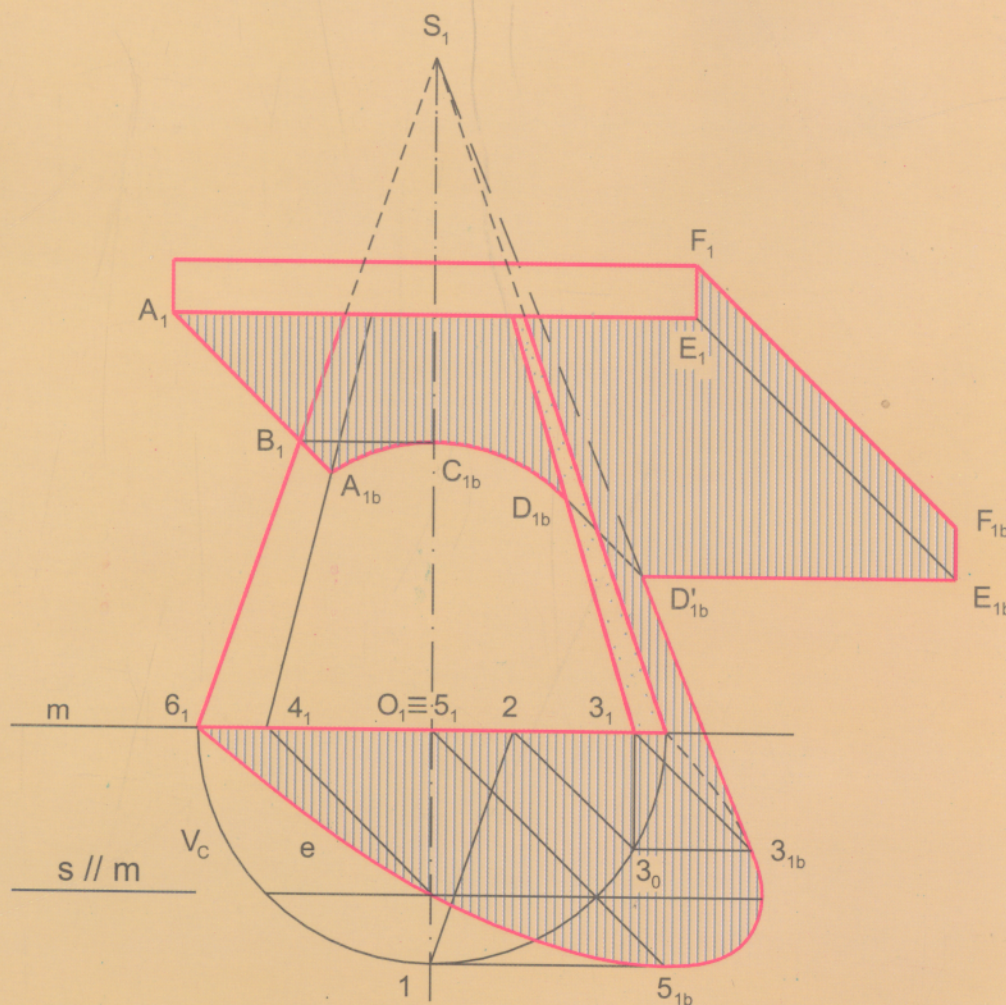


HOÀNG VĂN THÂN (*chủ biên*)

DƯƠNG TIẾN THỌ, ĐOÀN NHƯ KIM, NGUYỄN VĂN TUẤN

VỀ BÓNG

TRÊN BẢN VẼ KIẾN TRÚC



NHÀ XUẤT BẢN
XÂY DỰNG

HOÀNG VĂN THÂN (*chủ biên*)
DƯƠNG TIẾN THỌ, ĐOÀN NHƯ KIM, NGUYỄN VĂN TUẤN

VẼ BÓNG TRÊN BẢN VẼ KIẾN TRÚC

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2003

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **“Vẽ bóng trên bản vẽ kiến trúc”** tập trung giới thiệu vẽ bóng trên hình chiếu thẳng góc, nhằm rèn luyện kỹ năng thực hành vẽ bóng cho người học, không đi sâu vào phần lý thuyết, chứng minh.

Tuy nhiên, trong quy tắc vẽ bóng có sử dụng một số tính chất của đường và mặt, một vài phép biến đổi xạ ảnh thông dụng. Do đó để giúp người đọc tiện theo dõi, nắm vững tinh thần phương pháp, chúng tôi có giới thiệu ngắn gọn, không chứng minh một số tính chất và định lý được sử dụng.

Cuốn sách này chủ yếu phục vụ sinh viên, cán bộ thiết kế các ngành Kiến trúc, Xây dựng... Ngoài mục đích ứng dụng, thực hành, để giúp cán bộ giảng dạy môn học và độc giả muốn đi sâu tìm hiểu vấn đề này, chúng tôi giới thiệu một số vấn đề nâng cao có ý nghĩa thực tế như: ứng dụng định lý Đuypanh (Dupin) trong vẽ bóng; mở rộng phương pháp Kôlôlop để vẽ bóng với hướng tia sáng bất kỳ...

Thêm vào đó, với một số bài tập, ngoài cách giải có tính chất “thực hành”, được nêu thành quy tắc, chúng tôi giới thiệu một vài phương pháp có tính chất “lý thuyết” nhằm gợi ý cho những ai quan tâm, muốn nghiên cứu sâu vấn đề này. Các phần này đều có đánh dấu (*).

Ngoài các phần mà nội dung có tính chất “kinh điển”, chúng tôi có thêm phần hướng dẫn dùng máy tính để vẽ bóng với phần mềm sử dụng là AutoCAD2000. Ở phần này tác giả trình bày tỉ mỉ từng bước cụ thể vẽ bóng do nguồn sáng từ xa, bóng do đèn chiếu và bóng do nguồn sáng điểm. Để tiếp thu tốt hơn, người đọc cần có kiến thức cơ bản về vẽ các mặt 3D và khối 3D trong AutoCAD2000. Tuy nhiên, phần này chỉ đề cập đến một số vấn đề cơ bản của vẽ bóng trên máy tính nhằm giúp người đọc có được một số kinh nghiệm để vẽ bóng ứng với từng trường hợp cụ thể cho hiệu quả tốt nhất. Độc giả nào muốn tìm hiểu sâu có thể tìm đọc thêm ở các tài liệu chuyên sâu về AutoCAD.

Chúng tôi rất mong được tiếp thu các ý kiến đóng góp của bạn đọc cho nội dung cuốn sách để lần tái bản sau được hoàn chỉnh hơn.

Các tác giả

BẢNG KÝ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH NÀY

1. Điểm	$A, B, \dots$
2. Hình chiếu đứng của điểm	$A_1, B_1, \dots, 1_1, 2_1, \dots$
3. Hình chiếu bằng của điểm	$A_2, B_2, \dots, 1_2, 2_2, \dots$
4. Đường thẳng	$a, b, \dots$
5. Đường cong	$\alpha, \beta, \delta, \lambda, \sigma, \omega, \gamma, \dots$
6. Mặt cong	$\Sigma, \Phi, \dots$
7. Mặt phẳng	$(P), (Q)$
8. Mặt phẳng hình chiếu đứng	(P_1) hay (π_1)
9. Mặt phẳng hình chiếu bằng	(P_2) hay (π_2)
10. Trục hình chiếu	x
11. Góc tia sáng tạo với các mặt phẳng hình chiếu	θ
12. Góc vuông	$\perp$
13. Song song	$//$
14. Thuộc	$\in$
15. Giao	$\cap$
16. Trùng với	$\equiv$

PHẦN MỘT - TÓM TẮT LÝ THUYẾT VỀ VẼ BÓNG

Chương I

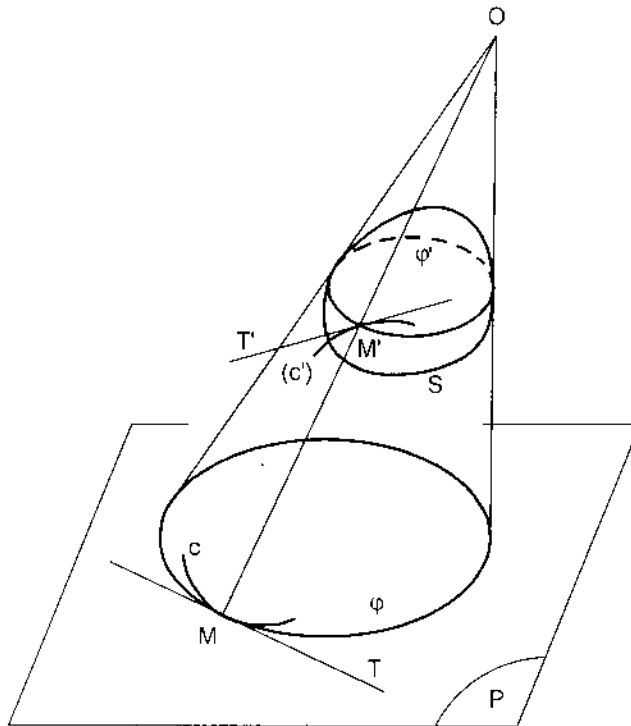
ĐẠI CƯƠNG VỀ VẼ BÓNG

1.1. ĐƯỜNG BAO THẤY NGOÀI

Vấn đề vẽ bóng các mặt liên quan chặt chẽ tới khái niệm "đường bao thấy ngoài của mặt".

Gọi O là mắt người quan sát nhìn một mặt S. Các tia nhìn tiếp xúc mặt tạo nên một nón gọi là nón đường bao thấy ngoài. Đường cong tiếp xúc (φ') của nón với mặt gọi là đường bao thấy ngoài của mặt đối với điểm O.

Vết (φ) của nón lên một mặt phẳng chiếu P gọi là đường bao thấy ngoài của mặt trên mặt phẳng P. Đường cong (φ) chính là phối cảnh của (φ').



Hình 1.1

Hai định lý cơ bản về đường bao thấy ngoài:

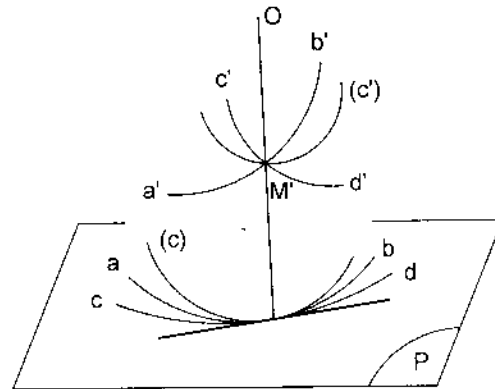
Định lý 1. Phối cảnh lên một mặt phẳng của một đường vẽ trên một mặt, tiếp xúc với đường bao thấy ngoài của mặt trên mặt phẳng đó (hình 1.1).

Hệ quả: Đường bao thấy ngoài của một mặt trên một mặt phẳng, là đường bao các hình chiếu của một hệ đường sinh lên mặt phẳng đó.

Chú ý: Định lý trên không áp dụng được khi OM' là tiếp' tuyến của (φ') , vì khi đó ở điểm M đường cong (φ) có điểm lùi.

Định lý 2. Khi hai mặt tiếp xúc dọc theo một đường (c') (hình 1.2).

1. Đường bao thấy ngoài $a'b'$ và $c'd'$ của hai mặt đối với điểm quan sát O , cắt nhau trên đường cong tiếp xúc (c') .
2. Đường bao thấy ngoài ab và cd của hai mặt trên một mặt phẳng P , tiếp xúc với phối cảnh (c) của đường cong tiếp xúc (c') .



Hình 1.2

1.2. KHÁI NIỆM ĐẠI CƯƠNG VỀ BÓNG CỦA VẬT THỂ (HÌNH 1.3)

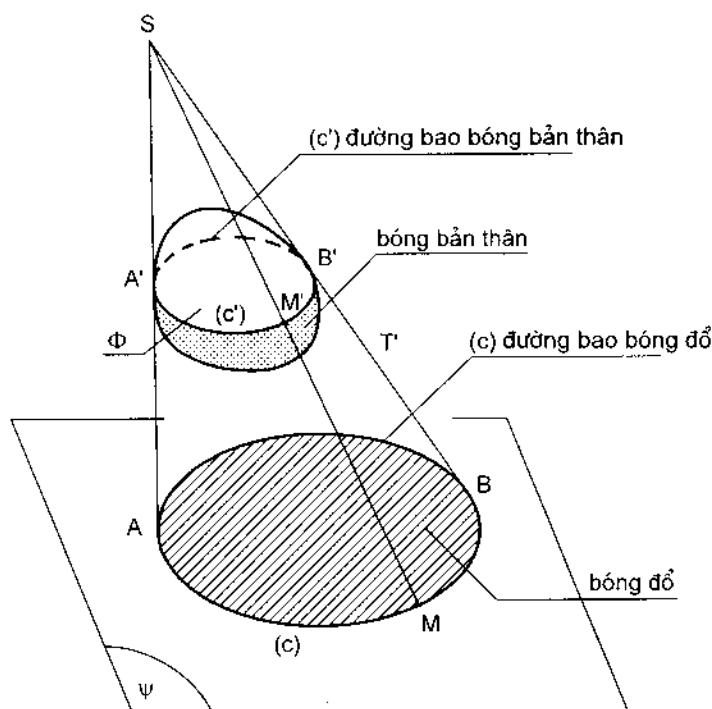
Một vật Φ đặt trước một nguồn sáng S ; một phần của mặt Φ được chiếu sáng, phần kia ở trong bóng tối. Bóng tạo lên trên mặt của Φ gọi là *bóng bản thân* của Φ (hình 1.3). Bóng tạo nên bởi Φ lên trên một mặt phẳng hay trên mặt của một vật thể khác ψ gọi là *bóng đổ* của Φ lên mặt phẳng hay trên mặt đó.

Đường giới hạn bóng bản thân gọi là *đường bao bóng bản thân*. Đường giới hạn bóng đổ gọi là *đường bao bóng đổ*. Nguồn sáng S được giả thiết thu về một điểm. Nếu S ở khoảng cách giới nội ta có bóng theo bó đuốc. Nếu S ở xa vô tận, các tia sáng song song, ta có bóng theo mặt trời. Các tia sáng từ S và tiếp xúc mặt Φ tạo nên một *nón bóng*. Nếu các tia sáng song song ta có *trụ bóng*.

So sánh các định nghĩa này với phần đã trình bày ở mục 1.1, coi điểm S là mắt người quan sát ta thấy ngay:

- Nón bóng: chính là nón đường bao thấy ngoài.
- Trụ bóng: chính là trụ đường bao thấy ngoài.
- Bóng bản thân: đường bao thấy ngoài của mặt.
- Bóng đổ lên mặt phẳng P hay mặt ψ : chính là đường bao thấy ngoài của mặt lên ψ hay lên mặt phẳng P .

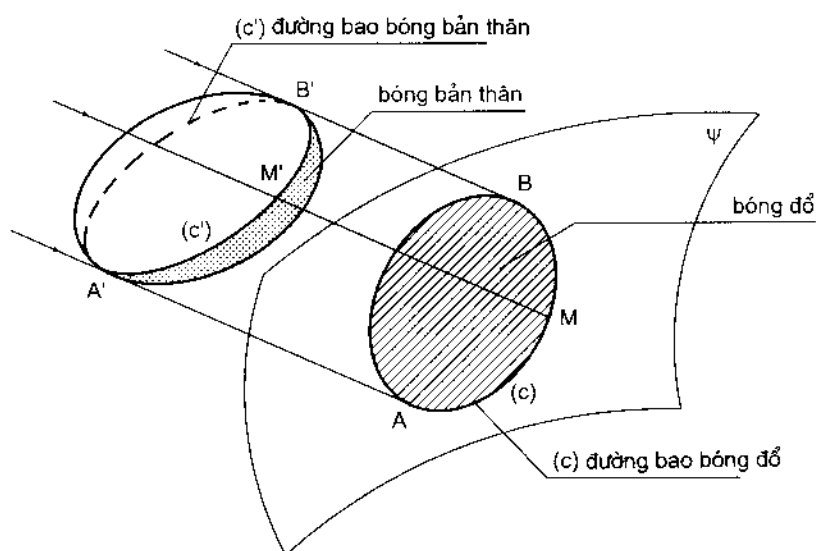
Với nhận xét trên ta thấy hai định lý về đường bao thấy ngoài có thể được phát biểu dưới dạng vẽ bóng như sau:



Hình 1.3

Mệnh đề 1: Bóng đổ lên trên một mặt phẳng của một đường, vẽ trên một mặt, tiếp xúc với đường bao bóng đổ của mặt lên mặt phẳng đó.

Suy ra đường bao bóng đổ của một mặt lên trên một mặt phẳng, là đường bao các bóng đổ của một hệ đường sinh của mặt.

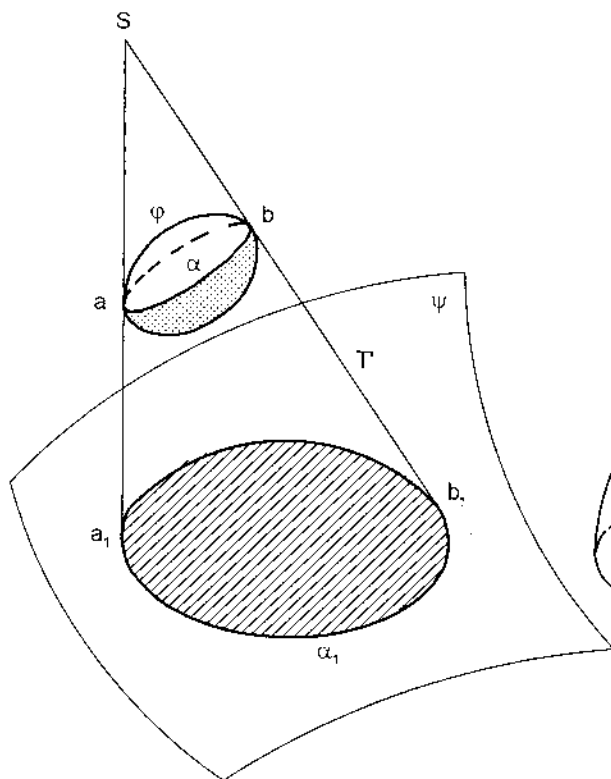


Hình 1.3a

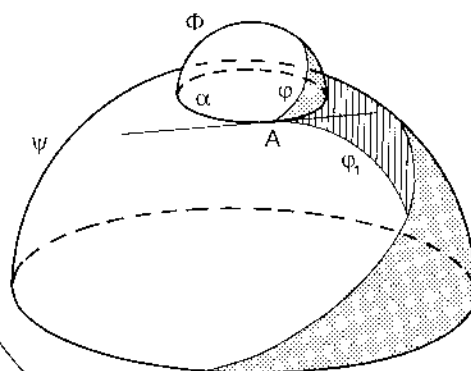
Mệnh đề 2: Các đường bao bóng bản thân của hai mặt ngoại tiếp, cắt đường cong tiếp xúc ở cùng các điểm.

Các đường bao bóng đổ lên một mặt phẳng tiếp xúc với bóng đổ của đường cong tiếp xúc ở các điểm tương ứng.

Suy ra đường bao bóng đổ của một mặt lên một mặt phẳng là đường bao của các bóng đổ của một họ mặt nội tiếp mặt đã cho.



Hình 1.4



Hình 1.5

Hệ quả của mệnh đề 1 và 2:

Trên mỗi mặt phẳng hình chiếu, các tiếp tuyến kẻ từ hình chiếu của điểm sáng tới đường bao thấy ngoài của mặt được chiếu sáng, đều tiếp xúc với đường bao bóng bản thân của mặt, và với đường bao bóng đổ của mặt lên mọi mặt khác.

Trường hợp ngoại lệ xem 1.1 và chú ý ở định lý 1.

Trên hình 1.4, hai tiếp tuyến qua S tiếp xúc α ở a và b và tiếp xúc α_1 ở a_1 và b_1 . Ngoài hai mệnh đề trên, với trường hợp có hai mặt cắt cắt nhau, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3: Nếu đường bao bóng đổ của một mặt lên một mặt khác bắt đầu ở giao của hai mặt thì đường bao bóng đổ tiếp xúc với giao (hình 1.5).

Trên hình 1.5, hai mặt Φ và ψ cắt nhau theo giao α . Bóng đổ của Φ lên ψ là φ_1 , bắt đầu từ điểm A của giao α . φ_1 tiếp xúc ở A với giao α .

1.3. BỐN PHƯƠNG PHÁP VẼ BÓNG CỦA MỘT MẶT

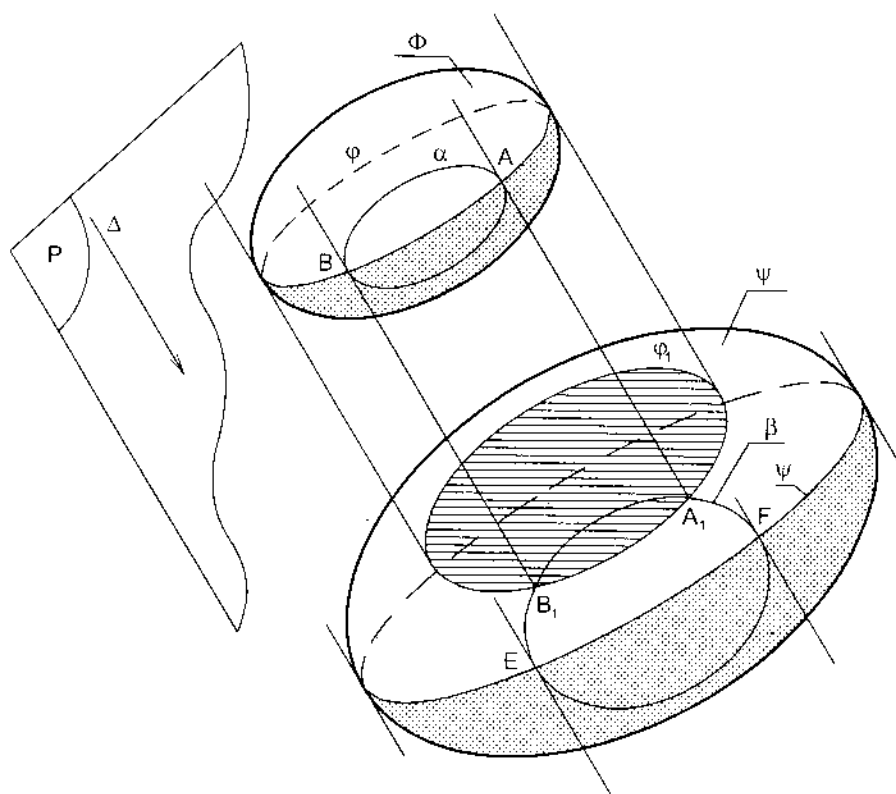
1.3.1. Phương pháp các mặt phẳng tiếp xúc

Qua điểm sáng vẽ các mặt phẳng tiếp xúc với mặt và xác định tiếp điểm; các điểm này thuộc đường bao bóng bản thân; vết của các tia sáng tương ứng, lên trên một mặt phẳng đã cho thuộc đường bao bóng đổ lên mặt phẳng.

1.3.2. Phương pháp các mặt phẳng cắt (hình 1.6)

Cắt mặt bằng các mặt phẳng qua điểm sáng; từ điểm này vẽ các tiếp tuyến với các tiết diện thu được; các tiếp điểm của các tiếp tuyến đó thuộc đường bao bóng bản thân; vết của các tiếp tuyến đó lên một mặt phẳng đã cho thuộc đường bao bóng đổ lên mặt phẳng.

Trên hình 1.6 giả thiết các tia sáng song song với hướng Δ . Cần vẽ bóng bản thân của Φ và ψ cũng như bóng đổ của Φ lên ψ .



Hình 1.6

Cắt bằng mặt phẳng P song song với Δ . Mặt phẳng này cắt Φ và ψ theo hai đường cong tương ứng α và β .

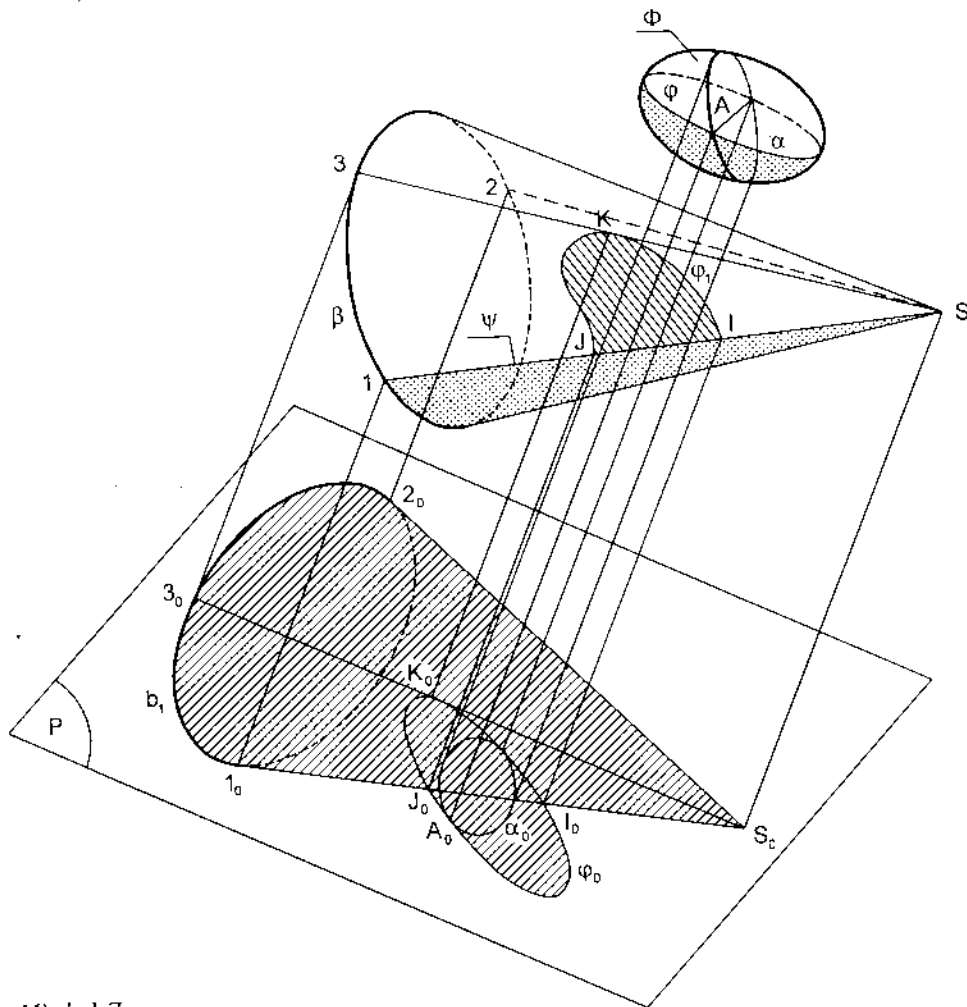
Tiếp điểm A, B của các tia sáng với α thuộc đường bao bóng bản thân φ của Φ . Cũng vậy, tiếp điểm E, F của các tia sáng với β là hai điểm của đường bao bóng bản thân của ψ .

Các giao điểm A_1, B_1 của đường cong β với các tia sáng qua A, B cho hai điểm của đường bao bóng đổ φ_1 của Φ lên ψ .

Chú ý: Khi vẽ bóng đổ, chỉ cần xét đến những điểm mà các tia sáng tiếp xúc với Φ cắt phân được chiếu sáng của ψ .

1.3.3. Phương pháp tia chiếu ngược

Cần vẽ các đường bao bóng bản thân của các mặt Φ và ψ và đường bao bóng đổ của Φ lên ψ (hình 1.7).



Hình 1.7

Muốn vậy trước tiên vẽ các đường bao bóng đổ của Φ và ψ lên một mặt thứ ba P , mà thông thường là một mặt phẳng.

Từ đường bao bóng đổ φ_0 của Φ lên P , ta suy ra đường bao bóng bản thân mặt của Φ .
Thí dụ A_0 là một điểm của φ_0 . Giả thiết A_0 thuộc hình chiếu α_0 của một đường cong α của Φ . Giao điểm của α với tia chiếu ngược vẽ từ A_0 sẽ cho điểm A là một điểm thuộc đường

bao bóng bản thân của Φ . Thông thường chọn α là một đường sinh của Φ . Đường bao bóng đổ của mặt ψ gồm hai đường sinh S_01_0 và S_02_0 . Dùng tia chiếu ngược ta có hai đường sinh S_1 và S_2 tạo thành đường bao bóng bản thân của nón ψ .

Trên hình 1.7, các điểm I và J của φ_1 , nằm trên đường bao bóng bản thân của nón ψ , gọi là các *điểm mất*. Đó là các điểm giới hạn chia đường bao bóng đổ φ_1 thành hai phần, một phần nằm trong miền được chiếu sáng của ψ , một phần nằm trong miền bóng bản thân của ψ .

Ở các điểm mất I và J các tia sáng tiếp xúc với φ_1 .

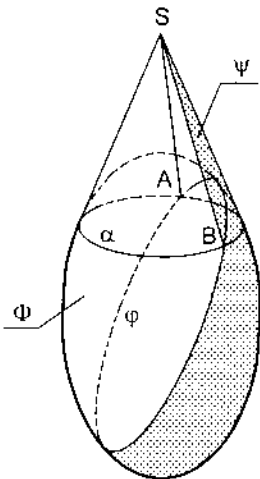
- *Phương pháp các mặt nội, ngoại tiếp*

Phương pháp này thường dùng trong vẽ bóng bản thân của các mặt tròn xoay.

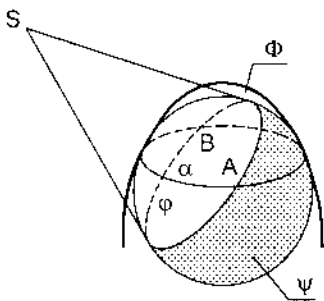
Giả thiết cần tìm bóng bản thân φ của mặt Φ ; S là nguồn sáng (hình 1.8).

Gọi ψ là một mặt nội tiếp Φ dọc theo đường cong α . Để xác định đường bao bóng bản thân φ của ψ vẽ các điểm như điểm A, giao của α với φ , thuộc đường bao bóng bản thân φ của Φ vì mặt phẳng tiếp xúc ở A với Φ đi qua S.

Thông thường nếu Φ là một mặt tròn xoay, mặt phụ trợ ψ được chọn là một nón hay trụ tròn xoay có cùng trục với Φ (hình 1.8a).



Hình 1.8a



Hình 1.8

Chương II

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI XẠ ẢNH ỨNG DỤNG TRONG VẼ BÓNG LÝ THUYẾT VỀ ĐƯỜNG CONG MẶT CONG, ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ ĐUYPANH (DUPIN) TRONG VẼ BÓNG

2.1. PHÉP BIẾN ĐỔI THẤU XẠ VÀ BIẾN ĐỔI APHIN

2.1.1. Tỷ số kép của 4 điểm thẳng hàng, của 4 đường thẳng đồng quy

Tỉ số đơn của 3 điểm thẳng hàng A, B, C:

$$(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Tỉ số kép của 4 điểm thẳng hàng A, B, C, D:

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

Trường hợp đặc biệt:

$$1) D \rightarrow \infty \text{ thì } (ABCD_{\infty}) = \frac{(ABC)}{(ABD_{\infty})} = (ABC)$$

$$2) \text{ Hai cặp điểm A, B và C, D liên hiệp điều hoà khi } (ABCD) = -1$$

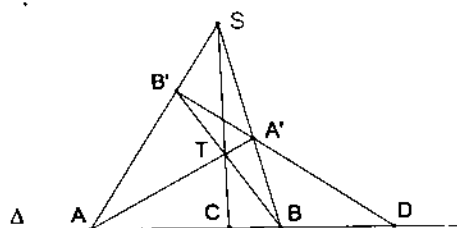
Ví dụ: Vẽ D khi biết A, B, C (hình 2.1).

Giải: Chọn điểm S bất kỳ ngoài Δ , kẻ SC vẽ AA' tùy ý cắt SC ở T. Kẻ BT cắt SA ở B'; B'A' cắt Δ ở điểm D cần tìm.

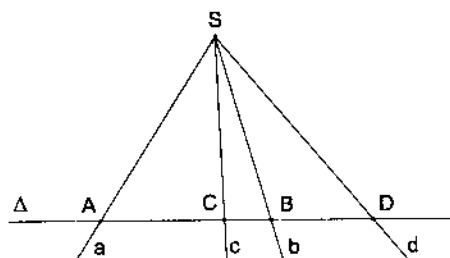
Tỉ số kép của chùm 4 đường thẳng đồng quy S(abcd).

Cắt Sa, Sb, Sc, Sd bằng đường thẳng Δ bất kỳ (hình 2.2).

Ta được 4 điểm A, B, C, D.



Hình 2.1



Hình 2.2

Người ta chứng minh rằng: với $S(abcd)$ đã cho, $(ABCD) = \text{const}$, không phụ thuộc vị trí của Δ . Do đó tỉ số kép của $(abcd)$ được định nghĩa là:

$(abcd) = (ABCD)$ với A, B, C, D là giao của $S(abcd)$ cắt bằng Δ bất kỳ.

Nếu $(ABCD) = -1$ thì $(abcd) = -1$ và ta nói a, b và c, d liên hiệp điều hoà.

2.1.2. Biến đổi thấu xạ

Trên mặt phẳng cho một điểm cố định S (tâm thấu xạ) và một đường thẳng cố định s (trục thấu xạ). Gọi λ là một số đại số cho trước.

Ta cho ứng với một điểm A là điểm A' sao cho $(SIAA') = \lambda$ với I là giao của SA với s .

Nếu A vẽ nên một hình $\mathcal{F}$ thì A' tương ứng vẽ nên hình $\mathcal{F}'$. Hai hình $\mathcal{F}$ và $\mathcal{F}'$ gọi là tương ứng thấu xạ.

Tính chất:

1) Hai hình tương ứng thấu xạ thì điểm ứng với điểm; đường thẳng ứng với đường thẳng.

Đường thẳng nối hai điểm tương ứng A, A' đi qua một điểm cố định S (tâm thấu xạ); hai đường thẳng tương ứng cắt nhau trên một đường thẳng cố định s (trục thấu xạ).

2) Phép thấu xạ hoàn toàn được xác định bởi tâm và trục thấu xạ S, s và một cặp điểm tương ứng A, A' .

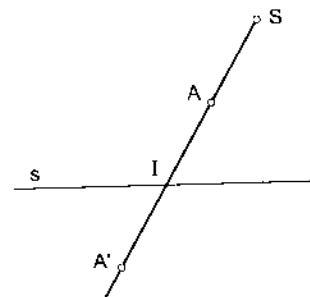
Ví dụ: Cho phép thấu xạ (S, s, A, A') biết M , vẽ M' .

Giải: Kẻ AM cắt s ở M_0 . M' là giao của SM với $A'M_0$. Biết M' vẽ M , cách vẽ tương tự.

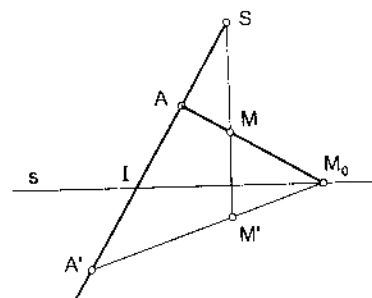
3) Phép thấu xạ bảo tồn tỷ số kép.

Ứng với 4 điểm thẳng hàng A, B, C, D là 4 điểm thẳng hàng A', B', C', D' và $(A'B'C'D') = (ABCD)$.

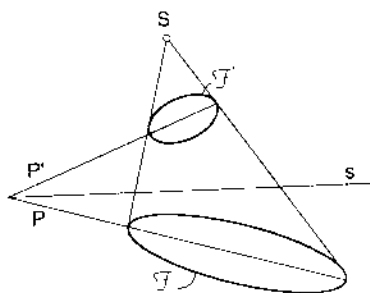
4) Hai hình tương ứng thấu xạ có thể coi là hình chiếu xuyên tâm của nhau.



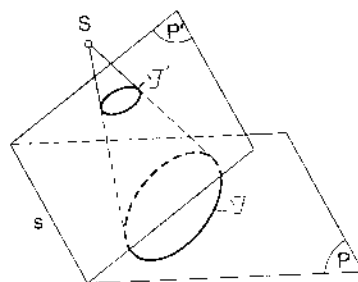
Hình 2.3



Hình 2.4



Hình 2.5a



Hình 2.5b

Gập mặt phẳng φ theo trục s (hình 2.5a) tới 1 vị trí tùy ý (hình 2.5b). Khi đó tồn tại tâm chiếu S chiếu $\mathcal{F}'$ thành $\mathcal{F}$ (cũng là chiếu $\mathcal{F}$ thành $\mathcal{F}'$)

Người ta chứng minh rằng khi φ cố định và φ' xoay quanh trục s thì quỹ tích các tâm chiếu S là một đường tròn.

Chú ý: Tương ứng thấu xạ của một đường tròn là một Conic (elip, parabol, hypebol).

5) Đường thẳng giới hạn.

Xét $\mathcal{F}$ và $\mathcal{F}'$ tương ứng thấu xạ. Ứng với đường thẳng ở vô tận L_∞ của $\mathcal{F}$ là đường thẳng L' của $\mathcal{F}'$. Đường thẳng L' phải song song với trục s vì phải cắt s ở vô tận.

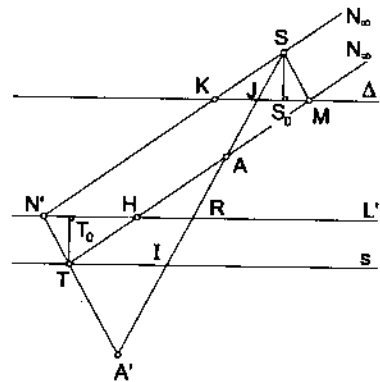
Tương tự ứng với đường thẳng ở vô tận Δ'_∞ của $\mathcal{F}'$ là đường thẳng Δ của $\mathcal{F}$, song song với trục s .

Cách vẽ hai đường giới hạn Δ và L' (hình 2.6).

1) Từ một điểm T của trục s vẽ TA .

Từ S kẻ đường song song với TA , cắt TA ở M . Từ M kẻ song song với trục s ta có Δ .

2) Từ S kẻ đường song song với TA , cắt TA' ở N' . Từ N' kẻ song song với trục s ta có L' .



Hình 2.6

Chú ý: $\Delta SMK = \Delta TN'H$ nên đường cao từ S và từ T bằng nhau và $\overline{SS_0} = \overline{TT_0}$.

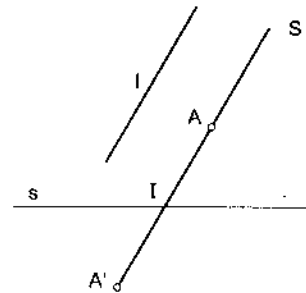
2.1.3. Biến đổi afin phối cảnh

Khi tâm thấu xạ S ra vô tận theo hướng l thì ta có phép afin phối cảnh. Ứng với điểm A là điểm A' sao cho $AA' \parallel l$ và $(S_\infty IAA') = \lambda$:

$$\lambda = \frac{(S_\infty IA)}{(S_\infty IA')} = \frac{\overline{S_\infty A}}{\overline{IA}} : \frac{\overline{S_\infty A'}}{\overline{IA'}} = \frac{IA'}{IA}$$

Vậy trong tương ứng afin phối cảnh ta luôn có $\frac{IA'}{IA} = \lambda$. Vì là trường hợp đặc biệt của thấu xạ nên trong phép afin, các tính chất sau đây là hiển nhiên:

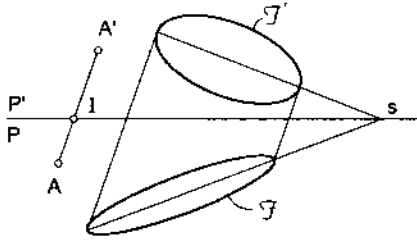
1) Hai hình tương ứng afin thì điểm ứng với điểm; đường thẳng ứng với đường thẳng. Đường thẳng nối cặp điểm tương ứng luôn song song với hướng afin l .



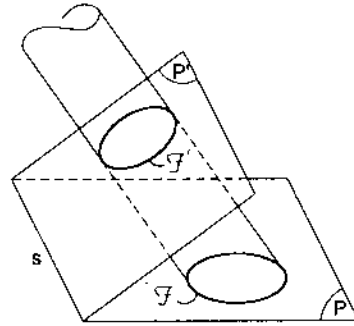
Hình 2.7

Ta luôn có $\frac{IA'}{IA} = \lambda$. Hai đường thẳng tương ứng cắt nhau trên trục s .

- 2) Phép ảnhin phối cảnh hoàn toàn được xác định bởi trục ảnhin s và cặp điểm tương ứng A, A' . Ta ký hiệu $\mathcal{A}(s, A, A')$.
- 3) Phép ảnhin bảo tồn tỉ số đơn.
- 4) Hai hình tương ứng ảnhin phối cảnh có thể coi là hình chiếu song song của nhau.



Hình 2.7a,



Hình 2.7a

Chú ý: Tương ứng ảnhin của vòng tròn là elip.

$$5) \frac{\text{Diện tích } \mathcal{J}'}{\text{Diện tích } \mathcal{J}} = \frac{IA'}{IA} = \lambda.$$

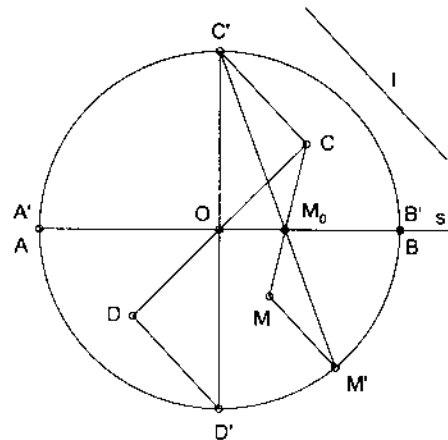
Ví dụ 1: Vẽ elip khi biết hai đường kính liên hiệp AB và CD .

Giải: Cách 1 (hình 2.8): Vẽ vòng tròn đường kính AB . Dùng ảnhin phối cảnh biến elip có hai đường kính liên hiệp AB, CD thành đường tròn có 2 đường kính vuông góc: $A'B' \equiv AB$ và vuông góc với $C'D'$. Trục ảnhin $s \equiv AB$.

Hướng ảnhin phối cảnh $l \parallel CC' \parallel DD'$.

- Cách vẽ 1 điểm M :

Lấy 1 điểm M' của đường tròn. Kẻ $C'M'$ cắt trục s ở M_0 . Kẻ đường thẳng qua M' và song song với l , cắt CM_0 ở điểm M cần tìm.



Hình 2.8

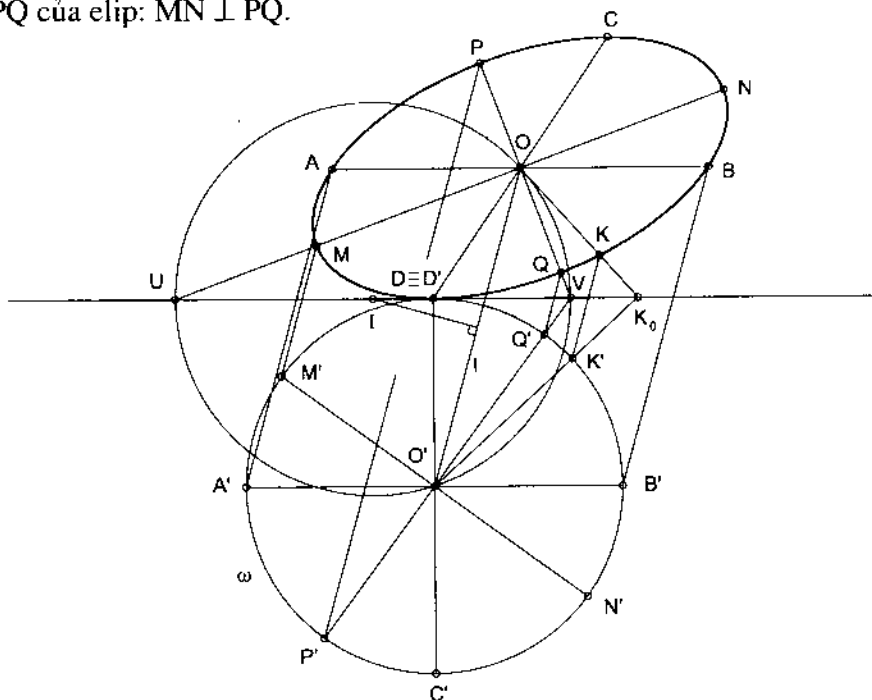
Cách 2 (hình 2.9): Qua D kẻ trục ảnhin $s \parallel AB$.

Cho ứng hai đường kính liên hiệp AB, CD của elip là hai đường kính vuông góc của đường tròn w , tương ứng ảnhin của elip: $A'B' \perp C'D'$ ($D' \equiv D$; $O'D' \perp s$; $O'D' = OA = OB$).

Như vậy hướng ảnhin sẽ là $l \parallel OO' \parallel AA' \parallel BB'$. Vẽ dễ dàng điểm K tương ứng với K' (hình 2.9). Kẻ $O'K'$ cắt s ở K_0 . Từ K kẻ đường song song với hướng ảnhin l , cắt OK_0 ở điểm K cần tìm.

- Vẽ trục elip: vẽ trung trực của OO' , cắt s ở I . Vẽ đường tròn tâm I , bán kính $R = IO = IO'$. Vòng tròn này cắt trục s ở 2 điểm U và V .

$O'U$ và $O'V$ cắt w theo 2 đường kính $M'N'$ và $P'Q'$ vuông góc nhau. Vẽ hai trục tương ứng MN và PQ của elip: $MN \perp PQ$.

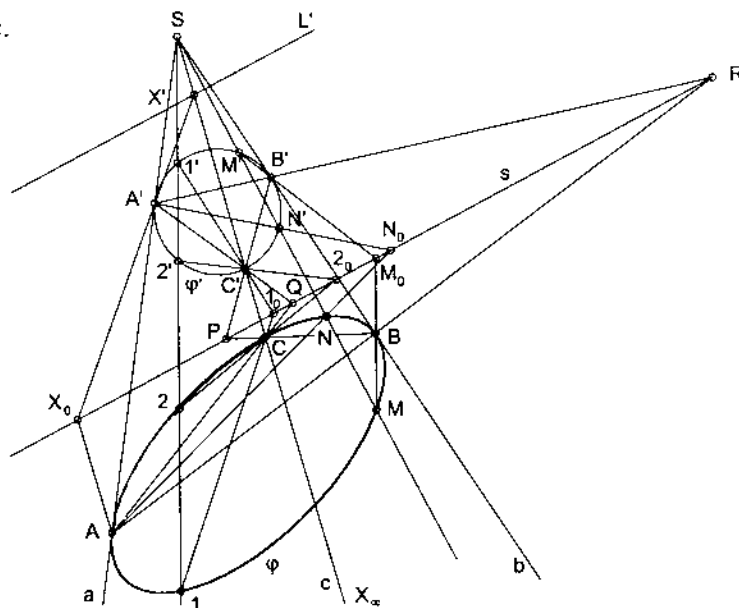


Hình 2.9

Ví dụ 2: a) Vẽ conic ϕ đi qua một điểm C và tiếp xúc 2 đường thẳng Sa và Sb ở A và B .

b) Xác định loại conic.

Giải:



Hình 2.10

1) Vẽ vòng tròn φ' tùy ý, tiếp xúc S_a, S_b ở A' và B' . Kẻ SC cắt φ' ở 2 điểm. Chọn tùy ý 1 trong 2 điểm đó, thí dụ điểm C' .

Hai $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có 3 đường thẳng nối 3 cặp đỉnh tương ứng, đồng quy ở S . Vậy 3 cặp cạnh tương ứng cắt nhau ở 3 điểm P, Q, R thuộc một đường thẳng là trục thấu xạ s . Ta có phép thấu xạ (S, s, A, A') biến $\triangle A'B'C'$ thành $\triangle ABC$ và sẽ biến vòng tròn φ' (qua C' , tiếp xúc S_a, S_b ở A', B') thành conic φ (qua C , tiếp xúc S_a, S_b ở A, B).

Trên hình 2.10 ta vẽ M bằng cách nối M' với B' cắt s ở M_0 . Đường thẳng M_0B sẽ cắt tia SM' ở M . Muốn vẽ N ta nối A', N' cắt s ở N_0 , AN_0 sẽ cắt SN' ở N .

Cách vẽ các điểm 1, 2 tương tự.

2) Xác định loại conic: Ta biết rằng nếu đường thẳng ở vô tận L_∞ mà không cắt conic φ thì đó là elip. Nếu cắt ở hai điểm thật sẽ là hypebol, nếu φ tiếp xúc L_∞ thì ta có parabol. Trường hợp hình 2.10, đường thẳng L' tương ứng L_∞ không cắt đường tròn φ' . Vậy L_∞ không cắt conic φ . Do đó φ là elip. Ta đã vẽ L' như sau: kẻ qua A đường thẳng song song với SC và cắt s ở X_0 , X_0A' cắt SC' tại X' là điểm có tương ứng là điểm ở vô tận. Qua X' kẻ đường thẳng song song với s ta được L' .

2.2. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG BẬC HAI

2.2.1. Đường thẳng đẳng hướng

Phương trình đường thẳng đẳng hướng qua gốc tọa độ O :

$$x^2 + y^2 = 0 \quad (1)$$

Suy ra $y = \pm ix$ ($i^2 = -1$).

Đôi khi người ta gọi (1) là phương trình của đường tròn có bán kính bằng không.

Phương trình đường đẳng hướng qua 1 điểm $M(x_0, y_0)$ là:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0 \quad (2)$$

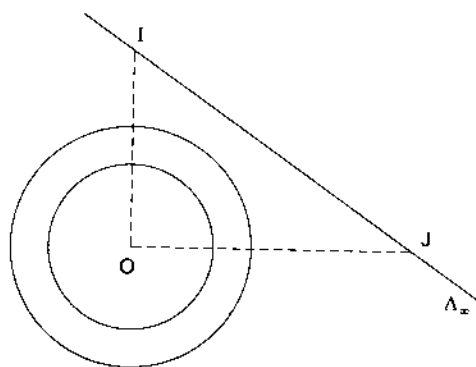
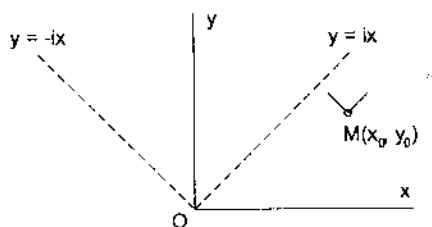
Các đường đẳng hướng cắt đường thẳng ở vô tận ở 2 điểm I và J gọi là điểm xyclic.

Người ta chứng minh rằng:

1) Conic mà đi qua 2 điểm xyclic là đường tròn.

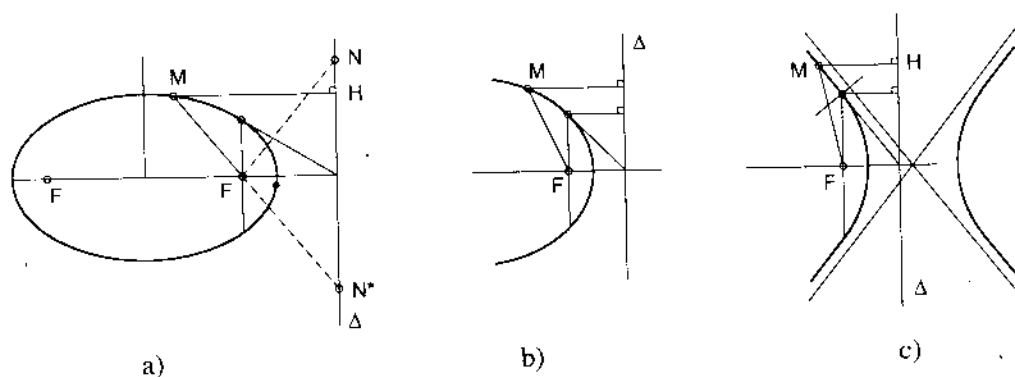
- Các đường tròn đồng tâm O đều tiếp xúc nhau ở hai điểm xyclic I và J .

- Hai tiếp tuyến chung là hai đường đẳng hướng OI, OJ qua O .



Hình 2.11

2) Hai đường đẳng hướng đi qua một tiêu điểm của 1 conic tiếp xúc với conic đó ở hai điểm ảo liên hợp N và N' và N, N' thuộc đường thẳng thật Δ gọi là đường chuẩn của conic.



Hình 2.12

Trên hình 2.12 vẽ conic bằng 1 tiêu điểm F và đường chuẩn Δ . Conic được định nghĩa là quỹ tích các điểm M sao cho $\frac{MF}{MH} = e$ ($MH \perp \Delta$).

Hình 2.12a, b, c ứng với elip $e < 1$, parabol $e = 1$ và hypebol $e > 1$.

2.2.2. Đường bậc hai

Elip:

$$1) MF + MF' = 2a;$$

F, F' là hai tiêu điểm.

$$OF = OF' = c \text{ (tiêu cự).}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

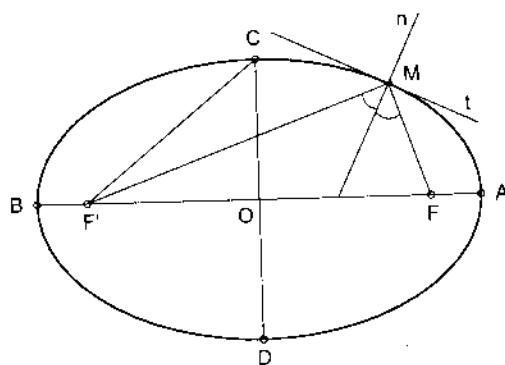
2) Phương trình elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

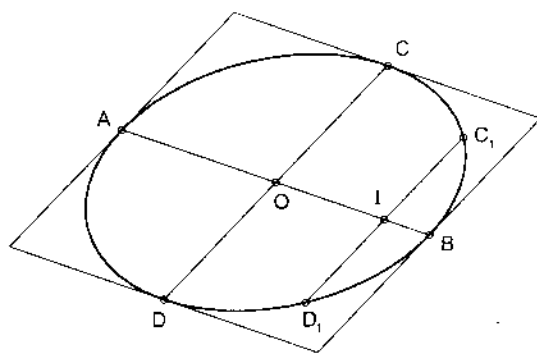
3) Tiếp tuyến Mt và pháp tuyến Mn tương ứng là đường phân giác ngoài và đường phân giác trong của góc FMF' .

4) Đường kính liên hợp:

AB và CD liên hợp nếu tiếp tuyến ở C và D song song với AB (và khi đó tiếp tuyến ở A và B sẽ song song với CD). Dây cung $C_1D_1 \parallel CD$ bị AB chia làm đôi $IC_1 = ID_1$.



Hình 2.13



Hình 2.14

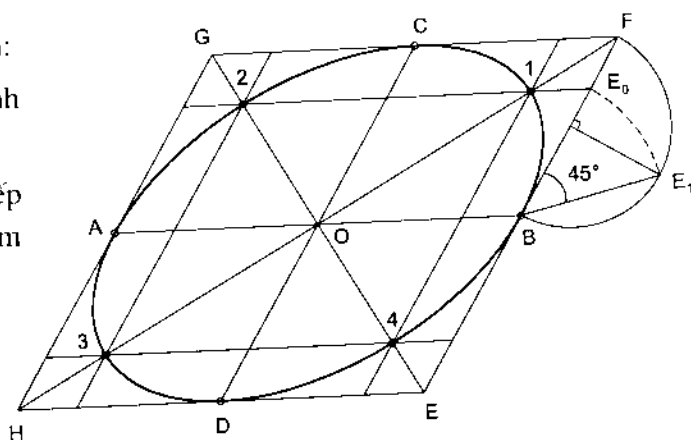
Elip được cho bằng hai đường kính
cắt nhau tại trung tâm O của hình
thoi $ABCD$.

Giải: Vẽ hình bình hành ngoại tiếp có cạnh song song với AB và CD vẽ tam giác vuông cân BE_1F .

Đặt $BE_0 = BE_1$. Ta có $\frac{BE_0}{BF} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kể $E_0 G_0 // FG$ ta có 2 điểm 1, 2.

Tương tự suy ra các điểm còn lại.



Hình 2.15

Parabol:

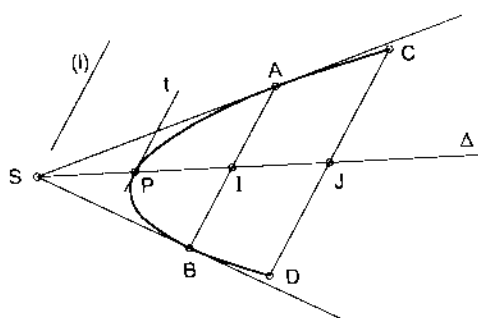
1) $MF = MH$; $OF = OI = p/2$ với p là thông số.

2) Phương trình parabol:

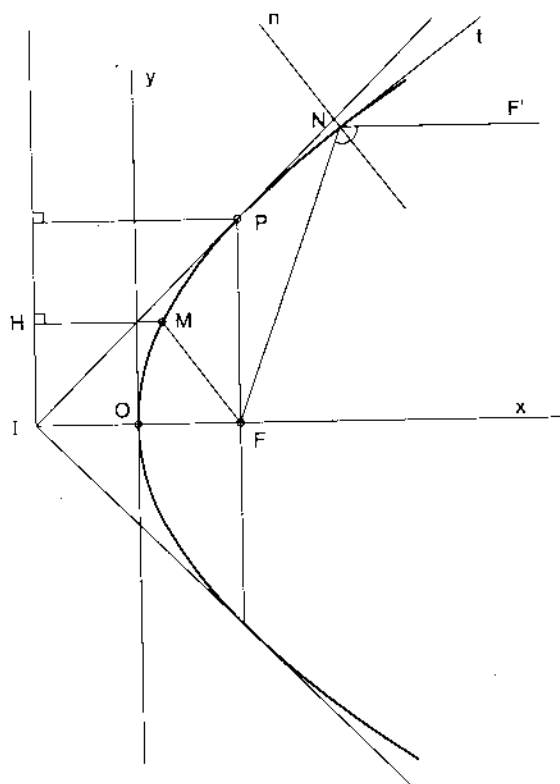
$$y^2 = 2px$$

3) Tiếp tuyến Nt và pháp tuyến Nn ở điểm N là phân giác ngoài và phân giác trong của góc FNF' , với $NF' \parallel$ trục x .

4) Đường thẳng liên hiệp hướng l đã cho:



Hình 2.17



Hình 2.16

Kẻ các cát tuyến song song với l , cắt parabol ở A, B; C, D; tiếp tuyến $P_t // l$. Các điểm giữa I của AB ($IA = IB$); J của CD ($JC = JD$)... thuộc 1 đường thẳng Δ qua p. Đường Δ luôn song song với trục đối xứng của parabol và gọi là đường thẳng liên hiệp với hướng l .

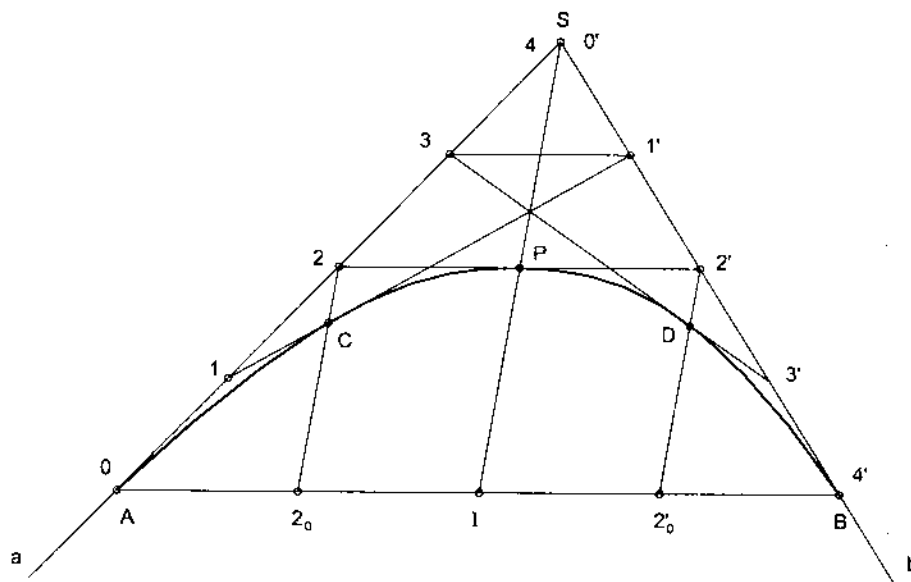
Người ta chứng minh rằng $PI = PS$ và mọi cặp tiếp tuyến ở A và B; ở C và D... đều cắt nhau trên Δ .

5) Vẽ parabol tiếp xúc S_a, S_b ở 2 điểm A và B:

Chia S_a, S_b thành các đoạn bằng nhau, đánh số 0, 1, 2, 3, 4 và $0', 1', 2', 3', 4'$ (hình 2.18).

Các đường thẳng $1-1'; 2-2'; 3-3'$, sẽ bao một parabol tiếp xúc S_a, S_b ở A và B. Chia AB làm 4 phần bằng nhau với I là điểm giữa. Parabol này qua các điểm A, B; $P = SI \cap 2-2'$; $C = 1-1' \cap 2-2_0$; $D = 3-3' \cap 2'-2_0'$.

Chú ý: $SP = PI$.



Hình 2.18

Hypebol:

1) $MF - MF' = 2a$; F, F' tiêu điểm.

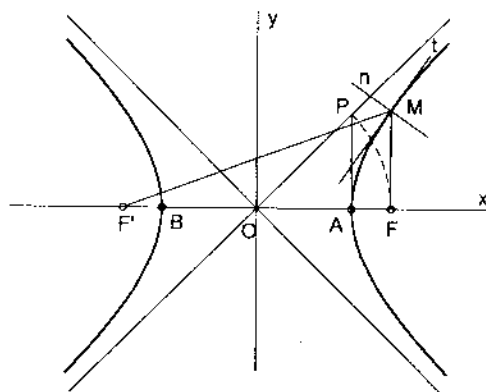
2) $OA = OB = a$; $OF = OF' = c$ (tiêu cự);

$$a^2 + b^2 = c^2, (AP = b)$$

3) Phương trình hypebol:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

4) Tiếp tuyến Mt và pháp tuyến Mn tại điểm M là phân giác trong và phân giác ngoài của góc FMF' .



Hình 2.19

5) Đường kính liên hợp với một hướng l cắt hypebol bằng các cát tuyến MN, KL... song song với hướng đã cho l. MN cắt hai tiệm cận ở M_0, N_0 ; KL cắt hai tiệm cận ở K_0, L_0 ...

Người ta chứng minh rằng điểm giữa I của MN cũng là điểm giữa I của M_0N_0 ; điểm giữa J của KL cũng là điểm giữa của K_0L_0 ...

Quỹ tích các điểm giữa I, J... là một đường thẳng d đi qua tâm O, gọi là đường kính liên hợp của hypebol đối với hướng l.

Chú ý: Đường kính PQ qua tâm O và song song với hướng l là liên hợp với đường thẳng d đối với 2 tiệm cận a, b. Nếu ký hiệu $PQ \equiv k$ thì $(abdk) = -1$.

Tiếp tuyến với hypebol ở P và Q phải song song với d.

6) Vẽ hypebol biết 2 tiệm cận và 1 điểm M:
 Cách vẽ hypebol dựa vào tính chất $MM_0 = NN_0$ (hình 2.20).

Ở đây ta có (hình 2.21):
 $1-1_0 = 2-2_0$
 $2-2_0' = 3-3_0'$
 $4-4_0 = 3-3_0$

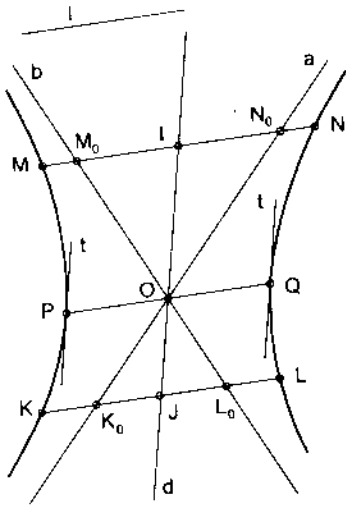
Chú ý rằng có 1 và 3 ta cũng có thể có 8 và 6 nhờ đối xứng qua O...

Do đó cách vẽ các điểm rất linh hoạt.
 7) Vẽ trục của hypebol khi biết hai tiệm cận (t, t') và một điểm P (hình 2.22a):

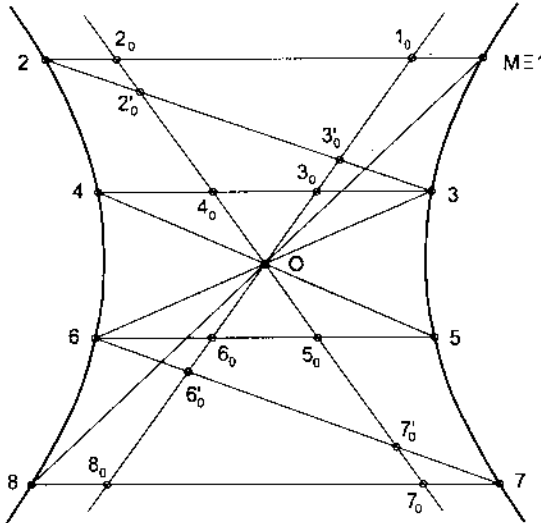
Giải: Ta biết rằng các tiếp tuyến với hypebol xác định trên hai tiệm cận t, t' hai hàng điểm liên hệ xạ ảnh: $t(M...) \wedge t'(M'...)$.
 Ứng với điểm $M_\infty(t)$ là điểm $I' \in (t')$ và ứng với điểm $M'_\infty(t')$ là điểm $J \in (t)$.

Người ta chứng minh rằng $JM.I'M' = c^{lc}$.
 Nhưng $I' \equiv J \equiv O$ nên $OM.OM' = c^{lc}$.
 Suy ra tiếp tuyến ở đỉnh A của hypebol sẽ cắt (t) và (t') ở B và B' và ta có:

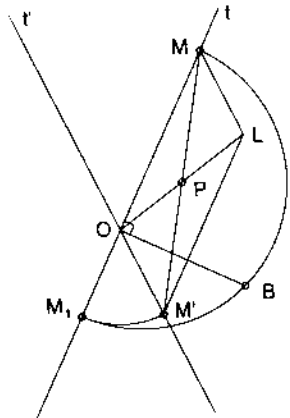
$$OB^2 = OB'^2 = OM.OM'$$



Hình 2.20



Hình 2.21



Hình 2.22a

Cách vẽ hai đỉnh A và A₁ như sau:

1- Qua P vẽ tiếp tuyến với hypebol: Vẽ điểm L (PL = OP). Vẽ hình bình hành OMLM' → MM' là tiếp tuyến qua P (hình 2.22b).

2- Vẽ đoạn OB: Trên (t) lấy OM₁ = OM'. Vẽ OB ⊥ MM₁, cắt vòng tròn đường kính MM₁ ở B (hình 2.22b).

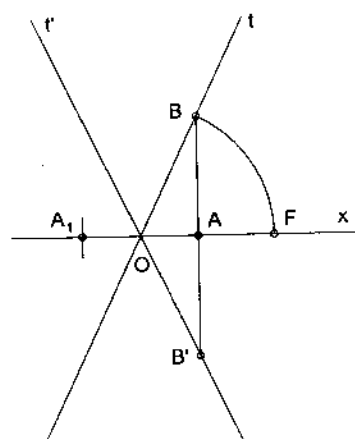
Ta có: OB² = OM.OM₁ = OM.OM'.

Trên hai tiệm cận (t) và (t') lấy OB = OB' (góc BOB' chứa P). BB' cắt trục x, phân giác của góc BOB' ở A (hình 2.22c). Vẽ điểm đối xứng A₁, ta có:

$$OA = OA_1 = a; AB = AB' = b$$

$$OF = OB = c \text{ (tiêu cự)} \quad (c^2 = a^2 + b^2).$$

$$\text{Phương trình hypebol là: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



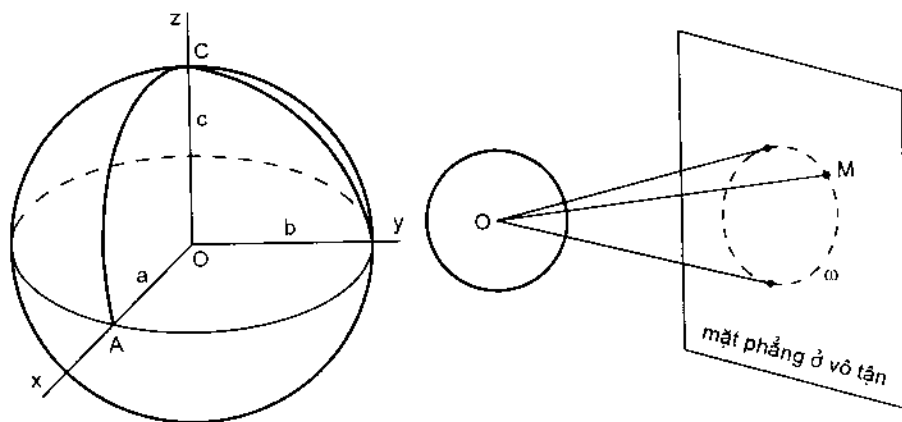
Hình 2.22b

2.3. GIỚI THIỆU TÓM TẮT VỀ MẶT BẬC HAI

Ngoài mặt nón, mặt trụ bậc hai, mặt bậc hai còn gồm năm quadric. Sau đây ta giới thiệu năm quadric đó.

2.3.1. Mặt elipxoid

Phương trình của mặt:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$



Hình 2.23

a) Mặt cắt chính

Cắt bằng mặt phẳng xOy ta có elip:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cắt bằng mặt phẳng yOz ta có elip: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Cắt bằng mặt phẳng zOx ta có elip: $\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$

b) *Nón tiệm cận*

Nón ảo có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (2)

c) *Elipxoid tròn xoay*

$a = b$; trục xoay Oz : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (3)

d) *Mặt cầu*

Đường rốn là quỹ tích các điểm xyclic thuộc mặt phẳng ở vô tận. Elipxoid chứa đường rốn là mặt cầu.

Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (4)

Phương trình nón tiệm cận của mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (4'), đây là nón ảo có đỉnh thật là tâm cầu, đường sinh là các đường thẳng đẳng hướng OM. Nói cách khác: nón đẳng hướng có đỉnh là tâm O của mặt cầu, đường chuẩn là đường rốn ω .

Mặt cầu tâm O và nón đẳng hướng đỉnh O tiếp xúc dọc theo đường rốn ω .

Hai mặt cầu cùng tâm O tiếp xúc dọc theo đường rốn ω (vì chúng cùng tiếp xúc nón đẳng hướng đỉnh O).

e) *Giao tuyến phẳng*

Cắt elipxoid bằng một mặt phẳng P ta được một elip. Elipxoid có hai hướng tiết diện tròn.

f) *Đường kính liên hợp đối với một hướng mặt phẳng π*

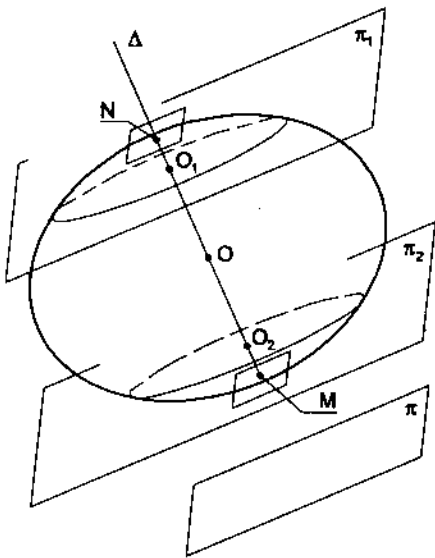
Các mặt phẳng song song với π cắt elipxoid theo các elip đồng dạng. Quỹ tích tâm các elip này là một đường thẳng Δ gọi là đường kính liên hợp với hướng mặt phẳng π đã cho (hình 2.24). Δ qua tâm O của elipxoid và cắt elipxoid tại hai điểm N, M ở đó có hai mặt phẳng tiếp xúc đều song song với π .

Vậy có thể nói: Đường kính Δ liên hợp với hướng mặt phẳng π là đường nối 2 tiếp điểm M và N của hai mặt phẳng song song π và tiếp xúc elipxoid.

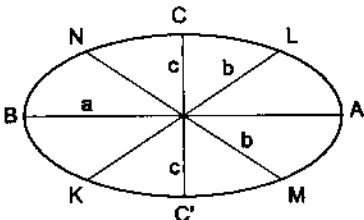
g) *Điểm rốn*

Nếu hướng mặt phẳng π là một hướng tiết diện tròn thì hai điểm M và N gọi là điểm rốn. Mặt phẳng π_1 và π_2 tiếp xúc elipxoid ở M và N cắt elipxoid theo hai cặp đường thẳng đẳng

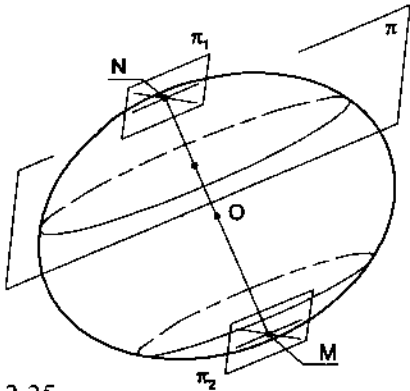
hướng (hình 2.25). Ứng với hướng tiết diện tròn thứ 2 ta có 2 điểm rốn nữa là K và L. Trên hình 2.22 vẽ elipxoid có 3 trục vuông góc từng đôi một: OA, OB, OC.



Hình 2.24



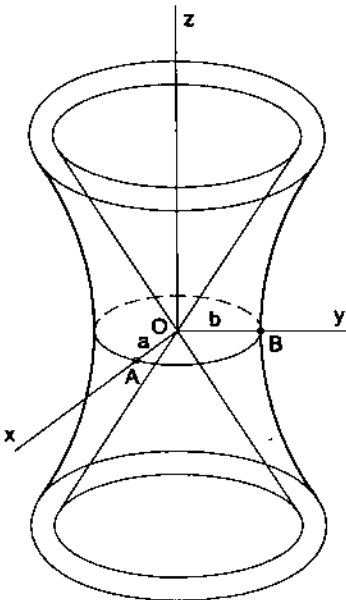
Hình 2.25



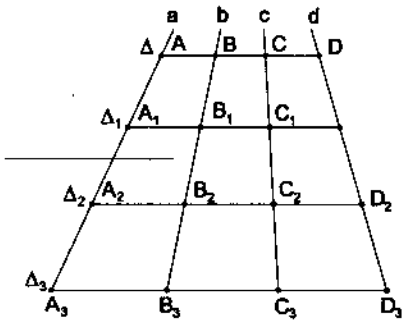
Hình 2.25a

Giả thiết $a > b > c$ (hình 2.25a). Trong mặt phẳng chính AOC vẽ đường kính $MN = 2b$ và đường kính $KL = 2b$ ta có 4 điểm rốn M, N, K, L.

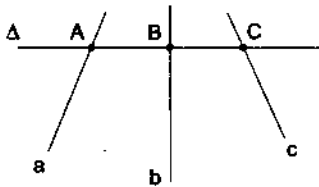
MN và KL đối xứng qua 2 trục AA' và CC'.



Hình 2.26



Hình 2.27



Hình 2.28

2.3.2. Mặt hypeboloid một tầng (mặt ké)

a) Phương trình của mặt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

b) Mặt cắt chính

Cắt bằng mặt phẳng xOy ta có elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Cắt bằng mặt phẳng yOz ta có hypebol: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Cắt bằng mặt phẳng xOz ta có hypebol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hypeboloid một tầng được xác định bởi một đường thẳng Δ di chuyển và tựa trên ba đường thẳng chéo nhau cố định a, b, c không cùng song song với một mặt phẳng (hình 1.27). Các đường thẳng như Δ thuộc một họ đường sinh. Các đường thẳng a, b, c,... thuộc họ đường sinh thứ 2. Người ta chứng minh rằng:

4 đường sinh một họ (ví dụ a, b, c, d) cắt các đường sinh của họ kia theo các hàng điểm liên hệ xạ ảnh (hình 2.27a):

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2) = (A_3B_3C_3D_3) \dots$$

Hypeboloid một tầng tròn xoay (trục xoay Oz): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$

Hypeboloid một tầng tròn xoay có thể coi là mặt tạo bởi một đường thẳng d xoay quanh trục z (d và z chéo nhau) (hình 2.28).

c) Nón tiệm cận

Nón tiệm cận có phương trình: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

d) Giao tuyến phẳng

Muốn phân loại giao tuyến của mặt phẳng cắt π với hypeboloid, ta xét mặt phẳng $\pi' \parallel \pi$ và qua tâm O là đỉnh của nón tiệm cận.

- Nếu π' cắt nón tiệm cận theo hai đường sinh thật m, n thì giao của π với hypeboloid là một hypebol nhận a và b là hai đường tiệm cận

- Nếu π' tiếp xúc nón tiệm cận: $m \equiv n$ thì giao của π với hypeboloid là một parabol có hướng trục song song với m.

- Nếu π' không cắt nón tiệm cận (tức là cắt nón theo hai đường sinh ảo liên hợp) thì giao là một elip.

Hypeboloid có các tính chất sau:

- Mặt phẳng π mà cắt nón tiệm cận theo elip ε' thì cũng cắt hypeboloid theo elip ε đồng dạng, đồng tâm.

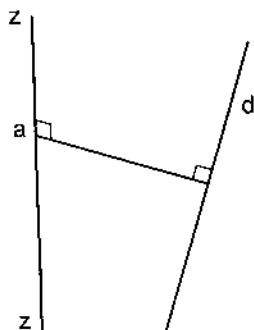
- Mặt phẳng π mà cắt nón tiệm cận theo hypebol ε' thì cũng cắt hypeboloid theo hypebol cùng tiệm cận (đồng dạng hay liên hợp) ε và ε' đồng dạng ε và ε' liên hợp (hình 2.29).

Trường hợp π cắt nón tiệm cận theo hai đường sinh m, n thì cắt hypeboloid theo hypebol nhận m, n làm tiệm cận.

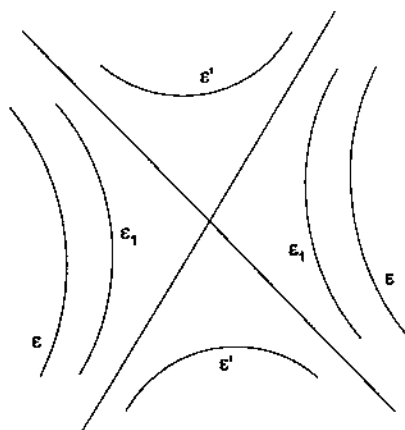
- Mặt phẳng π mà cắt nón tiệm cận theo parabol ε' thì cũng cắt hypeboloid theo parabol cùng trục, cùng phía lồi.

Chú ý:

+ Trường hợp π tiếp xúc nón tiệm cận dọc theo một đường sinh thì sẽ tiếp xúc hypeboloid ở một điểm thuộc đường cong ở vô tận và cắt hypeboloid theo 2 đường sinh song song.



Hình 2.28



Hình 2.29

+ Trường hợp nón tiệm cận có hai hướng tiết diện tròn nên hypeboloid cũng có hai hướng tiết diện tròn.

+ Nếu mặt phẳng π tiếp xúc hypeboloid ở một điểm M thì sẽ cắt hypeboloid theo hai đường sinh m, n qua M . Mọi mặt phẳng song song với π sẽ cắt hypeboloid theo hypebol nhận m, n làm hai hướng tiệm cận.

e) Đường kính liên hợp với một hướng mặt phẳng π

Cắt hypeboloid bằng các mặt phẳng song song với π ta có:

- Các elip đồng dạng nếu π' cắt nón tiệm cận theo hai đường sinh ảo liên hợp.

- Các hypebol đồng dạng hoặc liên hợp (có cùng hướng tiệm cận) nếu π' cắt nón theo hai đường sinh thật. Quỹ tích tâm các elip (hoặc hypebol) này là một đường thẳng Δ gọi là đường kính liên hợp đối với hướng mặt phẳng π , Δ đi qua tâm của hypeboloid.

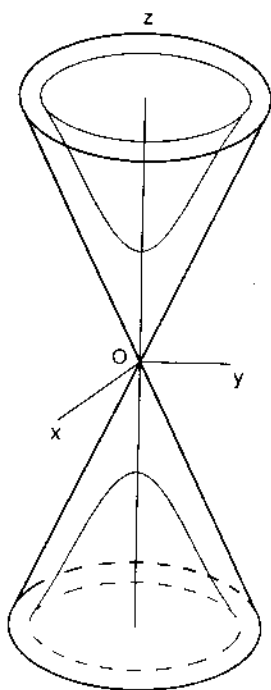
Nếu Δ cắt hypeboloid ở hai điểm thật M và N thì hai mặt phẳng tiếp xúc hypeboloid tại M và N sẽ song song với mặt phẳng π .

- Các parabol nếu π' tiếp xúc nón dọc theo một đường sinh $m \equiv n$. Khi đó đường kính liên hợp đối với hướng mặt phẳng π chính là đường sinh m.

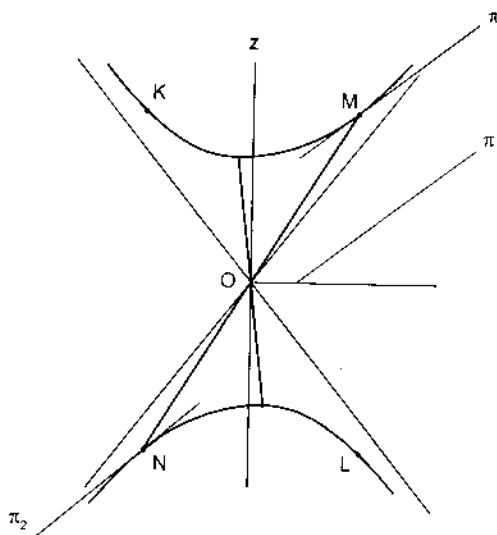
2.2.3. Mặt hypeboloid hai tầng

a) Phương trình của mặt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (1)$$



Hình 2.30



Hình 2.31

b) Mặt cắt chính

Cắt bằng mặt phẳng yOz ta có hypebol: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Cắt bằng mặt phẳng xOz ta có hypebol: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Hypeboloid hai tầng tròn xoay (trục z): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (2)$

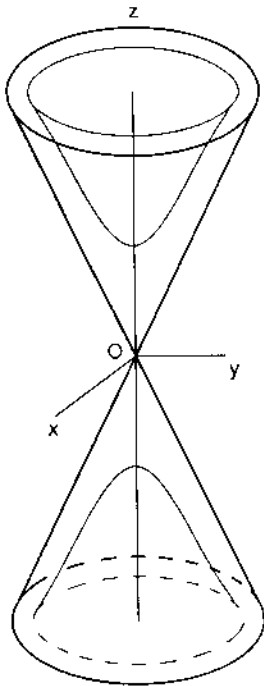
- Các hypebol đồng dạng hoặc liên hợp (có cùng hướng tiệm cận) nếu π' cắt nón theo hai đường sinh thật. Quỹ tích tâm các elip (hoặc hypebol) này là một đường thẳng Δ gọi là đường kính liên hợp đối với hướng mặt phẳng π , Δ đi qua tâm của hypeboloid.

Nếu Δ cắt hypeboloid ở hai điểm thật M và N thì hai mặt phẳng tiếp xúc hypeboloid tại M và N sẽ song song với mặt phẳng π .

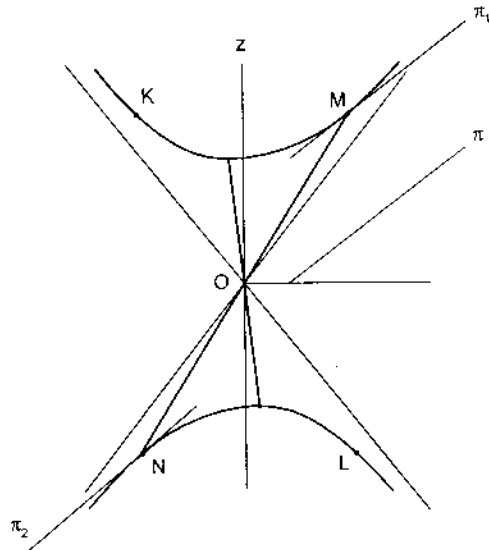
- Các parabol nếu π' tiếp xúc nón dọc theo một đường sinh $m \equiv n$. Khi đó đường kính liên hợp đối với hướng mặt phẳng π chính là đường sinh m.

2.2.3. Mặt hypeboloid hai tầng

a) Phương trình của mặt:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{1}$$



Hình 2.30



Hình 2.31

b) Mặt cắt chính

Cắt bằng mặt phẳng yOz ta có hypebol:
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cắt bằng mặt phẳng xOz ta có hypebol:
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Hypeboloid hai tầng tròn xoay (trục z):
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{2}$$

c) Nón tiệm cận

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (3)$$

d) Giao tuyến phẳng

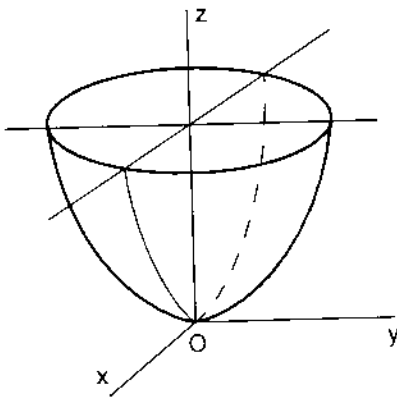
Đường kính liên hợp đối với một hướng mặt phẳng π (tương tự như với hypeboloid một tầng). Hypeboloid hai tầng có hướng tiết diện tròn cũng là hướng tiết diện tròn của nón tiệm cận.

e) Điểm rốn

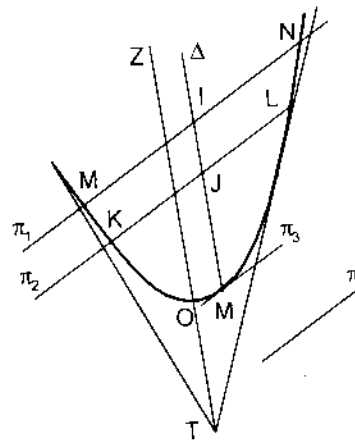
Nếu π là một hướng tiết diện tròn thì $\pi_1 // \pi_2 // \pi$ và tiếp xúc hypeboloid ở hai điểm M và N sẽ cho ta hai điểm rốn M và N. π_1 và π_2 cắt hypeboloid ở hai điểm M và N theo hai đường tròn có bán kính bằng 0 (tức là hai cặp đường kính thẳng đẳng hướng đi qua hai điểm thật M và N).

Hypeboloid con hai điểm rốn nữa là K và L đối xứng với MN qua trục Oz (hình 2.31).

2.3.4. Paraboloid eliptic (hình 2.32)



Hình 2.32



Hình 2.33

a) Phương trình của mặt

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0; q > 0) \quad (1)$$

b) Mặt cắt chính

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cắt bằng mặt phẳng } yOz \text{ ta có parabol: } z = \frac{y^2}{2q} \\ \text{Cắt bằng mặt phẳng } xOz \text{ ta có parabol: } z = \frac{x^2}{2p} \end{array} \right\} \text{ Hai parabol này gọi là parabol chính.}$$

Cắt bằng mặt phẳng song song với xOy, với $z = h$ ta được một elip: $h = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$

Paraboloid tròn xoay ($p = q$): $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p}$

c) Giao tuyến phẳng

- Mọi mặt phẳng cắt song song với trục Oz cho ta một parabol.
- Mọi mặt phẳng không cắt song song với trục Oz cho ta một elip.
- Mọi giao tuyến thuộc mặt phẳng cắt song song với một mặt cắt chính xOz hoặc yOz là các parabol bằng parabol chính và có đỉnh nằm trên parabol chính kia.

Vậy có thể coi paraboloid elliptic là mặt tạo bởi một parabol chính tịnh tiến dọc parabol chính kia.

- Mọi mặt phẳng π song song với nhau và cắt trục Oz sẽ cắt paraboloid theo các elip đồng dạng.
- Với trường hợp paraboloid tròn xoay, hình chiếu của giao tuyến elip bất kỳ lên mặt phẳng vuông góc với trục Oz là một vòng tròn.

d) Điểm rốn

Có hai hướng tiết diện tròn. Nếu π là một hướng tiết diện tròn và $\pi_1 \parallel \pi$ và tiếp xúc paraboloid ở một điểm M thì M gọi là điểm rốn, ở đó π_1 cắt paraboloid theo cặp đường thẳng đẳng hướng qua M.

Ứng với hướng tiết diện tròn thứ hai ta có một điểm rốn thứ hai N, đối xứng của M đối với trục oz

e) Đường kính liên hợp với một mặt phẳng π (hình 2.33)

Giả thiết hướng mặt phẳng π không song song với oz khi đó các mặt các phẳng song song với π cắt parabol theo các elip đồng dạng có hình chiếu đứng là MN và KL.

π_3 tiếp xúc paraboloid ở điểm M. Quỹ tích tâm các elip là một đường thẳng Δ đi qua M và song song với trục oz của paraboloid. Δ gọi là đường kính liên hợp đối với hướng mặt phẳng π đã cho.

Người ta chứng minh rằng paraboloid elliptic tiếp xúc mặt phẳng ở vô tận ở điểm ω là điểm ở vô tận xác định bởi hướng oz. Điểm ω coi là tâm của paraboloid.

- Mặt phẳng ở vô tận cắt paraboloid theo hai đường thẳng ảo liên hợp p, q đi qua điểm thực ω . Giả thiết hướng mặt phẳng π song song với trục oz, tức là chứa một đường thẳng ở zr vô tận đi qua ω . Đường kính liên hợp đối với hướng $\pi \parallel oz$ sẽ là đường thẳng ở vô tận s, đi qua ω sao cho $(p, q, r, s) = -1$.

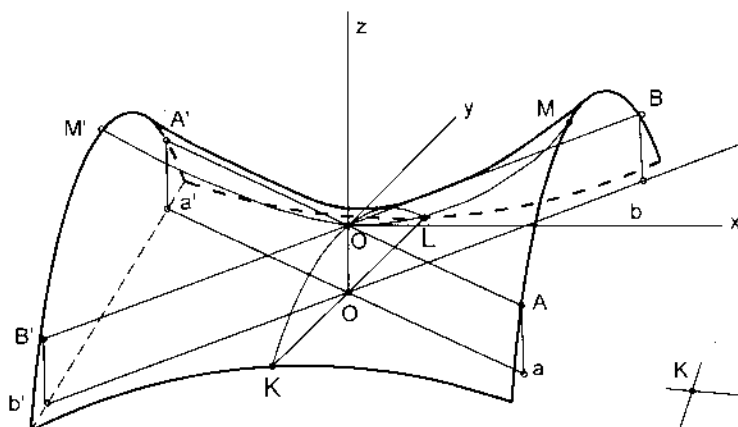
2.3.5. Paraboloid hypebolic (mặt kẻ)

a) Phương trình mặt:
$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0, q > 0)$$

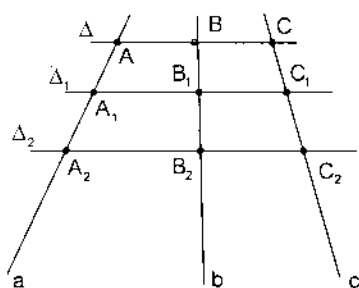
b) Mặt cắt chính

Cắt bằng mặt phẳng yOz , ta có parabol KOL với phương trình: $z = -\frac{y^2}{2q}$

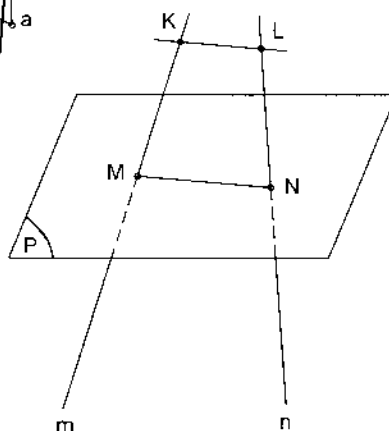
Cắt bằng mặt phẳng xOz , ta có parabol MOM' với phương trình: $z = \frac{x^2}{2p}$



Hình 2.34



Hình 2.35a



Hình 2.35b

Đây là hai parabol chính có phía lõm đối nhau. Mặt paraboloid hypebolic (mặt yên ngựa) có thể coi là tạo bởi một parabol chính di chuyển song song dọc theo parabol chính kia.

Cách tạo mặt yên ngựa bằng các đường thẳng:

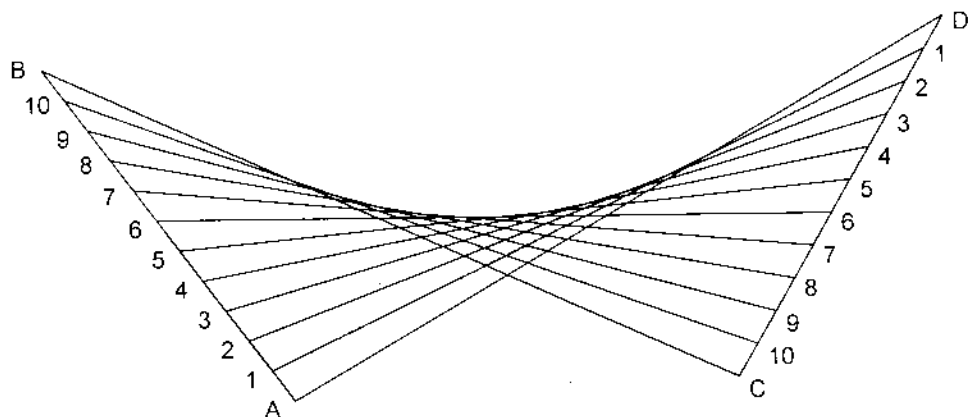
1- Paraboloid hypebolic được tạo bởi một đường thẳng di động Δ dựa trên ba đường thẳng chéo nhau a, b, c cùng song song với một mặt phẳng (hình 2.35a).

- $a, b, c, \dots$ thuộc một họ đường sinh.
- Các đường thẳng Δ tạo nên họ đường sinh thứ hai.

- Ba đường sinh của họ thứ nhất tạo trên các đường sinh của họ thứ hai các hàng điểm bảo tồn tỉ số đơn: $(ABC) = (A_1B_1C_1) = (A_2B_2C_2) \dots$

2- Mặt yên ngựa còn được xác định bởi hai đường thẳng chéo nhau m, n cắt một mặt phẳng P ở M và N . Đường thẳng đi động Δ song song với mặt phẳng P và cắt m, n tạo nên một họ đường sinh của mặt phẳng yên ngựa. Đường thẳng m, n thuộc họ đường sinh thứ hai và song song với một mặt phẳng Q (hình 2.35b).

- Đường thẳng ở vô tận p_∞ của mặt phẳng P cùng thuộc họ đường sinh với m, n .
- Đường thẳng ở vô tận q_∞ của mặt phẳng Q cùng thuộc họ đường sinh với các Δ .



Hình 2.36

3- Mặt yên ngựa cũng thường được cho bằng một tứ diện $ABCD$. Cách vẽ các đường sinh của hai họ như sau: (hình 2.36)

- Chia AB thành các đoạn bằng nhau, có đánh số (từ 1 đến 10). Tương tự chia DC thành các đoạn bằng nhau có đánh số theo cách trên.
- Nối các điểm có cùng số, ta có các đường sinh cùng một họ: 1-1, 2-2, 3-3,...
- Làm tương tự với BC và AD ta có họ đường sinh thứ hai.

c) Mặt phẳng định hướng (hình 2.34)

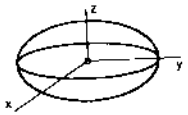
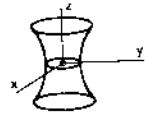
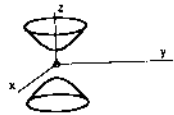
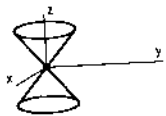
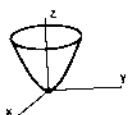
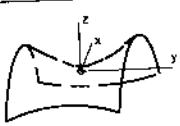
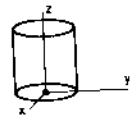
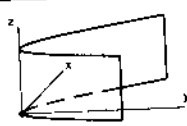
Mặt phẳng tiếp xúc ở O cắt mặt paraboloid hypebolic theo hai đường sinh gọi là đường sinh chính AA', BB' .

Hai đường sinh này tạo với trục oz hai mặt phẳng gọi là mặt phẳng định hướng P và Q của paraboloid.

d) Mặt phẳng tiệm cận tương ứng với một đường sinh

Mặt phẳng R đi qua một đường sinh và song song với một mặt phẳng định hướng P cắt paraboloid theo một đường sinh ở khoảng cách giới nội, và theo một đường sinh ở vô tận thuộc hệ đường sinh song song với Q . Mặt phẳng R gọi là mặt phẳng tiệm cận tương ứng với đường sinh nối trên (vì tiếp xúc với paraboloid hypebolic ở điểm vô tận của đường sinh này).

BẢNG TÓM TẮT CÁC DẠNG MẶT BẬC HAI

STT	Phương trình chuẩn tắc	Hình dáng	Tên mặt
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		Elipxoid (trường hợp đặc biệt elipxoid tròn xoay và mặt cầu)
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		Hypeboloid một tầng (kẻ)
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$		Hypeboloid hai tầng
4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$		Nón bậc hai
5	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$		Paraboloid lptic
6	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$		Paraboloid hypebolic (kẻ)
7	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		Trụ eliptic
8	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Trụ hypepolic
9	$y^2 = 2px$		Trụ parabolic

10- Dạng suy biến: cặp mặt phẳng cắt nhau $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$; cặp mặt phẳng cắt nhau $\frac{x^2}{a^2} = 1$;

cặp mặt phẳng trùng nhau $x^2 = 0$

Và các mặt bậc hai ảo; trong đó có elipxoid ảo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$, các nón và trụ ảo, các cặp mặt phẳng ảo, v.v...

e) Giao tuyến phẳng

- Nếu mặt phẳng cắt π mà cắt trục oz thì sẽ cắt hai mặt phẳng định hướng theo hai đường thẳng cắt nhau Δ và Δ_1 , giao tuyến là một hypebol với hướng tiệm cận là Δ và Δ_1 .

Chú ý: Mặt phẳng π tiếp xúc paraboloid ở một điểm M sẽ cắt mặt này theo hai đường sinh m, n qua M. Mọi mặt phẳng song song với π sẽ cắt paraboloid theo hypebol nhận m và n làm hướng tiệm cận.

- Nếu mặt phẳng π song song với trục oz thì hai hướng Δ và Δ_1 trùng nhau. Giao tuyến là một parabol.

f) Đường kính liên hợp với một hướng mặt phẳng đã cho

- Cho hướng mặt phẳng π cắt paraboloid theo các hypebol. Các mặt phẳng song song với π sẽ cắt paraboloid theo các hypebol đồng dạng hay liên hợp (có các tiệm cận tương ứng song song).

- Quỹ tích tâm các hypebol nói trên là một đường thẳng Δ gọi là đường kính liên hợp của mặt phẳng π đối với paraboloid hypebolic.

- Δ luôn song song với trục oz.

- Người ta chứng minh rằng paraboloid hypebolic tiếp xúc mặt phẳng ở vô tận ở điểm ω là điểm ở vô tận xác định bởi hướng oz. Điểm ω coi là tâm của paraboloid.

- Mặt phẳng ở vô tận cắt paraboloid hypebolic. theo hai đường sinh thật p, q đi qua điểm thực ω . Giả thiết hướng mặt phẳng π song song với trục oz, tức là chứa một đường thẳng ở vô tận r đi qua ω . Đường kính liên hợp đối với hướng π khi đó là đường thẳng s ở vô tận đi qua ω sao cho $(p, q, r, s) = -1$.

2.4. MỘT SỐ TÍNH CHẤT MẶT BẬC HAI LIÊN QUAN TỚI VẼ BÓNG

1. Hai mặt bậc hai có một conic chung, cắt nhau theo một conic thứ hai, và tiếp xúc nhau ở giao điểm của hai đường cong đó.

2. Định lý Monge (đảo của định lý trên).

Hai mặt bậc hai lưỡng tiếp, nói chung cắt nhau theo hai đường cong phẳng.

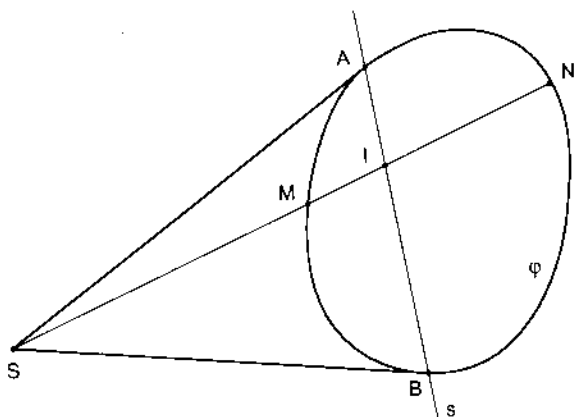
3. Hai mặt bậc hai tiếp xúc ở ba điểm, nói chung tiếp xúc dọc một conic đi qua ba điểm đó.

4. Mặt phẳng đối cực của một điểm đối với một mặt bậc hai.

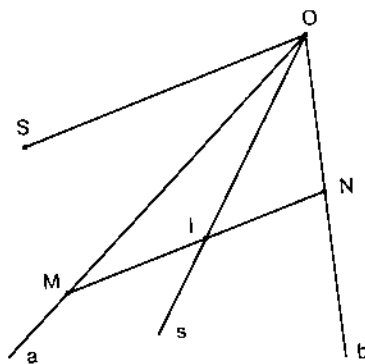
a) Đường thẳng đối cực của một điểm đối với một conic.

Qua S kẻ đường thẳng di động cắt conic ở M, N.

Quỹ tích điểm I sao cho $(SIMN) = -1$ là một đường thẳng s gọi là đường thẳng đối cực của điểm S đối với conic φ .



Hình 2.37a



Hình 2.37b

- Trường hợp A và B là hai tiếp điểm thì s chính là đường thẳng AB.

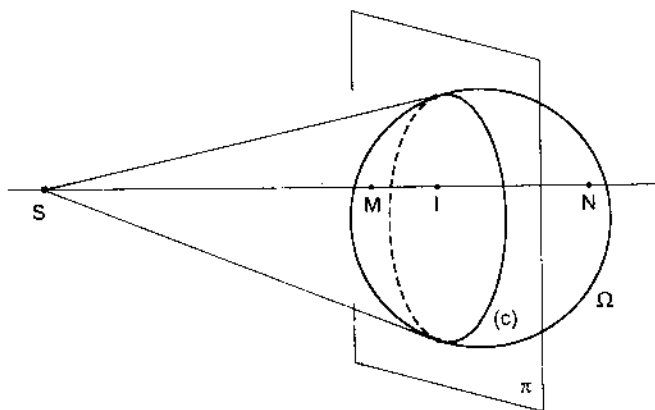
- Trường hợp conic φ suy biến thành cặp đường thẳng a, b thì đối cực của S đối với φ là đường thẳng s liên hợp của đường thẳng OS đối với a, b.

Trên hình 2.37b vẽ $MN \parallel OS$; $IM = IN$, OI chính là đường thẳng đối cực s cần tìm.

b) Mặt phẳng đối cực của một điểm đối với một mặt bậc hai đã cho.

Đường thẳng di động qua S cắt mặt bậc hai ở hai điểm MN. Quỹ tích điểm I sao cho $(SIMN) = -1$ là một mặt phẳng π gọi là mặt phẳng đối cực của điểm S đối với mặt bậc hai Ω .

Mặt phẳng π cắt mặt bậc hai Ω theo một conic. Nón đỉnh S, đường chuẩn (c) tiếp xúc mặt bậc hai dọc theo conic (c).



Hình 2.38

Mặt phẳng qua S cắt Ω theo một conic ω và cắt phẳng π theo một đường thẳng s.

Đường thẳng s là đối cực của S đối với ω .

Bóng bản thân và bóng đổ của mặt bậc hai:

Trường hợp mặt Φ là mặt bậc hai, rõ ràng φ' thuộc mặt phẳng đối cực của nguồn sáng S đối với Φ .

Nếu nguồn sáng S ra xa vô tận, mặt phẳng đối cực là một mặt phẳng đi qua tâm O của Φ , gọi là mặt phẳng kính. Vậy với tia sáng song song, bóng bản thân của Φ là một conic thuộc một mặt phẳng kính.

Mệnh đề này có thể phát biểu dưới dạng vẽ bóng như sau:

Cho nguồn sáng S , mặt bậc hai Ψ nội tiếp mặt bậc hai Φ dọc theo conic ω' .

- Đường cong bóng bản thân φ' của Φ , đường cong bóng bản thân ψ' của Ψ và đường cong ω' cắt nhau ở hai điểm P' và Q' .

- Đường cong bóng đổ φ của Φ .

Đường cong bóng đổ ψ của Ψ và đường cong φ , bóng đổ của ω' lên mặt phẳng π tiếp xúc ở hai điểm P và Q là bóng đổ của P' và Q' .

• Trường hợp đặc biệt (hình 2.41a):

Φ là hypeboloid một hoặc hai tầng. ψ là nón tiệm cận của Φ .

– ω' là đường cong tiếp xúc ở vô tận của nón tiệm cận với hypeboloid.

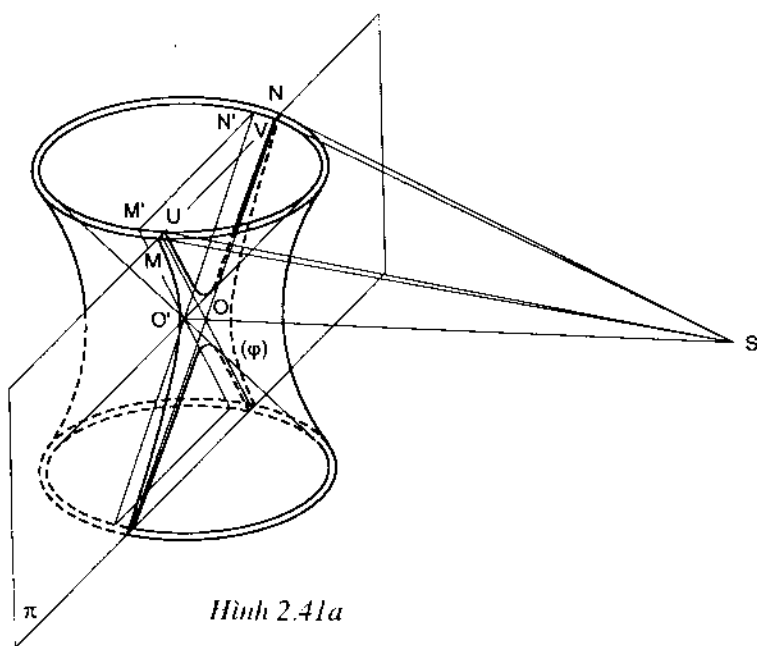
Khi đó: Bóng bản thân ψ' của nón ψ (gồm hai đường sinh $O'P'$ và $O'Q'$) và bóng bản thân φ' của Φ cắt nhau ở hai điểm P' và Q' thuộc đường cong tiếp xúc ω' ở vô tận.

Trên hình 2.41a hai đường sinh $O'P'$ và $O'Q'$ chính là hai đường sinh $O'M'$ và $O'N'$.

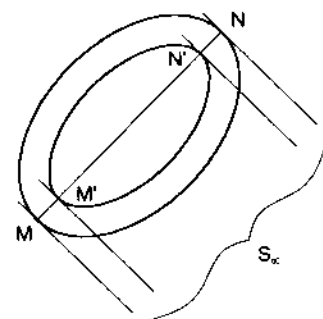
Ta có ngay mệnh đề 1': "Với nguồn sáng S , đường cong bóng bản thân φ của hypeboloid Φ nhận hai đường sinh bóng bản thân của nón tiệm cận làm hai hướng tiệm cận".

• Trường hợp S ra vô tận: các tia sáng đều song song. Ta có mệnh đề sau: (hình 2.41b)

Với tia sáng song song đường cong bóng bản thân φ của Φ nhận hai đường sinh của nón tiệm cận làm tiệm cận. Đường cong bóng đổ φ_0 của Φ nhận hai đường sinh thấy ngoài của nón tiệm cận làm hai tiệm cận.



Hình 2.41a



Hình 2.41b

Từ mệnh đề 1' suy ra các hệ quả sau:

a) Với hypeboloid một tầng:

1/ Nguồn sáng S ở miền trong nón tiệm cận.

Nón tiệm cận không có đường sinh bóng bản thân. Nói cách khác hai đường sinh bóng bản thân ảo liên hợp. Bóng bản thân của hypeboloid là elip.

2/ Nguồn sáng S nằm trên mặt nón tiệm cận thuộc một đường sinh (d). Bóng bản thân của nón gồm hai đường sinh trùng nhau với (d).

Đường cong bóng bản thân hypeboloid có hướng tiệm cận (d). Vậy là parabol.

3/ S nằm ngoài nón tiệm cận. Đường cong bóng bản thân của nón gồm hai đường sinh thật là hướng tiệm cận của đường cong bóng bản thân của hypeboloid. Vậy đường cong bóng bản thân của hypeboloid là hypebol.

Chú ý: Khi S coi là một điểm mà thuộc mặt hypeboloid thì đường cong bóng bản thân của hypeboloid suy biến thành hai đường sinh qua S.

Trường hợp tia sáng song song, lý luận tương tự.

- Nếu tia sáng qua đỉnh nón tiệm cận mà thuộc miền trong nón, đường cong bóng bản thân hypeboloid là elip.

- Nếu tia sáng song song với một đường sinh của nón tiệm cận thì đường cong bóng bản thân của hypeboloid là một parabol.

- Nếu tia sáng qua đỉnh nón tiệm cận mà thuộc miền ngoài của nón thì bóng bản thân của hypeboloid là một hypebol.

b) Hypeboloid hai tầng:

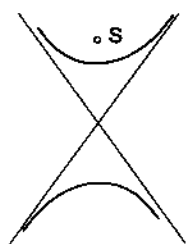
1/ Nguồn sáng S ở miền trong của hypeboloid

Không có bóng bản thân của hypeboloid (hình 2.42a).

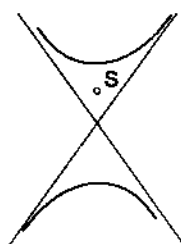
2/ Nguồn sáng S ở miền ngoài hypeboloid nhưng ở miền trong nón tiệm cận (hình 2.42b). Đường cong bóng bản thân hypeboloid là elip.

3/ Nguồn sáng S ở ngoài nón tiệm cận. Đường cong bóng bản thân hypeboloid là hypebol.

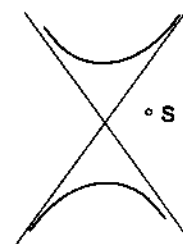
Độc giả tự xét lấy trường hợp nguồn sáng S ra xa vô tận.



Hình 2.42a

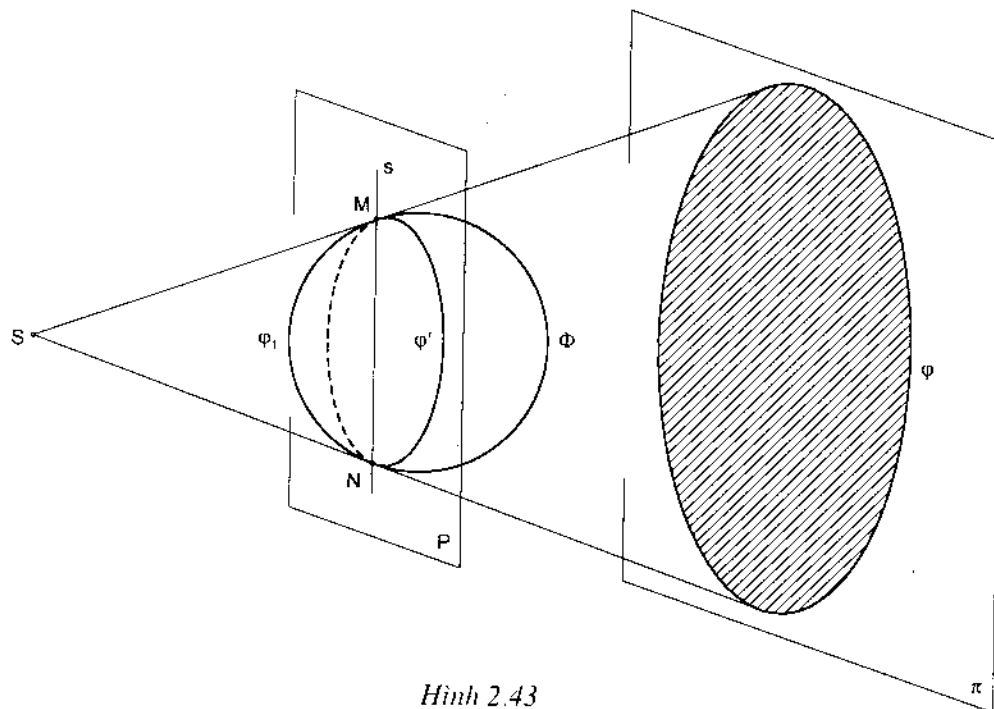


Hình 2.42b



Hình 2.42c

Mệnh đề 2: Cho mặt bậc hai Φ ; nón đỉnh S tiếp xúc Φ dọc conic φ' ; φ là hình chiếu từ S của φ' lên một mặt phẳng π . Trên mặt Φ vẽ đường cong (c') . Ta có mệnh đề sau: (hình 2.43)



Hình 2.43

Hình chiếu từ S lên mặt phẳng π của các đường cong thuộc ϕ và đặc biệt hình chiếu của các đường sinh của ϕ nhận φ làm đường bao.

Hệ quả 1: (hình 2.43a) Giả thiết Φ là mặt bậc hai không kè và F' là một điểm rốn, ở đó mặt phẳng tiếp xúc P song song với mặt tranh vẽ π . Ta biết rằng vì F' là điểm rốn nên mặt phẳng P tiếp xúc ở điểm F' cắt ϕ theo hai đường thẳng hướng qua F' . Vì mặt phẳng P song song mặt phẳng π nên hai đường đẳng hướng qua F' chiếu lên mặt phẳng π thành hai đường đẳng hướng qua F là hình chiếu từ S của F' lên mặt phẳng π . Theo mệnh đề 2, hai đường đẳng hướng qua F phải tiếp xúc conic φ . Vậy F là một tiêu điểm của φ .

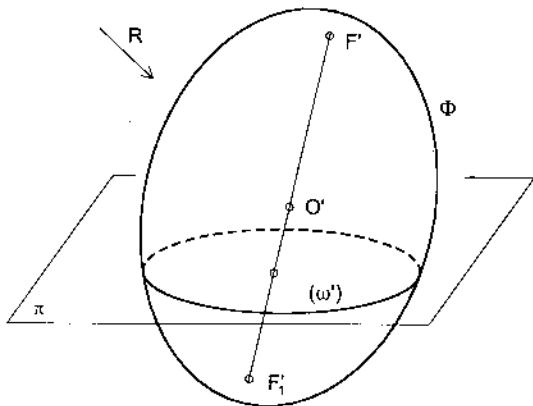
Ta chú ý rằng hình chiếu F_1 của điểm rốn F'_1 đối xứng của F' đối với tâm của mặt bậc hai sẽ là tiêu điểm thứ hai của đường cong bóng đổ φ . Nói cách khác hệ quả 1 có thể phát biểu:

"Nếu hai mặt phẳng P và P_1 song song với mặt phẳng π và tiếp xúc mặt bậc hai ϕ ở hai điểm rốn F' và F'_1 thì đường cong bóng đổ của ϕ lên mặt phẳng π nhận bóng đổ F và F_1 của hai điểm rốn làm tiêu điểm".

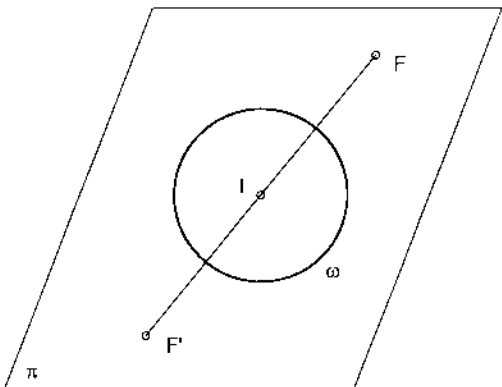
Hệ quả 2: Cho mặt phẳng π cắt mặt bậc hai ϕ theo một conic (ω') và F' , F'_1 là đường kính liên hợp của hướng mặt phẳng π đối với ϕ (hình 2.43a).

Giả thiết hướng tia sáng song song và bóng đổ của (ω') và $F'F_1'$ lên mặt phẳng π là vòng tròn ω và đường kính FF_1' , áp dụng mệnh đề 2 ta có hệ quả 2 sau đây:

"Bóng đổ ϕ của ϕ lên mặt phẳng π theo hướng song song R là conic nhận F và F_1 làm tiêu điểm và tiếp xúc vòng tròn ω ở hai điểm" (hình 2.43b).



Hình 2.43a



Hình 2.43b

2.5. ĐỊNH LÍ DUPIN (ĐUYPANH) VÀ ỨNG DỤNG VÀO VẼ BÓNG

2.5.1. Nhắc lại một số khái niệm và định lý

1/ Mặt phẳng tiếp xúc đường cong:

Mặt phẳng tiếp xúc đường cong là mặt phẳng đi qua một tiếp tuyến với đường cong.

Mặt phẳng tiếp xúc đường cong (c) ở điểm M là giới hạn của một mặt phẳng tiếp xúc ở M và qua một điểm M' của (c) vô cùng gần M .

Pháp tuyến chính: mọi đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến và qua tiếp điểm gọi là pháp tuyến của đường cong.

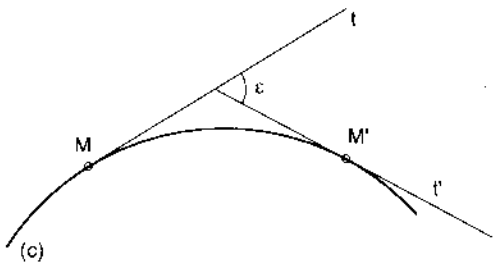
Pháp tuyến thuộc mặt phẳng tiếp xúc gọi là pháp tuyến chính.

Mặt phẳng vuông góc tiếp tuyến và qua tiếp điểm gọi là mặt phẳng pháp tuyến.

Tiết diện pháp tuyến: đường cong phẳng giao tuyến của mặt với mặt phẳng đi qua pháp tuyến với mặt.

2/ Độ cong và tâm cong:

Trên một đường cong phẳng hoặc gھnھ (c) , xét một điểm M cố định và điểm M' vô cùng gần; ϵ góc vô cùng nhỏ giữa hai tiếp tuyến ở M và M' .



Hình 2.44

Độ cong của (c) ở M:

$$\lim \frac{\varepsilon}{MM'} \quad (\widehat{MM'} \text{ là cung } MM')$$

Bán kính cong R: là nghịch đảo của độ cong.

Trên pháp tuyến chính, từ điểm M, theo hướng lõm của hình chiếu đường cong (c) lên mặt phẳng tiếp ở M, đặt một đoạn thẳng bằng R ta có tâm cong của (c).

3/ Độ cong của các đường cong vẽ trên một mặt:

Xét điểm M thuộc đường cong (c) vẽ trên một mặt Φ . Người ta chứng minh rằng đường cong (c') giao của mặt Φ với mặt phẳng tiếp của (c) ở M có cùng độ cong ở điểm M.

Như vậy việc nghiên cứu độ cong của các đường cong trên một mặt đưa về nghiên cứu độ cong của các đường cong phẳng.

4/ Công thức Euler (Ole):

Định trên pháp tuyến MN ở M một hướng dương, thí dụ Mz. Xét một mặt phẳng cắt pháp tuyến biến đổi được xác định bởi vết MT trên mặt phẳng P tiếp xúc Φ ở M.

R số đo đại số trên Mz của bán kính cong ở M của tiết diện. Người ta chứng minh rằng có hai tiết diện pháp tuyến đặc biệt, tương ứng hai mặt phẳng vuông góc, có bán kính cong R_1 và R_2 gọi là bán kính cong chính.

Ký hiệu MT_1 , MT_2 vết vuông góc của các mặt phẳng chính lên mặt phẳng P và θ là góc giữa MT_1 và MT. Ta có công thức Euler:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}$$

2.5.2. Chỉ đồ Dupin

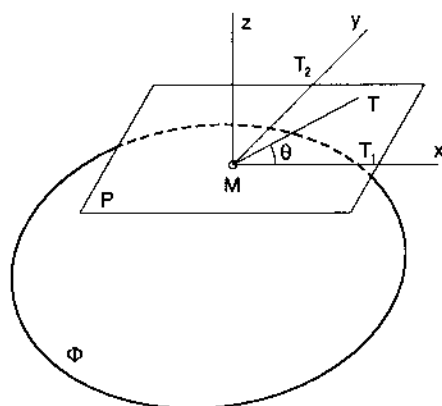
Trên vết MT của mặt phẳng cắt pháp tuyến, từ điểm M đặt một đoạn $MI = \sqrt{\lambda R}$.

λ là số đo của một đoạn thẳng cố định, cùng dấu với R. Tìm quỹ tích điểm I khi mặt phẳng cắt pháp tuyến xoay quanh MN.

Trong mặt phẳng P lấy MT_1 và MT_2 làm trục x và y.

Tọa độ x, y của điểm I sẽ là: $x = MI \cos \theta$

$$y = MI \sin \theta$$



Hình 2.45

Do đó, từ công thức Euler suy ra:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \lambda$$

Quỹ tích điểm I là một conic có trục là vết lên mặt phẳng tiếp xúc của hai mặt phẳng chính ở M.

Conic này gọi là chỉ đồ độ cong ở điểm được xét. Đôi khi người ta còn gọi là chỉ đồ Dupin.

Phân loại:

1/ R_1 và R_2 cùng dấu: chỉ đồ là elip. Hai tâm conic chính ở cùng phía của M.

Nếu $R_1 = R_2$ chỉ đồ là đường tròn. M là một điểm rốn (ombilic).

2/ R_1 và R_2 khác dấu: chỉ đồ là hypebol. Hai tâm conic chính ở hai phía khác nhau của M. Mặt có độ cong đối.

Muốn thể hiện cả độ cong âm, chỉ đồ gồm thêm một hypebol liên hiệp ứng với:

$$MI = \sqrt{-\lambda R}$$

3/ Một trong hai bán kính cong chính là vô tận: thí dụ $R_2 \rightarrow \infty$

Phương trình chỉ đồ sẽ là:

$$x = \pm \sqrt{\lambda R_1}$$

Chỉ đồ khi đó gọi là chỉ đồ parabolic và gồm hai đường song song cách đều M. Chỉ đồ parabolic xuất hiện với tất cả các điểm của một mặt khả triển (nón, trụ, mặt có cạnh lồi). ở mỗi điểm của mặt này, một trong hai tiết diện chính là đường sinh: bán kính cong của nó là vô tận. Do đó chỉ đồ trở thành hai đường thẳng song song với đường sinh của điểm được xét.

Vài mệnh đề sau nói lên tính chất của chỉ đồ:

Mệnh đề 1: Tiết diện của một mặt, cắt bằng mặt phẳng tiếp xúc có một điểm kép ở tiếp điểm, hai tiếp tuyến ở điểm đó là tiệm cận của chỉ đồ.

Mệnh đề 2: Hai mặt tiếp xúc ở một điểm cắt nhau theo một đường cong có điểm kép ở điểm đó. Tiếp tuyến là các đường kính chung với hai chỉ đồ (vẽ cùng tỉ lệ xích).

Mệnh đề 3: Trường hợp đặc biệt, nếu hai mặt tiếp xúc dọc theo một đường cong chung, các chỉ đồ (vẽ cùng một tỉ lệ xích) lưỡng tiếp và đường kính nối tiếp điểm là tiếp tuyến với đường cong tiếp xúc của hai mặt.

Từ mệnh đề 3 suy ra: Định lý Dupin hay là định lý về hai tiếp tuyến liên hợp.

Xét một mặt S, một đường cong (c) vẽ trên mặt và một mặt khả triển Σ bao các mặt phẳng tiếp xúc S dọc theo (c). Chỉ đồ của Σ ở một điểm bất kỳ M của (c) gồm hai đường thẳng song song với đường sinh ở M và tiếp xúc với chỉ đồ của S. Vây đường kính của chỉ đồ của S nối hai tiếp điểm, sẽ liên hiệp với đường sinh của điểm M.

Suy ra định lý sau:

Định lý Dupin: Ở một điểm bất kỳ của một đường cong vẽ trên một mặt, tiếp tuyến với đường cong và đường sinh của mặt khả triển ngoại tiếp mặt dọc theo đường cong là hai đường kính liên hiệp đối với chỉ đồ của mặt ở điểm được xét.

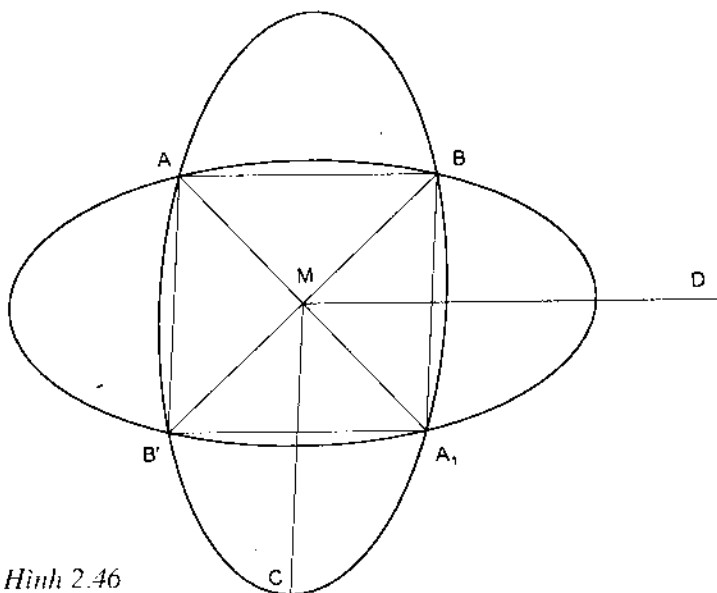
Đặc biệt: Tiếp tuyến ở một điểm với đường cong tiếp xúc của một nón ngoại tiếp một mặt là đường kính liên hiệp với đường sinh của nón qua điểm đó, đối với chỉ đồ của mặt.

Nói cách khác, dưới dạng vẽ bóng:

"*Tiếp tuyến tại một điểm với đường cong bóng bản thân của một mặt là đường kính liên hiệp của tia sáng đối với chỉ đồ của mặt*".

Ta xét thêm mệnh đề sau:

Xét hai mặt tiếp xúc ở M . Chỉ đồ của chúng (vẽ cùng tỉ lệ xích) cắt nhau ở bốn điểm A, B, A', B' (hình 2.46) là đỉnh của một hình bình hành nội tiếp đồng thời hai conic. Do đó MC và MD song song với cạnh hình bình hành là hai tiếp tuyến liên hiệp đối với mỗi chỉ đồ gọi là tiếp tuyến liên hiệp chung.



Hình 2.46

Dựa mệnh đề 2 ta có ngay mệnh đề sau:

Mệnh đề 4: Hai mặt tiếp xúc ở một điểm M có một mặt tiếp tuyến liên hiệp chung, tạo với các tiếp tuyến qua M với giao của hai mặt, một chùm liên hiệp điều hòa. Nếu hai mặt là khả triển, hai hướng tiếp tuyến liên hiệp chung là hướng của hai đường sinh. Đặc biệt với trường hợp nón ta có mệnh đề quen thuộc:

"Hai tiếp tuyến ở một điểm kép của hai mặt nón có chung một mặt phẳng tiếp xúc, tạo với hai đường sinh qua tiếp điểm, một chùm liên hiệp điều hòa".

Xét mặt Φ giới hạn bởi đường cong (c) và được chiếu sáng từ nguồn S .

Nón tia sáng đỉnh S với đường cong chuẩn (c) cắt mặt Φ theo đường cong (c_1) là bóng đổ của (c) lên Φ . Xét một điểm M chung với (c) và (c_1) . Người ta chứng minh, dựa vào mệnh đề 4 và định lý Dupin mệnh đề sau:

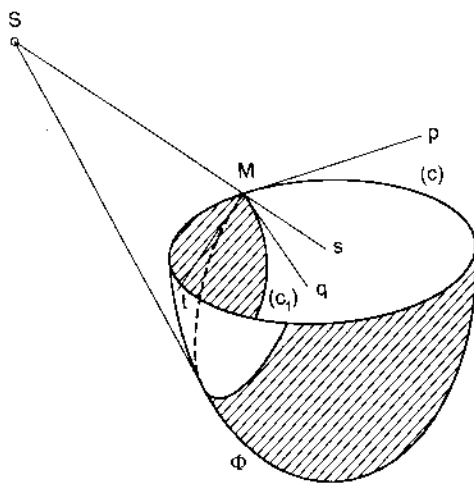
Mệnh đề 5: "Tiếp tuyến ở M với đường cong bóng đổ lên một mặt từ bờ mép của mặt đó là liên hiệp điều hòa của tiếp tuyến đường cong bờ mép ở M đối với tia sáng và tiếp tuyến đường cong bóng bản thân ở M ".

Trên hình 2.47 đường cong bờ mép là (c) , bóng đổ từ (c) lên mặt Φ là (c_1) .

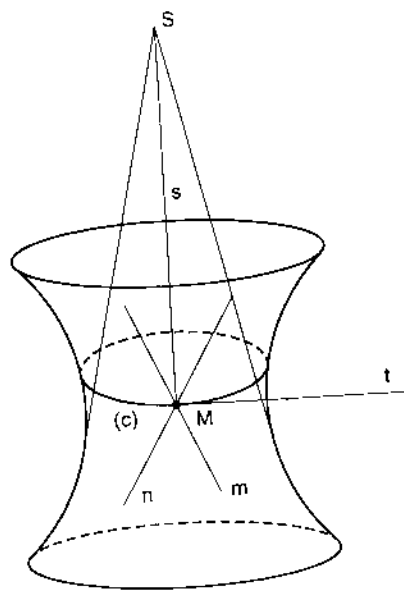
Tiếp tuyến với (c) và (c_1) ở M là p và q .

Tiếp tuyến với bóng bản thân ở M là t .

Tia sáng SM kí hiệu là s và ta có $(pqst) = -1$.



Hình 2.47



Hình 2.48

Chỉ độ Dupin với quadric:

Theo mệnh đề 1, mặt phẳng tiếp xúc cắt Σ theo hai đường sinh là hai tiệm cận của chỉ độ.

Vậy với quadric không kè (elipxoid, paraboloid eliptic, hypeboloid hai tầng) chỉ độ ở mọi điểm là một elip đồng dạng với elip tiết diện cắt bằng mặt phẳng song song với mặt phẳng tiếp xúc ở điểm đó.

Với quadric kè (hypeboloid một tầng, paraboloid hypebolic) chỉ độ ở mọi điểm của quadric là một hypebol có tiệm cận là hai đường sinh qua điểm đó.

Mặt không kè là lỗi trong khi đó mặt kè có "độ cong đối", với tất cả các điểm của mặt.

Ví dụ 1: Chứng minh định lý Dupin với mặt bậc hai "Tiếp tuyến ở một điểm của đường cong tiếp xúc của một quadric với một nón là liên hiệp điều hòa của đường sinh của nón đối với hai đường sinh của quadric".

Giải: 1/ Áp dụng định lý Dupin: Tiếp tuyến Mt với đường cong tiếp xúc và đường sinh SM là liên hiệp đối với chỉ đồ của quadric ở M, cũng tức là đối với hai đường sinh m, n là hai tiệm cận của chỉ đồ.

2/ Chứng minh trực tiếp: Tiếp tuyến Mt là giao của mặt phẳng tiếp xúc ở M với mặt phẳng đối cực của S với quadric (tức là mặt phẳng của đường cong tiếp xúc của nón tia sáng với quadric).

Mặt phẳng tiếp xúc ở M cắt quadric theo conic suy biến thành hai đường sinh qua M là m và n.

Đối cực của S đối với conic này vừa ở mặt phẳng tiếp xúc ở M, vừa ở mặt phẳng đối cực. Đó chính là Mt. Vậy $(m \ n \ s \ t) = -1$ đối với ký hiệu s là SM và t là Mt.

Ví dụ 2: Cho quadric Φ giới hạn bởi conic (c) và được chiếu sáng từ nguồn S. Nón tia sáng đỉnh S, đường cong chuẩn (c) cắt quadric theo conic (c_1) là bóng đổ của (c) lên quadric. Hai conic (c) và (c_1) cắt nhau ở hai điểm. Giả thiết M là một trong hai điểm đó.

Chứng minh trực tiếp mệnh đề 5 sau đây với mặt bậc hai: "Tiếp tuyến với hai conic (c) và (c_1) , ký hiệu p, q. Tia sáng SM ký hiệu s, tiếp tuyến ở M với bóng bản thân ký hiệu là t.

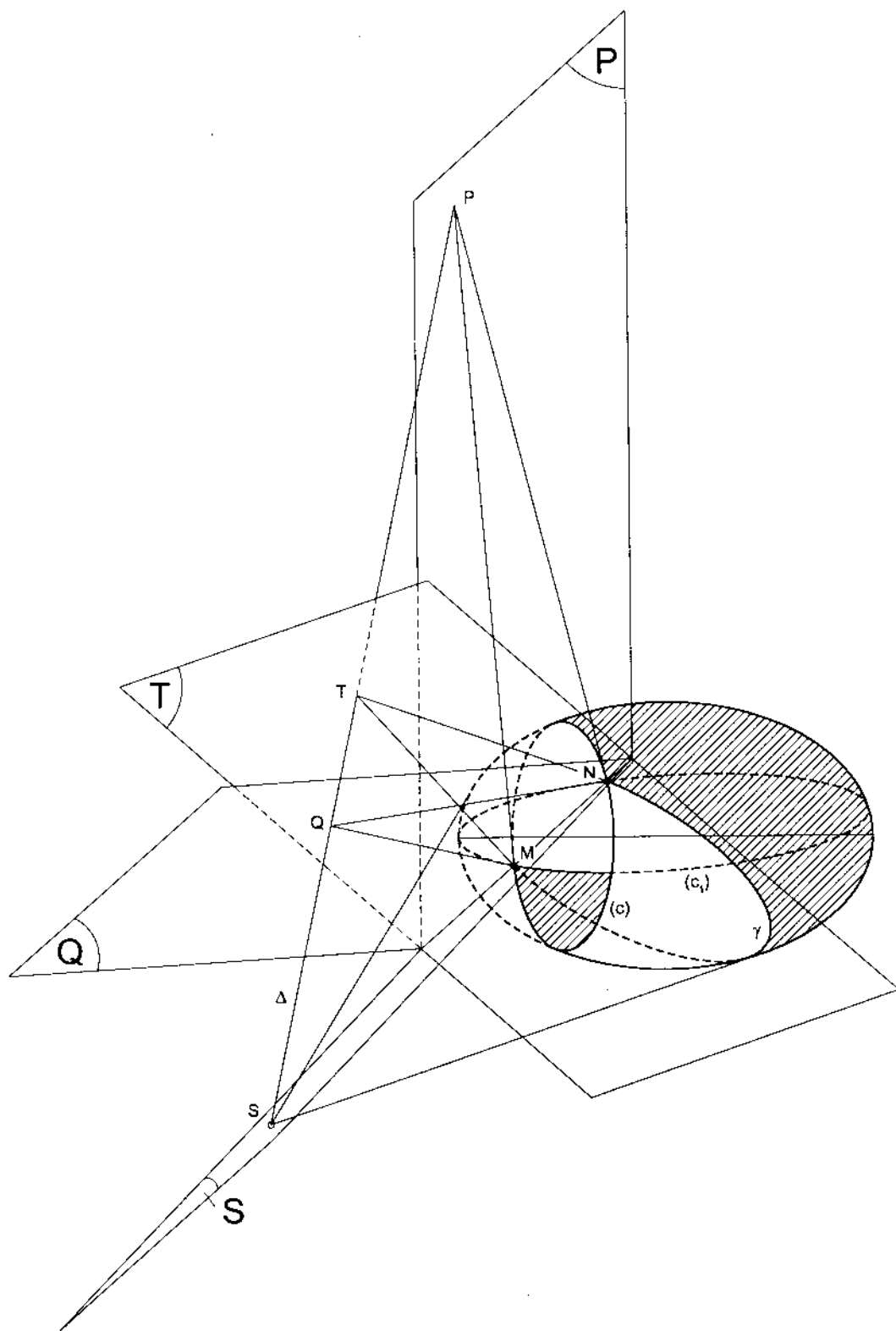
Chứng minh rằng $(p, q, s, t) = -1$ (hình 2.49).

Giải: Nón đỉnh S, đường chuẩn (c) và quadric có chung (c) sẽ cắt nhau theo conic thứ hai (c_1) . Hai đường cong (c) và (c_1) cắt nhau ở hai điểm M, N ở đó nón và quadric có mặt phẳng tiếp xúc chung. Hai mặt phẳng tiếp xúc ở M và N cắt nhau theo một đường thẳng Δ là đối cực của MN đối với quadric (và đối với tất cả các mặt bậc hai của chùm tuyến tính ξ xác định bởi nón và quadric). Ta biết rằng các mặt bậc hai của chùm tuyến tính ξ đều có chung mặt phẳng đối cực đối với đỉnh nón S. Nhưng quadric là một mặt của chùm. Mặt phẳng đối cực của S đối với quadric, tức mặt phẳng T chính là mặt phẳng của bóng bản thân. Hai mặt phẳng P chứa (c) và Q chứa (c_1) là mặt suy biến của chùm. Vậy đối cực của S đối với mặt suy biến (gồm hai mặt phẳng P và Q) là mặt phẳng T. Vậy chùm bốn mặt phẳng P, Q, S, T là liên hiệp điều hòa $(P, Q, S, T) = -1$ với S là mặt phẳng SMN.

Hiển nhiên Δ cắt chùm này theo bốn điểm liên hiệp điều hòa P, Q, S, T và $(PQST) = -1$.

Mặt phẳng P vì qua MN nên cắt Δ đối cực của MN ở điểm P là cực của MN đối với conic (c) thuộc P.

Vậy PM và PN là hai tiếp tuyến ở M và N với (c). Chứng minh tương tự QM, QN là hai tiếp tuyến ở M và N với (c_1) ; và TM, TN là hai tiếp tuyến ở M với γ . Ký hiệu $MP = p$, $MQ = q$, $MS = s$, $MT = t$ thì hiển nhiên ta có $(p, q, s, t) = -1$.



Hình 2.49

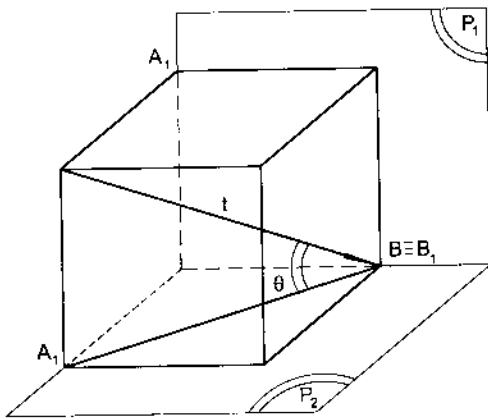
PHẦN HAI - ĐỀ BÀI VÀ LỜI GIẢI

Chương III

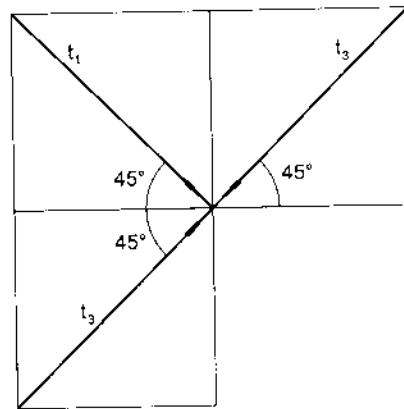
BÓNG CÁC HÌNH HÌNH HỌC

3.1. NGUỒN SÁNG QUY ƯỚC

Để mọi kiến trúc sư và kỹ sư vẽ bóng và đọc hiểu bóng như nhau, người ta quy ước các tia sáng là các đường thẳng song song với đường chéo AB của khối lập phương đặt ở vị trí các mặt bên song song với các mặt phẳng hình chiếu như trên hình 3.1. Ta thấy tia sáng (đường chéo AB) nghiêng một góc bằng nhau (ký hiệu góc θ) đối với mặt phẳng hình chiếu.



Hình 3.1



Hình 3.2

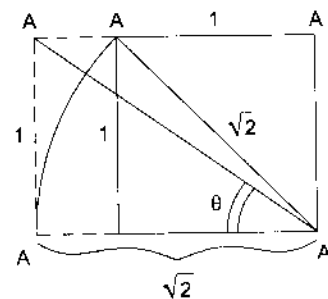
Để dàng tính được góc $\theta = 35^{\circ}15'54'' \rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Các hình chiếu của tia sáng $t \equiv AB$ là t_1, t_2, t_3 đều nghiêng với các trục hình chiếu một góc như nhau bằng 45° (hình 3.2).

Sau này trong quá trình vẽ bóng của các vật thể, có khi ta phải dùng góc θ nên ta có thể dựng góc θ như sau:

- Vẽ đường chéo AB của hình vuông cạnh bằng một đơn vị. Tức là: $AB = \sqrt{2}$.

- Dựng hình chữ nhật có cạnh lần lượt bằng 1 và $\sqrt{2}$ như trên hình 3.3. Góc cần vẽ là $\theta = \widehat{CAB}'$.



Hình 3.3

3.2. BÓNG CỦA ĐIỂM ĐỔ LÊN MẶT PHẪNG HÌNH CHIẾU

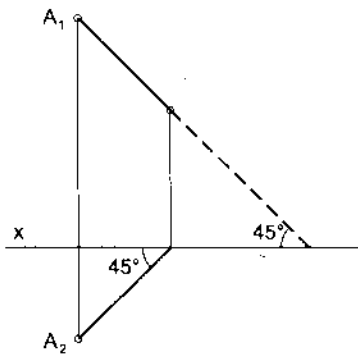
Cho điểm A (A_1, A_2). Bóng của A đổ lên mặt phẳng hình chiếu được vẽ như sau:

- Qua A vẽ một tia sáng t: $t_1 \in A_1, (t_1, x) = 45^\circ$

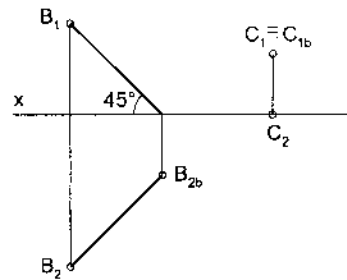
$$t_2 \in A_2, (t_2, x) = 45^\circ$$

- Xác định giao điểm của t với mặt phẳng hình chiếu. Ở đây $t \cap P_1 = A_{1b}$ (hình 3.4). A_{1b} gọi là bóng đổ của A lên mặt phẳng (P_1).

Mặt chứa bóng đổ của điểm (vật thể) gọi là mặt hứng bóng.



Hình 3.4



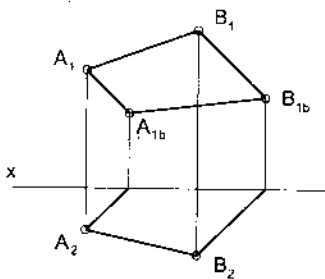
Hình 3.5

Hình 3.5 thể hiện bóng B_{2b} của điểm B đổ lên mặt phẳng (P_2).

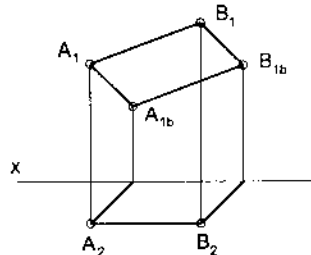
Dễ dàng thấy rằng: bóng của điểm thuộc mặt hứng bóng là điểm trùng với chính nó.

3.3. BÓNG CỦA ĐƯỜNG THẺ ĐỔ LÊN MẶT PHẪNG HÌNH CHIẾU

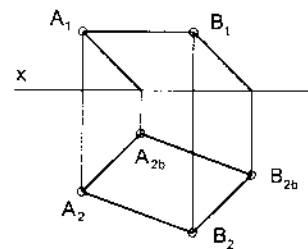
Bóng của đoạn thẳng AB đổ lên mặt phẳng hình chiếu (P_1 chẳng hạn) là một đoạn thẳng xác định bởi bóng của A và B đổ lên (P_1), là $A_{1b}B_{1b}$ (hình 3.6).



Hình 3.6



Hình 3.7

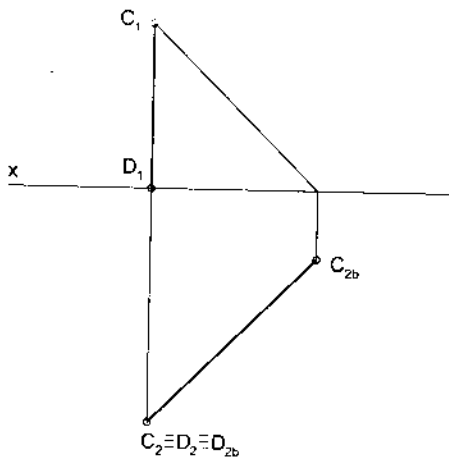


Hình 3.8

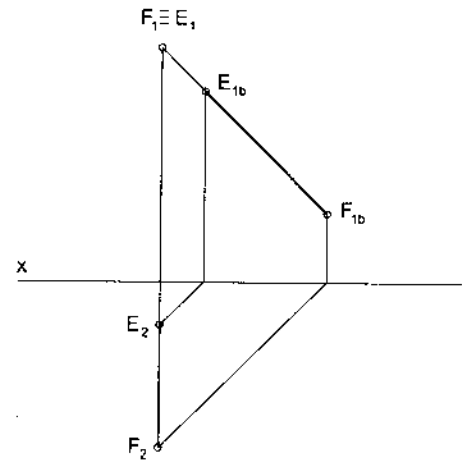
Hình 3.7 và hình 3.8 vẽ bóng đổ của các đường thẳng song song với mặt phẳng (P_1) và (P_2).

Bóng đổ của mỗi đoạn thẳng trên là đoạn thẳng song song và bằng chính đoạn thẳng đó.

Hình 3.9 và hình 3.10 vẽ bóng của đoạn thẳng thẳng góc với mặt phẳng hình chiếu. Bóng của chúng là các đoạn thẳng trùng với hình chiếu tương ứng của tia sáng, tức nghiêng 45° đối với trục x .



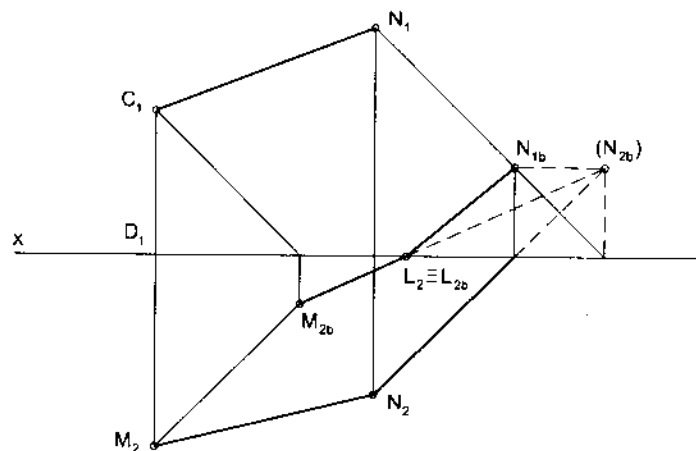
Hình 3.9



Hình 3.10

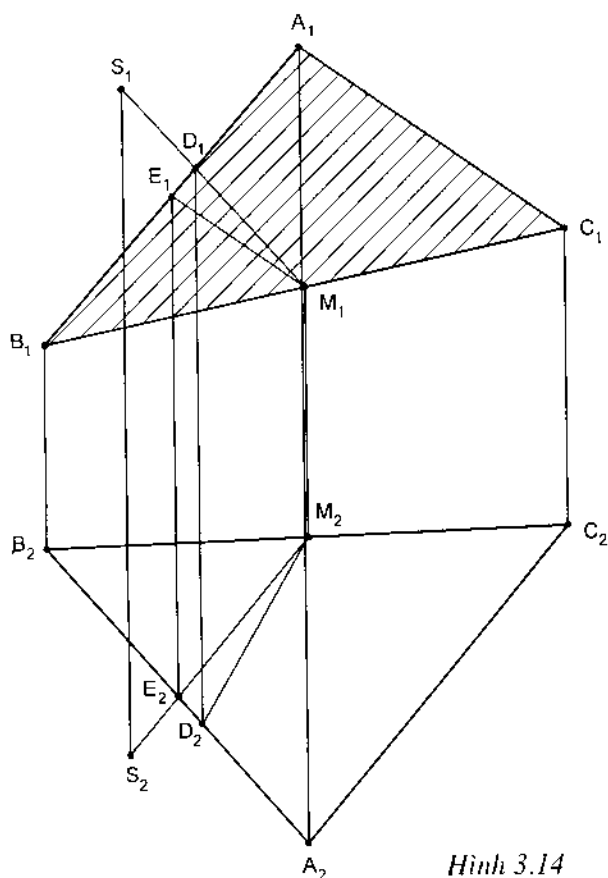
Trên hình 3.11 vẽ bóng của đoạn thẳng MN đổ lên hai mặt phẳng hình chiếu (P_1) và (P_2). Bóng của nó là đường gãy khúc $M_{2b}L_{1b}N_{1b}$. Điểm $N_{1b} \equiv N_{2b} \in x$ gọi là điểm gãy của bóng. Điểm này được xác định nhờ việc nối M_{2b} với điểm bóng ảo (N_{2b}). (N_{2b}) là bóng của điểm N tương tự đổ xuống mặt phẳng (P_2) vì mặt phẳng hứng bóng được giả thiết là đục tia sáng không xuyên qua.

Vậy bóng của đoạn thẳng đổ xuống hai mặt phẳng là một đường gãy khúc mà điểm gãy nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng hứng bóng ấy.

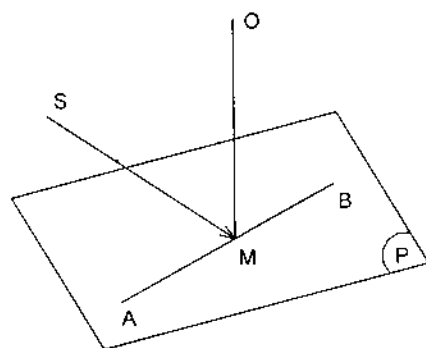


Hình 3.11

Ví dụ: Xác định tối, sáng của mặt phẳng P được cho bằng tam giác ABC.



Hình 3.14



Hình 3.13

Giải: (hình 3.14)

Ta áp dụng quy tắc trên. Xét mặt phẳng tia chiếu bằng Q chứa SM. Mặt phẳng Q cắt mặt phẳng P theo đường thẳng EM có hình chiếu bằng là E_2M_2 và hình chiếu đứng là E_1M_1 .

Tia sáng SM tới điểm M ở phía trên mặt phẳng P, vậy trên hình chiếu bằng mặt phẳng P sáng. Tương tự, xét mặt phẳng tia chiếu đứng R chứa SM. Mặt phẳng R cắt mặt phẳng P theo đường thẳng DM có hình chiếu bằng D_2M_2 và hình chiếu đứng D_1M_1 .

Tia sáng SM tới điểm M ở phía sau mặt phẳng P, vậy trên hình chiếu đứng mặt phẳng P tối.

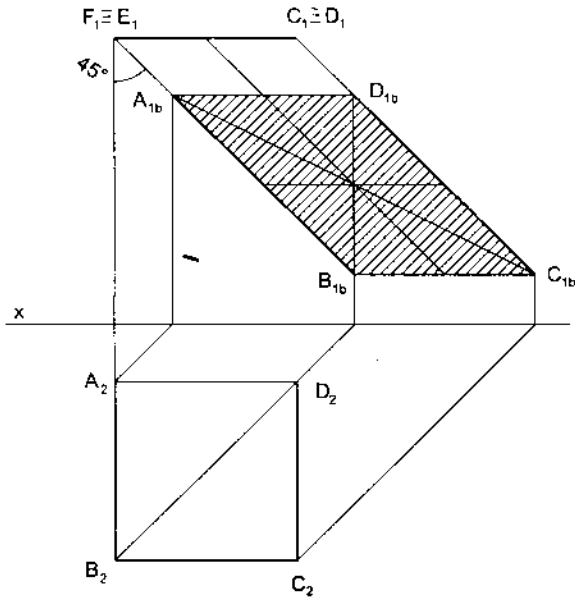
Chú ý: Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của tam giác ABC có chiều khác nhau: $A_1B_1C_1$ (ngược chiều kim đồng hồ), $A_2B_2C_2$ (cùng chiều kim đồng hồ). Vậy nếu trên hình chiếu bằng mặt phẳng P là sáng thì trên hình chiếu đứng mặt phẳng P nhất thiết phải là tối.

Cần nhớ quy tắc sau:

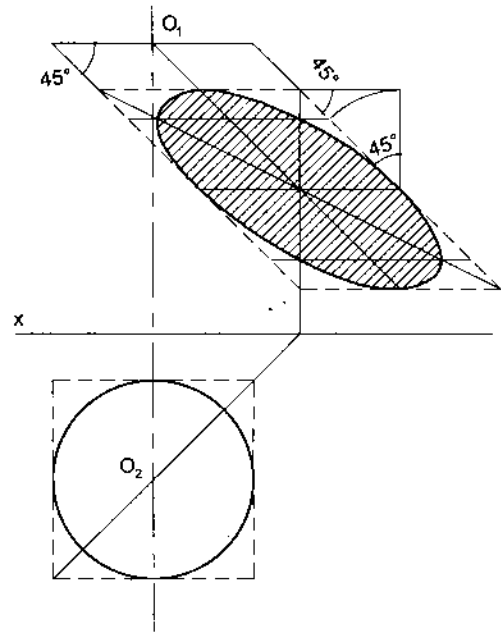
“Nếu hai hình chiếu của mặt phẳng P là cùng chiều thì trên hình chiếu đứng và hình chiếu bằng, mặt phẳng P đều là sáng hoặc là tối. Nếu hai hình chiếu của mặt phẳng P khác chiều thì nếu trên một hình chiếu, mặt phẳng P là sáng thì trên hình chiếu kia, mặt phẳng P sẽ là tối và đảo lại”.

3.4.3. Một số ví dụ về vẽ bóng các hình phẳng

- Hình 3.15 vẽ bóng của hình vuông đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng.
- Hình 3.16 vẽ bóng của hình tròn đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng theo phương pháp 8 điểm với hình vuông ngoại tiếp làm phụ trợ.

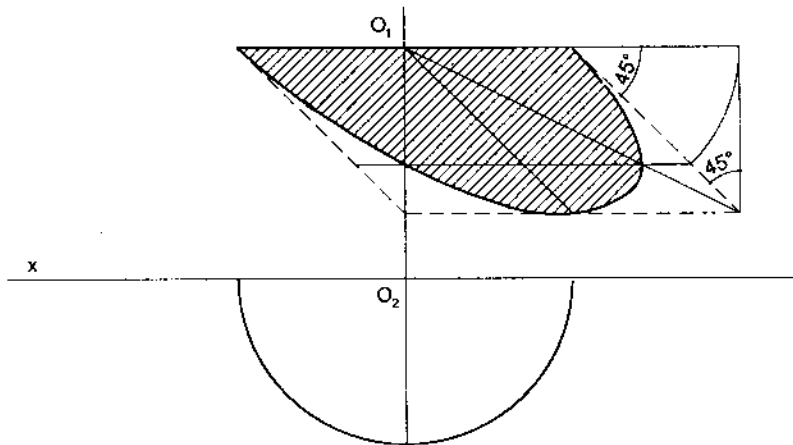


Hình 3.15



Hình 3.16

Hình 3.17 vẽ bóng nửa hình tròn.



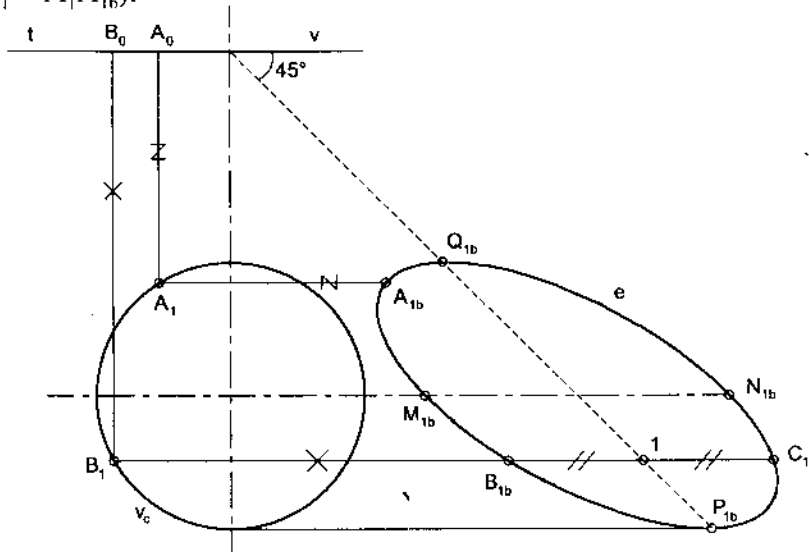
Hình 3.17

Để vẽ bóng đổ của vòng tròn, người ta thường vẽ hình bình hành bóng đổ của hình vuông ngoại tiếp hình tròn, rồi nội tiếp một elip trong hình bình hành ấy. Elip này là bóng cần tìm của hình tròn.

Dưới đây ta dùng phép afin để vẽ bóng của hình tròn.

Trên hình 3.18, giả sử elip e là bóng của đường tròn v nằm ngang đổ lên hình chiếu đứng Π_1 . Gọi v_c là hình chập của v quanh vết đứng của mặt phẳng chứa v vào Π_1 . Vòng tròn v_c và elip e tương ứng nhau trong phép afin trục t , cặp điểm tương ứng A_1, A_{1b} ; hướng afin song song với t , trong đó cặp đường thẳng tương ứng nhau là hai đường thẳng A_0A_1, A_0A_{1b} cắt nhau tại t , theo thứ tự vuông góc và nghiêng 45° với t . Và elip e được vẽ từng điểm như điểm A_{1b} như sau:

- Từ A_0 trên v , kẻ đường thẳng đứng cắt v_c tại A_1 .
- Từ A_1 kẻ đường thẳng song song với t , cắt tia nghiêng 45° đi qua A_0 tại điểm A_{1b} cần vẽ (hoặc lấy $A_0A_1 = A_1A_{1b}$).

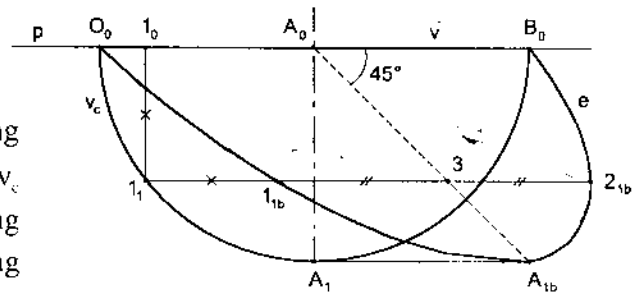


Hình 3.18

Ngoài ra, ta có hai đoạn thẳng $P_{1b}Q_{1b}$ và $M_{1b}N_{1b}$ là đường kính liên hợp của elip. Nếu kết hợp phép afin nói trên với tính chất đường kính liên hợp của elip liên hợp chia đôi dây cung song song với đường kính kia, ta có cách vẽ tương ứng với một điểm, chẳng hạn B của v ta được hai điểm B_{1b}, C_{1b} của e như sau:

- Từ B_1 trên v_c vẽ đường thẳng $s \parallel t$.
- Lấy $B_0B_1 = B_1B_{1b}$.

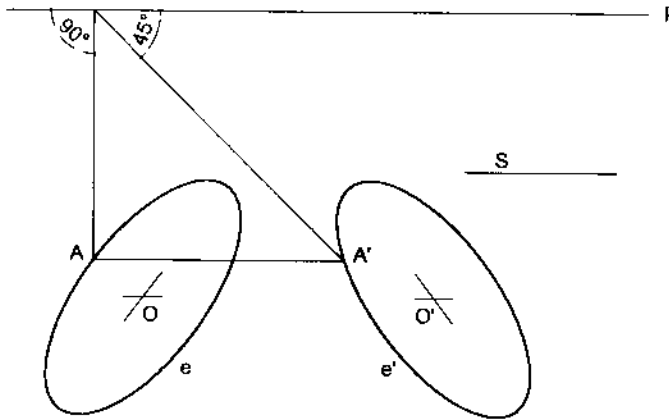
Hình 3.19 vẽ bóng elip e của nửa vòng tròn v (mà hình chập lên Π_1 và v_c). e và v_c tương ứng nhau trong afin trục p , hướng afin song song với p . Và e được vẽ tương tự như hình 1.



Hình 3.19

Chú ý: Hai điểm O_0 và B_0 là hai điểm tự ứng. Đường thẳng $A_1A_{1b} \parallel p$ là tiếp tuyến chung của e và v_c .

Hình 3.20 giới thiệu tương ứng affin phối cảnh giữa elip e và e' , trục là p và hướng $s \parallel p$.



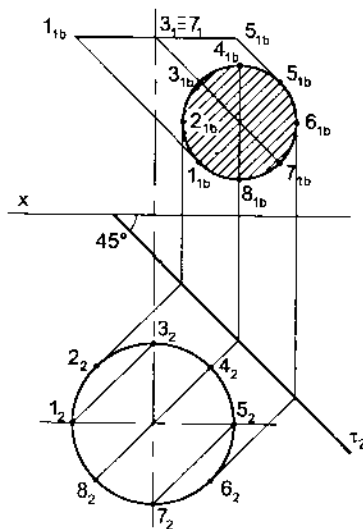
Hình 3.20

Hình 3.21 vẽ bóng của hình tròn nằm ngang bán kính R đổ lên mặt phẳng τ chiếu bằng và nghiêng 45° so với mặt phẳng hình chiếu đứng (τ gọi là mặt phẳng Pilê).

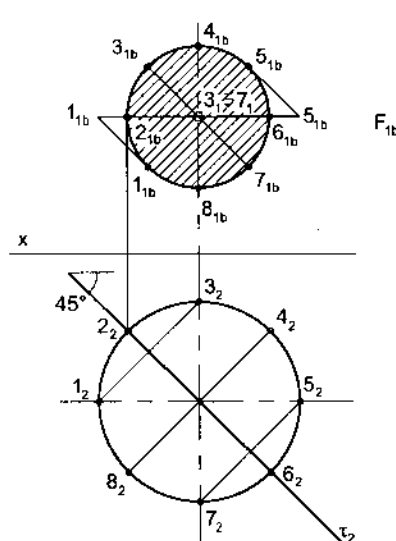
Dễ dàng thấy rằng, bóng đổ là một hình tròn $1_{1b}2_{1b}3_{1b}4_{1b}5_{1b}6_{1b}7_{1b}$ có bán kính $r = R \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự, nếu mặt phẳng Pilê đi qua tâm hình tròn thì bóng đổ hình tròn được thể hiện trên hình 3.22.

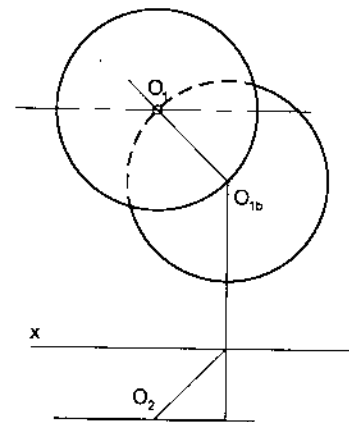
Trên hình 3.23 vẽ bóng của hình tròn song song với mặt phẳng hứng bóng (là mặt phẳng hình chiếu đứng). Bóng đổ là hình tròn bằng hình tròn cho bóng.



Hình 3.21



Hình 3.22



Hình 3.23

3.5. BÓNG CỦA ĐA DIỆN

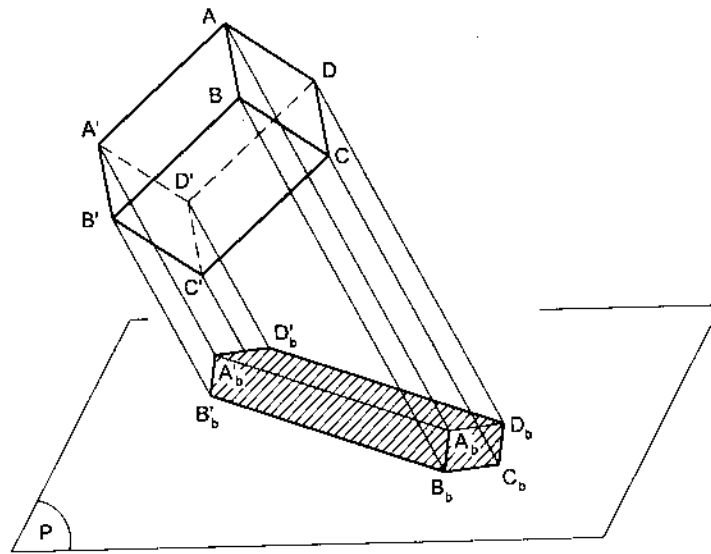
3.5.1. Bóng đổ của đa diện

Bóng của đa diện $ABCD A'B'C'D'$ đổ lên mặt phẳng (P) là $A_b B_b C_b D_b A'_b B'_b C'_b D'_b$. Đường ranh giới $B_b C_b D_b D'_b A'_b B'_b B_b$ của bóng đổ gọi là đường bao quanh bóng đổ (hình 3.24).

Trên đa diện có ba mặt bên được chiếu sáng là $ABCD$, $ABB'A'$ và $ADD'A'$. Ba mặt kia bị tối và được gọi là bóng bản thân.

Đường ranh giới giữa mặt sáng và mặt có bóng bản thân gọi là đường bao quanh bóng bản thân $B_b C_b D_b D'_b A'_b B'_b$.

Sau này sẽ giới thiệu quy tắc xét mặt sáng hay mặt có bóng bản thân của đa diện.



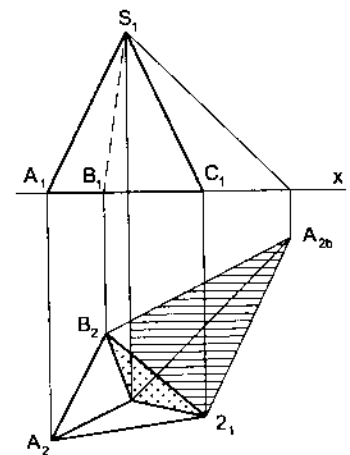
Hình 3.24

3.5.2. Bóng của đa diện là mặt chóp SABCD

Chỉ cần vẽ bóng các đỉnh của đa diện rồi nối lại. Ba đỉnh A, B, C nằm trong (P_2) nên trùng với bóng đổ của chúng. Bóng đổ S đổ lên (P_2) là S_{2b} . Bóng đổ của chóp là $S_{2b} C_{2b} B_{2b}$ (hình 3.25).

3.5.3. Phía sáng tối của đa diện (hình 3.24)

Một đa diện được đặt trước một nguồn sáng. Người ta phân biệt hai loại mặt: các mặt được chiếu sáng và các mặt tối; ba loại cạnh: cạnh được chiếu sáng phân cách hai mặt được chiếu sáng; cạnh tối phân cách hai mặt tối; cạnh hỗn hợp phân cách một mặt sáng và một mặt tối.



Hình 3.25

Tập các cạnh hỗn hợp tạo nên một đường đa giác khép kín gọi là đường phân cách tối sáng. Các tia sáng tựa trên đường phân cách tối sáng xác định một hình chóp ngoại tiếp đa diện, gọi là chóp bóng. Nếu các tia sáng song song ta có một hình lăng trụ ngoại tiếp đa diện gọi là lăng trụ bóng. Vết của chóp bóng hoặc lăng trụ bóng lên trên một mặt phẳng gọi là đường bao bóng đổ của đa diện lên mặt phẳng đó. Ta thấy rằng đường bao của bóng đổ một đa diện lên một mặt phẳng chính là bóng đổ của đường phân cách tối sáng lên mặt phẳng đó.

Trên hình 3.24 vẽ đa diện ABCDA'B'C'D' với các mặt sáng và các mặt tối. Đồng thời trên hình này cũng vẽ bóng đổ của đa diện lên một mặt phẳng P.

Theo hình vẽ, đa diện có ba mặt được chiếu sáng là ABCD, ABB'A' và ADA'D'. Ba mặt kia bị tối và được gọi là mặt có bóng bản thân. Đường phân cách tối sáng là BCDD'A'B'. Bóng đổ của đường phân cách tối sáng tức đường bao quanh bóng đổ lên mặt phẳng P tất nhiên là $B_bC_bD_bD'_bA'_bB'_b$.

• Vấn đề xác định mặt sáng tối, mặt tối của đa diện.

Bài toán về bóng với đa diện rất cuộc là xác định mặt sáng, mặt tối.

Có ba phương pháp xác định:

1/ Phương pháp xét riêng từng mặt của đa diện:

Ta trở lại bài toán xác định phía sáng, phía tối của một mặt phẳng đã nói ở trên. Phương pháp này đặc biệt có lợi với trường hợp đa diện rỗng và mở, tức là khi xét một kết hợp các đa giác phẳng, đục (hình 3.24).

2/ Phương pháp chiếu xiên (hình 3.25):

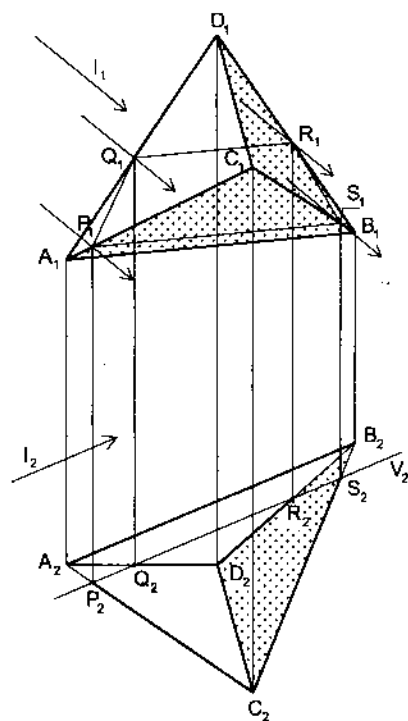
Thí dụ xét tứ diện ($A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$) được chiếu sáng bởi các tia sáng song song. Ta tìm bóng đổ của các cạnh lên một mặt phẳng, ví dụ lên mặt phẳng hình chiếu bằng (P_2).

Đường bao ngoài của bóng đổ là $B_{2b}C_{2b}A_{2b}D_{2b}$, tương ứng với đường phân cách tối sáng ($B_1C_1A_1D_1, B_2C_2A_2D_2$).

Kẻ tia sáng đi qua điểm $Q = A_{2b}B_{2b} \cap C_{2b}D_{2b}$. Tia sáng này đi vào trong đa diện từ một điểm U thuộc A_2B_2 và đi qua một điểm V thuộc C_2D_2 . Vậy có hai mặt sáng ($A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$) và ($A_1B_1D_1, A_2B_2D_2$) và hai mặt tối ($C_1D_1A_1, C_2D_2A_2$) và ($B_1C_1D_1, B_2C_2D_2$).

3/ Phương pháp mặt phẳng cắt (hình 3.26):

Cắt đa diện bằng một mặt phẳng đi qua nguồn sáng. Thông thường ta chọn mặt phẳng cắt này là mặt phẳng tia chiếu đứng hay chiếu bằng để vẽ dễ dàng tiết diện. Ta minh họa



Hình 3.26

tính thân phương pháp này bằng ví dụ: “Cho một tứ diện ($A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$) với hướng tia sáng song song (l). Cần vẽ bóng bản thân tứ diện đó”.

Giải: Dùng mặt phẳng cắt là mặt phẳng thẳng đứng (V) song song với tia sáng l . Mặt phẳng cắt (V) cắt tứ diện theo tứ giác PQRS. Trên hình chiếu đứng qua mỗi đỉnh của tứ giác kẻ tia song song với l_1 . Điểm Q_1 qua đó tia sáng đi vào miền trong tứ giác, thuộc một cạnh sáng. Đó là D_1A_1 . Điểm S_1 từ đó tia sáng từ miền trong tứ giác đi ra thuộc cạnh tối B_1C_1 . Sau cùng hai điểm P_1 , R_1 qua đó tia sáng tựa nhưng không xuyên qua tiết diện PQRS thuộc C_1A_1 , B_1D_1 là các cạnh phân cách sáng tối.

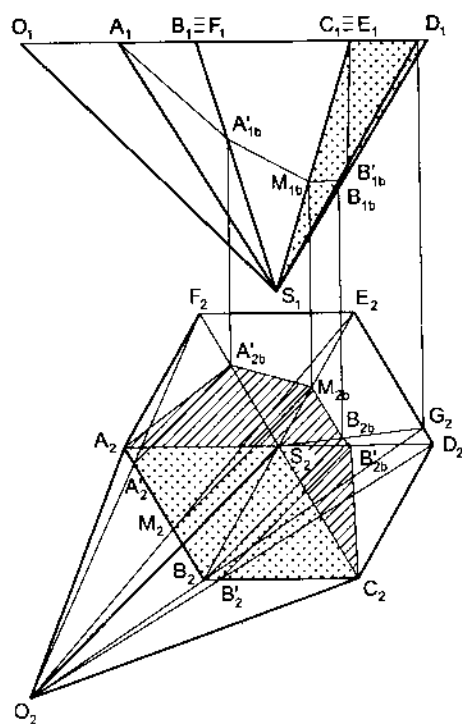
Như vậy hai mặt $A_1D_1B_1$, $A_1D_1C_1$ có cạnh chung A_1D_1 nên được chiếu sáng. Hai mặt $B_1C_1A_1$ và $B_1C_1D_1$ đều tối. Đường phân cách tối sáng khi đó sẽ là $A_1C_1D_1B_1$.

Ghi chú: Trường hợp chung, qua việc nghiên cứu phân bố ánh sáng trong một vài tiết diện, ta sẽ xác định được đường phân cách tối sáng và phân biệt được các mặt sáng, tối.

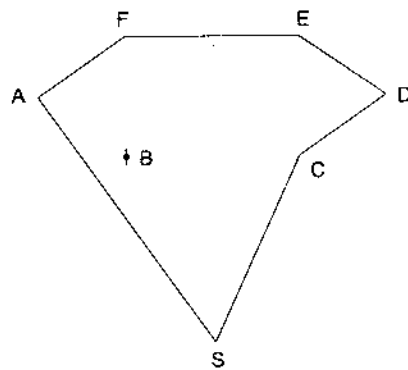
Phương pháp này đặc biệt có lợi khi tìm bóng của đa diện không lồi.

Sau đây là ví dụ về một bài toán, trong đó ta áp dụng cả hai phương pháp 1 và 2.

Ví dụ: Cho hình chóp đều, rỗng, đáy là hình lục giác đều, được chiếu sáng bởi các tia sáng song song và giả thiết các mặt bên của hình chóp là đục. Vẽ bóng trên hai hình chiếu.



Hình 3.27



Hình 3.28

Giải: Qua S vẽ tia sáng cắt mặt phẳng đáy chóp ở điểm (O_1 , O_2). Nối O_2 với tất cả các đỉnh của đáy, ta có hình chiếu xiên, song song với hướng tia sáng, của tất cả các cạnh bên

của chóp. Đường bao quanh ngoài $O_2C_2D_2E_2F_2A_2O_2$ của hình chiếu xiên đó được xác định đường phân cách tối sáng trên mặt ngoài của chóp là đường đa giác SCDEFAS có hình chiếu bằng $S_2C_2D_2E_2F_2A_2S_2$ và hình chiếu đứng $S_1C_1D_1E_1F_1A_1S_1$ (hình 3.28). Theo đó hai mặt $S_2A_2B_2$ và $S_2B_2C_2$ đều sáng ở ngoài, tối ở trong. Các mặt khác, ngược lại đều tối ở ngoài. Chúng sẽ tất cả sáng ở trong nếu không có hai mặt SAB và SBC. Do có hai mặt này nên có bóng đổ của chúng nên phía trong của các mặt còn lại. Đường bao bóng đổ là đường gãy khúc ABC. Đường bóng đổ bắt đầu từ A và kết thúc ở C. Đó là giao của chóp và lăng trụ có đường chuẩn là đáy chóp.

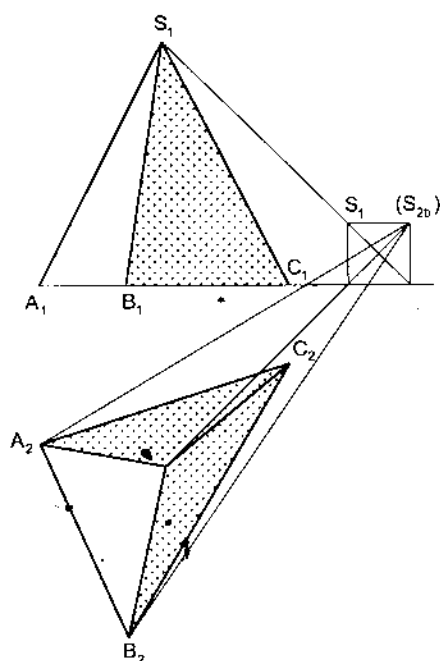
Trên hình chiếu bằng, mặt phẳng tia sáng có vết O_2B_2 cắt chóp theo đường sinh S_2G_2 . Từ B_2 ta kẻ B_2B_{2b} song song với l_2 cắt S_2G_2 ở B_{2b} là bóng đổ của B lên mặt $S_2E_2D_2$.

Tương tự kẻ O_2D_2 cắt A_2B_2 ở B_2' . Từ B_2' kẻ $B_2'B_{2b}'$ song song với l_2 và cắt S_2D_2 ở B_{2b}' . Ta có B_{2b}' là bóng đổ của điểm B_2' lên S_2D_2 . Vì AB song song với DE nên từ B_{2b}' kẻ $B_{2b}'M_{2b}$ song song với D_2E_2 ta được bóng của cạnh A_2B_2 lên mặt $S_2D_2E_2$.

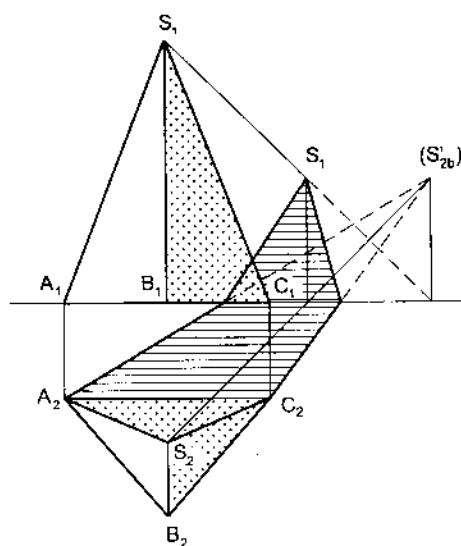
Sau cùng kẻ O_2F_2 cắt A_2B_2 ở A_2' . Từ A_2' kẻ $A_2'A_{2b}'$ song song với l_2 ta được bóng đổ của A_2' lên cạnh S_2F_2 .

Tóm lại: đường bóng đổ trên hình chiếu bằng là đường gãy khúc $C_2B_{2b}'B_{2b}M_{2b}A_{2b}'A_2$. Ta vẽ dễ dàng bóng đổ trên hình chiếu đứng $C_1B_{1b}'B_{1b}M_{1b}A_{1b}'A_1$.

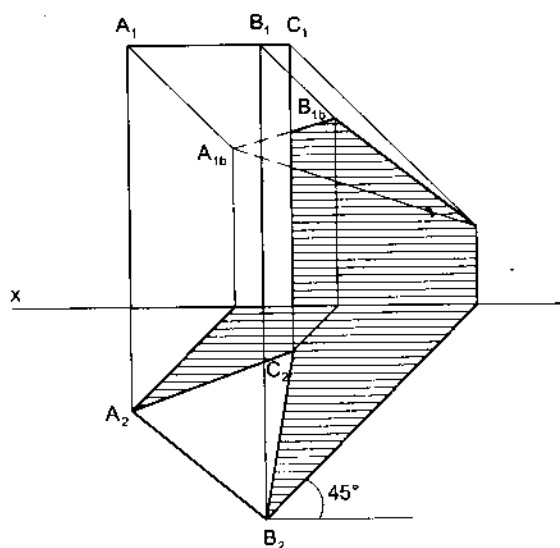
Dưới đây là một số ví dụ về vẽ bóng bản thân và bóng đổ của đa diện (hình 3.29, hình 3.30, hình 3.31, hình 3.32).



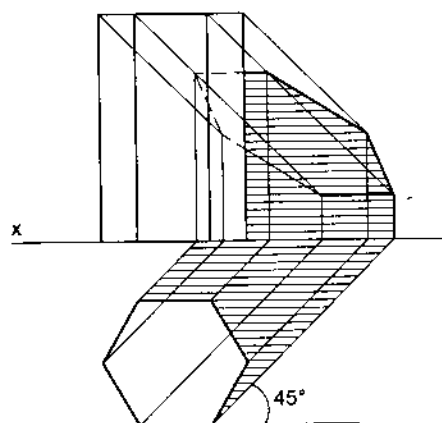
Hình 3.29



Hình 3.30



Hình 3.31



Hình 3.32

3.6. BÓNG CỦA MẶT TRÒN XOAY

3.6.1. Bóng bản thân của nón tròn xoay

Quy tắc vẽ (phương pháp Kolotov):

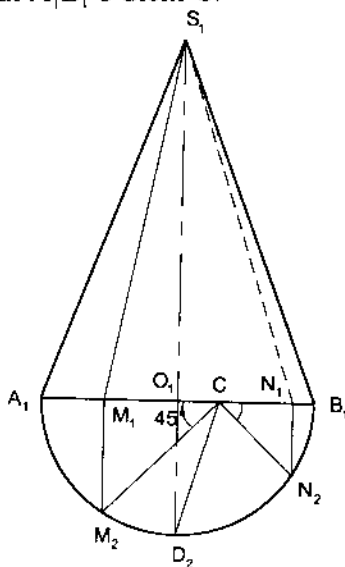
1) Vẽ nửa vòng tròn hình chiếu bằng ω của đáy nón. Từ điểm D_2 kẻ D_2C song song đường sinh biên bên trái S_1A_1 , cắt A_1B_1 ở điểm C .

2) Từ C kẻ hai đường thẳng nghiêng một góc 45° đối với A_1B_1 , cắt ω ở M_2 và N_2 ; suy ra có hình chiếu đứng M_1 và N_1 .

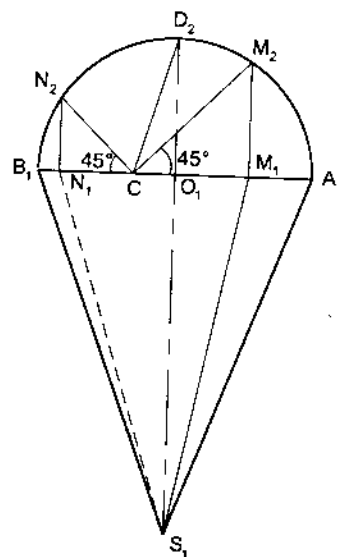
3) SM và SN là hai đường sinh ranh giới bóng bản thân.

Chú ý trường hợp đỉnh S chạy xa vô tận trên trục xoay SO , nón trở thành trụ ta trở lại cách vẽ ở hình 2.

Ví dụ: Vẽ bóng bản thân của nón tròn xoay trong trường hợp đỉnh S nằm phía trên đáy (hình 3.33a).



Hình 3.33a



Hình 3.33b

Giải: Kẻ D_2C/S_1A_1 . Vẽ CM_2 và CN_2 nghiêng với A_1B_1 một góc 45° . Vẽ hình chiếu đứng M_1, N_1 . S_1M_1 và S_1N_1 là hai đường sinh ranh giới bóng bản thân trên hình chiếu đứng.

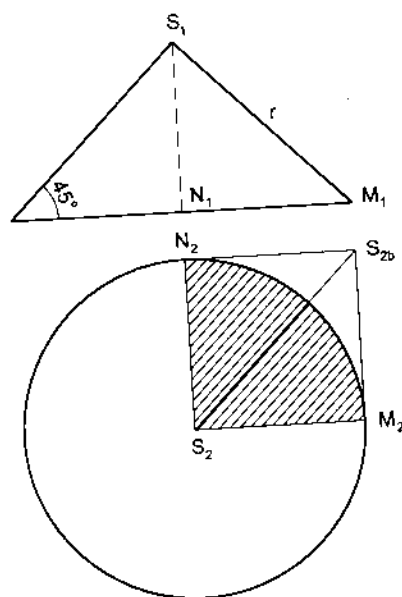
Nếu đỉnh nón S nằm phía dưới đáy nón, ta vẽ nửa đường tròn đáy lên phía trên và chú ý đoạn $D_2C // SA_1$ (S_1A_1 ở bên phải nón). (hình 3.33b)

- Trường hợp đặc biệt:

1) Nón tròn xoay có đường sinh tạo với đáy nón góc 45° .

- Đỉnh nón ở phía trên (hình 3.34):

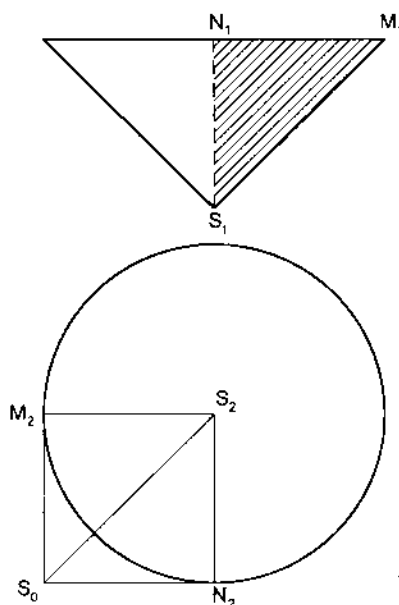
Một phần tư mặt nón bị tối, ranh giới bóng bản thân trên hình chiếu đứng gồm hai đường sinh S_1M_1 , S_1N_1 .



Hình 3.34

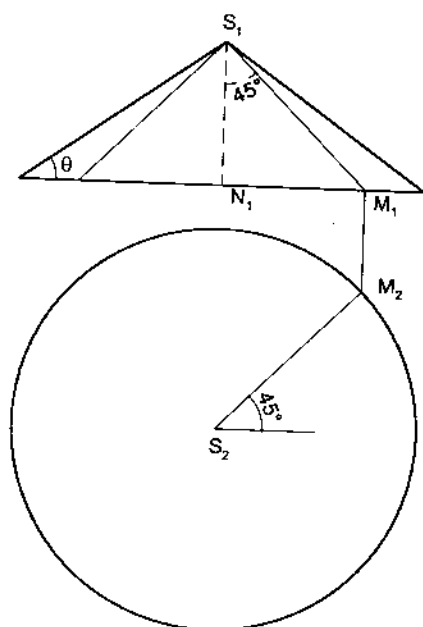
- Đỉnh nón ở phía dưới (hình 3.35):

Một phần tư mặt nón được chiếu sáng; ba phần tư bị tối ranh giới bóng bản thân trên hình chiếu đứng là S_1M_1 và S_1N_1 .



Hình 3.35

2) Nón có đường sinh tạo với đáy nón góc θ ($\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$) (hình 3.36).



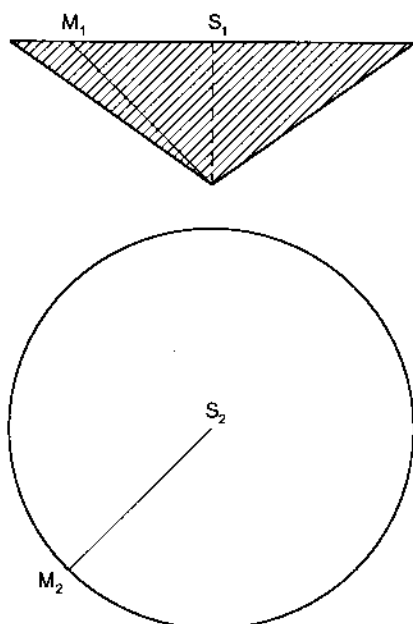
Hình 3.36

- Đỉnh nón ở phía trên (hình 3.36):

Đường sinh duy nhất SM có bóng. Toàn bộ mặt nón được chiếu sáng.

- Đỉnh nón ở phía dưới (hình 3.37):

Tia sáng chạy dọc một đường sinh duy nhất SM. Toàn bộ mặt nón trong bóng tối.



Hình 3.37

1) Vẽ bóng bản thân theo phương pháp thông thường:

Tia sáng qua đỉnh S của nón cắt mặt phẳng hình chiếu bằng ở điểm (K_1, K_2) .

Từ K_2 kẻ hai tiếp tuyến K_2M_2 và K_2N_2 với vòng tròn đáy nón ω .

Vẽ hai hình chiếu đứng M_1 và N_1 .

Hai đường sinh S_1M_1 và S_1N_1 là ranh giới bóng bản thân của nón.

2) Trong tam giác vuông OM_2K_2 ta có $r^2 = OH_2 \cdot OK_2$.

Mặt khác $\frac{OC}{OH_2} = \frac{OK_2}{OK_1}$ (do hai tam giác đồng dạng $\triangle OH_2C$ và $\triangle OK_1K_2$).

$$\text{Suy ra } OC = \frac{OH_2 \cdot OK_2}{OK_1} = \frac{r^2}{OK_1} = \frac{r^2}{OS_0}, \text{ vì vậy } \frac{OC}{r} = \frac{r}{OS_0}.$$

Vậy hai tam giác vuông $\triangle COD_2$ và $\triangle A_1OS_0$ đồng dạng. Do đó D_2C song song A_1S_0 .

Hiển nhiên M_2N_2 vuông góc OK_2 . Nhưng $OK_2 \parallel r_2$ (do vẽ). Vậy $M_2N_2 \perp r_2 \mapsto (\text{ĐPCM})$.

- Hình 3.40 giới thiệu cách vẽ bóng bản thân và bóng đổ lên mặt (P_1) nón tròn xoay theo phương pháp aphin phối cảnh.

Trước tiên vẽ hình chập v_c vào (P_1) của vòng tròn đáy nón v quanh vết đứng p của mặt phẳng chứa v ở đây vòng tròn chập có tâm O'_2 cách tâm O_1 một đoạn y_0 có độ xa của trục nón. Theo hình 3.19 ta biết hình tròn v_c và elip bóng đổ e của v nằm trong tương ứng aphin phối cảnh trục là p hướng là r song song với p . Người ta gọi phép aphin mà hướng r song song với trục m là phép thấu xạ đặc biệt hay phép dịch chuyển.

1) Vẽ bóng bản thân:

- Từ điểm 1 giao điểm của trục nón với v_c , vẽ tia $12 \parallel S_1C_1$.

- Từ điểm 2 vẽ tia 45° so với x có N_2', b_2' trên v_c .

- Từ A_2', B_2' suy ra A_1, B_2 và do đó có hai đường sinh bóng bản thân S_1A_1, S_1B_1 cần tìm.

2) Vẽ bóng đổ:

Theo bài 3.19 vẽ dễ dàng hình elip bóng đổ e của hình tròn đáy v , cũng là ảnh của hình tròn chập v_c trong tương ứng aphin nói trên. vẽ điểm $B'_{1b} \in e$ như sau:

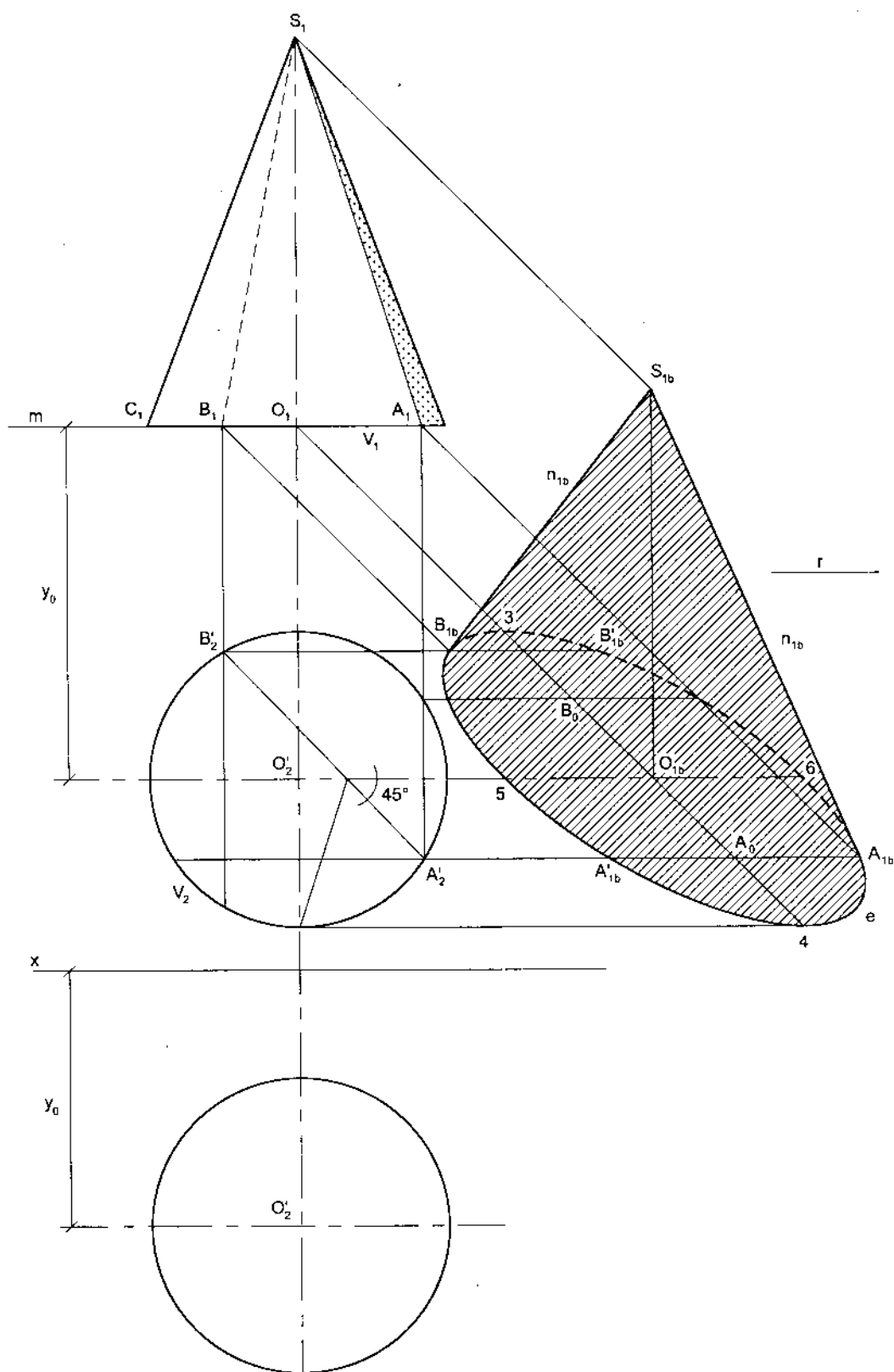
- Từ $B_1 \in v_1$ hạ B_1B_2' , trong đó $B_2' \in v_c$.

- Từ B_2' vẽ $B_2'B_{1b}$ sao cho $B_2B_{1b}'' = B_1B_2'$. điểm B_{1b} là điểm thuộc elip bóng đổ e .

Bóng đổ của đỉnh nón S là S_{1b} cắt đường thẳng thẳng đứng qua O_{1b} .

Chú ý:

Trên hình 3.40, sau khi vẽ được B_{1b} ta lấy B_{1b}' đối xứng B_{1b} qua đường kính 3-4 vì $B_{1b}B_{1b}' \parallel 5-6$ (5-6 là đường kính liên hợp với đường kính 3-4 của elíp).



Hình 3.40

3.6.2. Bóng mặt trụ tròn xoay (hình 3.41)

1) Vẽ bóng bản thân trụ:

Quy tắc vẽ:

- Vẽ vòng tròn đáy trụ rồi từ tâm của vòng tròn ta vẽ tia 45° so với x , ta có điểm 1 và điểm 2 hai đường sinh qua 1 và 2 chính là 2 đường sinh bóng bản thân của trụ.

2) Vẽ bóng đổ lên mặt phẳng chiếu đứng (hình 3.42):

Gọi đoạn y_0 là độ xa của trụ trục (ở đây không vẽ hình chiếu bằng trụ).

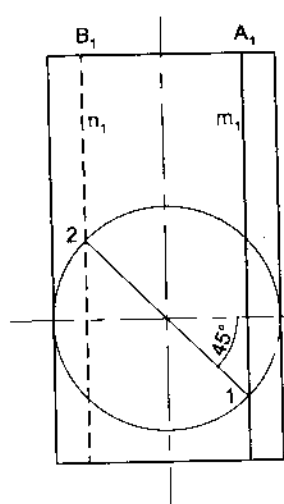
- Quy tắc vẽ:

- Vẽ hình tròn chập v_c của vòng tròn v đáy thứ nhất (đáy trên) sao cho tâm O'_2 cách O_1 một đoạn bằng y_0 .

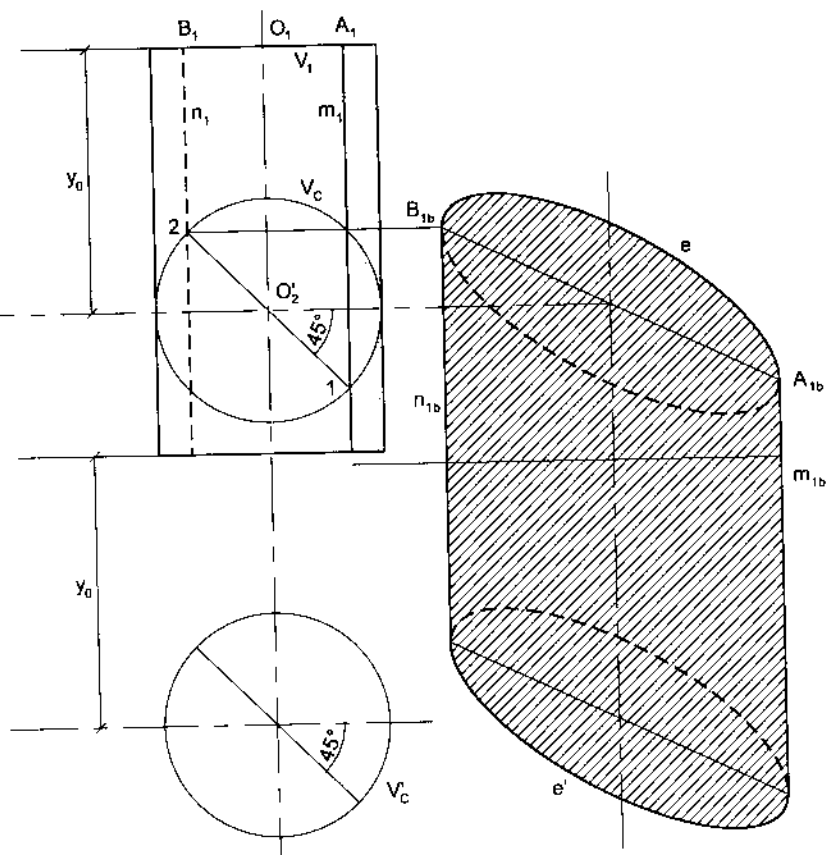
- Vẽ elip bóng đổ e của v như hình 3.19.

- Tương tự vẽ elip e' với hình chập của đáy thứ hai v'_c .

- Bóng của hai đường sinh m và n là m_{1b}, n_{1b} .



Hình 3.41



Hình 3.42

3.6.3. Bóng của mặt cầu

Ví dụ 1: Vẽ bóng bản thân mặt cầu cho bởi đường bao thấy ngoài hình chiếu đứng là ω (hình 3.43).

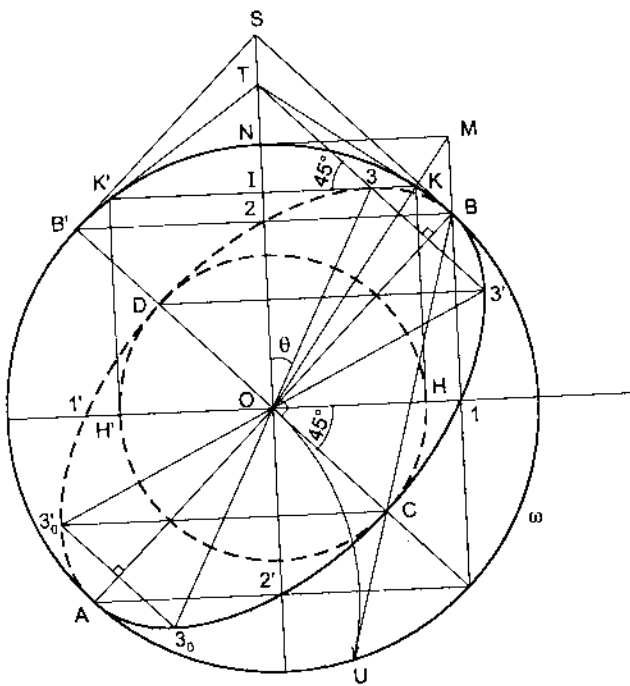
• Cách vẽ:

Đường bao quanh bóng bản thân mặt cầu là vòng tròn lớn thuộc mặt phẳng qua tâm O của cầu và vuông góc với hướng tia sáng.

Hình chiếu đứng của vòng tròn này là một elip có trục lớn là AB.

a) Dùng nón ngoại tiếp để vẽ một số điểm

- Điểm 1 và 1': Dùng trụ đứng ngoại tiếp cầu.
- Điểm 2 và 2': Dùng nón ngoại tiếp cầu dọc vòng tròn có hình chiếu đứng BB', đường sinh của nón nghiêng 45° với mặt phẳng đáy nón, ta có điểm 2, 2' là đối xứng của 2 qua O.



Hình 3.43

- Điểm 3: Vẽ tiếp tuyến n với vòng tròn ω là đường bao thấy ngoài hình chiếu đứng mặt cầu. Đường thẳng BM//ON cắt tiếp tuyến đó ở điểm M. Góc $\widehat{MON} = \theta$. Thật vậy ta có

$$\tan \widehat{MON} = \frac{NM}{ON} = \frac{OI}{ON} = \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Vậy góc } \widehat{MON} = \theta.$$

Kẻ OM cắt ω ở K.

Nón ngoại tiếp cầu dọc vòng tròn đáy, có hình chiếu đứng KK' , có các đường sinh nghiêng một góc θ với mặt phẳng đáy nón. Từ đỉnh T của nón này kẻ hình chiếu đứng tia sáng ta được điểm 3 . Từ điểm 3 suy ra điểm $3'$, đối xứng qua AB . Từ 3 và $3'$ suy ra 3_0 và $3'_0$, đối xứng qua tâm O .

- Vẽ trục nhỏ CD : Từ K và K' hạ đường vuông góc tới đường thẳng $1-1'$. Ta được hai điểm H và H' . Dùng nón ngoại tiếp mặt cầu, dọc theo vòng tròn đáy có hình chiếu đứng là vòng tròn đường kính HH' ; trục xoay của nón qua O và vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng. Các đường sinh của nón sẽ nghiêng với mặt phẳng đáy nón một góc θ . Chú ý nón này cũng như nón đỉnh T dùng để tìm điểm 3 chỉ khác ở chỗ trục xoay vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Dùng nón này ta có ngay hai điểm C và D .

- Tính $OC = OD$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1/2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Trong ΔKIO ta có: $\frac{IK}{OK} = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy: $IK = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3} \quad (OK = R)$

Do đó: $OC = OD = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

Cách vẽ hai điểm C và D :

- Vẽ điểm U trên ω sao cho $AU = R$.

- BU cắt đường vuông góc với AB và đi qua O ở điểm C . Vẽ điểm D đối xứng của C qua O . Ta sẽ có $OC = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

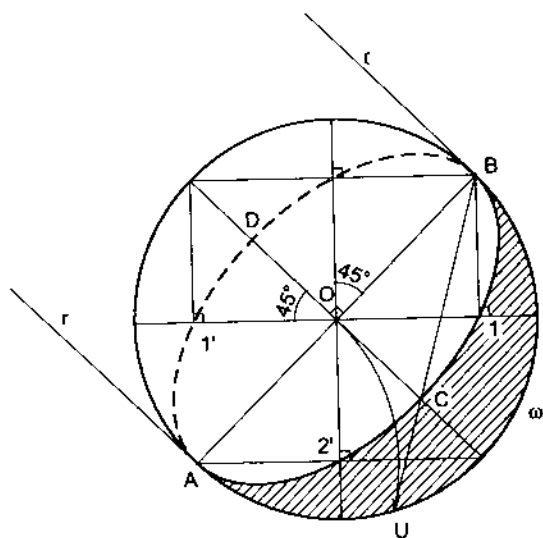
Thật vậy $\Delta OBC \sim \Delta BUA$. Do đó $\frac{OC}{UA} = \frac{OB}{UB} \rightarrow \frac{OC}{R} = \frac{R}{R\sqrt{3}} \rightarrow OC = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

Trên đây đi vào chi tiết để các độc giả làm quen với vấn đề dùng nón ngoại tiếp để vẽ bóng. Thực tế để vẽ bóng bản thân mặt cầu ta tiến hành theo quy tắc đơn giản sau:

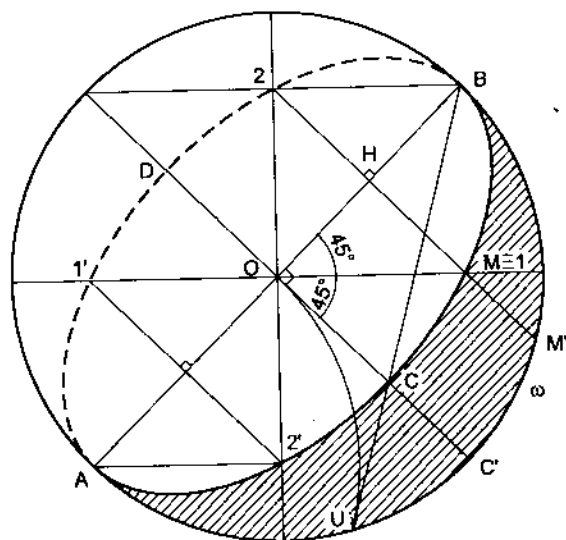
Quy tắc vẽ bóng bản thân mặt cầu (hình 3.44):

- 1) Vẽ trục lớn AB của elip đường bao bóng bản thân mặt cầu.
- 2) Vẽ trục nhỏ CD bằng cách lấy $AU = R$; BU cắt trung trục của AB ở C . Vẽ D đối xứng của C qua O .

3) Vẽ điểm 2 đối xứng của 1 qua AB. Vẽ 1 và 1'; 2 và 2' đối xứng qua O.



Hình 3.44



Hình 3.45

Chú ý: - 1, 2, 1', 2' là 4 đỉnh hình vuông có cạnh song song với trục elip.

- Với phương tiện vẽ ngày nay, sau khi có trục lớn và trục nhỏ của elip ta dùng AutoCAD vẽ nhanh và chính xác elip bóng bản thân (và bóng đổ) của mặt cầu.

b) Dùng ảnh in và thấu xạ để vẽ bóng

Muốn đi đến quy tắc trên ta đã mất nhiều công sức nếu theo phương pháp thường (dùng nón ngoại tiếp). Sau đây là dùng phương pháp ảnh in và thấu xạ nhanh và gọn hơn. Phương pháp này dựa trên tính chất đã trình bày ở phần lý thuyết: Hình chiếu đứng (hoặc bằng) của đường bao thấy ngoài mặt bậc hai và hình chiếu đứng (hoặc bằng) của bóng bản thân của mặt bậc hai nằm trong.

- Tương ứng ảnh in phối cảnh nếu hướng tia sáng song song (bóng mặt trời).
- Tương ứng thấu xạ nếu nguồn sáng ở khoảng cách giới nội (bóng đèn).

Áp dụng vào trường hợp mặt cầu với hướng tia sáng song song:

Trên hình chiếu đứng, đường bao bóng bản thân (elip) và đường bao thấy ngoài ω của mặt cầu, nằm trong tương ứng ảnh in phối cảnh, trục ảnh in là AB, hướng ảnh in là hướng r (hình chiếu đứng của tia sáng) vuông góc với AB.

Tính hệ số ảnh in: λ (hình 3.45).

$$\text{Ta có: } \lambda = \frac{HM}{HM'}, \text{ với } HM' = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R; HM = R/2 \rightarrow \lambda = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy:
$$\frac{OC}{OC'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow OC = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

Trục nhỏ
$$OC = OD = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

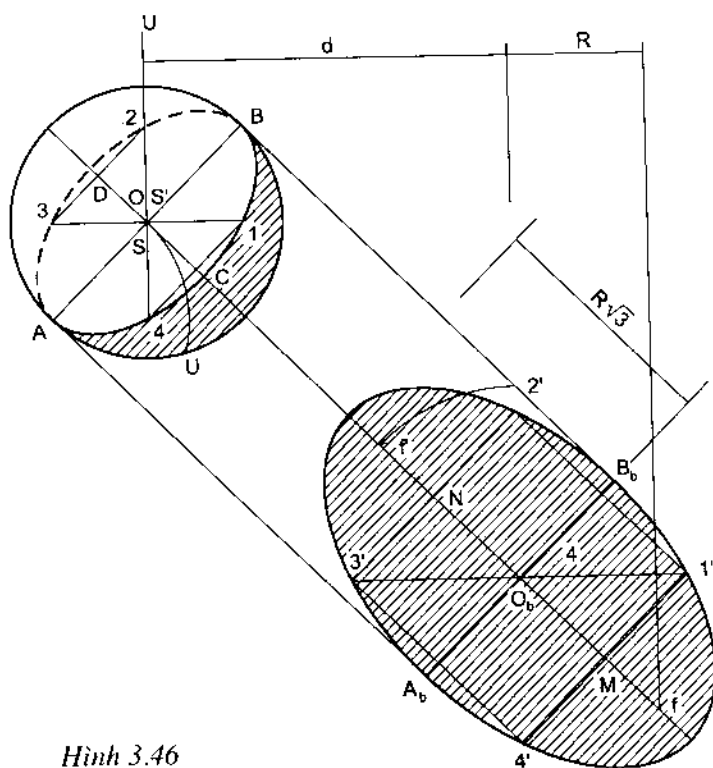
Như vậy vẽ bóng bản thân mặt cầu như sau:

1) Vẽ AB.

2) Vẽ $M \equiv 1$, rồi vẽ điểm 2 (đối xứng qua AB của điểm 1). Các điểm 1' và 2' là đối xứng của 1 và 2 qua điểm O.

3) Vẽ trục nhỏ theo cách đã nêu. Ta thấy lại quy tắc trên.

Ví dụ 2: Bóng đổ của mặt cầu bán kính R lên mặt phẳng hình chiếu đứng V. Tâm O của mặt cầu cách V một khoảng cách d (hình 3.46).



Hình 3.46

Giải:

1) Để hoàn chỉnh, vẽ bóng bản thân cầu như đã biết.

2) Vẽ bóng đổ:

Xét đường kính $SS' \perp$ mặt phẳng hình chiếu đứng V.

S ở cách mặt phẳng hình chiếu V khoảng cách $d + R$.

S' ở cách mặt phẳng hình chiếu V khoảng cách $d - R$.

Hình chiếu lên mặt phẳng V của S và S' chính là hai tiêu điểm f và f' của elip đường bao bóng đổ của cầu lên mặt phẳng V. Ta thấy ngay tiêu cự:

$$O_b f = O_b f' = R\sqrt{2}$$

Bán trục nhỏ elip bằng R. Suy ra bán trục lớn elip bằng:

$$O_b C_b = O_b D_b = B_b f = \sqrt{R^2 + (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{3}$$

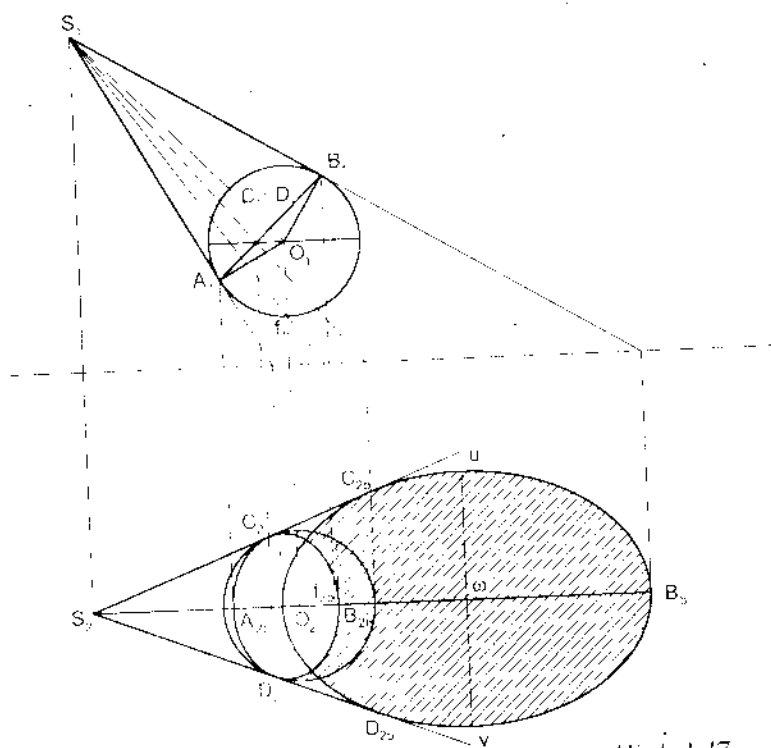
Chú ý: Ta kiểm tra dễ dàng: $\frac{OD}{OB} = \frac{R\sqrt{3}}{3R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $\frac{O_b B_b}{O_b C_b} = \frac{R\sqrt{3}}{3R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy trên mặt phẳng hình chiếu V elip bóng bản thân và elip bóng đổ đồng dạng. Ta có quy tắc vẽ bóng đổ như sau:

Quy tắc:

- Vẽ tâm O_b của elip bóng đổ. Vẽ bán trục nhỏ: $O_b A_b = O_b B_b = R$.
- Vẽ tiêu điểm f và f'.
- Vẽ bán trục lớn $O_b C_b = O_b D_b = f B_b$.
- Vẽ bốn đỉnh 1', 2', 3', 4' của hình vuông nội tiếp elip (chú ý $O_b M = O_b N = O_b C_b/2$).

Ví dụ 3: Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt cầu, với nguồn sáng S nằm trong mặt phẳng mặt qua tâm O của cầu (hình 3.47).



Hình 3.47

Giải:

1) Bóng bản thân: Trên hình chiếu đứng bóng bản thân là đoạn thẳng A_1B_1 . Suy ra hình chiếu bằng A_2B_2 .

Elip bóng đổ bản thân trên hình chiếu bằng có trục nhỏ A_2B_2 và tiếp xúc với hình chiếu bằng mặt cầu ở C_2, D_2 .

2) Bóng đổ: Vết của nón tròn xoay đỉnh S ngoại tiếp cầu, trên mặt phẳng hình chiếu bằng H chính là bóng đổ mặt cầu trên mặt phẳng H. Bóng đổ này có thể là elip, hypebol hay parabol tùy theo mặt phẳng bằng qua S không cắt nón, cắt nón, hoặc tiếp xúc với nón.

Trường hợp (hình 3.47) bóng đổ là elip.

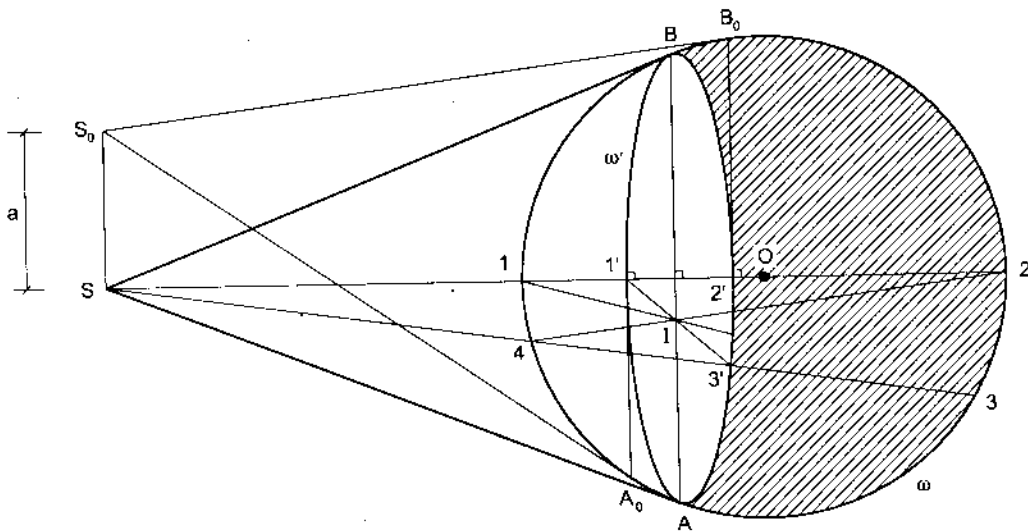
Vẽ trục lớn $A_{2b}B_{2b}$ nhờ hai đường sinh biên trên hình chiếu đứng S_1A_1, S_1B_1 .

Chiếu điểm $F(f_1, f_2)$ lên mặt phẳng hình chiếu bằng H ta được điểm f_{2b} là một tiêu điểm của elip bóng đổ.

Vẽ trung trục UV của A_1B_1 trên đó chọn U và V sao cho $f_bU = f_bV = \omega A_{2b} = \omega B_{2b}$. Ta được trục nhỏ UV của elip bóng đổ.

Vẽ hình chiếu đứng $S_1C_1 \equiv S_1D_1$ của hai đường sinh SC, SD. Đường bằng qua O_1 cắt SB ở $C_1 \equiv D_1$. Hai đường sinh SC, SD của nón cắt mặt phẳng H ở hai điểm C_{2b}, D_{2b} là tiếp điểm của S_2C_2 và S_2D_2 với elip bóng đổ.

Ví dụ 4: Vẽ bóng bản thân của mặt cầu cho bằng hình chiếu đứng ω (hình 3.48). Cho hình chiếu đứng S của nguồn sáng s cách mặt phẳng qua tâm O của cầu một đoạn a.



Hình 3.48

Giải: Từ S kẻ hai tiếp tuyến SA và SA với ω . Đường thẳng AB nối hai tiếp tuyến là trục thấu xạ có tâm S biến vòng tròn ω thành elip ω' là đường bao bóng bản thân của mặt cầu. Cần tìm một cặp điểm tương ứng để xác định thấu xạ này.

Dùng mặt phẳng tia chiếu đứng đi qua S và tâm O của mặt cầu, cắt mặt này theo vòng tròn lớn ω_0 . Xoay quanh đường mặt 1-2 qua tâm O để vòng tròn ω_0 trùng với ω . Khi đó S tới vị trí chấp S_0 :

$$SS_0 \perp 1-2 \text{ và } SS_0 = a$$

Từ S_0 kẻ hai tiếp tuyến SA_0 và SB_0 . Với $\omega \equiv \omega_0$, chân đường vuông góc hạ từ A_0 và B_0 lên SO cho hai điểm $1'$ và $2'$ của bóng bản thân. Như vậy phép thấu xạ S; trục thấu xạ AB; cặp điểm tương ứng 1, $1'$ (hoặc 2, $2'$).

- Vẽ điểm $3'$ như sau:

Đường thẳng nối 1 và 3 cắt trục thấu xạ ab ở một điểm I.

Đường thẳng nối $1'$ và I cắt S3 ở điểm $3'$.

Chú ý: Do tính chất của đối cực, nếu coi 1 và $2'$ là cặp tương ứng thì ω' vẫn như cũ.

Quy tắc:

1) Kẻ tiếp tuyến SA, SB với vòng tròn ω . Ta có trục thấu xạ AB.

2) Vẽ $SS_0 \perp SO$ với $SS_0 = a$. Từ S_0 kẻ hai tiếp tuyến SA_0 , SB_0 với ω . Từ A_0 và B_0 hạ đường vuông góc với SO ta có $1'$ và $2'$.

3) Phép thấu xạ tâm S, trục AB, cặp điểm tương ứng ($1 \rightarrow 1'$) hoặc ($2 \rightarrow 2'$) sẽ biến vòng tròn ω thành ω' là elip bao bóng bản thân mặt cầu.

Ví dụ 5: Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt elipsoid tròn xoay bằng ảnh phối cảnh (hình 3.49).

Giải:

1/ Bóng bản thân:

Trên hình chiếu bằng (hình 3.49), elip bóng bản thân ω' lượm tiếp vòng tròn ω (đường bao thấy ngoài của elipxoit trên hình chiếu bằng) ở hai đầu mút 1_2 và 2_2 của đường kính vuông góc với r_2 (hình chiếu bằng hướng sáng).

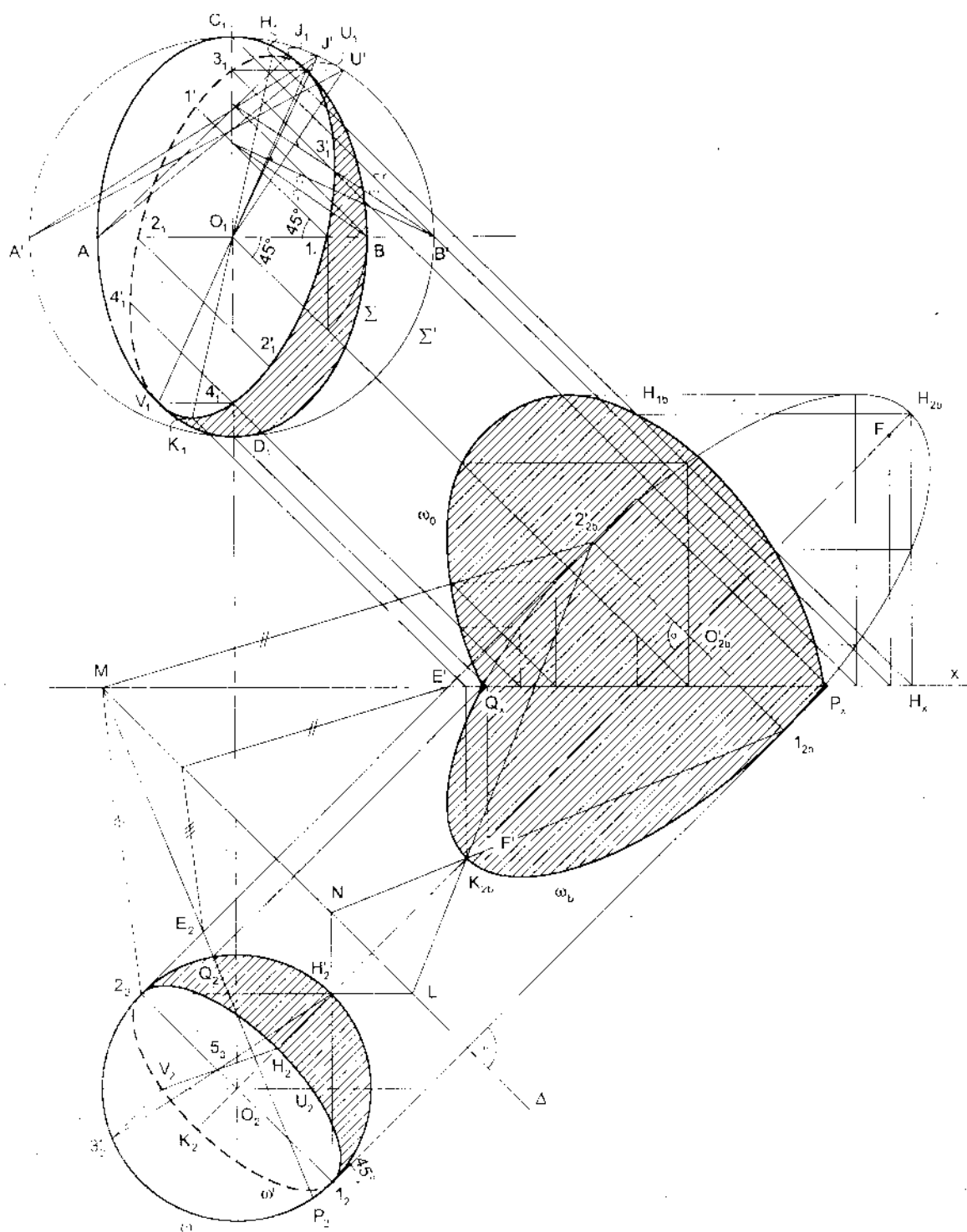
Elíp bóng bản thân có trục lớn là 1_22_2 .

Ta biết rằng ω và ω' tương ứng ảnh, trục ảnh là 1_22_2 . Suy ra dễ dàng hai đầu mút K_2 và H_2 của trục nhỏ (nhờ cặp đường thẳng tương ứng $3_2'H_2'$ và H_2V_2 cắt nhau trên trục ảnh). Tam giác hướng ảnh là $3_2'V_2S_0$. Dùng AutoCAD để vẽ ω' .

2/ Bóng đổ:

Ta vẽ bóng đổ ω_b của elipxoit trên mặt phẳng hình chiếu bằng (hình 3.49) rồi từ đó suy ra bóng đổ trên mặt phẳng hình chiếu đứng.

Qua hai điểm rốn C_1 và D_1 của elipxoit kẻ hai đường thẳng C_1F và D_1F' song song với hướng tia sáng, cắt mặt phẳng hình chiếu bằng Π_2 ở hai điểm F và F'. Đó chính là hai tiêu



Hình 3.49

điểm F và F' của elip bóng đổ ω_b trên hình chiếu bằng. Trục nhỏ của elip bóng đổ ω_b tất nhiên bằng đường kính của đường tròn ω . Suy ra dễ dàng trục lớn $K_{2b}H_{2b}'$ của elip bóng đổ ω_b : $O_{2b}'H_{2b}' = O_{2b}'K_{2b}$.

Như vậy elip bóng đổ ω_b có hai trục: trục lớn $K_{2b}H_{2b}'$ và trục nhỏ $1_{2b}2_{2b}'$.

Tương tự, ta vẽ được mọi điểm của elip bóng đổ ω_b . Tuy nhiên với hai trục đó, ta vẽ nhanh chóng ω_b nhờ AutoCAD.

Biết bóng đổ trên hình chiếu bằng ω_b , vẽ dễ dàng bóng đổ trên hình chiếu đứng ω_0 . Thí dụ với điểm H_{2b}' là bóng đổ trên hình chiếu bằng ta suy ra bóng đổ H_{1b} trên hình chiếu đứng với $H_{1b}H_{2b}'$ kẻ song song với trục xx và $H_{1b}H_{2b}' = H_xH_{2b}'$. Ta lưu ý là hai elip bóng đổ ω_b và ω_0 nằm trong tương ứng ảnh phối cảnh hướng ảnh song song với trục xx (có thể coi đây là tương ứng thấu xạ đặc biệt với tâm thấu xạ ở vô tận theo hướng trục xx , hay còn gọi là phép dịch chuyển).

Ghi chú: Có thể tìm hai điểm P_x và Q_x trên trục hình chiếu xx như sau:

Ta biết rằng ω và ω_b nằm trong tương ứng ảnh phối cảnh: ứng với $1_2 \rightarrow 1_{2b}$; $2_2 \rightarrow 2_{2b}$; ứng với điểm H_2' của ω có thể lấy điểm H_{2b}' hoặc K_{2b} của ω_b . Trên hình 3.49, ta cho ứng với $H_{2b}' \rightarrow K_{2b}$.

Suy ra một điểm L của trục ảnh Δ . Vì $1_22_2//1_{2b}2_{2b}'$ nên trục ảnh Δ phải song song với các đường thẳng này. Hướng ảnh là vuông góc với Δ . Đường thẳng Δ cắt trục hình chiếu xx ở điểm M . Trong tương ứng ảnh này, ứng với $M2_2$ là $M2_{2b}'$ và ứng với E' (giao của trục xx với $2_22_{2b}'$) là E_2 . Đường thẳng ME_2 cắt ω ở Q_2 và P_2 . Giống từ P_2 và Q_2 các đường thẳng vuông góc với Δ , ta được hai điểm P_x và Q_x cần tìm.

Qua trình bày trên ta thấy, chỉ riêng vẽ bóng bản thân, phương pháp dùng ảnh tỏ ra ưu việt vì vẽ nhanh, gọn clip khi biết hai trục. Ưu thế này càng nổi bật khi dùng AutoCAD.

3.6.4. Bóng của mặt bậc hai tròn xoay

Ví dụ 1: Vẽ bóng bản thân của hypeboloid hai tầng và một tầng tròn xoay trên hình chiếu đứng (hình 3.50 và hình 3.51).

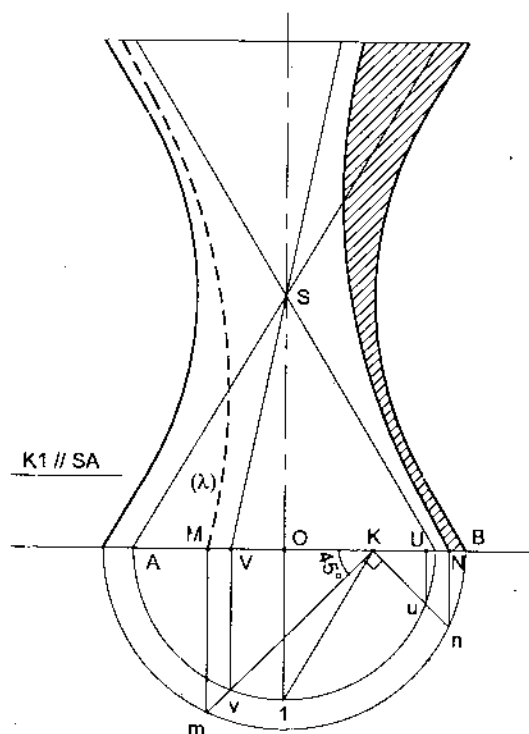
Giải: Bóng bản thân của nón tiệm cận được giới hạn bởi hai đường sinh OU và OV .

Ta biết rằng OU và OV lại là tiệm cận của bóng bản thân của hypeboloid.

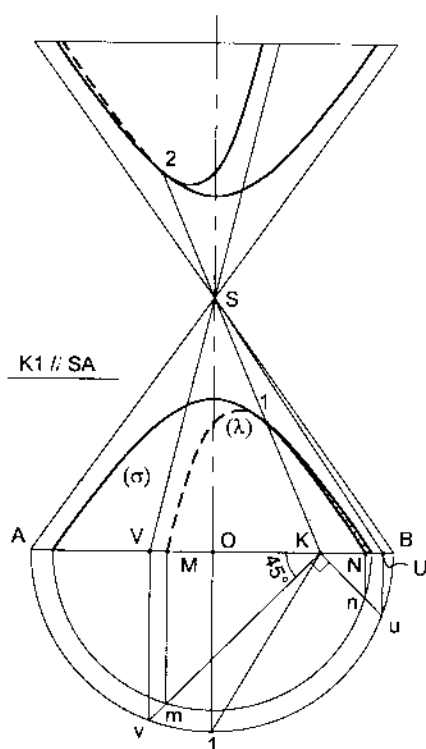
Vẽ hai điểm M và N của bóng bản thân λ của hypeboloid. Hypebol λ được xác định bởi hai tiệm cận OU và OV và một điểm M (hoặc N).

Chú ý rằng SK cắt đường bao hình chiếu đứng σ của hypeboloid ở điểm 1 và 2, ở đó λ và σ tiếp xúc.

Với hypeboloid 1 tầng giải quyết tương tự.



Hình 3.50



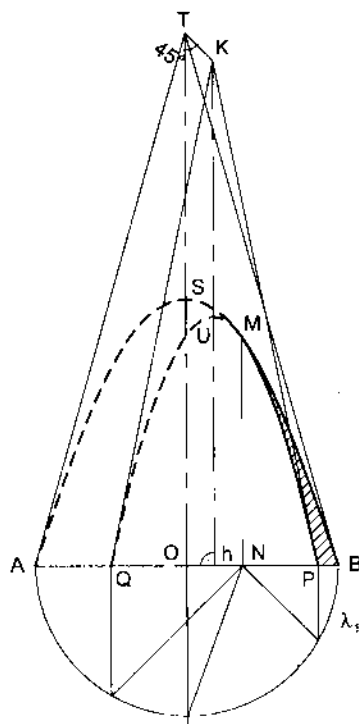
Hình 3.51

Ví dụ 2: Vẽ bóng bản thân của paraboloid tròn xoay trên hình chiếu đứng (hình 3.52).

Giải: Nón tròn xoay ngoại tiếp có điểm T sao cho $OT = 2OS$.

Vì hướng tia sáng song song nên bóng bản thân là parabol thuộc mặt phẳng song song với trục OS. Vẽ hai điểm P và Q của bóng bản thân thuộc vòng tròn đáy nón. Hai điểm này cũng là hai điểm thuộc parabol bóng bản thân. Vẽ đường trung trực HK của PQ, cắt tia TK (ngiêng 45° so với đường bằng) ở điểm K (hình 3.52).

Đỉnh parabol bóng bản thân là điểm U với $HU = UK$. Từ điểm N đóng lên ta được điểm tiếp xúc M của hình chiếu đứng bóng bản thân với đường parabol bao thấy ngoài của paraboloid trên hình chiếu đứng.



Hình 3.52

ĐỀ BÀI - BÓNG CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ CÁC HÌNH PHẪNG

3.1. ĐB. Cho bóng của điểm A (A_1, A_2), hãy tìm bóng đổ của A lên các mặt phẳng hình chiếu P_1 và P_2 (hình 3.1(DB)) làm tương tự đối với điểm B và cho nhận xét.

3.2. ĐB. Vẽ bóng đổ của đoạn thẳng AB có vị trí bất kỳ (hình 3.2(DB)).

3.3. ĐB. Vẽ bóng đổ của các đoạn thẳng SA, SB, SC (hình 3.3(DB)).

3.4. ĐB. Vẽ bóng đổ của các đường thẳng đặc biệt AB, CD, EF, GH (hình 3.4(DB)).

3.5. ĐB. Vẽ bóng đổ của AB lên mặt phẳng chiếu bằng Q (hình 3.5(DB)).

3.6. ĐB. Tìm bóng đổ của hình chữ nhật ABCD lên mặt phẳng Q (cho bằng các vết) (hình 3.6(DB)).

3.7. ĐB. Tương tự bài 3.6, mặt phẳng Q cho bằng hai đường thẳng song song bất kỳ m, n (hình 3.7(DB)).

3.8. ĐB. Tương tự bài 3.6, mặt phẳng Q cho bằng hai đường thẳng song song m, n ($m, n // P_1$) (hình 3.8(DB)).

3.9. ĐB. Vẽ bóng đổ của hình chữ nhật ABCD nằm ngang (hình 3.9(DB)). Có nhận xét gì về bóng của AD và BC?

3.10. ĐB. Vẽ bóng đổ của hình vuông ABCD nằm ngang (hình 3.10(DB)).

3.11. ĐB. Vẽ bóng đổ của hình vuông ABCD lên mặt phẳng thẳng đứng nghiêng góc 45° so với P_1 (tường Pilet) (hình 3.11(DB)).

3.12. ĐB. Vẽ bóng đổ của hình vuông lên tường Pilet đi qua A và C (hình 3.12(DB)).

3.13. ĐB. Vẽ bóng của hình lục giác đều ABCDEF nằm ngang (hình 3.13(DB)).

3.14. ĐB. Vẽ bóng đổ của vòng tròn tâm O nằm ngang (hình 3.14(DB)).

3.15. ĐB. Vẽ bóng đổ của nửa vòng tròn nằm ngang (hình 3.15(DB)).

3.16. ĐB. Vẽ bóng đổ của vòng tròn lên tường Pilet (hình 3.16(DB)).

3.17. ĐB. Vẽ bóng đổ của hình hộp lên các mặt phẳng hình chiếu (hình 3.17a(DB)). Tương tự làm cho hình 3.17b(DB).

3.18; 3.19; 3.20. ĐB. Vẽ bóng của lăng trụ thẳng đứng đáy tam giác (hình 3.18(DB)) và đáy lục giác (hình 3.19(DB); hình 3.20(DB)).

3.21; 3.22; 3.23. ĐB. Vẽ bóng của hình chóp đáy tam giác đỉnh S (hình 3.21(DB); hình 3.22(DB); hình 3.23(DB)).

3.24*. ĐB. Vẽ bóng của mặt mảnh mặt Paraboloid hypebolich cho bằng tứ giác ghềnh ABCD (hình 3.24(DB)).

3.25*. ĐB. Cho mặt nón tròn xoay mà độ xa của trục nón là y_0 , hãy vẽ bóng đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng (hình 3.25a(DB)); đổ lên mặt phẳng hình chiếu bằng (hình 3.25b(DB)) và đổ lên cả hai mặt phẳng hình chiếu (hình 3.25c(DB)).

3.26. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt nón tròn xoay thẳng đứng nhưng đỉnh ở phía dưới (hình 3.26(DB)).

3.27*. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt nón tròn xoay thẳng đứng mà độ xa của trục là y_0 (yêu cầu làm theo phương pháp aphin phối cảnh) (hình 3.27(DB)).

3.28. ĐB. Vẽ bóng của nửa mặt nón tròn xoay (hình 3.28(DB)).

3.29. ĐB. Vẽ bóng của mặt trụ tròn xoay thẳng đứng mà độ xa của trục hình trụ là y_0 (hình 3.29(DB)).

3.30. ĐB. Vẽ bóng của nửa mặt trụ (hình 3.30(DB)).

3.31a*. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt cầu (hình 3.31a(DB)).

3.31b*. ĐB. Cũng bài 3.31a, nhưng vẽ theo phương pháp aphin phối cảnh (hình 3.31b(DB)).

3.31c*. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt cầu lên hai mặt phẳng hình chiếu (hình 3.31c(DB)).

3.32a. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt bán cầu lên mặt phẳng hình chiếu đứng (hình 3.32a(DB)).

3.32b. ĐB. Cũng bài 3.32a, nhưng vẽ bóng đổ lên mặt phẳng hình chiếu bằng.

3.32c*. ĐB. Cũng bài 3.32a, nhưng vẽ theo phương pháp aphin phối cảnh.

3.33a*. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt elipxoit tròn xoay lên hai mặt phẳng hình chiếu (hình 3.33a(DB)).

3.33b*. ĐB. Cũng bài 3.33a, nhưng vẽ theo phương pháp aphin phối cảnh.

3.34*. ĐB. Vẽ bóng của nửa mặt elipxoit tròn xoay đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng (hình 3.34(DB)).

3.35a. ĐB. Vẽ bóng của mặt paraboloid tròn xoay trục thẳng đứng lên mặt phẳng hình chiếu bằng (phương pháp vĩ tuyến) (hình 3.35a(DB)).

3.35b. ĐB. Cũng bài 3.35a, nhưng vẽ theo phương pháp nón trụ tiếp xúc.

3.35c. ĐB. Cũng bài 3.35a, nhưng vẽ theo phương pháp quay trục của mặt đã cho.

3.35d. ĐB. Cũng bài 3.35a, nhưng vẽ theo phương pháp 5 tiếp tuyến.

3.35e*. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt paraboloid tròn xoay trục thẳng đứng theo phương pháp aphin phối cảnh.

3.35f*. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng của mặt paraboloid tròn xoay trục thẳng đứng theo phương pháp aphin phối cảnh, biết độ xa của trục là y_0 .

3.36a. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ lên mặt phẳng hình chiếu bằng của mặt hypeboloit tròn xoay trục thẳng đứng theo phương pháp các vĩ tuyến (hình 3.36a(DB)).

3.36b*. ĐB. Cũng bài 3.36a nhưng vẽ bằng phương pháp nón tiệm cận.

3.36c. ĐB. Cũng bài 3.36a nhưng vẽ bằng phương pháp ảnh phối cảnh.

3.36d*. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng của mặt hypeboloit tròn xoay trục thẳng đứng theo phương pháp ảnh phối cảnh (hình 3.36d(DB)).

3.38. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của nửa mặt tròn xoay với trục thẳng đứng (hình 3.38(DB)).

3.39. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt nón trục thẳng đứng, đáy là elip mà trục lớn nằm ngang ($// x$) (hình 3.39(DB)).

3.40. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt trụ thẳng đứng, đáy là elip mà trục lớn nằm ngang ($// x$) (hình 3.40(DB)).

3.41. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt parabolôit trục thẳng đứng, đáy là elip mà trục lớn nằm ngang ($// x$) (hình 3.41(DB)).

3.42a. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt hypeboloit một tầng trục thẳng đứng, đáy là elip mà trục lớn nằm ngang ($// x$), cho biết nón tiệm cận của mặt (hình 3.42a(DB)).

3.42b. ĐB. Vẽ bóng bản thân của mặt hypeboloit hai tầng trục thẳng đứng, đáy là elip mà trục lớn nằm ngang ($// x$), cho biết nón tiệm cận của mặt (hình 3.42b(DB)).

3.43. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của hõm tường hình nửa trụ (không có đáy trên) (hình 3.43(DB)).

3.44. ĐB. Cũng bài 3.43, nhưng hõm tường có đáy trên (hình 3.44(DB)).

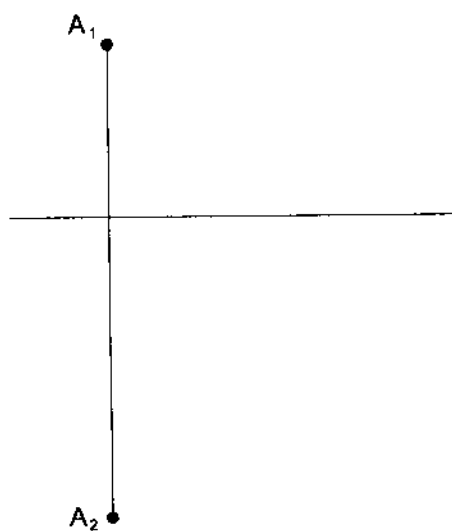
3.45. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của hõm tường hình bán cầu (hình 3.45(DB)).

3.46. ĐB. Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của rãnh cột (hình 3.46(DB)).

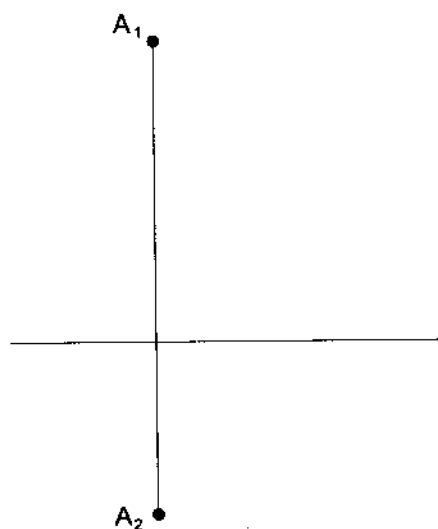
3.47*. ĐB. Vẽ bóng trên lỗ hõm hình nón cụt mà trục nón thẳng góc với mặt phẳng hình chiếu đứng P_1 (hình 3.47(DB)).

3.48*. ĐB. Vẽ bóng trên lỗ hõm dạng parabolôit có trục thẳng góc với mặt phẳng hình chiếu đứng P_1 (hình 3.48(DB)).

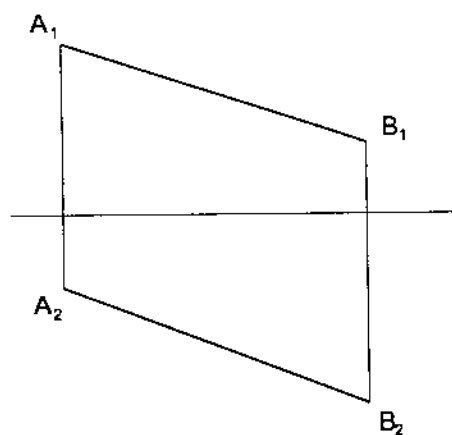
3.49. ĐB. Vẽ bóng bản thân của chuỗi mặt nón tròn xoay trục thẳng đứng và trục nằm ngang (hình 3.49a, b(DB)) (bạn đọc tự làm).



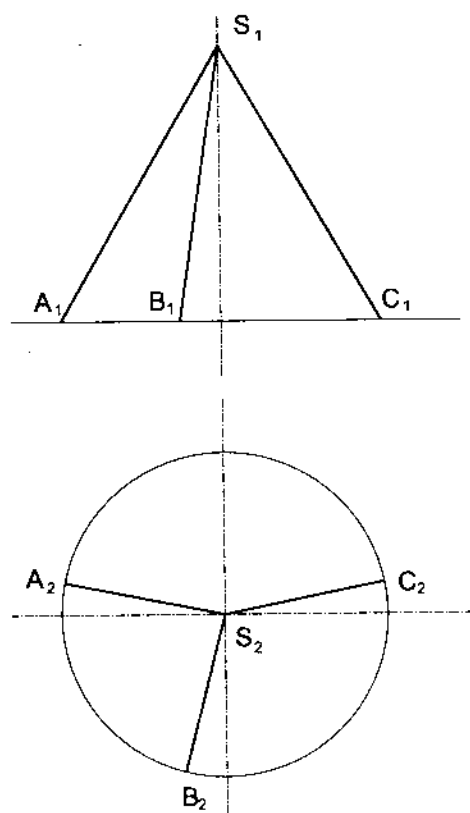
Hình 3.1a(DB)



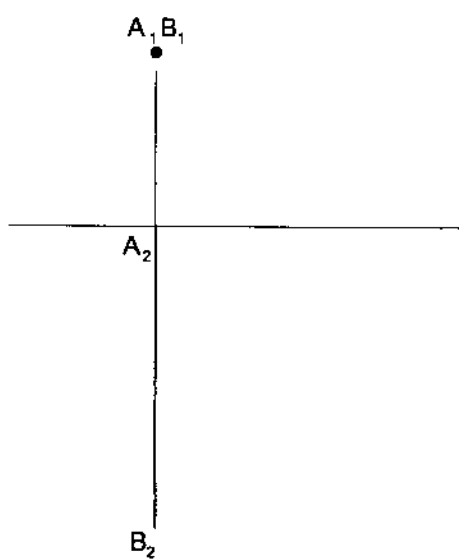
Hình 3.1b(DB)



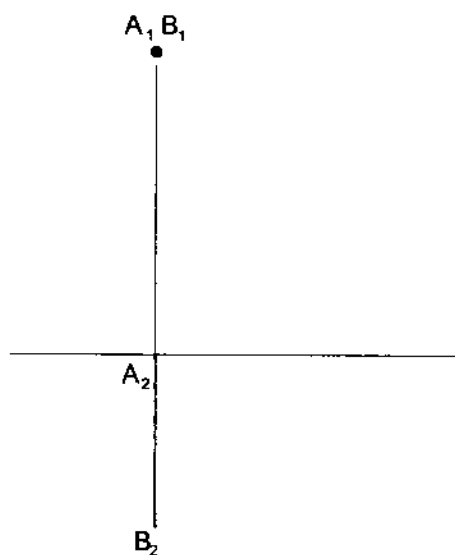
Hình 3.2(DB)



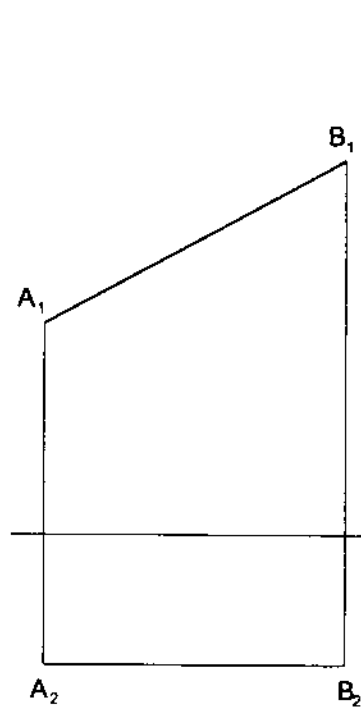
Hình 3.3(DB)



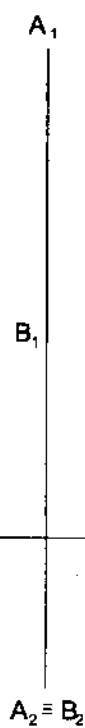
Hình 3.4a(DB)



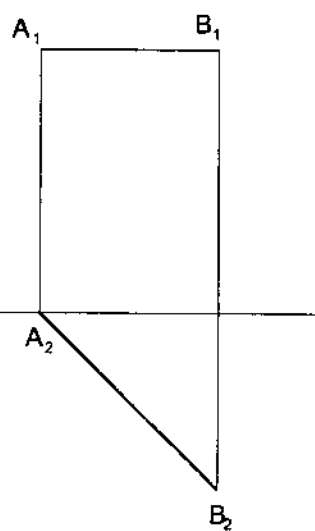
Hình 3.4b(DB)



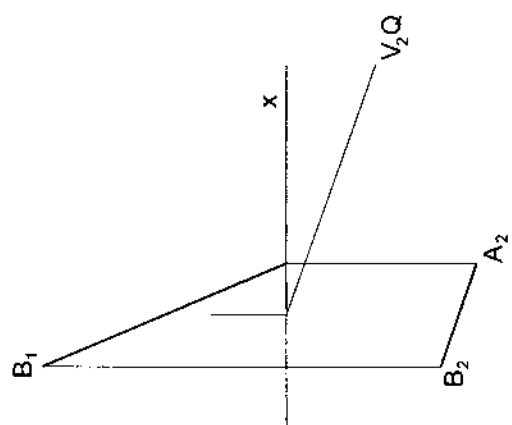
Hình 3.4c(DB)



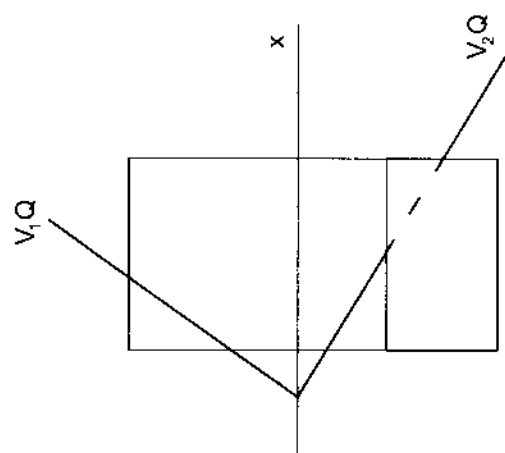
Hình 3.4d(DB)



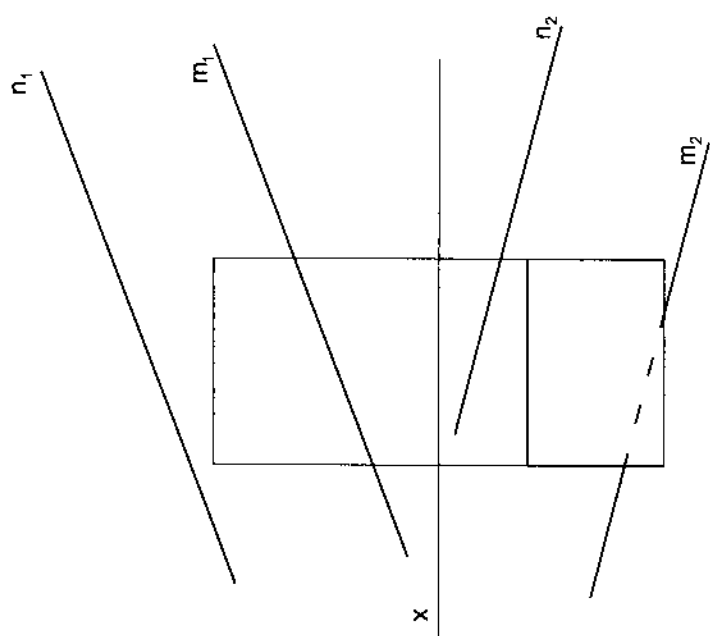
Hình 3.4e(DB)



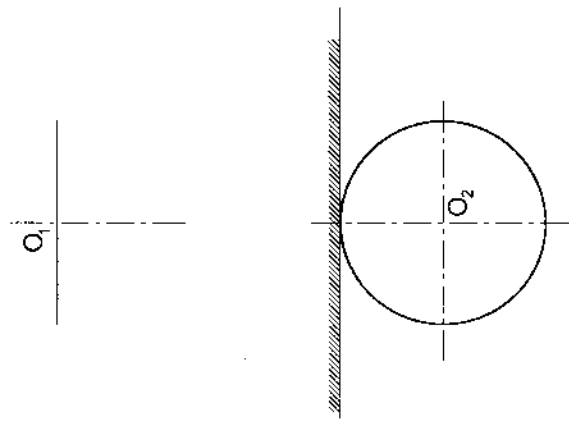
Hình 3.5(DB)



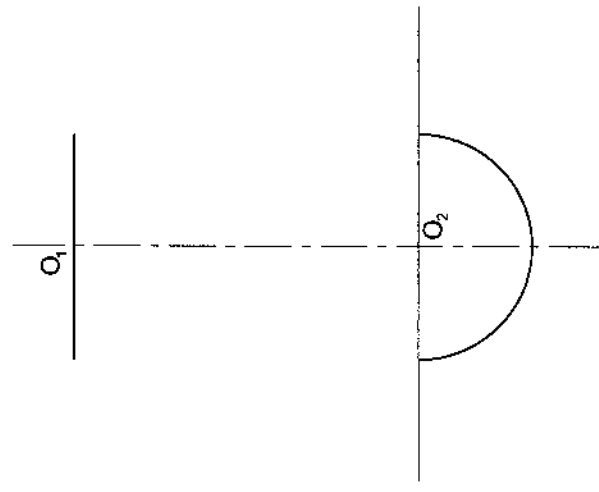
Hình 3.6(DB)



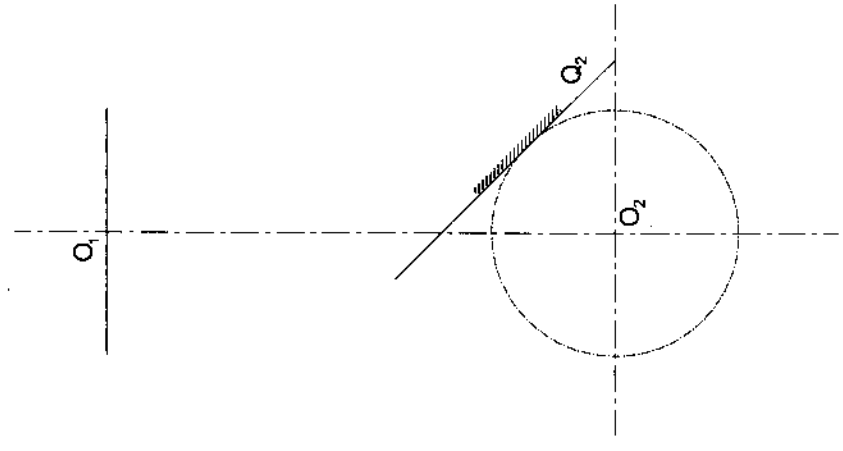
Hình 3.7(DB)



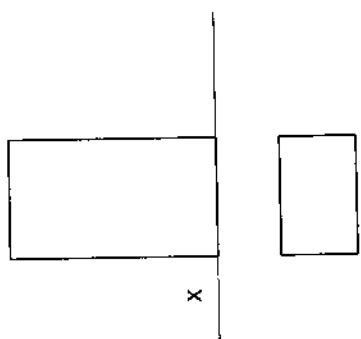
Hình 3.14(DB)



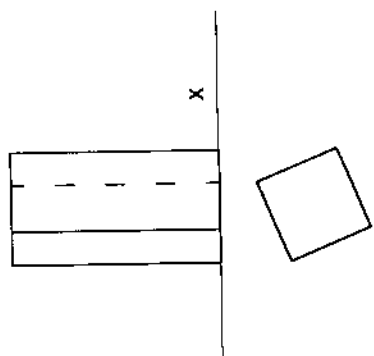
Hình 3.15(DB)



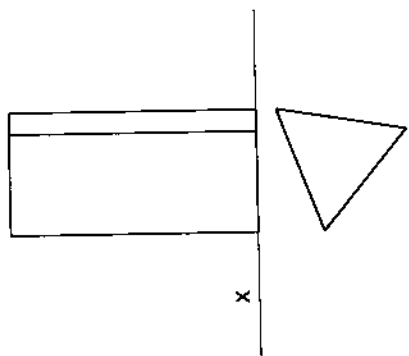
Hình 3.16(DB)



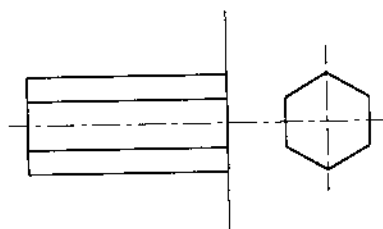
Hình 3.17a(DB)



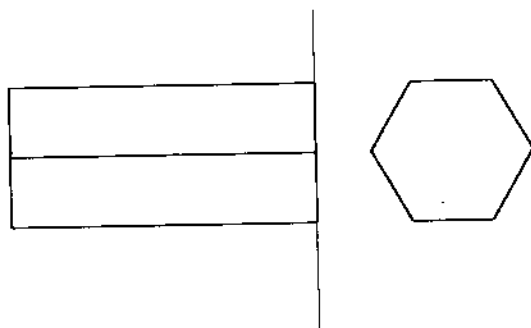
Hình 3.17b(DB)



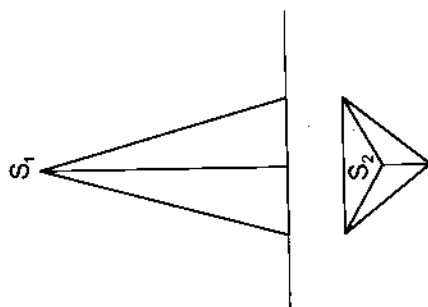
Hình 3.18(DB)



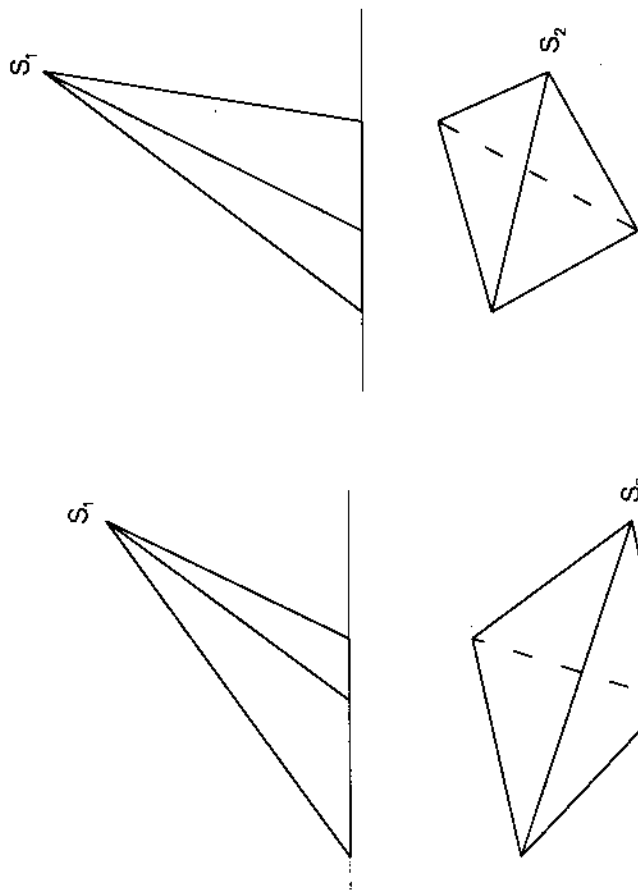
Hình 3.19(DB)



Hình 3.20(DB)

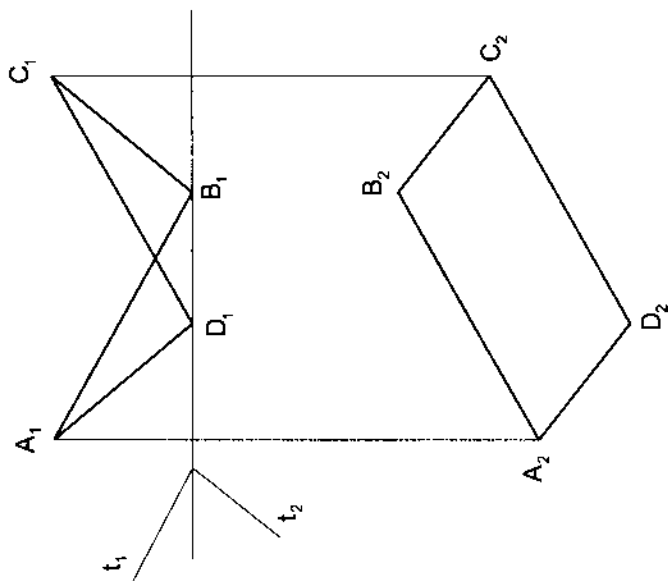


Hình 3.21(DB)

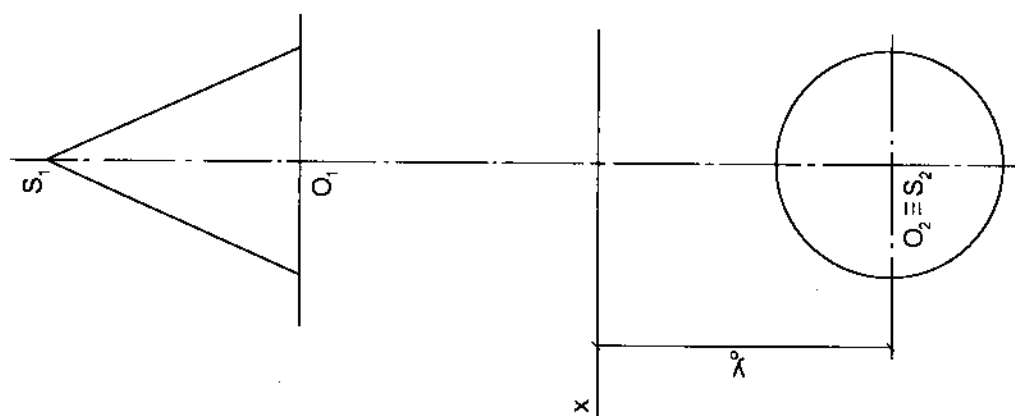


Hình 3.22(DB)

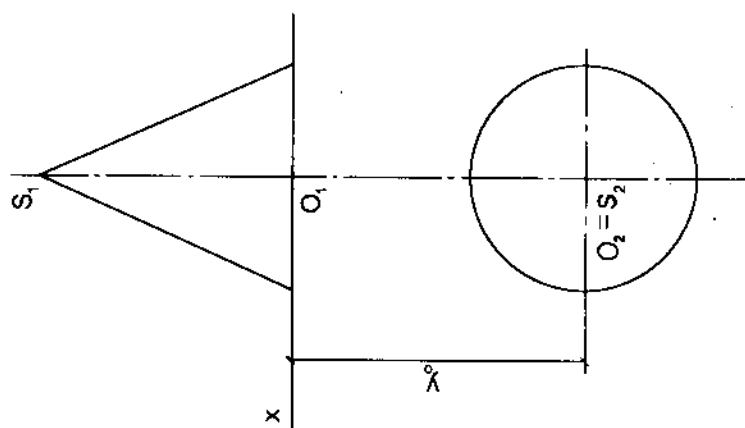
Hình 3.23(DB)



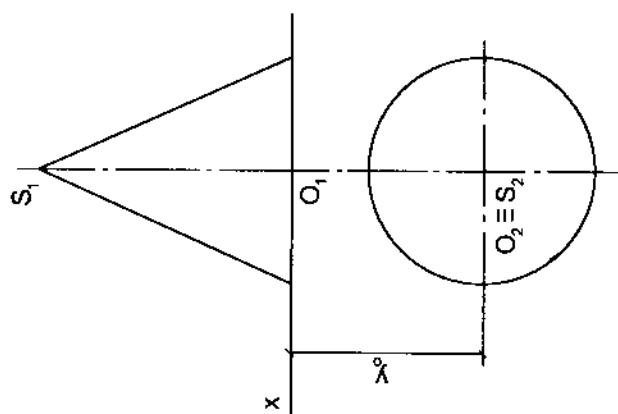
Hình 3.24(DB)



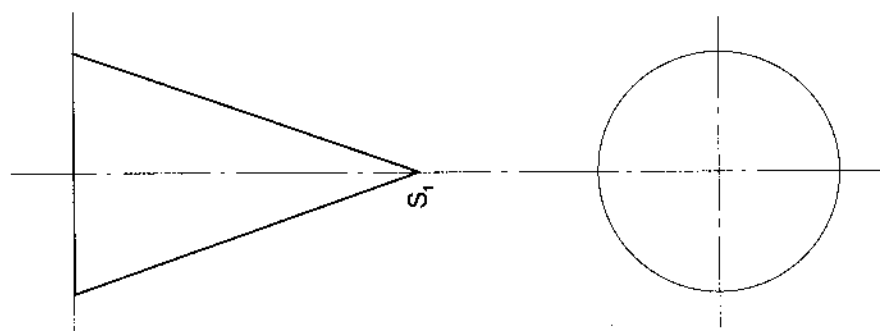
Hình 3.25a(DB)



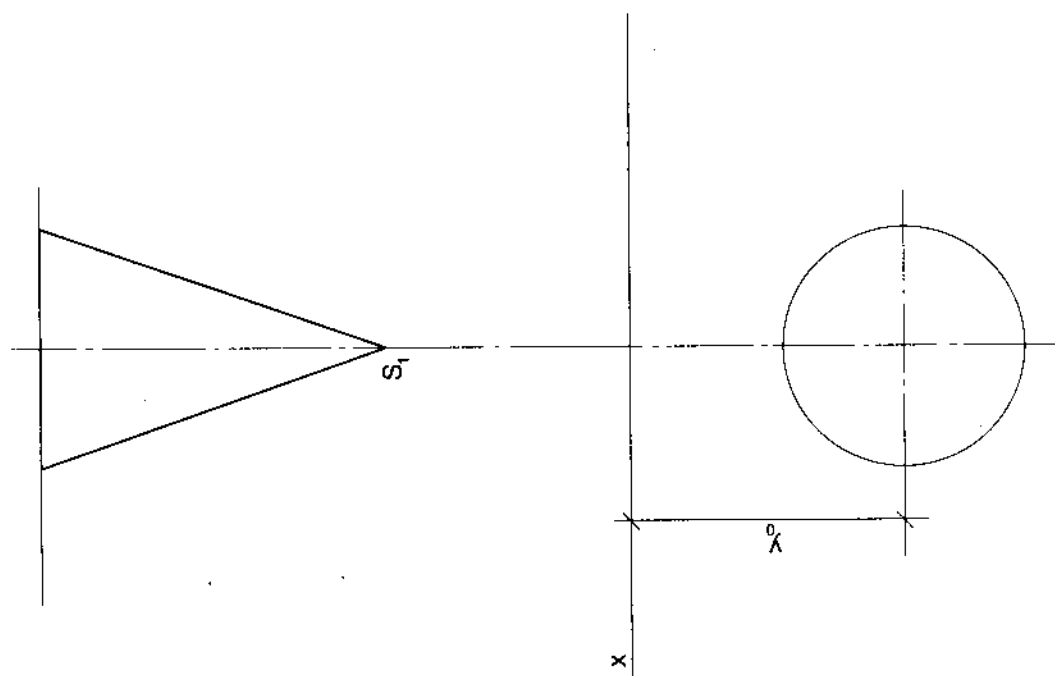
Hình 3.25b(DB)



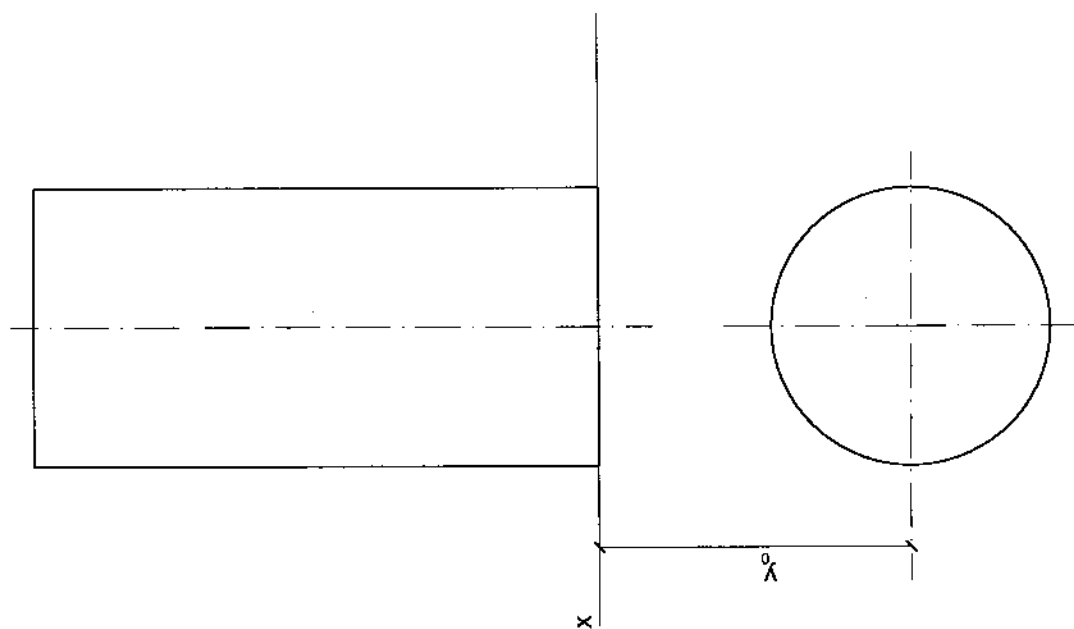
Hình 3.25c(DB)



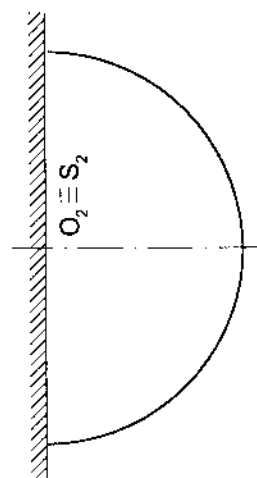
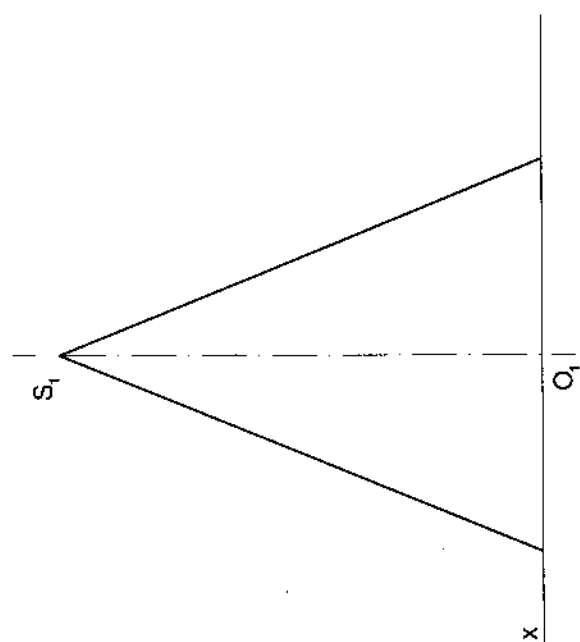
Hình 3.26(DB)



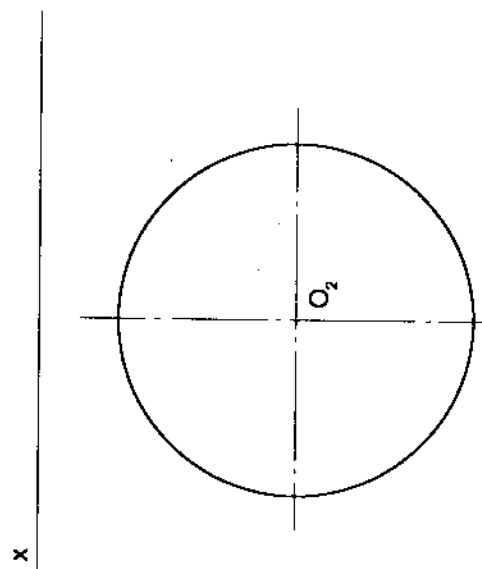
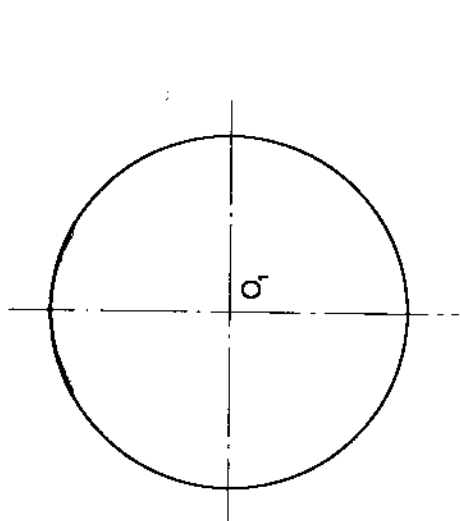
Hình 3.27(DB)



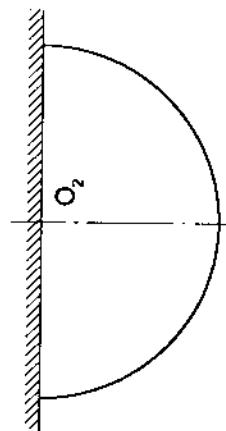
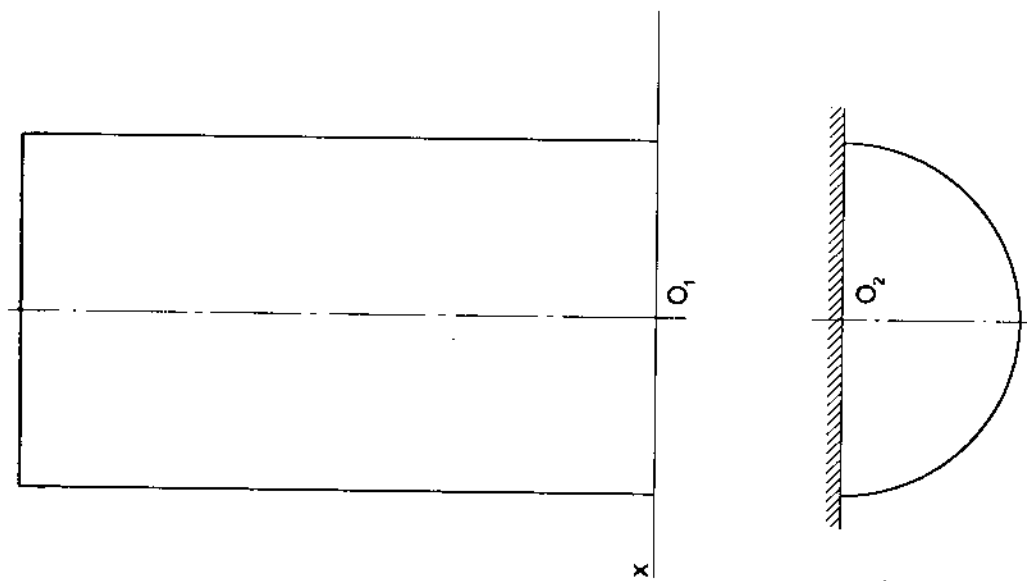
Hình 3.29(DB)



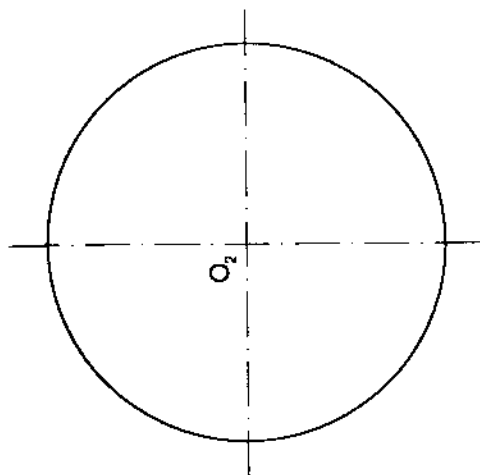
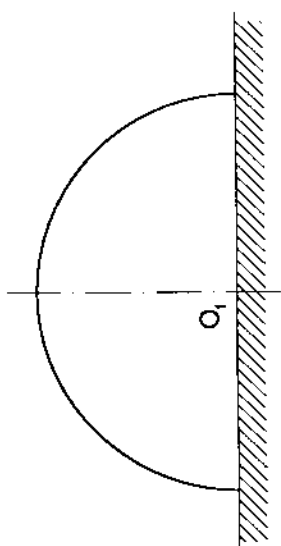
Hình 3.28(DB)



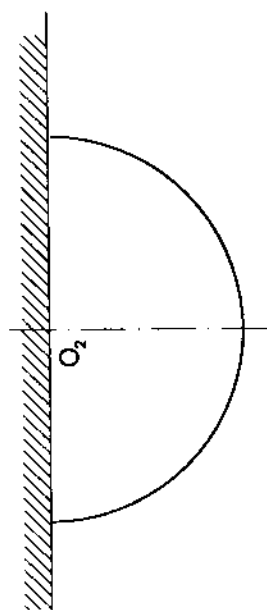
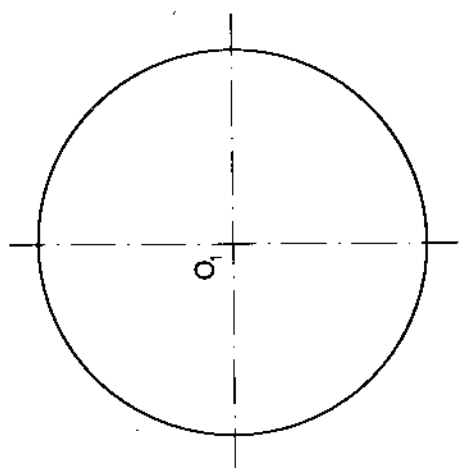
Hình 3.30(DB)



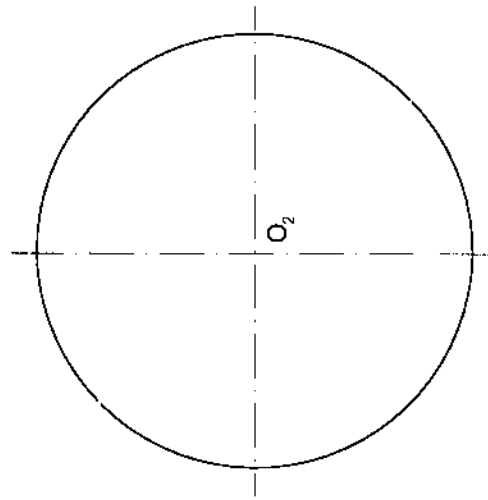
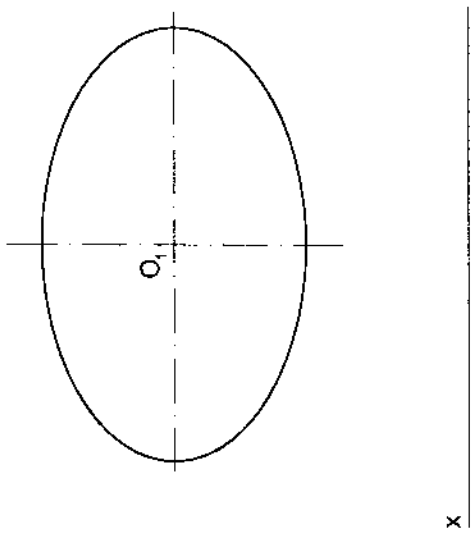
Hình 3.31(DB)



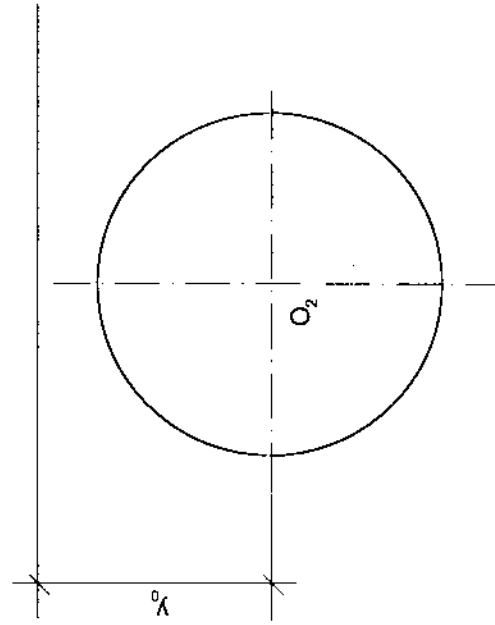
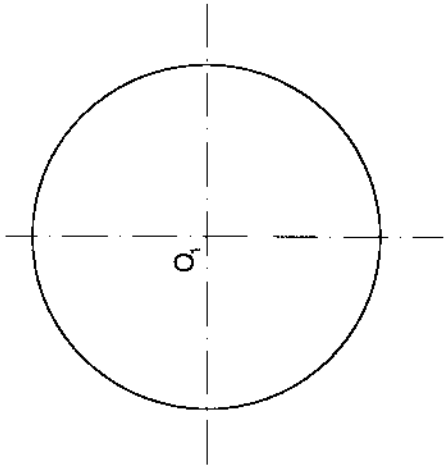
Hình 3.32b(DB)



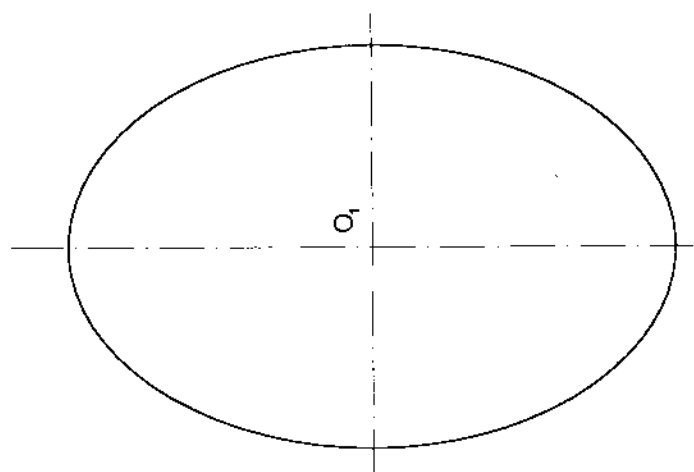
Hình 3.32a(DB)



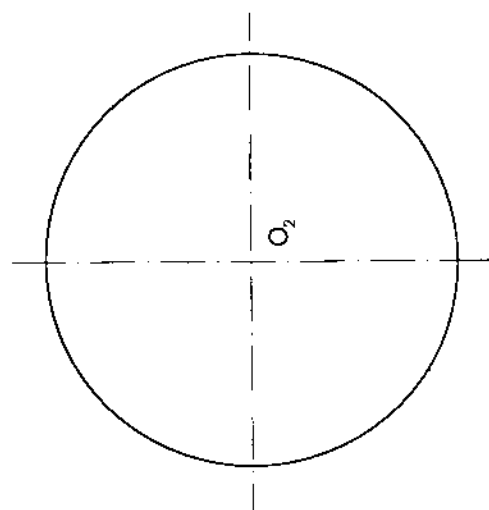
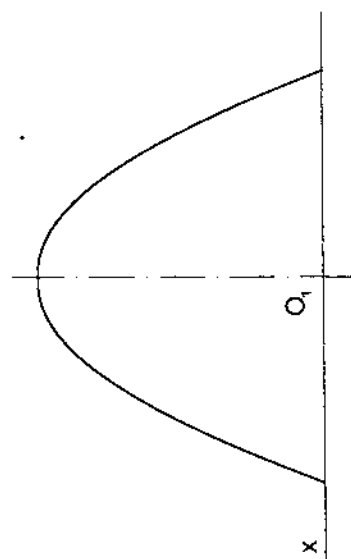
Hình 3.33a(DB)



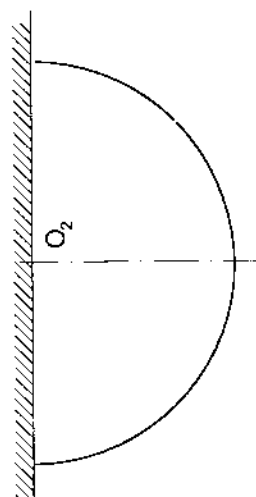
Hình 3.33b(DB)

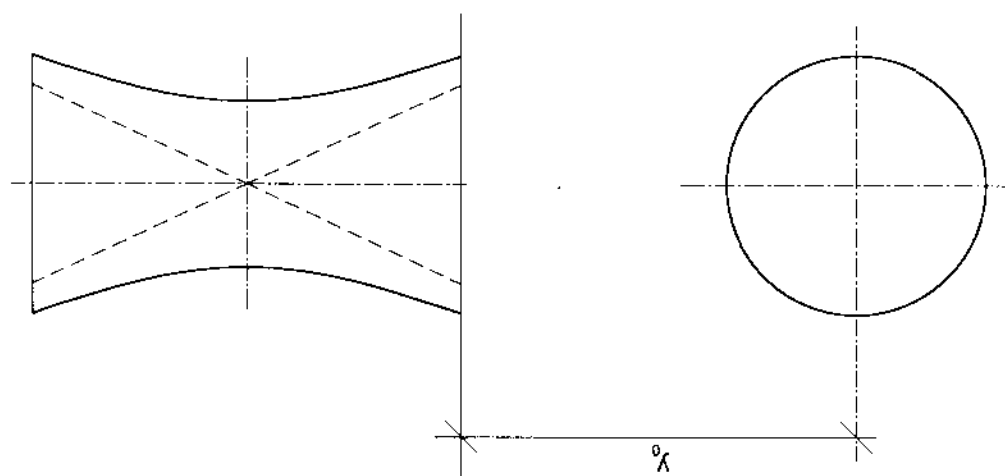


Hình 3.34(DB)

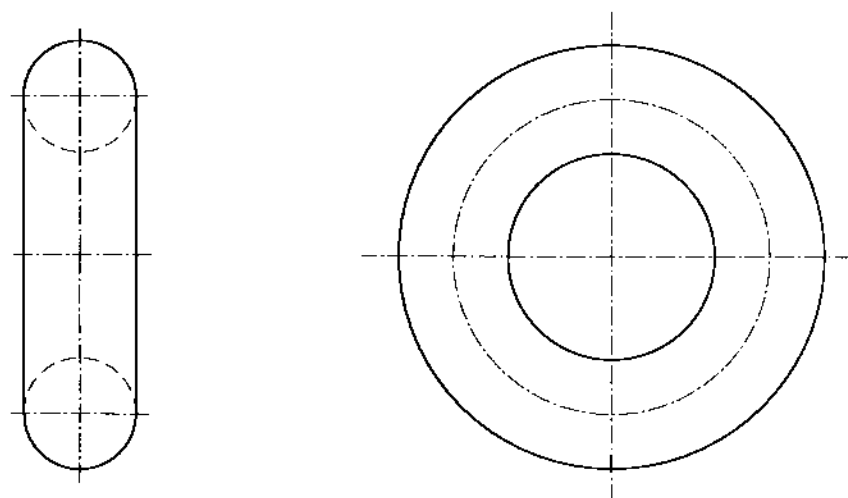


Hình 3.35(DB)

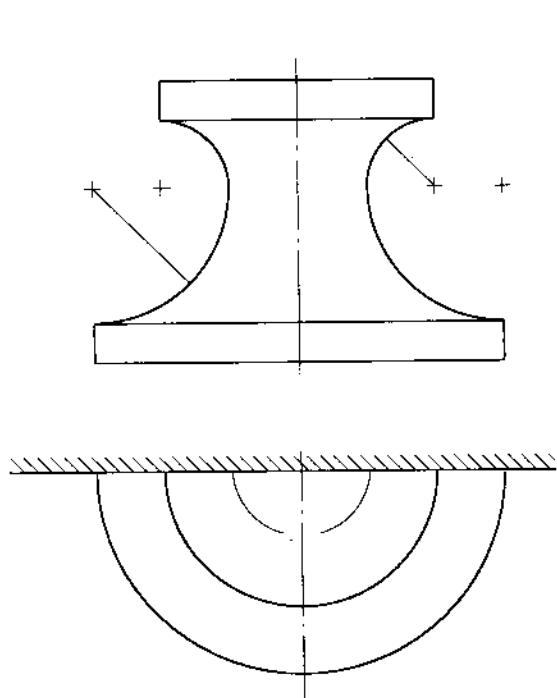




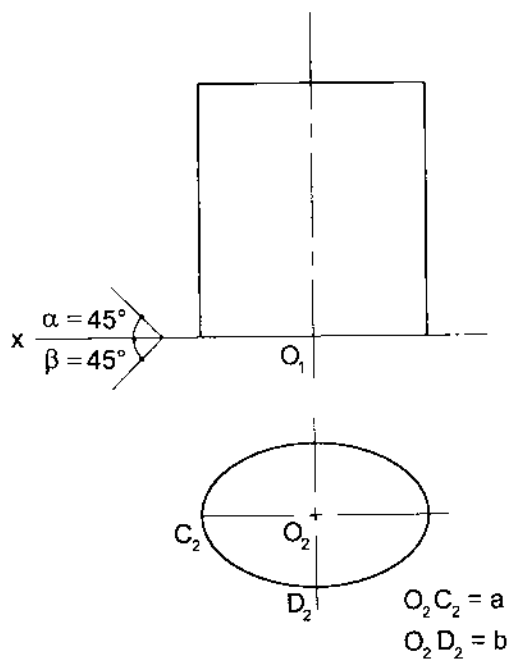
Hình 3.36a, b, c, d(DB)



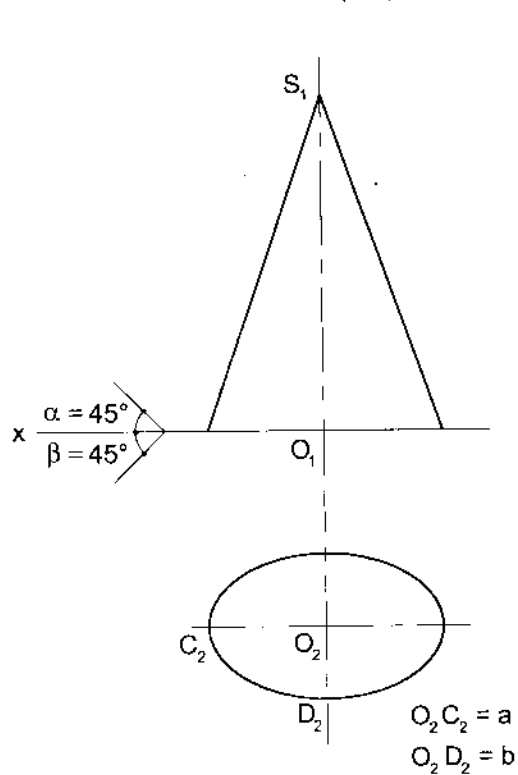
Hình 3.37(DB)



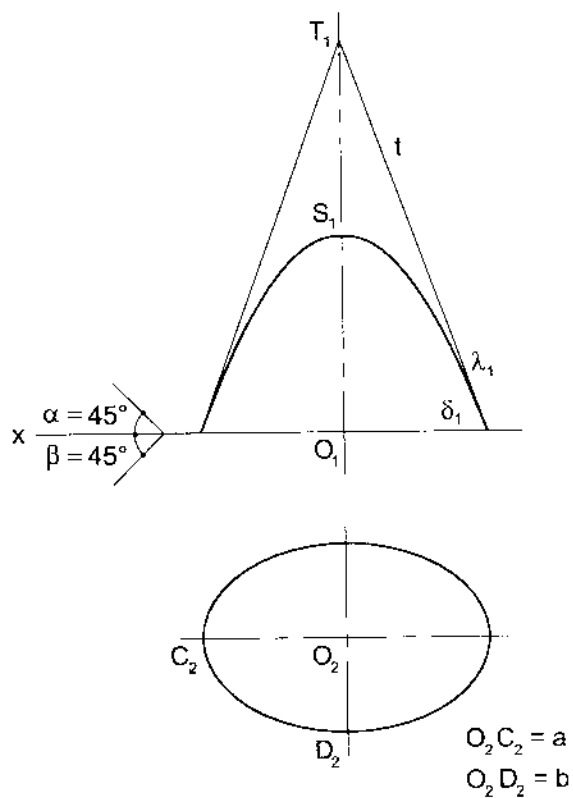
Hình 3.38(DB)



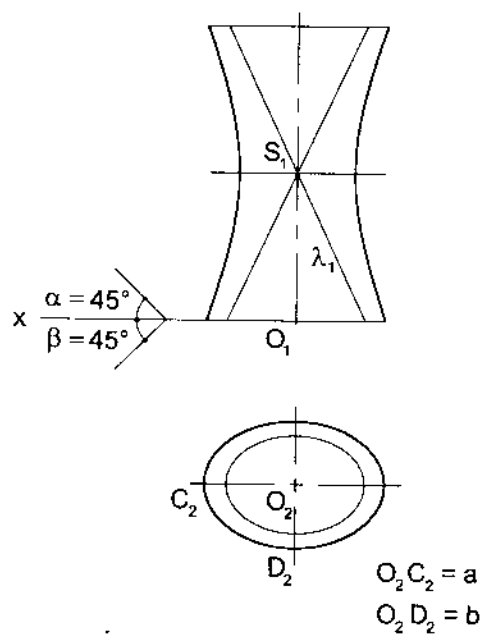
Hình 3.40(DB)



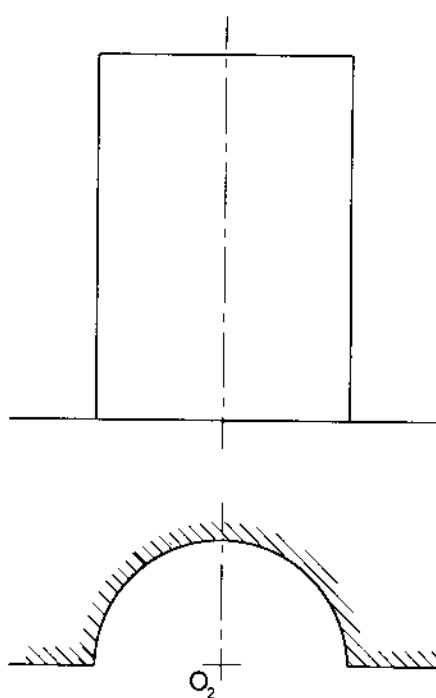
Hình 3.39(DB)



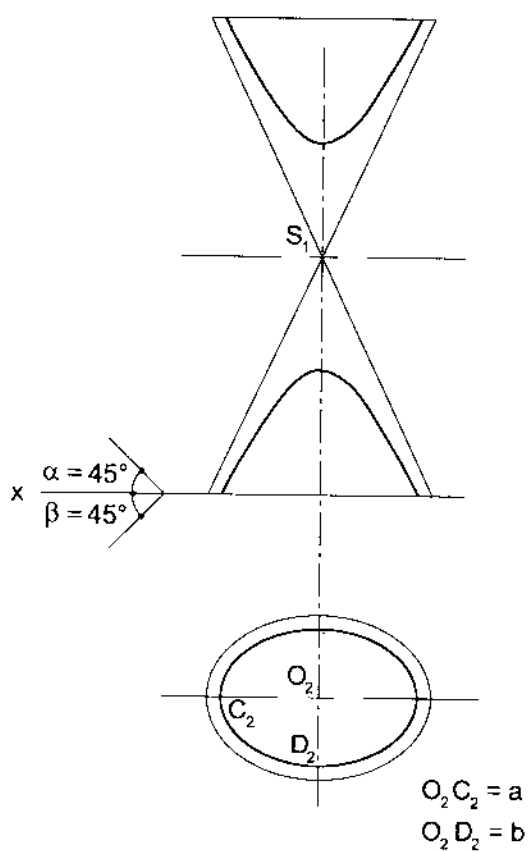
Hình 3.41(DB)



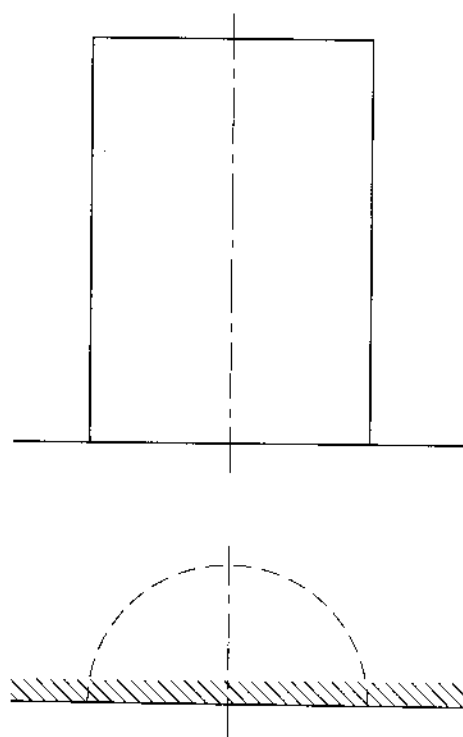
Hình 3.42a(DB)



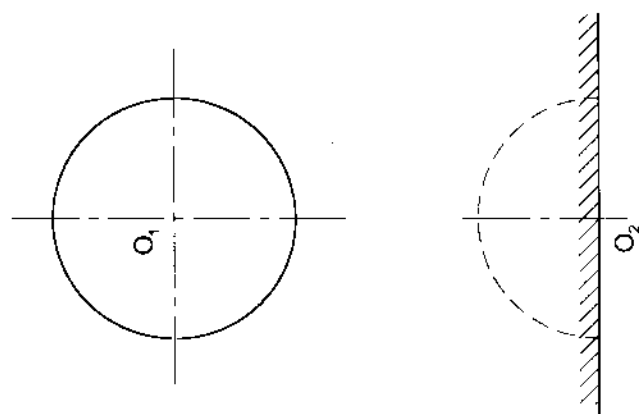
Hình 3.43(DB)



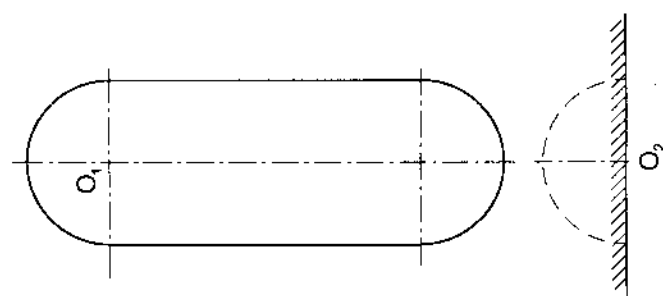
Hình 3.42b(DB)



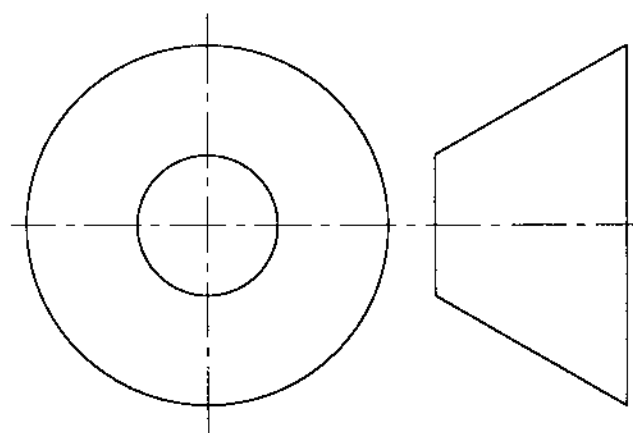
Hình 3.44(DB)



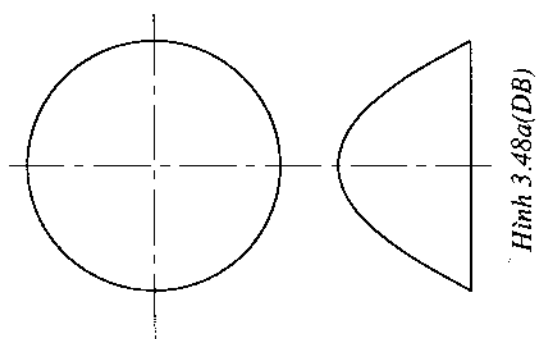
Hình 3.45(DB)



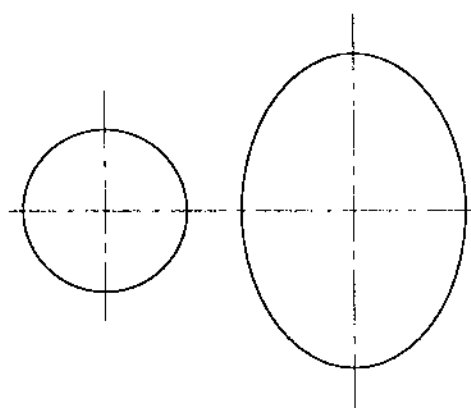
Hình 3.46(DB)



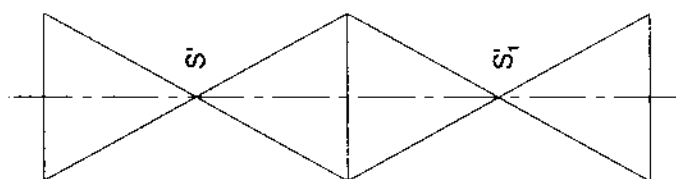
Hình 3.47(DB)



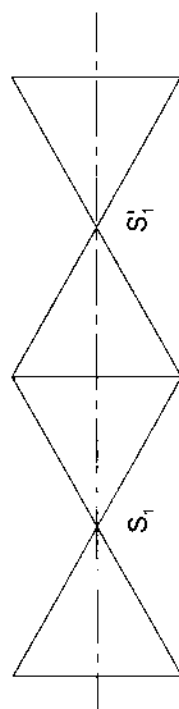
Hình 3.48a(DB)



Hình 3.48b(DB)



Hình 3.49a(DB)



Hình 3.49b(DB)

LỜI GIẢI

3.1. LG. Vết đứng của đường thẳng vẽ qua A là bóng của A lên P_1 . Nếu kéo dài đường thẳng trên, ta tìm được vết bằng; đó là bóng đổ của A lên P_2 (khuất); A_{1b} và A_{2b} nằm trên đường nằm ngang (cạnh của hình vuông) (hình 3.1a(LG)). Trường hợp điểm B: chỉ có bóng đổ B_{2b} trên P_2 vì độ cao của B nhỏ hơn độ xa của nó (hình 3.1b(LG)).

3.2. LG. Điểm A cho bóng đổ trên P_1 và B cho bóng đổ trên P_2 . K là điểm gãy của bóng (hình 3.2(LG)).

3.3. LG. Vẽ bóng đổ của S lên P_2 (S_{2b}). Bóng của A, B, C trên P_2 nằm tại chỗ (trùng với A_2 , B_2 , C_2) (hình 3.3(LG)).

3.4. LG. Bóng đổ của AB lên P_1 trùng với hình chiếu đứng tia sáng s_1 vẽ qua $A_1 \equiv B_1$ (hình 3.4a(LG)).

Bóng đổ của CD lên P_2 trùng với hình chiếu bằng tia sáng s_2 vẽ qua $A_2 \equiv D_2$ (hình 3.4b(LG)).

Bóng đổ của EF lên P_1 song song với E_1F_1 (hình 3.4c(LG)).

Bóng đổ của GH lên P_1 song song với G_1H_1 và thẳng đứng (hình 3.4d(LG)).

Bóng đổ là đoạn thẳng A_1B_{1b} có $\tan \alpha = 1/2$.

3.5. LG. Tìm giao của tia sáng vẽ qua B với mặt phẳng Q. Đó là điểm B_{Qb} . Bóng của B trên P_2 cắt vết bằng V_{2Q} tại K_2 . Bóng của AB trên mặt P_2 là đoạn A_2K_2 ; suy ra K_{Qb} . Bóng của AB trên Q là đoạn thẳng $B_{Qb}K_{Qb}$ (hình 3.5(LG)).

3.6. LG. Lần lượt tìm giao của các tia sáng vẽ qua các đỉnh A, B, C, D với mặt phẳng Q (dùng các mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng) (hình 3.6(LG)).

3.7. LG. Cách làm tương tự bài 3.6. Chú ý AD và CB là các đường thẳng $\perp P_1$, nên bóng đổ của chúng trùng với hình chiếu đứng tia sáng, cho dù Q có vị trí bất kỳ.

3.8. LG. Xem bài 3.7. Đây là trường hợp hay gặp khi vẽ bóng của các vật thể đổ lên mái nhà (mái ở đây cho bằng sống mái m và đường giọt ranh n) (hình 3.8(LG)).

3.9. LG. Bóng đổ là hình bình hành. Bóng đổ của AD và BC trùng với hình chiếu đứng tia sáng (hình 3.9(LG)).

3.10. LG. Bóng đổ là hình bình hành (như bài 3.9) nhưng chú ý A_{1b} và C_{1b} cùng nằm trên đường dóng thẳng đứng (hình 3.10(LG)).

3.11. LG. Xem bài 3.5. Bóng đổ của hình vuông ABCD lên tường Pilet là một hình vuông nhỏ hơn (hình 3.11(LG)).

3.12. LG. Bóng của A và C nằm tại chỗ; bóng của B là B_{1b} . Bóng 1 là tam giác vuông cân (vuông tại B_{1b}) (hình 3.12(LG)).

3.13. LG. Bóng là hình lục giác (hình 3.13(LG)).

3.14. LG. Ngoại tiếp ra ngoài đường tròn một hình vuông. Bóng đổ lên P_1 là hình bình hành $A_1A_{1b}B_{1b}B_1$. Vẽ elíp nội tiếp trong hình bình hành này (tiếp điểm ở trung điểm các cạnh) (hình 3.14(LG)).

3.15. LG. Làm tương tự như bài 3.14.

3.16. LG. Hình vuông ngoại tiếp đường tròn có bóng đổ lên tường Pilet là 1 hình vuông; do đó bóng đổ của đường tròn lên tường Pilet là 1 vòng tròn.

3.17. LG. Bóng của đáy trên là hình bình hành (cạnh $CD \perp P_1$ có bóng trùng với hình chiếu đứng tia sáng (hình 3.17a(LG))); các cạnh đi qua điểm C và A cho ta các điểm gãy trên đường biên của bóng. Đây là bài tập rất hay gặp sau này khi làm bài tập về tìm bóng của nhóm vật thể.

Hình 3.17b(LG) trình bày bóng của hình hộp đáy vuông, nhưng ở vị trí lệch so với mặt phẳng hình chiếu đứng.

3.18; 3.19; 3.20. LG. Cách làm tương tự như bài 3.17; chú ý trên hình chiếu đứng mặt bên phải của hai lăng trụ đều có bóng bản thân (hình 3.18 và hình 3.19(LG)). Đối với lăng trụ vẽ trên hình 3.20(LG) mặt bên chứa cạnh CD được chiếu sáng (nhìn hình chiếu bằng).

3.21; 3.22. LG.

a- Hình 3.21(LG): Tìm bóng đổ của đỉnh S lên P_2 và S_{2b} ; nối S_{2b} với A_2, B_2, C_2 , ta có bóng đổ trên P_2 của chóp từ S_{2b} suy ra S_{1b} ; nối S_{1b} với các điểm gãy trên trục x. Mặt $S_2A_2C_2$ có bóng bản thân trên hình chiếu bằng.

b- Hình 3.22(LG): Nối S_{2b} với các đỉnh ABC của đáy.

3.23. LG. Như bài 3.21.

3.24. LG. Vì hướng tia sáng song song, với paraboloid hypebolich, đường bao bóng bản thân bao giờ cũng là parabol (ở đây không nói trường hợp đặc biệt khi hướng tia sáng // với một trong hai mặt phẳng định hướng).

Trong trường hợp hình vẽ, bóng bản thân parabol có vị trí chiếu bằng (mặt phẳng của nó nằm trong mặt phẳng thẳng đứng.) Muốn tìm vết bằng của nó chỉ cần có hai điểm của parabol.

Lập mặt phẳng tia sáng (Dat) đi qua DA để tìm tiếp điểm trên DA. Mặt phẳng (Dat) bị CB cắt ở một điểm K. Từ K_2 kẻ song song với đường sinh A_2B_2 ta tìm được M_2 là hình chiếu bằng của tiếp điểm M trên AD. Tương tự vẽ tiếp điểm N trên AB. Đường thẳng M_2N_2 chính là vết bằng của mặt phẳng thẳng đứng chứa parabol, đường bao bóng bản thân cần tìm. Từ hình chiếu bằng dễ dàng suy ra hình chiếu đứng của parabol. Trên hình 3.24(LG) có vẽ bóng đổ của mặt paraboloid hypebolich trên P_2 .

Cũng theo cách đó, sinh viên thử tìm bóng bản thân của mặt paraboloid hypebolich cho bằng tứ giác ghềnh mà hình chiếu bằng là một hình vuông (hình 3.24b(LG)).

3.25a. LG. Gọi y_0 là độ xa của trục nón tròn xoay thẳng đứng. Để vẽ bóng đổ và bóng bản thân của nón, ta áp dụng phương pháp aphin phối cảnh. Trước hết, vẽ hình chập v_c của vòng tròn đáy O'_2 sao cho vòng tròn O'_2 cách vòng tròn O_1 một đoạn bằng y_0 .

- Vẽ bóng bản thân: Từ điểm 1- giao điểm của v_c với trục nón, ta vẽ tia 12 // S_1C_1 . Từ điểm 2 vẽ tia nghiêng với x góc 45° tới cắt v_c tại A'_1, B'_1 ; từ đó dóng lên ra suy ra hình chiếu đứng hai đường sinh bóng bản thân S_1A_1, S_1B_1 .

- Vẽ bóng đổ: Ta biết vòng v_c và elip bóng đổ e của đáy nón thuộc tương ứng aphin phối cảnh, trục là p , hướng aphin là đường thẳng $s // p$, sao cho bóng và điểm cho bóng nằm trên một đường thẳng nghiêng 45° so với x . Do đó ta vẽ e theo từng điểm như vẽ điểm A_{1b} sau đây: kẻ $A_1A'_1$ thẳng đứng. Lấy đoạn thẳng nằm ngang $A_1A'_1 = A'_1A_{1b}$. Điểm A_{1b} là điểm cần vẽ.

Ngoài ra, theo tính chất đường kính liên hợp của elip chia đôi dây cung song song với đường kính kia, nên sau khi có A_{1b} ta lấy A'_{1b} đối xứng với A_{1b} qua A_0 là điểm chia của đường kính liên hợp 3-4 đối với dây cung $A_{1b}A'_{1b}$ song song với đường kính 5-6.

Chú ý:

1) Bóng đổ của tâm O là O_{1b} ; của trục SO là $S_{1b}O_{1b}$. Tia $S_{1b}A_{1b}$ và tia $S_{1b}B_{1b}$ (bóng đổ của đường sinh SA, SB) là hai tiếp tuyến với elip bóng đổ e tại A_{1b} và B_{1b} .

2) Trong phép aphin nói trên, các tam giác $A_1A'_1A_{1b}, B_1B'_1B_{1b}, \dots$ là đồng dạng nhau, nên ta có thể chọn một trong các tam giác ấy làm tam giác hướng, gọi là *tam giác hướng aphin*.

3) Ngoài ra, người đọc có thể tự làm hai bài vẽ bóng của mặt nón tròn xoay thẳng đứng đổ lên mặt phẳng hình chiếu bằng (P_2) (hình 3.25b(LG)) và đổ lên cả mặt phẳng hình chiếu (P_1) và (P_2) (hình 3.25c(LG)).

3.26. LG. Vẽ nửa vòng tròn đáy nón; từ 1 vẽ 12 // S_1C_1 ; từ 2 vẽ tia nghiêng góc 45° so với x có A_1, B_1 . Nối S_1A_1, S_1B_1 , ta được hai đường sinh bóng bản thân của nón.

3.27. LG. Tương tự bài 3.25, vẽ được bóng bản thân và bóng đổ của nón, chỉ khác là đỉnh nón S ở phía dưới so với đáy nên S_{1b} cũng ở phía dưới so với e .

3.28. LG.

- Vẽ nửa vòng tròn đáy v_c (độ xa $y_0 = 0$ vì tâm O thuộc mặt hứng bóng). Vẽ đường sinh bóng bản thân S_1A_1 ; từ 1 vẽ tia 12 // S_1C_1 ; từ 2 vẽ tia $2A_0$ nghiêng 45° so với x . Từ A_0 dóng lên có A_1 . Nối A_1-S_1 .

- Vẽ bóng đổ: Nửa vòng tròn v_c và nửa elip bóng đổ e thuộc tương ứng aphin như trong bài 3.25. Ví dụ vẽ bóng của điểm $A(A_1)$ như sau: vẽ A_1A_0 ($A_0 \in v_c$), từ A_0 vẽ đường nằm ngang A_0A_{1b} sao cho $A_1A_0 = A_0A_{1b}$. Điểm cần vẽ là A_{1b} . Trong tương ứng aphin này, tam giác $2A_0A_{1b}$ được dùng làm tam giác hướng aphin. Dựa vào tam giác hướng aphin ta dễ dàng vẽ được các điểm khác của bóng. Chẳng hạn, để vẽ D_{1b} , ta vẽ tam giác $D_1D_0D_{1b}$ (trong đó $D_0 \in v_c$) đồng dạng với tam giác $2A_0A_{1b}$ sẽ có D_{1b} .

3.29. LG. Trước hết, vẽ bóng của vòng tròn đáy trên v_1 đổ lên mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1). Vẽ hình chập v_c của v_1 ; tâm O'_1 của v_c cách O_1 một đoạn bằng y_0 (độ xa của O).

- Vẽ bóng bản thân trụ: Từ tâm O'_1 vẽ tia 45° so với x , có A'_1, B'_1 . Từ đó suy ra hai đường sinh bóng bản thân $A_1A'_1, B_1B'_1$.

- Vẽ bóng đổ: Vòng tròn v_c và elip bóng đổ e của v_c nằm trong tương ứng ảnh, trục ảnh là p , tam giác hướng ảnh được chọn là $A_1A'_1A_{1b}$. Như vậy e được vẽ tương tự bài 3.25.

Bóng đổ của hai đường sinh bóng bản thân lên (P_1) hai đường thẳng đứng $A_{1b}I_1, B_{1b}J_1$ (chúng là hai tiếp tuyến với e tại A_{1b} và tại B_{1b}); lên (P_2) là hai đoạn thẳng A_2I_2, B_2J_2 nghiêng 45° so với x .

3.30. LG. Tương tự bài 3.28 vẽ được nửa elip bóng đổ e . Đường thẳng thẳng đứng a_{1b} là bóng của đường sinh bóng bản thân a . Cung elip E_1F_{1b} vẽ tương tự cung C_1A_{1b} của e .

3.31a. LG. Dùng nón, trụ tròn xoay tiếp xúc để vẽ bóng bản thân của mặt cầu. Trong thực hành, làm cụ thể như sau:

- Trên (P_1):

Bước 1: Từ O_1 vẽ tia 45° có điểm 2_1 và 7_1 .

Bước 2: Từ 2_1 và 7_1 vẽ các tia thẳng đứng và nằm ngang có $3_1, 8_1$ và $5_1, 10_1$.

Bước 3: Nối 2_1 với 11_1 - giao của đường 5_18_1 với đường tròn, ta được 4_1 và 9_1 .

Bước 4: Nối $1_12_13_14_15_16_17_18_19_110_1$ bằng tay hoặc dùng AutoCAD vẽ elip theo hai trục 2_17_1 và 4_19_1 ta được elip bóng bản thân của cầu.

- Trên (P_2) làm tương tự.

3.31b. LG.

- Trên (P_2), vẽ bóng đổ của hai trục elip: $1_{2b}6_{2b}$ và $3_{2b}8_{2b}$ rồi vẽ elip bóng bản thân bằng AutoCAD theo hai trục đó.

- Trên (P_1), tương tự vẽ hai trục $2_{1b}7_{1b}$, $4_{1b}9_{1b}$ rồi dùng AutoCAD vẽ elip bóng bản thân cầu.

3.31c. LG. Cũng bài toán trên, dùng ảnh phối cảnh để vẽ:

- Hình chiếu đứng đường bao thấy ngoài λ và đường ranh giới bóng bản thân α_1 tương ứng nhau qua phép ảnh phối cảnh trục A_1B_1 , hướng ảnh s nghiêng góc 45° so với x . Từ điểm bóng 1_1 trên α_1 (do trụ tiếp xúc mà có) ta lập tam giác hướng ảnh là $1_01_11'$ (mà ba đỉnh theo thứ tự nằm trên trục A_1B_1 , trên α_1 và trên λ sao cho cạnh 1_01_1 nằm ngang và cạnh $1_11' \parallel s$). Theo tam giác hướng ảnh ta vẽ được mọi điểm của elip α_1 . Ví dụ vẽ điểm 2_1 của α_1 như sau: từ $2'$ vẽ tam giác $2_02_12'$ đồng dạng với tam giác hướng ảnh $1_01_11'$ sao cho $2_0 \in A_1B_1$ và $2' \in \lambda$, ta có điểm 2_1 cần tìm.

- Trên hình chiếu bằng làm tương tự.

3.32a. LG. Trên (P_1) , đường ranh giới bóng bản thân α_1 và đường phân cách bóng đổ α_{1b} là tương ứng nhau trong phép afin phối cảnh trục là A_1B_1 , hướng afin là s nghiêng góc 45° so với trục x . Mặt khác α_{1b} là nửa elip có trục nhỏ là A_1B_1 và bán trục lớn là O_1C_{1b} - bóng đổ của bán trục O_1C_1 của α . Để vẽ α_{1b} ta lập tam giác hướng afin $l_0l_1l_{1b}$ có đỉnh $l_1 \in \alpha_1$ và đỉnh $l_0 \in A_1B_1$ còn đỉnh thứ ba là điểm bóng đổ C_{1b} cần tìm. Điểm l_{1b} là bóng đổ của điểm l - giao của α với đường xích đạo của cầu. Độ xa của điểm l bằng đoạn l_0l_1 .

Bây giờ xác định bán trục lớn O_1C_{1b} của α_{1b} . Từ đỉnh C_1 vẽ tam giác $C_0C_1C_{1b}$ sao cho $C_0 \in A_1B_1$ đồng dạng với tam giác hướng afin $l_0l_1l_{1b}$.

Dùng AutoCAD vẽ nửa elip α_{1b} dựa vào trục nhỏ A_1B_1 và bán trục O_1C_{1b} .

3.32b. LG. Đường ranh giới bóng bản thân của bán cầu là nửa elip 1234567 được vẽ nhờ dùng nón, trụ tiếp xúc hoặc dùng tương ứng afin phối cảnh như bài 3.32a.

- Đường phân cách bóng đổ $1_23_{2b}4_{2b}5_{2b}7_2$ được vẽ từng điểm nhờ hình chiếu đứng và hình chiếu bằng tia sáng xuất phát từ mỗi điểm cho bóng tới cắt mặt phẳng hứng bóng. Bạn đọc hãy tự vẽ bóng đổ này theo tương ứng afin phối cảnh như đã thấy trên bài 3.32a.

3.32c. LG. Dùng phép afin phối cảnh trục A_1B_1 , hướng là đường thẳng nghiêng 45° so với x ta vẽ được đường ranh giới bóng bản thân α như trên hình bán cầu (hình 3.32a(LG)).

- Vì tâm cầu có độ xa là y_0 , nên trước hết ta nêu rõ tương ứng afin phối cảnh biến α_1 thành α_{1b} (đường phân cách bóng đổ của cầu trên (P_1)) có trục là vết đứng v_1 của mặt phẳng chứa α tức là mặt phẳng vuông góc với tia sáng (xem hình vẽ). Tam giác hướng afin vẫn là $l_0l_1l_{1b}$ như trong trường hợp mặt bán cầu vì các mặt phẳng hứng bóng trong hai trường hợp là song song với nhau nên các tam giác hướng afin là đồng dạng nhau. Theo phép afin phối cảnh này ta dễ dàng vẽ hai trục của elip bóng đổ: trục nhỏ $A_{1b}B_{1b} // A_1B_1$, trục lớn $C_{1b}D_{1b}$ - bóng đổ của C_1D_1 (xem lại bài 3.32a). Cuối cùng dùng AutoCAD vẽ α_{1b} (hoặc nối bằng tay).

3.33a. LG.

1/ Vẽ bóng bản thân:

- Dùng trụ tròn xoay tiếp xúc có hai điểm 1 và 5.

- Dùng nón 45° tiếp xúc có hai cặp điểm 2, 4 và 6, 8. Nhưng để xác định chính xác các điểm này, ta dùng tương ứng afin phối cảnh biến mặt elipxoit Σ thành cầu Σ' , trục BB' , hướng $s \perp BB'$. Trong tương ứng đó điểm A_1 của Σ biến thành A'_1 của Σ' . Chẳng hạn để xác định cặp điểm 2_1 và 4_1 , ta vẽ tia $A_0A_1 \in \Sigma$ nghiêng 45° so với x tương ứng với tia $A_0A'_1 \in \Sigma'$. Từ O_1 vẽ tia $O_12' \perp A_0A'_1$. Điểm tương ứng của $2'$ là $2_1 \in \Sigma$. Từ 2_1 suy ra 4_1 là cặp điểm bóng bản thân nhờ nón 45° tiếp xúc. Lấy đối xứng với $2_1, 4_1$ qua O_1 ta có cặp điểm $6_1, 8_1$. Bằng cách làm tương tự với nón tiếp xúc mà đường sinh nghiêng góc θ so với mặt bằng, ta có điểm cao nhất 3_1 và thấp nhất 7_1 của $\sigma_1 \equiv 1,2,3,4,5,6,7,8,1$.

Từ hình chiếu đứng σ_1 suy ra hình chiếu bằng $\sigma_2 \equiv 1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2$.

Chú ý: Để vẽ bóng đổ với phương tiện AutoCAD, ta rất cần có đường kính 37 (khi vẽ bóng đổ trên (P_2)) và đường kính 26 (khi vẽ bóng đổ trên (P_1)). Trong thực hành, ta làm như sau:

* **Xác định điểm 2_1 :** Vẽ tia $A_1 A_0$ nghiêng 45° so với x . Nối $A_0 A'_1$ sao cho $A_0 A'_1 = O_1 B$. Kẻ $O_1 2' \perp A_0 A'_1$. Từ $2'$ hạ đường thẳng đứng có $2_1 \in \Sigma$. Lấy đối xứng với 2_1 qua O_1 có điểm 6_1 .

* **Xác định điểm 3_1 (điểm cao nhất):** Quá trình làm tương tự như khi xác định điểm 2_1 nhưng thay vì dùng góc nghiêng 45° ta dùng góc θ (xem hình bên cạnh). Điểm 7_1 (điểm thấp nhất) là đối xứng với điểm 3_1 qua O_1 . Bạn đọc tự xác định $3_1, 7_1$ coi như một bài tập.

2/ Vẽ bóng đổ:

- Vẽ bóng đổ trên (P_2) : Đường phân cách bóng đổ của Σ lên (P_2) chính là bóng đổ của σ lên (P_2) . Chỉ cần vẽ bóng hai trục của σ : trục lớn $3_{2b} 7_{2b}$, trục nhỏ $1_{2b} 5_{2b} // 1_2 2_2$. Từ đó dùng AutoCAD vẽ elip bóng đổ σ_{2b} theo hai trục.

- Bóng đổ của Σ trên mặt (P_1) : Vẽ từng điểm từ hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của σ rồi nối lại.

Hoặc có thể dùng tương ứng ảnh phối cảnh giữa δ_{2b} và α_{1b} , trục là x , hướng là $s // x$. Ví dụ vẽ điểm 3_{1b} : từ $3_{2b} \in \sigma_{2b}$ hạ $3_{2b} 3_0 \perp x$, từ 3_0 kẻ tia 45° cắt đường thẳng $3_{2b} 3_{1b} // s$ tại $3_{1b} \in \alpha_{1b}$ cần tìm. Vẽ nhiều điểm của α_{1b} rồi nối bằng AutoCAD.

3.33b. LG.

1/ Vẽ bóng bản thân:

- Trên (P_1) : Đường ranh giới bóng bản thân σ_1 và đường bao thấy ngoài Σ tương ứng ảnh nhau, trục ảnh $2_1 6_1$ (xem lại cách xác định $2_1, 6_1$ trên bài 3.33a), hướng s nghiêng 45° so với x . Tuy nhiên, thuận tiện hơn ta dùng tam giác hướng $O_1 1_1 1'_1$, trong đó điểm 1_1 (cũng như 5_1) có được là nhờ trụ tròn xoay tiếp xúc.

- Trên (P_2) : Đường ranh giới bóng bản thân σ_2 và đường bao thấy ngoài ω tương ứng ảnh nhau, trục ảnh $1_2 5_2$, hướng ảnh q nghiêng 45° so với x , tam giác hướng ảnh là tam giác $O_2 4_2 4'_2$.

2/ Vẽ bóng đổ:

- Trên (P_1) : Như đã biết đường ranh giới bóng bản thân σ_1 và đường phân cách bóng đổ σ_{1b} tương ứng ảnh nhau, trục ảnh là vết đứng v_1 của (P_1) và mặt phẳng chứa σ , hướng ảnh r nghiêng 45° so với x , tam giác hướng $O_0 O_1 O_{1b}$ (bạn đọc tự tìm hiểu cách vẽ O_{1b} và vẽ nốt elip σ_{1b}).

- Trên (P_2) : Elip σ_{1b} và elip σ_{2b} (đường phân cách bóng đổ của mặt Σ trên P_2) tương ứng ảnh nhau, trục ảnh là x , hướng ảnh là $s // x$ (còn gọi phép ảnh này là phép thấu xạ đặc biệt, tâm là điểm vô tận của trục thấu xạ x hay cũng gọi là phép dịch chuyển). Ví dụ

muốn xác định điểm $9_{2b} \in \sigma_{2b}$, từ $(9_{1b}) \in \sigma_{1b}$ kẻ tia 45° tới cắt x tại 9_0 ; đồng thẳng đứng từ 9_0 xuống gặp đường nằm ngang qua (9_{1b}) tại 9_{2b} cần tìm (xem thêm bài 3.33a).

Ngoài ra, trên (P_2) ta còn thấy giữa đường bao thấy ω và σ_{2b} nằm trong tương ứng ảnh phối cảnh trục Δ đi qua điểm $L = 5_2 3'_2 \cap 5_{2b} 7_{2b}$ (nếu cho $3'_2$ ứng với 7_{2b}) và điểm $M = 3_{2b} 5_{2b} \cap 7'_2 5_2$ (nếu cho 3_{2b} ứng với $7'_2$), hướng ảnh là $q \perp \Delta$. Trục Δ là đường thẳng nghiêng 45° so với x . Bạn đọc hãy vẽ σ_{2b} từ ω theo tương ứng ảnh này, coi như bài tập.

3.34. LG.

- Vẽ bóng bản thân trên (P_1) : Đường ranh giới bóng bản thân α_1 và đường bao thấy ngoài λ của nửa mặt tròn xoay nằm trong tương ứng ảnh trục là $A_1 B_1$ (xác định như 2,6₁ trên hình 3.33a(LG)), hướng ảnh là đường thẳng s nghiêng góc 45° so với x và α_1 được vẽ như vẽ σ_1 trên hình 3.33b(LG) (ở đây không nhắc lại).

- Vẽ bóng đổ trên (P_1) : Đường phân cách bóng đổ α_{1b} là một nửa elip tương ứng với α_1 qua phép ảnh phối cảnh, trục là đường thẳng $A_1 B_1$, hướng ảnh là đường thẳng s nghiêng góc 45° so với x . Để vẽ các điểm của α_{1b} , trước hết ta xác định một điểm bóng của α_{1b} . Trong bài này điểm đó là 1_{1b} - bóng của điểm $1(1_1)$ của vòng tròn xích đạo mà độ xa của nó là đoạn thẳng $1_1 1'$ và thấy rõ trên hình vẽ. Ta gọi tam giác hướng ảnh là $1_0 1_1 1_{1b}$, trong đó cạnh $1_0 1_1$ là nằm ngang và dài bằng độ xa $1_1 1'$, cạnh $1_1 1_{1b} \parallel s$ và dài bằng $1_1 1' \cdot \sqrt{2}$.

Bây giờ ta vẽ bóng của điểm bất kỳ của α_1 , ví dụ điểm 2_{1b} , từ điểm $2_1 \in \alpha_1$ vẽ tam giác $2_0 2_1 2_{1b}$ đồng dạng với tam giác hướng ảnh $1_0 1_1 1_{1b}$ sao cho $2_0 \in A_1 B_1$ sẽ được điểm bóng cần tìm 2_{1b} . Cuối cùng, ta nối các điểm của α_{1b} bằng tay hoặc tốt nhất dùng AutoCAD.

Ngoài ra, dễ dàng thấy rằng trên (P_2) , đường bao thấy ngoài ω và elip ranh giới bóng bản thân α_2 thuộc tương ứng ảnh phối cảnh trục là $O_2 1_2$, hướng là đường thẳng u vuông góc với $O_2 1_2$. Bạn đọc hãy tự vẽ α_2 theo ảnh đó như một bài tập.

3.35a. LG. Dùng phương pháp các vĩ tuyến.

- Vẽ bóng đổ: Trước tiên vẽ bóng đổ của nhiều vòng tròn vĩ tuyến của paraboloid Σ đã cho, ví dụ vẽ bóng đổ của vĩ tuyến v là v_{2b} , tâm là O_{2b} . Sau cùng vẽ đường bao ω_{2b} quanh các vòng tròn bóng đổ ấy. Đường ω_{2b} chính là đường phân cách bóng đổ cần tìm của paraboloid Σ .

- Vẽ bóng bản thân: Từ các tiếp điểm của ω_{2b} với các vòng tròn bóng đổ, ví dụ từ tiếp điểm A_{2b} vẽ tia ngược chiều tia sáng ta tìm được A_1, A_2 trên vĩ tuyến tương ứng sẽ có một điểm của đường ranh giới bóng bản thân δ của Σ . Các điểm khác làm tương tự. Chú ý hình chiếu bằng δ_2 là đoạn thẳng vuông góc với hình chiếu bằng tia sáng.

Điểm B_1 là tiếp điểm chung của đường bao thấy ngoài của Σ với δ_1 , tại đó tiếp tuyến chung t nghiêng góc 45° so với x . Điểm cao nhất C_1 của δ_1 được suy ra bằng đường đồng từ C_2 - giao điểm của δ_2 với hình chiếu bằng tia sáng qua O .

3.35b. LG. Dùng phương pháp nón, trụ tiếp xúc.

- Vẽ bóng bản thân: Dùng nhiều nón cùng trục với paraboloid Σ tiếp xúc với Σ theo các vĩ tuyến, ví dụ nón đỉnh T tiếp xúc với Σ theo vòng tròn đáy. Xác định hai điểm bóng P, Q của nón (theo phương pháp Kôlôtop). P và Q cũng là hai điểm bóng thuộc đường ranh giới bóng bản thân δ của Σ (trên hình 3.35b(LG), dùng thêm một nón đỉnh T' tiếp xúc nữa, bạn đọc tự xem). Nối các điểm như P và Q lại (dĩ nhiên bằng tay hoặc AutoCAD) sẽ được δ_1 .

- Bóng đổ: Vẽ bóng đổ các nón đỉnh T, T' v.v..., rồi nối các điểm bóng $P_2, P'_2, D_2, Q'_2, P'_2$ ta được đường phân cách bóng đổ δ_{2b} . Chú ý điểm đỉnh D_{2b} là trung điểm của đoạn $T_{2b}C_2$ (xem phần lý thuyết).

3.35c. LG. Dùng phương pháp quay.

- Trên (P_1): Vẽ hình chiếu đứng đường ranh giới bóng bản thân δ_1 : với nón tiếp xúc đỉnh T, ta có hai điểm bóng bản thân: $P_1, Q_1; P_2, Q_2$. Quay các điểm thuộc δ quanh trục của paraboloid tới vị trí mà δ song song với mặt hình chiếu đứng, ta được δ_1 . Xem quay điểm K.

- Vẽ bóng đổ trên (P_2): Ngoài hai điểm P_2, Q_2 ta vẽ thêm ba điểm nữa K_{2b}, H_{2b}, C_{2b} rồi nối bằng tay hoặc AutoCAD sẽ được parabol bóng đổ δ_{2b} .

3.35d. LG. Dùng phương pháp 5 tiếp tuyến.

- Trước tiên dùng nón đỉnh T tiếp xúc được hai điểm bóng $P_1, Q_1; P_2, Q_2$ (chú ý $T_1S_1 = S_1O_1$).

- Để dễ trình bày, ta vẽ đường phân cách bóng đổ δ_{2b} trước. Nối T_{2b} (bóng đổ của điểm T) với P_2 và Q_2 . Theo hình 2.18 (lý thuyết) parabol δ_{2b} nhận hai tia $T_{2b}P_2, T_{2b}Q_2$ làm hai tiếp tuyến.

- Parabol ranh giới bóng bản thân δ_1 nhận hai tia T_1Q_1, T_1P_1 làm hai tiếp tuyến (xem phần lý thuyết). Ta cần vẽ ba tiếp tuyến nữa. Muốn vậy, chia $T_{2b}P_2$ và $T_{2b}Q_2$ làm n đoạn bằng nhau, ví dụ 4 đoạn bởi các điểm 1, 2, 3 và 1', 2', 3'. Tiếp đó cũng chia P_2Q_2 thành 4 đoạn bằng nhau bởi các điểm 2₀, 3₀, 4₀. các đường thẳng 1-1'; 2-2'; 3-3' sẽ bao parabol δ_{2b} tiếp xúc với $T_{2b}P_2, T_{2b}Q_2$ tại P_2 và Q_2 .

- Cuối cùng dùng AutoCAD vẽ parabol δ_{2b} đi qua các điểm:

$$P_2; J_{2b} = 1-1' \cap 2_0-2; C_{2b} = 2-2' \cap 3_0 - T_{2b}; I_{2b} = 3-3' \cap 4_0 - 2'; Q_2.$$

- Parabol δ_1 được vẽ tương tự và thấy rõ trên hình bên cạnh.

3.35e. LG. Trước tiên vẽ P_1, Q_1 nhờ nón đỉnh T_1 tiếp xúc với paraboloid theo vòng tròn đáy. Như đã biết, đường ranh giới bóng bản thân δ_1 và đường bao thấy ngoài λ_1 là tương ứng nhau trong ảnh phối cảnh trực là t - giao của mặt phẳng mặt qua trục của paraboloid với mặt phẳng chiếu bằng chứa δ , hướng là đường thẳng s nghiêng 45° so với x. Hình chiếu bằng δ_2 là đường thẳng P_2Q_2 nghiêng 45° so với x. Các điểm của δ_1 được vẽ như điểm Q_1 của δ_1 như sau:

- Vẽ tia $Q_1R_1 // s$ và nối R_1 với 2₀. Tam giác $Q_1R_12_0$ là tam giác hướng ảnh.

- Vẽ các điểm khác của δ_1 : ví dụ để vẽ điểm 5_1 ta vẽ tam giác $4_05'_15_1$ đồng dạng với tam giác hướng $2_0R_1Q_1$ sao cho $4_0 \in t$.

Điểm 4_1 vẽ được nhờ tam giác đồng dạng kéo dài phía bên kia trục t .

3. 35f. LG.

1/ Bóng bản thân: Đường ranh giới bóng bản thân δ (δ_1, δ_2) được tương tự hình 3. 35e(LG).

2/ Vẽ bóng đổ lên (P_1): Đường phân cách bóng đổ gồm hai phần: elip bóng đổ e vòng tròn đáy và parabol λ_{2b} của mặt paraboloid đã cho.

- Để vẽ elip e , ta vẽ hình chập v_c của vòng tròn đáy, ở đáy tâm O'_2 cách tâm O_1 một đoạn y_0 (độ xa của trục mặt đã cho). Và ta đã biết vòng tròn v_c và elip e tương ứng ảnh nhau, trục ảnh là q - giao của π_1 và mặt phẳng chứa vòng tròn đáy của paraboloid (xem lại hình 3.25).

- Vẽ λ_{1b} : Tương tự bài 3.33b, ta thấy λ_{1b} và δ_1 nằm trong tương ứng ảnh phối cảnh trục là p - giao của π_1 với mặt phẳng chứa δ . Do đó dễ dàng vẽ được λ_{1b} .

3.36a. LG. Vẽ bóng đổ các vĩ tuyến của hypeboloit ví dụ v_{2b} , rồi vẽ bao chúng bằng một hypebol λ_{2b} . Tiếp đó từ các tiếp điểm, ví dụ A_{2b} , đóng tia ngược chiều tia sáng, ta vẽ được các điểm trên đường phân cách bóng bản thân λ (λ_1, λ_2).

3.36b. LG. Vẽ bóng đổ nón tiệm cận đỉnh S_{2b} . Tại vòng tròn họng có hai điểm bóng bản thân 1 và 2 (nhờ trụ tiếp xúc) từ đó suy ra $1_{2b}, 2_{2b}$. Theo hình 3.21(LG), ta vẽ các điểm của hypebol λ_{2b} như điểm A_{2b} sau đây: vẽ đường thẳng s cắt đường sinh nón bóng S_{2b} tại điểm 3, 4. Lấy đoạn 1_{2b} -3 dài bằng đoạn 4- A_{2b} . Các điểm khác làm tương tự như điểm B_{2b} với A_{2b} -5 = 6- B_{2b} .

3.36c. LG.

- Trên (P_1): Đường bao thấy ngoài α và đường ranh giới bóng bản thân λ_1 của hypeboloit Σ tương ứng ảnh phối cảnh với nhau, trục là t — giao tuyến của mặt phẳng mặt chứa trục của Σ và mặt phẳng chứa λ , hướng là đường thẳng s nghiêng với x góc 45° . Cách vẽ các điểm của λ_1 : Dựa vào điểm bóng 1_1 và 4_1 của λ_1 (nhờ trụ tiếp xúc mà có), vẽ $1_11'_1 // s$ ($1'_1 \in \alpha$); nối $1'_1$ với $1_0 \in t$, ta có tam giác hướng $1_01_11'_1$. Dựa vào tam giác hướng đó ta vẽ được mọi điểm của λ_1 . Từ λ_1 suy ra hình chiếu bằng λ_2 .

- Bóng đổ trên mặt (P_2): Hình chiếu bằng λ_2 và hypebol bóng đổ λ_{2b} tương ứng ảnh phối cảnh với nhau, trục p — vết bằng của mặt phẳng chứa λ , hướng là đường thẳng u nghiêng 45° so với x ($u \perp p$); cặp điểm tương ứng là $4_2 \leftrightarrow 4_{2b}$.

- Bây giờ xác định một điểm của λ_{2b} , ví dụ điểm 3_{2b} ảnh của điểm 3_2 , nối 3_2 với 3_0 của p tới cắt n tại i ($n // n' // p$); nối 3_0 với i' (ảnh của i) sẽ có 3_{2b} sao cho $3_23_{2b} // u$. Các điểm khác vẽ tương tự.

3.36d. LG. Gọi hypeboloit đã cho là Σ . Đường ranh giới bóng bản thân λ_1 và đường bao thấy ngoài σ của Σ trên (P_1) được xác định như trên hình 3.36c(LG).

- Đường phân cách bóng λ_{1b} đổ lên mặt (P_1) của mặt đã cho nằm trong tương ứng ảnh phối cảnh, trục là v_{1R} — giao tuyến của mặt phẳng hứng bóng, ở đây là (P_1) với mặt phẳng R chứa λ , hướng ảnh là s song song với hình chiếu đứng tia sáng (ngiêng 45° so với x). Nên nhớ $v_{1R} // t$ (bạn đọc tự tìm hiểu). Tam giác hướng ảnh là $Q_0Q_1Q_{1b}$, ở đây $Q_0 \in v_{1R}$ và $Q_1Q_{1b} // s$. Các điểm khác vẽ tương tự.

Chú ý: Đường phân cách bóng đổ λ_{1b} là một hypebol có trục là j (xem hình) là bóng đổ của trục của Σ . Vì vậy khi vẽ được điểm Q_{1b} ta có thể lấy P_{1b} đối xứng với Q_{1b} , tâm đối xứng là Ω - giao điểm của tia Q_0Q_{1b} với trục j (vì tia $Q_{1b}P_{1b}$ tương ứng ảnh của tia Q_1P_1).

Riêng bóng của hai vòng tròn đáy là hai elip, được vẽ bằng tương ứng ảnh, ví dụ để vẽ bóng đổ của vòng tròn đáy dưới v , ta vẽ hình chập v_c của v với độ xa tâm O là $y_0 = O_1O'_2$. Vòng tròn v_c và elip bóng đổ của đáy dưới e nằm trong tương ứng ảnh trục là $m \equiv P_1Q_1$, hướng ảnh là s nghiêng 45° so với x (xem lại hình 3.29(LG)). Bóng của đáy trên vẽ tương tự.

3.37. LG.

1) Vẽ hình chiếu đứng đường ranh giới bóng bản thân:

- Dùng trụ tiếp xúc được điểm 1_1 và 5_1 .
- Dùng nón 45° tiếp xúc được điểm $2_1, 4_1, 6_1$ và 8_1 .
- Dùng nón θ° tiếp xúc được điểm cao nhất 7_1 và điểm thấp nhất 3_1 .

2) Từ các điểm vừa thu được, dóng xuống ta được hình chiếu bằng đường ranh giới bóng bản thân: $1_22_23_24_25_26_27_28_2$.

Chú ý: Trên mặt xuyên còn một đường ranh giới bóng bản thân nữa, nhưng khuất trên hình chiếu đứng nên không vẽ.

3.38. LG. Vẽ đường ranh giới bóng bản thân $1_12_13_14_15_1$:

- Dùng nón 45° tiếp xúc ta được hai điểm 1_1 và 3_1 .
- Dùng nón θ tiếp xúc ta được điểm cao nhất 2_1 .
- Dùng trụ tiếp xúc ta được điểm 4_1 .
- Dùng trụ 45° đỉnh ở phía trên ta được điểm 5_1 .

Vẽ đường phân cách bóng đổ $A_{1b}, B_{1b}, C_{1b}, D_{1b}$:

- Dùng nón θ đỉnh S (S_1) thuộc trục trụ và đáy là vòng tròn $v(v_1)$. Nón này cắt mặt tròn xoay theo vòng tròn n . Tiếp đó vẽ tia S_1B_{1b} tới cắt n tại B_{1b} cần tìm, trong đó tia S_1B_{1b} nghiêng 45° so với x .

- Vẽ điểm A_{1b} và D_{1b} nằm trên đường bao thấy ngoài trên hình chiếu đứng:

- Vẽ hình chập v_c của v , và vẽ elip e tương ứng ảnh phối cảnh với v_c trục m , hướng $s // m$ như đã biết trên hình 3.28(LG). Elip e cắt đường bao thấy ngoài trên (P_1) tại A_{1b} và D_{1b} cần tìm. Từ A_{1b} suy ra C_{1b} bằng đường dóng nằm ngang vì điểm đổ bóng và đường sinh hứng bóng tương ứng đối xứng nhau qua mặt phẳng tia sáng chứa trục trụ. Cuối cùng nối các điểm thu được lại.

3.39. LG. Dùng phép ảnh phối cảnh biến đổi nón đáy elip (nón eliptic) thẳng đứng, hai bán trục là a, b , trục lớn $2a$ nằm ngang, thành mặt nón tròn xoay thẳng đứng, rồi áp dụng phương pháp Kôlôtop mở rộng (như trên hình 3.38 trong phần lý thuyết chương III) để vẽ đường ranh giới bóng bản thân của nón tròn xoay và suy ra đường ranh giới bóng bản thân của nón eliptic đã cho. Trong phép biến đổi nói trên, hình chiếu bằng tia sáng thay đổi ($\beta \neq 45^\circ$ trục x), nhưng hình chiếu đứng tia sáng không đổi ($\alpha = 45^\circ$ trục x). Đồng thời, hình chiếu đứng của hai đường ranh giới bóng bản thân của hai nón nói trên lại trùng nhau.

Trình tự làm cụ thể như sau (hình 3.39(DB)):

1- Vẽ vòng tròn v đường kính $2a$, tâm là tâm của elip (e) đáy nón. Như vậy v và e tương ứng nhau trong phép ảnh phối cảnh, trục $p \equiv O_2A_2$, hướng ảnh là đường thẳng $\perp x$, cặp điểm tương ứng là 1 và B_2 , tỷ số ảnh là $k = \frac{a}{b}$.

2- Từ 3 kẻ tia nghiêng 45° . Tia $J3'$ là hướng hình chiếu bằng tia sáng sau biến đổi.

3- Vẽ đường thẳng $12 // S_1A_1$ tới cắt p tại 2.

4- Từ điểm 2 vẽ đường thẳng $4'5' \perp J3'$, ta được hai điểm $4', 5'$ trên v .

5- Dóng từ $4', 5'$ ta có các điểm chân sinh bóng bản thân là 4_1 và 5_1 cần tìm.

Chú ý: Với những bạn đọc quen dùng máy vi tính để vẽ thì có thể làm như thấy rõ trên hình 3.39b(LG), ở đây từ được điểm S' (bóng của S xuống mặt phẳng hình chiếu bằng), vẽ hai tiếp tuyến (lệnh tangent) với elip đáy e có 4 và 5, suy ra chân đường sinh bóng bản thân $4_1, 5_1$.

Bạn đọc hãy vẽ bóng đổ xuống mặt phẳng hình chiếu bằng của nón eliptic đã cho, coi như bài tập.

3.40. LG. Tương tự như trường hợp mặt nón eliptic, ta vẽ mặt trụ tròn xoay tương ứng ảnh phối cảnh với mặt trụ eliptic, rồi suy ra bóng bản thân cần tìm của mặt trụ eliptic. Trình tự vẽ cụ thể như sau:

1- Vẽ vòng tròn v tâm O_1 , bán kính bằng a (gọi v là vòng tròn ảnh).

2- Từ điểm 3 kẻ tia nghiêng 45° đối với đường bằng, được điểm J . Nối $J3'$ được hình chiếu bằng của tia sáng sau biến đổi.

3- Qua O_1 vẽ đường thẳng vuông góc với $J3'$ tới cắt vòng tròn ảnh v tại $4'$ và $5'$.

4- Từ $4'$, $5'$ dựng lên có 4_1 và 5_1 là các điểm chân đường sinh bóng bản thân S_14_1 và S_15_1 cần tìm của mặt trụ eliptic đã cho.

Bạn đọc hãy vẽ bóng của mặt trụ eliptic đổ lên mặt phẳng hình chiếu bằng, coi như bài tập.

3.41a. LG. Cũng dùng ảnh phối cảnh tương tự biến đổi mặt paraboloid eliptic (ký hiệu là Φ) thành mặt paraboloid tròn xoay (ký hiệu là Σ), rồi vẽ bóng bản thân cần tìm của Φ .

Trình tự cụ thể vẽ đường ranh giới bóng bản thân (ký hiệu là λ) của Φ như sau (để hình đỡ chổng chéo ta vẽ trên hình chiếu bằng):

1- Vẽ vòng tròn v , tâm trùng với tâm O_2 của clip đáy, bán kính bằng a . Như vậy, $\Phi \rightarrow \Sigma$ trong ảnh phối cảnh trục là $p \equiv O_2A_2$, cặp điểm tương ứng $1 \rightarrow B_2$, tỷ số ảnh là $k = \frac{a}{b}$, hướng ảnh là đường thẳng vuông góc với x .

Như đã biết (xem hình 3.54, phần lý thuyết chương III) mặt nón tròn xoay tiếp xúc với mặt Σ theo vòng tròn v và có đỉnh là T_1 sao cho $T_1S_1 = S_1O_1$.

2- Vẽ đường thẳng $12 // S_1A_1$.

3- Vẽ tia $J3$ nghiêng 45° đối với đường bằng. $J3'$ là hình chiếu bằng tia sáng sau biến đổi.

4- Từ điểm 2 vẽ đường thẳng vuông góc với tia $J3'$ tới cắt v tại $4'$ và $5'$, suy ra hai điểm $4_1, 5_1$ của λ .

5- Nối điểm giữa O'_1 của 4_15_1 với T'_1 . Điểm giữa 6_1 của $O'_1T'_1$ là đỉnh của hypebol bóng bản thân λ (xem thêm hình 3.41b(LG) bên cạnh).

6- Từ điểm 2 dựng lên có điểm 2_1 trên đường bao thấy ngoài của Φ , và bằng vĩ tuyến của mặt tròn xoay Σ , từ 2, 2_1 suy ra $2'_1$ của λ .

7- Cuối cùng ta thu được λ qua các điểm $4_12'_16_12_15_1$.

3.42a. LG. Ta vẫn dùng ảnh phối cảnh biến hypeboloid eliptic (Φ) thành hypeboloid tròn xoay (Σ) như trên hình 3.39, ..., 3.41(LG). Đồng thời biến nón tiệm cận eliptic η của Φ thành nón tròn xoay μ (μ là tiệm cận của Σ). Đường ranh giới bóng bản thân của Φ là một hypebol (ta gọi là λ).

Như đã biết, hai đường sinh ranh giới bóng bản thân của nón tiệm cận μ sẽ là hai đường tiệm cận của đường hypebol λ . Vì vậy làm tương tự bài toán 3.39. LG ta dễ dàng vẽ được hai đường sinh ranh giới bóng bản thân là $S_14'_1, S_15'_1$ của nón tiệm cận μ . Cuối cùng với hai đường tiệm cận này và điểm bóng bản thân đã biết, ta vẽ được hypebol ranh giới bóng bản thân λ (như đã làm trên hình 2.21 trong phần lý thuyết, chương II) của mặt Φ đã cho.

Trình tự vẽ cụ thể như sau:

- 1- Vẽ vòng tròn v tương ứng ảnh với elip đáy e .
 - 2- Từ 3 kẻ $J3$ nghiêng 45° đối với đường nằm ngang. $J3'$ là hình chiếu bằng của tia sáng sau biến đổi.
 - 3- Kẻ tia $12 // S_1A_1$. Từ điểm 2 kẻ đường thẳng góc với $J3'$ được $4'$ và $5'$ trên v . Dóng lên được hình chiếu đứng của chân bóng bản thân của nón tiệm cận μ là $4'_1$ và $5'_1$.
 - 4- Trên hình 3.421(LG) cũng vẽ được điểm 4_1 là một điểm bóng bản thân của mặt Φ .
 - 5- Từ điểm 4_1 và hai đường tiệm cận $S_14'_1$, $S_15'_1$, ta vẽ các điểm 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14 v.v... $\in \lambda$ bằng cách lấy các đoạn $4_1-5 = 6-7$; $7-8 = 9-10$; v.v... như trên hình 3.42b(LG).
- 3.42c. LG.** Tương tự, bạn đọc hãy vẽ bóng bản thân của mặt hypeboloit elliptic hai tầng (hình 3. 42c(LG)).

3.43. LG. Bóng bản thân là đường sinh đi qua điểm 3, suy từ tia O_23_2 nghiêng 45° so với x cắt vòng tròn đáy.

Bóng đổ gồm đường thẳng a_{1b} và cung $1_{1b}2_{1b}3_{1b}$. Bạn đọc tự suy ra cách vẽ từng điểm.

3.44. LG. Bóng bản thân vẽ như trên hình 3.43(LG). Bóng đổ gồm: đường thẳng a_{1b} và phần tư cung tròn b_{1b} . Bạn đọc tự vẽ cung tròn b_{1b} .

3.45. LG. Bóng bản thân hõm tường là nửa elip (từ điểm 1_1-e-7_1) vẽ nhờ nón, trụ tiếp xúc. Cung bóng đổ $1_1-4_{1b}-7_1$ là bóng của cung tròn $1_14_17_1$ vẽ theo quy tắc “một phần ba” như sau. Ví dụ vẽ điểm 3_{1b} , từ điểm cho bóng 3_1 vẽ hình chiếu đứng tia sáng tới cắt đoạn 1_17_1 tại 3_0 . Lấy tiếp trên đó đoạn $3_03_{1b} = \frac{1}{3} \cdot 3_13_0$. Các điểm khác vẽ tương tự.

3.46. LG. Rãnh cột gồm 3 hõm tường kết nối lại: phần trên và dưới là hai hõm tường phần tư cầu, phần giữa là hõm tường nửa trụ.

- Bóng trên phần tư cầu vẽ như hình 3.41(LG).
- Bóng trên phần trụ vẽ như hình 3.39(LG).
- Bóng của mép trụ a_1 đổ lên phần cầu phía dưới là cung elip O_16_1 vẽ như giao tuyến của mặt phẳng tia sáng chiếu bằng cắt trụ.
- Bóng của mép cầu $3_14_16_1$ đổ lên trụ là $3_{1b}4_{1b}6_{1b}$ vẽ từng điểm như điểm 4_{1b} : từ 4_1 vẽ đường thẳng đứng gặp đường kính cầu tại 4_0 ; từ 4_0 vẽ đường thẳng song song với hình chiếu bằng tia sáng $4_04'_1$; từ $4'_1$ dóng thẳng đứng tới cắt tia 45° qua 4_1 tại điểm 4_{1b} cần tìm.

3.47. LG. Lỗ hõm có dạng nón tròn xoay có đường viền(ta gọi là đáy) nằm trong một mặt phẳng mặt.

Chiếu đỉnh S theo hướng ngược tia sáng lên mặt phẳng đáy, được điểm S^0 . Từ S^0 vẽ hai tiếp tuyến với đáy được hai điểm T , N , chân của các đường sinh bóng bản thân của lỗ và

đồng thời là các điểm giới hạn cung cho bóng đổ của đáy. Để tìm các điểm khác của đường viền bóng đổ, lấy đường sinh bất kỳ SK^0 . Từ K'_1 là giao điểm của hình chiếu phụ đường sinh SK^0 với đáy nón, vẽ tia sáng đến gặp $S_1K^0_1$ tại K_{1b} . Mặt phẳng chiếu đứng chứa tia sáng qua đỉnh S^0 là mặt phẳng đối xứng đối với nón, các điểm của đường bao bóng đổ có thể suy ra nhau nhờ phép đối xứng qua $S^0_1S_1$. Bóng đổ nằm trên đường sinh SM có được nhờ xác định điểm A trên đáy. Qua A vẽ tia sáng đến gặp đường sinh SM tại A_{1b} (dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng).

Các điểm $N_1A_{1b}T_1$ nằm trên 1 elip. Cần chú ý bóng đổ chính là giao của trụ tia sáng đi qua đáy nón và mặt trụ. Chúng đã có chung đường tròn đáy nón, do vậy chúng cắt nhau theo 1 elip nữa).

Bóng đổ từ đáy trước lên đáy sau là cung tròn tâm O_{1b} (hình chiếu của O lên đáy sau theo hướng tia sáng (hình 3.47(LG))).

Chú ý: Nếu gọi g là tiếp tuyến tại T_1 với đáy nón, s là đường thẳng // với s_1 ;

b_1 là tiếp tuyến với đường cong bóng bản thân và d là tiếp tuyến với đường cong bóng đổ thì bốn đường này tạo thành 1 chùm điều hoà ($g, d, s, b_1 = -1$)

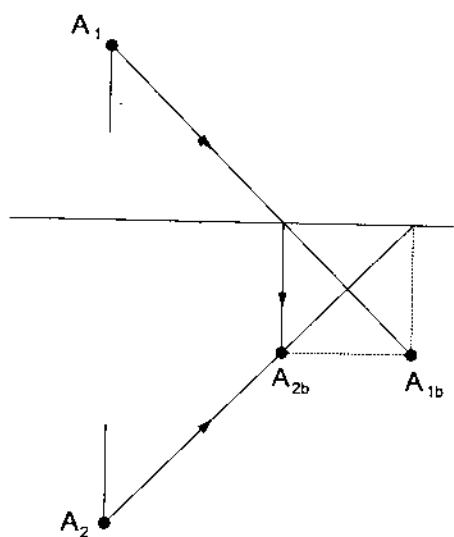
Nhờ có các tiếp tuyến d tại N_1, T_1 , ta có thể vẽ chính xác elip bóng đổ (biết 2 tiếp tuyến, 2 tiếp điểm và 1 điểm thuộc elip). Cách vẽ: xem phần 1 hoặc có thể xem cách vẽ trình bày trên hình 3.48b(LG).

3.48. LG. Lỗ hõm có dạng paraboloid tròn xoay có đường viền (ta gọi là đáy) nằm trong một mặt phẳng mặt. Trước tiên vẽ bóng bản thân của lỗ hõm; ta có nhận xét nón đỉnh S ngoại tiếp paraboloid dọc theo đường viền của lỗ. Vẽ bóng bản thân của nón (theo cách chiếu phụ đã làm ở bài trên hay theo cách vẽ của Kôlôtốp) ta có ngay 2 điểm B_1C_1 trên hình chiếu đứng (BC là chân của parabol bóng bản thân nằm trong mặt phẳng liên hiệp với hướng tia sáng, mặt phẳng này là mặt phẳng chiếu đứng. B_1C_1 cũng là hai điểm giới hạn của elip bao quanh bóng đổ. Muốn tìm điểm thứ ba của đường bao quanh bóng đổ, ta vẽ tia sáng qua A (giao điểm A_{1b} tìm được nhờ dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng $E_2D_2 \rightarrow$ hình chiếu đứng là vòng tròn đường kính D_1E_1).

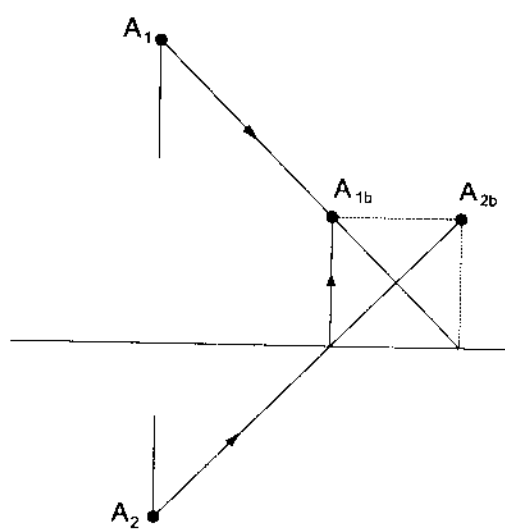
Ta cũng có nhận xét tương tự như đối với bài tập trên về 4 tiếp tuyến g, d, s, b_1 tại C_1 (hình 3.48a(LG)).

Hình 3.48b(LG) trình bày cách vẽ elip biết 2 tiếp tuyến $SB'; SC'$, 2 tiếp điểm B', C' và 1 điểm A' thuộc elip (vẽ vòng tròn bất kỳ tiếp xúc với 2 tiếp tuyến trên tại B và C ; vẽ trục x của phép thấu xạ; A' là điểm tương ứng của A ; D' là điểm tương ứng của D . Ta có 1 trục của elip ($A'D'$), suy ra tâm O' của elip. Vẽ O ứng với O' nhờ các điểm $E'E$.

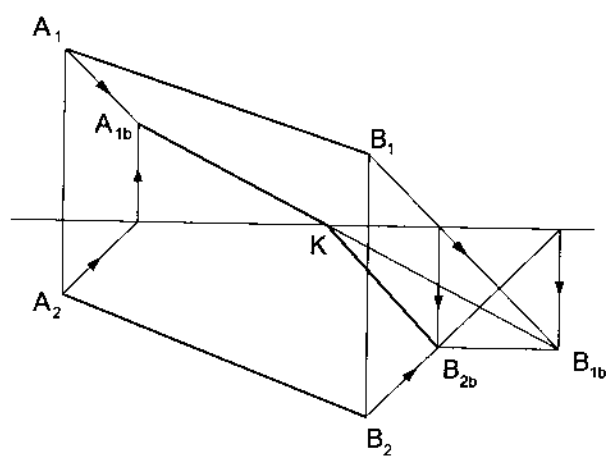
Từ O kẻ // trục $x \rightarrow F \rightarrow F'$ là 1 đỉnh của trục thứ hai của elip. Bằng phép đối xứng tìm được G' ; $F'G'$ là trục dài elip. Với 2 trục $A'D'$; $F'G'$ có thể vẽ chính xác elip).



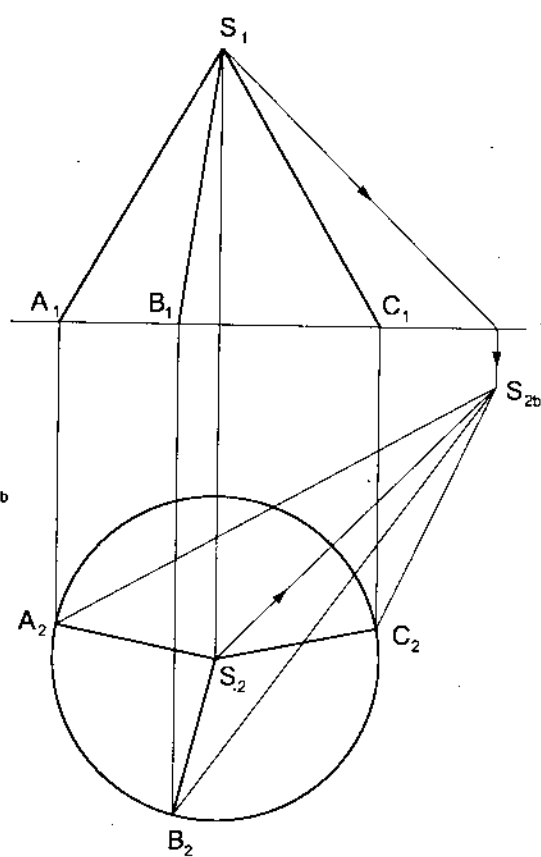
Hình 3.1a(LG)



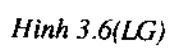
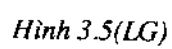
Hình 3.1b(LG)

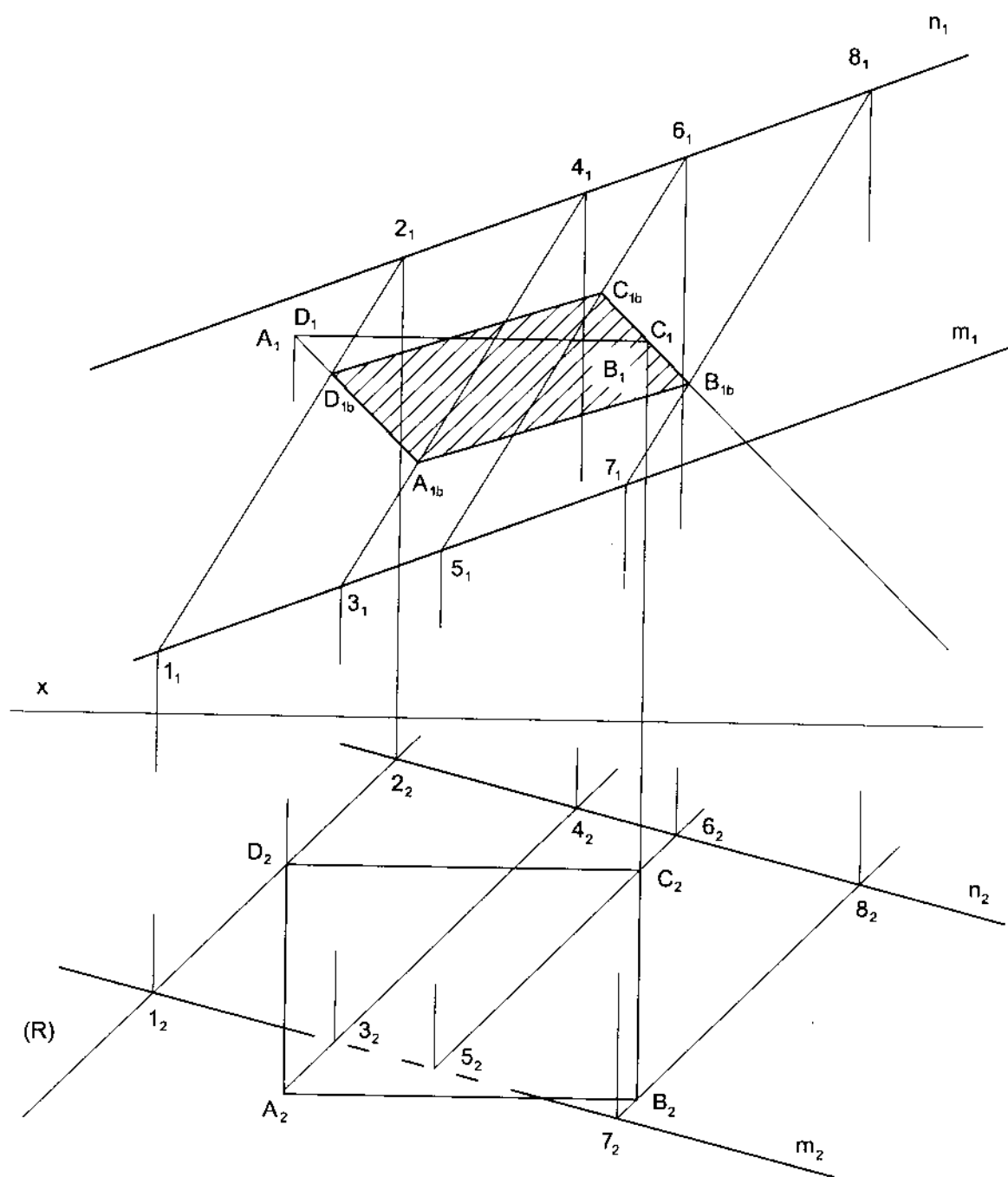


Hình 3.2(LG)

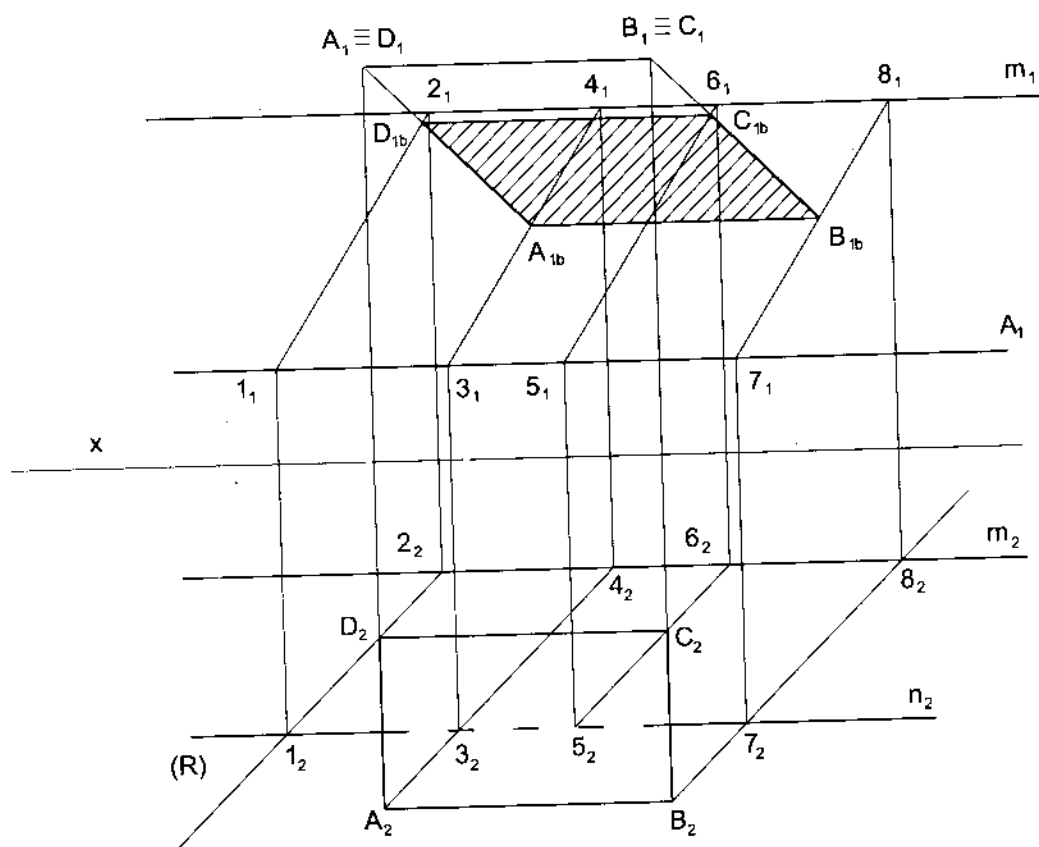


Hình 3.3(LG)

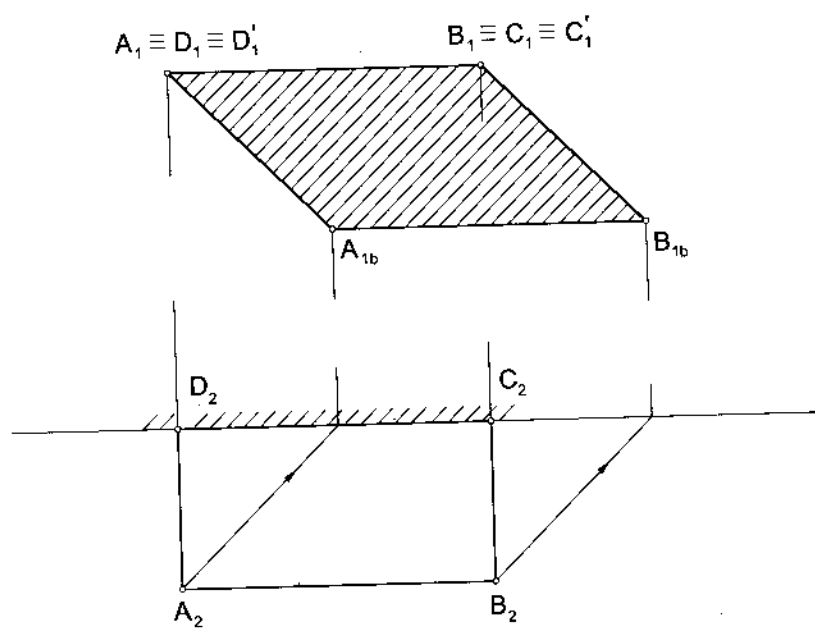




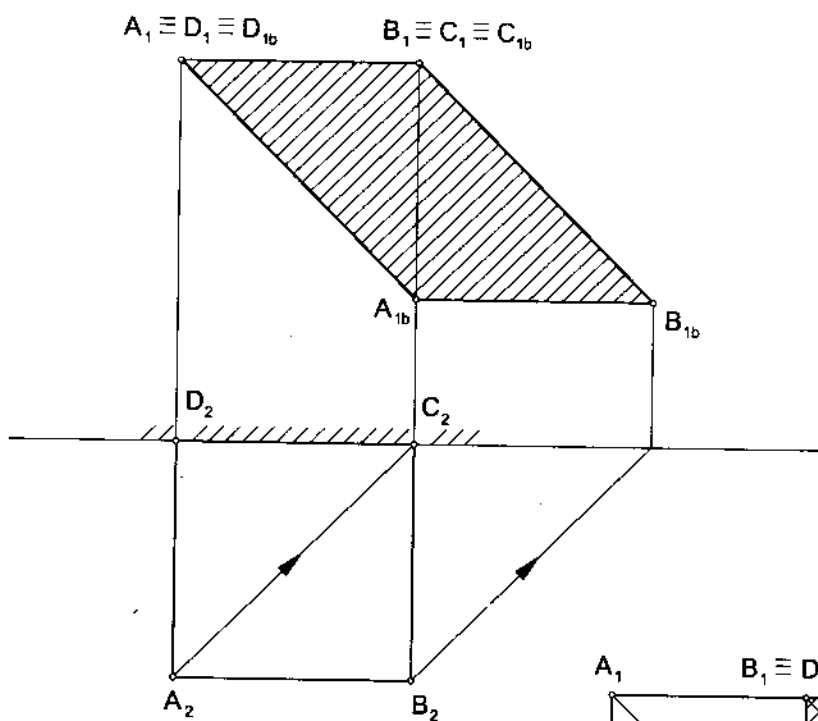
Hình 3.7(LG)



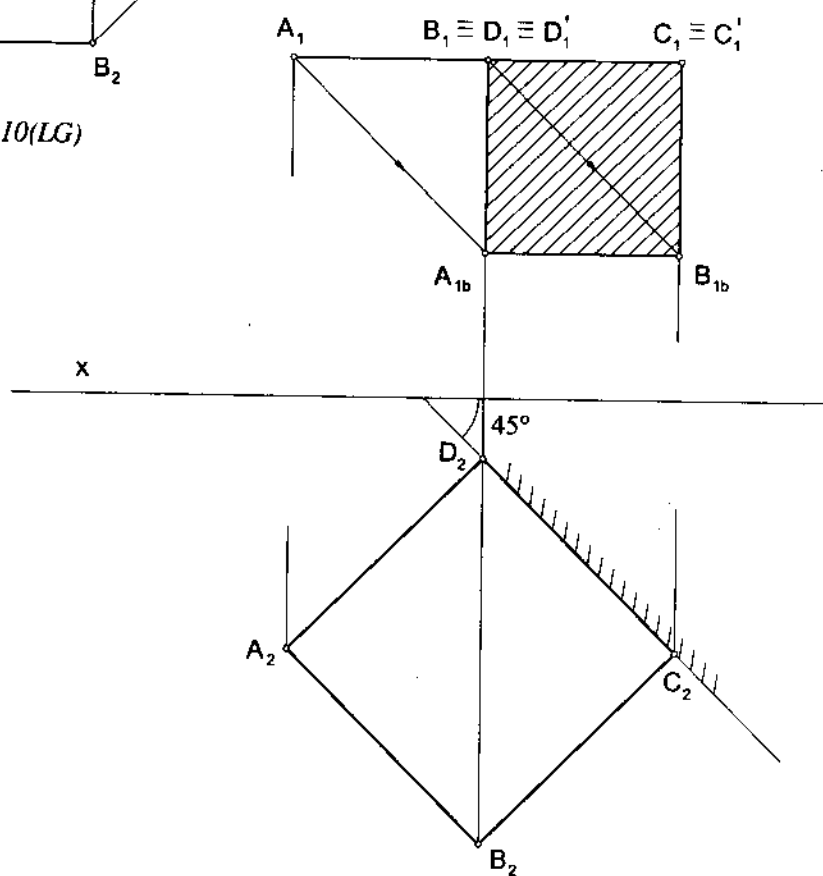
Hình 3.8(LG)



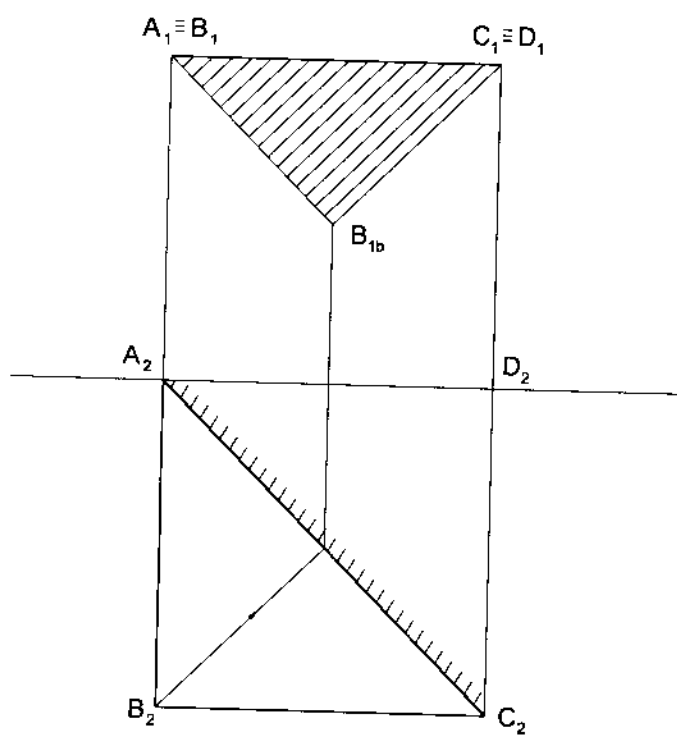
Hình 3.9(LG)



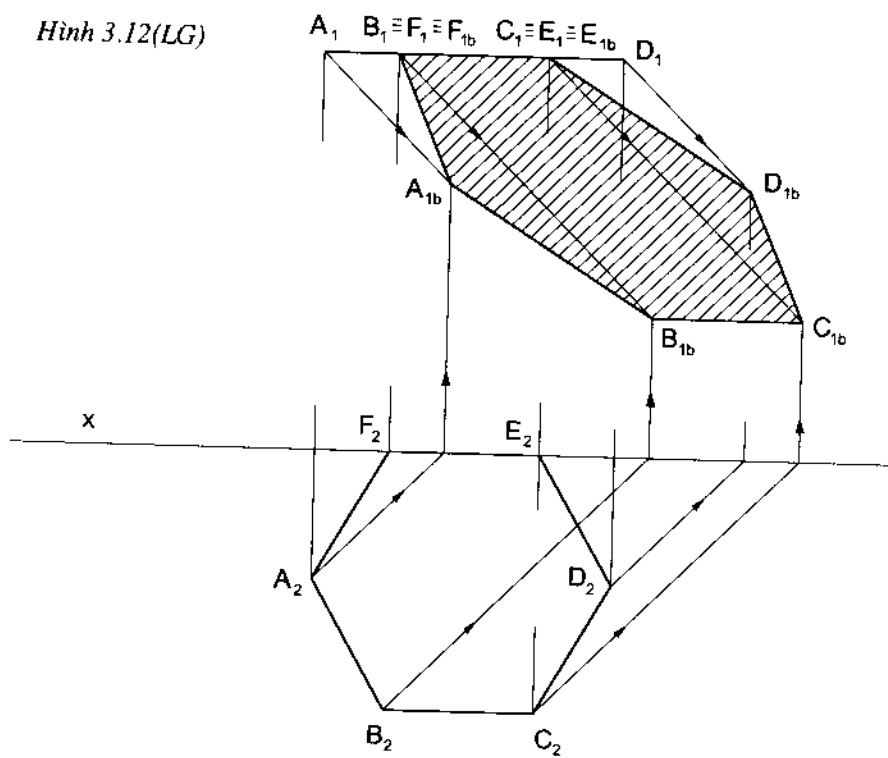
Hình 3.10(LG)



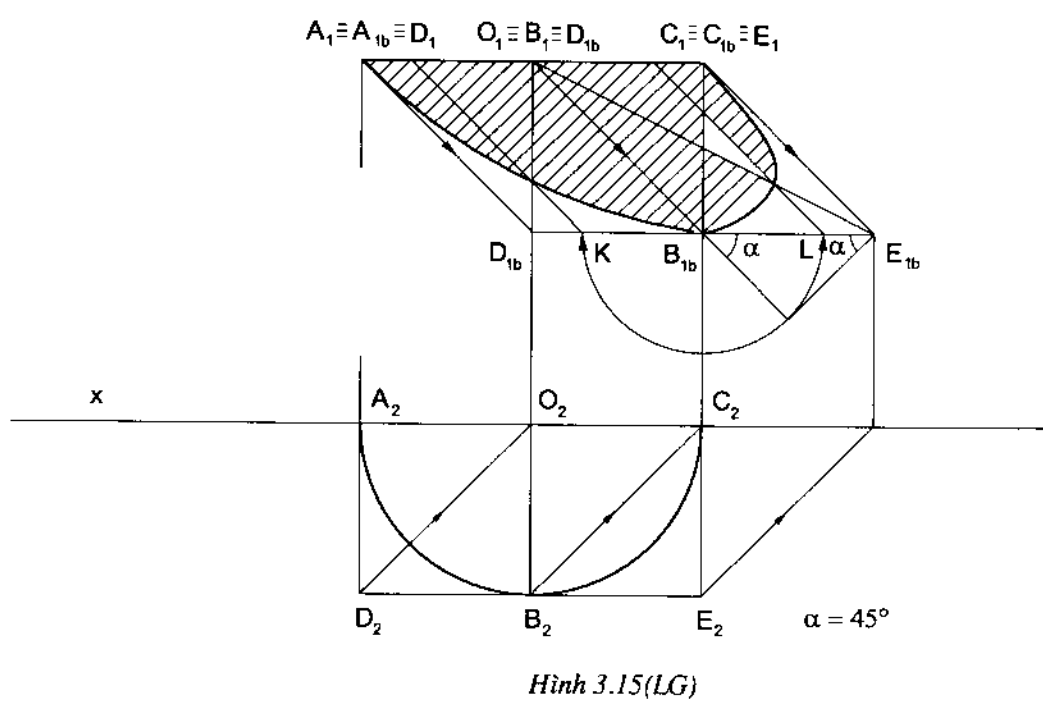
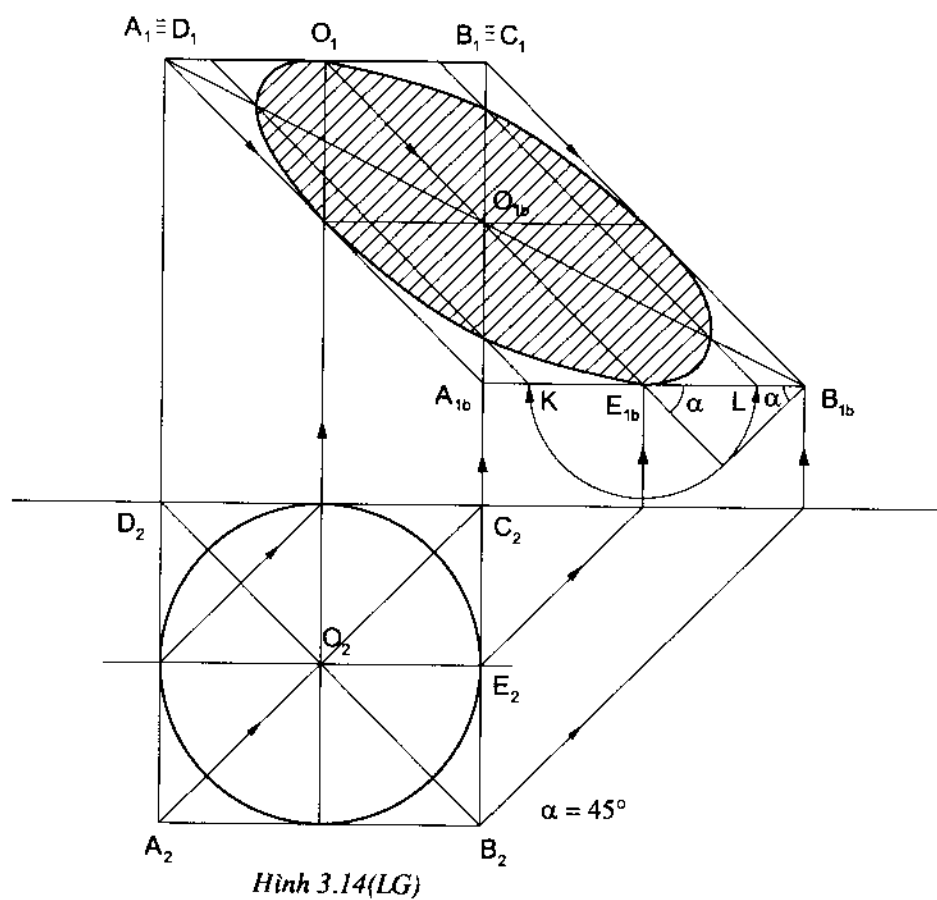
Hình 3.11(LG)

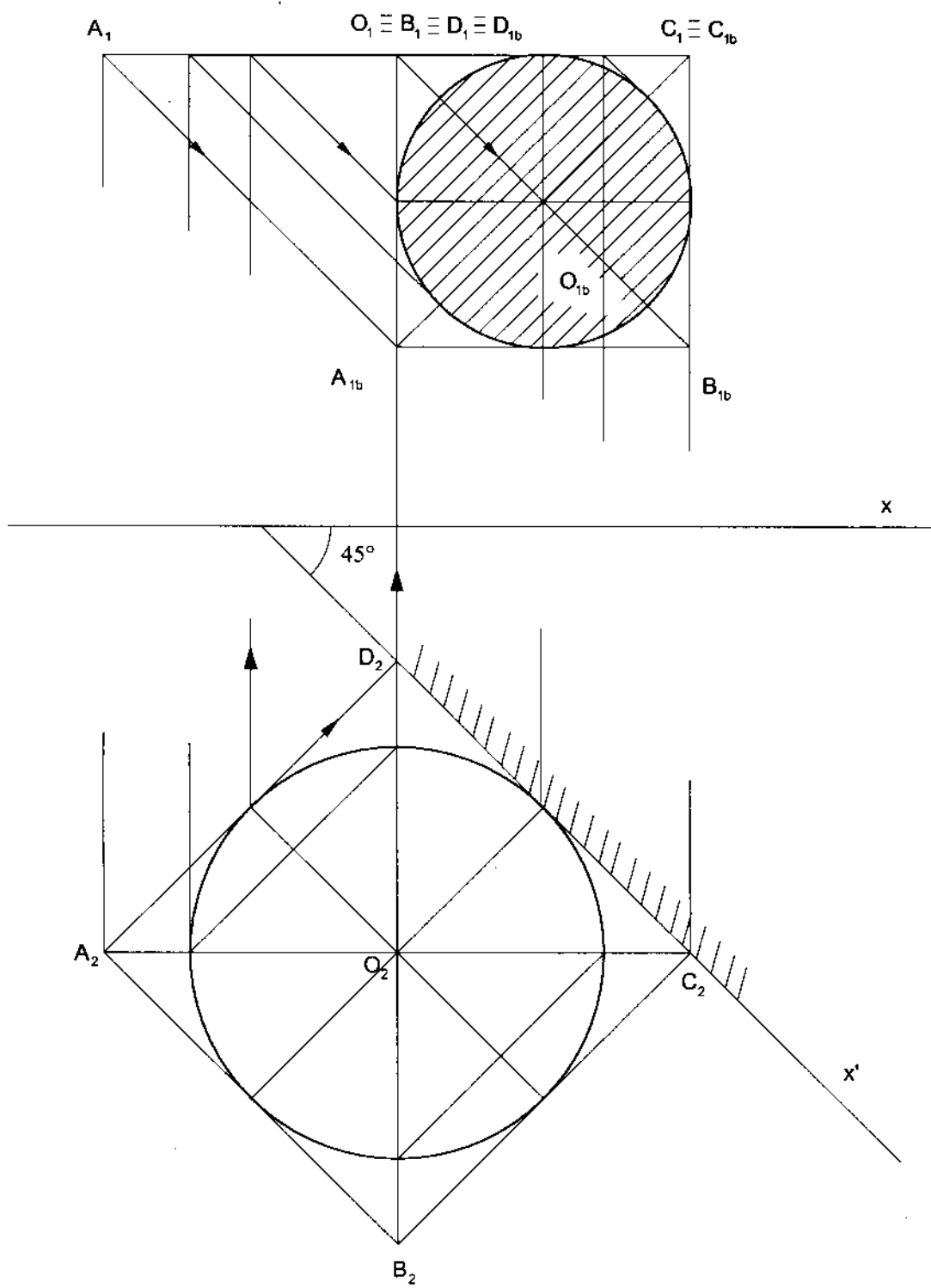


Hình 3.12(LG)

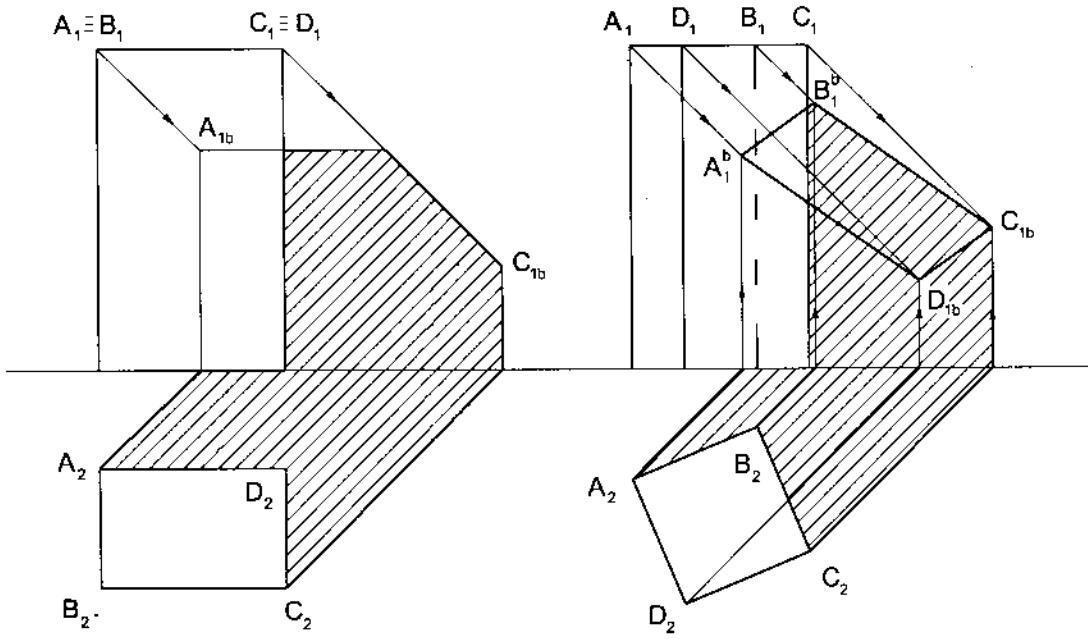


Hình 3.13(LG)



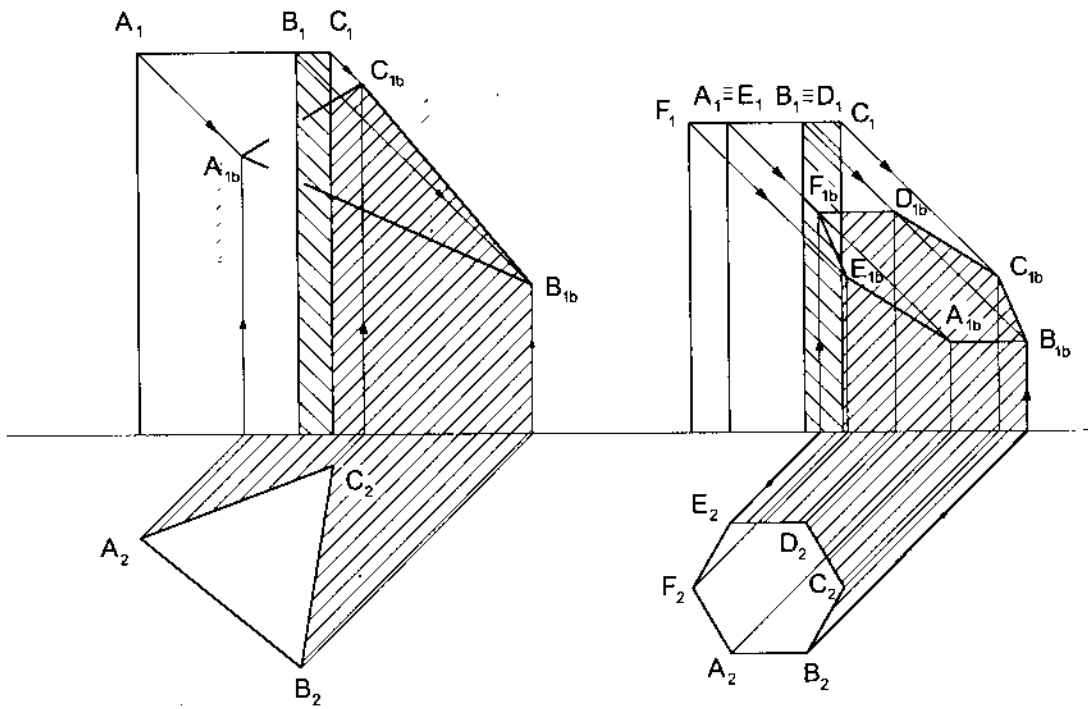


Hình 3.16(LG)



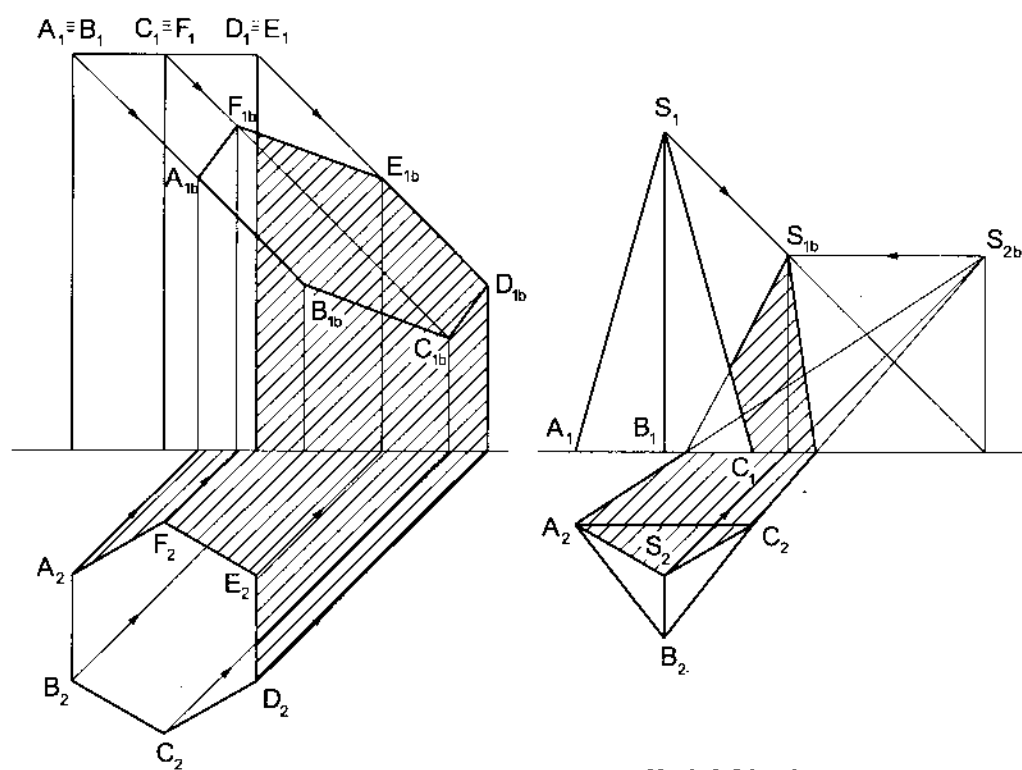
Hình 3.17a(LG)

Hình 3.17b(LG)



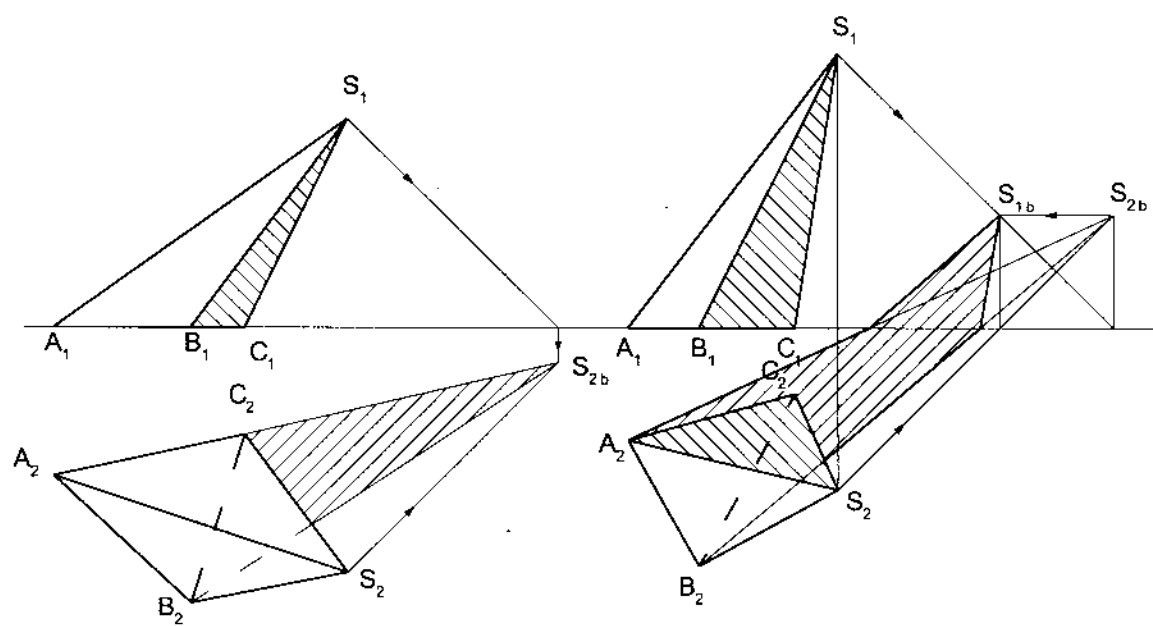
Hình 3.18(LG)

Hình 3.19(LG)



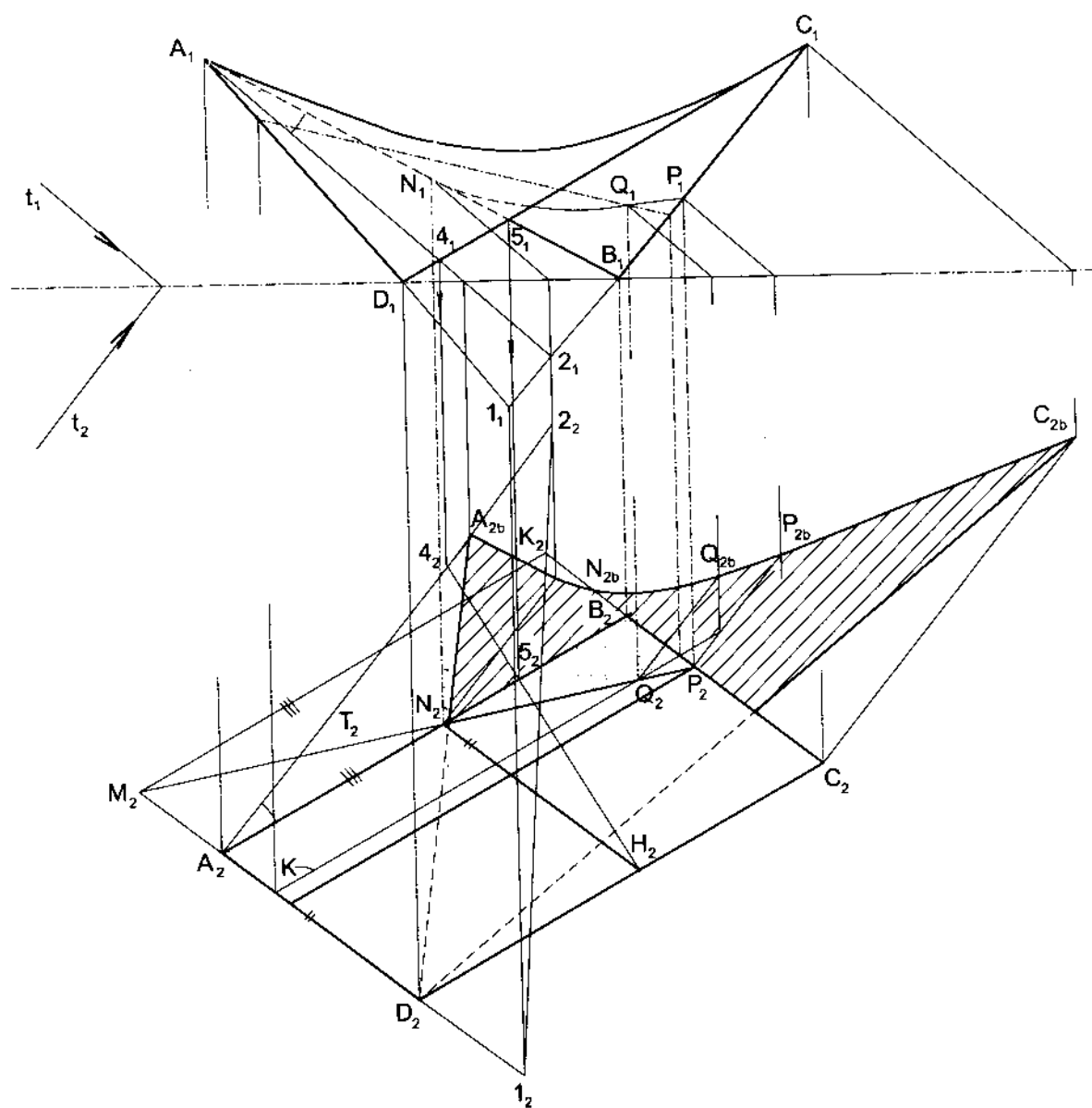
Hình 3.20(LG)

Hình 3.21(LG)

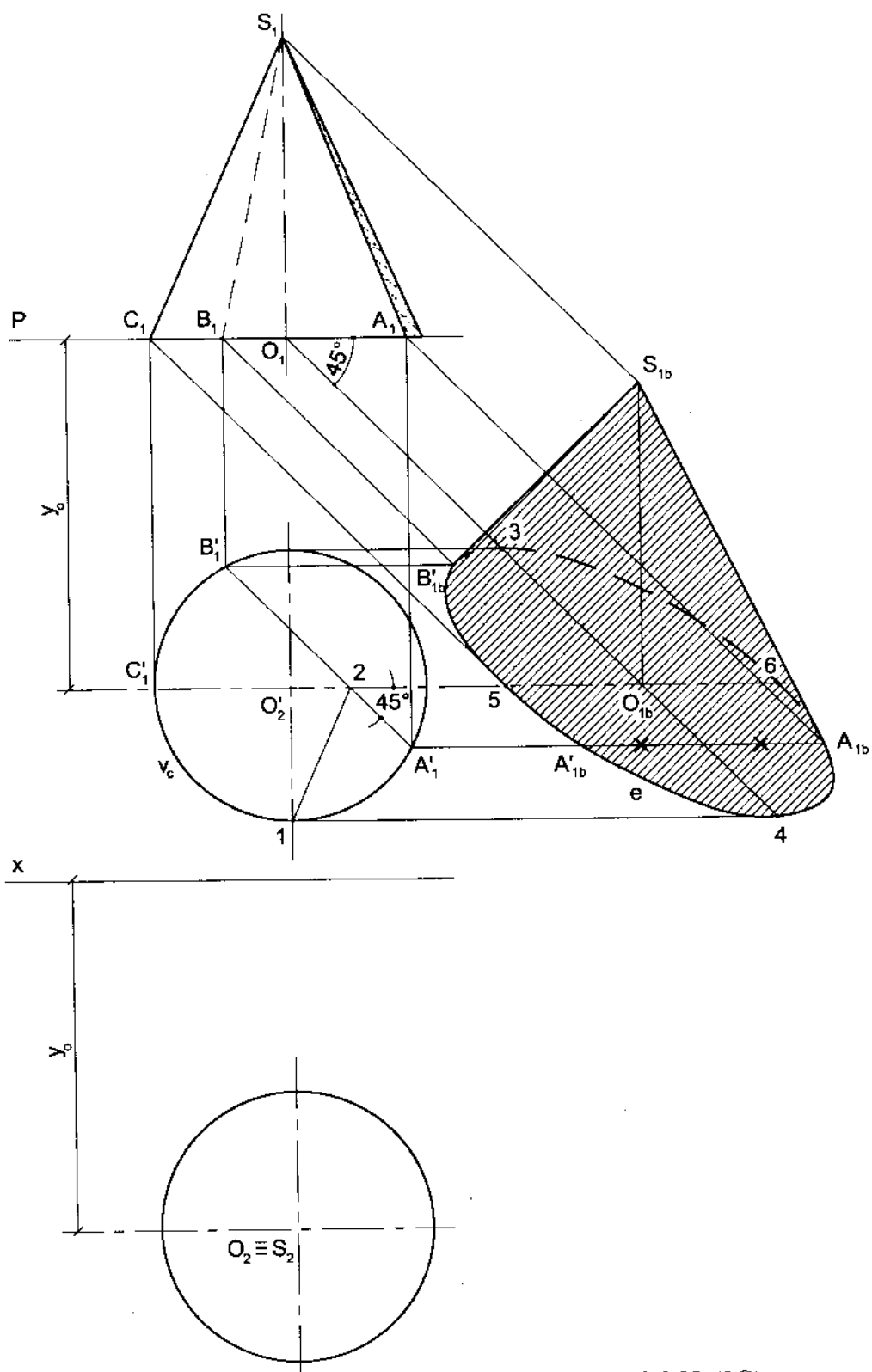


Hình 3.22(LG)

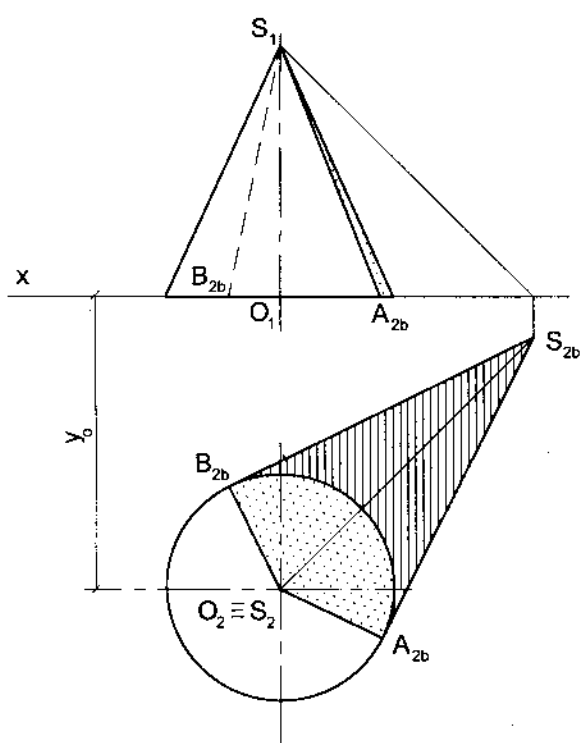
Hình 3.23(LG)



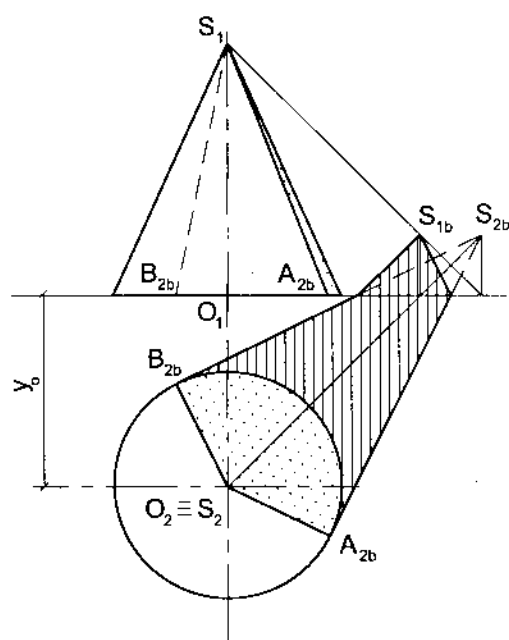
Hình 3.24a(LG)



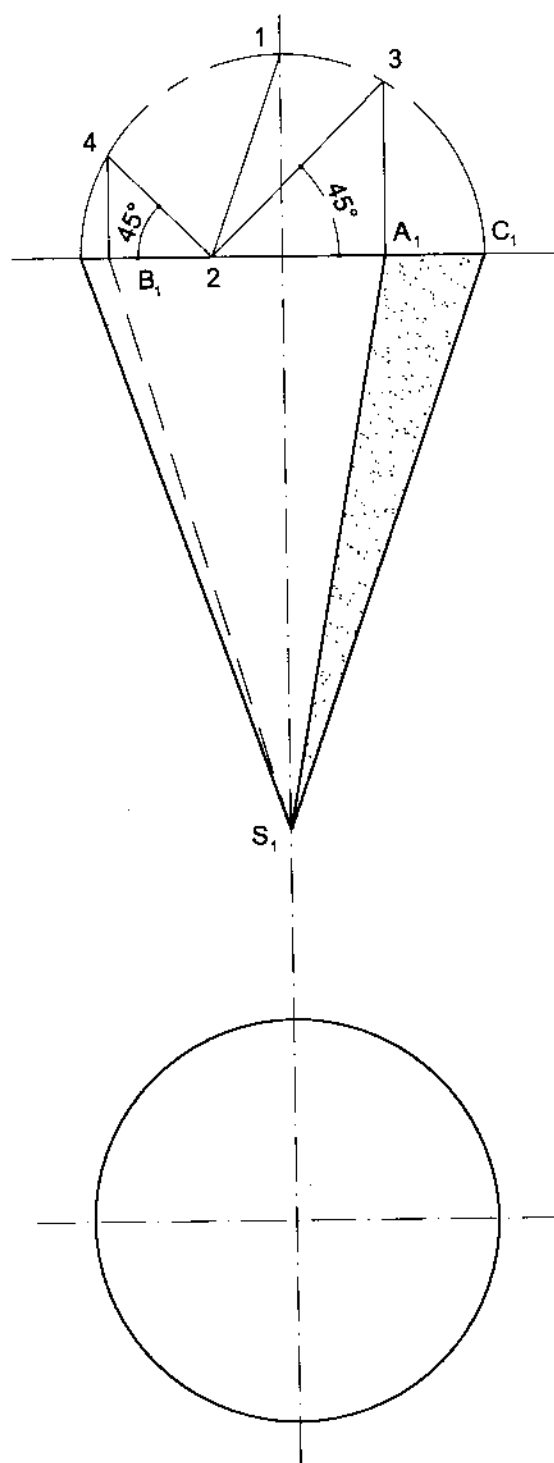
Hình 3.25a(LG)



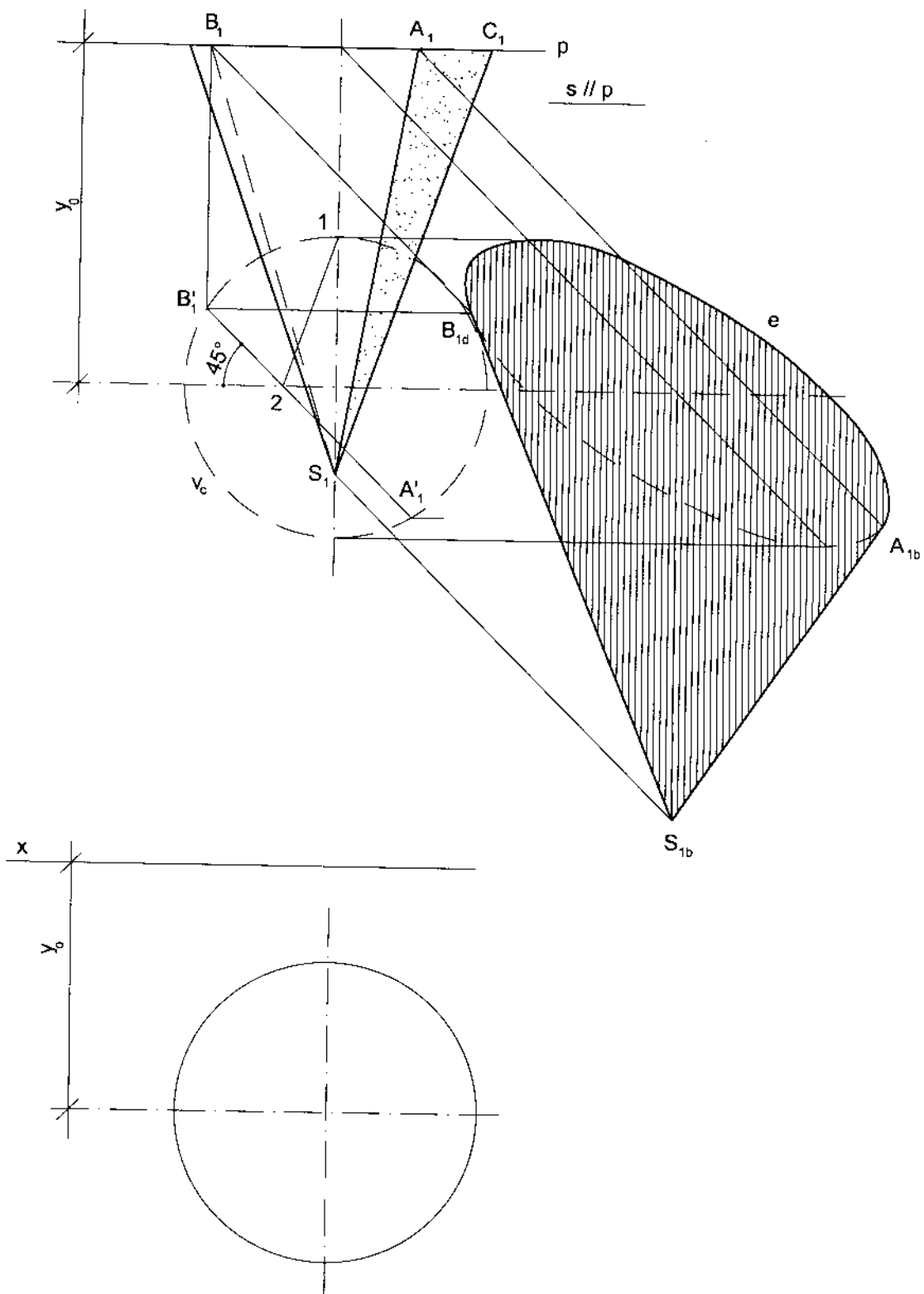
Hình 3.25b(LG)



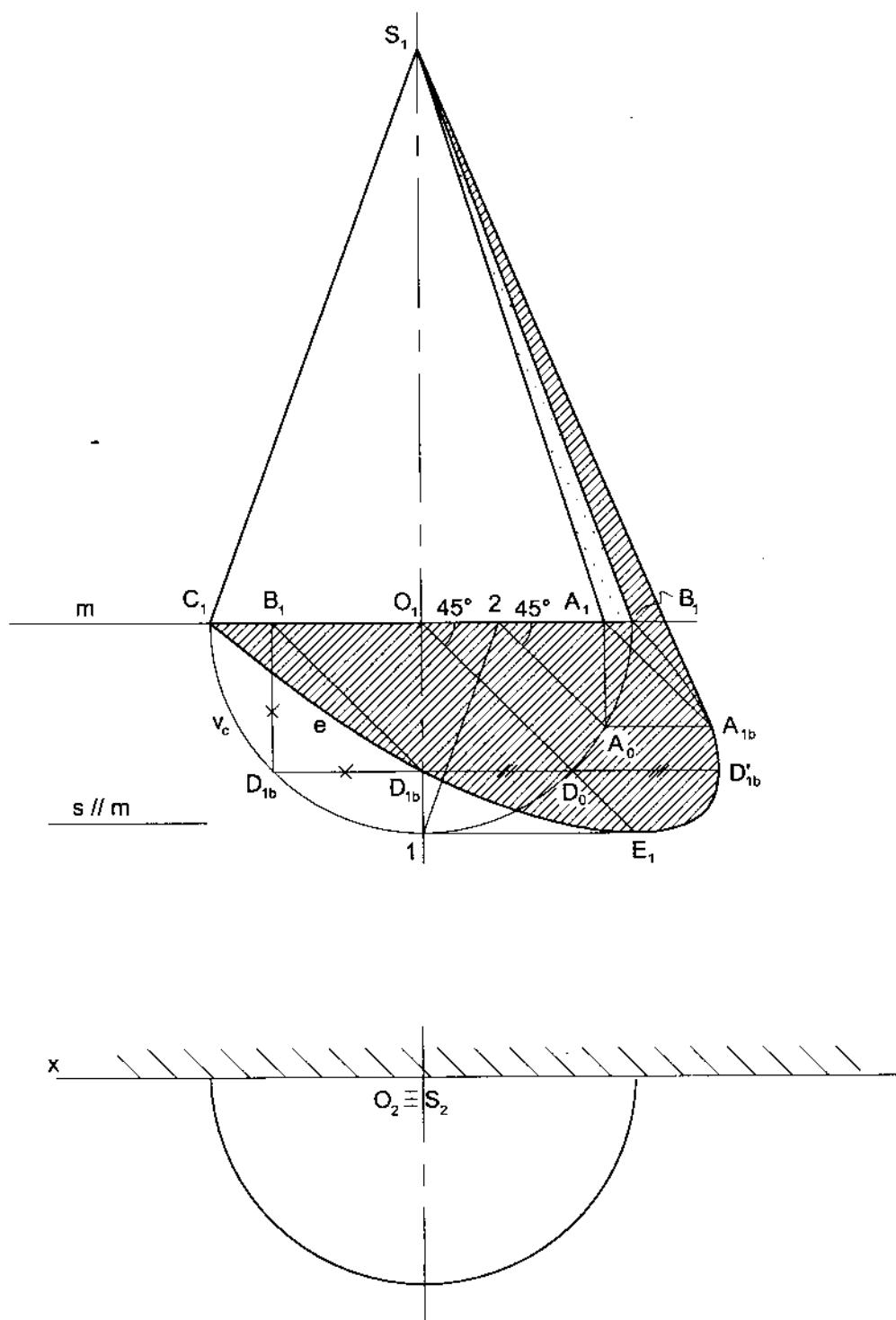
Hình 3.25c(LG)



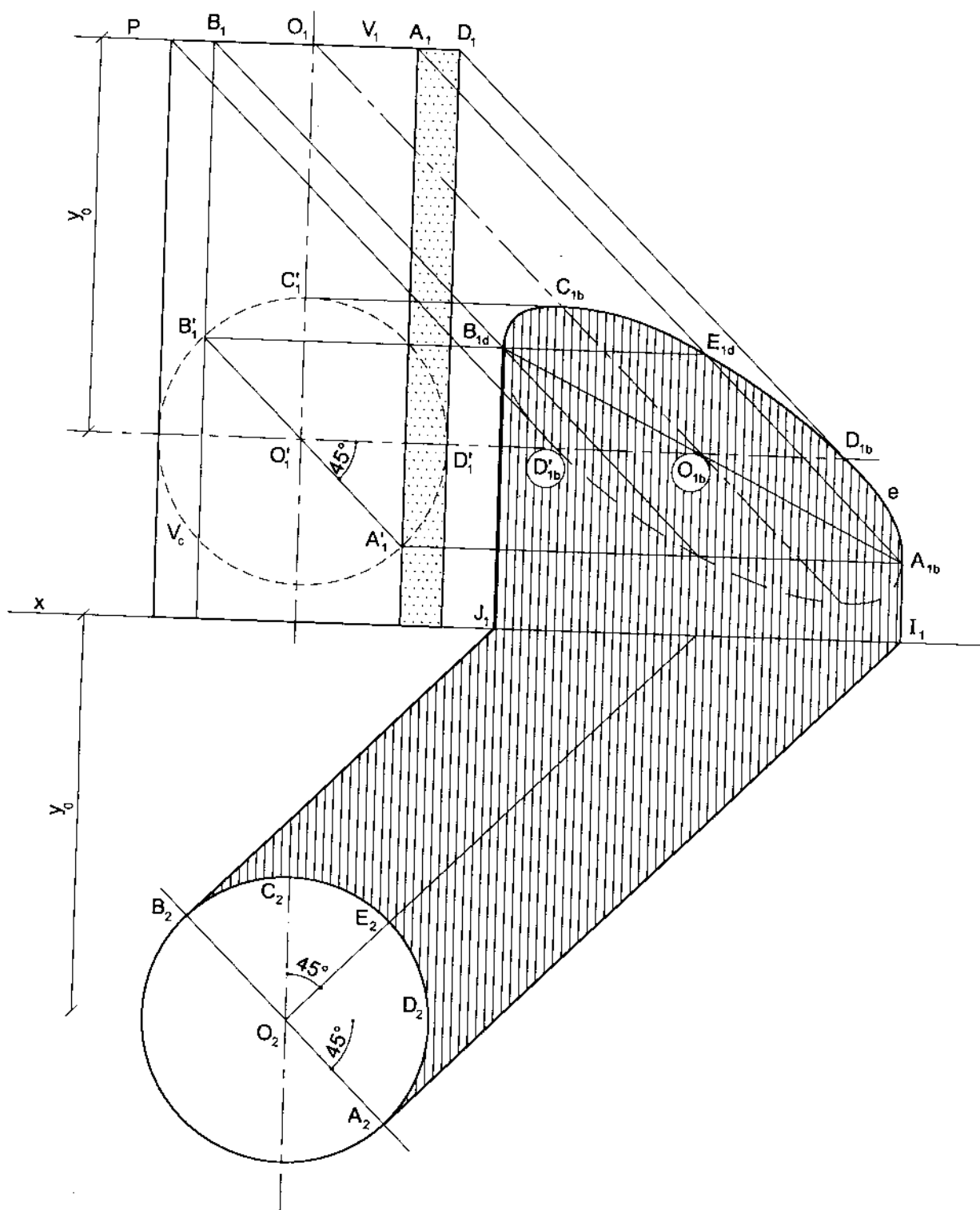
Hình 3.26(LG)



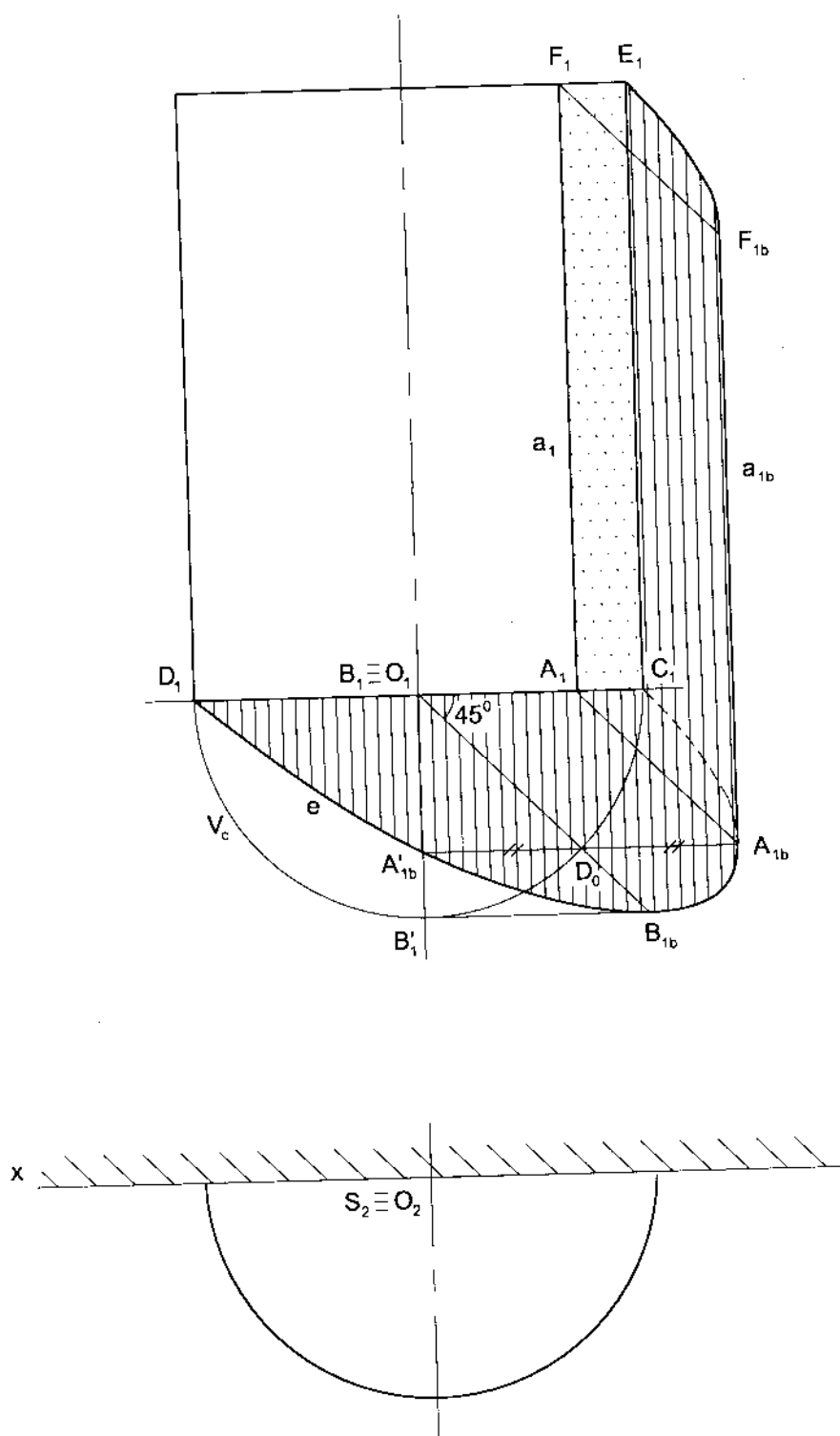
Hình 3.27(LG)



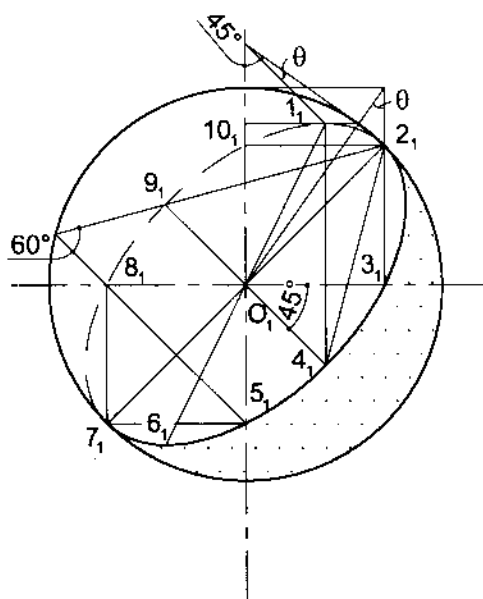
Hình 3.28(LG)



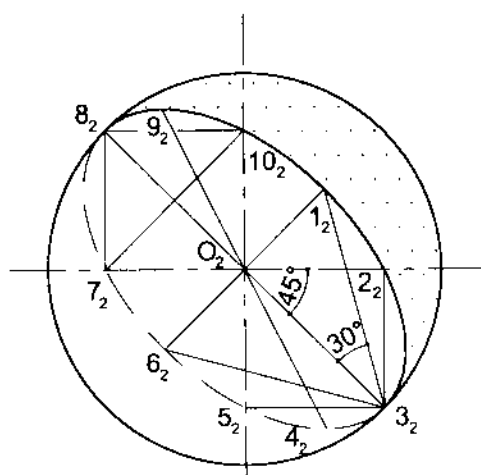
Hình 3.29(LG)



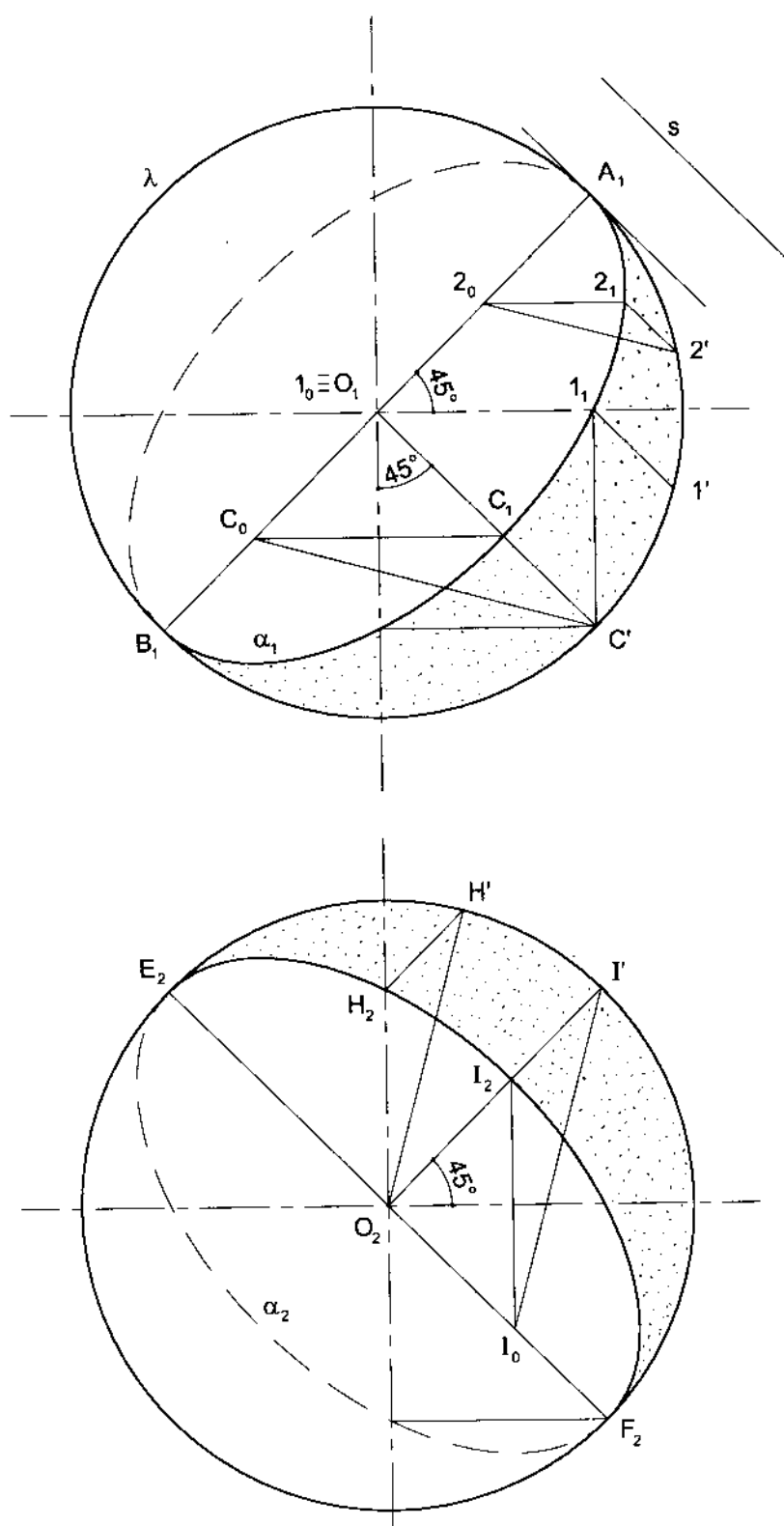
Hình 3.30(LG)



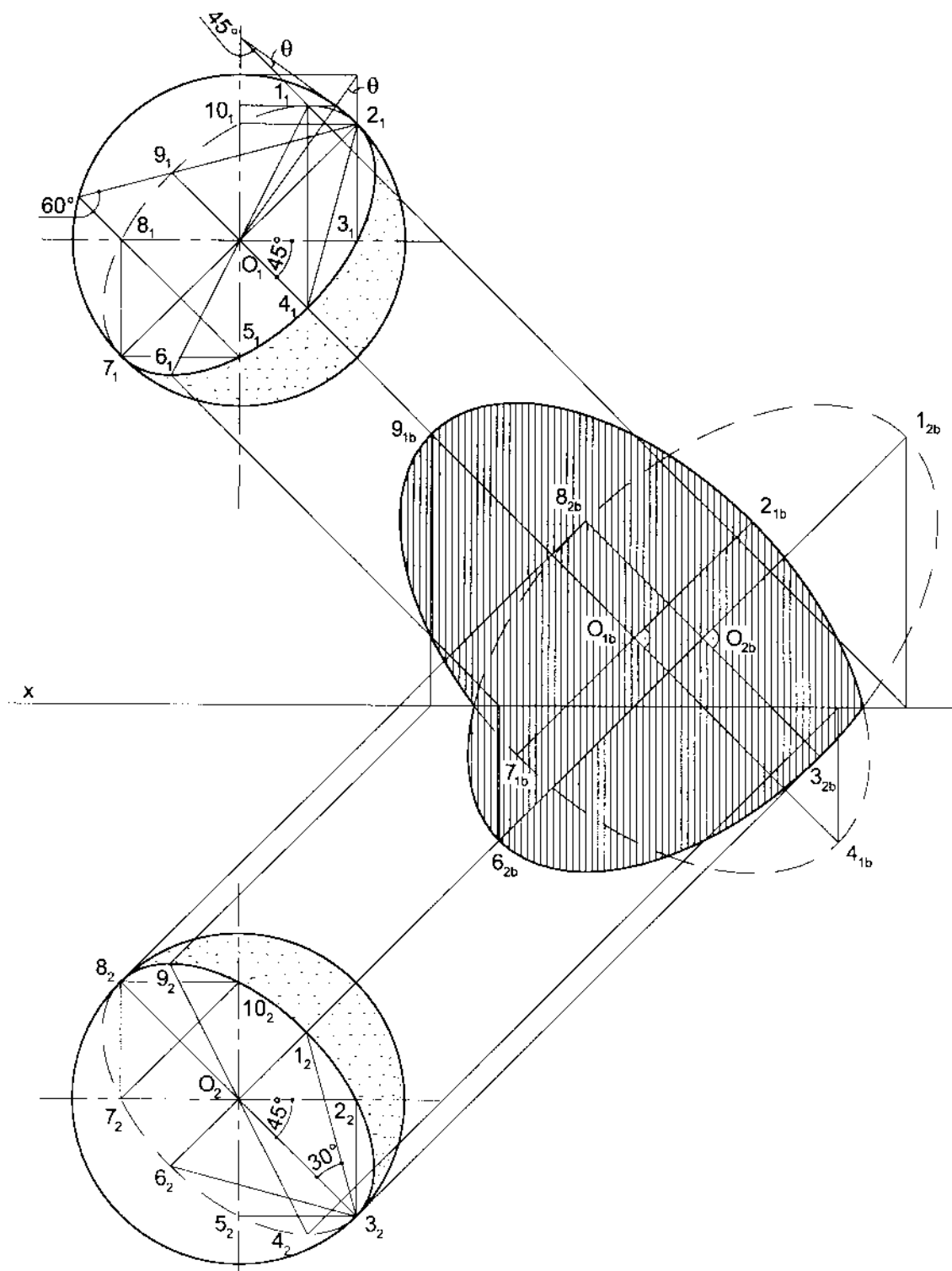
x



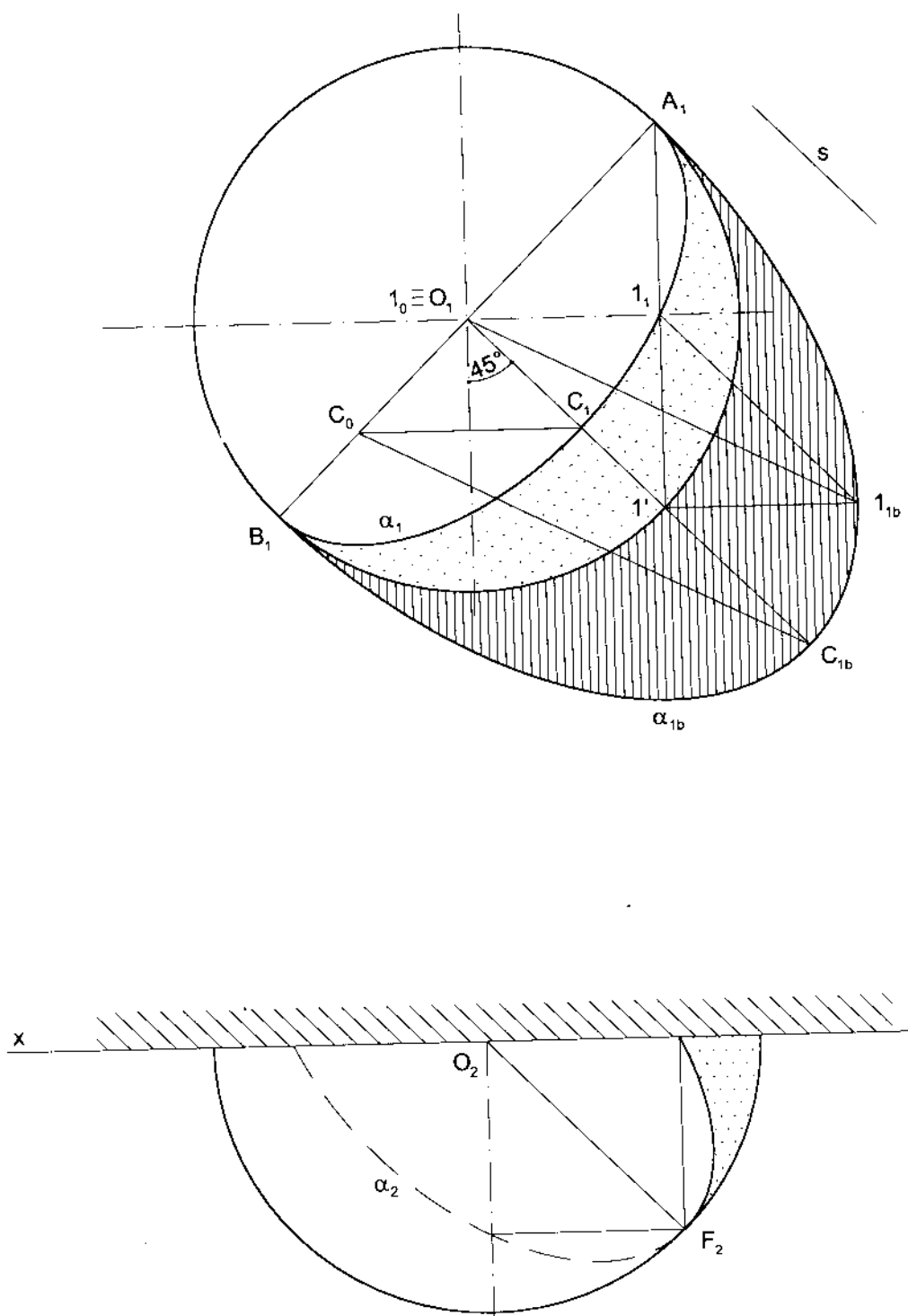
Hình 3.31a(LG)



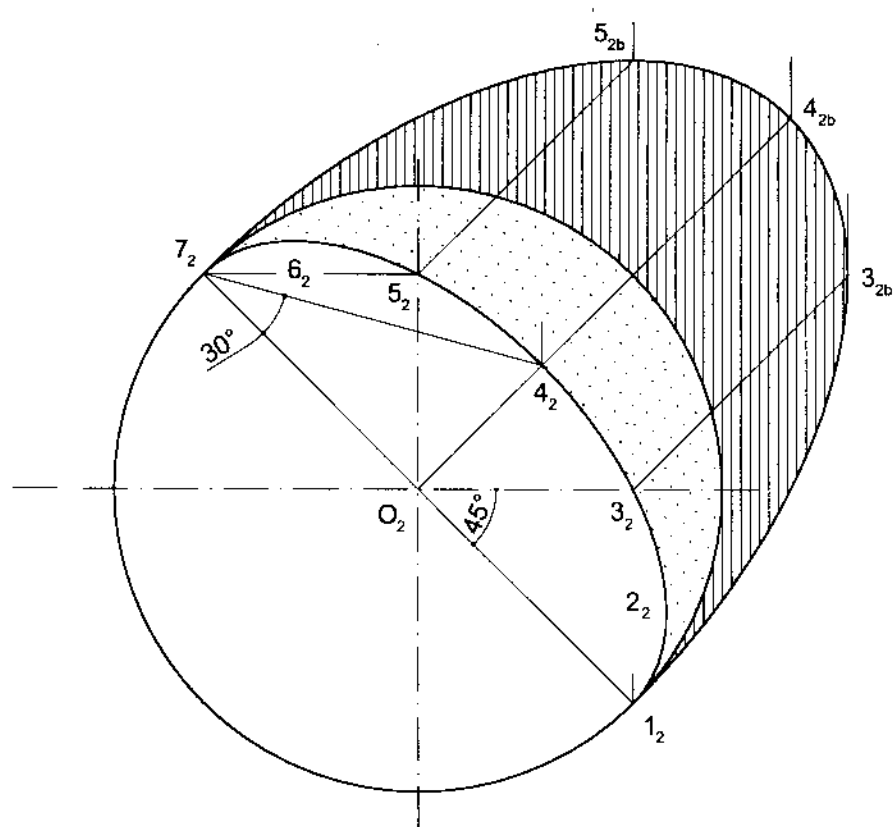
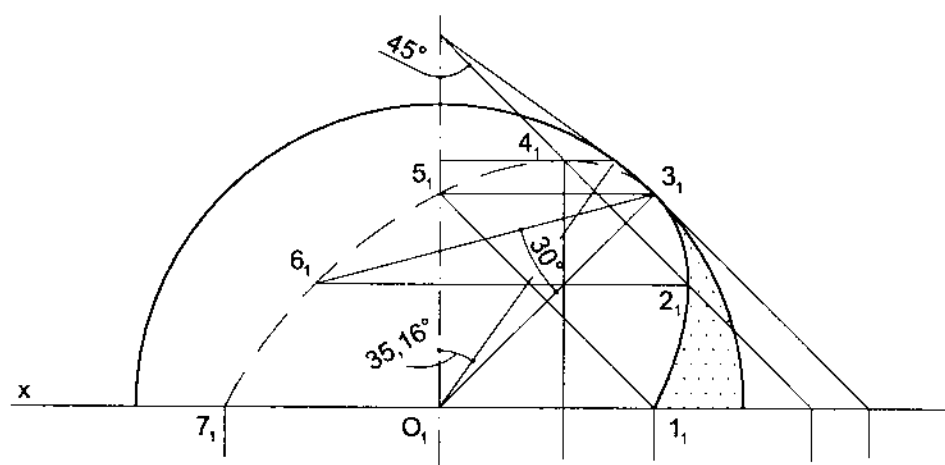
Hình 3.31b(LG)



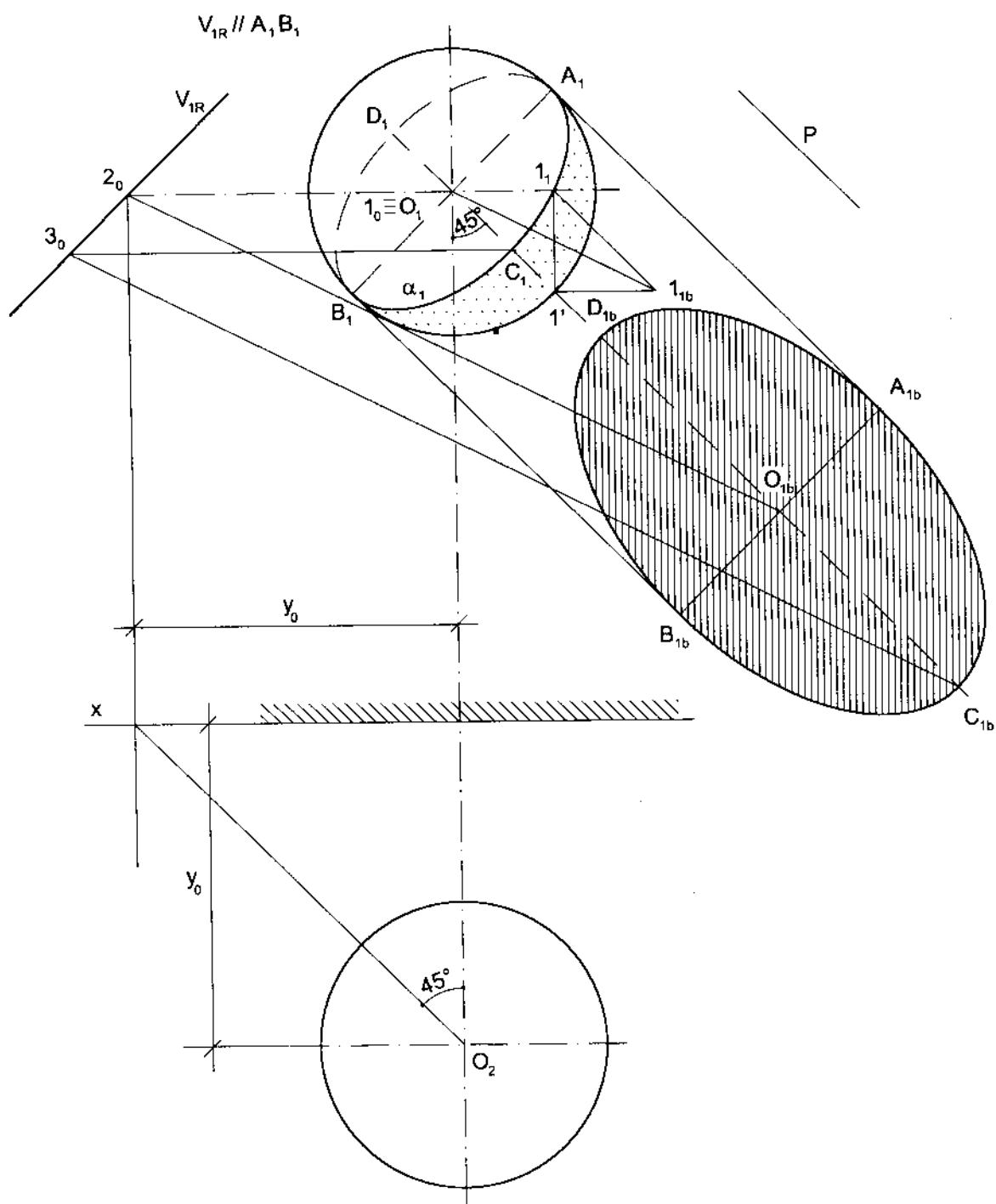
Hình 3.31c(LG)



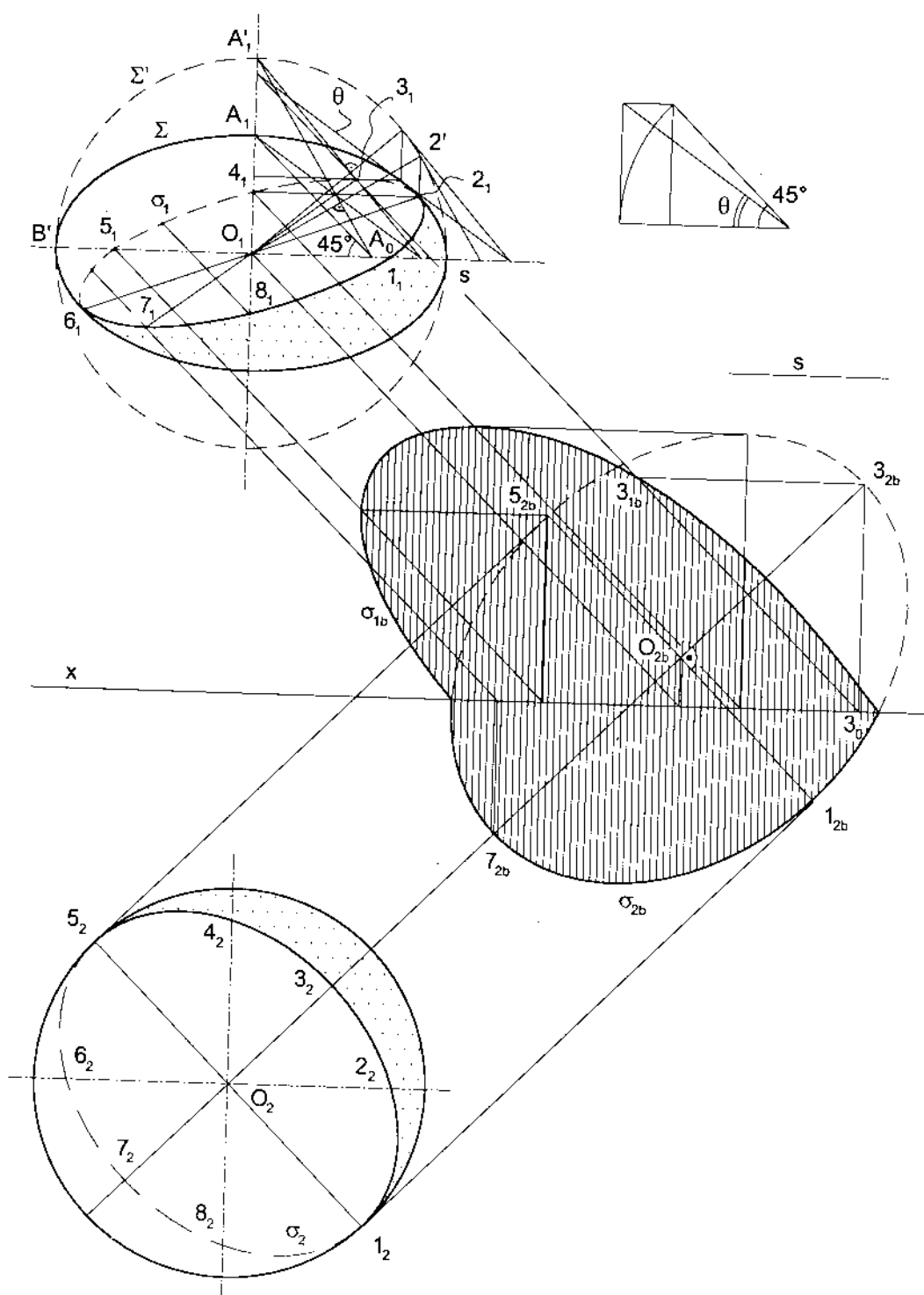
Hình 3.32a(LG)



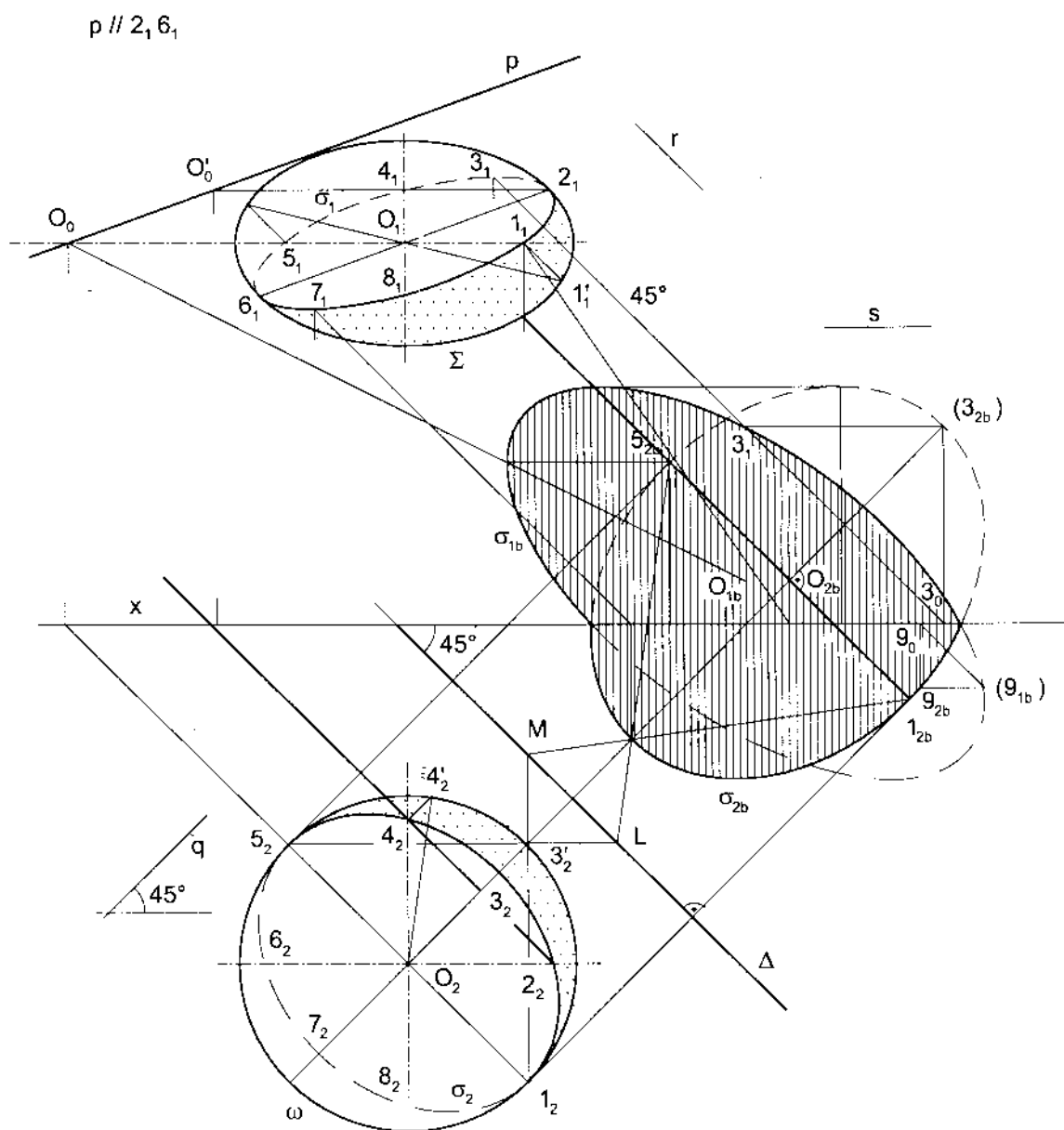
Hình 3.32b(LG)



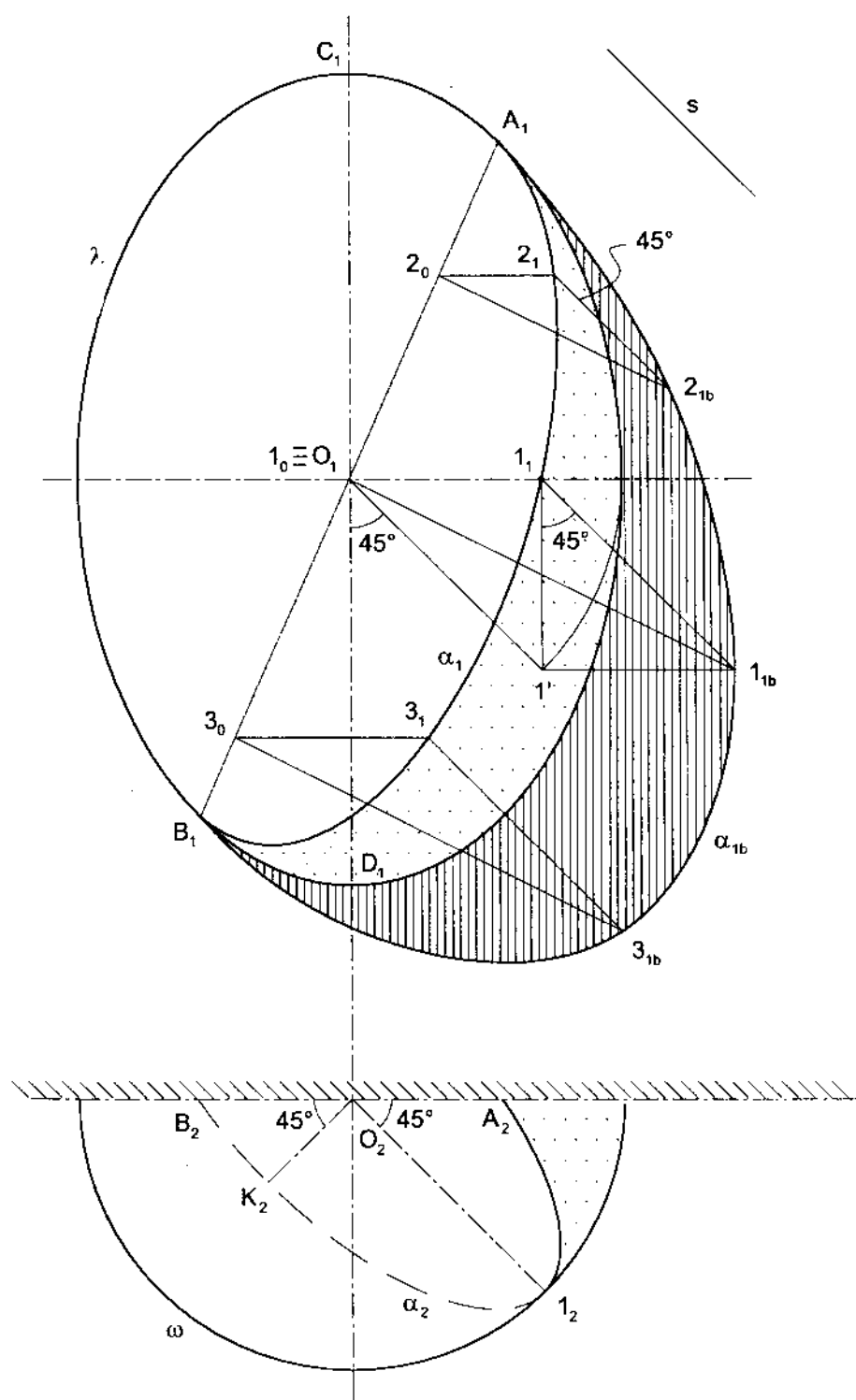
Hình 3.32c(LG)



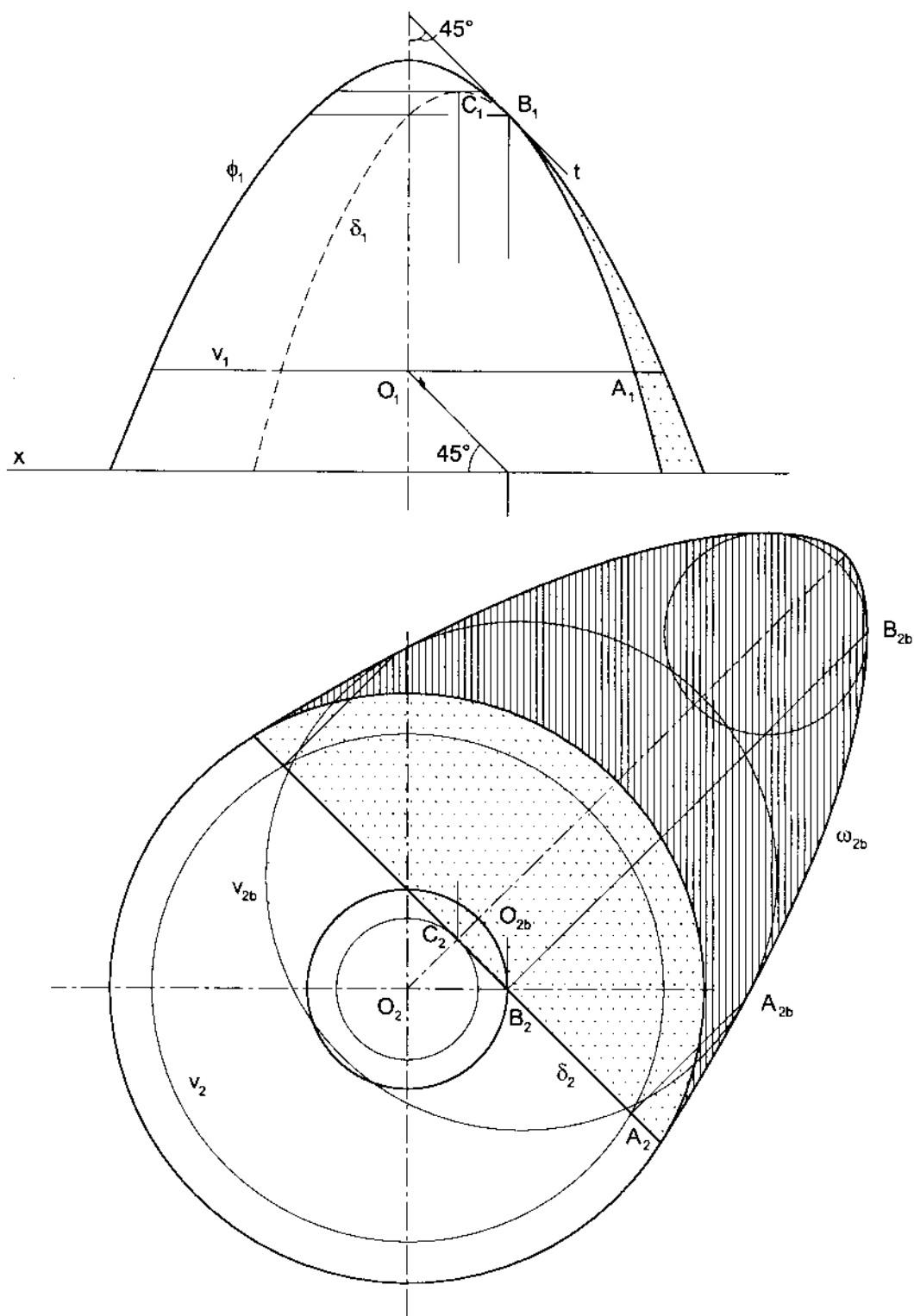
Hình 3.33a(LG)



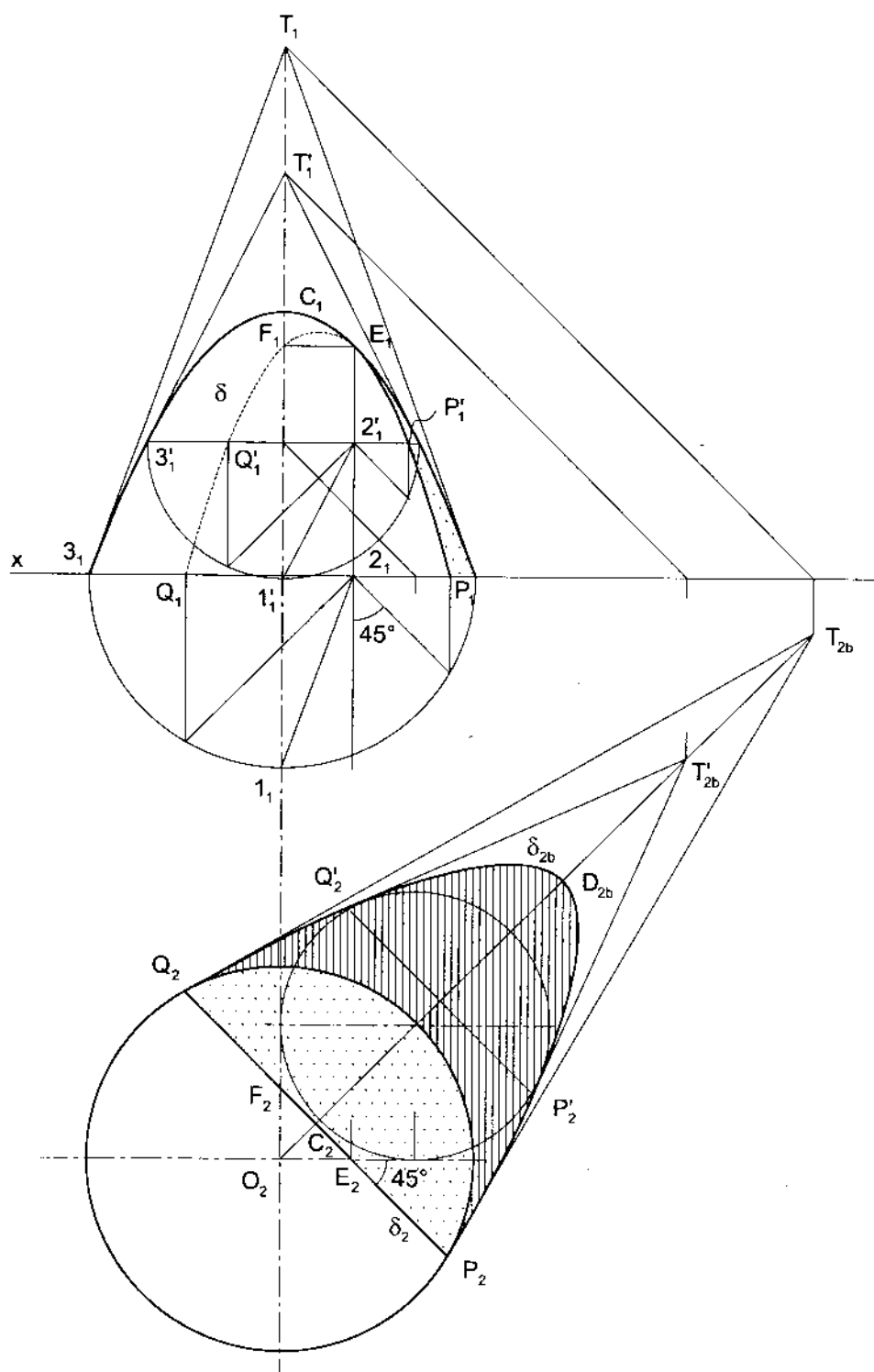
Hình 3.33b(LG)



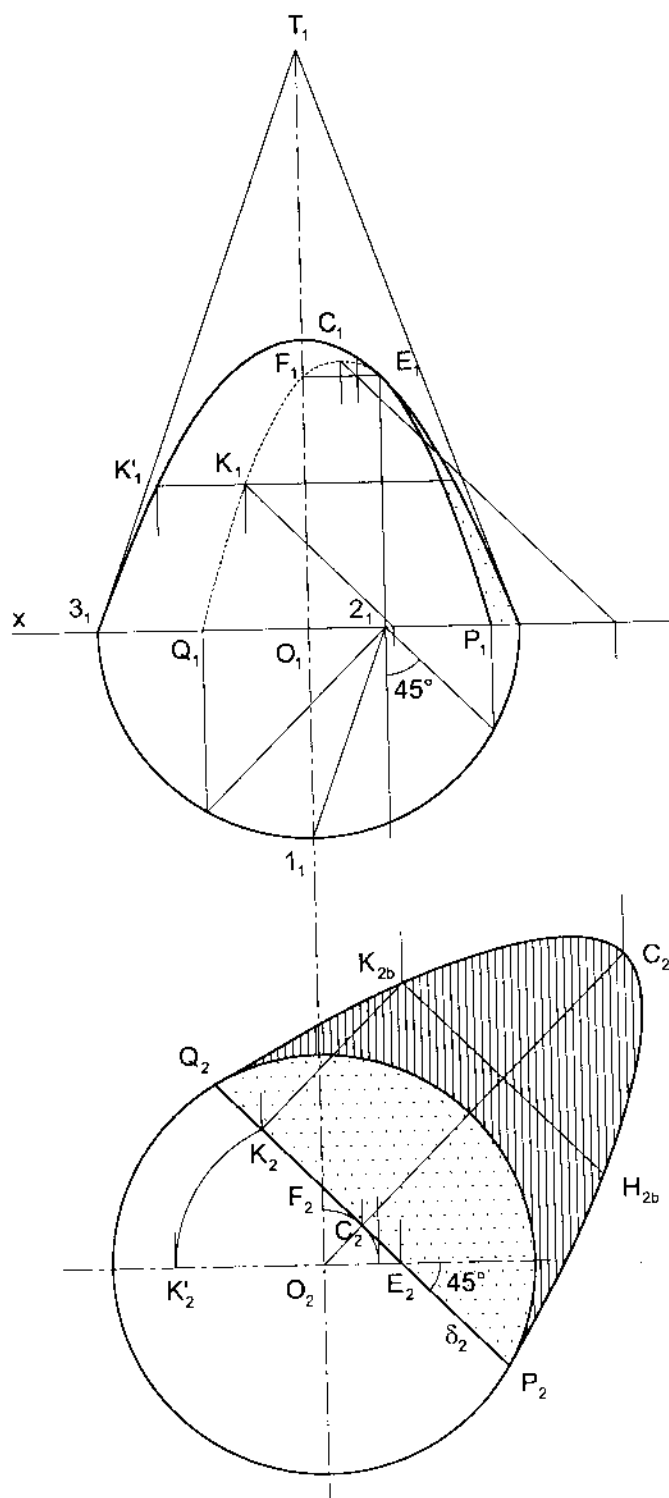
Hình 3.34(LG)



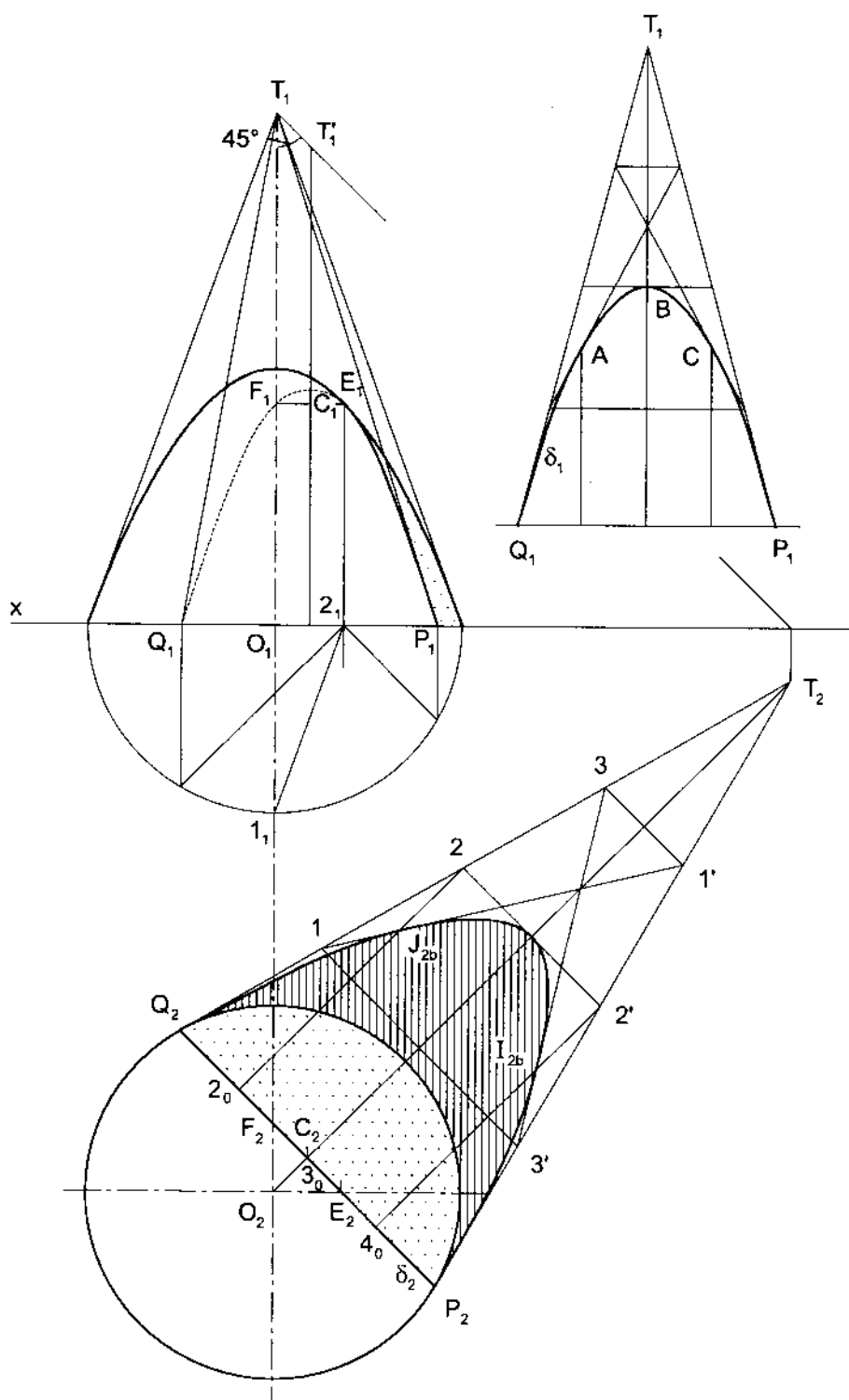
Hình 3.35a(LG)



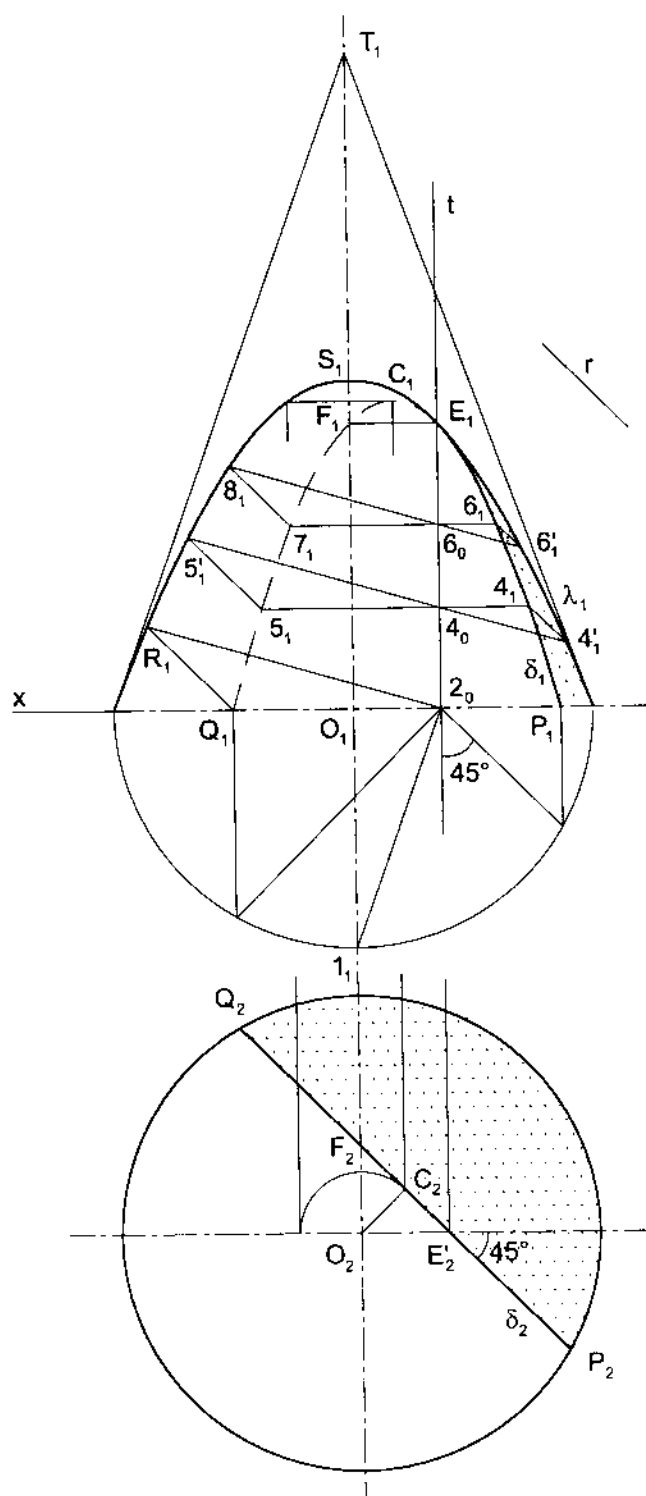
Hình 3.35b(LG)



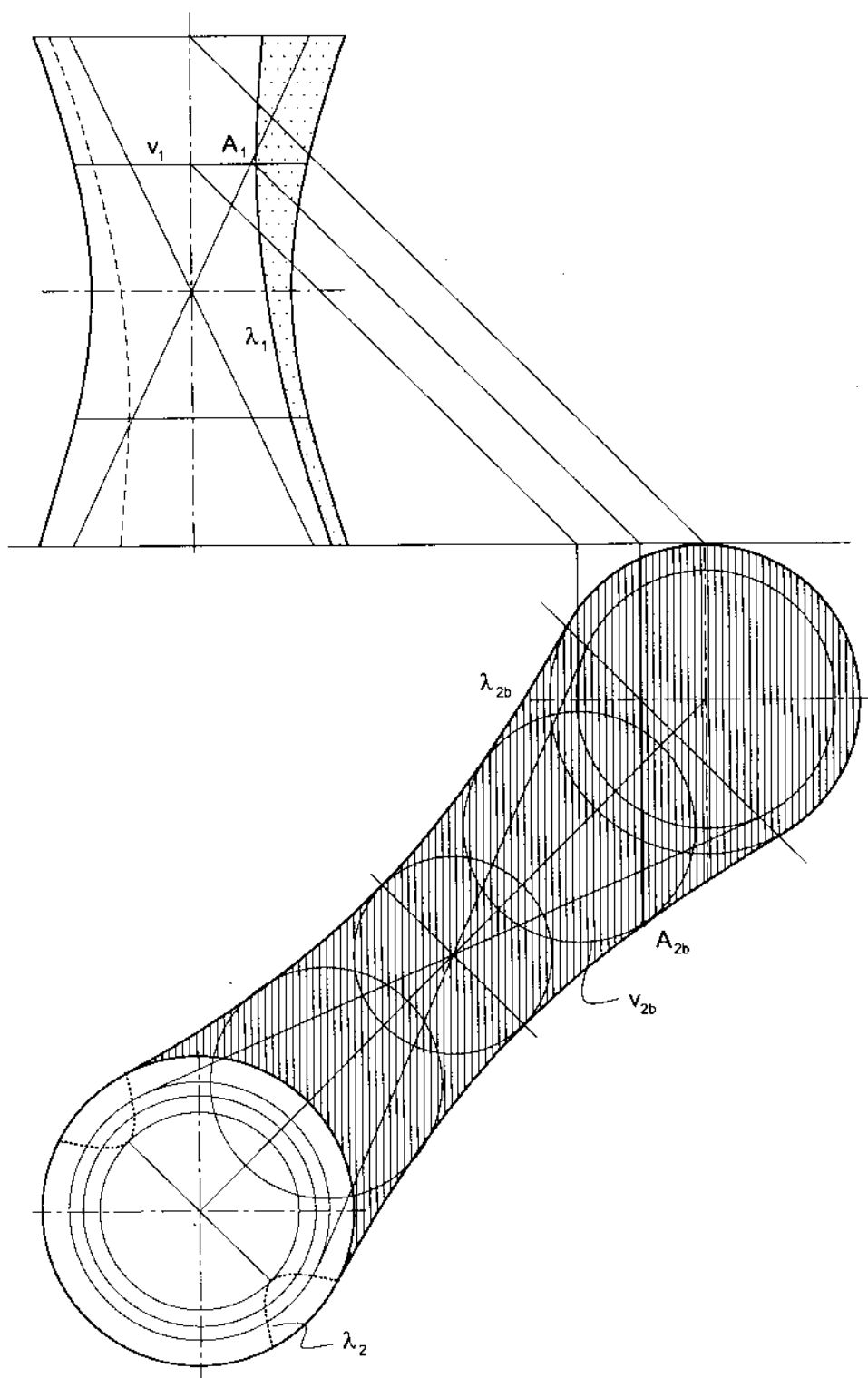
Hình 3.35c(LG)



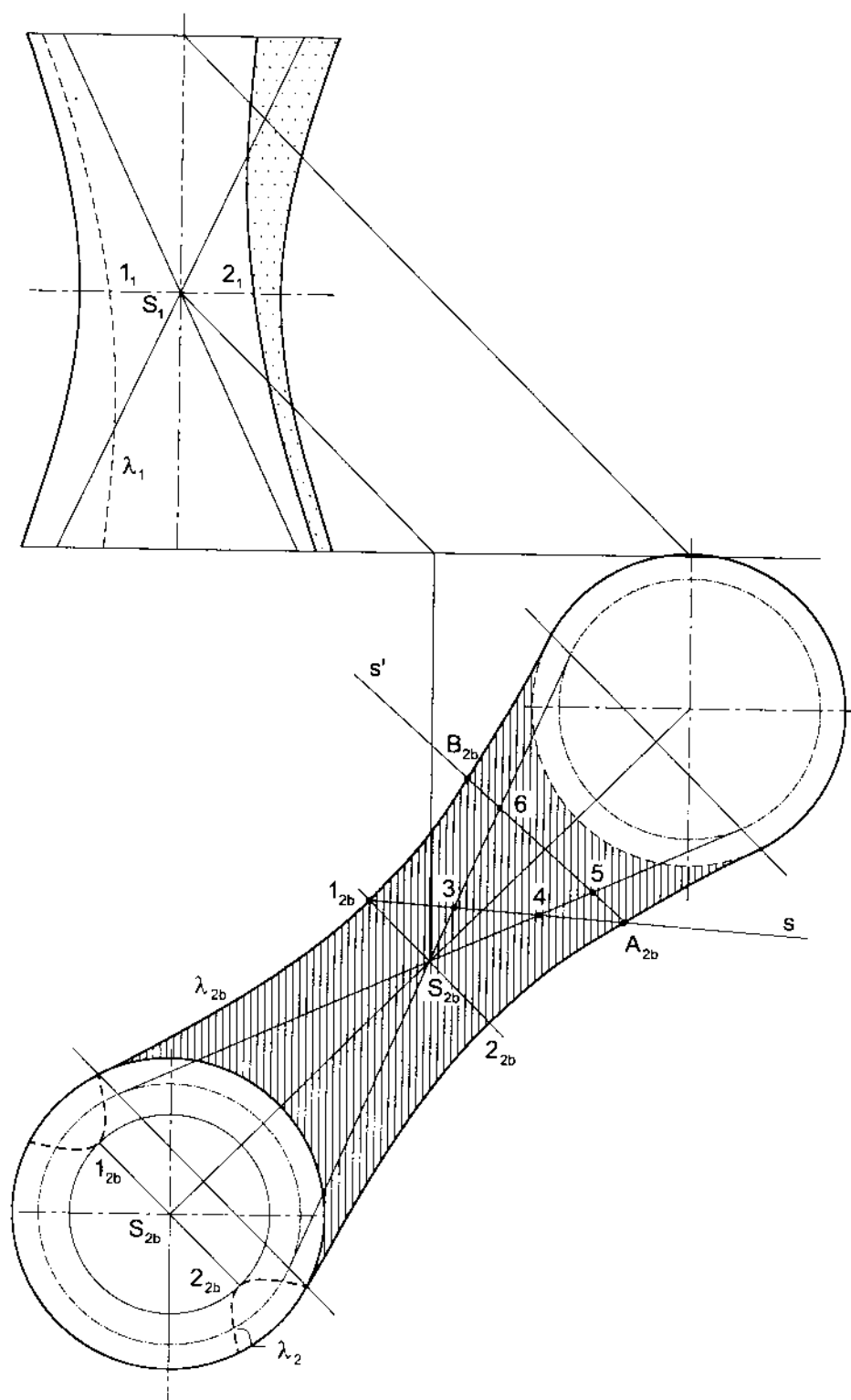
Hình 3.35d(LG)



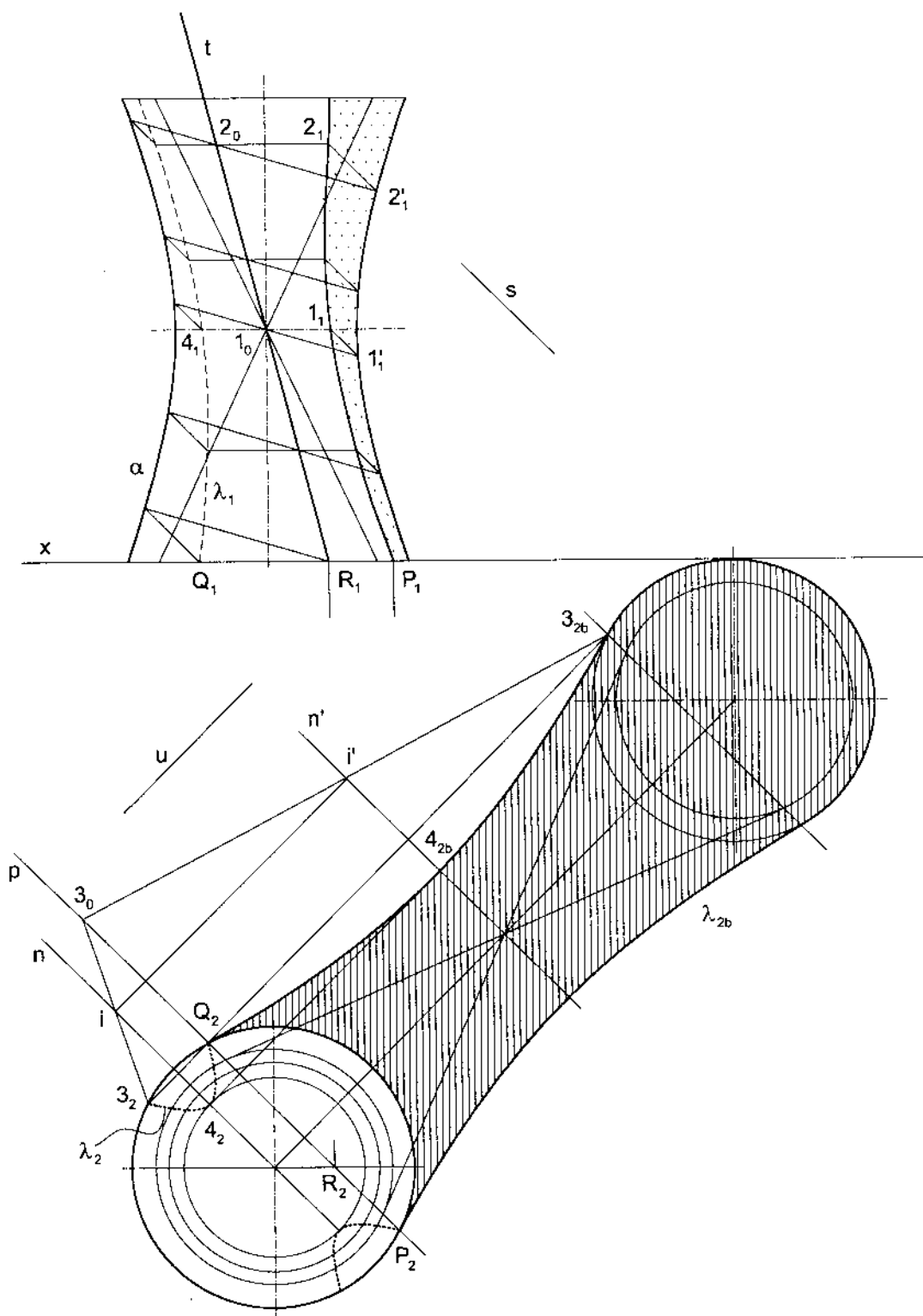
Hình 3.35e(LG)



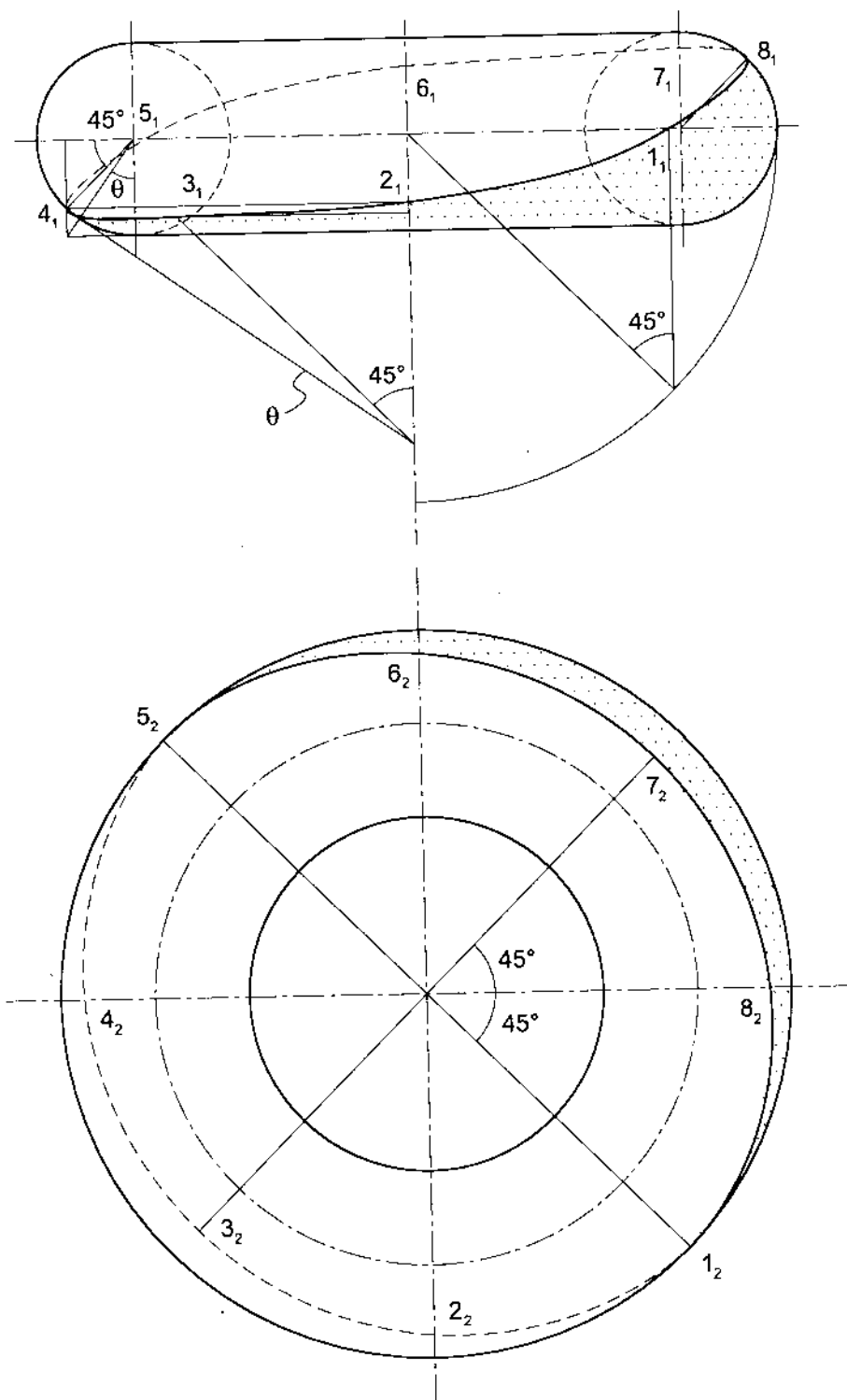
Hình 3.36a(LG)



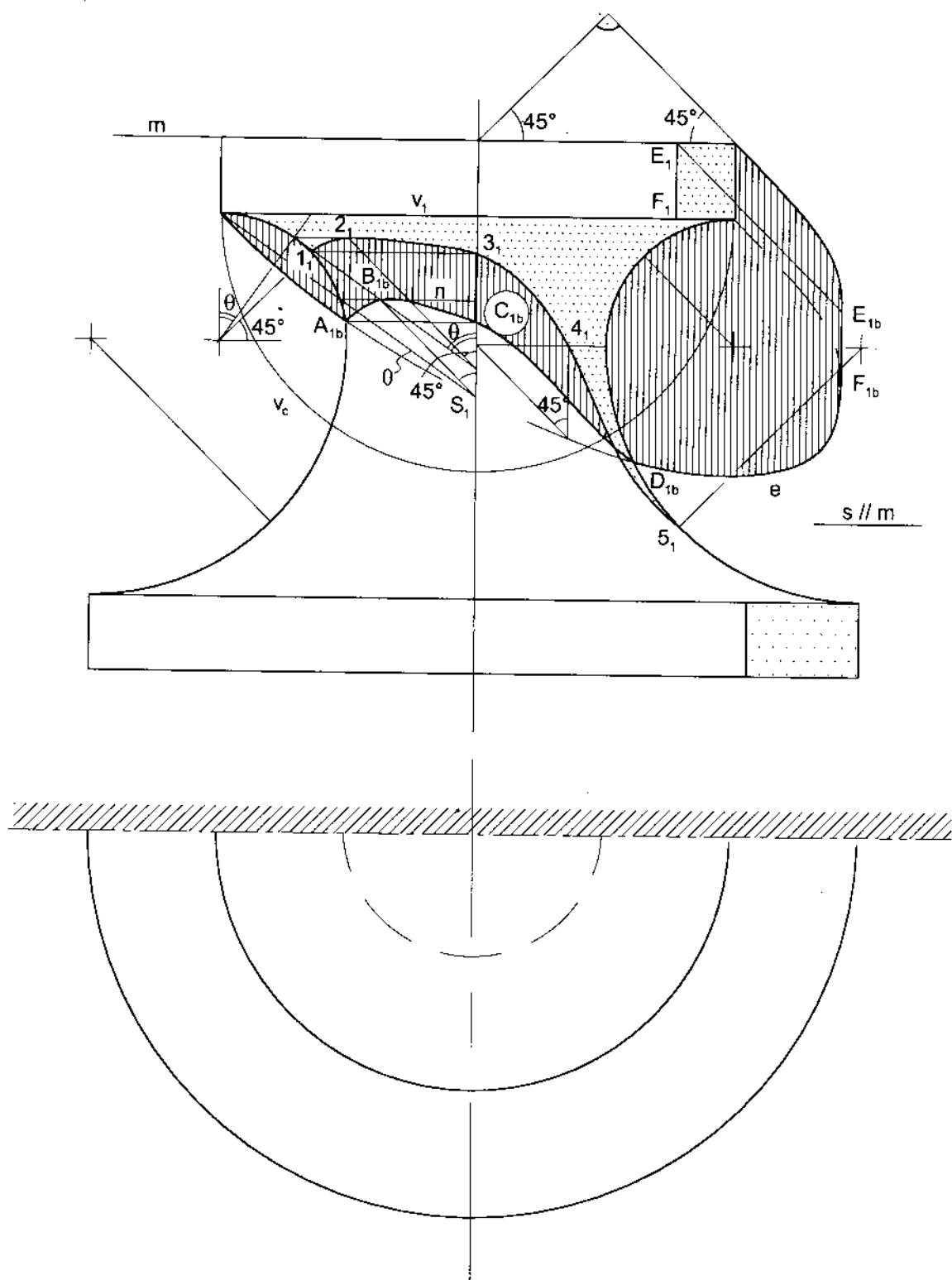
Hình 3.36b(LG)



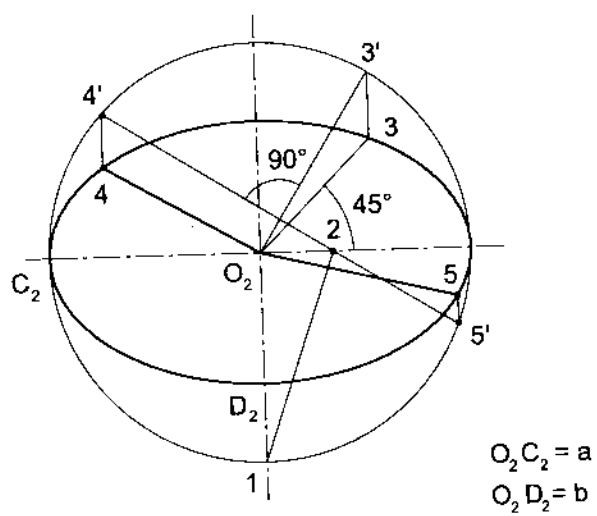
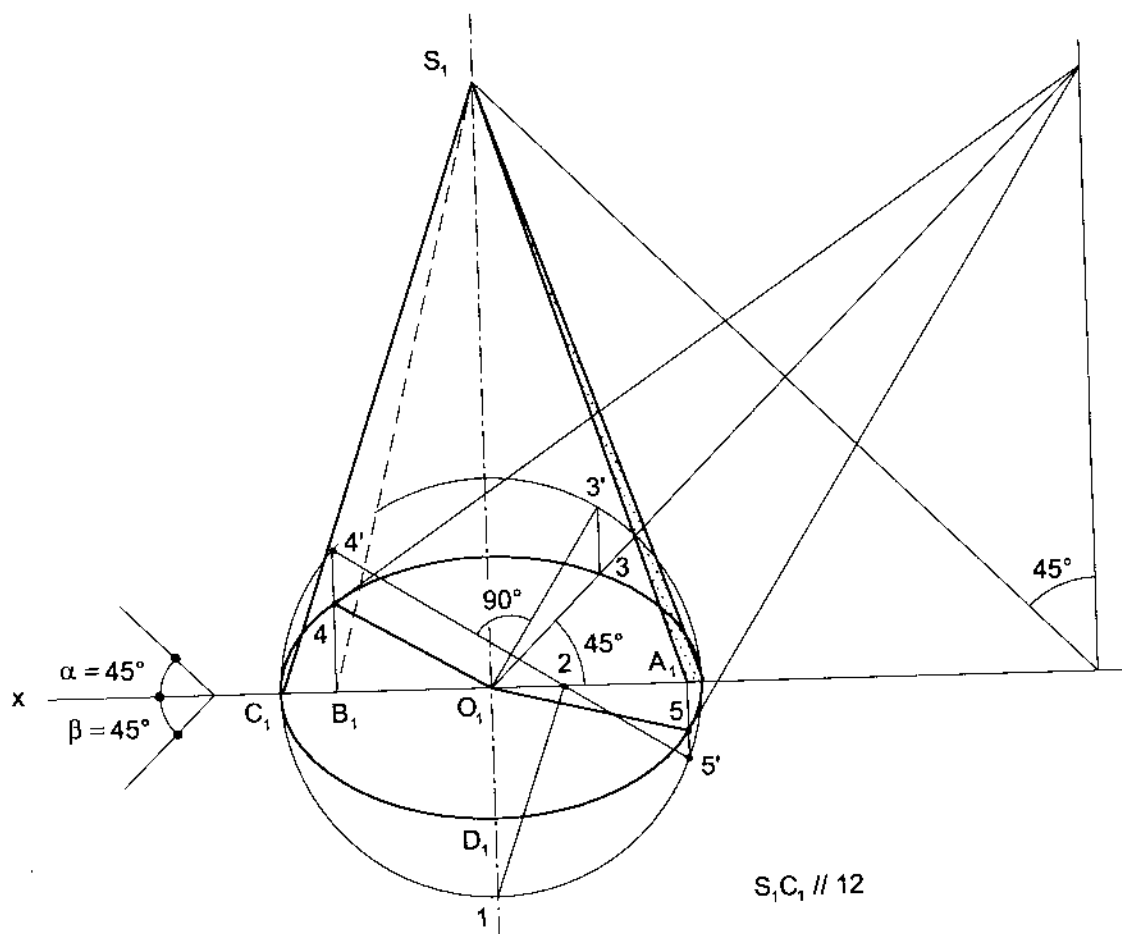
Hình 3.36c(LG)



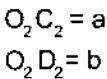
Hình 3.37(LG)



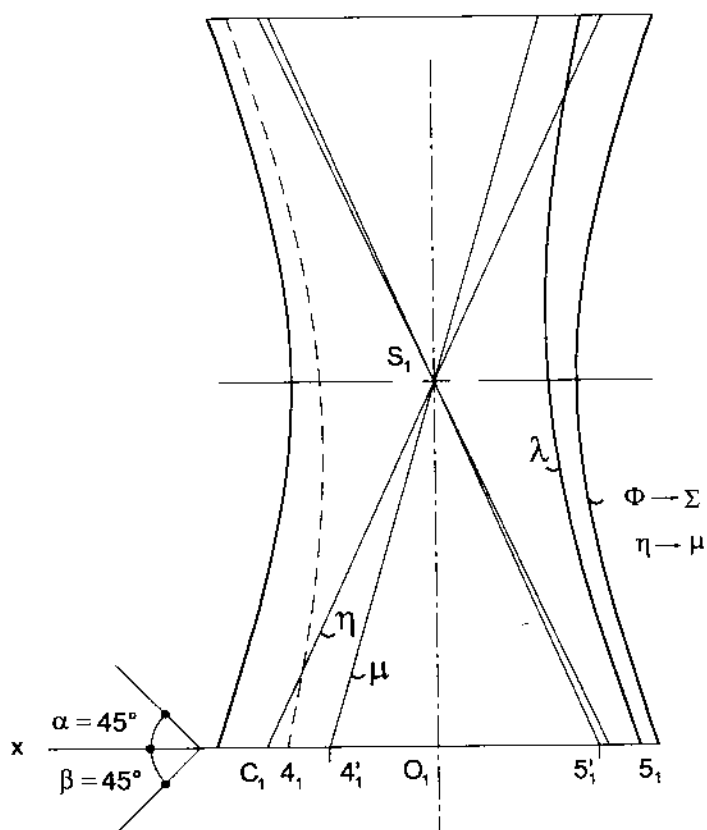
Hình 3.38(LG)



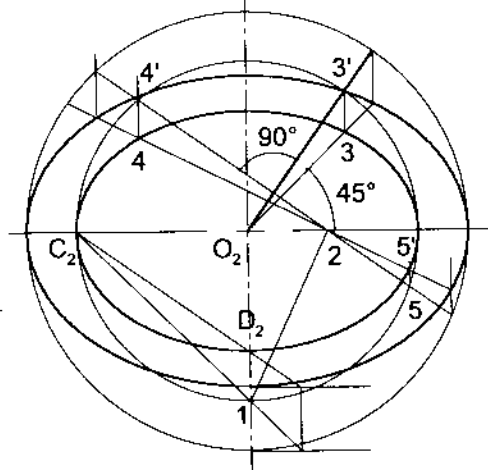
Hình 3.39(LG)



152

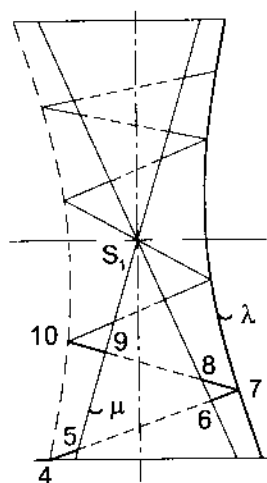


$S_1C_1 \parallel 12$



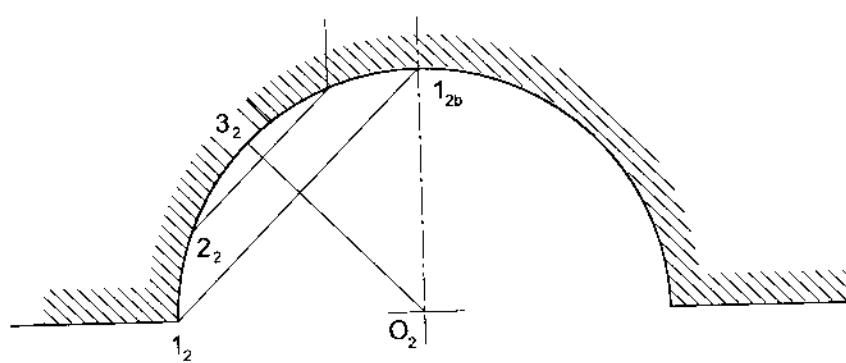
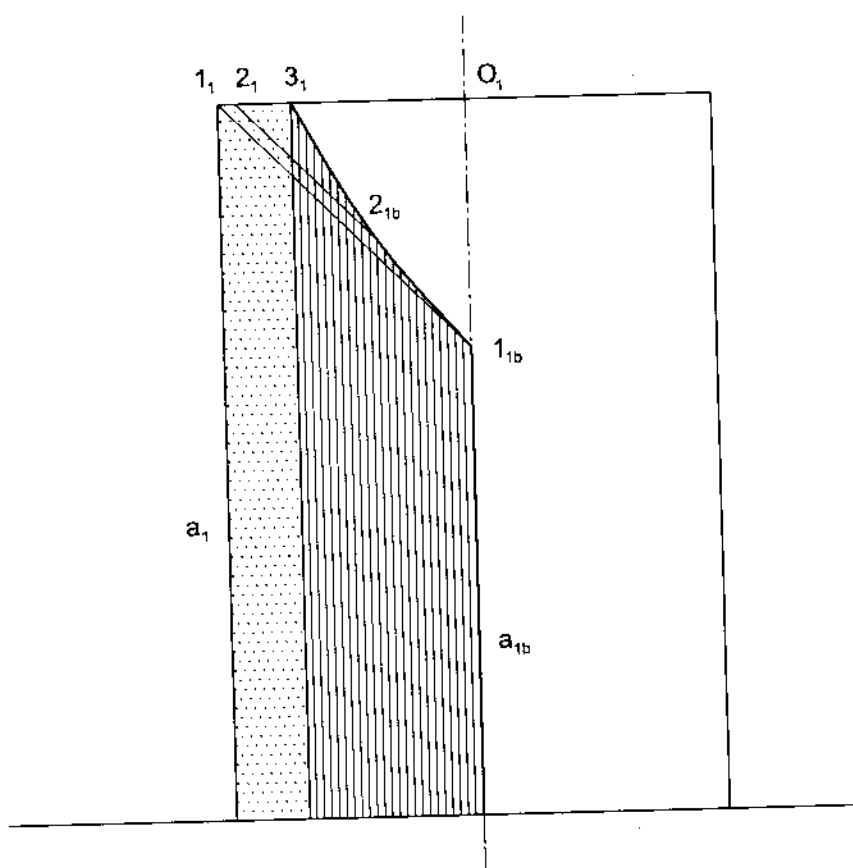
$O_2C_2 = a$
 $O_2D_2 = b$

Hình 3.42a(LG)

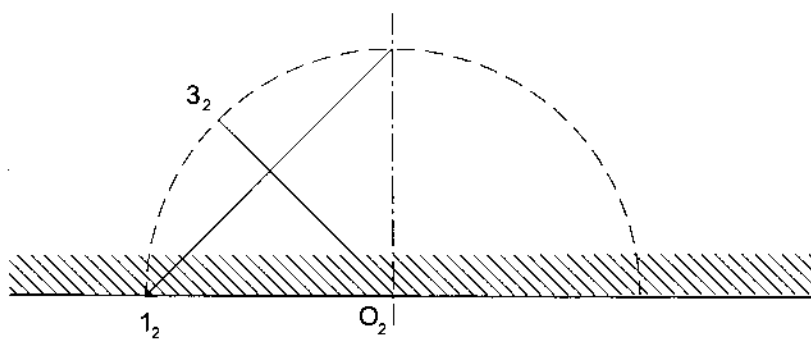
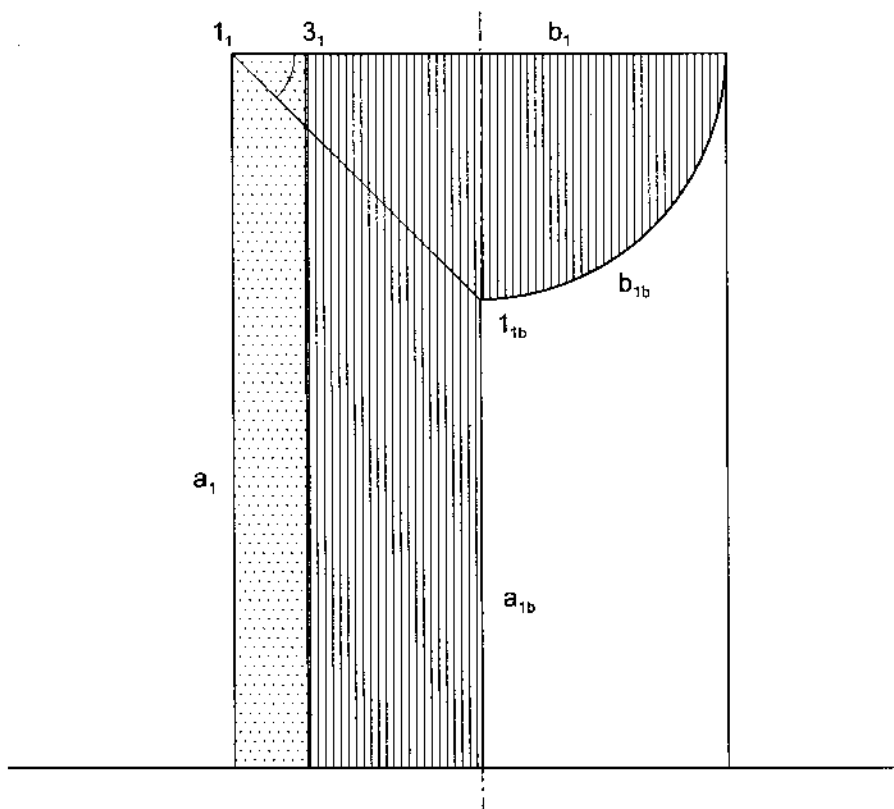


Đoạn 4-5 = đoạn 6-7
 Đoạn 7-8 = đoạn 9-10
 (4 là điểm đã biết của λ)

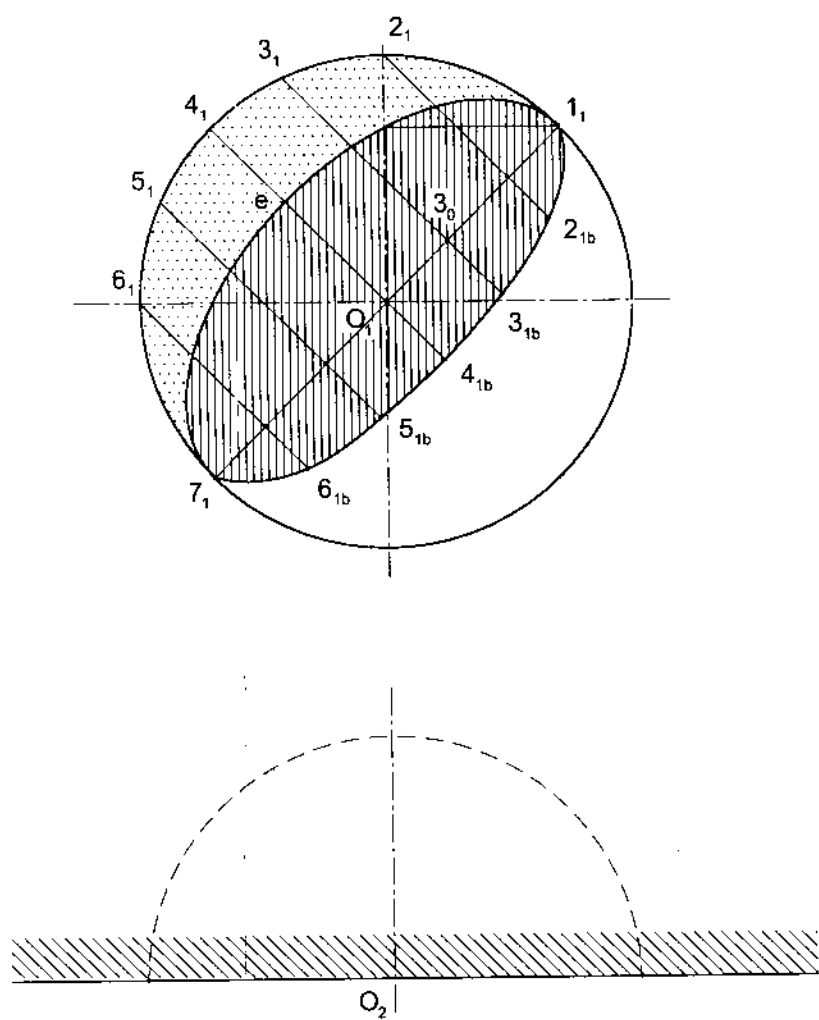
Hình 3.42b(LG)



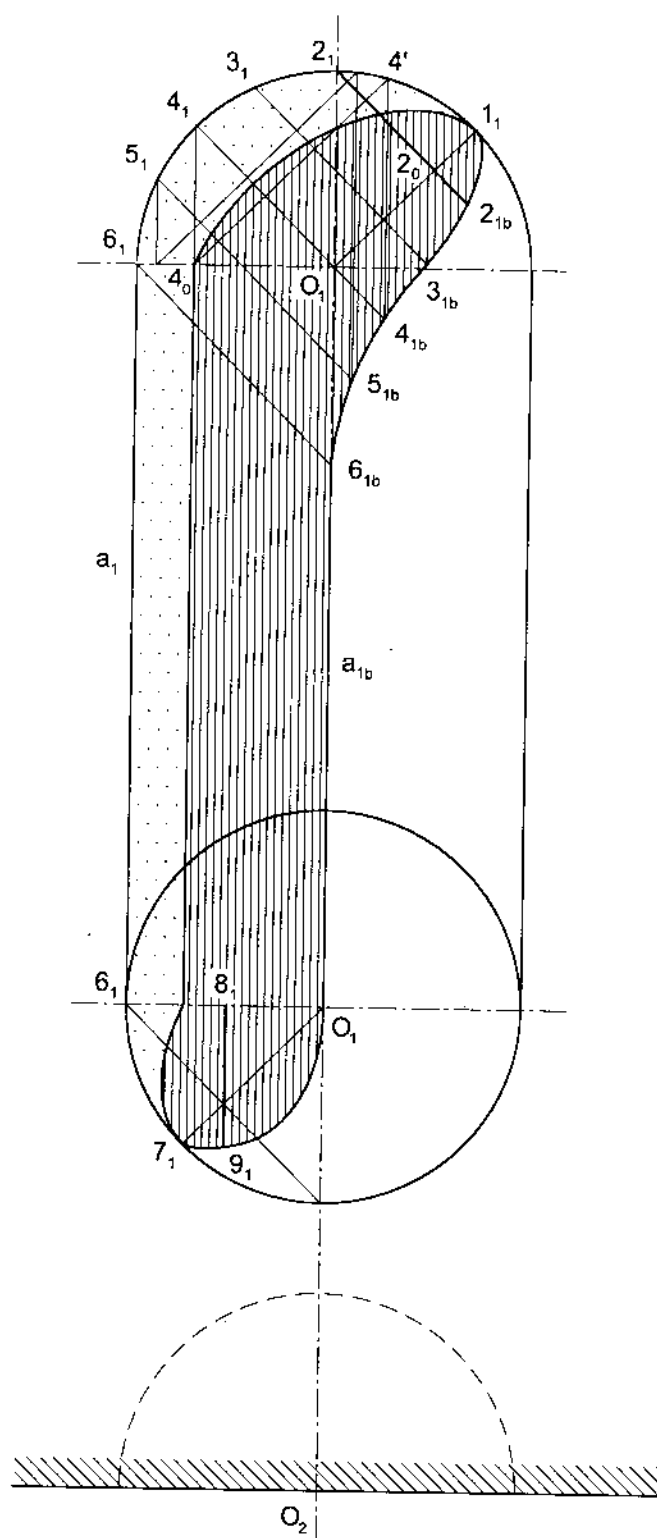
Hình 3.43(LG)



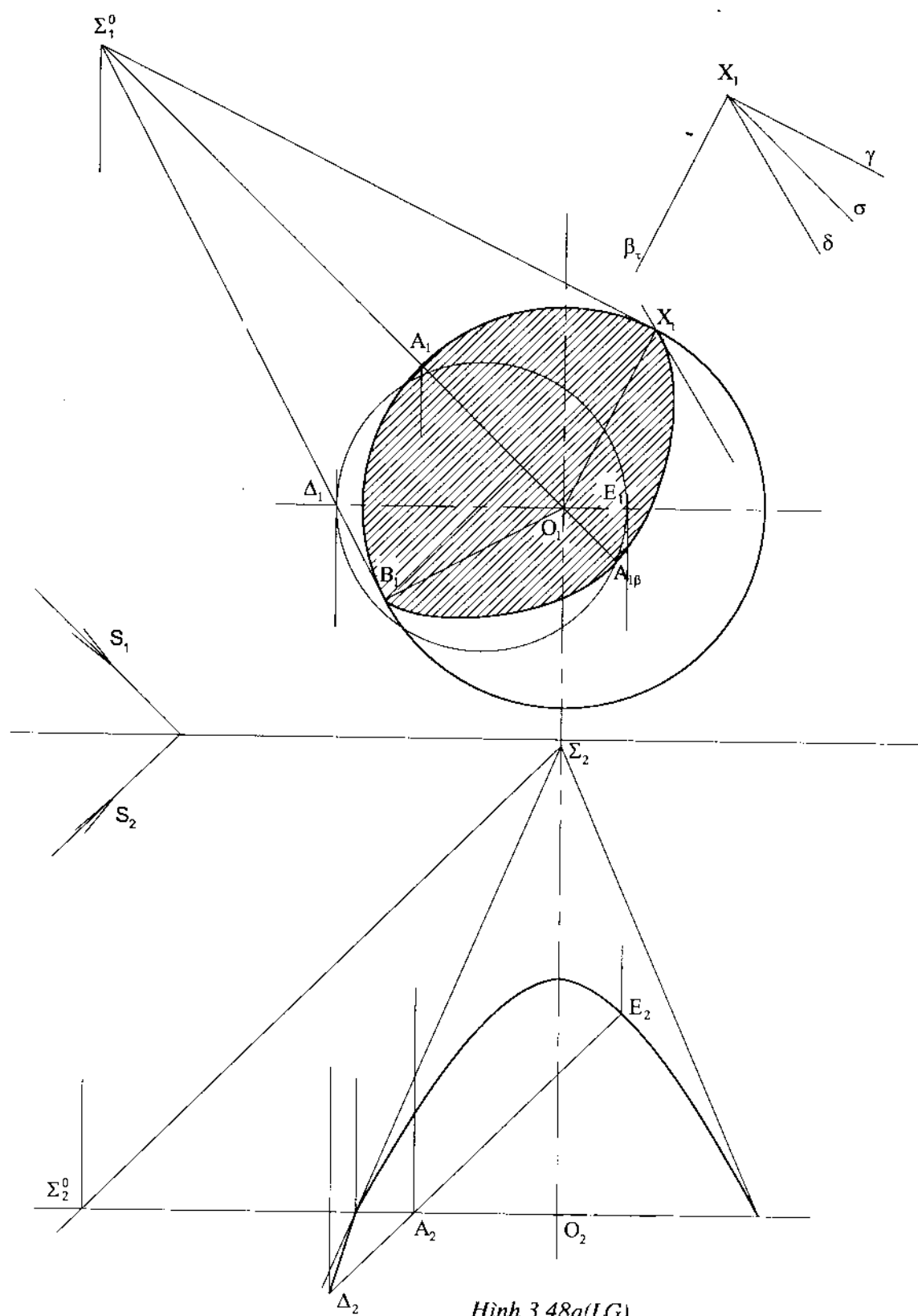
Hình 3.44(LG)



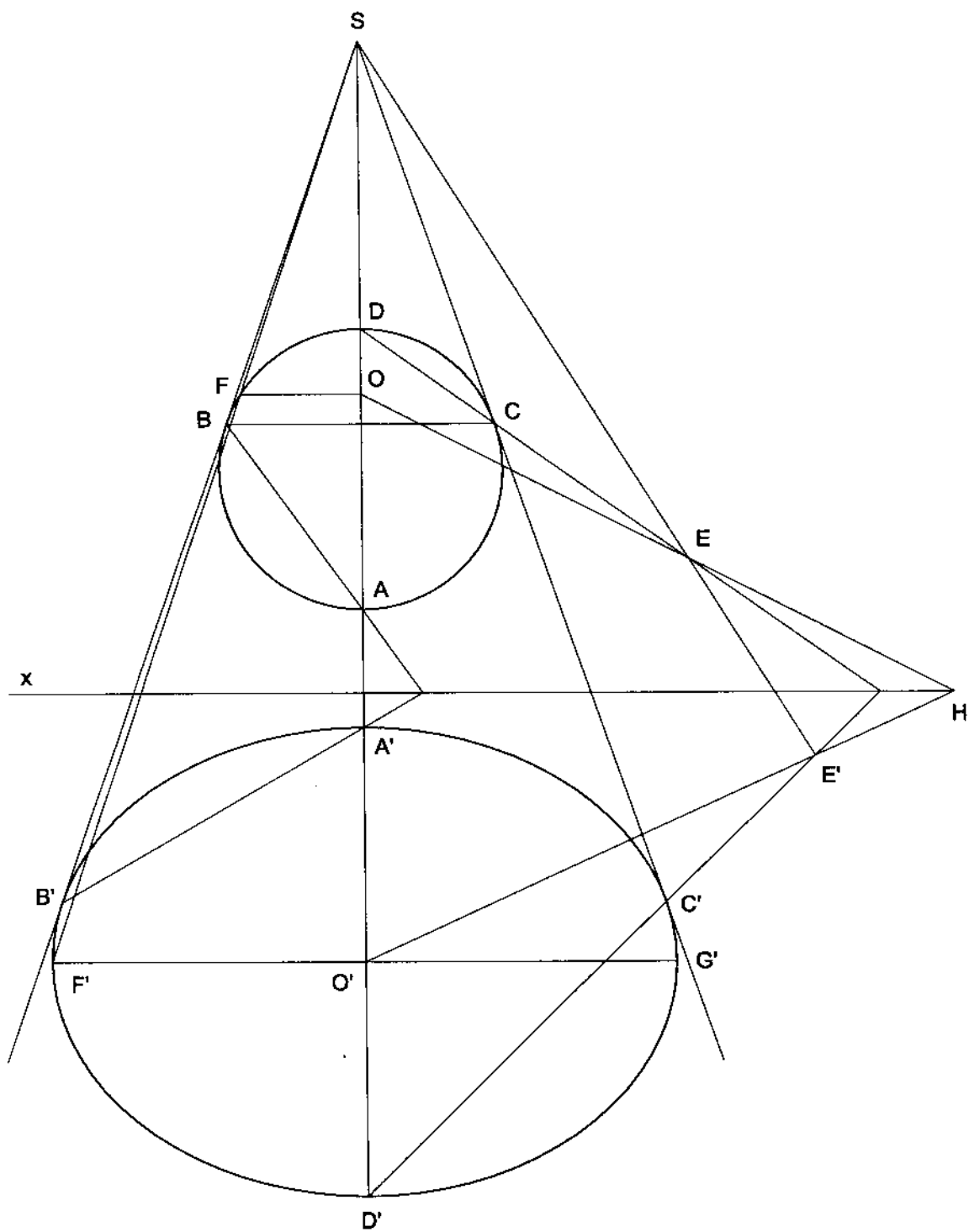
Hình 3.45(LG)



Hình 3.46(LG)



Hình 3.48a(LG)



Hình 3.48b(LG)

Chương IV

BÓNG CỦA NHÓM VẬT THỂ

Sau khi biết vẽ bóng của các khối đa diện, chúng ta tập vẽ bóng của một nhóm các vật thể gồm những đa diện đặt sát nhau.

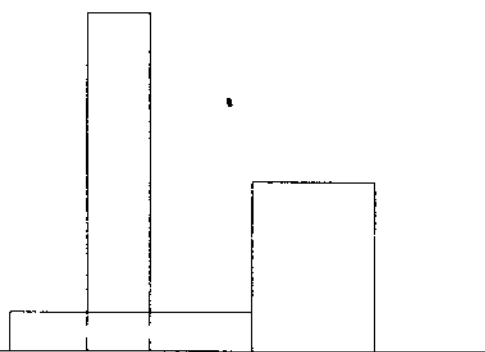
Phương pháp chung là vẽ bóng đổ từng khối một lên P_1 và P_2 , sau đó lại vẽ bóng đổ từ vật này lên vật kia.

Trên hình chiếu bằng, bóng đổ của các hình hộp thẳng đứng là các mảng bóng có đường biên trùng với hình chiếu bằng tia sáng (s_2) nếu hình hộp cao, nó sẽ đổ bóng bao trùm lên bóng đổ các khối thấp hơn.

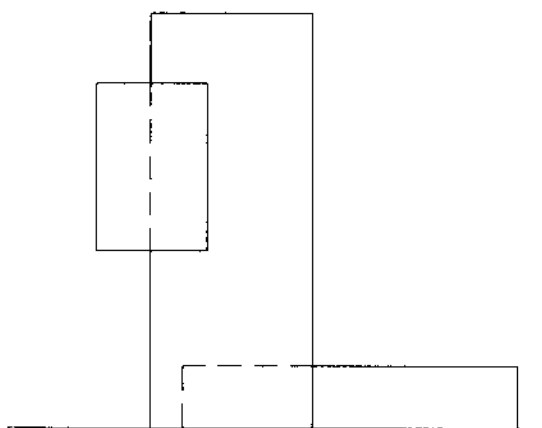
Sau khi vẽ bóng đổ từng vật, ta chú ý đến đường biên ngoài cùng của mảng bóng đổ. Những đường viền bóng đổ của các khối nhỏ hơn, thấp hơn khuất phía sau vẫn được vẽ, nhưng vẽ bằng nét mảnh để tiện kiểm tra.

ĐỀ BÀI

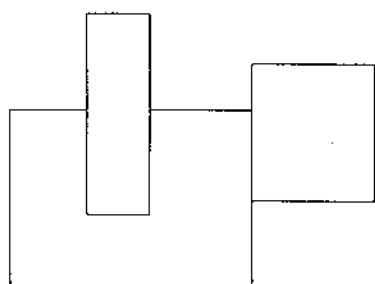
- 4.1. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên các hình 4.1(DB).
- 4.2. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên hình 4.2(DB).
- 4.3. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên hình 4.3(DB).
- 4.4. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên hình 4.4(DB).
- 4.5. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên hình 4.5(DB).
- 4.6. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên hình 4.6(DB).
- 4.7. **ĐB.** Vẽ bóng của nhóm vật thể cho trên hình 4.7(DB).
- 4.8. **ĐB.** Vẽ bóng của tấm phẳng $ABA'B'$ và đa diện (hình 4.8(DB)).
- 4.9. **ĐB.** Vẽ bóng của tấm phẳng Φ và bán cầu (hình 4.9(DB)).



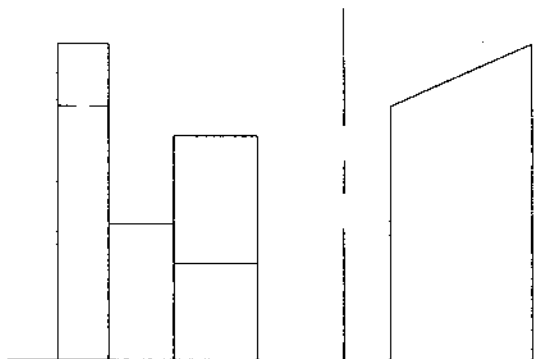
Hình 4.1(DB)



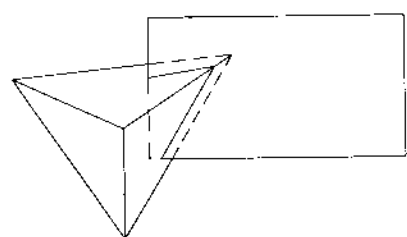
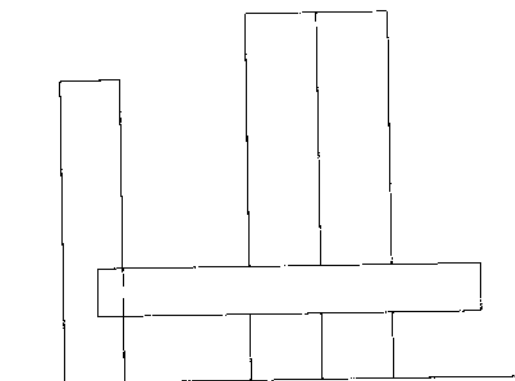
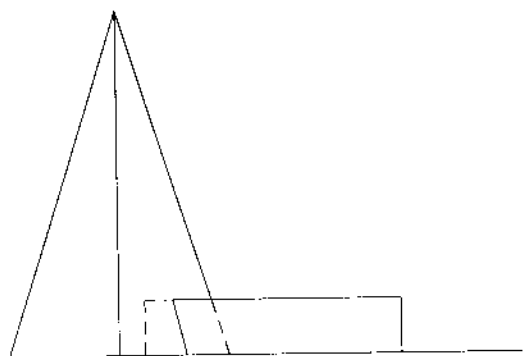
Hình 4.2(DB)



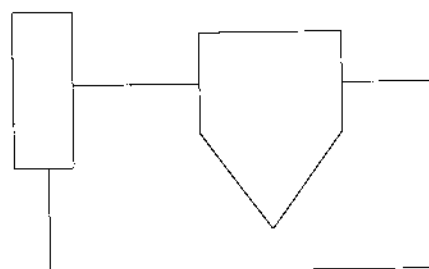
Hình 4.3(DB)



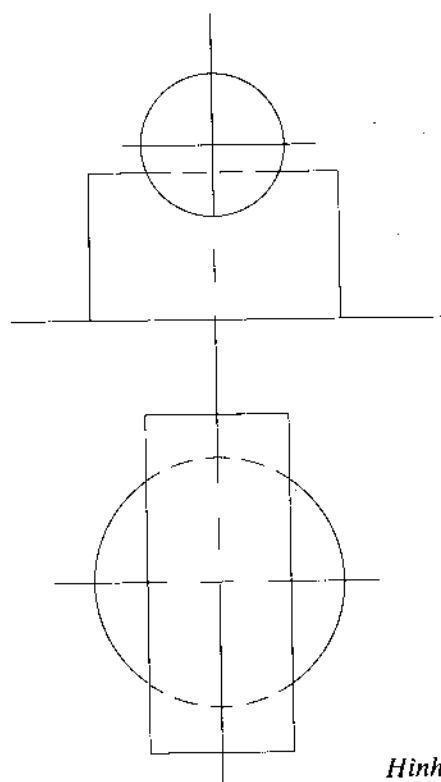
Hình 4.4(DB)



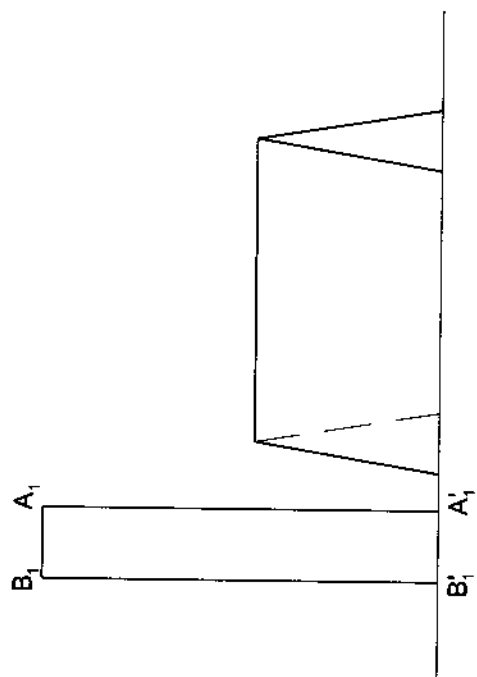
Hình 4.5(DB)



Hình 4.6(DB)

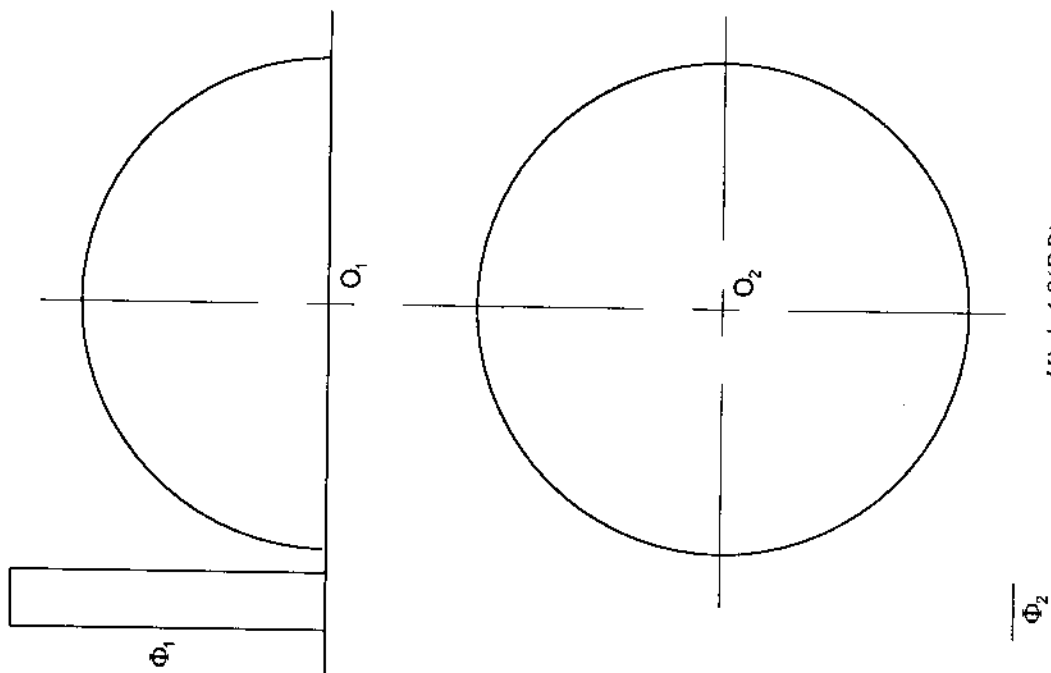


Hình 4.7(DB)



$B'_2 \equiv B_2$ — $A_2 \equiv A'_2$

Hình 4.8(DB)



Hình 4.9(DB)

LỜI GIẢI

4.1. LG. Nhóm vật thể gồm 3 khối hộp I, II, III (hình 4.1(LG)). Bóng đổ của khối I bắt đầu được vẽ từ đỉnh A (A_1, A_2) trên P_1 , đó là đường gấp khúc $A_{1b}B_{1b}C_{1b}K$ (xem bài tập cơ bản 3.17a). Tương tự bóng đổ của khối III cũng có dạng hình thang vuông; chỉ khác bóng của D đổ trên P_2 (mà không đổ trên P_1).

Bóng đổ của khối II hoàn toàn nằm trên P_2 (điểm $E \rightarrow E_{2b}$).

4.2. LG. Bóng đổ của khối I được bắt đầu bằng điểm A_{2b} (đổ trên P_2) cho ta biết bóng đổ của đáy dưới khối đó. Nó bị bóng đổ của khối II trên mặt bằng che hoàn toàn trên P_2 , bóng đổ của khối II nằm giữa các tia sáng qua C_2 và D_2 .

Bóng đổ của khối III trên P_2 có đỉnh E_{2b} nằm trong phần bóng đổ của khối II.

Trên P_1 bóng đổ của khối I lên khối II tìm được nhờ các điểm B_{1b} và F_{1b} .

4.3. LG. Bóng của khối I lên khối II nhờ bóng đổ của C (từ điểm 1 dóng lên C_{1b}).

Bóng đổ của khối I lên khối III nhờ tìm bóng đổ của đỉnh B (từ điểm 2 dóng lên).

Bóng đổ của khối II hoàn toàn nằm trên P_2 (hình 4.3(DB)).

4.4. LG. Hình chiếu cạnh cho ta biết thêm thông tin về hình dạng các khối.

- Tìm bóng đổ của C lên mặt nghiêng của khối III: kéo dài mặt nghiêng đến gặp cạnh C thẳng đứng tại điểm K. Nối K_1 với C_1' thì được bóng đổ của C lên mặt nghiêng của khối III.

Có thể làm như sau: Từ nhận xét bóng đổ của cạnh C thẳng đứng lên mặt nghiêng là đường thẳng cũng nghiêng một góc α như K_3D_3 . Do đó bóng của điểm C là giao của hình chiếu đứng tia sáng vẽ qua C_1 và đường thẳng vừa vẽ.

- Tìm bóng đổ của B lên mặt nghiêng: dùng hình chiếu cạnh $B_3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$.

- Bóng của BC lên mặt nghiêng là C'_12 (ta chỉ lấy đoạn bên phải).

- Bóng đổ của khối I lên P_1 : Tìm bóng đổ lên P_1 của các điểm A, B, C. Ta có đường gãy khúc đi từ A_{1b} đến C_{1b} .

- Tương tự tìm bóng đổ của khối III lên P_1 : $D \rightarrow D_{1b}$; $E \rightarrow E_{1b}$; $F \rightarrow F_{1b}$; điểm gãy trên bóng của E, $F \rightarrow$ nối điểm gãy với F_{2b} (hình 4.4(LG)).

4.5. LG. Tìm bóng đổ của chóp lên $P_2 \rightarrow S_{2b}$. Từ S_{2b} nối với các đỉnh của đáy chóp, suy ra các mặt của chóp có bóng bản thân trên hình chiếu bằng.

Bóng đổ của chóp lên mặt trên của khối hộp chữ nhật: tìm S_{Kb} ; nối S_{Kb} với các điểm $1_1, 2_2$.

Bóng trên hình chiếu đứng của chóp lên mặt trước của hình hộp. Từ các điểm $A_2, B_2 \rightarrow A_1B_1$ (hình 4.5(LG)).

4.6. LG. Bóng của các khối hình hộp được vẽ như bình thường (xem bài 3.17a. DB). Ở đây có khối lăng trụ đáy là 1 ngũ giác đỉnh A. Bóng đổ từ hình hộp nằm ngang lên mặt

trước của lăng trụ này lập lại mặt bằng của lăng trụ, nhưng có dạng đối xứng qua 1 trục nằm ngang. Dùng tia ngược từ điểm A_2 , xác định điểm A'_1 rồi điểm A_{1b} .

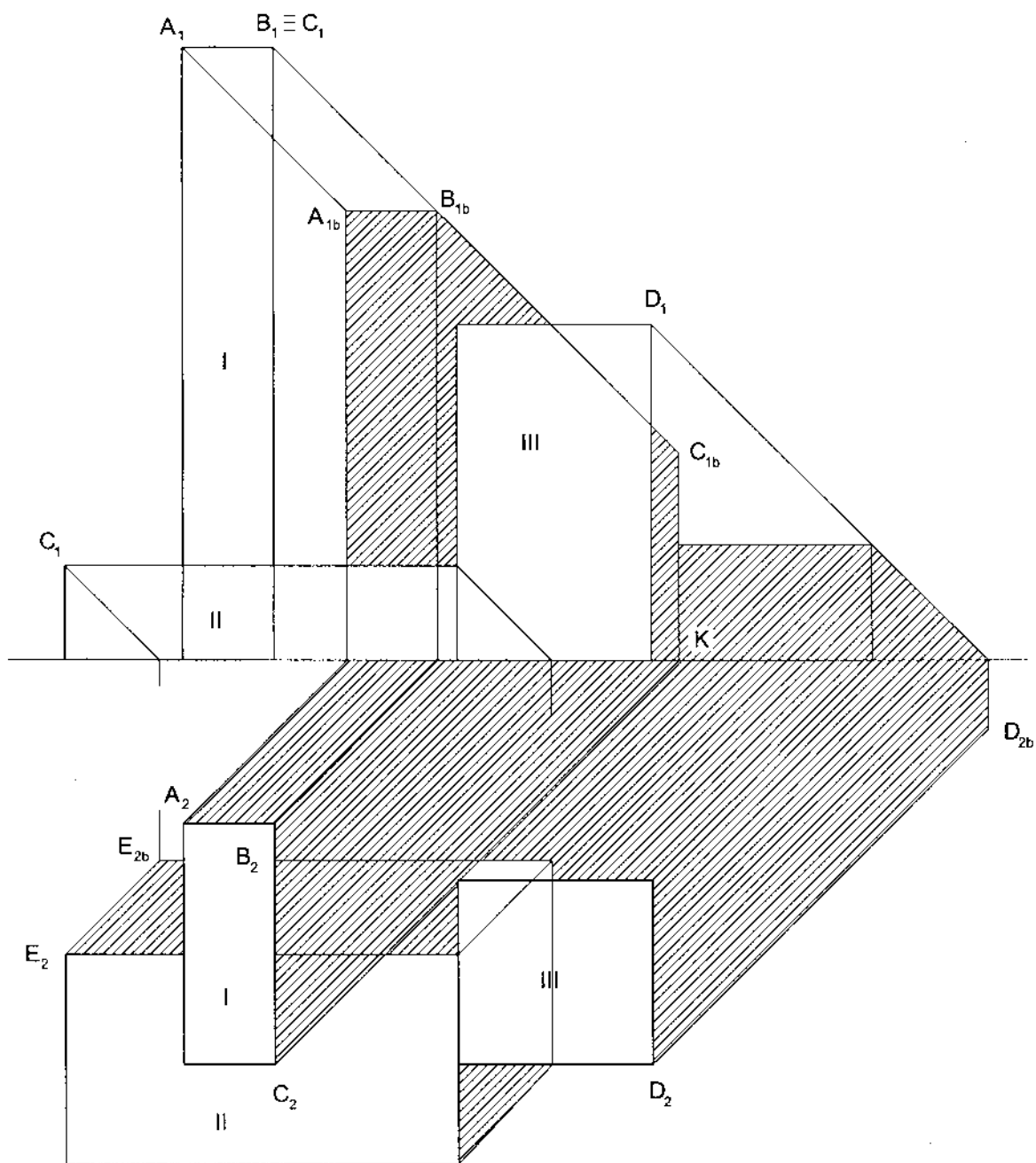
4.7. LG. Hình 4.7(LG) trình bày nhóm vật thể gồm 2 hình trụ. Dễ dàng xác định được các đường sinh bóng bản thân của trụ. Trên mặt bằng, bóng đổ của trụ nằm ngang được vẽ trước tiên nhờ vẽ bóng đổ của 2 đáy. Đó là hai elip. Bóng đổ của đáy trụ nằm ngang lên trụ đứng là đường cong $A_{1b}T_{1b}$, trong đó T_{1b} là điểm mất. Điểm này tìm được nhờ điểm T_{2b} . Dùng tia ngược $T_{2b} \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_{1b}$.

Điểm T_{1b} nằm trên đường sinh bóng bản thân của trụ đứng.

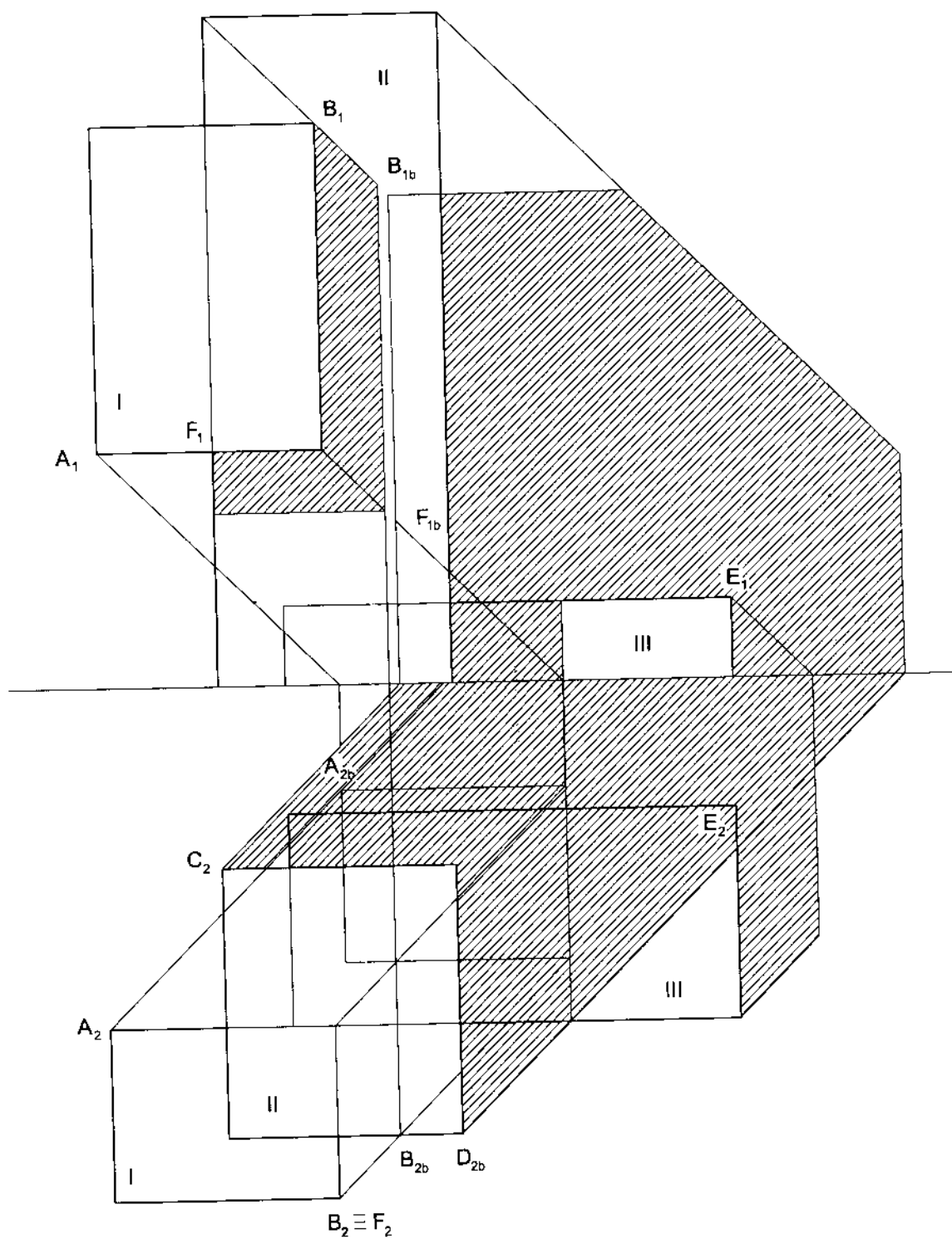
4.8. LG. Để vẽ bóng của đa diện, chỉ cần vẽ bóng của cạnh phía trên $C_{2b}D_{2b}$, rồi nối với hai điểm bóng E_{2b}, F_{2b} vì hai điểm này trùng với E_2, F_2 .

Bóng của cạnh thẳng đứng AA' nằm trùng với giao tuyến của mặt phẳng tia sáng chứa AA' cắt mặt phẳng hình chiếu bằng và đa diện. Đó là đường gãy khúc $A'_2I_2A_b$. Điểm A_b chính là giao điểm của tia sáng AA_b với đa diện. Tương tự, vẽ bóng của điểm B_b . 1 và 2 là hai điểm bóng gãy.

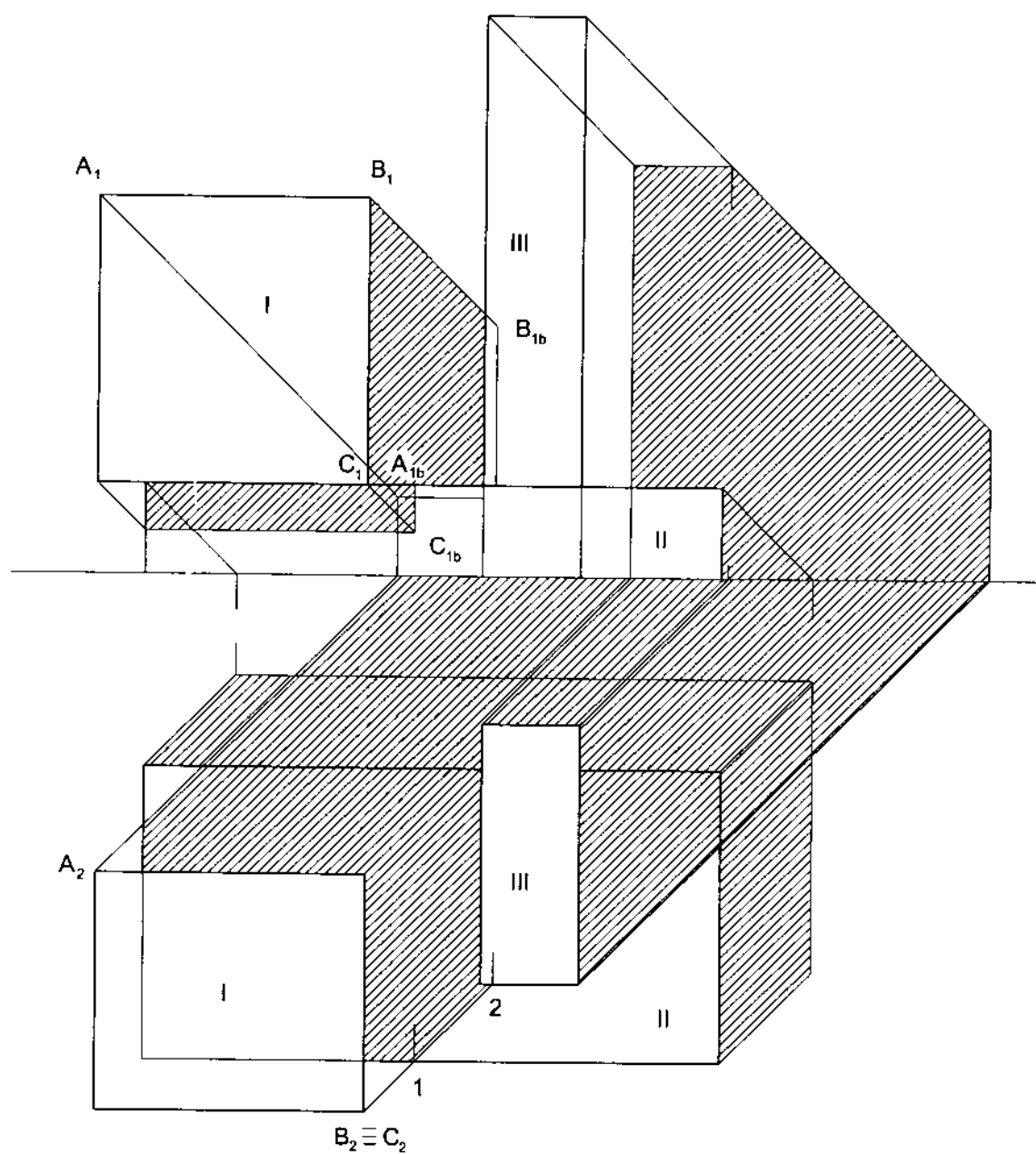
4.9. LG. Cách vẽ tương tự như bài 4.8, nhưng bóng đổ của các cạnh thẳng đứng của hình Φ lên cầu là các cung elip.



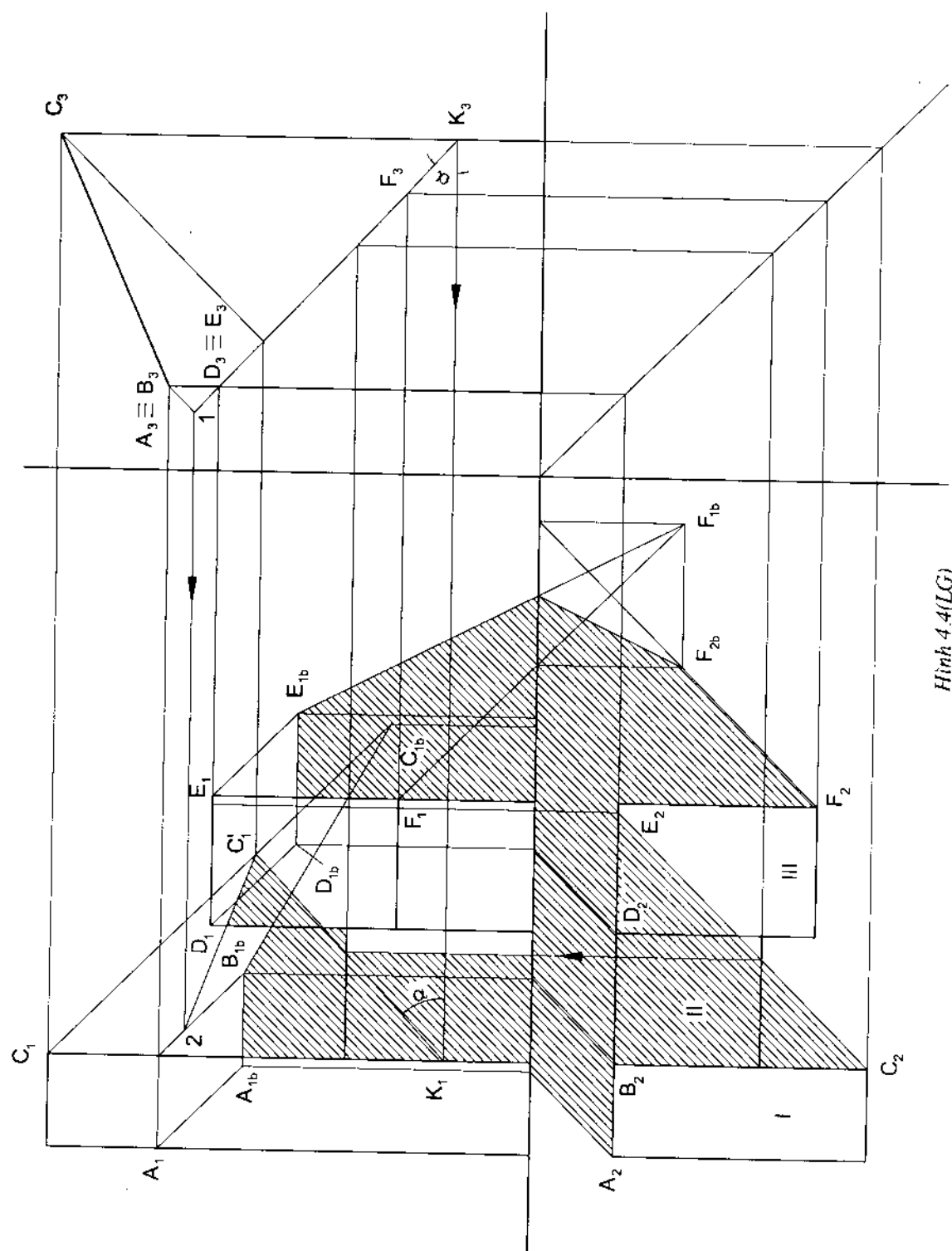
Hình 4.1(LG)



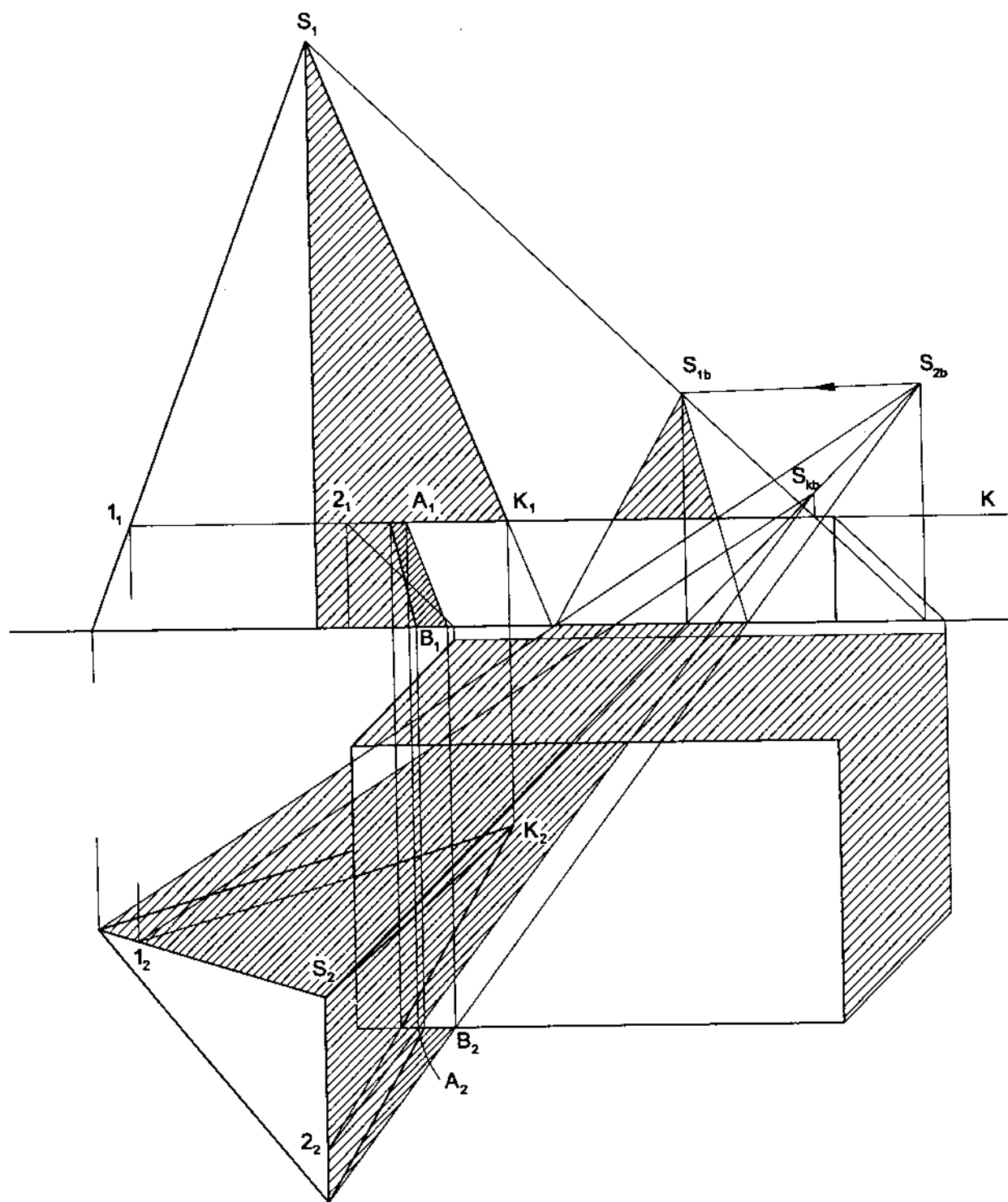
Hình 4.2(LG)



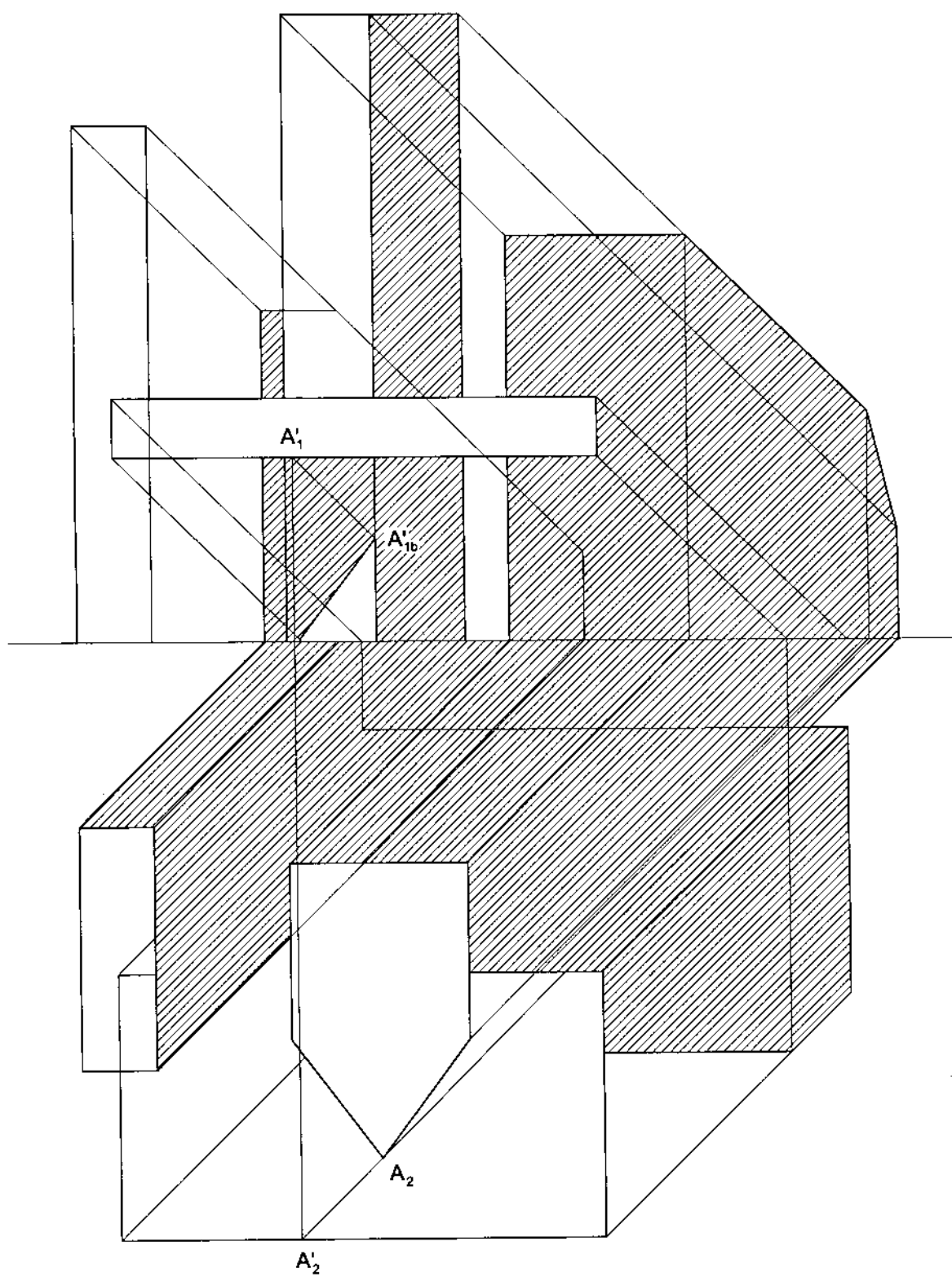
Hình 4.3(LG)



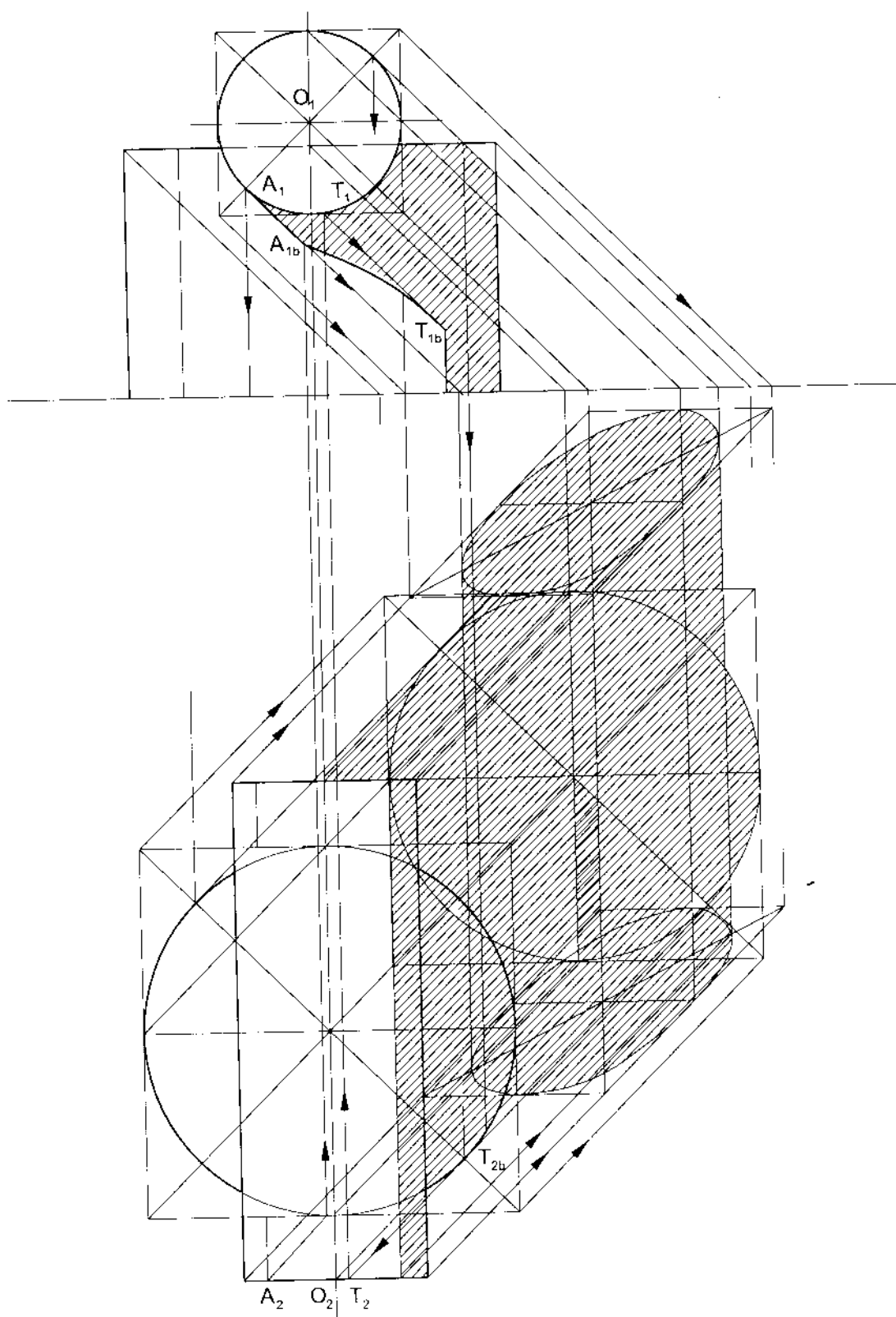
Hình 4.4(LG)



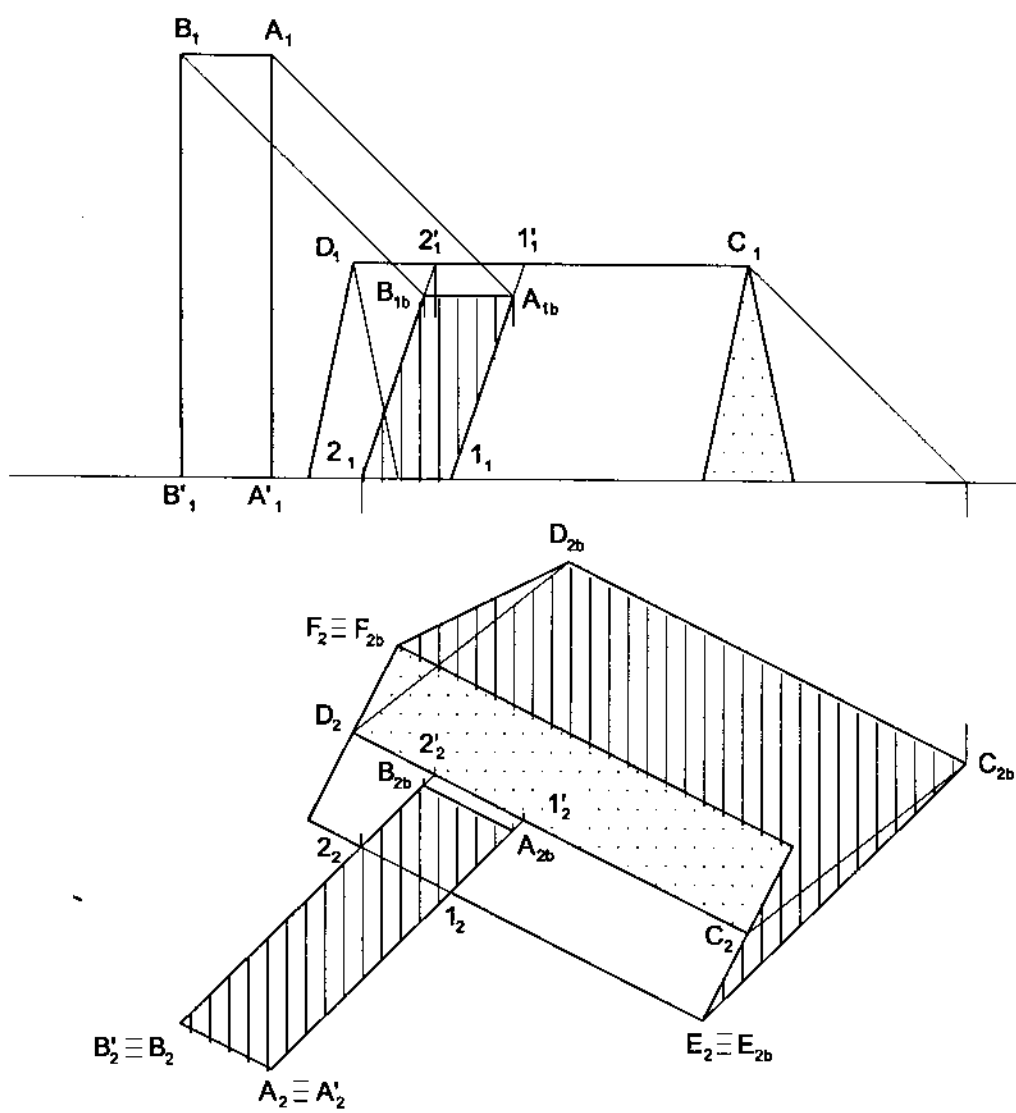
Hình 4.5(LG)



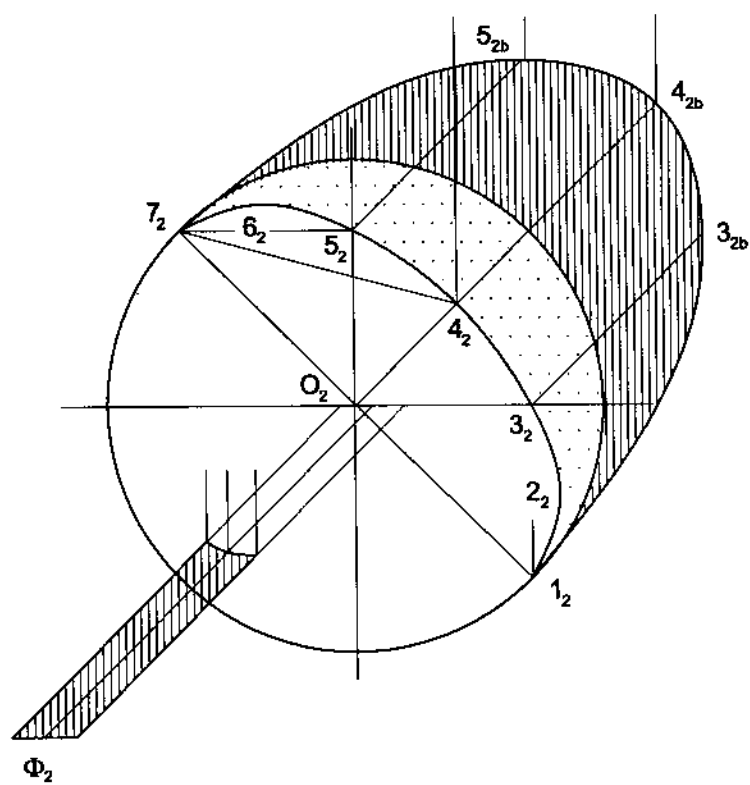
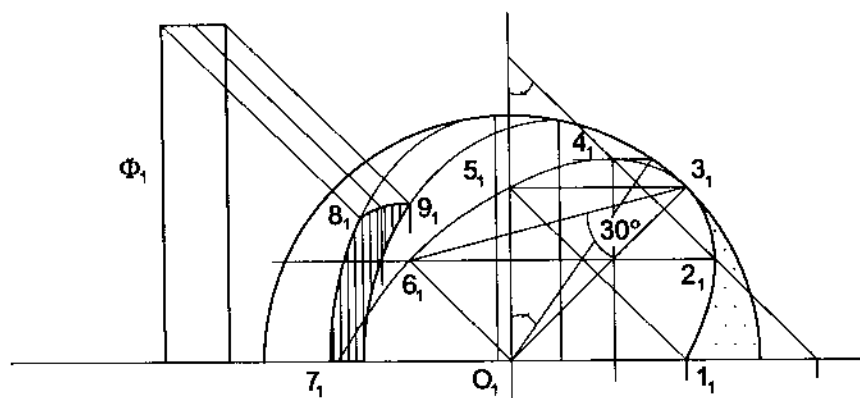
Hình 4.6(LG)



Hình 4.7(LG)



Hình 4.8(LG)



Hình 4.9(LG)

Chương V

BÓNG CÁC CHI TIẾT KIẾN TRÚC BÓNG TRÊN CHÍNH DIỆN NGÔI NHÀ

ĐỀ BÀI

- 5.1. **ĐB.** Vẽ bóng của mũ cột vuông đổ lên thân cột tròn (hình 5.1(DB)).
- 5.2. **ĐB.** Như bài 5.1, nhưng mũ cột nhỏ hơn (hình 5.2(DB)).
- 5.3. **ĐB.** Vẽ bóng của mũ cột tròn đổ lên thân cột tròn (hình 5.3a và 5.3b(DB)).
- 5.4. **ĐB.** Vẽ bóng của mũ cột tròn đổ lên thân cột vuông (hình 5.4(DB)).
- 5.5. **ĐB.** Vẽ bóng của mũ cột tròn đổ lên thân cột bát giác (hình 5.5(DB)).
- 5.6. **ĐB.** Vẽ bóng trên bậc thềm (hình 5.6(DB)).
- 5.7. **ĐB.** Vẽ bóng cửa sổ (hình 5.7(DB)).
- 5.8. **ĐB.** Vẽ bóng đổ của mái đua hình hộp trên tường cong (hình 5.8(DB)).
- 5.9. **ĐB.** Vẽ bóng đổ của cầu thang trên mặt trụ (hình 5.9(DB)).
- 5.10. **ĐB.** Vẽ bóng đổ của các con sơn (hình 5.10a, b, c(DB)).
- 5.11. **ĐB.** Vẽ bóng của gờ tường (hình 5.11(DB)).
- 5.12. **ĐB.** Vẽ bóng trên mặt đứng ngôi nhà ,có phần mái đua (hình 5.12(DB)).
- 5.13. **ĐB.** Vẽ bóng trên mặt đứng ngôi nhà (tường lồi lõm) (hình 5.13a, b(DB)).
- 5.14. **ĐB.** Bóng của đao đình (hình 5.14a, b(DB)).
- 5.15. **ĐB.** Vẽ bóng trên cửa sổ đặc có hai cánh (hình 5.15a, b(DB)).
- 5.16. **ĐB.** Vẽ bóng như bài 5.15 nhưng phía trên có tám ô văng (hình 5.16(DB)).
- 5.17. **ĐB.** Vẽ bóng bản thân và bóng đổ của mặt bán cầu có tám ô văng mà kích thước là $a \times 2a$ (hình 5.17(DB)).
- 5.18. **ĐB.** Vẽ bóng mũ cột hình hộp đáy vuông đổ lên thân cột hình trụ (hình 5.18(DB)).
- 5.19. **ĐB.** Vẽ bóng trên gờ nửa trụ có tám nắp đáy là hình chữ nhật mà cạnh là $a \times 2a$ (hình 5.19(DB)).
- 5.20a. **ĐB.** Vẽ bóng mũ cột hình trụ đổ lên thân cột hình trụ (có sử dụng tường Pilê) (hình 5.20a(DB)).
- 5.20b. **ĐB.** Cũng bài 5.20a nhưng có sử dụng tia sáng ngược chiều (tia ngược) để vẽ (hình 5.20b(DB)).

5.21. ĐB. Vẽ bóng mũ cột hình hộp đáy vuông đổ lên thân cột hình lăng trụ sáu mặt đều (hình 5.21(DB)).

5.22. ĐB. Vẽ bóng mũ cột hình hộp đáy vuông đổ lên thân cột hình lăng trụ sáu mặt đều (hình 5.22(DB)).

5.23. ĐB. Vẽ bóng của gờ nửa mặt nón có tám ô văng hình chữ nhật mà kích thước đáy là $a \times 2a$ (hình 5.23(DB)).

5.24. ĐB. Vẽ bóng mũ cột hình hộp đáy vuông đổ lên thân cột hình trụ và nửa mặt xuyên (hình 5.24(DB)).

5.25. ĐB. Vẽ bóng của ô văng nửa tròn (hình 5.25(DB)).

5.26. ĐB. Vẽ bóng trên mặt chính công trình (hình 5.26(DB)).

5.27. ĐB. Vẽ bóng trên cửa sổ đặc có tám ô văng ngang (hình 5.27(DB)).

5.28. ĐB. Vẽ bóng trên cửa sổ đặc có tám ô văng nghiêng (hình 5.28(DB)).

5.29. ĐB. Vẽ bóng trên bậc thềm mà bề tường đứng (hình 5.29(DB)).

5.30. ĐB. Vẽ bóng trên bậc thềm mà bề tường vát nghiêng (hình 5.30(DB)).

5.31. ĐB. Vẽ bóng trên tiền sảnh (hình 5.31(DB)).

5.32. ĐB. Vẽ bóng trên mặt đứng công trình (hình 5.32(DB)).

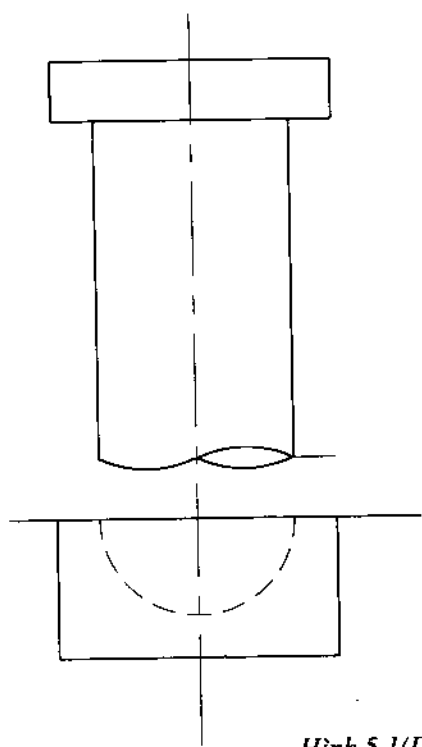
5.33. ĐB. Vẽ bóng trên chi tiết vòm tròn (hình 5.33(DB)).

5.34. ĐB. Vẽ bóng trên dây cửa vòm tròn (hình 5.34(DB)).

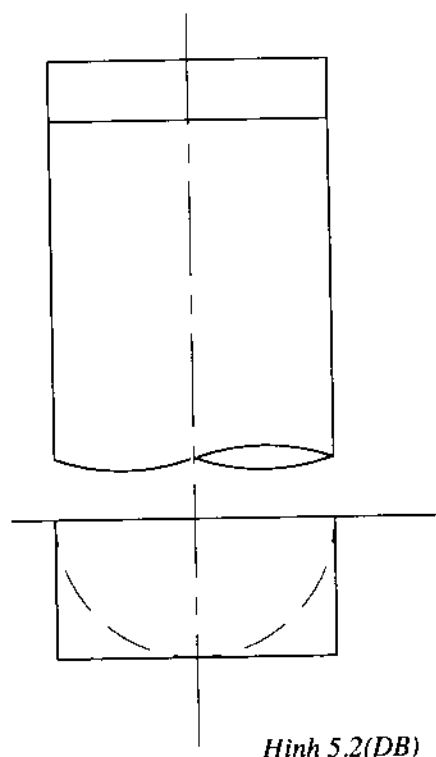
5.35. ĐB. Vẽ bóng trên cửa mái (hình 5.35(DB)).

5.36. ĐB. Vẽ bóng trên chính diện nhà (hình 5.36(DB)).

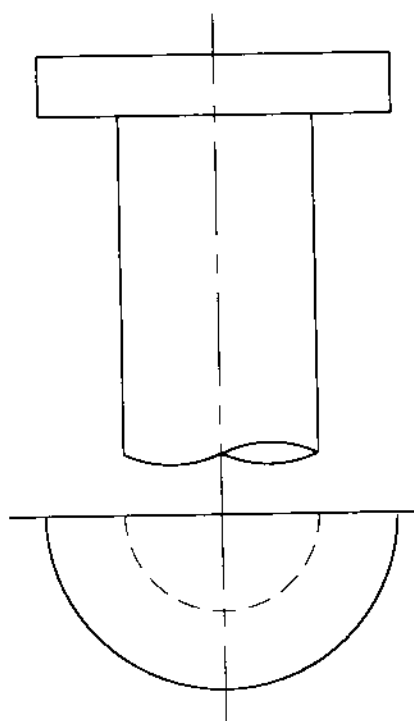
5.37. ĐB. Vẽ bóng trên ngôi nhà (hình 5.37(DB)).



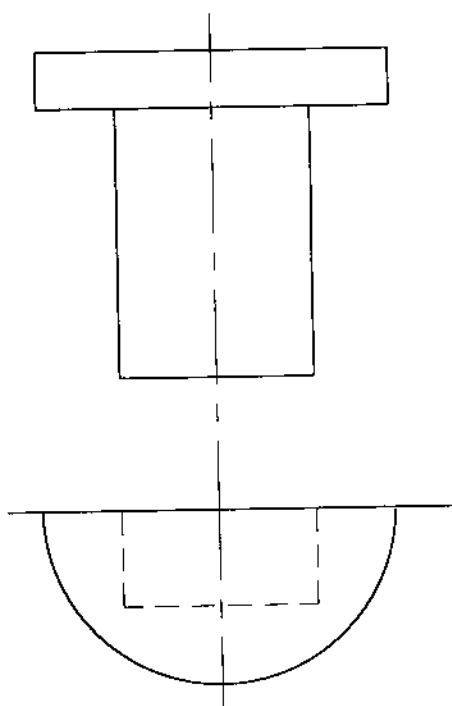
Hình 5.1(DB)



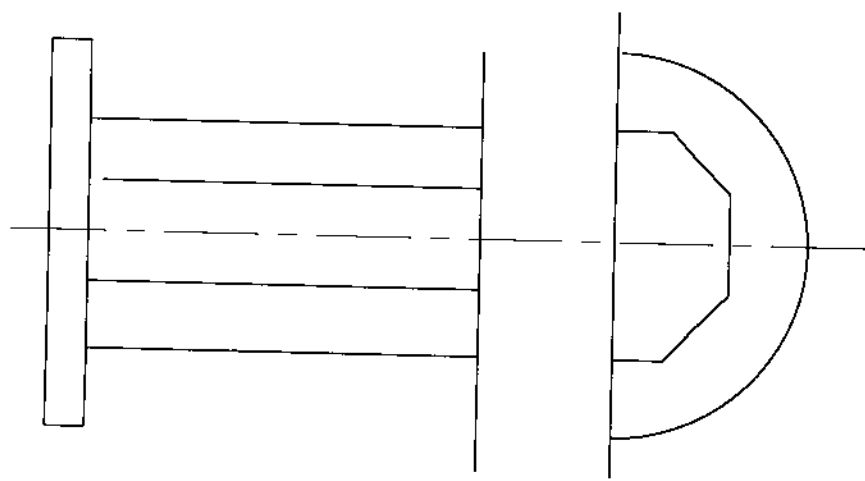
Hình 5.2(DB)



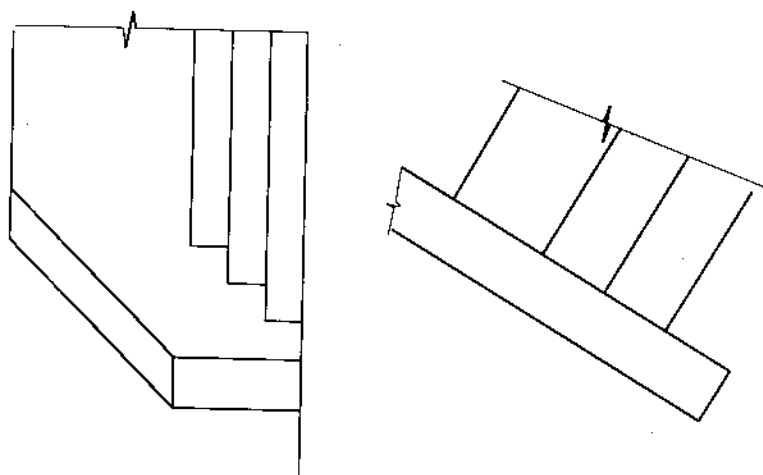
Hình 5.3(DB)



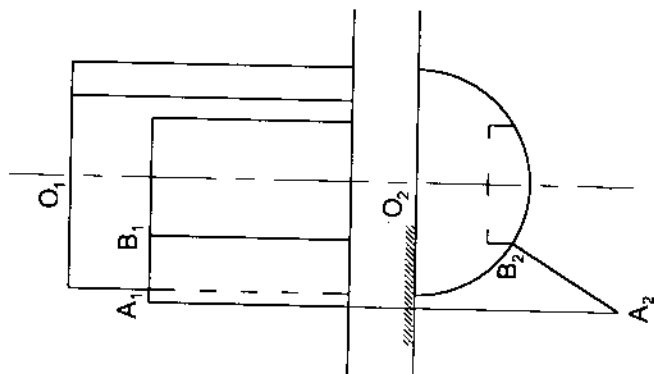
Hình 5.4(DB)



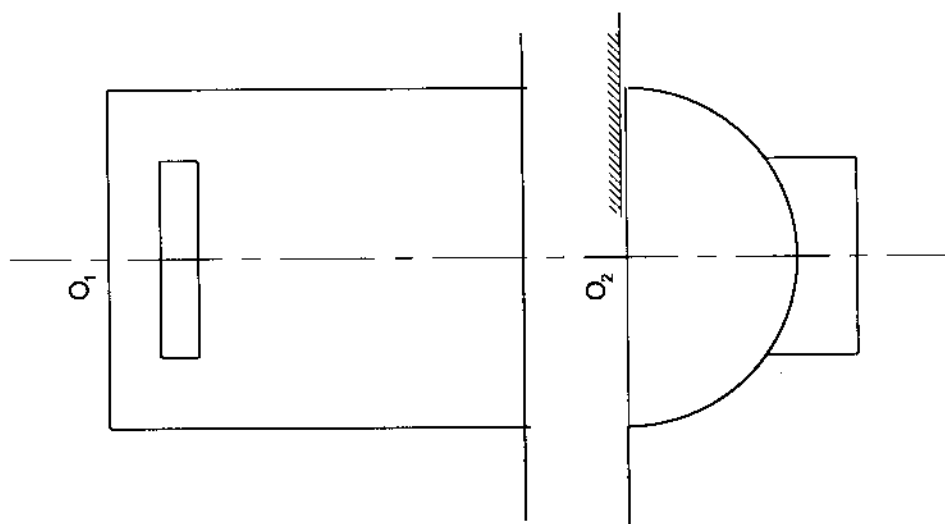
Hình 5.5(DB)



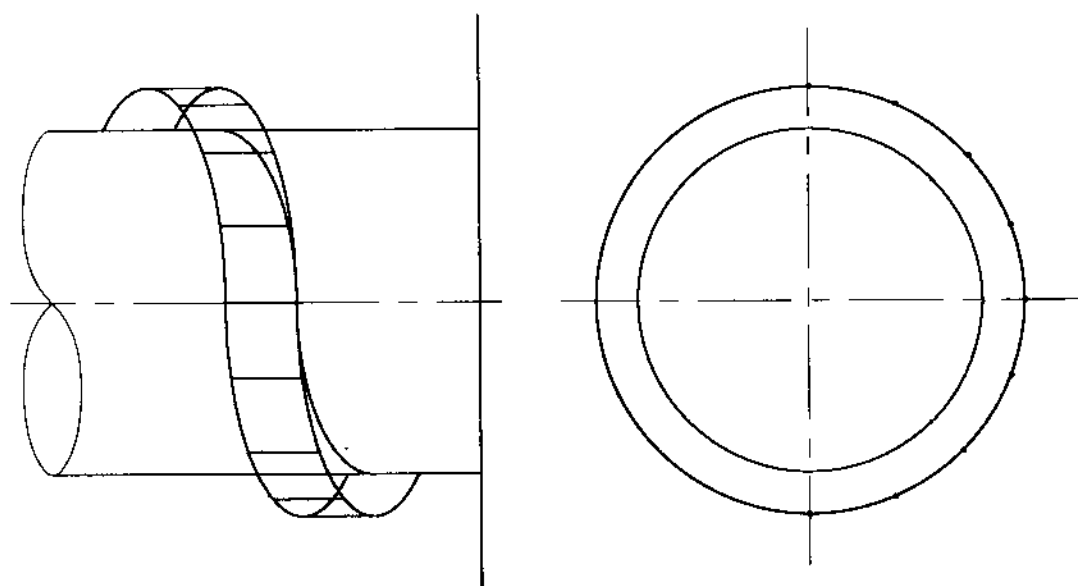
Hình 5.6(DB)



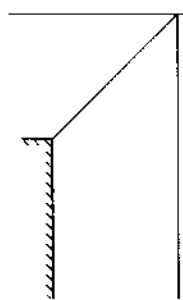
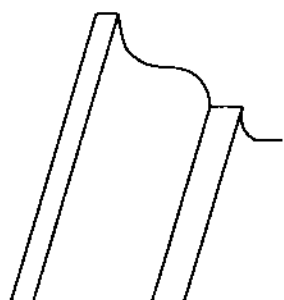
Hình 5.7(DB)



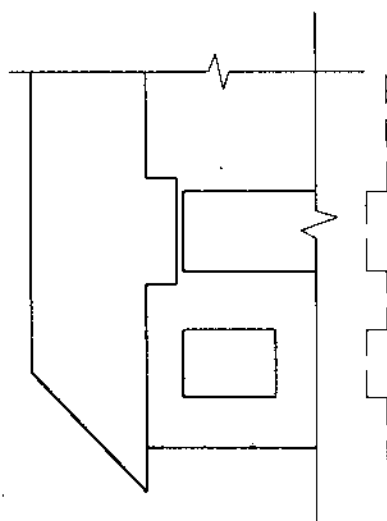
Hình 5.8(DB)



Hình 5.9(DB)



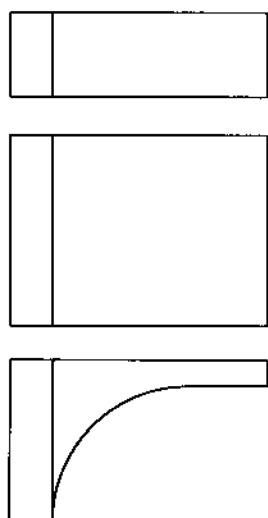
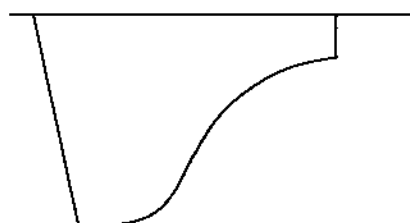
Hình 5.11(DB)



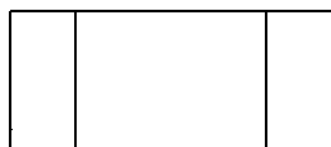
Hình 5.12(DB)



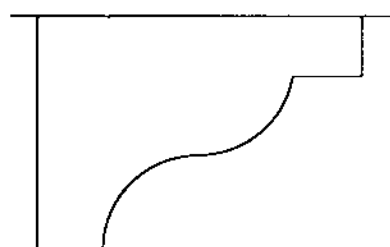
Hình 5.10c(DB)

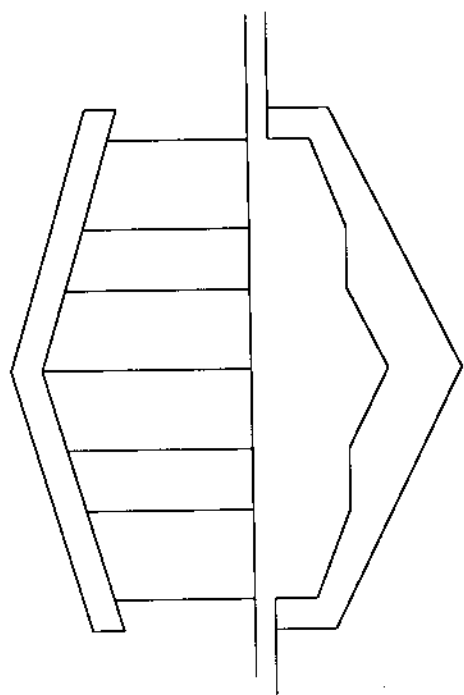


Hình 5.10a(DB)

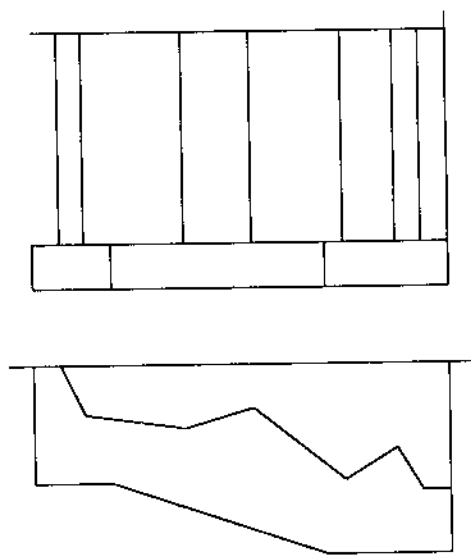


Hình 5.10b(DB)

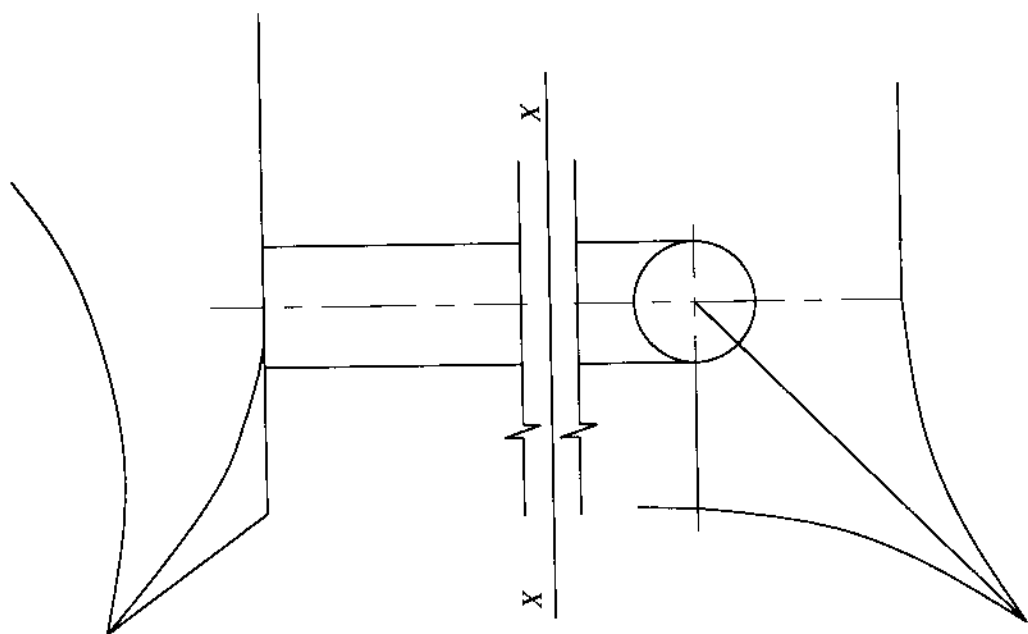




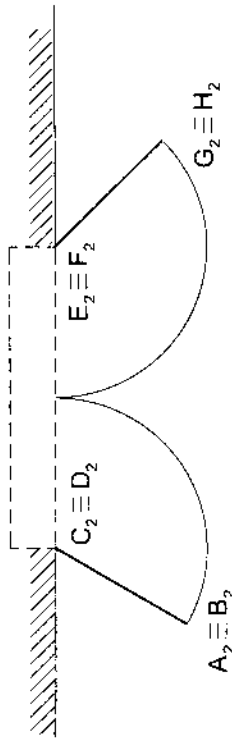
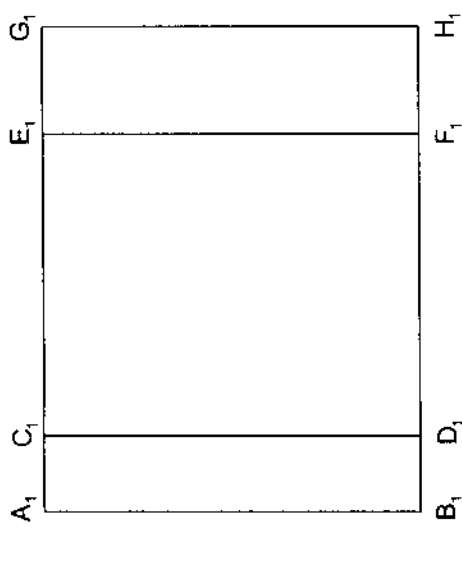
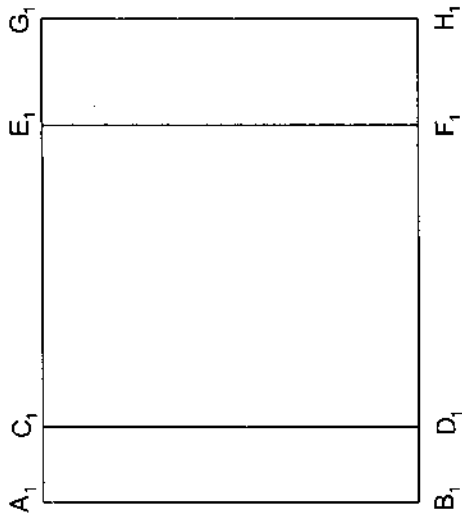
Hình 5.13a(DB)



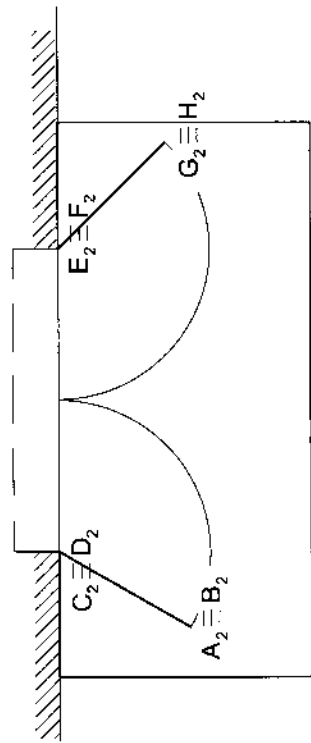
Hình 5.13b(DB)



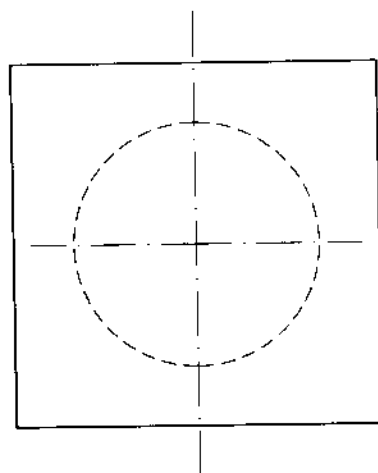
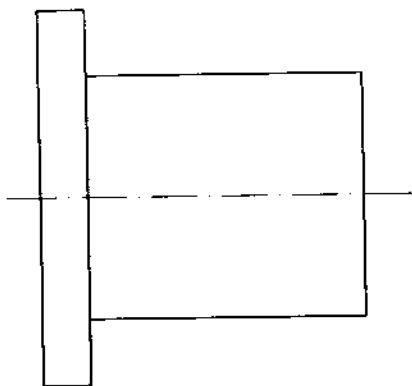
Hình 5.14(DB)



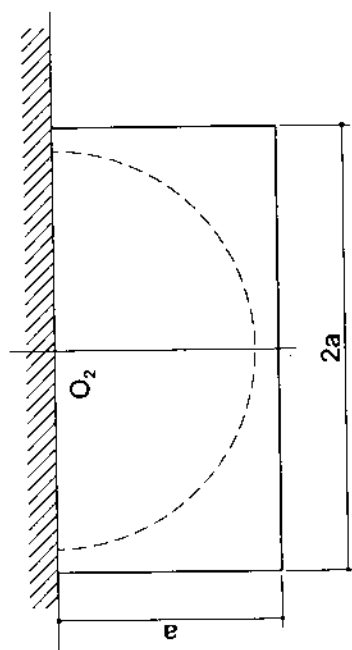
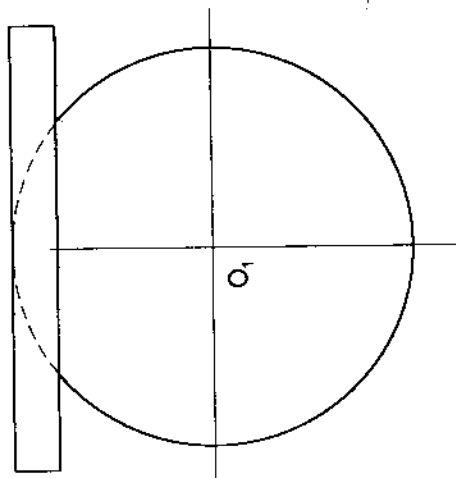
Hình 5.15(DB)



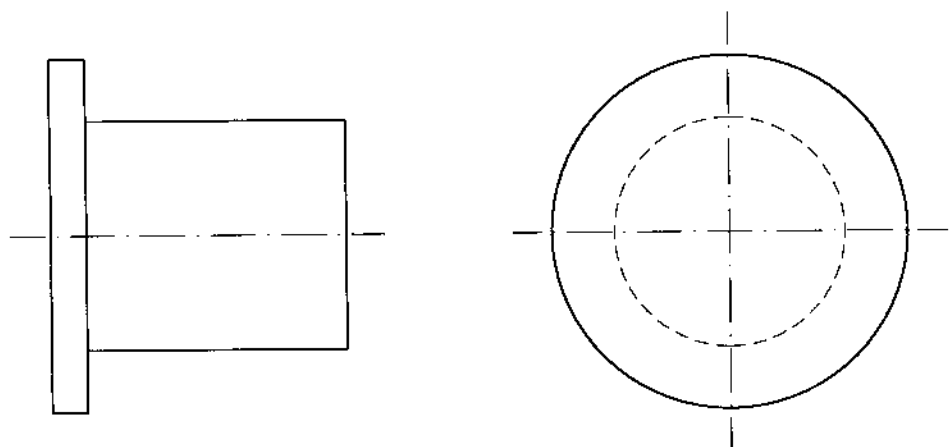
Hình 5.16(DB)



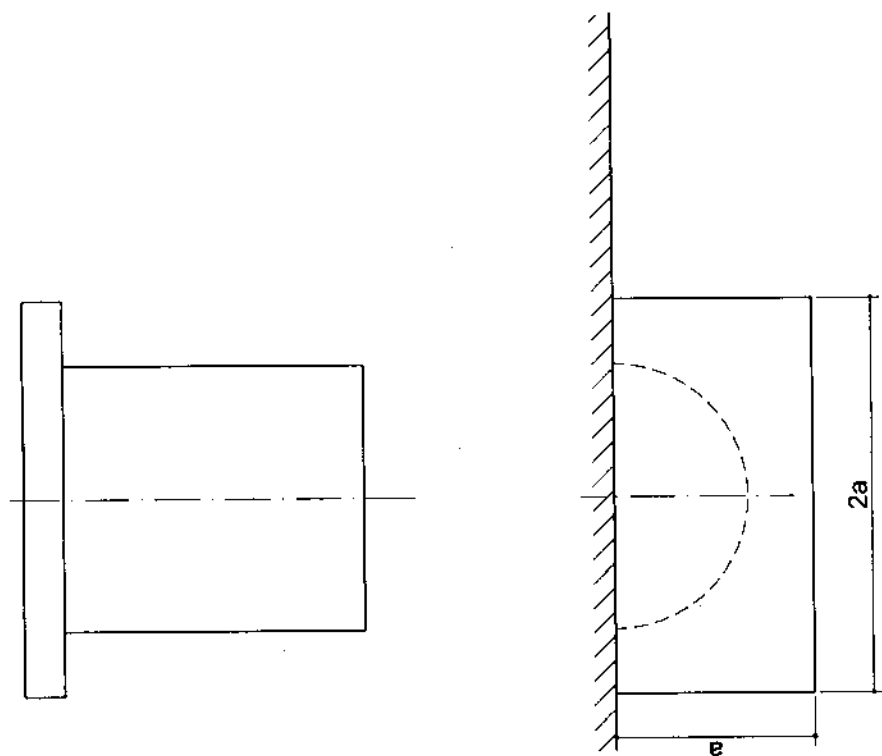
Hình 5.18(DB)



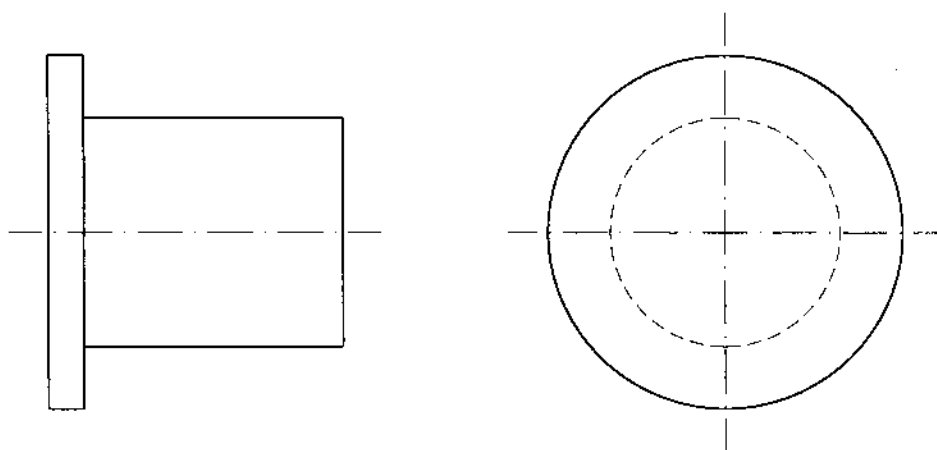
Hình 5.17(DB)



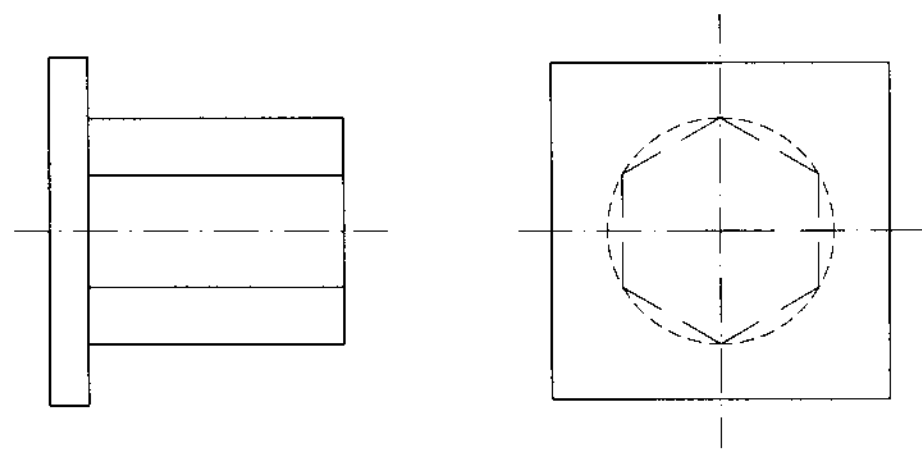
Hình 5.20a(DB)



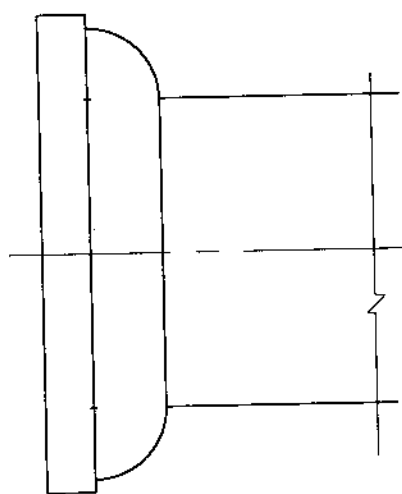
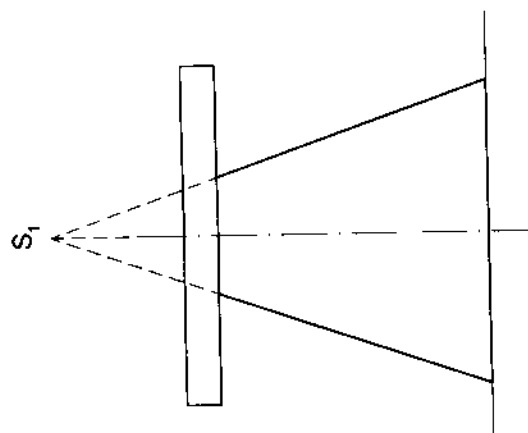
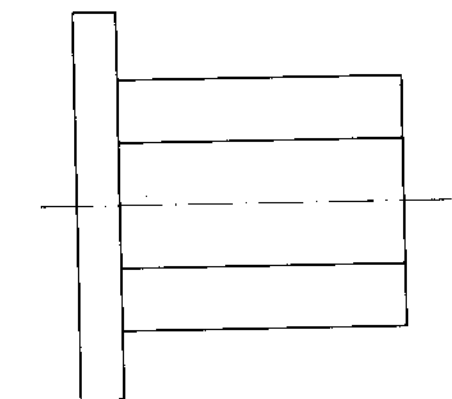
Hình 5.19(DB)



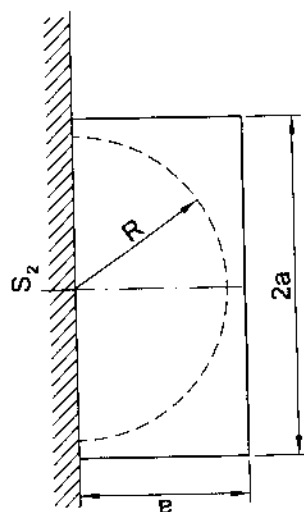
Hình 5.20b(DB)



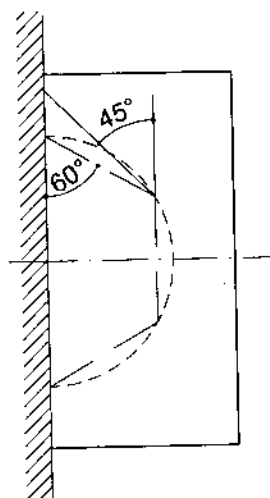
Hình 5.21(DB)



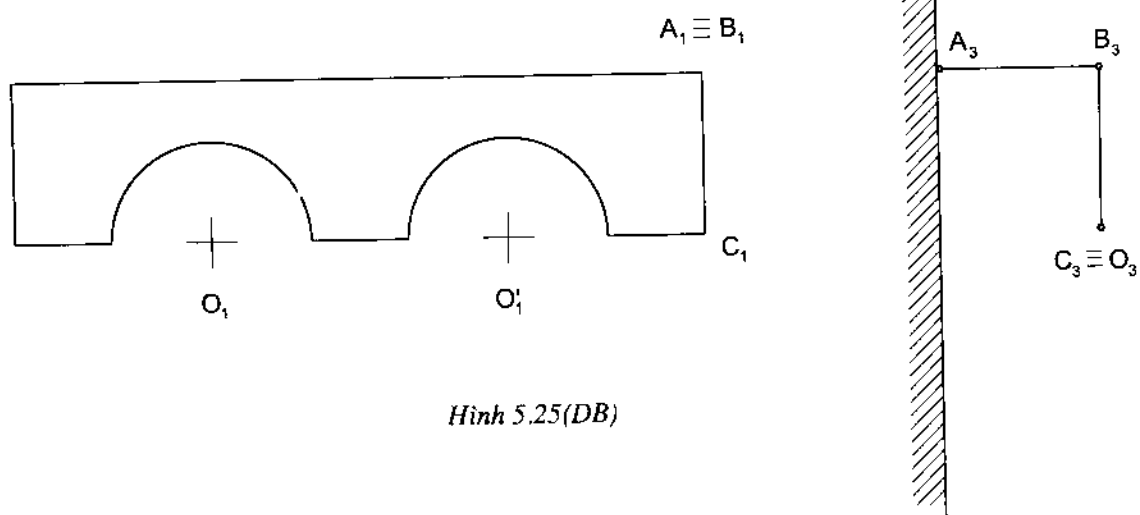
Hình 5.24(DB)



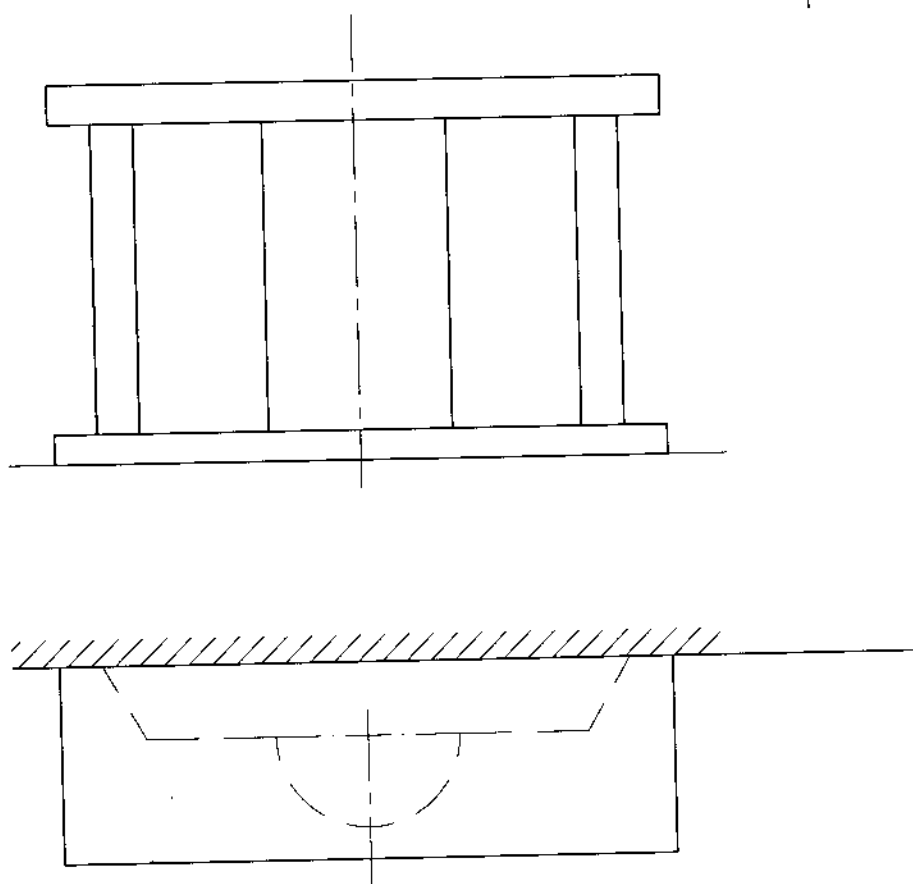
Hình 5.23(DB)



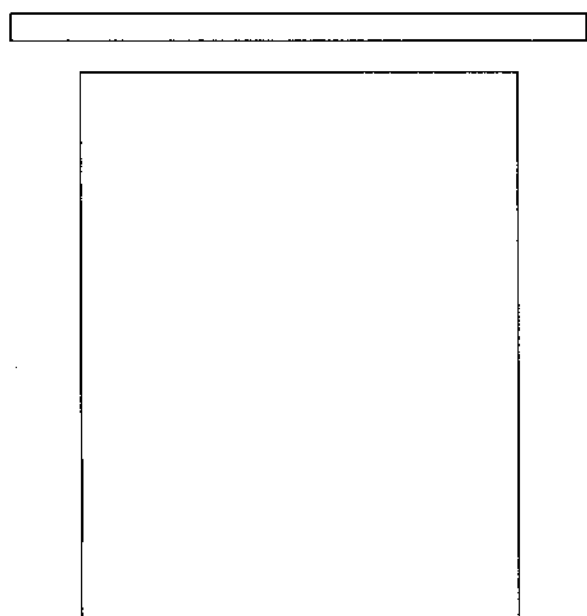
Hình 5.22(DB)



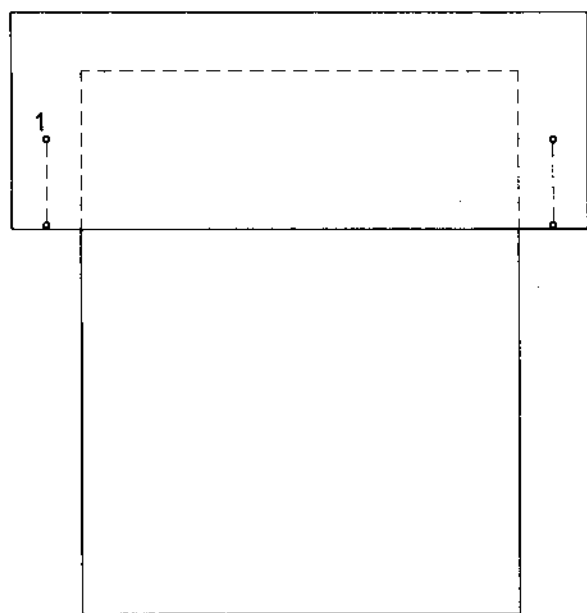
Hình 5.25(DB)



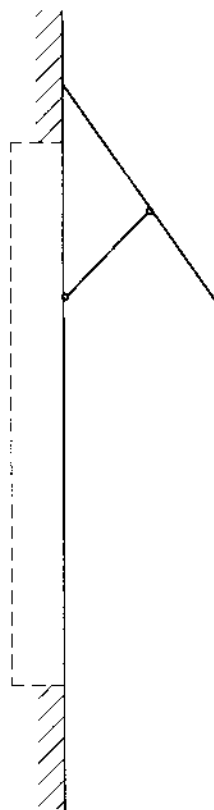
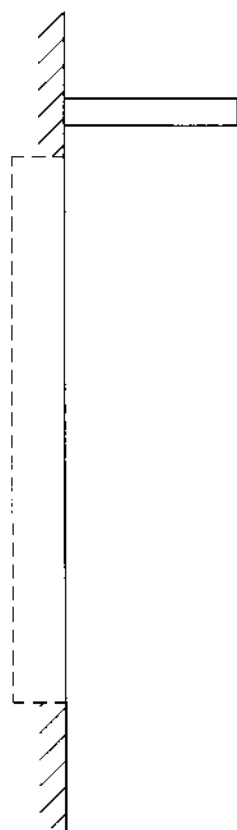
Hình 5.26(DB)

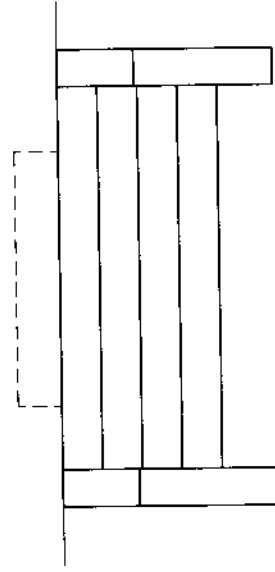
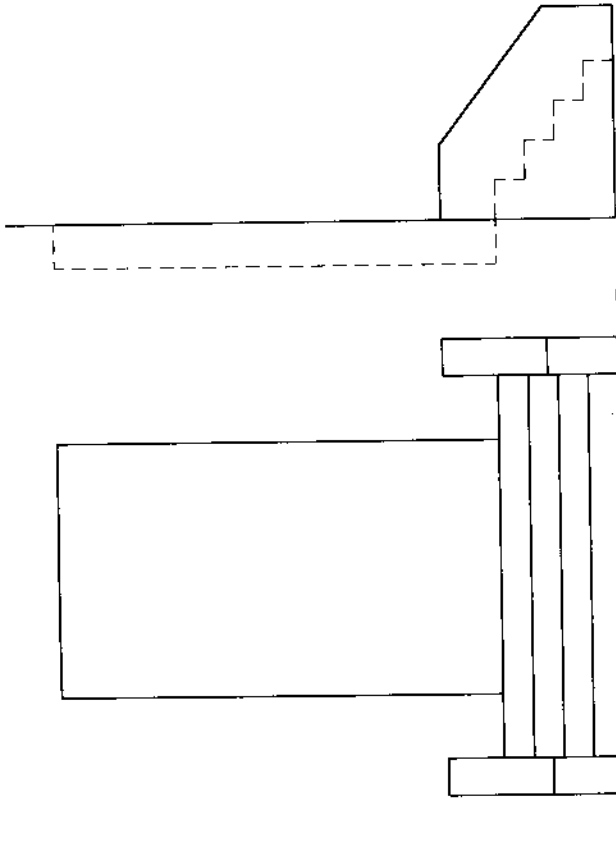


Hình 5.27(DB)

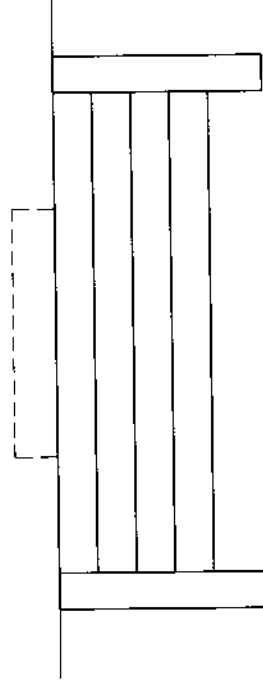
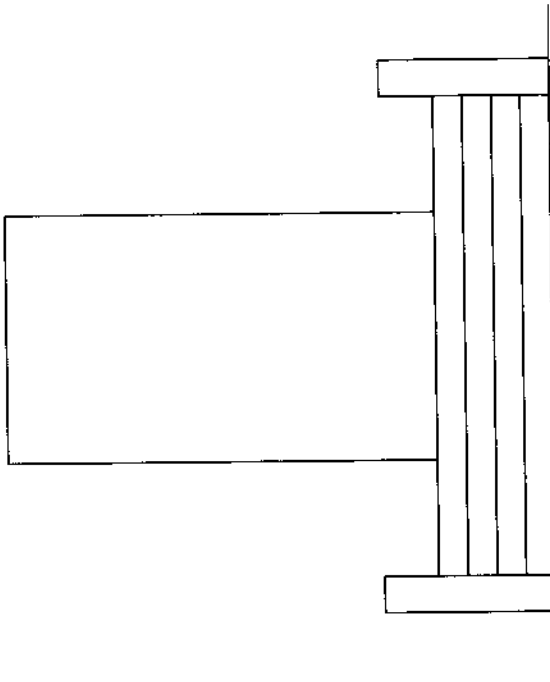


Hình 5.28(DB)

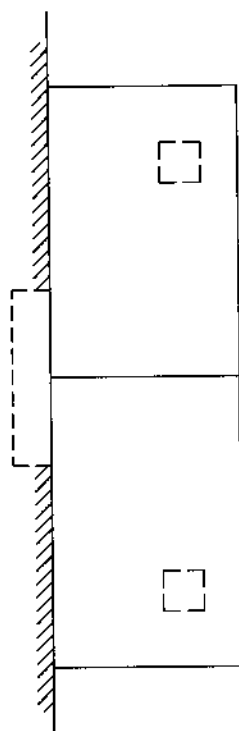
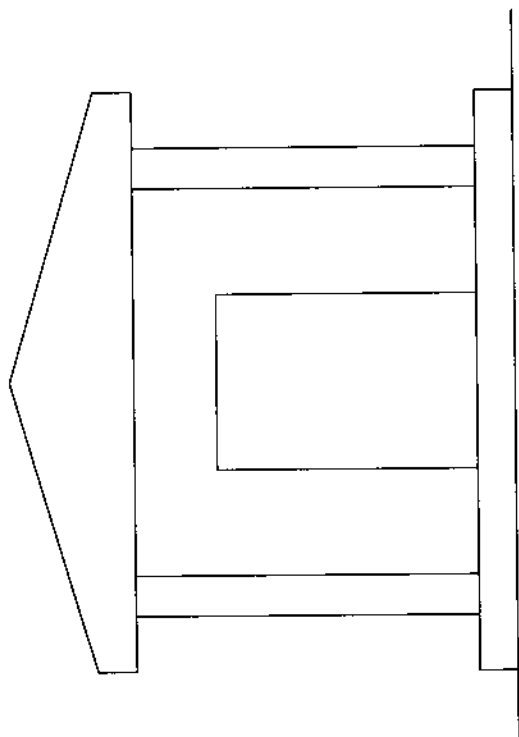




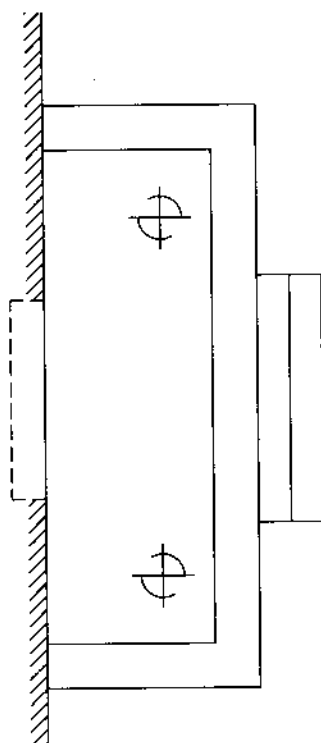
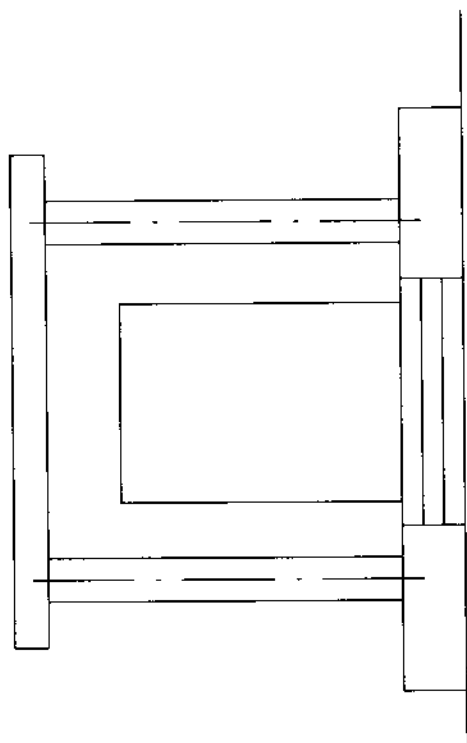
Hình 5.30(DB)



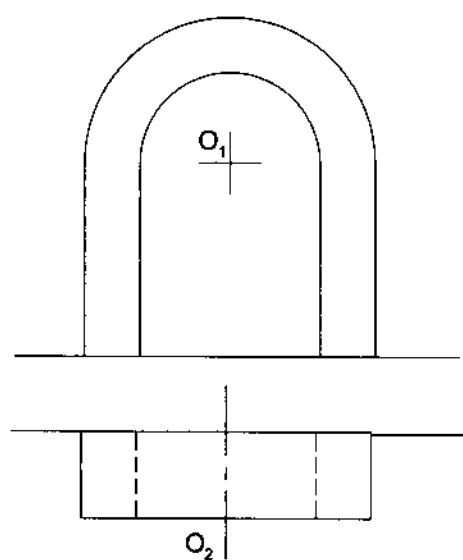
Hình 5.29(DB)



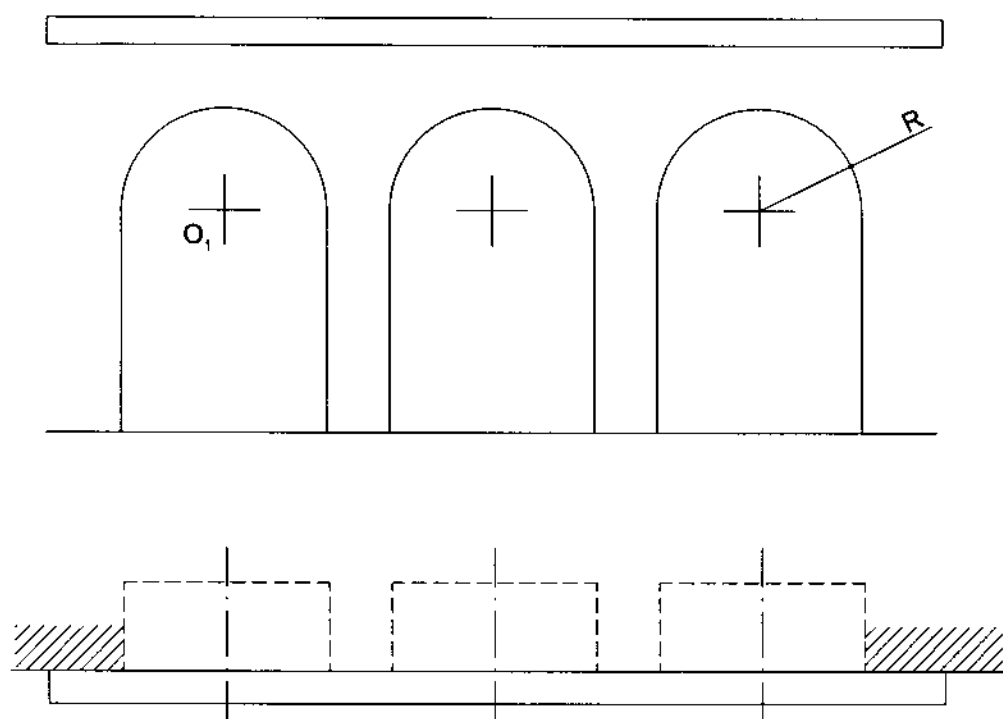
Hình 5.32(DB)



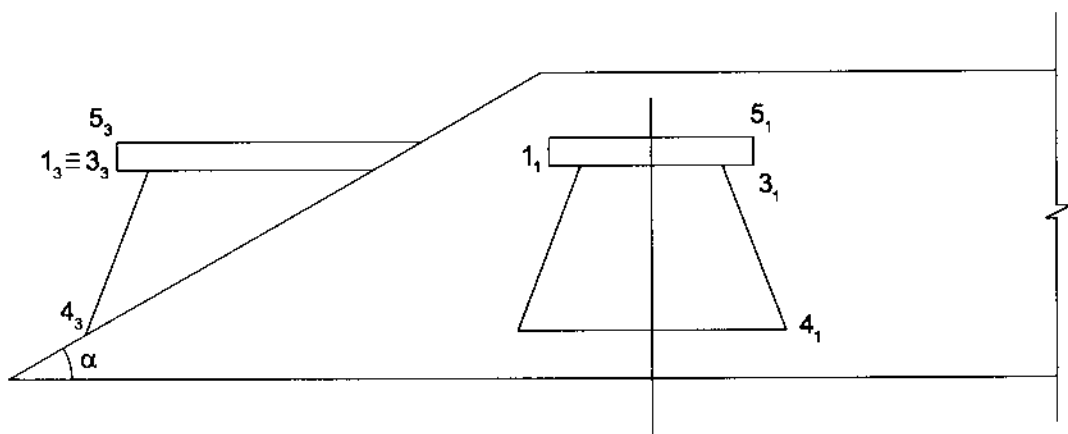
Hình 5.31(DB)



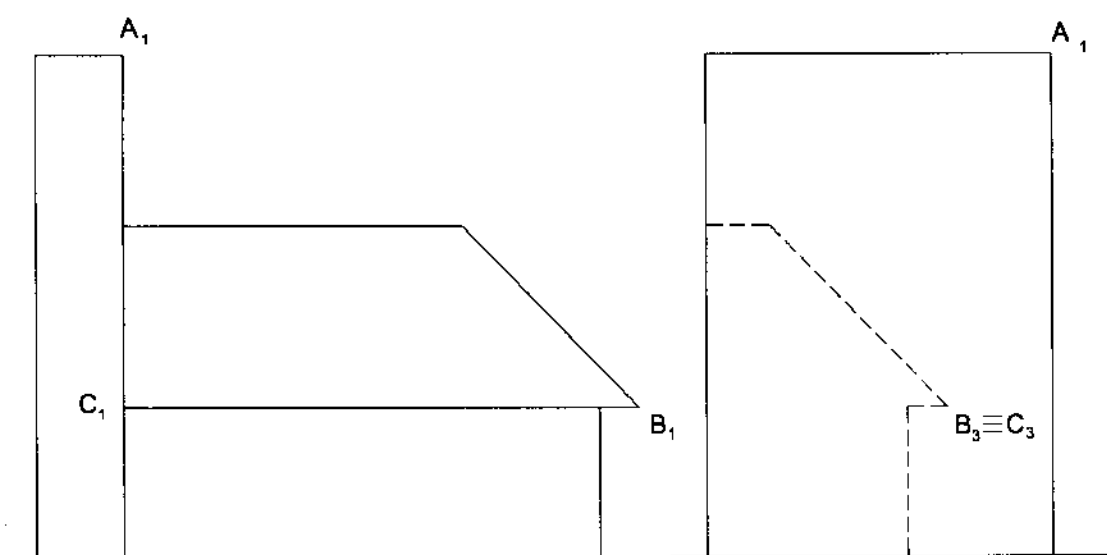
Hình 5.33(DB)



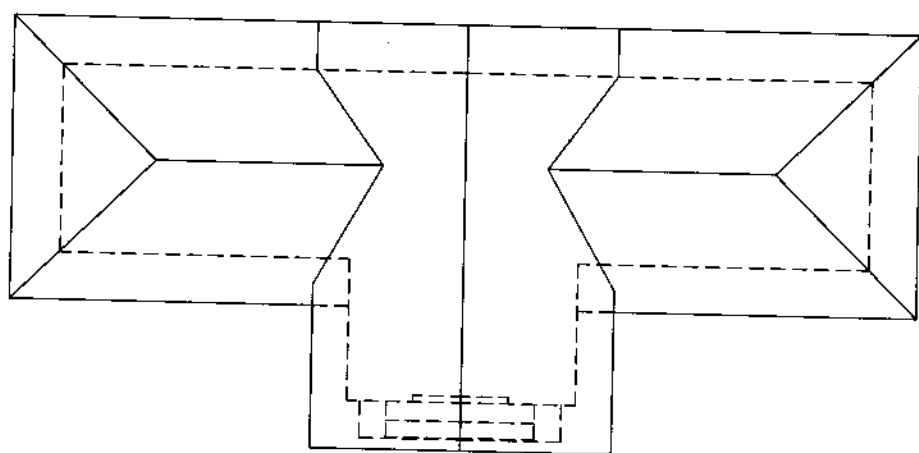
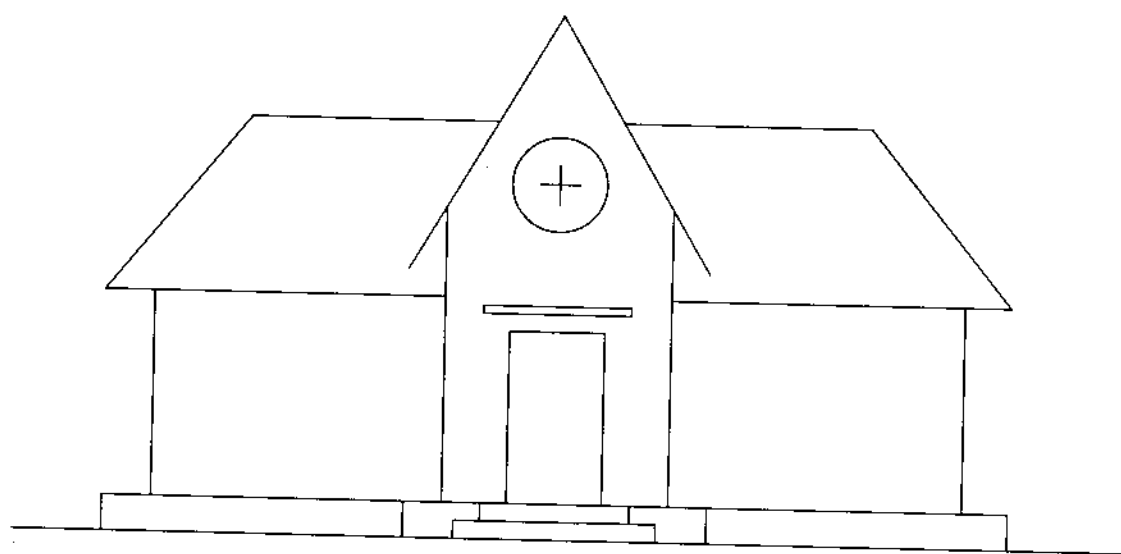
Hình 5.34(DB)



Hình 5.35(DB)



Hình 5.36(DB)



Hình 5.37(DB)

LỜI GIẢI

5.1. LG. Giống như trong lý thuyết đã học: bóng được trình bày trên hình 5.1(LG). Hãy chỉ rõ điểm mắt của bóng trên thân cột.

5.2. LG. Vì mũ cột vuông tiếp xúc với thân cột, nên bóng đổ có đường bao cũng tiếp xúc với A_1B_1 (hình 5.2(LG)).

5.3. LG. Bóng đổ của mũ cột có điểm cao nhất là 2_{1b} (vì sao?). Các điểm 1_{1b} và 3_{1b} cùng nằm trên một đường nằm ngang (vì sao?). Vì sao điểm 4_{1b} gọi là điểm mắt của bóng (hình 5.3a(LG)). Tương tự làm với bài 5.3b - chú ý bóng đổ của mũ cột lên tường đó là cung elíp bắt đầu từ điểm I_1 (khuất trên P_1).

5.4. LG. Các điểm 2_{1b} , 3_{1b} , 5_{1b} nằm trên một đường elip (vì sao?). Tại sao điểm 2_{1b} cao hơn điểm 5_{1b} (hình 5.4(LG)).

5.5. LG. Tương tự làm như bài 5.4, bóng đổ là 2 cung elip, mặt bên phải (CD) có ánh sáng lưới qua, nhưng người ta vẫn vẽ tối cho hình nổi hơn (hình 5.5(LG)). Bóng trên gờ A (1_{1b}) tìm được nhờ dùng tia sáng ngược. Tương tự làm đối với gờ B và C.

5.6. LG. Cạnh thẳng đứng AC đổ bóng lên cổ bậc theo đường thẳng đứng (từ điểm 1 dóng lên). A cho bóng đổ A_{2b} trên mặt bậc thứ 1 bóng của đường chéo AB lên mặt bậc này có được bằng cách kéo dài cạnh AB đến gặp mặt bậc ở điểm D ($D_1 \rightarrow D_2$). Nối D_2 với A_{2b} ; kéo dài gặp cổ bậc thứ 2 tại điểm 2, dóng lên 2_b . Muốn tìm bóng của AB lên cổ bậc của bậc thang thứ hai ta kéo dài mặt cổ bậc đến gặp cạnh AB tại 3. Nối 3_{2b} . Đoạn 3_{2b} cắt hình chiếu đứng của mặt bậc thứ 2 tại điểm 4. Trên mặt bậc của bậc thang thứ 2, ta vẽ đường thẳng 45 song song với đoạn 12. Từ 5 dóng lên 3_b , và tiếp tục làm như trước. Phương pháp tìm bóng mô tả ở trên có thể gọi là "*Phương pháp bóng tại chỗ*", vì kéo dài mặt phẳng mục đích để tìm giao của đường thẳng với mặt phẳng nhận bóng. Bóng của giao trên mặt phẳng này nằm tại chỗ (hình 5.6(LG)).

5.7. LG. Bóng của mép cửa AB là đoạn thẳng $A_{1b}B_{1b}$; bóng của cung tròn BCD là cung elip. Dùng tia ngược để xác định điểm $D_2 \rightarrow D_1 \rightarrow D_{1b}$ (hình 5.7(LG)).

5.8. LG. Mái đua có bóng đổ là 1 cung tròn (phải tạo ra một mũ cột vuông để quy về bài 5.1: vẽ tia ngược $O_2K_2 \rightarrow K_1$; E_{1b} là điểm mắt.

5.9. LG. Chủ yếu là dùng tia ngược, tìm bóng từng điểm của mép cầu thang và tay vịn đổ lên thân trụ (xem bài 5.3); điểm 5_{1b} là điểm mắt.

5.10. LG. Bóng của con sơn (hình 5.10a, b, c(LG))

a) Hình 5.10a: Từ hình chiếu cạnh, suy ra điểm $1'' \rightarrow 1'$.

Từ A_3 vẽ tia sáng $s_3 \rightarrow A' \rightarrow A_{1b}$ (nằm trên hình chiếu đứng tia sáng s_1 vẽ qua A_1). Lấy một điểm khác tương tự như A_3 và làm như trên ta có các điểm bóng nằm trên đường

cong $l'A_{1b}$. Nếu con sơn có chiều rộng hẹp hơn, đường cong bóng ($A'l'$) là một đoạn của đường cong $l'A_{1b}$.

b) Hình 5.10b: Bóng đổ của các điểm B và C tìm được nhờ các tia sáng s_3 vẽ qua B_3, C_3 .

Bóng của đỉnh A đổ lên thân con sơn (A_{1b}) tìm được nhờ điểm 1. Đường sinh bóng bản thân 32 của thân con sơn cũng suy ra từ hình chiếu cạnh. Từ điểm 3_1 suy ra bóng đổ 3_{1b} nhờ điểm 4. Sau điểm 3_{1b} bóng là đoạn thẳng, đó là bóng đổ của 32.

c) Hình 5.10c: Trên hình chiếu cạnh từ các điểm tiếp xúc C_3, E_3 suy ra các đường sinh bóng bản thân trên hình chiếu đứng.

Điểm D cho bóng đổ D_{1b} (nằm trên đường dóng vẽ từ điểm 1).

Phía sau điểm D_{1b} là đoạn thẳng, bóng đổ của đường sinh DC.

Có điểm 3, dễ dàng suy ra điểm 3_{1b} .

5.11. LG. Gờ tường có độ nghiêng song song với đường thẳng m (AB), đó là 1 đường mặt. Vì đường cong (c) nằm trong mặt phẳng phân giác của góc tường, người ta chiếu đoạn AB lên mặt phẳng phân giác theo hướng tia sáng, ta có $B_{1b}A_1$ trên hình chiếu đứng. Đó là hình chiếu phụ của tia sáng trên mặt phẳng phân giác.

Vẽ các đường thẳng song song với $B_{1b}A_1$ và tiếp xúc với (c) tại cao điểm 2_1 ; S và T. Từ đó suy ra các đường sinh giới hạn bóng bản thân.

Từ các điểm 1, 2, 3 suy ra các đường bóng đổ bằng cách vẽ các đường thẳng song song với A_1B_{1b} (hình 5.11(LG)).

5.12. LG. Hình 5.12(LG) vẽ mái nhà có đoạn của mép mái kéo dài (HE) ở phía trên cửa ra vào. Bóng đổ của mép mái được vẽ dễ dàng nhờ các tia S_3 vẽ qua A_1 và B_1 . Bóng đổ trên hình chiếu đứng của lỗ cửa sổ và cửa ra vào được vẽ rất nhanh nhờ biết độ sâu của chúng (chú ý bóng đổ của mép trên xuống sâu hơn).

Bóng đổ của chỗ mái nhô ra được vẽ nhờ điểm E_{1b} và các điểm C_1, D_1 (bóng của chúng nằm tại chỗ).

5.13. LG. a. Bằng phương pháp tia ngược dễ dàng tìm được các điểm bóng đổ trên các gờ tường (ví dụ $c_2 \rightarrow 5_2 \rightarrow 5_1 \rightarrow 5_{1b}$).

b. Cũng bằng phương pháp tia ngược áp dụng trên hình chiếu cạnh ta có bóng đổ của gờ tường bên trái mặt đứng công trình (ví dụ $c_3 \rightarrow 4_3 \rightarrow 4_1 \rightarrow 4_{1b}$). Bóng đổ của đoạn 78 thẳng đứng có độ nghiêng bằng độ nghiêng của mặt phẳng nhận bóng (m_3f_3).

5.14. LG. Bóng của đầu dao đổ lên cột và tường:

Đường cong mép mái đỉnh được đơn giản hoá là một đường cong phẳng (k_1k_2) mà hình chiếu cạnh là k_3 . Sau điểm D, đường cong được xem như thẳng.

Bóng đổ của dao lên thân cột được vẽ nhờ vào các điểm ABCD (trong đó C là điểm mái). Điểm E_{1b} nằm trên đường sinh biên bên trái của cột được vẽ theo tia sáng ngược.

Bóng của đoạn đường cong CD được thể hiện rõ trên tường từ C_1^T đến D_{1b} . Sau D_{1b} bóng là đường thẳng nằm ngang (hình 5.14a(LG)).

Tuỳ theo độ cong của đầu dao mà hình dạng của bóng thay đổi. Hình 5.14b(LG) trình bày bóng của đầu dao có độ cong lớn, bóng đổ của đầu dao A (A_{1b}) có dạng mũi hài (hình 5.14b(LG)).

5.15. LG. Bạn đọc tự tìm hiểu cách vẽ bóng của khuôn cửa.

Ta lưu ý vẽ bóng của hai cánh cửa. Bóng của cánh cửa EGHF là hình bình hành $E_{1b}G_{1b}H_{1b}F_{1b}$. Hai điểm E, F nằm trên tường nên bóng đổ trùng với chính điểm đó. Bóng của cánh cửa ABDC được vẽ từng điểm rồi nối lại. Hình chiếu đứng $A_1B_1D_1C_1$ có bóng bản thân vì cánh cửa này nghiêng với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc lớn hơn 45° .

5.16. LG. Làm tương tự bài 5.15. LG.

Bóng của ô văng được vẽ từng điểm và nối lại.

5.17. LG. Đường ranh giới bản thân α_1 và đường phân cách bóng đổ α_{1b} của mặt cầu vẽ tương tự bài 3.32a. LG.

Chú ý bóng của đáy dưới tấm ô văng đổ lên tường là hình bình hành $D_15_13_{1b}3_1$ và lên mặt cầu là hai cung elip E_1D_{1b} và $D_{1b}F_{1b}1_1$, ở đáy E_1D_{1b} là đoạn thẳng trùng với hình chiếu đứng tia sáng vì cạnh $ED \perp (P_1)$. Và vì mặt đã cho là đối xứng đối với mặt phẳng tia sáng chứa trục thẳng đứng của mặt nên từ E_1 ta dóng ngang sang sẽ được điểm F_{1b} trên trục của cầu. Điểm $2_1 \in \alpha_1$ được vẽ nhờ tia ngược chiều tia sáng xuất phát từ điểm 2_{1b} - giao của α_{1b} với đoạn bóng $2_{1b}3_{1b}$ của cạnh D3 của đáy ô văng.

5.18. LG. Mũ cột có đáy là hình vuông nên có bóng đổ lên thân cột là hai cung elip mà hình chiếu đứng là cung tròn a_{1b} và đoạn thẳng b_{1b} trùng với hình chiếu đứng tia sáng r_1 . Muốn vẽ a_{1b} , từ A_1 vẽ tia 45° tới gặp trục trụ tại O_1 . Lấy O_1 làm tâm vẽ một đường tròn bán kính bằng bán kính trụ. Tia 45° qua A_1 cắt đường tròn vừa vẽ tại A_{1b} và 1_1 . Điểm A_{1b} - bóng đổ của A, là giao điểm của a_{1b} và $b_{1b} \equiv r_1$. Đường thẳng đứng c_1 đi qua điểm 1_1 là đường sinh bóng bản thân của trụ.

5.19. LG. Bóng đổ của tấm nắp lên nửa trụ vẽ tương tự hình 5.18(LG).

Bóng của tấm nắp lên mặt tường (phần gạch gạch) vẽ từng điểm như E_{1b} , F_{1b} và thấy rõ trên hình vẽ.

Chú ý: Bóng của nửa vòng tròn đáy trụ v được vẽ theo tương ứng ảnh giữa nửa elíp bóng đổ e và nửa vòng tròn chập v_c của v (tương tự trên hình 3.30(LG)).

5.20a. LG. Sử dụng tường Pilê (xem lại phần lý thuyết):

- Vẽ nửa vòng tròn tâm O_1 , bán kính O_11_1 (gọi là vòng tròn Pilê). Vòng tròn Pilê cắt đường sinh bóng bản thân của cột trụ tại A_{1b} ; cắt đường thẳng thẳng đứng đi qua điểm giữa của bán kính bên phải của thân trụ tại điểm 3_1 ; cắt trục trụ tại 4_1 .

- Từ điểm 3_1 và 4_1 vẽ các tia ngược chiều tia sáng ta được điểm B_{1b} trên trục trụ và điểm C_{1b} trên đường sinh đi qua điểm 5_1 (5_1 đối xứng với 1_1 qua trục của cột trụ).

Từ B_{1b} dóng ngang sang được điểm D_{1b} .

- Nối các điểm $A_{1b} - B_{1b} - C_{1b} - D_{1b}$ ta được đường phân cách bóng đổ của mũ cột hình trụ đổ lên thân cột trụ.

Chú ý: Hai điểm D_{1b} và B_{1b} có độ cao bằng nhau. Điểm C_{1b} là điểm cao nhất của đường phân cách bóng đổ cần tìm.

5.20b. LG. Sử dụng tia sáng ngược chiều.

- Vẽ hai nửa vòng tròn đáy v_0, v'_2 . Từ O_1 vẽ tia 45° suy ra hai đường sinh bóng bản thân a_1, b_1 .

- Từ $B_0 \in v_0$ vẽ tia 45° được $B'_2 \in v'_2$, dóng xuống v_1 được B_1 . Suy ra B_{1b} bằng tia 45° qua B_1 . Tương tự, tia $45^\circ - O_1C'_2$ cho ta điểm C_{1b} . Do tính đối xứng của hình đối với mặt phẳng tia sáng qua trục, từ B_{1b} dóng ngang có D_{1b} . Để xác định $A_{1b} \in b_1$, vẽ tia $45^\circ - A_0A'_2$ rồi suy ra A_{1b} .

5.21. LG. Mặt bên phải vì nghiêng 60° so với π_1 nên có bóng bản thân.

Vì $a // x$ nên bóng đổ a_{1b} lặp lại hình chiếu bằng của lăng trụ thẳng đứng. Vẽ qua A_{1b} vẽ hình chiếu đứng tia sáng tới gặp trục hình lăng trụ tại O'_1 . Tiếp đó rồi lục giác đáy lăng trụ lên tâm O'_1 , ta có bóng đổ của A_1 là a_{1b} một phần của lục giác đáy. Bóng của cạnh b là b_{1b} song song với hình chiếu đứng tia sáng.

5.22. LG. Bóng a_{1b} và b_{1b} vẽ tương tự như trên hình 5.21(LG). Bóng đổ lên mặt tường (phần gạch gạch) của hình đã cho được vẽ từng điểm $1_{1b}, 2_{1b}, 3_{1b}$ và $6_{1b}, 7_{1b}$ và thấy rõ trên hình 5.21(LG).

5.23. LG. Trước hết vẽ nửa elip bóng đổ c của nửa vòng tròn đáy v_1 . Muốn vậy, vẽ hình chập v_c của v . Ta đã biết v_c và c nằm trong tương ứng ảnh phối cảnh trục m , hướng là $s // m$ (xem lại bài 3.28. LG).

Để vẽ đường sinh bóng bản thân S_13_1 , từ điểm $1 = S_1O_1 \cap v_c$ vẽ tia $12 // S_16_1$, tiếp đó vẽ tia 23_0 nghiêng 45° so với x ($3_0 \in v_c$). Từ 3_0 dóng thẳng đứng có 3_1 . Dễ dàng suy ra S_13_{1b} - bóng đổ của đường sinh bóng S_13_1 . Điểm 3_{1b} chính là tiếp điểm của e và tia S_13_{1b} .

Điểm $D_{1b} \in S_13_1$ được suy từ tia ngược chiều tia sáng xuất phát từ D'_{1b} - giao điểm của tia S_13_{1b} với đường $E_{1b}D'_{1b}$ (bóng của cạnh AE đổ lên tường).

Điểm C_{1b} suy từ điểm B_1 dóng ngang sang do tính đối xứng của hình đã cho đối với mặt phẳng tia sáng chứa trục trụ.

Điểm A_{1b} (bóng của A đổ lên nón) - giao của tia sáng qua A cắt đường sinh $S4$. Chú ý đường sinh $S4$ thuộc mặt phẳng tia sáng chứa trục trụ và điểm A .

5.24. LG. Đường ranh giới bóng bản thân trên phân trụ (a_{1b}) và xuyên ($1_1 2_1 3_1 4_1$) vẽ nhờ nón, trụ tiếp xúc.

Đường phân cách bóng đổ vẽ theo phương pháp mặt phẳng tia sáng cắt gồm: trên phân xuyên là đoạn thẳng song song với hình chiếu đứng tia sáng qua điểm 5_1 và cung cong $6_1 7_1 8_1$. Điểm 6_1 suy từ điểm 5_1 theo đường dóng ngang (vì hình đã cho đối xứng đối với mặt phẳng tia sáng chứa trục trụ), ở đây có vẽ một số điểm trung gian, ví dụ hai điểm $7_1, 8_1$.

Đường phân cách bóng đổ trên phân trụ gồm đoạn thẳng song song với hình chiếu đứng tia sáng tới điểm A_{1b} , và hai cung: cung tròn $A_{1b} B_{1b}$ và cung cong $B_{1b} 3_{1b} 4_{1b}$ mà cách vẽ thấy rõ trên hình, ví dụ điểm 3_{1b} .

5.26. LG. Bóng của cạnh AB ($AB \parallel x$) đổ lên mặt chính công trình là đoạn $A_{1b} A'_{1b} E'_{1b} D_{1b}$ và một cung tròn tâm O_{1b} . Đó là đường lặp lại hình chiếu bằng của mặt hứng bóng $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2$. Điểm B_{1b}, C_{1b} được vẽ nhờ hình chiếu đứng và hình chiếu bằng tia sáng.

5.27. LG. Bóng trên hình chiếu đứng được vẽ từng điểm như điểm A: hình chiếu cạnh tia sáng qua A_3 cắt tường hứng bóng tại A_{3b} ; từ A_{3b} dóng ngang sang gặp hình chiếu đứng tia sáng qua A_1 tại A_{1b} .

- Bóng của cạnh AB là đoạn gãy khúc $A_{1b} C_{1b} D_{1b} B_{1b}$, ở đây $A_{1b} C_{1b} \parallel D_{1b} B_{1b} \parallel A_1 B_1$ vì AB song song với hai mặt tường hứng bóng song song nhau. Đoạn $C_{1b} D_{1b}$ có độ dài bằng khoảng cách hai tường hứng bóng.

- Các điểm khác vẽ tương tự.

5.28. LG.

- Điểm A_1 và A'_1 nằm trên mặt hứng bóng nên bóng đổ trùng với chúng.

- Bóng của B' là B'_{13} được vẽ nhờ hình chiếu cạnh và hình chiếu đứng tia sáng (xem lại bài 5.37. LG).

- Bóng của cạnh BB_1 là $B_{1b} 1_1 2_1 B'_{1b}$ (xem bài 5.37. LG).

- Đoạn bóng $A'_1 B'_{1b} \parallel B_{1b} 3_1$ vì $A'_1 B'_1 \parallel A_1 B_1$ và hai mặt tường hứng bóng cũng song song với các cạnh đó.

5.29. LG. Bóng trên bậc thêm: vẽ vết bằng của mặt phẳng tia sáng chứa cạnh thẳng đứng BC, tức là từ $B_2 \equiv C_2$ vẽ tia 45° rồi suy ra giao tuyến của mặt phẳng tia sáng này với mặt bậc thêm.

Bóng của điểm B là B_{1b}, B_{2b} . Bóng của tia chiếu đứng BD là đường nghiêng 45° so với x.

5.30. LG. Dùng hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh tia sáng để vẽ bóng cho bậc thêm.

5.31. LG. - Bóng của ô văng đổ lên hai tường được vẽ như trên bài 5.27. LG.

- Bóng của ô văng đổ lên thân cột trụ là một cung tròn tâm 1_{1b} xác định bằng tia ngược và thấy rõ trên hình 5.31(LG).

5.32. LG. Cách vẽ tương tự như bài 5.31. Ở đây bóng đổ từ ô văng lên cột lăng trụ đáy vuông là đoạn thẳng nằm ngang đi qua điểm 1_1 . Điểm 1_1 suy từ giao điểm 1_{1b} của bóng cột và bóng a_{1b} của a_1 theo tia ngược chiều tia sáng $1_{1b}1_1$.

5.33. LG. - Bóng của vòm đổ vào tường vẽ như bài 5.25.

- Đường sinh bóng bản thân AA' được vẽ nhờ tia 45° xuất phát từ O_1 . Bóng đổ của AA' là đoạn A_1A_{1b} trùng với hình chiếu đứng tia sáng vì $AA' \perp (P_1)$.

- Bóng đổ của cung tròn A_1B_1 cũng là cung tròn $A_{1b}B_{1b}$ tâm là O_{1b} , bán kính bằng bán kính R của vòm.

5.34. LG. - Bóng đổ của phần vòm tròn là một cung tròn, tâm là O_{1b} (bóng đổ của điểm O), bán kính bằng bán kính R của vòm tròn.

Đoạn thẳng a song song với tường hứng bóng nên bóng đổ $a_{1b} // a_1$.

5.35. LG. Các bài trước thường vẽ bóng bằng dùng các hình chiếu tia sáng qua hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đề bài ra. Bài này (và bài 5.36. LG) trình bày cách dùng hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh của tia sáng. Ví dụ để vẽ bóng 1_{1b} , qua 1_3 vẽ hình chiếu cạnh tia sáng tới gặp mép tường tại $1'_3$; từ $1'_3$ dóng ngang sang gặp hình chiếu đứng tia sáng qua 1_1 tại điểm 1_{1b} cần vẽ. Các điểm khác vẽ tương tự.

Chú ý: Đoạn thẳng 35 (3_15_1) là đoạn thẳng đứng nên bóng đổ $3_{1b}5_{1b}$ của nó là $3_{1b}5_{1b}$ nghiêng một góc bằng góc nghiêng của mái nhà, ở đây là α .

5.36. LG. Cũng như bài 3.35. LG, ta dùng hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh tia sáng để vẽ bóng. Cụ thể:

- Từ A_3 vẽ hình chiếu cạnh tia sáng tới cắt hình chiếu cạnh mái nhà tại A_{3b} .
- Từ A_{3b} dóng ngang sang gặp hình chiếu đứng tia sáng qua A_1 tại A_{1b} .

Điểm bóng B_{1b} được vẽ tương tự như A_{1b} .

Đường phân cách bóng của lăng trụ đổ mái nhà là $C_{1b}A_{1b}1_{1b}$.

5.37. LG.

1) Trên hình chiếu đứng:

- Bóng của giọt giang $a(a_1)$ là $a_{1b} // a_1$ vì a song song với mặt tường hứng bóng (vẽ từ tia sáng qua A). Tương tự bóng của b là $b_{1b} // b_1$.

- Bóng của cạnh tường c_1 là $c_{1b} // c_1$ vì c song song với mặt tường hứng bóng.

- Bóng của cạnh mái BD đổ lên tường bên phải là $B_{1b}1_{1b} // B_1D_1$ vì BD song song với mặt tường hứng bóng.

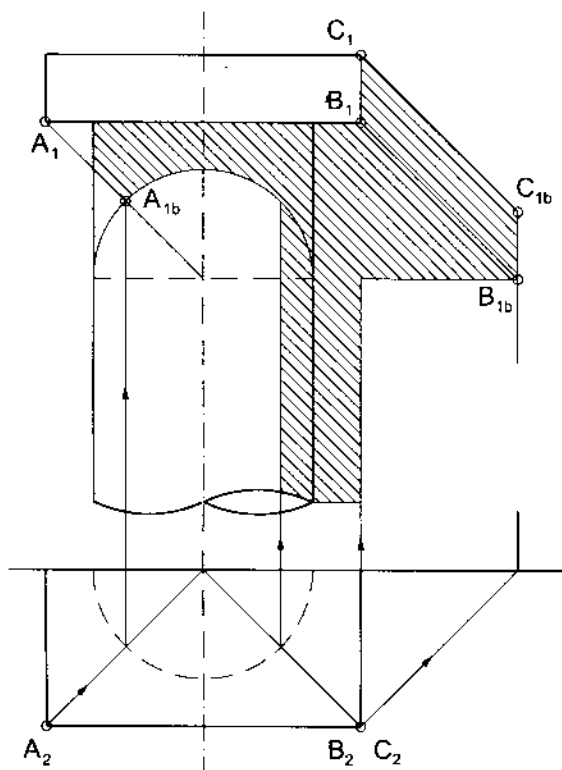
- Bóng của điểm D đổ lên mái phải là D_{1b} được vẽ như giao điểm của tia sáng qua D với mái hứng bóng.

Bóng của cạnh nóc DD' là $E_{1b}D_{1b}$ nghiêng 45° vì $DD' \perp (P_1)$.

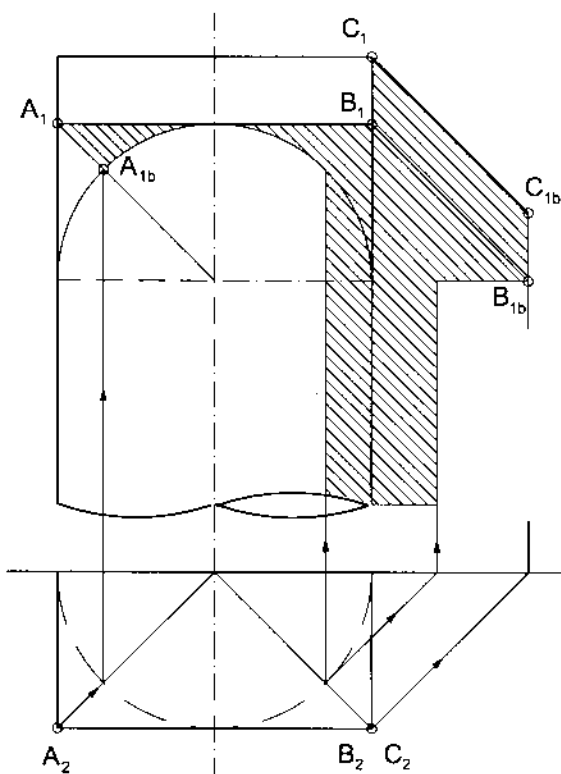
- Đoạn bóng $D_{1b}l_{1b}$ là bóng của cạnh BD đổ lên mái phải mà điểm l_{1b} suy từ tia ngược chiếu tia sáng xuất phát từ điểm $l_{1b} = a_{1b} \cap B_{1b}l_{1b}$.

2) Trên hình chiếu bằng: Dóng từ hình chiếu đứng bóng đổ xuống ta được hình chiếu bằng bóng đổ cần tìm.

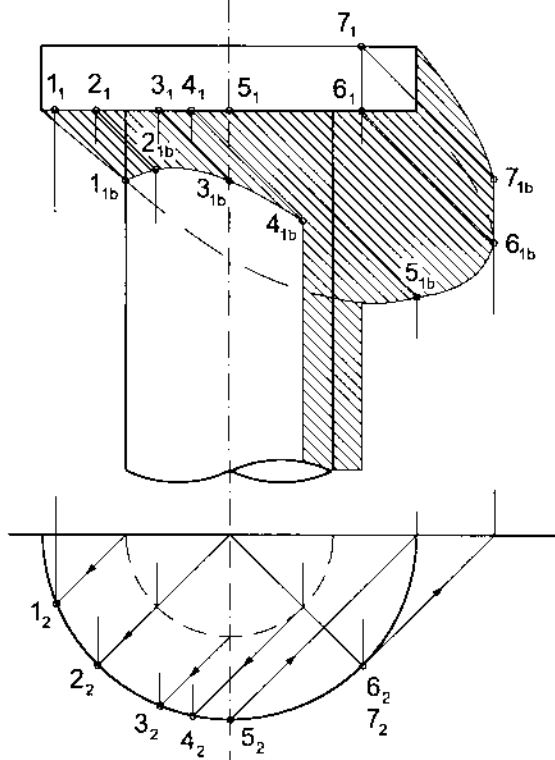
3) Phần vẽ bóng của cửa, ô văng và bậc thêm bạn đọc có thể tham khảo cách vẽ trên các bài 5.27. LG, 5.29. LG. Bạn đọc có thể xem lại và tự vẽ.



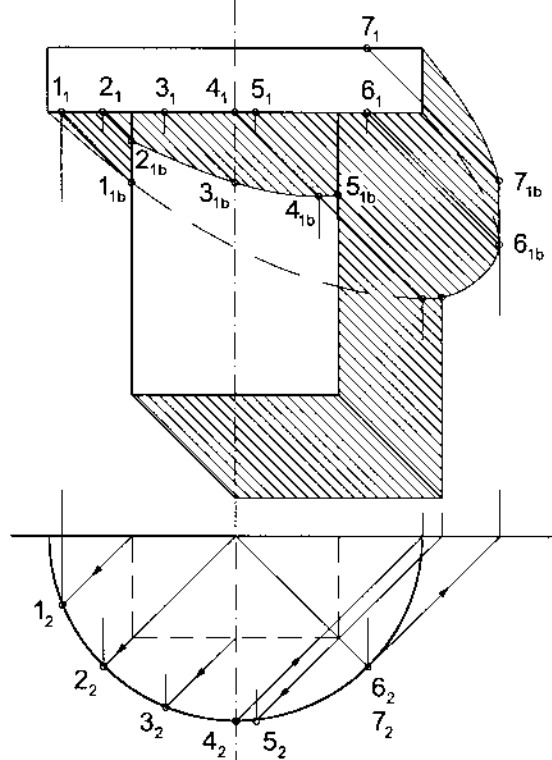
Hình 5.1(LG)



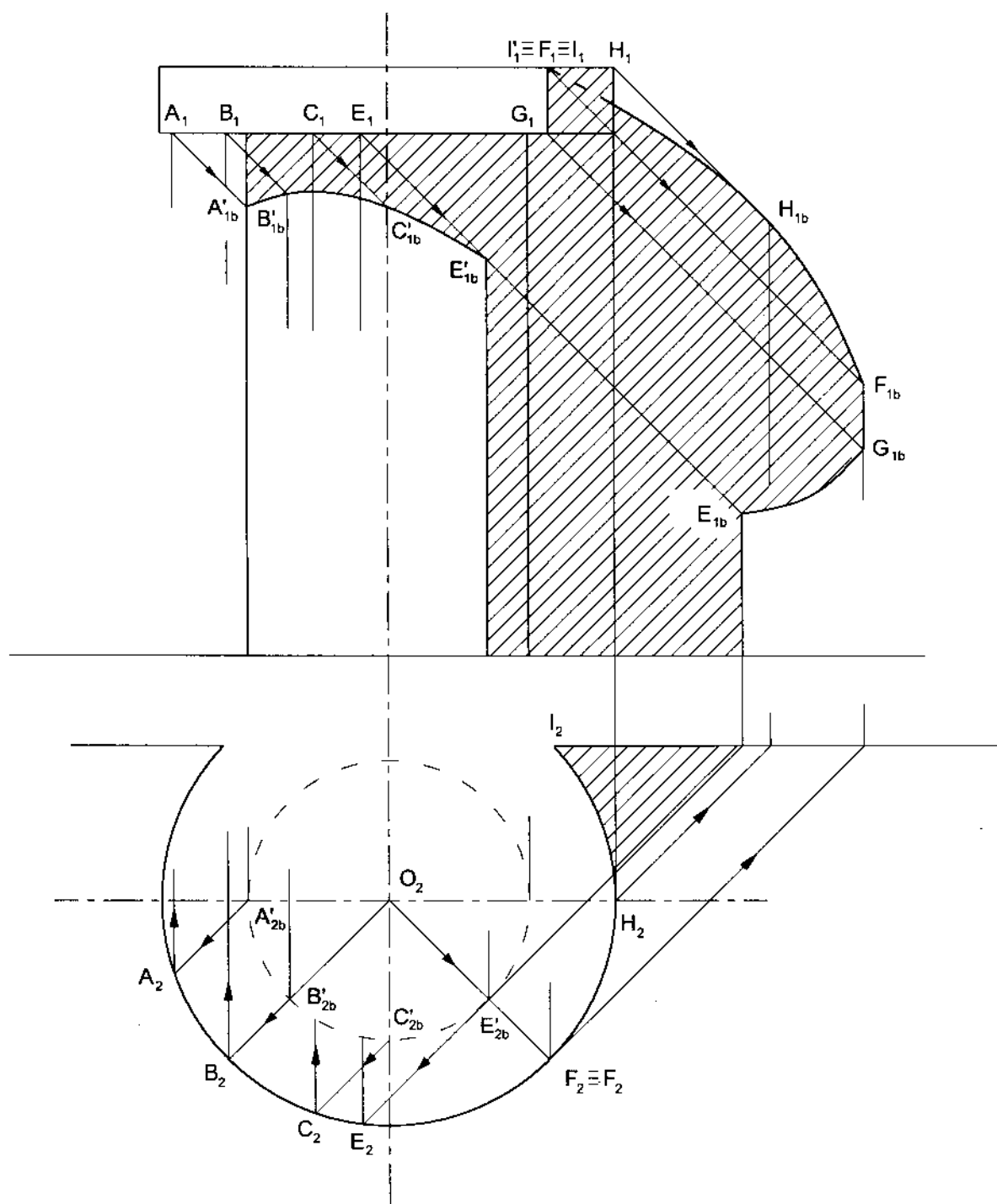
Hình 5.2(LG)



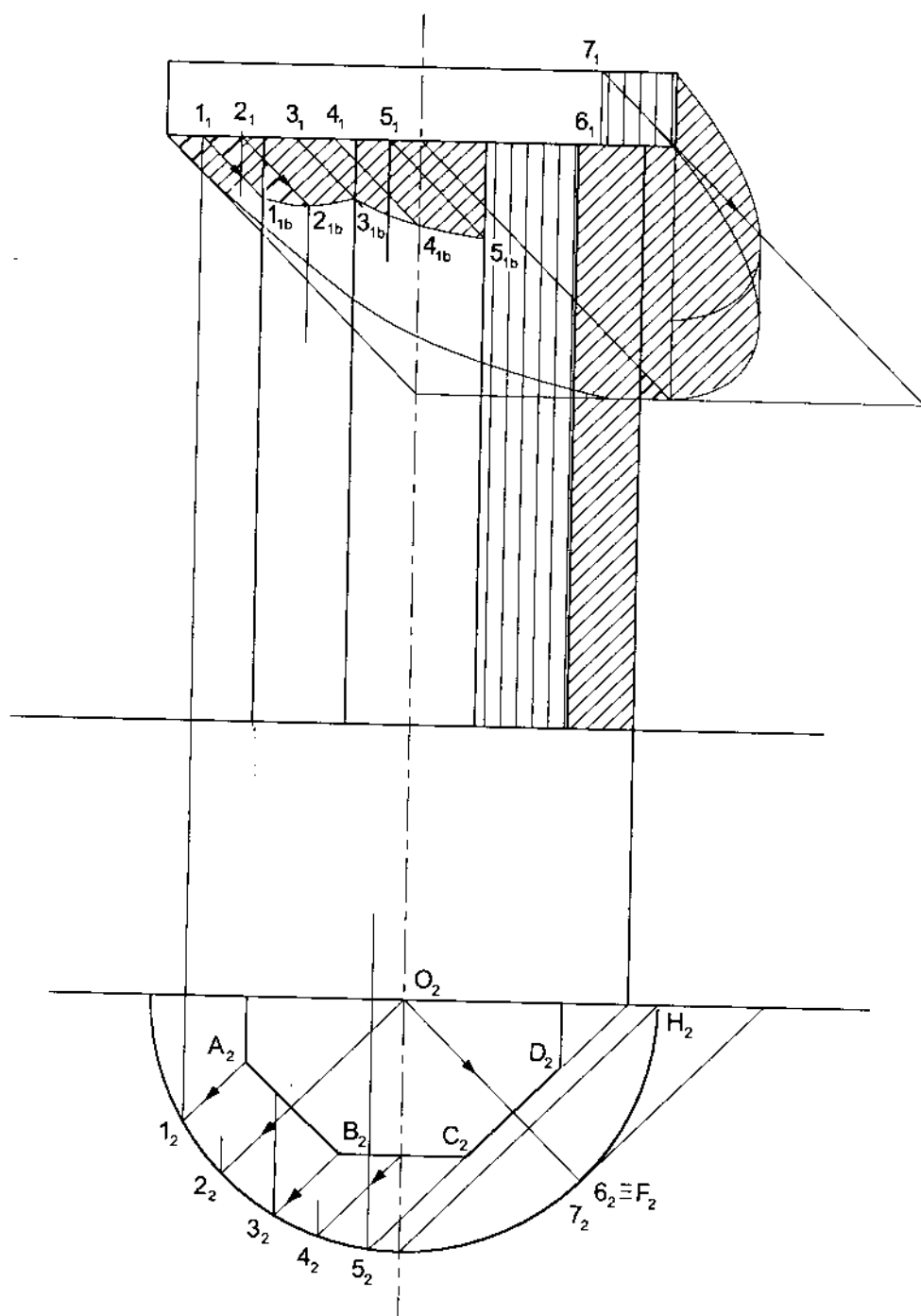
Hình 5.3(LG)



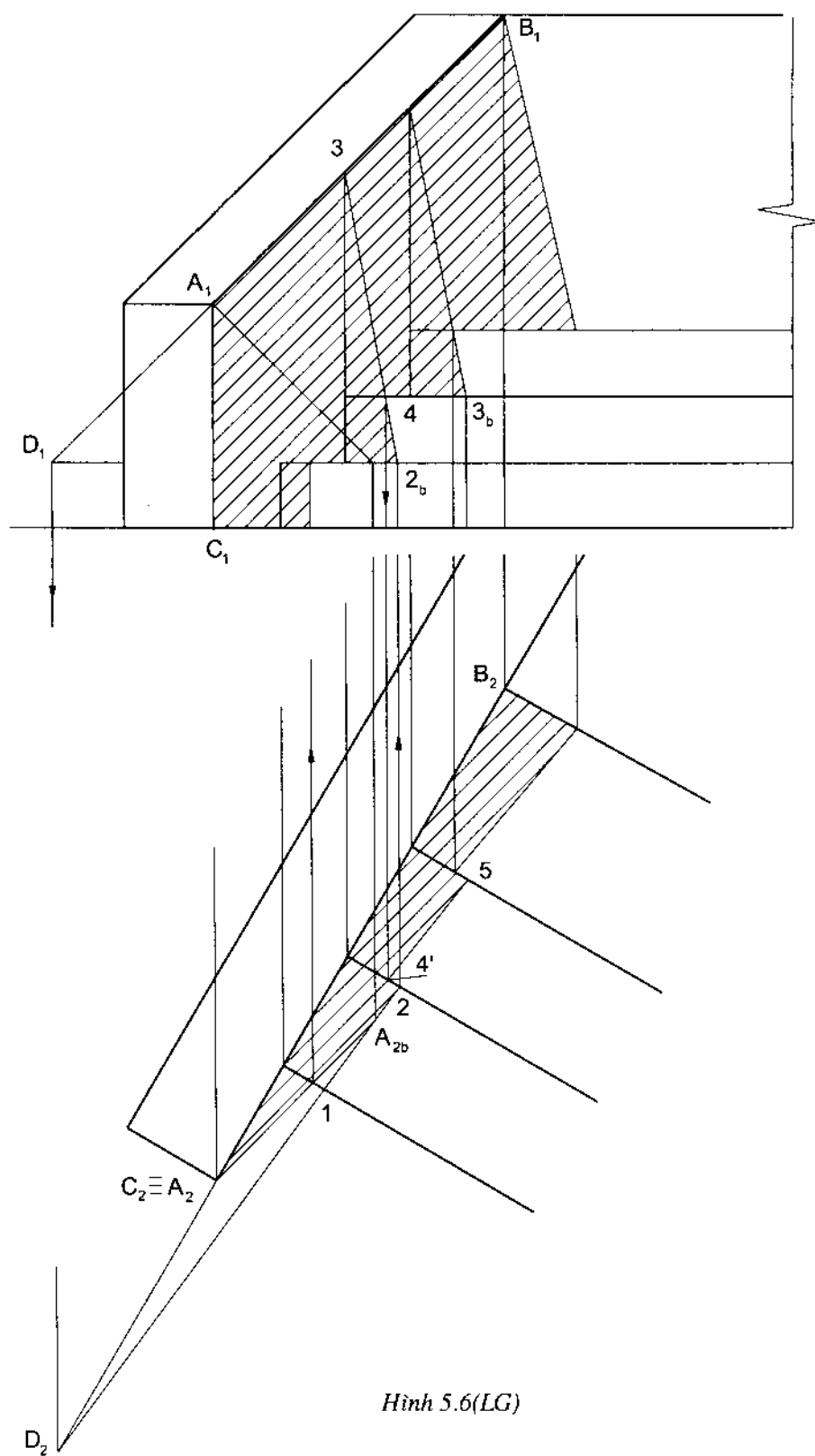
Hình 5.4(LG)



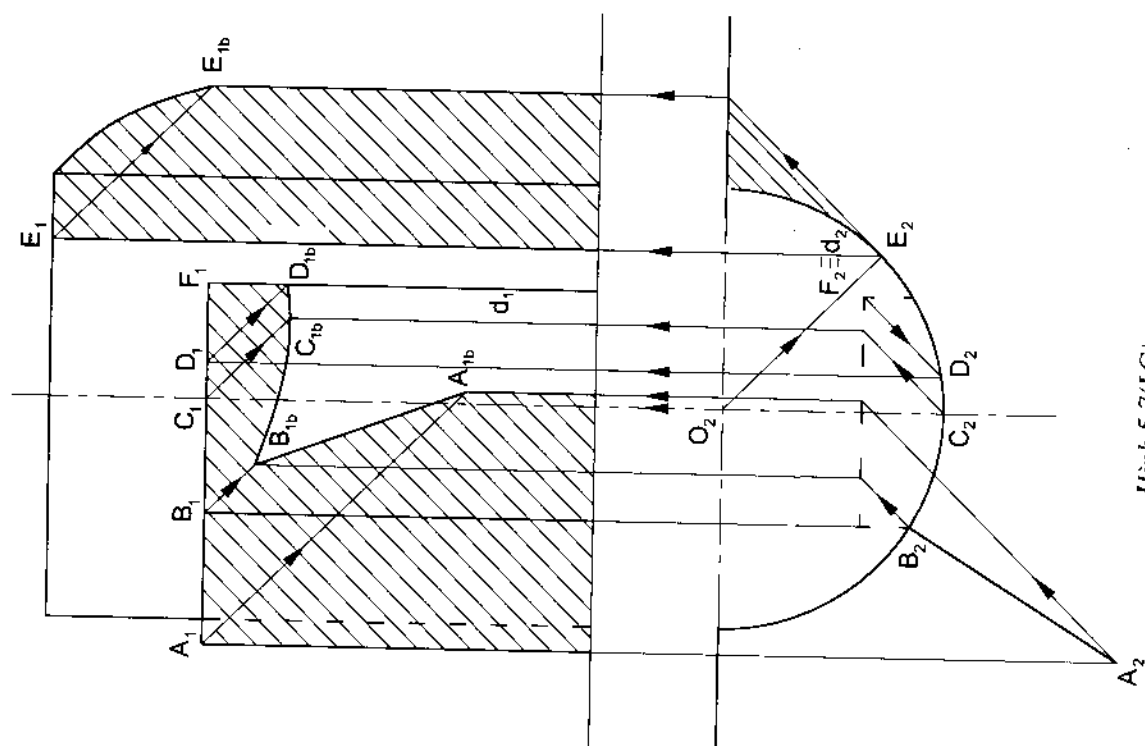
Hình 5.3b(LG)



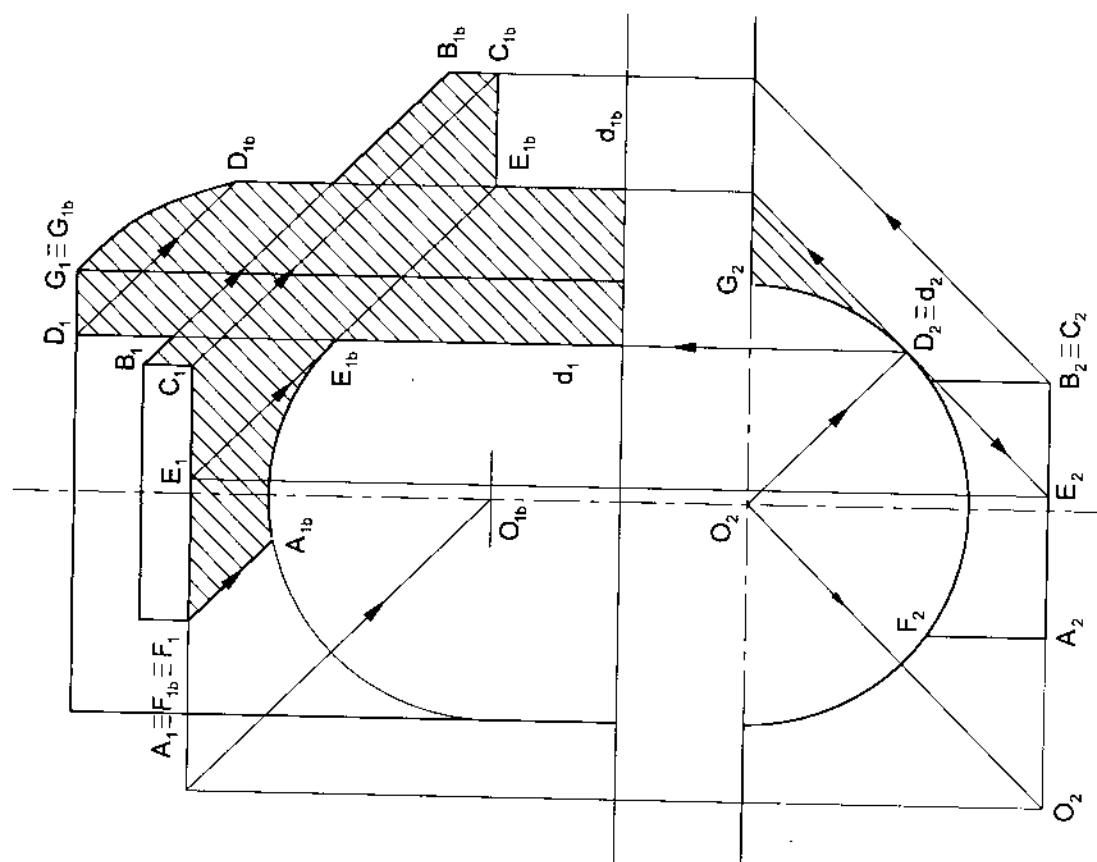
Hình 5.5(LG)



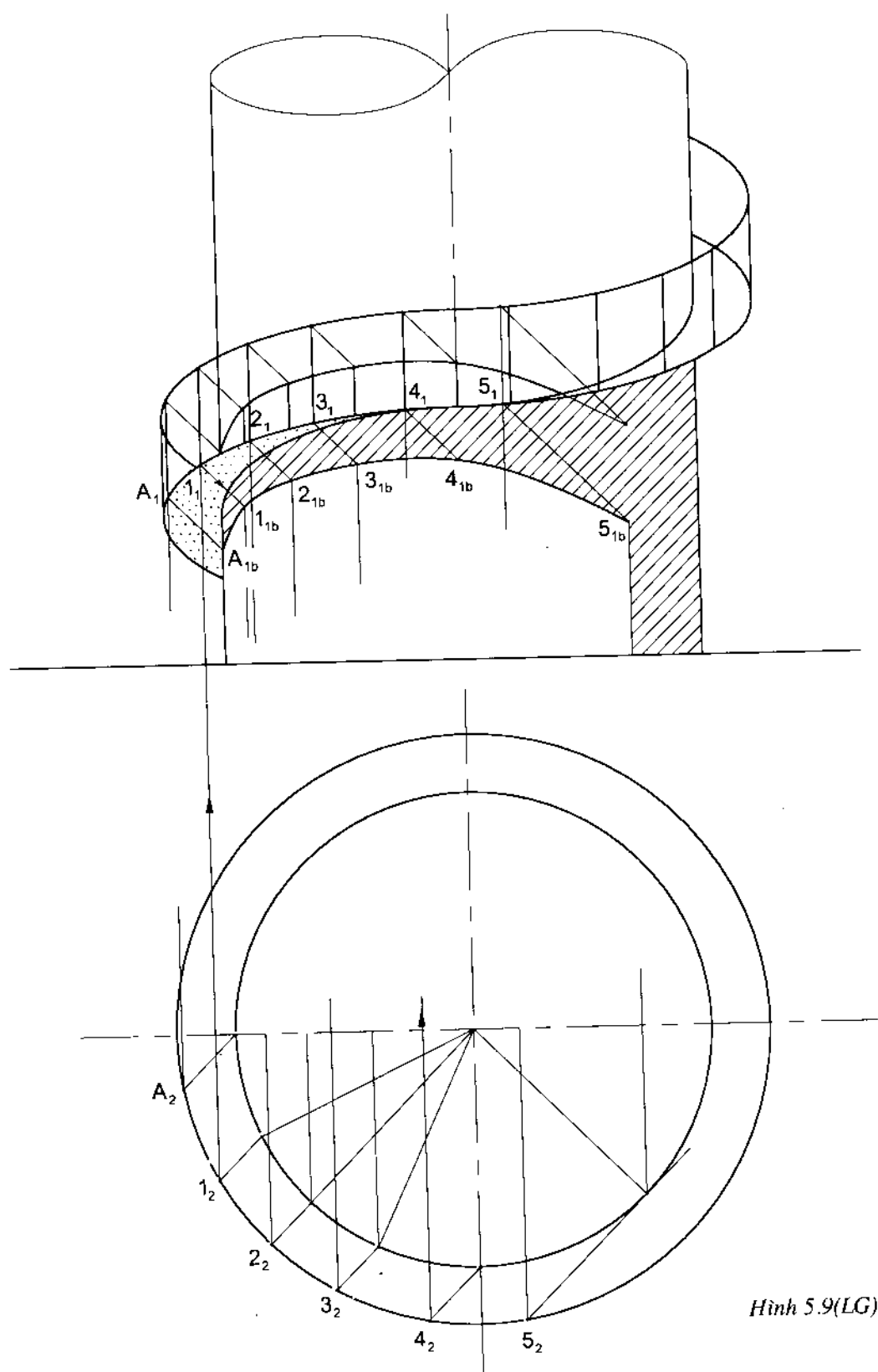
Hình 5.6(LG)

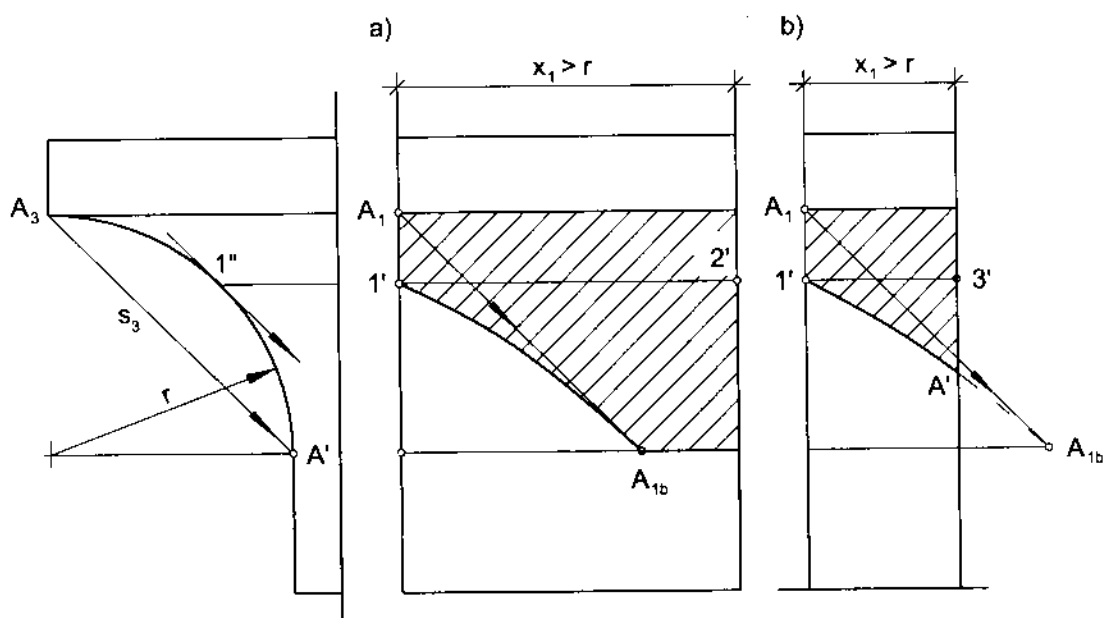


Hình 5.7(LG)

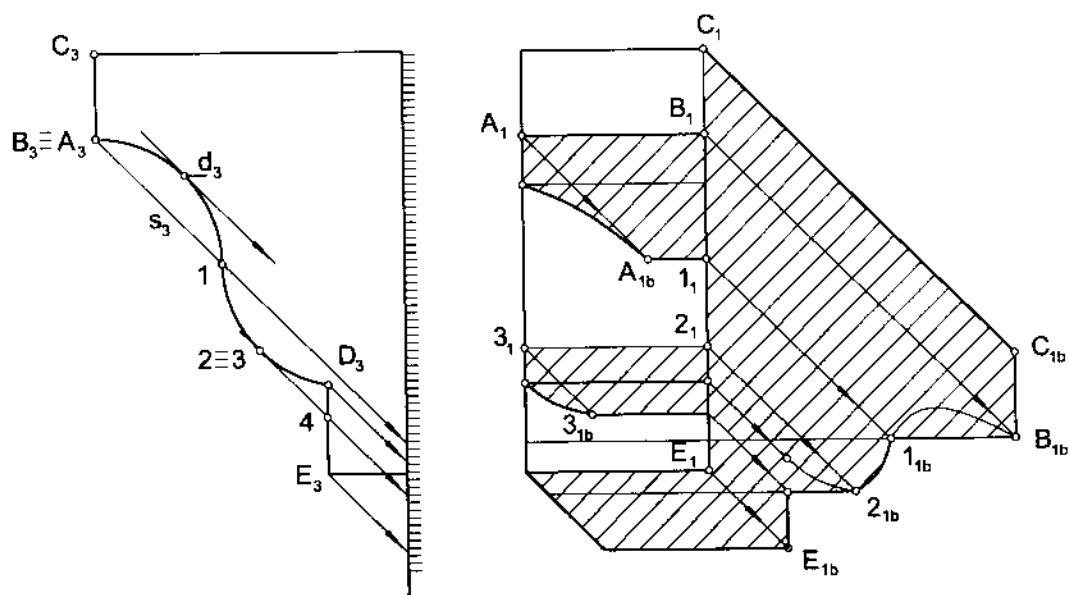


Hình 5.8(LG)

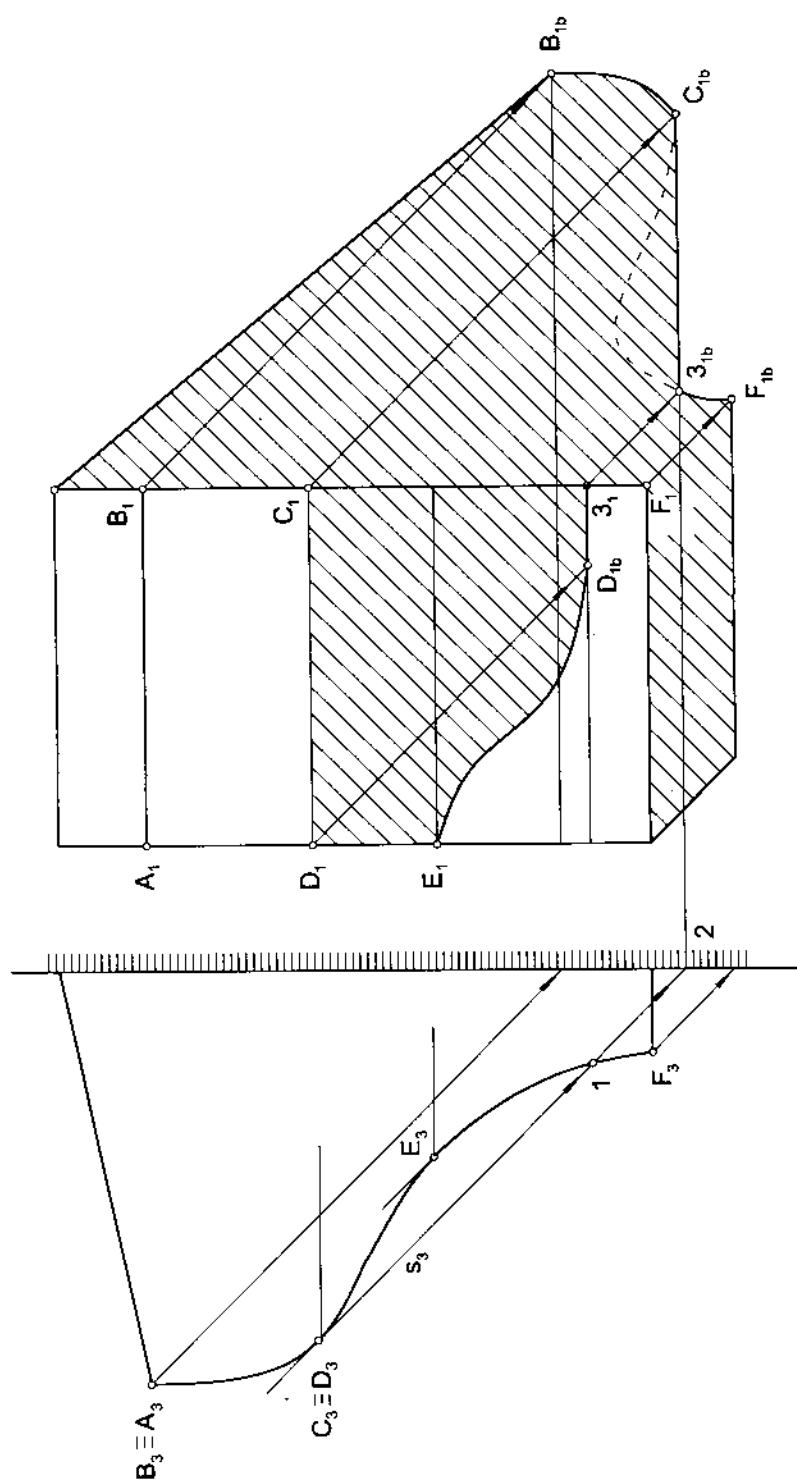




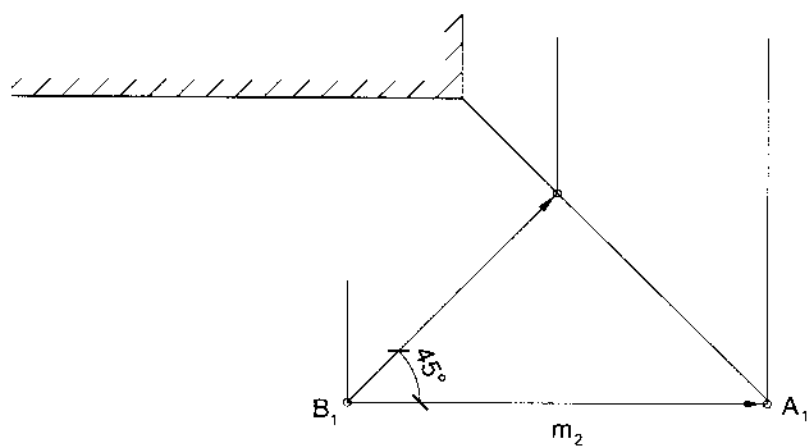
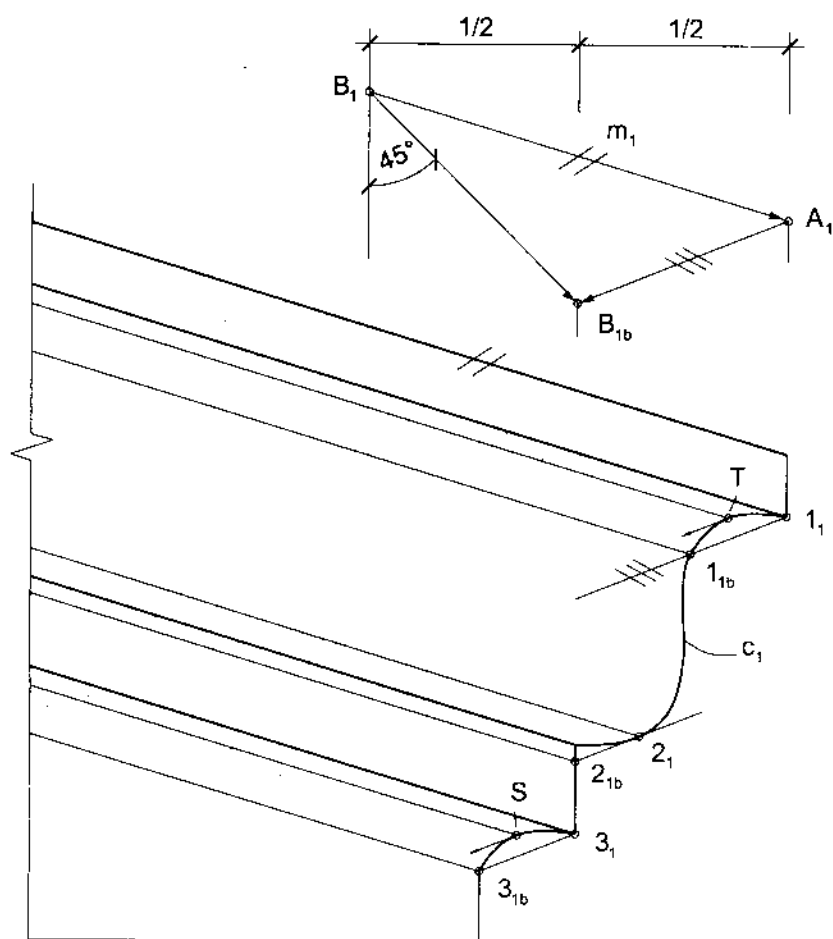
Hình 5.10a(LG)



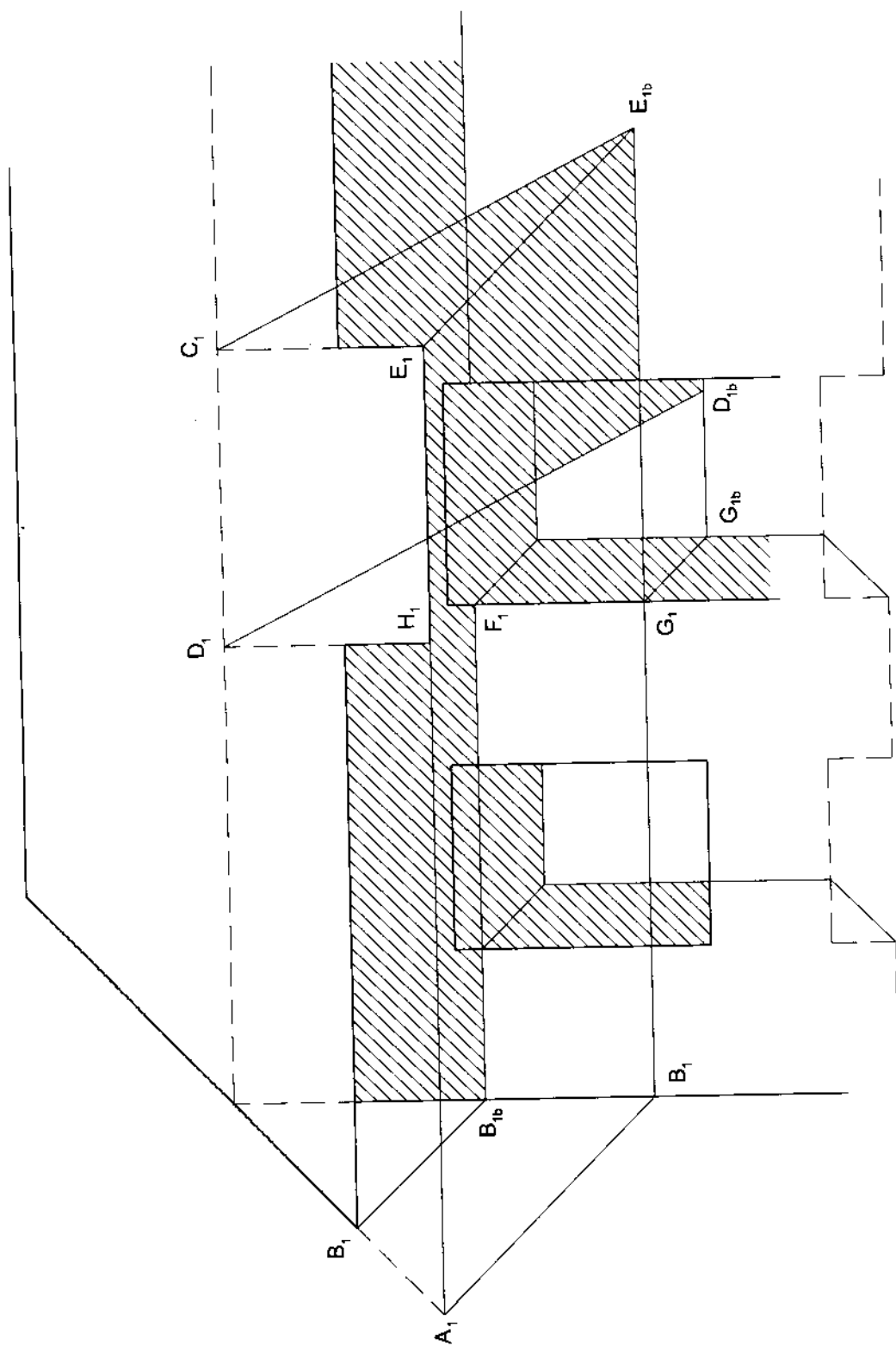
Hình 5.10b(LG)



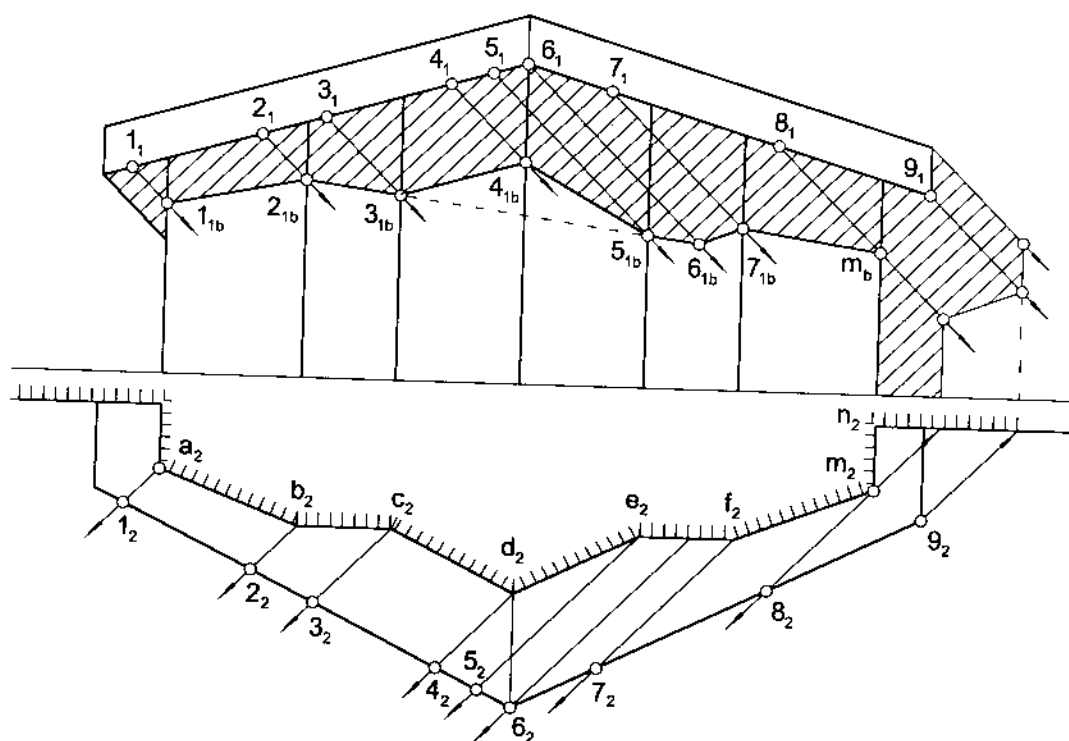
Hình 5.10c(LG)



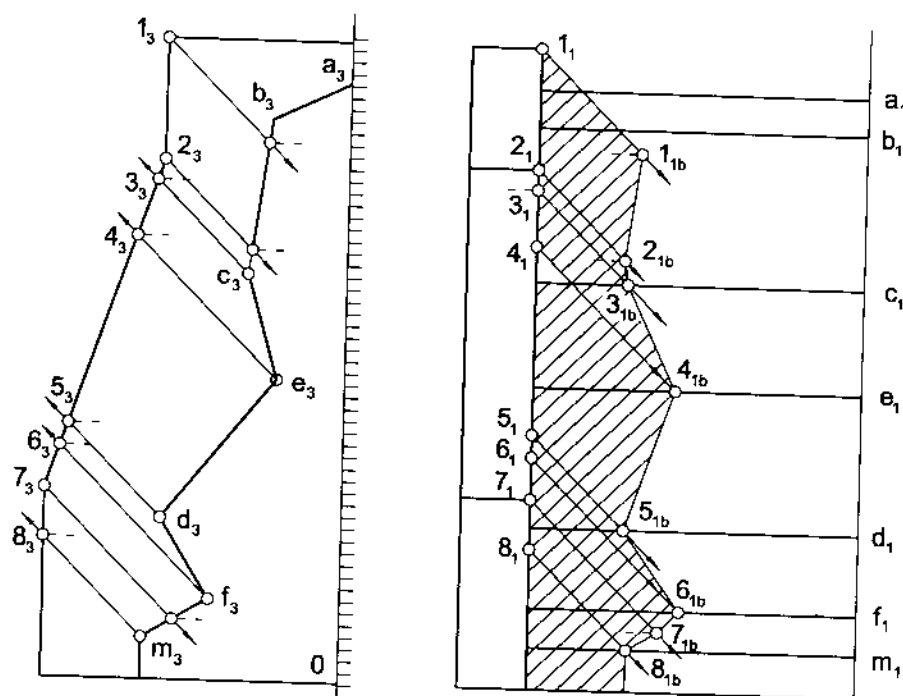
Hình 5.11 (LG)



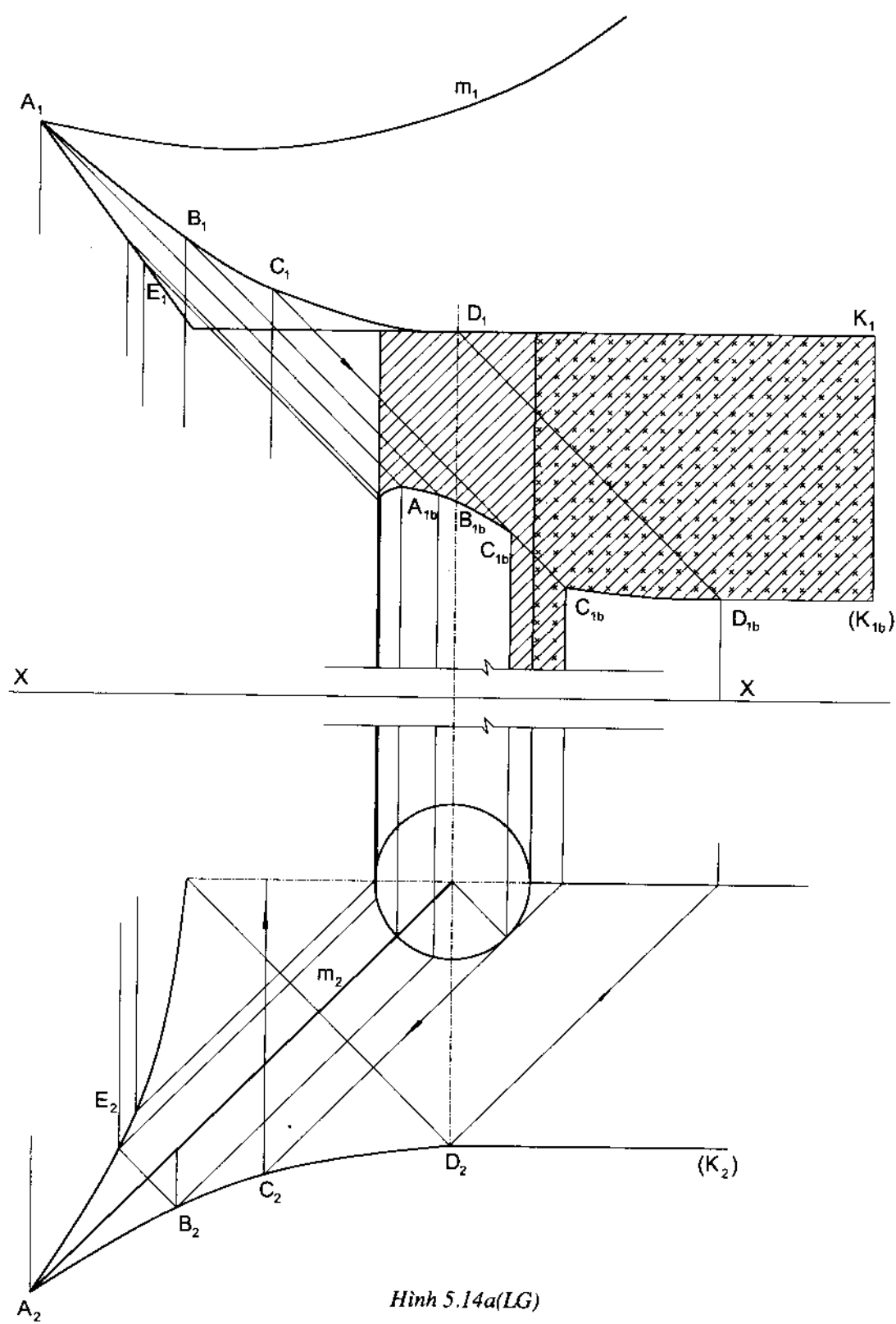
Hình 5.12(LG)



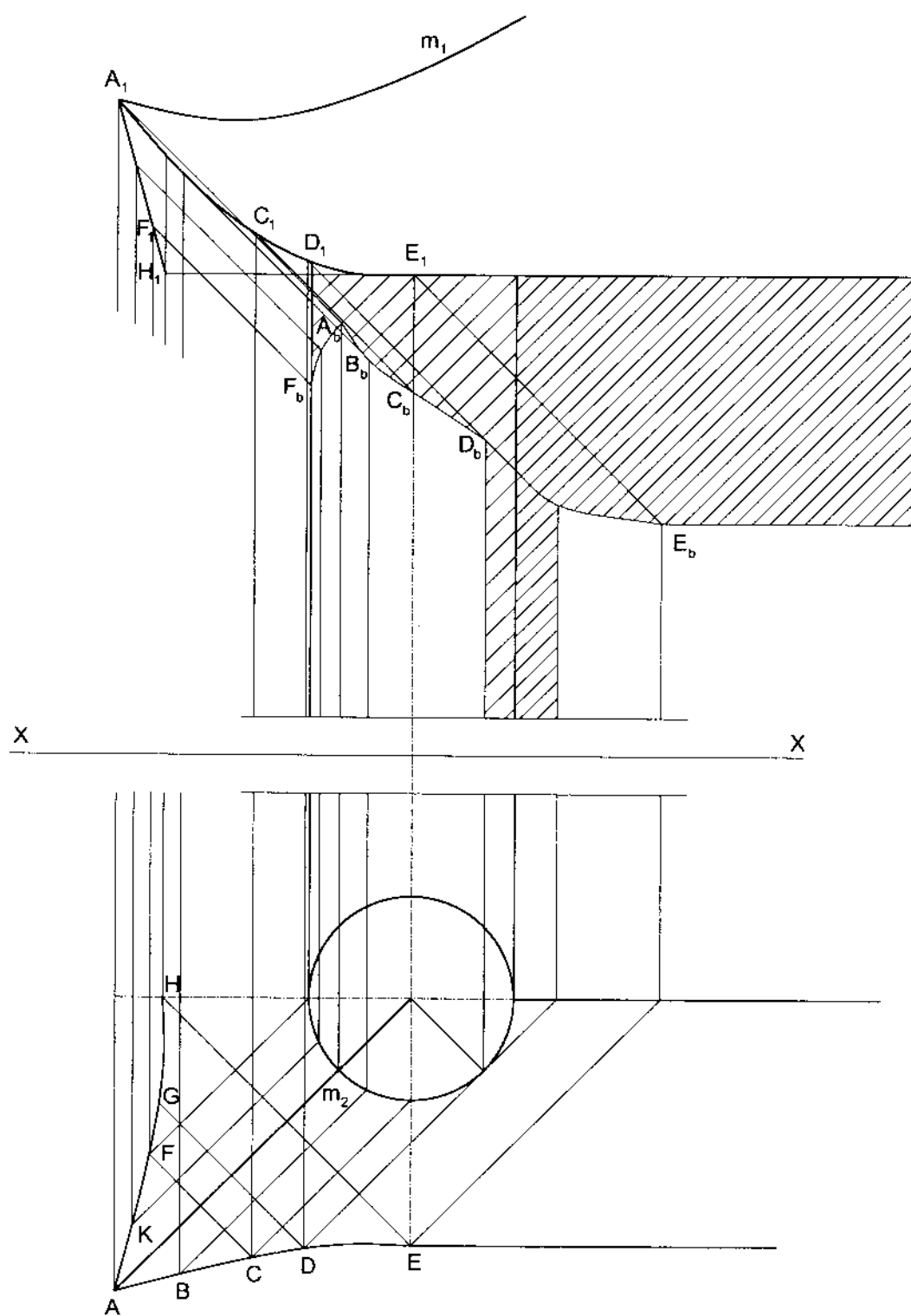
Hình 5.13a(LG)

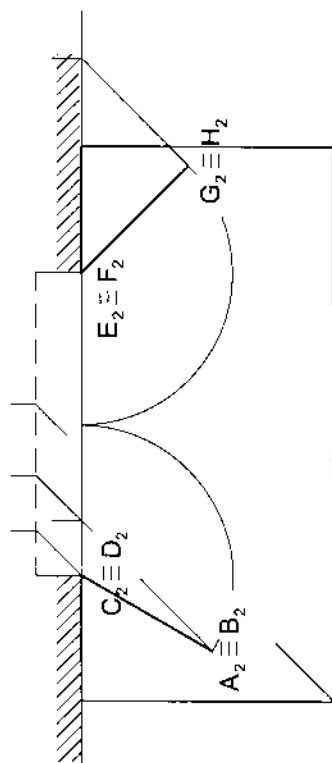
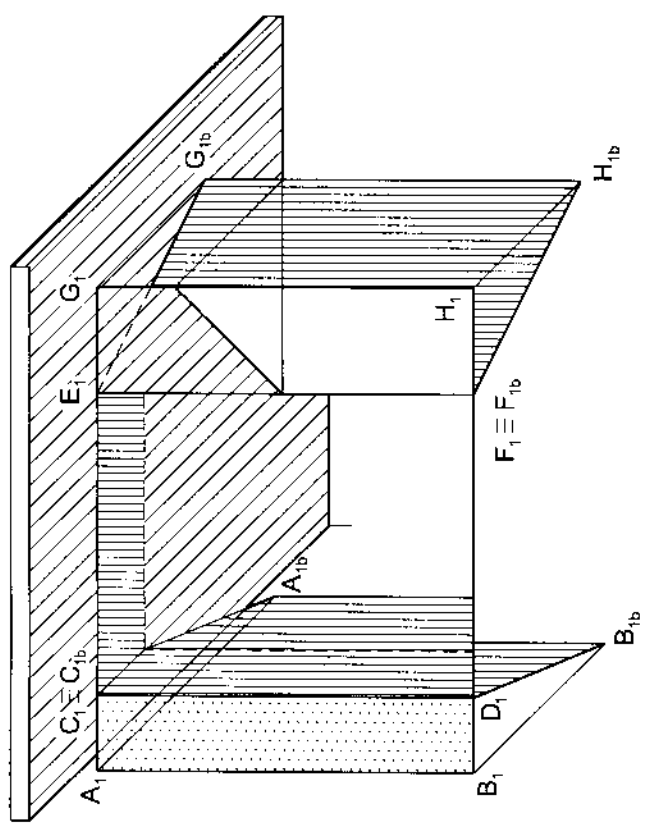


Hình 5.13b(LG)

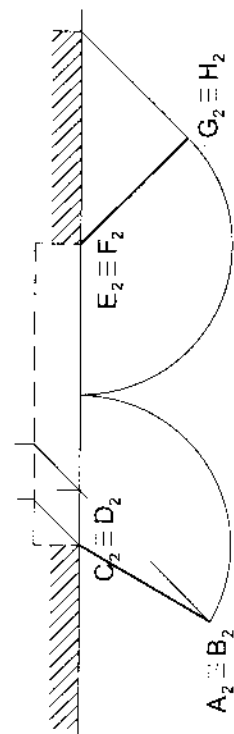
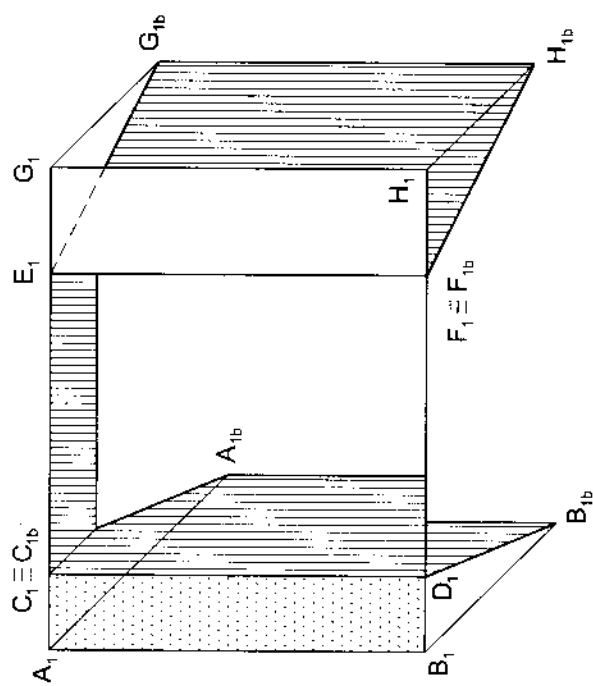


Hình 5.14a(LG)

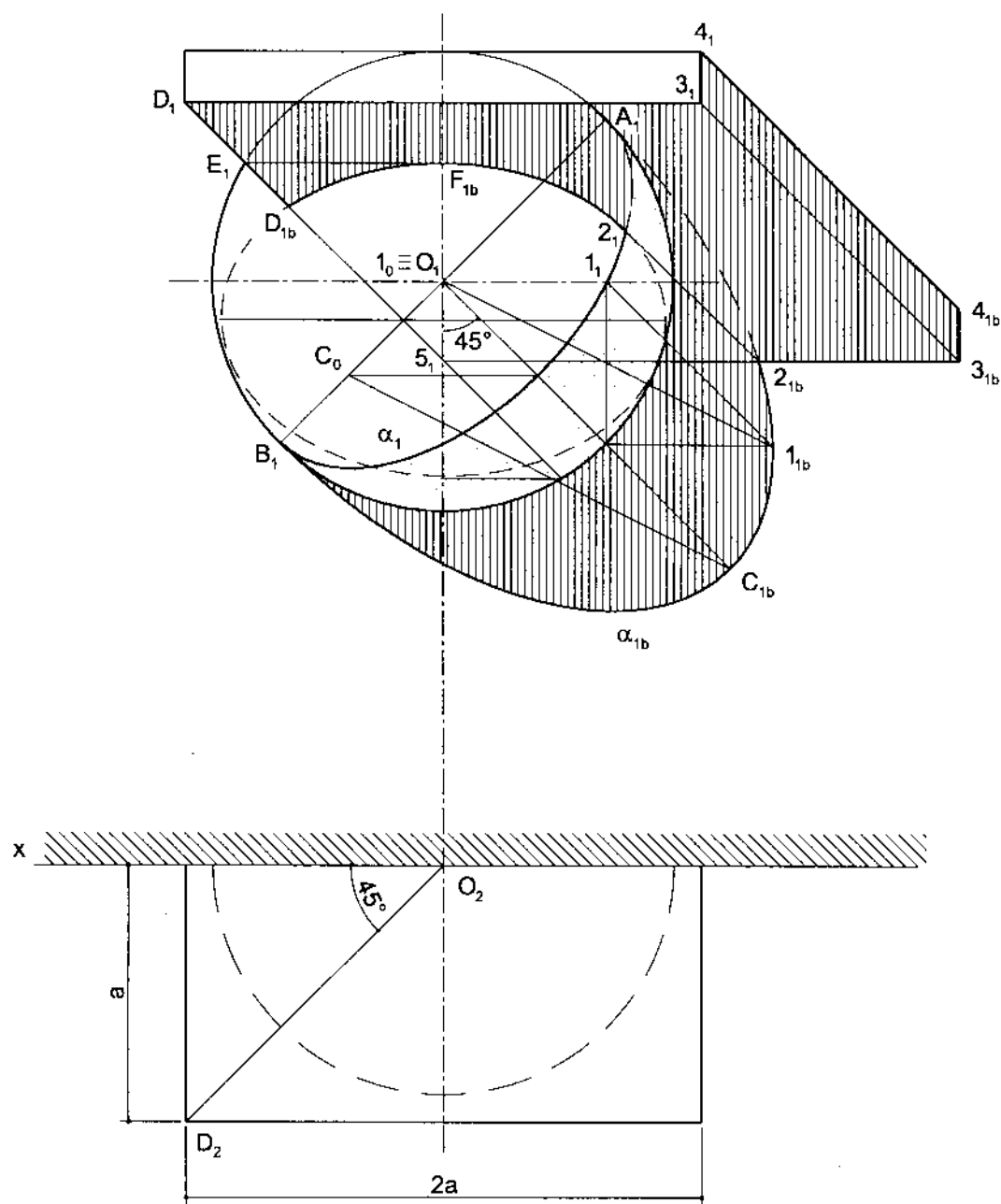




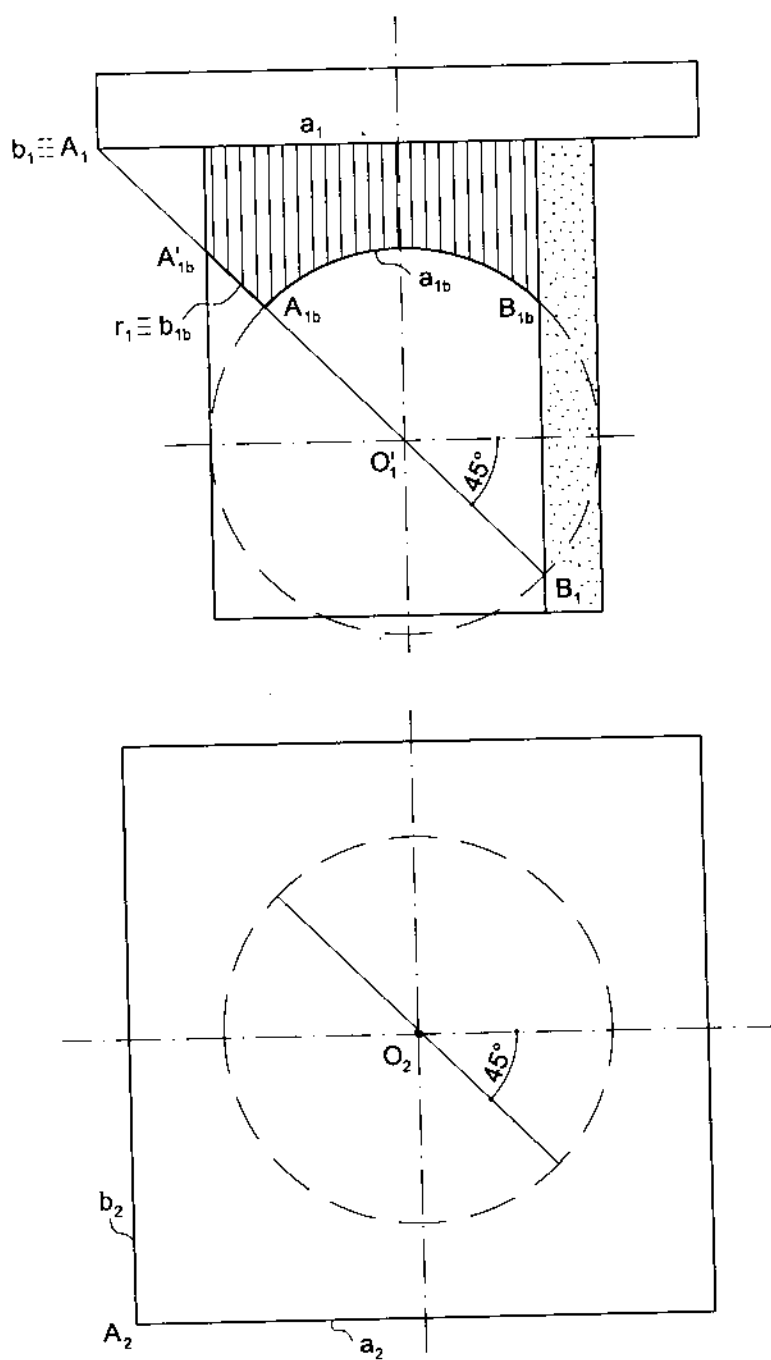
Hình 5.16(LG)



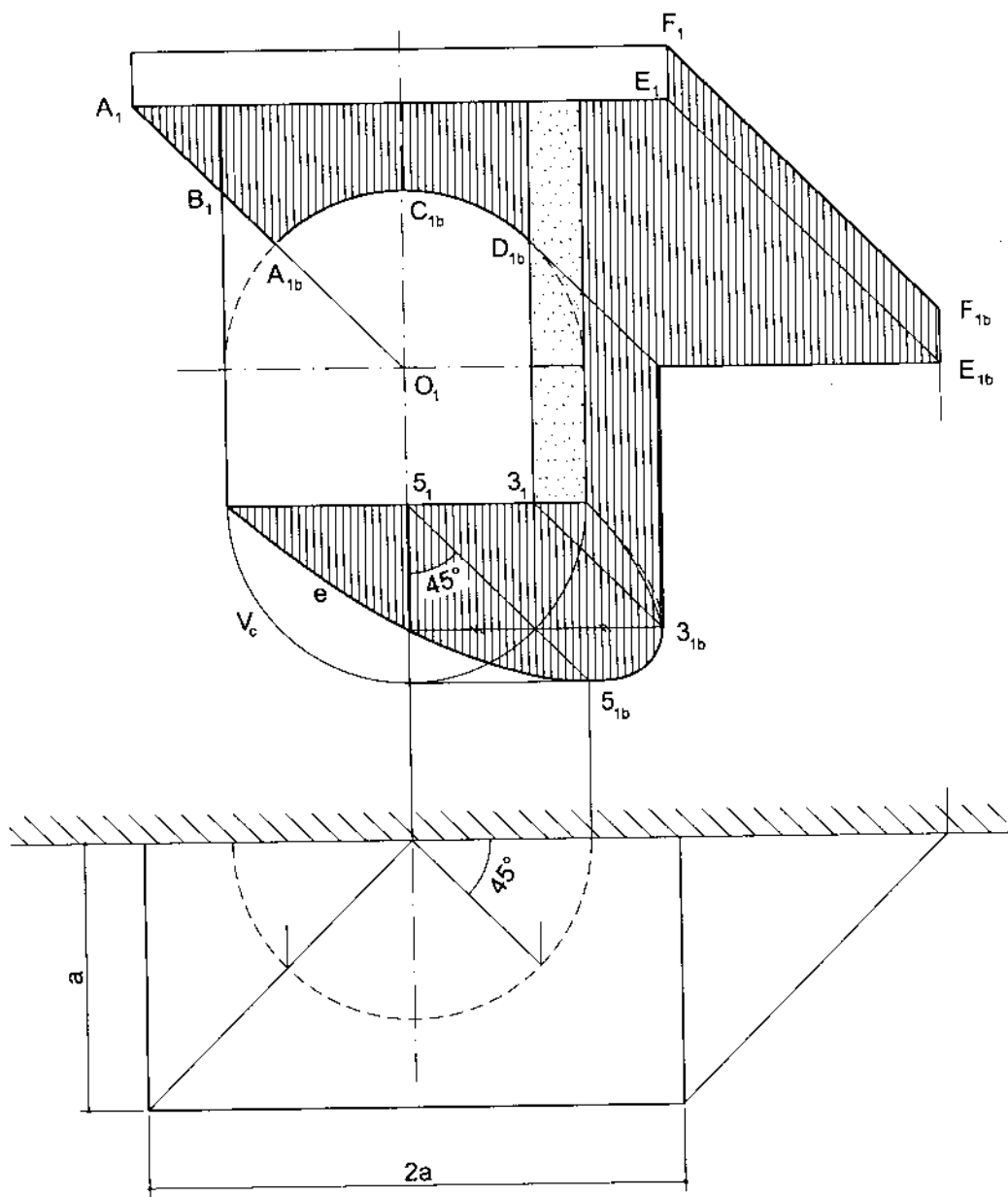
Hình 5.15(LG)



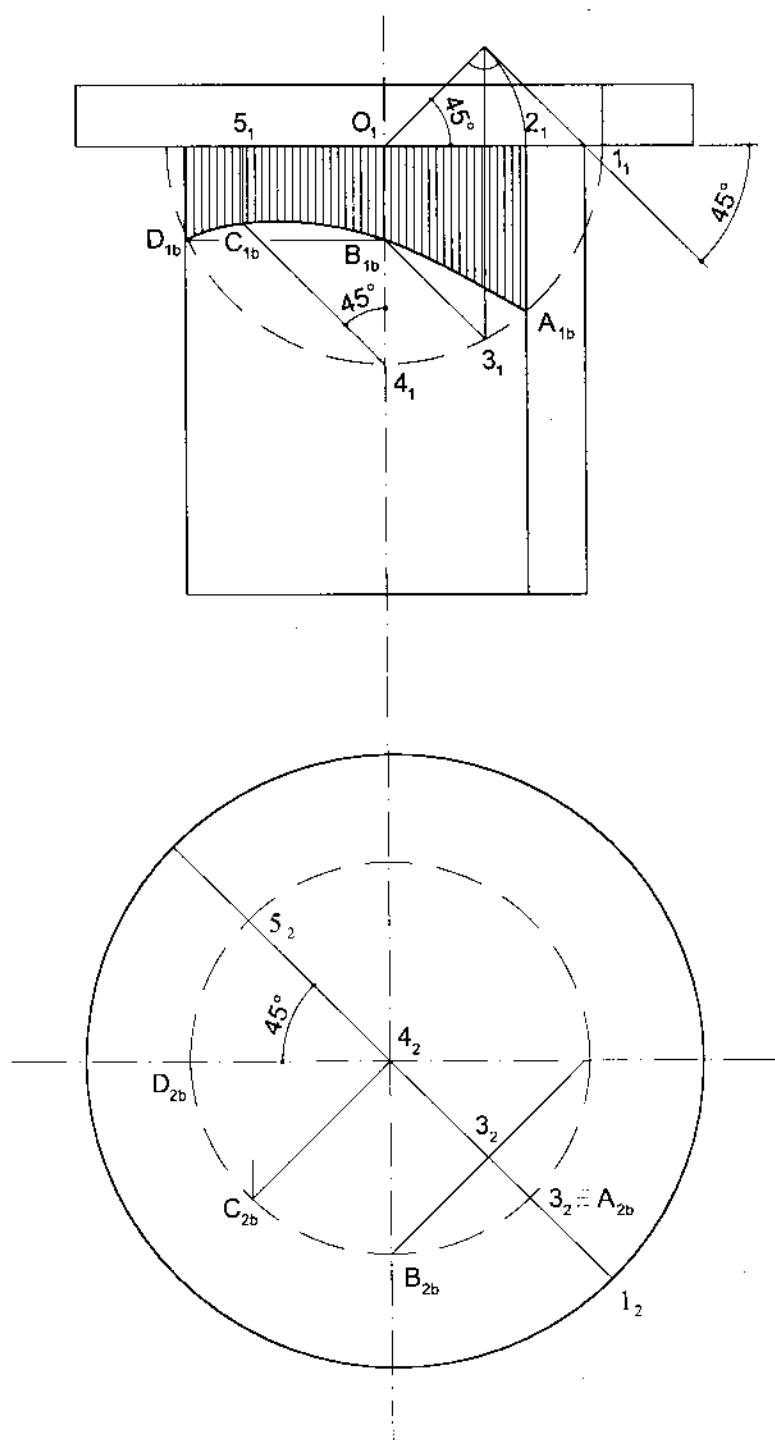
Hình 5.17(LG)



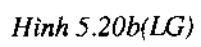
Hình 5.18(LG)

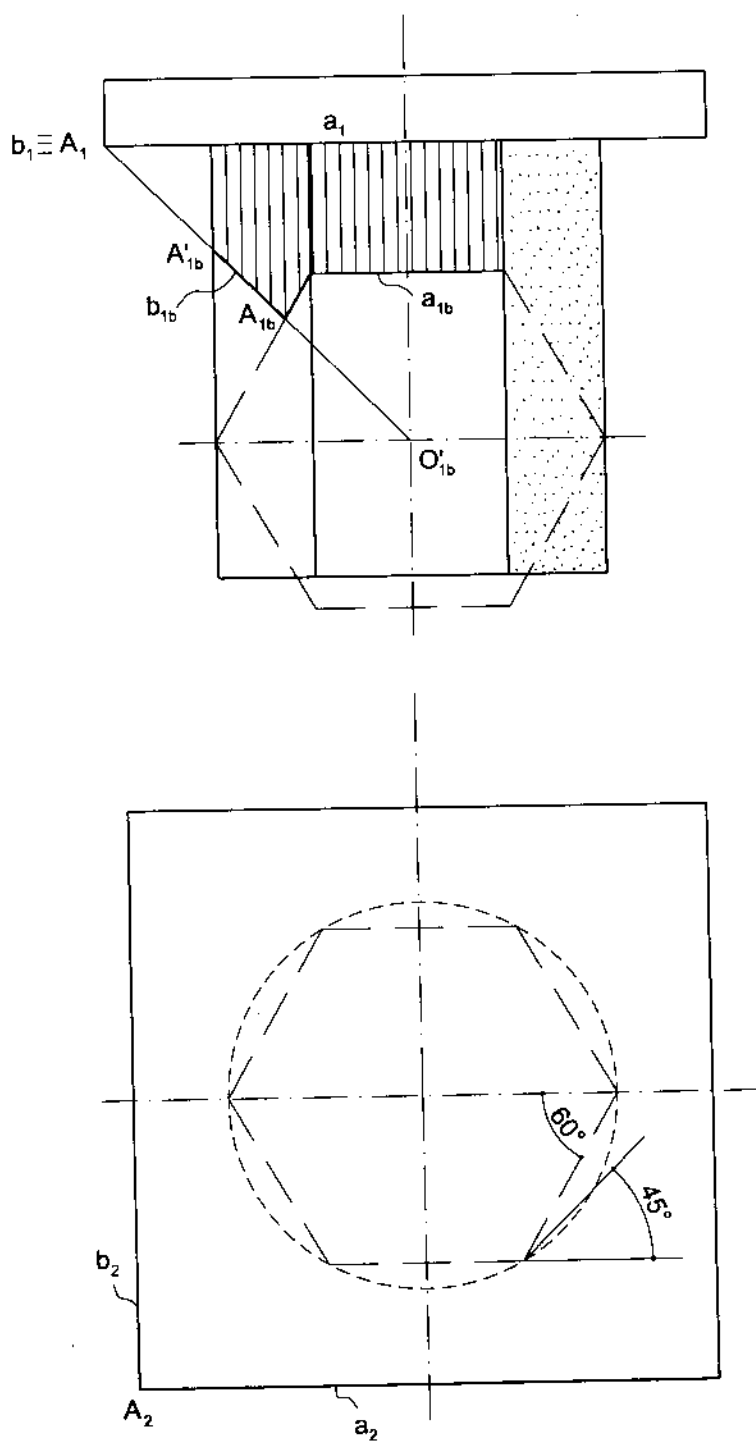


Hình 5.19(LG)

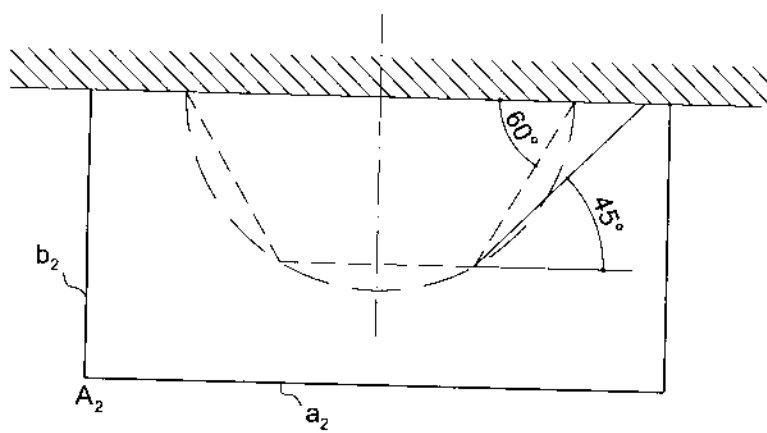
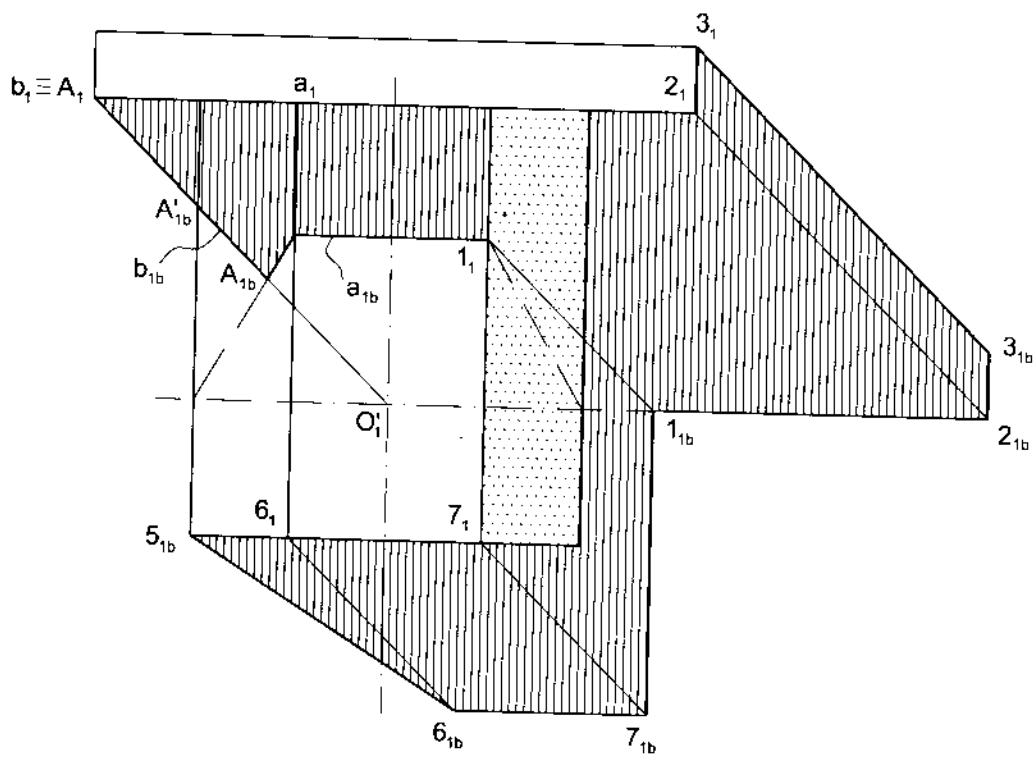


Hình 5.20a(LG)

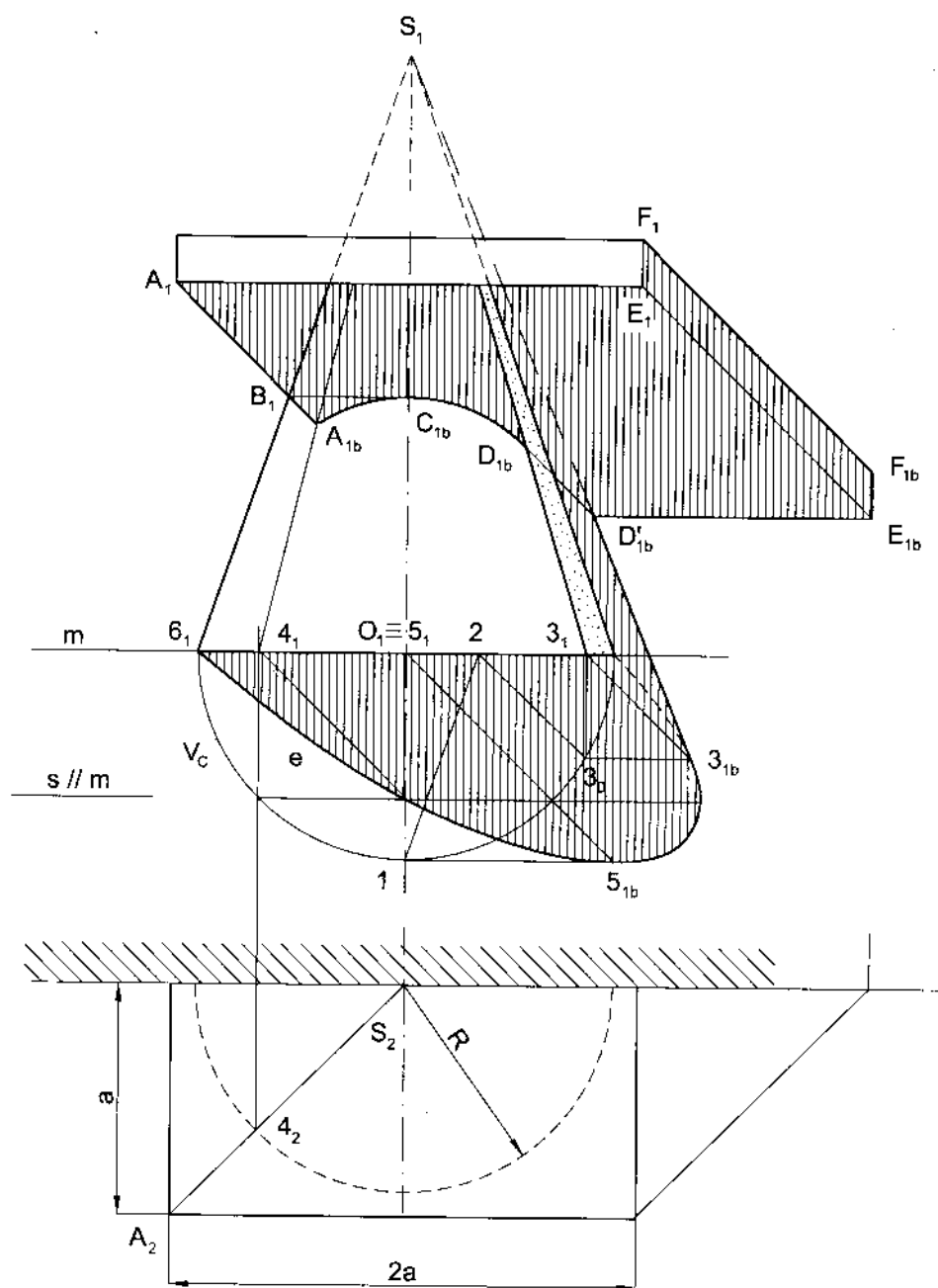




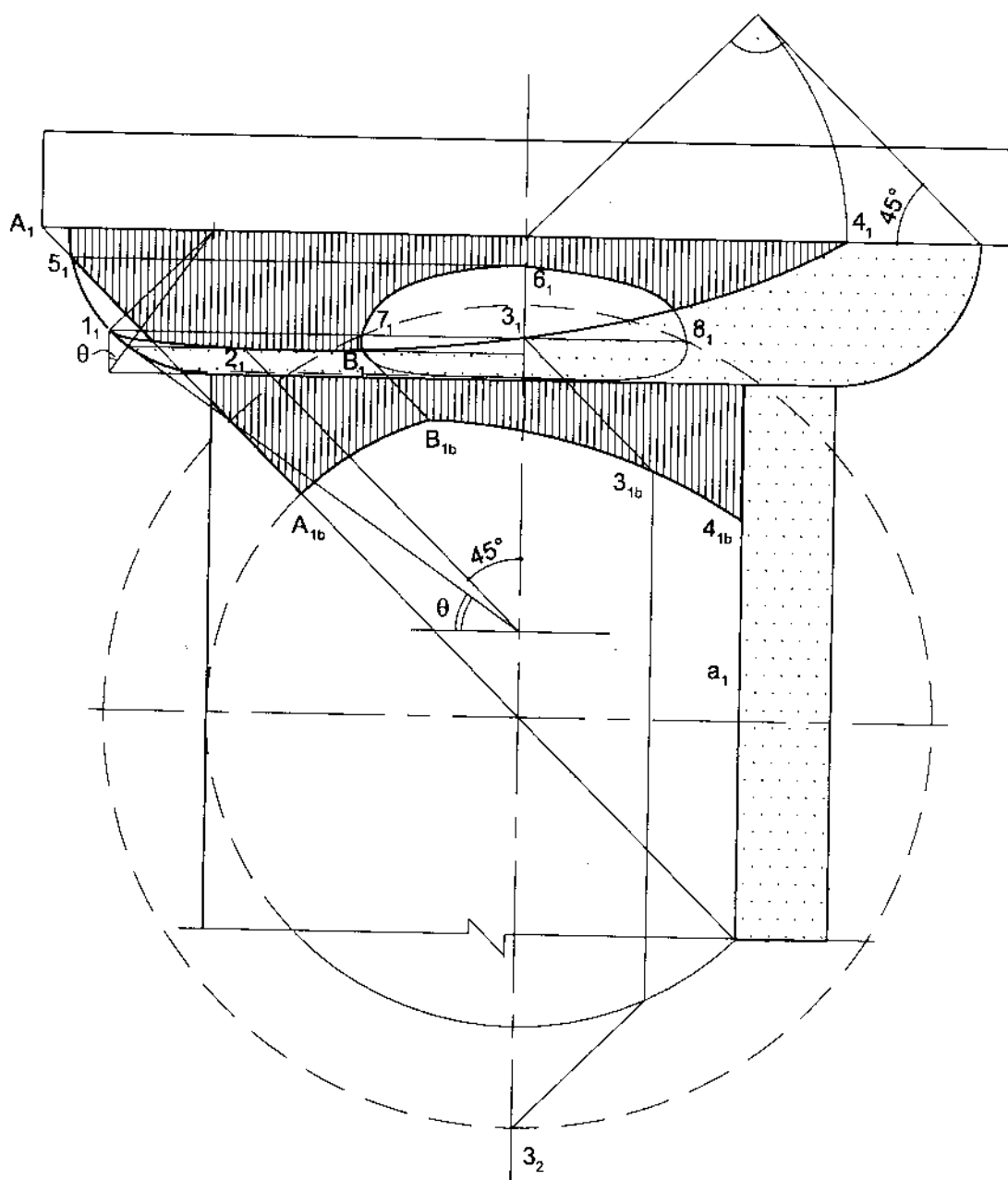
Hình 5.21(LG)



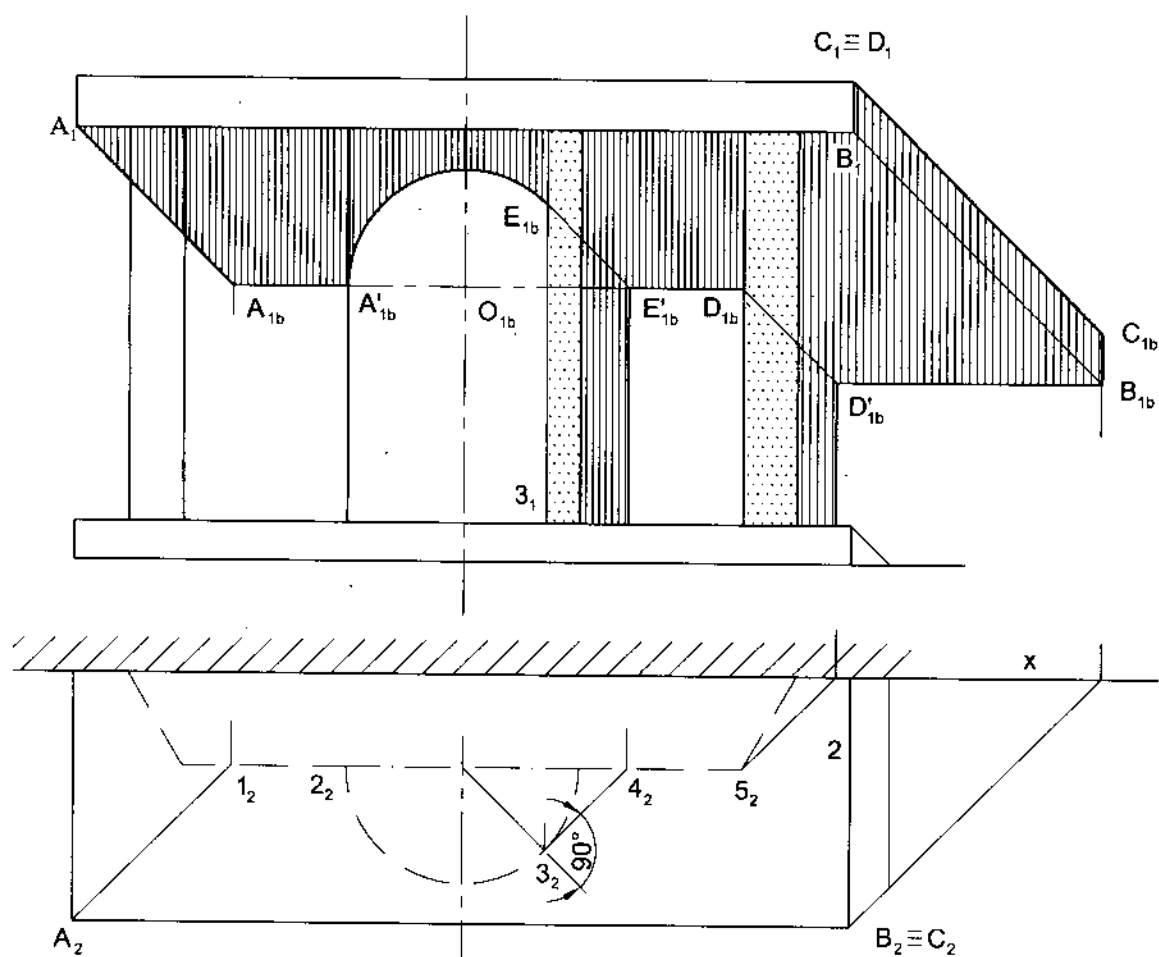
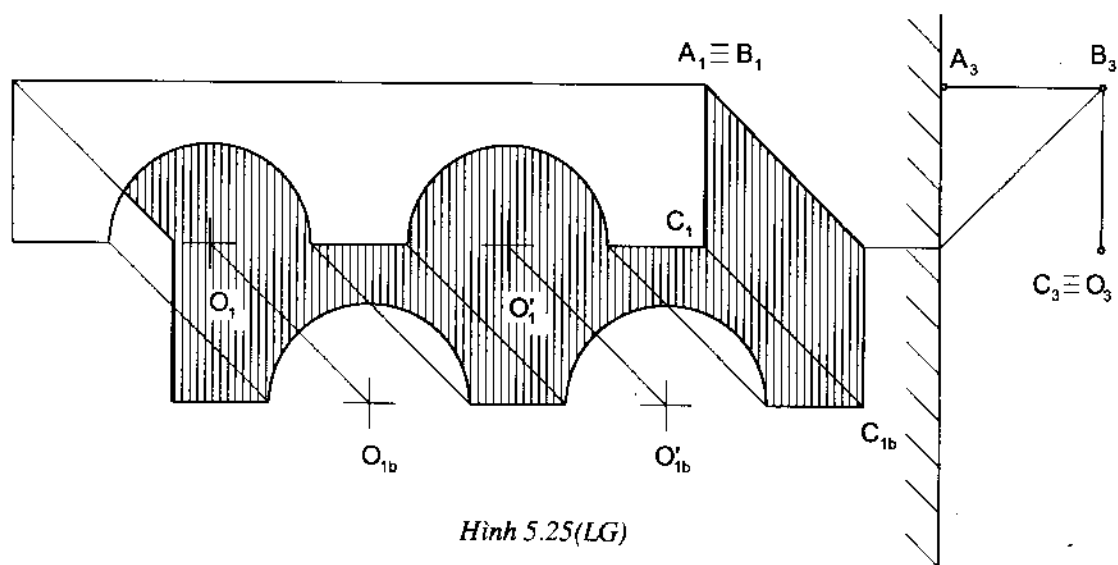
Hình 5.22(LG)

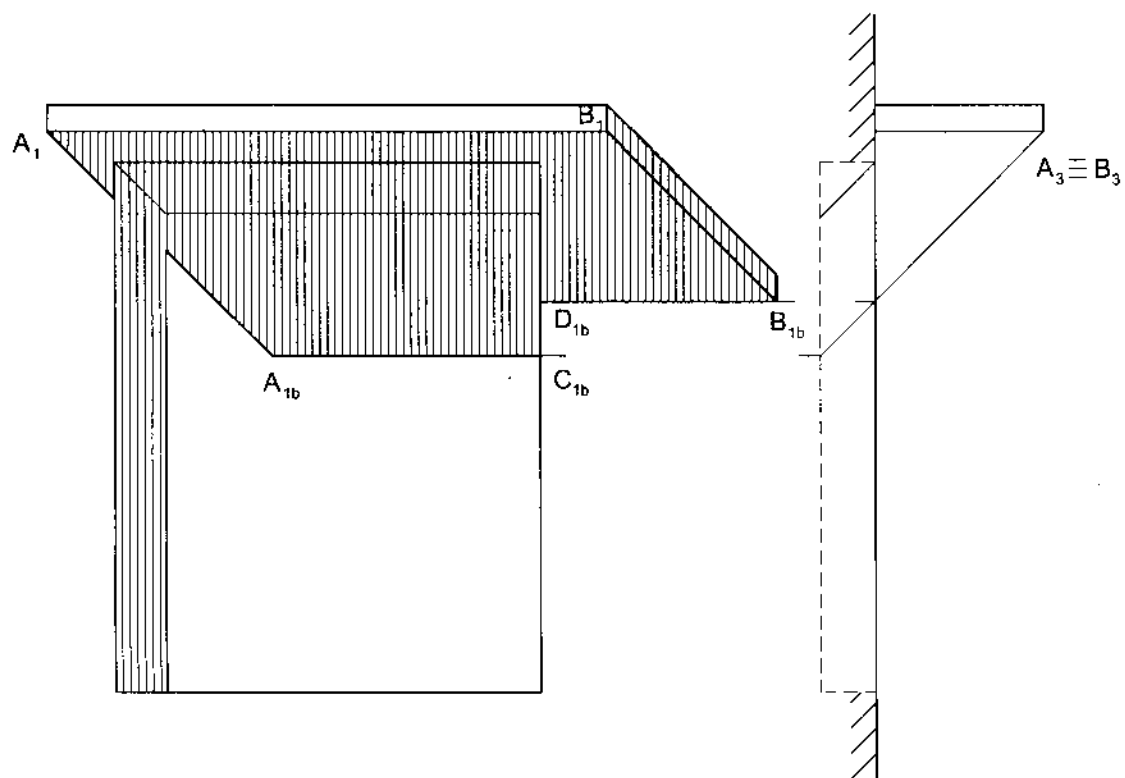


Hình 5.23(LG)

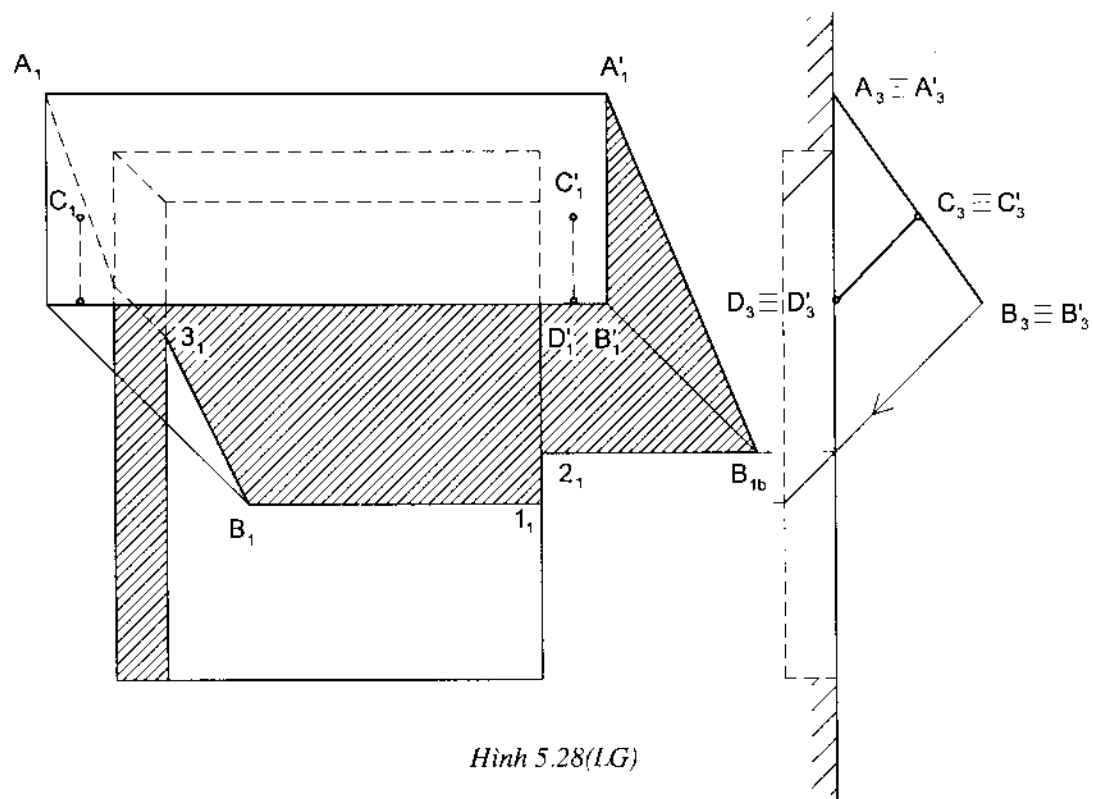


Hình 5.24(LG)

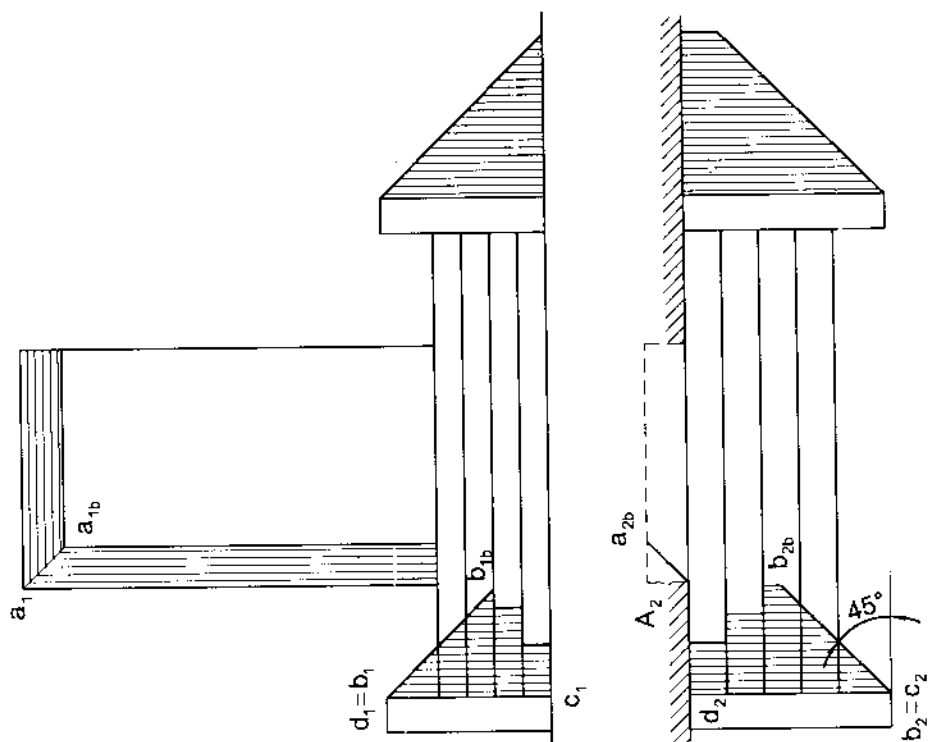




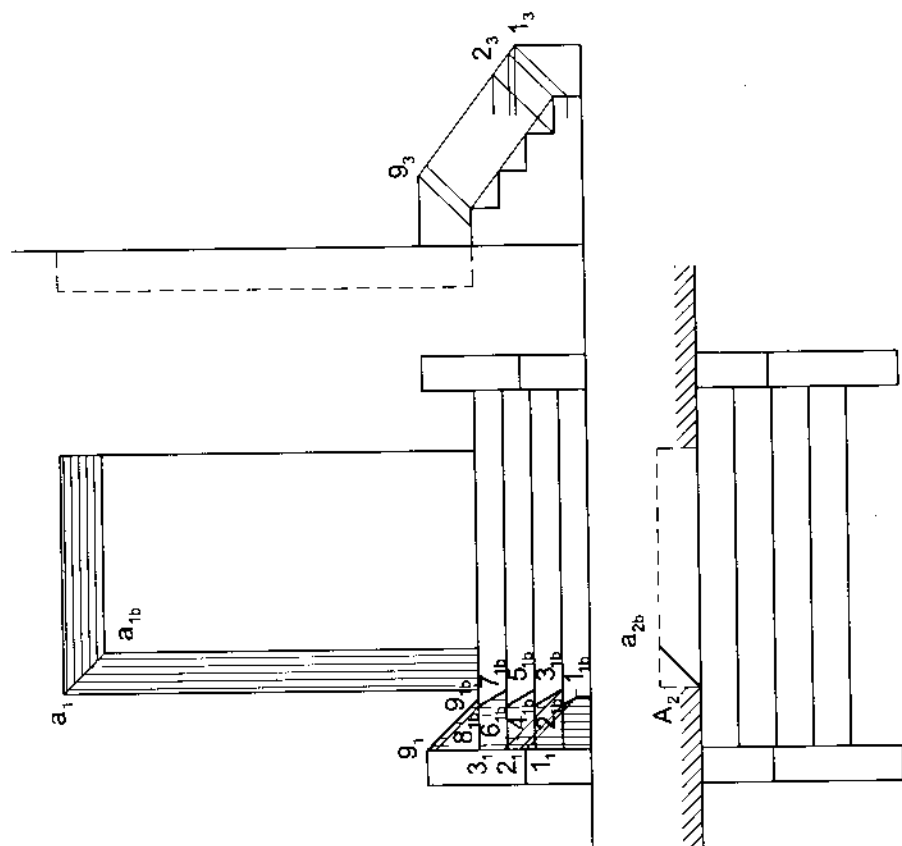
Hình 5.27(LG)



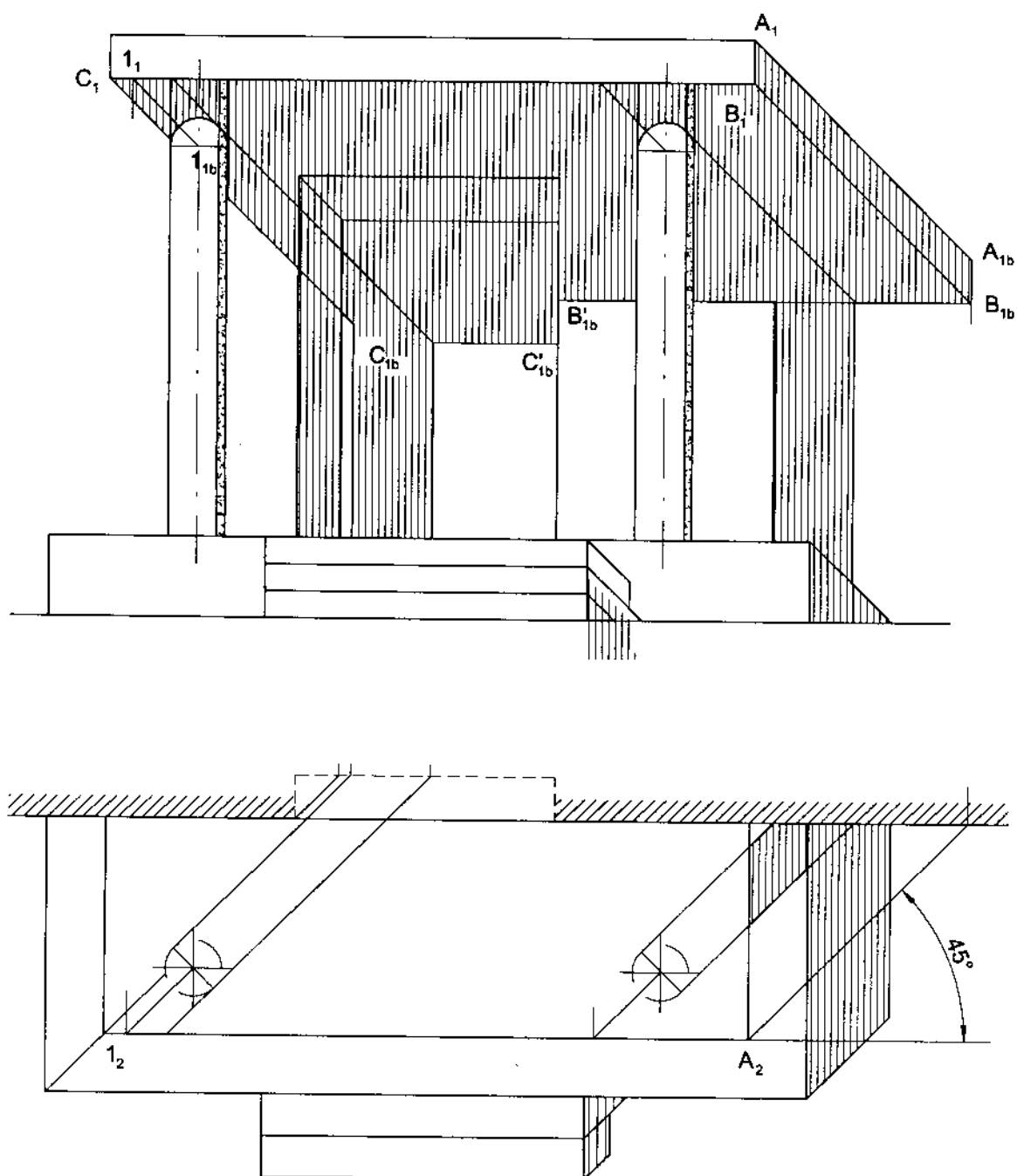
Hình 5.28(LG)



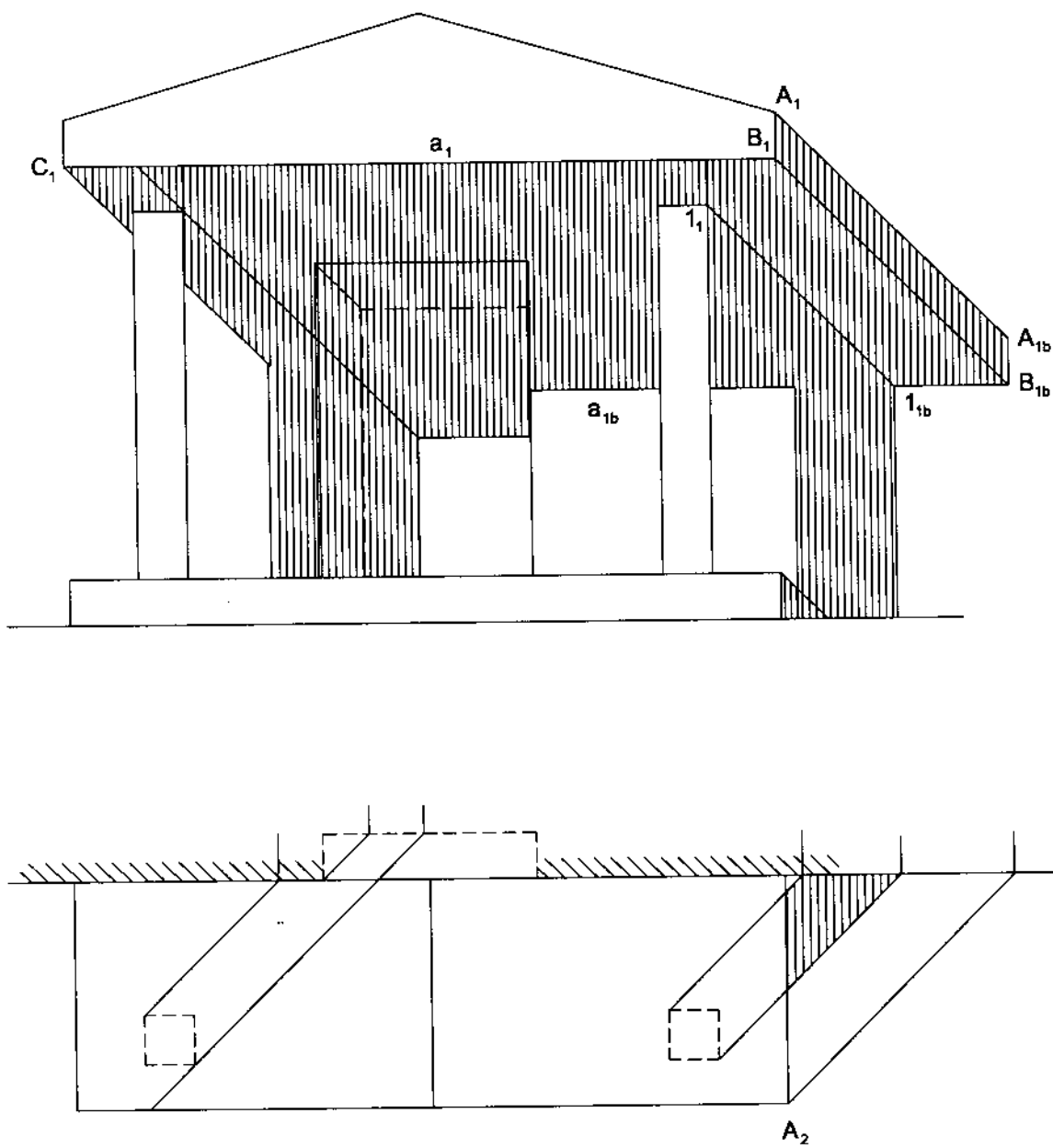
Hình 5.29(DB)



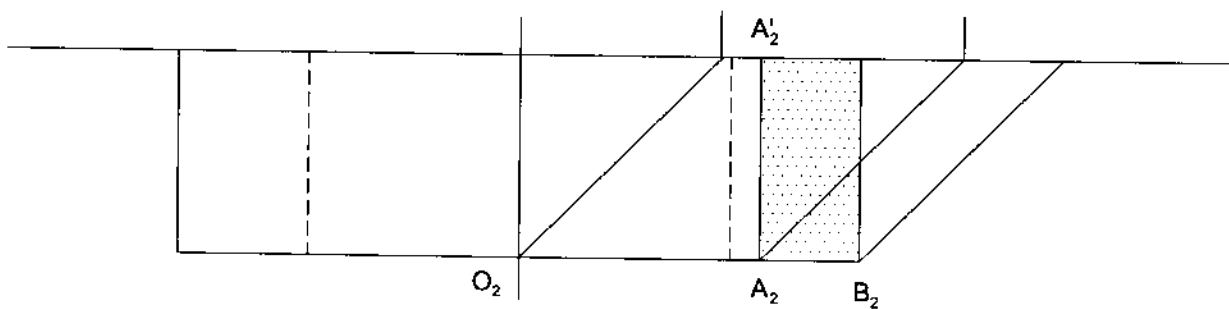
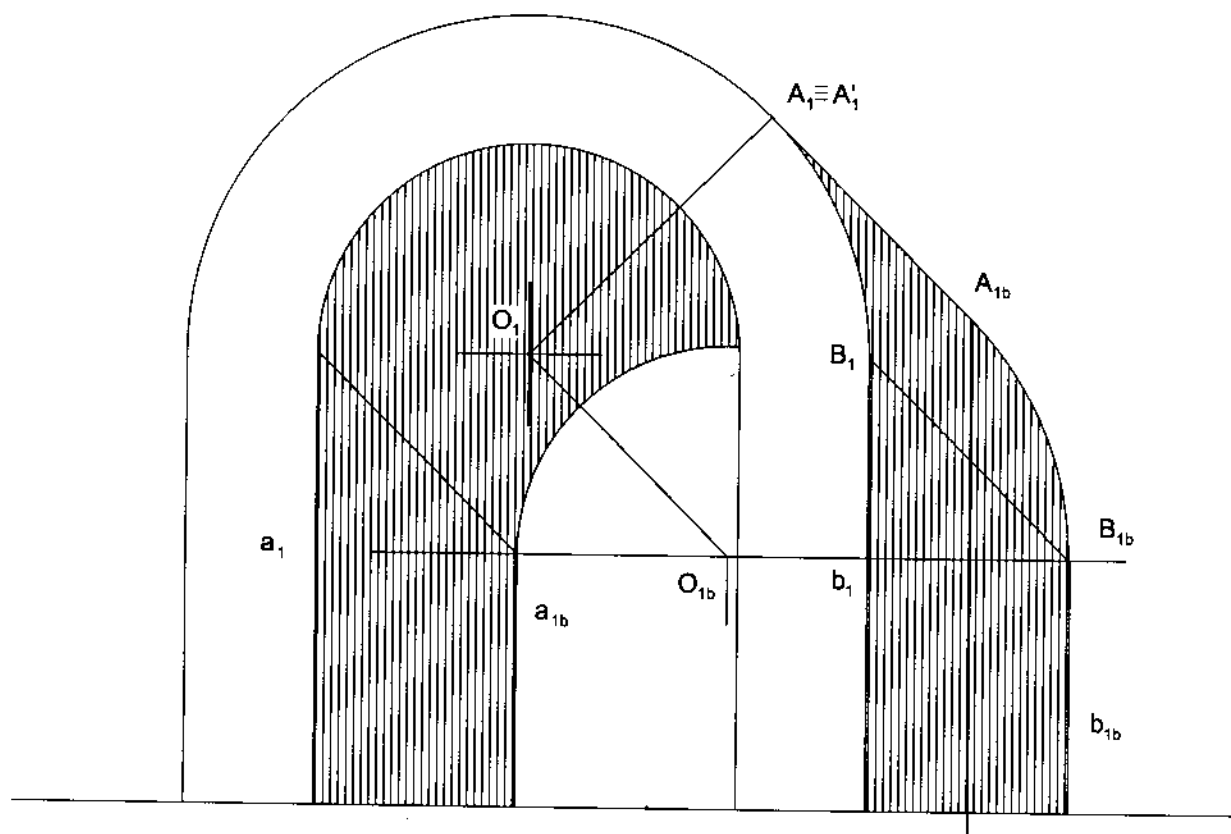
Hình 5.30(DB)



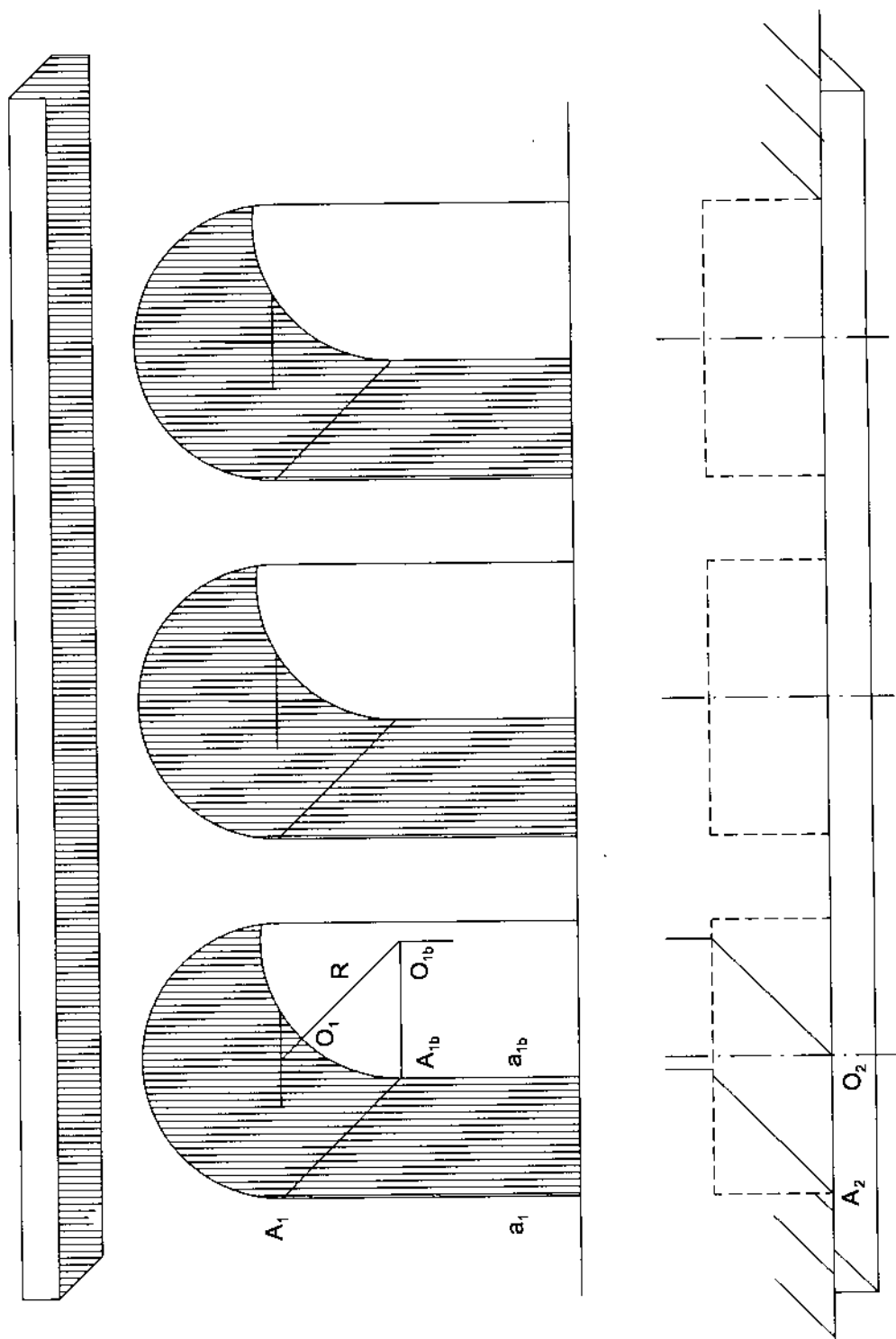
Hình 5.31(LG)



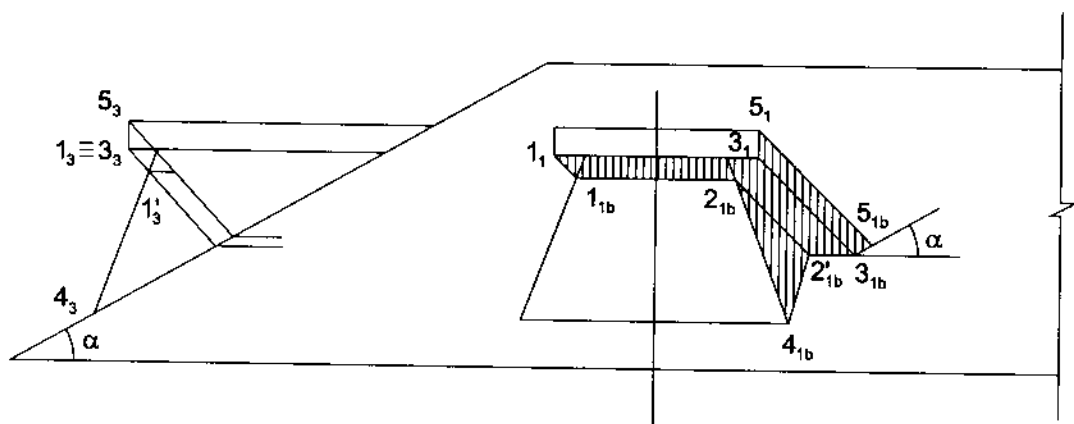
Hình 5.32(LG)



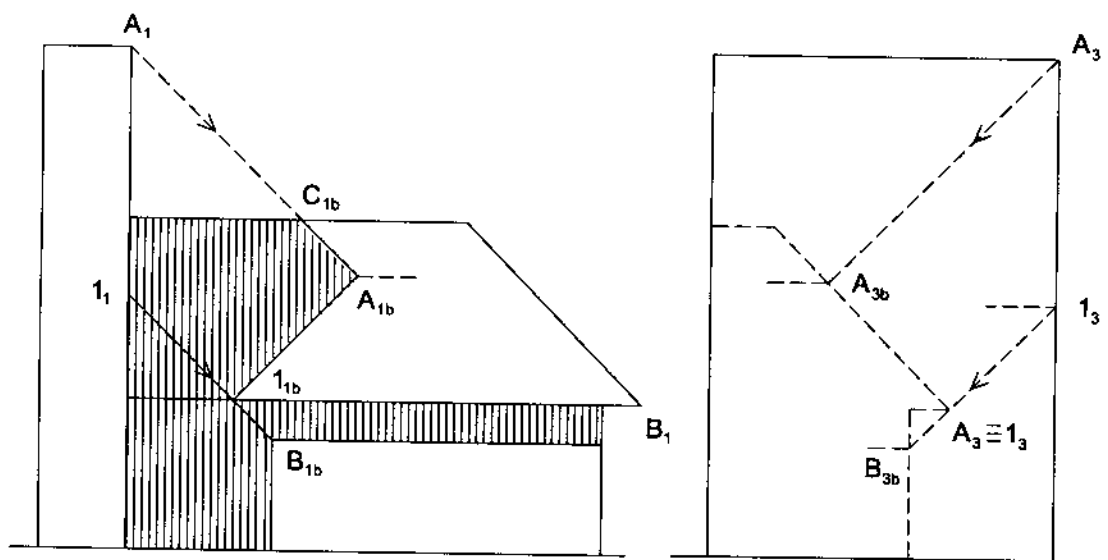
Hình 5.33(LG)



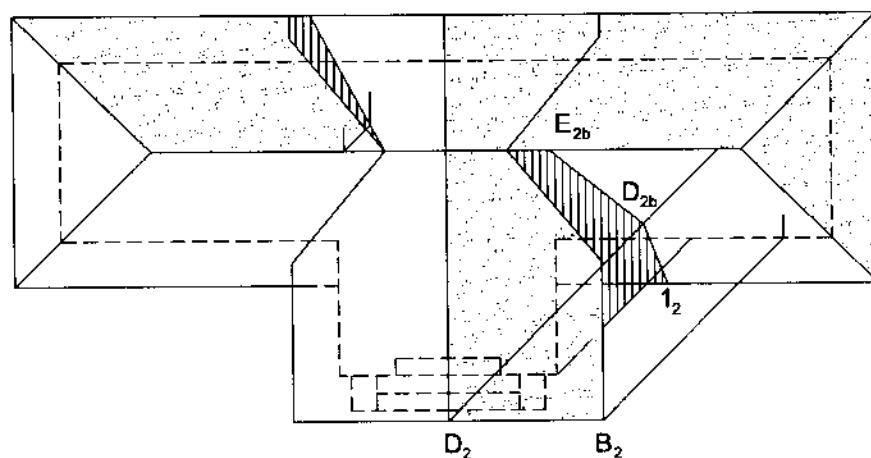
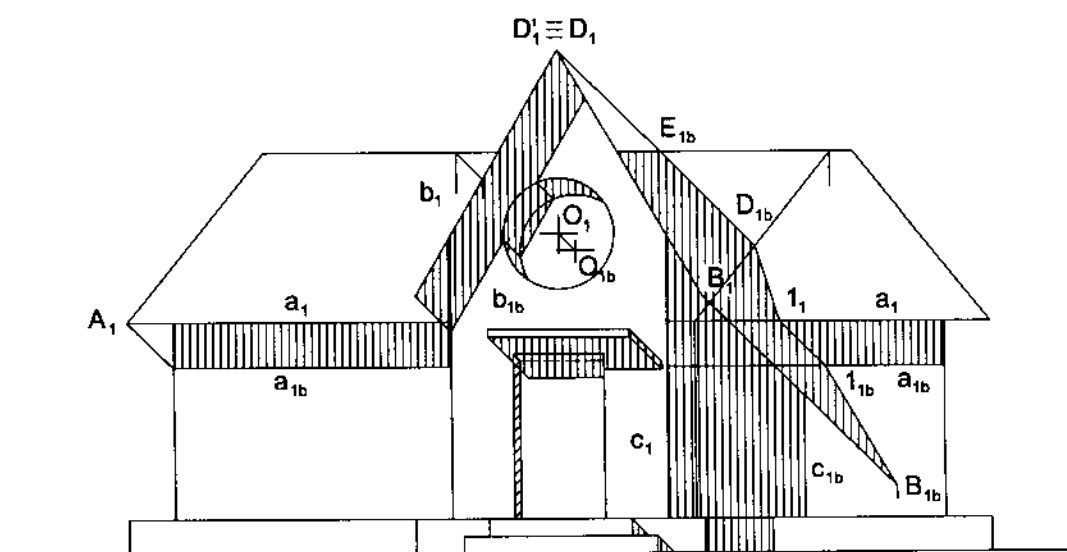
Hình 5.34(LG)



Hình 5.35(LG)



Hình 5.36(LG)



Hình 5.37(LG)

PHẦN BA - ỨNG DỤNG AUTOCAD ĐỂ VẼ BÓNG

Chương VI

DÙNG AUTOCAD2000 ĐỂ VẼ BÓNG

Sau đây là phân hướng dẫn sử dụng chương trình *Render* của AutoCAD2000 để vẽ bóng trong hình chiếu thẳng góc. Phần này gồm một số bài trình bày tỉ mỉ quá trình vẽ bóng trên máy tính nhằm giúp nắm được những điểm cơ bản trong khi thực hành làm *Render*, với điều kiện người đọc đã biết vẽ 3D trong AutoCAD.

6.1. THIẾT LẬP BẢN VẼ MẪU

Bản vẽ mẫu sẽ thiết lập dưới đây gồm có ba khung nhìn cần dùng để biểu diễn vật thể và tiến hành tô bóng sau này.

Sau khi khởi động AutoCAD ta có màn hình như dưới đây, chú ý rằng nhãn Model là hiện hành.

Chọn nhãn Layout1 ở đáy cửa sổ AutoCAD. Hộp thoại Page Setup-Layout1 xuất hiện.

Trong trang Layout Settings ta chọn cỡ giấy A4 trong danh sách Paper size. Nhấn OK.

Màn hình AutoCAD chuyển về không gian tờ giấy (Paper Space) với một khung nhìn mặc định vẽ bằng hình chữ nhật ở trong cùng, nét liền.

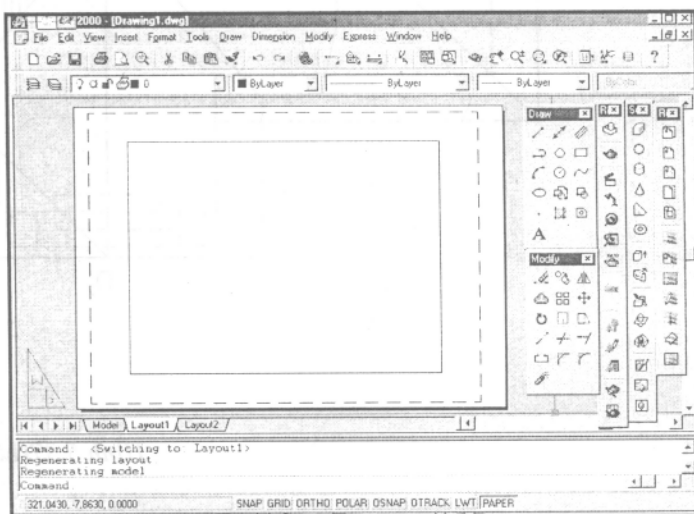
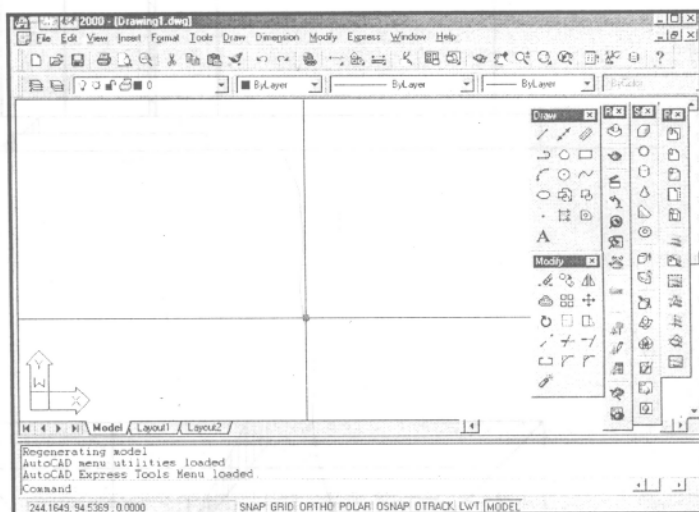
Command: ERASE ↵

Xoá bỏ khung nhìn đã cho.

Select objects:

Dùng con trỏ chọn đường bao của khung nhìn.

Select objects: ↵



Command: VIEWPORTS ↵ *Thiết lập ba khung nhìn.*

Xuất hiện hộp thoại Viewports, ta chọn trang New Viewports, và chọn Three: Right trong danh sách Standard viewports.

Chọn 3D trong danh sách Setup, và chọn 0.0 trong Viewport Spacing như ở hình bên.

Nhấn OK.

Xuất hiện dòng nhắc:

Specify first corner or [Fit] <Fit>:

Để trả lời ta nhấn ↵.

Xuất hiện ba khung nhìn trong không gian tờ giấy.

Ta cần định tỉ lệ vẽ cho các khung nhìn. Giả sử cả ba khung nhìn có cùng tỉ lệ 1:1. Cách làm như sau:

Dùng con trỏ chọn cạnh của khung nhìn ở góc trên, bên trái sau đó chọn biểu tượng Properties trên thanh công cụ chuẩn. Hình  là biểu tượng của Properties.

Hộp thoại Properties xuất hiện. Chọn danh sách Standard Scale và chọn tỉ lệ 1:1 trong danh sách đó. Thoát ra khỏi hộp thoại và nhấn phím Esc hai lần liên tiếp.

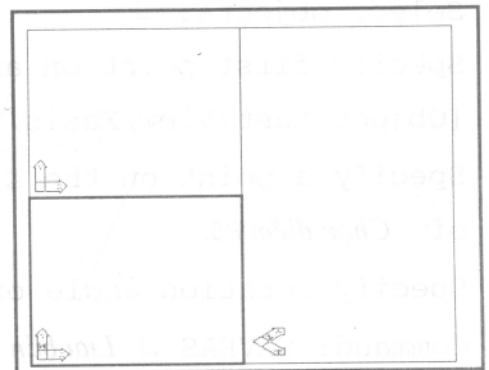
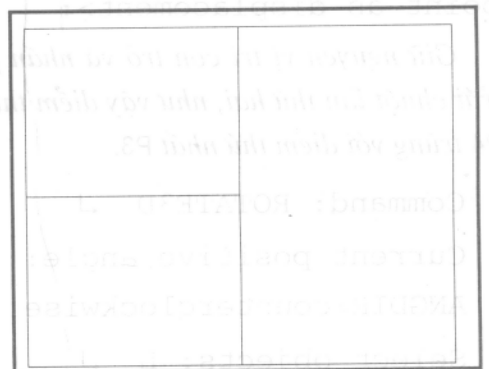
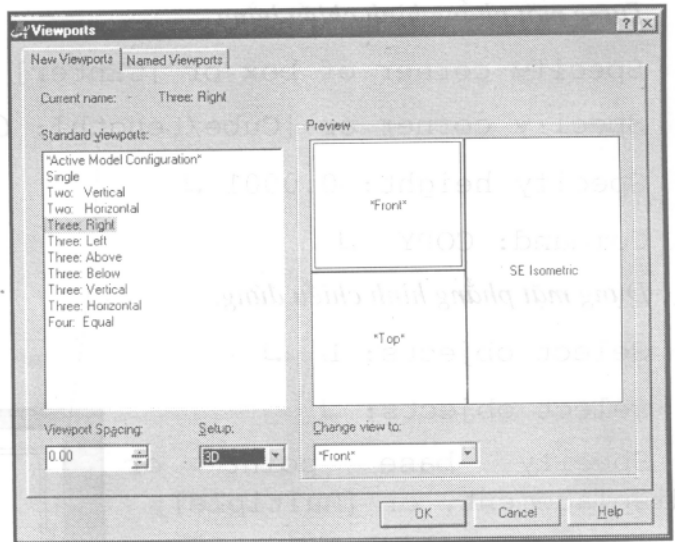
Như vậy là ta đã kết thúc việc định tỉ lệ cho khung nhìn đã chọn. Làm tương tự đối với từng khung nhìn còn lại. Trong những bài tập sau này nếu cần quan sát bóng tỉ mỉ hơn trong một khung nhìn nào đó ta có thể định lại tỉ lệ cho thích hợp.

Command: MS ↵

Chuyển sang không gian vật thể.

Để có thể vẽ bóng đổ của các vật thể trên hai mặt phẳng hình chiếu thẳng góc ta cần phải dựng cụ thể hai mặt phẳng đó.

Chọn khung nhìn hình chiếu bằng là hiện hành.



Command: BOX ↵

Dựng mặt phẳng hình chiếu bằng.

Specify corner of box or [Center] <0,0,0>: *Chọn điểm P1.*

Specify corner or [Cube/Length]: *Chọn điểm P2.*

Specify height: 0.0001 ↵

Command: COPY ↵

Dựng mặt phẳng hình chiếu đứng.

Select objects: L ↵

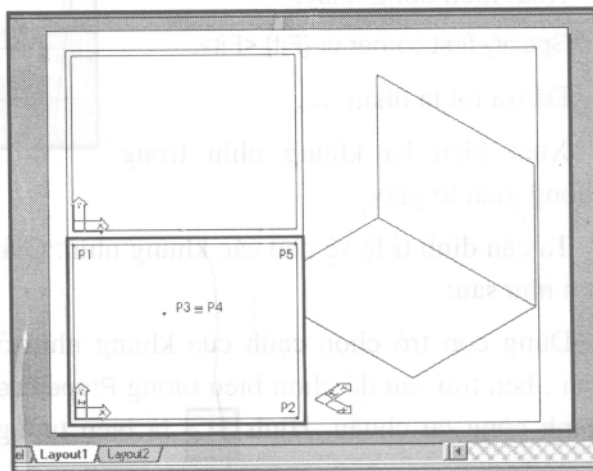
Select objects: ↵

Specify base point or displacement, or [Multiple]:

Dùng con trỏ chọn điểm P3 bất kỳ (nhấn phím trái chuột lần thứ nhất).

Specify second point of displacement or <use first point as displacement>:

Giữ nguyên vị trí con trỏ và nhấn phím trái chuột lần thứ hai, như vậy điểm thứ hai P4 trùng với điểm thứ nhất P3.



Command: ROTATE3D ↵

Current positive angle:

ANGDIR=counterclockwise ANGBASE=0

Select objects: L ↵

Select objects: ↵

Specify first point on axis or define axis by

[Object/Last/View/Xaxis/Yaxis/Zaxis/2points]: X ↵

Specify a point on the X axis <0,0,0>: END ↵

of *Chọn điểm P5.*

Specify rotation angle or [Reference]: -90 ↵

Command: SAVEAS ↵ *Lưu bản vẽ mẫu.*

Xuất hiện hộp thoại Save drawing As. Giả sử ta lưu bản vẽ mẫu vừa thiết lập với tên là C:\3VP.DWG để sử dụng ở các bài sau này.

6.2. VẼ BÓNG DO NGUỒN SÁNG TỪ XA (DISTANT LIGHT)

Tạo mặt nón:

Trước hết ta tạo một mẫu vật thể là mặt nón để làm thí dụ vẽ bóng. Trên thanh thực đơn của cửa sổ AutoCAD2000 ta chọn File-Open, tìm và mở bản vẽ mẫu đã lưu trước đây là C:\3VP.DWG. Chọn khung nhìn hình chiếu bằng là hiện hành.

Command: AI_CONE ↵ *Vẽ mặt nón.*

Specify center point for base of cone: .XY ↵

of Dùng con trỏ xác định tâm đáy nón ở mặt phẳng hình chiếu bằng (xem hình bên).

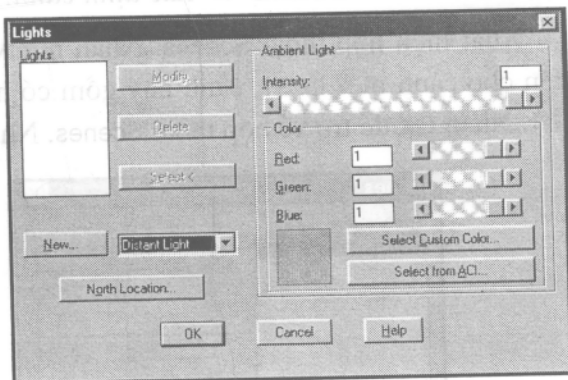
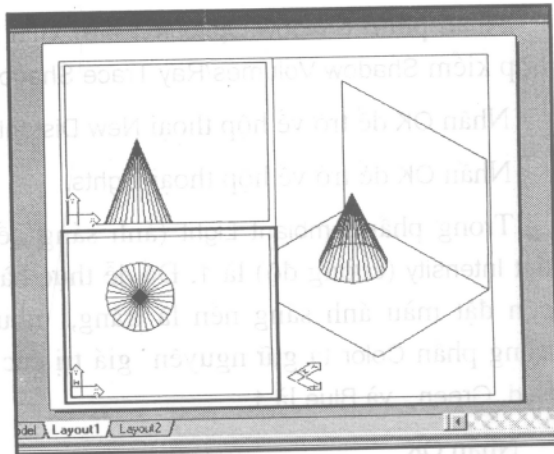
(need Z): 0 ↵

Specify radius for base of cone or [Diameter]: 20 ↵

Specify radius for top of cone or [Diameter] <0>: ↵

Specify height of cone: 50 ↵

Enter number of segments for surface of cone <16>: 32 ↵



Bố trí nguồn sáng:

Command: LIGHT ↵

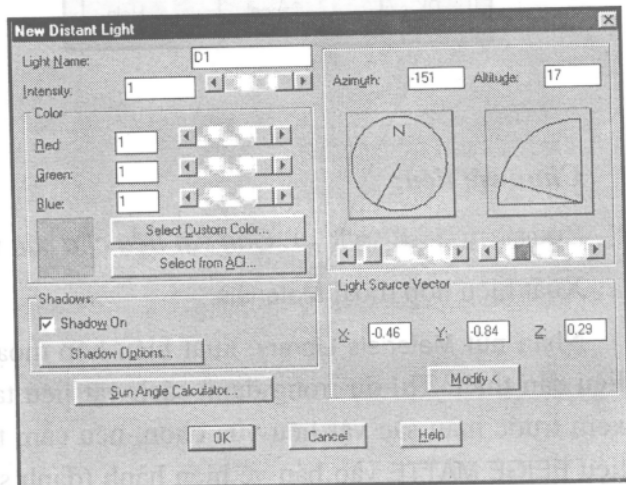
Xác định nguồn sáng.

Xuất hiện hộp thoại Lights.

Trong hộp danh sách các nguồn sáng ta chọn Distant Light.

Nhấn nút New.

Xuất hiện hộp thoại New Distant Light.



Ta đặt tên nguồn sáng mới (Light Name) là D1, cường độ nguồn sáng (Intensity) là 1. Bước đầu thực hành nên đặt màu ánh sáng (Color) là trắng (tương ứng với các giá trị của Red, Green và Blue là 1).

Lần lượt chọn hướng phương vị (Azimuth) và cao độ (Altitude) của nguồn sáng bằng cách gạt con chạy tương ứng sang phải hoặc sang trái để có hướng phương vị là -151 và cao độ là 17.

Trong phần Shadows (ta đánh dấu vào hộp kiểm Shadow On).

Nhấn phím Shadow Options... làm xuất hiện hộp thoại Shadow Options. Ta đánh dấu vào hộp kiểm Shadow Volumes/Ray Trace Shadows.

Nhấn OK để trở về hộp thoại New Distant Light.

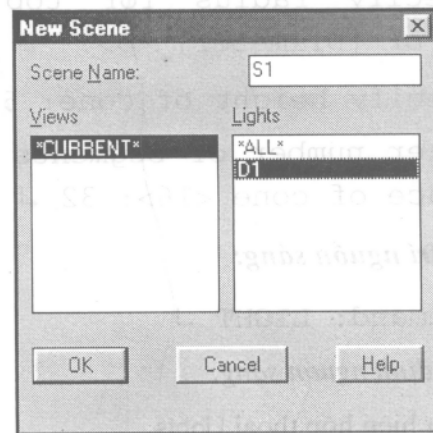
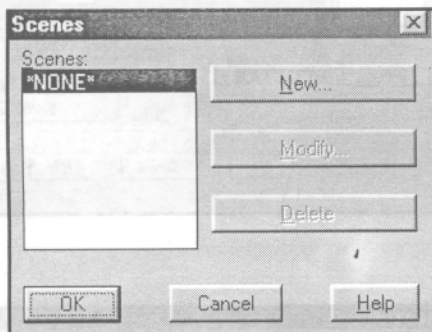
Nhấn OK để trở về hộp thoại Lights.

Trong phần Ambient Light (ánh sáng nền) ta đặt Intensity (cường độ) là 1. Để dễ thực hành ta nên đặt màu ánh sáng nền là trắng, như vậy trong phần Color ta giữ nguyên giá trị các màu Red, Green, và Blue là 1.

Nhấn OK.

Command: SCENE ↵ *Xác định cảnh.*

Xuất hiện hộp thoại Scenes. Nhấn nút New làm xuất hiện hộp thoại New Scene. Ta đặt tên cho cảnh mới là S1, cảnh này gồm có hình chiếu hiện hành của vật thể và nguồn sáng D1. Nhấn OK để trở về hộp thoại Scenes. Nhấn OK.

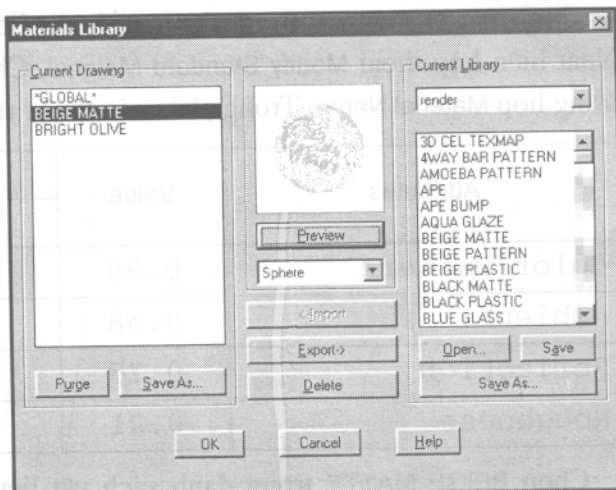
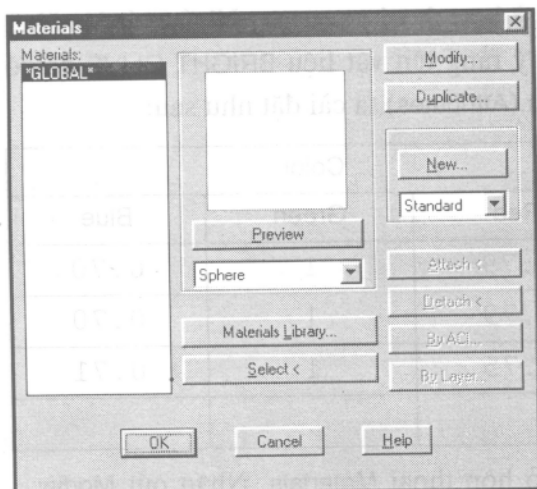


Chọn vật liệu:

Command: RMAT ↵ *Gán vật liệu cho các vật thể cần tô bóng.*

Xuất hiện hộp thoại Materials.

Nhấn nút Materials Library, xuất hiện hộp thoại Materials Library trong đó ta chọn các vật liệu cần thiết. Thí dụ trong danh sách vật liệu ta chọn BEIGE MATTE, nhấn nút Preview để xem trước màu sắc vật liệu vừa chọn, nếu cảm thấy vừa ý ta nhấn nút <-Import để đưa vật liệu BEIGE MATTE vào bản vẽ hiện hành (danh sách ở phía bên trái). Tiếp tục làm như vậy với vật liệu BRIGHT OLIVE. Để kết thúc ta nhấn OK và quay trở về hộp thoại Materials.



Bây giờ ta đã có tên các vật liệu vừa chọn ở trong danh sách Materials. Ta cần gán mỗi vật liệu cho một vật thể trong bản vẽ. Chọn vật liệu BRIGHT OLIVE, nhấn nút Attach < và thấy xuất hiện dòng nhắc:

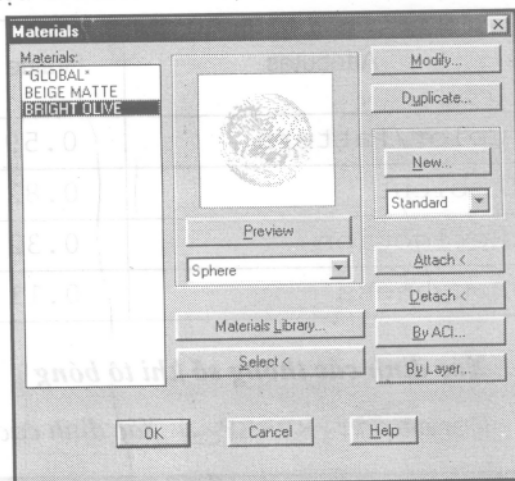
Select objects to attach "BRIGHT OLIVE" to:

Trên bản vẽ hiện hành ta chọn mặt nón để gán vật liệu BRIGHT OLIVE.

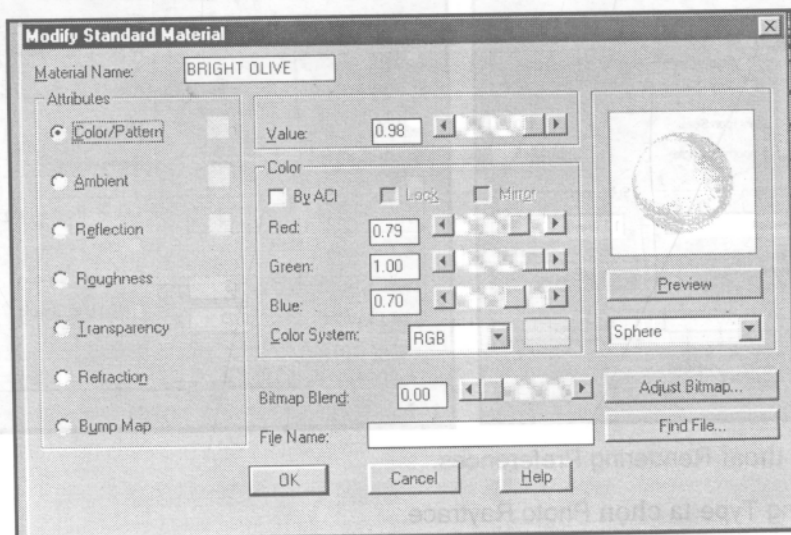
Select objects: ↵

Nhấn OK.

Làm tương tự, ta gán vật liệu BEIGE MATTE cho mặt phẳng hình chiếu đứng và cho mặt phẳng hình chiếu bằng.



Hiệu chỉnh thuộc tính vật liệu:



Chọn BRIGHT OLIVE trong danh sách vật liệu ở hộp thoại Materials. Nhấn nút Modify...
Xuất hiện hộp thoại Modify Standard Material. Chú ý rằng tên vật liệu BRIGHT OLIVE đã có trong hộp Material Name. Trong phần các thuộc tính (Attributes) ta cài đặt như sau:

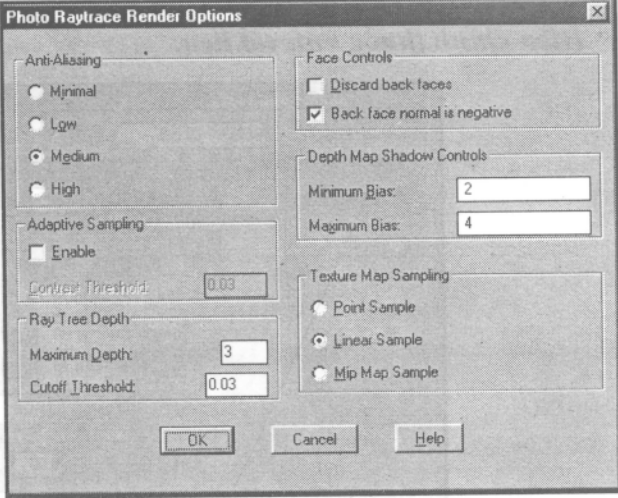
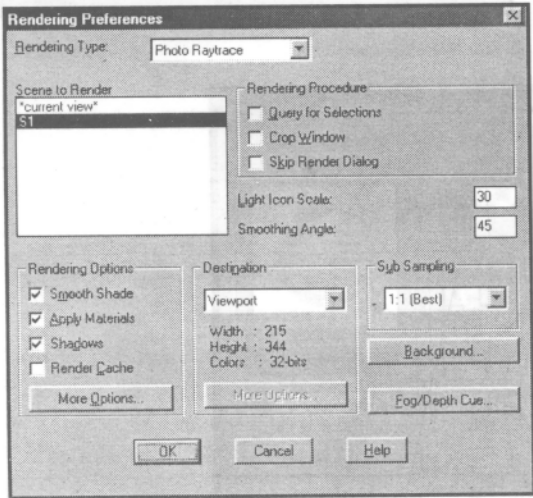
Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.98	0.79	1	0.70
Ambient	0.58	0.79	1	0.70
Reflection	0.75	0.75	1	0.71
Roughness	0.21			

Chọn BEIGE MATTE trong danh sách vật liệu ở hộp thoại Materials. Nhấn nút Modify...
Xuất hiện hộp thoại Modify Standard Material. Chú ý rằng tên vật liệu BEIGE MATTE đã có trong hộp Material Name. Trong phần các thuộc tính (Attributes) ta cài đặt như sau:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.59	1	0.83	0.64
Ambient	0.82	1	0.83	0.64
Reflection	0.32	0.71	0.71	0.71
Roughness	0.11			

Xác định các thông số khi tô bóng

Command: RPREF ↵ Xác định các thông số khi tô bóng.



Xuất hiện hộp thoại Rendering Preferences.
Trong Rendering Type ta chọn Photo Raytrace.

Trong Scene to Render ta chọn S1.

Trong Rendering Options ta đánh dấu vào các hộp kiểm Smooth Shade, Apply Materials và Shadows.

Đặt Light Icon Scale bằng 30, Smoothing Angle bằng 45.

Đặt Destination là Viewport, Sub Sampling bằng 1:1 (Best).

Nhấn nút More Options...

Xuất hiện hộp thoại Photo Raytrace Render Options. Nhấn nút tròn Medium trong phần Anti-Aliasing, đánh dấu hộp kiểm Back face normal is negative, nhấn nút OK để quay về hộp thoại Rendering Preferences và nhấn nút OK.

Tô bóng:

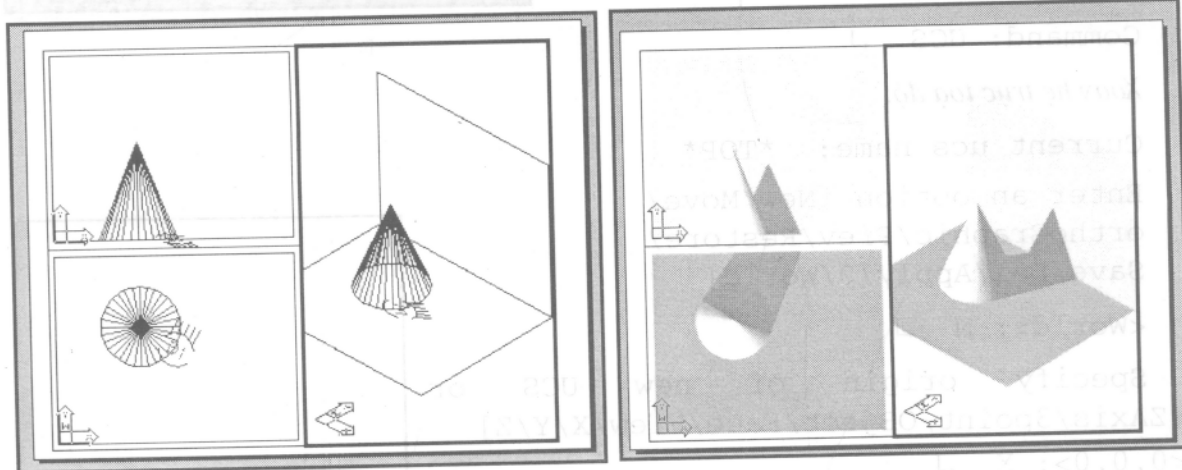
Chọn khung nhìn hình chiếu trục đo là hiện hành.

Command: RENDER ↵ Tiến hành tô bóng.

Xuất hiện hộp thoại Render tương tự hộp thoại Rendering Preferences. Nhấn nút OK.

Sau một vài giây chờ đợi, ta sẽ thấy hiện ra cảnh được tô bóng ở khung nhìn hình chiếu trục đo.

Tương tự, nếu ta chọn khung nhìn hình chiếu đứng hoặc hình chiếu bằng là hiện hành và lặp lại lệnh RENDER ta sẽ có các cảnh tô bóng tương ứng.



Trước khi tô bóng

Sau khi tô bóng

6.3. VẼ BÓNG DO NGUỒN SÁNG ĐÈN CHIẾU (SPOTLIGHT)

Tạo mặt tròn xoay:

Trước hết ta dựng một mặt tròn xoay làm mẫu để vẽ bóng. Trên thanh thực đơn của cửa sổ AutoCAD2000 ta chọn File-Open, tìm và mở bản vẽ mẫu đã lưu trước đây là C:\3VP.DWG. Chọn khung nhìn hình chiếu bằng là hiện hành.

Command: LINE ↵ *Vẽ trục xoay AB.*

Specify first point: *Chọn điểm A.*

Specify next point or [Undo]:

@0,0,50 ↵ *Vẽ điểm B.*

Specify next point or [Undo]: ↵

Chọn khung nhìn hình chiếu trục đo là hiện hành.

Command: UCS ↵

Di chuyển hệ trục tọa độ.

Current ucs name: *TOP*

Enter an option [New/Move/orthoGraphic/Prev/Restore/Save/Del/Apply/?/World]

<World>: M ↵

Specify new origin point or [Zdepth]<0,0,0>: END ↵

of Chọn điểm A.

Command: UCS ↵

Xoay hệ trục tọa độ.

Current ucs name: *TOP*

Enter an option [New/Move/orthoGraphic/Prev/Restore/Save/Del/Apply/?/World]

<World>: N ↵

Specify origin of new UCS or [ZAxis/3point/OBject/Face/View/X/Y/Z]

<0,0,0>: X ↵

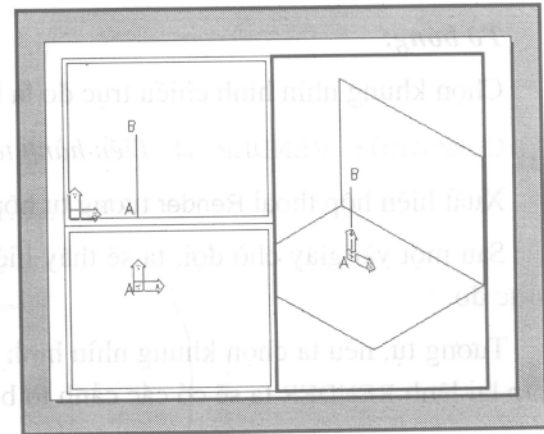
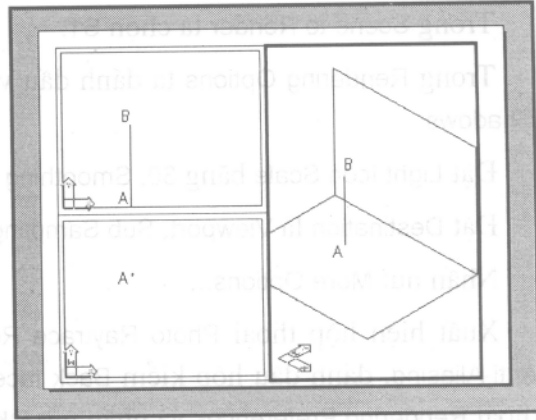
Specify rotation angle about X axis
<90d>: ↵

Command: SPLINE ↵

Vẽ đường sinh của mặt tròn xoay.

Specify first point or [Object]:

Chọn điểm 1.



Specify next point: *Chọn điểm 2.*

Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: *Chọn điểm 3.*

Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: *Chọn điểm 4.*

Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: *Chọn điểm 5.*

Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: *Chọn điểm 6.*

Specify next point or [Close/Fit tolerance] <start tangent>: ↵

Specify start tangent: ↵

Specify end tangent: ↵

Command: REVSURF ↵

Vẽ mặt tròn xoay.

Current wire frame density:
SURFTAB1=12 SURFTAB2=12

Select object to revolve:

Chọn đường cong vừa vẽ.

Select object that defines
the axis of revolution:

Chọn đường thẳng AB.

Specify start angle <0>: ↵

Specify included angle (+ccw, -cw) <360>: ↵

Command: ERASE ↵

Select objects: *Chọn đường thẳng AB.*

Select objects: ↵

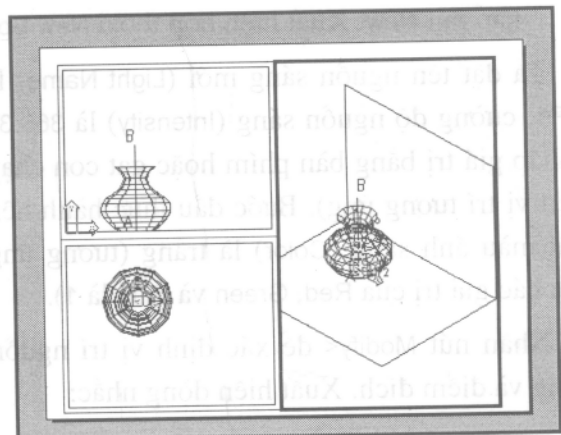
Command: UCS ↵

Quay trở về hệ trục tọa độ trước.

Current ucs name: *NO NAME*

Enter an option
[New/Move/orthoGraphic/Prev/Restore/Save/Del/Apply/?/World]

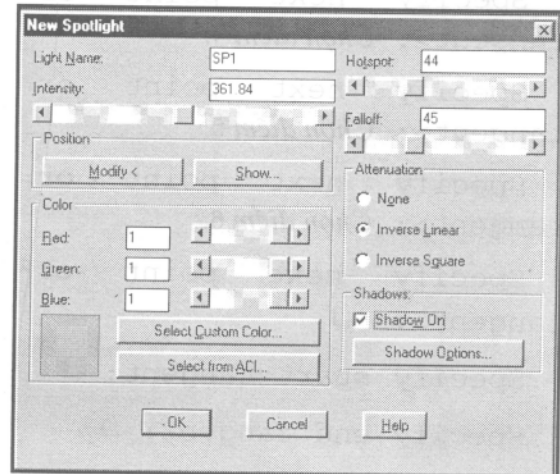
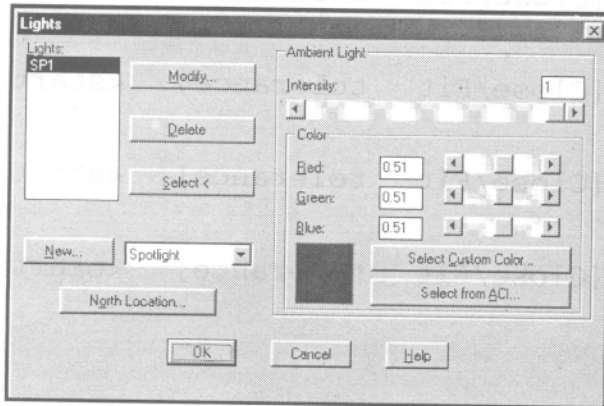
<World>: P ↵



Bố trí nguồn sáng:

Command: LIGHT ↵ *Xác định nguồn sáng.*

Xuất hiện hộp thoại Lights. Trong hộp danh sách các nguồn sáng ta chọn Spotlight.



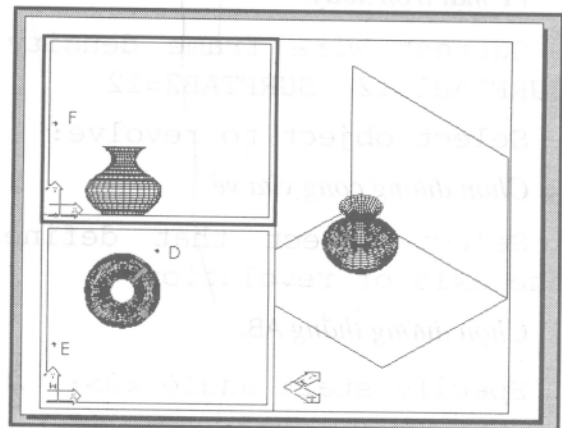
Nhấn nút New. Xuất hiện hộp thoại New Spotlight.

Ta đặt tên nguồn sáng mới (Light Name) là SP1, cường độ nguồn sáng (Intensity) là 366.38 (nhập giá trị bằng bàn phím hoặc gạt con chạy đến vị trí tương ứng). Bước đầu thực hành nên đặt màu ánh sáng (Color) là trắng (tương ứng với các giá trị của Red, Green và Blue là 1).

Nhấn nút Modify< để xác định vị trí nguồn sáng và điểm đích. Xuất hiện dòng nhắc:

Enter light target <current>:

Chọn khung nhìn hình chiếu bằng và dùng con trỏ xác định điểm đích là D.



Enter light location <current>: .XY ↵

of Dùng con trỏ xác định điểm nguồn sáng là E.

(need Z): .Z ↵

of Chọn khung nhìn hình chiếu đứng và dùng con trỏ xác định độ cao tại điểm F.

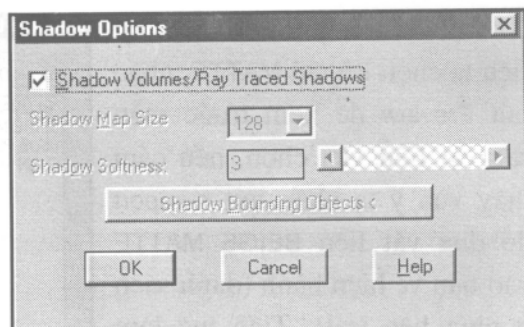
Xuất hiện lại hộp thoại New Spotlight.

Đặt giá trị của Hotspot (vùng ánh sáng mạnh) là 60, của Falloff (vùng ánh sáng yếu) là 61

Trong phần Attenuation nhấn nút tròn Inverse Linear.

Đánh dấu vào hộp kiểm Shadow On.

Nhấn phím Shadow Options... làm xuất hiện hộp thoại Shadow Options. Ta đánh dấu vào hộp kiểm Shadow Volumes/Ray Traced Shadows. Nhấn OK để trở về hộp thoại New Spotlight.

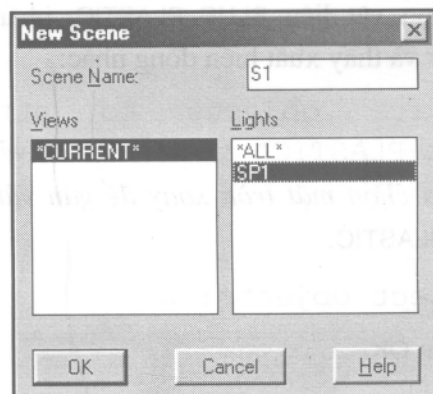
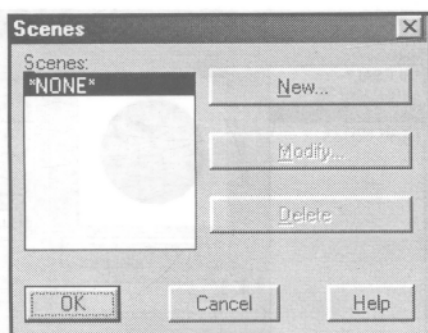


Nhấn OK để trở về hộp thoại Lights. Trong phần Ambient Light (ánh sáng nền) ta đặt Intensity (cường độ) là 1. Trong phần Color ta nhập giá trị các màu Red, Green, và Blue là 0.51. Nhấn OK.

Bố trí cảnh (Scene):

Command: SCENE ↵ *Xác định cảnh.*

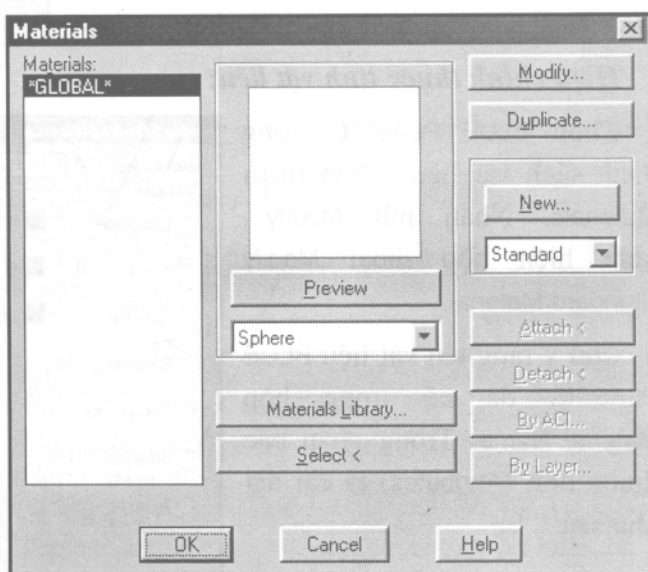
Xuất hiện hộp thoại Scenes. Nhấn nút New làm xuất hiện hộp thoại New Scene. Ta đặt tên cho cảnh mới là S1, cảnh này gồm có hình chiếu hiện hành của vật thể và nguồn sáng SP1. Nhấn OK để trở về hộp thoại Scenes. Nhấn OK.



Chọn vật liệu:

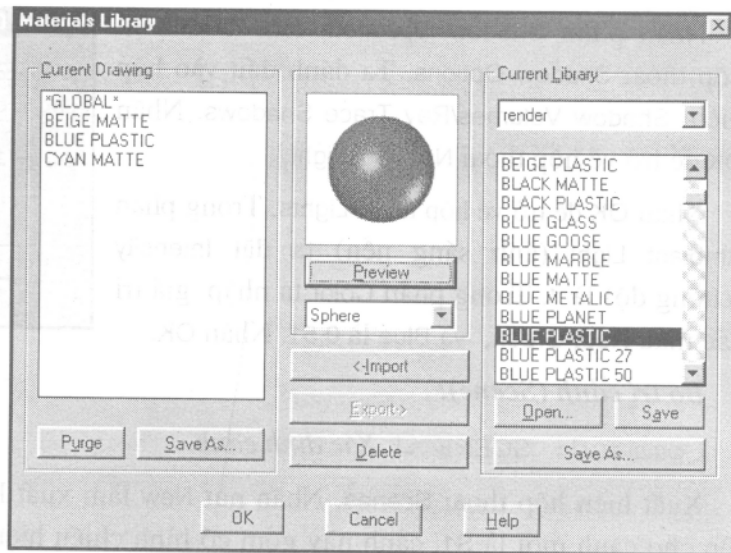
Command: RMAT ↵ *Gán vật liệu cho các vật thể cần tô bóng.*

Xuất hiện hộp thoại Materials.



Nhấn nút Materials Library, xuất hiện hộp thoại Materials Library trong đó ta chọn các vật liệu cần thiết.

Thí dụ trong danh sách vật liệu ta chọn BEIGE MATTE, nhấn nút Preview để xem trước màu sắc vật liệu vừa chọn, nếu cảm thấy vừa ý ta nhấn nút <-import để đưa vật liệu BEIGE MATTE vào bản vẽ hiện hành (danh sách ở phía bên trái). Tiếp tục làm như vậy với các vật liệu BLUE PLASTIC và CYAN MATTE. Để kết thúc ta nhấn OK và quay trở về hộp thoại Materials.



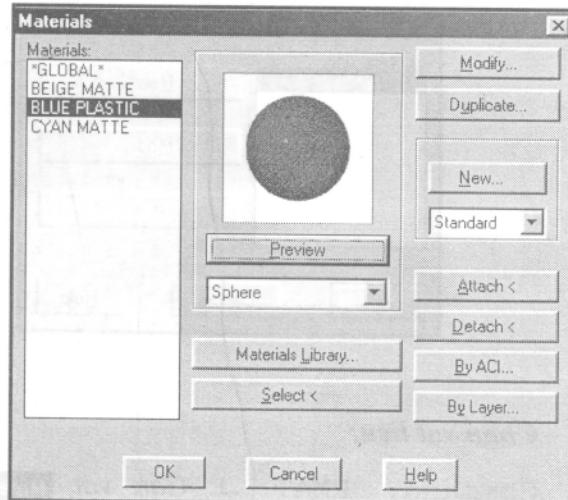
Bây giờ ta đã có tên các vật liệu vừa chọn ở trong danh sách Materials. Ta cần gán mỗi vật liệu cho một vật thể trong bản vẽ. Chọn vật liệu BLUE PLASTIC, nhấn nút Attach < và thấy xuất hiện dòng nhắc:

Select objects to attach "BLUE PLASTIC" to: Trên bản vẽ hiện hành ta chọn mặt tròn xoay để gán vật liệu BLUE PLASTIC.

Select objects: ↵

Nhấn OK.

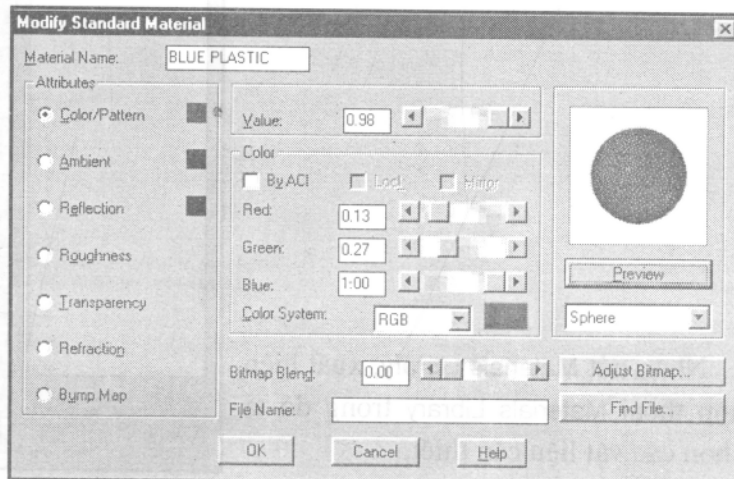
Làm tương tự, ta gán vật liệu BEIGE MATTE cho mặt phẳng hình chiếu bằng và CYAN MATTE cho mặt phẳng hình chiếu đứng.



Hiệu chỉnh thuộc tính vật liệu:

Chọn BLUE PLASTIC trong danh sách vật liệu ở hộp thoại Materials. Nhấn nút Modify... xuất hiện hộp thoại Modify Standard Material.

Chú ý rằng tên vật liệu BLUE PLASTIC đã có trong hộp Material Name. Trong phần các thuộc tính (Attributes) ta cài đặt như sau:



Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.98	0.13	0.27	1
Ambient	0.98	0.07	0.03	1
Reflection	0.96	0.3	0.3	0.3
Roughness	0.15			

Tương tự, ta hiệu chỉnh thuộc tính của các vật liệu còn lại theo các giá trị sau:

Vật liệu BEIGE MATTE:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.98	1	0.83	0.64
Ambient	0.98	1	0.83	0.64
Reflection	0.78	1	1	1
Roughness	0.11			

Vật liệu CYAN MATTE:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	1	1	0.98	1
Ambient	0.86	0	1	1
Reflection	0.34	0	1	1
Roughness	1			

Xác định các thông số khi tô bóng:

Command: RPREF ↵

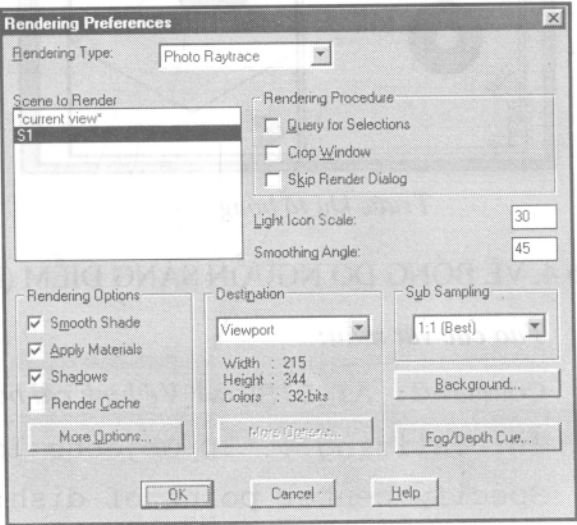
Xác định các thông số khi tô bóng.

Xuất hiện hộp thoại Rendering Preferences.

Trong Rendering Type ta chọn Photo Raytrace.

Trong Scene to Render ta chọn S1.

Trong Rendering Options ta đánh dấu vào các hộp kiểm Smooth Shade, Apply Materials và Shadows.

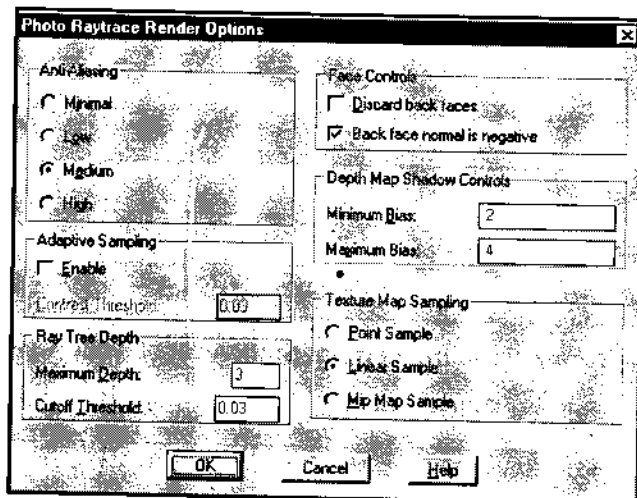


Đặt Light Icon Scale bằng 30, Smoothing Angle bằng 45.

Đặt Destination là Viewport, Sub Sampling bằng 1:1 (Best).

Nhấn nút More Options...

Xuất hiện hộp thoại Photo Raytrace Render Options. Nhấn nút tròn Medium trong phần Anti-Aliasing, đánh dấu hộp kiểm Back face normal is negative, nhấn nút OK để quay về hộp thoại Rendering Preferences và nhấn nút OK.



Tô bóng:

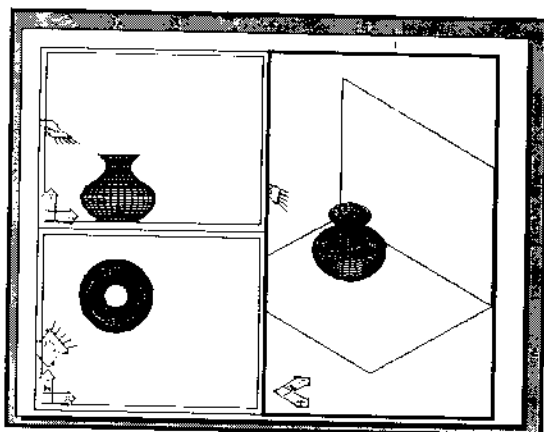
Chọn khung nhìn hình chiếu trực đo là hiện hành.

Command: RENDER ↵ Tiến hành tô bóng.

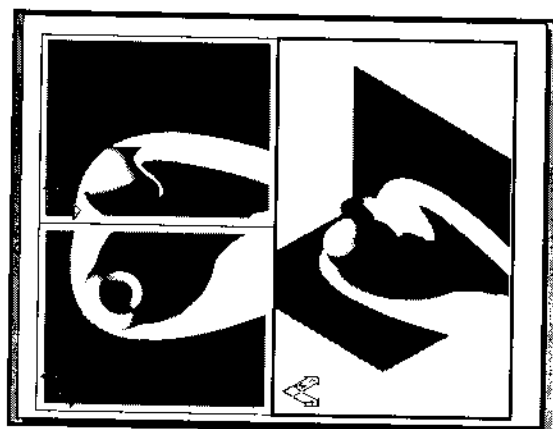
Xuất hiện hộp thoại Render tương tự hộp thoại Rendering Preferences. Nhấn nút OK.

Sau vài giây chờ đợi, ta sẽ thấy hiện ra cảnh được tô bóng ở khung nhìn hình chiếu trực đo.

Tương tự, nếu ta chọn khung nhìn hình chiếu đứng hoặc hình chiếu bằng là hiện hành và lặp lại lệnh RENDER ta sẽ có các cảnh tô bóng tương ứng.



Trước khi tô bóng



Sau khi tô bóng

6.4. VẼ BÓNG DO NGUỒN SÁNG ĐIỂM (POINT LIGHT)

Tạo các vật mẫu:

Command: AI_DISH ↵ Vẽ hình cái bát.

Initializing... 3D Objects loaded.

Specify center point of dish: .XY

of *Chọn điểm A (xem hình bên).*

(need Z): 20 ↵

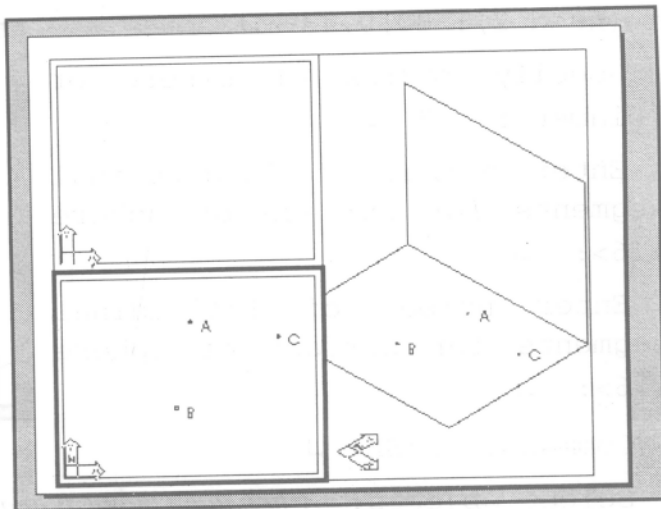
Specify radius of dish
or [Diameter]: 20 ↵

Enter number of
longitudinal segments for
surface of dish <16>:

32 ↵

Enter number of
latitudinal segments for
surface of dish <8>:

32 ↵



Command: LINE ↵

Vẽ đoạn thẳng thẳng đứng đi qua điểm B.

Specify first point: *Chọn điểm B.*

Specify next point or [Undo]: @0,0,40 ↵

Specify next point or [Undo]: ↵

Command: CIRCLE ↵

Vẽ đường tròn.

Specify center point for circle or [3P/2P/Ttr (tan tan radius)]: *Chọn điểm C.*

Specify radius of circle or [Diameter]: 2 ↵

Command: TABSURF ↵

Vẽ thân cây nến.

Select object for path curve:

Chọn đường tròn vừa vẽ.

Select object for direction vector:

Chọn đoạn thẳng đi qua điểm B, điểm chọn ở gần điểm B.

Command: AI_SPHERE ↵

Vẽ ngọn lửa của cây nến.

Specify center point of sphere: .XY ↵

of CEN ↵

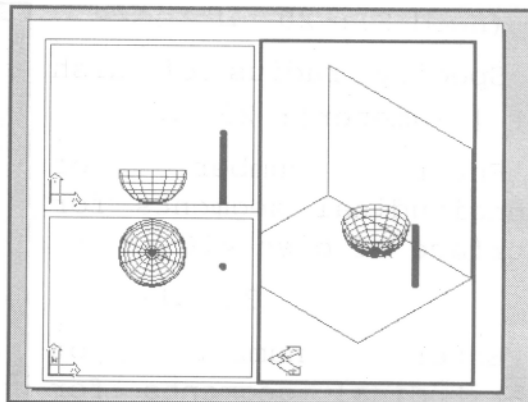
of Chọn đường tròn bán kính 2 đã vẽ ở trên.

(need Z): @0,0,43 ↵

Specify radius of sphere or
[Diameter]: 2 ↵

Enter number of longitudinal
segments for surface of sphere
<16>: ↵

Enter number of latitudinal
segments for surface of sphere
<16>: ↵



Command: ERASE ↵

Select objects: Chọn đoạn thẳng đi qua điểm B.

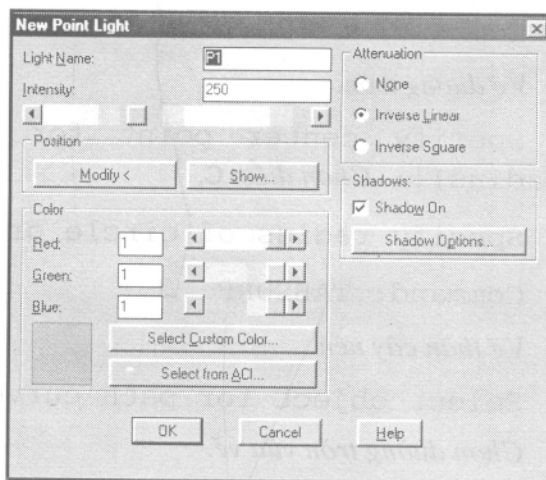
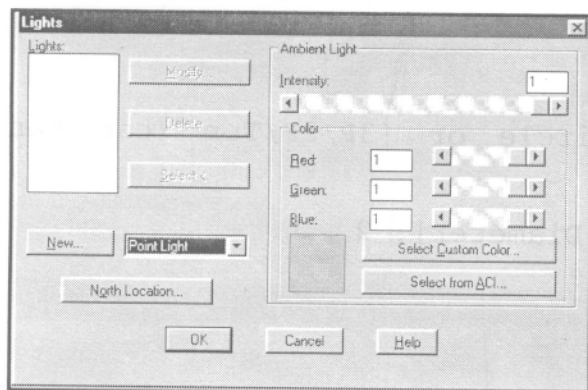
Select objects: ↵

Bố trí nguồn sáng:

Command: LIGHT ↵ Xác định nguồn sáng.

Xuất hiện hộp thoại Lights. Trong hộp danh sách các nguồn sáng ta chọn Point Light.

Nhấn nút New. Xuất hiện hộp thoại New Point Light.



Ta đặt tên nguồn sáng mới (Light Name) là P1, cường độ nguồn sáng (Intensity) là 250 (nhập giá trị bằng bàn phím hoặc gạt con chạy đến vị trí tương ứng). Bước đầu thực hành nên đặt màu ánh sáng (Color) là trắng (tương ứng với các giá trị của Red, Green và Blue là 1).

Nhấn nút Modify< để xác định vị trí nguồn sáng và điểm đích. Xuất hiện dòng nhắc:

Enter light location <current>: .XY ↵

of CEN ↵

of Chọn tâm đường tròn bán kính 2 đã vẽ.

(need Z) : 43 ↵

Trong phần Attenuation nhấn nút tròn Inverse Linear.

Đánh dấu vào hộp kiểm Shadow On.

Nhấn phím Shadow Options... làm xuất hiện hộp thoại Shadow Options. Ta đánh dấu vào hộp kiểm Shadow Volumes/Ray Trace Shadows. Nhấn OK để trở về hộp thoại New Point Light.

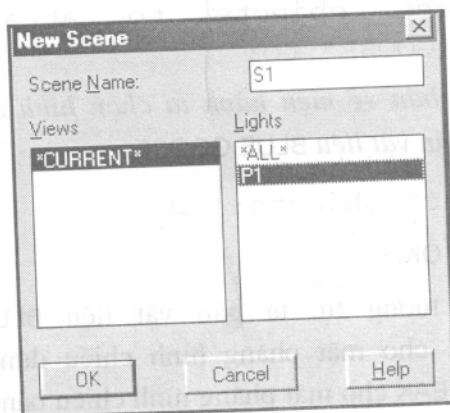
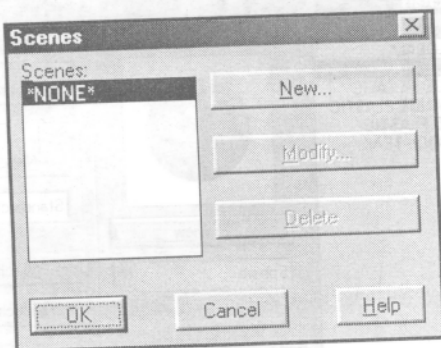
Nhấn OK để trở về hộp thoại Lights.

Trong phần Ambient Light (ánh sáng nền) ta đặt Intensity (cường độ) là 1. Trong phần Color ta nhập giá trị các màu Red, Green, và Blue là 1. Nhấn OK.

Bố trí cảnh (Scene):

Command: SCENE ↵ Xác định cảnh.

Xuất hiện hộp thoại Scenes. Nhấn nút New làm xuất hiện hộp thoại New Scene. Ta đặt tên cho cảnh mới là S1, cảnh này gồm có hình chiếu hiện hành của vật thể và nguồn sáng P1. Nhấn OK để trở về hộp thoại Scenes. Nhấn OK.



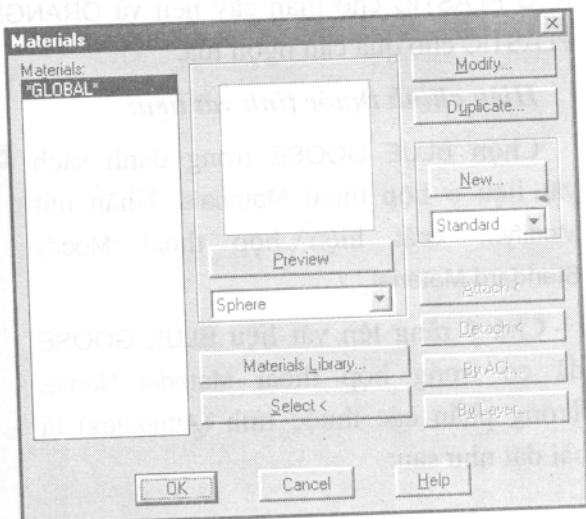
Chọn vật liệu:

Command: RMAT ↵

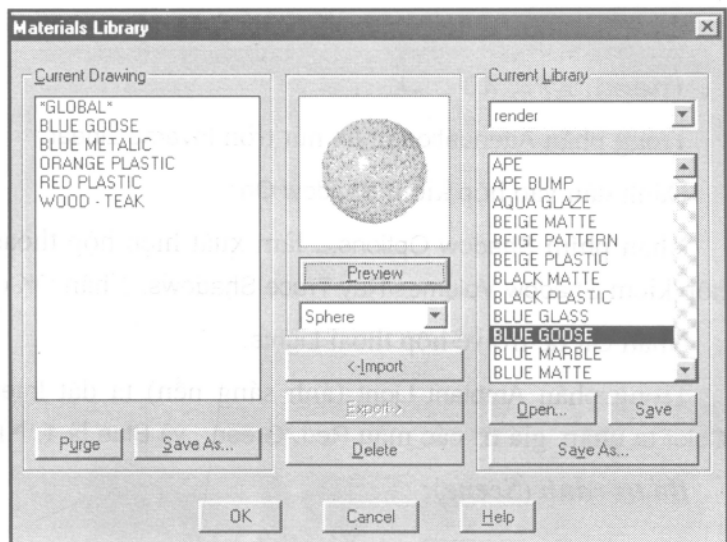
Gán vật liệu cho các vật thể cần tô bóng.

Xuất hiện hộp thoại Materials.

Nhấn nút Materials Library, xuất hiện hộp thoại Materials Library... trong đó ta chọn các vật liệu cần thiết.



Thí dụ trong danh sách vật liệu ta chọn BLUE GOOSE, nhấn nút Preview để xem trước màu sắc vật liệu vừa chọn, nếu cảm thấy vừa ý ta nhấn nút <-import để đưa vật liệu BLUE GOOSE vào bản vẽ hiện hành (danh sách ở phía bên trái). Tiếp tục làm như vậy với các vật liệu BLUE METALIC, ORANGE PLASTIC, RED PLASTIC và WOOD-TEAK. Để kết thúc ta nhấn OK và quay trở về hộp thoại Materials.



Bây giờ ta đã có tên các vật liệu vừa chọn ở trong danh sách Materials. Ta cần gán mỗi vật liệu cho một vật thể trong bản vẽ. Chọn vật liệu BLUE GOOSE, nhấn nút Attach < và thấy xuất hiện dòng nhắc:

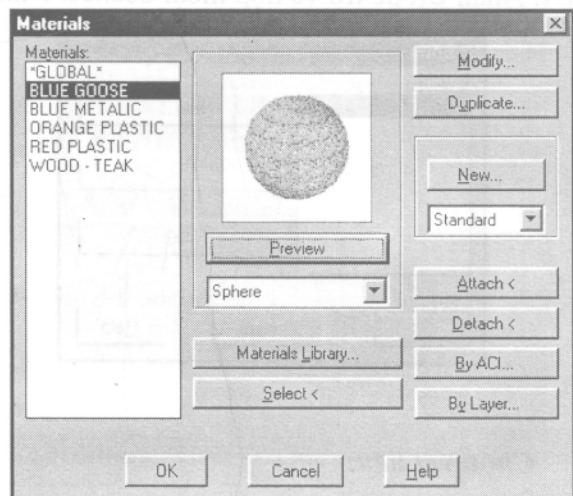
Select objects to attach
"BLUE GOOSE" to:

Trên bản vẽ hiện hành ta chọn hình cái bát để gán vật liệu BLUE GOOSE.

Select objects: ↵

Nhấn OK.

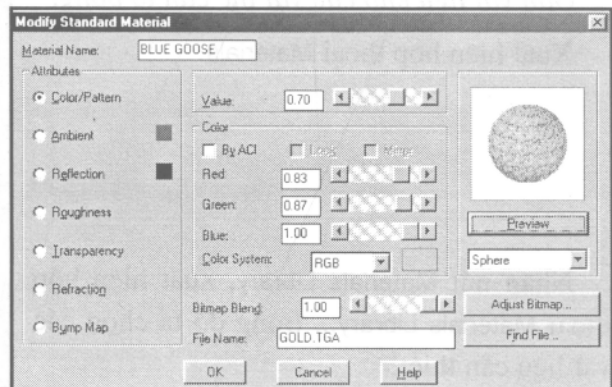
Làm tương tự, ta gán vật liệu BLUE METALIC cho mặt phẳng hình chiếu đứng, WOOD-TEAK cho mặt phẳng hình chiếu bằng, RED PLASTIC cho thân cây nến và ORANGE PLASTIC cho quả cầu ngọn lửa.



Hiệu chỉnh thuộc tính vật liệu:

Chọn BLUE GOOSE trong danh sách vật liệu ở hộp thoại Materials. Nhấn nút Modify... xuất hiện hộp thoại Modify Standard Material.

Chú ý rằng tên vật liệu BLUE GOOSE đã có trong hộp thoại Material Name. Trong phần các thuộc tính (Attributes) ta cài đặt như sau:



Vật liệu BLUE GOOSE:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.70	0.83	0.87	1
Ambient	0.50	0.73	0.19	0.30
Reflection	0.70	0.30	0.30	0.30
Roughness	0.15			

Tương tự, ta cài đặt các giá trị thuộc tính cho các vật liệu khác như sau.

Vật liệu BLUE METALIC:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.30	0.50	0.50	1
Ambient	0.50	0.50	0.50	1
Reflection	0.30	0.70	0.70	0.70
Roughness	0.75			

Vật liệu ORANGE PLASTIC:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.83	1	0.07	0.0
Ambient	1	1	0.65	0.0
Reflection	0.0	1	1	1
Roughness	0.0			
Transparency	1			

Vật liệu RED PLASTIC:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.75	1	0.0	0.0
Ambient	0.75	1	0.0	0.0
Reflection	1	1	1	1
Roughness	0.21			

Vật liệu WOOD-TEAK:

Attributes	Value	Color		
		Red	Green	Blue
Color/Pattern	0.70	0.0	0.0	0.0
Ambient	0.50	0.0	0.0	0.0
Reflection	0.70	0.3	0.3	0.3
Roughness	0.15			

Xác định các thông số khi tô bóng:

Command: RPREF ↵

Xác định các thông số khi tô bóng.

Xuất hiện hộp thoại Rendering Preferences.

Trong Rendering Type ta chọn Photo Raytrace.

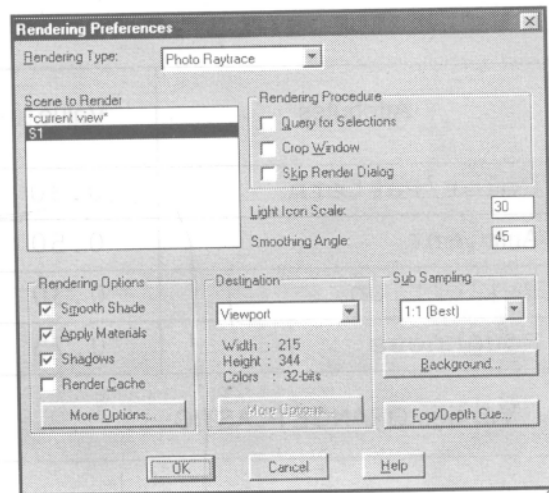
Trong Scene to Render ta chọn S1.

Trong Rendering Options ta đánh dấu vào các hộp kiểm Smooth Shade, Apply Materials và Shadows.

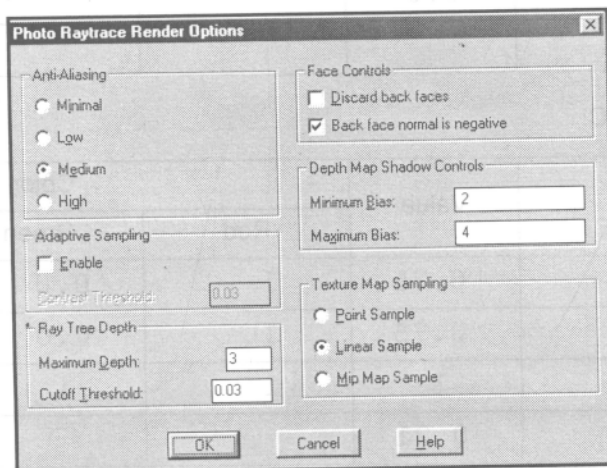
Đặt Light Icon Scale bằng 30, Smoothing Angle bằng 45.

Đặt Destination lự Viewport, Sub Sampling bằng 1:1 (Best).

Nhấn nút More Options...



Xuất hiện hộp thoại Photo Raytrace Render Options. Nhấn nút tròn Medium trong phần Anti-Aliasing, đánh dấu hộp kiểm Back face normal is negative, nhấn nút OK để quay về hộp thoại Rendering Preferences và nhấn nút OK.



Tô bóng:

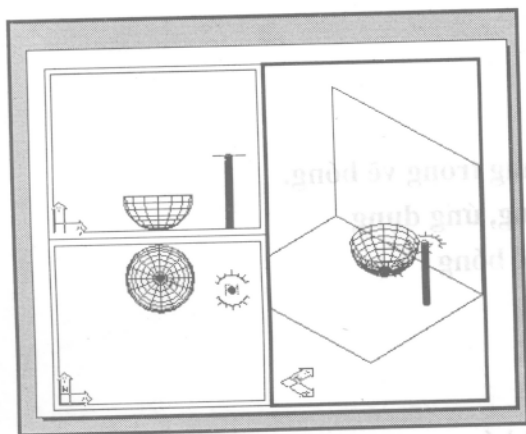
Chọn khung nhìn hình chiếu trực đo là hiện hành.

Command: RENDER ↵ Tiến hành tô bóng.

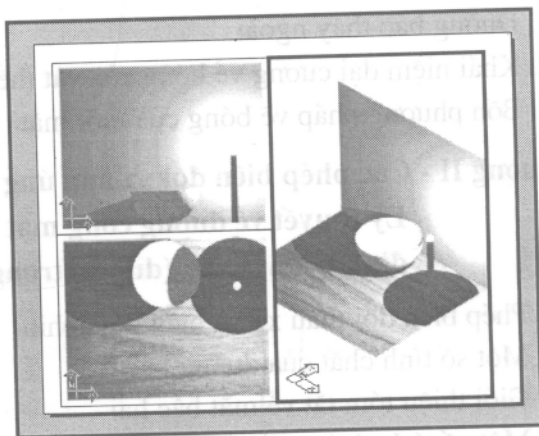
Xuất hiện hộp thoại Render tương tự hộp thoại Rendering Preferences. Nhấn nút OK.

Sau vài giây chờ đợi, ta sẽ thấy hiện ra cảnh được tô bóng ở khung nhìn hình chiếu trực đo.

Tương tự, nếu ta chọn khung nhìn hình chiếu đứng hoặc hình chiếu bằng là hiện hành và lặp lại lệnh RENDER ta sẽ có các cảnh tô bóng tương ứng.



Trước khi tô bóng



Sau khi tô bóng

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu	3
-------------	---

PHẦN MỘT - TÓM TẮT LÝ THUYẾT VỀ VẼ BÓNG

Chương I - Đại cương về vẽ bóng

1.1. Đường bao thấy ngoài	5
1.2. Khái niệm đại cương về bóng của vật thể	6
1.3. Bốn phương pháp vẽ bóng của một mặt	9

Chương II - Các phép biến đổi xạ ảnh ứng dụng trong vẽ bóng.

Lý thuyết về đường cong mặt cong, ứng dụng định lý đuypanh (dupin) trong vẽ bóng

2.1. Phép biến đổi thấu xạ và biến đổi afin	12
2.2. Một số tính chất của đường bậc hai	17
2.3. Giới thiệu tóm tắt về mặt bậc hai	22
2.4. Một số tính chất mặt bậc hai liên quan tới vẽ bóng	33
2.5. Định lí Dupin (Đuypanh) và ứng dụng vào vẽ bóng	39

PHẦN HAI - ĐỀ BÀI VÀ LỜI GIẢI

Chương III - Bóng các hình hình học

3.1. Nguồn sáng quy ước	46
3.2. Bóng của điểm đổ lên mặt phẳng hình chiếu	47
3.3. Bóng của đường thẳng đổ lên mặt phẳng hình chiếu	47
3.4. Bóng của các hình phẳng đổ lên mặt phẳng hình chiếu	49
3.5. Bóng của đa diện	54
3.6. Bóng của mặt tròn xoay	58
Bài tập	75
Lời giải	95

Chương IV - Bóng của nhóm vật thể

Bài tập	163
Lời giải	167

Chương V - Bóng các chi tiết kiến trúc. Bóng trên chính diện ngôi nhà

Đề bài	178
Lời giải	197

PHẦN BA - ỨNG DỤNG AUTOCAD ĐỂ VẼ BÓNG

Chương VI - Dùng AutoCad2000 để vẽ bóng

6.1. Thiết lập bản vẽ mẫu	236
6.2. Vẽ bóng do nguồn sáng từ xa (distant light)	239
6.3. Vẽ bóng do nguồn sáng đèn chiếu (spotlight)	243
6.4. Vẽ bóng do nguồn sáng điểm (point light)	250

VẼ BÓNG

TRÊN BẢN VẼ KIẾN TRÚC

Chịu trách nhiệm xuất bản:

BÙI HỮU HẠNH

<i>Biên tập:</i>	ĐÀO NGỌC DUY
<i>Chế bản:</i>	TÔ NGỌC HẢI
<i>Sửa bản in:</i>	ĐÀO NGỌC DUY
<i>Trình bày bìa:</i>	NGUYỄN HỮU TÙNG

In 1000 cuốn, khổ 19x27 tại xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 43/XB-QLXB-104 ngày 9-01-2003. In xong nộp lưu chiểu tháng 10-2003.

72-72(V)
XD-2003 43 - 2003

Giá : 40.000^d