể kèm theo quá trình hồi phục, do đó thế năng tiêu hao có thể tách thành hai phần :

$$\phi^* = \Omega_p + \Omega_r,$$

$$\Omega_p = \Omega_p [J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k, \underline{X}, R, M_k; T, \underline{\alpha}, r, m_k],$$

$$\Omega_r = \Omega_r (\underline{X}, R, M_k; T, \underline{\alpha}, r, m_k),$$

Ω_p cho biểu thức của các mật đồng thế năng trong không gian ứng suất và có thể phụ thuộc vào $\underline{X}$, R và M_k . Ω_r là thế năng hồi phục, có thể tồn tại ngay cả khi $\Omega_p = 0$. $J(\cdot)$ biểu thị chuẩn của không gian ứng suất, $J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k = 0$ tương ứng biểu thức của miền đàn hồi hiện thời. Ω_p chỉ cần là hàm lồi đối với $J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k$, X_{ij} , R , M_k , còn Ω chỉ cần là hàm lồi đối với X_{ij} , R , M_k .

Với sự phân chia nêu trên, áp dụng định luật chày dẻo pháp tuyến, ta có:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega_p}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \underline{\sigma}},$$

$$\dot{r} = - \left(\frac{\partial \Omega_p}{\partial R} + \frac{\partial \Omega_r}{\partial R} \right) = - \frac{\partial \Omega_p}{\partial J} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}.$$

Trường hợp vật liệu Von-Mises, khi biến dạng hướng R chỉ tham gia trong biểu thức:

$$J - R - k = J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k = \left[\frac{3}{2} (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') \right]^{\frac{1}{2}} - R - k,$$

với $\underline{\sigma}'$, $\underline{X}'$ - tương ứng thành phần lệch của các tenxơ $\underline{\sigma}$ và $\underline{X}$, ta có:

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega_p}{\partial J} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J},$$

$$\dot{r} = \dot{p} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}.$$

với p chính là biến dạng dẻo tích lũy, vì:

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \right)^{\frac{1}{2}},$$

và biến nội r bằng p khi bỏ qua hiệu ứng phục hồi ($\Omega_r = 0$).

6.4. CÁC MÔ HÌNH THUỘC TÍNH RIÊNG

6.4.1. Mô hình dẻo nhớt lý tưởng

6.4.1.1. Phương pháp thiết lập ba chiều

a) Dạng tổng quát

Mô hình thuộc tính dẻo nhớt lý tưởng trình bày dưới đây là sự thể hiện dưới dạng ba chiều của quan hệ giữa tốc độ biến dạng và ứng suất, áp dụng cho vật liệu đẳng hướng, không nén được.

Dẻo nhớt lý tưởng tương ứng trường hợp vật liệu không hoá bền trong quá trình biến dạng (không có giai đoạn chảy dẻo thứ nhất); không có biến nội nào tham gia mô hình. Theo phương pháp thiết lập tổng quát trình bày ở phần trước, hàm thế năng tiêu hao

$$\phi^* = \Omega = \Omega(\underline{\sigma}; T)$$

biểu thị một tập hợp các mật đồng thể năng tiêu hao trong không gian ứng suất.

Giả thiết vật liệu đẳng hướng và không nén được ta có thể viết:

$$\Omega = \Omega[J_2(\underline{\sigma}), J_3(\underline{\sigma}); T],$$

trong đó, J_2 và J_3 tương ứng bất biến bậc hai và bậc ba của tenxơ ứng suất lệch. Thực nghiệm cho thấy ảnh hưởng của J_3 không đáng kể và, để đơn giản việc thiết lập mô hình, có thể bỏ qua. Như vậy, ta đưa về trường hợp vật liệu dẻo nhớt tương tự vật liệu dẻo tuân theo điều kiện Von-Mises (các mật đồng thể năng tiêu hao là các mật trụ có đường tâm là phân giác trong không gian ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$):

$$\Omega = \Omega(\sigma_{eq}, T) \quad \text{với} \quad \sigma_{eq} = J_2(\underline{\sigma}) = \left(\frac{3}{2} \underline{\sigma}':\underline{\sigma}' \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}) \underline{1}.$$

Định luật thuộc tính dẻo nhớt sẽ hoàn toàn xác định khi biết hàm thế năng tiêu hao Ω , bởi lẽ theo định luật chảy dẻo pháp tuyến ta có:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\underline{\sigma}'}{\sigma_{eq}}.$$

Nếu ta muốn tính tới miền đàn hồi thuận tuý, thế năng tiêu hao sẽ có dạng:

$$\Omega = \Omega^* \left(1 - \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right) = k(T)^{-1}$$

trong đó, Ω^* bằng 0 đồng thời với $\sigma_{eq} = k(T)^{-1}$ với định nghĩa $\langle x \rangle = x$ nếu $x > 0$ và $\langle x \rangle = 0$ nếu $x \leq 0$. Giới hạn đàn hồi k phụ thuộc vào nhiệt độ. Hàm thế năng tiêu hao hoàn toàn xác định khi biết phụ thuộc của σ_{eq} vào Ω và ngược lại (xem mục 6.4.1.2).

b) Mô hình Odqvist

Mô hình Odqvist là sự mở rộng của mô hình Norton với giả thiết biến dạng hồi không đáng kể (tính về gốc toạ độ):

$$\Omega = \frac{\dot{\epsilon}^p}{N_1 + 1} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\dot{\epsilon}^p} \right)^{N_1 + 1}$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{eq}}{Z_1} \right)^{1/N_1} \frac{\sigma}{\sigma_{eq}}$$

Mô hình dẻo nhớt lý tưởng Odqvist được sử dụng rất phổ biến trong các tính toán số cũng như trong các tính toán giải tích.

c) Mô hình với miền đàn hồi

Hàm thế năng tiêu hao trong trường hợp này có thể viết dưới dạng sau:

$$\Omega = \frac{\lambda_N}{N_1 + 1} \left(\frac{\sigma_{eq}}{Z_N} \right)^{N_1 + 1} k(T)^{N_1 + 1}$$

trong đó, N_1 và λ_N là các hệ số phụ thuộc vào vật liệu và nhiệt độ. Khi đó, tốc độ biến dạng dẻo nhớt sẽ có dạng:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{eq} - k(T)^{N_1}}{\lambda_N} \right)^{1/N_1} \frac{\sigma}{\sigma_{eq}}$$

Mô hình trên chỉ phù hợp với trường hợp khi lũy thừa (biểu kiến) Norton có xu hướng tăng dần đối với các giá trị ứng suất nhỏ.

d) Mô hình với thành phần exponent

Mô hình này cho phép mở rộng miền ứng dụng của mô hình dẻo nhất lý tưởng khi lũy thừa Norton giảm dần đối với các giá trị ứng suất nhỏ (hình 6.5). Hàm thế năng tiêu hao có dạng:

$$\Omega = \frac{\exp(\alpha_o \sigma_{eq}^{N_o+1})}{\alpha_o (N_o + 1) \lambda_o^{N_o}}.$$

Áp dụng định luật chảy dẻo pháp tuyến, ta có:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\lambda_o} \right)^{N_o} \exp(\alpha_o \sigma_{eq}^{N_o+1}) \frac{\sigma}{\sigma_{eq}},$$

trong đó, vật liệu được đặc trưng bởi ba hệ số N_o , λ_o và α_o .

6.4.1.2. Nhận dạng mô hình bằng thí nghiệm kéo đơn

Đối với trạng thái ứng suất kéo đơn ta có đương nhiên $\sigma_{eq} = \sigma$ và $\dot{\epsilon}_{II}^p = \dot{\epsilon}^p$. Ba mô hình trình bày ở trên, trong trường hợp này, có dạng tương ứng:

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\sigma}{\lambda^*} \right)^{N^*},$$

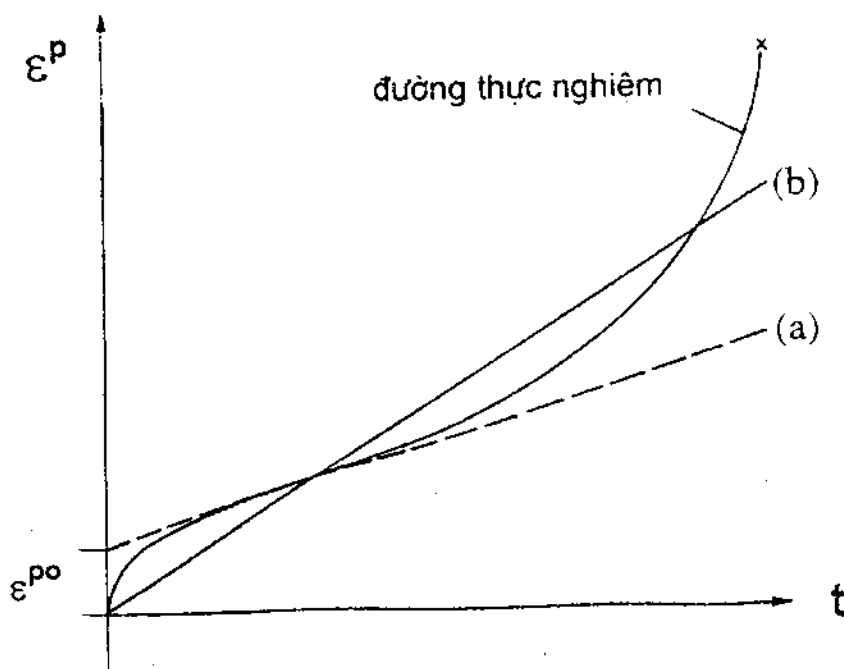
$$\dot{\epsilon}^p = \left\langle \frac{\sigma - k}{\lambda_Y} \right\rangle^{N_Y},$$

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\sigma}{\lambda_o} \right)^{N_o} \exp(\alpha_o \sigma^{N_o+1}).$$

Cả ba trường hợp trên đều có thể nhận dạng từ các kết quả thí nghiệm chảy dẻo giai đoạn hai. Tốc độ chảy dẻo có thể xác định theo hai phương pháp sau (hình 6.15):

- Tốc độ chảy dẻo giai đoạn hai được xác định bởi giá trị nhỏ nhất của tốc độ trong cả quá trình biến dạng (góc của tiếp tuyến với đường cong chảy dẻo tại điểm uốn). Trong trường hợp này, biến dạng chảy dẻo giai đoạn thứ nhất, ϵ^{pn} , được bỏ qua.

- Tốc độ chảy dẻo giai đoạn hai được xác định bởi góc nghiêng của đường thẳng đi qua gốc tọa độ ($\epsilon^p = 0$) và điểm uốn của đường cong chảy dẻo. Như vậy, phương pháp này có tính đến một cách "tho" ảnh hưởng của chảy dẻo giai đoạn thứ nhất.

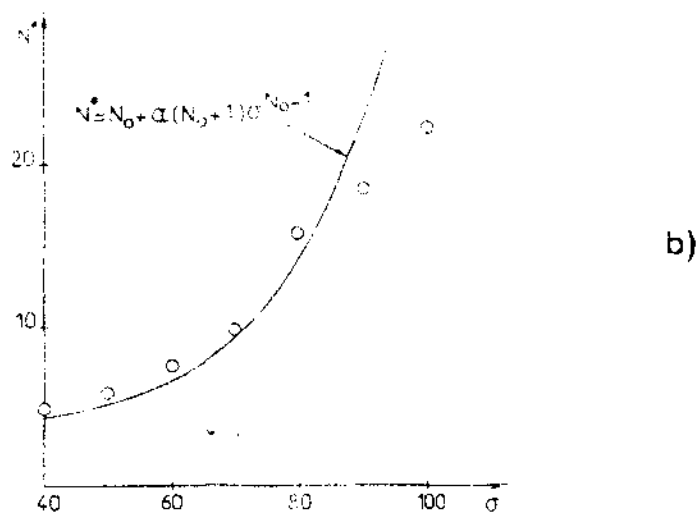
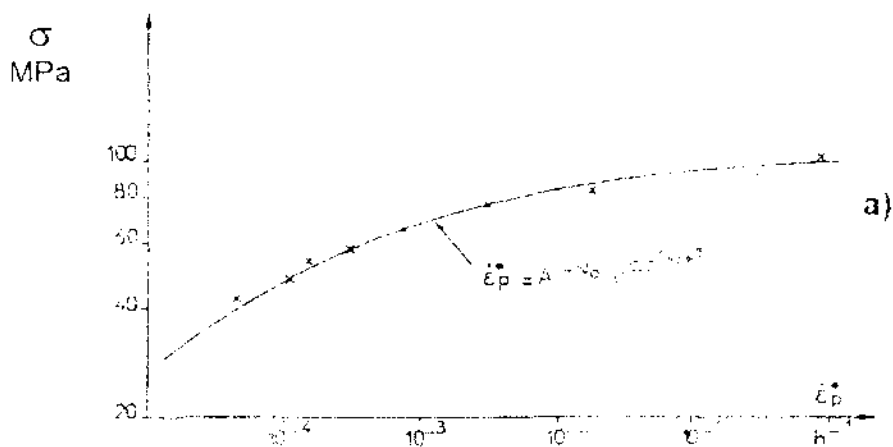


Hình 6.15. Hai cách xác định tốc độ biến dạng chảy dẻo giai đoạn hai.

Đối với mô hình thứ nhất, hai hệ số N^* và λ^* được xác định từ đồ thị ($\ln \sigma$, $\ln \epsilon^p$) (xem ví dụ hình 6.4). Theo hai cách xác định tốc độ nêu trên, các giá trị của N^* tìm được hầu như không khác nhau; chỉ khác nhau các giá trị của hệ số λ^* .

Mô hình thứ ba có thể nhận dạng hoặc bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất phi tuyến trên cơ sở các giá trị σ và ϵ^p đo được, hoặc bằng cách xác định sự biến đổi của lũy thừa Norton phụ thuộc vào ứng suất. Theo phương pháp này, giá trị của lũy thừa Norton được xác định bởi tiếp tuyến với đường cong trình bày trên hình 6.16-a. Quan hệ giữa lũy thừa Norton và ứng suất được thể hiện trên hình 6.16-b. Từ mô hình thứ ba, ta xác định lũy thừa tương đương:

$$N^*(\sigma) = \frac{d(\ln \epsilon^p)}{d(\ln \sigma)} = N_0 + \alpha_0 (N_0 + 1) \sigma^{N_0 + 1}.$$



Hình 6.16. Nhận dạng mô hình dẻo nhớt lý tưởng với thành phần exponent (hợp kim Mg ở nhiệt độ 260°C).

Giá trị của N_0 và α , có thể xác định dễ dàng bằng phương pháp gần đúng kế tiếp. Ví dụ, đường cong hình 6.16-b nhận được với $N_0 = 4$ và $\alpha = 65$. Hệ số λ_n xác định sau khi biết N_0 và α_n .

6.4.2. Mô hình dẻo nhớt hoá bền đẳng hướng

6.4.2.1. Phương pháp thiết lập ba chiều

a) Dạng tổng quát

Trong trường hợp dẻo nhớt hoá bền đẳng hướng, chỉ có biến vô hướng r là biến nội duy nhất. Biến r cho biết trạng thái hoá bền hiện thời của vật liệu và bằng chính biến dạng dẻo tích lũy khi quá trình phục hồi không xảy ra đồng thời. Năng lượng riêng tự do phụ thuộc vào ϵ^p , T và r . Lực nhiệt động học liên kết với r được xác định bởi:

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Thế năng tiêu hao phụ thuộc vào tenxơ ứng suất, ứng suất nội R và có thể phụ thuộc vào biến trạng thái r dưới dạng tham số:

$$\phi = \Omega = \Omega(\sigma, R; T, r).$$

Đối với vật liệu kim loại, giả thiết không nên được và đẳng hướng cho phép đưa vào biến ứng suất thông qua các bất biến J_2 và J_3 của tenxơ ứng suất lệch:

$$\Omega = \Omega \left[J_2(\sigma), J_3(\sigma), R; T, r \right].$$

Trong trường hợp vật liệu Von-Mises, ảnh hưởng của bất biến bậc ba thường được bỏ qua, ta có:

$$\Omega = \Omega(\sigma_{eq}, R; T, r),$$

với biến R biểu thị kích thước của miền đàn hồi hiện thời.

Ta có thể viết hàm thế năng tiêu hao dưới dạng hàm của $\sigma_{eq} - R = k$, trong đó k là giới hạn đàn hồi ban đầu. Ngoài ra, ta cũng có thể tách thế năng tiêu hao thành hai thành phần: thế năng chảy dẻo (có hoá bền), Ω_p , và thế năng phục hồi, Ω_r :

$$\Omega = \Omega_p(\sigma_{eq} - R = k; T, r) + \Omega_r(R; T).$$

Hàm Ω_p bằng 0 cùng với $\sigma_{eq} - R = k$ và hàm Ω_r bằng 0 cùng với R . Áp dụng định luật chảy dẻo pháp tuyến mở rộng, ta có các phương trình sau:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2} p \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Omega}{\partial R} = -\left(\frac{\partial \Omega_p}{\partial R} + \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}\right) = \frac{\partial \Omega_p}{\partial \sigma_{eq}} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R} = \dot{p} - \frac{\partial \Omega_r}{\partial R},$$

trong đó, $\dot{p}$ là bất biến của tenxơ tốc độ biến dạng:

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ta thấy rõ hiệu ứng hoá bền và (có thể) hiệu ứng phục hồi trong phương trình biến đổi của biến r .

Mô hình thuộc tính dẻo nhớt với hoá bền và phục hồi sẽ hoàn toàn xác định khi biết 3 thế năng Ψ , Ω_p , Ω_r . Trong các phần dưới đây, ta sẽ xét hai phương pháp mang tính truyền thống, cho phép mô tả hiện tượng hoá bền, bỏ qua ảnh hưởng của phục hồi ($\Omega_r=0$).

b) Mô hình dẻo nhớt hoá bền dạng tổng

Thế năng tiêu hao Ω_p , không chứa biến r , thường có dạng hàm lũy thừa:

$$\Omega = \Omega_p = \frac{K_a}{N_a + 1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a + 1}.$$

Áp dụng định luật chảy dẻo pháp tuyến ta có:

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\underline{\sigma}}'}{\sigma_{eq}}$$

$$\dot{p} = \dot{r} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k}{K_a} \right\rangle^{N_a}.$$

Quan hệ giữa R và p được chọn sao cho đường cong lý thuyết tương hợp tốt nhất với đường cong thực nghiệm (đường cong hoá bền và chảy dẻo giai đoạn thứ nhất). Một trong những dạng đơn giản thường được sử dụng bao gồm một thành phần tuyến tính và một thành phần exponent:

$$R = Q_1 p + Q_2 [1 - \exp(-bp)],$$

hay dưới dạng vi phân:

$$\dot{R} = b(Q_1 p + Q_2 - R)\dot{p} + Q_1 \dot{p}.$$

Mối quan hệ giữa R và p nêu trên tương đương với việc chọn hàm năng lượng riêng tự do, liên quan đến quá trình hoá bền, dạng:

$$\rho\Psi_p = \frac{1}{2}Q_1p^2 + Q_2\left[p + \frac{1}{b}\exp(-bp) - \frac{1}{b}\right].$$

Các hệ số vật liệu Q_1 , Q_2 , N_s , K_s , k , b có thể phụ thuộc vào nhiệt độ. Mô hình dạng tổng nêu trên có thể áp dụng trực tiếp cho các vật liệu tiêu chuẩn. Tuy nhiên, do nhận dạng phức tạp nên ít được sử dụng.

c) Mô hình dẻo nhớt hoá bền dạng tích

Hàm thế năng tiêu hao và năng lượng riêng tự do, với biến r tham gia dưới dạng tham số ($r = p$), có dạng sau:

$$\Omega = \Omega_p(\sigma_{eq} - R - k + h'(p)) \cdot \zeta(p),$$

$$\rho\psi = \rho\psi_e + h(p).$$

Hàm Ω_p và ζ thường được chọn có dạng hàm lũy thừa:

$$\Omega_p = \frac{K}{N+1} \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k + h'(p)}{K} \right\rangle^{N+1} p^\gamma,$$

trong đó, các hệ số N , K , k , γ cũng như hàm $h'(p)$ có thể phụ thuộc vào nhiệt độ.

Với các biểu thức nêu trên, ta có:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma}'}{\sigma_{eq}},$$

$$\dot{p} = \dot{r} = - \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R - k + h'(p)}{K} \right\rangle^N p^\gamma.$$

Thay R bằng biểu thức $R = p \frac{\partial \Psi}{\partial p} = h'(p)$, ta nhận được:

$$\dot{p} = \dot{r} = - \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \left\langle \frac{\sigma_{eq} - k}{K} \right\rangle^N p^\gamma.$$

Sự hoá bền do p sẽ làm giảm tốc độ biến dạng, do đó lũy thừa γ có giá trị âm. Nếu đặt $\gamma = -N/M$ và cho $k = 0$, ta nhận được biểu thức ba chiều của mô hình dẻo nhớt hoá bền đã xét trong mục 6.2.4 với dấu hồi tuyến tính:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} = \frac{3}{2} \left[\frac{\sigma_{eq}}{Kp^{1/M}} \right]^N \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}}.$$

Mô hình trên có thể viết dè dạng dưới dạng tích phân để nhận được quan hệ giữa biến dạng và ứng suất dưới dạng hàm của thời gian:

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \right)^{1/2} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{Kp^{1/M}} \right)^N \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma' : \sigma'}{\sigma_{eq}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\sigma_{eq}}{Kp^{1/M}} \right)^N,$$

trong đó, biểu thức $p(t)$ (với điều kiện ban đầu: $t = 0 \rightarrow p = 0$) có dạng:

$$p(t) = \left[\frac{N+M}{M} \int_0^t \left(\frac{\sigma_{eq}(t)}{K} \right)^N dt \right]^{M/N}$$

và

$$\dot{\epsilon}^p(t) = \int_0^t \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{eq}(t)}{Kp(t)^{1/M}} \right)^N \frac{\sigma'(t)}{\sigma_{eq}(t)} dt.$$

d) Tiêu hao cơ năng

Tiêu hao cơ năng xác định bởi:

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\epsilon}^p - R \dot{p}.$$

Trong trường hợp tổng quát, ta cần kiểm tra điều kiện Φ_1 luôn dương:

$$\Phi_1 = \frac{2}{3} \dot{p} \frac{\sigma' : \sigma'}{\sigma_{eq}} - R \dot{p} + R \frac{\partial \Omega_r}{\partial R} = \dot{p} (\sigma_{eq} - R) + R \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}$$

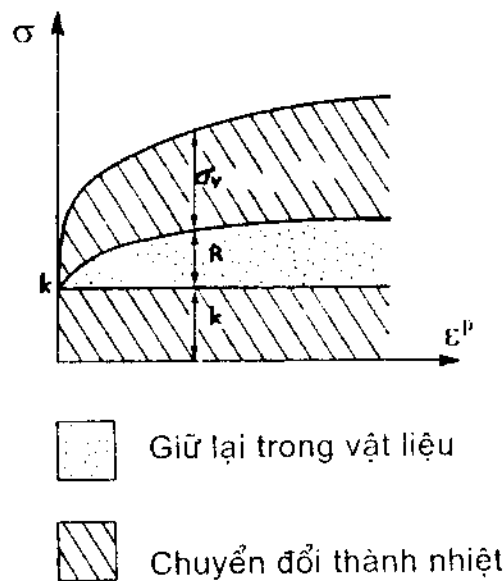
$$\Phi_1 = \dot{p} (\sigma_{eq} - R - k) + R \frac{\partial \Omega_r}{\partial R} + k \dot{p} \geq 0.$$

Thực vậy, nếu $\sigma_{eq} - R - k < 0$, ta có $\dot{p} = 0$ và nếu Ω là một hàm lồi sao cho

$\Omega_r(0) = 0$ thì tích $R \frac{\partial \Omega_r}{\partial R}$ phải luôn dương.

Với mô hình dẻo nhớt hoá bền tổng không có ảnh hưởng của phục hồi ($\Omega_r = 0$), các thành phần của năng lượng tiêu hao đối với trường hợp biến dạng kéo, được trình bày trên hình 6.17. Năng lượng tiêu hao cho biến dạng, $\sigma : \underline{\dot{\epsilon}}^p$, có thể chia thành hai thành phần sau:

- Phần chuyển đổi thành nhiệt năng bao gồm tiêu hao cơ năng ($\Phi_1 = (\sigma_{\text{th}} - R)\dot{p}$, tương ứng trên hao nhớt (σ_v) và tiêu hao cho biến dạng dẻo lý tưởng (k);
- Phần năng lượng bị giữ lại trong vật thể (trong mạng lệch hay ứng suất nội), biểu thị bởi thành phần $R \cdot \dot{p}$.



Hình 6.17. Phân tích năng lượng tiêu hao.

Trong trường hợp mô hình dẻo nhớt hoá bền dạng tích, năng lượng tiêu hao có giá trị dương khi giả thiết năng lượng riêng tự do không phụ thuộc vào r (hay p), hàm h là một hằng số và $R = 0$. Cơ năng lượng tiêu hao chỉ còn lại $\sigma : \underline{\dot{\epsilon}}^p$, hay nói một cách khác, toàn bộ năng lượng tiêu hao cho biến dạng dẻo chuyển đổi thành nhiệt năng.

6.4.2.2. Nhận dạng mô hình bằng thí nghiệm kéo

a) Mô hình dẻo nhớt hoá bền dạng tổng

Trong thí nghiệm kéo đơn, $\sigma_{eq} = J_2(\underline{\sigma}) = \sigma$ và thành phần đầu tiên của tenxơ ứng suất lệch bằng $\frac{2}{3}\sigma$, mô hình dẻo nhớt hoá bền dạng tổng được viết như sau:

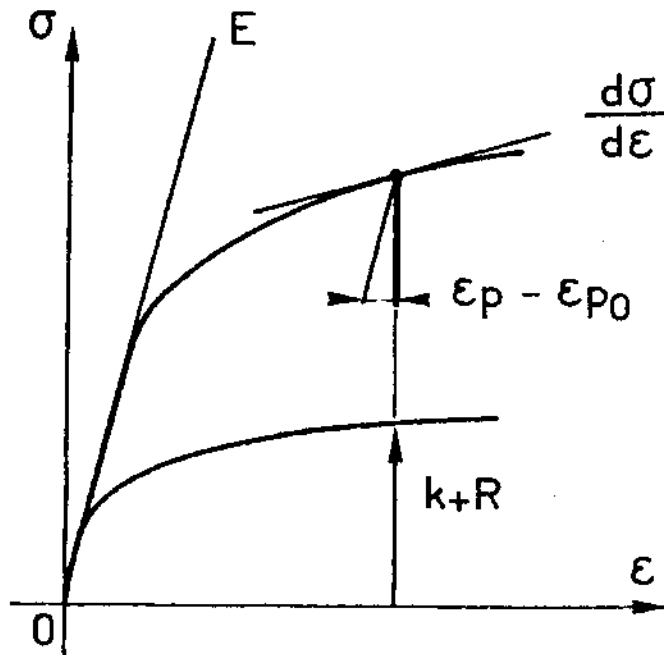
$$\dot{\epsilon}^p = \left\langle \frac{\sigma - R(\epsilon^p) - k}{K_a} \right\rangle^{N_a}.$$

Quan hệ trên cho:

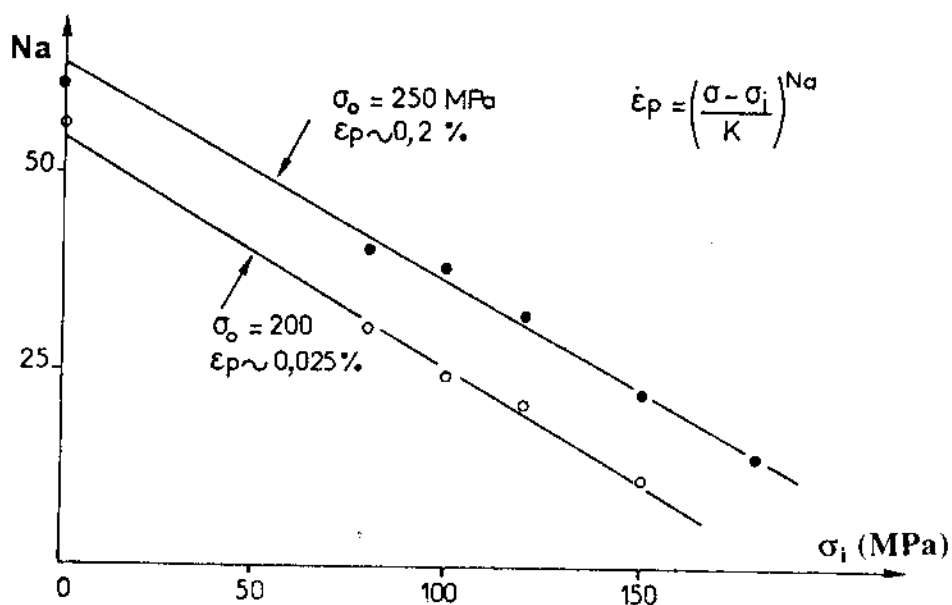
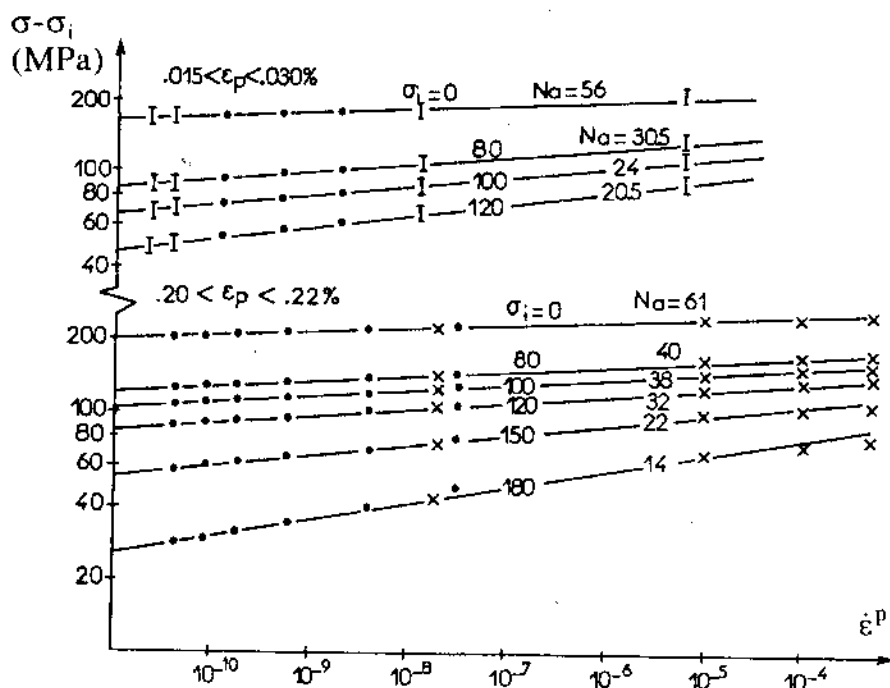
$$\sigma = k + R(\epsilon^p) + K_a (\dot{\epsilon}^p)^{1/N}.$$

Dạng hàm hoá bền $R(\epsilon^p)$ có thể suy trực tiếp từ quan hệ đã trình bày trong mục 4.4.2.1.b:

$$R(\epsilon^p) = Q_1 \epsilon^p + Q_2 [1 - \exp(-b\epsilon^p)].$$



Hình 6.18. Biến đổi của biến dạng dẻo và hoá bền trong quá trình nới.



Hình 6.19. Quan hệ giữa ứng suất nội σ_i và lũy thừa nhớt N_a ,
(thép 316 ở nhiệt độ 20°C).

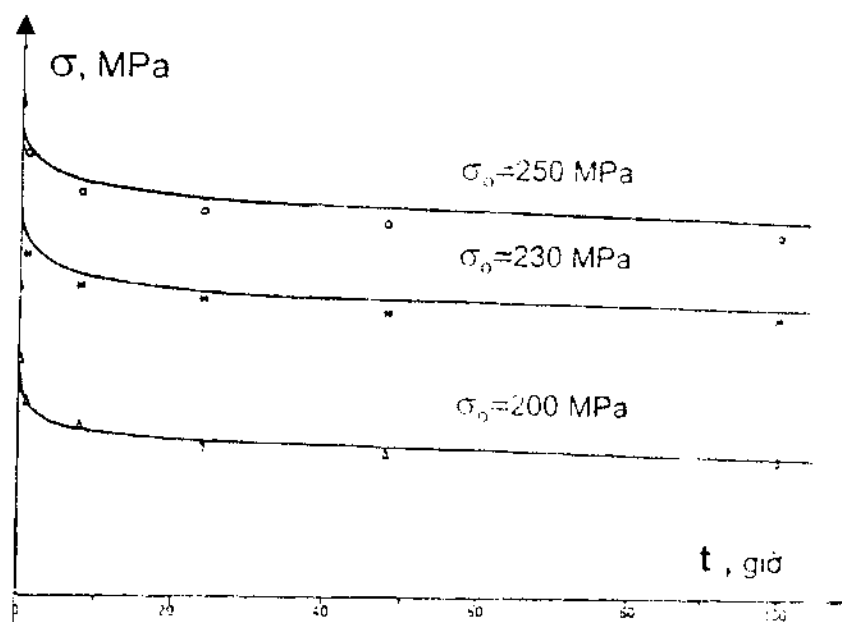
Mô hình thuộc tính nêu trên cho thấy một cách rõ rệt sự phân chia ứng suất thành tổng của hai thành phần:

- Hoá bền, biểu thị kích thước của miền đàn hồi bền thời, $R(\epsilon^p)$;
- Nhớt, thường gọi là ứng suất nhớt, $\sigma(\epsilon^p) = K(\epsilon^p)^n$.

Như vậy, để nhận dạng mô hình, ta nên dùng hai dạng thí nghiệm kéo đơn là hoá bền và nới. Bởi lẽ, hai dạng thí nghiệm này cho phép ta phân biệt riêng rẽ ảnh hưởng của ϵ^p và của σ . Hình 6.18 cho thấy một cách tượng trưng σ vẫn như không thay đổi ở giai đoạn cuối của thí nghiệm hoá bền với tốc độ biến dạng nhỏ định:

$$\dot{\epsilon}^p \rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} \left(1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right) \approx 0.$$

Ngược lại, trong thí nghiệm nới, chính biến dạng dẻo mới biến đổi ít và trạng thái hoá bền gần như không thay đổi.

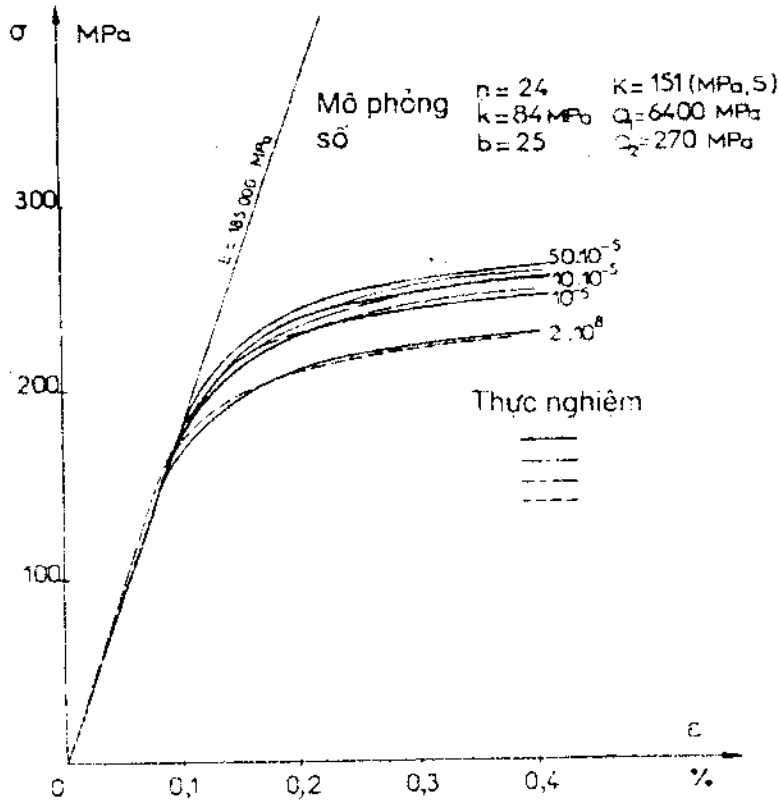


Hình 6.20. Mô phỏng thí nghiệm nới bởi mô hình dạng tổng (thép 316 ở nhiệt độ thường).

Từ thí nghiệm hoá bền, với ε^p lớn, ta có thể tìm được một cách gần đúng hàm $R(\varepsilon^p)$ và từ đó nhận dạng được các hệ số Q_1 , Q_2 và b . Từ thí nghiệm nới, ta tìm được quan hệ giữa tải thừa N_p và trị số của ứng suất $\sigma_1 = k + R(\varepsilon^p)$. Quan hệ này nhận được bằng cách dựng đồ thị $\log(\sigma - \sigma_1)$ phụ thuộc vào $\log(\varepsilon^p)$ với các giá trị khác nhau của σ_1 (hình 6.19).

Hệ số k xác định theo kích thước ban đầu của miền đàn hồi biểu kiến. Từ quan hệ thực nghiệm giữa N_p và σ_1 nhận được (hình 6.19), ta có thể áp dụng phương pháp nhận dạng số để xác định các hệ số còn lại.

Mô hình dạng tổng cho kết quả mô phỏng tương hợp tốt với kết quả thực nghiệm nới (hình 20) và thực nghiệm hoá bền (hình 6.21), đối với thép 316 ở nhiệt độ thường.



Hình 6.21. Mô phỏng thí nghiệm hoá bền với các tốc độ biến dạng khác nhau bởi mô hình dạng tổng (thép 316 ở nhiệt độ thường).

b) Mô hình nhớt hoá bền dạng tích

Mô hình trong trường hợp một chiều (kéo đơn) có dạng :

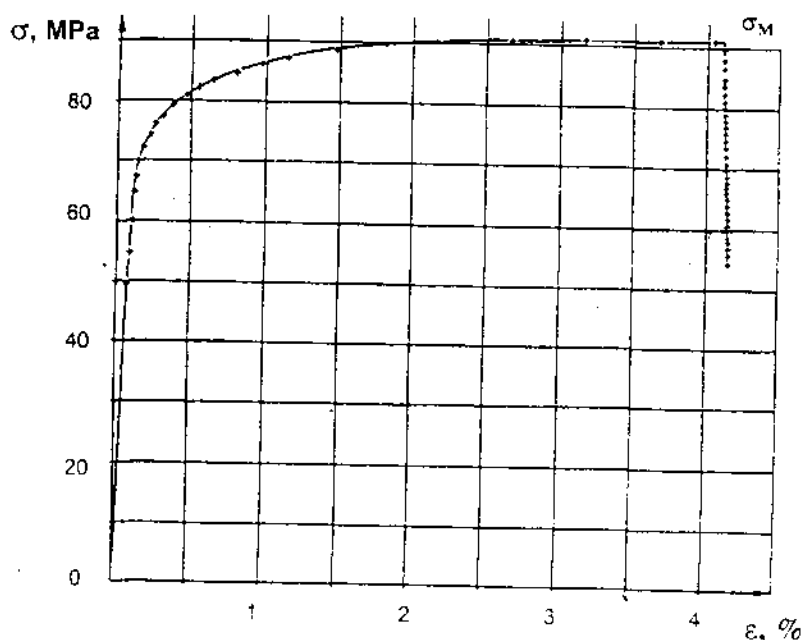
$$\dot{\epsilon}^p = \left[\frac{\sigma}{K(\epsilon^p)^{1/M}} \right]^N \quad \text{hay} \quad \sigma = K(\epsilon^p)^{1/M} (\dot{\epsilon}^p)^{1/N}.$$

Biểu thức trên cho phép đồng thời tính tới quá trình chảy dẻo, hoá bền, nối và có thể nhận dạng dễ dàng. Ba phương pháp có thể áp dụng để nhận dạng các hệ số đặc trưng K, M, N:

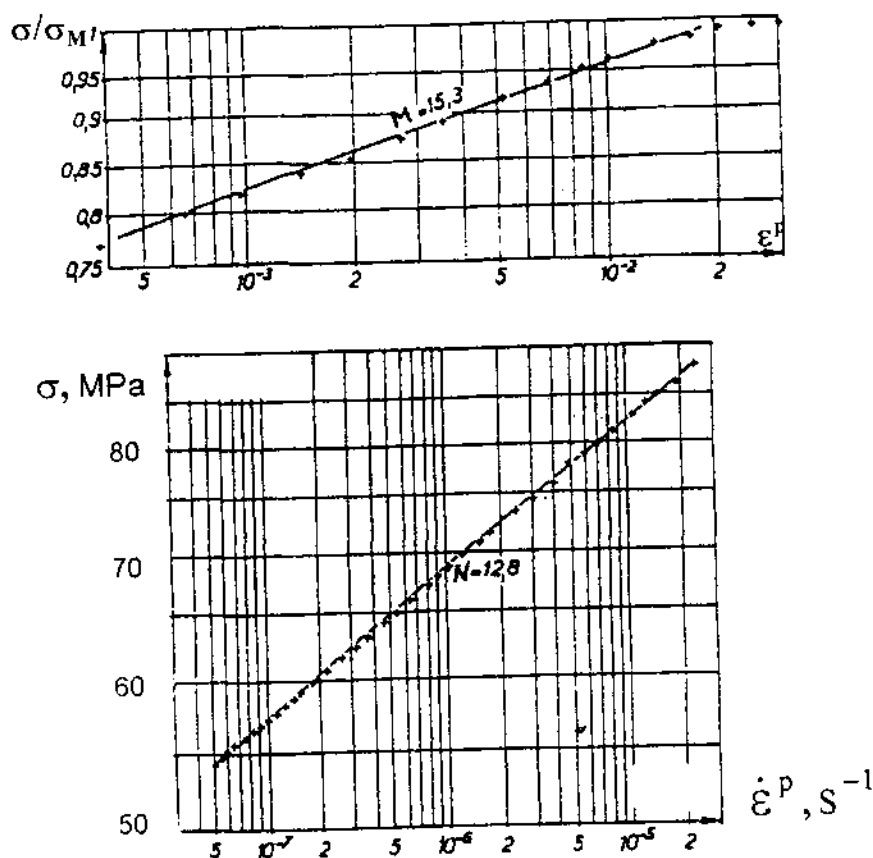
- Nếu ta có số lượng kết quả thực nghiệm (hoá bền, chảy dẻo giai đoạn I và nối) đủ lớn, cho phép xác định biến đổi của σ , ϵ^p và $\dot{\epsilon}^p$ trong một miền đủ rộng, ta có thể áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính. Mô hình có thể viết cho mỗi điểm thực nghiệm i như sau :

$$\frac{1}{N} \ln \dot{\epsilon}_i^p + \frac{1}{M} \ln \epsilon_i^p + \ln K = \ln \sigma_i$$

Mặt phẳng trong không gian ($\ln \epsilon^p$, $\ln \dot{\epsilon}^p$, $\ln \sigma$) tương hợp tốt nhất với các điểm thực nghiệm sẽ cho giá trị của các hệ số N, M, K.



Hình 6.22. Đường cong hoá bền-nối (hợp kim duyara AU4G ở nhiệt độ 208°C).



Hình 6.23. Quan hệ (σ, ϵ^P) và $(\sigma, \dot{\epsilon}^P)$ trong hệ trục logarit (hợp kim đuyara AU4G ở nhiệt độ 208°C).

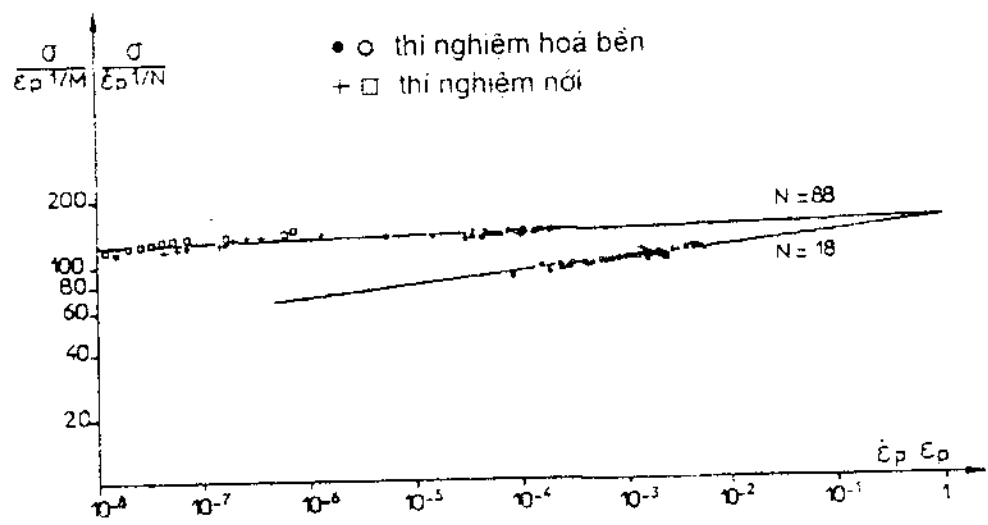
- Các thí nghiệm hoá bền-nối cho phép ta nhận dạng nhanh hơn các hệ số. Thí nghiệm hoá bền được tiến hành với tốc độ biến dạng không đổi, còn thí nghiệm nối được thực hiện với biến dạng có thể coi là hằng số. Bằng cách dựng các đồ thị biểu diễn mối quan hệ (σ, ϵ^P) và $(\sigma, \dot{\epsilon}^P)$ trong hệ trục logarit, ta có thể xác định một cách dễ dàng các hệ số $1/N$, $1/M$. Ví dụ về phương pháp nhận dạng này được trình bày trên hình 6.22, 6.23.

Trong các thí nghiệm nối với biến dạng nhỏ, sự biến đổi tương đối của biến dạng có thể đáng kể. Hơn nữa, tốc độ biến dạng $\dot{\epsilon}^P$ ở giai đoạn đầu của thí nghiệm hoá bền cũng không phải là hằng số. Do vậy, ta cần tiến hành hiệu chỉnh các hệ số M ,

N bằng cách dựng các quan hệ sau đây trong hệ trục logarit với các trị số của M, N vừa xác định được :

- Các giá trị $\sigma / (\epsilon^p)^{1/M}$ phụ thuộc vào ϵ^p ,
- Các giá trị $\sigma / (\epsilon^p)^{1/N}$ phụ thuộc vào ϵ^p .

Ta có thể dùng đồng thời các điểm thực nghiệm hoá bền và nới (có thể cả đảo). Hai đường thẳng tương hợp tốt nhất với hai tập hợp điểm và cắt nhau tại điểm tương ứng $\ln \epsilon^p = \ln \hat{\epsilon}^p = 0$, sẽ cho các giá trị cuối cùng của $1/N$, $1/M$. Tung độ của điểm giao nhau cho ta $\ln K$ (hình 6.24). Để kiểm tra độ chính xác của kết quả nhận được, ta nên tính thử đường cong chảy dẻo giai đoạn I với các hệ số xác định được.

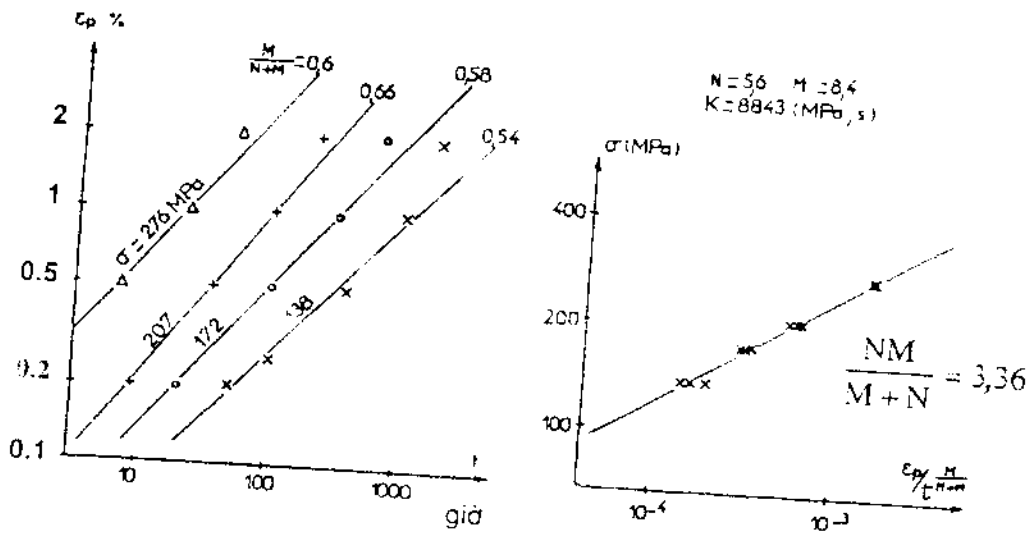


Hình 6.24. Nhận dạng mô hình dẻo nhớt dạng tích bằng thí nghiệm hoá bền-nới (thép kim INCO 718 ở 600°C).

- Mô hình dạng tích có ưu điểm là có thể tích phân một cách tường minh (với ứng suất không chế). Trong trường hợp chảy dẻo một chiều, sau khi tích phân, ta nhận được mô hình quan hệ giữa biến dạng và thời gian dạng Andrade :

$$\epsilon^p = \left[\frac{M + N}{M} \left(\frac{\sigma}{K} \right)^N t \right]^{\frac{1}{M+N}}.$$

Khi có các kết quả thực nghiệm chảy dẻo, ta dựng quan hệ (ϵ^p, t) cho giai đoạn chảy dẻo thứ nhất, trong hệ trục logarit và xác định được giá trị trung bình của $M/(M+N)$. Sau đó, ta dựng quan hệ $(\sigma, \epsilon^p / t^{M/(M+N)})$, cũng trong hệ trục logarit, và xác định được $MN/(M+N)$. Từ các kết quả nhận được, ta dễ dàng xác định N , M và tiếp theo là giá trị trung bình của hệ số K cho một tập hợp các thí nghiệm. Hình 6.25 trình bày một số ví dụ về phương pháp nhận dạng nói trên. Sau khi nhận dạng mô hình bằng phương pháp này, ta nên kiểm tra độ tương hợp của mô hình thông qua việc mô phỏng thí nghiệm biến cứng - nới.



Hình 6.25. Nhận dạng mô hình dẻo nhớt dạng tích bằng thí nghiệm dẻo (hợp kim HASTELLOY X ở 650°C).

6.4.2.3. Trường hợp chất tải chu kỳ

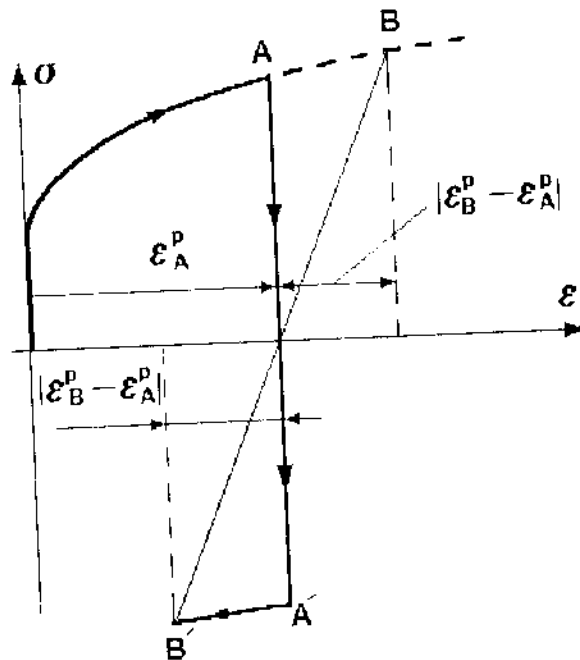
Các mô hình dẻo nhớt hoá bền đẳng hướng có thể áp dụng cho trường hợp chất tải chu kỳ. Trong biên dạng kéo - nén, hai mô hình trình bày ở trên có thể viết như sau:

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{|\sigma| - R(\epsilon^p)}{K_a} \right)^{N_a} \text{Sgn}(\sigma)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \left\langle \frac{|\sigma|}{K(\tilde{\epsilon}^p)^{1/M}} \right\rangle^N \text{Sgn}(\sigma),$$

trong đó, $\tilde{\epsilon}^p$ là biến dạng dẻo tích lũy một chiều, xác định bởi:

$$\tilde{\epsilon}^p = \int_0^t |\dot{\epsilon}^p(\tau)| d\tau$$



Hình 6.26. Hoá bền đẳng hướng và chất tải chu kỳ:
lần nén đầu tiên tiếp theo lần kéo đầu tiên.

Sự phát triển của biến dạng, sau chảy dẻo đầu tiên, giống nhau trong kéo và nén (chỉ khác nhau về dấu). Hình 6.26 trình bày sơ đồ minh hoạ tính chất này: $|\sigma|$ và $\tilde{\epsilon}^p$ có cùng giá trị tại điểm B và B'. Tuy nhiên, trong thực tế đặc điểm trên ít khi thoả mãn do ảnh hưởng của hiệu ứng Bauschinger.

Trong chất tải chu kỳ (có biến dạng dẻo), biến hoá bền $\tilde{\epsilon}^p$ có thể tăng không hạn định, do vậy có thể xảy ra hai khả năng: hoặc bão hoà hoá bền, trong mô hình thứ nhất $Q_1 = 0$, hoặc hoá bền không bão hoà:

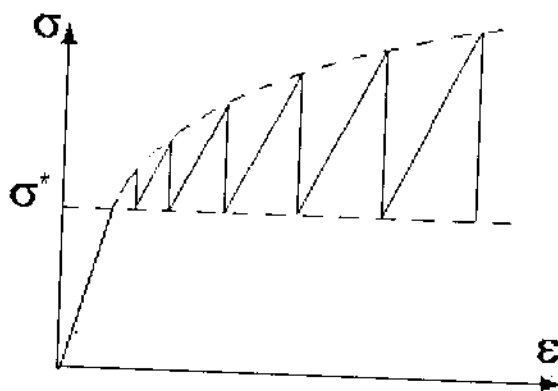
$$R\tilde{\epsilon}^p = Q_1\tilde{\epsilon}^p + Q_2[1 - \exp(-b\tilde{\epsilon}^p)].$$

Ở trường hợp đầu, quá trình biến dạng trong chu kỳ mang tính chất của mô hình Norton (ví dụ : thêm chảy dẻo giai đoạn I). Trong trường hợp thứ hai, sự ổn định chỉ có thể xảy ra khi vật liệu trở nên đàn hồi hoàn toàn. Sự thích nghi như vậy, sau một số lượng lớn chu kỳ chất tải, trong thực tế rất hiếm khi xảy ra. Tóm lại, các mô hình dẻo nhớt hoá bền đẳng hướng không phù hợp cho việc mô tả các quá trình chất tải chu kỳ.

6.4.2.4. Phương pháp ngoại suy. Thí nghiệm "nối-dẻo"

Vấn đề ngoại suy các kết quả thí nghiệm xảy ra trong thời gian ngắn cho một khoảng thời gian dài là vấn đề hết sức cơ bản và quan trọng trong các tính toán kết cấu công trình có tuổi thọ từ vài năm cho đến vài chục năm hoặc lâu hơn nữa. Thời gian hợp lý cho một thí nghiệm chỉ có thể kéo dài từ một vài ngày cho đến một năm.

Nếu các hiện tượng xảy ra chỉ phụ thuộc chủ yếu vào thời gian, ví dụ chỉ có sự tham gia của quá trình hồi phục hoặc hoá già của vật liệu, thì vấn đề ngoại suy hầu như không thể giải quyết được. Nhiệt độ thường có tác dụng thúc đẩy các hiện tượng nêu trên, do vậy ta có thể sử dụng các thông số tương đương *thời gian-nhiệt độ* trong ngoại suy, tuy nhiên, các thông số này phải thoả mãn cho từng vật liệu trong khoảng thời gian sử dụng dài nhất, vì lẽ đó, phương pháp này cũng không đem lại sự tiện lợi đáng kể nào.



Hình 6.27. Sơ đồ thí nghiệm nối dẻo.

Ngược lại, nếu vật liệu ổn định và tuân theo một mô hình dẻo nhớt hoá bền đẳng hướng trong kéo đơn dạng $\sigma = f(\epsilon^p, \dot{\epsilon}^p)$, ta có thể xây dựng một phương pháp thực nghiệm nối, cho phép có được tốc độ biến dạng dẻo $\dot{\epsilon}^p$ trong thời gian ngắn hơn

rất nhiều so với thời gian tiến hành các thí nghiệm dao tương đương. Từ kết quả của thí nghiệm nói, ta có thể xây dựng các đường cong dao ngoại suy cho một khoảng thời gian dài.

Nguyên lý ngoại suy đơn giản như sau: giả sử cần xác định đường cong chảy dao $\varepsilon(t)$ tương ứng ứng suất σ^* và nhiệt độ T^* , ta tiến hành một loạt thí nghiệm với ứng suất hoặc, tốt hơn, một thí nghiệm với tần số (xem 3.2.1.4). Trong mỗi lần thí nghiệm, ứng suất đạt giá trị σ^* (hình 6.27). Tại mỗi điểm của các đường cong với $\sigma(t)$, tại đó $\sigma = \sigma^*$, trạng thái của vật liệu được đặc trưng bởi:

$$\sigma = \sigma^*, \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \frac{\sigma^*}{E}, \quad \dot{\varepsilon}^p = -\frac{\dot{\sigma}(\sigma)}{E}.$$

Mô hình thể hiện mối quan hệ giữa σ , ε^p , $\dot{\varepsilon}^p$ trong toàn bộ quá trình chất tải, cũng đặc trưng cho thí nghiệm chảy dẻo với $\sigma = \sigma^* = \text{const}$. Như vậy, từ các điểm, ta có thể dựng quỹ đạo của biến dạng chảy dẻo qua toán đồ $(\varepsilon^p, \dot{\varepsilon}^p)$ và bằng cách lấy tích phân hàm $\dot{\varepsilon}^p = g(\varepsilon^p)$, tương hợp tốt nhất với các điểm thực nghiệm, với điều kiện ban đầu $\varepsilon^p(t=0) = \varepsilon_o^p$, ta nhận được đường cong chảy dẻo $\varepsilon^p(t)$, trong đó:

$$t = \int_{\varepsilon_o^p}^{\varepsilon^p} \frac{1}{g(\varepsilon^p)} d\varepsilon^p.$$

Sơ đồ của các thao tác nêu trên được trình bày trên hình 6.28.

Quá trình tính toán nêu trên có thể lập lại cho mọi giá trị ứng suất mà mỗi lần thí nghiệm đạt được. Như vậy, từ các đường cong thí nghiệm hay từ một đường cong thí nghiệm, bằng cách đó, ta nhận được một tập hợp các đường cong chảy dẻo cho nhiều ứng suất khác nhau.

So với thí nghiệm dao, trong thí nghiệm nói, thời gian cần thiết để đạt được trạng thái với các giá trị đặc trưng của σ , ε^p , $\dot{\varepsilon}^p$, ít hơn từ 5 đến 50 lần. Thời gian được lợi có thể tính với sự trợ giúp, ví dụ, của mô hình hoá bên-nhất:

$$\sigma = E\varepsilon^e$$

$$\sigma = f(\varepsilon^p, \dot{\varepsilon}^p) = K(\varepsilon^p)^{1/M}(\dot{\varepsilon}^p)^{1/N}.$$

Thời gian t_r^* , cần thiết để đạt trạng thái $\sigma^*, \varepsilon^{p*}, \varepsilon^{c*}$ trong thí nghiệm đảo, có thể xác định bằng cách tích phân mô hình trên với $\sigma = \sigma^*$ và điều kiện ban đầu $\varepsilon^p(t=0) = 0$

$$t_r^* = \frac{M}{M+N} \left(\frac{K}{\sigma^*} \right)^N (\varepsilon^{p*})^{\frac{M+N}{M}}.$$

Thời gian cho thí nghiệm nổi t_n^* , cần thiết để đạt được trạng thái tương tự thí nghiệm đảo, có thể xác định cũng bằng cách tích phân mô hình hoá bên-nhốt với $\varepsilon^* = \varepsilon^{p*} + \varepsilon^{c*} = \varepsilon^{p*} + \frac{\sigma^*}{E} = \text{const}$ và điều kiện ban đầu $\varepsilon^p(t=0) = 0$:

$$t_n^* = \left(\frac{K}{E} \right)^N \int_0^{\varepsilon^{p*}} \frac{x^{N/M}}{(\varepsilon^* - x)^N} dx.$$

Tích phân trên chỉ có thể tính gần đúng bằng phương pháp số.

Lợi thời gian được tính bởi :

$$\frac{t_r^*}{t_n^*} = \frac{M}{M+N} \frac{(\varepsilon^{p*})^{\frac{M+N}{M}}}{(\varepsilon^{c*})^N} \left(\int_0^{\varepsilon^{p*}} \frac{x^{N/M}}{(\varepsilon^* - x)^N} dx \right)^{-1}.$$

Đặt $\Gamma = \frac{M}{M+N} \frac{(\varepsilon^{p*})^{N/M}}{(\varepsilon^{c*})^{N-1}} \left(\int_0^{\varepsilon^{p*}} \frac{x^{N/M}}{(\varepsilon^* - x)^N} dx \right)^{-1}$ ta có :

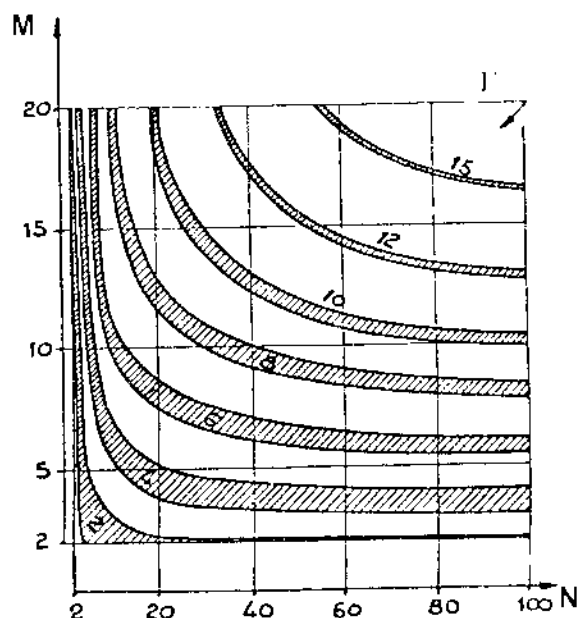
$$\frac{t_r^*}{t_n^*} = \Gamma \frac{\varepsilon^{p*}}{\varepsilon^{c*}}.$$

Thực tế cho thấy, với các giá trị thông thường của $\varepsilon^{p*}, \varepsilon^{c*}$, Γ ít phụ thuộc vào các biến (biến đổi ít khi các biến biến đổi), do vậy ta có thể tính Γ chỉ phụ thuộc vào N và M .

Trên hình 6.29 trình bày các giá trị xác định được của hàm Γ cho trường hợp:

$$2 \leq M \leq 20$$

$$2 \leq N \leq 100$$



Hình 6.29. Các giá trị của hàm Γ .

6.4.3. Mô hình dẻo nhớt hoá bền động

Mô hình dẻo nhớt hoá bền động được xây dựng nhằm mục đích tính tới ảnh hưởng của chất tải chu kỳ trong trường hợp tổn tại hiệu ứng nhớt. Mô hình cho phép phân tách các hiện tượng khác nhau liên quan một cách trực tiếp với lý thuyết nhiệt động học.

6.4.3.1. Phương pháp thiết lập tổng quát

a) Hoá bền động thuận tuý

Bỏ qua hiện tượng phục hồi, biến nội r được xem như trùng với biến dạng dẻo tích lũy p . Trong quá trình chảy dẻo nhớt, hoá bền động tương ứng với sự tịnh tiến của miền đàn hồi hay của các mặt đồng thế năng trong không gian ứng suất, gây nên bởi biến nội $\underline{\alpha}$. Lực nhiệt động học $\underline{X}$ liên kết với biến nội $\underline{\alpha}$ theo biểu thức:

$$\underline{X} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}}$$

Thế năng tiêu hao biểu diễn dưới dạng hàm của các biến nhiệt động học liên kết và có thể phụ thuộc cả vào các biến trạng thái (dưới dạng tham số):

$$\varphi^* = \Omega(\underline{\sigma}, \underline{X}; T, \underline{\alpha}).$$

Dưới đây, giả sử vật liệu ban đầu có tính đẳng hướng và biến dạng trong điều kiện thể tích không đổi. $\underline{X}$ xác định tâm hiện thời của miền đàn hồi. Thế năng tiêu hao được viết dưới dạng hàm của các bất biến của $(\underline{\sigma} - \underline{X})$, $\underline{X}$ và $\underline{\sigma}$.

Trong thực tế, ảnh hưởng của bất biến bậc 3 thường được bỏ qua, thế năng tiêu hao chỉ còn phụ thuộc vào các bất biến bậc hai:

$$\Omega = \Omega \left[J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}), J_2(\underline{X}); T, J_2(\underline{\alpha}) \right]$$

với

$$J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) = \left[\frac{3}{2} (\underline{\sigma}' - \underline{X}') : (\underline{\sigma}' - \underline{X}') \right]^{\frac{1}{2}}$$

Hoá bền động phi tuyến thường được mô tả bởi phương trình biến đổi của biến $\underline{X}$, gồm hai thành phần: thành phần hoá bền động (tuyến tính) và thành phần thể hiện hiệu ứng nhớ mờ dần của quỹ đạo biến dạng:

$$\dot{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}^p - \gamma \underline{X} \dot{p}.$$

Thành phần thứ hai chứa modul p của tốc độ biến dạng dẻo, hiệu ứng nhớ mang tính tức thời, độc lập với thời gian hay tốc độ. Mô hình thể hiện sự hoá bền phi tuyến do biến dạng, không có hiệu ứng phục hồi theo thời gian.

Để áp dụng phương pháp nhiệt động học tổng quát, cần giữ biến α trong hàm thế năng tiêu hao. Ta có thể sử dụng hàm Ω sau đây:

$$\Omega = \Omega \left[J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - k + \frac{\gamma}{2C} J_2^2(\underline{X}) - \frac{2\gamma C}{9} J_2^2(\underline{\alpha}) ; T \right],$$

các hệ số k , γ , C có thể phụ thuộc vào nhiệt độ.

Tốc độ biến dạng và tốc độ biến đổi của biến nhiệt động học α được xác định theo định luật chảy dẻo pháp tuyến mở rộng:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})},$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{X}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \underline{X} \dot{p},$$

trong đó, modul tốc độ biến dạng $\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p \right)^{1/2} = \frac{2}{3} J_2(\underline{\dot{\varepsilon}}^p)$. Mặt khác, ta giả thiết năng lượng riêng tự do chứa một thành phần bậc hai của $\underline{\alpha}$:

$$\rho \Psi = \rho \Psi_e + \frac{2}{9} C J_2^2(\underline{\alpha}) = \rho \Psi_e + \frac{1}{3} C \underline{\alpha} : \underline{\alpha},$$

sao cho :

$$\underline{X} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha}.$$

Sử dụng quan hệ trên, ta nhận được mô hình xác định đầy đủ thuộc tính dẻo nhớt hoá bền động của vật liệu:

$$\Omega = \Omega [J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - k; T]$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \gamma \underline{\alpha} \dot{p}$$

$$\underline{X} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha}.$$

Kết hợp hai phương trình cuối, ta có phương trình mô tả biến đổi của biến $\underline{X}$:

$$\underline{\dot{X}} = \frac{2}{3} C \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \gamma \underline{X} \dot{p}.$$

Cần lưu ý rằng, trong hàm thế năng tiêu hao, thành phần bổ sung đầu tiên, phụ thuộc vào $\underline{X}$, sẽ tạo hiệu ứng nhớ trong phương trình biến đổi của biến động học $\underline{\alpha}$; thành phần bổ sung thứ hai, phụ thuộc vào $\underline{\alpha}$, cho phép tính tới ảnh hưởng của thành phần bổ sung thứ nhất đến giới hạn đàn hồi k , thông qua quan hệ phụ thuộc giữa $\underline{X}$ và $\underline{\alpha}$.

Trong các biểu thức trên, hệ số $2/3$ được đưa vào nhằm tạo cho chúng có dạng đơn giản trong trường hợp biến dạng kéo - nén đơn, đồng thời ta cũng dễ dàng kiểm

tra điều kiện : nếu $\underline{X}(0)$ là một tenxơ lệch thì nó sẽ luôn tồn tại là tenxơ lệch trong quá trình biến dạng. Đương nhiên đó không phải là điều kiện bắt buộc, bởi lẽ toàn bộ lý thuyết dẻo nhớt không nén được sẽ bất biến đối với sự tịnh tiến của các mặt đồng thế năng tiêu hao theo hướng trục không nén được (đường phân giác trong hệ trục chính của tenxơ ứng suất).

Trong miền biến đổi rộng của các biến, hàm thế năng tiêu hao có thể chọn có dạng lũy thừa như sau:

$$\Omega = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - k}{K} \right\rangle^{n+1},$$

trong đó các hệ số k , K , n , cũng như C và γ , phụ thuộc vào nhiệt độ. Mô hình chảy dẻo hoá bền, khi đó, có dạng:

$$\underline{\dot{\epsilon}}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma}' - \underline{X}')}$$

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - k}{K} \right\rangle^n$$

$$\underline{X} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha}$$

$$\underline{\dot{\alpha}} = \underline{\dot{\epsilon}}^p - \gamma \underline{\alpha} \dot{p}.$$

Mô hình dẻo nhớt hoá bền động phi tuyến dạng trên thường được sử dụng. Dạng này tương thích với trường hợp chất tải với nhiệt độ biến đổi. Khi nhiệt độ biến đổi nhanh trong điều kiện không có chảy dẻo, $\underline{\alpha}$ không biến đổi. Ngược lại, ứng suất nội $\underline{X}$ biến đổi một cách tức thời do hệ số C phụ thuộc vào nhiệt độ.

b) Dẻo nhớt hoá bền hỗn hợp

Ta xét trường hợp hoá bền đẳng hướng xếp chồng với hoá bền động. Như vậy, mô hình có thể mô tả các hiện tượng biến cứng hoặc hoá mềm trong biến dạng chu kỳ.

Hoá bền đẳng hướng được đưa vào hàm năng lượng riêng tự do thông qua biến độc lập p . Khi đó, lực nhiệt động học R , liên kết với p , xác định theo biểu thức

$$R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial p}$$

sẽ tham gia vào hàm thế năng tiêu hao. Hàm này cũng có thể phụ thuộc vào p ở dạng tham số:

$$\varphi^* = \Omega(\underline{\sigma}, \underline{X}, R; T, \underline{\alpha}, p).$$

Cũng với các giả thiết tương tự như đã trình bày trong mục trước, ta có thể viết hai hàm thế năng dưới dạng sau:

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e + \frac{1}{3}C\underline{\alpha} : \underline{\alpha} + h(p)$$

$$\Omega = \Omega \left[J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k + \frac{1}{2} \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\underline{X}) - \frac{2}{9} C \gamma(p) J_2^2(\underline{\alpha}); T, p \right].$$

Từ đó ta có các biến lực nhiệt động học liên kết:

$$\underline{X} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha} \quad \text{và} \quad R = h(p)$$

và các định luật biến đổi:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\underline{\sigma} - \underline{X}}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}$$

$$\dot{p} = \frac{\partial \Omega}{\partial R} = \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} = \left(\frac{2}{3} \dot{\underline{\varepsilon}}^p : \dot{\underline{\varepsilon}}^p \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\underline{\alpha}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{X}} = \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2} \frac{\gamma(p)}{C} \underline{X} \dot{p}.$$

Thay cho phương trình biến đổi của $\underline{\alpha}$, ta có thể dùng phương trình biến đổi của $\underline{X}$:

$$\dot{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \gamma(p) \underline{X} \dot{p}.$$

Vai trò của hai thành phần bổ sung trong hàm thế năng tiêu hao tương tự như đã trình bày trong mục trước. Áp dụng quan hệ giữa $\underline{X}$ và $\underline{\alpha}$, ta có thể đưa hàm thế năng tiêu hao về dạng đơn giản:

$$\Omega = \Omega [J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k; T, p]$$

Các hàm thế năng còn có thể có dạng đặc thù như sau:

- Hàm năng lượng riêng tự do với thành phần exponent cho $h(p)$:

$$h(p) = Qp - \frac{Q}{b} [1 - \exp(-bp)] .$$

- Thế năng tiêu hao có dạng hàm lũy thừa:

$$\Omega = \frac{K(p)}{n+1} \left\langle \frac{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k}{K(p)} \right\rangle^{n+1} ,$$

trong đó, các hệ số n , k , b , Q và hàm $K(p)$ phụ thuộc vào nhiệt độ.

Như vậy, ta có thể tập hợp các phương trình của mô hình thuộc tính dẻo nhớt chu kỳ với hoá bền động phi tuyến và hoá bền đẳng hướng, trong điều kiện đẳng nhiệt, như sau:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma}' - \underline{X}'}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})}$$

$$\dot{p} = \left\langle \frac{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k}{K(p)} \right\rangle^n$$

$$\dot{\underline{X}} = \frac{2}{3} C \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \gamma(p) \underline{X} \dot{p}$$

$$\dot{R} = b(Q - R) \dot{p} \quad \text{với} \quad \underline{X}(0) = R(0) = 0$$

Phương trình cuối cùng có thể thay bằng biểu thức của R :

$$R = Q [1 - \exp(-bp)] .$$

So sánh biểu thức trên với biểu thức hoá bền đẳng hướng trình bày trong mục 6.4.2.1-b ta thấy, ở đây thành phần tuyến tính đầu tiên được bỏ qua. Điều này cho phép đảm bảo tính ổn định của chu kỳ: khi số lượng chu kỳ chảy dẻo tăng, p tăng không xác định, nhưng R ổn định dần. Ta có ba phương pháp để đưa vào mô hình thuộc tính ảnh hưởng của hoá bền đẳng hướng như sau:

- Điều khiển kích thước miền đàn hồi và kích thước của các mặt đồng thế năng tiêu hao bằng cách đưa vào hàm $R(p)$,

- Tác động vào phần ứng suất nhớt (kích thước của các mặt đồng thế năng tiêu hao) bởi hàm $K(p)$.

- Tác động vào chuyển động của tâm miền đàn hồi, $\underline{X}$, bằng hàm $\gamma(p)$.

Việc chọn lựa một trong các phương pháp trên hay kết hợp giữa chúng, cũng như việc xác định các hệ số n, k, C trong từng trường hợp, sẽ quyết định mức độ khó khăn của việc nhận dạng mô hình.

3) Năng lượng tiêu hao

Tiêu hao cơ năng được xác định bởi:

$$\Phi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{X} : \dot{\underline{\alpha}} - R\dot{p}$$

Trong khuôn khổ của các giả thiết đã chọn, nguyên lý nhiệt động học thứ hai dễ dàng thoả mãn khi hàm thế năng tiêu hao Ω là một hàm lồi đối với các biến và bao góc toạ độ. Trong trường hợp hàm thế năng là hàm lũy thừa, tỷ lệ với

$$\left\langle J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k + \frac{1}{2} \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\underline{X}) - \frac{9}{2} C \gamma(p) J_2^2(\underline{\alpha}) \right\rangle^{n+1}$$

thì hai điều kiện mà Ω cần thoả mãn sẽ là hệ quả trực tiếp từ đặc tính dương của các hệ số k, C và của hàm $\gamma(p)$ (khi $\underline{\sigma} = \underline{X} = 0, R = 0$, giá trị của biểu thức trong ngoặc móc sẽ âm, dẫn đến $\Omega=0$).

Thay mô hình thuộc tính vào biểu thức tiêu hao cơ năng, ta có:

$$\Phi_1 = (\underline{\sigma} - \underline{X}) : \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\sigma} - \underline{X}}{J_2(\underline{\sigma} - \underline{X})} - R\dot{p} - \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\underline{X})\dot{p}$$

hay

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \left[J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k + \frac{1}{2} \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\underline{X}) - \frac{2}{9} C \gamma(p) J_2^2(\underline{\alpha}) \right] \dot{p} + \\ & + \left[k + \frac{1}{2} \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\underline{X}) + \frac{2}{9} C \gamma(p) J_2^2(\underline{\alpha}) \right] \dot{p} \end{aligned}$$

Áp dụng quan hệ giữa $\underline{X}$ và $\underline{\alpha}$, ta có thể đưa biểu thức trên về dạng đơn giản sau:

$$\Phi_1 = [J_2(\underline{\sigma} - \underline{X}) - R - k] \dot{p} + \left[k + \frac{\gamma(p)}{C} J_2^2(\underline{X}) \right] \dot{p}.$$

Ta dễ dàng thấy cả hai thành phần của Φ_1 đều dương. Thành phần đầu tiên dương hoặc bằng 0 vì $\dot{p} = 0$ ngay khi $\sigma = X = 0$, $R = 0$, thành phần thứ hai dương vì các hệ số k , γ và C có giá trị dương.

6.4.3.2. Nhận dạng mô hình bằng thí nghiệm kéo-nén đơn

a) Mô hình dẻo nhớt hoá bền động phi tuyến trong điều kiện kéo nén đơn

Trong kéo-nén đơn, tenxơ ứng suất lệch và tenxơ ứng suất nội có dạng đơn giản sau:

$$\underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}, \quad \underline{X} = \underline{X}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}X & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}X & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}X \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có $J_2(\sigma - X) = |\sigma - X|$ và mô hình chảy dẻo trở thành:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - k}{K(\tilde{\varepsilon}^p)} \right\rangle^n \operatorname{sgn}(\sigma - X) \\ \dot{X} &= C\dot{\varepsilon}^p - \gamma(\tilde{\varepsilon}^p)X|\dot{\varepsilon}^p| \\ \dot{R} &= b(Q - R)|\dot{\varepsilon}^p|, \end{aligned}$$

trong đó, $\tilde{\varepsilon}^p$ là biến dạng dẻo tích lũy xác định bởi $\dot{\tilde{\varepsilon}}^p = |\dot{\varepsilon}^p|$. Các thành phần của các tenxơ tốc độ xác định bởi:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^p &= \dot{\varepsilon}^p \quad \dot{\varepsilon}_{22}^p = \dot{\varepsilon}_{33}^p = \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^p \\ \dot{X}_{11} &= \frac{2}{3}\dot{X} \quad \dot{X}_{22} = \dot{X}_{33} = -\frac{1}{3}\dot{X}. \end{aligned}$$

Đối với một quá trình chất tải cho trước, hai biến hoá bền có thể xác định cụ thể như sau: nếu ban đầu ta có $\varepsilon^p = \varepsilon_n^p$, $X = X_n$ và nếu $\gamma = \text{const}$:

$$X = v\frac{C}{\gamma} + \left(X_n - v\frac{C}{\gamma}\right)\exp\left[-v\gamma(\varepsilon^p - \varepsilon_n^p)\right],$$

trong đó, $v = \text{Sgn}(\sigma - X) = \pm 1$ cho biết hướng chảy dẻo. Điều đó cho thấy quan hệ giữa X và ε^p không phải là đơn trị và biến động học cho phép mô tả các vòng trễ (hình 6.30-a). Ngược lại, đối với biến dạng hướng, ta có thể tích phân từ thời điểm ban đầu:

$$R = Q \left[1 - \exp(-b\tilde{\varepsilon}^p) \right]$$

Mô hình chảy dẻo có thể đảo ngược để có:

$$\sigma = X(\varepsilon^p, X_0, \varepsilon_0^p) + vR(\tilde{\varepsilon}^p) + vk + vK(\tilde{\varepsilon}^p)|\dot{\varepsilon}^p|^{1/n},$$

trong đó, các hàm X và R đã được xác định ở trên. Dạng mô hình này cho thấy rõ ràng sự phân chia ứng suất thành các thành phần hoá bền và ứng suất nhớt σ , (đôi khi chịu ảnh hưởng của hoá bền):

$$\sigma(\tilde{\varepsilon}^p, \dot{\varepsilon}^p) = K(\tilde{\varepsilon}^p)|\dot{\varepsilon}^p|^{1/n}.$$

Đối với chất tải chu kỳ, ta cần lưu ý các tính chất quan trọng sau đây, áp dụng khi hiệu ứng biến cứng hay hoá mềm chu kỳ đã ổn định, tức là khi K , R , γ là các hằng số:

- Dưới tải trọng và ứng suất không chế, ứng xử của vật liệu có thể ổn định sau không quá hai chu kỳ;
- Dưới tải trọng và biến dạng không chế, sự ổn định có thể xảy ra sau một số lượng chu kỳ phụ thuộc vào giá trị ban đầu của X và các giá trị tương ứng của C và γ ;
- Nếu biến dạng không chế với tốc độ như nhau khi chất tải và dỡ tải, mô hình cho thấy hiệu ứng nơi ứng suất trung bình, sự ổn định chỉ có thể xảy ra khi các giá trị cực đại và cực tiểu của X đối nhau. Biểu thức của X dẫn đến giá trị cực đại sau đây:

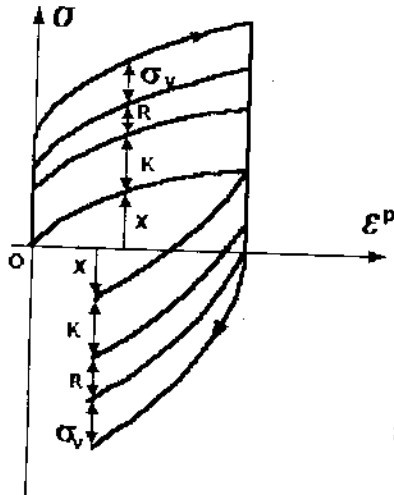
$$X_M = \frac{C}{\gamma} \text{th} \left(\gamma \frac{\Delta \varepsilon^p}{2} \right),$$

trong đó, $\Delta \varepsilon^p$ là biên độ biến dạng không chế của chu kỳ.

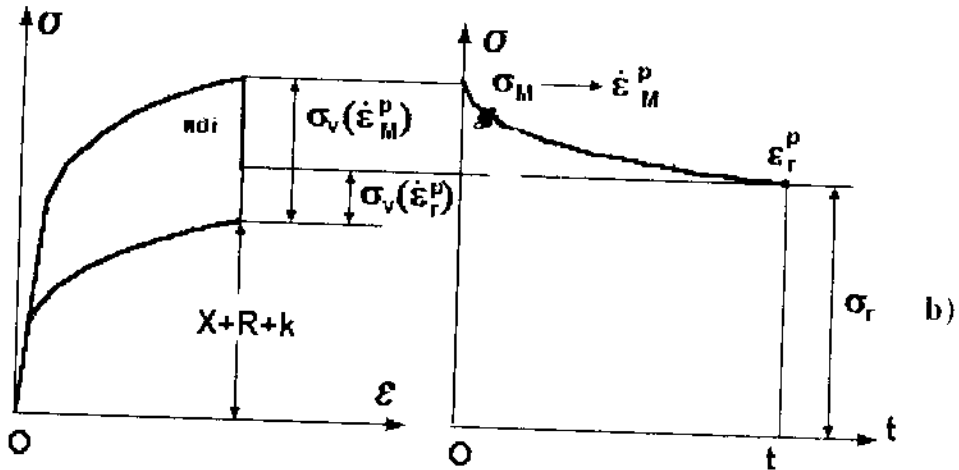
- Trong nới chu kỳ, tức là khi biến dạng không chế với thời gian giữ nhất định (khi kéo chẳng hạn), phản ứng suất được nới trong mỗi chu kỳ, $\delta\sigma = \sigma_M - \sigma_r$, biến đổi đồng thời với hàm $K(\tilde{\varepsilon}^p)$. Ta có thấy quan hệ dưới đây thoả mãn một cách gần đúng (chỉ số s ký hiệu giá trị ổn định):

$$\frac{\delta \sigma_s}{\delta \sigma_l} = \frac{\sigma_{Ms} - \sigma_{ls}}{\sigma_{Ml} - \sigma_{ll}} \approx \frac{K_s}{K_l} \frac{(\dot{\epsilon}_{Ms}^p)^{1/n} - (\dot{\epsilon}_{ls}^p)^{1/n}}{(\dot{\epsilon}_{Ml}^p)^{1/n} - (\dot{\epsilon}_{ll}^p)^{1/n}} \approx \frac{K_s}{K_l},$$

với các ký hiệu định nghĩa trên hình 6.30-b.



Hình 6.30. Phân tích ứng suất thành ứng suất nội và ứng suất nhót :
a) chất tải chu kỳ ; b) trường hợp nới ứng suất.



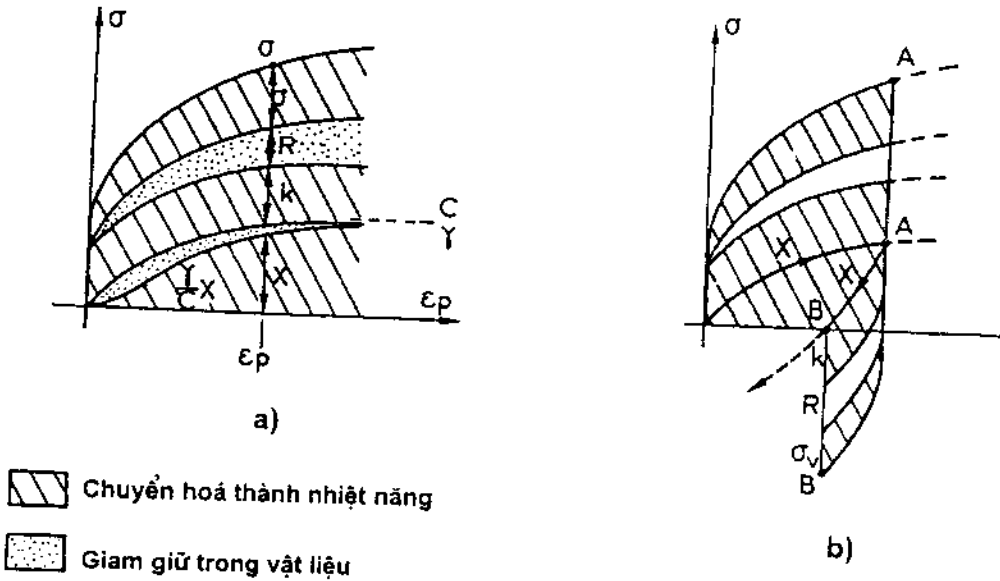
b) Năng lượng tiêu hao

Tiêu hao cơ năng được viết như sau:

$$\Phi_l = \sigma \dot{\epsilon}^p - X \dot{\alpha} - R |\dot{\epsilon}^p| = (\sigma - X - R - k) |\dot{\epsilon}^p| + k |\dot{\epsilon}^p| + \frac{\gamma(\dot{\epsilon}^p)}{C} X^2 |\dot{\epsilon}^p|.$$

Thành phần đầu tiên tương ứng tiêu hao nhớt $\sigma_v|\dot{\epsilon}^p|$, thành phần thứ hai là tiêu hao do ứng suất nội ban đầu, thành phần thứ ba là tiêu hao động học. Hình 6.31 thể hiện sự phân chia nêu trên của năng lượng tiêu hao trong quá trình kéo đầu tiên. Ta có thể viết:

$$\sigma \dot{\epsilon}^p = \left(\sigma - X - R + \frac{\gamma}{C} X^2 \right) \dot{\epsilon}^p + R \dot{\epsilon}^p + \left(X - \frac{\gamma}{C} X^2 \right) \dot{\epsilon}^p.$$



Hình 6.31. Phân tích năng lượng tiêu hao:

a) biến dạng kéo ; b) biến dạng kéo-nén với $X = 0$.

Từ trạng thái ban đầu, công tiêu hao cho quá trình biến dạng dẻo có thể phân chia thành:

- Phần tiêu tán bởi hệ (chuyển thành nhiệt năng), Φ_1 ,

- Phần bị giữ lại trong hệ, $\int_0^A R d\epsilon^p$,

- Phần $\int_0^A \left(X - \frac{\gamma}{C} X^2 \right) d\epsilon^p$ bị giữ lại tạm thời trong hệ và sẽ tham gia vào quá

trình nén tiếp theo với vai trò làm "mờ" dần ứng suất động X . Khi đó thành phần này

sẽ chuyển hoá thành nhiệt. Cần lưu ý rằng, năng lượng bị giữ lại trong hệ chính là phần năng lượng tự do tương ứng với các biến nội:

$$\rho\Psi_p = \frac{1}{2}C\alpha : \underline{\alpha} + Q\left(p + \frac{1}{b}\exp(-bp) - \frac{1}{b}\right),$$

và ta có:

$$\int_0^A R d\varepsilon^p = Q\left(\varepsilon_A^p + \frac{1}{b}\exp(-b\varepsilon_A^p) - \frac{1}{b}\right),$$

$$\int_0^A \left(X - \frac{\gamma}{C}X^2\right) d\varepsilon^p = \frac{1}{2}C\alpha_A^2 = \frac{1}{2}\frac{X_A^2}{C}.$$

Tại điểm B, khi X trở lại về giá trị 0, năng lượng bị giam giữ chỉ còn là phần năng lượng tương ứng với biến đẳng hướng R.

c) Nhận dạng các hệ số

Mô hình hoá hành vi đơn điệu cũng như hành vi chu kỳ của vật liệu đòi hỏi phải đưa vào một số lượng lớn các hệ số. Nhận dạng các hệ số này đối với một vật liệu cho trước, ở nhiệt độ nhất định, là một vấn đề không dễ. Phương pháp xây dựng và nhận dạng mô hình bao gồm các bước sau:

- Chọn các thí nghiệm đặc trưng và xem xét các đại lượng cơ học $[\sigma(t), \varepsilon(t)]$. Việc lựa chọn này phụ thuộc vào miền ứng dụng dự kiến (chất tải ban đầu, chu kỳ ổn định hay hiệu ứng chu kỳ chuyển tiếp),

- Chọn dạng mô hình, đặc biệt cần xem xét đưa biến hoá bền đẳng hướng vào dưới dạng nào để có thể mô tả được hiệu ứng thích nghi chu kỳ. Sự so sánh giữa đường cong thử kéo ban đầu và các vòng chu kỳ ổn định (với chất tải như nhau) sẽ cho những thông tin quan trọng như sự biến đổi kích thước của miền đàn hồi biểu kiến (biến đổi của R) hay biến đổi của mô đun hoá bền với cùng một biến dạng (biến đổi của γ).

- Nhận dạng các hệ số. Đây là giai đoạn khó khăn nhất, đôi khi đòi hỏi phải có sự trợ giúp của máy tính.

Trong đa số các trường hợp, ta thường hạn chế ở việc nhận dạng các hệ số sau:

- n, K, k, C, γ : cho hành vi ban đầu của vật liệu;
- $n, K, k + Q, C, \gamma$: cho hành vi chu kỳ ổn định;
- b : trong trường hợp cần mô tả hành vi chu kỳ chuyển tiếp.

Các hệ số nêu trên được xác định riêng rẽ nhờ các thí nghiệm thực hiện trong các miền tương ứng. Ứng xử trong chu kỳ ổn định thường không phụ thuộc vào quá trình tải tải trước, do đó các hệ số liên quan có thể xác định trực tiếp trên cơ sở áp dụng mô hình cho chế độ ổn định ($b=0, R=Q$). Lưu ý rằng, hệ số b không ảnh hưởng đến ứng xử trong chế độ ổn định và ảnh hưởng ít đến ứng xử trong chu kỳ đầu tiên. Như vậy, ta cần nhận dạng lần lượt 5 hệ số cho hành vi ban đầu, 5 hệ số hành vi trong chế độ ổn định và một hệ số cho hành vi trong chế độ chuyển tiếp. Giá trị tương ứng của các hệ số n, K, C, γ được lấy trung bình, trừ khi ta thấy cần phải tính đến sự biến đổi của K hoặc γ . Việc phân tách giữa k và $k + Q$ có thể thực hiện được bằng cách đo năng lượng tiêu hao, tuy nhiên điều này không quan trọng đối với ứng xử cơ học của mô hình.

Mặc dù có đầy đủ phương tiện xử lý số và khả năng phân tách ảnh hưởng của các hệ số bằng thực nghiệm, nhưng đối với số lượng hệ số lớn, việc nhận dạng mô hình đôi khi cũng gặp những trở ngại, một mặt do kết quả thực nghiệm không đủ để có thể nhận biết một cách đúng đắn ảnh hưởng của các hệ số, mặt khác, lưu đồ tính toán không phải lúc nào cũng cho kết quả hội tụ. Để khắc phục khó khăn trên, ta cần xử lý trước bằng cách nhận dạng sơ bộ lũy thừa n (ảnh hưởng của tính nhớt). Ba phương pháp bổ sung sau đây có thể áp dụng:

- Nếu có các kết quả thí nghiệm dao động giai đoạn 2 ở nhiệt độ cho trước, ta xác định lũy thừa Norton N^* . Thực nghiệm cho thấy, ta có thể chọn sơ bộ n trong khoảng $0,6N^* < n < N^*$. Quan hệ $n(T)$ thường là đơn điệu (giảm khi T tăng) và biến đổi đồng dạng với $N^*(T)$. Phương pháp này chỉ áp dụng khi ta không có đủ số liệu thực nghiệm chính xác trong một miền biến đổi đủ rộng của tốc độ biến dạng.

- Bằng một thí nghiệm nối lập (hay vài thí nghiệm nối đơn) với ít nhất 3 giá trị khác nhau của tốc độ biến dạng, thiết lập quan hệ thực nghiệm giữa lũy thừa n và ứng suất nội σ_1 trong biểu thức

$$\dot{\epsilon}^p = \left(\frac{\sigma - \sigma_1}{K_x} \right)^n.$$

trong đó, σ_i nhận các giá trị tùy ý khác nhau (xem hình 6.19), biểu thị quan hệ:

$$\sigma_i = X(\varepsilon^p) + R(\bar{\varepsilon}^p) + k \quad .$$

Phương pháp này chỉ áp dụng nếu hoá bền X + R biến đổi ít trong quá trình nới, có nghĩa là khi quá trình nới được thực hiện với biến dạng dẻo ban đầu đã tương đối cao (0,2% chẳng hạn). Mô tả phương pháp này trình bày trên hình 6.19.

- Từ một thí nghiệm ở mức trung bình, xác định điểm thực nghiệm trung bình $(\sigma^*, \varepsilon^{p*}, \bar{\varepsilon}^{p*})$, mà qua đó đường cong tính toán bắt buộc phải đi qua.

Các phương pháp số trợ giúp cho việc nhận dạng mô hình có thể phân chia thành hai nhóm sau :

- Các lưu đồ tính toán ứng xử của vật liệu (từng bước theo thời gian) đối với tác động không chế, áp dụng trong trường hợp lời giải không tường minh;

- Các phương pháp giảm thiểu sai số giữa giữa mô hình và thực nghiệm. Các phương pháp này chỉ có hiệu quả khi số lượng ẩn không quá lớn.

Cần lưu ý rằng, việc nhận dạng mô hình ở đây thực chất là áp dụng các phương pháp số sau khi đã có xử lý sơ bộ trước như đã trình bày ở trên.

6.4.4. Mô hình hoá các ảnh hưởng đặc thù

Ứng xử đa dạng của vật liệu ở miền nhiệt độ cao là do ảnh hưởng của nhiều hiện tượng khác nhau, tương ứng với sự không ổn định của cấu trúc vật lý. Các hiện tượng này có thể kết hợp với tính nhớt của vật liệu để gây nên các tác động phức tạp như ảnh hưởng của lịch sử nhiệt độ, của hiệu ứng hồi phục, của hiện tượng hoá già và sự kết hợp giữa tính dẻo tức thời và dẻo nhớt.

6.4.4.1. Ảnh hưởng của lịch sử nhiệt độ

Các mô hình thuộc tính dẻo nhớt đã trình bày chỉ áp dụng đối với các vật liệu có cấu trúc vật lý ổn định khi nhiệt độ biến đổi. Các quan hệ xác định từ các thí nghiệm đẳng nhiệt chứa các hệ số phụ thuộc nhiệt độ. Giả thiết về sự ổn định của cấu trúc thường chỉ thoả mãn khi tốc độ biến đổi của nhiệt độ thấp hơn khoảng 30 °C / s.

Trong miền nhiệt độ cao, cấu trúc vi mô của một số vật liệu có thể biến đổi một cách không ổn định dưới tác dụng của nhiệt độ. Ví dụ, đối với hợp kim hai pha : pha γ và sản phẩm kết pha (pha phân tán) γ' . Khi nhiệt độ tăng từ T_0 đến T_1 , xảy ra

quá trình phân rã một phân pha phân tán, dẫn đến sự suy giảm của hàm lượng thể tích pha thứ hai này (hình 6.32). Khi nhiệt độ trở lại giá trị ban đầu T_0 , xảy ra quá trình tái tiết pha γ' nhưng với kích thước mịn hơn. Do vậy, trở kháng biến dạng của hợp kim sau khi tái tiết pha sẽ lớn hơn giá trị ở nhiệt độ T_0 ban đầu (trước khi tăng nhiệt).

Ảnh hưởng nêu trên của sự không ổn định cấu trúc khi nhiệt độ biến đổi, có thể mô tả thông qua hai biến nội T_i (xác định một cách tổng quát hàm lượng thể tích pha γ') và r^* (bán kính trung bình của pha phân tán). Các biến nhiệt động học, liên kết với hai biến trên, tương ứng là S_i và R^* . Một số điểm lưu ý dưới đây cho phép xác định và lựa chọn các phương trình biến đổi của các biến :

- Khi nhiệt độ tăng, hàm lượng thể tích pha γ' không đạt ngay trạng thái cân bằng. Hiệu ứng trễ này có thể biểu diễn bởi quan hệ sau :

$$\dot{T}_i = \frac{T - T_f}{\alpha} .$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng T_i có vai trò của nhiệt độ trễ ảo.

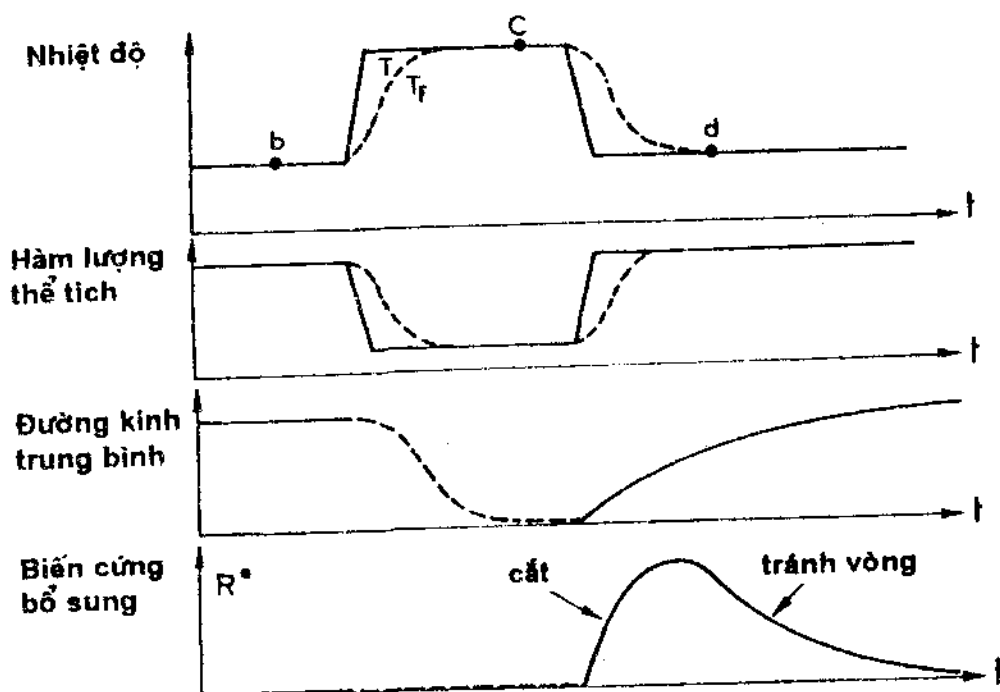
- Một mô hình đơn giản có thể thiết lập trên cơ sở phân tích thế năng tiêu hao φ^* thành tổng của thế năng tiêu hao cho biến dạng dẻo nhất Ω_p (có dạng tương tự như đã trình bày trong các phần trước) và thế năng Ω_i , phụ thuộc vào các biến liên kết với hiện tượng mất ổn định cấu trúc :

$$\Omega_i = \Omega_i(S_i, R^*) .$$

- Kích thước của pha phân tán ảnh hưởng đến quá trình chảy dẻo. Sự khác biệt duy nhất giữa trạng thái hiện thời (trong khi mất ổn định cấu trúc) và trạng thái bình thường (giả ổn định) được tính tới bởi biến R^* , biểu thị mức độ biến cứng bổ sung. Vì ảnh hưởng của kích thước pha phân tán có thể xem như một hiệu ứng đẳng hướng, nên trong hàm Ω_p , ta có thể thay R bởi $(R + R^*)$:

$$\Omega_p = \Omega_p \left[J(\underline{\sigma} - X) - (R + R^*) - k \right] .$$

R^* được giả thiết luôn dương. T_i không ảnh hưởng tới biến cứng nên Ω_p không phụ thuộc vào S_i .



Hình 6.32. Sơ đồ quá trình phân rã - tái kết pha thứ hai (pha phân tán) trong và sau khi tăng nhiệt và hiệu ứng hoá bền tương ứng.

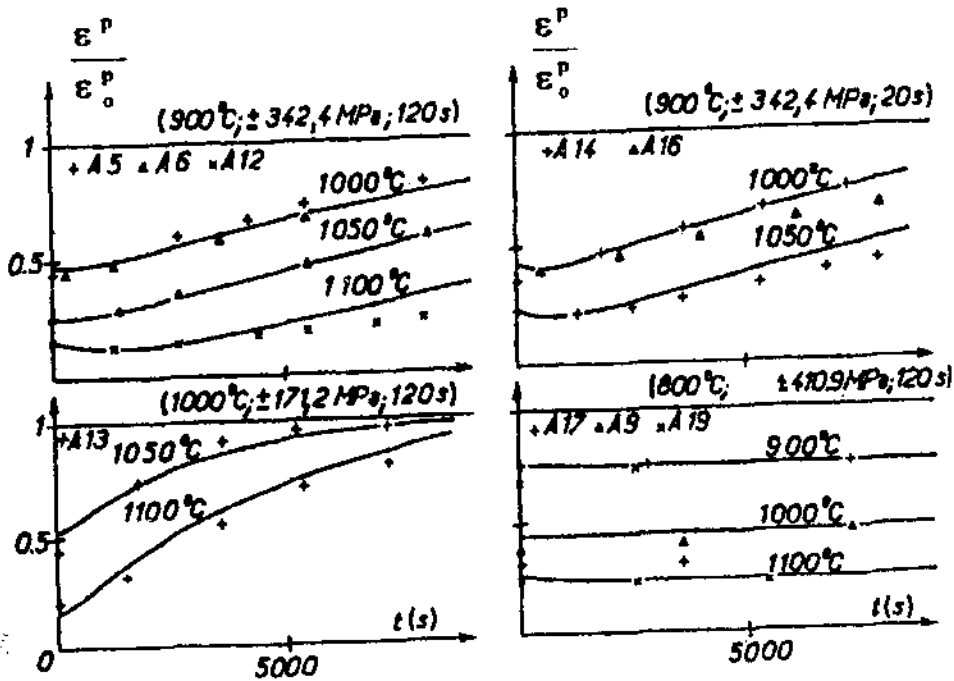
- Biến đổi của R^* trong và sau khi giảm nhiệt độ bao gồm hai giai đoạn: tăng sau đó giảm và trở về trạng thái bình thường (hình 6.32). Các quan sát thực nghiệm và các mô hình vật lý cho thấy hai giai đoạn trên tương ứng với các cơ chế vượt chướng ngại (pha phân tán) khác nhau của lệch (cắt, chạy bao quanh).

Từ cơ sở phương pháp nhiệt động học tổng quát, ta có thể xây dựng các mô hình với độ độ tin cậy thoả mãn yêu cầu. Dạng mô hình đơn giản dưới đây có thể cho kết quả thoả mãn về định tính cũng như định lượng :

$$\dot{T}_f = \frac{T - T_f}{\alpha}$$

$$\dot{R}^* = a(T_f - T) - \frac{R^*}{\beta}, \quad R^* \geq 0.$$

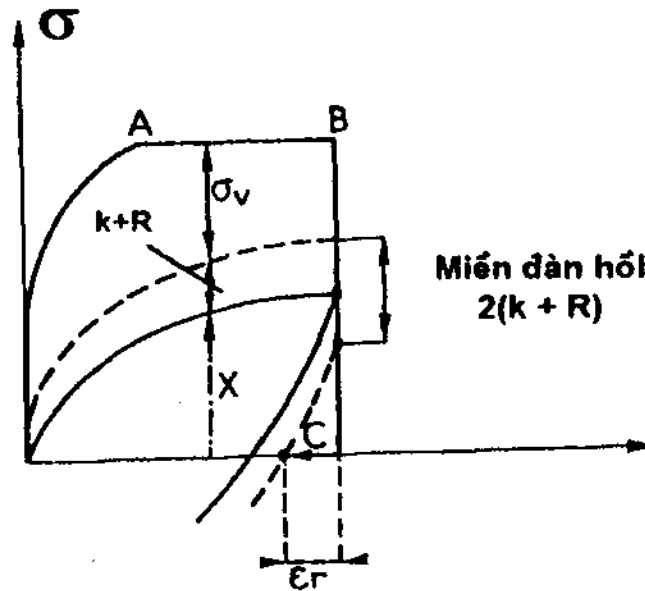
Các hệ số a , α , β phụ thuộc rõ rệt vào nhiệt độ. Hình 6.33 cho thấy kết quả tính toán theo mô hình trên tương hợp tương đối tốt với kết quả thực nghiệm cho hợp kim IN100.



Hình 6.33. Biến cứng của hợp kim IN100 (nhiệt độ thí nghiệm và tải chỉ dẫn ở phía trên mỗi đồ thị, $\Delta\epsilon_0^P$ - biên độ biến dạng dẻo trước khi tăng nhiệt, nhiệt độ xử lý trước khi thí nghiệm chỉ dẫn trên mỗi đường cong).

6.4.4.2. Hiệu ứng hồi biến dạng và phục hồi

Hiệu ứng hồi một phần biến dạng dẻo có thể quan sát thấy ở nhiệt độ cao đối với vật liệu có thuộc tính nhớt mạnh. Sau khi biến dạng (đảo chẳng hạn) và dỡ tải đàn hồi, xảy ra hiện tượng giảm dần của biến dạng dư trong quá trình giữ không tải ở nhiệt độ ổn định. Hiện tượng này có thể mô tả trong mô hình hoá bền động phi tuyến như trình bày trên hình 6.34 : nếu miên đàn hồi ($R + k$) nhỏ, ta có chảy dẻo âm ở ứng suất bằng 0. Biến dạng hồi phục (sau một thời gian nhất định) được chỉ dẫn bởi vị trí của điểm C, tương ứng $\sigma = X - R - k = 0$.



Hình 6.34. Mô tả hiện tượng hồi biến dạng bằng mô hình hoá bền động phi tuyến.

Ngược lại, hiệu ứng hồi phục, thường xảy ra ở nhiệt độ cao, gây nên sự mờ dần của hiệu ứng hoá bền. Dưới tác dụng của biến đổi nhiệt độ, xảy ra quá trình hồi phục chậm của cấu trúc tinh thể gây nên bởi sự triệt tiêu lệch và sự phân bố lại (nói) ứng suất nội. Sự phục hồi này làm cho trở kháng biến dạng của vật liệu giảm đi.

Các phương trình mô tả hiện tượng phục hồi, xét về ứng suất nội, cũng tương tự các quan hệ mô tả quá trình nói ứng suất vĩ mô trong thí nghiệm nói (được biểu diễn theo định luật Norton) :

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = E \left[\dot{\epsilon} - \left(\frac{\sigma}{\lambda^*} \right)^{N^*} \right] = -E \left(\frac{\sigma}{\lambda^*} \right)^{N^*}.$$

Trong trường hợp ứng suất nội, ta có thể viết phương trình dưới dạng tương tự:

$$\dot{\sigma}_i = E_p \left[\dot{\epsilon}^p - \left(\frac{\sigma_i}{\lambda_i} \right)^{N_i} \right],$$

trong đó, thành phần đầu tiên $E_p \dot{\epsilon}^p$ mô tả hiệu ứng hoá bền do biến dạng. Khi $\dot{\epsilon}^p$ nhỏ hay bằng 0, ta có :

$$\hat{\sigma}_i = -E_p \left(\frac{\sigma_i}{\lambda_i} \right)^{N_i}.$$

Các phương trình phục hồi nêu trên có viết cho các biến động học cũng như cho các biến đẳng hướng. Áp dụng hàm thế năng tiêu hao dạng :

$$\varphi^* = \Omega_p(\underline{\sigma}, \underline{X}, R : T, \underline{\alpha}, r) + \Omega_r(\underline{X}, R),$$

trong đó, Ω_p là thế năng tiêu hao cho chảy dẻo và Ω_r là thế năng tiêu hao cho quá trình hồi phục (thế năng hồi phục), có thể có dạng sau :

$$\Omega_r = \frac{A}{a+1} \left[\frac{J(\underline{X})}{A} \right]^{a+1} + \frac{B}{b+1} \left(\frac{R}{B} \right)^{b+1}.$$

Áp dụng các phương trình tổng quát, ta có :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\alpha}} &= \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \frac{3}{2} \frac{\gamma}{C} \underline{X} \dot{p} - \frac{3}{2} \left[\frac{J(\underline{X})}{A} \right]^a \frac{\underline{X}}{J(\underline{X})} \\ \dot{r} &= \dot{p} - \left(\frac{R}{B} \right)^b. \end{aligned}$$

Năng lượng riêng tự do có thể chọn dạng :

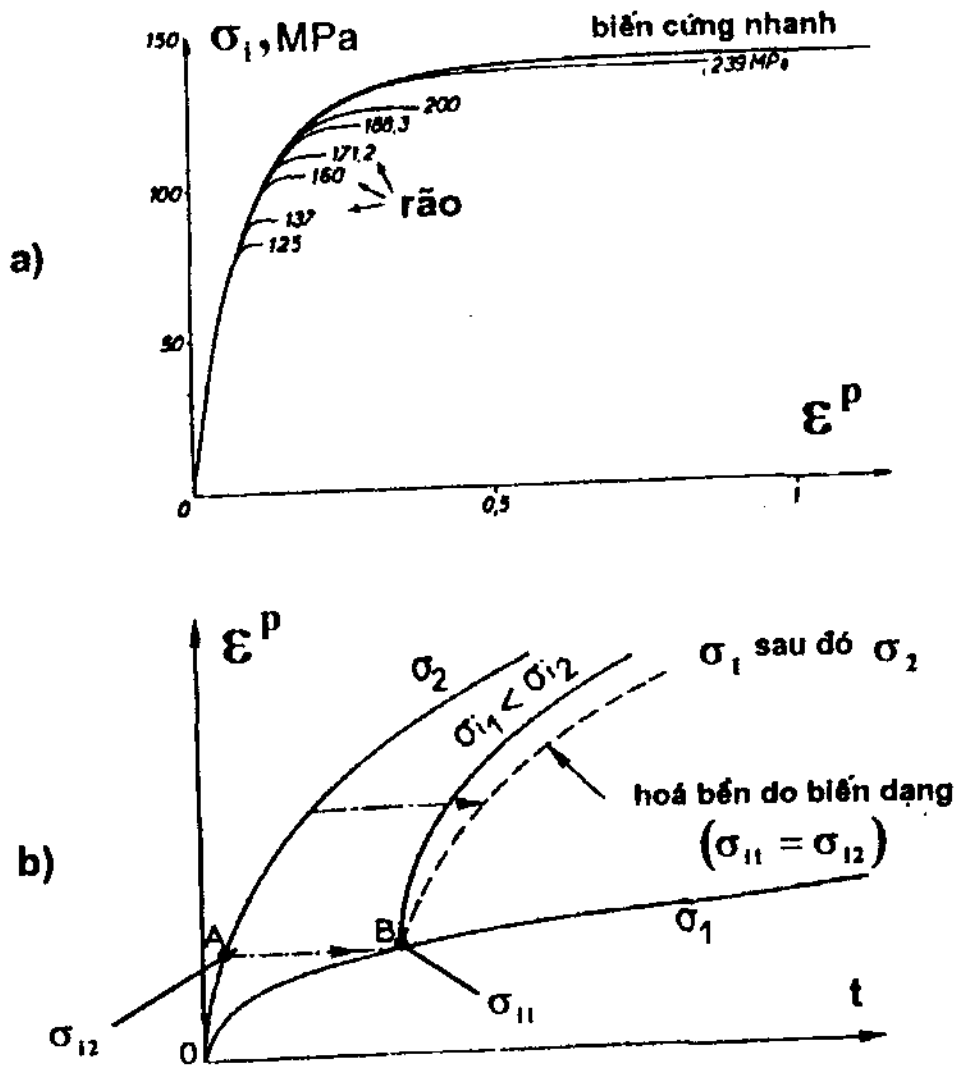
$$\rho \Psi = \rho \Psi_e + \frac{1}{3} C \underline{\alpha} : \underline{\alpha} + h(r)$$

Khi đó ta có :

$$\underline{X} = \frac{2}{3} C \underline{\alpha} \quad \text{và} \quad R = h'(r).$$

Đặt $g(R) = h''(r) = h''[h'^{-1}(R)]$, ta có thể biểu diễn phương trình nêu trên dưới dạng hàm của $\underline{X}$ và R :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{X}} &= \frac{2}{3} C \underline{\dot{\varepsilon}}^p - \gamma \underline{X} \dot{p} - C \left[\frac{J(\underline{X})}{A} \right]^a \frac{\underline{X}}{J(\underline{X})} \\ \dot{R} &= g(R) \dot{p} - g(R) \left(\frac{R}{B} \right)^b. \end{aligned}$$

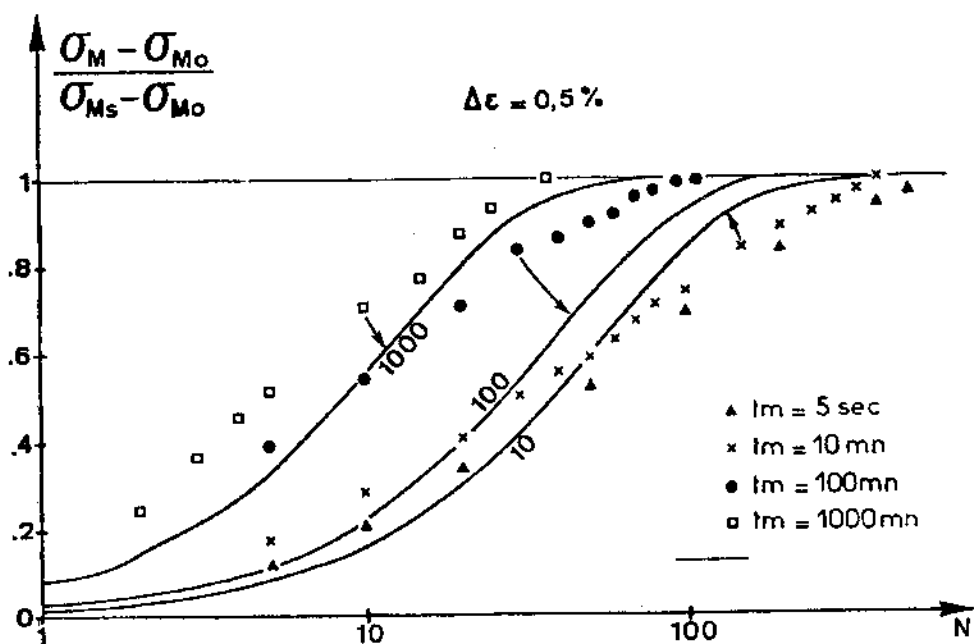


Hình 6.35. Ảnh hưởng của phức hồi đến sự biến đổi của ứng suất nội trong thí nghiệm dao (a) và ảnh hưởng trực tiếp của phức hồi đến quá trình chảy dao ở mức thứ hai (b) .

Các phương trình trên có thể mô tả không chỉ hiệu ứng hồi phục mà cả một vài ảnh hưởng khác của lịch sử chất tải như thường quan sát thấy trong các thí nghiệm chảy dao hai mức (hiệu ứng tăng tốc và hiệu ứng do dự trong chảy dao). Hình 6.35 trình bày sơ đồ mô tả trường hợp thí nghiệm dao với hai mức ứng suất : cho cùng một biến dạng như nhau, trạng thái ứng suất nội sẽ không như nhau dưới tác dụng của ứng suất σ_1 và σ_2 , bởi lẽ tỷ lệ giữa thành phần hoá bền (theo ϵ^p hay p) và thành

phân phục hồi không như nhau cho mỗi mức ứng suất tác dụng. Mức thứ hai bắt đầu với ứng suất nội σ_{i1} thấp hơn ứng suất nội σ_{i2} lẽ ra tồn tại (cho cùng một biến dạng) với ứng suất tác dụng σ_2 (thí nghiệm một mức với ứng suất tác dụng σ_2), điều đó gây nên hiệu ứng tăng tốc so với trường hợp hoá bền do biến dạng (không có phục hồi).

Hiệu ứng do dự trong chảy dẻo, khi $\sigma_2 < \sigma_1$, có thể được giải thích cũng bởi các nguyên nhân tương tự: ban đầu ta có $\sigma_{i1} > \sigma_{i2}$, do vậy, khi chuyển mức ứng suất tác dụng, sự phóng toả chảy dẻo sẽ mất dần do hồi phục (σ_i giảm dần từ σ_{i1} đến σ_{i2}). Lưu ý rằng, hiệu ứng phục hồi cũng gây nên sự thuyên giảm của lũy thừa nhớt khi tốc độ biến dạng nhỏ.



Hình 6.36. Ảnh hưởng của phục hồi đến biến cứng chu kỳ của thép 316 ở 600 °C.

Trong trường hợp chất tải chu kỳ với thời gian giữ ở biến dạng không đổi (xem 6.2.6), ta thấy, biên độ ứng suất của chu kỳ giảm khi thời gian giữ t_m tăng, trong khi đó biên độ biến dạng và tốc độ biến dạng cố định trong suốt quá trình chuyển tiếp (hình 6.26-b). Hiện tượng nêu trên chỉ có thể giải thích bởi ảnh hưởng của quá trình hồi phục đến biến dạng hướng. Áp dụng phương trình đơn giản dạng :

$$\dot{R} = b(Q - R)p - \beta(R - Q_r) ,$$

ta xác định được R cho chu kỳ ổn định :

$$R_s = \frac{2bQ\Delta\epsilon^p + \beta Q_r t_m}{2b\Delta\epsilon^p + \beta t_m}.$$

và phương trình biến đổi của cực trị ứng suất :

$$\frac{\sigma_M - \sigma_{M0}}{\sigma_{Ms} - \sigma_{M0}} \approx \frac{R}{R_s} = 1 - e^{-(2b\Delta\epsilon^p + \beta t_m)N}$$

Với dạng đơn giản nêu trên, ta đã có được sự tương hợp tương đối tốt với kết quả thực nghiệm như trình bày trên hình 6.36 (nếu không có hiệu ứng phục hồi, đường cong biến đổi của cực trị ứng suất sẽ là duy nhất).

6.4.4.3. Ảnh hưởng của hoá già

So với ảnh hưởng của phục hồi, ảnh hưởng của hoá già có ba đặc điểm cơ bản sau :

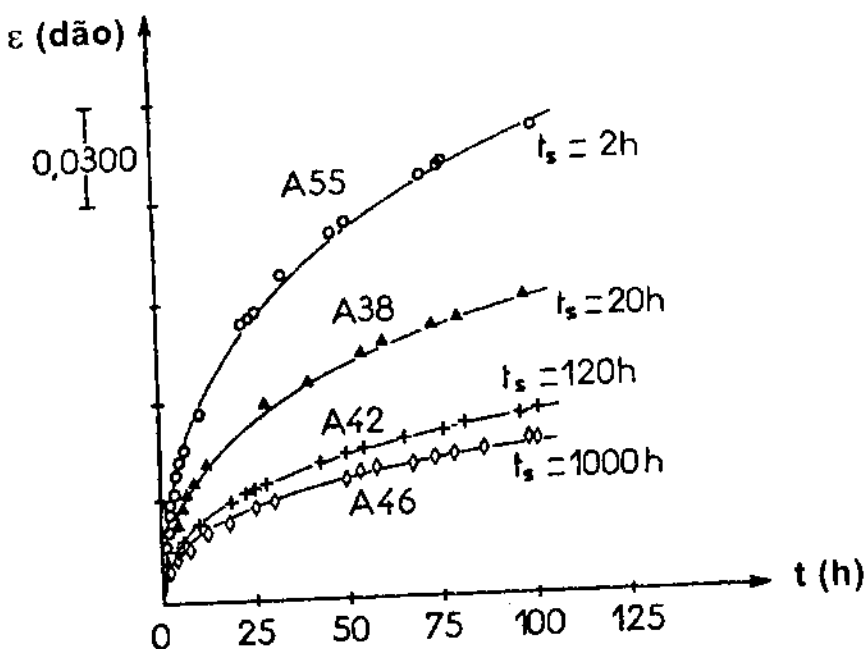
- Có thể xảy ra cả trong trường hợp không có biến dạng dẻo trước;
- Quá trình hoá già tương ứng với sự không ổn định cấu trúc (cấu trúc của vật liệu biến đổi theo thời gian);
- Hoá già thường gây nên sự biến cứng của vật liệu.

Hoá già là hiện tượng nhiệt hoạt, xảy ra nhanh ở nhiệt độ cao. Tuy nhiên, ảnh hưởng của hoá già đến tính chất cơ học của vật liệu chỉ có ý nghĩa (đối với mô hình hoá) ở miền nhiệt độ trung gian, trong đó, sự biến đổi của cấu trúc vi mô xảy ra trong khoảng thời gian cùng bậc với thời gian tác động cơ học.

Nguyên nhân của sự không ổn định cấu trúc có thể đa dạng : chuyển biến pha, tiết pha phân tán, tiết pha trên ranh giới hạt, sự lớn lên và hợp dính của các hạt pha phân tán, kết tinh lại. Các nguyên nhân này có thể kết hợp hoặc không với cơ chế biến dạng. Trong trường hợp hiệu ứng biến cứng phụ thuộc nhiều vào biến dạng hay tốc độ biến dạng, ta có hiệu ứng hoá già động.

Hình 6.37 trình bày ảnh hưởng của thời gian giữ ở cùng một nhiệt độ (xử lý nhiệt trước biến dạng) đến biến dạng chảy dẻo giai đoạn I của thép không gỉ 304 .

Thông qua sự giảm đi của biến dạng dẻo khi thời gian giữ nhiệt tăng, ta thấy rằng, thời gian hoá già có ảnh hưởng rõ rệt đến biến cứng của vật liệu.



Hình 6.37. Ảnh hưởng của thời gian hoá già, t_s , đến biến dạng chảy dẻo giai đoạn I của thép không gỉ 304 ở 593 °C.

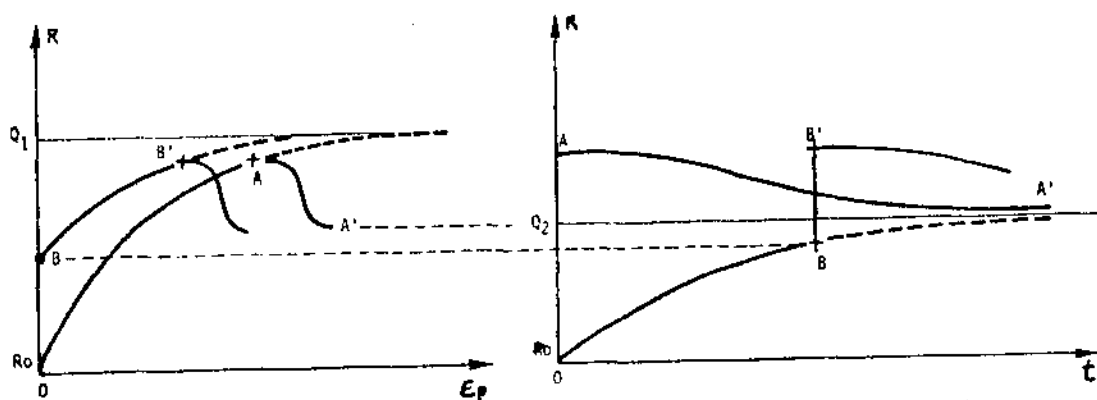
Còn rất ít kết quả nghiên cứu về mô hình hoá thuộc tính cơ học của vật liệu trong quá trình hoá già. Ta hạn chế dưới đây ở mô hình với biến hoá bền đẳng hướng :

$$\dot{R} = b(Q_1 - R)\dot{p} + \beta(Q_2 - R) \cdot$$

Mô hình này thể hiện sự kết hợp giữa hoá bền do biến dạng và hoá bền do thời gian. Nếu tốc độ biến dạng lớn, thành phần đầu tiên, biểu thị hoá bền do biến dạng, sẽ chiếm ưu thế. Nếu tốc độ biến dạng bằng 0 hoặc nhỏ, sẽ chỉ có hoá bền do thời gian tham gia vào quá trình.

Tuỳ theo giá trị so sánh của Q_1 , Q_2 , R_0 (giá trị ban đầu của R), ta có hiệu ứng hồi phục hay hoá già (biến cứng theo thời gian). Ví dụ, với $Q_1 > Q_2 > R_0$ hình 6.38 mô tả trường hợp thứ kéo nhanh (đường cong hoá bền OA phụ thuộc vào biến

dạng), tiếp theo là thử đảo (kết hợp giữa hai hiệu ứng, sau đó hiệu ứng hồi phục theo thời gian chiếm ưu thế vì $R_A > Q_2$ (đường cong AA')). Trong trường hợp vật liệu qua xử lý hoá già trước (đường cong OB), tiếp theo là biến dạng kéo nhanh ở cùng nhiệt độ, ảnh hưởng của biến cứng ban đầu được thể hiện bởi đường cong BB' (so sánh với đường cong OA).



Hình 6.38. Biến đổi của biến hoá bền trong trường hợp thí nghiệm kéo nhanh và thí nghiệm chảy dẻo kế tiếp :

a) phụ thuộc vào biến dạng ; b) phụ thuộc vào thời gian .

6.4.4.4. Hỗn hợp dẻo tức thời-dẻo nhớt

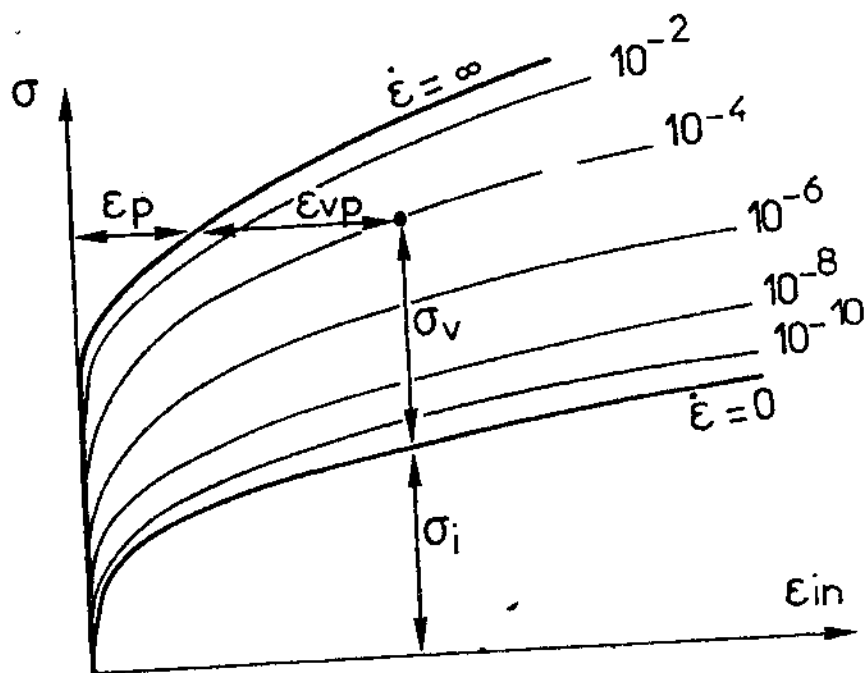
Để tính tới biến dạng nhanh (tức thời), trong khi chất tải, đồng thời với biến dạng chậm trong quá trình chảy dẻo, ta có thể áp dụng phương pháp phân tách biến dạng tổng thành các thành phần như sau :

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^m = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^p + \underline{\epsilon}^{vp},$$

trong đó $\underline{\epsilon}^e, \underline{\epsilon}^p, \underline{\epsilon}^{vp}$ tương ứng biến dạng đàn hồi, biến dạng dẻo tức thời và biến dạng dẻo nhớt.

Trong khi chất tải, sau khoảng thời gian rất ngắn, vật liệu biến dạng dẻo tức thời với mức độ đáng kể. Trong khi đó, một khoảng thời gian rất dài chỉ gây nên biến dạng chảy dẻo rất nhỏ. Dường như tồn tại hai thang đo thời gian khác nhau cho hai

quá trình khác nhau. Tuy nhiên, nhiều kết quả thực nghiệm cho thấy, hai loại biến dạng dẻo xảy ra đồng thời.



Hình 4.39. Mô tả đường cong hoá bền với tốc độ biến dạng khác nhau bằng sự kết hợp giữa lý thuyết dẻo tức thời và dẻo nhớt.

Biến dạng dẻo tức thời tuân theo các định luật trình bày trong chương 5, biến dạng dẻo nhớt - theo lý thuyết trình bày trong chương này. Với V_k là các biến trạng thái biểu thị sự hoá bền của vật liệu và A_k là các biến nhiệt động học liên kết với chúng, các phương trình tổng quát mô tả thuộc tính hỗn hợp (dẻo tức thời và dẻo nhớt) có dạng sau :

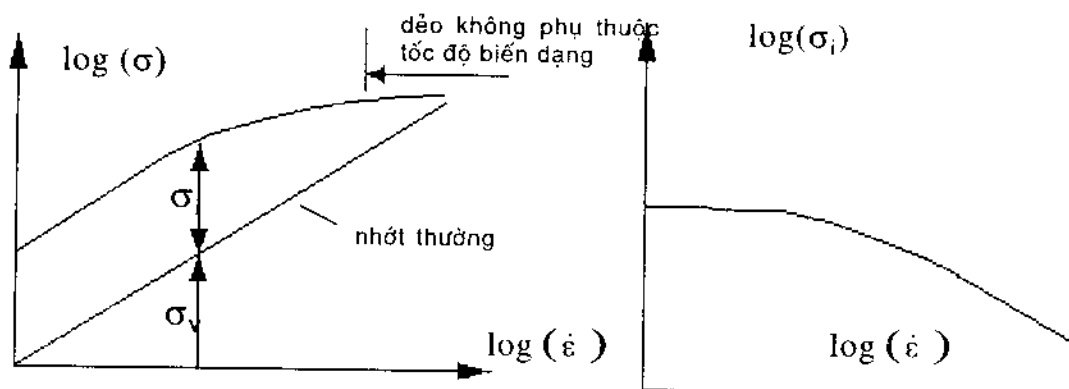
$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^{in} &= \dot{\epsilon}^v + \dot{\epsilon}^{vp} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} \\ \dot{V}_k &= -\lambda \frac{\partial f}{\partial A_k} - \frac{\partial \Omega}{\partial A_k},\end{aligned}$$

trong đó, các thế năng f và Ω phụ thuộc vào $\underline{\sigma}$ và A_k . Hoá bền do biến dạng dẻo tức thời sẽ ảnh hưởng đến tốc độ biến dạng dẻo nhớt và ngược lại. Hệ số nhân dẻo xác

định từ điều kiện tương thích (chảy dẻo liên tục) của biến dạng dẻo tức thời : $f = \dot{f} = 0$. Lưu ý rằng, λ cũng phụ thuộc vào tốc độ biến dạng dẻo nhất thông qua $\partial\Omega/\partial A_k$:

$$\lambda = \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\underline{\sigma}} - \frac{\partial f}{\partial \Lambda_i} \frac{\partial \Lambda_i}{\partial V_k} \frac{\partial \Omega}{\partial A_k} \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial A_i} \frac{\partial V_k}{\partial V_k} \frac{\partial f}{\partial A_k}}$$

Hiệu ứng kết hợp nêu trên có thể được mô tả thông qua thí nghiệm kéo (hình 6.39). Đường cong trên cùng tương ứng với biến dạng dẻo tức thời. Đó chính là đường cong kéo với tốc độ biến dạng vô cùng. Như vậy, hướng tới tốc độ biến dạng bằng 0 ta có đường cong kéo tới hạn, xác định bởi ứng suất nội σ_i , hướng tới tốc độ biến dạng vô cùng - theo đường cong dẻo tức thời.



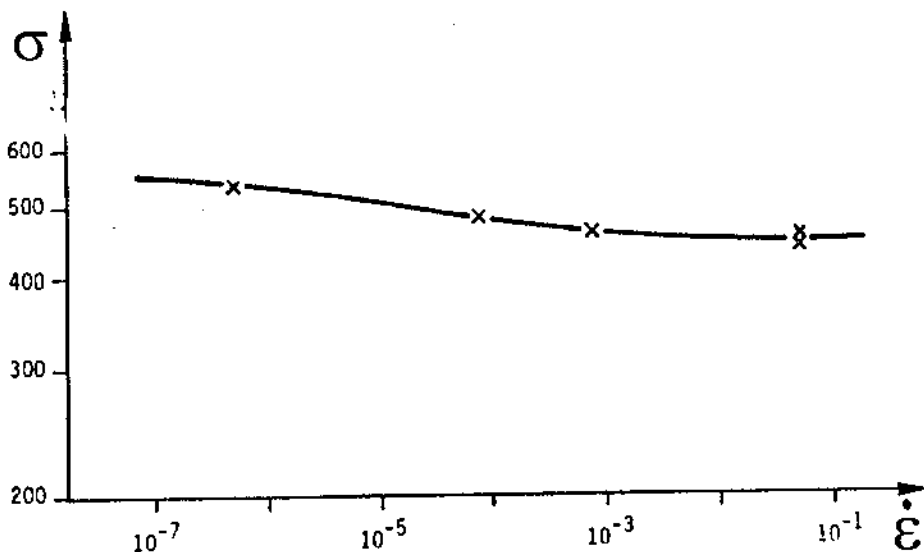
Hình 6.40. Tổ hợp của hiệu ứng nhớt và hiệu ứng hoá già có thể dẫn đến thuộc tính biểu kiến không phụ thuộc tốc độ biến dạng .

Có thể áp dụng một phương pháp khác cho phép tính tới hai thang đo thời gian nêu trên. Ta không xét biến dạng dẻo tức thời, nhưng đưa cả hai thang thời gian vào phương trình hoá bền bằng cách kết hợp hoá bền do biến dạng với hoá bền do thời gian:

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{\text{in}} = \dot{\underline{\epsilon}}^{\text{vp}} = \frac{\partial \Omega_{\text{vp}}}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$\dot{V}_k = -\frac{\partial \Omega}{\partial A_k} = -\frac{\partial \Omega_{\text{vp}}}{\partial A_k} - \frac{\partial \Omega_{\text{el}}}{\partial A_k}.$$

Cách tiếp cận nói trên dẫn đến các mô hình tương tự như đã trình bày trong 6.4.2 và 6.4.3. Ở đây, hiệu ứng hoá già đã tham gia cạnh tranh cùng hiệu ứng nhót để, trong một miền nào đó, làm mất đi ảnh hưởng của tốc độ biến dạng. Hình 6.40 minh hoạ sự kết hợp nói trên trong trường hợp thử kéo với tốc độ biến dạng không đổi (cho cùng một biến dạng) : ứng suất nội, tăng dần theo thời gian, càng lớn khi tốc độ biến dạng càng nhỏ. Ứng suất tác dụng là tổng của ứng suất nội σ_i và ứng suất nhót σ_v (hàm lũy thừa của $\dot{\epsilon}$). Ta thấy rằng, xu thế tiến tới song song với trục hoành của đường cong thử kéo, khi tốc độ biến dạng tăng, chỉ là biểu kiến. Ta cũng có thể nhận được hiệu ứng nghịch đảo của tốc độ (lũy thừa nhót biểu kiến có giá trị âm) như đã quan sát thấy đối với một vài vật liệu (hình 6.41).



Hình 6.41. Hiệu ứng nghịch đảo của tốc độ biến dạng, quan sát được đối với thép không gỉ 18-10 biến dạng trong môi trường nitơ lỏng.

6.5. VÍ DỤ THAM KHẢO : XÂY DỰNG MÔ HÌNH ỨNG XỬ CỦA KIM LOẠI VÀ HỢP KIM BIẾN DẠNG Ở TRẠNG THÁI NÓNG

Gần 80% kim loại và hợp kim được tạo hình ở trạng thái nóng với các phương pháp công nghệ như cán, rèn, dập, ép chảy, Các quá trình này thường không đẳng nhiệt và được đặc trưng bởi biến dạng rất lớn với tốc độ biến dạng cao ($10^{-3} \div 10^4 \text{ s}^{-1}$).

Hành vi của kim loại trong quá trình biến dạng nóng phức tạp. Động lực học của quá trình biến dạng phụ thuộc rõ rệt vào tốc độ biến dạng và nhiệt độ. Thêm vào đó, cấu trúc của vật liệu khi gia công cũng biến đổi do ảnh hưởng của các quá trình vật lý có thể xảy ra như hoá bền, kết tinh lại và hồi phục động. Do vậy, việc xây dựng mô hình biểu diễn sự biến đổi hành vi của vật liệu trong mối quan hệ đầy đủ với các hiện tượng vật lý xảy ra trong quá trình biến dạng là một điều phức tạp và khó khăn, đặc biệt trong thực nghiệm nhận dạng mô hình.

Tuy nhiên các kết quả nghiên cứu thực nghiệm cho thấy, đối với đa số kim loại và hợp kim biến dạng ở nhiệt độ cao hơn 1/3 nhiệt độ nóng chảy tuyệt đối, hoá bền gần như cân bằng với phục hồi, các đường cong ứng suất – biến dạng ở trạng thái ổn định thể hiện thuộc tính dẻo nhớt lý tưởng, biến dạng đàn hồi không đáng kể so với biến dạng tổng.

6.5.1. Các giả thiết cơ bản

Để đơn giản cho việc thiết lập, nhận dạng và ứng dụng mô hình, căn cứ vào các quan sát thực tế và phân tích nêu trên, ta sẽ xây dựng mô hình ứng xử của kim loại và hợp kim ở trạng thái nóng với các giả thiết cơ bản sau đây :

- Vật liệu có thuộc tính dẻo nhớt lý tưởng và đẳng hướng;
- Bỏ qua biến dạng đàn hồi. Khi đó, tốc độ biến dạng được tính như sau :

$$\underline{D} = \underline{D}^D = (\text{grad} \underline{v})^{\text{sym}},$$

trong đó, $\underline{D}$ - tenxơ tốc độ biến dạng tổng; $\underline{D}^D$ - tenxơ tốc độ biến dạng dẻo; $\underline{v}$ - vectơ tốc độ chuyển vị; $(\text{grad} \underline{v})^{\text{sym}}$ - phần đối xứng của gradient tốc độ chuyển vị.

- Vật liệu không nén được:

$$\text{div}(\underline{v}) = 0 \quad \text{hay} \quad \text{Tr}(\underline{D}) = 0 ;$$

Tồn tại hàm thế năng tiêu hao Ω cho quá trình biến dạng dẻo, phụ thuộc vào ứng suất và nhiệt độ, $\Omega = \Omega(\underline{\sigma}, T)$.

6.5.2. Phương trình thuộc tính

Từ giả thiết vật liệu đẳng hướng và không nén được, ta có thể viết biểu thức thế năng tiêu hao dưới dạng sau :

$$\Omega = \Omega(J_2, T) ,$$

trong đó, J_2 bất biến bậc hai của tenxơ ứng suất lệch $\underline{\sigma}'$, $J_2 = \frac{1}{2}(\underline{\sigma}' : \underline{\sigma}')$ với $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\underline{\sigma}).\underline{1}$.

Một trong những tổ hợp của J_2 được biểu diễn dưới dạng ứng suất tương đương Von-Mises, σ_{eq} :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \left[\frac{3}{2}(\underline{\sigma}' : \underline{\sigma}') \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Như vậy, thế năng tiêu hao có thể biểu diễn dưới dạng hàm của σ_{eq} :

$$\Omega = \Omega\{\sigma_{eq}(J_2), T\} .$$

Áp dụng định luật chảy dẻo pháp tuyến, ta có :

$$\underline{D}^p = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\sigma}'} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{3}{2} \frac{\underline{\sigma}'}{\sigma_{eq}} . \tag{1}$$

Để xác định giá trị và ý nghĩa và giá trị của thành phần $\partial \Omega / \partial \sigma_{eq}$, ta giả thiết tồn tại tốc độ biến dạng tương đương D_{eq} đối với ứng suất tương đương σ_{eq} , thỏa mãn điều kiện tương đương năng lượng tiêu hao :

$$\underline{D}^p : \underline{\sigma}' = D_{eq} . \sigma_{eq} .$$

Thay các giá trị tương ứng vào phương trình này, ta được :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{eq}} \underline{\sigma}' : \underline{\sigma}' = D_{eq} \sqrt{\frac{3}{2}(\underline{\sigma}' : \underline{\sigma}')_2} .$$

Từ đó ta có :

$$D_{eq} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{eq}} . \tag{2}$$

Cuối cùng, thay (2) vào (1), ta nhận được phương trình thuộc tính sau :

$$\underline{\sigma'} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}}{D_{eq}} \underline{D^p}, \quad (3)$$

hay :

$$\underline{\sigma'} = 2\mu \underline{D^p}, \quad (4)$$

với $\mu = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{eq}}{D_{eq}}$ đặc trưng cho độ nhớt của vật liệu. Biểu thức (5) thể hiện mối quan hệ giữa ứng suất và tốc độ biến dạng, tương tự phương trình thuộc tính của chất lỏng phi Newton.

Biểu thức (5) chỉ xác định khi biết hệ số nhớt μ , hay cụ thể hơn, mối quan hệ giữa σ_{eq} và D_{eq} :

$$D_{eq} = D_{eq}(\sigma_{eq}, T).$$

Một trong các biểu thức biểu thị mối quan hệ trên, được Garofalo đề xuất cho biến dạng chảy dẻo và được áp dụng rộng rãi cho đa số kim loại và hợp kim biến dạng ở nhiệt độ cao, có dạng :

$$D_{eq} = \xi \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) [\sinh(\alpha \sigma_{eq})]^n, \quad (5)$$

trong đó, Q là năng lượng kích hoạt (hoạt năng) biến kiến, R là hằng số khí lý tưởng, ξ , α , n là các hệ số đặc trưng của vật liệu, T là nhiệt độ (K). Biểu thức (5) là phương trình bổ sung cho phương trình cơ bản (3). Hai phương trình (3) và (5) cấu thành mô hình ứng xử (thuộc tính) của kim loại và hợp kim biến dạng ở nhiệt độ cao.

6.5.3. Nhận dạng mô hình

Nhận dạng mô hình có nghĩa là xác định giá trị của các hệ số đặc trưng cho vật liệu là Q , ξ , α và n trong phương trình chảy dẻo (5), khi mô hình được áp dụng cho một vật liệu cụ thể.

Để nhận dạng phương trình (5), ta có thể áp dụng phương pháp qui hồi phi tuyến. Tuy nhiên, phương pháp này phức tạp và không phải trường hợp nào cũng cho kết quả. Để có thể áp dụng phương pháp qui hồi tuyến tính, dưới đây trình bày một

phương pháp đơn giản, trên cơ sở tuyến tính hoá phương trình chảy dẻo cho hai vùng ứng suất cao và thấp.

Đối với vùng ứng suất thấp, phương trình (5) có thể đưa về dạng gần đúng sau:

$$D_{eq} \approx \xi (\alpha \sigma_{eq})^n \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right). \quad (6)$$

Đối với vùng ứng suất cao, phương trình (5) sẽ có dạng gần đúng :

$$D_{eq} \approx \xi \left(\frac{e^{\alpha \sigma_{eq}}}{2}\right)^n \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right). \quad (7)$$

Tuyến tính hoá (6) và (7) bằng cách lấy logarit hai vế của phương trình, ta có tương ứng :

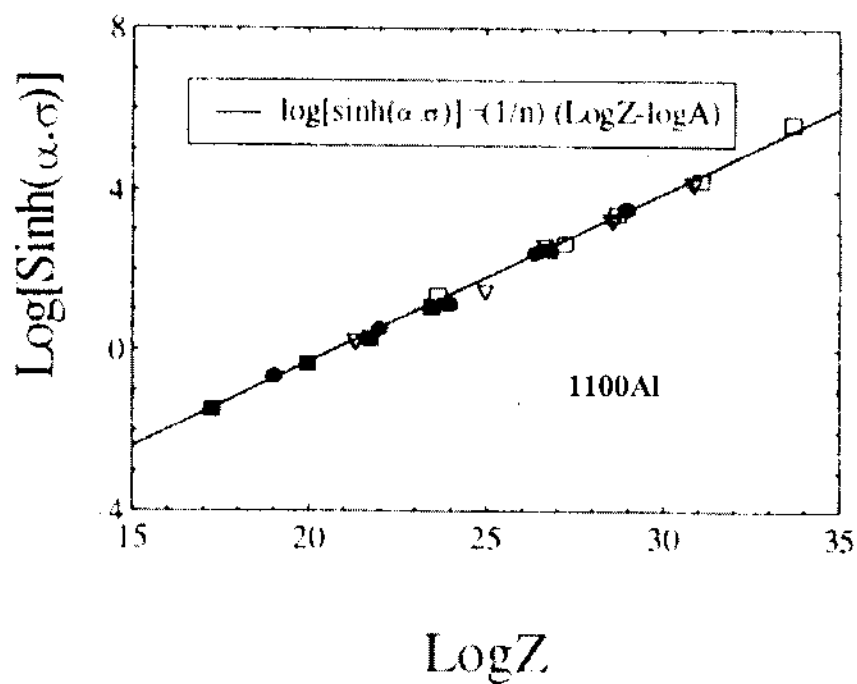
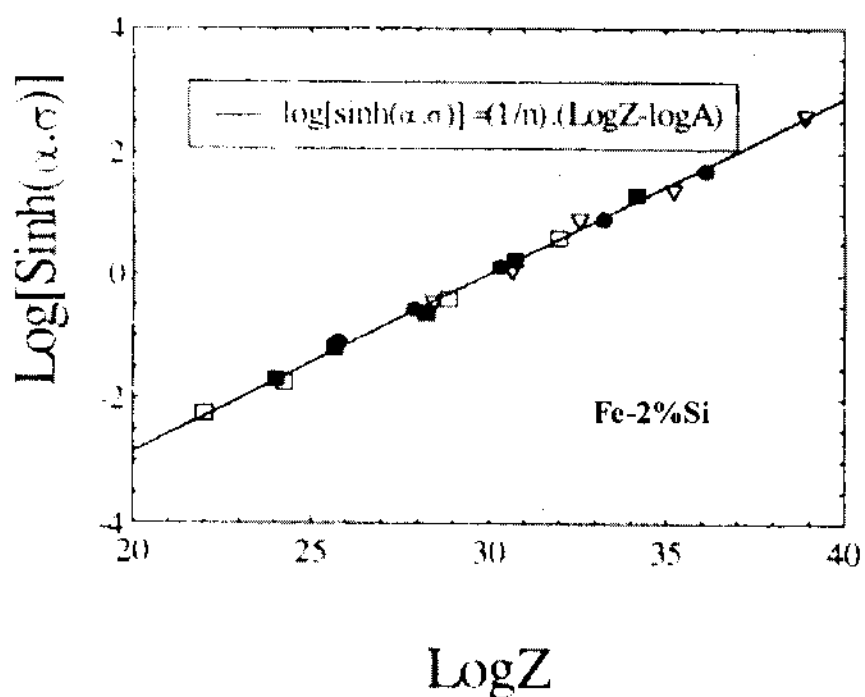
$$\ln D_{eq} \approx n \ln \sigma_{eq} + \left(\ln \xi + n \ln \alpha - \frac{Q}{RT} \right). \quad (8)$$

$$\ln D_{eq} \approx n \alpha \sigma_{eq} + \left(\ln \xi - n \ln 2 - \frac{Q}{RT} \right). \quad (9)$$

Để xác định các hệ số, ta cần tiến hành các thí nghiệm kéo (hoặc nén) đơn ($\sigma_{eq} = \alpha$, $D_{eq} = \dot{\epsilon}$) ở các nhiệt độ và tốc độ biến dạng khác nhau. Số liệu cần thiết cho tính toán các hệ số là các giá trị của ứng suất ứng với từng nhiệt độ và tốc độ biến dạng cho trước.

Với các số liệu thực nghiệm đã có, từ (8) và (9), bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính, ta xác định được giá trị của n và α . Tiếp theo, thay n và α đã biết vào phương trình (5), ta đã có thể tính được thành phần phi tuyến $[\sinh(\alpha \sigma)]^n$ và tuyến tính hoá được phương trình này. Cũng bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất tuyến tính, ta xác định được giá trị của Q , và ξ .

Việc hiệu chỉnh giá trị của n được tiến hành bằng cách tính lại giá trị của hệ số này từ (8) hoặc (9) với các giá trị của Q và ξ vừa tính được. Nếu sai số của n giữa hai lần tính không vượt quá giá trị cho phép, ta có thể chấp nhận kết quả nhận dạng. Còn trong trường hợp ngược lại, giá trị mới của n sẽ được nhận để tính lại Q , ξ , và quá trình tính toán sẽ tiếp tục tương tự cho đến khi đạt được yêu cầu mong muốn.



Hình 6.42. Quan hệ giữa $\log[\sinh(\alpha\sigma)]$ và $\log Z$.

Áp dụng cho thép Fe-2%Si và nhôm (1100Al) trong điều kiện nhiệt độ và tốc độ biến dạng như sau :

đối với Fe-2%Si: $T = 623 \div 873 \text{ }^{\circ}\text{K}$, $\dot{\epsilon} = 0.001 \div 1.0 \text{ s}^{-1}$

đối với 1100Al : $T = 1073 \div 1473 \text{ K}$, $\dot{\epsilon} = 0.001 \div 1.0 \text{ s}^{-1}$

ta nhận được các kết quả nhận dạng sau đây :

Hệ số	Fe-2%Si	1100Al
ξ	$0,568 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$	$0,485 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$
α	$0,028 \text{ MPa}^{-1}$	$0,16 \text{ MPa}^{-1}$
N	4,06	2,36
Q	340,2 kJ/mol	167,86 kJ/mol

Trên hình 6.42 trình bày quan hệ giữa $\log[\sinh(\alpha\sigma)]$ và $\log Z$, trong đó Z là tốc độ biến dạng mở rộng hay thông số Zener-Hollomon, $Z = \dot{\epsilon} \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)$, cho hai loại vật liệu nêu trên. Sự tương hợp giữa các điểm thực nghiệm, ở mọi nhiệt độ và tốc độ biến dạng, và đường mô phỏng chứng tỏ tính hợp lý của các giả thiết về thuộc tính của vật liệu và độ tin cậy của kết quả nhận dạng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Germain P., Muler P.*, Introduction à la mécanique des milieux continus, Masson, 1980.
2. *Malvern L. E.*, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice Hall, 1969.
3. *Bamberger Y.*, Mécanique de l'ingénieur, II : Milieux déformables, Hermann, 1981.
4. *Mandel J.*, Propriétés mécaniques des matériaux, Eyrolles, 1978.
5. *Billington E. W., Tate A.*, The Physics of Deformation and Flow, McGraw-Hill, New York, 1981.
6. *Lemaitre J., Chaboche J.-L.*, Mécanique des matériaux solide, Bordas, Paris, 1985.
7. *Francois D., Pineau A., Zaoui A.*, Comportement mécanique des matériaux, Vol. 1+2, Hermès, Paris, 1993.
8. *Ashby M. F., Jones D. R.H.*, Engineering Materials 1: An introduction to their Properties and Application, Pergamon Press, 1989.
9. *Argon A.S.*, Constitutive Equations in Plasticity, MIT Press, 1975.
10. *Radenkovic D., Salecon J.*, Plasticity and Viscoplasticity, Ediscience - McGraw Hill, 1974.
11. *Padmanabhan K. A., Davies G. J.*, Superplasticity, Springer-Verlag, 1980.
12. *Sellars C.M., McGearty*, Hot Workability, Metall. Rev., 17, 1972, p.1.
13. *McQueen H.J. and Jonas J.J.*, Recovery and Recrystallization during High Temperature Deformation, Treatise on Materials Science and Technology, Academic Press, New York, 6, 1975, p.231.
14. *Almasan C., Danu D., Rosu I.*, Rev. Roum. Sci. Tech.-Mech. Appl., 26, N°2, Bucarest, 1981, p.249.
15. *T. Giang Nguyen, M. Suery, D. Favier*, Mechanical Behaviour of Semi-Solid Alloys under Drained Compression with Lateral Pressure, Proc. 2nd International Conference on the processing of Semi-Solid Alloys and Composites, S.B. Brown and M.C. Flemings (Ed.), MIT, Boston, USA, April 1992.

16. *T. Giang Nguyen, D. Favier, M. Suery and D. Bouvard*. Modelling of Thermomechanical Behaviour of Semi-Solid Metal, "Constitutive Laws for Engineering Materials", C.S. Desai, E. Krempl, G. Frantziskonis, H. Saadatmanesh (Ed.), ASME Press, 1992.
17. *Nguyễn Trọng Giảng, Phạm Văn Cường*. Mô hình ứng xử của hỗn hợp bột kim loại biến dạng ở trạng thái nguội, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, N° 23+24, 2000, pp. 55-58.
18. *Nguyễn Trọng Giảng, Phạm Văn Cường, Nguyễn Trọng Đức*, Nhận dạng một mô hình ứng xử của hỗn hợp bột kim loại biến dạng ở trạng thái nguội, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, N° 25+26, 2000, pp. 74-79.
19. *Nguyễn Trọng Giảng, Đào Minh Ngừng, Lê Thái Hùng*, Mô hình hoá ứng xử đàn-dẻo dị hướng trong biến dạng lớn, Tạp chí Khoa học & Công nghệ, N°37, 2002, pp. 146-153.
20. *Nguyen Trong Giang, Nguyen Duc Trung, Nguyen Tat Tien*, A Model for Deformation of Metals and Alloys at High Temperatures, Proc. 5th National Conference on Solid Mechanics, Hanoi, November 1996.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

THUỘC TÍNH CƠ HỌC CỦA VẬT RẮN

Tác giả ✎ Nguyễn Trọng Giảng

Chịu trách nhiệm xuất bản : PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập : ThS. NGUYỄN HUY TIẾN
Sửa bài : NGỌC LINH
Trình bày bìa : HƯƠNG LAN

**NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70, TRẦN HƯNG ĐẠO – HÀ NỘI**

In 700 cuốn, khổ 19 x 27cm, tại Xí nghiệp in 19 - 8 số 3
đường Nguyễn Phong Sắc - Nghĩa Tân - Cầu Giấy - Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 113-35 - 17/10/2003
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2004.

204042



Giá: 46 .000đ