NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH - DƯƠNG THỦY VỸ

Giáo trình
TOÁN HỌC CAO CẤP

Tập 1

(DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (Chủ biên)
LÊ TRỌNG VINH – DƯƠNG THỦY VỸ

Giáo trình
TOÁN HỌC CAO CẤP

TẬP 1

(Sách dùng cho các trường Cao đẳng)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Sinh viên mới vào năm học thứ nhất các trường đại học, cao đẳng thường gặp khó khăn do phương pháp dạy, phương pháp học ở bậc học này có nhiều điều khác biệt so với ở bậc Trung học. Toán học cao cấp lại là một môn học khó với thời lượng lớn của năm thứ nhất các trường đại học, cao đẳng kĩ thuật, nhằm rèn luyện tư duy khoa học, cung cấp công cụ toán học để sinh viên học các môn khoa học kĩ thuật khác và xây dựng tiềm lực để tiếp tục tự học sau này.

Bộ giáo trình "Toán học cao cấp" này được biên soạn căn cứ vào chương trình khung đã được ban hành, và thực tế giảng dạy của hệ cao đẳng của một số trường đại học kĩ thuật và căn cứ vào chương trình môn Toán hiện nay của các trường Trung học Phổ thông, nhằm giúp cho sinh viên hệ cao đẳng học tốt môn học này.

Do yêu cầu đào tạo hiện nay của hệ cao đẳng, một số phần của toán học cao cấp như cấu trúc đại số, dạng toàn phương, tích phân phụ thuộc tham số, tích phân ba lớp, tích phân mặt, chuỗi Fourier,... không được đưa vào giáo trình này. Những khái niệm toán học cơ bản, những phương pháp cơ bản, những kết quả cơ bản của các chương đều được trình bày đầy đủ. Một số định lí không được chứng minh, nhưng ý nghĩa của những định lí quan trọng được giải thích rõ ràng, nhiều ví dụ minh hoạ được đưa ra. Nhiều ứng dụng của lí thuyết vào tính gần đúng được trình bày ở đây. Riêng với những kiến thức về giải tích mà sinh viên được học ở Trung học Phổ thông, giáo trình này chỉ nhắc lại một cách hệ thống các điểm chính và trình bày các kiến thức nâng cao. Phần câu hỏi ôn tập ở cuối mỗi chương nhằm giúp sinh viên học tập và tự kiểm tra kết quả học tập của mình. Làm những bài tập để ra ở cuối mỗi chương sẽ giúp người học hiểu sâu sắc hơn các khái niệm toán học, rèn luyện kĩ năng tính toán và khả năng vận dụng các khái niệm ấy. Các bài tập đó sẽ được giải trong bộ bài tập kèm theo bộ giáo trình này.

Bộ giáo trình này được viết thành 2 tập và là công trình tập thể của ba nhà giáo: Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Lê Trọng Vinh và Dương Thủy Vỹ. Ông Lê Trọng Vinh viết các chương I, II, IV, V. Ông Dương Thủy Vỹ viết các chương III, VI, VIII, IX. Ông Nguyễn Đình Trí viết các chương VII, X, XI.

Khi xây dựng đề cương cho bộ giáo trình này cũng như khi biên soạn giáo trình, chúng tôi đã tham khảo kinh nghiệm của nhiều nhà giáo đã giảng dạy nhiều năm môn Toán học cao cấp cho hệ cao đẳng các trường đại học kĩ thuật. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã đọc bản thảo và cho nhiều ý kiến quý báu.

Bộ giáo trình này được viết lần đầu, chắc không tránh hết được những khiếm khuyết. Chúng tôi chân thành cảm ơn mọi ý kiến đóng góp của bạn đọc. Thư góp ý xin gửi về Công ti Cổ phần Sách Đại học - Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Các tác giả

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Chương I. Tập hợp và ánh xạ. Số thực và số phức 7

§1. Nhắc lại về mệnh đề toán học và kí hiệu lôgic 7

§2. Tập hợp 8

§3. Ánh xạ 12

§4. Số thực 16

§5. Số phức 18

Câu hỏi ôn tập 32

Bài tập 33

Đáp số 36

Chương II. Hàm số một biến số. Giới hạn và liên tục. Đạo hàm và vi phân 39

§1. Các khái nệm cơ bản về hàm số một biến số 39

§2. Phân loại hàm số 44

§3. Giới hạn của dãy số 50

§4. Giới hạn của hàm số 59

§5. Vô cùng bé và vô cùng lớn 64

§6. Hàm số liên tục 69

§7. Đạo hàm 77

§8. Vi phân 84

Câu hỏi ôn tập 86

Bài tập 88

Đáp số 95

Chương III. Các định lí về giá trị trung bình và ứng dụng 99

§1. Các định lí về giá trị trung bình 99

§2. Công thức Taylor 102

§3. Quy tắc L'Hospital 107

§4. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số 111

§5. Đường cong cho bởi phương trình tham số 123
§6. Đường cong trong hệ toạ độ cực 128
Câu hỏi ôn tập 133
Bài tập 134
Đáp số 137
Chương IV. Định thức - Ma trận - Hệ phương trình tuyến tính 141
§1. Khái niệm mở đầu về ma trận 141
§2. Định thức 143
§3. Ma trận 147
§4. Hệ phương trình tuyến tính 155
Câu hỏi ôn tập 162
Bài tập 163
Đáp số 168
Chương V. Không gian vectơ 171
§1. Khái niệm về không gian vectơ 171
§2. Không gian con. Hệ sinh 174
§3. Hạng của một họ vectơ 183
§4. Bài toán đổi cơ sở 184
§5. Ánh xạ tuyến tính 188
Câu hỏi ôn tập 198
Bài tập 199
Đáp số 205
Chương VI. Phép tính tích phân của hàm số một biến số 207
§1. Tích phân bất định 207
§2. Tích phân xác định 226
§3. Một số ứng dụng hình học của tích phân xác định 237
§4. Tích phân suy rộng 250
Câu hỏi ôn tập 257
Bài tập 260
Đáp số 266
Tài liệu tham khảo 271

CHƯƠNG I. TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ - SỐ THỰC VÀ SỐ PHỨC

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

Chương I dành để ôn tập và bổ sung những kiến thức về tập hợp và ánh xạ, về số thực đã được học ở bậc Trung học Phổ thông, trình bày những kiến thức cơ bản về số phức, các phép tính về số phức.

Sinh viên cần hiểu kĩ các kiến thức đó, làm quen với số phức, làm tính thành thạo đối với các số phức, biết sử dụng dạng lượng giác của số phức.

§1. NHẮC LẠI VỀ MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC VÀ KÍ HIỆU LÔGIC

1.1. Mệnh đề toán học

Mệnh đề toán học là một khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai, vừa không đúng vừa không sai.

Ví dụ 1: $2 < 4$ là mệnh đề toán học đúng;

$5 > 7$ là mệnh đề toán học sai.

1.2. Kí hiệu lôgic

Trong suy diễn toán học, người ta dùng các kí hiệu sau:

Giả sử có hai mệnh đề A và B.

- Kí hiệu $A \Rightarrow B$ đọc là "từ mệnh đề A suy ra mệnh đề B".
- Kí hiệu $A \Leftrightarrow B$ đọc là "mệnh đề A tương đương với mệnh đề B". Điều đó có nghĩa là $A \Rightarrow B$, đồng thời $B \Rightarrow A$.
- Nếu $A \Rightarrow B$ thì ta nói A là điều kiện đủ để có B, còn B là điều kiện cần có được từ A. Nếu $A \Leftrightarrow B$ thì A là điều kiện cần và đủ của B, đồng thời B cũng là điều kiện cần và đủ của A.

Ví dụ 2: Điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm thực phân biệt là $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Ta viết:

[phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm thực phân biệt] $\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$.

- Kí hiệu $:=$ đọc là "được định nghĩa là".
- Kí hiệu $\forall x$ đọc là "với mọi x".
- Kí hiệu $\exists$ y đọc là "tồn tại y".

Ví dụ 3: $\forall x$ ta đều có $x^2 + x + 1 > 0$; $\exists$ y để $y^2 - 5y + 4 = 0$.

§2. TẬP HỢP

2.1. Tập hợp và các phần tử của tập hợp

Tập hợp là một khái niệm nguyên thuỷ, không được định nghĩa cũng như đối với các khái niệm điểm, đường, mặt. Ta thường nói tập hợp sinh viên của một lớp, tập hợp các điểm trong hình tròn có bán kính đơn vị,... Như vậy, tập hợp bao gồm các đối tượng có chung một tính chất nào đó. Mỗi đối tượng trong tập hợp gọi là một *phần tử* của tập hợp.

Người ta thường dùng các chữ hoa như A, B, C, ... để chỉ các tập hợp và các chữ thường như x, y, z, t,... để chỉ các phần tử của tập hợp.

Nếu x là phần tử của tập hợp A, ta kí hiệu $x \in A$ (đọc là "x thuộc A"). Nếu y không phải là phần tử của tập hợp B, ta kí hiệu $y \notin B$ (đọc là "y không thuộc B").

Tập hợp gồm một số hữu hạn phần tử gọi là *tập hợp hữu hạn*. Người ta cho một tập hợp hữu hạn bằng cách liệt kê các phần tử của nó. Tập hợp gồm vô số phần tử gọi là *tập hợp vô hạn*. Tập hợp không có phần tử nào gọi là *tập rỗng* (tập trống), kí hiệu là $\varnothing$.

Nếu A là tập hợp gồm những phần tử x có tính chất $\mathscr{P}$, ta viết: $A = \{x | x$ có tính chất $\mathscr{P}\}$.

Ví dụ 1: $A = \{x | x^2 - 1 = 0\}$ đọc là "A là tập hợp các số x sao cho $x^2 - 1 = 0$".

Đó chính là tập hợp hữu hạn $\{-1; 1\}$.

Các tập hợp thường gặp trong toán học là:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ là tập hợp các số tự nhiên.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ là tập hợp các số nguyên dương.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ là tập hợp các số nguyên.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ là tập hợp các số hữu tỉ.

$\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ là tập hợp các số thực khác không.

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ là tập hợp các số thực không âm.

$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ là tập hợp các số thực không dương.

Tập hợp vô hạn được gọi là *đếm được* nếu có thể đánh số các phần tử của nó theo thứ tự tự nhiên. Trong trường hợp trái lại, tập hợp được gọi là *không đếm được*. Các tập hợp $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ là những tập hợp đếm được. Chẳng hạn, ta có thể đánh số các phần tử của $\mathbb{Z}$ (tập hợp các số nguyên) theo các mũi tên như sau:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & 1 & & 2 & & 3 & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \cdots \\
 & & -1 & & -2 & & -3 & &
\end{array}$$

Các tập hợp $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ là những tập hợp không đếm được.

2.2. Tập hợp con. Tập hợp bằng nhau

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, ta nói rằng A là tập hợp con của B, hay A bao hàm trong B, hay tập hợp B chứa tập hợp A, kí hiệu $A \subset B$ hay $B \supset A$.

Như vậy, ta cũng có $A \subset A$.

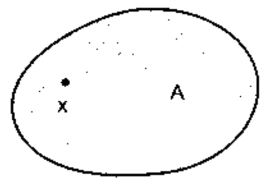
Với các tập hợp đã liệt kê ở trên, ta có $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ta quy ước : Tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp.

Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, kí hiệu : $A = B$.

2.3. Các phép toán về tập hợp

Để dễ hình dung tập hợp và các phần tử của nó, người ta thường dùng cách biểu diễn hình học, xem mỗi phần tử của tập hợp là một điểm nằm trong một hình phẳng giới hạn bởi một đường cong kín, gọi là biểu đồ Ven (hình 1.1).



Hình 1.1

2.3.1. Phép hợp

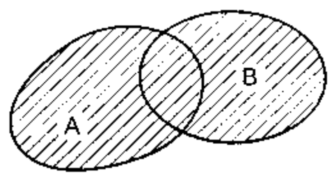
Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm những phần tử thuộc tập hợp A, hoặc tập hợp B, kí hiệu $A \cup B$.

$A \cup B = \{x | x \in A$ hoặc $A \in B\}$ (hình 1.2).

Phép hợp các tập hợp có các tính chất sau:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (tính chất kết hợp);

$A \cup B = B \cup A$ (tính chất giao hoán).



Hình 1.2

2.3.2. Phép giao

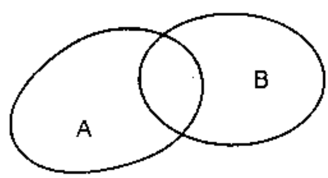
Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm những phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B, kí hiệu $A \cap B$.

$A \cap B = \{x | x \in A$ và $x \in B\}$ (hình 1.3).

Phép giao của các tập hợp có các tính chất sau :

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

$A \cap B = B \cap A$.



Hình 1.3

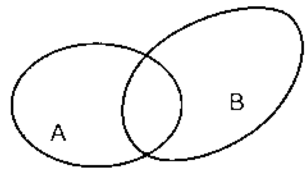
Hai phép toán trên được liên hệ với nhau bởi luật phân phối :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2.3.3. Phép trừ

Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp gồm những phần tử thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B, kí hiệu $A \setminus B$,



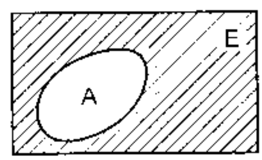
$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ (hình 1.4).

Hình 1.4

2.3.4. Tập hợp bù (phần bù)

Xét tập hợp E, A là tập hợp con của E. Tập hợp bù của A trong E là tập hợp $E \setminus A$, kí hiệu $\overline{A}$, $\overline{A} = E \setminus A$ (hình 1.5).

Như vậy $\overline{A} \subset E \Rightarrow E - \overline{A} = \overline{\overline{A}} = A$.



Ví dụ 2: $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1,2\}$;

$B = \{x \mid x^2 + 4x - 5 = 0\} = \{-5,1\}$.

Hình 1.5

Khi đó $A \cup B = \{-5, 1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$;

$A \setminus B = \{2\}$, $(A \cup B) \setminus A = \{-5\}$.

2.4. Tích đề - các của các tập hợp

Tích đề - các của hai tập hợp A và B là tập hợp tất cả các cặp (a, b), $a \in A$, $b \in B$ theo thứ tự a trước b sau, kí hiệu $A \times B$,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Ví dụ 3. Nếu $A = \{1, 2\}$, $B = \{5, x\}$ thì $A \times B = \{(1, 5), (1, x), (2, 5), (2, x)\}$.

Nếu A = B thì $A \times B = A \times A$, kí hiệu A^2.

Nếu $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ thì $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{n lần}}$, kí hiệu A^n.

Chú ý: Tích đề-các của hai tập hợp không có tính chất giao hoán : $A \times B \neq B \times A$.

§3. ÁNH XẠ

3.1. Các định nghĩa

Định nghĩa1. Cho hai tập hợp X ,Y khác $\varnothing$. Ta gọi *ánh xạ f từ X vào Y* là một quy luật cho ứng với mỗi phần tử $x \in X$ một và chỉ một phần tử $y \in Y$, kí hiệu: $f : X \to Y,\ x \mapsto y = f(x)$.

X được gọi là *tập hợp nguồn*, Y được gọi là *tập hợp đích*. Phần tử y được gọi là *ảnh* của x và x được gọi là *nghịch ảnh* của y.

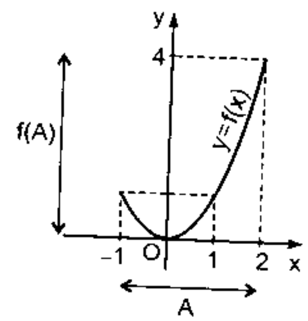
Định nghĩa 2. Nếu $A \subset X$ thì tập hợp các ảnh qua ánh xạ f của tất cả các phần tử $x \in A$ gọi là *ảnh của tập hợp A* qua f, kí hiệu f(A). Vậy

$$f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\}.$$

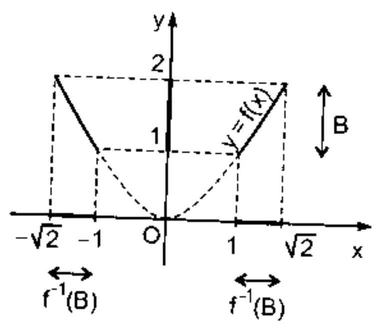
Định nghĩa 3. Nếu $B \subset Y$ thì tập hợp $\{x \in X \mid f(x) = y \in B\}$

gọi là *nghịch ảnh của tập hợp B* trong ánh xạ f, kí hiệu là $f^{-1}(B)$.

Ví dụ 1: Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto y = f(x) = x^2$. Đó là một ánh xạ vì với mỗi $x \in \mathbb{R}$, ta được một và chỉ một $y = x^2$.



Hình 1.6



Hình 1.7

Nếu $A = [-1, 2] \subset \mathbb{R}$ thì $f(A) = \{y \mid y = x^2, x \in [-1, 2]\} = [0, 4] \subset \mathbb{R}_+$ (hình 1.6).

Nếu $B = [1, 2] \subset \mathbb{R}_+$ thì $f^{-1}(B) = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ x^2 \in [1, 2]\} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 1 \le x^2 \le 2\}$

$$= \{x \mid -\sqrt{2} \le x \le -1\} \cup \{x \mid 1 \le x \le \sqrt{2}\} = \left[-\sqrt{2}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{2}\right] \quad \text{(hình 1.7).}$$

3.2. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh

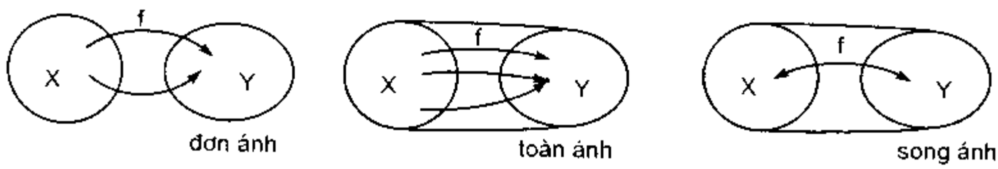
Định nghĩa 4. Cho ánh xạ $f : X \to Y$.

1) Ánh xạ f gọi là *đơn ánh* nếu: $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, điều đó tương đương với: $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

2) Ánh xạ f gọi là *toàn ánh* nếu $f(X) = Y$, điều đó có nghĩa là với mọi $y \in Y$, tồn tại ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $y = f(x)$. Khi đó, ta nói rằng $f: X \to Y$ là ánh xạ từ X *lên* Y.

3) Ánh xạ f gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

Mô tả hình học của đơn ánh, toàn ánh, song ánh được cho ở hình 1.8.



Hình 1.8

Ví dụ 2: Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $x \mapsto f(x) = x^3 + 1$.

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ hay $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$, ta suy ra $x_1^3 = x_2^3$, vậy $x_1 = x_2$. Do đó, f là đơn ánh.

Lấy bất kì $y \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x) = x^3 + 1 = y$ hay $x^3 + 1 - y = 0$ có nghiệm $x = \sqrt[3]{y-1}$.

Vậy $\exists x = \sqrt[3]{y-1} \in \mathbb{R}$ để $f(x) = x^3 + 1 = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y$ hay f là toán ánh.

f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh nên f là song ánh.

Ví dụ 3: Cho ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $x \mapsto f(x) = x^2$.

Nếu $f(x_1) = f(x_2)$ hay $x_1^2 = x_2^2$, ta suy ra $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$ hay $x_1 = x_2$ và $x_1 = -x_2$. Vậy f không phải là đơn ánh.

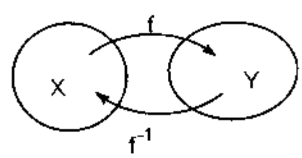
Lấy bất kì $y \in \mathbb{R}$, phương trình $x^2 = y$ chỉ có nghiệm $x = \pm\sqrt{y}$, khi $y \geq 0$. Vậy f cũng không phải là toàn ánh.

Tuy nhiên, ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ xác định bởi $x \mapsto x^2$ là toàn ánh vì $\forall\ y \in \mathbb{R}_+$ $(y \geq 0)$, ta luôn có $x = \pm\sqrt{y}$ để cho $x^2 = y$.

Lại xét ánh xạ $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ xác định bởi $x \mapsto x^2$. Rõ ràng ánh xạ ấy là một song ánh.

3.3. Ánh xạ ngược của một song ánh

Giả sử $f: X \to Y$ là một song ánh. Khi đó, mỗi phần tử $x \in X$ có một ảnh xác định $f(x) \in Y$. Ngược lại, mỗi phần tử $y \in Y$ có một và chỉ một nghịch ảnh $x \in X$. Vì vậy, song ánh f từ X lên Y là một phép tương ứng 1 – 1 hai chiều giữa X và Y. Ánh xạ biến $y \in Y$ thành $x \in X$ sao cho $f(x) = y$ gọi là *ánh xạ ngược* của song ánh f, kí hiệu là f^{-1}. Vậy f^{-1} là một ánh xạ từ Y lên X, nó cũng là một song ánh (hình 1.9).



Hình 1.9

Ví dụ 4: Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto f(x) = x^3 + 1$ là một song ánh (xem ví dụ 2). Nó có ánh xạ ngược f^{-1}, đó là:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ xác định bởi } y \mapsto \sqrt[3]{y-1}.$$

Ví dụ 5 : Xét ánh xạ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi :

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (3x + 2y, 7x + 5y).$$

Giả sử $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, tức là:

$$(3x_1 + 2y_1, 7x_1 + 5y_1) = (3x_2 + 2y_2, 7x_2 + 5y_2).$$

Khi đó $\begin{cases} 3x_1 + 2y_1 = 3x_2 + 2y_2 \\ 7x_1 + 5y_1 = 7x_2 + 5y_2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 3(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) = 0 \\ 7(x_1 - x_2) + 5(y_1 - y_2) = 0. \end{cases}$

Nghiệm của hệ phương trình đó là $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$. Vậy $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$. Do đó $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Suy ra f là một đơn ánh từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

Lấy $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, cần chỉ ra tồn tại cặp (x, y) sao cho :

$$f(x, y) = (3x + 2y,\ 7x + 5y) = (u, v) \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = u \\ 7x + 5y = v. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình đó đối với x, y, ta được một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 5u - 2v \\ y = 3v - 7u. \end{cases}$

Vậy f là một toàn ánh từ $\mathbb{R}^2$ lên $\mathbb{R}^2$. Do f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh nên là một song ánh . Do đó, nó có ánh xạ ngược f^{-1} xác định bởi :

$$(u, v) \mapsto f^{-1}(u, v) = (5u - 2v,\ 3v - 7u).$$

Chú thích: Nếu $f: X \to Y$ là một đơn ánh thì f là một song ánh từ X lên f(X). Vì vậy, tồn tại ánh xạ ngược $f^{-1} : f(X) \to X$.

3.4. Tích (hợp) của hai ánh xạ

Cho ba tập hợp X, Y, Z và hai ánh xạ $f: X \to Y$; $g: Y \to Z$. Như vậy, ứng với mỗi phần tử $x \in X$, có một và chỉ một phần tử $y = f(x) \in Y$và ứng với mỗi phần tử $y \in Y$, có một và chỉ một phần tử $z = g(y) \in Z$. Như vậy, ứng với mỗi phần tử $x \in X$, qua trung gian y, có một và chỉ một phần tử $z = g(y) = g[f(x)] \in Z$. Ánh xạ từ X tới Z xác định bởi: $x \in X \mapsto z = g[f(x)] \in Z$.

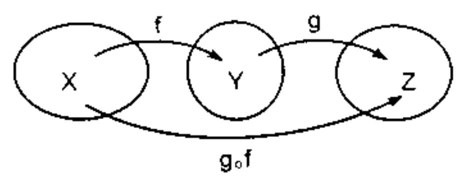
Gọi là *tích* (hay *hợp*) của các ánh xạ f và g, kí hiệu là $g \circ f$. Vậy $g \circ f: X \to Z$, $x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$ (hình 1.10).

Ví dụ 6: Cho $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$;

$$g : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ x \mapsto e^x.$$

Ta có $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = e^{\sin x}$;

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sin e^x.$$



Hình 1.10

§4. SỐ THỰC

4.1. Khái niệm về số thực

Ta biết rằng *số hữu tỉ* là số có dạng $\frac{p}{q}$, trong đó p, q $\in \mathbb{Z}$, q $\neq$ 0. Mọi số hữu tỉ đều có thể viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn, hay số thập phân vô hạn tuần hoàn. Chẳng hạn : $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{1}{3} = 0{,}333333333 \ldots = 0{,}(3)$.

Ngoài các số thập phân vô hạn tuần hoàn, ta còn gặp những số thập phân vô hạn không tuần hoàn như các số :

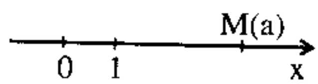
$$\pi = 3{,}1415926\ldots;\quad \sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots;\qquad \sqrt{3} = 1{,}718281825\ldots$$

Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là các *số vô tỉ*. Như vậy, số vô tỉ là những số không viết được dưới dạng tỉ số của hai số nguyên.

Tập hợp tất cả các số hữu tỉ và vô tỉ gọi là tập hợp các *số thực*, kí hiệu là $\mathbb{R}$.

4.2. Trục số thực

Người ta thường biểu diễn các số thực trên một đường thẳng, trên đó đã chọn một điểm O làm gốc, một chiều dương và một đơn vị dài (hình 1.11). Mỗi điểm M trên đường thẳng đó được ứng với số thực a bằng độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{OM}$. Đảo lại, nếu cho trước một số thực a, ta tìm được một điểm duy nhất M trên đường thẳng sao cho độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{OM}$ bằng a. Như vậy, giữa tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ và tập hợp các điểm trên đường thẳng có một phép tương ứng một - một hai chiều. Đường thẳng đó gọi là *trục số thực*. Ta dùng kí hiệu M(x) để chỉ điểm M ứng với số thực x.



Hình 1.11

4.3. Khoảng, đoạn, khoảng vô hạn

Sau đây là các tập hợp số thực thường gặp. Giả sử a, b là hai số thực, a < b.

$\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ được kí hiệu là (a, b), gọi là một *khoảng mở*.

$\{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ được kí hiệu là $[a, b]$, gọi là một *khoảng đóng* hay *đoạn*.

$\{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$ được kí hiệu là $(a, b]$.

$\{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$ được kí hiệu là $[a, b)$.

$\{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ được kí hiệu là $(-\infty, a)$.

$\{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$ được kí hiệu là $(-\infty, a]$.

$\{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ được kí hiệu là $(a, +\infty)$.

$\{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$ được kí hiệu là $[a, +\infty)$.

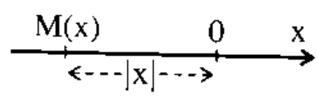
Còn $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Các khoảng $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ là những *khoảng vô hạn*.

4.4. Giá trị tuyệt đối

Số thực x có thể là dương, âm hay bằng 0. Người ta gọi trị số tuyệt đối của số thực x là một số, kí hiệu là $|x|$, được xác định như sau:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \ge 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$



Hình 1.12

Chẳng hạn, $|7| = 7$; $|-5| = 5$.

Nếu số thực x biểu diễn điểm M trên trục số thì số $|x|$ là độ dài hình học của đoạn OM (hình 1.12).

Giả sử a là một số thực dương. Nếu số thực x biểu diễn điểm M trên trục số thì bất đẳng thức $|x| < a$ chứng tỏ rằng khoảng cách hình học từ gốc O tới M nhỏ hơn a. Vậy: $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$.

Một cách tổng quát : $|x - x_0| \le a \Leftrightarrow x_o - a \le x \le x_o + a$.

4.5. Các tính chất của giá trị tuyệt đối

$$|x + y| \le |x| + |y|;$$

$$|x - y| \ge |x| - |y|;$$

$$|xy| = |x|.|y|;$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ với } y \ne 0;$$

$$|x^n| = |x|^n.$$

Bạn đọc tự chứng minh các công thức này.

§5. SỐ PHỨC

Nếu chỉ tính toán với các số thực thì những phương trình đại số như phương trình $x^2 + 1 = 0$ hay $x^2 = -1$ vô nghiệm vì bình phương của mọi số thực đều không âm. Vì vậy, cần phải xây dựng những số mới sao cho số thực là trường hợp riêng của những số mới và các phương trình đại số đều có nghiệm. Những số mới đó là số phức.

5.1. Các định nghĩa

Người ta gọi *đơn vị ảo* là số i thoả mãn đẳng thức $i^2 = -1$. Như vậy, phương trình $x^2 = -1$ có hai nghiệm $x = i$ và $x = -i$.

Người ta gọi *số phức* là số có dạng $z = a + ib$, (1 . 1)

trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, a gọi là *phần thực* của số phức z , kí hiệu là Rez, b gọi là *phần ảo* của z, kí hiệu là Imz.

Nếu $b = 0$, ta có $z = a \in \mathbb{R}$. Vậy số thực là trường hợp riêng của số phức.

Nếu $a = 0$, ta có $z = ib$. Ta nói $z = ib$ là một *số ảo thuần tuý.*

Nếu $a = b = 0$, ta viết $z = 0$.

Tập hợp tất cả các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$. Vậy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$ gọi là *bằng nhau* nếu $a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$, kí hiệu là $z_1 = z_2$.

Nếu $z = a + ib$ thì $-a - ib$ gọi là *số phức đối của z*, kí hiệu là $-z$, còn $a - ib$ gọi là *số phức liên hợp của z*, kí hiệu là $\bar{z}$. Chẳng hạn, nếu $z = 3 + 5i$ thì $-z = -3 - 5i$; $\bar{z} = 3 - 5i$.

5.2. Các phép tính về số phức

5.2.1. Phép cộng các số phức

Cho hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$; $z_2 = a_2 + ib_2$. Người ta gọi tổng của hai số phức z_1 và z_2 là số phức, kí hiệu là $z_1 + z_2$, xác định bởi $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

Từ đó suy ra các tính chất sau:

a) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (tính chất kết hợp);

b) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (tính chất giao hoán);

c) $z + 0 = z$;

d) $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Chẳng hạn, nếu $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 7i$ thì :

$$z_1 + z_2 = (3 - 2) + i(-4 + 7) = 1 + 3i;$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 4i) + (2 - 7i) = 5 - 11i.$$

5.2.2. phép nhân các số phức

Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ là số phức có được bằng cách nhân chúng như nhân hai nhị thức thông thường với chú ý $i^2 = -1$, kí hiệu là $z_1 . z_2$,

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a_1 + ib_1).(a_2 + ib_2) = a_1(a_2 + ib_2) + ib_1(a_2 + ib_2) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1). \end{aligned}$$

Nếu $z_1 = z_2 = z$ thì z.z được kí hiệu là z^2. Còn $\underbrace{z.z.......z}_{\text{n lần}}$ được kí hiệu là z^n.

Phép nhân số phức có các tính chất sau:

a) $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ (tính chất kết hợp).

b) $z_1.z_2 = z_2.z_1$ (tính chất giao hoán).

c) $z.1 = z$.

d) Nếu $z \neq 0$ thì tồn tại số phức, kí hiệu là z^{-1} sao cho $z.z^{-1} = 1$. Số phức z^{-1} gọi là số nghịch đảo của z.

Thật vậy, giả sử $z = a + ib \neq 0$, tức là $a^2 + b^2 \neq 0$. Ta cần tìm số phức $z^{-1} = x + iy$ sao cho $z.z^{-1} = 1$, hay $(a + ib)(x + iy) = 1 \Leftrightarrow ax - by + i(ay + bx) = 1 + 0i$.

Hai số phức bằng nhau khi phần thực của chúng bằng nhau và phần ảo của chúng bằng nhau. Do đó: $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases}$

Giải hệ hai phương trình đó, ta được một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$. Vậy $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Chú thích: Trong thực hành, ta có thể tính $z^{-1} = \dfrac{1}{a + ib}$ bằng cách nhân tử số và mẫu số với (a – ib), ta được $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \dfrac{a - ib}{a^2 - i^2b^2} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

e) $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1.z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0)$.

5.3. Các ví dụ

Ví dụ 1 : Tìm các số thực x, y sao cho $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$.

Giải. Do $x, y \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho có thể viết:

$$x + 3y + i(2x - 5y) = 1 - 3i.$$

Suy ra $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{4}{11};\ \ y = \dfrac{5}{11}$.

Ví dụ 2: Tính A = (x − 1 − i) (x − 1 + i) (x + 1 + i) (x + 1 − i).

Giải. $(x - 1 - i)(x - 1 + i) = (x - 1)^2 - i^2 = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2;$

$$(x + 1 + i)(x + 1 - i) = (x + 1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow A = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = x^4 + 4.$$

Ví dụ 3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $A = \dfrac{3+2i}{1-\sqrt{3}i}$.

Giải. $$A = \frac{3+2i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(3+2i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{(3-2\sqrt{3})+i(2+3\sqrt{3})}{1-(\sqrt{3}i)^2}$$

$$= \frac{(3-2\sqrt{3})+i(2+3\sqrt{3})}{1+3} = \frac{3-2\sqrt{3}}{4} + i\frac{2+3\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $\operatorname{Re} A = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{4}$, $\operatorname{Im} A = \dfrac{2+3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4: Cho z = a + ib. Tính z^4.

Giải. $z^4 = (a + ib)^4 = a^4 + 4a^3ib + 6a^2(ib)^2 + 4a(ib)^3 + (ib)^4$

$$= a^4 + 4a^3bi - 6a^2b^2 - 4ab^3i + b^4$$

$$=(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) + 4ab(a^2 - b^2)i.$$

Chú ý rằng: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$.

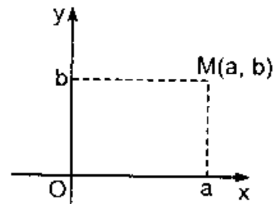
Ví dụ 5 : Tính $A = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Giải. $$A = \frac{(1+i)^9(1+i)^7}{(1-i)^7(1+i)^7} = \frac{(1+i)^{16}}{\left[(1-i)(1+i)\right]^7} = \frac{(1+i)^{16}}{(1-i^2)^7} = \frac{1}{2^7}(1+i)^{16}$$

$$= \frac{1}{2^7}\left[(1+i)^2\right]^8 = \frac{(2i)^8}{2^7} = 2.i^8 = 2.$$

5.4. Dạng lượng giác của số phức

5.4.1. Mặt phẳng phức

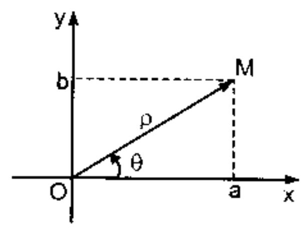


Hình 1.13

Vì số phức $z = a + ib$ ứng với cặp số thực (a, b) nên ta có thể biểu diễn nó bởi điểm M trong mặt phẳng toạ độ Oxy sao cho M có toạ độ (a, b). Số phức z gọi là *toạ vị* của điểm M. Như vậy, ta được một song ánh giữa tập hợp tất cả các số phức $\mathbb{C}$ và mặt phẳng toạ độ Oxy. Ta gọi mặt phẳng đó là *mặt phẳng phức* (hình1.13).

Những điểm trên trục Ox là ảnh của các số phức có dạng $z = a \in \mathbb{R}$ nên trục Ox gọi là *trục thực*. Những điểm trên trục Oy là ảnh của những số phức có dạng $z = ib$, đó là những số phức thuần tuý ảo, nên trục Oy gọi là *trục ảo*.

5.4.2. Dạng lượng giác của số phức



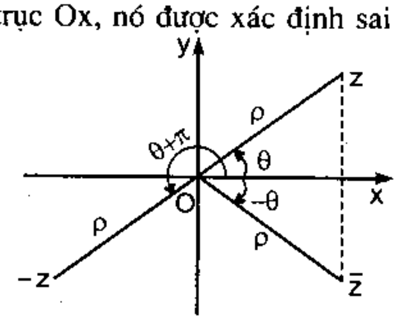
Hình 1.14

Giả sử M là ảnh của số phức z trong mặt phẳng phức. Nếu $z \neq 0$ thì M không trùng với gốc O, vectơ $\overrightarrow{OM}$ hoàn toàn xác định. Đặt:

$$\rho = OM;\ \theta = (Ox, \overrightarrow{OM}),$$

ρ là một số dương gọi là *môđun* của z, kí hiệu là $|z|$;

θ là góc định hướng mà vectơ $\overrightarrow{OM}$ làm với trục Ox, nó được xác định sai khác $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và được gọi là *agumen* của z (hình 1.14).



Hình 1.15

Nếu z có môđun ρ và agumen θ thì $\overline{z}$ có môđun ρ và agumen $-\theta$, còn $-z$ có môđun ρ và agumen $\theta + \pi$ (hình 1.15).

Từ hình 1.14 ta suy ra :

$$a = \rho\cos\theta,\ b = \rho\sin\theta.$$

Do đó, số phức $z = a + ib$ có thể viết được dưới dạng $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.
$$(1.2)$$

Đó là dạng lượng giác của số phức. Còn dạng (1. 1) gọi là dạng chính tắc.

Nếu z = 0 thì M trùng với O, ta có $\rho = 0$, agumen θ của nó tuỳ ý.

Cũng từ hình 1.14, ta suy ra :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \ \ tg\theta = \frac{b}{a}. \qquad (1.\ \ 3)$$

Trong khoảng [0; 2π) có hai góc φ_1, φ_2 thoả mãn $tg\varphi_1 = tg\varphi_2 = \frac{b}{a}$. Chọn φ là một trong hai góc đó sao cho sinφ cùng dấu với b. Khi đó $\theta = \varphi + 2k\pi$.

Ví dụ 6 : Cho $z = 1 + \sqrt{3}i$, ta có a = 1; $b = \sqrt{3}$, vậy $\rho = \sqrt{1+3} = 2$; $tg\varphi = \sqrt{3}$.

Trong khoảng [0; 2π), phương trình $tg\varphi = \sqrt{3}$ có hai nghiệm $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{4\pi}{3}$. Vì $\sin\frac{\pi}{3} > 0$ cùng dấu với $b = \sqrt{3}$ nên $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Vậy dạng lượng giác của z là

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Ví dụ7: Cho $z = 1 - \sqrt{3}i$. Ta có a = 1, $b = -\sqrt{3}$, vậy $\rho = 2$; $tg\varphi = -\sqrt{3}$. Do đó $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ hoặc $\varphi = \frac{5\pi}{3}$. Ta chọn $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ vì $\sin\frac{5\pi}{3} < 0$ cùng dấu với $b = -\sqrt{3}$. Vậy $z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

Ví dụ 8 : Cho z = − 27. Ta có a = − 27, b = 0, vậy $\rho = \sqrt{(-27)^2} = 27$, số phức này nằm trên phía âm của trục thực nên φ = π. Vậy z = 27(cosπ + i sinπ).

Ví dụ 9: Cho z = 3i. Ta có a = 0, b = 3, ρ = 3. Số phức này nằm trên phía dương của trục ảo nên $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Vậy $z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Ví dụ 10 : Cho $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Ta có $\rho = 3$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $a = \rho\cos\varphi = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $b = \rho\sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Vậy $z = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

5.4.3. Phép nhân và phép chia các số phức dưới dạng lượng giác

Cho $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Ta có

$z_1.z_2 = \rho_1\rho_2\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$$= \rho_1\rho_2\,\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)\}$$

$$\Rightarrow z_1z_2 = \rho_1\rho_2\,\{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}. \qquad (1.\ \ 4)$$

Vậy tích của hai số phức dưới dạng lượng giác là số phức có môđun bằng tích các môđun và agumen bằng tổng các agumen.

Gọi z là số thương $\dfrac{z_1}{z_2}$ với $z_2 \neq 0$, tức là $\rho_2 \neq 0$. Gọi R và α là môđun và agumen của z. Vì $z_1 = z.z_2$ nên ta có $\rho_1 = R.\rho_2$ và $\varphi_1 = \alpha + \varphi_2$.

Do đó $R = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ và $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$.

Vậy thương của hai số phức là số phức có môđun bằng thương các môđun và agumen bằng hiệu các agumen.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]. \qquad (1.\ \ 5)$$

Đặc biệt nếu $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\rho \neq 0$ thì

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]. \qquad (1.\ \ 6)$$

Ví dụ 11: Cho $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Trong các ví dụ 6 và 7, ta đã thấy

$$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),\ z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}).$$

Do đó, theo các công thức (1. 4) và (1. 5), ta có:

$$z_1.z_2 = 4\left[\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3})\right] = 4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 4;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}) = \cos(-\frac{4\pi}{3}) + i\sin(-\frac{4\pi}{3})$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

5.4.4. Luỹ thừa của số phức ở dạng lượng giác. Công thức Moivre

Cho $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Theo(1.4) ta có

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi);$$

$$z^3 = z^2.z = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Tổng quát: $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Đặc biệt nếu $\rho = 1$, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, thì $\forall n \in \mathbb{N}$, ta có

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (1.\ 7)$$

Công thức (1. 7) gọi là công thức Moivre. Ta có thể dùng công thức đó để tính cosnx và sinnx theo cosx và sinx.

Ví dụ 12: Cho $z = 1-\sqrt{3}i$. Tính z^n, z^{12}.

Giải. Ta có $z = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ (xem ví dụ 7), do đó :

$$z^n = 2^n(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})^n = 2^n(\cos\frac{5n\pi}{3} + i\sin\frac{5n\pi}{3});$$

$$z^{12} = 2^{12}\left[\cos(12.\frac{5\pi}{3}) + i\sin(12.\frac{5\pi}{3})\right] = 2^{12}(\cos 20\pi + i\sin 20\pi) = 2^{12}.$$

Ví dụ 13 : Hãy biểu diễn cos3x, sin3x theo sinx và cosx.

Giải. Theo công thức Moivre ta có

$$\cos 3x + i\sin 3x = (\cos x + i\sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x + 3\cos^2 x.i\sin x + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3$$

$$= (\cos^3 x - 3\cos x.\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).$$

Vậy:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x;$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3(1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Ví dụ 14: Chứng minh rằng: $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$.

Giải. Đặt $z = 1 + i = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Ta có $z^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$.

Ví dụ 15: Tính các tổng : $S = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx;$

$T = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx.$

Giải. Ta có

$$S + iT = (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + ... + (\cos nx + i\sin nx).$$

Đặt $\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2} = \alpha$. Khi đó $\alpha^k = \cos\frac{kx}{2} + i\sin\frac{kx}{2}$. Vậy

$$S + iT = \alpha^2 + \alpha^4 + ... + \alpha^{2n} = \alpha^2\frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} =$$

$$= \alpha^2\frac{\alpha^n(\alpha^n - \alpha^{-n})}{\alpha(\alpha - \alpha^{-1})} = \alpha^{n+1}.\frac{\alpha^n - \alpha^{-n}}{\alpha - \alpha^{-1}}. \qquad (*)$$

Ta có $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}} = \cos(-\frac{x}{2}) + i\sin(-\frac{x}{2})$

$$\Rightarrow \alpha^{-n} = \left[\cos(-\frac{x}{2}) + i\sin(-\frac{x}{2})\right]^n =$$

$$\cos(-\frac{nx}{2}) + i\sin(-\frac{nx}{2}) = \cos\frac{nx}{2} - i\sin\frac{nx}{2}.$$

Do đó $\alpha - \alpha^{-1} = 2i\sin\frac{x}{2}$, $\alpha^{n} - e^{-n} = 2i\sin\frac{n}{x}$.

Thế vào (*), ta được $S + iT = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left[\cos(n+1)\frac{x}{2} + i\sin(n+1)\frac{x}{2}\right]$

$$\Rightarrow S = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\cos(n+1)\frac{x}{2},\ T = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\sin(n+1)\frac{x}{2}.$$

5.4.5. Khai căn số phức

Người ta gọi căn bậc m của số phức z ($m \in \mathbb{N}$) là số phức ζ sao cho $\zeta^m = z$.

Giả sử $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $\zeta = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ là một căn bậc m của z. Vì $\zeta^m = z$, ta có $\{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\}^m = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Áp dụng công thức Moivre, ta được :

$$r^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\Rightarrow r^m = \rho,\ m\alpha = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $r = \sqrt[m]{\rho}$, $\alpha = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{m}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cho k = 0, 1, 2 ... , m − 1, ta được m giá trị khác nhau của α. Cho k = m, m + 1, ..., 2m − 1, các giá trị trên của α lại được lặp lại. Vậy ta được m căn bậc m của z (chúng có cùng môđun):

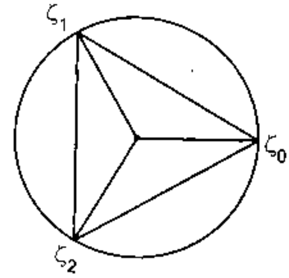
$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{\rho}\left[\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{m}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{m})\right],\ k = 0, 1, ..., m-1. \qquad (1.\ 8)$$

Ảnh của chúng là các đỉnh của một đa giác đều m cạnh.

Ví dụ 16: Tính $\sqrt[3]{1}$.

Giải. Ta có $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$.

Do đó $\sqrt[3]{1} = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$.



Hình 1.16

Cho k = 0, 1, 2, ta được: $\zeta_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$;

$$\zeta_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\zeta_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ảnh của chúng được cho trên hình 1.16.

Ví dụ 17: Cho $z = \sqrt{3} - i$. Tính $\sqrt[7]{z}$.

Giải. Viết lại z dưới dạng lượng giác. Ta có $\rho = \sqrt{3+1} = 2$, $\mathrm{tg}\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hai góc $\dfrac{5\pi}{6}$ và $\dfrac{11\pi}{6}$ đều có tang bằng $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ta chọn $\varphi = \dfrac{11\pi}{6}$, vì $\sin\dfrac{11\pi}{6} < 0$, cùng dấu với $b = -1$. Vậy $z = 2\left[\cos(\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi) + i\sin(\dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi)\right]$.

Do đó theo (1. 8)

$$\sqrt[7]{z} = \sqrt[7]{2}\left[\cos\frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{7} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{7}\right]$$

$$= \sqrt[7]{2}[\cos\frac{(11+12k)\pi}{42} + i\sin\frac{(11+12k)\pi}{42}], \quad k = 0, 1, ..., 6.$$

Ví dụ 18: Tính $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$.

Giải. Đặt $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$. Viết z_1, z_2 dưới dạng lượng giác:

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}); \qquad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Do đó $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{3})\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12})$.

Theo công thức (1. 7), ta được:

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left[\cos\frac{\frac{17\pi}{12} + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{17\pi}{12} + 2k\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left[\cos(\frac{17 + 24k}{72})\pi + i\sin(\frac{17 + 24k}{12})\pi\right].$$

Ví dụ 19: Giải phương trình bậc hai $x^2 + x + 1 = 0$.

Giải. Ta có $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{3}i$.

Chú ý rằng Δ là số phức, nó có hai căn bậc hai. Vậy

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Tổng quát, nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, nó có hai nghiệm phức: $x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Đó là hai số phức liên hợp với nhau.

Ví dụ 20: Giải phương trình $x^2 - (2 + i)x + (-1 + 7i) = 0$.

Giải. Ta có $\Delta = (2 + i)^2 - 4(-1 + 7i) = 4 + 4i + i^2 + 4 - 28i = 7 - 24i =$

$$= 16 - 24i - 9 = 16 - 24i + 9i^2 = (4 - 3i)^2.$$

Vậy $x_1 = \frac{(2+i) + (4-3i)}{2} = 3 - i$; $x_2 = \frac{(2+i) - (4-3i)}{2} = -1 + 2i$.

5.4.6. Phân tích đa thức với hệ số thực thành thừa số

Trong đại số cao cấp, người ta đã chứng minh được rằng mọi đa thức $P_n(x)$ bậc n ($\geq$ 1) đều có n nghiệm thực hay phức, đơn hay bội, mỗi nghiệm bội bậc m ($\leq$ n) được tính m lần, đa thức ấy có thể phân tích thành tích của n thừa số bậc nhất $P_n(x) = a_n(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n)$, (1. 9)

trong đó a_n là hệ số đầu của đa thức; $\lambda_1,..., \lambda_n$ là các số thực hay phức. Bây giờ, ta chứng minh định lí sau.

Định lí 1.1. Mọi đa thức $P_n(x)$ bậc n ($\geq$ 1) với hệ số thực đều có thể phân tích thành tích của các thừa số bậc nhất và bậc hai

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)...(x - x_k)(x^2 + p_1x + q_1)...(x^2 + p_lx + q_l), \qquad (1.\ \ 10)$$

trong đó $x_1,..., x_k$ là các nghiệm thực của $P_n(x)$, các tam thức bậc hai đều có hệ số thực nhưng không có nghiệm thực, $k + 2l = n$.

Chứng minh : Giả sử ta có $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+ a_1x + a_0$,

trong đó $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1,...,n$, $a_n \neq 0$.

Nếu $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ thì $\overline{z_1} = a_1 - ib_1$, $\overline{z_2} = a_2 - ib_2$, do đó:

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = \overline{z_1 + z_2},$$

$$\overline{z_1}.\overline{z_2} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) = \overline{z_1.z_2},$$

$$P_n(\overline{z}) = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + ... + a_1\overline{z} + a_0 =$$

$$= \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0} = \overline{P_n(z)}.$$

Vì vậy, nếu $P_n(\zeta) = 0$ thì ta cũng có $P_n(\overline{\zeta}) = 0$, tức là nếu ζ là nghiệm của đa thức $P_n(x)$ thì $\overline{\zeta}$ cũng là nghiệm của đa thức ấy.

Giả sử đa thức $P_n(x)$ có k nghiệm thực $x_1,..., x_k$ và l cặp nghiệm phức liên hợp $\zeta_1, \overline{\zeta}_1, ..., \zeta_l, \overline{\zeta}_l$, $k + 2l = n$. Theo công thức (1. 9) ta có

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_k)(x - \zeta_1)(x - \overline{\zeta_1})\ldots(x - \zeta_l)(x - \overline{\zeta_l}).$$

Nhưng $(x - \zeta_1)(x - \overline{\zeta_1}) = x^2 - (\zeta_1 + \overline{\zeta_1})x + |\zeta_1|^2$

là một tam thức bậc hai với hệ số thực, vì $\zeta_1 + \overline{\zeta_1} = 2\,\mathrm{Re}(\zeta_1) \in \mathbb{R}$ và tam thức ấy không có nghiệm thực, chỉ có hai nghiệm phức liên hợp, nó có dạng:

$$x^2 + p_1x + q_1, \text{ với } p_1^2 - 4q_1 < 0.$$

Vậy $P_n(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_k)(x^2 + p_1x + q_1)\ldots(x^2 + p_lx + q_l)$.

Ví dụ 21: Phân tích đa thức $P(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

thành thừa số với hệ số thực.

Giải. Dễ dàng thấy rằng $x = 1$ và $x = 2$ là 2 nghiệm đơn của $P(x)$. Chia $P(x)$ cho $(x - 1)(x - 2)$, ta được

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x - 2)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2)$$

$$= (x - 1)(x - 2)\{(x^2 + 1)^2 - x^2\} = (x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Ví dụ 22: Giải phương trình $x^4 - 2\sqrt{3}x^3 + 5x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$.

Giải. Ta biến đổi

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^3 + 5x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = (x^4 + x^2) + (4x^2 + 4) - 2\sqrt{3}(x^3 + x) =$$

$$= x^2(x^2 + 1) + 4(x^2 + 1) - 2\sqrt{3}x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 2\sqrt{3}x + 4) = 0.$$

Do đó $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$;

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \pm i.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Thế nào là tập hợp đếm được và tập hợp không đếm được? Hãy tìm cách mô tả tập hợp số nguyên $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$ để khẳng định $\mathbb{Z}$ là tập hợp đếm được.

2. Thế nào là luật phân phối của ba tập hợp A, B, C? Hãy mô tả luật đó bằng biểu đồ Ven.

3. Ánh xạ là gì ? Thế nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Cho ví dụ.

4. Trị tuyệt đối của số thực là gì ? Hãy chứng minh các tính chất của giá trị tuyệt đối.

5. Định nghĩa đơn vị ảo, số phức, phần thực và phần ảo của số phức.

6. Nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $|x|$ là gì? Nếu x là số phức thì $|x|$ là gì ?

7. Nếu $x \in \mathbb{R}_+$, ta có $\sqrt[n]{x}$. Nếu x là số phức ta cũng có $\sqrt[n]{x}$. Các căn số đó khác nhau như thế nào?

8. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ là một toàn ánh.

b) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ là một đơn ánh.

c) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ với mọi $a \geq 0, b \geq 0$.

d) $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ với mọi $a \geq 0, b \geq 0$.

e) $\sqrt{a^2} = a$ với mọi số thực a.

f) $\dfrac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\dfrac{a}{b^2}}$ với mọi số $a \geq 0$.

g) $z.\overline{z} \geq 0$ với mọi số phức z.

h) Nếu $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, thì $z_1.z_2 = a_1.a_2 + ib_1.b_2$.

i) $\sqrt[5]{32+0i} = 2$.

j) Tập hợp các số phức z thoả mãn đẳng thức $\dfrac{|z+1-i|}{|z-1-2i|} = 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $-1 + i$ và $1 + 2i$.

BÀI TẬP

1. Tìm tập hợp các nghiệm thực của các phương trình và bất phương trình sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$; b) $x^2 - 4x + 3 > 0$;

c) $x^2 - 4x + 3 \le 0$; d) $x^2 - x + 1 = 0$;

e) $x^2 - x + 1 > 0$; f) $x^2 - x + 1 \le 0$.

Gọi các tập hợp nghiệm tương ứng là A, B, C, D, E, F. Tìm $A \cup B$; $A \cap B$; $A \cup C$; $A \cap C$.

2. Cho $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$. Hãy viết tất cả các phần tử của tích đề - các $A \times B$.

3. Cho $A = \{x | 1 \le x \le 2\}$; $B = \{y | 2 \le y \le 3\}$. Hãy biểu diễn hình học tích đề - các $A \times B$ lên mặt phẳng toạ độ.

4. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh? Nếu là song ánh hãy tìm ánh xạ ngược.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 7$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

c) $f : [4, 9] \subset \mathbb{R} \to [21, 96] \subset \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 3$.

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 2|x|$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto e^{x+1} (\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$.

g) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x(x + 1)$.

5. a) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Nó có phải là đơn ánh, toàn ánh không? Tìm ảnh $f(\mathbb{R})$.

b) Cho g: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$); $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$. Tìm $f \circ g$.

6. Cho ánh xạ $f : E \to F$; A, B là hai tập con của E.

a) Chứng minh rằng nếu $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

b) Nếu f là đơn ánh thì $f(A \cap B) = f(A) \cup f(B)$.

7. Cho a, b, c, d $\in \mathbb{Z}$ và $ad - bc = 1$ ($\mathbb{Z}$ là tập số nguyên), f: $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$; $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$. Chứng minh rằng f là song ánh, tìm f^{-1}.

8. Tìm tất cả các số hữu tỉ x, sao cho $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ là số hữu tỉ.

9. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ, từ đó chứng minh số $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ cũng là số vô tỉ.

10. Giải các bất phương trình:

a) $|2x - 3| < 1$; b) $(x - 2)^2 \geq 4$;

c) $x^2 + 2x - 8 \leq 0$; d) $|x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12$.

11. Tìm x, y, z, t là các số thực thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} (1+i)x + (1+2i)y + (1+3i)z + (1+4i)t = 1+5i \\ (3-i)x + (4-2i)y + (1+i)z + 4it = 2-i. \end{cases}$$

12. Tính : a) $(1 + 2i)^6$; b) $(1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5$.

13. Thực hiện phép tính:

a) $\dfrac{1 + i\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\mathrm{tg}\alpha}$; b) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$.

14. Tìm x, y $\in \mathbb{C}$ (tập các số phức) là nghiệm của hệ :

a) $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i \end{cases}$; b) $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6 \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$

15. Tính : a) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

16. Giải các phương trình bằng cách biến đổi vế trái về tích của hai nhân thức bậc hai với hệ số thực hoặc phức :

a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$; b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

17. Đưa về dạng lượng giác các số phức sau:

a) $1-i$; b) $1+i\sqrt{3}$; c) $-1+i\sqrt{3}$;

d) $-1-i\sqrt{3}$; e) $1-i\sqrt{3}$; g) $2i$; h) -3.

18. Tìm biểu diễn hình học của các số phức z thoả mãn:

a) $|z|<2$; b) $|z-i|\le 1$; c) $|z-1-i|<1$.

19. Tính: a) $(1+i)^{25}$; b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

20. Cho $\omega_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tính $\omega_1^n+\omega_2^n$, $n\in\mathbb{N}$.

21. Tính : a) $\sqrt[3]{2-2i}$; b) $\sqrt[4]{-4}$.

22. Tính : a) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

23. a) Tính cos5x, sin6x theo sinx và cosx.

b) Biểu diễn $\sin^4x$, $\cos^5x$ theo sin, và cosin của các góc bội của x.

24. Tính tổng : a) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots$;

b) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots$

25. Giải các phương trình sau trên tập $\mathbb{C}$:

a) $x^2 - (1 + i\sqrt{3})x - 1 + i\sqrt{3} = 0$; b) $x^3 - 6x + 9 = 0$;

c) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$; d) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;

e) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$.

ĐÁP SỐ

1. a) $\{1 ; 3\}$; b) $(-\infty ; 1) \cup (3 ; +\infty)$; c) $[1 ; 3]$; d) $\varnothing$; e) $(-\infty ; +\infty)$;

f) $\varnothing$; $A \cup B = (-\infty; +\infty)$; $A \cap B = \varnothing$; $A \cup C = [1, 3]$; $A \cap C = \{1, 3\}$.

2. $\{(1, 2); (2, 2); (3, 2); (1, 3); (2, 3); (2, 4); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}$.

4. a) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh, $f^{-1}(y) = y - 7$.

b) Không đơn ánh, không toàn ánh, không có ánh xạ ngược.

c) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh, $f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4 + y}$.

d) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y & y \geq 0 \\ \frac{1}{5}y & y < 0. \end{cases}$

e) Đơn ánh, toàn ánh, song ánh, $f^{-1}(y) = \ln y - 1$.

f) Không.

5. a) Không phải đơn ánh hay toàn ánh: $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$; b) $f \circ g = f$.

10. a) $1 < x < 2$; b) $x \geq 4$; $x \leq 0$; c) $-4 \leq x \leq 2$; d) $3 < x < 4$.

11. $x = -2$; $y = \frac{3}{2}$; $z = 2$; $t = -\frac{1}{2}$.

12. a) $117 + 44i$; b) $-76i$.

13. a) $\cos2\alpha + i\sin2\alpha$; b) $\frac{44-5i}{318}$.

14. Tìm các số phức x; y:

a) $x = 1 + i, y = i$; b) $x = 2 + i, \quad y = 2 - i$.

15. a) $-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$; b) 1.

16. a) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 8x + 20) = 0 \Rightarrow 1 \pm 2i; -4 \pm 2i$.

b) $(x^2 - 4x + 6)(x^2 + 4x + 12) = 0 \Rightarrow 2 \pm i\sqrt{2}; -2 \pm 2i\sqrt{2}$.

17. a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; b) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

c) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; d) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

e) $2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; g) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; h) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$.

18. a) Tất cả các điểm trong của hình tròn tâm O, bán kính r = 2.

b) Các điểm trong hình tròn tâm (0; 1), bán kính r = 1.

c) Các điểm trong hình tròn tâm (1; 1), bán kính r = 1.

19. a) $2^{12}(1 + i)$; b) $2^9(1-i\sqrt{3})$; c) $(2-\sqrt{3})^{12}$.

20. $2\cos\frac{n\pi}{3}$.

21. a) $-1+i$; $\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$; $\frac{1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$.

b) $1 + i$; $1 - i$; $-1 + i$; $-1 + i$.

22. a) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left\{\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right\}$.

b) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left\{\cos\frac{24k+17}{72}\pi + i\sin\frac{24k+17}{72}\pi\right\}$.

23. a) $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$;

$\cos 6x = 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$.

b) $\sin^4 x = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$;

$\cos^5 x = \frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$.

24. Xét $(1 + i)^n \Rightarrow$ a) $2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$; b) $2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

25. a) $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; b) -3; $\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

c) -1; $\frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$; d) $\pm\sqrt{2}$; $1 \pm i\sqrt{3}$; e) $-1 \pm \sqrt{6}$; $\pm i\sqrt{3}$.

CHƯƠNG II. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ - GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC - ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

Chương này nhằm ôn tập, hệ thống hoá và nâng cao các kiến thức về hàm số một biến số, về giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số, tính liên tục và gián đoạn của hàm số, đạo hàm và vi phân của hàm số một biến số.

Sinh viên cần nắm vững một cách có hệ thống kiến thức đó, sử dụng linh hoạt các kiến thức đó trong tính giới hạn của hàm số, khảo sát tính liên tục của hàm số, tính đạo hàm và vi phân, hiểu ý nghĩa hình học cũng như ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm và vi phân.

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

1.1. Định nghĩa hàm số một biến số

Cho X là một tập hợp khác rỗng của $\mathbb{R}$. Người ta gọi ánh xạ $f : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$,

là *hàm số một biến số* xác định trên tập hợp X, trong đó x gọi là *biến số độc lập*, y gọi là *biến số phụ thuộc* hay *hàm số* của x, X gọi là *miền xác định* của hàm số f, tập hợp $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), \forall x \in X\}$ gọi là *miền giá trị* của f.

Nếu người ta cho hàm số một biến số bởi biểu thức y = f(x) mà không nói gì về miền xác định của nó thì miền xác định của hàm số được hiểu là tập hợp những điểm x sao cho biểu thức có nghĩa.

Ví dụ 1: Hàm số $y = 2x^2 - 4x + 6$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vì $y = 2(x-1)^2 + 4 \geq 4$ nên miền giá trị của y là khoảng vô hạn $[4, +\infty)$.

Ví dụ 2: Hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ xác định khi : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

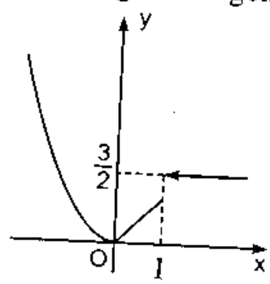
Miền giá trị của hàm số là đoạn [0, 1].

1.2. Đồ thị của hàm số một biến số

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là $X \subset \mathbb{R}$. Ứng với giá trị $x_0 \in X$, ta được giá trị $y_0 = f(x_0)$ của hàm số. Gọi M_0 là điểm có toạ độ (x_0, y_0) trong một hệ trục toạ độ đề - các vuông góc. Cho x_0 biến thiên trên tập hợp xác định X, điểm M_0 biến thiên theo và tạo nên một đường cong trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Tóm lại, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp những điểm có tọa độ thoả mãn hệ thức $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có thể là một tập hợp rời rạc các điểm, cũng có thể gồm một số cung liền.

Ví dụ 3: Đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leq 0 \\ x & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{3}{2} & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

được cho ở hình 2.1.



Hình 2.1

1.3. Hàm số đơn điệu - Hàm số chẵn, hàm số lẻ - Hàm số tuần hoàn

1.3.1. Hàm số đơn điệu

Hàm số f(x) gọi là tăng (hay đồng biến) trong khoảng (a, b) nếu :

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

là tăng ngặt trong (a, b) nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số f(x) gọi là giảm (hay nghịch biến) trong khoảng (a, b) nếu :

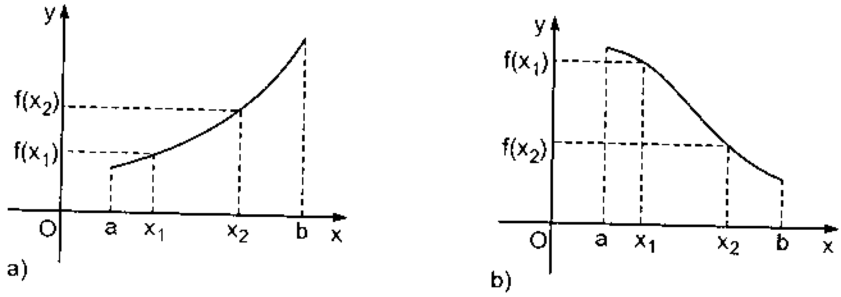
$$\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$

là giảm ngặt trong khoảng (a, b) nếu: $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Hàm số f(x) gọi là đơn điệu trong khoảng (a, b) nếu nó tăng hoặc giảm trong khoảng ấy.

Đồ thị của hàm số tăng là một đường đi lên từ trái sang phải (hình 2.2a).

Đồ thị của hàm số giảm là một đường đi xuống từ trái sang phải (hình 2.2b).



Hình 2.2

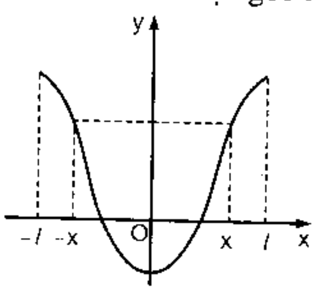
1.3.2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Hàm số f(x) xác định trong khoảng $(-l, l)$ gọi là *chẵn* nếu:

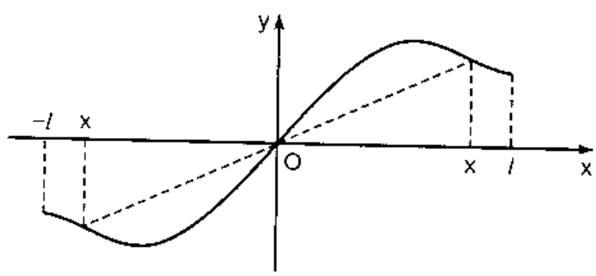
$$\forall x \in (-l, l),\ f(-x) = f(x)$$

và gọi là *lẻ* nếu : $\forall x \in (-l, l),\ f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng (hình 2.3), đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng (hình 2.4).



Hình 2.3



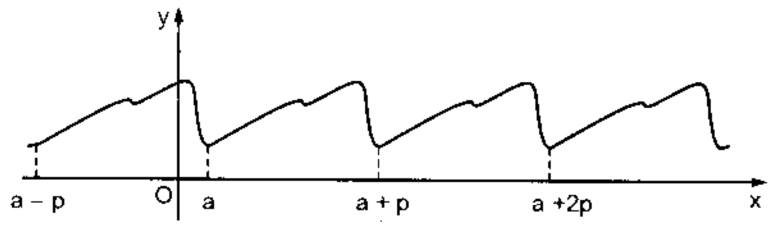
Hình 2.4

1.3.3. Hàm số tuần hoàn

Hàm số f(x) gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại số thực $p \neq 0$ sao cho :

$$f(x + p) = f(x) \qquad (*)$$

với mọi x thuộc tập xác định của nó. Số p dương nhỏ nhất sao cho đẳng thức (*) được thoả mãn gọi là *chu kì* của hàm số. Nếu biết đồ thị của hàm số đó trong một khoảng có độ dài p thì chỉ cần thực hiện những phép tịnh tiến theo vectơ (kp, 0), $k \in \mathbb{Z}$ để được toàn bộ đồ thị của nó (hình 2.5).



Hình 2.5

Ví dụ 4: a) Hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, là hàm số chẵn vì :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x).$$

b) Hàm số $g(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ xác định khi $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$ và $x \neq 1$, tức là khi $-1 < x < 1$.

Ta có $\forall\ x \in (-1, 1)$, $g(-x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x} = \ln(\dfrac{1+x}{1-x})^{-1} = -\ln\dfrac{1+x}{1-x} = -g(x)$.

Vậy g(x) là hàm số lẻ.

c) Hàm số h(x) = cosx xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, là hàm số chẵn và tuần hoàn chu kì 2π.

d) Hàm số k(x) = 5sin3x xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, là hàm số lẻ và tuần hoàn chu kì $\dfrac{2\pi}{3}$.

1.4. Hàm số hợp

Giả sử y = f(x) là hàm số của biến số u, đồng thời u = g(x) là hàm số của biến số x. Khi đó, y = f(u) = f{g(x)}là *hàm số hợp* của biến số độc lập x thông qua biến số trung gian u, kí hiệu: $(f \circ g)(x) = f\{g(x)\}$.

Miền xác định của hàm số hợp $f \circ g$ là tập hợp những x sao cho g(x) thuộc miền xác định của x.

Ví dụ 5 : Cho $y = f(u) = \sin u$, $u = g(x) = x^2 - 4x + 5$. Vì $f(u)$ xác định $\forall u \in \mathbb{R}$, nên hàm số hợp $y = (f \circ g)(x) = f\{g(x)\} = \sin(x^2 - 4x + 5)$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chú thích:

1) Giả sử cả hai hàm số f và g đều xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Nói chung ta có

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

Chẳng hạn, nếu $f(x) = \arccos x$, $g(x) = e^x + 1$, thì:

$$(f \circ g)(x) = f\{g(x)\} = \arccos(e^x + 1)$$

$$(g \circ f)(x) = g\{f(x)\} = e^{\arccos x} + 1.$$

2) Cũng có thể định nghĩa hợp của ba hàm số hoặc nhiều hơn. Chẳng hạn,

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

1.5. Hàm số ngược

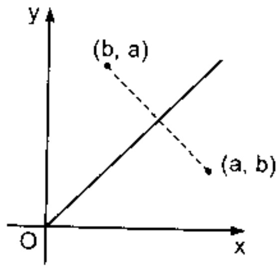
Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số xác định, đơn điệu trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Khi đó, f là một song ánh từ X lên $f(X) := Y$ (xem chú thích mục 3.3 chương I). Do đó, mỗi phần tử $y \in Y$ đều là ảnh của một phần tử duy nhất $x \in X$. Quy tắc cho ứng với mỗi phần tử $y \in Y$, một phần tử duy nhất $x \in X$ gọi là hàm số ngược của f và được kí hiệu là f^{-1}. Vậy f^{-1} là một hàm số xác định trên $Y = f(X)$, lấy giá trị trong X. Ánh xạ $f^{-1} : Y \to X$ cũng là một song ánh. Như vậy,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

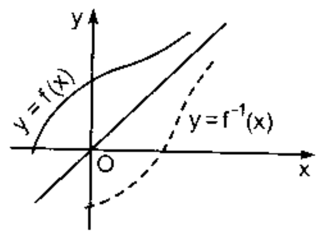
Do đó, đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ trong cùng một hệ toạ độ trùng nhau. Nhưng thông thường, ta vẫn dùng x để chỉ biến số độc lập và y để chỉ biến số phụ thuộc. Vì vậy, ta viết hàm số ngược của $f(x)$ là

$$f^{-1} : x \mapsto y = f^{-1}(x).$$

Lúc đó, điểm (a, b) nằm trên đồ thị của f khi và chỉ khi điểm (b, a) nằm trên đồ thị của f^{-1}. Hai điểm (a, b) và (b, a) đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất (hình 2.6). Vì vậy, đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} đối xứng với nhau qua đường phân giác thứ nhất (hình 2.7).



Hình 2.6



Hình 2.7

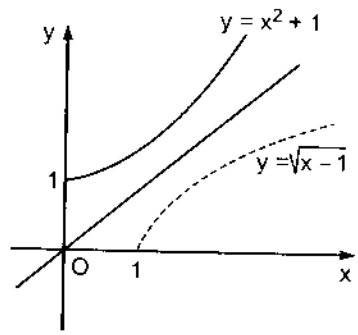
Ví dụ 6 : Hàm số $f : x \mapsto x^2 + 1$ tăng ngặt trên $\mathbb{R}_+$, nó là một song ánh từ $\mathbb{R}_+$ lên khoảng $[1, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Do đó, nó có hàm số ngược $f^{-1} : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, xác định bởi :

$$y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}.$$

Đổi vai trò của x và y, ta được

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}.$$

Đồ thị của các hàm số f(x) và $f^{-1}(x)$ được cho ở hình 2.8.



Hình 2.8

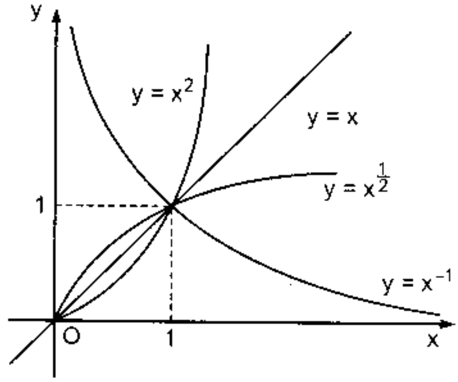
§2. PHÂN LOẠI HÀM SỐ

2.1. Các hàm số sơ cấp cơ bản

2.1.1. Hàm số luỹ thừa: $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Miền xác định phụ thuộc vào α. Chẳng hạn, nếu $\alpha \in \mathbb{N}$, hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Nếu α nguyên âm, hàm số xác định trên $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nếu $\alpha = \dfrac{1}{p}$, thì hàm số xác định trên $\mathbb{R}_+$ nếu $p \in \mathbb{N}^*$, p chẵn và xác định trên $\mathbb{R}$ nếu $p \in \mathbb{N}^*$, p lẻ. Nếu α là số vô tỉ thì quy ước chỉ xét hàm số tại mọi $x > 0$.

Đồ thị của hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm (1, 1) và đi qua gốc toạ độ nếu $\alpha > 0$, không đi qua gốc tọa độ nếu $\alpha < 0$ (hình 2.9).

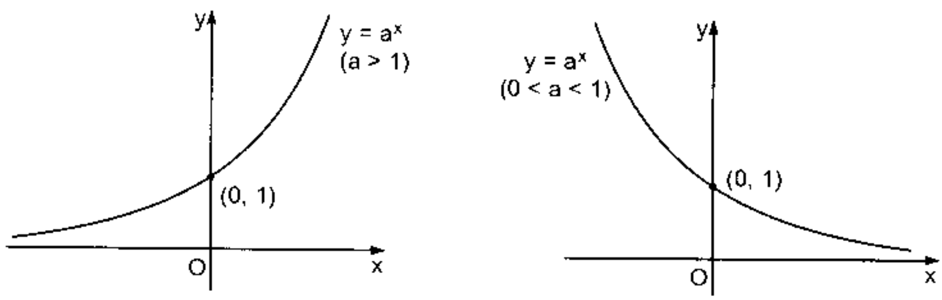


Hình 2.9

2.1.2. Hàm số mũ : $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$)

Số a gọi là *cơ số* của hàm số mũ. Hàm số $y = a^x$ xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và lấy giá trị dương. Nếu $a > 1$ hàm số $y = a^x$ tăng, nếu $a < 1$ hàm số $y = a^x$ giảm . Đồ thị của hàm số $y = a^x$ được cho ở hình 2.10.

Trong các hàm số mũ, hàm số $y = e^x$ với e là một số vô tỉ, có giá trị bằng 2,71 8281827 ..., có vai trò quan trọng.



Hình 2.10

2.1.3. Hàm số Lôgarit $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$)

Vì hàm số mũ xác định và đơn điệu trên $\mathbb{R}$ (nó tăng nếu $a > 1$, giảm nếu $a < 1$) nên nó là một song ánh từ $\mathbb{R}$ lên $\mathbb{R}_+^*$. Do đó, nó có hàm số ngược, kí hiệu là $x = \log_a y$. Đổi vai trò của x và y, ta được : $y = \log_a x$ (đọc là lôgarit cơ số a của x). Hàm số đó là một song ánh từ $\mathbb{R}_+^*$ lên $\mathbb{R}$. Đồ thị của nó được suy ra từ đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$ bằng phép lấy đối xứng qua đường phân giác thứ nhất (hình 2.11).

Từ đó, ta suy ra rằng : Hàm số $y = \log_a x$ xác định khi $x > 0$, tăng nếu $a > 1$, giảm nếu $a < 1$, $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.

Hàm số $\log_a x$ có các tính chất sau :

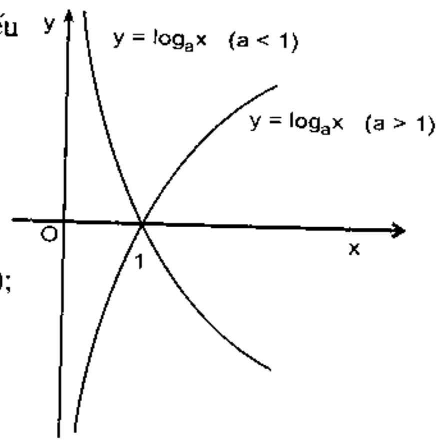
$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ $(x_1 > 0 \,;\, x_2 > 0)$;

$\log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ $(x_1 > 0, x_2 > 0)$;

$\log_a(x^\alpha) = \alpha\log_a x$ $(x > 0)$;

$b = a^{\log_a b}$ $(b > 0)$;

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0 \,;\, a \neq 1 \,;\, b > 0;\, c > 0, c \neq 1)$.



Hình 2.11

Chú thích: Lôgarit cơ số 10 của x còn gọi là lôgarit thập phân của x, kí hiệu là lgx; lôgarit cơ số e của x gọi là lôgarit tự nhiên của x, kí hiệu là lnx.

2.1.5. Các hàm số lượng giác

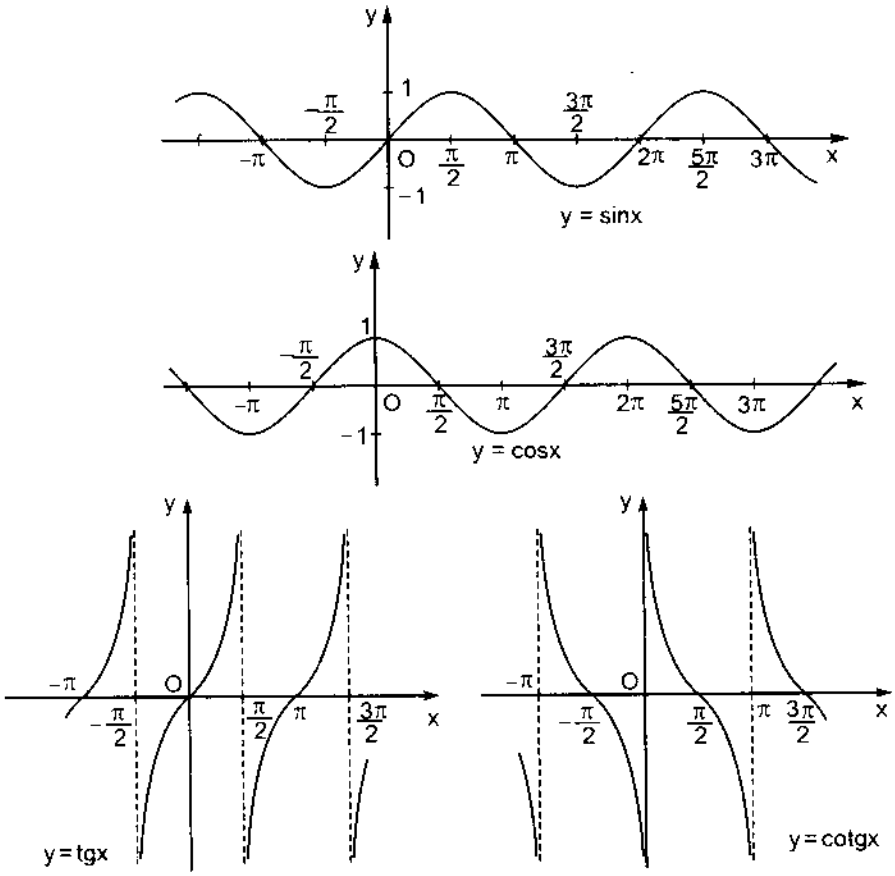
- Hàm số y = sinx xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, lấy mọi giá trị trên đoạn $[-1, 1]$ là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì 2π.

- Hàm số y = cosx xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, lấy mọi giá trị trên đoạn $[-1, 1]$, là hàm số chẵn tuần hoàn với chu kì 2π.

- Hàm số y = tgx xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, lấy mọi giá trị trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.

- Hàm số y = cotgx xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, lấy mọi giá trị trên $\mathbb{R}$, là hàm số lẻ, tuần hoàn chu kì π.

Hình 2.12 cho ta thấy đồ thị của các hàm số lượng giác.



Hình 2.12

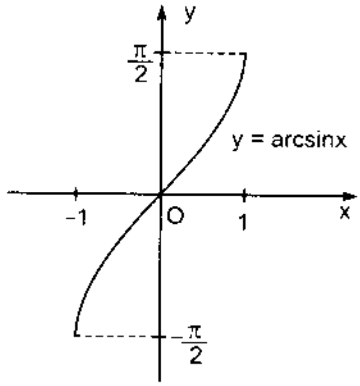
2.1.5. Hàm số lượng giác ngược

• *Hàm số* y = arcsinx

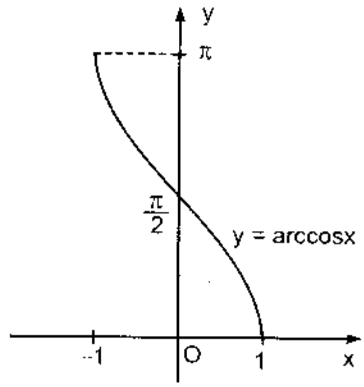
Hàm số y = sinx xác định trên toàn $\mathbb{R}$, nhưng không đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Nó tăng trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một song ánh từ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ lên đoạn $[-1;1]$. Do đó nó có hàm số ngược, kí hiệu là y = arcsinx (đọc là ac-sin-x, có nghĩa là cung có sin bằng x). Hàm số y = arcsinx có miền xác định là đoạn $[-1; 1]$, có miền giá trị là đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ và là một hàm số tăng. Như vậy :

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Đồ thị của hàm số $y = \arcsin x$ cho ở hình 2.13.



Hình 2.13



Hình 2.14

• *Hàm số* $y = \arccos x$

Hàm số $y = \cos x$ giảm trên đoạn $[0, \pi]$ và là một song ánh từ đoạn $[0, \pi]$ lên đoạn $[-1, 1]$. Do đó, nó có hàm số ngược, kí hiệu là $y = \arccos x$ (đọc là ac-cos-x, có nghĩa là cung có cosin bằng x). Hàm số $y = \arccos x$ có miền xác định là đoạn $[-1, 1]$, có miền giá trị là đoạn $[0, \pi]$ và là một hàm giảm.

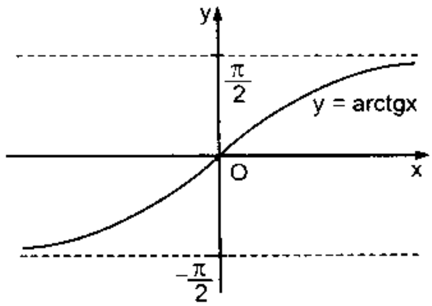
Ta có $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3};\ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

Hình 2.14 cho ta đồ thị của hàm số $y = \arccos x$.

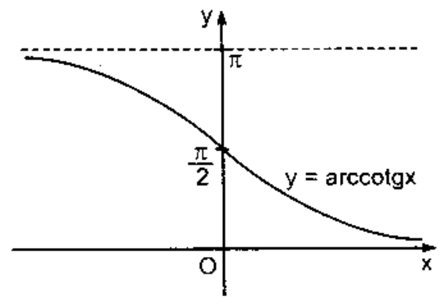
• *Hàm số* $y = \operatorname{arctg} x$

Hàm số $y = \operatorname{tg} x$ tăng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ và là một song ánh từ khoảng mở $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ lên $\mathbb{R}$. Do đó, nó có hàm số ngược, kí hiệu là $y = \operatorname{arctg} x$ (đọc là ac-tang-x, có nghĩa là cung có tang bằng x).

Hàm số y = arctgx có miền xác định là $\mathbb{R}$ và miền giá trị là khoảng mở $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Đó là một hàm số tăng. Đồ thị của nó được cho bởi hình 2.15.



Hình 2.15



Hình 2.16

• *Hàm số* y = arccotgx

Hàm số y = cotgx giảm trên khoảng (0, π) và là một song ánh từ khoảng (0, π) lên $\mathbb{R}$. Do đó, nó có hàm số ngược, kí hiệu là y = arccotgx (đọc là ac-cotang-x, có nghĩa là cung có côtang bằng x). Hàm số y = arccotgx có miền xác định là $\mathbb{R}$, miền giá trị là khoảng mở (0; π) và là một hàm số giảm. Đồ thị của nó được cho ở hình 2.16.

2.2. Hàm số sơ cấp

Người ta gọi hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép cộng, trừ, nhân, chia, phép lập hàm số hợp đối với những hàm số sơ cấp cơ bản.

Ví dụ : $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \log_a\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$,

$y = \dfrac{1 + \sin x}{1 - x^2} + \operatorname{arctg}(2x + 3)$ là những hàm số sơ cấp.

Các hàm số sơ cấp được chia làm hai loại.

2.2.1. Hàm số đại số

Hàm số đại số là những hàm số mà khi tính giá trị của nó ta chỉ phải làm một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và luỹ thừa với số mũ hữu tỉ. Trong các hàm số đại số có:

• Các đa thức bậc n ($n \in \mathbb{N}$)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, ..., n,\ a_n \neq 0.$$

• Các hàm số hữu tỉ $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, trong đó $P_n(x)$ và $Q_m(x)$ là những đa thức bậc n và m.

• Các hàm số vô tỉ là những hàm số đại số không hữu tỉ, chẳng hạn:

$$y = \frac{\sqrt{1-x}}{1+x^2},\ y = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^{\frac{5}{3}}, ...$$

2.2.2. Hàm số siêu việt

Hàm số siêu việt là những hàm số sơ cấp không là hàm số đại số như:

$$y = \sin x,\ y = x.\ 2^x,\ y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+x^2},\ y = \lg\sqrt{1+x^2}, ...$$

§ 3 . GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

3.1. Các định nghĩa về dãy số

• Người ta gọi *dãy số* là một tập hợp số viết theo một thứ tự xác định :

$$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}.$$

Để chỉ dãy số đó, ta thường dùng kí hiệu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hay gọn hơn $\{x_n\}$.

Trong §3 này, ta chỉ xét các dãy số thực. Như vậy, dãy số thực là một ánh xạ f từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{R}$, $f(1) = x_1$, $f(2) = x_2$, ..., $f(n) = x_n$,...

Ví dụ 1:

a) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...\right\}$;

b) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...\}$;

c) $\{n^2\} = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$; d) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\right\}$.

Dãy số $\{x_n\}$ gọi là *tăng* nếu $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, gọi là *giảm* nếu $x_n > x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Trong ví dụ 1, dãy a) là dãy số giảm, dãy c) là dãy số tăng. Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi là dãy số *đơn điệu*.

• Dãy số $\{x_n\}$ gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho $x_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho $x_n \ge m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

Ví dụ 2 : Trong ví dụ 1 :

Dãy a) là dãy số giảm, nó bị chặn dưới bởi 0 và bị chặn trên bởi 1;

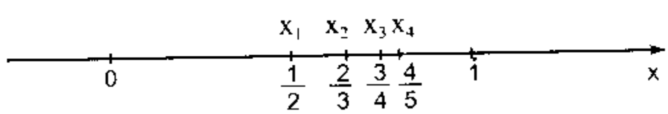
Dãy b) không phải là dãy số đơn điệu, nó bị chặn dưới bởi −1 và bị chặn trên bởi 1;

Dãy c) là dãy số tăng, nó bị chặn dưới bởi 1 nhưng không bị chặn trên, nó không bị chặn;

Dãy d) là dãy số tăng, nó bị chặn dưới bởi 0 và bị chặn trên bởi 1.

3.2. Giới hạn của dãy số

Trở lại dãy d) của ví dụ 1. Biểu diễn hình học của nó được cho ở hình 2.17.



Hình 2.17

Ta nhận thấy rằng khi n càng lớn thì x_n càng gần 1, tức là khoảng cách $|x_n - 1|$ càng nhỏ, nó có thể nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn.

Ta nói rằng dãy $\{x_n\}$ gần tới 1 (hay có giới hạn là 1) khi n dần tới vô cùng. Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa. Số a gọi là *giới hạn* của dãy số $\{x_n\}$ nếu với mọi số ε dương bé tuỳ ý cho trước, tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ thì $|x_n - a| < \varepsilon$. Ta viết : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ hay $x_n \to a$ khi $n \to \infty$.

Khi đó, dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ*. Dãy số không hội tụ được gọi là *phân kì*.

Chú thích: Chỉ số n_0 phụ thuộc vào ε, nên có thể viết $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Ví dụ 3: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$, ta sẽ chỉ ra rằng tìm được $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ để cho

$|x_n - 0| = \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon, \forall n > n_0$. Ta có $\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ khi $2^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, tức là khi $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Vậy chỉ cần chọn $n_0(\varepsilon) = \left[\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ thì với $n > n_0$ ta có $|x_n - 0| < \varepsilon$.

([x] là phần nguyên của x, tức là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x, chẳng hạn [3, 25] = 3).

3.3. Tính chất và các phép tính về giới hạn của dãy số

Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số, có thể chứng minh được các định lí sau.

Định lí 2.1. a) *Nếu một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.*

b) *Nếu một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.*

Chú thích: Mệnh đề b) của định lí 2.1 là một điều kiện cần của dãy số hội tụ. Từ đó suy ra rằng nếu một dãy số không bị chặn thì nó không có giới hạn. Chẳng hạn, dãy c) trong Ví dụ 1 không có giới hạn vì nó không bị chặn.

Định lí 2.2. Nếu các dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ đều có giới hạn thì

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n.y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n . \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \text{(với điều kiện } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\text{).}$$

Chú thích: Trong tính toán về giới hạn, có khi ta gặp các dạng sau đây gọi là dạng vô định: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$. Khi đó không thể dùng các kết quả của định lí 2.2, mà phải dùng các phép biến đổi để khử các dạng vô định đó.

Chẳng hạn, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+5}$ có dạng $\frac{\infty}{\infty}$. Ta biến đổi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

3.4. Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

Định lí 2.3. *Cho ba dãy số* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. *Nếu:*

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \le y_n \le z_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

thì dãy $\{y_n\}$ *có giới hạn và* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Chứng minh: Do giả thiết b), $\forall\, \varepsilon > 0$ cho trước:

$\exists\, n_1(\varepsilon)$ sao cho $\forall\, n > n_1$, $|x_n - a| < \varepsilon$;

$\exists\, n_2(\varepsilon)$ sao cho $\forall\, n > n_2$, $|z_n - a| < \varepsilon$.

Chọn $n_0 = \max(n_1, n_2)$, ta có với $n > n_0$

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

$$|z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

lại do giả thiết a), ta suy ra với $n > n_0$: $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$.

Vậy : $|y_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

Định lí 2.4. a) Nếu dãy số tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.

b) Nếu dãy số giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.

3.5. Sự tồn tại của $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Đặt $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Theo công thức khai triển nhị thức, ta có

$$x_n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}.\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}.\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}.\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

trong đó $k! = 1.\ 2 \ldots k$. (2. 1)

Còn $x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, khai triển của nó gồm (n + 2) số hạng, (n + 1) số hạng đầu của khai triển đó có dạng như trong công thức (2.1), chỉ có thừa số dạng $\left(1-\frac{i}{n}\right)$ được thay bởi $\left(1-\frac{i}{n+1}\right)$.

Vậy (n +1) số hạng đầu trong khai triển của x_{n+1} đều lớn hơn các số hạng trong khai triển của x_n. Số hạng thứ (n + 2) trong khai triển của x_{n+1} lại dương, vì vậy $x_{n+1} > x_n$. Do đó, dãy $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Từ công thức (2.1), ta lại suy ra: $x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}$,

vì ta có $1 - \frac{i}{n} < 1$ với i = 1,2, ..., n.

Mặt khác $n! = n.(n-1)\ldots 2.1 > 2^{n-1}$, $\forall n \geq 3$, nên

$$x_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Tổng trong dấu ngoặc ở vế phải là một cấp số nhân có số hạng đầu là 1,

công bội là $\frac{1}{2}$, nó có tổng bằng: $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] < 2, \forall n$.

Do đó $x_n < 3$.

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên, nên theo định lí 2.4, tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Giới hạn ấy được gọi là số e, đó là một số vô tỉ, có giá trị xấp xỉ bằng

$$e \approx 2{,}71828.$$

3.6. Các ví dụ về giới hạn của dãy số

Ví dụ 4 : Cho dãy số $\{x_n\}$ với $x_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{3}$.

Với k nào thì x_k nằm ngoài khoảng $L = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right)$.

Giải. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-5}{9n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}{n\left(9+\frac{4}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{5}{n}}{9+\frac{4}{n}} = \dfrac{1}{3}$

Khoảng cách từ x_n đến $\frac{1}{3}$ bằng

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n-5}{9n+4} - \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{19}{3(9n+4)}\right| = \frac{19}{3(9n+4)};$$

x nằm ngoài khoảng L khi và chỉ khi $\left|x - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{1000}$ hay $\dfrac{19}{3(9n+4)} > \dfrac{1}{1000}$.

Do đó $n < \frac{18988}{27} = 703\frac{7}{27}$.

Vậy các số của dãy nằm ngoài khoảng L là $x_1, x_2, \ldots, x_{703}$.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Giải. Ta có $\frac{2^n}{n!} = \frac{2.2\ldots2}{1.2\ldots n} = 2.1.\frac{2}{3}.\frac{2}{4}\ldots\frac{2}{n} < 2.1.\frac{2}{3}.\underbrace{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}}_{(n-3)\text{ số}} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Ví dụ 6: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$.

Giải. a) Ta có $x_n := \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2} = \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+1}$.

Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}+1\right)} = 3$.

b) Ta có $x_n := \frac{1+2^2+3^2+\ldots+n^2}{5n^3+n+1} = \frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{5n^3+n+1} = \frac{1}{6}\frac{2n^3+3n^2+n}{5n^3+n+1}$

$$= \frac{1}{6}\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{6}.\frac{2}{5} = \frac{1}{15}$.

c) Ta có $x_n := \left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3 = \left(\dfrac{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{7}{n^2}}\right)^3$.

Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{7}{n^2}}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$.

Ví dụ 7. Tìm giới hạn của các dãy số $\{x_n\}$ sau :

a) $x_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}$;

b) $x_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$;

c) $x_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$;

d) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$.

Giải. a) Khi $n \to \infty$, $x_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}$ có dạng vô định $\infty - \infty$. Muốn khử dạng vô định ấy, ta nhân x_n với $\dfrac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}$, ta được:

$$x_n = \frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}} = \frac{(2n+3)-(n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}}.$$

Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}} = +\infty$.

b) $x_n = n^2(n-\sqrt{n^2+1}) = n^2\,\dfrac{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{(n+\sqrt{n^2+1})} = -n^2.\dfrac{1}{(n+\sqrt{n^2+1})}$.

Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = -\infty$.

c) Ta có $n^2 - n^3 = n^3\left(\frac{1}{n} - 1\right) \to -\infty$ khi $n \to \infty$, vì vậy $x_n := \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$ có dạng $\infty - \infty$. Nhân và chia x_n với lượng liên hợp của $\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n$, ta được :

$$x_n = \frac{(n + \sqrt[3]{n^2 - n^3})\left[n^2 - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + (\sqrt[3]{n^2 - n^3})^2\right]}{n^2 - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + (\sqrt[3]{n^2 - n^3})^2}$$

$$= \frac{n^2}{n^2 - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + (\sqrt[3]{n^2 - n^3})^2} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{n} - 1} + \sqrt[3]{(\frac{1}{n} - 1)^2}}$$

Do đó : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{1}{n} - 1} + \sqrt[3]{(\frac{1}{n} - 1)^2}} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$.

d) Ta có $x_n := \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - \sqrt{n}} = \frac{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{\frac{1}{n}}\right)} = \sqrt[4]{n}.\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{\frac{1}{n}}}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n}.\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[4]{\frac{1}{n}}} = +\infty$.

§ 4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

4.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1. Giả sử hàm số f(x) xác định ở lân cận điểm a (có thể trừ tại a). Ta nói hàm số f(x) có giới hạn là A khi x dần tới a nếu với mọi số $\varepsilon > 0$ cho trước, đều tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - A| < \varepsilon$, kí hiệu là $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ hay $f(x) \to A$ khi $x \to a$.

Ví dụ 1 : Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 1) = 3$.

Giải. Ta cần chỉ ra rằng nếu cho trước số $\varepsilon > 0$, thì tìm được số $\delta > 0$ sao cho $|2x + 1 - 3| = |2(x - 1)| < \varepsilon$ nếu $|x - 1| < \delta$. Ta có

$$|2(x - 1)| = 2|x - 1| < \varepsilon \text{ nếu } |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy lấy $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, ta thấy điều đặt ra được thoả mãn. Vậy $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 1) = 3$.

Chú thích: Trong định nghĩa 1, khi nói x dần tới a, có thể x > a, cũng có thể x < a. Nếu khi x dần tới a về phía trái (tức là x dần tới a và x luôn nhỏ hơn a) mà f(x) dần tới giới hạn A thì A gọi là giới hạn trái tại a, kí hiệu là:

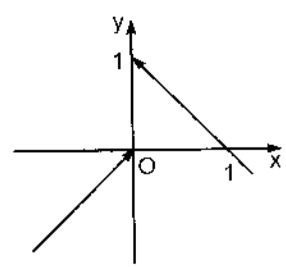
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ hay } f(x_0 - 0).$$

Tương tự, người ta định nghĩa giới hạn phải tại a, kí hiệu là:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \text{ hay } f(x_0 + 0).$$

Hàm số f(x) có giới hạn A khi $x \to a$ khi và chỉ khi nó có giới hạn trái tại a và giới hạn phải tại a và hai giới hạn ấy đều bằng A: $f(a - 0) = f(a + 0) = A$.

Ví dụ 2: Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x < 0 \\ 1 - x & \text{khi } x > 0. \end{cases}$



Hình 2.18

Đồ thị của nó được cho ở hình 2.18. Ta có

$$f(0 - 0) = 0 \neq 1 = f(0 + 0).$$

Vậy f(x) không có giới hạn khi $x \to 0$.

Định nghĩa 2. Người ta nói hàm f(x) dần tới $+\infty$ khi $x \to a$ nếu với mọi số $M > 0$ cho trước, lớn bao nhiêu tuỳ ý, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi $|x - a| < \delta$ ta có $f(x) > M$, kí hiệu: $f(x) \to +\infty$ khi $x \to a$ hay $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Các trường hợp $f(x) \to -\infty$ khi $x \to a$, $f(x) \to A$ khi $x \to \pm\infty$, ... được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 3 : a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, vì với số $M > 0$ cho trước, ta có

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M \text{ khi } (x-1)^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Vậy với $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, ta thấy khi $|x - 1| < \delta$ thì $\dfrac{1}{(x-1)^2} > M$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$, vì với số $\varepsilon > 0$ cho trước, ta có $2^x < \varepsilon$ khi $x < \log_2\varepsilon$.

với $m = \log_2\varepsilon$, ta thấy $2^x < \varepsilon$ nếu $x < m$. Chú ý rằng $\log_2\varepsilon < 0$ nếu $\varepsilon < 1$.

4.2. Các phép toán về giới hạn

Định lí 2.5. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1, \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$. Khi đó :

a) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x).f_2(x)) = A_1.A_2$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{A_1}{A_2}$, nếu $A_2 \neq 0$.

Chú thích:

1) Trong định lí 2.5, A_1, A_2 là các số hữu hạn, a có thể là hữu hạn, có thể là $\pm\infty$.

2) Nếu gặp các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$ thì phải tìm cách biến đổi để khử chúng.

Ví dụ 4:

a) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3x^2 + x - 1} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (3x^2 + x - 1)} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 3x^2 + \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x - \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 1} =$$

$$= \frac{1}{3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} - 1} = \frac{4}{3\pi^2 + 2\pi - 4}.$$

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-3)^2}{5x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3).\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(5x) - \lim\limits_{x\to 2} 2} = \frac{1.1}{10-2} = \frac{1}{8}.$$

c) $$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^3}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^3}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)} = 0.$$

Ví dụ 5 :

a) Xét $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. Ở đây, ta gặp dạng vô định $\frac{0}{0}$. Khi $x \to 1$, có thể xem $x \neq 1$,

do đó : $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$.

b) Tính $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$.

Vì $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$ nên $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12$.

4.3. Tiêu chuẩn tồn tại giới hạn của hàm số

Định lí 2.6. a) Nếu ở lân cận của a, các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f(x)$ thoả mãn bất đẳng thức: $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$.

b) Nếu các hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$ có giới hạn khi $x \to a$, $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$ thì hàm số f(x) cũng có giới hạn khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

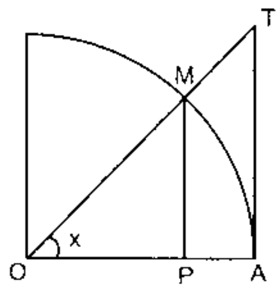
Định lí 2.7. a) Nếu ở lân cận của điểm a, hàm số f(x) tăng và bị chặn trên bởi số M thì tồn tại giới hạn của f(x) khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le M$.

b) Nếu ở lân cận của điểm a, hàm số f(x) giảm và bị chặn dưới bởi số m thì tồn tại giới hạn của f(x) khi $x \to a$ và $\lim\limits_{x \to a} f(x) \ge m$.

Hai định lí này cho phép ta tìm được một số giới hạn quan trọng.

4.3.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Hàm số $\dfrac{\sin x}{x}$ không xác định khi x = 0. Đó là một hàm số chẵn, ta chỉ xét với x > 0. Trên đường tròn lượng giác, xét góc x, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (hình 2.19).



Hình 2.19

Diện tích ΔAOM < diện tích hình quạt AOM < diện tích ΔAOT.

Do đó : $\dfrac{1}{2}OA.MP < \dfrac{1}{2}.OA.sđ\overset{\frown}{AM} < \dfrac{1}{2}.OA.AT$, hay $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2}x < \dfrac{1}{2}tgx$ hay sinx < x < tgx.

Chia các vế cho sinx, ta được : $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ hay $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

Khi $x \to 0$, $\dfrac{\sin x}{x}$ bị kẹp giữa hai hàm số cùng có giới hạn là 1 khi $x \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. (2.2)

Ví dụ 6:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$.

b) Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. Đặt arcsinx = t, ta có x = sint. Khi $x \to 0$ thì $t \to 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin t}{t}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}} = 1$.

c) Tương tự , $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}x}{x} = 1$.

4.3.2. $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Giới hạn này có dạng vô định 1^∞ . Trước hết, ta xét $x \to +\infty$. Mọi số x > 0 đều có thể kẹp giữa hai số tự nhiên liên tiếp: $n \le x \le n + 1$, do đó $\dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{n}$. Vì vậy, ta có $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Khi $x \to +\infty$ thì $n \to +\infty$, $n + 1 \to +\infty$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n . \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.1 = e\,.$$

Do định lí 2.6, ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Bây giờ, ta xét $x \to -\infty$.

Đặt y = – (x + 1), cũng chứng minh được $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Tóm lại $$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,. \qquad (2.3)$$

Công thức (2.3) còn có thể được viết dưới dạng

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e. \qquad (2.4)$$

Ví dụ 7: a) Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+3}$.

Giải. a) $\left(\dfrac{3+x}{x}\right)^x = \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$ có dạng 1^∞ khi $x \to \infty$. Đặt $x = 3t$, khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{3t} = \lim\limits_{t\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right\}^3 = e^3$.

b) $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+3}$ có dạng 1^∞ khi $x \to \infty$. Ta có $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+3} = \left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)^{x+3}$.

Đặt $x - 1 = 3t$, ta có $x = 3t + 1$. Khi $x \to \infty$ thì $t \to \infty$. Vậy:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t+4} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}.\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4} = e^3.1 = e^3.$$

§ 5. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

5.1. Định nghĩa 1

Hàm số f(x) gọi là một *vô cùng bé* (viết tắt là VCB) khi $x \to a$ nếu

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Trong § này, a có thể là hữu hạn hay vô cùng. Từ định nghĩa giới hạn của hàm số, ta suy ra rằng nếu $f(x) \to A$ khi $x \to a$ thì $f(x) = A + \alpha(x)$.

Trong đó $\alpha(x)$ là một VCB khi $x \to a$.

Hàm số F(x) gọi là một *vô cùng lớn* (viết tắt là VCL) khi $x \to a$ nếu $\lim\limits_{x \to a}|F(x)| = +\infty$.

Có thể dễ dàng thấy rằng nếu f(x) là một VCB khi $x \to a$ thì $\frac{1}{f(x)}$ là một VCL và ngược lại nếu F(x) là một VCL khi $x \to a$ thì $\frac{1}{F(x)}$ là một VCB khi $x \to a$.

Chú thích:

Một số khác không dù nhỏ bao nhiêu cũng không là một VCB khi $x \to a$.

Một số lớn bao nhiêu cũng không thể là một VCL khi $x \to a$.

5.2. Tính chất

1) Nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hai VCB khi $x \to a$ thì $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x).\ f_2(x)$ cũng là những VCB khi $x \to a$.

2) Nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$ là hai VCL cùng dấu khi $x \to a$ thì $f_1(x) + f_2(x)$ cũng là một VCL khi $x \to a$. Tích của hai VCL khi $x \to a$ cũng là một VCL khi $x \to a$.

5.3. So sánh các VCB

5.3.1. Bậc của các VCB

Định nghĩa 2. Giả sử $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to a$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc cao hơn $\beta(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, ta nói rằng $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x \to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A\ (\neq 0, \neq \infty)$, ta nói rằng $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB cùng bậc.

Nếu $\lim\limits_{x \to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ không tồn tại, ta nói rằng không thể so sánh hai VCB $\alpha(x)$ và $\beta(x)$.

Ví dụ 1 : a) $1 - \cos x$ và $2x$ đều là những VCB khi $x \to 0$. Vì

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}.\lim\frac{1}{2}.\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0$$

nên $1 - \cos x$ là VCB bậc cao hơn $2x$.

b) $x.\sin\frac{1}{x}$ và $2x$ là những VCB khi $x \to 0$. Vì

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ nên $x\sin\frac{1}{x}$ và $2x$ là hai VCB khi $x \to 0$ không so sánh được với nhau.

5.3.2. Vô cùng bé tương đương

Định nghĩa 3. Hai VCB khi $x \to a$ gọi là tương đương với nhau nếu

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

kí hiệu : $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Từ ví dụ 6 của § 4, ta suy ra rằng :

Nếu $\alpha(x) \to 0$ khi $x \to a$ thì :

$$\begin{cases}\sin\alpha(x) \sim \alpha(x), & \text{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x),\\ \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x), & \text{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x).\end{cases} \quad (2.5)$$

Định lí 2.8. Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to a$, $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ khi $x \to a$ thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. (2.6)

Thật vậy, vì $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1,\quad \lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$

$$\text{Do đó: } \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}.\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}.\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \blacksquare$$

Định lí 2.9. (quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao). Nếu $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to a$, $\beta(x)$ là VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$ thì khi $x \to a$

$$\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x).$$

Thật vậy, ta có $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha(x)+\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 + \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ khi $x \to 0$.

Giải. Khi $x \to 0$ thì $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} = \sin x^{\frac{3}{4}} \sim x^{\frac{3}{4}}$;

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}} = \sqrt{x^2+x^{\frac{3}{2}}} \sim \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3}{4}}.$$

Vì bậc của x^2 cao hơn bậc của $x^{\frac{3}{2}}$. Do đó $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$ khi $x \to 0$.

Ví dụ 3 : Tính các giới hạn :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \mathrm{arctg}^2 x}{3x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x + 2\sin x - \sin^3 x - x^2 + 3x^4}{\mathrm{tg}^3 x - 6\sin^2 x + x - 5x^3}$.

Giải. a) Ta có $\sin 2x + \arcsin^2 x - \mathrm{arctg}^2 x \sim 2x + x^2 - x^2 = 2x$ khi $x \to 0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \mathrm{arctg}^2 x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

b) Ta biến đổi tử số:

$$1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4=2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4\sim$$

$$\sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2+2x-x^3-x^2+3x^4\sim 2x \quad \text{khi } x\to 0.$$

Còn mẫu số tương đương với $x^3-6x^2+x-5x^3\sim x$ khi $x\to 0$.

Vậy ta được: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

5.4. So sánh các VCL

Giả sử F(x) và G(x) là hai VCL khi $x\to a$.

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\infty$, ta nói F(x) là VCL bậc cao hơn G(x) khi $x\to a$.

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=0$, ta nói F(x) là VCL bậc thấp hơn G(x) khi $x\to a$.

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=A\ (\neq 0,\neq\infty)$, ta nói F(x) và G(x) là những VCL cùng bậc.

Nếu $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{F(x)}{G(x)}=1$, ta nói F(x) và G(x) là hai VCL tương đương khi $x\to a$, kí hiệu $F(x)\sim G(x)$ khi $x\to a$.

Cũng như đối với các VCB, ta dễ dàng chứng minh được các định lí sau.

Định lí 2.9. *Nếu* Fx) *và* G(x) *là hai* VCL *khi* $x\to a$, $F(x)\sim F_1(x)$, $G(x)\sim G_1(x)$ *khi* $x\to a$ *thì* :

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F_1(x)}{G_1(x)}.$$

Định lí 2.10. *Nếu* F(x) *và* G(x) *là hai* VCL *khi* $x\to a$, G(x) *là* VCL *bậc thấp hơn* F(x) *thì khi* $x\to a$, $F(x)+G(x)\sim F(x)$ (*Quy tắc ngắt bỏ các* VCL).

Ví dụ 4 : Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-\sqrt{x^5}+6x}{12x^3+x^2-6\sqrt{x}}$.

Giải. Ta có $7x^3 - \sqrt{x^5} + 6x \sim 7x^3$ khi $x \to \infty$;

$12x^3 + x^2 - 6\sqrt{x} \sim 12x^3$ khi $x \to \infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 - \sqrt{x^5} + 6x}{12x^3 + x^2 - 6\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3}{12x^3} = \dfrac{7}{12}$.

§ 6. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Lớp các hàm số liên tục đóng vai trò rất quan trọng trong giải tích toán học.

6.1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. f là một hàm số xác định trong khoảng (a, b), x_0 là một điểm thuộc (a, b). Người ta nói rằng hàm số f *liên tục tại x_0* nếu :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.7}$$

Nếu hàm số f không liên tục tại x_0, ta nói rằng nó *gián đoạn* tại x_0.

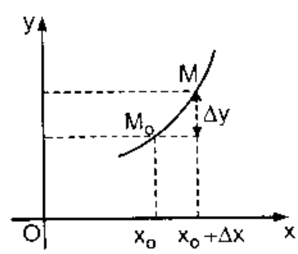
Nếu đặt: $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, thì đẳng thức (2.7) có thể viết là:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \text{ hay } \lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0. \tag{2.8}$$

Chú thích: Ta cũng có thể nói rằng f liên tục tại $x_0 \in$ (a, b) nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right). \tag{2.9}$$

Minh hoạ hình học: Từ (2.8) ta suy ra rằng nếu Δx khá bé thì Δy khá bé. Do đó, đường cong y = f(x) ở lân cận điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ là một đường liền (hình 2.20).



Hình 2.20

Ví dụ 1 : Hàm số $y = x^2$ liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có

$$y_0 = x_0^2,\ y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2,\ \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 2x_0 . \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x . \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0.$$

Ví dụ 2 : Hàm số y = sinx liên tục tại x_0 bất kì thuộc $\mathbb{R}$. Thật vậy:

$$y_0 = \sin x_0,\ y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x),$$

$$|\Delta y| = \left|\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0\right| = \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

Nếu $|\Delta x|$ rất nhỏ thì $\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le \frac{|\Delta x|}{2}$. Do đó $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Tương tự như vậy, có thể chứng minh được rằng mọi hàm số sơ cấp cơ bản đều liên tục tại những điểm thuộc miền xác định của nó.

Định nghĩa 2. f được gọi là liên tục trong khoảng mở (a, b) nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó, được gọi là liên tục trong khoảng đóng [a, b], nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng mở (a, b), liên tục phải tại a, tức là f(a + 0) = f(a) và liên tục trái tại b, tức là f(b – 0) = f(b).

6.2. Các phép toán về hàm số liên tục

Từ các định lí về giới hạn của tổng, tích, thương và từ định nghĩa của hàm số liên tục tại một điểm, có thể dễ dàng suy ra:

Định lí 2.11. *Nếu f và g là hai hàm số liên tục tại x_0 thì:*

1) f + g liên tục tại x_0.

2) f . g liên tục tại x_0.

3) $\frac{f}{g}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 2.12. *Nếu hàm số* $u = \varphi(x)$ *liên tục tại* x_0, *hàm số* $y = f(u)$ *liên tục tại* $u_0 = \varphi(x_0)$ *thì hàm số hợp* $y = (f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$ *liên tục tại* x_0.

Chứng minh: Ta có

$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, vì φ liên tục tại x_0. Hàm số y = f(u) lại liên tục tại u_0, do đó $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$. Vì vậy:

$$\lim_{x \to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f\left(\lim_{u \to u_0} u\right) = f(u_0) = f\left[\varphi(x_0)\right].$$

6.3. Tính chất của hàm số liên tục

Các định lí sau đây (không chứng minh) nêu lên những tính chất cơ bản của hàm số liên tục.

Định lí 2.13. *Nếu hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b] *thì nó bị chặn trong đoạn đó, tức là tồn tại hai số* m *và* M *sao cho*

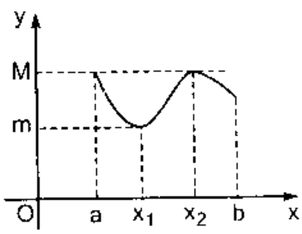
$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Định lí 2.14. *Nếu hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b] *thì nó đạt giá trị nhỏ nhất* m *và giá trị lớn nhất* M *của nó trên đoạn ấy, tức là tồn tại hai điểm* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *sao cho*:

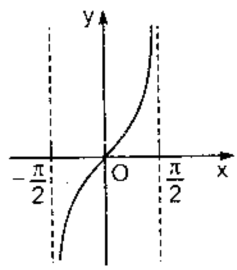
$$f(x_1) = m \leq f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b];$$

$$f(x_2) = M \geq f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

(hình 2.21).



Hình 2.21

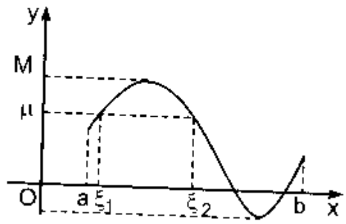


Hình 2.22

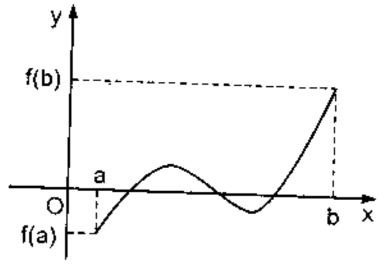
Chú thích: Giả thiết hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a, b] rất quan trọng. Nếu giả thiết đó không được thoả mãn thì f(x) không bị chặn, không thể đạt giá trị lớn nhất và bé nhất của nó. Chẳng hạn, hàm y = tgx liên tục trong khoảng mở $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, nhưng khi $x \to \pm\frac{\pi}{2}$ thì $y = \text{tg}x \to \pm\infty$ (hình 2.22).

Định lí 2.15. (định lí về giá trị trung gian) *Nếu hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b], m *và* M *là các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của nó trên đoạn đó thì với mọi số* μ *nằm giữa* m *và* M, *luôn tồn tại điểm* $\xi \in [a, b]$ *sao cho*:

$$f(\xi) = \mu, \qquad \text{(hình 2.23)}.$$



Hình 2.23



Hình 2.24

Hệ quả. *Nếu* f(x) *liên tục trên* [a, b], f(a).f(b) < 0 *thì trong khoảng* (a, b) *tồn tại điểm* ξ *sao cho* f(ξ) = 0 (hình 2.24).

6.4. Vài giới hạn đáng chú ý

Dùng tính chất của hàm số liên tục, ta chứng minh các công thức sau:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1\,; \tag{2.10}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1\,. \tag{2.11}$$

Thật vậy, do $\alpha \to 0$, có thể xem $|\alpha| < 1$, do đó $1 + \alpha > 0$.

Hàm số $\alpha \mapsto \ln(1 + \alpha)$ liên tục, nên:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\ln\left(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Nhưng $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ (xem công thức (2.4)) nên $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=\ln e=1$.

Đó là công thức (2.10). Bây giờ đặt: $e^{\alpha} - 1 = \beta$, ta có $e^{\alpha} = 1 + \beta$. Do đó $\alpha = \ln(1 + \beta)$. Khi $\alpha \to 0$ thì $\beta \to 0$. Vậy:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)}=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+\beta)}{\beta}}=\frac{1}{1}=1.$$

Các công thức (2.10), (2.11) đã được chứng minh.

Theo công thức đổi cơ số của lôgarit, ta có với $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a} . \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\ln a} . \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln a} .$$

Vậy $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\ln a} . \qquad (2.10')$$

Từ công thức (2.11) suy ra với $a > 0$, $a \neq 1$, ta có

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha \ln a} - 1}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{e^{\alpha \ln a} - 1}{\alpha \ln a} . \ln a \right) =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha \ln a} - 1}{\alpha \ln a} . \ln a = 1 . \ln a = \ln a.$$

Vậy $$\lim_{\alpha \to 0} \frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a. \qquad (2.11')$$

Các công thức (2.10), (2.11), (2.11') cho thấy nếu $\alpha(x) \to 0$ khi $x \to a$ thì khi $x \to a$:

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x); \qquad (2.12)$$

$$\begin{cases} e^{\alpha(x)} - 1 & \sim & \alpha(x); \\ a^{\alpha(x)} - 1 & \sim & \alpha(x) \ln a. \end{cases} \qquad (2.13)$$

6.5. Các ví dụ

Ví dụ 1: Tính $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 2}$.

Giải. Khi $x \to \pm\infty$, cả tử số và mẫu số đều là các VCL. Theo quy tắc ngắt bỏ các VCL

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{4x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{2x^2}}{4x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|\sqrt{2}}{4x} .$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 2 : Tìm $\lim\limits_{x\to\pm\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}$.

Giải. Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}5^{\frac{2x}{x+3}}=5^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x+3}}=5^2=25$.

Ví dụ 3: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$.

Giải. Ta phải khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Đặt $26+x=z^3$, suy ra $x=z^3-26$.

Khi $x\to 1$ thì $z^3\to 27$ hay $z\to 3$. Ta có

$$\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\frac{2(z^3-26)-2}{z-3}=\frac{2z^3-54}{z-3}=\frac{2(z^3-27)}{z-3}=$$

$$=\frac{2(z-3)(z^2+3z+9)}{z-3}=2(z^2+3z+9)\ \text{khi}\ z\neq 3.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim\limits_{z\to 3}2(z^2+3z+9)=54$.

Ví dụ 4 : Tìm $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$.

Giải. Đặt $f(x)=\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$, nó có dạng $\dfrac{0}{0}$ khi $x\to\dfrac{\pi}{6}$. Đặt $x-\dfrac{\pi}{6}=z$.

Khi $x\to\dfrac{\pi}{6}$ thì $z\to 0$. Ta có

$$f(x) = \frac{\sin z}{\sqrt{3} - 2\cos\left(z + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sin z}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos z + \sin z} = \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}.2\sin^2\frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}} \qquad (\text{khi } z \neq 0).$$

Vậy $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} f(x) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}} = 1$.

Ví dụ 5: Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$.

Giải. Đặt $f(x) = \dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$, nó có dạng $\dfrac{0}{0}$ khi $x \to 0$. Ta có

$$f(x) = \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \frac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3 \cos x}.$$

Khi $x \to 0$, $\sin x \sim x$, $\sin^2\dfrac{x}{2} \sim \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4}$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x.\frac{x^2}{4}}{x^3 \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{4\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 6: Tìm $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{3x}}$.

Giải. Ta gặp dạng 1^∞ khi $x \to 0$. Ta có $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{3x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left[(1 + x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

Ví dụ 7 : Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$.

Giải. Ta phải khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Khi $x \to 0$ thì: $\ln(1 + x) \sim x$ và $3^x - 1 \sim x\ln 3$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\ln 3} = \dfrac{1}{\ln 3}$.

Ví dụ 8: Tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

Giải. Ở đây, ta có dạng vô định 1^∞ khi $x \to \infty$. Ta có

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

6.6. Điểm gián đoạn của hàm số

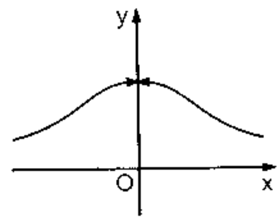
Hàm số f(x) gọi là *gián đoạn* tại x_0 nếu nó không liên tục tại x_0. Vậy x_0 là điểm gián đoạn của hàm số f(x) nếu:

- Hoặc f(x) không xác định tại x_0;
- Hoặc f(x) xác định tại x_0, nhưng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;
- Hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Nếu f(x) không xác định tại x_0, nhưng $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ thì x_0 gọi là điểm *gián đoạn bỏ được*. Chỉ cần xác định thêm hàm f tại $x = x_0$ bằng cách cho $f(x_0)$ bằng giá trị chung của hai giới hạn trên, hàm f trở thành liên tục cả tại x_0.

Nếu tồn tại các giới hạn hữu hạn $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ và $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ thì x_0 gọi là *điểm gián đoạn loại 1*. Hoặc $|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ gọi là *bước nhảy* của f tại x_0. Những điểm gián đoạn không thuộc loại 1 được gọi là *điểm gián đoạn loại 2*.

Ví dụ 9: Hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ không xác định tại $x=0$, nhưng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.



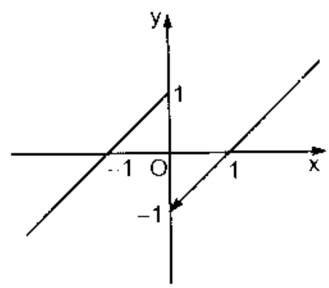
Hình 2.25

Vậy x = 0 là điểm gián đoạn bỏ được. Đồ thị của nó được cho ở hình 2.25. Nếu ta bổ sung giá trị f(0) = 1, thì hàm số trở nên liên tục cả tại x = 0.

Ví dụ 10: Hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x\le 0 \\ x-1 & \text{khi } x>0 \end{cases}$

xác định tại mọi $x\in\mathbb{R}$, nhưng

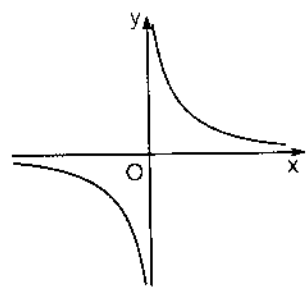
$f(0-0)=1\neq -1=f(0+0)$ (hình 2.26). Vậy x = 0 là điểm gián đoạn loại 1, bước nhảy của hàm f tại x = 0 bằng $|1-(-1)|=2$.



Hình 2.26

Ví dụ 11: Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}$ không xác định tại $x=0$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$, điểm x = 0 là điểm gián đoạn loại 2 (hình 2.27).



Hình 2.27

§ 7. ĐẠO HÀM

7.1. Nhắc lại

7.1.1. Các định nghĩa

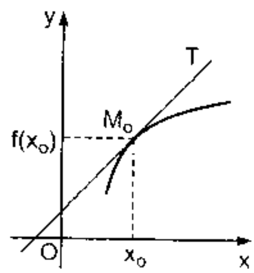
Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a, b) và $x_0\in(a, b)$. Nếu tồn tại giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (2.14) khi $x \to x_0$ thì giới hạn ấy được gọi là *đạo hàm* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$.

Đặt $x - x_0 = \Delta x$, ta có $x = x_0 + \Delta x$ và đặt $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, tỉ số (2.14) viết được dưới dạng $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Vậy $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (2.15)

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0.

Về mặt hình học, đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 biểu diễn hệ số góc của đường tiếp tuyến của đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ (hình 2.28).

Về mặt cơ học, nếu phương trình chuyển động của một chất điểm trên đường thẳng là $s = f(t)$ thì đạo hàm $f'(t_0)$ biểu diễn vận tốc tức thời của chuyển động đó ở thời điểm t_0. Với ý nghĩa đó, ta cũng có thể xem đạo hàm $f'(x_0)$ là vận tốc biến thiên của hàm số $f(x)$ theo x tại điểm x_0.



Hình 2.28

• Giới hạn của tỉ số (2.14) khi x dần tới x_0 về phía trái, nếu tồn tại, gọi là *đạo hàm trái* của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0 - 0)$ hay $f'_-(x_0)$.

• Giới hạn của tỉ số (2.14) khi x dần tới x_0 về phía phải, nếu tồn tại, gọi là *đạo hàm phải* của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0 + 0)$ hay $f'_+(x_0)$.

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó có đạo hàm trái và đạo hàm phải tại x_0 và $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$.

Nếu $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$ thì $f(x)$ không có đạo hàm tại x_0. Về mặt hình học, tiếp tuyến trái và tiếp tuyến phải của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$ không trùng nhau. Đồ thị đó có điểm góc $(x_0, f(x_0))$ (hình 2.29).

• Người ta nói hàm số $f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng đó, hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn [a, b] nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm trong khoảng(a, b), có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b.

• Người ta cũng mở rộng khái niệm đạo hàm cho trường hợp tỉ số (2.14) dần tới ∞ khi $x \to x_0$. Khi đó, ta nói hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm vô hạn tại x_0, tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại x_0 vuông góc với trục Ox.

7.1.2. Đạo hàm của tổng, tích, thương của hai hàm số

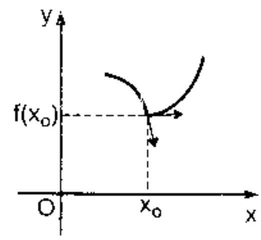
Nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm tại x thì

1) $u(x) + v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và

$$(u + v)' = u' + v'.$$

2) $u(x).v(x)$ cũng có đạo hàm tại x và

$$(u.v)' = u'v + v'.u.$$



Hình 2.29

3) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x, trừ khi $v(x) = 0$ và $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$.

7.1.3. Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm theo x, hàm $y = f(x)$ có đạo hàm theo u thì hàm số hợp $y = f[g(x)]$ có đạo hàm theo x và $y'(x) = y'(u).u'(x)$.

Ví dụ 1 : Cho $y = \sin(\cos x)$. Đặt $u = \cos x$, $y = \sin x$. Vậy

$$y'(x) = y'(u).u'(x) = \cos u.(-\sin x) = -\cos(\cos x).\sin x.$$

Ví dụ 2 : Tính y' nếu $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Ta biết rằng nếu $y = x^n$, n là số nguyên dương thì $y' = n.x^{n-1}$. Trong ví dụ này $y = x^\alpha$, α là một số thực bất kì, $x > 0$.

Lấy logarit cơ số e hai vế, ta được $\ln y = \alpha \ln x$.

Lấy đạo hàm hai vế đối với x, theo công thức đạo hàm của hàm số hợp, ta được $\dfrac{y'}{y} = \alpha.\dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha.\dfrac{y}{x} = \alpha.\dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha.x^{\alpha-1}$.

Vậy $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. (2.16)

Công thức này cũng đúng khi $x < 0$ với điều kiện x^α và $x^{\alpha-1}$ có nghĩa.

Ví dụ 3 : Tính y' nếu $y = (x+1)^{tgx}$, $x + 1 > 0$. Hàm số có dạng $u(x)^{v(x)}$ với $u(x) > 0$ gọi là hàm số luỹ thừa mũ. Để tính được đạo hàm của nó ta hãy lấy logarit cơ số e hai vế rồi tính đạo hàm theo x hai vế của đẳng thức thu được. Ta có $\ln y = tgx.\ln(x+1)$.

Do đó $\dfrac{y'}{y} = tgx.\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\ln(x+1)$.

Vậy $y' = y\left[tgx.\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{\cos^2 x}.\ln(x+1)\right] = (x+1)^{tgx}\left[\dfrac{tgx}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{\cos^2 x}\right]$.

7.2. Đạo hàm của hàm số ngược

Định lí 2.16. *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm tại* x, $f'(x) \neq 0$, *và nếu hàm số* $y = f(x)$ *có hàm số ngược* $x = \varphi(y)$ *thì hàm số* $x = \varphi(y)$ *có đạo hàm tại* $y = f(x)$ *và ta có*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Chứng minh: Vì $y = f(x)$ có hàm số ngược, nên nếu $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \neq 0$ thì $\Delta x \neq 0$. Do đó: $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

Vì $x = \varphi(y)$ liên tục tại y nên khi $\Delta y \to 0$ thì $\Delta x \to 0$. Do đó :

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} \text{ hay } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Bây giờ, ta áp dụng định lí 2.16 để tìm đạo hàm của các hàm số lượng giác ngược.

1) Hàm số $y = \arcsin x$ xác định khi $-1 \leq x \leq 1$, lấy mọi giá trị trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ là hàm số ngược của hàm số $x = \sin y$. Ta có

$$x'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y},$$

vì $\cos y \geq 0$ do $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$. Vậy $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \neq \pm 1$.

Vậy $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \neq \pm 1$. (2.17)

Hoàn toàn tương tự, ta có

2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \neq \pm 1)$. (2.18)

3) $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. (2.19)

4) $(\mathrm{arc\,cotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. (2.20)

7.3. Bảng đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

$(c)' = 0$ (c là hằng số);

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$;

$(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad (a > 0, a \neq 1)$;

$(e^x)' = e^x$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$;

$(\sin x)' = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$;

$(\mathrm{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $\quad (x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z})$;

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (|x| < 1)$;

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (|x| < 1)$;

$$(\operatorname{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\operatorname{arccotg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

7.4. Đạo hàm cấp cao

• Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thì $y' = f'(x)$ gọi là đạo hàm cấp 1 của x. Đạo hàm, nếu có, của đạo hàm cấp 1 gọi là đạo hàm cấp 2, kí hiệu là $y'' = f''(x)$. Vậy $y'' = f''(x) = [f'(x)]'$.

Tương tự, đạo hàm của đạo hàm cấp (n – 1) của f(x) gọi là đạo hàm cấp n, kí hiệu là $f^{(n)}(x)$. Vậy $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Ví dụ 4 : $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}, x > 0)$. Ta có :

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$
$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$
$$y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},$$
....
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Đặc biệt, nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ thì $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$,....

$$y^{(n)} = n.(n-1).(n-2), ..., 2.1. = n!$$

Do đó $y^{(m)} = 0$ nếu $m > n$.

Ví dụ 5 : $y = e^{kx}$, k là hằng số. Ta có

$$y' = ke^{kx},$$
$$y'' = k.ke^{kx} = k^2e^{kx},$$
....
$$y^{(n)} = k^ne^{kx}.$$

Ví dụ 6: $y = \sin x$.

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$$

....

$$y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

Ví dụ 7: $y = \dfrac{a}{bx + c}$, a, b, c là các hằng số, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$y = \frac{a}{b}.\frac{1}{x + \frac{c}{b}} = \frac{a}{b}(x + \frac{c}{b})^{-1}.$$

$$y' = \frac{a}{b}(-1)(x + \frac{c}{b})^{-2} = -\frac{a}{b}(x + \frac{c}{b})^{-2},$$

$$y'' = \frac{a}{b}(-1)(-2)(x + \frac{c}{b})^{-3} = (-1)^2\frac{a}{b}.1.2.(x + \frac{c}{b})^{-3},$$

....

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{a}{b}n!(x + \frac{c}{b})^{-(n+1)}.$$

Đặc biệt, nếu a = b = 1, c = 0 thì $y = \dfrac{1}{x}$, $y^{(n)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Công thức Leibniz

Giả sử các hàm số u(x), v(x) có đạo hàm liên tiếp đến cấp n. Khi đó, ta có

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}.v^{(k)},$$

trong đó $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$. (2.21)

Công thức (2.21) gọi là *công thức Leibniz*, được chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 7 : Tính $y^{(n)}$ nếu $y = (x^2 + 2x - 3)e^x$.

Giải. Đặt $u = e^x$, $v = (x^2 + 2x - 3)$. Ta có $u^{(n)} = e^x$,

$$v' = 2x + 2,\ v'' = 2,\ v''' = 0.$$

Do đó: $y^{(n)} = C_n^0(e^x)^{(n)}.(x^2+2x-3) + C_n^1(e^x)^{(n-1)}(2x+2) + C_n^2(e^x)^{(n-2)}.2$

$$= e^x(x^2+2x-3) + ne^x(2x+2) + \frac{n(n-1)}{2}.e^x.2$$

$$= e^x\left[x^2+2(n+1)x+2n-3+n(n-1)\right] = e^x\left[x^2+2(n+1)x+n^2+n-3\right].$$

§ 8. VI PHÂN

8.1. Định nghĩa

Cho hàm số y = f(x), có đạo hàm tại x, theo định nghĩa của đạo hàm:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

trong đó $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Vậy khi $\Delta x \to 0, \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\alpha \to 0$ khi $\Delta x \to 0$.

Do đó: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x).\Delta x + \alpha\Delta x$.

Số hạng $\alpha.\Delta x$ là một VCB bậc cao hơn Δx. Do đó, Δy và $f'(x)\Delta x$ là hai VBC tương đương. Biểu thức $f'(x)\Delta x$ gọi là *vi phân* của hàm số y = f(x) tại x, kí hiệu là dy hay d f(x). Vậy: $dy = f'(x)\Delta x$. (2.22)

Nếu hàm số có vi phân tại x, ta nói f(x) *khả vi* tại x. Như vậy, đối với hàm số một biến số, khái niệm hàm số có đạo hàm tại x và khái niệm hàm số khả vi tại x tương đương nhau.

Nếu y = x thì dy = dx = 1. Δx. Vậy đối với biến số độc lập x, ta có $dx = \Delta x$. Do đó, công thức (2.22) có thể viết là: $dy = f'(x)\,dx$. (2.23)

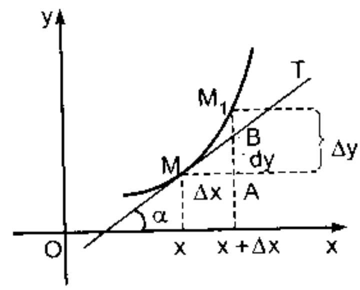
Ví dụ 1: Nếu $y=\sqrt{1+\ln x}$, thì $y'=\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}.\frac{1}{x}$. Do đó $dy=\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

8.2. Ý nghĩa hình học

Trên đường cong $y = f(x)$, lấy hai điểm $M(x, f(x))$, $M_1(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Qua M kẻ đường tiếp tuyến MT. Trên hình 2.30 ta có $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \overline{AM_1}$. Gọi B là giao điểm của AM_1 với MT, ta có trong tam giác AMB

$$\overline{AB} = \overline{MA} \;.\; \mathrm{tg}\alpha \;=\; f'(x) \;.\; \Delta x \;=\; dy\,.$$

Vậy vi phân $df(x)$ của hàm số $f(x)$ tại x là số gia của tung độ trên tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm ứng với số gia Δx.



Hình 2.30

8.3. Vi phân của tổng, tích, thương

Từ công thức đạo hàm của tổng, tích, thương của hai hàm số suy ra:

$$d(u + v) = du + dv$$
$$d(u.v) = udv + vdu$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

8.4. Ứng dụng vi phân vào tính gần đúng

Vì khi $\Delta x \to 0$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là VCB tương đương với $f'(x_0)\Delta x$, nên khi $|\Delta x|$ khá nhỏ, ta có công thức tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,.\Delta x. \qquad (2.24)$$

Ví dụ 2: Tính Δy và dy nếu $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$, nếu x biến thiên từ 2 đến 2,01.

Ta có $\quad f(2) = 2^3 + 2^2 - 2.2 + 1 = 9$;

$f(2{,}01) = (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2.(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$;

$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$;

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$;

$f'(2) = 3.2^2 + 2.2 - 2 = 14$;

$dy = f'(2).\,\Delta x = 14.(0{,}01) = 0{,}14.$

Rõ ràng tính dy đơn giản hơn tính Δy.

Ví dụ 3: Tính gần đúng $\sqrt[4]{15,8}$.

Ta cần tính gần đúng $y = f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ tại 16 – 0,2. Đặt $x_0 = 16$, $\Delta x = -0,2$. Ta có $\quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$.

Vì $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}$, ta được

$$\sqrt[4]{15,8} \approx \sqrt[4]{16} - \frac{0,2}{32} = 2 - 0,0062 \approx 1,9938.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa hàm số đơn điệu, chẵn, lẻ, tuần hoàn.

2. Định nghĩa hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$. Tìm hàm số ngược của hàm số $y = e^x$ và của các hàm số lượng giác.

Chứng minh rằng $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

3. Định nghĩa và phân loại các hàm số sơ cấp. Thế nào là một biểu thức hữu tỉ đối với sinx và cosx.

4. Định nghĩa giới hạn của dãy số.

5. Định nghĩa giới hạn của hàm số, giới hạn một phía, giới hạn vô hạn.

6. Phát biểu hai tiêu chuẩn tồn tại giới hạn.

7. Định nghĩa VCB, VCL, VCB tương đương, VCL tương đương. Quy tắc ngắt bỏ các VCB bậc cao và ngắt bỏ các VCL bậc thấp.

8. Hàm số liên tục: định nghĩa, tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn.

9. Định nghĩa đạo hàm, ý nghĩa hình học và cơ học. Đạo hàm cấp cao, công thức Leibnig.

10. Vi phân của hàm số: định nghĩa, ý nghĩa hình học. Nêu một ứng dụng của vi phân trong tính gần đúng.

11. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu các hàm số f(x), g(x) tăng trên [a, b] thì f(x) + g(x) tăng trên [a, b].

b) Nếu các hàm số f(x), g(x) tăng trên [a, b] thì f(x).g(x) tăng trên [a, b].

c) Nếu f(x) đơn điệu trên [−1, 0] và đơn điệu trên [0, 1] thì nó đơn điệu trên [−1, 1].

d) Nếu các hàm số f(x), g(x) là tuần hoàn với chu kì p thì f(x) − g(x) là tuần hoàn với chu kì p.

e) Nếu dãy số $\{x_n\}$ bị chặn thì nó hội tụ.

f) Nếu dãy số $\{x_n\}$ phân kì thì nó không bị chặn.

g) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3x}{x-3}-\dfrac{9}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x}{x-3}-\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9}{x-3}$.

h) Nếu $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=0$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

i) Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số xác định trong khoảng (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Nếu f(x) + g(x) gián đoạn tại x_0 thì f(x) và g(x) gián đoạn tại x_0.

j) Nếu f(x) liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại x_0.

k) Nếu $f(x) = |2x^3 + 5x|$ thì $f'(x) = |6x^2 + 5|$.

l) Nếu hàm số f(x) liên tục trên khoảng mở (a, b), nó đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại các điểm c, d ∈ (a, b).

BÀI TẬP

1. Cho $f(x) = x^2 + 1$; Tính $f(4)$; $f(\sqrt{2})$; $f(a + 1)$; $f(a^4)$; $[f(a)]^2$; $f(2a)$.

2. Cho $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3x+5}$. Viết $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ và $\dfrac{1}{\varphi(x)}$.

3. Cho $f(u) = \operatorname{tg}u$. Hãy chứng minh rằng $f(2u) = \dfrac{2f(u)}{1-[f(u)]^2}$.

4. Cho $g(t) = \lg\dfrac{1-t}{1+t}$. Chứng minh rằng $g(a) + g(b) = g\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$.

5. Cho $f(x) = \lg x$; $g(x) = x^3$. Tính $f[g(2)]$; $g[f(2)]$.

6. Cho $f(x) = x^2$. Tìm $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b \neq a)$.

7. Tìm miền xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \sqrt{1-x^2}$;

b) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{7-x}$;

c) $y = \lg\dfrac{a+x}{a-x}$ $(a > 0)$;

d) $y = \arcsin^2 x$;

e) $y = a^{x+2}$ $(a > 0, a \neq 1)$

f) $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2x+\pi}{3}\right)$.

g) $y = \lg\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$;

h) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+7x+10}}$;

i) $y = \sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

k) $y = \log_x 5$;

l) $y = \arccos\dfrac{3}{4+2\sin x}$;

m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

n) $y = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

o) $y = \lg|4-x^2|$;

p) $y = \log_2\log_3\log_4 x$

q) $y = \sqrt{\cos(\sin x)} + \arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$.

8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn, hàm số lẻ, không chẵn, không lẻ ?

a) $y = 2^x$; b) $y = 1 - x^2$; c) $y = 2^{-x^2}$;

d) $y = \text{cotg}x$; e) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$; f) $y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$;

g) $y = \dfrac{x}{a^x - 1}$ $(a > 0, a \neq 1)$; h) $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$.

9. Trong số các hàm số sau, hàm số nào là hàm số tuần hoàn ? Tìm chu kì của chúng.

a) $y = \sin^2 x$; b) $y = \sin(x^2)$; c) $y = x\cos x$;

d) $y = \sin\dfrac{1}{x}$; e) $y = 1 + \text{tg}x$; f) $y = 1 - \sin x$; g) $y = \sin\dfrac{x}{2}$;

h) $y = |\sin x|$; i) $y = 2\sin\left(3x + \dfrac{3\pi}{4}\right)$; k) $y = 3\cos\dfrac{x - \pi}{3}$.

10. Tìm hàm số ngược của các hàm số sau trên miền tồn tại của nó.

a) $y = 10^{x+1}$; b) $y = 1 + \lg(x + 2)$; c) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$;

d) $y = 2\sin 3x$; e) $y = x^2 - 2x$ khi $x \geq 1$.

11. Hãy thử lại rằng hàm số $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ có hàm ngược là chính nó.

Với điều kiện nào của a, b, c, d thì hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có hàm số ngược là chính nó?

12. Vẽ đồ thị các hàm số sau (dùng điểm đặc trưng và phép dời trục đã biết ở THPT).

a) $y = -3x + 5$; b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 1$; c) $y = x^2 + 2x + 1$;

d) $y = \frac{1}{x-1}$; e) $y = \sin 2x$; f) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$;

g) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; h) $y = \log_2 x$; i) $y = \log_2 \frac{1}{x}$;

k) $y = |\sin x|$; l) $y = |x-2|$; m) $y = x - |x|$;

n) $$y = \begin{cases} \cos x & \text{nếu} \quad -\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{nếu} \quad 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

13. Viết vài số hạng đầu tiên của các dãy số sau, nếu số hạng tổng quát là

a) $x_n = \sin\frac{n\pi}{3}$; b) $x_n = 2^{-n}\cos n\pi$.

14. Sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy số, chứng minh rằng dãy $x_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1}$ có giới hạn bằng $\frac{3}{5}$.

15. Chứng minh rằng dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{8}; \frac{1}{8}$ ... có số hạng tổng quát

$$x_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} & \text{với } n \text{ là số lẻ} \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} & \text{với } n \text{ là số chẵn;} \end{cases}$$

Từ đó suy ra dãy số đã cho không có giới hạn (có giải thích).

16. Chứng minh rằng các dãy số sau dần tới 0 khi $n \to \infty$

a) $x_n = \frac{1}{n^k}$ $(k > 0)$; b) $x_n = \frac{1-(-1)^n}{n}$;

c) $x_n = \frac{1}{n}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$;

d) $x_n = (-1)^n \frac{2}{5\sqrt[3]{n}+1}$.

17. Tìm giới hạn của các dãy số sau :

a) $x_n = \frac{3n^2+5n+4}{10+6n^2}$;

b) $x_n = \left[\frac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right]^4$;

c) $x_n = \frac{1^2+2^2+.......+n^2}{5n^3+n+1}$;

d) $x_n = \sqrt[n]{6n+3}$;

e) $x_n = \sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}$;

h) $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$;

i) $x_n = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;

k) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

l) $x_n = \frac{1}{2n}\cos(n^3)-\frac{3n}{6n+1}$.

18. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

19. Chứng minh rằng dãy số $x_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ là dãy tăng, còn dãy số $x_n = \frac{10^n}{n!}$ là dãy giảm khi $n \geq 10$.

20. Tìm giới hạn của các dãy số sau :

a) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$;

b) $z_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

c) $y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

21. Sử dụng định nghĩa về giới hạn của hàm số chứng minh rằng:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2) = 1$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 2$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+2}=\dfrac{2}{3}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ $(a>1)$.

22. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2+5}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+8}{x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ $n\in\mathbb{N}^*$.

g) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; i) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

k) $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$; l) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right]$; m) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$;

n) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{3x^2}$; o) $\lim\limits_{x\to0+0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$; p) $\lim\limits_{x\to0}x\cot gx$;

q) $\lim\limits_{y\to1}(1-y)\mathrm{tg}\dfrac{y}{2}\pi$; r) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$;

t) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{cx}$; u) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$; v) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\mathrm{tg}x}{x^3}$.

23. So sánh các VCB sau khi $x\to0$, hãy so sánh VCB $\varphi(x)=x$ với các VCB sau:

$f_1=\mathrm{tg}x^3$; $f_2=\sqrt[3]{\sin^2x}$; $f_3=\sqrt{9+x}-3$; $f_4=1-\cos x$; $f_5=\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

24. Chứng minh rằng khi $x\to0$, các VCB sau tương đương:

$1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\sim\dfrac{1}{2}x$; $1-\dfrac{1}{1+x}\sim x$; $\sin\sqrt{x\sqrt{x}}\sim\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$.

25. Hãy so sánh các VCL sau, khi $x\to\infty$:

a) $f(x)=3x^2+2x+5$ và $\varphi(x)=2x^3+2x-1$;

b) $f(x) = 2x^2 + 2x$ và $\varphi(x) = (x + 2)^2$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x+a}$ và $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$.

26. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{2}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\mathrm{arctg}^2 x}{3x+4x^3}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\mathrm{tg}x)^2+(1-\cos 2x)^4+x^5}{7\mathrm{tg}^7 x+\sin^6 x+2\sin^5 x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(\mathrm{arctg}\sqrt{x})^2(3^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

27. Tìm giới hạn một phía của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \text{nếu} \quad x\le 1\\ 3x-5 & \text{nếu} \quad x>1\end{cases}$ khi $x \to 1$;

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ khi $x \to 1$;

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ khi $x \to 0$.

28. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3x$ liên tục tại điểm x bất kì.

29. Tìm điểm gián đoạn và bước nhảy (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3) & \text{khi} \quad -\infty<x\le 1\\ 6-5x & \text{khi} \quad 1<x<3\\ x-3 & \text{khi} \quad 3\le x<+\infty;\end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.

30. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0.\end{cases}$

31. Cho $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Tính $f(1)$, $f'(1)$, $f(a^2)$, $f'(a^2)$.

32. Cho $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x}$. Tính $f'(\frac{1}{4})$.

33. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^3\text{arctg}x$; b) $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$;

c) $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$; d) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$; e) $y=(2x^3+5)^4$;

g) $y=\text{tg}^6x$; h) $y=\text{tg}(\ln x)$; i) $y=\ln\left(\text{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

k) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; *l*) $y=\ln(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1})$;

m) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\dfrac{k}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+k})$; n) $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$ $|x|<1$;

o) $y=\text{arctg}\dfrac{\ln x}{3}$; p) $y=e^x\text{arctg}e^x-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$; q) $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$.

34. Tính đạo hàm của các hàm số sau: a) $y=x^{x^2}$;

b) $y=(\sin x)^{\text{tg}x}$; c) $y=\dfrac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2.\sqrt[3]{1-x}}$; d) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$.

35. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=e^{x^2}$; b) $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$.

36. Chứng minh rằng hàm số $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$ với C_1, C_2 là hai hằng số tuỳ ý, thoả mãn phương trình $y''+3y'+2y=0$.

37. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:

a) $y = x\ln x$;   b) $y = \dfrac{1}{1+2x}$;   c) $y = x\,e^x$;   d) $y = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$.

38. So sánh số gia và vi phân của hàm số sau $y = 2x^3 + 5x^2$.

39. Tính giá trị gần đúng của $M = \arcsin 0{,}51$ bằng vi phân.

40. Tính giá trị gần đúng của diện tích hình tròn có bán kính bằng 3,02 m.

41. Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$;   b) $y = \mathrm{arctg}\,e^{2x}$;

c) $y = x(\ln x - 1)$;   d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

ĐÁP SỐ

1. 17; 3; $a^2 + 2a + 2$; $a^8 + 1$; $(a^2 + 1)^2$; $4a^2 + 1$.

2. $\dfrac{1-x}{3+5x}$; $\dfrac{3x+5}{x-1}$.

5. $3\lg 2$; $(\lg 2)^3$.

6. b + a.

7. a) $[-1, 1]$; b) $[-3, 7]$; c) $(-a, a)$; d) $[-1, 1]$;

e) $(-\infty, +\infty)$; f) $x \neq \dfrac{\pi}{4} + 3k\dfrac{\pi}{2}$; g) $(-1, 1)$;

h) $(-\infty, -5) \cup (-2, 1] \cup [2, +\infty)$; i) $[1, 4]$;

k) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$; *l*) $-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

m) $(-\infty, 0)$; n) $0 \leq \log_2 x \leq 1$ và $1 \leq x \leq 2$;

o) $x \neq \pm 2$; p) $4 < x < +\infty$; q) $x \neq \pm 1$.

8. a) Không chẵn, không lẻ; b) Chẵn; c) Chẵn; d) Lẻ;

e) Chẵn; f) Lẻ; g) Không chẵn, không lẻ; h) Lẻ.

9. a) Chu kì π; b) Không tuần hoàn; c) Không tuần hoàn;

d) Không tuần hoàn; e) Chu kì π; f) Chu kì 2π;

g) Chu kì 4π; h) Chu kì π; i) Chu kì $\frac{2\pi}{3}$; k) Chu kì 6π.

10. a) $y = \lg\frac{x}{10}$; b) $y = -2 + 10^{x-1}$; c) $y = \log_2\frac{x}{1-x}$;

d) $y = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$; e) $y = 1 + \sqrt{1+x}$.

11. Điều kiện d = – a và khi đó đồ thị của hàm số có trục đối xứng là đường phân giác thứ nhất.

13. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0; $\frac{-\sqrt{3}}{2}$;.... ; b) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; .... .

17. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{1}{15}$; d) 1; e) $+\infty$; h) $\frac{1}{3}$;

i) 1; k) $\frac{1}{12}$; *l*) $-\frac{1}{2}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

22. a) $\frac{1}{2}$; b) 0; c) ∞; d) 4; e) $\frac{1}{8}$; f) n;

g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{2}{3}$; i) $3x^2$; k) -1; *l*) 0 ;

m) 2; n) $\frac{1}{27}$; o) $\sqrt{2}$; p) 1; q) $\frac{2}{\pi}$;

r) e^2; s) e; t) $\frac{a-b}{c}$; u) 1; v) $-\frac{1}{2}$.

23. So với $\varphi(x) = x$ khi $x \to 0$; f_1 là VCB bậc cao hơn ;

f_2 là VCB bậc thấp hơn;

f_3 là VCB cùng bậc;

f_4 là VCB bậc cao hơn;

f_5 là VCB bậc thấp hơn.

25. a) f có bậc thấp hơn φ;

b) f và φ có cùng bậc;

c) f và φ tương đương.

26. a) $\frac{5}{4}$; b) 4; c) – 2; d) $\frac{1}{8}$; e) $\frac{2}{3}$;

g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{3}{5}$.

27. a) $f(1-0) = 1$; $f(1+0) = -2$;

b) $f(1-0) = -2$; $f(1+0) = 2$;

c) $f(-0) = -\sqrt{2}$; $f(+0) = \sqrt{2}$.

29. a) Tại x = 1 hàm số liên tục;

Tại x = 3 hàm số có bước nhảy $\lambda = 9$;

b) Tại $x = \frac{3}{2}$ hàm số gián đoạn loại 1, bước nhảy $\lambda = 2$.

30. a); b) Hàm số liên tục với mọi x.

31. $f(1) = 1$; $f'(1) = 2$; $f(a^2) = 3a^2 - 2|a|$; $f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}$.

32. $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 13$.

33. a) $y' = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2\text{arctg}x$; b) $y' = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$;

c) $y' = \frac{x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; d) $y' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$;

e) $y' = 24x^2(2x^3+5)^3$; g) $y' = \frac{6\text{tg}^5 x}{\cos^2 x}$; h) $y' = \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}$;

i) $y' = \frac{1}{\sin x}$;   k) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;   l) $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x - 1}}$;

m) $y' = \sqrt{x^2 + k}$;   n) $y' = \frac{4x}{1+x^4}$;   o) $y' = \frac{3}{x(9+\ln^2 x)}$;

p) $y' = e^x \operatorname{arctg} e^x$;   q) $y' = \frac{2}{\cos^3 x}$.

34. a) $y' = x^{x^2+1}(1+2\ln x)$;   b) $y' = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}\left[1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right]$;

c) $y' = \frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2.\sqrt[3]{1-x}}\left[\frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)}\right]$;   d) $y' = 0$.

35. a) $y'' = e^{x^2}\left[4x^2 + 2\right]$;   b) $y'' = \frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$;

37. a) $y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ $(n \geq 2)$;   b) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$;

c) $y^{(n)} = e^x(x+n)$;   d) $y^{(n)} = (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right]$.

38. Hiệu của số gia Δy và vi phân dy bằng $(6x + 5)\Delta x^2 + 2\Delta x^3$.

39. 0,513.

40. $\approx 28{,}66\ m^2$.

41. a) $dy = \frac{dx}{x^2 - 36}$;   b) $dy = \frac{2.e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$;

c) $dy = \ln x dx$;   d) $dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

CHƯƠNG III. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

Chương III trình bày các định lí về giá trị trung bình, về công thức Taylor và ứng dụng của chúng trong việc khử các dạng vô định, trong tính gần đúng, trong khảo sát hàm số và vẽ đường cong.

Sinh viên cần hiểu kĩ các định lí quan trọng này, vận dụng thành thạo quy tắc L'Hospital để khử các dạng vô định, dùng công thức Taylor để khai triển hữu hạn một số hàm số thông thường, khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, vẽ đường cong cho bởi phương trình tham số, hoặc phương trình trong hệ tọa độ cực.

§1. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Định lí 3.1. (Định lí Rolle) *Nếu hàm số* $f(x)$:

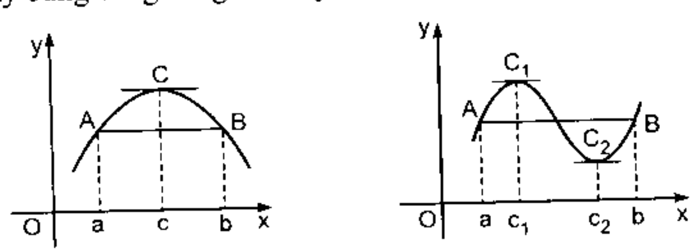
a) *Liên tục trong khoảng đóng* $[a, b]$;

b) *Khả vi trong khoảng mở* (a, b);

c) *Thoả mãn điều kiện* $f(a) = f(b)$;

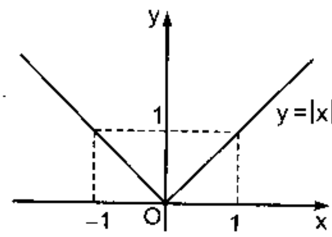
thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$.

Ta thừa nhận định lí này, ở đây chỉ nêu lên ý nghĩa hình học của định lí. Nếu cung AB của đường $y = f(x)$ với $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ liên tục và có tiếp tuyến tại mọi điểm và nếu $f(a) = f(b)$ thì trên cung ấy có ít nhất một điểm C có hoành độ $c \in (a, b)$, ở đó tiếp tuyến song song với trục Ox, tất nhiên tiếp tuyến ấy cũng song song với dây cung AB (hình 3.1).



Hình 3.1

Nhận xét: Các giả thiết của định lí 3.1 đều cần thiết, không thể bỏ qua một giả thiết nào. Chẳng hạn, hàm số f(x) = |x| liên tục trong khoảng đóng [−1, 1], f(−1) = f(1), nhưng không khả vi tại x = 0, do đó không áp dụng được định lí 3.1 (hình 3.2).



Hình 3.2

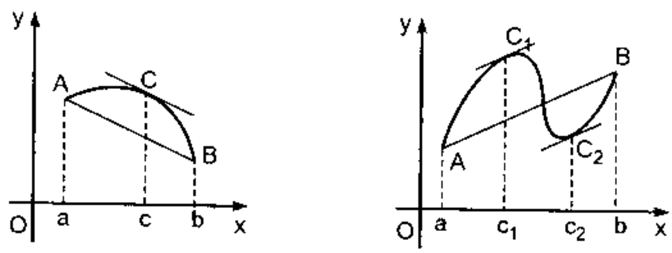
1.2. Định lí 3.2. (Định lí Lagrange) *Nếu hàm số* f(x) :

a) *Liên tục trong khoảng đóng* [a, b],

b) *Khả vi trong khoảng mở* (a, b),

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ *sao cho* $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$. (3.1)

Công thức (3.1) gọi là *công thức Lagrange*. Ta công nhận định lí này. Ý nghĩa hình học của định lí 3.2 như sau. Chú ý rằng $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ là hệ số góc của dây cung AB, còn f′(c) là hệ số góc của tiếp tuyến của đường y = f(x) tại x = c. Nếu hàm số f(x) thoả mãn các điều kiện a) và b) thì trên cung AB của đường y = f(x) với A(a, f(a)), B(b, f(b)) có ít nhất một điểm C có hoành độ $c \in (a, b)$, ở đó tiếp tuyến song song với dây cung AB (hình 3.3).



Hình 3.3

Nhận xét:

(1) Giống định lí Rolle, các giả thiết của định lí Lagrange đều cần thiết, không thể bỏ được.

(2) Định lí Rolle là một trường hợp riêng của định lí Lagrange. Thật vậy, nếu f(a) = f(b) thì từ công thức (3.1) có ngay f′(c) = 0.

Dạng khác của công thức Lagrange: công thức số gia hữu hạn

Vì $c \in (a, b)$ nên $\dfrac{c-a}{b-a} = \theta \in (0,1)$. Do đó $c - a = \theta(b - a)$ hay $c = a + \theta(b - a)$.

Vì vậy công thức Lagrange có thể viết là

$$f(b) - f(a) = f'[a + \theta(b - a)].(b - a) \quad (0 < \theta < 1).$$

Nếu đặt $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, ta có dạng thường gặp của công thức Lagrange

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x).\Delta x \quad (0 < \theta < 1). \tag{3.2}$$

Công thức này gọi là *công thức số gia hữu hạn.*

1.3. Định lí 3.3. (Định lí Cauchy) *Nếu các hàm số* $f(x)$, $g(x)$ *thoả mãn các điều kiện*:

a) *Liên tục trong khoảng đóng* $[a, b]$;

b) *Khả vi trong khoảng mở* (a, b);

c) $g'(x)$ *không triệt tiêu trong khoảng mở* (a, b) *thì tồn tại ít nhất một điểm* $c \in (a, b)$, *sao cho* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. $\quad$ (3.3)

Ta công nhận định lí này.

Nhận xét:

Định lí Lagrange chỉ là trường hợp riêng của định lí Cauchy, vì nếu chọn $g(x) = x$, ta có $g'(x) = 1$, $g'(c) = 1$, $g(a) = a$, $g(b) = b$. Thế vào công thức (3.3), ta được công thức Lagrange (3.2).

§2. CÔNG THỨC TAYLOR

2.1. Công thức Taylor

Việc tính giá trị của đa thức tại một điểm rất đơn giản, chỉ việc thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia đã quen thuộc. Vì vậy, để tính giá trị của một hàm số không phải là đa thức ở một điểm, người ta tìm cách biểu diễn nó ở lân cận điểm đó gần đúng bằng một đa thức. Ở chương II, khi nghiên cứu về vi phân, ta đã biết rằng nếu hàm số f(x) xác định ở lân cận của x_0, có đạo hàm tại x_0, thì ta có công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$

(chính là công thức 2.24). Nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$, công thức đó trở thành

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vậy ở lân cận x_0, ta đã xem f(x) gần đúng bằng một đa thức bậc 1. Vấn đề đặt ra là nếu hàm số f(x) có đạo hàm cấp cao hơn tại x_0, liệu có thể xấp xỉ f(x) bằng một đa thức bậc >1 ở lân cận điểm x_0 hay không? Công thức Taylor mà ta thừa nhận sau đây sẽ giải quyết vấn đề đó.

Định lí 3.4. *Nếu hàm số* f(x):

a) *Có đạo hàm đến cấp n trong khoảng đóng* [a, b];

b) *Có đạo hàm cấp* (n + 1) *trong khoảng mở* (a, b);

thì tồn tại điểm $c \in (a, b)$ *sao cho với điểm* $x_0 \in (a, b)$ *và với mọi* $x \in (a, b)$ *ta có*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1. \tag{3.4}$$

Công thức (3.4) gọi là *công thức Taylor*, số hạng cuối ở vế phải gọi là *số hạng dư dạng Lagrange*. Biểu diễn của hàm số f(x) dưới dạng (3.4) gọi là *khai triển hữu hạn của f(x)* ở lân cận điểm x_0.

Đặc biệt khi $x_0 = 0 \in (a, b)$, công thức (3.4) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \forall x \in (a,b). \quad (3.5)$$

Công thức (3.5) gọi là *công thức Mac Laurin.*

Nhận xét: (1). Nếu n = 0, công thức (3.4) chính là công thức Lagrange.

(2). Đặt $P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Công thức (3.4) cho phép ta biểu diễn f(x) gần đúng bằng đa thức $P_n(x)$ ở lân cận của x_0 với sai số $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Nếu hàm số f(x) thoả mãn điều kiện $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [a,b]$;

M là một số dương nào đó, thì ta có đánh giá sau đối với $R_n(x)$:

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}. \quad (3.6)$$

Có thể chứng minh được rằng với một giá trị xác định của x, vế phải của bất đẳng thức trên dần tới 0 khi $n \to \infty$. Khi đó, ta có thể xấp xỉ giá trị f(x) bởi đa thức $P_n(x)$ với độ chính xác bất kì.

2.2. Khai triển Mac Laurin của một số hàm số sơ cấp thường dùng

2.2.1. $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > -1$.

Ta có

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, ...,

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, ...

$f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$,...

$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$, ...

Thế vào công thức (3.5), ta được

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\quad 0<\theta<1,\ x>-1. \quad (3.7)$$

Đặc biệt nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ thì $\left[(1+x)^n\right]^{(n+1)}=0$, nên $R_n(x) = 0$, ta được

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k+...+x^n.$$

Đó chính là công thức nhị thức Newton quen thuộc.

Thay $\alpha = -1$ vào (3.7), nhận được

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},\quad 0<\theta<1. \quad (3.8)$$

Thay x bằng $-x$ vào (3.8), ta có

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+\frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}},\quad 0<\theta<1. \quad (3.9)$$

2.2.2. $f(x) = e^x$

Ta có $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1$.

Vậy $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, 0<\theta<1.$ (3.10)

Với mọi giá trị xác định của x, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ khi $n \to \infty$, còn $e^{\theta x}$ bị chặn.

Vì vậy $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}=0$.

Từ đó suy ra rằng với giá trị bất kì của x, có thể xấp xỉ hàm số siêu việt e^x bằng đa thức Mac Laurin bậc n với độ chính xác bất kì.

2.2.3. f(x) = sinx

Ta có $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Vậy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}.\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right];$$

$$0 < \theta < 1. \qquad (3.11)$$

2.2.4. f(x) = cosx

Tương tự như hàm số sinx, ta có

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left[\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right];$$

$$0 < \theta < 1. \qquad (3.12)$$

2.2.5. f(x) = ln(1 + x), $x > -1$

Ta có $f(0) = 1,\ f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -(1+x)^{-2},\ f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}, \ldots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!(1+x)^{-n},\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1,\ x > -1. \qquad (3.13)$$

2.3. Ứng dụng vào tính gần đúng

Ví dụ 1: Tính số e với độ chính xác 10^{-5}.

Thế x = 1 vào công thức (3.10), ta được

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta},\ 0 < \theta < 1.$$

Ta có $R_n(1)=\dfrac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\dfrac{e}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$ nếu $(n+1)!>3.10^5$.

Vậy lấy n = 8, ta được $e\approx 2,71828$ với độ chính xác 10^{-5}.

Ví dụ 2: Tính $\sqrt[4]{83}$ với độ chính xác 10^{-6}.

Vì $\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\left(1+\dfrac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$,

ta áp dụng công thức (3.7) với $x=\dfrac{2}{81}$, $\alpha=\dfrac{1}{4}$.

$$\sqrt[4]{83}=3\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162.108}+\frac{7}{162.108.486}-\frac{77}{162.108.486.648}+\ldots+R_n\right).$$

Đánh giá sai số $3|R_n|$, ta được

$$3|R_1|<\frac{3}{162.108}<0,0002\,;$$

$$3|R_2|<\frac{3.7}{162.108.486}<0,000003\,;$$

$$3|R_3|<\frac{3.7.11}{162.108.486.648}<0,00000006\,.$$

Vậy để nhận được $\sqrt[4]{83}$ với độ chính xác 10^{-6}, chỉ cần lấy bốn số hạng đầu:

$$\sqrt[4]{83}\approx 3(1+0,0061728-0,0000572+0,0000008)\approx 3,018349\,.$$

§3. QUY TẮC L'HOSPITAL

Trong mục này, dựa vào định lí Cauchy, ta xây dựng một phương pháp hiệu quả nhưng đơn giản để khử các dạng vô định.

3.1. Dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$

Định lí 3.5. (Quy tắc L'Hospital). Giả sử:

a) *Các hàm số* f(x), g(x) *khả vi trong một lân cận I của a (có thể trừ tại a),* $g'(x) \neq 0$ *trong lân cận ấy;*

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *và* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Khi đó nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *thì cũng tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *và*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3.14}$$

Chứng minh: Ta chỉ chứng minh cho trường hợp f(x), g(x) khả vi trong lân cận I của a, $g'(x) \neq 0$ trong lân cận ấy, f(a) = g(a) = 0. Khi đó, theo định lí Cauchy $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, trong đó c là một điểm nào đó nằm giữa a và x. Khi $x \to a$ thì c cũng dần tới a. Vậy nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ thì cũng tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ và hai giới hạn ấy bằng nhau. ■

Nhận xét : (1) Quy tắc L'Hospital vẫn đúng nếu:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$

(2) Nếu $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn có dạng $\dfrac{0}{0}$ hay $\dfrac{\infty}{\infty}$, các hàm số $f'(x)$, $g'(x)$ vẫn thoả mãn các giả thiết của quy tắc L'Hospital, ta có thể áp dụng quy tắc đó một lần nữa.

Ví dụ 1 : Tìm các giới hạn sau (dạng $\dfrac{0}{0}$) :

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+8}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2}{2x-4}=\dfrac{27}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2$;

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$.

Ví dụ 2 : Tìm các giới hạn sau (dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$) :

a) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\text{cotg}x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}\sin x=1.0=0.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$.

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots2.1}{e^x}=0.$$

Qua hai Ví dụ b) và c), ta thấy rằng khi $x \to +\infty$, e^x là VCL bậc cao hơn VCL x^n, x^n là VCL bậc cao hơn VCL $\ln x$ hay hàm số mũ e^x tăng nhanh nhất, rồi đến hàm số luỹ thừa x^n, hàm số $\ln x$ tăng chậm nhất.

3.2. Dạng vô định $0.\infty$ và $\infty - \infty$

Việc khử các dạng vô định này được thực hiện bằng cách chuyển chúng về các dạng $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ rồi áp dụng quy tắc L'Hospital.

Ví dụ 3 : Tìm các giới hạn sau (dạng $0.\infty$) :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^5 \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^5}}$ (dạng $\frac{\infty}{\infty}$) $= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{5}{x^6}} = -\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^5}{5} = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\text{tg}\dfrac{\pi x}{4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{\text{cotg}\dfrac{\pi x}{4}}$ (dạng $\frac{0}{0}$) $= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2x}{-\dfrac{\pi}{4}.\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{4}}} = \dfrac{16}{\pi}$.

Ví dụ 4 : Tìm $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \text{tg}x\right)$ (dạng $\infty - \infty$).

Ta có $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \text{tg}x\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ (dạng $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

3.3. Các dạng vô định 0^0, 1^∞, ∞^0

Xét hàm số $[f(x)]^{g(x)}$ ($f(x) > 0$). Giả sử khi $x \to a$ (hoặc $x \to \infty$) xảy ra các trường hợp sau :

a) $f(x) \to 0$ và $g(x) \to 0$: dạng 0^0;

b) $f(x) \to 1$ và $g(x) \to \infty$: dạng 1^∞;

c) $f(x) \to \infty$ và $g(x) \to 0$: dạng ∞^0.

Vì $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x).\ln f(x)}$, từ tính liên tục của hàm số mũ, ta có

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x).\ln f(x)} . \qquad (3.15)$$

Việc khử ba dạng vô định trên được đưa về việc khử dạng vô định $0.\infty$.

Ví dụ 5 : Tìm các giới hạn sau : a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2}$ (dạng 0^0);

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$ (dạng 1^∞); c) $\lim\limits_{x\to 0}(\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$ (dạng ∞^0).

Giải. a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x)}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{2} = 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^2} = e^0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{1-x}\ln x}$. Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{2}{x}}{-1} = -2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln \text{cotg}\, x}{\ln x}}$;

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \text{cotg}x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\text{cotg}x}.\frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{\cos x.\sin^2 x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{\cos x\sin x} = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = -1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}(\cot g\, x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

§4. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

§4 này nhắc lại, hệ thống hoá và nâng cao kiến thức đã học ở bậc Trung học Phổ thông về ứng dụng của đạo hàm trong khảo sát hàm số.

4.1. Chiều biến thiên của hàm số

Định lí 3.6. *Cho hàm số* f(x) *khả vi trong khoảng* (a, b).

1. *Nếu* $f'(x) > 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$ *thì* f(x) *tăng trong khoảng đó.*

2. *Nếu* $f'(x) < 0$ *với mọi* $x \in (a, b)$ *thì* f(x) *giảm trong khoảng đó.*

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = e^x - x - 1$.

Hàm số xác định $\forall\ x \in \mathbb{R}$, ta có

$$y' = e^x - 1,\ y' = 0 \text{ khi } x = 0,\ y' < 0 \text{ khi } x < 0,\ y' > 0 \text{ khi } x > 0.$$

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số giảm trong khoảng $(-\infty, 0)$ và tăng trong khoảng $(0, +\infty)$.

Từ kết quả trên, suy ra bất đẳng thức quan trọng sau

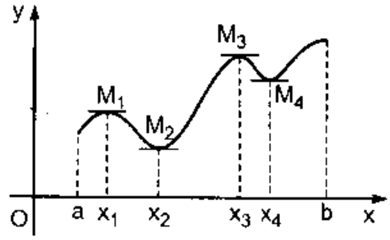
$$e^x - x - 1 > 0 \text{ hay } e^x > 1 + x,\ \forall x \neq 0.$$

4.2. Cực trị của hàm số

Hàm số f(x) gọi là đạt *cực đại* tại điểm x_1 nếu có một khoảng mở I_1 chứa x_1 sao cho $f(x_1) \geq f(x)$, $\forall x \in I_1$. Tương tự, hàm số f(x) gọi là đạt *cực tiểu* tại điểm x_2 nếu có một khoảng mở I_2 chứa x_2 sao cho $f(x_2) \leq f(x)$, $\forall x \in I_2$.

Giá trị cực đại, cực tiểu gọi chung là *cực trị* của hàm số. Điểm tại đó hàm số đạt cực trị gọi là *điểm cực trị* của hàm số (hình 3.4).

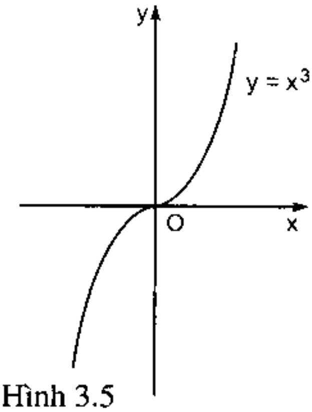
Chú thích : Giá trị cực đại hoặc cực tiểu của hàm số tại x_0 chỉ có tính chất địa phương, nghĩa là lớn hơn hoặc bé hơn giá trị của hàm số "ở lân cận" x_0, chứ không lớn hơn hoặc bé hơn mọi giá trị của hàm số trong toàn khoảng xác định. Hình 3.4 cho thấy giá trị cực tiểu của hàm số tại $x = x_4$ lớn hơn giá trị cực đại của hàm số tại $x = x_1$.



Hình 3.4

Điều kiện cần của cực trị

Định lí 3.7. (định lí Fermat). *Nếu hàm số* f(x) *đạt cực trị tại điểm* $x = x_1$ *và có đạo hàm tại điểm đó thì* $f'(x_1) = 0$.

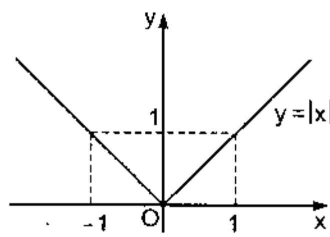


Hình 3.5

Chú ý rằng nếu $f'(x_1) = 0$ thì chưa chắc f(x) đã đạt cực trị tại $x = x_1$. Chẳng hạn, xét hàm số $f(x) = x^3$. Ta có $f'(x) = 3x^2 = 0$ khi $x = 0$, nhưng tại $x = 0$ hàm số không đạt cực trị (hình 3.5).

Hàm số f(x) cũng có thể đạt cực trị tại những điểm ở đó đạo hàm f'(x) không tồn tại. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = |x|$ đạt cực tiểu tại $x = 0$, nhưng $f'(0)$ không tồn tại (hình 3.6).

Những điểm thuộc miền xác định của hàm số, tại đó đạo hàm bằng không hoặc không tồn tại, gọi là *điểm tới hạn* của hàm số.



Hình 3.6

Định lí Fermat và nhận xét trên cho phép ta hạn chế việc tìm cực trị của hàm số tại những điểm tới hạn của nó. Những định lí sau cho ta biết điểm tới hạn nào là điểm cực trị của hàm số.

Điều kiện đủ của cực trị

Định lí 3.8. *Giả sử hàm số* f(x) *khả vi trong khoảng* (a, b) *chứa điểm tới hạn* x_0 *(có thể trừ tại điểm* x_0*).*

a) *Nếu khi* x *vượt qua* x_0 *mà* f'(x) *đổi dấu từ dương sang âm thì* f(x) *đạt cực đại tại* x_0.

b) *Nếu khi* x *vượt qua* x_0 *mà* $f'(x)$ *đổi dấu từ âm sang dương thì* $f(x)$ *đạt cực tiểu tại* x_0.

c) *Nếu khi* x *vượt qua* x_0 *mà* $f'(x)$ *không đổi dấu thì* $f(x)$ *không đạt cực trị tại* x_0.

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm số $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Vậy đạo hàm $y' = 0$ khi $x = \frac{2}{5}$ và y' không tồn tại khi $x = 0$. Do đó, y có hai điểm tới hạn $x = 0$; $x = \frac{2}{5}$.

Xét dấu của đạo hàm bằng cách lập bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
y'		+	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại 0, đạt cực tiểu tại $\frac{2}{5}$, $y_{max} = y(0) = 0$,

$$y_{min} = y\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}.$$

Định lí 3.9. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục ở lân cận điểm x_0 và $f'(x_0) = 0$.

a) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

b) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Ví dụ 3 : Tìm cực trị của hàm số $y = 2\sin x + \cos 2x$.

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kì 2π nên chỉ cần xét trên đoạn $[0, 2\pi]$.

Ta có $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$;

$y' = 0$ khi $\cos x = 0$ hay $1 - 2\sin x = 0$, tức là khi

$$x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2},\ x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6};$$

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x;$$

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} = -3 < 0;$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.1 + 4.1 = 2 > 0;$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} = -3 < 0;$$

$$y''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2.(-1) - 4.(-1) = 6 > 0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$, đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$.

$$(y_{max})_1 = (y_{max})_2 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$(y_{min})_1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.1 - 1 = 1,\ (y_{min})_2 = y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2.(-1) - 1 = -3.$$

4.3. Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trên một đoạn

Ta nói tại điểm x_1 hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất (hoặc bé nhất) trên đoạn [a, b] nếu $\forall x \in [a, b]$ ta có $f(x_1) \geq f(x)$ (hoặc $f(x_1) \leq f(x)$).

Giả sử tại điểm $x_1 \in [a, b]$ hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất (hoặc bé nhất) trên đoạn [a, b]. Nếu $x_1 \in (a, b)$ thì điểm đó phải là điểm cực trị của f(x) (tất nhiên cũng là điểm tới hạn). Nhưng cũng có thể x_1 là một trong hai điểm mút a, b. Do đó, để tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số f(x) trên đoạn [a, b], ta làm như sau:

1. Tính giá trị của f(x) tại các điểm tới hạn của nó và tại hai mút a, b.

2. Giá trị lớn nhất (bé nhất) trong các giá trị tính được ở trên là giá trị lớn nhất (bé nhất) phải tìm.

Ví dụ 3 : Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{1}{2}, 4\right].$$

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

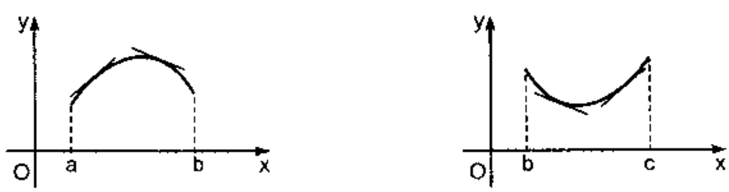
Vì hàm số f(x) có đạo hàm tại mọi x nên những điểm tới hạn chỉ có thể là những điểm ở đó $f'(x) = 0$, nghĩa là khi $x = 0$ và $x = 2$ (đều thuộc $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$).

Giá trị của hàm số f(x) tại các điểm tới hạn là: $f(0) = 1$, $f(2) = -3$. Giá trị của hàm số f(x) tại hai mút $-\frac{1}{2}$ và 4 là: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$, $f(4) = 17$.

Do đó, trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, hàm số f(x) đạt giá trị lớn nhất là 17 tại $x = 4$ và đạt giá trị bé nhất là -3 tại $x = 2$.

4.4. Sự lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ gọi là *lồi* trong khoảng (a, b) nếu mọi điểm của nó nằm phía dưới mọi tiếp tuyến của nó trong khoảng ấy, gọi là *lõm* trong khoảng (b, c) nếu mọi điểm của nó nằm phía trên mọi tiếp tuyến của nó trong khoảng ấy (hình 3.7).

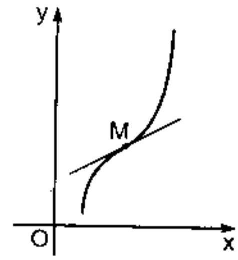


Hình 3.7

Điểm phân chia phần lồi và phần lõm của đồ thị của hàm số gọi là *điểm uốn* của nó.

Ta thấy ngay rằng, tại điểm uốn tiếp tuyến cắt đường cong vì về một phía của điểm đó thì đường cong nằm dưới tiếp tuyến, còn về phía kia đường cong nằm trên tiếp tuyến (hình 3.8).

Định lí 3.10. *Nếu tại mọi điểm của khoảng* (a, b), $f''(x) < 0$ *thì đường cong* $y = f(x)$ *lồi trong khoảng đó. Nếu tại mọi điểm của khoảng* (b, c), $f''(x) > 0$ *thì đường cong* $y = f(x)$ *lõm trong khoảng đó.*



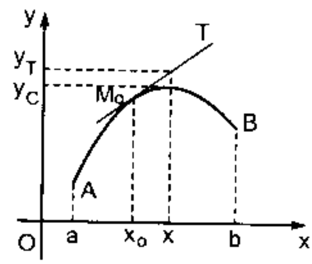
Hình 3.8

Chứng minh: Giả sử $f''(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$. Lấy điểm x_0 tuỳ ý trong (a, b) và vẽ tiếp tuyến của đường $y = f(x)$ tại điểm ấy. Phương trình của tiếp tuyến là:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Gọi tung độ của điểm nằm trên đường cong $y = f(x)$ có hoành độ x là y_C, tung độ của điểm nằm trên đường tiếp tuyến có cùng hoành độ x là y_T (hình 3.9), ta có

$$y_C - y_T = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$



Hình 3.9

Áp dụng định lí Lagrange hai lần liên tiếp, ta có

$$y_C - y_T = [f'(x_0 + \theta(x - x_0)) - f'(x_0)](x - x_0) = f''(x_0 + \theta_1\theta(x - x_0))\,\theta(x - x_0)^2,$$

trong đó $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$. Suy ra $y_C - y_T < 0$. Vì x_0 và x là những điểm lấy tuỳ ý trong (a, b) nên mọi điểm của đường $y = f(x)$ đều nằm dưới mọi tiếp tuyến của nó trong khoảng (a, b). Vậy đường $y = f(x)$ lồi trong (a, b).

Phần còn lại của định lí chứng minh tương tự. ■

Căn cứ vào định nghĩa của điểm uốn, từ định lí 3.10 suy ra hệ quả sau:

Nếu $f''(a) = 0$ *hoặc* $f''(a)$ *không tồn tại và khi đi qua điểm* $x = a$, $f''(x)$ *đổi dấu thì điểm trên đường cong có hoành độ* a *là điểm uốn.*

Ví dụ 4: Xét sự lồi lõm và tìm điểm uốn của hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = 12x^3 - 12x^2$;

$$y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2);$$

$$y'' = 0 \text{ khi } x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}.$$

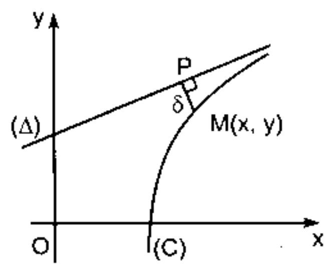
Xét dấu của y″ bằng cách lập bảng:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y″		+	0	−	0	+	
y		Lõm		Lồi		Lõm	

Vậy đồ thị của hàm số lồi trong khoảng $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, lõm trong các khoảng $(-\infty, 0)$ và $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Hai điểm $(0, 1)$ và $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ là hai điểm uốn.

4.5. Tiệm cận

Đường thẳng (Δ) gọi là tiệm cận của đường cong (C) nếu khoảng cách δ từ một điểm chạy $M(x, y)$ trên đường cong đến (Δ) dần tới không khi điểm M chạy ra vô cùng trên (C) (hình 3.10).



Hình 3.10

Như vậy, đường cong chỉ có thể có tiệm cận nếu trên đường cong ấy có điểm chạy ra vô cùng, nghĩa là phải có nhánh vô cùng.

Có ba loại tiệm cận: tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên.

4.5.1. Tiệm cận đứng

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đường $y = f(x)$.

Ví dụ 5 :

a) $y = \frac{1}{x} \to \infty$ khi $x \to 0$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đường $y = \frac{1}{x}$.

b) $y = e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ khi $x \to 0^+$, $y = e^{\frac{1}{x}} \to 0$ khi $x \to 0^-$. Đường $x = 0$ là tiệm cận đứng một phía của đường $y = e^{\frac{1}{x}}$.

4.5.2. Tiệm cận ngang

Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ thì $y = b$ là tiệm cận ngang của đường $y = f(x)$.

Ví dụ 6:

$y = e^{\frac{1}{x}} \to 1$ khi $x \to \infty$, nên y = 1 là tiệm cận ngang của đường $y = e^{\frac{1}{x}}$.

4.5.2. Tiệm cận xiên

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ hay $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ thì đường y = f(x) có thể có tiệm cận xiên. Nếu tồn tại các giới hạn : $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; (3.16)

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] \quad (3.17)$$

thì đường thẳng y = kx + b là tiệm cận xiên của đường y = f(x) khi x → +∞. Nếu một trong hai giới hạn trên không tồn tại thì đường y = f(x) không có tiệm cận xiên khi x → +∞.

Khi x → −∞, ta cũng xét tương tự.

Ví dụ 7 :

Tìm tiệm cận xiên khi x → +∞ của đường y = x arctgx.

Hàm số xác định ∀x ∈ ℝ. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,\text{arctg}x = +\infty$ nên có thể có tiệm cận xiên. Ta có

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2};$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} (x\,\text{arctg}x - \frac{\pi}{2}x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x(\text{arctg}x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{arctg}x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \quad (\text{dạng } \frac{0}{0});$$

Dùng quy tắc L'Hospital, ta có $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = -1$.

Vậy đường tiệm cận xiên khi x → +∞ của đường y = xarctgx là đường $y = \frac{\pi}{2}x - 1$.

Bạn đọc hãy tìm tiệm cận xiên khi x → −∞ của đường y = x arctgx.

Ví dụ 8 : Tìm các đường tiệm cận của đường cong $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Hàm số xác định với mọi $x \neq \pm\sqrt{3}$. Khi $x \to \pm\sqrt{3}$, $y \to \infty$, vậy $x = -\sqrt{3}$ và $x = \sqrt{3}$ là các tiệm cận đứng.

Khi $x \to +\infty$, thì $y \to -\infty$, đường cong có một nhánh vô cùng khi $x \to +\infty$;

Khi $x \to -\infty$, thì $y \to +\infty$, đường cong có một nhánh vô cùng khi $x \to -\infty$.

Ta có $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x(3-x^2)} = -1$;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Vậy $y = -x$ là tiệm cận xiên của đường cong đã cho (chung cho cả hai nhánh vô cùng).

Nhận xét: Tiệm cận ngang là trường hợp riêng của tiệm cận xiên. Thật vậy, nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ thì từ các công thức (3.16), (3.17), ta được $k = 0$; $y = b$ là tiệm cận của đường $y = f(x)$.

4.6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Sơ đồ khảo sát

1. Tìm miền xác định của hàm số;

2. Xét tính chẵn, lẻ, tính tuần hoàn của hàm số (nếu có);

3. Tìm giao điểm của đường cong đối với các trục toạ độ (nếu có);

4. Tìm các đường tiệm cận của đường cong (nếu có);

5. Xét sự tăng giảm, cực trị của hàm số; xét sự lồi, lõm và tìm điểm uốn của đường cong (nếu có). Lập bảng biến thiên.

6. Vẽ đường cong.

Ví dụ 9: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

1. Hàm số xác định và liên tục với mọi giá trị của x, trừ tại $x = \sqrt{3}$ và $x = -\sqrt{3}$, ở đó hàm số gián đoạn.

2. Hàm số lẻ vì: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = \dfrac{-x^3}{3-x^2} = -f(x)$.

Vậy đường cong đối xứng đối với gốc toạ độ O, do đó chỉ cần khảo sát với $x \geq 0$.

3. Khi x = 0, y = 0: đồ thị đi qua gốc toạ độ O.

4. Đường cong có hai tiệm cận đứng : $x = \pm\sqrt{3}$ và tiệm cận xiên y = − x (xem 4.5. ví dụ 8).

5. Tính các đạo hàm cấp một và cấp hai :

$$y' = \frac{(3-x^2)3x^2 - x^3(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2};$$

$y' = 0$ khi $x = 0$ và $x = 3$; y' không tồn tại khi $x = \sqrt{3}$.

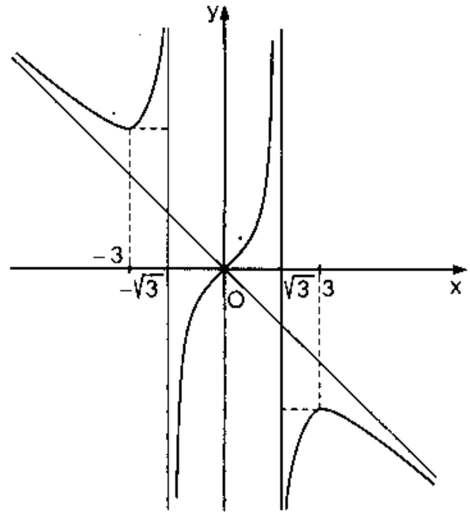
$$y'' = \frac{(3-x^2)^2(18x-4x^3)-(9x^2-x^4).2.(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4} = \frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}.$$

$y'' = 0$ khi $x = 0$; y'' không tồn tại khi $x = \sqrt{3}$, nhưng tại điểm ấy hàm số đã cho gián đoạn, nên không có điểm uốn.

Ta có bảng biến thiên :

x	0			$\sqrt{3}$			3		$+\infty$
y'	0	+		‖		+	0	−	
y''	0	+		‖		−		−	
y	0	↗	$+\infty$	‖	$-\infty$	↗	$-\dfrac{9}{2}$	↘	$-\infty$
	Lõm				Lồi				

6. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần đường cong nằm bên phải trục Oy. Để có được phần đường cong nằm bên trái trục Oy, chỉ cần lấy đối xứng qua tâm O phần đường cong đã vẽ (hình 3.11).



Hình 3.11

Ví dụ 10 : Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số y = 2cosx + sin2x.

1. Hàm số xác định và liên tục với mọi giá trị của x.

2. Hàm số không chẵn, không lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π. Vậy chỉ cần khảo sát trên đoạn $[0, 2\pi]$.

3. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0, 2) vì f(0) = 2 và cắt trục Ox tại những điểm ở đó 2cosx + sin2x = 2cosx + 2sinxcosx = 2cosx(1+ sinx) = 0, tức là khi cosx = 0 hoặc sinx = –1. Vậy đồ thị cắt đoạn $[0, 2\pi]$ của trục Ox tại $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$.

4. Các tiệm cận: không có.

5. $y' = -2\sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x)$

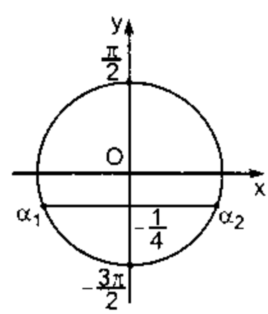
$$= -2(2\sin^2 x + \sin x - 1) = -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1);$$

$y' = 0$ khi $\sin x = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin x = -1$. Vậy $y' = 0$ trên đoạn $[0, 2\pi]$ tại $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$.

$y'' = -2\cos x - 4\sin 2x = -2\cos x(1 + 4\sin x)$,

$y'' = 0$ khi $\cos x = 0$, tức là khi $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$,

hoặc $\sin x = -\frac{1}{4}$.



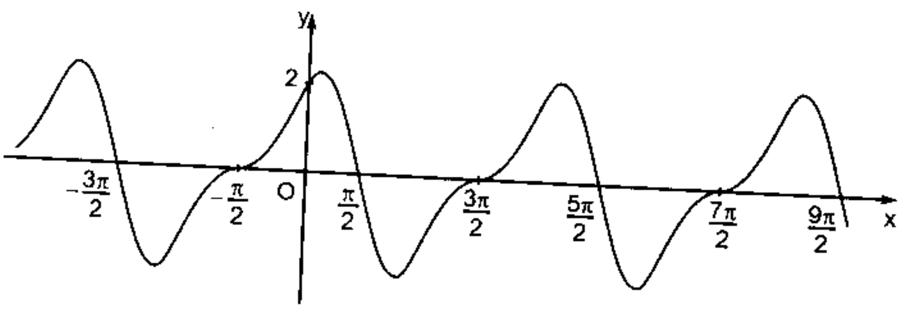
Hình 3.12

Trên đường tròn lượng giác, ta thấy trong $[0, 2\pi]$ có hai giá trị α_1, α_2 sao cho $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = -\dfrac{1}{4}$ (hình 3.12). Vậy trên $[0, 2\pi]$, $y'' = 0$ khi x bằng $\dfrac{\pi}{2}$, α_1, $\dfrac{3\pi}{2}$, và α_2.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		α_1		$\frac{3\pi}{2}$		α_2		2π
y'		+	0			−	0	+			0	+			
y''		−			0	+			0	−	0	+	0	−	
y	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗		↗	0	↗		↗	2
		Lồi			điểm uốn	Lõm			điểm uốn	Lồi	điểm uốn	Lõm	điểm uốn	Lồi	

6. Căn cứ vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần của đồ thị hàm số trong khoảng đóng $[0, 2\pi]$. Sau đó tịnh tiến theo những vectơ $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ để được toàn bộ đồ thị (hình 3.13).



Hình 3.13

§5. ĐƯỜNG CONG CHO BỞI PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

5.1. Phương trình tham số của đường cong

Cho hệ hai phương trình $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$ (3.18)

Gọi M là điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy có toạ độ ($\varphi(t)$, $\psi(t)$). Khi t biến thiên trong [α, β], điểm M vạch thành một đường cong C nào đó. Các phương trình (3.18) gọi là phương trình tham số của đường cong C, t gọi là tham số.

Ví dụ 1: Viết phương trình tham số của đường elip có tâm tại gốc toạ độ, hai bán trục là a và b.

Như đã biết, phương trình của đường elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Đặt $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{b} = \sin t$, ta được $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t. \end{cases}$ (3.19)

Đó là phương trình tham số của đường elip. Đặc biệt, nếu a = b = R thì

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (3.20)$$

là phương trình tham số của đường tròn tâm O, bán kính R.

5.2. Sơ đồ khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình tham số

Trình tự tiến hành như sau:

1. Tìm miền xác định, các điểm gián đoạn của các hàm số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$;

2. Xét tính đối xứng, tính tuần hoàn (nếu có) ;

3. Tìm các tiệm cận của đường cong (nếu có). Nếu khi $t \to t_0$ (hoặc $t \to \pm\infty$) mà hoặc x, hoặc y, hoặc cả x và y đều dần tới vô cùng thì đường cong có thể có tiệm cận.

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} \varphi(t) = a$ và $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} \psi(t) = \pm\infty$, thì đường cong có tiệm cận đứng x = a.

Nếu $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} \varphi(t) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ (t \to \pm\infty)}} \psi(t) = b$, thì đường cong có tiệm cận ngang y = b.

Nếu cả $\varphi(t)$ và $\psi(t)$ đều dần tới vô cùng khi $t \to t_0$ (hoặc $t \to \pm\infty$) và nếu $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\(t\to\pm\infty)}} \dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k$, $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\(t\to\pm\infty)}} \left[\psi(t) - k\varphi(t)\right] = b$, thì đường cong có tiệm cận xiên $y = kx + b$.

4. Khảo sát đạo hàm của x, y, xác định các điểm tại đó x'_t, y'_t triệt tiêu và xác định dấu của x'_t, y'_t. Lập bảng biến thiên gồm các dòng t, x'_t, x, y'_t, y để ghi lại các kết quả trên.

5. Để vẽ đường cong chính xác hơn, ta tìm các điểm đặc biệt (nếu có) của đường cong như: giao điểm của đường cong với các trục toạ độ, tiếp tuyến với đường cong tại các điểm ấy. Hệ số góc của đường tiếp tuyến với đường cong tại điểm ứng với tham số t được tính bởi:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Nếu không quá phức tạp, hãy tìm đạo hàm cấp hai của y đối với x:

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^2(t)} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}$$

để xét sự lồi, lõm và tìm điểm uốn của đường cong.

Ví dụ 2: Khảo sát và vẽ đồ thị đường hình sao (đường axtrôit)

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (a > 0).$$

Các hàm số x(t), y(t) xác định và liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$, miền giá trị của chúng là khoảng đóng $[-a, a]$. Vì các hàm số x(t), y(t) là tuần hoàn chu kì 2π nên chỉ cần khảo sát đường cong trong khoảng $[-\pi, \pi]$.

Khi đổi t thành $-t$ thì x(t) không đổi còn y(t) đổi dấu, nên đường cong nhận trục Ox làm trục đối xứng. Vậy chỉ cần khảo sát đường cong trong khoảng $[0, \pi]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua trục Ox.

Khi đổi t thành $\pi - t$ thì x(t) đổi dấu, còn y(t) không đổi nên đường cong nhận trục Oy làm trục đối xứng. Vậy chỉ cần khảo sát đường cong trong khoảng $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ rồi thực hiện phép đối xứng qua trục Oy.

Khi đổi t thành $\frac{\pi}{2} - t$ thì x(t) đổi thành y(t), y(t) đổi thành x(t), đường cong nhận đường phân giác thứ nhất làm trục đối xứng. Ta chỉ khảo sát đường cong trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ rồi thực hiện phép đối xứng qua đường phân giác thứ nhất. Ta có $x'_t = -3a\cos^2 t.\sin t$; $y'_t = 3a\sin^2 t.\cos t$.

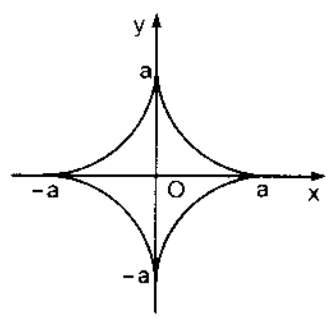
Trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ khi t = 0.

Vì $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\text{tg}t$ nên $y'_x = 0$ khi t = 0. Vậy tiếp tuyến của đường cong tại điểm (a, 0) nằm ngang.

Đối với đạo hàm cấp hai y''_{x^2}, ta có $y''_{x^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0$ trong khoảng $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Suy ra, đoạn đường cong ứng với $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ là lõm.

Bảng biến thiên

t	0		$\frac{\pi}{4}$
x'_t	0	−	$-\frac{3a}{2\sqrt{2}}$
x	a	↘	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y'_t	0	+	$\frac{3a}{2\sqrt{2}}$
y	0	↗	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$



Hình 3.14

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta vẽ đoạn đường cong ứng với $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Sau khi thực hiện các phép đối xứng nói trên, ta được đường axtrôit vẽ ở hình 3.14.

Ví dụ 3: Khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (a > 0).$$

Các hàm số x(t), y(t) xác định với mọi giá trị $t \in \mathbb{R}$ trừ $t = -1$.

Ta có, với mọi $t \neq -1$, $x\left(\dfrac{1}{t}\right) = y(t)$ và $y\left(\dfrac{1}{t}\right) = x(t)$, đường cong nhận đường phân giác thứ nhất làm trục đối xứng. Do đó, chỉ cần khảo sát đường cong trong khoảng (–1, 1], rồi thực hiện phép đối xứng đối với đường phân giác thứ nhất.

Khi $t \to -1$ thì cả x lẫn y đều dần tới vô cùng, và có:

$$k = \lim_{t\to-1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-1} t = -1;$$

$$b = \lim_{t\to-1}\left[y(t) - kx(t)\right] = \lim_{t\to-1}\left(\frac{3at^2}{1+t^3} + \frac{3at}{1+t^3}\right) =$$

$$= \lim_{t\to-1} \frac{3at(t+1)}{1+t^3} = \lim_{t\to-1} \frac{3at}{1-t+t^2} = -a.$$

Vậy $y = -x - a$ là tiệm cận xiên.

Các hàm số x(t), y(t) đều khả vi trên (– 1, 1] và với mọi $t \in (-1, 1]$, ta có

$$x'_t = 3a.\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}; \; x'_t = 0 \text{ khi } t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

$$y'_t = 3a.\frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}; \; y'_t = 0 \text{ khi } t = 0.$$

Vì $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$, nên $y'_x = 0$ khi $t = 0$, $y'_x = \infty$ khi $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

$$\left(x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=a\sqrt[3]{4},\, y\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=a\sqrt[3]{2}\right).$$

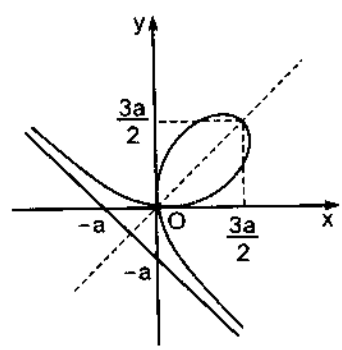
Vậy tiếp tuyến với đường cong tại điểm (0, 0) nằm ngang, còn tại điểm $(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$ tiếp tuyến thẳng đứng.

Từ các kết quả trên , ta suy ra bảng biến thiên của x, y:

t	-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1
x'_t	‖	$+$		$+$	0	$-$	$-\frac{3a}{4}$
x	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\frac{3a}{2}$
y'_t	‖	$-$	0	$+$		$+$	$\frac{3a}{4}$
y	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\frac{3a}{2}$

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta vẽ đoạn đường cong ứng với $t \in (-1, 1]$. Sau khi thực hiện phép đối xứng đối với đường phân giác thứ nhất, ta được toàn bộ đường cong (hình 3.15).

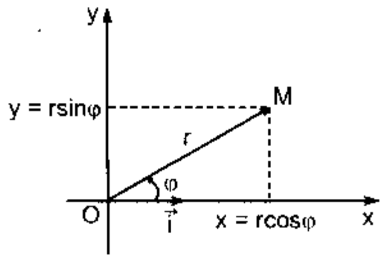
Đường cong đó gọi là đường hình lá đề-các.



Hình 3.15

§ 6 . ĐƯỜNG CONG TRONG HỆ TOẠ ĐỘ CỰC

6.1. Hệ toạ độ cực. Trên mặt phẳng chọn một điểm O cố định gọi là cực và một nửa đường thẳng Ox nằm ngang, trên đó chọn một véctơ đơn vị $\vec{i}$, gọi là trục cực. Khi đó, vị trí của một điểm M trong mặt phẳng được hoàn toàn xác định bởi: $r = |\overrightarrow{OM}|$ và $\varphi = (\vec{i};\overrightarrow{OM})$ (hình 3.16), φ là góc định hướng.



Hình 3.16

Các số r và φ gọi là *toạ độ cực* của điểm M, r là bán kính cực, φ gọi là góc cực. Theo định nghĩa thì $0 \le r < +\infty, -\infty < \varphi < +\infty$. Nếu chỉ xét $0 \le \varphi < 2\pi$ thì mỗi điểm M trong mặt phẳng, trừ cực O, ứng với một cặp số (r, φ) duy nhất, ngược lại, mỗi cặp số (r, φ) ứng với một điểm M duy nhất trong mặt phẳng. Đặc biệt, đối với cực O thì r = 0 và φ lấy giá trị tuỳ ý. Như vậy, trừ cực O, có một sự tương ứng 1– 1 hai chiều giữa tập hợp các điểm trong mặt phẳng và tập hợp các toạ độ cực của chúng.

Nếu ta chọn hệ toạ độ đề-các vuông góc sao cho gốc O trùng với cực, trục Ox trùng với trục cực thì giữa hệ toạ độ đề-các và hệ toạ độ cực có công thức liên hệ sau:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \qquad (3.21)$$

và ngược lại:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\,. \qquad (3.22)$$

Chú ý rằng, có hai góc φ thoả mãn hệ thức (3.22). Do đó, cần chọn góc φ sao cho sin φ cùng dấu với y(vì y = r sin φ). Ví dụ, toạ độ cực của điểm (1, 1) là $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, nhưng toạ độ cực của điểm (1, – 1) là $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4}\right)$.

Nhận xét : Trong nhiều trường hợp, nhất là khi vẽ đường cong, người ta còn dùng hệ toạ độ cực mở rộng: $-\infty < r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Khi đó, mỗi cặp số (r, φ) ứng với một điểm M trong mặt phẳng, nhưng ngược lại, mỗi điểm M trong mặt phẳng ứng với vô số cặp $(r, \varphi + 2k\pi)$ hoặc $(-r, \varphi + \pi + 2k\pi)$.

6.2. Phương trình đường cong trong hệ toạ độ cực

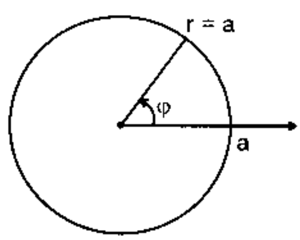
Phương trình $r = r(\varphi)$ biểu thị mối quan hệ hàm giữa r và φ, xác định cho ta một đường cong nào đó trong hệ toạ độ cực. Thật vậy, với một giá trị φ nằm trong miền xác định của hàm số $r(\varphi)$, ta xác định được một giá trị $r = r(\varphi)$ tương ứng. Do đó, xác định được một điểm M trong mặt phẳng.

Cho φ thay đổi, điểm M sẽ di chuyển và vẽ nên một đường cong trong mặt phẳng, gọi là đồ thị của hàm số $r = r(\varphi)$. Phương trình $r = r(\varphi)$ gọi là phương trình đường cong trong hệ toạ độ cực.

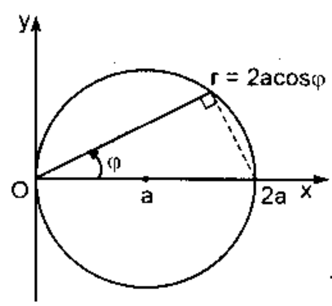
Ví dụ 29: Phương trình $r = a$ $(a > 0)$ là phương trình đường tròn, tâm là cực O, bán kính a trong hệ toạ độ cực (hình 3.17).

Phương trình $r = 2a\cos\varphi$ $(a > 0)$ là phương trình đường tròn, tâm tại điểm (r, φ) với $r = a$, $\varphi = 0$, bán kính a trong hệ toạ độ cực (hình 3.18).

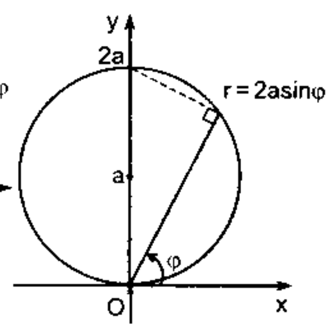
Phương trình $r = 2a\sin\varphi$ $(a > 0)$ là phương trình đường tròn, tâm tại điểm (r, φ) với $r = a$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, bán kính a trong hệ toạ độ cực (hình 3.19).



Hình 3.17



Hình 3.18



Hình 3.19

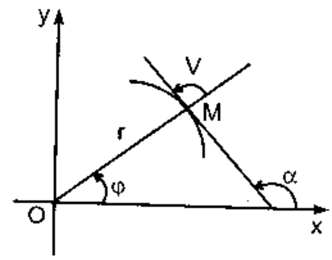
6.3. Tiếp tuyến của đường cong trong hệ toạ độ cực

Cho đường cong có phương trình trong toạ độ cực là: $r = r(\varphi)$. Gọi M là một điểm trên đường cong có toạ độ cực (r, φ) và toạ độ vuông góc tương ứng là (x, y). Ta có $\begin{cases} x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Đây chính là phương trình tham số của đường cong đã cho, tham số là góc cực φ.

Gọi α là góc giữa tiếp tuyến với đường cong tại M và trục Ox (hình 3.20), ta có $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \dfrac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}$

hay $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$.



Hình 3.20

Gọi V là góc giữa bán kính cực của điểm M và tiếp tuyến với đường cong tại M, ta có

$$\alpha = V + \varphi \text{, suy ra: } V = \alpha - \varphi \text{ và } \mathrm{tg}V = \mathrm{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\varphi}{1 + \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\varphi}.$$

Thay biểu thức của $\mathrm{tg}\alpha$ và $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ vào biểu thức trên của tgV, ta được:

$$\mathrm{tg}V = \frac{r}{r'}.$$

Như vậy, dựa vào phương trình của đường cong $r = r(\varphi)$, ta tìm được tgV tại mỗi điểm của đường cong, từ đó xác định tiếp tuyến với đường cong tại điểm đó. Đặc biệt, nếu $\mathrm{tg}V = 0$, tiếp tuyến trùng với bán kính cực; nếu $\mathrm{tg}V = \infty$, tiếp tuyến thẳng góc với bán kính cực.

6.4. Sơ đồ khảo sát và vẽ đường cong trong hệ toạ độ cực

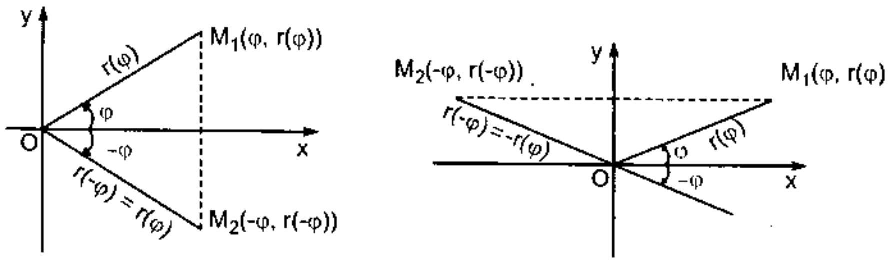
Trình tự tiến hành như sau:

1. Tìm miền xác định của hàm số.

2. Xét tính đối xứng, tính tuần hoàn của hàm số. Nếu hàm số $r(\varphi)$ tuần hoàn với chu kì ω thì chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong một khoảng có độ dài ω. Ta nhận được toàn bộ đường cong từ phần đường cong đã vẽ bằng những phép quay liên tiếp tâm O và các góc quay ω, 2ω, ... Nếu $r(\varphi)$ là hàm số chẵn thì đường cong nhận trục cực làm trục đối xứng (hình 3.21a).

Nếu $r(\varphi)$ là hàm số lẻ thì đường cong nhận đường thẳng đi qua gốc cực, thẳng góc với trục cực làm trục đối xứng (hình 3.21b).

3. Tìm đạo hàm $r' = r'(\varphi)$ và xét dấu của r' để xác định các khoảng tăng, giảm của r theo φ.



a) b)

Hình 3.21

4. Tìm tgV tại các điểm đặc biệt. Ghi tóm tắt các kết quả thu được trong bảng biến thiên.

5. Vẽ đường cong.

Ví dụ 1: Khảo sát và vẽ đường hình tim (đường cardioide có phương trình: $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$.

Hàm số xác định và liên tục với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$.

Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, do đó chỉ cần khảo sát đường cong trong khoảng $[-\pi, \pi]$.

Hàm số chẵn, vậy ta cho φ biến thiên trong khoảng $[0, \pi]$, rồi thực hiện phép đối xứng qua trục cực.

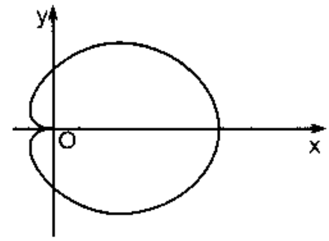
$$r' = -a\sin\varphi,\ \mathrm{tg}V = \frac{r}{r'} = \frac{a(1+\cos\varphi)}{-a\sin\varphi} = -\frac{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\mathrm{cotg}\frac{\varphi}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right),$$

suy ra $V = \dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r'			$-$		
r	$2a$		a		0
tgV	$-\infty$		-1		0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta vẽ được phần đường cong tương ứng với $\varphi \in [0, \pi]$, lấy đối xứng qua trục cực, ta nhận được toàn bộ đường cong (hình 3.22).



Hình 3.22

Ví dụ 2: Khảo sát và vẽ đồ thị đường xoắn ốc loga:

$$r = a.e^{\lambda\varphi},\ a > 0,\ \lambda > 0.$$

Hàm số xác định và liên tục với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$. Hàm số không tuần hoàn và cũng không chẵn, không lẻ. Ta có, với mọi $\varphi \in \mathbb{R}$:

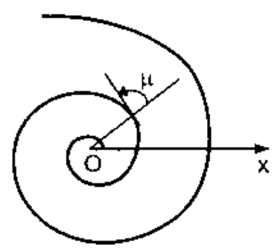
$$r' = a\lambda\, e^{\lambda\varphi} > 0;\ \mathrm{tg}V = \frac{r}{r'} = \frac{ae^{\lambda\varphi}}{a\lambda e^{\lambda\varphi}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Vậy góc V không đổi, và đặc tính của đường xoắn ốc loga là tại mọi điểm, tiếp tuyến luôn làm với bán kính cực một góc không đổi. Ta có bảng biến thiên sau:

φ	$-\infty$		$-\pi$		0		π		$+\infty$
r'	0	+	$a\lambda e^{-\lambda\pi}$	+	$a\lambda$	+	$a\lambda e^{\lambda\pi}$	+	$+\infty$
r	0	$\nearrow$	$ae^{-\lambda\pi}$	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$ae^{\lambda\pi}$	$\nearrow$	$+\infty$
tgV			$\frac{1}{\lambda}$		$\frac{1}{\lambda}$		$\frac{1}{\lambda}$		

Chú ý rằng $r(\varphi) \to 0$ khi $\varphi \to -\infty$, ta nói rằng cực O là một điểm tiệm cận của đường xoắn ốc loga (hình 3.23).

Từ bảng biến thiên ta vẽ được đường xoắn ốc loga (hình 3.23).



Hình 3.23

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Công thức số gia hữu hạn. Phân biệt công thức đó với công thức tính gần đúng bằng vi phân.

2. Quy tắc L'Hospital có thể áp dụng được cho những trường hợp nào?

3. Công thức Taylor. Khai triển Mac Laurin của vài hàm số sơ cấp.

4. Điều kiện cần của cực trị. Điều kiện đủ của cực trị. Quy tắc tìm cực trị của hàm số một biến số.

5. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số trong một khoảng đóng.

6. Định lí về sự lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

7. Quy tắc tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của $y = f(x)$ có thể vừa có tiệm cận xiên, vừa có tiệm cận ngang khi $x \to +\infty$ được không?

8. Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$.

9. Sơ đồ khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình tham số.

10. Định nghĩa toạ độ cực. Sơ đồ khảo sát và vẽ đường cong cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực.

11. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, thì $f(x)$ tăng trong khoảng (a, b).

b) Nếu $f(x)$ khả vi và tăng trong khoảng (a, b) thì $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$.

c) Nếu $f'(x_0) = 0$ thì $f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_0$.

d) Nếu $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[a, b]$ tại điểm $x_o \in [a, b]$ thì $f'(x) = 0$

e) Nếu $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in [a, b]$ thì $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

f) Nếu $f''(x_0) = 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có điểm uốn tại $x = x_0$.

g) Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty, g'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ thì cũng tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

h) Với những giả thiết như câu g, nếu không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ thì cũng không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

i) Nếu tồn tại một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ thì giới hạn kia cũng tồn tại và hai giới hạn ấy bằng nhau.

BÀI TẬP

1. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = x - x^3$ thoả mãn định lí Rolle trên các khoảng $-1 \le x \le 0$ và $0 \le x \le 1$. Hãy tìm các giá trị c tương ứng.

2. Chứng tỏ rằng, giữa hai nghiệm của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có một nghiệm của đạo hàm $f'(x)$.

3. Hàm số $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ nhận hai giá trị bằng nhau $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$ tại hai mút của khoảng đóng [0, 4]. Hỏi hàm số trên có thoả mãn định lí Rolle trong khoảng đóng [0, 4] không?

4. Chứng tỏ rằng hàm số $y = \ln x$ thoả mãn định lí Lagrange trong khoảng đóng [1, 2], sau đó tìm giá trị c.

5. Dùng công thức Lagrange cho hàm số $\ln x$ để chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

6. Viết công thức Cauchy và tìm giá trị c đối với các hàm số:

a) sinx và cosx trong khoảng đóng $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) x^2 và $\sqrt{x}$ trong khoảng đóng [1, 4].

7. Cho $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}$, tìm ba số hạng đầu trong khai triển Taylor của f(x) ở lân cận $x_o = 1$, áp dụng để tính gần đúng f(1,005).

8. Cho f(x) là một đa thức bậc 4, biết $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, và $f^{(4)}(2) = 24$, hãy tính: $f(-1)$, $f'(0)$ và $f''(1)$.

9. Viết công thức Taylor cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $x_0 = -1$.

10. Dùng công thức gần đúng $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$, tính $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ và ước lượng sai số.

11. Tính $\sin 49^0$ với độ chính xác 10^{-6}.

12. Dùng quy tắc L' Hospital, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{tg}x - x}{x^3}$;   b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$;   c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\pi - 2\text{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$;   e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\text{tg}x}{\text{tg}3x}$;   f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\text{tg}\frac{\pi x}{2}$;   h) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$;

i) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right)$;   k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right)$;

l) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot gx}$;   m) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$;   n) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;   p) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\text{tg}x)^{2x-\pi}$;   q) $\lim\limits_{x\to 0}(\text{cotg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

13. Chứng tỏ rằng các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;   b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x}$,

không thể tính bằng quy tắc L'Hospital. Hãy tính các giới hạn ấy bằng phương pháp khác.

14. Xét sự tăng giảm của các hàm số:

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$; b) $y = \dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}$; c) $y = \ln|x|$.

15. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(1 + x)^n > 1 + nx$ khi $x > 0$ và $n > 1$; b) $x > \ln(1 + x)$ khi $x > 0$.

16. Tìm cực trị của các hàm số :

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; b) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

c) $y = x^{\frac{2}{3}}.\dfrac{1}{x+2}$; d) $y = x^3e^{-x}$; e) $y = x^2 + \sqrt{x^5}$;

f) $y = \sin^2x$; g) $y = e^x + 2\cos x + e^{-x}$.

17. Tím giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ $(-4 \le x \le 4)$;

b) $y = x^2\ln x$ $(1 \le x \le e)$;

c) $y = 2\sin x + \sin 2x$ $\left(0 \le x \le \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

d) $y = \mathrm{arctg}x^2$ trong toàn bộ miền xác định.

18. Cho hình nón bán kính đáy R, chiều cao H. Tìm bán kính r, chiều cao h của hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón.

19. Xét sự lồi, lõm và tìm các điểm uốn của các đường cong sau:

a) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; b) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$;

c) $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}$; d) $y = 2 - |x^5 - 1|$.

20. Tìm tiệm cận của các đường cong sau:

a) $y = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$; b) $y = x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$;

c) $y = xe^x$;   d) $y = x.\text{arccotg}x$;   e) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

21. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$;   b) $y = \dfrac{4x+4}{x^2} - 2$;

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;   d) $y = x + 2\text{arccotg}x$;   e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

22. Cho $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$, tính y'_x tại $t = 1$.

23. Cho $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$, tính y'_{x^2} tại $t = 0$.

24. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho theo tham số:

a) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;   b) $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

25. Khảo sát và vẽ đồ thị các đường cong cho trong hệ toạ độ cực

a) $r = a\sin 3\varphi$ $(a > 0)$;   b) $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ $(a > 0)$.

ĐÁP SỐ

1. $-1 < c_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < 0$; $0 < c_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1$;

2. $x = 2$ là nghiệm của đạo hàm.

3. Không, vì $f'(x) \neq 0 \ \forall \ x \neq 2$ và $f'(2)$ không tồn tại.

4. $c = e - 1$.

6. a) $\dfrac{\pi}{4}$;   b) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)^2} \approx 2,4$.

7. $f(x) = 1 + 60(x-1) + 2570(x-1)^2 + ...$; $f(1{,}005) \approx 1{,}36425$.

8. $f(-1) = 143$; $f'(0) = -60$; $f''(1) = 26$.

9. $-1-(x+1)-(x+1)^2-...-(x+1)^n+(-1)^{n+1}.\dfrac{(x+1)^{n+1}}{\left[-1+\theta(x+1)\right]^{n+2}}$, $0 < \theta < 1$.

10. 0,781; $\delta < 0{,}003$.

11. 0,75471.

12. a) $\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{2e}{e-1}$; c) 2; d) 1; e) 3;

f) cosa; g) $\dfrac{2}{\pi}$; h) 0; i) $\dfrac{1}{5}$; k) $-\dfrac{1}{2}$; *l*) e^4;

m) e; n) e^2; o) e^{-6}; p) 1; q) $\dfrac{1}{e}$.

13. a) 0; b) 1.

14. a) $(-1, 0)$ và $(2, +\infty)$: tăng; $(-\infty, -1)$ và $(0, 2)$: giảm.

b) $(-1, 1)$: tăng; $(-\infty, -1)$ và $(1, +\infty)$: giảm.

c) $(0, +\infty)$: tăng; $(-\infty, 0)$: giảm.

16. a) Không có. b) $y_{min} = -\dfrac{1}{2}$ tại $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $y_{max} = \dfrac{1}{2}$ tại $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $y_{min} = 0$ tại $x = 0$; $y_{max} = \dfrac{3\sqrt{2}}{3}$ tại $x = 4$;

d) $y_{max} = 27e^{-3}$ tại $x = 3$; e) Không có.

f) $y_{min} = 0$ tại $x_k = \dfrac{k\pi}{2}$ với k chẵn.

$y_{max} = 1$ tại $x_k = \dfrac{k\pi}{2}$ với k lẻ.

g) $y_{min} = 4$ tại $x = 0$.

17. a) $y_{\text{lớn nhất}} = 40$ tại $x = -1$; $y_{\text{bé nhất}} = -41$ tại $x = -4$.

b) $y_{\text{lớn nhất}} = e^2$ tại $x = e$; $y_{\text{bé nhất}} = 0$ tại $x = 1$.

c) $y_{\text{lớn nhất}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $x = \dfrac{\pi}{3}$; $y_{\text{bé nhất}} = -2$ tại $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

d) $y_{\text{bé nhất}} = 0$ tại $x = 0$.

18. $r = \dfrac{2}{3}R$, $h = \dfrac{1}{3}H$.

19. a) $(-\infty, 1)$: lồi; $(1, +\infty)$: lõm; $(1, 2)$: điểm uốn;

b) $(-\infty; -2)$: lõm; $(-2, +\infty)$: lồi; $(-2, 3)$: điểm uốn;

c) $(-\infty, -1)$: lồi; $(-1, +\infty)$: lõm; không có điểm uốn vì tại $x = -1$ đường cong không liên tục (gián đoạn).

d) $(-\infty, 0)$ và $(1, +\infty)$: lồi; $(0, 1)$: lõm; $(0, 1)$ và $(1, 2)$: điểm uốn.

20. a) $x = 1$, $x = 3$ và $y = 0$;

b) $x = -\dfrac{1}{e}$ và $y = x + \dfrac{1}{e}$.

c) $y = 0$ khi $x \to -\infty$

d) $y = \pi x + 1$ khi $x \to -\infty$; $y = 1$ khi $x \to +\infty$.

e) $y = x - 2$.

21. a) $y_{max} = 5{,}4$ tại $x = 3$; điểm uốn: $(0, 0)$ và $(2; 3{,}2)$; không có tiệm cận.

b) $y_{min} = -3$ tại $x = -2$; điểm uốn: $(-3; -\dfrac{26}{9})$; tiệm cận đứng: $x = 0$, tiệm cận ngang: $y = -2$.

c) Hàm số lẻ: đường cong đối xứng với gốc O, chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong đối với $x \geq 0$, sau đó lấy đối xứng qua gốc O; $y_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37$ tại $x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$; điểm uốn $(0, 0)$ và $(3; 1{,}5)$; tiệm cận đứng $x = 1$.

d) $y_{max} = \frac{3\pi}{2} - 1$ tại x = − 1, $y_{min} = \frac{\pi}{2} + 1$ tại x = 1, điểm uốn: $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; tiệm cận xiên: y = x + 2π khi x → − ∞, y = x khi x → + ∞.

e) Hàm số chẵn và tuần hoàn chu kì $\frac{\pi}{2}$, chỉ cần khảo sát và vẽ đường cong trong khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, tại những điểm còn lại của trục số, đường cong được lặp lại sau một khoảng bằng chu kì $\frac{\pi}{2}$, $y_{max} = 1$ tại x = 0, $y_{min} = \frac{1}{2}$ tại $x = \frac{\pi}{4}$; điểm uốn: $\left(\frac{\pi}{8}; \frac{3}{4}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{8}; \frac{3}{4}\right)$; không có tiệm cận.

22. $y'_x(1) = 1$.

23. $y''_{x^2}(0) = 1$.

24. a) $x_{max} = 1$ tại t = 0 (y = 0), đường cong có một tiệm cận đứng x = − 1.

b) $x_{min} = -\frac{1}{e}$ tại t = − 1 (y = − e) ; $y_{max} = \frac{1}{e}$ tại t = 1 (x = e) tiệm cận đứng: x = 0, tiệm cận ngang: y = 0; có hai điểm uốn $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ và $(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$.

25. a) Đường hoa hồng ba cánh. Cực O là điểm đường cong đi qua ba lần, tại đó tiếp tuyến của đường cong là trục cực và các đường thẳng $\varphi = \frac{\pi}{3}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Cực trị ứng với $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ và $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, r là một hàm số tuần hoàn chu kì $\frac{2\pi}{3}$.

b) Đường lemniscat. Cực O là điểm đường cong đi qua hai lần, tại đó tiếp tuyến của đường cong là các đường thẳng $\varphi = \frac{\pi}{4}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Cực trị ứng với φ = 0 và φ = π, r là một hàm số tuần hoàn, chu kì π.

CHƯƠNG IV. ĐỊNH THỨC - MA TRẬN - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

Chương này trình bày những kiến thức cơ bản về ma trận và định thức, cách tính định thức, tính hạng của ma trận và nghiên cứu tổng quát về các hệ m phương trình tuyến tính n ẩn.

Sinh viên cần nắm được các kiến thức, vận dụng chúng trong việc tính định thức, tính hạng của ma trận, giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính tổng quát, đặc biệt chú ý đến phương pháp khử của Gauss.

§1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU VỀ MA TRẬN

• Người ta gọi bảng số (thực hoặc phức) hình chữ nhật A gồm m hàng, n cột

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

là *ma trận cỡ $m \times n$.* Số a_{ij} nằm ở hàng i, cột j gọi là *phần tử* của ma trận A.

Để cho gọn, ta viết: $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Ví dụ 1 : $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 3×2.

$[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$ là ma trận cỡ 1×4.

• *Ma trận không* là ma trận mà mọi phần tử đều bằng không. Ma trận không được kí hiệu là 0.

• Hai ma trận A và B được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử ở cùng vị trí bằng nhau.

Ví dụ 2 : $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = 0, d = 5, e = 1, f = 0$.

• Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Nếu đổi hàng thành cột, cột thành hàng, ta được một ma trận mới gọi là *ma trận chuyển vị* của A, kí hiệu là A^t.

Vậy $$A^t = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}.$$

Ví dụ 3 : Nếu $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ thì $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

• Nếu m = n thì ta có *ma trận vuông* và gọi nó là ma trận vuông cấp n:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là các *phần tử chéo*.

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là *đường chéo chính*.

Ma trận vuông (cấp n) dạng $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ gọi là *ma trận tam giác trên* (cấp n). Đó là ma trận $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, trong đó $a_{ij} = 0$ nếu i > j.

Ma trận $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, trong đó $a_{ij} = 0$ nếu i < j gọi là *ma trận tam giác dưới*.

Ma trận vuông (cấp n) mà mọi phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận chéo* (cấp n).

Ma trận chéo (cấp n) mà mọi phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 gọi là *ma trận đơn vị* (cấp n), kí hiệu là E

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

§2. ĐỊNH THỨC

2.1. Định nghĩa định thức của ma trận vuông

Cho ma trận vuông cấp n : $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$.

Xét phần tử a_{ij}. Nếu bỏ đi hàng i, cột j của ma trận A, ta được một ma trận vuông cấp n – 1 và gọi nó là *ma trận con cấp n – 1* của A ứng với phần tử a_{ij}, kí hiệu là M_{ij}.

Người ta gọi *định thức* của ma trận vuông A là một số, kí hiệu là :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được xác định như sau:

Nếu A là ma trận vuông cấp 1, $A = [a_{11}]$ thì $\det A = a_{11}$.

Nếu A là ma trận vuông cấp 2, $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ thì $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Với cách kí hiệu của ma trận con M_{ij} ứng với phần tử a_{ij}, ta có thể viết:

$$\det A = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}), \qquad (4.1)$$

trong đó $M_{11} = [a_{22}]$, $M_{12} = [a_{21}]$.

Nếu A là ma trận vuông cấp 3, $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ thì:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13}), \quad (4.2)$$

trong đó: $M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $M_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$.

Từ công thức tính định thức cấp 2, ta được:

Ví dụ 1: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} =$

$$= (45 + 48) - 2(-36 - 42) + 3(32 - 35) = 240.$$

Các công thức (4.1), (4.2) gọi là công thức *khai triển định thức cấp 2 và định thức cấp 3 theo các phần tử của hàng thứ nhất.*

Một cách tổng quát, nếu A là ma trận vuông cấp n, $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ thì

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n}.a_{1n}.\det(M_{1n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}.a_{1j}.\det(M_{1j}) \;. \quad (4.3)$$

Người ta gọi $\det(M_{ij})$ là *định thức con ứng với phần tử a_{ij}* của ma trận A.

Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là *định thức cấp n.*

2.2. Các tính chất của định thức

Để tính định thức, nếu căn cứ vào công thức truy hồi (4.3) thì khối lượng tính sẽ lớn với định thức cấp $n \geq 4$. Các tính chất sau đây sẽ giúp cho việc giảm khối lượng tính.

Tính chất 1. *Định thức của ma trận vuông A bằng định thức của ma trận chuyển vị A^t.*

Hệ quả: *Nếu một tính chất của định thức đã đúng khi phát biểu về hàng thì nó vẫn đúng khi ta thay hàng bằng cột.*

Chẳng hạn, từ công thức (4.3), khai triển định thức theo các phần tử của hàng đầu, ta suy ra công thức khai triển định thức theo các phần tử của cột đầu :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}.a_{i1}.\det(M_{i1}) \ . \tag{4.4}$$

Tính chất 2. *Nếu đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) cho nhau, ta được một định thức mới bằng định thức cũ đổi dấu.*

Hệ quả: *Định thức có hai hàng (hay hai cột) như nhau thì bằng 0.*

Tính chất 3. *Nếu nhân các phần tử của một hàng (hay một cột) với số $\lambda \neq 0$ thì ta được một định thức mới bằng định thức cũ nhân với λ.*

Hệ quả 1: *Nếu các phần tử của một hàng (hay một cột) có một thừa số chung, ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.*

Hệ quả 2: *Một định thức có hai hàng (hay hai cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.*

Tính chất 4. *Nếu mọi phần tử của một hàng (hay một cột) là tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức. Chẳng hạn như:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Tính chất 5. *Khi ta cộng (hoặc trừ) các phần tử của một hàng (hay một cột) với các phần tử tương ứng của một hàng (hay cột) khác sau khi đã nhân với số $\lambda \neq 0$ thì giá trị của định thức không đổi.*

Tính chất 6. *Định thức của ma trận dạng tam giác bằng tích các phần tử chéo:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & \\ 0 & 0 & . & \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn} \ ; \quad \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\ldots b_{nn} \ .$$

Các tính chất trên có thể chứng minh được dựa vào các khai triển (4.3) hoặc (4.4). Ở đây không chứng minh.

2.3. Các ví dụ tính

Ví dụ 2: Tính định thức cấp 4: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

Giải. Sử dụng tính chất 5, ta trừ lần lượt các hàng thứ 4, 3, 2 với các hàng liền trước chúng nhằm đưa về định thức dạng tam giác trên.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ (h_4-h_3) \\ (h_3-h_2) \\ (h_2-h_1) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (h_4-h_3) \\ (h_3-h_2) \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ (h_4-h_3) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Chú thích: Ở đây kí hiệu $(h_i - \alpha h_k)$ chỉ ra rằng, ta lấy hàng thứ i trừ đi α lần hàng thứ k. Kí hiệu đó luôn được sử dụng khi cần đến.

Ví dụ 3: Tính định thức cấp 5: $D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Giải. Trong cột đầu chỉ có hai phần tử khác không. Khai triển định thức theo các phần tử của cột đầu, ta được: $D = 5.\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Đổi chỗ hàng 1 và 2 của định thức thứ nhất ở vế phải, khai triển định thức thứ hai của vế phải theo các phần tử hàng đầu, ta có .

$$D = -5.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (h_2 - 5h_1) \end{matrix} - 6.\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -5.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -19 & -30 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6.\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -5.\begin{vmatrix} -19 & -30 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 6.\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665.$$

§3. MA TRẬN

3.1. Các phép tính về ma trận

3.1.1. Cộng hai ma trận

Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. Tổng của hai ma trận đó, kí hiệu là A + B, là ma trận $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, trong đó : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ví dụ 1 : $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & t \\ y & u \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x & 2+t \\ 2+y & 3+u \\ 3+z & 4+v \end{bmatrix}.$$

Từ định nghĩa suy ra:

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (tính chất kết hợp) ;

$A + B = B + A$ (tính chất giao hoán).

3.1.2. Nhân ma trận với một số

Tích của ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ với số λ (thực hoặc phức), kí hiệu là λA, là ma trận $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, trong đó: $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}$.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng với các số α , β, ta có : $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;

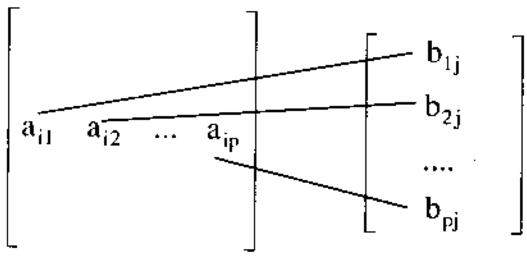
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$
$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

3.1.3. Nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$ số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B. Ta gọi tích của hai ma trận A và B, kí hiệu là A. B, là ma trận $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ gồm m hàng, n cột mà các phần tử được xác định theo công thức

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\,.$$

Vậy c_{ij} là tổng các tích các phần tử tương ứng ở hàng i của ma trận A với các phần tử ở cột j của ma trận B.



Ví dụ 2:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1.1+2.2+3.3+4.0 & 1.2+2.3+3.0+4.1\\ 2.1+3.2+4.3+1.0 & 2.2+3.3+4.0+1.1\\ 3.1+4.2+1.3+2.0 & 3.2+4.3+1.0+2.1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}14 & 12\\ 20 & 14\\ 14 & 20\end{bmatrix}.$$

Từ định nghĩa trên, có thể suy ra rằng nếu các phép nhân sau đây có thể thực hiện được thì : (A.B).C = A. (B.C); A.B có thể khác B.A;

(A + B). C = A.C + B.C; A.(B + C) = A.B + A.C.

3.1.4. Chuyển vị của tích của hai ma trận

Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times p}$, $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ Khi đó thực hiện được phép nhân A.B và tích A.B là ma trận cỡ m × n. Nếu thực hiện phép chuyển vị

$$A^t = [a_{ji}]_{p \times m} \text{ , } B^t = [b_{ji}]_{n \times p},$$

ta thấy số cột của B^t bằng số hàng của A^t. Do đó có thể thực hiện được phép nhân $B^t.A^t$, tích đó có cỡ n × m. Người ta đã chứng minh rằng:

$$(AB)^t = B^t.A^t. \tag{4.5}$$

3.2. Hạng của ma trận

3.2.1. Định nghĩa

Cho ma trận cỡ m × n : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

k là một số nguyên, k ≤ min(m, n). Định thức cấp k thành lập từ các phần tử nằm ở chỗ giao nhau của k hàng và k cột tuỳ ý của ma trận A gọi là định thức con cấp k của ma trận A.

Người ta gọi *hạng* của ma trận A, kí hiệu là r(A), là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A.

Ví dụ 3 : Tìm hạng của ma trận : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Giải. Các định thức con cấp 3 của A là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Nhưng định thức con cấp 2 của A là $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Do đó r(A) = 2.

Nhận xét: Nếu B là ma trận vuông thì $\det(B^t) = \det(B)$.

Do đó với mọi ma trận A, ta có:

$$r(A^t) = r(A). \tag{4.6}$$

3.2.2. Cách tính hạng của ma trận bằng các phép biến đổi sơ cấp

Hai ma trận A và B được gọi là tương đương và kí hiệu là A ~ B nếu r(A) = r(B).

Từ các tính chất của định thức, dễ thấy rằng các phép biến đổi sau đây gọi là biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận:

1/ Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột cho nhau).

2/ Nhân một hàng (hay một cột) với số $\lambda \neq 0$.

3/ Thêm vào một hàng (hay một cột) k lần một hàng (hay một cột) khác.

Để tính hạng của ma trận A, ta tìm các phép biến đổi sơ cấp để A tương đương với một ma trận có nhiều hàng (hay cột) gồm toàn số 0.

Ví dụ 4 : Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$.

Giải .

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (h_2 - 2h_1) \\ (h_3 - 3h_1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (h_3 - 2h_2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận cuối cùng có một định thức con cấp 2 khác không, chẳng hạn $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ còn tất cả các định thức con cấp 3 của nó đều bằng 0.

Vậy r(A) = 2.

Chú thích: Người ta gọi ma trận cuối cùng trong ví dụ 4 là *ma trận dạng bậc thang*. Để tính hạng của ma trận A, người ta thường dùng các phép biến đổi sơ cấp để A tương đương với một ma trận dạng bậc thang.

Ví dụ 5. Tính hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}$.

Giải. Trước hết đổi chỗ hàng đầu và hàng thứ 2. Ta được:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (h_2 - 2h_1) \\ (h_3 - 11h_1) \\ (h_4 - 2h_1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (h_3 - 4h_2) \\ (h_4 + h_2) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vì $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ nên $r(A) = 2$.

3.3. Ma trận vuông

3.3.1. Nếu A là ma trận vuông cấp n, E là ma trận đơn vị cùng cấp. Dễ kiểm tra được rằng

$$E.A = A.E = A.$$

Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì nói chung: $A.B \neq B.A$.

Nhưng người ta chứng minh được rằng:

$$\det(AB) = \det A.\det B. \tag{4.7}$$

Nếu B = A, ta kí hiệu : $A.A = A^2$, $A.A^2 = A^3$, ..., $A.\ A^{k-1} = A^k$.

Ví dụ 6: Cho $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

Tính A^2.

Giải.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2\sin x \cos x \\ -2\sin x \cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}.$$

Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng : $A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$.

Ví dụ 7: Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tính A^2.

Giải. Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2.2+1.3+1.1 & 2.1+1.1-1.1 & 2.1+1.2+1.0 \\ 3.2+1.3+2.1 & 3.1+1.1-2.1 & 3.1+1.2+2.0 \\ 1.2-1.3+0.1 & 1.1-1.1-0.1 & 1.1-1.2+0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

3.3.2. Ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại ma trận vuông cùng cấp B sao cho

$$A.B = B.A = E,$$

trong đó E là ma trận đơn vị cấp n, thì B gọi là *ma trận nghịch đảo* của A, kí hiệu là A^{-1}. Khi đó, ta nói A là *ma trận khả nghịch*. Như vậy, nếu ma trận A khả nghịch thì: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$.

Định lí 4.1. *Điều kiện cần để ma trận A khả nghịch là* $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh: Giả sử ma trận A có nghịch đảo A^{-1}, ta có: $A.A^{-1} = E$.

Theo công thức (4.7) ta có: $\det(A.\ A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(E) = 1$.

Suy ra: $\det(A) \neq 0$ và $\det(A^{-1}) \neq 0$. ■

Định lí 4.2. *Nếu* $\det(A) \neq 0$ *thì* A *có ma trận nghịch đảo* A^{-1} và *nếu :*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

thì A^{-1} *được cho bởi công thức:* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$, (4.8)

trong đó :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}). \qquad (4.9)$$

$\det(M_{ij})$ là định thức con ứng với phần tử a_{ij} của ma trận A (xem mục 2.1).

Ta thừa nhận định lí này.

c_{ij} tính theo công thức (4.9) gọi là *phần phụ đại số, ứng với phần tử* a_{ij} của ma trận A.

Ví dụ 8: Tính A^{-1} nếu $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có : $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

Do đó tồn tại A^{-1}. Ta có :

$$c_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,\ c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Vậy : $$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} & \frac{8}{15} \end{bmatrix}.$$

Định lí 4.3. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và khả nghịch thì A.B cũng khả nghịch và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chứng minh: Ta có: $(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$$

Vậy AB khả nghịch và $B^{-1}A^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của AB.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính có dạng tổng quát sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.10}$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn số, a_{ij} là các hệ số của hệ phương trình, b_i là vế phải của phương trình thứ i. Nếu m = n, ta có hệ n phương trình với n ẩn số.

Hệ được gọi là *thuần nhất* nếu $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

Hệ được gọi là *tương thích* nếu nó có nghiệm, *không tương thích* nếu nó vô nghiệm.

Ví dụ 1. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

là hệ hai phương trình tuyến tính thuần nhất ba ẩn, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$

là hệ hai phương trình không thuần nhất hai ẩn.

4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính (4.10). Ma trận: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

gọi là ma trận hệ số của hệ. Ma trận $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$, gọi là ma trận vế phải hay cột vế phải.

Ma trận $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$ gọi là ma trận ẩn.

Với định nghĩa phép nhân hai ma trận, hệ (4.10) có thể viết là

$$Ax = b \tag{4.11}$$

Đó là dạng ma trận của hệ (4.10). Nếu m = n thì A là ma trận vuông.

4.3. Hệ Cramer

Hệ phương trình tuyến tính (4.10) gọi là *hệ Cramer* nếu m = n và $\det(A) \neq 0$.

Khi đó, theo định lí 4.2, ma trận A có nghịch đảo. Từ (4.11) ta suy ra :

$$x = A^{-1}b.$$

Theo công thức (4.8):

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Do đó : $$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \dots + c_{nj}b_n}{\det(A)}.$$

Nếu so sánh biểu thức $c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \dots + c_{nj}b_n$ với khai triển của det(A) theo các phần tử của cột thứ j, ta thấy biểu thức đó được suy từ det(A) bằng cách thay cột thứ j của det(A) bằng cột vế phải. Kí hiệu biểu thức đó là A_j, ta được:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},\ j = 1, 2, \dots, n. \tag{4.12}$$

Nghiệm đó là duy nhất, vì nếu hệ (4.10) có hai nghiệm là x và y, ta có:

$$Ax = b,\ Ay = b.$$

Do đó Ax − Ay = 0 hay A(x − y) = 0.

Nhân A^{-1} vào hai vế đẳng thức trên, ta được : $A^{-1}A(x - y) = A^{-1}0$ hay $x - y = 0$.

Vậy hệ chỉ có một nghiệm. Tóm lại:

Định lí 4.4. *Hệ Cramer có một nghiệm duy nhất cho bởi công thức* (4.12).

Ví dụ 2: Giải hệ:
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Giải. Ta có : $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$.

Vậy hệ đã cho là hệ Cramer, nó có nghiệm duy nhất. Theo công thức (4.12), ta tính:
$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23; \ \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -46,$$
$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -69.$$

Vậy x = 1, y = 2, z = 3.

Chú thích : Định lí 4.4 có ý nghĩa về mặt lí thuyết nhiều hơn về mặt thực hành, vì nếu muốn giải hệ n phương trình tuyến tính n ẩn, ta phải tính (n + 1) định thức cấp n.

4.4. Phương pháp khử của Gauss

Từ các tính chất của định thức suy ra rằng nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính không đổi nếu ta thực hiện những phép biến đổi sơ cấp sau:

1) Đổi chỗ hai phương trình của hệ.

2) Nhân một phương trình của hệ với một số $\lambda \neq 0$.

3) Cộng vào một phương trình của hệ với một phương trình khác của hệ sau khi đã nhân với một số $\lambda \neq 0$.

Hai hệ phương trình gọi là tương đương nếu tập hợp các nghiệm của chúng bằng nhau.

Nội dung của phương pháp khử của Gauss là khử dần các ẩn số. Phương pháp đó được minh hoạ trong ví dụ sau:

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

Giải. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \;\; (h_2 - 3h_1) \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \;\; (h_3 - 4h_1) \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 5 \\ -5x_2 + 9x_3 = 3 \quad (h_3 - 5h_2) \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 5 \\ 11x_3 = 22. \end{cases}$$

Ta đã dùng các phép biến đổi sơ cấp để đưa hệ phương trình đã cho về hệ mà ma trận hệ số là ma trận tam giác trên $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$.

Giải hệ đó từ dưới lên thật dễ dàng. Từ phương trình cuối, ta được $x_3 = 2$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được $x_2 = 3$. Thế vào phương trình đầu, ta được $x_1 = -1$.

4.5. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Xét hệ m phương trình tuyến tính n ẩn số dạng (4.10). Nếu ta thêm cột vế phải của hệ vào ma trận hệ số A, ta được ma trận :

$$\overline{A} = [A, b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

gọi là ma trận bổ sung.

Ta thừa nhận định lí quan trọng sau đây :

Định lí 4.5. (Định lí Kronecker - Capelli). *Hệ phương trình* (4.10) *có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận bổ sung* $\overline{A}$. *Từ định lí* (4.5) *suy ra*:

Nếu $r(A) \neq r(\overline{A})$ *thì hệ vô nghiệm.*

Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$, *n là số ẩn số, thì hệ là hệ Cramer. Nó có nghiệm duy nhất.*

Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = r < n$, ta sẽ thấy hệ có vô số nghiệm, phụ thuộc n – r tham số.

Thật vậy, khi đó ma trận A có một định thức con khác 0 cấp r, ta gọi nó là định thức con chính. Giả sử đó chính là định thức con:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Khi đó, r phương trình đầu của hệ gọi là những phương trình chính, $x_1, x_2, ..., x_r$ gọi là những ẩn số chính, các ẩn số còn lại gọi là ẩn số phụ, hệ (4.10) tương đương với hệ gồm r phương trình đầu. Trong các phương trình đó, chuyển các ẩn số phụ sang vế phải. Vậy hệ (4.10) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Vì $\Delta \neq 0$ nên đó là hệ Cramer đối với $x_1, ..., x_r$. Nếu cho $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ lấy những giá trị xác định thì vế phải của hệ được xác định. Hệ (4.13) có một nghiệm duy nhất nhưng nghiệm đó phụ thuộc vào (n – r) giá trị gán cho $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$. Khi các giá trị này thay đổi thì nghiệm của hệ (4.13) cũng thay đổi. Vậy hệ (4.13) có vô số nghiệm, phụ thuộc vào (n – r) tham số. Ta nói hệ (4.10) vô định, phụ thuộc (n – r) tham số.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$

Giải. $\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (h_2 - h_1) \\ (h_3 - 2h_1) \end{array}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 11 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (h_3 + h_2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -11 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Ta thấy : r(A) = 2 vì $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, $r(\overline{A}) = 3$ vì $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$.

Vì $r(A) \neq r(\overline{A})$ nên hệ vô nghiệm.

Ví dụ 5 : Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

Giải. $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (h_2 - 2h_1) \\ (h_3 - 5h_1) \end{array}$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ ((-1) \times h_2) \\ (h_3 - 2h_2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ta có : r(A) = 2, vì $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$, $r(\overline{A}) = 2$ vì $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Vậy $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4$. Hệ đã cho vô định. Chọn định thức con chính của A là $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 11 \end{vmatrix}$.

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 11x_2 = 2 - 6x_3 - 7x_4. \end{cases}$

Cho các ẩn số phụ $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, từ phương trình sau, ta được :

$$x_2 = \frac{1}{11}(2 - 6\alpha - 7\beta).$$

Thế vào phương trình đầu, ta được : $x_1 = \dfrac{1}{11}(1 - 14\alpha + 2\beta)$.

Tóm lại nghiệm của hệ là $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11}(1 - 14\alpha + 2\beta) \\ x_2 = \dfrac{1}{11}(2 - 6\alpha - 7\beta) \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta. \end{cases}$

4.6. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

luôn có nghiệm (0, 0, ..., 0) ($x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$), gọi là nghiệm tầm thường. Vấn đề đặt ra là khi nào thì hệ phương trình thuần nhất có nghiệm không tầm thường.

Nếu hạng của ma trận hệ số nhỏ hơn n, hệ phương trình thuần nhất có vô số nghiệm như đã thấy ở mục 4.5, do đó nó có nghiệm không tầm thường.

Đặc biệt, hệ thuần nhất gồm n phương trình n ẩn có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số bằng không.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Các phép tính về ma trận. Hai ma trận A, B phải có cỡ thế nào để có thể thực hiện được cả hai phép nhân ma trận A.B và B.A?

2. Công thức khai triển một định thức theo các phần tử của hàng thứ nhất.

3. Các tính chất của định thức.

4. Hạng của ma trận, định nghĩa, cách tính bằng các phép biến đổi sơ cấp.

5. Khi nào thì ma trận vuông A khả nghịch? Công thức để tính ma trận nghịch đảo A^{-1}.

6. Định lí Kronecker-Kapelli. Áp dụng định lí đó vào hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

7. Định nghĩa hệ Cramer. Vì sao hệ Cramer chỉ có một nghiệm duy nhất.

8. Khi nào thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm duy nhất? Khi nào nó có vô số nghiệm?

9. Các mệnh đề sau đúng hay sai? Vì sao?

a) Nếu $A = [1, 5]$, $B = [-2, 3]$ thì từ $\alpha A + \beta B = [0, 0]$, trong đó $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, suy ra $\alpha = \beta = 0$.

b) Nếu các phần tử của một ma trận vuông đều khác 0 thì ma trận đó khả nghịch.

c) Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cỡ khả nghịch thì A + B cũng khả nghịch.

d) Nếu A, B là hai ma trận vuông cùng cỡ sao cho A. B = 0 thì A. B không thể đồng thời khả nghịch.

e) Nếu A là ma trận vuông sao cho $A^4 = E$ (E là ma trận đơn vị) thì A khả nghịch.

f) Định thức không thay đổi nếu ta thay một hàng bằng tổng của hai hàng khác.

g) Hệ hai phương trình tuyến tính ba ẩn có thể có nghiệm duy nhất.

h) Nếu một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khác không thì hệ đó không thể là hệ thuần nhất.

i) Nếu hệ phương trình thuần nhất có một nghiệm thì nó có vô số nghiệm.

BÀI TẬP

1. Tính định thức $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Tính các định thức sau :

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a & c+id \\ e-id & b \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

3. Tính a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$.

4. Tính a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

5. Tính :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

6. Giải phương trình : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$.

7. Chứng minh rằng : $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$.

8. Hãy thực hiện các phép tính về ma trận:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$,

b) Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Hãy tính : 1) A + (B + C) ; 2) (A + B) + C ; 3) 3A,

và tìm A', B', C'.

c) 1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. Cho các ma trận : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Hãy tính :

a) A.B.C ; b) AC + BC.

10. Thực hiện các phép tính: a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$, d) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$.

11. Tìm f(A) nếu : a) $f(x) = x^2 - x - 1$, với $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, với $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

12. Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0.$$

13. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$, d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Tìm hạng của các ma trận sau theo tham số λ (thực):

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Cho $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1) Tính J^2, J^3, suy ra J^n.

2) Hãy biểu diễn $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$, a, b, c ∈ ℝ, theo các ma trận E, J, J^2.

16. Chứng minh rằng nếu AB = BA thì ta có :

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3\,AB^2 - B^3.$$

17. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A :

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

18. Tìm ma trận X từ các phương trình sau:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} .X. \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, d) $X. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -7 \\ 15 & 2 & -13 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

19. Giải hệ Cramer:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$.

20. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$, g) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$,

h) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$, i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$

21. Tìm a để hệ phương trình sau vô nghiệm, có một nghiệm duy nhất và có vô số nghiệm:

$$\begin{cases} x + y + 3z = a \\ ax + y + 5z = 4 \\ x + ay + 4z = a \end{cases}.$$

ĐÁP SỐ

1. 68. **2.** a) 1, b) $ab - (c^2 + d^2)$; c) -2.

3. a) 1, b) $2a^2(a + x)$.

4. a) $4t - x - y - z$, b) 160, c) 900, d) $-3(x^2 - 1)(x^2 - 4)$.

5. a) $n!$, b) $n!$. **6.** $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$.

8. a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; b) 1) và 2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$;

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

c) 1) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$, 3) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, 4) [13].

9. a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 9 & 13 & 15 \\ 5 & 2 & 5 \\ 4 & 11 & 10 \end{bmatrix}$.

10. a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

11. a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13. a) $r(A) = 2$, b) $r(A) = 3$, c) $r(A) = 2$, d) $r(A) = 3$.

14. a) $\lambda = 0$, $r(A) = 2$, $\lambda \neq 0$, $r(A) = 3$,

b) $\lambda = 1$, $r(A) = 3$; $\lambda \neq 1$, $r(A) = 4$.

15. 1) $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $J^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$, $J^n = \begin{cases} E & \text{nếu } n = 3k \\ J & \text{nếu } n = 3k+1 \\ J^2 & \text{nếu } n = 3k+2. \end{cases}$

2) $M = aE + bJ + cJ^2$.

17. a) $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$,

f) $\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, g) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

18. a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} -9x_2 - 4x_3 + 8 & x_2 & x_3 & 11x_2 + 5x_3 - 10 \end{bmatrix}^t$.

19. a) $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = 1$, b) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

20. a) $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$,

c) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$, d) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$,

e) x_1, x_2, $x_3 = 2x_2 - x_1$, $x_4 = 1$, g) Hệ vô nghiệm,

h) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, x_4, x_5, i) Hệ vô nghiệm.

21. Nếu $a = 1$, hệ vô nghiệm; nếu $a = 2$, hệ có vô số nghiệm $x = 2 - 2t$, $y = -t$, $z = t$, t tuỳ ý;

Nếu $a \neq 1$ và $a \neq 2$ hệ có một nghiệm duy nhất

$$x = \frac{8 - 5a}{3(a-1)},\ y = \frac{-2a - a}{3(a-1)},\ z = \frac{a+2}{3}.$$

CHƯƠNG V. KHÔNG GIAN VECTƠ

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

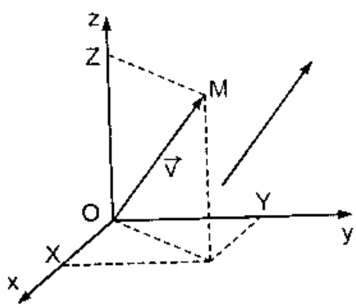
Chương V trình bày những kiến thức cơ bản về không gian vectơ, về không gian con và hệ sinh, về cơ sở của không gian vectơ, về bài toán đổi cơ sở và về ánh xạ tuyến tính.

Sinh viên cần hiểu rõ cấu trúc của không gian vectơ V, nắm được tiêu chuẩn để tập hợp $W \subset V$ là không gian con của V, tìm được cơ sở, số chiều của V và quan hệ giữa toạ độ của một vectơ xác định theo hai cơ sở khác nhau của V, nhận biết được ánh xạ tuyến tính, tìm được ma trận của ánh xạ tuyến tính, tìm được trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính.

§ 1. KHÁI NIỆM VỀ KHÔNG GIAN VECTƠ

1.1. Mở đầu

Trong hình học sơ cấp, một vectơ $\vec{v}$ trong không gian được đặc trưng bởi bộ ba số thực (x, y, z) là ba thành phần của nó (hình 5.1).



Hình 5.1

Trong tập hợp các vectơ tự do, nếu ta đồng nhất những vectơ có cùng hướng, cùng độ dài thì có một song ánh giữa tập hợp các vectơ tự do $\vec{v}$ trong không gian và tập hợp các bộ ba số thực (x, y, z), tức là tập hợp $\mathbb{R}^3$.

Trong tập hợp đó, ta đã định nghĩa phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thực.

Nếu $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ và λ là một số thực thì:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);$$

$$\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3).$$

Phép cộng hai vectơ có các tính chất như phép cộng hai số thực: nó có tính kết hợp, tính giao hoán, tồn tại phần tử trung hoà (vectơ θ), mọi vectơ $\vec{v}$ đều có vectơ đối $-\vec{v}$.

Phép nhân một vectơ với một số thực có tính phân phối đối với phép cộng hai vectơ và phép cộng hai số thực, ngoài ra nếu λ và μ là hai số thực thì $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ và $1.\vec{v} = \vec{v}$.

Ta nói rằng với hai phép toán này, tập hợp các vectơ tự do trong không gian có cấu trúc của một không gian vectơ thực. Chương này nghiên cứu về các không gian vectơ thực (gọi tắt là không gian vectơ).

1.2. Định nghĩa không gian vectơ

Người ta gọi *không gian vectơ* là một tập hợp không rỗng V các phần tử, gọi là vectơ, trên đó ta định nghĩa được phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thực. Tổng của hai vectơ v và w được kí hiệu là v + w. Tích của vectơ v và số thực λ được kí hiệu là λv. Hai phép toán đó thoả mãn các tiên đề sau:

(1) Nếu u và v $\in$ V thì u + v $\in$ V;

(2) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$;

(3) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$;

(4) Tồn tại vectơ θ sao cho $\theta + u = u + \theta = u, \forall u \in V$;

(5) Với mỗi vectơ $u \in V$, tồn tại vectơ $-u \in V$ sao cho $u + (-u) = (-u) + u = \theta$;

(6) Nếu $u \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ thì $\lambda u \in V$;

(7) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

(8) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$;

(9) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in V$;

(10) $1\,u = u, \forall u \in V$.

Các tiên đề (1) và (6) nói lên tính đóng kín của V đối với phép cộng hai vectơ và phép nhân một vectơ với một số thực. Vectơ θ trong tiên đề (4) gọi là vectơ không. Vectơ $-u$ trong tiên đề (5) gọi là vectơ đối của u.

Nếu trong định nghĩa trên ta thay $\mathbb{R}$ bởi $\mathbb{C}$ (tập hợp các số phức), ta được không gian vectơ phức.

1.3. Các ví dụ

Trong các ví dụ sau đây về không gian vectơ, việc kiểm tra các tiên đề (1) - (10) được xem như bài tập.

Ví dụ 1 : $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Phép cộng hai phần tử và phép nhân một phần tử với một số thực λ được định nghĩa như sau :

Nếu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ thì :

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) ;$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n).$$

Với hai phép toán đó, $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ. Vectơ θ của $\mathbb{R}^n$ là vectơ $(0, 0, ..., 0)$. Vectơ đối của x là vectơ $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Người ta cũng gọi vectơ trong $\mathbb{R}^n$ là vectơ n thành phần.

Ví dụ 2: Gọi P_n là tập hợp tất cả các đa thức có bậc $\leq n$;

$$P_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n | a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Phép cộng hai phần tử của P_n và phép nhân một phần tử của P_n với một số thực được định nghĩa như sau:

Nếu $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \in P_n$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n \in P_n$ thì $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$;

$$\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \ldots + (\lambda a_n)x^n.$$

Với hai phép toán đó, P_n là một không gian vectơ. Vectơ θ của P_n là :

$$0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n.$$

Vectơ đối của p(x) là : $-p(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n$.

Ví dụ 3: Gọi $\mathfrak{M}_{m \times n}$ là tập hợp tất cả các ma trận cỡ $m \times n$. Với phép cộng hai ma trận cỡ $m \times n$ và phép nhân một ma trận cỡ $m \times n$ với một số thực đã định nghĩa ở §3 chương IV, $\mathfrak{M}_{m \times n}$ là một không gian vectơ.

1.4. Vài tính chất của các phép toán trong không gian vectơ

1/ $0.u = \theta \qquad \forall u \in V$.

2/ $\lambda\theta = \theta \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3/ $\lambda.u = \theta \Rightarrow \lambda = 0$ hoặc $u = \theta$.

Việc chứng minh các tính chất này xem như bài tập.

§2. KHÔNG GIAN CON. HỆ SINH

2.1. Không gian con

Định nghĩa. V là một không gian vectơ với hai phép toán : Cộng hai vectơ và nhân vectơ với một số thực, W là một tập hợp con của V. Nếu với hai phép toán trên, W cũng là một không gian vectơ thì W gọi là không gian con của V.

Theo định nghĩa đó, muốn kiểm tra $W \subset V$ là không gian con của V, ta phải chứng minh rằng hai phép toán đã định nghĩa trong V cũng thoả mãn 10 tiên đề của không gian vectơ đối với W. Định lí sau đây giúp cho việc kiểm tra dễ dàng hơn.

Định lí 5.1. V *là một không gian vectơ.* W *là một tập hợp con khác rỗng của* V. *Nếu:*

a) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$.

b) $u \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u \in W$.

thì W *là không gian con của* V.

Chứng minh: Vì a) và b) được thoả mãn, nên các tiên đề (1) và (6) đã được thoả mãn đối với W. Các tiên đề (2); (3); (7); (8); (9); (10) đương nhiên cũng được thoả mãn đối với W. Ta chỉ còn phải chứng minh rằng các tiên đề (4) và (5) cũng được thoả mãn đối với W.

Giả sử $u \in W$. Do điều kiện b) $\lambda u \in W$. Với $\lambda = 0$, ta có $0.u = \theta \in W$. Với $\lambda = -1$, ta có $(-1)u = -u \in W$. Vậy trong W :

$$u + \theta = \theta + u = u.$$

$$(-u) + u = u + (-u) = [1 + (-1)]u = 0u = \theta.$$

Đó chính là nội dung của các tiên đề (4) và (5). Do đó, W là một không gian con. ■

Chú thích: Nếu V là một không gian vectơ thì bản thân V có thể xem là một không gian con của V. Còn tập hợp chỉ gồm vectơ θ thoả mãn:

$$\theta + \theta = \theta, \lambda\theta = \theta$$

nên tập hợp $\{\theta\}$ cũng là một không gian con của V, gọi là *không gian con không.*

Ví dụ 1: $\mathbb{R}^3$ là một không gian vectơ (xem mục mở đầu). Xét W là tập hợp các điểm trong $\mathbb{R}^3$ thoả mãn phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Nếu $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ là hai vectơ thuộc W thì ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Do đó $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$.

Vậy $x + y \in W$. Cũng vậy với $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0$.

Vậy $\lambda x \in W$. Theo định lí 5.1, W là một không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ví dụ 2: Tập hợp $\mathfrak{M}_{2\times 2}$ tất cả các ma trận vuông cỡ 2×2 là một không gian vectơ (xem ví dụ 3). Gọi $\mathfrak{M}$ là tập hợp các ma trận vuông cấp 2 dạng:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R};$$

Các phần tử trên đường chéo phụ bằng nhau.

Nếu $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}$, $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}$ thì

$$M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M},\ \lambda M_1 = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda c_1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}.$$

Vậy $\mathfrak{M}$ là một không gian con của $\mathfrak{M}_{2\times 2}$.

Ví dụ 3: Nghiệm của hệ m phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = \theta$$

(A là ma trận các hệ số), là một bộ n số thực $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Gọi W là tập hợp các nghiệm của hệ ấy. Rõ ràng $W \subset \mathbb{R}^n$.

Nếu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in W$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in W$ thì $Ax = 0$, $Ay = 0$. Do đó :

$A(x + y) = Ax + Ay = 0$, suy ra $x + y \in W$.

Với $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(\lambda x) = \lambda Ax = 0$, suy ra $\lambda x \in W$.

Vậy W là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.

2.2. Tổ hợp tuyến tính. Hệ sinh

2.2.1. Tổ hợp tuyến tính của một họ vectơ

Định nghĩa. V là một không gian vectơ. $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$. Biểu thức:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

với $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots n$, là một vectơ thuộc V và gọi là một *tổ hợp tuyến tính của họ S.*

Ví dụ 4: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$, vectơ (x, y) là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ i = (1; 0), j = (0; 1), vì :

$$x.i + y.j = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y).$$

Vectơ (7, –3) là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $x_1 = (1, 1)$ và $x_2 = (1, -1)$ vì : $2x_1 + 5x_2 = 2(1, 1) + 5(1, -1) = (7, -3)$.

2.2.2. Hệ sinh

Định nghĩa. $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là một họ vectơ của không gian vectơ V. Tập hợp tất cả những tổ hợp tuyến tính của họ S gọi là *bao tuyến tính* của họ S, được kí hiệu là span(S).

Định lí 5.2. *Nếu* S *là một họ vectơ của không gian vectơ* V *thì* W = span(S) *là một không gian con của* V.

Chứng minh: Trước hết $W \neq \varnothing$, vì $x_1 = 1.x_1 \in W$. Bây giờ cần kiểm tra các điều kiện a), b) của định lí 5.1.

Giả sử: $x = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \in W$, $y = d_1y_1 + \ldots + d_ny_n \in W$. Khi đó

$$x + y = (c_1 + d_1)x_1 + \ldots + (c_n + d_n)x_n \in W,$$

với $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda x = (\lambda c_1)x_1 + ... + (\lambda c_n)x_n \in W$.

Do W đóng kín đối với hai phép toán trong V nên W là không gian con của V.

Định nghĩa. Nếu span(S) = V, tức là nếu mọi vectơ $x \in V$ đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$

ta nói rằng họ S sinh ra V hay S là một *hệ sinh* của V.

Ví dụ 5: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^2$ xét hai vectơ i = (1, 0); j = (0, 1). Mọi vectơ trong $\mathbb{R}^2$ đều có dạng:

$$x = (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1i + x_2j,$$

nên họ S = {i, j} là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 6: Trong không gian vectơ P_2 các đa thức có bậc ≤ 2, xét họ ba vectơ: $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$. Mọi vectơ p(x) trong P_2 đều có dạng:

$$p(x) = ax^2 + bx + c = ap_2(x) + bp_1(x) + cp_0(x).$$

Vậy họ $S = \{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$ là một hệ sinh của P_2.

2.3. Họ vectơ độc lập tuyến tính. Cơ sở và số chiều của không gian vectơ

2.3.1. Họ vectơ độc lập tuyến tính

Định nghĩa. Ta nói họ vectơ $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ của không gian vectơ V là *độc lập tuyến tính* nếu biểu thức

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \theta, \qquad (5.1)$$

trong đó $c_1, ..., c_n$ là các số thực, chỉ xảy ra khi $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Nếu tồn tại các số $c_1, c_2, ..., c_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho hệ thức (5.1) được thoả mãn, ta nói họ S là *phụ thuộc tuyến tính*.

Ví dụ 7: Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, họ bốn vectơ $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 0, 0)$, $x_4 = (3, 2, 0)$ có độc lập tuyến tính không?

Giải. Hệ thức (5.1) ở đây là :

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) + c_4(3, 2, 0) = \theta = (0, 0, 0).$$

$$\text{Do đó : } \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + 3c_4 = 0 \\ c_1 + c_2 \qquad\quad + 2c_4 = 0 \\ c_1 \qquad\qquad\qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Đó là một hệ ba phương trình tuyến tính thuần nhất bốn ẩn. Hạng của ma trận hệ số nhỏ hơn số ẩn, nên hệ có nghiệm không tầm thường (xem mục 4.6). Vậy họ S phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 8: Trong không gian vectơ P_2 các đa thức bậc ≤ 2, họ ba vectơ $p(x) = x^2 - 2x + 3$, $q(x) = 2x - 2$, $r(x) = 2$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

Giải. Ta có : $c_1(x^2 - 2x + 3) + c_2(2x - 2) + c_3.2 = 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow c_1x^2 + (-2c_1 + 2c_2)x + (3c_1 - 2c_2 + 2c_3) = 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \qquad\qquad\qquad = 0 \\ -2c_1 + 2c_2 \qquad\quad = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Vậy họ $S = \{x^2 - 2x + 3,\ 2x - 2,\ 2\}$ độc lập tuyến tính.

Nhận xét: 1) Mọi họ chứa vectơ θ đều phụ thuộc tuyến tính, vì $1.\theta = \theta$.

2) Nếu họ S phụ thuộc tuyến tính thì mọi họ chứa nó cũng phụ thuộc tuyến tính.

3) Nếu họ S độc lập tuyến tính thì mọi họ con khác rỗng của S cũng độc lập tuyến tính.

4) Nếu họ $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại ít nhất một số $c_k \neq 0$ sao cho ta có (5.1). Từ hệ thức đó rút ra :

$$x_k = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{k-1} x_{k-1} + \alpha_{k+1} x_{k+1} + ... + \alpha_n x_n,$$

với $\alpha_k = -\dfrac{c_i}{c_k}$. Vậy một vectơ của họ S là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại của họ.

2.3.2. Cơ sở. Số chiều của không gian vectơ

Định lí 5.3. *Cho* V *là một không gian vectơ sinh bởi* n *vectơ. Nếu* S *là một họ* m *vectơ độc lập tuyến tính trong* V *thì* $m \leq n$.

Chứng minh: Giả sử $V = \text{span}\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ và $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ là một họ vectơ độc lập tuyến tính trong V. Khi đó $u_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$. Vì $u_1 \neq \theta$ (do nhận xét 1)), các a_i không thể đồng thời bằng 0. Giả sử $a_1 \neq 0$, nếu thế $V = \text{span}\{u_1, v_2, ..., v_n\}$. Do đó $u_2 = b_1u_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + ... + c_nv_n$. Một trong các số c_i phải khác 0, vì $\{u_1, u_2\}$ độc lập tuyến tính, vậy $V = \text{span}\{u_1, u_2, v_3, ..., v_n\}$. Nếu $m > n$, quá trình trên được tiếp tục cho đến khi $V = \text{span}\{u_1, u_2, ..., u_n\}$. Khi đó, vì u_{n+1} là một vectơ trong V, u_{n+1} là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, điều này trái với giả thiết họ $S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ độc lập tuyến tính. Vậy $m \leq n$. ■

Định nghĩa. Người ta gọi *cơ sở* của không gian vectơ V là họ các vectơ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ thoả mãn hai điều kiện:

1) Họ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ độc lập tuyến tính;

2) Họ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là hệ sinh của V.

Định lí 5.4. *Nếu* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *và* $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ *là hai cơ sở của* V *thì* $n = m$.

Chứng minh: Vì $V = \text{span}\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ nên theo định lí 5.3, ta có $m \leq n$. Lại vì $V = \text{span}\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ nên $n \leq m$. Do đó $n = m$. ■

Vì số vectơ của mọi cơ sở của không gian vectơ V đều bằng nhau, ta đưa ra định nghĩa sau:

Định nghĩa. Nếu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V, ta nói V là không gian vectơ *n chiều*, n gọi là *số chiều* của V và kí hiệu là dim(V) = n. Ta nói không gian vectơ chỉ gồm vectơ θ là không gian vectơ 0 chiều, $\dim(\{\theta\}) = 0$.

Không gian vectơ V gọi là *hữu hạn chiều* nếu $V = \{\theta\}$ hay V có cơ sở gồm một số hữu hạn vectơ. V gọi là không gian vectơ *vô hạn chiều* nếu nó không là *hữu hạn chiều*.

Nhận xét: Trong không gian vectơ n chiều V, mọi họ S gồm n vectơ độc lập tuyến tính đều là một cơ sở, vì nếu S không là hệ sinh của V thì tồn tại vectơ $x \in V \setminus \mathrm{span}(S)$, vậy $\dim(V) > n$.

Ví dụ 9: Trong $\mathbb{R}^2$, họ hai vectơ $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ gồm hai vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^2$, vậy là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$, gọi là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 10: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ là họ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, trong đó $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (1 ở vị trí thứ i).

Ví dụ 11: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ P_n là họ $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

Ví dụ 12: Cơ sở chính tắc của không gian vectơ $\mathfrak{M}_{2\times 2}$ là họ :

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

Định lí 5.5. *Nếu* $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *là một cơ sở của không gian vectơ* n *chiều* V *thì mọi vectơ* $x \in V$ *đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng* :

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ne_n, \qquad (5.2)$$

trong đó $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

Chứng minh: Vì S là một cơ sở của V nên là một hệ sinh của V. Do đó, mọi vectơ $x \in V$ đều biểu diễn được dưới dạng (5.2).

Dạng biểu diễn ấy là duy nhất, vì nếu x còn có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$x = d_1e_1 + d_2e_2 + ... + d_ne_n \qquad (5.2)'$$

thì bằng cách trừ hai đẳng thức (5.2) và (5.2)′ từng vế một, ta có :

$$\theta = (c_1 - d_1)e_1 + (c_2 - d_2)e_2 + ... + (c_n - d_n)e_n. \qquad (*)$$

Vì họ S độc lập tuyến tính nên từ (*) suy ra $c_1 - d_1 = 0, c_2 - d_2 = 0, ..., c_n - d_n = 0$ hay $c_1 = d_1, c_2 = d_2, ..., c_n = d_n$. ■

Định nghĩa. Các số $c_1, c_2, ..., c_n$ được xác định một cách duy nhất bởi công thức (5.2) gọi là các toạ độ của vectơ x đối với cơ sở S.

Vectơ $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ gọi là *vectơ toạ độ* của x đối với cơ sở S, được kí hiệu là $(x)_S$. Vectơ $(x)_S = (c_1, c_2, ..., c_n)$ viết dưới dạng cột là một ma trận cỡ $n \times 1$, kí hiệu là $[x]_S$:

$$[x]_s = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

gọi là *ma trận tọa độ* của x đối với cơ sở S.

Định lí 5.6. V là một không gian vectơ n chiều, $S = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ là một họ vectơ độc lập tuyến tính trong V, r < n. Khi đó có thể tìm được n − r vectơ $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ sao cho họ $\{x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n\}$ là một cơ sở của V.

Ta thừa nhận định lí này.

§3. HẠNG CỦA MỘT HỌ VECTƠ

3.1. Định nghĩa. $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ là một họ vectơ trong không gian vectơ V. Số lớn nhất các vectơ độc lập tuyến tính lấy ra từ họ S gọi là hạng của họ S, kí hiệu là r(S).

Định lí 5.7. Hạng của họ S bằng số chiều của không gian con sinh bởi họ S.

$$r(S) = \dim \operatorname{span}(S).$$

Chứng minh: Đặt r(S) = p. Trong họ S có nhiều nhất p vectơ độc lập tuyến tính, có thể xem đó là $x_1, x_2, ..., x_p$. Khi đó với $i = p + 1, p + 2, ..., n$, họ các vectơ $\{x_1, x_2, ..., x_p, x_i\}$ phụ thuộc tuyến tính, nên tồn tại p + 1 số c_i không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_px_p + c_{p+1}x_i = 0.$$

Nếu $c_{p+1} = 0$ thì do $x_1, x_2, ..., x_p$ độc lập tuyến tính, ta có $c_1 = c_2 = ... = c_p = 0$, điều này vô lí, vậy $c_{p+1} \neq 0$. Từ đẳng thức trên suy ra:

$$x_i = -\frac{1}{c_{p+1}}(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_px_p),\ i = p+1, p+2, ..., n.$$

Đặt W = span(S). Ta có $\operatorname{span}(\{x_1, x_2, ..., x_p\}) = S$. Họ $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ là hệ sinh của W, nó gồm p vectơ độc lập tuyến tính, vậy:

$$\dim\operatorname{span}(S) = p = r(S). \blacksquare$$

3.2. Tính hạng của một họ vectơ bằng các phép biến đổi sơ cấp

Phương pháp tính này được trình bày qua ví dụ sau:

Ví dụ : Tính hạng của họ vectơ $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \subset \mathbb{R}^3$ với

$$x_1 = (1, 2, 3), x_2 = (2, 3, 4), x_3 = (3, 5, 7), x_4 = (1, 1, 1), x_5 = (0, 1, 2).$$

Giải. Lập ma trận A với năm hàng là năm vectơ tọa độ của các vectơ đã cho :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về dạng bậc thang :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (h_2 - 2h_1) \\ (h_3 - 3h_1) \\ (h_4 - h_1) \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (h_5 + h_4) \\ (h_4 - h_3) \\ (h_3 - h_2) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \cdot$$

Dễ thấy rằng các phép biến đổi sơ cấp về hàng của ma trận không làm thay đổi bao tuyến tính của các vectơ hàng của ma trận đó và các vectơ hàng khác không của ma trận dạng bậc thang B là độc lập tuyến tính. Do đó, r(S) = 2. Một cơ sở của không gian con sinh bởi năm vectơ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là

$$\{e_1 = (1, 2, 3), e_2 = (0, -1, -2)\}.$$

§4. BÀI TOÁN ĐỔI CƠ SỞ

4.1. Đặt bài toán

Giả sử $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ và $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ là hai cơ sở của không gian vectơ n chiều V, v là một vectơ $\in$ V. Đối với cơ sở B ta có :

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + ... + v_ne_n, \tag{5.3}$$

$v_1, v_2, ..., v_n$ là các tọa độ của v đối với cơ sở B . Do đó, ma trận tọa độ của v đối với cơ sở B là : $[v]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$

Đối với cơ sở B′ ta có : $v = v'_1e'_1 + v'_2e'_2 + \ldots + v'_ne'_n$. (5.4)

ma trận tọa độ của v đối với cơ sở B′ là : $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix}$.

Hãy tìm liên hệ giữa $[v]_B$ và $[v]_{B'}$.

4.2. Ma trận chuyển

Trước hết, ta biểu diễn các vectơ $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ qua các vectơ $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$\begin{cases} e'_1 = p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n, \\ e'_2 = p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{cases} \quad (5.5)$$

Thế (5.5) vào (5.4), ta được :

$$\begin{aligned} v = {} & v'_1(p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n) + \\ & + v'_2(p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + v'_n(p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n) = \\ & = (p_{11}v'_1 + p_{12}v'_2 + \ldots + p_{1n}v'_n)e_1 + \\ & = (p_{21}v'_1 + p_{22}v'_2 + \ldots + p_{2n}v'_n)e_2 + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (p_{n1}v'_1 + p_{n2}v'_2 + \ldots + p_{nn}v'_n)e_n. \end{aligned}$$

So sánh với (5.3), ta được:

$$\begin{cases} v_1 = p_{11}v'_1 + p_{12}v'_2 + \ldots + v_{1n}v'_n \\ v_2 = p_{21}v'_1 + p_{22}v'_2 + \ldots + p_{2n}v'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = p_{n1}v'_1 + p_{n2}v'_2 + \ldots + p_{nn}v'_n. \end{cases} \quad (5.6)$$

Công thức (5.6) có thể viết dưới dạng ma trận

$$[v]_B = P.[v]_{B'}, \tag{5.7}$$

trong đó : $$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

gọi là *ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'*.

Lưu ý rằng ma trận chuyển cơ sở P gồm n cột, cột thứ i chính là $[e'_i]_B$. Vậy :

$$P = \left[[e'_1]_B [e'_2]_B \ldots [e'_n]_B\right].$$

Vì các vectơ $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ độc lập tuyến tính, nên $\det P \neq 0$. Do đó ma trận P khả nghịch. Từ công thức (5.7) suy ra :

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B. \tag{5.9}$$

Ví dụ 1: Cho hai cơ sở trong $\mathbb{R}^2$ là $B = \{e_1, e_2\}$ và $B' = \{e'_1, e'_2\}$, trong đó :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \; e'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

2) Tìm $[v]_{B'}$ nếu $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Giải. 1) Trước hết, ta có $e'_1 = 2e_1 + e_2, e'_2 = e_1 + e_2$. Do đó, ma trận chuyển từ B sang B' là :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Ta có ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B là : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vì $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 5e_1 + 3e_2$, nên $[v]_B = \begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$. Do đó, theo (5.7) ta có :

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B = \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: 1) Chứng minh rằng trong không gian vectơ P_2 các đa thức có bậc ≤ 2, họ $B = \{1, (1-x)^2, (1+x)^2\}$ là một cơ sở.

2) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B đến cơ sở chính tắc $B' = \{1, x, x^2\}$. Tìm tọa độ của đa thức $p(x) = a + bx + cx^2$ đối với cơ sở B.

Giải. 1) Vì P_2 là một không gian vectơ 3 chiều nên để chứng minh rằng B là một cơ sở của P_2, chỉ cần chứng minh rằng ba vectơ 1, $(1-x)^2$, $(1+x)^2$ là độc lập tuyến tính. Bạn đọc hãy chứng minh điều đó.

2) Phân tích các vectơ của B' theo các vectơ của B, ta được:

$$1 = 1.1 + 0.(1-x)^2 + 0(1+x)^2;$$

$$x = 0.1 - \frac{1}{4}(1-x)^2 + \frac{1}{4}(1+x)^2 ;$$

$$x^2 = -1.1 + \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 .$$

Do đó, ma trận chuyển cơ sở từ B sang B' là :

$$P = \begin{bmatrix}[1]_B & [x]_B & [x^2]_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Vì $[p]_{B'} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, ta có theo công thức (5.7) :

$$[p]_B = P[p]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ -\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \\ \frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \end{bmatrix}.$$

Như vậy ta có :

$$p(x) = a - c + \left(-\frac{b}{4}+\frac{c}{2}\right)(1-x)^2 + \left(\frac{b}{4}+\frac{c}{2}\right)(1+x)^2.$$

§5. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

5.1. Định nghĩa và ví dụ

5.1.1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

V, W là hai không gian vectơ. Ánh xạ $f: V \to W$ gọi là *ánh xạ tuyến tính* nếu nó thoả mãn hai tính chất sau:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in V;$

2) $f(\lambda u) = \lambda f(u), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V.$

Nếu $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính thì :

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall u_1, u_2 \in V.$$

5.1.2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Xét ánh xạ $f: V \to W$, xác định bởi $f(u) = \theta \in W, \forall u \in V$. Đó là một ánh xạ tuyến tính vì:

1) $\forall u, v \in V$, $f(u) = \theta$, $f(v) = \theta$, $f(u + v) = \theta$, do đó $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in V$, $f(u) = \theta$, $f(\lambda u) = \theta$, do đó $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Ánh xạ đó gọi là *ánh xạ không*.

Ví dụ 2: Xét ánh xạ f: $V \to V$, xác định bởi $f(u) = \alpha u$, $\forall u \in V$, α là một số thực. Dễ kiểm tra rằng đó là một ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ đó gọi là *ánh xạ đồng dạng*. Nếu $\alpha = 1$, ánh xạ đó là ánh xạ đồng nhất, kí hiệu là I.

Ví dụ 3: Ánh xạ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi $f: (x, y) \to (x + y, x - y, x + 2y)$ là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ và $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, thì $f(u + v) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2)$$

$$= (x_1 + y_1, x_1 - y_1, x_1 + 2y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2, x_2 + 2y_2)$$

$$= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = f(u) + f(v);$$

$$f(\lambda u) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1, \lambda x_1 + 2\lambda y_1) =$$

$$= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - y_1, x_1 + 2y_1) = \lambda f(x_1, y_1) = \lambda f(u).$$

Ví dụ 4 : Gọi A là một ma trận cỡ $m \times n$, x là một ma trận cỡ $n \times 1$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Nhân A với x, ta được một ma trận cỡ $m \times 1$:

$$A.x = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Vậy ánh xạ f xác định bởi f(x) = A.x là một ánh xạ từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$. Từ định nghĩa phép cộng hai ma trận và phép nhân một ma trận với một số, ta thấy rằng ánh xạ f xác định như vậy là một ánh xạ tuyến tính.

5.2. Các phép toán về ánh xạ tuyến tính

• Giả sử V, W là hai không gian vectơ, f: V → W, g: V → W, là hai ánh xạ tuyến tính. Tổng của hai ánh xạ f và g, kí hiệu là f + g, là ánh xạ được xác định như sau: $\forall u \in V$, $(f + g)(u) = f(u) + g(u) \in W$.

Tích của ánh xạ f và số thực λ, kí hiệu là λf, là ánh xạ xác định bởi:

$$\forall u \in V, (\lambda f)(u) = \lambda f(u) \in W.$$

Dễ kiểm tra rằng f + g và λf cũng là những ánh xạ tuyến tính.

• Giả sử V, W, U là ba không gian vectơ f : V → W và g: W → U, là hai ánh xạ tuyến tính. Khi đó, ánh xạ hợp (xem mục 3.4. Chương I) xác định bởi:

$$\forall u \in V, (g \circ f)(u) = g(f(u)) \in U.$$

là một ánh xạ từ V tới U. Dễ thấy rằng hợp của hai ánh xạ tuyến tính là một ánh xạ tuyến tính.

5.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

• Giả sử V, W là hai không gian vectơ, dim(V) = n, dim(W) = m, $B = \{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V, $B' = \{e'_1, ..., e'_m\}$ là một cơ sở của W. f: V → W là một ánh xạ tuyến tính, ta có $\forall x \in V$,

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Do đó : $$f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n). \qquad (5.10)$$

Vậy ánh xạ f được hoàn toàn xác định nếu biết $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$. Vì $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n) \in W$, có thể phân tích chúng theo các vectơ của B′. Giả sử :

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m,$$
$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{m2}e'_m,$$
$$.................................$$
$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m.$$

Thế vào (5.10), ta được :

$$\begin{aligned} f(x) = & x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m) \\ & + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{m2}e'_m) \\ & + ... \\ & + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)e'_1 + \\ & + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)e'_2 + \\ & + ... \\ & + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n)e'_m. \end{aligned}$$

Do đó, ma trận tọa độ của f(x) đối với cơ sở B′ là :

$$[f(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$

gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f. Công thức (5.11) có thể viết là :

$$[f(x)]_{B'} = A[x]_B. \qquad (5.12)$$

Lưu ý rằng ma trận A gồm n cột, cột thứ i chính là $[f(e_i)]_{B'}$. Vậy :

$$A = [[f(e_1)]_{B'}\ [f(e_2)]_{B'}\ ...\ [f(e_n)]_{B'}].$$

Ví dụ 5: Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi:

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$$

theo các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$.

Giải. Cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$, của $\mathbb{R}^3$ là $\{e'_1 = (1,0,0); e'_2 = (0,1,0); e'_3 = (0,0,1)\}$. Do đó :

$$f(e_1) = f(1, 0) = (1, 1, 1),$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (1, -1, 2).$$

Vậy ma trận của ánh xạ tuyến tính f là :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 6 : Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $f : P_2 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi :

$$f(a + bx + cx^2) = (a + c, b - a - c)$$

theo các cơ sở chính tắc của P_2 và $\mathbb{R}^2$.

Giải. Cơ sở chính tắc của P_2 là $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$, của $\mathbb{R}^2$ là $\{e'_1 = (1,0); e'_2 = (0,1)\}$. Ta có :

$$f(e_1) = f(1 + 0x + 0x^2) = (1, -1) = (1, 0) - (0, 1) = e'_1 - e'_2,$$

$$f(e_2) = f(0 + 1.x + 0x^2) = (0, 1) = e'_2,$$

$$f(e_3) = f(0 + 0.x + 1.x^2) = (1, -1) = e'_1 - e'_2.$$

Vậy ma trận của ánh xạ tuyến tính f là : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Chú thích : Nếu V = W, ánh xạ tuyến tính f : V → W gọi là toán tử tuyến tính trên V. Trong trường hợp đó, ta chọn cơ sở B = B′. Ma trận của toán tử tuyến tính f là ma trận vuông.

5.4. Trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính

V là một không gian vectơ, f : V → V là một toán tử tuyến tính. Không gian con W của V gọi là *bất biến đối với f* nếu $f(v) \in W, \forall v \in W$, tức là nếu $f(W) \subset W$. Rõ ràng, tập hợp $\{\theta\}$ và V là những không gian con bất biến đối với f. Vấn đề là, ngoài $\{\theta\}$ và V, còn những không gian con nào khác của V bất biến đối với f.

5.4.1. Trị riêng. Vectơ riêng

Số λ gọi là *trị riêng* của toán tử tuyến tính f : V → V nếu tồn tại vectơ $x \in V$, $x \neq \theta$ sao cho :

$$f(x) = \lambda x. \tag{5.13}$$

Khi đó, vectơ x gọi là *vectơ riêng* của toán tử tuyến tính f ứng với trị riêng λ.

Nếu λ là một trị riêng của f, đặt V_λ là tập hợp gồm vectơ θ và tất cả các vectơ riêng của f ứng với λ.

Định lí 5.8. *Tập hợp* V_λ *là một không gian con của* V, *bất biến đối với* f.

Chứng minh : Nếu $x_1, x_2 \in V_\lambda$ thì :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2).$$

Do đó $x_1 + x_2 \in V_\lambda$. Nếu $k \neq 0$, ta có :

$$f(kx_1) = kf(x_1) = k\lambda x_1 = \lambda(kx_1).$$

Từ đó ta có $kx_1 \in V_\lambda$. Vậy V_λ là một không gian con của V. Ngoài ra, nếu $\forall x \in V_\lambda$ thì $f(x) = \lambda x \in V_\lambda$, nên V_λ bất biến đối với f. ■

Định nghĩa. Người ta gọi V_λ là *không gian con riêng* của f ứng với trị riêng λ.

5.4.2. Phương trình đặc trưng

Giả sử dim(V) = n, B = $\{e_1, e_2,..., e_n\}$ là một cơ sở của V. Gọi A là ma trận của toán tử tuyến tính f, đó là một ma trận vuông cấp n, cột thứ i là ma trận tọa độ của $f(e_i)$ đối với cơ sở B. Theo công thức (5.12), ta có :

$$[f(x)]_B = A[x]_B.$$

Vì vậy phương trình (5.13) có thể viết dưới dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

hay:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Đó là một hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn, nó có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số của nó bằng 0 (mục 4.6. Chương IV).

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.15)$$

Phương trình (5.15) gọi là phương trình đặc trưng của toán tử tuyến tính f. Đó là một phương trình bậc n đối với λ, nên nó có n nghiệm, thực hoặc phức, đơn hoặc bội. Nghiệm của (5.15) là trị riêng của f. Sau khi tìm được trị riêng λ, nghiệm không tầm thường của hệ (5.14) ứng với λ là các vectơ riêng tương ứng.

Định lí 5.9. *Phương trình đặc trưng của toán tử tuyến tính* f *không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của không gian vectơ* V.

Ta thừa nhận định lí này.

5.4.3. Các ví dụ

Ví dụ 7 : Tìm trị riêng và vectơ riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi :

$$f(x_1, x_2) = (5x_1 + 4x_2, 8x_1 + 9x_2).$$

Giải. Trước hết, ta tìm ma trận của f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$. Ta có :

$$f(e_1) = f(1, 0) = (5, 8) \; ; \; f(e_2) = f(0, 1) = (4, 9).$$

Vậy ma trận của f là $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, phương trình đặc trưng của f là :

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

hay $\lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0$; nó có hai nghiệm $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$. Đó là các trị riêng của f.

Hệ thuần nhất (5.14) ứng với $\lambda = 1$ là :

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 8x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}.$$

Hệ ấy tương đương với phương trình $x_1 + x_2 = 0$. Phương trình đó có nghiệm $(\alpha, -\alpha)$ với α tuỳ ý $\in \mathbb{R}$. Vậy các vectơ riêng ứng với trị riêng λ_1 là $\alpha(1, -1)$ với $\alpha \neq 0$.

Hệ thuần nhất ứng với $\lambda = 13$ là :

$$\begin{cases} -8x_1 + 4x_2 = 0 \\ 8x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Hệ đó tương đương với phương trình : $2x_1 - x_2 = 0$. Phương trình đó có nghiệm $\beta(1, 2)$ với β tuỳ ý $\in \mathbb{R}$. Vậy các vectơ riêng ứng với trị riêng λ_2 là $\beta(1, 2)$ với $\beta \neq 0$.

Ví dụ 8 : Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 5x_2 - 3x_3, - x_1 - 2x_2 - 3x_3, 3x_1 + 15x_2 + 12x_3).$$

Giải. Ma trận của toán tử tuyến tính f theo cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là :

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Do đó, phương trình đặc trưng của f là :

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix}_{(h_3 + 3h_2)} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 9-3\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Cộng cột thứ 2 với (– 3) lần cột thứ 3, ta được:

$$0 = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -3 \\ -1 & 7-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

Vậy f có hai trị riêng : $\lambda_1 = 3$ (trị riêng kép) và $\lambda_2 = 6$ (trị riêng đơn).

Các vectơ riêng ứng với λ_1 là nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất :

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Hệ ấy tương đương với phương trình $x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$. Trong $\mathbb{R}^3$, đó là phương trình của một mặt phẳng đi qua gốc tọa độ. Vậy không gian con riêng ứng với λ_1 là không gian 2 chiều. Cơ sở của nó gồm hai vectơ độc lập tuyến tính có tọa độ thoả mãn phương trình $x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$. Chẳng hạn, $e_1 = (3, 0, -1)$, $e_2 = (5, -1, 0)$.

Các vectơ riêng ứng với λ_1 là $\alpha(3, 0, -1) + \beta(5, -1, 0)$ với α, β không đồng thời bằng 0.

Các vectơ riêng ứng với λ_2 là nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} (h_1 - 4h_3) \\ (h_2 - h_3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -15x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Trong $\mathbb{R}^3$, hệ (*) biểu diễn giao tuyến của hai mặt phẳng đi qua gốc tọa độ, tức là một đường thẳng đi qua gốc. Đó là một không gian con 1 chiều trong $\mathbb{R}^3$, cơ sở của nó là một vectơ khác θ bất kì, có tọa độ thoả mãn hệ (*), chẳng hạn nếu lấy $x_3 = -3$, ta được vectơ $e_0 = (1, 1, -3)$. Các vectơ riêng của f ứng với λ_2 là $\gamma(1, 1, -3)$ với $\gamma \neq 0$.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa không gian vectơ. Tập hợp các đa thức có bậc $\geq$ n có phải là một không gian vectơ không?

2. Định nghĩa không gian con. Giả sử V là một không gian vectơ. Điều kiện để tập hợp $W \subset V$ là một không gian con của V.

3. Định nghĩa cơ sở của một không gian vectơ. Vì sao mọi họ n vectơ độc lập tuyến tính trong không gian vectơ n chiều là một cơ sở của V?

4. Vì sao nếu họ $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V thì mọi vectơ $x \in V$ đều có thể biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng:

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_ne_n?$$

5. Hạng của một họ vectơ: Định nghĩa, cách tính.

6. Khi đổi cơ sở của một không gian vectơ, giữa các tọa độ của một vectơ đối với các cơ sở đó có mối liên hệ gì?

7. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính. Ánh xạ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, xác định bởi $f(x) = 2x + 3$ có phải là ánh xạ tuyến tính không?

8. Định nghĩa trị riêng, vectơ riêng, không gian con riêng của toán tử tuyến tính.

9. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu họ vectơ $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính thì họ vectơ $\{u, u + v\}$ cũng độc lập tuyến tính.

b) Nếu họ vectơ $\{u, v\}$ độc lập tuyến tính thì họ vectơ $\{u, v, u + v\}$ cũng độc lập tuyến tính.

c) Nếu họ vectơ $\{u, v, w\}$ độc lập tuyến tính thì họ vectơ $\{u, v\}$ cũng độc lập tuyến tính.

d) Không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ có một cơ sở gồm các vectơ $\{x, x + y, x - y\}$, trong đó x, y là hai vectơ độc lập tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$.

e) Nếu $\{x_1, x_2, x_3\}$ và $\{y_1, y_2, y_3\}$ là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thì $\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\}$ cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

f) span (u, v) = span(u, v, ku + lv), trong đó $k, l \in \mathbb{R}$.

g) Mọi họ bốn vectơ $\neq \theta$ của $\mathbb{R}^4$ đều là một hệ sinh của $\mathbb{R}^4$.

BÀI TẬP

1. Hãy kiểm tra lại 10 tiên đề của không gian vectơ trong các ví dụ 1, 2, 3 của mục 1.1.

2. Với các phép toán đã xét trong ví dụ 1, các tập:

a) $U = \{x = (x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

b) $W = \{x = (x_1, x_2, 1, 1) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

có phải là không gian vectơ không?

3. Tập hợp $X = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i \in \mathbb{R}_+^*, i = 1, 2, 3, 4\}$ có phải là không gian vectơ không nếu ta đưa vào hai phép toán sau:

$\forall x, y \in X$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ với $x_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1,4}$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ với $y_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1,4}$ thì $x + y = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4)$, và với λ bất kì thì $\lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, x_3^\lambda, x_4^\lambda)$?

4. Các tập hợp những hàm số sau đây, trong đó phép cộng hai hàm số, phép nhân một hàm số với một số thực được hiểu theo nghĩa thông thường có là không gian vectơ không ?

a) Tập hợp các hàm số f(x) liên tục trên [a, b].

b) Tập hợp các hàm số f(x) khả vi trên [a, b].

c) Tập hợp các hàm số sơ cấp.

5. Tập hợp các đa thức bậc hai với hệ số thực với phép cộng hai đa thức và phép nhân một đa thức với một số thực có phải là một không gian vectơ không?

6. Chứng minh rằng tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4t = 0 \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4t = 0 \\ d_1x + d_2y + d_3z + d_4t = 0 \end{cases}$$

(với a_i, b_i, c_i, $d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$) với phép cộng hai nghiệm, phép nhân một nghiệm với một số thực thông thường là một không gian vectơ.

7. Chứng minh rằng tập hợp $\mathfrak{M}_{2\times2}$ các ma trận vuông cỡ 2 × 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

với phép cộng hai ma trận và phép nhân một ma trận với một số thực thông thường là một không gian vectơ.

8. Chứng minh rằng tập hợp : $F = \{y = (0, y_2, y_3, y_4) \mid y_i \in \mathbb{R}, i = 2, 3, 4\}$

là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

9. Chứng minh rằng tập hợp : $F = \left\{ B \in \mathfrak{M}_{2\times2} \middle| B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

là một không gian con của $\mathfrak{M}_{2\times2}$.

10. Chứng minh rằng tập hợp :

$$F = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \mid y_2 + y_3 + y_4 = 0\}$$

là một không gian con của $\mathbb{R}^4$.

11. $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ là một họ vectơ trong không gian vectơ V. Chứng minh rằng nếu S chứa vectơ θ thì họ S phụ thuộc tuyến tính.

12. Cho P_2 là tập hợp các đa thức bậc ≤ 2 với hệ số thực.

a) Chứng minh rằng họ $S = \{P_1(x) = 1 + 2x + 3x^2, P_2(x) = 2 + 3x + 4x^2, P_3(x) =$
$= 3 + 5x + 7x^2\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

b) Họ vectơ $\{q_1(x) = 1, q_2(x) = 1 + x, q_3(x) = 1 + x + x^2\}$ là độc lập tuyến tính.

c) Họ vectơ $\{p(x), p'(x), p''(x)\}$ là độc lập tuyến tính, trong đó $p'(x)$, $p''(x)$ lần lượt là đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của $p(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

13. Trong $\mathbb{R}^2$ họ $S = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (0, 1), v_3 = (2, 3), v_4 = (-1, 0)\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

14. Tìm bao tuyến tính của họ vectơ trong câu a) bài tập 12.

15. Cho không gian vectơ $\mathbb{R}^2$.

a) Chứng minh rằng họ $\{ e_1' = (1,2);\ e_2' = (3,4) \}$ là độc lập tuyến tính.

b) Chứng minh rằng họ ấy là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

c) Tìm toạ độ của vectơ $x = (7, 10)$ theo hệ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

d) Tìm toạ độ của vectơ $x = (7, 10)$ theo cơ sở e_1', e_2' trong câu a).

16. Chứng minh rằng họ:

$$\left\{e_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, e_4' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right\}$$

là một cơ sở của $\mathfrak{M}_{2\times 2}$.

17. $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ là một họ vectơ trong $\mathbb{R}^4$. Tìm hạng $r(S)$ nếu:

$x_1 = (1, 1, -1, 1)$; $x_2 = (1, -1, 1, -1)$; $x_3 = (3, 1, -1, 1)$;

$x_4 = (3, -1, 1, -1)$; $x_5 = (2, 0, 0, 0)$.

18. Chứng minh rằng tập hợp các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{2}{3}x_2 + x_3 + \dfrac{3}{4}x_4 = 0 \\ \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{3}{4}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

là một không gian con của $\mathbb{R}^4$. Tìm số chiều và một cơ sở của không gian con này.

19. Tìm số chiều và cơ sở của không gian con các nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

20. Trong $\mathbb{R}^4$ cho cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ và một cơ sở khác $S = \{e'_1 = (0,1,1,1); e'_2 = (1,0,1,1); e'_3 = (1,1,0,1); e'_4 = (1,1,1,0)\}$; x là vectơ có tọa độ (1, 1, 1, 1) theo cơ sở chích tắc. Tìm toạ độ của nó đối với cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$.

21. Với kí hiệu trong bài tập 20, hãy biểu diễn vectơ $x = 8e_1 + 6e_2 + 4e_3 - 18e_4$ theo cơ sở $\{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ nếu:

$$e'_1 = -3e_1 + e_2 + e_3 + e_4; \qquad e'_2 = 2e_1 - 4e_2 + e_3 + e_4;$$

$$e'_3 = e_1 + 3e_2 - 5e_3 + e_4; \qquad e'_4 = e_1 + e_2 + 4e_3 - 6e_4.$$

22. Các ánh xạ sau đây có phải là ánh xạ tuyến tính không?

a) f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (x, y, -z)$;

b) f: $\mathfrak{M}_{n\times n} \to \mathfrak{M}_{n\times n}$ xác định bởi $f(A) = A + A^t$;

c) f: $P_n \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f\{p(x)\} = p(0)$;

d) f: $V \to V$ xác định bởi $f(v) = v + u$, $u \neq \theta$ là một vectơ xác định;

e) f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$;

f) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$;

g) f: $V \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1$, trong đó $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở của V;

h) f: $P_n \to P_n$ xác định bởi $f[p(x)] = p(x) + xp'(x)$.

23. f là một ánh xạ tuyến tính.

a) Nếu f: $V \to \mathbb{R}$, $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = -3$. Tính $f(3v_1 + 2v_2)$.

b) Nếu f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(1, -1) = (0, 1)$, $f(1, 1) = (1, 0)$. Tính $f(1, -7)$.

c) Nếu f : $P_2 \to \mathbb{R}$, $f(x + 2) = 1$, $f(1) = 5$, $f(x^2 + x) = 0$. Tính $f(2 - x + 3x^2)$.

24. a) Biết f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính, $f(2, -1) = (1, -1, 1)$, $f(1, 1) = (0, 1, 0)$. Hãy tính $f(x, y)$.

b) Biết f: $\mathfrak{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ tuyến tính, $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3, f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1$,

$f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 = f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Tính $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

25. a) Chứng minh rằng f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$ là một toán tử tuyến tính. Tìm ma trận của f.

b) Chứng minh rằng f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2 - 8x_3)$ là một toán tử tuyến tính. Tìm ma trận của f.

26. a) Cho hai toán tử tuyến tính f, g: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z; 4x + 5y + 6z; 7x + 8y + 9z);$$

$$g(x, y, z) = (x + 3y + 4{,}5z ; 6x + 7y + 9z ; 10{,}5x + 12y + 13z).$$

Tìm ma trận của toán tử $3f - 2g$ và $f \circ g$.

b) Cho hai toán tử tuyến tính $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi:

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x).$$

$$g(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y).$$

Tìm ma trận của toán tử tuyến tính $f \circ g$ và $g \circ f$.

27. a) f là phép quay mỗi vectơ trên mặt phẳng Oxy một góc $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Biểu diễn toán tử tuyến tính $f + I$ dưới dạng toạ độ, I là toán tử đồng nhất.

b) f là phép quay mọi vectơ của mặt phẳng Oxy một góc α. Tìm ma trận của toán tử tuyến tính $g = f + f^{-1}$.

28. a) Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính với ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính với ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Tìm trị riêng, vectơ riêng của toán tử tuyến tính với ma trận :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

ĐÁP SỐ

2. a) có ; b) không.

3. Có.

4. a) b) c) Có.

5. Không.

14. $\text{span}(S) = \{q(x) = (2b + c)x^2 + (b - c)x + c \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

15. c) $x = (7, 10) = 7e_1 + 10e_2$.

d) $x = (7, 10) = e'_1 + 2e'_2$.

17. $r(S) = 2$.

18. Số chiều bằng 3, một cơ sở là :

$$\{f_1 = (-2, 1, 0, 0), f_2 = (-3, 0, 1, 0), f_3 = (-4, 0, 0, 1)\}.$$

19. Số chiều bằng 1, một cơ sở là $\{f = (1, 1, 1)\}$.

20. $x = \frac{1}{3}(e'_1 + e'_2 + e'_3 + e'_4)$.

21. $x = e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + 4e'_4$.

22. a) Có ; b) Có ; c) Có ; d) Không ; e) Có; f) Không ; g) Có ; h) Có,

23. a) $f(3v_1 + 2v_2) = 0$; b) $f(1, -7) = (-3, 4)$; c) $f(2 - x + 3x^2) = 46$.

24. a) $f(x, y) = \frac{1}{3}(x - y, 3y, x - y)$;

Hướng dẫn : Đặt $(x, y) = \alpha(2, -1) + \beta(1, 1)$ rồi đồng nhất hai vế;

b) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 3a - 3c + 2b$.

25. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

26. a) $3f - 2g = I$; ma trận của $f \circ g$ là $\begin{bmatrix} 44,5 & 53 & 61,5 \\ 94,5 & 119 & 141 \\ 149,5 & 185 & 211,5 \end{bmatrix}$.

b) Ma trận của $f \circ g$ là $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; Ma trận của $g \circ f$ là $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

27. a) $(f + I)(x, y) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)y\right)$;

b) $g = f + f^{-1} = 2I\cos x$, ma trận của g là : $\begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix}$.

28. a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $u = C(e_1 + e_2)$;

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 3$; $u = C_1(e_1 + e_2)$; $v = C_2(e_1 - e_2)$;

c) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, $u = \alpha\,(2e_1 - e_2)$; $v = \beta(e_1 + 2e_2)$;

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$, $u = \alpha\,(4e_1 - 3e_2)$; $v = \beta(3e_1 + 4e_2)$;

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $u = \alpha(1, 0, -1)$, $v = \beta(1, 1, 1)$, $w = \gamma(1, -2, 1)$;

$\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\lambda_3 = -2$, $u = 2(a + b)e_1 + ae_2 + be_3$, $v = c(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$.

CHƯƠNG VI. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

MỤC ĐÍCH YÊU CẦU

Chương này nghiên cứu các định nghĩa, tính chất, phương pháp tính cơ bản của tích phân bất định và tích phân xác định, sự hội tụ của tích phân suy rộng và một số ứng dụng hình học của tích phân xác định.

Khi học, cần nắm vững các khái niệm, các phương pháp tính tích phân, vận dụng thành thạo và linh hoạt các phương pháp đó trong tính tích phân và trong việc khảo sát tích phân suy rộng, biết cách sử dụng tích phân xác định trong một số tính toán trong hình học.

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1. Khái niệm tích phân bất định

1.1.1. Định nghĩa tích phân bất định

Ta nhắc lại rằng hàm số F(x) gọi là *nguyên hàm* của hàm số f(x) trong khoảng I nếu $\forall x \in I$ ta có:

$$F'(x) = f(x) \text{ hay } dF(x) = f(x)dx.$$

Nếu hàm số f(x) có một nguyên hàm là F(x) thì mọi nguyên hàm của f(x) đều có dạng:

$$F(x) + C,$$

trong đó C là một hằng số tuỳ ý. Người ta gọi *tích phân bất định* của hàm số f(x) là tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm số đó và kí hiệu là: $\int f(x)dx$.

Dấu $\int$ gọi là *dấu tích phân*, f(x) gọi là *hàm số dưới dấu tích phân*, f(x)dx gọi là *biểu thức dưới dấu tích phân*, x gọi là *biến số lấy tích phân*. Vậy:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ nếu } F'(x) = f(x).$$

Chẳng hạn: $\int \sin x dx = -\cos x + C$ vì $(-\cos x)' = \sin x$.

Định lí sau đây, sẽ được chứng minh ở cuối mục 2.3.1, trả lời câu hỏi : phải chăng mọi hàm số đều có nguyên hàm (và do đó có tích phân bất định).

Định lí 6.1. *Mọi hàm số liên tục trên đoạn* [a, b] *đều có nguyên hàm trên đoạn ấy.*

1.1.2. Bảng các tích phân cơ bản

Từ bảng các đạo hàm cơ bản, ta suy ra bảng các tích phân cơ bản sau:

1. $\int 0 dx = C$;

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$;

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$;

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \qquad (a > 0$ và $a \neq 1)$;

Đặc biệt $\int e^{x} dx = e^{x} + C$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

Ta bổ sung thêm các công thức sau, trong đó a là một hằng số khác 0.

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Các công thức 11 – 14 có thể chứng minh rất đơn giản bằng cách lấy đạo hàm. Chẳng hạn, vì:

$$\left(\ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} . \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

nên ta có công thức 14.

1.1.3. Các tính chất đơn giản

Từ định nghĩa tích phân bất định, dễ dàng suy ra các tính chất sau:

1) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$ (a là hằng số);

2) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Ví dụ 1: Tính $\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx$.

$$\int \frac{(1 + x)^2}{x(1 + x^2)} dx = \int \frac{1 + x^2 + 2x}{x(1 + x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1 + x^2} \right) dx = \ln|x| + 2\operatorname{arctg} x + C .$$

Ví dụ 2: Tính $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Vì $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, nên

$$\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\text{tg}x-\text{cotg}x+C.$$

Ví dụ 3: Tính $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$.

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx=\sin x-\cos x+C$$

1.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

1.2.1. Phương pháp đổi biến số

Giả sử cần tính $\int f(x)dx$ mà ta không thể sử dụng các tính chất đơn giản của tích phân bất định và bảng các tích phân cơ bản. Bằng cách đổi biến số $x = \varphi(t)$, với $\varphi(t)$ là một hàm số liên tục, có đạo hàm liên tục và có hàm số ngược. Khi đó, ta có công thức đổi biến số sau:

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \qquad (6.1)$$

Ví dụ 4: Tính $\int\sqrt{1-x^2}dx$.

Hàm số dưới dấu tích phân xác định khi $x \in [-1, 1]$. Để khử căn, ta đổi biến số $x = \sin t$ với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ta có :

$$dx=\cos t dt, \sqrt{1-x^2}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\cos t \text{ vì } t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos^2 t dt=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C.$$

Trở về biến số x, ta có :

$$t=\arcsin x,\quad \cos t=\sqrt{1-x^2}, \sin 2t=2\sin t\cos t=2x\sqrt{1-x^2}.$$

Vậy $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$.

Ví dụ 5 : Tính $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Đổi biến số x = atgt, với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có :

$$dx = \frac{adt}{\cos^2 t}, \; x^2 + a^2 = a^2(tg^2 t + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 t};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int \frac{adt}{\cos^2 t.\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Trở về biến số x, ta có : $t = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}}$,

$$\sin t \cos t = \frac{tgt}{1+tg^2 t} = \frac{\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{ax}{a^2+x^2}.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + C. \qquad (6.2)$$

Chú thích : Nếu biểu thức dưới dấu tích phân f(x)dx có thể viết dưới dạng g[φ(x)]. φ′(x)dx, thì ta thực hiện phép đổi biến số φ(x) = t và được :

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(t)dt. \qquad (6.3)$$

Ví dụ 6 : Tính $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$.

Vì $\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+(x^3)^2}.3x^2dx$, mà $3x^2 = (x^3)'$, nên ta đổi biến số $x^3 = t$.

Ta có $3x^2dx = dt$, do đó: $\int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctgt} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C$.

Ví dụ 7 : Tính $\int (\ln x)^2 \dfrac{dx}{x}$.

Đặt t = lnx, ta có $dt = \dfrac{dx}{x}$. Do đó : $\int \dfrac{(\ln x)^2 dx}{x} = \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{1}{3}(\ln x)^3 + C$.

Ví dụ 8 : Tính $\int \dfrac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$.

Vì $\dfrac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1+e^x}} = \dfrac{e^x}{\sqrt[4]{1+e^x}}.e^x dx$ và $(1 + e^x)' = e^x$, nên nếu đổi biến số $t = 1 + e^x$, ta được: $e^x = t - 1$, $e^x dx = dt$;

$$\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1+e^x}} = \int \frac{t-1}{t^{\frac{1}{4}}} dt = \int (t^{\frac{3}{4}} - t^{-\frac{1}{4}}) dt = \frac{t^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - \frac{t^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C$$

$$= \frac{4}{7}(1+e^x)^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}(1+e^x)^{\frac{3}{4}} + C.$$

1.2.2. Phương pháp tính tích phân từng phần

• Giả sử u(x), v(x) là hai hàm số khả vi, có các đạo hàm u′(x), v′(x) liên tục. Khi đó, từ công thức: d(uv) = udv + vdu.

Suy ra : $$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (6.4)$$

Công thức đó gọi là *công thức tính tích phân từng phần*. Công thức đó thường được áp dụng trong việc tính v nếu biết dv dễ dàng và khi việc tính $\int v du$ đơn giản hơn việc tính $\int u dv$.

Ví dụ 9 : Tính $\int x \sin x dx$.

Đặt u = x ; sinxdx = dv. Ta có du = dx, v = −cosx. Do đó, theo công thức (6. 3) ta có $\int x \sin x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$.

Phương pháp tính tích phân từng phần thường được áp dụng để tính các tích phân:

$$\int P_n(x)\cos ax dx\ ,\ \int P_n(x)\sin ax dx\ ;\ \int P_n(x)e^{ax}dx\ ,$$

trong đó a là hằng số, $P_n(x)$ là đa thức bậc n đối với x.

Ví dụ 10 : Tính $\int (x^2-3)e^x dx$.

Đặt $u = x^2 - 3$, $e^x dx = dv$, ta có $du = 2xdx$, $v = e^x$. Theo công thức (6.4), ta được: $\int (x^2-3)e^x dx = (x^2-3)e^x - 2\int xe^x dx$.

Để tính tích phân ở vế phải, ta lại áp dụng công thức (6.4) một lần nữa. Đặt $u = x$, $e^x dx = dv$, ta được: $du = dx$, $v = e^x$. Do đó:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C\ .$$

Cuối cùng:

$$\int (x^2-3)e^x dx = (x^2-3)e^x - 2(xe^x - e^x + C) = x^2e^x - 2xe^x - e^x + C_1\ ,$$

với $C_1 = -2C$ cũng là hằng số tuỳ ý.

• Phương pháp tính tích phân từng phần còn được áp dụng khi hàm dưới dấu tích phân là tích của một hàm số hữu tỉ với một hàm số siêu việt, nhưng có đạo hàm là hàm số đại số như lnx, arctgx, arcsinx.

Ví dụ 11 : Tính $\int (x^2+5x-1)\ln x dx$.

Đặt $u = \ln x$, $(x^2 + 5x - 1)dx = dv$, ta có $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x$.

Theo công thức (6.4) ta được:

$$\int (x^2+5x-1)\ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{2} - 1\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{5x^2}{4} + x + C\ .$$

Ví dụ 12. Tính $\int x\text{arctg}x dx$.

Đặt u = arctgx, dv = xdx, ta có: $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Do đó :

$$\int x\text{arctg}x dx = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2+1}{2}\text{arctg}x - \frac{x}{2} + C.$$

Ví dụ 13: Tính các tích phân $I_1 = \int e^x \cos x dx$, $I_2 = \int e^x \sin x dx$.

Để tính cả hai tích phân đó, ta đặt u = e^x. Do đó du = e^xdx. Ta được:

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I_2; \qquad (*)$$

$$I_2 = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I_1. \qquad (**)$$

Từ hai công thức (*) và (**) suy ra : $\begin{cases} I_1 + I_2 = e^x \sin x \\ I_1 - I_2 = e^x \cos x. \end{cases}$

Do đó: $I_1 = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$; $\quad I_2 = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$.

1.3. Tích phân các phân thức hữu tỉ

1.3.1. Các định nghĩa

• Người ta gọi *phân thức hữu tỉ* là phân thức có dạng $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, trong đó $P_m(x)$ và $Q_n(x)$ là những đa thức bậc m và n đối với x. Phân thức đó gọi là *phân thức thực sự* nếu m < n, gọi là *phân thức không thực sự* nếu m ≥ n.

Nếu phân thức $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ là phân thức không thực sự, thì bằng cách chia $P_m(x)$ cho $Q_n(x)$, ta có thể viết nó dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức thực sự. Chẳng hạn:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}.$$

• Người ta gọi *phân thức đơn giản* là phân thức có dạng sau:

I. $\frac{A}{x-b}$ (A, b là các hằng số);

II. $\frac{A}{(x-b)^k}$ (k nguyên dương ≥ 2);

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (M, N, p, q là các hằng số, $\Delta = p^2-4q<0$);

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ (k nguyên dương ≥ 2, $\Delta = p^2-4q<0$).

1.3.2. Phân tích một phân thức hữu tỉ thực sự thành những phân thức đơn giản

Theo định lí 1.1 của chương I, mọi đa thức bậc n với hệ số thực:

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

đều có thể phân tích thành tích của các thừa số bậc nhất và thừa số bậc hai với biệt thức $\Delta < 0$

$$Q_n(x)=a_0(x-b_1)^{k_1}...(x-b_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \quad (6.5)$$

trong đó k_i là số bội của nghiệm thực b_i, l_j là số bội của cặp nghiệm phức liên hợp thứ j của phương trình :

$$Q_n(x) = 0,\ p_i^2-4q_i<0,\ k_1+...+k_r+2(l_1+...+l_s)=n.$$

Trong đại số cao cấp, người ta đã chứng minh được rằng nếu $Q_n(x)$ phân tích thành tích dưới dạng (6.5) thì phân thức thực sự $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ có thể phân tích thành tổng của các phân thức đơn giản như sau:

Ứng với thừa số $(x-b)^k$ của $Q_n(x)$, tổng các phân thức đơn giản thành phần là : $\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{(x-b)^2}+...+\frac{A_k}{(x-b)^k}$.

Ứng với thừa số $(x^2 + px + q)^l$ của $Q_n(x)$, tổng các phân thức đơn giản thành phần là: $\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}$.

$A_1, A_2, ..., A_k, B_1, C_1, ..., B_l, C_l$ là những hằng số. Việc xác định các hằng số đó sẽ được chỉ ra trong các ví dụ.

Ví dụ 14: Phân tích: $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Vì $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$, nên ta có thể phân tích:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+2}.$$

Quy đồng mẫu số ở vế phải và khử mẫu số ở hai vế, ta có :

$$4x^2 + 16x - 8 \equiv A_1(x - 2)(x + 2) + A_2x(x + 2) + A_3x(x - 2). \qquad (*)$$

Vì hai vế bằng nhau với mọi giá trị của x, nên chỉ việc cho x ở hai vế của (*) lấy ba giá trị thích hợp khác nhau. Ta sẽ tính được các hệ số A_1, A_2, A_3.

Cho $x = 0$ vào hai vế, ta được $-8 = -4A_1$, suy ra $A_1 = 2$.

Cho $x = 2$ vào hai vế, ta được $40 = 8A_2$, suy ra $A_2 = 5$.

Cho $x = -2$ vào hai vế, ta được $-24 = 8A_3$, suy ra $A_3 = -3$.

Phương pháp xác định các hệ số A_1, A_2, A_3 trong ví dụ này gọi là *phương pháp trị số riêng*. Vậy: $\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$.

Trong ví dụ này, ta đã cho x lần lượt bằng các nghiệm của mẫu số.

Ví dụ 15 : Phân tích $\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Vì $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1)(x + 2)^2$, nên ta có thể phân tích :

$$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+1}.$$

Quy đồng mẫu số ở vế phải và khử mẫu số ở hai vế, ta có :

$$x^2 \equiv A_2(x+1) + A_1(x+2)(x+1) + B(x+2)^2.$$

Cho $x = -2$ vào hai vế, ta được: $4 = -A_2$, suy ra $A_2 = -4$.

Cho $x = -1$ vào hai vế, ta được: $1 = B$.

Cho $x = 0$ vào hai vế, ta được: $0 = A_2 + 2A_1 + 4B$, suy ra $2A_1 = -A_2 - 4B = 4 - 4$. Vậy $A_1 = 0$.

Do đó: $\dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \dfrac{-4}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{x+1}$.

Ví dụ 16: Phân tích $\dfrac{5}{(x-2)(x^2-2x+5)}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Vì $x^2 - 2x + 5$ có biệt thức $\Delta = -16 < 0$ nên:

$$\frac{5}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+5}.$$

Quy đồng mẫu số ở vế phải và khử mẫu số ở hai vế, ta có:

$$5 \equiv A(x^2 - 2x + 5) + (Mx + N)(x - 2).$$

Cho $x = 2$ vào hai vế, ta có $5 = 5A$, suy ra $A = 1$.

Cho $x = 0$ vào hai vế, ta có $5 = 5A - 2N$, suy ra $N = 0$.

Cho $x = 1$ vào hai vế, ta có $5 = 4A - M - N = 4 - M$, suy ra $M = -1$.

Vậy : $\dfrac{5}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x}{x^2-2x+5}$.

Ví dụ 17: Phân tích $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ thành tổng các phân thức đơn giản.

Ta có: $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \dfrac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}$.

Quy đồng mẫu số ở vế phải và khử mẫu số ở hai vế, ta có:

$$2x \equiv A(x^2+1)^2 + (M_1x+N_1)(x+1)(x^2+1) + (M_2x+N_2)(x+1)$$

$$\Rightarrow 2x \equiv (A+M_1)x^4 + (M_1+N_1)x^3 + (2A+M_2+M_1+N_1)x^2 +$$

$$+ (M_2+N_2+M_1+N_1)x + (A+N_2+N_1).$$

Hai đa thức đồng nhất với nhau khi và chỉ khi hệ số của các số hạng cùng bậc của chúng bằng nhau. Do đó:

$$\begin{cases} A+M_1=0 \\ M_1+N_1=0 \\ 2A+M_2+M_1+N_1=0. \\ M_2+N_2+M_1+N_1=2 \\ A+N_2+N_1=0. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu suy ra $A = -M_1$, $N_1 = -M_1$.

Thay vào phương trình cuối, ta được $N_2 = 2M_1$.

Thay N_1 và N_2 vào phương trình thứ tư, ta có:

$$M_2 = 2 - N_2 - M_1 - N_1 = 2 - 2M_1 - M_1 + M_1 = 2 - 2M_1.$$

Thay A, M_2 và N_1 vào phương trình thứ ba, ta được

$-2M_1 + 2 - 2M_1 + M_1 - M_1 = 0$, suy ra $M_1 = \dfrac{1}{2}$; $N_1 = -\dfrac{1}{2}$; $N_2 = 1$; $M_2 = 1$;

$A = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{-1}{2(x+1)} + \dfrac{x+1}{(x^2+1)^2} + \dfrac{x-1}{2(x^2+1)}$.

Phương pháp xác định các hệ số trong ví dụ này gọi là *phương pháp đồng nhất hệ số*.

1.3.3. Tích phân của các phân thức hữu tỉ

Vì mọi phân thức hữu tỉ thực sự đều phân tích được thành tổng của các phân thức đơn giản nên việc tính tích phân các phân thức hữu tỉ thực sự được quy về việc tính tích phân các phân thức đơn giản. Cách tính tích phân của các phân thức đơn giản sẽ được trình bày trong các ví dụ.

Ví dụ 18 : Tính $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx$.

Vì $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ là phân thức không thực sự, nên bằng cách chia tử số cho mẫu số, ta được $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$.

Phân thức ở vế phải là phân thức thực sự. Từ kết quả của ví dụ 14, ta có:

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}.$$

Vậy $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx = \int (x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2})dx$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.$$

Ví dụ 19: Tính $\int \frac{x^2dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$.

Phân thức $\frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ là phân thức thực sự. Trong ví dụ 15, ta đã có :

$$\frac{x^2}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Vậy $\int \frac{x^2dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \int \frac{dx}{x+1} - 4\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C$.

Ví dụ 20 : Tính $\int \frac{5dx}{(x-2)(x^2-2x+5)}$.

Phân thức dưới dấu tích phân đã được phân tích thành tổng các phân thức đơn giản trong ví dụ 16. Do đó :

$$\int \frac{5dx}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{xdx}{x^2-2x+5} = \ln|x-2| - \int \frac{xdx}{x^2-2x+5}.$$

Phân thức dưới dấu tích phân ở vế phải là phân thức đơn giản dạng III. Vì $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$, ta đổi biến số $x - 1 = t$, do đó $dx = dt$. Ta có :

$$\int \frac{xdx}{x^2-2x+5} = \int \frac{(t+1)dx}{t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4} + \int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C.$$

Trở về biến x, ta được: $\int \frac{xdx}{x^2-2x+5} = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$.

Ví dụ 21 : Tính $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

Từ ví dụ 17, ta có :

$$\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx + \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\int \frac{2xdx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Ta có : $\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x^2+1} + C$.

Để tính $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, ta đổi biến số $x = tgt$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ như đã làm ở ví dụ 5 và được : $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$.

Cuối cùng :

$$\int\frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\text{arctg}x - \frac{1}{2(x^2+1)} +$$

$$+\frac{1}{2}\text{arctg}x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + C.$$

1.4. Tích phân của một số hàm số lượng giác và vô tỉ

Trong mục này, ta sẽ tính tích phân của một số hàm số lượng giác và vô tỉ bằng cách đổi biến số để đưa chúng về tích phân của các phân thức hữu tỉ.

1.4.1. Tích phân dạng $\int R(\sin x, \cos x)dx$,

trong đó R(u,v) là một biểu thức hữu tỉ đối với u, v, tức là một biểu thức chỉ chứa các phép cộng, trừ, nhân, chia đối với u, v, và các hằng số.

Thực hiện phép đổi biến số $t = \text{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, ta có:

$$\frac{x}{2} = \text{arctg}t, x = 2\text{arctg}t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Do đó: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).\frac{2dt}{1+t^2}$.

Hàm dưới dấu tích phân ở vế phải là một phân thức hữu tỉ đối với t.

Ví dụ 22: Tính $I = \int\frac{dx}{3\sin x - 5\cos x + 4}$.

Đổi biến số $t = \text{tg}\frac{x}{2}$, ta được:

$$I = \int\frac{1}{3.\frac{2t}{1+t^2} - 5\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int\frac{2dt}{6t - 5(1-t^2) + 4(1+t^2)} =$$

$$\int\frac{2dt}{9t^2+6t-1} = -2\int\frac{dt}{2-(9t^2+6t+1)} = -2\int\frac{dt}{(\sqrt{2})^2 - (3t+1)^2} =$$

$$= -2.\frac{1}{3}.\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+3t+1}{\sqrt{2}-(3t+1)}\right|+C.$$

Trở về biến số x, ta được : $I = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+1+3tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}-1-3tg\frac{x}{2}}\right|+C.$

Phương pháp đổi biến số trong ví dụ 22 là phương pháp tổng quát, nhưng có khi đưa đến tính tích phân của phân thức hữu tỉ khá phức tạp. Với một số dạng đặc biệt, có thể có những phép đổi biến số đưa đến kết quả nhanh hơn.

Ví dụ 23 : Tính $I = \int\frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx$.

Biểu thức dưới dấu tích phân có thể viết là :

$$\frac{\cos^2 x(\cos x dx)}{4+\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)d(\sin x)}{4+\sin x}.$$

Do đó, đổi biến số t = sinx, ta được

$$I = \int\frac{1-t^2}{4+t}dt = \int\left(4-t-\frac{15}{4+t}\right)dt = 4t-\frac{t^2}{2}-15\ln|4+t|+C =$$

$$= 4\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x-15\ln|4+\sin x|+C.$$

Ví dụ 24 : Tính $I = \int\frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$.

Vì $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2x}$, $\sin^2 x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$, nên nếu đổi biến số t = tgx, ta được

$x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, do đó:

$$I = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t^6} dt = \int (t^{-6} + t^{-4}) dt =$$

$$= -\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{5tg^5x} - \frac{1}{3tg^3x} + C.$$

Ví dụ 25: Tính $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Có thể đổi biến số t = tgx như trong ví dụ 24, nhưng đơn giản hơn là dùng công thức lượng giác :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

để giảm bậc của các hàm số sin và cosin. Ta có :

$$\sin^4 x \cos^2 x = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 . \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)(1 - \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 2x)\sin^2 2x = \frac{1}{8}\sin^2 2x - \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x.$$

Vậy:
$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}\sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin^3 2x}{3}\right) + C.$$

1.4.2. Tích phân dạng $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$,

trong đó a, b, c, d là những hằng số thoả mãn điều kiện $ad - bc \neq 0$; m, n, r, s là những số nguyên.

Đổi biến số $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$, k là mẫu số chung của $\frac{m}{n}, \frac{r}{s}$ để hữu tỉ hóa biểu thức dưới dấu tích phân.

Ví dụ 26 : Tính $I = \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Đổi biến số $1 + x = t^2$ (với $t > 0$). Ta có : $dx = 2tdt$,

$$I = \int \frac{2tdt}{t^3 + t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\text{arctg}t + C = 2\text{arctg}\sqrt{1+x} + C.$$

Ví dụ 27 : Tính $I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} . \frac{dx}{x}$.

Đổi biến số $\frac{1-x}{1+x} = t^2$ (với $t > 0$). Ta có :

$$1 - x = t^2(1 + x),\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2},$$

$$I = \int t.\frac{1+t^2}{1-t^2}.\frac{(-4t)dt}{(1+t^2)^2} = -\int \frac{4t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = 2\int \frac{-2t^2 - 1 + 1}{(1-t^2)(1+t^2)}dt$$

$$= 2\int \frac{-t^2 - 1 + 1 - t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt = 2\int \left(\frac{-1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= -2.\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + 2\text{arctg}t + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right| + 2\text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

1.4.3. Tích phân dạng $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

Ta có : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$

Tuỳ theo dấu của Δ, ta đặt $\pm\frac{\Delta}{4a^2} = k^2$, $k > 0$ và đổi biến số $x + \frac{b}{2a} = ku$. Ta được một trong ba dạng tích phân sau:

1) $\int R_1(u, \sqrt{1+u^2})du$, trong đó $R_1(u, v)$ là một biểu thức hữu tỉ đối với u, v.

Để tính tích phân này, cần đổi biến số $u = \text{tg}t$.

2) $\int R_1(u,\sqrt{1-u^2})du$, trong trường hợp này, đổi biến số u = sint.

3) $\int R_1(u,\sqrt{u^2-1})du$, trong trường hợp này, đổi biến số $u=\dfrac{1}{\cos t}$.

Ví dụ 28 : Tính: $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}$.

Vì $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$, $\Delta = -4 = -2^2$, ta đổi biến số $x + 1 = 2u$, do đó $dx = 2du$, $x^2 + 2x + 5 = 4(u^2 + 1)$. Vậy : $I=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{du}{\sqrt{(u^2+1)^3}}$.

Đặt $u = tgt$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, ta có:

$$du=\frac{dt}{\cos^2 t},\sqrt{u^2+1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{1}{|\cos t|}=\frac{1}{\cos t},\text{ vì } -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$$

Do đó : $I=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^3 t}}=\dfrac{1}{4}\int\cos t\,dt=\dfrac{1}{4}\sin t+C=$

$$=\frac{1}{4}\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}+C=\frac{1}{4}\cdot\frac{\dfrac{x+1}{2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

Ví dụ 29 : Tính $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

Đổi biến số $x=\dfrac{3}{\cos t}$, với $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ và $\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$. Ta có :

$$dx=\frac{3\sin t\,dt}{\cos^2 t},\sqrt{x^2-9}=\sqrt{\left(\frac{3}{\cos t}\right)^2-9}=\sqrt{9\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=3|tgt|.$$

Khi đó: a) Nếu $x > 3$ thì $\cos t > 0$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}t > 0$, do đó $\sqrt{x^2 - 9} = 3\operatorname{tg}t$

và $I = \int \frac{1}{\frac{3}{\cos t}.3\operatorname{tg}t} . \frac{3\sin t dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3}\int dt = \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x} + C$.

b) Nếu $x < -3$ thì $\cos t < 0$, $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\operatorname{tg}t < 0$, do đó $\sqrt{x^2 - 9} = -3\operatorname{tg}t$ và

$$I = -\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x} + C.$$

1.5. Chú thích về các hàm số mà nguyên hàm của nó không biểu diễn được qua các hàm số sơ cấp

Ta biết rằng mọi hàm số liên tục trên đoạn [a, b] đều có nguyên hàm trên đó. Nhưng không phải mọi nguyên hàm đều biểu diễn được dưới dạng hữu hạn qua các hàm số sơ cấp. Chẳng hạn các tích phân:

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}dx\ (k < 1),...$$

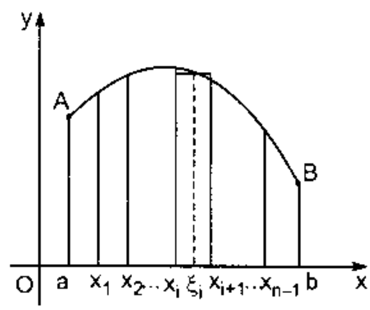
không biểu diễn được dưới dạng hữu hạn qua các hàm số sơ cấp.

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1. Định nghĩa tích phân xác định

2.1.1. Bài toán diện tích hình thang cong

Cho hàm số f(x) liên tục, không âm trên đoạn [a, b]. Hãy tính diện tích hình thang cong aABb giới hạn bởi trục Ox, đường cong y = f(x) và hai đường thẳng x = a, x = b (hình 6.1).



Hình 6.1

Chia tuỳ ý đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b.$$

Từ các điểm chia ấy, dựng những đường thẳng vuông góc với trục Ox. Khi đó, hình thang cong aABb được chia thành n hình thang cong nhỏ. Diện tích hình thang cong nhỏ thứ i có thể xem gần đúng bằng diện tích hình chữ nhật có kích thước là $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ và $f(\xi_i)$, với ξ_i là một điểm bất kì trên $[x_i;\ x_{i+1}]$. Do đó, diện tích S của hình thang cong aABb gần đúng bằng :

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Dễ thấy rằng nếu độ dài các đoạn nhỏ Δx_i càng nhỏ thì sự khác nhau giữa S và S_n càng ít. Do đó, diện tích S của hình thang cong aABb được xem là giới hạn của tổng S_n khi $\max \Delta x_i \to 0$: $S = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Giới hạn đó có vai trò rất quan trọng trong toán học. Ta có định nghĩa sau:

2.1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm số f(x) xác định và bị chặn trên đọan [a, b]. Chia một cách tuỳ ý đoạn [a, b] bởi các điểm chia :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Trên mỗi đoạn nhỏ $[\,x_i;\, x_{i+1}\,]$, lấy một điểm bất kì ξ_i và lập tổng

$$I_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$, I_n dẫn tới một giới hạn xác định I không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b] và cách chọn điểm ξ_i trong đoạn $[x_i;\, x_{i+1}\,]$ thì giới hạn đó được gọi là *tích phân xác định* của hàm số f(x) trên đoạn [a, b],kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$. Khi đó, ta nói rằng hàm số f(x) *khả tích* trên [a, b], [a, b] gọi là *khoảng lấy tích phân*, a là *cận dưới*, b là *cận trên*, x là *biến số lấy tích phân*, f(x) là *hàm số dưới dấu tích phân*, f(x)dx là *biểu thức dưới dấu tích phân.*

Người ta chứng minh được rằng: *Nếu hàm số* f(x) *liên tục trên đoạn* [a, b], *hàm số* f(x) *bị chặn và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên đoạn* [a, b] *thì nó khả tích trên* [a, b].

Trở lại bài toán diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi trục Ox, đường $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$, ta có :

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Chú thích: 1) Tích phân xác định chỉ phụ thuộc vào hàm số f(x) và các cận lấy tích phân mà không phụ thuộc vào biến số lấy tích phân. Do đó: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

2) Khi đưa vào khái niệm tích phân xác định, ta đã giả thiết $a < b$. Bây giờ mở rộng khái niệm tích phân xác định cho trường hợp $a \geq b$, ta có định nghĩa sau:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

$$\text{và } \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Ví dụ 1: Tính $\int_a^b e^x dx$.

Hàm số $f(x) = e^x$ liên tục trên [a, b] nên nó khả tích trên [a, b]. Ta có:

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} e^{\xi i}.\Delta x_i,$$

giới hạn ở vế phải không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b] và cách chọn các điểm ξ_i. Vì vậy, ta sẽ chia đoạn [a, b] và chọn các điểm ξ_i một cách đặc biệt để việc tính toán được đơn giản. Ta chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia:

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \Delta x,\ ...,\ x_i = a + i\Delta x,\ ....,\ x_n = a + n\Delta x$$

với $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ và chọn điểm ξ_i trùng với x_i ($i = 0,1,2,..., n - 1$). Khi đó, ta có :

$$I_n = e^{x_0}\Delta x + e^{x_1}\Delta x + ... + e^{x_{n-1}}\Delta x = e^a(1 + e^{\Delta x} + ... + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x.$$

Biểu thức trong dấu ngoặc là một cấp số nhân, số hạng đầu là 1, công bội là Δx. Do đó : $I_n = e^a \dfrac{1-e^{n\Delta x}}{1-e^{\Delta x}} \cdot \Delta x = e^a \dfrac{1-e^{b-a}}{1-e^{\Delta x}} \cdot \Delta x$, vì $n\Delta x = b - a$.

Do đó : $\int\limits_a^b e^x dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} e^a (e^{b-a} - 1)\dfrac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}$.

Nhưng $e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x$ khi $\Delta x \to 0$, ta được : $\int\limits_a^b e^x dx = e^a(e^{b-a} - 1) = e^b - e^a$.

Nhận xét: Việc tính tích phân xác định trực tiếp từ định nghĩa như trong ví dụ 1 là khá phức tạp ngay cả khi hàm số dưới dấu tích phân là hàm số sơ cấp cơ bản e^x. Ở các phần tiếp theo sẽ đưa ra phương pháp tính tích phân xác định đơn giản hơn.

2.2. Các tính chất của tích phân xác định

Căn cứ vào định nghĩa của tích phân xác định, có thể chứng minh được các tính chất sau:

Giả sử các tích phân xác định sau đây đều tồn tại. Khi đó :

1. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ (k là hằng số);

2. $\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)\ dx + \int\limits_a^b f_2(x)\ dx$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Đẳng thức này đúng ngay cả khi c không nằm giữa a và b.

Giả sử các tích phân xác định sau đây đều tồn tại và a < b. Khi đó :

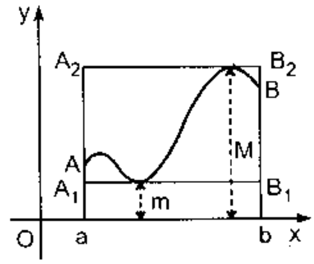
4. Nếu $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. Nếu $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

6. Nếu $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, m, M là các hằng số thì :

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Nếu f(x) liên tục và dương trên [a, b] thì bất đẳng thức trên có thể minh hoạ hình học như sau: diện tích hình thang cong aABb nằm giữa diện tích các hình chữ nhật aA_1B_1b và aA_2B_2b (hình 6.2). Dựa vào tính chất này, ta có thể ước lượng giá trị của tích phân xác định mà không cần tính tích phân ấy. Điều này có ích khi việc tính tích phân ấy quá phức tạp hay khi nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân không là hàm số sơ cấp.



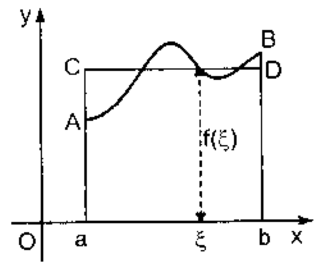
Hình 6.2

Ví dụ 2: Ước lượng giá trị của tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$.

Vì $0 \le \sin^2 x \le 1$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên : $1 \le \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x} \le \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Do đó : $\frac{\pi}{2} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx \le \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{\pi}{2}$

hay $1,57 \le I \le 1,92$.



Hình 6.3

7. Nếu f(x) liên tục trên [a; b] thì tồn tại một điểm ξ trên đoạn đó sao cho : $\int_a^b f(x)dx = f(\xi).(b-a)$.

Nếu f(x) > 0 trên [a, b] thì đẳng thức trên có thể minh hoạ hình học như sau: Diện tích hình thang cong aABb bằng diện tích hình chữ nhật aCDb (hình 6.3).

Tính chất 7 còn được gọi là định lí về giá trị trung bình.

Giá trị của hàm số f(x) tại điểm ξ: $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

gọi là giá trị trung bình của hàm số f(x) trên đoạn [a, b] .

2.3. Liên hệ giữa tích phân xác định và nguyên hàm. Công thức Newton- Leibniz

Cho đến nay, ta đã xét hai khái niệm nguyên hàm và tích phân xác định một cách độc lập. Thực ra hai khái niệm ấy có liên hệ với nhau. Trong mục này, ta sẽ thiết lập mối quan hệ ấy.

2.3.1. Đạo hàm của tích phân theo cận trên

Giả sử y = f(x) là một hàm số liên tục trên [a, b]. Xét tích phân $\int_a^x f(t)dt$ với $a \le x \le b$. Nếu giữ cận dưới a cố định, để cận trên x biến thiên thì giá trị của tích phân phụ thuộc vào x. Đặt $I(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Hàm số I(x) xác định trên [a, b]. Nó có tính chất sau:

Định lí 6.2. *Nếu* f(x) *là hàm số liên tục trên* [a, b] *thì*:

$$I'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Chứng minh:

Cho x một số gia Δx sao cho $x + \Delta x \in [a, b]$. Theo tính chất 3 của tích phân xác định, ta có : $I(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Do đó : $\Delta I(x) = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Theo tính chất 7 của tích phân xác định, ta có: $\Delta I(x) = f(\xi)\,\Delta x$,

ξ là một điểm nằm giữa x và $x + \Delta x$. Do đó :

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi).$$

Khi $\Delta x \to 0$ thì $x + \Delta x \to x$, suy ra $\xi \to x$. Vì hàm số f(x) liên tục tại x nên $I'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$. ■

Nhận xét: Từ định lí trên suy ra rằng nếu f(x) liên tục trên [a; b] thì $\forall x \in [a, b]$, hàm số $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của f(x). Vậy có thể khẳng định rằng mọi hàm số liên tục trên [a, b] đều có nguyên hàm trên đoạn ấy. Đó chính là nội dung của định lí 6.1 đã phát biểu ở mục 1.1.1.

2.3.2. Công thức Newton - Leibniz

Định lí 6.3. Nếu F(x) là nguyên hàm của hàm số f(x) liên tục trên [a, b] thì :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.6}$$

Chứng minh: Theo giả thiết F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x). Mặt khác, theo định lí 6.2, $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ cũng là một nguyên hàm của f(x). Do đó :

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C,\ \forall x \in [a, b].$$

Để xác định C, chỉ cần cho x = a vào hai vế của đẳng thức trên, ta được:

$$\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C.$$

Suy ra C = –F (a). Vậy $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, $\forall x \in [a, b]$.

Cho x = b, ta được $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. ■

Công thức (6.6) gọi là công thức Newton - Leibniz.

Người ta thường kí hiệu $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$. Khi đó, công thức (6.6) được viết là $\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b$.

Công thức đó cho ta cách tính tích phân xác định rất thuận lợi.

Ví dụ 3 : a) $\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$, vì e^x là một nguyên hàm của e^x.

b) $\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) = \frac{8}{3}$;

c) $\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)\big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$;

d) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\big|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{4}$.

2.4. Các phương pháp tính tích phân xác định

2.4.1. Phương pháp đổi biến số

Cho tích phân $\int_a^b f(x)dx$, trong đó hàm số f(x) liên tục trên [a; b]. Thực hiện phép đổi biến số $x = \varphi(t)$. Nếu :

a) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

b) $\varphi(t)$ và $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha; \beta]$;

c) $f[\varphi(t)]$ liên tục trên $[\alpha; \beta]$,

thì ta có công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$. (6.7)

Thật vậy, nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì $F[\varphi(t)]$ là một nguyên hàm của $f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)$ (xem chứng minh công thức (6.1)). Áp dụng công thức Newton - Leibniz, ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$;

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a).$$

Chú thích: Khi tính tích phân xác định bằng phương pháp đổi biến số thì không cần trở về biến số cũ như trong tích phân bất định.

Ví dụ 4: Tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Đổi biến số $x = \sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ta có $0 = \sin 0$, $1 = \sin\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$.

Cả ba điều kiện a), b), c) đều được thoả mãn. Vậy :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 5: Nếu f(x) liên tục trên [−a, a], tính $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ trong hai trường hợp f(x) là hàm số chẵn và hàm số lẻ.

Ta có : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$.

Đối với tích phân thứ nhất ở vế phải, ta đổi biến số $x = -t$, $dx = -dt$. Khi x biến thiên từ −a đến 0 thì t biến thiên từ a đến 0. Do đó:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx.$$

Vậy: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx$.

Do đó: $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu hàm số } f(x) \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu hàm số } f(x) \text{ lẻ.} \end{cases}$$

Chú thích 2: Nếu hàm số dưới dấu tích phân f(x) có dạng:

$$f(x) = g[\varphi(x)].\ \varphi'(x).$$

thì để tính tích phân $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[\varphi(x)].\varphi'(x)dx$,

ta đổi biến số $\varphi(x) = t$. Nếu $\varphi(x)$ biến thiên đơn điệu và có đạo hàm $\varphi'(x)$ liên tục trên [a, b] còn g(t) liên tục trên $[\varphi(a), \varphi(b)]$, ta có công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g[\varphi(x)].\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt. \qquad (6.8)$$

Ví dụ 6: Tính: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}$.

Đổi biến số sinx = t Hàm số sinx biến thiên đơn điệu và có đạo hàm cosx liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, theo công thức (6.8), ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{6 - 5t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{(t-2)(t-3)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2}\right) dt$$

$$= \left(\ln|t-3| - \ln|t-2|\right)\Big|_0^1 = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Bigg|_0^1 = \ln\frac{4}{3}.$$

2.4.2. Phương pháp tính tích phân từng phần

Giả sử u(x) và v(x) là những hàm số có đạo hàm liên tục trên [a, b].Từ công thức tính tích phân từng phần đối với tích phân bất định và công thức Newton - Leibniz, suy ra công thức:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (6.9)$$

Ví dụ 7: Tính $I = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Đặt u = arctgx, dx = dv. Ta có $du = \frac{dx}{1 + x^2}$, v = x. Theo (6. 9), ta được:

$$I = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Ví dụ 8 : Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, n là số nguyên dương.

Bằng phép đổi biến số $x = \frac{\pi}{2} - t$, bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh được rằng:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

Bây giờ, ta tính được $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ bằng phương pháp tích phân từng phần.

Đặt $u = \sin^{n-1}x$, $dv = \sin x dx$, ta có $du = (n-1)\sin^{n-2}x \cos x dx$, $v = -\cos x$, do đó:

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx\right]$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Suy ra: $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Trong đẳng thức trên, thay n bởi n – 2, ta được: $I_{n-2} = \dfrac{n-3}{n-2} I_{n-4}$.

Tiếp tục làm như vậy, cuối cùng ta đi tới

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \text{ nếu n chẵn hay}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ nếu n lẻ.}$$

Như vậy, nếu n chẵn, n = 2m, thì $I_{2m} = \dfrac{(2m-1)(2m-3)...3.1}{2m(2m-2)...4.2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$. (6.10)

Nếu n lẻ, n = 2m + 1, thì $I_{2m+1} = \dfrac{2m(2m-2)...4.2}{(2m+1)(2m-1)...5.3}$. (6.11)

§3. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.1. Tính diện tích hình phẳng

3.1.1. Diện tích hình phẳng trong hệ toạ độ đề-các vuông góc

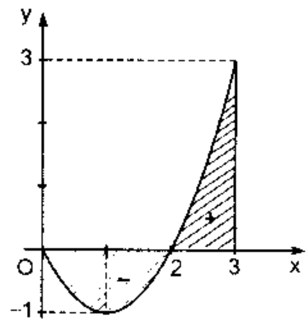
• Ta đã biết rằng nếu hàm số f(x) liên tục, không âm trên [a, b] thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường cong y = f(x), trục Ox và các đường thẳng x = a, x = b là: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Nếu $f(x) \le 0$ trên [a, b] thì: $S = -\int_a^b f(x)dx$.

Do đó trong mọi trường hợp, ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (6.12)$$

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = x^2 - 2x$, trục Ox và hai đường x = 0, x = 3 (hình 6.4).



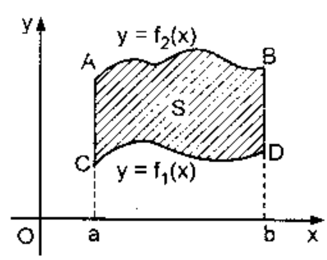
Hình 6.4

Vì $x^2 - 2x \le 0$ với $0 \le x \le 2$, $x^2 - 2x \ge 0$ với $2 \le x \le 3$, ta có:

$$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^3 = \frac{8}{3}.$$

• Trường hợp hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong liên tục $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$



Hình 6.5

và hai đường thẳng x = a, x = b (hình 6.5) thì diện tích S bằng:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx. \qquad (6.13)$$

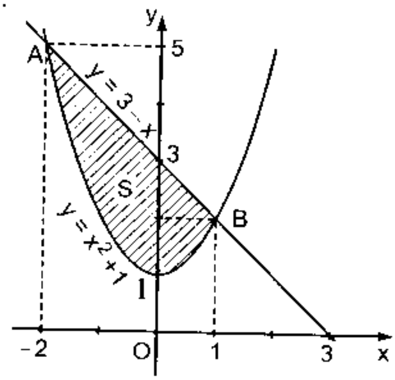
Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $x + y = 3$ (hình 6.6).

Trước hết, ta tìm hoành độ các giao điểm của hai đường đó bằng cách giải hệ hai phương trình: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

ta được : $x_A = -2$, $x_B = 1$.

Áp dụng công thức (6.13), ta có:

$$S = \int_{-2}^{1}\left[(3-x)-(x^2+1)\right]dx = \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx$$



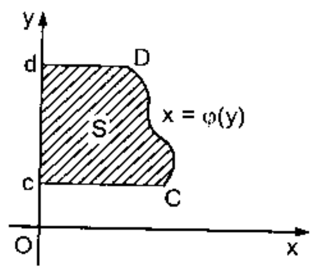
Hình 6.6

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - \left(-\frac{20}{6}\right) = 4,5.$$

• Nếu hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $x = \varphi(y)$, trong đó $\varphi(y)$ là hàm số liên tục trên $[c, d]$, trục Oy và các đường thẳng $y = c$, $y = d$ (hình 6.7).

Diện tích S của nó được tính theo công thức :

$$S = \int_{c}^{d}|\varphi(y)|dy. \qquad (6.14)$$



Hình 6.7

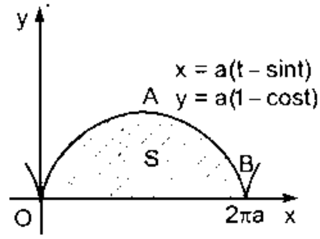
Nếu đường cong được cho bởi phương trình tham số: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

với $\alpha \le t \le \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, trong đó các hàm số $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ thì diện tích hình thang cong giới hạn bởi đường cong đó, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ được cho bởi công thức:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}|\psi(t)\varphi'(t)|dt. \qquad (6.15)$$

Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi một cung xiclôit:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$



và trục Ox (hình 6.8).

Áp dụng công thức (6. 15), ta có:

$\psi(t) = a(1 - \cos t)$, $\varphi'(t) = a(1 - \cos t)$,

Hình 6.8

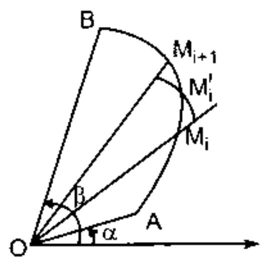
$$S = \int_0^{2\pi} \left| a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) \right| dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

3.1.2. Diện tích hình quạt cong trong hệ toạ độ cực

Giả sử cần tính diện tích S của hình quạt cong OAB giới hạn bởi đường cong cho bởi phương trình $r = r(\varphi)$ cho trong hệ toạ độ cực và hai tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $r(\varphi)$ là hàm số liên tục trên $[\alpha, \beta]$ (hình 6.9).



Chia hình quạt cong OAB thành n hình quạt cong nhỏ bởi các tia $\varphi = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ với:

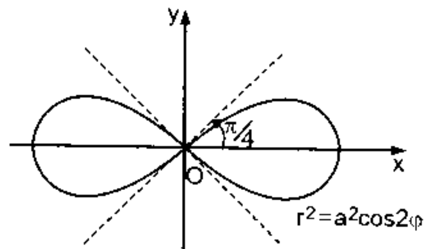
Hình 6.9

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_i < \varphi_{i+1} < ... < \varphi_n = \beta.$$

Đặt $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Diện tích hình quạt cong nhỏ thứ i xấp xỉ bằng diện tích hình quạt tròn có góc ở tâm là $\Delta\varphi_i$ và bán kính là $r(\varphi'_i)$, $\varphi_i \le \varphi'_i \le \varphi_{i+1}$, tức là xấp xỉ bằng $\frac{1}{2} r^2(\varphi'_i)\Delta\varphi_i$. Do đó: $S \approx \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} r^2(\varphi'_i)\Delta\varphi_i$.

Độ xấp xỉ càng tốt nếu n càng lớn, các $\Delta\varphi_i$ càng nhỏ, do đó theo định nghĩa của tích phân xác định:
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (6.16)$$

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường lemniscat $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. (hình 6. 10).



Hình 6.10

Vì tính đối xứng của đường lemniscat, chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ diện tích phải tìm. Áp dụng công thức (6. 16), ta có: $\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi$.

Do đó: $S = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = 2a^2\left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$.

3.2. Tính độ dài cung đường cong phẳng

- Giả sử cần tính độ dài s của cung đường cong AB có phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$, trong đó hàm số f(x) có đạo hàm liên tục trên đoạn [a; b].

Chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm:
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b \quad \text{(hình 6.11)}.$$

Gọi M_i là điểm có tọa độ $(x_i, f(x_i))$. Đặt: $\Delta x_i < x_{i+1} - x_i$. Nếu Δx_i khá nhỏ, độ dài cung $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ xấp xỉ bằng độ dài của dây cung $M_i M_{i+1}$, tức là xấp xỉ bằng $\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$,

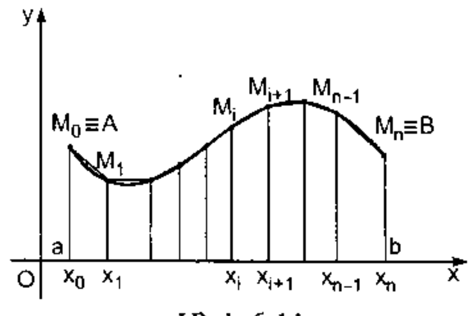
trong đó $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Theo công thức Lagrange, ta có
$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)\,\Delta x_i,\ x_i \le \xi_i \le x_{i+1}.$$

Do đó: $M_iM_{i+1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}.\Delta x_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}.\Delta x_i$.

Vậy: $s \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i$.

Độ xấp xỉ càng tốt nếu n càng lớn, các Δx_i càng nhỏ. Do đó:

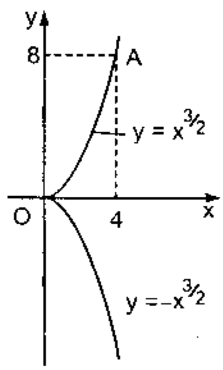
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx . \quad (6.17)$$



Hình 6.11

Ví dụ 5: Tính độ dài cung đường cong $y^2 = x^3$ từ điểm O(0; 0) đến điểm A(4, 8) (hình 6. 12).

Ta có: $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$. Đường cong gồm hai nhánh đối xứng qua trục Ox. Phần cung $\overset{\frown}{OA}$ phải tính ứng với nhánh nằm ở phía trên trục Ox và có phương trình $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$.



Hình 6.12

Áp dụng công thức (6. 17), ta nhận được:

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4} x\right)$$

$$= \frac{4}{9} . \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) .$$

• Trường hợp cung đường cong được cho bởi phương trình tham số:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta,$$

trong đó $\varphi(t)$, $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$, ta có:

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt .$$

Do đó: $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$. (6.18)

Ví dụ 6 : Tính độ dài đường axtrôit $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$ (hình 6. 13).

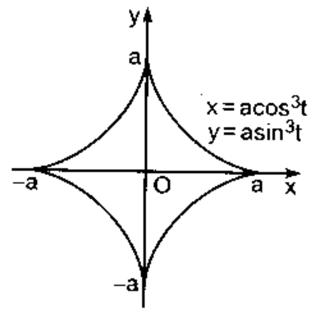
Vì tính đối xứng của đường axtrôit, chỉ cần tính $\frac{1}{4}$ độ dài của nó nằm trong góc phần tư thứ nhất, ứng với $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Áp dụng công thức (6. 18), ta có:

$$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,\ \psi'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t.\sin^2 t}dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt$$

$$= \frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \frac{3a}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$



Hình 6.13

Vậy $s = 6a$.

• Nếu cung đường cong được cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r(\varphi)$ có đạo hàm liên tục trong $[\alpha, \beta]$ thì dùng công thức liên hệ giữa toạ độ đề-các vuông góc và toạ độ cực, ta có: $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Có thể xem đó là hai phương trình tham số của cung đường cong AB. Do đó theo công thức (6. 18), ta có:

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi;$$

$$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi;$$

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = r'^2(\varphi\ ) + r^2(\varphi) = r'^2(\varphi) + r^2(\varphi).$$

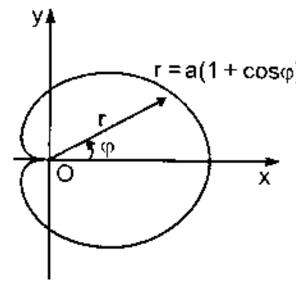
Vậy : $s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}d\varphi$. (6.19)

Ví dụ 7: Tính độ dài đường hình tim : $r = a(1 + \cos\varphi)$ với $a > 0$ (hình 6. 14).

Vì tính đối xứng của đường hình tim, nên chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ độ dài của nó ứng với φ biến thiên từ 0 đến π. Ta có:

$r'^2(\varphi) + r^2(\varphi) = a^2\sin^2\varphi + a^2(1 + \cos\varphi)^2 =$

$= a^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1 + 2\cos\varphi) = 2a^2(1 + \cos\varphi)$.



Hình 6.14

Áp dụng công thức (6. 19), ta nhận được:

$$\frac{1}{2}s = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2a^2(1 + \cos\varphi)}d\varphi$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

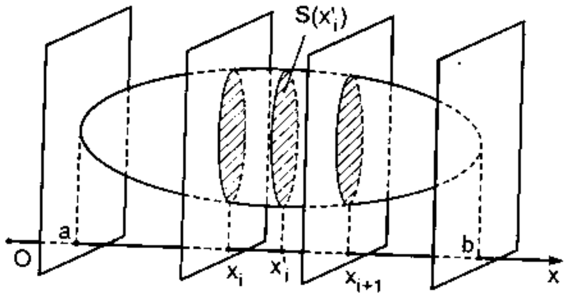
Vậy s = 8a.

3.3. Tính thể tích vật thể theo diện tích của các thiết diện song song

Cho một vật thể T giới hạn bởi một mặt cong kín mà ta đã biết diện tích S của mọi thiết diện của nó trên những mặt phẳng vuông góc, chẳng hạn với trục Ox. Giả sử $S = S(x)$, trong đó x là hoành độ của giao điểm của mặt phẳng với trục Ox (hình 6.15) và S(x) liên tục trên [a, b]. Ta cần tính thể tích V của vật thể T.

Chia [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia :

$$A = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$



Hình 6.15

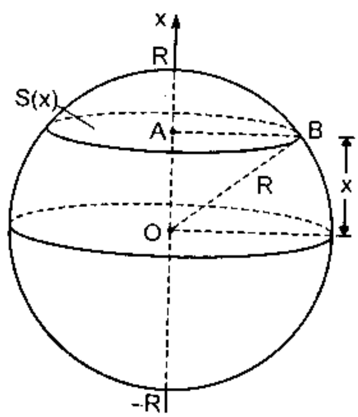
Qua mỗi điểm x_i dựng mặt phẳng vuông góc với trục Ox. Các mặt phẳng ấy chia T thành n vật thể nhỏ. Nếu $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ khá nhỏ, có thể xem thể tích của vật thể nhỏ thứ i xấp xỉ bằng thể tích hình trụ có chiều cao Δx_i và diện tích đáy $S(x_i'), x_i \le x_i' \le x_{i+1}$, tức là xấp xỉ bằng $S(x_i')\Delta x_i$. Do đó :

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i')\Delta x_i .$$

Vậy V là giới hạn của tổng $\sum\limits_{i=0}^{n-1} S(x_i')\Delta x_i$ khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$,

tức là: $V = \int\limits_a^b S(x)dx$. (6. 20)

Ví dụ 8: Tính thể tích hình cầu tâm O, bán kính R (hình 6.16).



Hình 6.16

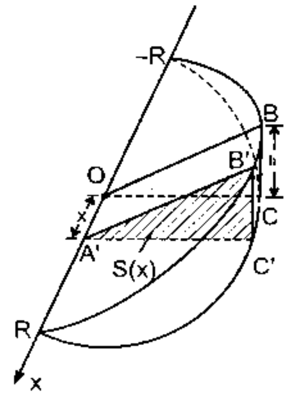
Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng, thẳng góc với trục Ox tại điểm x, ta được hình tròn tâm A bán kính AB. Trong tam giác vuông OAB, ta có: $AB^2 = OB^2 - OA^2 = R^2 - x^2$.

Do đó: $S(x) = \pi AB^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

Áp dụng công thức (6. 20), ta nhận được:

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Ví dụ 9 : Tính thể tích phần hình trụ đứng, bị cắt bởi mặt phẳng đi qua đường kính của đáy, biết rằng bán kính đáy là R và BC = h (hình 6. 17).



Hình 6.17

Cắt vật thể bằng một mặt phẳng, thẳng góc với trục Ox tại điểm x, ta nhận được thiết diện là tam giác A'B'C', đồng dạng với tam giác OBC, thiết diện của vật thể với mặt phẳng thẳng góc với trục Ox tại gốc O.

Diện tích S(x) của tam giác A'B'C' là :

$$S(x) = \frac{1}{2} B'C'.A'C'.$$

Trong tam giác vuông OA'C', ta có:

$$A'C' = \sqrt{OC'^2 - OA'^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Do sự đồng dạng của hai tam giác OBC và A'B'C', ta có:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{OC},\ B'C' = \frac{A'C'}{OC}.BC = \frac{h}{R}\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Vậy :

$$S(x) = \frac{1}{2}.\frac{h}{R}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$$

$$\text{và } V = \frac{h}{2R}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \frac{h}{2R}\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{2}{3}hR^2.$$

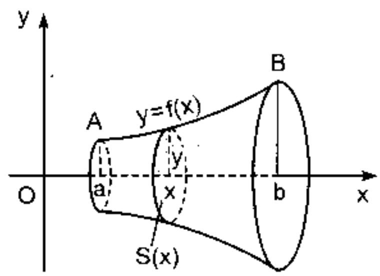
3.4. Tính thể tích vật thể tròn xoay

Giả sử cho hình thang cong aABb, giới hạn bởi đường cong y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a, x = b, quay xung quanh trục Ox ; f(x) là một hàm số liên tục trên đoạn [a, b]. Hãy tìm thể tích V của vật thể tròn xoay tạo nên bởi phép quay đó. Trong trường hợp này, thiết diện của vật thể với một mặt phẳng thẳng góc với trục Ox tại điểm x là một hình tròn, tâm tại điểm x, bán kính y = f(x) (hình 6. 18). Do đó :

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Theo công thức (6. 20), ta có:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \quad (6.21)$$



Hình 6.18

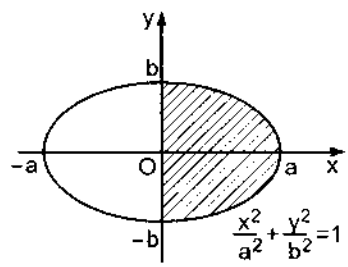
Ví dụ 10: Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Ox hình giới hạn bởi đường elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (hình 6.19)

Ta có: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Vì tính đối xứng của hình giới hạn bởi đường elip đối với trục Oy, nên chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ thể tích vật thể tròn xoay, ứng với x biến thiên từ 0 đến a. Áp dụng công thức (6. 21), ta nhận được:

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

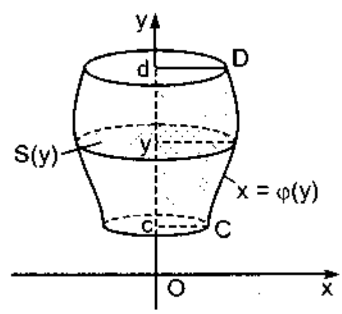


Hình 6.19

Vậy: $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Đặc biệt khi a = b, ta nhận được thể tích của hình cầu tâm O, bán kính a:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

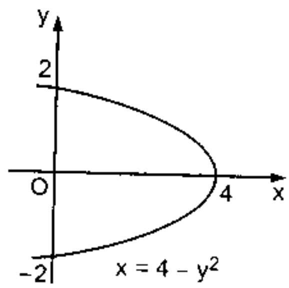


Hình 6.20

Trong trường hợp cần tính thể tích V của vật thể tròn xoay, tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Oy hình thang cong cCDd, giới hạn bởi đường cong x = φ(y), trục Oy và hai đường thẳng y = c và y = d với giả thiết rằng φ(y) là hàm số liên tục trên đoạn [c, d] (hình 6. 21), thì bằng cách đổi vai trò của x và y trong công thức (6. 21), ta có:

$$V = \int_c^d S(y)dy = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy. \quad (6.22)$$

Ví dụ 11: Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Oy hình giới hạn bởi đường $y^2 + x - 4 = 0$ và trục Oy (hình 6. 21)



Hình 6.21

Từ phương trình : $y^2 + x - 4 = 0$, ta có :

$x = 4 - y^2$. Vì tính đối xứng của hình phẳng đã cho đối với trục Ox, nên chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ thể tích vật thể tròn xoay, ứng với y biến thiên từ 0 đến 2. Áp dụng công thức (6. 22), ta có:

$$\frac{V}{2} = \pi\int_0^2 x^2 dy = \pi\int_0^2 (4 - y^2)^2 dy = \pi\int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)dy$$

$$= \pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right)\Bigg|_0^2$$

$$= \pi\left(16.2 - \frac{8}{3}.2^3 + \frac{1}{5}.2^5\right) = \frac{256}{15}\pi.$$

Vậy $V = \frac{512}{15}\pi$.

3.5. Tính diện tích mặt tròn xoay

Giả sử cho cung đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x)$, $a \le x \le b$, quay quanh trục Ox, hàm số f(x) được giả thiết là ≥ 0 và có đạo hàm liên tục trên [a, b]. Hãy tính diện tích S của mặt tròn xoay được tạo thành (hình 6. 22).

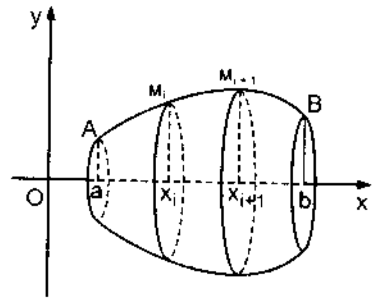
Chia đoạn [a, b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b.$$

$M_i\ (x_i; f(x_i))$ với $i = 0, 1, ..., n$ là những điểm trên cung $\overset{\frown}{AB}$, chúng chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ. Nếu $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ khá nhỏ, có thể xem diện tích của mặt tròn xoay do cung $\overset{\frown}{M_iM_{i+1}}$ quay quanh trục Ox xấp xỉ bằng diện tích của mặt nón cụt do dây cung M_iM_{i+1} quay quanh trục Ox sinh ra, tức là xấp xỉ bằng:

$$\pi M_iM_{i+1}\{f(x_i) + f(x_{i+1})\}.$$

trong đó (xem mục 3.2):



$$M_iM_{i+1} = \sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i, \quad x_i \le \xi_i \le x_{i+1}.$$

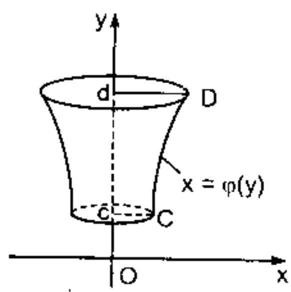
Hình 6.22

Do đó : $S \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]\Delta x_i$.

Người ta đã chứng minh được rằng khi $n \to \infty$ sao cho $\max \Delta x_i \to 0$ thì tổng trên dần tới: $2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$. Vậy: $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

Nếu f(x) có dấu bất kì và có đạo hàm liên tục trên [a, b] thì:

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (6.\ 23)$$



Hình 6.23

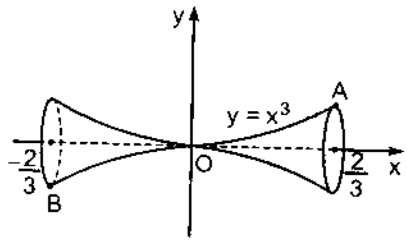
Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, các hàm số $\varphi(t)$, $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$, thì :

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \qquad (6.24)$$

Nếu cung đường cong $\overset{\frown}{CD}$ có phương trình $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, quay quanh trục Oy (hàm số $\varphi(y)$ được giả thiết là có đạo hàm liên tục) thì diện tích của mặt tròn xoay (hình 6. 23) là : $S = 2\pi\int_c^d |\varphi(y)|\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy$. (6. 25)

Ví dụ 12: Tính diện tích mặt tròn xoay sinh bởi sự quay quanh trục Ox của cung $y = x^3$ với $-\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$ (hình 6. 24).

Vì lí do đối xứng của đường tròn $y = x^3$ đối với tâm O, chỉ cần tính $\frac{1}{2}$ diện tích mặt tròn xoay ứng với x biến thiên từ 0 đến $\frac{2}{3}$.



Hình 6.24

Áp dụng công thức (6. 23), ta được: $S = 2.2\pi\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+9x^4}dx$.

Đổi biến số $1 + 9x^4 = t$, ta được $36x^3dx = dt$, $t = 1$ khi $x = 0$, $t = \frac{25}{9}$ khi $x = \frac{2}{3}$. Do đó :

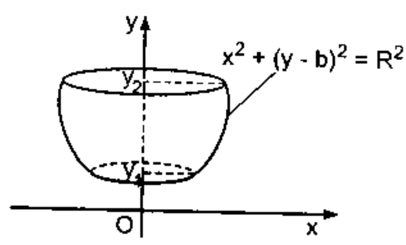
$$S = 4\pi\int_1^{\frac{25}{9}}\sqrt{t}\frac{dt}{36} = \frac{\pi}{9}\int_1^{\frac{25}{9}} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{\pi}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right) = \frac{196}{729}\pi.$$

Ví dụ 13 : Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên bởi sự quay xung quanh trục Oy của cung đường tròn $x^2 + (y - b)^2 = R^2$ giữa hai điểm $y = y_1$ và $y = y_2$ ($y_1 < y_2$).

Nếu cung đường tròn không cắt trục Oy thì khi quay xung quanh trục Oy, nó tạo nên một mặt gọi là đới cầu (hình 6. 25).

Lấy đạo hàm theo y hai vế của phương trình đường tròn, ta có :

$$2xx' + 2(y - b) = 0,\ xx' = -(y - b).$$



Hình 6.25

Thế vào công thức (6. 25), ta được:

$$S = 2\pi\int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+x'^2}dy = 2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{x^2+x^2x'^2}dy =$$

$$= 2\pi\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{R^2-(y-b)^2+(y-b)^2}\,dy = 2\pi R\int_{y_1}^{y_2}dy = 2\pi R(y_2-y_1) = 2\pi Rh,$$

trong đó $h = y_2 - y_1$ là chiều cao của đới cầu. Khi $h = 2R$, ta được diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

§4. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Khi định nghĩa tích phân xác định, ta đã giả thiết rằng khoảng lấy tích phân là hữu hạn và hàm số dưới dấu tích phân là bị chặn. Trong mục này, ta sẽ mở rộng khái niệm tích phân cho trường hợp khoảng lấy tích phân là vô hạn và trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn.

4.1. Trường hợp khoảng lấy tích phân vô hạn

Giả sử hàm số f(x) xác định trong khoảng $[a; +\infty)$ và khả tích trong mọi khoảng hữu hạn [a, b] với b > a. Khi đó $\int_a^b f(x)dx$ có nghĩa $\forall b > a$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, thì giới hạn đó gọi là *tích phân suy rộng* của hàm số f(x) trong khoảng $[a, +\infty)$ và được kí hiệu là: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Vậy
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (6.26)$$

Tương tự, nếu hàm số f(x) xác định trong khoảng $(-\infty, a)$ và nếu $\int_b^a f(x)dx$ có nghĩa với mọi b < a, ta định nghĩa:

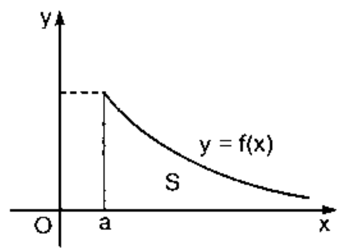
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{a} f(x)dx \qquad (6.27)$$

miễn là giới hạn ở vế phải tồn tại.

Khi đó, các tích phân suy rộng $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ gọi là hội tụ. Chúng được gọi là phân kì nếu chúng không hội tụ.

Nếu hàm số f(x) xác định trên toàn $\mathbb{R}$ và nếu cả hai tích phân suy rộng: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ đều hội tụ, ta nói rằng: $\int_{-\infty}^{+\infty}$ hội tụ và :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (6.28)$$



Hình 6.26

Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \geq a$ thì tích phân suy rộng $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ là số đo diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường y = f(x), trục Ox và đường thẳng x = a (hình 6. 26).

Chú thích: Theo công thức Newton – Leibniz, nếu F(x) là một nguyên hàm của f(x) thì: $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Nếu $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\lim_{b\to+\infty} F(b)$ là một số hữu hạn. Ta quy ước viết:

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty).$$

Khi đó ta có: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$.

Ví dụ 1 : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_0^{+\infty} = \text{arctg}(+\infty) - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0} = \text{arctg}0 - \text{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ví dụ 2 : Xét sự hội tụ của $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(a > 0)$.

Với $\alpha \neq 1$: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty} = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \text{nếu} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{nếu} \quad \alpha < 1. \end{cases}$

Với $\alpha = 1$: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty$.

Vậy: $\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ hội tụ khi } \alpha > 1 \text{, phân kì khi } \alpha \leq 1.}$ (6.29)

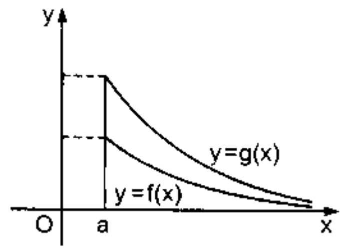
Nhiều khi không tính được giá trị chính xác của tích phân suy rộng, khi đó vấn đề quan trọng là xét xem nó hội tụ hay phân kì. Trong trường hợp đó, định lí sau đây rất có ích.

Định lí 6.4. (định lí so sánh) *Giả sử các hàm số* f(x) *và* g(x) *liên tục trong khoảng* [a, +∞) *và* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq a$.

1) *Nếu* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *cũng hội tụ.*

2) *Nếu* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *phân kì thì* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *cũng phân kì.*

Ta không chứng minh định lí này. Hình 6. 27 cho ta thấy ý nghĩa hình học của nó. Nếu đường y = f(x) nằm dưới đường y = g(x) thì diện tích S_2 của hình giới hạn bởi đường y = g(x), trục Ox và đường thẳng x = a hữu hạn, thì diện tích S_1 của hình giới hạn bởi đường y = f(x), trục Ox và đường x = a cũng hữu hạn. Còn nếu S_1 vô hạn thì S_2 cũng vô hạn.



Hình 6.27

Ví dụ 3: Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng:

1) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$; 2) $J = \int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$.

Giải. 1) Vì $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ hội tụ (do (6.29)) nên I hội tụ.

2) Vì $\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$, mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kì (do 6. 29)) nên J phân kì.

Ví dụ 4: Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Ta biết rằng không thể biểu diễn nguyên hàm của e^{-x^2} bằng những hàm số sơ cấp, nên không tính chính xác được $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Nhưng vì $e^{-x^2} \le e^{-x}$, $\forall x \ge 1$, mà $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ nên $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ.

Nếu hàm số f(x) đổi dấu trong khoảng lấy tích phân thì định lí sau có thể có ích.

Định lí 6.5. *Nếu* $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *hội tụ thì* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *hội tụ.*

Ta thừa nhận định lí này. Trong trường hợp này, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *hội tụ tuyệt đối.*

Chú thích: Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì thì chưa thể kết luận được gì. Vì cũng có khi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ mà $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì. Lúc đó, ta nói $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là *bán hội tụ.*

Ví dụ 5: Xét sự hội tụ của $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$.

Ta có: $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$, $\forall x \ge 1$, mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}dx$ hội tụ tuyệt đối.

4.2. Trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn

Giả sử hàm số f(x) liên tục trong khoảng [a, b) nhưng $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Khi đó, $\int_a^c f(x)dx$ có nghĩa với mọi c < b. Nếu tồn tại giới hạn : $\lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$,

thì ta định nghĩa tích phân suy rộng :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx .$$

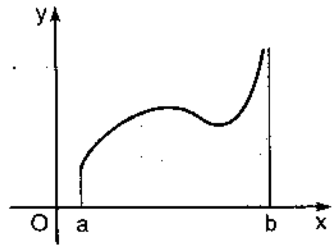
Nếu f(x) liên tục trong khoảng (a, b] nhưng $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx ,$$

miễn là giới hạn ở vế phải tồn tại.

Nếu f(x) liên tục trên [a; c) ∪ (c, b], nhưng $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$, ta định nghĩa:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$



Hình 6.28

Nếu $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b)$ thì tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ bằng số đo diện tích của hình giới hạn bởi đường $y = f(x)$, trục Ox, hai đường $x = a$ và $x = b$ (hình 6. 28).

Ví dụ 6:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1+0}\int_c^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to -1+0} \arcsin x\Big|_c^0 = \lim_{c\to -1+0}(-\arcsin c) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1-0}\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c\to 1-0}\arcsin x\Big|_0^c = \lim_{c\to 1-0}\arcsin c = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi .$$

Ví dụ 7: Xét sự hội tụ của $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ trong đó $a < b$, $\alpha > 0$.

Hàm số dưới dấu tích phân trở nên vô cùng tại $x = b$.

Với $\alpha \neq 1$, ta có: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c\to b^-}\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{c\to b^-}\left[-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^c\right]$

$$= \lim_{c\to b^-}\frac{1}{\alpha-1}\left[(b-c)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}\right].$$

Nhưng khi $c \to b^-$, $(b-c)^{1-\alpha} \to \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}.$

Vậy: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{nếu } \alpha > 1. \end{cases}$

Với $\alpha = 1$, ta có: $\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{c\to b^-} \int_a^c \frac{dx}{b-x} = \lim_{c\to b^-} -[\ln(b-c) - \ln(b-a)] = +\infty$.

Tóm lại: $\boxed{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \text{ hội tụ nếu } \alpha < 1, \text{ phân kì nếu } \alpha \geq 1.}$ (6. 30)

Đối với tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn trong khoảng hữu hạn, ta cũng có định lí so sánh tương tự như định lí 6.4.

Định lí 6. 6. Giả sử các hàm số f(x), g(x) liên tục trên [a, b), dần tới vô cùng khi x dần tới b và thoả mãn điều kiện : $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b)$.

1) Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.

2) Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kì.

Ví dụ 8: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng:

$$1)\ \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x}}dx, \qquad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\sin x}.$$

1) Hàm số dưới dấu tích phân dần tới ∞ khi $x \to 1^-$.

Vì $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$, mà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ hội tụ (do 6.30) nên $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x}}dx$ hội tụ.

2) Hàm số dưới dấu tích phân dần tới ∞ khi $x \to 0^+$.

Vì $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{1}{x\sin x} > \frac{1}{x}$ mà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x}$ phân kì nên $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\sin x}$ phân kì.

Ví dụ 9: Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^2}$.

Trong ví dụ này, khoảng lấy tích phân vô hạn và hàm số dưới dấu tích phân trở nên vô cùng x = 0. Ta viết:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^2} = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^2} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^2} = I_1 + I_2 .$$

Với $x \in (0, 1]$, ta có : $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^2} < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ mà $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ hội tụ (do (6. 30)),

nên I_1 hội tụ.

Với $x \in [1, +\infty)$, ta có: $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^2} < \frac{1}{x^2}$ mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ (do (6. 29)),

nên I_2 hội tụ. Vì I_1 và I_2 hội tụ nên $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^2}$ hội tụ.

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Định nghĩa và tích chất của tích phân bất định.

2. Phát biểu công thức đổi biến số và công thức tích phân từng phần trong tính toán tích phân bất định. Phạm vi ứng dụng của mỗi công thức.

3. Hai kết quả sau có mâu thuẫn với nhau không?

a) $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$.

b) $\int \sin 2x dx = 2 \int \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x d(\sin x) = \sin^2 x + C_2$.

4. Định nghĩa phân thức hữu tỉ, phân thức thực sự, phân thức đơn giản. Có mấy dạng phân thức đơn giản ?

5. Nêu phương pháp xác định các hằng số A, B, C, D trong phân tích phân thức hữu tỉ thực sự sau đây thành tổng các phân thức đơn giản :

$$\frac{x^2}{16-x^4}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{2+x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

6. Khi nào thì tính được tích phân bất định của các hàm số lượng giác và vô tỉ.

7. Định nghĩa và tính chất của tích phân bất định.

8. Phát biểu quan hệ giữa tích phân bất định và tích phân xác định.

9. Phát biểu công thức đạo hàm của tích phân xác định theo cận trên.

10. Công thức Newton -Lerbniz.

11. Phương pháp đổi biến số và phương pháp tích phân từng phần trong tính tích phân xác định.

12. Công thức tính diện tích hình phẳng trong hệ toạ độ.

13. Các công thức tính chiều dài cung đường cong.

14. Công thức tính thể tích vật thể theo diện tích của các thiết diện song song và vật thể tròn xoay.

15. Công thức tính diện tích mặt tròn xoay.

16. Định nghĩa tích phân suy rộng trong trường hợp khoảng lấy tích phân vô hạn. Định lí so sánh.

17. Định nghĩa tích phân suy rộng trong trường hợp hàm số dưới dấu tích phân không bị chặn. Định lí so sánh.

18. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Phân thức $\dfrac{x(x^2+9)}{x^2-9}$ có thể phân tích dưới dạng $\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+3}$, A, B là các hằng số.

b) Phân thức $\dfrac{x^2+9}{x(x^2-9)}$ có thể phân tích dưới dạng $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x+3}$, A, B, C là các hằng số.

c) Phân thức $\dfrac{x^2-9}{x(x^2+9)}$ có thể phân tích dưới dạng $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2+9}$, A, B là các hằng số.

d) Nếu f(x) và g(x) khả tích trên [a, b] thì:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

e) Nếu f(x) và g(x) khả tích trên [a, b] thì:

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx.$$

f) Nếu f(x) và g(x) liên tục trên [a, b], $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$ thì:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

g) Nếu f(x) và g(x) khả vi trên [a, b], $f(x) \geq g(x)$ với $a \leq x \leq b$ thì :
$f'(x) \geq g'(x)$ với $a \leq x \leq b$

h)Vì một nguyên hàm của $\dfrac{1}{x-1}$ là $\ln|x-1|$ nên :

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

i) Để tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, có thể đổi biến số x = sint, với $0 \leq t \leq \pi$.

j) Nếu f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$ là một hàm số khả vi trên $\mathbb{R}$.

k) Nguyên hàm của mọi phân thức hữu tỉ đều có thể biểu diễn được bằng các hàm số sơ cấp.

l) $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\sqrt{3}}}$ hội tụ.

BÀI TẬP

Dùng các tính chất của tích phân bất định, tính những tích phân sau:

1. $\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$; **2.** $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$; **3.** $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$;

4. $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; **5.** $\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

6. $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$; **7.** $\int\frac{(2^{3x}-3^{2x})^2}{2^{3x}3^{2x}}dx$;

8. $\int 3^{2x}(e^{3x}+2^x.5^{3x})dx$; **9.** $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$;

10. $\int\frac{1-5\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; **11.** $\int(3\text{tg}x-2\text{cotg}x)^2dx$.

Dùng phương pháp đổi biến số, tính những tích phân sau:

12. $\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}$; **13.** $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$; **14.** $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$;

15. $\int\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$; **16.** $\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$; **17.** $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$;

18. $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; **19.** $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$; **20.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1+\sqrt{x}}}$;

21. $\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; **22.** $\int e^{e^x+x}dx$; **23.** $\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+2}$;

24. $\int\frac{dx}{x^2+4x+8}$; **25.** $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx$; **26.** $\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx$;

27. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$; **28.** $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9+6x-3x^2}}$.

Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính các tích phân sau:

29. $\int(x^2+7x-5)\cos 2xdx$; **30.** $\int x^2e^{3x}dx$; **31.** $\int\arccos xdx$;

32. $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2}$;   33. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;   34. $\int \cos(\ln x) dx$;

35. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$;   36. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx$;   37. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ và $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$.

Sau đó, dùng kết quả nhận được, tính các tích phân sau:

a) $\int x \arcsin x dx$;   b) $\int \sqrt{x^2+2x+6}\, dx$;   c) $\int \sqrt{3+4x-x^2}\, dx$.

38. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Dùng phối hợp các phương pháp tính tích phân, tính những tích phân sau:

39. $\int x^5 e^{-x^2} dx$;   40. $\int e^{\sqrt{x}} dx$;

41. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;   42. $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2(1+x^2)}$.

Tính tích phân các hàm số hữu tỉ sau:

43. $\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx$;   44. $\int \frac{2x-5}{x^3-3x^2+4} dx$;   45. $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8} dx$;

46. $\int \frac{x^2+x-1}{x(x^2+1)^2} dx$;   47. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$;

48. $\int \frac{(x^4-1)dx}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}$;   49. $\int \frac{x^2+2}{x^4+3x^2+4} dx$.

Tính tích phân các hàm số lượng giác sau:

50. $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$;   51. $\int \frac{dx}{2+3\cos x}$;

52. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x-\cos^2 x}$;   53. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$;   54. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin^4 x}$;

55. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$;   56. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} dx$;   57. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$;

58. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$; **59.** $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$;

60. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$; **61.** $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$; **62.** $\int \cos x \cos^2 3x dx$.

Tính tích phân các hàm số vô tỉ sau:

63. $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$; **64.** $\int \dfrac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$; **65.** $\int \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} dx$;

66. $\int \dfrac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$; **67.** $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$; **68.** $\int \dfrac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$;

69. Dùng định nghĩa tích phân xác định, tính: $\int_0^b x^2 dx$.

70. Chỉ rõ (không cần tính) tích phân nào lớn hơn:

a) $\int_0^1 \sqrt{e^{2x}+1}\, dx$ hay $\int_0^1 e^x dx$,

b) $\int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ hay $\int_0^1 x \sin^2 x dx$.

71. Chứng minh rằng: $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ nằm giữa $\dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$ và $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$.

Tính giá trị đúng của tích phân đã cho.

72. Ước lượng giá trị của tích phân: $I = \int_0^2 e^{x^2-x} dx$.

73. Chứng minh rằng: $\int_1^4 \sqrt{1+x^2} dx \geq 7{,}5$.

74. Tính cường độ trung bình I_m của dòng điện $I = I_0 \sin\omega t$ trên đoạn $\left[0, \dfrac{\pi}{\omega}\right]$,

trong đó $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, I_0 là giá trị lớn nhất của cường độ dòng điện.

75. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $F(x) = \int\limits_{1}^{x} \ln t\,dt$, $(x > 0)$;

b) $F(x) = \int\limits_{x}^{0} \sqrt{1+t^4}\,dt$;

c) $F(x) = \int\limits_{2}^{e^x} \frac{\ln z}{z}\,dz$;

d) $F(x) = \int\limits_{x^2}^{1} \ln x\,dx$.

76. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \int\limits_{x}^{5} \sqrt{1+t^2}\,dt$ tại $x = 0$ và $x = \frac{3}{4}$.

Dùng công thức Newton - Leibniz, tính những tích phân xác định sau:

77. $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$;

78. $\int\limits_{4}^{9} \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$;

79. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}$;

80. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Dùng phương pháp đổi biến số, tính những tích phân xác định sau:

81. $\int\limits_{0}^{1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$;

82. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

83. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$;

84. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2}$;

85. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$;

86. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$;

87. $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$;

88. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}\,dx$;

89. $\int\limits_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

90. $\int\limits_{3}^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}\,dx$;

91. $\int\limits_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $(a > 0)$;

92. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$;

93. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$;

94. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

95. Chứng minh rằng: Nếu f(x) là hàm số tuần hoàn chu kì T thì :

$\int_a^{a+T} f(x)dx$ không phụ thuộc a, nghĩa là: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Áp dụng: Tính $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$.

Dùng phương pháp tích phân từng phần, tính những tích phân xác định sau:

96. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$; **97.** $\int_0^1 xe^{-x}dx$; **98.** $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$;

99. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$; **100.** $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$; **101.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau:

102. $y^2 = 9x$ và $y = 3x$.

103. $y = x^3$, $y = 8$ và trục Oy.

104. $y = x^2$, $y = 2 - x$ và trục Ox.

105. $y^2 = 2x + 4$, $y = -2$ và $y = \frac{3x}{2} - 5$ (phần diện tích nằm ở phía trên đường $y = -2$).

106. $y = 6x - 3x^2$, $x = 3$ và trục Ox.

107. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

108. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

109. $r = a\cos 2\varphi$.

110. $r = a(1+\cos\varphi)$.

111. Tính độ dài cung đường cong:

a) $y = \ln x$ từ $x = \sqrt{3}$ đến $x = \sqrt{8}$;

b) $y = \frac{x^2}{2} - 1$ giới hạn bởi trục Ox.

112. Tính chu vi hình phẳng giới hạn bởi các đường cong:

$$y^3 = x^2 \text{ và } y = \sqrt{2 - x^2}.$$

113. Tính độ dài một cung xyclôit: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ với $0 \le t \le 2\pi$.

114. Tính độ dài đường tròn trong hai trường hợp:

a) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$;

b) $r = R$ (phương trình đường tròn tâm O, bán kính R trong hệ toạ độ cực).

115. Tính thể tích phần hình trụ đứng, bị cắt bởi mặt phẳng đi qua đường kính 2R của đáy và tạo với mặt phẳng đáy góc α.

116. Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Ox hình giới hạn bởi các đường cong:

a) $y^2 = 4x$ và $x = 4$;

b) $2y = x^2$ và $2x + 2y - 3 = 0$.

117. Tính thể tích vật thể tròn xoay, tạo nên bởi phép quay xung quanh trục Oy hình giới hạn bởi đường e lip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

118. Tính diện tích mặt tròn xoay, tạo nên bởi phép quay:

a) Xung quanh trục Ox cung parabol $y^2 = 2px$ với $0 \le x \le a$.

b) Xung quanh trục Oy đường elip: $4x^2 + y^2 = 4$;

c) Xung quanh trục Ox một cung xyclôit: $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ với $0 \le t \le 2\pi$.

119. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau và tính nếu chúng hội tụ :

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$; b) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$; c) $\int_0^{+\infty} x\cos xdx$; d) $\int_0^1 \ln xdx$.

120. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)dx}{1+x^2}$; b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}$; c) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

ĐÁP SỐ

1. $4\ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$;

2. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$;

3. x − arctgx + C

4. $\text{arctg}x - \frac{1}{x} + C$;

5. $\frac{3}{13}x^4.\sqrt[3]{x} - \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x} + C$;

6. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C$;

7. $\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln\frac{8}{9}} - 2x + \frac{\left(\frac{9}{8}\right)^x}{\ln\frac{9}{8}} + C$;

8. $\frac{(3^2.e^3)^x}{\ln(3^2.e^3)} + \frac{(3^2.2.5^3)^x}{\ln(3^2.2.5^3)} + C$;

9. x + cosx + C

10. 6tgx + 4cotgx + C;

11. 9tgx − 25x − 4cotgx + C;

12. $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} + \text{arctg}\frac{1}{x} + C$;

13. $\dfrac{-(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$; **14.** $\ln(e^x+e^{-x})+C$; **15.** $-\ln(3+e^{-x})+C$;

16. $-\dfrac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$; **17.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$; **18.** $2\sqrt{1+\sin^2 x}+C$;

19. $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$; **20.** $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$; **21.** $2\arcsin\sqrt{x}+C$;

22. $e^{e^x}+C$; **23.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2+1)+C$; **24.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{2}+C$;

25. $\ln\left|\dfrac{x-1}{x-0,5}\right|-2\ln|x^2-1,5x+0,5|+C$

26. $3\ln|x+3|+\dfrac{11}{x+3}+C$; **27.** $\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x-3}\right|+C$;

28. $-\sqrt{9+6x-3x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arcsin\dfrac{x-1}{2}+C$;

29. $(x^2+7x-5)\dfrac{\sin 2x}{2}+(2x+7)\dfrac{\cos 2x}{4}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$;

30. $\dfrac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C$; **31.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$;

32. $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}+C$; **33.** $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$;

34. $\dfrac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$; **35.** $\dfrac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}-\sqrt{1+x^2}+C$;

36. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$; **37.** $\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$,

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

a) $\dfrac{1}{4}\left[(2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right]+C$;

b) $\dfrac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+6}+\dfrac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+6}\right|+C$;

c) $\frac{x-2}{2}\sqrt{3+4x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+C.$

38. $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$;

39. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^4+2x^2+2)+C$;

40. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$;

41. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+C$;

42. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{x}\mathrm{arctg}x-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2+C$;

43. $\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+C$;

44. $\frac{1}{3(x-2)}+\frac{7}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$;

45. $x+\frac{7}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$;

46. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$;

47. $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right|-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^3+1}\right)+C$;

48. $\frac{1}{5}\left(\ln|x^5-5x|-\ln|x^5-5x+1|\right)+C$;

49. $\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-2}{x\sqrt{7}}+C$;

50. $\frac{1}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C$;

51. $\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right|+C$;

52. $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sin x+1-\sqrt{5}}{2\sin x+1+\sqrt{5}}\right|+C$;

53. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$;

54. $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2x+1)+C$ hoặc $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\sin^2 x+C$;

55. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2x)+C$;

56. $-\ln|\sin x-\cos x|+C$;

57. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}x)+C$;

58. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|+C$;

59. $\frac{1}{128}(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8})+C$;

60. $2\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x-\frac{1}{\operatorname{tg}x}+C$;

61. $-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2x}+3\ln|\operatorname{tg}x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x+C$;

62. $\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{20}\sin 5x+\frac{1}{28}\sin 7x+C$;

63. $\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln|\sqrt[12]{x^5}-1|)+C$;

64. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1}{16}(1+x)^2-\frac{1}{5}(1+x)+\frac{1}{7}\sqrt{1+x}+\frac{1}{4}\right)+C$;

65. $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}+C$;

66. $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$;

67. $\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C$;

68. $-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}+C$;

69. $\frac{b^3}{3}$;

70. a) Tích phân thứ nhất; b) Tích phân thứ hai;

71. $2\arcsin\frac{1}{3}$;

72. $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le I\le 2e^2$;

74. $\frac{2}{\pi}I_0$;

75. a) lnx; b) $-\sqrt{1+x^4}$; c) x; d) – 4xlnx;

76. – 1 và $-\frac{5}{4}$;

77. $\frac{7}{4}$;

78. $\frac{23}{3}$;

79. $\ln\frac{4}{3}$;

80. 2;

81. $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

82. $\frac{\pi}{2}$;

83. $\frac{1}{2}(4-\pi)$;

84. $\frac{13}{8}+8\ln 3-15\ln 2$; **85.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; **86.** $\frac{4}{3}$; **87.** 0;

88. $\frac{16}{3}$; **89.** $2(1+\ln 2)$; **90.** $8+\frac{9\pi}{2\sqrt{3}}$; **91.** $\frac{\pi a^4}{16}$;

92. $\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}$; **93.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; **94.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$;

95. $200\sqrt{2}$; **96.** $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$; **97.** $1-\frac{2}{e}$; **98.** $\pi^3-6\pi$;

99. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$; **100.** $\frac{\pi}{2}-1$; **101.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; **102.** $\frac{1}{2}$; **103.** 12;

104. $\frac{5}{6}$; **105.** 24; **106.** 4; **107.** $\frac{12}{5}\pi a^2$; **108.** πab;

109. $\frac{\pi a^2}{2}$; **110.** $\frac{32}{5}\pi a^2$;

111. a) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; b) $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$;

112. $2\left(\frac{13\sqrt{13}-8}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$; **113.** 8a; **114.** $2\pi R$;

115. $\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha$; **116.** a) 32π; b) $\frac{91}{3}\pi$ **117.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$;

118. a) $\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]$; b) $2\pi\left(1+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$; c) $\frac{64}{3}\pi a^2$.

119. a) 1; b) 1; c) phân kì; d) -1;

120. a) hội tụ; b) hội tụ; c) hội tụ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Trí - Tạ Văn Đĩnh - Nguyễn Hồ Quỳnh. Toán học cao cấp (3 tập). Nhà xuất bản Giáo dục 2000.

2. Dương Quốc Việt - Nguyễn Cảnh Lương - Đại Số - Nhà xuất bản Khoa học và Kĩ thuật 2003.

3. W. Keith Nicholson - Linear algebra with applications - Mc Graw Hill 2002.

4. James Stewart - Calculus - Brooks / Cole Publishing Company 1991.

5. Elie Azoulay - Jean Avignant (4 tomes). Mc Graw Hill 1991.

6. G. M. Gelfand - Bài giảng đại số tuyến tính (tiếng Nga) 1966.

7. N. S. Piskounov - Phép tính vi tích phân (tiếng Nga) 1960.

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung và sửa bản in :
PHẠM BẢO KHUÊ

Trình bày bìa :
BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :
TRẦN BÍCH VÂN

GIÁO TRÌNH TOÁN HỌC CAO CẤP - TẬP MỘT

Mã số : 7K613MS - DAI

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Công ty cổ phần In Diên Hồng 187B Giảng Võ - Hà Nội. Số in : 189/P. Số xuất bản : 89/111 - 05.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2005.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN – HÀ NỘI

TÌM ĐỌC SÁCH GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

1. Giáo trình toán học cao cấp T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
2. Giáo trình toán học cao cấp T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
3. Bài tập toán học cao cấp T1	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
4. Bài tập toán học cao cấp T2	Nguyễn Đình Trí (Chủ biên)
5. Giáo trình vật lý đại cương T1	Lương Duyên Bình
6. Giáo trình vật lý đại cương T2	Lương Duyên Bình
7. Bài tập vật lý đại cương T1	Lương Duyên Bình
8. Bài tập vật lý đại cương T2	Lương Duyên Bình
9. Hoá học đại cương	Lê Mậu Quyền
10. Vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn
11. Bài tập vẽ kỹ thuật	Trần Hữu Quế Nguyễn Văn Tuấn

Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở địa phương hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ;

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh ;

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

8934980534236

Giá : 24.000đ