

ĐÀO HUY BÍCH

LÝ THUYẾT DẪO VÀ CÁC ỨNG DỤNG



NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

ĐÀO HUY BÍCH

LÝ THUYẾT DẪO VÀ CÁC ỨNG DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG
HÀ NỘI - 2004

Lời nói đầu

Lý thuyết dẻo là một bộ phận của cơ học vật rắn biến dạng nghiên cứu các tính chất và các quy luật của vật rắn khi có biến dạng dẻo. Các phương pháp tính toán chính xác của lý thuyết này đã thâm nhập vào nhiều lĩnh vực của kỹ thuật hiện đại, cho phép giải quyết các bài toán về độ bền, khả năng làm việc của máy móc và kết cấu công trình chịu tác dụng của tải trọng và các yếu tố khác. Việc áp dụng những thành tựu toán học và vật lý để xây dựng cơ sở lý thuyết và giải quyết các vấn đề do lý thuyết này đặt ra đã đạt được những kết quả quan trọng.

Giáo trình nhằm giới thiệu những kiến thức cơ bản về lý thuyết dẻo và các ứng dụng, được biên soạn dựa trên những bài giảng đã được sửa đổi và bổ sung của tác giả cho sinh viên ngành Cơ học của trường Đại học Tổng hợp Hà Nội trước đây và trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội hiện nay. Đặc biệt đưa vào và trình bày chi tiết hơn các bài toán có định hướng ứng dụng nhiều trong kỹ thuật.

Đặc điểm của quá trình biến dạng dẻo là không thuận nghịch, nhiều tính chất phức tạp của vật thể xuất hiện, nên có nhiều mô hình của lý thuyết dẻo được xây dựng dựa trên các giả thiết khác nhau phản ánh các tính chất đó, không có một mô hình duy nhất như trong lý thuyết đàn hồi. Các vấn đề này được đề cập trong chương 1 với các mô hình lý thuyết dẻo đơn giản và trong chương 2 với các mô hình lý thuyết dẻo hoàn chỉnh hơn.

Chương 3 trình bày cách đặt bài toán, các định lý tổng quát và các phương pháp chung để giải bài toán của lý thuyết dẻo. Các phương pháp này hiện đang được sử dụng rộng rãi trong tính toán kỹ thuật.

Các chương còn lại, từ chương 4 đến chương 8, trình bày các ứng dụng của lý thuyết dẻo trong các bài toán điển hình, bài toán ứng suất phẳng, bài toán biến dạng phẳng với các ứng dụng trong gia công kim loại bằng áp lực, bài toán về trạng thái giới hạn với ứng dụng tính toán khả năng chịu lực của kết cấu công trình và điều kiện thích nghi của kết cấu, bài toán ổn định ngoài

giới hạn đàn hồi, bài toán truyền sóng dần déo và kết cấu chịu tải trọng động.

Sách này có thể dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên ngành Cơ học, sinh viên các trường Đại học kỹ thuật, các học viên cao học, nghiên cứu sinh và tài liệu tham khảo cho các cán bộ kỹ thuật liên quan đến cơ học.

Giáo trình được hoàn thành nhờ sự quan tâm và tạo điều kiện của lãnh đạo trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, lãnh đạo khoa Toán - Cơ - Tin học và sự giúp đỡ của các đồng nghiệp thuộc bộ môn Cơ học, tác giả bày tỏ lời cảm ơn chân thành.

Tác giả chân thành cảm ơn GS TSKH Nguyễn Đăng Bích, PGS TS Đào Văn Dũng đã đọc và cho những nhận xét quý báu nhằm hoàn thiện giáo trình.

Nhân dịp này Tác giả trân trọng cảm ơn Nhà xuất bản Xây dựng đã nhiệt tình giúp đỡ trong việc xuất bản cuốn sách.

Mong nhận được sự góp ý của bạn đọc và đồng nghiệp về nội dung và cách trình bày cuốn sách.

Hà Nội - 2003

Tác giả

Mục lục

	Trang
Lời nói đầu	i
Mở đầu	1
Chương 1. Cơ sở lý thuyết dẻo	5
1.1. Trạng thái biến dạng	5
1.2. Tốc độ biến dạng	10
1.3. Trạng thái ứng suất	13
1.4. Phương trình cân bằng hoặc chuyển động. Điều kiện biên	16
1.5. Liên hệ giữa ứng suất và biến dạng trong vật liệu đàn hồi đồng chất đẳng hướng (định luật Hooke)	18
1.6. Một số tính chất cơ học của vật rắn khi có biến dạng dẻo	19
1.7. Điều kiện chảy dẻo	27
1.8. Điều kiện đặt tải và cắt tải. Giả thiết đường cong biến dạng duy nhất	29
1.9. Những lý thuyết dẻo đơn giản	33
1.10. Lý thuyết biến dạng dẻo	34
1.11. Lý thuyết chảy dẻo	38
1.12. Nhận xét chung về các lý thuyết dẻo. Trường hợp đặt tải đơn giản	42
1.13. Lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ	46

Chương 2. Lý thuyết dẻo hiện nay	53
2.1. Vector biến dạng và vector ứng suất	53
2.2. Khái niệm về mặt tải (mặt giới hạn)	57
2.3. Định đề Drucker và lý thuyết chảy hiện nay	62
2.4. Định đề đẳng hướng và lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát	73
2.5. Liên hệ giữa hai lý thuyết	81
2.6. Giả thiết xác định địa phương. Hệ thức xác định của lý thuyết quá trình đàn dẻo	90
2.7. Lý thuyết trượt	97
Chương 3. Các định lý tổng quát. Các phương pháp giải bài toán lý thuyết dẻo	101
3.1. Phương trình biến phân Lagrange. Phương pháp Ritz và phương pháp Bubnov-Galerkin	101
3.2. Định lý năng lượng cực tiểu theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ	108
3.3. Nguyên lý cực tiểu công phụ. Phương pháp Philonhenko-Borodish	111
3.4. Định lý về duy nhất nghiệm	114
3.5. Định lý về đặt tải đơn giản	116
3.6. Định lý về cắt tải	118
3.7. Nguyên lý cực trị trong thuyết chảy dẻo	120
3.8. Định lý về phá hủy dẻo hay cân bằng giới hạn	125
3.9. Phương trình cân bằng theo chuyển dịch. Phương pháp nghiệm đàn hồi	132
3.10. Phương pháp tham số đàn hồi thay đổi	134
Chương 4. Ứng dụng lý thuyết dẻo trong các bài toán điển hình	137
4.1. Kéo và xoắn đồng thời ống mỏng	138
4.2. Uốn và kéo thanh hình lăng trụ	142
4.3. Xoắn thanh hình lăng trụ	150

4.4. Cầu rỗng dưới tác dụng của áp suất	162
4.5. Ứng suất nhiệt trong cầu rỗng	168
4.6. Biến dạng đối xứng của ống dày	171
4.7. Trạng thái đàn dẻo của đĩa tròn quay đều	182
4.8. Uốn tấm lá	186
4.9. Biến dạng của ống trụ trong khuôn cứng hình côn	191
Chương 5. Bài toán phẳng của lý thuyết dẻo	195
A - ỨNG SUẤT PHẪNG	
5.1. Các hệ thức cơ sở của ứng suất phẳng	195
5.2. Cách đặt bài toán ứng suất phẳng trong trường hợp vật liệu dẻo lý tưởng	197
5.3. Cân bằng đàn dẻo của bản có lỗ hổng tròn với vật liệu dẻo lý tưởng	207
5.4. Cách đặt bài toán ứng suất phẳng theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ với vật liệu tái bền	220
5.5. Uốn đàn dẻo bản mỏng	222
B - BIẾN DẠNG PHẪNG	
5.6. Những phương trình cơ bản của biến dạng phẳng	240
5.7. Biến dạng phẳng đối xứng trục	261
5.8. Bài toán về nén khuôn phẳng	264
5.9. Kéo một dải có vết cắt	269
5.10. Nén lớp vật liệu dẻo giữa hai khuôn cứng. Bài toán Prandtl	271
5.11. Cán dẹt tấm lá	275
Chương 6. Trạng thái giới hạn	279
6.1. Ứng dụng các định lý tĩnh và động về trạng thái giới hạn	279
6.2. Trạng thái giới hạn của thanh có tiết diện bất kỳ chịu xoắn	286
6.3. Trạng thái giới hạn của bản tròn	289
6.4. Khái niệm về thích ứng	299

Chương 7. Ổn định cân bằng ngoài giới hạn đàn hồi	305
7.1. Ổn định của thanh bị nén	305
7.2. Ổn định của bản	312
7.3. Một vài bài toán cụ thể về ổn định của bản	328
Chương 8. Bài toán động của lý thuyết dẻo	333
8.1. Truyền sóng tải đàn dẻo trong thanh	334
8.2. Sóng cắt tải và biến dạng dư	343
8.3. Va chạm của thanh với tường chắn cố định	347
8.4. Vật liệu cứng dẻo trong bài toán động	349
Tài liệu tham khảo	357

Mở đầu

Để tăng công suất và tốc độ động cơ, phát triển kỹ thuật áp lực cao, giảm nhẹ kết cấu các máy móc bay, kết cấu làm việc trong trường nhiệt độ... chúng ta cần phải thiết lập chính xác các quy luật vật lý giữa ứng suất và biến dạng, phải nghiên cứu những hiện tượng không đàn hồi mà lý thuyết đàn hồi không đáp ứng được nữa. Chúng ta thấy rằng vật rắn chỉ biến dạng đàn hồi với biến dạng khá nhỏ; khi tác dụng lực ngoài đến chừng mức nào đấy trong vật thể xuất hiện biến dạng không đàn hồi, tức là biến dạng dư hay biến dạng dẻo.

Lý thuyết dẻo dùng công cụ toán học mô tả quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong vật thể biến dạng dẻo. Nó mở ra triển vọng sử dụng đầy đủ khả năng bền vững của vật liệu. Nó gần gũi với lý thuyết đàn hồi, phần lớn khái niệm của lý thuyết đàn hồi áp dụng được trong lý thuyết dẻo. Đối tượng nghiên cứu của lý thuyết dẻo khá rộng rãi, nó bao gồm nhiều vấn đề của cơ học các vật rắn biến dạng. Ngoài việc chủ yếu nghiên cứu biến dạng đàn dẻo nhỏ (trong đó xem quá trình là đẳng nhiệt hoặc đoạn nhiệt và không phụ thuộc yếu tố thời gian), còn phải nghiên cứu các vấn đề trong lý thuyết chảy dẻo-nhớt, lý thuyết từ biến và lý thuyết dẻo với biến dạng lớn.

Trong tự như thuyết đàn hồi hai vấn đề lớn đặt ra cho lý thuyết dẻo: Một là trên cơ sở những kết luận rút ra từ vật lý lý thuyết và những số liệu thí nghiệm ta thiết lập những quy luật cơ bản của thuyết dẻo. Những quy luật này cùng với các hệ thức cơ sở của cơ học vật rắn biến dạng lập thành những phương trình cơ bản của lý thuyết dẻo. Vấn đề quan trọng thứ hai là giải các phương trình đó, ta sẽ nhận được hình ảnh của biến dạng dẻo trong những trường hợp khác nhau.

Như ta đã biết cơ sở của lý thuyết đàn hồi là định luật Hooke tổng quát, định luật này hoàn toàn xác định các vấn đề xét trong lý thuyết đàn hồi. Nhưng đối với lý thuyết dẻo vấn đề trở nên phức tạp hơn nhiều, các giả thuyết về độ cứng, về tính chất đẳng hướng và thuần nhất, về liên hệ tuyến

tính giữa ứng suất và biến dạng của lý thuyết đàn hồi không còn sử dụng được nữa. Tính chất đa dạng của quá trình biến dạng dẻo phụ thuộc vào cấu trúc của vật liệu và các điều kiện vật lý khác. Do đó một đặc điểm nổi bật là trong thuyết dẻo chưa có một quy luật về liên hệ ứng suất - biến dạng duy nhất như định luật Hooke tổng quát. Với cách đặt vấn đề khác nhau và với các giả thiết đơn giản hóa các quy luật vật lý phức tạp, nhiều nhà nghiên cứu đã thiết lập các mô hình biến dạng dẻo trên hai quan điểm thống kê và hiện tượng. Vì vậy trong lý thuyết dẻo để hẳn một phần trình bày vấn đề thiết lập những định luật biến dạng của các vật liệu khác nhau, làm việc trong các điều kiện khác nhau.

Một đặc điểm đáng chú ý là tính chất phi tuyến của các định luật cơ bản của thuyết dẻo. Do đó khi giải các bài toán này thường gặp khó khăn về mặt toán học, những phương pháp cổ điển của vật lý, toán sử dụng vào đây rất hạn chế, nên phải dựa vào đặc điểm riêng của lý thuyết dẻo để giải. Song song với việc phát triển các phương pháp đúng (thường gặp các hệ thức toán học khá phức tạp), phương pháp gần đúng đóng vai trò quan trọng. Các phương pháp này xuất hiện do yêu cầu của thực tiễn, một mặt phải phù hợp với cơ sở khoa học của lý thuyết, mặt khác phải đơn giản để dễ áp dụng.

Cuối cùng cần chú ý đến ý nghĩa to lớn của các nghiên cứu bằng thực nghiệm để phát triển lý thuyết dẻo.

Những công trình đầu tiên của lý thuyết dẻo xuất hiện vào cuối thế kỷ 19, Saint-Venant xét bài toán phẳng, Lévy mở rộng ra bài toán không gian, trong đó dựa vào kết quả thực nghiệm của Tresca đưa ra điều kiện để vật liệu chuyển từ trạng thái đàn hồi sang trạng thái dẻo và xây dựng hệ thức giữa ứng suất và tốc độ biến dạng. Đầu thế kỷ 20 người ta đã chính xác hóa điều kiện chảy dẻo (Hubert, Mises), kiến nghị quy luật khác về liên hệ giữa ứng suất và biến dạng (Hencky, Mises, Prager) và tiến hành nghiên cứu bằng thực nghiệm (Lode, Rose, Nadai, Taylor). Các công trình về thuyết dẻo hình thành hai hướng phát triển: lý thuyết chảy dẻo và lý thuyết biến dạng. Thời gian này cũng đã thấy những kết quả đầu tiên của việc áp dụng lý thuyết dẻo vào kỹ thuật (gia công kim loại bằng áp suất,...). Phát triển trực tiếp lý thuyết đàn hồi, lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ (Ilyushin) cho phương pháp giải các bài toán cơ bản về tính toán ứng suất, biến dạng và ổn định như đã đặt ra trong lý thuyết đàn hồi. Phương pháp nghiệm đàn hồi (gần đúng liên tiếp) lấy nghiệm đàn hồi làm cơ sở cho phép giải một loạt bài toán dẻo, ngày nay đang có triển vọng được áp dụng rộng rãi trong tính toán kỹ thuật.

Nhờ khái niệm rất cơ bản là đặt tải đơn giản và đặt tải phức tạp, đã phân rõ phạm vi đúng đắn của các lý thuyết trên đây. Ilyushin đã chứng minh rằng

với cách đặt tải đơn giản, tất cả các lý thuyết dẻo đều cho cùng kết quả và có thể đặc trưng cho quá trình này là lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ. Lý thuyết này đã được ứng dụng trong các bài toán về cân bằng, tải tới hạn và ổn định bản, vỏ, về ứng suất tập trung tại lỗ hổng (Ilyushin, Panfiorov, Popov, Barsian,...), trong việc thiết lập bài toán động (Rakhmatulin...) nghiên cứu truyền sóng đàn dẻo một chiều và sóng cắt tải.

Đã có nhiều nghiên cứu giành cho lý thuyết dẻo liên quan tới các vật liệu dẻo lý tưởng (không tái bền). Trong bài toán phẳng Hencky, Prandtl, Nadai,... đã chỉ ra rằng trạng thái dẻo của vật liệu này tương ứng với tải giới hạn. Các tác giả đưa vào khái niệm đường trượt để tích phân phương trình của lý thuyết dẻo. Khristianovitch đã tổng quát hóa kết quả này, dẫn về bài toán biên của phương trình loại hyperbolic. Sokolovsky, Ivlev cho phương pháp giải nhiều bài toán cụ thể, nhất là các bài toán phẳng dựa trên lý thuyết chảy dẻo. Các kết quả này có nhiều ứng dụng thực tế trong gia công kim loại bằng áp suất, xác định tải giới hạn (Prandtl, Nadai, Sokolovsky, Phillips, Hodge, Prager,...)

Ilyushin xây dựng phương pháp giải bài toán về sự chảy dẻo của lớp kim loại giữa hai mặt cứng, lớp biên mỏng trên mặt cứng hoặc đàn hồi.

Phát triển lý thuyết biến dạng dẻo hữu hạn và ứng dụng trong kỹ thuật cũng được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm tới (Ilyushin, Green, Prager,...).

Một số vấn đề khác của lý thuyết dẻo đã được nhiều nhà khoa học quan tâm như nghiên cứu đối xử của vật liệu dưới tác dụng lâu dài của trường nhiệt độ, phóng xạ,... (Rabotnov, Katchanov, Oghibalov, Boley,...) hoặc của vật liệu không thuần nhất (Olszak, Urbanowski,...).

Tóm lại trong thời kỳ đầu phát triển lý thuyết dẻo, người ta xuất phát từ những kết quả thực nghiệm nghiên cứu tính dẻo của vật thể để xây dựng những hệ thức đơn giản giữa ứng suất và biến dạng cùng các đạo hàm bậc nhất của nó. Các hệ thức này thông thường chứa một hàm cần xác định bằng thực nghiệm, nên không phản ánh được đầy đủ các quá trình biến dạng. Kết thúc thời kỳ này xuất hiện công trình của Melan, trong đó thiết lập được dưới dạng tổng quát liên hệ giữa tốc độ biến dạng dẻo và mật độ chảy (mật độ giới hạn); đó là cơ sở cho nhiều nghiên cứu về sau này. Cũng thời gian này công trình của Ilyushin với khái niệm toán học về đặt tải đơn giản và phức tạp đã phân rõ được phạm vi tác dụng của các thuyết dẻo hiện có.

Từ những năm 50 của thế kỷ 20 song song với việc thiết lập và giải các bài toán cụ thể theo các lý thuyết dẻo đơn giản, lý thuyết dẻo đang ở thời kỳ phát triển thứ hai đi sâu vào xây dựng lý thuyết tổng quát áp dụng cho trường hợp đặt tải phức tạp với các điều kiện ngoài bất kỳ. Do đó cần phải

xuất phát từ các nguyên lý tổng quát hơn, có thể là chưa dẫn đến đích các hệ thức xác định, nhưng cho phương hướng để giảm bớt khối lượng các thí nghiệm cần thiết, mang tính chất tổng quát và nguyên tắc hơn. Hiện nay có hai hướng phát triển chính: lý thuyết chảy dẻo hiện nay và lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo. Lý thuyết chảy dẻo hiện nay dựa trên cơ sở của định đề Drucker (Drucker, Prager, Novozhilov, Vaculenko,...). Định đề này là một bước tiến quan trọng trong sự phát triển lý thuyết dẻo tổng quát, nhưng còn đòi hỏi có những thí nghiệm để xác minh hệ quả cơ bản của định đề này, đồng thời về mặt lý thuyết cũng như thực nghiệm phải tìm được luật thay đổi của mặt chảy trong quá trình biến dạng. Lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo xây dựng trên cơ sở định đề đẳng hướng của Ilyushin (Ilyushin, Lensky, Panfiorov, D. H. Bich, Pobedria,...), có xét đến tính phức tạp của quá trình đặt tải, đến bất đẳng hướng biến dạng. Những cơ sở của định đề này được chứng minh bằng thực nghiệm, nhưng đến nay mới có một số kết quả nghiên cứu phiếm hàm trong hệ thức giữa ứng suất và biến dạng.

Ngoài ra phải chú ý đến những công trình như của Badorf và Budiansky, Malmeister phát triển lý thuyết trượt. Đó là một hướng đang ở thời kỳ phát triển ban đầu và còn nhiều điểm chưa rõ ràng.

Lý thuyết dẻo có nhiều ứng dụng trong kỹ thuật và vật lý.

Giải quyết nhiều vấn đề về độ bền của các máy móc và công trình đa dạng dựa trên những kết luận của lý thuyết dẻo. Lý thuyết dẻo mở ra triển vọng sử dụng đầy đủ hơn tiềm năng bền vững của vật thể và đưa ra những phương pháp tiên tiến để tính toán khả năng chịu lực của chi tiết máy và công trình. Các phương pháp này không những đơn giản mà nhiều khi còn cho phép xác định trực tiếp dạng tối ưu của kết cấu (lý thuyết thiết kế tối ưu).

Một lãnh vực khác rất quan trọng và có ý nghĩa trong nền kinh tế quốc dân là ứng dụng các quá trình biến dạng dẻo của kim loại ở trạng thái nóng và nguội trong công nghệ cán, ép, chuốt, cắt và tạo dạng sản phẩm công nghiệp..., lý thuyết dẻo được dùng ở đây để phân tích các điều kiện để thực hiện các quá trình đó, phân tích sự phân bố tương ứng của biến dạng.

Vấn đề nghiên cứu các tính chất cơ lý của vật liệu, chẳng hạn các tính bền cũng dựa trên các kết luận của lý thuyết dẻo vì trước khi phá hủy trong vật liệu tồn tại biến dạng dẻo. Các kết quả nghiên cứu về bài toán động lực của lý thuyết dẻo cho phép ta phân tích ứng xử của kết cấu công trình hoặc máy móc chịu tải trọng xung và nổ.

Trong công nghiệp mỏ người ta sử dụng lý thuyết dẻo để nghiên cứu quy luật phân bố của áp lực mỏ và gần đây có triển vọng ứng dụng các phương pháp của lý thuyết dẻo trong các bài toán của địa vật lý và địa chất học.

CHƯƠNG 1

Cơ sở lý thuyết dẻo

Trong chương này trình bày một cách tóm tắt những hệ thức cơ sở của cơ học vật rắn biến dạng được dùng trong lý thuyết dẻo. Các hệ thức này đã được trình bày cụ thể trong phần I của giáo trình “Lý thuyết đàn hồi” [7]. Tiếp đó nêu những tính chất và quy luật vật lý của vật liệu khi có biến dạng dẻo, trên đó xây dựng cơ sở của lý thuyết dẻo toán học. Cũng cần nhấn mạnh là các thuyết dẻo trình bày trong chương này thuộc vào thời kỳ phát triển thứ nhất, tức là các lý thuyết cho quá trình đặt tải đơn giản. Các thuyết này tuy chưa tổng quát, nhưng có ý nghĩa thực tiễn lớn lao, đã được sử dụng để tính toán trong kỹ thuật hiện nay.

1.1 Trạng thái biến dạng

Biến dạng của vật thể được xác định hoàn toàn, khi ta biết vector chuyển dịch u tại mỗi điểm của vật thể. Tenxơ biến dạng nhỏ ε_{ij} xác định bởi công thức sau đây

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad (1.1)$$

trong đó

$$\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^m u_m,$$

$\nabla_i u_j$ là đạo hàm hiệp biến của thành phần u_j của vector chuyển dịch. Chỉ số trong một số hạng lặp lại hai lần biểu thị tổng từ 1 đến 3. Đại lượng Γ_{ij}^m là ký hiệu Christoffel loại hai:

$$\Gamma_{ij}^m = g^{ms} \Gamma_{ijs} = \frac{1}{2} g^{ms} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right),$$

trong đó g_{ij} là tenxơ mêtric của không gian chứa môi trường.

Thành phần vật lý của vector chuyển dịch có dạng

$$u_i^* = u_i \sqrt{g^{ii}} ,$$

trong tọa độ Descartes vuông góc nó trùng với thành phần vector chuyển dịch.

Trong một số bài toán chúng ta cần viết các thành phần vật lý của tenxơ biến dạng trong tọa độ cong trực giao

$$\varepsilon_{ij}^* = (g^{ii} g^{jj})^{1/2} \varepsilon_{ij}.$$

1. Tenxơ biến dạng trong tọa độ trụ

Trong tọa độ trụ r, θ, z , các thành phần vật lý của chuyển dịch và biến dạng có dạng:

$$\begin{aligned} u_1^* &\equiv u_r = u_1, & u_2^* &\equiv u_\theta = \frac{1}{r} u_2, & u_3^* &\equiv u_z = u_3, \\ \varepsilon_{11}^* &\equiv \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{22}^* &\equiv \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{33}^* &\equiv \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_{12}^* &\equiv \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{23}^* &\equiv \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r} \varepsilon_{23}, & \varepsilon_{13}^* &\equiv \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{13}. \end{aligned}$$

Ten xơ biến dạng (1.1) dẫn đến các hệ thức

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} , \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} , \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned}$$

Trường hợp riêng tọa độ cực $u_z = 0$, u_r , u_θ không phụ thuộc z ta có

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} , \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} , \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned}$$

2. Tenxơ biến dạng trong tọa độ cầu

Thành phần vật lý của chuyển dịch và tenxơ biến dạng trong tọa độ cầu r, θ, φ có dạng:

$$\begin{aligned} u_1^* &\equiv u_r = u_1, & u_2^* &\equiv u_\theta = \frac{1}{r \sin \varphi} u_2, & u_3^* &\equiv u_\varphi = \frac{1}{r} u_3, \\ \varepsilon_{11}^* &\equiv \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{22}^* &\equiv \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{33}^* &\equiv \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} \varepsilon_{33}, \\ \varepsilon_{12}^* &\equiv \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r \sin \varphi} \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{23}^* &\equiv \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \varepsilon_{23}, & \varepsilon_{13}^* &\equiv \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{r} \varepsilon_{13}. \end{aligned}$$

Các thành phần này liên hệ với nhau bằng các hệ thức suy từ (1.1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r \operatorname{tg} \varphi} u_\varphi, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \operatorname{tg} \varphi} u_\theta + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

3. Tenxơ biến dạng trong tọa độ Descartes

Trong tọa độ Descartes vuông góc ta nhận được công thức Cauchy quen thuộc

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

hay là

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

trong đó $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$, $u_3 \equiv w$ và ký hiệu x_1, x_2, x_3 trong hệ tọa độ Descartes bằng các biến quen thuộc x, y, z .

Đại lượng $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ biểu thị *độ giãn tương đối* theo các trục x, y, z , tương ứng $2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{zx}$ là *độ trượt tương đối* và

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

là *độ thay đổi thể tích tương đối*.

Tenxơ biến dạng ε_{ij} là tenxơ đối xứng hạng hai có thể đưa về dạng chính

$$\varepsilon_{ij} = e_{(i)}\delta_{ij} \quad (\text{không tổng theo } i),$$

trong đó e_1, e_2, e_3 là *độ giãn chính* (hay *biến dạng chính*).

Các hiệu số

$$\gamma_1 = e_2 - e_3, \quad \gamma_2 = e_3 - e_1, \quad \gamma_3 = e_1 - e_2$$

gọi là *độ trượt chính*.

Tenxơ biến dạng có ba bất biến

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = e_1 + e_2 + e_3 = \theta, \\ \mathcal{E}_2 &= \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 \\ &= (e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \\ \mathcal{E}_3 &= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Chúng ta có thể biểu diễn tenxơ ε_{ij} thành tổng hai tenxơ

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + e\delta_{ij},$$

trong đó tenxơ

$$e\delta_{ij} = \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$$

là *tenxơ cầu biến dạng* tương ứng với sự thay đổi thể tích của phần tử vật thể, và tenxơ

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}$$

là *tenxơ lệch biến dạng* đặc trưng cho sự thay đổi hình dạng của phần tử vật thể. Bất biến của tenxơ lệch có dạng

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_1 &= 0, \\ \mathcal{E}'_2 &= \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2 \right], \\ \mathcal{E}'_3 &= (e_1 - e)(e_2 - e)(e_3 - e).\end{aligned}$$

Trong tự như trong lý thuyết đàn hồi ta đưa vào đại lượng *cường độ biến dạng trượt*

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\sqrt{\mathcal{E}'_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} \\ &= (2e_{ij}e_{ij})^{1/2}\end{aligned}$$

và *cường độ biến dạng*

$$\begin{aligned}e_u &= \left(\frac{2}{3} e_{ij}e_{ij} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}.\end{aligned}$$

Hai đại lượng Γ , e_u chỉ sai khác bất biến thứ hai $\mathcal{E}'_2$ và biến dạng trượt tổng hợp theo hướng bất diện một hằng số nhân. Trong lý thuyết dẻo các đại lượng này có vai trò quan trọng khi thiết lập các hệ thức cơ sở.

Cuối cùng, *ten xơ chỉ hướng biến dạng* xác định bởi công thức

$$\bar{e}_{ij} = \frac{2e_{ij}}{3e_u}.$$

Biến dạng tại lân cận điểm có thể biểu thị qua tenxơ biến dạng ε_{ij} , hoặc là qua biến dạng dân trung bình e , cường độ biến dạng e_u và 4 thành phần độc lập của ten xơ chỉ hướng $\bar{e}_{ij}$.

Nếu do kết quả của bài toán nào đấy ta biết được vectơ chuyển dịch $\mathbf{u}$ như hàm của tọa độ và thời gian, việc xác định thành phần biến dạng theo

(1.1) không gặp khó khăn. Nếu cho các thành phần biến dạng, việc xác định chuyển dịch dẫn đến tích phân các hệ thức Cauchy, các hệ thức này coi như phương trình vi phân của các thành phần u_j . Để xác định đơn trị u_j , tức là đảm bảo tính liên tục của môi trường, các thành phần ε_{ij} phải thỏa mãn phương trình tương thích biến dạng

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{mp}}{\partial x_n \partial x_q} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{nq}}{\partial x_m \partial x_p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{mq}}{\partial x_n \partial x_p} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{np}}{\partial x_m \partial x_q} = 0, \quad (1.2)$$

hay là

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

1.2 Tốc độ biến dạng

Tính chất nhớt có thể xuất hiện trong vật thể khi có biến dạng lớn, vì vậy người ta thường đặc trưng quá trình biến dạng bằng các đại lượng tốc độ biến dạng. Nhận xét theo bản chất của nó, biến dạng dẻo là một trạng thái chuyển động. Hiện tượng chảy dẻo xem như một chuyển động nào đấy của môi trường liên tục.

Giả sử phần tử vật thể chuyển động với vận tốc

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x^1, x^2, x^3, t)$$

và gọi v_i là các thành phần của $\mathbf{v}$. Tương tự như tenxơ biến dạng chúng ta có thể xác định các thành phần của tenxơ tốc độ biến dạng trong tọa độ cong

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i).$$

Trong tọa độ Descartes vuông góc $\dot{\epsilon}_{ij}$ có dạng

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

hay là

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, & \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, & \dot{\epsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, & \dot{\epsilon}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Các đại lượng $\dot{\epsilon}_{xx}$, $\dot{\epsilon}_{yy}$, $\dot{\epsilon}_{zz}$ biểu thị tốc độ giãn tương đối của phần tử theo hướng trục x , y , z tương ứng, còn $2\dot{\epsilon}_{xy}$, $2\dot{\epsilon}_{yz}$, $2\dot{\epsilon}_{zx}$ là tốc độ lệch góc giữa các phần tử hướng theo các trục. Tốc độ thay đổi thể tích bằng

$$\dot{\theta} = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j}.$$

Tenxơ tốc độ biến dạng cũng có thể phân tích thành hai thành phần

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}\delta_{ij} + \dot{e}_{ij} = \dot{\epsilon}\delta_{ij} + \frac{3}{2}v_u\overline{\dot{e}_{ij}},$$

trong đó

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3}\dot{\theta}$$

là *tốc độ giãn trung bình*, $\dot{e}_{ij}$ là tenxơ lệch tốc độ biến dạng, còn

$$v_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})^2 + (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz})^2 + (\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{xx})^2 + 6(\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_{zx}^2)}$$

là *cường độ tốc độ biến dạng*, và $\overline{\dot{e}_{ij}}$ là tenxơ chỉ hướng tốc độ biến dạng

$$\overline{\dot{e}_{ij}} = \frac{2\dot{e}_{ij}}{3v_u}.$$

Tóm lại, đặc trưng cho tốc độ biến dạng tại lân cận điểm có thể dùng tốc độ giãn trung bình $\dot{\epsilon}$, cường độ tốc độ biến dạng v_u và 4 thành phần độc lập của tenxơ chỉ hướng tốc độ biến dạng $\overline{\dot{e}_{ij}}$.

Tốc độ là đạo hàm toàn phần của chuyển dịch

$$v_i = \frac{du_i}{dt},$$

nên

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Nói chung các đại lượng $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ không nhỏ, nên ta chưa có thể thay biểu thức trong dấu ngoặc là $2\varepsilon_{ij}$. Trong trường hợp *biến dạng nhỏ* ta sẽ có:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt},$$

nhưng phải chú ý rằng ngay trong trường hợp này

$$v_u \neq \frac{de_u}{dt}.$$

Sau này ta sẽ thấy $v_u = \frac{de_u}{dt}$ chỉ trong trường hợp *biến dạng đơn giản*.

Để đặc trưng cho biến dạng trượt tổng hợp theo hướng bất diện trong khoảng thời gian t , ta đưa vào đại lượng

$$\frac{d\lambda_u}{dt} = \frac{\partial \lambda_u}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_u}{\partial x} v_x + \frac{\partial \lambda_u}{\partial y} v_y + \frac{\partial \lambda_u}{\partial z} v_z = v_u,$$

khi đó

$$\lambda_u = \int_0^t v_u dt$$

gọi là *mức độ biến dạng trượt*.

Nếu quá trình biến dạng dẻo xảy ra từ từ và nhiệt độ không cao lắm, tính chất cơ học của vật thể phụ thuộc rất ít vào tốc độ biến dạng, thực tế xem như không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng; thì điều quan trọng không phải là tốc độ biến dạng, mà là gia số vô cùng nhỏ của các thành phần biến dạng $d\varepsilon_{ij}$. Các đại lượng

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (du_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial (du_i)}{\partial x_j} \right]$$

lập thành *tenxơ gia số biến dạng*.

Chú ý. Ta không thể xem $d\varepsilon_{ij}$ là vi phân của các thành phần biến dạng ε_{ij} . Chỉ trong trường hợp biến dạng nhỏ $\int d\varepsilon_{ij}$ mới cho thành phần biến dạng ε_{ij} , vì khi đó tồn tại quy luật tổ hợp đơn giản các biến dạng. Trong trường hợp tổng quát người ta không lấy tích phân $\int d\varepsilon_{ij}$; tích phân này chỉ biết khi biết quá trình biến dạng tức là biết $d\varepsilon_{ij}$ như hàm của tham số nào đấy. Trong tự như trên ta cũng có thể tính các gia số $de, de_u, \dots$

1.3 Trạng thái ứng suất

Vector ứng suất $\mathbf{T}_\nu$ tại tiết diện có hướng ν đi qua một điểm nào đấy của vật thể biến dạng có thể biểu thị qua ba vector ứng suất $\mathbf{T}^{(i)}$ trên ba tiết diện được chọn làm mặt tọa độ.

$$\mathbf{T}_\nu = \sum_{i=1}^3 \nu_i \sqrt{G^{ii}} \mathbf{T}^{(i)}, \quad (1.3)$$

trong đó G^{ij} là tenxơ mêtric của không gian chứa môi trường đã biến dạng, ν_i là thành phần của vector ν . Thành phần của ba vector $\sqrt{G^{ii}} \mathbf{T}^{(i)}$ lập thành tenxơ ứng suất đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại một điểm:

$$\sqrt{G^{ii}} \mathbf{T}^{(i)} = \sigma^{ij} \mathbf{G}_j$$

σ^{ij} được gọi là *tenxơ phản biến ứng suất* hạng hai. Ký hiệu T_ν^j là thành phần của $\mathbf{T}_\nu$, từ (1.3) suy ra

$$T_\nu^j = \sigma^{ij} \nu_i. \quad (1.4)$$

Tương tự như thành phần vật lý của chuyển dịch và biến dạng ta xác định thành phần vật lý của tenxơ ứng suất bằng công thức

$$\sigma_{ij}^* = (G_{ii} G_{jj})^{1/2} \sigma^{ij}.$$

Trong tọa độ Descartes thành phần vật lý trùng với thành phần tenxơ ứng suất, ta dùng ký hiệu chung

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ là ứng suất pháp; $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ là ứng suất tiếp tại các tiết diện trực giao với đường tọa độ. Công thức (1.4) trong trường hợp này có dạng

$$\begin{aligned} T_\nu^1 &= X_\nu = \sigma_{xx}\ell + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n, \\ T_\nu^2 &= Y_\nu = \tau_{xy}\ell + \sigma_{yy}m + \tau_{yz}n, \\ T_\nu^3 &= Z_\nu = \tau_{xz}\ell + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n, \end{aligned}$$

trong đó $\nu_1 = \ell, \nu_2 = m, \nu_3 = n$ là cosin chỉ hướng của pháp tuyến ν . Chiếu vectơ $\mathbf{T}_\nu$ lên pháp tuyến ν ta nhận được ứng suất pháp σ_ν

$$\sigma_\nu = \mathbf{T}_\nu \cdot \nu = \sigma_{xx}\ell^2 + \sigma_{yy}m^2 + \sigma_{zz}n^2 + 2\tau_{xy}\ell m + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}n\ell.$$

Ứng suất tiếp τ_ν xác định từ hệ thức

$$\tau_\nu^2 = X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2 - \sigma_\nu^2.$$

Tại mỗi điểm của vật thể biến dạng tồn tại ba tiết diện trực giao với nhau, tại đó ứng suất tiếp bằng không, hướng pháp tuyến của các tiết diện đó gọi là các hướng chính của tenxơ ứng suất. Các hướng chính không phụ thuộc vào cách chọn tọa độ x, y, z . Ứng suất pháp tương ứng theo các hướng chính gọi là *ứng suất pháp chính*, ta ký hiệu $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Tenxơ ứng suất đối với các trục chính có dạng

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(i)}\delta_{ij} \quad (\text{không tổng theo } i).$$

Trên các tiết diện chia đôi góc giữa các mặt phẳng chính có ứng suất tiếp *chính*

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Tenxơ ứng suất σ_{ij} đối xứng có ba bất biến

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma, \\ J_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ &= (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1), \\ J_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \end{aligned}$$

trong đó σ gọi là ứng suất pháp trung bình hay áp suất thủy tĩnh.

Tương tự như tenxơ biến dạng chúng ta có thể phân tenxơ ứng suất thành hai tenxơ

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma \delta_{ij},$$

trong đó $\sigma \delta_{ij}$ là *tenxơ cầu ứng suất*, tương ứng với ứng suất pháp trung bình, còn

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$$

là *tenxơ lệch ứng suất*. Bất biến của tenxơ lệch ứng suất có dạng

$$\begin{aligned} J'_1 &= 0, \\ J'_2 &= \frac{1}{6} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \\ J'_3 &= (\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)(\sigma_3 - \sigma). \end{aligned}$$

Chúng ta đưa vào đại lượng *cường độ ứng suất tiếp*

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{J'_2} = \left(\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned}$$

và đại lượng *cường độ ứng suất*

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned}$$

Cuối cùng, *tenxơ chỉ hướng ứng suất* xác định bởi công thức

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma_u}.$$

Trạng thái ứng suất tại một điểm đặc trưng bởi tenxơ ứng suất σ_{ij} . Nó cũng có thể đặc trưng bởi ứng suất pháp trung bình σ , cường độ ứng suất σ_u và 4 thành phần độc lập của tenxơ chỉ hướng ứng suất.

1.4 Phương trình cân bằng hoặc chuyển động. Điều kiện biên

Nếu tác dụng vào vật thể lực khối K^j , lực mặt Σ^j , vật thể sẽ ở trạng thái chuyển động (hoặc cân bằng), Cauchy là người đầu tiên thiết lập phương trình vi phân chuyển động của môi trường liên tục

$$\nabla_i \sigma^{ij} + \rho K^j = \rho w^j. \quad (1.5)$$

Trường hợp vật thể ở trạng thái cân bằng, phương trình này có dạng

$$\nabla_i \sigma^{ij} + \rho K^j = 0. \quad (1.6)$$

Trong tọa độ cầu r, θ, φ các thành phần vật lý của lực khối và tenxơ ứng suất

$$\begin{aligned} \rho K^1 &= \rho K_r, \quad \rho K^2 = \frac{1}{r \sin \varphi} \rho K_\theta, \quad \rho K^3 = \frac{1}{r} \rho K_\varphi, \\ \sigma_{11}^* &\equiv \sigma_{rr} = \sigma^{11}, \quad \sigma_{22}^* \equiv \sigma_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \varphi \sigma^{22}, \quad \sigma_{33}^* \equiv \sigma_{\varphi\varphi} = r^2 \sigma^{33}, \\ \sigma_{12}^* &\equiv \tau_{r\theta} = r \sin \varphi \sigma^{12}, \quad \sigma_{23}^* \equiv \tau_{\theta\varphi} = r^2 \sin \varphi \sigma^{23}, \quad \sigma_{13}^* \equiv \tau_{r\varphi} = r \sigma^{13} \end{aligned}$$

thỏa mãn phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} - \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi) + \rho K_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + 3\tau_{r\theta}] + \rho K_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\varphi} + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) \operatorname{ctg} \varphi] + \rho K_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Trong tọa độ trụ r, θ, z các thành phần vật lý của tenxơ ứng suất

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &\equiv \sigma_{rr} = \sigma^{11}, \quad \sigma_{22}^* \equiv \sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma^{22}, \quad \sigma_{33}^* \equiv \sigma_{zz} = \sigma^{33}, \\ \sigma_{12}^* &\equiv \tau_{r\theta} = r \sigma^{12}, \quad \sigma_{23}^* \equiv \tau_{\theta z} = r \sigma^{23}, \quad \sigma_{13}^* \equiv \tau_{rz} = \sigma^{13} \end{aligned}$$

thỏa mãn phương trình cân bằng sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho K_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho K_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho K_z &= 0. \end{aligned}$$

Trường hợp riêng trong **tọa độ cực** ta có phương trình cân bằng

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho K_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho K_\theta &= 0,\end{aligned}$$

Trong tọa độ **Descartes vuông góc** phương trình (1.5) và (1.6) có dạng khá đơn giản:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho K_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} (= 0), \quad (1.7)$$

hay là

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho K_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (= 0), \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho K_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} (= 0), \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho K_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (= 0),\end{aligned}$$

ở đây ký hiệu K_x, K_y, K_z là thành phần của lực khối trong tọa độ Descartes vuông góc.

Giải phương trình chuyển động hoặc cân bằng (1.7) cần biết điều kiện trên mặt biên của vật thể. *Điều kiện biên* dưới dạng tổng quát nhất trong tọa độ Descartes phát biểu như sau

a) trên phần mặt biên S_u cho trước chuyển dịch, tức là

$$u_j(x, y, z, t) = u_j^b(x, y, z, t) \quad \text{trên } S_u,$$

b) trên phần mặt biên S_σ cho trước lực mặt Σ_j , tức là

$$\sigma_{ij} \nu_i = \Sigma_j \quad \text{trên } S_\sigma, \quad (1.8)$$

hay là

$$\begin{aligned}X_\nu &= \sigma_{xx}\ell + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = \Sigma_x, \\ Y_\nu &= \tau_{xy}\ell + \sigma_{yy}m + \tau_{yz}n = \Sigma_y, \\ Z_\nu &= \tau_{xz}\ell + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n = \Sigma_z.\end{aligned}$$

Ngoài ra, khi giải phương trình chuyển động (1.7) cần biết *điều kiện ban đầu* tại $t = 0$

$$u_j(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = u_j^0(x, y, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_j^0(x, y, z). \quad (1.9)$$

Biểu thức *công phân tố của lực trong* có dạng

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (1.10)$$

Dùng các tenxơ lệch và tenxơ cầu có thể phân tích phân tố công thành hai thành phần: một phần công gây ra thay đổi thể tích của phần tử vật thể và một phần công gây ra thay đổi hình dáng của phần tử vật thể

$$\delta W = \delta W_\theta + \delta W_d = \sigma \delta \theta + S_{ij} \delta e_{ij}.$$

Nếu biết được hàm W , từ công thức (1.10) có thể xác định được ứng suất:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \right).$$

1.5 Liên hệ giữa ứng suất và biến dạng trong vật liệu đàn hồi đẳng hướng (định luật Hooke)

Đặc trưng cho năng lượng trong của vật thể đàn hồi là thế đàn hồi W . Hàm W ở đây là đẳng cấp bậc hai của các thành phần biến dạng hoặc ứng suất:

$$W = \frac{1}{2} C^{ijrs} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs},$$

từ đây suy ra liên hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng. Trong trường hợp đàn hồi đẳng hướng *định luật Hooke tổng quát* có dạng

$$\sigma^{ij} = C^{ijrs} \varepsilon_{rs} = C_{rs}^{ij} \varepsilon^{rs} = [\lambda g^{ij} g_{rs} + \mu (\delta_r^i \delta_s^j + \delta_r^j \delta_s^i)] \varepsilon_{rs}.$$

Trong tọa độ Descartes hệ thức này dẫn đến¹

$$\sigma_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{jr} \delta_{is})] \varepsilon_{rs} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.11)$$

¹Trong hệ tọa độ cong trực giao, định luật Hooke cũng có dạng như (1.11), nhưng các thành phần ứng suất, biến dạng là các thành phần vật lý của các tenxơ này

hay là

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}, & \tau_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}, & \tau_{yz} &= 2\mu\varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}, & \tau_{zx} &= 2\mu\varepsilon_{zx},\end{aligned}$$

trong đó λ và μ là hằng số Lamé. Nếu ta dùng hai hằng số đàn hồi khác E và ν

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

và biểu thị ngược lại định luật Hooke, tức là biến dạng qua ứng suất, ta được

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (1.12)$$

hay là

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]; & \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})]; & \varepsilon_{yz} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]; & \varepsilon_{zx} &= \frac{1 + \nu}{E} \tau_{zx}.\end{aligned}$$

Định luật Hooke còn có thể biểu thị dưới dạng các hệ thức giữa tenxơ lệch ứng suất và biến dạng, ứng suất pháp trung bình và độ dẫn trung bình, cường độ ứng suất và cường độ biến dạng

$$\begin{aligned}S_{ij} &= 2\mu\varepsilon_{ij}, \\ \sigma &= 3Ke = K\theta, \\ \sigma_u &= 3\mu\varepsilon_u.\end{aligned}$$

Bây giờ để có thể thiết lập được những hệ thức cơ sở của lý thuyết dẻo, trước hết chúng ta xét một số tính chất cơ học của vật rắn khi có biến dạng dẻo.

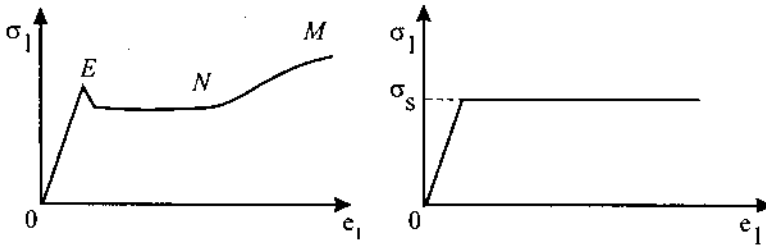
1.6 Một số tính chất cơ học của vật rắn khi có biến dạng dẻo

Để nhận được liên hệ giữa ứng suất và biến dạng ngoài giới hạn đàn hồi trong trường hợp tổng quát, chúng ta cần biết một số tính chất liên quan đến tính đàn hồi và tính dẻo của vật liệu.

Nếu tăng tiếp lực ngoài, vật liệu sẽ chuyển sang trạng thái dẻo, tương ứng với đoạn cong trên đồ thị bắt đầu từ điểm S . Giá trị ứng suất σ_s tương ứng gọi là *giới hạn chảy*. Thông thường người ta xem như $\sigma_e = \sigma_s$.

Khi chuyển trạng thái có thể xảy ra từ từ, cũng có khi tồn tại móm nhọn tùy theo từng loại vật liệu.

Trong giai đoạn dẻo nếu ngừng đặt tải ở trạng thái A chẳng hạn, thì do quá trình không thuận nghịch đường cất tải ABC sẽ không trùng với đường đặt tải mà gần giống đường thẳng có độ dốc như độ dốc của đoạn đàn hồi. Đại lượng *biến dạng dư* tính bằng đoạn OC và ký hiệu là e_1^p .



Hình 1.2

Biến dạng dư e_1^p bằng hiệu số của biến dạng toàn phần e_1 và biến dạng đàn hồi $e_1^e = \frac{\sigma_1}{E}$, vậy:

$$e_1 = e_1^e + e_1^p.$$

Đại lượng e_1^p còn gọi là *biến dạng dẻo*.

Thí nghiệm về nén hoặc xoắn thanh cũng cho đường cong tương tự.

1.6.2 Tái bền

Đối với kim loại đường cất tải ABC gần như đường thẳng. Nếu cất tải hoàn toàn, ứng suất sẽ dẫn tới 0 (điểm C).

Sau khi cất tải hoàn toàn ta có thể coi đây là trạng thái xuất phát mới. Nếu đặt tải trở lại, đường cong đặt tải tiếp CDA không khác mấy đường ABC , tiếp đó nó trùng với đường cong cũ coi như không có hiện tượng cất tải trung gian xảy ra. Vật liệu do bị căng trước đây hình như tích lũy thêm tính đàn hồi, làm tăng giới hạn đàn hồi và giảm đi chừng mức nào đấy khả năng biến dạng dẻo. Hiện tượng đó gọi là *tái bền*.

Ta thấy rằng tái bền giảm dần dần. Khi tăng nhiệt độ hiện tượng này càng thể hiện rõ rệt và dưới tác dụng của nhiệt độ cao tái bền tích lũy được sẽ biến mất (sự ủ vật liệu).

Đặc trưng cho tính tái bền là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $\sigma_1 \sim e_1$. Ở trạng thái dẻo, hệ số góc của tiếp tuyến này giảm dần. Ta gọi đại lượng $\frac{d\sigma_1}{de_1}$ là *môđun tái bền*. Tái bền là tuyến tính khi $\frac{d\sigma_1}{de_1} = E' = \text{const.}$ Thường thường ở giai đoạn đầu của dẻo tương ứng với đoạn đồ thị nằm ngang, tại đó ứng suất có giá trị không đổi σ_s (*giới hạn chảy*) và $\frac{d\sigma_1}{de_1} = 0$ (không tái bền), ta gọi đoạn đó là *tiết diện chảy*.

Nếu lại tiếp tục tăng lực ngoài ứng suất đạt giá trị *giới hạn bền* σ_b , sau đó xảy ra sự phá hủy.

Trong lý thuyết dẻo người ta lý tưởng hóa đường cong $\sigma_1 \sim e_1$ dưới dạng khá đơn giản như sau

a) *Vật liệu dẻo lý tưởng* (không tái bền): gồm đoạn thẳng đàn hồi OE , tiếp đến đoạn thẳng song song với trục Oe_1 .

b) *Vật liệu cứng dẻo*: khi ứng suất nhỏ hơn σ_s , biến dạng xem như bằng không.

c) *Vật liệu tái bền*: tiếp theo đoạn OE là đường cong liên tục có hệ số góc giảm dần, hoặc là đoạn thẳng có hệ số góc E' nếu vật liệu *tái bền tuyến tính*.

d) *Vật liệu có tiết diện chảy*: gồm ba đoạn - đoạn đàn hồi OE , đoạn EN ứng với tiết diện chảy và đoạn ứng với trạng thái tái bền.

1.6.3 Bất đẳng hướng biến dạng - Hiệu ứng Bauschinger

Từ trạng thái sau khi cắt tải hoàn toàn (điểm C) chúng ta đặt tải tiếp nhưng có dấu ngược lại, tức là thay thế việc dãn thanh bằng nén thanh. Giới hạn chảy xuất hiện lại khi nén $\sigma_1^{(H)}$ thay đổi phụ thuộc vào biến dạng trước, do đó $\sigma_1^{(A)} \neq \sigma_1^{(H)}$. Ngoài ra môđun tái bền cũng có thể thay đổi.

Như vậy là khi có biến dạng dẻo, trong vật thể xuất hiện *bất đẳng hướng biến dạng*, nó làm thay đổi tính chất đàn hồi của vật liệu. Một trong những biểu hiện đó là *hiệu ứng Bauschinger*.

Nói chung hiệu ứng Bauschinger thể hiện ở chỗ biến dạng dẻo có trước khi dãn (hoặc nén) làm giảm sức đối kháng với biến dạng dẻo khi nén (hoặc dãn) tiếp sau. Điều đó có nghĩa là tăng giới hạn chảy khi dãn kéo theo sự giảm giới hạn chảy khi nén

$$|\sigma_1^{(A)}| > |\sigma_1^{(H)}|.$$

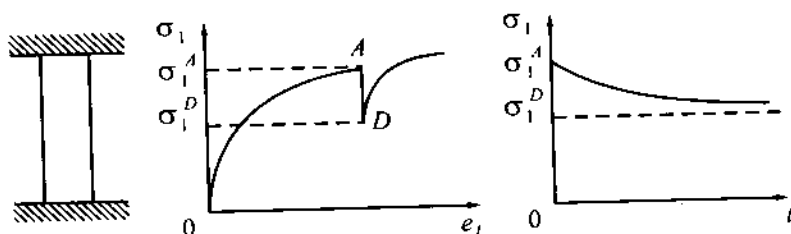
1.6.4 Ảnh hưởng của tốc độ biến dạng

Nếu những thí nghiệm tiến hành trong khoảng thời gian bình thường với nhiệt độ bình thường, thì tính chất cơ học của kim loại nói chung không phụ

thuộc vào tốc độ biến dạng. Tốc độ biến dạng ảnh hưởng trong các thí nghiệm với vật liệu như chì, thiếc... và trong các thí nghiệm với thời gian dài hoặc tức thời và tăng nhiệt độ. Ảnh hưởng của tốc độ biến dạng phụ thuộc rất nhiều vào nhiệt độ.

1.6.5 Hiện tượng chùng ứng suất, từ biến và mồi

a) *Hiện tượng chùng ứng suất*: Xét trường hợp dãn một thanh với tốc độ biến dạng không đổi



Hình 1.3

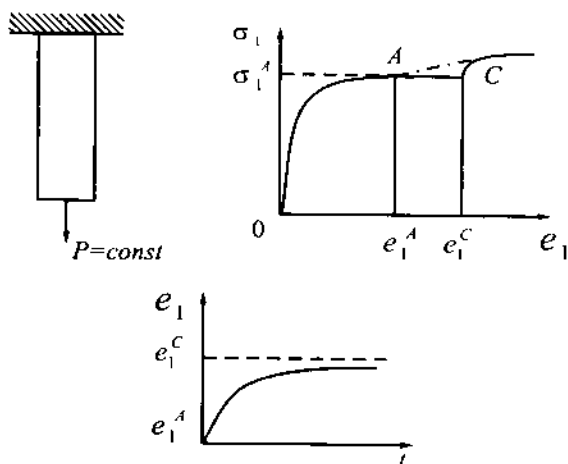
Đến điểm A trên đường cong $\sigma_1 \sim e_1$ ta ngừng đặt tải một cách nhanh chóng và giữ cho biến dạng không đổi. Ứng suất $\sigma_1^{(A)}$ bắt đầu giảm nhanh sau đó thay đổi từ từ và tiệm cận tới giá trị $\sigma_1^{(D)} < \sigma_1^{(A)}$. Hiện tượng ứng suất giảm liên tục với biến dạng không đổi gọi là *hiện tượng chùng ứng suất*. Với nhiệt độ thấp hiện tượng này không đáng kể, tức là sau khi ngừng đặt tải với biến dạng không đổi, nếu ta đặt tải tiếp, ứng suất nhanh chóng đạt giá trị $\sigma_1^{(A)}$, đường cong $\sigma_1 \sim e_1$ có dạng bình thường, hầu như không có điều gì xảy ra tại điểm A.

b) *Hiện tượng từ biến*: Giả sử tại điểm A ta ngừng đặt tải và giữ cho ứng suất không đổi. Biến dạng không ngừng lại, mà tiếp tục tăng nhanh sau đó chậm dần và tiệm cận tới giá trị $e_1^{(c)}$. Hiện tượng này gọi là *hiện tượng chảy chậm* hay còn gọi là *hiện tượng từ biến*. Nếu đặt tải tiếp với tốc độ biến dạng không đổi lớn hơn tốc độ chảy chậm, ứng suất lại đạt giá trị trên đường cong $\sigma_1 \sim e_1$.

Với nhiệt độ bình thường hiện tượng chảy chậm không đáng kể. Nhưng với nhiệt độ khoảng 500° hai hiện tượng trên đối với thép trở thành quan trọng. Maxwell, Prandtl đã mô tả hai hiện tượng trên bằng biểu thức toán học

$$\frac{de_1}{dt} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} = e_1^{(0)} \exp\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1^{(0)}}\right),$$

trong đó t là thời gian, e_1 biến dạng tính từ điểm C ; $\sigma_1^{(0)}$, $e_1^{(0)}$, E là hằng số phụ thuộc vào nhiệt độ.



Hình 1.4

Theo Nadai:

$$\frac{de_1}{dt} - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} = 2e_1^{(0)} \operatorname{sh} \frac{\sigma_1}{\sigma_1^{(0)}}.$$

c) *Hiện tượng mỏi*: Thí nghiệm cho thấy một thanh kim loại dưới tác dụng của tải thay đổi chu kỳ, có thể bị phá hủy sau một số khá lớn nhưng hữu hạn chu kỳ đặt tải, ngay cả khi ứng suất cực đại chưa vượt giới hạn đàn hồi.

Sự lặp lại nhiều lần chu kỳ đặt tải - cất tải thường dẫn đến giảm giới hạn bền của kết cấu, tức là kết cấu có thể bị phá hủy với ứng suất nhỏ hơn giá trị ứng suất phá hủy khi làm việc tĩnh. Người ta gọi đó là *hiện tượng mỏi* của vật liệu.

Vấn đề này rất quan trọng trong thực tế, vì rằng nhiều chi tiết máy, vỏ máy bay và tàu thủy, giàn khoan thường chịu các lực có chu trình.

Sự phá hủy do mỏi thường thể hiện ở chỗ xuất hiện và phát triển các vết rạn vi mô bên trong và bên ngoài mặt vật liệu.

1.6.6 Kết luận về dãn thanh

Những hiện tượng nêu trên trong trường hợp dãn thanh biểu thị nhiều tính chất của biến dạng dẻo. Trong phạm vi giáo trình không thể trình bày mọi nghiên cứu về các vấn đề đó. Như trên chúng ta đã nói, ở đây chỉ đề cập đến khảo sát lý thuyết dẻo của kim loại trong nhiệt độ bình thường. Vì vậy:

a) Liên hệ phi tuyến giữa ứng suất và biến dạng khi đặt tải có thể viết dưới dạng:

$$\sigma_1 = \Phi(e_1) = Ee_1(1 - \omega(e_1)),$$

trong đó hàm $\Phi(e_1)$ phải thỏa mãn điều kiện

$$E \geq \frac{1}{e_1} \Phi(e_1) \geq \frac{d\Phi}{de_1} \geq 0.$$

Các vật liệu có hàm đặc trưng như vậy gọi là vật liệu tái bền. Đối với vật liệu tái bền tuyến tính, người ta biểu thị hàm $\Phi(e_1)$ thành hai đoạn thẳng gặp nhau tại điểm σ_s và $e_s = \frac{\sigma_s}{E}$; khi đó:

$$e_1 \leq e_s \quad \omega = 0,$$

$$e_1 \geq e_s \quad \omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_1}\right) \quad \text{với } \lambda = \frac{E - E'}{E},$$

trong đó E' là môđun tái bền.

b) Biến dạng đàn hồi trong quá trình cắt tải: nếu cắt tải bắt đầu từ $\sigma_1 = \sigma_1^*$ và $e_1 = e_1^*$ thì theo định luật Hooke ta có

$$\sigma_1 - \sigma_1^* = E(e_1 - e_1^*),$$

hay là

$$\sigma_1 = E(e_1 - e_1^p) = Ee_1^{(e)},$$

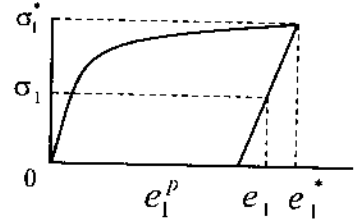
vì

$$e_1^p = e_1^* - \frac{\sigma_1^*}{E}.$$

Ở đây, trong quá trình cắt tải hiệu ứng Bauschinger bằng không. Chúng ta bỏ qua mọi hiện tượng chùng ứng suất, từ biến và phụ thuộc tốc độ biến dạng.

1.6.7 Tính chất thay đổi thể tích đàn hồi

Đa số các vật thể thuần nhất đẳng hướng có tính chất thay đổi thể tích đàn hồi, tức là độ thay đổi thể tích tương đối θ trong quá trình biến dạng đẳng nhiệt là hàm số xác định của ứng suất trung bình σ . Quá trình biến dạng này là thuận nghịch. Có thể thiết lập liên hệ giữa σ và θ từ thí nghiệm nén thủy tĩnh vật thể. Các kết quả thí nghiệm của Bridgman [25]



Hình 1.5

với nhiều vật liệu khác nhau đã khẳng định kết luận trên: thể tích giảm khi tăng áp suất và trở lại trạng thái cũ khi cắt tải. Do đó, theo công thức về thay đổi thể tích trong lý thuyết đàn hồi, ta có:

$$\sigma = 3Ke = K\theta.$$

Quy luật này không những đúng trong trường hợp nén đều mọi phía, mà còn đúng trong trường hợp có biến dạng tùy ý. Thí nghiệm của Davidenkov chỉ ra rằng ảnh hưởng của biến dạng trượt tới quy luật thay đổi thể tích là không đáng kể và có thể bỏ qua.

Biến dạng trượt của vật thể gây ra sự thay đổi hình dáng. Ở nhiệt độ không cao lắm đối với vật liệu đẳng hướng, biến dạng trượt ít phụ thuộc vào áp suất trung bình, nhưng đối với vật liệu bất đẳng hướng, biến dạng trượt phụ thuộc vào áp suất trung bình.

Để tính toán biến dạng dẻo đôi khi người ta còn thay thế bằng *điều kiện không nén được*

$$e = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = 0.$$

Điều đó có nghĩa là sự thay đổi mật độ khi biến dạng dẻo có thể bỏ qua.

Việc xây dựng lý thuyết dẻo liên quan đến giải 3 bài toán cơ bản:

- mở rộng khái niệm giới hạn chảy trong trường hợp ứng suất bất kỳ;
- đưa vào khái niệm dặt tải và cắt tải;
- thiết lập quy luật biến dạng dẻo.

Do đó chúng ta cần đưa vào những khái niệm đối với quá trình biến dạng phức tạp một cách tổng quát hơn những kết quả nhận được trong khảo sát đồ thị dãn - nén thanh.

1.7 Điều kiện chảy dẻo

Trạng thái ứng suất xét trong trường hợp kéo - nén thanh là trạng thái ứng suất một chiều, vì chỉ có một thành phần ứng suất chính khác không. Trường hợp tổng quát cả ba hoặc hai ứng suất chính khác không, những kết quả trên chưa đủ cho ta khảo sát trạng thái ứng suất tổng quát. Vì vậy cần phải thiết lập điều kiện chuyển từ trạng thái đàn hồi sang trạng thái dẻo. Ta gọi điều kiện đó là *điều kiện chảy dẻo*. Xuất phát từ chỗ điều kiện chảy ban đầu có thể biểu thị qua ứng suất và không phụ thuộc vào cách đặt tải trong miền đàn hồi, nó phải độc lập với cách chọn hệ tọa độ x, y, z vì vậy dạng tổng quát của điều kiện chảy chỉ là hàm số của các bất biến tenxơ ứng suất

$$f(\sigma_{ij}) = f(J_1, J_2, J_3) = k^2.$$

Như trên đã chỉ ra rằng trong nhiều bài toán ảnh hưởng của áp suất trung bình đối với sự thay đổi hình dáng có thể bỏ qua, khi đó có thể viết điều kiện chảy nhờ thành phần tenxơ lệch ứng suất. Vì vậy

$$f(S_{ij}) = f(J'_2, J'_3) = k^2.$$

Đối với vật liệu dẻo lý tưởng (không tái bền) trong cả quá trình biến dạng dẻo $k^2 = \text{const}$, còn với vật liệu tái bền k sẽ thay đổi khi biến dạng dẻo tăng.

Ta thấy rằng hàm f phải đối xứng đối với điểm không vì phương trình trên biểu thị điều kiện chảy dẻo ban đầu, trong đó hiệu ứng Bauschinger bằng không. Hơn nữa, hàm f phải đối xứng đối với hướng chính vì chúng ta xét vật liệu đẳng hướng.

Nếu biểu diễn trong không gian ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ phương trình trên biểu thị một hình trụ có trục là đường $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ thẳng góc với mặt phẳng $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Nghiên cứu điều kiện chảy trong quá trình biến dạng dẻo là một vấn đề rất quan trọng được nhiều người quan tâm. Chúng ta sẽ đề cập đến trong chương sau. Ở đây nêu một số giả thiết về điều kiện chảy ban đầu, tức là điều kiện để trong vật thể xuất hiện biến dạng dẻo.

1.7.1 Điều kiện Tresca - Saint Venant

(hay điều kiện ứng suất tiếp cực đại không đổi)

Dựa trên những kết quả thí nghiệm của Tresca về sự chảy dẻo của kim loại qua khe hồng, Saint Venant đã kiến nghị điều kiện chảy như sau: *Vật liệu vượt khỏi giới hạn đàn hồi khi ứng suất tiếp cực đại đạt giá trị τ_s*

$$\tau_{\max} = \tau_s \quad (1.13)$$

trong đó τ_s là ứng suất giới hạn khi xoắn.

Saint Venant cho điều kiện chảy trong trường hợp biến dạng phẳng, còn Lévy cho trong trường hợp không gian.

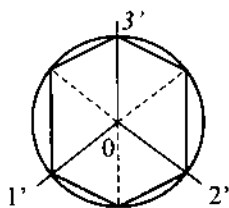
Nếu gọi σ_i ($i = 1, 2, 3$) là ứng suất chính, điều kiện (1.13) có thể viết dưới dạng

$$\sigma_i - \sigma_k = 2\tau_s \quad (\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k), \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Áp dụng vào trường hợp dẫn thanh $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_s$ điều kiện chảy Saint Venant cho ta

$$\tau_s = \frac{1}{2}\sigma_s.$$

Vẽ mặt biểu diễn hình học, điều kiện này cho ta hình lăng trụ có tiết diện là hình sáu cạnh, trục của lăng trụ là đường thẳng $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.



Hình 1.6

Tiết diện của nó trong mặt phẳng $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ là hình lục lăng đều.

Miền đàn hồi là miền trong của lăng trụ. Với nén hoặc dẫn đều mọi phía trạng thái ứng suất có dạng $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, thì vật liệu vẫn làm việc đàn hồi kể cả khi σ_i có giá trị cực lớn.

Điều kiện Saint Venant đặc trưng cho trạng thái chảy dẻo của vật liệu. Những kết quả thực nghiệm về sự chảy dẻo của vật liệu khi bị cán phù hợp với điều kiện này.

Nhưng dùng điều kiện Saint Venant trong bài toán không gian gặp khó khăn lớn về mặt toán học. Mises kiến nghị điều kiện chảy khác.

1.7.2 Điều kiện chảy Mises

(hay điều kiện cường độ ứng suất tiếp không đổi)

Hubert, Mises và Hencky đưa ra điều kiện chảy dẻo trên cơ sở năng lượng biến dạng không đổi

$$f(S_{ij}) = J_2' = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = \tau_s^2. \quad (1.14)$$

Vế trái của (1.14) tỷ lệ với năng lượng làm thay đổi hình dáng, nó cũng chính là biểu thức của bình phương cường độ ứng suất tiếp T .

Phương trình (1.14) biểu thị bằng hình học có dạng hình trụ tròn, ngoại tiếp lăng trụ Saint Venant. Tiết diện của nó trong mặt phẳng $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ là hình tròn ngoại tiếp lăng trụ đều.

Nếu biết các ứng suất chính σ_i ($i = 1, 2, 3$) phương trình trên có dạng

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6\tau_s^2.$$

Áp dụng vào trường hợp dẫn thuần túy $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_s$ từ đây suy ra

$$\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s.$$

Ta cũng có thể biểu thị điều kiện Mises dưới dạng thuận tiện hơn qua cường độ ứng suất σ_u

$$\sigma_u = \sigma_s \quad \text{hay là} \quad \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} = \sigma_s^2.$$

Mises coi điều kiện Saint Venant là đúng, còn điều kiện (1.14) là gần đúng, nhưng nhiều thí nghiệm cho ta thấy với các kim loại đa tinh thể điều kiện Mises thỏa mãn tốt hơn.

Chú ý rằng điều kiện Saint Venant và điều kiện Mises không khác biệt nhau lắm, sự khác biệt đó có thể làm giảm đi được.

Để thể nghiệm các điều kiện chảy người ta đã tiến hành nhiều thí nghiệm, công trình của Hill [77] trình bày khá đầy đủ về vấn đề này.

1.8 Điều kiện đặt tải và cắt tải.

Giả thiết đường cong biến dạng duy nhất

Trong lý thuyết đàn hồi do tính chất tổng hợp tuyến tính ảnh hưởng của lực tác dụng, nên chúng ta không cần quan tâm đến cách đặt tải. Với cách đặt tải tùy ý tenxơ chỉ hướng ứng suất và tenxơ chỉ hướng biến dạng luôn luôn trùng nhau.

Trong lý thuyết dẻo cách đặt lực ảnh hưởng quyết định đến liên hệ giữa tenxơ ứng suất và biến dạng. Do ảnh hưởng của sự thay đổi lực ngoài (quá trình đặt tải) trạng thái biến dạng tại lân cận điểm thay đổi theo, ta gọi hiện tượng đó là *quá trình biến dạng*.

Quá trình biến dạng là *đơn giản* khi tenxơ chỉ hướng biến dạng không thay đổi. Quá trình này thực hiện được nếu các tải ngoại thay đổi tỷ lệ với một tham số nào đấy. Trong quá trình đơn giản các thành phần biến dạng có thể thay đổi, các đại lượng e , e_u cũng có thể thay đổi nhưng hướng chính biến dạng và tỷ số biến dạng chính không đổi.

Trong ứng với quá trình đặt tải đơn giản tenxơ chỉ hướng ứng suất cũng không thay đổi.

Quá trình biến dạng là *phức tạp*, khi có ít nhất một thành phần của tenxơ chỉ hướng biến dạng thay đổi.

Trong nhiều nghiên cứu thực nghiệm chúng ta thấy, trong miền biến dạng dẻo với đặt tải đơn giản hệ thức giữa cường độ ứng suất tiếp T và cường độ biến dạng trượt Γ không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất

$$T = g(\Gamma)\Gamma, \quad (1.15)$$

trong đó $g(\Gamma)$ là hàm số đặc trưng cho từng vật liệu. Vì dạng của phương trình này không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất, nên có thể xác định từ thí nghiệm đơn giản.

Trong trường hợp quá trình biến dạng phức tạp hệ thức (1.15) cho kết quả gần đúng với thực nghiệm.

Phương trình này có thể đặc trưng cho mọi giai đoạn biến dạng. Quả vậy nếu đặt $g(\Gamma) = \mu$ ta có định luật Hooke cho giai đoạn đàn hồi $T = \mu\Gamma$, nếu đặt $g(\Gamma) = \tau_s/\Gamma$ ta sẽ có điều kiện chảy Mises $T = \tau_s$ (vật liệu dẻo lý tưởng). Hàm số $g(\Gamma)$ đôi khi còn gọi là *môđun dẻo*. Ở trạng thái tái bền của các vật liệu thường gặp đường biến dạng lõm về phía dưới, ta có $\frac{dT}{d\Gamma} \geq 0$ dấu bằng xảy ra khi vật liệu dẻo lý tưởng. Khi đó

$$\frac{dT}{d\Gamma} - \frac{T}{\Gamma} = g'(\Gamma)\Gamma < 0.$$

Vì vậy $g'(\Gamma) < 0$, $g(\Gamma)$ là hàm số giảm của Γ

$$0 \leq g \leq \mu = G.$$

Giải (1.15) ngược lại ta được:

$$\Gamma = \bar{g}(T)T.$$

Giả thiết về đường cong biến dạng duy nhất như vừa trình bày có thể mở rộng như sau:

Ở trạng thái tái bền công của biến dạng dẻo W_p không phụ thuộc vào cách đặt tải và chỉ là hàm của cường độ ứng suất tiếp

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p = \Psi(T), \quad (1.16)$$

trong đó $\Psi(T)$ hàm đặc trưng cho từng vật liệu, không phụ thuộc vào dạng của trạng thái ứng suất. Công biến dạng dẻo là một hàm số dương, vì vậy $\Psi(T) > 0$. Ngoài ra khi biến dạng dẻo tăng, W_p cũng tăng, cho nên $\Psi'(T) > 0$.

Ilyushin [51] cũng giả thiết liên hệ giữa cường độ ứng suất và cường độ biến dạng là duy nhất

$$\sigma_u = \Phi(e_u). \quad (1.17)$$

Hàm $\Phi(e_u)$ đặc trưng cho từng vật liệu và không phụ thuộc trạng thái ứng suất. Từ thí nghiệm dãn đơn giản ta có:

$$\sigma_1 = \Phi(e_1) = Ee_1(1 - \omega).$$

Trong trường hợp này:

$$\sigma_u = \sigma_1, \quad e_u = \frac{2}{3}(1 + \nu)e_1$$

hệ thức trên còn có thể viết dưới dạng

$$\sigma_u = \frac{3}{2(1 + \nu)} Ee_u(1 - \omega) = 3Ge_u(1 - \omega),$$

trong đó $G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$.

Vì vậy ta có thể mở rộng để viết hệ thức (1.17)

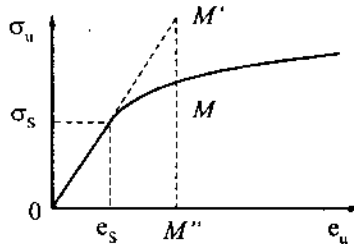
$$\sigma_u = 3Ge_u[1 - \omega(e_u)]. \quad (1.18)$$

Hàm $3G(1 - \omega)$ ở đây đóng vai trò tương tự như $g(\Gamma)$ trong (1.15). Hàm $\omega(e_u)$ xác định bởi công thức

$$\omega = \frac{3Ge_u - \sigma_u}{3Ge_u}.$$

Giả thiết về đường cong $\sigma_u \sim e_u$ tương tự như đối với $T \sim \Gamma$ ta có

$$3G \geq \frac{\sigma_u}{e_u} \geq \frac{d\sigma_u}{de_u} > 0.$$



Hình 1.7

Hàm số $\omega(e_u)$ biểu thị tỷ số đoạn MM' trên đoạn $M'M''$. Nó bằng không với biến dạng đàn hồi và thỏa mãn các bất đẳng thức

$$1 \geq \omega + e_u \frac{d\omega}{de_u} > \omega \geq 0.$$

Ký hiệu e_s là biến dạng giới hạn tương ứng với σ_s , ta có

$$\begin{aligned} \omega &= 0 & \text{với } e_u \leq e_s, \\ \omega &= \omega(e_u) > 0 & \text{với } e_u \geq e_s. \end{aligned}$$

Nếu đường cong $\sigma_u = \Phi(e_u)$ có thể biểu diễn gần đúng bằng hai đoạn thẳng, thì $\frac{d\sigma_u}{de_u}$ là hằng số. Khi đó

$$\begin{aligned} \omega &= 0 & \text{với } e_u \leq e_s, \\ \omega &= \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_u}\right) & \text{với } e_u \geq e_s, \end{aligned}$$

trong đó

$$\lambda = 1 - \frac{1}{3G} \frac{d\sigma_u}{de_u} = 1 - \frac{E'}{3G}$$

tương ứng với vật liệu tái bền tuyến tính.

Điều kiện đặt tải và cắt tải. Với ứng suất một chiều ta phân biệt một cách dễ dàng đặt tải và cắt tải. Nhưng trong trường hợp ứng suất phức tạp vấn đề khó khăn hơn nhiều.

Giả sử vật thể ở trạng thái dẻo đặc trưng bởi ứng suất σ_{ij} và biến dạng ε_{ij} . Nếu cho gia số $d\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{ij}$, các đại lượng T , Γ cũng nhận được gia số dT , $d\Gamma$, nhưng ta chưa thể kết luận được có tăng thêm biến dạng dẻo hay không.

Trường hợp đặt tải đơn giản các thành phần của tenxơ lệch ứng suất thay đổi tỷ lệ với tham số t . Khi đó t tăng ứng với đặt tải, t giảm ứng với cắt tải.

Chúng ta có thể đi đến tiêu chuẩn đặt tải một cách tổng quát hơn. Độ đo cơ bản của biến dạng dẻo là công biến dạng dẻo W_p . Khi đặt tải biến dạng dẻo tăng, thì gia số công biến dạng dẻo dương. Cần phân biệt hai loại vật liệu:

a) Vật liệu dẻo lý tưởng. Với vật liệu này chỉ có thể $dT \leq 0$

$dT = 0$ phát sinh biến dạng dẻo

$dT < 0$ cắt tải trong vật thể theo quy luật đàn hồi.

b) Vật liệu tái bền. Điều kiện $dW_p > 0$ tương đương với $\Psi'(T)dT > 0$. Vì $\Psi'(T) > 0$, cho nên

$dT > 0$ ứng với đặt tải

$dT < 0$ ứng với cất tải theo quy luật đàn hồi. Trạng thái ứng với $dT = 0$ đôi khi gọi là trạng thái trung gian.

Khi cất tải, phần biến dạng của phần tử xảy ra do việc tích lũy năng lượng đàn hồi sẽ mất đi, còn lại biến dạng dư. Vì vậy biến dạng toàn phần ε_{ij} có thể xem là tổng biến dạng đàn hồi ε_{ij}^e và biến dạng dẻo ε_{ij}^p

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p.$$

Thành phần biến dạng đàn hồi liên hệ với ứng suất theo định luật Hooke, các hằng số đàn hồi xem như không đổi. Khi cất tải thành phần biến dạng dẻo không đổi, thành phần biến dạng đàn hồi thay đổi và thỏa mãn hệ thức (1.12)

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right).$$

1.9 Những lý thuyết dẻo đơn giản

Khác với lý thuyết đàn hồi, trong đó quy luật liên hệ giữa ứng suất và biến dạng là duy nhất, người ta thấy có nhiều lý thuyết dẻo. Các lý thuyết này đều có cơ sở xây dựng trên những giả thuyết khác nhau và đều mang ý nghĩa thực tiễn. Nếu đi sâu vào phân tích ta sẽ thấy chúng cho cùng kết quả đối với lớp quá trình này, nhưng lại khác biệt nhau đối với lớp quá trình khác. Vấn đề ở chỗ các giả thiết của lý thuyết mới chỉ phản ánh được một số khía cạnh nào đấy của tính chất vật liệu khi có biến dạng dẻo.

Để xác định quy luật biến dạng dẻo cần phải thiết lập được quan hệ giữa ứng suất và biến dạng, tương tự như định luật Hooke trong lý thuyết đàn hồi. Ở đây chúng ta không xét quy luật dẻo, liên quan đến tính từ biến, tính nhớt của vật liệu, tức là những hiện tượng trong đó thời gian ảnh hưởng nhiều đến tính chất cơ học của vật liệu.

Trên quan điểm cơ học thì trong lý thuyết dẻo cũng có hai bài toán cơ bản.

Bài toán thứ nhất cũng tương tự như bài toán đàn hồi: cho trước lực ngoài tĩnh hoặc động phải tìm biến dạng; nếu lực ngoài triệt tiêu hoàn toàn hoặc một phần, cần xác định biến dạng dư tồn tại trong vật thể; biết sự thay đổi tính chất cơ học liên quan đến biến dạng dẻo và đặt tải lặp lại cần xác định tải tương ứng với sự phá hủy v.v...

Bài toán thứ hai về khía cạnh nào đấy tương tự như bài toán thủy động học: theo chuyển động cho trước của cố thể (hoặc vật thể biến dạng) xảy ra bên trong hoặc trên mặt môi trường dẻo. Cần xác định sức đối kháng, sự

phân bố áp suất trên mặt vật thể và trạng thái cơ học của môi trường. Cũng có thể bổ sung vào đây những điều kiện của bài toán thứ nhất. Trong những trường hợp đơn giản, lý thuyết dẻo có thể không tính đến ảnh hưởng của các biến dạng trước đối với sức đề kháng của vật liệu, nhưng phải tính đến hiệu quả của áp suất (trong trường hợp áp suất cao). Một lý thuyết như vậy phải sử dụng được với biến dạng hữu hạn và với ý nghĩa nào đấy nó tương đương với thủy động học.

Prager [69, 73] chỉ ra rằng mọi lý thuyết dẻo cơ bản đều xây dựng trên cơ sở hệ thức tuyến tính giữa các tenxơ. Các hệ thức này chứa vi phân, tích phân của các tenxơ lệch ứng suất và biến dạng

$$L(S_{ij}) = L'(e_{ij}). \quad (1.19)$$

trong đó L, L' là toán tử tuyến tính của các tenxơ lệch phụ thuộc vào một tham số λ nào đấy

$$\begin{aligned} L(S_{ij}) &= AS_{ij} + B \frac{dS_{ij}}{d\lambda} + \int_0^\lambda CS_{ij} d\lambda + \dots \\ L'(e_{ij}) &= A'e_{ij} + B' \frac{de_{ij}}{d\lambda} + \int_0^\lambda C'e_{ij} d\lambda + \dots \end{aligned} \quad (1.20)$$

$A, B, C, \dots$ là các hàm của bất biến J'_2, J'_3 , còn A', B', C' là hàm của các bất biến $\mathcal{E}'_2, \mathcal{E}'_3$.

Nhờ các giả thiết riêng về các hệ số A, B, C và A', B', C' chúng ta nhận được các hệ thức của lý thuyết dẻo đơn giản. Sau đây chúng ta đi vào khảo sát một vài lý thuyết chính, hiện được sử dụng rộng rãi trong tính toán kỹ thuật. Theo Ilyushin có thể tạm chia ra hai nhóm lý thuyết:

a) lý thuyết biến dạng, trong đó liên hệ hữu hạn giữa tenxơ lệch ứng suất và tenxơ lệch biến dạng.

b) lý thuyết chảy, trong đó liên hệ vi phân giữa tenxơ lệch ứng suất và tenxơ lệch biến dạng.

1.10 Lý thuyết biến dạng dẻo

Lý thuyết biến dạng Hencky - Nadai [25, 73] xây dựng trên cơ sở

a) *Vật liệu đẳng hướng ban đầu.*

b) *Sự thay đổi thể tích tương đối tỷ lệ với áp suất trung bình*

$$\sigma = 3Ke.$$

c) *Tenxơ lệch ứng suất và biến dạng tương tự với nhau và có cùng trục, tức là có cùng hướng chính.*

Lý thuyết này là sự mở rộng của định luật Hooke.

Khi đó trong hệ thức (1.19) và (1.20) chỉ còn các số hạng có hệ số A và A'

$$AS_{ij} = A'e_{ij}. \quad (1.21)$$

Theo cách ký hiệu của Hencky có thể viết (1.21) dưới dạng

$$e_{ij} = \psi S_{ij},$$

hay là

$$\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij} = \psi(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}), \quad (1.22)$$

trong đó ψ - hệ số tỷ lệ là hàm của các bất biến tenxơ ứng suất và tenxơ biến dạng. Phương trình (1.22) chỉ ra rằng các thành phần của tenxơ lệch biến dạng bằng thành phần tương ứng của tenxơ lệch ứng suất nhân với vô hướng ψ . Rõ ràng rằng tenxơ lệch biến dạng và tenxơ lệch ứng suất có cùng hướng chính còn các giá trị chính của chúng tỷ lệ với nhau

$$e_i - e = \psi(\sigma_i - \sigma),$$

từ đây suy ra

$$\frac{e_1 - e_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{e_2 - e_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{e_3 - e_1}{\sigma_3 - \sigma_1},$$

ứng suất tiếp chính tỷ lệ với biến dạng trượt chính.

Viết công thức (1.22) theo các thành phần ta được

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} - e &= \psi(\sigma_{xx} - \sigma), & \varepsilon_{xy} &= \psi\tau_{xy}, \\ \varepsilon_{yy} - e &= \psi(\sigma_{yy} - \sigma), & \varepsilon_{yz} &= \psi\tau_{yz}, \\ \varepsilon_{zz} - e &= \psi(\sigma_{zz} - \sigma), & \varepsilon_{zx} &= \psi\tau_{zx}. \end{aligned}$$

Thay thế e bởi σ , đưa (1.22) về dạng

$$\varepsilon_{ij} = \psi \left(\sigma_{ij} - \frac{\psi - \frac{1}{3}K}{\psi} \sigma \delta_{ij} \right).$$

Nhờ các hệ thức Hencky tính gia số công của lực trong theo công thức (1.10)

$$\delta W = \sigma \delta \theta + S_{ij} \delta e_{ij}.$$

trong đó $\sigma = K\theta$, còn S_{ij} liên hệ với e_{ij} theo (1.22). Vậy

$$\delta W = K\theta\delta\theta + \frac{\Gamma}{2\psi}\delta\Gamma. \quad (1.23)$$

Tiếp đến tính các giá trị của cường độ ứng suất tiếp T và cường độ biến dạng trượt Γ , chúng liên hệ với nhau bởi hệ thức:

$$\Gamma = 2\psi T. \quad (1.24)$$

Thế biểu thức này vào biểu thức của công dẫn đến

$$\delta W = \sigma\delta\theta + T\delta\Gamma.$$

Trong các hệ thức trên hàm ψ chưa xác định, nó là hàm của các bất biến

$$\psi = \psi(T, \Gamma, \mu_\sigma).$$

Trường hợp riêng:

a) *Đàn hồi tuyến tính.*

Giả sử

$$\psi = \frac{1}{2G} = \text{const},$$

hệ thức (1.22) đưa về dạng định luật Hooke đối với tenxơ lệch

$$e_{ij} = \frac{1}{2G}S_{ij}.$$

Cường độ ứng suất tiếp và cường độ biến dạng trượt (1.24) tỷ lệ với nhau

$$T = G\Gamma$$

và thế đàn hồi W có dạng

$$W = \frac{1}{2}K\theta^2 + \frac{1}{2}G\Gamma^2.$$

b) *Vật liệu dẻo lý tưởng*

Từ điều kiện chảy Mises

$$T = \tau_s$$

và biểu thức (1.24) suy ra

$$\psi = \Gamma/2T = \Gamma/2\tau_s.$$

Hệ thức Hencky có dạng

$$S_{ij} = \frac{2\tau_s}{\Gamma} e_{ij}.$$

Tất nhiên chúng ta không thể xác định một cách đơn trị thành phần biến dạng qua ứng suất trong trường hợp này, vì rằng tiết diện chảy không có liên hệ đơn trị giữa ứng suất và biến dạng.

Công lực trong có dạng:

$$W = \frac{K\theta^2}{2} + \tau_s \Gamma.$$

c) *Vật liệu tái bền.* Với giả thiết đường cong biến dạng duy nhất (1.15)

$$T = g(\Gamma)\Gamma \quad \text{hay là} \quad \Gamma = \bar{g}(T)T,$$

hệ thức (1.24) dẫn đến

$$\psi = \frac{1}{2g(\Gamma)} \quad \text{hay} \quad \psi = \frac{\bar{g}(T)}{2}.$$

Khi đó hệ thức Hencky có dạng:

$$S_{ij} = 2g(\Gamma)e_{ij},$$

hay là

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\bar{g}(T)S_{ij}. \quad (1.25)$$

Thế năng biến dạng sẽ bằng

$$W = \frac{K\theta^2}{2} + \int g(\Gamma)\Gamma d\Gamma.$$

Số hạng thứ nhất biểu thị năng lượng làm thay đổi thể tích, số hạng thứ hai biểu thị năng lượng làm thay đổi hình dáng vật thể.

Phương trình của lý thuyết biến dạng do Hencky thiết lập đầu tiên cho vật liệu dẻo lý tưởng, sau đó được mở rộng cho trường hợp tái bền. Tuy phương trình này vẫn phi tuyến, nhưng đơn giản, nên được áp dụng rộng rãi.

Lý thuyết biến dạng phản ánh đầy đủ đối xử dẻo trong trường hợp đặt tải đơn giản (khi các thành phần ứng suất tăng tỷ lệ với một tham số) và có thể sử dụng được cho quá trình gần với đơn giản.

Với quá trình phức tạp, lý thuyết không cho kết quả phù hợp với thực tế. Chẳng hạn với quá trình trong đó các thành phần ứng suất thay đổi, nhưng giá trị T không đổi. Khi đó theo giả thiết đường cong biến dạng duy nhất và $dT = 0$, từ công thức Hencky suy ra

$$de_{ij} = \frac{1}{2} \bar{g}(T_0) dS_{ij}.$$

Mặt khác khi $dT_0 = 0$ có thể xem như trường hợp giới hạn của cắt tải

$$de_{ij} = \frac{1}{2G} dS_{ij}.$$

Kết quả nhận được mâu thuẫn với thực tế vì chuyển từ biến dạng dẻo sang cắt tải phải xảy ra liên tục nhưng ở đây $\bar{g}(T_0) \neq \frac{1}{G}$. Vì vậy, cần phải giới hạn những quá trình trong đó ứng dụng được lý thuyết.

Katchanov [59] đã chỉ ra rằng phương trình của lý thuyết biến dạng là phương trình của vật thể đàn hồi phi tuyến.

1.11 Lý thuyết chảy dẻo

Ứng suất tại một trạng thái nào đấy phụ thuộc vào cả quá trình biến dạng, nên liên hệ giữa ứng suất và biến dạng nói chung không ở dạng hữu hạn, mà ở dạng vi phân. Lý thuyết chảy dẻo thiết lập liên hệ giữa gia số biến dạng và ứng suất, dựa trên các giả thiết cơ bản sau đây

- a) *Vật liệu đẳng hướng ban đầu*
- b) *Sự thay đổi thể tích tương đối tỷ lệ với áp suất trung bình*

$$\sigma = 3Ke,$$

hay là

$$d\sigma = 3Kde.$$

c) *Gia số biến dạng toàn phần bằng tổng của gia số biến dạng đàn hồi và gia số biến dạng dẻo*

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p,$$

trong đó gia số biến dạng đàn hồi thỏa mãn định luật Hooke

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \delta_{ij} \right),$$

hay là

$$de_{ij}^e = \frac{1}{2G} dS_{ij}.$$

d) *Tenxơ lệch ứng suất trùng với tenxơ lệch gia số biến dạng dẻo*, tức là trạng thái ứng suất xác định gia số tức thời của biến dạng dẻo

$$de_{ij}^p = d\lambda S_{ij}, \quad (1.26)$$

vì theo giả thiết b), ta có $de^p = 0$, nên $de_{ij}^p = de_{ij}^p$.

Do đó hệ thức (1.19), (1.20) chỉ tồn tại số hạng có hệ số A, B, B' :

$$B' de_{ij} = AS_{ij} + BdS_{ij},$$

trong đó

$$B' = 1, \quad B = \frac{1}{2G} \quad \text{và} \quad A = d\lambda,$$

$d\lambda$ là hàm của các bất biến ứng suất và biến dạng, tùy thuộc vào từng vật liệu và từng quá trình biến dạng. Dựa vào các điểm cơ sở trên, hệ thức giữa ứng suất và biến dạng của lý thuyết dẻo có dạng sau đây

$$de_{ij} = d\lambda S_{ij} + \frac{1}{2G} dS_{ij}, \quad (1.27)$$

hay là

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma\delta_{ij} \right).$$

Ta viết lại hệ thức của lý thuyết chảy dưới dạng thành phần

$$d\varepsilon_{xx} = d\lambda(\sigma_{xx} - \sigma) + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{xx} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \right),$$

$$d\varepsilon_{yy} = d\lambda(\sigma_{yy} - \sigma) + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{yy} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \right),$$

$$d\varepsilon_{zz} = d\lambda(\sigma_{zz} - \sigma) + \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{zz} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \right),$$

$$d\varepsilon_{xy} = d\lambda\tau_{xy} + \frac{1}{2G} d\tau_{xy},$$

$$d\varepsilon_{yz} = d\lambda\tau_{yz} + \frac{1}{2G} d\tau_{yz},$$

$$d\varepsilon_{zx} = d\lambda\tau_{zx} + \frac{1}{2G} d\tau_{zx}.$$

Hệ phương trình này chưa đầy đủ, cần phải có phương trình nữa đối với đại lượng $d\lambda$. Ta chỉ ra rằng nó liên quan đến đại lượng công biến dạng dẻo.

Quả vậy, biểu thức công của lực trong

$$\delta W = K\theta\delta\theta + S_{ij}\delta e_{ij} = \delta W_e + \delta W_p,$$

trong đó

$$\delta W_e = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^e \text{ - công biến dạng đàn hồi,}$$

$$\delta W_p = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^p \text{ - công biến dạng dẻo,}$$

với các gia số biến dạng thỏa mãn hệ thức lý thuyết chảy có dạng

$$\delta W = K\theta\delta\theta + \frac{1}{2G}T\delta T + 2d\lambda T^2.$$

Khi đó

$$\delta W_e = K\theta\delta\theta + \frac{1}{2G}T\delta T,$$

$$\delta W_p = 2T^2 d\lambda = \frac{2}{3}\sigma_u^2 d\lambda. \quad (1.28)$$

Bây giờ xét một số dạng của lý thuyết chảy dẻo.

1. Lý thuyết Prandtl - Reuss đối với vật liệu dẻo lý tưởng [73].

Từ điều kiện chảy dẻo Mises

$$\sigma_u = \sigma_s$$

và từ (1.28) suy ra

$$d\lambda = \frac{3dW_p}{2\sigma_s^2} = \frac{3}{2\sigma_s^2}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2\sigma_s^2}S_{ij}d\varepsilon_{ij}^p.$$

Thay biểu thức của $d\lambda$ vào (1.27) ta nhận được hệ thức xác định của lý thuyết Prandtl - Reuss

$$de_{ij} = \frac{1}{2G}dS_{ij} + \frac{3}{2}\frac{S_{kl}d\varepsilon_{kl}^p}{\sigma_s^2}S_{ij}. \quad (1.29)$$

Ta thấy rằng liên hệ đơn trị giữa gia số biến dạng với ứng suất không tồn tại trong trường hợp vật liệu dẻo lý tưởng.

Prandtl đã thiết lập hệ thức này trong trường hợp phẳng với điều kiện chảy khác một chút. Reuss mở rộng cho trường hợp không gian với điều kiện chảy Mises.

2. Lý thuyết chảy dẻo Saint Venant - Lévy - Mises [73]

Trong quá trình chảy dẻo, *biến dạng dẻo lớn hơn nhiều so với biến dạng đàn hồi*, nên biến dạng đàn hồi có thể bỏ qua. Trong hệ thức của lý thuyết Prandtl - Reuss bỏ thành phần biến dạng đàn hồi, chúng ta nhận được lý thuyết chảy Saint Venant - Lévy - Mises

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij}.$$

Saint Venant cho hệ thức này trong trường hợp phẳng với điều kiện chảy Saint Venant, Lévy mở rộng trong trường hợp không gian. Mises thay thế điều kiện chảy Saint Venant bằng điều kiện chảy Mises.

Lý thuyết này được sử dụng rộng rãi trong bài toán gia công kim loại bằng áp suất, liên quan đến hiện tượng chuyển động chảy dẻo của kim loại; vì vậy ở đây người ta dùng khái niệm tốc độ biến dạng. Chia hai vế hệ thức trên cho dt :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda' S_{ij}, \quad (1.30)$$

trong đó theo (1.28)

$$\lambda' = \frac{1}{2\tau_s^2} \frac{dW_p}{dt} = \frac{1}{2\tau_s^2} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\tau_s^2} S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}.$$

Dùng hệ thức (1.30) có thể tính được biểu thức của λ' :

$$\lambda' = \frac{3v_u}{2\sigma_s},$$

trong đó $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ và v_u - cường độ tốc độ biến dạng. Khi đó (1.30) đưa về hệ thức xác định của lý thuyết Saint Venant - Lévy - Mises

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3v_u}{2\sigma_s} S_{ij}. \quad (1.31)$$

Rõ ràng rằng cho trước ứng suất không thể xác định một cách đơn trị tốc độ biến dạng, ngược lại cho tốc độ biến dạng có thể xác định đơn trị ứng suất.

3. Lý thuyết Prager - Reuss [70, 73]

Lý thuyết sử dụng cho vật liệu tái bền đẳng hướng, thỏa mãn điều kiện (1.16)

$$dW_p = \Psi'(T)dT.$$

Nhờ hệ thức (1.28) xác định đại lượng $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\Psi'(T)}{2T^2} dT.$$

Ký hiệu

$$F(T) = \frac{\Psi'(T)}{2T^2},$$

hệ thức của lý thuyết chảy dẻo (1.27) có dạng

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma \delta_{ij} \right) + F(T) dT (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}). \quad (1.32)$$

Các hệ thức này thỏa mãn với điều kiện $dT \geq 0$. Nếu $dT = 0$, ta có sự thay đổi trung gian của trạng thái ứng suất, khi đó gia số biến dạng liên hệ với gia số ứng suất theo định luật Hooke. Nếu $dT < 0$ sẽ xảy ra cắt tải theo định luật Hooke. Khi chuyển từ cắt tải sang trạng thái trung gian hay cắt tải, gia số biến dạng thay đổi liên tục, điều này không có được trong lý thuyết biến dạng.

Chú ý rằng trong trường hợp vật liệu tái bền, hệ thức (1.32) cho liên hệ đơn trị giữa gia số biến dạng và ứng suất.

1.12 Nhận xét chung về các lý thuyết dẻo.

Trường hợp đặt tải đơn giản

Những lý thuyết dẻo đơn giản trình bày ở trên đã được áp dụng vào giải một số bài toán của lý thuyết dẻo và bước đầu sử dụng trong tính toán kỹ thuật.

Bài toán xác định ứng suất có nhiều ý nghĩa và về nguyên tắc chừng mức nào đấy có thể giải được.

Nhưng các lý thuyết trên cũng còn có những nhược điểm. Lý thuyết Saint Venant-Lévy-Mises giả thiết rằng tenxơ chỉ hướng ứng suất chỉ là hàm của tenxơ chỉ hướng tốc độ biến dạng tức thời, tức là giả thiết vật liệu “quên đi” biến dạng trước, điều đó không hoàn toàn đúng. Lý thuyết Prandtl-Reuss chỉ áp dụng cho vật liệu dẻo lý tưởng, xem tốc độ biến dạng chỉ phụ thuộc vào hai giá trị gần nhau của tenxơ lệch ứng suất. Điều đó đã phần nào tính đến lịch sử quá trình biến dạng, nhưng chưa đầy đủ vì ảnh hưởng của biến dạng trước khá nhiều. Lý thuyết Hencky-Nadai khẳng định rằng biến dạng tại thời điểm đã cho chỉ phụ thuộc ứng suất tức thời, nhưng ta biết rằng nếu thay đổi đột ngột ứng suất, mà lý thuyết cho biến dạng không bị gián đoạn, kết quả đó không phù hợp với thực tế. Lý thuyết tái bền của Prager có cùng nhược

điểm như lý thuyết Prandtl-Reuss, mặt khác dựa trên thực nghiệm đơn giản để xác định tái bền, nó không phản ánh được hiệu ứng Bauschinger. Nhìn chung các tác giả không giới hạn phạm vi ứng dụng của lý thuyết, Ilyushin đã xác định ranh giới sử dụng các lý thuyết dẻo trên.

Đưa vào khái niệm *đặt tải đơn giản* và *đặt tải phức tạp*, Ilyushin đã giải thích được mâu thuẫn tại sao các lý thuyết trên phù hợp với quá trình biến dạng này lại không phù hợp với quá trình biến dạng khác và đã chứng minh được với *đặt tải đơn giản* tất cả các thuyết dẻo nêu trên đều trùng nhau và có thể đặc trưng bằng lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ [51].

Theo định nghĩa đặt tải đơn giản, tenxơ chỉ hướng ứng suất không đổi và các trục chính ứng suất là cố định tại mỗi điểm.

Nếu chúng ta không tính đến các hiện tượng từ biến thì mọi lý thuyết suy từ hệ thức (1.19), (1.20) trùng nhau. Kết quả này có thể suy từ định lý về toán tử tuyến tính đối với tenxơ. Giả sử có tenxơ P và toán tử tuyến tính L phụ thuộc tham số λ . Nếu liên hệ giữa tenxơ và tham số λ là đơn giản, thì $Q = L(P)$ có cùng tenxơ chỉ hướng như P .

Prager đã biểu diễn bằng đồ thị sự trùng nhau của các lý thuyết khi trục chính biến dạng cố định. Ở đây trình bày phần chứng minh của Ilyushin.

Giả sử tenxơ ứng suất σ_{ij} tại điểm nào đấy của vật thể phụ thuộc vào λ , trong đó λ có thể là thời gian hoặc tham số đặt tải tỷ lệ. Theo định nghĩa đặt tải đơn giản:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \text{const},$$

như vậy, tuy các thành phần S_{ij} và cường độ σ_u phụ thuộc vào λ ; chúng phát triển theo gia số lực ngoài tính từ thời điểm đặt lực đến thời điểm đang xét, nhưng mọi thành phần của tenxơ chỉ hướng đều thỏa mãn hệ thức trên.

Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các giá trị trung gian của λ , ta có

$$\frac{S_{ij}(\lambda_1)}{\sigma_u(\lambda_1)} = \frac{S_{ij}(\lambda_2)}{\sigma_u(\lambda_2)} = \dots = \frac{S_{ij}(\lambda_n)}{\sigma_u(\lambda_n)} = \frac{S_{ij}(\lambda)}{\sigma_u(\lambda)} = \text{const}.$$

Theo tính chất của tỷ lệ thức thì

$$\frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{a_1 S_{ij}(\lambda_1) + \dots + a_n S_{ij}(\lambda_n) + a S_{ij}}{a_1 \sigma_u(\lambda_1) + \dots + a_n \sigma_u(\lambda) + a \sigma_u} = \text{const},$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những hằng số nào đấy. Ta có thể chọn λ tùy ý và đặt

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0, \quad a = -a_n, \quad \lambda - \lambda_n = d\lambda,$$

khi đó

$$\frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{dS_{ij}}{d\lambda} \bigg/ \frac{d\sigma_u}{d\lambda}. \quad (1.33)$$

Với cách làm tương tự, nếu lấy ba giá trị rất gần nhau của λ khác không, chúng ta tính được công thức cho đạo hàm bậc hai v.v... Nếu đặt

$$a_n = a(\lambda, \lambda_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_n),$$

khi $n \rightarrow \infty$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n = d\lambda_n \rightarrow 0$ thì

$$\frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{\int a(\lambda, \lambda_n) S_{ij}(\lambda_n) d\lambda_n}{\int a(\lambda, \lambda_n) \sigma_u(\lambda_n) d\lambda_n}. \quad (1.34)$$

Dựa vào kết quả (1.33), (1.34) mọi toán tử tuyến tính có dạng (1.20) có thể đưa về

$$\frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{L(S_{ij})}{L(\sigma_u)}. \quad (1.35)$$

Gọi $q_{ij} = L(S_{ij})$ là các thành phần của tenxơ lệch và q_u là cường độ của nó

$$q_u = \left(\frac{3}{2} q_{ij} q_{ij} \right)^{1/2},$$

từ (1.35) suy ra

$$q_{ij} = \frac{L(\sigma_u)}{\sigma_u} S_{ij}.$$

Đem biểu thức vừa nhận được thay thế vào biểu thức của q_u

$$q_u = \frac{L(\sigma_u)}{\sigma_u} \sigma_u = L(\sigma_u),$$

hệ thức (1.35) dẫn đến $\frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{q_{ij}}{q_u}$ hay là

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{q}_{ij}, \quad (1.36)$$

tenxơ chỉ hướng của số hạng thứ nhất (1.20) trùng với tenxơ chỉ hướng của cả tổ hợp những tenxơ (1.20).

Trong trường hợp đặt tải đơn giản

$$\frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{q_{ij}}{q_u} = \text{const},$$

liên hệ giữa ứng suất và biến dạng (1.19)

$$L(S_{ij}) = L'(e_{ij})$$

có thể viết dưới dạng

$$\frac{L(S_{ij})}{L(\sigma_u)} = \frac{q_{ij}}{q_u} = \frac{L'(e_{ij})}{P_u} = \text{const}, \quad (1.37)$$

trong đó

$$P_u = \left[\frac{3}{2} L'(e_{ij}) L'(e_{ij}) \right]^{1/2}. \quad (1.38)$$

Gọi $\bar{L}'$ là toán tử tuyến tính nghịch đảo của L' , tức là

$$\bar{L}' L'(e_{ij}) = e_{ij},$$

dem tác dụng vào hệ thức (1.37) và nhờ tính chất của tỷ lệ thức ta được

$$\frac{q_{ij}}{q_u} = \frac{L'(e_{ij})}{P_u} = \frac{\bar{L}' L'(e_{ij})}{\bar{L}'(P_u)} = \frac{e_{ij}}{\bar{L}'(P_u)} = \text{const}. \quad (1.39)$$

Từ đây suy ra

$$L'(e_{ij}) = \frac{P_u}{\bar{L}'(P_u)} e_{ij},$$

dem giá trị này đặt vào (1.38)

$$P_u = \frac{3}{2} \frac{P_u}{\bar{L}'(P_u)} e_u$$

đi đến kết quả

$$\bar{L}'(P_u) = \frac{3}{2} e_u.$$

Thế giá trị vừa nhận được vào (1.39) và kết hợp với (1.36) ta đi đến kết luận

$$\frac{q_{ij}}{q_u} = \frac{S_{ij}}{\sigma_u} = \frac{L'(e_{ij})}{P_u} = \frac{2e_{ij}}{3e_u} = \text{const}.$$

Vậy, trong trường hợp đặt tải đơn giản mọi lý thuyết dẻo suy từ hệ thức (1.19) đều dẫn về hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{e}_{ij}. \quad (1.40)$$

1.13 Lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ

1.13.1 Hệ thức cơ sở

Nếu tại thời điểm đang xét cường độ ứng suất σ_u có giá trị lớn hơn tất cả các giá trị trước nó, thì ta gọi quá trình biến dạng tại thời điểm đó là “chủ động”, tương ứng với quá trình đặt tải. Trong trường hợp ngược lại ta có quá trình biến dạng là “bị động”, tương ứng với quá trình cất tải.

Lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ Ilyushin [51] xây dựng trên những cơ sở sau đây:

- a) Vật thể đẳng hướng hoặc tựa đẳng hướng ban đầu
- b) Biến dạng khối là đàn hồi:

$$\sigma = K\theta = 3Ke. \quad (1.41)$$

Trường hợp vật liệu không nén được hoặc trường hợp biến dạng đàn hồi nhỏ so với biến dạng toàn phần, điều kiện này có thể thay thế bằng

$$\theta = 0.$$

- c) Tenxơ chỉ hướng ứng suất và tenxơ chỉ hướng biến dạng trùng nhau

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{e}_{ij}.$$

Đặt các biểu thức của $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma_u}$ và $\bar{e}_{ij} = \frac{2e_{ij}}{3e_u}$ vào đây sẽ dẫn đến

$$S_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{ij},$$

hay là

$$\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} (\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}). \quad (1.42)$$

Ta viết phương trình (1.42) dưới dạng thành phần:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} (\varepsilon_{xx} - e), & \tau_{xy} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{xy}, \\ \sigma_{yy} - \sigma &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} (\varepsilon_{yy} - e), & \tau_{yz} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{yz}, \\ \sigma_{zz} - \sigma &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} (\varepsilon_{zz} - e), & \tau_{zx} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{zx}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

Quy luật này cũng có thể phát biểu cách khác: tiếp chính của ứng suất và biến dạng trùng nhau, tỷ số của ứng suất tiếp chính và độ trượt tương ứng là một hằng số

$$\frac{\tau_1}{\gamma_1} = \frac{\tau_2}{\gamma_2} = \frac{\tau_3}{\gamma_3} = \frac{\sigma_u}{3e_u}.$$

Tổng theo vế ba phương trình đầu của (1.43) cho ta đồng nhất thức. Hệ các phương trình (1.41), (1.43) gồm 5 phương trình độc lập chứa 6 thành phần ứng suất và 6 thành phần biến dạng. Phương trình thứ 6 xác định bởi quy luật sau.

d) *Cường độ ứng suất σ_u là hàm của cường độ biến dạng e_u .* Hàm này xác định cho từng vật liệu mà không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất (giả thiết đường cong biến dạng duy nhất). Hệ thức $\sigma_u \sim e_u$ viết dưới dạng (1.17), (1.18):

$$\sigma_u = \Phi(e_u),$$

hay là

$$\sigma_u = 3Ge_u[1 - \omega(e_u)], \quad (1.44)$$

trong đó

$$\omega = (3Ge_u - \sigma_u)/3Ge_u.$$

Khi đã biểu thị σ_u là hàm của e_u thì hệ phương trình (1.41), (1.43), (1.44) là hệ đầy đủ biểu diễn liên hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng.

Bây giờ chúng ta viết (1.42) dưới dạng tương tự như định luật Hooke:

$$\sigma_{ij} = \left(K - \frac{2\sigma_u}{3e_u}\right)\theta\delta_{ij} + \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon_{ij}. \quad (1.45)$$

Với $e_u < e_s$, thì $\sigma_u = 3Ge_u$, phương trình này trùng với định luật Hooke viết dưới dạng Lamé.

Ngược lại, cũng có thể biểu thị thành phần biến dạng qua ứng suất

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3e_u}{2\sigma_u}\sigma_{ij} - \left(\frac{3e_u}{2\sigma_u} - \frac{1}{3K}\right)\sigma\delta_{ij}. \quad (1.46)$$

1.13.2 Biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo

Biến dạng toàn phần gồm biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p,$$

trong đó

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \delta_{ij} \right).$$

Dùng hệ thức này và (1.46) xác định thành phần biến dạng dẻo

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{3e_u}{2\sigma_u} - \frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{ij} - \left[\frac{3e_u}{2\sigma_u} - \left(\frac{3\nu}{E} + \frac{1}{3K} \right) \right] \sigma \delta_{ij}.$$

Ta có

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \frac{3\nu}{E} + \frac{1}{3K} = \frac{1}{2G},$$

thay các giá trị vừa nhận được vào hệ thức của ε_{ij}^p

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3Ge_u - \sigma_u}{2G\sigma_u} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}).$$

Đặt

$$\varphi(\sigma_u) = \frac{3Ge_u - \sigma_u}{\sigma_u} = \frac{\omega}{1-\omega},$$

dẫn đến:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\varphi(\sigma_u)}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = \frac{\varphi(\sigma_u)}{2G} S_{ij}. \quad (1.47)$$

Từ đây nhận thấy rằng tenxơ biến dạng dẻo là tenxơ lệch, quả vậy

$$\varepsilon_{ii}^p = \theta^p = 0.$$

Bây giờ tính cường độ biến dạng đàn hồi và cường độ biến dạng dẻo

$$e_u^e = \left(\frac{2}{3} e_{ij}^e e_{ij}^e \right)^{1/2}; \quad e_u^p = \left(\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p \right)^{1/2}$$

Nhờ định luật Hooke

$$e_u^e = \frac{\sigma_u}{3G}$$

và nhờ (1.47)

$$e_u^p = \frac{\varphi(\sigma_u)}{3G} \sigma_u = \frac{\omega}{3G(1-\omega)} \sigma_u.$$

Cộng hai đẳng thức vừa nhận được và so sánh với (1.44), suy ra kết quả quan trọng

$$e_u = e_u^e + e_u^p.$$

Cường độ biến dạng toàn phần bằng tổng cường độ biến dạng đàn hồi và cường độ biến dạng dẻo.

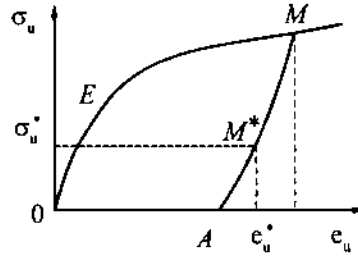
Do kết quả vừa nhận được nên có thể coi đồ thị của $\sigma_u \sim e_u$ tương tự như đồ thị dẫn đơn giản không những cho biến dạng chủ động, mà cả cho biến dạng bị động.

Nếu từ điểm M trên đồ thị $\sigma_u \sim e_u$, cường độ ứng suất bắt đầu giảm đến giá trị σ_u^* nào đấy, trong đó

$$\sigma_u^* < \sigma_s,$$

thì quá trình cắt tải thực hiện theo đường MA (song song với đoạn đàn hồi ban đầu OE) cho ta:

$$\sigma_u^* = 3G(e_u^* - e_u^p) = 3Ge_u^{*e}.$$



Hình 1.8

Cần phải thêm vào đây những quy luật cần thiết của cắt tải: điều kiện tỷ lệ của tenxơ lệch ứng suất và tenxơ lệch biến dạng

$$S_{ij}^* = \frac{2\sigma_u^*}{3e_u^{*(e)}} e_{ij}^{*(e)}$$

và điều kiện biến dạng khối đàn hồi

$$\sigma^* = 3Ke^*.$$

Dấu sao (*) chỉ ứng suất và biến dạng trong quá trình cất tải. Chúng ta thấy rằng các hệ thức ứng suất biến dạng trong trường hợp biến dạng bị động hoàn toàn tương tự như định luật Hooke cho biến dạng đàn hồi ban đầu, điều khác ở chỗ biến dạng bắt đầu tính từ gốc A và giới hạn tỷ lệ lớn hơn. Để tiện dùng chúng ta viết quy luật biến dạng trong quá trình biến dạng dưới dạng khác

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^* = \lambda(\theta - \theta^*)\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*), \quad (1.48)$$

trong đó: λ, μ là hệ số Lamé, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ là ứng suất và biến dạng tại thời điểm bắt đầu cất tải, $\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*$ là ứng suất và biến dạng tại thời điểm nào đấy khi cất tải.

1.13.3 Thế năng biến dạng

Theo định nghĩa phân tố công của lực trong

$$\delta W = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$$

có thể viết dưới dạng khác

$$\delta W = \delta W_\theta + \delta W_d = \sigma\delta\theta + S_{ij}\delta e_{ij},$$

trong đó δW_θ là công làm thay đổi thể tích, δW_d là công thay đổi hình dáng phần tử vật thể.

Đặt (1.42) vào hệ thức này cho ta

$$\delta W = \frac{2\sigma_u}{3e_u}e_{ij}\delta e_{ij} + \sigma\delta\theta.$$

Biểu thức $e_{ij}\delta e_{ij}$ là vi phân toàn phần của hàm

$$\frac{1}{2}e_{ij}e_{ij} = \frac{3}{4}e_u^2.$$

Vì vậy

$$\delta W = \sigma_u\delta e_u + \sigma\delta\theta. \quad (1.49)$$

Mặt khác $\sigma_u = \Phi(e_u)$, $\sigma = K\theta$, nên δW là vi phân toàn phần, do đó

$$W = W(e_u, \theta) = W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{e_u} \sigma_u de_u + \frac{K\theta^2}{2},$$

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e_u} \delta e_u + \frac{\partial W}{\partial \theta} \delta \theta = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij}.$$

Hàm W biểu thị công của lực trong và bằng thế của ứng suất trên một đơn vị thể tích

$$\sigma_u = \frac{\partial W}{\partial e_u}, \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial \theta},$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ji}} \right).$$

Thế năng đàn hồi là phần công W được giải phóng khi cắt tải hoàn toàn. Nó có giá trị bằng công của ứng suất σ_{ij} trên biến dạng đàn hồi ε_{ij}^e . Ta có

$$W_e = \frac{1}{2}(\sigma\theta + \sigma_u e_u^e),$$

trong đó

$$\sigma = K\theta, \quad \sigma_u = 3Ge_u^e.$$

Vì vậy

$$W_e = \frac{1}{6G}\sigma_u^2 + \frac{1}{2K}\sigma^2.$$

Phần công của lực trong không hoàn lại bằng

$$W_p = W - W_e = \int_0^{e_u} \sigma_u de_u - \frac{\sigma_u^2}{6G}.$$

Công của lực trong trên toàn bộ thể tích vật thể sẽ là

$$U = \iiint_V W dV = \iiint_V \left[\int_0^{e_u} \sigma_u de_u + \frac{K\theta^2}{2} \right] dV, \quad (1.50)$$

còn thế đàn hồi của vật thể

$$U_e = \iiint_V W_e dV = \frac{1}{6G} \iiint_V \sigma_u^2 dV + \frac{1}{2K} \iiint_V \sigma^2 dV.$$

CHƯƠNG 2

Lý thuyết dẻo hiện nay

Mục đích của lý thuyết dẻo hiện nay là thiết lập hệ thức giữa ứng suất và biến dạng trong miền biến dạng dẻo với cách đặt tải phức tạp cho các vật liệu đẳng hướng hoặc tựa đẳng hướng ban đầu.

Hiện nay có hai hướng phát triển chính: *lý thuyết chảy* dựa trên định đề của Drucker [12, 13, 14] và *lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát* dựa trên định đề đẳng hướng của Ilyushin [52, 53, 54, 55]. Ngoài ra cũng cần lưu ý các phương hướng mới như lý thuyết trượt xuất phát từ mô hình vật lý của đối xử dẻo [2, 22, 66] và các lý thuyết suy từ các kết quả của nhiệt động học [37].

Trong phạm vi giáo trình này trình bày một cách ngắn gọn các vấn đề trên. Vì đây là vấn đề đang phát triển được nhiều người quan tâm, cho nên ở đây cũng chỉ trên một quan điểm nhất định đề cập đến các vấn đề thời sự của lý thuyết dẻo hiện nay mà thôi.

2.1 Vector biến dạng và vector ứng suất

Khi đặt tải trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng nói chung không thuần nhất, tức là chúng có giá trị khác nhau tại các điểm khác nhau của vật thể và thay đổi theo thời gian (không dừng). Nhưng trong lân cận nhỏ của điểm nào đấy của vật thể thì do tính chất liên tục, trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng có thể xem như thuần nhất. Cách khảo sát trên quan điểm vĩ mô như vậy cho phép đặt tương ứng lân cận điểm đang xét với *mẫu*. Mẫu là vật thể có kích thước xác định và hữu hạn luôn luôn ở trạng thái ứng suất biến dạng thuần nhất. Quá trình thay đổi trạng thái của mẫu trùng hoàn toàn với trạng thái của lân cận điểm.

Ta gọi sự thay đổi trạng thái ứng suất và biến dạng thuần nhất của lân cận điểm của vật thể theo thời gian trong điều kiện thay đổi nhiệt độ và các

tham số vật lý khác là *quá trình đặt tải* tại điểm đó.

Với biến dạng dẻo quy luật giữa ứng suất σ_{ij} và biến dạng ε_{ij} không những chứa bản thân các tenxơ này mà còn phụ thuộc vào quá trình đặt tải. Vì vậy việc biểu thị hình học quá trình đặt tải và xác định các đối tượng toán học đặc trưng quá trình đặt tải đóng vai trò quan trọng.

Quá trình đặt tải tại điểm nào đấy của vật thể được xác định hoặc bằng cách cho sáu thành phần tenxơ biến dạng dưới dạng sáu hàm số của thời gian

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t),$$

khi đó ta nói rằng cho quá trình trong không gian biến dạng, hoặc bằng cách cho sáu thành phần ứng suất

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t),$$

tức là cho quá trình trong không gian ứng suất. Có thể thay thế sáu thành phần $\varepsilon_{ij}(t)$ bằng cách cho các thành phần của tenxơ lệch $e_{ij}(t)$ và bất biến $e(t)$. Tương tự như vậy cho trong không gian ứng suất các thành phần $S_{ij}(t)$ và $\sigma(t)$. Quá trình đặt tải cũng có thể cho một cách hỗn hợp giữa các giá trị σ_{ij} , ε_{ij} . Ta thường xét quá trình cho bởi tenxơ lệch biến dạng $e_{ij}(t)$ và áp suất trung bình $\sigma = p(t)$.

Cách cho quá trình trong không gian biến dạng theo tenxơ lệch biến dạng rất tiện lợi. Ta biết sáu hàm e_{ij} có một liên hệ

$$e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0.$$

Ngoài ra cho $p(t)$ - áp suất là hàm tùy ý của thời gian, có thể xem nó như một yếu tố lực ngoài, tương tự như nhiệt độ $T(t)$.

Xuất phát từ tenxơ lệch bao gồm 5 thành phần độc lập, đưa vào 5 hàm $\vartheta_i(t)$ độc lập liên hệ tuyến tính đơn trị với các thành phần $e_{ij}(t)$ và bình phương cường độ biến dạng e_u^2 trùng hoàn toàn với tổng bình phương của các hàm ϑ_i . Từ đây có thể coi ϑ_i như thành phần của một vectơ năm chiều ϑ trong không gian năm chiều trực giao với các vectơ cơ sở là $\mathbf{e}_n$

$$\vartheta = \vartheta_n \mathbf{e}_n \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5),$$

$$\mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = \delta_{mn},$$

trong đó

$$|\vartheta|^2 = \vartheta_n \vartheta_n = \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} = e_u^2 \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Vì vậy có thể đặt

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= e_{11}, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_{22} - e_{33}), \quad \vartheta_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}e_{12}, \\ \vartheta_4 &= \frac{2}{\sqrt{3}}e_{23}, \quad \vartheta_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}e_{31}.\end{aligned}$$

Ta đi đến kết luận, quá trình đặt tải tại một điểm của vật thể xác định bởi *vector biến dạng* $\vartheta(t)$ (tất nhiên, cần bổ sung thêm áp suất $p(t)$ và nhiệt độ $T(t)$). Đầu mút vector $\vartheta(t)$ trong không gian biến dạng ϑ_5 vạch một đường cong 5 chiều. Chúng ta gọi đường đó là *quỹ đạo biến dạng*, phương trình của nó có dạng

$$\vartheta = \vartheta(t).$$

Đặt tải tại một điểm gọi là đơn giản, nếu tenxơ chỉ hướng không thay đổi theo thời gian. Điều đó tương ứng với vector biến dạng đơn vị

$$\vartheta^0 = \frac{\vartheta(t)}{|\vartheta|}$$

không đổi. Quỹ đạo biến dạng trong không gian biến dạng là một tia thẳng đi qua gốc tọa độ.

Trong khoảng thời gian dt vector $\vartheta(t)$ có gia số

$$d\vartheta = e_n d\vartheta_n$$

hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo.

Theo các công thức ta xác định *độ dài cung của quỹ đạo*

$$ds = |d\vartheta| = (d\vartheta_n d\vartheta_n)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}de_{ij}de_{ij}\right)^{1/2},$$

$$s = \int_0^t \left| \frac{d\vartheta}{dt} \right| dt.$$

Trong tự như vậy, ta xây dựng *vector biến dạng đàn hồi* ϑ^e , *vector biến dạng dẻo* ϑ^p và *vector ứng suất* $\sigma, \dots$ tương ứng với các tenxơ lệch biến dạng đàn hồi, biến dạng dẻo và ứng suất. Chẳng hạn, vector ứng suất σ xác định như sau

$$\sigma = S_n \sigma_n, \quad \sigma_n \sigma_m = \delta_{nm}, \quad (n, m = 1, 2, 3, 4, 5),$$

trong đó

$$|\sigma|^2 = S_n S_n = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} = \sigma_u^2$$

và các thành phần

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{2} S_{11}, & S_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{22} - S_{33}), & S_3 &= \sqrt{3} S_{12}, \\ S_4 &= \sqrt{2} S_{23}, & S_5 &= \sqrt{3} S_{13}. \end{aligned}$$

Vector ứng suất σ có thể xây dựng trong không gian riêng (không gian ứng suất 5 chiều với các vector cơ sở σ_n), nhưng do sự tương ứng giữa trạng thái ứng suất và biến dạng, nên cũng có thể xây dựng vector này trong cùng không gian Ξ_5 với hệ vector cơ sở e_n .

Vì vậy tại mỗi điểm của quỹ đạo biến dạng trong không gian biến dạng có thể xây dựng một cách duy nhất các vector $\sigma, \Xi^e, \Xi^p, \dots$. Các vector này là hệ quả của quá trình biến dạng.

Ta gọi tập hợp gồm quỹ đạo biến dạng $\Xi(t)$ và các vector xây dựng tại mỗi điểm của quỹ đạo là *hình ảnh* của quá trình đặt tải trong không gian biến dạng.

Dĩ nhiên chúng ta cũng có thể xây dựng hình ảnh quá trình đặt tải trong không gian ứng suất.

Phân tố công của lực trong làm thay đổi hình dáng có thể biểu thị dưới dạng

$$dW_d = S_{ij} de_{ij} = \sigma d\Xi.$$

Các tính chất hình học của quỹ đạo biến dạng $\Xi(t)$ xác định bằng cách cho rêpe tự nhiên trực giao chuyển động theo quỹ đạo. Rêpe này xác định theo công thức Frenet suy rộng

$$\mathbf{p}_1 = \frac{d\Xi}{ds}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2\Xi}{ds^2}, \quad \dots,$$

trong đó

$$\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$$

và

$$\frac{d\mathbf{p}_n}{ds} = \kappa_n \mathbf{p}_{n+1} - \kappa_{n-1} \mathbf{p}_{n-1}, \quad (n = 1 \div 5)$$

Các hệ thức này chứa 4 tham số *độ cong* và *độ xoắn* của đường cong năm chiều $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ ($\kappa_0 \equiv \kappa_5 \equiv 0$). Các đại lượng này xác định bởi các bất biến của tenxơ lệch biến dạng.

2.2 Khái niệm về mặt tải (mặt giới hạn)

2.2.1 Mặt giới hạn (hay mặt tải)

Mặt giới hạn là mặt được xây dựng trong không gian biến dạng hoặc không gian ứng suất; mặt này chia không gian ra hai phần: quá trình xảy ra bên trong mặt tương ứng với biến dạng đàn hồi, còn bên ngoài và trên mặt tương ứng với biến dạng dẻo.

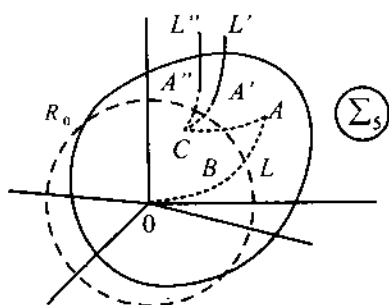
Có thể xem mặt Mises hoặc Tresca là mặt giới hạn ban đầu. Vấn đề đặt ra là trong quá trình biến dạng dẻo, mặt giới hạn thay đổi như thế nào.

Chúng ta xét quá trình đặt tải đặc trưng bởi quỹ đạo ứng suất trong không gian ứng suất. Khi đó tại thời điểm nào đấy trạng thái ứng suất đặc trưng bằng một điểm trên quỹ đạo ứng suất. Ta gọi điểm đó là *điểm tải*. Điểm tải sẽ nằm trên mặt giới hạn tức thời (tức là mặt giới hạn tại điểm đang xét).

Để xác định mặt tải ta xét trạng thái ứng suất thuần nhất của lân cận điểm của vật thể đẳng hướng ban đầu đối với tính chất đàn hồi và dẻo, tức là vật thể tuân theo điều kiện chảy của Mises

$$\sigma_u \equiv |\sigma| = \sigma_s.$$

Mặt tải ban đầu là siêu mặt cầu bán kính σ_s , Ký hiệu mặt này là R_0 . Quỹ đạo ứng suất nằm trong R_0 tương ứng với trạng thái biến dạng đàn hồi. Khi đó quá trình đặt tải theo quỹ đạo khép kín bất kỳ trong không gian ứng suất Σ_5 (bên trong R_0) tương ứng với đường khép kín trong không gian biến dạng Θ_5 . Bây giờ xét quỹ đạo L vượt ra ngoài mặt R_0 , tại điểm B giao điểm của



Hình 2.1

L và mặt R_0 trạng thái đàn hồi của vật thể thay thế bằng trạng thái biến dạng dẻo, đường khép kín trong Σ_5 bây giờ không tương ứng với đường khép kín trong Θ_5 nữa. Chẳng hạn khi cắt tải hoàn toàn, tức là trở lại điểm gốc tọa độ không gian Σ_5 , thì điểm cuối của quỹ đạo biến dạng tương ứng sẽ không trùng với gốc tọa độ của Θ_5 . Bán kính vectơ của điểm ấy sẽ biểu thị biến dạng dư (biến dạng dẻo).

Nếu vật liệu tái bền, khi biến dạng dẻo tăng điểm tải tại thời điểm nào đấy sẽ nằm ngoài mặt R_0 , chẳng hạn điểm A. Bắt đầu từ A ta thực hiện quá trình cắt tải bộ phận theo quỹ đạo AC, đại lượng biến dạng dẻo sẽ không thay đổi. Lại từ điểm C đặt tải tiếp vào vật thể theo quỹ đạo L' và ghi tại điểm A' tại đó xuất hiện lại biến dạng dẻo.

Bây giờ lấy mẫu khác cùng vật liệu và cũng lập lại các quá trình cho tới điểm C . Sau đó đặt tải theo quỹ đạo $L'' (\neq L')$, ghi lại điểm xuất hiện biến dạng dẻo A'' . Tập hợp những điểm $A', A'', \dots$ kể cả điểm A , xác định *mặt giới hạn tức thời* $R (\neq R_0)$. Rõ ràng rằng đối với mỗi vật liệu hình dáng và vị trí của R phụ thuộc vào điểm tải A và quỹ đạo L , nhưng không phụ thuộc vào quỹ đạo $L', L'', \dots$.

Sự thay đổi hình dáng và kích thước của mặt giới hạn trong quá trình đặt tải chủ động liên quan đến thay đổi biến dạng dẻo đã phản ánh sự thay đổi tính chất cơ học của vật thể khi có biến dạng dẻo. Trong quá trình đó đã xuất hiện *bất đẳng hướng đàn hồi và dẻo*.

Cũng có thể nói quá trình thay đổi hình dáng và kích thước của mặt giới hạn khi biến dạng dẻo là quá trình *tái bền* của vật thể.

Những điều nêu trên đây vừa cho định nghĩa vừa cho phương pháp xác định mặt giới hạn. Ta gọi phương pháp vừa trình bày là *phương pháp cắt tải bộ phận và đặt tải tiếp*.

Phương pháp thứ hai xác định mặt giới hạn như mặt “đặt tải trung gian” phân chia miền đặt tải và cắt tải. Đó là mặt của những điểm kể cả điểm A , mà khi chuyển động trên mặt đó đại lượng biến dạng dẻo không thay đổi. Điều này cũng tồn tại khắp nơi bên trong mặt. Hiện nay chưa có cơ sở nào để khẳng định mặt xác định bằng phương pháp thứ hai trùng với mặt xác định bằng phương pháp trước.

Một vấn đề lớn đặt ra: trong quá trình biến dạng dẻo *mặt giới hạn thay đổi hình dáng và kích thước như thế nào?*

Cho đến nay cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm chưa phát biểu được quy luật tổng quát. Chúng ta mới chỉ có thể xây dựng trên một số giả thuyết đơn giản (giả thuyết về tái bền).

2.2.2 Giả thuyết tái bền đẳng hướng

Trong quá trình biến dạng dẻo, mặt giới hạn nở rộng đẳng hướng. Mặt biến dạng tại mỗi thời điểm biến dạng chủ động sẽ đi qua điểm tải và nhận được bằng phép vị tự mặt tải ban đầu với tâm vị tự là gốc tọa độ Σ_5 .

Phương trình mặt tải có thể viết dưới dạng

$$f(\sigma_{ij}) = k^2. \quad (2.1)$$

Hàm $f(\sigma_{ij})$ và đại lượng vô hướng k^2 có thể phụ thuộc vào biến dạng, cũng như quá trình đặt tải và biến dạng. Trong cả quá trình hàm f giữ nguyên hình dáng của nó, còn k^2 thay đổi sao cho mặt tải có hình dáng tương tự đi qua điểm tải. Đối số của hàm f và k phải biểu thị dưới dạng vô hướng. Có

hai cách biểu thị (2.1)

$$f(\sigma_{ij}) = F(\lambda), \quad (2.2)$$

trong đó

$$\lambda = \int \sigma_{ij} de_{ij}^p$$

và

$$f(\sigma_{ij}) = H(e_u^p), \quad (2.3)$$

trong đó

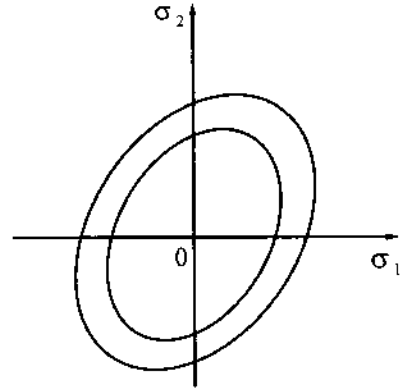
$$e_u^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \int (de_{ij}^p de_{ij}^p)^{1/2}.$$

Trong (2.2) đối số λ biểu thị công biến dạng dẻo, còn e_u^p trong (2.3) là cường độ biến dạng dẻo. Các đối số này là các hằng số, khi gia số biến dạng dẻo bằng không

$$d\lambda = de_u^p = 0 \quad \text{với} \quad de_{ij}^p = 0.$$

Nếu F và H là hàm không giảm thì mặt giới hạn sẽ nở rộng trong quá trình biến dạng dẻo.

Trường hợp đơn giản nhất: vật liệu đẳng hướng ban đầu tuân theo điều kiện chảy Mises, hàm f chỉ phụ thuộc vào bất biến thứ hai của tenxơ lệch ứng suất. Mặt giới hạn tức thời là hình cầu tâm tại gốc và bán kính bằng σ_u .



Hình 2.2

Vật liệu có tính chất như vậy gọi là *vật liệu tái bền đẳng hướng*. Nếu trong quá trình biến dạng đạt giá trị cường độ ứng suất σ_u , tiếp đó thực hiện cắt tải, khi đặt tải tiếp theo quỹ đạo nào đấy, thì biến dạng dẻo sẽ xuất hiện lại khi cường độ ứng suất bằng σ_u . Trường hợp riêng, sự dẫn vật thể sẽ dẫn đến làm tăng giới hạn chảy khi nén. Nhưng hệ quả này không phù hợp với thực nghiệm, nó mâu thuẫn với hiệu ứng Bauschinger, bởi vì quá trình biến dạng dẻo là quá trình phụ thuộc hướng, trong đó cấu trúc vi mô của vật thể thay đổi, phụ thuộc vào hướng biến dạng và xuất hiện bất đẳng hướng đàn dẻo. Ta thấy thuyết này trong các công trình của Mises, Hencky, Haldenman và Prager, Hill, Ilyushin ... [16, 73, 77].

2.2.3 Giả thuyết tái bền dịch chuyển

Mặt giới hạn trong quá trình biến dạng giữ nguyên hình thể và chuyển dịch tịnh tiến theo phương của pháp tuyến của mặt giới hạn tại điểm tải. Giả thuyết này phù hợp với hiệu ứng Bauschinger.

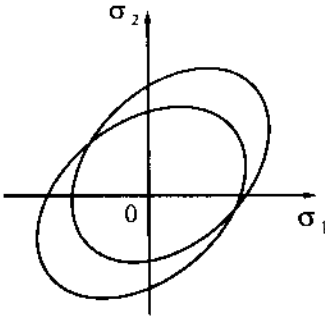
Nếu phương trình của mặt tải ban đầu là $f(\sigma_{ij}) = k^2$ thì với chuyển dịch tịnh tiến mặt tải tức thời có dạng

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = k^2, \quad (2.4)$$

trong đó α_{ij} là tenxơ, các thành phần của nó trong không gian ứng suất là tọa độ của tâm mặt tải, tenxơ α_{ij} phụ thuộc vào trạng thái ứng suất và biến dạng dẻo. Giả thiết đơn giản nhất của α_{ij} theo Ishlinsky [57] có dạng

$$\alpha_{ij} = ce_{ij}^p,$$

và hàm f có dạng bất biến thứ hai của tenxơ lệch ứng suất.



Hình 2.3

Trường hợp ứng suất một chiều từ (2.4) suy ra ngay liên hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng dẻo. Đó là biểu thức của lý thuyết dẻo với tái bền tuyến tính. Phát triển độc lập với Ishlinsky trong công trình của Prager [69] đưa ra giả thuyết tương tự và gọi là *tái bền động học* vì nó được biểu diễn qua mô hình động học đơn giản. Nghiên cứu tỷ mỉ về dạng của tái bền động học trong các không gian con của không gian ứng suất trình bày trong bài báo của Shield và Ziegler [28, 32]. Ziegler giả thiết tenxơ α_{ij} xác định như sau

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\eta}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}).$$

Với $\sigma_{ij} = 0$ thì α_{ij} cũng bằng không, vì vậy mô hình động học tồn tại trong không gian con bất kỳ của không gian ứng suất. Kadashevitch và Novozhilov [58] phát triển một cách tổng quát hơn, các tác giả xem tenxơ α_{ij} và e_{ij}^p liên hệ với nhau dưới dạng lý thuyết biến dạng

$$e_{ij}^p = \frac{1}{2g} \alpha_{ij}, \quad (2.5)$$

trong đó g là hàm của bất biến tenxơ α_{ij} .

Đơn giản hơn có thể giả thiết g chỉ phụ thuộc bất biến thứ hai của tenxơ lệch α'_{ij} . Do tính chất phi tuyến của (2.5) có thể biểu thị tương đối sát hơn tính chất dẻo của vật thể.

Nhưng đối với vật liệu có độ tái bền cao, với giá trị nào đó của tải sẽ dẫn đến mặt giới hạn chuyển dịch và không chứa điểm gốc tọa độ. Khi đó ta sẽ không còn khái niệm về định nghĩa biến dạng dẻo.

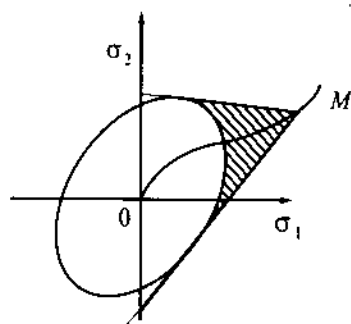
2.2.4 Giả thuyết mặt tải tuyến tính từng đoạn

Ta có thể xem mặt tải ban đầu là mặt giới hạn bởi những mẫu mặt trơn, tại những cạnh giao tuyến vector pháp tuyến thay đổi không liên tục; các mặt trơn này có thể là mặt phẳng. Dùng thuyết này đơn giản hóa được liên hệ phức tạp giữa ứng suất và biến dạng. Trong quá trình biến dạng dẻo có xuất hiện tái bền, mặt tải trơn từng đoạn hoặc nở rộng đẳng hướng, hoặc dịch chuyển tịnh tiến. Một thí dụ đơn giản về mặt tải không đều là mở rộng mặt chảy Tresca - Saint Venant cho trường hợp tái bền.

Mặt tải đều, hẳn có thể biểu thị gần đúng một cách tùy ý bằng mặt nhiều cạnh. Hodge [39] đã phát triển lý thuyết chảy dựa trên thuyết này.

Trong quá trình biến dạng dẻo, mặt tải tức thời có thể không đều, tại các điểm tải xuất hiện các điểm góc trên mặt giới hạn. Giả thuyết về *tồn tại điểm góc* trên mặt giới hạn do Badorf và Budiansky kiến nghị đầu tiên. Sau này ta thấy trong các công trình của Koiter, Sanders, Prager và Hill,... [20, 27, 60, 70].

Một trong những giả thuyết mặt giới hạn tức thời loại này nhận được bằng phương pháp nón tiếp tuyến. Mặt giới hạn tương ứng với điểm nào đấy của quá trình là miền trong không gian ứng suất gồm mặt giới hạn ban đầu và miền nằm trong nón tiếp tuyến có đỉnh tại điểm đang xét và tiếp xúc với mặt tải ban đầu.



Hình 2.4

Nhưng giả thuyết này không những không phù hợp với hiệu ứng Bauschinger, mà còn không phù hợp với định đề đẳng hướng sẽ trình bày trong phần sau.

2.2.5 Giả thuyết dẻo lý tưởng

Trong quá trình biến dạng dẻo đối với lớp vật liệu không tái bền, giả thuyết mặt giới hạn là mặt cầu R_0 không thay đổi

$$\sigma_u = \sigma_s = \text{const.} \quad (2.6)$$

Các quá trình chỉ có thể xảy ra bên trong mặt cầu (biến dạng đàn hồi) và bên trên mặt cầu (biến dạng đàn dẻo). Hệ thức (2.6) hoàn toàn phù hợp với đặt tải đơn giản và có thể mở rộng cho trường hợp đặt tải phức tạp.

Dựa trên một số giả thuyết về mặt giới hạn kết hợp với các quy luật cơ bản, chúng ta nhận được các lý thuyết dẻo tương ứng.

Sau đây chúng ta đề cập đến các định đề cơ sở của các phương hướng hiện đại của lý thuyết dẻo.

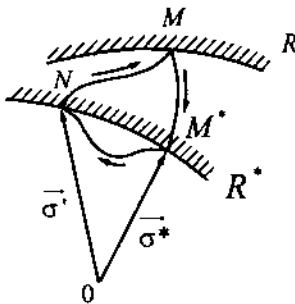
2.3 Định đề Drucker và lý thuyết chảy hiện nay

2.3.1 Định đề Drucker

Giả sử vật thể ở trạng thái ứng suất nào đấy, đặc trưng bởi điểm M^* - đầu mút của vector ứng suất σ^* trong không gian ứng suất. Qua điểm M^* có mặt tải kín R^* , tức là mặt phân chia miền trạng thái đàn hồi và miền trạng thái dẻo. Điều đó có nghĩa là chuyển động của đầu mút vector σ^* ra ngoài thể tích giới hạn bởi mặt R^* , tương ứng với việc xuất hiện thêm biến dạng dẻo. Cùng với trạng thái ứng suất trên, xét trạng thái ứng suất tương ứng với điểm M có bán kính vector σ . Ứng suất thêm khi chuyển từ M^* đến M là $\sigma - \sigma^*$. Bây giờ chúng ta xuất phát từ điểm M^* và lại đi trở lại M^* theo một quỹ đạo khép kín gồm một phần ra khỏi mặt giới hạn R^* . Gia số ứng suất $d\sigma$ luôn luôn tương ứng với gia số biến dạng $d\epsilon$.

Định đề [12, 13, 14]. Công của ứng suất thêm theo quỹ đạo ứng suất khép kín sẽ không âm

$$\Delta W = \oint (\sigma - \sigma^*) d\epsilon \geq 0. \quad (2.7)$$



Hình 2.5

Bây giờ chúng ta hãy xét quỹ đạo kín như trong hình 2.5. Điểm M^* tương ứng với trạng thái ứng suất σ^* nằm trong mặt R^* hoặc có thể trên mặt R^* . Từ M^* chuyển động đến điểm N trên mặt R^* theo đường cong nằm hoàn toàn trong R^* . Sau đó cho ứng suất gia số $d\sigma$ vượt ra ngoài giới hạn mặt R^* , tức là có liên quan đến thay đổi biến dạng dẻo. Như vậy trên quỹ đạo ứng suất chúng ta rơi vào điểm lân cận M . Qua M có mặt giới hạn mới R , vì vậy khi trở lại điểm M^* theo bất kỳ

đường nào đều tương ứng với cắt tải. Tóm lại ta chuyển động theo đường kín M^*NMM^* trên đoạn M^*N và MM^* biến dạng là đàn hồi, còn trên đoạn NM biến dạng gồm đàn hồi và dẻo

$$d\Xi = d\Xi^e + d\Xi^p.$$

Trên M^*N và MM^* ta có $d\Xi^p = 0$. Hệ thức (2.7) có thể viết

$$\begin{aligned}\Delta W &= \oint_{M^*NMM^*} (\sigma - \sigma^*) d\Xi^e + \oint_{M^*NMM^*} (\sigma - \sigma^*) d\Xi^p = \\ &= \oint_{M^*NMM^*} (\sigma - \sigma^*) d\Xi^e + \int_{NM} (\sigma - \sigma^*) d\Xi^p.\end{aligned}$$

Với giả thiết tính chất đàn hồi (các hằng số đàn hồi) không thay đổi trong quá trình biến dạng dẻo thì

$$\oint_{M^*NMM^*} (\sigma - \sigma^*) d\Xi^e = \oint_{M^*NMM^*} \sigma d\Xi^e - \sigma^* \cdot \oint_{M^*NMM^*} d\Xi^e = 0.$$

Tích phân thứ nhất biểu thị công toàn phần của biến dạng đàn hồi theo đường cong kín bằng không; tích phân thứ hai cũng bằng không do tính đơn trị của biến dạng đàn hồi. Vì vậy công không thuận nghịch chỉ sinh ra do biến dạng dẻo, từ (2.7) suy ra

$$\Delta W = \int_{NM} (\sigma - \sigma^*) d\Xi^p \geq 0.$$

Từ đây ta nhận được

$$(\sigma - \sigma^*) \dot{\Xi}^p \geq 0, \quad (2.8)$$

trong đó dấu chấm biểu thị đạo hàm theo thời gian hoặc theo độ dài cung đặc trưng quá trình.

Điểm M^* nằm trong miền đàn hồi tương ứng với trạng thái ứng suất $\sigma^{*(a)}$, ta gọi là “trạng thái an toàn”. Giá số biến dạng dẻo chỉ xuất hiện khi điểm tải nằm trên mặt tải (mặt giới hạn). Trạng thái ứng suất $\sigma^{*(c)}$ tương ứng với điểm trong hoặc trên mặt tải gọi là “trạng thái cho phép”. Do đó nếu σ là trạng thái ứng suất trên mặt tải, tương ứng với nó tồn tại tốc độ biến dạng dẻo $\dot{\Xi}^p$, thì mọi ứng suất “an toàn” $\sigma^{*(a)}$ và ứng suất cho phép $\sigma^{*(c)}$ đều thỏa mãn bất đẳng thức (2.8)

$$(\sigma - \sigma^{*(a)}) \dot{\Xi}^p > 0 \quad \text{hay} \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*(a)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0, \quad (2.9)$$

$$(\sigma - \sigma^{*(c)}) \dot{\Xi}^p \geq 0 \quad \text{hay} \quad (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*(c)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0. \quad (2.10)$$

Nếu chúng ta xuất phát ngay từ M^* đến điểm M vô cùng gần, sẽ luôn luôn xuất hiện biến dạng dẻo, ta gọi quá trình như vậy là quá trình dặt tải chủ động. Sau đó từ điểm M trở lại M^* theo đường bất kỳ nằm trong R ; công không thuận nghịch cũng chỉ sinh ra do biến dạng dẻo, do đó

$$d\sigma d\epsilon^p \geq 0. \quad (2.11)$$

Drucker nhiều lần nhấn mạnh rằng định đề Drucker không phải suy từ quy luật nhiệt động học và không phải là định đề nhiệt động học, tác giả dùng danh từ “tựa nhiệt động học”; bởi vì định đề Drucker khẳng định rằng công của mọi kích động thêm trên phần chuyển dịch do nó sinh ra thì không âm đối với quá trình kín, trong khi từ định luật của nhiệt động học sinh ra, công của toàn hệ lực tác dụng lên vật thể thì không âm. Do đó kích động thêm không thể suy từ định luật về năng lượng.

Tính chất này biểu thị tính ổn định của vật liệu. Để minh họa ta xét đồ thị đơn giản. Nếu $d\sigma_1 de_1 > 0$ tức là gia số e_1 cùng dấu với gia số σ_1 , vật liệu tái bền. Nếu $d\sigma_1 de_1 < 0$ tức là ứng suất giảm, thì độ dãn tăng, vật liệu không ổn định. Với ý nghĩa đó định đề Drucker xác định lớp vật liệu ổn định.

2.3.2 Hệ quả của định đề Drucker [12, 13]

Xuất phát từ (2.8) ta suy ra hai hệ quả sau:

1. *Nguyên lý pháp tuyến*: Vector gia số biến dạng dẻo tại mọi trạng thái biến dạng chủ động luôn luôn hướng theo pháp tuyến của mặt giới hạn tức thời, nếu mặt này đều.

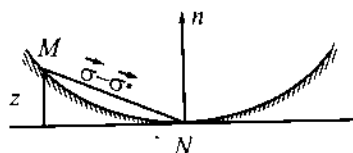
2. *Mặt giới hạn lồi khắp nơi*. Gọi $f = \text{const}$ là phương trình biểu diễn mặt giới hạn đi qua điểm N . Điều kiện (2.8) cho ta vector $\sigma - \sigma^*$, trong đó σ^* là bán kính vector của điểm bất kỳ nằm trong R^* , luôn luôn tạo với hướng của vector $\dot{\epsilon}^p$ một góc nhọn. Hệ thức (2.8) đúng với mọi điểm M^* bất kỳ nằm trong R^* , có nghĩa là với mọi hướng của điểm M^* đối với N . Vì vậy có thể chọn M^* sát mặt giới hạn một cách tùy ý. Nếu *mặt giới hạn đều*, qua điểm N có thể vẽ siêu mặt phẳng duy nhất tiếp xúc với mặt R^* . Khi M^* tiến gần đến N , vector $\sigma - \sigma^*$ nằm trong mặt phẳng đó. Vector $\dot{\epsilon}^p$ không phụ thuộc vào M^* và $\sigma - \sigma^*$ mà chỉ phụ thuộc vào N và hướng NM , nó phải hướng theo pháp tuyến của mặt giới hạn $f = \text{const}$ tại điểm N , tức là

$$\dot{\epsilon}^p = \text{Agrad} f. \quad (2.12)$$

Giả thiết về mặt $f = \text{const}$ đều tại N không bắt buộc, trong một số dạng của lý thuyết dẻo người ta có thể xem điểm N là điểm góc. Tiếp tuyến của mặt giới hạn tại điểm đó tạo thành mặt nón có đỉnh là điểm đó. Từ định đề

Drucker suy ra vectơ $\dot{\Sigma}^p$ phải nằm trong hình nón tạo thành bởi các pháp tuyến của mặt giới hạn tại điểm N .

Mặt giới hạn nằm về một phía của mặt phẳng tiếp tuyến, nên nó lồi khắp nơi. Quả vậy, vẽ mặt phẳng chứa $\sigma - \sigma^*$ và $\dot{\Sigma}^p$ trực giao với $f = \text{const}$, ta sẽ nhận được đường giao tuyến có độ cong κ giữa mặt f và mặt phẳng này, trong đó $\kappa > 0$ nếu đường cong lồi (tâm chính khúc nằm trên pháp tuyến ngoài).



Hình 2.6

Gọi z là khoảng cách (trong mặt phẳng vừa nhận được) từ điểm M tới mặt phẳng tiếp tuyến của $f = \text{const}$ xác định gần đúng bởi công thức

$$z = \frac{1}{2} \kappa |\Delta \sigma|^2,$$

trong đó

$$|\Delta \sigma| = |\sigma - \sigma^*|.$$

Chú ý rằng vectơ $\dot{\Sigma}^p$ hướng theo pháp tuyến ngoài của mặt f . Vì điều kiện $(\sigma - \sigma^*) \dot{\Sigma}^p \geq 0$ đúng với mọi hướng của $\sigma - \sigma^*$ từ trong mặt f tiến tới điểm N , có nghĩa là hệ số A trong (2.12) dương

$$A > 0 \quad (\text{nếu } \text{grad } f > 0).$$

Với gần đúng thứ hai theo hình vẽ

$$\begin{aligned} (\sigma - \sigma^*) \dot{\Sigma}^p &= |\dot{\Sigma}^p| |\sigma - \sigma^*| \cos(\sigma - \sigma^*, \mathbf{n}) \\ &= -\frac{z}{|\Delta \sigma|} |\dot{\Sigma}^p| |\Delta \sigma| = -\frac{1}{2} \kappa |\Delta \sigma|^2 |\dot{\Sigma}^p|. \end{aligned}$$

Từ điều kiện (2.8):

$$-\frac{1}{2} \kappa |\Delta \sigma|^2 |\dot{\Sigma}^p| \geq 0,$$

tức là $\kappa < 0$, mặt giới hạn lồi khắp nơi.

Ta còn gọi f là *hàm tải* hoặc *hàm cháy*, nói chung hàm f phụ thuộc vào trạng thái ứng suất và lịch sử quá trình. Tương tự như vậy đối với hệ số A .

Hệ thức (2.12) viết dưới dạng tenxơ

$$\dot{e}_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (2.13)$$

Điều kiện biến dạng chủ động thể hiện ở chỗ, nếu gia số ứng suất thỏa mãn bất đẳng thức

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$$

thì xuất hiện biến dạng dẻo de_{ij}^p .

Hệ thức (2.13) còn gọi là *quy luật dẻo kết hợp*, vì nó vừa biểu thị liên hệ giữa ứng suất và biến dạng, vừa biểu thị điều kiện chảy dẻo.

Hàm tải f đóng vai trò thế năng đối với biến dạng dẻo, vì vậy người ta thường gọi là *thế dẻo*.

Bây giờ ta phân ra 2 trường hợp: vật liệu dẻo lý tưởng và vật liệu tái bền.

1. Đối với vật liệu dẻo lý tưởng. Ta thay thế bất đẳng thức (2.11) bằng đẳng thức

$$d\sigma_{ij} de_{ij}^p = 0$$

đúng với mọi gia số ứng suất và gia số biến dạng dẻo.

Liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sẽ có dạng (2.13) cùng những điều kiện sau:

$$\dot{e}_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

trong đó

$$A = 0 \quad \text{nếu } f - k^2 < 0 \text{ hoặc nếu } f - k^2 = 0, \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0,$$

$$A > 0 \quad \text{nếu } f - k^2 = 0 \text{ và } \dot{f} = 0.$$

Hệ thức này có thể phát biểu như sau: A luôn luôn không âm và chỉ khác không khi trạng thái ứng suất nằm ở giới hạn chảy và không xảy ra cất tải. A là đại lượng chưa xác định có thứ nguyên thời gian, nó không phải là hằng số của vật liệu.

Trường hợp *mặt tải không đều* có cạnh hoặc điểm góc, khi đó có thể coi mặt giới hạn biểu thị bởi hữu hạn hoặc vô số các hàm chảy $f_\alpha(\sigma_{ij})$ ($\alpha = 1, 2, \dots$). Miền đàn hồi tương ứng với giá trị âm của tất cả các hàm chảy. Trạng thái ứng suất ở giới hạn chảy đặc trưng bởi một hoặc nhiều hàm chảy bằng không, các hàm còn lại âm. Ta có thể giả thiết ứng với mỗi hàm chảy tồn tại quy luật (2.13). Tốc độ biến dạng dẻo toàn phần xác định theo công thức

$$\dot{e}_{ij}^p = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}},$$

trong đó

$$\begin{aligned} A_\alpha &= 0 & \text{nếu } f_\alpha - k_\alpha^2 < 0 \text{ hoặc nếu } f_\alpha - k_\alpha = 0, \dot{f}_\alpha < 0, \\ A_\alpha &> 0 & \text{nếu } f_\alpha - k_\alpha^2 = 0 \text{ và } \dot{f}_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Ta có thể xem mặt đều là tập hợp vô hạn những hàm chảy f_α .

2. Đối với vật liệu tái bền. Ta thấy rằng muốn xuất hiện gia số biến dạng dẻo cần tăng ứng suất ngoài giới hạn chảy (khác với vật liệu dẻo lý tưởng gia số biến dạng dẻo xuất hiện với ứng suất không đổi bằng giới hạn chảy).

Trong trường hợp này để chính xác hóa hệ số nhân A cần giả thiết thêm về liên hệ tuyến tính giữa de_{ij}^p và $d\sigma_{ij}$. Điều đó có nghĩa là chúng ta giả thiết với gia số nhỏ của ứng suất và biến dạng dẻo tồn tại nguyên lý tổ hợp tuyến tính. Drucker chỉ ra rằng giả thiết đó không cần thiết, nhưng chúng ta không chứng minh ở đây. Do giả thiết trên ta phân tích gia số vectơ ứng suất ra hai thành phần: $d\sigma'$ hướng theo tiếp tuyến với mặt tải và $d\sigma''$ hướng theo pháp tuyến. Thành phần thứ nhất tương ứng với đặt tải trung gian, không sinh ra biến dạng dẻo. Do đó gia số biến dạng dẻo chỉ phụ thuộc vào thành phần pháp tuyến của vectơ $d\sigma$ thành phần này tỷ lệ với $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}$; vì vậy hệ số A cũng tỷ lệ với đại lượng đó

$$A = H \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}.$$

Hàm tái bền H là hàm của ứng suất, biến dạng và lịch sử quá trình. Bỏ qua ảnh hưởng của thời gian (tính chảy chậm, tốc độ biến dạng...) hàm H phải không phụ thuộc hoặc là hàm số bậc không của tốc độ ứng suất $\dot{\sigma}_{ij}$.

Khi đó, hệ thức (2.13) có dạng

$$e_{ij}^p = H \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.14)$$

$$\text{nếu: } f - k^2 = 0 \text{ và } \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \geq 0$$

$$\text{và } e_{ij}^p = 0 \text{ nếu } f - k^2 < 0 \text{ hoặc nếu } f - k^2 = 0, \dot{f} \leq 0.$$

Koiter [20, 61] mở rộng cho trường hợp mặt tải không đều biểu diễn bởi một số hàm tải f_α nào đấy. Hệ thức xác định gia số biến dạng dẻo có dạng

$$e_{ij}^p = \sum_{\alpha} C_{\alpha} H_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl},$$

trong đó

$$C_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f_\alpha - k_\alpha^2 < 0 \text{ hoặc nếu } f_\alpha - k_\alpha^2 = 0, \dot{f}_\alpha \leq 0, \\ 1 & \text{nếu } f_\alpha - k_\alpha^2 = 0, \dot{f}_\alpha = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} > 0. \end{cases}$$

Công thức (2.14) biểu thị quy luật cơ bản của lý thuyết chảy hiện nay. Vấn đề cơ bản là xác định hàm số f trong quá trình biến dạng dẻo. Hiện giờ ta chưa có quy luật chung biểu thị hàm f , mới chỉ có một số giả thuyết như trình bày trong 2.2.

Dùng quy luật (2.14) và các giả thuyết về mặt giới hạn, chúng ta nhận được những hệ thức của lý thuyết dẻo đơn giản tương ứng.

2.3.3 Lý thuyết chảy với tái bền đẳng hướng

Chú ý rằng có thể thay thế hàm tải f bằng hàm bất kỳ của f , vì chúng ta có thể chọn H tùy ý.

Mặt tải trong trường hợp tái bền đẳng hướng có dạng

$$f(\sigma_{ij}) - k^2 = 0.$$

Giả thiết đơn giản nhất là hàm f và H chỉ phụ thuộc vào bất biến thứ hai của ten xơ lệch ứng suất

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}, \quad (2.15)$$

khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = S_{ij}.$$

Biểu thức $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} = \dot{f}$ là đạo hàm theo thời gian của f ; nếu biểu thị qua cường độ ứng suất tiếp, thì nó có dạng

$$\dot{f} = 2T\dot{T}.$$

Đặt các giá trị vừa nhận được vào (2.14) ta được

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = S_{ij} F(T) \dot{T}, \quad (2.16)$$

trong đó

$$F(T) = 2H(T)T.$$

Đó là phương trình của lý thuyết chảy Prager - Reuss trình bày trong 1.11.

Trường hợp đặt tải đơn giản chúng ta có thể lấy đại lượng T làm tham số của quá trình đặt tải.

Điều kiện đặt tải đơn giản khẳng định rằng $\frac{S_{ij}}{T}$ không thay đổi theo thời gian, vì vậy có thể tích phân phương trình (2.16):

$$e_{ij}^p = S_{ij} \frac{1}{T} \int_0^T T F(T) dT. \quad (2.17)$$

So sánh phương trình này với phương trình (1.25) của lý thuyết biến dạng nhận thấy trùng nhau, trong đó

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(T) T dT = \frac{1}{2} \left[\bar{g}(T) - \frac{1}{G} \right].$$

Từ phương trình (2.17) suy ra tồn tại duy nhất đường cong biến dạng $T \sim \Gamma$ ứng với đặt tải đơn giản.

Nhân hai vế hệ thức cuối cùng với T và lấy đạo hàm, ta được

$$F(T) = \frac{1}{2T} \left[\bar{g}(T) - \frac{1}{G} \right] + \frac{1}{2} \frac{d\bar{g}}{dT}.$$

Do đó hàm $F(T)$ được xác định nếu ta biết đồ thị đơn giản giữa ứng suất và biến dạng trong trường hợp biến dạng một chiều.

2.3.4 Lý thuyết chảy với tái bền dịch chuyển

Ta giới hạn xét vật liệu tái bền dịch chuyển với hiệu ứng Bauschinger lý tưởng. Mặt giới hạn khi đó có dạng

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0,$$

trong đó $\alpha_{ij} = 2ge_{ij}^p$ và g là môđun tái bền.

Kadashevitch và Novozhilov [58] đưa vào khái niệm ứng suất chủ động σ_{ij}^0 , ứng suất dư vì mô $2ge_{ij}^p$, trong đó

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij} - 2ge_{ij}^p.$$

Hàm f có dạng tương tự như (2.15), nhưng đối với ứng suất chủ động

$$f = \frac{1}{2} S_{ij}^0 S_{ij}^0 = T^{02}.$$

Do đó tìm được liên hệ biến dạng - ứng suất tương tự như (2.16), trong đó mọi ứng suất thực thay bằng biểu thức của ứng suất chủ động

$$e_{ij}^p = S_{ij}^0 F(I^0) I^0. \quad (2.18)$$

Ứng suất dư vi mô trong vật thể có thể coi là nội lực đàn hồi xuất hiện để chống kháng với biến dạng dẻo tựa như ma sát khô chống lại chuyển động trượt.

Lý thuyết chảy với tải bền dịch chuyển tuyến tính dưới dạng đơn giản do Ishlinsky tìm ra đầu tiên.

2.3.5 Lý thuyết chảy với mặt tải không đều

Rabotnov [71] mở rộng lý thuyết dẻo Tresca - Saint Venant cho trường hợp vật liệu tải bền. Tiêu chuẩn xuất hiện trạng thái dẻo trong lý thuyết này là đại lượng ứng suất tiếp lớn nhất, nó cho ta xác định giới hạn chảy tức thời. Khi đó mặt tải tức thời có dạng

$$\tau_{\max}^2 = k^2. \quad (2.19)$$

Hằng số k được chọn, sao cho tại mỗi thời điểm mặt giới hạn đi qua điểm tải. Trong trường hợp tổng quát biểu thức của ứng suất tiếp cực đại là hàm rất phức tạp của các thành phần tenxơ ứng suất. Lý thuyết Saint - Venant có ưu thế chỉ trong trường hợp biết các hướng chính, khi đó có thể xét không gian ba chiều ứng suất chính. Nếu $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ thì $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ và hệ thức (2.19) có dạng

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm 2k. \quad (2.20)$$

Nhưng trong không gian ứng suất chính ta không thể liên hệ các trục tương ứng một cách cố định với các đại lượng $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Vì vậy chúng ta ký hiệu $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ là ứng suất chính; hệ thức giữa các đại lượng này khác nhau tại những điểm khác nhau của không gian ứng suất chính. Do đó thay thế một điều kiện (2.20) bằng các điều kiện

$$\begin{aligned} \sigma_\xi - \sigma_\eta &= \pm 2k, \\ \sigma_\eta - \sigma_\zeta &= \pm 2k, \\ \sigma_\zeta - \sigma_\xi &= \pm 2k. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Sáu mặt phẳng thỏa mãn điều kiện này tạo thành lăng trụ 6 mặt biểu thị mặt tải. Giả sử trạng thái dẻo của ta trên biên lăng trụ tương ứng với phương

trình thứ nhất của (2.21) tức là $f = \sigma_\xi - \sigma_\eta$. Khi đó $\frac{\partial f}{\partial \sigma_\xi} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_\eta} = -1$, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_\zeta} = 0$ theo công thức (2.14) ta được:

$$\begin{aligned} \dot{e}_\xi^p &= H(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\eta), \\ \dot{e}_\eta^p &= -H(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\eta), \\ \dot{e}_\zeta^p &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bây giờ giả thiết rằng hàm H phụ thuộc ứng suất tiếp cực đại, tức là hàm của $\sigma_\xi - \sigma_\eta$. Khi đó có thể lấy tích phân hệ thức trên

$$\begin{aligned} e_\xi^p &= h(\sigma_\xi - \sigma_\eta), \\ e_\eta^p &= -h(\sigma_\xi - \sigma_\eta), \\ e_\zeta^p &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

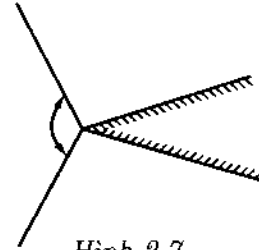
Kết quả cho liên hệ hữu hạn giữa ứng suất và biến dạng dẻo, tương tự như lý thuyết biến dạng. Hệ thức này tồn tại khi $\sigma_\xi > \sigma_\zeta > \sigma_\eta$, nếu bất đẳng thức này không thỏa mãn, ta phải chọn tương ứng trong $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ ứng suất cực đại và ứng suất cực tiểu, khi đó hệ thức (2.22) thỏa mãn với chỉ số khác, ta lại có thể lấy tích phân được. Chẳng hạn, ở trên biên $\sigma_\xi - \sigma_\zeta = \pm 2k$ tích phân hệ thức tương tự (2.22) cho kết quả

$$\begin{aligned} e_\xi^p &= h(\sigma_\xi - \sigma_\zeta) + e_\xi^{p'}, \\ e_\eta^p &= e_\eta^{p'}, \\ e_\zeta^p &= -h(\sigma_\xi - \sigma_\zeta). \end{aligned}$$

Dấu phẩy biểu thị biến dạng dẻo tích lũy tại cùng thời điểm ấy khi điểm tải trên biên $\sigma_\xi - \sigma_\eta = \pm 2k$ và tính theo công thức (2.23).

Cần phải xét khi điểm tải nằm trên cạnh của lăng trụ. Chẳng hạn $\sigma_\xi = \sigma_\eta > \sigma_\zeta$, khi đó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\sigma_\xi - \sigma_\eta = \pm 2k$ và $\sigma_\eta - \sigma_\zeta = \pm 2k$.

Trong hình 2.7 biểu thị tiết diện của mặt tải trong mặt phẳng có hướng bất diện, pháp tuyến với mặt biên tại điểm cạnh tạo thành một góc, trong đó chứa hướng của gia số biến dạng dẻo. Vectơ này nằm trong góc đó có thể xem là tổ hợp bậc nhất của các vectơ pháp tuyến cạnh. Vectơ tốc độ biến dạng dẻo hướng theo pháp tuyến mặt $\sigma_\xi - \sigma_\zeta = 2k$ là



Hình 2.7

$$\dot{e}_\xi^p = H_1(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\zeta), \quad \dot{e}_\eta^p = 0, \quad \dot{e}_\zeta^p = -H_1(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\zeta).$$

Trong tự đối với mặt $\sigma_\eta - \sigma_\zeta = 2k$:

$$\varepsilon_\xi^p = 0, \quad \varepsilon_\eta^p = H_2(\dot{\sigma}_\eta - \dot{\sigma}_\zeta), \quad \varepsilon_\zeta^p = -H_2(\dot{\sigma}_\eta - \dot{\sigma}_\zeta).$$

Cộng lại ta được

$$\begin{aligned} \dot{e}_\xi^p &= H_1(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\zeta), \\ \dot{e}_\eta^p &= H_2(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\zeta), \\ \dot{e}_\zeta^p &= -(H_1 + H_2)(\dot{\sigma}_\xi - \dot{\sigma}_\zeta), \end{aligned} \quad (2.24)$$

trong đó $\sigma_\xi = \sigma_\eta$. Hàm $H_1 + H_2$ là hàm của $\sigma_\xi - \sigma_\zeta$. Ta thấy rằng biến dạng dẻo không phụ thuộc vào ứng suất trung bình, cho nên nếu đặt vào vật thể ứng suất nén thủy tĩnh $-\sigma_\xi$, thì ứng suất theo chiều ξ, η bằng không, theo hướng ζ có ứng suất nén $-(\sigma_\xi - \sigma_\zeta)$. Biến dạng theo hướng ζ sẽ là $e_\zeta^p = -h(\sigma_\xi - \sigma_\zeta)$; hệ thức này nhận được bằng cách tích phân phương trình thứ ba của (2.24). Cuối cùng nhận được kết quả

$$\begin{aligned} e_\zeta^p &= -h(\sigma_\xi - \sigma_\zeta), \\ e_\xi^p &= \lambda h(\sigma_\xi - \sigma_\zeta), \\ e_\eta^p &= (1 - \lambda)h(\sigma_\xi - \sigma_\zeta). \end{aligned}$$

trong này còn tham số λ chưa xác định. Trên đây chúng ta giả thiết mặt tải không đều nở đẳng hướng trong quá trình biến dạng dẻo và suy ra liên hệ giữa ứng suất và biến dạng; tương tự như vậy cũng có thể dùng giả thuyết tải bền dịch chuyển với mặt tải không đều.

2.4 Định đề đẳng hướng và lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát

Trong các công trình đầu tiên về thuyết đàn dẻo, Ilyushin phân tích sự khác biệt cơ bản của cách *đặt tải đơn giản* và *đặt tải phức tạp* trong miền biến dạng dẻo. Để xây dựng lý thuyết tổng quát cần dựa vào những khái niệm mới và các nguyên lý cơ bản.

Khái niệm đặt tải đơn giản và đặt tải phức tạp của phần tử vô cùng nhỏ của vật thể, khái niệm về tenxơ chỉ hướng ứng suất, biến dạng và tốc độ biến

dạng, là cơ sở để xây dựng “độ phức tạp” của quá trình biến dạng, tương tự như vectơ đơn vị trong lý thuyết trường vectơ. Lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát biểu thị quy luật của các quá trình đặt tải phức tạp. Nghiên cứu tính chất cơ học của vật rắn biến dạng trong các quá trình đó dẫn đến việc phân chia tính chất cơ học ra hai loại: *tính chất vô hướng* và *tính chất vectơ*.

Nhờ toán tử tuyến tính dưới dạng tổng quát nhất người ta biểu thị liên hệ giữa ứng suất và biến dạng

$$L(S_{ij}) = L'(e_{ij}),$$

trong đó L, L' là toán tử tuyến tính theo thời gian hay tham số nào đấy với các hệ số là hàm của các bất biến của $S_{ij}, e_{ij}, \dot{S}_{ij}, \dot{e}_{ij}$. Các cố gắng làm đơn giản hóa hệ thức này dẫn tới việc đưa vào các vectơ trong không gian năm chiều như đã trình bày trên, và đã thiết lập được *tenxơ độ cong của quỹ đạo*. Đó là độ đo toán học của đặt tải phức tạp.

Cơ sở của lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát là những định đề Ilyushin [52, 53, 54].

2.4.1 Định đề đẳng hướng tổng quát

Định đề. Trong quá trình biến dạng tenxơ lệch ứng suất $S_{ij} = S_{ij}(t)$ và mọi vô hướng là hàm số xác định đơn trị của quá trình, tức là phiếm hàm phụ thuộc vào $e_{ij}(t), p(t), T(t)$

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \Phi_{ij}\{e_{mn}(t'), p(t'), T(t')\}, \\ \theta &= \theta\{e_{mn}(t'), p(t'), T(t')\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Các hệ thức này phải bất biến đối với phép quay hệ tọa độ x_i trong vật thể.

Nếu quá trình biến dạng là giải tích thì các hàm e_{ij}, p, T có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi Taylor

$$\begin{aligned} e_{ij}(t') &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t' - t)^k}{k!} \frac{d^k e_{ij}(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t' - t)^k}{k!} e_{ij}^{(k)}(t), \\ p(t') &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t' - t)^k}{k!} p^{(k)}(t), \\ T(t') &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t' - t)^k}{k!} T^{(k)}(t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

trong đó (k) ký hiệu đạo hàm cấp k theo t của đại lượng tương ứng.

Đặt (2.26) vào (2.25) ta biến đổi phiếm hàm Φ_{ij} , θ thành hàm của vô số hoặc số lớn hữu hạn biến số $e_{mn}^{(k)}(t)$, $p^{(k)}(t)$, $T^{(k)}(t)$

$$\begin{aligned} S_{ij}(t) &= \Phi_{ij}(e_{mn}^{(0)}, e_{mn}^{(1)}, \dots, e_{mn}^{(\alpha)}, \dots, p^{(0)}, \dots, p^{(\alpha)}, \dots, T^{(0)}, \dots, T^{(\alpha)}, \dots), \\ \theta &= \theta(e_{mn}^{(0)}, \dots, e_{mn}^{(\alpha)}, \dots, p^{(0)}, \dots, p^{(\alpha)}, \dots, T^{(0)}, \dots, T^{(\alpha)}, \dots), \\ &(\alpha = 0, 1, \dots, k, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nếu quá trình không giải tích, ta chọn tập hợp đếm được các giá trị $t_0, t_1, \dots, t_\alpha, \dots, t_k, \dots$ sao cho

- 1) mọi điểm không giải tích của quá trình đều rơi vào trong đó
- 2) lấp đầy toàn khoảng thời gian khảo sát
- 3) hiệu số $t_{\alpha+1} - t_\alpha$ nhỏ để cho phần quỹ đạo biến dạng giữa hai điểm lân cận e_{ij}^α và $e_{ij}^{\alpha+1}$ có thể xem như thẳng, vì vậy có thể giới hạn khảo sát những giá trị rời rạc của S_{ij} , θ với $t = t_k$. Khi đó có thể xem Φ_{ij} , θ là hàm của nhiều biến

$$\begin{aligned} S_{ij}(t_k) &= \Phi_{ij}(e_{mn}^0, \dots, e_{mn}^k, p^0, \dots, p^k, \dots, T^0, \dots, T^k, \dots), \\ \theta(t_k) &= \theta(e_{mn}^0, \dots, e_{mn}^k, p^0, \dots, p^k, \dots, T^0, \dots, T^k), \end{aligned} \quad (2.28)$$

trong đó e_{mn}^α , p^α , T^α ($\alpha = 0, 1, 2, \dots, k$) là giá trị của e_{mn} , p , T tại $t = t_\alpha$.

Để hệ thức (2.27), (2.28) bất biến đối với phép biến đổi hệ trục tọa độ trong vật thể, S_{ij} , θ phải phụ thuộc một cách đặc biệt vào các tenxơ $e_{mn}^{(\alpha)}$, e_{mn}^α .

Trong trường hợp chung tenxơ lệch ứng suất phải là hàm của các tenxơ đối xứng (tenxơ lệch hạng hai)

$$S = (S_{ij}) = \Phi(E, \mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k; [I, p, T]),$$

trong đó tenxơ lệch $\mathcal{E}_m$ là đạo hàm bậc m của tenxơ lệch $\mathcal{E}$, hoặc là giá trị của nó tại thời điểm t_m

$$\mathcal{E} = (e_{ij}), \quad \mathcal{E}_m = (e_{ij}^{(m)}), \quad \text{với} \quad e_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \frac{d^m e_{ij}}{dt^m}, & \text{hoặc} \\ e_{ij}(t_m), \end{cases}$$

E -tenxơ đơn vị, I -tập hợp các bất biến của các tenxơ lệch, dấu hiệu $[I, p, T]$ biểu thị Φ là phiếm hàm của các đại lượng I, p, T .

Hệ quả 2.1. Tenxơ lệch S tại thời điểm t của quá trình bất kỳ có thể biểu thị dưới dạng cấp số lũy thừa của tập hợp tenxơ lệch $\mathcal{E}_m$

$$S = L^1(\mathcal{E}) + L^2(\mathcal{E}) + \dots, \quad (2.29)$$

trong đó

$L(\mathcal{E})$ - tenxơ lệch đối xứng là hàm tuyến tính của các $\mathcal{E}_m$;

$L^2(\mathcal{E})$ - tenxơ lệch đối xứng là hàm bậc hai của $\mathcal{E}_m$;

$L^3(\mathcal{E})$ - tenxơ lệch đối xứng là hàm bậc ba của $\mathcal{E}_m, \dots$

Ta có

$$\begin{aligned} L^1(\mathcal{E}) &= A_m \mathcal{E}_m, \\ L^2(\mathcal{E}) &= A_{mn} \mathcal{E}_m \mathcal{E}_n - A_{mn}^{mn} E, \\ L^3(\mathcal{E}) &= A_{lmn} \mathcal{E}_l \mathcal{E}_m \mathcal{E}_n - A_{lmn}^{lmn} E, \dots \end{aligned} \quad (2.30)$$

trong đó $A_m, A_{mn}, A_{lmn}, \dots$ - hệ số bất biến phụ thuộc vào p, T và I . Các hệ số $A_{mn}^{mn}, A_{lmn}^{lmn}, \dots$ được chọn sao cho $L^2(\mathcal{E}), L^3(\mathcal{E}), \dots$ là tenxơ lệch, còn $A_m, A_{mn}, A_{lmn}, \dots$ chọn sao cho mỗi số hạng (2.30) là tenxơ đối xứng hạng hai.

Theo phép tính tenxơ trên cơ sở hằng đẳng thức Hamilton - Cayley và hằng đẳng thứ nguyên có thể biến đổi (2.29) và (2.30) về dạng đơn giản. Ở đây không trình bày tỉ mỉ mà chỉ đưa kết quả cuối cùng của Ilyushin [54]

$$S_{ij} = A_m e_{ij}^{(m)} + A_{(mn)} e_{ij}^{(mn)}, \quad (2.31)$$

trong đó

$$\begin{aligned} e_{ij}^{(mn)} &= \frac{1}{2} (e_{i\alpha}^{(m)} e_{j\alpha}^{(n)} + e_{i\alpha}^{(n)} e_{j\alpha}^{(m)}) - \frac{1}{3} I_{(mn)} \delta_{ij}, \\ (m, n &= 0, 1, 2, 3, 4; i, j, \alpha = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

$I_{(mn)}$ là bất biến:

$$I_{(mn)} = e_{ji}^{(m)} e_{ij}^{(n)}.$$

Vế phải của (2.31) gồm tổng năm số hạng độc lập tuyến tính, nếu các tenxơ $\mathcal{E}_m$ ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) độc lập tuyến tính.

Hệ thức (2.31) biểu thị quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát.

Hệ quả 2.2. Các đại lượng vô hướng như biến dạng khối θ , cường độ ứng suất $\sigma_u^2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}$, bất biến thứ ba $\text{Det} |S_{ij}|$, bất biến của đạo hàm tenxơ lệch $\frac{d^m S_{ij}}{dt^m}$, năng lượng trong U , công hao tán $W^*, \dots$ đều là hàm của các bất biến tenxơ $\mathcal{E}_m = (e_{ij}^{(m)})$, tương tự như A_m :

$$(A_m, \theta, \sigma_u, U, W^*, \dots) = (A_m, \theta, \sigma_u, U, W^*, \dots)[I, p, T].$$

Dùng các công thức về xây dựng vector trong 2.1 ta viết hệ thức (2.31) dưới dạng vector trong không gian biến dạng

$$\sigma = A_m \ni_m + A_{(mn)} \ni_{(mn)}, \quad (m, n = 0, 1, 2, 3, 4),$$

trong đó $\ni_m$ là vector năm chiều xây dựng trên cơ sở tenxơ lệch e_{ij} :

$$\ni_m = \begin{cases} \frac{d^m \ni}{dt^m} & \text{hoặc} \\ \ni(t_m), \end{cases}$$

còn

$$\ni_{(mn)} = \ni_i^{(mn)} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 5),$$

$\ni_i^{(mn)}$ biểu thị qua $e_{ij}^{(mn)}$.

2.4.2 Định đề đẳng hướng

Gần đúng tựa tuyến tính của hệ thức giữa ứng suất và biến dạng (2.31) là hệ thức vector suy từ định đề đẳng hướng sau đây.

Định đề. Hình ảnh quá trình đặt tải trong không gian biến dạng năm chiều hoàn toàn xác định do đặc trưng hình học của quỹ đạo biến dạng và các hàm vô hướng như áp suất $p(s)$, nhiệt độ $T(s)$, tốc độ $\frac{ds}{dt}$, và vậy hình ảnh này bất biến với phép quay và phép chiếu trong không gian biến dạng.

Trên cơ sở định đề này ta có công thức

$$\sigma = S_m \ni_m \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (2.32)$$

trong đó $\ni_m = \frac{d^m \ni}{ds^m}$ và các vô hướng như biến dạng khối θ , năng lượng trong U , các hệ số S_m phụ thuộc phiếm hàm vào $p(s)$, $T(s)$, $s(t)$ và bốn hàm $\kappa_n(s)$ biểu thị độ cong của quỹ đạo biến dạng.

$$(S_m, \theta, U, \dots) = (S_m, \theta, U, \dots)[p, T, \kappa_n, s]_t. \quad (2.33)$$

Điều đó có nghĩa là các đại lượng này bất biến đối với phép quay và phép chiếu trong không gian $\ni_5$.

Ta thấy dễ dàng rằng đây là hệ quả tựa tuyến tính của định đề đẳng hướng tổng quát (2.31) và giả thiết thêm là các vô hướng chỉ xác định bởi bất biến

thứ hai của mọi tenxơ $\mathcal{E}_m$. Khác với định đề tổng quát trong liên hệ giữa tenxơ lệch ứng suất và biến dạng không chứa bất biến thứ ba của $\mathcal{E}_m$.

Định đề đẳng hướng xác định vectơ ứng suất σ dưới dạng toán tử tuyến tính của vectơ Ξ , tức là xác định tenxơ lệch ứng suất S_{ij} dưới dạng toán tử tuyến tính của tenxơ lệch biến dạng e_{ij} cho nên các hệ số của toán tử không những phụ thuộc vào p, T mà còn phụ thuộc vào tích vô hướng của các vectơ nhận được từ Ξ dưới dạng toán tử tuyến tính nào đấy.

Nếu quỹ đạo biến dạng xảy ra trong không gian con biến dạng n chiều, trong đó $n \leq 5$, thì trong hệ thức (2.32) tồn tại n số hạng và hệ thức (2.33) chỉ chứa $n - 1$ tham số độ cong quỹ đạo.

Chẳng hạn trong bài toán phẳng nói chung tồn tại quỹ đạo biến dạng trong không gian biến dạng 3 chiều $n = 3$, ta có

$$\begin{aligned}\sigma &= S_n \Xi_n \quad (n = 1, 2, 3), \\ S_n &= S_n\{T, p, \kappa_1, \kappa_2, s\}_t,\end{aligned}$$

trong đó

$$ds = |d\Xi|, \quad \kappa_1 = |\Xi_2|, \quad \kappa_1^2 \kappa_2^2 = |\Xi_3|^2 - \kappa_1^2 - \kappa_1^4.$$

Ta biết rằng θ, s, κ_n ($n = 1, 2, 3, 4$) biểu thị qua tenxơ lệch biến dạng, theo công thức Cauchy các đại lượng trên cuối cùng cũng biểu thị qua vectơ chuyển dịch $\mathbf{u}$. Do đó tenxơ lệch ứng suất cũng biểu thị qua vectơ chuyển dịch và đạo hàm của nó

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(m)} &= \frac{\partial^m \mathbf{u}}{\partial t^m}, \quad e_{ij}^{(m)} = \frac{\partial^m e_{ij}}{\partial t^m}, \\ \theta^{(m)} &= \operatorname{div} \mathbf{u}^{(m)} \quad (m = 1, 2, 3, 4).\end{aligned}$$

Công thức (2.32), (2.33) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}S_{ij} &= S_m e_{ij}^{(m)} = S_m \left(\varepsilon_{ij}^{(m)} - \frac{1}{3} \theta^{(m)} \delta_{ij} \right), \\ S_m &= S_m\{T, \theta, \kappa_n, s\}_t, \\ p &= p\{T, \theta, \kappa_n, s\}_t \quad (n = 1, 2, 3, 4).\end{aligned}$$

Không gian biến dạng không có gì ưu thế đặc biệt hơn không gian ứng suất, vì vậy Ilyushin thiết lập định lý đẳng cấu, theo đó định đề đúng trong không gian biến dạng cũng đúng trong không gian ứng suất. Từ đó suy ra liên hệ ngược lại giữa biến dạng và các thành phần ứng suất.

Liên hệ giữa ứng suất và biến dạng suy từ định đề đẳng hướng chứa các hệ số vô hướng, các hệ số này phải xác định trên cơ sở các tính chất cụ thể của môi trường đàn dẻo.

2.4.3 Giả thuyết về cắt tải

Biến dạng toàn phần thường biểu thị dưới dạng tổng biến dạng đàn hồi và biến dạng dẻo. Cách biểu thị đó có thể hiểu là tất cả những quỹ đạo biến dạng khả dĩ tiếp tục từ điểm K của quỹ đạo trước có thể chia ra hai tập hợp giới hạn bởi mặt giới hạn đi qua điểm K . Về một phía của mặt này (bên trong) mọi quỹ đạo đều tương ứng với biến dạng bị động (cắt tải), tại đó biến dạng dẻo không đổi mà chỉ có biến dạng đàn hồi thay đổi; về phía kia (bên ngoài) của mặt mọi quỹ đạo đều biểu thị biến dạng chủ động, tức là không những $\exists^e$, mà cả $\exists^p$ thay đổi. Thành phần biến dạng đàn hồi $\exists^e$ dẫn tới không khi σ dẫn tới không. Vì vậy $\exists^p$ là biến dạng trong quá trình cắt tải tại thời điểm khi $\sigma = 0$

$$\exists^p = \exists \big|_{\sigma=0}.$$

Đẳng thức này cho phép đo biến dạng dẻo trong thực nghiệm và xét xem $\exists^p$ có phụ thuộc vào cách cắt tải hay không. Đối với biến dạng đàn hồi $\exists^e$ chúng ta giả thiết rằng nó là hàm tuyến tính thuần nhất của ứng suất σ , trong đó mô đun đàn hồi được xác định bằng đại lượng trung bình trong quá trình cắt tải toàn phần; nếu không $\exists^p$ sẽ phụ thuộc vào cách cắt tải

$$\exists^e = (D)\sigma, \quad \sigma = (E)\exists^e, \quad (2.34)$$

hay là

$$e_{ij}^e = D_{ijmn}S_{mn}, \quad S_{ij} = E_{ijmn}e_{mn}^e,$$

trong đó ma trận hệ số đàn hồi (D) và (E) chỉ phụ thuộc vào phần quỹ đạo chủ động (trước K) và là ma trận đối xứng và nghịch đảo được

$$\begin{aligned} (D)(E) &= (E)(D) = (I), \\ D_{ijmn} &= D_{jimn} = D_{ijnm} = D_{mnij}, \\ E_{ijmn} &= E_{jimn} = E_{ijnm} = E_{mnij}. \end{aligned}$$

Hệ thức (2.34) cũng đúng ngoài mặt giới hạn, trong đó (D) và (E) còn phụ thuộc thêm vào đoạn quỹ đạo chủ động ngoài mặt giới hạn.

2.4.4 Tính chất chậm trễ

Trong quá trình nghiên cứu tính chất của vật liệu, người ta phát hiện ra *tính chất chậm trễ*, thể hiện dưới dạng sau đây: độ lệch của vectơ ứng suất σ với tiếp tuyến quỹ đạo biến dạng không phụ thuộc vào toàn bộ quỹ đạo biến

dạng, mà chỉ phụ thuộc vào phần quỹ đạo tiếp cận điểm đang xét, độ dài của phần này gọi là *vết chậm trễ* h .

Giả sử trong không gian biến dạng cho quỹ đạo $\Xi(s)$, trên cơ sở của định đề đẳng hướng ta có thể viết liên hệ ở dạng tổng quát nhất

$$\sigma = \int_0^s K_s(s, s', \kappa, \kappa', \dots) d\Xi', \quad (2.35)$$

trong đó

$$d\Xi' = \frac{d\Xi'}{ds'} ds' = \mathbf{p}_1' ds'.$$

Hàm số ảnh hưởng K_s bất biến, phụ thuộc đặc trưng hình học quỹ đạo tại mọi điểm của nó.

Đối với quỹ đạo giải tích thì (2.35) trùng với (2.32); quả vậy theo công thức Frenet

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1' &= \mathbf{p}_1(s') = \mathbf{p}_1(s) + (s - s') \frac{d\mathbf{p}_1}{ds} + \frac{1}{2!} (s - s')^2 \frac{d^2\mathbf{p}_1}{ds^2} + \dots \\ &= P_{1m} \mathbf{p}_m, \quad (m = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Đưa biểu thức này vào (2.35) chúng ta sẽ nhận được hệ thức (2.32), trong đó

$$S_m = \int_0^s K_s P_{1m} ds'$$

Nhờ công thức (2.35) phát biểu tính chậm trễ bằng biểu thức toán học:

$$\sigma = \int_{s-h}^s K(s, s', \kappa, \kappa', \dots) d\Xi, \quad (2.37)$$

trong đó hàm K phụ thuộc vào độ dài quỹ đạo s và đặc trưng hình học quỹ đạo chỉ ở phần quỹ đạo từ $s' = s - h$ đến $s' = s$, hàm K giảm dần khi $s - s'$ tăng và hầu như bằng không với $s' \leq s - h$

$$K(s, s') = 0 \quad \text{với} \quad s' \leq s - h.$$

Nếu độ cong quỹ đạo tại mọi điểm của khoảng h là nhỏ, thì trong (2.36) ta chỉ cần giới hạn ở số hạng nhỏ bậc nhất

$$\frac{d\Xi'}{ds'} = \mathbf{p}_1(s) + (s' - s) \kappa_1 \mathbf{p}_2 + \dots$$

Do đó từ (2.37) ta được

$$\sigma = c \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (2.38)$$

với sai số

$$|\varkappa_1| \int_{s-h}^s K(s, s')(s-s')ds'$$

so với giá trị

$$c = \int_{s-h}^s K(s, s')ds' = |\sigma| = \sigma_u,$$

tức là góc lệch của vector σ đối với tiếp tuyến $\mathbf{p}_1 = \frac{d\vartheta}{ds}$ có giá trị bằng tỷ số những đại lượng ấy. Tính đến tính chất kể trên của hàm số K (bằng không tại $s' = s - h$), thì ngay cả giá trị gần đúng thứ nhất của K theo s' , độ lớn của góc đã có bậc $\frac{1}{2}\varkappa_1 h$. Thực tế chỉ ra rằng với $|\varkappa|h < s$ có thể xem đoạn h là quỹ đạo có độ cong nhỏ.

Thí nghiệm của Lensky [21, 62] chứng minh rằng với quỹ đạo có độ cong nhỏ hệ thức (2.38) thỏa mãn và $c = |\sigma| = \sigma_u(s)$ là hàm phổ dụng của độ dài cung s

$$\sigma_u(s) = \Phi(s).$$

Khi đó ta có hệ thức

$$\sigma = \frac{\Phi(s)}{v_u} \dot{\vartheta}, \quad (2.39)$$

trong đó $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$ là vector tốc độ biến dạng và

$$s = \int_0^t v_u dt.$$

Trong trường hợp đặt tải đơn giản chỉ có một vector duy nhất

$$\vartheta^0 = \frac{\vartheta}{e_u} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\dot{\vartheta}}{v_u},$$

cho nên từ định đề đẳng hướng ta nhận ngay được hệ thức cơ bản của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ

$$\sigma = \frac{\sigma_u}{e_u} \ni = \frac{\Phi(e_u)}{e_u} \ni .$$

Lý thuyết biến dạng dẻo hữu hạn đã được dùng vào việc nghiên cứu các quá trình gia công kim loại bằng áp suất và các quá trình chảy dẻo khác (như khi nổ, khoan lớn...) trong vật thể biến dạng xảy ra theo quỹ đạo có độ cong nhỏ, vì vết chậm trễ khá nhỏ. Điều đó có nghĩa là hệ thức (2.39) phát biểu tương đối chính xác lý thuyết biến dạng hữu hạn, trừ trường hợp quỹ đạo quay đột ngột trong khoảng giới hạn e_s .

Trong lý thuyết biến dạng nhỏ, cần chú ý quá trình có điểm góc. Quỹ đạo của nó gồm hai đoạn có độ cong nhỏ, khi chuyển từ đoạn này sang đoạn kia phải qua điểm góc, tức là vectơ tiếp tuyến quay đi một cách đột ngột một góc nào đấy. Trong thực tế quá trình này xảy ra khi đặt tải vào kết cấu mỏng tới giai đoạn mất ổn định và quá trình tiếp theo. Trong toàn bộ quỹ đạo biến dạng loại này chúng ta chỉ còn chưa biết liên hệ ứng suất biến dạng trong lân cận điểm gãy (theo tính chậm trễ). Ta có thể thay thế tại lân cận điểm gãy hai đoạn có độ cong nhỏ bằng hai đoạn thẳng với góc gãy bằng góc giữa hai tiếp tuyến với hai đoạn quỹ đạo tại điểm đó.

Tính chất chậm trễ có thể mở rộng cho cả tính chất vô hướng của vật liệu [62].

2.5 Liên hệ giữa hai lý thuyết

Hai lý thuyết phát triển song song, độc lập, nhưng qua quá trình phát triển ta thấy có phương hướng kết hợp giữa hai lý thuyết [53, 54].

Sự kết hợp đó dẫn đến mấy kết luận sau đây:

1. Nếu tính đến sự thay đổi tính chất đàn hồi của vật thể và bất đẳng hướng biến dạng (theo số liệu thực nghiệm của Zhukov [50]), thì $\text{grad } f$ trong công thức (2.12) không phải biểu thị hướng của vectơ gia số biến dạng dẻo $d \ni^p$, mà là của vectơ vật lý khác. Nguyên lý pháp tuyến phải viết dưới dạng

$$d \ni^p + d(D)\sigma = A|d\sigma| \text{ grad } f,$$

trong đó $d(D)$ gia số tenxơ môđun đàn hồi bất đẳng hướng. Về tính chất lồi khắp nơi của mặt giới hạn cần phải xét thêm.

2. Hệ thức trên và hệ thức đẳng cấu của nó trong không gian biến dạng

$$(E)d \ni - d\sigma = B|d \ni| \text{ grad } F \quad (2.40)$$

suy ra được từ *định đề dẻo* tổng quát hơn hệ thức (2.12). Trên cơ sở đó chứng minh được định đề Drucker không phải là điều kiện cần.

3. Giả thuyết tuyến tính của hệ thức giữa ứng suất và biến dạng (2.14) và H không phụ thuộc vào vi phân $d\sigma_{ij}$ (B - vào de_{ij}) không phù hợp với thực tế. Các hệ số H , B cũng như S_m phụ thuộc vào những tham số loại $d\sigma_{ij}$, de_{ij} .

Những kết luận này không những chứng minh tính chất không đầy đủ của những điểm cơ sở của thuyết chảy hiện nay, mà còn có một nội dung mới kết hợp được với những nguyên lý của thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát. Chú ý ở đây ta không xét đến lý thuyết cứng dẻo lý tưởng.

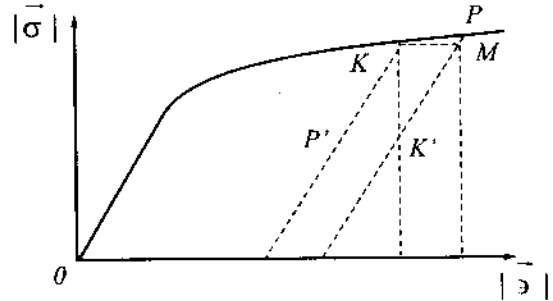
Bây giờ chúng ta đi sâu vào các vấn đề đã được nêu ở trên.

2.5.1 Định đề dẻo

Định đề. Công của ứng suất σ theo mọi quỹ đạo kín bất kỳ trong không gian biến dạng Ξ_5 , bắt đầu từ trạng thái K nào đấy và trở lại K , thì bằng không nếu biến dạng dẻo không thay đổi trên toàn quỹ đạo và dương nếu tại phần nào đấy của quỹ đạo biến dạng dẻo thay đổi.

Trong trường hợp đàn đơn giản hoặc xoắn ống mỏng, hay trong trường hợp đặt tải đơn giản và cắt tải theo cùng hướng như khi đặt tải thì định đề trên là đúng cả cho vật liệu tái bền và không tái bền.

Trong hình 2.8 trình bày đồ thị giữa $|\sigma|$ và $|\Xi|$ khi đặt tải đơn giản. Công $\sigma d\Xi$ khi đó bằng $|\sigma|d|\Xi|$.



Hình 2.8

Do đó công sinh ra theo đường biến dạng kín sẽ là

$$\oint \sigma d\Xi = W_{KPK'},$$

ở đây đặt tải theo KP và cắt tải theo PK' . Công này bằng diện tích tam giác KPK' và dương, không phụ thuộc vào độ lệch của đoạn KP khi biến dạng dẻo tăng. Trong trường hợp biến dạng bị động (đường biến dạng kín theo $KP'K$) thì công bằng không.

Định đề Drucker cho công dương theo đường kín trong không gian ứng suất, dẫn tới hệ thức

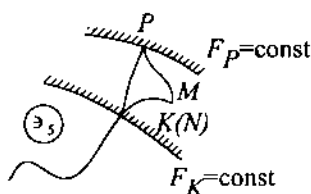
$$\int_{KPM} (|\sigma| - |\sigma_K|) d\Xi = W_{KPM} > 0.$$

Vì rằng

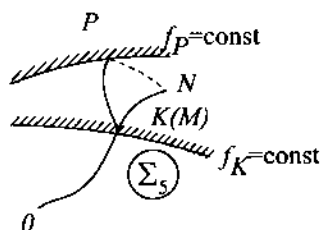
$$W_{KPK'} = W_{KPM} + W_{KMK'} \quad \text{và} \quad W_{KMK'} > 0,$$

do đó ta thấy đòi hỏi của định đề Drucker mạnh hơn.

Bây giờ ta chứng minh cho trường hợp tổng quát: định đề Drucker chỉ là *điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần* để thỏa mãn định đề dẻo. Định đề dẻo tổng quát hơn, nó đúng cho lớp tính chất vật liệu và quá trình rộng rãi hơn định đề Drucker.



Hình 2.9



Hình 2.10

Trong hình 2.9 thuộc không gian Ξ_5 : OK là quỹ đạo biến dạng trước điểm K . Từ K tiếp tục quá trình biến dạng đến P và sau đó theo PM và $MK(N)$ (quỹ đạo kín), trong đó chọn điểm M sao cho tại đó ứng suất bằng ứng suất tại điểm K , tức là σ_K .

Trong hình vẽ thuộc không gian Σ_5 , cũng quá trình đó biểu diễn trong không gian ứng suất. Đường kín theo biến dạng là $KPMK(N)$, đường kín theo ứng suất là $KPK(M)$.

Định đề dẻo được biểu thị dưới dạng toán học

$$W = \oint_{\Xi_K} \sigma d\Xi \geq 0,$$

trong đó đường kín theo biến dạng Ξ_K .

Trong tự, ta viết định đề Drucker

$$W_1 = \oint (\sigma - \sigma_K) d\Xi \geq 0,$$

trong đó đường kín theo ứng suất σ_K .

Ta phải chứng minh

$$W > W_1. \quad (2.41)$$

Khi đó với $W > 0$ không thể suy được $W_1 \geq 0$, nhưng ngược lại từ $W_1 > 0$ suy ra $W > 0$.

Qua điểm K và P vẽ mặt giới hạn tương ứng F_K , f_k và F_p , f_p . Chúng ta xét đoạn quỹ đạo KP không lớn lắm, trong đó điểm $K(N)$ và $K(M)$ nằm trong mặt giới hạn mới F_p và f_p . Điểm $K(M)$ nằm trong f_p suy ra điểm $M(\sigma_M = \sigma_K)$ nằm trong F_p , điểm $K(N)$ nằm trong F_p thì điểm $N(\exists_N = \exists_K)$ nằm trong f_p .

Do đó đường $PMK(N)$ và $PK(N)M$ trong hình 2.9 cũng như $PK(M)N$ và $PNK(M)$ trong hình 2.10 là quá trình bị động (cất tải), tại đó biến dạng dẻo không đổi và bằng $\exists_p$. Bây giờ chứng minh bất đẳng thức (2.41). Xét quá trình trong không gian biến dạng, ta có

$$W = \oint_{\exists_K} \sigma d\exists = \oint_{\exists_K} \sigma_K d\exists + \oint_{\exists_K} (\sigma - \sigma_K) d\exists,$$

vì vector σ_K không đổi, nên $\oint_{\exists_K} \sigma_K d\exists = 0$, tích phân thứ hai lấy theo đường $KPMK(N) = KPM + MK(N)$ nhưng

$$\int_{KPM} (\sigma - \sigma_K) d\exists = \oint_{\sigma_K} (\sigma - \sigma_K) d\exists.$$

Do đó

$$W - W_1 = \int_{MK(N)} (\sigma - \sigma_K) d\exists. \quad (2.42)$$

Trên đoạn quỹ đạo $MK(N)$ chỉ có thành phần biến dạng đàn hồi thay đổi. Ta biết rằng $\sigma_K = \sigma_M$, $d\exists = d\exists^e = d(\exists^e - \exists_M^e)$ và quy luật cất tải từ điểm P :

$$\sigma - \sigma_M = (E)_p(\exists^e - \exists_M^e).$$

Hệ thức (2.42) đưa về dạng

$$\begin{aligned} W - W_1 &= \int_{MK(N)} (E)_p(\exists^e - \exists_M^e) d(\exists^e - \exists_M^e) = \\ &= W_e(\exists_{K(N)}^e - \exists_M^e). \end{aligned}$$

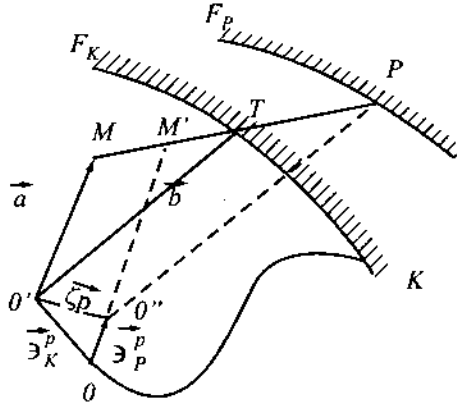
Thế đàn hồi W_e là hàm xác định dương

$$W_e = \frac{1}{2}(E)_p (\exists_{K(N)}^e - \exists_M^e) (\exists_{K(N)}^e - \exists_M^e) > 0$$

nên bất đẳng thức (2.41) được chứng minh.

2.5.2 Gia số biến dạng dẻo và mặt giới hạn

Giả sử với quỹ đạo biến dạng OK ta biết mặt giới hạn $F_K = \text{const}$ (xem hình 2.11). Từ K tiến hành quá trình biến dạng bị động tới điểm M , vector $\exists_K^p$ sẽ không thay đổi. Sau đó tiến hành quá trình theo quỹ đạo biến dạng kín $MTPTM$, không làm mất tính chất tổng quát có thể lấy $MTPTM$ là đoạn thẳng.



Hình 2.11

Chúng ta biểu thị đoạn MT (bị động) bằng vector đơn vị $\vec{t}$, $TM = x$, tọa độ chạy x' ; đoạn TP (chủ động) bằng vector đơn vị $\vec{e}$, $TP = \xi$, tọa độ chạy ξ' ; từ điểm T tới P vector biến dạng dẻo thay đổi từ $\vec{OO}' = \exists_K^p$ đến $\vec{OO}'' = \exists_P^p$. Khi đó hiệu số $\exists_P^p - \exists_K^p = \zeta \vec{p} = \Delta \exists^p$ là một đại lượng nhỏ bậc ξ ($\vec{p}$ - vector đơn vị của $O'O''$). Giá trị tức thời của vector biến dạng dẻo trong đoạn nhỏ TP ký hiệu là $\zeta' \vec{p}$.

Định đề dẻo đối với đường kín $MTPTM$ có dạng

$$W = \oint_{MTPTM} \sigma d\exists \geq 0,$$

khi tính tích phân này ta chỉ giới hạn tới số hạng nhỏ bậc nhất đối với ξ . Giả thiết rằng ma trận đàn hồi (E) tại điểm nào đấy trong đoạn TP có thể viết

$$\begin{aligned}(E)_{\xi'} &= (E)_T + \xi' \left[\frac{d}{d\xi}(E) \right]_T, \\ (E)_p &= (E)_T + \xi \left[\frac{d}{d\xi}(E) \right]_T,\end{aligned}\tag{2.43}$$

trong đó

$$(E)_T = (E)_K.$$

Chú ý tích phân

$$\int_{TP} \sigma d\Xi + \int_{PT} \sigma d\Xi = \int (\sigma_{TP} - \sigma_{PT}) \epsilon d\xi$$

là đại lượng nhỏ bậc ξ^2 có thể bỏ qua, vì rằng sự thay đổi của ma trận đàn hồi và đại lượng biến dạng đàn hồi trong đoạn TP có bậc ξ , do đó $\sigma_{TP} - \sigma_{PT}$ cũng sẽ có bậc ξ .

Nếu chỉ giới hạn ở số hạng nhỏ bậc nhất đối với ξ thì biểu thức công W có dạng:

$$\begin{aligned}W &= \int_{MT} \sigma d\Xi + \int_{TP} \sigma d\Xi + \int_{PT} \sigma d\Xi + \int_{TM} \sigma d\Xi = \\ &= \int_{MT} \sigma d\Xi + \int_{TM} \sigma d\Xi = \int_0^x (\sigma_{MT} - \sigma_{TM}) t dx',\end{aligned}\tag{2.44}$$

trong đó $d\Xi = t dx'$, σ_{MT} ứng suất tại điểm tx' , khi chuyển động từ M đến T , σ_{TM} ứng suất cũng tại điểm ấy khi chuyển động ngược lại.

Theo hình 2.11 với MT ta có

$$\sigma_{MT} = (E)_T(\mathbf{a} + t\mathbf{x}')\tag{2.45}$$

và với TM

$$\sigma_{TM} = (E)_p(\mathbf{a} + t\mathbf{x}' - \zeta\mathbf{p}),$$

những biểu thức trong dấu ngoặc là vector biến dạng đàn hồi tương ứng với quá trình MT và ngược lại TM , tức là vector $\overrightarrow{O'M'}$ và $\overrightarrow{O''M'}$.

Dùng (2.43), (2.45) và giới hạn ở số hạng nhỏ bậc nhất ta tính

$$\begin{aligned}\sigma_{MT} - \sigma_{TM} &= \zeta(E)_T \mathbf{P} - \xi \left[\frac{d}{d\xi}(E) \right]_T [\mathbf{b} - (x - x')\mathbf{t}] = \\ &= \zeta(E)\mathbf{P} - \xi(E)'[\mathbf{b} - (x - x')\mathbf{t}],\end{aligned}$$

trong đó

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{t}x; \quad (E) = (E)_T; \quad (E)' = \frac{d}{d\xi}[E]_T.$$

Đặt biểu thức vừa nhận được vào (2.44) ta được

$$W = x[\zeta(E)\mathbf{P} - \xi(E)'\mathbf{b}]\mathbf{t} + \frac{1}{2}x^2\xi(E)'\mathbf{t}.$$

Tính đến $\zeta\mathbf{P} = \Delta \ni^p$ và thay $\frac{\Delta \ni^p}{\xi} = \frac{d \ni^p}{d\xi}$ (vì đoạn TP nhỏ tùy ý), ngoài ra

$$\mathbf{b} = \ni - \ni^p = \ni^e,$$

biểu thức W có thể viết dưới dạng

$$W = x\xi\mathbf{P}\mathbf{t} + \frac{1}{2}x^2\xi\mathbf{t}(E)'\mathbf{t}, \quad (2.46)$$

trong đó

$$\mathbf{P} = (E)\frac{d \ni^p}{d\xi} - (E)'\ni^e.$$

Dùng hệ thức $\sigma = (E)\ni^e$ biến đổi hệ thức cuối cùng về dạng

$$\mathbf{P} = (E)\frac{d \ni}{d\xi} - \frac{d\sigma}{d\xi},$$

trong đó $d\xi = |d \ni|$.

Vì đại lượng ξ dương nhỏ tùy ý, điểm M có thể lấy gần mặt F_K tùy ý rồi cho nó dần về điểm T sao cho tỷ số ξ/x nhỏ tùy ý. Khi đó từ định đề dẻo và công thức (2.46) với $\xi x > 0$ suy ra

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} \geq 0$$

với $\mathbf{t}$ bất kỳ, tức là với hướng bất kỳ của M đối với T . Vector $\mathbf{P}$ không phụ thuộc vào M và $\mathbf{t}$, mà chỉ phụ thuộc vào điểm T và hướng $\mathbf{e}$. Trong trường hợp như vậy $\mathbf{t}$ là vector đơn vị nằm trên mặt phẳng tiếp tuyến với F_K . Do đó

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{t} = 0$$

suy ra vectơ $\mathbf{P}$ hướng theo pháp tuyến của mặt F_K tại điểm T . Hệ quả của định đề dẻo là hệ thức sau đây

$$\mathbf{P} = B \operatorname{grad} F,$$

hay là

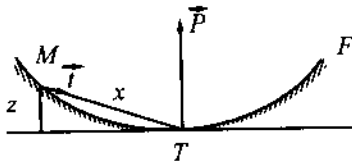
$$(E)d \ni -d\sigma = B|d \ni |\operatorname{grad} F. \quad (2.47)$$

Đây chính là hệ thức (2.40) đã nêu ở trên.

Về chứng minh tính chất lồi của mặt giới hạn ta làm tương tự như trong 2.3. Giao tuyến của mặt giới hạn và mặt phẳng $(\mathbf{P}, \mathbf{t})$ có thể viết

$$z = \frac{1}{2} \kappa x^2.$$

Chú ý rằng $\mathbf{P}$ hướng theo pháp tuyến ngoài của mặt giới hạn, nên $B > 0$ (nếu $\operatorname{grad} F > 0$).



Hình 2.12

Đưa

$$\mathbf{P} \mathbf{t} = |\mathbf{P}| \cos(\mathbf{P}, \mathbf{t}) = -\frac{z}{x} |\mathbf{P}| = -\frac{1}{2} \kappa x |\mathbf{P}|$$

vào biểu thức (2.46), ta được

$$W = \frac{1}{2} x^2 \xi \left[-\kappa |\mathbf{P}| + \mathbf{t}(E)' \mathbf{t} \right].$$

Vì $\xi x^2 > 0$, từ $W \geq 0$ suy ra

$$\mathbf{t}(E)' \mathbf{t} - \kappa |\mathbf{P}| \geq 0.$$

Điều kiện này thỏa mãn khi $\kappa < 0$, tức là mặt F_k lồi. Nhưng với mọi tiếp tuyến $\mathbf{t}$ của F_k chưa có thể khẳng định $\kappa < 0$, về mặt lý thuyết chưa loại bỏ khả năng mặt lõm hoặc hình yên ngựa.

Theo định lý đẳng cấu định đề dẻo có thể áp dụng cho quá trình $MTPTM$ trong không gian ứng suất. Ký hiệu

$$d\Sigma = |d\sigma|$$

là môđun gia số ứng suất σ khi vượt qua mặt tải $f = \text{const}$ và (D) là ma trận nghịch đảo của (E) . Bằng cách lý luận tương tự như trên ta nhận được W tỷ lệ với $\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau}$, trong đó

$$\mathbf{Q} = \frac{d \exists^p}{d\Sigma} + \frac{d}{d\Sigma}(D)\sigma,$$

$\boldsymbol{\tau}$ - vectơ đơn vị nằm trên mặt phẳng tiếp tuyến với mặt $f = \text{const}$. Hệ quả của định đề dẻo cho ta vectơ $\mathbf{Q}$ hướng theo pháp tuyến của f :

$$\mathbf{Q} = A \text{grad } f,$$

hay là

$$d \exists^p + d(D)\sigma = A|d\sigma| \text{grad } f.$$

So sánh với hệ thức (2.12) suy từ định đề Drucker ta thấy trong hệ thức này có tính đến *tính chất đàn hồi thay đổi*; vì trong quá trình biến dạng dẻo xuất hiện bất đẳng hướng biến dạng.

Dùng hệ thức $\exists^e = (D)\sigma$ có thể biểu thị phương trình vừa nhận được dưới dạng

$$d \exists - (D)d\sigma = A|d\sigma| \text{grad } f. \quad (2.48)$$

Với các giả thuyết về mặt giới hạn như đã trình bày trong 2.2 áp dụng vào đây chúng ta sẽ nhận được các biểu thức của lý thuyết dẻo có tính đến bất đẳng hướng biến dạng.

a) *Vật liệu dẻo lý tưởng* [40] mặt giới hạn giả thiết là mặt cầu

$$f = \sigma_u^2 - \sigma_s^2 = 0,$$

khi đó $\text{grad } f = \frac{\sigma}{\sigma_s}$. Thay thế $\text{grad } f$ vào liên hệ (2.48)

$$d \exists - (D)d\sigma = A|d\sigma| \frac{\sigma}{\sigma_s},$$

hay là

$$(E)d \exists - d\sigma = \frac{A|d\sigma|}{\sigma_s}(E)\sigma. \quad (2.49)$$

Nhân hai vế của (2.49) với σ ; và chú ý rằng với vật liệu dẻo lý tưởng $\sigma d\sigma = 0$ khi biến dạng chủ động, chúng ta nhận được

$$(E)d \exists \cdot \sigma = \frac{A|d\sigma|}{\sigma_s}(E)\sigma \cdot \sigma.$$

Khử A từ (2.49) và hệ thức này, cùng tính đến sự đối xứng của ma trận (E) , ta đi đến

$$(E)d\vartheta - d\sigma = \frac{(E)\sigma d\vartheta}{(E)\sigma \cdot \sigma}(E)\sigma. \quad (2.50)$$

Để hoàn chỉnh lý thuyết đối với vật liệu dẻo lý tưởng ta chỉ cần xác định quy luật thay đổi của ma trận (E) . Hệ thức (2.50) mở rộng thuyết Prandtl-Reuss khi tính đến bất đẳng hướng biến dạng. Quả vậy nếu không tính đến bất đẳng hướng biến dạng thì $(E) = 3G(I)$ hệ thức (2.50) cho kết quả của thuyết Prandtl-Reuss

$$d\vartheta - \frac{1}{3G}d\sigma = \frac{\sigma d\vartheta}{\sigma_s^2}\sigma.$$

b) *Vật liệu tái bền đẳng hướng*

Giả thiết mặt giới hạn f là mặt giới hạn Mises nở đẳng hướng tức là f chỉ là hàm của cường độ ứng suất σ_u . Khi đó vector ứng suất σ hướng theo $\text{grad } f$, từ hệ thức (2.48) suy ra:

$$d\vartheta - (D)d\sigma = L|d\sigma|\sigma,$$

trong đó L cũng chỉ là hàm của σ_u .

Chúng ta nhận thấy rằng trong hai trường hợp này vector ứng suất σ hướng theo pháp tuyến của mặt giới hạn trong không gian ứng suất, với các trường hợp khác ta chưa có kết luận gì.

2.6 Giả thiết xác định địa phương. Hệ thức xác định của lý thuyết quá trình đàn dẻo

Cho đến nay chưa có nhiều công trình nghiên cứu về cấu trúc và phương pháp xác định các đại lượng tham gia trong các hệ thức cơ bản của lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát, chẳng hạn ma trận bất đẳng hướng biến dạng, hàm chảy f , các phiếm hàm S_m trong hệ thức (2.32),... Vì vậy cùng với sự phát triển của lý thuyết tổng quát xuất hiện vấn đề thiết lập một số dạng của lý thuyết dẻo phù hợp với thực nghiệm và có khả năng ứng dụng thực tế.

Để hoàn chỉnh việc xây dựng hệ thức ứng suất - biến dạng cần phải xác định các tính chất và cấu trúc giải tích của các phiếm hàm và các giá trị của các đại lượng đặc trưng trong các hệ thức (2.32), (2.33) tương ứng với từng vật liệu; tức là cụ thể hóa hệ thức ứng suất - biến dạng. Có như vậy mới

có thể ứng dụng lý thuyết biến dạng đàn dẻo vào giải quyết các bài toán kỹ thuật.

Trước hết ta biểu diễn quan hệ (2.32), (2.33) dưới dạng khác. Trong hệ thức (2.32) vector ứng suất σ biểu diễn qua năm vector độc lập tuyến tính $\Xi_m(s)$ tại từng điểm của quỹ đạo biến dạng. Nhờ công thức Frenet ta xây dựng năm vector độc lập tuyến tính $\mathbf{p}_k$ ($k = 1 \div 5$) thuộc rêpe tự nhiên của quỹ đạo biến dạng thông qua năm vector Ξ_m ($m = 0, 1, 2, 3, 4$). Khi đó hệ thức giữa ứng suất - biến dạng suy từ hệ quả của định đề đẳng hướng (2.32) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_u \cos \theta_k \mathbf{p}_k, \\ \cos \theta_k \cos \theta_k &= 1, \quad (k = 1 \div 5)\end{aligned}$$

trong đó σ_u là cường độ ứng suất, $\theta_k = \arccos \frac{\sigma}{\sigma_u} \mathbf{p}_k$ là các góc chỉ hướng của vector ứng suất trong rêpe tự nhiên của quỹ đạo biến dạng. Các đại lượng σ_u , θ_k chỉ phụ thuộc vào hình học nội tại của quỹ đạo biến dạng, hơn nữa theo tính chất chậm trễ chúng chỉ phụ thuộc vào lịch sử biến dạng của đoạn hữu hạn quỹ đạo biến dạng ngay trước đó (vết chậm trễ h). Do vậy σ_u và θ_k là phiếm hàm của độ cong κ_n của quỹ đạo biến dạng và các hàm vô hướng đặc trưng cho sự thay đổi các điều kiện vật lý của quá trình

$$(\sigma_u, \theta_k, e, \dots) = (\sigma_u, \theta_k, e) [p(s'), T(s'), \kappa_n(s')]_{s-h}^s.$$

Các đại lượng này được gọi là các phiếm hàm dẻo.

Một trong những cách tiếp cận có hiệu quả dựa trên khả năng biểu diễn các phiếm hàm dẻo dưới dạng vi phân.

2.6.1 Giả thiết xác định địa phương [40, 41, 47, 62, 63]

Nội dung của giả thiết là các phiếm hàm dẻo có thể biểu diễn như nghiệm tổng quát của hệ phương trình vi phân thường bậc nhất phi tuyến, tính khả thi của nó được chứng minh bằng thực nghiệm. Giả thiết xác định địa phương được phát biểu dưới dạng mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1. *Tốc độ thay đổi các góc chỉ phương của vector ứng suất trong rêpe tự nhiên của quỹ đạo biến dạng $\frac{d\theta_i}{ds}$ và tốc độ thay đổi cường độ ứng suất $\frac{d\sigma_u}{ds}$ là hàm của các giá trị tức thời θ_k , σ_u , độ cong κ_p và độ dài cung quỹ đạo biến dạng s :*

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_i}{ds} &= \mathcal{F}_i(\theta_k, \sigma_u, \kappa_p, s), \\ \frac{d\sigma_u}{ds} &= \psi(\theta_k, \sigma_u, \kappa_p, s), \quad (i, k = 1 \div 5, p = 1 \div 4)\end{aligned}\quad (2.51)$$

với điều kiện đầu

$$\sigma_u = \sigma_{i0}, \quad \theta_i = \theta_{i0} \quad \text{khi } s = s_0,$$

trong đó

$$\theta_k = \arccos\left(\frac{\sigma}{\sigma_u} \cdot \mathbf{p}_k\right), \quad \cos \theta_k \cos \theta_k = 1.$$

Chú ý rằng các phương trình này chứa các hàm $\mathcal{F}_i$ và ψ . Do vậy, điểm hàm cường độ σ_u và các điểm hàm góc chỉ hướng θ_k là nghiệm hệ phương trình vi phân phi tuyến (2.51).

Các hàm $\mathcal{F}_i$, ψ hoàn toàn đặc trưng cho tính chất của vật liệu trong quá trình dặt tải phức tạp. Để xây dựng cụ thể các hàm này, cần phải tiến hành thực nghiệm trên các quỹ đạo biến dạng phức tạp khác nhau. Số lượng thí nghiệm có thể giảm đi, suy từ hệ quả của giả thiết xác định địa phương: Quá trình biến dạng theo mọi quỹ đạo kế tiếp nhận được bằng cách quay quanh vector ứng suất đều dẫn về cùng sự thay đổi cường độ ứng suất và góc định hướng của vector ứng suất với quỹ đạo biến dạng kế tiếp.

Trường hợp riêng, nếu quỹ đạo kế tiếp là đoạn thẳng bắt đầu từ điểm đang xét trùng với vector ứng suất tại điểm này thì tại các điểm tiếp theo trên quỹ đạo kế tiếp vector ứng suất sẽ trùng với quỹ đạo biến dạng.

Tính chất xác định địa phương được thể hiện trong công thức (2.51), trong đó $\mathcal{F}_i$ và ψ là các hàm, cho ta tiếp cận xây dựng hệ thức hoàn chỉnh của lý thuyết quá trình đàn dẻo.

Bây giờ cần khảo sát cấu trúc giải tích của các hàm $\mathcal{F}_i$, ψ và dựa vào thực nghiệm để xác định các đại lượng đặc trưng cho vật liệu xuất hiện trong các hàm đó. Các đại lượng này gọi là *các hàm vật liệu*.

Theo định nghĩa ta có

$$\cos \theta_1 = \frac{\sigma}{\sigma_u} \cdot \mathbf{p},$$

vi phân hai vế theo s ta được

$$\frac{d\theta_1}{ds} = f_1 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_1}, \quad (2.52)$$

trong đó

$$f_1 = -\mathbf{p}_1 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sigma_u} \right) / \sin \theta_1.$$

Đại lượng f_1 là tốc độ tiếp cận tức thời của vector ứng suất $\boldsymbol{\sigma}$ theo hướng $\mathbf{p}_1$, nó không phụ thuộc vào độ cong κ_p mà là hàm của θ_k , σ_u và s

$$f_1 \equiv f_1(\theta_k, \sigma_u, s)$$

và

$$\mathcal{F}_1 = f_1(\theta_k, \sigma_u, s) - \kappa_1 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_1}.$$

Trong tự ta có

$$\frac{d\theta_\alpha}{ds} = f_\alpha - \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_{\alpha+1} - \kappa_{\alpha-1} \cos \theta_{\alpha-1}}{\sin \theta_\alpha} \quad (2.53)$$

$$(\alpha = 2 \div 5, \kappa_0 = \kappa_5 \equiv 0).$$

Dựa trên các số liệu thực nghiệm [43] ta thấy hàm ψ không phụ thuộc hiển vào độ cong quỹ đạo κ_p , tức là

$$\psi = \psi(\theta_k, \sigma_u, s).$$

Do vậy các hàm $f_i(\theta_k, \sigma_u, s)$, $\psi(\theta_k, \sigma_u, s)$ không phụ thuộc vào dạng của quá trình biến dạng, chúng là những hàm vật liệu đặc trưng cho từng vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm.

Trong [47] cho dạng xấp xỉ giải tích các hàm f_1 và ψ , chúng phụ thuộc yếu vào θ_α ($\alpha = 2 \div 5$):

$$f_1(\sigma_u, \theta_1, s) = -\frac{\sin \theta_1}{s} \left[1 + \left(\frac{3Gs}{\sigma_u} - 1 \right) \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{2} \right)^\alpha \right],$$

$$\psi(\sigma_u, \theta_1, s) = \phi'(s) \cos \theta_1 - (3G - \phi'(s)) \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{2} \right)^\beta, \quad (2.54)$$

$$0 \leq \theta_1 \leq \pi, \quad \alpha \geq 1, \quad \beta > 1,$$

trong đó $\phi'(s) = \frac{d\phi}{ds}$ với $\phi(s)$ là hàm phổ dụng cho từng vật liệu được xác định từ đồ thị $\sigma_1 \sim e_1$ trong trường hợp một chiều, α, β là những hằng số vật liệu.

2.6.2 Hệ thức xác định của lý thuyết quá trình đàn dẻo

Từ quan hệ đồng phẳng của vector ứng suất, gia số vector ứng suất và vector tốc độ biến dạng với quá trình đặt tải phức tạp bất kỳ hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo tổng quát đưa về

$$\dot{\sigma} = A\dot{\Xi} + B\sigma. \quad (2.55)$$

Kết hợp (2.55) với các hệ thức (2.54) của giả thiết xác định địa phương dẫn đến các quan hệ giữa ứng suất và biến dạng. Đây là hệ thức xác định hoàn chỉnh của *lý thuyết quá trình đàn dẻo* [47]

$$\dot{\sigma} = \frac{-\sigma_u f_1}{\sin \theta_1} \dot{\Xi} + \left(\frac{\psi}{\cos \theta_1} + \frac{\sigma_u f_1}{\sin \theta_1} \right) \frac{\sigma \dot{\Xi}}{\sigma_u^2} \sigma, \quad (2.56)$$

hay là

$$d\sigma = -\frac{\sigma_u f_1}{\sin \theta_1} d\Xi + \left(\frac{\psi}{\cos \theta_1} + \frac{\sigma_u f_1}{\sin \theta_1} \right) \frac{\sigma d\Xi}{\sigma_u^2} \sigma. \quad (2.57)$$

Các hàm f_α ($\alpha = 2 \div 5$) trong hệ thức (2.53) được xác định qua hàm f_1 như sau

$$f_\alpha = -f_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_\alpha}{\sin \theta_1 \sin \theta_\alpha}.$$

Biểu diễn ngược lại ta có

$$d\Xi = -\frac{\sin \theta_1}{\sigma_u f_1} d\sigma + \left(\frac{\sin \theta_1}{\sigma_u f_1} + \frac{\cos \theta_1}{\psi} \right) \frac{\sigma d\sigma}{\sigma_u^2} \sigma. \quad (2.58)$$

Viết dưới dạng tenxơ, hệ thức (2.56) có dạng

$$\dot{S}_{ij} = -\frac{2}{3} \frac{\sigma_u f_1}{\sin \theta_1} \dot{e}_{ij} + \left(\frac{\psi}{\cos \theta_1} + \frac{\sigma_u f_1}{\sin \theta_1} \right) \frac{S_{kl} \dot{e}_{kl}}{\sigma_u^2} S_{ij}, \quad (2.59)$$

trong đó f_1, ψ lấy theo (2.54), còn $\dot{\sigma} = 3K\dot{e}$.

$$\text{Đặt } A = -\frac{\sigma_u f_1}{\sin \theta_1}, \quad P = \frac{\psi}{\cos \theta_1}$$

ta đưa hệ thức xác định của lý thuyết quá trình đàn dẻo về dạng

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2}{3} A \dot{e}_{ij} + (P - A) \frac{S_{kl} \dot{e}_{kl}}{\sigma_u^2} S_{ij}, \quad (2.60)$$

trong đó

$$A = \frac{\sigma_u}{s} \left[1 + \left(\frac{3Gs}{\sigma_u} - 1 \right) \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{2} \right)^\alpha \right], \quad (2.61)$$

$$P = \phi'(s) - (3G - \phi'(s)) \frac{1}{\cos \theta_1} \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{2} \right)^\beta, \quad \alpha \geq 1, \beta > 1.$$

Điều quan trọng là f_1 và ψ có thể sử dụng cho cả quá trình biến dạng chủ động và bị động. Do vậy liên hệ ứng suất - biến dạng (2.60), (2.61) có thể mô tả mọi quá trình biến dạng phức tạp, không chỉ dặt tải mà cả cắt tải. Các liên hệ ứng suất - biến dạng cho trường hợp đàn hồi, cho quá trình dặt tải đơn giản, cho quá trình có độ cong nhỏ và trung bình, cho quá trình cắt tải và các hệ thức Prandtl - Reuss có thể xem như những trường hợp riêng của lý thuyết này.

1. Trường hợp đàn hồi

Ta có

$$\sigma_u = 3Gs, \quad \phi'(s) = 3G,$$

hệ thức (2.61) đưa về $A = P = 3G$. Hệ thức (2.60) dẫn đến định luật Hooke

$$\dot{S}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}.$$

2. Quá trình cắt tải

Quá trình cắt tải chắc chắn xảy ra khi $\theta_1 = \pi$, tức là hướng của tiếp tuyến với quỹ đạo biến dạng kế tiếp ngược với hướng của vector ứng suất tại điểm đang xét. Từ (2.61) với $\theta_1 = \pi$ suy ra

$$A = P = 3G,$$

hệ thức (2.60) dẫn đến

$$\dot{S}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}.$$

3. Đặt tải đơn giản

Đối với quá trình này $\theta_1 = 0$, từ (2.61) dẫn đến

$$A = \frac{\sigma_u}{s}, \quad P = \phi'(s),$$

hệ thức (2.60) trở thành

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{s} \dot{e}_{ij} + \left(\phi' - \frac{\sigma_u}{s} \right) \frac{S_{ij}}{\sigma_u} v_u. \quad (2.62)$$

Mặt khác, theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ cho quá trình đặt tải đơn giản (1.42)

$$S_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{ij}, \quad (2.63)$$

ta nhận được

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{e_u} \dot{e}_{ij} + \frac{2}{3} \left(\frac{d\sigma_u}{de_u} - \frac{\sigma_u}{e_u} \right) \frac{\dot{e}_u}{e_u} e_{ij}.$$

Thay e_{ij} từ (2.63) vào đây dẫn đến

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} \dot{e}_{ij} + \left(\frac{d\sigma_u}{de_u} - \frac{\sigma_u}{e_u} \right) \frac{S_{ij}}{\sigma_u} \dot{e}_u. \quad (2.64)$$

Vì quá trình đặt tải đơn giản ta luôn có

$$s = e_u, \quad \dot{s} = \dot{e}_u = v_u, \quad \frac{d\sigma_u}{de_u} = \frac{d\sigma_u}{ds} = \phi'(s),$$

do vậy hệ thức (2.64) đưa về (2.62).

4. Quá trình biến dạng độ cong trung bình

Khi phân tích các quá trình gia công kim loại bằng áp suất hoặc đốt nóng không đều kết hợp với tác dụng của lực ngoài, ta thấy quá trình biến dạng đàn dẻo xảy ra trong vật thể hoặc là quá trình độ cong nhỏ, hoặc là quá trình phức tạp hơn, nhưng tương đối đều đặn (quá trình biến dạng độ cong trung bình).

Trong quá trình này giá trị của góc θ_1 là nhỏ. Giới hạn ở đại lượng nhỏ bậc hai đối với θ_1 ta có thể lấy gần đúng

$$\sin \theta_1 \approx \theta_1, \quad \cos \theta_1 \approx 1 - \frac{\theta_1^2}{2},$$

nên

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{2} \right)^\alpha &= \left(\frac{\theta_1^2}{4} \right)^\alpha \approx 0, \\ \frac{1}{\cos \theta_1} \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{2} \right)^\beta &\approx \frac{\left(\frac{\theta_1^2}{4} \right)^\beta}{1 - \frac{\theta_1^2}{2}} \approx 0. \end{aligned}$$

Từ (2.61) suy ra

$$A = \frac{\sigma_u}{s}, \quad P = \phi'(s).$$

Thay giá trị của A , P vừa nhận được vào hệ thức (2.60), ta có hệ thức ứng suất - biến dạng cho quá trình độ cong trung bình

$$\dot{S}_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3s} \dot{\epsilon}_{ij} + \left(\phi'(s) - \frac{\sigma_u}{s} \right) \frac{S_{k\ell} \dot{\epsilon}_{k\ell}}{\sigma_u^2} S_{ij}. \quad (2.65)$$

Hệ thức (2.65) là dạng tổng quát hóa của hệ thức Prandtl-Reuss (1.29) cho vật liệu dẻo lý tưởng và hệ thức Prager-Reuss (1.32) cho vật liệu dẻo tái bền.

2.7 Lý thuyết trượt

Các lý thuyết dẻo trình bày trong các mục trên đều xây dựng trên những giả thuyết dựa vào các quy luật hiện tượng. Đó là những quy luật chung của tính dẻo được thiết lập không liên quan đến cấu tạo bên trong của vật liệu, chúng cho phép thu tóm trong một lý thuyết duy nhất nào đấy phản ánh hoặc tính dẻo của kim loại, hoặc cân bằng giới hạn của đất, hay phá hủy giòn của kết cấu bê tông v.v... Khi cụ thể hóa những quy luật chung để mô tả trạng thái môi trường thực cần phải dùng kết quả thực nghiệm vĩ mô.

Badorf và Budiansky [2] xây dựng lý thuyết mới lưu ý đến cấu tạo của vật liệu, dựa trên khái niệm vật lý đơn giản: *cơ cấu trượt*, vì vậy ta còn gọi là *lý thuyết trượt*.

Giả thiết vật liệu bao gồm các tinh thể sắp đặt hỗn độn, do đó có thể coi vật liệu là đẳng hướng thuần nhất, biến dạng chung có thể coi như tổng các biến dạng trượt của các tinh thể. Biến dạng trượt theo hướng nào đó xác định bởi ứng suất tiếp của hướng đó. Biến dạng dẻo ở tinh thể xuất hiện khi ứng suất tiếp tại mặt trượt vượt giới hạn chảy dẻo. Các tác giả giả thiết rằng tại mỗi tinh thể chỉ tồn tại một hệ thống trượt. Có nghĩa là sự trượt xảy ra trong một mặt phẳng nhất định và theo một hướng nhất định. Gọi $\mathbf{n}$ là pháp tuyến của *mặt phẳng trượt* và β là *hướng trượt* trên mặt phẳng đó. Tập hợp hai vectơ đơn vị $\mathbf{n}$, β xác định *hệ thống trượt*. Gọi $\tau_{n\beta}$ ứng suất trên mặt phẳng $\mathbf{n}$ và theo hướng β , $\gamma_{n\beta}^p$ - biến dạng trượt tương ứng. Đại lượng $\gamma_{n\beta}^p$ là hàm xác định của $\tau_{n\beta}$ đối với từng vật liệu: $\gamma_{n\beta}^p = F(\tau_{n\beta})$. Tại lân cận nhỏ mỗi điểm của vật thể, mọi hướng của mặt phẳng trượt và hướng trượt như nhau, do đó tích phân theo hình cầu đơn vị cho phép ta tính các thành phần của tenxơ biến dạng dẻo. Bây giờ chúng ta xét điều vừa nêu ra. Cố định hai hướng trực giao $\mathbf{n}$ và β . Nếu số hạt tinh thể trong thể tích đang xét khá lớn, thì luôn luôn có thể tìm được một số hạt nào đấy có pháp tuyến với mặt phẳng trượt nằm trong hình nón có trục là $\mathbf{n}$ với góc đặc $d\Omega$. Ta gọi các hạt đó là *mặt có mặt phẳng trượt $\mathbf{n}$* . Vì vật thể đẳng hướng, phân bố hạt rất ngẫu nhiên, nên không có hướng nào định trước, thể tích tương đối

của những hạt có mặt phẳng trượt $\mathbf{n}$ ở trạng thái ứng suất thuần nhất tỷ lệ với $d\Omega$. Nếu số hạt có mặt phẳng trượt $\mathbf{n}$ khá lớn, thì trong số đó tìm được những hạt có hướng trượt β nằm trong góc $d\beta$, thể tích tương đối của chúng tỷ lệ với $d\beta$. Do đó thể tích tương đối của những hạt có hệ thống trượt $\mathbf{n}, \beta$ tỷ lệ với $d\Omega d\beta$. Ta giả thiết rằng những biến dạng của các hạt có hệ thống trượt $\mathbf{n}, \beta$ gây ra biến dạng chung của vật thể có cùng giá trị và tỷ lệ với thể tích của các hạt đó

$$d\gamma_{n\beta}^p = F(\tau_{n\beta})d\Omega d\beta.$$

Biến dạng của toàn phần tử vật thể là tổng hợp vô số những biến dạng trượt đối với mọi hệ thống trượt $\mathbf{n}, \beta$. Chúng ta tính biến dạng đó bằng cách tính các thành phần trên các trục của hệ tọa độ cố định x_i nhờ công thức biến đổi thành phần tenxơ. Lấy hướng $\mathbf{n}, \beta$ làm hướng 1 và 2 thì trong hệ này chỉ có $e_{12} = \gamma_{n\beta} \neq 0$ các thành phần khác bằng không, vì vậy trong hệ x_i ta nhận được

$$de_{ij}^p = (\beta_{1i}\beta_{2j} + \beta_{2i}\beta_{1j})de_{12}$$

Vì $\beta_{1i} = n_i, \beta_{2i} = \beta_i$, do đó

$$de_{ij}^p = \frac{1}{2}(n_i\beta_j + n_j\beta_i)F(\tau_{n\beta})d\Omega d\beta$$

Công thức cho biến dạng

$$e_{ij}^p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (n_i\beta_j + n_j\beta_i)F(\tau_{n\beta})d\Omega d\beta \quad (2.66)$$

kết quả nhận được như điều khẳng định trên, còn ứng suất tiếp tính theo công thức

$$\tau_{n\beta} = \sigma_{ij}n_i\beta_j. \quad (2.67)$$

Điều khó khăn cơ bản ở đây là hàm $F(\tau)$ khác không khi $\tau > \tau_s$, vì vậy tích phân (2.66) không lấy theo toàn mặt cầu đơn vị, mà chỉ trên miền nào đấy của mặt cầu. Badorf và Budiansky xác định hàm $F(\tau)$ theo đường cong biến dạng đơn giản và giả thiết F duy nhất cho từng vật liệu. Giả thiết này không hoàn toàn đúng, kết quả tính toán của Yoshimura [31] cho ta thấy hàm $F(\tau)$ có giá trị khác nhau khi dãn và khi xoắn.

Giả sử dân theo hướng 1, theo (2.67) ta được

$$\tau_{n\beta} = \sigma_{11}n_1\beta_1.$$

Vì biến dạng dẻo xảy ra khi $\tau_{n\beta} > \tau_s$, cho nên

$$n_1\beta_1 > \frac{\tau_s}{\sigma_{11}}$$

điều kiện này xác định miền tích phân. Các tác giả lấy hàm $F(\tau)$ có dạng

$$F(\tau) = \sum_{m=1}^N a_m \left(\frac{\tau}{\tau_s} - 1 \right)^m.$$

Khi đó hệ (2.66) cho kết quả

$$e_{11}^p = \sum_{m=1}^N a_m g_m \left(\frac{\sigma_{11}}{2\tau_s} \right)$$

Với $N = 5$ ta đã phải tính hàm g_m rất công phu.

Theo lý thuyết trượt biến dạng ban đầu xuất hiện khi tại hệ thống trượt nào đấy đạt giới hạn chảy, vì vậy mặt giới hạn ban đầu tương ứng với điều kiện ứng suất tiếp cực đại Tresca. Tại các mặt giới hạn tức thời điểm tải sẽ là *điểm góc*. Xuất phát từ hiện tượng khi đặt tải trực giao sau dân đơn giản, môđun trượt tức thời nhỏ hơn môđun đàn hồi và xuất hiện thêm biến dạng dẻo, nên điểm tải trên mặt giới hạn nhất định phải là điểm góc.

Lý thuyết trượt Badorf - Budiansky nói chung không phù hợp với thực nghiệm, mặc dầu nó cho phép ta suy đoán kết quả một cách định tính, nhưng kết quả định lượng không hoàn toàn thỏa đáng.

Trong công trình của Lin [22] giả thiết tinh thể có ba hướng trượt và ứng suất tiếp phụ thuộc vào ba biến dạng trượt. Phát triển ý của Lin với giả thiết tập hợp vô hạn hướng trượt chúng ta đi đến cơ sở của lý thuyết biến dạng địa phương của Malmeister [66]. Koiter [60] tổng quát hóa hệ thức ứng suất - biến dạng của lý thuyết trượt bằng cách thay thế một hàm chảy, đưa vào tập hợp hữu hạn hàm chảy. Tác giả chỉ ra rằng thuyết Budiansky là trường hợp riêng của thuyết này khi số hàm chảy tăng vô hạn. Đây cũng là một hướng mới, bước đầu cho ta thấy sự liên quan giữa thuyết trượt và thuyết chảy dẻo khi mặt giới hạn không phải là mặt đều.

Ưu điểm của thuyết trượt là nó đi vào tính chất vật lý của biến dạng dẻo với những giả thuyết thực tế, nhưng nhược điểm lớn là tính toán rất khó khăn và phức tạp, ngay trong trường hợp đơn giản nhất.

CHƯƠNG 3

Các định lý tổng quát. Các phương pháp giải bài toán lý thuyết dẻo

Trong các chương trên thiết lập các quy luật đặc trưng cho tính chất dẻo của vật thể khi có lực ngoài tác dụng. Quá trình xây dựng lý thuyết khá phức tạp, hiện đang tiếp tục hoàn chỉnh. Nhưng trong kỹ thuật hiện đại đã xuất hiện nhiều vấn đề đòi hỏi áp dụng lý thuyết dẻo để tính toán. Vì vậy những bài toán của lý thuyết đàn hồi cần được thiết lập một cách tương tự cho lý thuyết dẻo. Cho đến nay, những bài toán loại này còn rất ít, vì gặp phải khó khăn về cách đặt bài toán và phương pháp giải các phương trình nhận được. Điều này một mặt do đặc tính của lý thuyết dẻo, mặt khác do các hệ thức cơ bản có dạng khá phức tạp.

Từ chương này chúng ta chỉ giới hạn cách đặt bài toán và phương pháp giải với các quy luật dẻo đơn giản trình bày ở chương 1.

Trong chương này khảo sát các định lý tổng quát dựa trên lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ và một số định lý dựa trên lý thuyết chảy.

3.1 Phương trình biến phân Lagrange. Phương pháp Ritz và phương pháp Bubnov-Galerkin

Ta đặt vật thể trong hệ tọa độ x_i , tại thời điểm nào đấy vật chịu tác dụng của lực mặt ngoài và lực khối, vật thể biến dạng. Những tính chất cơ học của vật thể được biểu thị bởi các quy luật đã trình bày ở các chương trên. Bây giờ cần xác định ứng suất và biến dạng tại mỗi điểm của vật thể, khi trong vật

đã xuất hiện biến dạng dẻo. Điều này dẫn đến thiết lập bài toán biên của lý thuyết dẻo.

3.1.1 Cách đặt bài toán của lý thuyết dẻo

Giả thiết cho lực khối $\mathbf{K}$ tác dụng tại mỗi điểm trong thể tích V của vật thể, lực mặt ngoài Σ tác động trên phần biên S_σ và cho chuyển dịch $\mathbf{u}^b$ trên phần biên S_u , cần xác định các thành phần chuyển dịch u_i , tenxơ biến dạng ε_{ij} và tenxơ ứng suất σ_{ij} thỏa mãn các phương trình sau

* Phương trình cân bằng (hoặc chuyển động) (1.7)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho K_j = 0 \quad \left(= \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right). \quad (3.1)$$

* Hệ thức Cauchy

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.2)$$

* Hệ thức xác định của lý thuyết dẻo nào đấy. Chẳng hạn hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ (1.42)

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} e_{ij}, \\ \sigma &= 3Ke, \quad \sigma_u = \Phi(e_u), \end{aligned} \quad (3.3)$$

hoặc hệ thức của lý thuyết chảy dẻo (1.27)

$$\begin{aligned} de_{ij} &= \frac{1}{2G} dS_{ij} + d\lambda S_{ij}, \\ de &= \frac{1}{3K} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.3')$$

Kết hợp với điều kiện biên (1.8):

$$u_j = u_j^b \quad \text{trên } S_u, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{ij} \nu_i = \Sigma_j \quad \text{trên } S_\sigma. \quad (3.5)$$

Nếu giải phương trình chuyển động cần thêm điều kiện ban đầu tại $t = 0$ (1.9):

$$\begin{aligned} u_j|_{t=0} &= u_j^0, \\ \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \dot{v}_j^0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Chú ý. Nếu trong bài toán sử dụng hệ thức xác định của lý thuyết chảy dẻo ta thay quan hệ (3.2) bằng quan hệ giữa ε_{ij} và v_i .

3.1.2 Phương trình biến phân Lagrange

Dưới tác dụng của lực khối $\mathbf{K}$ và lực mặt Σ trong vật thể xuất hiện chuyển dịch $\mathbf{u}$. Giả sử $\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ là chuyển dịch khả dĩ, nó phù hợp với *liên kết hình học* đặt lên vật thể trong trường hợp cân bằng, phù hợp với *liên kết động học* trong trường hợp chuyển động và không làm mất tính chất liên tục của vật liệu, tức là thỏa mãn điều kiện (3.4): $u_j + \delta u_j = u_j^b$ trên S_u , hay là $\delta u_j = 0$ trên S_u .

Nguyên lý biến phân Lagrange (nguyên lý công ảo). Trên chuyển dịch khả dĩ lực ngoài (kể cả lực quán tính) sản thêm một công δ^*L , công này bằng công của lực trong δU trên chuyển dịch thêm ấy

$$\delta^*L = \delta U,$$

hay là

$$\iiint_V \rho \left(K_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \delta u_j dV + \iint_{S_\sigma} \Sigma_j \delta u_j dS = \iiint_V \delta W dV. \quad (3.7)$$

Tích phân khối lấy theo toàn bộ thể tích vật thể, tích phân mặt lấy theo phần mặt biên S_σ của nó. Phương trình (3.7) gọi là *phương trình biến phân Lagrange*.

Sau đây sẽ chỉ ra rằng phương trình (3.7) chứa trong đó ba phương trình chuyển động (hoặc cân bằng) và ba *điều kiện biên tĩnh học* (điều kiện (3.5)).

Nhờ định nghĩa (1.10) của δW ta biến đổi biểu thức δU

$$\delta U = \iiint_V \delta W dV = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

trong đó

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x_i} \right),$$

vì dấu biến phân và đạo hàm riêng có thể hoán vị cho nhau.

Chú ý tính đối xứng của σ_{ij} và ε_{ij} , kết quả nhận được:

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x_i} dV.$$

Áp dụng công thức Gauss-Ostrogradsky vào hệ thức vừa nhận được

$$\begin{aligned}\delta U &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} \delta u_j) dV - \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j dV = \\ &= \iint_S \sigma_{ij} \delta u_j \nu_i dV - \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j dV.\end{aligned}$$

Đặt kết quả này vào phương trình (3.7) ta nhận được phương trình Lagrange ở dạng mới

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho \left(K_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) \right] \delta u_j dV - \iint_{S_\sigma} (\sigma_{ij} \nu_i - \Sigma_j) \delta u_j dS = 0. \quad (3.8)$$

Tích phân mặt chỉ lấy theo S_σ , vì trên S_u ta có $\delta u_j = 0$. Chú ý rằng, vì biến phân δu_j tùy ý, độc lập tuyến tính, nên từ phương trình (3.7) có thể nhận lại được phương trình chuyển động (hoặc cân bằng) (3.1) và điều kiện biên tĩnh học (3.5).

Do đó khi dùng phương trình biến phân Lagrange để tìm hàm $\mathbf{u}$, ta không phải quan tâm đến điều kiện thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên tĩnh nữa. Các phương trình này thỏa mãn một cách tự động. Chỉ cần chú ý rằng chuyển dịch $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$ phù hợp với điều kiện biên động học trên miền S_u , tại đó cho trước chuyển dịch, thì $\mathbf{u}$ phải bằng chuyển dịch đó, còn $\delta \mathbf{u}$ phải bằng không.

Trở lại phương trình biến phân (3.7), vì lực khối và lực mặt cho trước nên không lấy biến phân các đại lượng đó. Do đó phương trình (3.7) có thể viết dưới dạng

$$\delta \mathfrak{D} = 0, \quad (3.9)$$

trong đó $\mathfrak{D}$ gọi là *năng lượng toàn phần của vật thể*

$$\mathfrak{D} = \iiint_V W dV - \int_V \rho \left(K_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) u_j dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_j u_j dS. \quad (3.10)$$

Định lý 3.1. (Năng lượng toàn phần cực tiểu). Trong tất cả các chuyển dịch khả dĩ thỏa mãn điều kiện liên kết (điều kiện biên hình học hoặc động học), thì chuyển dịch thực (tức là chuyển dịch thỏa mãn phương trình chuyển động và điều kiện biên tĩnh) làm cho năng lượng toàn phần đạt cực trị.

Nếu xét tiếp biến phân cấp hai có thể chỉ ra năng lượng toàn phần đạt cực tiểu.

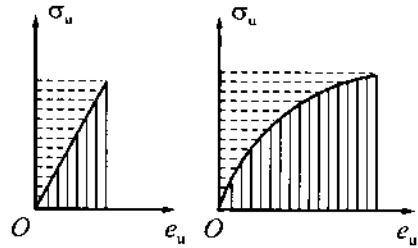
Chú ý. Khi rút ra công thức (3.10) ta ngầm hiểu đã sử dụng quan hệ ứng suất - biến dạng theo một lý thuyết dẻo nào đấy, tức là biểu thị W qua các thành phần chuyển dịch u_j . Đại lượng $\mathfrak{D}$ trở thành phiếm hàm của các đối số là các hàm u_j . Do vậy $\mathfrak{D}$ còn gọi là *phiếm hàm năng lượng*. Bài toán của lý thuyết dẻo trở thành bài toán toán học: tìm các hàm u_j thỏa mãn điều kiện (3.4) làm cho phiếm hàm $\mathfrak{D}$ đạt cực trị.

Thí dụ 3.1. Viết phiếm hàm $\mathfrak{D}$, khi sử dụng quan hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ.

Sử dụng công thức (1.50) trong lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ, biểu thức công của lực trong trên một đơn vị thể tích có dạng

$$W = \int_0^{e_u} \sigma_u de_u + \frac{K\theta^2}{2} = W_d + W_\theta.$$

Số hạng thứ nhất biểu thị thế năng biến dạng hình dáng, số hạng thứ hai biểu thị thế năng biến dạng thể tích. Số hạng thứ nhất được biểu diễn bằng diện tích gạch thẳng trên hình 3.1, giới hạn bởi đường cong biến dạng $\sigma_u = \Phi(e_u)$, trục hoành và $e_u = \text{const.}$



Hình 3.1

Phiếm hàm năng lượng $\mathfrak{D}$ có dạng

$$\mathfrak{D} = \iiint_V \left[\int_0^{e_u} \sigma_u de_u + \frac{K\theta^2}{2} \right] dV - \iiint_V \rho \left(K_j - \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right) u_j dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_j u_j dS. \quad (3.11)$$

3.1.3 Phương pháp Ritz

Cách đặt bài toán của lý thuyết dẻo như bài toán biến phân cho phép ta dùng phương pháp của bài toán thuận để giải, tức là cho trước các giá trị lực ngoài cần xác định chuyển dịch thỏa mãn điều kiện biên. Ta sử dụng phương pháp Ritz cho bài toán của vật thể cân bằng, tìm các thành phần chuyển dịch dưới dạng

$$u_j(x, y, z) = u_{j0}(x, y, z) + \sum_{\alpha} a_{j\alpha} f_{j\alpha}(x, y, z), \quad (3.12)$$

$$(j = 1, 2, 3), \text{ (không tổng theo } j),$$

trong đó $a_{i\alpha}$ là các hằng số cần xác định. Các hàm $u_{j0}(x, y, z)$ và $f_{j\alpha}(x, y, z)$ được chọn trước sao cho các thành phần chuyển dịch *thỏa mãn điều kiện liên kết hình học*. Để khỏi làm mất tính chất liên tục của vật thể (liên kết hình học bên trong) thì các hàm này phải liên tục và có đạo hàm đến cấp cần thiết. Ngoài ra chuyển dịch phải thỏa mãn liên kết trên biên nên chọn

$$u_{j0}(x, y, z) = u_j^b,$$

$$f_{j\alpha} = 0, \quad j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3, 4, \dots \text{ trên } S_u.$$

Các hàm này phải là một hệ hàm độc lập tuyến tính. Với điều kiện (3.12) chúng lập thành trường các chuyển dịch khả dĩ với các hằng số bất kỳ $a_{j\alpha}$. Bây giờ phải tìm chuyển dịch thực của vật thể bằng cách tìm cực trị của phiếm hàm $\mathfrak{D}$ có dạng

$$\mathfrak{D} = U - \iiint_V \rho K_j u_j dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_j u_j dS. \quad (3.13)$$

Đặt biểu thức của u_j theo (3.12) vào (3.13), sau khi thực hiện lấy tích phân ta được $\mathfrak{D}$ trở thành hàm của các đại lượng $a_{j\alpha}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = U(a_{j\alpha}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha} \left(\iiint_V \rho K_j a_{j\alpha} f_{j\alpha} dV + \iint_{S_\sigma} \Sigma_j a_{j\alpha} f_{j\alpha} dS \right) \\ - \iiint_V \rho K_j u_{j0} dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_j u_{j0} dS. \end{aligned}$$

Điều kiện cực trị của $\mathfrak{D}$ là $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial a_{j\alpha}} = 0$, kết quả dẫn đến

$$\frac{\partial U}{\partial a_{j\alpha}} = \iiint_V \rho K_j f_{j\alpha} dV + \iint_{S_\sigma} \Sigma_j f_{j\alpha} dS, \quad j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

hay là

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial a_{1\alpha}} &= \iiint_V \rho K_1 f_{1\alpha} dV + \iint_{S_\sigma} \Sigma_1 f_{1\alpha} dS, \\ \frac{\partial U}{\partial a_{2\alpha}} &= \iiint_V \rho K_2 f_{2\alpha} dV + \iint_{S_\sigma} \Sigma_2 f_{2\alpha} dS, \\ \frac{\partial U}{\partial a_{3\alpha}} &= \iiint_V \rho K_3 f_{3\alpha} dV + \iint_{S_\sigma} \Sigma_3 f_{3\alpha} dS, \quad \alpha = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Ta nhận được hệ 3α phương trình đại số phi tuyến để xác định $a_{j\alpha}$. Nếu ngắt một số hạng trong chuỗi hàm này, thì nghiệm tìm được cho ta nghiệm gần đúng. Có thể dùng phương pháp Newton-Raphson để giải hệ phương trình đại số phi tuyến.

3.1.4 Phương pháp Bubnov-Galerkin

Nếu trong biểu thức (3.11) ta chọn các hàm u_{j0} , $f_{j\alpha}$ sao cho chuyển dịch u_j không những thỏa mãn điều kiện biên động học (3.4) mà còn thỏa mãn điều kiện biên tĩnh học (3.5), điều đó có nghĩa là ứng suất tính theo các chuyển dịch này thỏa mãn

$$\sigma_{ij}\nu_i = \Sigma_j$$

thì trong phương trình biến phân Lagrange (3.8) tích phân mặt bằng không. Phương trình biến phân trong trường hợp cân bằng có dạng

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_i} + \rho K_j \right) \delta u_j dV = 0. \quad (3.15)$$

ở đây cần hiểu rằng $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$ là các thành phần của tenxơ ứng suất biểu thị qua chuyển dịch (3.12) theo hệ thức xác định của lý thuyết dẻo (chẳng hạn, lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ).

Theo (3.11) δu_j có dạng

$$\delta u_j = \sum_{\alpha} f_{j\alpha} \delta a_{j\alpha};$$

đặt biểu thức này vào (3.15) và chú ý đến tính chất tùy ý của các biến phân $\delta a_{j\alpha}$ chúng ta nhận được hệ phương trình để xác định $a_{j\alpha}$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_i} + \rho K_j \right) f_{j\alpha} dV = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

(không tổng theo j)

hay là

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho K_1 \right) f_{1\alpha} &= 0, \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho K_2 \right) f_{2\alpha} &= 0, \\ \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho K_3 \right) f_{3\alpha} &= 0, \quad (\alpha = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Đây là hệ phương trình đại số phi tuyến của đại lượng $a_{j\alpha}$, bởi vì ứng suất σ_{ij} xác định theo chuyển dịch (3.12) nhờ lý thuyết dẻo sẽ là hàm số phi tuyến của $a_{j\alpha}$.

3.2 Định lý năng lượng cực tiểu theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ

Bây giờ ta tiến hành chứng minh định lý năng lượng toàn phần cực tiểu theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ.

Định lý 3.2. Trong tất cả các trạng thái biến dạng khả dĩ thì trạng thái biến dạng thực sẽ tương ứng với năng lượng toàn phần nhỏ nhất (cực tiểu), tức là đối với trạng thái biến dạng thực thì

$$\delta \mathfrak{D} = 0 \quad \text{và} \quad \delta^2 \mathfrak{D} > 0. \quad (3.17)$$

Chứng minh. Ký hiệu $\mathfrak{D}$ là năng lượng toàn phần đối với trạng thái biến dạng thực và $\mathfrak{D}^*$ - đối với trạng thái biến dạng khả dĩ nào đấy. Dùng công thức tính công lực trong (1.50) và công thức tính năng lượng toàn phần $\mathfrak{D}$ (3.11), ta viết

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \iiint_V \left[\int_0^{e_u} \sigma_u de_u + \frac{K\theta^2}{2} \right] dV - \iiint_V \rho \left(K_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) u_i dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_i u_i dS; \\
\mathfrak{D}^* &= \iiint_V \left[\int_0^{e_u^*} \sigma_u de_u + \frac{K\theta^{*2}}{2} \right] dV - \iiint_V \rho \left(K_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) (u_i + \delta u_i) dV \\
&\quad - \iint_{S_\sigma} \Sigma_i (u_i + \delta u_i) dS.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D} &= \delta \mathfrak{D} + \frac{1}{2} \delta^2 \mathfrak{D} + \dots = \iiint_V \left[\int_{e_u}^{e_u^*} \sigma_u de_u + \frac{K(\theta^{*2} - \theta^2)}{2} \right] dV \\
&\quad - \iiint_V \rho \left(K_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_i \delta u_i dS. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Vì θ biểu thị tuyến tính qua đạo hàm chuyển dịch nên $\theta^* = \theta + \delta\theta$, do đó

$$\theta^{*2} - \theta^2 = 2\theta\delta\theta + (\delta\theta)^2. \tag{3.19}$$

Như đã biết

$$e_u^2 = \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij},$$

vì vậy

$$e_u^{*2} = \frac{2}{3} (e_{ij} + \delta e_{ij})(e_{ij} + \delta e_{ij}),$$

hay là

$$\begin{aligned}
e_u^{*2} &= e_u^2 + 2e_u \delta e_u + \frac{2}{3} \delta e_{ij} \delta e_{ij}, \\
e_u^* &= \sqrt{e_u^2 + 2e_u \delta e_u + \frac{2}{3} \delta e_{ij} \delta e_{ij}} = \\
&= e_u + \delta e_u + \frac{1}{2e_u} \left[\frac{2}{3} \delta e_{ij} \delta e_{ij} - (\delta e_u)^2 \right] + \dots
\end{aligned}$$

Bỏ qua số hạng nhỏ bậc cao

$$e_u^* - e_u = \delta e_u + \frac{1}{2e_u} \left[\frac{2}{3} \delta e_{ij} \delta e_{ij} - \frac{4}{9e_u^2} (e_{ij} \delta e_{ij})^2 \right] \quad (3.20)$$

và khai triển tích phân $\int_{e_u}^{e_u^*} \sigma_u de_u$ thành cấp số theo $e_u^* - e_u$ ta được

$$\int_{e_u}^{e_u^*} \sigma_u de_u = \sigma_u (e_u^* - e_u) + \frac{1}{2} \frac{d\sigma_u}{de_u} (e_u^* - e_u)^2 + \dots$$

Đặt (3.20) vào đây

$$\begin{aligned} \int_{e_u}^{e_u^*} \sigma_u de_u &= \sigma_u \delta e_u + \frac{2}{9} \frac{\sigma_u}{e_u^3} [(e_{ij} e_{ij})(\delta e_{ij} \delta e_{ij}) - (e_{ij} \delta e_{ij})^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d\sigma_u}{de_u} (\delta e_u)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Thay thế (3.21), (3.19) vào (3.18), đưa đẳng thức này về dạng

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^* - \mathfrak{D} &= \iiint_V (\sigma_u \delta e_u + K \theta \delta \theta) dV - \iiint_V \rho \left(K_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \delta u_i dV \\ &\quad - \iint_{S_\sigma} \Sigma_i \delta u_i dS + \iiint_V \left\{ \frac{2}{9} \frac{\sigma_u}{e_u^3} [(e_{ij} e_{ij})(\delta e_{ij} \delta e_{ij}) - (e_{ij} \delta e_{ij})^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d\sigma_u}{de_u} (\delta e_u)^2 + \frac{K}{2} (\delta \theta)^2 + \dots \right\} dV. \end{aligned}$$

Trong phương trình trên ba số hạng đầu biểu thị biến phân của năng lượng toàn phần $\delta \mathfrak{D}$, theo công thức (3.9), (3.11) thì $\delta \mathfrak{D} = 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^* - \mathfrak{D} &= \frac{1}{2} \delta^2 \mathfrak{D} + \dots = \iiint_V \left\{ \frac{2}{9} \frac{\sigma_u}{e_u^3} [(e_{ij} e_{ij})(\delta e_{ij} \delta e_{ij}) - (e_{ij} \delta e_{ij})^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d\sigma_u}{de_u} (\delta e_u)^2 + \frac{K}{2} (\delta \theta)^2 + \dots \right\} dV. \end{aligned}$$

Bởi vì $\sigma_u > 0$, $e_u > 0$, $K > 0$, $\frac{d\sigma_u}{de_u} > 0$ và theo bất đẳng thức Schwartz

$$(e_{ij} e_{ij})(\delta e_{ij} \delta e_{ij}) - (e_{ij} \delta e_{ij})^2 > 0,$$

đồng thời bỏ qua số hạng nhỏ bậc cao, đưa chúng ta đến điều phải chứng minh $\delta^2 \ni > 0$. $\square$

Định lý 3.3. *Trong trường hợp cân bằng không có lực khối và cho trước chuyển vị trên toàn biên thì ứng với trạng thái biến dạng thực công của lực trong U có giá trị cực tiểu.*

Chứng minh. Quả vậy, phương trình (3.18) khi đó có dạng

$$\ni^* - \ni = U^* - U = \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U + \dots = \iiint_V \left[\int_{e_u}^{e_u^*} \sigma_u de_u + \frac{K(\theta^{*2} - \theta^2)}{2} \right] dV. \quad (3.22)$$

Hiệu số năng lượng toàn phần bằng hiệu số năng lượng trong. Theo nguyên lý biến phân Lagrange (3.7) trong trường hợp này $\delta U = 0$ và biến đổi vế phải của phương trình (3.22) như đã làm trên đây cho kết quả

$$\begin{aligned} \delta^2 U = \iiint_V \left\{ \frac{4}{9} \frac{\sigma_u}{e_u^3} [(e_{ij} e_{ij})(\delta e_{ij} \delta e_{ij}) - (e_{ij} \delta e_{ij})^2] \right. \\ \left. + \frac{d\sigma_u}{de_u} (\delta e_u)^2 + K(\delta \theta)^2 + \dots \right\} dV > 0. \end{aligned}$$

Định lý công của lực trong cực tiểu thỏa mãn với các vật liệu tái bền

$$\frac{d\sigma_u}{de_u} > 0. \quad \square$$

3.3 Nguyên lý cực tiểu công phụ.

Phương pháp Philonhenko-Borodish

3.3.1 Nguyên lý biến thiên ứng suất khả dĩ

Cũng như mục trước giả thiết rằng vật thể chiếm thể tích V giới hạn bởi mặt S chịu tác dụng của lực khối $\mathbf{K}$ và trên phần biên S_σ chịu tác dụng của lực mặt Σ , trên phần biên S_u cho chuyển dịch $\mathbf{u}^b$. Vật thể ở trạng thái cân bằng. Ký hiệu σ_{ij} là các thành phần ứng suất thực xuất hiện tại các điểm của vật thể, còn $\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ là ứng suất khả dĩ tĩnh học. Các thành phần ứng suất khả dĩ thỏa mãn các phương trình

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) + \rho(K_j + \delta K_j) &= 0, \\ (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) \nu_i &= \Sigma_j + \delta\Sigma_j \quad \text{trên } S_\sigma, \end{aligned}$$

còn các ứng suất thực thỏa mãn

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho K_j &= 0, \\ \sigma_{ij} \nu_i &= \Sigma_j, \quad \text{trên } S_\sigma.\end{aligned}$$

Trừ vế với vế các phương trình tương ứng dẫn đến

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta \sigma_{ij}) + \rho \delta K_j &= 0, \\ \delta \sigma_{ij} \nu_i &= \delta \Sigma_j,\end{aligned}$$

tức là các biến phân $\delta \sigma_{ij}$, δK_j , $\delta \Sigma_j$ lập thành một hệ cân bằng. Do đó theo nguyên lý chuyển dịch khả dĩ đối với vật thể biến dạng, có thể lấy chuyển dịch thực làm khả dĩ. Nhân hai vế phương trình thứ nhất với u_j và tích phân trên toàn bộ vật thể, sử dụng công thức Gauss-Ostrogradsky và chú ý đến phương trình thứ hai, sau khi biến đổi ta được

$$\iiint_V \rho \delta K_j u_j dV + \iint_S \delta \Sigma_j u_j dS = \iiint_V \delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (3.23)$$

Để minh họa ý nghĩa của nguyên lý ta xét nó trong phạm vi của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ. Ta có

$$\begin{aligned}\delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} &= (\delta S_{ij} + \delta \sigma \delta_{ij})(e_{ij} + e \delta_{ij}) = \\ &= e_{ij} \delta S_{ij} + 3e \delta \sigma.\end{aligned}$$

Sử dụng các hệ thức (1.41), (1.42) của lý thuyết biến dạng đàn dẻo vào đây, sau khi biến đổi dẫn đến

$$\varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} = e_u \delta \sigma_u + \frac{\sigma}{K} \delta \sigma = \delta R,$$

suy ra

$$R = \frac{\sigma^2}{2K} + \int_0^{\sigma_u} e_u \delta \sigma_u. \quad (3.24)$$

Rõ ràng rằng

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial R}{\partial \sigma_{ij}}$$

ta nhận trở lại quan hệ ứng suất - biến dạng của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ.

Hàm của các thành phần ứng suất R gọi là *công phụ* trên một đơn vị thể tích. Số hạng thứ nhất trong (3.24) là thế năng biến dạng thể tích, còn số hạng thứ hai biểu thị phần diện tích bị gạch ngang trên hình 3.1

Công phụ của toàn vật thể biến dạng bằng

$$\Pi = \iiint_V R dV.$$

Khi đó hệ thức (3.23) của nguyên lý biến thiên ứng suất khả dĩ đưa về dạng

$$\delta\Pi = \iiint_V \rho \delta K_j u_j dV + \iint_S \delta \Sigma_j u_j dS. \quad (3.25)$$

Định lý 3.4. *Tổng công của gia số lực ngoài trên chuyển dịch của các điểm đặt các lực đó bằng gia số công phụ của toàn vật.*

Ghi chú. Trong giới hạn đàn hồi công phụ và công biến dạng bằng nhau.

3.3.2 Nguyên lý cực tiểu công phụ

Ta xét trường hợp riêng, khi lực khối bằng không, còn trên mặt S hoặc là cho trước lực mặt Σ trên toàn biên, hoặc là trên phần biên S_σ cho trước lực mặt Σ còn trên phần biên S_u cho $\mathbf{u}^b = 0$. Khi đó vế phải của (3.25) bằng không và ta có

$$\delta\Pi = 0. \quad (3.26)$$

Trong [59] Katchanov chỉ ra rằng $\delta^2\Pi > 0$, vậy Π cực tiểu.

Định lý 3.5. *Trong tất cả các trạng thái ứng suất khả dĩ tĩnh học chỉ có trạng thái ứng suất thực làm cực tiểu công phụ.*

3.3.3 Phương pháp Philonhenko-Borodish

Ta tìm tenxơ ứng suất dưới dạng

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \quad (3.27)$$

tenxơ $\sigma_{ij}^{(0)}$ gọi là tenxơ “chính”, nó thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên cho theo ứng suất; tenxơ $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ gọi là tenxơ “hiệu chỉnh”, nó thỏa

mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên bằng không; a_α là hằng số tùy ý.

Như vậy tenxơ (3.27) là những tenxơ ứng suất khả dĩ tĩnh học, nói chung nó không thỏa mãn điều kiện liên tục của môi trường (tức là không thỏa mãn phương trình tương thích). Nhờ nguyên lý biến thiên ứng suất khả dĩ (hoặc trường hợp riêng nguyên lý công phụ cực tiểu) ta tìm được trong tập hợp ứng suất khả dĩ, trạng thái ứng suất thực thỏa mãn phương trình tương thích.

Đối với mỗi vật liệu ta biết đường cong biến dạng $\sigma_u = \Phi(e_u)$ hay là $e_u = \Phi^{-1}(\sigma_u)$. Đặt biểu thức này và biểu thức của ứng suất (3.27) vào (3.24) để tính công phụ R trên một đơn vị thể tích, tiến hành tích phân trên toàn bộ vật thể cho ta biểu thức của công phụ Π . Phiếm hàm Π trở thành hàm phi tuyến của các đối số a_α . Từ điều kiện cực trị của Π dẫn đến $\frac{\partial \Pi}{\partial a_\alpha} = 0$, ta nhận được hệ phương trình đại số phi tuyến để xác định a_α

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_\alpha} = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial a_\alpha} dV = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (3.28)$$

Nếu ngắt một số số hạng của chuỗi (3.27) ta nhận được nghiệm gần đúng. Nghiệm này thỏa mãn chính xác phương trình cân bằng và điều kiện biên và thỏa mãn gần đúng phương trình tương thích.

3.4 Định lý về duy nhất nghiệm

Ở đây chúng ta chưa đề cập đến sự tồn tại nghiệm của bài toán lý thuyết dẻo. Giả sử nghiệm tồn tại, cần chứng minh nghiệm này duy nhất.

Định lý 3.6. *Cho trước lực khối tác dụng lên vật thể, lực mặt tác dụng trên phần mặt biên S_σ và chuyển dịch trên phần mặt biên S_u , bài toán biên của lý thuyết dẻo (3.1) ÷ (3.5) có nghiệm duy nhất.*

Chứng minh. Ta giả thiết ngược lại: có hai trạng thái ứng suất và chuyển dịch thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên.

Ký hiệu hai trạng thái đó

$$u_i^{(1)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \quad \text{và} \quad u_i^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(2)}$$

và đặt

$$u_i = u_i^{(2)} - u_i^{(1)},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(2)} - \sigma_{ij}^{(1)}.$$

Rõ ràng rằng σ_{ij} thỏa mãn phương trình cân bằng thuần nhất

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.29)$$

và điều kiện biên thuần nhất

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \nu_j &= 0 \quad \text{trên } S_\sigma, \\ u_i &= 0 \quad \text{trên } S_u. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Nhân (3.29) với u_i và lấy tích phân theo thể tích vật thể

$$\iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} u_i dV = 0.$$

Dùng công thức biến đổi tích phân Gauss-Ostrogradsky vào đây, kết quả nhận được

$$\iint_S \sigma_{ij} \nu_j u_i dS - \iiint_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = 0. \quad (3.31)$$

Tách tích phân mặt thành hai phần

$$\iint_S \sigma_{ij} \nu_j u_i dS = \iint_{S_\sigma} \sigma_{ij} \nu_j u_i dS + \iint_{S_u} \sigma_{ij} \nu_j u_i dS,$$

tích phân đầu bằng không do đẳng thức thứ nhất còn tích phân sau bằng không theo đẳng thức thứ hai của (3.30).

Do đó phương trình (3.31) có dạng

$$\iiint_V \sigma_{ij} e_{ij} dV = 0. \quad (3.32)$$

Với biến dạng đàn hồi thì biểu thức $\sigma_{ij} e_{ij} = 2W$, trong đó thế đàn hồi W là hàm xác định dương. Từ (3.32) suy ra $W = 0$. Hàm W dương thuần nhất chỉ bằng không trong trường hợp $e_{ij} = 0$ hay $\sigma_{ij} = 0$. Đó là định lý duy nhất nghiệm của lý thuyết đàn hồi do Kirchhoff chứng minh.

Với biến dạng đàn dẻo ta lấy liên hệ ứng suất - biến dạng theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ (1.42) thay thế vào đây, kết quả nhận được

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\sigma_u^{(2)} e_u^{(2)} + \sigma_u^{(1)} e_u^{(1)} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_u^{(2)}}{e_u^{(2)}} + \frac{\sigma_u^{(1)}}{e_u^{(1)}} \right) e_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)} \right] dV + \\ & + \iiint_V 3(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})(e^{(2)} - e^{(1)}) dV = 0. \end{aligned}$$

Phương trình này có thể viết:

$$\begin{aligned} & \iiint_V [(\sigma_u^{(2)} - \sigma_u^{(1)})(e_u^{(2)} - e_u^{(1)}) + 3(\sigma^{(2)} - \sigma^{(1)})(e^{(2)} - e^{(1)})] dV + \\ & + \iiint_V \frac{2}{3} \frac{\sigma_u^{(1)} e_u^{(2)} + \sigma_u^{(2)} e_u^{(1)}}{e_u^{(1)} e_u^{(2)}} \left\{ [(e_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)})(e_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(2)})]^{1/2} - e_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} \right\} dV = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Vì chúng ta chỉ xét vật liệu trong đó σ_u là hàm số tăng của e_u , hàm σ cũng là hàm tăng của e , nên biểu thức dưới dấu tích phân thứ nhất là hàm xác định dương. Số hạng thứ hai cũng dương theo công thức Schwartz

$$e_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} \leq [(e_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(1)})(e_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(2)})]^{1/2} = \frac{3}{2} e_u^{(1)} e_u^{(2)}.$$

Do đó đẳng thức (3.33) tồn tại khi

$$\sigma_u^{(2)} = \sigma_u^{(1)}, \quad \sigma^{(1)} = \sigma^{(2)},$$

hay là $e_u^{(1)} = e_u^{(2)}$, $e^{(1)} = e^{(2)}$, $e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(2)}$, vì vậy trạng thái ứng suất, biến dạng thứ nhất và thứ hai trùng nhau. $\square$

3.5 Định lý về đặt tải đơn giản

Lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ xây dựng trên cơ sở đặt tải đơn giản tại mọi điểm của vật thể. Khi trạng thái ứng suất và biến dạng thuần nhất, quá trình này có thể xảy ra nếu lực ngoài tỷ lệ với một tham số nào đấy. Quả vậy, khi đó phương trình cân bằng thỏa mãn đồng nhất, phương trình tương thích cũng vậy, vì thành phần ứng suất không phụ thuộc vào tọa độ. Trạng thái ứng suất chỉ xác định bởi lực ngoài, nếu lực này tăng tỷ lệ với tham số

α , thì tất cả các thành phần ứng suất cũng tăng tỷ lệ theo tham số đó, tenxơ chỉ hướng ứng suất sẽ không thay đổi.

Xuất hiện vấn đề: có tồn tại cách đặt lực như thế nào đấy vào vật thể có hình dáng phức tạp, để tại mỗi điểm của nó quá trình đặt tải là đơn giản hay không. Để trả lời câu hỏi đó chúng ta xét *định lý về đặt tải đơn giản* do Ilyushin chứng minh [51]. Định lý xác định điều kiện đủ để tenxơ chỉ hướng ứng suất không đổi.

Định lý 3.7. *Nếu lực khối và lực mặt đặt vào vật thể ở trạng thái cân bằng tăng tỷ lệ với một tham số, ngoài ra liên hệ cường độ ứng suất và biến dạng có dạng*

$$\sigma_u = Ae_u^x \quad (3.34)$$

và vật liệu không nén được $e = 0$, thì quá trình đặt tải tại mỗi điểm của vật thể sẽ đơn giản.

Chứng minh. Giả sử với giá trị lực ngoài (lực khối $K_i^{(*)}$ và lực mặt $\sigma_i^{(*)}$) tương ứng với giá trị nào đấy của tham số α (chẳng hạn $\alpha = 1$), phương trình cân bằng

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i = 0 \quad (3.35)$$

và điều kiện biên

$$\sigma_{ij} \nu_j = \Sigma_i \quad (3.36)$$

cho ta nghiệm $\sigma_{ij}^{(*)}$ và $\sigma_u^{(*)}$. Theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{e}_{ij}, \quad (3.37)$$

chúng ta tính được các thành phần biến dạng e_{ij}^* và e_u^*

$$\frac{\sigma_{ij}^* - \sigma^* \delta_{ij}}{\sigma_u^*} = \frac{2}{3} \frac{e_{ij}^*}{e_u^*}; \quad \sigma_u^* = A(e_u^*)^x; \quad e^* = 0. \quad (3.38)$$

Với giá trị của lực ngoài tương ứng với $\alpha \neq 1$

$$K_i = \alpha K_i^*; \quad \Sigma_i = \alpha \Sigma_i^*$$

và các điều kiện của định lý ta chứng minh rằng tìm được nghiệm duy nhất dưới dạng

$$\sigma_{ij} = \alpha \sigma_{ij}^*; \quad e_{ij} = \beta e_{ij}^* \quad (3.39)$$

thỏa mãn phương trình cân bằng (3.35), điều kiện biên (3.36) và phương trình suy từ đặt tải đơn giản (3.37).

Quả vậy, nếu đặt (3.39) vào các phương trình (3.35), (3.36), (3.37) và chú ý đến (3.38) ta thấy các phương trình đó thỏa mãn hoàn toàn.

Hằng số β xác định duy nhất bằng cách đặt (3.39) vào (3.34)

$$\alpha \sigma_u^* = \beta^\kappa A(e_u^*)^\kappa$$

và chú ý đến hệ thức thứ hai của (3.38), ta được

$$\beta = \alpha^{1/\kappa}.$$

Vậy nếu đặt $\beta = \alpha^{1/\kappa}$ thì nghiệm (3.39) ứng với $\alpha \neq 1$ nhận được từ nghiệm $\alpha = 1$ bằng cách nhân mọi thành phần ứng suất với α và mọi thành phần biến dạng với $\alpha^{1/\kappa}$. Khi đó rõ ràng rằng tenxơ chỉ hướng ứng suất và biến dạng sẽ không đổi. Điều kiện $e = 0$ cho phép biểu thị β qua α một cách duy nhất. $\square$

Định lý vừa chứng minh chỉ cho điều kiện đủ để đặt tải là đơn giản, chứ không cần đối với lớp vật liệu $\sigma_u = \Phi(e_u)$ có dạng (3.34) và $e = 0$.

Thực tế chứng tỏ rằng đặt tải là đơn giản không đòi hỏi các điều giới hạn nêu trên, mà chỉ cần tải ngoài tăng tỷ lệ theo một tham số. Do đó người ta giả thiết rằng lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ đúng với mọi vật liệu khi tải ngoài tăng tỷ lệ với một tham số nào đấy.

3.6 Định lý về cắt tải

Trong mục 1.13 đã chỉ ra cách xác định biến dạng dư khi cắt tải hoàn toàn trong trường hợp trạng thái ứng suất thuần nhất. Trong trường hợp vật thể biến dạng đàn dẻo không thuần nhất khi cắt tải ngoài sẽ dẫn đến sự tồn tại trong vật thể không những biến dạng dư mà còn ứng suất dư. Định lý về cắt tải phát biểu về ứng suất, biến dạng và chuyển dịch tại thời điểm nào đấy trong khi cắt tải.

Giả sử bài toán lý thuyết dẻo đã được giải quyết, có nghĩa là với lực ngoài cho trước K_i và Σ_i ta biết được biến dạng ε_{ij} , ứng suất σ_{ij} và chuyển dịch

u_i tại mỗi điểm của vật thể. Chúng thỏa mãn phương trình cân bằng (3.35), điều kiện biên (3.36) và hệ thức của lý tuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ. Bây giờ chúng ta xét quá trình cắt tải. Cắt tải đặc trưng bởi sự chuyển từ trạng thái biến dạng chủ động sang trạng thái biến dạng bị động. Cắt tải tại mỗi điểm tuân theo định luật Hooke (1.48) và bắt đầu khi cường độ ứng suất giảm.

Ta ký hiệu giá trị lực ngoài, ứng suất, biến dạng và chuyển dịch tại thời điểm nào đấy khi cắt tải là K_i^* , Σ_i^* , ε_{ij}^* , σ_{ij}^* và u_i^* . Các đại lượng này thỏa mãn phương trình cân bằng

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + \rho K_i^* = 0 \quad (3.40)$$

và điều kiện biên

$$\sigma_{ij}^* \nu_j = \Sigma_i^*. \quad (3.41)$$

Trừ vế với vế các phương trình cân bằng (3.35) và (3.40) và dùng định luật Hooke (1.48) ta đưa về phương trình Lamé

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta - \theta^*) + \mu \Delta (u_i - u_i^*) + \rho (K_i - K_i^*) = 0. \quad (3.42)$$

Trương tự trừ vế với vế hai phương trình của điều kiện biên (3.36) và (3.41)

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \nu_j = \Sigma_i - \Sigma_i^*. \quad (3.43)$$

Giải phương trình cân bằng (3.42) và điều kiện biên (3.43) theo phương pháp của lý thuyết đàn hồi cho nghiệm duy nhất

$$\begin{aligned} u_i - u_i^* &= \tilde{u}_i, \quad \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^* = \tilde{\varepsilon}_{ij}, \\ \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^* &= \tilde{\sigma}_{ij} = \lambda \tilde{\theta} \delta_{ij} + 2\mu \tilde{\varepsilon}_{ij}, \end{aligned}$$

hay là

$$u_i^* = u_i - \tilde{u}_i, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad \text{và} \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}.$$

Kết quả ta có định lý sau:

Định lý 3.8. *Giá trị ứng suất, biến dạng và chuyển dịch tại thời điểm nào đấy trong khi cắt tải khác với giá trị của chúng tại điểm bắt đầu cắt tải một đại lượng; đại lượng này xem như sinh ra do vật thể biến dạng hoàn toàn đàn hồi dưới tác dụng của lực ngoài bằng hiệu số giá trị của nó lúc mới cắt tải và lúc đang xét.*

Chú ý rằng ở đây biến dạng bị động xảy ra đồng thời tại mọi điểm của vật thể.

Hệ quả 3.1. *Nếu tất hoàn toàn tải ngoài mà trong vật thể không xuất hiện thêm biến dạng dư, thì ứng suất dư, chuyển dịch và biến dạng dư sẽ bằng hiệu số giá trị của chúng tìm được theo lý thuyết dẻo với hệ lực ngoài cho trước và các giá trị ứng suất, chuyển dịch tính theo lý thuyết đàn hồi cũng với lực ngoài đó (ứng suất đàn hồi giả định).*

3.7 Nguyên lý cực trị trong thuyết chảy dẻo

Nguyên lý này do Hodge, Prager và Greenberg chứng minh đầu tiên. Hill, Koiter chứng minh trong trường hợp tổng quát [61, 77].

Giả sử vật thể dưới tác dụng của lực mặt Σ_i trên phần biên S_σ và chuyển dịch u_i^b trên S_u xuất hiện trạng thái ứng suất thực σ_{ij} và biến dạng thực ε_{ij} .

Nếu bây giờ cho lực ngoài gia số $d\Sigma_i$ trên S_σ và gia số du_i^b trên S_u sẽ xuất hiện tương ứng trong vật thể gia số ứng suất thực $d\sigma_{ij}$ và biến dạng thực $d\varepsilon_{ij}$.

3.7.1 Tính chất cực tiểu của gia số biến dạng thực

Gọi du_i^0 là gia số chuyển dịch khả dĩ động học, thỏa mãn điều kiện trên biên S_u . Trong ứng với gia số này xác định gia số biến dạng $d\varepsilon_{ij}^0$ và theo thuyết chảy dẻo (1.27) xác định gia số ứng suất $d\sigma_{ij}^0$. Nói chung gia số ứng suất này không thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên. Xuất phát từ chỗ gia số ứng suất thực thỏa mãn phương trình cân bằng $\frac{\partial d\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ và điều kiện biên $d\sigma_{ij}\nu_j = d\Sigma_i$, bằng cách nhân cả hai vế phương trình với du_i , sau một số phép biến đổi cho ta phương trình Lagrange

$$\iiint_V d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}dV = \iint_S d\Sigma_i du_i dS. \quad (3.44)$$

Mặt khác nếu nhân với du_i^0 , ta được

$$\iiint_V d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^0dV = \iint_S d\Sigma_i du_i^0 dS.$$

Trừ vế với vế hai phương trình cho nhau, chú ý rằng $du_i^0 = du_i$ trên S_u

$$\iiint_V d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij}^0 - d\varepsilon_{ij})dV = \iint_S d\Sigma_i(du_i^0 - du_i)dS. \quad (3.45)$$

Có thể thấy dễ dàng hằng đẳng thức

$$2d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij}^0 - d\varepsilon_{ij}) \equiv (d\sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij}^0 - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) - [d\varepsilon_{ij}^0 (d\sigma_{ij}^0 - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^0)]. \quad (3.46)$$

Dùng hệ thức này của lý thuyết chảy dẻo (1.29) đối với vật liệu dẻo lý tưởng và (1.32) đối với vật liệu tái bền để biến đổi các biểu thức trong dấu ngoặc vuông

$$\begin{aligned} & [d\varepsilon_{ij}^0 (d\sigma_{ij}^0 - d\sigma_{ij}) + d\sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^0)] = \\ & = \frac{1}{2G}(dS_{ij}^0 - dS_{ij})(dS_{ij}^0 - dS_{ij}) + \frac{1}{3K}(d\sigma^0 - d\sigma)^2 + \\ & + \left\{ [(\alpha^0 d\lambda^0 - \alpha d\lambda)dT^{02} + \alpha d\lambda(dT^2 - dT^{02})] \right. \\ & \left. + [(\alpha^0 dT^{02} - \alpha dT^2)dT^{02} + \alpha dT^2(dT^2 - dT^{02})]F(T), \right. \end{aligned}$$

trong đó

$$\alpha, \alpha_0 = \begin{cases} 0 & \text{khi cắt tải hoặc đặt tải trung gian,} \\ 1 & \text{khi đặt tải.} \end{cases}$$

Chú ý rằng

$$dT^2 = \frac{\partial T^2}{\partial \sigma_{ij}} dS_{ij}, \quad dT^{02} = \frac{\partial T^2}{\partial \sigma_{ij}} dS_{ij}^0,$$

vì trạng thái ứng suất cố định, chỉ thay đổi gia số ứng suất. Bây giờ ta cần chứng minh biểu thức trên không âm. Hai số hạng đầu dương, nó chỉ bằng không khi $dS_{ij}^0 = dS_{ij}$, $d\sigma^0 = d\sigma$. Các số hạng còn lại cũng không âm, quả vậy, nếu cắt tải $\alpha = \alpha^0 = 0$ các số hạng này bằng không; trong trường hợp đặt tải $\alpha = \alpha^0 = 1$ các số hạng này bằng không với vật liệu dẻo lý tưởng vì $dT^2 = dT^{02} = 0$ và bằng $(dT^{02} - dT^2)^2 \geq 0$ với vật liệu tái bền.

Do đó từ hằng đẳng thức (3.46) suy ra

$$\frac{1}{2}(d\sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij}^0 - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) > d\sigma_{ij}(d\varepsilon_{ij}^0 - d\varepsilon_{ij})$$

và từ (3.45) dẫn đến

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV - \iint_{S_\sigma} d\Sigma_i du_i dS < \\ & < \frac{1}{2} \iiint_V d\sigma_{ij}^0 d\varepsilon_{ij}^0 dV - \iint_{S_\sigma} d\Sigma_i du_i^0 dS. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vế phải của bất đẳng thức biểu thị gia số năng lượng của hệ. Ta có định lý sau

Định lý 3.9. *Gia số năng lượng ứng với mọi gia số biến dạng khả dĩ động học luôn luôn lớn hơn gia số năng lượng ứng với gia số biến dạng thực.*

3.7.2 Tính chất cực đại của gia số ứng suất thực

Gọi $d\sigma_{ij}^*$ là gia số ứng suất khả dĩ tĩnh học thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên trên S_σ . Tương ứng với gia số ứng suất khả dĩ $d\sigma_{ij}^*$ theo lý thuyết chảy dẻo xác định gia số biến dạng $d\varepsilon_{ij}^*$. Nói chung $d\varepsilon_{ij}^*$ không thỏa mãn điều kiện liên tục của biến dạng.

Cũng với cách làm như trên ta đi đến

$$\iiint_V (d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij} dV = \iint_{S_u} (d\Sigma_i^* - d\Sigma_i) du_i dS$$

Dùng hằng đẳng thức

$$2d\varepsilon_{ij}(d\sigma_{ij}^* - d\sigma_{ij}) \equiv (d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* - d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) - \\ - [d\sigma_{ij}^*(d\varepsilon_{ij}^* - d\varepsilon_{ij}) + d\varepsilon_{ij}(d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^*)]$$

và các hệ thức của lý thuyết chảy dẻo, kết quả nhận được

$$- \frac{1}{2} \iiint_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV + \iint_{S_u} d\Sigma_i du_i dS > - \\ - \frac{1}{2} \iiint_V d\sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \iint_{S_u} d\Sigma_i^* du_i dS. \quad (3.48)$$

Định lý 3.10. *Gia số ứng suất thực cho gia số năng lượng cực đại so với mọi gia số ứng suất khả dĩ tĩnh học.*

3.7.3 Nguyên lý cực trị đối với vật liệu cứng dẻo

Thiết lập nguyên lý cực trị đối với vật liệu này có ý nghĩa quan trọng, nó cho phương pháp có hiệu quả để tính ngay *lực giới hạn*. Đó là lực làm cho vật liệu cứng dẻo lý tưởng xuất hiện chảy dẻo liên tục. Có thể xem *trạng thái giới hạn* này báo hiệu sự *phá hủy*, cho nên người ta còn gọi là *trạng thái phá hủy dẻo*.

Gọi σ_{ij} là trạng thái ứng suất thực thỏa mãn phương trình cân bằng $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ và điều kiện biên $\sigma_{ij} \nu_j = \Sigma_i$ trên mặt S_σ , mặt khác gọi v_i là tốc độ thỏa mãn điều kiện trên S_u : $v_i = v_i^b$, nó xác định tenxơ tốc độ biến dạng thực $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Trong vật liệu cứng dẻo lý tưởng không nén được, bỏ qua biến dạng đàn hồi, chúng thỏa mãn hệ thức của lý thuyết chảy Saint Venant-Mises (1.30)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda S_{ij},$$

hay là

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3v_u}{2\sigma_s} S_{ij}.$$

Phương trình năng lượng Lagrange (3.44) trong trường hợp này có dạng

$$\iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \iint_S \Sigma_i v_i dS. \quad (3.49)$$

a) Để thiết lập tính chất cực tiểu của tốc độ, ta xét *tốc độ khả dĩ động học* v_i^0 thỏa mãn điều kiện không nén được và điều kiện biên trên S_u . Tương ứng với nó xác định tốc độ biến dạng $\dot{\epsilon}_{ij}^0$, theo lý thuyết Saint-Venant xác định ứng suất σ_{ij}^0 , và theo điều kiện biên xác định lực mặt Σ_i^0 . Ta làm tương tự như trong 3.7.1 được phương trình năng lượng đối với ứng suất thực và tốc độ khả dĩ động học.

$$\iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV = \iint_S \Sigma_i v_i^0 dS. \quad (3.50)$$

Theo lý thuyết Saint Venant σ_{ij} và $\dot{\epsilon}_{ij}$ đồng trục, nên

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_s v_u,$$

nhưng σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ không đồng trục, do đó $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 \leq \sigma_s v_u^0$. Nếu thay bằng đại lượng lớn hơn, từ (3.50) dẫn đến

$$\sigma_s \iiint_V v_u^0 dV - \iint_S \Sigma_i v_i^0 dS \geq 0.$$

Với tốc độ thực ta có (3.49), đem so sánh với bất đẳng thức này có thể viết

$$\sigma_s \iiint_V v_u dV - \iint_S \Sigma_i v_i dS \leq \sigma_s \iiint_V v_u^0 dV - \iint_S \Sigma_i v_i^0 dS. \quad (3.51)$$

Định lý 3.11. *Thương ứng với tốc độ thực công suất toàn phần cực tiểu.*

Chú ý rằng từ (3.49) suy ra

$$\iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dv - \iint_{S_\sigma} \Sigma_i v_i dS = \iint_{S_u} \Sigma_i v_i dS = \iint_{S_u} \Sigma_i v_i^b dS,$$

do đó theo (3.51)

$$\iint_{S_u} \Sigma_i v_i^b dS \leq \sigma_s \iiint_V v_u^0 dV - \iint_S \Sigma_i v_i^0 dS. \quad (3.52)$$

b) Bây giờ đưa vào *ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép* $\sigma_{ij}^{*(c)}$ thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên trên S_σ và không vượt giới hạn chảy dẻo, tức là

$$\sigma_u^{*(c)} \leq \sigma_s.$$

Ứng suất này cũng thỏa mãn phương trình năng lượng

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{*(c)} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \iint_S \Sigma_i^* v_i dS = 0,$$

trong đó trên S_σ : $\Sigma_i^* = \Sigma_i$, còn trên S_u : Σ_i^* xác định từ điều kiện biên $\sigma_{ij}^{*(c)} \nu_j = \Sigma_i^*$. Trừ vế với vế phương trình này và phương trình (3.49) và chú ý đến điều kiện trên biên ta được

$$\iiint_V (\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} dV = \iint_{S_u} (\Sigma_i^* - \Sigma_i) v_i^b dS. \quad (3.53)$$

Theo điều kiện (2.10) chương 2

$$(\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \leq 0,$$

từ (3.53) suy ra

$$\iint_{S_u} \Sigma_i^* v_i^b dS \leq \iint_{S_u} \Sigma_i v_i^b dS. \quad (3.54)$$

Định lý 3.12. *Công suất của lực ngoài thực trên tốc độ đã cho (trên biên) lớn hơn công suất của lực ngoài tương ứng với mọi ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép.*

Từ (3.51), (3.52) và (3.54) suy ra đánh giá trên và dưới của công suất lực ngoài thực trên tốc độ cho trước.

$$\iint_{S_u} \Sigma_i^* v_i^b dS \leq \iint_{S_u} \Sigma_i v_i^b dS \leq \sigma_s \iiint_V v_u^0 dV - \iint_S \Sigma_i v_i^0 dS.$$

3.8 Định lý về phá hủy dẻo hay cân bằng giới hạn

Khả năng chịu lực của kết cấu bằng vật liệu dẻo lý tưởng chưa mất đi, nếu còn tồn tại sự phân bố ứng suất cân bằng với tải ngoài và không đâu vượt quá giới hạn chảy dẻo. Phân tích về phá hủy dẻo hay cân bằng giới hạn đã được nhiều người quan tâm, các công trình tương đối hoàn chỉnh đầu tiên là của Van den Broek, Prager và Hodge [30, 70]. Thiết lập và chứng minh định lý dưới dạng tổng quát có công trình của Koiter, Drucker, Greenberg và Prager [49, 61].

Ứng suất của *môi trường dẻo lý tưởng* không thể vượt quá giới hạn chảy dẻo, cho nên tải ngoài tác dụng lên vật thể không thể tăng tùy ý. Tải ngoài đạt giá trị giới hạn nào đấy sẽ xuất hiện phá hủy dẻo, tức là biến dạng tăng tùy ý với tải ngoài không đổi, vật thể không còn khả năng chịu lực khi tăng tải ngoài. Ta gọi hệ thống tải ngoài như vậy là *hệ thống tải giới hạn (lực giới hạn)*, còn tốc độ biến dạng $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ khi phá hủy thường gọi là *cơ cấu phá hủy*. Cần chú ý rằng, ta giả thiết mọi biến dạng là nhỏ và bỏ qua sự thay đổi hình học khi thiết lập phương trình cân bằng. Vì vậy định nghĩa về phá hủy dẻo và các định lý chỉ liên quan đến giai đoạn đầu của sự phá hủy. Để thiết lập các định lý về phá hủy dẻo một cách đơn giản chúng ta giới hạn xét trường hợp trên phần biên S_u giá trị của tốc độ chuyển dịch bằng không ($v_i^b = 0$) và lực ngoài tăng tỷ lệ với một tham số $\alpha > 0$

$$\Sigma_i = \alpha \bar{\Sigma}_i \quad \text{trên } S_\sigma. \quad (3.55)$$

Trong trường hợp này có thể xác định được sự đánh giá lực giới hạn. Lực này đạt được với giá trị nào đấy của tham số $\alpha = \alpha_*$. Ta gọi giá trị α_* là *hệ số lực giới hạn* hay *hệ số an toàn*.

3.8.1 Đánh giá cận trên và cận dưới của hệ số an toàn nhờ các nguyên lý cực trị với vật liệu cứng dẻo lý tưởng

1. **Cận trên của hệ số an toàn.** Xuất phát từ bất đẳng thức (3.51)

$$\sigma_s \iiint_V v_u^0 dV - \iint_{S_\sigma} \Sigma_i v_i^0 dS - \iint_{S_u} \Sigma_i v_i^0 dS \geq 0,$$

trong đó tốc độ khả dĩ động học v_i^0 bằng không trên S_u (theo giả thiết), vậy

$$\iint_{S_\sigma} \Sigma_i v_i^0 dS \leq \sigma_s \iiint_V v_u^0 dV.$$

Từ hệ thức (3.55) với trạng thái giới hạn ta có

$$\alpha_* \leq \sigma_s \frac{\iiint_V v_u^0 dV}{\iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i^0 dS} \equiv \alpha_d. \quad (3.56)$$

Giả thiết rằng biểu thức công suất của lực ngoài cho trước trên tốc độ khả dĩ động học ở mẫu số (3.56) dương. Dấu bằng chỉ xảy ra khi v_i^0 trùng với tốc độ thực. Giá trị α_d gọi là **hệ số động**. Vậy:

Mệnh đề 3.1. *Hệ số an toàn không thể lớn hơn hệ số động*

$$\alpha_* \leq \alpha_d.$$

2. **Cận dưới của hệ số an toàn.** Xuất phát từ nguyên lý thứ hai để tính cận dưới của hệ số an toàn α_* . Xét ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép $\sigma_{ij}^{*(c)}$ thỏa mãn điều kiện biên trên S_σ

$$\Sigma_i^* = \alpha_t \bar{\Sigma}_i \quad \text{trên } S_\sigma$$

(điều kiện biên (3.55) trong trường hợp này có thể viết $\Sigma_i = \alpha_* \bar{\Sigma}_i$ trên S_σ), còn trên S_u vẫn giả thiết $v_i^b = 0$. Khi đó tương tự như phương trình (3.53) ta có

$$\begin{aligned} \iiint_V (\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \iint_{S_\sigma} (\Sigma_i^* - \Sigma_i) v_i dS = \\ &= (\alpha_t - \alpha_*) \iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i dS. \end{aligned}$$

Vậy

$$\alpha_t - \alpha_* = \frac{\iiint_V (\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} dV}{\iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i dS}. \quad (3.57)$$

Nói chung tử số là đại lượng âm theo (2.10) chương 2 nên

$$\alpha_t \leq \alpha_*.$$

Mệnh đề 3.2. *Hệ số an toàn không nhỏ hơn hệ số tĩnh α_t .*

3.8.2 Định lý về cân bằng giới hạn với vật liệu dẻo lý tưởng

Trong trường hợp tổng quát liên hệ ứng suất và tốc độ biến dạng của vật liệu có dạng (2.13) chương 2:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad A \geq 0,$$

trong đó $f = f(\sigma_{ij}) = k^2$ là hàm chảy trùng với thế dẻo của vật liệu, nó biểu thị mặt giới hạn lồi khắp nơi.

Để tiện dùng trong việc thiết lập và chứng minh định lý ta nhắc lại một vài khái niệm:

a) *Tốc độ biến dạng khả dĩ động học $\dot{\epsilon}_{ij}^0$* hay còn gọi là *cơ cấu phá hủy khả dĩ động học* có giá trị bằng không trên S_u nhờ quy luật dẻo (2.13) chương 2 nêu trên xác định ứng suất σ_{ij}^0 . Ứng suất σ_{ij}^0 nằm trên mặt giới hạn nhưng nói chung không thỏa mãn phương trình cân bằng. Do mặt giới hạn lồi khắp nơi nên

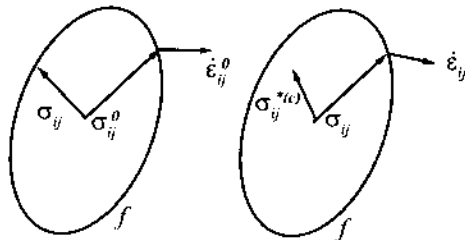
$$(\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^0 \geq 0. \quad (3.58)$$

b) *Ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép $\sigma_{ij}^{*(c)}$* đều nằm trong hoặc trên mặt giới hạn; vì mặt giới hạn lồi, nên nó thỏa mãn (2.10) chương 2

$$(\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \leq 0. \quad (3.59)$$

c) *Ứng suất khả dĩ tĩnh học an toàn $\sigma_{ij}^{*(a)}$* luôn luôn nằm trong mặt giới hạn, khi đó thỏa mãn (2.9) chương 2 tức là

$$(\sigma_{ij}^{*(a)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} < 0. \quad (3.60)$$



Hình 3.2

Định lý 3.13. *Vật thể có thể tiếp thụ được lực ngoài đặt lên nó một cách tùy ý, nếu như với mọi tốc độ biến dạng khả dĩ động học biến thiên công lực ngoài không lớn hơn biến thiên năng lượng trong tương ứng với tốc độ biến dạng dẻo $\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^0$*

$$\iint_S \Sigma_i v_i^0 dS \leq \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV. \quad (3.61)$$

Mặt khác vật thể không thể tiếp thụ được lực ngoài, nếu tồn tại tốc độ biến dạng khả dĩ động học ϵ_{ij}^0 , với tốc độ này biến thiên công lực ngoài lớn hơn biến thiên năng lượng trong

$$\iint_S \Sigma_i v_i^0 dS > \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV. \quad (3.62)$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng phần thứ nhất của định lý. Giả sử vật thể không tiếp thụ được lực ngoài mặc dầu thỏa mãn bất đẳng thức (3.61)

$$\iint_S \Sigma_i v_i^0 dS < \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^0 dV$$

với mọi cơ cấu phá hủy khả dĩ động học. Khi đó phá hủy sẽ xảy ra với lực ngoài nhỏ hơn $\Sigma'_i < \Sigma_i$. Gọi ϵ_{ij}^p cơ cấu phá hủy tương ứng với các lực ngoài Σ'_i , v_i là tốc độ tương ứng, σ_{ij} là ứng suất đạt giới hạn chảy tại những điểm ϵ_{ij}^p khác không. Khi đó phương trình năng lượng của trạng thái phá hủy sẽ là

$$\iint_S \Sigma'_i v_i dS = \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^p dV, \quad \Sigma'_i < \Sigma_i.$$

Mâu thuẫn giữa đẳng thức này và bất đẳng thức (3.61) dẫn đến kết quả cần chứng minh.

Trong tự chứng minh phần thứ hai của định lý. Giả sử điều khẳng định đó không đúng. Khi đó với cơ cấu phá hủy $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ khả dĩ động học nào đấy, mặc dầu có bất đẳng thức (3.62) vẫn tồn tại ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép $\sigma_{ij}^{*(c)}$. Phương trình năng lượng với ứng suất này có dạng

$$\iint_S \Sigma_i v_i^0 dS = \iiint_V \sigma_{ij}^{*(c)} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV.$$

Chú ý rằng theo điều kiện của định lý tốc độ biến dạng dẻo $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ là cơ cấu phá hủy $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ trong (3.62), σ_{ij} là trạng thái ứng suất trên mặt giới hạn tương ứng với tốc độ biến dạng dẻo $\dot{\epsilon}_{ij}^P$. Kết hợp đẳng thức này và bất đẳng thức (3.62) cho ta

$$\iiint_V (\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^P dV > 0.$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với bất đẳng thức (3.59) dẫn đến điều cần chứng minh. $\square$

Định lý này cho ta *cận trên của hệ số an toàn*. Nếu chọn cơ cấu phá hủy khả dĩ động học một cách thích hợp, sao cho vế trái của (3.61) dương và lực ngoài tăng tỷ lệ theo một tham số $\Sigma_i = \alpha \bar{\Sigma}_i$; thì hệ số an toàn sẽ được xác định từ công thức

$$\alpha_* \iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i^0 dS = \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV. \quad (3.63)$$

Theo định nghĩa hệ số động đối với tốc độ khả dĩ động học v_i^0 ta có

$$\alpha_d \iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i^0 dS = \iiint_V \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV,$$

trong đó như đã nêu trên ứng suất σ_{ij}^0 tương ứng với tốc độ khả dĩ động học $\dot{\epsilon}_{ij}^0$. Điều này cũng là sự mở rộng biểu thức vế phải (3.56), với chú ý ứng suất σ_{ij}^0 nằm trên mặt giới hạn. Trừ vế với vế hai phương trình vừa nhận được đi đến

$$(\alpha_d - \alpha_*) \iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i^0 dS = \iiint_V (\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV.$$

Theo bất đẳng thức (3.58) ta dẫn đến điều cần chứng minh.

$$\alpha_d \geq \alpha_*$$

Định lý 3.14. *Vật thể có thể tiếp thụ được lực ngoài đặt lên nó một cách tùy ý, nếu tại mỗi giai đoạn đặt lực có thể tìm được phân bố ứng suất khả dĩ tĩnh học an toàn $\sigma_{ij}^{*(a)}$.*

Mặt khác vật thể không thể tiếp thụ được lực ngoài, nếu như tương ứng với lực ngoài đó không tồn tại phân bố ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép.

Nói một cách khác sự tồn tại phân bố ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép là điều kiện cần, còn tồn tại phân bố ứng suất khả dĩ tĩnh học an toàn là điều kiện đủ để vật thể còn khả năng chịu đựng được lực ngoài.

Chứng minh. Ở trạng thái phá hủy dẻo với tải ngoài không đổi có thể tồn tại tốc độ biến dạng khác không tương ứng với biến thiên ứng suất bằng không. Vì vậy cơ cấu phá hủy dẻo thực $\dot{\epsilon}_{ij}^{(c)}$ phải là tốc độ biến dạng dẻo khả dĩ động học.

Chứng minh phần thứ nhất bằng phản chứng: Mặc dầu đã giả thiết tồn tại phân bố ứng suất khả dĩ tĩnh học an toàn $\sigma_{ij}^{*(a)}$, tại giai đoạn nào đấy của quá trình đặt tải vẫn xảy ra phá hủy. Khi đó ứng suất thực σ_{ij} trong vật thể tại thời điểm phá hủy phải đạt giới hạn chảy dẻo tại những điểm, ở đó tốc độ biến dạng dẻo khác không. Tốc độ biến dạng dẻo này phải phù hợp với phân bố ứng suất tại giới hạn chảy. Phương trình năng lượng của hiệu số ứng suất $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*(a)}$ sẽ là

$$\iiint_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*(a)}) \dot{\epsilon}_{ij} dV = \iint_S (\Sigma_i - \Sigma_i) v_i dS = 0,$$

(vì cùng lực ngoài Σ_i có thể tồn tại $\sigma_{ij}^{*(a)}$ hoặc σ_{ij}). Đẳng thức này mâu thuẫn với bất đẳng thức (3.60). Điều đó có nghĩa là tại mọi giai đoạn của quá trình đặt tải chỉ tồn tại phân bố ứng suất khả dĩ tĩnh học an toàn thì không thể xuất hiện phá hủy dẻo. Phần thứ nhất của định lý được chứng minh.

Phần thứ hai của định lý thấy được một cách hiển nhiên, vì vật thể không thể tiếp thụ được lực ngoài, khi tương ứng với lực đó tồn tại phân bố ứng suất phá vỡ điều kiện chảy dẻo. $\square$

Định lý này cho phép xác định *cận dưới của hệ số an toàn*. Kết quả nhận được bằng cách suy trực tiếp từ phương trình (3.57)

$$(\alpha_t - \alpha_*) \iint_{S_\sigma} \bar{\Sigma}_i v_i dS = \iiint_V (\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} dV,$$

trong đó σ_{ij} là ứng suất thực, còn $\sigma_{ij}^{*(c)}$ là ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép. Theo bất đẳng thức (3.59) ta đi đến điều cần chứng minh

$$\alpha_t \leq \alpha_*.$$

3.8.3 Hệ quả

Ở đây nêu một vài hệ quả không chứng minh suy từ các bất đẳng thức trên [59]

1. Hệ số an toàn α^* là duy nhất
2. Thêm vào vật thể một phần khối lượng không thể hạ thấp hệ số an toàn
3. Bớt đi khỏi vật thể một phần không làm tăng hệ số an toàn
4. Tăng giới hạn chảy τ_s tại phần nào đấy của vật thể không hạ thấp tải giới hạn (vì mọi ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép cho vật cũ cũng là ứng suất khả dĩ tĩnh học cho vật mới).
5. Trong hai nghiệm khả dĩ động học thì nghiệm dẫn tới tải giới hạn nhỏ hơn sẽ thích hợp hơn, còn với khả dĩ tĩnh học thì ngược lại.

Koiter [20] chỉ ra sự duy nhất của ứng suất ở trạng thái phá hủy: *dưới tác dụng của tải giới hạn tồn tại duy nhất phân bố ứng suất tại những miền của vật thể có tốc độ biến dạng dẻo khác không*. Điều này có sự hạn chế thể hiện ở chỗ, trong vật thể đàn dẻo phân bố ứng suất phụ thuộc khá nhiều vào lịch sử quá trình đặt tải, nên chưa kết luận được điều trên. Nhưng mặt khác ta thấy khả năng phá hủy dẻo với tải ngoài không đổi không phụ thuộc vào lịch sử đặt tải, khi thiết lập và chứng minh định lý lịch sử đặt tải không đóng vai trò quan trọng.

Cũng cần chú ý rằng cơ cấu phá hủy tương ứng với lực giới hạn thì không duy nhất.

Định lý về phá hủy dẻo là định lý quan trọng của lý thuyết dẻo. Các phương pháp phổ biến tính toán kết cấu theo trạng thái giới hạn đều xây dựng trên cơ sở những định lý này. Phương pháp tính toán theo trạng thái giới hạn cho phép chọn hệ số an toàn hợp lý hơn phương pháp đàn hồi. Ngoài ra phương pháp này đơn giản hơn và dùng để chọn các kết cấu hợp lý bảo đảm tiết kiệm nguyên vật liệu và hạ giá thành. Phân tích ứng suất tại mỗi

giai đoạn đàn dẻo khá phức tạp, nhưng dựa vào các định lý trên có thể tính gần đúng hệ số an toàn với tập hợp lực ngoài cho trước.

Định lý về phá hủy dẻo không xét ảnh hưởng của thay đổi hình học tới điều kiện cân bằng. Khi cho lực ngoài tiến gần đến giá trị giới hạn, ta thường thấy biến dạng của kết cấu tăng khá nhanh. Vì vậy để xác định giá trị lực tới hạn cần xác định giới hạn của đại lượng biến dạng dẻo, ở đây chưa được đề cập đến.

Cuối cùng, chú ý rằng hai định lý về phá hủy với *vật liệu đàn dẻo* liên quan mật thiết với hai định lý về giới hạn chảy của *vật liệu cứng dẻo*. Đối với vật liệu cứng dẻo khi ứng suất chưa đạt giới hạn chảy, vật thể không có biến dạng, khi đạt giới hạn chảy xuất hiện chảy dẻo liên tục. Ta thấy giới hạn của vật liệu cứng dẻo tương đương với tải phá hủy của vật liệu đàn dẻo, vì rằng khi chứng minh định lý phá hủy không có điều gì ràng buộc đối với hằng số đàn hồi.

Lý thuyết về trạng thái giới hạn của vật thể cứng dẻo trình bày trong công trình của Hill phát triển đồng thời với thuyết phá hủy dẻo dựa trên quy luật biến dạng của vật thể đàn dẻo Ilyushin. Hiện nay cũng chưa khẳng định được lý thuyết nào ưu thế hơn. Phân tích cứng - dẻo cho phép loại trừ khả năng xuất hiện biến dạng lớn, mà trong phân tích đàn dẻo ta gặp phải. Nhưng dùng phân tích đàn dẻo ta thấy được sự liên hệ sâu xa giữa lý thuyết phá hủy dẻo với lực ngoài không đổi và vấn đề thích ứng của vật thể khi lực ngoài thay đổi tác dụng theo chu trình.

3.9 Phương trình cân bằng theo chuyển dịch. Phương pháp nghiệm đàn hồi

Liên hệ ứng suất - biến dạng của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ (1.45) kết hợp với hệ thức giữa cường độ ứng suất và cường độ biến dạng (1.44) có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - 2G\omega(\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}) = \\ &= \sigma_{ij}^E - 2G\omega(\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}).\end{aligned}\quad (3.64)$$

Ta gọi σ_{ij}^E là ứng suất *đàn hồi giả định*, liên hệ với biến dạng theo định luật Hooke

$$\sigma_{ij}^E = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}.\quad (3.65)$$

Đặt (3.64) vào phương trình cân bằng (3.1) và chú ý tới (3.65); ta được

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \rho K_i = 2\mu R_i, \quad (3.66)$$

trong đó

$$R_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [\omega(\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij})] = \frac{d\omega}{de_u} (\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}) \frac{\partial e_u}{\partial x_j} + \omega \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}).$$

Tương tự đặt (3.64) vào điều kiện biên

$$\sigma_{ij}^E \nu_j = \Sigma_i - \Sigma_{R_i}, \quad (3.67)$$

trong đó Σ_{R_i} là hàm chứa ω

$$\Sigma_{R_i} = -2\mu\omega(\varepsilon_{ij} - e\delta_{ij})\nu_j.$$

Nếu biến dạng đàn hồi thì $\omega(e_u) = 0$, khi đó $R_i = 0$ và $\Sigma_{R_i} = 0$, phương trình (3.66) sẽ có dạng phương trình Lamé trong lý thuyết đàn hồi

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \rho K_i = 0 \quad (3.68)$$

và điều kiện biên

$$\sigma_{ij}^E \nu_j = \Sigma_i \quad (3.69)$$

trong đó σ_{ij}^E biểu thị qua chuyển dịch theo định luật Hooke (3.65).

Phương trình (3.66) là phương trình vi phân không tuyến tính, vì vậy tích phân phương trình này phức tạp hơn nhiều.

Phương pháp chung giải phương trình cân bằng (3.66) là *phương pháp nghiệm đàn hồi* do Ilyushin đề xuất [51], tìm cách đưa việc tích phân phương trình (3.66) về tích phân phương trình Lamé (3.68). Phương trình sau là phương trình vi phân tuyến tính.

Chúng ta giả thiết rằng có thể giải được bài toán đàn hồi với vật thể có hình dáng cho trước, tức là tìm được nghiệm phương trình cân bằng (3.68) với điều kiện biên (3.69).

Để giải bài toán biến dạng đàn dẻo nhỏ ta dùng phương pháp gần đúng liên tiếp mang tên là *phương pháp nghiệm đàn hồi*.

Với *gần đúng thứ không* đặt $\omega(e_u) = \omega^{(0)} = 0$, khi đó phương trình cân bằng (3.66) trùng với (3.68), còn trong hệ thức điều kiện biên (3.67) $\Sigma_{R_i} = 0$,

tức là ta có bài toán của lý thuyết đàn hồi. Theo giá trị nghiệm của bài toán này $u_i^{(0)}$ tính $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ và $e_u^{(0)}$ như hàm số của tọa độ.

Nếu tại mọi điểm của vật thể $e_u^{(0)} < e_s$ thì biến dạng dẻo chưa xuất hiện và gần đúng thứ không sẽ là nghiệm của bài toán, ứng suất xác định theo định luật Hooke.

Tại miền nào đấy $e_u^{(0)} > e_s$ thì với vật liệu cho trước đường cong biến dạng $\sigma_u = \Phi(e_u)$ hoàn toàn xác định, do đó biết được dạng của hàm $\omega(e_u)$, ta xác định $\omega^{(1)} = \omega(e_u^{(0)})$ như hàm của tọa độ.

Với gần đúng thứ nhất trong biểu thức của R_i và Σ_{R_i} thay ω bằng hàm số biết rồi $\omega^{(1)}$ và thay ε_{ij} , e bằng $\varepsilon_{ij}^{(0)}$, $e^{(0)}$. Khi đó hàm $2\mu R_i^{(1)}$ và $\Sigma_{R_i}^{(1)}$ đóng vai trò lực khối và lực mặt giả định bổ sung vào lực khối ρK_i và lực mặt Σ_i .

Chúng ta lại giải bài toán đàn hồi lần nữa với lực khối là $\rho K_i - 2\mu R_i^{(1)}$ và lực mặt $\Sigma_i - \Sigma_{R_i}^{(1)}$. Ký hiệu nghiệm là $u_i^{(1)}$; theo các giá trị này tính biến dạng ở gần đúng thứ nhất $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, $e^{(1)}$ và $e_u^{(1)}$.

Trong miền vật thể tồn tại $e_u^{(1)} > e_s$ ta xác định $\omega^{(2)}$, sau đó xây dựng gần đúng thứ hai tương tự như cách làm trên. Quá trình cứ tiếp tục mãi cho đến khi gần đúng thứ $(n+1)$ không khác biệt mấy với gần đúng thứ n (với độ chính xác do ta yêu cầu).

Ở đây ta chưa đề cập đến vấn đề chứng minh hội tụ của phương pháp nghiệm đàn hồi, nghiên cứu hội tụ có công trình của Vorovitch và Krasovsky [36]. Thực tế chỉ cần đến gần đúng thứ hai đã cho nghiệm khá chính xác. Vì vậy vấn đề quan trọng là tìm được nghiệm của bài toán đàn hồi tương ứng.

Phương pháp nghiệm đàn hồi có thể được áp dụng để giải bài toán lý thuyết dẻo khi sử dụng quan hệ ứng suất - biến dạng theo lý thuyết chảy dẻo.

3.10 Phương pháp tham số đàn hồi thay đổi

Ý tưởng đưa việc giải bài toán đàn dẻo về giải liên tiếp một loạt bài toán đàn hồi được Ilyushin đề xuất đầu tiên bằng phương pháp nghiệm đàn hồi. Phát triển ý tưởng này Birger trình bày *phương pháp tham số đàn hồi thay đổi* [34]. Cơ sở của phương pháp này là biểu diễn lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ dưới dạng của định luật Hooke tổng quát, trong đó các hệ số đàn hồi phụ thuộc vào trạng thái ứng suất tại từng điểm và do vậy nó khác nhau tại các điểm khác nhau.

Sử dụng các hệ thức (1.41), (1.42) đưa quan hệ ứng suất - biến dạng của

lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ về dạng

$$\sigma_{ij} = \lambda^* \theta \delta_{ij} + 2G^* \varepsilon_{ij}, \quad (3.70)$$

trong đó

$$\lambda^* = K - \frac{2\sigma_u}{9e_u}, \quad G^* = \frac{\sigma_u}{3e_u}. \quad (3.71)$$

Trường hợp đàn hồi $\sigma_u = 3Ge_u$ thì $\lambda^* = K - \frac{2}{3}G = \lambda$, $G^* = G$ hệ thức (3.70) đưa về định luật Hooke quen thuộc.

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}.$$

Ta cũng có thể đưa (1.41), (1.42) về dạng

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu^*}{E^*} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu^*}{1 + \nu^*} \sigma \delta_{ij} \right), \quad (3.72)$$

trong đó

$$E^* = \frac{\frac{\sigma_u}{e_u}}{1 + \frac{1 - 2\nu}{3E} \frac{\sigma_u}{e_u}}, \quad G^* = \frac{\sigma_u}{3e_u}, \quad \nu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1 - 2\nu}{3E} \frac{\sigma_u}{e_u}}{1 + \frac{1 - 2\nu}{3E} \frac{\sigma_u}{e_u}}. \quad (3.73)$$

Dễ dàng kiểm tra được hệ thức $G^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu^*)}$.

Đối với vật liệu không nén được, $\nu = \frac{1}{2}$ theo công thức (3.73) ta có

$$E^* = 3G^* = \frac{\sigma_u}{e_u}, \quad \nu^* = \frac{1}{2},$$

tức là các “mô đun đàn hồi thay đổi” trùng với mô đun cắt tuyến, còn hệ số $\nu^* = \nu = \frac{1}{2}$.

Trường hợp đàn hồi $\sigma_u = 3Ge_u$, từ (3.73) suy ra $G^* = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$, nên $E^* = E$ và $\nu^* = \nu$, hệ thức (3.72) đưa về định luật Hooke quen thuộc

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1 + \nu} \sigma \delta_{ij} \right).$$

Đặt (3.70) vào phương trình cân bằng (3.1) ta được

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + G^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho K_j = 0. \quad (3.74)$$

và điều kiện biên dẫn đến

$$\begin{aligned} \left[\lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + G^* \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_i &= \Sigma_j \quad \text{trên } S_\sigma \\ u_j &= u_j^b \quad \text{trên } S_u. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Giải bài toán đàn dẻo (3.74), (3.75) bằng phương pháp tham số dần hồi thay đổi được tiến hành như sau

Với *gần đúng thứ không* ta cho các tham số dần hồi thay đổi λ^* , G^* bằng các hằng số dần hồi λ , G . Khi đó (3.74) trở thành phương trình Lamé ta có bài toán đàn hồi. Theo giá trị nghiệm của bài toán này $u_j^{(0)}$ tính $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ và $e_u^{(0)}$ như hàm số của tọa độ.

Nếu tại mọi điểm của vật thể $e_u^{(0)} < e_s$ thì biến dạng dẻo chưa xuất hiện và gần đúng thứ không sẽ là nghiệm của bài toán, ứng suất được tính theo định luật Hooke.

Tại miền nào đấy $e_u^{(0)} > e_s$ thì với vật liệu cho trước, đường cong biến dạng $\sigma_u = \Phi(e_u)$ hoàn toàn xác định, do đó theo $e_u^{(0)}$ biết được $\sigma_u^{(0)}$, ta xác định

$$\lambda^{*(1)} = K - \frac{2\sigma_u^{(0)}}{9e_u^{(0)}}, \quad G^{*(1)} = \frac{\sigma_u^{(0)}}{3e_u^{(0)}}$$

như hàm của tọa độ.

Với *gần đúng thứ nhất* trong phương trình (3.74), (3.75) thay λ^* , G^* bằng $\lambda^{*(1)}$, $G^{*(1)}$ là hàm đã biết. Ta có bài toán đàn hồi như của vật thể không thuần nhất, các tham số dần hồi khác nhau tại các điểm khác nhau. Giải bài toán ta được nghiệm gần đúng thứ nhất $u_j^{(1)}$. Theo giá trị tính $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ và $e_u^{(1)}$.

Theo đường cong biến dạng xác định $\sigma_u^{(1)}$, rồi xác định

$$\lambda^{*(2)} = K - \frac{2\sigma_u^{(1)}}{9e_u^{(1)}}, \quad G^{*(2)} = \frac{\sigma_u^{(1)}}{3e_u^{(1)}}$$

như các hàm mới của tọa độ.

Với các giá trị này của $\lambda^{*(2)}$ và $G^{*(2)}$ đưa vào các phương trình (3.74), (3.75) ta tìm nghiệm ở gần đúng thứ hai. Quá trình này tiếp diễn cho đến khi nghiệm ở gần đúng thứ n và thứ $(n+1)$ không khác biệt mấy (độ chính xác do ta yêu cầu).

Chứng minh sự hội tụ của phương pháp này được trình bày trong [35].

CHƯƠNG 4

Ứng dụng lý thuyết dẻo trong các bài toán điển hình

Việc giải hoàn chỉnh bài toán của lý thuyết dẻo thể hiện ở chỗ xác định được ứng suất và biến dạng trong cả miền đàn hồi và miền dẻo. Trong miền đàn hồi ứng suất và biến dạng liên hệ với nhau theo định luật Hooke, trong miền dẻo liên hệ đó (theo các thuyết dẻo) phức tạp hơn nhiều, có thể là hữu hạn đơn trị, nhưng cũng có thể là liên hệ vi phân và tính đến lịch sử quá trình đặt tải. Khi đó quá trình biến dạng dẻo phải xem như quá trình tích lũy liên tiếp các gia số nhỏ của biến dạng, muốn tìm liên hệ ứng suất và biến dạng tại thời điểm nào đấy phải lấy tích phân.

Nghiệm trong miền đàn hồi và miền dẻo liên hệ với nhau bởi điều kiện liên tục của ứng suất và chuyển dịch. Điều đó có nghĩa là trên biên đàn dẻo (biên phân chia giữa miền đàn hồi và miền dẻo) phải thỏa mãn điều kiện liên tục của ứng suất và chuyển dịch. Bản thân biên này cũng là một yếu tố chưa xác định và thường có dạng phức tạp, điều này gây khó khăn không nhỏ ngay cả trong trường hợp tính ứng suất trong miền đàn hồi.

Ta thấy rằng chỉ trong một số trường hợp bài toán có những đặc thù riêng hoặc đối xứng mới có thể tìm được nghiệm chính xác và đầy đủ. Trong chương này chúng ta xét một số bài toán thuộc loại này, nghiệm của nó có thể tìm được dưới dạng hiển, hoặc chỉ còn phải tích phân bằng phương pháp số. Trên cơ sở những nghiệm này cho ta hình ảnh của sự liên hệ giữa trạng thái ứng suất và biến dạng trong miền đàn hồi và miền dẻo.

Đối với những bài toán phức tạp có nhiều ý nghĩa thực tiễn, ta dùng các phương pháp gần đúng, trong đó có phương pháp nghiệm đàn hồi.

4.1 Kéo và xoắn đồng thời ống mỏng

Xét biến dạng đối xứng của ống tròn có độ dày mỏng dưới tác dụng của mômen xoắn M và lực kéo theo hướng trục P . Ống có độ dày h và đường kính trung bình D . Ta dùng tọa độ trụ r, θ, z , trong bài toán này chỉ có các thành phần ứng suất $\sigma_{zz}, \tau_{\theta z}$ khác không. Ứng suất pháp σ_{zz} và ứng suất tiếp $\tau_{\theta z}$ trong giới hạn đàn hồi cũng như ngoài giới hạn đàn hồi được tính theo công thức

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{\pi D h}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{2M}{\pi D^2 h}.$$

Cường độ ứng suất bằng

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau_{\theta z}^2}.$$

Để tính toán được đơn giản có thể xem vật liệu dẻo lý tưởng và không nén được. Đưa vào đại lượng không thứ nguyên

$$q = \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_s}, \quad \tau = \frac{\tau_{\theta z}}{\tau_s}, \quad \zeta = \frac{\varepsilon_{zz}}{e_s}, \quad \gamma = \frac{\gamma_{\theta z}}{\gamma_s} = \frac{2\varepsilon_{\theta z}}{\gamma_s},$$

trong đó $Ee_s = \sigma_s, G\gamma_s = \tau_s$.

4.1.1 Nghiệm của bài toán theo lý thuyết biến dạng

Hệ thức Hencky đối với vật liệu dẻo lý tưởng, không nén được (xem 1.10 chương 1)

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_{ij}$$

trong trường hợp này có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} - \sigma &= \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_{zz}, \\ \tau_{\theta z} &= \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_{\theta z}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{zz}. \end{aligned}$$

Dùng các đại lượng không thứ nguyên có thể viết các hệ thức trên

$$q = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \gamma^2}}, \quad \tau = \frac{\gamma}{\sqrt{\zeta^2 + \gamma^2}}. \quad (4.1)$$

Điều kiện chảy dẻo $\sigma_u = \sigma_s$ cho ta

$$q^2 + \tau^2 = 1. \quad (4.2)$$

Nếu đặt

$$q = \sin v \quad \text{với} \quad 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

và

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = w \quad \text{với} \quad 0 \leq w \leq 1,$$

từ (4.1) và (4.2) giải ra nghiệm

$$w = -\frac{\gamma}{\zeta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\zeta}\right)^2 + 1}. \quad (4.3)$$

4.1.2 Nghiệm của bài toán theo lý thuyết chảy

Hệ thức của lý thuyết chảy (1.27) trong trường hợp đang xét có dạng (xem 1.11 chương 1)

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} d\sigma_{zz} + \frac{2}{3} d\lambda \sigma_{zz}; \\ d\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2G} d\tau_{\theta z} + d\lambda \tau_{\theta z}. \end{aligned}$$

Dùng các đại lượng không thứ nguyên vào đây ta được

$$\begin{aligned} d\zeta &= dq + \frac{2}{3} E q d\lambda, \\ d\gamma &= d\tau + \frac{2}{3} E \tau d\lambda; \end{aligned}$$

kết hợp với điều kiện chảy dẻo (4.2) suy ra

$$\frac{2}{3} E d\lambda = q d\zeta + \tau d\gamma.$$

Vậy

$$\begin{aligned} d\zeta &= dq + (q d\zeta + \tau d\gamma) q, \\ d\gamma &= d\tau + (q d\zeta + \tau d\gamma) \tau. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Từ đây ta có

$$\frac{dq}{d\zeta} = \sqrt{1-q^2} \left(\sqrt{1-q^2} - q \frac{d\gamma}{d\zeta} \right).$$

Ta xem quá trình biến dạng $\gamma = \gamma(\zeta)$ là liên tục và thỏa mãn điều kiện đặt tải $d\lambda > 0$. Dùng phép đổi biến tương tự như trên phương trình (4.4) đưa về dạng

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{1}{2}w^2 - w\gamma'(\zeta) + \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

4.1.3 Trường hợp riêng

1. Quỹ đạo biến dạng có dạng đường thẳng

Phương trình quỹ đạo biến dạng

$$\gamma(\zeta) = A + B\zeta, \quad (4.6)$$

nếu $\gamma = \gamma_0$ với $\zeta = \zeta_0$ và $\gamma = \gamma_1$ với $\zeta = \zeta_1$, thì

$$A = \frac{\gamma_0\zeta_1 - \gamma_1\zeta_0}{\zeta_1 - \zeta_0}, \quad B = \frac{\gamma_1 - \gamma_0}{\zeta_1 - \zeta_0}.$$

Thay thế (4.6) vào (4.3) ta được ngay kết quả theo lý thuyết biến dạng. Ở đây ta dừng lại phân tích kết quả theo lý thuyết chảy. Phương trình (4.6) trong trường hợp này có dạng

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{1}{2}(w^2 + 2Bw - 1).$$

Lấy tích phân phương trình vừa nhận được với điều kiện

$$w = w_0 \quad \text{khi } \zeta = \zeta_0,$$

ta nhận được:

$$w = \frac{P(\zeta)w_2 \mp w_1}{P(\zeta) \mp 1},$$

trong đó

$$P(\zeta) = \left| \frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2} \right| \exp \left[-\sqrt{B^2 + 1}(\zeta - \zeta_0) \right],$$

$$w_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 + 1}.$$

Với $w > w_1$, trong hệ thức của w lấy dấu trừ, với $w < w_1$ lấy dấu cộng.

2. Quỹ đạo biến dạng có dạng đường gấp khúc

Tại mỗi đoạn của quỹ đạo biến dạng hoặc ζ không đổi, hoặc γ không đổi. Từ các hệ thức (4.4) có thể tìm được nghiệm của bài toán. Chẳng hạn

$$\begin{aligned}\zeta &= \text{const}, \quad d\zeta = 0, \\ d\gamma &= \frac{d\tau}{1 - \tau^2}.\end{aligned}$$

Tích phân phương trình này với điều kiện

$$\tau = \tau_1 \quad \text{khi } \gamma = \gamma_1,$$

ta được

$$\tau = \frac{Q(\gamma) - 1}{Q(\gamma) + 1},$$

trong đó

$$Q(\gamma) = \frac{1 + \tau_1}{1 - \tau_1} \exp[2(\gamma - \gamma_1)].$$

Từ phương trình (4.2) xác định q theo τ

$$q = \sqrt{1 - \tau^2}.$$

Tương tự như vậy, ta nhận được kết quả trong trường hợp

$$\gamma = \text{const}, \quad d\gamma = 0.$$

Bài toán kéo xoắn đồng thời ống mỏng có ý nghĩa quan trọng, vì quá trình này thực hiện được bằng thực nghiệm. Kết quả thực nghiệm có thể đem so sánh với những tính toán lý thuyết của từng thuyết dẻo, trên cơ sở đó có thể xác minh tính đúng đắn và giới hạn sử dụng của từng lý thuyết. Hầu hết các nghiên cứu thực nghiệm tiến hành trên mẫu có dạng hình ống trụ với độ dày mỏng.

Người ta thấy rằng với quỹ đạo biến dạng thẳng hai lý thuyết chảy và biến dạng cho kết quả gần nhau. Những kết quả trên đây vẫn còn dùng được với biến dạng dẻo lớn gấp khoảng mười lần biến dạng đàn hồi cực đại.

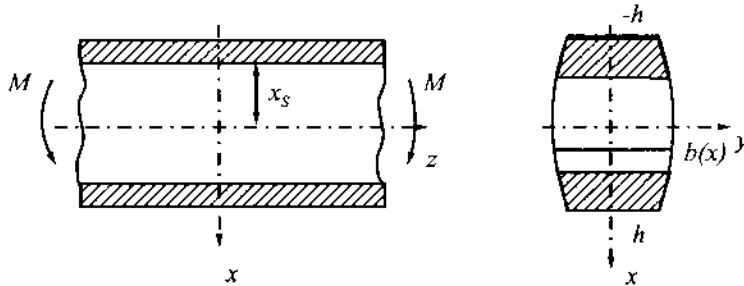
4.2 Uốn và kéo thanh hình lăng trụ

4.2.1 Uốn thuần túy

Xét bài toán uốn thanh hình lăng trụ có tiết diện đối xứng với hai trục và mặt phẳng uốn chứa một trong hai trục đó. Gọi x, y là trục đối xứng của tiết diện ngang, z hướng theo trục của thanh và mặt phẳng (x, z) là mặt phẳng uốn. Ký hiệu κ độ cong của trục giữa, $b(x)$ và h là chiều rộng và chiều cao của tiết diện. Ta có trường hợp đặt tải đơn giản, nên có thể xuất phát từ hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ Ilyushin. Trong trường hợp uốn thuần túy trạng thái biến dạng ở mọi tiết diện đều như nhau và giả thiết tiết diện phẳng đúng trong miền biến dạng đàn hồi cũng đúng trong miền biến dạng dẻo. Theo công thức biến dạng uốn (lý thuyết đàn hồi) và để thỏa mãn phương trình tương thích biến dạng ta đặt

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= e_3 = -\kappa x, \\ \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz}, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Ở đây giả thiết hệ số Poisson $\nu = \frac{1}{2}$ trên toàn bộ thiết diện, giả thiết này ít ảnh hưởng đến kết quả bài toán nhưng làm đơn giản tính toán rất nhiều.



Hình 4.1

Từ (4.7) xác định cường độ biến dạng $e_u = |e_3|$ và từ liên hệ ứng suất - biến dạng theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ (1.43) và (1.44) chương 1 suy ra

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sigma_3, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \\ \sigma_u &= |\sigma_3|, \\ \sigma_3 &= Ee_3[1 - \omega(e_3)].\end{aligned}\tag{4.8}$$

Trạng thái ứng suất này thỏa mãn phương trình cân bằng; còn đối với điều kiện biên do không tác dụng lực dọc theo trục nên

$$\int_{-h}^h \sigma_3 b(x) dx = 0$$

phải bằng không. Quả vậy, do tính chất đối xứng của tiết diện điều kiện này thỏa mãn. Từ điều kiện cân bằng mômen nội lực tại tiết diện bất kỳ với mômen uốn ngoài M

$$M = 2 \int_0^h \sigma_3 b(x) x dx, \quad (4.9)$$

ta nhận được hệ thức giữa độ cong và mômen uốn. Đặt (4.8) vào (4.9):

$$M = 2 \int_0^h E e_3 [1 - \omega(e_3)] b(x) x dx$$

và nhờ (4.7) đưa phương trình vừa nhận được về dạng

$$M = -EJ\kappa - 2E \int_0^h \omega e_3 b(x) x dx, \quad (4.10)$$

trong đó $J = 2 \int_0^h b x^2 dx$ là mômen quán tính của tiết diện đối với trục y .

Nếu M chưa đủ lớn, thanh bị uốn hoàn toàn đàn hồi, khi đó $\omega(e_3) \equiv 0$ và

$$M = -EJ\kappa,$$

$$\sigma_3 = \sigma_{zz} = E e_3 = -E\kappa x = \frac{M}{J} x.$$

Khi M tăng, tại mỗi tiết diện xuất hiện miền biến dạng dẻo. Gọi x_s là tọa độ của những điểm trên biên ngăn cách miền đàn hồi và miền dẻo. Trên biên đàn dẻo ta có

$$e_3 = e_s = \frac{\sigma_s}{E}, \quad x_s = -\frac{e_s}{\kappa}. \quad (4.11)$$

Chú ý rằng trong miền đàn hồi $\omega = 0$ với $x \leq x_s$, hệ thức (4.10) có thể viết dưới dạng

$$M = -EJ\kappa - 2E \int_{x_s}^h \omega e_3 b x dx. \quad (4.12)$$

Đối với từng vật liệu hàm $\omega(e_3)$ hoàn toàn xác định, từ (4.12) có thể biểu thị độ cong κ như là hàm của mômen uốn M . Điều đó có nghĩa là đã giải quyết được bài toán đặt ra, Bây giờ xét một vài trường hợp

1. Thanh làm bằng vật liệu dẻo lý tưởng

Khi đó

$$\omega = 1 - \frac{e_s}{e_3},$$

hệ thức (4.12) đưa về

$$M = -EJ_e \kappa + \sigma_s S_p, \quad (4.13)$$

trong đó $J_e = 2 \int_0^{x_s} b x^2 dx$ là mômen quán tính của phần tiết diện đàn hồi đối

với trục y , còn $S_p = 2 \int_{x_s}^h b x dx$ là mômen tĩnh của miền dẻo đối với trục y .

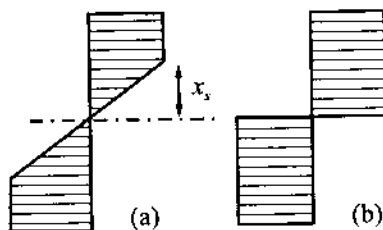
Khi tăng mômen uốn miền biến dạng dẻo mở rộng, tức là x_s giảm, ở trạng thái giới hạn $x_s = 0$, tương ứng với độ cong κ dẫn tới vô cùng (suy từ (4.11)). Giá trị cực đại của mômen uốn sẽ là

$$M_* = \sigma_s S_p^*,$$

trong đó

$$S_p^* = 2 \int_0^h b x dx.$$

Giá trị M_* gọi là *giá trị giới hạn* của mômen uốn, hay còn gọi là *khả năng chịu lực* của thanh khi uốn. Nó tương ứng với trạng thái thanh biến dạng dẻo hoàn toàn. Biểu đồ ứng suất hình bên biểu thị thanh còn miền đàn hồi (a) và thanh dẻo hoàn toàn (b). Mặt



Hình 4.2

phẳng trung hòa là mặt phẳng gián đoạn của ứng suất, độ cong trong trường hợp giới hạn dẫn tới vô cùng. Nhưng cần chú ý rằng biến dạng dẻo không lớn lắm, mômen uốn đã có giá trị gần bằng giá trị giới hạn. Vì vậy khái niệm mômen giới hạn có ý nghĩa thực tiễn. Quả vậy, xét thanh có tiết diện chữ nhật cạnh b và $2h$. Khi đó hệ thức của mômen uốn

$$M = \sigma_s b h^2 - \frac{1}{3} \sigma_s b x_s^2$$

và giá trị cực đại của nó

$$M_* = \sigma_s b h^2,$$

từ đó suy ra

$$\frac{M}{M_*} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_s}{h} \right)^2. \quad (4.14)$$

Ta thấy rằng chỉ cần với $x_s = -\frac{e_s}{\kappa} \approx \frac{h}{3}$ giá trị mômen uốn chỉ sai khác giá trị giới hạn khoảng 4%.

2. Thanh làm bằng vật liệu tái bền tuyến tính có tiết diện hình chữ nhật ($b, 2h$)

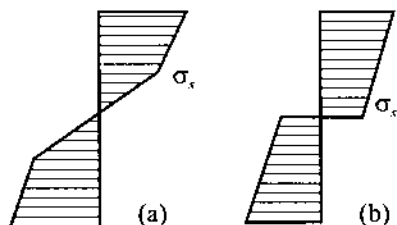
Khi đó: $\omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_3} \right)$ với $\lambda = 1 - \frac{E'}{E} = \text{const.}$

Thế giá trị ω vào phương trình (4.12) và tích phân lên

$$M = -\frac{2}{3} E b h^2 \kappa (1 - \lambda) + E b e_s \lambda \left(h^2 - \frac{e_s^2}{3 \kappa^2} \right).$$

Biểu đồ ứng suất có dạng như hình bên:

- a) còn tồn tại miền đàn hồi,
- b) tiết diện dẻo hoàn toàn.



Hình 4.3

3. Trường hợp cắt tải

Nếu thanh biến dạng hoàn toàn đàn hồi, quá trình cắt tải khá đơn giản: biến dạng đàn hồi giảm dần và dẫn đến không. Nếu thanh biến dạng dẻo, sau khi cắt tải sẽ tồn tại ứng suất dư, biến dạng dư. Áp dụng định lý về cắt tải để tính toán, trước hết tính độ cong giả định $\tilde{\kappa}$ coi như thanh biến dạng hoàn

toàn đàn hồi dưới tác dụng của mômen uốn M (giá trị của mômen trước lúc cất tải). Ta có

$$\tilde{\kappa} = -\frac{M}{EJ}$$

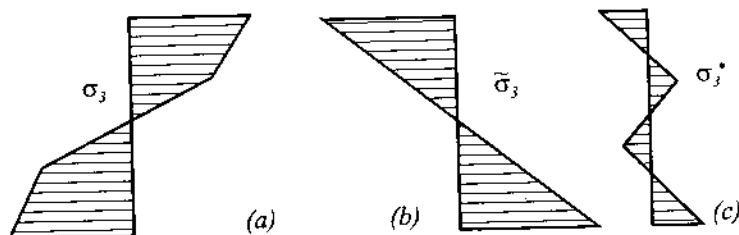
tương ứng với ứng suất đàn hồi giả định

$$\tilde{\sigma}_3 = -E\tilde{\kappa}x.$$

Độ cong dư κ^* và ứng suất dư tính bằng công thức

$$\begin{aligned}\kappa^* &= \kappa - \tilde{\kappa} = \kappa + \frac{M}{EJ}, \\ \sigma_3^* &= -E\kappa x[1 - \omega(-\kappa x)] + E\tilde{\kappa}x = \\ &= -Ex(\kappa - \tilde{\kappa}) + E\kappa x\omega,\end{aligned}$$

trong đó κ tính từ công thức (4.12), hàm $\omega = \omega(-\kappa x)$ bằng không với $x < x_s$ và là hàm đã biết của biến dạng với $x \geq x_s$. Trong hình 4.4 biểu thị biểu đồ ứng suất: a) ứng suất với vật liệu dẻo tuyến tính trước khi cất tải, b) ứng suất đàn hồi giả định và c) ứng suất dư



Hình 4.4

4.2.2 Kéo và uốn thuần túy

Bài toán tác dụng đồng thời mômen uốn M và lực kéo P cũng đơn giản. Đặt mọi thành phần biến dạng trượt bằng không và biến dạng dãn

$$\varepsilon_{zz} = e_0 - \kappa x, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz},$$

e_0 là đại lượng không đổi. Phương trình tương thích biến dạng thỏa mãn. Trạng thái ứng suất tương ứng cũng thỏa mãn phương trình cân bằng, từ điều kiện trên biên cho ta hệ thức để xác định độ dãn e_0 và độ cong κ .

$$P = \int_{-h}^h \sigma_3 b dx = E e_0 F - E \int_{-h}^h b e_3 \omega dx,$$

$$M = \int_{-h}^h \sigma_3 b x dx = -E J \kappa - E \int_{-h}^h b e_3 \omega x dx,$$

trong đó F - diện tích tiết diện thanh. Hàm ω chỉ khác không trong miền biến dạng dẻo. Xét ba trường hợp:

1. Nếu $e_0 - \kappa h \leq e_s$, tức là e_3 tại mọi điểm nhỏ hơn e_s , do đó $\omega = 0$, toàn bộ tiết diện còn ở trạng thái đàn hồi; ta có

$$P = E F e_0, \quad M = -E J \kappa.$$

2. Nếu $e_0 - \kappa h \geq e_s$, $e_0 = -\kappa h \leq e_s$, trong tiết diện có hai miền đàn hồi và dẻo, biên của hai miền xác định bởi công thức

$$e_3 = e_s, \quad x_s = \frac{e_0 - e_s}{\kappa}.$$

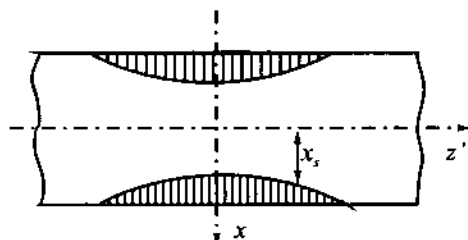
3. Nếu $e_0 + \kappa h > e_s$, thanh chuyển sang biến dạng dẻo. Biến dạng dư của thanh sau khi cất tải hoàn toàn xác định như sau

$$e_0^* = e_0 - \frac{P}{E F}, \quad \kappa^* = \kappa + \frac{M}{E J}.$$

4.2.3 Uốn ngang

Khi tác dụng lực ngang vào thanh, ngoài ứng suất pháp còn xuất hiện ứng suất tiếp. Nhưng với thanh dài ta có thể bỏ qua. Vì rằng mômen uốn thay đổi theo chiều dài, nên đại lượng x_s cũng thay đổi, nó xác định miền dẻo dọc theo thanh. Vị trí miền dẻo được xác định nếu biết mômen uốn là hàm của z

$$x_s = x_s(M).$$



Hình 4.5

Đối với thanh tiết diện chữ nhật bằng vật liệu dẻo lý tưởng tồn tại hệ thức (4.14):

$$M = M_* \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{x_s}{h} \right)^2 \right],$$

suy ra

$$x_s = h \sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_*} \right)}. \quad (4.15)$$

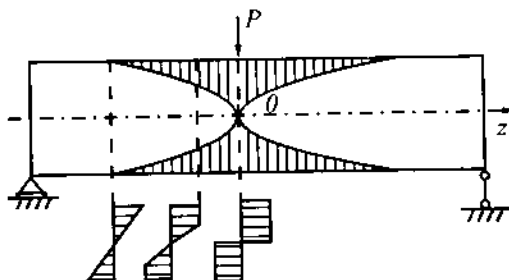
1. Thanh chịu tải tập trung tại giữa

Ở đây cần phân biệt phần thanh biến dạng đàn hồi, phần biến dạng dẻo.

Ở trạng thái giới hạn, khi lực P đạt giá trị xác định nào đấy sẽ xuất hiện “khớp dẻo” tại tiết diện dưới lực P , tại đó mômen uốn cực đại. Ta gọi tiết diện đó là *tiết diện không an toàn*. Biểu đồ ứng suất tại tiết diện đó có dạng hình chữ nhật. Trạng thái giới hạn giả định đó tương đương với độ cong vô cùng lớn.

Đặt gốc tọa độ tại điểm đặt lực P ta có biểu thức mômen uốn M trong trường hợp mất hoàn toàn khả năng thích ứng của tiết diện không an toàn

$$M = M_* \left(1 - \frac{z}{\ell} \right),$$



Hình 4.6

trong đó

ℓ - nửa chiều dài thanh,

z - khoảng cách từ lực P đến tiết diện đang xét. Đặt giá trị M vào (4.15) ta được

$$x_s = h \sqrt{3 \frac{z}{\ell}}.$$

Trên mặt phẳng (x, z) biên đàn dẻo là parabol.

2. Thanh chịu tải đều

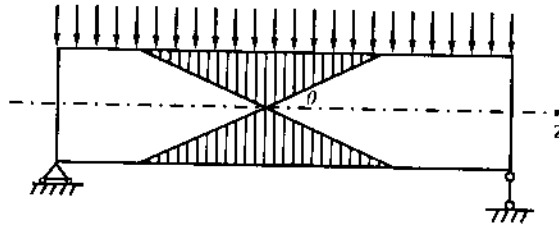
Trong trường hợp giới hạn biểu thức của mômen uốn bằng

$$M = M_* \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2}\right).$$

Đặt giá trị này vào (4.15), cho ta

$$x_s = h\sqrt{3} \frac{z}{\ell},$$

biên đàn dẻo là hai mặt phẳng.



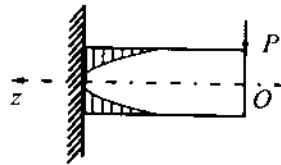
Hình 4.7

3. Thanh công xôn có độ dài ℓ chịu tải đặt tại một đầu

Biểu thức mômen có dạng

$$M = M_* \frac{z}{\ell}.$$

Nhờ (4.15) ta có $x_s = h\sqrt{3\left(1 - \frac{z}{\ell}\right)}$, biên đàn dẻo trên mặt (x, z) là một parabol.



Hình 4.8

Nếu cần xác định độ võng của trục thanh khi uốn ngang đàn dẻo, thì phải tích phân phương trình trục võng. Tại phần thanh đàn hồi

$$-EJ \frac{d^2 u}{dz^2} = M,$$

còn tại phần thanh biến dạng đàn dẻo

$$\kappa = -\frac{e_s}{x_s},$$

hay là

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\sigma_s}{E x_s}.$$

Thay biểu thức của x_s theo (4.15) vào đây ta được

$$EJ \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{2}{3} \frac{M^*}{\sqrt{3 \left(1 - \frac{M}{M_*}\right)}}.$$

Xét điều kiện xuất hiện khớp dẻo tại thanh ta tìm được tải giới hạn tương ứng. Xem lực đó là lực phá hủy, khi chọn kích thước an toàn cho thanh cần xuất phát từ hệ số an toàn nào đấy đối với lực đó.

4.3 Xoắn thanh hình lăng trụ

4.3.1 Xoắn thanh tròn

Giả sử thanh tròn có trục hướng theo trục z chịu tác dụng của mômen xoắn M , với giá trị nào đấy của mômen, một phần của tiết diện sẽ chuyển sang trạng thái dẻo.

Khi giải bài toán này ta vẫn dùng giả thiết tiết diện phẳng, do đó

$$u = -\beta zy, \quad v = \beta zx, \quad w = 0,$$

suy ra các thành phần biến dạng

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= -\frac{1}{2}\beta y, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\beta x, \\ e_u &= \gamma_{\theta z}/\sqrt{3} = \beta r/\sqrt{3}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

trong đó góc xoắn đơn vị β cần xác định.

Các thành phần ứng suất khác không sẽ là τ_{xz} , τ_{yz} và

$$\sigma_u = \sqrt{3} \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{3} \tau_{\theta z}.$$

Theo thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ

$$\sigma_u = 3Ge_u[1 - \omega(e_u)] = \Phi(e_u), \quad (4.17)$$

do đó có thể xác định được ứng suất tiếp, nếu biết góc xoắn đơn vị β và dạng của đường cong $\Phi(e_u)$. Bài toán đưa về xác định β là hàm của mômen xoắn M , từ điều kiện cân bằng mô men trên mỗi tiết diện cho ta

$$M = \int_0^a 2\pi r^2 \tau_{\theta z} dr,$$

trong đó a là bán kính tiết diện.

Dùng (4.16), (4.17) biến đổi hệ thức này:

$$M = \frac{6\pi}{\beta^2} \int_0^{\beta a/\sqrt{3}} \sigma_u e_u^2 de_u,$$

hay là

$$M = \beta G J_p - \frac{18\pi G}{\beta^3} \int_{e_s}^{\beta a/\sqrt{3}} \omega e_u^3 de_u, \quad (4.18)$$

trong đó $J_p = \frac{\pi a^4}{2}$ là mômen quán tính cực của tiết diện. Với M chưa đủ lớn thanh xoắn đàn hồi ($\omega = 0$), ta có

$$M = \beta G J_p. \quad (4.19)$$

Vậy

$$e_u = \frac{Mr}{G J_p \sqrt{3}} \quad \text{và} \quad \tau_{\theta z} = \frac{M}{J_p} r.$$

Khi M tăng, biên $r = a$ sẽ xuất hiện dẻo trước tiên sau đó lan dần vào. Biên đàn dẻo là vòng tròn bán kính r_s

$$r_s = \frac{e_s \sqrt{3}}{\beta}.$$

Miền $0 \leq r \leq r_s$ gọi là nhân đàn hồi, còn miền $r_s \leq r \leq a$ là miền dẻo.

Đối với mỗi vật liệu ta biết dạng của hàm $\Phi(e_u)$, tức là biết hàm $\omega(e_u)$, đặt vào (4.18) sẽ xác định được hệ thức giữa β và M .

1. Thanh làm bằng vật liệu tái bền tuyến tính

Khi đó ta có

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_u} \right),$$

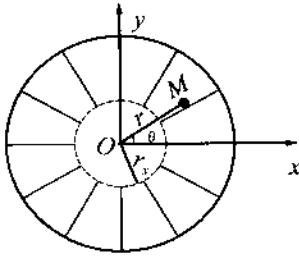
từ (4.16) và (4.18) suy ra:

$$M = \beta G J_p - \lambda G J_p \beta + e_s S_p G \lambda \sqrt{3} - \frac{\pi G \lambda e_s r_s^3}{2\sqrt{3}},$$

$$r_s = \frac{e_s \sqrt{3}}{\beta},$$

trong đó r_s là bán kính của miền đàn hồi, S_p - mômen tĩnh của tiết diện $S_p = \frac{2\pi a^3}{3}$.

2. Thanh làm bằng vật liệu dẻo lý tưởng



Hình 4.9

Khi đó ta có

$$\omega = 1 - \frac{e_s}{e_u};$$

ta tìm được

$$M = \frac{\sigma_s S_p}{\sqrt{3}} - \frac{\pi \sigma_s r_s^3}{6\sqrt{3}},$$

trong đó $\sigma_s = 3G e_s$.

Trạng thái giới hạn ($r_s = 0$) đạt được khi $\beta \rightarrow \infty$, nhân đàn hồi suy biến về điểm gián đoạn. Từ biểu thức của M suy ra

$$M_* = \frac{\sigma_s S_p}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \tau_s \pi a^3.$$

Cũng cần chú ý rằng khi tăng mômen xoắn, giá trị M tiến rất nhanh đến giá trị giới hạn M_* . Quả vậy, có thể viết

$$M = M_* \left(1 - \frac{r_s^3}{12a^3} \right),$$

với $r_s = \frac{a}{2}$, thì $M = \frac{95}{96} M_*$, khả năng chịu lực của thanh trên thực tế mất đi khi góc xoắn β không lớn lắm.

Ứng suất tiếp cực đại tác dụng theo các mặt phẳng $z = \text{const}$ và theo những mặt phẳng trục giao với vectơ ứng suất. Vết của những mặt phẳng

đó trên mặt phẳng $z = \text{const}$ gọi là những *đường trượt*. Ở đây đường trượt trùng với bán kính như hình 4.9.

3. Cắt tải

Sau khi cắt tải trong tiết diện ngang của thanh còn ứng suất dư và góc xoắn dư, theo định lý về cắt tải sẽ bằng

$$\beta^* = \beta - \tilde{\beta},$$

trong đó $\tilde{\beta}$ là góc xoắn đàn hồi giả định tính theo công thức (4.19) vậy

$$\beta^* = \beta - \frac{M}{GJ_p}.$$

Trong tự, tính ứng suất dư

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{\theta z} - \frac{M}{J_p} r,$$

trong đó β và $\tau_{\theta z}$ là nghiệm của bài toán đàn dẻo trước khi cắt tải.

4.3.2 Xoắn thanh có tiết diện bất kỳ

Thanh dài hình lăng trụ có tiết diện bất kỳ bị xoắn bởi một ngẫu lực đặt ở tiết diện. Nếu mômen xoắn đạt đến một giá trị nào đấy thì có phần của tiết diện thanh sẽ biến dạng dẻo, tạo thành miền dẻo. Khi mômen xoắn tăng nữa, miền dẻo tăng dần, nhân dần hồi giảm dần và sau đó thanh chuyển sang dẻo hoàn toàn. Theo giả thiết của Saint-Venant, tiết diện ngang quay trong mặt phẳng của nó và bị vòng theo hướng trục z :

$$u = -\beta zy, \quad v = \beta zx, \quad w = \beta \varphi(x, y),$$

β - góc xoắn trên đơn vị dài, $\varphi(x, y)$ - hàm chưa biết. Khi đó theo công thức Cauchy xác định các thành phần biến dạng

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} &= 0, \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

Thay thế (4.20) vào hệ thức của lý thuyết biến dạng hoặc lý thuyết chảy dẻo đều dẫn đến

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0,$$

chỉ có hai thành phần ứng suất τ_{xz} và τ_{yz} khác không. Trên tiết diện $z = \text{const}$ chỉ tác dụng vector ứng suất tiếp $\tau_z = \tau_{xz}\mathbf{i} + \tau_{yz}\mathbf{j}$.

Cường độ biến dạng trượt và cường độ ứng suất tiếp có dạng

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2} = \sqrt{3} e_u, \\ T &= \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \sigma_u/\sqrt{3}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Ứng suất tiếp cực đại

$$\tau_{\max} = |\tau_z| = T$$

tác dụng theo các mặt phẳng $z = \text{const}$ và các mặt trụ có đường sinh song song với trục z và có đường cong đáy tại mỗi điểm thẳng góc với vector ứng suất tiếp. Vết của các mặt trụ đó trên mặt phẳng $z = \text{const}$ gọi là *đường trượt*.

Từ (4.20) suy ra phương trình tương thích biến dạng trong trường hợp xoắn thành:

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = -\beta.\tag{4.22}$$

Trạng thái ứng suất thỏa mãn đồng nhất phương trình cân bằng thứ nhất và thứ hai, phương trình thứ ba đưa về dạng

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Bây giờ đưa vào hàm ứng suất $F(x, y)$, phương trình cân bằng thỏa mãn nếu như

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x},\tag{4.23}$$

đem thay chúng vào (4.21), ta được

$$\sigma_u = \sqrt{3}T = \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}\tag{4.24}$$

Ứng suất tiếp tổng hợp tác dụng trên tiết diện ngang tại mỗi điểm hướng theo tiếp tuyến của những đường F không đổi. Ta gọi các đường đó là *đường ứng suất tiếp*.

Tại mặt sườn của thanh trụ do với ứng suất, điều kiện biên có dạng

$$\tau_{xz}\ell + \tau_{yz}m = 0,$$

hay là

$$\tau_{xz}dy - \tau_{yz}dx = 0.$$

Đặt (4.23) vào đây suy ra

$$\frac{\partial F}{\partial s} = 0,$$

tức là trên chu tuyến $F = \text{const}$. Đối với chu tuyến L đơn liên có thể đặt

$$F = 0.$$

Bài toán xoắn thanh dẫn về tìm hàm $F(x, y)$ thỏa mãn điều kiện $F = \text{const}$ trên chu tuyến tiết diện. Một khi đã xác định được hàm F thì điều kiện cân bằng mômen xoắn ngoài M với mômen của các thành phần ứng suất cho ta phương trình xác định góc xoắn đơn vị β :

$$M = \iint_S (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})dxdy.$$

Thay biểu thức của ứng suất vào đây và lấy tích phân từng phần kết quả nhận được

$$M = - \oint_L F(x\ell + ym)ds + 2 \iint_S Fdxdy.$$

Đối với chu tuyến đơn liên thì

$$M = 2 \iint_S Fdxdy. \quad (4.25)$$

Đối với chu tuyến đa liên, hàm ứng suất có thể lấy các giá trị không đổi $F_0, F_1, \dots, F_m$ tại chu tuyến ngoài L_0 và các chuy tuyến $L_1, \dots, L_m$. Có thể đặt $F_0 = 0$, các giá trị khác xác định theo công thức sau từ định lý về thông lượng của ứng suất tiếp (xem [7]):

$$M = 2 \sum_{i=1}^m F_i S_i + 2 \iint_S Fdxdy.$$

Bây giờ tìm phương trình xác định hàm ứng suất $F(x, y)$, phương trình này nhận được bằng cách sử dụng đến các phương trình liên hệ ứng suất - biến dạng, phương trình tương thích (4.22), hệ thức (4.23) và (4.24). Ta phân ra mấy trường hợp

1. Xoắn đàn hồi

Liên hệ ứng suất-biến dạng theo định luật Hooke

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G} \tau_{xz} = \frac{1}{2G} \frac{\partial F_e}{\partial y}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \tau_{yz} = -\frac{1}{2G} \frac{\partial F_e}{\partial x},\end{aligned}\quad (4.26)$$

F_e - hàm ứng suất trong trường hợp đàn hồi. Đặt chúng vào phương trình tương thích cho ta phương trình xác định hàm F_e

$$\frac{\partial^2 F_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_e}{\partial y^2} = -2G\beta. \quad (4.27)$$

Phương trình này với điều kiện trên biên $F_e = 0$ và hệ thức (4.25) cho phép xác định hàm F_e và góc xoắn đơn vị β . Bài toán này đã được giải quyết hoàn toàn trong giáo trình lý thuyết đàn hồi.

2. Xoắn đàn dẻo

Trong trường hợp xoắn đàn dẻo không tồn tại đặt tải đơn giản vì tenxơ lệch ứng suất thay đổi một cách tỷ lệ, nhưng trục chính thay đổi. Ta có thể xem sự thay đổi đó không lớn lắm, nên trạng thái ứng suất gần như đơn giản. Theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ Ilyushin

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz} &= \frac{3e_u}{2\sigma_u} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{3e_u}{2\sigma_u} \tau_{yz}, \quad \sigma_u = \Phi(e_u).\end{aligned}$$

Nếu vật liệu tái bền, có thể suy ngược lại

$$e_u = \Phi^{-1}(\sigma_u). \quad (4.28)$$

Đem e_u đặt vào các hệ thức vừa nêu trên cho ta

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yz} &= \Psi(\sigma_u) \tau_{xz}, \\ \varepsilon_{yz} &= \Psi(\sigma_u) \tau_{yz},\end{aligned}$$

trong đó

$$\Psi(\sigma_u) = \frac{3\Phi^{-1}(\sigma_u)}{2\sigma_u}.$$

Thay thế các biểu thức vừa nhận được vào phương trình tương thích (4.22) và chú ý đến (4.23), (4.24), ta được

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi(\sigma_u) \frac{\partial F_p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Psi(\sigma_u) \frac{\partial F_p}{\partial y} \right] = -\beta, \quad (4.29)$$

trong đó

$$\sigma_u = \sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{\partial F_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_p}{\partial y} \right)^2}.$$

Khi thiết lập bài toán tổng quát của lý thuyết dẻo với các điều kiện ràng buộc hàm σ_u , ta thấy rằng đây là phương trình tựa tuyến tính elliptic. Vì vậy bài toán xác định hàm F thỏa mãn phương trình này và điều kiện biên $F = \text{const}$ là bài toán đúng đắn.

3. Xoắn thanh bằng vật liệu dẻo lý tưởng

Phương trình vi phân của hàm ứng suất trong miền biến dạng dẻo của thanh bằng vật liệu dẻo lý tưởng có thể suy ra từ điều kiện

$$\sigma_u = \sigma_s.$$

Đối với trường hợp này không tồn tại hệ thức (4.28) do đó việc xác định hàm F_p không dẫn đến phương trình (4.29). Phương trình để xác định F_p sẽ có dạng phương trình loại hyperbolic. Đây là sự thay đổi về chất trong mọi bài toán chuyển từ vật liệu tái bền sang vật liệu không tái bền (dẻo lý tưởng).

Thay thế biểu thức của σ_u vào (4.24) ta được

$$\left(\frac{\partial F_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_p}{\partial y} \right)^2 = \frac{\sigma_s^2}{3} = \tau_s^2. \quad (4.30)$$

Trong miền biến dạng đàn hồi vẫn thỏa mãn phương trình (4.27). Trên biên giữa miền biến dạng đàn hồi và miền biến dạng dẻo phải thỏa mãn điều kiện liên tục của hàm F .

Về trái của phương trình này là bình phương độ lớn của $\text{grad } F$. Do đó tại mọi điểm của tiết diện ngang ở trạng thái dẻo phải thỏa mãn điều kiện

$$\text{grad } F = \text{const},$$

điều đó có nghĩa là mặt hàm ứng suất khi xoắn dẹt là mặt có độ dốc không đổi xây dựng trên chu tuyến của tiết diện ngang.

Vectơ ứng suất trong miền dẹt có độ lớn không đổi và hướng thẳng góc với pháp tuyến của chu tuyến. Đường ứng suất $F_p = \text{const}$ song song với chu tuyến của miền, đường trượt trùng với pháp tuyến của chu tuyến.

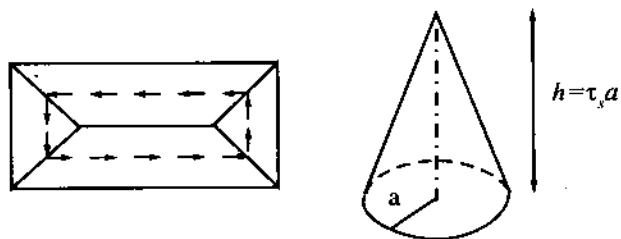
a) *Phương pháp tương tự đổ cát*

Xác định hàm ứng suất F_p từ phương trình (4.30) với điều kiện $F_0 = 0$, $F_i = \text{const}$ trên chu tuyến dẫn tới *phương pháp tương tự với sự đổ cát*: một bản nằm ngang có hình dáng tiết diện ngang trên đó đổ cát, ta sẽ nhận được “mái lợp” cát, chiều cao cột cát tại mỗi điểm biểu thị (một cách tỷ lệ) hàm ứng suất khi xoắn tại điểm đó.

Cần chú ý rằng phương pháp tương tự đổ cát ứng với trường hợp *toàn bộ thanh đã chuyển sang trạng thái dẻo (trạng thái giới hạn)*. Mômen xoắn tương ứng cũng gọi là giá trị mômen giới hạn, nó xác định *khả năng chịu lực* của thanh khi xoắn, có nghĩa là với vật liệu dẻo lý tưởng không thể tăng mômen xoắn quá giá trị giới hạn của nó, vì khi đó góc xoắn sẽ tăng vô hạn. Theo (4.25) giá trị này xác định bằng hai lần thể tích giữa mái dốc và mặt phẳng tiết diện.

Do đó có thể tính dễ dàng giá trị giới hạn của mômen xoắn đối với các thanh có tiết diện ngang khác nhau.

Nếu tiết diện là miền đa liên, thì dọc theo các chu tuyến trong $F_{pi} = \text{const}$. Do đó khi đổ cát cần đặt thành chắn với chiều cao xác định cho từng chu tuyến.

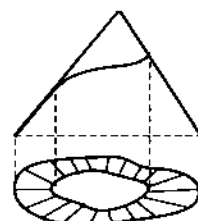


Hình 4.10

Bây giờ xét trạng thái xảy ra trước trạng thái giới hạn, tức là với $M < M_*$. Khi đó một phần tiết diện còn ở trạng thái đàn hồi, trong đó hàm ứng suất thỏa mãn phương trình (4.26), về mặt thực nghiệm tương tự với màng mỏng Prandtl. Nhưng chu tuyến để căng màng không phẳng, vì trên biên đàn dẻo phải thỏa mãn điều kiện liên tục của hàm ứng suất $F_p = F_e$, hàm này có giá trị khác nhau tại mỗi điểm trên biên đó. Sự phân bố hàm ứng suất khi có nhân đàn hồi có thể xác định bằng *phương pháp tương tự của Nadai*

b) *Phương pháp tương tự Nadai*

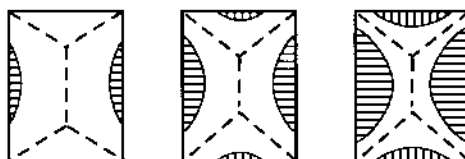
Làm một vỏ cứng có dạng mặt cát, chu tuyến đáy của nó trùng với chu tuyến của bản để đổ cát (trùng với chu tuyến tiết diện ngang của thanh). Trên chu tuyến đáy của vỏ căng một màng mỏng và cho áp suất tác dụng lên màng từ ngoài vào trong. Với áp suất không lớn lắm màng không dính vào vỏ cứng, ta có tương ứng với trường hợp xoắn đàn hồi. Khi áp suất tăng tới lúc màng bắt đầu dính sát vào vỏ cứng, ta có tương ứng với sự xuất hiện biến dạng dẻo.



Hình 4.11

Khi áp suất càng tăng màng càng dính sát vào vỏ. Hình chiếu của miền màng dính vào vỏ tương ứng với miền biến dạng dẻo trên tiết diện ngang, phần còn lại tương ứng với nhân đàn hồi. Rõ ràng rằng điều kiện $F_p = F_e$ thỏa mãn trên biên đàn dẻo. Mômen xoắn bằng hai lần thể tích giới hạn bởi màng và mặt đáy. Giá trị của hàm ứng suất đo bằng chiều cao của điểm trên vỏ cứng (tại miền biến dạng dẻo) hoặc độ võng của màng (tại miền biến dạng đàn hồi).

Trong hình 4.12 trình bày sự phát triển của miền biến dạng dẻo đối với thanh có tiết diện chữ nhật.



Hình 4.12

Đường gạch chỉ hướng đường trượt, đường chấm nhỏ là đường gián đoạn, khi đến giới hạn nhân đàn hồi suy biến về đường đó.

4. Ứng dụng phương pháp biến phân

Ta có thể sử dụng nguyên lý biến thiên ứng suất khả dĩ (xem 3.3.1 chương 3) vào giải bài toán xoắn thanh đàn hồi.

Trước hết tính công của gia số các lực ngoài trên chuyển dịch của các điểm đặt lực ấy. Nó bằng công của gia số momen δM trên góc quay của đáy tự do của thanh (xem đáy $z = 0$ gắn chặt, đáy $z = \ell$ tự do). Góc quay này bằng

$\varphi = \beta\ell$, trong đó β - góc xoắn trên đơn vị dài, ℓ - chiều dài thanh

$$\iint_S \delta \Sigma_j u_j dS = \delta M \cdot \beta \ell.$$

Sử dụng (4.25) vào đây ta được

$$\iint_S \delta \Sigma_j u_j dS = 2\beta\ell \delta \iint_S F dx dy. \quad (4.31)$$

Bây giờ tính công phụ của toàn bộ thanh, vì sự phân bố ứng suất ở mọi tiết diện thanh như nhau nên

$$\Pi = \iiint_V R dV = \ell \iint_S R dS.$$

Vì trường hợp này ứng với trượt thuần túy $\sigma = 0$, và theo (4.21) $\sigma_u = \sqrt{3} T$, $e_u = \frac{\Gamma}{\sqrt{3}}$, nên

$$R = \int_0^T \Gamma dT \quad \text{và} \quad \Pi = \ell \iint_S \left(\int_0^T \Gamma dT \right) dx dy. \quad (4.32)$$

Đặt (4.31) và (4.32) vào phương trình của nguyên lý biến thiên ứng suất khả dĩ ta được

$$\delta \mathcal{P} = \delta \iint_S \left(\int_0^T \Gamma dT - 2\beta F \right) dx dy = 0, \quad (4.33)$$

trong đó

$$\mathcal{P} = \iint_S \left(\int_0^T \Gamma dT - 2\beta F \right) dx dy. \quad (4.34)$$

Phương trình biến phân (4.33) có thể giải bằng phương pháp Ritz bằng cách chọn hàm $F(x, y)$ dưới dạng

$$F(x, y) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} F_{\alpha}(x, y), \quad (4.35)$$

Các hàm $F_\alpha(x, y)$ bằng không trên chu tuyến tiết diện, vì trên chu tuyến $F = 0$. Biểu diễn T qua F , rồi thay biểu thức của F nêu trên vào phiếm hàm $\mathcal{P}$, ta nhận được $\mathcal{P}$ trở thành hàm nhiều biến a_α . Điều kiện cực trị của $\mathcal{P}$ dẫn đến các phương trình xác định các hệ số a_α

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4.36)$$

Do đồ thị giữa Γ và T , tức đường cong biến dạng $\Gamma = \bar{g}(T)T$ là phi tuyến, nên ta nhận được hệ phương trình (4.36) phi tuyến. Việc tìm hàm F làm cực trị phiếm hàm $\mathcal{P}$ có thể tiến hành bằng phương pháp gần đúng liên tiếp như trình bày trong chương 3 (phương pháp nghiệm đàn hồi hoặc tham số đàn hồi thay đổi).

Ở gần đúng thứ không, lấy quan hệ giữa $\Gamma \sim T$ là đàn hồi $T = G\Gamma$, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iint_S \left(\int_0^T \frac{T}{G} d\Gamma - 2\beta F \right) dxdy = \iint_S \left(\frac{T^2}{2G} - 2\beta F \right) dxdy = \\ &= \iint_S \left[\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}{2G} - 2\beta F \right] dxdy. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Đặt F theo (4.30) vào (4.37) và từ điều kiện $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a_\alpha} = 0$, ta được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định $a_\alpha^{(0)}$, tức là xác định được $F^{(0)}(x, y) = \sum_\alpha a_\alpha^{(0)} F_\alpha(x, y)$ ở gần đúng thứ không, qua đó xác định $\tau_{xz}^{(0)}$, $\tau_{yz}^{(0)}$ và $T^{(0)}$.

Nếu $T^{(0)} < \tau_s$, nghiệm nhận được là nghiệm đúng.

Nếu $T^{(0)} > \tau_s$ ta thực hiện gần đúng tiếp theo

Ở gần đúng thứ nhất ta lấy

$$\Gamma = \bar{g}(T^{(0)})T,$$

trong đó $\bar{g}(T^{(0)})$ trở thành hàm đã biết của tọa độ. Ta có

$$\mathcal{P} = \iint_S \left(\frac{T^2}{2\bar{g}(T^{(0)})} - 2\beta F \right) dxdy = \iint_S \left[\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2}{2\bar{g}(T^{(0)})} - 2\beta F \right] dxdy,$$

và thực hiện các bước như ở gần đúng trước, kết quả nhận được $a_\alpha^{(1)}$ và $F^{(1)}(x, y) = \sum_\alpha a_\alpha^{(1)} F_\alpha(x, y)$.

Các gần đúng tiếp theo được tiến hành tương tự, ở gần đúng thứ n ta lấy $\Gamma = \bar{g}(T^{(n-1)})T$, trong đó $T^{(n-1)}$ là giá trị của T ở gần đúng thứ $n-1$.

4.4 Cầu rỗng dưới tác dụng của áp suất

Xét bài toán cầu rỗng bán kính trong là a , bán kính ngoài là b dưới tác dụng của áp suất trong. Do tính chất đối xứng tâm các biến dạng trượt và ứng suất tiếp bằng không, ngoài ra $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$. Quá trình đặt tải như vậy là đơn giản, vì vậy khi tính toán chúng ta dùng lý thuyết biến dạng.

Trong trường hợp này, các thành phần ứng suất thỏa mãn phương trình cân bằng trong tọa độ cầu (xem 1.4 chương 1)

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + 2\frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})}{r} = 0, \quad (4.38)$$

còn ứng suất trung bình và cường độ ứng suất bằng

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}),$$

$$\sigma_u = |\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}|.$$

Các thành phần biến dạng và cường độ biến dạng bằng

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r},$$

$$e_u = \frac{2}{3}|\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}|$$

trong đó $u \equiv u_r$ là chuyển dịch theo bán kính.

Các thành phần biến dạng thỏa mãn phương trình tương thích

$$\frac{d\varepsilon_{\varphi\varphi}}{dr} + \frac{\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0, \quad (4.39)$$

Giả sử cầu chỉ chịu tác dụng của áp suất trong p , điều kiện biên có dạng

$$\sigma_{rr} = -p \quad \text{với} \quad r = a,$$

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{với} \quad r = b.$$

Bây giờ cần xác định sự phân bố ứng suất và biến dạng trong vật thể nhờ các phương trình trên.

4.4.1 Trạng thái đàn hồi

Nếu áp suất chưa đủ lớn, cầu còn ở trạng thái hoàn toàn đàn hồi. Bài toán này đã được giải trong lý thuyết đàn hồi, kết quả nhận được

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u}{r} = \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] = \\ &= \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}]\end{aligned}$$

dẫn đến

$$\begin{aligned}u &= \frac{pa^3r}{E(b^3 - a^3)} \left(1 - 2\nu + \frac{1 + \nu}{2} \frac{b^3}{r^3}\right) = \\ &= p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{4G} \frac{b^3}{r^3}\right).\end{aligned}$$

Cường độ ứng suất

$$\sigma_u = \frac{3}{2}p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{b^3}{r^3} \quad (4.41)$$

đạt cực trị với $r = a$; vì vậy với áp suất $p < \frac{2}{3}\sigma_s \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) = p_s$ cầu ở trạng thái hoàn toàn đàn hồi, với $p = p_s$ trên biên $r = a$ của cầu bắt đầu xuất hiện biến dạng dẻo. Khi áp suất tăng miền dẻo càng lan rộng. Biên đàn dẻo là mặt cầu đồng tâm bán kính r_s .

4.4.2 Trạng thái đàn dẻo

Ở đây ta xét bài toán cầu rồng bằng *vật liệu dẻo lý tưởng* (không tái bền), khi đó cả hai điều kiện Tresca $\tau_{\max} = \tau_s$ và Mises $\sigma_u = \sigma_s$ đều dẫn đến

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \sigma_s. \quad (4.42)$$

Dấu cộng chọn ở đây dựa trên điều đã biết từ (4.41), tức là biết lịch sử xuất hiện miền dẻo.

a) Khi áp suất tăng miền biến dạng dẻo mở rộng. Gọi r_s là bán kính biên đàn dẻo; khi đó $a \leq r \leq r_s$ là miền *biến dạng dẻo*, tại đó thỏa mãn đồng thời phương trình cân bằng (4.38) và điều kiện chảy dẻo (4.42). Ta có

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{2\sigma_s}{r} = 0.$$

Tích phân phương trình vừa nhận được

$$\sigma_{rr} = 2\sigma_s \ln r + C_1$$

C_1 - hằng số tùy ý xác định từ điều kiện biên với $r = a$, $\sigma_{rr} = -p$. Kết quả cuối cùng cho ta

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - p \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \sigma_s = 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \sigma_s - p.\end{aligned}\quad (4.43)$$

Ở đây ta có bài toán xác định tĩnh có điều kiện, đó là loại bài toán đặc trưng cho vật liệu dẻo lý tưởng.

b) Miền $r_s \leq r \leq b$ tương ứng với biến dạng đàn hồi. Ta có thể nhận được nghiệm trong miền này bằng cách dùng hệ thức (4.40), trong đó thay thế p và a bằng q và r_s ,

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{qr_s^3}{b^3 - r_s^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{qr_s^3}{b^3 - r_s^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right), \\ u &= \frac{qr_s^3 r}{E(b^3 - r_s^3)} \left(1 - 2\nu + \frac{1 + \nu}{2} \frac{b^3}{r^3}\right),\end{aligned}\quad (4.44)$$

trong đó q là áp suất tác dụng tại $r = r_s$ để biên này xuất hiện dẻo đầu tiên, do đó

$$q = \frac{2}{3}\sigma_s \left(1 - \frac{r_s^3}{b^3}\right).$$

Hệ thức (4.44) đưa về

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{2}{3}\sigma_s \frac{r_s^3}{b^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{3}\sigma_s \frac{r_s^3}{b^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \\ u &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_s}{E} \frac{r_s^3 r}{b^3} \left(1 - 2\nu + \frac{1 + \nu}{2} \frac{b^3}{r^3}\right)\end{aligned}\quad (4.45)$$

Giá trị chưa biết r_s sẽ xác định từ điều kiện liên tục của ứng suất σ_{rr} trên biên đàn dẻo:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r_s-0} = \sigma_{rr} \Big|_{r_s+0}, \quad (4.46)$$

Dùng (4.43), (4.45) vào (4.46) ta nhận được phương trình để xác định bán kính r

$$\frac{2}{3}\sigma_s \frac{r_s^3}{b^3} \left(1 - \frac{b^3}{r_s^3}\right) = 2\sigma_s \ln \frac{r_s}{a} - p,$$

hay là

$$\ln \frac{r_s}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{r_s}{b}\right)^3 = \frac{p}{2\sigma_s} - \frac{1}{3}. \quad (4.47)$$

Chuyển dịch trong miền dẻo được xác định từ điều kiện biến dạng thể tích là hoàn toàn đàn hồi, tức là

$$\sigma = K\theta = \frac{E}{3(1-2\nu)}\theta,$$

từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r} &= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\varphi\varphi}) = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \left(6\sigma_s \ln \frac{r}{a} + 2\sigma_s - 3p\right). \end{aligned}$$

Tích phân lên ta được

$$u = \frac{1-2\nu}{E} \left(2\sigma_s r \ln \frac{r}{a} - pr\right) + \frac{C}{r^2}. \quad (4.48)$$

Hằng số C được xác định từ điều kiện liên tục về chuyển dịch trên biên đàn dẻo r_s

$$\frac{(1-2\nu)r_s}{E} \left(2\sigma_s \ln \frac{r_s}{a} - p\right) + \frac{C}{r_s^2} = \frac{2\sigma_s r_s^4}{3Eb^3} \left(1 - 2\nu + \frac{1+\nu}{2} \frac{b^3}{r_s^3}\right),$$

Chú ý đến (4.47) từ đây suy ra

$$C = \frac{\sigma_s r_s^3}{E} (1 - \nu).$$

Chuyển dịch trong miền dẻo có dạng

$$u = \frac{\sigma_s r}{E} \left[(1 - \nu) \frac{r_s^3}{r^3} + (1 - 2\nu) \left(2 \ln \frac{r}{a} - \frac{p}{\sigma_s} \right) \right]. \quad (4.49)$$

c) Nếu tăng áp suất p , miền biến dạng dẻo tăng cho đến khi $r_s = b$, nghiệm (4.43) thỏa mãn; mặt khác $\sigma_{rr} = 0$ với $r = b$. Vậy ở trạng thái giới hạn, áp suất đạt giá trị

$$2\sigma_s \ln \frac{b}{a} - p_* = 0,$$

hay là

$$p_* = 2\sigma_s \ln \frac{b}{a},$$

p_* là *áp suất giới hạn* để cho cầu rỗng biến dạng dẻo hoàn toàn.

4.4.3 Biến dạng dư và ứng suất dư

Với áp suất p ta nhận được ứng suất và biến dạng như trên. Bây giờ triệt tiêu áp suất p , trong cầu rỗng xuất hiện cất tải. Theo định lý về cất tải ứng suất giả định $\tilde{\sigma}_{rr}$ tính theo công thức (4.40) coi như cầu biến dạng đàn hồi với áp suất p . Ứng suất dư có dạng

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^* &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - p - \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - p + \sigma_s - \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right), \\ &\text{với } a \leq r \leq r_s,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^* &= \left(\frac{2}{3}\sigma_s \frac{r_s^3}{b^3} - \frac{pa^3}{b^3 - a^3}\right) \left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \left(\frac{2}{3}\sigma_s \frac{r_s^3}{b^3} - \frac{pa^3}{b^3 - a^3}\right) \left(1 + \frac{b^3}{2r^3}\right) \\ &\text{với } r_s \leq r \leq b.\end{aligned}$$

Các công thức này đúng khi cường độ ứng suất dư không vượt quá giới hạn đàn hồi. Nếu bây giờ lại tăng áp suất nhưng chưa vượt quá giá trị khi cất tải, thì biến dạng dẻo mới không xuất hiện. Thật vậy, khi đặt tải tiếp, thì đầu tiên xuất hiện thêm ứng suất và biến dạng theo lý thuyết đàn hồi không phụ thuộc vào việc tồn tại ứng suất dư cũ. Nhưng để đạt giới hạn dẻo phải tính cả ứng suất dư và ứng suất mới xuất hiện, cầu rỗng hình như bền hơn so với đặt tải ban đầu. Hiện tượng này gọi là *tăng bền kết cấu*.

4.4.4 Giải theo chuyển dịch

Trong trường hợp này hệ thức giữa ứng suất và biến dạng theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ với vật liệu dẻo lý tưởng có dạng

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= K(\varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}) \mp \frac{2}{3}\sigma_s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K(\varepsilon_{rr} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}) \pm \frac{1}{3}\sigma_s,\end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= K\left(\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r}\right) \mp \frac{2}{3}\sigma_s, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \left(\frac{du}{dr} + 2\frac{u}{r}\right) \pm \frac{1}{3}\sigma_s.\end{aligned}$$

Đặt các biểu thức này vào phương trình cân bằng (4.38) ta được

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 2r \frac{du}{dr} - 2u \mp \frac{2\sigma_s}{K}r = 0$$

và nghiệm của nó

$$\begin{aligned}u &= D_1 r + \frac{D_2}{r^2} \pm \frac{2}{3K}\sigma_s r \ln r = \\ &= D_1 r + \frac{D_2}{r^2} \pm \frac{1-2\nu}{E}\sigma_s r \ln r,\end{aligned}$$

D_1, D_2 - hằng số tùy ý xác định từ điều kiện biên $r = a$ và điều kiện liên tục trên biên $r = r_s$. Sau khi tính toán cũng sẽ dẫn đến kết quả trên.

Quả vậy thay biểu thức của u vào σ_{rr} ta được

$$\sigma_{rr} = 3KD_1 + 2\sigma_s \ln r.$$

Cho thỏa mãn điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p$ khi $r = a$ dẫn đến

$$3KD_1 = -p - 2\sigma_s \ln a,$$

ta nhận lại được biểu thức của σ_{rr} trong miền dẻo như (4.43)

$$\sigma_{rr} = 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} - p,$$

còn biểu thức của chuyển dịch u trong miền dẻo đưa về dạng (4.48).

4.5 Ứng suất nhiệt trong cầu rỗng

Ta xét cầu chịu tác dụng của sự chênh lệch nhiệt độ T_a tại mặt trong bán kính a và nhiệt độ T_b tại mặt ngoài bán kính b . Nhiệt độ trong cầu rỗng thay đổi theo r .

Nếu sự chênh lệch $T_a - T_b$ không quá lớn, thì trường nhiệt độ dừng $T(r)$ thỏa mãn phương trình Laplace đối xứng tâm

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0.$$

Nghiệm của nó có dạng

$$T(r) = \frac{\frac{b}{a} T_b - T_a}{\frac{b}{a} - 1} + \frac{T_a - T_b}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{b}{r} \quad (4.50)$$

Sự phân bố nhiệt độ này sẽ gây ra trong cầu trạng thái ứng suất biến dạng.

4.5.1 Ứng suất nhiệt đàn hồi

Quan hệ giữa ứng suất - biến dạng và nhiệt có dạng

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\theta\theta}) + \alpha T, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [(1 - \nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}] + \alpha T. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Phương trình tương thích (4.39) đưa về

$$\frac{d}{dr} [(1 - \nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}] + \frac{1 + \nu}{r} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) + E\alpha \frac{dT}{dr} = 0,$$

nhờ phương trình cân bằng (4.38) phương trình vừa nhận dẫn đến

$$\frac{d}{dr} (\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}) + 2 \frac{E\alpha}{1 - \nu} \frac{dT}{dr} = 0.$$

Tích phân lên ta được

$$\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta} = 3A + 2 \frac{E\alpha}{1 - \nu} T. \quad (4.52)$$

Kết hợp hệ thức này với phương trình (4.38) đưa về

$$\frac{d}{dr}(r^3 \sigma_{rr}) = 3Ar^2 + 2 \frac{E\alpha}{1-\nu} r^2 T.$$

Thay biểu thức của T theo (4.50) vào phương trình này và tích phân lên ta được

$$\sigma_{rr} = A + \frac{2B}{r^3} - \lambda \frac{b}{r}. \quad (4.53)$$

Nhờ (4.52) xác định ứng suất $\sigma_{\theta\theta}$

$$\sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^3} - \frac{\lambda}{2} \frac{b}{r} \quad (4.54)$$

trong đó

$$\lambda = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{(1-\nu)\left(\frac{b}{a} - 1\right)}$$

Nếu ứng suất chỉ do sự chênh lệch nhiệt độ, thì các hằng số A và B có thể xác định từ điều kiện $\sigma_{rr}(a) = \sigma_{rr}(b) = 0$. Kết quả cho ta

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\lambda \left[\frac{b}{r} - \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} + 1} \left(\frac{b^3}{r^3} + \frac{b^2}{r^2} + \frac{b}{a} \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\lambda \left[\frac{b}{2r} + \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} + 1} \left(\frac{b^3}{2r^3} - 2\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

và cường độ ứng suất

$$\sigma_u = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{b}{r} - \frac{3}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} + 1} \frac{b^3}{r^3} \right)$$

đạt được giá trị lớn nhất tại biên $r = a$

$$|\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|_{\max} = \frac{|\lambda|}{2} \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \left(\frac{2b}{a} + 1 \right)}{\left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{b}{a} + 1}$$

Biến dạng dẻo xảy ra đầu tiên tại $r = a$ khi giá trị này bằng σ_s . Do vậy đòi hỏi sự chênh lệch nhiệt độ để xuất hiện dẻo đầu tiên phải bằng

$$|T_a - T_b|_E = \frac{(1 - \nu)\sigma_s}{E\alpha} \cdot \frac{1 + \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 + \frac{a}{2b}}. \quad (4.56)$$

Derrington và Johnson khảo sát trường hợp cầu rỗng vừa chịu áp suất trong vừa chịu chênh lệch nhiệt độ.

Do bài toán nhiệt đàn hồi là tuyến tính, nên có thể sử dụng tính chất cộng nghiệm. Trường ứng suất trong cầu rỗng bằng tổng của nghiệm (4.40) và nghiệm (4.55). Nhưng trường hợp này không phải lúc nào σ_u cũng đạt cực đại tại $r = a$, mà còn phụ thuộc vào các tỷ số $\frac{p}{\lambda}$ và $\frac{b}{a}$.

4.5.2 Ứng suất nhiệt dẻo

Khi giá trị $|T_a - T_b|$ vượt quá $|T_a - T_b|_E$ trong cầu xuất hiện miền biến dạng dẻo $a \leq r \leq r_s$. Tại miền này phương trình cân bằng (4.38), điều kiện dẻo (4.42) và điều kiện biên $\sigma_{rr}(a) = 0$ cho ta xác định ứng suất

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\sigma_s \ln \frac{r}{a} + \sigma_s, \quad a \leq r \leq r_s. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Trong miền biến dạng đàn hồi $r_s \leq r \leq b$, ứng suất cho bởi hệ thức (4.53) (4.54). Điều kiện biên $\sigma_{rr}(b) = 0$ dẫn đến

$$A + \frac{2B}{b^3} = \lambda.$$

Điều kiện liên tục của ứng suất tại $r = r_s$ cho thêm hai phương trình đối với B và λ thông qua r_s , giải chúng ta được

$$\begin{aligned} B &= \sigma_s r_s^3 \frac{1 - \frac{r_s}{b} + \ln \frac{r_s}{a}}{\left(2 + \frac{r_s}{b}\right) \left(1 - \frac{r_s}{b}\right)^2}, \\ \lambda &= \sigma_s \frac{r_s}{b} \frac{2 \left(1 - \frac{r_s^3}{b^3}\right) + 3 \ln \frac{r_s}{a}}{\left(2 + \frac{r_s}{b}\right) \left(1 - \frac{r_s}{b}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

trong đó λ có dạng trong biểu thức (4.54).

Bài toán được thực hiện bằng cách xác định r_s từ hệ thức (4.58), tiếp đến xác định A, B và theo (4.53), (4.54) hoàn toàn xác định ứng suất của cầu trong miền đàn hồi.

4.6 Biến dạng đối xứng của ống dày

Xét trường hợp ống trụ dày dưới tác dụng của áp suất trong đối xứng trục. Đây là bài toán có nhiều ứng dụng thực tế, chẳng hạn ống dẫn, phuy chứa hình trụ. Có khá nhiều nghiên cứu về bài toán này, nhưng tìm nghiệm chặt chẽ của bài toán gặp nhiều khó khăn. Vì vậy để tính toán gần đúng người ta đưa vào một vài giả thiết.

Bây giờ phân ra hai trường hợp để xét: ống bằng vật liệu dẻo lý tưởng và vật liệu tái bền.

4.6.1 Trạng thái biến dạng đàn dẻo của ống trụ bằng vật liệu dẻo lý tưởng

Giả sử ống tương đối dài có đáy, khi đó dọc theo trục tác dụng lực $p\pi a^2$, như vậy bảo đảm trạng thái biến dạng của ống là phẳng ($\varepsilon_{zz} = 0$), vật liệu của ống giả thiết là dẻo lý tưởng (không tái bền) và không nén được ($\nu = \frac{1}{2}$).

Chọn tọa độ trụ r, θ, z trong đó z hướng theo trục của ống. Do tính chất đối xứng của bài toán, trạng thái ứng suất

$$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}), \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{zr} = 0$$

thỏa mãn phương trình cân bằng

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0. \quad (4.59)$$

Cường độ ứng suất có dạng

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}|. \quad (4.60)$$

Trạng thái biến dạng

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zr} = 0$$

thỏa mãn phương trình tương thích sau

$$\frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{dr} + \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}}{r} = 0. \quad (4.61)$$

Điều kiện biên của bài toán

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p & \text{với } r = a, \\ \sigma_{rr} &= 0 & \text{với } r = b. \end{aligned}$$

1. Trạng thái đàn hồi

Với áp suất p chưa đủ lớn, ống còn biến dạng đàn hồi, đây là bài toán Lamé đã giải trong lý thuyết đàn hồi. Nghiệm Lamé có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Trạng thái dẻo bắt đầu xuất hiện ở biên trong $r = a$, khi áp suất đạt giá trị

$$p = p_s = \tau_s \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (4.63)$$

2. Trạng thái đàn dẻo

Khi áp suất tăng miền biến dạng dẻo mở rộng. Gọi $r = r_s$ là bán kính biên đàn dẻo, khi đó

$$\begin{aligned} a \leq r \leq r_s & \text{ miền biến dạng dẻo,} \\ r_s \leq r \leq b & \text{ miền biến dạng đàn hồi.} \end{aligned}$$

a) Trong miền biến dạng đàn hồi ứng suất được xác định theo công thức (4.62); nhưng thay a bằng r_s và thay p bằng q . Giá trị q đóng vai trò như p trong (4.63) làm cho biên $r = r_s$ bắt đầu xuất hiện chảy dẻo. Vì vậy

$$q = \tau_s \left(1 - \frac{r_s^2}{b^2} \right),$$

Các thành phần ứng suất trong miền đàn hồi có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \tau_s \frac{r_s^2}{b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \tau_s \frac{r_s^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \tau_s \frac{r_s^2}{b^2}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

b) Trong miền biến dạng dẻo $a \leq r \leq r_s$ vật liệu dẻo lý tưởng nên thỏa mãn phương trình $\sigma_u = \sigma_s$, kết hợp với (4.60) suy ra

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} = 2\tau_s.$$

Vế phải trong (4.60) ta lấy dấu cộng vì với ống chỉ chịu áp suất trong, biểu thức $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ có giá trị dương.

Dem thay vào phương trình cân bằng (4.59) ta được

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} - \frac{2\tau_s}{r} = 0$$

và nghiệm của nó

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln r + C.$$

Hằng số C xác định từ điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p$ khi $r = a$, cuối cùng ta được

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{a} - p. \quad (4.65)$$

Ứng suất $\sigma_{\theta\theta}$ có giá trị

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} + 2\tau_s = 2\tau_s \ln \frac{r}{a} + 2\tau_s - p.$$

Trên biên đàn dẻo phải thỏa mãn điều kiện liên tục của ứng suất σ_{rr} , ta nhận được điều kiện này bằng cách cho

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=r_s-0} = \sigma_{rr} \Big|_{r=r_s+0},$$

hay là

$$2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} - p = -\tau_s \left(1 - \frac{r_s^2}{b^2} \right). \quad (4.66)$$

Từ đây ta tìm được bán kính miền dẻo r_s , thay thế vào (4.64) tính giá trị của ứng suất trong miền đàn hồi.

Các thành phần ứng suất trong miền dẻo được xác định nhờ (4.65), (4.66)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} - p = \tau_s \left(2 \ln \frac{r}{r_s} + \frac{r_s^2}{b^2} - 1 \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} + 2\tau_s - p = \tau_s \left(2 \ln \frac{r}{r_s} + \frac{r_s^2}{b^2} + 1 \right), \\ \sigma_{zz} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} + \tau_s - p = \tau_s \left(2 \ln \frac{r}{r_s} + \frac{r_s^2}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (4.67)$$

c) *Trạng thái giới hạn* (cả ống chuyển sang dẻo) đạt được khi $r_s = b$, từ hệ thức (4.66), ta nhận được áp suất giới hạn

$$p_* = 2\tau_s \ln \frac{b}{a}.$$

Công thức này dùng một cách rộng rãi để tính bền vững của ống trụ và phuy chứa,

3. Ứng suất dư

Nếu khử áp suất đi, trong ống sẽ xuất hiện cắt tải. Theo định lý về cắt tải ta tính ứng suất đàn hồi giả định theo công thức (4.62). Ứng suất dư sẽ bằng

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^* &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} - p - \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right) - p - \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \text{ với } a \leq r \leq r_s; \\ \sigma_{rr}^* &= \left(\tau_s \frac{r_s^2}{b^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\theta\theta}^* &= \left(\tau_s \frac{r_s^2}{b^2} - \frac{pa^2}{b^2 - a^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \text{ với } r_s \leq r \leq b.\end{aligned}$$

4. Xác định chuyển dịch

Chuyển dịch trong miền đàn hồi xác định từ định luật Hooke

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \right] = \frac{3}{4E} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}).$$

Thay $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$ và các biểu thức của ứng suất (4.64) vào đây ta được

$$u = \frac{3\tau_s r_s^2}{2Er}. \quad (4.68)$$

Trong miền dẻo chuyển dịch được xác định từ điều kiện không nén được

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$$

dẫn đến $u = \frac{C}{r}$. Hằng số C được xác định từ điều kiện liên tục của chuyển dịch trên biên đàn dẻo. Kết quả cho thấy chuyển vị trong miền đàn hồi và miền dẻo có cùng công thức (4.68).

5. Điều kiện tồn tại trạng thái làm việc của ống

Khi ống chịu áp suất trong ta thấy xuất hiện ứng suất σ_{zz} . Giá trị của lực pháp tác dụng trên tiết diện ngang của ống bằng

$$N = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz} r dr.$$

Đặt vào biểu thức này ứng suất dọc trục theo công thức (4.64), (4.67), ta được

$$N = 2\pi \int_a^{r_s} \tau_s \left(2\ln \frac{r}{r_s} + \frac{r_s^2}{b^2} \right) r dr + \int_{r_s}^b \tau_s \frac{r_s^2}{b^2} r dr,$$

nhờ công thức (4.66) sau khi tính toán dẫn đến

$$N = \pi a^2 \tau_s \left(2\ln \frac{r_s}{a} - \frac{r_s^2}{b^2} - 1 \right) = p\pi a^2. \quad (4.69)$$

Rõ ràng lực dọc trục này xuất hiện trong ống dày có đáy, chịu áp suất trong. Do đó biến dạng dọc trục bằng không nếu các đầu ống không thể chuyển dịch theo hướng trục hoặc là nếu ống bằng vật liệu không nén được giá trị của lực dọc trục phải được xác định bằng công thức (4.69).

4.6.2 Trạng thái đàn dẻo của ống trụ bằng vật liệu tái bền

Ilyushin [56] đã giải bài toán đàn dẻo của ống trụ bằng vật liệu tái bền và không nén được

1. Ống trụ chịu tác dụng của áp suất và lực dọc trục

Giả sử ống trụ dưới tác dụng của áp suất trong p_a , áp suất ngoài p_b và lực dọc trục N . Vì rằng áp suất và lực trục không đổi theo chiều dài, nên có thể xem biến dạng theo trục

$$\varepsilon_{zz} = \text{const.}$$

Đặt các giá trị của biến dạng theo chuyển dịch vào điều kiện không nén được

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 0,$$

suy ra

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = -\varepsilon_{zz}.$$

Tích phân lên ta được

$$u = -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz}r + \frac{C}{r}. \quad (4.70)$$

Khi đó biến dạng

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz} - \frac{C}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{zz} + \frac{C}{r^2} \end{aligned}$$

và cường độ biến dạng sẽ bằng

$$e_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{4}\varepsilon_{zz}^2 + \frac{C^2}{r^4}}. \quad (4.71)$$

Như vậy cường độ biến dạng và cường độ ứng suất $\sigma_u = \Phi(e_u)$ là hàm đã biết của r và hai hằng số ε_{zz} , C .

Nhờ hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ biểu thị ứng suất qua biến dạng trong trường hợp này

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - \sigma &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{rr}, \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{zz} - \sigma &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{zz}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} (\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}), \\ \sigma_{zz} - \sigma_{rr} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr}), \end{aligned}$$

thay thế biểu thức của biến dạng vào đây

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{4\sigma_u}{3e_u} \frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{zz} - \sigma_{rr} &= \frac{2\sigma_u}{3e_u} \left(\frac{3}{2}\varepsilon_{zz} + \frac{C}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ta sẽ sử dụng các hệ thức trên và các phương trình cân bằng trong trường hợp này để giải bài toán; ngoài ra cần điều kiện cân bằng lực tác dụng dọc theo trục

$$N = 2\pi \int_a^b \sigma_{zz} r dr \quad (4.73)$$

và điều kiện biên

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p_a \quad \text{với } r = a, \\ \sigma_{rr} &= -p_b \quad \text{với } r = b. \end{aligned}$$

Trước hết hãy biến đổi hệ thức (4.71)

$$\frac{C}{r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2} \operatorname{sign} C. \quad (4.74)$$

Vi phân hệ thức vừa nhận được

$$-\frac{2C}{r^3} dr = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{e_u de_u}{\sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2}} \operatorname{sign} C$$

và thay $\frac{C}{r^2}$ theo hệ thức trên vào đây

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \frac{e_u de_u}{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2}.$$

Nhờ (4.74) viết hệ thức (4.72)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_u}{e_u} \sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2} \operatorname{sign} C, \\ \sigma_{zz} - \sigma_{rr} &= \frac{\sigma_u}{e_u} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2} \operatorname{sign} C + \varepsilon_{zz} \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Thế hệ thức thứ nhất của (4.75) vào phương trình cân bằng (4.59) và tích phân lên

$$\sigma_{rr} = C_1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_u}{e_u} \sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2} \operatorname{sign} C \frac{dr}{r}.$$

Đặt biểu thức $\frac{dr}{r}$ vào đây

$$\sigma_{rr} = C_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sigma_u de_u}{\sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2}} \text{sign } C.$$

Gọi cường độ biến dạng tại $r = a$ là $e_u^{(a)}$ và tại $r = b$ là $e_u^{(b)}$ hằng số C_1 xác định từ điều kiện biên với $r = a$. Ta có

$$\sigma_{rr} = -p_a + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{e_u^{(b)}}^{e_u^{(a)}} \frac{\sigma_u de_u}{\sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2}} \text{sign } C. \quad (4.76)$$

Như vậy chúng ta còn 4 hằng số cần xác định là ε_{zz} , $e_u^{(a)}$, $e_u^{(b)}$, C . Bây giờ viết các phương trình xác định các hằng số đó. Từ điều kiện biên với $r = b$ ta được

$$p_a - p_b = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{e_u^{(b)}}^{e_u^{(a)}} \frac{\sigma_u de_u}{\sqrt{e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2}} \text{sign } C. \quad (4.77)$$

Từ hệ thức này suy ra dấu của C trùng với dấu của $p_a - p_b$. Xét hệ thức (4.74), nó đúng với mọi r , tức là

$$\frac{4}{3} C^2 = r^4 (e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2) = a^4 (e_u^{(a)2} - \varepsilon_{zz}^2) = b^4 (e_u^{(b)2} - \varepsilon_{zz}^2), \quad (4.78)$$

suy ra

$$r^2 = a^2 \sqrt{\frac{e_u^{(a)2} - \varepsilon_{zz}^2}{e_u^{(b)2} - \varepsilon_{zz}^2}}.$$

Vì phân biểu thức vừa nhận được

$$r dr = -\frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{e_u^{(a)2} - \varepsilon_{zz}^2}}{(e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2)^{3/2}} e_u de_u.$$

Bây giờ đặt vào (4.73) biểu thức của σ_{zz} theo (4.75) và dùng các hệ thức của σ_{rr} và $r dr$, ta có

$$\frac{N - \pi(p_a a^2 - p_b b^2)}{\pi a^2} = \varepsilon_{zz} \sqrt{e_u^{(a)2} - \varepsilon_{zz}^2} \int_{e_u^{(b)}}^{e_u^{(a)}} \frac{\sigma_u de_u}{(e_u^2 - \varepsilon_{zz}^2)^{3/2}}. \quad (4.79)$$

Nếu cho trước dạng hàm $\sigma_u = \Phi(e_u)$ các phương trình (4.77), (4.78) và (4.79) sẽ xác định các hằng số ε_{zz} , $e_u^{(a)}$, $e_u^{(b)}$ và C . Ứng suất hoàn toàn xác định theo (4.75), (4.76) và chuyển dịch xác định theo công thức (4.70).

2. Ống chỉ chịu tác dụng của áp suất

Từ hệ thức (4.79) ta thấy rằng nếu không tác dụng lực dọc trục thì dưới tác dụng chỉ của áp suất trong ống sẽ ngắn đi ($\varepsilon_{zz} < 0$) và chỉ áp suất ngoài ống sẽ dài ra ($\varepsilon_{zz} > 0$).

Với ống có đáy chịu tác dụng của áp suất trong và ngoài, lực dọc trục xuất hiện do áp suất vào đáy bằng

$$N = \pi(p_a a^2 - p_b b^2).$$

Khi đó từ (4.79) suy ra $\varepsilon_{zz} = 0$, tức là trong trường hợp này ống không biến dạng theo trục, các công thức (4.75), (4.76), (4.77) có dạng

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p_a + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{e_u}^{e_u^{(a)}} \frac{\sigma_u de_u}{e_u} \text{sign}(p_a - p_b), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_u \text{sign}(p_a - p_b), \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}),\end{aligned}\tag{4.80}$$

$$p_a - p_b = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{e_u^{(b)}}^{e_u^{(a)}} \frac{\sigma_u de_u}{e_u} \text{sign}(p_a - p_b).$$

Chú ý. Các công thức trình bày trong mục này ứng với trường hợp toàn bộ ống dày đã chuyển sang giai đoạn dẻo

3. Ống bằng vật liệu tái bền tuyến tính chịu áp suất trong

Chúng ta khảo sát trạng thái đàn dẻo của ống dày nêu trên làm bằng vật liệu tái bền tuyến tính, không nén được và chịu tác dụng chỉ của áp suất trong $p_a = p$

Trong trường hợp này $\varepsilon_{zz} = 0$ (suy từ (4.79)), $u = \frac{C}{r}$ (suy từ (4.70)) và $e_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{r^2}$ (suy từ (4.71)).

Giả sử áp suất p đã lớn hơn giá trị $p_s = \tau_s \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$ để trong ống xuất hiện miền biến dạng đàn hồi và miền biến dạng dẻo.

a) Trong *miền biến dạng đàn hồi* $r_s \leq r \leq b$. Các thành phần ứng suất được xác định theo công thức (4.64) như ở mục trên, trong đó r_s là biên đàn dẻo cần xác định

b) Trong *miền biến dạng dẻo* $a \leq r \leq r_s$. Đối với vật liệu dẻo tái bền tuyến tính đường cong biến dạng có dạng

$$\sigma_u = \sigma_s + g(e_u - e_s) = \lambda \sigma_s + g e_u,$$

trong đó $\lambda = 1 - \frac{g}{3G}$, g - mô đun tái bền.

Theo công thức (4.80) ta tính ứng suất

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{e_u}^{e_u^{(a)}} \frac{\lambda \sigma_s + g e_u}{e_u} d e_u = \\ &= -p + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda \sigma_s \ln \frac{e_u^{(a)}}{e_u} + \frac{1}{\sqrt{3}} g (e_u^{(a)} - e_u). \end{aligned}$$

Thay biểu thức của e_u vào đây ta được

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda \sigma_s \ln \frac{r}{a} + \frac{2}{3} g \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) C.$$

Nhờ công thức (4.78)

$$r^2 e_u = a^2 e_u^{(a)} = r_s^2 e_u^{(s)},$$

với $\varepsilon_{zz} = 0$, $e_u^{(s)} = e_s$ trên biên đàn dẻo, $e_u^{(a)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{a^2}$ suy ra

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2} r_s^2 e_s.$$

Các biểu thức của các thành phần ứng suất (4.80) có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\lambda \tau_s \ln \frac{r}{a} + \frac{g}{3G} \tau_s r_s^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\lambda \tau_s \ln \frac{r}{a} + \frac{g}{3G} \tau_s r_s^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) + 2\lambda \tau_s, \\ \sigma_{zz} &= -p + \lambda \tau_s + 2\lambda \tau_s \ln \frac{r}{a} + \frac{g}{3G} \tau_s \frac{r_s^2}{a^2}, \end{aligned} \quad (4.81)$$

trong đó: $\tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$, $\sigma_s = 3G e_s$.

Biên đàn dèo r_s được xác định từ điều kiện liên tục của ứng suất σ_{rr} tại biên này. Sử dụng công thức (4.64) và (4.81) ta được

$$\tau_s \frac{r_s^2}{b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r_s^2} \right) = 2\lambda \tau_s \ln \frac{r_s}{a} + \frac{g}{3G} \tau_s \left(\frac{r_s^2}{a^2} - 1 \right) - p,$$

hay là

$$p = \tau_s \left(2\lambda \ln \frac{r_s}{a} + \frac{g}{3G} \frac{r_s^2}{a^2} - \frac{r_s^2}{b^2} + \lambda \right) \quad (4.82)$$

Biểu thức của chuyển dịch có dạng

$$u = \frac{C}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{r_s^2 \epsilon_s}{r} \quad (4.83)$$

đúng cho cả miền đàn hồi và miền dẻo.

Bài toán đưa về giải phương trình siêu việt (4.82) để xác định biên đàn dèo r_s khi cho trước áp suất p . Tiếp đến theo (4.64), (4.81) và (4.83) xác định các thành phần ứng suất và chuyển dịch của ống.

Do đó, tái bền không ảnh hưởng đến quy luật phân bố của ứng suất trong miền đàn hồi và chuyển dịch hướng kính trong miền đàn hồi và miền dẻo.

4. Sự tăng bền của ống dày

Trong thực tiễn sản xuất ống dày đôi khi người ta làm tăng khả năng chịu tải của chúng trong giới hạn đàn hồi bằng cách cho ống chịu tác dụng của áp suất trong, khi đó trong ống xuất hiện biến dạng dẻo. Hiện tượng này gọi là *sự tăng bền* (sự nong tự rắn).

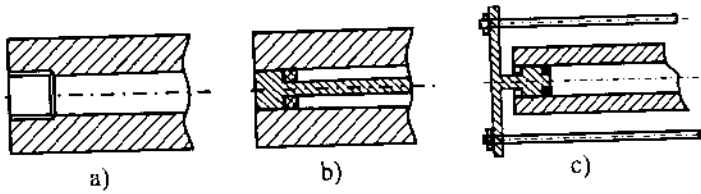
Sự tăng bền của ống được tiến hành hoặc ở giai đoạn đàn dẻo, khi trong ống tồn tại miền đàn hồi và miền dẻo, hoặc là trong giai đoạn dẻo, khi miền đàn hồi biến mất và cường độ ứng suất σ_u tại mọi điểm của ống vượt qua giới hạn chảy σ_s .

Có hai phương pháp làm tăng bền:

Phương pháp thứ nhất. Tăng bền với sự kéo dọc trục. Ống được bịt kín bằng các nắp (hình 4.13a), do tác dụng của áp suất trong sẽ xuất hiện lực kéo

$$N = p\pi a^2.$$

Phương pháp thứ hai. Tăng bền không có sự kéo dọc trục. Trong trường hợp này các nắp bịt không vặn vào ống mà nối với nhau bằng một thanh dọc trục ống (hình 4.13b) hoặc nhiều thanh (hình 4.13c). Với phương pháp này lực nong kéo ống bằng không.



Hình 4.13

4.7 Trạng thái đàn dẻo của đĩa tròn quay đều

Xét đĩa tròn bị đốt nóng đều có độ dày không đổi quay đều với vận tốc góc ω không đổi. Giả thiết vật liệu của đĩa không có tái bền.

Ta sử dụng các giả thiết tính toán đĩa trong giới hạn đàn hồi. Giả thiết thứ nhất ứng suất phân bố đều theo pháp tuyến với mặt phẳng giữa của đĩa. Giả thiết thứ hai trong các mặt phẳng song song với mặt giữa không có ứng suất. Theo giả thiết thứ nhất khi đặt tải đối xứng trục vào đĩa thì ứng suất, biến dạng và chuyển dịch chỉ là hàm của bán kính điểm. Từ giả thiết thứ hai suy ra trạng thái ứng suất tại mọi điểm là hai chiều hay là phẳng.

Sử dụng điều kiện đối xứng trục và giả thiết không có ứng suất trên các mặt phẳng song song với mặt giữa dẫn đến ứng suất tiếp theo hướng kính và theo hướng vòng không tồn tại. Do đó các tiết diện ứng với các hướng này là các tiết diện chính, tương ứng với chúng ứng suất vòng $\sigma_{\theta\theta}$ và ứng suất kính σ_{rr} là các ứng suất chính.

Trong giai đoạn đàn hồi các điểm nguy hiểm nhất của đĩa sẽ hoặc là tâm của đĩa trong trường hợp đĩa không có lỗ thủng, hoặc là các điểm thuộc biên trong đối với đĩa có lỗ. Do vậy miền biến dạng dẻo hoặc là chứa điểm tâm của đĩa hoặc là kề với biên trong của đĩa.

Các thành phần ứng suất thỏa mãn phương trình chuyển động

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\gamma\omega^2 r}{g} = 0, \quad (4.84)$$

trong đó γ - trọng lượng riêng của vật liệu đĩa, g - gia tốc trọng trường, và các điều kiện biên:

a) Với đĩa không lỗ bán kính b

tại $r = 0, \sigma_{rr}$ và $\sigma_{\theta\theta}$ phải có giá trị hữu hạn

tại $r = b, \sigma_{rr} = 0$.

(4.85)

b) Với đĩa có lỗ, bán kính trong a , bán kính ngoài b

$$\begin{aligned} \text{tại } r = a, \quad \sigma_{rr} &= 0, \\ \text{tại } r = b, \quad \sigma_{rr} &= 0. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Khi đĩa quay với vận tốc góc ω đủ lớn, lực khối $\frac{\gamma}{g}\omega^2 r$ tác dụng vào đĩa làm cho đĩa xuất hiện miền biến dạng dẻo. Việc xác định ứng suất trên từng miền được thực hiện bằng cách giải phương trình (4.84) và các phương trình biểu thị quan hệ ứng suất biến dạng tại từng miền.

1. **Miền biến dạng đàn hồi.** Các thành phần ứng suất được xác định theo công thức như trong lý thuyết đàn hồi [37] bằng cách kết hợp phương trình (4.84) và định luật Hooke:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= A - \frac{B}{r^2} - \frac{3 + \nu}{8} \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A + \frac{B}{r^2} - \frac{1 + 3\nu}{8} \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

trong đó A, B là các hằng số tích phân cần xác định.

2. **Miền biến dạng dẻo.** Các thành phần ứng suất được xác định từ phương trình (4.84) và điều kiện dẻo. Nếu sử dụng điều kiện dẻo Mises

$$\sigma_u^2 = \sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_s^2$$

việc giải bài toán gặp nhiều khó khăn, thường giải quyết bằng phương pháp số. Sokolovski [32] đã giải bài toán này và còn mở rộng cho trường hợp có tính đến tái bền và độ dày đĩa thay đổi.

Để đơn giản cách giải bài toán, ta sử dụng điều kiện dẻo Tresca - Saint Venant. Trong trường hợp này $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} > 0$, nên điều kiện dẻo có dạng

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\tau_s = \sigma_s. \quad (4.88)$$

Tích phân phương trình (4.84) có tính đến (4.88) ta nhận được

$$\sigma_{rr} = \sigma_s - \frac{\gamma \omega^2 r^2}{3g} + \frac{C}{r}, \quad (4.89)$$

trong đó C là hằng số tích phân.

Các hằng số A, B, C và biên đàn dẻo r_s được xác định từ các điều kiện biên và điều kiện liên tục trên biên đàn dẻo.

a) **Đĩa không có lỗ.** Ta có $0 \leq r \leq r_s$ miền dèo, còn $r_s \leq r \leq b$ miền đàn hồi. Các thành phần ứng suất phải thỏa mãn điều kiện biên (4.85) và điều kiện liên tục tại $r = r_s$,

$$\sigma_{rr}|_{r_s+0} = \sigma_{rr}|_{r_s-0}, \quad \sigma_{\theta\theta}|_{r_s+0} = \sigma_{\theta\theta}|_{r_s-0}.$$

Điều kiện thứ nhất của (4.85) dẫn đến $C = 0$ (vì tâm $r = 0$ thuộc miền dèo). Điều kiện thứ hai của (4.85) trên $r = b$ (thuộc miền đàn hồi) cho ta

$$A - \frac{B}{b^2} - \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2 b^2}{g} = 0. \quad (4.90)$$

Điều kiện liên tục trên r_s dẫn đến

$$\begin{aligned} A - \frac{B}{r_s^2} - \frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2 r_s^2}{g} &= \sigma_s - \frac{\gamma\omega^2 r_s^2}{g}, \\ A + \frac{B}{r_s^2} - \frac{1+3\nu}{8} \cdot \frac{\gamma\omega^2 r_s^2}{g} &= \sigma_s. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Giải hệ (4.91) đối với A, B ta được

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+3\nu}{12} \cdot \frac{\gamma\omega^2 r_s^2}{g} + \sigma_s, \\ B &= \frac{1+3\nu}{24} \cdot \frac{\gamma\omega^2 r_s^4}{g}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Đặt (4.92) vào (4.90) ta nhận được công thức xác định biên đàn dèo r_s phụ thuộc vào góc quay ω

$$\omega = \left(24 \frac{g\sigma_s}{\gamma} \cdot \frac{b^2}{3(3+\nu)b^4 - 2(1+3\nu)b^2 r_s^2 + (1+3\nu)r_s^4} \right)^{1/2} \quad (4.93)$$

Sử dụng các biểu thức vừa nhận được vào (4.87), (4.88), (4.89) ta có các công thức xác định các thành phần ứng suất:

* Trong miền đàn hồi $r_s \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_s + \frac{1+3\nu}{24} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \left(2r_s^2 - \frac{r_s^4}{r^2} - 3 \frac{3+\nu}{1+3\nu} r^2 \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_s + \frac{1+3\nu}{24} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \left(2r_s^2 + \frac{r_s^4}{r^2} - 3r^2 \right). \end{aligned} \quad (4.94)$$

* Trong miền dèo $0 \leq r \leq r_s$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_s - \frac{\gamma\omega^2 r^2}{3g}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_s.\end{aligned}\tag{4.95}$$

Vận tốc góc quay giới hạn khi miền dèo chiếm toàn bộ đĩa nhận được từ (4.93) cho $r_s = b$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3g\sigma_s}{\gamma b^2}}$$

b) **Đĩa có lỗ hổng.** Ta có miền biến dạng dèo $a \leq r \leq r_s$ và miền đàn hồi $r_s \leq r \leq b$. Các thành phần ứng suất thỏa mãn điều kiện biên (4.86) và điều kiện liên tục trên biên đàn dèo.

Bằng cách làm tương tự như trường hợp trên, ta nhận được quan hệ giữa vận tốc góc ω và biên đàn dèo r_s

$$\omega = \left[\frac{12g\sigma_s}{\gamma} \cdot \frac{2r_s b^2 - a(b^2 + r_s^2)}{3(3 + \nu)r_s b^4 - (1 + 3\nu)r_s^3(2b^2 - r_s^2) - 4a^3(b^2 + r_s^2)} \right]^{1/2} \tag{4.96}$$

và các công thức xác định ứng suất:

* Trong miền đàn hồi

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_s \left(1 - \frac{a}{2r_s} - \frac{ar_s}{2r^2} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma\omega^2}{24} \left[(1 + 3\nu) \left(2r_s^2 - \frac{r_s^4}{r^2} - 3\frac{3 + \nu}{1 + 3\nu} r^2 \right) + 4a^2 \left(\frac{a}{r_s} + \frac{ar_s}{r^2} \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_s \left(1 - \frac{a}{2r_s} + \frac{ar_s}{2r^2} \right) \\ &\quad + \frac{\gamma\omega^2}{24g} \left[(1 + 3\nu) \left(2r_s^2 + \frac{r_s^4}{r^2} - 3r^2 \right) + 4a^2 \left(\frac{a}{r_s} - \frac{ar_s}{r^2} \right) \right]\end{aligned}\tag{4.97}$$

* Trong miền dèo

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_s \left(1 - \frac{a}{r} \right) - \frac{\gamma\omega^2}{3g} \left(r^2 - \frac{a^3}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_s.\end{aligned}\tag{4.98}$$

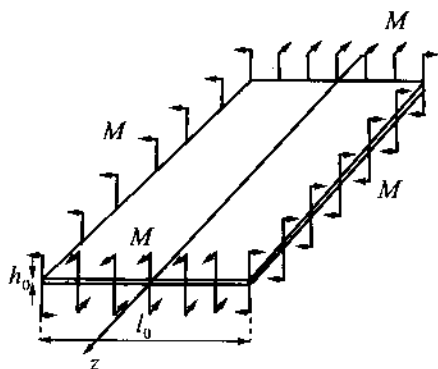
Vận tốc quay giới hạn được xác định từ (4.96) với $r_s = b$

$$\omega^* = \sqrt{\frac{3g\sigma_s}{\gamma(b^2 + ab + a^2)}}.$$

3. Khái niệm về sự tăng bền của đĩa

Sự tăng bền của đĩa là quá trình làm tăng khả năng chịu lực của đĩa bằng quá trình biến dạng dẻo trước khi khai thác sử dụng. Quy trình tiến hành như sau: cho đĩa trên giá đặc biệt quay đều với vận tốc góc sao cho trong đĩa xuất hiện biến dạng dẻo. Vì quay đĩa bị đốt nóng đều, các điểm biến dạng nhiều là các điểm thuộc biên trong, nên biến dạng dẻo cũng bắt đầu phát triển từ các điểm ấy. Khi tăng số vòng quay miền dẻo kề với biên trong tăng lên. Sau đó cho giảm dần số vòng quay và cho đĩa dừng, trong đĩa đã xuất hiện miền dẻo, đĩa được cất tải hoàn toàn, nhưng trong đĩa còn ứng suất dư. Ứng suất dư hướng kính là ứng suất nén tại mọi điểm, ứng suất vòng là ứng suất nén tại miền kề với biên trong và ứng suất kéo tại miền còn lại. Người ta dùng phương pháp này để làm tăng khả năng chịu lực của các đĩa làm bằng thép, chẳng hạn các đĩa tuốc bin.

4.8 Uốn tấm lá



Hình 4.14

Ta khảo sát sự uốn tấm lá khi có biến dạng lớn

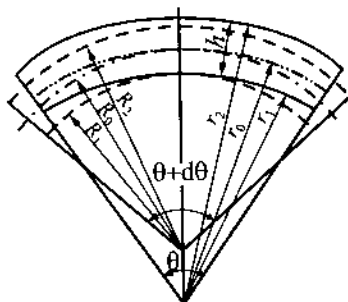
Xem rằng biến dạng của tấm lá theo hướng trục giao với mặt phẳng uốn bằng không

$$\varepsilon_{zz} = 0. \quad (4.99)$$

Giả thiết thêm vật liệu là dẻo lý tưởng, biến dạng đàn hồi nhỏ so với biến dạng dẻo nên có thể bỏ qua. Do vậy đường cong biến dạng ứng với vật liệu cứng dẻo lý tưởng.

Với uốn thuần túy do tính đối xứng của cách đặt lực, tấm lá uốn theo cung tròn.

Trong hình 4.15 ta hình dung hai trạng thái biến dạng lân cận của tấm lá. Giả thiết rằng khi chuyển từ trạng thái này sang trạng thái kia gần nhau biến dạng và chuyển dịch là nhỏ. Để cho xác định ta giả thiết thêm khi uốn mặt giữa của tấm lá không bị vặn và điểm dưới của tiết diện này cố định.



Hình 4.15

Gọi mặt phân chia hai miền của tấm lá, miền bị dãn và miền bị nén theo hướng vòng, là mặt biên.

Ký hiệu r_1, r_2 là bán kính mặt trong và ngoài của tấm lá ở trạng thái thứ nhất, còn r_0 là bán kính của mặt biên và R_1, R_2, R_0 là bán kính tương ứng của tấm lá ở trạng thái kế tiếp.

Do tính đối xứng của biến dạng nên tiết diện kính và tiết diện vòng của tấm lá là tiết diện chính và ứng suất trên nó $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ là ứng suất chính. Chúng thỏa mãn phương trình cân bằng

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (4.100)$$

và điều kiện biên

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 0 \quad \text{tại } r = r_1, \\ \sigma_{rr} &= 0 \quad \text{tại } r = r_2. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Từ phương trình này có thể suy ra lực pháp tác dụng trên tiết diện kính bằng không. Quả vậy ta viết lại phương trình (4.100) dưới dạng

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} = 0,$$

tích phân phương trình này từ r_1 đến r_2 và chú ý đến điều kiện biên (4.101) ta được

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\theta} dr = 0.$$

Theo thuyết chảy quan hệ ứng suất - biến dạng cho vật liệu không nén được có dạng

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{rr} &= \frac{3}{2} \frac{de_u}{\sigma_u} (\sigma_{rr} - \sigma), \\ d\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{3}{2} \frac{de_u}{\sigma_u} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma), \\ d\varepsilon_{zz} &= \frac{3}{2} \frac{de_u}{\sigma_u} (\sigma_{zz} - \sigma), \end{aligned} \quad (4.102)$$

trong đó

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}.$$

Do điều kiện (4.99) $d\varepsilon_{zz} = 0$ nên từ hệ thức thứ ba của (4.102) suy ra

$$\sigma_{zz} = \sigma,$$

kết hợp với $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})$ ta được

$$\sigma_{zz} = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}). \quad (4.103)$$

Biểu thức của cường độ ứng suất dẫn đến

$$\sigma_u = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}), \quad (4.104)$$

dấu cộng ứng với miền dẫn theo hướng vòng, còn dấu trừ ứng với miền nén.

Do vật liệu dẻo lý tưởng nên điều kiện dẻo $\sigma_u = \sigma_s$ có dạng

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s = \pm 2\tau_s \quad (4.105)$$

Giải hai phương trình (4.100) và (4.105) cho nghiệm

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2\tau_s \ln \frac{r}{r_1} + C_1 \quad \text{với } r_1 \leq r \leq r_0, \\ \sigma_{rr} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{r_2} + C_2 \quad \text{với } r_0 \leq r \leq r_2. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Các hằng số C_1 , C_2 và r_0 xác định từ điều kiện biên (4.101) và điều kiện liên tục trên biên $r = r_0$, $\sigma_{rr}^{\text{dẫn}} = \sigma_{rr}^{\text{nén}}$. Cho thỏa mãn điều kiện (4.101) dẫn đến $C_1 = C_2 = 0$. Các hệ thức xác định ứng suất có dạng

* Trong miền $r_1 \leq r \leq r_0$

$$\sigma_{rr} = -2\tau_s \ln \frac{r}{r_1}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{r_1}\right) \quad (4.107)$$

* Trong miền $r_0 \leq r \leq r_2$

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{r_2}\right). \quad (4.108)$$

Điều kiện liên tục trên biên r_0 cho ta hệ thức xác định bán kính của lớp biên

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2}. \quad (4.109)$$

Bây giờ xác định mômen uốn

$$M = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\theta} r dr = - \int_{r_1}^{r_0} 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{r_1}\right) r dr + \int_{r_0}^{r_2} 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{r_2}\right) r dr,$$

sau khi tính toán nhận được

$$M = 2\tau_s \frac{(r_2 - r_1)^2}{4} = \frac{\tau_s h^2}{2} \quad (4.110)$$

trong đó $h = r_2 - r_1$ - độ dày của tấm lá ở trạng thái biến dạng. Tiếp sau ta sẽ chỉ ra trong quá trình biến dạng độ dày của tấm lá không thay đổi $h = h_0$. Điều này rất có ý nghĩa trong thực tiễn gia công tạo dáng kết cấu.

Nhờ công thức (4.103), (4.107) và (4.108) ta tính lực pháp và mômen uốn trong tiết diện ngang của tấm lá

$$N_z = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz} r dr d\theta,$$

$$M_z = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{zz} r^2 \cos \theta dr d\theta,$$

trong đó φ là góc mở của tấm lá. Thay biểu thức của σ_{zz} và thực hiện tính toán ta thấy $N_z = 0$ còn M_z khác không. Vì vậy điều kiện để thực hiện uốn dạng trụ thì phải đặt mômen ở hai đầu của tấm lá. Nếu không đặt mômen này mặt biến dạng của tấm lá không còn là mặt trụ tròn nữa, mà sẽ là mặt vênh có hai độ cong.

Chuyển sang xét biến dạng và chuyển dịch. Gia số biến dạng vòng khi chuyển từ trạng thái thứ nhất đến trạng thái thứ hai tại điểm nào đấy trên bán kính r có dạng

$$d\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{R(\varphi + d\varphi) - r\varphi}{r\varphi},$$

suy ra

$$R = \frac{1 + d\varepsilon_{\theta\theta}}{1 + \frac{d\varphi}{\varphi}} r. \quad (4.111)$$

Trên các điểm của biên phân chia r_0 biến dạng vòng bằng không, nên từ đây suy ra

$$R_0 = \frac{r_0}{1 + \frac{d\varphi}{\varphi}}. \quad (4.112)$$

Ta viết điều kiện không nén được của vật liệu cho lớp có bán kính trong r_0 và bán kính ngoài r có chú ý đến biến dạng dọc trục $\varepsilon_{zz} = 0$

$$d\varepsilon_{rr} + d\varepsilon_{\theta\theta} + d\varepsilon_{zz} = \pi(R^2 - R_0^2) \frac{\varphi + d\varphi}{2\pi} - \pi(r^2 - r_0^2) \frac{\varphi}{2\pi} = 0 \quad (4.113)$$

Đặt các biểu thức (4.111), (4.112) vào (4.113) và tính đến điều kiện $d\varepsilon_{zz} = 0$, ta nhận được từ đây đối với vật liệu không nén được gia số biến dạng kính và gia số biến dạng vòng bằng nhau về độ lớn

$$d\varepsilon_{\theta\theta} = -d\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\varphi} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \quad (4.114)$$

Sự thay đổi độ dày được xác định theo công thức

$$dh = \int_{r_1}^{r_2} (d\varepsilon_{rr}) dr,$$

đặt (4.114) vào đây ta nhận được $dh = 0$, tức là độ dày của tấm lá khi uốn không thay đổi.

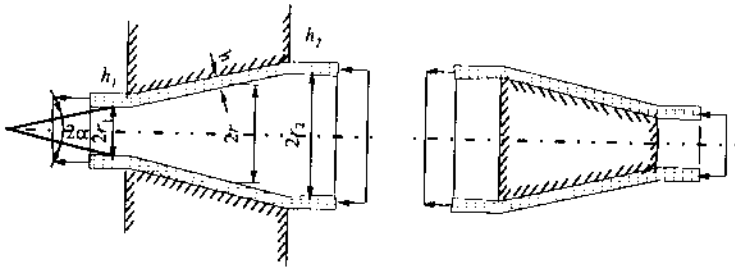
Chú ý rằng nếu tính đến tái bền độ dày của tấm lá khi uốn sẽ thay đổi.

Do h không thay đổi nên theo (4.110) mômen uốn đặt vào tấm lá bằng vật liệu không tái bền cũng không đổi.

Các công thức (4.107), (4.108), (4.109) cho phép xác định ứng suất chỉ cần cho trước bán kính trong r_1 . Vì rằng trong quá trình uốn độ dày của tấm lá không thay đổi, nên bán kính ngoài $r_2 = r_1 + h_0$.

4.9 Biến dạng của ống trụ trong khuôn cứng hình côn

Đây cũng là bài toán của lý thuyết dẻo có nhiều ý nghĩa thực tiễn. Ống trụ độ dày mỏng bị kéo hoặc ép bằng lực dọc trục qua khuôn cứng hình côn sao cho bán kính của nó hoặc tăng lên hoặc giảm đi theo yêu cầu. Tùy theo cách đặt lực mà ta có quá trình kéo, chuốt hoặc ép, nong.



Hình 4.16

Trên hình 4.16 khi đặt lực ở bên trái ta có quá trình chuốt và kéo, còn khi đặt lực bên phải ta có quá trình ép và nong.

Giả thiết vật liệu là cứng dẻo lý tưởng, không nén được. Khuôn có dạng hình côn và cứng, ta quan tâm đến sự biến dạng dẻo phần ống nằm sát khuôn, khi đó đoạn ống này có dạng vỏ tròn xoay. Bỏ qua mômen uốn xuất hiện khi ống biến dạng, tức là giải bài toán bằng lý thuyết phi mômen của vỏ tròn xoay (xem [37]).

Biến dạng ống là đối xứng trục, nên ứng suất, biến dạng và độ dày của thành ống chỉ phụ thuộc vào bán kính. Trong lý thuyết phi mômen của vỏ tròn xoay chịu tải đối xứng trục trạng thái ứng suất của vỏ là phẳng và ứng suất theo kinh tuyến $\sigma_{\varphi\varphi}$ và ứng suất vòng $\sigma_{\theta\theta}$ là ứng suất chính. Phương trình cân bằng của vỏ tròn xoay chịu tải đối xứng trục có dạng

$$\frac{d}{dr}(\sigma_{\varphi\varphi}rh) - \sigma_{\theta\theta}h + \frac{p_{\varphi}r}{\sin \alpha} = 0, \quad (4.115)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{R_2} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{R_1} + \frac{p_z}{h} = 0, \quad (4.116)$$

trong đó R_2 - bán kính cong của kinh tuyến, R_1 - là bán kính cong của giao tuyến của vỏ với mặt phẳng trục giao với kinh tuyến tại điểm đang xét, r - bán kính của đường tròn giao tuyến của vỏ với mặt phẳng trục giao với trục của vỏ, h - độ dày của vỏ, p_{φ} - cường độ tải ngoài theo hướng kinh tuyến, p_z -

cường độ tải ngoài theo hướng pháp tuyến, α - là góc giữa tiếp tuyến với kinh tuyến và trục của vỏ.

Đối với khuôn hình côn (nón)

$$R_2 = \infty, \quad R_1 = \frac{r}{\cos \alpha},$$

từ phương trình (4.116) và đặt $p_z = p$ ta nhận được công thức liên hệ giữa áp suất giữa khuôn và vỏ với ứng suất vòng

$$p = -\frac{\sigma_{\theta\theta} h \cos \alpha}{r} \quad (4.117)$$

Tính đến lực tiếp (theo hướng kinh tuyến)

$$p_\varphi = f p,$$

trong đó f - hệ số nhót và sử dụng hệ thức (4.117) đưa phương trình (4.115) về dạng

$$r \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi} - k \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad (4.118)$$

trong đó $k = 1 + f \cot \alpha$.

Trong bài toán đang xét gia số biến dạng vòng $d\varepsilon_{\theta\theta}$ và gia số biến dạng theo hướng pháp tuyến $d\varepsilon_{zz}$ liên hệ với bán kính và độ dày bằng hệ thức

$$d\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{dr}{r}, \quad d\varepsilon_{zz} = \frac{dh}{h}, \quad (4.119)$$

ta viết lại phương trình (4.118)

$$r \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} + \frac{d\varepsilon_{zz}}{d\varepsilon_{\theta\theta}} \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi} - k \sigma_{\theta\theta} = 0. \quad (4.120)$$

Vỏ ở trạng thái ứng suất phẳng và vật liệu không nén được nên

$$\sigma = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}}{3}.$$

Hệ thức giữa ứng suất cho vật liệu cứng dẻo trong trường hợp này đưa về dạng

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{de_u}{2\sigma_u} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}), \\ d\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{de_u}{2\sigma_u} (2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\ d\varepsilon_{zz} &= -\frac{de_u}{2\sigma_u} (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}), \end{aligned} \quad (4.121)$$

trong đó

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2},$$

$d\epsilon_u$ - cường độ gia số biến dạng dẻo, các đại lượng $d\epsilon_{ij}$ đều là gia số biến dạng dẻo (vì vật liệu cứng dẻo, biến dạng đàn hồi bằng không).

Từ (4.121) suy ra

$$\frac{d\epsilon_{zz}}{d\epsilon_{\theta\theta}} = -\frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}}{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}, \quad (4.122)$$

ta đưa phương trình (4.119) về dạng

$$r \frac{d\sigma_{\varphi\varphi}}{dr} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}}{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}} \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi} - k\sigma_{\theta\theta} = 0, \quad (4.123)$$

kết hợp với điều kiện dẻo $\sigma_u = \sigma_s$, tức là

$$\sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_s^2, \quad (4.124)$$

ta nhận được hệ hai phương trình để xác định $\sigma_{\varphi\varphi}$ và $\sigma_{\theta\theta}$.

Đưa vào hàm $\psi(r)$, sao cho

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cos \psi, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \cos \left(\psi - \frac{\pi}{3} \right), \quad (4.125)$$

phương trình (4.124) sẽ thỏa mãn đồng nhất.

Trước xét giới hạn thay đổi của ψ trong các quá trình đặt lực, xuất phát từ dấu của $\sigma_{\varphi\varphi}$ và $\sigma_{\theta\theta}$:

* Trường hợp hợp *chuốt*

$$\sigma_{\varphi\varphi} > 0, \quad \sigma_{\theta\theta} < 0 : \frac{3}{2}\pi \leq \psi \leq \frac{11\pi}{6};$$

* Trường hợp *ép*

$$\sigma_{\varphi\varphi} < 0, \quad \sigma_{\theta\theta} < 0 : \frac{5\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{3\pi}{2};$$

* Trường hợp *nong*

$$\sigma_{\varphi\varphi} < 0, \quad \sigma_{\theta\theta} > 0 : \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{5\pi}{6};$$

* Trường hợp kéo

$$\sigma_{\varphi\varphi} > 0, \quad \sigma_{\theta\theta} > 0 : -\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Đặt (4.125) vào (4.123) dẫn đến phương trình xác định hàm ψ

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\text{tg}^2\psi d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\text{tg}\psi - \sqrt{3}k\text{tg}^2\psi},$$

tích phân lên ta được

$$\frac{r}{r_1} = \exp \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{2\text{tg}^2\psi d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\text{tg}\psi - \sqrt{3}k\text{tg}^2\psi}, \quad (4.126)$$

trong đó r_1 là bán kính của đường tròn giao tuyến của vỏ với mặt phẳng trục giao với trục của vỏ tại đầu vào cửa khuôn, còn ψ_1 là giá trị của ψ tại $r = r_1$.

Theo (4.125) ta có

$$\cos \psi_1 = \frac{\sqrt{3} \sigma_{\varphi\varphi}(r_1)}{2 \sigma_s},$$

trong đó $\sigma_{\varphi\varphi}(r_1)$ là ứng suất kinh tuyến của vỏ tại đầu vào cửa khuôn.

Phương trình (4.126) thiết lập quan hệ giữa hàm ψ và đại lượng bán kính không thứ nguyên $\frac{r}{r_1}$.

Bây giờ xác định độ dày của vỏ, từ các hệ thức (4.119), (4.122), (4.125) và (4.126) dẫn đến

$$\frac{dh}{h} = - \frac{\text{tg}\psi(\text{tg}\psi + \sqrt{3})d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\text{tg}\psi - \sqrt{3}k\text{tg}^2\psi},$$

tích phân lên ta được

$$\frac{h}{h_0} = \exp \left[- \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{\text{tg}\psi(\text{tg}\psi + \sqrt{3})d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)\text{tg}\psi - \sqrt{3}k\text{tg}^2\psi} \right] \quad (4.127)$$

quan hệ giữa sự thay đổi độ dày với hàm ψ . Các tích phân (4.126), (4.127) có thể biểu diễn qua các hàm sơ cấp hoặc tính toán bằng số.

Sau khi xác định được hàm ψ từ (4.126), theo (4.125) xác định được ứng suất và theo (4.127) xác định độ dày tại từng điểm của đoạn ống trong miền cùng làm việc với khuôn cứng hình côn.

CHƯƠNG 5

Bài toán phẳng của lý thuyết dẻo

A - ỨNG SUẤT PHẪNG

5.1 Các hệ thức cơ sở của ứng suất phẳng

Tương tự như lý thuyết đàn hồi ta xem trạng thái ứng suất phẳng là trạng thái, trong đó các thành phần σ_{zz} , τ_{zx} , τ_{zy} bằng không, còn các thành phần σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} không phụ thuộc vào tọa độ z .

Nói một cách chính xác ta chỉ có thể thực hiện được trạng thái ứng suất phẳng suy rộng với các giá trị trung bình của thành phần ứng suất σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} và xem các thành phần còn lại bằng không. Trạng thái này có được khi bỏ qua ảnh hưởng của lực nằm trong mặt phẳng của nó.

Gọi σ_1 , σ_2 , σ_3 là ứng suất chính, trong trường hợp ứng suất phẳng $\sigma_3 = \sigma_{zz} = 0$, còn σ_1 , σ_2 là nghiệm của phương trình

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{[\alpha]} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_{[\alpha]} \end{vmatrix} = 0.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}. \end{aligned}$$

Ứng suất tiếp chính xác định theo công thức:

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = -\frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_2}{2}.$$

Gọi θ - góc giữa trục chính 1 và trục x , ta biểu thị các thành phần ứng suất qua ứng suất chính nhờ hệ thức như đã trình bày trong lý thuyết đàn hồi

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Cường độ ứng suất trong trường hợp ứng suất phẳng có dạng:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2},$$

nếu biểu thị qua ứng suất chính, thì:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

Trạng thái ứng suất phẳng thỏa mãn phương trình cân bằng

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho Y &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

và điều kiện trên biên cho trước lực ngoài

$$\begin{aligned}X_\nu &= \sigma_{xx}\ell + \tau_{xy}m = \Sigma_x \\ Y_\nu &= \tau_{xy}\ell + \sigma_{yy}m = \Sigma_y,\end{aligned}\tag{5.2}$$

hoặc cho trước chuyển dịch:

$$u = u^b(x, y), \quad v = v^b(x, y).\tag{5.3}$$

5.2 Cách đặt bài toán ứng suất phẳng trong trường hợp vật liệu dẻo lý tưởng

Để xác định trạng thái ứng suất từ các phương trình (5.1) - (5.3) cần có liên hệ ứng suất và biến dạng, các liên hệ này tùy thuộc vào từng lý thuyết dẻo.

Từ hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ Ilyushin đối với ứng suất phẳng và không nén được, có thể viết

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{\sigma_{xx} - \sigma} = \frac{\varepsilon_{yy}}{\sigma_{yy} - \sigma} = \frac{\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}},$$

trong đó

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}).$$

Thay các giá trị của biến dạng theo chuyển dịch, dẫn đến

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}{6\tau_{xy}}. \quad (5.4)$$

Trong tự như vậy, nếu xuất phát từ hệ thức giữa ứng suất và tốc độ biến dạng của Saint Venant - Mises:

$$\frac{\frac{\partial v_x}{\partial x}}{2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial y}}{2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{6\tau_{xy}}. \quad (5.5)$$

Cùng với các phương trình (5.1) - (5.3) và (5.4) hoặc (5.5) cần thêm phương trình biểu thị vật liệu dẻo lý tưởng. Tùy thuộc vào việc dùng điều kiện dẻo, chúng ta sẽ nhận được hệ phương trình có dạng khác nhau. Chẳng hạn, sau này ta sẽ thấy, nếu dùng điều kiện dẻo Mises sẽ dẫn tới phương trình loại elliptic, hyperbolic và parabolic. Điều kiện chảy dẻo Saint Venant dẫn tới phương trình loại hypecbôlic và parabolíc. Khi đó ta sẽ có hệ đầy đủ các phương trình để giải bài toán ứng suất phẳng đối với vật liệu dẻo lý tưởng. Nghiên cứu vấn đề này có các công trình của Sokolovsky, trong đó chỉ ra rằng hệ phương trình nhận được không tuyến tính. Để khắc phục khó khăn khi giải, có thể tách hệ thành hai nhóm phương trình giải liên tiếp: phương trình đối với ứng suất và phương trình đối với tốc độ biến dạng. Nếu tìm được ứng suất thì phương trình xác định tốc độ sẽ tuyến tính. Phương trình cân bằng và điều kiện chảy dẻo gồm 3 phương trình chứa ba ẩn σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} có thể xác

định ứng suất một cách độc lập nếu điều kiện biên cho dưới dạng ứng suất (5.2). Do đó bài toán đang xét dẫn về bài toán xác định tĩnh, nhưng cũng cần chú ý rằng đây là *xác định tĩnh có điều kiện*, vì ngoài phương trình cân bằng còn phải dùng hệ thức điều kiện dẻo.

5.2.1 Phương trình trạng thái ứng suất phẳng với điều kiện chảy Mises

Vật liệu dẻo lý tưởng (không tái bền) thỏa mãn điều kiện dẻo Mises $\sigma_u = \sigma_s$, trong trường hợp phẳng có dạng

$$\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2, \quad (5.6)$$

hoặc là

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 = 3\tau_s^2. \quad (5.7)$$

Trong mặt phẳng (σ_1, σ_2) phương trình (5.7) biểu thị ellip nghiêng một góc $\pi/4$ đối với trục chính và gặp các trục tại điểm có khoảng cách tới tâm bằng σ_s .

Hệ phương trình (5.1), (5.5) và điều kiện dẻo Mises (5.6) tạo thành hệ 5 phương trình độc lập đối với 5 ẩn σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , v_x , v_y .

1. Phương trình đối với ứng suất

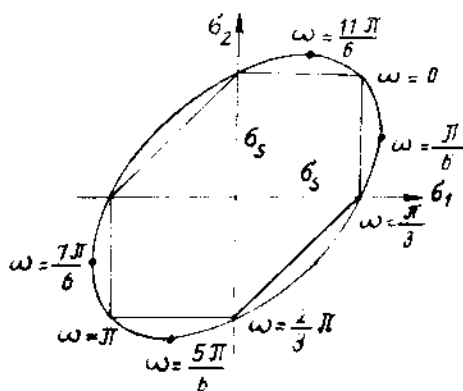
Bây giờ xét phương trình cân bằng (5.1) và điều kiện dẻo (5.7), đó là bài toán xác định tĩnh.

Sokolovsky [75] cho phương trình (5.7) thỏa mãn, bằng cách đặt

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\tau_s \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right), \\ \sigma_2 &= 2\tau_s \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

trong đó $\omega = \omega(x, y)$ là hàm chưa biết. Khi ω chạy từ 0 đến 2π sẽ tương ứng với mọi điểm trên ellip chạy theo chiều kim đồng hồ.

Nhờ công thức giữa ứng suất chính và các thành phần ứng suất, ta biểu thị σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} qua ω và θ



Hình 5.1

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \tau_s(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\theta), \\ \sigma_{yy} &= \tau_s(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\theta), \\ \tau_{xy} &= \tau_s \sin \omega \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra điều kiện ràng buộc

$$|\sigma_{xx}| \leq 2\tau_s, \quad |\sigma_{yy}| \leq 2\tau_s, \quad |\tau_{xy}| \leq \tau_s.$$

Đặt các biểu thức trên vào phương trình cân bằng (5.1), kết quả nhận được hai phương trình đối với hai hàm chưa biết $\omega(x, y)$ và $\theta(x, y)$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \frac{\partial \omega}{\partial y} - 2 \sin \omega \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \frac{\partial \omega}{\partial x} - (\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta + \cos \omega) \frac{\partial \omega}{\partial y} + 2 \sin \omega \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Hệ phương trình này có đường đặc trưng xác định bởi phương trình

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3} \sin \omega \sin 2\theta \pm \Sigma(\omega)}{\sqrt{3} \sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega}$$

và dọc theo đường đặc trưng có hệ thức

$$\Omega(\omega) \pm \theta = \text{const},$$

trong đó

$$\begin{aligned}\Sigma(\omega) &= \sqrt{3 - 4 \cos^2 \omega}, \\ \Omega(\omega) &= -\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\omega} \frac{\Sigma(\omega)}{\sin \omega} d\omega.\end{aligned}$$

Hệ phương trình trên thuộc loại hypecbôlic nếu $3 - 4 \cos^2 \omega > 0$, tức là

$$\frac{\pi}{6} < \omega < \frac{5\pi}{6} \quad \text{hoặc} \quad \frac{7\pi}{6} < \omega < \frac{11\pi}{6}.$$

Hệ trên thuộc loại parabolíc nếu $3 - 4 \cos^2 \omega = 0$, tức là hàm ω lấy một trong những giá trị $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. Cuối cùng nếu $3 - 4 \cos^2 \omega < 0$, thì hệ thuộc loại enliptic.

Trường hợp hệ thuộc loại hypecbôlic $\Sigma(\omega) > 0$, ta tính dễ dàng $\Omega(\omega)$. Đặt

$$2\psi = \pi - \arccos \frac{\text{ctg}\omega}{\sqrt{3}},$$

khi đó phương trình đặc trưng có dạng

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \text{tg}(\theta - \psi), \quad \Omega(\omega) - \theta = \text{const} \equiv \xi(\alpha), \\ \frac{dy}{dx} &= \text{tg}(\theta + \psi), \quad \Omega(\omega) + \theta = \text{const} \equiv \eta(\beta). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Trường hợp hệ thuộc loại parabolíc $\Sigma(\omega) = 0$, $\Omega(\omega) = 0$, ω có giá trị không đổi. Phương trình đường đặc trưng sẽ là

$$y = x \text{tg}(\theta - \psi) + \Phi(\theta),$$

$\Phi(\theta)$ - xác định từ điều kiện biên, còn $\psi = 0$ với $\omega = \frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ và $\psi = \frac{\pi}{2}$ với $\omega = \frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$. Dọc theo đường đặc trưng ứng suất không đổi.

Trường hợp hệ thuộc loại enlptíc, giải hệ phương trình này gặp nhiều khó khăn, đến nay mới chỉ có nghiệm cho bài toán đối xứng trục.

Như vậy, trong bài toán ứng suất phẳng có thể gặp cả miền hypecbôlic, parabolíc, elliptic mà biên của chúng chưa biết.

2. Phương trình đối với tốc độ

Bây giờ xem hệ phương trình (5.5) đối với tốc độ, trong đó ứng suất coi như đã biết. Hệ này là hệ tuyến tính với hệ số thay đổi. Tại miền hyperbôlic của phương trình đối với ứng suất, phương trình với tốc độ cũng là hyperbôlic, trong đó đường đặc trưng của hai hệ trùng nhau.

Quả vậy, giả sử cho trước tốc độ trên đường L không phải là đường gián đoạn của tốc độ. Qua điểm M tùy ý của đường L , vẽ hệ tọa độ x, y và cho trục x theo tiếp tuyến với L . Dọc L ta biết đạo hàm $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial x}$. Đạo hàm $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ xác định phương trình (5.5).

$$\begin{aligned} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \frac{\partial v_y}{\partial y} &= (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= 6\tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial x}, \end{aligned}$$

trừ trường hợp khi

$$2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Nhưng điều kiện $2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0$ thỏa mãn dọc theo đường đặc trưng của ứng suất.

Do đó nghiệm của bài toán đối với tốc độ không thể có dọc theo đường đặc trưng của ứng suất. Vậy, đường đặc trưng tốc độ trùng với đường đặc trưng của ứng suất.

Còn điều kiện $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, có nghĩa là dọc theo đường đặc trưng, tốc độ giãn tương đối bằng không. Điều kiện này cũng thỏa mãn dọc theo họ đường đặc trưng thứ hai.

5.2.2 Phương trình ứng suất phẳng với điều kiện dẻo Tresca - Saint Venant

Vật liệu dẻo lý tưởng biểu thị theo điều kiện Tresca - Saint Venant là

$$\tau_{\max} = \tau_s.$$

Ứng suất tiếp cực đại phát triển theo các tiết diện khác nhau tùy thuộc vào dấu của ứng suất chính σ_1, σ_2 .

Nếu σ_1, σ_2 khác dấu, thì

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

$\tau_{\max}$ tác dụng trên tiết diện trực giao với mặt phẳng (x, y) và chia đôi góc giữa hai trục chính σ_1, σ_2 .

Khi đó trên mặt phẳng sẽ có hai họ đường trượt thẳng góc với nhau (phương trình nhận được sẽ có hai họ đường đặc trưng).

Nếu σ_1, σ_2 cùng dấu chẳng hạn ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) thì ứng suất tiếp cực đại

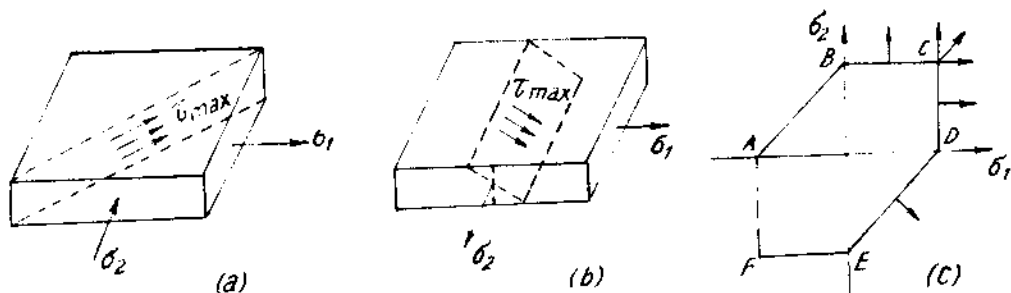
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$$

tác dụng trên tiết diện song song với trục σ_2 và nghiêng một góc $\pi/4$ với mặt phẳng (x, y) . Khi đó trên mặt phẳng (x, y) chỉ có một họ đường trượt, hướng của nó trùng với hướng của σ_2 .

Từ những điều suy luận trên, điều kiện chảy dẻo Saint Venant có dạng

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm \sigma_s \quad \text{nếu } \sigma_1 \sigma_2 \leq 0, \\ \text{hoặc } \left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \pm \sigma_s \\ \sigma_2 &= \pm \sigma_s \end{aligned} \right\} &\text{nếu } \sigma_1 \sigma_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Phương trình (5.10) biểu diễn hình sáu cạnh trong mặt phẳng (σ_1, σ_2) và nội tiếp với ellip Mises.



Hình 5.2

Hệ thức giữa ứng suất và tốc độ biến dạng theo lý thuyết dẻo Saint Venant có thể viết dưới dạng trực chính

$$\dot{\epsilon}_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (5.11)$$

trong đó f - hàm chảy có dạng (5.10). Từ hệ thức (5.11) và điều kiện không nén được ta có thể viết tỷ số giữa các tốc độ biến dạng chính.

Trong trường hợp phẳng $\sigma_3 = \sigma_z = 0$ điều kiện (5.10) chính là giao tuyến của hình lăng trụ (biểu thị điều kiện Saint Venant trong trường hợp tổng quát) và mặt phẳng $\sigma_3 = 0$. Pháp tuyến với lăng trụ không nằm trong mặt phẳng $\sigma_3 = 0$, nhưng hình chiếu của nó lên mặt phẳng $\sigma_3 = 0$ thì trực giao với các cạnh của đường sáu cạnh (5.10). Do đó tỷ số của tốc độ biến dạng chính bằng tỷ số của cosin chỉ hướng pháp tuyến tại điểm đang xét. Ta quy ước gọi những điểm trong đoạn $AB, BC \dots$ là trạng thái $AB, BC \dots$, còn đỉnh $A, B, \dots$ là trạng thái $A, B, \dots$.

Trường hợp $\sigma_1 \sigma_2 < 0$ tương ứng với trạng thái AB và DE , chẳng hạn đối với trạng thái DE : $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$ và điều kiện dẻo có dạng

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_s.$$

Từ (5.11) suy ra $\dot{\epsilon}_1 = \lambda, \dot{\epsilon}_2 = -\lambda$ tức là $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_2$ và từ điều kiện không nén được, dẫn đến $\dot{\epsilon}_3 = 0$. Đại lượng $\lambda \geq 0$ là hàm chưa biết được xác định tùy từng bài toán cụ thể.

Trường hợp $\sigma_1 \sigma_2 > 0$ tương ứng với các cạnh ngang và đứng của lục giác. Chẳng hạn trạng thái CD : $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. Điều kiện dẻo có dạng

$$\sigma_1 = \sigma_s.$$

Theo quy luật (5.11) biến dạng chỉ xảy ra theo hướng chính thứ nhất tức là

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda, \quad \dot{\epsilon}_2 = 0,$$

Từ điều kiện không nén được suy ra $\dot{\epsilon}_3 = -\dot{\epsilon}_1 = -\lambda$. Tương tự cho trạng thái BC , thì $\sigma_2 = \sigma_s$, suy ra

$$\dot{\epsilon}_1 = 0, \quad \dot{\epsilon}_2 = \lambda \quad \text{và} \quad \dot{\epsilon}_3 = -\dot{\epsilon}_2 = -\lambda.$$

Trường hợp điểm góc, chẳng hạn trạng thái C . Ở đây

$$\sigma_1 = \sigma_s, \quad \sigma_2 = \sigma_s.$$

Khi đó $\dot{\epsilon}_1 = \lambda_1$, $\dot{\epsilon}_2 = \lambda_2$ và $\dot{\epsilon}_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$. Các hệ số λ_1, λ_2 là hàm chưa biết xác định tùy thuộc vào bài toán cụ thể, ở đây thêm một hàm tùy ý vì tồn tại “hai điều kiện chảy”. Tương tự cho trạng thái F .

Cuối cùng, trường hợp dẫn một chiều tương ứng với trạng thái D

$$\sigma_1 = \sigma_s, \quad \sigma_2 = 0.$$

Tốc độ biến dạng là tổ hợp tuyến tính với hệ số λ_1, λ_2 của sự chảy dẻo tại trạng thái lân cận CD và DE , tức là

$$\dot{\epsilon}_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \dot{\epsilon}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{\epsilon}_3 = -\lambda_2.$$

Tương tự ta có đối với trạng thái A, B, E .

Bài toán xác định ứng suất sẽ đơn giản đi nhiều nếu thay ellip Mises bằng lục giác Saint Venant. Ta nhận thấy rằng các phương trình nhận được sẽ khác nhau tương ứng với các trạng thái khác nhau. Giải bài toán cụ thể thường đòi hỏi phải xem sự chảy dẻo xảy ra trong vật thể thuộc trạng thái nào. Do đó rất dễ nhầm lẫn trong việc chọn trạng thái và sẽ dẫn đến những điều phi lý. Để chọn một cách chính xác cơ cấu nghiệm cần phải xây dựng một cách cẩn thận tốc độ tương ứng.

Sokolovsky [75] nghiên cứu các phương trình đối với ứng suất trong các trạng thái.

1. Trạng thái DE và AB ($\sigma_1\sigma_2 < 0$)

Điều kiện chảy có dạng

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm\sigma_s,$$

hay là

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 = 4\tau_s^2. \quad (5.12)$$

Kết hợp (5.12) với phương trình cân bằng (5.1) cho ta hệ phương trình để xác định ứng suất. Về dạng giống với hệ phương trình trong trường hợp biến

dạng phẳng chúng ta sẽ xét tỉ mỉ trong phần sau. Ở đây nêu ngắn gọn cách đặt bài toán. Điều kiện chảy (5.12) thỏa mãn đồng nhất, nếu ta đặt

$$\sigma_{xx} = \sigma - \tau_s \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma + \tau_s \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{xy} = \tau_s \cos 2\varphi.$$

Dem chúng thay vào phương trình cân bằng (5.1) không có lực khối, chúng ta nhận được hệ hai phương trình để xác định hai hàm chưa biết $\sigma(x, y)$ và $\varphi(x, y)$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\tau_s \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\tau_s \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0.$$

Hệ phương trình này thuộc loại hyperbôn có hai họ đường đặc trưng thực

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi$$

và dọc theo đường đặc trưng tồn tại hệ thức

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\tau_s} - \varphi &= \operatorname{const} = \xi \\ \frac{\sigma}{2\tau_s} + \varphi &= \operatorname{const} = \eta \end{aligned}$$

Nếu biết được họ đường đặc trưng và giá trị ξ, η trên đường đó, thì có thể xác định được σ, φ , tức là biết được giá trị của ứng suất $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ tại mỗi điểm. Trong trường hợp này giá trị của ứng suất pháp phải giới nội và chiều dày bản không thay đổi ($\dot{e}_3 = 0$).

2. Trạng thái CD và EF

Đối với trạng thái CD ($\sigma_1 \sigma_2 > 0$)

$$\sigma_1 = \sigma_s \quad 0 < \sigma_2 < \sigma_s.$$

Đặt

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\sigma_s \chi,$$

trong đó $\chi(x, y)$ là hàm chưa biết. Khi đó

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_s \alpha (1 - \chi), \quad \alpha = \operatorname{sign} \sigma_1 = \operatorname{sign} \sigma_2.$$

Đối với trạng thái CD : $\alpha = +1$, và với EF : $\alpha = -1$. Đặt các biểu thức này của ứng suất chính vào biểu thức của thành phần ứng suất ta được

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_s[\alpha(1 - \chi) + \chi \cos 2\theta], \\ \sigma_{yy} &= \sigma_s[\alpha(1 - \chi) - \chi \cos 2\theta], \\ \tau_{xy} &= \sigma_s \chi \sin 2\theta.\end{aligned}$$

Dem thế chúng vào phương trình cân bằng (5.1), sau một số phép biến đổi đơn giản ta nhận được

$$\begin{aligned}\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - (\alpha + \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \sin 2\theta \frac{\partial \ln \chi}{\partial x} - (\alpha + \cos 2\theta) \frac{\partial \ln \chi}{\partial y} + 2\alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Hệ phương trình này chỉ có một họ đường đặc trưng thực

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha + \cos 2\theta}{\sin 2\theta}, \quad d\theta = 0,\tag{5.14}$$

có nghĩa là hệ đó thuộc loại parabolíc. Phương trình đường đặc trưng có dạng

$$\theta = \text{const} = C_1, \quad y = x \operatorname{tg}\left[\theta + (\alpha + 1) \frac{\pi}{4}\right] + C_2.$$

Đường đặc trưng là những đường thẳng nghiêng với trục x một góc $\theta + (\alpha + 1) \frac{\pi}{4}$ và do đó trùng với đường trượt, tức là đường thẳng của ứng suất chính. Đối với trạng thái CD đường đặc trưng trùng với đường thẳng của ứng suất chính σ_2 (đối với trạng thái EF $\sigma_2 = -\sigma_s$, $\alpha = -1$ đường đặc trưng theo đường thẳng của σ_1). Tại trạng thái CD $\epsilon_2 = 0$ tức là đường đặc trưng không bị dãn.

Nghiệm tổng quát của phương trình thứ nhất

$$y = x \operatorname{tg}\left[\theta + (\alpha + 1) \frac{\pi}{4}\right] + \Phi(\theta),\tag{5.15}$$

trong đó $\Phi(\theta)$ là hàm tùy ý xác định từ điều kiện biên. Nhờ (5.14) và phương trình thứ hai (5.13) ta tìm được biểu thức dọc theo đường đặc trưng

$$d \ln \chi = -2\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{dx}{\sin 2\theta}.$$

Đạo hàm theo x phương trình (5.15) để tính $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, sau đó đem thay vào phương trình vừa nhận được và lấy tích phân. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình thứ hai có dạng

$$\chi = \frac{\Psi(\theta)}{2x + (1 - \alpha \cos 2\theta)\Phi'(\theta)},$$

trong đó $\Psi(\theta)$ là hàm tùy ý xác định từ điều kiện biên.

Khi tính các hàm tùy ý cần phải cho giá trị của θ , χ dọc theo một đường nào đấy trên mặt phẳng (x, y) , đó là bài toán Cauchy. Nghiệm của bài toán này không xác định, nếu như đường đó chính là đường đặc trưng.

3. Trạng thái C và F

Ta có

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \alpha \sigma_s,$$

trong đó $\alpha = 1$ đối với trạng thái C và $\alpha = -1$ đối với F . Từ công thức giữa các thành phần ứng suất và ứng suất chính suy ra

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \alpha \sigma_s, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Phương trình cân bằng (5.1) thỏa mãn đồng nhất. Trạng thái này tương ứng với trạng thái ứng suất dãn nén đều mọi phía trong mặt phẳng (x, y) . Hướng bất kỳ của ứng suất đều là hướng chính. Tốc độ biến dạng đối với trạng thái C bằng $\dot{e}_1 = \lambda_1 \geq 0$, $\dot{e}_2 = \lambda_2 \geq 0$.

4. Trạng thái D , A (dãn hoặc nén một chiều)

Ta có

$$\sigma_1 = \alpha \sigma_s, \quad \sigma_2 = 0,$$

khi đó

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\alpha \sigma_s}{2}(1 + \cos 2\theta), \\ \sigma_{yy} &= \frac{\alpha \sigma_s}{2}(1 - \cos 2\theta), \\ \tau_{xy} &= \frac{\alpha \sigma_s}{2} \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Đặt các biểu thức này vào phương trình cân bằng (5.1), ta nhận được góc nghiêng $\theta = \text{const}$, tức là tương ứng với trường hợp dãn (hoặc nén) một chiều. Tốc độ biến dạng sẽ bằng

$$\dot{e}_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \dot{e}_2 = -\lambda_1, \quad \dot{e}_3 = -\lambda_2 \quad (\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0).$$

5.3 Cân bằng đàn dẻo của bản có lỗ hổng tròn với vật liệu dẻo lý tưởng

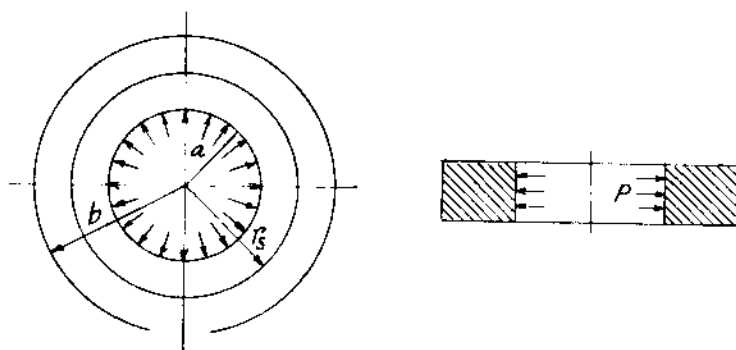
5.3.1 Bản có lỗ hổng tròn chịu tác dụng của áp suất

Xét bài toán đối xứng trục đàn dẻo của bản có độ dày không đổi, bán kính trong (lỗ hổng) a , bán kính ngoài b chịu tác dụng của áp suất p trên biên lỗ hổng. Giả sử vật liệu của bản là dẻo lý tưởng (không tái bền).

Ta sử dụng giả thiết sau: ứng suất phân bố đều theo pháp tuyến với mặt giữa của bản và trên các mặt phẳng song song mặt giữa ứng suất bằng không.

Với giả thiết thứ nhất và đặt lực đối xứng trục dẫn đến ứng suất, biến dạng và chuyển dịch là hàm chỉ của bán kính, còn từ giả thiết thứ hai dẫn đến trạng thái ứng suất tại mọi điểm của bản là trạng thái phẳng, hai chiều.

Hơn nữa sử dụng điều kiện đối xứng trục và không có ứng suất trên các mặt phẳng song song với mặt giữa ta nhận được ứng suất tiếp trên các tiết diện kính và tiết diện vòng bằng không. Do đó các tiết diện này là tiết diện chính và ứng suất pháp tương ứng $\sigma_{\theta\theta}$ và σ_{rr} là ứng suất chính.



Hình 5.3

Các thành phần ứng suất thỏa mãn phương trình cân bằng

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (5.16)$$

và điều kiện biên

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p \quad \text{tại } r = a, \\ \sigma_{rr} &= 0 \quad \text{tại } r = b. \end{aligned} \quad (5.17)$$

a) **Trạng thái đàn hồi**

Ứng suất kính và ứng suất vòng được xác định như trong lý thuyết đàn hồi [37] có dạng

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2}, \quad (5.18)$$

trong đó A, B là các hằng số, chúng được xác định khi cho thỏa mãn điều kiện biên (5.17)

$$A - \frac{B}{a^2} = -p \quad \text{và} \quad A - \frac{B}{b^2} = 0.$$

Kết quả nhận được

$$\sigma_{rr} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right). \quad (5.19)$$

Cường độ ứng suất bằng

$$\sigma_u = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \sqrt{3 + \frac{b^4}{r^4}}.$$

Biến dạng dẻo xuất hiện tại biên $r = a$ khi

$$p = p_s = \frac{\sigma_s(b^2 - a^2)}{\sqrt{3a^4 + b^4}}.$$

b) **Trạng thái đàn dẻo**

Khi áp suất tăng lớn hơn giá trị p_s biến dạng dẻo mở rộng, bản gồm hai miền:

$a \leq r \leq r_s$ - miền biến dạng dẻo,

$r_s \leq r \leq b$ - miền biến dạng đàn hồi,

trong đó r_s là biên đàn dẻo cần xác định.

Trong miền biến dạng đàn hồi ứng suất được xác định theo công thức (5.18) với A, B chưa xác định.

Trong miền biến dạng dẻo việc xác định ứng suất còn tùy thuộc cách chọn điều kiện chảy dẻo đặc trưng cho vật liệu dẻo lý tưởng.

1. Giải bài toán với điều kiện chảy dẻo Mises

Ứng suất phải thỏa mãn phương trình cân bằng (5.16) và điều kiện dẻo Mises

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_s^2 = 3\tau_s^2. \quad (5.20)$$

Đây là bài toán xác định tĩnh có điều kiện vì ứng suất không chỉ xác định từ phương trình cân bằng mà còn từ điều kiện dẻo.

Phương trình (5.20) thỏa mãn đồng nhất nếu

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\tau_s \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma_2, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\tau_s \cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right) = \sigma_1.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Đặt ứng suất theo công thức (5.21), vào phương trình cân bằng (5.16), sau khi biến đổi ta nhận được phương trình xác định hàm ω

$$(\sqrt{3} + \cot g \omega) d\omega + \frac{2}{r} dr = 0, \tag{5.22}$$

nghiệm của nó có dạng

$$\frac{C}{r^2} = \exp(\sqrt{3}\omega) \sin \omega, \tag{5.23}$$

trong đó C là hằng số tích phân.

Từ điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p$ với $r = a$, hay là

$$-p = 2\tau_s \cos\left(\omega_a + \frac{\pi}{6}\right), \tag{5.24}$$

trong đó $\omega_a = \omega(a)$ ta xác định ω_a

$$\cos\left(\omega_a + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{p}{2\tau_s}.$$

Hằng số C trong (5.23) được xác định khi cho $r = a$

$$\frac{C}{a^2} = \exp(\sqrt{3}\omega_a) \sin \omega_a,$$

thay biểu thức của C vừa nhận vào (5.23) ta được hệ thức xác định hàm ω qua bán kính r

$$\frac{r^2}{a^2} = \exp(\sqrt{3}(\omega_a - \omega)) \frac{\sin \omega_a}{\sin \omega}. \tag{5.25}$$

kết hợp (5.25) với (5.21) ta được công thức xác định ứng suất trong miền biến dạng dẻo.

Bây giờ để xác định các hằng số A, B trong công thức xác định ứng suất trong miền đàn hồi và biên đàn dẻo r_s , ta sử dụng điều kiện biên

$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{tại} \quad r = b$$

và các điều kiện liên tục trên biên đàn dẻo

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}|_{r_s+0} &= \sigma_{rr}|_{r_s-0}, \\ \sigma_{\theta\theta}|_{r_s+0} &= \sigma_{\theta\theta}|_{r_s-0}.\end{aligned}$$

Thay biểu thức của ứng suất tương ứng vào các điều kiện trên dẫn đến

$$A - \frac{B}{b^2} = 0, \quad (5.26)$$

$$A - \frac{B}{r_s^2} = 2\tau_s \cos\left(\omega_s + \frac{\pi}{6}\right), \quad (5.27)$$

$$A + \frac{B}{r_s^2} = 2\tau_s \cos\left(\omega_s - \frac{\pi}{6}\right), \quad (5.28)$$

trong đó $\omega_s = \omega(r_s)$ và theo công thức (5.25)

$$\frac{r_s^2}{a^2} = \exp\left(\sqrt{3}(\omega_a - \omega_s)\right) \frac{\sin \omega_a}{\sin \omega_s}. \quad (5.29)$$

Từ (5.27), (5.28) ta được

$$A = \tau_s \sqrt{3} \cos \omega_s, \quad B = \tau_s r_s^2 \sin \omega_s. \quad (5.30)$$

Đặt các biểu thức vừa nhận được vào (5.26) dẫn đến

$$\frac{b^2}{r_s^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \omega_s. \quad (5.31)$$

Nhân vế với vế (5.29) và (5.31) ta được

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\sqrt{3}(\omega_a - \omega_s)\right) \frac{\sin \omega_a}{\cos \omega_s}. \quad (5.32)$$

Phương trình (5.32) cho ta xác định giá trị ω_s khi cho trước áp suất p (tức là biết ω_a). Sau khi xác định ω_s biên đàn dẻo r_s xác định từ (5.31), tiếp đến xác định A, B theo (5.30).

Sử dụng (5.18), (5.30) và (5.31) ta viết biểu thức của ứng suất trong miền đàn hồi

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_s \cos \omega_s \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_s \cos \omega_s \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right).\end{aligned} \quad (5.33)$$

5.3. CÂN BẰNG ĐÀN DẸO CỦA BẢN CÓ LỖ HỒNG TRÒN

Để xác định chuyển vị kính u_r với giả thiết vật liệu không nén được $e = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, ta xuất phát từ

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}.$$

Trong miền đàn hồi

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\sigma_{rr}), \quad (5.34)$$

thay các biểu thức của $\varepsilon_{\theta\theta}$ và ứng suất theo (5.33) ta được công thức xác định chuyển dịch trong miền đàn hồi:

$$u_r = \frac{\sigma_s r}{2E} \cos \omega_s \left(1 + 3\frac{b^2}{r^2}\right).$$

Trong miền dẻo với vật liệu không nén được và tính đến $\sigma = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{3}$ các hệ thức của lý thuyết biến dạng đàn dẻo cho ta

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{3e_u}{2\sigma_u}(\sigma_{rr} - \sigma) = \frac{e_u}{2\sigma_u}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{3e_u}{2\sigma_u}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma) = \frac{e_u}{2\sigma_u}(2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Chia vế với vế hai hệ thức vừa nêu và sử dụng hệ thức đối với biến dạng ta được

$$\frac{du}{u_r} \cdot \frac{r}{dr} = \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}. \quad (5.36)$$

Thay các biểu thức ứng suất theo (5.21) và đại lượng $\frac{dr}{r}$ theo (5.22) vào đây ta có

$$\frac{du_r}{u_r} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \cotg \omega) d\omega.$$

Tích phân lên ta được

$$u_r = C_1 \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\right)}{\sqrt{\sin \omega}}.$$

Hằng số C_1 xác định từ điều kiện liên tục của chuyển dịch u_r trên biên đàn dẻo

$$\frac{\sigma_s r_s}{2E} \cos \omega_s \left(1 + 3 \frac{b^2}{r_s^2}\right) = C_1 \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_s\right)}{\sqrt{\sin \omega_s}},$$

Chú ý đến (5.31) ta được

$$C_1 = \frac{\sigma_s r_s}{E} \sin\left(\omega_s + \frac{\pi}{6}\right) \frac{\sqrt{\sin \omega_s}}{\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_s\right)}.$$

Vậy chuyển dịch kính trong miền dẻo có dạng

$$u_r = \frac{\sigma_s r_s}{E} \sin\left(\omega_s + \frac{\pi}{6}\right) \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega - \omega_s)\right) \sqrt{\frac{\sin \omega_s}{\sin \omega}}.$$

Bây giờ xác định áp suất giới hạn, khi miền đàn hồi biến mất, tức hết khả năng chịu lực. Trong trường hợp này $r_s = b$, từ công thức (5.31) ta có $\omega_s = \frac{\pi}{3}$, khi đó hệ thức (5.32) có dạng

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(\sqrt{3}\left(\omega_a - \frac{\pi}{3}\right)\right) \sin \omega_a. \quad (5.37)$$

Theo giá trị cho trước của tỷ số $\frac{b}{a}$ từ hệ thức này xác định giá trị ω_a . Kết quả nhận được thay vào (5.24) ta xác định áp suất giới hạn p_* , tức là với áp suất này bản chuyển sang dẻo hoàn toàn.

Công thức (5.24) cho ta khẳng định rằng giá trị áp suất lớn nhất có được khi $\omega_a = \frac{5\pi}{6}$

$$p_{* \max} = 2\tau_s.$$

Giá trị $\omega_a = \frac{5\pi}{6}$ theo công thức (5.37) tương ứng với

$$\frac{b}{a} = 2,963.$$

Do đó nếu bản có tỷ số của bán kính ngoài trên bán kính trong lớn hơn 2,963 thì không có áp suất trong nào làm mất khả năng chịu lực của bản, bản luôn luôn còn một miền biến dạng đàn hồi kề biên ngoài.

1 Giải bài toán với điều kiện chảy dẻo Saint Venant

Từ nghiệm (5.19) của bài toán khi bản làm việc đàn hồi ta thấy $\sigma_{rr} < 0$, $\sigma_{\theta\theta} > 0$, vì vậy điều kiện chảy dẻo Saint Venant có dạng

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\tau_s. \quad (5.38)$$

Kết hợp phương trình này với phương trình cân bằng, tích phân lên và sử dụng điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p$ tại $r = a$, ta nhận được biểu thức của ứng suất trong miền dẻo

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} - p, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) - p. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Để xác định các hằng số A , B trong công thức xác định ứng suất trong miền đàn hồi và biên đàn dẻo r_s ta sử dụng điều kiện biên $\sigma_{rr} = 0$ tại $r = b$ và điều kiện liên tục ứng suất trên biên đàn dẻo. Kết quả nhận được

$$\begin{aligned} A - \frac{B}{b^2} &= 0, \\ A - \frac{B}{r_s^2} &= 2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} - p, \\ A + \frac{B}{r_s^2} &= 2\tau_s + 2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} - p. \end{aligned}$$

Từ hai phương trình sau xác định được

$$\begin{aligned} A &= 2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} - p + \tau_s, \\ B &= \tau_s r_s^2. \end{aligned}$$

Thay A , B vừa nhận được vào phương trình thứ nhất dẫn đến phương trình để xác định biên đàn dẻo

$$2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} + \tau_s - p - \frac{\tau_s r_s^2}{b^2} = 0. \quad (5.40)$$

Sử dụng phương trình (5.40) và biểu thức của A , B ta viết công thức xác định ứng suất trong miền đàn hồi

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left(2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} + \tau_s - p \right) \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{\tau_s r_s^2}{b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(2\tau_s \ln \frac{r_s}{a} + \tau_s - p \right) \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{\tau_s r_s^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Áp suất giới hạn p_* làm cho bản chuyển sang dẻo hoàn toàn được xác định từ hệ thức (5.39) với mọi $a \leq r \leq b$, mà tại $r = b$, $\sigma_{rr} = 0$ nên

$$p_* = 2\tau_s \ln \frac{b}{a}. \quad (5.42)$$

Theo giá trị cho trước của tỷ số $\frac{b}{a}$ ta xác định được lực tới hạn p_* .

Theo điều kiện chảy dẻo ứng suất σ_{rr} không vượt quá $2\tau_s$, do vậy áp suất lớn nhất $p_{* \max} = 2\tau_s$, kết hợp với công thức (5.42) ta thấy ứng với giá trị này tỷ số

$$\frac{b}{a} = e \approx 2,82.$$

Vậy bản có tỷ số $\frac{b}{a}$ lớn hơn 2,82, trong bản luôn vẫn còn miền biến dạng đàn hồi.

So sánh kết quả nhận được theo hai cách sử dụng điều kiện chảy ta thấy sai số không lớn, khoảng 5%.

Chuyển vị kính trong miền đàn hồi tính theo công thức (5.34), trong đó ứng suất có dạng (5.41), kết quả nhận được

$$u_r = \frac{\tau_s r_s^2 r}{2Eb^2} \left(1 + 3 \frac{b^2}{r^2} \right).$$

Chuyển vị kính trong miền dẻo xác định theo công thức (5.36), trong đó ứng suất có dạng (5.39), ta có

$$\frac{du}{u} = \left(1 - \frac{6\tau_s}{2\tau_s \ln \frac{r}{a} + 4\tau_s - p} \right) \frac{dr}{r}.$$

Tích phân lên ta được

$$u_r = \frac{C_2 r}{\left(\ln \frac{r}{a} + 2 - \frac{p}{2\tau_s} \right)^3}.$$

Hằng số C_2 xác định từ điều kiện liên tục của chuyển dịch trên biên đàn dẻo

$$\frac{\tau_s r_s^3}{2Eb^2} \left(1 + 3 \frac{b^2}{r_s^2} \right) = \frac{C_2 r_s}{\left(\ln \frac{r_s}{a} + 2 - \frac{p}{2\tau_s} \right)^3}.$$

Sử dụng phương trình (5.40) vào đây dẫn đến

$$C_2 = \frac{\tau_s}{16E} \left(\frac{r_s^2}{b^2} + 3 \right)^4,$$

vậy chuyển dịch trong miền dẹt xác định theo công thức

$$u_r = \frac{\tau_s}{16E} \left(\frac{r_s^2}{b^2} + 3 \right)^4 \frac{r}{\left(\ln \frac{r}{a} + 2 - \frac{p}{2\tau_s} \right)^3}.$$

5.3.2 Bản vô hạn dưới tác dụng của áp suất theo biên của lỗ hồng

Bản vô hạn có lỗ hồng bán kính a , bán kính $b \rightarrow \infty$, trên biên lỗ hồng $r = a$ tác dụng áp suất đều p , trạng thái ứng suất xuất hiện trong bản sẽ là σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta} = 0$. Ứng suất σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ cũng là ứng suất chính, chúng thỏa mãn phương trình cân bằng (5.16) và điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p$ với $r = a$, còn $\sigma_{rr} \rightarrow 0$ khi $r \rightarrow \infty$.

a) Trạng thái đàn hồi

Khi áp suất chưa đủ lớn, bản ở trạng thái đàn hồi, ứng suất nhận được từ (5.19) cho $b \rightarrow \infty$:

$$\sigma_{rr} = -p \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = p \left(\frac{a}{r} \right)^2.$$

Cường độ ứng suất bằng

$$\sigma_u = \sqrt{3} p \left(\frac{a}{r} \right)^2.$$

Vì vậy biến dạng dẹt xuất hiện trước tiên tại biên $r = a$ khi

$$p = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \tau_s.$$

b) Trạng thái đàn dẻo

Khi áp suất tăng miền biến dạng dẻo mở rộng, bản gồm hai miền

$a \leq r \leq r_s$ - miền biến dạng dẻo

$r_s \leq r < \infty$ - miền biến dạng đàn hồi,

trong đó r_s là biên đàn dẻo cần xác định.

Rõ ràng rằng trong miền đàn hồi ứng suất có dạng

$$\sigma_{rr} = -\tau_s \left(\frac{r_s}{r} \right)^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = \tau_s \left(\frac{r_s}{r} \right)^2. \quad (5.43)$$

Trong miền biến dạng dẻo trạng thái ứng suất xác định theo hai cách tùy thuộc vào việc chọn điều kiện chảy dẻo.

1. Giải bài toán với điều kiện chảy dẻo Mises

Điều kiện dẻo Mises trong trường hợp này có dạng (5.20)

$$\sigma_{rr}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 = \sigma_s^2 = 3\tau_s^2. \quad (5.44)$$

Kết hợp với phương trình cân bằng (5.16) ta có đủ phương trình để xác định ứng suất. Do điều kiện liên tục trên biên đàn dẻo $r = r_s$, các thành phần ứng suất phải thỏa mãn (5.43)

$$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr} = \tau_s \quad \text{với} \quad r = r_s. \quad (5.45)$$

Phương trình (5.44) thỏa mãn đồng nhất nếu đặt theo (5.21)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\tau_s \cos(\omega + \pi/6) = \sigma_2, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\tau_s \cos(\omega - \pi/6) = \sigma_1, \end{aligned} \quad (5.46)$$

suy ra

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = 2\tau_s \sin \omega.$$

Từ phương trình này và (5.45) ta đi đến

$$\omega = \frac{\pi}{2} \quad \text{tại} \quad r = r_s. \quad (5.47)$$

Đặt (5.46) vào phương trình cân bằng (5.16) cho phương trình xác định ω .

$$(\sqrt{3} + \operatorname{ctg} \omega) d\omega + \frac{2}{r} dr = 0,$$

nghiệm của nó thỏa mãn điều kiện (5.47) có dạng

$$\left(\frac{r_s}{r}\right)^2 = \exp\left(-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\right) \sin \omega. \quad (5.48)$$

Hàm ω hoàn toàn xác định, nếu biết được biểu thức của biên đàn dẻo r_s . Đại lượng sau xác định khi biết giá trị của áp suất p tại $r = a$. Quả vậy đặt $r = a$ vào (5.48) ta có

$$\left(\frac{r_s}{a}\right)^2 = \sin \omega_a \exp\left(-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2} - \omega_a\right)\right), \quad (5.49)$$

trong đó giá trị ω_a được xác định nhờ công thức (5.46) và điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p$ với $r = a$

$$-p = 2\tau_s \cos(\omega_a + \pi/6).$$

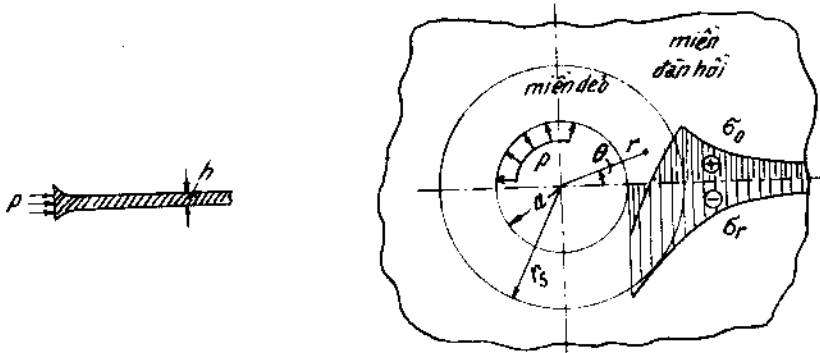
Cũng từ đây suy ra áp suất đạt cực đại

$$p_{\max} = 2\tau_s \quad \text{khi} \quad \omega_a = 5\pi/6.$$

Ta không thể tăng áp suất được nữa, đồng thời miền dẻo cũng không mở rộng nữa. Với giá trị áp suất cực đại bản bị phồng lên (làm dày thêm) một cách tùy ý tại biên lỗ hổng.

Quả vậy, từ liên hệ ứng suất biến dạng (5.35) ta có

$$\varepsilon_{rr} + \frac{\sigma_{\theta\theta} - 2\sigma_{rr}}{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}} \varepsilon_{\theta\theta} = 0.$$



Hình 5.4

Kết hợp với điều kiện không nén được

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 0,$$

suy ra

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}} \varepsilon_{\theta\theta}.$$

Khi $p = 2\tau_s$ ứng suất tại biên $r = a$:

$$\sigma_{rr} = -2\tau_s, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\tau_s,$$

biến dạng $\varepsilon_{zz} \rightarrow \infty$. Bán kính cực đại của biên đàn dẻo r_s nhận được từ (5.49) với $\omega_a = \frac{5\pi}{6}$

$$\left(\frac{r_s}{a}\right)_{\max} \approx 1,75.$$

2. Giải bài toán với điều kiện chảy Tresca - Saint Venant

Trong trường hợp này vật thể chuyển sang dẻo ứng với trạng thái DE vì: $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_1 > 0$, $\sigma_{rr} = \sigma_2 < 0$ (suy từ nghiệm trong miền đàn hồi). Khi đó điều kiện chảy dẻo có dạng

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma_s = 2\tau_s.$$

Đặt biểu thức này vào phương trình cân bằng (5.16), rồi tích phân lên với điều kiện biên (5.45) tại $r = r_s$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\tau_s \left(1 + 2\ln \frac{r_s}{r}\right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \tau_s \left(1 - 2\ln \frac{r_s}{r}\right).\end{aligned}$$

Theo điều kiện chảy dẻo ứng suất σ_{rr} không vượt quá $2\tau_s$, do đó xác định được bán kính cực đại của miền dẻo

$$\left(\frac{r_s}{a}\right)_{\max} \approx 1,65.$$

Khi khử áp suất ngoài ta dùng định lý về cất tải có thể tính ứng suất dư σ_{rr}^* , $\sigma_{\theta\theta}^*$. Người ta thấy rằng ứng suất dư σ_{rr}^* là ứng suất nén. Hiện tượng này được sử dụng trong chế tạo máy để gắn ống vào lá kim loại bằng áp suất.

5.3.3 Bản vô hạn có lỗ hổng tròn bị dãn đều ở vô cùng

Xét bản khá lớn có lỗ hổng tròn chịu dãn đều ở vô cùng, còn biên lỗ hổng tự do

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0 \quad \text{với } r = a, \\ \sigma_{rr} &\rightarrow q \quad \text{với } r \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{5.50}$$

1. Sử dụng điều kiện chảy dẻo Mises

Đối với bài toán này vẫn tồn tại phương trình (5.16), (5.44) và (5.46). Từ điều kiện (5.50) suy ra

$$\omega = \pi/3 \quad \text{với } r = a.$$

Nghiệm thỏa mãn điều kiện này có dạng

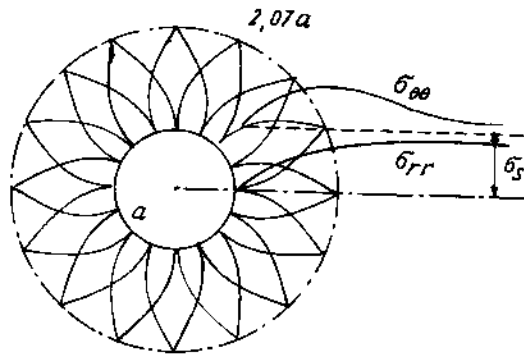
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 = \sin \omega \exp \left(-\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} - \omega\right)\right).\tag{5.51}$$

Vì rằng trục r, θ là trục chính, từ hệ thức này và hệ thức

$$\Omega \pm \theta = \text{const},$$

có thể xác định phương trình đường đặc trưng ở dạng thông số. Càng xa biên lỗ hồng góc giữa các đường đặc trưng càng giảm với $\omega = \frac{\pi}{6}$ (tương ứng với $\frac{r}{a} = 2,07$) cả hai họ đặc trưng hợp lại làm một. Khi đó ứng suất có giá trị $\sigma_{rr} = \tau_s, \sigma_{\theta\theta} = 2\tau_s$. Với $r < 2,07a$ phương trình thuộc loại hyperbolic, với $r > 2,07a$ - thuộc loại elliptic, nghiệm của nó vẫn có dạng (5.51).

Tại vô cùng từ (5.51) suy ra $\omega = 0$ và $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_s$ tức là bản chịu dãn đều tại vô cùng.



Hình 5.5

2. Sử dụng điều kiện chảy Saint Venant

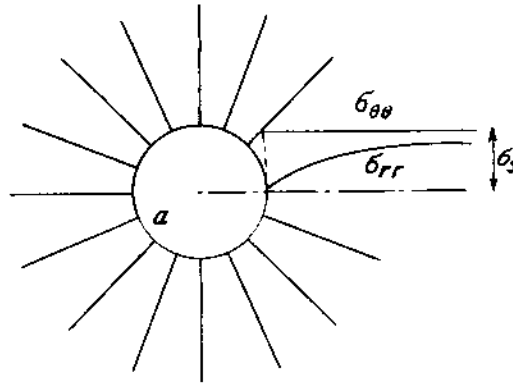
Từ nghiệm của bài toán đàn hồi $\sigma_{rr} = q\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$, $\sigma_{\theta\theta} = q\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$ ta thấy ứng suất $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ có cùng dấu dương và $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$, vì vậy điều kiện chảy có dạng

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_s.$$

Khi đó từ phương trình cân bằng và điều kiện biên (5.50) suy ra

$$\sigma_{rr} = \sigma_s \left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

Phương trình thuộc loại parabolíc có một họ đường đặc trưng gồm những tia thẳng qua tâm.



Hình 5.6

5.4 Cách đặt bài toán ứng suất phẳng theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ với vật liệu tái bền

Chúng ta giới hạn xét vật liệu không nén được

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0.$$

Hệ thức của lý thuyết Ilyushin trong trường hợp ứng suất phẳng có dạng

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} = \frac{\sigma_u}{e_u}\varepsilon_{xx}, \\ S_y &= \sigma_{yy} - \frac{1}{2}\sigma_{xx} = \frac{\sigma_u}{e_u}\varepsilon_{yy}, \\ S_{xy} &= \tau_{xy} = \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

trong đó cường độ ứng suất σ_u như đã xác định

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2},$$

còn cường độ biến dạng

$$e_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xy}^2}. \quad (5.53)$$

Đại lượng σ_u và e_u liên hệ với nhau theo quy luật

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \Phi(e_u) = Ee_u[1 - \omega(e_u)], \\ e_u &= \Phi^{-1}(\sigma_u) = \frac{\sigma_u}{E}[1 + \varphi(\sigma_u)].\end{aligned}\quad (5.54)$$

Giả sử không có lực khối, hệ phương trình cân bằng (5.1) thỏa mãn nếu như tồn tại hàm ứng suất Airy sao cho

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (5.55)$$

Dùng (5.54) vào (5.52) để biểu thị ngược lại biến dạng qua ứng suất, sau đó sử dụng (5.55) ta nhận được

$$\begin{aligned}E\varepsilon_{xx} &= [1 + \varphi(\sigma_u)] \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \\ E\varepsilon_{yy} &= [1 + \varphi(\sigma_u)] \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ E\varepsilon_{xy} &= -\frac{3}{2} [1 + \varphi(\sigma_u)] \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},\end{aligned}\quad (5.56)$$

trong đó cường độ ứng suất cũng biểu thị qua hàm Airy

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2}.$$

Phương trình để xác định hàm ứng suất Airy có được bằng cách thay (5.56) vào phương trình tương thích biến dạng

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

kết quả nhận được:

$$\begin{aligned}(\psi + S_y^2) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 6S_y S_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + 2\left(\psi + S_x S_y + \frac{9}{2} S_{xy}^2\right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - 6S_x S_{xy} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + (\psi + S_x^2) \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \chi = 0,\end{aligned}$$

trong đó χ là hàm của các đạo hàm bậc ba và thấp hơn của F , còn ψ có dạng

$$\psi = \sigma_u(1 + \varphi) \sqrt{\frac{d\varphi}{d\sigma_u}}.$$

Nếu σ_u nhỏ hơn giới hạn chảy dẻo, thì $\varphi = 0$, $\psi = \infty$, phương trình trên sẽ trùng với phương trình lưỡng điều hòa Lévy của bài toán phẳng đàn hồi.

Chẳng hạn, trường hợp vật liệu tái bền tuyến tính cường độ biến dạng liên hệ với cường độ ứng suất theo công thức

$$Ee_u = \sigma_u \frac{2 - 3\lambda + \lambda \frac{\sigma_u^2}{\sigma_s^2}}{2(1 - \lambda)},$$

trong đó

$$\lambda = \begin{cases} 1 - \frac{E'}{E} = \text{const} < 1 & \text{với } \sigma_u \geq \sigma_s, \\ 0 & \text{với } \sigma_u < \sigma_s. \end{cases}$$

Khi đó hàm $\varphi(\sigma_u)$ có dạng

$$\varphi = \frac{\lambda}{2(1 - \lambda)} \left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma_s^2} - 1 \right).$$

Với $\psi \geq 0$ phương trình xác định hàm F luôn luôn thuộc loại phương trình elliptic.

Trừ những bài toán khá đơn giản, chẳng hạn kéo nén một dải (hàm F chỉ phụ thuộc 1 biến) hay uốn thuần túy của bản, cho đến nay người ta chưa tìm được nghiệm giải tích của bài toán ứng suất phẳng với vật liệu tái bền.

5.5 Uốn đàn dẻo bản mỏng

Lý thuyết uốn đàn dẻo bản mỏng dựa trên những giả thuyết cơ bản của uốn bản đàn hồi. Giả thuyết đó cho phép đưa việc nghiên cứu trạng thái biến dạng của bản về nghiên cứu uốn mặt giữa của bản. Về sau này ta dùng giả thuyết vật liệu không nén được ($e = 0$) và xem trạng thái ứng suất trong bản là trạng thái ứng suất phẳng suy rộng.

5.5.1 Đặt bài toán

Giả sử bản có dạng tùy ý với điều kiện biên đã biết dưới tác dụng của lực cắt q . Khi tải q tăng, trong những miền ứng suất lớn hơn giới hạn đàn hồi sẽ xuất hiện biến dạng dẻo. Khi tải đủ lớn, trong miền nào đấy của bản sẽ có biến dạng dẻo trên toàn độ dày.

Cho mặt giữa trước khi uốn trùng với mặt phẳng (x, y) , trục z hướng về phía dưới trục giao với (x, y) , độ dày h không thay đổi và nhỏ so với các kích thước khác.

Các thành phần ứng suất σ_{zz} , τ_{xz} , τ_{yz} tại những mặt phẳng song song với mặt giữa nhỏ hơn và có thể bỏ qua so với những thành phần σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} tại các tiết diện trục giao với mặt giữa. Các đại lượng này cũng thay đổi ít theo độ dày, vì vậy có thể xét giá trị trung bình của chúng. Trạng thái ứng suất như vậy là trạng thái ứng suất phẳng suy rộng.

Tương tự như trong lý thuyết đàn hồi trạng thái căng của bản có thể xác định bởi các đại lượng tổng hợp tương ứng với cả độ dày của bản: lực dân, lực cắt và mômen trên một đơn vị dài

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz; & N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz; & N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = T_1, \\ Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz; & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz, \\ M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz; & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz; & M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = H_1. \end{aligned}$$

Theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ các thành phần ứng suất liên hệ với các thành phần biến dạng bằng công thức (5.52). Trong đó, các thành phần biến dạng ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} suy từ giả thiết pháp tuyến thẳng của Kirchhoff, tính đến biến dạng của mặt giữa:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= e_1 - z\kappa_1, \\ \varepsilon_{yy} &= e_2 - z\kappa_2, \\ \varepsilon_{xy} &= e_{12} - z\kappa_{12}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Các đại lượng $e_1(x, y)$, $e_2(x, y)$, $e_{12}(x, y)$, $\kappa_1(x, y)$, $\kappa_2(x, y)$, $\kappa_{12}(x, y)$ biểu thị biến dạng và độ cong của mặt giữa

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & e_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \kappa_{12} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Cường độ biến dạng (5.53) biểu thị qua (5.57):

$$e_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{P_e - 2zP_{e\kappa} + z^2P_{\kappa}}, \quad (5.58)$$

trong đó ký hiệu

$$\begin{aligned} P_e &= e_1^2 + e_1e_2 + e_2^2 + e_{12}^2, \\ P_{\kappa} &= \kappa_1^2 + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_{12}^2, \\ P_{e\kappa} &= e_1\kappa_1 + e_2\kappa_2 + \frac{1}{2}e_1\kappa_2 + \frac{1}{2}e_2\kappa_1 + \kappa_{12}e_{12}. \end{aligned}$$

Đặt (5.57) vào (5.52), ta được hệ thức của ứng suất trong miền biến dạng dẻo:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} = \frac{\sigma_u}{e_u}(e_1 - z\kappa_1), \\ S_y &= \sigma_{yy} - \frac{1}{2}\sigma_{xx} = \frac{\sigma_u}{e_u}(e_2 - z\kappa_2). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Ở đây, cường độ ứng suất liên hệ với cường độ biến dạng theo công thức (5.54). Tại miền đàn hồi $\omega(e_u) = 0$, $\sigma_u = Ee_u$, hệ thức (5.59) đưa về hệ thức trong trường hợp uốn đàn hồi.

Dùng hệ thức (5.59) để tính các biểu thức lực dẫn và mômen, qua một số tính toán nhận được kết quả

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}N_1 &= \left(e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)J_1 - \left(\kappa_1 + \frac{1}{2}\kappa_2\right)J_2, \\ \frac{3}{4}N_2 &= \left(e_2 + \frac{1}{2}e_1\right)J_1 - \left(\kappa_2 + \frac{1}{2}\kappa_1\right)J_2, \\ \frac{3}{2}N_{12} &= e_{12}J_1 - \kappa_{12}J_2, \\ \frac{3}{4}M_1 &= \left(e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)J_2 - \left(\kappa_1 + \frac{1}{2}\kappa_2\right)J_3, \\ \frac{3}{4}M_2 &= \left(e_2 + \frac{1}{2}e_1\right)J_2 - \left(\kappa_2 + \frac{1}{2}\kappa_1\right)J_3, \\ \frac{3}{4}M_{12} &= e_{12}J_2 - \kappa_{12}J_3, \end{aligned} \quad (5.60)$$

trong đó

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_u}{e_u} dz, \quad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_u}{e_u} z dz, \quad J_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_u}{e_u} z^2 dz.$$

Từ điều kiện cân bằng của phân tố bản sau khi biến dạng đi đến các phương trình như đã trình bày trong nghiên cứu bản đàn hồi

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_{12}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{5.61}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N_1 \varkappa_1 + N_2 \varkappa_2 + 2N_{12} \varkappa_{12} + q = 0,\tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} &= Q_1, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} &= Q_2.\end{aligned}\tag{5.63}$$

Đặt giá trị của Q_1, Q_2 theo (5.63) vào (5.62) cho ta phương trình cơ bản

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N_1 \varkappa_1 + N_2 \varkappa_2 + 2N_{12} \varkappa_{12} + q = 0.\tag{5.64}$$

Hệ các phương trình (5.60) - (5.64) kết hợp với điều kiện trên biên cho phép giải bài toán tổng quát về uốn và dẫn bản.

5.5.2 Uốn thuần túy bản đàn dẻo

1. Hệ thức cơ sở

Xét bài toán uốn thuần túy một bản dưới tác dụng của lực ngoài q thẳng góc với mặt của bản. Vì không có lực ngoài trong mặt phẳng của bản nên ta có thể giả thiết một cách tự nhiên các lực N_1, N_2, N_{12} bằng không. Từ (5.60) suy ra

$$\begin{aligned}\left(e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)J_1 - \left(\varkappa_1 + \frac{1}{2}\varkappa_2\right)J_2 &= 0, \\ \left(e_2 + \frac{1}{2}e_1\right)J_1 - \left(\varkappa_2 + \frac{1}{2}\varkappa_1\right)J_2 &= 0, \\ e_{12}J_1 - \varkappa_{12}J_2 &= 0.\end{aligned}$$

Các đẳng thức này thỏa mãn khi $e_1 = e_2 = e_{12} = 0$ và $\varkappa_n \neq 0, J_2 = 0$. Khi đó $P_e = P_{e\varkappa} = 0$, cường độ biến dạng (5.58) sẽ bằng

$$e_u = \frac{2}{\sqrt{3}}|z|\sqrt{P_{\varkappa}}.$$

Lấy vi phân theo z hai vế:

$$dz = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{P_{\kappa}}} de_u \quad (z > 0),$$

rồi dùng các biểu thức của e_u , dz tính các tích phân J_n :

$$J_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{P_{\kappa}}} \int_0^{e_o} \frac{\sigma_u de_u}{e_u}, \quad J_2 = 0,$$

$$J_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4(P_{\kappa})^{3/2}} \int_0^{e_o} \sigma_u e_u de_u,$$

trong đó

$$e_o = e_u\left(\frac{h}{2}\right) = e_u\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{\sqrt{3}}\sqrt{P_{\kappa}}.$$

Hệ thức (5.60) có dạng

$$\begin{aligned} M_1 &= -\left(\kappa_1 + \frac{1}{2}\kappa_2\right)J(P_{\kappa}), \\ M_2 &= -\left(\kappa_2 + \frac{1}{2}\kappa_1\right)J(P_{\kappa}), \\ M_{12} &= -\frac{1}{2}\kappa_{12}J(P_{\kappa}), \end{aligned} \tag{5.65}$$

trong đó ký hiệu $J(P_{\kappa}) = \frac{4}{3}J_3$.

Ta đưa vào biểu thức

$$M = M_1^2 - M_1M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2$$

và thay thế (5.65) vào đây, khi đó

$$P_{\kappa}J^2(P_{\kappa}) = \frac{4}{3}M. \tag{5.66}$$

Biết dạng của $J(P_{\kappa})$, từ đây suy ra P_{κ} và J là hàm của M . Giải ngược lại hệ thức (5.65) ta được

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{4}{3J}\left(M_1 - \frac{1}{2}M_2\right), \\ \kappa_2 &= -\frac{4}{3J}\left(M_2 - \frac{1}{2}M_1\right), \\ \kappa_{12} &= -\frac{2}{J}M_{12}. \end{aligned} \tag{5.67}$$

2. Biểu thức năng lượng uốn

Trường hợp vật liệu không nén được công nội lực trên một đơn vị thể tích theo (1.50)

$$W = \int_0^{e_u} \sigma_u de_u.$$

Vì vậy công trên một đơn vị diện tích bản sẽ là:

$$W^* = \int_{-h/2}^{h/2} W dz.$$

Biến phân của hàm W^* tương ứng với biến phân độ cong $\delta \kappa_1, \delta \kappa_2, \delta \kappa_{12}$ bằng công của mômen (trên đơn vị dài) đối với “chuyển dịch” đó

$$\delta W^* = -(M_1 \delta \kappa_1 + M_2 \delta \kappa_2 + 2M_{12} \delta \kappa_{12}).$$

Do đó có thể viết:

$$M_1 = -\frac{\partial W^*}{\partial \kappa_1}, \quad M_2 = -\frac{\partial W^*}{\partial \kappa_2}, \quad M_{12} = -\frac{\partial W^*}{\partial \kappa_{12}}.$$

Mặt khác tính biến phân δW^* theo công thức

$$\delta W^* = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_u \delta e_u dz.$$

Nhờ biểu thức của e_u , tính biến phân δe_u

$$\frac{3}{2} e_u \delta e_u = z^2 \delta P_{\kappa}.$$

Đặt biểu thức này vào hệ thức của δW^* và chú ý đến biểu thức J_3 , ta được

$$\delta W^* = \frac{2}{3} \delta P_{\kappa} J_3 = \frac{1}{2} J(P_{\kappa}) \delta P_{\kappa}.$$

Vậy biến phân của năng lượng uốn toàn bản bằng:

$$\begin{aligned} \delta U &= \iint_S \delta W^* dx dy = - \iint_S (M_1 \delta \kappa_1 + M_2 \delta \kappa_2 + 2M_{12} \delta \kappa_{12}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_S J(P_{\kappa}) \delta P_{\kappa} dx dy. \end{aligned} \quad (5.68)$$

3. Phương trình cân bằng

Trong trường hợp uốn thuần túy phương trình cân bằng nhận được từ hệ phương trình (5.61)-(5.63) bằng cách cho N_1, N_2, N_{12} bằng không. Phương trình (5.61) thỏa mãn đồng nhất, các phương trình còn lại cho ta

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}}{\partial y} &= Q_1, \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} &= Q_2.\end{aligned}$$

Từ đây, suy ra:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q = 0. \quad (5.69)$$

Điều kiện biên của bài toán uốn dầm dèo cũng tương tự như trong trường hợp dầm hồi. Tại biên có thể cho trước chuyển dịch hay đạo hàm theo pháp tuyến ν :

$$w = f_1(s), \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = f_2(s),$$

hoặc lực cắt và mômen uốn

$$M_\nu = f_3(s), \quad Q_\nu + \frac{\partial H_\nu}{\partial s} = f_4(s),$$

hoặc điều kiện hỗn hợp, chẳng hạn tựa tự do

$$w = 0, \quad M_\nu = 0.$$

Có ba cách đặt bài toán uốn bản:

1. Biểu thị qua chuyển dịch w . Phương trình đối với độ võng nhận được bằng cách đặt (5.65) vào (5.69)
2. Dùng phương trình năng lượng
3. Biểu thị qua mômen. Ta có phương trình (5.69) và các hệ thức (5.67) Bây giờ đi vào xét cụ thể từng cách

4. Nghiệm tổng quát của bài toán uốn bản thuần túy

a) *Giải theo chuyển dịch*. Dùng công thức (5.54)

$$\sigma_u = E e_u [1 - \omega(e_u)]$$

vào tính biểu thức của J :

$$J = D(1 - \Omega), \quad \Omega = \frac{3}{e_0^3} \int_0^{e_0} \omega e_u^2 de_u, \quad (5.70)$$

trong đó $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{Eh^3}{9}$ là độ cứng trụ của bản.

Nếu dạng của đường cong $\sigma_u \sim e_u$ đã biết, thì hoàn toàn xác định được Ω . Chẳng hạn đối với vật liệu tái bền tuyến tính

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \quad \text{với } e_u < e_s, \\ \omega &= \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_u}\right) \quad \text{với } e_u \geq e_s, \end{aligned}$$

hàm Ω sẽ có dạng

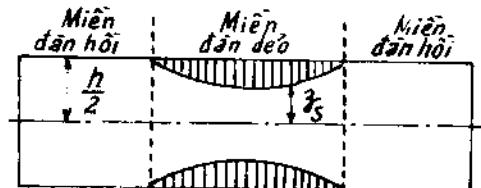
$$\begin{aligned} \Omega &= 0 \quad \text{với } e_0 = \frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{P_x} < e_s, \\ \Omega &= \lambda \left(1 - \frac{3e_s}{2e_0} + \frac{e_s^3}{2e_0^3}\right) \quad \text{với } e_0 \geq e_s. \end{aligned}$$

Khi đó bản chia ra làm hai miền: một miền biến dạng thuần túy đàn hồi ($\Omega = 0$), miền kia biến dạng đàn dẻo, biên của chúng xác định bởi phương trình:

$$e_0 = e_s \quad \text{hay là} \quad P_x = \frac{3e_s^2}{h^2}.$$

Ở miền biến dạng đàn dẻo độ dày của bản phân thành hai miền biến dạng dẻo kề với biên $z = \pm \frac{h}{2}$ và miền biến dạng đàn hồi chứa mặt giữa $z = 0$. Hai miền này phân chia bởi biên

$$z = z_s = \pm \frac{e_s \sqrt{3}}{2\sqrt{P_x}}; \quad |z| \leq \frac{h}{2}.$$



Hình 5.7

Dùng biểu thức (5.70) và các hệ thức (5.65) đối với mômen đũa phương trình (5.69) về dạng

$$\begin{aligned}\Delta\Delta w = \frac{q}{D} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Omega \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Omega x_{12}) \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\Omega \left(x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) \right],\end{aligned}\quad (5.71)$$

Ilyushin chứng minh được rằng phương trình (5.71) thuộc loại phương trình elliptic, vì vậy với điều kiện biên nó cho nghiệm duy nhất.

Viết phương trình cân bằng dưới dạng (5.71) cho phép dùng phương pháp nghiệm đàn hồi để giải bài toán. Quả vậy, ở trạng thái đàn hồi $\Omega = 0$ phương trình này trùng với phương trình Germain-Lagrange.

Giả sử biết hàm Green của bài toán đàn hồi với điều kiện biên xác định

$$w_0^{(e)} = \frac{P}{D} \Gamma(x, y, \xi, \eta),$$

trong đó lực tập trung P đặt tại điểm ξ, η . Bây giờ phải xác định độ võng w trong bài toán uốn đàn dẻo với lực $q(\xi, \eta)$. Để áp dụng phương pháp nghiệm đàn hồi ta viết (5.71) dưới dạng

$$\Delta\Delta w = \frac{q + q^* D}{D}.$$

Dùng hàm Green viết nghiệm của phương trình này

$$w = \frac{1}{D} \iint_S [q(\xi, \eta) + Dq^*(\xi, \eta)] \Gamma(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Đặt $w = w^{(e)} + \hat{w}$ với

$$w^{(e)} = \frac{1}{D} \iint_S q(\xi, \eta) \Gamma(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

là nghiệm của bài toán đàn hồi với lực ngoài q và

$$\hat{w} = \iint_S q^*(\xi, \eta) \Gamma(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

biểu thị độ võng dư. Đặt giá trị của q^* theo (5.71) vào đây và thực hiện phép tích phân, ta được:

$$\begin{aligned}\tilde{w} = & \iint_S \left[\kappa_1 \left(\Gamma_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \Gamma_{\eta\eta} \right) + \kappa_{12} \Gamma_{\xi\eta} + \kappa_2 \left(\Gamma_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \Gamma_{\xi\xi} \right) \right] \Omega d\xi d\eta \\ & + \oint \left(\Gamma \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Omega \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) \right] \cos(\nu, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Omega \kappa_{12}) \cos(\nu, x) \right. \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Omega \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) \right] \cos(\nu, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Omega \kappa_{12}) \cos(\nu, y) \right\} \\ & - \Omega \left[\left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) \Gamma_\xi \cos(\nu, x) + \frac{1}{2} \kappa_{12} \Gamma_\eta \cos(\nu, x) \right. \\ & \left. \left. + \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) \Gamma_\eta \cos(\nu, y) + \frac{1}{2} \kappa_{12} \Gamma_\xi \cos(\nu, y) \right] \right) ds,\end{aligned}$$

trong đó

$$\Gamma_\xi = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}, \quad \Gamma_\eta = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta}, \quad \Gamma_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2}, \quad \Gamma_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2}, \quad \Gamma_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Tích phân thứ hai bằng không theo điều kiện trên biên, vậy

$$\tilde{w} = \iint_S \left[\kappa_1 \left(\Gamma_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \Gamma_{\eta\eta} \right) + \kappa_{12} \Gamma_{\xi\eta} + \kappa_2 \left(\Gamma_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \Gamma_{\xi\xi} \right) \right] \Omega d\xi d\eta. \quad (5.72)$$

Phương pháp gần đúng liên tiếp như sau: gần đúng thứ nhất $\Omega = \Omega_1 = 0$ ta tìm được $w^{(1)} = w^{(e)}$, nhờ $w^{(e)}$ tính

$$\kappa_1^{(1)} = \frac{\partial^2 w^{(e)}}{\partial x^2}, \dots, P_{\kappa}^{(1)}, e_0^{(1)}$$

thay thế các giá trị này vào (5.70) tính Ω_2 . Đặt các biểu thức vừa tìm được vào (5.72) để tính độ võng dư $\tilde{w}_1$. Vậy gần đúng thứ hai bằng $w^{(2)} = w^{(e)} + \tilde{w}_1$. Tương tự như trên tính $\kappa_1^{(2)}, \dots, \Omega_3, \tilde{w}_2$. Quá trình này lặp lại cho đến khi nghiệm gần đúng thứ $(n+1)$ không sai khác mấy gần đúng thứ n .

b) *Sử dụng phương pháp năng lượng*

Công của lực ngoài trên chuyển dịch khả dĩ δw bằng

$$\delta^* L = \iint_S q \delta w dx dy.$$

Theo nguyên lý Lagrange ta có thể viết

$$\begin{aligned} - \iint_S (M_1 \delta \kappa_1 + M_2 \delta \kappa_2 + 2M_{12} \delta \kappa_{12}) dx dy &= \frac{1}{2} \iint_S J(P_{\kappa}) \delta P_{\kappa} dx dy \\ &= \iint_S q \delta w dx dy \end{aligned} \quad (5.73)$$

hay là

$$\frac{1}{2} \iint_S (1 - \Omega) \delta P_{\kappa} dx dy = \frac{1}{D} \iint_S q \delta w dx dy.$$

Để giải phương trình này ta chọn hệ hàm số độc lập $f_{\alpha}(x, y)$ thỏa mãn điều kiện biên và đặt

$$w = \sum_{\alpha} a_{\alpha} f_{\alpha}, \quad \delta w = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \delta a_{\alpha},$$

trong đó a_{α} hằng số tùy ý.

Đặt các giá trị này vào phương trình (5.73) và từ tính chất tùy ý của δa_{α} ta nhận được phương trình để xác định các hằng số a_{α}

$$\begin{aligned} \iint_S q f_{\alpha} dx dy + \iint_S \left(M_1 \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial x^2} + M_2 \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial y^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial x \partial y} \right) dx dy &= 0. \\ (\alpha = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Chú ý rằng các đại lượng M_1, M_2, M_{12} trong phương trình này biểu thị qua $w = \sum_{\alpha} a_{\alpha} f_{\alpha}$ theo công thức (5.65).

c) *Sử dụng phương trình cân bằng theo các mômen*

Từ định nghĩa của độ cong, độ xoắn suy ra điều kiện tương thích

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial y} = \frac{\partial \kappa_{12}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \kappa_2}{\partial x} = \frac{\partial \kappa_{12}}{\partial y}.$$

Dùng (5.66), (5.67) vào đây

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{2M_1 - M_2}{J(M)} &= 3 \frac{\partial}{\partial x} \frac{M_{12}}{J(M)}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{2M_2 - M_1}{J(M)} &= 3 \frac{\partial}{\partial y} \frac{M_{12}}{J(M)}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Kết hợp phương trình này với phương trình (5.69) cho phép xác định trực tiếp nghiệm của bài toán dưới dạng các thành phần mômen.

5.5.3 Khả năng chịu lực của bản

Xác định khả năng chịu lực là xác định giá trị cực đại của lực ngoài, mà bản làm bằng vật liệu dẻo lý tưởng (không tái bền) có thể tiếp thụ được. Theo định lý về cân bằng giới hạn chúng ta xuất phát từ phương trình (5.73) với giả thiết có thể bỏ qua biến dạng đàn hồi so với biến dạng toàn phần. Điều đó có nghĩa về thực chất chúng ta giả thiết vật liệu cứng dẻo lý tưởng, tức là $e_s \rightarrow 0$, $E \rightarrow \infty$ và $Ee_s \rightarrow \sigma_s$. Do đó từ biểu thức của Ω đặt $\lambda = 1$ và chú ý điều vừa nêu trên, ta nhận được biểu thức của Ω cho trường hợp cứng dẻo lý tưởng:

$$\Omega = 1 - \frac{3\sqrt{3}e_s}{2h\sqrt{P_x}}.$$

Vậy

$$J = D(1 - \Omega) = \frac{3\sqrt{3}De_s}{2h\sqrt{P_x}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{M_s}{\sqrt{P_x}}, \quad (5.75)$$

trong đó

$$M_s = \frac{\sigma_s h^2}{4}.$$

Phương trình (5.73) đưa về dạng

$$\frac{\sigma_s h^2}{2\sqrt{3}} \iint_S \frac{\delta P_x}{2\sqrt{P_x}} dx dy = \iint_S q \delta w dx dy.$$

Gọi a và q_0 là đại lượng đặc trưng của kích thước bản và lực ngoài

$$q = q_0 \bar{q}, \quad \frac{q_0 a^2}{\sigma_s h^2} = k.$$

Ta có thể viết phương trình biến phân cân bằng dưới dạng

$$\delta \iint_S \left(\sqrt{P_x} - \frac{2\sqrt{3}k}{a^2} \bar{q} w \right) dx dy = 0, \quad (5.76)$$

trong đó

$$P_x = \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_{12}^2$$

là biểu thức tựa tuyến tính thuần nhất theo w . Mô men và lực cắt biểu thị qua độ võng và đạo hàm của nó dưới dạng hàm thuần nhất bậc không (suy từ (5.65) và (5.75)); điều kiện biên cũng là hàm thuần nhất và tựa tuyến tính đối với độ võng. Do đó phương trình (5.76) là biểu thức tựa tuyến tính thuần nhất đối với w . Nó chỉ có nghiệm với giá trị xác định nào đấy của tham số k . Giá trị nhỏ nhất của k xác định lực cực đại hay khả năng chịu lực của bản.

$$k = \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \frac{\iint_S \delta \sqrt{P_x} dx dy}{\iint_S \bar{q} \delta w dx dy}. \quad (5.77)$$

Do đó, có thể xác định được khả năng chịu lực của bản nếu tìm được $w(x, y)$ sao cho tham số k có giá trị cực tiểu. Giải bài toán này tương tự như bài toán xác định lực giới hạn đàn hồi theo phương pháp Ritz-Timoshenko.

Chẳng hạn, xét bài toán về khả năng chịu lực của bản chữ nhật có cạnh a và b tựa tự do theo chu tuyến và chịu tải phân bố đều.

Tìm độ võng thỏa mãn điều kiện biên dưới dạng

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

khi đó,

$$P = \frac{2a^2}{\pi^2 A} \sqrt{P_x} = \left[(1 + \alpha^2)^2 - (1 + \alpha^4) \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi \alpha y}{a} \right) + (1 + \alpha^2)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi \alpha y}{a} \right]^{1/2},$$

trong đó $\alpha = \frac{a}{b}$.

Biến phân δw và $\delta \sqrt{P_x}$ lấy theo A , sẽ tỷ lệ với δA . Thay thế biểu thức của δw và $\delta \sqrt{P_x}$ vào (5.77) đưa ta đến việc xác định tham số k khá đơn giản:

$$k = \frac{\alpha \pi^4}{16\sqrt{3}a^2} \int_0^a \int_0^{a/\alpha} P dx dy.$$

Ilyushin đưa ra một phương pháp khác để tính lực giới hạn nhờ hệ thức giữa các mômen

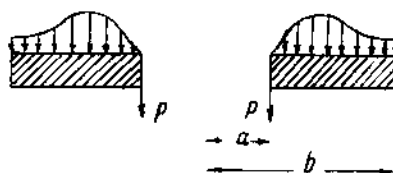
$$M = M_s^2 = M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3M_{12}^2 \quad (5.78)$$

kết hợp phương trình này với phương trình cân bằng (5.69) và phương trình tương thích biến dạng (5.74) cho ta hệ phương trình để xác định khả năng chịu lực của bản. Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp này vào bài toán đối với bản tròn.

5.5.4 Biến dạng đối xứng trục: Uốn bản tròn

Xét bản tròn với bán kính trong và ngoài là a và b dưới tác dụng của lực cắt ngoài P theo biên $r = a$ và lực cắt đối xứng trục $q(r)$. Lực cắt trong tại vòng tròn bán kính r bằng

$$-2\pi r Q_r = 2\pi a P + 2\pi \int_a^r q r dr.$$



Hình 5.8

Do tính chất đối xứng $M_{r\theta} = 0$, từ điều kiện cân bằng của một phần tử bản ta nhận được phương trình vi phân cân bằng:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q_r,$$

hay là

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = -\frac{a}{r}P - \frac{1}{r} \int_a^r q r dr \quad (5.79)$$

(đối với bản không có lỗ hổng $a = 0$). Ký hiệu $w(r)$ là độ võng của bản, độ cong $\varkappa_r$, $\varkappa_\theta$ có dạng

$$\varkappa_r = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \varkappa_\theta = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr},$$

suy ra điều kiện tương thích

$$\varkappa_r = \varkappa_\theta + r \frac{d\varkappa_\theta}{dr}.$$

Biểu thức của mômen (5.65) trong trường hợp này

$$\begin{aligned} M_r &= -D(1 - \Omega) \left(\varkappa_r + \frac{1}{2} \varkappa_\theta \right) = -D(1 - \Omega) \left(\frac{3}{2} \varkappa_\theta + r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} \right), \\ M_\theta &= -D(1 - \Omega) \left(\varkappa_\theta + \frac{1}{2} \varkappa_r \right) = -D(1 - \Omega) \left(\frac{3}{2} \varkappa_\theta + \frac{1}{2} r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} \right), \\ \Omega &= \Omega(P_\varkappa), \quad P_\varkappa = 3 \left[\varkappa_\theta^2 + \varkappa_\theta r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} + r^2 \left(\frac{d\varkappa_\theta}{dr} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Phương trình cân bằng (5.79) dẫn về phương trình của một hàm chưa biết

$$r \frac{d}{dr} \left[(1 - \Omega) \left(r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} + \frac{3}{2} \varkappa_\theta \right) \right] + \frac{1}{2} (1 - \Omega) r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} = \frac{Pa}{D} + \frac{1}{D} \int_0^r q r dr. \quad (5.81)$$

Đây là phương trình vi phân thường bậc hai tựa tuyến tính, trong trường hợp tổng quát giải bằng phương pháp số.

1. Uốn bán dưới tác dụng chỉ của lực cắt P theo chu tuyến

Đặt $q = 0$ và chú ý rằng

$$r \frac{d}{dr} = r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} \frac{d}{d\varkappa_\theta},$$

ta viết lại phương trình (5.81)

$$r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} \frac{d}{d\varkappa_\theta} \left[(1 - \Omega) \left(r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} + \frac{3}{2} \varkappa_\theta \right) \right] + \frac{1}{2} (1 - \Omega) r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} = \frac{Pa}{D}.$$

Đưa vào đại lượng không thứ nguyên

$$\frac{\varkappa_\theta h}{2e_s} = -\varkappa, \quad \frac{h}{2e_s} r \frac{d\varkappa_\theta}{dr} = \zeta = -r \frac{d\varkappa}{dr},$$

ta biến đổi phương trình trên về dạng

$$\zeta \frac{d}{d\varkappa} \left[(1 - \Omega)(3\varkappa - 2\zeta) \right] + (1 - \Omega)\zeta = p, \quad \text{với } p = \frac{ahP}{De_s}. \quad (5.82)$$

Biểu thức $\frac{e_0}{e_s}$ có thể viết

$$e = \frac{e_0}{e_s} = \frac{h}{e_s \sqrt{3}} \sqrt{P_\varkappa} = 2 \sqrt{\varkappa^2 - \varkappa \zeta + \frac{1}{3} \zeta^2},$$

khi đó với vật liệu tái bền tuyến tính

$$\Omega = 0 \text{ với } e \leq 1, \quad \Omega = \lambda \left(1 - \frac{3}{2e} + \frac{1}{2e^3} \right) \text{ với } e > 1.$$

Bây giờ giải phương trình (5.82) theo $\frac{d\zeta}{d\kappa}$:

$$\frac{d\zeta}{d\kappa} = \frac{4(1 - \Omega) - (3\kappa - 2\zeta) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \frac{p}{\zeta}}{2(1 - \Omega) + (3\kappa - 2\zeta) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}},$$

trong đó Ω và các đạo hàm của nó có thể biểu thị qua κ và ζ nhờ các hệ thức trên. Quả vậy ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} &= \frac{3\lambda}{e^5} (2\kappa - \zeta)(e^2 - 1), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} &= -\frac{3\lambda}{e^5} (3\kappa - 2\zeta)(e^2 - 1). \end{aligned}$$

Bài toán này có thể giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

2. Khả năng chịu lực của bản tròn dưới tác dụng của lực cắt P

Ta cần xác định giá trị lớn nhất của lực P để cho toàn miền của bản ở trạng thái biến dạng dẻo, tức là giải bài toán dẻo cho toàn miền. Tương tự như trên chúng ta xuất phát từ mô hình vật liệu cứng dẻo lý tưởng. Hệ thức giữa các mô men (5.78) có dạng

$$M_\theta^2 - M_\theta M_r + M_r^2 = M_s^2, \quad (5.83)$$

trong đó M_θ , M_r là mômen chính. Phương trình này thỏa mãn nếu đặt:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{2M_s}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right), \\ M_\theta &= \frac{2M_s}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned} \quad (5.84)$$

Nếu biên tựa tự do thì

$$M_r = 0, \quad \text{với } \omega = \frac{\pi}{3} \text{ và } \omega = -\frac{2\pi}{3}.$$

Nếu biên ngàm thì $\frac{dw}{dr} = 0$ tức là $\kappa_\theta = 0$. Từ (5.80), (5.84) suy ra:

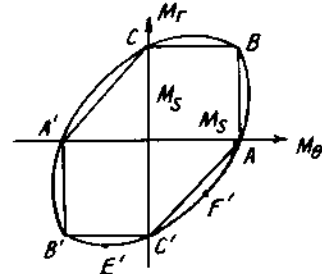
$$2M_\theta = M_r = -\frac{2M_s}{\sqrt{3}}, \quad \text{với } \omega = \frac{5\pi}{6},$$

$$2M_\theta = M_r = \frac{2M_s}{\sqrt{3}} \quad \text{với } \omega = -\frac{\pi}{6}.$$

Trong mặt phẳng (M_r, M_θ) phương trình (5.83) biểu thị ellip, trên đó ghi tương ứng những điểm có giá trị đặc biệt (theo ω) và vẽ lục giác nội tiếp ellip.

Đối với bài toán bán tròn có chu tuyến trong $r = a$ tựa tự do thì tại đó $M_r = 0$, κ_θ âm và $M_\theta = M_s$. Chu tuyến ngoài $r = b$ bị ngàm, tại đó $M_r = 2M_\theta = -\frac{2M_s}{\sqrt{3}}$.

Bán kính thay đổi từ a đến b , tương ứng với các điểm trên ellip từ $\omega = \frac{\pi}{3}$ đến $\omega = \frac{5\pi}{6}$, tức là trên cạnh $AF'C'E'$.



Hình 5.9

Đặt

$$m_1 = \frac{M_r}{M_s}, \quad m_2 = \frac{M_\theta}{M_s}, \quad \frac{aP}{M_s} = 4 \frac{aP}{h^2 \sigma_s} = k,$$

phương trình cân bằng (5.79) trong trường hợp này có dạng

$$r \frac{dm_1}{dr} + m_1 - m_2 = -k. \quad (5.85)$$

a) *Sử dụng điều kiện Saint-Venant.* Trên lục giác tương ứng với đoạn $AF'C'$: $m_2 - m_1 = \delta$ ($\delta = 1$ với lục giác nội tiếp, $\delta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ với lục giác ngoại tiếp) thay thế giá trị này vào phương trình (5.85) và tích phân lên

$$m_1 = (\delta - k) \ln \frac{r}{a}. \quad (5.86)$$

Tương ứng với đoạn $C'E'$: $m_1 = -\delta$, mà đoạn $C'E'$ lại tương ứng với chu tuyến ngoài. Vì vậy với $r = b$, $m_1 = -\delta$, từ (5.86) suy ra

$$k = \delta \frac{1 + \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (5.87)$$

Do đó giá trị cực đại của lực đặt tại chu tuyến bằng

$$2\pi a P_{\max} = \frac{\pi}{2} h^2 \sigma_s \delta \frac{1 + \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

b) *Sử dụng điều kiện Mises.* Nếu dùng ellip, thì trong khoảng $\frac{\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{5\pi}{6}$

$$m_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right), \quad m_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6} \right),$$

phương trình cân bằng (5.85) có dạng

$$r \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \frac{d\omega}{dr} = k - \sin \omega$$

hay là

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) d\omega}{k - \sin \omega},$$

với $\frac{\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{5\pi}{6}$.

Tích phân phương trình vừa nhận được với cận $r = a$, $\omega = \frac{\pi}{3}$ và $r = b$, $\omega = \frac{5\pi}{6}$ dẫn đến kết quả sau

$$\begin{aligned} \ln \frac{b}{a} - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = & -\frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{k^2-1}} \left[\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \ln \frac{2k+\sqrt{3}}{2k-1}, \end{aligned}$$

Giá trị k xác định từ đây nằm giữa các giá trị k tính từ (5.87) với $\delta = 1$ và $\delta = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Có nghĩa là tính theo lục giác ngoại tiếp cho giới hạn trên của khả năng chịu lực, tính theo lục giác nội tiếp cho giới hạn dưới. Ta còn có thể viết phương trình cân bằng (5.85) dưới dạng:

$$\ln \frac{b}{a} = - \int_{m_a}^{m_b} \frac{dm_1}{k - (m_2 - m_1)},$$

trong đó $m_a = m_1(a)$; $m_b = m_1(b)$.

B - BIẾN DẠNG PHẪNG

5.6 Những phương trình cơ bản của biến dạng phẳng

Như đã định nghĩa trong lý thuyết đàn hồi, *trạng thái biến dạng phẳng* xác định bởi những tính chất sau đây:

a) chuyển dịch của phần tử vật thể song song với một mặt phẳng cho trước, chẳng hạn mặt phẳng (x, y) .

b) chuyển dịch không phụ thuộc vào z .

Khi đó chúng ta có hệ phẳng, trong đó các thành phần chuyển dịch u, v (hoặc các thành phần tốc độ v_x, v_y) khác không

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (5.88)$$

Tại tiết diện bất kỳ $z = \text{const}$ ta có cùng hình ảnh của trạng thái biến dạng và ứng suất. Các thành phần ứng suất cũng chỉ phụ thuộc vào x, y , trong đó τ_{xz}, τ_{yz} bằng không. Vì vậy σ_{zz} là một trong những ứng suất chính.

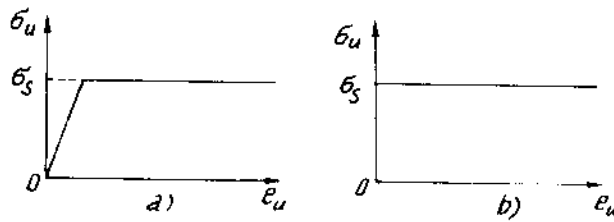
Khác với lý thuyết đàn hồi, trong đó các điều kiện trên đủ để thiết lập bài toán phẳng, việc thiết lập bài toán biến dạng phẳng của lý thuyết dẻo cần có thêm điều kiện nữa.

Giải bài toán biến dạng phẳng đối với vật liệu dẻo tái bền gặp khó khăn rất lớn về mặt toán học, hiện nay có ít công trình nghiên cứu về vấn đề này. Vì vậy ở đây chúng ta chỉ giới hạn xét bài toán đối với *vật liệu dẻo lý tưởng* (không tái bền). Hơn nữa, ngay với vật liệu này chúng ta cũng mới chỉ giải được bài toán phẳng đàn dẻo trong những trường hợp đối xứng trục, vì biết trước dạng của biên đàn dẻo. Nói chung, dạng của biên đàn dẻo trong bài toán đàn dẻo phẳng chưa biết trước và phương pháp tổng quát giải bài toán này chưa phát triển lắm.

Thường đối với biến dạng dẻo tương đối lớn có thể bỏ qua biến dạng đàn hồi, do đó để giải bài toán phẳng người ta dùng mô hình *cứng dẻo lý tưởng*: trong miền dẻo dùng hệ thức của lý thuyết dẻo Saint Venant, còn miền đàn hồi xem như miền không biến dạng.

Trước khi đi vào thiết lập cụ thể bài toán phẳng chúng ta nêu một vài đặc thù của cách đặt bài toán với vật liệu dẻo lý tưởng. Đồ thị liên hệ $\sigma_u = \Phi(e_u)$ của vật liệu dẻo lý tưởng có dạng trên hình 5.10.

Từ đó ta thấy rằng, vật liệu dẻo lý tưởng chỉ vừa hoàn toàn chuyển sang trạng thái dẻo, thì nếu tăng tiếp lực ngoài (tức là tăng cường độ ứng suất) sẽ dẫn đến không cân bằng, vật liệu mất khả năng chịu đựng biến dạng dẻo. Chính với ý nghĩa đó ta đã phát biểu về khả năng chịu lực của vật thể (xem định lý về cân bằng giới hạn).



Hình 5.10

Cũng cần chú ý rằng, có thể tăng lực ngoài mà không làm mất cân bằng. Trường hợp này xảy ra khi tăng áp suất trung bình, vì cường độ σ_u sẽ không tăng. Do đó, cách đặt bài toán với vật liệu dẻo lý tưởng khác về thực chất với cách đặt bài toán vật liệu tái bền, thể hiện ở chỗ:

- xuất hiện bài toán về khả năng chịu lực;
- dưới tác dụng của lực ngoài xuất hiện miền chảy dẻo tại đó cường độ ứng suất không đổi;
- bài toán có ý nghĩa lớn về mặt thực tế: xét sự chảy dẻo của vật liệu, sự phân bố chuyển dịch, áp suất trên mặt vật thể trong gia công kim loại bằng áp suất.

5.6.1 Hệ thức cơ bản

Khi biến dạng dẻo tương đối lớn vật liệu hầu như trở thành không nén được, tức là $e = \frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) = 0$ và $v = \frac{1}{3}(\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}) = 0$. Từ (5.88) suy ra $\epsilon_{zz} = 0$ (hoặc $\dot{\epsilon}_{zz} = 0$) và $\dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0$. Dùng các điều kiện này và theo lý thuyết chảy cũng như theo thuyết biến dạng đều đưa đến hệ thức:

$$\sigma_{zz} = \sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}); \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

$$\frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}, \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (5.90)$$

Cường độ ứng suất có dạng

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Với vật liệu dẻo lý tưởng theo điều kiện chảy dẻo của Mises $\sigma_u = \sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$, suy ra:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_s^2. \quad (5.91)$$

Có thể chỉ ra rằng trong trường hợp này điều kiện dẻo Mises trùng với điều kiện Saint Venant. Quả vậy, ngoài σ_{zz} là một thành phần ứng suất chính, các ứng suất chính còn lại xác định bởi công thức

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2},$$

trong đó $\sigma_1 > \sigma_{zz} > \sigma_2$. Khi đó ứng suất tiếp cực đại sẽ là

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Từ điều kiện dẻo Saint Venant $\tau_{\max} = \tau_s$, ta lại nhận được hệ thức (5.91). Đó là điều cần chứng minh.

Khi không có lực khối tác dụng, phương trình cân bằng (5.1) có dạng

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Nếu tại biên vật thể cho trước ứng suất (điều kiện biên (5.2)) thì hệ phương trình (5.91) và (5.92) tạo thành hệ thống đầy đủ phương trình để xác định trạng thái ứng suất, không phải dùng đến hệ thức biến dạng. Bài toán như vậy gọi là *xác định tĩnh (có điều kiện)*.

Để xác định hoàn toàn ứng suất và biến dạng trong bài toán biến dạng phẳng ta có 5 phương trình (5.89) - (5.92), với 5 ẩn số $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, u_x, v_y$.

Giải hệ phương trình (5.91) và (5.92) có thể thực hiện bằng nhiều cách khác nhau. Saint Venant làm tương tự như giải bài toán đàn hồi phẳng đưa vào hàm ứng suất F thỏa mãn (5.92). Sau đó đem thay vào phương trình (5.91), ta nhận được phương trình xác định hàm F :

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 = 4\tau_s^2.$$

Nhưng phương pháp này không phát triển được.

Lévy đã kiến nghị một phương pháp khác, đặt cơ sở cho những nghiên cứu sau này.

5.6.2 Đường trượt. Phương trình biến dạng phẳng đối với đường trượt

Gọi σ_ν , τ_ν là ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại tiết diện có hướng ν , tạo với trục x một góc θ . Ta có

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_\nu &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (5.93)$$

Từ đây suy ra hướng của trục chính ứng suất

$$\operatorname{tg} 2\theta_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}.$$

Hai góc θ_1 , θ_2 (tính từ trục x) khác nhau một lượng là $\pi/2$.

Bây giờ tìm hướng của tiết diện tại đó ứng suất tiếp có giá trị cực đại. Gọi α và β là hướng của các tiết diện đó, φ_α là góc giữa hướng α và trục x . Ta tính cực đại của hàm τ_ν (5.93), nó tồn tại khi

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{\alpha,\beta} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\theta_{1,2}}. \quad (5.94)$$

Do đó

$$\varphi_\alpha = \theta_1 + \pi/4, \quad \varphi_\beta = \theta_2 + \pi/4.$$

đường α và β tạo thành một góc 45° đối với trục chính.

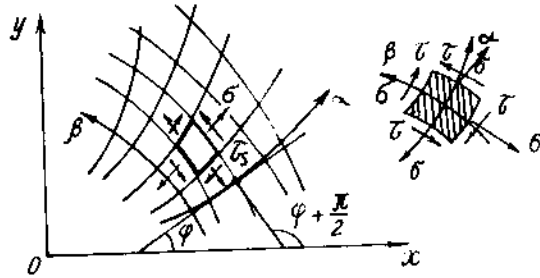
1. Đường trượt

Bây giờ đưa vào định nghĩa *đường trượt*. *Đường trượt là đường, mà tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó trùng với hướng tiết diện có ứng suất tiếp cực đại*. Rõ ràng rằng tồn tại hai họ đường trượt trực giao, đường của họ thứ nhất xác định bởi giá trị của tham số α nào đấy, họ thứ hai - giá trị β . Ta giả thiết rằng hướng của đường α , β tạo thành hệ phải, trong đó ứng suất tiếp τ có hướng dương. Ký hiệu góc lệch của tiếp tuyến đường α với hướng dương của trục x là $\varphi_\alpha = \varphi$. Phương trình họ đường α , β sẽ là

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (5.95)$$

Các đường trượt bao phủ miền ta xét bằng lưới trực giao. Phần tử vô cùng nhỏ giới hạn bởi các đường trượt chịu dãn như nhau theo hướng của đường trượt.

Giả sử hệ thống đường trượt được xác định, khi đó ta có thể biểu diễn ứng suất tại mỗi điểm qua ứng suất trung bình σ và góc nghiêng của đường trượt.



Hình 5.11

Theo định nghĩa hướng trượt (5.94) suy ra:

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = -2\tau_{xy}\tan 2\varphi,$$

thay thế nó vào điều kiện chảy (5.91)

$$\tau_{xy} = \pm \tau_s \cos 2\varphi,$$

và do đó

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \mp 2\tau_s \sin 2\varphi,$$

ngoài ra

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2\sigma.$$

Từ ba đẳng thức này xác định trạng thái ứng suất

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma - \tau_s \sin 2\varphi, \\ \sigma_{yy} &= \sigma + \tau_s \sin 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= \tau_s \cos 2\varphi.\end{aligned}\tag{5.96}$$

Nếu biết được ứng suất pháp σ_ν và ứng suất tiếp τ_ν tại tiết diện có hướng ν , có thể xác định được σ và φ ; sau đó biết được các đại lượng σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} . Quả vậy, dùng (5.96) vào giải hệ (5.93)

$$\cos 2(\theta - \varphi) = \frac{\tau_\nu}{\tau_s},\tag{5.97}$$

$$\sigma = \sigma_\nu - \tau_s \sin 2(\theta - \varphi).$$

Đặt (5.96) vào điều kiện chảy (5.91), nó thỏa mãn đồng nhất, còn thay chúng vào hệ phương trình cân bằng (5.92) ta đi đến hệ hai phương trình vi phân phi tuyến đối với hai hàm chưa biết $\sigma(x, y)$ và $\varphi(x, y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\tau_s \left(\cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\tau_s \left(\sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{5.98}$$

Có thể chỉ ra rằng hệ phương trình này thuộc loại hyperbolic. Quả vậy, khử σ , ta được

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\text{ctg} 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2\text{ctg} 2\varphi \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Phương trình này có hệ đường đặc trưng

$$dy^2 - dx^2 + 2\text{ctg} 2\varphi dx dy = 0,$$

hay là

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg} \varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\text{ctg} \varphi.$$

Phương trình họ đường đặc trưng của hệ phương trình (5.98) cũng có thể nhận được từ hệ thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2\tau_s \cos 2\varphi & -2\tau_s \sin 2\varphi \\ 0 & 1 & -2\tau_s \sin 2\varphi & +2\tau_s \cos 2\varphi \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển định thức ta nhận lại phương trình

$$dy^2 - dx^2 + 2\text{ctg} 2\varphi dx dy = 0.$$

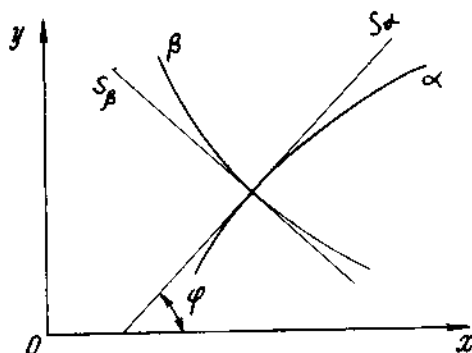
So sánh với (5.95), suy ra rằng hệ đường trượt trùng với hệ đường đặc trưng của phương trình cân bằng loại hyperbolic. Do tính chất hệ phương trình cân bằng là phương trình loại hyperbolic, nên nếu cho một cách bất kỳ điều kiện biên (cho tác dụng lực tùy ý trên biên vật thể) có thể dẫn đến bài toán toán học không đúng đắn. Điều này phản ánh điều ta đã biết trước đây là đối với vật liệu dẻo lý tưởng không thể đặt tải ngoài một cách tùy ý, vì đặt lực tùy ý có thể dẫn tới phá hủy cân bằng.

2. Phương trình biến dạng phẳng đối với đường trượt

Bây giờ ta viết phương trình biến dạng phẳng đối với đường đặc trưng (cũng như đối với đường trượt). Về mặt toán học tìm nghiệm $\sigma(x, y)$, $\varphi(x, y)$, dọc theo đường L nhận giá trị cho trước $\sigma(s)$, $\varphi(s)$; tức là giải bài toán Cauchy. Nhằm mục đích đó, nhân phương trình đầu (5.98) với $\cos \varphi$ và phương trình thứ hai với $\sin \varphi$ rồi cộng lại, sau đó nhân phương trình thứ nhất với $\sin \varphi$ và phương trình thứ hai với $\cos \varphi$, rồi lấy phương trình sau trừ đi phương trình trước, kết quả nhận được:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \sin \varphi \right) - 2\tau_s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \varphi \right) &= 0, \\ \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos \varphi \right) + 2\tau_s \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \varphi \right) &= 0. \end{aligned}$$

Đưa vào tọa độ cong α , β sao cho họ đường α ứng với đường trượt $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$, còn họ β ứng với đường trượt $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi$. Trục tọa độ s_α và s_β tại mỗi điểm hướng theo tiếp tuyến với đường trượt (hình 5.12), sử dụng công thức đạo hàm theo hướng



Hình 5.12

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \sin \varphi &= \frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha}, \\ -\frac{\partial \sigma}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos \varphi &= \frac{\partial \sigma}{\partial s_\beta}, v.v... \end{aligned}$$

5.6. NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA BIẾN DẠNG PHẪNG

đưa hệ phương trình trên về dạng

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial s_\alpha} - 2\tau_s \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial s_\beta} + 2\tau_s \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} &= 0.\end{aligned}$$

Các phương trình này có ý nghĩa cơ học đơn giản, đó là phương trình cân bằng của phần tử vật thể dẻo giới hạn bởi lưới đường trượt. Tích phân lên ta được:

$$\begin{aligned}\sigma - 2\tau_s \varphi &= 2\tau_s \xi(\beta), \\ \sigma + 2\tau_s \varphi &= 2\tau_s \eta(\alpha).\end{aligned}\tag{5.99}$$

Như vậy dọc theo họ đường trượt α ($\beta = \text{const}$) biểu thức $\sigma - 2\tau_s \varphi$ không đổi, dọc họ đường β ($\alpha = \text{const}$) thì $\sigma + 2\tau_s \varphi$ không đổi. Các hàm $\xi(\beta)$, $\eta(\alpha)$ được xác định từ điều kiện biên.

Từ hệ thức (5.99) suy ra

$$\begin{aligned}\sigma &= \tau_s [\xi(\beta) + \eta(\alpha)], \\ \varphi &= \frac{1}{2} [\eta(\alpha) - \xi(\beta)],\end{aligned}\tag{5.100}$$

các hệ thức này dùng để giải các bài toán cụ thể.

5.6.3 Tuyến tính hóa hệ phương trình cơ bản. Tích phân bài toán phẳng

Lévy đã biến đổi hệ phương trình (5.98) nhờ hệ thức (5.100), xem hàm ξ , η là chưa biết:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \cos 2\varphi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \sin 2\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \sin 2\varphi - \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \cos 2\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Nhân phương trình thứ hai với $\text{tg } \varphi$ và cộng với phương trình thứ nhất

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \text{tg } \varphi = 0;\tag{5.101}$$

cũng phương trình đó nhân với $-\operatorname{ctg}\varphi$ và cộng với phương trình thứ nhất, ta được

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\operatorname{ctg}\varphi = 0. \quad (5.102)$$

Do vậy ta nhận được hệ phương trình tựa tuyến tính thuần nhất, các hệ số là hàm của ξ, η . Bằng cách biến đổi ngược lại ta đưa hệ phương trình (5.101) và (5.102) về hệ phương trình tuyến tính.

Giả sử:

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta),$$

đạo hàm theo x và y dẫn đến

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{\Delta(\xi, \eta)} \frac{\partial \eta}{\partial y}, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\Delta(\xi, \eta)} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\Delta(\xi, \eta)} \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{\Delta(\xi, \eta)} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \end{aligned}$$

trong đó

$$\Delta(\xi, \eta) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Đặt các biểu thức này vào (5.101), (5.102), kết quả nhận được

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{ctg}\varphi \right) \Delta(\xi, \eta) &= 0, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg}\varphi \right) \Delta(\xi, \eta) &= 0, \end{aligned}$$

từ đây suy ra phương trình Khristianovitch

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{ctg}\varphi = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \operatorname{tg}\varphi = 0, \quad \Delta(\xi, \eta) \neq 0.$$

Đây là các phương trình tuyến tính có hệ số thay đổi, nói chung các phương trình này không tương đương với (5.98), vì bỏ qua nghiệm tương ứng với $\Delta = 0$. Ta khảo sát các nghiệm này.

Nhờ (5.101), (5.102) biểu diễn $\Delta(\xi, \eta)$ dưới dạng

$$\Delta(\xi, \eta) = \frac{2}{\sin 2\varphi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2}{\sin 2\varphi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Nghiệm của phương trình $\Delta = 0$ thường được dùng trong thực tế và gọi là *tích phân bài toán phẳng*.

Jacôbiên $\Delta(\xi, \eta)$ bằng không trong ba trường hợp:

với $\xi = \text{const} = \xi_0$ và $\eta = \text{const} = \eta_0$,

với $\eta = \text{const} = \eta_0$,

với $\xi = \text{const} = \xi_0$.

a) *Trường hợp 1.* Từ (5.100) suy ra

$$\sigma = \tau_s(\xi_0 + \eta_0) = \sigma_0 = \text{const},$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\eta_0 - \xi_0) = \varphi_0 = \text{const}.$$

Đặt giá trị vừa nhận được vào (5.96), dẫn đến

$$\sigma_{xx} = \text{const}, \quad \sigma_{yy} = \text{const}, \quad \tau_{xy} = \text{const},$$

trạng thái ứng suất thuần nhất. Từ phương trình (5.95)

$$dy = \text{tg}\varphi_0 dx, \quad dy = -\text{ctg}\varphi_0 dx,$$

tích phân lên ta được hai họ đường đặc trưng là đường thẳng trực giao

$$y = x \text{tg}\varphi_0 + C_1, \quad y = -x \text{ctg}\varphi_0 + C_2$$

b) *Trường hợp 2.* Với $\eta = \text{const} = \eta_0$, phương trình (5.100) dẫn đến

$$\xi = \eta_0 - 2\varphi$$

Phương trình (5.102) thỏa mãn đồng nhất, phương trình (5.101) đưa về dạng

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \varphi = 0.$$

Phương trình đặc trưng của nó

$$\frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dy}{\sin \varphi} = \frac{d\varphi}{0}$$

cho ta

$$d\varphi = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Tích phân lên ta được

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{const} = C_1, \\ y - x \operatorname{tg} C_1 &= \operatorname{const} = C_2,\end{aligned}$$

một họ đường đặc trưng là đường thẳng có hệ số góc thay đổi, họ kia là đường cong trục giao với chúng.

c) *Trường hợp 3.* Làm tương tự như trường hợp hai. Nếu biết lưới đường trượt và giá trị của tham số ξ, η trên đó, thì tại mỗi điểm có thể biết σ, φ tức là biết các thành phần ứng suất $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$. Chú ý rằng trong bài toán này khác với bài toán tuyến tính ở chỗ đường đặc trưng phụ thuộc vào ẩn cần phải tìm (ứng suất).

5.6.4 Một số tính chất của đường trượt

Hencky đã nghiên cứu một số tính chất quan trọng của đường trượt.

1. Góc giữa hai đường trượt cùng họ tại những điểm tương ứng (tại các giao điểm với đường của họ thứ hai) thì không đổi. Ta còn gọi là *định lý thứ nhất của Hencky*. Để chứng minh điều này ta xuất phát từ phương trình thứ hai của (5.100).

Lấy hai đường trượt bất kỳ $\alpha = \alpha' = \operatorname{const}$ và $\alpha = \alpha'' = \operatorname{const}$ của họ β và $\beta = \beta', \beta = \beta''$ của họ α . Dọc theo các đường đó ta có $\eta_1 = \eta(\alpha'), \eta_2 = \eta(\alpha''), \xi_1 = \xi(\beta'), \xi_2 = \xi(\beta'')$. Thay các giá trị này vào công thức (5.100) tại các điểm cắt A, B, C, D ta được

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_A - \varphi_B = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1) \\ \varphi_2 &= \varphi_C - \varphi_D = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)\end{aligned}$$

suy ra

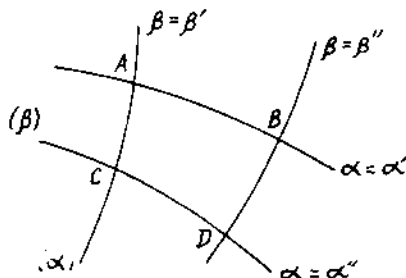
$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Trong tự, hiệu số ứng suất pháp $\sigma' - \sigma''$ khi chuyển từ đường trượt này sang đường trượt khác cùng họ dọc theo đường trượt thứ hai cũng không đổi (suy từ hệ thức 1 của (5.100)).

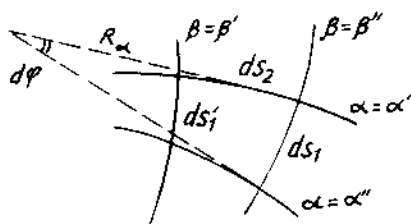
Hệ quả 5.1. Nếu đoạn AC thẳng thì đoạn BD cũng thẳng, tức là nếu một đường trượt là thẳng thì các đường trượt khác cùng họ cũng thẳng.

2. Dọc theo đường trượt ứng suất pháp trung bình tỷ lệ với góc nghiêng của đường đó với trục x . Điều này suy ngay từ (5.99).

Hệ quả 5.2. Dọc theo đường trượt thẳng ứng suất σ có giá trị không đổi.



Hình 5.13



Hình 5.14

3. Độ cong của họ đường trượt α ($\beta = \text{const}$) khi chuyển dịch dọc theo đường trượt β ($\alpha = \text{const}$) thay đổi tỷ lệ với độ dài cung ds_β (định lý thứ hai của Hencky). Quả vậy

$$R_\alpha d\varphi = ds_\alpha$$

và với độ chính xác tới số hạng nhỏ bậc cao

$$ds'_\alpha = (R_\alpha - ds_\beta) d\varphi.$$

Mặt khác góc $d\varphi$ không thay đổi nên

$$ds'_\alpha = (R_\alpha + dR_\alpha) d\varphi,$$

suy ra

$$dR_\alpha = -ds_\beta.$$

4. Nếu theo giá trị lực pháp σ_ν và lực tiếp τ_ν ta xác định hệ đường trượt và ứng suất, thì khi tác dụng thêm áp suất phân bố đều p sẽ không làm thay đổi hệ đường trượt và ứng suất tiếp, mà chỉ làm thay đổi ứng suất pháp một lượng là p . Điều này suy ra ngay từ hệ thức (5.96) và (5.97).

5. Nếu trên biên vật thể $\tau_\nu = 0$, tức là chỉ tác dụng lực pháp hoặc không có lực ngoài, thì đường trượt cắt biên một góc bằng $\pi/4$. Điều này suy từ công thức thứ hai của (5.97)

5.6.5 Xác định tốc độ chuyển dịch

Trong các tiết trên chúng ta đã khảo sát trạng thái ứng suất trong trường hợp biến dạng phẳng. Bây giờ chú ý đến các phương trình xác định tốc độ chuyển dịch (5.89) và (5.90)

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Nếu biết giá trị ứng suất thì bài toán xác định tốc độ chuyển dịch là tuyến tính. Hệ phương trình trên cũng thuộc loại hyperbolic và có đường đặc trưng trùng với đường trượt.

Quả vậy, sử dụng các công thức (5.96) ta đưa các phương trình nêu trên về dạng

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - \operatorname{tg} 2\varphi \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{5.103}$$

Họ các đường đặc trưng của hệ này xác định từ hệ thức

$$\begin{vmatrix} -1 & -\operatorname{tg} 2\varphi & -\operatorname{tg} 2\varphi & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển định thức và giải theo $\frac{dy}{dx}$ ta được

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \text{ và } \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} \varphi.$$

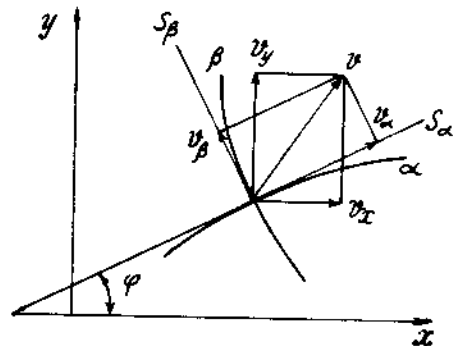
Bây giờ ký hiệu hình chiếu của vector tốc độ theo hướng trục tọa độ s_α, s_β là v_α và v_β (hình 5.15).

Rõ ràng ta có

$$v_x = v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi,$$

$$v_y = v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi.$$

Đặt các hệ thức này vào hệ phương trình (5.103), chú ý đến công thức đạo hàm theo hướng ta nhận được



Hình 5.15

$$\frac{1}{\cos 2\varphi} \left[\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} \right) - \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} \right) \right] = 0,$$

$$\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} \right) + \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} \right) = 0.$$

Từ các hệ thức này suy ra

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} = 0.$$

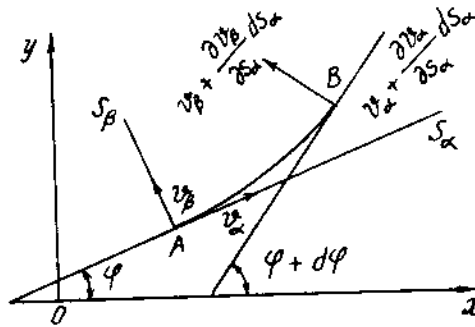
Do đó dọc theo đường trượt α ta có

$$dv_\alpha - v_\beta d\varphi_\alpha = 0, \quad (5.104)$$

còn dọc theo đường trượt β

$$dv_\beta + v_\alpha d\varphi_\beta = 0. \quad (5.105)$$

Hai hệ thức trên do Geiringer tìm ra và gọi là *phương trình tốc độ dọc theo đường trượt*. Từ đây suy ra sự thay đổi của tốc độ toàn phần dọc theo các đường trượt bằng không, tức là *tốc độ tương đối của sự chảy dọc theo đường trượt bằng không* (hình 5.16)



Hình 5.16

Bây giờ xét trường tốc độ ứng với trường ứng suất đơn giản (khi có một họ đường trượt là đường thẳng). Theo công thức (5.104) thành phần tốc độ hướng theo đường đặc trưng thẳng có giá trị không đổi.

Trong trường hợp đường đặc trưng thuộc họ đường thẳng xuyên tâm, chẳng hạn họ β , thì thành phần tốc độ v_β không đổi dọc theo các đường đó, tức là v_β là hàm chỉ của φ . Giả sử lấy $v_\beta = \psi(\varphi)$, thì từ (5.104) ta có

$$v_\alpha = \int \psi(\varphi) d\varphi + \chi(r)$$

r - khoảng cách từ tâm đến đường trượt α đang xét.

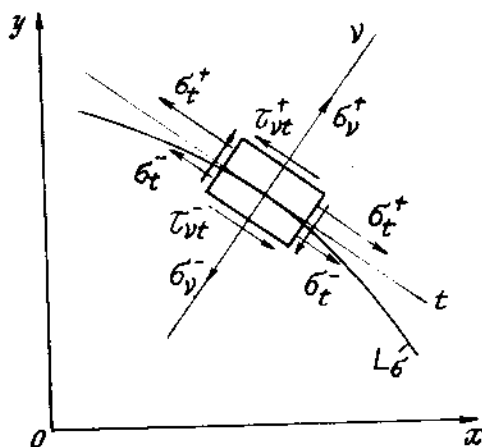
Trường hợp riêng đối với trường ứng suất đều, cả hai họ đường trượt là đường thẳng, tốc độ chuyển dịch theo hướng các đường đặc trưng có giá trị không đổi dọc theo các đường này.

5.6.6 Đường gián đoạn

Trong nhiều trường hợp giải bài toán biến dạng phẳng phải tính đến sự gián đoạn của các đại lượng ứng suất (hoặc tốc độ chuyển dịch) hay đạo hàm của chúng. Trường hợp thứ nhất ta có gián đoạn mạnh, trường hợp thứ hai - gián đoạn yếu.

1. Đường gián đoạn ứng suất

Giả sử L_σ - đường gián đoạn ứng suất (hình 5.17), ký hiệu ν, t là pháp tuyến và tiếp tuyến tại mỗi điểm của đường, σ_ν, σ_t - ứng suất pháp và $\tau_{\nu t}$ ứng suất tiếp trên các cạnh của phần tử, một trong những cạnh của nó trực giao với đường gián đoạn, phân biệt hai phía của đường gián đoạn bằng dấu + hoặc -. Từ điều kiện cân bằng của phần tử suy ra $\sigma_\nu^+ = \sigma_\nu^-$, $\tau_{\nu t}^+ = \tau_{\nu t}^-$; gián đoạn đối với ứng suất chỉ xảy ra đối với σ_t .



Hình 5.17

Điều kiện dẻo (5.91) đúng với cả hai phía của đường gián đoạn

$$(\sigma_t - \sigma_\nu)^2 + 4\tau_{\nu t}^2 = 4\tau_s^2,$$

suy ra

$$\sigma_t = \sigma_\nu \pm 2\sqrt{\tau_s^2 - \tau_{\nu t}^2}.$$

Bước nhảy của đại lượng σ_t bằng

$$[\sigma_t] = 4\sqrt{\tau_s^2 - \tau_{\nu t}^2}, \quad (5.106)$$

khi đó bước nhảy của ứng suất pháp trung bình

$$[\sigma] = \left[\frac{\sigma_\nu + \sigma_t}{2} \right] = 2\sqrt{\tau_s^2 - \tau_{\nu t}^2}.$$

Nhớ rằng ứng suất tiếp đạt cực đại trên đường trượt và

$$\tau_{\max} = \tau_s,$$

vì vậy theo (5.106) đường gián đoạn ứng suất không thể trùng với đường trượt hoặc bao hình của chúng.

Đường gián đoạn có thể được xem như là vết của lớp vô cùng mảnh (vị trí giới hạn của miền đàn hồi) phân chia hai miền dẻo. Điều này suy từ hiện trạng ứng suất pháp σ_ν và ứng suất tiếp $\tau_{\nu t}$ tại lớp mảnh thuộc lân cận đường gián đoạn hầu như không đổi, còn ứng suất pháp σ_t thay đổi đột ngột theo độ dày của lớp, vì vậy điều kiện dẻo tại lớp mảnh không thỏa mãn. Trong lý thuyết đang xét ta sử dụng mô hình cứng dẻo, tức là bỏ qua biến dạng đàn hồi so với biến dạng dẻo, nên đường gián đoạn ứng suất không thay đổi độ dài trong quá trình biến dạng.

2. Đường gián đoạn tốc độ chuyển dịch

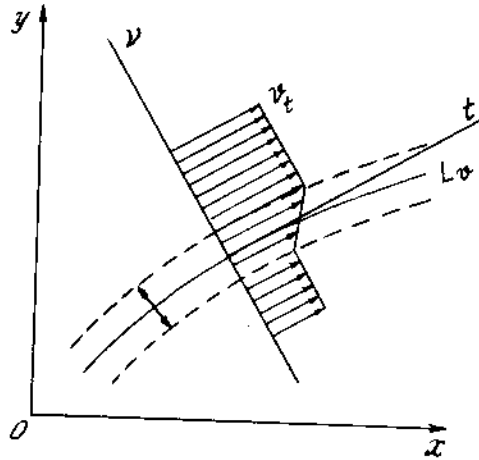
Giả sử L_ν là đường gián đoạn tốc độ chuyển dịch (hình 5.18). Rõ ràng gián đoạn chỉ xảy ra đối với thành phần tốc độ v_t tiếp tuyến với đường L_ν , vì rằng nếu gián đoạn thành phần v_ν vuông góc với đường gián đoạn thì có nghĩa là xuất hiện vết nứt trong vật liệu.

Đường gián đoạn tốc độ chuyển dịch có thể xem như vị trí giới hạn của lớp mỏng tại đó thành phần tốc độ v_t thay đổi đột ngột theo độ dày của lớp, còn thành phần pháp v_ν không đổi.

Theo công thức liên hệ giữa tốc độ biến dạng và các thành phần tốc độ chuyển dịch

$$\dot{\epsilon}_{\nu\nu} = \frac{\partial v_\nu}{\partial \nu}, \quad \dot{\epsilon}_{tt} = \frac{\partial v_t}{\partial t}, \quad \dot{\epsilon}_{\nu t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\nu}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial \nu} \right),$$

suy ra rằng với độ dày của lớp mỏng giảm thì tốc độ biến dạng trượt sẽ tăng liên tục, còn các thành phần khác của tốc độ biến dạng hầu như không đổi.



Hình 5.18

Liên hệ ứng suất biến dạng theo lý thuyết chảy Saint Venant cho vật liệu dẻo lý tưởng có thể viết dưới dạng

$$\frac{\dot{\epsilon}_{\nu\nu}}{v_u} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_\nu - \sigma}{\sigma_s}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{tt}}{v_u} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_t - \sigma}{\sigma_s}, \quad \frac{\dot{\epsilon}_{\nu t}}{v_u} = \frac{3\tau_{\nu t}}{\sigma_s}, \quad (5.107)$$

ở đây cường độ tốc độ biến dạng v_u trong trường hợp biến dạng phẳng và vật liệu không nén được ($\dot{\epsilon}_{zz} = 0$, $\dot{\epsilon}_{\nu\nu} = -\dot{\epsilon}_{tt}$) có dạng

$$v_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\dot{\epsilon}_{tt}^2 + \frac{1}{4} \dot{\epsilon}_{\nu t}^2}.$$

Từ công thức này suy ra khi giảm độ dày của lớp cường độ tốc độ biến dạng tăng liên tục do tốc độ biến dạng trượt tăng. Vì vậy trên cơ sở công thức (5.107) khẳng định rằng khi giảm độ dày của lớp mỏng σ_ν và σ_t dẫn đến σ còn $\tau_{\nu t}$ dẫn đến τ_s , đây chính là đặc trưng của các tiết diện trùng với đường trượt và trực giao với nó. Vậy đường gián đoạn tốc độ chuyển dịch trùng với đường trượt hoặc bao hình của các đường trượt.

Từ các phương trình Geiringer (5.104), (5.105) có tính đến sự liên tục của thành phần v_ν suy ra bước nhảy của đại lượng tốc độ chuyển dịch v_t theo

hướng tiếp tuyến với đường gián đoạn không thay đổi dọc theo đường gián đoạn

$$d[v_t] = 0.$$

5.6.7 Các phương pháp số giải bài toán biên

Khi giải bài toán biến dạng phẳng bằng phương pháp đường trượt ta thường gặp ba bài toán biên cơ bản

1. Bài toán đặc trưng ban đầu (bài toán Riemann)

Giả sử trên đoạn OA và OB của các đường đặc trưng ta đã biết các giá trị σ và φ . Hiển nhiên là chúng thỏa mãn phương trình cân bằng và do đó liên hệ với nhau bởi các hệ thức (5.99).

Ta sẽ chỉ ra rằng có thể xác định các đại lượng σ và φ trong tứ giác cong $OACB$ giới hạn bởi bốn đường trượt.

Để giải bài toán này ta chia các đường trượt OA và OB thành các đoạn nhỏ bởi các điểm chia $(1, 0), (2, 0), \dots, (m, 0), \dots$ và $(0, 1), (0, 2), \dots, (0, n), \dots$. Theo định lý thứ nhất Hencky giá trị σ , φ tại điểm (m, n) được xác định theo công thức

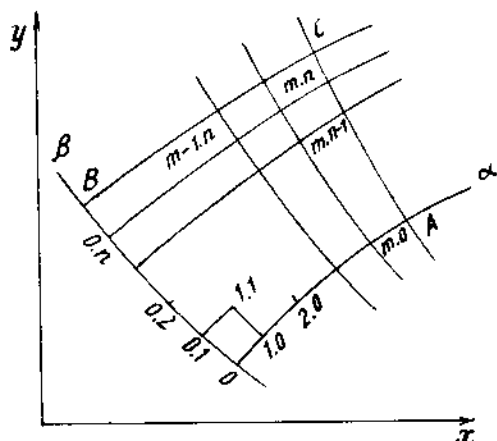
$$\begin{aligned}\sigma_{(m,n)} &= \sigma_{(m,0)} + \sigma_{(0,n)} - \sigma_{(0,0)}, \\ \varphi_{(m,n)} &= \varphi_{(m,0)} + \varphi_{(0,n)} - \varphi_{(0,0)}.\end{aligned}$$

Để xác định tọa độ của điểm (m, n) theo tọa độ của các điểm $(m-1, n)$ và $(m, n-1)$ và theo giá trị của góc φ tại ba điểm ấy ta dùng phương trình vi phân của đường trượt (5.95). Biểu diễn chúng dưới dạng sai phân

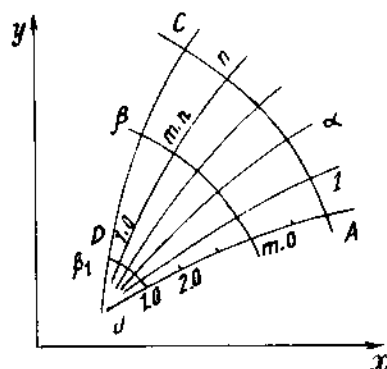
$$\begin{aligned}y_{(m,n)} - y_{(m-1,n)} &= (x_{(m,n)} - x_{(m-1,n)}) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_{(m,n)} + \varphi_{(m-1,n)}), \\ y_{(m,n)} - y_{(m,n-1)} &= -(x_{(m,n)} - x_{(m,n-1)}) \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\varphi_{(m,n)} + \varphi_{(m,n-1)}).\end{aligned}$$

Do vậy, bước tiếp bước bắt đầu từ điểm $(1, 1)$ ta xác định tọa độ điểm và giá trị σ , φ tại điểm đó. Kết quả xây dựng được nghiệm của bài toán Riemann trong tứ giác cong $OACB$.

Nếu đoạn đường trượt OB (hoặc OA) co về một điểm (hình 5.20) và tại điểm 0 hội tụ các đường trượt của họ α (hoặc β) ta có họ đường trượt xuyên tâm, đây là trường hợp suy biến của bài toán đặc trưng ban đầu. Điểm O là điểm đặc biệt tại đó σ có gián đoạn.



Hình 5.19



Hình 5.20

Giả sử biết σ và φ trên OA và sự thay đổi góc φ tại O , tức là góc AOC . Chia đoạn OA của đường trượt thành các đoạn nhỏ, qua điểm $(1, 0)$ vẽ đường trượt β_1 của họ β . Chia nhỏ góc AOC và vẽ các đoạn đường trượt của họ α , do vậy ta xác định giá trị φ trên các điểm của đường trượt β_1 . Theo giá trị $\sigma_{(1,0)}$ và $\varphi_{(1,0)}$ tại điểm $(1, 0)$ trên đường OA và dùng công thức thứ hai (5.99) ta xác định giá trị η đối với đường β_1

$$\eta_1 = \frac{\sigma_{(1,0)}}{2\tau_s} - \varphi_{(1,0)}.$$

Tiếp đến cũng theo công thức này xác định giá trị σ tại các điểm khác thuộc đường β_1

$$\sigma_{(1,n)} = 2\tau_s(\eta_1 + \varphi_{(1,n)}).$$

Do đó trường hợp suy biến lại đưa về bài toán Riemann cơ bản: xác định ứng suất tại tứ giác cong $(1, 0)DCA$ tương tự như đã nêu ở trên.

2. Bài toán về giá trị ban đầu (bài toán Cauchy)

Giả sử, trên đường trơn AB (hình 5.21) không trùng với đường trượt và chỉ cắt mỗi đường trượt chỉ một lần ta biết các giá trị σ , φ liên tục cùng với đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của chúng.

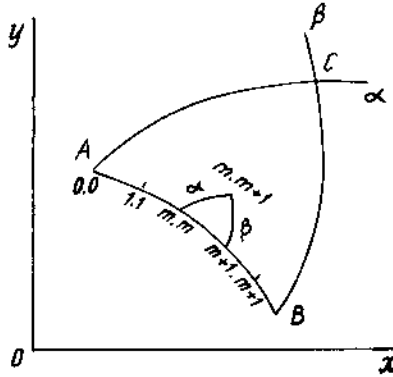
Khi đó ta có thể chỉ ra rằng có thể xác định được σ , φ , có nghĩa là xác định được ứng suất trong tam giác cong ABC cạnh của nó là đường AB và hai đường trượt AC và BC của họ α và họ β đi qua A và B .

Chia cung AB thành các đoạn nhỏ bằng các điểm $(0, 0), (1, 1), \dots, (m, m), \dots$. Vẽ qua điểm (m, m) và $(m+1, m+1)$ hai đường trượt của họ α và β và ký

hiệu giao điểm là $(m, m+1)$. Từ điều kiện không đổi của tham số ξ, η (công thức (5.99)) trên các đường trượt α và β ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{(m,m+1)}}{2\tau_s} + \varphi_{(m,m+1)} &= \frac{\sigma_{(m,m)}}{2\tau_s} + \varphi_{(m,m)}, \\ \frac{\sigma_{(m,m+1)}}{2\tau_s} - \varphi_{(m,m+1)} &= \frac{\sigma_{(m+1,m+1)}}{2\tau_s} - \varphi_{(m+1,m+1)}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Từ các hệ thức này xác định giá trị $\sigma_{(m,m+1)}$ và $\varphi_{(m,m+1)}$. Tương tự như vậy ta xác định được σ và φ tại các điểm là đỉnh của các tam giác cong gần kề với đường AB . Tiếp đến ta xây dựng nghiệm trong miền tam giác cong ABC bằng cách giải bài toán đặc trưng ban đầu.



Hình 5.21

Tương tự với việc xây dựng nghiệm của bài toán Cauchy để xác định ứng suất, ta có thể xây dựng nghiệm của bài toán này đối với tốc độ chuyển dịch.

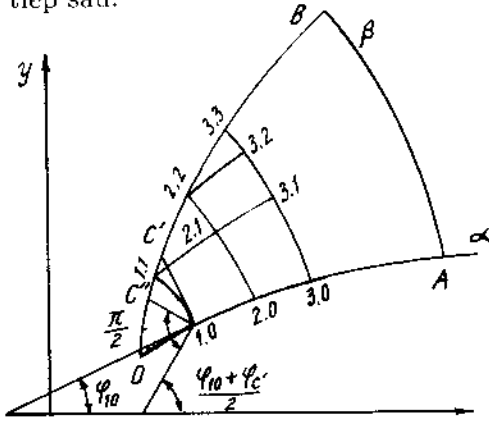
Như đã chỉ ra trên đây trong vật thể cùng với miền biến dạng dẻo có thể vẫn còn miền cứng. Người ta đã chứng minh rằng biên của miền dẻo và miền cứng là đường trượt hoặc bao hình của các đường trượt.

3. Bài toán hỗn hợp

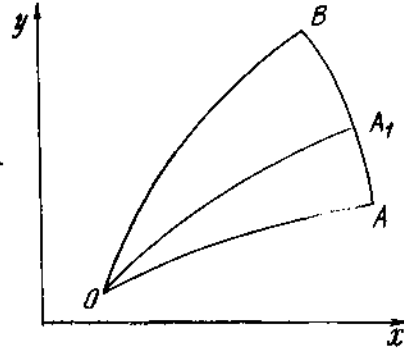
Giả sử trên đoạn đường trượt OA (hình 5.22) đã biết các đại lượng σ, φ thỏa mãn phương trình cân bằng, còn trên đường OB không trùng với đường trượt cho biết góc φ . Chẳng hạn đường OB là chu tuyến biên vật thể tại đó tự do với ứng suất hoặc chỉ chịu áp suất (tức là lực tiếp bằng không), khi đó các đường trượt đều cắt đường OB một góc 45° . Do vậy tại mọi điểm của OB đã cho biết góc $\varphi = 45^\circ$.

Trong trường hợp này có thể xác định giá trị σ, φ trong tam giác cong OAB giới hạn bởi các đường trượt OA, AB và đường OB . Giả thiết góc φ

tại O trên đường OA và OB như nhau. Trường hợp góc φ khác nhau ta sẽ xét tiếp sau.



Hình 5.22



Hình 5.23

Chia đoạn đường trượt OA thành các đoạn nhỏ bởi các điểm $(1,0), (2,0), \dots, (m,0), \dots$. Từ điểm $(1,0)$ vẽ đường đặc trưng trực giao với OA và cắt OB ở $C(1,1)$. Giá trị σ tại điểm này được xác định như trong trường hợp suy biến của bài toán đặc trưng ban đầu. Theo công thức (5.108) xác định tham số η cho đường trượt β đi qua điểm $(1,0)$ và $(1,1)$. Sau đó dùng công thức (5.99) tìm giá trị của σ tại điểm $(1,1)$

$$\sigma_{(1,1)} = 2\tau_s(\eta_1 + \varphi_{(1,1)})$$

Các giá trị σ và φ tại các điểm $(2,1), (3,1), \dots$ được tính như trong cách giải bài toán đặc trưng ban đầu. Vị trí điểm $(2,2)$ và σ tại đó được xác định bằng cách tương tự như đối với điểm $(1,1)$. Do vậy bước tiến bước bắt đầu từ $(1,1)$ ta xác định được σ và φ trong tam giác cong OAB .

Nếu góc φ tại điểm trên các đường OB và OA khác nhau, chẳng hạn $\varphi_{OB} > \varphi_{OA}$, thì miền AOB chia ra làm hai AOA_1 và A_1OB sao cho góc φ tại điểm O trên đường OB và OA_1 như nhau. Khi đó đối với miền AOA_1 ta có trường hợp suy biến của bài toán đặc trưng ban đầu, còn miền A_1OB tương ứng bài toán hỗn hợp.

Bài toán biến dạng phẳng đàn - dẻo có nhiều ứng dụng trong thực tiễn, đặc biệt trong nghiên cứu các quy trình công nghệ trong gia công kim loại bằng áp lực như cán, ép, kéo, chuốt, tạo dáng công nghiệp ... cũng như xác định tải trọng giới hạn khi thực hiện các quá trình nêu trên.

Sau đây ta xét một số bài toán biến dạng phẳng đàn dẻo điển hình.

5.7 Biến dạng phẳng đối xứng trục

Để xét bài toán này ta viết các phương trình cơ bản trong tọa độ cực. Phương trình cân bằng có dạng (xem 1.4 chương 1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0.\end{aligned}\quad (5.109)$$

Điều kiện chảy dẻo có thể viết

$$(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4\tau_s^2. \quad (5.110)$$

Ba phương trình trên đủ để xác định trạng thái ứng suất. Bây giờ biến đổi các phương trình này, trước hết phương trình thứ nhất

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0.$$

Đạo hàm phương trình này theo θ rồi cộng với phương trình thứ hai sau khi đã nhân với r :

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(r\sigma_{rr}) + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} + \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial \theta^2} = 0.$$

Nhân phương trình thứ hai của (5.109) với r^2 , sau đó lấy đạo hàm theo r

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(r\sigma_{\theta\theta}) + 4r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} + r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} = 0.$$

Lấy hai phương trình vừa nhận được trừ đi cho nhau ta nhận được:

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}[r(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})] = \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial \theta^2} - 3r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2}.$$

Đặt vào phương trình này giá trị của $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}$ suy từ điều kiện chảy (5.110) dẫn ta về phương trình chỉ chứa $\tau_{r\theta}$:

$$\pm 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(r \sqrt{\tau_s^2 - \tau_{r\theta}^2}) = \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial \theta^2} - 3r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2}.$$

Đối với bài toán đối xứng trục $\tau_{r\theta}$ chỉ phụ thuộc r , phương trình vừa nêu dẫn về

$$r \frac{d^2 \tau_{r\theta}}{dr^2} + 3 \frac{d\tau_{r\theta}}{dr} = 0.$$

Kết hợp với điều kiện biên cho ta nghiệm của các bài toán tương ứng.

Trường hợp riêng đối xứng: σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ chỉ phụ thuộc r , $\tau_{r\theta} = 0$. Phương trình cân bằng (5.109) và điều kiện chảy dẻo đưa về dạng

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} &= \pm 2\tau_s.\end{aligned}\tag{5.111}$$

Ta trở lại bài toán đơn giản đã khảo sát trong chương 4 về ống dày dưới tác dụng của áp suất trong p , tức là $\sigma_{rr} = -p$ với $r = a$. Ở đó đã xác định giá trị của áp suất giới hạn p_* và công thức xác định ứng suất ở trạng thái giới hạn. Bây giờ ta có thể nhận lại các công thức đó bằng cách sử dụng lý thuyết đường trượt. Vì ứng suất vòng và ứng suất kính là ứng suất chính, nên đường trượt cắt bán kính một góc $\frac{\pi}{4}$ và

$$\varphi = \theta + \frac{3\pi}{4}.$$

Từ hình vẽ 5.24 đối với phần tử vô cùng nhỏ ta có

$$dr = \pm r d\theta,$$

dấu cộng ứng với đường trượt β , còn dấu trừ ứng với đường trượt α . Sử dụng liên hệ giữa φ và θ , rồi tích phân phương trình vừa nêu ta được phương trình hai họ đường trượt

$$r = Ae^{\pm\varphi},$$

hay là

$$\begin{aligned}\varphi - \ln \frac{r}{a} &= \beta, \\ \varphi + \ln \frac{r}{a} &= \alpha.\end{aligned}\tag{5.112}$$

Đây là các đường xoắn lôga, các đường này tạo với biên trong và biên ngoài một góc $\pm \frac{\pi}{4}$ (hình 5.25), thỏa mãn tính chất 5 của đường trượt và tạo thành lưới trực giao.

Trong bài toán này ta có

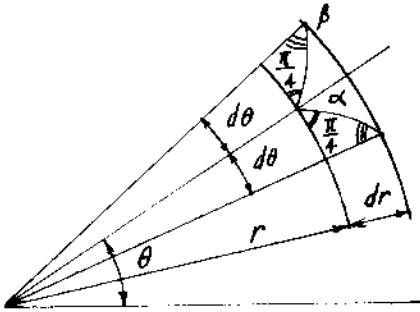
$$\sigma = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2},$$

nhờ các hệ thức (5.99) và (5.112) dẫn đến

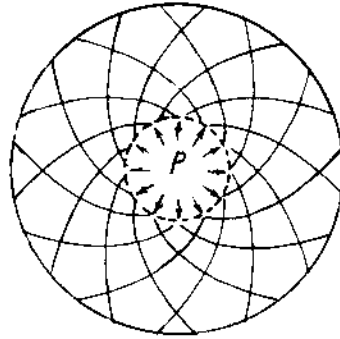
$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\tau_s \left(\eta + \beta + \ln \frac{r}{a} \right)$$

kết hợp với (5.111) cho ta biểu thức của ứng suất kính

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \left[\eta + \beta + \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{2} \right].$$



Hình 5.24



Hình 5.25

Tham số η không đổi với một đường trượt xác định. Vì ứng suất chỉ phụ thuộc vào bán kính (do tính đối xứng) nên kết luận được tham số η này là như nhau với mọi đường trượt. Giá trị của nó xác định từ điều kiện biên $\sigma_{rr} = -p_*$ với $r = a$, do đó

$$2\tau_s \left(\eta + \beta - \frac{1}{2} \right) = -p_*.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} - p_*, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\tau_s \ln \frac{r}{a} + 2\tau_s - p_*. \end{aligned}$$

Áp suất giới hạn p_* xác định được từ điều kiện biên $\sigma_{rr} = 0$ với $r = b$

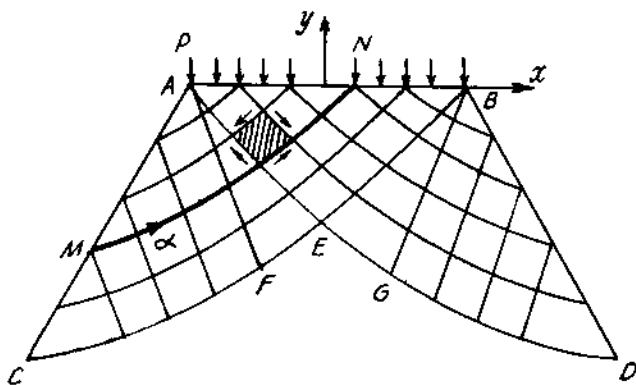
$$p_* = 2\tau_s \ln \frac{b}{a}.$$

Do vậy ta nhận được các công thức đối với ứng suất trùng với các công thức đã nhận được khi khảo sát trạng thái giới hạn của ống, tức là khi ống chuyển sang dẻo hoàn toàn.

5.8 Bài toán về nén khuôn phẳng

5.8.1 Vật thể dạng nêm nửa vô hạn

Giả sử trên biên AB của vật thể nửa vô hạn có dạng nêm cắt bằng vật liệu cứng dẻo lý tưởng bị nén theo hướng Oy bởi vật rắn tuyệt đối (khuôn). Giả thiết áp suất phân bố đều trên mặt AB , cần xác định lực P tác dụng lên khuôn để xuất hiện nén dẻo



Hình 5.26

Từ tính chất hình học của đường trượt ta thấy lưới đường trượt có thể là chữ nhật. Vì trên cạnh AB chỉ tác dụng lực pháp tuyến p , còn các cạnh AC và BD tự do đối với ứng suất cho nên các đường trượt sẽ cắt các cạnh biên này một góc 45° . Trong hình vẽ 5.26 chúng ta xây dựng hệ đường trượt trực giao tại lân cận miền tác dụng lực. Xét hình vuông nhỏ gạch xẫm trên cạnh nó tác dụng ứng suất tiếp τ_s biểu thị bằng mũi tên, do đó những đường đi từ AC đến AB thuộc họ α .

Nếu ký hiệu γ là góc giữa AC và chiều âm của trục Oy thì tại điểm M

$$\varphi_M = \frac{1}{4}\pi - \gamma,$$

còn tại điểm N :

$$\varphi_N = \frac{1}{4}\pi.$$

Góc giữa pháp tuyến tại điểm M và N với cạnh AC và AB là

$$\theta_M = \pi - \gamma, \quad \theta_N = \frac{\pi}{2}.$$

Từ công thức (5.99), ta được trên đường α :

$$\sigma_M - 2\tau_s\varphi_M = \sigma_N - 2\tau_s\varphi_N. \quad (5.113)$$

Tại điểm M : $\sigma_\nu = \tau_\nu = 0$ và tại điểm N : $\tau_\nu = 0$, $\sigma_\nu = +p$ theo công thức (5.97)

$$\begin{aligned}\sigma_M &= -\tau_s \sin 2(\theta_M - \varphi_M) = +\tau_s, \\ \sigma_N &= -\tau_s \sin 2(\theta_N - \varphi_N) + p = +p - \tau_s.\end{aligned}$$

Đặt các giá trị vừa tìm được vào (5.113) xác định áp suất giới hạn

$$p_* = 2\tau_s(1 + \gamma). \quad (5.114)$$

Khi đó lực giới hạn

$$P_* = 2\tau_s(1 + \gamma)\overline{AB}.$$

5.8.2 Bài toán Prandtl nén khuôn trên nửa không gian

Trong trường hợp này $\gamma = \frac{\pi}{2}$, từ (5.14) ta nhận được

$$p_* = \tau_s(2 + \pi).$$

Prandtl gọi giá trị p_* này là “áp suất nhấn”. Khi áp suất bằng giá trị áp suất nhấn, khuôn bắt đầu nhấn vào vật thể.

Ta phân tích kỹ hơn về lưới đường trượt và sự phân bố ứng suất trong bài toán này. Chỉ giới hạn xét quá trình bắt đầu có chảy dẻo, nên nghiệm của bài toán có thể thỏa mãn điều kiện biên trên bề mặt khi chưa biến dạng.

Bắt đầu xây dựng trường ứng suất ở phần mặt bên phải khuôn nén. Đoạn BE của nó phải ở trạng thái dẻo để có thể xuất hiện sự vòng lên của mặt ở vùng này. Vì mặt tự do đối với ứng suất, nên ở đấy

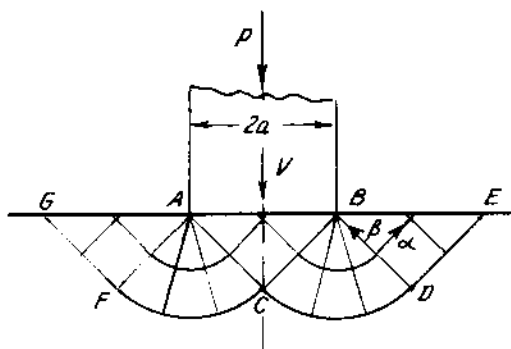
$$\sigma_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$$

từ công thức xác định điều kiện dẻo (5.91) cho ta giá trị của ứng suất σ_{xx} tại các điểm trên mặt này

$$\sigma_{xx} = -2\tau_s. \quad (5.115)$$

Vì trên mặt tự do BE ứng suất tiếp bằng không, nên các đường trượt cắt mặt này theo các góc $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{3\pi}{4}$. Vì σ_{xx} và do đó σ cũng như φ không đổi dọc

theo BE , nên theo công thức (5.99) các tham số ξ và η không thay đổi dọc theo đường này. Do đó dưới BE tồn tại trường ứng suất đều.



Hình 5.27

Theo công thức (5.99), (5.115) dọc theo đường trượt α (hình 5.27) ta có

$$\xi = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad (5.116)$$

Nếu biết điểm cuối E của miền dẻo trên mặt, thì xác định được miền ứng suất đều là tam giác cân BDE , và AFG .

Vì đường trượt BD thẳng nên họ đường trượt β phía trái của BD cũng là đường thẳng. Do tính đối xứng của bài toán, nên dưới khuôn trường ứng suất tại ABC là đều, điều này dẫn đến áp suất dưới khuôn không đổi.

Hai trường ứng suất đều nối với nhau bằng trường xuyên tâm BDC . Do vậy đường trượt α là đường thẳng trong BDE , chuyển thành cung tròn trong BDC , rồi lại là đường thẳng trong ABC . Trong miền ABC đường trượt α nghiêng với trục x một góc

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}. \quad (5.117)$$

Dọc theo đường trượt α giá trị ξ không đổi. Theo công thức (5.99) có tính đến (5.116), (5.117) ta xác định được giá trị của σ tại các điểm trên đoạn AB (dưới khuôn)

$$\frac{\sigma}{2\tau_s} + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4},$$

hay là

$$\sigma = -\tau_s(\pi + 1).$$

Theo công thức (5.96) xác định ứng suất tại các điểm trên AB

$$\sigma_{xx} = -\pi\tau_s, \quad \sigma_{yy} = -(\pi + 2)\tau_s.$$

Do σ_{yy} dọc theo AB không đổi, nên lực nén khuôn bằng

$$P_* = |\sigma_{yy}|\overline{AB} = 2a\tau_s(2 + \pi), \quad (5.118)$$

trong đó $\overline{AB} = 2a$ là chiều rộng của khuôn.

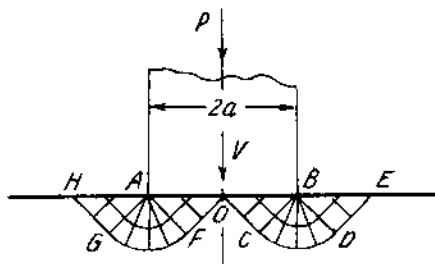
Ta nhận lại được công thức đã nêu ở trên.

Bây giờ xét sự phân bố tốc độ. Rõ ràng rằng tam giác ABC chuyển động với vận tốc v của khuôn xuống phía dưới như một cố thể. Dọc đường BC thành phần tiếp tuyến của tốc độ bị gián đoạn, còn thành phần pháp tuyến bằng $\frac{v\sqrt{2}}{2}$. Dọc theo CD thành phần tiếp tuyến của tốc độ bị gián đoạn, còn thành phần pháp tuyến bằng không. Trong trường xuyên tâm tốc độ theo hướng đường trượt α bằng $\frac{v\sqrt{2}}{2}$, còn dọc theo đường trượt β bằng không.

Miền BDE trượt như vật rắn theo hướng DE với tốc độ $\frac{v\sqrt{2}}{2}$.

Hill chỉ ra rằng nghiệm Prandtl không duy nhất và đề xuất trường đường trượt có thể biểu diễn dưới dạng hai trường ứng suất đều BOC và BED nối với nhau bằng trường xuyên tâm BCD (hình 5.28). Trong trường hợp này độ dài miền dẻo của mặt tự do bằng một nửa chiều rộng của khuôn $\frac{\overline{AB}}{2}$.

Ứng suất trong các trường ứng suất đều và xuyên tâm cũng giống như nghiệm của Prandtl. Vì vậy lực đặt vào khuôn cũng được xác định bằng công thức (5.118).



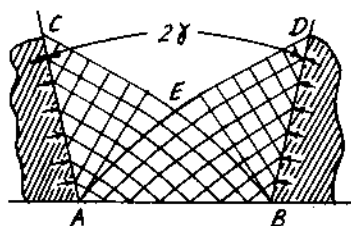
Hình 5.28

Trường tốc độ khác với nghiệm của Prandtl. Tam giác BOC trượt như vật rắn dọc OC với tốc độ $\sqrt{2}v$. Tốc độ trên BC liên tục. Trong trường xuyên tâm tốc độ theo hướng đường trượt α bằng $\sqrt{2}v$, còn dọc theo đường trượt β bằng không. Tam giác BDE chuyển động theo hướng DE với tốc độ $\sqrt{2}v$.

Từ bài toán đang xét suy ra rằng khi sử dụng mô hình cứng dẻo lý tưởng của vật liệu có thể có nghiệm không duy nhất.

5.8.3 Bài toán ép chảy kim loại

Nhờ tính chất 4) và 5) của đường trượt ta có thể dùng kết quả vừa nhận được từ bài toán nén nôm trong 5.8.1 vào bài toán về áp suất trên thành khuôn



Hình 5.29

ở gần cửa chảy ra của kim loại trong quá trình ép kim loại. Trước hết theo chu tuyến $ABDECA$ đặt lực căng đều $-p$, sau đó trên đoạn $BDECA$ đặt tải ngược lại. Chúng ta sẽ nhận được giá trị áp suất tác dụng lên thành khuôn BD, AC , ở đây giả thiết không tính đến ma sát.

$$p = 2\tau_s(1 + \gamma).$$

Một nghiệm khác của bài toán gần tương tự với nghiệm trên, giả thiết rằng AB là cung hình tròn bán kính a . Đây là bài toán đối xứng trục: bán kính và cung của hình tròn là hướng chính. Điều kiện chảy của vật liệu sẽ là

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_s$$

và phương trình cân bằng

$$\frac{d\sigma_1}{dr} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r} = 0.$$

Với $r = a, \sigma_1 = 0$, từ các phương trình dẫn đến:

$$\sigma_1 = -2\tau_s \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_2 = -p = -2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right).$$

trong đó p là áp suất trên thành khuôn. Ta thấy rằng áp suất không phụ thuộc vào góc mở γ . Đường trượt cắt các hướng chính một góc $\pi/4$, do đó chúng là những đường xoắn lôgarit. So sánh với nghiệm trên ta thấy có sự khác biệt khá lớn, với ý nghĩa đó người ta nói rằng nghiệm của bài toán vật liệu dẻo lý tưởng không ổn định.

5.9 Kéo một dải có vết cắt

Xét bài toán về kéo một dải có vết cắt sâu đối xứng. Giả thiết rằng dải tương đối dài, vì vậy cách đặt lực ở hai đầu không ảnh hưởng đến chảy dẻo ở miền bị cắt.

1. Dải với vết cắt lý tưởng

Ở trạng thái giới hạn dải bị kéo theo hướng y với tốc độ v . Hệ đường trượt như hình 5.30

Dọc theo biên tự do ở vết cắt OA trong tam giác OAB xảy ra hoặc kéo hoặc nén, ở đây là kéo. Tiếp đó đến miền có hệ đường trượt tập trung OBC và sau đó đến miền ứng suất đều OCD . Biên của miền dẻo là đường β $DCBA$, trong toàn miền tham số $\eta = \text{const}$ (xem mục 5.6.3). Ta biết rằng trong tam giác OBA : $\sigma = \tau_s$, $\varphi = -\pi/4$ và $\eta = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$, trong tam giác ODC σ chưa biết, $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ và $\eta = \frac{\sigma}{2\tau_s} - \frac{3\pi}{4}$ suy ra trong OCD $\sigma = \tau_s(1 + \pi)$.

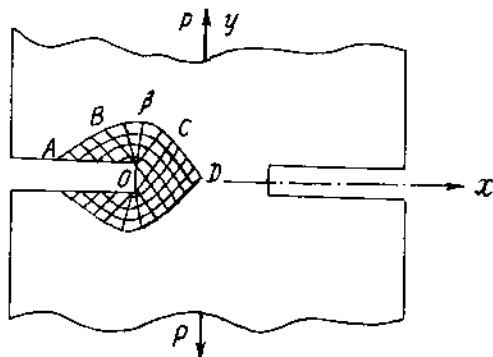
Dùng công thức (5.96) tính các thành phần ứng suất

$$\sigma_{xx} = \tau_s \pi, \quad \sigma_{yy} = \tau_s(2 + \pi).$$

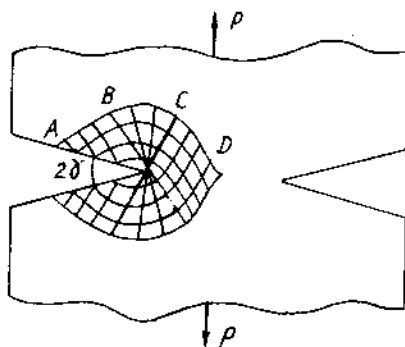
Do đó lực giới hạn bằng

$$\frac{P_*}{P_*^0} = 1 + \frac{\pi}{2},$$

trong đó $P_*^0 = 4\tau_s h$ là lực kéo giới hạn của dải nhẵn (không vết cắt) có chiều rộng $2h$.



Hình 5.30



Hình 5.31

2. Dải có vết cắt xiên góc

Trong trường hợp này xây dựng nghiệm hoàn toàn tương tự như trường hợp trên (hình 5.31).

Giá trị của tải giới hạn bằng

$$\frac{P_*}{P_*^0} = 1 + \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

3. Dải có vết cắt đáy tròn

Hệ thống đường trượt phụ thuộc vào tỷ số giữa chiều rộng chỗ co $2h$ và bán kính đáy vết cắt a . Với $\frac{h}{a} \leq 3,81$ hệ thống đường trượt chỉ bao phủ miền của đáy tròn, nó tạo thành họ những đường xoắn lôga (xem mục 5.7) Góc γ liên hệ với h bởi hệ thức

$$\gamma = \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right).$$

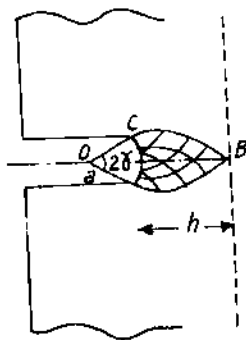
Ứng suất σ_{yy} tại tiết diện AB có dạng

$$\sigma_{yy} = 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right), \quad (5.119)$$

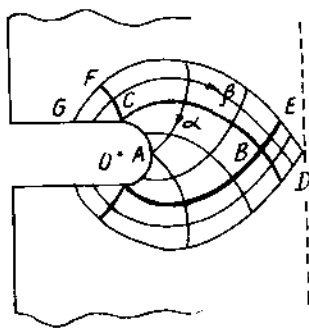
r là khoảng cách tính từ tâm O .

Lực giới hạn bằng

$$\frac{P_*}{P_*^0} = \left(1 + \frac{a}{h}\right) \ln\left(1 + \frac{h}{a}\right).$$



Hình 5.32



Hình 5.33

Vì $\gamma \leq \pi/2$, nghiệm này chỉ đúng khi $\frac{h}{a} \leq e^{\pi/2} - 1 = 3,81$.

Với tỷ số $\frac{h}{a}$ lớn xây dựng hệ đường trượt phức tạp hơn. Hệ thống đường trượt lôga tồn tại với giá trị $\gamma = \pi/2$ tương ứng với đoạn $AB = 3,81a$. Bên phải của miền này là tam giác BDE có ứng suất đều. Tiếp cận nó là tứ giác $BEFC$, trong đó $\eta = \text{const}$ (xem mục 5.6.3) đường trượt α là những đoạn thẳng trục giao với BC , đường β song song với BC . Sau nữa là miền CFG có ứng suất đều, tam giác CFG bằng tam giác BDE . Dọc theo AB phân bố ứng suất theo công thức (5.119). Trong tam giác BDE ta có $\sigma_{yy} = 2\tau_s(1 + \pi/2)$. Do đó tải giới hạn sẽ là

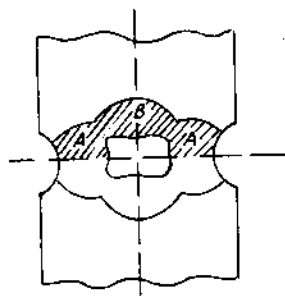
$$\frac{P_*}{P_0} = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{a}{h} \left(e^{\pi/2} - 1 - \frac{\pi}{2} \right).$$

4. Các dạng khác của vết cắt

Ta có thể khảo sát bằng phương pháp tương tự như trên đối với các vết cắt sâu có hình dáng khác. Bằng phương pháp số xây dựng hệ đường trượt có thể áp dụng để giải các bài toán với dải có vết cắt phức tạp.

Nhưng đối với vết cắt nông phương pháp trên không sử dụng được nữa. Kết quả tính toán và thực nghiệm cho ta thấy vết cắt nông khi tải tăng miền dèo ở trục của dải nhưng không theo tiết diện bị làm yếu vì vết cắt mà ở trên nó.

Kết quả tính toán của Southwell về kéo dài có vết cắt nông nửa hình tròn chỉ ra rằng, đầu tiên miền dèo xuất hiện và phát triển ở miền A , khi tải gần giới hạn thì tại trục xuất hiện miền dèo mới B , miền này tăng nhanh và dính liền với A khi tải đạt giá trị giới hạn.



Hình 5.34

5.10 Nén lớp vật liệu dẻo giữa hai khuôn cứng. Bài toán Prandtl

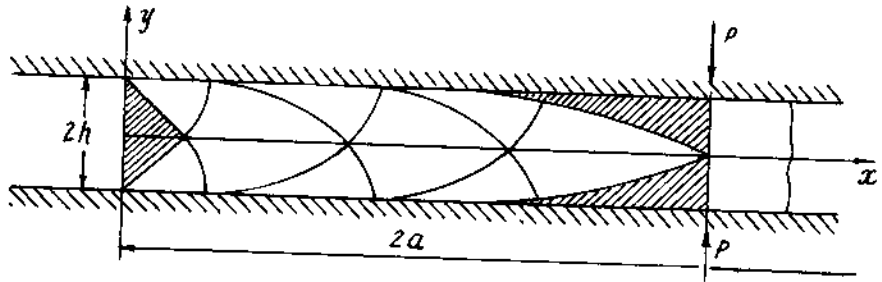
Giả sử lớp vật liệu có hình dải dài vô hạn theo hướng trục z có chiều rộng $2a$ và chiều cao $2h$ bị nén bằng lực P giữa hai khuôn cứng. Lớp vật liệu dẻo bị nén sẽ chảy từ giữa ra hai cạnh, tại mặt tiếp xúc xuất hiện ứng suất tiếp cực đại. Với biến dạng dẻo tương đối lớn có thể xem ứng suất tiếp đạt giá trị giới hạn chảy τ_s tại mặt tiếp xúc.

Ở đây ta có bài toán biến dạng phẳng, hệ trục tọa độ chọn như trong hình vẽ 5.35. Với $a \gg h$ có thể xem τ_{xy} không phụ thuộc vào x

Có thể thấy một cách dễ dàng ứng suất

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_1 - \tau_s \left(\frac{x}{h} - 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right), \\ \sigma_{yy} &= C_1 - \tau_s \frac{x}{h}, \\ \tau_{xy} &= \tau_s \frac{y}{h}\end{aligned}\quad (5.120)$$

thỏa mãn phương trình cân bằng (5.92) và điều kiện chảy dẻo (5.91) với mọi giá trị của C_1 .



Hình 5.35

Dễ dàng kiểm nghiệm các hệ thức nêu trên bằng cách thay trực tiếp vào các phương trình tương ứng. Tuy nhiên theo (5.120), σ_{xx} , τ_{xy} không bằng không tại $x = 0$ và $x = 2a$. Do vậy gần hai đầu và phần giữa của lớp nghiệm Prandtl không thỏa mãn.

Tại cạnh tự do $x = 0$ điều kiện biên thỏa mãn theo nghĩa Saint Venant, tức là với $x = 0$ lực pháp tác dụng ở đây bằng không

$$\int_{-h}^h \sigma_{xx} dy = 0,$$

từ đây cho phép xác định hằng số C_1 . Quả vậy đặt biểu thức thứ nhất của (5.120) với $x = 0$ vào đây, sau khi biến đổi ta được

$$C_1 = \frac{\pi}{2} \tau_s.$$

Do đó theo biểu thức thứ hai của (5.120) ta nhận được quy luật thay đổi tuyến tính của áp suất trên mặt tiếp xúc

$$\sigma_{yy} = -\tau_s \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{h} \right).$$

Vậy lực nén giới hạn tác động lên lớp vật liệu sẽ là

$$P_* = 2 \int_0^a |\sigma_{yy}| dx = a\tau_s \left(\pi + \frac{a}{h} \right).$$

Các thành phần tốc độ

$$\begin{aligned} v_x &= C_2 + V \left(\frac{x}{h} - 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right), \\ v_y &= -V \frac{y}{h}, \end{aligned} \quad (5.121)$$

trong đó V là tốc độ chuyển động của khuôn cứng, thỏa mãn điều kiện nén được (5.90) và hệ thức (5.89) với các giá trị của ứng suất đã biết theo (5.120). Đại lượng chưa biết C_2 xác định từ điều kiện: lượng vật liệu đi qua tiết diện $x = 0$ phải bằng lượng vật liệu nén do khuôn trên chiều dài $2a$ trong một đơn vị thời gian

$$- \int_{-h}^h v_x dy = 2aV.$$

Đặt v_x theo (5.121) với $x = 0$ vào đây, ta được

$$C_2 = V \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{h} \right).$$

Để xây dựng lưới đường trượt dùng phương trình thứ ba của (5.96) và biểu thức (5.120) đối với τ_{xy} dẫn đến

$$y = h \cos 2\varphi,$$

suy ra

$$\frac{dy}{dx} = -2h \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

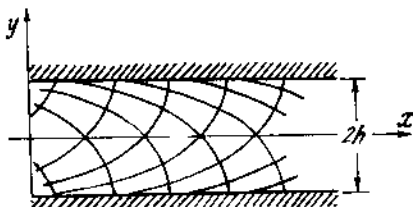
Đặt hệ thức vừa nhận được vào (5.95) xác định phương trình đường trượt

$$2h \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dx} = -\operatorname{tg} \varphi, \quad 2h \sin 2\varphi \frac{d\varphi}{dx} = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Lấy tích phân các phương trình này, nhận được phương trình tham số của đường trượt

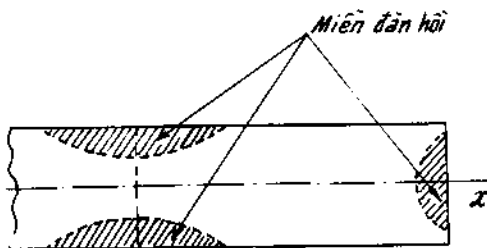
$$\begin{aligned} x &= -h(2\varphi + \sin 2\varphi) + C_1, & y &= h \cos 2\varphi, \\ x &= +h(2\varphi - \sin 2\varphi) + C_2, & y &= h \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (5.122)$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.



Hình 5.36

Cả hai họ đều là xicloit sinh ra bởi vòng tròn bán kính h .



Hình 5.37

Đối với mỗi họ đường trượt đường thẳng $y \pm h$ là đường đặc biệt: bao hình của họ đường này đồng thời là đường của những điểm lồi của họ đường kia.

Bài toán đặt ra chưa được giải quyết hoàn toàn: thật vậy, ứng suất (5.120) thỏa mãn điều kiện thực trên biên $y = \pm h$ chỉ tại miền nào đấy cách cạnh tự do $x = 0$ và cạnh $x = 2a$ và tiết diện giữa của dải, còn với điều kiện không có ứng suất tại cạnh tự do thì nói chung nghiệm này không thỏa mãn. Do đó lưới đường trượt (5.122) cũng chỉ tương ứng với trạng thái chảy tại miền cách các cạnh và giữa dải. Có thể là miền gần cạnh tự do và gần giữa dải $x = a$ tồn tại miền đàn hồi. Nghiệm xây dựng trên không xác định được biên giữa miền dẻo và miền đàn hồi. Nguyên nhân của hiện tượng này ở chỗ bài toán không phải là bài toán xác định tĩnh. Thực tế là điều kiện biên tại $y = \pm h$ không phải điều kiện tĩnh: khi khuôn tiến gần, thì tốc độ tiến của nó phải tính đến trong khi giải bài toán.

Vấn đề này được khảo sát đầy đủ hơn (thỏa mãn các điều kiện biên) trong các công trình của Sokolovsky, Hill [75, 77].

Tuy nhiên, nghiệm của Prandtl cho phép nghiên cứu sự chảy dẻo của kim loại giữa hai mặt cứng, khi độ dày của lớp kim loại nhỏ hơn các kích thước khác.

5.11 Cán dẹt tấm lá

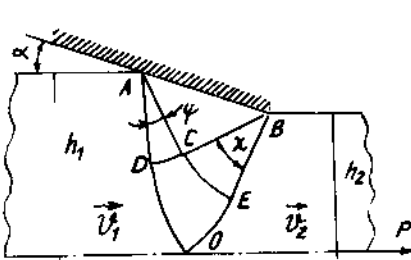
Quá trình biến dạng của vật thể gọi là dừng, nếu như trong quá trình đó ứng suất và tốc độ chuyển dịch tại mọi điểm của vật thể không thay đổi theo thời gian.

Ta xét quá trình dừng về cán tấm lá qua khuôn cứng, độ dày ban đầu của tấm lá là h_1 (hình 5.38).

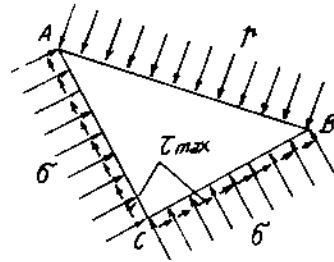
Để cho đơn giản ta không tính đến ma sát trên mặt phẳng tiếp xúc giữa tấm lá và sàn cán. Ký hiệu độ dày cuối cùng của tấm lá thành phẩm là h_2 , còn tốc độ tại đầu vào sàn cán và đầu ra khỏi cán tương ứng là v_1 và v_2 . Từ điều kiện không nén được của vật liệu ta có

$$v_1 = v_2 \frac{h_2}{h_1}.$$

Giả thiết áp suất trên mặt phẳng tiếp xúc AB phân bố đều và ký hiệu là p . Khi đó kẻ với đường AB ta có trường ứng suất đều ABC , nối với nó là hai trường xuyên tâm ACD và BCE với góc tâm chưa biết ψ và χ .



Hình 5.38



Hình 5.39

Từ điều kiện cân bằng của miền ABC (hình 5.39) ta xác định ứng suất pháp trung bình tại miền này

$$\sigma^{ABC} = -(p - \tau_s). \quad (5.123)$$

Ta có tại điểm C : $\varphi_C = \frac{\pi}{4} - \alpha$, theo công thức (5.99) tính các giá trị của tham số ξ, η đối với đường BCD và ACE

$$\xi = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} + \alpha, \quad (5.124)$$

$$\eta = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} + \frac{\pi}{4} - \alpha. \quad (5.125)$$

Sau đó cũng theo công thức (5.99) có thể xác định giá trị σ tại các điểm của đường trượt CD và CE , các đường này là các cung tròn bán kính AC và BC tương ứng. Do vậy ta đưa bài toán về bài toán đặc trưng ban đầu. Phương pháp số để giải nó đã được trình bày ở mục 5.6.7. cho phép xác định trạng thái ứng suất trong miền $CDOE$.

Để xác định quan hệ giữa các góc mở ψ và χ chưa biết, ta biểu diễn ứng suất trung bình tại điểm O qua giá trị của nó tại điểm C bằng cách di chuyển từ C đến O đầu tiên theo đường CDO , sau đó theo đường CEO .

Tính đến giá trị $\varphi_D = \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi)$ và sử dụng công thức (5.124) theo các phương trình (5.99) ta có

$$\frac{\sigma_D}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} + \alpha + \psi = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} + \alpha,$$

suy ra

$$\frac{\sigma_D}{2\tau_s} = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} - \psi. \quad (5.126)$$

Bây giờ xác định tham số η cho đường trượt ADO

$$\eta = \frac{\sigma_D}{2\tau_s} + \varphi_D = \frac{\sigma_D}{2\tau_s} + \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi),$$

góc φ tại điểm O bằng $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Theo công thức (5.99) ta có

$$\frac{\sigma_O}{2\tau_s} + \frac{\pi}{4} = \frac{\sigma_D}{2\tau_s} + \frac{\pi}{4} - (\alpha + \psi),$$

kết hợp với (5.126) dẫn đến

$$\frac{\sigma_O}{2\tau_s} = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} - \alpha - 2\psi. \quad (5.127)$$

Tương tự như vậy có thể thiết lập quan hệ giữa các ứng suất pháp trung bình tại điểm O và C khi di chuyển theo CEO ta được

$$\frac{\sigma_O}{2\tau_s} = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} + \alpha - 2\chi. \quad (5.128)$$

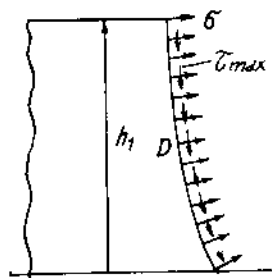
Từ (5.127) và (5.128) suy ra

$$\chi = \psi + \alpha. \quad (5.129)$$

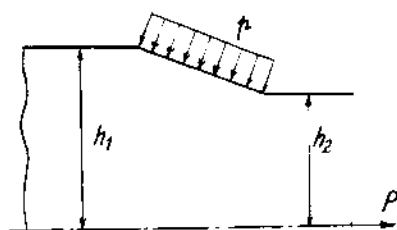
Áp suất p và một trong hai góc ψ , χ được xác định từ hai điều kiện: tổng hình chiếu trên trục nằm ngang của tất cả các lực tác động trên mặt ADO phải bằng không (cân bằng của miền cứng tại đầu vào sàn cán)

$$\int_{ADO} (\sigma \cos \varphi + \tau_s \sin \varphi) ds = 0,$$

và tìm điểm O trên trục đối xứng.



Hình 5.40



Hình 5.41

Sau khi xác định áp suất p thì lực cán P trên một đơn vị dài theo hướng trục giao với hình vẽ tính theo công thức

$$P = \overline{AB} p \sin \alpha = \overline{AB} p \cdot \frac{h_1 - h_2}{\overline{AB}} = p(h_1 - h_2) \quad (5.130)$$

điều này suy từ điều kiện cân bằng của tấm lá (hình 5.41)

Nén cực đại $\frac{h_1 - h_2}{h_1}$ tương ứng với $\psi = 0$, khi tứ giác $CDOE$ co về một điểm. Trong trường hợp này không phải sử dụng đến phương pháp số để giải bài toán đặc trưng ban đầu.

Theo công thức (5.129) ta có $\chi = \alpha$, do đó đường BO nghiêng với trục nằm ngang góc $\frac{\pi}{4}$. Từ hình 5.42 ta có

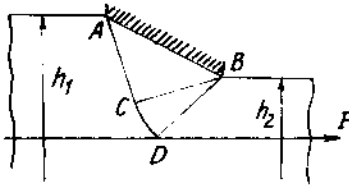
$$\frac{h_2}{2} = BO \frac{\sqrt{2}}{2} = BC \frac{\sqrt{2}}{2} = AB \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h_1 - h_2}{\sin \alpha}, \quad \text{suy ra} \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{1 + 2 \sin \alpha}.$$

Ứng suất pháp trung bình tại các điểm của đường BO tìm được theo hệ thức (5.99) có tính đến (5.123) và (5.124)

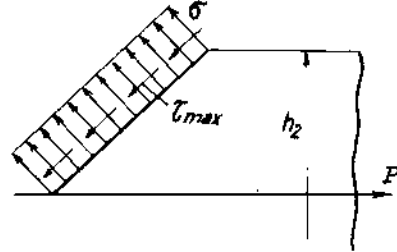
$$\frac{\sigma^{BO}}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sigma^{ABC}}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} + \alpha = \frac{-(p - \tau_s)}{2\tau_s} - \frac{\pi}{4} + \alpha,$$

suy ra

$$\sigma^{BO} = -p + \tau_s(1 + 2\alpha).$$



Hình 5.42



Hình 5.43

Từ điều kiện cân bằng của miền cứng biểu diễn trên hình 5.43 ta có

$$P = 2\tau_s \frac{h_2}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sigma^{BO} \frac{h_2}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Đặt biểu thức của σ^{BO} vào đây và sử dụng công thức (5.130), sau khi biến đổi nhận được

$$P = \frac{4(1 + \alpha) \sin \alpha}{1 + 2 \sin \alpha} \tau_s h_2.$$

Đại lượng $2\tau_s h_2$ bằng tải trọng giới hạn khi kéo tấm lá có độ dày không đổi h_2 . Vì vậy cán tấm có thể thực hiện được với điều kiện

$$P = 2\tau_s h_2, \quad \text{hay là} \quad \alpha \sin \alpha < \frac{1}{2},$$

suy ra $\alpha < 42^\circ 27'$.

Nhiều thí dụ khác về việc sử dụng lý thuyết biến dạng phẳng để nghiên cứu các quá trình công nghệ gia công kim loại được trình bày trong các tài liệu, chẳng hạn [59, 70, 75].

CHƯƠNG 6

Trạng thái giới hạn

Một trong những lãnh vực ứng dụng của lý thuyết dẻo có nhiều ý nghĩa thực tiễn là xác định tải trọng giới hạn của các kết cấu công trình, cũng như ứng lực trong quá trình công nghệ khác nhau.

Trong lãnh vực này ta tiếp cận với nghiệm của bài toán dẻo với giả thiết vật liệu là *cứng dẻo lý tưởng*. Nhưng như ta thấy, chỉ cần giới hạn trong điều kiện biến dạng phẳng (xem chương 5) việc giải các bài toán đã gặp nhiều khó khăn. Khó khăn này càng tăng lên khi chuyển sang các trường hợp biến dạng tổng quát hơn. Vì vậy điều có ý nghĩa quan trọng là sử dụng các phương pháp gần đúng để đánh giá tải trọng tương ứng với trạng thái giới hạn theo sơ đồ của vật liệu dẻo lý tưởng.

Trong chương 3 ta đã trình bày các định lý tổng quát của lý thuyết dẻo, trong đó có các định lý liên quan đến vấn đề này (xem 3.7.3).

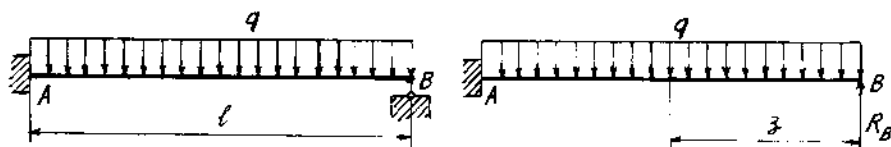
Trong chương này đề cập đến một số bài toán điển hình có sử dụng các định lý đó và xét trạng thái giới hạn của một số kết cấu khi chịu tác dụng tải trọng khác nhau [4, 17, 23, 49, 59, 65]

6.1 Ứng dụng các định lý tĩnh và động về trạng thái giới hạn

Ứng dụng các định lý này cho phép xác định cận dưới và cận trên của tải trọng giới hạn mà kết cấu có thể tiếp thụ được

6.1.1 Dầm chịu lực phân bố đều

Dầm có chiều dài ℓ một đầu bị ngàm, đầu kia tựa tự do, chịu tải phân bố đều với cường độ q



Hình 6.1

Dầm này có một bậc siêu tĩnh. Như trong giáo trình sức bền vật liệu nếu biểu đồ kéo của vật liệu không có tái bền thì khả năng chịu lực của dầm tĩnh định và khung sẽ mất đi khi ở tiết diện nguy hiểm của dầm xuất hiện khớp dẻo. Nếu dầm có một trục đối xứng trong mặt phẳng tác dụng mômen uốn, biểu đồ dãn và nén của vật liệu trùng nhau thì giá trị của mômen uốn giới hạn tại khớp dẻo bằng

$$M_* = \sigma_s(S_d + S_n),$$

trong đó S_d và S_n là giá trị tuyệt đối của mômen tĩnh của phần tiết diện chịu dãn và chịu nén (diện tích của chúng bằng nhau) đối với đường trung hòa.

Đối với dầm siêu tĩnh việc hình thành một khớp dẻo chưa dẫn tới mất khả năng chịu lực. Trong bài toán đang xét phải hình thành một khớp dẻo tại tiết diện ngàm A và khớp dẻo thứ hai tại một tiết diện nữa trên AB.

Thay vào phản lực R_B tại gối B ta có thể xét mọi trạng thái khả dĩ tĩnh học của dầm. Mômen tại tiết diện có tọa độ z

$$M = R_B z - \frac{qz^2}{2},$$

giá trị cực đại của nó đạt được với

$$z = \frac{R_B}{q}, \quad M_{\max} = \frac{1}{2} \frac{R_B^2}{q}. \quad (6.1)$$

Từ điều kiện suy từ định lý 3.12 chương 3, giá trị này không vượt giá trị mômen giới hạn

$$M_{\max} \leq M_*,$$

ta có

$$q \geq \frac{R_B^2}{2M_*}. \quad (6.2)$$

Giá trị lớn nhất của mômen tại đầu ngàm

$$M_{\ell n} = -R_B \ell + \frac{q \ell^2}{2},$$

với điều kiện giá trị này của mômen không vượt giá trị giới hạn $M_{\ell n} \leq M_*$ suy ra

$$q \leq \frac{2M_*}{\ell^2} + \frac{2R_B}{\ell} \quad (6.3)$$

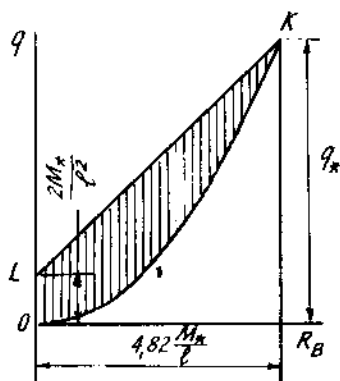
Trên hình 6.2 miền bị gạch thỏa mãn bất đẳng thức (6.2), (6.3) Tải trọng lớn nhất thỏa mãn định lý 3.12 trong số các tải trọng xác định bởi các điểm trong miền bị gạch ứng với giao điểm Q của đường OQ và SQ . Điểm Q có tọa độ

$$R_B = 2(\sqrt{2} + 1) \frac{M_*}{\ell} = 4,82 \frac{M_*}{\ell}, \quad (6.4)$$

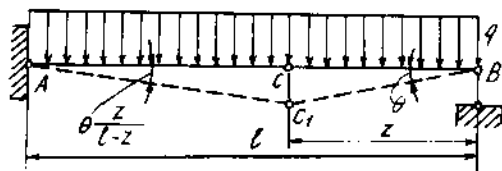
$$q_* = 11,6 \frac{M_*}{\ell} \quad (\text{tải trọng giới hạn}).$$

Từ các hệ thức (6.1), (6.4) ta tính được $z = 0,414\ell$, tiết diện trở thành khớp dẻo thứ hai gần gối B .

Bây giờ xác định tải trọng giới hạn theo định lý 3.11 chương 3 (phương pháp động)



Hình 6.2



Hình 6.3

Trên hình 6.3 đường đứt đoạn mô tả trạng thái khả dĩ động học của hệ. Ký hiệu θ là góc xoay của thanh BC , khi đó góc xoay của thanh AC bằng $\theta \frac{z}{\ell - z}$. Công của tải trọng phân bố đều

$$q_*(\ell - z) \frac{1}{2} \theta \frac{z}{\ell - z} (\ell - z) + q_* z \frac{1}{2} \theta z = \frac{q_* \ell z \theta}{2},$$

nó chính bằng tích của cường độ tải nhân với diện tích tam giác AC_1B .

Công của mômen giới hạn bằng $M_*\theta + 2M_*\frac{\theta z}{\ell - z}$. Cân bằng hai đại lượng vừa nhận được

$$\frac{q_*\ell z\theta}{2} = M_*\theta + 2M_*\frac{\theta z}{\ell - z},$$

suy ra

$$q_* = \frac{2M_*}{\ell} \frac{\ell + z}{z(\ell - z)}. \quad (6.5)$$

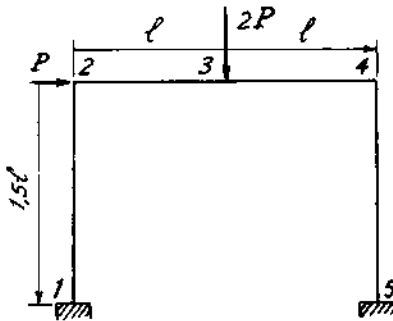
Theo định lý 3.11 giá trị của tải trọng giới hạn thực là giá trị cực tiểu trong tất cả các giá trị tải trọng xác định theo công thức (6.5). Cho đạo hàm của q_* theo z bằng không dẫn đến -

$$z^2 + 2\ell z - \ell^2 = 0,$$

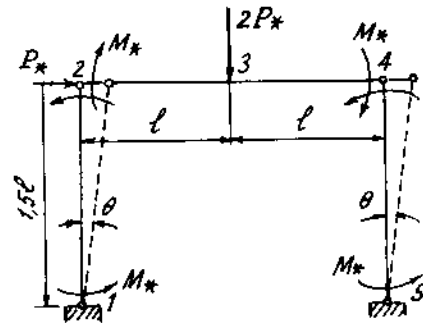
nghiệm của nó $z = (\sqrt{2} - 1)\ell = 0,414\ell$. Xét đạo hàm cấp hai của q_* ta thấy dương, vậy với giá trị của z này, q_* đạt cực tiểu. Đặt giá trị của z vào (6.5) ta nhận được giá trị của q_* xác định theo (6.4). Vậy tải trọng giới hạn xác định theo phương pháp tĩnh và phương pháp động trùng nhau. Trong bài toán này đây chính là nghiệm đầy đủ.

6.1.2 Khung

Giả sử cho khung vuông góc, cấu tạo bởi các thanh có tiết diện ngang không đổi chịu tác dụng của lực ngang P và lực vuông góc $2P$ hình 6.4



Hình 6.4



Hình 6.5

Khung này có ba bậc siêu tĩnh, ta giải bài toán bằng phương pháp động.

Vì khung không chịu tác dụng của tải phân bố trên mỗi đoạn của khung 12, 23, 34, 45 lực ngang không đổi, còn mômen uốn thay đổi theo quy luật tuyến tính. Vì vậy các khớp dẻo chỉ xuất hiện ở các tiết diện 1-5.

Vì khung siêu tĩnh bậc 3, nó trở thành biến hình khi xuất hiện 4 khớp dẻo. Theo định lý động 3.11 tải trọng giới hạn thực là tải trọng nhỏ nhất trong các tải trọng giới hạn xác định theo các phương án khác nhau về vị trí khớp dẻo hoặc số khớp dẻo ít hơn.

Giả sử khớp dẻo xuất hiện tại tiết diện 1, 2, 4 và 5. Khi đó chuyển dịch khả dĩ của khung ở trạng thái giới hạn sẽ là sự quay thanh 12 và 45 một góc θ (hình 6.5).

Chuyển dịch của thanh 234 theo hướng thẳng đứng là đại lượng nhỏ bậc hai so với chuyển dịch của nó theo phương ngang. Cơ cấu mất khả năng chịu lực này gọi là *cơ cấu dịch chuyển cạnh*.

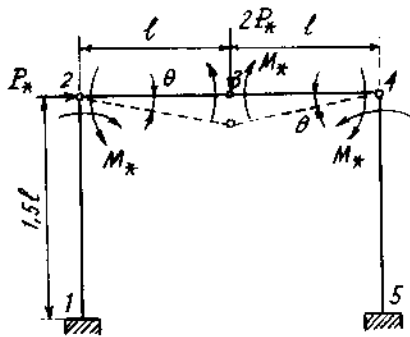
Công của lực ngang P_* bằng $1,5P_*\ell\theta$, công của lực thẳng đứng $2P_*$ bằng không, còn công của 4 mômen giới hạn bằng $4M_*\theta$. Theo định lý động

$$1,5P_*\ell\theta = 4M_*\theta$$

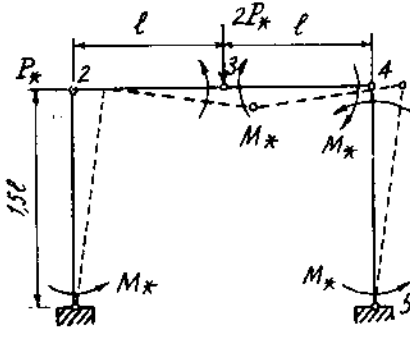
suy ra

$$P_* = \frac{8}{3} \frac{M_*}{\ell}.$$

Bây giờ giả sử khớp dẻo xuất hiện tại tiết diện 2, 3 và 4. Trạng thái khả dĩ động học trong trường hợp này biểu diễn bằng đường đứt nét trên hình 6.6



Hình 6.6



Hình 6.7

Cơ cấu mất khả năng chịu lực này gọi là *cơ cấu dầm*.

Công của lực dọc thẳng đứng $2P_*$ bằng $2P_*\ell\theta$, công của lực ngang bằng không, công của bốn mô men giới hạn bằng $4M_*\theta$. Vậy theo định lý động

$$2P_*\ell\theta = 4M_*\theta,$$

suy ra

$$P_* = 2 \frac{M_*}{\ell}.$$

Bây giờ giả thiết khớp dẻo xuất hiện tại tiết diện 1, 3, 4 và 5. Trên hình 6.7 đường đứt nét mô tả trạng thái khả dĩ động học. Cơ cấu mất khả năng chịu lực này gọi là *cơ cấu kết hợp*.

Công của lực ngang bằng $1,5\ell\theta P_*$, công của lực thẳng đứng $2P_*\ell\theta$, công của 6 mômen giới hạn $6M_*\theta$. Trên cơ sở định lý động

$$1,5P_*\ell\theta + 2P_*\ell\theta = 6M_*\theta,$$

suy ra

$$P_* = \frac{12}{7} \frac{M_*}{\ell} = 1,71 \frac{M_*}{\ell}. \quad (6.6)$$

So sánh các giá trị P_* nhận được ta thấy giá trị P_* xác định theo công thức (6.6) là nhỏ nhất, ta lấy giá trị này là tải trọng giới hạn.

6.1.3 Phiến dày

Phiến dày chiều cao h có lỗ hổng đường kính d chịu kéo trong điều kiện biến dạng phẳng ($\varepsilon_{zz} = 0$) bởi lực, giá trị của nó trên một đơn vị dài theo hướng trục giao với hình 6.8 bằng P .

Ta lấy trạng thái sau đây là trạng thái khả dĩ tĩnh học: miền bị gạch ứng suất bằng không, còn trong dải trên và dải dưới với chiều cao $\frac{h-d}{2}$ có trạng thái ứng suất

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xx} = \text{const.}$$

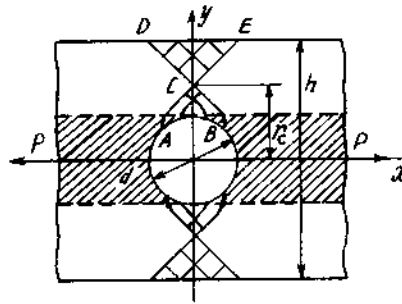
Theo điều kiện chảy (5.91) ta có

$$\sigma_{xx} = 2\tau_s. \quad (6.7)$$

Từ điều kiện cân bằng dẫn đến việc xác định tải trọng giới hạn theo phương pháp tĩnh

$$P_* = 2\tau_s(h-d). \quad (6.8)$$

Bây giờ tìm tải trọng giới hạn theo phương pháp động. Ta lấy làm trạng thái khả dĩ động học là trạng thái, khi miền dẻo tập trung tại vị trí yếu nhất thuộc lân cận lỗ hổng. Khi đó trường đường trượt là các đường xoắn lôgarit kề với biên lỗ hổng và lưới các đường thẳng (trường đều) gần cạnh thẳng của phiến dày. Hai trường này tiếp giáp nhau tại điểm C cách tâm lỗ hổng một khoảng r_c . Ta có thể các định tốc độ và ứng suất tại các miền dẻo ABC và CDE và chỉ ra công suất $\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p > 0$, tức là trường ứng suất và trường tốc độ phù hợp nhau.



Hình 6.8

Các trạng thái khả dĩ động học và tải trọng tương ứng với chúng phụ thuộc vào vị trí điểm C . Ứng với một trạng thái khả dĩ động học nào đấy tải trọng giới hạn được xác định bằng hệ thức

$$P_* = 2 \int_{d/2}^{r_c} \sigma_{\theta\theta} dr + 2 \int_{r_c}^{h/2} \sigma_{xx} dr, \quad (6.9)$$

trong đó $\sigma_{\theta\theta}$ là ứng suất vòng trong miền dẻo ABC , còn σ_{xx} ứng suất trong miền dẻo CDE . Ứng suất trong miền dẻo ABC được xác định như trong bài toán biến dạng đối xứng trục (công thức (4.65) với $p = 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\tau_s \ln \frac{2r}{d}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{2r}{d} \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Ứng suất trong miền dẻo CDE được xác định theo (6.7). Đặt (6.7) và (6.10)

vào (6.9)

$$P_* = 2 \int_{d/2}^{r_c} 2\tau_s \left(1 + \ln \frac{2r}{d}\right) dr + 2 \int_{r_c}^{h/2} 2\tau_s dr,$$

sau khi tính toán ta được

$$P_* = 2\tau_s(h-d) + 4\tau_s \int_{d/2}^{r_c} \ln \frac{2r}{d} dr.$$

Số hạng thứ hai trong biểu thức này dương và tăng khi r_c tăng, do đó giá trị của P_* nhỏ nhất khi $r_c = \frac{d}{2}$

$$P_{*\min} = 2\tau_s(h-d). \quad (6.11)$$

So sánh (6.8) với (6.11) ta thấy tải trọng giới hạn ứng với trạng thái khả dĩ tĩnh học và khả dĩ động học trùng nhau, tức là công thức này xác định tải trọng giới hạn thực của bài toán.

6.2 Trạng thái giới hạn của thanh có tiết diện bất kỳ chịu xoắn

Trong mục 4.3.2 chương 4 ta đã khảo sát trạng thái ứng suất, biến dạng của thanh tiết diện bất kỳ chịu xoắn, khi thanh làm việc ngoài giới hạn đàn hồi. Trong đó đã đề cập đến *khả năng chịu lực* của thanh bằng vật liệu dẻo lý tưởng khi xoắn. Mômen xoắn giới hạn xác định khả năng chịu lực của thanh, nó ứng với trường hợp toàn bộ thanh chuyển sang trạng thái dẻo.

Giá trị này được xác định theo công thức (4.25)

$$M_* = 2 \iint_S F_p(x, y) dx dy,$$

trong đó hàm ứng suất $F_p(x, y)$ thỏa mãn phương trình (4.30)

$$\left(\frac{\partial F_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_p}{\partial y}\right)^2 = \tau_s^2,$$

với $F_p = 0$ trên biên tiết diện thanh.

Đặt $F_p = \tau_s \Phi$ ta đưa các hệ thức trên về dạng

$$M_* = 2\tau_s \iint_S \Phi(x, y) dx dy. \quad (6.12)$$

trong đó

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

với $\Phi = 0$ trên chu tuyến tiết diện.

Mặt $z = \Phi(x, y)$ là mặt có pháp tuyến nghiêng một góc không đổi $\pi/4$ đối với trục z .

Bằng phương pháp tương tự đồ cát như đã trình bày trong 4.3.2 trên cơ sở công thức (6.12) ta xác định giá trị của mômen xoắn giới hạn, nó tỷ lệ với thể tích khối cát đồ đầy trên bản nằm ngang có dạng của tiết diện thanh bị xoắn.

Ta tính mômen xoắn giới hạn đối với một số dạng tiết diện của thanh.

1. Thanh có tiết diện tròn

Giả sử thanh có tiết diện tròn với bán kính a . Mặt hàm ứng suất là mặt nón xây dựng trên tiết diện ngang tức là nón có pháp tuyến nghiêng một góc $\pi/4$ với trục z .

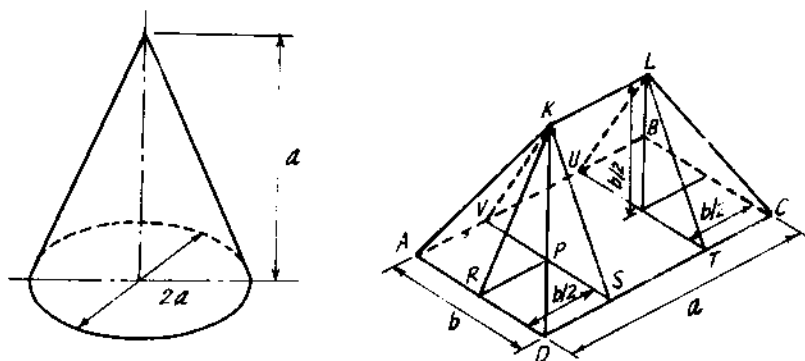
Theo công thức (6.12) mômen xoắn giới hạn bằng hai lần thể tích của hình nón này nhân với giới hạn chảy của vật liệu khi trượt thuần túy

$$M_* = 2\tau_s \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a = \frac{2}{3} \tau_s \pi a^3,$$

trùng với công thức đã biết trong sức bền vật liệu.

2. Thanh có tiết diện chữ nhật

Tiết diện thanh là hình chữ nhật có cạnh b và a , trong đó $a \geq b$. Trong trường hợp này mặt ứng suất có dạng mái nhà xây dựng trên hình chữ nhật, chiều cao của mái là $\frac{b}{2}$. Thể tích giới hạn bởi mái này bao gồm thể tích của lăng trụ ba cạnh STLKVU với diện tích đáy $\frac{b^2}{4}$ và chiều cao $a - b$ và thể tích của tháp bốn cạnh đều ghép bởi hai nửa như nhau ADKSV và BCTLU diện tích đáy là hình vuông bằng b^2 và chiều cao $\frac{b}{2}$.



Hình 6.9

Mômen xoắn giới hạn M_* bằng hai lần thể tích giới hạn bởi mái nhân với giới hạn chảy của vật liệu khi trượt thuần túy

$$M_* = 2\tau_s \left[\frac{b^2}{4}(a-b) + \frac{1}{3}b^2 \frac{b}{2} \right],$$

hay là

$$M_* = \tau_s \frac{b^2}{6} (3a - b).$$

Trường hợp thanh có tiết diện vuông $a = b$

$$M_* = \tau_s \frac{a^3}{3},$$

còn với dải mỏng $a \gg b$ ta có

$$M_* = \tau_s \frac{b^2 a}{2}.$$

3. Thanh có tiết diện tam giác đều

Giả sử thanh có tiết diện là tam giác đều cạnh a . Mặt ứng suất là tháp ba mặt có chiều cao là $\frac{\sqrt{3}}{6}a$. Diện tích đáy của tháp là diện tích của tam giác đều bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Vậy mômen xoắn giới hạn bằng

$$M_* = 2\tau_s \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a = \tau_s \frac{a^3}{12}.$$

6.3 Trạng thái giới hạn của bản tròn

Trong mục 5.3 Chương 5 nghiên cứu về trạng thái ứng suất và biến dạng của bản vành khăn chịu áp suất trên biên trong và bản vô hạn có lỗ hổng chịu tác dụng của áp suất trên biên lỗ hổng, khi bản làm việc ngoài giới hạn đàn hồi với giả thiết vật liệu của bản là vật liệu dẻo lý tưởng, ta đã xác định áp suất giới hạn mà bản có thể tiếp thụ được. Giá trị của đại lượng này được xác định tùy thuộc vào việc sử dụng điều kiện chảy dẻo Mises hay Saint Venant để mô tả vật liệu dẻo lý tưởng. Cách giải quyết bài toán có khác nhau, nhưng sai khác giữa kết quả cuối cùng (áp suất giới hạn) không lớn.

Khảo sát trạng thái giới hạn của bản vành khăn chịu uốn dưới tác dụng của lực cắt phân bố đều trên biên trong được đề cập đến trong mục 5.5.4 chương 5. Ở đây ta tiếp tục khảo sát trạng thái giới hạn của bản tròn và bản vành khăn chịu uốn bởi các dạng tải trọng khác.

Giải bài toán về trạng thái đàn dẻo của bản gặp nhiều khó khăn ngay cả trong trường hợp đơn giản tải trọng đối xứng trục và vật liệu dẻo lý tưởng. Nghiên cứu uốn đàn dẻo bản tròn và bản vành khăn bằng vật liệu dẻo lý tưởng chịu tải đối xứng trục cho thấy khác với uốn dầm đàn dẻo khả năng chịu lực của bản trong nhiều trường hợp mất đi khi không còn miền đàn hồi, tức là khi tại mọi điểm của bản cường độ ứng suất đạt giá trị giới hạn chảy của vật liệu.

Do vậy, giải bài toán xác định tải trọng giới hạn đối với bản tròn và bản vành khăn chịu tải đối xứng trục ta dùng phương trình cân bằng và điều kiện mô tả tính dẻo của vật liệu dẻo lý tưởng. Việc mô tả này tùy thuộc vào cách chọn điều kiện Mises hay Saint Venant.

Phương trình vi phân cân bằng của phần tử bản có dạng (5.79)

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q,$$

hay là

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = Qr. \quad (6.13)$$

6.3.1 Giải bài toán với điều kiện chảy dẻo Mises

Nếu sử dụng điều kiện Mises cho mô tả vật liệu cứng dẻo lý tưởng, hệ thức giữa các mômen có dạng (5.83)

$$M_\theta^2 - M_\theta M_r + M_r^2 = M_s^2, \quad (6.14)$$

trong đó

$$M_s = \sigma_s \frac{h^2}{4}.$$

Các phương trình (6.13), (6.14) là các phương trình cơ bản để nghiên cứu khả năng chịu lực của bản.

Các điều kiện biên có dạng

- i) Đối với bản tròn thì tại tâm điểm $M_r = M_\theta$;
 - ii) Bản chịu tác dụng của mômen phân bố đều với cường độ m trên chu tuyến thì trên đó $M_r = \pm m$;
 - iii) Bản có chu tuyến tự do hoặc tựa tự do thì trên đó $M_r = 0$;
 - iv) Bản có chu tuyến ngàm thì $\kappa_\theta = 0$ suy ra trên chu tuyến $M_r = 2M_\theta$.
- Phương trình (6.14) thỏa mãn nếu đặt

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right), \\ M_\theta &= \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \cos \left(\omega - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Đặt các biểu thức mômen theo (6.15) vào phương trình cân bằng (6.13), sau khi biến đổi ta được

$$\frac{dr}{r} = \frac{-\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) d\omega}{\frac{\sqrt{3}}{2M_s} Qr + \sin \omega}. \quad (6.16)$$

Phương trình này có thể tích phân được dưới dạng kín nếu $Q = 0$ (uốn thuần túy) và $Q = \frac{A}{r}$, $A = \text{const.}$

Trường hợp sau ứng với bản chịu lực tập trung tại tâm hoặc bản chịu lực phân bố đều theo đường tròn đồng tâm. Các trường hợp khác tích phân phương trình (6.16) có thể thực hiện bằng phương pháp số.

1. Trường hợp $Q = 0$

Từ (6.16) ta có

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) d\omega}{\sin \omega} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \cot \omega) d\omega,$$

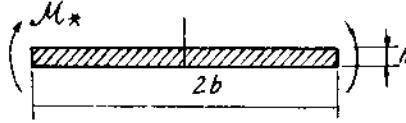
tích phân của nó có dạng

$$\frac{C}{r^2} = e^{\sqrt{3}\omega} \sin \omega, \quad (6.17)$$

trong đó C là hằng số tích phân.

Ta xét một vài thí dụ sử dụng tích phân này để tính tải trọng giới hạn.

Thí dụ 6.1. Bản tròn bán kính b chịu tác dụng của mômen phân bố đều $\mathcal{M}_*$ trên chu tuyến



Hình 6.10

Trong trường hợp này $Q = 0$, điều kiện biên có dạng

$$M_r = M_\theta \quad \text{tại } r = 0,$$

$$M_r = \mathcal{M}_* \quad \text{tại } r = b.$$

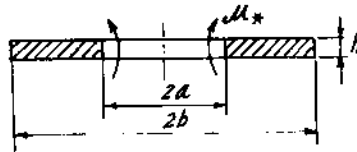
Sử dụng hệ thức (6.15) và (6.17) vào hệ thức thứ nhất của điều kiện biên ta được

$$\omega_0 = \omega(0) = 0, \quad C = 0,$$

do đó với mọi giá trị của r ta đều có $\omega(r) = 0$. Tính đến điều này, từ điều kiện biên thứ hai ta nhận được giá trị mômen giới hạn

$$\mathcal{M}_* = M_s = \sigma_s \frac{h^2}{4}.$$

Thí dụ 6.2. Bản vành khăn bán kính a và b chịu tác dụng của mômen phân bố đều $\mathcal{M}_*$ trên chu tuyến trong.



Hình 6.11

Trong trường hợp này $Q = 0$, điều kiện biên có dạng

$$M_r = \mathcal{M}_* \quad \text{tại } r = a,$$

$$M_r = 0 \quad \text{tại } r = b.$$

Sử dụng hệ thức (6.15) và (6.17) tính đến giá trị của mômen uốn M_θ trên biên ngoài âm, từ điều kiện biên thứ hai ta nhận được

$$\omega_b = \omega(b) = \frac{4\pi}{3}, \quad C = -\frac{\sqrt{3}}{2}b^2 \exp\left(\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}\right). \quad (6.18)$$

Từ điều kiện biên thứ nhất, tính đến các hệ thức (6.15), (6.17) và (6.18) ta có

$$\frac{b^2}{a^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(\sqrt{3}\left(\omega_a - \frac{4\pi}{3}\right)\right) \sin \omega_a, \quad (6.19)$$

$$\mathcal{M}_* = \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \cos\left(\omega_a + \frac{\pi}{6}\right), \quad (6.20)$$

trong đó ω_a - giá trị của $\omega(r)$ tại $r = a$.

Nếu cho trước tỷ số $\frac{b}{a}$ từ phương trình (6.19) ta xác định ω_a , tiếp đến thay vào (6.20) xác định mômen giới hạn $\mathcal{M}_*$.

Công thức (6.20) cho ta xác định mômen tới hạn lớn nhất khi $\omega_a = \frac{11\pi}{6}$:

$$\mathcal{M}_{*\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_s$$

Giá trị $\omega_a = \frac{11\pi}{6}$ theo công thức (6.19) tương ứng với

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right) \approx (2,963)^2.$$

Do đó nếu tỷ số của bán kính ngoài với bán kính trong $\frac{b}{a} \geq 2,963$ thì không có mômen nào tác dụng vào bản làm mất khả năng chịu lực của nó. Chú ý rằng kết quả này cũng tương tự như kết quả của bài toán bản vành khuyên chịu áp suất phân bố đều trên biên trong đã khảo sát trong mục 5.3.1 chương 5.

2. Trường hợp $Q = \frac{A}{r}$

Từ phương trình (6.16) ta có

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) d\omega}{k - \sin \omega} \quad (6.21)$$

trong đó $k = -\frac{\sqrt{3}A}{2M_s}$.

Tích phân phương trình này ta được

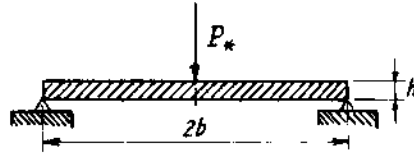
$$\ln \frac{C}{r^2} = \sqrt{3}\omega + \ln(k - \sin \omega) - \sqrt{3}k \int \frac{d\omega}{k - \sin \omega}, \quad (6.22)$$

trong đó C là hằng số tích phân.

Số hạng chứa tích phân trong hệ thức vừa nhận được có biểu thức khác nhau tùy thuộc vào giá trị k lớn hơn hay nhỏ hơn đơn vị.

Thí dụ 6.3. Ta đã xét trường hợp này trong bài toán xác định tải trọng giới hạn bản vành khăn chịu lực cắt phân bố đều trên biên trong (mục 5.5.4 chương 5)

Thí dụ 6.4. Bản tròn tựa tự do theo chu tuyến và chịu tác dụng của lực tập trung P_* đặt tại tâm của bản.



Hình 6.12

Trong trường hợp này

$$Q = -\frac{P_*}{2\pi r},$$

do đó

$$A = -\frac{P_*}{2\pi} \quad \text{và} \quad k = \frac{\sqrt{3} P_*}{4\pi M_s}. \quad (6.23)$$

Điều kiện biên có dạng

$$M_r = M_\theta \quad \text{tại } r = 0$$

$$M_r = 0 \quad \text{tại } r = b.$$

Từ các điều kiện biên này ta xác định được

$$\text{- tại } r = 0, \quad \omega_0 \equiv \omega(0) = 0, \quad (6.24)$$

$$\text{- tại } r = b, \quad \omega_b \equiv \omega(b) = \frac{\pi}{3}. \quad (6.25)$$

Tích phân phương trình (6.21) tính đến điều kiện (6.25) ta được

$$\ln \frac{r}{b} = \int_{\pi/3}^{\omega} \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) d\omega}{k - \sin \omega}.$$

Từ điều kiện (6.24) và hệ thức vừa nhận được suy ra tích phân

$$\int_{\pi/3}^0 \frac{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) d\omega}{k - \sin \omega} \quad (6.26)$$

phân kỳ. Vì cận tích phân hữu hạn, hàm dưới dấu tích phân phải trở thành vô cùng với giá trị nào đấy của ω .

Từ các hệ thức (6.21), (6.24) và (6.25) suy ra

$$k - \sin \omega \geq 0.$$

Với $0 \leq \omega \leq \pi/3$, bất đẳng thức $k - \sin \omega \geq 0$ luôn đúng khi $k \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Để hàm dưới dấu tích phân trong biểu thức (6.26) trở thành vô cùng thì điều kiện cần là phải thỏa mãn đẳng thức

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó hàm dưới dấu tích phân trở thành vô cùng với $\omega = \frac{\pi}{3}$. Thực hiện tích phân trong biểu thức (6.22) với $k > 1$, ta kết luận tích phân (6.26) phân kỳ với giá trị k nêu trên.

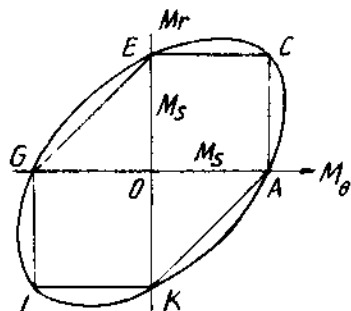
Thay $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vào biểu thức (6.23) ta nhận được giá trị của tải trọng giới hạn

$$P_* = 2\pi M_s.$$

6.3.2 Giải bài toán với điều kiện chảy dẻo Saint Venant

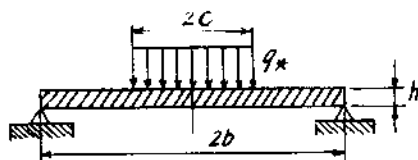
Sử dụng điều kiện chảy Tresca-Saint Venant cho phép đơn giản hóa đi rất nhiều khi xác định tải trọng giới hạn của bản tròn.

Thay cho đường ellip (6.14) trong mặt phẳng (M_r, M_θ) ta lấy đường lục giác nội tiếp ellip này. Như vậy, khi sử dụng điều kiện Tresca - Saint Venant tùy thuộc vào hệ thức giữa các mômen uốn điều kiện dẻo được mô tả bằng các hệ thức toán học khác nhau.



Hình 6.13

Thí dụ 6.5. Bản tròn bán kính b tựa tự do theo chu tuyến và chịu tác dụng của tải phân bố đều cường độ q_* trên hình tròn đồng tâm bán kính c



Hình 6.14

Trong trường hợp này lực cắt Q có dạng

- với $0 \leq r \leq c$

$$Q = -\frac{q_* r}{2},$$

- với $c \leq r \leq b$

$$Q = -\frac{q_* c^2}{2r}.$$

Điều kiện biên của bài toán

tại $r = 0$ $M_r = M_\theta$,

tại $r = c$ $(M_r)_1 = (M_r)_2$

tại $r = b$ $M_r = 0$

ký hiệu "1" và "2" tương ứng với giá trị của đại lượng đang xét trong miền $0 \leq r \leq c$ và miền $c \leq r \leq b$ tương ứng.

Từ điều kiện thứ nhất ta thấy tại tâm của bản trạng thái dẻo tương ứng với điểm C trên hình 6.13. Do đó tại lân cận của nó trạng thái dẻo có thể biểu diễn bởi các điểm trên đường CA hoặc CE .

Ta chỉ ra trong trường hợp này là trạng thái CA . Quả vậy, viết lại phương trình cân bằng (6.13)

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_\theta - Qr = 0. \quad (6.27)$$

Đối với trạng thái CE $M_r = M_s$ nên $\frac{dM_r}{dr} = 0$. Từ hình 6.13 ta thấy với trạng thái CE $M_r - M_\theta > 0$, đặt biểu thức này vào phương trình (6.27) ta lại nhận được $\frac{dM_r}{dr} < 0$ mâu thuẫn với kết quả vừa nêu trên, vậy không thể là trạng thái CE .

Trong trường hợp này trạng thái dẻo tương ứng là CA , ta có

$$M_\theta = M_s,$$

phương trình cân bằng (6.27) tính đến biểu thức này và các biểu thức của Q dẫn đến:

- Với $0 \leq r \leq c$

$$\frac{d}{dr}(rM_r) = M_s - \frac{q_* r^2}{2};$$

- Với $c \leq r \leq b$

$$\frac{d}{dr}(rM_r) = M_s - \frac{q_* c^2}{2}.$$

Nghiệm của các phương trình trên có dạng

- Với $0 \leq r \leq c$

$$M_r = M_s - \frac{q_* r^2}{6} + \frac{C_1}{r};$$

- Với $c \leq r \leq b$

$$M_r = M_s - \frac{q_* c^2}{2} + \frac{C_2}{r}.$$

Cho thỏa mãn điều kiện thứ nhất ta được

$$C_1 = 0,$$

từ điều kiện thứ hai

$$C_2 = \frac{q_* c^3}{3},$$

tiếp đến thỏa mãn điều kiện thứ ba cho ta xác định giá trị của tải trọng giới hạn

$$q_* = \frac{6M_s b}{3bc^2 - 2c^3}. \quad (6.28)$$

Trường hợp tải phân bố đều trên toàn bản, tức là $c = b$ ta có

$$q_* = 6 \frac{M_s}{b^2}.$$

Nếu so sánh kết quả này với kết quả nhận được bằng tính toán số khi sử dụng điều kiện Mises

$$q_* = 6,5 \frac{M_s}{b^2},$$

ta thấy sai số khoảng 8%.

Ta có thể nhận được nghiệm của bài toán bản chịu tác dụng của lực tập trung từ biểu thức (6.28) bằng cách viết

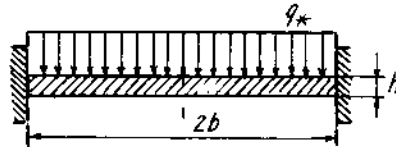
$$q_* \pi c^2 = \frac{6\pi M_s b}{3b - 2c}.$$

Cho $c \rightarrow 0$, $q_* \pi c^2 \rightarrow P_*$, ta được

$$P_* = 2\pi M_s,$$

Kết quả trùng với kết quả nhận được trước đây bằng cách sử dụng điều kiện dẻo Mises.

Thí dụ 6.6. Bàn tròn bị ngàm theo chu tuyến và chịu tải phân bố đều.



Hình 6.15

Trong trường hợp này có thể chia bản thành hai miền. Miền $0 \leq r \leq c$ xuất hiện trạng thái dẻo CA, còn miền $c \leq r \leq b$ ứng với trạng thái dẻo AK. Lực cắt trong miền thứ nhất cũng như miền thứ hai xác định theo công thức

$$Q = -\frac{q_* r}{2}. \quad (6.29)$$

Mômen M_r trong miền thứ nhất xác định như bài toán trên

$$M_r = M_s - \frac{q_* r^2}{6}.$$

Bán kính giữa hai miền xác định từ điều kiện

$$r = c \quad M_r = 0,$$

dẫn đến

$$c^2 = \frac{6M_s}{q_*}. \quad (6.30)$$

Trong miền thứ hai $c \leq r \leq b$ trạng thái dẻo AK ứng với biểu thức của điều kiện Saint-Venant có dạng

$$M_\theta - M_r = M_s. \quad (6.31)$$

Kết hợp hệ thức (6.31) và biểu thức của lực cắt Q (6.29) ta đưa phương trình cân bằng (6.27) về dạng

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{M_s}{r} - \frac{q_* r}{2},$$

nghiệm của nó nhận được bằng cách tích phân trực tiếp

$$M_r = M_s \ln \frac{r}{c} - \frac{q_* r^2}{2} + C_2.$$

Hằng số C_2 được xác định từ điều kiện $r = c$, $M_r = 0$

$$C_2 = \frac{q_* c^2}{2},$$

Vậy mômen M_r trong miền $c \leq r \leq b$ bằng

$$M_r = M_s \ln \frac{r}{c} - \frac{q_*(r^2 - c^2)}{2}. \quad (6.32)$$

Trong bài toán đang xét tại tiết diện ngàm không thể thỏa mãn điều kiện $M_r = 2M_\theta$, vì theo đường trạng thái dẻo AK mômen M_r và M_θ , có dấu khác nhau. Tại biên ngàm tạo thành khớp dẻo tròn, vì vậy $M_r = -M_s$ tại $r = b$.

Từ hệ thức này và sử dụng hệ thức (6.32) và (6.30) ta nhận được phương trình xác định biên của miền

$$5 + 2\ln \frac{b}{c} - 3\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 0,$$

nghiệm của nó

$$\frac{c}{b} = 0,73.$$

Đặt (6.30) vào đây ta tìm được giá trị của tải trọng giới hạn

$$q_* = 11,3 \frac{M_s}{b^2}.$$

6.4 Khái niệm về thích ứng

Trong các bài toán đã xét tải trọng tác dụng một lần vào các kết cấu, tuy nhiên các kết cấu công trình hoặc máy móc có thể chịu tác dụng của tải trọng và nhiệt thay đổi lặp lại theo chu trình. Khi kết cấu công trình làm việc ngoài giới hạn đàn hồi chịu tải trọng lặp lại như vậy có thể xảy ra ba trường hợp biến dạng sau đây trong các chi tiết của nó: a) biến dạng dẻo thay đổi dấu; b) biến dạng dẻo không đổi dấu tăng theo từng chu kỳ; c) sau một hay vài chu kỳ đầu ngừng tăng biến dạng dẻo và chuyển kết cấu về làm việc ở trạng thái đàn hồi.

Trong trường hợp thứ nhất do kết quả của tải trọng lặp lại có thể xảy ra phá hủy có tính mỏi dẻo. Trong trường hợp thứ hai tăng không ngừng biến dạng một dấu dẫn đến phá vỡ điều kiện làm việc của kết cấu, kết cấu bị phá hủy khi vật liệu kết thúc giai đoạn dẻo. Trong trường hợp thứ ba liên quan đến khả năng dẫn trở lại trạng thái làm việc đàn hồi của kết cấu, điều này xảy ra khi xuất hiện trong kết cấu sự phân bố ứng suất dư do kết quả của biến dạng dẻo trong các giai đoạn đặt tải đầu tiên. Nếu khả năng này là hiện thực thì ta nói rằng *kết cấu thích ứng được* với tải trọng lặp lại thuộc dạng đã cho.

Do vậy xuất hiện bài toán xác định khoảng thay đổi lớn nhất của lực đặt vào kết cấu để kết cấu có thể thích ứng được (miền thích ứng).

Khi phân tích điều kiện thích ứng ta thường dùng sơ đồ vật liệu dẻo lý tưởng.

Ta xét một vài thí dụ minh họa hiện tượng thích ứng.

Thí dụ 6.7. Xét trạng thái đàn dẻo của cầu rỗng dưới tác dụng của áp suất trong p (xem mục 4.4 chương 4) với điều kiện áp suất thay đổi theo sơ đồ $0 \rightarrow p \rightarrow 0 \rightarrow p \dots$. Khi đặt tải giai đoạn đầu $0 \rightarrow p$ trong cầu xuất hiện miền biến dạng dẻo ($a \leq r \leq r_s$). Sau khi cất tải $p \rightarrow 0$ trong cầu tồn tại ứng suất dư (hình 6.16a).

Giả thiết ứng suất dư không lớn, nên không gây ra biến dạng dẻo thứ cấp, tức là cường độ ứng suất dư không vượt giới hạn chảy $|\sigma_{\varphi\varphi}^* - \sigma_{rr}^*| \leq \sigma_s$. Vì

giá trị $\max |\sigma_{\varphi\varphi}^* - \sigma_{rr}^*|$ đạt được tại $r = a$, nên bất đẳng thức trên thỏa mãn khi

$$p \frac{a^3}{b^3 - a^3} \leq \frac{4a^3}{3b^3} \sigma_s,$$

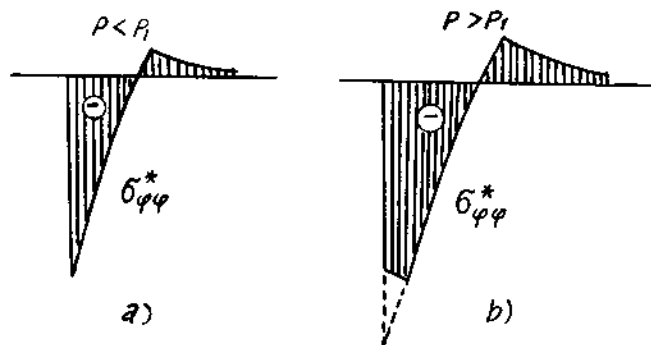
hay là

$$p \leq \frac{4}{3} \left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) \sigma_s \equiv p_1. \quad (6.33)$$

Với điều kiện này khoảng thay đổi của cường độ ứng suất (theo nghiệm bài toán đàn hồi) không có chỗ nào trong cầu vượt quá giới hạn chảy σ_s .

Ngoài ra, điều kiện cần là không vượt quá tải giới hạn $p_* = 2\sigma_s \ln \frac{b}{a}$, hay là $p_1 < p_*$. Dễ dàng thấy rằng, biến dạng dẻo thứ cấp có thể xuất hiện khi cắt tải chỉ với cầu khá dày (với $\frac{b}{a} > 1,7$).

Nếu điều kiện (6.33) được thỏa mãn, thì khi đặt tải lại trong cầu sẽ chỉ có biến dạng đàn hồi, do trường ứng suất dư đã xuất hiện trước đó trong cầu có dấu ngược lại (dấu hữu ích). Cầu tựa như bền hơn so với lần đặt tải đầu tiên. Ta nói kết cấu thích ứng được với tải chu trình nhờ xuất hiện trường ứng suất dư hữu ích. Bất đẳng thức (6.33) có thể xem như điều kiện thích ứng của cầu rỗng, bất đẳng thức này xác định *miền thích ứng* (miền thay đổi cho phép của tải trọng).



Hình 6.16

Nếu $p > p_1$, khi cắt tải tại miền nào đấy kề với biên trong $r = a$ (hình 6.16b) xuất hiện biến dạng dẻo có dấu ngược lại với dấu của biến dạng dẻo khi đặt tải. Nếu bây giờ lại đặt tải vào cầu rỗng với cùng áp suất $p > p_1$,

trong miền này sẽ xuất hiện biến dạng dẻo có dấu ban đầu. Sau một số không lớn các chu kỳ đặt tải tương tự như vậy, tại miền này xuất hiện phá hủy do mỏi dẻo. Do đó điều kiện an toàn đòi hỏi tải trọng không được vượt quá miền thích ứng.

Thí dụ 6.8. Ống dày dưới tác dụng của áp suất trong p (xem mục 4.6 chương 4). Giá trị p_s của áp suất trong, mà với nó trong ống xuất hiện biến dạng dẻo tại biên trong $r = a$ được xác định theo công thức (4.63)

$$p_s = \tau_s \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Áp suất giới hạn để ống trở thành dẻo hoàn toàn xác định theo hệ thức

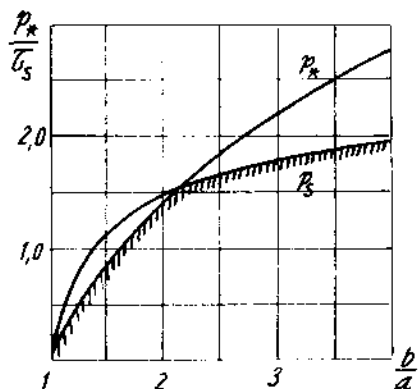
$$p_* = 2\tau_s \ln \frac{b}{a}.$$

Do vậy nếu ta đặt tải p (với $p_s < p < p_*$) vào ống rồi cắt tải, trong ống sẽ xuất hiện ứng suất dư (xem 4.6.1). Cắt tải hoàn toàn đàn hồi, nếu cường độ của ứng suất dư tại vùng nguy hiểm nhất (biên trong) nhỏ hơn giới hạn chảy của vật liệu $\sigma_u^* \leq \sigma_s$. Nếu cường độ ứng suất dư bằng giới hạn chảy, thì khi đặt tải lặp lại để có thể xuất hiện lại biến dạng dẻo, đầu tiên ta phải đặt áp suất p_s , điều này dẫn đến tại các điểm thuộc biên trong cường độ ứng suất giảm đến không, sau đó cho tăng áp suất đến giá trị $2p_s$, lúc đó cường độ ứng suất tại biên trong bằng giới hạn chảy và tại đây xuất hiện biến dạng dẻo.

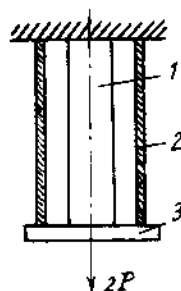
Do vậy với đặt tải lặp lại biến dạng dẻo sẽ không xuất hiện nếu áp suất nhỏ hơn $2p_s$ và để cho ống chưa mất khả năng chịu lực áp suất phải nhỏ hơn áp suất giới hạn.

Trên hình 6.17 biểu diễn đồ thị của các đại lượng $2\sqrt{3}\frac{p_s}{\sigma_s}$ và $\sqrt{3}\frac{p_*}{\sigma_s}$ phụ thuộc vào tỉ số $\frac{b}{a}$. Giao điểm của hai đồ thị này tại $\frac{b}{a} = 2,22$.

Ta thấy với $\frac{b}{a} < 2,22$, $p_* < 2p_s$ và với $p < p_*$ quá trình cắt tải lần đầu và mọi quá trình đặt tải - cắt tải tiếp sau đều không gây ra biến dạng dẻo. Với $\frac{b}{a} > 2,22$, $p_* > 2p_s$ thì ngay quá trình cắt tải lần đầu đã có thể xuất hiện biến dạng dẻo. Nếu $p < 2p_s$ quá trình cắt tải tiếp sau không dẫn đến biến dạng dẻo. Miền áp suất ứng với chúng trong ống không xuất hiện biến dạng dẻo trong lần thứ hai và các lần tiếp sau của quá trình đặt tải - cắt tải được giới hạn bởi đường bị gạch trong hình 6.17.



Hình 6.17



Hình 6.18

Thí dụ 6.9. Kết cấu gồm thanh tròn và ống gắn với nhau bởi phiến cứng, chịu tác dụng của lực $2P$ (hình 6.18).

Giả thiết tiết diện thanh và ống như nhau và bằng F . Nhiệt độ trong thanh không đổi, còn nhiệt độ của ống thay đổi chu kỳ từ 0° đến T° ($0 \rightarrow T \rightarrow 0 \rightarrow T \rightarrow \dots$). Mô đun đàn hồi xem như không đổi, còn giới hạn chảy bằng σ_{s0} khi 0° và bằng σ_{sT} khi T° ; α là hệ số nở nhiệt. Đặt vào ký hiệu

$$p = \frac{P}{F} \quad \text{và} \quad q = \frac{E\alpha T}{2}.$$

Theo điều kiện cân bằng ta có

$$\sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} = 2p,$$

trong đó $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_1^{(2)}$ là ứng suất tương ứng trong thanh và trong ống. Tùy thuộc vào hệ thức giữa p và q và giới hạn chảy σ_{s0} , σ_{sT} kết cấu sẽ làm việc ở trạng thái này hoặc trạng thái khác.

a) **Trạng thái đàn hồi.** Ứng suất trong thanh và trong ống khi đốt nóng bằng $\sigma_1^{(1)} = p + q$, $\sigma_1^{(2)} = p - q$. Để không xuất hiện biến dạng dẻo ta phải có

$$p + q < \sigma_{s0}, \quad p - q > -\sigma_{sT}.$$

b) **Trạng thái thích ứng.** Thanh luôn luôn ở trạng thái đàn hồi, còn ống chịu biến dạng dẻo khi đốt nóng. Khi đó với nhiệt độ T° ứng suất trong ống

bằng $\sigma_1^{(2)*} = -\sigma_{sT}$, còn ứng suất trong thanh phải không đạt giới hạn chảy tức là

$$\sigma_1^{(1)*} = 2p + \sigma_{sT} < \sigma_{so} \quad (6.34)$$

Sau khi làm nguội ta có $\sigma_1^{(2)**} = -\sigma_{sT} + q$ và $\sigma_1^{(1)**} = 2p + \sigma_{sT} - q$. Để thỏa mãn điều kiện thích ứng thì các ứng suất này không thể vượt giới hạn chảy σ_{so} , tức là

$$-\sigma_{sT} + q < \sigma_{so}, \quad |2p + \sigma_{sT} - q| < \sigma_{so} \quad (6.35)$$

Các bất đẳng thức (6.34), (6.35) biểu thị điều kiện thích ứng của kết cấu đã cho.

c) **Trạng thái biến dạng tăng liên tục.** Giả sử tại mỗi chu kỳ thanh chịu biến dạng dẻo khi đặt tải, còn ống có biến dạng dẻo khi làm nguội. Dễ dàng thấy rằng, thanh “chảy dẻo” khi tiếp tục dẫn nở nhiệt ống (tức là thanh tích lũy biến dạng dẻo). Khi làm nguội, ống “chảy dẻo” với ứng suất σ_{so} và giữ nguyên chiều dài do chiều dài thanh không thay đổi. Bức tranh này lặp lại với mỗi chu kỳ và biến dạng dẻo chung của hệ tăng lên.

Khi đốt nóng ứng suất trong thanh bằng σ_{so} , còn trong ống bằng $2p - \sigma_{so}$, trong đó

$$|2p - \sigma_{so}| < \sigma_{sT} \quad (6.36)$$

Khi làm nguội ứng suất trong ống bằng σ_{sT} , còn trong thanh bằng $2p - \sigma_{sT}$. Ta xem với điều kiện nào sẽ thực hiện được chế độ đó. Với tải đàn hồi (làm nguội) ứng suất trong ống bằng $2p - \sigma_{so} + q$, đại lượng này phải không nhỏ hơn σ_{so} , khi đó

$$q > 2\sigma_{so} - 2p. \quad (6.37)$$

Biến dạng chung của hệ với mỗi chu kỳ sẽ tăng lên một lượng bằng

$$\varepsilon = \alpha T + \frac{4p}{E} - \frac{2\sigma_{so}}{E}.$$

Do đó nếu số chu kỳ tăng lên, biến dạng có thể đạt giá trị lớn không cho phép.

Qua các thí dụ trên ta thấy, để xác định được điều kiện thích ứng của kết cấu một cách chặt chẽ ta phải phân tích trạng thái cân bằng đàn dẻo của kết cấu. Nhưng việc làm này chỉ có thể thực hiện trong một số bài toán đơn giản.

Các định lý về thích ứng (định lý tĩnh của Melan và định lý động của Koiter [61]) cho phép khắc phục khó khăn nêu ra, xác định được cận dưới

và cận trên của miền thích ứng. Với việc sử dụng định lý này ta không cần phân tích trạng thái đàn dẻo, mà chỉ cần sử dụng nghiệm của bài toán đàn hồi tương ứng.

Các nghiên cứu này được trình bày trong nhiều tài liệu chẳng hạn [4, 23, 65, 70, ...].

Đối với các kết cấu thực điều kiện thích ứng phụ thuộc vào sự tăng giới hạn đàn hồi khi có biến dạng dẻo (tính tái bền) và giảm giới hạn này khi đặt tải theo hướng ngược lại (hiệu ứng Bauschinger). Gần đây đã có những kết quả nghiên cứu bước đầu về điều kiện thích ứng có tính đến các yếu tố này.

CHƯƠNG 7

Ổn định cân bằng ngoài giới hạn đàn hồi

Trong “Lý thuyết đàn hồi” chúng ta đã xét các khái niệm cơ bản về ổn định của hệ đàn hồi [38, 76], nhưng trong nhiều kết cấu công trình hiện tượng mất ổn định thường xảy ra ngoài giới hạn đàn hồi. Những tính chất không đàn hồi (chẳng hạn dẻo, từ biến...) đã ảnh hưởng đáng kể đến ổn định cân bằng của vật thể. Các tính chất đó làm giảm khả năng đối kháng của vật thể với *sự võng*.

Trong thực hành người ta dùng các công thức nhận được từ thực nghiệm về ổn định của thanh bị nén, còn về mặt lý thuyết đã bắt đầu phát triển một số phương pháp tính ổn định của kết cấu làm việc ngoài giới hạn đàn hồi.

Hệ biến dạng đàn dẻo không phải là hệ bảo toàn, vì vậy nghiên cứu ổn định ngoài giới hạn đàn hồi phải xây dựng trên tiêu chuẩn động, tức là phân tích chuyển động của hệ ở lân cận vị trí cân bằng khi hệ chịu một kích động nào đấy. Nhưng sự phân tích như vậy gặp phải khó khăn rất lớn, một mặt vì trong lý thuyết dẻo chưa có một lý thuyết hoàn chỉnh, mặt khác ngay cả khi sử dụng các lý thuyết đơn giản đã dẫn đến khó khăn lớn về mặt toán học.

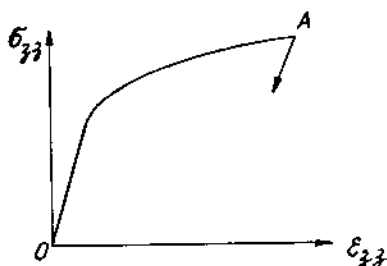
Trong tự nhiên trường hợp đàn hồi, người ta thường xuất phát từ tiêu chuẩn tĩnh, nhưng kết quả không được đảm bảo về mặt cơ sở lý luận và không đủ để xét ổn định ngoài giới hạn đàn hồi.

7.1 Ổn định của thanh bị nén

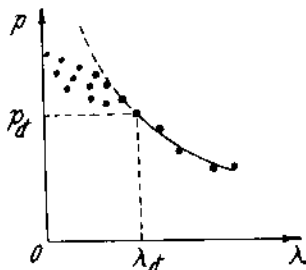
Xét thanh có tiết diện không đổi và đối xứng dưới tác dụng của lực nén P đặt tại trọng tâm của tiết diện. Chọn z hướng theo trục thanh, x và y là trục đối xứng của tiết diện.

Giả sử thanh bị nén ngoài giới hạn đàn hồi, chẳng hạn đến điểm A trên đường cong biến dạng $\sigma_{zz} \sim \varepsilon_{zz}$. Công thức tính *lực tới hạn* theo Euler không sử dụng được nữa.

Trong thời gian gần đây người ta phát triển phương pháp dựa trên kết quả thực nghiệm.



Hình 7.1



Hình 7.2

Trên đồ thị giữa p (tham số tải) và λ (tham số độ uốn) ta thấy trong miền đàn hồi các điểm thực nghiệm nằm sát đường hypecbôn Euler, còn miền đàn dẻo chúng khá phân tán. Điều này có thể giải thích ở chỗ lực tới hạn thay đổi tùy thuộc vào đường cong biến dạng khi nén, ngoài ra các hiện tượng như đặt tải lệch tâm, có độ võng ban đầu, ứng suất dư... cũng ảnh hưởng khá nhiều so với trường hợp đàn hồi.

Vì vậy có nhiều tác giả kiến nghị các công thức để tính ổn định của thanh bị nén.

a) Công thức tuyến tính

$$p = a - b\lambda,$$

a, b - hằng số của từng vật liệu. Khi xác định các hằng số này cần cho thỏa mãn điều kiện với $\lambda = \lambda_d$ thì công thức trên cho giá trị như công thức Euler. Mặt khác yêu cầu khi $\lambda \rightarrow 0$ thì lực tới hạn trùng với lực giới hạn khi nén.

b) Công thức dạng hypecbôn

$$p = \frac{p_0}{1 + \alpha\lambda^2}.$$

c) Công thức dạng parabol

$$p = \alpha - \beta\lambda^2,$$

hệ số α, β xác định sao cho parabol chuyển một cách liên tục sang hypecbôn Euler, có tại $\lambda = \lambda_d$ tiếp tuyến chung.

7.1. ỔN ĐỊNH CỦA THANH BỊ NÉN

Bây giờ ta chuyển sang xét về mặt lý thuyết ổn định của thanh ngoài giới hạn đàn hồi. Giả sử lực nén đạt giá trị vượt giá trị lực giới hạn (điểm A) và với lực đó xảy ra sự võng thanh, trong quá trình này lực giữ giá trị không đổi. Cần tìm công thức xác định lực tới hạn đó.

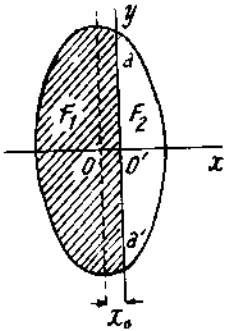
7.1.1 Lực tới hạn theo môđun dẫn xuất

Engesser đã kiến nghị một cách phân tích đơn giản tính đến tính chất dẻo. Coi đường cong biến dạng ngoài giới hạn đàn hồi như đường biến dạng đàn hồi phi tuyến, tác giả xét bài toán ổn định ngoài giới hạn đàn hồi như bài toán ổn định của thanh đàn hồi phi tuyến. Khi đó liên hệ giữa gia số ứng suất và gia số biến dạng có dạng

$$\delta\sigma_{zz} = E' \delta\epsilon_{zz}, \quad (7.1)$$

trong đó $E' = \left(\frac{d\sigma_{zz}}{d\epsilon_{zz}} \right)_A$ là môđun đàn hồi địa phương (tại điểm A) hay còn gọi là *môđun tiếp tuyến*. Tương tự cách làm như trong đàn hồi, chúng ta xác định lực tới hạn P'_{th} . Lực này có thể nhận được bằng cách thay trong công thức Euler môđun đàn hồi E bằng môđun tiếp tuyến E' :

$$P'_{th} = \frac{\pi^2 E' J}{\ell^2},$$



Hình 7.3

P'_{th} gọi là *lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến*. Nhưng Iashinsky chỉ ra rằng, khi thanh bị võng một phần tiết diện tiếp tục bị nén, tại đó tồn tại hệ thức (7.1), phần còn lại xảy ra cắt tải theo định luật Hooke. Vì vậy cần bổ sung nghiệm của Engesser. Gia số ứng suất và cùng nhỏ $\delta\sigma_{zz}$ xác định như sau

$$\delta\sigma_{zz} = \begin{cases} E' \delta\epsilon_{zz} & \text{trong miền dặt tải } F_1 (\delta\epsilon_{zz} < 0), \\ E \delta\epsilon_{zz} & \text{trong miền cắt tải } F_2 (\delta\epsilon_{zz} > 0). \end{cases}$$

Dọc đường aa' $\delta\epsilon_{zz} = 0$, đường aa' gọi là *đường phân chia*, và tính giá trị của x từ đường đó

$$\delta\epsilon_{zz} = -\kappa x.$$

Theo điều kiện sự vòng của thanh xảy ra với giá trị lực dọc trục không đổi, nên

$$\delta P = \iint_S \delta \sigma_{zz} dx dy = 0,$$

suy ra

$$S_1 E' - S_2 E = 0,$$

trong đó S_1, S_2 mômen tĩnh của tiết diện F_1, F_2 đối với đường phân chia. Phương trình này xác định vị trí x_0 của đường phân chia, nó phụ thuộc vào dạng của tiết diện và tỉ số E'/E .

Mômen của lực trong đối với đường phân chia

$$\delta M_y = \iint_S \delta \sigma_{zz} x dx dy = -E_k J \varkappa,$$

trong đó

$$E_k = \frac{E' J_1 + E J_2}{J},$$

J_1, J_2 là mômen quán tính của F_1, F_2 đối với đường phân chia. Đại lượng E_k gọi là *môđun dẫn xuất* hay môđun Engesser-Karman. Có thể thấy rằng

$$E' \leq E_k \leq E.$$

Tương tự như trên, lực tới hạn xác định bằng công thức

$$P_{th}'' = \frac{\pi^2 E_k J}{\ell^2},$$

hay là

$$\lambda p = \pi^2 \frac{E_k}{E}. \quad (7.2)$$

Thí dụ 7.1. Thanh có tiết diện chữ nhật cạnh b và h . Gọi mh (với $m < 1$) là chiều rộng của F_1 , Khi đó

$$S_1 = \frac{1}{2} m^2 h^2, \quad S_2 = \frac{1}{2} (1 - m^2) h^2.$$

Phương trình xác định vị trí đường phân chia cho ta

$$m^2 E' - (1 - m^2) E = 0,$$

suy ra

$$m = \frac{1}{1 + \sqrt{E'/E}}.$$

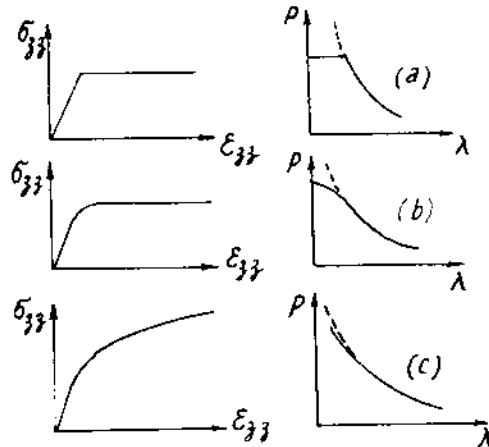
Ta có

$$J_1 = \frac{bm^3 h^3}{3}, \quad J_2 = \frac{b(1 - m^3)h^3}{3}, \quad J = \frac{bh^3}{12}$$

vậy môđun dẫn xuất có giá trị:

$$E_k = \frac{4EE'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}.$$

Biên độ ổn định phụ thuộc vào đường cong biến dạng. Đối với vật liệu dẻo lý tưởng $E_k = 0$, tức là khi tiến tới giới hạn chảy dẻo, thì thanh mất ổn định (hình 7.4(a)).



Hình 7.4

Nếu chuyển một cách liên tục từ đàn hồi tới tiết diện chảy thì biên ổn định có dạng hình 7.4(b). Nếu vật liệu tái bền thì biên ổn định có dạng như hình 7.4(c). Nói chung biên ổn định gồm hai phần: trước giới hạn đàn hồi biên ổn định biểu thị bởi phương trình Euler, tiếp đó biểu thị bởi phương trình (7.2). Đường chấm trong hình vẽ là đường kéo dài của hypecbôn Euler.

7.1.2 Lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến

Kết quả của phương pháp xét ổn định của thanh nêu trên được xác minh bằng thực nghiệm của Karman. Nhưng do yêu cầu của ngành chế tạo máy bay người ta tiến hành nghiên cứu thực nghiệm về nén thanh bằng nhôm hợp chất. Kết quả nghiên cứu cho ta thấy giá trị lực tới hạn gần với lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến P'_{th} hơn là lực tới hạn theo môđun dẫn xuất P''_{th} . Hơn nữa, thực nghiệm chỉ ra rằng sự uốn xuất hiện trước khi đạt giá trị P''_{th} và không kéo theo sự cất tãi.

Trong công trình của Engesser và Karman vấn đề ổn định được xét trên cơ sở tiêu chuẩn ổn định tĩnh tương tự như trong lý thuyết đàn hồi. Trước thời điểm mất ổn định thanh vẫn thẳng, trong đó chuyển tiếp từ trạng thái thanh thẳng đến trạng thái bị vòng xảy ra với giá trị lực nén *không đổi*, tức là $\delta P = 0$.

Shanley [78] xét trường hợp thanh kép gồm hai thanh nối với nhau bởi bản lề đàn dẻo nhỏ, trong đó bỏ qua những điều ràng buộc trên. Như thế có nghĩa là tìm tải tới hạn, sao cho thanh có thể cong với điều kiện *lực nén tăng* ($\delta P > 0$) và tại mọi điểm trên tiết diện không xảy ra cất tãi. Lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến P'_{th} đáp ứng yêu cầu đó.

Katchanov xét vấn đề ổn định dựa trên kết quả của Engesser-Karman; cho giá trị δP tùy ý. Khi đó vị trí của đường phân chia xác định bởi hệ thức

$$S_1 E' - S_2 E = -\frac{\delta P}{\kappa}.$$

Mô men uốn của ứng suất thêm có giá trị $-E_* J \kappa$, trong đó

$$E_* = \frac{E' J_1 + E J_2}{J},$$

kết quả phân tích ở đây khác trước là vị trí của đường phân chia không cố định; E_* là hàm của hình dáng tiết diện, của tính chất vật liệu và tỷ số $\delta P/\kappa$ trong đó

$$E' \leq E_* \leq E.$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi toàn bộ tiết diện chịu tải ($E_* = E'$) hoặc cất tãi ($E_* = E$). Phương trình cân bằng của thanh bị uốn có dạng

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{P}{E_* J} u = 0,$$

còn điều kiện biên vẫn như trước. Phương trình này là phương trình Euler của bài toán biến phân

$$P = \min_0^{\ell} \frac{\int_0^{\ell} J \left(\int E_* \kappa d\kappa \right) dz}{\int_0^{\ell} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz}.$$

Ta thấy rằng công biến dạng uốn của thanh trên một đơn vị dài $\int E_* J \kappa d\kappa$ có giá trị cực tiểu khi $E_* = E$. Trong công thức trên từ số biểu thị công biến dạng uốn của toàn bộ thanh. Về mặt hình thức từ nguyên lý năng lượng nếu thay biểu thức của thế đàn hồi bằng công biến dạng uốn ta sẽ nhận được hệ thức đó.

Vì δP tùy ý và E_* phụ thuộc vào δP , nên ta có thể chọn δP sao cho xảy ra sự vòng thanh với giá trị lực nhỏ nhất. Khi đó $E_* = E'$ và lực tới hạn nhỏ nhất là lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến.

Nếu lực ngoài cố định ($\delta P = 0$) nghiệm bài toán đưa về nghiệm của Engesser-Karman.

Tóm lại, lực ngoài nhỏ nhất để có thể làm vòng thanh khi lực ngoài tăng ($\delta P > 0$) và tại mọi phần tử thanh không có cắt tải có giá trị bằng *lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến*.

$$P'_{th} = \frac{\pi^2 E' J}{\ell^2},$$

hay là

$$\lambda p = \pi^2 \frac{E'}{E}.$$

Trong thực tế mất ổn định xảy ra trong điều kiện lực ngoài thay đổi. Như ta thấy điều này chỉ ảnh hưởng tới giá trị lực tới hạn tại miền dẹt, trong miền đàn hồi không có ảnh hưởng gì, bởi vì giá trị δP không ảnh hưởng đến giá trị δM_y . Vì vậy trong trường hợp đàn hồi phương pháp Kachanov cũng cho giá trị lực tới hạn Euler.

Nghiên cứu uốn thanh bị nén ngoài giới hạn đàn hồi phụ thuộc vào lực nén dẫn đến bài toán khá phức tạp về mặt toán học. Kết quả định tính của Shanley cho ta thấy: sự vòng của thanh bắt đầu khi lực ngoài đạt giá trị lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến P'_{th} . Nhưng thanh chưa mất khả năng chịu lực, thêm gia số lực ngoài thanh bị uốn từ từ. Độ vòng uốn tăng đột biến

khi tiến đến lực tới hạn theo môđun dẫn xuất P''_{th} . Với lực ngoài lớn hơn lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến P'_{th} sự uốn kéo theo cắt tải và xuất hiện biến dạng dư. Đôi khi người ta gọi lực tới hạn theo môđun tiếp tuyến là *lực tới hạn dưới*, lực tới hạn theo môđun dẫn xuất là *lực tới hạn trên*. Lực tới hạn dưới P'_{th} an toàn hơn, nên có nhiều ý nghĩa thực tiễn hơn. Tuy nhiên, sự khác biệt giữa hai lực này cũng không lớn lắm.

7.2 Ổn định của bản

Bài toán nghiên cứu về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi đã được nhiều người quan tâm. Một số tác giả dựa trên lý thuyết biến dạng đàn dẻo với giả thiết mất ổn định xảy ra với lực ngoài không đổi và khi bản bị vòng kéo theo sự xuất hiện miền cắt tải. Một số khác dựa trên lý thuyết chảy tính toán giới hạn dưới của lực tới hạn tương ứng với sự vòng trong điều kiện đặt tải tiếp tục (không có cắt tải). Ở đây trình bày một cách đơn giản cách đặt bài toán về ổn định của bản và một vài thí dụ dựa trên hai lý thuyết như đã nêu trên.

7.2.1 Cách đặt bài toán về ổn định của bản

Giả sử dưới tác dụng của lực ngoài bản ở vị trí cân bằng. Bản biến dạng đàn dẻo trong mặt phẳng (x, y) của nó. Trạng thái cân bằng hoàn toàn xác định theo phương pháp tính bản ngoài giới hạn đàn hồi, có nghĩa là chúng ta biết ứng suất σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} và biến dạng ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} . Các đại lượng này thỏa mãn những hệ thức cơ bản của lý thuyết dẻo (thuyết chảy hoặc thuyết biến dạng, tùy thuộc vào việc ta chọn thuyết nào làm cơ sở tính toán).

Hiện tượng ổn định được thể hiện như sau: với giá trị nào đấy của lực ngoài, đồng thời với trạng thái cân bằng xuất phát sẽ tồn tại những trạng thái cân bằng khác.

Khi bản bị vòng, tức là bản bắt đầu có biến dạng uốn, biến dạng nhận thêm gia số vô cùng nhỏ $\delta\varepsilon_{xx}$, $\delta\varepsilon_{yy}$, $\delta\varepsilon_{xy}$. Theo lý thuyết uốn bản của Kirchhoff gia số biến dạng là hàm tuyến tính của khoảng cách z với mặt giữa (xem 5.5 chương 5):

$$\delta\varepsilon_{xx} = e_1 - z\kappa_1,$$

$$\delta\varepsilon_{yy} = e_2 - z\kappa_2,$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = e_{12} - z\kappa_{12},$$

trong đó e_1 , e_2 , e_{12} là gia số biến dạng vô cùng nhỏ của mặt giữa, còn κ_1 , κ_2 ,

$\varkappa_{12}$ là biến thiên vô cùng nhỏ của độ cong và độ xoắn mặt giữa:

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varkappa_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Hàm u, v, w là hàm của tọa độ x, y ; w là độ võng của bản khi bị uốn.

Trong ứng với gia số biến dạng là gia số ứng suất $\delta\sigma_{xx}, \delta\sigma_{yy}, \delta\tau_{xy}$; các đại lượng này xác định qua gia số biến dạng nhờ hệ thức của lý thuyết dẻo.

Bây giờ có thể tính dễ dàng gia số của lực dẫn

$$\delta N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{xx} dz, \quad \delta N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{yy} dz, \quad \delta N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\tau_{xy} dz$$

và gia số của mômen:

$$\delta M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{xx} z dz, \quad \delta M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\sigma_{yy} z dz, \quad \delta M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \delta\tau_{xy} z dz.$$

Các đại lượng trên thỏa mãn các phương trình cân bằng

$$\frac{\partial \delta N_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{12}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \delta N_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial y} = 0$$
(7.3)

và

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial y^2} + N_1 \varkappa_1 + N_2 \varkappa_2 + 2 N_{12} \varkappa_{12} = 0. \quad (7.4)$$

Điều kiện tương thích trong trường hợp này có dạng

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y}. \quad (7.5)$$

Để giải quyết bài toán cần biết điều kiện biên:

a) bản ngàm chặt, chẳng hạn dọc theo biên $x = a$, thì:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{với } x = a;$$

b) bản có cạnh $x = a$ tựa tự do

$$w = 0, \quad \delta M_1 = 0 \quad \text{với } x = a;$$

c) bản có cạnh tự do, chẳng hạn cạnh $x = a$:

$$\delta M_1 = 0, \quad \delta Q_1 + \frac{\partial \delta M_{12}}{\partial y} = 0,$$

trong đó δQ_1 là lực cắt tại cạnh thẳng góc với trục x .

Kết hợp với tất cả các hệ thức trình bày trên cần có hệ thức giữa ứng suất và biến dạng tùy thuộc vào từng lý thuyết dẻo. Vì vậy chúng ta xét cụ thể hơn cách đặt bài toán theo từng lý thuyết dẻo.

7.2.2 Cách đặt bài toán ổn định theo lý thuyết chảy [59]

1. Phương pháp trực tiếp

Để cho đơn giản giả thiết rằng trước khi bị võng trong bản tồn tại trạng thái ứng suất nén thuần nhất theo hai hướng trục giao

$$\sigma_{xx} = -p, \quad \sigma_{yy} = -q, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Theo lý thuyết chảy cho vật liệu tái bền Prager (1.32) gia số ứng suất (khi bản bị võng) liên hệ với gia số biến dạng dưới dạng:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\delta \sigma_{xx} - \nu \delta \sigma_{yy}) - \frac{1}{3} F(T) \delta T (2p - q), \\ \delta \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\delta \sigma_{yy} - \nu \delta \sigma_{xx}) - \frac{1}{3} F(T) \delta T (2q - p), \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \delta \tau_{xy}, \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{3} (p^2 - pq - q^2), \\ \delta T &= -\frac{1}{6T} [(2p - q) \delta \sigma_{xx} + (2q - p) \delta \sigma_{yy}]. \end{aligned}$$

Biểu thức của δT được xác định xuất phát từ $T^2 = \frac{1}{3} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy})$, do đó

$$\begin{aligned} 2T \delta T &= \frac{1}{3} [(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \delta \sigma_{xx} + (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \delta \sigma_{yy}] \\ &= -\frac{1}{3} [(2p - q) \delta \sigma_{xx} + (2q - p) \delta \sigma_{yy}]. \end{aligned}$$

Đặt giá trị δT vào các hệ thức của gia số biến dạng ta được

$$\begin{aligned} E\delta\varepsilon_{xx} &= A_{xx}\delta\sigma_{xx} + A_{xy}\delta\sigma_{yy}, \\ E\delta\varepsilon_{yy} &= A_{xy}\delta\sigma_{xx} + A_{yy}\delta\sigma_{yy}, \\ 2G\delta\varepsilon_{xy} &= \delta\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

trong đó

$$\begin{aligned} A_{xx} &= 1 - \frac{EF(T)}{18T}(2p - q)^2, \\ A_{xy} &= -\nu - \frac{EF(T)}{18T}(2p - q)(2q - p), \\ A_{yy} &= 1 - \frac{EF(T)}{18T}(2q - p)^2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Theo công thức tính $F(T)$ trong 1.11 chương 1

$$F(T) = \frac{\psi'(T)}{2T^2} = \frac{1}{2T^2} \frac{dW_p(T)}{dT}.$$

Trong đó $W_p(T)$ là công biến dạng dẻo, nó là hàm đặc trưng cho từng vật liệu và không phụ thuộc vào dạng của trạng thái ứng suất. Vì vậy có thể xác định hàm này từ đường biến dạng trong trường hợp đơn giản. Giả sử đường biến dạng trong trường hợp đơn giản biểu thị bằng phương trình $\sigma_1 = \Phi(e_1)$. Khi đó công biến dạng dẻo

$$\begin{aligned} dW_p &= \sigma_1 de_1^p = \sigma_1 de_1 - \frac{1}{E} \sigma_1 d\sigma_1 = \\ &= \sigma_1 \frac{d}{d\sigma_1} [\Phi^{-1}(\sigma_1)] d\sigma_1 - \frac{1}{E} \sigma_1 d\sigma_1 \end{aligned}$$

từ đây suy ra

$$\frac{1}{\sigma_1} \frac{dW_p}{d\sigma_1} - \frac{1}{3T} \frac{dW_p}{dT} = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E}$$

ở đây $E' = 1 / \frac{d}{d\sigma_1} [\Phi^{-1}(\sigma_1)]$ là môđun tiếp tuyến. Nhờ biểu thức này của $\frac{dW_p}{dT}$ ta xác định $F(T)$, sau đó thay thế vào (7.7), kết quả nhận được:

$$\begin{aligned} A_{xx} &= 1 - \alpha(2p - q)^2, \\ A_{xy} &= -\nu - \alpha(2p - q)(2q - p), \\ A_{yy} &= 1 - \alpha(2q - p)^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$\alpha = -\frac{1}{12T^2} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right).$$

Nếu vật liệu đàn hồi thì $\alpha = 0$, vật liệu dẻo lý tưởng $\alpha \rightarrow -\infty$. Bây giờ giải ngược lại hệ thức (7.6)

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{xx} &= \frac{E}{B} (A_{yy}\delta\varepsilon_{xx} - A_{xy}\delta\varepsilon_{yy}), \\ \delta\sigma_{yy} &= \frac{E}{B} (-A_{xy}\delta\varepsilon_{xx} + A_{xx}\delta\varepsilon_{yy}), \\ \delta\tau_{xy} &= 2G\delta\varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

trong đó

$$B = (1 - \nu^2)B_1, \quad B_1 = 1 + \frac{5 - 4\nu}{1 - \nu^2} \alpha \left(p^2 - \frac{8 - 10\nu}{5 - 4\nu} pq + q^2 \right).$$

Chúng ta đã giả thiết rằng bản bị võng trong điều kiện lực nén tăng và không có miền cắt tải, vì vậy hệ thức (7.8) đúng trong toàn bộ bản.

Nhờ các hệ thức (7.8) tính các gia số của mômen

$$\begin{aligned} \delta M_1 &= -\frac{D}{B_1} (A_{yy}\varkappa_1 - A_{xy}\varkappa_2), \\ \delta M_2 &= -\frac{D}{B_1} (-A_{xy}\varkappa_1 + A_{xx}\varkappa_2), \\ \delta M_{12} &= -D(1 - \nu)\varkappa_{12}. \end{aligned}$$

Ngoài ra

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = -ph, \quad N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = -qh, \quad N_{12} = 0,$$

trong đó $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ là độ cứng của bản đàn hồi, h là độ dày không đổi của bản.

Khi đó phương trình uốn bản (7.4) có dạng

$$\begin{aligned} A_{yy} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + \frac{hB_1}{D} \left(p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7.9)$$

kết hợp với điều kiện biên chúng ta có đủ phương trình để xác định độ võng. Do đó việc xác định tải tới hạn dẫn đến tìm giá trị riêng của bài toán.

2. Phương pháp năng lượng

Trong nhiều trường hợp xuất phát từ *phương trình năng lượng* có lợi hơn. Tương tự phương pháp của Timoshenko, có thể rút ra phương trình năng lượng bằng cách cân bằng công biến dạng uốn và công lực ngoài trên độ võng của bản bị võng.

Gọi ΔW là gia số công biến dạng uốn trên một đơn vị diện tích bản khi bị võng, ta có:

$$\begin{aligned}\Delta W &= D\overline{\Delta W} = - \int (\delta M_1 d\kappa_1 + \delta M_2 d\kappa_2 + \delta M_{12} d\kappa_{12}) = \\ &= \frac{D}{2B_1} [A_{yy}\kappa_1^2 + A_{xx}\kappa_2^2 - 4A_{xy}\kappa_1\kappa_2 + (1-\nu)B_1\kappa_{12}^2].\end{aligned}$$

Công biến dạng uốn của toàn bản

$$\Delta U = D\overline{\Delta U} = D \iint_S \overline{\Delta W} dx dy,$$

còn công của lực ngoài $h\overline{\Delta L}$ trên chuyển dịch khi bản bị võng sẽ bằng:

$$\Delta L = h\overline{\Delta L} = \frac{h}{2} \iint_S \left[p \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + q \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Vậy

$$D\overline{\Delta U} = h\overline{\Delta L}.$$

Giả sử ℓ là kích thước đặc trưng của bản, ta đưa vào độ uốn của bản xác định bằng công thức

$$\Omega^2 = \frac{\ell^2 E h}{D} = \frac{\ell^2}{h^2} 12(1-\nu^2).$$

Khi đó

$$\Omega^2 = \ell^2 E \min \frac{\overline{\Delta U}}{\overline{\Delta L}}. \quad (7.10)$$

Để giải bài toán này ta dùng phương pháp Ritz-Timoshenko, bằng cách đặt

$$w = \sum_{\alpha} a_{\alpha} f_{\alpha}(x, y),$$

trong đó a_α là các hằng số tùy ý, f_α là hệ hàm độc lập tuyến tính được chọn sao cho điều kiện biên thỏa mãn. Chúng ta sẽ nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất đối với các hằng số a_α ; cho định thức của hệ này bằng không ta tìm được phương trình để xác định tải tới hạn.

7.2.3 Cách đặt bài toán ổn định theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo [51, 68]

Giả thiết rằng vật liệu không nén được $\nu = 1/2$, tại mọi mặt phẳng song song với mặt giữa đều có trạng thái ứng suất phẳng. Khi đó, cường độ ứng suất và biến dạng

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2}, \\ e_u &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xy}^2}\end{aligned}$$

liên hệ với nhau bằng hệ thức (1.44):

$$\sigma_u = \Phi(e_u) = 3Ge_u[1 - \omega(e_u)].$$

Theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ của Ilyushin trong miền biến dạng chủ động, tức là đặt tải, ta có hệ thức (1.42)

$$\begin{aligned}S_x &= \sigma_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} = \frac{\sigma_u}{e_u}\varepsilon_{xx}, \\ S_y &= \sigma_{yy} - \frac{1}{2}\sigma_{xx} = \frac{\sigma_u}{e_u}\varepsilon_{yy}, \\ S_{xy} &= \tau_{xy} = \frac{2\sigma_u}{3e_u}\varepsilon_{xy}.\end{aligned}\tag{7.11}$$

Trong miền biến dạng bị động, tức là cắt tải, các hệ thức này có dạng

$$\begin{aligned}S_x &= \sigma_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} = E\varepsilon_{xx}, \\ S_y &= \sigma_{yy} - \frac{1}{2}\sigma_{xx} = E\varepsilon_{yy}, \\ S_{xy} &= \tau_{xy} = \frac{2}{3}E\varepsilon_{xy}.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Chú ý rằng $E = 2(1+\nu)G$ trong trường hợp vật liệu không nén được $E = 3G$.

1. Thiết lập chính xác bài toán về ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi trên cơ sở lý thuyết biến dạng

Giả sử dưới tác dụng của lực ngoài bản ở trạng thái cân bằng giữ nguyên dạng phẳng ban đầu, tương ứng với trạng thái ứng suất đã biết, trong đó $\sigma_u \geq \sigma_s$.

Nếu tiếp tục thay đổi lực ngoài, bản có thể bị võng. Để nghiên cứu ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi chúng ta giả thiết rằng bằng cách nào đấy bản hơi bị võng, mà lực ngoài và điều kiện biên không thay đổi. Cần xác định giữa σ_u và kích thước của bản liên hệ như thế nào đấy để bản hơi bị võng có thể ở trạng thái cân bằng. Gọi giá trị nhỏ nhất của những ứng suất này là ứng suất tới hạn.



Hình 7.5

Chuyển tiếp từ trạng thái phẳng sang trạng thái hơi võng gây ra nén tiếp miền này, đồng thời dãn miền kia của bản. Tại những phần tử bị dãn tiếp ta có quá trình đặt tải, cường độ σ_u , e_u tăng. Tại những phần tử bị dãn xảy ra cắt tải cường độ σ_u , e_u giảm. Độ dày của bản chia làm hai miền: tại một miền xảy ra đặt tải theo quy luật (7.11), tại miền kia - cắt tải theo quy luật (7.12). Theo điều kiện vừa nêu trên gia số ứng suất, biến dạng và cường độ phải triệt tiêu trên biên phân chia hai miền. Trong miền đặt tải ta có:

$$\begin{aligned}\delta S_x &= \delta \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{yy} = \frac{\sigma_u}{e_u} \delta \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx} \frac{d}{de_u} \left(\frac{\sigma_u}{e_u} \right) \delta e_u, \\ \delta S_y &= \delta \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{xx} = \frac{\sigma_u}{e_u} \delta \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy} \frac{d}{de_u} \left(\frac{\sigma_u}{e_u} \right) \delta e_u, \\ \delta S_{xy} &= \delta \tau_{xy} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} \delta \varepsilon_{xy} + \frac{2}{3} \varepsilon_{xy} \frac{d}{de_u} \left(\frac{\sigma_u}{e_u} \right) \delta e_u,\end{aligned}\tag{7.13}$$

cần kết hợp thêm điều kiện $\sigma_u = \Phi(e_u)$, trong đó

$$\frac{d}{de_u} \left(\frac{\sigma_u}{e_u} \right) = -\frac{1}{e_u} \left(\frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) \leq 0.$$

Trong miền cắt tải:

$$\begin{aligned}\delta S_x &= \delta \sigma_{xx} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{yy} = E \delta \varepsilon_{xx}, \\ \delta S_y &= \delta \sigma_{yy} - \frac{1}{2} \delta \sigma_{xx} = E \delta \varepsilon_{yy}, \\ \delta S_{xy} &= \delta \tau_{xy} = \frac{2}{3} E \delta \varepsilon_{xy}.\end{aligned}\tag{7.14}$$

Theo công thức (1.49) gia số công lực trong trên một đơn vị thể tích bản có dạng

$$\begin{aligned}\delta W &= \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} = \\ &= \sigma_u \delta e_u + \sigma \delta \theta = \sigma_u \delta e_u,\end{aligned}$$

vì vật liệu không nén được $\theta = 0$.

Đặt $\delta W = 0$ ta nhận được phương trình mặt phân chia miền biến dạng đàn hồi và miền biến dạng dẻo

$$\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} = 0.\tag{7.15}$$

Bây giờ đưa vào các đại lượng không thứ nguyên

$$\sigma_{xx}^* = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_u}, \quad \sigma_{yy}^* = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_u}, \quad \tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_u}, \quad S_x^* = \frac{S_x}{\sigma_u}, \quad S_y^* = \frac{S_y}{\sigma_u}$$

$$\kappa_1^* = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2^* = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\kappa_{12}^* = \frac{h}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad z^* = \frac{2}{h} z.$$

Đặt các biểu thức của $\delta \varepsilon_{xx}$, $\delta \varepsilon_{yy}$, $\delta \varepsilon_{xy}$ vào (7.15), chú ý ở đây $z = z_0$ (tọa độ mặt phân chia) và các biểu thức không thứ nguyên cho ta:

$$\varepsilon = z_0^* \kappa^*,$$

trong đó ký hiệu

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sigma_{xx}^* e_1 + \sigma_{yy}^* e_2 + 2\tau_{xy}^* e_{12}, \\ \kappa &= \sigma_{xx}^* \kappa_1 + \sigma_{yy}^* \kappa_2 + 2\tau_{xy}^* \kappa_{12}, \\ \kappa^* &= \frac{1}{2} \kappa h.\end{aligned}$$

Tiếp đến đặt các gia số biến dạng vào (7.13), (7.14) và viết các phương trình vừa nhận được qua các đại lượng không thứ nguyên với $z > z_0$:

$$\begin{aligned}\delta S_x &= \left(\frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) S_x^* \kappa^* (z^* - z_0^*) - \frac{\sigma_u}{e_u} (e_1 - \kappa_1^* z^*), \\ \delta S_y &= \left(\frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) S_y^* \kappa^* (z^* - z_0^*) - \frac{\sigma_u}{e_u} (e_2 - \kappa_2^* z^*), \\ \delta S_{xy} &= \left(\frac{\sigma_u}{e_u} - \frac{d\sigma_u}{de_u} \right) S_{xy}^* \kappa^* (z^* - z_0^*) - \frac{\sigma_u}{e_u} (e_{12} - \kappa_{12}^* z^*),\end{aligned}\quad (7.16)$$

với $z < z_0$:

$$\begin{aligned}\delta S_x &= E(e_1 - \kappa_1^* z^*), \\ \delta S_y &= E(e_2 - \kappa_2^* z^*), \\ \delta S_{xy} &= \frac{2}{3} E(e_{12} - \kappa_{12}^* z^*).\end{aligned}\quad (7.17)$$

Bây giờ tính các biểu thức của gia số lực dân và mômen theo ba trạng thái:

a) Trạng thái đàn hồi, theo công thức (7.17) có thể viết:

$$\begin{aligned}\frac{1}{Eh} \left(\delta N_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 \right) &= e_1, \quad \frac{1}{Eh} \left(\delta N_2 - \frac{1}{2} \delta N_1 \right) = e_2, \quad \frac{1}{Eh} \delta N_{12} = \frac{2}{3} e_{12}, \\ \frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -\kappa_1, \quad \frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) = -\kappa_2, \quad \frac{4}{3D} \delta M_{12} = -\frac{2}{3} \kappa_{12}.\end{aligned}$$

b) Trạng thái khi tồn tại hai miền: miền $z < z_0$ biến dạng đàn hồi, miền $z > z_0$ biến dạng dẻo. Tích phân các biểu thức gia số lực và mômen được tách làm hai: tích phân thứ nhất lấy từ $-h/2$ đến z_0 với hệ thức (7.17), tích phân thứ hai lấy từ z_0 đến $h/2$ với hệ thức (7.16) ta nhận được:

$$\begin{aligned}\frac{4}{Eh} \left(\delta N_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 \right) &= 2(2 - \omega + \omega z_0^*) e_1 + \omega(1 - z_0^{*2}) \kappa_1^* \\ &\quad + (\lambda - \omega) S_x^* (1 - z_0^*)^2 \kappa^*, \\ \frac{4}{Eh} \left(\delta N_2 - \frac{1}{2} \delta N_1 \right) &= 2(2 - \omega + \omega z_0^*) e_2 + \omega(1 - z_0^{*2}) \kappa_2^* \\ &\quad + (\lambda - \omega) S_y^* (1 - z_0^*)^2 \kappa^*, \\ \frac{12}{Eh} \delta N_{12} &= 4(2 - \omega + \omega z_0^*) e_{12} + 2\omega(1 - z_0^{*2}) \kappa_{12}^* \\ &\quad + 3(\lambda - \omega) S_{xy}^* (1 - z_0^*)^2 \kappa^*,\end{aligned}\quad (7.18)$$

trong đó

$$\omega = \omega(e_u) = 1 - \frac{1}{E} \frac{\sigma_u}{e_u}, \quad \lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_u}{de_u}.$$

Trong tự, ta nhận được các biểu thức của mômen:

$$\begin{aligned}
 \frac{16}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -2(2 - \omega + \omega z_0^{*3}) \varkappa_1 \\
 &\quad + (\lambda - \omega)(1 - z_0^*)^2(2 + z_0^*) S_x^* \varkappa - \frac{6\omega}{h}(1 - z_0^{*2}) e_1, \\
 \frac{16}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -2(2 - \omega + \omega z_0^{*3}) \varkappa_2 \\
 &\quad + (\lambda - \omega)(1 - z_0^*)^2(2 + z_0^*) S_y^* \varkappa - \frac{6\omega}{h}(1 - z_0^{*2}) e_2, \\
 \frac{16}{D} \delta M_{12} &= -4(2 - \omega + \omega z_0^{*3}) \varkappa_{12} \\
 &\quad + 3(\lambda - \omega)(1 - z_0^*)^2(2 + z_0^*) S_{xy}^* \varkappa - \frac{12\omega}{h}(1 - z_0^{*2}) e_{12}.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

c) Trạng thái đặt tải hoàn toàn (toàn miền biến dạng dẻo), theo công thức (7.16) có thể viết:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Eh} \left(\delta N_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 \right) &= (1 - \omega) e_1 - (\lambda - \omega) S_x^* \varepsilon, \\
 \frac{1}{Eh} \left(\delta N_2 - \frac{1}{2} \delta N_1 \right) &= (1 - \omega) e_2 - (\lambda - \omega) S_y^* \varepsilon, \\
 \frac{1}{Eh} \delta N_{12} &= \frac{2}{3}(1 - \omega) e_{12} - (\lambda - \omega) S_{xy}^* \varepsilon, \\
 \frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -(1 - \omega) \varkappa_1 + (\lambda - \omega) S_x^* \varkappa, \\
 \frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -(1 - \omega) \varkappa_2 + (\lambda - \omega) S_y^* \varkappa, \\
 \frac{4}{3D} \delta M_{12} &= -\frac{2}{3}(1 - \omega) \varkappa_{12} + (\lambda - \omega) S_{xy}^* \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Nếu trước khi mất ổn định biến dạng dẻo nhỏ hơn biến dạng đàn hồi, thì trong các hệ thức trên có thể bỏ qua đại lượng nhỏ bậc ω so với 1, các hệ thức (7.18), (7.19) có dạng:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Eh} \left(\delta N_1 - \frac{1}{2} \delta N_2 \right) &= e_1 + \frac{\lambda h}{2} S_x^* \varkappa \zeta^2, \\
 \frac{1}{Eh} \left(\delta N_2 - \frac{1}{2} \delta N_1 \right) &= e_2 + \frac{\lambda h}{2} S_y^* \varkappa \zeta^2, \\
 \frac{1}{Eh} \delta N_{12} &= \frac{2}{3} e_{12} + \frac{\lambda h}{2} S_{xy}^* \varkappa \zeta^2,
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -\varkappa_1 + \lambda S_x^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \varkappa, \\
\frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -\varkappa_2 + \lambda S_y^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \varkappa \\
\frac{4}{3D} \delta M_{12} &= -\frac{2}{3} \varkappa_{12} + \lambda S_{xy}^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \varkappa,
\end{aligned} \tag{7.21}$$

trong đó ký hiệu

$$\zeta = \frac{1 - z_0^*}{2} = \frac{h_p}{h}, \quad z_0^* = 1 - 2\zeta,$$

h_p là độ dày của miền biến dạng dẻo.

Lực dãn tại mặt phẳng giữa trước khi mất ổn định xác định nhờ công thức:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = h \sigma_u \sigma_{xx}^*, \\
N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = h \sigma_u \sigma_{yy}^*, \\
N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = h \sigma_u \tau_{xy}^*.
\end{aligned}$$

Tập hợp các phương trình (7.3), (7.4), (7.5) và các hệ thức (7.18), (7.19) kết hợp với các điều kiện biên cho ta hệ đầy đủ các phương trình để giải bài toán ổn định. Bài toán đưa về bốn phương trình vi phân với hàm chưa biết

$$\delta N_1, \delta N_2, \delta N_{12} \text{ và } w.$$

Giải bài toán ổn định theo cách đặt chính xác gặp nhiều khó khăn về mặt toán học. Bài toán sẽ đơn giản đi nhiều, khi các gia số lực dãn δN_1 , δN_2 , δN_{12} trong mặt giữa bằng không. Trên cơ sở đó Ilyushin xây dựng *nghiệm gần đúng* của bài toán ổn định.

2. Giải gần đúng bài toán về ổn định của bản

Phương pháp giải gần đúng bài toán về ổn định của bản do Tiomoshenko, Bleich và nhiều tác giả khác nghiên cứu.

Ilyushin kiến nghị phương pháp giải gần đúng dựa trên giả thuyết các gia số lực dãn δN_1 , δN_2 , δN_{12} bằng không tại mọi điểm. Giả thuyết này có cơ sở vì những lẽ sau đây:

i) Như sau ta thấy, giá trị lực tới hạn xác định với giả thuyết này gần với nghiệm chính xác.

ii) Kết quả phù hợp với thực nghiệm.

iii) Thỏa mãn điều kiện cơ bản của bài toán là gia số lực ngoài bằng không.

iv) Đối với biến dạng đàn hồi của bản nó thỏa mãn một cách chính xác.

Theo giả thuyết này từ hệ thức (7.20) suy ra

$$\begin{aligned} e_1 + \frac{\lambda}{h} S_x^* \kappa \left(\frac{1-2z_0}{2} \right)^2 &= 0, \\ e_2 + \frac{\lambda}{h} S_y^* \kappa \left(\frac{1-2z_0}{2} \right)^2 &= 0, \\ \frac{2}{3} e_{12} + \frac{\lambda}{h} S_{xy}^* \kappa \left(\frac{1-2z_0}{2} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Nhân phương trình đầu với σ_{xx} , phương trình hai với σ_{yy} và phương trình ba với $3\tau_{xy}$ rồi cộng lại ta được

$$\varepsilon = -\frac{\lambda}{h} \kappa \left(\frac{1-2z_0}{2} \right)^2.$$

Thế giá trị $\varepsilon = z_0^* \kappa^*$ vào đây và giải theo z_0 :

$$z_0 = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda}) - 1; \quad \zeta = \frac{1 - \sqrt{1-\lambda}}{\lambda}.$$

Từ đây ta đi đến kết luận mặt phân chia song song với mặt giữa, vị trí của nó xác định bởi tính chất của vật liệu $\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_u}{de_u}$. Nếu trước khi mất ổn định trạng thái ứng suất của bản thuần nhất, thì đại lượng ζ là hằng số, vì $\frac{d\sigma_u}{de_u}$ có giá trị như nhau tại mọi điểm của bản.

Làm một cách tổng quát hơn, cho

$$\delta N_1 = \delta N_2 = \delta N_{12} = 0,$$

trong các hệ thức (7.18), ta tìm được liên hệ giữa κ_n và e_n . Dem các giá trị này vào phương trình (7.19), kết quả cuối cùng sẽ là

$$\begin{aligned} \frac{\delta M_1}{D} &= -(1-\psi) \left(\kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \sigma_{xx}^* \kappa, \\ \frac{\delta M_2}{D} &= -(1-\psi) \left(\kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \sigma_{yy}^* \kappa, \\ \frac{\delta M_{12}}{D} &= -\frac{1}{2} (1-\psi) \kappa_{12} + \frac{3}{4} (1-\psi-k) \tau_{cy}^* \kappa, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3D} \left(\delta M_1 - \frac{1}{2} \delta M_2 \right) &= -\kappa_1 + \lambda S_r^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \kappa, \\
\frac{4}{3D} \left(\delta M_2 - \frac{1}{2} \delta M_1 \right) &= -\kappa_2 + \lambda S_y^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \kappa \\
\frac{4}{3D} \delta M_{12} &= -\frac{2}{3} \kappa_{12} + \lambda S_{xy}^* \zeta^2 (3 - 2\zeta) \kappa,
\end{aligned} \tag{7.21}$$

trong đó ký hiệu

$$\zeta = \frac{1 - z_0^*}{2} = \frac{h_p}{h}, \quad z_0^* = 1 - 2\zeta,$$

h_p là độ dày của miền biến dạng dẻo.

Lực dẫn tại mặt phẳng giữa trước khi mất ổn định xác định nhờ công thức:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = h \sigma_u \sigma_{xx}^*, \\
N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz = h \sigma_u \sigma_{yy}^*, \\
N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = h \sigma_u \tau_{xy}^*.
\end{aligned}$$

Tập hợp các phương trình (7.3), (7.4), (7.5) và các hệ thức (7.18), (7.19) kết hợp với các điều kiện biên cho ta hệ đầy đủ các phương trình để giải bài toán ổn định. Bài toán đưa về bốn phương trình vi phân với hàm chưa biết

$$\delta N_1, \delta N_2, \delta N_{12} \text{ và } w.$$

Giải bài toán ổn định theo cách đặt chính xác gặp nhiều khó khăn về mặt toán học. Bài toán sẽ đơn giản đi nhiều, khi các gia số lực dẫn δN_1 , δN_2 , δN_{12} trong mặt giữa bằng không. Trên cơ sở đó Ilyushin xây dựng *nguyên gần đúng* của bài toán ổn định.

2. Giải gần đúng bài toán về ổn định của bản

Phương pháp giải gần đúng bài toán về ổn định của bản do Timoshenko, Bleich và nhiều tác giả khác nghiên cứu.

Ilyushin kiến nghị phương pháp giải gần đúng dựa trên giả thuyết các gia số lực dẫn δN_1 , δN_2 , δN_{12} bằng không tại mọi điểm. Giả thuyết này có cơ sở vì những lẽ sau đây:

trong đó

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \frac{Eh^3}{9}; \quad k = \frac{4 \frac{d\sigma_u}{de_u}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{\frac{d\sigma_u}{de_u}}\right)^2};$$

$$\psi = \omega \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{k}\right)\omega}\right].$$

Ta thấy rằng môđun k tỷ lệ với môđun Karman K_*

$$k = \frac{1}{E} K_*.$$

Nếu trước khi mất ổn định trạng thái ứng suất của bản không thuần nhất, thì các đại lượng ω , ψ , k và ứng suất phụ thuộc vào tọa độ x, y . Khi đó như (7.22) đưa phương trình (7.4) về phương trình bậc bốn có hệ số thay đổi.

Nếu trạng thái ứng suất thuần nhất, tức là σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} là hằng số, thì ta nhận được phương trình có hệ số hằng số

$$\begin{aligned} & (1 - P\sigma_{xx}^{*2}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left[1 - P(\sigma_{xx}^* \sigma_{yy}^* + 2\tau_{xy}^{*2})\right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + (1 - P\sigma_{yy}^{*2}) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2P\tau_{xy}^* \left(\sigma_{xx}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \sigma_{yy}^* \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}\right) \\ & - \frac{\Omega^2 \sigma_u}{E\ell^2(1-\psi)} \left(\sigma_{xx}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

trong đó

$$P = \frac{3(1-\psi-k)}{4(1-\psi)}, \quad \Omega^2 = \frac{\ell^2 E h}{D} \cdot \text{độ uốn của bản.}$$

Phương trình ổn định của bản ngoài giới hạn đàn hồi (7.23) do Ilyushin tìm ra đầu tiên. Kết hợp với điều kiện biên cho phép chúng ta xác định lực tới hạn.

3. Phương pháp năng lượng

Công biến dạng uốn trên một đơn vị diện tích bản trong trường hợp này có dạng

$$\Delta W = D \overline{\Delta W} = \frac{D}{2} \left[(1-\psi)(\varkappa_1^2 + \varkappa_1 \varkappa_2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2) - \frac{3}{4}(1-\psi-k)\varkappa^2 \right].$$

Đạo hàm riêng của hàm này theo độ cong cho giá trị của gia số mômen xác định bởi công thức (7.22)

$$\delta M_1 = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial \kappa_1}, \quad \delta M_2 = -\frac{\partial(\Delta W)}{\partial \kappa_2}, \quad \delta M_{12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \kappa_{12}}.$$

Công biến dạng uốn của toàn bản bằng

$$\Delta U = D \overline{\Delta U} = \iint_S \Delta W dx dy.$$

Vì rằng ngoài giới hạn đàn hồi uốn bản kéo theo biến dạng của mặt giữa e_1, e_2, e_{12} , do đó công của lực trong tương ứng với biến dạng này sẽ là

$$\Delta U_1 = \iint_S (N_1 e_1 + N_2 e_2 + 2N_{12} e_{12}) dx dy.$$

Công này bằng công của lực ngoài ΔL_1 trên chuyển dịch của chu tuyến tương ứng với biến dạng e_1, e_2, e_{12} . Ngoài công ΔL_1 , lực ngoài đặt trên chu tuyến của bản còn thực hiện công ΔL trên chuyển dịch của những điểm chu tuyến gây ra bởi sự uốn bản:

$$\begin{aligned} \Delta L &= h \overline{\Delta L} = \frac{1}{2} \iint_S \left[N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= \frac{h}{2} \iint_S \sigma_u \left[\sigma_{xx}^* \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy}^* \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Nếu công biến dạng $\Delta U + \Delta U_1$ lớn hơn công lực ngoài $\Delta L + \Delta L_1$ thì trạng thái phẳng của bản ổn định, nếu $\Delta U + \Delta U_1 < \Delta L + \Delta L_1$ thì trạng thái phẳng không ổn định.

Vì $\Delta U_1 = \Delta L_1$ nên phương trình để xác định lực tới hạn sẽ là

$$\Delta U = \Delta L,$$

hay là

$$\iint_S \left\{ \Delta W - \frac{h}{2} \sigma_u \left[\sigma_{xx}^* \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy}^* \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx dy = 0.$$

Tương tự như trong lý thuyết chảy, ở đây ta có phương trình ổn định của bản

$$\Omega^2 = \ell^2 E \min \frac{\overline{\Delta U}}{\overline{\Delta L}} = \quad (7.24)$$

$$\ell^2 E \min \frac{\iint_S [(1-\psi)(\kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2 + \kappa_{12}^2) - \frac{3}{4}(1-\psi-k)\kappa^2] dx dy}{\iint_S \sigma_u \left[\sigma_{xx}^* \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_{yy}^* \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy}.$$

Để giải phương trình này chúng ta cũng dùng phương pháp Ritz-Timoshenko. Ở đây nêu cách làm cụ thể hơn. Đặt

$$w = \sum_{\alpha} a_{\alpha} f_{\alpha}(x, y)$$

thỏa mãn điều kiện biên. Khi đó

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial x^2}; \dots \\ \kappa &= \sum_{\alpha} \left(\sigma_{xx}^* \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial x^2} + \sigma_{yy}^* \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial y^2} + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x}; \dots \end{aligned}$$

Đặt các giá trị này vào biểu thức bên vế phải của (7.24) ta được

$$\Omega^2 = \frac{\ell^2 E \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha\beta} a_{\alpha} a_{\beta}}{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \mu_{\alpha\beta} a_{\alpha} a_{\beta}}.$$

Tìm giá trị cực tiểu của Ω^2 đưa đến hệ phương trình:

$$\frac{\partial \Omega^2}{\partial a_{\alpha}} = 0.$$

Đây là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất của a_{α} . Cho định thức của chúng bằng không dẫn đến phương trình xác định lực tới hạn.

Trong nhiều trường hợp giải phương trình (7.23) hoặc (7.24) đều phức tạp như nhau.

7.3 Một vài bài toán cụ thể về ổn định của bản

Trong mục này áp dụng những phương pháp theo hai lý thuyết trình bày trên vào xét ổn định của bản trong một vài trường hợp đơn giản.

7.3.1 Ổn định bản chữ nhật tựa tự do bị nén một phía

Giả sử bản chữ nhật có chiều dài a , chiều rộng b và độ dày h tựa tự do tại các biên, bản bị nén đều theo hướng trục x bởi lực p .

Khi đó

$$\sigma_{xx} = -p = -\sigma_u, \quad \sigma_{yy} = -q = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

1. Giải theo lý thuyết chảy

Trong trường hợp này phương trình uốn bản (7.9) có dạng

$$A_{yy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{hB_1}{D} p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$$

với chú ý rằng trong các biểu thức của A_{xx} , A_{yy} , A_{xy} , T , B_1 ta đặt $q = 0$.

Điều kiện biên có dạng

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad & \text{với } x = 0, \quad x = a, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad & \text{với } y = 0, \quad y = b. \end{aligned}$$

Tìm nghiệm phương trình uốn bản thỏa mãn các điều kiện biên dưới dạng

$$w = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.25)$$

trong đó a_{mn} là hằng số tùy ý, m, n là số nguyên. Thế (7.25) vào phương trình uốn bản ta được

$$\begin{aligned} a_{mn} \left\{ \pi^4 \left[A_{yy} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + A_{xx} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \right. \\ \left. - B_1 \frac{hp}{D} \pi^2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Vì $a_{mn} \neq 0$ suy ra

$$p = \frac{\pi^2 D}{B_1 h} \left[A_{yy} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 2(B_1 - \nu B_1 - A_{xy}) \left(\frac{n}{b} \right)^2 + A_{xx} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \left(\frac{a}{m} \right)^2 \right].$$

Ta thấy rằng mọi số hạng đều dương, vì vậy để xác định p nhỏ nhất cần đặt $n = 1$, tức là theo hướng y luôn luôn có nửa sóng. Số m phải chọn phụ thuộc vào $\frac{a}{b}$ và hệ số của phương trình sao cho p có giá trị cực tiểu.

2. Giải theo lý thuyết biến dạng đàn dẻo [68]

Trong trường hợp này

$$\sigma_{xx} = -\sigma_u, \quad \sigma_{xx}^* = -1, \quad \sigma_{yy}^* = \tau_{xy}^* = 0$$

phương trình (7.23) đưa về dạng

$$\frac{1 - \psi + 3k}{4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma_u \Omega^2}{E \ell^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Có thể làm tương tự như trên để tìm tải tới hạn. Ở đây giới thiệu phương pháp năng lượng của Timoshenko. Đặt w dưới dạng (7.25) thỏa mãn điều kiện biên vào phương trình năng lượng (7.24), sau khi tích phân ta nhận được

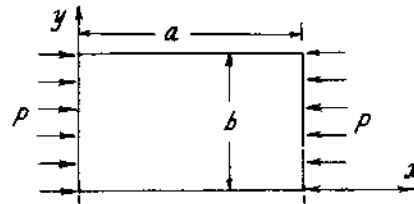
$$\Omega^2 = \frac{\pi^2 \ell^2 E}{4a^2 \sigma_u} \left[(1 - \psi + 3k)m^2 + 4(1 - \psi) \left(\frac{a^4 n^4}{b^4 m^4} + \frac{2a^2 n^2}{b^2} \right) \right].$$

Giả thiết rằng khi mất ổn định thanh bị uốn, sao cho có thể tồn tại một số nửa sóng theo hướng bị nén và chỉ một nửa sóng theo hướng trục giao, tức là $n = 1$. khi đó

$$\Omega^2 = \frac{\pi^2 \ell^2 E}{4a^2 \sigma_u} \left[(1 - \psi + 3k)m^2 + 4(1 - \psi) \left(\frac{a^4}{b^4 m^4} + \frac{2a^2}{b^2} \right) \right]. \quad (7.26)$$

Trước hết xét bản có độ dài vô hạn ($a \rightarrow \infty$), số sóng theo chiều x lớn vô hạn và chiều dài của nửa sóng là một đại lượng giới nội a' ,

$$a' = \left(\frac{a}{m} \right)_{\substack{a \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}}$$



Hình 7.6

Lấy kích thước đặc trưng của bản $\ell = b$ và cho a, m dần tới vô cực ta đưa hệ (7.26) về dạng

$$\Omega = \pi \sqrt{\frac{E(1 - \psi)}{\sigma_u} \left[\frac{1 - \psi + 3k}{4(1 - \psi)} \left(\frac{b}{a'} \right)^2 + \left(\frac{a'}{b} \right)^2 + 2 \right]}.$$

Hệ thức này có giá trị cực tiểu khi

$$a' = b \sqrt{\frac{1 - \psi + 3k}{4(1 - \psi)}}. \quad (7.27)$$

Độ uốn tới hạn của bản dài vô hạn có giá trị:

$$\Omega_{th} = \pi \sqrt{\frac{2E(1-\psi)}{\sigma_u} \left(1 + \sqrt{\frac{1-\psi+3k}{4(1-\psi)}}\right)}.$$

Xét bản có cạnh a và b có giá trị cùng bậc, từ (7.26) có thể nhận được độ uốn tới hạn với số nửa sóng xác định trong khoảng

$$m+1 \geq \frac{a}{a'} \geq m,$$

trong đó a' xác định theo công thức (7.27). Chẳng hạn với bản vuông $a = b = \ell$ và $m = 1$, ta nhận được

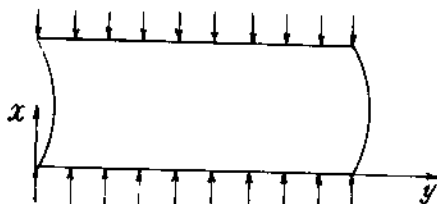
$$\Omega_{th} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E}{\sigma_u} [13(1-\psi) + 3k]}.$$

7.3.2 Ổn định của dải chữ nhật bị nén

Xét bài toán về sự võng của bản chữ nhật dài bị nén theo hướng x bởi ứng suất $-\sigma_{xx}$ không đổi dọc theo trục y và tựa bản lề tại các cạnh $x = 0, x = a$. Vì bản khá dài ($b \gg a$), nên có thể xem dạng mất ổn định chính là dạng hình trụ, tức là $w = w(x)$.

Theo điều kiện đặt lực ta có

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = -\sigma_u = -p, \quad \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0, \\ \sigma_{xx}^* = -1, \quad \sigma_{yy}^* = \tau_{xy}^* = 0. \end{aligned}$$



Hình 7.7

1. Giải theo lý thuyết chày

Khi đó phương trình uốn bản (7.9) có dạng

$$A_{yy} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{pB_1 h}{D} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

với điều kiện biên

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{tại } x = 0, x = a.$$

Ta thấy dễ dàng lực tới hạn có giá trị

$$p = p_0 \frac{A_{yy}}{B_1},$$

trong đó

$$p_0 = \frac{\pi^2 D}{a^2 h}$$

là lực tới hạn của dải đàn hồi bị nén, còn hệ số

$$\frac{A_{yy}}{B_1} = \frac{1 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right)}{1 + \frac{5 - 4\nu}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right)}.$$

2. Giải theo lý thuyết biến dạng

Phương trình (7.23) với chú ý đặt $\ell = a$ đưa về dạng:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \gamma^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

trong đó

$$\gamma = \frac{2\Omega}{a} \sqrt{\frac{\sigma_u}{E(1 - \psi + 3k)}}.$$

Tương tự như trên, kết hợp phương trình này với điều kiện biên chúng ta tìm được giá trị tới hạn γ_{th} , sau đó xác định độ uốn tới hạn

$$\Omega_{th} = \frac{1}{2} \gamma_{th} a \sqrt{\frac{E(1 - \psi + 3k)}{\sigma_u}}.$$

Chẳng hạn bản tựa tự do $\gamma_{th} = \frac{\pi}{a}$, độ uốn tới hạn sẽ là

$$\Omega_{th} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{E(1 - \psi + 3k)}{\sigma_u}}.$$

CHƯƠNG 8

Bài toán động của lý thuyết dẻo

Vật thể đàn dẻo dưới tác dụng của tải trọng động đặt ra nhiều vấn đề cần giải quyết.

Ở đây giới hạn trong việc xét sự truyền sóng trong môi trường đàn dẻo [26, 48, 72] và một số tính chất của vật liệu cứng dẻo trong bài toán động [23, 67]. Vấn đề này có nhiều ý nghĩa, vì tải có cường độ lớn khi va chạm thường kéo theo biến dạng dẻo. Tính toán bền vững của máy móc, công trình khi va chạm hay dưới tác dụng của sự nổ cũng đòi hỏi phải biết quy luật truyền biến dạng đàn dẻo trước khi sụp gãy. Mặt khác, kết quả của bài toán cho phép phân tích quá trình kỹ thuật gia công kim loại.

Trong bài toán tổng quát về truyền sóng đàn dẻo, cần lưu ý cách chọn mô hình đặc trưng cho môi trường đàn dẻo, tức là cần xác định liên hệ ứng suất - biến dạng và các tham số khác

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{m,n}, T, \dots).$$

Nhưng chọn được mô hình chính xác cho môi trường gặp nhiều khó khăn (suy từ kết quả của chương 2), đồng thời dẫn đến tính toán khá phức tạp. Do đó thường có xu hướng đơn giản hóa mô hình (dùng các lý thuyết dẻo đơn giản) và đưa vào các giả thiết hợp lý.

Chương này giới hạn khảo sát bài toán truyền sóng trong thanh (một chiều) của Rakhmatulin. Bài toán cho phép ta hình dung sự sắp xếp sóng và cho khái niệm cơ bản về các loại sóng. Tiếp đến xét một số tính chất của vật liệu cứng dẻo trong bài toán động và ứng dụng.

8.1 Truyền sóng tải đàn dẻo trong thanh

8.1.1 Phương trình chuyển động

Xét thanh nửa vô hạn $x \geq 0$ (x hướng theo trục của thanh); tại thời điểm $t = 0$ thanh ở trạng thái yên tĩnh. Giả sử với $t \geq 0$ có kích động tại đầu thanh $x = 0$. Để cho đơn giản ta đưa vào một số giả thiết:

- i) Khi thanh biến dạng tiết diện ngang vẫn phẳng và trục giao với trục x .
- ii) Biến dạng nhỏ, nên có thể bỏ qua sự thay đổi các độ đo của thanh.
- iii) Lực quán tính tương ứng với chuyển động của phần tử trong tiết diện ngang có thể bỏ qua.

iv) Bỏ qua ảnh hưởng của tốc độ biến dạng đối với đường cong liên hệ giữa σ_{xx} và ϵ_{xx} .

Vì bài toán một chiều nên ta thay ký hiệu $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, u_1, v_1$ bằng σ_1, e_1, u, v tương ứng. Trong các bài toán động, tốc độ biến dạng lớn, nên ảnh hưởng của nó đến đường cong liên hệ σ_1 và e_1 là đáng kể. Vì vậy dùng hệ thức ứng suất - biến dạng trình bày trong chương I chỉ là gần đúng thứ nhất tương ứng với tốc độ biến dạng trung bình nào đấy trong khoảng đã cho.

Phương trình chuyển động (1.7) trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (8.1)$$

Vì biến dạng nhỏ $\rho \approx \text{const}$, mặt khác

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{d\sigma_1}{de_1} \frac{\partial e_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(\text{vì } e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x \right),$$

từ phương trình (8.1) suy ra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.2)$$

trong đó

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma_1}{de_1}},$$

a - gọi là *tốc độ truyền kích động (truyền sóng)* hay là *tốc độ truyền âm*.

Có thể thay thế phương trình (8.2) bằng các phương trình

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial e_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial e_1}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

trong đó $v = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ tốc độ phần tử vật thể. Có thể thấy một cách không khó khăn hệ phương trình này thuộc loại hyperbolic.

Để giải bài toán cần cho điều kiện ban đầu: với $t = 0$ thanh ở trạng thái yên tĩnh

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= 0 \quad (x \geq 0) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (x > 0) \end{aligned} \right\} \text{ với } t = 0$$

và điều kiện biên tại $x = 0$. Kích động có nhiều loại, chẳng hạn tại đầu thanh biết biến dạng là hàm của thời gian

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = e_1(0, t) = f(t) \quad \text{tại } x = 0.$$

8.1.2 Phương pháp đường đặc trưng để giải phương trình loại hyperbolic

Xét phương trình tựa tuyến tính đơn giản

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.3)$$

trong đó $u(x, t)$ là hàm chưa biết của x, t

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2(u_t, u_x, u, x, t), \\ u_t &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Chúng ta đặt và giải bài toán sau đây: xác định điều kiện để khi các điều kiện đó thỏa mãn, ta có thể theo các giá trị cho trước của đạo hàm bậc nhất u_t, u_x trên đường $L(x, t)$ nào đấy tìm được vô số giá trị của đạo hàm bậc hai thỏa mãn phương trình (8.3). Dọc đường $L(x, t)$ ta có

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dt, \\ du_t &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Trong này các đại lượng dx và dt liên hệ với nhau bởi phương trình đường $L(x, t)$, $\frac{dx}{dt}$ là tg góc nghiêng của tiếp tuyến của đường ấy tại (x, t) ; các giá

trị du_x , du_t cho trước dọc theo đường L , còn các đại lượng chưa biết $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ phải thỏa mãn phương trình (8.3). Để cho hệ (8.3) và (8.1) đối với 3 ẩn số trên có vô hạn nghiệm, đòi hỏi tổ hợp bậc nhất bất kỳ của hai phương trình của hệ đó phải đồng nhất với phương trình đầu.

Vì vậy, nhân phương trình thứ nhất của (8.4) với hệ số λ và cộng với phương trình thứ hai ta được

$$du_t + \lambda du_x = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + (\lambda dt + dx) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt.$$

Điều kiện đồng nhất dẫn tới tỷ lệ của các hệ số

$$\frac{1}{dt} = -\frac{a^2}{\lambda dx} = \frac{0}{\lambda dt + dx} = \frac{0}{du_t + \lambda du_x}.$$

Từ đây suy ra

$$\lambda = -\frac{a^2}{dx/dt}, \quad \lambda dt + dx = 0, \quad du_t + \lambda du_x = 0,$$

hay là

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2, \quad du_t = \frac{a^2}{dx/dt} du_x.$$

Do đó bài toán đặt ra có nghiệm khi thỏa mãn các điều kiện đặc trưng

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a, \\ du_t &= a du_x, \end{aligned} \tag{8.5}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a, \\ du_t &= -a du_x. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Các hệ thức này là các phương trình vi phân của đường đặc trưng và các điều kiện trên đường đặc trưng của phương trình (8.3).

Có thể chứng minh được rằng một hàm số $u(x, t)$ đạo hàm được hai lần và cùng biến số của nó thỏa mãn các hệ thức trên thì cũng sẽ thỏa mãn phương trình (8.3). Quả vậy

$$du_t = \pm a du_x.$$

Vì $u(x, t)$ vi phân được hai lần, nên ta có thể biến đổi hệ thức vừa nhận được

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \pm a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dt + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right);$$

dx, dt thỏa mãn $dx = \pm a dt$, nên hệ thức trên đưa về dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

hay là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cũng có thể chứng minh ngược lại: hàm số thỏa mãn phương trình (8.3) sẽ thỏa mãn đồng nhất điều kiện trên đường đặc trưng và biến số của nó thỏa mãn phương trình đường đặc trưng.

Xác định tính chất tương ứng của đường đặc trưng cho phép

- giải bài toán biên,
- làm sáng tỏ tính chất của nghiệm,
- tìm phương pháp giải bằng đồ thị và bằng số phương trình loại hyperbolic.

Nghiệm của phương trình (8.3) có đạo hàm bậc nhất liên tục tại miền nào đấy của (x, t) , ta quy ước gọi là *sóng*. Hệ thức (8.5) liên quan đến *sóng tiến* (truyền theo hướng dương của x) hệ thức (8.6) - liên quan đến *sóng ngược*.

Điểm phân chia hai sóng chuyển dịch dọc thanh gọi là *mặt sóng*. Trên mặt phẳng pha (x, t) mặt sóng biểu thị dưới dạng một đường nào đấy.

Tương tự như định nghĩa trong phần xét truyền sóng đàn hồi, ta gọi mặt sóng *gián đoạn yếu*, nếu các đại lượng e_1, v liên tục, còn $\frac{\partial e_1}{\partial t}, \frac{\partial e_1}{\partial x}$ gián đoạn. Nếu bản thân các hàm e_1, v gián đoạn, ta có mặt sóng *gián đoạn mạnh*. Sóng như vậy gọi là *sóng gián đoạn* hay *sóng xung kích*.

8.1.3 Truyền sóng tải đàn - dẻo

Dùng phương trình đặc trưng như vừa trình bày ta viết phương trình truyền sóng trong thanh (8.2) tương đương với hệ đặc trưng

$$dx = \pm a dt, \quad (8.7)$$

$$du_t = \pm a du_x. \quad (8.8)$$

Phương trình (8.8) có thể viết dưới dạng

$$dv = \pm a de_1.$$

Vì $a = a(e_1)$, từ đây suy ra

$$v = \pm \int_0^{e_1} a(e_1) de_1 + C_{1,2}. \quad (8.9)$$

Nếu truyền sóng không kéo theo biến dạng dẻo, tức là thanh biến dạng đàn hồi

$$\sigma_1 = E e_1,$$

thì tốc độ truyền sóng sẽ bằng

$$a = a_0 = \sqrt{E/\rho} = \text{const.}$$

Khi đó tích phân phương trình (8.7) ta được

$$x = \pm a_0 t + A_{1,2},$$

trong mặt phẳng (x, t) chúng là họ những đường thẳng. Phương trình (8.9) cho ta

$$v = \pm a_0 e_1 + C_{1,2}.$$

Bây giờ đi sâu vào xét bài toán truyền sóng của thanh nửa vô hạn với điều kiện biên và điều kiện ban đầu nêu trên.

Với $e_1 = f(t) < e_s$ (e_s - giới hạn đàn hồi) trong thanh chỉ truyền *sóng đàn hồi*, với $e_1 = f(t) \geq e_s$ khi đó tiếp theo sóng đàn hồi sẽ xuất hiện *sóng dẻo*. Hình ảnh của quá trình này được biểu diễn trong mặt pha (x, t) .

Qua mỗi điểm của mặt phẳng (x, t) vẽ đường đặc trưng hướng dương và hướng âm. Lấy điểm M nào đấy và vẽ đường đặc trưng

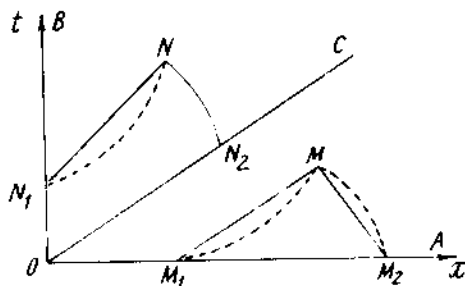
$$dx = \pm a dt$$

qua M , sao cho chúng gặp trục Ox tại hai điểm bên phải gốc tọa độ. Dọc theo các đường đó ta có hệ thức (8.9). Theo điều kiện ban đầu tại điểm M_1 và M_2 :

$$v = e_1 = 0,$$

suy ra

$$C_1 = C_2 = 0.$$



Hình 8.1

Do đó tại điểm M có đồng thời

$$v = \pm \int_0^{e_1} a(e_1) de_1,$$

tức là $v = e_1 = 0$. Với $e_1 = 0$, không tồn tại biến dạng dẻo, vậy $a = a(0) = a_0$. Đường đặc trưng MM_1 , MM_2 là đường thẳng

$$x = \pm a_0 t + A_{1,2}.$$

Trong miền COA (đường OC xác định bởi phương trình $x = a_0 t$), các phần tử của thanh vẫn ở trạng thái ban đầu, tức là ở trạng thái không biến dạng.

Bây giờ ta tìm nghiệm của bài toán trong miền COB . Trước hết chỉ ra trong miền COB ta có

$$v = - \int_0^{e_1} a(e_1) de_1. \quad (8.10)$$

Quả vậy, dọc theo các đường đặc trưng hướng âm bao phủ miền đó

$$v = - \int_0^{e_1} a(e_1) de_1 + C_2.$$

Tất cả các đường đặc trưng hướng âm đều cắt đường $x = a_0 t$ trên đó $v = e_1 = 0$, vì vậy hằng số C_2 bằng không, đó là điều cần phải chứng minh. Bây

giờ có thể chỉ ra rằng tất cả các đường đặc trưng hướng dương là đường thẳng. Nhằm mục đích đó chỉ cần chú ý là cùng với điều kiện (8.10) ta có điều kiện đặc trưng

$$v = \int_0^{e_1} a(e_1) de_1 + C_1,$$

từ đó suy ra tốc độ phần tử vật thể và biến dạng không đổi dọc theo đường đặc trưng hướng dương. Điều đó có ý nghĩa là hệ số góc $a(e_0)$ của đường đặc trưng hướng dương không đổi, do đó phương trình đường đặc trưng hướng dương có dạng

$$x = a(e_0)(t - t_0),$$

trong đó t_0 - là điểm bất kỳ trên đoạn OB , tại đó theo điều kiện biên ta biết

$$e_0 = f(t_0).$$

Giá trị này giữ nguyên theo đường thẳng có hệ số góc $a(e_0)$. Từ công thức (8.10), xác định được v .

Nếu hàm số $f(t)$ tăng, với giá trị $0 \leq t \leq t_s$, $f(t) < e_s$, thì tất cả các đường đặc trưng hướng dương đều song song với OC .

Nếu $\sigma_1 = \sigma_1(e_1)$ biểu thị đường cong lồi về phía trục σ_1 thì $a(e_1) = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma_1}{de_1}$ là hàm số giảm khi e_1 tăng. Các đường đặc trưng trên đường $x = a_0(t - t_s)$ tạo thành hình quạt không cùng tâm của các đường thẳng phân kỳ: trong đó theo giả thiết $f(t)$ là hàm số tăng.

Như vậy, điều kiện ban đầu và điều kiện biên xác định trạng thái chuyển động của điểm bất kỳ của thanh.

Biến dạng tại điểm $P(x, t)$ xác định bởi hệ thức

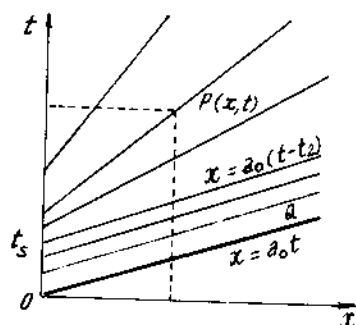
$$e_1 = f\left(1 - \frac{x}{a(e_1)}\right)$$

trong miền đàn hồi (điểm Q) có dạng tường minh

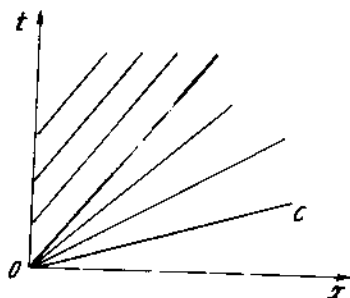
$$e_1 = f\left(t - \frac{x}{a_0}\right), \quad v = -a_0 f\left(t - \frac{x}{a_0}\right).$$

Trường hợp riêng: khi va chạm $f(t) = e_0 = \text{const}$ với $t \geq 0$ và $f(t) = 0$ với $t < 0$. Khi đó ta có quạt các đường đặc trưng với tâm tại gốc tọa độ, thường gọi là *sóng Riemann*, và các đường đặc trưng song song với góc lệch

$a(e_0)$. Đường thẳng OC là đường gián đoạn mạnh, vì qua đường này biến dạng có bước nhảy từ 0 đến e_0 .



Hình 8.2



Hình 8.3

Nếu đường $\sigma_1 = \sigma_1(e_1)$ lồi về phía e_1 , thì hình ảnh như trên không tồn tại, các đường đặc trưng cắt nhau. Điều này dẫn tới sự tạo thành sóng xung kích, từ đầu sóng xảy ra phản xạ sóng và làm phức tạp hình ảnh truyền sóng.

Trong bài toán xét trên giả thiết rằng $\frac{da}{de_1} < 0$. Giả thiết bảo đảm quá trình truyền sóng liên tục, bởi vì kích động sau tương ứng với biến dạng lớn truyền đi với tốc độ nhỏ hơn và không thể đuổi theo kích động trước.

Nếu $\frac{da}{de_1} > 0$, kích động sau truyền đi với tốc độ lớn hơn kích động trước, sóng sau gộp với sóng trước thành sóng gián đoạn mạnh. Với lực đặt ở đầu thanh tăng đều, sự xuất hiện sóng gián đoạn mạnh xảy ra ở khoảng cách x_0 .

Trong miền $0 \leq x \leq x_0$ sóng truyền liên tục theo công thức (8.10),

Để xác định x_0 và thời điểm t_0 xuất hiện sóng gián đoạn mạnh, ta tìm điểm cắt của hai đường đặc trưng hướng dương gần nhau, xuất phát từ lân cận gốc tọa độ (x, t) . Giao điểm của hai đường đặc trưng $x = a(t_2)(t - t_2)$ và $x = a(t_1)(t - t_1)$ có tung độ bằng

$$t = \frac{a(t_2)t_2 - a(t_1)t_1}{a(t_2) - a(t_1)}.$$

Dẫn tới giới hạn ta được

$$t_0 = \lim_{t_2 \rightarrow t_1 \rightarrow 0} t = \frac{a(0)}{a'(0)},$$

do đó,

$$x_0 = \frac{a^2(0)}{a'(0)}.$$

Barenblatt [33] khảo sát bài toán về tải tức thời không đổi tác dụng lên thanh nửa vô hạn trong trường hợp $\frac{da}{de_1} > 0$. Cơ sở của nghiên cứu này là từ mô hình của bài toán tồn tại với mọi $\sigma_1(e_1)$. Vì vậy, đặt $u = v^* t f(\xi)$, $\xi = \frac{x}{v^* t}$ (v^* - hằng số nào đấy có thứ nguyên tốc độ), phương trình chuyển động (8.2) đưa về dạng phương trình vi phân thường.

$$v^{*2} \xi^2 f'' = a^2(f') f''.$$

Nghiệm của nó sẽ là

$$\xi^2 = \overline{a^2}(f'), \quad f = p + q\xi,$$

trong đó

$$\overline{a^2} = \frac{a^2}{v^{*2}} = \frac{1}{\rho_0 v^{*2}} \frac{d\sigma_1}{de_1}.$$

Có thể chỉ ra rằng trong trường hợp này nghiệm có dạng như sau: trong phần thanh chưa biến dạng sóng gián đoạn mạnh (tại đó biến dạng tăng nhảy vọt từ 0 đến giá trị e_0) truyền đi với tốc độ $D = \text{const}$; trong miền giữa đầu thanh $x = 0$ và sóng gián đoạn mạnh biến dạng và tốc độ của phần tử không đổi.

Trước hết viết điều kiện động học và động lực học trên sóng gián đoạn mạnh suy từ quy luật bảo toàn khối lượng và động lượng

$$\tilde{\rho}_0(D - v_0) = \rho_0 D, \quad \rho_0 D \tilde{v}_0 + \tilde{\sigma}_1 = 0.$$

Ở đây giả thiết rằng bên phải mặt sóng gián đoạn mạnh môi trường vẫn yên tĩnh không biến dạng; bên trái mặt gián đoạn mạnh có tốc độ $\tilde{v}_0$, mật độ $\tilde{\rho}_0$ và ứng suất $\tilde{\sigma}_1$. Ký hiệu ξ_0 là giá trị của ξ tương ứng với vị trí sóng gián đoạn mạnh ($D = \xi_0 v^*$), dùng phương trình này và phương trình liên tục

$$\rho_0 = \tilde{\rho}_0(1 + e_0),$$

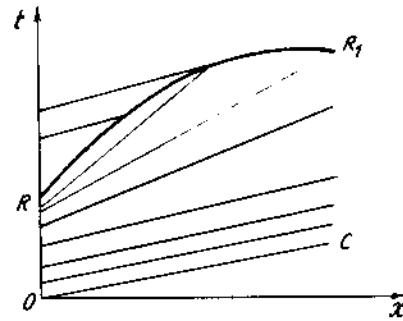
ta được

$$v_1 = -\xi_0 e_0 v^*; \quad D^2 = \frac{\tilde{\sigma}_1(e_0)}{\rho_0 e_0}.$$

8.2 Sóng cắt tải và biến dạng dư

Bây giờ giả thiết rằng bắt đầu từ thời điểm $t = t_1$ nào đấy, hàm $f(t)$ giảm dần. Khi đó tại đầu thanh bắt đầu xuất hiện *sự cắt tải*; với quá trình cắt tải vật thể biến dạng theo quy luật đàn hồi. Vì vậy sóng xuất phát từ đầu thanh có xu hướng như sóng đàn hồi truyền đi với tốc độ a_0 . Chúng đuổi kịp sóng biến dạng dẻo xuất hiện trước đấy, phối hợp với chúng. Hình ảnh chuyển động sẽ trở thành phức tạp hơn.

Về mặt toán học bài toán dẫn đến sự tồn tại trong mặt phẳng (x, t) một đường cong RR_1 , nó biểu thị một mặt di động chia miền biến dạng chủ động và biến dạng bị động. Hình dáng của đường này ta không biết trước: trong quá trình giải quyết bài toán chúng ta sẽ xác định đường cong đó. Nếu biết hình dáng của RR_1 , ta sẽ xác định được chuyển động trong miền trên đường RR_1 . Rakhmatulin [72] đã chứng minh sự tồn tại của đường này và gọi nó là *sóng cắt tải*.



Hình 8.4

Trong một vài trường hợp riêng có thể biết dạng của sóng cắt tải. Chẳng hạn, nếu triệt tiêu một cách đột ngột lực ngoài ở đầu thanh thì sóng cắt tải sẽ là đường gián đoạn mạnh.

Trước hết chúng ta chỉ ra rằng sóng cắt tải truyền đi với tốc độ của sóng đàn hồi a_0 . Nhằm mục đích đó xét điều kiện động học và động lực học trên mặt sóng cắt tải. Giả sử tốc độ truyền sóng cắt tải là c . Từ điều kiện liên tục của chuyển dịch $u^{(1)} = u^{(2)}$ và $du^{(1)} = du^{(2)}$ khi đi qua sóng cắt tải ta có

$$e_1^{(1)} dx + v^{(1)} dt = e_1^{(2)} dx + v^{(2)} dt.$$

Vì $dx = c dt$ do đó

$$c(e_1^{(1)} - e_1^{(2)}) = v^{(2)} - v^{(1)}. \quad (8.11)$$

Mặt khác, theo định lý về động lượng ta có

$$\rho c(v^{(2)} - v^{(1)}) = \sigma_1^{(1)} - \sigma_1^{(2)},$$

vì cắt tải theo quy luật đàn hồi, do đó

$$\rho c(v^{(2)} - v^{(1)}) = E(e_1^{(1)} - e_1^{(2)}). \quad (8.12)$$

Thay thế (8.11) vào (8.12) ta tìm được

$$c = \sqrt{E/\rho} = a_0.$$

Điều đó có nghĩa là sóng cắt tải truyền đi với tốc độ sóng đàn hồi.

Bây giờ chúng ta viết phương trình biểu thị biến dạng các phần tử của thanh sau khi có sóng cắt tải đi qua.

Ký hiệu e_m , σ_m là biến dạng và ứng suất tại tiết diện cho trước của thanh ở thời điểm bắt đầu cắt tải (trên sóng cắt tải). Sau khi sóng cắt tải đi qua, biến dạng của thanh phải giảm đi, tức là tại phần tử đó của thanh xảy ra hiện tượng cắt tải:

$$\sigma_1 - \sigma_m = E(e_1 - e_m).$$

Đặt biểu thức vừa nhận được vào phương trình chuyển động (8.1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_m - E e_m), \quad (8.13)$$

trong đó số hạng thứ hai của vế phải là hàm chưa biết. Cần phải xét nghiệm phương trình này đồng thời với nghiệm phương trình chuyển động khi đặt tải (8.2), giới hạn phân chia hai nghiệm này cũng chưa biết trước. Ngoài các điều kiện biên tại đầu thanh cần thỏa mãn điều kiện *liên tục* của tốc độ và biến dạng tại sóng cắt tải.

Vì áp suất tại đầu thanh tăng có bước nhảy nên hình ảnh chuyển động trong miền BOC (trước khi có sóng cắt tải) tương tự như bài toán xét trên, có nghĩa là

$$\frac{x}{t} = a(e_1), \quad v = - \int_0^{e_1} a(e_1) de_1.$$

Nếu ký hiệu $t = \varphi(x)$ là phương trình sóng cắt tải, thì trên nó ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e_1 - e_m(x), \quad \frac{x}{\varphi(x)} = a(e_m), \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v = - \int_0^{e_m} a(e_1) de_1.$$

Ngoài ra, ta biết biến dạng tại đầu thanh, theo công thức

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = e_1(0, t) = f(t). \quad (8.15)$$

Bây giờ tìm nghiệm của phương trình (8.13) với điều kiện biên (8.14) và (8.15). Nghiệm tổng quát của nó có dạng

$$u(x, t) = F_1(a_0 t + x) + F_2(a_0 t - x) - \frac{1}{E} \int_0^x (\sigma_m - E e_m) dx.$$

Cho thỏa mãn điều kiện biên (8.15) tại $x = 0$

$$F_1'(a_0 t) - F_2'(a_0 t) - \frac{\sigma_m(0) - E e_m(0)}{E} = f(t),$$

từ đây suy ra

$$F_1'(a_0 t + x) = F_2'(a_0 t + x) + \frac{\sigma_m(0)}{E} - e_m(0) + f\left(\frac{a_0 t + x}{a_0}\right). \quad (8.16)$$

Điều kiện thứ nhất của (8.14) cho ta

$$F_1'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} + 1\right)\right] - F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} - 1\right)\right] = \frac{\sigma_m(x)}{E}$$

và từ điều kiện thứ hai của (8.14)

$$F_1'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} + 1\right)\right] + F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} - 1\right)\right] = - \int_0^{e_m} \frac{a(e_1)}{a_0} de_1.$$

Dùng hệ thức (8.16) để biến đổi, hai phương trình sau đưa đến

$$\begin{aligned} & F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} + 1\right)\right] - F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} - 1\right)\right] = \\ & = \frac{\sigma_m(x)}{E} - \frac{\sigma_m(0)}{E} + e_m(0) - f\left[x\left(\frac{1}{a(e_m)} + \frac{1}{a_0}\right)\right], \\ & F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} + 1\right)\right] + F_2'\left[x\left(\frac{a_0}{a(e_m)} - 1\right)\right] = \\ & = - \int_0^{e_m} \frac{a(e_1)}{a_0} de_1 - \frac{\sigma_m(0)}{E} + e_m(0) - f\left[x\left(\frac{1}{a(e_m)} + \frac{1}{a_0}\right)\right], \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} F_2' \left[x \left(\frac{a_0}{a(c_m)} + 1 \right) \right] &= -\frac{\sigma_m(0)}{E} + c_m(0) - f \left[x \left(\frac{1}{a(c_m)} + \frac{1}{a_0} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_m(x)}{E} - \int_0^{c_m} \frac{a(e_1)}{a_0} de_1 \right], \\ F_2' \left[\left(\frac{a_0}{a(c_m)} - 1 \right) \right] &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_m(x)}{E} + \int_0^{c_m} \frac{a_0(e_1)}{a_0} de_1 \right]. \end{aligned}$$

Khởi F_2' , chúng ta nhận được hệ thức phiếm hàm để xác định c_m

$$\begin{aligned} c_m(0) - \frac{\sigma_m(0)}{E} - f \left(\frac{z}{a_0} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{c_m[x_1(z)]} \left(\frac{a^2}{a_0^2} - \frac{a}{a_0} \right) de_1 = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^{c_m[x_2(z)]} \left(\frac{a^2}{a_0^2} + \frac{a}{a_0} \right) de_1, \end{aligned} \quad (8.17)$$

trong đó

$$x_1 \left(\frac{a_0}{a[c_m(x_1)]} + 1 \right) = x_2 \left(\frac{a_0}{a[c_m(x_2)]} - 1 \right) = z.$$

Từ hệ thức xác định c_m đi đến kết luận: nếu biết phân bố biến dạng dư trong thanh dầm dèo và đồ thị động $\sigma_1 = \sigma_1(e_1)$, có thể hoàn toàn xác định tính chất của ứng suất tại đầu thanh. Quả vậy, trong trường hợp này hệ thức đó giúp ta xác định $f(z)$ theo sự phân bố biến dạng dư, đại lượng sau biết được qua thực nghiệm

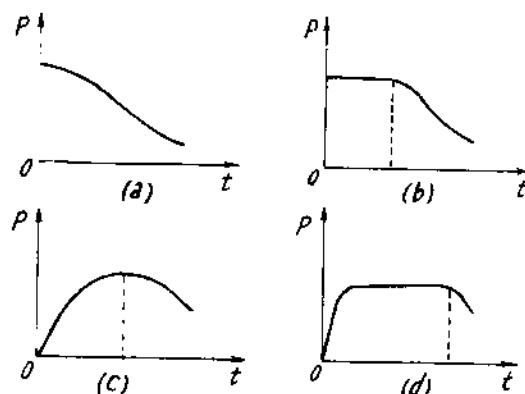
$$c_1^*(x) = c_m(x) - \frac{\sigma_m(c_m)}{E}.$$

Đầu sóng cắt tải chuyển động với tốc độ lớn nhất a_0 sẽ đuổi kịp các sóng trước. Bởi vì sóng có tốc độ nhỏ hơn tương ứng với biến dạng dèo lớn hơn; do đó khi sóng cắt tải truyền dọc theo thanh, đại lượng biến dạng dư xuất hiện sau sóng cắt tải giảm dần.

Dùng công thức (8.17) Rakhmatulin xét trường hợp vật thể có liên hệ ứng suất biến dạng theo mô hình của Prandtl. Đường cong $\sigma_1 \sim e_1$ gồm ba đoạn: đàn hồi ($\sigma_1 = Ee_1$), dèo với giá trị $\frac{d\sigma_1}{de_1}$ giảm nhanh và dèo với hệ số

góc $E' = d\sigma_1/de_1$ không đổi. Theo mô hình này có thể phân sóng ra ba nhóm: nhóm thứ nhất truyền với tốc độ $a_0 = \sqrt{E/\rho}$ và gây ra biến dạng tăng từ 0 đến e_s , nhóm thứ hai có tốc độ giảm nhanh từ a_0 đến $a_1 = \sqrt{E'/\rho}$ và hầu như không làm thay đổi biến dạng của thanh, nhóm thứ ba truyền đi với tốc độ không đổi a_1 và gây ra biến dạng đáng kể từ e_s đến e_m . Tác giả đã xác định được sóng cắt tải khi biết quá trình biến dạng $f(t)$ tại đầu thanh. Biến dạng này sinh ra do áp suất $p(t)$ tác dụng lên đầu thanh $x = 0$. Sự thay đổi áp suất tại đầu thanh có thể xảy ra như trong hình 8.5.

Trường hợp a) xảy ra khi thanh bị va chạm, như trên ta thấy sóng Riemann là chùm đường thẳng qua gốc tọa độ. Trong trường hợp b) sóng Riemann chia thành hai nhóm: nhóm thứ nhất là chùm đường thẳng qua gốc tọa độ, nhóm thứ hai là những đường thẳng song song xuất phát từ những điểm khác nhau trên trục Ot . Trong trường hợp c) sóng Riemann là họ đường thẳng phân kỳ xuất phát từ những điểm khác nhau của trục Ot . Trong trường hợp d) sóng Riemann chia thành hai nhóm: nhóm thứ nhất gồm các đường thẳng phân kỳ xuất phát từ các điểm khác nhau của trục Ot , tiếp đó là các đường thẳng song song. Tọa độ t_m của trục Ot (bắt đầu sóng cắt tải) xác định từ phương trình $p(t_m) = p_m$.



Hình 8.5

8.3 Va chạm của thanh với tường chắn cố định

Giả sử thanh có độ dài ℓ chuyển động với tốc độ V dọc theo trục từ phải sang trái, tại thời điểm $t = 0$ thanh gặp tường chắn cố định rắn tuyệt đối.

Hình ảnh truyền sóng trong thanh biểu diễn trong mặt phẳng (x, t) : OA - đầu sóng (mặt gián đoạn mạnh); ON - một trong những sóng Riemann tương ứng với biến dạng lớn nhất e_m . Trong miền BOC biến dạng không đổi và

trong đó $\sigma_1(e_m)$ là giá trị của ứng suất trước khi cắt tải xác định theo đồ thị $\sigma_1 \sim e_1$. Xét sóng Riemann nào đấy truyền với tốc độ $a(e_1)$, sóng này gặp sóng cắt tải tại vị trí

$$x = \frac{2a(e_1)\ell}{a_0 + a(e_1)}.$$

Vì a là hàm đã biết của e_1 , từ đây chúng ta xác định biến dạng tại tiết diện x trước khi cắt tải $e_1 = e_1(x)$. Theo quy luật cắt tải, biến dạng dư xác định bởi công thức

$$e_1^* = e_1 - \frac{\sigma_1(e_1)}{E}.$$

Ngược lại, biết phân bố biến dạng dư sau khi va chạm có thể xây dựng đồ thị động liên hệ giữa ứng suất và biến dạng $\sigma_1 = \sigma_1(e_1)$.

8.4 Vật liệu cứng dẻo trong bài toán động

Với biến dạng dẻo khá lớn có thể bỏ qua biến dạng đàn hồi, vật liệu xem như là cứng dẻo. Hơn thế nữa tái biến không đáng kể ta có mô hình vật liệu cứng dẻo lý tưởng. Bỏ qua biến dạng đàn hồi làm giảm nhẹ tính toán khá nhiều và trong nhiều bài toán động cho nghiệm khá đơn giản.

Mô hình này thường sử dụng rộng rãi trong bài toán về tác dụng của xung lực lên dầm (thanh), bản tròn, vỏ mỏng v.v... Như vậy, dầm còn cứng khi mômen uốn chưa vượt mômen giới hạn M_* , tiếp đó trong dầm xuất hiện khớp dẻo (như đã trình bày trong 4.2 chương 4) tại đó $[M] = M_*$. Nghiên cứu chuyển động của miền cứng và miền dẻo của dầm tính đến điều kiện trên biên của chúng cho phép xác định biến dạng dư và thời gian biến dạng (có thể xác định được cả trong trường hợp độ võng lớn).

8.4.1 Một vài định lý về năng lượng

Trong động lực học các vật thể cứng dẻo hiện chưa thiết lập được những định lý tổng quát cho phép giải bài toán một cách có hiệu quả. Martin [67] thiết lập một vài định lý đơn giản.

Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = t_0$ ta biết tốc độ $\bar{v}_i$ của các điểm vật thể cứng dẻo, còn với $t > t_0$ trên mặt biên vật thể lực mặt $\Sigma_i = 0$ hoặc là tốc độ $v_i = 0$. Ngoài ra, sự thay đổi hình học vật thể không đáng kể và bỏ qua lực khối. Với các giả thiết này ta biết được động năng ban đầu, động năng này hao tán cho biến dạng dẻo của vật thể trong quá trình chuyển động, vì rằng

lực ngoài không sinh công khi $t > t_0$. Do đó đến thời điểm $t = t_*$ nào đấy chuyển động sẽ kết thúc.

Định lý 8.1. Thời gian biến dạng $t_* - t_0$ có cận dưới

$$t_* - t_0 \geq \frac{\iiint_V \rho \bar{v}_i v_i^0 dV}{\iiint_V \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV}, \quad (8.18)$$

Trong đó ρ là mật độ vật thể, v_i^0 là tốc độ khả dĩ động học không phụ thuộc thời gian, $\dot{\epsilon}_{ij}^0$ là tốc độ biến dạng khả dĩ động học, còn σ_{ij} xác định theo tốc độ biến dạng nhờ quy luật chảy dẻo (2.13)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad A \geq 0.$$

Chứng minh. Nhân hai vế phương trình chuyển động (1.7) với v_i^0 rồi tích phân trên toàn bộ vật thể ta được

$$\iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i^0 dV = \iiint_V \rho \dot{v}_i v_i^0 dV.$$

Biến đổi tích phân về trái dẫn đến

$$\iint_S \sigma_{ij} \nu_j v_i^0 dS - \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV = \iiint_V \rho \dot{v}_i v_i^0 dV.$$

Tích phân mặt bằng không vì hoặc là lực mặt bằng không hoặc là tốc độ bằng không. Vậy

$$- \iiint_V \rho \dot{v}_i v_i^0 dV = \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV,$$

trong đó σ_{ij} , $\dot{v}_i$ là ứng suất và gia tốc thực. Theo điều lập luận trong 3.8 chương 3 ta có $(\sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^0 \geq 0$, nên

$$\iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV \leq \iiint_V \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 dV \equiv W^0,$$

W^0 là một đại lượng không phụ thuộc vào thời gian. Khi đó

$$- \iiint_V \rho \dot{v}_i v_i^0 dV \leq W^0.$$

Tích phân theo thời gian từ $t = t_0$ đến $t = t_*$, ta được

$$- \iiint_V \rho v_i v_i^0 dV \Big|_{t_0}^{t_*} \leq W^0(t_* - t_0).$$

Tại $t = t_0$ tốc độ $v_i = \bar{v}_i$, còn tại $t = t_*$ tốc độ $v_i = 0$, ta đi đến bất đẳng thức (8.18) $\square$

Định lý 8.2. Với chuyển dịch cho trước trên mặt u_i^b , trong thời gian vật thể biến dạng ta có bất đẳng thức

$$\iint_S \Sigma_i^* u_i^b dS \leq \iiint_V \frac{1}{2} \rho \bar{v}_i^2 dV, \quad (8.19)$$

trong đó Σ_i^* là lực tương ứng với ứng suất khả dĩ tĩnh học cho phép $\sigma_{ij}^{*(c)}$ và nó không phụ thuộc thời gian.

Chứng minh. Với cách làm tương tự như trên, nhân hai vế phương trình chuyển động với v_i , tích phân lên và qua một số biến đổi dẫn đến

$$- \iiint_V \rho \dot{v}_i v_i dV = \iiint_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV.$$

Ta lại có theo 3.8 chương 3

$$(\sigma_{ij}^{*(c)} - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \leq 0$$

và theo 3.7 chương 3

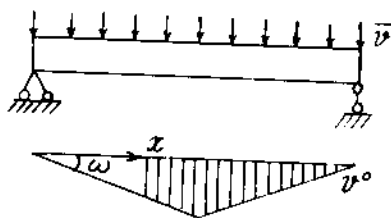
$$\iiint_V \sigma_{ij}^{*(c)} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \iint_S \Sigma_i^* v_i dS,$$

c cuối cùng nhận được

$$- \iiint_V \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \rho v_i^2 dV \geq \iint_S \Sigma_i^* v_i dS.$$

Tích phân bất đẳng thức này theo thời gian từ $t = t_0$ đến $t = t_*$; chú ý rằng Σ_i^* không phụ thuộc thời gian và với $t = t_0$, $u_i = 0$, $v_i = \bar{v}_i$; còn với $t = t_*$, $u_i = u_i^b$ (chuyển dịch trên mặt), $v_i = 0$; ta đi đến bất đẳng thức (8.19) $\square$

8.4.2 Dầm dưới tác dụng của xung lực



Hình 8.7

Giả sử dầm có độ dài 2ℓ tựa tự do tại hai đầu, chịu tác dụng của xung lực gây ra tại mọi tiết diện thanh tốc độ ban đầu không đổi $\bar{v}$. Lấy tốc độ khả dĩ động học v^0 không phụ thuộc thời gian phân bố theo hình tam giác như hình 8.7. Khi đó tại tiết diện giữa hình thành khớp dẻo, mỗi phần nửa thanh quay quanh gối tựa như cố thể với tốc độ góc ω . Khi đó $v^0 = \omega x$ (x -hướng theo trục thanh), $W^0 = 2M_*\omega$ và

$$\iiint_V \rho \bar{v}_i v_i^0 dV = 2 \int_0^\ell \rho \bar{v} \omega x F dx = m \bar{v} \ell^2 \omega,$$

trong đó $m = \rho F$ là khối lượng của thanh trên một đơn vị dài. Thay thế vào bất đẳng thức (8.18) ta được

$$t_* - t_0 \geq \frac{m \bar{v} \ell^2}{2M_*}.$$

Bây giờ tiếp tục tính

$$\iiint_C \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 F dx = m \ell \bar{v}^2.$$

Ta chọn tải khả dĩ tĩnh học cho phép là tải tập trung Σ^* đặt tại giữa thanh và tương ứng với nó tồn tại trạng thái giới hạn, tức là $\Sigma^* = \frac{2}{\ell} M_*$. Từ bất đẳng thức (8.19) có thể đánh giá độ võng u^b tại điểm giữa thanh

$$u^b \leq \frac{1}{2} \frac{m \ell \bar{v}^2}{M_*}.$$

8.4.3 Bản tròn chịu tải trọng động

Bài toán động của bản tròn cứng dẻo tựa tự do theo chu tuyến, chịu tác dụng một cách đột ngột của áp suất phân bố đều p đã được Hopkins và Prager khảo

sát. Phương trình cân bằng (6.13) được thay bằng phương trình chuyển động

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = - \int_0^r \left(p + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) r dr \quad (8.20)$$

trong đó ρ là khối lượng trên một đơn vị diện tích mặt bản, p là áp suất (giả thiết nó tác dụng theo hướng z âm). Điều kiện chảy dẻo Tresca-Saint Venant được biểu diễn trên hình 6.13. Cũng như trong trường hợp tĩnh, trạng thái dẻo của bản ứng với trạng thái CA , trong đó điểm C ứng với tâm của bản. Độ võng của bản có thể lấy dạng hình côn

$$w(r, t) = -\Delta(t) \left(1 - \frac{r}{a} \right),$$

trong đó $\Delta(t)$ là độ võng của điểm tâm của bản.

Đặt biểu thức này vào phương trình chuyển động (8.20) và hệ thức của điều kiện chảy dẻo Tresca-Saint Venant $M_\theta = M_s$, ta có thể tích phân phương trình và nhận được

$$M_r(r, t) = M_s - p \frac{r^2}{6} + \rho \ddot{\Delta}(t) \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^3}{12a} \right),$$

trong đó để cho gọn ta ký hiệu $\ddot{\Delta} = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2}$.

Điều kiện biên tự do trên $r = a$, $M_r(a, t) = 0$ cho ta $\rho \ddot{\Delta} = 2(p - p_s)$, trong đó $p_s = \frac{6M_s}{a^2}$. Khử $\rho \ddot{\Delta}$ ta có thể viết biểu thức của M_r :

$$M_r = M_s - \frac{r^2}{6} \left[p - (p - p_s) \left(2 - \frac{r}{a} \right) \right].$$

Kết quả này chỉ có nghĩa khi biểu thức bên vế phải không vượt quá M_s , tức là giá trị trong dấu ngoặc phải không âm với mọi r . Do vậy điều kiện cần và đủ là $p \leq 2p_s$. Các áp suất thỏa mãn điều kiện này gọi là áp suất thông thường, còn các áp suất lớn hơn $2p_s$ gọi là áp suất cao.

Với áp suất cao ta có thể giả thiết độ võng có dạng hình nón cụt với vòng tròn nối bán kính r_0 phân chia miền hình côn ngoài với miền trong, tại đó chuyển dịch cứng với vận tốc $\dot{w} = -\dot{\Delta}$. Miền trong tương ứng với điểm C trên đường lục giác Tresca-Saint Venant, tức là $M_r = M_\theta = M_s$ và phương trình chuyển động với $r < r_0$ dẫn đến

$$\rho \ddot{\Delta} = p.$$

Với $r > r_0$ vận tốc có dạng

$$\dot{w}(r, t) = -\dot{\Delta}(t) \frac{a-r}{a-r_0},$$

nên gia tốc sẽ là

$$\rho \ddot{w} = -p \frac{a-r}{a-r_0}.$$

Phương trình chuyển động bây giờ trở thành

$$\frac{d}{dr}(rM_r) = M_s - \frac{p}{6(a-r_0)}(2r^3 - 3r_0r^2 + r_0^3).$$

Tích phân lên và cho thỏa mãn điều kiện $M_r = M_s$ tại $r = r_0$, ta nhận được

$$rM_r = rM_s - p \frac{(r-r_0)^3(r+r_0)}{12(a-r_0)}.$$

Điều kiện biên tại $r = a$, $M_r = 0$ cho ta phương trình xác định biên phân chia r_0

$$\left(1 - \frac{r_0}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{r_0}{a}\right) = \frac{2p_s}{p}. \quad (8.21)$$

Bây giờ giả sử tại thời điểm $t = t_0$ ta khuấy áp suất một cách đột ngột.

a) Trường hợp $p \leq 2p_s$

Với $p \leq 2p_s$ dạng của nghiệm trước đây vẫn đúng với $t > t_0$ bằng cách cho $p = 0$. Gia tốc của điểm giữa bây giờ cho bởi $\rho \ddot{\Delta} = -2p_s$. Độ võng của điểm tâm phụ thuộc vào thời gian có dạng

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \frac{1}{\rho}(p - p_s)t^2, \quad \text{với } 0 < t < t_0, \\ &= \frac{1}{\rho}[p(2t_0t - t_0^2) - p_st^2] \quad \text{với } t_0 < t < t_*, \end{aligned}$$

trong đó t_* là thời điểm dừng chuyển động, tức là $\dot{\Delta}(t_*) = 0$ dẫn đến $t_* = \frac{p}{p_s}t_0$.

Khi đó độ võng của điểm tâm bản

$$\Delta_p = \Delta(t_*) = \frac{p(p - p_s)}{\rho p_s} t_0^2.$$

Kết quả đối với t_* trùng với cận dưới cho bởi định lý Martin (8.1). Ta lấy trường vận tốc khả di động học không phụ thuộc thời gian $\dot{w}^0 = \dot{\Delta}^0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)$,

$\dot{\Delta}^0 = \text{const.}$ Khi đó mẫu số trong biểu thức bên vế phải của (8.1) bằng $2\pi M_s \dot{\Delta}^0$, còn tử số

$$2\pi \int_0^a \rho \dot{\Delta}(t_0) \dot{\Delta}^0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 r dr = 2\pi \frac{a^2}{12} \rho \dot{\Delta}(t_0) \dot{\Delta}^0 = 2\pi \frac{a^2}{6} (p - p_s) t_0 \dot{\Delta}^0.$$

Vì rằng $M_s - p_s \frac{a^2}{6}$ nên giá trị của tử số bằng

$$2\pi t_0 \dot{\Delta}^0 M_s \left(\frac{p}{p_s} - 1\right).$$

Bất đẳng thức (8.1) dẫn đến

$$t_* - t_0 \geq \left(\frac{p}{p_s} - 1\right) t_0$$

và vế phải trùng với nghiệm chính xác.

b) Trường hợp $p > 2p_s$

Khi $p > 2p_s$ việc khur áp suất có nghĩa là tại miền trung tâm gia tốc bằng không, tức là $\dot{\Delta} = 0$, nên

$$\dot{\Delta}(t) - \dot{\Delta}(t_0) = \frac{pt_0}{\rho}.$$

Vì vận tốc trong miền hình côn tỉ lệ với $\dot{\Delta}$ còn gia tốc không triệt tiêu, nên đòi hỏi bán kính của vòng tròn nối phải là hàm của thời gian $\bar{r}(t)$ với $\bar{r}(t_0) = r_0$. Với $r > \bar{r}(t)$ vận tốc và gia tốc có dạng

$$\dot{w}(r, t) = -\frac{pt_0}{\rho} \cdot \frac{a - r}{a - \bar{r}(t)}, \quad \ddot{w}(r, t) = -\frac{pt_0 \dot{\bar{r}}(t)}{\rho} \cdot \frac{a - r}{[a - \bar{r}(t)]^2},$$

phương trình chuyển động đưa về

$$\frac{d}{dt}(rM_r) = M_s + \frac{pt_0 \dot{\bar{r}}}{6(a - \bar{r})^2} [3a(r^2 - \bar{r}^2) - 2(r^3 - \bar{r}^3)]$$

Tích phân phương trình này với $M_r = M_s$ tại $r = \bar{r}$ ta được

$$rM_r = rM_s + \frac{pt_0 \dot{\bar{r}}(r - \bar{r})^2}{12(a - \bar{r})^2} [2a(r + 2\bar{r}) - (r^2 + 2r\bar{r} + 3\bar{r}^2)]$$

Đặt $M_r = 0$ tại $r = a$ dẫn đến phương trình vi phân để xác định $\bar{r}$

$$(a^2 + 2a\bar{r} - 3\bar{r}^2) \frac{d\bar{r}}{dt} = -\frac{2p_s a^3}{pt_0}.$$

Thừa số bên vế trái dương nên $\frac{d\bar{r}}{dt} < 0$, bán kính $\bar{r}$ của vòng tròn nối giảm dần. Phương trình vừa nhận có thể tích phân được và cho kết quả

$$\frac{t}{t_0} = 1 + \frac{p}{2p_s a^3} [a^2(r_0 - \bar{r}) + a(r_0^2 - \bar{r}^2) - (r_0^3 - \bar{r}^3)].$$

Giả sử t_1 là thời điểm tại đó bán kính của vòng tròn nối dẫn đến không. Khi đó ta được

$$\frac{t_1}{t_0} = 1 + \frac{p}{2p_s} \left[\frac{r_0}{a} + \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{a} \right)^3 \right],$$

trong đó r_0 cho bởi phương trình (8.21). Với $t > t_1$ trường vận tốc hoàn toàn dạng hình côn.

Tài liệu tham khảo

1. Bamberger Y. (1997) *Mecanique de l'ingenieur III*. Solides deformables. Editeurs des sciences et des arts, Paris.
2. Badorf S. B., Budiansky B. A. (1949) *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*. NACA, TN, N° 1971.
3. Chakrabarty J. (1987) *Theory of Plasticity*. Mc Graw-Hill, New York.
4. Chen W. F., Han D. J. (1988) *Plasticity in structural engineering*. Springer-Verlag.
5. Đào Huy Bích (1975) *Cơ sở lý thuyết dẻo*. Nhà xuất bản ĐH và THCN.
6. Đào Huy Bích (2003) *Cơ học môi trường liên tục*. Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.
7. Đào Huy Bích (2000) *Lý thuyết đàn hồi*. Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.
8. Đào Huy Bích (1999) *Lý thuyết quá trình đàn dẻo*. Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.
9. Dao Huy Bich (1992) *The local theory of elasto-plastic deformation processes and the stability beyond elastic limits of thin-walled structures subjected to complex loading*. Journal of Mechanics, vol. 14, N° 1.
10. Dao Huy Bich (1994) *A boundary value problem of elasto-plastic deformation processes theory: existence and uniqueness theorems*. Journal of the Australian Mathematical Society, Series B-Appl. Math., vol. 35, part 4.
11. Dao Huy Bich (1995) *The loading parameter method in solving elasto-plastic stability problems of thin-walled structures under complex loading*. Proceeding of the International Conference on Analysis and Mechanics of Continuous Media, Ho Chi Minh City.
12. Drucker D. (1951) *A more fundamental approach to plastic stress-strain relations*. Proc. 1st US Nat. Congr. Appl. Mech.

13. Drucker D. (1959) *A definition of stable inelastic material*. J. of. appl. mech., v. 26, N° 1.
14. Drucker D. (1960) *Plasticity*. "Structural mechanics".
15. François D., Pineau A., Zaoui A. (1992) *Elasticité et plasticité*. Editions Hermes, Paris.
16. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. (1947) *On the mechanical behavior of metals in the strain hardening range*. Quart. Appl. Math. 4.
17. Heyman J. (1971) *Plastic Design of Frames*. Cambridge University Press.
18. Horne M. R. (1979) *Plastic theory of structures*. Pergamon Press, Oxford.
19. Johnson W., Sowerby R., Venter R. (1982) *Plane strain slip-line. Theory and Bibliography*. Pergamon Press, Oxford.
20. Koiter W. T. (1953) *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with singular yield surface*. Quart. Appl. Math. 11, N° 3.
21. Lensky V. S. (1960) *Analysis of plastic behaviour of metals under complex loading*. In: Plasticity, Proc. 2nd Symp. on Naval Structural Mechanics.
22. Lin T. H. (1958) *On stress-strain relations based on slips*. Proc. 3rd US Nat. Congr. Appl. Mech.
23. Lubliner J. (1990) *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company New York, Collier Macmillan Publishers London.
24. Martin J. B. (1975) *Plasticity: Fundamental and general results*. Cambridge.
25. Nadai A. (1963) *Theory of flow fracture of solids*, New York.
26. Nowacki W. K. (1978) *Stress waves in non-elastic solids*. Pergamon Press, Oxford.
27. Sanders J. L. (1954) *Plastic stress-strain relations based on linear loading function*. Proc. 2nd US. Nat. Congr. Appl. Mech.
28. Shield R. T., Ziegler H. (1958) *On Prager's hardening rule*. ZAMM 9a, N° 3.
29. Temam R. (1985) *Mathematical problems in plasticity*. Gauthier-Villars, Paris.
30. Van den Broek J. A. (1948) *Theory of limit design*. New York.

31. Yoshimaru Yoshimara (1958) *Comment on the slip theory of Badorf and Budiansky*. Bull. JSME 1, N° 2.
32. Ziegler H. (1959) *A modification of Prager's hardening rule*. Quart. Appl. Math. 17.
33. Баренблатт Г. И. (1953) *О распространении мгновенных возмущений в среде с линейной зависимостью напряжений от деформаций*. ПММ Т. 17, № 4.
34. Биргер И. А. (1963) *Метод дополнительных деформаций в задачах теории пластичности*. Известия АН СССР. Механика и машиностроение, Т. 1.
35. Боков В. В., Сидоров Е. А. (1973) *О сходимости двух итерационных методов, применяемых в теории пластичности*. Методы решения задач упругости и пластичности, № 7.
36. Ворович И. И., Красовский Ю. П. (1959) *О методе упругих решений*. ДАН СССР, Т. 126, № 4.
37. Вакуленко А. А. (1957) *Термодинамическое исследование зависимости напряжений и деформаций в изотропной упруго-пластической среде*. ДАН СССР, 126.
38. Вольмир А. С. (1963) *Устойчивость упругих систем*. Физматгиз М.
39. Гудър ДЖ, Н., Ходж Ф. Г. (1960) *Упругость и пластичность*. ИЛ.
40. Дао Зуй Бик (1965) *О гипотезе локальной определенности в теории пластичности*. Вестник МГУ, № 2.
41. Дао Зуй Бик (1966) *Экспериментальная проверка упрощенных вариантов теории пластичности*. Вестник МГУ, № 1.
42. Дао Зуй Бик (1965) *Исследование упрощенного варианта теории пластичности*. Кандидатская Диссертация. Москва.
43. Дао Зуй Бик (1981) *Некоторые свойства функций материала, фигурирующих в соотношениях теории пластичности*. Сб: Методы решения задач упругости и пластичности, Горький № 17.
44. Дао Зуй Бик (1982) *О теореме единственности краевой задачи теории пластичности с использованием гипотезы локальной определенности*. Известия АН СССР, МТТ, № 1.

45. Дао Зуй Бик (1983) *О приближенном методе решения краевой задачи теории пластичности при сложном нагружении*. Изв. Сев. Кавк. Научн. центра высш. школы, № 2.
46. Дао Зуй Бик (1981) *Модификация соотношений упругопластических процессов средней кривизны*. Вестник МГУ, сер. мат. и мех. № 5.
47. Дао Зуй Бик (1988) *Исследование краевой задачи локальной теории упруго-пластических процессов*. Докторская диссертация МГУ, Москва.
48. Дейвис Р. М. (1961) *Волны напряжений в твердых телах*. ИЛ.
49. Друкер Д., Прагер В., Гринберг Х. (1953) *Расширение теоремы в предельном состоянии для непрерывной среды*. Механика № 1.
50. Жуков А. М. (1961) *Поведение металлов при разгрузке и повторной нагрузке*. Инженерный журнал, Т. 1 № 1.
51. Ильюшин А. А. (1948) *Пластичность*. Гостехиздат, Москва.
52. Ильюшин А. А. (1954) *О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред*. ПММ, 18.
53. Ильюшин А. А. (1961) *Об основах математической теории пластичности*. Вопросы теории пластичности, АН СССР.
54. Ильюшин А. А. (1963) *Пластичность*. Издат. АН СССР.
55. Ильюшин А. А. (1960) *О приращении пластической деформации и поверхности текучести*. ПММ, Т. 24, в. 4.
56. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. (1960) *Упруго-пластические деформации полых цилиндров*. Издат. МГУ.
57. Ишлинский А. Ю. (1954) *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*. Украинский Мат. Журнал 6, в. 3.
58. Кадашев Ю. И., Новожилов В. В. (1958) *Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения*. ПММ, Т. 22, в. 1.
59. Качанов Л. М. (1969) *Основы теории пластичности*. Наука.
60. Койтер В. Т. (1960) *Соотношение между напряжениями и деформациями*. Механика № 2.
61. Койтер В. Т. (1961) *Общие теоремы теории упруго-пластических сред*. ИЛ.

62. Ленский В. С. (1961) *Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упруго-пластической деформации*. Вопросы теории пластической деформации. Вопросы теории пластичности, АН СССР.
63. Ленский В. С. (1962) *Гипотеза локальной определенности в теории пластичности*. Известия АН СССР, ОТН, № 5.
64. Ленский В. С., Ленский Э. В. (1985) *Трехчленное соотношение общей теории пластичности*. Известия АН СССР, МТТ, № 4.
65. Малинин Н. Н. (1975) *Прикладная теория пластичности и ползучести*. Машиностроение, Москва.
66. Малмсейстер А. К. (1961) *Об основах теории локальных деформаций*. Изв. АН СССР, № 8.
67. Мартин Д. (1965) *Теоремы для импульсного нагружения жестко-пластической среды*. Механика № 3.
68. Попов С. М. (1951) *Устойчивость свободно опертых пластинок за пределами упругости*. Инж. сборник АН СССР, Т. 9.
69. Прагер В. (1958) *Проблемы теории пластичности*. Физматгиз.
70. Прагер В., Ходж Ф. Г. (1956) *Теория идеально-пластических тел*. Гостехиздат.
71. Работнов Ю. И. (1966) *Ползучесть элементов конструкций*. Наука, Москва.
72. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. (1961) *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*. Физматгиз, Москва.
73. Сборник статей "Теория пластичности". ИЛ 1948.
74. Седов Л. И. (1970) *Механика сплошной среды*. Наука.
75. Соколовский В. В. (1969) *Теория пластичности*. Издат. Высшая школа.
76. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. (1966) *Пластинки и оболочки*. Наука.
77. Хилл Р. (1956) *Математическая теория пластичности*. Гостехиздат.
78. Шелли Ф. (1951) *Теория неупругой колонны*. Механика № 2.

LÝ THUYẾT DẪO VÀ CÁC ỨNG DỤNG

Chịu trách nhiệm xuất bản
BÙI HỮU HẠNH

Biên tập : LƯƠNG CAO PHI
Chế bản điện tử : PHÙNG QUANG TIÊU
Sửa bản in : LƯƠNG CAO PHI
Trình bày bìa : NGUYỄN HỮU TÙNG

In 500 cuốn khổ 17×24 cm, tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 136/XB-QLXB-06 ngày 13 - 02 - 2004. In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2004.

