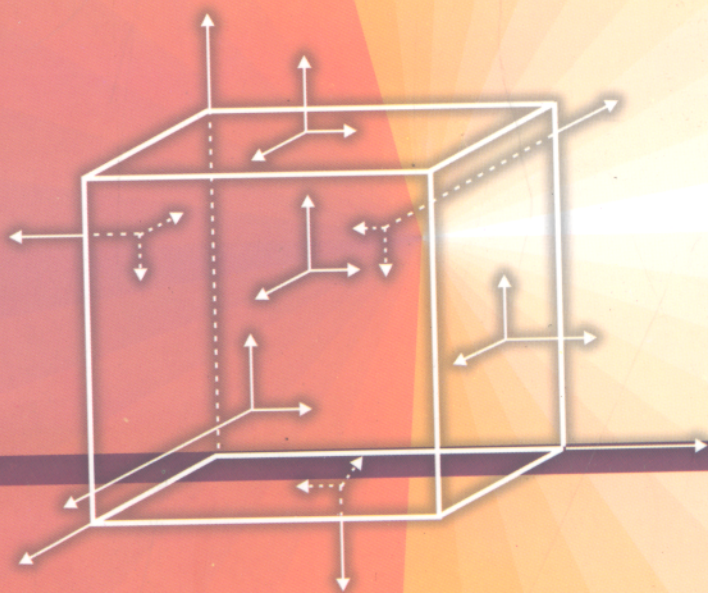


PGS. TS. NGUYỄN VĂN VƯỢNG

LÝ THUYẾT ĐÀN NHÓT



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

PGS, TS NGUYỄN VĂN VƯỢNG

LÝ THUYẾT ĐÀN NHÓT



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2004

LỜI NÓI ĐẦU

Hiện nay đất nước ta đang xây dựng nền công nghiệp hóa một cách khẩn trương để đến năm 2020 trở thành một nước công nghiệp. Do đó chúng ta đã và sẽ áp dụng nhiều máy móc, thiết bị hiện đại, công nghệ cao và xây dựng nhiều công trình lớn, vĩnh cửu.

Do đó chúng tôi thấy cần giới thiệu một tài liệu mà nó nhắc các nhà thiết kế, kiểm định khi tính toán cần lưu tâm đến thời gian tác dụng của tải trọng nhất là công trình sử dụng bê tông, chất dẻo cứng, vật liệu polyme ngay ở nhiệt độ bình thường và những vật liệu như thép, gang ở nhiệt độ cao. Đó là tài liệu về lý thuyết đàn nhớt nằm trong kiến thức ngành cơ học vật rắn biến dạng, nói rộng ra là của ngành lưu biến học.

Lý thuyết đàn nhớt gồm 2 phần: lý thuyết đàn nhớt tuyến tính và lý thuyết đàn nhớt phi tuyến.

Trong tài liệu này chúng tôi chỉ trình bày phần cơ sở lý thuyết đàn nhớt tuyến tính ở môi trường đẳng nhiệt. Khi cần tính đến ảnh hưởng của nhiệt độ sẽ sử dụng nguyên lý cộng tác dụng.

Nội dung được trình bày thành 8 chương, một chương phụ và một phụ lục.

Chương 1 và 2. Nhắc lại các phương trình cơ bản về chuyển vị, biến dạng ứng suất, quan hệ giữa biến dạng ứng suất và 2 định luật quan trọng của vật thể đàn hồi tuyến tính, đồng nhất, đẳng hướng nhằm hệ thống lại kiến thức để phục vụ các chương sau.

Chương 3 và 5. Trình bày vật đàn nhớt khi chịu lực 1 chiều và 3 chiều.

Chương 4. Trình bày phương pháp mô hình trong lưu biến để xét quy luật đối xử trong vật liệu đàn nhớt.

Chương 6. Trình bày phương pháp toán tử nêu lên quan hệ giữa ứng suất biến dạng.

Chương 7. Trình bày cách giải quyết bài toán đàn nhớt theo cách biến đổi Laplace.

Chương 8. Đi sâu vào các bài toán sóng để thấy sự khác nhau giữa vật thể đàn hồi và đàn hồi nhớt.

Chương phụ. Trình bày một vài nét về phương pháp moden phức biểu diễn vật đàn nhớt.

Phụ lục. Để cập phương pháp biến đổi Laplace giúp độc giả chưa biết phương pháp này có thể nắm được nội dung của phương pháp tính. Độc giả có thể đọc phần này trước khi đọc toàn bộ cuốn sách này.

Tài liệu này phục vụ các kỹ sư xây dựng, chế tạo máy và hy vọng trong thời gian tới trở thành một giáo trình cho học viên cao học sau đó cho sinh viên các ngành xây dựng, cơ khí.

Vì lần đầu tiên biên soạn, chắc còn nhiều thiếu sót. Chúng tôi rất cảm ơn và chân thành mong các bạn đồng nghiệp và các độc giả đóng góp ý kiến. Các ý kiến xin gửi về: Bộ môn cơ học vật liệu – kết cấu, khoa cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội và Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội.

Tác giả

Chương 1

CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG ỨNG SUẤT

Trong các giáo trình cơ học các môi trường liên tục, lý thuyết đàn hồi đã trình bày khá đầy đủ về những khái niệm, định nghĩa về chuyển vị, biến dạng và ứng suất.

Độc giả có thể xem [1] [2].

Trong chương này chúng tôi chỉ tóm tắt các phương trình cơ bản để độc giả đọc phần sau được liên tục.

§1. LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG

1. Khái niệm về chuyển vị

Xét một vật thể chịu lực và giả sử tại thời điểm $t = t_0$ vật thể chưa chịu lực có thể tích là V . Dưới tác dụng của ngoại lực vật thể bị biến dạng có thể tích là V' (đường chấm chấm hình 1.1). Một điểm M nào đó có tọa độ x, y, z ban đầu lúc chưa biến dạng, sau khi biến dạng chuyển đến vị trí mới M_1 có tọa độ x', y', z' .

Gọi vectơ $\overline{MM_1}$ là chuyển vị của điểm M khi biến dạng.

Các thành phần hình chiếu của vectơ $\overline{MM_1}$ được xác định bởi các biểu thức sau:

$$u = x' - x$$

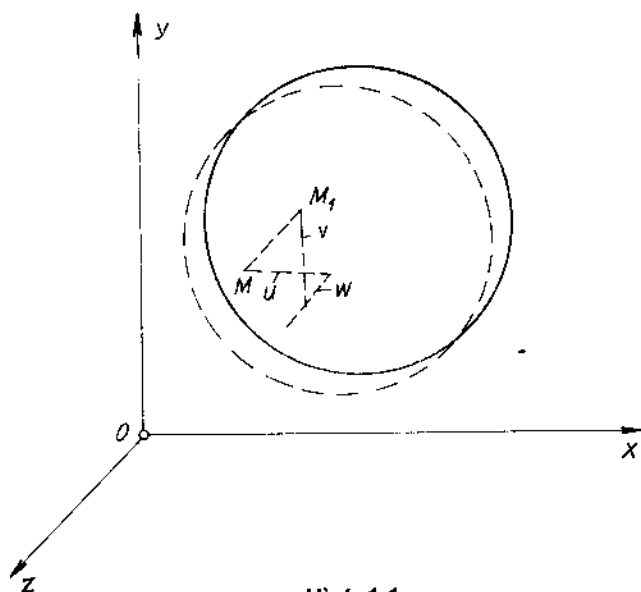
$$v = y' - y$$

$$w = z' - z$$

u, v, w - các thành phần chuyển vị của vectơ $\overline{MM_1}$ tương ứng với các trục x, y, z . Chuyển vị của những điểm khác nhau là không bằng nhau và là hàm số tọa độ của điểm:

$$\begin{aligned}
 u &= f_1(x, y, z) \\
 v &= f_2(x, y, z) \\
 w &= f_3(x, y, z)
 \end{aligned}$$

Hay viết gọn $u_i = f_i(x, y, z) \quad i = 1, 2, 3.$ (1.1)



Hình 1.1

2. Các phương trình động hình học

Biểu thức liên hệ giữa chuyển vị và biến dạng tại một điểm trong vật thể có dạng:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_x = \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \epsilon_y = \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \epsilon_z = \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

trong đó: ϵ - độ dãn dài tỷ đối.
 γ - độ biến dạng góc.

Biến dạng dài kèm theo một chỉ số chỉ phương xét biến dạng hoặc xét 2 chỉ số như nhau. Biến dạng góc kèm theo hai chỉ số chỉ mặt phẳng xét biến dạng.

Các phương trình (1.2) gọi là các phương trình động hình học, còn có tên là phương trình côsi (Cauchy).

$$\text{Công thức (1.2) được viết gọn dưới dạng } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$j = 1, 2, 3.$$

3. Trạng thái biến dạng

Trạng thái biến dạng tại một điểm được đặc trưng bởi tenxơ biến dạng ε_{ij} và được biểu diễn bởi các thành phần biến dạng sau:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Chúng ta có thể chia tenxơ biến dạng này thành tenxơ biến dạng cầu cộng tenxơ biến dạng lệch.

Tenxơ biến dạng cầu:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

Trong đó: ε_0 biến dạng dài tỷ đối trung bình:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (1.6)$$

$$\text{Viết gọn} \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} \quad (1.7)$$

Tenxơ biến dạng lệch e_{ij} :

$$\begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_o & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_o & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_o \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

hay

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \delta_{ij} \quad (1.9)$$

trong đó: δ_{ij} - ký hiệu Kronecker:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 & \text{nếu } i &= j \\ \delta_{ij} &= 0 & \text{nếu } i &\neq j \end{aligned} \quad (1.10)$$

4. Liên hệ giữa các thành phần quay cứng với các thành phần chuyển vị

Để hình ảnh hình học về biến dạng tại một thời điểm được đầy đủ và để sự tính toán được đối xứng ta phải đưa thêm vào 3 thành phần quay cứng theo 3 trục. Các thành phần quay cứng được xác định theo các biểu thức sau:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ w_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ w_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

trong đó: w_x ; w_y ; w_z - các thành phần quay cứng đối với các trục x, y, z.

5. Các phương trình liên tục

Giữa các biến dạng dài ε và các biến dạng góc γ phải liên hệ với nhau theo một biểu thức nào đó, để sau khi biến dạng các phần tử trong

vật thể không có sự gián đoạn vô cùng bé. Vật thể sau khi biến dạng vẫn là một môi trường liên tục. Các biểu thức đó là:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \cdot \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Các phương trình này gọi là các phương trình liên tục hay các phương trình tương thích có tên là phương trình Xanh Vơng (Saint Venant).

Viết gọn:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \epsilon_{jl}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_l} \quad (1.13)$$

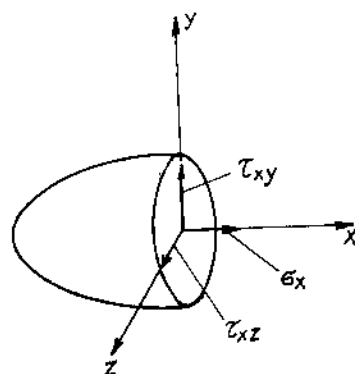
§2. LÝ THUYẾT ỨNG SUẤT

1. Các thành phần ứng suất tại một điểm

Ứng suất tại một điểm M bất kỳ trên mặt cắt là một vectơ ký hiệu $\vec{p}$. Tổng quát của $\vec{p}$ có giá trị và phương bất kỳ. Để thuận lợi ta phân ứng suất ra làm hai thành phần:

Thành phần nằm vuông góc với mặt cắt gọi là ứng suất pháp, kí hiệu σ kèm theo một chỉ số, chỉ phương của pháp tuyến, ví dụ σ_x .

Thành phần nằm trong mặt cắt gọi là ứng suất tiếp. Trong hệ toạ độ vuông góc được phân thành hai thành phần ứng suất tiếp kí hiệu là τ kèm theo hai chỉ số, chỉ số thứ nhất chỉ chiều của pháp tuyến ngoài mặt cắt, chỉ số thứ hai chỉ phương ứng suất tiếp song song, ví dụ, τ_{xy} và τ_{xz} (hình 1.2).



Hình 1.2

Mặt trên đó không có ứng suất tiếp, ta gọi là mặt chính. Ứng suất pháp trên mặt chính gọi là ứng suất chính. Tổng quát qua một điểm bao giờ cũng tìm được 3 mặt chính vuông góc với nhau từng đôi một. Ứng suất chính trên 3 mặt chính được kí hiệu $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ về giá trị đại số.

2. Trạng thái ứng suất tại một điểm

Trạng thái ứng suất tại một điểm đặc trưng bởi tenxơ ứng suất σ_{ij} và được biểu diễn bởi các thành phần ứng suất sau:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

Tenxơ ứng suất σ_{ij} được chia thành hai tenxơ ứng suất sau:

+ Tenxơ ứng suất cầu

$$\begin{Bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

+ Tenxơ ứng suất lệch S_{ij} :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Hay $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \cdot \delta_{ij}$ (1.17)

Trong đó σ_0 – ứng suất trung bình $\sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \cdot \sigma_{ij}$ (1.18)

Tenxơ ứng suất cầu chỉ gây nên biến dạng thể tích còn tenxơ ứng suất lệch chỉ gây ra biến dạng góc, nghĩa là gây nên biến đổi hình dáng.

3. Phương trình vi phân cân bằng chuyển động trong hệ tọa độ vuông góc

Xét phần tử hình hộp có các cạnh dx, dy, dz , hình 1.3, được tách ra từ một vật thể chịu tác dụng của hệ lực. Hệ lực này gồm có các lực bề mặt trên biên vật thể và lực thể tích ở bên trong vật thể. Theo nguyên lý Đalămbe, ở thời điểm t phần tử ở trạng thái cân bằng sẽ chuyển động khi đặt vào các lực quán tính. Bằng cách lấy tổng hình chiếu các lực trên ba trục sẽ được ba phương trình vi phân cân bằng sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Viết gọn $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ (1.20)

trong đó: $i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3$

f_1, f_2, f_3 – các thành phần hình chiếu của cường độ lực thể tích lên các trục tọa độ;

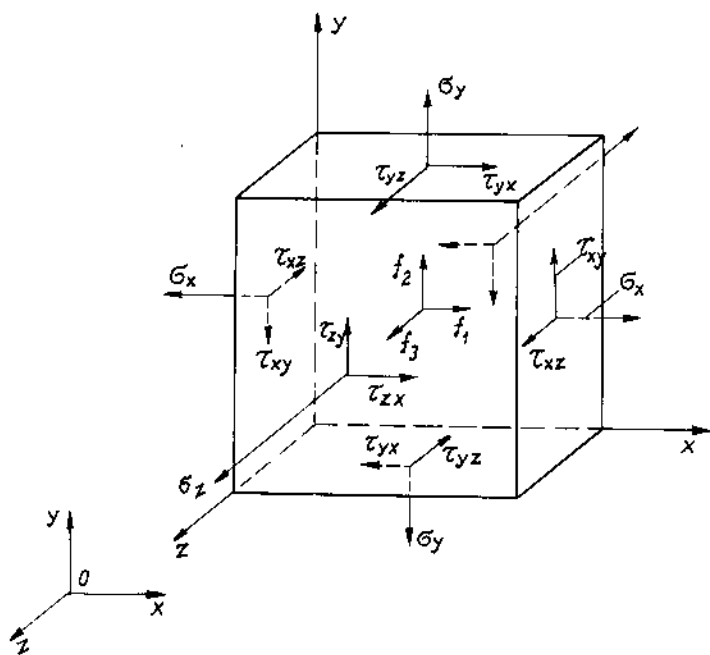
ρ – khối lượng riêng;

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ – gia tốc của các chuyển vị.

Tổng mômen các lực đối với 3 trục:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_z = 0 \text{ ta được } \tau_{yx} &= \tau_{xy} \\ \sum M_y = 0 \text{ ta được } \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \sum M_x = 0 \text{ ta được } \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Biểu thức (1.21) được phát biểu thành định luật đối ứng của ứng suất tiếp: “Trên mặt cắt nào đó có ứng suất tiếp thì trên mặt cắt vuông góc với mặt cắt đó cũng có ứng suất tiếp cùng giá trị nhưng ngược dấu”.



Hình 1.3

Chương 2

QUAN HỆ GIỮA CÁC ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG CỦA VẬT THỂ ĐÀN HỒI

Chương trên chúng ta đã xét về ứng suất nhằm giải đáp khía cạnh động lực học, tĩnh học của bài toán và đã xét về chuyển vị, biến dạng nhằm giải đáp bài toán theo quan điểm động hình học. Bản thân hai lý thuyết đó không đủ để giải các bài toán vật lý của cơ học vật rắn biến dạng dưới tác dụng của các lực ngoài đặt lên nó. Vì giữa ứng suất và biến dạng chưa có một định luật vật lý nào ràng buộc nhau. Trong chương này chúng ta đề cập đến mối tương quan giữa ứng suất và biến dạng của vật thể đàn hồi tuyến tính một cách sơ lược để sau đó sẽ trình bày chi tiết hơn cho vật thể đàn hồi nhớt tuyến tính, nghĩa là, đề cập đến tính chất vật lý của bài toán.

§1. SỰ LIÊN HỆ GIỮA CÁC THÀNH PHẦN ỨNG SUẤT VỚI THÀNH PHẦN BIẾN DẠNG Ở VẬT THỂ ĐỒNG NHẤT, ĐẲNG HƯỚNG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH

Trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính, được biết ở vật thể đồng nhất, đẳng hướng thì quan hệ giữa ứng suất, biến dạng được mô tả bằng định luật Húc, tổng quát có dạng:

+ Đối với biến dạng dài:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

+ Đối với biến dạng trượt:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{12} \\ \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{23} \\ \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} = 2\mu \varepsilon_{31} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Hai biểu thức (2.1) và (2.2) có thể viết gọn ở dạng sau:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij} \quad (2.3)$$

trong đó: δ_{ij} - kí hiệu Krônecke;

λ, μ - các hằng số Lamê;

θ - độ biến dạng thể tích tỷ đối.

Ta thấy ở vật đàn hồi tuyến tính đẳng hướng chỉ có hai hằng số đàn hồi là độc lập. Ví dụ, hai hằng số Lamê λ, μ , và tồn tại hai định luật quan trọng là:

- Định luật biến đổi thể tích: "Ứng suất trung bình tại 1 điểm bằng biến dạng tỷ đối trung bình tại điểm đó nhân với hệ số $3K$ ".

- Định luật biến đổi hình dạng: "Tenxơ ứng suất lệch tại 1 điểm bằng tenxơ biến dạng lệch tương ứng nhân với hệ số $2G$ ".

Biểu thức toán học của hai định luật trên là:

$$\sigma_0 = 3K \cdot \varepsilon_0 \quad (2.4)$$

$$S_{ij} = 2G \cdot \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

trong đó: σ_0 - ứng suất trung bình;

ε_0 - biến dạng tỷ đối trung bình;

S_{ij} - tenxơ ứng suất lệch;

K - môđun thể tích;

G - môđun trượt.

§2. HỆ THỨC GIỮA CÁC HẰNG SỐ ĐÀN HỒI

Vật liệu đẳng hướng chỉ có hai hằng số đàn hồi là độc lập, ví dụ, hai hằng số Lamê: λ, μ . Trong kỹ thuật nhiều khi còn sử dụng các hằng số đàn hồi khác như:

E - môđun khi kéo nén (môđun Young).

G - môđun trượt.

K - môđun thể tích.

ν - hệ số biến dạng ngang (hệ số Poatxông)

Ta hãy tìm các hệ thức giữa các hằng số nêu trên với hai hằng số Lamé: λ, μ .

1. Môđun đàn hồi khi kéo nén (môđun Young), E

Xét trường hợp vật thể đẳng hướng chịu kéo theo trục x.

Trạng thái ứng suất tại mỗi điểm của vật thể là trạng thái đơn được xác định theo biểu thức:

$$\sigma_{xx} \neq 0 ; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Đặt hệ thức này vào (2-1) ta nhận được hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx} \\ 0 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy} \\ 0 &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Cộng theo vế các phương trình trên được:

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{xx} \quad (2.7)$$

Đặt θ vào phương trình đầu được:

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \varepsilon_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (2.8)$$

Từ đó suy ra:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.9)$$

2. Hệ số Poatxông

Khi kéo $\vec{F}$ thành theo phương x chẳng hạn, theo định nghĩa, hệ số biến dạng ngang được xác định bởi tỷ số âm giữa độ giãn dài theo phương ngang và phương dọc, biểu thức toán học có dạng:

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = - \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad (2.10)$$

Trong đó: ε_{xx} – biến dạng theo phương dọc.

Từ hai phương trình sau của (2.6) và chú ý tới (2.7), suy ra:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda\theta}{2\mu} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx} \quad (2.11)$$

Thay giá trị tại σ_{xx} theo (2.8) vào (2.11) ta được:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \varepsilon_{xx}$$

Vậy hệ số Poatxông được xác định bởi hệ thức:

$$\nu = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.12)$$

3. Môđun thể tích K

Trong trường hợp nén đều về mọi phía, trạng thái ứng suất tại 1 điểm được xác định bởi các thành phần sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Thay các giá trị theo (2.13) vào (2.1) ta được

$$2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda\theta = -p$$

$$2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda\theta = -p$$

$$2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda\theta = -p$$

Cộng từng vế 3 phương trình lại ta có:

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = -3p$$

Suy ra
$$p = -\left(\lambda + \frac{1}{2}\mu\right)\theta = -K\theta$$

Trong đó môđun nén thể tích sẽ là:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.14)$$

1. Môđun trượt G

Giả sử, hình trụ dài tiết diện chữ nhật có trục hướng theo trục x, chịu lực tiếp F tác dụng lên mỗi đơn vị độ dài cạnh.

Môđun trượt được xác định bởi hệ thức sau.

$$G = \frac{F}{\varphi} \quad (2.15)$$

Trong đó φ - góc trượt.

Với biến dạng như vậy, mọi thành phần biến dạng bằng không, ngoại trừ $\tau_{yz} = F$.

Theo (2.1) ta có:

$$\tau_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz}$$

Vậy $G = \mu$

Ta thấy rằng, các hằng số đàn hồi phụ thuộc lẫn nhau. Nếu lấy một đôi bất kỳ làm hằng số độc lập, các hằng số khác sẽ biểu thị qua nó, bảng 2.1.

Bảng 2.1. Bảng liên hệ các hằng số đàn hồi

Hằng số đàn hồi	Đôi chính				
	λ, μ	K, G	μ, ν	E, ν	E, G
λ		$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$\mu = G$	μ	G	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	G
K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	K	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$2(1+\nu)\mu$	E	E
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3K-2G}{6K+2G}$	ν	ν	$\frac{E}{2G} - 1$

Chương 3

QUAN HỆ GIỮA CÁC THÀNH PHẦN ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG Ở VẬT LIỆU ĐÀN NHÓT TUYẾN TÍNH

Vật liệu ở thể đàn hồi nhớt có những đặc điểm cơ lý khác vật liệu ở thể đàn hồi. Đặc điểm nổi bật là quan hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng phụ thuộc vào lịch sử đặt tải, yếu tố thời gian và hai hiện tượng đặc trưng là *rão* và *trùng*.

Hiện tượng *rão*: khi ứng suất có giá trị không đổi nhưng biến dạng của vật thể vẫn tiếp tục giảm theo thời gian.

Hiện tượng *trùng* (Rêlácxasi): khi biến dạng có giá trị không đổi nhưng ứng suất trong vật thể vẫn tiếp tục giảm theo thời gian.

Để xây dựng qui luật đối xử của vật liệu, trước hết hãy làm một số thí nghiệm cơ bản ở trạng thái ứng suất một chiều sau.

§1. CÁC THÍ NGHIỆM CƠ BẢN

1. Thí nghiệm *rão* (từ biến)

Kéo một mẫu vật liệu pôlime hay nén một mẫu hình trụ bằng bê tông sẽ thấy: giữ tải trọng không đổi nhưng biến dạng vẫn tiến triển theo thời gian mặc dù giá trị lực đặt vào bé hơn giá trị lực phá huỷ (vật liệu dẻo là giới hạn chảy, vật liệu đàn hồi là giới hạn bền), thậm chí lực đặt vào còn nằm dưới giới hạn tỷ lệ. Sự tiến triển biến dạng còn phụ thuộc vào lịch sử đặt tải, vận tốc đặt tải và cất tải.

Chúng ta hãy xét một trường hợp đặc biệt về lịch sử đặt tải đơn giản được định nghĩa như sau:

Tại thời điểm $t < t_0$ vật ở trạng thái không tải $\sigma = 0$, đến khi $t \geq t_0$ ứng suất có bước nhảy về biên độ σ_0 , nghĩa là:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot h(t - t_0) \quad (3.1)$$

Trong đó: h – hàm Hêviside⁽¹⁾ (hình 3.1).

Quan sát sự tiến triển của biến dạng ε theo thời gian, sẽ thấy:

- + Khi $t < t_0$ thì $\varepsilon = 0$.
- + Khi $t = t_0$ thành linh ε có bước nhảy bằng giá trị biến dạng đàn hồi của vật liệu.
- + Khi $t > t_0$ biến dạng ε tăng theo thời gian.

Để đơn giản người ta viết sự tiến triển của ε là hàm của thời gian dưới dạng sau:

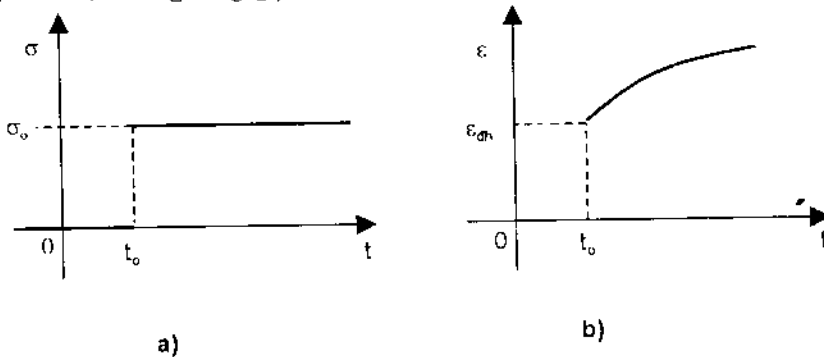
$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot J(t_0, t, \sigma_0) \quad (3.2)$$

Trong đó:

$$J(t_0, t, \sigma_0) = 0 \text{ khi } t < t_0$$

$$J(t_0, t, \sigma_0) \text{ tăng theo } t \text{ khi } t > t_0.$$

Thí nghiệm này gọi là thí nghiệm rão (từ biến) thực hiện ở thời điểm t_0 , hàm J tương ứng gọi là hàm rão.



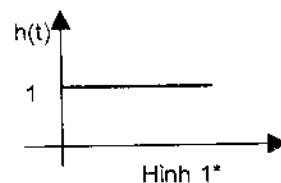
Hình 3.1. Thí nghiệm rão ở thời điểm t_0

a) bước nhảy ứng suất;

b) đường cong biến dạng.

⁽¹⁾ Hàm Hêvisaide

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t \geq 0 \end{cases} \text{ được biểu diễn trên hình 1*}$$



2. Thí nghiệm trùng (Rêlăcxasi)

Thật là tự nhiên khi nghĩ đến một thí nghiệm “đổi ngẫu” đối với thí nghiệm trên.

Tại thời điểm t_0 biến dạng có bước nhảy về biên độ ε_0 . Biểu thức toán học của nó có dạng:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t - t_0) \quad (3.3)$$

Trong đó: h – hàm Hêviside.

Quan sát lời giải của ứng suất, ta thấy:

- + Khi $t < t_0$ ứng suất bằng 0,
- + Khi $t = t_0$ ứng suất có bước nhảy tương ứng với ứng suất đàn hồi của vật liệu sau đó nó giảm dần theo thời gian.

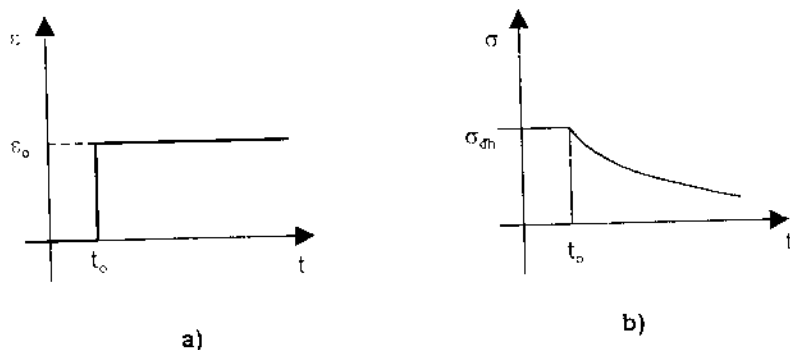
Bản chất ở đây tương tự như ở (3.2). Biểu thức toán học của σ tiến triển là hàm của thời gian, có dạng:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t_0, t, \varepsilon_0)$$

trong đó: $R(t_0, t, \varepsilon_0) = 0$ khi $t < t_0$;

R biểu diễn bước nhảy khi $t = t_0$;

R là hàm giảm dần theo thời gian khi $t > t_0$.



Hình 3.2. Thí nghiệm trùng ở thời điểm t_0 .

a) bước nhảy biến dạng;

b) lời giải của ứng suất.

Thí nghiệm này gọi là thí nghiệm trùng thực hiện ở thời điểm t_0 với biến dạng có biên độ ε_0 , hàm R gọi là hàm trùng tương ứng.

3. Thí nghiệm về sự phục hồi (thí nghiệm bỏ tải)

Khi $t = t_1$ ta bắt đầu bỏ tải (cắt tải tức thời).

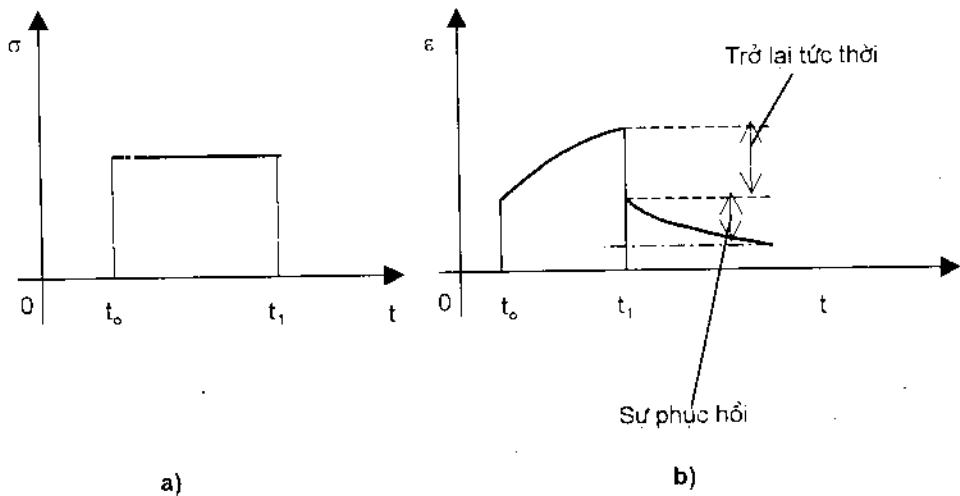
Biểu thức ứng suất có dạng:

$$\sigma(t) = \sigma_0 [h(t - t_0) - h(t - t_1)] \quad t_0 < t_1 \quad (3.5)$$

Quan sát biến dạng ta thấy:

- + Khi $t < t_1$ đồ thị giống hình 3.1 (thí nghiệm rão).
- + Khi $t = t_1$ nó có bước nhảy xuống một giá trị biên độ bằng bước nhảy khi $t = t_0$ nếu tính đàn hồi tức thời của vật liệu không đổi.
- + Khi $t > t_1$ biến dạng tiếp tục giảm như hình 3.3.

Quá trình này gọi là sự phục hồi. Biến dạng còn lại là biến dạng dư.



Hình 3.3. Thí nghiệm về sự phục hồi.

a) đồ thị của ứng suất;

b) đồ thị quá trình biến dạng.

4. Thí nghiệm về sự xoá ứng suất

Đây là một thí nghiệm “đổi ngẫu” với thí nghiệm về sự phục hồi. Tiếp tục quan sát thí nghiệm sau tác dụng.

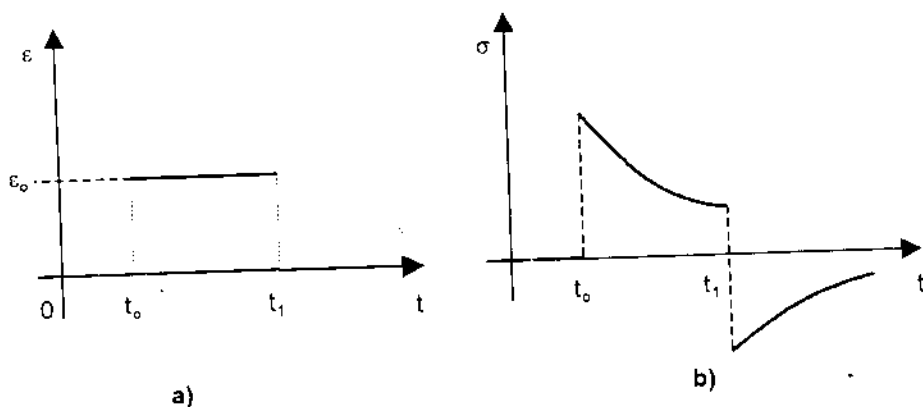
Biểu thức toán học của biến dạng sau tác dụng có dạng:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0[h(t - t_0) - h(t - t_1)] \quad t < t_1 \quad (3.6)$$

có nghĩa là tại thời điểm t_1 , ta cho biến dạng ε nhảy một bước xuống giá trị $\varepsilon_0 = 0$. Quan sát ứng suất tiếp tục biến đổi theo thời gian ta thấy:

- + Khi $t < t_1$ đồ thị của ứng suất theo thời gian như hình 3.4b (thí nghiệm trùng).
- + Khi $t = t_1$ giá trị ứng suất nhảy xuống một giá trị bằng giá trị khi nhảy lên lúc $t = t_0$ nếu vật liệu bị biến dạng đàn hồi không bị biến điệu. Lúc này ứng suất bị thay đổi dấu (hình 3.4b).
- + Khi $t > t_1$ người ta nhận thấy rằng giá trị tuyệt đối của ứng suất giảm dần (hình 3.4b). Đó thực chất là sự xoá ứng suất (nó có thể là tổng thể hay từng phần).

Ứng suất còn lại trong vật liệu gọi là ứng suất dư.



Hình 3.4. Thí nghiệm về sự xoá ứng suất.
a) đồ thị biến dạng;
b) đồ thị ứng suất

§2. ĐÀN NHÓT TUYẾN TÍNH

Trạng thái ứng suất một chiều (trạng thái ứng suất đơn).

Nói một cách tổng quát, qui luật đối xử của vật liệu được thể hiện bằng phiếm hàm tương ứng giữa lịch sử của ứng suất và lịch sử của biến dạng. Trong trường hợp ứng suất một chiều (trạng thái ứng suất

đơn) chính là sự tương ứng giữa lịch sử của ứng suất σ và lịch sử của biến dạng ϵ .

Vậy tại thời điểm t , biến dạng $\epsilon(t)$ phụ thuộc vào lịch sử ứng suất σ mà biểu thức toán học có thể viết ở dạng.

$$\epsilon(t) = F_t [\sigma]_{-\infty}^t \quad (3.7)$$

1. Định nghĩa

Đối xử vật liệu là tuyến tính nếu phép hàm tương ứng giữa lịch sử của ứng suất σ và của biến dạng ϵ thuộc dạng (3.7) là tuyến tính.

2. Tính chất của vật liệu đàn nhớt tuyến tính

Từ định nghĩa trên ta suy ra một số tính chất sau của vật liệu đàn nhớt tuyến tính.

+ Đối với thí nghiệm rã thực hiện ở thời điểm t_0 . Lời giải $\epsilon(t)$ là tỷ lệ với σ_0 hay nói một cách khác hàm rã $J(t, t_0, \sigma_0)$ là độc lập với σ_0 . Có nghĩa:

- Nếu lực tác động là:

$$\sigma(t) = \sigma_0 h(t - t_0) \quad (3.8)$$

$$\text{Thì ta có lời giải} \quad \epsilon(t) = \sigma_0 J(t - t_0) \quad (3.9)$$

Điều này tương tự với thí nghiệm trùng. Hàm trùng $R(t_0, t, \epsilon_0)$ là độc lập với ϵ_0 có nghĩa:

$$\text{- Nếu lực tác động là} \quad \epsilon(t) = \epsilon_0 h(t - t_0) \quad (3.10)$$

$$\text{Thì lời giải là} \quad \sigma(t) = \epsilon_0 R(t - t_0) \quad (3.11)$$

+ Cộng tác dụng hai lịch sử ta được kết quả là cộng tác dụng của hai lời giải.

$$\epsilon(t) = f[\sigma^{(1)}(\tau) + \sigma^{(2)}(\tau)]_{-\infty}^t = f[\sigma^{(1)}(\tau)]_{-\infty}^t + f[\sigma^{(2)}(\tau)]_{-\infty}^t \quad (3.12)$$

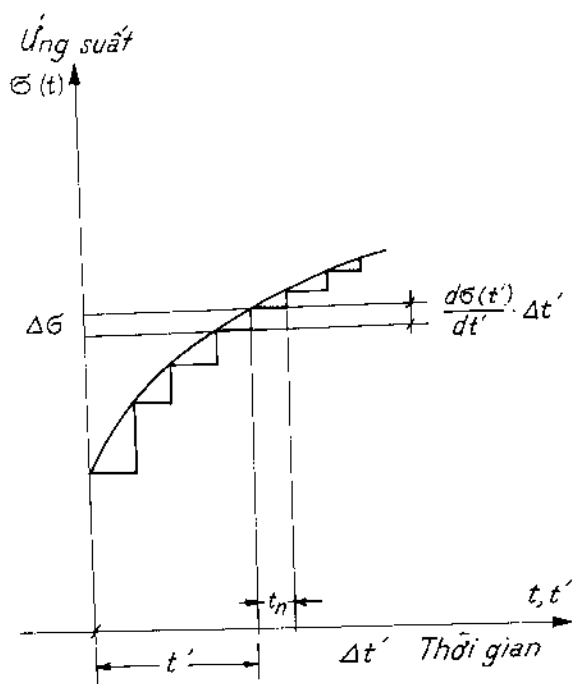
Tất nhiên ta có các công thức tương tự khi hoán vị vai trò của σ và ϵ .

Biểu thức (3.12) biểu thị nguyên lý cộng tác dụng theo nghĩa truyền thống và có tên là nguyên lý cộng tác dụng của Bôizôman (Boltzman).

§3. QUAN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG (CÔNG THỨC BÔIĐOMAN)

Ta biết, sự tuyến tính đối xử cho phép mô tả tất cả lời giải của lịch sử tác động (ứng suất hay biến dạng) kể từ khi biết được hàm rã hoặc hàm trùng.

Thật vậy, xét một vật thể chịu một ứng suất $\sigma(t)$ là hàm của thời gian như hình 3.5.



Hình 3.5

Ứng suất này có thể xem như tổng nhiều phần tử $\Delta\sigma$ không đổi tác dụng dưới dạng bước nhảy không đổi:

$$\Delta\sigma(t_1); \Delta\sigma(t_2); \dots \Delta\sigma(t_n)$$

Dưới tác dụng của mỗi bước nhảy, ví dụ, $\Delta\sigma(t_i)$ sẽ gây ra biến dạng phân tử là:

$$\Delta\varepsilon(t_i) = J(t - \tau_i) \cdot \Delta\sigma(t_i) \quad (a)$$

Ta thấy biến dạng này chỉ là hàm của thời gian $(t - \tau_i)$ và nó không bị ảnh hưởng bởi gia số ứng suất nào trước và sau nó.

Theo đó ta có:

$$\varepsilon(t) = J(t - \tau_1) \cdot \Delta\sigma(t_1) + J(t - \tau_2) \cdot \Delta\sigma(t_2) + \dots + J(t - \tau_n) \cdot \Delta\sigma(t_n) \quad (b)$$

Khi cho $\Delta t = (t - \tau_i)$ dần tới 0, ta có thể viết (b) dưới dạng sau:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) \cdot d\tau \quad (3.13)$$

Công thức (3.13) cũng có thể viết dưới dạng tích phân:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.14)$$

Bởi vì:
$$d\sigma(\tau) = \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau = \dot{\sigma}(\tau) \cdot d\tau$$

Nếu ta xét một lịch sử mà chỉ bắt đầu ở thời điểm t_0 hoặc ở thời điểm ban đầu $t = 0$ thì biểu thức (3.14) viết ở dạng:

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.15)$$

hay

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) \cdot d\tau \quad (3.16)$$

Bằng cách lấy tích phân từng phần biểu thức (3.14), ta được:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \cdot J(t, t) - \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial J}{\partial \tau}(\tau, t) \cdot d\tau \quad (3.17)$$

Và đối với lịch sử bắt đầu ở thời điểm t_0 là:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \cdot J(t, t_0) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial J}{\partial \tau}(\tau, t) \cdot d\tau \quad (3.18)$$

Và đối với lịch sử bắt đầu ở thời điểm $t_0 = 0$ là:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t).J(t,t) - \int_0^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial J}{\partial \tau}(\tau,t) \cdot d\tau \quad (3.19)$$

Trong các công thức này $\frac{\partial J}{\partial \tau}(\tau,t)$ thể hiện như lời giải quan sát ở thời điểm t do xung đơn vị thực hiện ở thời điểm $\tau < t$. Đó chính là một hàm số trên tất cả khoảng tích phân.

Làm tương tự, bằng cách hoán vị vai trò của σ và ε ta nhận được:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(\tau,t) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau \quad (3.20)$$

Và đối với một lịch sử bắt đầu ở thời điểm t_0 là:

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t R(\tau,t) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau \quad (3.21)$$

Ở thời điểm ban đầu $t = 0$ là:

$$\sigma(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) \cdot R(\tau,t) \cdot d\tau \quad (3.22)$$

Bằng cách lấy tích phân từng phần biểu thức (3.20), (3.21), (3.22) ta được:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \cdot R(t,t) - \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial R}{\partial \tau}(\tau,t) \cdot d\tau \quad (3.23)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \cdot R(t,t) - \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial R}{\partial \tau}(\tau,t) \cdot d\tau \quad (3.24)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \cdot R(t,t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) \frac{\partial R}{\partial \tau}(\tau,t) \cdot d\tau \quad (3.25)$$

Những công thức (3.17), (3.18), (3.19) và (3.23), (3.24), (3.25) nói lên rằng quan hệ giữa biến dạng và ứng suất (hay giữa ứng suất và biến dạng) ở trong trạng thái ứng suất một chiều của vật đàn nhớt tuyến tính, có tên là biểu thức Bôizoman.

§4. VẬT LIỆU ĐÀN NHÓT TUYẾN TÍNH KHÔNG LÃO HOÁ

1. Định nghĩa

Đối xử vật liệu gọi là không lão hoá khi bản chất cơ học của vật liệu không tiến triển với thời gian. Nói cách khác về mặt toán học bản chất cơ học của vật liệu là bất biến với thời gian, có nghĩa lời giải ở thời điểm t do tác động ở thời điểm t_0 cũng giống như lời giải ở thời điểm $t + \tau$ do tác động ở thời điểm $\tau + t_0$.

2. Tính chất

Sự bất biến do tịnh tiến kéo theo hàm rã và hàm trùng $J(t_0, t)$ và $R(t_0, t)$ chỉ là hàm một biến.

Thực vậy ta có:

$$J(t_0, t) = J(0, t - t_0) \quad \text{bất biến với sự tịnh tiến} \quad (3.26)$$

Có nghĩa là:

$$J(t_0, t) = f(0, t - t_0) \quad (3.27)$$

Trong đó: $f(\tau) = 0$ nếu $\tau < 0$.

$$\text{Cũng vậy: } R(t_0, t) = g(t - t_0) \quad (3.28)$$

Trong đó: $g(\tau) = 0$ nếu $\tau < 0$.

Do đó những công thức (3.14), (3.20) và những công thức Boizơman khi thay $J(\tau, t)$ và $R(\tau, t)$ theo biểu thức (3.27), (3.28) bằng các hàm f và g có đối số $(t - \tau)$ ta được công thức Boizơman:

+ Cho ε :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t).f(0) \pm \int_{-\infty}^t \sigma(\tau).f'(t - \tau).d\tau \quad (3.29)$$

+ Cho σ :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t).g(0) \pm \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau).g'(t - \tau).d\tau \quad (3.30)$$

Như đã nói, các hàm f và g có giá trị R^+ . $f(0)$ và $g(0)$ biểu diễn bước nhảy của hàm ở gốc, f' và g' là những hàm trên tất cả khoảng lấy tích

phân như những đạo hàm $\frac{\partial J}{\partial \tau}$, $\frac{\partial R}{\partial \tau}$ ở mục (§3). Mặt khác những lịch sử của σ và ε có giá trị giới hạn bên trái: kích động là bằng không ở thời gian $t = -\infty$ và bắt đầu ở thời điểm hữu hạn.

Ta thấy, biểu thức (3.29), có thể biểu diễn ε như là tích chập (của Rieman) * của hàm σ và đạo hàm của f . Theo nghĩa các hàm suy rộng kí hiệu * là tích chập⁽²⁾ ta có:

$$\varepsilon = f' * \sigma \quad (\approx f * \sigma') \quad (3.31)$$

Tích chập này cũng được gọi là tích chập Stiltje của hàm f và của σ .

Tương tự, xuất phát từ công thức (3.30), ta có:

$$\sigma = g' * \varepsilon \quad (\approx g * \varepsilon') \quad (3.32)$$

Những đạo hàm tham gia trong các công thức được lấy theo nghĩa các hàm suy rộng. Thực vậy ở đây chính các hàm f , g , σ , ε là những hàm của thời gian liên tục và có đạo hàm từng đoạn.

⁽²⁾ Định nghĩa tích chập của hai hàm số:

$$\text{Cho hai hàm số} \quad f(t) \text{ và } g(t). \quad (3.35)$$

$$\text{Tích phân} \quad \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau$$

là một hàm số của t và được gọi là tích chập của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$. Nó được kí hiệu là $f * g$.

$$f * g = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (3.36)$$

Tính chất:

- Tích chập có tính giao hoán, nghĩa là:

$$f * g = g * f$$

Thật vậy.

Dùng phép biến đổi $\tau_1 = t - \tau$, $d\tau = -d\tau_1$, ta có:

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = - \int_t^0 f(t - \tau_1) \cdot g(\tau_1) \cdot d\tau_1 \\ &= \int_0^t g(\tau_1) \cdot f(t - \tau_1) \cdot d\tau_1 = g * f \end{aligned}$$

- nếu $f(t)$ và $g(t)$ là những hàm gốc thì $f * g$ cũng là hàm gốc (định nghĩa hàm gốc xin xem phụ lục).

Từ những công thức (3.31), (3.32), ta thấy rằng f' và g' là nghịch đảo trong tích chập Rieman:

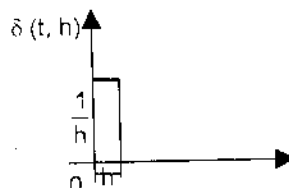
$$f' * g' = \delta^{(3)} \quad (3.33)$$

trong đó: δ - hàm Dirac - Delta $f' * g = f * g' = h(t) \quad (3.34)$

$h(t)$ - hàm Hêviside

(3) Hàm Dirac - Delta:

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} [h(t) - h(t-h)] = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{khi } 0 < t < h \\ 0 & \text{khi } t < 0 \\ & \text{khi } t > h \end{cases}$$



Hình 2*

như hình 2* nếu xem $\delta(t, h)$ như một lực có cường

độ $\frac{1}{h}$ tác dụng trong thời gian $0 < t < h$, thì lực này tạo nên một xung bằng 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, h) dt = \int_0^h \frac{1}{h} dt = 1$$

Xung này luôn luôn bằng 1 với mọi h .

Cho $h \rightarrow 0$, theo lý thuyết giải tích cổ điển hàm $\delta(t, h)$ không dẫn tới một giới hạn nào cả. Tuy vậy Dirac coi như $\delta(t, h)$ có giới hạn là hàm $\delta(t)$ và được định nghĩa như sau:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, h) dt = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \neq 0 \\ \infty & \text{khi } t = 0 \end{cases}$$

Vì $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, h) dt = 1$ với mọi h nên lập luận của Dirac dẫn tới hệ quả:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, h) dt = \int_0^h \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) dt = 1$$

Về mặt vật lý hàm $\delta(t)$ có thể coi như một lực có cường độ vô cùng lớn khi $t = 0$ và triệt tiêu với mọi $t \neq 0$ lực này tạo nên một xung bằng đơn vị.

Các tính chất (không chứng minh) khác:

a/ Nếu $\varphi(t)$ là một hàm liên tục thì: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$

b/ $\frac{d h(t)}{dt} = \delta(t)$

Hàm Dirac, hàm Dirac - Delta đã đưa vào một cách không phù hợp với logic toán học. Tuy vậy sử dụng nó trong các bài toán vật lý, kỹ thuật làm đơn giản rất nhiều các phép toán. Vì thế nó vẫn được sử dụng rộng rãi. Chỉ mới gần đây nhờ lý thuyết hàm suy rộng các nhà toán học mới đặt cơ sở chính xác cho hàm Dirac.

Chương 4

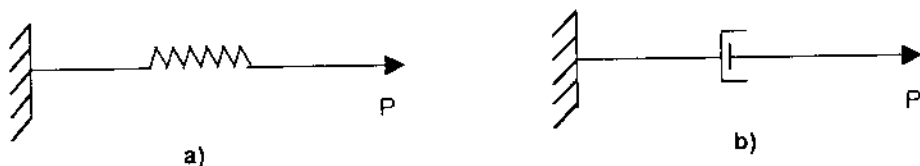
PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH

Người ta thường sử dụng các mô hình lưu biến như một sự hỗ trợ trong việc công thức hoá cách đối xử đàn nhớt tuyến tính đơn trục.

Lợi ích của phương pháp này là dẫn đến việc công thức hoá định luật đối xử mà nó thoả mãn một cách tự động các nguyên lý của nhiệt động học.

Ở đây chỉ đưa ra một vài chỉ dẫn về những mô hình đàn nhớt không lão hoá liên quan đến việc áp dụng cho tính toán kết cấu trong kỹ thuật.

Đàn nhớt tuyến tính không lão hoá là sự hợp thành từ hai mô hình cơ bản: đàn hồi tuyến tính hình 4.1a và nhớt tuyến tính hình 4.1b.



Hình 4.1

- a) mô hình đàn hồi tuyến tính (đặc trưng bởi một lò xo);
 - b) mô hình nhớt tuyến tính (đặc trưng bởi một giảm chấn).
- P - (hay σ) lực tác động lên phần tử.
 δ - (hay ϵ) chuyển vị (hay độ dãn) của phần tử.

§1. CÁC LOẠI MÔ HÌNH

1. Mô hình đàn hồi

Mô hình vật liệu đàn hồi tuyệt đối tuyến tính được đặc trưng bởi một lò xo hình 4.1a gọi là phần tử đàn hồi (hay vật Húc).

Nếu xem lò xo có tính chất đàn hồi tuyệt đối thì tải trọng và độ dịch chuyển của lò xo là tỷ lệ với nhau. Khi tải trọng thôi tác dụng thì độ dịch chuyển sẽ trở lại vị trí ban đầu, vật thể tuân theo định luật Húc:

$$\delta = k_1 P \quad (4.1)$$

trong đó: δ - độ dịch chuyển của vật thể theo phương tải trọng tác dụng;

P - tải trọng tác dụng lên vật thể;

k_1 - hằng số tỷ lệ phụ thuộc vào từng loại vật liệu.

Bây giờ đổi từ dịch chuyển sang độ biến dạng tỷ đối, lực sang ứng suất pháp σ và thay hằng số $k_1 = \frac{1}{E}$, ta có định luật Húc ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.2)$$

hay $\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.3)$

trong đó: E - môđun đàn hồi khi kéo hoặc nén, nó đặc trưng cho độ cứng của vật liệu.

2. Mô hình lỏng (mô hình nhớt – Niutơn)

Mô hình lỏng được đặc trưng bởi một giảm chấn hình 4.1b gọi là mô hình Niutơn (phần tử Niutơn). Nếu xem pittông dịch chuyển trong chất lỏng chứa trong xilanh thì tốc độ dịch chuyển tỷ lệ với lực tác dụng.

Biểu thức toán học có dạng:

$$\frac{d\delta}{dt} = k_2 P \quad (4.4)$$

trong đó: k_2 - hằng số tỷ lệ phụ thuộc vào từng loại chất lỏng;

$\frac{d\delta}{dt}$ - tốc độ chuyển dịch;

P - lực tác động.

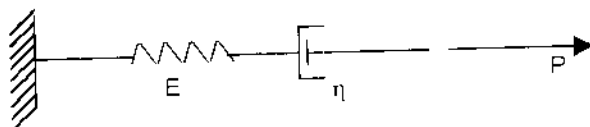
Chuyển từ chuyển dịch sang độ biến dạng dài tỷ đối ε , từ lực sang ứng suất pháp σ . Và thay hằng số tỷ lệ $k_2 = \frac{1}{\eta}$ (trong đó η - hệ số độ nhớt của chất lỏng). Biểu thức (4.4) trở thành:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\eta} \quad (4.5)$$

hay $\sigma = \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.6)$

3. Mô hình Macxoen

Để tìm quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng Macxoen đưa ra mô hình hai thông số bằng cách mắc nối tiếp hai mô hình: mô hình vật thể đàn hồi tuyến tính và mô hình chất lỏng Niuton như hình 4.2.



Hình 4.2

Tính chất của mô hình: lực tác động lên hai phần tử là như nhau, độ dịch chuyển toàn phần bằng tổng các dịch chuyển của phần tử đàn hồi δ_{dh} và độ dịch chuyển của phần tử giảm chấn δ_n . Dưới tác dụng của lực P có ngay chuyển dịch δ_{dh} . Khi bỏ lực P thì biến dạng đàn hồi khôi phục. Biến dạng nhớt còn lại. Tính đàn hồi và tính nhớt ở đây đều là tuyến tính.

3.1. Thiết lập phương trình trạng thái (tìm qui luật đối xử của mô hình)

Theo hình 4.2 mô hình vật Macxoen là sự lắp nối tiếp của hai mô hình Húc và Niuton nên chuyển dịch δ của phần tử Macxoen bằng tổng độ chuyển vị của phần tử đàn hồi δ_{dh} và phần tử Niuton δ_n , ta có:

$$\delta = \delta_{dh} + \delta_n \quad (a)$$

Đạo hàm theo thời gian biểu thức (a) ta được:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_{dh}}{dt} + \frac{d\delta_n}{dt} \quad (b)$$

Thay các giá trị $\frac{d\delta_{dh}}{dt}$ theo (4.1) và $\frac{d\delta_n}{dt}$ theo (4.4) vào (b), ta được:

$$\frac{d\delta}{dt} = k_1 \cdot \frac{dP}{dt} + k_2 P \quad (4.7)$$

Chuyển từ độ dịch chuyển δ sang độ biến dạng dài tỷ đối ε , từ lực P sang ứng suất pháp σ và thay các hằng số k_1, k_2 bằng: $k_1 = \frac{1}{E}$ và $k_2 = \frac{1}{\eta}$, ta nhận được phương trình trạng thái dạng:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (4.8)$$

Phần tử Macxoen có những tính chất sau:

3.2. Tính rã

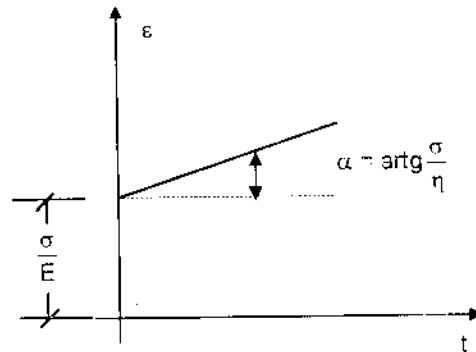
Phần tử chịu ứng suất không đổi $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{hằng số}$, đường cong rã $\varepsilon(t)$ được tính như sau:

Thay giá trị $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ vào phương trình (4.8), phương trình trạng thái trở thành:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (c)$$

Tích phân hai vế biểu thức (c), ta được:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{\eta} t$$



Hình 4.3. Đường thẳng rã của phần tử Macxoen.

Suy ra

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \varepsilon_0$$

Đường rã $\varepsilon(t)$ là một đường thẳng, hình 4.3.

3.3. Tính trùng

Khi phần tử chịu biến dạng $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = \text{hằng số}$. Tìm đường thẳng rã của phần tử Macxoen, đường cong trùng $\sigma(t)$.

Từ điều kiện $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ suy ra $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$. thay giá trị này vào phương trình (4.8) ta được:

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0 \quad (e)$$

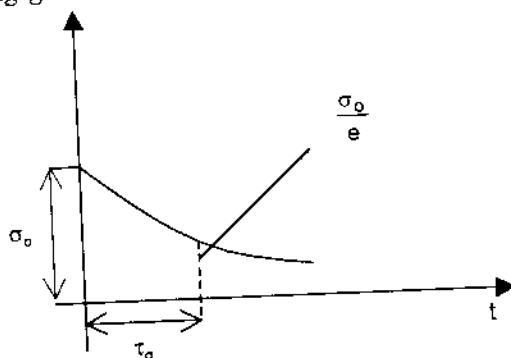
Tích phân biểu thức (e) với điều kiện đầu $t = 0, \sigma(0) = \sigma_0$ ta được:

$$\sigma = \sigma_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau_g} \right) \quad (4.10)$$

Trong đó: τ_g – thời gian trùng, $\tau_g = \frac{\eta}{E}$ (4.11)

Thời gian trùng chính là thời gian cần thiết để ứng suất ban đầu σ_0 giảm đi một lượng $e = 2,718$ lần.

Ứng suất trùng giảm theo qui luật hàm số mũ, hình 4.4



Hình 4.4. Đường cong trùng của phần tử Macxoen.

Cần chú ý hai trường hợp thực tế thường xảy ra là: ở giai đoạn đầu tốc độ tăng tải không đổi cho tới khi ứng suất đạt được một giá trị xác định, hoặc ở giai đoạn đầu tốc độ tăng biến dạng không đổi cho tới khi biến dạng đạt tới một giá trị xác định. Trong khoảng thời gian này hiện tượng rão và trùng chưa xảy ra khi đó phương trình trạng thái có dạng như (f) sau:

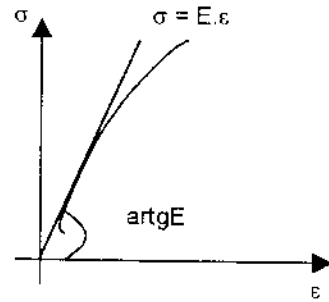
3.4. Khi tốc độ tăng tải không đổi

$$V_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \text{hằng số} \quad (f)$$

Từ (f) ta suy ra $t = \frac{\sigma}{V_\sigma}$, sau khi lấy tích phân phương trình trạng thái (4.8) đối với ϵ và chú ý đến giá trị V_σ ở trên ta được phương trình trạng thái biểu diễn quan hệ giữa biến dạng và ứng suất, hình 4.5:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma^2}{2EV_{\sigma tg}} \quad (4.12)$$

Ta thấy khi tốc độ tăng tải càng nhanh đường cong càng gần đường thẳng $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Vì vậy E được gọi là môđun đàn hồi tức thời.



Hình 4.5

3.5. Tốc độ tăng biến dạng V_ε không đổi

$$V_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt} = \text{hằng số}$$

Thay giá trị $V_\varepsilon = \text{hằng số}$ vào phương trình trạng thái (4.8).

Tích phân phương trình đối với σ ta tìm được:

$$\sigma = V_\varepsilon \cdot \eta \left(1 - e^{-\frac{t}{V_\varepsilon \tau_g}} \right) \quad (4.13)$$

$$\text{Và} \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{V_\varepsilon \tau_g}} \quad (4.14)$$

Ta thấy tương tự trường hợp trên, tại gốc toạ độ đường cong tiếp xúc với đường thẳng $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

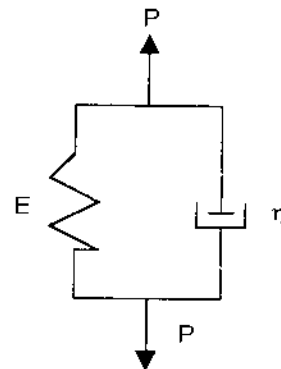
4. Mô hình Kelvin- Voigt

4.1. Phương trình trạng thái

Mô hình Kelvin – Voigt là mô hình loại hai hằng số, được mắc song song của hai phần tử Húc và nhớt Niuton như hình 4.6.

Tính chất của mô hình là độ chuyển dời của phần tử δ bằng độ chuyển dời của phần tử lò xo δ_{dh} và cũng bằng độ chuyển dời của phần tử nhớt δ_n .

$$\delta = \delta_{dh} = \delta_n \quad (a)$$



Hình 4.6

Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, vật thể không có độ chuyển dời, khi chịu lực tác động, lò xo và giảm chấn cùng chịu lực nhưng giá trị lực P

tại thời điểm t thì bằng tổng giá trị lực tác động vào lò xo và giá trị lực tác động vào giảm chấn, ta có:

$$P = P_{lò\ xo} + P_n \quad (b)$$

trong đó: P - giá trị lực tác động;

$P_{lò\ xo}$ - giá trị lực tác động vào phần tử đàn hồi $\rightarrow P_{lò\ xo} = P_{đàn\ hồi}$;

P_n - giá trị lực tác động vào phần tử nhớt.

Thay giá trị $P_{đàn\ hồi}$ theo (4-1), giá trị P_n theo (4.4) vào (b) có chú ý đến (a), ta có:

$$P = \frac{\delta}{k_1} + \frac{1}{k_2} \cdot \frac{d\delta}{dt} \quad (4.14)$$

Chuyển từ lực chuyển dời sang ứng suất, biến dạng và các hệ số k_1, k_2 sang $\frac{1}{E}; \frac{1}{\eta}$ một cách tương ứng ta nhận được phương trình trạng thái cho mô hình Kelvin – Voigt là:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.15)$$

4.2. Tính rã

Khi phần tử chịu ứng suất $\sigma(t) = \sigma_0 =$ hằng số, hàm rã $\varepsilon(t)$ được tính từ biểu thức:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad (c)$$

hay
$$d\varepsilon + \frac{E}{\eta} \varepsilon dt = \frac{\sigma_0}{\eta} dt \quad (d)$$

với các điều kiện tại $t = 0, \varepsilon = 0$, và sau khi lấy tích phân, ta được:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (4.16)$$

trong đó: τ_f - thời gian rã, $\tau_f = \frac{\eta}{E}$. (4.17)

hàm rã
$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (4.18)$$

Mô hình Kelvin – Voigt phản ánh được tính rã của vật liệu, khi biến dạng không đổi thì không xảy ra hiện tượng trũng.

4.3. Tính khôi phục

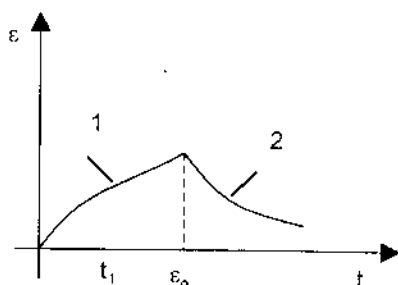
Nếu tại thời điểm t_1 ta cắt nhanh tải trọng thì độ biến dạng giảm dần theo thời gian, khôi phục dần kích thước ban đầu theo hình 4.7:

1- đường cong rã thuận theo phương trình:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (4.19A)$$

2- đường cong rã nghịch theo phương trình:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \quad (4.19B)$$



Hình 4.7

4.4. Tốc độ ứng suất không đổi

$$V_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \text{hằng số}$$

Đạo hàm phương trình (4.15) một lần theo thời gian, thay giá trị $\frac{d\sigma}{dt} = V_\sigma$ ta nhận được phương trình:

$$V_\sigma = E \frac{d\varepsilon}{dt} \eta \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \quad (e)$$

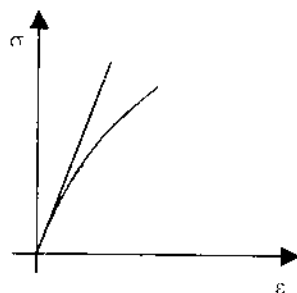
Nghiệm phương trình (e) có dạng:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \frac{\tau_g}{E} V_\sigma \left(e^{-\frac{t}{V_\sigma \tau_g}} - 1 \right) \quad (4.20)$$

Đạo hàm

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{V_\sigma \tau_g}} \right) \quad (4.21)$$

Ta thấy đường cong tiếp xúc tại gốc toạ độ và khi V_σ tăng nó tiến dần tới trục σ , hình 4.8.



Hình 4.8

4.5. Tốc độ tăng biến dạng không đổi

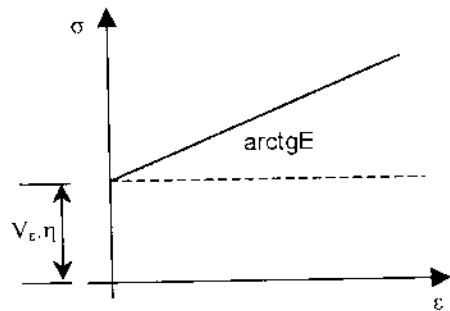
$$V_c = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (f)$$

Khi tốc độ tăng biến dạng không đổi, phương trình trạng thái (4.15) có dạng:

$$\sigma = E\varepsilon + V_c \cdot \eta \quad (4.22)$$

quan hệ giữa σ và ε là đường thẳng, hình (4.9), khi V_c tăng thì độ cứng của phần tử tăng.

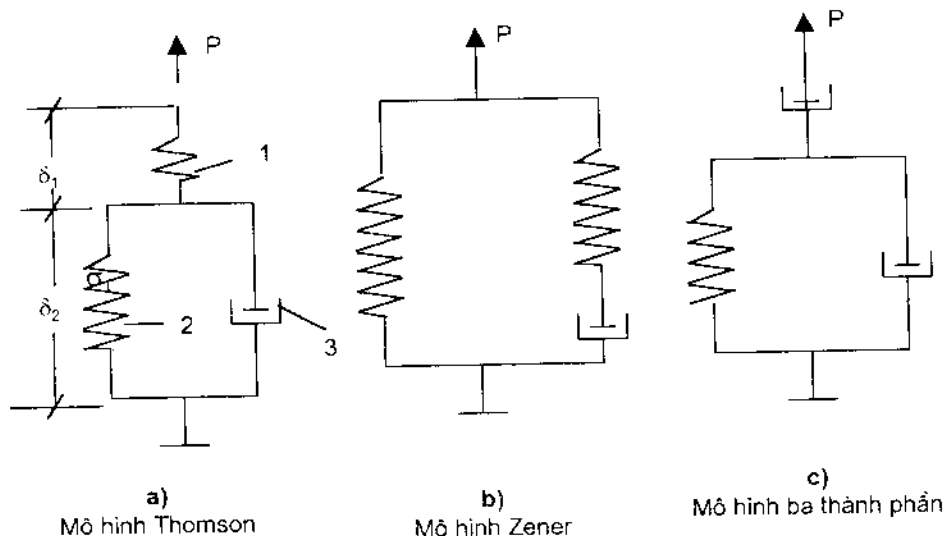
Hai mô hình Macxoen và Kelvin là hai mô hình cơ bản được nghiên cứu cho vật đàn nhớt.



Hình 4.9

5. Mô hình ba hằng số (mô hình tuyến tính tiêu chuẩn)

Mô hình ba hằng số có các dạng sau:



Hình 4.10

Hai mô hình Thomson và Zener thường có tên là mô hình tuyến tính tiêu chuẩn.

5.1. Mô hình Thomson

5.1.1. Phương trình trạng thái

Mô hình Thomson gồm vật thể đàn hồi được mắc nối tiếp với vật Kelvin-Voigt như hình 4.10a. Trong mô hình này khoảng cách giữa các điểm đặt lực P sẽ bằng tổng độ dãn δ_1 của lò xo 1 và độ dãn dài δ_2 của lò xo 2 hay là độ chuyển dời δ_n của các giảm chấn 3:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (a)$$

Đạo hàm (a) theo thời gian, ta có:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt} \quad (b)$$

Quan hệ giữa các chuyển vị δ_1 và δ_2 và lực tác dụng P lên mô hình như sau:

$$\delta_1 = k_1 P; \quad \delta_2 = k_2 P_{2(1,x)}; \quad \frac{d\delta_2}{dt} = k_3 P_n \quad (c)$$

Trong đó: lực P bằng lực P_1 tác dụng lên lò xo 1 và cũng bằng tổng lực $P_{21 \times 2}$ tác dụng lên lò xo 2 và lực P_n tác dụng lên giảm chấn 3.

$$\text{Ta có:} \quad P = P_1 = P_{1 \times 2} + P_n \quad \text{hay} \quad P = P_{21 \times 2} + P_n \quad (d)$$

Thay biểu thức (c) vào (b) và chú ý đến biểu thức (d), khi đó ta được:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P_n = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 (P - P_{1 \times 2}) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta_2 \\ &= k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} (\delta - \delta_1) = k_1 \frac{dP}{dt} + k_3 P - \frac{k_3}{k_2} \delta + \frac{k_3 \cdot k_1}{k_2} P \\ \text{Từ đó} \quad \frac{dP}{dt} + \frac{k_3 \cdot (k_1 + k_2)}{k_2 k_1} P &= \frac{1}{k_1} \frac{d\delta}{dt} + \frac{k_3 \cdot k_1}{k_2} \delta \end{aligned} \quad (4.23)$$

Chuyển từ độ chuyển dời δ và lực P sang biến dạng ε và ứng suất σ và thay các giá trị hằng số k_1 và k_2 tương ứng với $\frac{1}{E_1}$ và $\frac{1}{E_2}$ hằng số k_3 sang $\frac{1}{\eta}$. Sau khi sắp xếp lại ta được phương trình trạng thái:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha \sigma = E \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \beta \varepsilon \right) \quad (4.24)$$

$$\text{Trong đó} \quad \alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}; \quad \beta = \frac{E_2}{\eta}; \quad E = E_1 \quad (4.25)$$

Từ (4.24) ta thấy trong trường hợp đặt tải rất nhanh khi đó đạo hàm theo thời gian của ứng suất và biến dạng là đại lượng đủ lớn so với thừa số σ và ε . Trong (4.24) mỗi vế ta có thể bỏ qua số hạng thứ hai so với thứ nhất, phương trình (4.24) có thể viết:

$$\frac{d\sigma}{dt} = E \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.26)$$

$$\text{Suy ra} \quad \sigma = E\varepsilon \quad (4.27)$$

Do đó đại lượng E được gọi là môđun đàn hồi tức thời.

Trong trường hợp tải trọng tăng rất chậm khi đó đại lượng $\frac{d\sigma}{dt}$ và $\frac{d\varepsilon}{dt}$ là nhỏ so với đại lượng σ và ε , ta có thể bỏ qua và phương trình (4.24) có thể viết:

$$\sigma = \frac{E\beta}{\alpha} \cdot \varepsilon \quad (4.28)$$

Do đó đại lượng $\frac{E\beta}{\alpha}$ được gọi là môđun đàn hồi lâu dài.

Từ (4.27) ta thấy rằng $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ nên môđun đàn hồi lâu dài nhỏ hơn môđun đàn hồi tức thời.

5.1.2. Tính rão

Cho $\sigma(t) = \sigma_0 =$ hằng số, xét quá trình biến dạng $\varepsilon(t)$.

Nghiệm của phương trình vi phân.

$$\alpha\sigma = E \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \beta\varepsilon \right)$$

Với điều kiện tại $t = 0$, $\varepsilon = 0$ có dạng:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 + \frac{\alpha - \beta}{\beta} [1 - \exp(-\beta t)] \right\} \quad (4.29)$$

hay sau khi biến đổi:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp - \frac{t}{\tau_f} \right) \right] \quad (4.30)$$

Trong đó: $\tau_f = \frac{\eta}{E_2}$ - thời gian rão. (4.31)

Hàm rão có dạng:

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp - \frac{t}{\tau_f} \right) \quad (4.32)$$

Trong tính toán người ta còn đặt:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \text{ tức } K = \frac{E \cdot E_2}{E + E_2} \quad (4.33)$$

Sau khi sắp xếp lại hàm rão có dạng:

$$f(t) = \left[\frac{1}{K} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{K} \right) e^{-\frac{t}{\tau_f}} \right] \quad (4.34)$$

Ta thấy $f(0) = \frac{1}{E}$ (E - biểu diễn môđun đàn hồi tức thời). (4.35)

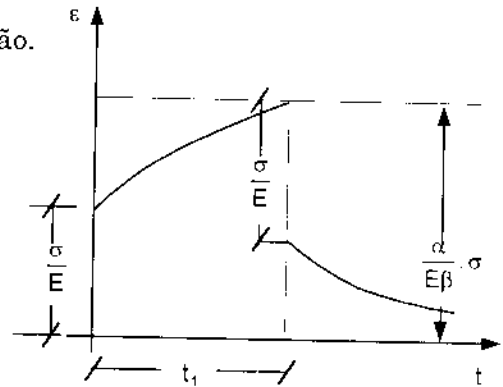
$$f(\infty) = \frac{1}{K} \quad (K - \text{biểu diễn môđun đàn hồi lâu dài}).$$

τ_f - đặc trưng cho thời gian rão.

5.1.3. Tính khôi phục

Nếu quá trình rão tiến tới thời điểm t_1 sau đó ta cắt tải một cách đột ngột thì biến dạng đột ngột giảm đi một đại lượng bằng biến dạng đàn hồi $\frac{\sigma}{E}$ (hình 4.11a)

và sau đó quá trình rão nghịch được xác định bởi biểu thức:



Hình 4.11a. Biểu diễn tính khôi phục của mô hình Thomsom.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\alpha - \beta}{E} \int_{t_1}^t \sigma \cdot \exp[-\beta(t - \xi)] d\xi = \\ &= \frac{\alpha - \beta}{\beta} \cdot \frac{\sigma}{E} \{ \exp[-\beta(t - t_1)] - \exp(-\beta t) \} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Từ phương trình (4.36) ta thấy khi thời gian tăng vô hạn thì biến dạng ε dần tới không. Có nghĩa là, biến dạng rã nghịch và thuận trong vật thể Thomson là đàn hồi.

5.1.4. Tính trùng

Cho $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 =$ hằng số, tìm ứng suất biến thiên theo thời gian $\sigma(t)$.

Nghiệm phương trình vi phân:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E\beta\varepsilon$$

có dạng:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\beta} [1 - \exp(-\alpha t)] \right\} \quad (4.37)$$

Đặt $\tau_g = \frac{\eta}{E + E_2}$ - thời gian trùng. (4.38)

Biểu thức (4.37) trở thành:

$$\sigma = E\varepsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_g}\right) \right] \right\} \quad (4.39)$$

Hàm trùng có dạng:

$$g(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E \left\{ 1 - \frac{\alpha - \beta}{\beta} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_g}\right) \right] \right\} \quad (4.40)$$

Hay $g(t) = \left[K + (E - K) \exp\left(-\frac{t}{\tau_g}\right) \right] \quad (4.41)$

So sánh với (4.31) và (4.38), ta có:

$$\frac{\tau_g}{\tau_r} = \frac{K}{E} \quad (4.42)$$

Vậy thời gian đặc trưng cho sự trùng là ngắn hơn thời gian cho sự rã.

Đây là một tính chất rất quan trọng.

5.2. Mô hình Zener

5.2.1 Phương trình trạng thái

Mô hình Zener gồm phần tử đàn hồi mắc song song với phần tử Macxoen, hình 4.11b.

Ký hiệu P - lực tác dụng vào phần tử Zener.

δ - độ chuyển dời toàn phần.

δ_1 - độ chuyển dời của phần tử giảm chấn.

δ_2 - độ chuyển dời của phần tử lò xo.

Ta có:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (a)$$

Lực tác động P bằng lực tác động lên lò xo 1 và lò xo 2 hay giảm chấn 3:

$$P = P_1 + P_2 \text{ hay } P = P_1 + P_n$$

Trong đó:

$$P_1 = \frac{\delta}{K_{11}}; \quad P_2 = \frac{\delta_2}{K_{11}} = K_3 \frac{d\delta_1}{dt}$$

k_{11} - hằng số tỷ lệ của lò xo 1.

k_{12} - hằng số tỷ lệ của lò xo 2.

k_3 - hằng số tỷ lệ của giảm chấn.

Chuyển từ lực sang ứng suất, từ độ chuyển dời sang biến dạng ε và các hằng số $k_{11} = \frac{1}{E}$; $k_{12} = \frac{1}{E_2}$ và $k_3 = \frac{1}{\eta}$ khi đó các biểu thức (a) (b) trở thành:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (c)$$

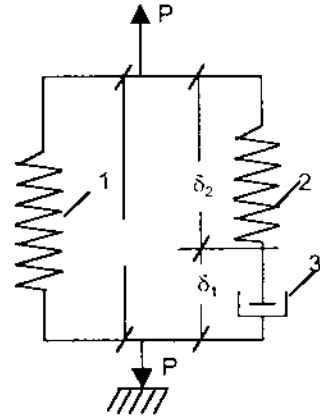
$$\sigma = E\varepsilon + E_2\varepsilon_2 \quad (d)$$

$$\text{và} \quad E_2\varepsilon_2 = \eta \frac{d\varepsilon_1}{dt} \quad (e)$$

rút ε_2 từ (c), ta có:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 \quad (f)$$

Thay giá trị ε_2 theo (f) vào (e) ta nhận được phương trình vi phân theo thời gian đối với ε_1 có dạng:



Hình 4.11b

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon_1 = \frac{E_2}{\eta} \varepsilon \quad (g)$$

Thay giá trị ε_2 ở (f) vào (e) ta rút ra

$$\varepsilon_1 = \frac{(E + E_2)\varepsilon - \sigma}{E_2} \quad (h)$$

Đạo hàm biểu thức (h) theo thời gian, ta được:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{(E + E_2)d\varepsilon}{E_2 dt} - \frac{1}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} \quad (i)$$

Thay giá trị ε_1 và $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ theo (h), (i) vào phương trình vi phân (g), sau khi sắp xếp lại ta nhận được phương trình trạng thái của mô hình Zener dạng:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \sigma = (E + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E \cdot E_2}{\eta} \varepsilon \quad (4.43)$$

Phương trình trạng thái của mô hình Zener có thể biểu diễn dưới dạng khác như sau:

Giải phương trình vi phân (g), ta được:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - e^{-\frac{E_2 \tau}{\eta}} \int_0^{\frac{E_2 \tau}{\eta}} e^{\frac{E_2 \tau}{\eta}} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (k)$$

Trong đó τ là biến số thời gian tuân theo điều kiện $0 \leq \tau \leq t$.

Theo (c) (d) ta có:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 (\varepsilon - \varepsilon_1) \quad (l)$$

Thay (k) vào (l) ta được phương trình trạng thái dạng:

$$\sigma = E_1 \varepsilon + E_2 \int_0^t e^{-\frac{E_2(t-\tau)}{\eta}} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau$$

5.2.2. Mô hình 3 thành phần gồm phần tử Niuton 1 mắc nối tiếp với phần tử Kelvin – Voigt 2

Ký hiệu (hình 4.11c)

δ - độ chuyển dời của mô hình.

δ_1 - độ chuyển dời của phần tử Niuton.

δ_2 - độ chuyển dời của phần tử Kelvin.

Ta có $\delta = \delta_1 + \delta_2$ (a)

Gọi P là lực tác động lên mô hình lực; P_1 – tác động lên phần tử nhớt 1 và lực P_2 – tác động lên phần tử Kelvin – Voigt 2.

Ta có: $P = P_1 + P_2$ (b)

Chuyển từ lực sang ứng suất, từ độ chuyển dời sang biến dạng tương đối ε .

Ta có:

$$P_1 = k_{21} \cdot \frac{d\delta_1}{dt} \quad (c)$$

$$P_2 = k_1 \cdot \delta_2 + k_{22} \cdot \frac{d\delta_2}{dt} \quad (d)$$

Chuyển từ lực sang ứng suất, độ chuyển dời sang biến dạng tương đối ε và các hằng số $k_1 = \frac{1}{E}$; $k_{21} = \frac{1}{\eta_1}$ và $k_{22} = \frac{1}{\eta_2}$.

Từ (a) (b) (c) (d) ta được:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (e)$$

$$\sigma = \sigma_1 = \eta_1 \cdot \frac{d\varepsilon_1}{dt} \quad (f)$$

$$\sigma = \sigma_2 = E\varepsilon_2 + \eta_2 \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (g)$$

Từ (e) suy ra $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$ (h)

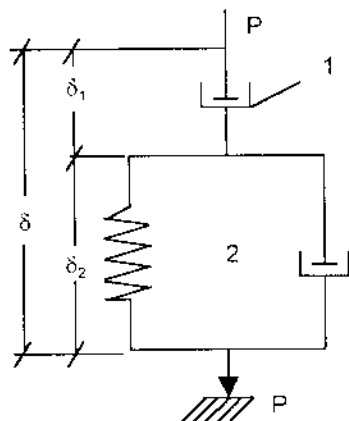
Từ (f) ta có $\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_1}$ (i)

Từ (g) (e) suy ra $\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{\sigma - E(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\eta_2}$ (k)

Đạo hàm một lần theo thời gian biểu thức (e), ta được:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (l)$$

Thay các giá trị $\frac{d\varepsilon}{dt}$; $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ theo (i), (k) ta được phương trình:



Hình 4.10c

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_1} + \frac{\sigma - E(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\eta_2} \quad (m)$$

Đạo hàm một lần theo thời gian và thay giá trị tại $\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_1}$ vào biểu thức (m) và sau khi sắp xếp lại ta được phương trình trạng thái của mô hình dạng:

$$p_1 \cdot \frac{d\sigma}{dt} + p_2 \cdot \sigma = q_2 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + q_1 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.44)$$

Trong đó:

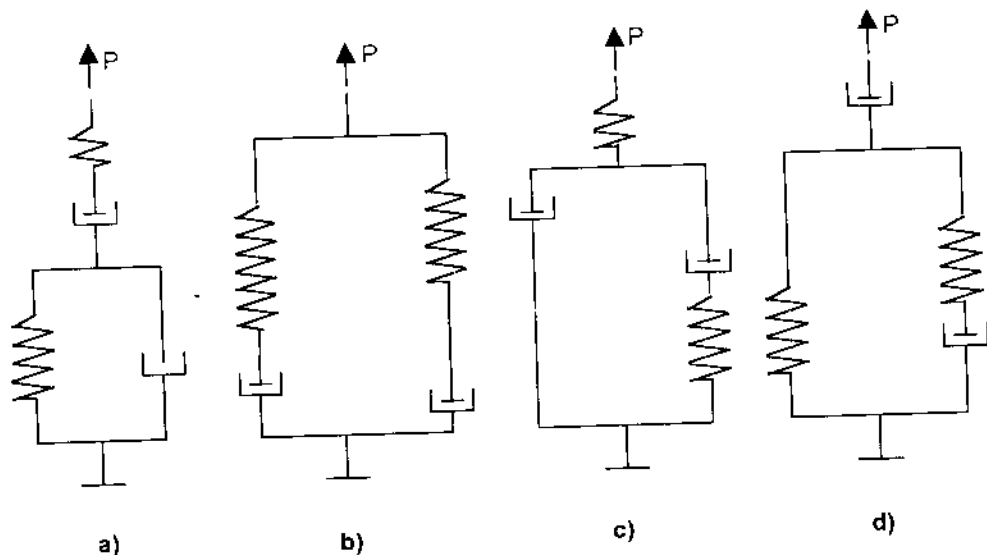
$$p_1 = \eta_1 + \eta_2; p_0 = \frac{E}{\eta_1 \eta_2}; q_2 = \eta_1 \cdot \eta_2; q_1 = \eta_1 \cdot E \quad (4.45)$$

Tính rão, tính khôi phục, tính trùng của hai mô hình vừa xét độc giả có thể tự làm như ở mô hình Thomson.

Chú ý rằng mô hình tuyến tính tiêu chuẩn được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật vì nó thể hiện được tính rão và tính trùng.

6. Mô hình 4 hằng số

Mô hình 4 hằng số có những dạng sau:



Hình 4.12

Mô hình được lắp nối tiếp giữa hai mô hình Macxoen và mô hình Kelvin-Voigt hình 4.13a.

Lực tác động lên mô hình P bằng lực tác động lên phần tử Macxoen P_1 và bằng lực tác động lên phần tử Kelvin – Voigt P_2 :

$$P = P_1 = P_2 \quad (a)$$

Độ chuyển dời δP của mô hình ở thời điểm t bằng tổng các độ chuyển dời phân tử Macxoen và độ chuyển dời của phần tử Kelvin-Voigt, hay tách ra bằng tổng độ chuyển dời δ_1 của phần tử Húc, độ chuyển dời δ_2 của phần tử lỏng và độ chuyển dời δ_3 của phần tử Kelvin-Voigt:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \quad (b)$$

Chuyển từ lực sang ứng suất, từ độ chuyển dời sang biến dạng và các hằng số: $k_{11} = \frac{1}{E_1}$; $k_{13} = \frac{1}{E_3}$; $k_3 = \frac{1}{\eta_3}$; $k_2 = \frac{1}{\eta_2}$, từ (a) ta có:

$$\sigma = \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \quad (c)$$

$$\sigma = \sigma_2 = \eta_2 \frac{d\varepsilon_2}{dt} \quad (d)$$

$$\sigma = \sigma_3 = E_3 \varepsilon_3 + \eta_3 \frac{d\varepsilon_3}{dt} \quad (e)$$

Và từ (b) ta có:

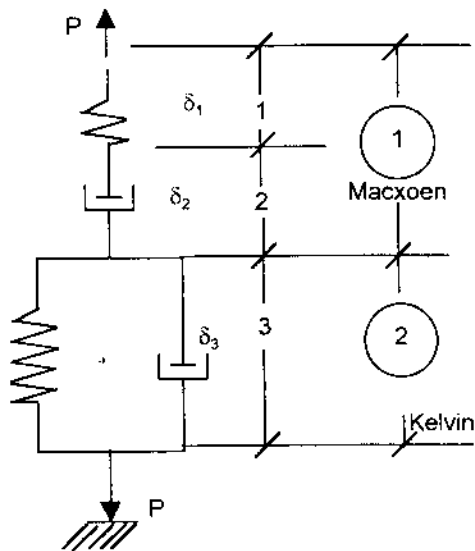
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (f)$$

Từ bốn biểu thức (c) (d) (e) (f) bằng cách loại trừ ε_1 , ε_2 , ε_3 ta nhận được quan hệ giữa ứng suất σ và biến dạng ε như sau:

+ Theo (f) ta suy ra:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (g)$$

+ Đạo hàm theo thời gian một lần biểu thức (f):



Hình 4.13a

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} + \frac{d\varepsilon_3}{dt} \quad (h)$$

+ Trong đó theo (c), (d), (e):

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \quad (i)$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_2} \quad (k)$$

$$\frac{d\varepsilon_3}{dt} = \frac{\sigma}{\eta_3} \cdot \frac{E_3}{\eta} \varepsilon_3 \quad (l)$$

+ Thay các giá trị ở (i) (k) (l) vào (h) và chú ý đến (g), ta được:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta_2} + \frac{\sigma}{\eta_3} \cdot \frac{E_3}{\eta} (\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (m)$$

+ Đạo hàm biểu thức (m) theo thời gian một lần nữa, ta được:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{1}{\eta_2} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta_3} \cdot \frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_3}{\eta_3} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\varepsilon_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_2}{dt} \right) \quad (4.46)$$

+ Thay các giá trị $\frac{d\varepsilon}{dt}$; $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$; $\frac{d\varepsilon_2}{dt}$ theo ứng suất từ (h) (i) (k) vào (m), sau khi sắp xếp lại ta nhận được phương trình trạng thái của mô hình:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left(\frac{E_1}{\eta_2} + \frac{E_1}{\eta_3} + \frac{E_3}{\eta_3} \right) \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 E_3}{\eta_2 \eta_3} \sigma = E_1 \cdot \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{E_1 E_3}{\eta} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.47)$$

Tính rão và tính khôi phục độc giả có thể làm theo trình tự như ở các mô hình 3 thông số. Bây giờ chúng ta xét tính rão, tính trùng theo quan điểm toán học.

§2 TÍNH RÃO, TÍNH TRÙNG THEO QUAN ĐIỂM TOÁN HỌC

Hiện tượng rão quan sát được khi cho lực tác dụng lên vật thể một giá trị ứng suất hằng số nhân với hàm Heviside.

$$\sigma(t) = \sigma_0 h(t) \quad (4.48)$$

Sau đó quan sát giá trị biến dạng $\varepsilon(t)$ theo thời gian.

Hiện tượng trùng là khi cho vật thể chịu một biến dạng bằng hằng số nhân với hàm Hêviside.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot h(t) \quad (4.49)$$

Sau đó quan sát giá trị ứng suất $\sigma(t)$ theo thời gian.

1. Tính rão (tính từ biến)

1.1. Mô hình đàn hồi

Quan hệ giữa ứng suất $\sigma(t)$ và biến dạng $\varepsilon(t)$ được xác định bởi phương trình:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \sigma(t) \quad (4.50)$$

Thay giá trị $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ vào (4.50), ta được:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \cdot \sigma_0 h(t) \quad (4.51)$$

Hàm rão sử dụng kí hiệu cho vật đàn nhớt tuyến tính không lão hoá (3.28):

$$J(t_0, t) = f(t - t_0) \quad (4.52)$$

Hàm rão có dạng:

$$f(t) = \frac{1}{E} \cdot h(t) \quad (4.53)$$

1.2. Mô hình lỏng Niuton

Cho $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ (a)

Tìm hàm $\varepsilon(t)$ biến thiên theo thời gian.

Thay giá trị (a) vào phương trình trạng thái (4.5), ta có:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} h(t) \quad (b)$$

Lấy tích phân biểu thức (b) với điều kiện tại $t = 0, \varepsilon = 0$.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t \cdot H(t) \quad (4.54)$$

Hàm rão có dạng:

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{\eta} \cdot t \cdot H(t) \quad (4.55)$$

1.3. Mô hình Macxoen

Cho vật chịu ứng suất không đổi $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ (a)

Tìm hàm rã $\varepsilon(t)$ theo thời gian. Thay (a) vào phương trình trạng thái (4.8).

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d}{dt} (\sigma_0 h(t)) + \frac{\sigma_0}{\eta} h(t) \quad (b)$$

Suy ra
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{E} \delta(t) + \frac{\sigma_0}{\eta} h(t) \quad (c)$$

Trong đó $\delta(t)$ – hàm Delta

Vì khi $t = 0$; $\varepsilon = 0$, tích phân biểu thức, ta được:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) \cdot h(t) \quad (4.56)$$

Hàm rã có dạng:

$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) \cdot h(t) \quad (4.57)$$

1.4. Mô hình Kelvin - Voigt

Ta có phương trình trạng thái (4.15):

$$E\varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma(t)$$

Thay giá trị $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ vào phương trình (4.15), ta nhận được phương trình mới:

$$E\varepsilon + \eta \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma_0(t) \quad (a)$$

Nhân hai vế biểu thức (a) với $\exp\left(\frac{E}{\eta} t\right)$, ta có:

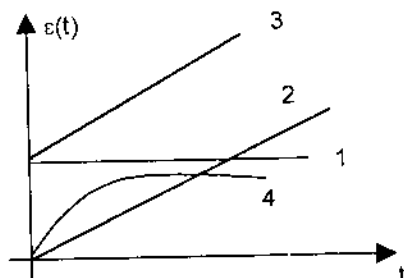
$$\eta \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\exp \frac{E}{\eta} t \right) \varepsilon \right] = \sigma_0 \cdot \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) \cdot h(t) \quad (b)$$

Lấy tích phân hai vế với điều kiện khi $t = 0$, $\varepsilon = 0$, ta nhận được :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(\frac{E}{\eta} t\right) \right] \cdot h(t) \quad (4.58)$$

vậy hàm rã
$$f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] \cdot h(t) \quad (4.59)$$

Hình 4.13 là đồ thị các hàm biến dạng theo thời gian dưới tác động của lực đơn vị $h(t)$ của 4 loại mô hình.



Hình 4.13. Các hàm biến dạng của 4 mô hình

1. mô hình đàn hồi.
2. mô hình lỏng Newton.
3. mô hình Macxoen.
4. mô hình Kelvin – Voigt.

2. Tính trùng

2.1. Mô hình đàn hồi

Từ phương trình (4.3), ta có:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) = E\varepsilon_0 \cdot h(t) \quad (4.60)$$

Sử dụng kí hiệu cho vật đàn nhớt tuyến tính không lão hoá:

$$R(t_0, t) = g(t - t_0) \quad (4.61)$$

$$\text{Hàm trùng} \quad g(t) = E \cdot h(t) \quad (4.62)$$

2.2. Mô hình lỏng Newton

Từ phương trình (4.6) thay giá trị $\varepsilon(t) = E\varepsilon_0 \cdot h(t)$

ta được:
$$\sigma(t) = \eta \cdot \frac{d}{dt} (\varepsilon_0 \cdot h(t)) = \eta \cdot \varepsilon_0 \cdot \delta(t) \quad (4.63)$$

Suy ra hàm trùng:

$$g(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \eta \cdot \delta(t) \quad (4.64)$$

2.3. Mô hình Macxoen

Thay giá trị $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot h(t)$ vào phương trình trạng thái (4.8), ta có:

$$\varepsilon_0 \cdot \delta(t) = \frac{1}{E} \cdot \frac{d(t)}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Giải phương trình trên, ta được:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \cdot h(t) \quad (4.65)$$

Hàm trùng

$$g(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \cdot h(t) \quad (4.66)$$

2.4. Mô hình Kelvin - Voigt

Làm tương tự, như đối với các mô hình trên ta được:

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \cdot h(t) + \eta \cdot \varepsilon_0 \cdot \delta(t) \quad (4.67)$$

Hàm trùng: $g(t) = E \cdot h(t) + \eta \cdot \delta(t) \quad (4.68)$

Phần trên ta đã có nhận xét, đối với vật Kelvin – Voigt không phản ánh được tính trùng, nhưng ở đây về mặt toán học ta lại nhận được hàm trùng theo biểu thức (4.68). Nhưng về mặt vật lý ta thấy điều đó không thể xảy ra được vì trong biểu thức (4.68) có chứa hàm Delta. Điều đó có nghĩa là ứng suất trở nên vô cùng ở thời điểm xuất hiện biến dạng. Ta cần chú ý một điều là giảm chấn khác với lò xo không thể cho độ dẫn đột ngột hữu hạn tương ứng với lực thay đổi hữu hạn.

Do đó nếu cần đặt vào giảm chấn một độ dẫn hữu hạn thì lực đặt vào cần phải có giá trị vô hạn.

Từ trên ta cũng thấy một điều là đối với các mô hình có nhiều hơn một phần tử thì độ dẫn dài đột ngột hữu hạn có thể xảy ra do lực đặt đột ngột chỉ trong trường hợp mô hình có một hoặc nhiều lò xo có thể kéo nén tự do đồng thời với giảm chấn cơ hoặc dẫn.

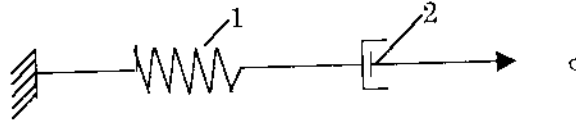
Ví dụ, lò xo trong phần tử Macxoen là tự do, còn trong phần tử Kelvin – Voigt là không tự do. Vì vậy biểu thức (4.68) chứa hàm Delta.

3. Mô hình gồm các phần tử mắc nối tiếp

Mô hình gồm các phần tử mắc nối tiếp thì lực tác dụng lên các phần tử là như nhau, nhưng độ chuyển rời bằng tổng độ chuyển rời của mỗi phần tử. Hàm rão của mô hình bằng tổng hàm rão của mô hình thành phần.

Ví dụ 1

Vật Macxoen gồm hai phần tử Huc và Niuton mắc nối tiếp. Lực tác dụng lên hai phần tử là như nhau. Độ chuyển rời của phần tử Macxoen bằng tổng độ chuyển rời của phần tử Huc và Niuton (hình 4.14a).



Hình 4.14a

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (a)$$

$$f_1 + f_2 = f(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) h(t) \quad (b)$$

Ví dụ 2

Mô hình Thomson được mắc nối tiếp giữa hai phần tử Húc và Kelvin - Voigt (hình 4.14b).

$$\text{Ta có độ dẫn} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (c)$$

$$\text{Hàm rã:} \quad f = f_1 + f_2 \quad (d)$$

Thay giá trị của hàm vào f_1 và f_2 , ta được hàm rã:

$$f = \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \right] \right\} .h(t) \quad (4.69)$$

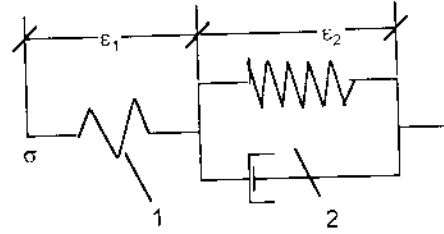
Ví dụ 3.

Mô hình 4 thông số: hình 4.14c được mắc nối tiếp giữa hai phần tử Macxoen 1 với Kelvin - Voigt 2. Hoặc mắc nối tiếp của ba phần tử Húc 1 với nhớt 2 và Kelvin - Voigt 3.

$$\text{Độ dẫn:} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

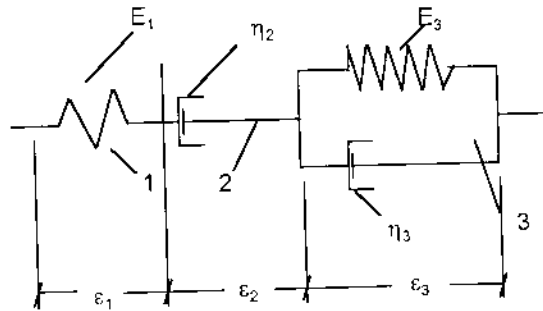
$$\text{Hàm rã:} \quad f = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\text{Độ dẫn:} \quad \varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} t \right) h(t) + \frac{\sigma_0}{E_3} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_3}{\eta_3} t\right) \right] .h(t) \quad (e)$$



Hình 4.14b

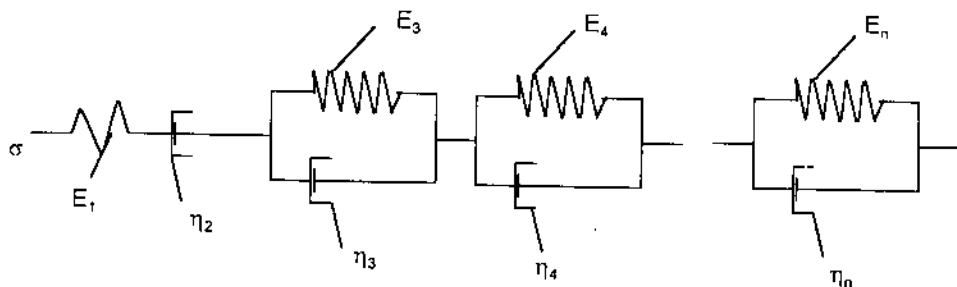
- 1. phần tử Húc.
- 2. phần tử Kelvin.



Hình 4.14c

$$\text{Hàm rã: } f(t) = \left\{ \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) + \frac{1}{E_3} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_3}{\eta} t \right) \right] \right\} h(t) \quad (f)$$

Ví dụ, Voigt tổng quát, hình 4.15.



Hình 4.15

Độ dãn:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} t \right) .h(t) + \sum_{i=3}^n \frac{\sigma_0}{E_i} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_i}{\eta} t \right) \right] .h(t) \quad (g)$$

Hàm rã:

$$f(t) = \left\{ \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_2} \right) + \sum_{i=3}^n \frac{1}{E_i} \left[1 - \exp \left(-\frac{E_i}{\eta} t \right) \right] \right\} .h(t) \quad (h)$$

4. Mô hình gồm các phần tử mắc song song

Mô hình gồm các phần tử mắc song song thì độ chuyển rời lên các phần tử là như nhau, ứng suất bằng tổng ứng suất tác dụng lên mỗi phần tử. Hàm trùng sẽ bằng tổng hàm trùng của mỗi phần tử.

Ví dụ 1, mô hình Kelvin – Voigt là gồm hai phần tử Húc và nhớt mắc song song.

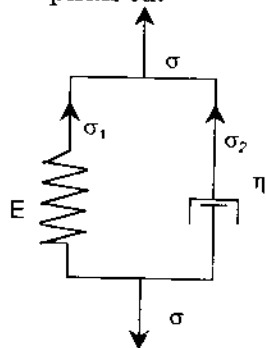
$$\text{Do đó: } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

ở đây: σ - ứng suất trùng của mô hình Kelvin-Voigt.

σ_1 - ứng suất trùng của phần tử Húc.

σ_2 - ứng suất trùng của phần tử lỏng.

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 .h(t) + \eta .\dot{\varepsilon}_0 .\delta(t) \quad (i)$$

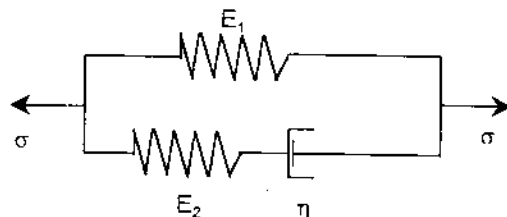


Hình 4.16

hàm trùng $g(t) = \frac{\sigma_o(t)}{\epsilon_o} = Eh(t) + \eta\delta(t)$

$$g(t) = Eh(t) + \eta\delta(t) \quad (j)$$

Ví dụ 2, mô hình Zener mắc song song giữa hai phần tử Húc và phần tử Macxoen (hình 4.17).



$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

σ - ứng suất trùng tác dụng ở phần tử Zener.

Hình 4.17

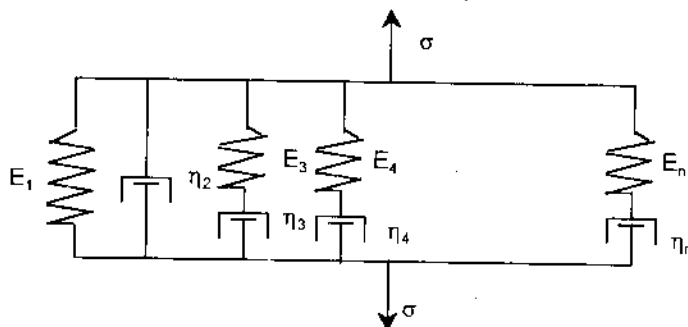
σ_1 - ứng suất trùng ở phần tử Húc.

σ_2 - ứng suất trùng ở phần tử Macxoen

$$\sigma(t) = E_1\epsilon_o.h(t) + E_2\epsilon_o.\exp\left(-\frac{E_2}{\eta}t\right).h(t) \quad (k)$$

Hàm trùng: $g(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_o} = \left[E_1 + E_2.\exp\left(-\frac{E_2}{\eta}t\right) \right].h(t) \quad (l)$

Ví dụ 3, mô hình Macxoen tổng quát được biểu diễn trên hình 4.18.



Hình 4.18

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \dots + \sigma_n \quad (4.70)$$

trong đó: σ - ứng suất trùng của mô hình Macxoen tổng quát;

σ_1 - ứng suất trùng của mô hình Húc;

σ_2 - ứng suất trùng của phần tử nhớt;

σ_3 - ứng suất trùng của phần tử Macxoen thứ 3;

...

σ_n - ứng suất trùng của phần tử Macxoen thứ n.

$$\sigma(t) = E_1 \varepsilon_0 \cdot h(t) + \eta_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \delta(t) + \varepsilon_0 \cdot \sum_{r=3}^n E_r \exp\left(-\frac{E_r}{\eta_r} t\right) \cdot h(t) \quad (4.71)$$

Hàm trùng khi bỏ qua hai phần tử đầu:

$$g(t) = \sum_{r=3}^n E_r \exp\left(-\frac{E_r}{\eta_r} t\right) \cdot h(t) \quad (4.72)$$

§3. PHƯƠNG PHÁP THỰC NGHIỆM XÁC ĐỊNH CÁC THÔNG SỐ CỦA MÔ HÌNH

Như đã biết phương pháp mô hình hoá cho phép công thức hoá qui luật đối xử vật liệu rất đơn giản nên thường được dùng trong tính toán kỹ thuật. Vấn đề đặt ra là cần chọn mô hình nào phù hợp với vật liệu trong công trình tính toán và biết các thông số của mô hình đó.

Sau đây chúng tôi xin trình bày cách xác định các thông số của mô hình 3 thông số làm ví dụ minh hoạ, đó là mô hình Thomson như hình 4.10a.

Các mô hình khác độc giả có thể dựa trên các nguyên tắc chung để xác định.

Trước tiên ta viết hàm rã hay hàm trùng của mô hình theo lý thuyết đã biết, căn cứ vào đó cần xác định các thông số của mô hình, ví dụ, mô hình Thomson là E_1 , E_2 và độ nhớt η .

1. Thí nghiệm rã

Tiến hành thí nghiệm rã (hay trùng) với vật liệu ta sử dụng để lấy số liệu tính toán.

Ví dụ, xét mô hình Thomson:

Theo lý thuyết, hàm rã của mô hình Thomson là:

$$f(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right] \quad (a)$$

Trong đó τ_f – thời gian rã, $\tau_f = \frac{\eta}{E_2}$

Hãy khi viết theo độ mềm:

$$f(t) = C_1 + C_2 - C_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}} \quad (b)$$

Trong đó $C_1 = \frac{1}{E}; \quad C_2 = \frac{1}{E_2} \quad (c)$

Theo (b) ta thấy khi $t = 0$ thì $f(0) = C_1. \quad (d_1)$

$$t = \infty \text{ thì } f(\infty) = C_1 + C_2 \quad (d_2)$$

Hình 4.19 biểu diễn đồ thị rã ký hiệu hàm $f_m(t)$ là hàm rã nhận được từ thực nghiệm. Ta thấy:

Tại $t = 0$ có $f_m(0) = C_0$ giá trị độ mềm tức thời. (e_1)

$t = \infty$ có $f_m(\infty) = C_\infty$ giá trị độ mềm tại thời điểm vô cùng (e_2) , ở đây lấy ở thời điểm cuối thí nghiệm, giá trị gần tiệm cận với đường nằm ngang.

So sánh (d_1) với (e_1) và (d_2) với (e_2) ta nhận được:

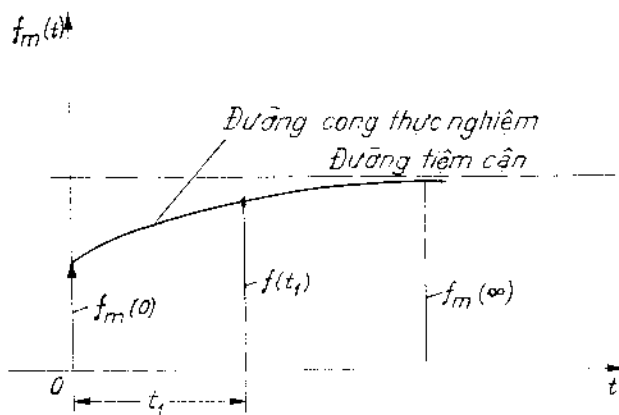
$$C_1 = C_0 \quad (f)$$

$$C_1 + C_2 = C_\infty \quad (i)$$

Từ (f), (i) suy ra $C_2 = C_\infty - C_0 \quad (j)$

Thay các giá trị trên vào (b) hàm rã được viết dưới dạng:

$$f_m(t) = C_0 - (C_\infty - C_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}} \quad (k)$$



Hình 4.19

Hàm $f(t)$ theo (b) so với hàm nhận được từ thực nghiệm $f_m(t)$ có cùng tọa độ điểm đầu điểm cuối nhưng còn một thông số tự do τ_f .

Để xác định giá trị τ_f chọn trong khoảng từ $(0 \rightarrow \infty)$ một thời gian nào đó $t = t_1$ và viết:

$$f_m(t_1) = C_0 - (C_\infty - C_0) \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau_f}} \quad (l)$$

Tính giá trị τ_f theo biểu thức (l).

Từ biểu thức (l), ta suy ra.

$$e^{-\frac{t_1}{\tau_f}} = \frac{C_\infty - f_m(t_1)}{C_\infty - C_0} \quad (4.73)$$

Lấy logarit hai vế, ta được:

$$-\frac{t_1}{\tau_f} = \ln \frac{C_\infty - f_m(t_1)}{C_\infty - C_0}$$

Suy ra:

$$\tau_f = -\frac{t_1}{\ln \frac{C_\infty - f_m(t_1)}{C_\infty - C_0}} \quad (4.74)$$

τ_f là đại lượng dương, bởi vì $C_\infty - f_m(t_1) < C_\infty - C_0$.

Xác định được giá trị C_0 , C_∞ và giá trị τ_f theo (4.74).

Ta hoàn toàn xác định được hàm rã của mô hình Thomson E_1 , E_2 ,

$\eta \dots$

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{C_0} \\ E_2 &= \frac{1}{C_\infty - C_0} \\ \eta &= E_2 \cdot \tau_f \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

2. Thí nghiệm trùng

Ta có thể xác định các thông số của mô hình nhờ hàm trùng.

Theo lý thuyết hàm trùng của mô hình Thomson có dạng:

$$g(t) = [K + (E - K) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_f}}] \quad (m)$$

trong đó

$$\tau_g = \frac{\eta}{E + E_2} \quad (n)$$

$$K = \frac{EE_2}{E + E_2} \quad (o)$$

$$\text{Tại } t = 0 \text{ có } g(0) = E. \quad (p)$$

$$t = \infty \text{ có } g(\infty) = K$$

Tiến hành thí nghiệm trùng với vật liệu sử dụng, ta nhận được hàm trùng ký hiệu $g_m(t)$, ta thấy: .

Tại $t = 0$ có $g_m(0) = E_0$ (E_0 - môđun đàn hồi tức thời giá trị đầu).

$$E_0 = \frac{\sigma_{dh}}{\epsilon_0} \quad (\sigma_{dh} - \text{ứng suất đàn hồi ở đầu thí nghiệm}). \quad (q)$$

Tại $t = \infty$ có $g_m(\infty) = E_\infty$ (E_∞ - môđun đàn hồi ở vô cùng). Giá trị điểm cuối thí nghiệm khi dừng cong $g_m(t)$ tiệm cận với trục t .

$$\left. \begin{array}{l} \text{So sánh các biểu thức (q) (p) ta rút ra } E_0 = E \\ E_\infty = K \end{array} \right\} \quad (r)$$

Từ biểu thức (o) (r) ta tính được:

$$E_2 = \frac{E_\infty E_0}{E_0 - E_\infty} \quad (s)$$

Hàm trùng $g(t)$ theo lý thuyết bây giờ có được so với hàm trùng $g_m(t_1)$ nhận được bằng thực nghiệm có tọa độ điểm đầu và cuối nhưng trong đó tồn tại một thông số tự do τ_g . Để tính giá trị τ_g cũng như trên ta chọn trong khoảng thời gian từ $0 - \infty$ một điểm $t = t_1$ và viết trên hàm trùng thực nghiệm $g_m(t)$ dưới dạng:

$$g_m(t_1) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) \cdot e^{-\frac{t_1}{\tau_g}} \quad (t)$$

Giá trị τ_g được tính từ biểu thức (t). Từ biểu thức (t) ta có thể viết:

$$e^{-\frac{t_1}{\tau_g}} = \frac{g_m(t_1) - E_\infty}{E_0 - E_\infty}$$

Lấy lôgarit hai vế, ta được:

$$-\frac{t_1}{\tau_g} = \ln \frac{g_m(t_1) - E_\infty}{E_0 - E_\infty}$$

Suy ra
$$\tau_g = \frac{t_1}{\ln \frac{g_m(t_1) - E_x}{E_o - E_x}} \quad (4.76)$$

Trong đó $g_m(t_1) - E_x < E_o - E_x$.

Các thông số của mô hình là:

$$E_x = \frac{E_o \cdot E_o}{E_o - E_x} \quad (4.77)$$

trong đó τ_g được xác định từ công thức (4.76).

Chương 5

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT 3 CHIỀU

§1. NHỮNG THÍ NGHIỆM CƠ BẢN

Trong mô hình đàn nhót tuyến tính 3 chiều, các biến là những tenxơ đối xứng do ứng suất và biến dạng (kí hiệu $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\varepsilon}}$) và được biểu diễn trong hệ tọa độ vuông góc bởi các ma trận trực giao (kí hiệu σ và ε).

Những thí nghiệm cơ bản, vẫn là các thí nghiệm rão và trùng, được định nghĩa theo cách sau đây.

1. Thí nghiệm rão

Thí nghiệm kéo nén đơn như sau:

+ Đặt σ_{11} dưới dạng:

$$\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^0 \cdot h(t - t_0) \quad (5.1a)$$

và những σ_{ij} khác triệt tiêu, có nghĩa là:

$$\sigma_{ij} \equiv 0 \text{ nếu } ij \neq 1. \quad (5.1b)$$

Sau đó quan sát lời giải của tất cả ε_{ij} , ta thấy:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{11}^0 \cdot J_{ij11}(t_0, t, \sigma_{11}^0) \quad (5.2)$$

Một cách tổng quát hơn:

+ Đặt σ_{hk} với h, k nào đó, có dạng:

$$\sigma_{hk}(t) = \sigma_{hk}^0 \cdot h(t - t_0) \quad (5.3a)$$

và những σ_{ij} khác triệt tiêu, có nghĩa là:

$$\sigma_{ij}(t) \equiv 0 \text{ nếu } \delta_{ib} \cdot \delta_{jk} = 0 \text{ và } \delta_{ik} \cdot \delta_{jb} = 0 \quad (5.3b)$$

Quan sát lời giải các ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{hk}^0 \cdot J_{ijhk}(t_0, t, \sigma_{hk}^0)_{\text{không tổng}} \quad (5.4)$$

ta thấy không có tổng.

Trong đó, hàm J_{ijhk} tương ứng là hàm rã có biên độ lực σ_{hk}^0 thực hiện ở thời điểm t_0 .

2. Thí nghiệm trùng

Việc mô tả giống hệt như thí nghiệm rã, nhưng bằng cách hoán vị vai trò của các σ và các ε cho nhau.

Đặt một ε_{hk} dưới dạng:

$$\varepsilon_{hk}(t) = \varepsilon_{hk}^0 \cdot h(t - t_0) \quad (5.5a)$$

và những ε_{ij} khác triệt tiêu:

$$\varepsilon_{ij} \equiv 0 \text{ nếu } \delta_{ik}, \delta_{jk} = 0 \text{ và } \delta_{ik}, \delta_{jh} = 0 \quad (5.5b)$$

Quan sát các σ_{ij} :

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{hk}^0 \cdot R_{ijhk}(t_0, t, \varepsilon_{hk}^0)_{\text{không tổng}} \quad (5.6)$$

Như ở thí nghiệm rã: chiều các hàm $J_{ijhk}(t_0, t, \sigma_{hk}^0)$ và $R_{ijhk}(t_0, t, \varepsilon_{hk}^0)$ triệt tiêu đối với $t < t_0$. Các hàm này có những bước nhảy tại thời điểm $t = t_0$ tương ứng với tính đàn hồi tức thời của vật liệu.

§2. ĐÀN NHÓT TUYẾN TÍNH

1. Định nghĩa

Định nghĩa toán học về sự tuyến tính của cách đối xử đối với môi trường đàn nhót 3 chiều thì cũng tương tự như đã đưa ra ở trường hợp môi trường đàn nhót 1 chiều. Sự tương ứng hàm giữa các lịch sử của các tenxơ $\underline{\sigma}$ và $\underline{\varepsilon}$ là tuyến tính.

2. Các tính chất của sự tuyến tính

- Như trong trường hợp 1 chiều, tuyến tính của cách đối xử kéo theo những hàm rã và trùng là độc lập.

Khi thí nghiệm rã thì hàm rã là độc lập với σ_{hk}^0 , khi thí nghiệm trùng thì hàm trùng là độc lập với ε_{hk}^0 .

Đối với thí nghiệm rã:

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijhk}(t_0, t). \sigma_{hk}^0 \text{ không tổng} \quad (5.7)$$

Đối với thí nghiệm trùng:

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{hk}^0 \cdot R_{ijhk}(t_0, t, \varepsilon_{hk}^0)_{\text{không tổng}} \quad (5.8)$$

- Chỉ cần áp dụng nguyên lý cộng tác dụng xuất phát từ sự hiểu biết các J_{ijhk} và R_{ijhk} ta có thể viết ra lời giải của tất cả các thí nghiệm rã và trùng.

Ví dụ.

Khảo sát thí nghiệm rã được định nghĩa theo cách sau:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}^0 \cdot h(t - t_0) \quad (5.9a)$$

Có nghĩa, đối với mỗi thành phần của $\underline{\underline{\sigma}}(t)$ ta có:

$$\sigma_{hk}(t) = \sigma_{hk}^0 \cdot h(t - t_0) \quad (5.9b)$$

Lịch sử này của $\underline{\underline{\sigma}}$ có thể xem như cộng tác dụng của các lịch sử tương ứng cho mỗi thí nghiệm rã đơn đã được giới thiệu ở mục §1 cho mỗi σ_{hk} .

Đối với mỗi ε_{ij} lời giải được viết với tổng trên các chỉ số lặp:

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijhk}(t_0, t). \sigma_{hk}^0 \quad (5.10)$$

Tính tới các đặc trưng của tenxơ $\underline{\underline{\sigma}}^0$ và của $\underline{\underline{\varepsilon}}^0$ thì các J_{ijhk} là những thành phần của tenxơ bậc 4 ký hiệu $\hat{\underline{\underline{J}}}(t_0, t)$, khi đó có thể viết:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \hat{\underline{\underline{J}}}(t_0, t): \underline{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.11)$$

kí hiệu $\hat{\underline{\underline{J}}}$ là ma trận các thành phần $\underline{\underline{J}}(t_0, t)$.

$\hat{\underline{\underline{J}}}(t_0, t)$ là ma trận rã của vật liệu cho các thời điểm t_0 và t .

* Bằng cách tương tự cho thí nghiệm trùng.

$$\text{Đặt} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^0 \cdot h(t - t_0) \quad (5.12)$$

ta có lời giải

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{R}}(t_0, t, \underline{\underline{\varepsilon}}^0) \quad (5.13)$$

trong đó $\underline{\underline{R}}(t_0, t)$ là tenxơ, mà ma trận của nó là $\hat{\underline{\underline{R}}}(t_0, t)$.

$\hat{\underline{\underline{R}}}(t_0, t)$ là ma trận trùng của vật liệu cho các thời điểm t_0 và t có các thành phần $R_{ijkl}(t_0, t)$.

3. Những công thức Bôizơman

Các công thức (5.11) và (5.13) cho ta lời giải trong các thí nghiệm rão và trùng khất quát nhất. Bằng cách lý luận như trong trường hợp một chiều và áp dụng nguyên lý cộng tác dụng chúng ta suy ra lời giải cho một lịch sử nào đó của σ hay của ε .

Không cần tính toán chi tiết chúng ta nhận được biểu thức sau:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{J}}(t_0, t; \underline{\underline{\sigma}}(t_0)) + \int_{t_0}^t \underline{\underline{J}}(\tau, t); \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (5.14)$$

Suy ra công thức Bôizơman:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{J}}(t, t; \underline{\underline{\sigma}}(t)) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \underline{\underline{J}}}{\partial \tau}(\tau, t); \underline{\underline{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (5.15)$$

Tương tự, ta có:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{R}}(t_0, t; \underline{\underline{\varepsilon}}(t_0)) + \int_{t_0}^t \underline{\underline{R}}(\tau, t); d\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) \quad (5.16)$$

và công thức Boizơman:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{R}}(t, t; \underline{\underline{\varepsilon}}(t)) - \int_{-\infty}^t \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial \tau}(\tau, t); \underline{\underline{\varepsilon}}(\tau) d\tau \quad (5.17)$$

Những công thức này biểu diễn phép hàm tuyến tính liên hệ các lịch sử của $\underline{\underline{\sigma}}$ và của $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Tức là quan hệ giữa tenxơ ứng suất và tenxơ biến dạng ở trạng thái ứng suất ba chiều (trạng thái ứng suất khối).

4. Vật liệu đàn nhớt tuyến tính không lão hoá

Giả thiết của sự không lão hoá của vật liệu cũng giống như trong trường hợp một chiều là những tenxơ $\underline{\underline{J}}(t_0, t)$ và $\underline{\underline{R}}(t_0, t)$ không phụ thuộc vào đối số $(t - t_0)$. Đó chính là sự bất biến của sự tịnh tiến.

$$\underline{\underline{J}}(t_0, t) = \underline{\underline{f}}(t - t_0) \quad (5.18)$$

$$\underline{\underline{R}}(t_0, t) = \underline{\underline{g}}(t - t_0) \quad (5.19)$$

Những công thức Boizoman được viết dưới dạng tích chập:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{f}}'(*). \underline{\underline{\sigma}} \quad (5.20)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{g}}'(*). \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (5.21)$$

Có thể đưa vào phép biến đổi Cacxông⁽¹⁾ và đưa đến các công thức đại số:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}^* &= \underline{\underline{f}}^* : \underline{\underline{\sigma}}^* \\ \underline{\underline{\sigma}}^* &= \underline{\underline{g}}^* : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \\ \underline{\underline{f}}^* : \underline{\underline{g}}^* &= \underline{\underline{1}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

§3. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI KHÁC

1. Quan hệ giữa tenxơ ứng suất lệch và tenxơ biến dạng lệch

1.1. Tenxơ ứng suất

Như đã biết một tenxơ ứng suất σ_{ij} bao giờ cũng gồm hai tenxơ ứng suất: tenxơ ứng suất lệch S_{ij} và tenxơ ứng suất cầu σ .

$$\left. \begin{aligned} \text{Trong đó} \quad S_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \cdot \delta_{ij} \\ \sigma &= \frac{1}{3} \delta_{kk} \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

⁽¹⁾ Ma trận của tenxơ biến đổi có cho các thành phần biến đổi của các thành phần ma trận của tenxơ gốc.

Đối với vật liệu đàn nhớt tuyến tính ở quá trình đẳng nhiệt, trên cơ sở của biểu thức Bôizơman người ta còn sử dụng biểu thức sau để xác định quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật đàn nhớt tuyến tính không lão hoá:

$$S_{ij} = \int_0^t R(t - \tau) \cdot de_{ij}(\tau) \quad (5.24)$$

$$\sigma = \int_0^t R_1(t - \tau) \cdot d\theta(\tau) \quad (5.25)$$

Trong đó:

$R(t - \tau)$ là các hàm trùng trượt.

$R_1(t - \tau)$ là hàm trùng (Rêlexaxi) thể tích.

Dựa vào biểu thức (5.24) (5.25), người ta có thể khai triển đối với biến dạng, khi đó hàm số $e_{ij}(\tau)$ và $\theta(\tau)$ có dạng:

$$e_{ij} = \int_0^t \Pi(t - \tau) \cdot dS_{ij}(\tau) \quad (5.26)$$

$$\theta = \int_0^t \Pi_1(t - \tau) \cdot d\sigma(\tau) \quad (5.27)$$

trong đó $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$ là tenxơ biến dạng lệch;

$\theta = \varepsilon_{kk}$ là biến dạng thể tích.

$\Pi(t)$ là hàm rã trượt.

$\Pi_1(t)$ là hàm rã thể tích.

Từ biểu thức (5.26) (5.27) có chú ý đến (5.23) ta nhận được biểu thức ứng suất qua biến dạng ε_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t \left[R_1(t - \tau) - \frac{1}{3}R(t - \tau) \right] d\theta(\tau) + \int_0^t R(t - \tau) \cdot d\varepsilon_{ij}(\tau) \quad (5.28)$$

và

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t \left[\frac{1}{3}\Pi_1(t - \tau) - \Pi(t - \tau) \right] d\sigma(\tau) + \int_0^t \Pi(t - \tau) \cdot d\varepsilon_{ij}(\tau) \quad (5.29)$$

Các hàm $\Pi(t)$, $\Pi_1(t)$; $R(t)$, $R_1(t)$ trong các biểu thức (5.28), (5.29) không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất và vì vậy có thể xác định từ chúng các thí nghiệm đơn giản.

2. Phương pháp thực nghiệm xác định các hàm $\Pi(t)$, $\Pi_1(t)$; $R(t)$, $R_1(t)$

a) Hàm rã trượt $\Pi(t)$ có thể được xác định từ thí nghiệm rã khi trượt thuần túy (ví dụ xoắn ống mỏng)

Cho lực tác dụng là $\sigma_{12}(t) = \sigma_{12}^0 h(t)$ (a)

Trong đó $h(t)$ là hàm Heviside:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \leq 0 \\ 1 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$

Cho ta lời giải $\varepsilon_{12} = f_{12}(t)$. (b)

Về lý thuyết, khi thay (a) vào (5.23) ta được thành phần khác không ε_{12} :

$$\varepsilon_{12} = \sigma_{12}^0 \int_0^t \Pi(t - \tau) \cdot \delta(\tau) d\tau. \quad (c)$$

Trong đó $\delta(t)$ là hàm delta.

Sau khi tính toán ta được:

$$\varepsilon_{12} = \sigma_{12}^0 \cdot \Pi(t) \quad t \geq 0 \quad (d)$$

So sánh giữa (b) và (d) ta được giá trị hàm rã trượt:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sigma_{12}^0} \cdot f_{12}(t) \quad (5.30)$$

Trong đó hàm $f_{12}(t)$ được xác định từ thực nghiệm.

b) Hàm rã thể tích $\Pi_1(t)$ được xác định từ thí nghiệm rã khi vật chịu nén đều theo các phương

Trong thí nghiệm này cho lực tác dụng là $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_0 h(t)$ còn các σ_{ij} khác thì bằng không. Quan sát độ biến dạng tương đối theo thời gian, ta nhận được hàm rã thể tích:

$$\theta = f(t). \quad (e)$$

Theo biểu thức (5.27) ta có:

$$\theta = \int_0^1 \Pi_1(t - \tau) \cdot d\sigma(\tau) \quad (f)$$

Thay giá trị $\sigma(t) = \sigma^0 h(t)$ vào biểu thức trên, có chú ý đến tính chất của hàm δ lấy tích phân ta được $\sigma(t) = \sigma^0 \Pi_1(t)$ với $t \geq 0$.

So sánh hai biểu thức (f) và (e), ta tìm được:

$$\Pi_1(t) = \frac{1}{\sigma_{12}} \cdot f_{12}(t) \quad (5.31)$$

Chú ý : cả hai hàm $\Pi(t)$ và $\Pi_1(t)$ có thể tìm được từ thực nghiệm kéo đơn giản như sau:

$$\text{Cho lực tác động} \quad \sigma_{11} = \sigma_1^0 h(t) \quad (g)$$

còn các σ_{ij} khác thì bằng không.

Quan sát biến dạng dọc ε_{11} và ngang $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$. Ta nhận được các hàm rã thực nghiệm:

$$\varepsilon_{11} = f_1(t) \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = f_2(t)$$

Khi thay biểu thức (g) vào biểu thức (5.29), ta có:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{3} \sigma_1^0 \left[\frac{1}{3} \Pi_1(t) + 2 \Pi(t) \right] \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= \frac{1}{3} \sigma_1^0 \left[\frac{1}{3} \Pi_1(t) - \Pi(t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Giải phương trình (5.33) và chú ý đến (5.32) ta được:

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sigma_1^0} [f_1(t) - f_2(t)] \quad (5.34)$$

$$\Pi_1(t) = \frac{1}{\sigma_1^0} [f_1(t) + 2f_2(t)] \quad (5.35)$$

c) *Xác định hàm trượt $R(t)$*

Tương tự, ta làm thí nghiệm về trượt khi trượt thuần túy.

Cho một biến dạng

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 h(t) \quad t > 0 \quad (h)$$

Quan sát biến dạng của mẫu thí nghiệm. Trong thí nghiệm này ứng suất trùng thay đổi như hàm của thời gian:

$$\sigma_{12} = \psi_{12}(t) \quad (i)$$

$\psi_{12}(t)$ xác định được từ kết quả thực nghiệm.

Về lý thuyết ta tính được:

$$\sigma_{12} = R(t) \cdot \varepsilon_{12}^0 \quad (j)$$

Từ (h) và (i) ta suy ra:

$$R(t) = \frac{\psi_{12}(t)}{\varepsilon_{12}^0} \quad (5.36)$$

d) *Xác định hàm trùng thể tích $R_1(t)$*

Cho thể tích tỷ đối thay đổi $\theta = \theta_0 h(t)$.

Trong đó $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 3\varepsilon_0$ (k)

ε_0 – biến dạng tỷ đối trung bình.

Quan sát ứng suất trùng trung bình σ ta nhận được: $\sigma = \psi(t)$ (l)

Bằng lý thuyết theo (5.25) ta có:

$$\sigma = \int_0^t R_1(t - \tau) \cdot d\theta(\tau) \quad (m)$$

Thay giá trị $\theta = \theta_0 h(t)$ hay giá trị $\varepsilon = \varepsilon_0 h(t)$ vào sau khi tính toán tương tự như trên ta được:

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot R_1(t) \quad (n)$$

So sánh (l) với (n) ta xác định được $R_1(t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \psi(t)$. (5.37)

1. Có thể biểu diễn quan hệ giữa ứng suất σ_{ij} và biến dạng ε_{ij} theo cách khác.

Từ biểu thức thứ nhất của (5.24) khi lấy tích phân phân đoạn ta được:

$$S_{ij} = R(0) \cdot e_{ij}(t) - \int_0^t \frac{dR}{d\tau} \cdot (t - \tau) \cdot e_{ij}(\tau) \cdot d\tau \quad (5.38)$$

Với thời gian t đủ nhỏ biểu thức (5.30) dẫn tới định luật Huc, ta đặt $R(0) = 2G$, từ (5.38) ta được:

$$S_{ij} = 2G \cdot e_{ij}(t) - \int_0^t \Gamma \cdot (t - \tau) \cdot e_{ij}(\tau) \cdot d\tau \quad (5.39)$$

Trong đó

$$\Gamma(t) = \frac{dR(t)}{dt} \quad (5.40)$$

tương tự biểu thức thứ hai của (5.25), ta có:

$$\sigma = K.\theta - \int_0^t \Gamma_1(t - \tau) \cdot \theta(\tau) \cdot d\tau \quad (5.41)$$

trong đó

$$K - \text{môđun thể tích, } K = R_1(0) \quad (5.42)$$

$$\Gamma_1(t) = \frac{dR_1}{dt} \quad (5.43)$$

Tương tự, biểu thức (5.26) và (5.27) cũng có thể đưa tới dạng:

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2G} S_{ij}(t) - \int_0^t K(t - \tau) \cdot S_{ij}(\tau) \cdot d\tau \quad (5.44)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{K} \sigma(t) - \int_0^t K_1(t - \tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau \quad (5.45)$$

Trong đó

$$K(t) = \frac{d\Pi(t)}{dt} \quad (5.46)$$

$$K_1(t) = \frac{d\Pi_1(t)}{dt} \quad (5.47)$$

Các hàm số $\Gamma(t)$, $\Gamma_1(t)$ gọi là nhân tương ứng trùng trượt và trùng thể tích.

Các hàm $K(t)$, $K_1(t)$ gọi là nhân rão trượt và rão thể tích.

Từ bốn nhân K , Γ , K_1 , Γ_1 chỉ có hai nhân là độc lập.

Thật vậy, ví dụ, trong biểu thức (5.39) hàm số $S_{ij}(t)$ là đã cho thì biểu thức (5.39) có thể xem như phương trình tích phân đối với biến dạng e_{ij} . Nghiệm phương trình này có dạng biểu thức (5.44). Bởi vì thay biểu thức (5.39) đối với S_{ij} ở trong biểu thức (5.44) cần cho ta đồng nhất thức với hàm bất kỳ $e_{ij}(t)$.

Từ biểu thức này ta nhận được hai biểu thức:

$$2G\Gamma(t) + \int_0^t \Gamma(t - \tau) \cdot K(\tau) d\tau = 2GK(t) \quad (5.48)$$

Tương tự, ta được:

$$\frac{1}{K} \Gamma_1(t) + \int_0^t \Gamma(t-\tau) \cdot K(\tau) d\tau = 2KK_1(t) \quad (5.49)$$

Từ các biểu thức (5.38) và (5.41) có chú ý đến (a) ta nhận được biểu thức ứng suất qua biến dạng:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \cdot \theta \cdot \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \int_0^t \left[\Gamma_1(t-\tau) - \frac{1}{3} \Gamma(t-\tau) \right] \theta(\tau) \cdot d\tau - \\ - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \epsilon_{ij}(\tau) \cdot d\tau \end{aligned} \quad (5.50)$$

Biểu diễn ngược biến dạng qua ứng suất nhận được biểu thức có dạng:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2a} \right) \cdot \sigma \cdot \delta_{ij} + \frac{1}{2a} \sigma_{ij} + \\ + \delta_{ij} \int_0^t \left[\frac{1}{3} k_1(t-\tau) - K(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau \right] \sigma(\tau) + \int_0^t K(t-\tau) \cdot d\tau \end{aligned} \quad (5.51)$$

Nếu hàm rã $\Pi(t)$ và $\Pi_1(t)$ và hàm trùng $R(t)$, $R_1(t)$ được xác định thì nhân rã $K(t)$, $K_1(t)$ và nhân trùng $\Gamma(t)$, $\Gamma_1(t)$ ở trong các biểu thức (5.40) (5.43) (5.46) (5.47) tìm được bằng cách vi phân các hàm tương ứng theo các công thức trên.

Chú ý là, ví dụ, nhân rã K , K_1 tìm được từ thực nghiệm thì tương ứng nhân trùng Γ , Γ_1 có thể tìm được bằng lý thuyết như nghiệm phương trình tích phân (5.48) và (5.49).

2 - Đối với vật tại thời điểm ban đầu không ứng suất, phổ ứng suất là liên tục, theo Biô quan hệ giữa ứng suất và biến dạng có dạng:

$$\sigma_{ij} = 2 \int_0^t a(t-\tau) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \tau} d\tau - \delta_{ij} \int_0^t b(t-\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau \quad (5.52)$$

Trong đó $a(t)$, $b(t)$ là hàm thời gian đặc trưng cho tính lưu biến của vật liệu được xác định từ thực nghiệm. Trong trường hợp vật liệu là đàn hồi tuyến tính đó chính là giá trị hằng số Lamê μ , λ .

Chương 6

PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ

§1. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT ĐƠN

Trước hết ta hãy khảo sát trường hợp trạng thái ứng suất đơn. Từ phương pháp mô hình trên, ta thấy phương trình trạng thái của vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng không lão hoá, quan hệ giữa ứng suất $\sigma(t)$ và biến dạng $\varepsilon(t)$ tương ứng tổng quát có thể biểu diễn dưới dạng toán tử sau:

$$P(\sigma) = Q(\varepsilon) \quad (6.1)$$

Trong đó P, Q là các toán tử vi phân dạng:

$$\left. \begin{aligned} P &= p_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} + p_{m-1} \frac{\partial}{\partial t^{m-1}} + \dots + p_0 = \sum_{m=0}^k p_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \\ Q &= q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} + q_{n-1} \frac{\partial}{\partial t^{n-1}} + \dots + q_0 = \sum_{n=0}^h q_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$h = 0, 1, 2, \dots, n$$

$p_0; p_1; p_{m-1}; p_m$ và $q_0; q_1; q_{n-1}; q_n$ là những hệ số hằng số, đặc trưng cho tính chất vật lý và lưu biến của vật liệu được xác định bằng thực nghiệm.

Ví dụ

- Phần tử đàn hồi.

$$\text{Phương trình trạng thái là: } \sigma = E \cdot \varepsilon \quad (a)$$

Theo (6.2) ta có:

$$k = 0 \quad p_0 = 1 \quad h = 0 \quad q_0 = E \quad (6.3)$$

- Phần tử Niuton.

Phương trình trạng thái: $\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$ (b)

Ta có:

$$k = 0 \quad p_0 = 1 \quad h = 1 \quad q_0 = 0 \quad q_1 = \eta \quad (6.4)$$

- Phần tử Macxoen.

Phương trình trạng thái:

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{hay} \quad \frac{d\sigma}{dt} + E \frac{\sigma}{\eta} = E \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (c)$$

suy ra
$$\left. \begin{array}{lll} k = 1 & p_0 = \frac{E}{\eta} & p_1 = 1 \\ h = 1 & q_0 = 0 & q_1 = E \end{array} \right\} \quad (6.5)$$

- Phần tử Voigt - Kelvin.

Phương trình trạng thái:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

ta có: $k = 0 \quad p_0 = 1 \quad h = 1 \quad q_0 = E \quad q_1 = \eta \quad (6.6)$

- Phần tử ba hằng số

a) Mô hình Thomson

Phương trình trạng thái:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_1 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \cdot \varepsilon$$

Suy ra:
$$\left. \begin{array}{lll} k = 1 & p_0 = \frac{E_1 + E_2}{\eta_2} & p_1 = 1 \\ h = 1 & q_0 = \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_2} & q_1 = E_1 \end{array} \right\} \quad (6.7)$$

b) Mô hình Zener

Phương trình trạng thái:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta} \cdot \sigma = \frac{E_1 + E_2}{\eta} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \cdot \varepsilon \quad (6.8)$$

$$k = 1 \quad p_0 = \frac{E}{\eta} \quad p_1 = 1$$

$$h = 1 \quad q_0 = \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \quad q_1 = \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}$$

§2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI

Như đã biết, ở vật thể đàn hồi tuyến tính đẳng hướng tồn tại hai định luật quan trọng sau:

- Định luật biến đổi hình dáng: biểu thức toán học có dạng:

$$S_{ij} = 2Ge_{ij}$$

- Định luật thể tích là: $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$

hay

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$$

Ở vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng, theo phương pháp toán tử người ta biểu diễn quan hệ tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng qua các toán tử thời gian dưới dạng sau:

$$PS_{ij}(t) = 2Qe_{ij}(t) \quad (6.9)$$

$$P'\sigma_0(t) = 3Q'\varepsilon_0(t) \quad (6.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trong đó toán tử } P: \quad P = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + p_{m-1} \cdot \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + p_0 \\ \text{Và} \quad Q = q_n \cdot \frac{\partial^n}{\partial t^n} + q_{n-1} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + q_0 \end{array} \right\} \quad (6.11)$$

p_0, p_1, p, p_{m-1} và q_0, q_1, q, q_n là những hệ số hằng số đặc trưng cho tính chất vật lý và lưu biến của vật liệu, chúng được xác định từ thực nghiệm.

Tương tự P' và Q' được xác định từ các phương trình:

$$\left. \begin{array}{l} P' = \frac{\partial^m}{\partial t^m} + p'_{m-1} \cdot \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + p'_0 \\ Q' = q'_n \cdot \frac{\partial^n}{\partial t^n} + q'_{n-1} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + q'_0 \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

Trong đó các hệ số hằng số $p'_0, p'_1, p', p'_{m-1}; q'_0, q'_1, q', q'_n$ là những hệ số hằng số đặc trưng cho tính chất vật lý và lưu biến của vật liệu, chúng được xác định từ thực nghiệm.

Trong tính toán người ta còn thay biểu (6-10) bằng biểu thức sau:

$$\left. \begin{aligned} P_1(D) S_{ij}(t) &= P_2(D) e_{ij}(t) \\ P_3(D) \cdot \sigma(t) &= P_4(D) \theta(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Trong đó

$$\sigma(t) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{ij}$$

$$\theta(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{ii}$$

$$P_i(D) = \sum_{n=0}^{N_i} a_i^{(n)} D^n; a_i^{(N_i)} \neq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

là các toán tử đạo hàm tuyến tính

$$D^n = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \text{ là đạo hàm bậc } n \text{ theo thời gian.}$$

$a_i^{(n)}$ là các hệ số hằng số.

So sánh với biểu thức (6-10) ta có:

$$\text{Toán tử: } \left. \begin{aligned} P_1 &= P \\ P_2 &= 2Q \\ P_3 &= P' \\ P_4 &= 3Q' \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Thuận lợi hơn người ta thường viết (6.13) ở dạng liên hệ giữa ứng suất σ_{ij} vào biến dạng ε_{ij} .

Nếu chú ý đến biểu thức (1.17), (1.18) và thay vào biểu thức (6.13) sau khi tính toán ta được:

$$\begin{aligned} P_1(D) \cdot P_3(D) \cdot \sigma(t) &= \\ &= P_2(D) P_3(D) \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} [P_1(D) P_4(D) - P_2(D) P_3(D)] \theta \end{aligned} \quad (6.15)$$

Tính toán các giá trị P_i .

1. Mô hình đàn hồi

Phương trình trạng thái:

$$\text{Trạng thái đơn} \quad \sigma = E\varepsilon$$

$$\text{Trạng thái khối} \quad S_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$$

Suy ra

$$P_1(D) = 1 \quad P_2(D) = 2G \quad P_3(D) = 1 \quad P_4(D) = 3K \quad (6.16)$$

2. Mô hình Kelvin – Voigt

Phương trình trạng thái:

$$\begin{aligned} \text{Trạng thái đơn:} \quad \sigma &= E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \text{Trạng thái khối:} \quad S_{ij} &= 2G e_{ij} + \eta \dot{e}_{ij} = 2G(e_{ij} + t^0 \dot{e}_{ij}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$$

$$\text{Trong đó} \quad t^0 = \frac{\eta}{2G} \quad (6.18)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P_1(D) &= 1 \quad P_2(D) = 2G(1 + t^0 D) \\ P_3(D) &= 1 \quad P_4(D) = 3K \end{aligned} \quad (6.19)$$

Biểu thức $\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$ chứng tỏ khi nén hoặc kéo theo 3 phương như nhau, vật thể đàn hồi và vật thể đàn hồi nhớt là như nhau.

Tùy từng loại mô hình người ta còn dựa vào các hằng số mới là tỷ số các hằng số. Nó vẫn thể hiện được tính chất vật lý và lưu biến của vật liệu.

Ví dụ: mô hình tuyến tính tiêu chuẩn trong phương trình toán tử. Quan hệ giữa ứng suất lệch với biến dạng dạng lệch có các tỉ số sau:

$$\frac{P_0}{q_0} = G_0 \quad (6.20)$$

Trong đó G_0 là môđun đàn hồi khi trượt trong quá trình biến dạng chậm và ta có thể gọi đó là môđun đàn hồi tĩnh khi trượt.

$$\frac{P_1}{q_1} = G_1 \quad (6.21)$$

Trong đó G_1 là môđun đàn hồi khi trượt trong quá trình biến dạng nhanh và ta gọi đó là môđun đàn hồi tức thời khi trượt.

$$\frac{P_1}{P_0} = n \quad (6.22)$$

Trong đó n là thời gian trùng (Rêlaxaxi).

$$\frac{p_1 q_0}{p_0 q_1} = \frac{G_0}{G_1} = \tau \quad (6.23)$$

τ là đại lượng không thứ nguyên thể hiện tỉ số môđun đàn hồi tĩnh và tức thời khi trượt. Kí hiệu

$$\eta = \frac{1}{\tau} \quad (6.24)$$

Ta có

$$\frac{p_1}{q_0} = \frac{q_1 p_1}{p_0 p_1} = n G_1 = \frac{n G_0}{\tau} = n G_0 \eta \quad (6.25)$$

Các giá trị n và τ thể hiện những thông số lưu biến đặc trưng cho vật đàn nhớt.

Tương tự trong phương trình toán tử thứ hai của (6.10) quan hệ giữa tenxơ ứng suất pháp trung bình với tenxơ biến dạng pháp trung bình, ta có các tỉ số và ý nghĩa của nó.

$$\frac{q_0}{p'_0} = B_0 \quad \text{trong đó } B_0 - \text{môđun thể tích đàn hồi tĩnh} \quad (6.26)$$

$$\frac{q'_1}{p'_1} = B_1 \quad \text{trong đó } B_1 - \text{môđun thể tích đàn hồi tức thời} \quad (6.27)$$

$$\frac{p'_1}{p_0} = n' \quad (6.28)$$

$$\frac{p'_1 q'_0}{p'_0 q'_1} = \frac{B_0}{B_1} = \tau' \quad (6.29)$$

Trong đó n' - thời gian trùng và τ' là tỉ số môđun thể tích đàn hồi tĩnh và tức thời.

$$\frac{q'_1}{p_0} = \frac{q'_1 p'_1}{p'_0 p'_1} n' B_1 = n' \frac{B_0}{\tau'} = n' \eta' B_0 \quad (6.30)$$

Trong tất cả các bài toán sau này ta sẽ giả thiết là các thông số lưu biến là như nhau khi thay đổi thể tích cũng như khi thay đổi hình dáng.

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \tau' \\ n &= n' \\ \eta &= \eta' \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

Khi đó môđun đàn hồi thể tích xác định bởi quan hệ:

$$B_0 = \frac{2}{3} G_0 \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \quad (6.32)$$

$$B_1 = \frac{2}{3} G_1 \frac{(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \quad (6.33)$$

Trong đó ν - hệ số Poisson.

§3. CÁC BIỂU THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình vi phân chuyển động

Phương trình vi phân cân bằng động khi bỏ qua lực thể tích có dạng:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.34)$$

trong đó u_1, u_2, u_3 biểu diễn chuyển vị theo 3 phương vuông góc (trong kỹ thuật thường dùng u, v, w theo hướng x, y, z).

Thay giá trị $\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_{ij} \cdot \sigma_0$ theo (1.17) vào biểu thức thứ nhất của (6.34), ta có:

$$\frac{\partial S_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (6.35)$$

Sử dụng phương trình toán tử (6.9); (6.10) và phương trình (1.9) được thay vào (6.35). Sau khi tính toán ta có:

$$\begin{aligned} 2QP' \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} - 2QP' \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + 3PQ' \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} + 2QP' \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} + 2QP' \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} = \\ = \rho \cdot P \cdot P' \frac{\partial u_1}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Thay các giá trị biến dạng theo (1.2):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Sau khi tính toán ta nhận được phương trình chuyển động theo hướng x_1 :

$$PP' \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (P' Q u_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \cdot \partial x_j} \left(\frac{1}{3} P' Q u_j + P Q' u_j \right) \right] \quad (6.38)$$

Tương tự, ta thay vào phương trình vi phân chuyển động theo hướng x_2, x_3 , tổng quát ta nhận được phương trình chuyển động của vật đàn nhớt tuyến tính theo chuyển vị có dạng:

$$\begin{aligned} PP' \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) &= \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (P' Q u_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \cdot \partial x_j} \left(\frac{1}{3} P' Q u_j + P Q' u_j \right) \right] \end{aligned} \quad (6.39)$$

$i = 1, 2, 3$

2. Biểu thức đối với ứng suất

Theo (1.17) ứng suất σ_{ij}, σ_{ij} có dạng.

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= S_{ii} + \sigma_0 \\ \sigma_{ij} &= S_{ij} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Nếu sử dụng phương trình toán tử (6.10) và phương trình (1.9) và sau khi điều chỉnh từ (6.35) ta nhận được quan hệ:

$$PP' \sigma_{ii} = 2QP'(\varepsilon_{ii} - \varepsilon) + 3PQ'\varepsilon \quad (6.41)$$

$$P\sigma_{ij} = 2Q\varepsilon_{ij} \quad (6.42)$$

Bằng cách sử dụng các phương trình động hình học (1.2) ta sẽ xác định được phương trình ứng suất theo chuyển vị:

$$PP'\sigma_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} (2P'Q \cdot u_j) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial_j}{\partial x_j} \left(-\frac{2}{3} P'Q u_j + PQ' u_j \right)$$

$$P \cdot \sigma_{ij} = Q \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3 \quad (6.43)$$

3. Trạng thái biến dạng phẳng

Xét trường hợp khi biến dạng $\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$ hoặc $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ta có trạng thái biến dạng phẳng. Khi đó phương trình chuyển động có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

Ứng suất $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ trong phương trình (6.39) chúng ta thể hiện theo quan hệ:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= S_{11} + \sigma_0 \\ \sigma_{12} &= S_{12} \\ \sigma_{21} &= S_{21} \\ \sigma_{22} &= S_{22} + \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

và sử dụng phương trình toán tử:

$$P \cdot S_{ij} = 2Q \cdot e_{ij}$$

$$P' \sigma_0 = 3Q' \cdot \epsilon_0$$

Chúng ta nhận được:

$$2P'Q \cdot \frac{\partial e_{11}}{\partial x_1} + 3PQ' \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_1} + 2P'Q \frac{\partial e_{12}}{\partial x_1} = PP' \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (6.46)$$

$$2P'Q \cdot \frac{\partial e_{21}}{\partial x_1} + 2P'Q \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} + 3PQ' \frac{\partial e_{22}}{\partial x_2} = PP' \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (6.47)$$

Nếu tiếp tục sử dụng quan hệ:

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \varepsilon_{11} - \varepsilon \\ e_{12} &= \varepsilon_{12} \\ e_{21} &= \varepsilon_{21} \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

của phương trình động hình học tương ứng thì sau khi tính toán ta nhận được phương trình chuyển động cho trạng thái biến dạng phẳng của vật đàn nhớt tuyến tính theo chuyển vị ở dạng sau:

$$PP' \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (P' Q u_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{3} P' Q u_j + P Q' u_j \right) \right] \quad (6.49)$$

$$i = 1, 2$$

Đối với ứng suất σ_{ii} , σ_{ij} sau khi tính toán có dạng:

$$PP' \sigma_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} (2P' Q u_i) + \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{2}{3} P' Q u_j + P Q' u_j \right) \right] \quad (6.50)$$

$$P \sigma_{ij} = Q \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad i = 1, 2; j = 1, 2 \quad (6.51)$$

Ứng suất σ_{33} tìm được từ các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} P' (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) &= Q' (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \\ P \cdot \left[\sigma_{33} - \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] &= 2Q \left[-\frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right] \end{aligned} \quad (6.52)$$

Loại trừ $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$. Từ (6.47) sau khi tính toán ta được phương trình σ_{33} :

$$\left(2PQ' + \frac{1}{3} P' Q \right) \sigma_{33} = - \left(\frac{2}{3} P' Q - PQ' \right) (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (6.53)$$

4. Trạng thái ứng suất phẳng

Xét trạng thái ứng suất phẳng $\sigma_{33} = 0$; $\sigma_{13} = 0$; $\sigma_{23} = 0$.

Phương trình toán tử vật lý của vật liệu đàn nhớt tuyến tính có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{3}P'(\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= Q'(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ P \cdot \left[\sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right] &= 2Q \cdot \left[\epsilon_{11} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right] \\ P \cdot \left[\sigma_{22} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right] &= 2Q \cdot \left[\epsilon_{22} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right] \\ P \cdot \left[\sigma_{33} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right] &= 2Q \cdot \left[\epsilon_{33} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \right] \end{aligned} \right\} (6.54)$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ 4 loại trừ $\sigma_{11} + \sigma_{22}$ ta nhận được phương trình biến dạng ϵ_{33} được biểu diễn qua $\epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ cho bởi phương trình:

$$\left(\frac{4}{3}P'Q + PQ' \right) \epsilon_{33} = \left(-PQ' + \frac{2}{3}P'Q \right) (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (6.55)$$

Nếu sử dụng phương trình (6.55) thay giá trị ϵ_{33} vào phương trình thứ 2, thứ 3 của (6.54), thì sau khi tính toán ta được hai phương trình đối với σ_{11} và σ_{22} có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \left(PPQ' + \frac{4}{3}PP'Q \right) \sigma_{11} &= \\ = \left(4PQQ' + \frac{4}{3}P'QQ \right) \epsilon_{11} - \left(-2PQQ' + \frac{4}{3}P'QQ \right) \epsilon_{22} \\ \left(PPQ' + \frac{4}{3}PP'Q \right) \sigma_{22} &= \\ = \left(4PQQ' + \frac{4}{3}P'QQ \right) \epsilon_{22} - \left(-2PQQ' + \frac{4}{3}P'QQ \right) \epsilon_{11} \end{aligned} \right\} (6.56)$$

Ứng suất σ_{12} hoặc σ_{21} cho bởi phương trình:

$$P\sigma_{12} = P\sigma_{21} = Q \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (6.57)$$

Bằng cách thay vào phương trình vi phân cân bằng động đối với bài toán phẳng (6.44), sau khi tính toán ta nhận được phương trình chuyển động cho chuyển vị đối với trạng thái ứng suất phẳng của vật đàn nhớt tuyến tính, có dạng:

$$\left. \begin{aligned}
\left(\text{PPQ}' + \frac{4}{3} \text{PP}'\text{Q} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 4 \left(\text{PQQ}' + \frac{1}{3} \text{P}'\text{QQ} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \\
&+ \left(\text{PPQ}' + \frac{4}{3} \text{P}'\text{QQ} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 3 \text{PQQ}' \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\
\left(\text{PPQ}' + \frac{4}{3} \text{PP}'\text{Q} \right) \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 4 \left(\text{PQQ}' + \frac{1}{3} \text{P}'\text{QQ} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \\
&+ \left(\text{PQQ}' + \frac{4}{3} \text{P}'\text{QQ} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 3 \text{PQQ}' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}
\end{aligned} \right\} \quad 6.58)$$

Chương 7

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN

(phương pháp biến đổi Laplace)

Trên cơ sở các phương trình cơ bản của cơ học môi trường liên tục: các phương trình cân bằng Navier (1.19), hệ các phương trình liên hệ giữa chuyển vị, biến dạng Cauchy (1.2), các phương trình liên tục và các quan hệ xác định sự liên hệ giữa ứng suất, biến dạng ở các chương chúng ta có thể tính được chuyển vị, ứng suất trong các bài toán của vật đàn nhớt tuyến tính.

Có nhiều phương pháp khác nhau, mỗi phương pháp có những ưu điểm riêng và phạm vi sử dụng, trong tài liệu này chỉ trình bày một phương pháp được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật để giải các bài toán tĩnh, dao động. Đó là phương pháp biến đổi Laplace, Caxơng. Nhờ phép biến đổi này ta đã khử được yếu tố thời gian trong các phương trình cơ bản nhưng đưa vào thông số chuyển đổi p để nhận được hệ phương trình ảnh đồng nhất hình thức với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng.

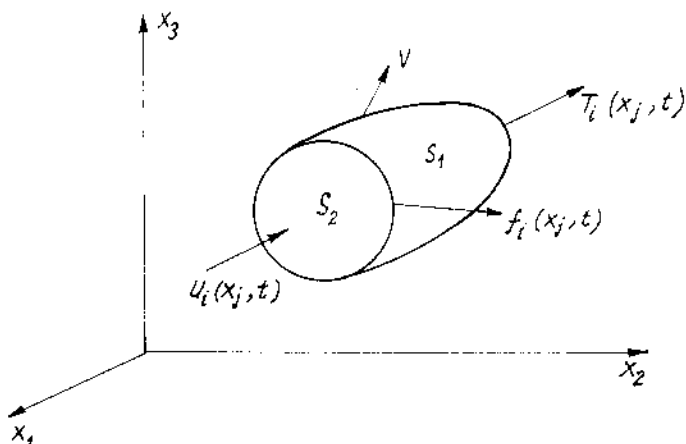
Theo lý thuyết tương ứng, ta suy ra hai bài toán của vật đàn nhớt tuyến tính và vật đàn hồi tuyến tính có cùng kích thước, cùng điều kiện biên và ban đầu như nhau thì nghiệm dưới dạng ảnh của bài toán đàn nhớt tuyến tính sẽ đồng nhất hình thức với nghiệm của bài toán đàn hồi tuyến tính. Vấn đề còn lại là từ nghiệm hàm ảnh dùng phép chuyển đổi ngược, ta xác định được nghiệm chuyển vị $u_i(x,t)$ hay ứng suất $\sigma_{ij}(x,t)$ cần tìm.

§1. LÝ THUYẾT CƠ BẢN CỦA SỰ TƯƠNG ƯNG

Bằng cách biến đổi Laplace, Caxơng, định luật đối xử của vật liệu đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng là đồng nhất hình thức với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng.

Ví dụ.

Xét vật đàn nhớt tuyến tính được xác định trong hệ tọa độ vuông góc X_1, X_2, X_3 như hình 7.1. Vật này chịu các lực bề mặt $T_i(x_j, t)$ trên phần S_1 của mặt S và chịu chuyển vị $U_i(x_j, t)$ trên phần S_2 , ngoài ra có thể có những liên kết mà tại đó chuyển vị bằng không. Quá trình tăng tải S_1, S_2 và thể tích V không thay đổi, có nghĩa ta xét trường hợp biến dạng nhỏ^(*).



Hình 7.1

Trong trường hợp giới hạn là nhỏ theo các giả thiết cổ điển thì ta có các phương trình cơ bản sau:

Phương trình chuyển động khi bỏ qua lực thể tích:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \rho = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (7.1)$$

Phương trình liên hệ giữa các thành phần chuyển vị, biến dạng:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.2)$$

^(*) Trường hợp biến dạng lớn S_1, S_2 , và V sẽ thay đổi theo thời gian trong quá trình tăng tải, các bài toán như thế thường dẫn đến hệ phi tuyến.

Điều kiện kết hợp biến dạng:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \cdot \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \cdot \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_j \cdot \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \cdot \partial x_l} \quad (7.3)$$

Điều kiện bề mặt:

$$T_i = \sigma_{ij} \cdot x_j \quad \sigma_{ij} \cdot n_j |_s = T_i(x, t) \quad (7.4)$$

$$u_i | = \varphi_i(x, t)$$

Trong đó n_j là cosin chỉ hướng của pháp tuyến ngoài.

Trong các bài toán động cần thiết thoả mãn các điều kiện ban đầu sau:

$$\left. \begin{aligned} u_i /_{t=t_0} &= f_i(x) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} /_{t=t_0} &= \psi_i(x) \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Trong đó hàm $f_i(x)$, $\psi_i(x)$ là các hàm đã cho của vật ở trên miền S_1 , S_2 hay S .

Các phương trình cơ bản trên đúng cho vật thể đàn hồi tuyến tính hoặc vật đàn nhớt tuyến tính. Chúng khác nhau chỉ ở các phương trình vật lý nêu lên quan hệ giữa ứng suất và biến dạng.

a) Ví dụ, vật đàn hồi tuyến tính đẳng hướng là hai phương trình sau:

$$S_{ij} = 2G e_{ij} \quad (7.6)$$

$$\sigma_{ii} = 3K \varepsilon_{ii} \quad (7.7)$$

$$\text{hay } \sigma_o = K\theta. \quad (7.8)$$

trong đó S_{ij} - ứng suất lệch, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \cdot \delta_{ij}$

e_{ij} - biến dạng lệch, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_o \cdot \delta_{ij}$

K - môđun thể tích.

θ - biến dạng thể tích.

σ_o - ứng suất trung bình.

ε_o - biến dạng dài tỷ đối trung bình.

Nếu viết biến dạng theo ứng suất, ta có:

$$e_{ij} = \frac{1}{2G} S_{ij} \quad (7.9)$$

$$\theta = \frac{1}{K} \sigma_0 \quad (7.10)$$

Vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng.

b) Nếu ta sử dụng quan hệ (5.24) thì ta nhận được hệ hai phương trình vật lý sau:

$$S_{ij}(t) = \int_0^t R(t - \tau).de_{ij}(\tau) \quad (7.11)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t R_1(t - \tau).d\theta(\tau)$$

hoặc viết biến dạng theo ứng suất, ta có:

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau).dS_{ij}(\tau)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \Pi_1(t - \tau).d\sigma(\tau) \quad (7.12)$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace – Cacxông đối với các phương trình cơ bản ở vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng chúng ta nhận được bài toán biên ở dạng ảnh:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{X}_i \rho = \left(\rho \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2} \right) \quad (7.13)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.14)$$

$$\bar{S}_{ij} = \bar{R} \cdot \bar{e}_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_0 = K \cdot \bar{\theta} \quad (7.15)$$

Các điều kiện biên:

$$\bar{\sigma}_{ij} \cdot n_j = \bar{T}_i$$

$$\bar{u}_i = \bar{\varphi}_i \quad (7.16)$$

Các điều kiện ban đầu (đối với bài toán động):

$$\bar{u} \Big|_{t=t_0} = \bar{f}_i(x)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \bar{\psi}_i(x) \quad (7.17)$$

Nếu chúng ta khảo sát bài toán được giải theo ứng suất, thì thay cho áp dụng phép biến đổi Laplace- Caxơ (7.11) ta áp dụng phép biến đổi Laplace- Caxơ với biểu thức (7.12), ta được:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ij} &= \bar{\Pi} \cdot \bar{S}_{ij} \\ \bar{\theta} &= \frac{1}{K} \bar{\sigma}_0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

So sánh các phương trình cơ bản của bài toán đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng với các phương trình cơ bản của bài toán đàn hồi tuyến tính đẳng hướng ta thấy chúng đồng nhất với nhau về mặt hình thức, do đó ta tìm được nghiệm ảnh của bài toán đàn nhớt như đã tìm nghiệm ở bài toán đàn hồi. Nói cách khác, khi vật thể đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng cùng kích thước, cùng điều kiện biên (cùng điều kiện đầu) với vật thể đàn hồi tuyến tính thì nghiệm ảnh của bài toán đàn nhớt là đồng nhất về mặt hình thức với nghiệm của bài toán đàn hồi.

Từ nghiệm ảnh của vật đàn nhớt tuyến tính, ta dùng phép biến đổi ngược ta sẽ xác định được nghiệm của bài toán đàn nhớt.

Để làm rõ thêm ta lấy ví dụ về cách giải bài toán theo phương pháp chuyển vị. Trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính, như đã biết xuất phát từ các phương trình cân bằng Navier (1.19) bằng cách biểu diễn ứng suất qua biến dạng nhờ các phương trình Cauchy ta nhận được 3 phương trình chuyển động Lamé với 3 ẩn số chuyển vị u, v, w dưới dạng viết gọn sau:

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (7.19)$$

trong đó ∇^2 - toán tử Laplace, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

θ - độ giãn thể tích tỷ đối, $\theta = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$

f_i - thành phần lực thể tích.

u_i - các thành phần chuyển vị (u, v, w).

ρ - khối lượng riêng.

Đối với vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng:

Từ hệ phương trình chuyển động, phương trình liên hệ giữa biến dạng chuyển vị và sử dụng quan hệ giữa ứng suất và biến dạng theo (6.15). Sau khi tính toán ta nhận được hệ phương trình chuyển động sau:

$$\frac{P_2(D)}{2P_1(D)} \nabla^2 u_i + \frac{1}{6} \cdot \frac{2P_4(D) \cdot P_1(D) + P_2(D) \cdot P_3(D)}{P_1(D) \cdot P_3(D)} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (7.20)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots$$

Trong đó ký hiệu:

$$\mu(D) = \frac{P_2(D)}{2P_1(D)}$$

$$\lambda(D) = \frac{P_1(D) \cdot P_4(D) - P_2(D) \cdot P_3(D)}{3P_1(D) \cdot P_2(D)} \quad (7.21)$$

Biểu thức (7.20) trở thành:

$$\mu(D) \cdot \nabla^2 u_i + (\lambda(D) + \mu(D)) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (7.22)$$

Giả thiết các điều kiện ban đầu là bằng không $u_i(x, s) = \dot{u}_i(x, s) = 0$, sau khi tiến hành phép chuyển đổi Laplát – xơ đối với các phương trình (7.19), (7.22), ta nhận được các phương trình sau:

Từ (7.19), ta có:

$$\mu \cdot \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} + \bar{f}_i = \rho p^2 \bar{u}_i \quad (7.23)$$

và từ (7.22), ta được:

$$\bar{\mu}(p) \cdot \nabla^2 \bar{u}_i + (\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} + \bar{f}_i = \rho p^2 \bar{u}_i \quad (7.24)$$

trong đó: λ, μ ở phương trình (7.23) là các hằng số Lamê.

Còn trong phương trình (7.24), $\bar{\lambda}(p), \bar{\mu}(p)$, là các hàm số của p :

$$\lambda(p) = \frac{P_1(p) \cdot P_4(p) - P_2(p) \cdot P_3(p)}{3P_1(p) \cdot P_2(p)}$$

$$\bar{\mu}(p) = \frac{P_2(p)}{2P_1(p)}$$

Ta thấy nhờ phép biến đổi Laplace, các phương trình chuyển động ở vật đàn nhớt tuyến tính đẳng hướng không lão hoá là đồng nhất hình thức với vật liệu đàn hồi tuyến tính đẳng hướng. Sự khác nhau giữa chúng chỉ ở giá trị λ, μ .

Do đó khi hai vật thể cùng kích thước, cùng các điều kiện biên ban đầu, cùng chịu tải trọng ngoài như nhau, nghiệm ảnh của bài toán vật thể đàn nhớt sẽ giống như nghiệm của bài toán đàn hồi.

Nếu trong vật đàn nhớt, ta sử dụng biểu thức liên hệ giữa ứng suất và biến dạng theo (5.52) thì làm tương tự như trên, ta nhận được hệ phương trình chuyển động sau:

$$\int_0^t \left\{ a(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 u_i + [b(t-\tau) + a(t-\tau)] \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right\} d\tau + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (7.25)$$

Sau khi tiến hành phép chuyển đổi Laplace, với các điều kiện ban đầu bằng không, ta nhận được hệ phương trình có dạng:

$$\bar{\mu}(p) \cdot \nabla^2 \bar{u}_i + (\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} + \bar{f}_i = \rho p^2 \bar{u}_i$$

trong đó

$$\bar{\mu}(p) = p \cdot \bar{b}(p) \quad (7.26)$$

$$\bar{\mu}(p) = p \cdot \bar{a}(p) \quad (7.27)$$

§2. TÍNH CÁC GIÁ TRỊ $E(p)$, $G(p)$, $\nu(p)$ VÀ $K(p)$

1. Tính giá trị $E(p)$

Trong nhiều bài toán kỹ thuật, người ta thường sử dụng hằng số môđun đàn hồi khi kéo E . Để thuận tiện sử dụng sau này ta tìm quan hệ giữa $E(p)$ với các giá trị $\lambda(p)$, $\mu(p)$.

Xuất phát từ định luật Hooke ở trạng thái đơn ta có:

+ Đối với vật thể đàn hồi:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Sau khi tiến hành phép chuyển đổi Laplace, ta có:

$$\bar{\sigma}(x, p) = E. \bar{\varepsilon}(x, p) = E. \frac{\partial \bar{u}(x, p)}{\partial x} \quad (a)$$

+ Còn ở vật đàn nhớt có dạng:

$$\bar{\sigma}(x, p) = \bar{E}(p). \bar{\varepsilon}(x, p) = \bar{E}(p). \frac{\partial \bar{u}(x, p)}{\partial x} \quad (b)$$

Sự khác nhau ở chỗ: đối với vật đàn hồi tuyến tính, môđun đàn hồi E là hằng số của vật liệu. Còn $\bar{E}(p)$ trong biểu thức (b) là hàm số của thông số p.

Để xác định giá trị $\bar{E}(p)$ ta dựa vào điều kiện sau:

Ứng suất ở trạng thái đơn giản sử là σ_x .

Đối với vật thể đàn hồi ta có:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11} = E. \varepsilon_{11}; \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$$

Đối với vật đàn nhớt theo phương trình (2.1), sau khi thực hiện phép biến đổi Laplace ta có:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(p) &= \bar{\lambda}(p). \bar{\theta} + 2\bar{\mu}(p). \bar{\varepsilon}_{11}(p) \\ \bar{\sigma}_{22}(p) &= \bar{\lambda}(p). \bar{\theta} + 2\bar{\mu}(p). \bar{\varepsilon}_{22}(p) = 0 \\ \bar{\sigma}_{33}(p) &= \bar{\lambda}(p). \bar{\theta} + 2\bar{\mu}(p). \bar{\varepsilon}_{33}(p) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Cộng từng vế của phương trình trên ta được:

$$\bar{\sigma}_{11}(p) + \bar{\sigma}_{22}(p) + \bar{\sigma}_{33}(p) = \sigma_{11} = [3. \bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)]. \bar{\theta}(p) \quad (d)$$

$$\text{Suy ra:} \quad \bar{\theta}(p) = \frac{\bar{\sigma}_{11}(p)}{3\bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)} \quad (e)$$

Thay (e) vào phương trình thứ nhất của (c) ta được:

$$\bar{\sigma}_{11}(p) = \frac{\mu(p) [3\bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)]}{\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)} . \bar{\varepsilon}_{11}(p)$$

Suy ra:

$$\bar{E}_{11}(p) = \frac{\bar{\mu}(p) [3\bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)]}{\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)} \quad (7.28)$$

Thay các giá trị $\bar{\lambda}(p)$, $\bar{\mu}(p)$ theo các công thức (7.21), ta được giá trị $\bar{E}(p)$ tính theo $P_1(p)$, $P_2(p)$, $P_3(p)$, $P_4(p)$:

$$\bar{E}_{11}(p) = \frac{3P_2(p) \cdot P_4(p)}{2P_1(p)P_4(p) + P_2(p) \cdot P_3(p)} \quad (7.29)$$

2. Tính các giá trị $\bar{G}(p)$, $\bar{v}(p)$ và $\bar{K}(p)$

Các giá trị $\bar{G}(p)$, $\bar{v}(p)$, $\bar{K}(p)$ lý luận tương tự và sau khi thực hiện phép biến đổi Laplace, ta được:

$$\bar{G}(p) = \bar{\mu}(p) \quad (7.30)$$

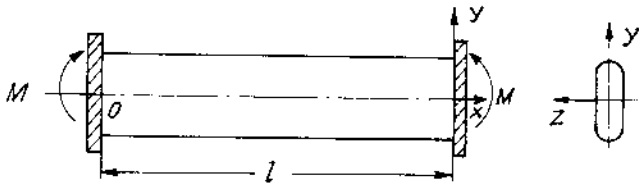
$$\bar{v}(p) = \frac{\bar{\lambda}(p)}{2(\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p))} \quad (7.31)$$

$$\bar{K}(p) = \bar{\lambda}(p) + \frac{2}{3}\bar{\mu}(p) \quad (7.32)$$

§3. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Uốn thuần túy một thanh hình trụ.

Xét bài toán uốn thuần túy như hình 7.2.



Hình 7.2

Mômen uốn tập trung đặt ở thời điểm t_0 và giữ không đổi:

$$M(t) = M^0(t - t_0)$$

oy, oz là hệ trục quán tính chính trung tâm. Mômen uốn nằm trong mặt phẳng chính trung tâm xoy. Vật liệu đàn nhớt tuyến tính đồng nhất đẳng hướng. Tìm sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang, chuyển vị là hàm của tọa độ x, y, z và thời gian.

Lời giải

Để giải bài toán này chúng ta có thể sử dụng lý thuyết của sự tương ứng. Theo lý thuyết đàn hồi nghiệm bài toán này là duy nhất và được viết như sau:

- Đối với những ứng suất:

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I} y \quad \text{các ứng suất khác } \sigma_{ij} = 0$$

- Đối với những biến dạng:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M}{EI} y \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu \frac{M}{EI} y \quad \text{các biến dạng khác } \varepsilon_{ij} = 0$$

- Đối với các chuyển vị:

$$U = -\frac{M}{EI} yx$$

$$V = \frac{M}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \nu \frac{M}{EI} \cdot \frac{z^2 - y^2}{2}$$

$$W = \nu \frac{M}{EI} y \cdot z$$

- Góc quay của mặt cắt ngang $x = l$ đối với mặt cắt $x = 0$ giả định là ngàm chặt là:

$$\omega_3 = \frac{Ml}{EI}$$

Độ cong của đường trục thanh:

$$\chi = \frac{M}{EI}$$

Lời giải của bài toán đối với vật đàn nhớt không lão hoá nhận được ngay tức khắc nhờ phép biến đổi Caxxông như sau:

- Đối với những ứng suất:

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\frac{\bar{M}}{I} y \quad \text{các ứng suất khác } \bar{\sigma}_{ij} = 0$$

- Đối với những biến dạng:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = -\frac{\bar{M}}{EI} y \quad \bar{\varepsilon}_{yy} = \bar{\varepsilon}_{zz} = \nu \frac{\bar{M}}{EI} y \quad \text{các biến dạng khác } \bar{\varepsilon}_{ij} = 0$$

- Đối với các chuyển vị:

$$\bar{U} = -\frac{\bar{M}}{EI} yx$$

$$\bar{V} = \frac{\bar{M}}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{v}{EI} \cdot \frac{z^2 - y^2}{2}$$

$$\bar{W} = \frac{v}{EI} y.x$$

- Góc quay của mặt cắt ngang $x = l$ đối với mặt cắt $x = 0$ giả định là ngàm chặt là:

$$\bar{\omega}_3 = -\frac{\bar{M}l}{EI}$$

Độ cong của đường trục thanh.

$$\bar{x} = -\frac{\bar{M}}{EI}$$

Trong đó:

Kí hiệu (—) ở trên là ảnh của đại lượng theo phép biến đổi Cauchy.

Ta có thể trở lại hàm gốc (hàm của thời gian t) không khó khăn bằng các chú ý sau:

+ Hàm gốc của $\bar{M} = M_0$ hay $\bar{M} = M_0 \cdot h(t)$

+ Hàm gốc của $\frac{1}{E}$ là $f(t)$.

+ Hàm gốc của $\frac{v}{E}$ là $m(t) \cdot f(t)$

Trong đó: $f(t)$ là hàm rã.

$$m(t) \text{ là tỷ số Poisson, } m(t) = -\frac{\epsilon_{22}(t)}{\epsilon_{11}(t)}.$$

Trong các thí nghiệm rã kéo hay nén đơn (trong đó chỉ ứng suất σ_{11} khác không). Chỉ số này thường được giả thiết là hằng số $m(t_0, t) = v$ hằng số biến dạng ngang. Từ đó hàm gốc của $\frac{v}{E}$ là $v \cdot f(t)$.

Thay vào, ta nhận được các biểu thức là hàm của thời gian:

+ Ứng suất: $\sigma_{xx} = -\frac{M^0}{I} \cdot y \cdot h(t)$ các ứng suất khác $\sigma_{ij}(t) = 0$

+ Các biến dạng:

$$\varepsilon_{xx}(t) = -\frac{M^0}{I} \cdot y \cdot f(t)$$

$$\varepsilon_{yy}(t) = \varepsilon_{zz}(t) = -\frac{M^0}{I} \cdot y \cdot v \cdot f(t) = -v \cdot \varepsilon_{xx}(t)$$

+ Chuyển vị:

$$u(t) = \frac{M^0}{I} \cdot y \cdot x \cdot f(t)$$

$$v(t) = \frac{M^0}{I} \left[\frac{x^2}{2} - y \frac{z^2 - y^2}{2} \right] \cdot f(t)$$

$$w(t) = \frac{M^0}{I} \cdot y \cdot z \cdot v \cdot f(t)$$

+ Góc quay của mặt cắt ngang $x = l$ đối với mặt cắt $x = 0$:

$$\omega_3(t) = \frac{M^0}{I} \cdot l \cdot f(t)$$

+ Độ cong đường trục thanh:

$$\chi(t) = \frac{M^0}{I} \cdot f(t)$$

Hàm rã $f(t)$ được xác định từ thí nghiệm rã khi kéo nén đơn. Nếu chọn vật liệu theo một mô hình nào đó thì ta sẽ lấy hàm rã của mô hình đó.

Ví dụ, chọn mô hình Thomson thì hàm rã:

$$f(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right)$$

Ứng suất $\sigma_{xx}(t)$ không phụ thuộc vào hàm $f(t)$ nên vật đàn hồi, đàn nhớt như nhau. Biến dạng là hàm của thời gian:

$$\varepsilon_{xx}(t) = -\frac{M^0}{I} \cdot y \cdot \left\{ \frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \right\}$$

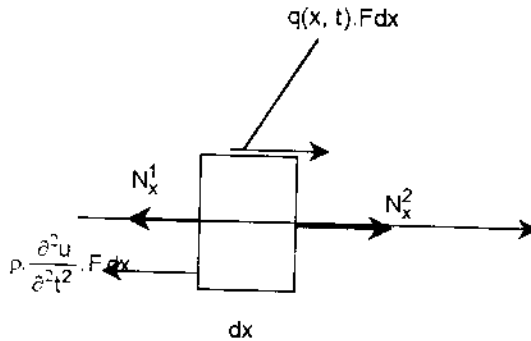
$$\varepsilon_{yy}(t) = \varepsilon_{zz}(t) = -\frac{M^0}{I} \cdot y \cdot v \left\{ \frac{1}{E} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp\left(\frac{t}{\tau_r}\right) \right) \right\}$$

Ví dụ 2. Dao động dọc.

Xét phương trình dao động dọc của thanh có tiết diện không đổi làm từ vật liệu đàn nhớt tuyến tính không lão hoá đẳng hướng, chịu tải trọng phân bố dọc thanh chịu cường độ $q(x, t)$.

Bài giải.

Tách từ thanh ra một phân tố dx (hình 7.3). Trên phân tố có các lực tác dụng sau:



Hình 7.3

+ Lực dọc: $N_x^1 = \sigma_x \cdot F$

$$N_x^2 = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) F$$

+ Lực tác động: $q(x, t) \cdot F \cdot dx$

+ Lực quán tính: $\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot F \cdot dx$

Tổng hình chiếu các lực xuống phương x , sau khi tính toán ta nhận được phương trình chuyển động:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(x, t) = 0 \quad (a)$$

trong đó: σ_x - ứng suất pháp.

F - diện tích mặt cắt ngang.

ρ - khối lượng riêng.

U - chuyển vị theo phương x .

Phương trình (a) đúng cả cho vật thể đàn hồi và đàn nhớt. Giả thiết điều kiện ban đầu là:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ \dot{u}(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \quad (b)$$

Tiến hành phép chuyển đổi Laplace cho phương trình (a), ta được:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\xi} - p^2 \cdot \rho \cdot \bar{u} + \bar{q} = -p \cdot \rho \cdot f(x) + \rho \cdot g(x) = -\rho \cdot [p \cdot f(x) + g(x)] \quad (c)$$

Trong đó:

$$+ \text{Đối với vật thể đàn hồi: } \bar{\sigma}(x, p) = E \cdot \bar{\varepsilon}(x, p) = E \cdot \frac{d\bar{u}}{dx}(x, p) \quad (d)$$

E – môđun đàn hồi kéo – nén là hằng số.

Thay (d) vào (c) ta nhận được phương trình:

$$c^2 \frac{d^2 \bar{u}(x, p)}{dx^2} - p^2 \bar{u}(x, p) = - \left[\frac{\bar{q}(x, p)}{\rho} + p f(x) + g(x) \right]$$

$$\text{Trong đó} \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

+ Đối với vật đàn nhớt:

$$\bar{\sigma}(x, p) = \bar{E}(p) \cdot \bar{\varepsilon}(x, p) = \bar{E}(p) \frac{d\bar{u}}{dx}(x, p) \quad (e)$$

$E(p)$ là hàm số của thời gian p .

Giá trị $E(p)$ được tính theo công thức sau:

$$E(p) = \frac{\bar{\mu}(p) \cdot [3\bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)]}{\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)} \quad (f)$$

Thay (e) vào (c) ta nhận được phương trình:

$$C^2(p) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - p^2 \bar{u} = - \left[\frac{\bar{q}(x, t)}{\rho} + p \cdot f(x) + g(x) \right] \quad (g)$$

trong đó

$$C^2(p) = \frac{\bar{E}(p)}{\rho} \quad (h)$$

Phương trình (g) hoàn toàn tương tự phương trình dao động dọc của thanh từ vật liệu đàn hồi, sự khác nhau chỉ ở chỗ hệ số của $\frac{d^2 u}{dx^2}$. Ở

vật thể đàn hồi hệ số $C^2 = \frac{E}{\rho}$ là hằng số, còn trong vật đàn nhớt tuyến

tính không lão hoá thì $C^2(p)$ là hàm của thông số p . Do đó phương pháp giải bài toán dao động dọc ở vật đàn nhớt tuyến tính, về mặt toán học được nghiên cứu tương tự như vật đàn hồi tuyến tính với các điều kiện biên, điều kiện ban đầu giống nhau.

Ví dụ.

Xét bài toán dao động dọc của thanh hai đầu ngàm, các điều kiện ban đầu là:

$$u(x, 0) = f(x); \quad \dot{u}(x, 0) = g(x)$$

Bài giải

Xuất phát từ phương trình (g), sau khi giải ta xác định được giá trị:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) = & \frac{2}{e} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \cdot x}{p^2 + \alpha_n^2 \cdot C^2(p)} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^1 \bar{q}(u, p) \cdot \sin \alpha_n \cdot u du \right\} + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_0^1 f(u) \cdot \sin \alpha_n u du + \int_0^1 g(u) \cdot \sin \alpha_n \cdot u du \end{aligned} \quad (i)$$

Trong đó
$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l}$$

Để tìm giá trị $u(x, t)$ ta phải sử dụng phép biến đổi Laplace nghịch phương trình (i).

Thí dụ, vật đàn nhớt tuân theo mô hình Voigt – Kelvin. Theo công thức (6.19) và (7.29) ta có:

$$\bar{E}_{11} = \frac{3P_2(p) \cdot P(p)}{2P_1(p)P_4(4) + P_2(p) \cdot P_3(p)} = \frac{9G(1+t^0 p)}{3 + \frac{G}{K}(1+t^0 p)} \quad (k)$$

Do đó

$$C^2(p) = \frac{E(p)}{\rho} = \frac{3G}{\rho}(1+t^0 p) = \frac{E}{\rho} \cdot (1+t^0 p) = C^2 \cdot (1+t^0 p) \quad (l)$$

Trường hợp vật không nén khi đó $K \rightarrow \infty$ và $v = \frac{1}{2}$.

Biểu thức (1) trở thành:

$$\frac{E(p)}{\rho} = \frac{3G}{\rho}(1 + t^0 p) = \frac{E}{\rho} \cdot (1 + t^0 p) = C^2 \cdot (1 + t^0 p)$$

Trong đó C – tốc độ lan truyền sóng trong vật thể đàn hồi tuyến tính.

$$\text{Đặt} \quad \gamma_n^2 = \alpha_m^2 \cdot C^2 \quad \text{và} \quad p_n = \frac{\gamma_n \cdot t^0}{2}$$

$$\text{Thì} \quad \frac{1}{p^2 + \alpha_n^2 \cdot C^2(p)} = \frac{1}{p^2 + 2p\beta_n\gamma_n + \gamma_n^2}$$

Sau khi tiến hành phép biến đổi Laplace nghịch (i) ta tìm được giá trị $u(x, t)$ có dạng:

$$\begin{aligned} U(x, t) = & \\ = & \frac{2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{\gamma_n \sqrt{1 - \beta_n^2}} \int_0^1 \sin \alpha_n \cdot u \cdot du \cdot \int_0^t q(u, t) \cdot e^{-\beta_n \gamma_n (t-\tau)} \cdot \sin [\gamma_n \sqrt{1 - \beta_n^2} (t - \tau)] d\tau + \\ & + \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \cdot x}{\gamma_n \sqrt{1 - \beta_n^2}} \cdot e^{-\beta_n \gamma_n t} \cdot \sin [\gamma_n \cdot t \cdot \sqrt{1 - \beta_n^2}] \cdot \int_0^1 f(\xi) \cdot \sin \alpha_n \cdot \xi \cdot d\xi + \\ & + \frac{2}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n \cdot x}{\gamma_n \sqrt{1 - \beta_n^2}} \cdot e^{-\beta_n \gamma_n t} \cdot \sin [\gamma_n \cdot t \cdot \sqrt{1 - \beta_n^2}] \cdot \int_0^1 g(\xi) \cdot \sin \alpha_n \cdot \xi \cdot d\xi . \end{aligned}$$

$$\text{Trong đó} \quad \varphi_n = \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - \beta_n^2}}{-\beta_n} \right) ; \quad 1 - \beta_n^2 > 0$$

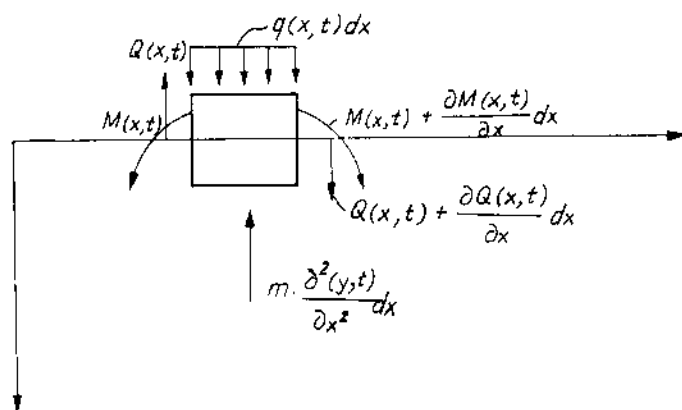
Ví dụ 3. Dao động ngang của dầm.

Xét phương trình dao động ngang của dầm có tiết diện không đổi làm từ vật liệu đàn nhớt tuyến tính không lão hoá đẳng hướng, chịu tải trọng phân bố dọc dầm có cường độ $q(x, t)$.

Bài giải

Tách từ thanh ra một phân tố dx (hình 7.4). Trên phân tố có các lực tác động:

- + Lực cắt: $Q(x, t)$.
- + Lực cắt: $Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx$
- + Mômen: $M(x, t)$.
- + Mômen: $M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx$
- + Lực kích thích: $q(x, t).dx$
- + Lực quán tính: $m. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$
- + Khối lượng trên một đơn vị chiều dài, m .



Hình 7.4

Khi bỏ qua lực cắt, lực quán tính quay của phần tử thanh thì phương trình có dạng:

$$c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{q(x, t)}{m} \quad (a)$$

Trong đó $c^2 = \frac{EI}{m}$

Phương trình (a) đúng cho cả vật thể đàn hồi và vật thể đàn nhớt. Tiến hành phép biến đổi Laplace với các điều kiện ban đầu $y(x, 0)$; $\dot{y}(x, 0)$, ta được:

+ Vật đàn hồi:

$$c^2 \frac{d^4 \bar{y}}{dx^4} + p^2 \bar{y} = \frac{\bar{q}(x, p)}{m} + p \cdot y(x, 0) + \dot{y}(x, 0) \quad (b)$$

+ Vật đàn nhớt:

Chỉ cần thay $c(p)$ là một hàm của thông số p , khi đó ta có phương trình:

$$c^2(p) \frac{\partial^4 \bar{y}}{\partial x^4} + p^2 \bar{y} = \frac{\bar{q}(x, p)}{m} + p \cdot y(x, 0) + \dot{y}(x, 0) \quad (c)$$

Trong đó

$$c^2(p) = \frac{E(p)I}{m} \quad (d)$$

$$E(p) = \frac{\bar{\mu}(p) \cdot [3\bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)]}{\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)} \quad (e)$$

Ví dụ.

Cho dầm có chiều dài l , chịu dao động cưỡng bức với lực kích thích phân bố $q(x, t)$, điều kiện ban đầu $y(x, 0) = f(x)$; $\dot{y}(x, 0) = g(x)$. Tìm giá trị $y(x, t)$.

Bài giải

Để giải phương trình (c) có nhiều cách, ở đây ta sẽ sử dụng phương pháp thông dụng trong kỹ thuật. Giả sử các hàm $\bar{y}(x, p)$; $f(x)$; $g(x)$ và $\bar{q}(x, p)$ khai triển được thành chuỗi các hàm riêng $y_n(x)$ dạng:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}(x, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(p) \cdot y_n(x) \\ f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot y_n(x) \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cdot y_n(x) \\ \bar{q}(x, p) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(p) \cdot y_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Trong đó hàm $y_n(x)$ là các hàm trực giao được xác định từ phương trình sau:

$$\frac{d^4 y_n}{dx^4} - \lambda_n^4 \cdot y_n = 0 \quad (f)$$

Trong đó:

$$\lambda_n^4 = \frac{\omega_n^2}{c^2}; \quad c^2 = \frac{EI}{m} \quad (g)$$

Thay giá trị (f) vào (c) ta được:

$$[c^2(p) \cdot \lambda_n^4 + p^2] \cdot F_n(p) = \frac{1}{m} p_n(p) + p \cdot f_n + g_n$$

Từ đó:

$$F_n(p) = \frac{\frac{1}{m} \cdot p_n(p) + p \cdot f_n + g_n}{c^2(p) \cdot \lambda_n^4 + p^2} \quad (h)$$

Thay (h) vào phương trình đầu của (e) ta được:

$$\bar{y}(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{p_n(p) + p \cdot f_n + g_n}{c^2(p) \cdot \lambda_n^4 + p^2} y_n(x) \quad (i)$$

Hoặc viết:

$$\begin{aligned} \bar{y}(x, p) = & \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) \int_0^1 q(u, p) \cdot y(u) \cdot du}{c^2(p) \cdot \lambda_n^4 + p^2} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x) \left[p \int_0^1 f(u) \cdot y_n(u) \cdot du + \int_0^1 g(u) \cdot y_n(u) \cdot du \right]}{c^2(p) \cdot \lambda_n^4 + p^2} \end{aligned}$$

Đối với các hàm $f(u)$; $g(u)$; $q(u, p)$ đã cho, ta lấy tích phân trên, sau đó dùng phép biến đổi Laplace nghịch phương trình (i) ta tìm được giá trị $y(x, t)$.

Giá trị $c^2(p)$ được tính như sau:

$$c^2(p) = \frac{I}{m} E(p) = \frac{I}{m} \cdot \frac{3P_2(p) \cdot P_4(p)}{2P_1(p) \cdot P_4(p) + P_2(p) \cdot P_3(p)} \quad (k)$$

Ví dụ đối với vật Voigt - Kelvin:

Thay vào ta được:

$$c^2(p) = \frac{I}{m} \cdot \frac{9G(1+t^0.p)}{3 + \frac{G}{K}(1+t^0.p)}$$

Thay (k) vào (j) và tiến hành phép biến đổi Laplace ngược ta tìm được hàm $y(x, t)$.

Trường hợp vật không nén, khi đó $k \rightarrow \infty$ thì $\gamma = \frac{1}{2}$.

$$\text{Giá trị } c^2(p) \text{ đưa về dạng: } c^2(p) = \frac{3IG}{m} (1 + t^0 p) \quad (l)$$

Thay giá trị $3G = E$ ta được:

$$c^2(p) = \frac{EI}{m} (1 + t^0 p) \quad (m)$$

Thay (m) vào (j) sau khi thực hiện phép biến đổi Laplace ngược, ta được:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 f(u) \cdot y_n(u) \cdot du \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta_n^2}} \cdot e^{-\beta_n \gamma_n t} \\ & \sin \left[\gamma_n t \sqrt{1-\beta_n^2} + \varphi_n \right] + \frac{1}{\gamma_n \sqrt{1-\beta_n^2}} \cdot e^{-\beta_n \gamma_n t} \\ & \sin \left(\gamma_n t \sqrt{1-\beta_n^2} \right) \int_0^1 g(u) y_n + \\ & + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)}{\gamma_n (1-\beta_n^2)} \int_0^1 y_n(u) \cdot du \int_0^t q(u, \tau) \cdot e^{-\beta_n \gamma_n (t-\tau)} \\ & \sin \left[\gamma_n (t-\tau) \sqrt{1-\beta_n^2} \right] \cdot d\tau \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Trong đó:

$$\beta_n = \frac{\gamma_n \cdot t}{2}; \quad \gamma_n^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\omega_n^2}{1+\gamma} \alpha_n^2; \quad \varphi_n = \arctg \frac{\sqrt{1-\beta_n^2}}{\beta_n} \quad (o)$$

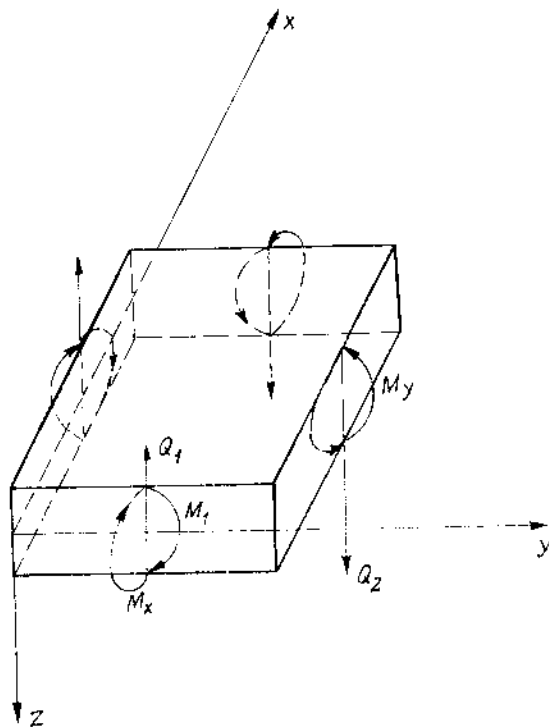
Nghiệm bài toán đàn hồi tuyến tính tìm được bằng cách cho $t = 0$ trong hệ phương trình (o).

Ví dụ 4. Dao động của tấm

Phương trình vi phân dao động của tấm mỏng hình chữ nhật làm từ vật liệu đàn nhớt tuyến tính, không lão hoá, đẳng hướng, chịu tải trọng kích thích phân bố có cường độ $q(y, t)$.

Tách từ tấm ra một phần tử (hình 7.5). Phần tử chịu tác động của các thành phần nội lực, ngoại lực sau:

- + M_x, M_y - mômen uốn trên một đơn vị chiều dài.
- + M_1, M_2 - mômen xoắn trên một đơn vị chiều dài.
- + Q_1, Q_2 - lực cắt trên một đơn vị chiều dài.
- + $q(y, t).dx.dy$ - lực kích thích.
- + $g(x, y, t)$ - lực quán tính: $g(x, y, t) = -\rho h \cdot \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}$



Hình 7.5

Xét sự cân bằng của phân tố, làm tương tự như đối với vật thể đàn hồi, sau khi tính toán ta nhận được phương trình vi phân chuyển động sau:

$$D \cdot \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (a)$$

Các nội lực được xác định bằng các biểu thức sau:

$$M_x(x, y) = -D \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}$$

$$M_y(x, y) = -D \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$$

$$M_1 = M_2 = -D(1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2}$$

$$Q_2 = -D \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3 \partial y}$$

trong đó $w(x, y, t)$ - chuyển vị của mặt nào đó trên mặt trung gian;

$$D - \text{độ cứng trụ của tấm, } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

h - bề dày tấm mỏng.

ν - hệ số biến dạng ngang.

ρ - khối lượng riêng.

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Phương trình (a) đúng cho cả vật đàn hồi và đàn nhớt.

Áp dụng phép biến đổi Laplace đối với phương trình (a).

Với điều kiện ban đầu $W(x, y, 0) = f(x, y)$ $\dot{W}(x, y, 0) = g(x, y)$

Ta được:

$$D \nabla^4 \bar{w}(x, y, p) + \rho h [p^2 \bar{w} - p w(x, y, 0) - \dot{w}(x, y, 0)] = \bar{q}(x, y, p)$$

$$\text{Hoặc} \quad c^2(p) \nabla^4 W + p \bar{W} - p.f + g = \frac{\bar{q}}{\rho h}$$

Đối với vật thể đàn hồi tuyến tính D là hằng số con. Đối với vật đàn nhớt tuyến tính thì D là hàm của thông số p.

Giá trị D(p) được tính như sau:

+ Ở vật đàn hồi.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2G}{(1-\nu)} \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$G = \mu \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{vì vậy} \quad \frac{2G}{(1-\nu)} = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$$

+ Ở vật đàn nhớt, ta thay các giá trị D và ν là hàm của thông số p áp dụng tương tự ta được:

$$\bar{D}(p) = 4\bar{\mu}(p) \cdot \frac{\bar{\lambda}(p) + \bar{\lambda}(p)}{\bar{\lambda}(p) + 2\bar{\mu}(p)}$$

$$\bar{\nu}(p) = \frac{\bar{\lambda}(p)}{2[\bar{\lambda}(p) + \bar{\mu}(p)]}$$

Nếu tính quan hệ giữa ứng suất biến dạng theo (6.15) thì ta có:

$$\bar{D}(p) = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{P_2(p)}{P_1(p)} \cdot \frac{2P_1(p) \cdot P_4(p) + P_2(p) \cdot P_3(p)}{P_1(p) \cdot P_4(p) + 2P_2(p) \cdot P_3(p)}$$

$$\bar{\nu}(p) = \frac{P_1(p) \cdot P_4(p) - P_2(p) \cdot P_3(p)}{2P_1(p) \cdot P_4(p) + P_2(p) \cdot P_3(p)}$$

Nếu tính quan hệ giữa ứng suất và biến dạng theo (5.52) thì ta có:

$$\bar{D}(p) = 4p \cdot \bar{a}(p) \cdot \frac{\bar{b}(p) + \bar{a}(p)}{\bar{b}(p) + 2\bar{a}(p)} \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$\bar{\nu}(p) = \frac{\bar{b}(p)}{2[\bar{b}(p) + \bar{a}(p)]}$$

Nghiệm của phương trình (c) với các điều kiện ban đầu $w(x,y,0) = f(x,y)$ và $\dot{w}(x,y,0) = g(x,y)$ có dạng:

$$\begin{aligned}
\overline{W}(x, y, p) = & \frac{1}{\rho h} \sum_{n,m}^{\infty} \frac{M_{nm}(x, y)}{\lambda_{n,m}^4 \cdot c^2(p) \cdot p^2} \int_0^a \int_0^b q(\xi, \eta, p) \cdot W_{nm}(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta + \\
& + \sum_{n,m}^{\infty} \frac{W_{nm}(x, y) \cdot p}{\lambda_{n,m}^4 \cdot c^2(p) + p^2} \int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta) \cdot W_{nm}(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta + \\
& + \sum_{n,m}^{\infty} \frac{W_{nm}(x, y)}{\lambda_{n,m}^4 \cdot c^2(p) + p^2} \int_0^a \int_0^b g(\xi, \eta) \cdot W_{nm}(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta
\end{aligned} \quad (g)$$

Trong đó:

$W_{n,m}(x, y)$ là hàm trực giao được xác định từ phương trình:

$$\nabla^4 W_{nm} - \lambda_{nm}^4 W_{nm} = 0 \quad (h)$$

$$\lambda_{nm}^4 = \frac{\omega_{n,m}^2}{c^2} \quad (i)$$

Thực hiện phép biến đổi Laplace nghịch phương trình (g) ta nhận được giá trị $W(x, y, t)$.

Ví dụ.

Nhằm minh họa đơn giản ta xét trường hợp vật không nén ($K \rightarrow \infty$; $\gamma = \frac{1}{2}$) khi đó, theo (e): $D(p) = \frac{h^3}{12} \cdot \frac{2P_2(p)}{P_1(p)}$.

Ở vật Voigt – Kelvin, thay vào ta được:

$$D(p) = \frac{4Gh^3}{12} (1 + t^0 p) = D(1 + t^0 p)$$

Trong đó D là độ cứng trụ của tấm đàn hồi khi $\nu = \frac{1}{2}$.

Trường hợp này ta có:

$$\lambda_{nm}^4 c^2(p) = \frac{\omega_{n,m}^2}{c^2} \cdot c^2(p) = \omega_{nm}^2 (1 + t^0 p) \quad (m)$$

ω_{nm} là tần số dao động riêng của vật đàn hồi khi $\nu = \frac{1}{2}$.

Thay (m) vào (g) sử dụng phương pháp đổi Laplace nghịch, sau khi tính toán ta được:

$$\begin{aligned}
W(x, y, t) = & \frac{1}{\rho h} \cdot \sum_{n, m} \frac{W_{nm}(x, y)}{\omega_{nm} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} \int_0^a \int_0^b W_{nm}(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot \times \\
& \times \int_0^t e^{-\beta_{mn} \cdot \omega_{mn} (t - \tau)} q(\xi, \eta, \tau) \cdot \sin \omega_{mn} (t - \tau) \sqrt{1 - \beta_{mn}^2} \cdot d\tau + \\
& + \sum_{n, m} \frac{W_{nm}(x, y)}{\omega_{nm} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} e^{-\beta_{mn} \cdot \omega_{mn} t} \sin \left(\omega_{nm} \cdot t \sqrt{1 - \beta_{mn}^2} + \varphi_{nm} \right) \times \\
& \times \int_0^a \int_0^b f(\xi, \eta) \cdot W_{nm}(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta + \\
& + \sum_{n, m} \frac{W_{nm}(x, y)}{\omega_{nm} \sqrt{1 - \beta_{mn}^2}} e^{-\beta_{mn} \cdot \omega_{mn} t} \sin \left(\omega_{nm} \cdot t \sqrt{1 - \beta_{mn}^2} + \varphi_{nm} \right) \times \\
& \times \int_0^a \int_0^b g(\xi, \eta) \cdot W_{nm}(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta .
\end{aligned}$$

Trong đó:

$$\beta_{nm} = \frac{\omega_{nm} t}{2} \quad \varphi_{nm} = \arctg \frac{\sqrt{1 - \beta_{mn}^2}}{-\beta_{nm}} .$$

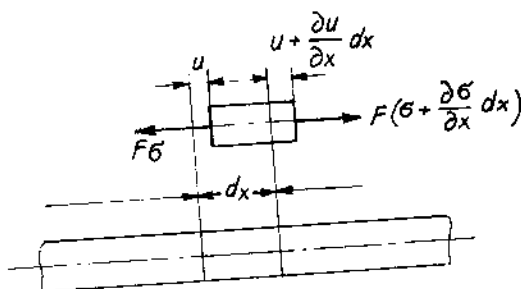
Chương 8

SỰ LAN TRUYỀN SÓNG TRONG VẬT ĐÀN NHỐT

§1. SỰ LAN TRUYỀN SÓNG HÌNH SIN DỌC TRONG THANH MỎNG TỪ VẬT LIỆU ĐÀN NHỐT

Chúng ta đã biết về sự lan truyền sóng hình sin dọc trong thanh ở vật liệu đàn hồi, trong phần này ta chủ yếu xét ảnh hưởng của sự tán sắc trong vật liệu đàn nhớt.

Giả thiết thanh rất mảnh và ứng suất là bé để có thể bỏ qua sự thay đổi hình dáng. Vị trí mặt cắt ngang của thanh được xác định bởi tọa độ x , chuyển vị của tiết diện là $u(x,t)$, (hình 8.1).



Hình 8.1. Biến dạng của thanh mỏng gây nên bởi sóng dọc.

Kí hiệu như sau:

F - diện tích mặt cắt ngang.

σ - ứng suất pháp.

ρ - khối lượng riêng.

Phương trình cân bằng chuyển động của một phân tử chiều trên trục x có dạng:

$$F\rho \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) - F\sigma \quad (8.1)$$

Suy ra
$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (8.2)$$

Đối với các vật liệu có những quan hệ giữa ứng suất, biến dạng phụ thuộc khác nhau, thay giá trị σ quan hệ với u ta nhận được các phương trình sóng khác nhau.

Ví dụ: vật đàn hồi, thay $\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}$ ta được phương trình sóng dọc trong thanh mỏng có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (8.3)$$

Trong đó: C_0 - tốc độ sóng dọc trong thanh,

$$C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.4)$$

Ví dụ. Vật đàn nhớt

1. Vật Kelvin - Voigt

Theo (4.15) thay σ như sau:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (8.5)$$

Phương trình chuyển động có dạng:

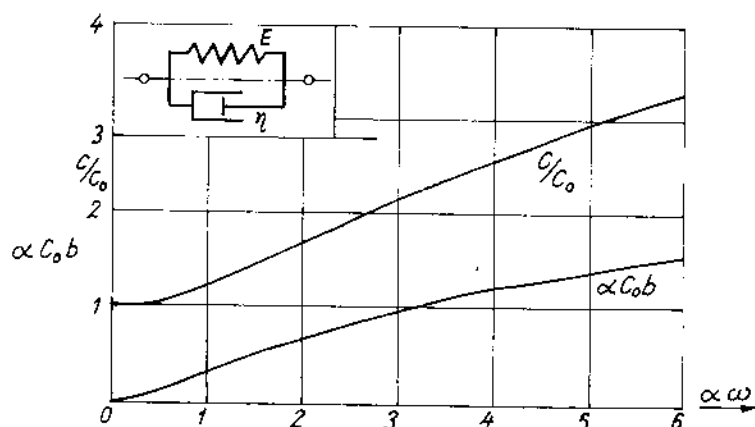
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^2}$$

Chia hai vế cho ρ ta được:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (8.6)$$

Trong đó C_0^2 là tốc độ lan truyền trong thanh vật đàn hồi:

$$C_0^2 = \frac{E}{\rho}$$



Hình 8.2. Sự phụ thuộc tốc độ và hệ số của mô hình Kelvin-Voigt

Đối với sóng hình sin có biên độ ban đầu là A , tần số là $\frac{\omega}{2\pi}$ thì nghiệm phương trình (8.6) có dạng:

$$u(x, t) = A \cdot e^{-bx} \cdot \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (8.7)$$

trong đó b - hệ số giảm chấn;
 c - tốc độ pha của sóng.

Đặt giá trị $u(x, t)$ này vào phương trình (8.6) ta nhận được hệ hai phương trình đối với b và c .

$$\frac{C^2}{C_0^2} = \frac{2}{\alpha^2 \omega^2} (1 + \alpha^2 \omega^2) \left[\sqrt{(1 + \alpha^2 \omega^2)} - 1 \right] \quad (8.8)$$

$$\alpha C_0 b = \frac{\alpha \omega}{\sqrt{2\sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2}}} \left[\sqrt{(1 + \alpha^2 \omega^2)} - 1 \right] \quad (8.9)$$

Trong đó

$$\alpha = \frac{\eta}{\rho C_0^2} = \frac{\eta}{E} \quad (8.10)$$

Nhờ đẳng thức này ta vẽ được đồ thị các đại lượng $\frac{c}{c_0}$ và $\alpha c_0 b$ phụ thuộc vào $\alpha\omega$ như hình 8.2.

Tất cả đại lượng $\frac{c}{c_0}$ và $\alpha c_0 b$ là không thứ nguyên.

Ta thấy:

- Nếu $\alpha\omega$ nhỏ thì $\frac{c}{c_0} = 1$ và $\alpha c_0 b = \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2$.

Vì vậy tốc độ pha không phụ thuộc vào tần số, còn hệ số giảm chấn tỷ lệ với bình phương của tần số.

- Nếu $\alpha\omega$ lớn thì $\frac{c}{c_0} = \sqrt{2\alpha\omega}$ và $\alpha c_0 b = \sqrt{\frac{1}{2}\alpha\omega}$. Trong những điều kiện này rõ ràng xuất hiện tán sắc và hệ số giảm chấn tỷ lệ với căn bậc hai của tần số.

2. Vật theo mô hình Macxoen

Theo (4.8) quan hệ giữa σ và ϵ là
$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (8.11)$$

Đạo hàm (8.11) theo x ta được.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = \frac{1}{x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \quad (8.12)$$

Thay giá trị $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ từ phương trình (8.12) vào (8.2). Sau khi tính toán ta nhận được phương trình chuyển động dạng:

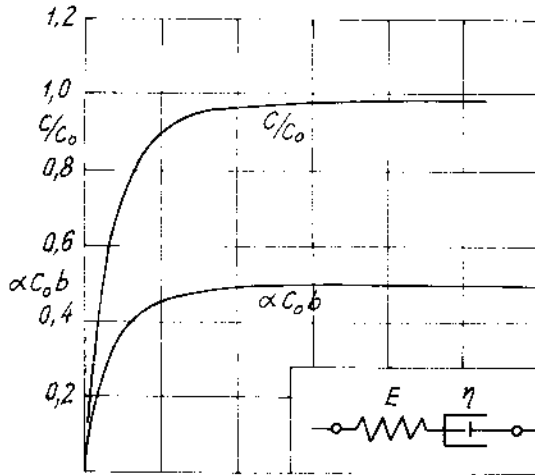
$$\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\rho}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad (8.13)$$

Đối với sóng lan truyền, chúng ta giả thiết nghiệm có dạng (8.7). Thay (8.7) vào (8.13) ta nhận được hệ hai phương trình để xác định tốc độ và sự suy giảm của sóng:

$$\left(\frac{C_0}{C} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2 \omega^2}} \right] \quad (8.14)$$

$$\alpha C_0 b = \frac{\alpha \omega}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \omega^2} \right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.15)$$

Giá trị những đại lượng không thứ nguyên $\frac{c}{c_0}$ và $\alpha c_0 b$ như hàm của $\alpha \omega$ chỉ trên hình 8.3.



Hình 8.3. Sự phụ thuộc tốc độ và hệ số của vật liệu mô hình Macxoen.

Ta thấy:

- Nếu $\alpha \omega$ nhỏ thì

$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{2\alpha\omega} \quad \text{và} \quad \alpha C_0 b = \frac{\alpha\omega}{\sqrt{2}}.$$

Khi $\alpha \omega = 0$ thì $c = b = 0$, có nghĩa là, mặc dầu nhóm sóng bao gồm những sóng có chiều dài lớn vô hạn sẽ không bị giảm chấn, nó cũng sẽ không tách khỏi nguồn.

- Nếu $\alpha \omega$ lớn thì $\frac{c}{c_0} = 1$ và $\alpha c_0 b = \frac{1}{2}$. Từ đó ta thấy rằng sự tán sắc biến mất và trong điều kiện này hệ số giảm chấn là không đổi.

3. Vật theo mô hình 3 hằng số

Phương trình quan hệ có dạng:

$$\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right)\sigma + \frac{\eta}{E_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = E_2 \varepsilon + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (8.16)$$

Đạo hàm theo x biểu thức (8.16) ta được:

$$\left(1 + \frac{E_2}{E_1}\right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\eta}{E_1} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial x} = E_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (8.17)$$

Đạo hàm theo t phương trình (8.2) ta có:

$$\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial x} \quad (8.18)$$

Thay giá trị $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial x}$ ở (8.17) vào biểu thức (8.18) và chú ý đến (8.16).

Sau khi tính toán ta nhận được phương trình chuyển động của các mô hình 3 hằng số:

$$\rho \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \rho(E_1 + E_2) \frac{\partial^3 u}{\partial t^2} - \eta E_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - E_1 \cdot E_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (8.19)$$

Tính chất của phương trình này không chỉ phụ thuộc vào hệ số cản nội η mà còn phụ thuộc vào tỷ số mô đun đàn hồi E_1 và E_2 . Đối với vật liệu đàn hồi $\eta = 0$ và tốc độ sóng có giá trị sau:

$$\frac{1}{C_0^2} \rho \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = \frac{\rho}{E_c} \quad (8.20)$$

Trái lại khi $\eta \rightarrow \infty$ mô hình Kelvin – Voigt trở thành phân tử cứng và từ phương trình chuyển động ta nhận được tốc độ:

$$C = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}} \quad (8.21)$$

Tốc độ sóng sẽ nằm giữa hai trường hợp biên.

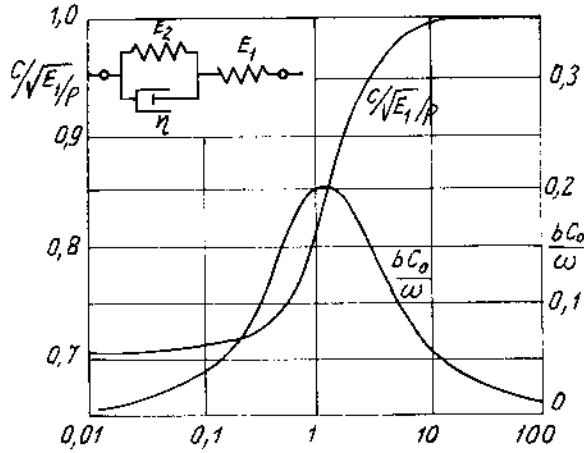
Thay (8.7) vào (8.19) ta nhận được hai phương trình xác định $\frac{C_0^2}{C^2}$

và $\frac{b^2 c_0^2}{\omega^2}$ như sau:

$$\frac{C_0^2}{C^2} = \frac{1}{2E_1} \left[\left(\frac{E_1^2 + E_c^2 \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{E_1 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right]$$

$$\frac{b^2 C_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{2E_1} \left[\left(\frac{E_1^2 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{E_1 + E_c \omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] \quad (8.22)$$

Trong đó $\tau = \frac{\eta}{E_2}$, kết quả nghiệm được biểu diễn trên hình 8.4.



Hình 8.4

Ta thấy khi tăng $\omega\tau$ từ 0 đến 100, tốc độ pha tăng từ $0,7C_0$ đến C_0 , còn đường cong $\frac{bC_0}{\omega}$ có giá trị cực đại khi $\omega\tau = 1,8$ và theo hai phía giảm dần tới 0.

§2. SỰ LAN TRUYỀN SÓNG PHẪNG TRONG MÔI TRƯỜNG ĐÀN HỒI NHỚT VÔ HẠN

Đối với bài toán hai, ba chiều ta hãy dùng cách nghiên cứu theo hướng trên để giới thiệu cách áp dụng phương pháp toán tử.

Giả thiết rằng sự lan truyền sóng ứng suất phẳng trong môi trường đàn nhớt vô hạn theo hướng x_1 , chuyển vị sẽ thể hiện bởi hàm $e^{i(\omega t - f_0 x_1)}$, trong đó ω là tần số vòng, f_0 phải là số phức để có thể thoả mãn phương trình vi phân chuyển động tương ứng.

$$\text{Giả thiết là} \quad f_0 = f + i\alpha. \quad (8.23)$$

$$\text{Trong đó:} \quad f - \text{số sóng,} \quad f = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8.24)$$

λ – chiều dài sóng.

$$\alpha - \text{hệ số tắt dần.} \quad (8.25)$$

Tính chất vật lý thực là chuyển động sẽ tắt dần nếu $\alpha < 0$. Giữa vận tốc pha C , tần số vòng ω và số sóng f có quan hệ sau:

$$\omega = C.f \quad (8.26)$$

2.1. Sự truyền sóng ứng suất phẳng trong bản ở trạng thái ứng suất phẳng

Chuyển vị u_1, u_2 theo hướng x_1, x_2 giả sử cho bởi hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_1 \cdot e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \\ u_2 &= U_2 \cdot e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

trong đó U_1, U_2 , là các hằng số.

Hệ phương trình vi chuyển động (8.27) đối với trạng thái ứng suất phẳng, sau khi tính toán có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \left(PPQ' + \frac{4}{3} PP'Q \right) \rho u^2 \cdot u_1 &= 4 \left(PQQ' + \frac{P'QQ}{3} \right) f_0^2 \cdot u_1 \\ \left(PPQ' + \frac{4}{3} PP'Q \right) \rho u^2 \cdot u_2 &= \left(PQQ' + \frac{4P'QQ}{3} \right) f_0^2 \cdot u_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

Ví dụ: ở vật tuyến tính tiêu chuẩn.

Lấy các đạo hàm các toán tử tương ứng, ta nhận được phương trình ở dạng sau:

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \omega^2 [(p_0 + p_1 i \omega)(p_0 + p_1 i \omega)(q_0' + q_1' i \omega) + \\ & \quad + \frac{4}{3} (p_0 + p_1 i \omega)(p_0 + p_1 i \omega)(q_0 + q_1 i \omega)] \cdot u_1 = \\ & = 4 [(p_0 + p_1 i \omega)(q_0 + q_1 i \omega)(q_0' + q_1' i \omega) + \\ & \quad + \frac{1}{3} (p_0' + p_1' i \omega)(q_0 + q_1 i \omega)(q_0 + q_1 i \omega)] (f + i \alpha)^2 \cdot u_1 \end{aligned} \quad (8.29)$$

Chia tất cả phương trình cho $p_0 q_0 q_0'$ và chú ý các quan hệ, sau khi tính toán ta được phương trình:

$$\rho \omega^2 - G_0 \cdot \frac{2}{1 - \mu} \cdot \frac{1 + i \eta n \omega}{1 + i n \omega} (f + i \alpha)^2 = 0 \quad (8.30)$$

Tách phần thực và phần ảo ta được 2 phương trình sau:

+ Phần thực

$$\frac{\rho \omega^2 (1 - \mu)}{2 G_0} (1 + n^2 \omega^2) - f^2 + \alpha^2 - f^2 \eta n^2 \omega^2 + \alpha \eta n^2 \omega^2 + 2 f \alpha n \omega (\eta - 1) = 0 \quad (8.31)$$

+ Phần ảo

$$2 f \alpha + 2 f \alpha \eta n^2 \omega^2 + (f^2 - \alpha^2) n \omega (\eta - 1) = 0 \quad (8.32)$$

Phương trình (8.32) có thể thể hiện như tỷ số của hệ số sin α với số sóng .

Sau khi điều chỉnh (8.32) ta được:

$$\left(\frac{\alpha}{f} \right)^2 - \frac{\alpha}{f} 2 \frac{1 + \eta \Omega^2}{\Omega (\eta - 1)} - 1 = 0 \quad (8.33)$$

Trong đó $\Omega = n \omega$

Giả sử nghiệm âm của phương trình (8.33) được thể hiện bởi quan hệ sau:

$$\frac{\alpha}{f} = \frac{1 + \eta \Omega^2}{\Omega (\eta - 1)} - \sqrt{\frac{1 + \eta \Omega^2}{\Omega (\eta - 1)}} + 1 \quad (8.34)$$

Từ phương trình (8.30) ta có thể biểu diễn tỷ số tốc độ pha C với tốc độ C_L :

$$C_L = \sqrt{\frac{2G_0}{\rho(1-\mu)}} = \sqrt{\frac{E_0}{\rho(1-\mu^2)}} \quad (8.35)$$

Bởi quan hệ:

$$\frac{C^2}{C_L^2} = -2 \frac{\alpha}{f} \cdot \frac{(1 + \eta\Omega^2) + \Omega^2(\eta-1)^2}{(1 + \Omega^2)\Omega(\eta-1)} \quad (8.36)$$

Hoặc thay giá trị $\frac{\alpha}{f}$ theo (8.34) vào (8.36) sau khi tính toán ta được:

$$\frac{C^2}{C_L^2} = \frac{2[(1 + \eta\Omega^2)^2 + \Omega^2(\eta-1)^2]}{(1 + \Omega^2)[1 + \eta\Omega^2 + \sqrt{1 + \Omega^2 + \eta^2\Omega^2(1 + \Omega^2)}]} \quad (8.37)$$

Phương trình (8.37) và (8.34) thể hiện phụ thuộc của tốc độ pha của sóng dọc và hệ số tắt dần vào tần số.

Bằng cách tương tự tính toán từ phương trình thứ 2 của hệ (8.28) ta được:

$$\rho\omega^2 - G_0 \frac{1 + i\eta n\omega}{1 + i n\omega} (f + i\alpha)^2 = 0 \quad (8.38)$$

Khai triển ta thấy phần ảo dần tới đồng nhất thức với phương trình (8.34) còn phần thực cho quan hệ tốc độ pha với sóng trượt C vào tần số ở dạng:

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{C_2^2} &= -2 \frac{\alpha}{f} \cdot \frac{(1 + \eta\Omega^2) + \Omega^2(\eta-1)^2}{(1 + \Omega^2)\Omega(\eta-1)} = \\ &= \frac{2[(1 + \eta\Omega^2)^2 + \Omega^2(\eta-1)^2]}{(1 + \Omega^2)[1 + \eta\Omega^2 + \sqrt{1 + \Omega^2 + \eta^2\Omega^2(1 + \Omega^2)}]} \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$\text{Trong đó:} \quad C_2 = \sqrt{\frac{G_0}{\rho}} \quad (8.40)$$

Rõ ràng rằng trong bản đàn nhớt vô hạn có thể lan truyền hai loại sóng ứng suất phẳng sóng dọc và sóng ngang. Chuyển động của các hạt trong sóng dọc hướng theo phương sóng lan truyền trong khi đó chuyển động các hạt sóng ngang nằm trong mặt phẳng vuông góc với sóng lan truyền.

Khác với vật thể đàn hồi tuyệt đối có hai tốc độ lan truyền là không đổi còn ở vật đàn nhớt do tác dụng của tính nhớt thì sóng bị tán sắc.

2.2. Sự lan truyền ứng suất phẳng trong vật thể không hạn chế ở trạng thái biến dạng phẳng

Giả thiết sóng phẳng lan truyền theo phương trục x_1 , như vậy chuyển vị u_1, u_2 được xác định bởi quan hệ (8.27). Sau khi thay vào phương trình vi phân của vật đàn nhớt ở trạng thái biến dạng phẳng (6.49) ta nhận được phương trình:

$$PP'\rho\omega^2 u_1 = \left(PQ' + \frac{4}{3}P'Q \right) f_0^2 u_1 \quad (8.41)$$

$$P \cdot \rho\omega^2 u_2 = Qf_0^2 u_2$$

Tiến hành lấy đạo hàm các toán tử tương ứng, giả sử ở vật tuyến tính tiêu chuẩn và chú ý các quan hệ (6.20) và (6.21) sau khi tính toán ta nhận được phương trình:

$$\rho\omega^2 - G_0 \cdot \frac{2(1-\mu)}{1-i\omega} \cdot \frac{1+i\eta n\omega}{(1+i\eta\omega)} (f+i\alpha)^2 = 0 \quad (8.42)$$

$$\rho\omega^2 - G_0 \cdot \frac{1+i\eta n\omega}{1+i\eta\omega} (f+i\alpha)^2 = 0$$

Tách phần thực và phần ảo và cho nó bằng không, từ phương trình thứ nhất ta nhận được sự phụ thuộc tốc độ pha của sóng dẫn vào tần số và từ phương trình thứ hai - sự phụ thuộc tốc độ pha của sóng trượt vào tần số, tương ứng là sự phụ thuộc của hệ số cản vào tần số.

Trong cả hai trường hợp ta đều nhận được phương trình (8.34) còn đối với tốc độ pha là:

$$\left(\frac{C}{C^*} \right)^2 = \frac{2 \left[(1+\eta\Omega^2)^2 + \Omega^2(\eta-1)^2 \right]}{(1+\Omega^2) \left[1+\eta\Omega^2 + \sqrt{1+\Omega^2 + \eta^2\Omega^2(1+\Omega^2)} \right]} \quad (8.43)$$

Trong đó

+ Đối với sóng dẫn:

$$C^* = C_1 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \quad (8.44)$$

+ Và đối với sóng trượt:

$$C^* = C_2 = \sqrt{\frac{G_0}{\rho}}$$

Ta thấy rằng hệ số cản, tốc độ pha trong trạng thái biến dạng phẳng, phụ thuộc vào tần số là như nhau. Chỉ có tốc độ C^* là khác nhau hoặc là sóng dẫn hay sóng trượt tùy theo bài toán phẳng.

2.3. TÍNH CHẤT CỦA SỰ PHỤ THUỘC TÁN SẮC

Nghiên cứu sự chuyển động và tính chất sự phụ thuộc tán sắc đối với sự cản, có nghĩa, sự phụ thuộc hàm $\frac{\alpha}{f}$ đến tích tần số vòng và thời gian trùng Ω cho bởi phương trình (8.34).

Phân tích toán học tỷ mỉ ta thấy rằng, hệ số cản rút gọn $\frac{\alpha}{f}$ có cực trị khi $\Omega = \frac{1}{\sqrt{n}}$ và đạt giá trị cực đại cho bởi biểu thức:

$$\left(\frac{\alpha}{f}\right)_{\max} = \frac{2\sqrt{n} - \eta - 1}{\eta - 1} \quad (8.46)$$

Và bằng 0 khi $\Omega \rightarrow 0, \Omega \rightarrow \infty$. Thật vậy:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\frac{1 + \eta\Omega^2}{\eta - 1} - \sqrt{\frac{(1 + \eta\Omega^2)^2 + \Omega^2(\eta - 1)^2}{(\eta - 1)^2}}}{\Omega} \quad (8.47)$$

Theo qui tắc L'hospital ta được.

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\alpha}{f} = 0$$

Tương tự

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{f} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{-\Omega}{\frac{1 + \eta\Omega^2}{\eta - 1} + \sqrt{\left(\frac{1 + \eta\Omega^2}{\eta - 1}\right)^2 + \Omega^2}} \quad (8.48)$$

Và bằng cách sử dụng qui tắc L'hospital ta xác định được.

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{f} = 0 \quad (8.49)$$

Sự phụ thuộc tán sắc của tốc độ pha vào Ω được xác định bởi phương trình (8.43) khi $\Omega = 0$ thì $\frac{C}{C^*} = 1$. Nếu đem chia tử số và mẫu số của phương trình (8.43) cho Ω^4 . Ta nhận được quan hệ:

$$\left(\frac{C}{C^*}\right)^2 = \frac{2\left[\left(\frac{1}{\Omega^2} + \eta\right)^2 + \frac{1}{\Omega^2}(\eta - 1)^2\right]}{\left(\frac{1}{\Omega^2} + 1\right)\left[\frac{1}{\Omega^2} + \eta + \sqrt{\frac{1}{\Omega^4} + \frac{1}{\Omega^2} + \eta^2\left(\frac{1}{\Omega^2} + 1\right)}\right]} \quad (8.50)$$

Từ đó ta thấy rằng khi $\Omega \rightarrow \infty$ thì $\frac{C}{C^*} = \sqrt{\eta}$.

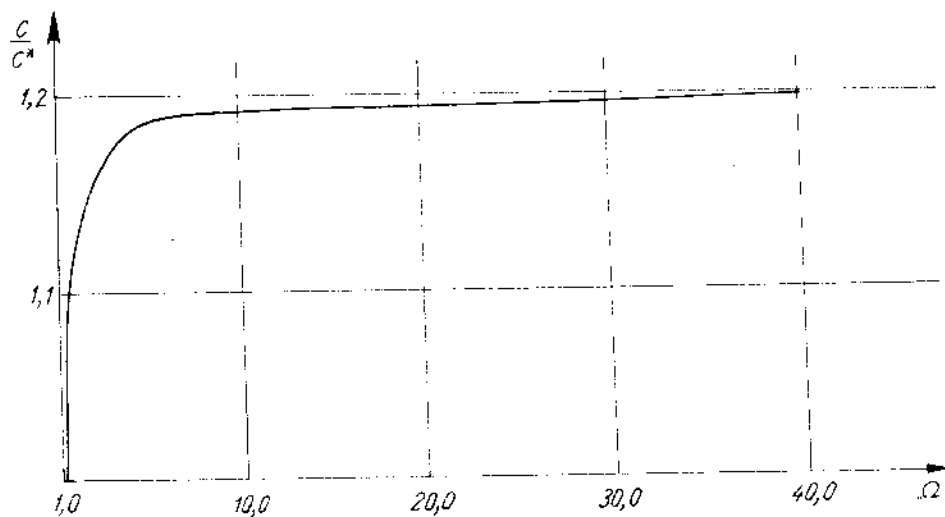
Sự phụ thuộc tán sắc $\frac{C}{C^*}$ xảy ra từ khi $\Omega = 0$ tức từ giá trị $\frac{C}{C^*} = 1$.

Tốc độ pha tăng dần và tiệm cận khi $\Omega \rightarrow \infty$ gần tới giá trị:

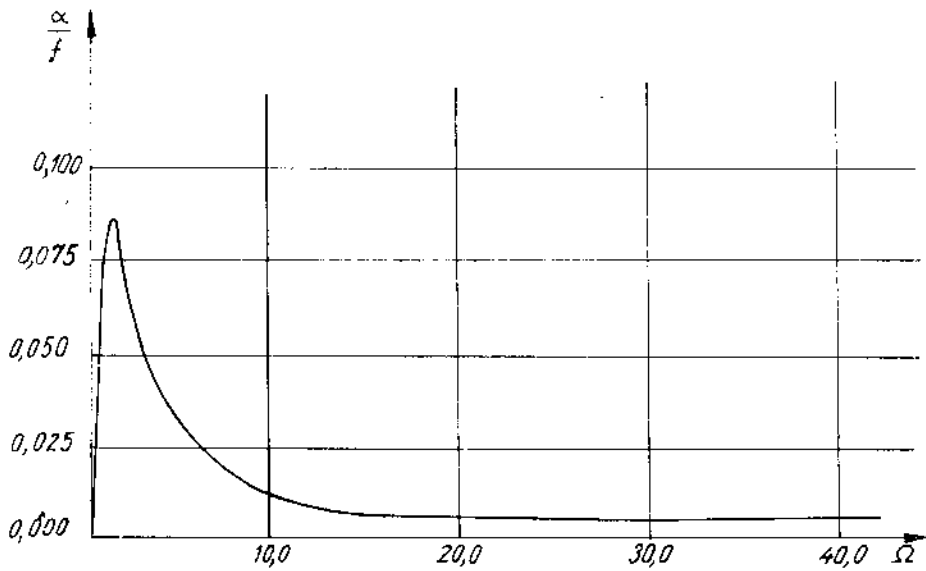
$$\frac{C}{C^*} = \sqrt{\eta}. \quad (8.51)$$

Ví dụ: ở vật tuyến tính tiêu chuẩn có $\tau = \frac{G_0}{G_1} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{1}{\eta} = 0,7$

Đồ thị $\frac{C}{C^*}, \frac{\alpha}{f}$ phụ thuộc vào Ω cho trên hình 8.5 và hình 8.6.



Hình 8.5. Đồ thị sự phụ thuộc tán sắc cho sóng ứng suất dãn và sóng ứng suất trượt ở vật liệu đàn nhớt.



Hình 8.6. Đồ thị sự phụ thuộc tần số của hệ số cản khi lan truyền sóng ứng suất ở vật đàn nhớt.

2.4. Sự lan truyền sóng ứng suất phẳng trong tấm có mặt tự do

Trong trường hợp sự lan truyền của sóng ứng suất phẳng ở vật thể đàn nhớt phương trình vi phân ở trạng thái biến dạng phẳng có dạng:

$$PP' \left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{4}{3} P' Q u_1 + P Q' u_1 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{1}{3} P' Q u_2 + P Q' u_2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P' Q u_1 \quad (8.52)$$

$$PP' \left(\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{4}{3} P' Q u_2 + P Q' u_2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{1}{3} P' Q u_1 + P Q' u_1 \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P' Q u_2 \quad (8.53)$$

Giả thiết sóng phẳng lan truyền theo hướng x_1 , khi đó chuyển vị u_1, u_2 giả sử cho bởi phương trình:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= U_1(x_2) \cdot e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \\ u_2 &= U_2(x_2) \cdot e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \end{aligned} \right\} \quad (8.54)$$

Trong đó $U_1(x_2)$, $U_2(x_2)$ là hàm của biến x_2 chưa biết, f_0 là số phức số sóng cho bởi biểu thức (8.23).

Sau khi thay vào phương trình vi phân chuyển động (8.52) và (8.53) và lấy đạo hàm ta nhận được phương trình vi phân thường:

$$\rho \omega^2 U_1 - f_0^2 Z_1(\omega) U_1 - i f_0 Z_2(\omega) \frac{dU_1}{dx_2} + Z(\omega) \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} = 0 \quad (8.55)$$

$$\rho \omega^2 U_2 - f_0^2 Z_1(\omega) U_2 - i f_0 Z_2(\omega) \frac{dU_2}{dx_2} + Z(\omega) \frac{d^2 U_2}{dx_2^2} = 0 \quad (8.56)$$

Trong đó

$$\left. \begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{\sum_0^n q_n (i\omega)^n}{\sum_0^m p_m (i\omega)^m} & (a) \\ Z_1(\omega) &= \frac{4}{3} Z(\omega) + Z'(\omega) & (b) \\ Z_2(\omega) &= \frac{1}{3} Z(\omega) + Z'(\omega) & (c) \\ Z'(\omega) &= \frac{\sum_0^n q'_n (i\omega)^n}{\sum_0^m p'_m (i\omega)^m} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (8.57)$$

Trong đó:

$q_0, q_1, \dots; p_0, p_1, \dots; q'_0, q'_1, \dots; p'_0, p'_1, \dots$ là những hằng số thông số của vật liệu, đặc trưng cho tính chất vật lý và tự biến của vật liệu.

Để tìm nghiệm hệ phương trình vi phân tuyến nhất (8.55), (8.56) nhờ hàm $\phi(x_2)$ ta đặt:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= i f_0 Z_2 \cdot \frac{d}{dx_2} \phi \\ U_2 &= \left(\rho \omega^2 - f_0^2 Z_1 + Z \frac{d^2}{dx_2^2} \right) \phi \end{aligned} \right\} \quad (8.58)$$

Thay vào phương trình (8.55) thoả mãn đồng nhất thức và thay vào phương trình (8.56), sau khi tính toán ta nhận được phương trình vi phân hạng 4:

$$ZZ_1 \cdot \frac{d^4 \phi}{dx_2^4} + [\rho \omega^2 (Z + Z_1) + f_0^2 (Z_2^2 - Z_1^2 - Z^2)] \frac{d^2 \phi}{dx_2^2} + [\rho^2 \omega^4 - \rho \omega^2 f_0^2 (Z_1 + Z) + f_0^4 Z_1 Z] \phi = 0 \quad (8.59)$$

Đặt

$$q^2 = a + b$$

$$s^2 = a - b$$

Trong đó

$$a = -\frac{1}{2} \left[\rho \omega^2 \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_1} \right) + f_0^2 \left(\frac{Z_2^2}{ZZ_1} - \frac{Z_1}{Z} - \frac{Z}{Z_1} \right) \right] \quad (8.60)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\rho \omega^2 \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_1} \right) + f_0^2 \left(\frac{Z_2^2}{Z_1 Z} - \frac{Z_1}{Z} - \frac{Z}{Z_1} \right) \right]^2 - \left[\frac{\rho^2 \omega^4}{ZZ_1} - \rho \omega^2 f_0^2 \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_1} \right) + f_0^4 \right]} \quad (8.61)$$

Nghiệm phương trình (8.59) có dạng :

$$\phi_2(x_2) = A_1 \cdot e^{qx_2} + A_2 \cdot e^{qx_2} + A_3 \cdot e^{sx_2} + A_4 \cdot e^{-sx_2} \quad (8.62)$$

trong đó A_1, A_2, A_3, A_4 là các hằng số bất kỳ.

Hàm U_1, U_2 được tính nhờ biểu thức (8.58) và (8.62).

3.5. Sóng ứng suất mặt

Trước tiên chúng ta phân tích sự lan truyền sóng ứng suất trong vật thể đàn nhớt trong tám. Ta biết rằng sự lan truyền sóng mặt Rây-lây trong môi trường đàn nhớt bán không gian mà mặt phẳng giới hạn là $x_2 = 0$.

Nếu giả thiết rằng nghiệm q và s là số phức sẽ có phần thực dương lấy trong phương trình (8.62) thành phần thứ hai và thứ bốn. Bỏ đi thành phần thứ nhất và thứ ba của hàm $\phi(x_2)$. Vì với chiều sâu từ biên tự do của bán không gian tăng vô hạn. Do đó hàm $\phi(x_2)$ sẽ là:

$$\phi(x_2) = A_1 e^{-qx_2} + A_4 e^{-sx_2} \quad (8.63)$$

Thay (8.63) vào (8.54) ta được:

$$u_1 = -if_0 Z_2 [A_2 q e^{-qx_2} + A_3 s e^{-sx_2}] e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \quad (8.64)$$

$$u_2 = [(\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + q^2 Z) A e^{-qx_2} + (\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + s^2 Z) A_4 e^{-sx_2}] e^{i(\omega t - f_0 x_1)}$$

Ứng suất pháp σ_{22} và ứng suất tiếp σ_{12} theo phương trình (6.46) cho bởi quan hệ:

$$PP'\sigma_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{4}{3} (P'Q + PQ') \right) u_2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{2}{3} P'Q + PQ' \right) u_1 \quad (8.65)$$

$$P\sigma_{12} = Q \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Sau khi thay biểu thức (8.64), đạo hàm và sử dụng quan hệ (8.57a,b,c,d) ta sẽ nhận được ứng suất cho bởi phương trình:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \left\{ A_2 \left[-qZ_1 (\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + q^2 Z) - f_0^2 Z_2 \left(-\frac{2}{3} Z + Z' \right) q \right] e^{-qx_2} + \right. \\ & \left. + A_4 \left[-sZ_1 (\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + s^2 Z) - f_0^2 Z_2 \left(-\frac{2}{3} Z + Z' \right) s \right] e^{-sx_2} \right\} e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \quad (8.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = & -if_0 Z \left\{ A_2 [\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + q^2 (Z - Z_2)] e^{-qx_2} + \right. \\ & \left. + A_4 [\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + s^2 (Z - Z_2)] e^{-sx_2} \right\} e^{i(\omega t - f_0 x_1)} \quad (8.67) \end{aligned}$$

Trên mặt biên của bán không gian, để thoả mãn điều kiện biên, các ứng suất σ_{22} , σ_{12} cần phải bằng không. Tại $x_2 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{22}] &= 0 \\ [\sigma_{12}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.68)$$

Thay giá trị σ_{22} , σ_{12} theo (8.67) vào (8.68) ta được:

$$\begin{aligned} & A_2 \left[qZ_1 (\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 - q^2 Z) + f_0^2 Z \left(-\frac{2}{3} Z + Z' \right) q \right] + \\ & + A_4 \left[sZ_1 (\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 - s^2 Z) + f_0^2 Z_2 \left(-\frac{2}{3} Z + Z' \right) s \right] = 0 \quad (8.69) \end{aligned}$$

$$A_2 [\rho\omega^2 - f_0^2 x_1 + q^2 (z - z_2)] + A_4 [\rho\omega^2 - f_0^2 x_1 + p^2 (z - z_2)] = 0$$

Phương trình tần số nhận được khi cho định thức của hệ phương trình thuần nhất (8.69) bằng không. Tính toán định thức trên có dạng:

$$\begin{aligned} & \left[qZ_1(\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + q^2 Z) + f_0^2 Z_2 \left(-\frac{2}{3} Z + Z' \right) q \right] \cdot [\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + s^2 (Z - Z_2)] - \\ & - \left[sZ_1(\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + s^2 Z) + f_0^2 Z_2 \left(-\frac{2}{3} Z + Z' \right) s \right] \cdot [\rho\omega^2 - f_0^2 Z_1 + q^2 (Z - Z_2)] = 0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

Phương trình tần số này có giá trị cho vật đàn nhớt tổng quát.

Tách phần thực và ảo của nghiệm ta thiết lập được hai hệ phương trình siêu việt mà nghiệm của nó cho ta đường cong tán sắc của tốc độ pha và đường cong tán sắc hệ số cản.

Giả thiết vật là tuyến tính tiêu chuẩn từ quan hệ (6.20); (6.21).

Các hàm $Z(\omega)$, $Z'(\omega)$, $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$ theo (8.57a,b,c,d) sau khi tính toán cho ta các biểu thức sau:

$$Z = G_0 \frac{1 + i\eta\Omega}{1 + i\Omega} \quad (8.71)$$

$$Z' = \frac{2(1 + \mu)}{3(1 - 2\mu)} \cdot G_0 \frac{1 + i\eta\Omega}{1 + i\Omega} \quad (8.72)$$

$$Z_1 = \frac{2(1 - \mu)}{1 - 2\mu} \cdot G_0 \frac{1 + i\eta\Omega}{1 + i\Omega} \quad (8.73)$$

$$Z_2 = \frac{1}{1 - 2\mu} \cdot G_0 \frac{1 + i\eta\Omega}{1 + i\Omega} \quad (8.74)$$

Trong đó $\Omega = \omega n$ và n là thời gian trùng.

Nghiệm phương trình đặc trưng q^2 , s^2 theo (8.60) cho bởi quan hệ:

$$q^2 = f_0^2 \cdot \mu_0 \frac{\Omega^2}{C_2^2 n^2} \cdot \frac{1 + i\Omega}{1 + i\eta\Omega} \quad (8.75)$$

$$s^2 = f_0^2 - \frac{\Omega^2}{C_2^2 n^2} \cdot \frac{1 + i\Omega}{1 + i\eta\Omega} \quad (8.76)$$

Trong đó

$$\mu_0 = \frac{1 - 2\mu}{2(1 - \mu)}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{G_0}{\rho}} \text{ là tốc độ sóng trượt}$$

Trong phương trình (8.75) chúng ta thể hiện đại lượng phức f_0 theo (8.23). Chia (8.75) cho số sóng bình phương. Sau khi điều chỉnh có dạng:

$$\frac{q^2}{f^2} = q_r^R + i q_i^R \quad (8.77)$$

Trong đó

+ Phần thực:

$$q_r^R = 1 - \alpha_R^2 - \mu_0 \chi^2 \cdot \frac{1 + \eta \Omega^2}{1 + \eta^2 \Omega^2} \quad (8.78)$$

+ Và phần ảo:

$$q_i^R = 2\alpha_R \cdot \mu_0 \chi^2 \cdot \frac{\Omega(1 - \eta)}{1 + \eta^2 \Omega^2} \quad (8.79)$$

$$\alpha_R = \frac{\alpha}{f} \quad (8.80)$$

$$\chi = \frac{C}{C_2} \quad (8.81)$$

Thì tỷ số có thể viết:

$$\frac{q}{f} = r_q^R + i m_q^R \quad (8.82)$$

Trong đó

$$+ \text{Phần ảo: } m_q^R = \sqrt{-\frac{q_r^R}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(q_r^R)^2 + (q_i^R)^2}} \quad (8.83)$$

$$+ \text{Phần thực: } r_q^R = \frac{q_i^R}{2m_q^R} \quad (8.84)$$

Tương tự chia (8.76) cho f^2 ta nhận được phương trình dạng:

$$\left(\frac{S}{f}\right)^2 = S_r^R + i S_i^R \quad (8.85)$$

Trong đó:

$$S_r^R = 1 - \alpha_R^2 - \chi^2 \cdot \frac{1 + \eta \Omega^2}{1 + \eta^2 \Omega^2} \quad (8.86)$$

$$S_i^R = 2\alpha_R \cdot \chi^2 \cdot \frac{\Omega(1 - \eta)}{1 + \eta^2 \Omega^2} \quad (8.87)$$

Tỷ số có dạng:

$$\frac{s}{f} = r_s^R + i.m_s^R \quad (8.88)$$

Trong đó

$$m_s^R = \sqrt{-\frac{S_r^R}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(S_r^R)^2 + (S_i^R)^2}} \quad (8.89)$$

$$r_s^R = \frac{S_i^R}{2m_s^R} \quad (8.90)$$

Thực hiện lần lượt các biểu thức trong dấu ngoặc vuông của phương trình tần số (8.70).

Biểu thức thứ nhất trong dấu ngoặc vuông của thành phần thứ nhất của phương trình (8.70) nhân với $\frac{1}{G_0 z_1 f^3}$, sau khi tính toán ta

nhận được phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_0 Z_1 f^3} \left[q_1 z_1 (\rho \omega^2 - f_0^2 z_1 + q^2 z) + f_0^2 z_2 \left(-\frac{2}{3} z + z' \right) q \right] = \\ = r_q^R r_{q_1}^R - m_q^R m_{q_1}^R + (r_q^R m_{q_1}^R + m_q^R r_{q_1}^R) \end{aligned} \quad (8.91)$$

Trong đó:

$$r_{q_1}^R = \chi^2 + (2\mu_1 \alpha_R - q_i^R) \frac{\Omega(\eta - 1)}{1 + \Omega^2} + [q_r^R - \mu_1(1 - \alpha_R^2)] \frac{1 + \eta\Omega^2}{1 + \Omega^2} \quad (8.92)$$

$$m_{q_1}^R = [q_r^R - \mu_1(1 - \alpha_R^2)] \frac{\Omega(\eta - 1)}{1 + \Omega^2} + (q_i^R - 2\mu_1 \alpha_R) \frac{1 + \eta\Omega^2}{1 + \Omega^2} \quad (8.93)$$

Trong đó ta đã ký hiệu:

$$\mu_1 = \frac{2 - 5\mu + \mu^2}{(1 - 2\mu)(1 - \mu)} = \frac{2 - \mu}{1 - \mu} \quad (8.94)$$

Tương tự biểu thức thứ nhất trong dấu ngoặc vuông thành phần thứ hai của phương trình (8.70) nhân với $\frac{1}{G_0 z_1 f^3}$. Sau khi tính toán ta sẽ nhận được phương trình:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_0 Z_1 f^3} \left[s_i z_1 (\rho \omega^2 - f_0^2 z_1 + s^2 z) + f_0^2 z_2 \left(-\frac{2}{3} z + z' \right) s \right] = \\ & = r_s^R r_{s_1}^R - m_s^R m_{s_1}^R + i(r_s^R m_{s_1}^R + m_s^R r_{s_1}^R) \end{aligned} \quad (8.95)$$

Trong đó:

$$r_{s_1}^R = \chi^2 + (2\mu_1 \alpha_R - s_i^R) \frac{\Omega(\eta-1)}{1+\Omega^2} + [s_r^R - \mu_1(1-\alpha_R^2)] \frac{1+\eta\Omega^2}{1+\Omega^2} \quad (8.96)$$

$$m_{s_1}^R = [s_r^R - \mu_1(1-\alpha_R^2)] \frac{\Omega(\eta-1)}{1+\Omega^2} + (s_i^R - 2\mu_1 \alpha_R) \frac{1+\eta\Omega^2}{1+\Omega^2} \quad (8.97)$$

Biểu thức thứ hai trong dấu ngoặc vuông của phương trình tần số (8.70) nhân với $\frac{1}{Z_1 f^2}$ sẽ cho ta quan hệ:

$$\frac{1}{f^2 Z_1} [\rho \omega^2 - f_0^2 Z_1 + q^2 (Z - Z_2)] = \frac{1}{1-\mu} (q_r^R + i q_i^R) \quad (8.98)$$

Và biểu thức thứ hai trong dấu ngoặc vuông của thành phần thứ nhất của phương trình (8.70) nhân với $\frac{1}{Z_1 f^2}$ cho bởi biểu thức:

$$\frac{1}{f^2 Z_1} [\rho \omega^2 - f_0^2 Z_1 + S^2 (Z - Z_2)] = \frac{1}{1-\mu} (S_r^{*R} + i S_i^{*R}) \quad (8.99)$$

Trong đó:

$$S_r^{*R} = 1 - \alpha_R^2 - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1 + \eta\Omega^2}{1 + \eta^2\Omega^2} \quad (8.100)$$

$$S_i^{*R} = 2\alpha_R - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\Omega(1-\eta)}{1 + \eta^2\Omega^2} \quad (8.101)$$

Phương trình tần số (8.70) đối với sóng mặt Rây-lây, sau khi thay (8.91) (8.95) và (8.98) và sau khi tách phần thực và phần ảo ta được hệ phương trình:

$$\begin{aligned} & S_r^{*R} (r_q^R r_{q_1}^R - m_q^R m_{q_1}^R) - S_i^{*R} (r_q^R m_{q_1}^R + m_q^R r_{q_1}^R) - q_r^R (r_s^R r_{s_1}^R - m_s^R m_{s_1}^R) + \\ & + q_i^R (r_s^R m_{s_1}^R + m_s^R r_{s_1}^R) = 0 \end{aligned} \quad (8.102)$$

$$\begin{aligned} & S_r^{*R} (r_q^R m_{q_1}^R + m_q^R r_{q_1}^R) + S_i^{*R} (r_q^R r_{q_1}^R - m_q^R m_{q_1}^R) - q_r^R (r_s^R m_{s_1}^R + m_s^R r_{s_1}^R) - \\ & - q_i^R (r_s^R r_{s_1}^R - m_s^R m_{s_1}^R) = 0 \end{aligned} \quad (8.103)$$

Phương trình thứ nhất là phần thực của phương trình tần số bằng không, phương trình thứ hai là phần ảo của phương trình tần số (8.70) bằng không.

Nghiệm bằng số của phương trình (8.70) có thể nhận được đường cong tán sắc phụ thuộc x vào Ω và hệ số cần thu gọn α_R vào Ω . Nếu cho hệ số thu gọn $\alpha_T = 0$ và thông số lưu biến $n = 0$; $\eta = \frac{1}{\tau} = 1,0$ thì (8.102), (8.103) sẽ là phương trình tần số của vật thể đàn hồi tuyệt đối. Với các thông số trên thay vào phương trình (8.103) sẽ bằng không, còn biểu thức (8.102) có:

$$\begin{aligned} q_r^R &= 1 - \mu_0 \chi^2; & q_i^R &= 0; & m_q^R &= 0; & r_q^R &= \sqrt{1 - \mu_0 \chi^2} \\ S_r^R &= 1 - \chi^2; & s_i^R &= 0; & m_s^R &= 0; & r_s^R &= \sqrt{1 - \chi^2} \\ r_{q_1}^R &= \chi^2(1 - \mu_0) + 1 - \mu_1; & m_{q_1}^R &= 0; \\ r_{s_1}^R &= 1 - \mu_1; & m_{s_1}^R &= 0; & r_{s_1}^{*R} &= 1 - \frac{\chi^2}{2}; & s_i^{*R} &= 0 \end{aligned}$$

Sau khi điều chỉnh (8.102) ta được phương trình:

$$x^6 - 8x^4 + x^2(24 - 16\mu_0) + (-16 + 16\mu_0) = 0 \quad (8.104)$$

Đó là phương trình sóng mặt trong bán không gian đàn hồi mà chúng ta biết.

Trên cơ sở các bài toán trên ta có thể nghiên cứu các bài toán sau:

- Sóng ứng suất đối xứng trong tấm – sóng dọc.
- Sóng ứng suất phản đối xứng trong tấm – sóng uốn.

Chúng tôi không trình bày các bài toán này ở đây, độc giả có thể tự nghiên cứu hoặc tham khảo trong tài liệu tham khảo [4].

Chương phụ

PHƯƠNG PHÁP MÔĐUN PHỨC

Ngoài các phương pháp trên được sử dụng rộng rãi khi nghiên cứu vật đàn nhớt tuyến tính, một số tác giả còn nghiên cứu một phương pháp gọi là phương pháp môđun phức. Phương pháp này thuận lợi khi giải các bài toán dao động của vật đàn nhớt tuyến tính chịu tải trọng thay đổi hình sin. Nhờ phương pháp chuyển đổi Furiê và sử dụng nguyên lý tương ứng có thể giải quyết đơn giản bài toán ở vật thể đàn nhớt. Trong giáo trình này chỉ giới thiệu một vài nét để độc giả tự nghiên cứu khi đọc sách.

§1. KHÁI NIỆM

Giả sử mô hình chịu lực thay đổi hình sin có tần số góc ω sau khoảng thời gian dao động đủ để điều kiện ban đầu có thể bỏ qua thì chuyển vị cũng nhận tần số góc ω . Nếu gọi $R_2(z)$ biểu diễn phần thực của z thì đối với lực dao động hình sin và chuyển vị được xác định bởi phương trình.

$$F = R_2[F^0(\omega).exp(i\omega t)] \quad (1)$$

$$\delta = R_2[\delta^0(\omega).exp(i\omega t)]$$

Trong đó: F -- lực kích thích tác động. (2)

δ -- chuyển vị dao động do lực kích thích gây nên.

$F^0(\omega)$; $\delta^0(\omega)$ là biên độ lực và chuyển vị không phụ thuộc vào thời gian t , tổng quát chúng là giá trị phức.

Liên hệ với việc xác định sự cản khi dao động cưỡng bức có tần số góc không đổi, người ta đã đưa ra một phương pháp khác để mô tả bản chất của vật liệu đàn nhớt.

Ta biết trong hệ tuyến tính, ứng suất và biến dạng dưới tác dụng của lực hình sin sẽ thay đổi có dạng hình sin cùng tần số của lực kích thích có tần số góc ω không đổi thì tỷ số giữa biên độ ứng suất, biến dạng và hiệu pha sẽ giữ nguyên không đổi và không phụ thuộc vào biên độ của lực kích thích. Do đó tính chất đàn nhớt của vật liệu đàn nhớt tuyến tính có thể biểu diễn như môđun phức như sau:

Theo (7.1) (7.2) ta viết phần thực của ứng suất, biến dạng.

$$\sigma = \text{Re}[\sigma^0(\omega) \cdot \exp(i\omega t)] \quad (3)$$

$$\varepsilon = \text{Re}[\varepsilon^0(\omega) \cdot \exp(i\omega t)] \quad (4)$$

Giá trị môđun phức bằng tỷ số giữa hai biên độ của ứng suất và biến dạng, còn đối số bằng sự chậm pha của biến dạng so với ứng suất.

$$Y(i\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma^0(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)} = Y_1(\omega) + iY_2(\omega) \quad (5)$$

$Y(i\omega)$ – môđun phức

Giá trị tỷ lệ nghịch của môđun phức gọi là độ mềm phức ký hiệu $J(i\omega)$.

$$J(i\omega) = \frac{1}{Y(i\omega)} = J_1(\omega) - iJ_2(\omega) \quad (6)$$

§2. TÍNH MÔĐUN PHỨC VÀ ĐỘ MỀM PHỨC CỦA CÁC MÔ HÌNH

Môđun phức và độ mềm phức là các hàm của ω . Do đó 1 trong 2 thông số này là phương pháp bổ sung mô tả tính chất vật đàn nhớt của vật liệu.

1. Mô hình đàn hồi

Theo (3), (4) tương ứng với (4.3) ta suy ra:

$$\text{Re}[\sigma^0(\omega) \cdot \exp(i\omega t)] = E \text{Re}[\varepsilon^0(\omega) \cdot \exp(i\omega t)]$$

Đối với mỗi thời gian t , từ đẳng thức này, ta được

$$\frac{\sigma^0(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)} = E \quad (7)$$

Trong trường hợp này tỷ số $\frac{\sigma^0(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)}$ bằng môđun đàn hồi E.

Vậy

$$Y(i\omega) = E + i.0 = Y_1(\omega) + i.0 \rightarrow Y_1(\omega) = E \quad (8)$$

$$Y_2(\omega) = 0$$

Độ mềm phức

$$J(i\omega) = J_1(\omega) - i J_2(\omega) = \frac{1}{E} - i.0 \rightarrow J_1(\omega) = \frac{1}{E} \quad (9)$$

$$J_2(\omega) = 0$$

2. Mô hình lỏng - Niuton

Thay (3), (4) vào (4.6) ta có biểu thức sau:

$$\text{Re}[\sigma^0(\omega).\exp(i\omega t)] = \eta \text{Re}[\varepsilon^0(\omega).i\omega.\exp(i\omega t)]$$

Suy ra
$$\frac{\sigma^0(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)} = i\omega\eta \quad (10)$$

Vậy môđun phức

$$Y(i\omega) = 0 + i\omega\eta \rightarrow Y_1(i\omega) = 0 \quad (11)$$

$$Y_2(i\omega) = \omega\eta$$

Độ mềm phức $J(i\omega) = 0 - i.\frac{1}{\omega\eta} \rightarrow J_1(\omega) = 0$

$$J_2(\omega) = \frac{1}{\omega\eta} \quad (12)$$

3. Mô hình Voigt – Kelvin

Ở mô hình Kelvin, ứng suất bằng tổng ứng suất ở phần tử lò xo 1 và phần tử giảm chấn 2:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

ta có:

$$\frac{\sigma^0(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)} = \frac{\sigma^1(\omega) + \sigma^2(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)} = E + i\omega\eta \quad (13)$$

Vậy

$$\text{Môđun phức} \quad Y(i\omega) = Y_1(\omega) + iY_2(\omega) = E + i\omega\eta \quad (14)$$

$$\text{Suy ra} \quad Y_1(\omega) = E; \quad Y_2(\omega) = \omega\eta \quad (15)$$

$$\text{Độ mềm phức} \quad J(i\omega) = \frac{1}{Y(i\omega)} = \frac{1}{E + i\omega\eta} = J_1(\omega) - iJ_2(\omega) \quad (16)$$

Sau khi tính toán ta được:

$$J(i\omega) = \frac{E}{E^2 + \eta^2 \omega^2} - i \frac{\eta\omega}{E^2 + \eta^2 \omega^2} \quad (17)$$

$$\text{Suy ra} \quad J_1(\omega) = \frac{E}{E^2 + \eta^2 \omega^2}; \quad J_2(\omega) = \frac{\eta\omega}{E^2 + \eta^2 \omega^2} \quad (18)$$

4. Mô hình Macxoen

Ở mô hình Macxoen, biến dạng bằng tổng biên dạng của phần tử lò xo 1 và biến dạng phần tử giảm chấn 2:

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0$$

Từ đó, ta có thể viết:

$$\frac{\varepsilon^0(\omega)}{\sigma^0(\omega)} = \frac{\varepsilon_1^0(\omega) + \varepsilon_2^0(\omega)}{\sigma^0(\omega)} = \frac{\varepsilon_1^0(\omega)}{\sigma^0(\omega)} + \frac{\varepsilon_2^0(\omega)}{\sigma^0(\omega)} = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\eta\omega} \quad (19)$$

$$\text{giá trị} \quad \frac{\sigma^0(\omega)}{\varepsilon^0(\omega)} = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{i\eta\omega}} = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{i\eta\omega} \right]^{-1} \quad (20)$$

Vậy môđun phức sau khi tính toán có giá trị:

$$Y(i\omega) = Y_1(\omega) + iY_2(\omega) = \frac{\omega^2 \eta^2 E}{E^2 + \omega^2 \eta^2} + i \frac{E^2 \eta \omega}{E^2 + \omega^2 \eta^2} \quad (21)$$

$$\text{Suy ra} \quad Y_1(\omega) = \frac{\omega^2 \eta^2 E}{E^2 + \omega^2 \eta^2}; \quad Y_2(\omega) = \frac{E^2 \eta \omega}{E^2 + \omega^2 \eta^2} \quad (22)$$

Độ mềm phức

$$J(i\omega) = J_1(\omega) - iJ_2(\omega) = \frac{1}{E} - i \frac{1}{\eta\omega} = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\eta\omega} \quad (23)$$

$$\text{Suy ra} \quad J_1(\omega) = \frac{1}{E}; \quad J_2(\omega) = \frac{1}{\eta\omega} \quad (24)$$

Qua cách tính môđun phức của mô hình Voigt – Kelvin và độ mềm phức của mô hình Macxoen, ta có thể tổng quát như sau:

– Nếu hai mô hình M_1 , M_2 mắc song song, thì độ dẫn của mô hình tổng hợp và thành phần là như nhau, nhưng lực đặt vào mô hình tổ hợp bằng tổng lực đặt vào các mô hình riêng rẽ. Kí hiệu môđun phức của mô hình thành phần và của mô hình tổng hợp là: $Y_1(i\omega)$, $Y_2(i\omega)$ và $Y(i\omega)$, ta có:

$$Y(i\omega) = \frac{\sigma^0}{\varepsilon^0} = \frac{\sigma_1^0 + \sigma_2^0}{\varepsilon^0} = Y_1(i\omega) + Y_2(i\omega) \quad (25)$$

– Nếu hai mô hình M_1 và M_2 đặt nối tiếp thì lực đặt vào mô hình tổng hợp và riêng rẽ là bằng nhau nhưng độ dẫn dài của mô hình tổ hợp bằng tổng độ dẫn dài của mô hình thành phần.

Kí hiệu độ mềm phức của mô hình thành phần và độ mềm phức của mô hình tổ hợp là $J_1(i\omega)$, $J_2(i\omega)$ và $J(i\omega)$, ta có:

$$J(i\omega) = \frac{\varepsilon^0}{\sigma^0} = \frac{\varepsilon_1^0 + \varepsilon_2^0}{\sigma^0} = J_1(i\omega) + J_2(i\omega) \quad (26)$$

Từ hai nhận xét trên ta dễ dàng xác định độ mềm phức và môđun phức của các mô hình ba, bốn thông số.

Đối với mô hình mắc nối tiếp, ta xác định độ mềm phức trước.

Đối với mô hình mắc song song, ta xác định môđun phức trước.

$$\text{Sau đó dùng công thức} \quad Y(i\omega) = \frac{1}{J(i\omega)} \quad (27)$$

để tính giá trị chưa biết.

Ví dụ.

+ Mô hình Thomson hình 4.10a.

Ta xem mô hình Thomson gồm hai mô hình Húc và Kelvin mắc nối tiếp. Kí hiệu $J_1(i\omega)$ là độ mềm của mô hình Húc và $J_2(i\omega)$ là độ mềm của mô hình Kelvin. Theo (26), ta có:

$$J(i\omega) = J_1(i\omega) + J_2(i\omega)$$

Thay giá trị $J_1(i\omega)$ theo (9) và giá trị $J_2(i\omega)$ theo (17) ta được độ mềm phức của mô hình Thomson:

$$J(i\omega) = J_1(i\omega) + J_2(i\omega) = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right) - i \frac{\eta_2 \omega}{E_2^2 + \eta_2^2 \omega^2} \quad (28)$$

Trong đó:

$$J_1(i\omega) = \frac{1}{E_1} + i.0$$

$$J_2(i\omega) = \frac{E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} - i \frac{\eta_2 \omega}{E_2^2 + \eta_2^2 \omega^2} \quad (29)$$

Môđun phức của mô hình Thomson:

$$Y(i\omega) = \frac{1}{J(i\omega)} = \frac{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right) + i \frac{\eta_2 \omega}{E_2^2 + \eta_2^2 \omega^2}}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\eta_2 \omega}{E_2^2 + \eta_2^2 \omega^2} \right)^2} \quad (30)$$

Ví dụ

Mô hình Zener gồm hai mô hình Huc mắc song song với mô hình Macxoen.

Do đó

$$Y(i\omega) = Y_1(i\omega) + Y_2(i\omega)$$

Trong đó

$Y(i\omega)$ – môđun phức mô hình Zener.

$Y_1(i\omega)$ – môđun phức mô hình Huc.

$Y_2(i\omega)$ – môđun phức mô hình Macxoen.

Theo (7) và (21) ta có:

$$Y_1(i\omega) = E_1 + i.0$$

$$Y_2(i\omega) = \frac{\omega^2 \eta E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} + i \frac{E_2^2 \eta \omega}{E_2^2 + \eta_2^2 \omega^2}$$

Vậy môđun phức của mô hình Zener là:

$$Y(i\omega) = \left(E_1 + \frac{\omega^2 \eta E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right) + \frac{E_2^2 \eta \omega}{E_2^2 + \eta_2^2 \omega^2} \quad (31A)$$

Độ mềm phức của mô hình Zener là:

$$J(i\omega) = \frac{1}{Y(i\omega)} = \frac{\left(E_1 + \frac{\omega^2 \eta E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right) - i \frac{E_2^2 \eta \omega}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2}}{\left(E_1 + \frac{\omega^2 \eta E_2}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right)^2 + \left(\frac{E_2^2 \eta \omega}{E_2^2 + \eta^2 \omega^2} \right)^2} \quad (31A)$$

Mô hình Voigt tổng quát được mắc nối tiếp một phần tử Macxoen với các phần tử Voigt - Kelvin. Do đó độ mềm phức của mô hình Voigt tổng quát bằng:

$$J(i\omega) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{i\omega\eta_2} + \sum_{r=3}^n \frac{1}{E_r + i\omega\eta_r} \quad (32)$$

Ví dụ

Mô hình Macxoen tổng quát, hình 4.18.

Mô hình Macxoen tổng quát gồm một phần tử Voigt - Kelvin mắc song song với nhiều mô hình Macxoen. Do đó mô hình Macxoen tổng quát bằng:

$$Y(i\omega) = E_1 + i\omega\eta_2 + \sum_{r=3}^n \left(\frac{1}{E_r} + \frac{1}{i\omega\eta_r} \right)^{-1} \quad (33)$$

Nếu chú ý đến toán tử vi phân tuyến tính (6.1): $P(\sigma) = Q(\varepsilon)$ trong trường hợp dao động cưỡng bức thì toán tử ở đây cần nhân thêm với $i\omega$ vì hàm thời gian có dạng $e^{i\omega t}$.

Giá trị môđun phức được tính theo biểu thức sau:

$$Y(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} \quad (34)$$

Giá trị độ mềm phức:

$$J(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \quad (35)$$

Trong đó $Y(i\omega)$, $J(i\omega)$ là các hàm hữu tỷ của $i\omega$.

§3. CÁC VÍ DỤ

Để minh họa biểu thức trên đây, ta xác định giá trị môđun phức, độ mềm phức của các mô hình đơn giản sau:

1. Mô hình hồi

Theo định nghĩa, môđun phức:

$$Y(i\omega) = \frac{\sigma_0(\omega)}{\varepsilon_0(\omega)} \quad (36)$$

Theo (6.3), các hệ số của toán tử có giá trị sau:

$$k = 0; p_0 = 1; h = 0; q_0 = E$$

Vậy theo (34) ta có:

$$Y(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = E \quad (37)$$

Tỷ số này chính bằng môđun đàn hồi của vật liệu.

2. Mô hình Niuton

Tương tự theo (6.4) các hệ số của toán tử dưới có giá trị.

$$k = 0; p_0 = 1; h = 1; q_0 = 0; q_1 = \eta$$

Do đó

$$Y(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = i\omega\eta \quad (38)$$

3. Mô hình Macxoen

Theo phương trình (6.5), các hệ số của toán tử có giá trị:

$$k = 1; \quad p_0 = \frac{E}{\eta}; \quad p_1 = 1$$

$$h = 1; \quad q_0 = 0; \quad q_1 = E$$

Do đó

$$Y(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} \right)^{-1} = \frac{\omega^2\eta^2 E}{E^2 + \omega^2\eta^2} + i \frac{E^2\omega\eta}{E^2 + \omega^2\eta^2} \quad (39)$$

4. Mô hình Kelvin - Voigt

Theo (6.6) các hệ số toán tử có giá trị:

$$k = 0; \quad p_0 = 1; \quad h = 1; \quad q_0 = E; \quad q_1 = \eta$$

Từ phương trình $\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d}{dt}\varepsilon$ ta suy ra:

$$E\sigma_0 \exp i\omega t = E\varepsilon_0 \exp i\omega t + \eta \cdot i\omega - \varepsilon_0 \exp i\omega t \quad (40)$$

$$\text{Vậy} \quad Y(i\omega) = \frac{Q(i\omega)}{P(i\omega)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E + i\omega\eta \quad (41)$$

5. Mô hình ba thông số

Mô hình này có dạng:

$$\frac{d\sigma}{dt} + p_0 \cdot \sigma = q_1 \cdot \frac{d}{dt} \varepsilon + q_0 \cdot \varepsilon \quad (42)$$

Theo phương trình (6.7):

$$k = 1; \quad p_0 = \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}; \quad q_1 = E_1; \quad q_0 = \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta_2}$$

Thay các giá trị trên vào (42) và sau khi tính toán ta có:

$$Y(i\omega) = \frac{\frac{E_1 + E_2}{\eta_2}}{E_1 + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}} + i \frac{\omega}{E_1 + \frac{E_1 + E_2}{\eta_2}} \quad (43)$$

Ở trạng thái ứng suất khối nếu chúng ta chú ý đến toán tử vi phân (6.13), tương tự có dạng:

$$P_1(i\omega)S_{ij} = P_2(i\omega)e_{ij} \quad (44)$$

$$P_3(i\omega)\sigma_{ij} = P_4(i\omega)\varepsilon_{ij} \quad (45)$$

Gọi môđun phức lệch $Y_1(i\omega)$ và môđun phức thể tích $Y_u(i\omega)$ ta có:

$$Y_1(i\omega) = \frac{P_2(i\omega)}{P_1(i\omega)} \quad (46)$$

$$Y_u(i\omega) = \frac{P_4(i\omega)}{P_3(i\omega)} \quad (47)$$

Do đó ta có thể viết biểu thức liên hệ giữa ứng suất và biến dạng sau:

$$\bar{\sigma}_{ij} = Y_u \cdot \bar{\varepsilon}_{ij}$$

$$\bar{S}_{ij} = Y_1 \cdot \bar{e}_{ij}$$

Phương pháp này thực ra không chỉ hạn chế ở lực kích thích điều hòa hình sin với tần số ω không đổi. Như đã biết nhờ lý thuyết Phurie, ta có thể khai triển hàm bất kỳ liên hệ giữa ứng suất và biến dạng vào thời gian ở dạng tổng các thành phần hình sin. Do đó ta có thể áp dụng phương pháp trên cho tải trọng bất kỳ.

6. Ví dụ

Xét sự lan truyền sóng dọc trong thanh bán vô hạn làm từ vật liệu đàn nhớt, thanh hình trụ đường kính d , chịu lực kích thích tại đầu thanh. Tìm chuyển vị u , vận tốc v , biến dạng ε và ứng suất σ .

Lời giải

Trường hợp chiều dài sóng rất lớn so với đường kính ($d \ll \lambda$), khi đó phương trình sóng cho thanh đàn hồi như đã biết có dạng:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a)$$

Nghiệm theo D'Alembert là:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (b)$$

Trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các hàm bất kỳ của x .

$$c - \text{tốc độ lan truyền sóng dọc, } c^2 = \frac{E}{\rho};$$

Nếu tại $x = 0$ đặt chuyển vị ban đầu thì phương trình chỉ còn lại sóng lan truyền theo chiều dương:

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

Từ đó:

$$+ \text{ Tốc độ hạt sóng : } v = \frac{\partial u}{\partial t} = cf'(x - ct) \quad (d)$$

$$+ \text{ Biến dạng : } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - ct) \quad (e)$$

$$+ \text{ Ứng suất : } \sigma = E\varepsilon = Ef'(x - ct) \quad (f)$$

Hàm f được xác định nhờ điều kiện biên.

Giả sử tại $x = 0$, $t = 0$ ta đặt vào xung I . Khi đó điều kiện biên sẽ là:

$$\sigma_{x=0} = -I\delta(t) \quad (i)$$

Thay vào ta được:

$$Ef'(-ct) = -I\delta(t) \quad (j)$$

Khi đó ta tìm được:

$$+ \text{Chuyển vị } u = f(x - ct) = \frac{cI}{E} h\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (k)$$

$$+ \text{Tốc độ hạt } v = \frac{cI}{E} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (l)$$

$$+ \text{Biến dạng } \varepsilon = -\frac{I}{E} \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (m)$$

$$+ \text{Ứng suất } \sigma = -I \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (n)$$

Đối với thanh làm từ vật liệu đàn nhớt, áp dụng nguyên lý tương ứng, sử dụng phép chuyển đổi Phuriê một chiều đối với ứng suất:

$$\bar{\sigma} = -I \int_0^x e^{-i\omega t} \cdot \delta\left(t - \frac{x}{c}\right) dt = I e^{-i\omega x/c} \quad (o)$$

Khi thay c theo giá trị môđun phức bằng $[\rho J(i\omega)]^{1/2}$, chúng ta nhận được phép chuyển đổi đối với ứng suất cho thanh làm từ vật đàn hồi nhớt:

$$\bar{\sigma} = -I \exp\left[-i\omega x \sqrt{\rho J(i\omega)}\right] \quad (p)$$

Còn ứng suất:

$$\sigma = -\frac{I}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{i\omega \left(t - \sqrt{\rho J(i\omega)} x \right)} \right] d\omega \quad (q)$$

Ví dụ đối với vật Macxoen. Theo (23):

$$J(i\omega) = \frac{1}{E} + \frac{1}{i\omega\eta} = \frac{1}{E} - i \frac{1}{\omega\eta} \quad (r)$$

Thay (16) vào (15) ta được:

$$\begin{aligned} \sigma = & -I e^{-\frac{\sqrt{\rho E} x}{2\eta}} \times \\ & \times \left\{ \delta\left(t - \sqrt{\frac{E}{\rho}} x\right) + \frac{\sqrt{\rho E} x}{2\eta} \left[J_1\left(\frac{E}{2\eta} \sqrt{t^2 - \frac{\rho}{E} x^2}\right) \right] \left(t^2 - \frac{\rho}{E} x^2\right)^{1/2} h\left(t - \sqrt{\frac{\rho}{E}} x\right) \right\} \end{aligned} \quad (s)$$

J_1 - hàm số Bessel loại một có đối số phức, ở đây xung lan truyền với tốc độ $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ và hệ số tắt dần là $\sqrt{\frac{\rho E}{2\eta}}$.

PHỤ LỤC

§ 1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLAX

Phần này chỉ trình bày những nội dung cơ bản của phép tính toán tử Laplace nhằm giúp độc giả hiểu được các vấn đề đã trình bày ở trên và vận dụng vào tính toán các bài toán đơn giản khi cần sử dụng đến những kiến thức thông thường của phép tính toán tử Laplace.

Khi cần tìm hiểu sâu về cơ sở toán học, các tính chất cơ bản của phép tính toán tử Laplace, độc giả có thể đọc các tài liệu chuyên đề về toán: phép tính toán tử, phép biến đổi Laplace.

1. Khái niệm về phương pháp của phép tính toán tử

Cho hai tập A và B . Một ánh xạ T cho ứng với mỗi phần tử x của tập hợp A , một phần tử xác định của tập hợp B . Kí hiệu Tx , được gọi là một toán tử. Phần tử Tx được gọi là ảnh của x , còn x được gọi là gốc hoặc nghịch ảnh của Tx .

Ví dụ:

Nếu A là tập tất cả các số dương và $B = \mathbb{R}$ (tập hợp tất cả số thực), ánh xạ cho ứng với mỗi số $a \in A$ một số thực theo qui tắc:

$$Ta = \ln a \quad (1)$$

được gọi là toán tử lôga.

Nhờ có toán tử lôga mà phép nhân các gốc được chuyển thành phép cộng các ảnh tương ứng:

$$T(a_1 a_2) = Ta_1 + Ta_2 \quad (2)$$

Do đó muốn tính a_1, a_2 ta có thể tìm ảnh của nó theo công thức (2), sau đó dùng bảng lôga tra ngược lại tìm gốc.

Mục đích của phép tính toán là chuyển các phép toán phức tạp đối với gốc thành các phép tính đơn giản hơn đối với ảnh, sau đó tìm nghịch ảnh của kết quả. Đối với một lý thuyết về phép tính toán tử có hai vấn đề cơ bản phải giải quyết là:

- 1) Bài toán thuận: biết hàm gốc, tìm hàm ảnh.
- 2) Bài toán ngược: biết hàm ảnh, tìm hàm gốc.

Toán tử Laplace cũng có tính chất và mục đích này nội dung nghiên cứu là bài toán thuận và ngược.

2. Định nghĩa hàm gốc

Ta gọi hàm $f(t)$ của biến thực t là hàm gốc nếu nó thoả mãn các điều kiện sau đây:

1) Hàm $f(t)$ liên tục từng khúc khi $t \geq 0$, nghĩa là, nếu lấy một khoảng $[a, b]$ bất kỳ trên nửa trục $t \geq 0$, bao giờ cũng có thể chia thành một số hữu hạn khoảng nhỏ, sao cho mỗi khoảng nhỏ, $f(t)$ liên tục và tại các nút của mỗi khoảng nhỏ nó giới hạn một phía.

2) Khi $t \rightarrow +\infty$ hàm $f(t)$ tăng không nhanh, hơn một hàm số mũ, nghĩa là, tại các số $M > 0; S_0 \geq 0$ sao cho:

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{S_0 t} \quad \forall t > 0$$

Trong đó, số S_0 được gọi là chỉ số tăng của $f(t)$.

3) $f(t) = 0$ khi $t < 0$.

Điều kiện 3 được đặt ra vì trong ứng dụng, biến số t thường là thời gian, hàm $f(t)$ biểu diễn một quá trình nào đó mà ta chỉ cần khảo sát lúc $t > 0$.

3. Định nghĩa toán tử Laplace (hay còn gọi là phép biến đổi Laplace)

Nếu $f(t)$ là một hàm gốc, khi hàm $F(p)$ xác định bởi tích phân (3), là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng $\text{Re } p > S_0$. Ta gọi nó là ảnh của $f(t)$ qua phép biến đổi Laplace hoặc gọi tắt nó là phép biến đổi Laplace của hàm $f(t)$.

Ký hiệu $F(p) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ hay $f(t) = F(p)$

Ta có:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \cdot dt \quad (3)$$

Ví dụ 1

Tìm ảnh của hàm $f(t) = e^{at}$ trong đó $a = \alpha + i\beta =$ hằng số.

Lời giải

$$\text{Ta có: } F(p) = \mathcal{F}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} \cdot dt = e^{(a-p)t} dt = \frac{e^{(a-p)t}}{a-p} \int_0^{\infty}$$

Khi $t \rightarrow 0$ thì $e^{(a-p)t} \rightarrow 1$. Nếu $\text{Re } p > \text{Re } a$ ($s > \alpha$) thì khi $t \rightarrow +\infty$, $e^{(a-p)t} = e^{(\alpha-p)t} \cdot e^{i(\beta-p)t} \rightarrow 0$.

$$\text{Vậy: } \mathcal{F}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a} \quad \text{Re } p > \text{Re } a \quad (4)$$

Chú ý: Sau này ta chỉ quan tâm tới sự tồn tại của ảnh trong miền nào đó mà không chú ý tới bản thân miền đó, nên bên cạnh công thức cho ảnh của một hàm gốc ta sẽ không viết miền có nghĩa của công thức đó nữa.

Ví dụ 2:

Tìm ảnh của hàm $f(t) = t^a$, $a > -1$.

$$\mathcal{F}\{t^a\} = \int_0^{\infty} t^a \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

Lời giải

Ta xét hai trường hợp:

1) trường hợp $a > 0$ khi đó hàm t^a thoả mãn tất cả các điều kiện của hàm gốc:

$$\mathcal{F}\{t^a\} = \int_0^{\infty} t^a \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

Giả sử p là số thực dương, đổi biến số $pt = \tau$. Nó dẫn tới tích phân
Loại 2, ta có:

$$\frac{1}{p^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cdot \tau^a \cdot d\tau = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$$

Vậy ảnh của hàm t^a là:

$$\mathcal{A}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad a > -1 \quad (5)$$

Kí hiệu Γ - hàm gamma.

Người ta còn chứng minh được rằng $\int_0^\infty e^{-pt} t^a dt = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ với mọi

số phức p có phần thực dương.

2) Trường hợp $-1 < a < 0$ khi đó hàm $f(t) = t^a$ không phải là một hàm gốc vì khi $t \rightarrow 0$ thì $f(t) \rightarrow \infty$.

Tuy vậy tích phân $\int_0^\infty t^a e^{-pt} dt$ vẫn hội tụ và có giá trị bằng

$$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}.$$

Trong trường hợp này, ta gọi t^a là một hàm gốc bất thường và $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$ là ảnh bất thường của nó.

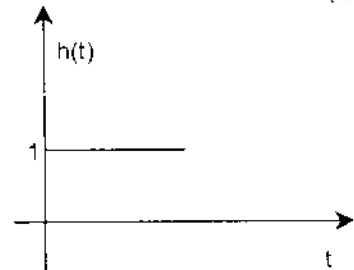
Vậy ảnh của hàm $f(t) = t^a$ (a là một hằng số thực lớn hơn -1) là:

$$\mathcal{A}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad (6)$$

Ví dụ 3:

Tìm ảnh của hàm Hêviside (hình PL.1)

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < 0 \\ 1 & \text{khi } t > 0 \end{cases}$$



Hình PL.1

Bài giải:

Hàm $h(t)$ là hàm gốc vì $|h(t)| \leq 1$ nên điều kiện 2 trong định nghĩa được thoả mãn. Nếu chọn $M = 1$, $s_0 = 0$ và dễ dàng kiểm tra được điều kiện 1.

Ảnh của hàm $f(t)$ là:

$$\mathcal{A}\{h(t)\} = \mathcal{A}\{1\} = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{p} r^{(-s-i\sigma)t} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{p} e^{-st} e^{-i\sigma t} \Big|_0^\infty$$

Nếu $\text{Rep} = s > 0$ thì khi $t \rightarrow +\infty$, $e^{-st} \rightarrow 0$.

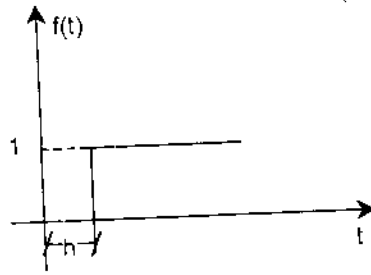
Khi $t \rightarrow 0$, thì $e^{-st} \rightarrow 1$.

Vậy $\mathcal{A}\{h(t)\} = \frac{1}{p}; \text{Rep} > 0$ (6A)

Hay $\mathcal{A}\{1\} = \frac{1}{p}; \text{Rep} > 0$ (6B)

Nếu bước nhảy đơn vị xảy ra ở thời điểm $t = h \geq 0$ (hình PL.2) chúng ta nhận được hàm:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < h \\ 1 & t > h \end{cases}$$



Hình PL.2

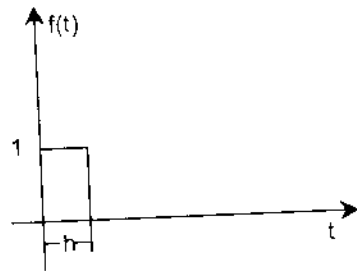
Ảnh của hàm $f(t)$ là:

$$\mathcal{A}\{f(t)\} = \int_h^\infty e^{-pt} dt = \frac{e^{-ph}}{p} \quad \text{Rep} > 0$$

Ví dụ 4

Tìm ảnh của hàm $f(t)$ hình PL.3:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < h \\ 0 & t > h \end{cases}$$



Hình PL.3

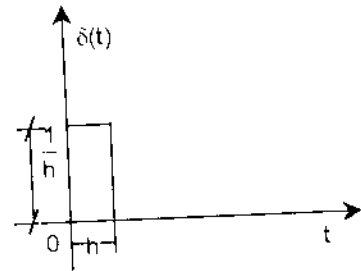
Lời giải: Ảnh của hàm $f(t)$ là:

$$\mathcal{A}\{f(t)\} = \int_0^h e^{-pt} dt = \frac{1 - e^{-ph}}{p} \quad (7)$$

Ví dụ 5

Tìm ảnh của hàm Delta - Dirac ký hiệu $\delta(t)$ (hình PL.4):

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \neq 0 \\ \infty & \text{khi } t = 0 \end{cases}$$



Hình PL.4

Trong đó:

$$\delta(t) = \frac{1}{h} [h(t) - h(t-h)] = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{khi } 0 < t < h \\ 0 & \text{khi } t < 0 \\ \text{và khi } t > h \end{cases}$$

Lời giải:

Ảnh của hàm $\delta(t)$ được xem là giới hạn khi $h \rightarrow 0$ của ảnh của hàm $\delta(t, h)$.

Theo (7) ảnh của hàm $\delta(t, h)$ là:

$$\mathcal{L}\{\delta(t, h)\} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1 - e^{-ph}}{p}$$

Suy ra
$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{1 - e^{-ph}}{p} = 1$$

4. Tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplace

Giả sử $f(t)$ và $g(t)$ là hai hàm gốc: A và B là hằng số thực đơn hoặc phức.

Nếu $f(t) = F(p)$; $g(t) = G(p)$ thì:

$$Af(t) + Bg(t) \rightleftharpoons AF(p) + BG(p).$$

Thật vậy theo định nghĩa:

$$Af(t) + Bg(t) = \int_h^\infty e^{-pt} [A(f(t) + Bg(t))] \cdot dt$$

Do tính chất tuyến tính của tích phân thì.

$$\int_h^\infty e^{-pt} [A(f(t) + Bg(t))] \cdot dt = A \int_h^\infty e^{-pt} f(t) \cdot dt + B \int_h^\infty e^{-pt} g(t) \cdot dt$$

Nhưng theo giả thiết thì:

$$\int_h^\infty e^{-pt} f(t) \cdot dt = F(p)$$

$$\int_h^\infty e^{-pt} g(t) \cdot dt = G(p)$$

Thay vào trên, ta được: $Af(t) + Bg(t) = AF(p) + BG(p)$

Ví dụ 1.

Tìm ảnh của hàm $f(t) = \sin \omega t$.

Lời giải:

Theo công thức Ôle:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}$$

Nhưng theo (4):

$$\mathcal{A}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{p - i\omega}; \quad \mathcal{A}\{e^{-i\omega t}\} = \frac{1}{p + i\omega}$$

Áp dụng tính chất tuyến tính ta được:

$$\mathcal{A}\{\sin \omega t\} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (9)$$

Làm tương tự ta có thể tìm được ảnh của các hàm:

$$f(t) = \cos \omega t$$

$$f(t) = \operatorname{ch}(\omega t)$$

$$f(t) = \operatorname{sh}(\omega t)$$

$$\mathcal{A}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (10)$$

$$\mathcal{A}\{\operatorname{ch} \omega t\} = \frac{p}{p^2 - \omega^2} \quad (11)$$

$$\mathcal{A}\{\operatorname{sh} \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \quad (12)$$

Ví dụ 2:

Tìm ảnh của hàm $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

Ta biết $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \omega t$.

Do tính chất tuyến tính ta có:

$$\mathcal{A}\{\sin(\omega t + \varphi)\} = \sin \varphi \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \cos \varphi \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$$

Tương tự:

$$\mathcal{A}\{\cos(\omega t + \varphi)\} = \frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2} \quad (13)$$

Ví dụ 3:

Tìm ảnh của $f(t) = \sin^3 t$.

Lời giải:

Ta có:
$$\sin^3 t = \frac{1}{4} [3\sin t - \sin 3t]$$

Vậy
$$\mathcal{A}\{\sin^3 t\} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 9} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{p^2 + 9} \right)$$

5. Tính chất đồng dạng

Giả sử λ là một hằng số dương bất kỳ.

Nếu $f(t) \doteq F(p)$ thì $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F \frac{p}{\lambda}$ (14)

Chứng minh:

Theo định nghĩa, ta có:

$$f(\lambda t) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\lambda t).dt.$$

Trong tích phân bên phải, đổi biến số $\lambda t = t_1$; $dt = \frac{1}{\lambda} dt_1$. Do đó ta được:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(\lambda t).dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-p \frac{t_1}{\lambda}} f(t_1).dt_1 = \frac{1}{\lambda} F \frac{p}{\lambda}$$

6. Tính chất chuyển dịch ảnh

Cho λ là một số phức bất kỳ:

$$f(t) \doteq F(p) \text{ thì } e^{\lambda t}.f(t) \doteq F(p - \lambda) \quad (15)$$

Chứng minh

Theo định nghĩa, ta có:

$$e^{\lambda t} f(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{\lambda t} f(t).e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\lambda)t} f(t).dt = F(p - \lambda)$$

Ví dụ 1

$$\text{Vì } \sin \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{nên} \quad e^{\lambda t} \sin \omega t \doteq \frac{p}{(p - \lambda)^2 + \omega^2} \quad (16)$$

Tương tự ta có:

$$\mathcal{A}\{e^{\lambda t} \cos \omega t\} = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2} \quad (17)$$

$$\mathcal{A}\{e^{\lambda t} \cdot \cosh \omega t\} = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} \quad (18)$$

$$\mathcal{A}\{e^{\lambda t} \cdot \sinh \omega t\} = \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2} \quad (19)$$

Ví dụ 2

Giả sử $\mathcal{A}\{f(t)\} = F(p)$ hãy tìm ảnh của $f(t) \sin \omega t$.

Lời giải

$$\text{Ta có:} \quad f(t) \sin \omega t = f(t) \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

Do công thức dịch chuyển ảnh:

$$\mathcal{A}\{f(t) \cdot e^{i\omega t}\} = F(p - i\omega)$$

$$\mathcal{A}\{f(t) \cdot e^{-i\omega t}\} = F(p + i\omega)$$

Nên theo tính chất tuyến tính ta có:

$$\mathcal{A}\{f(t) \sin \omega t\} = \frac{1}{2i} [F(p - i\omega) - F(p + i\omega)] \quad (20)$$

Tương tự

$$\mathcal{A}\{f(t) \cos \omega t\} = \frac{1}{2} [F(p - i\omega) + F(p + i\omega)] \quad (21)$$

Ví dụ 3

Tìm ảnh của hàm $f(t) = t^a \cdot e^{\lambda t}$ $a > -1$

$$\text{Vì hàm } t^a \text{ có ảnh } \mathcal{A}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$$

Nên theo công thức dịch chuyển ảnh ta có:

$$\mathcal{A}\{t^a \cdot e^{\lambda t}\} = \frac{\Gamma(a+1)}{(p - \lambda)^{a+1}} \quad (22)$$

Thật vậy đổi biến số $(p - \lambda)t = \tau$ ta được:

$$\frac{1}{(p - \lambda)^{a+1}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^a d\tau = \frac{\Gamma(a+1)}{(p - \lambda)^{a+1}} \quad \text{Re } p > \text{Re } p\lambda$$

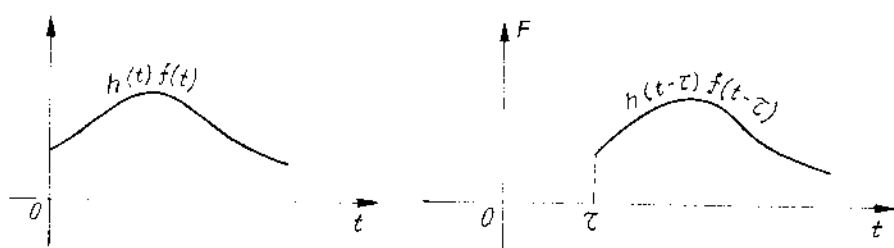
7. Tính chất trễ

Cho τ là một hằng số dương.

Nếu $f(t) \doteq F(p)$ thì $h(t - \tau).f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}F(p)$. (23)

Trước hết ta nhận xét rằng nếu $h(t).f(t)$ có đồ thị là đường cong C thì đồ thị dọc của hàm $h(t - \tau).f(t - \tau)$ là đường cong có được bằng cách tịnh tiến theo trục hoành sang phải một đoạn bằng τ .

Nếu t và τ là những đại lượng chỉ thời gian, thì quá trình biểu diễn bởi hàm $h(t - \tau).f(t - \tau)$ xảy ra giống như quá trình biểu diễn bởi hàm $h(t).f(t)$ nhưng chậm hơn một khoảng thời gian τ (hình PL.5).



Hình PL.5

Chứng minh.

Theo định nghĩa, ta có:

$$h(t - \tau).f(t - \tau) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t - \tau).f(t - \tau) dt$$

vì

$$h(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t < \tau \\ 1 & \text{khi } t > \tau \end{cases}$$

nên

$$h(t - \tau).f(t - \tau) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt.$$

Lấy tích phân vế phải, đổi biến số $t_1 = t - \tau$, ta được:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt = \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-p(t_1 + \tau)} dt_1 = e^{-p\tau} \cdot \int_0^{\infty} f(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} F(p)$$

8. Ảnh của một hàm tuần hoàn

Nếu $f(t)$ là một hàm gốc, tuần hoàn chu kỳ T , nghĩa là:

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t > 0$$

thì ảnh của nó được tính theo công thức sau:

$$F(p) = \frac{\phi(p)}{1 - e^{-pT}} \quad (24)$$

Trong đó $\phi(p)$ là ảnh của hàm:

$$\phi(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t).dt \quad (25)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t > 0 \\ f(t) & \text{khi } 0 < t < T \\ 0 & \text{khi } t > T \end{cases}$$

Chứng minh

Theo định nghĩa, ta có:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t).dt = \int_0^T e^{-pt} f(t).dt + \int_T^{\infty} e^{-pt} f(t).dt \quad (*)$$

Trong tích phân thứ hai bên vế phải, đổi biến số $t = u + T$, ta được.

$$\int_T^{\infty} e^{-pt} f(t).dt = \int_0^{\infty} e^{-p(u+T)} .du = e^{-pT} \int_0^{\infty} e^{-pu} (u + T) du$$

Do tính chất tuần hoàn $f(u + T) = f(u)$ nên:

$$\int_T^{\infty} e^{-pt} f(t) = e^{-pT} \int_0^{\infty} e^{-pu} f(u).du = e^{-pT} .F(p)$$

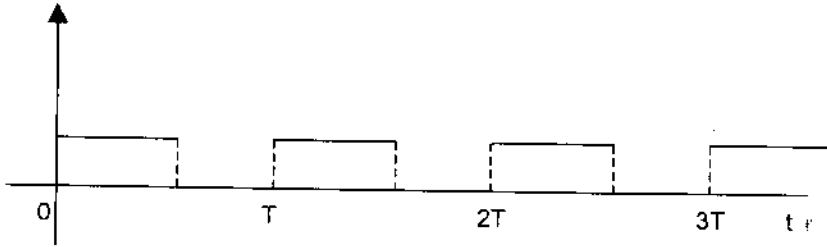
thay vào (*) ta được:

$$F(p) = \phi(p) + e^{-pT}F(p)$$

Từ đó rút ra:
$$F(p) = \frac{\phi(p)}{1 - e^{-pT}}$$

Ví dụ 1

Có một hệ thống tuần hoàn các xung, đồ thị được biểu diễn trên hình PL.6 trong đó hàm $f(t) = 1$ khi $0 < t < T$. Tìm ảnh của hàm $f(t)$ biểu diễn hệ xung đó.



Hình PL.6

Bài giải

Theo (25), ta có:

$$\phi(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t).dt = \int_0^T e^{-pt} f(t).dt = \frac{e^{-p.t}}{-p} \Big|_0^T = \frac{1}{p} (1 - e^{-pT})$$

Vậy
$$F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{1 - e^{-pT}}$$

Ví dụ 2

Có một hệ thống tuần hoàn các xung hình sin, đồ thị được biểu diễn trên hình PL.7. Tìm ảnh của hàm $f(t)$ biểu diễn hệ xung đó.

Lời giải

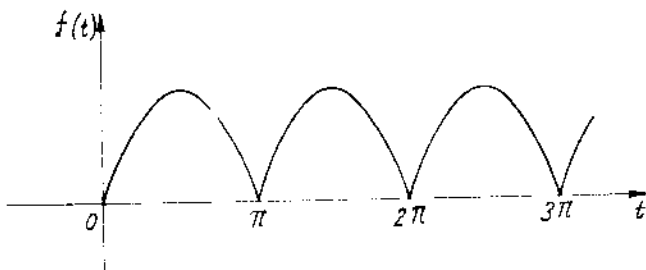
Theo đồ thị hàm $f(t) = |\sin t|$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Ta biết:

$$\phi(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t).dt = \int_0^T e^{-pt} |\sin t|.dt = \frac{1}{p^2 + 1} (1 + e^{-p\pi})$$

Do đó:

$$F(p) = \frac{\phi(p)}{1 - e^{-p\pi}} = \frac{1}{p^2 + 1} \frac{1 + e^{-p\pi}}{1 - e^{-p\pi}} = \frac{1}{p^2 + 1} \coth \frac{p\pi}{2}$$



Hình PL.7

9. Đạo hàm gốc

Giả sử $f(t)$ là hàm gốc có đạo hàm $f'(t)$ cũng là hàm gốc.

Nếu $f(t) \doteq F(p)$ thì $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$.

Chứng minh.

Theo định nghĩa thì $f(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt$. (26)

Dùng phương pháp tích phân từng phần tích phân vế phải đặt $u = e^{-pt}$; $du = -pe^{-pt}$.

$$dv = f'(t)dt \quad v = f(t)$$

Sau khi tính toán, ta được:

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + pF(p)$$

vì $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$ nên nếu $\text{Rep} = s > s_0$ thì $|f(t) \cdot e^{-pt}| < Me^{(s_0 - s)t} \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$.

Vậy
$$f(t) \cdot e^{pt} \Big|_0^\infty = -f(0)$$

Thay vào trên ta được:

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

Đạo hàm cấp cao

Nếu $f(t)$ có đạo hàm tới cấp n và các đạo hàm này đều là hàm gốc thì bằng cách áp dụng liên tiếp công thức (26) ta được:

$$f'(t) = p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$f^{(3)}(t) = p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) = p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

Một cách tổng quát:

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (27)$$

10. Tích tích phân gốc

Nếu $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ thì $\int_0^t f(t) dt$ là một hàm gốc và $\int_0^t f(t) dt \rightleftharpoons \frac{F(p)}{p}$ (28)

Chứng minh

Đặt $\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt$ rõ ràng $\varphi(0) = 0$. Hàm $\varphi(t)$ có đạo hàm $f(t)$ liên

tục từng khúc bởi vì:

$$|\varphi(t)| < \int_0^t f(t) dt \leq \int_0^t M e^{s_0 t} dt = \frac{M}{s_0} e^{s_0 t} \Big|_0^\infty \leq M_1 \cdot e^{s_0 t}$$

nên $\varphi(t)$ là một hàm gốc có cùng chỉ số tăng với $f(t)$.

Gọi $\phi(p)$ là ảnh của nó, ta phải tìm $\phi(p)$.

Vì $\varphi'(t) = f(t)$, nên theo công thức đạo hàm gốc, ta có:

$$f(t) \rightleftharpoons p\phi(p) - \varphi(0) = p\phi(p)$$

Vậy $F(p) = p\phi(p)$ từ đó rút ra $\phi(p) = \frac{F(p)}{p}$

Nhận xét:

Nhìn từ các công thức đạo hàm gốc và tích phân gốc ta thấy các phép tính đạo hàm và tích phân gốc được chuyển thành các phép tính đại số với ảnh tương ứng. Nhờ đó mà phép biến đổi Laplace có nhiều ứng dụng trong việc giải phương trình vi phân.

11. Đạo hàm ảnh

Nếu $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ thì $-tf(t) \rightleftharpoons F'(p)$. (29)

Theo một công thức đã được chứng minh thì ta có:

$$F'(p) \rightleftharpoons \int_0^{\infty} -tf(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Áp dụng liên tiếp công thức này, ta được:

$$(-t)^2 \cdot f(t) \rightleftharpoons F''(p)$$

.....

$$(-t)^n \cdot f(t) \rightleftharpoons F^{(n)}(p)$$

Phân chứng minh độc giả có thể xem [3].

Ví dụ:

Vì $1 \rightleftharpoons \frac{1}{p}$ nên theo (30) ta được:

$$-t \rightleftharpoons \left(\frac{1}{p} \right)' = -\frac{1}{p^2} \quad \text{suy ra } t \rightleftharpoons \frac{1}{p^2}$$

Một cách tổng quát:

$$t^n \rightleftharpoons \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (31)$$

12. Tích phân ảnh

Nếu tích phân $\int_p^{\infty} F(p) dp$ hội tụ thì nó là ảnh của hàm $\frac{f(t)}{t}$.

$$\text{Nghĩa là:} \quad \frac{f(t)}{t} \rightleftharpoons \int_p^{\infty} F(p) dp \quad (32)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \int_p^{\infty} dp \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (a)$$

Lấy s_1 là một số lớn hơn s_0 . Giả sử đường lấy tích phân (p, ∞) nằm hoàn toàn trong nửa mặt phẳng $\text{Re } p \geq s_1$ khi đó ta có:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s_1-s_0)t} dt$$

Dễ dàng nhận thấy rằng tích phân bên vế phải hội tụ. Vậy tích phân $\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ hội tụ đều đối với p .

Vậy trong (a) ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân:

$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \int_0^{\infty} f(t) \cdot dt \int_0^{\infty} e^{-pt} dp = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt$$

hay
$$\int_p^{\infty} F(p) dp = \frac{f(t)}{t}$$

Ví dụ

Tìm ảnh của hàm
$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \quad (b)$$

Lời giải

Theo (4)
$$e^{bt} - e^{at} = \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a} \quad (c)$$

Nên theo (c), ta có:
$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} = \int_p^{\infty} \left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a} \right) dp = \ln \frac{p-a}{p-b} \quad (33)$$

13. Tích chập của hai hàm số

Định nghĩa:

Cho hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$. Tích phân $\int_0^t f(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau$ là một hàm số của t , và được gọi là tích chập của hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$. Nó được ký hiệu là $f * g$.

$$f * g = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau \quad (34)$$

Tính chất

- Tích chập có tính giao hoán:

$$f * g = g * f \quad (35)$$

Thật vậy: dùng phép biến đổi $\tau_1 = t - \tau$; $d\tau_1 = -d\tau$, ta có:

$$f * g = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau = - \int_0^t f(t - \tau_1) \cdot g(\tau_1) \cdot d\tau_1 = \int_0^t g(\tau_1) \cdot f(t - \tau_1) \cdot d\tau_1$$

- Nếu $f(t)$ và $g(t)$ là những hàm gốc, thì $f \times g$ cũng là hàm gốc.

Ví dụ 1. Tính tích chập.

$$e^t * t = \int_0^t e^\tau (t - \tau) \cdot d\tau$$

Lời giải

Đặt $f(t) = e^t$, $g(t) = t$

ta có tích chập $e^t * t = \int_0^t e^\tau (t - \tau) \cdot d\tau$.

Tích phân bên vế phải được tính bằng phương pháp tích phân từng phần, ta được:

$$e * t = t(e^t - 1) - (t \cdot e^t - e^t + 1) = e^t - t - 1.$$

Ví dụ 2. Tính tích chập.

$$\sin t * t = \int_0^t (t - \tau) \sin \tau d\tau = -\sin t + 1$$

$$\cos t * t = \int_0^t (t - \tau) \cos \tau \cdot d\tau = -\cos t + 1$$

14. Ảnh tích chập

Nếu $f(t) = F(p)$ và $g(t) = G(p)$ thì ảnh của tích chập bằng tích các ảnh.

$$F * g = F(p) \cdot G(p) \quad (36)$$

Ở trên ta đã nghiên cứu cách tìm ảnh của một hàm gốc. Bây giờ ta sẽ giải quyết vấn đề tìm hàm gốc khi biết ảnh.

15. Quan hệ giữa gốc và ảnh

Định lý

Nếu $f(t)$ là một hàm gốc với chỉ số tăng là s_0 và $F(p)$ là ảnh của nó thì tại mọi điểm liên tục của $f(t)$, ta có:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) \cdot dp \quad (37)$$

Trong đó a là một số thực bất kỳ lớn hơn s_0 . Tích phân bên vế phải hiểu theo nghĩa giá trị chính.

Công thức (37) được gọi là công thức ngược của Mellin. Ta thừa nhận công thức này mà không chứng minh.

* Biết hàm ảnh tìm hàm gốc là bài toán ngược rất quan trọng khi sử dụng phép biến đổi Laplace. Mặc dù ta đã có công thức liên hệ giữa hàm gốc và hàm ảnh theo (37) nhưng nhiều khi ta không xác định được tích phân trên dưới dạng giải tích.

Để tìm hàm gốc khi biết hàm ảnh có nhiều phương pháp. Dưới đây chỉ trình bày phương pháp thực hành để tìm hàm gốc khi hàm ảnh là một phân thức hữu tỷ thực sự và tìm hàm gốc dưới dạng chuỗi.

16. Điều kiện đủ để $F(p)$ là một hàm ảnh

Định lý. Giả sử $F(p)$ là một hàm biến phức thoả mãn các điều kiện sau:

- + $F(p)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\text{Re } p > s_0$.
- + $F(p) \rightarrow 0$ khi $|p| \rightarrow +\infty$ trong nửa mặt phẳng $\text{Re } p < s_0$ đều đối với $\text{arg } p$.
- + Tích phân $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \cdot dp$ hội tụ tuyệt đối.

Khi đó $F(p)$ là ảnh của hàm $f(t)$ cho bởi công thức sau:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) \cdot dp \quad a > s_0 ; t > 0$$

17. Phương pháp thực hành để tìm gốc của một phân thức hữu tỷ

Để tìm gốc của một phân thức hữu tỷ thực sự với hệ số thực, trong thực hành người ta phân tích nó thành các phân thức tối giản loại I và loại II.

Các phân thức tối giản loại I có dạng:

$$\frac{1}{p-a} \text{ hay } \frac{1}{(p-a)^n}$$

(a thực; n nguyên dương).

Các phân thức tối giản loại II có dạng:

$$\frac{Mp+N}{p^2+2pb+c} \text{ hay } \frac{Mp+N}{(p^2+2pb+c)^n}$$

(M, N, b, c thực; $b^2 - c < 0$; n nguyên dương)

Đối với các phân thức tối giản loại I ta chú ý rằng:

$$\frac{1}{p} \doteq 1; \quad \frac{1}{p^n} \doteq \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Do đó dùng công thức dịch chuyển ảnh, ta được:

$$\frac{1}{p-a} \doteq e^{at}; \quad \frac{1}{(p-a)^n} \doteq e^{at} \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Đối với phân thức tối giản loại II, ta làm như sau:

Ta đưa tam thức ở mẫu số về dạng chính tắc:

$$\frac{Mp+N}{(p^2+2pb+c)^n} = \frac{M(p+b)+N-Mb}{[(p+b)^2+(c-b^2)]^n} = \frac{M(p+b)+N-Mb}{[(p+b)^2+\alpha^2]^n}$$

Trong đó $\alpha^2 = c - b^2$

sau đó ta tìm gốc của $\frac{Mp}{(p^2+\alpha^2)^n}$ và của $(N-Mb) \frac{1}{(p^2+\alpha^2)^n}$.

Rồi dùng công thức dịch chuyển ảnh.

Khi tìm gốc của hàm $\frac{p}{(p^2+\alpha^2)^n}$ hoặc của hàm $\frac{1}{(p^2+\alpha^2)^n}$ ta

thường dùng tới công thức đạo hàm ảnh.

Ví dụ 1

Tìm hàm gốc của $F(p) = \frac{p+1}{p^2+p+1}$

Lời giải

Đưa mẫu số về dạng chính tắc: $p^2 + p + 1 = \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

ta có:

$$F(p) = \frac{p+1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

Theo (10), ta có: $\frac{p}{p^2 + \frac{3}{4}} = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$

$$\frac{p}{p^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Áp dụng công thức dịch chuyển ảnh, ta được:

$$\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

$$\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = e^{-\frac{t}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Vậy

$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Ví dụ 2

Tìm gốc của hàm $F(p) = \frac{3p-4}{(p^2-2p+2)^2}$

Lời giải

Đưa mẫu số về dạng chính tắc I:

$$F(p) = \frac{3p-4}{(p^2-2p+2)^2} = \frac{3(p-1)-1}{[(p-1)^2+1]^2} = \frac{3(p-1)}{[(p-1)^2+1]^2} - \frac{1}{[(p-1)^2+1]^2}$$

Đặt $G(p) = \frac{3p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{(p^2+1)^2}$ thì $G(p-1) = F(p)$. Vậy tìm được

gốc của $G(p)$ ta sẽ dùng công thức dịch chuyển ảnh để tìm gốc của $F(p)$:

$$\text{Vì } \frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1}; \quad \frac{p}{(p^2+1)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2+1} \right)$$

$$\text{Nên } G(p) = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{(p^2+1)} \quad (a)$$

vì $\frac{1}{p^2+1} = \sin t$; $\frac{p}{p^2+1} = \cos t$ nên áp dụng tích chất đạo hàm ảnh, ta được:

$$\left(\frac{1}{p^2+1} \right)' = -t \sin t; \quad \left(\frac{p}{p^2+1} \right)' = -t \cos t$$

Từ (a) ta suy ra: $g(t) = \frac{3}{2} t \sin t + \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} t \sin t$

$$f(t) = e^t g(t) = e^t \left[\frac{3t}{2} \sin t + \frac{t}{2} \cos t - \frac{t \sin t}{2} \right]$$

Ví dụ 3

Tìm gốc của hàm ảnh $F(p) = \frac{3p^2+2p+2}{(p-2)(p^2+4p+8)}$

Lời giải

Trước hết ta phân tích $F(p)$ thành phân thức tối giản.

Dựa theo định lý Bodu chẳng hạn ta được:

$$F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{2p+3}{p^2+4p+8}$$

Hay

$$F(p) = \frac{1}{p-2} + \frac{2(p+2)-1}{(p+2)^2+4} = \frac{1}{p-2} + 2 \frac{(p+2)}{(p+2)^2+4} - \frac{1}{(p+2)^2+4}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{p-2} \doteq e^{2t}; \quad \frac{2p}{p^2+4} \doteq 2\cos 2t; \quad \frac{p}{p^2+4} \doteq \frac{1}{2}\sin 2t$$

Theo công thức dịch chuyển ảnh, ta có:

$$\begin{aligned} 2 \frac{(p+2)}{(p+2)^2+4} &\doteq 2 \cdot e^{2t} \cdot \cos 2t \\ \frac{1}{(p+2)^2+4} &\doteq e^{-2t} \cdot \frac{1}{2} \sin 2t \end{aligned}$$

Cuối cùng ta được:

$$f(t) = e^{2t} + 2e^{-2t}\cos 2t - e^{-2t} \cdot \frac{1}{2}\sin 2t$$

18. Tìm hàm gốc dưới dạng chuỗi

Định lý

Nếu $F(p)$ giải tích tại điểm $p = \infty$, nghĩa là, gần điểm ở lân cận điểm $p = \infty$, khai triển Lôrăng của nó, có dạng:

$$F(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \frac{C_3}{p^3} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{p^n}$$

Thì $F(p)$ là ảnh của hàm $h(t) \cdot f(t)$, trong đó:

$$f(t) = C_1 + \frac{C_2}{1!}t + \frac{C_3}{2!}t^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

(Nghĩa là muốn được $f(t)$, ta lấy giá trị của từng số hạng trong khai triển của $F(p)$).

Ví dụ 1

Tìm gốc của hàm
$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$$

Lời giải

Khai triển
$$e^{-\frac{1}{p}} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2!p^2} + \frac{1}{3!p^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{p^k}$$

Vậy
$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{p^{n+k+1}}$$

Vì $\frac{1}{p^{n+k+1}} = \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$ nên $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}$

Ví dụ 2

Tìm hàm gốc của phân thức
$$F(p) = \frac{p^9}{p^{10} - 1}$$

Bài giải

Khai triển $F(p)$ tại lân cận điểm $p = \infty$, ta được:

$$F(p) = \frac{p^9}{p^{10} - 1} = \frac{p^9}{p^{10} \left(1 - \frac{1}{p^{10}}\right)} = \frac{1}{p \left(1 - \frac{1}{p^{10}}\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^{11}} + \frac{1}{p^{21}} + \dots + \frac{1}{p^{10n+1}}$$

Theo định lý tìm gốc dưới dạng chuỗi thì:

$$f(t) = 1 + \frac{t^{10}}{10!} + \frac{t^{20}}{20!} + \dots + \frac{t^{10}}{(10n)!}$$

Bảng PL.1 cung cấp các ảnh thông dụng.

Bảng PL.1. Ảnh thông dụng

Gốc	Ảnh	Gốc	Ảnh
1	$\frac{1}{p}$	t	$\frac{1}{p^2}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$t^n \cdot e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
$e^{at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
$e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$e^{at} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{\omega \cos \varphi + (p-a) \sin \varphi}{(p-a)^2+\omega^2}$
		$e^{at} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(p-a) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(p-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t)$	1	$\delta_n(t)$	p^n
$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$	$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
t^n	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad A > -1$		
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch}(2\sqrt{at})$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} \operatorname{sh}(2\sqrt{\alpha t})$	$\frac{1}{p\sqrt{p}} e^{\frac{a}{p}}$		

§2. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLAX - CACXÔNG

Ảnh Laplaxơ - Cacxông của hàm gốc $f(t)$ được định nghĩa từ tích phân:

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) \cdot dt \quad (39)$$

Nếu kí hiệu: $F_k(p)$ là ảnh Laplax - Cacxông của $f(t)$

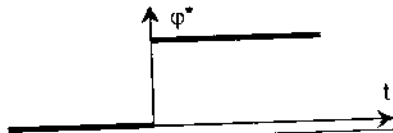
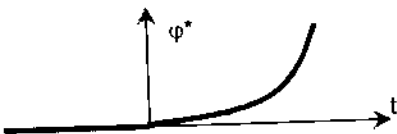
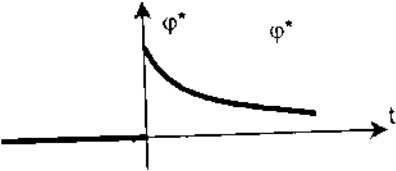
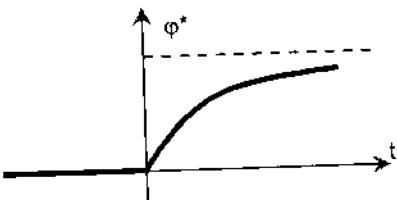
$F(p)$ là ảnh của Laplaxơ của nó,

thì theo (39), ta có liên hệ:

$$pF(p) = F_k(p)$$

Như vậy khi có bảng ảnh Laplax, nếu đem nhân mỗi ảnh với p , ta sẽ được bảng ảnh Laplax - Cacxông.

Bảng PL.2. Biểu đổi Cacxông thường gặp khi giải các bài toán đàn nhớt tuyến tính không lão hoá

Hàm gốc $\delta(t)$	Đồ thị	Biến đổi Cacxông φ^* p
$C \cdot h(t)$		C
$t^n \cdot h(t)$		$\frac{n!}{p^n}$
$e^{-at} \cdot h(t)$		$\frac{p}{p+a}$ $E \frac{p}{p+\frac{E}{n}} \rightarrow \frac{nEp}{pn+E}$
$(1 - e^{-an}) \cdot h(t)$ $\cdot \frac{1}{E_3} \left[1 - e^{-\frac{E}{n}t} \right] \cdot h(t)$		$\frac{a}{p+a}$ $\frac{1}{E} \left[\frac{\frac{E}{n}}{p+\frac{E}{n}} \right] \rightarrow \frac{1}{Enp}$

Ứng dụng:

1. Giải phương trình tuyến tính với hệ số hằng số và giải hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng số.
2. Giải phương trình tích phân.
3. Giải phương trình đạo hàm riêng.

Trong hai mục trên nguyên tắc chung là các phép tính đạo hàm, tích phân ở các phương trình vi phân với các hàm gốc được chuyển thành các phương trình đại số đối với hàm ảnh tương ứng. Tìm nghiệm ảnh ở các phương trình ảnh. Từ nghiệm ảnh ta tìm hàm gốc nhờ phương pháp biến đổi nghịch. Độc giả có thể đọc ví dụ ở các tài liệu [3] [5]. Riêng cách giải phương trình đạo hàm riêng cần có vài lưu ý, chúng tôi sẽ trình bày để độc giả tham khảo.

§3. ỨNG DỤNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠO HÀM RIÊNG

Phép biến đổi Laplace một chiều quan hệ đến biến số thời gian ta có thể sử dụng để giải các bài toán phương trình đạo hàm riêng đơn giản khi hàm chưa biết $U(x, t)$. Trong đó biến số x thay đổi trong khoảng $0 \leq x \leq l$ hoặc trong khoảng $0 \leq x \leq \infty$ và $-\infty < x < \infty$. Biến số t thay đổi trong khoảng $0 \leq t < \infty$. Mặt phẳng x, t xác định một miền xác định cho $U(x, t)$.

Ví dụ: – Một dải $0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty$.

– Một phần tư mặt phẳng $0 \leq x \leq \infty, 0 \leq t < \infty$.

– Một nửa mặt phẳng $-\infty < x < \infty, 0 \leq t < \infty$.

Điều kiện đối với U cho $t = +0$ như đã biết gọi là điều kiện đầu. Điều kiện quan hệ đến giới hạn $x =$ hằng số gọi là điều kiện biên.

Phép biến đổi Laplace chỉ liên quan đến biến số $t \geq 0$. Còn biến số x ta không để ý tới và xem nó là hằng số.

Ảnh $U(x, p)$ là hàm của x và p từ đó ta suy ra quan hệ:

$$\mathcal{L}\{U(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, t) dt = u(x, p)$$

Theo định lý về phép biến đổi đạo hàm, đạo hàm đối với t là:

$$\mathcal{P} \left\{ \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right\} = p \cdot u(x, p) - U(x, +0)$$

$$\mathcal{P} \left\{ \frac{\partial U^2(x, t)}{\partial t} \right\} = p^2 \cdot u(x, p) - pU(x, +0) - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=+0}$$

Đạo hàm theo x:

$$\mathcal{P} \left\{ \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} u(x, p)$$

Và

$$\mathcal{P} \left\{ \frac{\partial U^2(x, t)}{\partial x \cdot \partial t} \right\} = p \cdot \frac{\partial u(x, p)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, +0)}{\partial x}$$

Ngay lập tức ta thấy rằng, từ phương trình đạo hàm riêng trong miền gốc sau khi sử dụng phép biến đổi Laplace thì xuất hiện phương trình vi phân thường trong miền ảnh. Đối với ảnh $u(x, p)$ như hàm của x . Khi đó phép biến đổi Laplace đưa ra nghiệm phương trình vi phân thường trong miền ảnh.

Ở phương trình vi phân thường, điều kiện đầu trong miền gốc được thể hiện trong miền ảnh nhờ cách tính đạo hàm ảnh.

Điều kiện biên trong miền gốc ảnh được tính từ cách biến đổi Laplace điều kiện biên trong miền gốc.

Ví dụ Tính điều kiện khi $x = a$ và $x = b$.

$$U(x, t) \Big|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a+0} U(x, t) = G_1(t)$$

$$U(x, t) \Big|_{x=b} = \lim_{x \rightarrow b+0} U(x, t) = G_2(t)$$

Đưa đến điều kiện biên trong miền ảnh.

$$u(x, p) \Big|_{x=a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \bar{u}(x, p) = \mathcal{P}\{G_1(t)\} = g_1(p)$$

$$u(x, p) \Big|_{x=b} = \lim_{x \rightarrow b+0} \bar{u}(x, p) = \mathcal{P}\{G_2(t)\} = g_2(p)$$

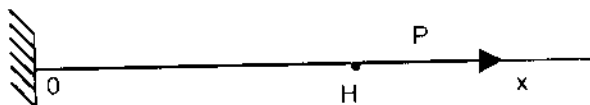
Biết hàm ảnh $u(x, p)$ ta tìm được hàm gốc $U(x, t)$.

Ví dụ

Một thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do có chiều dài l , lúc đầu nằm có vị trí cân bằng, trùng với đoạn OH của trục x như hình

(PL.8). Tại đầu H thanh chịu 1 lực P hướng theo trục x và phụ thuộc vào thời gian theo qui luật $P(t) = A \sin \omega t$.

Tìm dao động dọc của thanh.



Hình PL.8

Bài giải

Theo lý thuyết dao động, phương trình dao động dọc của thanh là:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (a)$$

trong đó a^2 - là hằng số, $a^2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

E - môđun đàn hồi.

ρ - khối lượng thanh.

$U(x, t)$ là độ lệch dọc của điểm x phụ thuộc vào thời gian t so với vị trí cân bằng. Theo đầu bài, ta có:

$$\text{Các điều kiện đầu} \quad U|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad (b)$$

$$\text{Các điều kiện biên} \quad U|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=l} = \frac{A}{E} \cdot \sin \omega t$$

Lập phương trình ảnh.

Biến đổi Laplace biểu thức (a) với các chú ý:

$$\mathcal{P}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = p^2 \bar{u}(x, p) - pU(x, +0) - \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}|_{t=-0}$$

$$\mathcal{P}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x, p) = \frac{\partial^2 \bar{u}(x, p)}{\partial x^2}$$

$$\text{Điều kiện đầu} \quad U(x, +0) = 0 \quad (c)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Phương trình ảnh của (a) là:

$$p^2 \cdot \bar{u}(x,p) = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \bar{u}(x,p)}{\partial x^2} \quad (d)$$

Các điều kiện biên gốc được chuyển qua điều kiện biên ảnh là:

$$\bar{u}(x,p) \Big|_{x=0} = 0 ; \quad \frac{\partial \bar{u}(x,p)}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{A}{E} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (e)$$

Để tìm hàm ảnh $\bar{u}(x,p)$ ta giải phương trình vi phân cấp 2 biến số là x thoả mãn các điều kiện biên.

Nghiệm tổng quát của (d) là:

$$U = C_1 \text{ch} \frac{p}{a} x + C_2 \text{sh} \frac{p}{a} x \quad (f)$$

C_1, C_2 là các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên:

$$\bar{u}(x,p) \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{ta được } C_1 = 0. \quad (g)$$

$$\bar{u}(x,p) \Big|_{x=1} = \frac{A}{E} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{ta được } C_2:$$

$$C_2 = \frac{b}{p(p^2 + \omega^2) \text{ch} \frac{1}{a} p} \quad \text{trong đó } b = \frac{Aa\omega}{E} \quad (h)$$

Vậy

$$\bar{u}(x,p) = \frac{b \text{sh} \frac{x}{a} p}{p(p^2 + \omega^2) \text{ch} \frac{1}{a} p} \quad (i)$$

Để tìm hàm gốc $u(x, t)$, ta dùng phép biến đổi nghịch của $\bar{u}(x,p)$, ta có:

$$U(x, t) = \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \quad (j)$$

$$U(x, t) = \sum_K \left| \text{Res.} u(p) \cdot e^{-pt}, p_k \right|$$

Với p_k là cực điểm của $u(p)$.

Hàm $u(p)$ có vô số các cực điểm ảo là nghiệm của phương trình $p^2 + \omega^2 = 0$ và phương trình ch. $\frac{1}{a} p = 0$.

Phương trình $p^2 + \omega^2 = 0$ có nghiệm là $p = \pm i\omega$.

Phương trình ch. $\frac{1}{a} p = 0$ hay $e^{\frac{2i}{a} p} = -1 = e^{i\pi}$ có nghiệm là $p = -\frac{2u+1}{2e} a\pi i$ với u nguyên bất kỳ.

Những cực điểm ảo nằm phía trên trục thực là:

$$P = i\omega; \quad p_n = \frac{a\pi i}{e} \left(a - \frac{1}{2} \right) = i\omega_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Nếu $\omega_n \neq \omega$ với mọi n (tức không xảy ra cộng hưởng) thì các cực điểm nói trên là các cực điểm đơn. Khi đó:

$$[\text{Res.} u(p) \cdot e^{pt}, i\omega] = \frac{b \sin \left(\frac{x}{a} - \omega \right)}{2i\omega^2 \cos \left(\frac{1}{a} \omega \right)} e^{i\omega t}$$

$$[\text{Res.} u(p) \cdot e^{pt}, i\omega] = \frac{ab}{l} \frac{\sin \left(\frac{x}{a} \omega_n \right)}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2) i \sin \frac{1}{a} \omega_n} e^{i\omega_n t} =$$

$$= \frac{ab}{l} \frac{\sin \left(\frac{x}{a} \omega_n \right)}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2) i \cos \pi t} e^{i\omega_n t}$$

Thay các kết quả vào (j), ta được:

$$U(a, t) = 2\text{Re} \left\{ \left[\text{Res } u(p) \cdot e^{pt}, i\omega \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{Res } u(p) \cdot e^{pt}, i\omega_n \right] \right\}$$

Hay:

$$U(x, t) = \frac{1}{\omega^2 \cos \frac{\omega l}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t + \frac{2ab}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\omega_n x}{a}}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_n t}{\omega_n}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đào Huy Bích
LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI.
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. 1979.
2. Nguyễn Văn Vượng
LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI ỨNG DỤNG.
Nhà xuất bản Giáo dục. 1999.
3. Phan Bá Ngọc
HÀM PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLAX.
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. 1980.
4. Gustav Martinšek
**TEÓRIA A METODIKA DYNAMICKÉHO
NEDEŠTRUKTÍVNEHO SKÚŠANIA PLOŠNÝCH PRVKOV.**
Nhà xuất bản VEDA. Bratislava. 1975.
5. Alfred Kneschke
POUŽÍVANIE DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC V PRAXI.
Nhà xuất bản Naklatelstvo ALFA. Bratislava (bản dịch).
6. **Н. Н. Малинин**
ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ МАТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ.
Nhà xuất bản "Машиностроение", 1975.
7. **Огибалов**
МЕХАНИКА ПОЛИМЕРОВ.
8. Witold Nowacki
DYNAMIKA BUDOWLI.
Bản dịch: **ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ.**
9. D.R. Bland
THE THEORY OF LINEAR VISCOELASTICITY.
Bản dịch: **ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО - УРУГОСТИ.**
10. R.M. Davies
STRESS WAVES IN SOLIDS.
Cambridge University press.
Bản dịch: **ВОЛНЫ НАПРЯЖЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ.**
11. Jean Salençon
VISCOÉLASTICITÉ.
Presses de l'école nationale des Ponts et chanales.

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU	3
Chương 1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG ỨNG SUẤT	5
§1. Lý thuyết biến dạng	5
1. Khái niệm về chuyển vị.....	5
2. Các phương trình động hình học.....	6
3. Trạng thái biến dạng	7
4. Liên hệ giữa các thành phần quay cứng với các thành phần chuyển vị	8
5. Các phương trình liên tục	8
§2. Lý thuyết ứng suất	9
1. Các thành phần ứng suất tại một điểm.....	9
2. Trạng thái ứng suất tại một điểm	10
3. Phương trình vi phân cân bằng chuyển động trong hệ tọa độ vuông góc	11
Chương 2. QUAN HỆ GIỮA CÁC ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG CỦA VẬT THỂ ĐÀN HỒI	13
§1. Sự liên hệ giữa các thành phần ứng suất với thành phần biến dạng ở vật thể đồng nhất, đẳng hướng đàn hồi tuyến tính	13

§2. Hệ thức giữa các hằng số đàn hồi.....	14
1. Môđun đàn hồi khi kéo nén (môđun Young), E.....	15
2. Hệ số Poatxông.....	15
3. Môđun thể tích K.....	16
4. Môđun trượt G.....	16
Chương 3. QUAN HỆ GIỮA CÁC THÀNH PHẦN ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG Ở VẬT LIỆU ĐÀN HỒI NHỚT TUYẾN TÍNH	18
§1. Các thí nghiệm cơ bản.....	18
1. Thí nghiệm rão (từ biến)	18
2. Thí nghiệm trùng (Rêlăxasi)	20
3. Thí nghiệm về sự phục hồi (thí nghiệm bỏ tải).....	21
4. Thí nghiệm về sự xoá ứng suất.....	21
§2. Đàn nhớt tuyến tính	22
1. Định nghĩa.....	23
2. Tính chất của vật liệu đàn nhớt tuyến tính	23
§3. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng (Công thức Bôizơman (Boltzman)).....	24
§4. Vật liệu đàn nhớt tuyến tính không lão hoá	27
1. Định nghĩa.....	27
2. Tính chất	27
Chương 4. PHƯƠNG PHÁP MÔ HÌNH.....	30
§1. Các loại mô hình.....	30
1. Mô hình đàn hồi	30
2. Mô hình lỏng (mô hình nhớt – Niutơn).....	31
3. Mô hình Macxoen.....	32

4. Mô hình Kelvin - Voigt.....	35
5. Mô hình ba hằng số (mô hình tuyến tính tiêu chuẩn)...	38
6. Mô hình 4 hằng số.....	46
§2. Tính rão, tính trùng theo quan điểm toán học.....	48
1. Tính rão (tính từ biến)	49
2. Tính trùng	51
3. Mô hình gồm các phần tử mắc nối tiếp.....	52
4. Mô hình gồm các phần tử mắc song song	54
§3. Phương pháp thực nghiệm xác định các thông số của mô hình.....	56
1. Thí nghiệm rão.....	56
2. Thí nghiệm trùng	58
Chương 5. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT 3 CHIỀU	61
§1. Những thí nghiệm cơ bản.....	61
1. Thí nghiệm rão.....	61
2. Thí nghiệm trùng	62
§2. Đàn nhót tuyến tính	62
1. Định nghĩa.....	62
1. Các tính chất của sự tuyến tính.....	62
3. Những công thức Bôizơman	64
4. Vật liệu đàn nhót tuyến tính không lão hoá.....	65
§3. Các dạng phương trình trạng thái khác	65
1. Quan hệ giữa tenxơ ứng suất lệch và tenxơ biến dạng lệch.....	65
2. Phương pháp thực nghiệm xác định các hàm $\Pi(t)$, $\Pi_1(t)$; $R(t)$, $R_1(t)$	67

Chương 6. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ	72
§1. Trạng thái ứng suất đơn	72
§2. Trạng thái ứng suất khối	74
§3. Các biểu thức cơ bản	78
1. Phương trình vi phân chuyển động.....	78
2. Biểu thức đối với ứng suất.....	79
3. Trạng thái biến dạng phẳng.....	80
4. Trạng thái ứng suất phẳng.....	81
Chương 7. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN (PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI LAPLAX)	84
§1. Lý thuyết cơ bản của sự tương ứng	84
§2. Tính các giá trị $E(p)$, $G(p)$, $v(p)$ và $k(p)$	90
1. Tính giá trị $E(p)$	90
2. Tính các giá trị $\bar{G}(p)$, $\bar{v}(p)$ và $\bar{K}(p)$	92
§3. Các ví dụ	92
Chương 8. SỰ LAN TRUYỀN SÓNG TRONG VẬT ĐÀN NHỚT	109
§1. Sự lan truyền sóng hình sin dọc trong thanh mỏng từ vật liệu đàn nhớt	109
§2. Sự lan truyền sóng phẳng trong môi trường đàn hồi nhớt vô hạn	116
2.1. Sự truyền sóng ứng suất phẳng trong bản ở trạng thái ứng suất phẳng.....	116
2.2. Sự lan truyền ứng suất phẳng trong vật thể không hạn chế ở trạng thái biến dạng phẳng.....	119
2.3. Tính chất của sự phụ thuộc tán sắc.....	120
2.4. Sự lan truyền sóng ứng suất phẳng trong tấm có mặt tự do.....	122
3.5. Sóng ứng suất mặt.....	124

<i>Chương phụ.</i> PHƯƠNG PHÁP MÔĐUN PHỨC.....	131
§1. Khái niệm.....	131
§2. Tính môđun phức và độ mềm phức của các mô hình	132
1. Mô hình đàn hồi	132
2. Mô hình lỏng - Niuton	133
3. Mô hình Voigt – Kelvin	133
4. Mô hình Macxoen	134
§3. Các ví dụ	137
PHỤ LỤC	142
§1. Phép biến đổi Laplax.....	142
1. Khái niệm về phương pháp của phép tính toán tử.....	142
2. Định nghĩa hàm gốc	143
3. Định nghĩa toán tử Laplaxơ (hay còn gọi là phép biến đổi Laplaxơ)	143
4. Tính chất tuyến tính của phép biến đổi Laplaxơ.....	147
5. Tính chất đồng dạng	149
6. Tính chất chuyển dịch ảnh.....	149
7. Tính chất trễ.....	151
8. Ảnh của một hàm tuần hoàn	152
9. Đạo hàm gốc	154
10. Tích tích phân gốc.....	155
11. Đạo hàm ảnh	156
12. Tích phân ảnh	156
13. Tích chập của hai hàm số.....	157
14. Ảnh tích chập	158

15. Quan hệ giữa gốc và ảnh.....	159
16. Điều kiện đủ để $F(p)$ là một hàm ảnh.....	159
17. Phương pháp thực hành để tìm gốc của một phân thức hữu tỷ.....	160
18. Tìm hàm gốc dưới dạng chuỗi.....	163
§2. Phép biến đổi Laplace – Caxông	166
§3. Ứng dụng giải phương trình vi phân đạo hàm riêng	167
TÀI LIỆU THAM KHẢO	173
MỤC LỤC	174

LÝ THUYẾT ĐÀN NHÓT

<i>Chịu trách nhiệm xuất bản :</i>	PGS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI
<i>Biên tập và sửa chế bản :</i>	NGUYỄN DIỆU THÚY
<i>Trình bày và chế bản :</i>	PHÚ THÁI, PHÒNG MÁY TÍNH
<i>Vẽ bìa :</i>	HƯƠNG LAN
<i>Vẽ hình :</i>	NGUYỄN THỊ HẠNH

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 TRẦN HUNG ĐẠO – HÀ NỘI

In 500 cuốn, khổ 16x24 cm, tại Xí nghiệp in II nhà in KH&CN
Giấy phép xuất bản: số 6 - 445 do Cục xuất bản cấp ngày 5/1/2004
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2004

204131



Giá 24.000 đ