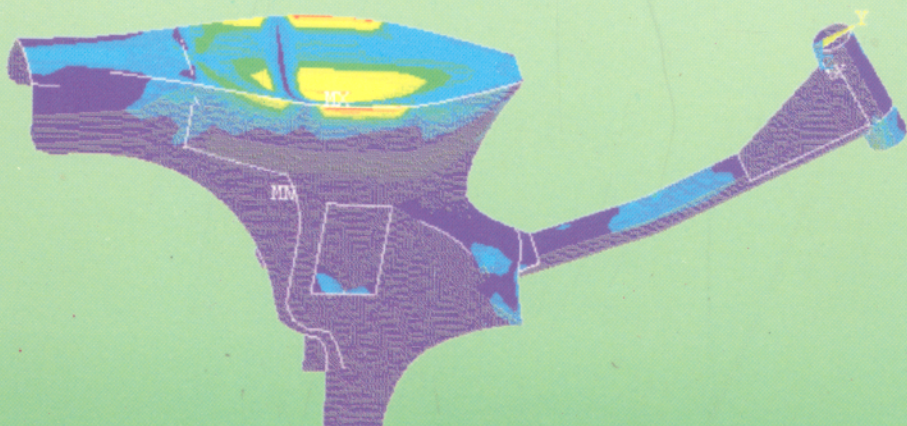


TS. TRƯƠNG TÍCH THIỆN

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TS. TRƯƠNG TÍCH THIÊN

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết đàn hồi là môn học cơ sở quan trọng cho nhiều môn học chuyên ngành khác như sức bền vật liệu, cơ kết cấu, cơ chảy dẻo, cơ phá hủy, ... Môn học này được ứng dụng rộng rãi trong việc giải các bài toán kỹ thuật khi những phương pháp giải khác không thể cho các kết quả chi tiết và chính xác như mong đợi.

Lý thuyết đàn hồi ứng dụng (lý thuyết cơ bản) không đủ để xác định sự tập trung ứng suất tại các vùng lân cận vị trí đặt tải, vị trí có liên kết, vị trí có sự thay đổi đột ngột hình học kết cấu, ... Lý thuyết này cũng không giải quyết được những bài toán mà tất cả các kích thước của vật tương đương nhau và phải được khảo sát như sự phân bố ứng suất trong các con lăn của ổ bi. Ngoài ra, ta cũng không thể khảo sát ứng suất đối với các dầm hay trục máy có những vùng thay đổi kích thước nhiều trong tiết diện. Sự tập trung ứng suất cao sẽ xảy ra tại các góc cạnh của tiết diện và tạo ra các vết nứt đầu tiên ở các vị trí này, nhất là khi cấu trúc chịu tải trọng động đối chiều.

Gần đây, đã có nhiều sự tiến triển trong việc giải các bài toán thực tế như trên. Đối với những trường hợp mà lời giải chính xác không thể tìm được thì các phương pháp xấp xỉ hay kinh nghiệm đã được sử dụng. Phương pháp quang đàn hồi để giải các bài toán đàn hồi hai chiều là một trong những phương pháp này. Các kết quả thu được từ các thí nghiệm quang đàn hồi rất có ý nghĩa trong việc nghiên cứu các trường hợp khác nhau của sự tập trung ứng suất ở các vị trí góc cạnh trên mặt cắt. Các kết quả này có ảnh hưởng lớn đến sự hoàn thiện và cải tiến thiết kế các chi tiết máy.

Phương pháp màng xà phòng được ứng dụng trong việc giải các bài toán đàn hồi nhằm xác định ứng suất trong các thanh lăng trụ chịu xoắn và uốn. Lời giải khó xác định của các phương trình đạo hàm riêng với các điều kiện biên đã cho được thay thế bằng các phép đo độ dốc và độ võng của một màng xà phòng chịu tải và căng thích hợp. Các thí nghiệm chỉ ra rằng, phương cách này không những chỉ ra hình ảnh trực quan của sự phân bố ứng suất mà còn cung cấp thông tin cần thiết về độ lớn của ứng suất với độ chính xác đủ cho ứng dụng thực tế.

Tài liệu này nhằm cung cấp cho các kỹ sư kiến thức cơ bản cần thiết của lý thuyết đàn hồi. Ngoài ra, tài liệu cũng có ý định hệ thống các phép giải của các bài toán đặc biệt có ý nghĩa thực tế cao và mô tả các phương pháp xấp xỉ và kinh nghiệm của bài toán đàn hồi. Tuy nhiên, giáo trình cũng chỉ cung cấp các nội dung rất cơ bản của lý thuyết đàn hồi theo chương trình môn học cùng tên của ngành Cơ Kỹ Thuật, trường Đại Học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh.

Trong quá trình biên soạn tài liệu này, tác giả đã nhận được sự hỗ trợ và góp ý của tất cả các thầy cô trong bộ môn Cơ Kỹ Thuật, trường Đại Học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh. Đặc biệt là các đồng nghiệp: Tô Chiêu Cường, Lê Bùi Hồng Phong, Trần Thị Quỳnh Như, ... Tác giả chân thành cảm ơn những sự giúp đỡ quý báu này. Cuối cùng xin trân trọng cảm ơn Nhà Xuất Bản Khoa Học và Kỹ Thuật đã biên tập cuốn sách và tạo mọi điều kiện thuận lợi để cuốn sách được ra mắt phục vụ bạn đọc.

Với sự chủ quan của người viết, giáo trình này không thể tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong sự đóng góp của quý đồng nghiệp, của các bạn đọc quan tâm. Mọi đóng góp xin vui lòng chuyển đến:

Bộ Môn Cơ Kỹ Thuật hoặc Phòng Tính Toán Cơ Học

110 B₄, 504 C4 Trường Đại Học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh,

268 Lý Thường Kiệt, P14, Q10, TP. Hồ Chí Minh

Tel : 84-8-8.660.568 hoặc 84-8-8.651.211

Fax : 84-8-8.651.211

Nhà Xuất Bản Khoa Học và Kỹ Thuật

28 Đồng Khởi - 12 Hồ Huân Nghiệp, Q1, TP. Hồ Chí Minh

Tel: 84-8-8.225.062 – 84-8-8.296.628 – 84-8-8.290.228

TP. Hồ Chí Minh, tháng 11 năm 2003

Tác giả

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
MỤC LỤC	5
Chương 1. ỨNG SUẤT – BIẾN DẠNG.	9
1.1. Ký hiệu chỉ số.	10
1.2. Lý thuyết đàn hồi.	12
1.3. Phân tích trạng thái ứng suất.	13
1.4. Biến dạng.	18
1.5. Lý thuyết đàn hồi tuyến tính.	22
Chương 2. BÀI TOÁN PHẪNG.	31
2.1. Trạng thái biến dạng phẳng.	32
2.2. Trạng thái ứng suất phẳng.	33
2.3. Ứng suất tại một điểm.	34
2.4. Biến dạng tại một điểm.	37
2.5. Đo biến dạng bề mặt.	39
2.6. Phương trình vi phân cân bằng.	42
2.7. Điều kiện biên.	43
2.8. Phương trình tương thích.	44
2.9. Các phương trình cơ bản của bài toán phẳng.	46
2.10. Hàm ứng suất <i>Airy</i> cho bài toán phẳng đẳng hướng.	47
Chương 3. BÀI TOÁN HAI CHIỀU TRONG TỌA ĐỘ VUÔNG GÓC.	49
3.1. Lời giải của phương trình bi điều hòa bằng các đa thức.	50
3.2. Xác định các chuyển vị.	50
3.3. Ứng dụng các nghiệm đa thức.	51

3.4. Nghiệm theo chuỗi <i>Fourier</i> dùng cho dầm vô hạn chịu các tải trọng bố trí đối xứng.	55
Chương 4. BÀI TOÁN HAI CHIỀU TRONG TỌA ĐỘ CỰC.	59
4.1. Các phương trình tổng quát trong tọa độ cực.	60
4.2. Sự phân bố ứng suất đối xứng trục.	64
4.3. Uốn thuần túy thanh cong.	67
4.4. Các thành phần biến dạng trong tọa độ cực.	71
4.5. Chuyển vị đối với sự phân bố ứng suất đối xứng trục.	72
4.6. Đĩa quay.	76
4.7. Uốn thanh cong dưới tác động lực ở hai đầu thanh.	79
4.8. Lệch mép.	84
4.9. Ảnh hưởng lỗ tròn đến sự phân bố ứng suất trong tấm.	86
4.10. Lực tập trung ở một điểm của biên thẳng.	92
4.11. Tải vuông góc bất kỳ trên biên thẳng.	98
4.12. Lực tác động lên đầu của nêm.	104
4.13. Ngẫu uốn tác động lên đầu nêm.	106
4.14. Lực tập trung tác động lên dầm.	108
4.15. Ứng suất trong đĩa tròn.	111
4.16. Lực tác động ở một điểm của tấm vô hạn.	114
4.17. Lời giải tổng quát của bài toán hai chiều trong tọa độ cực.	118
Chương 5. PHÂN TÍCH ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU.	121
5.1. Giới thiệu.	122
5.2. Các ứng suất chính.	124
5.3. <i>Ellipsoid</i> ứng suất và bề mặt định hướng ứng suất.	125

5.4. Xác định các ứng suất chính.	127
5.5. Các bất biến ứng suất.	128
5.6. Xác định ứng suất tiếp cực đại.	128
5.7. Biến dạng đồng nhất.	130
5.8. Biến dạng tại một điểm.	132
5.9. Phương chính của biến dạng.	135
5.10. Hiện tượng xoay.	137
 Chương 6. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT.	 141
6.1. Các phương trình vi phân cân bằng.	142
6.2. Các điều kiện tương thích.	143
6.3. Xác định chuyển vị.	147
6.4. Các phương trình cân bằng biểu diễn theo chuyển vị.	148
6.5. Lời giải tổng quát cho chuyển vị.	149
6.6. Nguyên lý cộng tác dụng.	150
6.7. Năng lượng biến dạng.	151
6.8. Năng lượng biến dạng của một lệch mép.	153
6.9. Nguyên lý công ảo.	154
6.10. Định lý <i>Castigliano</i> .	159
 TÀI LIỆU THAM KHẢO.	 153

Chương 1

ỨNG SUẤT - BIẾN DẠNG

- 1.1. Ký hiệu chỉ số.**
- 1.2. Lý thuyết đàn hồi.**
- 1.3. Phân tích trạng thái ứng suất.**
- 1.4. Biến dạng.**
- 1.5. Lý thuyết đàn hồi tuyến tính.**

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

1.1. Ký hiệu chỉ số.

Để rút gọn cách viết người ta sử dụng cách diễn đạt theo chỉ số như sau: các biến $x, y, z, t \dots$ được biểu diễn bằng một chỉ số kèm theo, ví dụ: chữ x ta sẽ có $2n$ biến độc lập: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ hoặc $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$. Chỉ số có thể đặt ở dưới hoặc trên. Dĩ nhiên với cùng biến số x thì khi có chỉ số dưới sẽ có giá trị khác với khi có chỉ số ở trên.

Với quy ước như vậy ta có thể dễ dàng biểu diễn một tổng có dạng:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} a_ix_i \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial u}{\partial x^3} dx^3 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x^n} dx^n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i \quad (1.2)$$

Với dạng tổng theo hai chỉ số khác nhau:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=2} a_{ij} b^{ij} = \sum_{i=1}^{i=3} (a_{i1} b^{i1} + a_{i2} b^{i2}) \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=2} a_{ij} b^{ij} = a_{11} b^{11} + a_{12} b^{12} + a_{21} b^{21} + a_{22} b^{22} + a_{31} b^{31} + a_{32} b^{32}$$

Đối với một tích ta có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\prod_{i=1}^{i=3} (a_i^1 - b_i^1) = (a_1^1 - b_1^1)(a_2^1 - b_2^1)(a_3^1 - b_3^1) \quad (1.4)$$

Ta đưa ra quy ước sau đây để loại bỏ dấu tổng (quy ước *Einstein*): Nếu trong một đơn thức một chỉ số được nhắc lại một lần trên và dưới hoặc ngược lại thì có nghĩa là ta phải lấy tổng đối với chỉ số đó.

Ví dụ:
$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i y^i = a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n$$

Biểu thức trên được viết lại như sau:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i y^i = a_i y^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Biểu thức $a_k^1 b_3^k$ với $(k = 1, 2, \dots, n)$ có nghĩa là:

$$a_k^1 b_3^k = a_1^1 b_3^1 + a_2^1 b_3^2 + \dots + a_n^1 b_3^n$$

Chỉ số lặp lại là chỉ số để chỉ phép cộng hay còn gọi là “chỉ số câm” mà ý nghĩa của biểu thức không thay đổi. Ví dụ:

Chương 1. Ứng suất - biến dạng

$$a^i b_i = a^a b_a = a^w b_w$$

Chỉ số gặp một lần là chỉ số tự do và có thể nhận một trong các giá trị $1, 2, \dots, N$, với N là miền giá trị của chỉ số. Chỉ số lặp lại là chỉ số tổng (hoặc chỉ số câm).

Qui ước phép lấy tổng: chỉ số lặp lại có nghĩa chỉ số này lấy tất cả các giá trị trong khoảng biến thiên của chỉ số và mọi thành phần tương ứng với giá trị của chỉ số được cộng lại.

Ví dụ:

$$\begin{aligned} a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & (i = 1..3) \\ a_{km} b_m &= a_{k1} b_1 + a_{k2} b_2 + a_{k3} b_3 & (m = 1..3) \\ d_{ss} &= d_{11} + d_{22} + d_{33} & (s = 1..3) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Thành phần *tensor* hạng bất kỳ có thể biểu diễn rõ và gọn nhờ ký hiệu chỉ số.

Ví dụ: $a_i, b^j, T_{ij}, \varepsilon_{ijk}, R^{pq}$.

Một số ký hiệu đặc biệt:

Ký hiệu *Kronecker delta* δ_{ik} , còn gọi là ký hiệu đường chéo chính, được định nghĩa như sau:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = k \\ 0 & \text{khi } i \neq k \end{cases} \quad (1.6)$$

Với định nghĩa đó ta có:

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Ví dụ với biểu thức: $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$

Hay:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (dx^i)^2 \quad (1.8)$$

Ta có thể viết theo kí hiệu *Kronecker*:

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i = 1, 2, \dots, n \text{ và } j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.9)$$

Ta có thể viết những chỉ số trong ký hiệu *Kronecker* cả trên và dưới tùy theo điều kiện sử dụng: $\delta_{ij}, \delta^{ij}, \delta_i^j$.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

Ký hiệu hoán vị ϵ_{ijk} , được định nghĩa như sau:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i, j, k = 1, 2, 3 \text{ hoặc lập thành hoán vị chẵn từ } 1, 2, 3. \\ 0 & \text{nếu hai chỉ số bất kỳ bằng nhau.} \\ -1 & \text{nếu lập thành hoán vị lẻ từ } 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.10)$$

Từ định nghĩa hoán vị trên ta có các giá trị sau của hoán vị ứng với các giá trị của các chỉ số:

$$\begin{aligned} \epsilon^{112} &= \epsilon^{222} = \epsilon^{233} = 0 \\ \epsilon^{123} &= \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1 \\ \epsilon^{132} &= \epsilon^{321} = \epsilon^{213} = -1 \end{aligned}$$

Một định thức hạng ba có thể biểu diễn theo qui ước hoán vị như sau:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \epsilon^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3$$

1.2. Lý thuyết đàn hồi

Lý thuyết đàn hồi là một ngành của Cơ học nghiên cứu về vật thể đàn hồi lý tưởng (mô hình vật rắn của *Hooke*). Một trong những mô hình lý tưởng của vật rắn là tính chất đàn hồi lý tưởng của vật thể.

Tính đàn hồi lý tưởng là khả năng vật thể lấy lại toàn vẹn hình dáng ban đầu khi nguyên nhân gây biến dạng bị loại bỏ. Công của ngoại lực trên chuyển dời của điểm đặt lực có tính thuận nghịch, nó được tích lũy dưới dạng thế năng đàn hồi trong vật thể. Vậy vật thể đàn hồi lý tưởng tuân theo định luật nhiệt động thứ nhất về bảo toàn năng lượng của hệ cô lập.

Hình dáng của vật thể chỉ phụ thuộc vào tải trọng đang tác động chứ không phụ thuộc vào quá trình đặt tải trong quá khứ. Như vậy, vật liệu tuân theo qui luật ứng xử đàn hồi tuyến tính thuận nghịch hay định luật *Hooke* (tuyến tính về mặt vật lý). Trong tự nhiên, hầu hết các vật thể, vật liệu trong thực tế đều có tính chất đàn hồi, từ chi tiết máy, vật liệu xây dựng đến các chất lỏng và chất khí đều có tính đàn hồi...; cho nên, ta có thể kết luận rằng tính đàn hồi là tính chất chủ yếu của vật thể trong tự nhiên.

Bài toán của lý thuyết đàn hồi xác định ứng suất và biến dạng trong vật thể đàn hồi dưới tác dụng của ngoại lực ở trạng thái cân bằng tĩnh cũng

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

như trạng thái cân bằng động hay dao động. Những bài toán trong lý thuyết đàn hồi cũng có thể gặp trong sức bền vật liệu. Tuy nhiên, giữa lý thuyết đàn hồi và sức bền vật liệu có những điểm khác nhau cơ bản về các tiên đề xuất phát, về phương pháp giải cũng như phạm vi áp dụng nó.

Những giả thiết trong sức bền vật liệu (ví dụ: giả thiết tiết diện phẳng), trong chừng mực nào đó sẽ cho kết quả phù hợp so với kết quả thực nghiệm khi vật thể dài có dạng thanh. Cho nên môn sức bền vật liệu không thể giải bài toán xác định ứng suất và biến dạng đối với những vật thể có dạng tấm, vỏ, khối...

Với giả thuyết khá rộng rãi và không hạn chế về hình dạng của vật thể nghiên cứu, lý thuyết đàn hồi có thể giải quyết được cả bài toán dạng tấm, vỏ, khối...

Phương pháp giải: từ điều kiện chuyển vị hay ngoại lực ở bề mặt để suy ra trạng thái ứng suất ở mọi nơi trong vật thể.

1.3. Phân tích trạng thái ứng suất.

1.3.1. Lực khối, lực mặt.

Một trong những vấn đề chính của cơ học môi trường liên tục là nghiên cứu vấn đề truyền lực trong môi trường. Các lực trong môi trường liên tục được phân làm hai loại: lực khối và lực mặt.

Những lực tác động lên mọi phần tử vật chất trong môi trường liên tục được gọi là lực khối. Lực hấp dẫn và lực quán tính là những lực khối. Chúng ta ký hiệu các lực này là b_i (lực tác động lên trên một đơn vị khối lượng) hoặc p_i (lực tác động lên một đơn vị thể tích), giữa chúng có mối quan hệ sau:

$$\rho b_i = p_i \quad (1.11)$$

với ρ là khối lượng riêng của vật thể (đại lượng vô hướng):

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} \quad (1.12)$$

Các lực tác động lên phần tử mặt, dù là một phần của mặt biên hay mặt trong bất kỳ được gọi là lực mặt. Vì vậy, lực này có thứ nguyên là lực trên một đơn vị diện tích. Ví dụ: Lực tương tác do tiếp xúc giữa các vật thể thuộc về dạng lực mặt.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

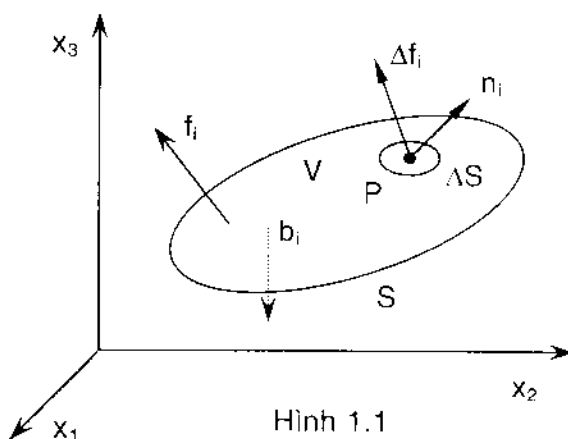
1.3.2. Nguyên lý ứng suất *Cauchy*. Vector ứng suất.

Lấy n_i là *vector* đơn vị pháp tuyến ngoài tại điểm P đối với tiết diện nhỏ ΔS của mặt S và ký hiệu Δf_i là hợp lực tác động qua tiết diện ΔS lên vật liệu bên trong V từ môi trường ngoài. Rõ ràng là lực phân tử Δf_i phụ thuộc vào cách chọn ΔS và n_i .

Nguyên lý ứng suất *Cauchy* khẳng định rằng: tỉ số $\Delta f_i/\Delta S$ tiến tới một giới hạn xác định df_i/dS khi ΔS co lại về điểm P. Vector hợp lực df_i/dS (lực tác động trên một đơn vị diện tích) được gọi là *vector* ứng suất $t_i^{(n)}$.

Vector ứng suất được xác định như sau:

$$t_i^{(n)} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} \quad (1.13)$$



Hình 1.1

Hình 1.1 biểu diễn vật thể có thể tích V, được bao bọc bởi bề mặt S. Vật thể chịu lực mặt f_i và lực khối b_i .

Ký hiệu $t_i^{(n)}$ dùng để nhấn mạnh *vector* ứng suất tại điểm P cho trước của môi trường liên tục hiển nhiên phải phụ thuộc vào hướng của phần tử mặt ΔS đã chọn và cho bằng *vector* pháp tuyến đơn vị n_i . Nếu lấy bất kỳ phần tử mặt có định hướng nào khác với pháp tuyến đơn vị khác thì *vector* ứng suất tại điểm P trên phần tử cũng khác đi.

1.3.3. Trạng thái ứng suất tại một điểm – Tensor ứng suất.

Tại điểm P bất kỳ của môi trường liên tục, nguyên lý ứng suất *Cauchy* sẽ tương ứng với mỗi *vector* pháp tuyến đơn vị n_i được xác định bởi phần tử mặt vô cùng bé chứa điểm P với *vector* ứng suất $t_i^{(n)}$. Tập hợp tất cả

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

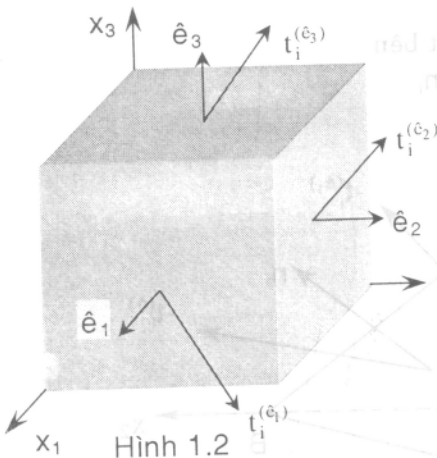
những cặp có thể có của $t_i^{(n)}$ và n_i ở điểm P sẽ xác định trạng thái ứng suất tại điểm này. Để mô tả được hoàn toàn trạng thái ứng suất tại một điểm cho trước, không nhất thiết phải chỉ ra tất cả các cặp $t_i^{(n)}$ và n_i . Có thể làm được điều này khi cho các *vector* ứng suất trên ba tiết diện tương ứng vuông góc với nhau tại P.

Để xác định trạng thái ứng suất tại một điểm, ta chọn những mặt phẳng vuông góc với các trục tọa độ và ký hiệu các *vector* pháp tuyến ngoài ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$) và các *vector* ứng suất ($t_i^{(\hat{e}_1)}, t_i^{(\hat{e}_2)}, t_i^{(\hat{e}_3)}$) như trên hình 1.2.

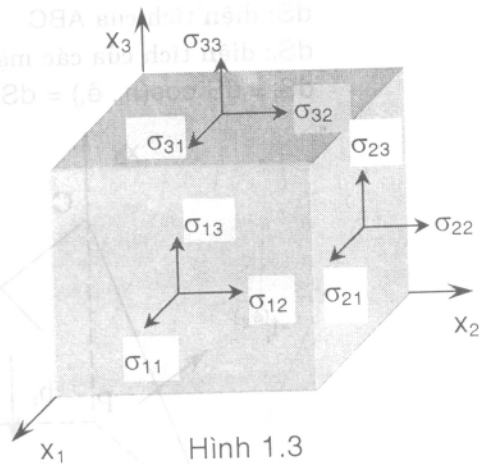
Ta có thể biểu diễn mỗi một trong ba *vector* ứng suất trên các tiết diện song song với các mặt phẳng tọa độ qua các thành phần Descartes của chúng:

$$\begin{aligned} t_i^{(\hat{e}_1)} &= t_1^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_1)}\hat{e}_j \\ t_i^{(\hat{e}_2)} &= t_1^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_2)}\hat{e}_j \\ t_i^{(\hat{e}_3)} &= t_1^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_3 = t_j^{(\hat{e}_3)}\hat{e}_j \end{aligned} \quad (1.14)$$

Trong đó, $\hat{e}_j$ cũng chính là các *vector* đơn vị theo ba phương X_1, X_2, X_3 ; $t_1^{(\hat{e}_j)}, t_2^{(\hat{e}_j)}, t_3^{(\hat{e}_j)}$ là ba tọa độ của *vector* ứng suất $t_i^{(\hat{e}_j)}$.



Hình 1.2



Hình 1.3

Từ (1.14) ta có chín thành phần của ba *vector* ứng suất $t_i^{(\hat{e}_1)}, t_i^{(\hat{e}_2)}, t_i^{(\hat{e}_3)}$ có thể biểu diễn dạng:

$$t_j^{(\hat{e}_i)} \equiv \sigma_{ij} \quad (1.15)$$

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

Hay được biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Ứng suất được xác định bằng các thành phần của *vector* ứng suất trong hệ tọa độ *Descartes* và các mặt phẳng tọa độ được biểu diễn trên hình 1.3. Các thành phần $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ được gọi là các ứng suất pháp. Các thành phần $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ được gọi là các ứng suất tiếp (hay ứng suất trượt).

Qui ước dấu của các thành phần *tensor* ứng suất: Thành phần ứng suất là dương, nếu trên tiết diện mà pháp tuyến ngoài của nó trùng với chiều dương của một trục tọa độ, lực tác động dọc theo chiều dương của trục này. Thành phần σ_{ij} cho lực tác dụng theo hướng của trục tọa độ thứ *j* lên tiết diện có pháp tuyến ngoài song song trục tọa độ thứ *i*. Mọi thành phần ứng suất biểu diễn trên hình 1.3 đều dương.

1.3.4. Liên hệ giữa *tensor* ứng suất và *vector* ứng suất.

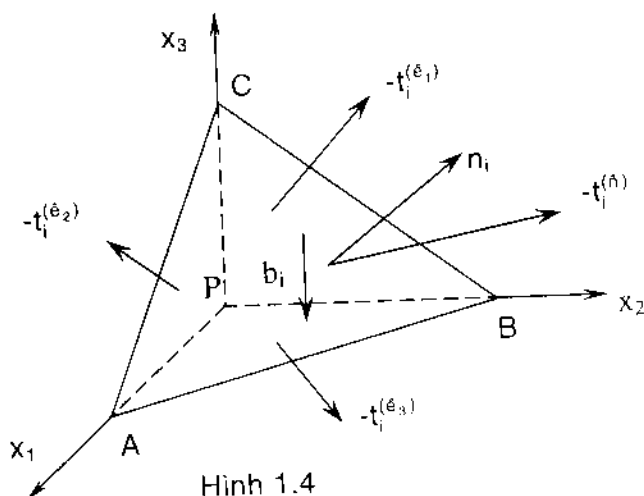
Xét phân tử tứ diện PABC, giới hạn bởi các mặt phẳng của hệ trục tọa độ và ABC, gọi:

n_i : pháp tuyến ngoài của ABC

dS : diện tích của ABC

dS_i : diện tích của các mặt bên

$$dS_i = dS \cos(n_i, \hat{e}_i) = dS n_i$$



Hình 1.4

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

Để tứ diện cân bằng lực thì phương trình sau phải thỏa:

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(\epsilon_1)} dS_1 + t_i^{(\epsilon_2)} dS_2 + t_i^{(\epsilon_3)} dS_3 + \rho b_i dV \quad (1.17)$$

Trong đó b_i là lực tác dụng lên một đơn vị khối lượng (lực khối), mà $\rho b_i dV$ tiến về 0 nhanh hơn vì bậc cao hơn. Nên từ (1.17) ta có :

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(\epsilon_1)} n_j dS = \sigma_{ji} n_j dS \quad (1.18)$$

Từ (1.15) và (1.18) ta có hệ thức *Cauchy* sau:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j \quad (1.19)$$

1.3.5. Cân bằng *moment* và tính đối ứng của ứng suất tiếp.

Để cân bằng thể tích V bất kỳ, ta cần có:

- Hợp lực tác động lên V bằng 0.
- Hợp *moment* tác động lên V bằng 0.

a) Xét cân bằng lực.

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = 0 \quad (1.20)$$

Theo định lý *Gauss* về quan hệ tích phân mặt và tích phân khối, ta có:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \right) dV = 0 \quad (1.21)$$

Do V là thể tích bất kỳ nên từ (1.21) ta có:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0 \quad (1.22)$$

b) Xét cân bằng *moment*.

Khi không có các *moment* phân bố, để cân bằng *moment* với gốc tọa độ cần phải có:

$$\int_S \epsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0 \quad (1.23)$$

Ở đây x_i là bán kính *vector* của phần tử mặt hay thể tích, ϵ_{ijk} là hoán vị.

Áp dụng định lý *Gauss*, ta có:

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial(x_j \sigma_{ik})}{\partial x_i} + \rho x_j b_k \right) dV = 0 \quad (1.24)$$

Do V bất kỳ, khai triển hàm dưới dấu tích phân (1.24), khai triển đạo hàm riêng ta có:

$$\varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial(x_j \sigma_{ik})}{\partial x_i} + \rho x_j b_k \right) = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} x_j + \delta_{ij} \sigma_{ik} + \rho x_j b_k \right) = 0 \quad (1.25)$$

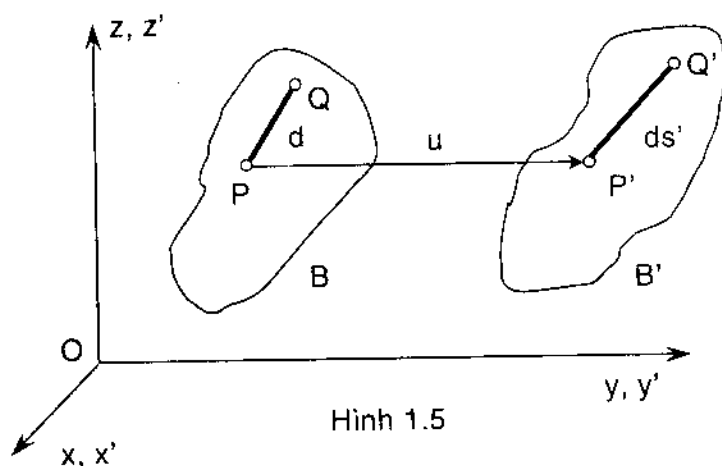
$$\varepsilon_{ijk} \left(\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + \rho b_k \right) x_j + \sigma_{jk} \right) = 0 \quad (1.26)$$

$$\text{Từ (1.22) và (1.26) ta có:} \quad \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (1.27)$$

$$\text{hay} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.28)$$

1.4. Biến dạng.

Gọi B là trạng thái ban đầu của một vật thể bất kỳ và B' là trạng thái của vật thể khi bị biến dạng (hình 1.5).



Hình 1.5

Chọn hai hệ quy chiếu thẳng trùng nhau x_i và x'_i . Một điểm P của B được xác định bởi tọa độ của nó x_i , và ảnh của nó P' trong B' xác định bằng các tọa độ x'_i . Ta gọi chuyển động, hay sự thay đổi vị trí của môi trường liên tục là phép biến đổi điểm.

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1.29)$$

Thiết lập một phép ánh xạ 1 – 1 giữa các điểm ở trạng thái B và B' .

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

Ta gọi chuyển vị của điểm P là *vector*:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} \quad (1.30)$$

Mà các thành phần của nó:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = x'_i - x_i \quad (1.31)$$

Tập hợp các *vector* chuyển vị tạo thành trường chuyển vị.

Còn lại cần làm rõ và định nghĩa thế nào là biến dạng. Khi môi trường thay đổi hình thái, mỗi phần tử bị thay đổi hình dáng, nói ngắn gọn là nó bị biến dạng; sự biến dạng này thay đổi từ điểm này sang điểm khác. Để khảo sát biến dạng, ta khảo sát cách vận động của một phần tử thẳng ds nối điểm P với điểm rất gần nó Q.

Nếu ds' là ảnh của ds , rõ ràng là về mặt hình học mà nói, ta có thể tưởng tượng sự chuyển động chia thành:

- Sự chuyển vị tổng thể mang phần tử ds đến ds' nhưng không làm nó biến dạng (không làm nó thay đổi chiều dài); động tác này được thực hiện bằng một phép quay toàn khối và được gọi là sự dịch chuyển như một cố thể hay sự quay cứng.
- Sau đó sự biến dạng nói một cách chính xác, mang ds trùng ds' (sự thay đổi chiều dài).

Định nghĩa của biến dạng cần phải độc lập với chuyển vị cứng, để không lẫn lộn giữa hai khái niệm này; nói khác đi, sự quay cứng phải gây ra một biến dạng bằng 0, hoặc là ta có một “chuyển vị mà không biến dạng”, như ta vẫn thường nói. Khi đó khái niệm về biến dạng sẽ được định nghĩa đúng đắn.

1.4.1. Tensor biến dạng.

Có nhiều cách diễn tả được đề nghị để biểu thị trạng thái biến dạng của một môi trường liên tục. Sự biểu thị này chẳng qua chỉ là một bài toán thuần túy hình học (hay động học). Trừ ra một số ngoại lệ, luôn luôn gắn liền với những bài toán đặc biệt, cách đo biến dạng được chấp nhận một cách phổ biến hiện nay là cách *khảo sát sự biến thiên của bình phương khoảng cách giữa hai điểm gần nhau*.

Nếu ds và ds' là hai phần tử thẳng tương ứng trong B và B', ta có bình phương độ dài của chúng lần lượt là:

$$ds^2 = dx_k dx_k = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (1.32)$$

$$(ds')^2 = dx'_k dx'_k \quad (1.33)$$

Lấy vi phân (1.29):

$$dx'_k = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} dx_i \quad (1.34)$$

Chương 1. Ứng suất - biến dạng

Từ đó:

$$(ds')^2 = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} dx_i dx_j \quad (1.35)$$

Hiệu số:

$$ds'^2 - ds^2 = \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} \right) dx_i dx_j \quad (1.36)$$

Gọi biểu thức giữa hai dấu ngoặc là $2E_{ij}$, nó có tính đối xứng đối với các chỉ số i và j , từ đó:

$$(ds')^2 - ds^2 = 2E_{ij} dx_i dx_j \quad (1.37)$$

E_{ij} là một *tensor* hạng hai và được gọi là *tensor* biến dạng.

Lưu ý rằng ở đây, ta dùng ký hiệu theo qui ước chỉ số câm như đã trình bày ở phần trước.

Biểu diễn *tensor* biến dạng theo trường chuyển vị, từ (1.31) ta có:

$$x'_k = u_k + x_k \quad (1.38)$$

đạo hàm riêng (1.38), với $\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \delta_{ik}$ (ký hiệu *Kronecker*):

$$\frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \quad (1.39)$$

Đại lượng $(\partial u_k / \partial x_i)$ gọi là *gradient* của chuyển vị. Đưa vào (1.37), ta được biểu thức thường dùng của *tensor* biến dạng:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.40)$$

hay thường được biết dưới tên "*tensor* biến dạng *Green*" được *Green* và *Saint Venant* giới thiệu, sáu phương trình (1.40) còn được gọi là *quan hệ biến dạng - chuyển vị*; và thường được biểu diễn dưới dạng thông thường như phương trình (1.41).

trong đó (u, v, w) là các thành phần của *vector* chuyển vị.

Ba thành phần có chỉ số $i = j$ (xx, yy, zz) gọi là biến dạng pháp tuyến, ba thành phần có chỉ số $i \neq j$ (xy, yz, xz) gọi là biến dạng tiếp tuyến.

Những biểu thức trong (1.41) chứng tỏ rằng các thành phần của biến dạng là các hàm toàn phương của các *gradient* của chuyển vị, và không phải là các hàm tuyến tính...

Thật vậy, việc khảo sát hình học mà chúng ta vừa thực hiện không chịu một sự hạn chế nào đối với độ lớn của chuyển vị: chúng ta không đưa vào giả thiết tuyến tính về hình học.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

$$\begin{aligned}
 E_{xx} = \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 E_{yy} = \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 E_{zz} = \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 E_{xy} = E_{yx} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 E_{yz} = E_{zy} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 E_{zx} = E_{xz} &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Vậy suy ra rằng *tensor* biến dạng E_{ij} là cách biểu diễn đầy đủ hơn của biến dạng bất chấp cấp của độ lớn chuyển vị. Việc sử dụng nó dẫn đến việc phân tích phi tuyến hình học của kết cấu.

1.4.2. Sự tuyến tính hình học.

Để có được tính tuyến tính giữa các thành phần của biến dạng và chuyển vị, ta cần phải có các giả thiết sau:

- Giả thiết tuyến tính hình học: *gradient* của các chuyển vị rất bé, sao cho bình phương và tích số của chúng không đáng kể:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \ll 1 \tag{1.42}$$

- *Tensor* biến dạng E_{ij} khi đó được đơn giản thành *tensor* biến dạng bé, ký hiệu ε_{ij} như sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.43}$$

Về mặt thực hành, đối với phần tử thẳng ds , chỉ cần:

- i) Góc quay rất bé.
- ii) Sự thay đổi chiều dài rất bé.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

Đối với vật rắn, điều kiện i dễ dàng thỏa mãn bởi các vật thể khối lớn nhưng khó thỏa hơn đối với vật thể mỏng (thanh, dầm, dãn, vỏ, ...), điều kiện ii thường có được đối với những vật liệu xây dựng thông dụng (thép, đá, gỗ, bê tông, ...) nhưng có thể có nhiều ngoại lệ (cao su, sự dãn mỏng, đúc và định hình kim loại, ...).

- *Tensor* biến dạng ε_{ij} thường được ký hiệu như sau:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &= \frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned}\quad (1.44)$$

1.5. Lý thuyết đàn hồi tuyến tính.

Mô hình vật thể đàn hồi tuyến tính được xây dựng theo cách tiếp cận năng lượng, dựa trên các giả thiết:

- Biến dạng bé.

- Quá trình biến dạng là đoạn nhiệt, tức là vật thể không có thu nhiệt hay hao tán về nhiệt.

1.5.1. Hàm năng lượng biến dạng.

Xét phân tố vô cùng bé của vật thể tại điểm P, có thể tích dV chịu lực khối f_i và lực bề mặt t_i tác dụng lên bề mặt rất nhỏ dS . Vật thể chịu biến dạng sao cho điểm P dịch chuyển một đoạn rất nhỏ là du_i .

Công sinh ra do lực thể tích f_i là:

$$dW_{it} = f_i du_i dV \quad (1.45)$$

Công sinh ra do lực bề mặt t_i là:

$$dW_{bm} = t_i du_i dS$$

Từ (1.29) ta có:

$$dW_{bm} = \sigma_{ij} n_j dS du_i \quad (1.46)$$

Theo định lý Gauss:

$$dW_{bm} = (\sigma_{ij} du_{j,i}) dV = (\sigma_{ij,i} du_j + \sigma_{ij} du_{j,i}) dV \quad (1.47)$$

Nếu như trong quá trình biến dạng, vật thể không tiếp thu hay hao tán nhiệt, toàn bộ công sinh ra sẽ chuyển thành năng lượng biến dạng hay

Chương 1. Ứng suất - biến dạng

thế năng biến dạng tích lũy bên trong vật thể (nội năng). Nội năng trong một đơn vị thể tích hay nội năng riêng được biểu diễn bằng U . Theo định luật bảo toàn cơ năng, ta có:

$$dUdV = dW_{tt} + dW_{bm} \quad (1.48)$$

Từ (1.45) và (1.47), ta có:

$$dUdV = [(f_j + \sigma_{ij,i})du_j + \sigma_{ij}du_{j,i}]dV \quad (1.49)$$

$$dU = \sigma_{ij}du_{j,i} \quad (1.50)$$

Quan hệ (1.50) được viết lại dưới dạng như sau:

$$dU = (\sigma_{ij}du_{j,i} + \sigma_{ji}du_{i,j})/2 = \sigma_{ij}d\epsilon_{ij} \quad (1.51)$$

Nếu thành phần ứng suất là hàm thuần nhất của biến dạng thì sẽ tồn tại hàm năng lượng biến dạng U chỉ phụ thuộc vào biến dạng:

$$U = U(\epsilon_{ij}) \quad (1.52)$$

Do đó có thể coi U như một hàm của các biến dạng và có thể viết vi phân toàn phần của hàm này:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} \quad (1.53)$$

Từ (1.51) và (1.53), ta có:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (1.54)$$

Đây là công thức *Green* được phát biểu như sau: ứng suất bằng đạo hàm riêng bậc nhất của hàm năng lượng U theo các biến dạng tương ứng cùng chỉ số.

1.5.2. Vật thể đàn hồi.

Vật thể đàn hồi được xác định như một vật thể mà biến dạng sinh ra khi đặt tải chỉ phụ thuộc vào trạng thái ứng suất ở thời điểm hiện tại mà không phụ thuộc vào biến dạng cũng như quá trình đặt tải trong quá khứ. Quá trình biến dạng đàn hồi là một quá trình thuận nghịch. Khi bỏ tải, biến dạng và ứng suất lại theo quá trình cũ trở về trạng thái ban đầu.

Sự tồn tại hàm năng lượng biến dạng sao cho thành phần ứng suất là hàm thuần nhất đơn trị của thành phần biến dạng là tính chất cơ bản của vật thể đàn hồi.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

1.5.3. Vật thể đàn hồi tuyến tính.

Trong lý thuyết đàn hồi tuyến tính, quan hệ ứng suất – biến dạng là quan hệ thuần nhất tuyến tính. Quan hệ này được *Robert Hooke* (1678) trình bày đầu tiên khi nghiên cứu sự làm việc của các lò xo.

Định luật *Hooke*, đối với vật thể đàn hồi phát biểu: ứng suất là hàm tuyến tính và thuần nhất của biến dạng.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (1.55)$$

Các hệ số C_{ijkl} lập thành *tensor* hằng số đàn hồi bậc bốn gồm 81 thành phần. Nhưng do tính đối xứng của *tensor* ứng suất và biến dạng nên chỉ có 21 thành phần là độc lập tuyến tính. Ta có:

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (1.56)$$

Thế (1.55) vào (1.51), ta có:

$$dU = C_{ijkl}\epsilon_{kl}d\epsilon_{ij}$$

$$dU = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\epsilon_{kl}d\epsilon_{ij} + C_{ijkl}\epsilon_{kl}d\epsilon_{ij}) = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\epsilon_{kl}d\epsilon_{ij} + C_{klij}\epsilon_{ij}d\epsilon_{kl})$$

Nhờ (1.56), ta có:

$$dU = \frac{1}{2}(C_{ijkl}\epsilon_{kl}d\epsilon_{ij} + C_{ijkl}\epsilon_{ij}d\epsilon_{kl}) = \frac{1}{2}C_{ijkl}d(\epsilon_{ij}\epsilon_{kl})$$

Tích phân phương trình trên từ trạng thái ban đầu (ứng suất và biến dạng bằng không), ta có:

$$U = \frac{1}{2}C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} \quad (1.57)$$

Vật thể đàn hồi tuyến tính cũng có thể xác định như vật thể có năng lượng bên trong (trong cấu hình biến dạng hiện tại) mang những tính chất sau:

- Năng lượng U tích lũy bên trong một đơn vị thể tích hay nội năng riêng luôn dương và là hàm thuần nhất của ϵ_{ij} và có thể xấp xỉ bằng dạng toàn phương (1.57).

- Thỏa mãn định luật bảo toàn năng lượng (không tính đến sự hao tán nhiệt).

Do *tensor* ứng suất và biến dạng đối xứng nên các hằng số đàn hồi không lớn hơn 21. Khi viết định luật *Hooke* qua 21 hệ số này, các chỉ số kép ở mỗi thành phần của *tensor* ứng suất và biến dạng được thay bằng chỉ số đơn từ 1 đến 6 như sau:

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

$$\{\sigma_i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.58)$$

Như vậy, định luật *Hooke* mở rộng cho vật thể đàn hồi tuyến tính bất kỳ ở dạng chỉ số:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \text{ với } (i, j = 1..6) \quad (1.59)$$

hay ở dạng ma trận:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.60)$$

Với C_{ij} là *tensor* độ cứng bậc hai có 21 thành phần liên hệ với 21 thành phần của *tensor* bậc bốn C_{ijkl} như phương trình (1.61).

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & & & & C_{2323} & C_{2331} \\ \text{Sym} & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Theo (1.57), hàm năng lượng biến dạng:

$$U = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i \quad (1.62)$$

luôn dương với mọi biến dạng khác không cho nên ma trận $[C_{ij}]$ là xác định dương.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

1.5.4. Môi trường trục hướng và đẳng hướng.

Vật liệu đẳng hướng: tính chất của hệ đàn hồi không phụ thuộc vào hướng.

Vật liệu trục hướng: là vật liệu có ba mặt phẳng đối xứng đàn hồi vuông góc với nhau.

Khái niệm mặt phẳng đối xứng đàn hồi: nếu các hệ số đàn hồi tại một điểm có giá trị không đổi đối với một cặp hệ tọa độ bất kỳ mà hệ nọ nhận được từ hệ kia bằng phép chiếu gương đối với mặt phẳng đã cho thì mặt phẳng này gọi là **mặt phẳng đối xứng đàn hồi**. Các trục của hệ tọa độ như thế gọi là “hướng của các tính chất đàn hồi tương đương”.

a) Vật liệu đàn hồi trục hướng.

Vật thể trục hướng thường gặp trong kỹ thuật như: gỗ, tấm bê tông cốt thép có đặt cốt thép không đồng đều theo hai phương, tấm sàn có hệ dầm trục giao, tấm vật liệu lượn sóng, ...

Xét vật thể có mặt phẳng đối xứng đàn hồi, giả sử là $x_1 - x_2$, nghĩa là khi thay đổi chiều trục x_3 để thành hệ trục tọa độ mới x'_i với $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = -x_3$, thì giá trị các hằng số đàn hồi không thay đổi. Phép biến đổi này viết theo ma trận là:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

Trong đó $[a_{ij}]$ là ma trận biến đổi tọa độ từ x_i sang x'_i .

Tensor ứng suất biến đổi theo phép biến đổi *tensor*:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11}, \quad \sigma'_{22} = \sigma_{22}, \quad \sigma'_{33} = \sigma_{33}, \quad \sigma'_{12} = \sigma_{12} \\ \sigma'_{13} &= -\sigma_{13}, \quad \sigma'_{23} = -\sigma_{23} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Tương tự, đối với *tensor* biến dạng ta có:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{11} &= \epsilon_{11}, \quad \epsilon'_{22} = \epsilon_{22}, \quad \epsilon'_{33} = \epsilon_{33}, \quad \gamma'_{12} = \gamma_{12} \\ \gamma'_{13} &= -\gamma_{13}, \quad \gamma'_{23} = -\gamma_{23} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Định luật Hooke trong hệ tọa độ mới:

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{15} & -C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & -C_{25} & -C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & -C_{35} & -C_{36} \\ & & & C_{44} & -C_{45} & -C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{33} \\ \gamma'_{12} \\ \gamma'_{23} \\ \gamma'_{31} \end{Bmatrix} \quad (1.66)$$

[Sym]

Chương 1. Ứng suất – biến dạng

Vì quan hệ ứng suất và biến dạng trong hai hệ trục phải đồng nhất nên ma trận cứng $[C_{ij}]$ phải bằng ma trận cứng trong (1.60), có nghĩa là những thành phần mang dấu âm trong (1.66) phải bằng 0, suy ra ma trận cứng $[C_{ij}]$ phải có dạng:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Như vậy, trong trường hợp có một mặt phẳng đàn hồi, số hệ số đàn hồi là 13. Giả sử có thêm mặt phẳng đối xứng đàn hồi, chẳng hạn x_2 - x_3 , ma trận $[C_{ij}]$ trên rút gọn còn chín hằng số đàn hồi như sau:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{Sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Khi có hai mặt phẳng tọa độ vuông góc là đối xứng đàn hồi thì mặt phẳng còn lại cũng sẽ là đối xứng đàn hồi. Như vậy, trong trường hợp đàn hồi trục hướng, số hằng số đàn hồi là chín và không thể rút gọn thêm.

Đặc điểm của phương trình xác định đối với vật liệu này là ứng suất pháp chỉ liên quan đến biến dạng dài, ứng suất tiếp chỉ liên quan đến biến dạng góc. Nói cách khác, trường hợp này, trục chính ứng suất và trục chính biến dạng trùng nhau.

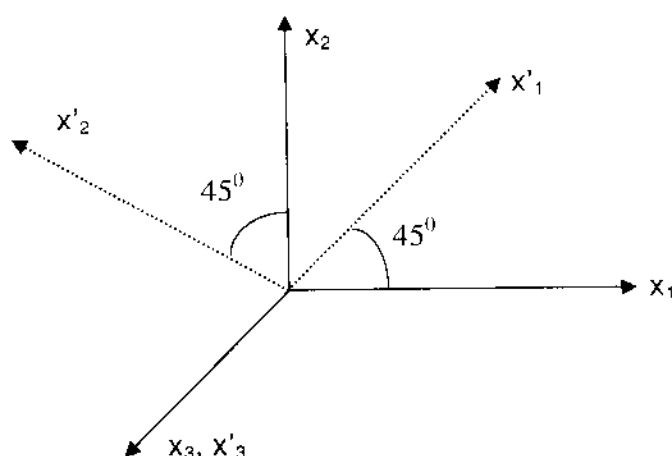
Vật thể trục hướng được gọi là đối xứng lập phương, nếu tính chất đàn hồi không đổi theo cả ba hướng. Lúc đó, chỉ còn ba hằng số đàn hồi:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} \text{ và } C_{12} = C_{23} = C_{31} \text{ và } C_{44} = C_{55} = C_{66} \quad (1.69)$$

b) Vật liệu đẳng hướng.

Do tính chất của vật liệu theo mọi phương là như nhau, ta có thể xoay trục theo một phương bất kỳ, các hằng số đàn hồi vẫn không thay đổi. Chẳng hạn quay hệ quanh trục x_3 một góc 45° như hình 1.6.

Chương 1. Ứng suất – biến dạng



Hình 1.6

Ma trận biến đổi tọa độ có dạng:

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Số hằng số độc lập còn lại hai và được ký hiệu là: $C_{12} = \lambda$ và $C_{12} = \mu$, gọi là hai hằng số *Lamé*. Ma trận cứng cho vật thể đàn hồi đẳng hướng:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ \text{Sym} & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

Như vậy định luật *Hooke* được viết dưới dạng chỉ số như sau:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.72)$$

hay biểu diễn biến dạng theo ứng suất:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \sigma_{kk} \right) \quad (1.73)$$

Chương 1. Ứng suất - biến dạng

Đặt

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.74)$$

Ta thu được

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.75)$$

Nghiên cứu trạng thái kéo đơn giản chỉ theo trục x_1 có thể đưa ra các *modulus* đàn hồi kỹ thuật E (*Young's modulus*) và ν (hệ số *Poisson*):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= -\nu \varepsilon_{11} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Từ quan sát thực nghiệm, ta thấy σ_{11} và ε_{11} cùng dấu, nhưng khác dấu với ε_{22} , ε_{33} . Suy ra $E > 0$ và $\nu > 0$.

Xét trạng thái ứng suất đặc biệt là áp suất thủy tĩnh, xác định bằng:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}.$$

Ta có $p = -K \varepsilon_{kk}$, với $K = E/[3(1-2\nu)]$. Vì áp suất thủy tĩnh $p > 0$ và ứng suất pháp gây nén nên $K > 0$, suy ra :

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad (1.77)$$

khi $\nu = \frac{1}{2}$ thì vật liệu không nén được.

Trong trạng thái trượt thuần túy, quan hệ giữa *modulus* trượt G và các *modulus* khác được thiết lập dễ dàng như sau:

$$\mu = G = E/[2(1+\nu)] \quad (1.78)$$

Quan hệ giữa các *modulus* đàn hồi được cho trong bảng sau:

	λ, μ	E, ν	μ, K	μ, ν
λ	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K-2\mu}{3}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ
K	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	K	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$2\mu(1+\nu)$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$	ν

Chương 2

BÀI TOÁN PHẪNG²

- 2.1. Trạng thái biến dạng phẳng.
- 2.2. Trạng thái ứng suất phẳng.
- 2.3. Ứng suất tại một điểm.
- 2.4. Biến dạng tại một điểm.
- 2.5. Đo biến dạng bề mặt.
- 2.6. Phương trình vi phân cân bằng.
- 2.7. Điều kiện biên.
- 2.8. Phương trình tương thích.
- 2.9. Các phương trình cơ bản của bài toán phẳng.
- 2.10. Hàm ứng suất *Airy* cho bài toán phẳng đẳng hướng.

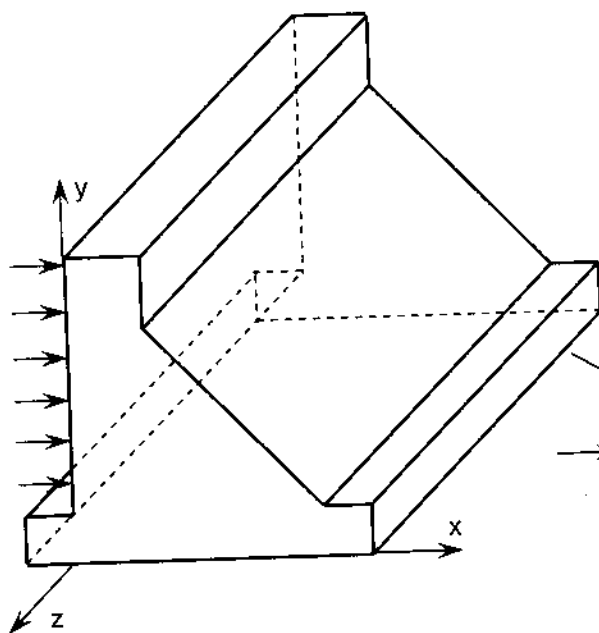
Chương 2. Bài toán phẳng

Trong chương 1, các thành phần của *tensor* ứng suất, biến dạng được dùng theo ký hiệu toán học (σ_{ij} , σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz} , ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{xz} , ...), nhưng để cho người đọc tiện tra cứu, so sánh với các tài liệu tham khảo khác, từ chương 2 trở đi, các thành phần của *tensor* ứng suất, biến dạng sẽ được ký hiệu theo các ký hiệu quen thuộc dùng trong kỹ thuật (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} , ...).

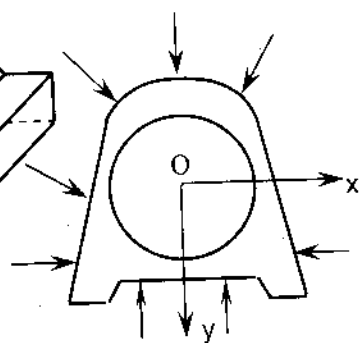
2.1. Trạng thái biến dạng phẳng.

Trạng thái biến dạng phẳng là trạng thái biến dạng mà trong đó mọi điểm của vật thể chuyển dịch song song với một mặt phẳng cố định (chẳng hạn mặt phẳng xy), mọi điểm nằm trên một đường thẳng bất kỳ trục giao với mặt phẳng cố định có chuyển dịch như nhau:

$$\begin{aligned}u_x &= u_x(x, y) \\u_y &= u_y(x, y) \\u_z &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$



Hình 2.1a



Hình 2.1b

Mô hình: vật thể thực hiện biến dạng phẳng là trụ thẳng có đáy song song với mặt phẳng cố định. Vật thể kéo dài theo phương z , chịu lực vuông góc với đường sinh. Các lực này là hằng số dọc theo đường sinh và tất cả các phần của vật thể ở khá xa các đầu mút sẽ biến dạng trong mặt phẳng vuông góc với đường sinh.

Chương 2. Bài toán phẳng

Ví dụ: đập nước (hình 2.1a), hầm ngang chịu áp lực đất (hình 2.1b), ...

Từ quan hệ chuyển vị – biến dạng, ta có:

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.2)$$

Từ (1.63) và (2.2), ta suy ra:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (2.3)$$

Từ (1.64), ta có:

$$\sigma_z = \gamma(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2.4)$$

Ta thấy $\sigma_z \neq 0$ có tác dụng bảo đảm việc tồn tại của trạng thái biến dạng phẳng. Chẳng hạn, một vật thể hình trụ dài, tại các tiết diện ở hai đầu phải có tác dụng của một ứng suất nào đó để cho các sợi dọc không thay đổi.

Định luật *Hooke* ngược cho bài toán biến dạng phẳng được viết lại như sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \gamma \sigma_{kk} \delta_{ij}) \quad (2.5)$$

với: $i, j, k = 1, 2$.

2.2. Trạng thái ứng suất phẳng.

Tại các tiết diện song song với một mặt phẳng cố định ứng suất bằng không. Ở các tiết diện khác, ứng suất không phụ thuộc vào khoảng cách từ điểm đang xét tới mặt phẳng cố định:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0 \quad (2.6)$$

Các thành phần ứng suất còn lại không phụ thuộc vào z :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2) \quad (2.7)$$

với: $i, j = 1, 2$.

Định luật *Hooke* ngược cho bài toán ứng suất phẳng được viết lại như sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.8)$$

với: $i, j, k = 1, 2$.

Ta kết hợp (2.5) và (2.8), để đưa ra định luật *Hooke* tổng quát cho bài toán phẳng:

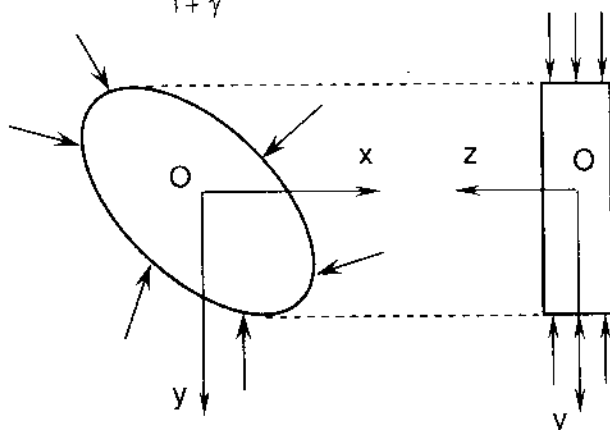
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{4}(3-k)\sigma_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (2.9)$$

Chương 2. Bài toán phẳng

với: $i, j, k = 1, 2$.

$k = 3 - 4\nu$: biến dạng phẳng.

$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$: ứng suất phẳng.



Hình 2.2

Tóm lại: *tensor* ứng suất và biến dạng của hai bài toán trên là:

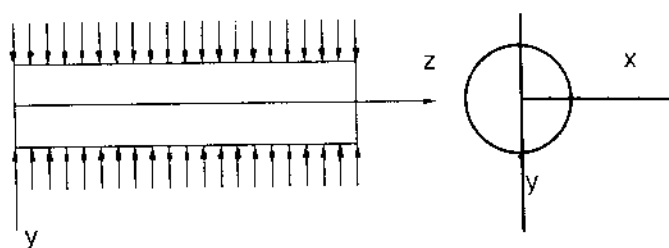
- Biến dạng phẳng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

- Ứng suất phẳng:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

2.3. Ứng suất tại một điểm.



Hình 2.3

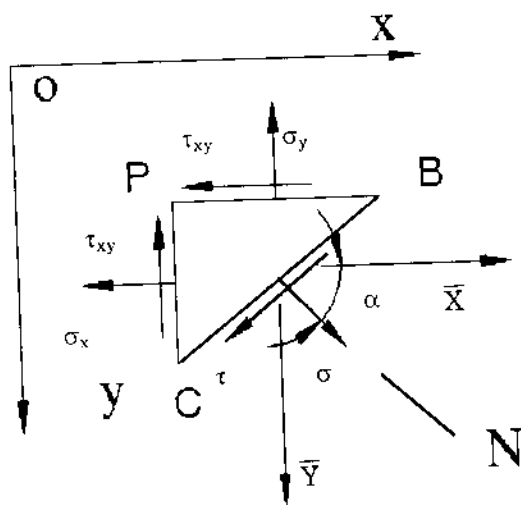
Chương 2. Bài toán phẳng

Trong bài toán ứng suất phẳng hoặc biến dạng phẳng, ứng suất tại một điểm của mặt phẳng ứng suất sẽ được xác định khi ta biết các thành phần ứng suất: σ_{ij} ($i, j = \overline{1,2}$) hay $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ và nhờ vào các phương trình cân bằng tĩnh học.

Trong mặt phẳng ứng suất, ta chọn một điểm P và giả thiết rằng các thành phần ứng suất: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ tại P đã được xác định.

Ta chọn mặt phẳng BC song song với trục Z và cách P một khoảng rất bé. Mặt phẳng này sẽ cùng với các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ qua P sẽ cắt ra khỏi mặt phẳng một phần tử dạng lăng trụ tam giác có đáy là tam giác PBC. Do tính chất liên tục của ứng suất trong vật thể nên ứng suất của mặt phẳng BC sẽ tiến đến giá trị ứng suất của mặt phẳng song song với BC và đi qua P khi thể tích phần tử tam giác này tiến tới 0 ($\Delta V \rightarrow 0$). Xét điều kiện cân bằng của phần tử lăng trụ tam giác này, bỏ qua thành phần lực khối (do thể tích dV là vô cùng bé bậc cao hơn dS). Vì phần tử rất bé nên ta giả sử rằng ứng suất phân bố lên các bề mặt là đồng dạng. Gọi N là pháp vector của mặt phẳng BC, ký hiệu các cosine của N với các trục x, y lần lượt là:

$$\cos(N, x) = l; \quad \cos(N, y) = m$$



Hình 2.4

Chương 2. Bài toán phẳng

Gọi $\bar{X}$, $\bar{Y}$ là các thành phần ứng suất tác dụng lên mặt BC, phương trình cân bằng của phân tố sẽ có dạng:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= l\sigma_x + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m\sigma_y + l\tau_{xy}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Do vậy, các thành phần ứng suất của mặt phẳng bất kỳ xác định bởi các *cosine* chỉ hướng l, m có thể tính bằng (2.12) nếu biết các thành phần ứng suất σ_{ij} của điểm P.

Gọi góc giữa N và Ox là α , ta có:

$$l = \cos\alpha, m = \sin\alpha$$

Ứng suất tiếp và pháp của mặt phẳng BC được tính như sau:

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{X}\cos\alpha + \bar{Y}\sin\alpha \\ \sigma &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\cos\alpha\sin\alpha \\ \tau &= \bar{Y}\cos\alpha - \bar{X}\sin\alpha \\ \tau &= \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}\quad (2.13)$$

Trong đó: $\begin{cases} \sigma : \text{ứng suất pháp trên mặt BC.} \\ \tau : \text{ứng suất tiếp trên mặt BC.} \end{cases}$

Chọn α sao cho thành phần ứng suất tiếp τ của mặt phẳng BC bằng 0, tức là chọn α ứng với phương chính ta có:

$$\tau = \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Suy ra:
$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.14)$$

Phương có ứng suất tiếp bằng không được gọi là phương chính và ứng suất pháp trên phương tương ứng này được gọi là ứng suất chính.

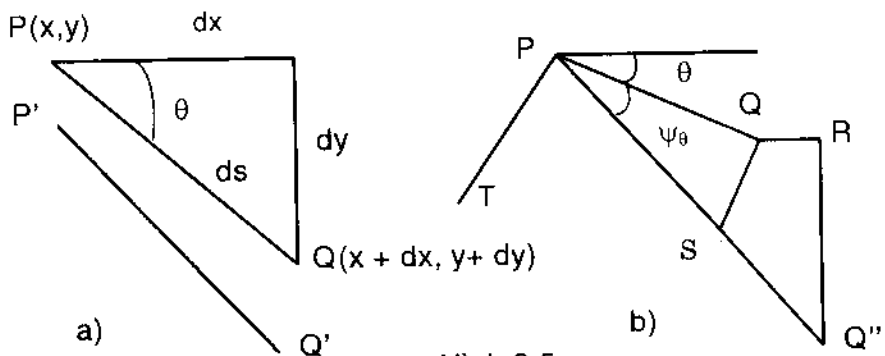
Nếu các phương chính trùng với hệ trục x, y , ta có $\tau_{xy} = 0$ và (2.13) có dạng:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha\end{aligned}\quad (2.15)$$

2.4. Biến dạng tại một điểm.

Khi các thành phần biến dạng tại một điểm: ε_x , ε_y , γ_{xy} đã biết, xét phần tử thẳng PQ giữa 2 điểm có tọa độ lần lượt là P (x, y) và Q (x + dx, y + dy) được dịch chuyển, kéo giãn và quay một góc để trùng P'Q'. Các thành phần chuyển vị của điểm Q:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy; \quad v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$



Hình 2.5

Nếu P'Q' (hình 2.5a) bây giờ được dịch chuyển sao cho mang P' trùng với P, đường thẳng này bây giờ là PQ'. Ở hình 2.5b ta có QR và RQ" là 2 thành phần chuyển vị tương đối của Q so với P, ta có:

$$QR = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy; \quad RQ'' = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \quad (2.16)$$

Các thành phần chuyển vị tương đối QS, SQ" lần lượt vuông góc với PQ" và dọc theo PQ" được tính như sau:

$$QS = -QR\sin\theta + RQ''\cos\theta$$

$$SQ'' = QR\cos\theta + RQ''\sin\theta \quad (2.17)$$

Vì góc QPS $\ll \theta$, QS rất bé nên có thể được xem như là một cung tròn của đường tròn có tâm là P, SQ" là độ giãn dài của PQ. Biến dạng dài trên một đơn vị của một đơn vị P'Q' ký hiệu là ε_θ :

$$\varepsilon_\theta = \frac{SQ''}{PQ}$$

Từ (2.16) và (2.17) ta có:

Chương 2. Bài toán phẳng

$$\varepsilon_\theta = \cos\theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \sin\theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin\theta \cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta$$

$$\text{Hay: } \varepsilon_\theta = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta \quad (2.18)$$

Gọi ψ_θ là góc xoay để PQ trùng với P'Q' ta có:

$$\psi_\theta \approx \operatorname{tg} \psi_\theta = \frac{QS}{PQ}$$

Từ (2.16) và (2.17) ta có:

$$\psi_\theta = -\sin\theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) + \cos\theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right)$$

$$\text{Hay } \psi_\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin\theta \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \theta \quad (2.19)$$

Gọi PT là đường thẳng vuông góc với PQ (hình 2.5b), do đó ta có góc tạo bởi PT và trục x sẽ là $(\frac{\pi}{2} + \theta)$. Khi PQ quay quanh P một góc ψ_θ (hình

2.5b) thì PT sẽ quay một góc là $\psi_{\theta+\frac{\pi}{2}}$. Góc này được tính tương tự

như ψ_θ ở phương trình (2.19) bằng cách thay θ bởi $\theta + \frac{\pi}{2}$ ta được phương trình tính biến dạng góc như sau:

$$\psi_{\theta+\frac{\pi}{2}} = \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin\theta \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \theta \quad (2.20)$$

Biến dạng góc γ_θ theo 2 hướng PQ và PT chính là:

$$\gamma_\theta = (\psi_\theta - \psi_{\theta+\frac{\pi}{2}})$$

Hay từ (2.20) và (2.19) ta có:

$$\gamma_\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) 2 \sin\theta \cos\theta \quad (2.21)$$

Chương 2. Bài toán phẳng

$$\text{Thay: } \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \text{vào biểu thức (2.21) ta có:}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_0 = \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \theta \cos \theta \quad (2.22)$$

So sánh (2.18), (2.22) với (2.13) ta thấy rằng chúng có dạng giống nhau nếu ta lần lượt thay các đại lượng σ bởi ε_0 ; τ bởi $\frac{\gamma_0}{2}$; σ_x bởi ε_x ; σ_y bởi ε_y ; τ_{xy} bởi $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ và α bởi θ .

Do đó, mọi tính chất, hệ quả của (2.13) đều đúng với (2.18) và (2.22) hay là mọi tính chất, hệ quả cho σ và τ đều giống như ε_0 và $\frac{\gamma_0}{2}$.

Vậy ta có được phương trình chính của biến dạng được tính như sau:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (2.23)$$

Từ phương trình trên ta thấy sẽ có hai phương trình của biến dạng ứng với hai giá trị của θ lệch nhau 90° mà theo phương đó $\gamma_0 = 0$.

Vòng tròn *Mohr* biến dạng cũng tương tự như vòng tròn *Mohr* ứng suất. Các biến dạng chính về mặt đại số là các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của

ε_0 . Bán kính vòng tròn *Mohr* biến dạng có giá trị: $\frac{\gamma_0}{2}$. Biến dạng cực

dại là:

$$\gamma_{0\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

2.5. Đo biến dạng bề mặt.

Ngày nay, các biến dạng bề mặt hầu hết đều được đo bằng thiết bị đo biến dạng (*strain gauge*). Dạng giản đơn nhất của một thiết bị đo biến dạng (*strain gauge*) là một dây kim loại, cách điện với bề mặt và được dán vào bề mặt, khi bề mặt bị kéo căng thì điện trở của dây kim loại cũng tăng theo, và từ đó đo được biến dạng.

Chương 2. Bài toán phẳng

Sử dụng các thiết bị đo biến dạng này sẽ đơn giản hơn khi hướng chính của biến dạng đã biết. Mỗi điện trở được đặt dọc theo mỗi hướng chính và đo trực tiếp các giá trị $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Từ định luật *Hooke* ta có thể tính các giá trị của các ứng suất chính σ_1 và σ_2 :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 - \nu \varepsilon_2) \end{cases} \quad \nu: \text{hệ số Poisson.}$$

Trong trường hợp tổng quát, các hướng chính chưa biết, ta cần phải đo ba thông số của biến dạng phẳng: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Nhưng vì thiết bị đo biến dạng bằng điện trở chỉ cho phép đo biến dạng dài, mà không thể đo trực tiếp biến dạng góc nên ta sẽ đo biến dạng dài theo ba hướng tại một điểm. Một số các thiết bị đo biến dạng được bố trí theo ba hướng tại một điểm gọi là hoa hồng đo biến dạng (*strain Rosette*). Sau khi đo được ba giá trị biến dạng dài và hai góc α, β ta sẽ dựng được đường tròn *Mohr* biến dạng như sau:

Một trục tạm thời ε nằm ngang được vẽ từ gốc O' (hình 2.6), ba giá trị biến dạng được đo từ điểm này ($\varepsilon_\phi, \varepsilon_{\phi+\alpha}, \varepsilon_{\phi+\alpha+\beta}$) và vẽ trên trục ε . Dựng các trục đứng (vuông góc với ε) qua các điểm $\varepsilon_\phi, \varepsilon_{\phi+\alpha}, \varepsilon_{\phi+\alpha+\beta}$ trên trục ε . Chọn điểm D bất kỳ trên trục đứng $\varepsilon_{\phi+\alpha}$, vẽ các đường thẳng qua D , tạo với đường $\varepsilon_{\phi+\alpha}$ thành các góc α và β như hình vẽ. Các đường thẳng này lần lượt cắt các đường $\varepsilon_\phi, \varepsilon_{\phi+\alpha+\beta}$ tại A và C như hình 2.6. Qua ba điểm A, C, D ta xác định được vòng tròn *Mohr* biến dạng. Tâm đường tròn F chính là giao điểm của hai đường trung trực của hai đoạn CD, DA . Điểm B được xác định sao cho:

$$\widehat{AFB} = 2\alpha; \quad \widehat{CFB} = 2\beta$$

Ba điểm A, B, C cho ta các giá trị biến dạng tương ứng với ba hướng đo.

OF chính là trục ε_0 , hai giao điểm của đường tròn tâm F với ε_0 lần lượt xác định giá trị của $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ và FA tạo với ε_0 một góc có giá trị 2ϕ (hình 2.6).

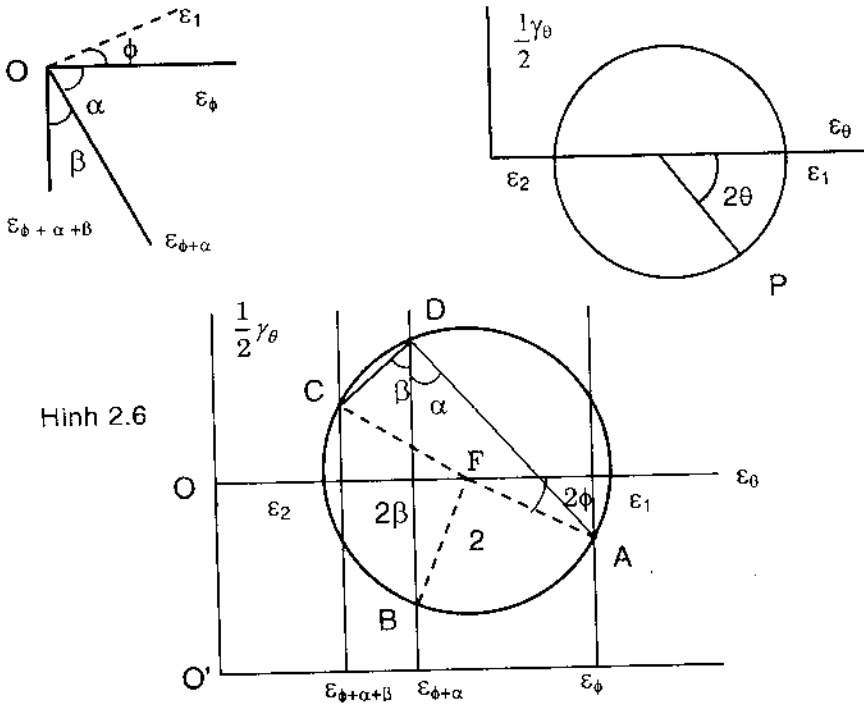
Từ đường tròn *Mohr* này ta có thể dễ dàng xác định các biến dạng chính, ba hướng điện trở đo biến dạng được biểu diễn bằng ba đường liền nét ở hình 2.6, đường đứt biểu thị cho hướng chưa biết của biến dạng chính lớn nhất ε_1 , tạo với phương của điện trở đo biến dạng thứ nhất một góc ϕ theo cùng chiều kim đồng hồ.

Chương 2. Bài toán phẳng

Nếu x và y là hướng của 2 phương trình (2.18) và (2.22) được chọn trùng với 2 phương biến dạng chính, khi đó ε_x sẽ trùng với ε_1 , ε_y sẽ trùng với ε_2 và τ_{xy} sẽ là 0.

Các phương trình tương ứng sẽ là:

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta ; \quad \frac{1}{2} \gamma_\theta = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \theta \cos \theta \quad (2.24)$$



Trong đó θ là góc từ phương chính ε_1 . Hay phương trình (2.24) được viết lại:

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \\ \frac{1}{2} \gamma_\theta = -\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta \end{cases} \quad (2.25)$$

Các giá trị ε_θ và γ_θ là hàm của θ (hình 2.6). Nếu θ có giá trị ϕ thì P sẽ trùng với A, góc quét giữa trục ε_θ và A là 2ϕ , hoành độ của điểm này là ε_ϕ .

Chương 2. Bài toán phẳng

Nếu $\theta = \phi + \alpha$ thì P trùng với điểm B, góc $\widehat{AFB} = 2\alpha$, hoành độ của B là $\varepsilon_{\phi + \alpha}$.

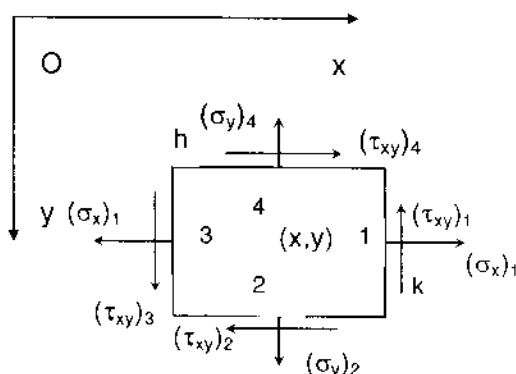
Tương tự, nếu $\theta = \phi + \alpha + \beta$ thì P trùng với C, góc $\widehat{BFC} = 2\beta$, hoành độ của C là $\varepsilon_{\phi + \alpha + \beta}$.

2.6. Phương trình vi phân cân bằng.

Xét sự cân bằng của một khối vi phân chữ nhật có cạnh là h và k, ứng suất tác dụng lên các mặt 1, 2, 3, 4 theo các hướng dương của chúng (hình 2.7), giá trị của ứng suất sẽ không giống nhau, chẳng hạn σ_x trên mặt 1 và mặt 3 là không bằng nhau.

Các ký hiệu $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ để biểu thị cho các trạng thái ứng suất của điểm (x, y) là trọng tâm của phân tố chữ nhật. Giá trị tại điểm giữa các mặt được ký hiệu lần lượt là $(\sigma_x)_1, (\sigma_x)_2, \dots$

Hình 2.7



Vì các mặt rất nhỏ, khi nhân các giá trị ứng suất với diện tích các mặt tương ứng thì ta thu được các lực tác dụng lên các mặt ấy.

Ở đây các lực khối không được bỏ qua vì chúng có cùng bậc với các lực mặt. Ta ký hiệu X, Y là các lực khối trên đơn vị thể tích. Phương trình cân bằng lực theo phương x:

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0 \quad (2.26)$$

Chia (2.26) cho h và k ta có:

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} - \frac{(\tau_{xy})_4 - (\tau_{xy})_2}{k} + X = 0 \quad (2.27)$$

Khi thể tích phần tố tiến dần tới 0 hay:
$$\begin{cases} h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0 \end{cases}$$

Thì:

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \quad \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (2.28)$$

Từ (2.27) và (2.28) suy ra:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

Vậy phương trình vi phân cân bằng cho bài toán hai chiều là:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Trong nhiều trường hợp thực tế, lực khối tác dụng lên vật thể chỉ có trọng lực, khi đó, chọn chiều trục y hướng xuống, gọi ρ là khối lượng riêng của vật thể, phương trình vi phân cân bằng có dạng:

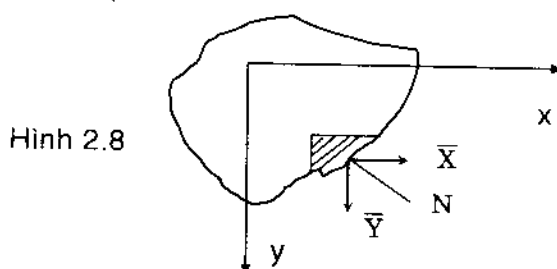
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + g\rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.7. Điều kiện biên.

Phương trình vi phân cân bằng (2.29) phải thỏa mãn tất cả mọi điểm trong vật thể. Các thành phần ứng suất thay đổi trong toàn bộ thể tích của vật thể. Trên biên của vật thể thì các thành phần ứng suất phải cân bằng với ngoại lực. Vì vậy ta có thể xem điều kiện trên biên là sự cân bằng giữa ngoại lực và ứng suất bên trong vật thể, hay nói cách khác là

Chương 2. Bài toán phẳng

điều kiện liên tục giữa ứng suất bên trong vật thể và ngoại lực trên biên của vật thể phải được thỏa mãn.



Từ phương trình (2.12) ta thấy một phần tử có dạng lăng trụ tam giác rất bé PBC trong đó cạnh BC trùng với biên của vật thể (hình 2.8). Gọi $\bar{X}$ và $\bar{Y}$ là các thành phần của lực mật trên đơn vị diện tích ta có:

$$\begin{cases} \bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m \\ \bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m \end{cases} \quad (2.31)$$

Trong đó l, m là *cosine* chỉ hướng của pháp vector N của mặt trên đối với các trục x, y .

Trong những trường hợp riêng, các trục tọa độ thường song song với các mặt bên của vật thể và phương trình điều kiện biên (2.31) trở thành đơn giản hơn. Giả sử một cạnh của vật thể song song với trục x thì ta có: pháp vector N sẽ song song với trục y ; nên: $l = 0, m = \pm 1$, khi đó phương trình (2.31) có dạng:

$$\begin{cases} \bar{X} = \pm \tau_{xy} \\ \bar{Y} = \pm \sigma_y \end{cases} \quad (2.32)$$

Từ phương trình trên ta thấy rằng tại biên của vật thể các thành phần ứng suất sẽ bằng các thành phần lực mật trên đơn vị diện tích tương ứng.

2.8. Phương trình tương thích.

Bài toán cơ bản của lý thuyết đàn hồi là xác định trạng thái ứng suất của vật thể dưới tác dụng của lực cho sẵn. Đối với bài toán hai chiều ta cần giải các phương trình vi phân (2.29) và (2.31). Những phương trình (2.29), (2.31) được dẫn ra từ các phương trình tĩnh chứa ba thành phần ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ nhưng không đủ để xác định các thành phần ứng suất này, vì ta chỉ có hai phương trình, ba ẩn số. Do đó để giải được bài toán ta cần phải xét tới biến dạng đàn hồi của vật thể.

Chương 2. Bài toán phẳng

Đối với bài toán phẳng, ta có các thành phần biến dạng tương ứng như sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.33)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Phương trình (2.34) được gọi là điều kiện tương thích. Điều kiện này phải được thỏa đối với các thành phần biến dạng theo phương trình (2.33).

Áp dụng định luật *Hooke*, phương trình (2.34) có thể được chuyển thành quan hệ giữa các thành phần ứng suất như sau:

Trường hợp ứng suất phẳng ta có:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Trong đó: ν là hệ số *Poisson*.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y + \nu \sigma_x) = \frac{2(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.36)$$

Trong trường hợp lực khối tác dụng lên mặt vật thể duy nhất chỉ có trọng lượng thì ta có điều kiện cân bằng sẽ tương ứng với hai phương trình của (2.30). Lấy vi phân phương trình thứ nhất theo x và phương trình thứ hai theo y , cộng lại ta có:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \quad (2.37)$$

Chương 2. Bài toán phẳng

Thay phương trình (2.37) vào (2.36) và phương trình tương thích dưới dạng ứng suất sẽ có dạng:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.38)$$

Tiến hành tương tự với phương trình cân bằng trong điều kiện tổng quát (2.29) ta có:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.39)$$

Trong trường hợp biến dạng phẳng ta có:

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

Và từ định thức Hooke ta có:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_x - (\nu + \nu^2) \sigma_y \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[(1-\nu^2) \sigma_y - (\nu + \nu^2) \sigma_x \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Thay các phương trình (2.40) vào (2.34) trong trường hợp tổng quát lực khối bất kỳ là X và Y ta có phương trình tương thích cho biến dạng phẳng đối với ứng suất như sau:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{-1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \quad (2.41)$$

Vậy từ điều kiện cân bằng và điều kiện tương thích ta có đủ ba phương trình để giải ba ẩn số σ_x , σ_y , τ_{xy} đối với bài toán hai chiều.

2.9. Các phương trình cơ bản của bài toán phẳng.

Bài toán cho biến dạng và ứng suất phẳng bao gồm các phương trình:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (2.42)$$

Chương 2. Bài toán phẳng

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{4} (3 - \kappa) \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (2.44)$$

với: $i, j, k = 1, 2$.

Điều kiện biên:

$$\bar{X}_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{hoặc} \quad u_i = \bar{u} \quad (2.45)$$

2.10. Hàm ứng suất Airy cho bài toán phẳng đẳng hướng.

Đây là một phương pháp sử dụng ứng suất như ẩn số chính trong các phương trình: phương trình cơ bản (2.42), quan hệ ứng suất – biến dạng (2.43), quan hệ biến dạng – chuyển vị (2.44), điều kiện biên (2.45).

Trong số sáu phương trình tương thích, thì chúng ta chỉ cần xem xét phương trình sau:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.46)$$

Vì năm phương trình còn lại tự động thỏa mãn đối với bài toán biến dạng phẳng.

Đối với bài toán ứng suất phẳng, năm phương trình còn lại sẽ thỏa mãn nếu:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.47)$$

Hay $\varepsilon_z = Ax + By + C$ (2.48)

Với A, B, C là các hằng số tích phân. Lời giải cho bài toán ứng suất phẳng thỏa phương trình (2.46) là không chính xác, nhưng là một xấp xỉ tốt đối với tấm mỏng.

Thế (2.43) vào (2.46), ta có:

$$\frac{(1 + \kappa)}{4} \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \quad (2.49)$$

Trong bài toán hai chiều, toán tử Laplace ∇^2 là:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.50)$$

Từ (1.22), ta có:

Chương 2. Bài toán phẳng

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (2.51)$$

Thế (2.51) vào (2.50) ta có:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{4}{1+k} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (2.52)$$

Nếu lực khối bảo toàn, thì tồn tại một hàm thế năng V sao cho:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Thực tế, để cho lực khối bảo toàn thì:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (2.54)$$

Phương trình (2.52) trở thành:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{4}{1+k} \nabla^2 V \quad (2.55)$$

Năm 1862, *G.B. Airy* đề xuất sử dụng hàm sau:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + V \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Trong đó $\phi(x, y)$ là hàm ứng suất *Airy*.

Phương trình (1.22) thỏa với (2.56), còn (2.55) trở thành:

$$\nabla^4 \phi = -2 \frac{k-1}{k+1} \nabla^2 V \quad (2.57)$$

với:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$$

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

Chương 3

BÀI TOÁN HAI CHIỀU TRONG TỌA ĐỘ VUÔNG GÓC

- 3.1. Lời giải của phương trình bi điều hòa bằng các đa thức.
- 3.2. Xác định các chuyển vị.
- 3.3. Ứng dụng các nghiệm đa thức.
- 3.4. Nghiệm theo chuỗi *Fourier* dùng cho dầm vô hạn chịu các tải trọng bố trí đối xứng.

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

3.1. Lời giải của phương trình bi điều hòa bằng các đa thức.

Ta đã chứng minh rằng nghiệm của các bài toán đàn hồi phẳng, trong trường hợp riêng lực thể tích bằng 0 hay bằng hằng số là rút về tích phân của phương trình:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.1)$$

và thỏa các điều kiện bề mặt.

Trong trường hợp đặc biệt có tiết diện chữ nhật hẹp, ta có thể tìm được lời giải bằng cách chọn cho hàm φ các đa thức với bậc khác nhau và đưa thêm vào các hệ số thích hợp. Dễ dàng thấy rằng các đa thức bậc hai:

$$\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (3.2)$$

Hàm φ bậc ba:

$$\varphi(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \quad (3.3)$$

luôn luôn là bi điều hòa. Chúng ứng với các bài toán kéo thuần túy, trượt thuần túy và uốn thuần túy đã được nghiên cứu kỹ trong sức bền vật liệu.

3.2. Xác định các chuyển vị.

Khi đã biết các ứng suất σ_x , σ_y , τ_{xy} ta có thể suy ra các chuyển vị ε_x , ε_y , γ_{xy} . Khi các biến dạng đã tính được, ta có thể suy ra các chuyển vị u và v theo các công thức sau:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4)$$

Tích phân hai phương trình đầu, ta được:

$$\begin{aligned} u &= \int \varepsilon_x dx + f_1(y) \\ v &= \int \varepsilon_y dy + f_2(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ta lại đạo hàm các biểu thức ấy lần lượt theo y và x và đưa các đạo hàm vào phương trình thứ ba của (3.4). Đồng nhất các vế của phương trình ấy cho phép ta xác định các hàm chứa biến $f_1(y)$ và $f_2(x)$.

Cuối cùng, ta nhận thấy rằng tích phân các phương trình (3.4) sẽ đưa vào một hằng số tích phân và do đó các biểu thức của u và v sẽ chứa các hàm tuyến tính tùy ý:

$$u_1 = a + by; \quad v_1 = c - bx \quad (3.6)$$

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

mà a , b , c là các hằng số cần tìm. Các chuyển vị bổ sung u_1 và v_1 ứng với:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

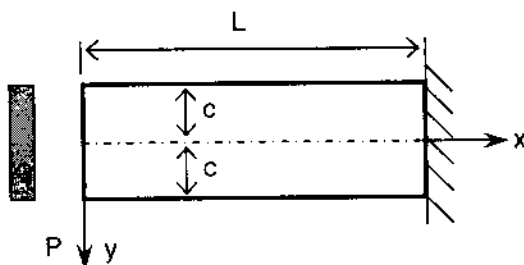
Tức là chúng không đưa lại một biến dạng nào của vật thể, nhưng chúng ứng với một chuyển động chung của vật thể không biến dạng. Các hằng số a và c của phương trình (3.6) biểu thị các chuyển vị thẳng của vật thể và hằng số b là một góc quay nhỏ quanh trục z . Ta phải xác định, trong mỗi bài toán riêng biệt, các hằng số a , b , c tương ứng với các điều kiện tựa của bài toán khảo sát.

Ta cũng lưu ý rằng các biểu thức liên hệ giữa ứng suất và biến dạng không như nhau trong bài toán ứng suất phẳng và biến dạng phẳng, các biểu thức của chuyển vị u , v ứng với một sự phân bố ứng suất sẽ khác nhau, tùy thuộc vào bài toán ứng suất phẳng hay biến dạng phẳng. Nếu ta xác định được các biểu thức u , v cho một trạng thái này, ta có thể suy ra trực tiếp các biểu thức cho trạng thái kia bằng các dùng các công thức chuyển đổi.

3.3. Ứng dụng các nghiệm đa thức.

3.3.1. Uốn dầm *console* chịu lực ở đầu mút.

Ta hãy khảo sát một dầm *console* có tiết diện chữ nhật hẹp (mà ta xem như có độ dày bằng đơn vị) chịu uốn do lực P đặt tại đầu mút tự do (hình 3.1).



Hình 3.1

Cạnh trên và dưới không có lực. Các lực tiếp mà hợp lực là P phân bố trên mặt trái tại $x = 0$. Ta có thể cho rằng các điều kiện chu vi đã được cá biệt hóa theo cách thích hợp với các trạng thái của ứng suất được ghi trong công thức (3.2). Chấp nhận hàm ứng suất dưới dạng:

$$\varphi(x, y) = b_2 xy + \frac{d_4}{3.2} xy^3 \quad (3.7)$$

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

Ta được:

$$\sigma_x = d_4 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -b_2 - \frac{d_4}{2} y^2 \quad (3.8)$$

Để trên các cạnh dọc $y = \pm c$ tự do đối với tất cả các lực, ta phải có:

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = -b_2 - \frac{d_4}{2} c^2 = 0 \quad (3.9)$$

Từ đó:
$$d_4 = -\frac{2b_2}{c^2} \quad (3.10)$$

Bây giờ ta phải cho tổng các lực tiếp phân bố trên cạnh thẳng đứng trái ($x = 0$) của dầm bằng P ; ta chú ý rằng τ_{xy} được xem là dương khi hướng lên trên:

$$-\int_{-c}^{+c} \tau_{xy} dy = \int_{-c}^{+c} \left(b_2 - \frac{b_2}{c^2} y^2 \right) dy = P \quad (3.11)$$

Từ đó ta có:

$$b_2 = \frac{3P}{4c} \quad (3.12)$$

Thay các giá trị tìm được của b_2 và d_4 vào các phương trình của (3.8), ta được:

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2c^3} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) xy \quad (3.13)$$

Ta có *moment* quán tính $I = 2c^3/3$, thì (3.13) được viết lại như sau:

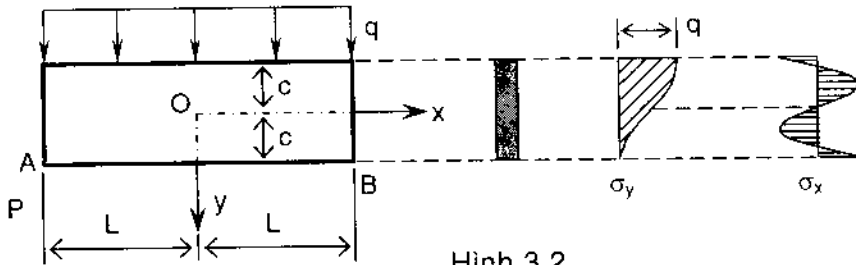
$$\sigma_x = -\frac{P}{I} xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right) xy \quad (3.14)$$

Tuy nhiên cần lưu ý rằng, các công thức (3.14) chỉ cho ta lời giải chính xác nếu các lực tiếp phân bố trên đầu tự do cũng theo luật *parabola* như các ứng suất tiếp và cường độ của lực pháp trong tiết diện ngàm là tỉ lệ với y . Khi các lực phân bố trên các mút khác đi, thì sự phân bố của các ứng suất (3.14) không còn chính xác ở lân cận các đầu mút. Nhưng ở khoảng cách $2c$ đến các đầu mút (bằng chiều cao của dầm) thì sự phân bố thật của các ứng suất sẽ phù hợp với sự phân bố của (3.14) theo nguyên lý *Saint-Venant*.

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

3.3.2 Uốn của dầm tựa trên hai gối, chịu lực phân bố đều.

Ta hãy khảo sát một dầm có tiết diện chữ nhật hẹp, đặt trên hai gối tựa ở hai đầu với khoảng cách $2L$ và chịu lực phân bố đều với cường độ q (kg/đơn vị dài) (hình 3.2).



Hình 3.2

Các điều kiện biên trên các cạnh trên và dưới của dầm:

$$(\tau_{xy})_{y=\pm c} = 0; \quad (\sigma_y)_{y=\pm c} = 0; \quad (\sigma_y)_{y=-c} = -q \quad (3.15)$$

Nếu ta giả định rằng dầm được đặt trên hai gối tựa tại A và B, thì tại các điểm A, B các phản lực tập trung và lân cận các điểm này xuất hiện một sự tập trung ứng suất mà ta không thể nghiên cứu bằng các phương pháp đơn giản. Các ứng suất ở các vùng lân cận các điểm đó chắc chắn sẽ vượt qua giới hạn đàn hồi. Chúng ta phải giả định rằng các phản lực tựa phân bố trên toàn bộ chiều cao của các tiết diện A và B và chỉ giả định rằng hợp lực của chúng là thẳng đứng và bằng qL :

$$\int_{-c}^{+c} \tau_{xy} dy = qL; \quad \int_{-c}^{+c} \sigma_x dy = 0; \quad \int_{-c}^{+c} \sigma_x y dy = 0 \quad (3.16)$$

Ta có thể thỏa mãn các điều kiện (3.15) và (3.16) bằng cách tổ hợp một cách thích hợp các lời giải dạng đa thức. Chấp nhận hàm ứng suất:

$$\varphi(x, y) = \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{d_3}{3.2} y^3 + \frac{d_5}{3.2} x^2 y^3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{d_5}{4.5} y^5 \quad (3.17)$$

Ta được:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d_3 y + d_5 (x^2 y - \frac{2}{3} y^3) \\ \sigma_y &= \frac{1}{3} d_5 y^3 + b_3 y + a_2 \\ \tau_{xy} &= -d_5 x y^2 - b_3 x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

Từ điều kiện (3.15), ta có:

$$\begin{aligned}d_5 c^2 - b_3 &= 0 \\ \frac{1}{3} d_5 c^3 + b_3 c + a_2 &= 0 \\ -\frac{1}{3} d_5 c^3 - b_3 c + a_2 &= -q\end{aligned}\quad (3.19)$$

Từ đó, ta rút ra:

$$a_2 = -\frac{q}{2}; \quad b_3 = \frac{3q}{4c}; \quad d_5 = -\frac{3q}{4c^3} \quad (3.20)$$

Thay (3.20) vào các phương trình (3.18) và chú ý rằng *moment* quán tính:

$$I = 2c^3/3$$

ta có phương trình (3.21).

Ta có thể dễ dàng kiểm tra lại rằng các biểu thức đó thỏa mãn không chỉ các điều kiện (3.11) trên các cạnh dọc của dầm, mà còn thỏa mãn hai điều kiện đầu của (3.16) trên các đầu mút.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_3 y - \frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2I} \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + I \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{q}{2I} x (y^2 - c^2)\end{aligned}\quad (3.21)$$

Điều kiện thứ ba của (3.16) tại $x = \pm L$:

$$\int_{-c}^{+c} \sigma_x y dy = \int_{-c}^{+c} \left[d_3 y - \frac{q}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \right] y dy = 0$$

Từ đó, ta rút ra:

$$d_3 = \frac{3q}{4c} \left(\frac{L^2}{c^2} - \frac{2}{5} \right) \quad (3.22)$$

Thế (3.22) vào (3.21), ta được:

$$\sigma_x = \frac{qy}{2I} (L^2 - x^2) + \frac{qy}{I} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{c^2}{5} \right) \quad (3.23)$$

Số hạng đầu của biểu thức là các ứng suất đạt được từ lý thuyết cơ sở của bài toán uốn, và số hạng thứ hai là sự hiệu chỉnh cần thiết. Sự hiệu chỉnh này không phụ thuộc x và nhỏ so với ứng suất cực đại do uốn,

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

miền là nhịp của dầm khá lớn so với chiều cao của dầm. Đối với các dầm đó, lý thuyết cơ sở cho ta một giá trị đủ chính xác cho ứng suất σ_x . Cần ghi chú rằng biểu thức (3.23) chỉ là nghiệm chính xác nếu các lực pháp ở hai đầu dầm phân bố theo luật:

$$\bar{X} = \frac{qy}{I} \left(\frac{y^2}{3} - \frac{c^2}{5} \right) \quad (3.24)$$

Có nghĩa là nếu các lực pháp tuyến tại các đầu mút phù hợp với các giá trị của σ_x với $x = \pm L$ trong công thức (3.23). Các lực ấy phân bố như trên hình 3.2 và có một hợp lực và *moment* hợp bằng không. Sử dụng nguyên lý *Saint-Venant*, ta có thể kết luận rằng hiệu ứng của sự phân bố lại các ứng suất có thể bỏ qua tại các tiết diện có khoảng cách đến các đầu mút lớn hơn chiều cao của dầm.

Sự khác nhau giữa lời giải chính xác (3.21), (3.23) và lời giải gần đúng của số hạng đầu trong (3.23) ở chỗ khi thiết lập công thức gần đúng, ta đã giả định rằng các thớ dọc của dầm trong trạng thái kéo đơn. Nhưng lời giải (3.21) chỉ ra rằng giữa các thớ tồn tại những ứng suất nén σ_y . Các ứng suất ấy là nguyên nhân của sự hiệu chỉnh bằng số hạng thứ hai của lời giải (3.23). Sự phân bố của ứng suất nén σ_y theo chiều cao của dầm như trên hình 3.2.

Cuối cùng, sự phân bố các ứng suất tiếp τ_{xy} là dạng *parabola* trên chiều cao của tiết diện và phù hợp với kết quả của lý thuyết cơ sở.

3.4. Nghiệm theo chuỗi *Fourier* dùng cho dầm vô hạn chịu các tải trọng bố trí đối xứng.

Ta khảo sát một dầm vô hạn có tiết diện chữ nhật hẹp với chiều cao h , chịu các lực chu kỳ $p(x)$ trên cạnh $y = -h/2$ và $\bar{p}(x)$ trên cạnh $y = h/2$.

Giả định rằng các lực ấy đối xứng đối với trục y , tức là hàm chẵn của x , chúng có thể được triển khai thành chuỗi *cosin*:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x \\ \bar{p}(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \cos \alpha_n x \end{aligned} \quad (3.25)$$

mà $\alpha_n = 2n\pi/L$. Các hệ số a_0 của (3.25) phải có giá trị như nhau vì các lực $p(x)$ và $\bar{p}(x)$ cân bằng.

Các điều kiện bề mặt:

$$\text{Với } y = -h/2: \quad \sigma_y = p(x) \quad \text{và} \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.26)$$

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

$$\text{Với } y = h/2: \quad \sigma_y = \bar{p}(x) \quad \text{và} \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.27)$$

Nếu ta chú ý rằng phương trình bi điều hòa (3.1) chỉ chứa các đạo hàm có bậc chẵn, và các hàm $\sin$ và $\cos$ lại trở về dạng cũ sau hai lần đạo hàm, ta thấy hàm bi điều hòa tiếp nhận nghiệm dưới dạng:

$$f(y)\cos\alpha x \quad \text{và} \quad f(y)\sin\alpha x \quad (3.28)$$

Từ đó ta có thể xây dựng các chuỗi. Trong trường hợp này, do σ_y là đạo hàm bậc hai của hàm ứng suất φ . Để thỏa mãn các điều kiện biên (3.26), ta chọn φ dưới dạng chuỗi $\cos$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) \cos \alpha_n x \quad (3.29)$$

Để cho biểu thức tổng quát của chuỗi thỏa mãn $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, ta thấy $f_n(y)$ phải thỏa mãn phương trình vi phân thường sau:

$$f_n^{(4)} - 2\alpha_n^2 f_n^{(2)} + \alpha_n^4 f_n = 0 \quad (3.30)$$

với $n \geq 1$, phương trình ấy có nghiệm tổng quát:

$$f_n(y) = \alpha_n^{-2} (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y + C_n \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \quad (3.31)$$

với $n = 0$, lời giải suy biến và trở thành $f_0 = A_0 x^2$. Các phương trình có các ứng suất tương ứng với lời giải đó:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + 2D_n) \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y + \\ &\quad (2B_n + C_n) \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y] \cos \alpha_n x \\ \sigma_y &= 2A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y + \\ &\quad C_n \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x \\ \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + D_n) \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + \\ &\quad (B_n + C_n) \cosh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y] \sin \alpha_n x \end{aligned} \quad (3.32)$$

Các công thức ấy hợp thành lời giải tổng quát cho các tải trọng đối xứng (pháp hay tiếp) trên các biên của dầm. Trong trường hợp riêng, thay các giá trị của σ_x , σ_y , τ_{xy} vào các điều kiện bề mặt (3.26), và cân bằng các hệ số của $\cos(\alpha_n x)$ trong hai vế, ta được 4 phương trình cho A_n , B_n , C_n , D_n và $A_0 = a_0/2$. Ta được các giá trị:

Chương 3. Bài toán hai chiều trong tọa độ vuông góc

$$\begin{aligned}
 A_n &= -(a_n + \bar{a}_n) \frac{\sinh \frac{\alpha_n h}{2} + \frac{\alpha_n h}{2} \cosh \frac{\alpha_n h}{2}}{\sinh \alpha_n h + \alpha_n h} \\
 B_n &= (a_n - \bar{a}_n) \frac{\cosh \frac{\alpha_n h}{2}}{\sinh \alpha_n h - \alpha_n h} \\
 C_n &= -(a_n - \bar{a}_n) \frac{\cosh \frac{\alpha_n h}{2} + \frac{\alpha_n h}{2} \sinh \frac{\alpha_n h}{2}}{\sinh \alpha_n h - \alpha_n h} \\
 D_n &= (a_n + \bar{a}_n) \frac{\sinh \frac{\alpha_n h}{2}}{\sinh \alpha_n h + \alpha_n h}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Chương 4

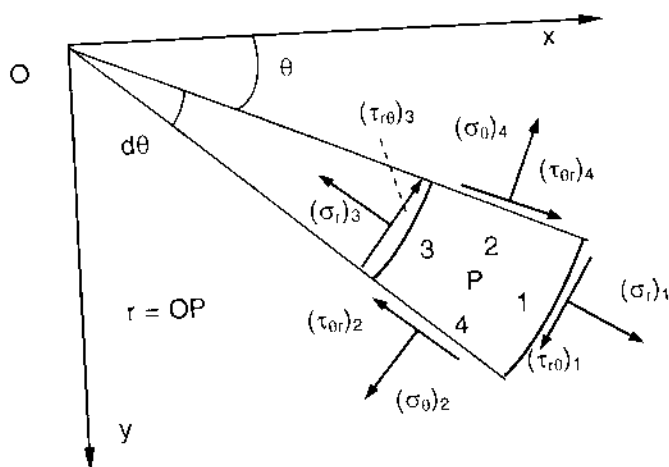
BÀI TOÁN HAI CHIỀU TRONG TỌA ĐỘ CỰC

- 4.1. Các phương trình tổng quát trong tọa độ cực.
- 4.2. Sự phân bố ứng suất đối xứng trục.
- 4.3. Uốn thuần túy thanh cong.
- 4.4. Các thành phần biến dạng trong tọa độ cực.
- 4.5. Chuyển vị đối với sự phân bố ứng suất đối xứng trục.
- 4.6. Đĩa quay.
- 4.7. Uốn thanh cong dưới tác động lực ở hai đầu thanh.
- 4.8. Lệch mép.
- 4.9. Ảnh hưởng lỗ tròn đến sự phân bố ứng suất trong tấm.
- 4.10. Lực tập trung ở một điểm của biên thẳng.
- 4.11. Tải vuông góc bất kỳ trên biên thẳng.
- 4.12. Lực tác động lên đầu của nêm.
- 4.13. Ngẫu uốn tác động lên đầu nêm.
- 4.14. Lực tập trung tác động lên dầm.
- 4.15. Ứng suất trong đĩa tròn.
- 4.16. Lực tác động ở một điểm của tấm vô hạn.
- 4.17. Lời giải tổng quát của bài toán hai chiều trong tọa độ cực.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

4.1. Các phương trình tổng quát trong tọa độ cực.

Đối với việc khảo sát trường ứng suất phân bố trong các vành tròn và đĩa tròn, các thanh cong có mặt cắt hình chữ nhật hẹp với một trục tròn, v.v..., thuận lợi nhất là dùng hệ tọa độ cực. Vị trí của một điểm trong mặt phẳng trung hòa của tấm sẽ được xác định bởi hai tọa độ (thông số): khoảng cách r giữa điểm và gốc tọa độ O và góc θ giữa r và trục Ox bất kỳ được cố định trong mặt phẳng (hình 4.1).



Hình 4.1

Xét phần tử nhỏ 1234 được tách ra khỏi tấm bởi các mặt hướng kính $O4$, $O2$ vuông góc với tấm và hai mặt trụ 3, 1. Thành phần ứng suất pháp theo phương hướng kính được ký hiệu là σ_r , theo phương tiếp tuyến (chu vi) là σ_θ ; và các thành phần ứng suất tiếp là $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta r}$. Các thành phần ứng suất này mô tả ứng suất (tensor ứng suất) của điểm giữa P trên phần tử, tọa độ của P là r, θ . Do có sự biến thiên của ứng suất, giá trị ứng suất ở trung điểm của các cạnh 1, 2, 3, 4 sẽ khác với các giá trị $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ của P và được ký hiệu là $(\sigma_r)_1, \dots$. Các bán kính cạnh 3, 1 là r_3, r_1 . Lực hướng kính trên cạnh 1 là $(\sigma_r)_1 r_1 d\theta = (\sigma_r)_1 dr$.

Lực hướng kính trên cạnh 3 là $-(\sigma_r)_3 dr$.

Lực pháp tuyến trên cạnh 2 có thành phần hướng kính qua P là:

$$-(\sigma_\theta)_2 (r_1 - r_3) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx -(\sigma_\theta)_2 dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$$

Tương tự, từ cạnh 4, ta cũng có $-(\sigma_\theta)_4 dr$.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Những lực cắt trên cạnh 2 và 4 cho:

$$\left[(\tau_{\theta r})_2 - (\tau_{\theta r})_4 \right] \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr \approx \left[(\tau_{\theta r})_2 - (\tau_{\theta r})_4 \right] dr$$

Phương trình cân bằng lực theo phương hướng kính tại P:

$$(\sigma_r)_1 d\theta - (\sigma_r)_3 d\theta - (\sigma_\theta)_2 dr \left(\frac{d\theta}{2}\right) + \left[(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4 \right] dr + Rr dr d\theta = 0$$

hay:

$$\frac{(\sigma_r)_1 - (\sigma_r)_3}{dr} - \frac{1}{2} \left[(\sigma_\theta)_2 + (\sigma_\theta)_4 \right] + \frac{(\tau_{r\theta})_2 - (\tau_{r\theta})_4}{d\theta} + Rr = 0$$

với R là lực phân bố thể tích (lực/chiều dài³) theo phương hướng kính.

Bây giờ ta xem phân tố là vô cùng bé (các cạnh hội tụ tại điểm P – thể tích phân tố tiến tới 0), phương trình cân bằng trên sẽ có giới hạn:

$$\frac{\partial(\sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + Rr = 0$$

hay:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (4.1a)$$

Tương tự, phương trình cân bằng lực theo phương tiếp tuyến tại P:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \quad (4.1b)$$

với S là lực phân bố thể tích theo phương tiếp tuyến.

Những phương trình (4.1) được dùng để giải các bài toán hai chiều bằng tọa độ cực. Khi không có lực phân bố thể tích, hệ hai phương trình (4.1) được thỏa bằng cách đặt:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\phi}{\partial r \partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

với $\phi = \phi(r, \theta)$ là hàm ứng suất. Sự đúng đắn của (4.2) có thể được kiểm chứng bằng cách thay thế trực tiếp vào (4.1).

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Ta cũng có thể chứng minh (4.2) theo các bước sau đây.

Chúng ta có thể xác định các thành phần ứng suất trong tọa độ cực σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ từ những thành phần ứng suất trong tọa độ *Descartes* σ_x , σ_y , τ_{xy} của trạng thái ứng suất phẳng:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (a)$$

Tương tự, ta có thể tính σ_x , σ_y , τ_{xy} theo σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{cases} \quad (b)$$

Mối quan hệ giữa các tọa độ trong hai hệ thống tọa độ:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned}$$

Do đó đối với hàm hai biến $f(x, y)$, trong tọa độ cực $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (c)$$

Để có đạo hàm riêng cấp hai ta lập lại toán tử trên:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

hay:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (d)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (e)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \\ &\quad - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (f)$$

Khi lấy $f(x, y)$ là hàm ứng suất $\phi(x, y)$ với $p_g = 0$, các đạo hàm cấp hai ở vế trái của (d), (e) và (f) tương ứng trở thành σ_y , σ_x và τ_{xy} . Những biểu thức bên vế phải của (d), (e) và (f) có thể được thay thế cho các thành phần ứng suất này ở vế phải của (a). Từ đây có thể dễ kiểm chứng rằng: các kết quả sẽ đưa đến (4.2).

Cộng hai phương trình (d) và (e) ta thu được:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) f \quad (g)$$

Biểu thức (g) cho thấy toán tử bên vế phải là dạng tương đương của tọa độ cực đối với toán tử Laplace ở vế trái. Tiếp theo, ta cộng hai phương trình đầu của (b):

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta \quad (h)$$

Nếu lực thể tích không tồn tại, ta có:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (i)$$

Tổng hợp (i), (h) và (g), ta có:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (4.3)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Từ những phép giải khác nhau của phương trình đạo hàm riêng này chúng ta thu nhận các phép giải của những bài toán hai chiều trong tọa độ cực cho nhiều điều kiện biên khác nhau.

4.2. Sự phân bố ứng suất đối xứng trục.

Khi hàm ứng suất chỉ phụ thuộc bán kính r , phương trình (4.3) trở thành:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (4.4)$$

Đây là phương trình vi phân thường, nó có thể được chuyển thành phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số hằng bằng cách đặt thêm một biến mới t thỏa $r = e^t$. Bằng cách này, nghiệm tổng quát của (4.4) có thể thu được dễ dàng. Nghiệm này có bốn hằng số tích phân, chúng phải được xác định từ các điều kiện biên. Nghiệm tổng quát của (4.4) có dạng:

$$\phi = A \log r + B r^2 \log r + C r^2 + D, \text{ với } \log r \equiv \log_e r \quad (4.5)$$

Các phép giải của loại bài toán ứng suất phân bố đối xứng trục và không có lực thể tích sẽ nhận được từ (4.5). Lúc này, các thành phần ứng suất tương ứng từ (4.2):

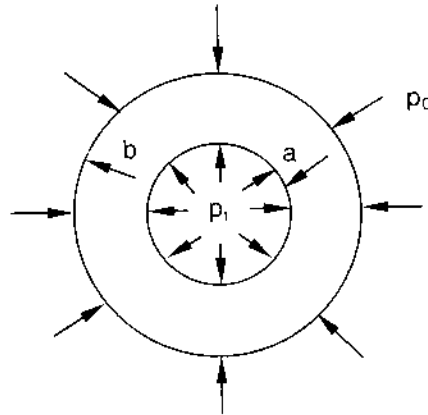
$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \log r) + 2C \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \log r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Nếu không có lỗ hổng ở gốc tọa độ, các hằng số A và B sẽ triệt tiêu nếu không các thành phần ứng suất sẽ trở nên vô hạn tại $r = 0$. Do đó, đối với một tấm không có lỗ hổng ở tâm và không có lực thể tích, chỉ có duy nhất một trường hợp ứng suất phân bố đối xứng trục có thể tồn tại, đó là $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{constant}$. Lúc này tấm ở trạng thái kéo đều hoặc nén đều theo mọi hướng trong mặt phẳng tấm.

Trường hợp có lỗ hổng ở gốc, các kết quả khác sẽ được tìm từ (4.6). Bằng cách khảo sát chuyển vị của tấm, ta rút ra $B = 0$. Do đó:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C \end{cases} \quad (4.7)$$



Hình 4.2

Lời giải này có thể được dùng để mô tả sự phân bố ứng suất trong hình trụ rỗng chịu áp suất đều ở mặt trụ trong và ngoài (hình 4.2). Đặt a và b là bán kính trong và ngoài của hình trụ, p_i và p_o là áp suất đều ở bề mặt trụ trong và ngoài. Ta có các điều kiện biên:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i; \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o \quad (a)$$

Thay các điều kiện biên (a) vào phương trình đầu của (4.7) ta có các phương trình xác định A và C :

$$\begin{cases} \frac{A}{a^2} + 2C = -p_i \\ \frac{A}{b^2} + 2C = -p_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \\ C = \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{2(b^2 - a^2)} \end{cases}$$

Các thành phần ứng suất của (4.7) có dạng:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\theta = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \end{cases} \quad (4.8)$$

Gọi u là chuyển vị hướng kính, ta có biến dạng dài theo phương chu vi:

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$$

Định luật *Hooke* cho trạng thái ứng suất phẳng:

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu\sigma_r$$

Kết hợp hai quan hệ trên ta dễ dàng tìm ra u :

$$u = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r)$$

Chú ý rằng: $\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}$ suốt chiều dày thành của ống trụ. Mà:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[-\nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] = \text{const} > 0$$

Nghĩa là σ_r và σ_θ tạo ra sự giãn đều theo hướng trục của ống trụ và mặt cắt ngang vuông góc với trục ống vẫn phẳng. Do đó sự biến dạng được gây ra bởi trường ứng suất (4.8) trong một phân tố của ống được tách ra bởi hai mặt cắt kề nhau thì không ảnh hưởng đến sự biến dạng của các phân tố lân cận. Đây chính là cơ sở để khảo sát phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng.

Trong trường hợp riêng khi $p_o = 0$ và hình trụ chỉ chịu áp lực ở mặt trụ trong, các công thức (4.8) sẽ thành:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) < 0 \\ \sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Ứng suất σ_θ sẽ cực đại ở mặt trụ trong của ống:

$$(\sigma_\theta)_{r=a} = \sigma_{\theta\max} = \frac{p_i(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} \quad (4.10)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Ta nhận thấy $\sigma_{\theta\max}$ luôn lớn hơn p_i và $\sigma_{\theta\max} \rightarrow p_i$ khi b tăng. Nhiều ứng dụng khác nhau của (4.9) và (4.10) trong thiết kế máy được trình bày trong các tài liệu sức bền vật liệu.

Bài toán cho một hình trụ với một lỗ lệch tâm đã được *G.B. Jeffery* giải. Nếu bán kính của lỗ là a , bán kính mặt ngoài là b , khoảng cách giữa các tâm (độ lệch tâm) là e , hình trụ chịu áp lực bên trong p_i thì ứng suất cực đại là ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến ở bề mặt trong tại vị trí mỏng nhất. Nếu $e < a/2$, ta có:

$$\sigma_{\theta\max} = p_i \left[\frac{2b^2(b^2 + a^2 - 2ae - e^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 - a^2 - 2ae - e^2)} - 1 \right] \quad (4.11)$$

Khi $e = 0$, (4.11) sẽ trùng với (4.10).

4.3. Uốn thuần túy thanh cong.

Khảo sát một thanh cong với mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp không đổi và trục tròn bị uốn trong mặt phẳng cong của thanh bởi ngẫu M tác động ở hai đầu mút thanh (hình 4.3).

Moment uốn trong trường hợp này là hằng số suốt chiều dài thanh và ứng suất phân bố như nhau trong các mặt cắt ngang xuyên tâm. Phép giải của bài toán này có thể nhận được bằng cách dùng đẳng thức (4.5). Đặt a, b là bán kính trong, ngoài của biên thanh cong và lấy chiều rộng của mặt cắt chữ nhật là một đơn vị chiều dài. Các điều kiện biên của bài toán:

$$(1) \quad \sigma_r = 0 \text{ tại } r = a \text{ và } r = b$$

$$(2) \quad \int_a^b \sigma_\theta dr = 0; \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M \quad (a)$$

$$(3) \quad \tau_{r\theta} = 0 \text{ tại biên}$$

Điều kiện biên (1) có nghĩa là các biên cong của thanh không chịu tác động của lực pháp tuyến; điều kiện (2) chỉ ra rằng ứng suất pháp ở các đầu mút chỉ do ngẫu M gây ra, và điều kiện (3) diễn tả không có lực cắt (tiếp tuyến) tác động ở biên thanh. Dùng đẳng thức đầu của (4.6) với điều kiện biên (1) của (a) ta có:

$$\begin{cases} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2\log a) + 2C = 0 \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2\log b) + 2C = 0 \end{cases} \quad (b)$$

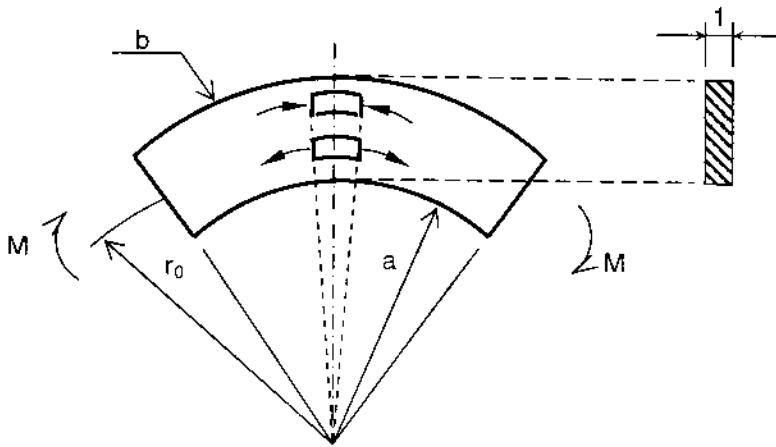
Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Điều kiện (2) trong (a) bây giờ cần thỏa mãn. Việc dùng hàm ứng suất đảm bảo sự cân bằng. Một hợp lực khác không ở mỗi đầu thanh sẽ vi phạm điều kiện cân bằng. Điều kiện ngẫu uốn bằng với M :

$$\int_a^b \sigma_0 r dr = \int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = -M$$

Ta có:

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} r dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} r \right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} r \right]_a^b - [\phi]_a^b \quad (c)$$



Hình 4.3

Theo (b) thì

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial r} r \right]_a^b = 0$$

Do đó từ (c):

$$[\phi]_a^b = M$$

Thay ϕ từ (4.5), ta có:

$$A \log \frac{b}{a} + B(b^2 \log b - a^2 \log a) + C(b^2 - a^2) = M \quad (d)$$

Hệ ba phương trình (b) và (d) giúp xác định ba hằng số A, B, C :

$$\begin{cases} A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \log \frac{b}{a}; & B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2) \\ C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log b - a^2 \log a)] \end{cases} \quad (e)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

với

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \quad (f)$$

Thay A, B, C từ (e) vào (4.6), ta tìm được các thành phần ứng suất:

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} \right) \\ \sigma_\theta = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2b^2}{r^2} \log \frac{b}{a} + b^2 \log \frac{r}{b} + a^2 \log \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Biểu thức (4.12) cho biết sự phân bố ứng suất thỏa tất cả các điều kiện biên của bài toán uốn thuần túy và là lời giải chính xác của bài toán. Nếu các lực tạo ra ngẫu M ở các đầu mút thanh được phân bố dưới các dạng khác, thì sự phân bố ứng suất ở đầu mút sẽ khác với lời giải (4.12). Nhưng, theo nguyên lý *Saint - Venant*, ở những vị trí xa đầu mút hơn chiều sâu thanh, các sai lệch với (4.12) có thể không đáng kể.

Có điều cần lưu ý khi so sánh (4.12) với các phép giải cơ sở được cho trong các tài liệu sức bền vật liệu. Nếu chiều sâu của thanh, $b - a$, nhỏ so với bán kính trục tâm, $(b + a)/2$, sự phân bố ứng suất thường được giả thiết tương tự cho trường hợp thanh thẳng. Còn nếu chiều sâu thanh không nhỏ, thường giả thiết rằng mặt cắt ngang thanh vẫn phẳng trong quá trình uốn. Từ giả thiết này ta tìm được sự phân bố của thành phần ứng suất pháp σ_θ trên các mặt cắt ngang bất kỳ sẽ theo quy luật hàm *hyperbola*. Trong tất cả trường hợp, giá trị cực đại và cực tiểu của σ_θ có thể được xác định theo dạng:

$$\sigma = m \frac{M}{a} \quad (g)$$

Hệ số m được cho trong bảng 4.1 trên cơ sở hai giả thiết trên và theo công thức chính xác của V. Billevicz (1931).

Những số liệu của bảng 4.1 cho thấy kết quả dựa trên giả thiết mặt cắt ngang phẳng cho độ chính xác cao.

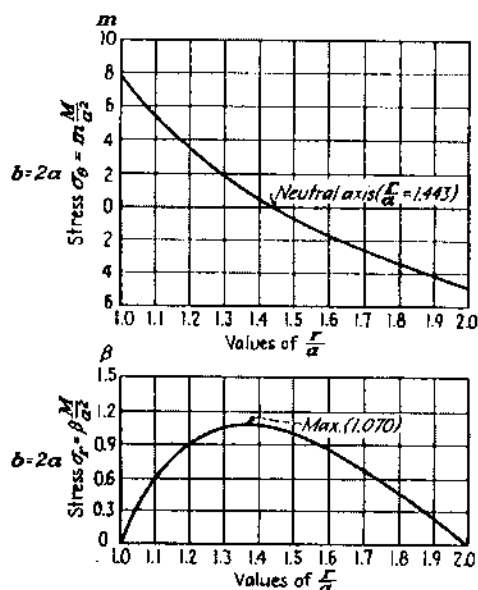
Trong trường hợp uốn thuần túy, mặt cắt ngang của thanh thực tế vẫn phẳng, và sự không thống nhất giữa các lời giải dựa trên các giả thiết

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

với lời giải chính xác là do thành phần ứng suất σ_r trong lời giải gần đúng được bỏ qua. Lúc này, các thớ dọc của thanh chịu uốn được xem là chịu kéo hoặc nén đơn.

Bảng 4.1. Hệ số m

$\frac{b}{a}$	Ứng suất phân bố tuyến tính	Ứng suất phân bố theo quy luật <i>hyperbola</i>	Lời giải chính xác
1,3	$\pm 66,67$	+72,98 -61,27	+73,05 -61,35
2	$\pm 6,000$	+7,725 -4,863	+7,755 -4,917
3	$\pm 1,500$	+2,285 -1,095	+2,292 -1,130



Hình 4.4

Phương trình đầu của (4.12) cho thấy σ_r luôn dương đối với phương uốn (hình 4.3). Nhận xét tương tự có thể được kết luận ngay từ phương ứng suất σ_θ tác động lên các phần tử $n - n$ (hình 4.3). Các lực tiếp tuyến tương ứng tạo ra các hợp lực theo hướng kính có xu hướng tách các thớ dọc và tạo ra các ứng suất kéo theo phương hướng kính. Ứng suất này tăng về phía mặt trung hòa và đạt cực đại gần bề mặt này. Giá trị cực đại của $(\sigma_r)_{\max}$ thì nhỏ hơn nhiều so với $(\sigma_\theta)_{\max}$. Thí dụ, khi $b/a = 1,3$ thì

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$(\sigma_r)_{\max} = 0,06(\sigma_\theta)_{\max}$; khi $b/a = 2$ thì $(\sigma_r)_{\max} = 0,138(\sigma_\theta)_{\max}$; khi $b/a = 3$ thì $(\sigma_r)_{\max} = 0,913(\sigma_\theta)_{\max}$. Hình 4.4 biểu diễn sự phân bố của σ_r và σ_θ khi $b/a=2$. ta nhận thấy rằng điểm cực đại của σ_r thì có phần dịch chuyển từ trục trung hòa thanh về hướng tâm cong thanh.

4.4. Các thành phần biến dạng trong tọa độ cực.

Gọi u, v là các thành phần chuyển vị theo phương hướng kính và tiếp tuyến khi khảo sát chuyển vị trong tọa độ cực.

Nếu u là chuyển vị hướng kính của cạnh ad của phân tố $abcd$ (hình 4.5), thì chuyển vị hướng kính của cạnh bc là $u + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr$. Biến dạng dài của phân tố $abcd$ theo phương hướng kính:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.13)$$

Biến dạng dài theo phương tiếp tuyến không chỉ phụ thuộc vào thành phần chuyển vị v mà còn phụ thuộc vào thành phần chuyển vị u . Xét trường hợp các điểm a và d của phân tố $abcd$ chỉ có chuyển vị hướng kính u , chiều dài mới của cung ad là $(u + r)d\theta$ và biến dạng dài theo phương tiếp tuyến:

$$\frac{(r + u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}$$

Sự sai khác về chuyển vị tiếp tuyến của hai cạnh ab và cd của phân tố $abcd$ là $(\partial v / \partial \theta)d\theta$, và biến dạng dài theo phương tiếp tuyến do chuyển

vị v là $\frac{\partial v}{r\partial \theta}$. Biến dạng dài theo phương tiếp tuyến tổng:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta} \quad (4.14)$$

Để xác định biến dạng trượt, ta đặt $a'b'c'd'$ là vị trí của phần tử sau biến dạng. Ta có:

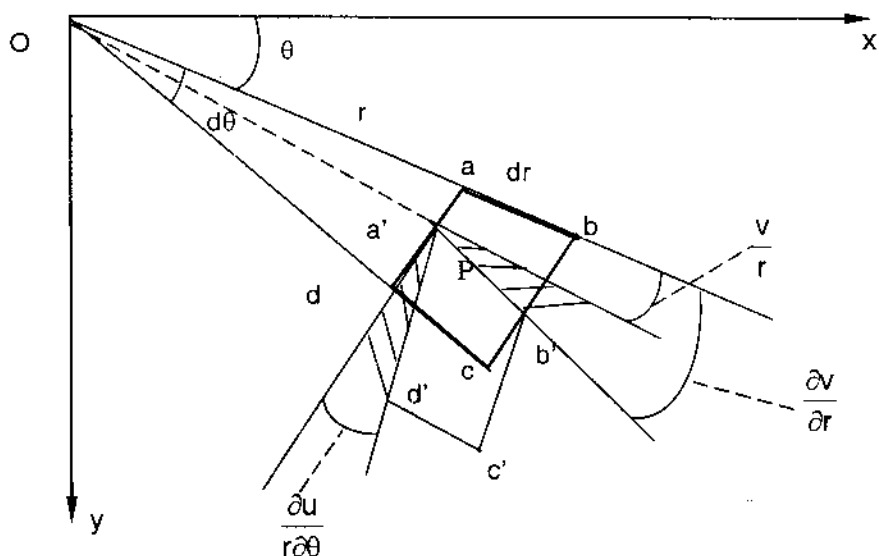
$$(ad, a'd') = \widehat{da'd'} = \frac{\partial u}{r\partial \theta}; \quad (a'b', ab) = \frac{\partial v}{\partial r}$$

Chú ý rằng chỉ một phần của góc này (được gạch sọc) có tác động tạo ra biến dạng trượt và phần còn lại $\left(\frac{v}{r}\right)$ diễn tả sự xoay của phần tử $abcd$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

như vật thể cứng quanh tâm O. Do đó sự thay đổi góc $d\alpha$, diễn tả biến dạng trượt, là:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (4.15)$$



Hình 4.5

Thay các biểu thức (4.13), (4.14), (4.15) vào định luật *Hooke* cho trường hợp ứng suất phẳng:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G}\tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ta có thể thu được các phương trình đủ để xác định u , v .

4.5. Chuyển vị đối với sự phân bố ứng suất đối xứng trục.

Thay các thành phần ứng suất từ (4.6) vào đẳng thức đầu của (4.16), ta tìm được:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} \left[\frac{(1+\nu)A}{r^2} + 2(1-\nu)B \log r + (1-3\nu)B + 2(1-\nu)C \right]$$

Tích phân đẳng thức trên ta thu được:

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)B \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + f(\theta) \quad (a)$$

trong đó $f(\theta)$ là hàm đơn biến theo θ . Tương tự, thay (4.14) và (4.6) vào đẳng thức thứ hai của (4.16) ta được:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

Tích phân ta được:

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta) d\theta + f_1(r) \quad (b)$$

với $f_1(r)$ là hàm đơn biến theo r . thay (a) và (b) vào (4.15) và chú ý rằng $\gamma_{r\theta} = 0$ do $\tau_{r\theta} = 0$, ta có:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0 \quad (c)$$

Nghiệm của (c) có dạng:

$$f_1(r) = Fr; f(\theta) = H \sin(\theta) + K \cos(\theta) \quad (d)$$

ở đây F, H, K là những hằng số được xác định từ các điều kiện ràng buộc của các thanh cong hay vòng. Thay (d) vào (a) và (b), ta tìm được các biểu thức xác định các thành phần chuyển vị:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)B \log r - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right] + \\ \quad + H \sin \theta + K \cos \theta \\ v = \frac{4Br\theta}{E} + Fr + H \cos \theta - K \sin \theta \end{cases} \quad (4.17)$$

Các hằng số A, B, C cho từng trường hợp cụ thể nên được thay vào (4.17).

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Khảo sát trường hợp uốn thuần túy (hình 4.3). Lấy phân tố ở khối tâm của mặt cắt có $\theta = 0$, phân tố này được ngàm cứng nên các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \quad \text{tại } \theta = 0 \text{ và } r = r_0 = \frac{a+b}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

Gán các điều kiện biên này vào (4.17) ta sẽ nhận được các phương trình xác định các hằng số tích phân F , H và K :

$$\begin{cases} \frac{1}{E} \left[-\frac{(1+\nu)A}{r_0} + 2(1-\nu)Br_0 \log r_0 - B(1+\nu)r_0 + 2C(1-\nu)r_0 \right] + K = 0 \\ Fr_0 + H = 0 \\ F = 0 \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} F = 0 \\ H = 0 \end{cases}$$

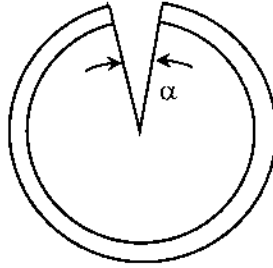
và thành phần chuyển vị v trong trường hợp này:

$$v = \frac{4Br\theta}{E} - K \sin \theta \quad (4.18)$$

Từ (4.18) ta nhận thấy rằng chuyển vị của mặt cắt ngang bất kỳ chứa một chuyển vị tịnh tiến $-K \sin \theta$, các điểm trên một mặt cắt ngang cũng có tính chất tương tự, và một chuyển vị xoay quanh tâm cong O bởi một góc $AB\theta/E$ (hình 4.3). Kết quả này chứng tỏ các mặt cắt ngang vẫn phẳng khi thanh cong chịu uốn thuần túy như thường được giả thiết trong lý thuyết đàn hồi ứng dụng (xấp xỉ, gần đúng).

Khi khảo sát sự phân bố ứng suất đối xứng trục trong một vành tròn (nhấn) ở mục 4.2, hằng số $B = 0$ trong lời giải tổng quát, và chúng ta đã đạt đến lời giải của bài toán *Lamé*. Dựa vào biểu thức (4.17) ta thấy rằng hằng số B chỉ phối thành phần chuyển vị v thông qua số hạng $4Br\theta/E$. Số hạng này không đơn trị tại một vị trí trên vành; do khi tăng θ một lượng $2\pi, 4\pi, \dots$ đều biểu diễn cùng vị trí trên vành nhưng số hạng này lại tăng theo tương ứng. Về mặt vật lý, điều này không thể xảy ra, và do đó, ta phải lấy $B = 0$ trong lời giải tổng quát (4.6).

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực



Hình 4.6

Một vành (nhẫn) tròn là một thí dụ về vật thể đa kết nối, nghĩa là vật thể không bị chia ra hai phần khi được cắt bởi mặt cắt ngang. Đối với các vật loại này, các điều kiện biên về ứng suất không đủ để xác định đầy đủ sự phân bố ứng suất, và các phương trình bổ sung mô tả các chuyển vị đơn trị phải được khảo sát.

Ý nghĩa vật lý của các lời giải đa trị có thể được giải thích bởi việc khảo sát các ứng suất ban đầu trong vật thể đa kết nối. Nếu một phần của vành giữa hai mặt cắt kề nhau được tách ra (hình 4.6) và các đầu mút của vành được nối lại bằng hàn hoặc những cách khác, một vành với các ứng suất ban đầu sẽ được nhận, tức là, có các ứng suất trong vành khi không có ngoại lực. Nếu α nhỏ, chuyển vị tiếp tuyến cần thiết để mang các đầu mút của vành lại với nhau:

$$v = \alpha r \quad (e)$$

Chuyển vị tương tự, thu được từ (4.18) bằng cách lấy $\theta = 2\pi$:

$$v = 2\pi \frac{4Br}{E} \quad (f)$$

Từ (e) và (f) ta tìm được:

$$B = \frac{\alpha E}{8\pi} \quad (g)$$

Hằng số B, tham gia vào số hạng đa trị đối với chuyển vị (4.18), bây giờ có một giá trị xác định phụ thuộc vào cách các ứng suất ban đầu đã được tạo ra trong vành. Thay (g) vào (e) của phần 4.3, ta thu được *moment* uốn M cần thiết để đưa hai đầu mút của vành lại với nhau:

$$M = -\frac{\alpha E}{8\pi} \frac{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 [\log(b/a)]^2}{2(b^2 - a^2)} \quad (h)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Các ứng suất ban đầu trong vành có thể được tính dễ dàng từ đây bằng cách dùng (4.12) cho uốn thuần túy.

4.6. Đĩa quay.

Việc xác định sự phân bố ứng suất trong các đĩa tròn quay có ý nghĩa thực tiễn lớn. Nếu chiều dày đĩa nhỏ so với bán kính của nó, sự biến thiên của các thành phần ứng suất hướng kính và tiếp tuyến theo chiều dày có thể được bỏ qua và bài toán có thể được giải một cách dễ dàng. Nếu chiều dày đĩa không đổi thì ta có thể áp dụng (4.1), và lúc này lực phân tố theo thể tích lấy bằng lực quán tính:

$$R = \rho \omega^2 r; \quad S = 0 \quad (a)$$

với ρ là khối lượng riêng của vật liệu đĩa và ω là vận tốc góc của đĩa. Do tính đối xứng trục, $\tau_{\theta} = 0$ và $\sigma_r, \sigma_{\theta}$ độc lập với θ . Phương trình thứ hai của (4.1) luôn được thỏa, còn phương trình đầu có thể được viết dưới dạng:

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_{\theta} + \rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (b)$$

Từ (4.13) và (4.14), các thành phần biến dạng trong trường hợp đối xứng trục:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \quad (c)$$

Chúng ta có thể giải hai quan hệ ứng suất – biến dạng đầu tiên của (4.16) như là những phương trình đối với các thành phần ứng suất để nhận được:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_{\theta}); \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\theta} + \nu\epsilon_r)$$

và tiếp tục sử dụng (c) ta có:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right); \quad \sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) \quad (d)$$

Thay (d) vào (b), ta thu được phương trình vi phân của u :

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3 \quad (e)$$

Nghiệm tổng quát của (e):

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$u = \frac{1}{E} \left[(1-\nu) \sigma_r - (1+\nu) C_1 \frac{1}{r} - \frac{1-\nu^2}{8} \rho \omega^2 r^3 \right] \quad (f)$$

với C và C_1 là hai hằng số bất kỳ. Các thành phần ứng suất được tìm bằng cách thay (f) vào (d) ta có phương trình (g).

Những hằng số tích phân C và C_1 được xác định từ các điều kiện biên.

$$\begin{cases} \sigma_r = C + C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta = C - C_1 \frac{1}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{cases} \quad (g)$$

Đối với đĩa đặc, để $u = 0$ tại tâm ta có $C_1 = 0$. Hằng số C được xác định từ điều kiện ở chu vi biên ($r = b$) của đĩa. Nếu không có lực tác động ở biên, ta có:

$$(\sigma_r)_{r=b} = C - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 = 0$$

Do đó:
$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2$$

Lúc này, các thành phần ứng suất:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \\ \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \end{cases} \quad (4.19)$$

Các ứng suất này đạt cực đại tại tâm đĩa:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \quad (4.20)$$

Xét trường hợp đĩa có lỗ tròn bán kính a ở tâm, các hằng số tích phân của những phương trình (g) sẽ được xác định từ các điều kiện biên trong và biên ngoài. Nếu không có lực tác động trên các biên này, các điều kiện biên về ứng suất:

$$(\sigma_r)_{r=a} = 0; (\sigma_r)_{r=b} = 0 \quad (h)$$

Từ (h) ta tìm được:

$$C = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 + a^2); C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Thay các hằng số này vào (g), ta có:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

Ứng suất pháp hướng kính cực đại tại $r = \sqrt{ab}$:

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_r)_{r=\sqrt{ab}} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b-a)^2 \quad (4.22)$$

Ứng suất pháp tiếp tuyến cực đại tại biên trong:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = (\sigma_\theta)_{r=a} = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 \left(b^2 + \frac{1-\nu}{3+\nu} a^2 \right) \quad (4.23)$$

Có thể so sánh rằng: $(\sigma_\theta)_{\max} > (\sigma_r)_{\max}$

Khi bán kính a của lỗ tiến đến không, ứng suất pháp tiếp tuyến cực đại sẽ đạt đến hai lần giá trị đối với đĩa đặc; nghĩa là, bằng cách làm một lỗ nhỏ ở tâm của một đĩa đặc quay ta sẽ làm tăng gấp đôi ứng suất cực đại. Hiện tượng này gọi là sự tập trung ứng suất ở lỗ.

Giả sử rằng ứng suất không thay đổi theo chiều dày đĩa, phương pháp tính toán được xây dựng cho đĩa có chiều dày hằng có thể được mở rộng cho những đĩa có chiều dày thay đổi. Nếu $h = h(r)$ là chiều dày đĩa ở bán kính r , phương trình cân bằng của phần tử trên hình 4.1:

$$\frac{d}{dr} (hr\sigma_r) - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (k)$$

Dùng (d) để biểu diễn các thành phần ứng suất theo u , phương trình (k) có dạng:

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \left(r \frac{du}{dr} + \nu u \right) = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 r^3 \quad (l)$$

Đây là phương trình vi phân đối với u khi h là hàm của r . Xét trường hợp hàm h có dạng:

$$h = Hr^n \quad (m)$$

với h và n là những hằng số. Nghiệm tổng quát của u có dạng:

$$u = mr^{n+3} + Ar^\alpha + Br^\beta$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

trong đó:

$$m = \frac{(1 - \nu^2) \rho \omega^2}{E[8 + (3 + \nu)n]}$$

và α, β là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2 + nx + n\nu - 1 = 0$$

A và B là hai hằng số bất kỳ.

4.7. Uốn thanh cong dưới tác động lực ở hai đầu thanh.

Ta bắt đầu khảo sát với trường hợp đơn giản của hình (4.7). Một thanh có trục tròn và mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp được ngàm ở đầu thấp và uốn bởi một lực P theo hướng kính tác động ở đầu trên. *Moment* uốn ở mặt cắt ngang bất kỳ mn thì tỉ lệ với $\sin\theta$, và ứng suất pháp σ_0 , theo lý thuyết đàn hồi ứng dụng của bài toán uốn thanh cong thì tỉ lệ với *moment* uốn. Giả sử rằng điều này cũng vẫn đúng cho lời giải chính xác, một giả thiết mà các kết quả sẽ chứng minh. Từ phương trình thứ hai của (4.2) ta xác định được hàm ứng suất ϕ thỏa phương trình:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (a)$$

Do đó hàm ứng suất ϕ tỉ lệ với $\sin\theta$:

$$\phi = f(r) \sin\theta \quad (b)$$

Thay (b) vào (a), hàm $f(r)$ phải thỏa phương trình vi phân sau:

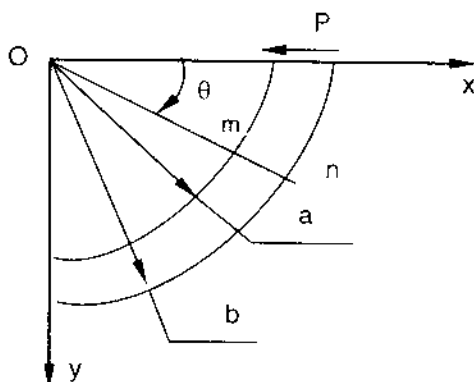
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{f}{r^2} \right) = 0 \quad (c)$$

Phương trình này có thể chuyển thành phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số hằng (xem mục lục 4.2), và nghiệm tổng quát của nó là:

$$f(r) = Ar^3 + B\frac{1}{r}Cr + Dr\log r \quad (d)$$

trong đó A, B, C và D là các hằng số tích phân, chúng được xác định từ các điều kiện biên. Thay nghiệm (d) vào (b) ta sẽ có hàm ứng suất ϕ , và sử dụng các công thức tổng quát (4.2) ta có thể tìm các biểu thức đối với các thành phần ứng suất:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực



Hình 4.7

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \sin \theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r} \right) \cos \theta \end{cases} \quad (4.24)$$

Do các biên ngoài và biên trong của thanh cong không có ngoại lực, ta có các điều kiện biên về ứng suất:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \text{ tại } r = a \text{ và } r = b$$

Thay các điều kiện biên này vào (4.24) ta nhận được hai phương trình:

$$\begin{cases} 2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} = 0 \\ 2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} = 0 \end{cases} \quad (e)$$

Điều kiện cuối được tìm từ tổng của các lực cắt phân bố trên đầu trên của thanh sẽ bằng lực P. Lấy chiều rộng của mặt cắt ngang là một đơn vị – hoặc P là lực trên đơn vị chiều dày tấm – ta thu được tại $\theta = 0$:

$$\int_a^b \tau_{r\theta} dr = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) dr = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_a^b = \left[Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C + D \log r \right]_a^b = P$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\text{hay} \quad -A(b^2 - a^2) + B \frac{(b^2 - a^2)}{a^2 b^2} - D \log \frac{b}{a} = P \quad (f)$$

Từ (e) và (f) ta xác định được:

$$A = \frac{P}{2N}; \quad B = \frac{Pa^2 b^2}{2N}; \quad D = -\frac{P}{N}(a^2 + b^2) \quad (g)$$

trong đó:

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a}$$

Thay các hằng số tích phân từ (g) vào (4.24) ta sẽ có các công thức tính các thành phần ứng suất. Tại đầu trên của thanh, $\theta = 0$, ta có:

$$\begin{cases} \sigma_0 = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P}{N} \left[r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{1}{r}(a^2 + b^2) \right] \end{cases} \quad (h)$$

Tại đầu dưới ứng với $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \tau_{r\theta} = 0 \\ \sigma_0 = \frac{P}{N} \left[3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - (a^2 + b^2) \frac{1}{r} \right] \end{cases} \quad (k)$$

Các biểu thức (4.24) cấu thành một lời giải chính xác chỉ khi các lực ở hai đầu mút của thanh cong được phân bố theo cách thức của (h) và (k). Trường hợp các lực tác động này có phân bố khác thì ứng suất gần hai đầu mút sẽ khác với (4.24), nhưng ở xa hai đầu mút lời giải này có thể vẫn còn đúng. Những tính toán cho thấy rằng lý thuyết đơn giản, dựa trên giả thiết mặt cắt ngang vẫn phẳng trong quá trình uốn, lại cho những kết quả rất tốt.

Hình 4.8 biểu diễn sự phân bố của ứng suất tiếp $\tau_{r\theta}$ trên mặt cắt ngang tại $\theta = 0$ ứng với trường hợp: $b = 3a$, $2a$, và $1,3a$. Hoành độ là các khoảng cách hướng kính từ bán kính trong $r = a$. Tung độ biểu thị các hệ số vô thứ nguyên $\tau_{r\theta}(b - a) / P$. Đối với những dầm thẳng chữ nhật, giá trị cực đại của hệ số này là 1,5 được tính toán từ sự phân bố

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

parabola. Từ đồ thị này ta thấy rằng sự phân bố của ứng suất tiếp sẽ tiệm cận với phân bố *parabola* khi chiều sâu của mặt cắt nhỏ. Đối với các cung vòm và mái vòm, sự phân bố *parabola* của ứng suất tiếp có thể được giả thiết với độ chính xác vừa đủ.

Bây giờ ta khảo sát các chuyển vị do lực P gây ra (hình 4.7). Bằng cách dùng các phương trình (4.13) và (4.16), và thay thế các thành phần ứng suất bằng công thức (4.24), ta có:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sin \theta}{E} \left[2Ar(1-3\nu) - \frac{2B}{r^3}(1+\nu) + \frac{D}{r}(1-\nu) \right] \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = r\epsilon_{\theta} - u \\ \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{cases} \quad (1)$$

Tích phân phương trình đầu của (1) ta nhận được:

$$u = \frac{\sin \theta}{E} \left(Ar^2(1-3\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) + D(1-\nu)\log r \right) + f(\theta) \quad (m)$$

với $f(\theta)$ là hàm đơn biến theo θ . Thay (m) vào phương trình thứ hai của (1), thay biểu thức tính ϵ_{θ} và sau cùng tích phân ta có:

$$v = -\frac{\cos \theta}{E} \left(Ar^2(5+\nu) + \frac{B}{r^2}(1+\nu) - D\log r(1-\nu) + D(1-\nu) \right) - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (n)$$

với $F(r)$ là hàm đơn biến r . Thay (m) và (n) vào phương trình thứ ba của (1) ta thu được:

$$\int f(\theta) d\theta + f'(\theta) + rF'(r) - F(r) = -\frac{4D\cos \theta}{E}$$

Phương trình này được thỏa mãn bằng cách đặt:

$$F(r) = Hr; \quad f(\theta) = -\frac{2D}{E}\theta \cos \theta + K \sin \theta + L \cos \theta \quad (p)$$

trong đó H , K và L là các hằng số bất kỳ được xác định từ các điều kiện ràng buộc. Lúc này các thành phần chuyển vị sẽ được xác định từ các công thức (q):

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\begin{cases} u = -\frac{2D}{E}\theta \cos\theta + \frac{\sin\theta}{E} \left[D(1-\nu)\log r + A(1-3\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} \right] + \\ \quad K \sin\theta + L \cos\theta \\ v = \frac{2D}{E}\theta \sin\theta - \frac{\cos\theta}{E} \left[A(5+\nu)r^2 + \frac{B(1+\nu)}{r^2} - D(1-\nu)\log r \right] + \\ \quad \frac{D(1+\nu)}{E} \cos\theta + K \cos\theta - L \sin\theta + Hr \end{cases} \quad (q)$$

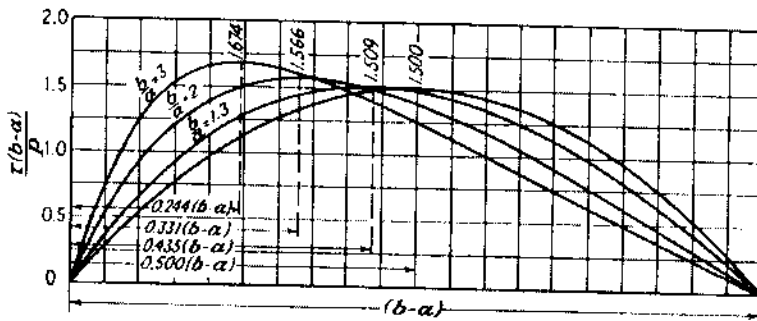
Độ võng hướng kính của đầu trên thanh:

$$(u)_{\theta=0} = L \quad (r)$$

Hằng số L thu được từ điều kiện ở đầu được gắn vào. Khi $\theta = \frac{\pi}{2}$ ta có

$\nu = 0$ và $\frac{\partial \nu}{\partial r} = 0$, do đó từ phương trình thứ hai của (q):

$$H = 0; L = \frac{D\pi}{E} \quad (s)$$



Hình 4.8

Độ võng của đầu trên được xác định bằng cách kết hợp (g), (r) và (s):

$$(u)_{\theta=0} = \frac{D\pi}{E} = -\frac{P\pi(a^2 + b^2)}{E[(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2)\log(b/a)]} \quad (4.25)$$

Khi b xấp xỉ a , chiều sâu thanh cong $h = b - a$ sẽ nhỏ so với a , ta có thể dùng công thức:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\log \frac{b}{a} = \log \left(1 + \frac{h}{a} \right) = \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} - \dots$$

Thay vào (4.25) và bỏ qua các số hạng vô cùng bé bậc cao, ta thu được:

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{3\pi a^3 P}{Eh^3}$$

nó trùng với công thức của lý thuyết đàn hồi ứng dụng.

Bằng cách lấy hàm ứng suất dạng $\phi = f(r)\cos\theta$ tiến hành như trên, ta sẽ nhận được lời giải khi một lực thẳng đứng và một ngẫu được tác động ở đầu trên thanh. Khi có được lời giải cho tải đứng và cho tải ngang, lời giải cho một lực nghiêng bất kỳ có thể thu được bằng cách dùng nguyên lý cộng tác dụng.

Trong phần này ta luôn giả sử rằng các đẳng thức (e) được thỏa, tức là các biên tròn của thanh không chịu lực tác động. Bằng cách lấy các đẳng thức (e) khác không ta sẽ có trường hợp những lực pháp và tiếp tuyến tỉ lệ với $\sin\theta$ và $\cos\theta$ được phân bố trên các biên tròn của thanh. Kết hợp những lời giải như thế với những lời giải đã thu được trước đây cho uốn thuần và uốn bởi một lực tác động ở đầu mút, ta có thể đi đến trường hợp tải tác động lên máng vòm được bao phủ bởi cát và đất.

4.8. Lệnh ghép.

Trong phần 4.7 các thành phần chuyển vị (q) đã thu được từ các thành phần ứng suất (4.24). Những hằng số A, B, D được cho bởi (g) đối với bài toán của hình 4.7.

Ứng dụng của lời giải này cho vành một phần tư chỉ là vấn đề lựa chọn chứ không nhất thiết phải như thế. Lời giải tương tự có thể được áp dụng cho một vành gần như hoàn toàn, hình 4.9a hoặc 4.9b. Ta cũng có thể diễn giải vấn đề này đối với những chuyển vị áp đặt (cường bức) thay cho lực tác động.

Khảo sát các chuyển vị (q) của 4.7, ta nhận thấy rằng số hạng đầu tiên trong biểu thức của u có thể gây ra sự bất liên tục. Trong hình 4.9b, một sự cửa cắt lưỡng kính đã được thực hiện trong vành hoàn toàn tại $\theta = 0$. Mặt cắt dưới (thấp) có $\theta = 0$. Mặt cắt trên có $\theta = 2\pi - \varepsilon$, với ε là vô cùng bé.

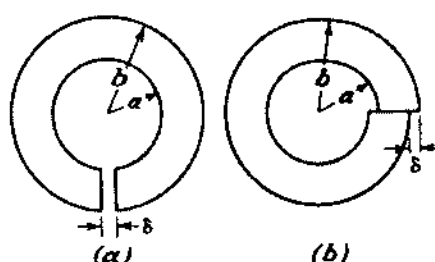
Nếu u trong (q) được định giá đối với hai giá trị này của θ , các kết quả sẽ khác nhau một lượng δ . Do đó:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\delta = (u)_{\theta = 2\pi - \varepsilon} - (u)_{\theta = 0} \quad (a)$$

Theo (q), ta có:

$$\delta = -\frac{2D}{E} 2\pi \quad (b)$$



Hình 4.9

Chuyển vị tương đối này của hai tiết diện cắt được biểu thị bởi δ trong hình 4.9b. Lực P yêu cầu được tìm từ đẳng thức cuối của (g) trong mục 4.7, với D được cho bởi (b) ở trên. Nếu hai mặt cắt được hàn với nhau sau khi chuyển vị tương đối δ đã được áp đặt, mỗi mặt cắt chịu lực cần thiết P để chúng trùng nhau (hai lực P có chiều ngược nhau và cùng trị số – thỏa tiên đề phản tác dụng). Vành ở trong trạng thái tự bị biến dạng được gọi là “lệch đường” – “lệch mép”. Trạng thái biến dạng phẳng tương ứng là cơ sở của sự giải thích biến dạng dẻo trong các tình thế kim loại.

Hình 4.9a giới thiệu một vành với khe hở song song δ . Nếu hai mặt cắt ban đầu hẹp, chuyển vị tương đối được áp đặt để mở rộng khe hở và sự bất liên tục chuyển vị bây giờ xảy ra trong v chứ không trong u . Từ mục 4.7 ta có:

$$\delta = (v)_{\theta = +\pi/2} - (v)_{\theta = -3\pi/2} \quad (c)$$

Dùng đẳng thức thứ hai của (q) trong mục 4.7 ta có:

$$\delta = \frac{2D}{E} \left(+\frac{\pi}{2} \right) \sin \left(+\frac{\pi}{2} \right) - \frac{2D}{E} \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) = \frac{4\pi D}{E} \quad (d)$$

Các giá trị δ trong (b) và (d) chỉ khác nhau về dấu, nghĩa là các ứng suất trong hai trường hợp sẽ chỉ khác nhau về dấu. Lực P được tìm từ đẳng thức thứ ba của (g) trong mục 4.7, sau đó A và B được tìm từ hai đẳng

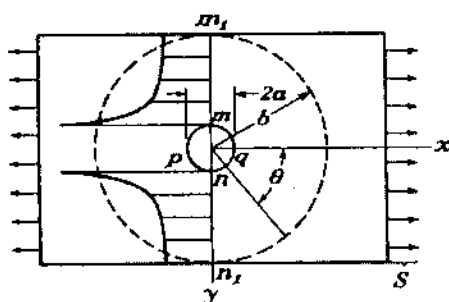
Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

thức đầu. Sự tương ứng này có thể dự đoán từ thực tế rằng nếu các mặt cắt của hình 4.9a và 4.9b được thực hiện đồng thời thì một phần tư của vành sẽ được tự do. Chuyển vị tương đối $-\delta$ trong hình 4.9b có thể được tác động một cách đồng thời bằng cách trượt phần tư vành về phía phải một lượng δ . Do hai lệch này bằng nhau nên không có ứng suất được sinh ra trong quá trình này. Đây là một thí dụ của định lý tổng quát về các mặt cắt tương đương.

4.9. Ảnh hưởng lỗ tròn đến sự phân bố ứng suất trong tấm.

Hình 4.10 mô tả một tấm chịu tải kéo phân bố đều S theo phương x . Một lỗ tròn nhỏ được tạo ở giữa tấm, sự phân bố ứng suất ở vùng lân cận lỗ sẽ bị thay đổi. Nhưng sự thay đổi này sẽ không đáng kể ở xa lỗ (theo nguyên lý *Saint - Venant*). Khảo sát một phần tấm bên trong một đường tròn đồng tâm với lỗ, có bán kính $b > a$. Ứng suất ở bán kính b tương tự như trường hợp tấm không có lỗ và do đó được tính theo các công thức sau:

$$\begin{cases} (\sigma_r)_{r=b} = S \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S (1 + \cos 2\theta) \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} = -\frac{1}{2} S \sin 2\theta \end{cases} \quad (a)$$



Hình 4.10

Những lực này tác động quanh cạnh ngoài của vành có bán kính trong $r = a$ và bán kính ngoài $r = b$, chúng gây ra sự phân bố ứng suất bên trong vành được xem như bao gồm hai phần. Phần đầu tiên do thành phần hằng số $\frac{1}{2}S$ của các lực pháp tuyến. Các ứng suất do thành phần này tạo ra có thể tính toán bằng cách dùng các phương trình (4.8). Phần còn lại, gồm các lực pháp $\frac{1}{2}S \cos 2\theta$ cùng với các lực tiếp $-\frac{1}{2}S \sin \theta$, tạo ra các ứng suất có thể được tính từ hàm ứng suất có dạng:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\phi = f(r) \cos 2\theta \quad (b)$$

Thay hàm này vào phương trình tương thích:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Ta tìm được phương trình vi phân để xác định $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{4f}{r^2} \right) = 0$$

Nghiệm tổng quát có dạng:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D$$

Do đó hàm ứng suất:

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (c)$$

Theo (4.2), các thành phần ứng suất:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (d)$$

Các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện (a) đối với biên ngoài và điều kiện biên trong (lỗ) không chịu ngoại lực. Các điều kiện này cho các đẳng thức:

$$\begin{cases} 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} = -\frac{1}{2}S \\ 2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} = 0 \\ 2A + 6Bb^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} = -\frac{1}{2}S \\ 2A + 6Ba^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} = 0 \end{cases}$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Giải hệ các phương trình này và đặt $a/b = 0$, nghĩa là, xét một tấm lớn vô hạn, ta có:

$$A = -\frac{S}{4}; B = 0; C = -\frac{a^4}{4}S; D = -\frac{a^2}{2}S$$

Thay các hằng số này vào (d) và cộng thêm các ứng suất được tạo bởi lực kéo đều $\frac{1}{2}S$ lên biên ngoài được tính từ (4.8):

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (4.26)$$

Các chuyển vị u, v (nếu không có chuyển động của vật thể rắn) có thể được tìm từ các đẳng thức (4.26) cùng với (4.13), (4.14), (4.15), (4.16).

Nếu r rất lớn, σ_r và $\tau_{r\theta}$ tiến tới các giá trị được cho trong các đẳng thức (a). Ở mép lỗ, $r = a$, ta có:

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0; \sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta$$

Ta có thể thấy rằng σ_θ cực đại tại $\theta = \frac{\pi}{2}$ và $\theta = \frac{3\pi}{2}$, tức là tại n và m của đường kính vuông góc với hướng kéo (hình 4.10). Ở các điểm này $(\sigma_\theta)_{\max} = 3S$. Đây là ứng suất kéo cực đại và bằng ba lần áp lực kéo đều tác động vào hai cạnh tấm.

Ở các điểm p và q ứng với $\theta = \pi$ và $\theta = 0$ ta có:

$$\sigma_\theta = -S$$

Kết quả này cho thấy có ứng suất nén theo phương tiếp tuyến tại các điểm này.

Đối với mặt cắt ngang của tấm qua tâm lỗ và vuông góc với trục x , $\theta = \frac{\pi}{2}$, ta tính được các thành phần ứng suất từ (4.26):

$$\tau_{r\theta} = 0; \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

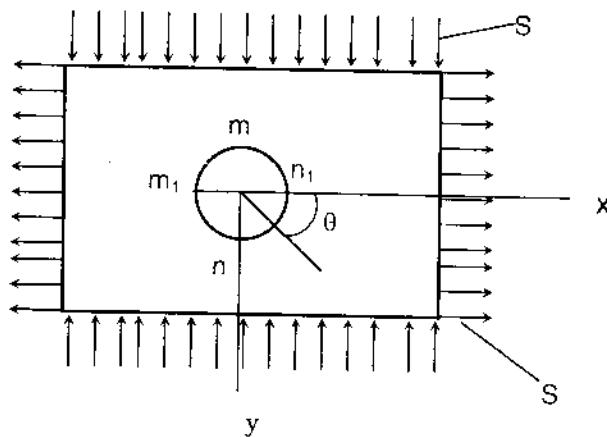
Sự hiện diện của lỗ trong tấm gây ra sự tập trung ứng suất. Khi r tăng, ứng suất σ_0 tiến nhanh đến giá trị S . Sự phân bố của ứng suất này được vẽ trong hình 4.10. Sự tập trung ứng suất quanh lỗ chứng minh sự ứng dụng của lời giải (e), nhận được đối với tấm vô hạn, cho tấm rộng hữu hạn. Nếu chiều rộng tấm không nhỏ hơn bốn lần đường kính lỗ, sai số của việc tính $(\sigma_\theta)_{\max}$ từ công thức (4.26) sẽ không vượt quá 6%.

Sự phân bố ứng suất trong trường hợp kéo hoặc nén theo hai hướng vuông góc có thể được xác định một cách dễ dàng theo nguyên lý cộng tác dụng các kết quả trong trường hợp kéo hay nén theo một hướng. Bằng cách lấy áp lực kéo theo hai hướng x và y bằng S , ta tìm được ở biên lỗ một ứng suất kéo $\sigma_0 = 2S$. Khi tác động áp lực kéo S theo hướng x và áp lực nén theo hướng y , ta có trường hợp trượt thuần túy (hình 4.11). Ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến ở biên lỗ được tính từ (4.26):

$$\sigma_\theta = S - 2S \cos 2\theta - [S - 2S \cos(2\theta - \pi)]$$

Trường hợp $\theta = \frac{\pi}{2}$ hay $\theta = \frac{3\pi}{2}$, tức là ở các điểm n hay m , ta có $\sigma_\theta = 4S$.

Khi $\theta = 0$ hay $\theta = \pi$, tức là tại n_1 hay m_1 ta có $\sigma_\theta = -4S$. Do đó, đối với tấm lớn trượt thuần túy, ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến cực đại ở biên lỗ có giá trị bằng bốn lần ứng suất trượt thuần túy tác động.



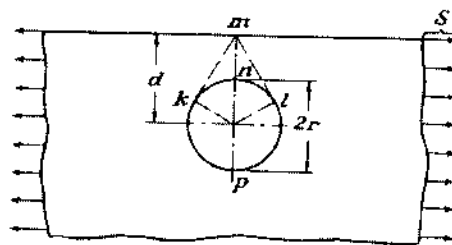
Hình 4.11

Sự tập trung ứng suất được tìm thấy ở mép lỗ là điều quan trọng nhất. Thí dụ các lỗ trên boong tàu. Khi thân tàu bị uốn, kéo hay nén được tạo ra trong boong tàu và có sự tập trung ứng suất cao ở các lỗ. Dưới tác

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

động của các chu kỳ ứng suất do sóng biển gây nên, các vết nứt mỏi cuối cùng có thể được hình thành ở các vị trí vượt tải của kim loại.

Thường cần phải làm giảm sự tập trung ứng suất ở các lỗ, như các lỗ trong cánh máy bay và trong thân máy bay. Điều này có thể được thực hiện bằng cách thêm vào đường gân nổi hoặc vành gia cường. Bài toán giải tích đã được giải bằng cách mở rộng phương pháp đã dùng cho lỗ và các kết quả đã được so sánh với các kết quả đo *strain - gauge*.



Hình 4.12

Trường hợp một lỗ tròn gần biên thẳng của một tấm bán vô hạn dưới tải kéo song song với biên này (hình 4.12) đã được tính toán bởi *G. B. Jeffery*. Kết quả đã hiệu chỉnh và sự so sánh với các thí nghiệm quang đàn hồi đã được thực hiện bởi *R. D. Midlin*. Ứng suất ở lỗ, ở điểm *n* gần cạnh biên của tấm nhất, trở thành bội số rất lớn của ứng suất kéo không nhiều loạn khi *mn* nhỏ so với *np*. *Jeffery* cũng đã nghiên cứu trường hợp của áp lực vuông góc đều p_i tác động lên biên lỗ. Đây là trường hợp đặc biệt của bài toán lỗ lệch tâm được mô tả ở cuối mục 4.2. Nếu lỗ ở rất xa biên thẳng của tấm thì ứng suất ở biên lỗ được tính từ (4.9):

$$\sigma_{\theta} = p_i; \quad \sigma_r = -p_i$$

Nếu lỗ ở gần cạnh thẳng, ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến không còn là hằng số dọc theo biên lỗ. Đại lượng này đạt cực đại tại điểm *k* và *l* với công thức:

$$(\sigma)_{0\max} = p_i \frac{d^2 + r^2}{d^2 - r^2} \quad (4.27)$$

Ứng suất này nên được so sánh với ứng suất kéo ở điểm *m* trên biên thẳng tấm được cho bởi công thức:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\sigma_{\theta} = \frac{4p_1 r^2}{d^2 - r^2} \quad (4.28)$$

Khi $d = r\sqrt{3}$, hai biểu thức trên có cùng độ lớn. Nếu $d > r\sqrt{3}$, ứng suất cực đại ở biên tròn.

Trường hợp tấm có chiều rộng hữu hạn với lỗ tròn ở trục đối xứng (hình 4.13) đã được khảo sát bởi *R. C. J. Howland*. Ông đã xác định rằng khi $2r = \frac{1}{2}d$, $\sigma_0 = 4,3S$ tại điểm n và $\sigma_0 = 0,75S$ tại điểm m.

Phương pháp đã dùng trong mục này để tính ứng suất quanh lỗ tròn nhỏ có thể được áp dụng khi tấm chịu uốn thuần. Nhiều trường hợp riêng đối với cả kéo và nén đã được khảo sát: một lỗ hay một hàng lỗ trong một dải hẹp và trong một tấm bán vô hạn, các dây tròn của lỗ, và các rãnh bán nguyệt trong dải hẹp.

Một phương pháp được sáng chế bởi *Hengst* đã được áp dụng cho trường hợp lỗ trong tấm vuông dưới tải kéo song trục bằng nhau, và dưới sự cắt khi lỗ tròn hoặc được gia cường.

Những lời giải thu được đối với tấm vô hạn với một lỗ tròn khi các lực được tác động lên biên lỗ, đối với bài toán tương ứng của dải, và đối với một hàng lỗ song song và gần với cạnh thẳng của tấm bán vô hạn (hàng lỗ dính tán).

Nếu một lỗ *ellipse* được tạo trong tấm vô hạn dưới tải kéo S , với một trong hai trục đối xứng song song với phương kéo, ứng suất ở hai điểm biên lỗ trên trục đối xứng vuông góc với phương kéo:

$$\sigma = S \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (4.29)$$

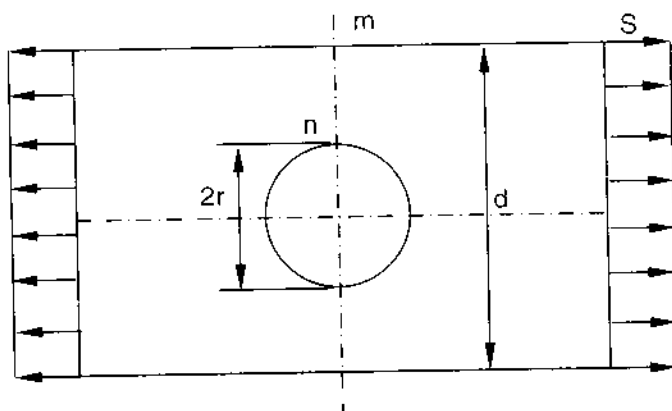
với $2a$ là trục của *ellipse* vuông góc với phương kéo và $2b$ là trục còn lại.

Một lỗ mảnh (a/b lớn) vuông góc với phương kéo tạo ra sự tập trung ứng suất rất cao. Điều này giải thích tại sao các vết nứt ngang với tải tác động có xu hướng mở rộng. Sự mở rộng có thể được ngăn chặn bằng cách khoan các lỗ ở cuối của vết nứt để loại bỏ độ cong nhọn nhạy đối với sự tập trung ứng suất cao.

Khi lỗ được điền đầy với vật liệu cứng hoặc có hằng số đàn hồi khác với hằng số đàn hồi của tấm (ứng suất phẳng) hay của vật (biến dạng phẳng), ta có bài toán hạt tạp chất cứng hay đàn hồi. Bài toán này đã

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

được giải cho các hạt tập chất tròn và *ellipse*. Những kết quả đối với hạt tập chất tròn cứng đã được kiểm chứng bởi phương pháp quang đàn hồi.



Hình 4.13

Các ứng suất được tính bởi (4.26) cho bài toán được chỉ ra bởi hình 4.10 thì giống nhau cho cả hai trường hợp biến dạng phẳng và ứng suất phẳng. Tuy nhiên, trong biến dạng phẳng, ứng suất pháp theo phương trục:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

phải tác động lên hai mặt biên song song với mặt phẳng xy , để làm cho $\varepsilon_y = 0$. Sự loại bỏ các ứng suất này, để có điều kiện hai mặt phẳng biên tự do, sẽ làm cho bài toán không còn tính chất hai chiều (ứng suất phẳng hay biến dạng phẳng). Nếu đường kính lỗ nhỏ so với chiều dày, sự rối loạn sẽ được giới hạn ở vùng lân cận của hai mặt biên. Nhưng nếu đường kính lỗ và chiều dày tương đương nhau, bài toán phải được xem như bài toán ba chiều hoàn toàn. Các nghiên cứu về loại bài toán này đã cho thấy σ_θ vẫn là thành phần ứng suất lớn nhất và giá trị của nó rất gần với giá trị của bài toán hai chiều.

4.10. Lực tập trung ở một điểm của biên thẳng

Khảo sát lực tập trung P thẳng đứng tác động lên biên thẳng ngang AB của một tấm lớn vô hạn (hình 4.14a). Sự phân bố của tải theo chiều dày tấm là đều (hình 4.14b). Chiều dày tấm lấy bằng đơn vị, do đó P là lực trên đơn vị chiều dày.

Sự phân bố ứng suất phụ thuộc vào bất cứ thứ gì mà lực tác động lên biên kín, thí dụ $ABnm$, và không chỉ phụ thuộc vào các điều kiện trên AB . Điều này đúng ngay cả khi $ABnm$ được dời đi đến vô hạn.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Có một lời giải cơ bản được gọi là sự phân bố hướng kính đơn. Một phân tử ở cách điểm đặt lực một khoảng r chịu nén đơn theo hướng kính. Các thành phần ứng suất của phân tử:

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.30)$$

Ta có thể thấy rằng các thành phần ứng suất này thỏa các phương trình cân bằng (4.1).

Các điều kiện biên trên AB cũng được thỏa do σ_θ và $\tau_{r\theta}$ bằng không dọc theo cạnh thẳng của tấm, cạnh này không chịu tác động của ngoại lực trừ điểm đặt lực P. Tại điểm này σ_r trở thành vô hạn. Hợp lực tác động lên bề mặt trụ bán kính r (hình 4.14b) phải cân bằng với P:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r r \cos \theta \, d\theta = -\frac{4P}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = -P$$

Để chứng minh rằng (4.30) là lời giải chính xác của bài toán ta cũng phải khảo sát phương trình tương thích (4.3). Lời giả trên thu được từ hàm ứng suất:

$$\phi = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (a)$$

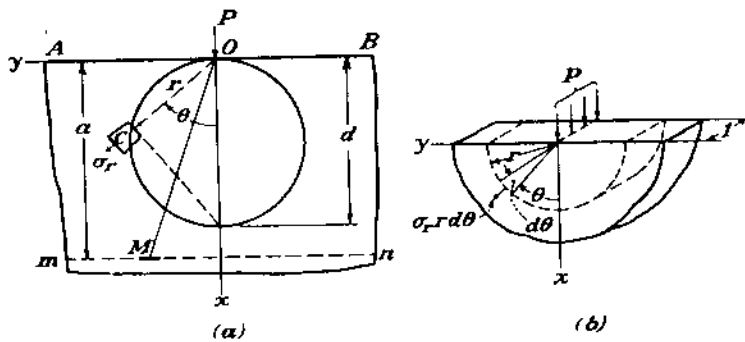
Ta có thể kiểm chứng hàm này bằng cách dùng (4.2):

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r} \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.30')$$

Kết quả này trùng với (4.30). Thay hàm (a) vào (4.3), ta dễ thấy phương trình này thỏa.

Lời giải này yêu cầu sự phân bố xác định của lực biên trên phần còn lại của biên. Nếu biên này là nửa đường tròn bán kính R, lực cần thiết được chỉ định bởi (4.30) với $r = R$.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực



Hình 4.14

Lấy đường tròn đường kính bất kỳ d với tâm nằm trên trục x và tiếp tuyến với trục y tại O (hình 4.14a), ta có bán kính của điểm C trên đường tròn: $r = d \cos \theta$. Do đó, từ (4.30) ta có:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$$

Nghĩa là ứng suất thì giống nhau cho mọi điểm trên đường tròn, từ điểm O chịu tác động của lực P .

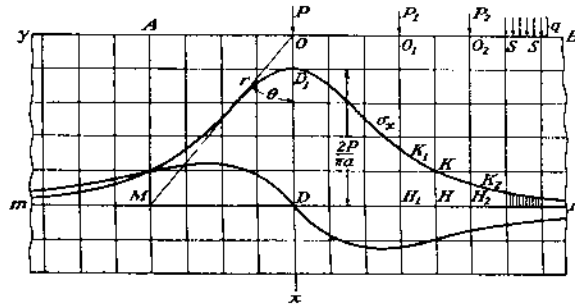
Lấy mặt phẳng ngang mn cách khoảng a với cạnh thẳng của tấm, các thành phần ứng suất pháp và tiếp trên mặt phẳng của tấm, các thành phần ứng suất đơn nén theo phương hướng kính như sau:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P \cos^3 \theta}{\pi r} = -\frac{2P}{\pi a} \cos^4 \theta \\ \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi a} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \tau_{xy} = \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P \sin \theta \cos^2 \theta}{\pi r} = -\frac{2P}{\pi a} \sin \theta \cos^3 \theta \end{cases} \quad (4.31)$$

Sự phân bố ứng suất pháp σ_x và ứng suất tiếp τ_{xy} dọc theo mặt phẳng ngang mn được biểu diễn trên đồ thị hình 4.15.

Ở điểm chịu tác động lực ứng suất lớn vô hạn bởi vì lực hữu hạn tác động lên diện tích vô cùng bé. Thực tế, tải sẽ được phân bố trên diện tích rộng hữu hạn. Chảy dẻo có thể xảy ra cục bộ. Tuy nhiên, vùng biến dạng dẻo có thể được hình dung bởi một bề mặt trụ tròn bán kính nhỏ như hình 4.14b. Các phương trình đàn hồi có thể được áp dụng cho phần còn lại của tấm.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực



Hình 4.15

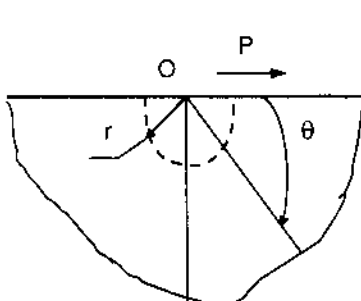
Một lời giải tương tự có thể thu được đối với lực ngang P tác động lên biên thẳng của tấm bán vô hạn (hình 4.16). Các thành phần ứng suất cho trường hợp này nhận được từ những phương trình tương tự (4.30'). Hợp lực tác động lên bề mặt trụ, bán kính r :

$$-\frac{2P}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = -P$$

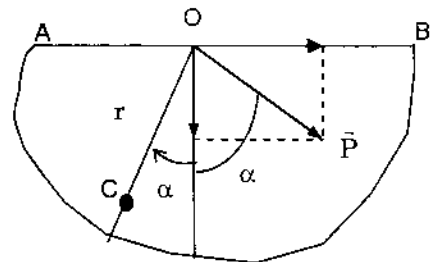
Hợp lực này cân bằng với ngoại lực P và khi các thành phần ứng suất $\tau_{r\theta}$ và σ_r bằng không trên biên thẳng, lời giải (4.30') thỏa các điều kiện biên.

Lời giải đối với lực nghiêng tập trung sẽ thu được bằng nguyên lý cộng tác dụng các lời giải đối với lực tập trung thẳng đứng và ngang. Phân lực nghiêng ra hai thành phần: $P \cos \alpha$ (đứng) và $P \sin \alpha$ (ngang) (hình 4.17), ứng suất pháp theo phương hướng kính tại điểm C được tìm từ (4.30'):

$$\sigma_r = -\frac{2}{\pi r} \left[P \cos \alpha \cos \theta + P \sin \alpha \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = -\frac{2P}{\pi r} \cos(\alpha + \theta) \quad (4.32)$$



Hình 4.16



Hình 4.17

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Do đó các phương trình (4.30') cho lực tác động có hướng bất kỳ.

Từ sự phân bố ứng suất, các thành phần chuyển vị tương ứng sẽ xác định được bằng cách áp dụng các phương trình (4.13) đến (4.16). Đối với lực vuông góc với biên thẳng (hình 4.14), ta có:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi E r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = \nu \frac{2P \cos \theta}{\pi E r} \\ \gamma_{r\theta} = r \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

Tích phân phương trình đầu của (b), ta xác định được u:

$$u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r + f(\theta) \quad (c)$$

Ở đây $f(\theta)$ là hàm đơn biến theo θ . Thay u vào phương trình thứ hai của (b) và tích phân nó, ta có:

$$v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \int f(\theta) d\theta + F(r) \quad (d)$$

với $F(r)$ là hàm đơn biến theo r. Thay (c) và (d) vào phương trình thứ ba của (b), ta rút ra được:

$$f(\theta) = -\frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta; F(r) = Cr \quad (e)$$

Các hằng số tích phân sẽ được xác định từ các điều kiện ràng buộc. Các biểu thức xác định các thành phần chuyển vị:

$$\begin{cases} u = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log r - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta \\ v = \frac{2\nu P}{\pi E} \sin \theta + \frac{2P}{\pi E} \log r \sin \theta - \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + \frac{(1-\nu)P}{\pi E} \sin \theta \\ \quad + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr \end{cases} \quad (f)$$

Giả sử rằng điều kiện ràng buộc của tấm bán vô hạn (hình 4.14) là các điểm trên trục x không có chuyển vị theo phương ngang. Do đó:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$v = 0 \text{ tại } \theta = 0$$

Từ phương trình thứ hai của (f) ta xác định được:

$$A = 0; C = 0$$

Chuyển vị theo phương đứng của các điểm trên trục x:

$$(u)_{\theta=0} = -\frac{2P}{\pi E} \log r + B \quad (g)$$

Để xác định hằng số B, ta hãy giả sử rằng một điểm trên trục x ở cách gốc một khoảng d sẽ không di chuyển theo phương thẳng đứng. Từ phương trình (g) ta xác định được B:

$$B = \frac{2P}{\pi E} \log d$$

Thay các hằng số tích phân A, B, C vào (f) ta tính được các thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ trên tấm bán vô hạn.

Thí dụ, khảo sát các thành phần chuyển vị của những điểm trên biên thẳng của tấm. Các chuyển vị ngang của các điểm này được tính từ đẳng thức thứ nhất của (f) với $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$(u)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E}; \quad (u)_{\theta = -\frac{\pi}{2}} = -\frac{(1-\nu)P}{2E} \quad (4.33)$$

Các điểm trên mỗi cạnh (ở hai phía của gốc) của biên thẳng có chuyển vị bằng và hướng về phía gốc. Chúng ta có thể đánh giá một chuyển vị như thế như là một khả năng vật lý, nếu nhớ lại rằng quanh điểm chịu lực P ta đã di chuyển phần vật liệu được bao bởi bề mặt trụ bán kính nhỏ (hình 4.14b) mà bên trong phần này các phương trình đàn hồi không còn đúng. Thực ra vật liệu trong vùng này sẽ bị biến dạng dẻo và do đó có thể cho phép chuyển vị (4.32) dọc theo biên thẳng. Các chuyển vị đứng trên biên thẳng được tính từ đẳng thức thứ hai của (f). Chú ý rằng v dương nếu chuyển vị theo hướng tăng θ và biến dạng có tính đối xứng đối với trục x. Ta tìm được các chuyển vị thẳng đứng hướng xuống của các điểm cách gốc một khoảng r:

$$(v)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = (v)_{\theta = -\frac{\pi}{2}} = \frac{2P}{\pi E} \log \frac{d}{r} - \frac{(1+\nu)P}{\pi E} \quad (4.34)$$

Ở gốc chuyển vị v sẽ lớn vô hạn. Để khắc phục khó khăn này, ta phải giả sử trước rằng một phần vật liệu quanh điểm đặt lực bị cắt ra bởi một

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

hình trụ bán kính nhỏ. Đối với các điểm khác trên biên, đẳng thức (4.33) cho những chuyển vị hữu hạn.

4.11. Tải vuông góc bất kỳ trên biên thẳng

Các đồ thị σ_x và τ_{xy} của mục 4.10 (hình 4.15) có thể được dùng như các đường ảnh hưởng. Chúng ta giả sử rằng các đường cong này mô tả các thành phần ứng suất đối với P bằng đơn vị. Đối với lực P có giá trị bất kỳ, ứng suất σ_x ở điểm bất kỳ H trên mặt mn được tính bằng cách nhân tọa độ $\overline{HK}$ với P .

Nếu vài lực thẳng đứng $P, P_1, P_2, \dots$ tác động lên biên thẳng ngang AB của tấm bán vô hạn, các ứng suất trên mặt phẳng ngang mn được tính bằng phương pháp cộng tác dụng các ứng suất được tạo bởi từng lực này. Đối với trường hợp từng lực P_i tác động, các đường cong σ_x, τ_{xy} sẽ được xác định bằng cách dời các đường cong σ_x, τ_{xy} được hình thành bởi lực P đến gốc mới O_i . Do đó ứng suất σ_x được tạo bởi lực P_i trên mặt phẳng mn ở điểm D được xác định bằng cách nhân tọa độ $\overline{H_1K_1}$ với P_i . Ứng suất pháp tổng tại D trên mặt phẳng mn được tạo bởi $P, P_1, P_2, \dots$ là:

$$\sigma_x = \overline{DD_1}P + \overline{H_1K_1}P_1 + \overline{H_2K_2}P_2 + \dots$$

Do đó đường cong σ_x được biểu diễn trên hình 4.15 là đường ảnh hưởng đối với ứng suất pháp σ_x tại điểm D . Tương tự, đường cong τ_{xy} là đường ảnh hưởng cho ứng suất tiếp trên mặt phẳng mn tại điểm D .

Có các đường cong này, các thành phần ứng suất tại D đối với loại tải thẳng đứng bất kỳ tác động trên cạnh AB của tấm có thể tính được dễ dàng.

Nếu tải là lực phân bố đều với cường độ q , phân bố trên phần $\overline{SS}$ của biên thẳng (hình 4.15), ứng suất pháp σ_x được tạo bởi tải này ở điểm D được tính bằng cách nhân q với "diện tích ảnh hưởng" được tô sọc trong hình.

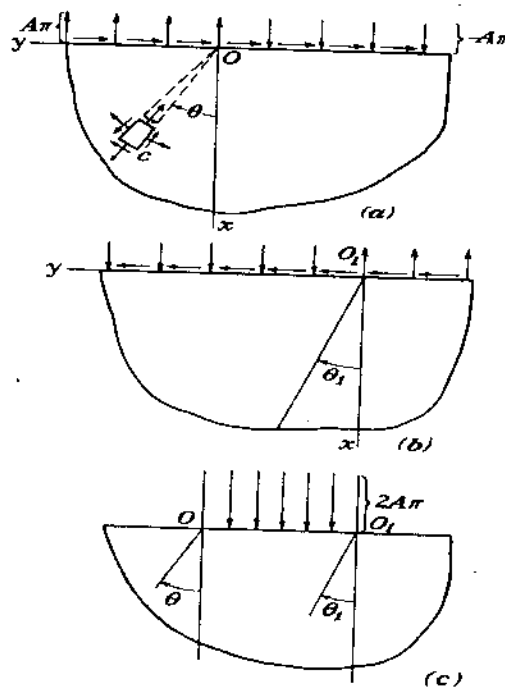
Bài toán tải phân bố đều có thể giải theo cách hàm ứng suất có dạng:

$$\phi = Ar^2\theta \quad (a)$$

Với A là hằng số. Các thành phần ứng suất tương ứng:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 2A\theta \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 2A\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = -A \end{cases} \quad (b)$$



Hình 4.18

Áp dụng kết quả này cho tấm bán vô hạn ta thu được sự phân bố tải như hình 4.18a. Trên cạnh thẳng của tấm có tác động của lực cắt phân bố đều với cường độ A và tải pháp phân bố đều với cường độ $A\pi$, có sự thay đổi dấu (chiều) đột ngột tại gốc O . Chiều dương của các thành phần ứng suất được biểu diễn trên phân tố C sẽ xác định chiều của tải phân bố trên biên thẳng.

Bằng cách dời gốc đến O_1 và thay đổi dấu của hàm ứng suất ϕ ta sẽ có sự phân bố tải như hình 4.18a và 4.18b. Cộng tác dụng hai trường hợp

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

phân bố tải này ta thu được trường hợp tải phân bố đều tác động lên một phần biên thẳng của tấm bán vô hạn (hình 4.18c). Để có được cường độ tải phân bố q , ta lấy:

$$2A\pi = q \Rightarrow A = \frac{1}{2\pi}q$$

Ứng suất tại một điểm bất kỳ của tấm được tính từ hàm ứng suất:

$$\phi = A(r^2\theta - r_1^2\theta_1) = \frac{q}{2\pi}(r^2\theta - r_1^2\theta_1) \quad (c)$$

Từ các đẳng thức (b), ta thấy rằng số hạng đầu tiên của hàm ứng suất (c) biểu thị ứng suất kéo đều ở điểm M bất kỳ của tấm (hình 4.19a) theo tất cả các hướng trong mặt phẳng tấm là $-2A\theta$ và trạng thái trượt thuần $-A$. Tương tự, số hạng thứ hai của hàm ứng suất cho ứng suất nén đều $-2A\theta_1$ và trượt thuần. Tải kéo và nén đều dẫn đến ứng suất nén đều:

$$p = 2A\theta - 2A\theta_1 = 2A(\theta - \theta_1) = -2A\alpha \quad (d)$$

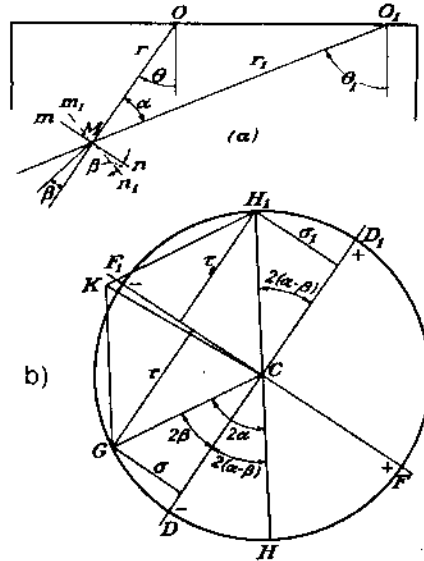
trong đó α là góc giữa bán kính r và r_1 .

Trong việc cộng tác dụng hai loại trượt thuần, một ứng với hướng r và một ứng với r_1 , ta sẽ dùng vòng tròn *Mohr* (hình 4.19b) có bán kính bằng giá trị ứng suất tiếp trượt thuần A . Bằng cách lấy hai bán kính: DD_1 song song với r và FF_1 vuông góc với r , như các trục ứng suất tiếp τ và trục ứng suất pháp σ , ta có sự mô tả trạng thái ứng suất trượt thuần túy ứng với hướng r . Các bán kính CF và CF_1 giới thiệu hai ứng suất chính A và $-A$ hợp một góc $\frac{\pi}{4}$ với hướng r ở điểm M, và bán kính CD diễn tả ứng suất tiếp $-A$ trên mặt mn vuông góc với r . Đối với mặt nghiêng bất kỳ m_1n_1 nghiêng một góc β đối với mặt mn (hình 4.19b) các thành phần ứng suất được cho bởi hai tọa độ σ và τ của điểm G trên vòng tròn *Mohr*, với góc bằng 2β .

Vòng tròn tương tự cũng có thể được dùng để tính các thành phần ứng suất do trạng thái trượt thuần theo hướng r_1 . Khảo sát lại mặt nghiêng m_1n_1 , chú ý rằng pháp tuyến của mặt nghiêng này tạo một góc $\alpha - \beta$ với hướng r_1 (hình 4.19a). Các thành phần ứng suất trên mặt nghiêng này sẽ được xác định bởi hai tọa độ điểm $H(\sigma, \tau)$ trên đường tròn. Để kể đến dấu của trạng thái trượt thuần tương ứng với hướng r_1 , ta phải thay đổi các dấu của các thành phần ứng suất, và chúng được diễn tả bởi điểm H_1

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

trên đường tròn. Ứng suất tổng tác động lên mặt nghiêng m_1n_1 được cho bởi *vector*, các hình chiếu của các *vector* này sẽ cho ứng suất pháp $-(\sigma + \sigma_1)$ và ứng suất tiếp $\tau_1 - \tau$. *Vector* có độ lớn không đổi với mọi góc β . Do đó, bằng cách tổ hợp hai trạng thái trượt thuần ta thu được trạng thái trượt thuần.



Hình 4.19

Khi $\tau_1 - \tau = 0$, góc β xác định hướng của một phương chính tại M. Ta thấy $\tau_1 = \tau$ nếu:

$$2\beta = 2(\alpha - \beta) \text{ hay } \beta = \frac{\alpha}{2}$$

Do đó, hướng của ứng suất chính trùng với đường phân giác của góc giữa bán kính r và r_1 . Độ lớn của các ứng suất chính:

$$2\sigma = \pm 2A \sin 2\beta = \pm 2A \sin \alpha \quad (e)$$

Kết hợp (e) với nén đều (d), ta xác định được ứng suất chính tổng ở điểm bất kỳ M:

$$-2A(\alpha + \sin \alpha) \text{ và } -2A(\alpha - \sin \alpha) \quad (f)$$

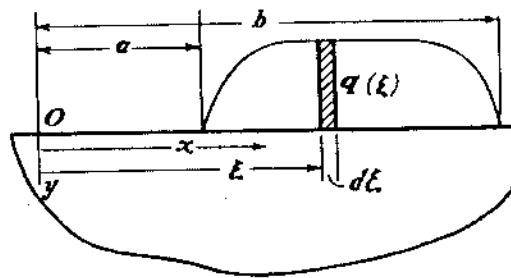
Dọc trên đường tròn bất kỳ O và O_1 , góc α là hằng và do đó ứng suất chính (f) cũng không đổi. Ở biên, giữa hai điểm O và O_1 (hình 4.19a),

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

góc $\alpha = \pi$, và từ (f) ta xác định được cả hai ứng suất chính đều bằng $-2\pi A = -q$. Đối với các phần còn lại của biên $\alpha = 0$, và cả hai ứng suất chính đều bằng zero. Do đó, nếu một tải phân bố bất kỳ được xem xét như là tổ hợp của lượng lớn các tải đều có cường độ thay đổi trên những đoạn ngắn của biên (hình 4.20), ứng suất pháp theo phương ngang σ_x dưới tác động của một phân tố tải như thế là:

$$\sigma_x = \sigma_y = -q \quad (g)$$

và (g) đúng cho các điểm trên biên thẳng.



Hình 4.20

Các chuyển vị tương ứng với các thành phần ứng suất được cho bởi (b) tìm được dễ dàng bằng cách tích phân trực tiếp đối với u và v như mục 4.5. Bỏ qua các số hạng chuyển vị của vật thể cứng, các kết quả thu được:

$$u = \frac{2A}{E}(1 - \nu)r\theta; \quad v = -\frac{4A}{E}r\log r \quad (h)$$

Áp dụng các kết quả này trong việc cộng tác dụng (c), ta có thể tìm các biểu thức chuyển vị đứng của mỗi điểm trên phương thẳng ban đầu của tấm. Theo định nghĩa trong tọa độ cực v là chuyển vị theo hướng θ tăng. Để tìm chuyển vị thẳng đứng hướng xuống đối với hình 4.18c ta lấy v cho điểm bất kỳ bên phải O, và $-v$ cho điểm bất kỳ ở bên trái O. Sự phân bố từ hệ trục dựa trên O_1 , tương ứng với số hạng $-r_1^2\theta$, trong biểu thức (c), thay đổi dấu một cách tương tự tại O_1 . Kết quả ứng suất phẳng cho chuyển vị thẳng đứng hướng xuống đối với hình 4.21. Dĩ nhiên một chuyển vị vật thể cứng có thể được cộng thêm. Các biểu thức trong hình 4.21 tạo độ dốc của cạnh biên bằng zero ở điểm giữa và ở vô hạn. Tại O và O' độ dốc không giới hạn, và chúng là các điểm suy biến.

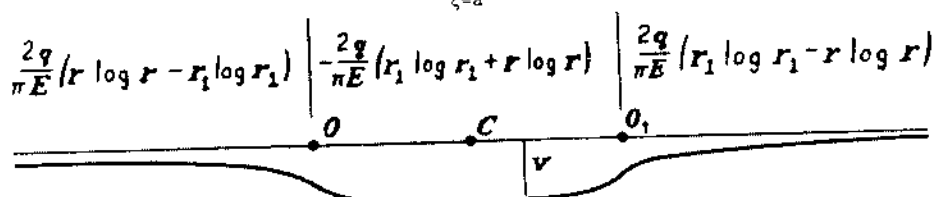
Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Chuyển vị tại C, điểm giữa cạnh biên, với $OO_1 = 2a$ là:

$$v_c = -\frac{2q}{\pi E} (2a \log a) \quad (i)$$

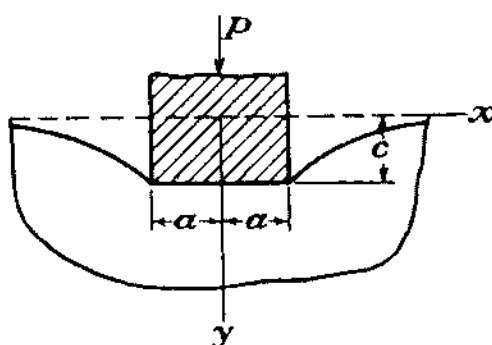
Bây giờ ta xem tải này là một phân tố tải của loại tải phân bố không đều (hình 4.20), chiều rộng $2a$ trở nên vô cùng bé. Do giới hạn của $a \log a$ bằng zero khi $a \rightarrow 0$, ta nhận thấy rằng trong việc xác định chuyển vị dưới tác động của phân tố tải bất kỳ, sự đóng góp của phân tố này có thể được bỏ qua. Chuyển vị do các phân tố tải khác được tính cho một điểm có tọa độ x trên cạnh $y = 0$:

$$v(x) = -\frac{2}{\pi E} \int_{\xi=a}^{\xi=b} q(\xi) \log|x-\xi| d\xi \quad (j)$$



Hình 4.21

Với $|x-\xi|$ là khoảng cách (dương) giữa phân tố tải ở tọa độ ξ đối với phân tố tải tác động tại x . Tuy nhiên, ta đã thấy rằng phân tố tải này không góp phần vào chuyển vị. Do đó tích phân được lấy như giá trị chính *Cauchy*.



Hình 4.22

Đẳng thức (j) cũng có thể được dùng để xác định cường độ tải phân bố q , nó tạo ra độ võng trên biên thẳng. Giả sử rằng độ võng là hằng dọc

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

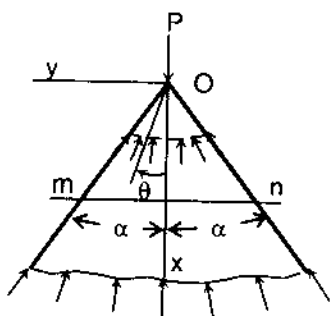
theo biên chịu tải (hình 4.22), sự phân bố áp lực trên phần này được cho bởi phương trình:

$$q(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad -a \leq x \leq a$$

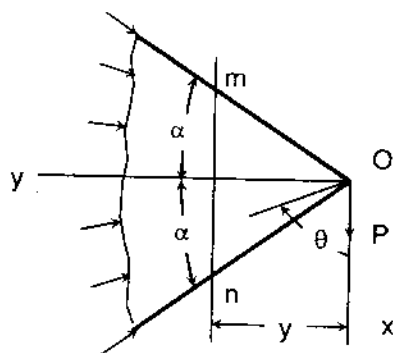
4.12. Lực tác động lên đầu của nêm.

Sự phân bố ứng suất hướng kính đơn giản đã được đề cập đến trong mục 4.10 cũng có thể xem là các ứng suất trong vật hình nêm do lực tập trung tác động ở đỉnh của nó. Chúng ta hãy khảo sát trường hợp đối xứng trục (hình 4.23). Chiều dày của nêm theo hướng vuông góc với mặt phẳng xy được lấy là đơn vị. Các điều kiện dọc theo các mặt, $\theta = \pm \alpha$, của nêm được thỏa bằng cách lấy giá trị các thành phần ứng suất trên các mặt này:

$$\sigma_r = -\frac{kP \cos \theta}{r}; \quad \sigma_\theta = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (a)$$



Hình 4.23



Hình 4.24

Hằng số k sẽ được điều chỉnh để thỏa điều kiện cân bằng tại O:

$$-2 \int_0^\alpha \frac{kP \cos^2 \theta}{r} r d\theta = -kP \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) = -P$$

$$k = \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$$

Từ đó:

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \quad (4.35)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ta có lại kết quả (4.30) cho tấm bán vô hạn. Có thể thấy rằng sự phân bố của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang bất kỳ mn vuông góc với trục x là không đều, và hệ số của ứng suất pháp ở các điểm m và n với ứng suất cực đại ở tâm mặt cắt được tìm thấy bằng $\cos^4 \alpha$. Trường hợp lực vuông góc với trục nệm (hình 4.24), lời giải (a) có thể được dùng nếu θ được đo từ hướng của lực. Hằng số k được tìm từ phương trình cân bằng:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta = -P$$

Thay σ_r từ (a) ta tìm được: $k = \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$

Và ứng suất pháp hướng kính:

$$\sigma_r = -\frac{P \cos \theta}{r \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \quad (4.36)$$

Ứng suất pháp và tiếp trên mặt cắt ngang bất kỳ mn vuông góc với trục nệm y:

$$\begin{cases} \sigma_y = -\frac{P x y \sin^4 \theta}{y^3 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \\ \tau_{xy} = \frac{P x^2 \sin^4 \theta}{y^3 \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)} \end{cases} \quad (b)$$

Trong trường hợp góc α nhỏ ta có thể đặt:

$$2\alpha - \sin 2\alpha \approx \frac{(2\alpha^3)}{6}$$

Gọi I là *moment* quán tính của mặt cắt ngang mn với trục, ta có:

$$\begin{cases} \sigma_y = -\frac{Pxy}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \right] \\ \tau_{xy} = -\frac{Px^2}{I} \left[\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} \right)^3 \sin^4 \theta \right] \end{cases} \quad (c)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Khi α nhỏ, biểu thức $\left(\frac{\tan \alpha}{\alpha}\right)^3 \sin^4(\theta) \approx 1$. Biểu thức tính σ_y trong (c)

trùng với kết quả của bài toán dầm trong đàn hồi ứng dụng. Ứng suất tiếp cực đại xảy ra ở hai điểm m và n, ứng suất tiếp cực đại này lớn gấp đôi kết quả của dầm hồi ứng dụng đối với tâm mặt cắt ngang hình chữ nhật của dầm. Từ các kết quả của hai trường hợp trong hình 4.23 và 4.24 ta có thể đi đến kết quả cho trường hợp lực P có hướng bất kỳ trong mặt phẳng xy bằng cách phân lực P thành hai thành phần đứng và ngang rồi dùng phương pháp cộng tác dụng. Chú ý rằng các kết quả (4.35) và (4.36) chỉ chính xác khi, ở đầu liên kết, nêm được giữ bởi các lực hướng kính phân bố theo cách được cho từ các kết quả. Bằng không kết quả chỉ chính xác ở các điểm xa tâm liên kết.

4.13. Ngẫu uốn tác động lên đầu nêm.

Hàm ứng suất : $\phi_2 = C_1 \sin 2\theta$ (a)

Cho các thành phần ứng suất:

$$\sigma_r = -4 C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta; \sigma_\theta = 0; \tau_{r\theta} = 2 C_1 \frac{1}{r^2} \cos 2\theta \quad (b)$$

Hàm ứng suất: $\phi_2 = C_2 \theta$ (c)

Cho các thành phần ứng suất:

$$\sigma_r = 0; \sigma_\theta = 0; \tau_{r\theta} = \frac{C_2}{r_2} \quad (d)$$

Kết hợp hai kết quả trên, ta có:

$$\sigma_r = -4 C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta; \sigma_\theta = 0; \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} (2 C_1 \cos 2\theta + C_2) \quad (e)$$

Để thỏa điều kiện các mặt $\theta = \pm \alpha$ không chịu tải, ta lấy:

$$C_2 = -2 C_1 \cos 2\alpha$$

Do đó, ứng suất sẽ là:

$$\sigma_r = -4 C_1 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta; \sigma_\theta = 0; \tau_{r\theta} = 2 C_1 \frac{1}{r^2} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad (f)$$

Trên bề mặt bán kính r (hình 4.25), thành phần ứng suất σ_r sẽ tạo thành lực ngang bằng không. Thành phần ứng suất tiếp $\tau_{r\theta}$ sẽ tạo thành

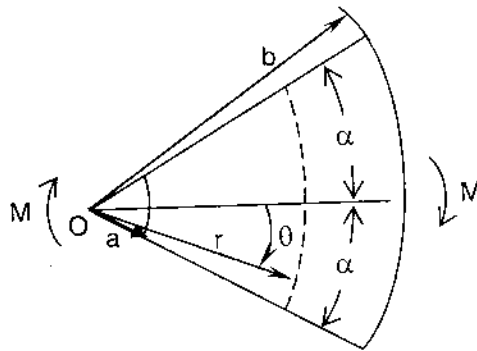
Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

hệ lực trên mặt trụ này. Hai thành phần cơ bản của hệ lực: *vector* chính bằng không, *vector moment* chính đối với tâm O bằng với ngẫu uốn M.

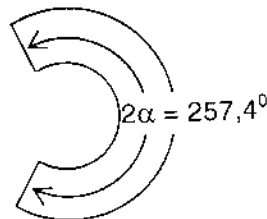
Trường hợp chiều dày nệm là đơn vị:

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta} r^2 d\theta = 2C_1(\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) \quad (g)$$

Từ (g) ta xác định được C_1 theo M và α . Do đó, ứng suất trong nệm phụ thuộc vào ngẫu uốn M.



Hình 4.25



Hình 4.26

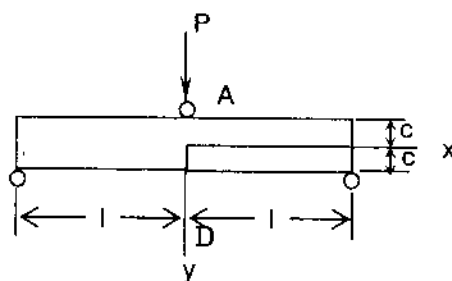
Biểu thức trong dấu ngoặc đơn của (g): $\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha$ không thể triệt tiêu với giá trị tùy ý của α thích hợp với nệm. Nó chỉ triệt tiêu khi $2\alpha = 257,4$ (hình 4.26). Ngẫu M sẽ bằng không, sự đóng góp của ϕ_1 và ϕ_2 bằng nhau và trái dấu. Hai tải đặt trên cung $r = a$ và $r = b$ tự cân bằng.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Khi $2\alpha > 257^\circ,4$ ngẫu M lại khác không và C_1 xác định. Sự hữu dụng của (f), (g) được giới hạn trong các miền góc nệm khá nhỏ, khi mà các ảnh hưởng của sự thay đổi phân bố tải trên cung $r = a$ hoặc $r = b$ có thể được tập trung hóa.

4.14. Lực tập trung tác động lên dầm.

Bài toán xác định sự phân bố ứng suất trên dầm chịu tác động của lực tập trung có ý nghĩa thực tế lớn. Lý thuyết uốn của dầm hồi ứng dụng đã xác định được phân bố ứng suất của dầm liên tục có mặt cắt ngang hình chữ nhật hẹp với độ chính xác cao. Tuy nhiên, có sự rối loạn tập trung nghiêm trọng về phân bố ứng suất ở gần điểm đặt lực tập trung, và sự nghiên cứu bản chất của vấn đề này là cần thiết. Nghiên cứu đầu tiên về tập trung ứng suất kiểu này đã được tiến hành bằng thí nghiệm bởi *Carus Wilson*. Thí nghiệm với dầm thủy tinh, tiết diện chữ nhật, đặt trên hai gối đỡ (hình 4.27), chịu tải tập trung ở giữa, và dùng ánh sáng đơn sắc, ông đã thấy rằng tại điểm A đặt lực, sự phân bố ứng suất tương tự như trong tấm bán vô hạn chịu lực tập trung vuông góc. Dọc theo mặt cắt AD ứng suất pháp σ_x không theo quy luật tuyến tính, và tại điểm D đối diện với A , ứng suất kéo nhỏ hơn kết quả tính từ lý thuyết dầm trong dầm hồi ứng dụng. Các kết quả này được giải thích trên cơ sở các giả thiết kinh nghiệm của *G.G. Stokes*. Cơ hệ trong hình 4.27 có thể được tạo thành từ hai cơ hệ trong hình 4.28. Các ứng suất nén hướng kính tác động trên các cạnh mn , np , và pq của tấm bán vô hạn (hình 4.28a) được khử bởi các ứng suất kéo hướng kính tương đương tác động trên các cạnh của dầm chữ nhật được đỡ tại n và p (hình 4.28b). Các ứng suất trong dầm này được cộng tác dụng với các ứng suất trong tấm bán vô hạn để có trường hợp của *Stokes*.



Hình 4.27

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Các công thức về lý thuyết dầm của đàn hồi ứng dụng sẽ được sử dụng để tính toán ứng suất trong dầm. *Moment* uốn ở mặt cắt giữa dầm AD được hình thành bằng cách lấy *moment* phản lực $\frac{P}{2}$ rồi trừ đi *moment* của tất cả lực kéo hướng kính tác động trên nửa dầm. *Moment* của lực kéo hướng kính này được xác định một cách dễ dàng nếu ta để ý rằng các lực kéo phân bố hướng kính tương đương với sự phân bố áp lực trên phần tư ab của mặt trụ abc tại điểm A (hình 4.28c) hay, sử dụng các đẳng thức 4.30, sẽ tương đương với lực ngang $\frac{P}{\pi}$ và một lực đứng $\frac{P}{2}$ tác động tại điểm A (hình 4.28d). Do đó, *moment* uốn trừ *moment* quanh điểm O là:

$$\frac{P}{2}l - \frac{P}{\pi}c, \text{ [lực, chiều dài/chiều dài]}$$

và ứng suất uốn tương ứng (P có thứ nguyên: lực/chiều dài):

$$\sigma'_x = \frac{P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y = \frac{3P}{2c^2} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y$$

Ứng suất kéo phân bố đều $\frac{P}{2\pi c}$ nên được thêm vào các ứng suất uốn này. Do đó, ứng suất pháp trên mặt cắt ngang CD:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c}$$

Kết quả này trùng với các công thức được tìm bởi *Stokes*. Tính đúng đắn của nó đã được xác nhận bằng thí nghiệm với các kỹ thuật quang đàn hồi hiện đại.

Sự xấp xỉ tốt hơn có thể thu được nếu ta khảo sát tải phân bố liên tục được tác động ở đáy dầm (hình 4.28b) và dùng các quan hệ:

Cường độ của tải phân bố tại D, từ phương trình (4.30), là $\frac{P}{(\pi c)}$. Thay cường độ này vào quan hệ trên và kết hợp với σ_x thu được ở trên, ta thu được kết quả xấp xỉ thứ hai:

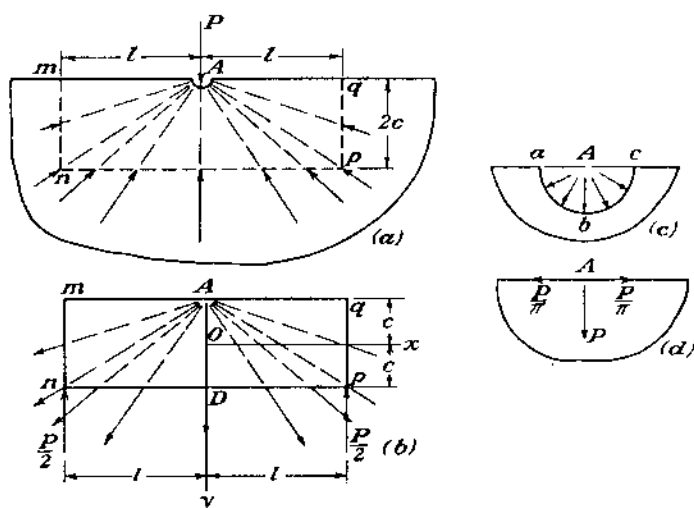
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{3P}{2c^3} \left(\frac{l}{2} - \frac{c}{\pi} \right) y + \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{y^3}{2c^3} - \frac{3y}{10c} \right) \\ \sigma_y = \frac{P}{2\pi c} + \frac{P}{\pi c} \left(\frac{3y}{4c} - \frac{y^3}{4c^3} \right) \end{cases} \quad (a)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Các ứng suất này rồi sẽ được cộng tác dụng với các ứng suất của tấm bán vô hạn:

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi(c+y)} \quad (b)$$

để thu được ứng suất tổng phân bố trên mặt cắt AD.



Hình 4.28

Bảng 4.1 Hệ số β đối với mặt cắt giữa AD

	y	-c	$\frac{C}{2}$	0	$\frac{C}{2}$	C
Lời giải chính xác	σ'_x	...	0,482	0,121	-0,136	-0,133
	σ_y	∞	-1,23	-0,456	-0,145	0
Lời giải gần đúng	σ'_x	0,573	0,426	0,159	-0,108	-0,254
	σ_y	∞	-1,22	-0,477	-0,155	0

So sánh với lời giải chính xác hơn được cho trong bảng 4.1, ta thấy rằng các công thức (a) và (b) cho các ứng suất với độ chính xác rất tốt ở tất cả

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

các điểm ngoại trừ điểm D ở đáy của dầm, nơi mà sự hiệu chỉnh các công thức đơn giản của dầm là:

$$-\frac{3P}{2\pi c} + \frac{P}{2\pi c} + \frac{1}{5} \frac{P}{\pi c} = -0,254 \frac{P}{c}$$

trong khi lời giải chính xác hơn chỉ cho $-0,133(P/c)$.

$$\text{Đặt } \sigma'_x = \beta \frac{P}{c}; \sigma_y = \beta \frac{P}{c}$$

4.15. Ứng suất trong đĩa tròn.

Đầu tiên, ta khảo sát trường hợp hai lực đối diện P tác động dọc theo đường kính AB (hình 4.29). Giả sử rằng mỗi lực tạo ra sự phân bố ứng suất hướng kính đơn giản (các đẳng thức (4.30)), ta có thể xác định các lực nên được tác động ở chu vi của đĩa theo cách để duy trì sự phân bố ứng suất như thế. Tại điểm M bất kỳ trên chu vi, điểm này chịu nén theo các hướng r và r_1 bằng $(2P/\pi)(\cos\theta/r)$ và $(2P/\pi)(\cos\theta_1/r_1)$. Do r vuông góc với r_1 và $\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos\theta_1}{r_1} = \frac{1}{d}$, ta kết luận rằng hai ứng suất chính

của điểm M là hai ứng suất nén có độ lớn bằng nhau: $2P/(\pi d)$. Do đó ứng suất nén tương tự tác động lên mặt phẳng bất kỳ qua M, vuông góc với mặt đĩa, và các lực nén pháp tuyến có cường độ $2P/(\pi d)$ nên được tác động lên chu vi đĩa để duy trì cặp phân bố ứng suất hướng kính đơn giản như đã giả thiết.

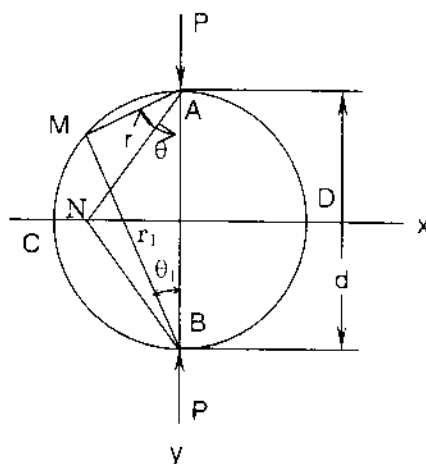
Nếu biên của đĩa không chịu tác động của ngoại lực, ứng suất ở điểm tùy ý được xác định bằng cách cộng tác dụng trạng thái kéo đều trong mặt phẳng đĩa với cường độ $2P/(\pi d)$ lên hai sự phân bố ứng suất hướng kính ở trên. Quan sát mặt cắt hướng kính ngang của đĩa tại N. Do tính đối xứng, ứng suất tiếp sẽ không tồn tại trên mặt cắt này. Ứng suất pháp được tạo bởi hai trạng thái nén hướng kính bằng nhau và có giá trị là:

$$-2 \left(\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta}{r} \right) \cos^2 \theta \quad (a)$$

trong đó r là khoảng cách AN, và θ là góc giữa AN và đường kính thẳng đứng AB. Chuyển chấp lên trạng thái này là một trạng thái kéo dài $2P/(\pi d)$, ứng suất pháp tổng trên mặt ngang tại N:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\sigma_y = -\frac{4P \cos^3 \theta}{\pi r} + \frac{2P}{\pi d} \quad (b)$$



Hình 4.29

mà:

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4x^2}}$$

nên:

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4x^2)^2} \right]$$

Ứng suất nén cực đại dọc theo đường kính CD ở tâm đĩa: $\sigma_y = -\frac{6P}{\pi d}$

Ở các điểm cuối đường kính: $\sigma_y = 0$.

Bây giờ khảo sát trường hợp hai lực có độ lớn bằng nhau và ngược chiều tác động dọc theo dây cung AB (hình 4.30). Lại giả thiết hai sự phân bố hướng kính đơn giản từ A và B, ứng suất trên mặt phẳng tiếp tuyến với chu vi tại M được xác định bằng cách tác dụng hai trạng thái nén hướng kính $(2P/\pi)(\cos\theta/r)$ và $(2P/\pi)(\cos\theta_1/r_1)$ tác động lên hướng r và r_1 . Pháp tuyến MN với tiếp tuyến tại M là đường kính đĩa; do đó MAN và MBN là những góc vuông và các góc pháp tuyến MO hợp với r và r_1 là $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ và $\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)$. Các thành phần ứng suất pháp và tiếp của phân bố tại điểm biên M:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

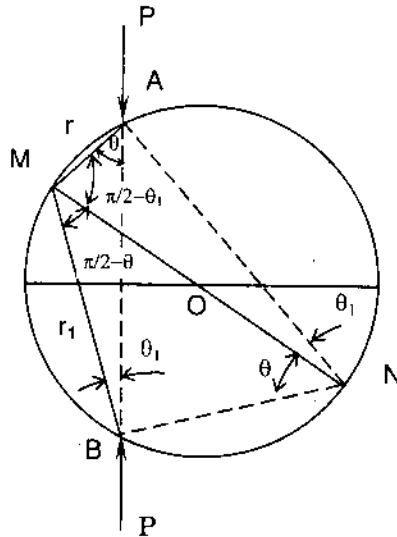
$$\begin{cases} \sigma = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) - \frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ \sigma = -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta \sin^2 \theta_1}{r} + \frac{\cos \theta_1 \sin^2 \theta}{r_1} \right) \\ \tau = -\frac{2P}{\pi} \left(\frac{\cos \theta}{r} \sin \theta_1 \cos \theta_1 + \frac{\cos \theta_1}{r_1} \sin \theta \cos \theta \right) \end{cases} \quad (c)$$

Ta có các quan hệ hình học:

$$r = d \sin \theta_1; \quad r_1 = d \sin \theta$$

Thay vào (c), ta thu được:

$$\sigma = -\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1); \quad \tau = 0 \quad (d)$$



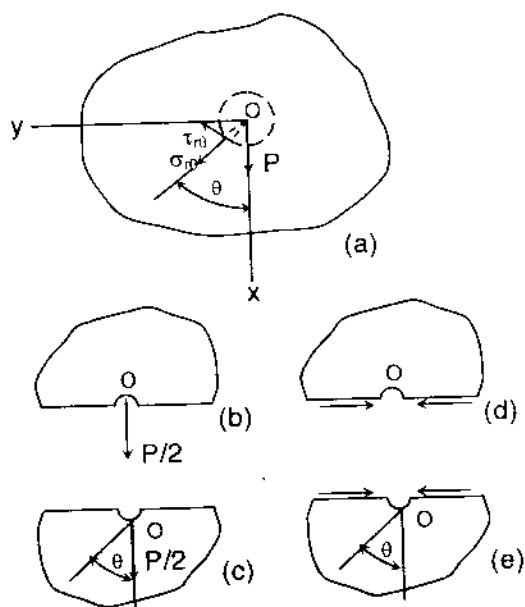
Hình 4.30

Từ hình 4.30, ta có thể thấy rằng $\sin(\theta + \theta_1) = \text{const}$ quanh biên. Do đó các lực nén phân bố đều có cường độ $\frac{2P}{\pi d} \sin(\theta + \theta_1)$ nên được tác động lên biên để duy trì sự phân bố ứng suất hướng kính đã giả thiết. Để thu được lời giải cho đĩa với biên không chịu nén đều ta cộng tác dụng lên

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

hai sự phân bố hướng kính ở trên trạng thái kéo đều với cường độ

$$\frac{2P}{pd} \sin(\theta + \theta_1).$$



Hình 4.31

4.16. Lực tác động ở một điểm của tấm vô hạn.

Trường hợp lực P tác động trong mặt phẳng giữa của tấm bán vô hạn, sự phân bố ứng suất có thể xác định được bằng cách cộng tác dụng các trường hợp mà ta đã có lời giải (hình 4.31). Tuy nhiên, ta không thể xây dựng lời giải bằng biện pháp cộng tác dụng đơn giản hai kết quả đối với tấm vô hạn như hình 4.31b và hình 4.31c. Mặc dù các chuyển vị đứng giống nhau trong cả hai trường hợp này, các chuyển vị ngang dọc theo biên thẳng thì khác nhau. Trong khi ở trường hợp hình 4.31b chuyển vị này có chiều rời xa điểm O , thì ở trường hợp hình 4.31c chúng có chiều hướng vào O . Độ lớn của các chuyển vị này trong cả hai trường hợp được tính từ (4.33):

$$\frac{1-\nu}{4E} P \quad (a)$$

Sự khác nhau về chuyển vị ngang có thể được loại trừ bằng cách tổ hợp các trường hợp 4.31d và 4.31e trong đó các lực cắt tác động dọc theo các

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

biên thẳng. Các chuyển vị đối với các trường hợp d và e có thể được tính theo bài toán uốn của thanh cong trong hình 4.7. Cho bán kính trong của thanh này tiến đến không và bán kính ngoài tăng vô hạn. Chuyển vị dọc theo biên thẳng của tấm theo hướng lực cắt tác động trên biên được tính theo đẳng thức (4.25):

$$\frac{D\pi}{E} \quad (b)$$

Hằng số D phải được điều chỉnh để làm cho chuyển vị gây ra từ (a) và (b) triệt tiêu:

$$\frac{D\pi}{E} = \frac{1-\nu}{4E}P \Rightarrow D = \frac{1-\nu}{4\pi}P \quad (c)$$

Với hiệu chỉnh này, kết quả của việc cộng tác dụng các trường hợp 4.31b, c, d, và e là tấm vô hạn chịu tác động tải tại một điểm (hình 4.31a).

Sự phân bố ứng suất trong tấm bây giờ được xác định bằng cách cộng tác dụng các ứng suất trong tấm bán vô hạn được tạo ra bởi lực pháp tuyến $P/2$ ở biên (xem mục 4.10) lên các ứng suất trong thanh cong chứa hằng số tích phân D. Chú ý sự khác nhau trong việc đo góc θ của hình 4.7 và hình 4.31 và dùng các công thức (4.24), các ứng suất trong thanh cong ứng với θ trong hình 4.31:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta = \frac{D \cos \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} = \frac{D \sin \theta}{r} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r} \end{cases}$$

Kết hợp các ứng suất này với những ứng suất (4.30) được tính đối với tải $\frac{P}{2}$, ta thu được sự phân bố ứng suất trong tấm vô hạn:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} - \frac{P \cos \theta}{\pi r} = -\frac{(3+\nu)}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \sigma_\theta = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \cos \theta}{r} \\ \tau_{r\theta} = \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{P \sin \theta}{r} \end{cases} \quad (4.37)$$

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

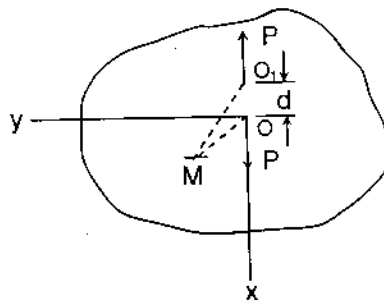
Tách điểm O ra khỏi tấm (hình 4.31a) bởi một phân tố hình trụ bán kính r, hình chiếu các lực tác động lên biên trụ của phân tố lên trục x và y:

$$X = 2 \int_0^\pi (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) r d\theta = P$$

$$Y = 2 \int_0^\pi (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) r d\theta = 0$$

Tức là, các lực tác động lên biên của phân tố hình trụ biểu thị tải P tác động tại điểm O. Các thành phần ứng suất trong hệ tọa độ *Descartes* được tìm từ (4.37):

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{P}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \left[-(3+\nu) + 2(1+\nu) \sin^2 \theta \right] \\ \sigma_\theta = \frac{P}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \left[1-\nu - 2(1+\nu) \sin^2 \theta \right] \\ \tau_{r\theta} = -\frac{P}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \left[1-\nu + 2(1+\nu) \cos^2 \theta \right] \end{cases} \quad (4.38)$$



Hình 4.32

Từ kết quả (4.38) cho trường hợp một lực tập trung, các kết quả cho các loại tải khác có thể được xác định bằng phương pháp cộng tác dụng. Thí dụ, xét trường hợp trong hình 4.32, trong đó hai lực cùng đường tác dụng, cùng trị số và ngược chiều tác động lên tấm vô hạn tại hai điểm O và O₁ cách nhau một khoảng rất nhỏ. Ứng suất của điểm M bất kỳ được tính bằng cách cộng tác dụng ứng suất được tạo bởi lực tại O với ứng suất được tạo bởi lực tại O₁. Khảo sát một phân tố tại M vuông góc với trục x và đặt σ_x là ứng suất pháp do lực tại O tạo trên phân tố, σ'_x là ứng suất pháp được tạo bởi hai lực:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\sigma'_x = \sigma_x - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d \right) = -d \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -d \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \sigma_x}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right)$$

Do đó các thành phần ứng suất đối với trường hợp hình 4.32 được xác định từ các quan hệ (4.38) bằng cách đạo hàm:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{dP}{4\pi r^2} \left[-(3+\nu) \cos^2 \theta + (1-\nu) \sin^2 \theta \right] + \\ \quad + \frac{dP}{4\pi r^2} \left[8(1+\nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \\ \sigma_y = \frac{dP}{4\pi r^2} \left[(1-\nu) \cos^2 \theta + (1+3\nu) \sin^2 \theta \right] - \\ \quad - \frac{dP}{4\pi r^2} \left[8(1+\nu) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \\ \tau_{xy} = \frac{dP}{4\pi r^2} \left[-(6+2\nu) + 8(1+\nu) \sin^2 \theta \right] \sin \theta \cos \theta \end{cases} \quad (4.39)$$

Kết quả (4.39) cho thấy rằng: các thành phần ứng suất tỉ lệ nghịch với bình phương bán kính r và có trị số nhỏ khi r rất lớn hơn d . Kết quả như thế phù hợp với nguyên lý *Saint - Venant* trong trường hợp hai lực cân bằng tác động ở hai vị trí rất gần nhau.

Bây giờ ta xét bài toán trong hình 4.33. Bài toán này được giải bằng cách cộng tác dụng hai trường ứng suất được cho bởi (4.39), tức là:

$$\begin{cases} \sigma_x = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \sigma_y = 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ \tau_{xy} = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2} \sin 2\theta \end{cases}$$

Trong tọa độ cực, trường ứng suất này có dạng:

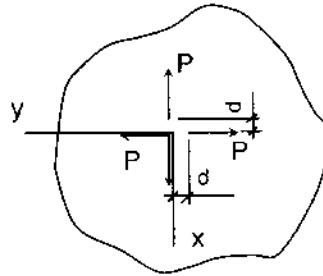
$$\sigma_r = -2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2}; \quad \sigma_\theta = 2(1-\nu) \frac{dP}{4\pi r^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.40)$$

Kết quả này phù hợp với kết quả (4.9) của hình trụ dày chịu tác động của áp lực nội nếu đường kính ngoài của hình trụ được lấy lớn vô cùng. Trong xu hướng tương tự, ta có thể tính kết quả đối với trường hợp trong hình 4.34a. Các thành phần ứng suất là:

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0; \tau_{r\theta} = -\frac{M}{2\pi r^2} \quad (4.41)$$

Cũng có thể xem trường ứng suất trên được tạo bởi ngẫu M tác động ở gốc (hình 4.34b).



Hình 4.33

4.17. Lời giải tổng quát của bài toán hai chiều trong tọa độ cực.

Theo kết quả tổng quát hóa của bài toán hai chiều trong tọa độ cực, hàm ứng suất tổng quát ϕ có dạng:

$$\phi = r^{\lambda+1} f(\theta) \quad (a)$$

với :

$$f(\theta) = C_1 \sin(\lambda+1)\theta + C_2 \cos(\lambda+1)\theta + C_3 \sin(\lambda-1)\theta + C_4 \cos(\lambda-1)\theta \quad (b)$$

trong đó C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số tùy ý.

Các thành phần ứng suất và chuyển vị (bỏ qua các chuyển vị cứng) được xác định:

$$\sigma_r = r^{\lambda-1} [f''(\theta) + (\lambda+1) f(\theta)] \quad (c)$$

$$\sigma_\theta = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda+1) f(\theta)] \quad (d)$$

$$\tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1} \lambda f'(\theta) \quad (e)$$

$$2Gu = r^\lambda [-(\lambda+1) f(\theta) + (1+\nu)^{-1} g'(\theta)] \quad (f)$$

$$2Gv = r^\lambda [-f'(\theta) + (1+\nu)^{-1} (\lambda+1) g(\theta)] \quad (g)$$

$$\text{với } g(\theta) = 4(\lambda-1)^{-1} [C_3 \cos(\lambda-1)\theta + C_4 \sin(\lambda-1)\theta] \quad (h)$$

và các thành phần chuyển vị trên ứng với ứng suất phẳng.

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Bây giờ ta khảo sát một ứng dụng của các kết quả trên đối với một miền dạng nêm được bao bởi các bán kính $\theta = \pm \alpha$, chúng không chịu tác động của tải, ta có:

$$\sigma_{\theta} = 0; \tau_{r\theta} = 0 \text{ tại } \theta = \pm \alpha \quad (i)$$

Nghĩa là:

$$f(\alpha) = 0; f(-\alpha) = 0; f'(-\alpha) = 0 \quad (j)$$

Theo (b), các điều kiện (j) trở thành bốn phương trình chứa bốn hằng số:

$$\begin{cases} C_1 \sin(\lambda + 1)\alpha + C_3 \sin(\lambda - 1)\alpha = 0 \\ (\lambda + 1)C_1 \cos(\lambda + 1)\alpha + (\lambda - 1)C_3 \cos(\lambda - 1)\alpha = 0 \end{cases} \quad (k)$$

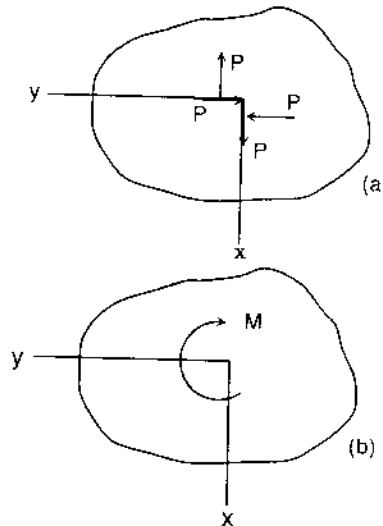
$$\begin{cases} C_2 \cos(\lambda + 1)\alpha + C_4 \cos(\lambda - 1)\alpha = 0 \\ (\lambda + 1)C_2 \sin(\lambda + 1)\alpha + (\lambda - 1)C_4 \sin(\lambda - 1)\alpha = 0 \end{cases} \quad (l)$$

Mỗi cặp phương trình là hệ hai phương trình tuyến tính thuần nhất, do đó nếu lấy λ bất kỳ, bốn hằng số sẽ bằng zero. Nhưng C_1, C_3 trong hệ (k) có thể khác không nếu định thức của nó bằng không:

$$(\lambda - 1)\sin(\lambda + 1)\alpha \cos(\lambda - 1)\alpha - (\lambda + 1)\sin(\lambda - 1)\alpha \cos(\lambda + 1)\alpha = 0$$

hay:

$$\lambda \sin 2\alpha - \sin 2\lambda \alpha = 0 \quad (m)$$



Hình 4.34

Chương 4. Bài toán hai chiều trong tọa độ cực

Nếu lấy λ thỏa (m), C_1 và C_3 có thể khác zero. Tỷ số C_3/C_1 được xác định bởi một trong hai phương trình (k), nhưng C_1 có thể được giữ như hằng số bất kỳ.

Tương tự, khảo sát hai phương trình (l), điều kiện để C_2, C_4 khác không là:

$$\lambda \sin 2\alpha + \sin 2\lambda\alpha = 0 \quad (n)$$

Khảo sát (m) và (n), rõ ràng chỉ có $\lambda = 0$ thỏa cả hai phương trình này, và điều này là vô nghĩa. Do đó chỉ có một phương trình được thỏa tức là chỉ có một cặp hằng số C_1, C_3 hoặc C_2, C_4 là khác không.

Lấy trường hợp (n) được thỏa, ta tính từ (l):

$$\frac{C_4}{C_2} = \frac{-\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos(\lambda-1)\alpha} \quad (o)$$

Hàm ứng suất trở thành:

$$\phi = r^{\lambda+1} C_2 \left[\cos(\lambda+1)\theta - \frac{\cos(\lambda+1)\alpha}{\cos(\lambda-1)\alpha} \cos(\lambda-1)\theta \right] \quad (p)$$

Có hàm phức như thế cho mỗi nghiệm của (n), tạo ra lời giải thực.

Khảo sát các nghiệm của (n) cho thấy đối với các miền dạng nêm, tức là $2\alpha < \pi$, có một tập hợp vô hạn các nghiệm có phần thực dương lớn hơn đơn vị. Những hàm ứng suất tương ứng tạo ra ứng suất và chuyển vị được xác định bởi các đẳng thức từ (c) đến (h). Nhưng nếu λ là một nghiệm của (n), thì $-\lambda$ cũng là một nghiệm. Do đó có bộ nghiệm khác có phần thực âm. Điều này làm cho cả ứng suất và chuyển vị tăng không giới hạn khi r tiến đến không. Do đó đỉnh nêm không thể được xem là không chịu tải, mặt dù hợp lực và ngẫu bằng không. Đối với trường hợp phản đối xứng bị chi phối bởi phương trình (m) kết luận cũng tương tự. Đối với $2\alpha > \pi$, tức là các tấm có rãnh, các thí nghiệm của (n) thay đổi đặc tính. Sự thay đổi trong các nghiệm của (m) xảy ra ở góc $2\alpha = 257^\circ, 4$.

Các kết quả này cũng đã được tìm ra đối với các điều kiện khác trên hai cạnh $\theta = \pm \alpha$. Trường hợp hai cạnh này được ngàm chặt ($u = v = 0$), các kết luận đối với miền dạng nêm ($2\alpha > \pi$) thì tương tự. Trường hợp một cạnh được ngàm, cạnh còn lại tự do ($\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$), có các hàm ứng suất làm cho chuyển vị tiến đến zero với r , nhưng ứng suất tăng không giới hạn, khi $2\alpha > 63^\circ$ (đối với $\nu = 0,3$).

Chương 5

PHÂN TÍCH ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

5.1. Giới thiệu.

5.2. Các ứng suất chính.

5.3. *Ellipsoid* ứng suất và bề mặt định hướng ứng suất.

5.4. Xác định các ứng suất chính.

5.5. Các bất biến ứng suất.

5.6. Xác định ứng suất tiếp cực đại.

5.7. Biến dạng đồng nhất.

5.8. Biến dạng tại một điểm.

5.9. Phương chính của biến dạng.

5.10. Hiện tượng xoay

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

5.1. Giới thiệu.

Chương này phân tích dạng tổng quát nhất của trạng thái ứng suất và biến dạng mà không quan tâm đến mối quan hệ giữa hai đối tượng này. Các kết quả thu được có thể áp dụng cho ứng suất và biến dạng xảy ra trong một môi trường liên tục bất kỳ như một chất lỏng nhớt hay một vật rắn dẻo.

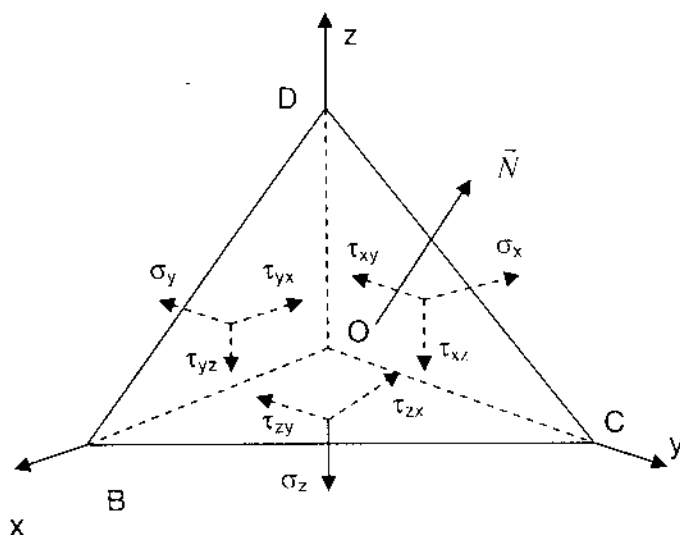
Khảo sát một trạng thái ứng suất khối, các ứng suất tác động lên sáu mặt của một phân tố khối được mô tả bởi sáu thành phần ứng suất độc lập cấu thành một *tensor* ứng suất:

$$T_{\sigma} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Trong đó, ba thành phần ứng suất $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ được gọi là thành phần ứng suất pháp. Còn các thành phần ứng suất còn lại được gọi là các thành phần ứng suất tiếp:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (5.2)$$

Hay nói cách khác, *tensor* ứng suất ở phương trình (5.1) có tính đối xứng.



Hình 5.1

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Trạng thái ứng suất tại một điểm được định nghĩa là tập hợp tất cả các ứng suất tác động lên mọi mặt nghiêng đi qua điểm đó. Tuy nhiên, các thành phần này không độc lập mà phụ thuộc nhau. Nếu biết được *tensor* ứng suất tại một điểm, tức là biết được sáu thành phần ứng suất độc lập trên ba bề mặt vi phân trực giao nhau tại điểm ấy, ta có thể xác định ứng suất trên một mặt nghiêng bất kỳ đi qua điểm đó từ các phương trình cân bằng tĩnh học. Do đó, trạng thái ứng suất tại một điểm được xác định bởi *tensor* ứng suất tại điểm đó.

Xét điểm O thuộc vật thể đang chịu tải, có trạng thái ứng suất đã được xác định bởi *tensor* ứng suất trong hệ trục Oxyz (hình 5.1). Để xác định ứng suất trên một mặt nghiêng bất kỳ qua O, ta dựng một mặt phẳng BCD song song với nó và cách O một khoảng cách nhỏ. Mặt nghiêng BCD cùng với ba mặt phẳng tọa độ hình thành một thể tích vi phân tứ diện BCDO. Do ứng suất thay đổi một cách liên tục trong thể tích vật thể, ứng suất tác động lên mặt phẳng BCD sẽ xấp xỉ với ứng suất trên mặt phẳng song song qua O khi phân tố thể tích tứ diện là vô cùng bé.

Thiết lập các điều kiện cân bằng của phân tố tứ diện, các lực thể tích có thể được bỏ qua. Vì phân tố rất bé, sự biến thiên của các ứng suất trên các mặt là không đáng kể nên giả sử ứng suất được phân bố đều. Các lực tác động lên phân tố tứ diện này được xác định bằng cách nhân các thành phần ứng suất với diện tích các mặt mà chúng tác động. Gọi A là diện tích mặt BCD, ba diện tích còn lại thu được do chiếu diện tích A lên ba mặt phẳng tọa độ. Đặt N là pháp tuyến đơn vị của mặt phẳng BCD, ta có:

$$\cos(Nx) = l; \quad \cos(Ny) = m; \quad \cos(Nz) = n \quad (5.3)$$

Ba diện tích: OCD, OBC, OBD lần lượt là:

$$Al; \quad Am; \quad An \quad (5.4)$$

Đặt $\vec{p}(X,Y,Z)$ là *vector* ứng suất trên mặt phẳng BCD.

Ba phương trình cân bằng lực trên ba phương x, y, z:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= AX - Al\sigma_x - Am\tau_{xy} - An\tau_{xz} = 0 \\ \sum F_y &= AY - Al\tau_{xy} - Am\sigma_y - An\tau_{yz} = 0 \\ \sum F_z &= AZ - Al\tau_{xz} - Am\tau_{yz} - An\sigma_z = 0 \end{aligned}$$

Hay:

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

$$\begin{aligned}X &= l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} \\Y &= l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} \\Z &= l\tau_{zx} + m\tau_{zy} + n\sigma_z\end{aligned}\quad (5.5)$$

Các kết quả thu được của (5.5) chứng tỏ rằng các ứng suất trên mặt nghiêng bất kỳ đi qua điểm đang xét hoàn toàn xác định nếu biết *tensor* ứng suất tại điểm đó. Hay trạng thái ứng suất của một điểm sẽ hoàn toàn xác định nếu biết sáu thành phần độc lập của *tensor* ứng suất tại điểm ấy.

5.2. Các ứng suất chính.

Phân *vector* ứng suất trên mặt phẳng nghiêng BCD thành ứng suất pháp σ_n và ứng suất tiếp τ_n : $\vec{p}(\sigma_n, \tau_n)$

Ta có:

$$\sigma_n = Xl + Ym + Zn$$

Thay X, Y, Z từ (5.5):

$$\sigma_n = Xl^2 + Ym^2 + Zn^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{xz}ln + 2\tau_{yz}nm \quad (5.6)$$

Để khảo sát sự biến thiên của σ_n theo hướng của pháp tuyến đơn vị $\vec{N}$ về mặt hình học, ta dựng một *vector* $\vec{r}$ cùng phương, chiều với $\vec{N}$ và có độ lớn:

$$\vec{r} = \frac{k}{\sqrt{\sigma_n}} \quad (5.7)$$

với k là hệ số hằng. Các tọa độ của *vector* $\vec{r}(x, y, z)$:

$$x=lr; \quad y=mr; \quad z=nr \quad (5.8)$$

Từ (5.7) ta có:

$$\sigma_n = \pm \frac{k^2}{r^2} \quad (5.9)$$

Thay (5.9) và l, m, n từ (5.8) vào (5.6) ta có:

$$\pm k^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy}xy + 2\tau_{xz}xz + 2\tau_{yz}zy \quad (5.10)$$

Khi mặt BCD quay quanh điểm O, ngọn của *vector* $\vec{r}$ sẽ nằm trên bề mặt bậc hai với phương trình (5.10). Dấu cộng hay trừ trong (5.9) và (5.10) tùy theo mặt BCD chịu kéo ($\sigma_n > 0$) hay nén ($\sigma_n < 0$). Khi cả ba ứng suất chính cùng dấu, chỉ một dấu xảy ra và bề mặt bậc hai là một

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

ellipsoid. Khi ba ứng suất chính trái dấu, bề mặt bậc hai gồm hai phương trình: (5.9) và (5.10) là một *hyperboloid* hai tầng và một *hyperboloid* một tầng, với một mặt nón tiệm cận.

Toán học đã chứng minh rằng luôn tìm được hệ trục x, y, z sao cho các số hạng chứa tích các tọa độ khác nhau trong phương trình (5.10) bị triệt tiêu. Điều này có nghĩa là ta luôn tìm được ba mặt phẳng vuông góc với nhau sao cho $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, hay trên ba mặt này *vector* ứng suất tác động vuông góc với bề mặt. Ba ứng suất này được gọi là ba ứng suất chính của điểm, ba mặt chịu tác động của ba ứng suất chính gọi là ba mặt chính, ba pháp tuyến của ba mặt chính gọi là ba phương chính. Trạng thái ứng suất của điểm hoàn toàn xác định nếu biết được ba phương chính và ba ứng suất chính.

5.3. Ellipsoid ứng suất và bề mặt định hướng ứng suất.

Nếu hệ trục (xyz) được chọn trùng với ba phương chính thì việc tính các ứng suất trên các mặt nghiêng trở nên rất đơn giản do các thành phần ứng suất tiếp:

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

Lúc này, phương trình (5.5) có dạng:

$$\begin{aligned} X &= l\sigma_x \\ Y &= m\sigma_y \\ Z &= n\sigma_z \end{aligned} \quad (5.11)$$

Do:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \text{ nên:}$$

$$\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_z^2} = 1 \quad (5.12)$$

Nếu *vector* ứng suất $\vec{p}(X, Y, Z)$ của một mặt phẳng nghiêng qua O được đặt tại O , thì theo (5.12) ngọn các *vector* này sẽ nằm trên bề mặt *ellipsoid*. *Ellipsoid* này được gọi là *ellipsoid* ứng suất. Các bán trục của nó biểu thị các ứng suất của điểm.

Ký hiệu ba ứng suất chính: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, do đó:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3$$

Trường hợp hai trong số ba ứng suất chính có trị số bằng nhau, *ellipsoid* ứng suất trở thành một *ellipsoid* tròn xoay. Khi hai ứng suất có giá trị bằng nhau này cùng dấu, *vector* ứng suất tác động trên các mặt phẳng đi

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

qua điểm khảo sát và chứa trục đối xứng của *ellipsoid* sẽ có trị số bằng nhau và vuông góc với mặt phẳng tác động. Trong trường hợp này, các ứng suất tác động lên hai mặt phẳng vuông góc chứa trục đối xứng được xem là những ứng suất chính. Trường hợp cả ba ứng suất chính bằng nhau về trị số và cùng dấu, *ellipsoid* ứng suất trở thành bề mặt cầu và ba phương vuông góc bất kỳ có thể xem là ba phương chính. Khi một trong ba ứng suất chính bằng không, *ellipsoid* ứng suất suy biến trở thành diện tích *ellipsoid* và *vector* ứng suất tác động lên tất cả các mặt phẳng nghiêng đi qua điểm sẽ đồng phẳng. Trạng thái ứng suất được gọi là ứng suất phẳng. Khi có hai ứng suất chính bằng không, trạng thái ứng suất này được gọi là ứng suất đơn.

Mỗi *vector* bán kính của *ellipsoid* diễn tả một tỷ lệ tương ứng, ứng suất tác động lên một trong các mặt phẳng đi qua tâm của *ellipsoid*. Để tìm mặt phẳng này ta dùng *ellipsoid* ứng suất ở phương trình (5.12) cùng với bề mặt định hướng ứng suất:

$$\frac{x^2}{\sigma_x} + \frac{y^2}{\sigma_y} + \frac{z^2}{\sigma_z} = 1 \quad (5.13)$$

Ứng suất được diễn tả bởi một *vector* bán kính của *ellipsoid* ứng suất tác động lên mặt phẳng song song với với mặt phẳng tiếp xúc của bề mặt định hướng ứng suất tại giao điểm giữa bề mặt định hướng ứng suất với *vector* bán kính. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với bề mặt định hướng ứng suất (5.13) ở điểm bất kì $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là:

$$\frac{xx_0}{\sigma_x} + \frac{yy_0}{\sigma_y} + \frac{zz_0}{\sigma_z} = 1 \quad (5.14)$$

Gọi h là chiều cao từ gốc của hệ trục đến mặt phẳng tiếp xúc, và l, m, n là các *cosine* chỉ phương của đường thẳng vuông góc này, phương trình mặt phẳng tiếp xúc có thể viết dưới dạng:

$$lx + my + nz = h \quad (5.15)$$

So sánh (5.14) và (5.15) ta có:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{x_0 h}{l} \\ \sigma_y &= \frac{y_0 h}{m} \\ \sigma_z &= \frac{z_0 h}{n} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Thay các giá trị này vào (5.11) ta có:

$$X = x_0 h; \quad Y = y_0 h; \quad Z = z_0 h \quad (5.17)$$

Điều này cho thấy các thành phần *vector* ứng suất tác động lên mặt phẳng với các *cosine* chỉ phương l, m, n tỉ lệ với các tọa độ x_0, y_0, z_0 .

5.4. Xác định các ứng suất chính.

Đối với trạng thái ứng suất đã xác định, tức là đã biết *tensor* ứng suất hoặc biết các thành phần ứng suất trên ba mặt phẳng tọa độ, ta có thể xác định phương và độ lớn của các ứng suất chính bằng cách dựa vào tính chất vuông góc của các ứng suất chính với các mặt chính mà chúng tác động. Gọi l, m, n là các *cosine* của mặt chính và δ là độ lớn của ứng suất chính tác dụng lên mặt này. Các thành phần tọa độ của $\delta(X, Y, Z)$:

$$X = \delta l; \quad Y = \delta m; \quad Z = \delta n$$

Thay vào (5.5) ta có:

$$\begin{cases} (\delta - \sigma_x)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n = 0 \\ -\tau_{xy}l + (\delta - \sigma_y)m - \tau_{yz}n = 0 \\ -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (\delta - \sigma_z)n = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với các ẩn là l, m, n . Hệ (5.18) có lời giải khác không khi và chỉ khi định thức của hệ phương trình này bằng không. Điều này dẫn đến phương trình bậc ba như sau:

$$\begin{aligned} &\delta^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\delta^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2)\delta \\ &- (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Hay:

$$\delta^3 - I_1\delta^2 - I_2\delta - I_3 = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{với: } \begin{cases} I_1 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ I_2 = (-\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \\ I_3 = (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) \end{cases}$$

là ba bất biến của *tensor* ứng suất.

Ba nghiệm của (5.20) là ba ứng suất chính $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Thay từng ứng suất chính δ_i vào (5.18) và kết hợp với $l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$ ta sẽ lần lượt tìm được ba phương chính i ($i = 1, 2, 3$).

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

5.5. Các bất biến ứng suất.

Đối với một trạng thái ứng suất đã cho, tức là ba phương chính và ba ứng suất chính đã xác định, ta có thể biểu diễn chúng trong hệ trục Oxyz bất kỳ. Hay nói cách khác, ba nghiệm của (5.20) sẽ không phụ thuộc vào hệ trục Oxyz được chọn. Do đó, ba hệ số của (5.20) sẽ không phụ thuộc vào hệ trục được chọn và được gọi là ba bất biến của *tensor* ứng suất. Nếu chọn ba phương chính làm hệ trục thì ba bất biến:

$$\begin{cases} I_1 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\ I_2 = (-\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_x\sigma_z + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \\ I_2 = -\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_3 - \delta_1\delta_3 \\ I_3 = (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) \\ I_3 = \delta_1\delta_2\delta_3 \end{cases} \quad (5.21)$$

Từ (5.21) có thể tìm thêm một bất biến:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 2I_1^2 - 6I_2 \quad (5.22)$$

5.6. Xác định ứng suất tiếp cực đại.

Lấy x, y, z là ba phương chính và l, m, n là ba *cosine* chỉ phương cho một mặt nghiêng. Từ (5.11), bình phương độ lớn của *vector* ứng suất trên mặt nghiêng:

$$\delta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 \quad (5.23)$$

Thành phần ứng suất pháp và tiếp trên mặt nghiêng được tính theo (5.9):

$$\sigma_n^2 = (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad (5.24)$$

$$\tau^2 = \delta^2 - \sigma_n^2 = \sigma_x^2 l^2 + \sigma_y^2 m^2 + \sigma_z^2 n^2 - (\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2)^2 \quad (5.25)$$

Điều kiện của pháp *vector* đơn vị: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Ta sẽ xác định điều kiện của l và m để ứng suất tiếp $|\tau|$ cực đại.

Thay $n^2 = 1 - l^2 - m^2$ vào (5.25), đạo hàm riêng phương trình thu được lần lượt theo l và m rồi cho hai đạo hàm này lần lượt bằng không sẽ thu được hai phương trình xác định phương của mặt nghiêng có $|\tau|$ cực trị (max hay min).

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

$$\begin{cases} l \left[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \right] = 0 \\ m \left[(\sigma_x - \sigma_z)l^2 + (\sigma_y - \sigma_z)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z) \right] = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

Một nghiệm của hệ hai phương trình này có thể nhận được bằng cách lấy $l = m = 0$; $n = \pm 1$. Cũng có thể tìm nghiệm khác không (m và n không đồng thời bằng không). Thí dụ lấy $l = 0$ ta tìm được $m = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, từ phương trình thứ hai của (5.26) và lấy $m = 0$ ta tìm được $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ từ phương trình thứ nhất của (5.26). Nói chung trong trường hợp này (xác định m và l), sẽ không có nghiệm m và l đồng thời khác không.

Lập lại các tính toán trên bằng cách thay thế lần lượt $m^2 = 1 - l^2 - n^2$ và $l^2 = 1 - m^2 - n^2$ vào (5.25), ta thu được các phương trình có $|\tau|_{\max}$ và $\min$ dưới dạng bảng 5.1.

Bảng 5.1. Phương các mặt phẳng có $|\tau|_{\max}$ và $|\tau|_{\min}$

l	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
m	0	± 1	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
n	± 1	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Ba cột đầu cho ba mặt phẳng trùng với ba mặt phẳng tọa độ hay ba mặt chính. Trên ba mặt này $\tau = 0$, nghĩa là $|\tau|_{\min} = 0$. Ba cột còn lại cho các mặt nghiêng song song với một phương chính và nghiêng đều (góc 45°) với hai phương chính còn lại. Thay các *cosine* chỉ phương của các mặt phẳng này vào (5.25), ta thu được τ trên các mặt phẳng này:

$$\tau = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} (\sigma_y - \sigma_z); \quad \tau = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} (\sigma_x - \sigma_z); \quad \tau = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} (\sigma_x - \sigma_y) \quad (5.27)$$

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Điều này cho thấy rằng $\tau_{\max}$ tác động trên mặt phẳng song song với phương chính thứ hai và nghiêng đều với hai phương chính thứ nhất và thứ ba.

$$|\tau|_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (5.28)$$

Nếu ba trục tọa độ x, y, z trong hình 5.1 trùng với ba phương chính, và nếu $OB = OC = OD$, thì mặt nghiêng BCD sẽ nghiêng đều với ba phương chính và pháp tuyến đơn vị $\vec{N}$ có các *cosine* chỉ phương:

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5.29)$$

Trong không gian ba chiều của O ta có tám mặt nghiêng như thế tạo thành một bát diện đều có các đỉnh trên ba trục tọa độ, do đó tám mặt nghiêng này được gọi là các bát diện. Ứng suất pháp σ_n trên các bát diện được tính từ (5.6):

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (5.30)$$

Ứng suất σ_n cũng được gọi là ứng suất trung bình hay ứng suất thủy tĩnh. Ứng suất tiếp trên bát diện được tính từ (5.25):

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{1}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{9}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \\ \tau^2 &= \frac{1}{9}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] \\ \tau^2 &= \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ \tau^2 &= \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_n)^2 + (\sigma_2 - \sigma_n)^2 + (\sigma_3 - \sigma_n)^2] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ứng suất tiếp này được gọi là ứng suất tiếp bát diện và thường đề cập đến trong lý thuyết dẻo.

5.7. Biến dạng đồng nhất.

Giáo trình giới hạn chỉ khảo sát biến dạng nhỏ, thường gặp trong những kết cấu kỹ thuật. *Vector* chuyển vị nhỏ của điểm thường được phân ra ba thành phần:

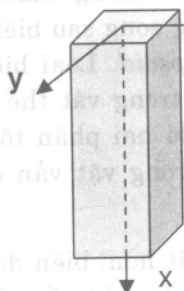
Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

$$\vec{d} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (5.32)$$

Giả sử ba thành phần của chuyển vị nhỏ: u , v , w là các đại lượng bé và biến thiên liên tục trong toàn thể tích vật thể.

Thí dụ khảo sát thí nghiệm kéo đơn trục một thanh lăng trụ được ngâm ở đầu trên (hình 5.2). Gọi ε là lượng giãn dài đơn vị (biến dạng dài) của thanh theo phương x . Các thành phần chuyển vị của một điểm $M(x, y, z)$:

$$u = \varepsilon x; v = -v\varepsilon y; w = -v\varepsilon z \quad (5.33)$$



Hình 5.2

Gọi $M'(x', y', z')$ là vị trí của M sau biến dạng:

$$\begin{cases} x' = x + u = x(1 + \varepsilon) \\ y' = y + v = y(1 - v\varepsilon) \\ z' = z + w = z(1 + v\varepsilon) \end{cases} \quad (5.34)$$

Nếu khảo sát một mặt phẳng trong thanh trước biến dạng và có phương trình:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (5.35)$$

Những điểm thuộc mặt phẳng này sẽ vẫn đồng phẳng sau biến dạng. Phương trình của mặt phẳng mới được thiết lập bằng cách thay x , y , z trong (5.35) từ (5.34). Có thể dễ dàng chứng minh rằng những mặt phẳng song song trước biến dạng vẫn tiếp tục song song sau biến dạng và tương tự cho các đường thẳng song song. Quan sát một mặt cầu trước biến dạng có tâm tại gốc tọa độ được cho bởi phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (5.36)$$

Ảnh của bề mặt này sau biến dạng được tìm bằng cách thay x , y , z từ (5.34) vào (5.36):

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

$$\frac{x'^2}{r^2(1+\varepsilon)^2} + \frac{y'^2}{r^2(1-\nu\varepsilon)^2} + \frac{z'^2}{r^2(1-\nu\varepsilon)^2} = 1 \quad (5.37)$$

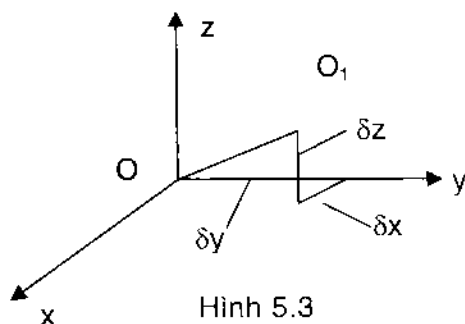
Điều này cho thấy rằng một mặt cầu bán kính r sẽ biến dạng thành một *ellipsoid* với các bán trục $r(1+\varepsilon)$, $r(1-\nu\varepsilon)$, $r(1-\nu\varepsilon)$.

Thí nghiệm kéo đơn trục ở trên chỉ giới thiệu một trường hợp riêng của một loại biến dạng tổng quát hơn có các thành phần chuyển vị u , v , w là các hàm tuyến tính của các tọa độ. Lập luận tương tự như trên, có thể chứng tỏ rằng loại biến dạng này có tất cả những đặc tính đã tìm thấy cho trường hợp kéo đơn trục: các đường thẳng song song và các mặt phẳng song song vẫn duy trì song song sau biến dạng, một mặt cầu sau khi biến dạng sẽ thành một *ellipsoid*. Loại biến dạng này được gọi là biến dạng đồng nhất. Mọi điểm trong vật thể biến dạng có biến dạng theo một phương như nhau. Do đó hai phân tố đồng dạng hình học và định hướng tương tự nhau bên trong vật vẫn đồng dạng hình học sau biến dạng.

Trong những trường hợp tổng quát hơn, biến dạng biến thiên trong thể tích của vật thể. Thí dụ, khi một dầm bị uốn, độ giãn dài và co rút của các thớ dọc phụ thuộc vào khoảng cách của chúng với mặt trung hòa. Biến dạng trượt trong các phân tố của một thanh tròn chịu xoắn thì tỉ lệ với khoảng cách của chúng với trục của thanh. Trong những trường hợp biến dạng không đồng nhất như thế, cần thiết phải tính lượng biến dạng trong vùng lân cận của điểm.

5.8. Biến dạng tại một điểm.

Xét một phân tố thẳng nhỏ OO_1 có chiều dài r , với các *cosine* chỉ phương là l , m , n . Các hình chiếu của phân tố này lên các trục tọa độ là δx , δy , δz (hình 5.3).



Hình 5.3

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

$$\begin{cases} \delta x = r l \\ \delta y = r m \\ \delta z = r n \end{cases} \quad (5.38)$$

Chúng cũng chính là tọa độ của điểm $O_1(\delta x, \delta y, \delta z)$.

Gọi u, v, w là ba thành phần chuyển vị của điểm O trong quá trình biến dạng thì các thành phần chuyển vị của điểm lân cận O_1 có thể được xác định theo:

$$\begin{cases} u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{cases} \quad (5.39)$$

Vì O_1 rất gần với O nên $\delta x, \delta y, \delta z$ có trị số nhỏ và có thể bỏ qua các số hạng tích của các đại lượng này là các vô cùng bé bậc cao. Sau biến dạng, các tọa độ của O_1 như phương trình (5.40). Những tọa độ này là những hàm tuyến tính của các tọa độ ban đầu $\delta x, \delta y, \delta z$; do đó biến dạng của một phân tử vô cùng bé trong vật thể tại O có thể được xem là biến dạng đồng nhất.

$$\begin{cases} \delta x + u_1 - u = \delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ \delta y + v_1 - v = \delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ \delta z + w_1 - w = \delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{cases} \quad (5.40)$$

Bây giờ xét độ giãn dài của phần tử r do biến dạng của vật thể. Bình phương chiều dài của phân tử này sau biến dạng bằng với tổng bình phương các tọa độ. Do đó, nếu gọi ϵ là độ giãn dài đơn vị của phân tử, ta có:

$$\begin{aligned} (r + \epsilon r)^2 &= \left(\delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \right)^2 + \left(\delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \right)^2 \\ &\quad + \left(\delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \right)^2 \end{aligned}$$

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Đơn giản hai vế cho r^2 , ta có:

$$(1 + \varepsilon)^2 = \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 + \left[l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \quad (5.41)$$

Chú ý rằng ε và các đạo hàm riêng $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial w}{\partial z}$ là các đại lượng bé do đó bình phương và tích các đại lượng này có thể được bỏ qua. Mặt khác, ta cũng có $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Phương trình (5.41) có thể viết:

$$\varepsilon = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (5.42)$$

Đặt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$$

Ý nghĩa vật lý của các đại lượng này có thể được diễn giải: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ là các biến dạng dài theo các phương x, y, z và $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ là ba biến dạng trượt (sự thay đổi góc vuông, biến dạng góc) trong các mặt phẳng xy, xz, yz . Lượng giãn dài của phân tố thẳng bất kỳ qua gốc O có thể tính theo:

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{xy} ln + \gamma_{yz} mn \quad (5.44)$$

Các thông số trong (5.43) được gọi là sáu thành phần biến dạng của điểm O và chúng cấu thành khái niệm biến dạng của điểm O dưới dạng *tensor* biến dạng như sau:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Trong trường hợp riêng của biến dạng đồng nhất, các thành phần chuyển vị u, v, w là các hàm tuyến tính của các tọa độ, và từ (5.43) sáu thành phần biến dạng là hằng số trong toàn thể tích của vật thể, nghĩa là, trong trường hợp biến dạng đồng nhất mọi điểm trong vật thể có biến dạng giống nhau.

Trong việc khảo sát biến dạng quanh điểm O , đôi khi cần biết sự thay đổi giữa hai phân tử phẳng qua O . Dùng các phương trình (5.40) và (5.38) và xem ε là đại lượng bé, *cosine* chỉ phương của phần tử r (hình 5.3) sau biến dạng:

$$\begin{cases} l_1 = \frac{\delta x + u_1 - u}{r(1+\varepsilon)} = l(1-\varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x}) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 = \frac{\delta y + v_1 - v}{r(1+\varepsilon)} = l \frac{\partial v}{\partial x} + m(1-\varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y}) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 = \frac{\delta z + w_1 - w}{r(1+\varepsilon)} = l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n(1-\varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z}) \end{cases} \quad (5.46)$$

Xét một phần tử khác r' qua cùng điểm O với các *cosine* chỉ phương l', m', n' . Những độ lớn của các *cosine* này, sau biến dạng, được cho bởi các phương trình tương tự như (5.46). *Cosine* của góc giữa hai phần tử (đoạn thẳng) sau biến dạng:

$$\cos(rr') = l_1 l'_1 + m_1 m'_1 + n_1 n'_1$$

Các biến dạng dài theo phương r và r' là ε và ε' , chúng có trị số bé. Dùng các phương trình (5.46), ta tìm được:

$$\begin{aligned} \cos(rr') = & (ll' + mm' + nn')(1 - \varepsilon - \varepsilon') + 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \\ & + \gamma_{yz}(mn' + m'n) + \gamma_{xz}(nl' + n'l) + \gamma_{xy}(lm' + l'm) \end{aligned} \quad (5.47a)$$

Nếu hai phương r và r' vuông góc với nhau, ta có:

$$ll' + mm' + nn' = 0 \quad (5.47b)$$

và phương trình (5.47) là biến dạng trượt giữa hai hướng này.

5.9. Phương chính của biến dạng.

Để có sự giải tích hình học về sự biến thiên của biến dạng tại một điểm, ta đặt theo phương của phần tử thẳng OO_1 một *vector* bán kính có độ lớn:

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

$$R = \frac{k}{\sqrt{|\epsilon|}} \quad (5.48)$$

Tương tự như mục 5.2, có thể thấy rằng các ngọn của các *vector* này sẽ nằm trên bề mặt có phương trình:

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 + \gamma_{xy} xy + \gamma_{xz} xz + \gamma_{yz} yz \quad (5.49)$$

hay:

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 + 2\epsilon_{xy} xy + 2\epsilon_{xz} xz + 2\epsilon_{yz} zy$$

Hình dạng và hướng của bề mặt này được xác định hoàn toàn bởi trạng thái biến dạng của điểm và phụ thuộc vào hệ tọa độ đã chọn. Về phương diện toán học, ta luôn có thể chọn hệ trục vuông góc sao cho các số hạng của tích các tọa độ không tồn tại, tức là, biến dạng trượt đối với các phương đó bằng không. Các phương này còn gọi là các phương chính của biến dạng, các mặt phẳng hình thành từ các phương chính này được gọi là các mặt chính của biến dạng và các biến dạng theo các phương chính được gọi là biến dạng chính. Rõ ràng các trục chính của biến dạng vẫn vuông góc với nhau sau biến dạng, và một hình hộp có các mặt song song với những mặt chính sẽ vẫn là hình hộp sau biến dạng. Nói chung nó sẽ trải qua một phép xoay nhỏ.

Nếu chọn x, y, z là các phương chính của biến dạng, (5.49) sẽ có dạng:

$$\pm k^2 = \epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 \quad (5.50)$$

Trong trường hợp này biến dạng dài theo phương của phần tử thẳng với các *cosine* chỉ phương l, m, n :

$$\epsilon = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 \quad (5.51)$$

Và biến dạng trượt tương ứng với hai phương vuông góc r và r' theo (5.47a) và (5.47b):

$$\gamma_{rr'} \approx \cos(rr') = 2(\epsilon_x ll' + \epsilon_y mm' + \epsilon_z nn') \quad (5.52)$$

Do đó có thể thấy rằng biến dạng ở một điểm được xác định hoàn toàn nếu biết ba phương chính của biến dạng và độ lớn của các biến dạng (dài) chính. Việc xác định các phương chính biến dạng và các biến dạng chính có thể tiến hành như mục 5.4. Tổng $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ là hằng số đối với việc chọn trục tọa độ. Tổng này có ý nghĩa vật lý là sự thay đổi thể tích đơn vị (biến dạng thể tích) do biến dạng tại điểm khảo sát.

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

5.10. Hiện tượng xoay.

Nói chung trong quá trình biến dạng của vật, một phần tử bất kỳ bị thay đổi về hình dáng, dịch chuyển tịnh tiến và xoay. Vì biến dạng trượt, các mép cạnh không xoay như nhau, và cần xác định mép xoay của phần tử. Một phần tử hình hộp có thể được làm biến đổi đến hình dáng, vị trí và hướng cuối cùng theo ba bước:

- Các thành phần biến dạng $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ tác động lên phần tử sẽ được định hướng sao cho các phương biến dạng chính không xoay.
- Phần tử bị dịch chuyển tịnh tiến cho tâm của nó đến vị trí cuối.
- Phần tử được xoay đến trạng thái cuối.

Phép xoay trong bước 3 là phép xoay trong các phương biến dạng chính và do đó sẽ không phụ thuộc vào việc chọn hệ trục tọa độ. Phép xoay này sẽ được xác định khi các thành phần chuyển vị của điểm u, v, w đã cho. Nói cách khác, phép xoay này rõ ràng độc lập với các thành phần biến dạng điểm.

Do chuyển vị tịnh tiến của cả phần tử OO_1 không gây ra biến dạng, ta chỉ khảo sát sự chuyển vị của điểm O_1 đối với điểm tâm O của phần tử. Chuyển động tương đối này được xác định theo (5.39):

$$\begin{cases} u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z \\ v_1 - v = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \\ w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial x} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \delta z \end{cases} \quad (5.53)$$

Ký hiệu:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \omega_x; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \omega_y; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_z \quad (5.54)$$

Chú ý rằng $\frac{\partial v}{\partial x}$ và $-\frac{\partial u}{\partial y}$ trong biểu thức ω_z là sự xoay theo chiều kim đồng hồ của các phần tử thẳng $O'A', O'B'$ từ vị trí ban đầu OA, OB . Do đó ω_z là giá trị trung bình của các phép xoay này trong mặt phẳng xy , và ω_x, ω_y có những ý nghĩa tương tự trong mặt phẳng yz và xz .

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Các đẳng thức trong (5.53) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\begin{cases} u_1 - u = \varepsilon_x \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta y + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \delta z - \omega_z \delta y + \omega_y \delta z \\ v_1 - v = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \delta x + \varepsilon_y \delta y + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \delta z - \omega_x \delta z + \omega_z \delta x \\ w_1 - w = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \delta x + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \delta y + \varepsilon_z \delta z - \omega_y \delta x + \omega_x \delta y \end{cases} \quad (5.55)$$

Các công thức (5.55) diễn giải chuyển vị tương đối thành hai phần: một phần chỉ phụ thuộc vào các thành phần biến dạng, phần còn lại chỉ phụ thuộc vào các đại lượng $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Bây giờ chúng ta có thể chứng tỏ rằng $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ là thành phần của các phép xoay 3. Khảo sát bề mặt có phương trình (5.49). Bình phương bán kính theo một hướng bất kỳ thì tỉ lệ nghịch với biến dạng dài của phần tố thẳng theo hướng đó. Phương trình (5.49) có dạng:

$$F(x, y, z) = \text{const} \quad (5.56)$$

Xét điểm lân cận trên bề mặt này với các tọa độ $x + dx, y + dy, z + dz$ ta sẽ có mối quan hệ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \quad (5.57)$$

Sự thay đổi dx, dy, dz ở trong một phương mà các *cosine* chỉ phương của nó tỉ lệ với dx, dy, dz . Ba đại lượng $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ cũng chỉ ra một phương,

do ta có thể lấy các *cosine* chỉ phương tỉ lệ với chúng. Vế trái của phương trình (5.57) thì tỉ lệ với *cosine* của góc giữa hai hướng này. Do *cosine* này triệt tiêu, hai hướng này vuông góc và do dx, dy, dz biểu diễn phương tiếp tuyến với bề mặt ở điểm có tọa độ (x, y, z) nên phương được mô tả bởi $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ sẽ vuông góc với bề mặt được cho bằng phương

trình (5.56).

Hàm $F(x, y, z)$ ở vế phải của (5.49), do đó:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2\varepsilon_x x + \gamma_{xy} y + \gamma_{xz} z \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \gamma_{xy} x + 2\varepsilon_y y + \gamma_{yz} z \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \gamma_{xz} x + \gamma_{yz} y + 2\varepsilon_z z \end{cases} \quad (5.58)$$

Chương 5. Ứng suất và biến dạng trong không gian ba chiều

Bề mặt (5.49) được vẽ với điểm O là tâm (hình 5.3), ta có thể đồng nhất $\delta x, \delta y, \delta z$ trong (5.55) với x, y, z trong (5.58).

Xét trường hợp đặc biệt khi $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ bằng không. Các vế phải của (5.58) với các vế phải của (5.55) thì vuông góc với bề mặt (5.49). Xem điểm O_1 (hình 5.3) nằm trên bề mặt, lúc này chuyển vị của O_1 sẽ vuông góc với bề mặt tại O_1 . Do đó nếu OO_1 là một trong những phương chính của biến dạng, tức là một trong các phương chính của bề mặt, chuyển vị của O_1 sẽ theo phương OO_1 , và do đó OO_1 sẽ không xoay. Chuyển vị này tương ứng với bước một.

Để hoàn chỉnh chuyển vị, ta đưa các đại lượng $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ vào (5.55). Các số hạng này tương ứng với một chuyển vị xoay cứng nhỏ có các thành phần $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ($\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$) quanh trục x, y, z . Do vậy các đại lượng này theo (5.54), diễn giải sự quay của bước ba, tức là phép xoay của các trục chính biến dạng tại điểm O . Chúng được gọi là các thành phần của phép xoay.

Chương 6

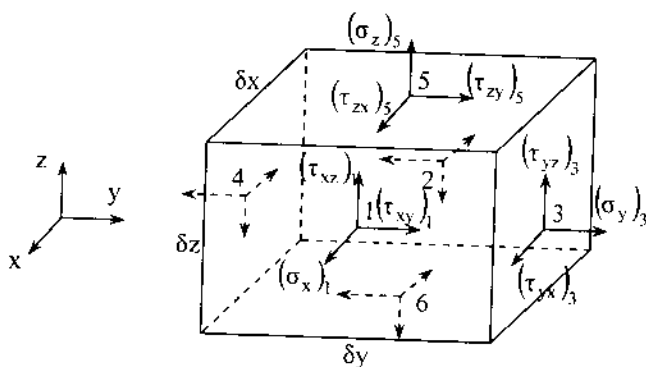
CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT

- 6.1. Các phương trình vi phân cân bằng.
- 6.2. Các điều kiện tương thích.
- 6.3. Xác định chuyển vị.
- 6.4. Các phương trình cân bằng biểu diễn theo chuyển vị.
- 6.5. Lời giải tổng quát cho chuyển vị.
- 6.6. Nguyên lý cộng tác dụng.
- 6.7. Năng lượng biến dạng.
- 6.8. Năng lượng biến dạng của một lệch mép.
- 6.9. Nguyên lý công ảo.
- 6.10. Định lý *Castigliano*.

Chương 6. Các định lý tổng quát

6.1. Các phương trình vi phân cân bằng.

Trong phần 5.1 chúng ta đã khảo sát ứng suất ở một điểm trong vật thể đàn hồi. Bây giờ ta cần khảo sát sự biến thiên của ứng suất theo vị trí của điểm bằng cách thiết lập các điều kiện cân bằng của phân tố hình hộp vi phân với các cạnh δx , δy , δz (hình 6.1).



Hình 6.1

Các thành phần ứng suất tác động lên các bề mặt vi phân của phân tố vi phân này và các chiều dương được thể hiện trên hình 6.1. Vấn đề là cần quan tâm đến sự biến thiên của các thành phần ứng suất do sự gia tăng δx , δy , δz của các tọa độ.

Ký hiệu 1, 2, 3, 4, 5, 6 là trọng tâm của các bề mặt vi phân của phân tố, $(\sigma_x)_1$, $(\sigma_x)_2$ là thành phần ứng suất pháp theo phương x ở các điểm có tọa độ x và $x + \delta x$.

Gọi X , Y , Z là ba thành phần của lực thể tích trên một đơn vị thể tích của phân tố, phương trình cân bằng lực tác động lên phân tố theo phương x :

$$\begin{aligned} & \left((\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_2 \right) \delta y \delta z + \left((\tau_{xy})_3 - (\tau_{yx})_4 \right) \delta x \delta y + \\ & + \left((\tau_{zx})_5 - (\tau_{xz})_6 \right) \delta x \delta y + X \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng thu được hai phương trình cân bằng lực còn lại. Sau khi chia cho $\delta x \delta y \delta z$ và cho phân tố trở nên vô cùng bé tại điểm có tọa độ (x, y, z) ta tìm được phương trình (6.1).

Phương trình (6.1) phải được thỏa ở mọi nơi trong vật thể. Ứng suất biến thiên trong thể tích vật, và ở các vị trí biến thiên chúng phải cân

Chương 6. Các định lý tổng quát

bằng với ngoại lực tác động trên mặt ngoài vật. Các điều kiện cân bằng ở mặt ngoài có thể thu được từ (5.5).

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Xét một phân tử tứ diện OBCD (hình 5.1) sao cho mặt BCD trùng với mặt ngoài của vật, và gọi $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ là các thành phần của ngoại lực phân bố bề mặt ở điểm khảo sát, các phương trình (5.5) trở thành:

$$\begin{cases} \tilde{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \tilde{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \tilde{Z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad (6.2)$$

trong đó l, m, n là các *cosine* chỉ phương của pháp *vector* đơn vị ngoài với bề mặt vật tại điểm đang xét.

Để xác định trạng thái ứng suất trong vật chịu tác động của các lực đã cho, cần giải hệ phương trình (6.1) và lời giải phải thỏa các điều kiện biên về lực (6.2). Ba phương trình (6.1) chứa sáu ẩn số là sáu thành phần ứng suất, sẽ không đủ để xác định sáu ẩn số ứng suất. Bài toán không tĩnh định, và để thu được lời giải ta phải tiến hành cách thức như trong bài toán hai chiều, nghĩa là biến dạng đàn hồi của vật cũng phải được khảo sát.

6.2. Các điều kiện tương thích.

Sáu thành phần biến dạng của một điểm được xác định hoàn toàn bởi ba thành phần chuyển vị u, v, w của điểm đó. Mỗi thành phần chuyển vị này, tổng quát, là hàm của ba biến tọa độ (x, y, z) . Do đó, các thành phần biến dạng sẽ là các hàm ba biến và được tính như sau:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Chương 6. Các định lý tổng quát

Từ (6.3) ta có:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Do đó:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}$$

Tương tự cho hai mối quan hệ còn lại.

Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$$

Ta rút ra được:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

Hai mối quan hệ nữa theo cùng cách cũng sẽ tồn tại. Tổng quát, sau mỗi quan hệ vi phân giữa các thành phần biến dạng, được gọi là các điều kiện tương thích, có dạng như sau:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Đặt biến dạng thể tích là e và tổng các ứng suất pháp là θ , chúng được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ \theta &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \end{aligned} \quad (6.5)$$

Dùng định luật *Hooke*, các điều kiện tương thích (6.4) sẽ chuyển thành mối quan hệ giữa các thành phần ứng suất. Thí dụ, một mối quan hệ như thế sẽ thu được từ điều kiện tương thích thứ hai:

Chương 6. Các định lý tổng quát

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (6.6a)$$

và từ định luật Hooke:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_y - \nu \theta]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_z - \nu \theta]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu) \tau_{yz}}{E}$$

Thay ba biểu thức này vào điều kiện tương thích, ta thu được:

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (6.6b)$$

Mặt khác, từ ba phương trình cân bằng ta có được:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - Z \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - Y \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X \end{cases}$$

hay:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial X}{\partial x} \end{cases}$$

Cộng hai phương trình đầu với nhau và kết hợp với phương trình thứ ba:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Thay kết quả này vào (6.6b) và dùng toán tử:

Chương 6. Các định lý tổng quát

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ta tìm được:

$$(1+\nu)\left(\nabla^2\theta - \nabla^2\sigma_x - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) - \nu\left(\nabla^2\theta - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right) = (1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \quad (6.6c)$$

Hai phương trình tương tự (6.6c) có thể thu được từ hai phương trình tương thích thứ nhất và thứ ba.

Cộng ba phương trình loại (6.6c) (trong đó hai phương trình tương tự thu được từ phương trình tương thích thứ nhất và thứ ba), ta có:

$$(1-\nu)\nabla^2\theta = -(1+\nu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

Thay thế biểu thức này đối với $\nabla^2\theta$ vào (6.6c):

$$\nabla^2\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x} \quad (6.6d)$$

Ta có thể thu được ba phương trình loại này tương ứng với ba phương trình tương thích đầu tiên. Tương tự ba phương trình tương thích còn lại có thể được chuyển thành các phương trình có dạng như sau:

$$\nabla^2\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \quad (6.6e)$$

Trường hợp lực thể tích là hằng, (6.6d) và (6.6e) sẽ có dạng:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} = 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\tau_{xz} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Chương 6. Các định lý tổng quát

Ta thấy rằng thêm vào ba phương trình cân bằng (6.1) và ba điều kiện biên (6.2), các thành phần ứng suất phải thỏa sáu điều kiện tương thích (6.6c) và (6.6d) hoặc (6.7). Hệ thống các phương trình này, nói chung, đủ để xác định các thành phần ứng suất.

Các điều kiện tương thích chỉ chứa những đạo hàm bậc hai của các thành phần ứng suất. Do đó, nếu ngoại lực tác động sao cho các phương trình cân bằng (6.1) cùng với các điều kiện biên (6.2) có thể được thỏa khi lấy các thành phần ứng suất như là hằng số hay là các hàm tuyến tính theo tọa độ, các phương trình tương thích được thỏa một cách tương tự và hệ thống ứng suất này là lời giải chính xác của bài toán.

6.3. Xác định chuyển vị.

Khi các thành phần ứng suất đã xác định, các thành phần biến dạng sẽ tính được bằng cách dùng định luật Hooke. Các phương trình (6.3) sẽ được dùng để xác định các thành phần chuyển vị u, v, w . Đạo hàm riêng các phương trình (6.3) theo x, y, z ta thu được 18 phương trình chứa 18 đạo hàm bậc hai của u, v, w . Thí dụ, đối với thành phần u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.8a)$$

Các đạo hàm bậc hai của hai thành phần chuyển vị v, w được suy ra bằng cách hoán chuyển theo cách thức chu kỳ các chỉ số chữ x, y, z trong các phương trình (6.8a). Các thành phần chuyển vị u, v, w sẽ được xác định bằng tích phân kép các phương trình dạng (6.8a). Để không làm thay đổi các thành phần biến dạng, các hằng số tích phân thêm vào các thành phần tuyến tính u, v, w là các hàm tuyến tính có dạng:

$$\begin{cases} u' = a + by - cz \\ v' = d - bx + ez \\ w' = f + cx - ey \end{cases} \quad (6.8b)$$

Điều này có nghĩa là các thành phần chuyển vị không được xác định hoàn toàn từ ứng suất và biến dạng. Một chuyển vị cứng của vật (không gây ra biến dạng) có thể được chồng lên các chuyển vị được tìm thấy từ (6.1), (6.2) và (6.7). Các hằng số a, d, f trong (6.8b) mô tả chuyển động tịnh tiến của vật và b, c, e là ba phép quay của vật rắn quanh ba trục tọa độ. Khi các ràng buộc đủ cân bằng vật, sáu hằng số trong (6.8b) sẽ được xác định dễ dàng.

Chương 6. Các định lý tổng quát

6.4. Các phương trình cân bằng biểu diễn theo chuyển vị.

Một phương pháp giải các bài toán đàn hồi là khử các thành phần ứng suất trong (6.1) và (6.2) bằng cách dùng định luật Hooke và để diễn giải các thành phần biến dạng theo các thành phần chuyển vị bằng cách dùng (6.3). Theo cách thức này ta thu được ba phương trình cân bằng chỉ chứa ba hàm ẩn u, v, w . Ta có:

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z \end{cases} \quad \text{với} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.9)$$

Thay (6.9) vào phương trình đầu của (6.1) ta có:

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X = 0$$

Hai phương trình còn lại sẽ thu được theo cách tương tự. Nếu dùng toán tử ∇^2 , các phương trình cân bằng thu được:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u + X = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v + X = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w + X = 0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Khi không có lực thể tích, (6.10) trở thành:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v = 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Đạo hàm các phương trình (6.11): phương trình đầu theo x , phương trình thứ hai theo y , và thứ ba theo z rồi cộng chúng lại với nhau ta sẽ được:

$$(\lambda + G) \nabla^2 e = 0$$

Tức là, biến dạng thể tích e thỏa phương trình vi phân:

Chương 6. Các định lý tổng quát

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (6.12)$$

Trường hợp lực thể tích là hằng, ta cũng thu được quan hệ (6.12).

Thay các phương trình (6.8a), (6.8b) vào các điều kiện biên (6.2), ta có:

$$\begin{cases} \tilde{X} = \lambda e_l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) \\ \tilde{Y} = \lambda e_l + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial y} n \right) \\ \tilde{Z} = \lambda e_l + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) \end{cases} \quad (6.13)$$

Các phương trình (6.10) cùng với (6.13) xác định hoàn toàn ba hàm u , v , w của trường chuyển vị. Trên cơ sở đó, các thành phần biến dạng và các thành phần ứng suất cũng sẽ được xác định.

6.5. Lời giải tổng quát cho chuyển vị.

Nghiệm của các phương trình vi phân (6.11) được cho bởi *P. F. Papkovitch* (1932), *H. Neuber* (1934) ... dưới dạng:

$$\begin{cases} u = \Phi_1 - \alpha \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3) \\ v = \Phi_2 - \alpha \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3) \\ w = \Phi_3 - \alpha \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3) \end{cases} \quad (6.14)$$

với $\alpha = \frac{1}{4(1-\nu)}$ và bốn hàm $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ có tính điều hòa, nghĩa là:

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0; \quad \nabla^2 \Phi_1 = 0; \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0; \quad \nabla^2 \Phi_3 = 0$$

Dạng nghiệm (6.14) là nghiệm tổng quát ngay cả khi Φ_0 được bỏ qua. *H. Neuber* đã hiệu chỉnh dạng nghiệm này cho tọa độ cong và áp dụng để giải các bài toán vật rắn quay truyền lực dọc, uốn, xoắn hay uốn ngang phẳng.

Chương 6. Các định lý tổng quát

6.6. Nguyên lý cộng tác dụng.

Khảo sát bài toán vật rắn đàn hồi dưới tác động của tải bề mặt và tải thể tích. Cần xác định các thành phần ứng suất hay chuyển vị thỏa các phương trình vi phân và các điều kiện biên. Nếu các thành phần ứng suất là các đại lượng cần tìm, ta phải thỏa: các phương trình cân bằng (6.1), các điều kiện tương thích (6.4) và các điều kiện biên (6.2). Gọi $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ là các thành phần ứng suất đã xác định được từ bài toán vật rắn đàn hồi chịu tải bề mặt $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ và tải thể tích X, Y, Z .

Gọi $\sigma'_x, \dots, \tau'_{xy}, \dots$ là các thành phần ứng suất của cùng vật rắn đàn hồi chịu tác động của các tải $\tilde{X}', \tilde{Y}', \tilde{Z}'$ và X', Y', Z' . Do các phương trình vi phân và điều kiện biên là tuyến tính, nên $\sigma_x + \sigma'_x, \dots, \tau_{xy} + \tau'_{xy}, \dots$ sẽ là các thành phần ứng suất cần xác định của vật rắn đàn hồi đang xét chịu tác động của tải bề mặt $\tilde{X} + \tilde{X}', \tilde{Y} + \tilde{Y}', \tilde{Z} + \tilde{Z}'$ và tải thể tích $X + X', Y + Y', Z + Z'$. Do đó, thêm phương trình đầu của (6.1) vào phương trình tương ứng:

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} + X' = 0$$

ta tìm được:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \sigma'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} + \tau'_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} + \tau'_{zx}) + X + X' = 0$$

Tương tự, từ phương trình đầu của (6.2) và phần tương ứng của nó, ta có:

$$\tilde{X} + \tilde{X}' = (\sigma_x + \sigma'_x)l + (\tau_{yx} + \tau'_{yx})m + (\tau_{zx} + \tau'_{zx})n$$

Những điều kiện tương thích có thể được kết hợp bởi phương cách tương tự. Hệ đầy đủ các phương trình cho thấy rằng $\sigma_x + \sigma'_x, \dots, \tau_{xy} + \tau'_{xy}, \dots$ thỏa tất cả các phương trình và điều kiện xác định ứng suất do những lực $\tilde{X} + \tilde{X}', \dots, X + X', \dots$. Đây là một thí dụ của nguyên lý cộng tác dụng. Nguyên lý này cũng được mở rộng cho các điều kiện biên khác như chuyển vị cưỡng bức. Trong việc xây dựng các phương trình cân bằng (6.1) và điều kiện biên (6.2), ta không quan tâm đến sự khác biệt giữa vị trí và hình dáng của phần tử trước và sau khi chịu tải. Các phương trình và kết luận được rút ra từ chúng chỉ đúng khi chuyển vị nhỏ không ảnh hưởng đáng kể đến sự tác động của ngoại lực. Tuy nhiên, có những trường hợp biến dạng phải được kể đến. Lúc này, nguyên lý cộng tác dụng không còn đúng nữa. Một thí dụ cho trường hợp này là dầm

Chương 6. Các định lý tổng quát

chịu tải dãn và ngang đồng thời. Nhiều thí dụ khác cũng xuất hiện khi khảo sát tính ổn định đàn hồi của các cấu trúc thành mỏng.

6.7. Năng lượng biến dạng.

Các lực tác động vào hai đầu mút một thanh chịu kéo nén đúng tâm sẽ tạo ra một công. Xét phần tử ở trạng thái ứng suất đơn (hình 6.2a), ta thấy lực $\sigma_x dydz$ thực hiện công trên sự giãn dài $\epsilon_x dx$. Mối quan hệ giữa hai đại lượng này trong quá trình đặt tải được biểu diễn bởi đường thẳng OA trong hình 6.2b và công biến dạng được xác định bởi diện tích tam giác OAB: $\frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x dydz)(\epsilon_x dx)$. Ta có:

$$dA = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (a)$$

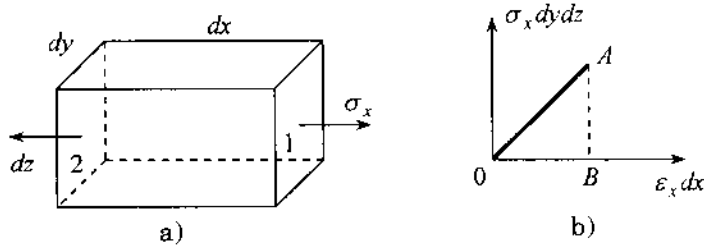
Nếu các phần tử trong thanh có thể tích giống nhau thì công biến dạng sẽ như nhau cho các phần tử này. Vấn đề cần quan tâm ở đây là xác định loại năng lượng nào được chuyển hóa thành công biến dạng.

Trường hợp khí được nén đoạn nhiệt sẽ làm gia tăng nhiệt độ. Khi một thanh thép thường được nén đoạn nhiệt cũng có sự gia tăng nhiệt độ tương tự, nhưng không lớn. Nhiệt độ gốc có thể được hồi phục bởi sự tản nhiệt. Sự thay đổi nhiệt độ như thế làm thay đổi biến dạng, nhưng chỉ một tỉ số rất nhỏ của biến dạng đoạn nhiệt. Nếu không như vậy, sẽ có sự khác nhau đáng kể giữa *modulus* đàn hồi đoạn nhiệt và đẳng nhiệt. Thực tế, sự khác nhau này đối với các kim loại thông thường là rất ít. Thí dụ đối với sắt, *modulus* đàn hồi đoạn nhiệt vượt quá *modulus* đàn hồi đẳng nhiệt chỉ 0,26%. Do đó, ta bỏ qua những sự khác biệt nhỏ này. Công được thực hiện do biến dạng trên mỗi phần tử và được lưu trữ trong nó được gọi là năng lượng biến dạng. Giả thiết rằng phần tử vẫn duy trì biến dạng đàn hồi và không tồn tại động năng.

Đối với phần tử có đủ 6 thành phần ứng suất tác động, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Sự bảo toàn năng lượng cho thấy rằng công không phụ thuộc cách thức tác động lực mà chỉ phụ thuộc độ lớn cuối cùng. Mặt khác, ta có thể đặt tải theo một cách thức và cất tải theo cách thức khác tương ứng với một lượng công lớn hơn. Do đó, một lượng công sẽ thu được từ phần tử trong một chu trình hoàn hảo.

Việc tính toán công biến dạng sẽ đơn giản khi các lực hoặc ứng suất gia tăng một cách đồng thời theo tỷ lệ tương tự và mối quan hệ giữa mỗi thành phần lực với chuyển vị tương ứng vẫn tuyến tính (hình 6.2b).

Chương 6. Các định lý tổng quát



Hình 6.2

Công được thực hiện bởi các lực:

$$dA = A_0 dx dy dz \quad (b)$$

với
$$A_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (c)$$

là công trên một đơn vị thể tích, hay năng lượng biến dạng trên một đơn vị thể tích.

Dùng định luật *Hooke*, năng lượng biến dạng trên một đơn vị thể tích có thể biểu diễn theo dạng:

$$A_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.15)$$

Hay có thể tính A_0 theo các bất biến của *tensor* ứng suất:

$$A_0 = \frac{1}{2E} [I_1^2 - 2(1+\nu)I_2]$$

Ở đây I_1, I_2 là hai trong ba bất biến ứng suất. Mặt khác, ta cũng có thể biểu diễn A_0 theo các thành phần của *tensor* biến dạng:

$$A_0 = \frac{1}{2} \lambda e^2 + G (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} G (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (6.16)$$

với:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Dạng (6.16) cho thấy A_0 luôn luôn dương.

Đạo hàm riêng (6.16) theo thành phần biến dạng bất kỳ sẽ cho thành phần ứng suất tương ứng:

Chương 6. Các định lý tổng quát

$$\frac{\partial A_0}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}; \quad i, j = x, y, z \quad (d)$$

Khi

$$\left\{ \begin{array}{l} i \neq j: \quad \sigma_{ij} \equiv \tau_{ij}; \quad \epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \gamma_{ij} \\ i = j: \quad \sigma_{ij} \equiv \sigma_i; \quad \epsilon_{ij} \equiv \epsilon_i \end{array} \right.$$

Trong trường hợp ứng suất phẳng, ta có:

$$A_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 \quad (6.17)$$

hay:

$$A_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{G}{2} \gamma_{xy}^2 \quad (6.18)$$

Năng lượng biến dạng A của vật biến dạng đàn hồi được tính theo:

$$A = \int_{(V)} A_0 dV \quad (6.19)$$

Ta có thể mô hình vật thể đàn hồi bởi tập hợp rất nhiều các chất điểm được kết nối với nhau bởi các lò xo. Lúc này, (6.19) mô tả công được thực hiện trong việc làm biến dạng các lò xo kết nối này. Công do hệ nội lực thực hiện trên các chất điểm có dấu ngược với (6.19).

6.8. Năng lượng biến dạng của một lệch mép.

Trong phần 4.10, ta thấy rằng lệch mép một lượng δ (hình 4.9b) sẽ cần một cặp lực P. Quan hệ giữa P và δ được suy từ (b) của mục 4.10 với (g) của mục 4.9:

$$P = \frac{N}{a^2 + b^2} \frac{E}{4\pi} \delta \quad (a)$$

với:

$$N = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a} \quad (b)$$

Năng lượng biến dạng của vòng bằng với công được thực hiện bởi cặp lực P trong quá trình đặt tải.

Do đó:

$$A = \frac{1}{2} P \delta = \frac{E}{8\pi} \frac{N}{a^2 + b^2} \delta^2 \quad (c)$$

Công thức (c) tính trên một đơn vị chiều dày tấm cho bài toán ứng suất phẳng. Trường hợp biến dạng phẳng, đối với cùng hàm ứng suất ϕ , các

Chương 6. Các định lý tổng quát

thành phần biến dạng $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$, và do đó các thành phần chuyển vị u, v sẽ khác với trường hợp ứng suất phẳng bởi sự thay đổi của các hằng số đàn hồi (xem mục 3.3). Vì thế, để chuyển sang biến dạng phẳng (với $\epsilon_z=0$) ta phải thay thế E bằng $\frac{E}{1-\nu^2}$. Lúc này (c) sẽ được chuyển thành năng lượng biến dạng trên một đơn vị dài theo phương trục (Oz).

$$A = \frac{\delta^2}{8\pi} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\log \frac{b}{a} - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \quad (d)$$

Các công thức trên được dùng rộng rãi trong vật liệu học để tính năng lượng lệch mạng của một tinh thể. Cả hai a và b phải cho dưới các đại lượng hữu hạn để năng lượng hữu hạn. Bán kính ngoài b được liên quan với các kích thước toàn thể (phủ bì) của tinh thể, bán kính trong liên quan với khoảng cách nguyên tử trong mạng tinh thể.

Trong các bài toán giá trị biên của biến dạng đàn hồi, các biên thường hữu hạn. Nhưng tâm lệch trong tinh thể có thể ở ngoài tinh thể như thể vòng tròn biên trong bán kính $r = a$ có thể được dịch chuyển tịnh tiến trong khi đường tròn biên ngoài $r = b$ không di chuyển. Nếu có hai lệch đồng thời, một dương ($\delta > \phi$) và một âm ($\delta < \phi$), có một năng lượng biến dạng thực miễn là các tâm của chúng riêng biệt. Trường hợp chúng trùng nhau, hai lệch sẽ triệt tiêu nhau. Lúc này, không có ứng suất, biến dạng và năng lượng. Rõ ràng là sự đến gần của hai tâm phải làm giảm năng lượng biến dạng. Bởi vì trong các tình huống đang xét, năng lượng biến dạng này thể hiện thế năng toàn bộ của hệ, hai tâm sẽ xuất hiện để thu hút một cái khác, và ở thời điểm liên kết, năng lượng được chuyển thành dạng khác, thí dụ sự lan truyền sóng khắp tinh thể.

6.9. Nguyên lý công ảo.

Việc sử dụng nguyên lý công ảo để giải các bài toán đàn hồi đôi khi rất ích lợi. Trong trường hợp của một chất điểm, nguyên lý này phát biểu rằng: điều kiện để một chất điểm cân bằng là tổng công của tất cả các lực tác động lên chất điểm trong mọi di chuyển ảo phải bằng không. Gọi $\delta u, \delta v, \delta w$ là các thành phần của một chuyển vị ảo theo ba phương x, y, z và $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z$ là tổng hình chiếu lên cùng ba phương của các lực tác động lên chất điểm, nguyên lý công ảo sẽ có dạng:

$$\delta u \Sigma X = 0; \delta v \Sigma Y = 0; \delta w \Sigma Z = 0 \quad (a)$$

Những phương trình này được thỏa cho mọi di chuyển ảo nếu:

Chương 6. Các định lý tổng quát

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0 \quad (b)$$

Ngược lại, từ các phương trình (b), ta có thể nhân chúng với các hệ số bất kỳ $\delta u, \delta v, \delta w$ và thu được (a). Thực ra, chuyển vị ảo chỉ là một tên cho những nhân tử bất kỳ như thế. Các lực vẫn tồn tại thực như chúng có. Một vật thể đàn hồi ở trạng thái đứng yên, với các lực thể tích và bề mặt của nó, tạo thành hệ các chất điểm mà trên mỗi chất điểm trong hệ chịu tác động của một hệ lực cân bằng. Do tổng công thực hiện bởi các lực tác động trên một chất điểm trong mọi di chuyển ảo bằng không, nên tổng công được thực hiện bởi tất cả các lực tác động lên toàn hệ cũng bằng không.

Một chuyển vị ảo trong trường hợp của một vật thể đàn hồi có thể được xem như chuyển vị nhỏ bất kỳ phù hợp với điều kiện liên tục của vật liệu và với các điều kiện này được biết. Thí dụ, một phần nào đó của bề mặt vật thể, như đầu mút của dầm, là cố định hay có một chuyển vị cưỡng bức, chuyển vị ảo đối với phần này có thể được lấy bằng không hay bằng chuyển vị cưỡng bức.

Chú ý rằng u, v, w là các thành phần của chuyển vị thật do tải tác động và $\delta u, \delta v, \delta w$ là các thành phần của chuyển vị ảo. Các thành phần của chuyển vị ảo là các hàm liên tục tùy ý theo ba biến x, y, z , chúng có giá trị tuyệt đối nhỏ.

Các chuyển vị ảo $\delta u, \delta v, \delta w$ tương ứng với các gia số của sáu thành phần biến dạng:

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u), \dots, \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(\delta v) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta u), \dots \quad (c)$$

và công ảo tương ứng cho một phân tố thể tích:

$$(\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz \quad (d)$$

Theo (d) của mục 6.7, công thức trên tương đương với:

$$\delta A_0 dx dy dz \quad (e)$$

A_0 được lấy như là hàm của các thành phần biến dạng của phương trình (6.16).

Như đã đề cập trước đây, sự thay đổi năng lượng biến dạng này thể hiện công thực hiện được để chống lại các lực tương tác giữa các chất điểm (làm co giãn các lò xo kết nối). Công được thực hiện bởi các lực tương tác lên các chất điểm có dấu ngược lại (e).

Chương 6. Các định lý tổng quát

Hệ ngoại lực bao gồm các lực bề mặt biên tác động lên mỗi phần tử mặt dS là: $\bar{X}dS, \bar{Y}dS, \bar{Z}dS$ và các lực thể tích tác động lên mỗi phần tử thể tích $dV = dx dy dz$ là: XdV, YdV, ZdV .

Theo nguyên lý công ảo cho toàn vật thể, tổng các công ảo sẽ bằng không:

$$\int_{(S)} (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w) dS + \int_{(V)} (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dV - \int_{(V)} \delta A_0 dV = 0 \quad (6.20)$$

Do các ngoại lực đã cho và các thành phần ứng suất thật được giữ không đổi trong công thức (6.20), ký hiệu biến thiên δ sẽ được chuyển ra trước dấu tích phân:

$$\delta \left[\int_{(V)} dA_0 dV - \int_{(V)} (Xu + Yv + Zw) dV - \int_{(S)} (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS \right] = 0 \quad (6.20')$$

Tích phân đầu trong dấu ngoặc đơn là năng lượng biến dạng, còn gọi là thế năng biến dạng. Năng lượng này được dùng để hồi phục lại hình dáng ban đầu của vật trong quá trình cất tải. Tích phân thứ hai là thế năng của lực thể tích, năng lượng này được xem bằng không khi $u = v = w = 0$. Tích phân thứ ba là thế năng lực mặt. Biểu thức trong dấu ngoặc được định nghĩa là thế năng tổng cộng của hệ.

Từ (6.20'), nguyên lý công ảo có thể phát biểu: các thành phần chuyển vị thật u, v, w dưới các ngoại lực làm cho biến thiên bậc nhất của thế năng tổng cộng bằng không trong mọi di chuyển ảo hoặc thế năng tổng cộng ở trạng thái dừng (ổn định).

Các thuật ngữ chuyển vị ảo và công ảo, mặc dù đã quen thuộc trong cách dùng, đơn giản chỉ là việc sử dụng các nhân tử bất kỳ được thể hiện bởi $\delta u, \delta v, \delta w$ với các phương trình cân bằng. Tiện lợi nhất là xem chúng như các biến thiên của những chuyển vị thật u, v, w .

Để khảo sát tính ổn định của sự cân bằng, chúng ta có thể tính tới khả năng các rối loạn xung xảy ra sau các sự biến thiên thật của những chuyển vị cân bằng. Do không có sự tiêu hao năng lượng nên tổng thế năng và động năng là hằng số. Nếu xuất phát từ trạng thái cân bằng, thế năng tất yếu tăng thì động năng phải giảm và ngược lại. Hai trường hợp này mô tả trạng thái ổn định và bất ổn định với các nhiễu loạn nhỏ. Trạng thái ổn định bao hàm ý rõ ràng rằng thế năng là cực tiểu ở vị trí cân bằng, và trạng thái bất ổn định có thế năng cực đại. Trong việc sử dụng hàm thế năng này, ta giả sử rằng lực thể tích và lực bề

Chương 6. Các định lý tổng quát

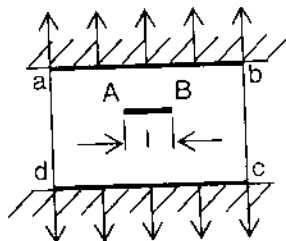
mặt cùng dịch chuyển với phần tử vật liệu mà nó tác động ở trạng thái cân bằng trong chuyển động của các rối loạn nhỏ và chúng vẫn không đổi về độ lớn và hướng. Khảo sát lại năng lượng biến dạng trên đơn vị thể tích cho trường hợp ứng suất phẳng (6.18). Theo sau rối loạn xung, các thành phần biến dạng cân bằng được giả định gia tăng, sau một thời gian ngắn, một lượng $\delta\epsilon_x$, $\delta\epsilon_y$, $\delta\gamma_{xy}$. Giá trị mới đầy đủ của A_0 :

$$A_0 + \delta A_0 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\epsilon_x + \delta\epsilon_x)^2 + 2\nu(\epsilon_x + \delta\epsilon_x)(\epsilon_y + \delta\epsilon_y) + (\epsilon_y + \delta\epsilon_y)^2 \right] + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[(\delta\epsilon_x)^2 + 2\nu\delta\epsilon_x\delta\epsilon_y + (\delta\epsilon_y)^2 \right] + \frac{G}{2} (\delta\gamma_{xy})^2$$

Lượng gia tăng của năng lượng biến dạng trên đơn vị thể tích:

$$\delta A_0 = \left\{ \frac{E}{2(1-\nu)^2} \left[2\epsilon_x\delta\epsilon_x + 2\nu(\epsilon_x\delta\epsilon_y + \epsilon_y\delta\epsilon_x) + 2\epsilon_y\delta\epsilon_y \right] + \frac{G}{2} 2\gamma_{xy}\delta\gamma_{xy} \right\} + \frac{E}{2(1-\nu)^2} \left[(\delta\epsilon_x)^2 + 2\nu\delta\epsilon_x\delta\epsilon_y + (\delta\epsilon_y)^2 \right] + \frac{G}{2} (\delta\gamma_{xy})^2$$

Biểu thức trong dấu { } biểu thị lượng gia tăng bậc một và tương ứng với (e), nếu không có hệ số thể tích $dxdy$. Phần còn lại là lượng gia tăng bậc hai, và nó có giá trị dương do A_0 trong (6.18) luôn dương với mọi ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} . Không có sự gia tăng bậc hai từ các lực thể tích và lực bề mặt trong thể năng tổng cộng π (6.20). Lượng gia tăng bậc nhất không tồn tại, do các chuyển vị thật δu , δv , δw có trạng thái ổn định như đã xác định, bởi vì lượng thay đổi bậc hai là dương. Kết luận này phụ thuộc vào việc dùng định luật Hooke cũng như phụ thuộc vào hai định đề 1 và 2. Đối với các quan hệ ứng suất – biến dạng phi tuyến, những gia số bậc cao sẽ không dừng ở bậc hai.



Hình 6.3

Chương 6. Các định lý tổng quát

Những sự khảo sát về năng lượng tổng của hệ thống được áp dụng bởi A. A. Griffith trong việc xây dựng lý thuyết của các vật liệu giòn. Như ta biết, các vật liệu luôn biểu thị một độ bền nhỏ hơn nhiều giá trị được mong đợi từ lực phân tử. Thí dụ đối với thủy tinh, Griffith đã tìm ra độ bền kéo lý thuyết khi chịu kéo đơn là $1,6 \cdot 10^6 \text{ psi}$ trong khi các thí nghiệm kéo thanh thủy tinh đã cho độ bền chỉ $26 \cdot 10^3 \text{ psi}$. Ông ta đã cho rằng sự khác nhau này do trong các vật liệu tồn tại các vết nứt vi mô hay các vết rạn tạo ra sự tập trung ứng suất lớn và kết quả là làm lan truyền vết nứt. Griffith lấy một vết nứt có dạng lỗ *ellipse* rất hẹp làm mô hình tính toán, trục chính của lỗ vuông góc với hướng lực kéo. Khảo sát một tấm được ngàm chặt ở hai cạnh ab và cd, và được kéo căng bởi ứng suất kéo phân bố đều S tác động dọc trên hai cạnh này (hình 6.3). Nếu một lỗ hổng *ellipse* AB có chiều dài trục chính l được tạo trước trong tấm, ab và cd vẫn được giữ chặt, năng lượng biến dạng ban đầu do các ứng suất kéo S sẽ bị giảm. Sự giảm này có thể được tính toán bằng cách dùng phép giải cho một lỗ hổng *ellipse*, và đối với một tấm chiều dày đơn vị, ta có năng lượng biến dạng của tấm:

$$A = \frac{\pi l^2 S^2}{4E} \quad (f)$$

Nếu vết nứt dài ra, có một lượng giảm năng lượng biến dạng được lưu trữ trong tấm hơn nữa. Tuy nhiên, sự giãn dài của vết nứt đồng nghĩa với sự gia tăng năng lượng bề mặt, do bề mặt vật rắn có một sức căng bề mặt như bề mặt của chất lỏng. Griffith đã tìm ra năng lượng bề mặt trên đơn vị diện tích bề mặt cho loại thủy tinh được dùng trong thí nghiệm của ông là $3,2 \cdot 10^{-3} \text{ lb.in/in}^2$. Sự giãn dài vết nứt cần sự gia tăng năng lượng bề mặt, sự tăng năng lượng này được cung cấp bởi sự giảm năng lượng biến dạng. Do đó sự giãn dài vết nứt có thể xảy ra mà không có sự gia tăng năng lượng tổng. Điều kiện để vết nứt mở rộng một cách tự động là hai đại lượng năng lượng này bằng nhau, tức là:

$$\frac{dV}{dl} dl = \frac{\pi l S_{cr}^2}{2E} dl = 2dlT \quad (g)$$

Suy ra:

$$S_{cr} = \sqrt{\frac{4ET}{\pi l}}$$

Những thí nghiệm trong đó các vết nứt có chiều dài đã biết trước được tạo với dụng cụ cắt thủy tinh bằng kim cương cho thấy có sự phù hợp rất tốt với công thức (g). Cũng từ thí nghiệm ta thấy nếu những cách thức phòng ngừa được thực hiện để loại trừ các vết nứt vi mô, thì độ bền sẽ

Chương 6. Các định lý tổng quát

cao hơn bình thường nhiều. Từ vài thanh thủy tinh thử nghiệm, *Griffith* đã thu được độ bền là 900.000psi, nó gấp hơn 1,5 lần độ bền lý thuyết đã đề cập ở trên.

Khía cạnh có vấn đề của ứng suất vô hạn ở các đầu mút của vết nứt trong lý thuyết của *Griffith* đã được loại bỏ bởi *Barenblatt*, người giới thiệu ứng suất lớn hữu hạn để mô tả sự dính kết nguyên tử.

6.10. Định lý *Castigliano*.

Trong mục trước, trạng thái cân bằng của vật thể đàn hồi chịu tác động của các lực thể tích và các điều kiện biên đã cho được so sánh với các trạng thái lân cận đạt được bởi các chuyển vị ảo δu , δv , δw từ vị trí cân bằng. Các chuyển vị thật tương ứng với vị trí cân bằng ổn định là các chuyển vị làm cho thế năng tổng cộng của hệ thống π cực tiểu.

Bây giờ ta khảo sát ứng suất thay thế cho chuyển vị tương ứng với vị trí cân bằng. Các phương trình vi phân cân bằng (6.1), cùng với các điều kiện biên (6.2) thì không đủ để xác định các thành phần ứng suất. Chúng ta có thể tìm nhiều sự phân bố ứng suất khác nhau thỏa các phương trình cân bằng và các điều kiện biên, và vấn đề đặt ra là: điều gì phân biệt trường ứng suất thật với tất cả trường ứng suất khả dĩ tính khác?

Gọi σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , ... là các thành phần ứng suất thật tương ứng với vị trí cân bằng, và $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\sigma_z$, $\delta\tau_{xy}$, $\delta\tau_{xz}$, ... là các biến thiên của các thành phần ứng suất này sao cho các thành phần ứng suất mới $\sigma_x + \delta\sigma_x$, $\sigma_y + \delta\sigma_y$, $\sigma_z + \delta\sigma_z$, $\tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$, $\tau_{xz} + \delta\tau_{xz}$, ... thỏa các phương trình cân bằng (6.1). Bằng cách trừ các phương trình trong bộ ba phương trình tương ứng trong bộ ba phương trình cân bằng của các thành phần ứng suất mới, ta tìm được sự thay đổi của các thành phần ứng suất thỏa ba phương trình:

$$\frac{\partial \delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (a)$$

Tương ứng với sự biến thiên của các thành phần ứng suất này sẽ có sự biến thiên của các lực bề mặt. Gọi $\delta\tilde{X}$, $\delta\tilde{Y}$ và $\delta\tilde{Z}$ là sự biến đổi nhỏ của các thành phần lực biên; từ các điều kiện biên (6.2), ta thu được ba phương trình dạng:

$$\delta\sigma_x l + \delta\tau_{yx} m + \delta\tau_{zx} n = \delta\tilde{X} \quad (b)$$

Chương 6. Các định lý tổng quát

Sự thay đổi của các thành phần ứng suất sẽ làm thay đổi năng lượng biến dạng. Năng lượng biến dạng trên một đơn vị thể tích được tính như là hàm của các thành phần ứng suất (6.15), sự thay đổi năng lượng này được tính theo công thức:

$$\delta A_o = \frac{\partial A_o}{\partial \sigma_x} \delta \sigma_x + \dots + \frac{\partial A_o}{\partial \tau_{xy}} \delta \tau_{xy} + \dots \quad (c)$$

Vế phải trong (c) gồm sáu số hạng, trong đó:

$$\frac{\partial A_o}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \epsilon_x$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \epsilon_y$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial \sigma_z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \epsilon_z$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \gamma_{xy}$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial \tau_{yz}} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = \gamma_{yz}$$

$$\frac{\partial A_o}{\partial \tau_{zx}} = \frac{1}{G} \tau_{zx} = \gamma_{zx}$$

Và sự thay đổi tổng cộng của năng lượng biến dạng do những thay đổi của những thành phần ứng suất là:

$$\delta A = \int_{(V)} \delta A_o dV = \int_{(V)} (\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \dots) dV \quad (d)$$

Chúng ta sẽ xác định sự thay đổi năng lượng này. Để đưa các điều kiện biên (b) vào việc xác định này, ta sẽ dùng định lý *Divergence*, hay định lý *Gauss*, hoặc bổ đề *Green*. Trong một miền được bao bởi bề mặt S , với l, m, n là các *cosine* của pháp tuyến ngoài, chúng ta có ba hàm U, V, W của vị trí. Định lý được biểu diễn dưới dạng:

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dV = \int_{(S)} (lU + mV + nW) dS \quad (6.21)$$

Tích phân thể tích ở vế trái được thực hiện trên toàn thể tích được bao bởi diện tích S , và tích phân mặt ở vế phải được lấy trên toàn bề mặt

Chương 6. Các định lý tổng quát

bao. S cũng có thể miêu tả một bề mặt ngoài cùng với một hay nhiều bề mặt trong (lỗ hổng). Để tiện lợi, đầu tiên ta chọn:

$$U = u\delta\sigma_x; V = u\delta\tau_{yx}; W = u\delta\sigma_x \quad (e)$$

Lúc đó, định lý (6.21) có dạng:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\delta\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u\delta\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\delta\tau_{zx}) \right] dV = \\ = \int_{(S)} u (l\delta\sigma_x + m\delta\tau_{xy} + n\delta\tau_{zx}) dS \end{aligned} \quad (f)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông ở vế trái có thể khai triển thành:

$$u \left(\frac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\delta\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta\tau_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta\tau_{zx} \quad (g)$$

Biểu thức trong dấu ngoặc đơn của (g) bị triệt tiêu bởi (a). Bây giờ (f) trở thành:

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta\tau_{yx} + \frac{\partial u}{\partial z} \delta\tau_{zx} \right) dV = \int_{(S)} u \delta \tilde{X} dS \quad (h)$$

Trong cách thức tương tự, ta chọn:

$$V = v\delta\sigma_y; W = v\delta\tau_{zx}; U = v\delta\tau_{xy} \quad (e')$$

Thay đổi một cách chu kỳ các thông số trong (h), định lý (6.21) có dạng:

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \delta\sigma_y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta\tau_{zy} + \frac{\partial v}{\partial x} \delta\tau_{xy} \right) dV = \int_{(S)} v \delta \tilde{Y} dS \quad (i)$$

Tương tự ta có thêm:

$$\int_{(V)} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \delta\sigma_z + \frac{\partial w}{\partial x} \delta\tau_{xz} + \frac{\partial w}{\partial y} \delta\tau_{yz} \right) dV = \int_{(S)} w \delta \tilde{Z} dS \quad (j)$$

Cộng vế theo vế của (h), (i), (j) và dùng các mối quan hệ chuyển vị - biến dạng, ta tìm được:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{xy} \delta\tau_x + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx}) dV = \\ = \int_{(S)} (u \delta \tilde{X} + v \delta \tilde{Y} + w \delta \tilde{Z}) dS \end{aligned} \quad (k)$$

Chương 6. Các định lý tổng quát

Theo (d), vế trái của (k) là δA . Do đó sự biến thiên của năng lượng biến dạng (6.15), tương ứng với các biến thiên của những thành phần ứng suất mà chúng vẫn duy trì sự cân bằng, được cho bởi:

$$\delta A = \int_{(S)} (u\delta\tilde{X} + v\delta\tilde{Y} + w\delta\tilde{Z}) dS \quad (6.22)$$

Các ứng suất thật thỏa phương trình này. Những sự biến thiên như thế là những sự biến thiên toán học chứ không phải biến thiên vật lý. Những sự biến thiên ứng suất vật lý được gây ra bởi các sự biến thiên của việc đặt tải biên thì chịu nhiều hạn chế hơn bởi (a). Nhưng về mặt toán học tích phân biểu thức năng lượng tổng do biến dạng:

$$\begin{aligned} A_0 - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = \\ = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \end{aligned} \quad (6.23)$$

với A_0 là hàm sáu biến, sáu thành phần ứng suất trong (6.15) sẽ có biến thiên khi sáu biến này thay đổi.

Trong lý thuyết kết cấu, năng lượng biến dạng của một kết cấu đàn hồi tuyến tính dưới tác động của hệ các lực tập trung $P_1, P_2, \dots$, có thể được diễn giải như là hàm bậc hai A của các lực này. Do đó:

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial P_1} \delta P_1 + \frac{\partial A}{\partial P_2} \delta P_2 + \dots$$

và chúng ta có định lý *Castigliano* cho các thành phần chuyển vị tương ứng $d_1, d_2, \dots$

$$d_1 = \frac{\partial A}{\partial P_1}; \quad d_2 = \frac{\partial A}{\partial P_2}; \quad \dots$$

Sự biến thiên của năng lượng biến dạng sẽ có dạng:

$$d_1 = \frac{\partial A}{\partial P_1}; \quad d_2 = \frac{\partial A}{\partial P_2}; \quad \dots \quad (6.24)$$

Sự tương đương giữa (6.24) với (6.22) là rõ ràng. Công thức (6.24) cũng được xem là định lý *Castigliano*.

Trở lại biểu thức (6.22), ta nhận thấy rằng sự biến thiên ứng suất có thể để cho các lực biên $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ không thay đổi. Thế thì $\delta\tilde{X}, \delta\tilde{Y}, \delta\tilde{Z}$ trong ba điều kiện của (b) bằng không, và (6.22) trở thành:

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Lê Quang Minh, Nguyễn Văn Vượng, **Sức Bền Vật Liệu** (tập 1, 2), Nhà Xuất Bản Đại Học và Giáo Dục Chuyên Nghiệp, 1989.
- [2]. Lều Thọ Trình, **Cơ Học Kết Cấu** (tập 1, 2), Nhà Xuất Bản Khoa Học và Kỹ Thuật, 2001.
- [3]. Nguyễn Lương Dũng, **Giáo Trình Tính Chất Cơ Học Của Vật Liệu**, Trường Đại Học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh, 09/1993.
- [4]. Trương Tích Thiện, Vũ Duy Cường, **Cơ Kỹ Thuật**, Trường Đại Học Kỹ Thuật TP. Hồ Chí Minh, 10/1999.
- [5]. Trương Tích Thiện, **Cơ Học Đại Cương và Cơ Học Môi Trường Liên Tục**, Trường Đại Học Bách Khoa TP. Hồ Chí Minh, 05/2003.
- [6]. S. P. Timoshenco and J. N. Goodier, **Theory of Elasticity**, McGraw-Hill International Book Company.
- [7]. S. P. Timoshenco and D. H. Young, **Theory of Structures**, McGraw-Hill International Book Company.

TS. TRƯƠNG TÍCH THIỆN

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

Chịu trách nhiệm xuất bản : GS. TS. TÔ ĐĂNG HẢI
Biên tập : TRỊNH QUANG TRUNG
NGUYỄN NGỌC BÍCH
Sửa bài : LÊ BÙI HỒNG PHONG
NGUYỄN NGỌC BÍCH
Bìa : TRƯƠNG TÍCH THIỆN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

28 Đồng Khởi - 12 Hồ Huân Nghiệp, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh

ĐT : 8225062 - 8296628 - 8290228

Mã số $\frac{6C5}{KHKT-2004}$ 6 - 632 - 2004

In 1.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Xí nghiệp In II - Công ty In Ba Đình,
Số 258 Nguyễn Trãi, Q.1, TP. HCM. Giấy phép xuất bản số 6-632 cấp
ngày 17/01/2004. In xong và nộp lưu chiểu tháng 3/2004.

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

- Cuốn sách này cung cấp cho các kỹ sư kiến thức cơ bản cần thiết của lý thuyết đàn hồi, là cơ sở quan trọng cho nhiều môn học chuyên ngành khác như sức bền vật liệu, cơ kết cấu, cơ chảy dẻo, cơ phá hủy...

- Lý thuyết đàn hồi được ứng dụng rộng rãi trong việc giải các bài toán kỹ thuật khi những phương pháp giải khác không thể cho các kết quả chi tiết và chính xác như mong đợi.

204003



8 935048 940037

Giá : 24.000 đ