

TRẦN VĂN ĐẮC

THỦY LỰC ĐẠI CƯƠNG



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



GS. TSKH. TRẦN VĂN ĐẮC

THUYẾT LỰC ĐẠI CƯƠNG

*Dùng cho sinh viên ngành xây dựng dân dụng,
công nghiệp và công nghệ môi trường*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Nội dung giáo trình được trình bày trong 10 chương với các tên gọi : Nhập môn ; Thủy tĩnh ; Cơ sở Động học và Động lực học của chất lỏng chuyển động ; Chuyển động thế và chuyển động xoáy của chất lỏng dòng song phẳng ; Sức cản thủy lực ; Tính toán thủy lực đường ống ; Chuyển động của chất lỏng qua lỗ, vòi ; Chuyển động đều không áp của chất lỏng ; Chuyển động ổn định không đều trong kênh hở và chương cuối cùng có tên là Lý thuyết thứ nguyên và tương tự đồng dạng.

Nhìn chung giáo trình có nội dung chính xác, phong phú, phương pháp diễn giải mạch lạc, lô gích, có thể dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên các ngành xây dựng dân dụng và công nghiệp, ngành công nghệ môi trường và làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các trường Đại học công nghệ.

Với những nội dung được trình bày, tác giả đã thể hiện sự am hiểu tường tận nội dung môn học và các môn có liên quan cùng với quá trình nhiều năm đã giảng dạy môn học trong trường Đại học Bách khoa Hà Nội nên việc cho xuất bản cuốn sách là một nhu cầu cần thiết.

Hà Nội, ngày 1 tháng 8 năm 2003

Người viết

GS. TS. NGUYỄN HỮU CHÍ

**Nguyên chủ nhiệm Bộ môn Thủy Khí Động lực
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội**

LỜI NÓI ĐẦU

Thủy lực là môn cơ học chất lỏng ứng dụng, thuộc loại kinh điển, từ lâu đã là nội dung giảng dạy của các trường đại học kỹ thuật lâu đời nhất trên thế giới. Ở nước ta nhiều trường đại học kỹ thuật ra đời cách đây gần nửa thế kỷ cũng tổ chức giảng dạy bộ môn này ngay từ những ngày đầu thành lập. Vì vậy giáo trình Thủy lực đã được nhiều tác giả biên soạn tùy mục tiêu đào tạo của từng loại trường nên đối tượng phục vụ, phân bố liều lượng nội dung cũng như cách tiếp cận có sự khác nhau, song bổ sung cho nhau với tư cách là tài liệu tham khảo. Nhờ đó thoả mãn được nhu cầu của người học, người tham khảo khi nhu cầu phát triển làm nảy sinh những vùng kiến thức đan xen. Ngoài ra, sự khác biệt còn tìm thấy trong mục tiêu hỗ trợ quá trình nhận thức và làm chủ kiến thức cũng như quá trình tiếp thu kiến thức của người học bằng những phương pháp chủ quan khác nhau mà các tác giả với hi vọng người học có thể có điều kiện lựa chọn cho mình cái phù hợp nhất.

Giáo trình này biên soạn với mục đích cung cấp lượng kiến thức tối thiểu, nhưng đủ dùng về thủy lực cho các sinh viên ngành xây dựng dân dụng và công nghiệp, ngành công nghệ môi trường, đồng thời có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho một số ngành kỹ thuật có những mảng kiến thức chung với hai ngành trên. Hướng đối tượng của nó là hỗ trợ cho các sinh viên coi trọng khâu tự học, ưa thích tư duy và chủ động trong việc tiếp nhận kiến thức mới đối với họ. Về quy mô kiến thức : giáo trình này hạn chế trong phạm vi 4 đến 5 học trình (tương đương 60 đến 75 tiết). Để đạt mục đích đề ra ở trên trong khâu biên soạn và các khâu tiếp theo chúng tôi cố gắng hạn chế tới mức tối đa sự thiếu triệt để trong khâu đề cập, những sai sót biên tập cũng như in ấn. Tất cả là chỉ để người đọc tin rằng những gì có trong tài liệu này là kết quả đúng, công thức đúng trên cơ sở phương pháp tư duy chấp nhận được và có thể dùng để kiểm tra kết quả hiểu biết của chính mình. Được như vậy thì mục đích hỗ trợ cho những nỗ lực tự học mới có cơ may đạt được. Giáo trình đã được đưa vào giảng dạy tại Trường Đại học Dân lập Đông Đô.

Tác giả chân thành cảm ơn GS. TS Nguyễn Hữu Chí Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, đã dành thời gian đọc và cho ý kiến nhận xét quý báu. Tác giả hết sức cảm ơn GS. TS Đoàn Đình Kiến, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội ; PGS. TS Nguyễn Văn Xuất, Học viện Kỹ thuật Quân sự ; và các bạn đồng nghiệp về sự động viên, khích lệ cho sự ra đời một giáo trình như thế này.

Cuối cùng, dù cố gắng đến đâu cũng chẳng thể tránh khỏi những sai sót, mong bạn đọc góp ý xây dựng mọi mặt để giáo trình này hoàn chỉnh hơn nữa. Chúng tôi chân thành cảm ơn.

Hà Nội, năm 2003

TÁC GIẢ

Chương I

NHẬP MÔN

1. Khái niệm chung

Thủy lực, còn có thể gọi là Cơ học chất lỏng ứng dụng, là một chương lớn trong cơ học các vật thể biến dạng, nghiên cứu các quy luật cân bằng và chuyển động cũng như biện pháp ứng dụng các quy luật này vào thực tiễn của chất lỏng và chất khí (Sau này gọi chung là chất lỏng, đồng thời thường dùng khái niệm chất lỏng chịu nén hay nén được để nói về các chất khí).

Thủy lực là một môn khoa học ứng dụng, rất gần gũi với hoạt động nghề nghiệp của các kĩ sư nói chung và kĩ sư xây dựng nói riêng.

Đối tượng nghiên cứu. Thủy lực nghiên cứu :

- + Các quy luật cân bằng và chuyển động của chất lỏng ;
- + Các biện pháp ứng dụng những quy luật đó vào thực tiễn.

2. Lược sử phát triển

Bộ môn Thủy lực có lịch sử phát triển rất lâu đời, bắt nguồn từ hàng mấy nghìn năm trước Công nguyên. Dấu tích của các công trình xây dựng quy mô lớn còn lưu lại đến ngày nay như các công trình dẫn thủy nhập điền (thủy lợi nông nghiệp), hệ thống cống tiêu thoát nước trong thành phố ; sự phát triển của ngành hàng hải, viễn dương chứng tỏ cư dân của nền văn minh trước đây đã nắm được những kiến thức ứng dụng rất sâu sắc về thủy lực. Thực vậy, trước Công nguyên người nông dân Ai Cập đã biết dùng một đoạn ống loe (ống dipphuzo) nối thêm vào miệng ống cũ để lấy được nhiều nước hơn vào ruộng của mình mà không phải trả thêm tiền bởi phí thủy lợi đã được ấn định theo kích thước ống dẫn từ sông máng.

Tuy nhiên, để trở thành một môn khoa học thực sự, có lí luận soi sáng, được chứng minh chặt chẽ, được thể nghiệm rõ ràng có lẽ phải sau khi Archimedes (Ac-si-met, năm 250 trước Công nguyên) phát kiến ra định luật vật nổi - lực đẩy Archimedes - bộ môn thủy lực mới ra đời với tư cách là một khoa học ứng dụng như cách hiểu ngày nay. Trước ông đã không ít các nhà khoa học, đồng thời là triết gia đã có những nhầm lẫn khi nghiên cứu, quan sát chuyển động của các vật thể trong đó có chất lỏng. Chẳng hạn như Aristoteles (ta thường gọi là A-ri-xtốt) cho rằng khi một vật chuyển động trong không khí (chuyển động do quán tính, không gắn máy động lực) phải có một lực thường xuyên tác động lên nó mà lực đó do không khí bao quanh sinh ra !

Leonardo da Vincit (Lê-ôn-na đờ Vanh-xi, 1452 - 1519 sau CN), cả về cách đặt vấn đề cũng như phương pháp tiếp cận, là người mở ra một giai đoạn mới - đúng với khí thế của thời kì phục hưng ở Châu Âu - bằng tư duy uyên bác, khoa học, đoạn tuyệt với tư duy triết học của Aristoteles, thay đổi quan niệm, thành một trường phái độc lập, do đó đã đạt nhiều

thành tựu khoa học trong nghiên cứu thủy lực như : nghiên cứu sức cản của chất lỏng lên vật thể chuyển động trong nó ; trong nghiên cứu về kĩ thuật bay lướt (cánh cố định) và bay vỗ cánh. Ông cũng là người đầu tiên dùng mô hình (thu nhỏ) để nghiên cứu chuyển động của chất lỏng. Tiếc rằng tư duy của ông vượt xa trước thời đại nên cũng gặp không ít khó khăn, trở ngại, trước hết là không có các đối tác thích hợp cho những ý kiến phản biện có tính thúc đẩy, một tập thể "tri kỉ" để có thể tiến xa hơn.

Sang thế kỉ thứ 17 Galilei (Ga-li-lê, 1564 - 1642) người có công đầu đưa định lí Archimedes vào khuôn khổ của môn cơ học tổng quát, nghiên cứu lực cản lên vật chuyển động trong không khí thông qua con lắc cơ học. Tiếp đó các học trò của ông như Torricelli (Tô-ri-xen-li, 1608 - 1647) và Castelli (Ca-xten-li, 1577 - 1642) đã đi sâu vào nghiên cứu và đã đạt được nhiều kết quả về quy luật phân bố áp suất khí quyển, dòng chảy qua lỗ và vòi, dòng chảy trong ống dẫn và lòng kênh, máng dẫn.

Isac Newton (I-zắc Niu-ton, 1642 - 1727) cũng là nhà bác học lớn trong ngành cơ học chất lỏng, có nhiều thành tựu trong nghiên cứu về lực cản của chất lỏng lên các vật, chỉ ra mối liên quan của nó đến bình phương của vận tốc chảy, đến các yếu tố hình dạng của vật thể, ma sát giữa chất lỏng và vật, đặc biệt là mô hình tuyến tính xác định ứng suất tiếp từ gradien vận tốc dòng chảy. Đây quả là những đóng góp to lớn, có giá trị thực tiễn đến tận ngày nay. Là bác học của mọi thời đại song ông cũng không tránh khỏi những chỗ chưa thấu đáo khi bỏ qua tác động của dòng quán sau vật, nên tính toán của ông thiên về giá trị cản lớn hơn. Daniel Bernoulli (Đa-ni-en Bec-nu-li, 1700 - 1783) và Leonhard Euler (Lê-ôn-na Ô-le 1707 - 1783) là những người đặt nền móng quan trọng cho thủy động lực học, một mảng quan trọng của bộ môn thủy lực, bằng các phương trình cơ bản trong thủy tĩnh học, thủy động học gắn liền với tên tuổi của các ông. D'Alambert cũng là một tên tuổi lớn, cùng thời và ngang tầm với Euler và Bernoulli, trong thủy lực D'Alambert quan tâm chủ yếu đến sức cản lên vật thể.

Còn có những tên tuổi khác có những đóng góp to lớn cho sự phát triển ngành khoa học này như Laplace (La pla'x, 1749 - 1827), Cauchy (Cô-si, 1789 - 1857), Lagrange (La-g' -răng-giơ', 1736 - 1813), Poisson (Poa-sông, 1781 - 1846), Navier (Na-vi-ê, 1785 - 1836), Stokes (X'tốc, 1819 - 1903), De Saint Venant (Đơ Xanh Vơ-năng, 1797 - 1886). Họ là các nhà toán học xuất sắc, tiếp cận bộ môn thủy lực bằng sắc thái riêng của mình. Đó là các giải pháp toán học, các mô hình toán học mô tả các quy luật trong thủy lực mà ngày nay vẫn còn nguyên giá trị.

Cuối thế kỉ 18 còn có Darcy (Đác-xi), Chézy (Sê-zi), Basin (Ba-zanh), Weissbach (Vây's-bắc) đi sâu vào các nghiên cứu lí thuyết nửa thực nghiệm và tiến hành nhiều thí nghiệm để kiểm chứng các kết quả nhằm đưa ra các công thức tính toán giúp cho việc ứng dụng thủy lực vào thực tiễn cuộc sống, mở đầu cho một hướng khoa học thực nghiệm trong lĩnh vực cơ chất lỏng, thủy lực.

Sự xích lại gần nhau giữa lí thuyết và thực nghiệm diễn ra hết sức mạnh mẽ vào cuối thế kỉ 19 khi sự hình thành các quan niệm mới về chuyển động của chất lỏng dựa trên những kết quả nghiên cứu cấu trúc vi mô của dòng chảy và thực sự phát triển trong thế kỉ 20 khi xuất hiện các thiết bị đo lường cao cấp giúp khẳng định đúng - sai của lí thuyết thông qua các mô hình thí nghiệm xuất phát từ phân tích thứ nguyên và lí thuyết tương tự - đồng dạng. Đó là điều dễ hiểu của quy luật phát triển, bởi lẽ lúc này nền công nghiệp chế tạo đã làm chủ được những công nghệ chính xác, cho phép chế tạo được các công cụ rất tinh vi.

Cuối thế kỉ 19, đầu thế kỉ 20 xuất hiện một loạt các nhà bác học Nga, các nhà bác học Xô viết. Họ đã có những đóng góp to lớn vào sự phát triển chung của nhân loại trong lĩnh vực cơ chất lỏng mà các đại diện tiêu biểu là Xiônôpki (lí thuyết bay, du hành vũ trụ), Petrôp (1836 - 1920 - nghiên cứu ma sát trong chảy tầng), Traplighin và Giukôpxki (chảy bao, lí thuyết cánh). Tiêu biểu cho các quốc gia châu Âu khác có Prandtl (1875 - 1953 - có nhiều đóng góp lớn trong nghiên cứu dòng rối, lớp biên, lực cản).

Trong nửa cuối của thế kỉ 20, sự phát triển của bộ môn thuỷ lực, mặc dù là một ngành khoa học truyền thống, có tính cổ điển, đã chuyển sang thời kì phát triển theo chiều sâu nhờ có các nghiên cứu hướng chuyên biệt sâu, các công cụ thí nghiệm, các phương tiện và công cụ toán học, đặc biệt là máy tính điện tử cùng các thiết bị ngoại vi hết sức tinh xảo nên - như ở các lĩnh vực khác - số các nhà bác học, khoa học của ngành tăng lên gấp bội.

Tại Việt Nam, ông cha ta cũng phải có những kiến thức thuỷ lợi sâu sắc thì mới có thể chế ngự phần nào những dòng sông hung dữ chẳng chịt khắp đất nước, mới có khả năng khai khẩn, cải tạo các dải đất ven biển, thau chua rửa mặn, biến nó thành tài sản quý giá cho đất nước. Các nhà khoa học ở nước ta ngày nay về lĩnh vực này chắc cũng không hiếm. Ngặt vì thiếu số liệu chính xác cả về con người cụ thể lẫn trường phái của họ, nên nói gì ở đây cũng khó đảm bảo sự nghiêm túc về khoa học. Hi vọng rằng đến một lúc nào đó chúng ta sẽ có đủ điều kiện để làm việc này.

3. Các tính chất vật lí chủ yếu của chất lỏng

3.1. Hệ đo lường

Khi khảo sát các tính chất vật lí của chất lỏng ta không thể không dùng các công cụ đo lường. Bởi vậy trước hết phải nói về các hệ đo lường sẽ dùng trong quá trình nghiên cứu sau này. Trong thực tiễn Việt Nam các kĩ sư của chúng ta thường sử dụng 2 hệ đo lường : *Hệ kĩ thuật MKGS, quy định*

- Độ dài đo bằng mét (m),
- Lực đo bằng kilôgam lực (kG),
- Thời gian đo bằng giây (s - secundum).

Như vậy, khối lượng sẽ có thứ nguyên quy dẫn từ quan hệ :

$$\text{Khối lượng} = \frac{\text{Lực}}{\text{Gia tốc}}$$

để dẫn đến "đơn vị đo lường" là $\text{kG.s}^2/\text{m}$.

Hệ đo lường quốc tế SI, quy định :

- Độ dài đo bằng mét (m),
- Thời gian đo bằng giây (s),
- Lực sẽ đo bằng “đơn vị đo lường quy dẫn” là newton : $1\text{N} = 1\text{kg m/s}^2$.

Từ đây có thể suy ra :

$$1\text{kG} = 9,81\text{kg m/s}^2 = 9,81\text{N}, \text{ nếu gia tốc trọng trường } g = 9,81\text{m/s}^2,$$

$$1\text{N} = 0,102\text{kG},$$

$$1\text{dyn} = 10^{-5}\text{N} = 1,02 \cdot 10^{-6}\text{kG}$$

Trong thực tiễn, để tiện người ta lấy $1\text{kG} = 10\text{N}$ và $1\text{N} = 0,1\text{kG}$.

Các đơn vị dẫn xuất khác cũng có thể suy ra từ các hệ đo lường như :

Áp suất đo bằng kG/cm^2 , kG/m^2 , dyn/cm^2 , atm (át-mốt-phe) ;

$$1\text{ Pa (pa-xcan)} = 1\text{N/m}^2 = 0,102\text{kG/m}^2$$

$$= 10\text{dyn/cm}^2 = 1,02 \cdot 10^{-5}\text{kG/cm}^2$$

$$= 9,87 \cdot 10^{-6}\text{ atm tuyệt đối}$$

$$= 7,5 \cdot 10^{-2}\text{mmHg}.$$

Đương nhiên, trong mỗi hệ đo lường người ta có thể dùng các đơn vị đo lường nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) sao cho thuận tiện, song cần lưu ý, đừng để nhầm lẫn khi tính toán). Ví dụ : mm, cm ; g (gam trọng lượng), g (gam khối lượng), v.v...

Ta cũng thường gặp 1kN (kilô niuton) = 1000N , 1MN (mêga niuton) = 10^6N ; 1kPa (kilô pa-xcan) = 1000Pa , 1MPa (mêga pa-xcan) = 10^6Pa .

3.2. Định nghĩa chất lỏng (nghĩa rộng, kể cả khí) :

Chất lỏng, khác với vật rắn, là loại vật chất có tính dễ chảy, chỉ dùng một lực rất bé có thể làm biến dạng/thay đổi hình dạng ; chất lỏng tự chảy dưới tác động của trọng lượng bản thân.

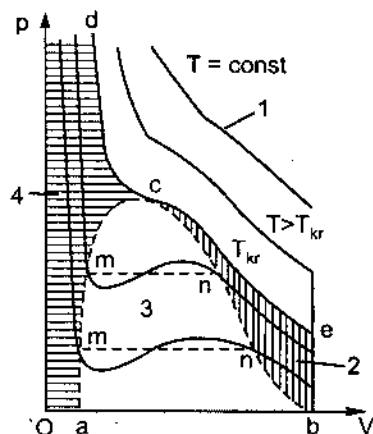
Ta phân biệt chất lỏng ra làm 2 loại : nén được (chịu nén) và không nén được (không chịu nén). Vậy các loại khí là chất lỏng nén được, còn vật chất ở thể lỏng đều được coi là chất lỏng không nén được. Trong một số trường hợp đặc thù người ta mới xem xét đến tính nén được của chúng, dù ở mức độ rất nhỏ so với thể khí.

3.3. Sự thay đổi thể tích của chất lỏng (nghĩa rộng) - Phương trình và biểu đồ trạng thái

Để hiểu sâu sắc tính chất của chất lỏng, hãy tìm hiểu hai trạng thái lỏng và khí của vật chất và trạng thái trung gian của nó là thể hơi (theo mạch của thuật ngữ “khí ướt”, “khí khô” – hơi, hơi quá nhiệt trong kỹ thuật) thông qua phương trình trạng thái Van der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = RT \quad (1-1)$$

trong đó : p - áp suất, V - thể tích khối khí đo bằng m^3 ; T - nhiệt độ tuyệt đối đo bằng K (độ Kenvanh); a và b là các hằng số ứng cho từng loại chất khí, R - hằng số chung của chất khí. Ví dụ đối với ôxi : $a = 273.10^{-5} atm$, $b = 143.10^{-5} cm^3$. Còn ở điều kiện $T = 273K$, $p = 1 atm$, lấy $V = 22,4 m^3$ (mol thể tích) thì $R = 847,83 kgm/^{\circ}C$. Bây giờ ta hãy giải thích biểu đồ của biểu thức (1-1) trên hình 1.1.



Hình 1.1

Đường cong d-c-e là đường nhiệt độ tới hạn. Các giá trị thể tích riêng, áp suất, nhiệt độ của đường này là các giá trị tới hạn. Trên đồ thị có 4 vùng đặc trưng khác nhau. Ở vùng thứ nhất, vùng nằm ở phía trên bên phải đường T_{kr} (hay đường $T^* = 1$) đặc trưng cho trạng thái khí (kể cả hơi quá nhiệt).

Ứng với miền này, khí dù có được tăng áp suất lên bao nhiêu để nén cũng không thể hoá lỏng được. Vùng thứ 2 giới hạn bởi biên e-c-b-phần tiếp của trục V đặc trưng cho thể hơi ("khí ẩm") có thể hoá lỏng bằng phương pháp nén, ép. Vùng thứ 3 có biên b-n-c-m-a là vùng hỗn hợp, có cả hơi bão hoà lẫn chất lỏng với tỉ lệ bất định. Vùng thứ 4 biên d-c-a-o-trục p đặc trưng cho vùng thuần chất lỏng. Các đường cong nằm trong vùng này rất dốc, thể hiện tính không chịu nén của chất lỏng.

Lưu ý rằng, có thể xác định các điểm cực đại, cực tiểu cục bộ và điểm uốn của các đường đẳng nhiệt trên đồ thị bằng cách giải các phương trình :

$$\frac{dp}{dV} = 0 \text{ và } \frac{d^2p}{dV^2} = 0 \quad (1-2)$$

Từ phương trình trạng thái trên có thể rút ra phương trình Gay-Lussac/Boyle-Mariotte quen thuộc

$$pV = RT \quad (1-3)$$

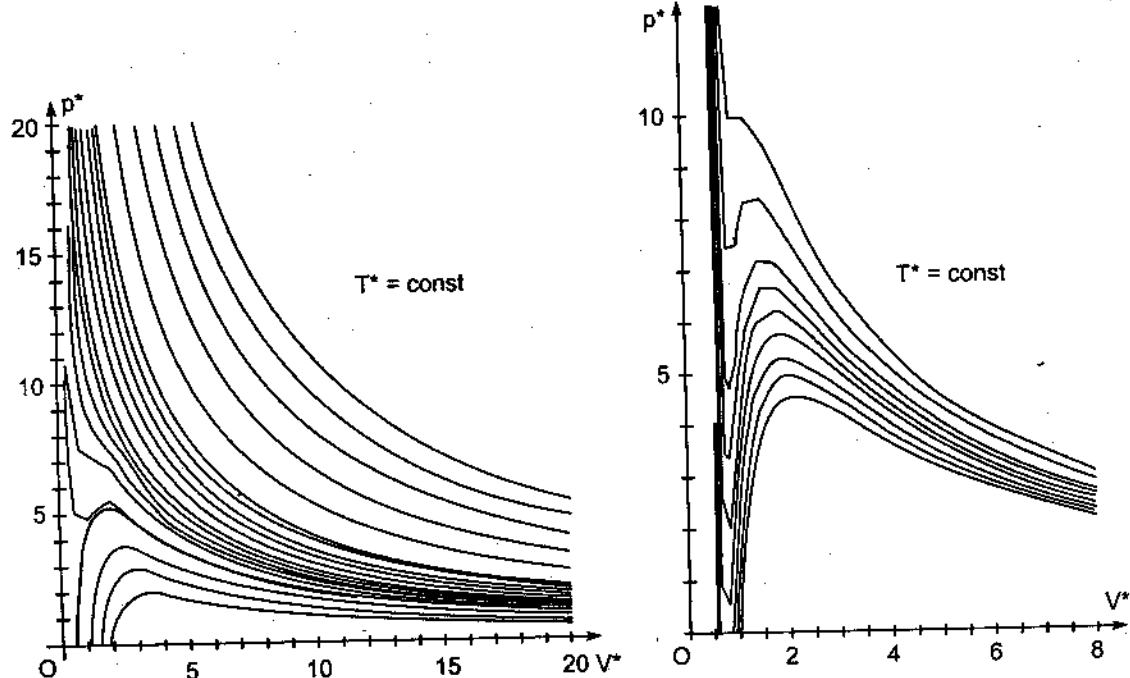
Nếu viết dưới dạng vạn năng (không thứ nguyên), bằng cách chia các biến số cho các trị số tới hạn tương ứng của nó :

$$p^* = p/p_{kr}, V^* = V/V_{kr}, T^* = T/T_{kr},$$

ta được :

$$\left(p^* \frac{3}{V^{*2}} \right) (3V^* - 1) = 8T^* \quad (1-4)$$

Hình 1.2 cho biểu đồ của phương trình Van der Waals (1-4) trong hệ tọa độ p^*OV^* với thông số là nhiệt độ T^* , nghĩa là các đường cong là những đường đẳng nhiệt. Ta thấy ở vùng khí (vùng thứ nhất) càng xa gốc tọa độ đường cong càng sát với đường hypebôn cho chất khí lí tưởng.



Hình 1.2

3.4. Mật độ/ khối lượng riêng, trọng lượng thể tích/trọng lượng riêng của chất lỏng

+ **Mật độ** (kí hiệu : ρ) của chất lỏng là khối lượng của một đơn vị thể tích của chất lỏng đó. Nếu tính đồng nhất được bảo đảm :

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (1-5a)$$

Nếu không, ta có mật độ cục bộ (hay mật độ địa phương) :

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dM}{dV} \quad (1-5b)$$

trong đó : M là khối lượng của thể tích khối chất lỏng V .

+ **Trọng lượng riêng của chất lỏng** là trọng lượng của một đơn vị thể tích khối chất lỏng đó. Nếu tính đồng nhất được đảm bảo thì :

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad (1-6a)$$

Nếu không, ta có trọng lượng riêng cục bộ :

$$\gamma = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dG}{dV} \quad (1-6b)$$

trong đó : G là trọng lượng của thể tích khối chất lỏng V .

Giữa mật độ và trọng lượng riêng tồn tại mối quan hệ :

$$\gamma = g\rho \quad (1-6c)$$

trong đó : g là gia tốc trọng trường còn gọi là gia tốc rơi tự do.

Người ta còn hay dùng khái niệm **tỉ trọng** (trọng lượng tương đối) là tỉ số giữa trọng lượng riêng của chất lỏng đang xét và của nước (H_2O) ở nhiệt độ $4^{\circ}C$:

$$\lambda = \frac{\gamma_{cl}}{\gamma_n}, \quad (1-6d)$$

trong đó : γ_{cl} là trọng lượng riêng của chất lỏng, γ_n là trọng lượng riêng của nước.

3.5. Tính chịu nén (nén được) do áp suất và sự giãn nở do nhiệt độ của chất lỏng

Như đã thấy ở biểu đồ Van der Waals, chất lỏng theo nghĩa hẹp (thể lỏng) có thể xem như không nén được theo khái niệm thông tục. Tuy nhiên, dưới sự gia tăng áp suất rất lớn độ giảm thể tích không thể bỏ qua. Nếu xem xét một cách tinh vi (theo mô hình vật lí chất lỏng hạt) dưới tác dụng của biến đổi áp suất thể tích ban đầu của chất lỏng cũng bị thay đổi một lượng nhất định. Đặc trưng cho quan hệ này là **hệ số nén thể tích**, thể hiện sự thay đổi tương đối về thể tích khi áp suất biến thiên 1 đơn vị :

$$\beta_v = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} \quad (1-7a)$$

trong đó :

V - thể tích ban đầu của khối chất lỏng ;

ΔV - độ thay đổi (lượng biến thiên) thể tích của lượng chất lỏng đó ;

Δp - độ biến thiên áp suất tương ứng.

Có thể chứng minh giữa hệ số nén thể tích ở trên với mô đun đàn hồi thể tích E_o của chất lỏng (một khái niệm quen thuộc trong cơ học hay sức bền vật liệu) tồn tại mối quan hệ :

$$\begin{cases} \beta_v = \frac{1}{E_o} \\ E_o = \frac{1}{\beta_v} \end{cases} \quad (1-7b)$$

3.6. Hệ số giãn nở nhiệt

Trong khoảng nhiệt độ từ $4^{\circ}C$ trở lên, như tuyệt đại đa số các vật liệu khác, khi nhiệt độ tăng, thể tích khối nước ban đầu cũng tăng lên (tương tự, trong nhiệt kế dùng chất lỏng). Trong đời sống kĩ thuật hiệu ứng này nhiều khi đóng vai trò hết sức quan trọng, chẳng hạn như trong ngành xăng dầu, một cây xăng có thể làm sai lệch một lượng không nhỏ giữa nhập và xuất (bán) nếu người ta tìm cách nhập xăng lạnh, bán xăng nóng có độ chênh nhiệt độ là vài độ. Chính vì vậy ngành đưa ra quy chuẩn hết sức chặt chẽ trong quản lí về mặt Nhà nước của mình.

Định nghĩa. Hệ số giãn nở nhiệt là lượng tăng tương đối thể tích chất lỏng khi nhiệt độ tăng lên $1^{\circ}C$, nghĩa là :

$$\beta_t = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (1-8a)$$

trong đó :

ΔV - lượng gia tăng thể tích khi nhiệt độ tăng ;

Δt - lượng gia tăng nhiệt độ.

Đối với nước, trong khoảng nhiệt độ từ 4°C trở lên, chẳng hạn nhiệt độ tăng từ 10°C đến 20°C và áp suất là 10^5 Pa có thể lấy gần đúng :

$$\beta_t = 0,0001/^{\circ}\text{C} \quad (1-8b)$$

Nếu giữ nguyên áp suất thì sự biến thiên mật độ theo nhiệt độ, từ định nghĩa và biểu thức hệ số dẫn nở nhiệt, tuân theo quy luật sau :

$$\rho_t = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_t(t - t_0)} \quad (1-8c)$$

trong đó : ρ_0 và t_0 là mật độ và nhiệt độ trong trạng thái ban đầu (lúc xuất phát). Ta đều biết, mật độ của chất lỏng là hàm của áp suất và nhiệt độ, nghĩa là :

$$\rho = \rho(p, t)$$

và :

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

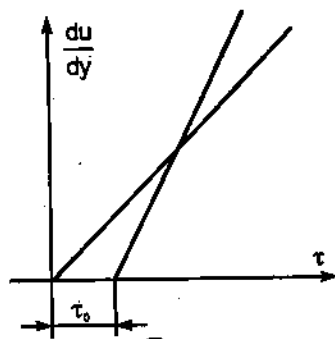
Biến thiên của mật độ là phi tuyến.

3.7. Tính nhớt của chất lỏng

Mặc dù khả năng chịu kéo của chất lỏng rất nhỏ, song cũng đủ tạo ra lực cản đối với các vật chuyển động trong nó. Tính nhớt là thuộc tính của chất lỏng chống lại sự di động. Mọi chất lỏng đều có tính nhớt nhất định được thể hiện dưới dạng ma sát khi có sự trượt tương đối giữa các phần tử chất lỏng.

Trong thực tế có những chất lỏng có độ nhớt rất cao (nhựa đường nóng, dầu nặng, glicerin,...) gây lực cản lớn đối với các vật thể chuyển động trong nó, nhưng lại là chất bôi trơn trong một số lĩnh vực công nghệ.

Hình 1.3 cho thấy với một phân bố vận tốc không đồng đều, các phần tử chất lỏng buộc phải trượt trên nhau gây ma sát



Hình 1.3

$$\tau = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} = \mu \frac{du}{dy} = \overline{\mu} \text{gradu}$$

trong đó : τ là ứng suất trượt hay ứng suất cắt, u là vận tốc, y là khoảng cách từ thành rắn đến lớp chất lỏng đang xét, μ là hệ số nhớt động lực học. Đây là mô hình xác định ma sát của chất lỏng do Newton đề xuất cho độ chính xác khá cao :

$$F = \tau.S = \overline{\mu}.S \text{gradu}$$

Từ ứng suất trượt ta có thể tính ra lực ma sát.

Độ nhớt động lực học trong hệ SI đo bằng $\text{Pa.s} = \text{Ns/m}^2$. Còn nếu đo trong hệ CGS ta dùng đơn vị Poiseuille (Poa-zoi) = dyn.s/cm^2 . Nếu dùng hệ MKGS đơn vị đo là kg.s/m^2 .

Độ nhớt động lực học phụ thuộc nghịch biến vào nhiệt độ, nghĩa là nhiệt độ tăng thì độ nhớt giảm và ngược lại, theo biểu thức sau :

$$\mu = \frac{0,00179}{1 + 0,0368t + 0,000221t^2} \quad (1-9)$$

Trong kĩ thuật người ta quen thuộc với khái niệm độ nhớt động học :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-10a)$$

liên quan đến tính giảm chấn, khả năng dập tắt chuyển động nhanh hay chậm, tức là liên quan đến quán tính của chất lỏng. Để minh họa, hãy so sánh nước với không khí. Mặc dù độ nhớt động lực học của nước lớn hơn của không khí, song do mật độ của nước lại gấp gần nghìn lần của không khí. Kết quả là độ nhớt động học của không khí lớn hơn, giúp nó nhanh chóng dập tắt các nhiễu động xảy ra trong không khí. Cụ thể hơn, tác động của sóng do một tàu thủy cao tốc còn kéo dài lâu hơn sau khi nó đi khỏi so với một máy bay phản lực lướt qua ở một khoảng cách gần.

Đơn vị đo độ nhớt động học là St (Stokes - Xtốc), để nhớ tới Stokes, nhà bác học người Anh, với $1\text{St} = 1\text{cm}^2/\text{s}$. Người ta còn dùng đơn vị $1\text{m}^2/\text{s} = 10^4\text{St}$. Độ nhớt động học được xác định bằng *nhớt kế Engler* và cho độ Engler ($^\circ\text{E}$). Nhớt kế này là loại thông dụng nhất trong các nhớt kế.

Để chuyển đổi từ độ nhớt quy ước tính bằng độ $^\circ\text{E}$ sang độ nhớt động học người ta dùng một số công thức chuyển đổi, như của Ubellot :

$$\nu = \left(0,0372^\circ\text{E} - \frac{0,0631}{^\circ\text{E}} \right) \times 10,4 [\text{St}] \quad (1-10b)$$

Ngược lại, từ St tính sang $^\circ\text{E}$, người ta dùng công thức Altsul :

$$^\circ\text{E} = 24 \left[2,3 \log \frac{\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \nu}{\sqrt{\nu^2 + 0,0166} - \nu} + \left(\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \sqrt{\nu^2 + 0,0166} \right) \right] \nu \quad (1-10c)$$

trong đó : ν đo bằng $\text{St} = \text{cm}^2/\text{s}$.

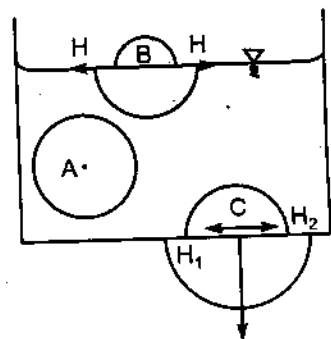
3.8. Sức căng mặt ngoài và hiện tượng mao dẫn của chất lỏng

Trong một khối chất lỏng không phải mọi phân tử chất lỏng đều cùng trong một điều kiện cân bằng như nhau. Phân tử nằm ở mặt tiếp xúc với chất khí (như ở mặt thoáng), với chất lỏng khác hay với vật rắn (thành bình) trong điều kiện cân bằng không đối xứng tâm như các phân tử nằm trong nội bộ chất lỏng mà điều kiện cân bằng của nó giống như của các phân tử bao quanh. Tại các mặt tiếp giáp, ngoài các tính chất chung còn có thể thấy

được một số hiện tượng có nguyên nhân chỉ có thể giải thích được bằng quan điểm phân tử. Đó là nguyên nhân sinh ra hiện tượng bám, lực dính, sức căng mặt ngoài và lực mao dẫn.

Lực bám dính có nguồn gốc điện từ của phân tử chất lỏng có cường độ rất lớn, tính bằng áp suất cỡ 10000 atm, nhưng chỉ trong tầm bán kính ảnh hưởng R khoảng $20 \div 50 \mu\text{m}$ ($1\mu\text{m} = 1$ phần triệu mét). Trong chất khí bán kính ảnh hưởng này của phân tử nhỏ hơn nhiều, nhưng ở chất rắn lại lớn hơn gấp bội.

Sơ đồ trên hình 1.4 có thể giúp giải thích cơ chế cân bằng lực của 3 loại phân tử chất lỏng đặc trưng : ở trong nội bộ chất lỏng (điểm A), trên mặt thoáng (điểm B) và nơi tiếp xúc với vách bình chứa - đáy và thành bên - (điểm C). Trên mặt thoáng, do có cường độ và bán kính ảnh hưởng chênh lệch về độ lớn, hệ thống lực đối xứng trục, trục giao với mặt thoáng và tổng hợp lực phân tử hướng vào chất lỏng, giữ không cho phân tử chất lỏng tách khỏi khối chất lỏng. Tương tự, ở các phân tử tiếp xúc với thành bình tổng hợp lực phân tử hướng trục giao vào thành rắn (gây lực bám). Các lực phân tử có xu thế làm giảm mặt thoáng của chất lỏng (theo nguyên lý tối thiểu hoá thế năng của hệ thống). Vì vậy chất lỏng loang ra bề mặt (chẳng hạn nước trên mặt kính sạch) hay rón lại thành hạt (như thủy ngân trên mặt kính sạch) hoàn toàn do sức căng bề mặt quyết định, trên hình vẽ đặc trưng bởi góc θ (xem hình 1.5) :

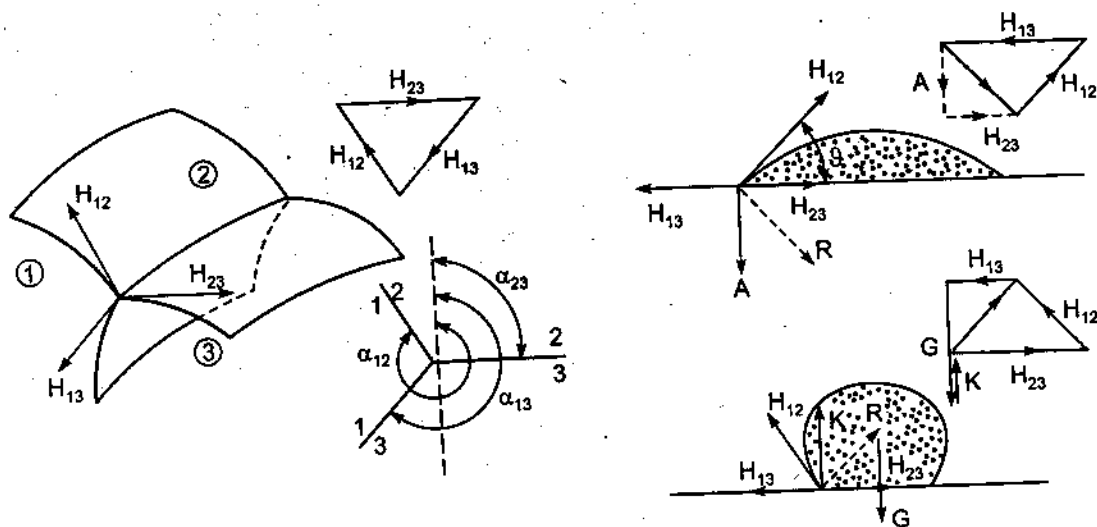


Hình 1.4

Nếu $\theta < 90^\circ$, chất lỏng bám vào thành rắn loang rộng ra ;

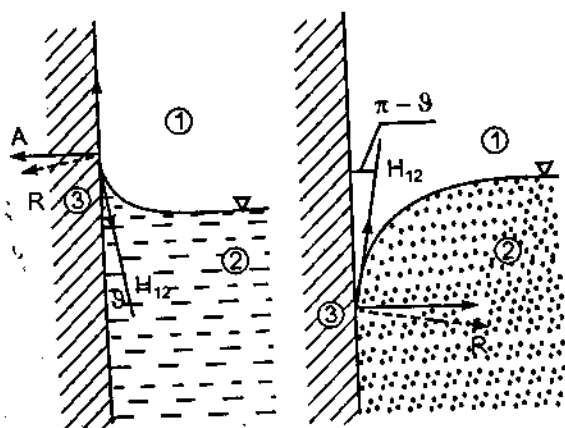
Nếu $\theta > 90^\circ$, chất lỏng không bám vào thành rắn, có xu thế co lại ;

Nếu $\theta = 180^\circ$, "hạt" chất lỏng như bị nén lại. (ví dụ hạt thủy ngân trên mặt kính).

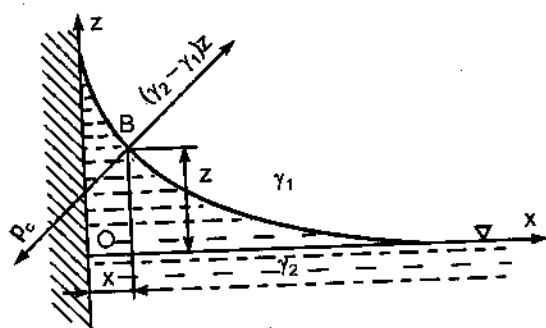


Hình 1.5

Những tính chất này đã được con người sử dụng có lợi cho mình trên nhiều lĩnh vực, từ phục vụ đời sống hàng ngày như sản xuất chảo chống dính đến các công trình xây dựng như chế tạo và sử dụng chất chống thấm lậu công trình ; tấm siêu thấm xử lý sự cố tràn dầu trong công nghệ môi trường ; trong công nghệ chế tạo vật liệu và linh kiện ở điều kiện vũ trụ. Tuy nhiên, sức căng bề mặt thông qua cơ chế mao dẫn lại làm sai lệch kết quả đo của các dụng cụ đo lường dùng độ cao của cột chất lỏng, làm tăng thêm sức cản của các dòng chảy trong các ống dẫn có kích thước rất nhỏ, nhất là trong các bộ lọc phân tử trong các thiết bị tách nito-ôxi không khí, trong hệ thống bơm nước vào vỉa giếng dầu (chỉ cho i-ông H_2O đi qua) ; làm đảo lộn một số quan niệm truyền thống trong ngành "công nghệ phân tử" (Nano Technology).



Hình 1.6



Hình 1.7

Sức căng bề mặt làm cho mặt thoáng bị cong, chủ yếu tại các vùng tiếp giáp giữa các vật chất khác nhau, gây thêm ứng suất bổ sung, làm cho áp suất vốn có tăng hay giảm một lượng nhất định tùy theo độ lớn của bán kính cong và tăng ở dạng lồi, giảm ở dạng lõm (hình 1.6 và 1.7). Áp suất bổ sung do sức căng mặt ngoài của chất lỏng được tính theo công thức của Laplace :

$$P_{bm} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1-11)$$

trong đó : σ - sức căng bề mặt [N/m]

R_1, R_2 - các bán kính chính của phân tử mặt thoáng (trục giao nhau).

Sức căng bề mặt của chất lỏng phụ thuộc vào nhiệt độ theo quan hệ sau :

$$\sigma = \sigma_0 - \beta \Delta t \quad (1-12)$$

trong đó : σ_0 - sức căng bề mặt khi tiếp xúc với không khí ở nhiệt độ 0°C , ví dụ với nước :

$\sigma_0 = 0,076 \text{ N/m}$;

β - hệ số tỉ lệ, bằng $1,5 \times 10^{-4} \text{ N/m}^\circ\text{C}$.

Như vậy, ở nhiệt độ 20°C giữa nước và không khí : $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$ và giữa thủy ngân với không khí : $\sigma = 0,48 \text{ N/m}$.

Áp suất bổ sung và chiều cao mao dẫn. Từ (1-11) và theo quy luật cân bằng thủy tĩnh (sẽ nghiên cứu ở Chương II), có phương trình cân bằng :

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (\gamma_2 - \gamma_1)z \quad (1-13)$$

trong đó : γ_1 là trọng lượng riêng của không khí, γ_2 là trọng lượng riêng của chất lỏng.

Trong trường hợp ống tròn đường kính d thì mặt thoáng là mặt cầu bán kính cong R_1 và R_2 bằng nhau ($=R$) và $d/2 = r = R \cos \vartheta$, cùng với lưu ý đến góc ϑ (xem H.1.8) từ (1-12) có thể viết :

$$h_{md} = \frac{4\sigma \cos \vartheta}{\gamma d} \quad (1-13a)$$

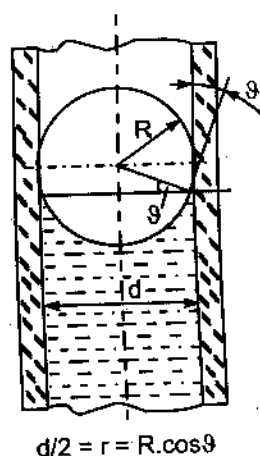
và sau khi đã bỏ qua trọng lượng riêng của không khí so với của chất lỏng mà trong kết quả cuối cùng ta kí hiệu là γ . Như vậy d càng nhỏ, chiều cao mao dẫn càng lớn. Nếu $\cos \vartheta \approx 1$, thì trong một số trường hợp nhất định :

$$h_{md} = \frac{4\sigma}{\gamma d} \quad (1-13b)$$

Điều đó giải thích khả năng tải nhựa của các cây cao đến năm bảy chục mét trong các rừng già ngàn năm.

Trường hợp trên bề mặt kính sạch hạt thủy ngân trong không khí gần như hình cầu. Lúc này có thể tính áp suất dư trong hạt bằng công thức sau :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} \quad (1-14)$$



$d/2 = r = R \cdot \cos \vartheta$

Hình 1.8

3.9. Chất lỏng phi Newton

Những chất lỏng, không tuân thủ định luật nhớt của Newton được gọi là chất lỏng phi Newton (chất lỏng lưu biến). Không loại trừ có những loại chất lỏng ở điều kiện này (chủ yếu liên quan đến nhiệt độ) là chất lỏng Newton, nhưng ở điều kiện khác lại không phải. Ví dụ vừa xây dựng, vừa khoan giếng, các sản phẩm dầu mỏ ở nhiệt độ gần đông cứng, các loại vừa cô-lô-ít (colloid) - như hồ bột gạo,... Với các chất lỏng loại này phải dùng một lực nhất định, đôi khi khá lớn, mới có thể làm cho chúng chuyển động và chỉ bắt đầu chảy khi ứng suất tiếp trong chất lỏng đạt một giá trị tới hạn nào đó gọi là ứng suất dịch chuyển ban đầu. Dưới ngưỡng đó chúng không chuyển động mà biến dạng đàn hồi như chất rắn.

Trong chất lỏng phi Newton ứng suất tiếp được xác định bằng công thức :

$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dy} \quad (1-15)$$

trong đó : τ_0 - ứng suất dịch chuyển ban đầu (giá trị tới hạn).

Độ nhớt của chất lỏng phi Newton - gọi là độ nhớt cấu tượng - ở nhiệt độ và áp suất đã định, phụ thuộc vào gradien vận tốc du/dy và sự phá huỷ cấu tượng của chất lỏng, có nghĩa là không đẳng hướng. Do đó độ nhớt không còn là sự tiếp xúc vật lí như đối với chất lỏng Newton.

3.10. Chất lỏng không nhớt - chất lỏng lí tưởng

Để giảm bớt khó khăn trong việc giải các bài toán thuỷ lực người ta sử dụng khái niệm này. *Chất lỏng lí tưởng được coi là chất lỏng giả tưởng có tính dịch chuyển-linh động tuyệt đối, hoàn toàn chỉ là một mô hình của chất lỏng thực, là một sự lí tưởng hoá cho những tiếp cận ban đầu : không nhớt, tuyệt đối không nén được, không dẫn nở nhiệt, không có khả năng chống lại lực cắt, lực kéo.* Các kết quả tính toán trên mô hình này là gần đúng, cần phải có biện pháp chỉnh lí, nếu thấy cần thiết.

4. Trạng thái ứng suất của chất lỏng

Các định luật trong thuỷ tĩnh và thuỷ động được xây dựng trên cơ sở các định luật cơ học môi trường liên tục - loại vật chất có các đặc trưng vật lí và cơ học là hàm số của toạ độ (trong hệ đã chọn) và thời gian. Cấu tạo phân tử của chất lỏng được thay thế bằng môi trường liên tục của cùng một chất. Điều đó cho phép xem xét sự cân bằng và chuyển động một cách tổng thể mà không cần tính đến cơ chế chuyển động của từng phân tử. Trong khối chất lỏng được coi là môi trường liên tục - theo nguyên lí đối ngẫu : lực và phản lực - dưới tác dụng của ngoại lực, xuất hiện các nội ứng lực tương thích. Để làm rõ, hãy tiếp cận vấn đề này qua khái niệm trạng thái ứng suất.

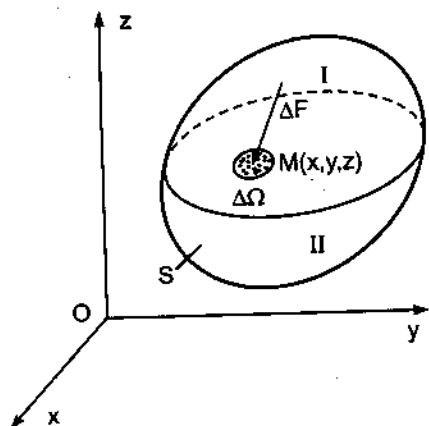
4.1. Định nghĩa trạng thái ứng suất

Trạng thái ứng suất tại một điểm trong chất lỏng là tập hợp (của vô cùng nhiều) các vectơ ứng suất tác dụng lên vô số tiết diện (của các mặt chứa chúng) đi qua điểm đó, mà vectơ ứng suất lại biểu thị nội lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tiết diện đi qua điểm đang xét của chất lỏng. Để tìm hiểu trạng thái ứng suất trong chất lỏng ta dùng phương pháp tiết diện. Bây giờ hãy hình dung một mặt phẳng Ω chia khối chất lỏng được bao bởi diện S khép kín ra làm 2 phần I và II (hình 1.9). Nếu bỏ phần I, để phần II vẫn được cân bằng như trong trạng thái cũ, trên mặt phân cách Ω cần phải đặt các lực thay thế được sự tác động trước đó của khối I lên khối II.

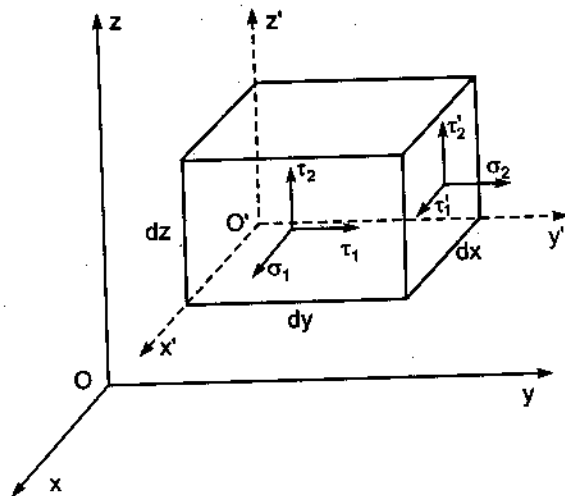
Như vậy, trên một diện tích nguyên tố $\Delta\Omega$ của mặt phân cách có một lực ΔF tác dụng lên khối chất lỏng II tại điểm M. Khi thu nhỏ $\Delta\Omega$ thành điểm M, cả ΔF lẫn $\Delta\Omega$ giảm dần và tiến tới 0, nhưng thương số của ΔF và $\Delta\Omega$ sẽ tiến tới một giới hạn nào đó (chứ không nhất thiết phải bằng 0) :

$$\lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta\Omega} = \sigma \quad (1-16)$$

là ứng suất tại điểm M của mặt phẳng Ω . Trị số ứng suất tại cùng một điểm phụ thuộc vào hướng đặt (pháp tuyến) của diện/mặt đó, đồng thời phương của ứng suất lập với pháp tuyến này một góc nhất định.



Hình 1.9



Hình 1.10

Tách một nguyên tố chất lỏng dạng hình hộp vuông (xem hình 1.10) có các cạnh là dx , dy và dz . Toàn bộ khối chất lỏng chuyển động được gắn với hệ toạ độ vuông góc $Oxyz$. Trên các mặt của hình hộp xuất hiện các ứng suất được phân ra các thành phần pháp và tiếp song song với các trục x , y , z . Đồng thời chúng tạo nên mômen lên một trục nào đó gây nên một gia tốc góc $d\omega/dt$ nào đó. Ví dụ lên trục z' có mômen :

$$\tau_1 dx dy dz - \tau'_1 dx dy dz$$

gây nên gia tốc : $d\omega/dt$ (ω là tốc độ góc).

$$\text{Do đó : } (\tau_1 - \tau'_1) dx dy dz = I(d\omega/dt)\rho$$

với I là mômen quán tính quanh trục z' . Có thể thấy ngay, mômen lực tỉ lệ bậc 3, còn mômen quán tính tỉ lệ bậc 4 với độ dài của vật thể (mômen lực = lực $\times$ cánh tay đòn) $\Rightarrow$ (lực) $\tau dy dz \times$ (cánh tay đòn) dx , hoặc (lực) $\tau dx dz \times$ (cánh tay đòn) dy ; các lực song song với trục z không gây mômen lên trục z . Khi giảm thể tích hình hộp xuống thành một điểm : $\tau - \tau' = 0$

Trên mặt hình hộp (hình 1.11) xuất hiện 3 ứng suất pháp và 3 ứng suất tiếp khác nhau về trị số :

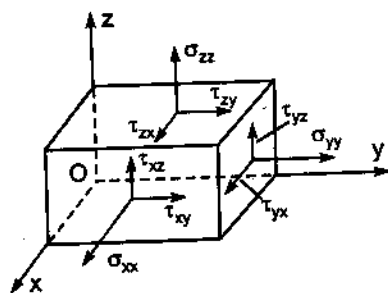
- dọc theo hướng trục x có ứng suất pháp $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ và các ứng suất tiếp τ_{zx} và τ_{yx} ,

- dọc theo hướng trục y có ứng suất pháp $\sigma_2 = \sigma_{yy}$ và các ứng suất tiếp τ_{xy} và τ_{zy} ,

- dọc theo hướng trục z có ứng suất pháp $\sigma_3 = \sigma_{zz}$; và các ứng suất tiếp τ_{xz} và τ_{yz} .

Đồng thời theo quy luật đối ứng của ứng suất tiếp

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_1; \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_2; \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_3.$$



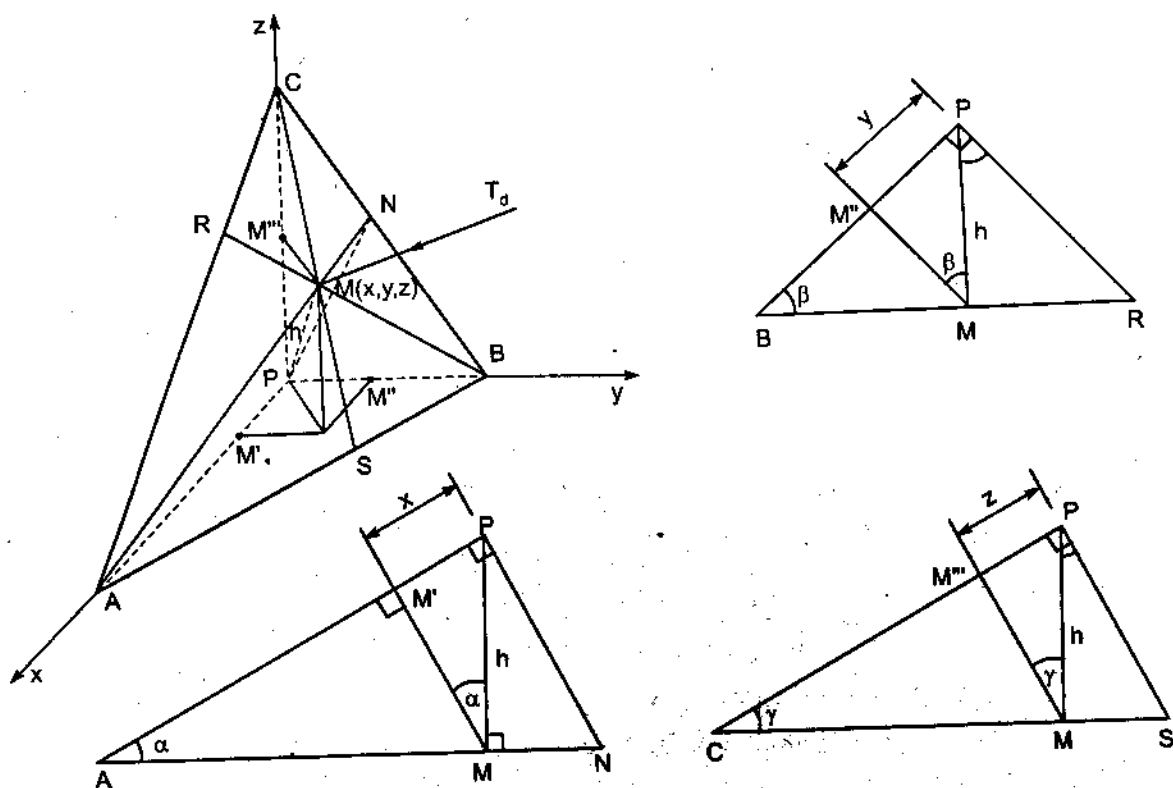
Hình 1.11

(1-17)

Lực tác động lên bề mặt hình hộp bằng tích của ứng suất xuất hiện trên diện tích đó và diện tích bề mặt đó, nghĩa là trên một tiết diện đã cho lực tỉ lệ thuận với độ lớn của tiết diện ấy. Ở trường hợp giới hạn, khi thể tích thu về một điểm, diện tích cũng tiến dần tới 0, lúc này chỉ còn các lực liên quan đến ứng suất tại điểm đó (theo khái niệm của ứng suất).

Cũng theo nguyên tắc cân bằng lực trong hệ cơ học, có thể nói, tại một điểm P bất kỳ trong chất lỏng chỉ cần biết 3 véc tơ ứng suất trên 3 mặt trực giao đi qua nó, ta có thể biết được ứng suất trên một tiết diện bất kỳ chứa điểm P.

Thực vậy, hãy xét cân bằng lực của phần tử khối chất lỏng hình tứ diện vuông PABC đỉnh P (hình 1.12) trong chất lỏng chuyển động chịu sự tác động của lực mật, lực khối - kể cả lực quán tính, lực động lượng.



Hình 1.12

Trên hình vẽ này các đoạn $PA = x^*$, $PB = y^*$, $PC = z^*$. Tại M, chân của đường cao từ đỉnh P của tứ diện trong đáy ABC có một tải do ứng suất T_d gây ra. Trên các mặt bên của tứ diện bị tải bởi 3 ứng suất đã biết là T_1 , T_2 , T_3 . Phương trình cân bằng ở đây là :

$$\vec{T}_d \Delta \Omega - \vec{T}_1 \Omega_1 - \vec{T}_2 \Omega_2 - \vec{T}_3 \Omega_3 + \rho \left(\vec{K} - \vec{q} \right) \Delta V - \rho \Delta V \Delta u = 0 \quad (1-18a)$$

trong đó : T_d - ứng suất tại đáy tứ diện ;

T_1, T_2, T_3 - các ứng suất trên các mặt bên $\Delta \Omega_1, \Delta \Omega_2, \Delta \Omega_3$;

ρK - lực khối, ρq - lực quán tính ;

$\rho \Delta V \Delta u$ - lực xung do biến thiên động lượng gây ra ;

u - vận tốc chuyển động của chất lỏng.

Chia cả 2 vế cho $\Delta \Omega$:

$$\vec{T}_d - \vec{T}_1 \cos(\vec{T}_1, \vec{i}) - \vec{T}_2 \cos(\vec{T}_2, \vec{j}) - \vec{T}_3 \cos(\vec{T}_3, \vec{k}) + \rho(\vec{K} - \vec{q}) \frac{\Delta V}{\Delta \Omega} - \rho \Delta \vec{u} \frac{\Delta V}{\Delta \Omega} = 0 \quad (1-18b)$$

với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục x, y và z .

Xét trường hợp giới hạn của $\Delta V / \Delta \Omega$ khi $\Delta \Omega$ tiến tới 0 với lưu ý là giữ cho pháp tuyến của mặt đáy không đổi bằng cách giữ cho tỉ số $x^* : y^* : z^*$ không đổi để không làm thay đổi trạng thái ứng suất tại điểm M. Biết rằng, bậc vô cùng bé/vô cùng lớn (còn nói là tốc độ tiến tới giới hạn) của ΔV lớn hơn của $\Delta \Omega$ một bậc nên $\Delta V / \Delta \Omega$ không thể tiến tới vô cùng. Do vậy hai số hạng cuối cùng của phương trình (1-18b) bằng 0. Nhớ lại rằng, mặt đáy ABC lấy tùy ý nên nó đại diện cho tất cả các khả năng có thể có của các tiết diện đi qua M và ở trường hợp giới hạn nó đi qua P. Như vậy khẳng định trên đã được chứng minh.

4.2. Mặt ứng suất

Có thể biểu diễn trạng thái ứng suất tại một điểm trong chất lỏng bằng một mặt cong bậc 2 như là hàm của ứng suất và hướng pháp tuyến ứng với các tiết diện đi qua điểm đó. Với phương pháp tư duy trên đây và theo định nghĩa của trạng thái ứng suất, cân bằng lực của tứ diện PABC ở trên (hình 1.12) với các ứng suất trên các mặt của tứ diện được phân thành các ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Nếu gọi các thành phần chiếu trục x, y , và z của vectơ ứng suất T_d lần lượt là X, Y , và Z , thì phương trình cân bằng lực sẽ là :

$$\begin{cases} X\Omega = \sigma_1\Omega_x + \tau_3\Omega_y + \tau_2\Omega_z = \sigma_1\Omega \sin\alpha + \tau_3\Omega \sin\beta + \tau_2\Omega \sin\gamma \\ Y\Omega = \sigma_2\Omega_y + \tau_1\Omega_z + \tau_3\Omega_x = \sigma_2\Omega \sin\beta + \tau_1\Omega \sin\gamma + \tau_3\Omega \sin\alpha \\ Z\Omega = \sigma_3\Omega_z + \tau_1\Omega_y + \tau_2\Omega_x = \sigma_3\Omega \sin\gamma + \tau_1\Omega \sin\beta + \tau_2\Omega \sin\alpha \end{cases} \quad (1-19)$$

trong đó : α, β, γ là góc tạo bởi h (tức AM) và các trục x, y, z (xem hình 1.12). Song, theo quan hệ hình học của các đại lượng trên hình vẽ ta có :

$$\sin\alpha = x/h ; \sin\beta = y/h ; \sin\gamma = z/h \Rightarrow x = h\sin\alpha ; y = h\sin\beta ; z = h\sin\gamma$$

Vì thế hệ (1-19) có dạng :

$$\begin{cases} X = (\sigma_1 x + \tau_3 y + \tau_2 z)/h \\ Y = (\sigma_2 y + \tau_1 z + \tau_3 x)/h \\ Z = (\sigma_3 z + \tau_1 y + \tau_2 x)/h \end{cases} \quad (1-20)$$

Đồng thời T_d có thành phần pháp tuyến là σ_n và thành phần tiếp τ_n (xem hình 1.12) nên có thể viết :

$$\sigma_n = T_d \cos(\vec{T}_d, \vec{n}) \quad (1-21a)$$

$$\tau_n = (T_d^2 - \sigma_n^2)^{1/2} \quad (1-21b)$$

Nếu tiếp tục phân các ứng suất σ_n và τ_n thành ra các thành phần $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ và τ_1, τ_2, τ_3 ra các thành phần chiều trục x, y, z ta có :

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \beta + \sigma_3 \sin^2 \gamma + 2\tau_3 \sin \alpha \sin \beta + 2\tau_1 \sin \beta \sin \gamma + 2\tau_2 \sin \gamma \sin \alpha \\ &= \sigma_1 (x/h)^2 + \sigma_2 (y/h)^2 + \sigma_3 (z/h)^2 + 2\tau_3 (x/h)(y/h) + 2\tau_1 (y/h)(z/h) + 2\tau_2 (z/h)(x/h) \quad (1-22)\end{aligned}$$

Từ đây có :

$$h^2 \sigma_n = \sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 + 2\tau_3 xy + 2\tau_1 yz + 2\tau_2 zx = 2f(x, y, z) \quad (1-23)$$

Nếu ta gọi M là đầu mút của đoạn kéo dài của h nối từ P dọc theo pháp tuyến n của mặt đáy ABC thì trong trường hợp giữ cho tích $h^2 \sigma_n$ không đổi ($= \text{const}$) ta được mặt ứng suất Cauchy như là quỹ tích của điểm M trong không gian 3 chiều x, y, z. Đây là mặt cong bậc 2 có tâm là điểm đối xứng (do phải đảm bảo nguyên lý đối ứng tác dụng và phản tác dụng luôn bằng nhau trong hệ cân bằng) nên nó chỉ có thể là mặt elipxôit hay hypebôlôit (kể cả các dạng suy biến của chúng). Bằng phép biến đổi tuyến tính trục tọa độ ta có thể xác định được hệ trục chính để ứng với nó chỉ có các ứng suất pháp chính, các ứng suất tiếp đều bằng 0. Lúc đó ta có phương trình dạng

$$\sigma_{11} x_1^2 + \sigma_{22} y_1^2 + \sigma_{33} z_1^2 = 2f(x_1, y_1, z_1) = \text{const} \quad (1-24)$$

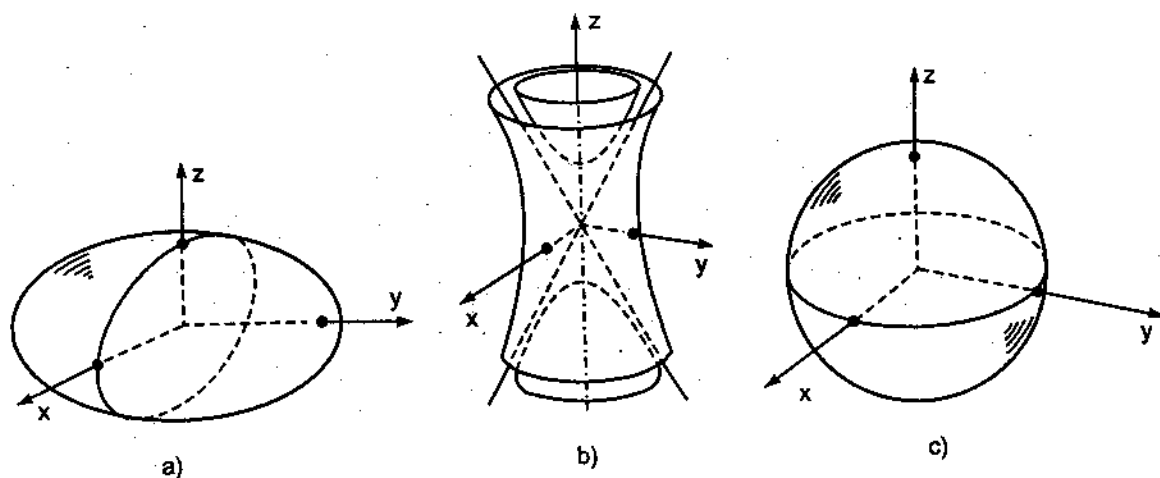
với các bán trục chính là :

$$a = \{2f(x_1, y_1, z_1)/\sigma_{11}\}^{1/2}; \quad b = \{2f(x_1, y_1, z_1)/\sigma_{22}\}^{1/2}; \quad c = \{2f(x_1, y_1, z_1)/\sigma_{33}\}^{1/2} \quad (1-25)$$

để có dạng chính tắc :

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} \pm \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad (1-26)$$

Dấu đại số của $f(x_1, y_1, z_1)$ và các ứng suất pháp quyết định mặt ứng suất là elipxôit hay hypebôlôit liên hợp (xem hình 1.13). Nếu tất cả là cùng dấu, mặt là elipxôit ; ngược lại, mặt là hypebôlôit.



Hình 1.13

Trên cơ sở ý nghĩa quy ước của mặt ứng suất có thể rút ra 2 tính chất cơ bản sau :

- Bình phương khoảng cách từ tâm tới một điểm bất kì của mặt (còn gọi là vectơ bán kính của điểm đó) tỉ lệ nghịch với ứng suất pháp tại tiết diện có pháp tuyến trùng với hướng bán kính đó ;

- Thương của ứng suất thành phần hướng theo trục tọa độ tương ứng và h là đạo hàm riêng của $f(x,y,z)$ theo x, y và z , nghĩa là :

$$\frac{1}{h} \text{grad} f(x,y,z) = \vec{T}_d \quad (1-27)$$

viết tường minh ra :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{h} (\sigma_1 x + \tau_2 z + \tau_3 y) = X ; \\ \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{h} (\sigma_2 y + \tau_1 z + \tau_3 x) = Y ; \\ \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{h} (\sigma_3 z + \tau_1 y + \tau_2 x) = Z. \end{aligned} \quad (1-28)$$

Về bản chất, trạng thái ứng suất liên quan trực tiếp đến sự biến dạng của vật chất tại điểm đang xét.

Khi đã có ứng suất chính trong hệ tọa độ chính thì thành phần ứng suất pháp trên một tiết diện nghiêng bất kì trong hệ tọa độ này - do ứng suất pháp trực giao với mặt tọa độ (x_1, y_1, z_1) - dễ dàng xác định được theo quan hệ :

$$X = \sigma_{11} \sin \alpha_1 ; Y = \sigma_{12} \sin \beta_1 ; Z = \sigma_{13} \sin \gamma_1 \quad (1-29)$$

và ứng suất trên mặt đang xét là :

$$\sigma = X \sin \alpha_1 + Y \sin \beta_1 + Z \sin \gamma_1 = \sigma_{11} \sin^2 \alpha_1 + \sigma_{12} \sin^2 \beta_1 + \sigma_{13} \sin^2 \gamma_1 \quad (1-30)$$

Trong cơ học chất lỏng người ta gọi trị số trung bình cộng :

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}) \quad (1-31)$$

của 3 ứng suất chính là áp suất. Giả thiết rằng :

$$\sigma_{11} - p = \Delta \sigma_1 ; \sigma_{12} - p = \Delta \sigma_2 ; \sigma_{13} - p = \Delta \sigma_3$$

thì :

$$\Delta \sigma_1 + \Delta \sigma_2 + \Delta \sigma_3 = 0$$

do định nghĩa của áp suất p và các đại lượng $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \Delta \sigma_3$ ở trên.

Lại biết rằng :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 \text{ và}$$

$$\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2 ; \sin^2 \beta = (1 - \cos 2\beta)/2 ; \sin^2 \gamma = (1 - \cos 2\gamma)/2$$

nên ta có
$$\sigma = p - \frac{(\sigma_{11} - p)}{2} \cos 2\alpha - \frac{(\sigma_{12} - p)}{2} \cos 2\beta - \frac{(\sigma_{13} - p)}{2} \cos 2\gamma .$$

Như vậy, ứng suất pháp trên tiết diện có hướng bất kì gồm 2 phần, một là áp suất p mà trị số của nó không phụ thuộc vào hướng đặt của tiết diện, một là thành phần bổ sung có trị số phụ thuộc vào hướng đặt của tiết diện.

Khi không có thành phần ứng suất tiếp,

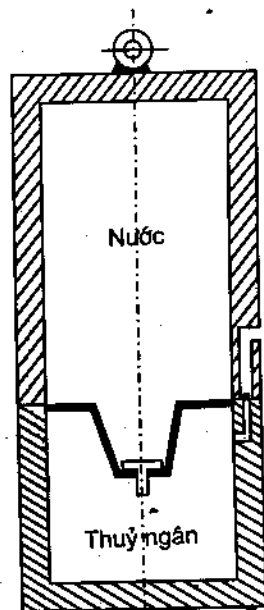
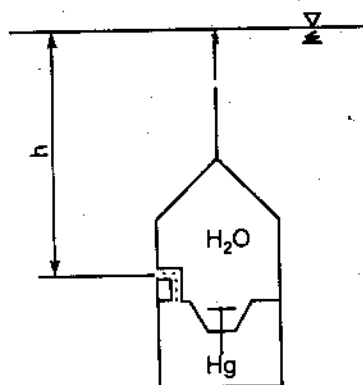
$$\sigma = \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = p.$$

Trong chất lỏng ở trạng thái nghỉ hay trong chất lỏng không nhớt ứng suất tiếp bằng 0, chỉ có ứng suất pháp đơn trị và nó bằng chính áp suất p , lúc này mặt ứng suất là mặt cầu, một dạng suy biến của elipxôit.

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG I

Bài 1. Đo độ sâu của đáy biển thông qua môđun đàn hồi thể tích của nước (chất lỏng). Nguyên lý hoạt động của thiết bị : Dụng cụ đo là một bơm hình chuông có 2 ngăn (hình 1.14), ngăn trên chứa chất lỏng, ngăn dưới chứa thủy ngân. So với thủy ngân thì nước đàn hồi gấp nhiều lần, do vậy ở đây có thể coi thủy ngân không có lại dưới tác động của áp suất cao. Đồng thời coi vách bơm rất cứng vững, không biến dạng.

Khi thả thiết bị xuống đáy biển khoang chứa thủy ngân thông với nước biển bao bọc xung quanh (có áp suất cao), dưới áp suất lớn ở đáy biển khối nước trong khoang bị nén lại, thủy ngân qua lỗ dẫn có van một chiều trào lên khoang chứa nước, điền đầy vào phần thể tích phát sinh do khối nước ban đầu co lại vì áp suất tăng lên đáng kể. Khi kéo thiết bị lên chất lỏng không thể chảy ngược qua van một chiều do khối nước lại nở ra vì áp suất giảm,



Hình 1.14

nên lượng thủy ngân trào lên khoang nước trước đó được bảo toàn. Trên cơ sở lượng thủy ngân này suy ra được độ co thể tích do nước đàn hồi để tính áp suất ở đáy biển và từ đó theo quy luật phân bố áp suất $p = \rho gh = \gamma h$ mà tính được độ sâu h của đáy biển.

Tham số của một thiết bị loại này như sau :

- Khoang chứa nước có thể tích $V = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$.

- Trọng lượng riêng của nước $\gamma_n = 1,04 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$.

Hệ số nén thể tích (nghịch đảo của mô đun đàn hồi thể tích)

$$\beta_v = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} = 5 \cdot 10^{-10} (\text{N/m}^2)^{-1} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}.$$

Tại một toạ độ trên bề mặt đáy biển người ta thu được kết quả đo như sau :

Lượng thủy ngân trào vào khoang nước là $350 \text{ g} = 0,35 \text{ kg}$ khối lượng. Vậy độ sâu ở đây là bao nhiêu ? Biết rằng trọng lượng riêng của thủy ngân là

$$\gamma_m = 13,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3.$$

Giải :

Ta vận dụng công thức định nghĩa :

$$\beta_v = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

để giải bài này. Thể tích của lượng thủy ngân trào lên khoang nước :

$$dV = \frac{dM}{\rho_m} = \frac{gdM}{\gamma_m} = \frac{10 \times 0,35 \text{ kgm/s}^2}{13,6 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3} = 0,257 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Độ chênh áp ở đây là :

$$dp = \gamma h - 0 = \gamma h$$

Vì vậy từ công thức định nghĩa ở trên có thể rút ra

$$h = -\frac{1}{V} \frac{dV}{\gamma_n \beta_v}$$

Thế trị số của các đại lượng đặc trưng cho nước vào ta được độ sâu của đáy biển ở toạ độ này :

$$h = -\frac{1}{10^{-3} \text{ m}^3} \frac{0,257 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3}{1,04 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-3} \times 5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}} = \frac{0,257 \text{ m}}{5,2 \cdot 10^{-5}}$$

$$h = -4942 \text{ m}.$$

Độ sâu của đáy biển ở đây là 4942m.

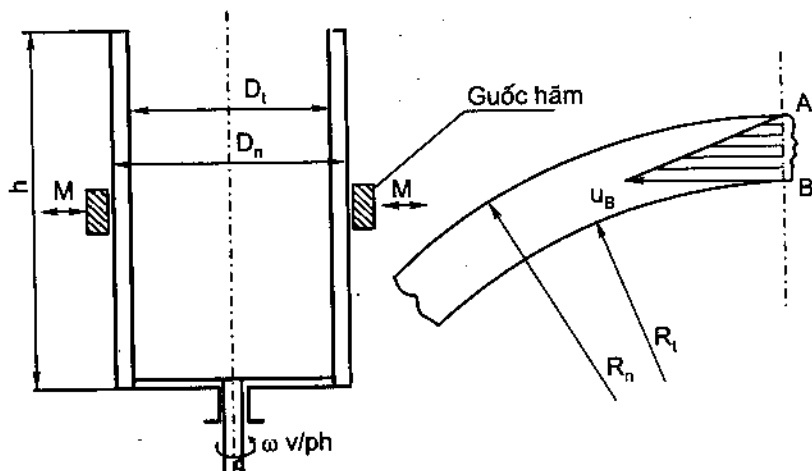
Bài 2. Xác định độ nhót - Nguyên lý hoạt động của nhót kế : Một hình trụ tròn xoay bán kính $R_1 = 120 \text{ mm}$ quay đồng trục trong một hình trụ tròn xoay khác bán kính $R_n = 126 \text{ mm}$ (hình 1.15). Cả 2 trụ có chiều cao $h = 300 \text{ mm}$. Người ta đổ đầy chất lỏng cần xác định độ nhót vào khoảng rỗng giữa 2 trụ (hình vành khăn). Xác định độ nhót của chất lỏng bằng cách đo mômen hãm để trụ ngoài đứng yên và qua đó biết được độ nhót cần tìm. Biết rằng trong một lần đo thu được các số liệu sau :

Ở số vòng quay của trụ trong là $n = 60$ vòng/phút để trụ ngoài có thể đứng yên phải hãm nó bằng mômen $M = 0,8829 \text{ Nm}$.

Giải :

Khi trụ ngoài đứng yên với số vòng quay ở trên, dùng mô hình phân bố vận tốc tuyến tính của Newton ta có :

Tại điểm A mặt trong trụ ngoài vận tốc chất lỏng $u_A = 0$ (vì trụ này đứng yên), còn tại điểm B mặt ngoài trụ trong vận tốc chất lỏng sát mặt trụ $u_B = \omega R_t$.



Hình 1.15

$$V_1. \quad \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \times 60}{30} = 2\pi \text{ Rad/s}$$

$$\text{nên } u_B = 2\pi \text{ Rad/s} \times 120 \text{ mm} = 24\pi \text{ cm/s}$$

Theo Newton giữa ứng suất cắt τ và gradien vận tốc có quan hệ

$$\dot{\gamma} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{du}{dr} \Rightarrow \mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dr}} \quad (a)$$

trong đó : μ là độ nhớt động lực học cần tìm và :

$$\frac{du}{dr} = \frac{u_B - u_A}{R_n - R_t} = \frac{24\pi}{12,6 - 12} = 40\pi / \text{s}$$

Mặt khác ta lại có quan hệ giữa ứng suất trượt và mômen hãm như sau

$$\tau F R_n = M \Rightarrow \tau = \frac{M}{F R_n} \quad (b)$$

trong đó : F là diện tích xung quanh của mặt trong trụ ngoài :

$$F = 2\pi R_n \times h = 2\pi \times 126 \times 300 = 75600\pi \text{ mm}^2 = 756\pi \text{ cm}^2$$

Thế τ ở (b) vào (a) :

$$\mu = \frac{\frac{M}{F R_n}}{\frac{du}{dr}} = \frac{\frac{0,8829 \text{ Nm}}{10^{-2} \cdot 7,56 \text{ m}^2 \times 0,126 \pi \text{ m}}}{40\pi \text{ s}^{-1}} = \frac{0,8829 \cdot 10^2}{7,56 \times 0,126 \times 40 \times \pi^2} = 2,350 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$$

$$\mu = 0,235 \text{ Pa.s}$$

Biết độ nhớt động lực học μ , ta suy ra độ nhớt động học ν của chất lỏng, nếu biết khối lượng riêng ρ của chất lỏng. Giả sử trường hợp trong ví dụ $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ thì :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,235 \text{ Pa.s}}{850 \text{ kg/m}^3} = \frac{0,235 \text{ N.s/m}^2}{850 \text{ kg/m}^3} = 2,765 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.s/kg}$$

$$\nu = 2,765 \cdot 10^{-4} \text{ N.m.s/kg} = 2,765 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m.s}^{-2} \cdot \text{m.s.kg}^{-1} = 2,765 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\nu = 2,765 \text{ cm}^2/\text{s} = 2,765 \text{ St}$$

TỔNG KẾT CHƯƠNG I

Chương này xác định Thủy lực là môn khoa học ứng dụng, một chương lớn của cơ học ứng dụng mà đối tượng nghiên cứu của nó là xem xét các quy luật cân bằng và chuyển động của chất lỏng để từ đó tìm ra các biện pháp khai thác mặt có lợi của chúng cho mục tiêu phát triển xã hội con người.

Chương giới thiệu ngắn gọn lược sử phát triển của môn thủy lực trên nền văn minh nhân loại trong đó con người là chủ thể phát hiện (phát minh) và đúc kết thành lí luận khoa học, kế thừa và phát triển, loại bỏ những nhận thức sai lầm, tiếp cận đến chân lí. Trong sự vận động ấy lao động của con người thông qua nhận thức trực quan của quần chúng lao động, sự phân tích lí luận đầy trí tuệ của các nhà khoa học từ xa xưa đến nay đã kết tinh thành bộ môn thủy lực hiểu theo cách hiểu ngày nay của chúng ta.

Trong nghiên cứu môn này cũng cần có sự cân đong đo đếm. Vì vậy cần nắm được các hệ và các đơn vị đo lường thường dùng, đó là hệ đo lường kĩ thuật và hệ đo lường quốc tế. Đồng thời cần nắm được cách chuyển đổi giữa chúng.

Cần nắm được đặc điểm của biểu đồ Van der Waals để biết được vị trí và tính chất vật lí của chất lỏng, một trạng thái xuất hiện của vật chất. Từ đây có thể suy ra nhiều kết luận quan trọng về thuộc tính của chất lỏng.

Với tư cách là vật chất tương tác cơ học cần nắm được một số đặc trưng, tính chất cơ bản của chất lỏng như khối lượng riêng - mật độ (còn gọi là khối lượng thể tích), trọng lượng riêng (còn gọi là trọng lượng thể tích) ; tính chịu nén và môđun đàn hồi thể tích của chất lỏng ; tính dẫn nở nhiệt ; tính nhớt của chất lỏng cũng như mô hình tuyến tính mô tả quan hệ giữa ứng suất cắt (trượt) và độ nhớt của chất lỏng ; cuối cùng là khái niệm sức căng mặt ngoài (bề mặt) và cơ chế sinh ra nó, từ đó hiểu được hiện tượng mao dẫn cũng như các ứng dụng của nó.

Phần cuối của chương nói về trạng thái ứng suất của chất lỏng. Ở đây vận dụng các kết quả nghiên cứu của Cơ học các môi trường đàn hồi và môi trường liên tục để phân tích và hiểu được khái niệm áp suất và một số tính chất của nó. Đồng thời làm quen với cách biểu diễn trạng thái ứng suất trong chất lỏng do Cauchy đề xuất.

Chương II

THỦY TĨNH HỌC

Tại Chương I ta đã biết rằng trong chất lỏng tĩnh (chất lỏng ở trạng thái nghỉ) ứng suất tiếp ở mọi điểm của chất lỏng đều bằng 0 và trạng thái ứng suất được xác định chỉ bằng tác động tổng hợp của 3 ứng suất pháp bằng nhau theo các trục toạ độ :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma = p$$

Lúc này mặt ứng suất là mặt cầu, một dạng suy biến của elipxôit (các bán trục chính bằng nhau : $a = b = c$).

Do chất lỏng dường như không chống lại được ứng suất kéo nên các ứng suất pháp ở đây là ứng suất nén. Đại lượng có trị số bằng môđun ứng suất σ trong cơ học chất lỏng được gọi là áp suất thủy tĩnh và kí hiệu bằng chữ p :

$$p = |\sigma|.$$

Có thể thấy ngay tính đẳng hướng của áp suất thủy tĩnh do hình dạng của mặt ứng suất là mặt cầu.

1. Hai tính chất cơ bản của áp suất thủy tĩnh

Từ các kết quả trên có thể rút ra 2 tính chất của áp suất thủy tĩnh như sau :

+ Áp suất thủy tĩnh (đồng thời áp lực thủy tĩnh) hướng thẳng góc vào tiết diện chịu lực.

+ Trị số của áp suất thủy tĩnh không phụ thuộc vào hướng đặt của tiết diện chịu lực (nói cách khác là có tính đẳng hướng).

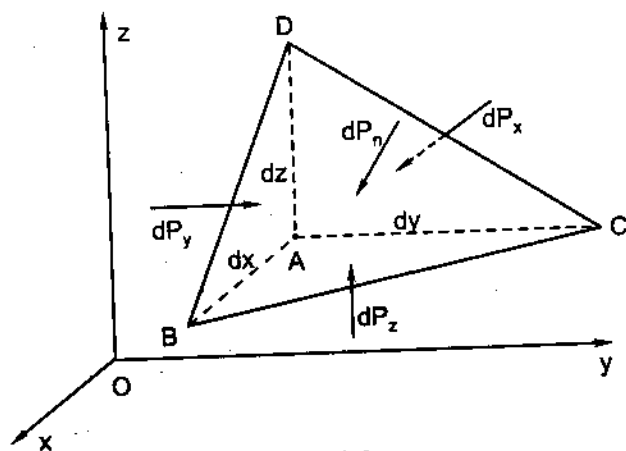
Bằng cách tiếp cận khác cũng có thể chỉ ra khẳng định trên là đúng. Thực vậy, nếu xét sự cân bằng lực và cân bằng mômen của phần tử khối chất lỏng tứ diện tồn tại trong nội bộ chất lỏng ABCD đỉnh A như hình 2.1. Khối chất lỏng này giữ nguyên trạng khi :

- Về lực : $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma F_z = 0$,

- Về mômen : $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma M_y = 0$; $\Sigma M_z = 0$.

trong đó : F_x, F_y, F_z - các thành phần lực ;

M_x, M_y, M_z - các thành phần tương ứng của vectơ mômen theo phương x, y , và z .



Hình 2.1

Hệ thống các lực ở đây gồm có lực bề mặt và lực khối. Không còn lực nào khác, do ta đang xét trong điều kiện thủy tĩnh.

Xét phương trình cân bằng lực $\Sigma F_x = 0$:

với $dP_x = p_x(dx dy)/2$ là lực tác dụng lên mặt ABD ;

$(dP_n)_x = dP_n \cos(n, Ox) = p_n d\Omega \cos(n, Ox)$, lực chiều x của dP_n ;

$$(dG)_x = admc \cos(a, Ox) = ap dV \cos(a, Ox) = \frac{1}{6} \rho dx dy dz X \cos(a, Ox),$$

trong đó : X là hình chiếu trên trục Ox của vector gia tốc lực khối $\mathbf{a}$, $a = |\mathbf{a}|$, ρ là mật độ của chất lỏng, ta có :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n \frac{1}{2} dy dz + \frac{1}{6} \rho dx dy dz X = \\ &= p_x - p_n + \rho dx X / 3 = 0. \end{aligned}$$

Xử lí tương tự như vậy đối với các chiều Oy, Oz, ta có kết quả cuối cùng :

$$\Sigma F_x = p_x - p_n + \rho dx X / 3 = 0$$

$$\Sigma F_y = p_y - p_n + \rho dy Y / 3 = 0$$

$$\Sigma F_z = p_z - p_n + \rho dz Z / 3 = 0.$$

Bỏ qua số hạng vô cùng bé bậc cao trong hệ phương trình này (các số hạng thứ 3 về trái), có thể thấy ngay

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

và tính đẳng hướng của áp suất thủy tĩnh đã được chứng minh.

Cần nhớ rằng ở đây không cần xét đến cân bằng mômen vì ở trường hợp giới hạn các cánh tay đòn của các lực đều bằng 0.

2. Phương trình vi phân cân bằng của chất lỏng thủy tĩnh - Phương trình Euler

Tách trong khối chất lỏng cân bằng một thể tích nguyên tố có dạng hình hộp vuông góc như hình 2.2. Ta thấy với gia tốc lực khối $\vec{a} = \mathbf{a} = [X, Y, Z]$ (dùng kí hiệu [...] để chỉ tường minh một vector) tổng hợp lực phương x là :

$$dP'_x - dP''_x + dG \cos(a, Ox) = 0 \quad (2-1)$$

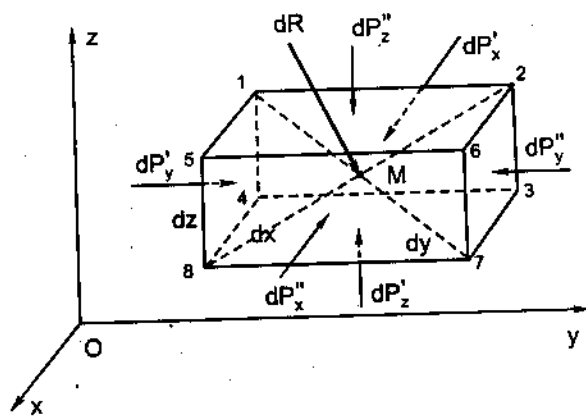
với G là độ lớn của lực khối và

$$dP'_x = p' dy dz, \text{ lực trên mặt 1-2-3-4 ;}$$

$$dP''_x = p'' dy dz, \text{ lực trên mặt 5-6-7-8 ;}$$

$dG_x = dG \cos(a, Ox) = \rho dx dy dz X$ là thành phần phương x của lực khối.

Vì $p = p(x, y, z)$, hàm của toạ độ nên nếu tại điểm M, tâm của khối phân tố, áp suất là p thì :



Hình 2.2

$$\begin{cases} p_x = p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \\ p_x = p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \end{cases} \quad (2-2)$$

(Lưu ý : trong không gian vô cùng bé hàm khả vi xấp xỉ tuyến tính nên theo vị trí của M trong biểu thức có hệ số $1/2$). Lúc này phương trình (2-1) có dạng :

$$\begin{aligned} (p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx) dydz - (p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx) dydz + \rho dx dy dz X &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= 0. \end{aligned}$$

Bằng cách xử lý tương tự đối với các phương y, z ta có kết quả cho cả hệ

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = 0; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y = 0; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

là phương trình vi phân cân bằng thủy tĩnh do Euler chứng minh năm 1755.

Nhân lần lượt các vế của phương trình (2-3) với dx, dy và dz rồi cộng các vế tương ứng, ta được :

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0 \quad (2-4a)$$

hay viết dưới dạng khác :

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2-4b)$$

Ta thấy ngay vế trái là một vi phân toàn phần của áp suất $p = p(x, y, z)$ nên (2-4b) quy về :

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2-4c)$$

Đây là một dạng khác của phương trình vi phân cân bằng chất lỏng thủy tĩnh. Do vế trái là một vi phân toàn phần, nên để đảm bảo tính đồng nhất vế phải cũng phải là một vi phân toàn phần của một hàm của tọa độ (x, y, z) nào đó, không có ràng buộc gì về tính chịu nén (nén được/không nén được) của chất lỏng.

Nếu chất lỏng không chịu nén ($\rho = \text{const}$) thì ở (2-4c) đại lượng trong ngoặc đơn là vi phân toàn phần của một hàm $U(x, y, z)$, hàm của tọa độ x, y và z mà các đạo hàm riêng của nó theo x, y và z chính là các thành phần phương x, y, z của gia tốc lực khối, cụ thể là :

$$\begin{cases} X = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \\ Y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \\ Z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \end{cases} \quad (2-5)$$

Các đại lượng X , Y , và Z cũng có thể coi là các thành phần chiều trục x , y , và z của lực khối tính cho một đơn vị khối lượng (ví dụ 1kg). Vì vậy, hàm U có tên là hàm thế hay hàm lực; còn các lực xuất xứ từ (2-5) là lực có thế.

Như vậy, căn cứ vào các hệ thức (2-4) và (2-5) có thể khẳng định: Sự cân bằng của chất lỏng thủy tĩnh chỉ có thể tồn tại nếu lực khối là lực có thế. Ngoài ra còn có nhận xét: Trong phương trình Euler (2-3) chỉ có mật độ ρ và áp suất p là ẩn số (các đại lượng X , Y , Z và tọa độ được xem là cho trước) nên để phương trình này có lời giải đơn trị, cần phải dùng phương trình thể hiện nhất quán mối quan hệ giữa các tính chất và trạng thái của chất lỏng đang xét, chẳng hạn như quan hệ giữa mật độ, áp suất và nhiệt độ của chất lỏng.

Theo lý thuyết chung, biểu diễn hình học trong không gian 3 chiều (x, y, z) của một hàm $f(x, y, z)$ lấy trị số không đổi, tức là $f(x, y, z) = \text{const}$, được gọi là mặt đồng mức hay mặt đẳng trị. Ý nghĩa vật lý của mặt đẳng trị tùy thuộc vào việc ta lấy đại lượng nào là thông số (lấy từng giá trị cụ thể). Ví dụ áp suất hay nhiệt độ lấy giá trị không đổi để có mặt đẳng áp hay mặt đẳng nhiệt... Trong thủy lực cũng như cơ chất lỏng mặt (hay đường - vẽ trên mặt phẳng tờ giấy) đẳng trị là một trong số ít các đối tượng đáng được quan tâm (ví dụ với thông số là p). Di động trên mặt này trạng thái áp suất không thay đổi, tại mọi điểm áp suất như nhau, nghĩa là $dp = 0$. Như vậy phương trình vi phân của mặt đẳng áp suy từ (2-4c) phải là:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (2-6)$$

do mật độ của chất lỏng luôn khác 0.

Mặt đẳng áp có những tính chất sau:

- Các mặt đẳng áp không bao giờ giao nhau;
- Lực khối tác dụng thẳng góc lên mặt đẳng áp.

Có thể giải thích 2 tính chất trên như sau. Đối với tính chất thứ nhất, nếu 2 mặt đẳng áp cắt nhau thì về mặt toán học không bảo đảm được tính đơn trị tại giao tuyến, ví dụ $p_1 = p_2$; đồng thời về mặt vật lý, áp suất sẽ tự cân bằng mà không sản sinh/tiêu thụ công - năng lượng, điều không thể tồn tại. Còn tính chất thứ 2, chỉ cần xem ý nghĩa vật lý của (2-6) sẽ rõ: như đã nói ở trên, có thể coi X , Y , và Z là các thành phần chiều trục của lực F của một đơn vị khối lượng và như vậy biểu thức (2-6) còn có thể coi là công của lực hoàn thành trên quãng đường:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Lúc đó công của lực:

$$\begin{aligned} dW &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= F \cos(F, ds) ds = 0; \end{aligned}$$

Song do $F \neq 0$ và $ds \neq 0$ nên chỉ có thể là $\cos(F, ds) = 0$. Điều đó có nghĩa là lực F tác dụng trực giao với mặt đẳng áp.

3. Sự cân bằng của chất lỏng thủy tĩnh trong trường trọng lực

Trong trường trọng lực, lực khối là lực trọng trường. Bởi vậy $X = 0, Y = 0, Z = -g$ với g là gia tốc trọng trường (g ngược chiều tăng của z).

3.1. Mặt đẳng áp

Từ phương trình tổng quát của mặt đẳng áp (2-6) vận dụng cho trường trọng lực ta có :

$$-gdz = 0$$

Do gia tốc trọng trường khác 0 và có thể coi là không đổi trong phạm vi không gian không lớn nên suy ra :

$$z = \text{const} \quad (2-7)$$

là mặt phẳng nằm ngang bất kì, kể cả mặt thoáng hoặc mặt phân cách giữa các chất lỏng có mật độ khác nhau (không hoà tan trong nhau) bất kể hình dạng của bình chứa là thế nào.

3.2. Sự phân bố áp suất

Sử dụng (2-4), với lưu ý điều kiện cụ thể của trọng trường : $X = 0, Y = 0, Z = -g$, ta có phương trình vi phân cân bằng chất lỏng

$$dp = -\rho g dz \quad (2-8)$$

Ở đây ρg không thay đổi, do đó khi tích phân ta đưa ra ngoài dấu tích phân :

$$\int dp = -\rho g \int dz \Rightarrow p = -\rho g z + \text{const}$$

$$\text{hay : } \frac{p}{\rho g} + z = \text{const} \text{ hoặc } p + \rho g z = \text{const} \quad (2-9)$$

là phương trình cơ bản của thủy tĩnh học.

Hằng số của phương trình (2-9) xác định được trên cơ sở các điều kiện của từng trường hợp cụ thể (điều kiện ban đầu). Ví dụ, với p_0 là áp suất ở mặt thoáng : $p = p_0$, khi đó :

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \text{const}$$

cho nên phương trình cơ bản có dạng

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \text{ hay } p_0 + \rho g z_0 = p + \rho g z$$

và :

$$p - p_0 = \rho g(z_0 - z) \text{ hay } p = p_0 + \rho g(z_0 - z) \quad (2-10)$$

Hình 2.3 cho thấy ý nghĩa hình học của (2-10) :

$$p = p_0 + \rho g h$$

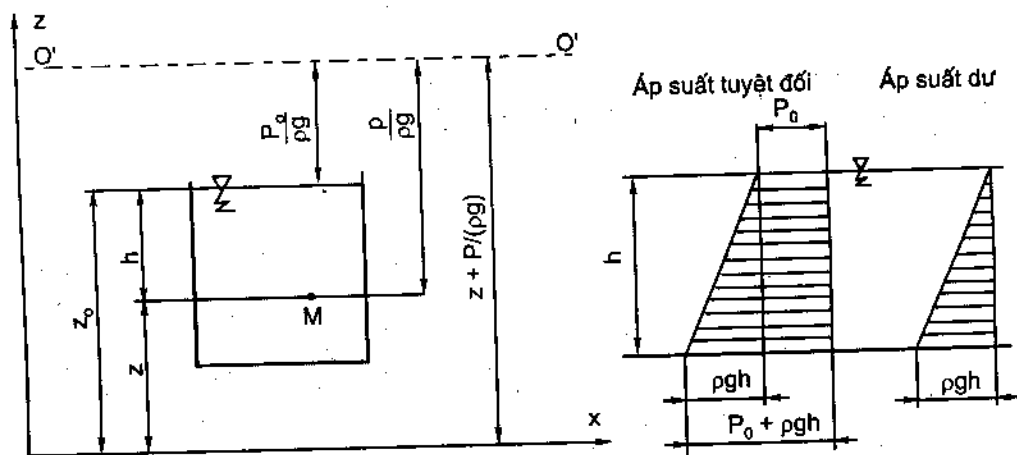
(với kí hiệu $h = z_0 - z$). Dễ dàng nhận thấy độ chênh áp (hiệu số áp suất) giữa 2 điểm bất kì 1 và 2, không phụ thuộc vào áp suất của môi trường bên ngoài mà chỉ phụ thuộc độ lớn của chênh lệch độ cao, còn nói là hiệu số cao trình của chúng, nghĩa là :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) \quad (2-11)$$

Đồng thời nhận thấy áp suất trên mặt phân cách (mặt thoáng) được truyền nguyên vẹn theo mọi hướng đến tất cả mọi điểm trong chất lỏng thủy tĩnh. Đây là định luật Pascal. Còn áp suất tại một điểm nằm trong nội bộ chất lỏng chính là trọng lượng của cột chất lỏng hình trụ chiều cao h , bề mặt đáy là đơn vị diện tích dùng để tính áp suất. Ví dụ dùng đơn vị kG/cm^2 thì đáy là 1cm^2 , dùng đơn vị Pa (Paxcan) thì đáy là m^2 . Vì vậy trong thực tiễn kĩ thuật người ta còn dùng chiều cao cột chất lỏng, nhất là chiều cao cột nước h (nếu ống đo áp dùng chất lỏng công tác là nước) để thể hiện số đo của áp suất. Khi mặt thoáng tiếp xúc thông với khí trời (khí quyển) :

$$p = p_a + p_{\text{du}} \quad (p = p_a + \rho gh) \quad (2-12)$$

Do $p_0 = p_a$ cho nên p là áp suất toàn phần, áp suất tuyệt đối ; ρgh là áp suất dư ; p_a là áp suất mặt thoáng thông với khí quyển.

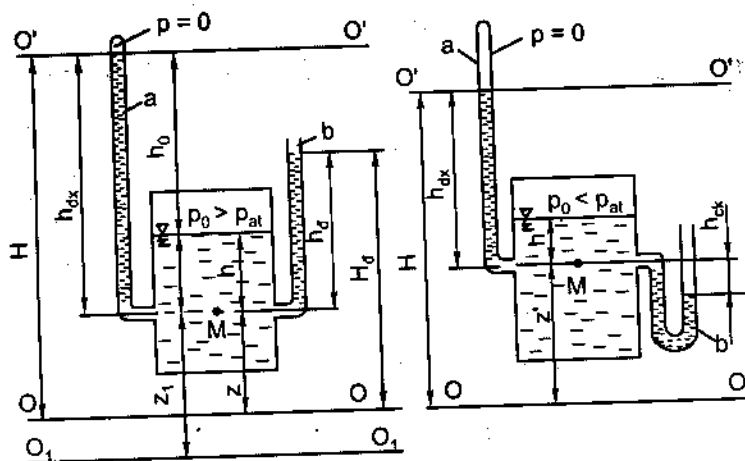


Hình 2.3

Như vậy áp suất thủy tĩnh của chất lỏng phụ thuộc tuyến tính vào độ lớn của chiều sâu h . Trong thực tiễn người ta chỉ đo được áp suất dư để suy ra áp suất toàn phần. Như vậy rất tiện cho thực hiện phép đo. Về mặt kĩ thuật, đo áp suất tuyệt đối không thể thực hiện được vì không thể tạo được chân không tuyệt đối.

3.3. Ý nghĩa hình học và năng lượng của phương trình cơ bản chất lỏng thủy tĩnh

Ta thấy các số hạng trong phương trình cơ bản thủy tĩnh đều có thứ nguyên là chiều dài. Do vậy đối với bất kì điểm M nào đều là tổng của 2 đoạn thẳng z và $p/(\rho g)$ mà trong thủy lực gọi z là chiều cao vị trí (cao trình), là khoảng cách tính từ mặt chuẩn 0-0 nào đó ; $p/(\rho g)$ là áp suất tại điểm M và có thể đo bằng chiều cao dẫn xuất h_{dx} của cột chất lỏng dâng lên trong ống, đã được đuổi hết không khí, nối với bình (ống a của hình 2.4).



Hình 2.4

Nếu cuối ống hở, với ống đo áp b, ta có :

$h_d = p_{du}/(\rho g)$ gọi là chiều cao đo áp ; $h_{dx} = p/(\rho g)$ là chiều cao dẫn xuất

$H_d = z + p_{du}/(\rho g)$, cột nước đo áp ; $H = z + p/(\rho g)$, cột nước thủy tĩnh.

Nếu nhân trọng lượng của lượng chất lỏng có khối lượng m với các vế của phương trình (2-9) :

$$zmg + \frac{p}{\rho g} mg = zmg + \frac{\rho g h_{dx}}{\rho g} mg = zmg + h_{dx} mg = \text{const}$$

ta thấy các số hạng đều là các đại lượng năng lượng, trong đó zmg là thế năng của khối chất lỏng, $\rho g h_{dx}$ cũng là thế năng nhưng do áp suất tạo ra.

Nếu chia (2-9) cho mg , phương trình cơ bản của thủy tĩnh học cho ta tổng số của thế năng vị trí z và tỉ thế năng áp suất thủy tĩnh $p/(\rho g)$ là không đổi.

3.4. Tính tương đối của chất lỏng thủy tĩnh trong trọng trường

Định nghĩa. Tính tương đối của chất lỏng là trạng thái mà từng phần tử của nó giữ nguyên vị trí tương đối với thành của bình chứa chuyển động.

Tính tương đối quan tâm tới 2 bài toán :

- Xác định hình dạng của mặt đẳng áp, trong đó có mặt thoáng ;
- Xét quy luật phân bố áp suất.

Đương nhiên từ phương trình cơ bản còn có thể có những bài toán chuyên biệt khác như xác định dạng đường/ mặt thế năng trong nội bộ chất lỏng phục vụ cho một số vấn đề kĩ thuật. Trong phạm vi giáo trình này của ngành ta tập trung vào 2 vấn đề trên. Để nghiên cứu chúng bao giờ cũng phải xuất phát từ dạng chung của phương trình (vi phân) mô tả nó, cụ thể là :

đối với mặt đẳng áp có :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (2-13)$$

đối với quy luật phân bố áp suất có :

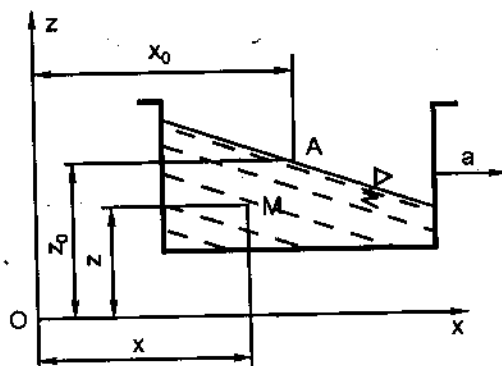
$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2-13a)$$

Qua đây thấy, mẫu chốt ở đây là phải biết được các đại lượng X , Y và Z . Chúng là các thành phần phương trục tọa độ tương ứng của tổng gia tốc lực khối (mà nó chính là gia tốc quán tính có mặt trong trường lực).

+ **Tình tương đối trong bình chứa chuyển động thẳng có gia tốc.** Trên hình 2.5 mô tả một xe bồn chở chất lỏng chuyển động trên mặt phẳng, đường nằm ngang với gia tốc a . Trường hợp này ;

$$\begin{cases} X = -a; \\ Y = 0; \\ Z = -g. \end{cases} \quad (2-13)$$

với g là gia tốc trọng trường và chọn phương trục x trùng với chiều chuyển động. Nên nhớ rằng gia tốc quán tính ngược chiều với gia tốc chuyển động nhưng có cùng trị số. Vì vậy, trong (2-13) g và a mang dấu âm.



Hình 2.5

Mặt đẳng áp có dạng suy từ phương trình (2-6)

$$-adx - 0dx - gdz = -adx - gdz = 0 \quad (2-14)$$

Thực hiện phép tích phân ta có :

$$ax + gz = \text{const} \Rightarrow z = -\frac{a}{g}x + \text{const.} \quad (2-14a)$$

là họ mặt phẳng song song với trục y , trên hình vẽ là đường nghiêng có độ dốc $-a/g$. Giá trị cụ thể của hằng số tích phân tùy thuộc vào điều kiện cụ thể đã cho (tức điều kiện ban đầu). Ví dụ với điểm $A(x_0, z_0)$ trên hình 2.5 :

$$z_0 = -\frac{a}{g}x_0 + \text{const} \Rightarrow z_0 + \frac{a}{g}x_0 = \text{const.}$$

Thế giá trị này vào (2-14a) được :

$$z = -\frac{a}{g}(x - x_0) + z_0 \quad (2-14b)$$

Phân bố áp suất. Từ phương trình :

$$dp = \rho(-adx - gdz) = -\rho(adx + gdz)$$

do ta coi cả a và g là không đổi nên đưa ra ngoài dấu tích phân rồi thực hiện tích phân xác định với cận trên (x, y, z) và cận dưới (x_0, y_0, z_0) :

$$\int_{p_0}^p dp = -\rho a \int_{x_0}^x dx - \rho g \int_{z_0}^z dz \Rightarrow p - p_0 = -\rho a(x - x_0) - \rho g(z - z_0)$$

Như vậy :

$$p = p_0 + \rho a(x_0 - x) + \rho g(z_0 - z) \quad (2-15a)$$

là phương trình mặt phẳng song song với trục y có pháp tuyến là $\mathbf{n} = [a, 0, g]$. Đưa (2-15a) về dạng phương trình cơ bản của thủy tĩnh học (khi bình chứa đứng yên)

$$p = p_0^* + \rho g(z_0 - z) \quad (2-15b)$$

với
$$p_0^* = p_0 + \rho a(x_0 - x) \quad (2-15c)$$

+ **Tình tương đối trong bình chứa chất lỏng quay với tốc độ góc không đổi.** Mô hình khảo sát có thể triển khai trong toạ độ Đêcác vuông góc hay toạ độ trụ độc cực. Biết rằng gia tốc ly tâm là $a = \omega^2 r$ với r là khoảng cách từ điểm đang xét đến gốc toạ độ, ω là tốc độ góc. Trong trường hợp này (xem hình 2.6):

$$X = \omega^2 r \cos \varphi = \omega^2 x;$$

$$Y = \omega^2 r \sin \varphi = \omega^2 y;$$

$$Z = -g.$$

vì: $r = (x^2 + y^2)^{1/2}; x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi.$

$$\Rightarrow dx = dr \cos \varphi; dy = dr \sin \varphi \quad (A)$$

Như vậy ta có phương trình **mặt đẳng áp** trong hệ toạ độ Đêcác:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0 \quad (2-16a)$$

và (có thể dùng các quan hệ (A) suy ra) trong hệ toạ độ trụ:

$$\omega^2 r dr - g dz = 0 \quad (2-16b)$$

Tích phân (2-16a) và (2-16b) được:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = \text{const} \quad (2-17a)$$

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = \text{const} \quad (2-17b)$$

Dễ dàng thấy (2-17b) có thể trực tiếp suy ra từ (2-17a) nếu lưu ý tới quan hệ:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Quy luật phân bố áp suất suy từ:

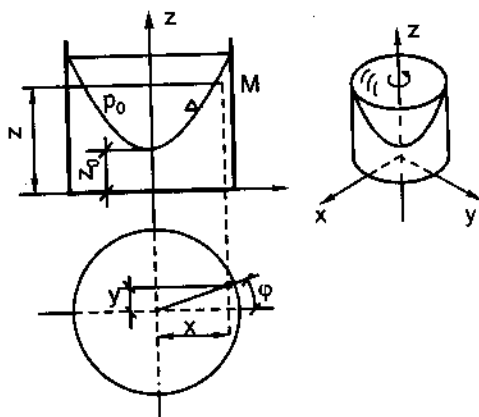
$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) \Rightarrow p - p_0 = \rho \left[\int_{x_0}^x \omega^2 x dx + \int_{y_0}^y \omega^2 y dy - \int_{z_0}^z g dz \right]$$

do g và ω không đổi, đồng thời sử dụng quan hệ $x^2 + y^2 = r^2$ nên:

$$p - p_0 = \rho \frac{\omega^2}{2} [(x^2 + y^2) - (x_0^2 + y_0^2)] - \rho g(z - z_0) = \rho \frac{\omega^2}{2} (r^2 - r_0^2) - \rho g(z - z_0)$$

Sắp xếp lại với lưu ý chọn điều kiện ban đầu: $r_0 = 0, z = z_0, p = p_0$, được:

$$p = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g(z_0 - z) \quad (2-18a)$$



Hình 2.6

Có thể thấy biểu diễn hình học của mặt đẳng áp, trong đó có mặt thoáng là mặt parabolôit có trục z đi qua đỉnh. Đưa về dạng phương trình cơ bản của thủy tĩnh học ta có :

$$p = p_0^* + \rho g(z_0 - z) \quad (2-18b)$$

với :
$$p_0^* = p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (2-18c)$$

Xác định quỹ đạo chìm/nổi. Là bài toán có ý nghĩa thực tiễn trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật. Dựa vào nguyên lý lực tác động luôn trực giao với mặt đẳng áp nên ta có thể xây dựng phương trình vi phân của quỹ đạo như sau :

Trong cùng hệ toạ độ 2 hàm $f_1(r)$ và $f_2(r)$ trực giao nhau nếu thoả mãn điều kiện

$$\frac{df_1}{dr} = -\frac{1}{\frac{df_2}{dr}}$$

Nếu gọi $f_1(r)$ là quỹ đạo và $f_2(r)$ là mặt (đường) đẳng áp thì phương trình vi phân của quỹ đạo có dạng sau đây :

Biết rằng

$$f_1(r) = Ar^2 \Rightarrow \frac{df_2}{dr} = 2Ar \Rightarrow \frac{df_1}{dr} = \frac{-1}{2Ar} \Rightarrow df_1 = -\frac{1}{2A} \frac{dr}{r}$$

$$f_1(r) = -\frac{1}{2A} \ln|r| + \text{const}$$

(với kí hiệu giá trị tuyệt đối $|r|$) là họ đường cong lôgarít tự nhiên (*log Nepe*) trong hệ toạ độ (zOr) đối xứng gương qua trục Oz (xem hình 2.7). Vận dụng vào trường hợp cụ thể $A = \omega^2/(2g)$

$$f_1(r) = -\frac{g}{\omega^2} \ln|r| = \text{const.}$$

Như vậy quỹ đạo chìm/nổi của vật trong chất lỏng thủy tĩnh tương đối ở đây là đường cong lôga, khác hẳn so với trong trường trọng lực thuần túy là đường thẳng đứng.

4. Áp lực của chất lỏng thủy tĩnh lên mặt phẳng (ở đáy và thành bể chứa).

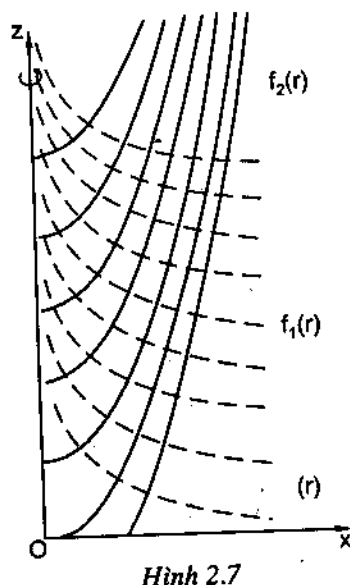
Tác động của áp lực thủy tĩnh lên bề mặt chịu lực - như trong cơ học nói chung - có thể thay thế bằng tác động của một lực tập trung là tổng hợp của các áp lực thủy tĩnh nói trên.

Khảo sát tác động của lực sinh ra bởi áp suất của chất lỏng thủy tĩnh luôn phải quan tâm tới 2 vấn đề

- Trị số của lực,
- Điểm đặt (tâm áp lực) của lực đó.

4.1. Áp lực lên đáy phẳng nằm ngang

Đặc điểm của quy luật phân bố áp suất ở trường hợp này là tại mọi điểm của đáy áp suất đều như nhau.



Hình 2.7

Biết rằng áp suất ở đáy là $p = p_0 + \rho gh$ với h là chiều sâu của bể. Kí hiệu Ω là mặt chịu áp lực ta có áp lực thủy tĩnh lên mặt Ω (hình 2.8) :

$$P = (p_0 + \rho gh)\Omega$$

Trong trường hợp này điểm đặt lực trùng với trọng tâm của mặt Ω .

4.2. Mặt chịu áp lực nằm thẳng đứng

Lúc này áp suất thay đổi trên từng điểm, do đó phải dùng phương pháp tích phân trên mặt Ω :

$$\int_{\Omega} dP = \int_{\Omega} p d\Omega = \int_{\Omega} (p_0 + \rho gh) d\Omega = \int_{\Omega} p_0 d\Omega + \int_{\Omega} \rho gh d\Omega$$

Có thể coi p_0 , g và ρ là không đổi, được đưa ra ngoài dấu tích phân :

$$P = p_0 \int_{\Omega} d\Omega + \rho g \int_{\Omega} h d\Omega = p_0 \Omega + \rho g S_{\Omega x} \quad (2-19a)$$

trong đó : $S_{\Omega x} = \int_{\Omega} h d\Omega = h_C \times \Omega$ là mômen tĩnh của Ω lên trục Ox với h_C là khoảng cách từ trọng tâm mặt Ω đến trục Ox . Tóm lại :

$$P = p_0 \Omega + \rho g S_{\Omega x} = p_0 \Omega + \rho g h_C \Omega \quad (2-19b)$$

Điểm đặt của áp lực trong trường hợp này xác định theo công thức tổng quát cho mặt phẳng nằm nghiêng dưới đây.

4.3. Áp lực thủy tĩnh lên mặt phẳng nằm nghiêng (một góc α so với mặt phẳng nằm ngang).

Với các kí hiệu dùng cho hình 2.9 ta tiến hành các khảo sát sau :

+ *Trị số của áp lực*. Lực nguyên tố lên vi phân diện tích $d\Omega$:

$$dP = p d\Omega = (p_0 + \rho gh) d\Omega$$

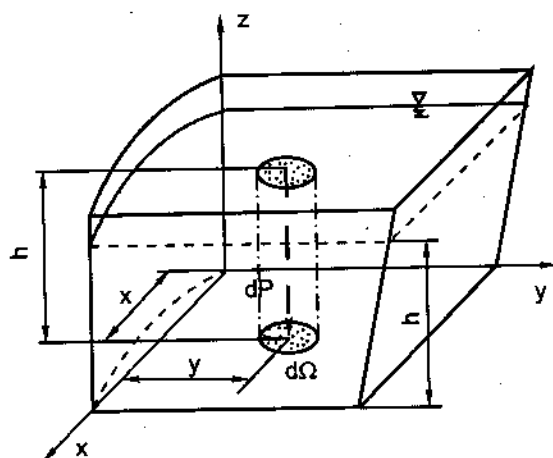
$$P = \int_{\Omega} (p_0 + \rho gh) d\Omega = \int_{\Omega} p_0 d\Omega + \int_{\Omega} \rho gh d\Omega$$

Biết rằng, $h = h(z) = z \sin \alpha$, nên :

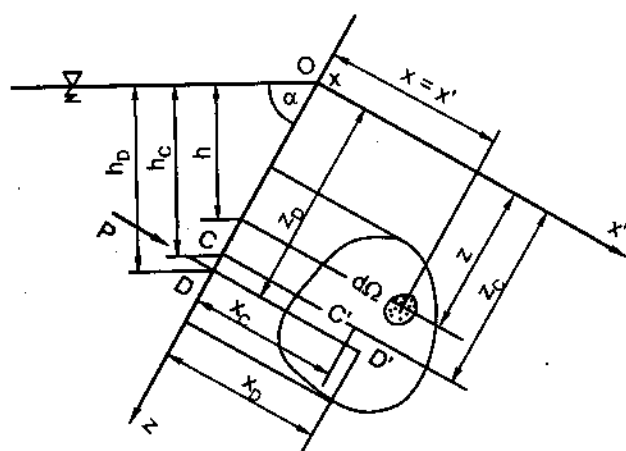
$$P = p_0 \int_{\Omega} d\Omega + \rho g \sin \alpha \int_{\Omega} z d\Omega$$

Cũng với ý nghĩa như trên với $S_{\Omega x} = z_C \Omega$

$$P = p_0 \Omega + \rho g \sin \alpha z_C \Omega$$



Hình 2.8



Hình 2.9

$$P = (p_0 + \rho gh_C)\Omega \quad (2-20)$$

Đến đây có thể nhận xét : áp lực thủy tĩnh tổng quát là tổng của 2 đại lượng (2 phần) :

- Áp lực bên ngoài $p_0\Omega = P_0$ do áp suất của môi trường xung quanh tạo nên ;

- Áp lực do áp suất dư gây ra của chất lỏng thủy tĩnh $P_{du} = \rho gh_C\Omega$.

+ *Xác định toạ độ điểm đặt* ($D(z_D, x_D)$). Như đã thấy ở trên, áp lực gồm 2 phần (có thể coi là 2 lực), căn cứ vào đó để xác định toạ độ D thông qua phương trình cân bằng mômen.

Tính z_D : Do áp suất $p_0 = \text{const}$ nên điểm đặt của lực P_0 , như kết quả ở trường hợp thành thẳng đứng ($p = \text{const}$), trùng với trọng tâm của mặt chịu lực. Bây giờ ta tìm điểm đặt của áp lực do áp suất dư. Để có cân bằng mômen lên trục Ox ta có :

$$P_{du} z_D = \int_{\Omega} z dP = \int_{\Omega} \rho gh_C z d\Omega = \int_{\Omega} \rho g \times z \sin \alpha \times z d\Omega = \rho g \sin \alpha \int_{\Omega} z^2 d\Omega$$

Từ đây :

$$z_D = \frac{\int_{\Omega} z dP}{P_{du}} = \frac{\rho g \sin \alpha}{P_{du}} \int_{\Omega} z^2 d\Omega$$

mà $\int_{\Omega} z^2 d\Omega$ lại chính là mômen quán tính lên trục Ox của mặt chịu lực Ω , ta kí hiệu bằng :

$$I_{Ox} = I_{xx} + \Omega z_C^2$$

(công thức quen thuộc trong cơ học và sức bền vật liệu) với I_{xx} là mômen quán tính lên trục đi qua trọng tâm của mặt chịu lực và song song với trục Ox .

Đã biết $P_{du} = \rho gh_C\Omega$ nên có :

$$z_D = \frac{\rho g \sin \alpha (I_{xx} + \Omega z_C^2)}{\rho gh_C\Omega} = \frac{\rho g \sin \alpha (I_{xx} + \Omega z_C^2)}{\rho g z_C \sin \alpha \Omega}$$

Do : $h_C = z_C \sin \alpha$, nên :

$$z_D = z_C + \frac{I_{xx}}{z_C \Omega} \quad (2-21a)$$

Như vậy, tâm áp lực (điểm đặt của áp lực) z_D nằm thấp hơn trọng tâm của nó. Trong trường hợp buộc phải lưu ý đến áp suất p_0 , điểm đặt tính theo công thức :

$$z_{D0} = \frac{P_0 z_C + P_{du} z_D}{P_0 + P_{du}} \quad (2-21b)$$

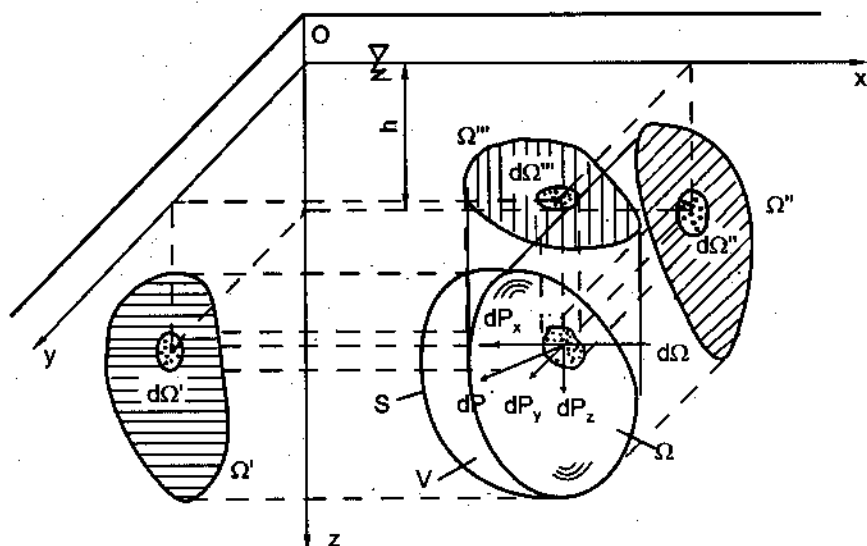
Tính x_D (thành phần x của D) xác định từ phương trình cân bằng mômen lên trục Oz :

$$x_D = \frac{\rho g \int_{\Omega} x h d\Omega}{\rho gh_C \Omega} = \frac{\int_{\Omega} x h d\Omega}{h_C \Omega} \quad (2-21c)$$

Nếu mặt chịu lực có trục đối xứng đi qua trọng tâm mà trục này nằm trong mặt phẳng thẳng đứng thì $x_D = x_C$. Ngoài ra còn có $x_{D0} = x_D$ do p_0 không thay đổi trên mặt chịu lực.

5. Áp lực của chất lỏng thủy tĩnh lên mặt cong

Đây là bài toán thường gặp ở nhiều công trình thủy lợi và xây dựng công nghiệp.



Hình 2.10

Trong chất lỏng thủy tĩnh chọn một khối chất lỏng V bất kì được bao bởi mặt kín S như trên hình 2.10. Biết rằng tại mọi điểm của S áp suất thủy tĩnh luôn tác dụng thẳng góc với bề mặt S . Tách từ S một mặt cong Ω tùy ý. Do Ω ở trạng thái cân bằng nên hệ lực trên toàn mặt cong này có thể thay thế bằng một lực tổng hợp dP (lực tập trung) có các thành phần theo các phương x, y, z lần lượt là dP_x, dP_y, dP_z .

Nếu gọi $d\Omega$ là diện tích nguyên tố của Ω thì áp lực tác dụng lên nó là :

$$dP = p d\Omega = (p_0 + \rho gh) d\Omega$$

Trong đó :

h là chiều sâu của trọng tâm của nguyên tố diện tích $d\Omega$;

$dP = \sqrt{dP_x^2 + dP_y^2 + dP_z^2}$, dP_x và dP_y nằm ngang, còn dP_z thẳng đứng, song song với trục Oz .

Xét các lực nằm ngang :

$dP_x = dP \cos(dP, Ox)$ mà (dP, Ox) là góc tạo bởi vector lực dP và trục Ox . Vì thế :

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) d\Omega \cdot \cos(dP, Ox). \quad (2-22a)$$

Lại thấy $d\Omega \cos(dP, Ox)$ chính là hình chiếu thẳng của $d\Omega$ lên mặt phẳng trục giao với trục Ox , chẳng hạn mặt phẳng yOz , ta kí hiệu hình chiếu này là $d\Omega'$. Thế vào (2-22a) được :

$$dP_x = (p_0 + \rho gh) d\Omega' \Rightarrow P_x = \int_{\Omega} (p_0 + \rho gh) d\Omega' = \int_{\Omega} p_0 d\Omega' + \int_{\Omega} \rho gh d\Omega'.$$

Khi áp suất trên mặt thoáng p_0 không đổi, tích phân thứ nhất :

$$\int_{\Omega} p_0 d\Omega' = p_0 \Omega'$$

với Ω' là hình chiếu của Ω trên mặt phẳng yOz ; còn việc tính tích phân $\rho g \int_{\Omega} h d\Omega$ có thể thao tác trên mặt phẳng ảnh yOz rồi suy về "vật thực" (do bản chất của phép tích phân và tính tương ứng một - một của phép chiếu). Với những lưu ý trên, $h' = h$ và :

$$\rho g \int_{\Omega} h' d\Omega' = \rho g h_C \Omega'$$

Đồng thời nhớ lại rằng, để chất lỏng cân bằng trong trường trọng lực, mặt đẳng áp phải nằm ngang, cho nên $h'_C = h_C$ và kết quả cuối cùng :

$$P_x = (p_0 + \rho g h_C) \Omega' \quad (2-22b)$$

Tương tự như vậy, sau khi thao tác các bước trên mặt phẳng ảnh thứ hai - mặt xOz - ta có kết quả đối với thành phần lực nằm ngang thứ hai :

$$P_y = (p_0 + \rho g h_C) \Omega'' \quad (2-22c)$$

trong đó : Ω'' là hình chiếu của Ω trên mặt phẳng xOz . Hiển nhiên P_x trực giao với Ω' và P_y trực giao với Ω'' .

Bây giờ xác định P_z , thành phần đứng trực giao với mặt thoáng :

$$P_z = \int_{\Omega} dP_z = \int_{\Omega} (p_0 + \rho g h) d\Omega \cdot \cos(dP_z, Oz)$$

Vì $d\Omega \cos(dP_z, Oz) = d\Omega'''$ là hình chiếu của $d\Omega$ lên mặt phẳng nằm ngang, chẳng hạn như mặt thoáng nên cũng theo cách tương tự như trên :

$$P_z = \int_{\Omega'''} p_0 d\Omega''' + \rho g \int_{\Omega'''} h d\Omega'''$$

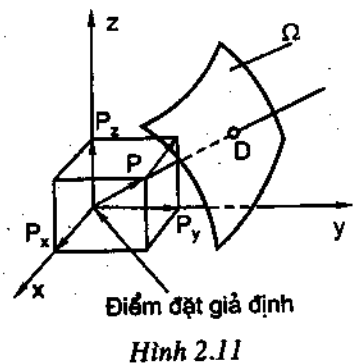
Lại thấy trên ý nghĩa hình học $\int_{\Omega'''} h d\Omega'''$ chính là thể tích của khối hình trụ có đáy là hình chiếu của Ω trên mặt thoáng (tức Ω''') mặt đỉnh là Ω , các đường sinh là đường thẳng đứng. Trong thủy lực người ta gọi thể tích này là *vật thể áp lực* và thường có kí hiệu V_{al} (hay W_{al}).

$$P_z = \int p_0 d\Omega''' + \rho g V_{al} \quad (2-22d)$$

Như vậy, *thành phần thẳng đứng của áp lực thủy tĩnh lên mặt cong bằng tổng của áp lực ở mặt thoáng (ứng với p_0) lên diện tích hình chiếu trên mặt thoáng của mặt cong đó và trọng lượng của vật thể áp lực tương ứng.*

Điểm đặt của lực trên mặt cong.

Trong trường hợp mặt cong, việc xác định điểm đặt phức tạp hơn so với ở mặt phẳng. Song, căn cứ vào điều kiện cân bằng mômen ta xác định một điểm đặt giả tưởng như ở mặt phẳng cùng với phương tác động của vectơ áp lực. *Điểm đặt thực trên mặt cong chính là giao điểm của mặt cong đó với đường thẳng kéo dài vectơ áp lực đi qua điểm đặt giả tưởng (không phải là vectơ tự do) như trên hình 2.11.*



Hình 2.11

Nhận xét : Phép chiếu áp lên các mặt cong có thể không đơn trị do có các mảng ảnh chõm nhau. Song điều đó không đáng ngại vì coi các mặt này có hướng nên tự chúng khử nhau nên chỉ còn lại các mảng đơn trị.

6. Định luật Archimedes và áp dụng của nó vào khảo sát vật nổi

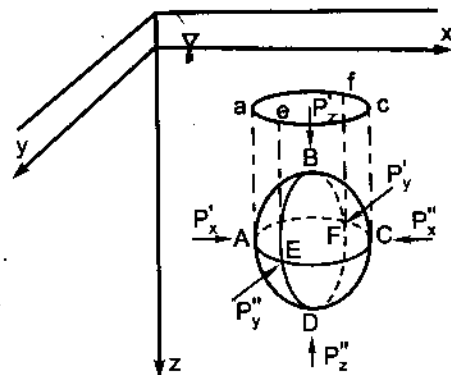
Vận dụng các kết quả trên đây có thể dễ dàng chứng minh được định luật Archimedes. Thực vậy, hãy xét vật có dạng bất kì ngập trong chất lỏng. Hệ thống lực tác động lên vật gồm có : *lực mặt và lực khối* (trọng lượng). Khi xét sự tác động của chất lỏng thủy tĩnh lên vật ta chỉ xét đến các lực bắt nguồn từ chất lỏng mà thôi. Trong chất lỏng thủy tĩnh loại lực tác dụng lên vật chỉ có lực mặt.

Lực mặt là áp lực thủy tĩnh có phương thẳng góc với bề mặt vật. Ở trạng thái cân bằng các lực mặt có thể thay thế bằng một lực tổng hợp P có các thành phần 3 phương x, y, z là P_x, P_y, P_z , trong đó (xem hình 2.12) :

$$P_x = P'_x - P''_x$$

$$P_y = P'_y - P''_y$$

$$P_z = P'_z - P''_z$$



Hình 2.12

Theo định nghĩa của thành phần nằm ngang (phương x , phương y) của áp lực thủy tĩnh, có thể dễ dàng chứng minh được rằng, trong trường hợp này P_x và P_y bằng 0, vì nếu không vật sẽ chuyển động với một gia tốc lớn hơn 0 làm cho giả thiết cân bằng không còn nữa. Để khẳng định điều đó hãy xét thành phần ngang P_x :

Ta thấy các lực P'_x và P''_x có trị số bằng nhau vì bề mặt mà chúng tác động lên đều như nhau do có hình chiếu của biên cong BFDE chung của 2 phần "trái - phải như nhau". Vì vậy hiệu của P'_x và P''_x bằng 0 :

$$P'_x - P''_x = 0.$$

Cũng do nguyên nhân tương tự, với hình chiếu biên chung ABCD của hai nửa :

$$P'_y - P''_y = 0.$$

Do vậy chỉ cần xét hai thành phần lực thẳng đứng :

P'_z tác dụng lên mặt cong AEFCB và

P''_z tác dụng lên mặt cong AEFCB

là toàn bộ hệ lực mặt tác dụng lên vật ngập đang xét. Trị số của các lực đó lần lượt là :

$$P'_z = \rho g V_{al(AeCB)}$$

$$P''_z = \rho g V_{al(AeCD)}$$

Tổng đại số của hai lực này chính là tổng hợp lực của áp lực thủy tĩnh lên vật ngập :

$$P_z = \rho g (V_{al(AeCB)} - V_{al(AeCD)}) = -\rho g V_{al(ABCD)}.$$

trong đó : $V_{ak(ABCD)}$ chính là thể tích của vật. Dấu âm có nghĩa là ngược chiều trục z !

Như vậy, áp lực thủy tĩnh lên vật ngập có trị số bằng trọng lượng của khối chất lỏng mà vật choán chỗ, chiều thẳng đứng từ dưới lên. Lưu ý mật độ ρ trong tính toán là mật độ của chất lỏng.

Đây là định luật Archimedes.

Khảo sát vật nổi. Dựa vào định luật Archimedes (ta kí hiệu P_{AR}) có thể phát biểu như sau : Nếu trọng lượng của vật trong nước là G thì

$G > P_{AR}$, vật chìm ;

$G = P_{AR}$, vật ở trạng thái lơ lửng trong nước ;

$G < P_{AR}$, vật nổi trên mặt nước, lượng chất lỏng mà vật nổi choán chỗ có trọng lượng bằng trọng lượng của vật.

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG II

Bài 1. Dùng ống chữ U nước - thủy ngân để đo áp suất thủy tĩnh tại các điểm A, O, B của một ống dẫn nước lớn bán kính $R = 1$ m như sơ đồ trong hình 2.13. Biết rằng các số liệu thu được như sau :

$$h_1 = 50 \text{ cm},$$

$$h_2 = 1,5 \text{ m}.$$

Biết trọng lượng riêng của nước $\gamma_n = 9810 \text{ N/m}^3$,
trọng lượng riêng của thủy ngân $\gamma_m = 133416 \text{ N/m}^3$.
Cho biết áp suất dư tại các điểm trên. Nếu $H = 10\text{m}$,
áp suất tại điểm D bằng bao nhiêu, có nhận xét gì ?

Giải :

Ta thấy điểm 2 nằm trên mặt phân cách giữa thủy ngân và nước. Như vậy có thể coi nó đồng thời nằm trong nước và trong thủy ngân. Do đó :

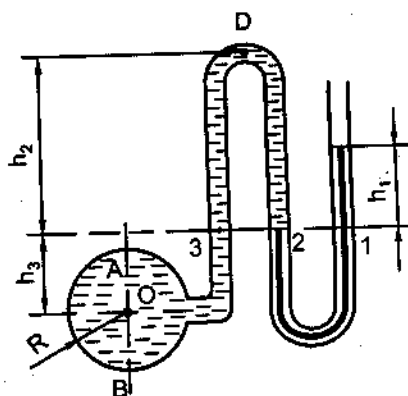
$$P_1 = P_2 = P_3$$

Theo công thức (2-12) ta có :

$$P_1 = P_a + \gamma_m h_1 = P_a + 133416 \text{ N/m}^3 \times 0,5 \text{ m} = P_a + 66708 \text{ N/m}^2$$

$$\begin{aligned} P_O = P_3 + \gamma_n h_3 &= P_1 + \gamma_n h_3 = P_a + 66708 \text{ N/m}^2 + 9810 \text{ N/m}^3 \times 1,5 \text{ m} \\ &= P_a + 81423 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A = P_O - \gamma_n R &= P_a + 81423 \text{ N/m}^2 - 9810 \text{ N/m}^3 \times 1 \text{ m} \\ &= P_a + 71613 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$



Hình 2.13

$$p_B = p_O + \gamma_n R = p_a + 81423 \text{ N/m}^2 + 9810 \text{ N/m}^3 \times 1 \text{ m} = \\ = p_a + 91233 \text{ N/m}^2.$$

Như vậy áp suất dư tại các điểm trên là :

$$p_{O_{\text{dư}}} = 81,423 \text{ kPa} ; p_{A_{\text{dư}}} = 71,613 \text{ kPa} ; p_{B_{\text{dư}}} = 91,233 \text{ kPa}.$$

Áp suất tại đỉnh ống chữ U chứa nước :

$$p_H = p_I - \gamma_n H = p_a + 66708 \text{ N/m}^2 - 9810 \text{ N/m}^3 \times 10 \text{ m} = \\ = p_a - 31392 \text{ N/m}^2$$

Như vậy tại đây xuất hiện chân không và áp suất chân không tại điểm H là :

$$p_{\text{Hck}} = 31,392 \text{ kPa}.$$

Bài 2. Thang máy chuyển vật liệu tại một công trường xây dựng vận hành lên và xuống với gia tốc cả hai chiều là $a = 2 \text{ m/s}^2$ chở một thùng phi hờ nắp đựng đầy nước. Kích thước thùng phi : $D = 800 \text{ mm}$ cao $L = 1000 \text{ mm}$. Cho biết áp lực lên đáy thùng lúc lên và lúc xuống. Chiều dày δ tối thiểu của đáy thùng là bao nhiêu nếu là tôn thép có ứng suất cắt cho phép là $\tau_{\text{cp}} = 400 \text{ kG/cm}^2$?

Giải :

Xác định áp lực lên đáy thùng :

Trước hết cần xác định áp suất tại đáy thùng để từ đó suy ra áp lực. Thang máy chuyển động theo chiều thẳng đứng nên gia tốc của nó chỉ có thành phần phương z và như vậy ở đây gia tốc lực khối của hệ thống này (theo (2-4) và (2-5)) là :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X = 0 ; \frac{\partial U}{\partial y} = Y = 0 ; \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

và khi lên

$$Z = g + a,$$

khi xuống

$$Z = g - a$$

do gia tốc quán tính (gây nên lực khối bổ sung) luôn ngược chiều với gia tốc chuyển động. Vì vậy, nếu lấy trọng trường $g = 10 \text{ m/s}^2$, khi lên theo (2-9) áp suất dư ở đáy thùng là :

$$p = \rho(g + a)H$$

và khi xuống

$$p = \rho(g - a)H$$

nên áp lực lên đáy thùng với S là diện tích đáy và mật độ nước $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$:

- Khi lên

$$P_{\text{lên}} = S\rho(g + a) = \frac{\pi D^2}{4} \rho(g + a) = \frac{\pi \times (0,4 \text{ m})^2}{4} 1000 \text{ kg/m}^3 \times (10 \text{ m/s}^2 + 2 \text{ m/s}^2)$$

$$P_{\text{lên}} = 13,0624 \cdot 10^3 \text{ kgm/s}^2 = 13,0624 \text{ kN}.$$

- Khi xuống

$$P_{xuống} = Sp(g - a) = \frac{\pi D^2}{4} \rho(g - a) = \frac{\pi \times (0,4\text{m})^2}{4} 1000\text{kg/m}^3 \times (10\text{m/s}^2 - 3\text{m/s}^2)$$

$$P_{xuống} = 7,0336 \cdot 10^3 \text{kgm/s}^2 = 7,0336 \text{ kN}.$$

Xác định bề dày đáy.

Biết rằng $\tau = \frac{P}{l\delta}$

trong đó P là lực tải (áp lực), l là chu vi đáy thùng, δ là bề dày đáy thùng. Do đó kiểm tra sức bền ở đây phải dùng trị số áp lực lớn hơn, tức là áp lực khi thang đi lên

$$\delta_{cp} = \frac{P}{l\tau} = \frac{13,0624\text{kN}}{\pi 0,8\text{m} \times 400\text{kG/m}^2} = \frac{13062,4\text{N}}{\pi 0,8\text{m} \times 400 \cdot 10^4 \text{N/m}^2} = 12993,4 \times 10^{-7} \approx 1,3\text{mm}$$

Như vậy phải dùng tôn có quy cách sao cho có chiều dày $\delta \geq 1,3\text{mm}$.

Bài 3. Xe xitéc có bồn chứa hình hộp kích thước như sau : chiều dài $b = 2\text{m}$, rộng $c = 1,6\text{m}$, cao $H = 1,0\text{m}$, chứa chất lỏng đến gần $h = 0,5\text{m}$ (xem hình 2.14).

Hỏi xe được phép tăng tốc (hoặc hãm để giảm tốc) với gia tốc tối đa là bao nhiêu để chất lỏng không trào (xánh) ra khỏi mép bồn ? Với gia tốc tối đa đó áp lực lên đáy bồn là bao nhiêu, nếu chất lỏng là nước ?

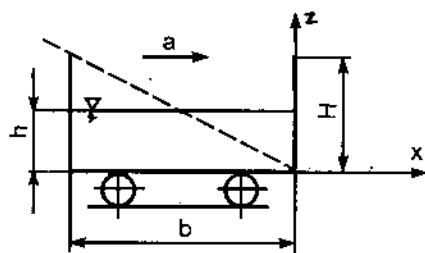
Giải :

- Tính gia tốc tối đa :

Lúc xe đứng yên hoặc chuyển động đều mặt thoáng của nước là mặt nằm ngang.

Khi xe tăng tốc, theo thuyết tính tương đối, mặt thoáng cũng như mặt đẳng áp là các mặt phẳng nằm nghiêng như mô tả của công thức (2-14a).

$$z = -\frac{a}{g}x + \text{const}$$



Hình 2.14

trong đó : g là gia tốc trọng trường, a là gia tốc của xe. Nước bắt đầu trào ra ngoài khi mặt thoáng đi qua mép thành bồn (ở trường hợp này trước hoặc sau). Với cách chọn trục tọa độ như ở hình 2.14 đối với mặt thoáng $\text{const} = 0$ nên trường hợp tăng tốc ta có :

$$-a_{\max} = \frac{gH}{b} = \frac{9,81\text{m/s}^2 \times 1\text{m}}{-2\text{m}} = -4,905\text{m/s}^2$$

vì lúc đó $b = -2\text{m}$ (trên trục tọa độ).

- Tính áp lực lên đáy bồn :

Do áp lực lên đáy thùng chỉ chịu ảnh hưởng bởi gia tốc lực khối $Z = -g$ (gia tốc a nằm ngang) nên khi nước chưa trào ra khỏi bồn thì áp lực lên đáy bồn chính là trọng lượng của khối nước trong bồn (cho dù điểm đặt của áp lực khác với lúc đứng yên). Nghĩa là :

$$P_z = G = \rho \times g \times b \times c \times h = 1000 \text{kgm}^{-3} \times 9,81 \text{ms}^{-2} \times 2,0 \text{m} \times 1,6 \text{m} \times 0,5 \text{m} = 15696 \text{N} = 15,696 \text{kN}$$

Bài 4. Thùng phi đường kính $d = 1,0 \text{m}$, cao $h = 2 \text{m}$ (hình 2.15) đựng nước quay quanh trục của nó với số vòng quay $n = 30$ vòng/phút. Lúc đứng yên mực (món) nước trong thùng $H = 1 \text{m}$. Hãy

- Xác định phương trình mặt thoáng.
- Lúc quay áp lực lên đáy thùng là bao nhiêu ?
- Được phép tăng số vòng quay tới trị số tối đa là bao nhiêu để nước không văng ra khỏi thùng ?

Giải :

- **Phương trình mặt thoáng.** Theo (2-17b) :

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = \text{const.}$$

Với $z = 0$; $r = 0$ ta có đường parabol đi qua gốc tọa độ :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 r^2}{2g} = \frac{\left(\frac{2 \times 3,14 \times 30}{60}\right)^2 r^2}{2 \times 9,81}$$

$$z = 0,5r^2$$

là phương trình mặt thoáng nếu coi nó là đường đẳng áp có trị số áp suất $p = p_a$.

- **Áp lực lên đáy thùng.** Lúc quay ta thấy gia tốc phương z (trục giao với đáy) của lực khối không có sự thay đổi, vẫn nguyên như cũ nên dù thùng quay, áp lực lên đáy cũng vẫn giữ nguyên giá trị và bằng trọng lượng khối nước chứa trong thùng :

$$P_z = G = \rho g \frac{\pi d^2}{4} H = 1000 \text{kgm}^{-3} \times 9,81 \text{ms}^{-2} \times \frac{3,14 \times (1 \text{m})^2}{4} \times 1 \text{m} = 7000 \text{kgms}^2$$

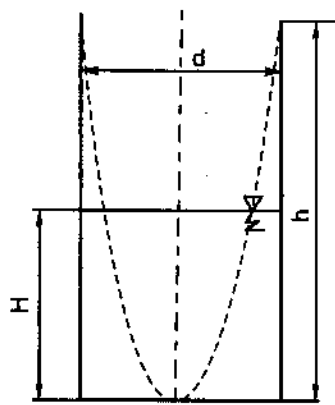
$$P_z = 7 \text{kN}$$

- **Số vòng quay tối đa.** Để nước không văng khỏi thùng khi số vòng quay tăng dần tới trị số ứng với đường mặt thoáng đi qua miệng thùng xác định từ kết quả trung gian khi xác định phương trình mặt thoáng ở trên.

$$z = \frac{\left(\frac{\pi}{30}\right)^2 \times n^2}{2 \times g} \times r^2 \rightarrow n = \frac{\sqrt{2g \times z}}{\frac{\pi}{30} r}$$

Từ đây suy ra :

$$n_{\max} = \frac{\sqrt{2g \times h}}{\frac{\pi d}{30 \times 2}} = \frac{\sqrt{2 \times 9,81 \text{ms}^{-2} \times 2 \text{m}}}{\frac{3,14 \times 1,0 \text{m}}{30 \times 2}} \approx 120 \text{vòng/phút.}$$



Hình 2.15

Bài 5. Công nghệ đúc ống bê tông bằng phương pháp ly tâm : Khuôn đúc hình trụ đứng có đường kính $D = 1120 \text{ mm}$, chiều cao $H = 1000 \text{ mm}$, quay xung quanh trục của nó với số vòng quay $n = 500 \text{ vòng/phút}$. Vữa xi măng có trọng lượng riêng $\gamma = 1600 \text{ kG/m}^3$ với yêu cầu chiều dày ở đáy là $\delta_1 = 60 \text{ mm}$. Hỏi chiều dày đầu trên δ_2 là bao nhiêu (xem hình 2.16).

Giải :

Với dữ liệu trên ta có :

- Vận tốc góc $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \times \pi \times 500}{60} = 52,3 \text{ Rad/s}$

- Phương trình mặt thoáng parabol theo (2-17b) :

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = \text{const}$$

với $z = 0 ; r = 0 \rightarrow \text{const} = 0$ nên :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

có đỉnh ở gốc tọa độ rOz (H.2.16). Như vậy đáy khuôn phải ở độ cao so với gốc tọa độ này là h_1 chưa biết. Theo hình 2.16 :

$$r_1 = D/2 - \delta_1 = 1120 \text{ mm}/2 - 60 \text{ mm} = 500 \text{ mm} = 0,5 \text{ m}$$

Từ quan hệ hình học của mặt thoáng ta có :

$$h_1 = \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = \frac{(52,3 \text{ rad.s}^{-1})^2 \times (0,5 \text{ m})^2}{2 \times 10 \text{ m/s}^2} = 34,9 \text{ m}.$$

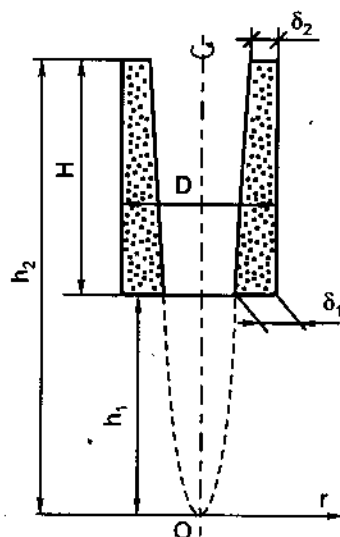
Lại có : $h_2 = h_1 + H = 34,9 \text{ m} + 1 \text{ m} = 35,9 \text{ m}$

và từ $h_2 = \frac{\omega^2 r_2^2}{2g} \rightarrow r_2 = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\omega} = \frac{\sqrt{2 \times 10 \text{ m/s}^2 \times 35,9 \text{ m}}}{52,3 \text{ rad.s}^{-1}} = 0,507 \text{ m}.$

Biết rằng :

$$\delta_2 = \frac{D}{2} - r_2 = \frac{1,120 \text{ m}}{2} - 0,507 \text{ m} = 0,053 \text{ m} = 53 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = 53 \text{ mm}.$$



Hình 2.16

Bài 6. Bể chứa có mặt cắt ngang như trong hình 2.17. Chiều dài bể là đường thẳng. Xác định áp lực và điểm đặt của lực cho một đơn vị chiều dài thành bên.

Giải :

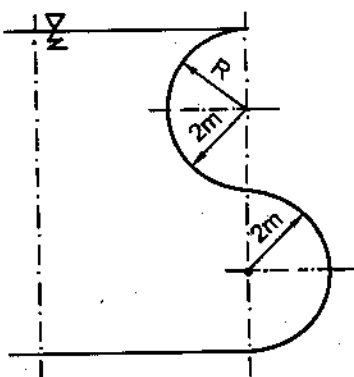
Theo đề bài đây là bài toán xác định áp lực thủy tĩnh lên mặt cong. Ta thấy nếu chọn mặt cắt ngang nằm trong mặt phẳng tọa độ thì có thể coi $P_y = 0$ và chỉ cần quan tâm đến P_x và P_z .

- Xác định P_x :

Do tính chất của các dữ kiện đã cho ở đây chỉ cần quan tâm đến áp suất dư nên trong (2-20a) vắng mặt áp suất môi trường xung quanh p_0 , cụ thể là:

$$\begin{aligned} P_x &= \rho g h_c \Omega' \\ &= 1000 \text{kgm}^{-3} \times 9,81 \text{ms}^{-2} \times (4 \times 2\text{m})/2 \times (1\text{m} \times 8\text{m}) \\ &= 313920 \text{kgm/s}^2 \end{aligned}$$

$$P_x = 313,92 \text{ kN}$$



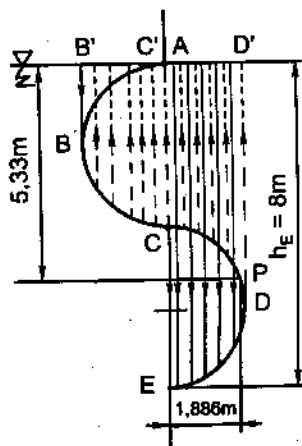
- Xác định P_z :

Theo (2-22d) ta có

$$P_z = -\rho g V_{al'}$$

Vì vậy trước hết ta xác định vật thể áp lực $V_{al'}$.

Theo hình 2.17 ta có vật thể áp lực của một đơn vị chiều dài kênh:



$$V_{ABCDE} = V_{BB'A} - V_{AB'BC} - V_{ACDD'} + V_{AEDD'}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} V_{ABCDE} &= 1 \times (R^2 - \frac{\pi R^2}{4}) - 1 \times (R^2 + \frac{\pi R^2}{4}) - \\ &\quad - 1 \times (R \times 3R - \frac{\pi R^2}{4}) + 1 \times (3R \times R + \frac{\pi R^2}{4}) = \\ &= R^2 - \frac{\pi R^2}{4} - R^2 - \frac{\pi R^2}{4} - 3R^2 + \frac{\pi R^2}{4} + 3R^2 + \frac{\pi R^2}{4} = 0. \end{aligned}$$

Hình 2.17

Do vật thể áp lực bằng không nên:

$$P_z = 0.$$

- Xác định điểm đặt lực - tâm áp lực.

Do $P_y = P_z = 0$ nên $P = P_x$ và điểm đặt của P chính là điểm đặt P_x . Biết rằng, phân bố áp suất thủy tĩnh theo chiều sâu là tam giác vuông có cạnh đáy là γh_E với h_E là độ sâu của điểm E và chiều cao h_E nên điểm đặt phải ở độ sâu $2h_E/3$. Suy ra tâm áp lực chính là điểm D_p có tọa độ:

$$P(x; y; z) = P(\sqrt{R^2 - \left(3R - \frac{2}{3}h_E\right)^2}; 0; 8R/3) = P(1,886\text{m}; 0; 5,33\text{m}).$$

$$P(1,886\text{m}; 0; 5,33\text{m})$$

là điểm nằm trên mặt cong, cung đoạn CD.

TỔNG KẾT CHƯƠNG II

Chương II nghiên cứu các quy luật của thủy tĩnh học và các vấn đề liên quan như hai tính chất cơ bản của áp suất thủy tĩnh nói về phương tác dụng và tính đẳng hướng của nó. Từ phương trình cân bằng lực của khối nguyên tố chất lỏng thủy tĩnh suy ra quy luật phân bố áp suất thủy tĩnh trong trường trọng lực, mở rộng ra khái niệm tĩnh tương đối với gia tốc chuyển động thẳng và trọng trường ly tâm (quay với số vòng quay không đổi). Đồng thời, qua một số ví dụ minh họa có thể thấy được những ứng dụng rất thiết thực trong cuộc sống.

Cũng trong chương này có thể tìm thấy cách dẫn dắt các công thức tính áp lực lên thành phẳng và thành cong với việc xác định trị số, phương và chiều tác dụng của áp lực cũng như điểm đặt của nó - tâm áp lực. Một hệ quả quan trọng thu được trong quá trình dẫn dắt là áp suất tại mặt thoáng được truyền nguyên vẹn đến mọi hướng, mọi nơi trong khối chất lỏng. Đây là *nguyên lý Pascal*. Ta còn thấy, nếu sử dụng các kết quả thu được của quá trình chứng minh công thức, việc chứng minh nguyên lý Archimedes sẽ hết sức dễ dàng, dường như là hiển nhiên để rồi đi đến phát biểu nguyên lý về vật nổi.

Chương III

CƠ SỞ ĐỘNG HỌC VÀ ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CHẤT LỎNG CHUYỂN ĐỘNG

1. Các phương pháp toán học dùng cho việc khảo sát

1.1. Phương pháp Lagrange (cách tiếp cận)

Phương pháp này dùng cách tiếp cận phần tử chất lỏng mà vị trí của nó tại mọi thời điểm phụ thuộc vào vị trí ban đầu. Đây là phương pháp quen biết trong cơ học vật rắn. Ở đây người ta nghiên cứu chuyển động của từng phần tử của nó. Nếu vị trí ban đầu được xác định bởi vectơ vị trí $\mathbf{r}_0$ định vị điểm P_0 tại thời điểm t_0 thì tại thời điểm t bất kì, hàm vị trí của phần tử chất lỏng là :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$$

với kí hiệu viết đậm là vectơ. Do vậy, đương nhiên :

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t_0)$$

Cũng có thể thay vì dùng hàm vectơ $\mathbf{r}$ ta dùng hàm của các biến toạ độ của điểm P_0 ở thời điểm bất kì t nào đấy là a, b, c để xác định

$$x = x(a, b, c, t)$$

$$y = y(a, b, c, t)$$

$$z = z(a, b, c, t)$$

với a, b, c là các biến Lagrange ; x, y, z là các hàm đơn trị, liên tục và ít nhất khả vi 2 lần, nghĩa là chúng có đạo hàm bậc nhất và bậc hai tại mọi nơi, mọi lúc.

Với các điều kiện như vậy thì bất kì một đường L_0 nào, bất kì một mặt S_0 nào đi qua P_0 đến thời điểm t sau t_0 sẽ có một đường L , một mặt S tương ứng đi qua P . Như vậy với :

$$a = f_1(\lambda), b = f_2(\lambda), c = f_3(\lambda)$$

là các hàm tham biến λ xác định một đường bởi tham biến và lúc đó tại thời điểm t có :

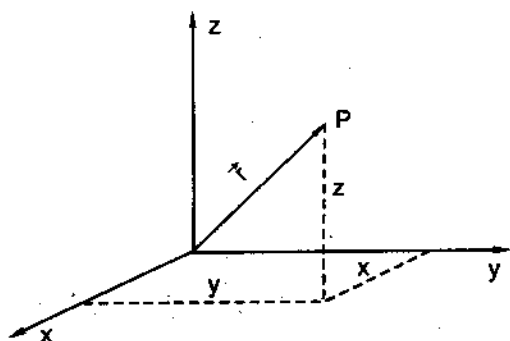
$$x = x[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), t] = \varphi_1(\lambda, t)$$

$$y = y[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), t] = \varphi_2(\lambda, t)$$

$$z = z[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), t] = \varphi_3(\lambda, t).$$

là hệ phương trình tham biến (vị trí và thời gian).

Từ các quan hệ trên ta có các đại lượng dẫn xuất vận tốc và gia tốc theo chiều các trục toạ độ :



Hình 3.1

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \Rightarrow a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

$$u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \Rightarrow a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

$$u_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \Rightarrow a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2}$$

Ý nghĩa vật lí của phương pháp là khi khảo sát biến động trạng thái của phần tử chất lỏng người ta bám theo nó, nói cách khác, người quan sát “trôi” cùng phần tử chất lỏng, tức là gắn trục tọa độ với phần tử chất lỏng. Giới kĩ thuật ít dùng phương pháp này vì có thể gặp khó khăn trong xử lí toán học. Thường được sử dụng trong nghiên cứu sóng và chuyển động xoáy.

1.2. Phương pháp Euler

Phương pháp này không gắn các đặc trưng chuyển động vào phần tử chất lỏng mà khảo sát không gian cố định chứa đầy chất lỏng, xem đặc trưng của chúng phân bố ra sao. Ở đây người ta khảo sát đồng thời sự biến đổi trạng thái tại mọi điểm của không gian chất lỏng. Nói cách khác, ta xem tại một điểm bất kì, không chịu một ràng buộc nào, các đặc trưng như mật độ, vận tốc, gia tốc, ... biến động ra sao. Như vậy việc khảo sát dẫn đến sự tìm hiểu một không gian trạng thái như trường mật độ, nhiệt độ, ... là các đặc trưng vô hướng; trường vận tốc, gia tốc, ... là các đặc trưng gồm cả trị số lẫn hướng vectơ. Trong không gian này tại điểm bất kì nào, vào bất cứ thời điểm nào, các đặc trưng nói trên đều có thể xác định được như một trường. Phương pháp này không quan tâm đến “số phận” của từng phần tử chất lỏng. Ví dụ đối với vận tốc ta có một trường vectơ có thể biểu diễn gọn nhất bằng một *hàm vectơ biến vectơ*

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ (dùng chữ đậm nét để kí hiệu vectơ: $\vec{u} = \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$) có các thành phần sau

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t); \\ u_y &= u_y(x, y, z, t); \\ u_z &= u_z(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

là các *hàm vô hướng biến vô hướng*.

Tương tự, đối với mật độ ta cũng có thể viết:

$$\rho = \rho(x, y, z, t).$$

Tóm lại có thể suy ra gia tốc:

$$\left\{ \begin{aligned} a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right. \quad (3-2a)$$

vì

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; u_z = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Để gọn, có thể biểu diễn trường vận tốc bằng hàm vectơ biến vô hướng thay thế các hệ thức (3-1):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$$

từ đây có gia tốc:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \quad (3-2b)$$

với toán tử Nabla :

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Trong (3-2b) số hạng thứ nhất $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ là gia tốc cục bộ (địa phương), số hạng thứ hai $(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}$ là gia tốc dịch chuyển (gia tốc trao đổi); sâu xa, nó là cầu nối giữa tĩnh và động.

Đến đây cũng cần nói rằng, có thể chuyển từ hệ Lagrange sang hệ Euler hoặc ngược lại, nhờ các quan hệ tồn tại giữa các biến a, b, c và x, y, z (biểu diễn dưới dạng tường minh thuận nhất) cũng như định nghĩa vật lý của vận tốc $u_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{dx}{dt}$. Tức là làm sao thay hết các biến Lagrange a, b, c bằng các biến x, y, z để chuyển từ hệ Lagrange sang hệ Euler.

Ngược lại, để chuyển từ Euler sang Lagrange ta phải giải xác định :

$$x = \int u_x dt = f_1(x, y, z, t) + C_1$$

$$y = \int u_y dt = f_2(x, y, z, t) + C_2$$

$$z = \int u_z dt = f_3(x, y, z, t) + C_3$$

Trong đó : C_1, C_2, C_3 là các hằng số tích phân. Trong hệ Lagrange các hằng số tích phân này có thể coi là các biến độc lập nếu viết được :

$$x = \varphi_1(C_1, C_2, C_3, t),$$

$$y = \varphi_2(C_1, C_2, C_3, t),$$

$$z = \varphi_3(C_1, C_2, C_3, t).$$

So sánh với cách biểu diễn điểm toạ độ trong hệ Lagrange :

$$x = \varphi_1(a, b, c, t),$$

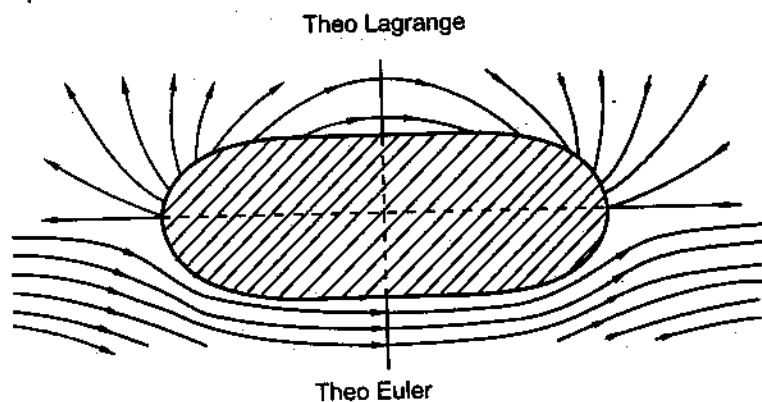
$$y = \varphi_2(a, b, c, t),$$

$$z = \varphi_3(a, b, c, t).$$

dựa vào nguyên lý đồng nhất, có thể thấy : $a = C_1, b = C_2, c = C_3$. Nghĩa là xuất phát từ điểm $P_0(a, b, c)$: $a = C_1; b = C_2; c = C_3$ có thể khảo sát phần tử chất lỏng tại thời điểm t_0 có mặt ở P_0 .

Biểu diễn toán học thì như thế, song trong quá trình chuyển hệ nhiều khi gặp rất nhiều khó khăn.

Hình 3.2 cho thấy sự khác nhau giữa 2 cách tiếp cận trên cùng một đối tượng là hình ảnh chảy bao quanh trụ cầu.



Hình 3.2

2. Các dạng chuyển động. Các kiến tạo hình học trong dòng chảy

Các đặc trưng của chất lỏng chuyển động - phụ thuộc vào vị trí, thời gian - có thể thay đổi hoặc cố định /không thay đổi.

Khái niệm ổn định/dừng, không ổn định/không dừng là phạm trù gắn với thời gian.
Ví dụ, tháo cạn một bể chứa nước qua một lỗ/vòi/ cửa xả thì :

Nếu không bổ sung nước cho bể chứa giữ cho mực nước không đổi, chuyển động của dòng chảy là không ổn định vì mực nước giảm dần khiến cho áp lực cửa xả cũng giảm, dẫn đến vận tốc giảm dần theo thời gian ; các đặc trưng khác cũng vì thế mà thay đổi theo.

Song, nếu duy trì mực nước cố định, dòng chảy là ổn định (dừng), chuyển động là ổn định.

Nếu mực nước bể chứa không thay đổi nhưng kênh hay ống xả có tiết diện thay đổi, dòng chảy (trong kênh, trong ống xả) *ổn định không đều*, ngược lại, nếu tiết diện không đổi, dòng chảy *ổn định đều*.

Tóm lại, các khái niệm trên trong các biểu thức toán học thể hiện như sau :

$u = u(x, y, z, t)$ đặc trưng cho dòng không ổn định xét theo tốc độ và gia tốc.

$u = u(x, y, z)$ và $\frac{\partial}{\partial t} u = 0$ đặc trưng cho dòng ổn định.

$u = u(x, y, z)$; $a = a(x, y, z) \neq 0$, với a là gia tốc, dòng ổn định không đều.

$u = \text{const}$; $a = 0$, dòng ổn định đều.

Các kiến tạo hình học. Trong dòng chảy tồn tại một số kiến tạo hình học như quỹ đạo, đường dòng, đường vết, đôi khi thông qua chúng, ta có thể biết được tính chất của dòng chảy. Điều sẽ thấy rõ dưới đây.

Quỹ đạo là kiến tạo hình học phát sinh bởi một phần tử chất lỏng cụ thể vạch ra khi chuyển động.

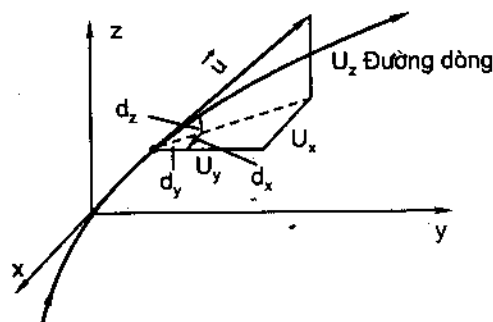
Đường dòng là đường bao các vectơ vận tốc dòng chảy và tiếp tuyến của nó trùng với vectơ vận tốc tại tiếp điểm. Từ ý nghĩa hình học của nó (tiếp tuyến $\frac{dy}{dx}$) tại một điểm trên đoạn đường dòng ds :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\Rightarrow dx / dy / dz = u_x / u_y / u_z$$

và vectơ vận tốc tại tiếp điểm này $u = [u_x, u_y, u_z]$ như trên hình 3.3 ta được phương trình vi phân đường dòng :

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z)} \quad (3-3)$$

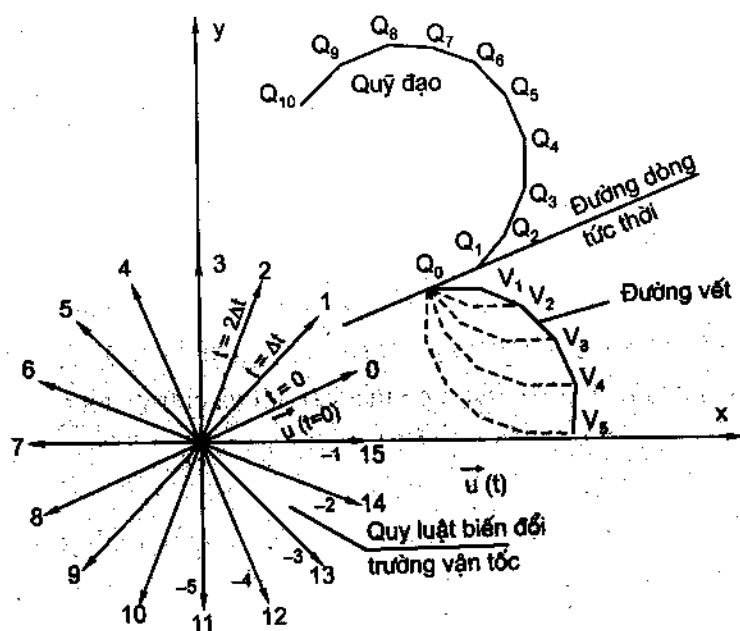


Hình 3.3

và lúc này (trường hợp dòng dừng) đường dòng trùng với đường quỹ đạo. Nói cách khác, nếu qua quan sát biết được đường dòng và quỹ đạo như nhau, có thể kết luận, đó là dòng ổn định, là dòng dừng.

Đường vết là tuyến tập hợp các phần tử chất lỏng đi qua (đã và đang đi qua) cùng một điểm cố định trong không gian chất lỏng.

Có thể nói, trong dòng chảy ổn định quỹ đạo, đường dòng và đường vết trùng nhau.



Hình 3.4

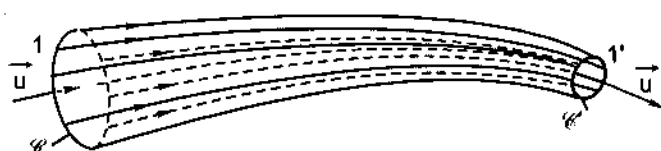
Hình 3.4 mô tả gần đúng 3 kiến tạo nói trên qua một ví dụ cụ thể của dòng được đặc trưng bởi trường vận tốc đồng nhất với trị số vận tốc $u = \text{const}$ nhưng hướng của nó thay đổi

đều theo thời gian (tại mọi điểm vectơ vận tốc lớn như nhau nhưng quay tròn ngược chiều kim đồng hồ).

Ống dòng được tạo bởi tập hợp đường dòng đi qua một đường khép kín. Do sự hình thành như thế của ống dòng nên không thể có phần tử chất lỏng nào xuyên qua ống dòng, cũng có nghĩa là không có sự trao đổi vật chất giữa chất lỏng chảy trong và ngoài ống dòng. Vì nếu không, vô hình chung có vectơ vận tốc không tiếp xúc với đường dòng, là điều trái với định nghĩa.

Đồng thời có thể nói, trong dòng không ổn định các khái niệm về các kiến tạo nói trên không còn mấy ý nghĩa và không có tính thực tiễn.

Dòng nguyên tố là dòng chảy trong ống dòng (hình 3.5).



Hình 3.5

3. Một số khái niệm thủy lực liên quan đến dòng chảy

Để hỗ trợ cho những khảo sát tiếp theo cần nắm được một số khái niệm thủy lực dưới đây.

Lưu lượng. Tích số của mặt cắt $\Delta\Omega$ và vận tốc u (trực giao với $\Delta\Omega$) là lưu lượng ΔQ chảy qua mặt cắt đó, đo bằng m^3/s hay l/s : $\Delta Q = u\Delta\Omega$.

Mặt cắt utor. Nếu xây dựng được một mặt cắt Ω của một dòng chảy sao cho tại mọi nơi nó trực giao với vectơ vận tốc của dòng chảy và $\Omega = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \sum \Delta\Omega = \int_{\Omega} d\Omega$ thì đó là mặt cắt utor và lưu lượng toàn dòng là $Q = \int_{\Omega} u d\Omega$.

Chu vi utor. Phần chu vi của mặt cắt utor tiếp xúc với chất lỏng chuyển động là chu vi utor của mặt cắt utor đó và được kí hiệu bằng kí tự Hi Lạp χ (chữ “khi”).

Bán kính thủy lực là tỉ số giữa diện tích mặt cắt utor và chu vi utor:

$$R = \frac{\Omega}{\chi} \quad (3-4a)$$

Ví dụ, nếu mặt cắt utor là mặt cắt của một ống tròn đường kính d thì trong trường hợp chảy đầy mặt cắt có bán kính thủy lực là:

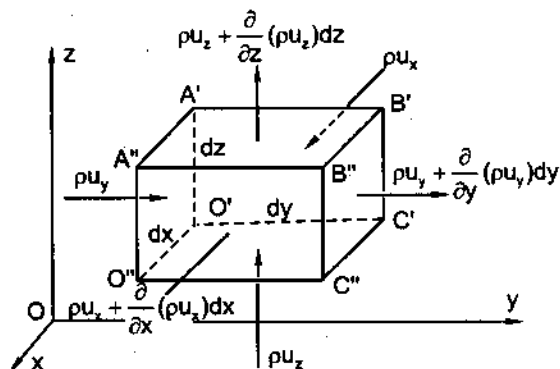
$$R = \frac{\pi d^2}{4\pi d} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2} \quad (3-3b)$$

với r là bán kính ống.

4. Phương trình liên tục

Điều kiện cơ bản đảm bảo sự tồn tại của một dòng chảy là tính liên tục của các đặc trưng dòng chảy theo toạ độ (vị trí) và theo thời gian. Nghĩa là khi chuyển động chất lỏng phải tuân thủ điều kiện liên tục, không gián đoạn; chất lỏng phải chuyển động trong các lòng dẫn, kênh tương ứng như là một môi trường liên tục, không có sự gián đoạn. Người ta biểu thị nó bằng phương trình toán học như sau.

Căn cứ vào hình 3.6 dòng chảy được quan sát từ một hệ toạ độ cố định là Oxyz. Trong tưởng tượng hãy tách khỏi môi trường chất lỏng một khối chất lỏng hình hộp có các cạnh dx, dy, dz song song với các trục toạ độ tương ứng của hệ toạ độ. O' là đỉnh toạ độ (x, y, z) của hình hộp này. Vận tốc thành phần của dòng chảy tại O' lần lượt là u_x, u_y và u_z .



Hình 3.6

Qua mặt bên $O'A'B'C'$ diện tích $dydz$ của hình hộp, với thời đoạn dt , một khối lượng chất lỏng $\rho u_x \times dydz \times dt$ đi vào hình hộp.

Qua mặt bên đối diện $O''A''B''C''$ có toạ độ $(x+dx, y, z)$ một khối lượng chất lỏng ra khỏi hình hộp là:

$$\rho u_x dydzdt + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dydzdt = \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} \right] dydzdt$$

Như vậy, trong khoảng thời gian dt số chất lỏng vào và ra chênh lệch nhau một lượng:

$$\rho u_x dydzdt - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dx dydzdt + \rho u_x dydzdt \right] = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dx dydzdt.$$

Tương tự như vậy đối với các hướng y và z (tức là đối với các cặp mặt $A'A''O''O' - B'B''C''C'$ và $O'O''C''C' - A'A''B''B'$) có lượng chênh lệch chất lỏng tương ứng để tổng hợp cho toàn bộ hình hộp:

$$\text{Cho phương } x : - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) dx dydzdt ;$$

$$\text{Cho phương } y : - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) dx dydzdt ;$$

$$\text{Cho phương } z : - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) dx dydzdt.$$

Từ đây chênh lệch giữa chất lỏng chảy vào và chảy ra đối với toàn hình hộp là:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) \right] dx dy dz dt \quad (3-4a)$$

Cách tiếp cận trên nặng về suy diễn toán học với giả thiết là trong không gian vô cùng bé nói chung “mọi thứ” đều tuyến tính. Song, nếu suy xét từ khía cạnh vật lí, có thể thấy :

Sau khi chọn hệ trục tọa độ (tọa độ điểm gốc O') thể tích hình hộp “cứng” $dx dy dz$ là xác định, trị số của nó (không phụ thuộc vào thời gian) cũng xác định. Vì vậy, sự thay đổi của khối chất lỏng chỉ có thể xảy ra do mật độ thay đổi theo thời gian. Còn nếu không, chỉ có thể vì có sự gián đoạn nào đấy ở nội bộ khối chất lỏng trong hình hộp như : sôi, gây bọt hơi, hoặc lượng khí hoà tan giải phóng gây thiên tích,..., điều đó trái với tính liên tục, không tồn tại trong điều kiện đang xét. Trong trường hợp coi nhiệt độ là không đổi, nói chung mật độ của chất lỏng phụ thuộc vào tọa độ và thời gian, $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Vì đã chọn cách tiếp cận Euler nên khi x, y, z đã xác định thì sự thay đổi của ρ chỉ có thể là do yếu tố thời gian. Bởi vậy sự thay đổi của mật độ trong khoảng thời gian dt phải là $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$ kéo theo

sự thay đổi khối lượng của khối chất lỏng $dx dy dz$ là $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \times dx dy dz$. Vật chất không sinh ra cũng không mất đi, vì thế, để bảo đảm tính liên tục kết quả của hai cách tiếp cận phải như nhau với lưu ý rằng nếu khối lượng ra lớn hơn khối lượng vào, trong thể tích $dx dy dz$, khối chất lỏng phải “nhẹ” đi, tức là mật độ phải giảm. Hoặc ngược lại, nếu lượng ra nhỏ hơn lượng vào, khối chất lỏng “nặng” lên, trong thể tích $dx dy dz$ mật độ phải tăng. Kết quả là :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) \right] dx dy dz dt \quad (3-4b)$$

Chuyển vế và ước lược $dx dy dz dt$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0. \quad (3-4c)$$

Trong cơ học chất lỏng và thủy lực người ta gọi phương trình này là phương trình liên tục, nó có giá trị đối với dòng chảy không ổn định hay ổn định của tất cả các loại chất lỏng, bất kể nén được hay không nén được. Đương nhiên với điều kiện nhiệt độ không đổi.

– Nếu dòng chảy là ổn định, (3-4c) độc lập với thời gian, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, ta có :

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \text{ hay } \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3-4d)$$

với :

$$\text{div}(\rho \vec{u}) = \left[\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [\vec{i} u_x + \vec{j} u_y + \vec{k} u_z]$$

trong đó : $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị tương ứng trên các trục hệ tọa độ vuông góc Đécác.

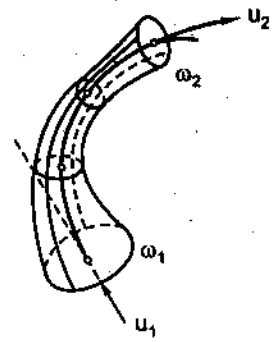
– Nếu ở dòng chảy ổn định của chất lỏng không chịu nén, ta có :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{u} = 0 \quad (3-4e)$$

Ví dụ đối với dòng nguyên tố chảy ổn định của chất lỏng chịu nén :

$$\rho u \Omega = \text{const} \Rightarrow \rho_1 u_1 \Omega_1 = \rho_2 u_2 \Omega_2, \quad (3-4f)$$

trong đó : Ω là tiết diện bất kì của dòng nguyên tố, Ω_1, Ω_2 ; u_1, u_2 ; ρ_1, ρ_2 là tiết diện, vận tốc và mật độ tại mặt 1 và 2 (xem hình 3.7 cùng với vận tốc và mật độ tại các mặt cắt tương ứng).



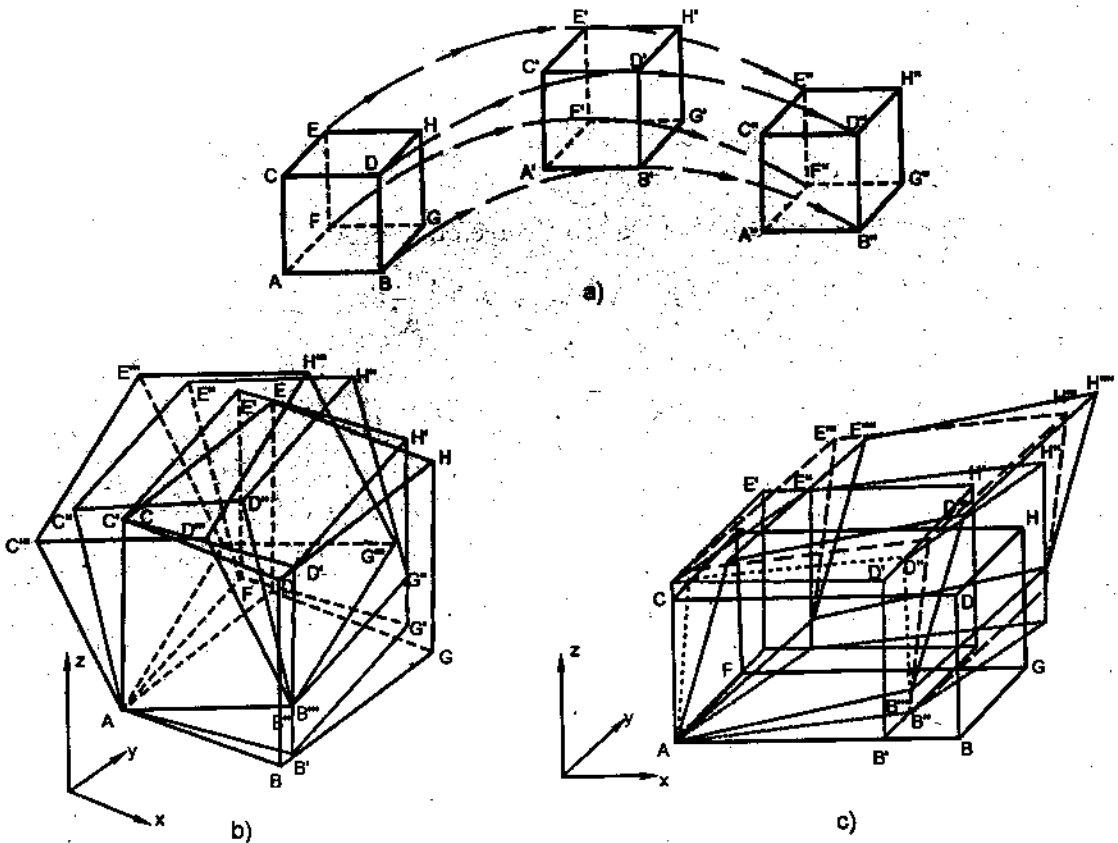
Hình 3.7

Đối với chất lỏng không chịu nén

$$u \Omega = \text{const} \Rightarrow u_1 \Omega_1 = u_2 \Omega_2$$

5. Phân tích hành vi của một phần tử chất lỏng - Chuyển động thế và chuyển động xoáy

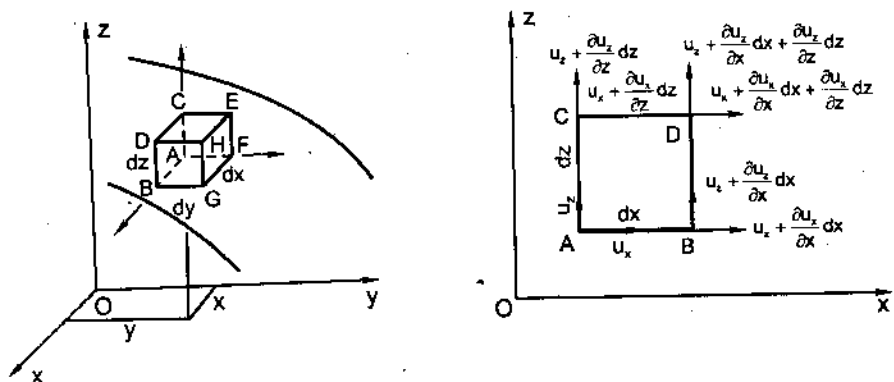
Như đã biết, trong cơ học vật rắn sự chuyển động của một phần tử có thể phân tích thành 2 loại chuyển động cơ bản : tịnh tiến và quay. Người ta đã bỏ qua biến dạng của vật thể vì so với các đại lượng khác mức độ biến dạng của chúng vô cùng bé.



Hình 3.8

Trong chất lỏng sự chuyển động của một phần tử phức tạp hơn do tính dễ biến dạng của nó. Vì vậy, như sẽ thấy, chuyển động của một phần tử chất lỏng là tổng hợp của 3 dạng chuyển động cơ bản: tịnh tiến (hình 3.8a), quay (hình 3.8b) và biến dạng (hình 3.8c), xảy ra đồng thời. Đó là định luật Helmholtz.

Bây giờ hãy khảo sát một phần tử chất lỏng có dạng hình hộp vuông góc có các cạnh dx , dy , dz . Việc chọn như thế không làm mất đi tính tổng quát của các kết quả sau này, nó chỉ giúp ta xử lý vấn đề dễ dàng hơn. Trước hết hãy nghiên cứu sự chuyển động của một mặt nào đó của hình hộp, ví dụ, mặt ABDC trong mặt phẳng xOz trên hình 3.9, nhưng chỉ xem xét đến chuyển động quay và chuyển động biến dạng (biến hình), tạm thời chưa quan tâm đến chuyển động tịnh tiến của nó vì không khó xác định.



Hình 3.9

Gọi vận tốc ở điểm A tọa độ $A(x,0,z)$ là $u = f(x,z)$ với các thành phần hướng x và z là $u_x = f_1(x,z)$; $u_z = f_2(x,z)$

Như thế, tại điểm $B(x+dx,z)$ bằng ngoại suy tuyến tính từ A

$$u_{Bx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx ; u_{Bz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx \quad (3-5a)$$

Tại điểm $C(x,z+dz)$:

$$u_{Cx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz ; u_{Cz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \quad (3-5b)$$

Tại điểm $D(x+dx,z+dz)$ có các thành phần vận tốc tương ứng sau:

$$u_{Dx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz ; u_{Dz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \quad (3-5c)$$

Dễ dàng nhận thấy có sự khác biệt vận tốc tại các đỉnh tạo nên sự chênh lệch dọc cạnh gây nên co giãn dài và sự chênh lệch ngang (trục giao) làm cho cạnh phải quay, đồng thời góc quay giữa 2 cạnh liền kề không như nhau và còn có thể không cùng chiều với nhau dẫn đến biến dạng góc (nói chung là gây biến dạng).

Xét biến dạng dài (co - giãn) của các tứ giác vuông góc này. Tại thời điểm t coi là thời điểm gốc tứ giác ABDC chưa bị biến dạng. Song, đến thời điểm $t + dt$, tức là dt sau đó nó

chuyển thành $AB'D'C'$ (hình 3.10a). Như vậy cạnh $\overline{AB}$ song song với trục Ox chịu một biến dạng dài :

$$(u_{Bx} - u_{Ax})dt = (u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx)dt - (u_x)dt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt \quad (3-6a)$$

theo phương Ox . Và, cạnh $\overline{AC}$ song song với trục Oz chịu một biến dạng dài là :

$$(u_{Cz} - u_{Az})dt = (u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz)dt - (u_z)dt = \frac{\partial u_z}{\partial z} dz dt \quad (3-6b)$$

Bằng phương pháp tương tự có thể chứng minh đối với cạnh $\overline{AF}$ song song với trục Oy ta cũng có :

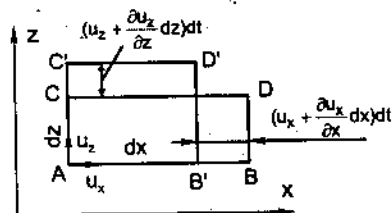
$$(u_{Fy} - u_{Ay})dt = \frac{\partial u_y}{\partial y} dy dt \quad (3-6c)$$

Đương nhiên do cách chọn tọa độ : $u_{Ax} = u_x$; $u_{Ay} = u_y$ và $u_{Az} = u_z$.

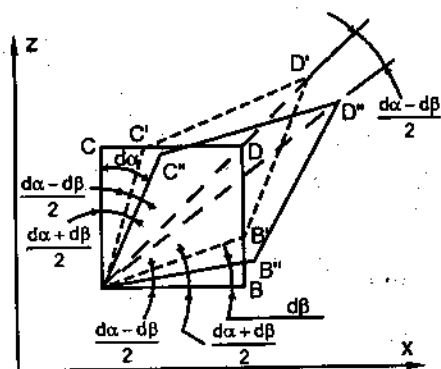
Từ ý nghĩa vật lí (coi lượng dẫn dài là quãng đường đi được trong khoảng thời gian dt) suy ra các đại lượng $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$, $\frac{\partial u_y}{\partial y} dy$, $\frac{\partial u_z}{\partial z} dz$ là các thành phần tốc độ biến dạng dài tương ứng.

Xét biến dạng góc đơn thuần và quay đơn thuần. Như trên, với các kí hiệu trên hình 3.10b, thoát đầu tại thời điểm gốc $t_0 = t$ hình chữ nhật $ABDC$ chưa bị biến dạng, các góc của nó đang vuông. Nhưng đến thời điểm $t + dt$ nó biến thành $AB''D''C''$ mà để dễ hình dung và tính toán ta phân kết cục thành 2 bước :

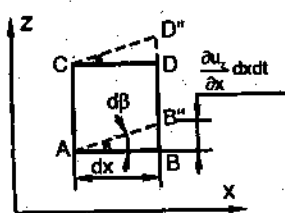
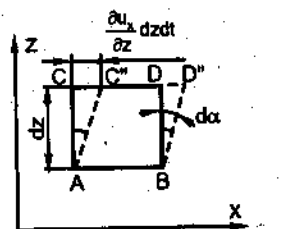
+ Từ $ABDC$ thành $AB'D'C'$ do biến dạng đơn thuần mà không quay (đường chéo $\overline{AD}$ thành $\overline{AD'}$, không quay).



Hình 3.10a



b)



c)

Hình 3.10b, c

+ Từ $AB'D'C'$ thành $AB''D''C''$ do thực hiện phép quay đơn thuần (tâm quay là điểm A).

Gọi góc có các cạnh $\overline{AC}$ và $\overline{AC''}$ là $d\alpha$; góc có các cạnh $\overline{AB}$ và $\overline{AB''}$ là $d\beta$. Tiến hành các bước nói trên với các kí hiệu trên hình vẽ có δ là góc do biến dạng đơn thuần tạo thành và γ là góc tạo bởi quay thuần túy. Từ quan hệ hình học trên hình có thể viết hệ phương trình

$$\begin{cases} d\beta = \delta - \gamma \\ d\alpha = \delta + \gamma \end{cases} \quad (3-7)$$

với các ẩn số δ và γ . Giải hệ phương trình trên ta được :

$$\text{Góc biến dạng đơn thuần :} \quad \delta = \frac{d\alpha + d\beta}{2} \quad (3-8a)$$

$$\text{Và góc quay đơn thuần :} \quad \gamma = \frac{d\alpha - d\beta}{2} \quad (3-8b)$$

Ta lại có :

$$\text{tg}(d\alpha) \approx d\alpha = \frac{\overline{CC''}}{\overline{CA}} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} dz dt}{dz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt \Rightarrow d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt \quad (3-9a)$$

và

$$\text{tg}(d\beta) \approx d\beta = \frac{\overline{BB''}}{\overline{BA}} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt \Rightarrow d\beta = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt \quad (3-9b)$$

Như vậy, **tốc độ biến dạng góc** (kí hiệu là θ) xung quanh trục đi qua điểm A, song song với trục Oy hoặc nói khác đi, xung quanh cạnh $\overline{AF}$ là :

$$\theta_y = \frac{1}{dt} \frac{d\alpha + d\beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3-10)$$

Tương tự như trên ta xử lí các tứ giác vuông AFEC và AFGB để được các kết quả cho các trục Ox và Oz, nhưng cũng có thể dùng phép hoán vị trục (biến số) để được các đại lượng còn lại, bởi lẽ thứ tự chọn các trục lúc đầu là tùy ý. Kết quả cho cả hệ như sau :

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \theta_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3-11)$$

Bây giờ tìm biểu thức thể hiện **quay đơn thuần** của cả hệ trên cơ sở ý nghĩa của γ thu được ở trên. Có thể viết vận tốc góc quay xung quanh trục chứa cạnh $\overline{AF}$

$$\omega_y = \frac{\gamma}{dt} = \frac{d\alpha - d\beta}{2 dt} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} dt - \frac{\partial u_z}{\partial x} dt}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3-12a)$$

Như vậy dễ dàng quy nạp cho cả hệ để có :

$$\begin{cases} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3-12)$$

là các thành phần hướng theo các trục toạ độ và vectơ quay đơn thuần :

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z = [\omega_x, \omega_y, \omega_z] = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} = \vec{\Omega},$$

trong cơ chất lỏng người ta dùng khái niệm vectơ xoáy $\vec{\Omega}$ (ômêga hoa) để mô tả hiện tượng phân tử chất lỏng quay xung quanh trục của nó.

Ở trên chúng ta mới nghiên cứu chuyển động của mặt hình hộp nguyên tố chất lỏng và tìm ra tốc độ biến dạng đơn thuần và tốc độ quay đơn thuần. Nếu tiếp tục phát triển cũng trên nguyên tắc ngoại suy, sẽ thu được kết quả tổng quát mang tính không gian bất kì mà ở trường hợp đang xét chính là việc khảo sát hành vi của điểm H, đỉnh đối của đỉnh A. Ta thấy đỉnh H có toạ độ :

$$H(x + dx, y + dy, z + dz)$$

với $u = f(x, y, z)$ vận tốc của điểm H (u_H) có các thành phần sau :

$$u_{Hx} = f_1(x + dx, y + dy, z + dz),$$

$$u_{Hy} = f_2(x + dx, y + dy, z + dz),$$

$$u_{Hz} = f_3(x + dx, y + dy, z + dz).$$

Khai triển chuỗi Taylor tại lân cận điểm A của hàm vận tốc và bỏ đi các số hạng vô cùng bé bậc cao, được :

$$u_{Hx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (3-13a)$$

$$u_{Hy} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \quad (3-13b)$$

$$u_{Hz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \quad (3-13c)$$

Để làm toát lên ý nghĩa vật lí của các biểu thức trên cần thực hiện một số phép biến đổi toán nhưng không làm mất đi bản chất cơ học của nó : Cộng vào các phương trình trên một lượng bằng 0 có dạng như :

$$\text{đối với phương trình (3-13a)} : 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dz + \frac{\partial u_y}{\partial x} dy \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dz + \frac{\partial u_y}{\partial x} dy \right) \quad (3-14a)$$

$$\text{đối với phương trình (3-13b)} : 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dz \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dz \right) \quad (3-14b)$$

$$\text{đối với phương trình (3-13c): } 0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dx \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dx \right) \quad (3-14c)$$

Chi tiết hoá (3-13a) ta có :

$$u_{Hx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} dz + \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x} dy - \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x} dz - \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial x} dy \quad (3-15a)$$

Tổ hợp lại theo các thừa số chung dx, dy, dz được :

$$u_{Hx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy \quad (3-15b)$$

Xử lý tương tự đối với u_{Hy} và u_{Hz} ta thu được :

$$u_{Hy} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dz \quad (3-15c)$$

$$u_{Hz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dx \quad (3-15d)$$

Thế các biểu thức của $\bar{\theta}$ và $\bar{\omega}$ từ các biểu thức (3-11) và (3-12) vào kết quả này, được :

$$\begin{cases} u_{Hx} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \theta_y dz + \theta_z dy + \omega_y dz - \omega_z dy \\ u_{Hy} = u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \theta_z dx + \theta_x dz + \omega_z dx - \omega_x dz \\ u_{Hz} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz + \theta_x dy + \theta_y dx + \omega_x dy - \omega_y dx \end{cases} \quad (3-16)$$

Đây là định luật Cauchy-Helmholtz.

Có thể nhận thấy, hành vi của phần tử chất lỏng chuyển động gồm chuyển vị tịnh tiến, biến dạng (dài và góc) và quay xung quanh trục của chính nó. Điều mà ngay từ đầu, lúc nói về tính chất riêng của chất lỏng đã được nhắc đến.

6. Phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng - phương trình Euler

6.1. Phương trình Euler

Tách trong dòng chảy một phần tử chất lỏng vô cùng bé dạng hình hộp vuông góc có các cạnh dx, dy, dz lần lượt song song với các trục x, y, z. Trong dòng chảy phần tử chất lỏng

này chịu tác động của 3 lực : *áp lực thuỷ động, lực khối và lực quán tính* (vì muốn nhấn mạnh, ta không xếp lực quán tính chung với lực khối) ; trước mắt bỏ qua lực ma sát.

Theo tiên đề/ định luật thứ 2 của Newton $\vec{P} = m\vec{a}$, với khối lượng $dm = \rho dV = \rho dx dy dz$ ta có phương trình cân bằng theo phương x :

$$\rho \times dx dy dz \times a_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \times dy dz + \rho \times dx dy dz \times X \quad (3-17a)$$

Triển khai tương tự đối với các phương khác rồi tổng hợp lại ta được hệ :

$$\begin{cases} \rho a_x dx dy dz = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X\right) dx dy dz \Rightarrow a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \rho a_y dx dy dz = \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y\right) dx dy dz \Rightarrow a_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \rho a_z dx dy dz = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z\right) dx dy dz \Rightarrow a_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{cases} \quad (3-17)$$

Chi tiết hoá các thành phần gia tốc gồm gia tốc cục bộ và gia tốc trao đổi, như (3-2a), được *phương trình Euler* như sau :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{cases} \quad (3-18)$$

Do cách đặt vấn đề ban đầu đã bỏ qua ma sát nên đây là phương trình vi phân mô tả dòng chảy của chất lỏng chịu nén, không nhớt, chuyển động không ổn định với ràng buộc là nhiệt độ không thay đổi. Trong thực tiễn ràng buộc này chỉ có ý nghĩa đối với các chất khí vì trong quá trình chuyển động các chất khí thường thay đổi nhiệt độ.

Dòng chất lỏng đồng thời phải bảo đảm tính liên tục (3-1). Ngoài ra, nếu biết được quan hệ hàm giữa mật độ và áp suất, $\rho = \rho(p)$, phương trình Euler trở nên khép kín.

6.2. Phương trình Lamb-Gromeko

Để hiểu sâu hơn hành vi của dòng chảy bây giờ thực hiện bước biến đổi sau :

Cộng vào vế trái của phương trình thứ nhất (phương x) trong hệ (3-18) đại lượng :

$$0 = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_z\right) - \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_z\right) ;$$

vào phương trình thứ hai (phương y) :

$$0 = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_z\right) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_z\right) ; \quad (3-0x)$$

vào phương trình thứ ba (phương z) :

$$0 = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_y \right) - \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} u_x \frac{\partial u_y}{\partial z} u_y \right).$$

với lưu ý là ở thời điểm t tại một vị trí xác định luôn có $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, đồng thời sử dụng các biểu thức của $\vec{\omega}$, thu được phương trình Lamb-Gromeko như sau :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2}{2} + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{u^2}{2} + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{cases} \quad (3-19a)$$

Viết gọn dưới dạng vectơ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \text{grad} U = 0 \quad (3-19b)$$

nếu nhớ lại rằng :

$$\text{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \left[\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left(\frac{u^2}{2} \right) = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) u ;$$

$$\vec{\omega} \times \vec{u} = (\vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z) \times (\vec{i} u_x + \vec{j} u_y + \vec{k} u_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{u} = \vec{i}(\omega_y u_z - \omega_z u_y) + \vec{j}(\omega_z u_x - \omega_x u_z) + \vec{k}(\omega_x u_y - \omega_y u_x) ;$$

Tương tự :

$$\text{grad} p = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{và} \quad \text{grad} U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ở chương II, trong phần thủy tĩnh học, chúng ta đã biết lực khối là đạo hàm riêng của một thế U, nghĩa là :

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} ; Y = -\frac{\partial U}{\partial y} ; Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Trong trường hợp tổng quát mật độ là hàm liên tục của áp suất. Có thể dùng một hàm liên tục của tọa độ P(x,y,z) sao cho :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} ; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} ; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3-00x)$$

thì (3-19a) có dạng :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) + 2(\omega_y u_z + \omega_z u_y) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) + 2(\omega_z u_x - \omega_x u_z) = 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) + 2(\omega_x u_y - \omega_y u_x) = 0 \end{cases} \quad (3-19c)$$

Đây là phương trình Lamb-Gromeko.

Viết gọn dưới dạng vectơ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \text{grad}(u^2 + P + U) + 2\vec{\omega} \times \vec{u}. \quad (3-19d)$$

7. Tích phân phương trình Euler - Tích phân Lagrange, tích phân Bernoulli

Các kết quả trên chưa thể dùng trực tiếp vì thực chất chúng còn dưới dạng phương trình vi phân. Bởi vậy dưới đây cần tìm cách tích phân chúng trong một số điều kiện cụ thể nhất định.

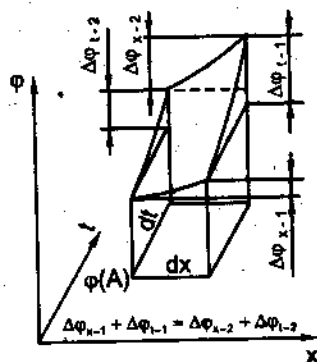
7.1. Tích phân Lagrange

Nếu dòng chảy không xoáy, nghĩa là các phần tử chất lỏng trong quá trình chuyển động không quay xung quanh trục của mình thì $\vec{\omega} = 0$, lúc đó các thành phần hướng trục x, y, z của vận tốc đều là đạo hàm riêng của một thế vận tốc $\varphi(x, y, z, t)$, cụ thể :

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

và gia tốc cục bộ $\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}$ triển khai chi tiết có dạng

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \end{cases} \quad (3-20)$$



Hình 3.11

do φ là hàm liên tục của cả biến thời gian t , lại là hàm thế, nên có thể hoán vị thứ tự đạo hàm (xem hình 3.11). Cho nên trường hợp này phương trình Lamb-Gromeko có dạng :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + U \right) = 0 ; \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + U \right) = 0 ; \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + U \right) = 0 \quad (3-21a)$$

là các thành phần vi phân toàn phần. Biểu thị dưới dạng vectơ :

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + U \right) = 0 \Rightarrow d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + U \right) = 0 \quad (3-21b)$$

Có một nhận xét thú vị là bản thân biểu thức (3-21b) biểu thị phương trình của mặt đẳng thế của một thể phức hợp mô tả bởi đại lượng trong ngoặc. Chính vì vậy dễ dàng tích phân trên một đường nào đó giữa hai điểm để được *tích phân Lagrange* dưới đây

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + P + U = \text{const} + f(t). \quad (3-22a)$$

với lưu ý trên tuyến tích phân $\overline{ds} = \overline{i}dx + \overline{j}dy + \overline{k}dz$ và $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; đồng thời do tích phân riêng theo tọa độ nên phải bổ sung một hàm thời gian nào đó.

Trong dòng chảy ổn định $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, nên từ (3.21b) có :

$$\frac{u^2}{2} + P + U = \text{const} \quad (3-22b)$$

Như vậy trong dòng chảy có thế, tổng của các số hạng trong (3-22a) không đổi tại mọi điểm.

Cần khẳng định lại, các phương trình (3-22) dùng cho dòng thế, dòng không xoáy.

7.2. Tích phân Bernoulli

Trong thủy lực người ta thường xét chuyển động ổn định dọc theo đường dòng. Với tuyến tích phân là đường dòng, một trường hợp riêng của Lagrange, Bernoulli đã cho một kết quả có ý nghĩa thực tiễn rất lớn trong lĩnh vực kĩ thuật, công nghệ. Thực vậy, như đã biết ở đầu chương này, trên đường dòng ta có quan hệ

$$u_z dx - u_x dz = 0; u_x dy - u_y dx = 0; u_y dz - u_z dy = 0 \quad (x)$$

Nhân các vế tương ứng của phương trình Lamb-Gromeko với dx, dy, dz là các thành phần của nguyên tố đường dòng rồi cộng lại, được :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) dz + \\ + 2(\omega_y u_z - \omega_z u_y) dx + 2(\omega_z u_x - \omega_x u_z) dy + 2(\omega_x u_y - \omega_y u_x) dz = 0 \end{aligned} \quad (xx)$$

Sắp xếp lại các số hạng ở dòng 2 của phương trình (xx) bằng cách đặt các thành phần vận tốc quay làm thừa số chung, ta được đại lượng tương đương :

$$2(u_z dx - u_x dz)\omega_y + 2(u_x dy - u_y dx)\omega_z + 2(u_y dz - u_z dy)\omega_x = 0$$

vì các đại lượng trong ngoặc đơn đều triệt tiêu bởi điều kiện của đường dòng (x). Đồng thời còn thấy, 3 số hạng cuối cùng của dòng thứ nhất của (xx) là một vi phân toàn phần. Do đó men theo đường dòng thì (xx) có dạng :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} dx + \frac{\partial u_y}{\partial t} dy + \frac{\partial u_z}{\partial t} dz + d \left(\frac{u^2}{2} + P + U \right) = 0 \quad (3-23a)$$

Nếu dòng là ổn định, các thành phần gia tốc cục bộ triệt tiêu nên :

$$d\left(\frac{u^2}{2} + P + U\right) = 0 \quad (3-23b)$$

Tích phân cả 2 vế, được kết quả dọc theo đường dòng là *tích phân Bernoulli*

$$\frac{u^2}{2} + P + U = \text{const} \quad (3-23c)$$

7.3. Tích phân Bernoulli trong trọng trường - Phương trình Bernoulli

Cần lưu ý rằng trị số của hằng số tích phân thay đổi theo đường dòng cụ thể mà ta dùng làm đường tích phân. Cho nên có thể hiểu (3-23c) còn là kết quả cho dòng nguyên tố hoặc cho một ống dòng, ở đó các trạng thái dòng chảy được coi là không đổi trên cùng mặt cắt ướt.

Trong trọng trường nếu chất lỏng không chịu nén với lực khối chỉ là trọng lực thì :

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{P}{\rho} \text{ và } U = gz.$$

Khi đó dọc theo đường dòng tổng số $u^2/2 + p/\rho + gz$ là không đổi :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (3-24a)$$

Hệ thức này là phương trình Bernoulli. Đáng lưu ý, men theo dòng nguyên tố :

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const} \quad (3-24b)$$

Để nắm được bản chất vấn đề, bây giờ hãy phân tích ý nghĩa năng lượng của phương trình Bernoulli :

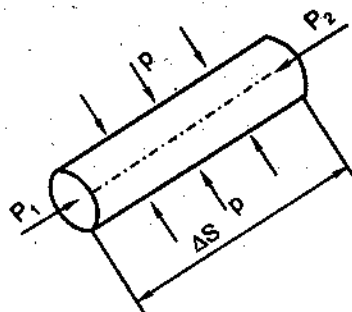
Dọc theo đường dòng, hay dòng nguyên tố, từ mặt 1 đến mặt 2 như hình 3.12, sự thay đổi động năng của một đơn vị khối lượng là $\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2}$; của một đơn vị trọng lượng :

$\frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}$ (do nhân tử số với g để được γ nên mẫu số cũng phải thế) ; còn nếu tính cho một

đơn vị thể tích thì $\rho \frac{u_1^2}{2} - \rho \frac{u_2^2}{2}$ (do $m = 1$ đơn vị khối lượng $= \rho V \Rightarrow V = 1/\rho \Rightarrow (1 \times u^2/2)/V = (u^2/2)/(1/\rho) = \rho u^2/2$).

Tương tự, giữa điểm A của mặt 1 và điểm B của mặt 2, biến đổi thế năng vị trí của một đơn vị khối lượng bằng : $gz_1 - gz_2$; của một đơn vị trọng lượng : $z_1 - z_2$; của một đơn vị thể tích : $\rho gz_1 - \rho gz_2$.

Xét một phần tử chất lỏng, thấy áp lực thành bên do đối xứng và trực giao với đường dòng nên không sinh công cơ học.



Hình 3.12

Trên hình 3.12 áp lực tại hai mặt 1 và 2 là P_1 và P_2 gây ra một lực

$$\Delta F = p\Delta\Omega - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \Delta s \right) \Delta\Omega = -\frac{\partial p}{\partial s} \Delta s \Delta\Omega = -\frac{\partial p}{\partial s} \Delta V$$

trong đó : Δs là đoạn đường từ A đến B, $\Delta\Omega$ là tiết diện mặt 1 và 2, ΔV là thể tích của phân tố (lấy xấp xỉ) và lực này sản ra một công nguyên tố bằng :

$$dE = \Delta F ds = \Delta V \frac{\partial p}{\partial s} ds = \Delta V dp$$

trong đó : dp là biến thiên áp suất dọc theo đường dòng. Tính trên một đoạn đường dòng hữu hạn Δs :

$$E = \int_{1-2} dE = \int_{1-2} \Delta V dp = \Delta V (p_2 - p_1).$$

Công này nếu tính cho một đơn vị khối lượng thì :

$$\epsilon = \frac{E}{\rho \Delta V} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} ;$$

nếu tính cho một đơn vị trọng lượng thì : $\epsilon = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} ;$

còn cho một đơn vị thể tích thì : $\epsilon = p_2 - p_1.$

Tóm lại, công sản ra khi có sự di chuyển của một đơn vị khối lượng hay một đơn vị trọng lượng hoặc một đơn vị thể tích là do có chênh áp, là công áp lực. Chất lỏng chuyển động dọc theo đường dòng, chuyển động không ma sát, vẫn tuân thủ nguyên lý bảo toàn năng lượng, nghĩa là :

Sự biến đổi động năng và thế năng vị trí bằng công tương ứng do áp lực tạo nên trên đoạn đường xảy ra sự biến đổi đó. Do vậy, nếu tính năng lượng dự trữ cho một đơn vị khối lượng, ta có :

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) = \frac{p_2 - p_1}{\rho} ;$$

hoặc dọc theo đường dòng ta viết được phương trình

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + gz_2 \Rightarrow \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = \text{const}$$

trong đó :

u - vận tốc dòng chảy ;

p - áp suất dòng chảy ;

z - khoảng cách đến mặt chuẩn tùy chọn tới điểm z bất kì nào của đường dòng.

Tổng hợp lại, thể hiện qua phương trình Bernoulli năng lượng dự trữ

$$\text{cho một đơn vị khối lượng : } \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = \text{const} ; \quad (3-24c)$$

$$\text{cho một đơn vị trọng lượng : } \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + z = \text{const} ; \quad (3-24d)$$

$$\text{cho một đơn vị thể tích : } p + \rho \frac{u^2}{2} + \rho g z = \text{const} . \quad (3-24e)$$

Cả 3 số hạng trong 3 dạng phương trình đều biểu thị cơ năng của dòng chảy nên có thể phát biểu như sau :

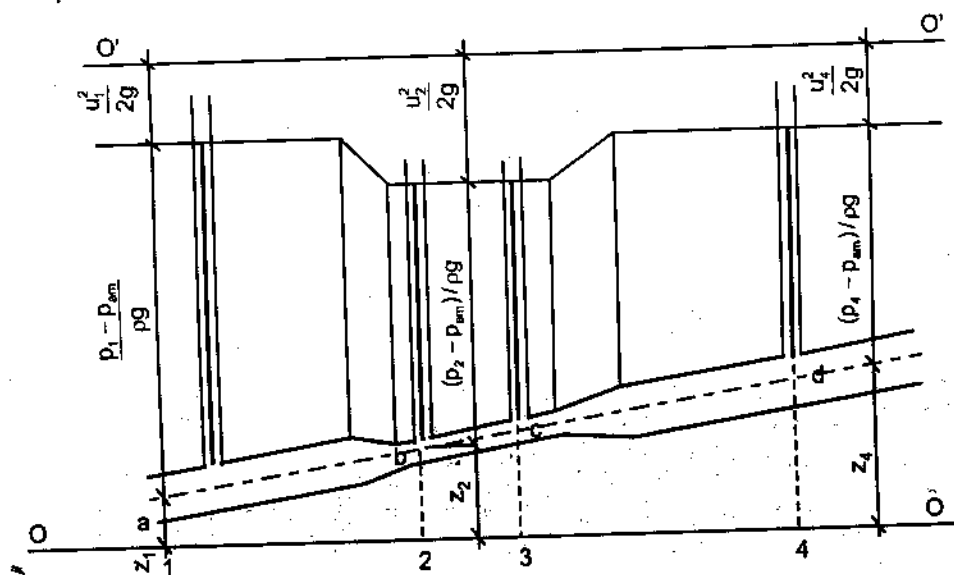
Dọc theo đường dòng của chất lỏng không nhớt, không chịu nén, dự trữ cơ năng tính cho một đơn vị khối lượng hay một đơn vị trọng lượng hoặc một đơn vị thể tích có trị số không đổi.

Trong thủy lực người ta **định nghĩa cột nước toàn phần** của một đơn vị trọng lượng chất lỏng chuyển động trong dòng chảy gồm 3 yếu tố :

- Động năng – cột nước vận tốc ;
- Thế năng áp suất ;
- Thế năng vị trí (vị năng),

hợp thành toàn bộ thế năng của dòng chảy thể hiện trên cột nước thủy tĩnh.

Như vậy, có thể nói, dọc theo đường dòng đã chọn trong dòng chảy của chất lỏng không nhớt, không chịu nén, cột nước toàn phần – tổng của cột nước vận tốc và cột nước tĩnh – giữ nguyên trị số.



Hình 3.13. Ý nghĩa hình học của phương trình Bernoulli :

Đường $O' - O'$: đường cột nước toàn phần ;

Đường a-b-c-d-e-f : đường đo áp ;

Đường $O - O$: đường mặt chuẩn nằm ngang ;

z : chiều cao vị trí ;

đoạn b-c : biến thiên do ống thu hẹp dần ;

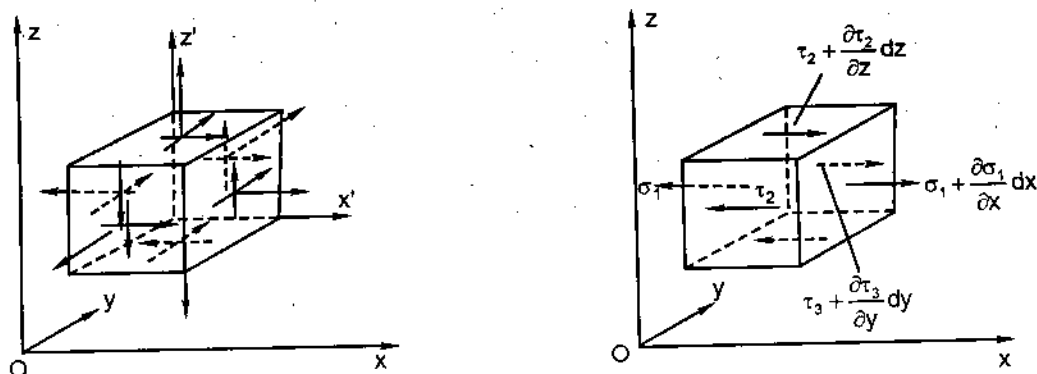
đoạn d-e : biến thiên do ống mở rộng dần.

8. Phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng nhớt - Phương trình Navier-Stokes

Trong chuyển động của chất lỏng thực (có độ nhớt) trong chất lỏng, nội bộ cũng như ở biên tồn tại ứng suất. Ứng suất đó được phân tích thành ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt mà nó tác động. Như đã chứng minh, trong dòng chảy như thế có thể xem xét 2 hệ ứng suất :

- Ứng suất pháp là ứng suất đơn trị, có thể xác định tại bất kì điểm nào trong dòng chảy.
- Ứng suất bổ sung gồm 3 thành phần pháp và 3 thành phần tiếp tuyến. Hệ ứng suất này phụ thuộc vào vị trí của điểm đang khảo sát trong không gian dòng chảy, vào hướng đặt của mặt chịu lực mà trên đó ứng suất xuất hiện.

Bây giờ tại một điểm bất kì O' trong nội bộ chất lỏng được xác định bởi tọa độ x, y, z của hệ tọa độ $Oxyz$ dựng một hệ tọa độ $O'x'y'z'$ gốc O' có các trục song song đôi một với các trục của hệ $Oxyz$ (xem hình 3.14). Trong các mặt phẳng của hệ $O'x'y'z'$ ngoài áp suất còn có 3 thành phần pháp $\sigma_1 = \sigma_{x'x'}$, $\sigma_2 = \sigma_{y'y'}$, $\sigma_3 = \sigma_{z'z'}$ và 3 thành phần tiếp $\tau_1 = \tau_{y'z'} = \tau_{z'y'}$, $\tau_2 = \tau_{x'z'} = \tau_{z'x'}$, $\tau_3 = \tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ của ứng suất bổ sung. Các ứng suất bổ sung phụ thuộc vào các tính chất vật lí và các đặc trưng chuyển động của chất lỏng.



Hình 3.14

Hãy khảo sát khối chất lỏng nguyên tố dạng hình hộp vuông cạnh dx, dy, dz . Tại thời điểm khi hình hộp, cùng với dòng chảy, đi qua điểm O thì trên các mặt hình hộp thẳng góc với trục Ox có tác động của các lực sau đây (với các kí hiệu trên hình 3.14b) và tính chất của lực :

$$\sigma_1 dydz \text{ và } \left[\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx \right] dydz ;$$

Lập luận tương tự, trên các mặt hình hộp song song với mặt phẳng tọa độ xOz có sự tác động của các ứng suất tạo nên lực cùng hướng với Ox có trị số :

$$\tau_3 dx dz \text{ và } \left[\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy \right] dx dz ;$$

và trên các mặt hình hộp song song với mặt toạ độ xOy có lực tác động (bởi ứng suất tiếp τ_2) có trị số :

$$\tau_2 dx dy \text{ và } \left[\tau_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} dz \right] dx dy$$

Các lực này đều cùng phương với trục Ox, tổng hợp lại tạo nên thành phần chiều x

$$\left[\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx \right] dy dz - \sigma_1 dy dz + \left[\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy \right] dx dz - \tau_3 dx dz +$$

$$+ \left[\tau_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} dz \right] dx dy - \tau_2 dx dy = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dy dz$$

tương tự, có thành phần chiều y :

$$\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} \right) dx dy dz$$

và thành phần chiều z :

$$\left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right) dx dy dz$$

Hãy cộng vế phải của phương trình chuyển động Euler (3-18) với các kết quả cùng chiều ở trên, được :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3-25)$$

Hệ phương trình này thể hiện các điều kiện cân bằng động lực học tại chất điểm trong dòng chảy của môi trường liên tục khi các ứng suất không tác động thẳng góc với mặt chịu lực. Môi trường dạng này rất gần với chất lỏng thực. Trị số các đạo hàm riêng, đặc trưng cho sự tồn tại các ứng suất bổ sung, ngoài độ lớn của chính ứng suất, còn phụ thuộc vào đặc tính của dòng chảy và tính chất vật lí của môi trường, của chất lỏng.

Như đã nói ở trên, trong không gian dòng chảy của môi trường liên tục tại mọi điểm có thể dùng một mặt bậc 2 (trong trường hợp cụ thể ở đây là mặt elipxôit) để biểu thị mặt trạng thái ứng suất của điểm đó, trong hệ toạ độ sao cho tất cả các ứng suất tiếp đều triệt tiêu ($\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$), chỉ còn lại các ứng suất pháp. Người ta gọi hệ trục toạ độ này là hệ trục chính. Trong hệ trục này các trục của hệ toạ độ trục giao với mặt elipxôit nói trên - mặt Cauchy - mặt trạng thái ứng suất và trong phương trình (1-26) ở chương I không xuất hiện các ứng suất tiếp nữa. Vì thế trong hệ này các ứng suất bổ sung cùng với áp suất chất lỏng tạo ra các lực kéo - nén.

Cũng trong hệ toạ độ này tốc độ biến dạng đơn thuần (3-11) của phần tử chất lỏng tại thời điểm khi nó đi qua điểm $O(x,y,z)$ thẳng góc với mặt elipxôit. Đồng thời tốc độ biến dạng của phần tử cùng phương với các trục tương ứng của hệ toạ độ (ở chương I ta dùng chỉ số I để biểu thị nội dung liên quan đến hệ trục chính như biến số trong hệ trục chính ; ứng suất chính,...). Phương trình mặt ứng suất có dạng :

$$f(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} \right) x_1^2 + \left(\frac{\partial u_{y_1}}{\partial y_1} \right) y_1^2 + \left(\frac{\partial u_{z_1}}{\partial z_1} \right) z_1^2 \right] \quad (3-26)$$

Sau đây dùng kí hiệu :

$$\frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1} = e_1 ; \quad \frac{\partial u_{y_1}}{\partial y_1} = e_2 ; \quad \frac{\partial u_{z_1}}{\partial z_1} = e_3 \quad (3-27)$$

Sử dụng mô hình chất lỏng Newton, loại chất lỏng có các tính chất : ứng suất sinh ra bởi tính nhớt của chất lỏng và phụ thuộc tuyến tính vào gradien vận tốc, tức là vào đạo hàm riêng lấy theo các biến của hệ ấy, đồng thời đảm bảo tính đẳng hướng trong chất lỏng. Toán học cũng đã chỉ ra rằng, trong quá trình biến dạng từ hình cầu sang elipxôit (chất lỏng chuyển từ tĩnh sang động) hoặc ngược lại, luôn có 3 trục (đường kính) trục giao nhau chỉ chịu biến dạng dài nhưng giữ nguyên vị trí tương đối với nhau (không thay đổi góc vuông vốn có với nhau) và không chuyển khỏi mặt phẳng toạ độ xác lập từ đầu ; chúng là 3 trục chính.

Biết rằng, đạo hàm riêng theo một hướng (lấy theo một biến) ảnh hưởng đến ứng suất qua hệ số tỉ lệ λ thể hiện sự co/dãn dài, còn theo hai hướng kia sự ảnh hưởng là đồng nhất thông qua hệ số tỉ lệ θ . Với các giả thiết về một loại chất lỏng như trên ta có :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \lambda e_1 + \theta(e_2 + e_3) \\ \sigma_{12} = \lambda e_2 + \theta(e_1 + e_3) \\ \sigma_{13} = \lambda e_3 + \theta(e_1 + e_2) \end{cases} \quad (3-28)$$

Trường hợp chất lỏng không chịu nén tính liên tục được đảm bảo khi :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3-29)$$

bất kể hệ quy chiếu là hệ nào. Điều đó còn có nghĩa trị số của thể tích nguyên tố hình cầu sau khi biến dạng thành elipxôit không thay đổi. Vì vậy, có thể viết :

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (3-30)$$

để từ (3-28) và (3-30) được :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda - \theta)e_1 \\ \sigma_{12} = (\lambda - \theta)e_2 \\ \sigma_{13} = (\lambda - \theta)e_3 \end{cases} \quad (3-31)$$

Cộng 3 ứng suất chính bổ sung ta có :

$$\sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} = (\lambda - \theta)(e_1 + e_2 + e_3) \quad (3-32)$$

Hãy kí hiệu $\mu = (\lambda - \theta)/2$ và thay vào (3-31) các biểu thức của e_1, e_2, e_3 được kết quả :

$$\sigma_1 = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} ; \sigma_2 = 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \sigma_3 = 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} . \quad (3-33)$$

Theo mô hình tuyến tính của Newton trong mọi trường hợp ta có :

$$\begin{cases} \tau_1 = 2\mu\theta_1 = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \tau_2 = 2\mu\theta_2 = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \tau_3 = 2\mu\theta_3 = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (3-34)$$

trong đó μ chính là độ nhớt của chất lỏng chuyển động.

Bây giờ hãy sử dụng (3-33), (3-34) để xác định các lực gây ra bởi tính nhớt của chất lỏng Newton xuất hiện tại các chất điểm của dòng chảy. Ta xử lí lần lượt theo từng phương của trục toạ độ. Thành phần phương x (còn nói là hình chiếu trên trục x) của lực nhớt tính cho một đơn vị thể tích tác động lên điểm có toạ độ (x, y, z) là :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \\ &= \mu \left[2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-35)$$

Sau đây hãy tập trung xử lí về phải của phương trình này. Ta lấy đạo hàm riêng theo x của phương trình liên tục để tính về phải cho phương x rồi theo y cho phương y và theo z cho phương z :

Đạo hàm theo x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (xxx)$$

Đưa kết quả này vào về phải của biểu thức (3-35) và để tiện, ta chỉ xử lí các đại lượng trong ngoặc vuông (với việc tách đôi số hạng thứ nhất, nửa để nguyên, nửa kia thay bằng đại lượng tương đương rút từ (xxx) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \left[- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) &= \\ = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} . \end{aligned}$$

Từ đây có :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (3-35a)$$

Tương tự, bây giờ ta xử lí :

Đạo hàm theo y : từ (3-25) thấy

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right]$$

và ở đây dùng kết quả đạo hàm riêng theo y của phương trình liên tục dạng phù hợp :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

để được đại lượng tương tự (3-25) :

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right). \quad (3-35b)$$

Cũng như vậy với

Đạo hàm theo z : ta có

$$\frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad (3-35c)$$

Thế kết quả này vào phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng nhớt (3-25) ta được phương trình Navier-Stokes như sau :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (3-36)$$

Viết dưới dạng vectơ cho gọn :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \text{grad} \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \text{grad} U + \frac{\mu}{\rho} \vec{T} \quad (3-37)$$

trong đó :

$$\begin{cases} \vec{u} \text{grad} \vec{u} = \vec{i}(\vec{u} \text{grad} u_x) + \vec{j}(\vec{u} \text{grad} u_y) + \vec{k}(\vec{u} \text{grad} u_z) \\ \vec{T} = \vec{i} \Delta u_x + \vec{j} \Delta u_y + \vec{k} \Delta u_z ; \end{cases} \quad (3-38)$$

và toán tử Laplace :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

9. Phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng nhớt

Ở phần trước chúng ta đã có phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng không nhớt như là kết quả của tích phân đường, thực hiện trên một đoạn của một đường dòng nhất định. Điều đó cũng có nghĩa là nếu trên mặt cắt ngang của một ống dòng, tức là mặt cắt ướt, các đặc trưng của dòng chảy (áp suất, vận tốc,...) đều như nhau tại mọi điểm trong mặt cắt, thì phương trình đó có giá trị cho cả dòng. Đối với chất lỏng nhớt, trong chuyển động các lực sinh ra do tính nhớt đã gây ra công ma sát mà toàn bộ biến thành nhiệt năng không hoàn lại (quá trình không thuận nghịch). Đối với năng lượng của dòng chảy đó là tổn thất. Điều này cũng được thể hiện một cách nhất quán trong phương trình Navier-Stokes (số hạng cuối). Việc tích phân phương trình này dù là dọc theo đường dòng cũng gặp không ít khó khăn. Chỉ với những ràng buộc nhất định mới có thể đưa về trường hợp khả dĩ để có được phương trình Bernoulli cho chất lỏng thực, chất lỏng nhớt. Các ràng buộc đó là :

- Chuyển động là ổn định ;
- Phân bố áp suất trên các mặt cắt tuân theo quy luật thủy tĩnh và vận tốc tại mọi điểm trên cùng một mặt cắt là như nhau ;
- Không có sự trao đổi nhiệt năng và cơ năng với môi trường bên ngoài.

Lại biết rằng, năng lượng tính cho một đơn vị khối lượng, một đơn vị trọng lượng hay một đơn vị thể tích của chất lỏng bằng tổng các năng lượng cơ học của khối chất lỏng đó. Theo định luật bảo toàn năng lượng thì ở trường hợp đang xét tổng năng lượng này không đổi, nó giữ nguyên trị số. Dọc theo dòng chảy từ mặt cắt này sang mặt cắt kia xảy ra quá trình biến đổi không đảo ngược từ cơ năng sang nhiệt năng. Do vậy nếu không được bổ sung từ bên ngoài, cơ năng của dòng chảy sẽ giảm dần từ mặt cắt này sang mặt cắt kia, theo chiều dòng chảy.

Công do lực nhớt gây ra của một đơn vị khối lượng, trọng lượng hay thể tích giữa 2 mặt cắt được gọi là tổn thất thủy lực. Nếu tính cho một đơn vị trọng lượng thì gọi là tổn thất cột nước (nếu chất lỏng là nước).

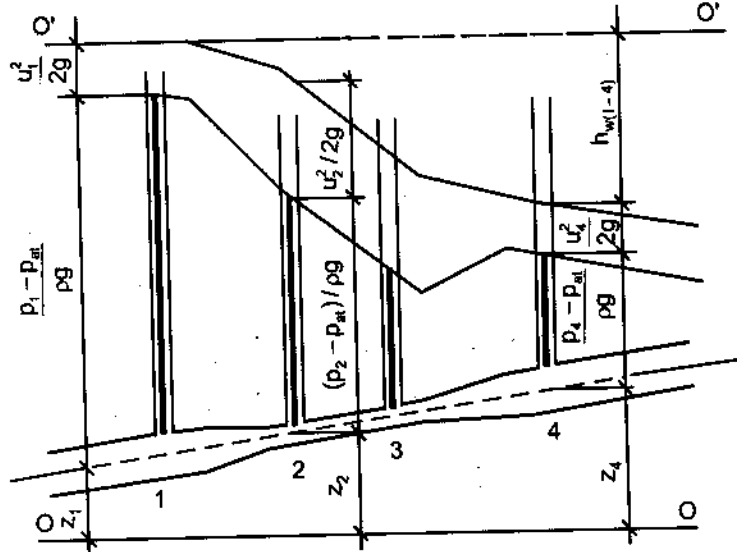
Ở hai mặt cắt đã chọn, đi theo là p_1, u_1, z_1 và p_2, u_2 và z_2 ta có cơ năng tính cho một đơn vị trọng lượng lần lượt là :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \text{ và } z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Vì vậy phương trình cân bằng cơ năng giữa hai mặt cắt có dạng :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w \quad (3-39)$$

Hình 3.15 thể hiện ý nghĩa hình học của phương trình (3-39), phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng nhớt.



Hình 3.15

Tổng hợp lại ta có các dạng cân bằng cơ năng tính cho 3 đại lượng đơn vị

$$\text{Khối lượng : } gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{\Delta p_w}{\rho} ; \quad (3-40a)$$

$$\text{Trọng lượng : } z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w ; \quad (3-40b)$$

$$\text{Thể tích : } \rho z_1 + p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = \rho z_2 + p_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} + \Delta p_w \quad (3-40c)$$

Nhận xét thấy rằng đường cột nước toàn phần trong trường hợp này không còn là đường nằm ngang như ở dòng chất lỏng không nhớt do có sự tổn thất qua từng đoạn, từng mặt cắt.

Trong kĩ thuật thủy lực người ta *định nghĩa tổn thất cột nước (chất lỏng) cho một đơn vị chiều dài giữa các mặt cắt là độ dốc thủy lực* và kí hiệu bằng chữ J , nghĩa là :

$$J = \frac{\Delta \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right)}{\Delta l} \quad (3-41)$$

Δl là chiều dài đoạn đường dòng (chiều dài chảy) giữa 2 mặt cắt. Người ta còn dùng *khái niệm độ dốc do áp* định nghĩa cho tỉ số giữa thế năng và chiều dài chảy :

$$J_{da} = \frac{\Delta \left(z + \frac{p}{\rho g} \right)}{\Delta l} \quad (3-42)$$

Có thể thấy, độ dốc thủy lực luôn nhỏ hơn 0 (độ dốc âm), nhưng độ dốc do áp có thể là âm hoặc dương tùy thuộc vào các đặc trưng của dòng chảy cụ thể. Thực vậy, ví dụ như trên hình 3.15 giữa đoạn 3-4 có một khúc ống loe (đíp-phu-zo) làm dòng chảy chậm dần, u giảm theo chiều dòng chảy làm cho p tăng nên độ dốc do áp ở đoạn này là dương (> 0).

10. Phương trình Bernoulli cho toàn dòng chất lỏng

Điều kiện ràng buộc cho việc mở rộng ra toàn dòng là :

- Dòng chất lỏng tại các mặt cắt đang xét phải thay đổi dần ;
- Trong chuyển động thay đổi dần này thành phần trục giao với chiều dòng chảy, thành phần ngang, phải nhỏ thua hơn thành phần chiều chảy nhiều lần ;
- Trong dòng đổi dần các mặt cắt ướt phải là phẳng hoặc cong dạng mặt trụ ; ở đây sự phân bố áp suất tuân theo quy luật thủy tĩnh.

Mở rộng ra toàn dòng trong điều kiện như thế này, năng lượng của toàn dòng bằng tổng năng lượng của các dòng nguyên tố hình thành nên dòng đó. Nghĩa là nếu năng lượng của dòng nguyên tố bằng :

$$dE = (gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2})\rho u d\Omega,$$

năng lượng của toàn dòng sẽ là :

$$E = \int_{\Omega} dE = \int_{\Omega} (gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2})\rho u d\Omega$$

trong đó phần thế năng bằng :

$$E_m = \int_{\Omega} (gz + \frac{p}{\rho})\rho u d\Omega,$$

Ω là mặt cắt ướt. Song vì do thay đổi dần, tổng $gz + p/\rho$ tại tất cả các điểm của cùng một mặt cắt như nhau, ta có thể đưa ra ngoài dấu tích phân và :

$$E_m = (gz + \frac{p}{\rho}) \int_{\Omega} \rho u d\Omega = (gz + \frac{p}{\rho})\rho Q$$

trong đó : Q là lưu lượng qua mặt cắt ướt Ω .

Phần động năng của dòng chảy tại mặt cắt đang xét :

$$E_{dn} = \int_{\Omega} \frac{u^2}{2} \rho u d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{u^3}{2} d\Omega$$

và của một đơn vị khối lượng :

$$\epsilon = \frac{\int_{\Omega} \rho \frac{u^3}{2} d\Omega}{\int_{\Omega} \rho u d\Omega} \quad (3-43)$$

Vận tốc trung bình mặt cắt :

$$v = \frac{\int_{\Omega} u d\Omega}{\int_{\Omega} u d\Omega} = \frac{Q}{\Omega} \quad (3-44)$$

Trong thực tiễn kĩ thuật người ta thường sử dụng vận tốc trung bình (mặt cắt) v . Nếu tính động năng theo vận tốc trung bình cho một đơn vị khối lượng ta được $v^2/2$. Đại lượng này thường không trùng với kết quả tính theo vận tốc (cục bộ) u . Vì vậy cần phải chỉnh lí cho đúng. Nếu gọi α là tỉ số giữa động năng thực và động năng tính theo vận tốc trung bình, thì :

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\Omega}{v^3 \Omega} \quad (3-45)$$

Trong thực tiễn α thay đổi trong phạm vi khá rộng, ví dụ phân bố đồng đều $\alpha = 1$, còn vận tốc cục bộ phân bố theo quy luật parabol $\alpha = 2$, ... Hệ số này có tên là Coriolis.

Tổng hợp lại, các dạng phương trình Bernoulli ở chất lỏng thực viết cho :

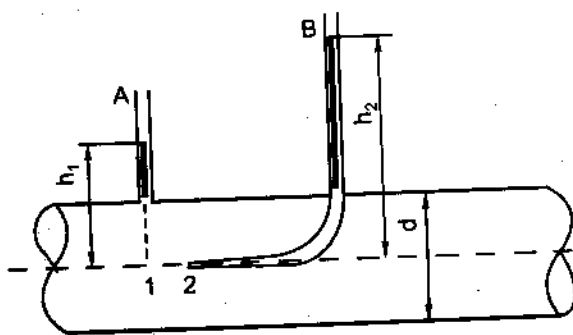
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- Một đơn vị khối lượng :} \quad gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + \frac{\Delta p_w}{\rho} \\ \text{- Một đơn vị trọng lượng :} \quad z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_w ; \\ \text{- Một đơn vị thể tích :} \quad \rho g z_1 + p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + \Delta p_w \end{array} \right. \quad (3-46)$$

11. Nguyên lí đo áp suất, vận tốc và lưu lượng của các dụng cụ đo

Trên cơ sở ý nghĩa vật lí của phương trình Bernoulli người ta đã thiết kế ra các dụng cụ đo các thông số của dòng chảy gồm : Ống Pitot (Pitô), ống Prandtl (Prăng) và ống Venturi (Văngturi).

11.1. Ống Pitot

Ống Pitot là dụng cụ đo áp suất tổng của dòng chảy. Biết rằng trong chuyển động của chất lỏng nếu ta hãm dòng chảy để vận tốc của nó bằng 0 thì toàn bộ động năng của dòng chuyển hoá thành áp năng (bỏ qua tổn thất). Ta tạo một điểm dừng trong dòng chảy là đã có thể thực hiện được mục đích đo áp suất tổng. Hình 3.16 cho sơ đồ đo theo nguyên lí đã nêu. Mũi



Hình 3.16

cho sơ đồ đo theo nguyên lí đã nêu. Mũi 2 của ống B (ống Pitot) hướng vào dòng chảy sao cho đoạn đầu của ống ở tư thế đối xứng trục (như hình vẽ) làm cho điểm 2 trở thành điểm dừng để tại đây vận tốc bằng 0. Theo phương trình Bernoulli viết cho đường dòng trên trục ống :

$$\gamma z_1 + p_1 + \frac{\gamma u_1^2}{2g} = \gamma z_2 + p_2 + \frac{\gamma u_2^2}{2g}$$

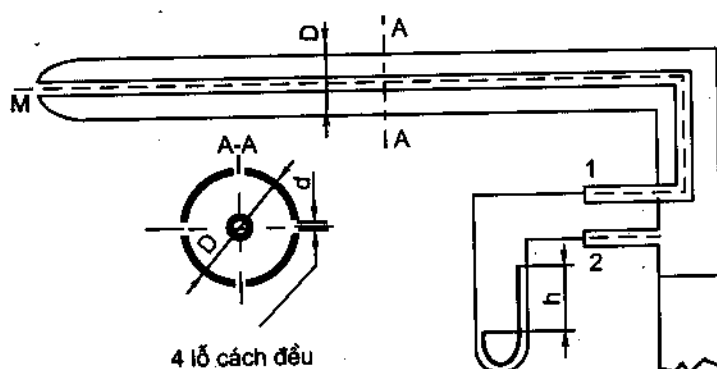
Do $z_1 = z_2$ và p_1 là áp suất tĩnh tại mặt cắt bất kì nào trên thượng nguồn nên $p_1 = p$ và ta có :

$$p_2 = p + \frac{\gamma u^2}{2g}$$

Nghĩa là áp suất p_2 (thể hiện bằng cột áp h_2) chính là áp suất tổng (gồm áp suất tĩnh và áp suất động) ở mặt cắt tại điểm 2.

11.2. Ống Prandtl

Ống Prandtl là dụng cụ cùng một lúc đo áp suất tổng và áp suất tĩnh, song nó đồng thời thực hiện phép so sánh thông qua 2 nhánh của ống đo áp hình chữ U để chỉ thị được cột áp vận tốc h trong phương trình Bernoulli. Nguyên lý hoạt động của nó thể hiện trên hình 3.17.



Hình 3.17

Tại điểm M, như ở ống Pitot, xuất hiện điểm dừng ; tại mặt cắt A-A có 4 lỗ đường kính d cách đều làm nhiệm vụ đo áp suất tĩnh tại mặt cắt này của dòng chảy. Do khoảng cách giữa M và A-A nhỏ nên tổn thất dòng chảy rất nhỏ, có thể bỏ qua ; đường kính D của ống đo cũng nhỏ thua hơn nhiều lần so với đường kính ống dẫn, không gây chèn dòng nên theo phương trình Bernoulli viết cho mặt cắt chứa M và mặt cắt A-A

$$\gamma z_A + p_A + \frac{\gamma u_A^2}{2g} = \gamma z_M + p_M ; z_A = z_M$$

Suy ra :

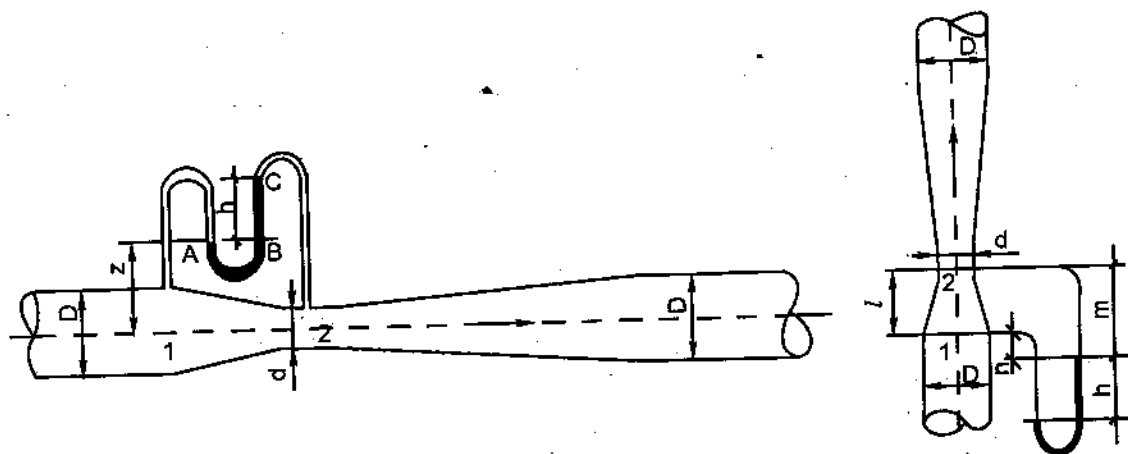
$$u_A^2 = \frac{2g(p_M - p_A)}{\gamma} = 2g \frac{\Delta p}{\gamma} = 2gh$$

$$u = \sqrt{2gh}$$

Lưu ý rằng có thể dùng ống Prandtl làm chức năng của một ống Pitot, nếu không nối một nhánh chữ U vào đầu nối 2 (trên hình vẽ). Ngược lại, có thể dùng để đo áp suất tĩnh, chỉ nối với nhánh 1 mà không nối với nhánh 2.

11.3. Ống Venturi

Ống Venturi dùng để đo lưu lượng, có kết cấu như hình 3.18. Dụng cụ này gồm 3 đoạn ống đặc trưng nối tiếp nhau bắt đầu bằng ống côn (cônphuzo) ngắn, tiếp theo là đoạn hình trụ rất ngắn và kết thúc bằng đoạn ống loe (dípphuzo) dài hơn với góc mở nhỏ nhằm giảm thiểu phát sinh do chảy quẩn và xoáy. Người ta đo áp suất tĩnh tại mặt cắt 1 và 2 và trên nhiều phát sinh do chảy quẩn và xoáy. Người ta đo áp suất tĩnh tại mặt cắt 1 và 2 và trên cơ sở biết được trị số của các đường kính D và d (thường có tỉ số $D/d = 2$) suy ra lưu lượng Q với lưu ý đến một hệ số gọi là hệ số lưu lượng (c) cho từng loại kích cỡ (xem phần phụ lục của sách).



Hình 3.18

Từ phương trình Bernoulli viết cho mặt cắt 1 và 2 ta có

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}; z_1 = z_2 = 0$$

Dựa vào phương trình liên tục ở trường hợp chất lỏng không chịu nén ta có :

$$u_1 \frac{\pi D^2}{4} = u_2 \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow u_2 = \left(\frac{D}{d} \right)^2 u_1 = \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right) u_1$$

Kết hợp với phương trình Bernoulli ta có :

$$u_2 = c \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)/\gamma}{1 - (\Omega_2/\Omega_1)^2}}$$

và lưu lượng :

$$Q = \Omega_2 u_2 = \Omega_2 c \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)/\gamma}{1 - (\Omega_2/\Omega_1)^2}}$$

Tỉ số Ω_1/Ω_2 là thông số đã biết của từng cỡ ống.

12. Biến thiên (biến đổi) động lượng của chất lỏng chuyển động - Phương trình biến thiên động lượng

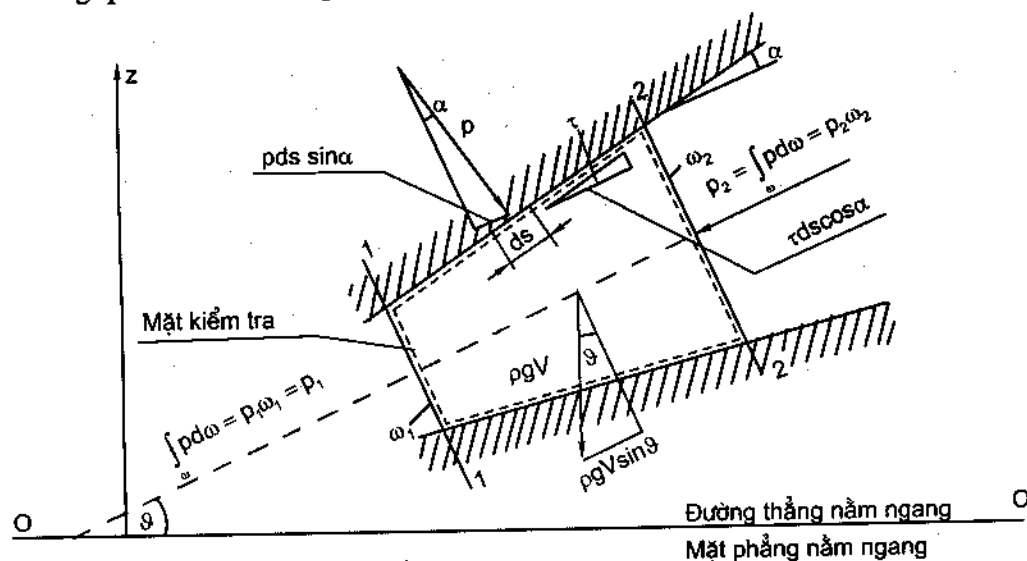
Như đã biết, trong cơ học người ta phân ra hai loại định luật không phụ thuộc nhau, đó là :

- 1- Định luật bảo toàn năng lượng (trong thủy lực thể hiện ở phương trình Bernoulli).
- 2- Định luật bảo toàn xung của ngoại lực và bảo toàn động lượng.

Khi áp dụng định luật bảo toàn xung lực và động lượng trong tính toán thủy lực cần đảm bảo một số điều kiện sau :

- Dòng chảy phải được giới hạn khép kín bởi các mặt biên cùng với 2 mặt cắt của dòng chảy, dù chỉ trong tưởng tượng, được gọi là *mặt kiểm tra* ;
- Sự phân bố áp suất tại các mặt cắt tuân theo quy luật thủy tĩnh ;
- Các mặt cắt nói trên phải thẳng góc với phương dòng chảy, tức là trực giao với vectơ vận tốc tại mặt cắt.

Hãy khảo sát dòng chảy trong hình 3.19 trong hệ toạ độ vuông góc chọn tùy ý để đảm bảo tính tổng quát của các kết quả.



Hình 3.19

Theo hình vẽ ta thấy :

- Dòng chảy nghiêng với trục nằm ngang một góc là θ ;
- Thành bên nghiêng với trục dòng chảy một góc là α ;
- Mặt kiểm tra gồm mặt thành bên và hai mặt cắt ướt 1-1 và 2-2.
- Các thành phần hướng theo dòng chảy của các lực tác động lên khối chất lỏng bao bởi diện kiểm tra gồm :

• Lực ma sát :
$$T_1 = \int_{\Omega_B} \tau \times ds \times \cos \alpha$$

trong đó Ω_B là diện tích của thành bên.

- Áp lực thành bên (do áp suất thủy tĩnh) : $P_{Bt} = \int_{\Omega_B} p \times ds \times \sin \alpha$

- Áp lực ở mặt cắt 1-1 : $P_{1t} = p_1 \times \Omega_1$ và

- Áp lực ở mặt cắt 2-2 : $P_{2t} = p_2 \times \Omega_2$

trong đó Ω_1 và Ω_2 là diện tích của mặt cắt 1-1 và 2-2.

- Lực trọng trường (lực khối) - trọng lượng của khối chất lỏng : $\rho g V \sin \theta$

trong đó V là thể tích của khối chất lỏng (chứa trong diện kiểm tra).

Tổng hợp các thành phần này lại với lưu ý đến chiều của chúng, được

$$P_{1t} + P_{Bt} - P_{2t} - T_t - G_t = p_1 \Omega_1 + \int_{\Omega_B} p \sin \alpha ds - p_2 \Omega_2 - \int_{\Omega_B} \tau \cos \alpha ds - \rho g V \sin \theta \quad (3-47)$$

Chính tổng hợp lực này làm thay đổi động lượng của khối chất lỏng, vì vậy ta có phương trình cân bằng động lượng sau

$$p_1 \Omega_1 - p_2 \Omega_2 - \rho g V \sin \theta + \int_{\Omega_B} p \sin \alpha ds - \int_{\Omega_B} \tau \cos \alpha ds = \alpha_{02} \rho Q v_2 - \alpha_{01} \rho Q v_1 \quad (3-48)$$

trong đó : α_{01} và α_{02} là hệ số sửa chữa động năng (Boussinesq - Coriolis) của dòng chảy tại mặt cắt 1-1 và 2-2 do trong công thức ta dùng vận tốc trung bình v ; Q là lưu lượng của dòng chảy.

Có một nhận xét là trong khi dẫn dắt công thức tính động lượng cách tiếp cận trên chỉ lưu ý đến lực ma sát trên mặt biên (vách rắn), còn ở phương trình Bernoulli ma sát trong nội bộ chất lỏng cũng được tính đến. Vì thế khi sử dụng đồng thời 2 phương trình này cho một bài toán nào đó trong phương trình Bernoulli không được quên ảnh hưởng của tổng tổn thất do ma sát. Điều đó còn có nghĩa là, khi khảo sát chuyển động ổn định của chất lỏng không chịu nén, để xác định tác động của các lực phát sinh từ động lực học của khối chất lỏng tách tùy ý từ dòng chảy, chỉ cần biết phân bố áp suất và vận tốc trên mặt bao khối ấy mà không cần biết các đại lượng này tại các điểm trong nội bộ khối chất lỏng đang xét.

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG III

Bài 1. Cho dòng chảy ổn định của chất lỏng không chịu nén với các thành phần vận tốc

$$u_x = 4xz ;$$

$$u_y = 6y.$$

- Tìm thành phần u_z tại toạ độ $A(1,1,2)$, nếu điểm dừng có toạ độ $O(0,0,2)$.

- Xác định gia tốc dịch chuyển (gia tốc trao đổi) tại điểm A .

Giải :

- Tìm thành phần chiều z của vận tốc (tìm u_z).

Để giải bài này ta vận dụng phương trình liên tục cho dòng ổn định của chất lỏng không chịu nén, công thức (3-3)

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Từ đây suy ra :

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(4xz) - \frac{\partial}{\partial y}(6y) = -4z - 6$$

Ta giải phương trình :

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -4z - 6 \rightarrow \int \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\int (4z + 6) dz + C$$

$$u_z = -2z^2 - 6z + C$$

Biết rằng, tại điểm dừng các thành phần vận tốc đều bằng 0 (triệt tiêu) vì vậy tại $z = 2$, $u_z = 0$ nên ta có :

$$0 = -2 \times 2^2 - 6 \times 2 + C \rightarrow C = 20$$

và :

$$u_z = -2z^2 - 6z + 20$$

Tổng hợp lại trường vận tốc có dạng :

$$u_x = 4xz$$

$$u_y = 6y$$

$$u_z = -2z^2 - 6z + 20.$$

- Xác định gia tốc trao đổi tại A.

Theo (3-2a) ta có

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 + 4xz \times 4z + 6y \times 0 + (-2z^2 - 6z + 20) \times 0 = 16xz^2$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 + 4xz \times 0 + 6y \times 6 + (-2z^2 - 6z + 20) \times 0 = 36y$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 + 4xz \times 0 + 6y \times 0 + (-2z^2 - 6z + 20) \times (-4z - 6) \\ = 8z^3 + 36z^2 - 44z - 120$$

Thế các trị số của toạ độ điểm A(1,1,2) vào các biểu thức kết quả trên ta được trị số gia tốc trao đổi tại điểm A :

$$a_x = 16xz^2 = 16 \times 1 \times 2^2 = 64 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = 36y = 36 \times 1 = 36 \text{ m/s}^2$$

$$a_z = 8z^3 + 36z^2 - 44z - 120 = 8 \times 2^3 + 36 \times 2^2 - 44 \times 2 - 120 = 64 + 144 - 88 - 120 = 0$$

Tóm lại :

$$a_x = 64 \text{ m/s}^2 ; a_y = 36 \text{ m/s}^2 ; a_z = 0$$

Lưu ý rằng thứ nguyên của gia tốc trao đổi hoàn toàn giống như thứ nguyên của gia tốc cục bộ bởi vì :

$$[a_x] = [u_x] \times \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \right] \text{ thì nếu độ dài đo bằng mét, thời gian đo bằng giây (s) ta có :}$$

$$[a_x] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{\text{m}} = \text{m/s}^2$$

Điều đó hợp lí do phải đảm bảo sự đồng nhất thứ nguyên trong biểu thức của gia tốc.

Mặt khác, trong dòng chảy ổn định biến đổi dần, gia tốc trao đổi không nhất thiết bằng 0, ví dụ dòng ổn định của chất lỏng không chịu nén trong cônphuzo. Tại điểm dừng gia tốc trao đổi triệt tiêu vì trong biểu thức của nó các số hạng đều có thừa số là thành phần vận tốc tương ứng. Tuy nhiên gia tốc cục bộ có thể khác không (ở dòng không ổn định).

Bài 2. Ống tiết diện chữ nhật chiều rộng $b = 2e$ có đoạn khuỷu cong tròn bán kính trung bình R_0 (hình 3.20). Ống được đặt nằm ngang.

- Tính mật cắt ướt, chu vi ướt và bán kính thủy lực của ống nếu chiều dày của ống $c = 15\text{cm}$, $e = 10\text{cm}$; $R_0 = 40\text{cm}$.

- Hãy thiết lập quan hệ $\Delta z = h = f(v)$ với e và R_0 là thông số, v là vận tốc trung bình mặt cắt của dòng chảy ; Δz là độ chênh cột chất lỏng đo áp giữa hai điểm N và T ở một mặt cắt ngang tại đoạn cong của khuỷu.

- Tính Δz với $v = 3\text{m/s}$.

Bỏ qua tổn thất năng lượng.

Giải :

- Xác định mặt cắt ướt Ω , chu vi ướt χ và bán kính thủy lực R

Do ống chảy có áp nên mặt cắt luôn đầy chất lỏng. Vì vậy mặt cắt ướt :

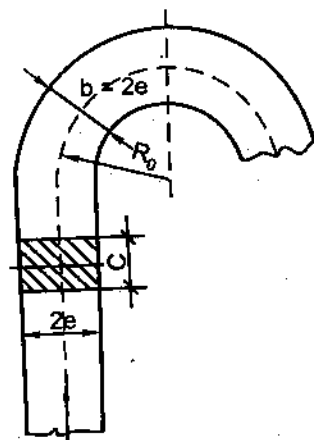
$$\Omega = b \times c = 2e \times c = 2 \times 0,1 \text{ m} \times 0,15 \text{ m} = 0,030 \text{ m}^2$$

và chu vi ướt :

$$\chi = 2(b + c) = 2(2e + c) = 2(2 \times 0,1 \text{ m} + 0,15 \text{ m}) = 0,7 \text{ m}$$

Suy ra bán kính thủy lực :

$$R = \frac{\Omega}{\chi} = \frac{0,03\text{m}^2}{0,7\text{m}} = 0,043\text{m} = 4,3 \text{ cm}$$



Hình 3.20

- Xác định hàm $\Delta z = h = f(v)$ và trị số cụ thể

Trước hết cần nói thêm rằng ở đây bỏ qua dòng thứ cấp xảy ra trong thực tiễn, dòng có xu thế cân bằng sự chênh áp giữa N và T của mặt cắt ngang. Như vậy, kết quả tính toán ở đây là giá trị cực đại, là giới hạn trên của Δz .

Có nhiều cách giải bài này, nhưng để vận dụng các kiến thức có được từ các chương trước ta có 2 cách tiếp cận :

Dựa vào quy luật phân bố áp suất trong tĩnh tương đối của bình quay (trường li tâm) - công thức (2-18a) Chương II và dựa vào phương trình Bernoulli - công thức (3-24e) Chương III.

Vận dụng (2-18a) Chương II. Quan niệm dòng chảy ở đoạn khuỷu như tĩnh tương đối trong chuyển động quay xung quanh trục tâm trùng với tâm uốn tròn của khuỷu và gắn trục toạ độ quan sát quay đồng bộ với chuyển động của chất lỏng. Do ống nằm ngang nên trong công thức sẽ vắng mặt độ cao vị trí z, đồng thời với sơ đồ đo như trên hình vẽ chỉ cần tính với áp suất dư, nên từ (2-18a) có lưu ý đến chuyển động tương đối, ta viết được

$$p = -\rho \frac{\omega^2 r^2}{2} \rightarrow p_N = -\rho \frac{\omega^2 r_N^2}{2}; p_T = -\rho \frac{\omega^2 r_T^2}{2}.$$

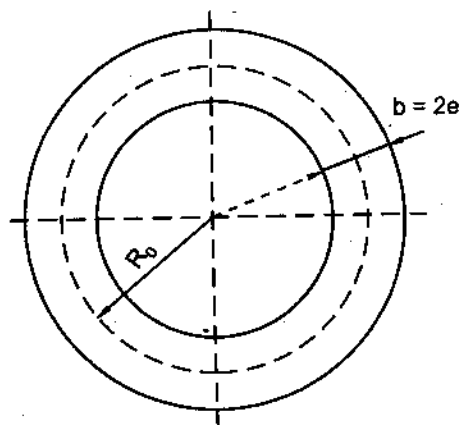
Biết rằng :

$$\omega = \frac{v}{R_0} \rightarrow \omega = \frac{3\text{m/s}}{0,4\text{m}} = 7,5\text{Rad/s};$$

$$v_N = \omega r_N \text{ và } v_T = \omega r_T$$

$$\Delta p = p_T - p_N = \rho \omega^2 \frac{r_N^2 - r_T^2}{2} \rightarrow h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \omega^2 \frac{r_N^2 - r_T^2}{2g}$$

$$h = \frac{v_N^2 - v_T^2}{2g}$$



(a)

Hình 3.21

Vận dụng (3-24e). Theo trục quan và bỏ qua dòng thứ cấp viết phương trình Bernoulli cho đường dòng đi qua điểm N và ngược về thượng nguồn (ở đoạn ống thẳng) qua điểm N_0 cũng như cho đường dòng đi qua điểm T và ngược về thượng lưu qua điểm T_0 tại mặt cắt 0-0 :

$$\frac{p_{T_0}}{\rho g} + \frac{v_{T_0}^2}{2g} = \frac{p_T}{\rho g} + \frac{v_T^2}{2g} \rightarrow \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_T}{\rho g} + \frac{v_T^2}{2g}$$

$$\frac{p_{N_0}}{\rho g} + \frac{v_{N_0}^2}{2g} = \frac{p_N}{\rho g} + \frac{v_N^2}{2g} \rightarrow \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_N}{\rho g} + \frac{v_N^2}{2g}$$

Lấy phương trình trên trừ đi phương trình dưới được :

$$\frac{p_T - p_N}{\rho g} + \frac{v_T^2 - v_N^2}{2g} = 0 \rightarrow h = \frac{p_T - p_N}{\rho g} = \frac{v_N^2 - v_T^2}{2g} \quad (b)$$

Ta thấy trị số của h trong cả hai cách tiếp cận là như nhau. Bây giờ ta xây dựng quan hệ hàm : $h = f(v)$. Biết rằng :

$$v_T = v - \Delta v \text{ và } v_N = v + \Delta v$$

mà theo hình vẽ từ 2 tam giác đồng dạng ta có :

$$\frac{\Delta v}{e} = \frac{v}{R_0} \rightarrow \Delta v = \frac{e}{R_0} v.$$

Kí hiệu $e/R_0 = \alpha$, độ cong tương đối của khuỷu, từ (a) hay (b) có thể viết :

$$h = \frac{(v + \frac{e}{R_0} v)^2 - (v - \frac{e}{R_0} v)^2}{2g} = 4 \frac{e}{2gR_0} v^2$$

$$h = f(v) = \frac{2e}{gR_0} v^2 \rightarrow h = 4 \frac{e}{R_0} \frac{v^2}{2g}$$

Như vậy với các dữ liệu của đầu bài độ chênh cột nước giữa hai điểm T và N là :

$$h = \frac{2e}{gR_0} v^2 = \frac{2 \times 0,1m}{8,81ms^{-2} \times 0,4m} =$$

$$0,0458719559m$$

$$h \approx 46 \text{ mm.}$$

Bài 3. Một ống dẫn dầu nằm ngang (hình 3.22) tại khuỷu uốn 45° tiết diện tròn chuyển từ $d_1 = 500\text{mm}$ sang $d_2 = 250\text{mm}$. Lưu lượng trong ống $Q = 0,45 \text{ m}^3/\text{s}$; áp suất dư tại mặt cắt 1-1 là 40 kN/m^2 . Hỏi :

- Nếu bỏ qua tổn thất, thành phần lực nằm ngang tác dụng lên thành ống là bao nhiêu ?

- Nếu tổn thất giữa 2 mặt cắt 1-1 và 2-2 là 15% tổng năng lượng, lực này là bao nhiêu ?

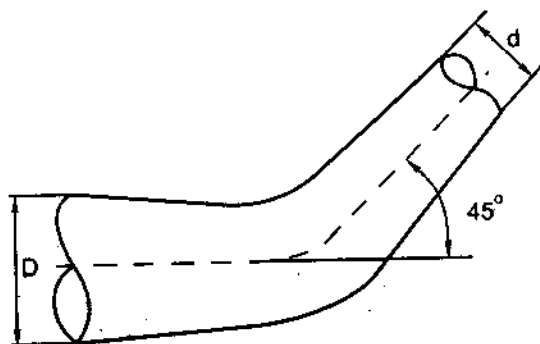
Giải :

- Trường hợp bỏ qua tổn thất. Viết phương trình Bernoulli cho dòng chất lỏng thực giữa 2 mặt cắt 1-1 và 2-2 :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w(1-2)} \quad (c)$$

Song do ống nằm ngang nên $z_1 = z_2$ và bỏ qua tổn thất $h_{w(1-2)} = 0$ nên từ phương trình (c) có :

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad (d)$$



Hình 3.22

Ta đã biết :

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 0,45 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0,5 \text{ m})^2} \rightarrow v_1 = 2,293 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 0,45 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0,25 \text{ m})^2} \rightarrow v_2 = 9,172 \text{ m/s}$$

nên từ (d) có :

$$P_2 = 40000 \text{ N} + \frac{850 \text{ kg/m}^3}{2} \left[(2,293 \text{ m/s})^2 - (9,172 \text{ m/s})^2 \right]$$

$$P_2 = 40000 \text{ N} - 33518,9 \text{ kg} \times \text{m}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$P_2 = 6481 \text{ N} = 6,481 \text{ kN.}$$

Để tính được thành phần lực ngang tác dụng lên khuỷu ta dùng phương trình động lượng với diện kiểm tra 1-1-2-2-1 :

Bây giờ cần xem xét các lực tác dụng lên hệ :

- Lực trọng trường G là trọng lượng của khối chất lỏng bao bởi diện kiểm tra, như sẽ thấy, theo đề bài không cần quan tâm ;

- Áp lực tại tiết diện 1-1 :

$$P_1 = p_1 \Omega_1 = p_1 \times \pi d_1^2 / 4 = 40 \text{ kN/m}^2 \times \pi \times (0,5 \text{ m})^2 / 4 = 7,854 \text{ kN} ;$$

- Áp lực tại tiết diện 2-2 :

$$P_2 = p_2 \Omega_2 = p_2 \times \pi d_2^2 / 4 = 6,481 \text{ kN/m}^2 \times \pi \times (0,25 \text{ m})^2 / 4 = 0,318 \text{ kN} ;$$

- Phản lực của thành ống lên chất lỏng là R .

Trên cơ sở đó và theo tinh thần của (3-45) phương trình động lượng viết dưới dạng vectơ là như sau :

$$\vec{G} + \vec{R} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (e)$$

(Tức là tổng hợp lực các lực tác động lên khối chất lỏng nằm trong diện kiểm tra là nguyên nhân duy nhất làm thay đổi động lượng của nó).

Theo đề bài phải xác định lực ngang, vì thế lực trọng trường G , do có phương thẳng đứng, không cần quan tâm, vì vậy G vắng mặt trong phương trình (e).

Phương trình viết cho từng thành phần ngang theo phương x và phương y như sau :

$$\begin{cases} R_x + P_1 - P_2 \cos \alpha = \rho Q (v_2 \cos \alpha - v_1) \rightarrow R_x = -P_1 + P_2 \cos \alpha + \rho Q (v_2 \cos \alpha - v_1) \\ R_y + 0 - P_2 \sin \alpha = \rho Q (v_2 \sin \alpha - 0) \rightarrow R_y = P_2 \sin \alpha + \rho Q v_2 \sin \alpha \end{cases} \quad (f)$$

Thế các trị số vào (f) ta được

$$\begin{aligned} R_x &= -7854 \text{ kgm/s}^2 + 318 \text{ kgm/s}^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 850 \text{ kg/m}^3 \times 0,45 \text{ m}^3/\text{s} \times (9,172 \text{ m/s} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &- 2,293 \text{ m/s}) = -7,854 \text{ kN} + 0,224 \text{ kN} + 1,604 \text{ kN} = -6,026 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$R_y = 318 \text{ km/s}^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 850 \text{ kg/m}^3 \times 0,45 \text{ m}^3/\text{s} \times 9,172 \text{ m/s} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 225 \text{ N} + 2480 \text{ N} = 2,705 \text{ kN}$$

$$R_x = -6,026 \text{ kN} \text{ và } R_y = 2,705 \text{ kN}$$

Nhớ rằng $1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$ và lực thủy động tác dụng lên thành ống khuỷu ngược chiều với

$$R : \vec{F} = -\vec{R}.$$

Trị số của lực ngang :

$$F = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6,026^2 + 2,705^2} = 6,605 \text{ kN}$$

$$|\vec{F}| = |\vec{R}| = 6,6 \text{ kN}$$

Góc lực thủy động tác dụng lên thành ống khuỷu là :

$$\theta = \text{Arctg} \frac{F_x}{F_y} = \text{Arctg} \frac{-2,705}{6,026} = \text{Arctg}(-0,4489) = -24,17^\circ \cong -24,2^\circ$$

$$\theta = -24,2^\circ$$

Trường hợp lưu ý đến tổn thất ($h_{w(1-2)} \neq 0$).

Vẫn giữ nguyên lưu lượng đầu vào Q thì theo phương trình liên tục vận tốc tại hai mặt cắt vẫn nguyên như cũ ; áp suất và đương nhiên áp lực tại mặt cắt 1-1 (ở điểm A) cũng không thay đổi. Tại mặt cắt 2-2 áp suất dư giảm một lượng để bù đắp vào tổn thất. Như vậy tổng năng lượng tính ra cột nước tương đương là :

$$H_1 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{40000 \text{ N}}{850 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2} + \frac{(2,293 \text{ m/s})^2}{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2} = 4,797 \text{ m} + 0,268 \text{ m} = 5,065 \text{ m}$$

Và năng lượng toàn phần tại mặt cắt 2-2 là :

$$H_2 = H_1 - h_{w(1-2)} = (1 - 0,15)H = 0,85 \times 5,065 \text{ m} = 4,305 \text{ m}$$

và từ đây suy ra p_2 cũng như P_2 :

$$H_2 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \rightarrow p_2 = \rho g H_2 - \rho \frac{v_2^2}{2} = 850 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 4,305 \text{ m}$$

$$- 850 \text{ kg/m}^3 \times \frac{(9,172 \text{ m/s})^2}{2} = 144,8693 \text{ N/m}^2$$

$$p_2 = 0,145 \text{ kN}$$

$$P_2 = p_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 0,145 \text{ kN/m}^2 \times \frac{\pi \times (0,25 \text{ m})^2}{4} = 7,12 \text{ N}$$

Với kết quả này

$$R_x = -6,245 \text{ kN}, \quad R_y = 2,485 \text{ kN}$$

và

$$R = 6,721 \text{ kN}$$

đồng thời góc của phản lực thành ống khuỷu lên chất lỏng θ là :

$$\theta = -21,7^\circ$$

Như vậy, cùng điều kiện đầu vào như nhau ở trường hợp tổn thất không thể bỏ qua, phản lực của thành ống khuỷu lên chất lỏng (hay lực thủy động tác dụng lên thành ống khuỷu) tăng lên. Điều này có thể hiểu được.

TỔNG KẾT CHƯƠNG III

Đây là một trong những chương quan trọng bậc nhất của môn học, đề cập đến rất nhiều vấn đề thường gặp trong thực tiễn.

Trước hết cần phân biệt rõ hai phương pháp nghiên cứu, quan sát khác nhau, một của Lagrange và một của Euler. Sự khác nhau cơ bản là cách chọn toạ độ quan sát : cùng chuyển động với phần tử chất lỏng hay cố định trong không gian dòng chảy.

Hiểu được các dạng chuyển động (dòng chảy) : ổn định (có sách gọi là dừng), không ổn định ; ổn định đều và ổn định không đều ; khái niệm quỹ đạo, đường dòng, đường vết – những kiến tạo hình học này được xem như là những cơ sở, những tiêu chuẩn quyết định chuyển động có ổn định hay không.

Bắt đầu làm quen với các khái niệm mặt cắt ướt, chu vi ướt cũng như bán kính thủy lực...

Động học chất lỏng giúp hiểu được định luật bảo toàn vật chất, tính liên tục vật chất đảm bảo điều kiện chất lỏng còn là chất lỏng thông qua phương trình liên tục. Phần này giới thiệu cách dẫn dắt các biểu thức toán học của vận tốc, gia tốc và qua biểu thức gia tốc của Euler thấy rõ hơn sự khác biệt giữa hai phương pháp Lagrange và Euler ; mô tả hành vi của phần tử chất lỏng trong khi chuyển động (phương trình Cauchy-Helmholtz) khác với của chất rắn là có thêm yếu tố biến dạng. Ta còn biết thêm khái niệm chuyển động thế (có thể) và chuyển động xoáy cùng các điều kiện tồn tại/xuất hiện của chúng.

Trong nghiên cứu động lực học của dòng chảy ta làm quen với phương trình vi phân chuyển động Euler mô tả cân bằng động, phương trình Lamb-Gromeko là sự phát triển kết quả của Euler có cấu trúc phương trình chi tiết hơn để biết được các điều kiện tồn tại dòng thế và dòng xoáy. Tích phân Lagrange và tích phân Bernoulli (trường hợp riêng của tích phân Lagrange) thực chất là sự triển khai phương trình vi phân chuyển động Euler vào thực tiễn, hiểu được qua ý nghĩa năng lượng của phương trình viết cho dòng nguyên tố.

Phương trình Navier-Stokes, thực chất là phương trình Bernoulli viết cho dòng chất lỏng thực, khi độ nhớt của chất lỏng gây nên ma sát, tạo ứng suất cắt, làm tiêu tán năng lượng dẫn đến tổn thất cột áp, ...

Cuối cùng, Chương này cũng đề cập đến một vấn đề của động lực học trong chuyển động chất lỏng là động lượng của chất lỏng chuyển động. Khác với chất rắn, ở đây ta phải đưa vào sử dụng khái niệm *mặt kiểm tra*. Đồng thời phải xuất phát từ một nguyên lý cơ bản là chỉ có lực bên ngoài mới làm thay đổi động lượng của một hệ. Từ đấy lập nên phương trình cân bằng.

Chương IV

CHUYỂN ĐỘNG THỂ VÀ CHUYỂN ĐỘNG XOÁY CỦA CHẤT LỎNG DÒNG SONG PHẪNG

1. Cơ sở lí thuyết

1.1. Đặt vấn đề

Chuyển động thể và chuyển động xoáy của dòng chất lỏng trong thủy lực hình thành một nhóm vấn đề được nhiều người quan tâm vì nó có ảnh hưởng đáng kể trong xử lí tính toán mà ta đã có dịp gặp khi tích phân phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng (phương trình Euler) để được phương trình Bernoulli. Đặc điểm của dòng thể là trường vận tốc của dòng chảy – không gian của chất lỏng chuyển động – có thể suy ra từ đạo hàm riêng của một trường (vô hướng), thế vận tốc là hàm của vị trí $\varphi(x,y,z)$. Ngoài ra – như đã biết – dòng thể còn có nghĩa là trong đó các phần tử chất lỏng không quay xung quanh trục của nó nên :

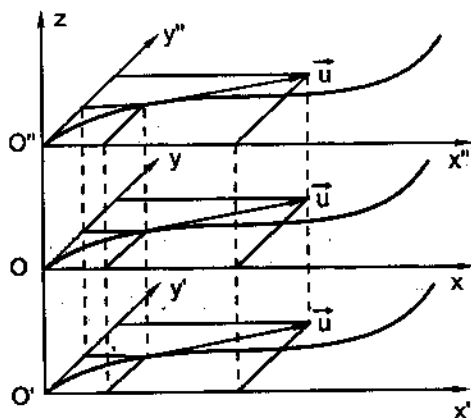
$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.$$

Cũng vì vậy, việc khảo sát dòng thể và dòng xoáy trong cùng một chương sẽ có nhiều điều thuận tiện. Hơn nữa, thường việc chọn hệ trục tọa độ là tùy ý nên chỉ cần khảo sát trên một mặt phẳng tọa độ là suy ra cho các mặt tọa độ khác để có được những kết luận quan trọng nhất. Từ đó nảy sinh khái niệm dòng song phẳng với những lợi thế to lớn : có thể sử dụng một công cụ toán học mạnh là hàm biến phức mà sau này sẽ có dịp thể nghiệm.

Dòng thể sẽ giúp làm sáng tỏ một số vấn đề như bức tranh của một số dòng chảy bao vật, xác định lực nâng của chảy bao,...

Còn khảo sát dòng xoáy bằng một số công cụ đơn giản cũng có thể rút ra được một số kết luận giúp giải thích được một số hiện tượng tự nhiên một cách dễ hiểu.

Định nghĩa dòng song phẳng : Là dòng có các đặc trưng động học và động lực học chỉ phụ thuộc vào 2 tọa độ (tức 2 biến số) của không gian 3 chiều. Ví dụ, chỉ phụ thuộc vào x và y mà độc lập đối với z trong không gian 3 chiều (x,y,z) . Bức tranh của dòng chảy trên các mặt phẳng song song với mặt phẳng xOy (có nghĩa là trục giao với trục z) đồng dạng với nhau theo tỉ lệ 1 : 1 (xem hình 4.1).



Hình 4.1

1.2. Hàm thế

Ta khảo sát dòng song phẳng trong mặt phẳng xOy với điều kiện $\omega_z = 0$, nghĩa là :

$$\omega_z = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4-1)$$

Theo định nghĩa của thế vận tốc $\varphi(x,y)$ ta có :

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ và } u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4-2)$$

Từ đây có vi phân toàn phần của hàm thế :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = u_x dx + u_y dy \quad (4-3)$$

trong đó : $d\vec{s} = \vec{i}dx + \vec{j}dy \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2$ là đoạn chuyển vị. Theo (4-3) :

$$\frac{u_y}{u_x} = -\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Do vậy vectơ vận tốc trực giao với đường $\varphi = \text{const}$ là đường đẳng thế có phương trình vi phân :

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = 0 \quad (4-4)$$

1.3. Hàm dòng

Trong phần trước ta đã biết, xuất phát từ định nghĩa của nó phương trình vi phân mô tả đường dòng có dạng :

$$\frac{u_x}{dx} = \frac{u_y}{dy} \Rightarrow u_x dy = u_y dx \Rightarrow u_x dy - u_y dx = 0 \quad (4-5a)$$

Phương trình này có thể giải được nếu tìm được một hàm $\psi(x,y)$ sao cho :

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ và } u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4-5b)$$

để vế trái của (4-5a) trở thành một vi phân toàn phần :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \quad (4-5c)$$

Dễ dàng nhận thấy, đường đẳng thế $\varphi(x,y) = \text{const} = C_1$ trực giao với đường dòng $\psi(x,y) = \text{const} = C_2$, điều mà ta đã chỉ ra qua một cách tiếp cận khác. Thực vậy, từ (4-5a) và (4-5b) có :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\varphi=C_1} = -\frac{u_x}{u_y} \Big|_{\varphi=C_1} = -\frac{1}{\frac{u_y}{u_x} \Big|_{\varphi=C_1}} \quad \text{và} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=C_2} = \frac{u_y}{u_x} \Big|_{\psi=C_2}$$

chính là điều kiện để 2 đường trực giao nhau.

Đối sánh (4-2) với (4-5b) còn thấy :

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ và } u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4-6)$$

Người ta gọi (4-6) là điều kiện Cauchy-Riemann.

Trong chuyển động của chất lỏng không nén được từ phương trình liên tục ta thấy hàm thế vận tốc $\varphi(x,y)$ thoả mãn phương trình Laplace :

$$0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (4-6a)$$

hay :

$$\text{divgrad} \varphi(x,y) = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (4-6b)$$

Nếu xuất phát từ điều kiện dòng chảy thế và từ hàm dòng $\psi(x,y)$:

$$\omega_z = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4-7a)$$

hay :

$$\text{divgrad} \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4-7b)$$

Điều đó có nghĩa là cả hai hàm này đều thoả mãn phương trình vi phân đạo hàm riêng Laplace.

1.4. Ý nghĩa hình học và vật lý của hàm thế và hàm dòng

Theo các kết quả thu được ở trên ta thấy 2 họ đường $\varphi(x,y) = \text{const}$ và $\psi(x,y) = \text{const}$ trực giao nhau (xem hình 4.2). Với các thông số là trị số của hằng số lấy $C_{11} = C_{21}$, $C_{12} = C_{22}$, $C_{13} = C_{23}$, ... được một mạng lưới tương ứng với mức chênh : $\Delta \varphi_i = \Delta \psi_i$ ($i = \overline{1, n}$), nghĩa là có mạng lưới :

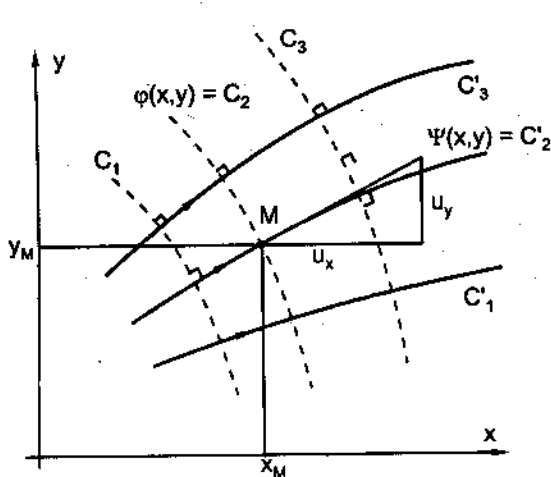
$$\varphi(x,y) = C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1n} \text{ với } C_{1i+1} = C_{1i} + \Delta \varphi$$

$$\psi(x,y) = C_{21}, C_{22}, \dots, C_{2n} \text{ với } C_{2i+1} = C_{2i} + \Delta \psi$$

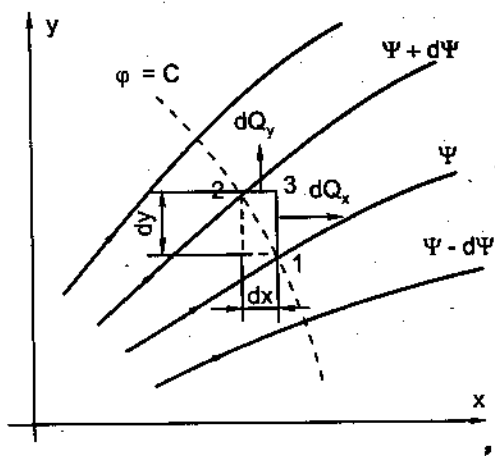
Trong dòng ổn định các phần tử chất lỏng không cắt ngang qua (không xuyên qua) đường dòng nên giữa 2 đường dòng đang quan sát tạo thành một lòng dẫn/kênh chảy (xem hình 4.3) có lưu lượng là :

$$dQ = dQ_x + dQ_y = u_x dy + u_y dx \quad (4-8)$$

Khi vận dụng trong thực tiễn kỹ thuật bao giờ ta cũng chọn một cách chủ động giá trị hằng số C sao cho tại một trị số nhất định tồn tại đường dòng trùng với thành cứng, vách biên đồng thời với việc bảo đảm tính liên tục của dòng chảy.



Hình 4.2



Hình 4.3

1.5. Hàm thế phức

Hàm số có biến số phức, gọi ngắn là hàm biến phức, như sẽ thấy, là công cụ cực kì hữu hiệu cho việc khảo sát, nghiên cứu dòng song phẳng. Song, ở ta, nhiều trường có một số ngành kĩ thuật đến nay vẫn không dạy hàm biến phức. Tuy nhiên, chỉ với mục đích sử dụng đơn giản chúng ta hãy tìm hiểu một số khái niệm, một số tính chất cơ bản nhất của một lớp hẹp hàm số, thường là các hàm khả vi, hàm chỉnh quy hay các hàm giải tích, ta có thể vượt qua hăng hụt đó. Muốn hiểu sâu hơn có thể tìm đến các sách nhập môn hoặc chuyên khảo về hàm biến phức. Phương châm tiếp cận ở đây của chúng ta là cần đến đâu, tìm hiểu đến đó. Vì vậy phải chấp nhận phương pháp xen kẽ, nhưng tránh để vấn đề quan tâm bị loãng hoặc rời.

a) Khái niệm số phức và một số phép toán

Ta gọi số phức thuần ảo đơn vị là $i = \sqrt{-1}$.

Như vậy suy ra :

$$i^2 = -1 ; i^3 = -i \text{ và } i^4 = 1.$$

Một số phức : $c = a + ib$, với a, b là các số thực, có phần thực (thường kí hiệu Re) là $\text{Re}c = a$ và phần ảo (kí hiệu Im) là $\text{Im}c = b$.

Số phức c có môđun $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ và argument $\text{arcc} = \text{arctg}(b/a) = \theta$.

Theo ý nghĩa hình học biểu diễn số phức ta có thể biểu diễn dưới dạng số mũ :

$$c = re^{i\theta}$$

để được công thức Euler biểu diễn một số phức.

Người ta gọi số phức liên hiệp của c là $\bar{c}$ nếu $\bar{c} = a - ib$.

Nếu trong hệ toạ độ xOy ta biểu diễn số phức $z = x + iy$ với x và y là các biến số thì một hàm $f(z)$ sẽ lấy các giá trị có thể là thực (chỉ gồm phần thực), có thể là thuần ảo (chỉ có phần ảo) và có thể là phức (có cả phần thực lẫn phần ảo).

Các phép toán cơ bản với 2 số phức $c_1 = a_1 + ib_1$ và $c_2 = a_2 + ib_2$:

$c = c_1 + c_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$; vậy $\text{Re}c = \text{Re}c_1 \pm \text{Re}c_2$ và $\text{Im}c = \text{Im}c_1 \pm \text{Im}c_2$.

$c = c_1 c_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$, vì vậy

$\text{Re}c = a_1 a_2 - b_1 b_2$ và $\text{Im}c = a_1 b_2 + a_2 b_1$

$$c = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1 \bar{c}_2}{c_2 \bar{c}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\text{Vì vậy: } \text{Re}c = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \text{ và } \text{Im}c = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$c^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \text{ với } r = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}.$$

b) Những tính chất cơ bản của hàm thế phức

Bây giờ ta xây dựng một hàm biến phức có phần thực là thế vận tốc $\phi(x,y)$ và phần ảo là hàm dòng $\psi(x,y)$ rồi xem chúng phải có những tính chất gì để có thể đáp ứng được yêu cầu cần có cho nghiên cứu hay không, trước hết là *điều kiện trực giao* và *điều kiện khả vi ít nhất 2 lần* (để có vận tốc và gia tốc). Nghĩa là :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

với ϕ và ψ thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann (4-6). Đồng thời có :

Tính khả vi của hàm biến phức $f(z)$ phụ thuộc vào giá trị của đạo hàm (với cách hiểu như trong hàm thực) df/dz tại z (và đối với chúng ta kể cả tại lân cận của nó) có tồn tại một cách đơn trị hay không. Như định nghĩa ta có :

$$df = d\phi + i d\psi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \text{ và } dz = dx + i dy \quad (4-9)$$

Như vậy :

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\phi + i d\psi}{dx + i dy} = \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) + i \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right)}{dx + i dy} \quad (4-10)$$

rút dx, idy thành thừa số chung :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy}{dx + i dy} = \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) idy}{dx + i dy} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) idy}{dx + i dy} \end{aligned} \quad (4-11)$$

Phân tích (4-11) thấy, đạo hàm của $f(z)$ được kí hiệu là $f'(z)$ tại z có thể lấy vô cùng nhiều trị số khác nhau với mỗi cặp giá trị dx, dy xác định dz . Để $f'(z)$ xác định (đơn trị) khi và chỉ khi điều kiện :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4-12)$$

được thoả mãn để :

$$\frac{df}{dz} = \frac{(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x})(dx + i dy)}{(dx + i dy)} = \frac{(\frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y})(dx + i dy)}{(dx + i dy)} \quad (4-13)$$

Nghĩa là :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4-14)$$

vì lúc này giá trị đạo hàm không phụ thuộc vào trị số của các cặp dx, dy (đã giản ước trong (4-13) rồi). Lại thấy trong (4-12) vế trái là đạo hàm riêng theo x và vế phải là đạo hàm riêng theo y (tức là iy) của hàm $f(z)$. Thực vậy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{\partial}{\partial x} (\varphi + i\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{i \partial y} &= \frac{\partial}{i \partial y} (\varphi + i\psi) = \frac{1}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{i}{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

Vì thế ràng buộc để $f(z)$ khả vi là đạo hàm của nó không phụ thuộc vào hướng tiến tới giới hạn của dz . Đây là điều kiện Cauchy-Riemann. So sánh 2 vế của (4-14) thấy điều kiện này thể hiện như sau (phần thực bằng phần thực, phần ảo bằng phần ảo) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{và} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (4-15)$$

Với các kết quả trên ta thấy, phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$ quả thực mô tả được đầy đủ quan hệ tồn tại giữa thế vận tốc và đường dòng của một dòng chảy thế. Như vậy, có thể nói một hàm $f(z)$ có các tính chất như trên thường là diễn tả toán học của một dòng chảy nào đó.

1.6. Xác định cặp hàm điều hoà

Toán học gọi φ và ψ là cặp hàm điều hoà vì nó thoả mãn điều kiện Cauchy Riemann (4-15). Trong thực tiễn vì một nguyên nhân nào đó thường chỉ biết 1 trong hai. Vì vậy vấn đề đặt ra ở đây là xác định hàm chưa biết để có được một cặp hàm điều hoà. Dựa vào (4-15) thực hiện phép tích phân ta có ngay lời giải cho từng trường hợp (tìm φ hay tìm ψ).

a) Trường hợp biết ψ tìm φ

Như đã thấy, nếu biết được vi phân toàn phần của một hàm ta dễ dàng xác định được hàm đó. Bởi vậy trước hết phải có $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \Rightarrow \varphi = \int_L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \quad (4-15a)$$

với L là đường tích phân chọn một cách tốt nhất cho tính toán (các đường gấp khúc song song với trục x và trục y) với lưu ý φ là hàm thế. Từ (4-15) ta có các giá trị đạo hàm riêng của φ (thông qua ψ) để thế vào (4-15a), được :

$$\varphi = \int_{x_0}^x \frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \int_{\substack{y_0 \\ x=x_0}}^y \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \quad (4-15b)$$

b) Trường hợp biết φ tìm ψ

Tương tự như dẫn dắt ở trên, khi đã biết φ , dùng :

$$\psi = - \int_{x_0}^x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \int_{\substack{y_0 \\ x=x_0}}^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \quad (4-15c)$$

với lưu ý là khi thực hiện tích phân thứ 2 theo y , biến x phải được thay bằng x_0 ; đồng thời tuyệt đối không được giản ước các đại lượng biến số dưới dấu tích phân trước khi tích phân.

Hãy minh họa qua một ví dụ sau đây. Cho :

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2),$$

tìm hàm dòng ψ .

Giải :

Đây là trường hợp b.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Từ đây, áp dụng (4-15c) :

$$\begin{aligned} \psi &= \int_L d\psi = \int_{x_0}^x \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \int_{\substack{y_0 \\ x=x_0}}^y \frac{x}{x^2 + y^2} dy = - \int_{x_0}^x \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \int_{y_0}^y \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} dy = \\ &= - \left[\arctg \frac{x}{y} \right]_{x_0}^x + \left[\arctg \frac{y}{x_0} \right]_{y_0}^y = -\arctg \frac{x}{y} + \arctg \frac{x_0}{y} + \arctg \frac{y}{x_0} - \arctg \frac{y_0}{x_0} = \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{y}{x_0}\right) + \arctg \frac{y}{x_0} - \arctg \frac{y_0}{x_0} = \arctg \frac{y}{x} - \arctg \frac{y_0}{x_0} \end{aligned}$$

$$\text{Và cuối cùng } \psi(x, y) = \arctg \frac{y}{x} + \text{const} \quad (4-16)$$

là cặp điều hoà với $\varphi(x, y)$ cho ở trên lập thành thế phức :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \frac{q}{2\pi} \ln z \quad (4-17)$$

với $q = 2\pi$. Như sau này sẽ thấy, đây là thế phức của một nguồn.

2. Vận dụng lí thuyết để khảo sát một số dòng chảy

Để minh họa, dưới đây hãy khảo sát một số dòng chảy thường gặp.

2.1. Dòng bao quanh góc

$$f(z) = az^2 \quad (4-18a)$$

Triển khai ra ta có $f(z) = a(x + iy)^2 = a\{x^2 + 2x(iy) + (iy)^2\} = a(x^2 - y^2) + i2axy$

$$f(z) = a(x^2 - y^2) + i2axy$$

$$\text{Từ đây có hàm thế vận tốc : } \varphi(x, y) = a(x^2 - y^2) \quad (4-18b)$$

$$\text{và hàm dòng : } \psi(x, y) = 2axy \quad (4-18c)$$

Kiểm tra điều kiện Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x = 2ax \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y = -2ay \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x = 2ax \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} = u_y = -2ay \end{cases} \quad (4-18d)$$

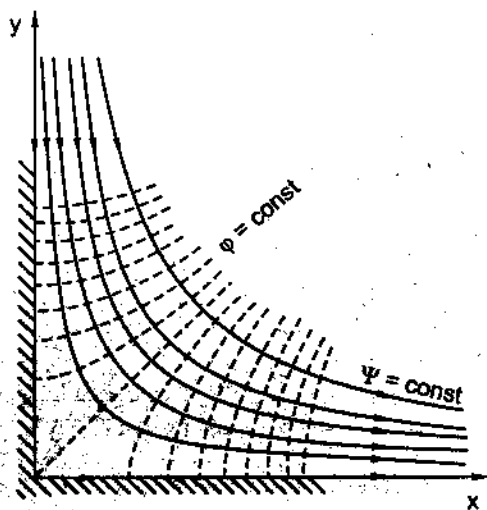
ta thấy đúng. Như vậy yêu cầu có chức năng mô tả một dòng chảy đã được thoả mãn.

$$\text{Đường đẳng thế : } \varphi = ax^2 - ay^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (4-18e)$$

với $A = B = (\text{const}/a)^{1/2}$ là 2 họ đường cong hypebôn có trục là trục x và trục y tùy theo trường hợp hằng số const lấy giá trị dương hay âm. Còn đường dòng :

$$\psi = 2axy = \text{const} \quad (4-18f)$$

cũng là 2 họ đường hypebôn khác trục giao với 2 họ đường trên có các đường tiệm cận là trục x và trục y. Hình 4.4 cho bức tranh dòng chảy này. Trong dòng chảy một số đường dòng lấy giá trị đặc trưng $\psi = 0$ để nó có thể đóng vai trò của một dòng chảy bao quanh một vật rắn nào đó. Ví dụ, ở trường hợp cụ thể của chúng ta trục x và trục y sẽ đóng vai trò đó để thay thế cho một góc (lỗm) 90° tạo nên thành rắn trong dòng chảy bao quanh quanh góc trục giao. Vì bản thân trục x và trục y cũng là các đường dòng.



Hình 4.4

2.2. Điểm nguồn

Thế phức của điểm nguồn đặt tại gốc toạ độ có dạng :

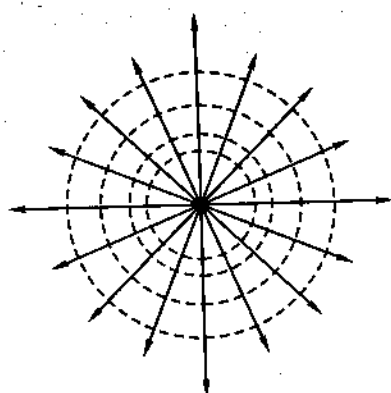
$$f(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z = \frac{q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} \quad (4-19a)$$

trong đó : q là cường độ của nguồn. Suy ra :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \\ \psi = \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (4-19b)$$

Và các thành phần vận tốc :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (4-19c)$$



Hình 4.5

2.3. Điểm tụ

Điểm tụ là điểm nguồn có cường độ âm. Nghĩa là thế phức của tụ đặt ở gốc tọa độ có dạng :

$$f(z) = -\frac{q}{2\pi} \ln z \quad (4-19d)$$

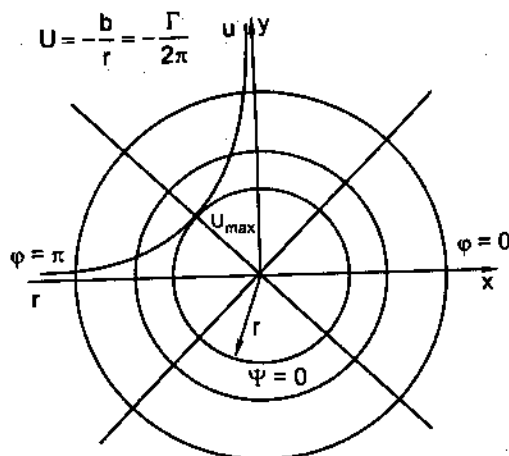
Do vậy hàm thế vận tốc φ và hàm dòng ψ có dạng giống của nguồn nhưng trái dấu :

$$\varphi_{\text{tụ}} = -\varphi_{\text{nguồn}} ; \psi_{\text{tụ}} = -\psi_{\text{nguồn}}$$

Nếu tụ đặt ở tọa độ $x = \pm a$ và $y = 0$ với $a > 0$ (tức là nằm trên trục x) thì :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{q}{4\pi} \ln[(x \mp a)^2 + y^2] \\ \psi = \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x \mp a} \end{cases} \quad (4-19e)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi} \frac{x \mp a}{(x \mp a)^2 + y^2} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{(x \mp a)^2 + y^2} \end{cases} \quad (4-19f)$$



Hình 4.6

2.4. Xoáy có thế vận tốc

Là điểm nguồn có cường độ ảo $q = i\Gamma$ với Γ là lưu số vận tốc. Như vậy :

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (4-19g)$$

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ \psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (4-19h)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-x}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (4-19i)$$

2.5. Tổ hợp xoáy có thế và tụ

Bức tranh của dòng chảy này thể hiện gần đúng hiện tượng xoáy trong nước hoặc vòi rồng trong khí quyển. Là sự kết hợp của xoáy cường độ Γ và tụ cường độ q có thể phức là :

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z + \frac{q}{2\pi} \ln z \quad (4-19j)$$

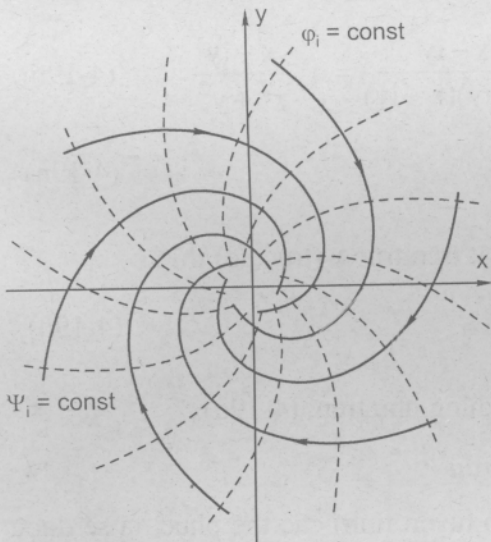
nên từ (4-19h) và (4-19e) :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) = \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta + \frac{q}{2\pi} \ln r \\ \psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) + \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \frac{q}{2\pi} \vartheta \end{cases} \quad (4-19k)$$

và từ (4-19i) và (4-19f) :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} + \frac{q}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r} \\ u_y = \frac{-\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\cos \vartheta}{r} + \frac{q}{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{r} \end{cases} \quad (4-19l)$$

Nếu là sự kết hợp giữa xoáy thế và nguồn chỉ cần thay $q = -q'$ là có ngay dòng chảy của tổ hợp xoáy thế và nguồn. Bức tranh của dòng xoáy với tụ thể hiện trên các hình 4.7 và hình 4.8 là ảnh của một xoáy nước trong thực tế.



Hình 4.7

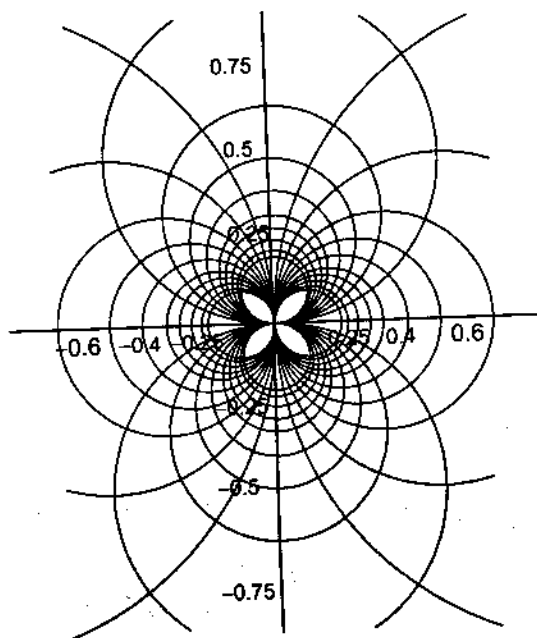
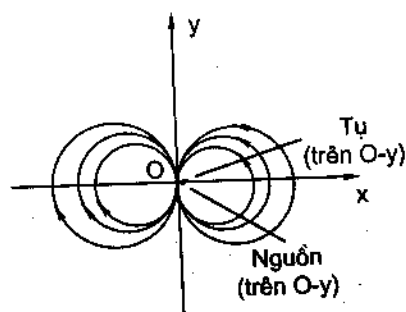
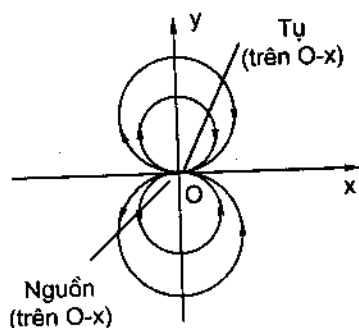


Hình 4.8

2.6. Lương cực

Phát sinh nhờ xếp chồng một nguồn và một tụ có cùng trị số cường độ (chỉ trái dấu) đặt đối xứng qua gốc toạ độ cùng nằm trên trục x (hoặc cùng nằm trên trục y) cách nhau một khoảng Δx (hoặc Δy) dần tiến tới giới hạn 0 sao cho tích $q \times \Delta x$ không đổi và lấy giá trị q_0 , nghĩa là :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} q \Delta x = q_0$$



Hình 4.9

$$f(z) = \frac{q_0}{z} = q_0 \frac{1}{x+iy} = q_0 \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = q_0 \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad (4-19m)$$

Từ đây có :

$$\varphi = \frac{q_0 x}{x^2+y^2} \quad \text{và} \quad \psi = -\frac{q_0 y}{x^2+y^2} \quad (4-19n)$$

Nếu trong quá trình tiến tới giới hạn nguồn và tụ đặt trên trục y (trục ảo) thì :

$$\varphi = \frac{q_0 y}{x^2+y^2} \quad \text{và} \quad \psi = -\frac{q_0 x}{x^2+y^2} \quad (4-19o)$$

Để thấy, nếu hoán vị x với y trong (4-19n), kết quả đúng như trên, (4-19o).

2.7. Sự xếp chồng các thế phức chảy bao quanh vật rắn

Như đã thấy và sẽ thấy, nếu xếp chồng (hay tổ hợp tuyến tính) các thế phức, ta sẽ được một thế phức mới mô tả một dòng chảy mới có cấu trúc chảy phức tạp hơn. Sau đây hãy khảo sát vấn đề này qua một số ví dụ tiếp theo.

a) Chảy bao quanh nửa vật thể cố định. Nửa vật thể là vật thể có chiều rộng hữu hạn, đầu ở trong hữu hạn nhưng đuôi ở vô cùng (xem hình 4.10).

Nếu xếp chồng dòng song song và đồng đều với một nguồn đặt tại gốc tọa độ ta sẽ được nửa vật thể như định nghĩa với cách chọn trục như ở trên. Thực vậy, nếu chọn hệ trục tọa độ như trên hình 4.10, thế phức của dòng song song và đồng đều là :

$$f_1(z) = u_\infty z = u_\infty(x + iy) = u_\infty x + i u_\infty y \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = u_\infty x \\ \psi_1 = u_\infty y \end{cases}$$

(vì tính chất của dòng này và cách chọn hệ tọa độ).

Nếu kí hiệu thế phức của nguồn là $f_2(z)$ thì thế phức tổng sẽ là :

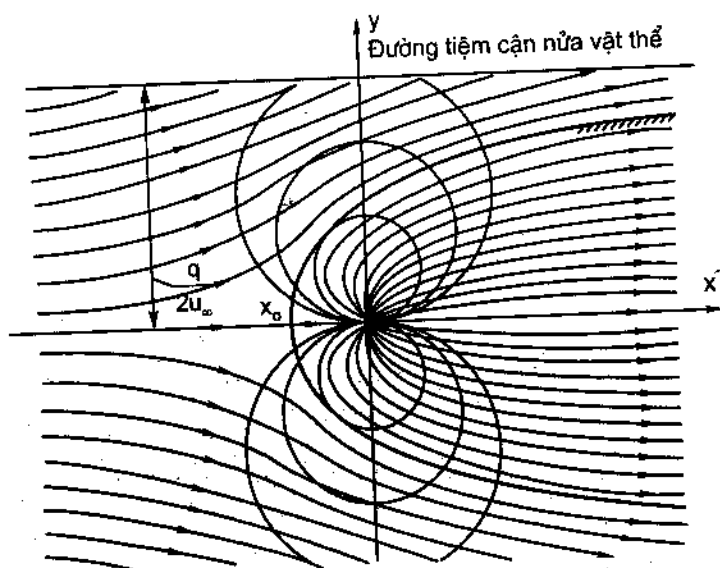
$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \varphi + i\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + i(\psi_1 + \psi_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = u_\infty x + \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \\ \psi = \psi_1 + \psi_2 = u_\infty y + \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (4-20a)$$

$$\begin{cases} u_x = u_\infty + \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ u_y = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (4-20b)$$

Từ đây có :

Có thể thấy, rất xa gốc tọa độ : $u_x = u_\infty$; $u_y = 0$.



Hình 4.10

Hãy tìm xem trong dòng chảy tồn tại hay không tồn tại điểm dừng (là nơi vận tốc bằng không). Điểm dừng tồn tại nếu hệ phương trình suy từ (4-20b) : cả u_x và u_y đồng thời bằng không, nghĩa là :

$$\begin{cases} u_{\infty} + \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (4-20c)$$

Từ phương trình thứ nhất (trong (4-20c)) có thể viết :

$$x^2 + y^2 + \frac{q}{2\pi u_{\infty}} x = y^2 + x(x + \frac{q}{2\pi u_{\infty}}) = 0 \quad (4-20d)$$

Từ phương trình thứ 2 hệ (4-20c) ta có nghiệm $y = y_0 = 0$. Nếu thế giá trị này vào (4-20d) ta có thể dễ dàng giải được phương trình này. Thực vậy :

$$0 + x(x + \frac{q}{2\pi u_{\infty}}) = 0$$

và kết quả là : $x = 0$ và $x = x_0 = -\frac{q}{2\pi u_{\infty}}$.

Trên ý nghĩa vật lí của dòng chảy bao, nghiệm $x = 0$ không có giá trị thực tiễn, coi là nghiệm ngoại lai. Nghiệm còn lại hoàn toàn có nghĩa và toạ độ $(x = x_0, y = 0)$ cho điểm vận tốc bằng 0.

Còn có thể nhận thấy khi $x = \infty$ thì :

$$u_{x\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} u_x = \lim_{x \rightarrow \infty} (u_{\infty} + \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}) = u_{\infty}$$

vì giá trị giới hạn của số hạng thứ hai bằng không bởi mẫu số lớn hơn tử số 1 bậc. Cũng dễ dàng thấy $u_{y\infty} = 0$ khi $x = \infty$. Và như vậy ở cách xa gốc toạ độ dòng chảy dần trở thành dòng song song và đồng đều. Đồng thời dựa vào phương trình liên tục và trị số vận tốc ở xa gốc toạ độ có thể suy ra bề rộng của nửa vật thể (kí hiệu là B) :

$$B = \frac{q}{u_{\infty}}$$

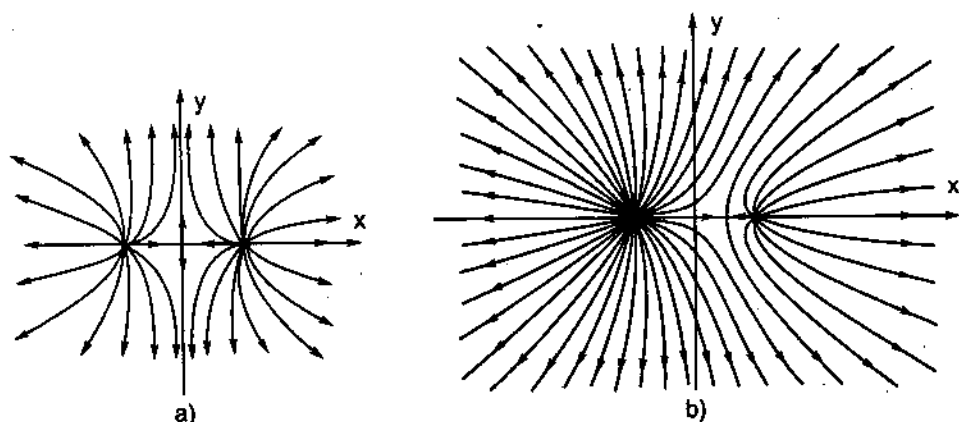
b) Hai nguồn có cùng cường độ (xem hình 4.11). Trên trục x đặt đối xứng qua gốc toạ độ hai nguồn có cùng cường độ cách nhau $2a$ ($a > 0$). Hãy khảo sát bức tranh dòng chảy phát sinh từ chúng. Ta có :

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi} \ln[(x+a)^2 + y^2] + \frac{q}{4\pi} \ln[(x-a)^2 + y^2] \\ \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} + \frac{q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \end{cases} \quad (4-21a)$$

Từ đây :

$$\begin{cases} u_x = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \\ u_y = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right] \end{cases} \quad (4-21b)$$

Do tụ chỉ khác nguồn ở chỗ cường độ của nó là âm nên chỉ cần đổi dấu các đại lượng của (2-21a) và (2-21b) là ta được các đại lượng tương ứng. Trên bức tranh dòng chảy chỉ cần đổi chiều mũi tên chỉ hướng dòng chảy là được. Nếu có vấn đề khác nhau về cường độ nguồn, bức tranh dòng chảy sẽ bị méo đi, ví dụ như hình 4.11b.



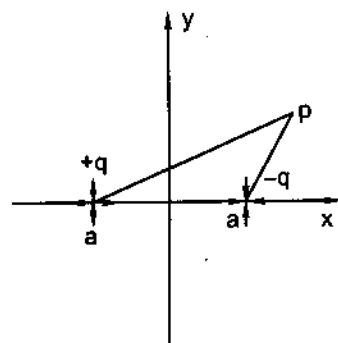
Hình 4.11

c) Một nguồn một tụ có cường độ cùng trị số tuyệt đối đặt đối xứng qua gốc tọa độ

Trên trục x nguồn đặt tại tọa độ $P_1(-a,0)$ và tụ đặt tại $P_2(+a,0)$. Dòng tổng có

$$\begin{cases} \varphi = \frac{q}{4\pi} \ln[(x+a)^2 + y^2] - \frac{q}{4\pi} \ln[(x-a)^2 + y^2] \\ \psi = \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x+a} - \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x-a} \end{cases} \quad (4-22a)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \\ u_y = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right] \end{cases} \quad (4-22b)$$



Hình 4.12

Có thể chỉ ra rằng họ đường $\varphi = \text{const}$ và $\psi = \text{const}$ là 2 họ đường tròn tâm nằm trên trục x và trên trục y. Cụ thể là:

Đường đẳng thế

$$\begin{aligned} \varphi = \text{const} = C &= \frac{q}{4\pi} \left\{ \ln[(x+a)^2 + y^2] - \ln[(x-a)^2 + y^2] \right\} = \frac{q}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \\ \Rightarrow \frac{4\pi}{q} C &= \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (4-22c)$$

Lấy thừa cơ số e cả 2 vế rồi biến đổi và sắp xếp:

$$\begin{aligned} K &= e^{\frac{4\pi C}{q}} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \Rightarrow (x+a)^2 + y^2 = K(x-a)^2 + Ky^2 = \\ &= x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = Kx^2 - K2ax + Ka^2 + Ky^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1-K)x^2 + 2a(1+K)x + (1-K)y^2 = Ka^2 \Rightarrow x^2 + 2a \frac{1+K}{1-K}x + y^2 = \frac{Ka^2}{1-K}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1+K}{1-K}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1-K}\sqrt{1+3K}\right)^2 \Rightarrow (x+A)^2 + y^2 = R^2$$

với $A = \frac{1+K}{1-K}a$ và $R = \frac{\sqrt{1+3K}}{1-K}a$.

Đây là phương trình đường tròn bán kính R , tâm tại điểm $(-A, 0)$ (xem hình 4.13).

Đường dòng

Còn họ đường $\psi = \text{const}$ cũng có thể suy ra từ ý nghĩa hình học của nó. Biết rằng hàm dòng từ (4-22a) còn có thể viết dưới dạng

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \vartheta_1 - \frac{q}{2\pi} \vartheta_2 \quad (4-23a)$$

do $\arctg \frac{x+a}{y} = \vartheta_1$ và $\arctg \frac{x-a}{y} = \vartheta_2$;

(xem hình 4.13).

Khi $\psi = \text{const}$, nghĩa là :

$$\begin{aligned} |\psi| &= |\vartheta_1 - \vartheta_2| (q/2\pi) \\ \Rightarrow |\vartheta_2 - \vartheta_1| &= \alpha = \text{const} \end{aligned} \quad (4-23b)$$

và quỹ tích các điểm thỏa mãn điều kiện này là đường tròn vì góc-nội tiếp tại P trên đường này nhìn cung AB dưới góc cố định. Họ đường này đi qua 2 điểm $-a$ và $+a$. Đường dòng $\psi = 0$ (hoặc $\psi = 2\pi$) là đường thẳng trùng với trục x . Vì lúc đó :

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 \text{ do } \alpha = 0 \text{ (} K = 1 \text{ ; } R = \infty \text{)}.$$

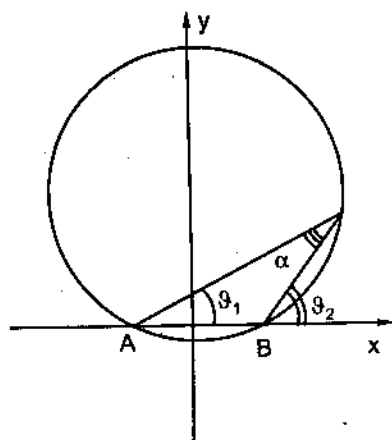
Hình 4.14 cho thấy bức tranh (lưới các đường dòng và đường đẳng thế) của dòng chảy này.

d) Dòng chảy bao hình ôvan hay sự xếp chồng dòng song song đồng đều với dòng tổ hợp nguồn - tụ. Thế phức dòng này suy từ các thế phức của từng dòng, có dạng :

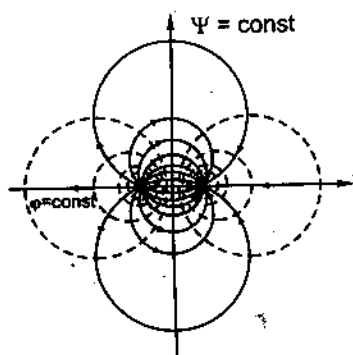
$$f(z) = u_\infty z + \frac{q}{2\pi} \ln(z+a) - \frac{q}{2\pi} \ln(z-a) = u_\infty z + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a} \quad (4-24a)$$

Từ đây có

$$\begin{cases} \varphi = u_\infty x + \frac{q}{4\pi} \left\{ \ln \left[(x+a)^2 + y^2 \right] - \left[(x-a)^2 + y^2 \right] \right\} \\ \psi = u_\infty y + \frac{q}{2\pi} \left(\arctg \frac{y}{x+a} - \arctg \frac{y}{x-a} \right) \end{cases} \quad (4-24b)$$



Hình 4.13



Hình 4.14

và các thành phần vận tốc phương x và phương y :

$$\begin{cases} u_x = u_\infty + \frac{q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right] \\ u_y = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right] \end{cases} \quad (4-24c)$$

Do dòng chảy là đối xứng nên có thể dự đoán điểm dừng nằm trên trục x (tức $y = 0$) nên từ (4-24c) có :

$$\begin{aligned} u_x = 0 &= u_\infty + \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right) \Rightarrow \frac{2\pi u_\infty}{q} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \\ \Rightarrow \frac{2\pi u_\infty}{q} (x+a)(x-a) &= x+a - (x-a) \Rightarrow \frac{2\pi u_\infty}{q} (x^2 - a^2) - 2a = 0 \quad (4-25a) \\ \Rightarrow x^2 - a^2 - 4a\pi \frac{u_\infty}{q} &= 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{a^2 + 4\pi a u_\infty / q} \end{aligned}$$

và cũng vì tính đối xứng (qua trục y) nên chiều rộng của vật thể phải ở điểm tọa độ có $x = 0$ trên đường $\psi = 0$, và từ (4-24c) kết hợp với ý nghĩa vật lý của dòng chảy bị bao kín với điều kiện tiếp xúc tại điểm A ($x = 0$; $y = y_{\max}$) của "ngoài và trong vật" có thể viết :

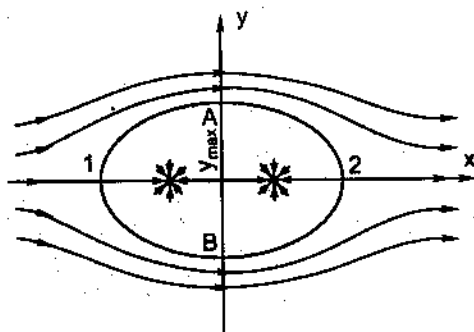
$$\frac{q}{2y_{\max}} = u_A = u_\infty + \frac{q}{2\pi} \frac{2a}{a^2 + y_{\max}^2}$$

Vì vậy chỉ cần giải phương trình :

$$(2u_\infty y_{\max} - q)(a^2 + y_{\max}^2) + 2aqy_{\max} = 0$$

để được $y_{\max}$ và bề dày của vật là :

$$B = 2y_{\max} \quad (4-25)$$



Hình 4.15

e) Dòng bao quanh trụ tròn cố định như là sự xếp chồng lưỡng cực với dòng song song đều. Với lưỡng cực đặt tại gốc tọa độ trên trục x và dòng song song, đều chảy theo chiều trục x ta có :

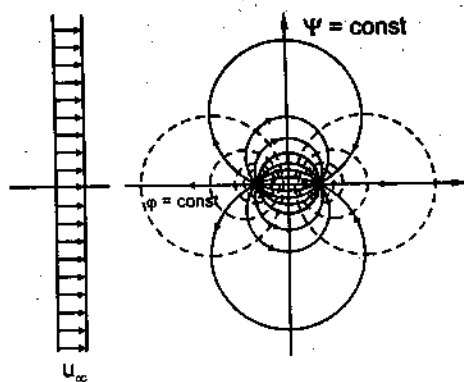
$$f(z) = \frac{q_0}{z} + u_\infty z = \frac{q_0 x}{x^2 + y^2} + u_\infty x + i \left(-\frac{q_0 y}{x^2 + y^2} + u_\infty y \right)$$

$$\begin{cases} \varphi = u_\infty x + \frac{q_0 x}{x^2 + y^2} \\ \psi = u_\infty y - \frac{q_0 y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_\infty + q_0 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2q_0 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

(4-26a)

(4-26b)



Hình 4.16

Dưới đây ta khảo sát một số đặc trưng của dòng chảy này.

+ Đường dòng ứng với $\psi = 0$. Từ (4-26b) có :

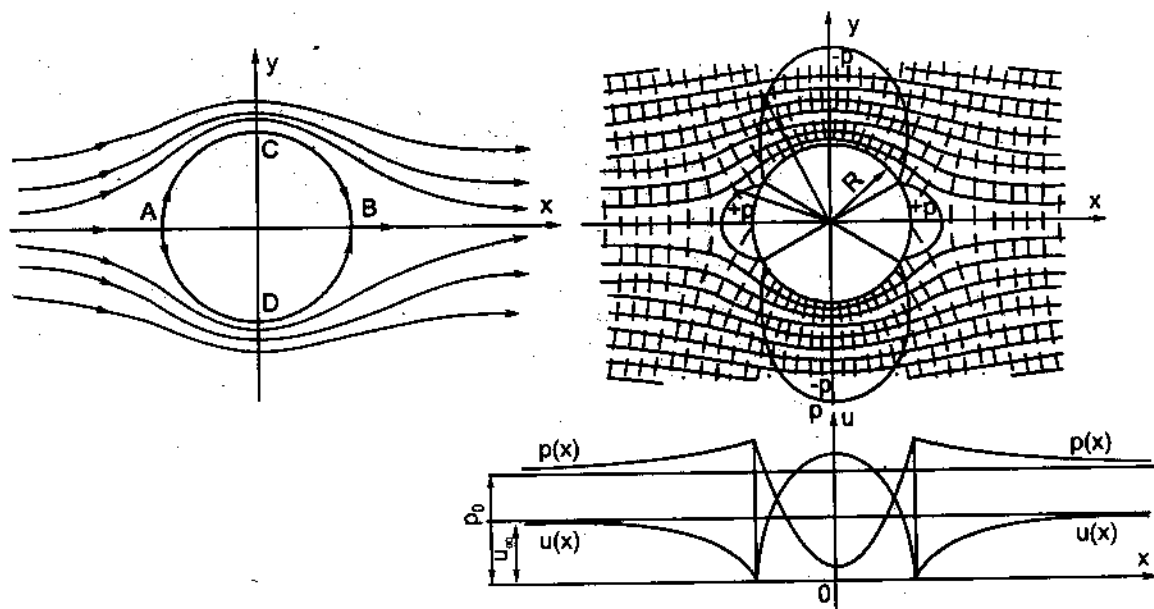
$$\psi = u_\infty y - \frac{q_0 y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow u_\infty y \left(1 - \frac{q_0}{u_\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0 \quad (4-26c)$$

Phương trình này có 2 nghiệm, một từ $u_\infty y = 0$ cho $y = 0$, do u_∞ luôn khác 0 ; một từ

$$1 - \frac{q_0}{u_\infty} \times \frac{1}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{q_0}{u_\infty} = R^2 \quad (4-26d)$$

do u_∞ và q_0 luôn dương. Đây là phương trình đường tròn bán kính R tâm gốc tọa độ.

+ **Điểm dừng** (nơi vận tốc dòng chảy bằng 0). Có thể thấy điểm dừng liên quan mật thiết với đường tròn nói trên và để tiện cho tính toán, hãy chuyển sang hệ tọa độ trụ :



Hình 4.17

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta; \\ y &= r \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2 \quad (4-26e)$$

$$u_\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\vartheta} = \frac{\partial \varphi}{\partial(r\vartheta)} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta}; \quad u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (4-26f)$$

Từ (4-26b), với $R^2 = q_0/u_\infty$, có thể viết:

$$\begin{cases} \varphi = u_\infty r \cos \vartheta + q_0 \frac{r \cos \vartheta}{r^2} = u_\infty r \cos \vartheta \left(1 + \frac{q_0/u_\infty}{r^2}\right) = u_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \vartheta \\ u_\vartheta = \frac{\partial}{\partial r} \varphi = -u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \vartheta \\ u_r = \frac{\partial}{\partial r} \varphi = u_\infty \left[\cos \vartheta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + r \cos \vartheta \frac{-2R^2}{r^3} \right] = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \vartheta \end{cases} \quad (4-26g)$$

Có thể thấy, trên mặt trụ (khi $r = R$) các thành phần vận tốc của dòng chảy

$$u_r = 0 \text{ và } u_\vartheta = -2u_\infty \sin \vartheta \quad (4-26h)$$

Các thành phần vận tốc theo phương x và y :

$$u_x = -2u_\infty \sin \vartheta \cos \vartheta = -u_\infty \sin 2\vartheta \quad (4-26i)$$

$$u_y = -2u_\infty \sin \vartheta \sin \vartheta = -2u_\infty \sin^2 \vartheta$$

Như vậy điểm dừng có tọa độ là: $r = R$ và $\vartheta = 0$ và π (180°), trên hình 4.17 là điểm A và B.

Điều này phù hợp với ý nghĩa chảy bao đang quan sát.

+ **Vận tốc cực đại.** Trên mặt trụ vận tốc cực đại đạt được tại điểm $\sin \vartheta = 1$ (điểm C và D trên hình 4.17) tức là khi:

$$\vartheta = \pi/2 \text{ và } 3\pi/2 \quad (4-26j)$$

$$u_{\max} = u_\vartheta = 2u_\infty \quad (4-26k)$$

Có thể dùng phương trình Benoulli để xác định phân bố áp suất trên mặt trụ, song ở phần sau sẽ nói rõ. Tuy nhiên hình 4.17 cho thấy bức tranh chảy bao và phân bố áp suất cũng như vận tốc. Quan sát sự đối xứng có thể kết luận không có sự chênh áp giữa nửa "trên" và nửa "dưới" mặt trụ nên trong chất lỏng lí tưởng trụ không chịu bất kì một lực tác động nào.

f) *Chảy bao trụ tròn tự quay như là sự tổ hợp của 3 dòng: song song đều, lưỡng cực và xoáy có thể.*

$$f(z) = u_\infty z + \frac{q_0}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (4-27a)$$

Viết cho tọa độ Đécác vuông và tọa độ trụ cùng với kí hiệu $R^2 = \frac{q_0}{u_\infty}$:

$$\begin{aligned} \varphi &= u_\infty x + \frac{q_0 x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = u_\infty r \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta \\ \psi &= u_\infty y - \frac{q_0 y}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) = u_\infty r \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \vartheta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \end{aligned} \quad (4-27b)$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_\infty + q_0 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2q_0 xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (4-27c)$$

$$\begin{cases} u_\vartheta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = -u_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \vartheta \end{cases} \quad (4-27d)$$

Như vậy phân bố vận tốc trên mặt trụ theo (4-27d), tức là khi $r = R$ trong hệ tọa độ trụ :

$$\begin{cases} u_{\vartheta|R} = -2u_\infty \sin \vartheta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \\ u_{r|R} = 0 \end{cases} \quad (4-27e)$$

Điểm dừng trên mặt trụ. Vận tốc trên mặt trụ có thể bằng 0 nếu từ (4-27e) có phương trình :

$$2u_\infty \sin \vartheta = \frac{\Gamma}{2\pi R} \Rightarrow \vartheta = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R u_\infty} \quad \Gamma < 4\pi R u_\infty \quad (4-27f)$$

Phân tích (4-27f) ta thấy (hình 4.18) :

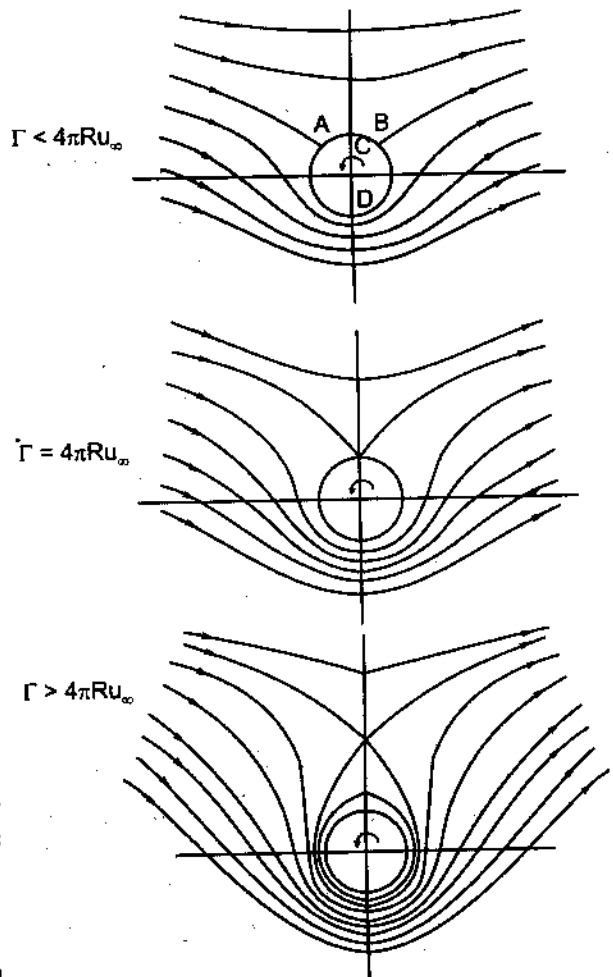
+ Nếu $\Gamma < 4\pi R u_\infty$ tức là góc ϑ có sin nhỏ hơn 1, ta có 2 nghiệm ứng với trị số này bởi nó là trị số của hàm arcsin đa trị ($\sin \vartheta = \sin(\pi - \vartheta)$) nên có 2 điểm dừng.

+ Nếu $\Gamma = 4\pi R u_\infty$, tức là góc ϑ có sin bằng 1, hàm arcsin chỉ có một giá trị duy nhất trên nhánh chính, ta có một điểm dừng tại $\vartheta = \pi/2$, có thể coi đây là điểm kép.

+ Nếu $\Gamma > 4\pi R u_\infty$, ta không có điểm dừng nào trên mặt trụ do phương trình không có nghiệm thực. Điểm dừng đã rời khỏi mặt trụ : một là nghiệm nằm ngoài và một nằm trong trụ (bán kính R) của hệ phương trình lập từ (4-27d).

Tại đây ta không đi sâu thêm.

Điểm có tốc độ cực đại và cực tiểu trên mặt trụ. Cũng từ (4-27e) thấy khi ϑ lấy giá trị $\pm \pi/2$ hàm $\sin \vartheta$ đạt cực trị và :



Hình 4.18

$$\begin{cases} u_{\max} = \frac{\Gamma}{2\pi R} + 2u_{\infty} \text{ tại } \vartheta = -\pi/2 \\ u_{\min} = \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2u_{\infty} \text{ tại } \vartheta = \pi/2 \end{cases} \quad (4-27g)$$

Phân bố áp suất trên mặt trụ. Như đã thấy trên mặt trụ, trước hết giữa 2 điểm C và D có sự khác biệt về trị số vận tốc nên theo ý nghĩa năng lượng dòng chảy (phương trình Bernoulli) tất yếu có sự chênh lệch áp giữa 2 nửa mặt trụ được phân chia bởi trục x. Để xác định biến thiên áp suất men theo chiều dòng chảy, hãy viết phương trình Bernoulli cho đường dòng ôm lấy mặt trụ giữa mặt cắt đầu nguồn ở xa mặt trụ và mặt cắt trên mặt trụ :

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} ; \quad (A)$$

Do là dòng chảy song phẳng nên $z_1 = z_2$.

Lại biết : $u_1 = u_{\infty}$ và $u_2 = u_{\vartheta} = u_{\vartheta|R} = \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2u_{\infty} \sin \vartheta$, (từ (4-27e)) ;

nên từ (A) có :
$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2) = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\Gamma}{2\pi R} - 2u_{\infty} \sin \vartheta \right)^2 - u_{\infty}^2 \right]$$

$$\Delta p = \rho \frac{u_{\infty}^2}{2} \left[\left(\frac{\Gamma}{2\pi R u_{\infty}} - 2 \sin \vartheta \right)^2 - 1 \right] \quad (4-27h)$$

Hình 4.18 trên đây cho ta bức tranh của dòng chảy bao trụ. Phân tích các kết quả của các phân tích trên ta thấy, trường hợp chảy bao trụ cố định (không quay xung quanh trục của mình) hai điểm dừng nằm trên trục x ; phân bố áp suất trên mặt trụ đối xứng qua trục x và trục y, tổng hợp lực bằng 0. Khi trụ quay tạo nên một lưu số Γ , bức tranh đã khác đi. Cụ thể là, cường độ xoáy, tức là trụ quay nhanh hay chậm, quyết định hai điểm này cách nhau bao nhiêu : cường độ càng lớn, chúng càng gần nhau hơn để có thể chạm một hay tách khỏi mặt trụ ; chênh lệch vận tốc dẫn đến chênh lệch áp càng rõ rệt giữa hai nửa trụ phân cách bởi trục x, phá vỡ sự đối xứng trong phân bố áp suất – vận tốc của 2 nửa mặt trụ đối xứng qua trục x, (đối với trục y không có gì thay đổi). Do quy luật phân bố vận tốc và áp suất như vậy hiệu ứng Magnus xuất hiện, có một lực ngang (phương y) tác dụng lên trụ về bên phải (chiều âm y) nếu mặt người quan sát hướng theo chiều dòng chảy và trụ quay ngược chiều kim đồng hồ (chiều dương) ; ngược lại, đẩy sang bên trái nếu trụ quay theo chiều kim đồng hồ. Trong lịch sử phát triển công nghệ có thời kì người ta đã dùng hiệu ứng Magnus trong giao thông thủy.

2.8. Lưu số vận tốc. Lực nâng Giucốpki

Vận dụng kết quả thu được ở dòng chảy bao quanh trụ tròn và khái niệm lưu số có thể xác định lực nâng Giucốpki.

a) Lưu số vận tốc và cách tính. Định nghĩa : Lưu số vận tốc (kí hiệu là Γ) là đại lượng được xác định bằng tích phân đường thực hiện trên một đường S nào đó

$$\Gamma = \int_S u \cos \alpha ds = \int_S \vec{u} d\vec{s} \quad (4-28a)$$

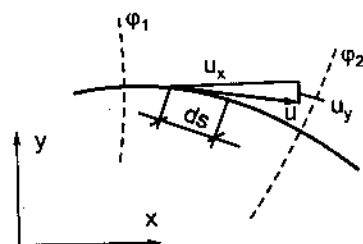
Trong (4-28a) $u \cos \alpha$ là hình chiếu của vận tốc cục bộ lên đoạn chiều dài ds của đường S , đồng thời cũng là tổng cộng hình chiếu của các thành phần vận tốc u_x và u_y trên ds , vì vậy ta xác định lưu số trong dòng có thể như sau :

$$u \cos \alpha ds = \vec{u} d\vec{s} = u_x dx + u_y dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi. \quad (4-28b)$$

$$\text{Do vậy : } \Gamma = \int_S u \cos \alpha ds = \int_S d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (4-28c)$$

với φ_1 và φ_2 là thế vận tốc ứng với điểm 1 tại thượng lưu và điểm 2 tại hạ lưu.

Nếu S là đường đẳng thế, lưu số trên S bằng 0.

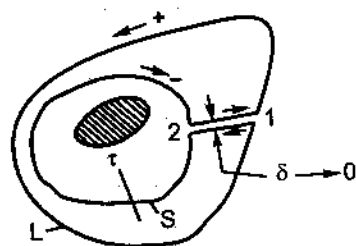


Hình 4.19

Đến đây cần nhắc lại một định lí của hàm biến phức, trong đó có các hàm thế phức, thuộc lớp hàm chỉnh quy là : nếu $f(z)$ là hàm chỉnh quy (lớp hàm thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann) thì trong miền đơn liên tích phân của nó trên một đường khép kín bằng 0. Nếu trong miền bao bởi đường khép kín tồn tại bất kì một kì dị nào, tích phân này có thể khác 0. Trong toán học các "vật" chảy bao đều được coi là một loại kì dị. Ví dụ, ở các thế phức của nguồn hay xoáy có thế vận tốc ($f(z)=1/z$), $f(z)=\ln z$) gốc toạ độ là điểm kì dị vì ở đó hàm không khả vi, vận tốc dòng chảy là vô cùng (∞). Ví dụ trường hợp của xoáy có thế vận tốc, lưu số vận tốc trên đường khép kín bao quanh gốc toạ độ, chẳng hạn như đường tròn bán kính r đồng thời cũng là một đường dòng có trị số :

$$\Gamma = 2\pi r u_s = \text{const} \quad (4-28c)$$

vì quy luật của loại xoáy này là u_r không đổi, trên đường dòng vận tốc không đổi. Để dạng thấy được trị số của lưu số vận tốc không phụ thuộc vào hình dạng và độ lớn của đường bao. Thực vậy, nếu gọi Γ_1 là trị số tính trên S và Γ_2 là trị số tính trên L , ta tiến hành như sau : Bằng một nhát cắt (xem hình 4.20) ta có thể tạo nên một miền đơn liên rồi tính lưu số trên đường viền của miền này và biết chắc trị số này bằng 0. Với lưu ý, lưu số là đại lượng có dấu : lấy dấu dương nếu chiều tích phân vòng ngược chiều kim đồng hồ (chiều dương toán học), ngược lại, lấy dấu âm.



Hình 4.20

Trên hình 4.20, S là đường tròn bao quanh tâm xoáy (gốc toạ độ), L là đường khép kín bất kì bao quanh S . Nối điểm 1 trên L với điểm 2 trên S bằng một đoạn (không nhất thiết là thẳng) 1-2 gọi là nhát cắt. Đường 1-L-1-2-S-2-1 lập thành biên của miền đơn liên (không bọc kì dị) $\mathfrak{J}$. Lưu số tính trên đường này sẽ là :

$$\Gamma = 0 = \int_{+L} \vec{u} d\vec{s} + \int_{1-2} \vec{u} d\vec{s} + \int_{-S} \vec{u} d\vec{s} + \int_{2-1} \vec{u} d\vec{s} = \Gamma_2 + \int_{1-2} \vec{u} d\vec{s} - \Gamma_1 - \int_{1-2} \vec{u} d\vec{s} = \Gamma_2 - \Gamma_1$$

do ta đã đảo chiều tích phân của đoạn 2-1 thành 1-2 ở tích phân thứ tư về phải nên

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \quad (4-28d)$$

Nếu đường L nằm gọn trong S, kết quả cũng vẫn như trên. Như vậy suy ngược lại, nếu L là đường biên của vật chảy bao (thành rắn), lưu số vẫn không thay đổi dù tính trên đường khép kín lớn hơn, có dạng bất kì bao lấy nó, ví dụ, một đa giác. Với sự chuẩn bị trên ta đủ điều kiện để chứng minh công thức lực nâng Giukópcki dưới đây theo "cách tiếp cận thủy lực".

b) *Lực nâng Giukópcki*. Trong dòng song phẳng dòng chảy bao quanh trụ tròn có xoáy (hoặc không nhất thiết là trụ tròn nhưng có lưu số Γ) đã đề cập ở trên ta hãy xét cân bằng động lực học của bài toán này. Để tiện, ta tính toán cho một đơn vị chiều dài/chiều cao hình trụ.

Phương trình động lượng và phương trình Bernoulli là các phương trình cơ bản giúp giải quyết bài toán này.

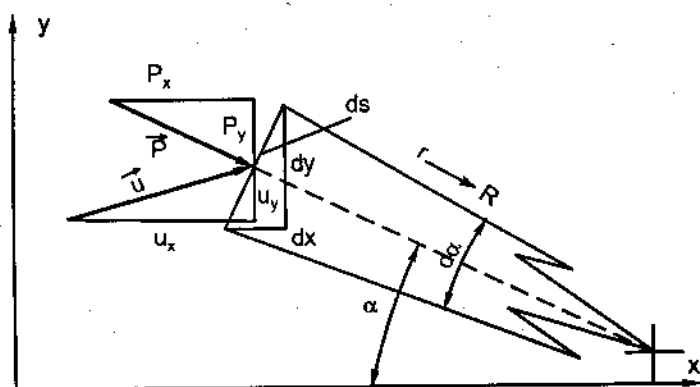
+ *Xét biến thiên động lượng* :

Kí hiệu xung lượng của dòng chảy là I

$$I = \vec{I} = \vec{i}I_x + \vec{j}I_y = [I_x, I_y] \quad (4-29a)$$

và

$$\begin{cases} dI_x = u_x p dQ \\ dI_y = u_y p dQ \end{cases} \quad (4-29b)$$



Hình 4.21

Theo hình vẽ ta có

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \sin \vartheta \Rightarrow dx = \sin \vartheta ds \\ \frac{dy}{ds} = \cos \vartheta \Rightarrow dy = \cos \vartheta ds \end{cases} \quad (4-29c)$$

Do chiều dày của dòng chảy là 1 đơn vị chiều dài nên phần tử mặt cắt $d\Omega = 1 \times ds$, nên :

$$dQ = u_x dy + u_y dx$$

Thế vào đây các giá trị của dx , dy từ (4-29c), được :

$$dQ = u_x \cos \vartheta ds + u_y \sin \vartheta ds \quad (4-29d)$$

Nếu một biên kiểm tra là đường tròn tâm gốc toạ độ, bán kính R_k lớn hơn bán kính trụ thì phần tử lưu lượng qua mặt này là :

$$dQ = (u_x \cos \vartheta + u_y \sin \vartheta) R_k d\vartheta \quad (4-29d)$$

Không cần xét đến ma sát, qua phần tiết diện kiểm tra là đường tròn bao quanh vật chảy bao phần lực của vật lên chất lỏng bằng tổng biến thiên động lượng và áp lực lên diện kiểm tra. Ta cũng biết rằng, không có phần tử chất lỏng xuyên qua bề mặt vật chảy bao, vận tốc tiếp tuyến bề mặt trụ nên không có trao đổi động lượng trên phần mặt kiểm tra này. Do vậy chỉ cần xét biến thiên động lượng trên mặt kiểm tra bán kính R_k thôi. Từ (4-29b) và (4-29d) có thể viết (nếu dm là khối lượng)

$$\begin{cases} dI_x = u_x dm = u_x \rho dQ = u_x \rho (u_x \cos \vartheta + u_y \sin \vartheta) R_k d\vartheta \\ dI_y = u_y dm = u_y \rho dQ = u_y \rho (u_x \cos \vartheta + u_y \sin \vartheta) R_k d\vartheta \end{cases} \quad (4-29e)$$

+ Xét tác động của áp suất (áp lực).

Hai thành phần phương x và y của áp lực dòng chảy (theo kí hiệu trên hình 4.21)

Áp suất p có thể rút ra từ phương trình Bernoulli viết cho 2 mặt cắt, một ở thượng lưu cách xa gốc toạ độ về phía $-x$, một ở trên mặt trụ :

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{u_2^2}{2} \quad (4-29f)$$

$z_1 = z_2$ do dòng chảy là song phẳng ;

tại mặt cắt 1 : $p_1 = p_0$

tại mặt cắt 2 : $p_2 = p$

$$u_2 = u = u_\vartheta = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \Rightarrow u^2 = u_x^2 + u_y^2$$

Thế các giá trị này vào (4-29f), được :

$$p + \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) = p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 \Rightarrow p = p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) \quad (4-29g)$$

Thế biểu thức này của p vào (4-29f) được :

$$dP_x = \left[p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) \right] \times 1 \times ds \cos \vartheta = \left[p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) \right] R_k d\vartheta \cos \vartheta$$

$$dP_y = \left[p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) \right] \times 1 \times ds \sin \vartheta = \left[p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) \right] R_k d\vartheta \sin \vartheta$$

(4-29h)

Nếu gọi phản lực của vật chảy bao lên chất lỏng (cũng là lực của chất lỏng tác dụng lên vật nhưng ngược chiều) là $\mathbf{F}$ thì :

$$\mathbf{F} = \bar{i}\mathbf{F}_x + \bar{j}\mathbf{F}_y = [\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y]$$

và sử dụng (4-29e), (4-29h) : $d\mathbf{F}_x = dI_x + dP_x \Rightarrow \mathbf{F}_x = I_x + P_x$ (4-29i)

$$d\mathbf{F}_y = dI_y + dP_y \Rightarrow \mathbf{F}_y = I_y + P_y$$

Bây giờ tính cụ thể từng đại lượng một :

$$\begin{aligned} P_x &= \int_0^{2\pi} \left[(p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2) - \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) \right] R_k \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} (p_0 + \frac{\rho}{2}u_\infty^2) R \cos \vartheta d\vartheta - \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2}(u_x^2 + u_y^2) R_k \cos \vartheta d\vartheta \\ &= (p_0 + \frac{\rho}{2})R \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta - \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (u_x^2 + u_y^2) R_k \cos \vartheta d\vartheta \\ &\Rightarrow P_x = -\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (u_x^2 + u_y^2) R_k \cos \vartheta d\vartheta \end{aligned} \quad (4-29j1)$$

vì ta đã đưa các hằng số ra ngoài dấu tích phân và thấy rằng tích phân từ 0 đến 2π của hàm $\cos \vartheta = 0$.

Tương tự như vậy ta có :

$$P_y = -\frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (u_x^2 + u_y^2) R_k \sin \vartheta d\vartheta \quad (4-29j2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_x = \int_0^{2\pi} dI_x + \int_0^{2\pi} dP_x = \int_0^{2\pi} \rho u_x (u_x \cos \vartheta + u_y \sin \vartheta) R_k d\vartheta - \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (u_x^2 + u_y^2) R_k \cos \vartheta d\vartheta \\ \mathbf{F}_y = \int_0^{2\pi} dI_y + \int_0^{2\pi} dP_y = \int_0^{2\pi} \rho u_y (u_x \cos \vartheta + u_y \sin \vartheta) R_k d\vartheta - \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} (u_x^2 + u_y^2) R_k \sin \vartheta d\vartheta \end{cases} \quad (4-29k)$$

Khử các ngoặc đơn và rút gọn :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \int_0^{2\pi} (\rho u_x^2 \cos \vartheta + \rho u_x u_y \sin \vartheta - \frac{\rho}{2} u_x^2 \cos \vartheta - \frac{\rho}{2} u_y^2 \cos \vartheta) R_k d\vartheta \\ \mathbf{F}_y &= \int_0^{2\pi} (\rho u_x u_y \cos \vartheta + \rho u_y^2 \sin \vartheta - \frac{\rho}{2} u_x^2 \sin \vartheta - \frac{\rho}{2} u_y^2 \sin \vartheta) R_k d\vartheta \\ \begin{cases} \mathbf{F}_x = \rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} u_x^2 \cos \vartheta + u_x u_y \sin \vartheta - \frac{1}{2} u_y^2 \cos \vartheta \right) R_k d\vartheta \\ \mathbf{F}_y = \rho \int_0^{2\pi} \left[u_x (u_y \cos \vartheta + u_x \sin \vartheta) - \frac{1}{2} u_x^2 \sin \vartheta - \frac{1}{2} u_y^2 \sin \vartheta \right] R_k d\vartheta \end{cases} \end{aligned} \quad (4-29m)$$

Bây giờ ta xét trường hợp giới hạn trước khi thực hiện phép tích phân như sau : Tăng bán kính R_k của mặt kiểm tra vừa lấy (như một mặt biên của diện kiểm tra trong tính toán) lên vô hạn, tức là : $R_k \rightarrow \infty$, $u_x \rightarrow u_\infty$, $u_y \rightarrow 0$ (do ở rất xa gốc toạ độ ảnh hưởng của lưỡng cực và xoáy gần như không còn nữa, chỉ còn sự chi phối của dòng song song và đồng đều). Vì vậy trong biểu thức tính F_x (4-29m) số hạng 2 và 3 dưới dấu tích phân triệt tiêu vì $u_y = 0$, chỉ còn lại đại lượng :

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ u_x \rightarrow u_\infty}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} u_x^2 \cos \vartheta R d\vartheta = \frac{u_\infty^2}{2} R_\infty \int_0^{2\pi} \cos \vartheta d\vartheta \rightarrow 0$$

và như vậy : $F_x = 0$

Kết quả trên không bất ngờ vì phân bố áp suất đối xứng qua trục y. Tương tự :

$$F_y = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ u_x \rightarrow u_\infty}} F_y = \rho \int_0^{2\pi} u_\infty (u_y \cos \vartheta + u_x \sin \vartheta) R_\infty d\vartheta - \rho \int_0^{2\pi} \frac{u_\infty^2}{2} \sin \vartheta R_\infty d\vartheta - \rho \int_0^{2\pi} \frac{0}{2} \sin \vartheta R_\infty d\vartheta.$$

Có thể thấy ngay hai số hạng cuối trong biểu thức trên triệt tiêu ; còn trong số hạng thứ nhất đại lượng tích phân chính là lưu số vận tốc Γ của dòng bao quanh trụ. Vì vậy :

$$\text{Do :} \quad \begin{cases} F_y = \rho u_\infty \Gamma \\ F_x = 0, \\ F = F_y = \rho u_\infty \Gamma \end{cases} \quad (4-29n)$$

phương của lực trực giao với u_∞ . Người ta gọi nó là lực nâng Giukôpxki.

Đến đây cũng phải nói rằng, nếu yêu cầu là xác định lực gây nên bởi phân bố áp suất trên mặt trụ không đối xứng thì chỉ cần tích phân hàm phân bố áp suất trên mặt trụ theo ϑ trong khoảng $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ là được. Mặt khác, nếu chảy bao trụ không có lưu số thì cũng không có lực nâng, như trường hợp trụ cố định, không quay.

3. Dòng xoáy và các định luật cơ bản

3.1. Một số khái niệm

Như đã thấy trong quá trình dẫn dắt phương trình Cauchy-Helmholtz, trong lúc chuyển động một phần tử chất lỏng có thể thực hiện đồng thời 3 chuyển động cơ bản : tịnh tiến, biến dạng và quay xung quanh trục của chính nó.

Định nghĩa dòng xoáy là dòng trong đó các phần tử chất lỏng quay xung quanh trục của mình, ngoài việc thực hiện các chuyển động khác.

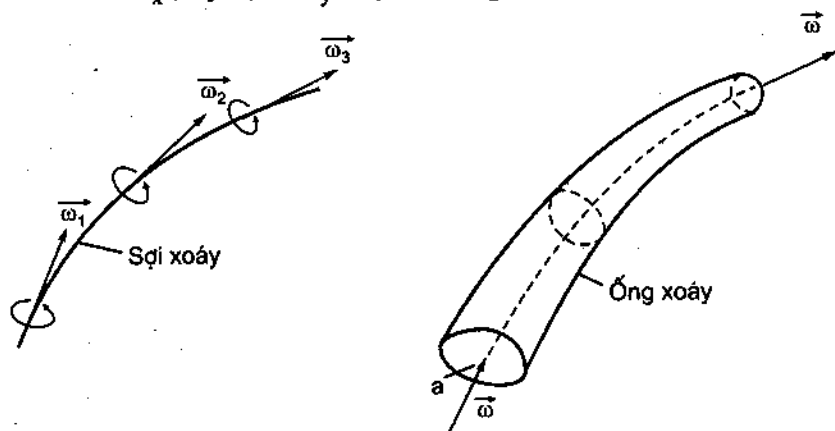
Định nghĩa đường xoáy là đường trong dòng chảy – tương tự như khái niệm đường dòng – tiếp xúc với các vectơ xoáy trong không gian dòng chảy tại điểm có vectơ xoáy đó. Từ định nghĩa này ta có ngay phương trình vi phân của đường xoáy như sau :

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)} \quad (4-30a)$$

đối với dòng không ổn định. Còn đối với dòng ổn định ta có :

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z)}$$

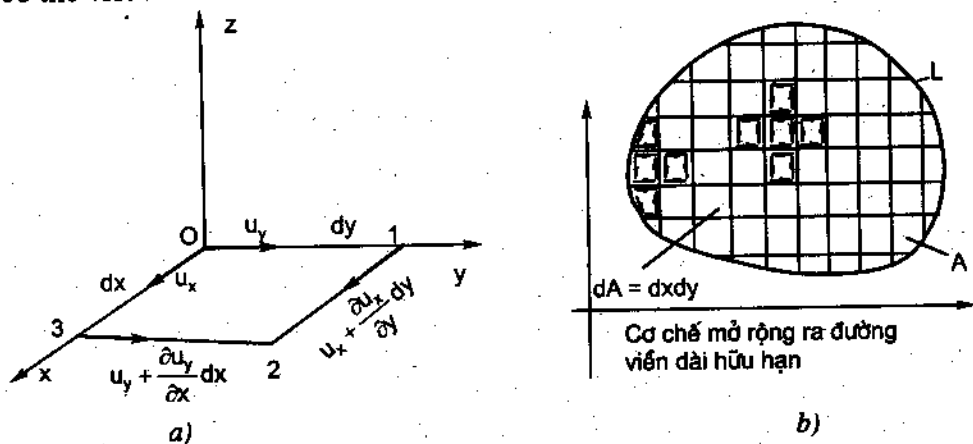
(4-30b)



Hình 4.22

Ống xoáy là tập hợp các đường xoáy đi qua đường biên (đường viền) của một phần tử diện tích và tạo thành mặt biên của một ống nguyên tố; chất lỏng chứa trong ống xoáy tạo thành sợi xoáy. Tích số của mặt cắt ngang ống xoáy với vectơ xoáy (vận tốc góc) là ứng suất hay cường độ của ống xoáy.

Tích phân Stokes. Hãy tính lưu số vận tốc trên một đường viền nguyên tố hình chữ nhật cạnh dx và dy nằm trong mặt phẳng tọa độ xOy (xem hình 4.23a). Với các kí hiệu trên hình vẽ có thể viết :



Hình 4.23

$$\begin{aligned} d\Gamma &= u_x dx + \left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right) dy - \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy\right) dx - u_y dy = \\ &= u_x dx + u_y dy + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx dy - u_x dx - \frac{\partial u_x}{\partial y} dx dy - u_y dy \\ &\Rightarrow d\Gamma = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dx dy = 2\omega_z dx dy = 2\omega_z dA \end{aligned}$$

(4-30c)

Như vậy, lưu số vận tốc hình thành trên đường viền nguyên tố bằng 2 lần tích số của vận tốc quay (hay vận tốc góc) với diện tích nguyên tố được bao bởi đường viền nguyên tố đó (đường 0-1-2-3-0).

Đối với đường viền có chiều dài hữu hạn L bao quanh diện tích A, bằng các nhát cắt song song với trục x và trục y (như trên hình 4.23b) để được các diện tích đủ nhỏ có thể sử dụng kết quả (4-30c); đồng thời lại thấy do tính chất của tích phân đường, dấu của kết quả phụ thuộc vào hướng tích phân, nên mỗi cạnh của phân tố đường viền hình chữ nhật trên diện tích hữu hạn đều được tính 2 lần nhưng ngược chiều nhau làm triệt tiêu nhau; chỉ còn lại phần đường viền ngoài cùng là đường viền hữu hạn L (do chỉ có "lượt đi"), cho nên:

$$\Gamma = \int_A \omega_z dx dy = \int_A \omega_z dA = 2\omega_z A \quad (4-30d)$$

trong đó: A là diện tích hữu hạn bao bởi đường viền hữu hạn L nằm trong mặt phẳng xOy. Đây là tích phân Stokes. Có nghĩa là khi mở rộng ra đường viền/điện tích hữu hạn, tính chất của kết quả tính lưu số vận tốc, đồng thời cũng là cường độ hay ứng suất xoáy vẫn giữ nguyên.

Cần lưu ý, các nhát cắt không nhất thiết phải song song với trục x và trục y mà có thể tùy ý, thậm chí không phải là đường thẳng, kết quả vẫn như nhau. Bởi lẽ, mấu chốt ở đây là khi tích phân đường kết quả chiều đi và chiều về luôn triệt tiêu nhau. Như vậy chỉ còn lại các giá trị tính trên các đoạn hợp thành đường khép kín L mà thôi.

3.2. Các định lý của Thomson

Là các định lý quan trọng nhất về dòng chảy có xoáy. Hãy khảo sát một số vấn đề sau đây.

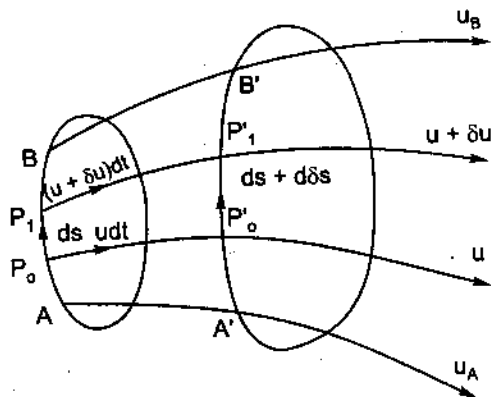
a) *Biến thiên theo thời gian của lưu số vận tốc trên đường viền trôi cùng dòng chảy.*
Hãy hình dung, tại một thời điểm gốc nhất định lấy một đường viền L nhất định tạo bởi các phần tử chất lỏng được đánh dấu, chúng chuyển động (trôi) cùng dòng chảy, với các chuyển động cơ bản có thể có trong dòng chất lỏng (chuyển vị tịnh tiến, biến dạng, quay xung quanh trục của nó). Như vậy sau một thời gian dt bản thân đường viền cũng như các đặc trưng thủy động của các phần tử trên đường viền lúc đó (vẫn là các phần tử bị đánh dấu, không thêm/bớt phần tử nào khác) cũng đã có thể thay đổi, kể cả hình dạng, khiến cho lưu số vận tốc trên nó có thể thay đổi. Ta khảo sát biến thiên của lưu số theo mô hình biến động trên.

Trong không gian 3 chiều (x,y,z) ta có:

$$\Gamma = \int_L (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \quad (4-31a)$$

Hãy đạo hàm theo thời gian biểu thức (4-31a) với lưu ý ở đây tính có thể hoán vị được của thứ tự đạo hàm và tích phân:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int \left[\frac{d}{dt}(u_x dx) + \frac{d}{dt}(u_y dy) + \frac{d}{dt}(u_z dz) \right] \quad (4-31b)$$



Hình 4.24

Để có thể tích phân được, dù chỉ trong một số trường hợp nhất định, phải đổi về dạng phù hợp trên cơ sở các kết quả thu được trong chương III. Biết rằng :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_x dx) = \frac{du_x}{dt} dx + u_x dx = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{d}{dx} \left(\frac{u_x^2}{2} \right) dx = \frac{du_x}{dt} dx + d \left(\frac{u_x^2}{2} \right) \\ \frac{d}{dt}(u_y dy) = \frac{du_y}{dt} dy + u_y dy = \frac{du_y}{dt} dy + \frac{d}{dy} \left(\frac{u_y^2}{2} \right) dy = \frac{du_y}{dt} dy + d \left(\frac{u_y^2}{2} \right) \\ \frac{d}{dt}(u_z dz) = \frac{du_z}{dt} dz + u_z dz = \frac{du_z}{dt} dz + \frac{d}{dz} \left(\frac{u_z^2}{2} \right) dz = \frac{du_z}{dt} dz + d \left(\frac{u_z^2}{2} \right) \end{cases} \quad (4-31c)$$

Nhớ lại phương trình vi phân chuyển động Euler trường hợp lực khối chịu tác dụng của trường thế :

$$\begin{cases} a_x = \frac{du_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \\ a_y = \frac{du_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ a_z = \frac{du_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad (B)$$

Đối chiếu (4-31c) với (B) thấy, nếu nhân lần lượt các thành phần gia tốc trong (B) với dx , dy và dz , ta sẽ được số hạng thứ nhất ở vế phải trong (4-31c). Bởi vậy có thể viết :

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} dx = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dx \\ \frac{du_y}{dt} dy = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial y} dy \\ \frac{du_z}{dt} dz = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial z} dz \end{cases} \quad (4-32)$$

và từ đây :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_x dx) = \frac{du_x}{dt} dx + d\left(\frac{u_x^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dx + d\left(\frac{u_x^2}{2}\right) \\ \frac{d}{dt}(u_y dy) = \frac{du_y}{dt} dy + d\left(\frac{u_y^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial y} dy + d\left(\frac{u_y^2}{2}\right) \\ \frac{d}{dt}(u_z dz) = \frac{du_z}{dt} dz + d\left(\frac{u_z^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial z} dz + d\left(\frac{u_z^2}{2}\right) \end{cases} \quad (4-33)$$

Cộng các vế tương ứng của (4-33) được :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u_x dx + u_y dy + u_z dz] &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) + d\left(\frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \Gamma(\bar{u}) = \Gamma(\bar{a}). \end{aligned} \quad (4-34a)$$

Nhận thấy ở vế phải hai số hạng cuối đều là vi phân toàn phần của U và bình phương vận tốc vì $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$. Nếu áp suất p , thậm chí cả p/ρ lại xuất xứ từ một thế nào đó thì vế phải là một thế tổng hợp và vì vậy từ (4-31b) có :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L \left[\left(-\frac{dp}{\rho} \right) + dU + d\left(\frac{u^2}{2} \right) \right] = \int_L d \left(\frac{-p}{\rho} + U + \frac{u^2}{2} \right) \quad (4-34b)$$

Các hệ thức (4-34) là dạng động học của định lí Thomson, cho thấy, đạo hàm theo thời gian của lưu số vận tốc trên đường viền khép kín L cùng chuyển động với các phần tử chất lỏng trong dòng chảy bằng tổng lưu số của (véctơ) gia tốc cũng tính trên đường viền đó.

Hàm dưới dấu tích phân của (4-34b) là một thế tổng hợp, do vậy khi tích phân trên một đường cong khép kín (như L chẳng hạn) phải bằng 0, suy ra Γ không đổi ($\Gamma = \text{const}$) theo thời gian. Đây là tính chất bảo toàn xoáy của dòng chảy ; là định lí thứ nhất của Helmholtz.

b) Các hệ quả của định lí Thomson

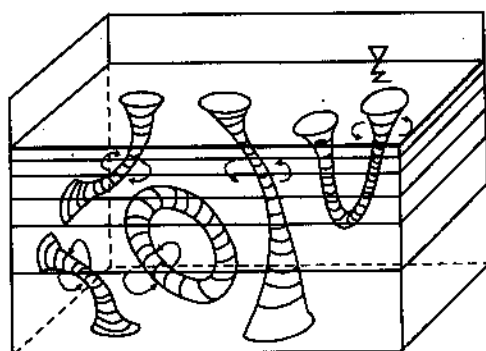
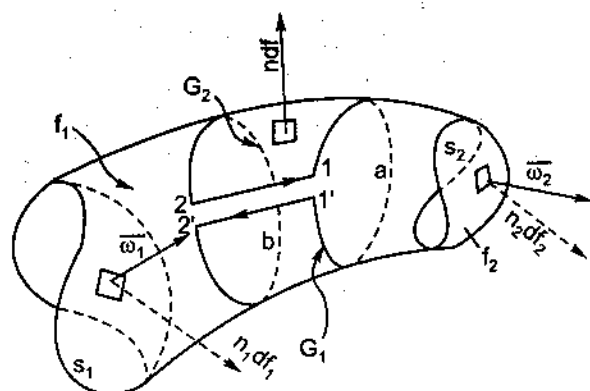
- Nếu dòng chảy ban đầu của chất lỏng không nhớt là không xoáy thì trong quá trình chuyển động dòng chảy sẽ không xoáy. Suy ra, một dòng chảy bắt nguồn từ khối chất lỏng nghỉ (tĩnh, nằm yên) luôn là dòng thế.

- Xoáy không thể kết thúc hay mất đi trong nội bộ chất lỏng mà chỉ có thể kết thúc ở mặt biên như mặt thoáng, mặt tiếp giáp với chất lỏng khác hoặc thành của bình chứa, nơi các phương trình mô tả nó không còn hiệu nghiệm ; hay hình thành các kiến tạo hình học không có điểm bắt đầu và không có điểm kết thúc – một hình cong khép kín, ví dụ như hình vành khăn. Xoáy không thể kết thúc trong một điểm vì như thế vận tốc sẽ tăng lên vô cùng. Điều này giải thích sức công phá cục bộ của xoáy lốc lớn hơn của bão.

- Trên bề mặt ống xoáy lưu số vận tốc trên đường khép kín bằng 0.

- Cường độ lúng suất của ống xoáy không đổi theo thời gian do lưu số vận tốc trên đường viền mặt cắt ống xoáy độc lập với thời gian.

Hình 4.25 minh họa các hệ quả trên.



Hình 4.25

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG IV

Bài 1. Khảo sát dòng chảy bao quanh góc lõm vuông có thể phức $f(z) = az^2$ với thông số $a = 1/s$. Hãy :

- Vẽ bức tranh dòng chảy ;
- Xác định lưu lượng chảy giữa tường cứng và đường dòng đi qua điểm $P(1 ; 1,5)$.
- Tính vận tốc và áp suất tại điểm này nếu áp suất cách rất xa gốc toạ độ là áp suất môi trường.

Giải :

Vẽ bức tranh dòng chảy. Theo (4-8b) và (4-8c) ta có thể vận tốc và hàm dòng

$$\varphi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy$$

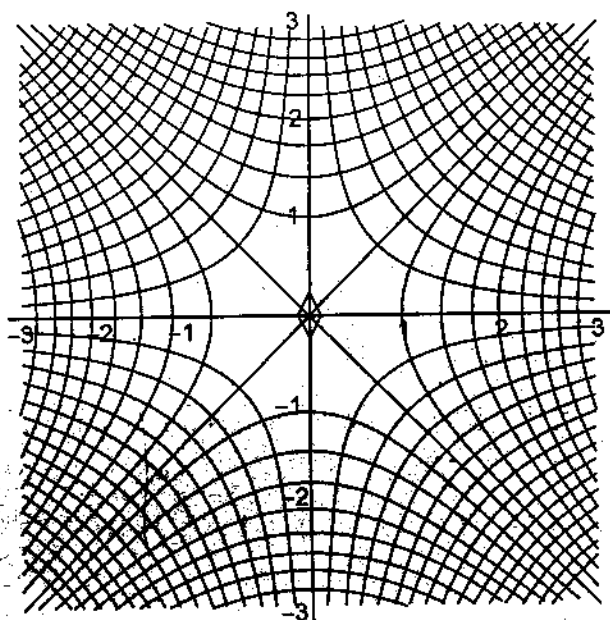
Với sự trợ giúp của máy tính bức tranh dòng chảy vẽ với :

$$\varphi = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10,$$

và :

$$\psi = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10.$$

Kết quả vẽ thể hiện trên hình 4.26.



Hình 4.26

Xác định lưu lượng

Biết rằng tường cứng – góc vuông ứng với đường dòng $\psi = 0$. Còn với đường dòng đi qua điểm $P(1; 1,5)$ ta sẽ vận dụng (4-18c) để tính như sau :

$$\psi = 2xy = 2 \times 1 \times 1,5 = 3 \text{ m}^2/\text{s}$$

Ta coi chiều dày của dòng chảy là 1 đơn vị chiều dài, ví dụ là 1m thì :

$$Q = 1\text{m} \times (\psi_3 - \psi_0) = 1\text{m} \times (3 \text{ m}^2/\text{s} - 0) = 3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Xác định vận tốc và áp suất

Dùng công thức (4-18d) ta có :

$$u_x = 2ax = 2x = 2 \text{ m/s} ; u_y = -2ay = -2y = -3 \text{ m/s}$$

$$u = \{u_x^2 + u_y^2\}^{1/2} = \{4 + 9\}^{1/2} = 3,6 \text{ m/s}.$$

Để tính áp suất ta viết phương trình Bernoulli cho đường dòng đang khảo sát giữa 2 điểm, một ở vô cùng và một tại P :

$$z_\infty + \frac{p_\infty}{\rho g} + \frac{v_\infty^2}{2g} = z_P + \frac{p_P}{\rho g} + \frac{v_P^2}{2g}$$

vì là dòng song phẳng nên $z_\infty = z_P$ và theo (4-8d) $v_\infty = \infty$ nên :

$$p_P = p_0 + \rho \frac{v_\infty^2 - v_P^2}{2} \rightarrow p_P = \infty$$

nghĩa là áp suất tại P hay tại bất kì một điểm nằm trong miền hữu hạn đều lớn vô cùng. Điều này có thể hiểu được vì đường như toàn bộ động năng của dòng chảy chuyển thành thế năng dạng áp suất (lò xo khí), áp năng. Đương nhiên đây là bài toán thuần túy lí thuyết, phục vụ cho việc nắm được lí thuyết, không tồn tại trong thực tiễn với vận tốc và áp suất lớn vô cùng.

Bài 2. Dòng chảy bao quanh trụ cố định có vận tốc tại rất xa gốc toạ độ :

$$u_\infty = u_x = 2 \text{ m/s}$$

và cường độ lưỡng cực $q_0 = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. Hãy :

- Vẽ bức tranh dòng chảy ;
- Xác định bán kính hình trụ được chảy bao và vận tốc cực đại trên mặt trụ ;
- Tính vận tốc và áp suất tại điểm $M(1,5; 2)$ nếu áp suất tại nơi rất xa gốc toạ độ $p_\infty = p_0 = 100000 \text{ N/m}^2$.

Giải :

Bức tranh dòng chảy

Với các dữ liệu trên ta có hàm thế và hàm dòng như sau :

$$\varphi = 2x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Từ (4-26a) :

$$\psi = 2y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Bằng sự trợ giúp của máy tính ta được kết quả trên hình 4.27.

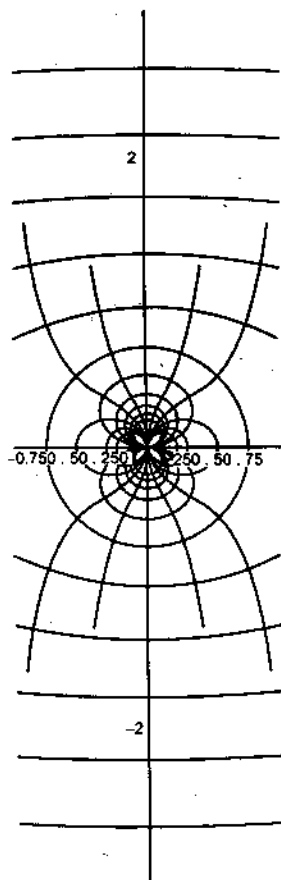
Tính bán kính trụ và vận tốc cực đại

Theo biểu thức (4-26d) bán kính trụ là :

$$R = \sqrt{\frac{q_0}{u_\infty}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707\text{m.}$$

Vận tốc cực đại trên mặt trụ tính theo công thức (4-26k)

$$u_{\max} = 2u_\infty = 2 \times 2 \text{ m/s} = 4 \text{ m/s.}$$



Hình 4.27

Tính vận tốc và áp suất tại M

Thay các trị số của q_0 và u_∞ vào biểu thức (4-26b) ta có :

$$u_x = u_\infty + q_0 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2 + 1 \times \frac{2^2 - 1,5^2}{(1,5^2 + 2^2)^2} = 2 + \frac{1,75}{42,25} = 2 + 0,041 = 2,041 \text{ m/s}$$

$$u_y = -2q_0 \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = -2 \times 1 \times \frac{1,5 \times 2}{(1,5^2 + 2^2)^2} = \frac{6}{42,25} = 0,142 \text{ m/s}$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2,041^2 + 0,142^2} = \sqrt{4,165681 + 0,020164} = 2,046 \text{ m/s.}$$

Biết được vận tốc, dựa vào phương trình Bernoulli ta xác định được áp suất tại M. Tương tự như bài toán trên ta có (tất cả quy ra m, N, kg và s) :

$$p_M = p_0 - \rho \frac{u^2 - u_\infty^2}{2} = 100000 - 1000 \frac{4,186116 - 4}{2} = 99907 \text{ N/m}^2 = 99 \text{ kN/m}^2 = 99 \text{ kPa}$$

Ta thấy tại điểm M xuất hiện chân không.

Điều cần lưu ý. Trong các đầu bài ở trên có mặt một số hằng số như hệ số a trong bài chảy bao góc lõm vuông (Bài 1), q_0 trong dòng chảy bao trụ đứng yên (Bài 2). Trên phương diện bài toán kĩ thuật cần làm rõ số đo của chúng. Vấn đề này sẽ được đề cập và làm rõ trong chương X nói về lí thuyết thứ nguyên và tương tự. Trước mắt, chỉ cần suy từ tính

đồng nhất số đo giữa các số hạng để có phương trình cân bằng rồi trên cơ sở đó suy từ số đo của các đại lượng đã biết. Ví dụ ta có :

$$u_x = 2ax.$$

Ở đây đã biết vận tốc u_x được đo bằng m/s và x được đo bằng m, thì với kí hiệu số đo hoặc thứ nguyên :

$$[u_x] = \text{m/s}$$

$$[x] = \text{m}$$

ta cân bằng phương trình thứ nguyên để có :

$$[2ax] = [u_x] \rightarrow [a] = [u_x]/[x] = \frac{\text{m/s}}{\text{m}} = \frac{1}{\text{s}}$$

với lưu ý là các giá trị bằng số là các đại lượng không có thứ nguyên.

Một ví dụ khác, tuy không gắn trực tiếp với ví dụ minh hoạ ở đây nhưng lại thường gặp và rất ấn tượng như trong hệ MKGS lực được đo bằng kG lực, gia tốc đo bằng m/s^2 nên lúc này khối lượng phải đo bằng đơn vị gì cho phù hợp ?

Bằng cách trên, xuất phát từ phương trình :

$$P = ma$$

ta có
$$[m] = [P]/[a] = \frac{\text{kG}}{\text{m/s}^2} = \frac{\text{kGs}^2}{\text{m}},$$

dạng thoạt nhìn không dễ nhận ra nó chính là kg (kilôgam khối lượng).

TỔNG KẾT CHƯƠNG IV

Chương này tập trung nghiên cứu các dòng có thể và dòng có xoáy theo nghĩa hẹp của cơ học (không theo nghĩa thông thường), xuất phát từ các điều kiện tồn tại của chúng được thể hiện bằng các biểu thức toán học chặt chẽ. Việc khảo sát sẽ trở nên dễ dàng hơn nếu áp lên dòng song phẳng thì về mặt toán học ta giới hạn bài toán trong không gian 2 chiều (x và y) mà không làm mất đi tính tổng quát và khái quát của nó. Ngược lại, còn có thể sử dụng được một công cụ hết sức hữu hiệu là phương pháp xử lí đối với một lớp hàm chính quy của các hàm biến phức để xây dựng hàm thế phức cho việc khảo sát dòng chảy thông qua hàm dòng và hàm thế mà ta đã hiểu rõ ý nghĩa vật lí của nó. Bằng một số kiến thức tối thiểu của số phức và hàm biến phức đã có thể bước đầu với tới một công cụ giúp ta dễ dàng hiểu được bản chất và cấu trúc của một số vấn đề thuỷ lực để lí giải một số khía cạnh thường gặp trong thực tiễn, chẳng hạn như vấn đề chảy bao và các hiệu ứng nảy sinh từ đó : hiệu ứng Magnus, lực nâng Giukôpxki. Ở đây còn ẩn chứa nhiều vấn đề thú vị, có thể trở thành những đề tài nghiên cứu phục vụ mục tiêu nâng cao chất lượng đào tạo.

Học xong chương này sinh viên phải nhanh chóng hình dung được bức tranh dòng chảy phức tạp hơn do sự xếp chồng, có chủ ý, các dòng chảy cơ bản : song song đều, tụ, nguồn, xoáy có thể, lưỡng cực,... Nắm được tiêu chuẩn Cauchy-Riemann như là tiêu chuẩn tồn tại dòng thế của chất lỏng lí tưởng không nén được trong thủy lực lại là tiêu chuẩn khả vi của một lớp hàm biến phức có thể dùng vào việc khảo sát dòng chảy trong thủy lực. Sinh viên được làm quen với khái niệm cũng như cách xác định lưu số vận tốc để hiểu được một số vấn đề trong đời sống kĩ thuật.

Cũng xuất phát từ định nghĩa của dòng xoáy cần nắm được các định luật về dòng xoáy mà trước hết là định luật / nguyên lí bảo toàn xoáy để có thể giải thích một số hiện tượng trong thiên nhiên một cách khoa học, có tính thuyết phục.

Chương V

SỨC CẢN THỦY LỰC

1. Những khái niệm chung về sức cản thủy lực

1.1. Các dạng sức cản thủy lực

Để xác định áp suất và vận tốc trung bình v tại các mặt cắt khác nhau ta dựa vào hai phương trình :

- Bảo toàn năng lượng cột áp toàn phần (phương trình Bernoulli) ;
- Bảo toàn khối lượng (phương trình lưu lượng không đổi – phương trình liên tục) :

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w = H = \text{const}$$

$$v\omega = Q = \text{const}$$

$$v\omega = Q = \text{Const}$$

Trong các bài toán cụ thể H và Q thường là các đại lượng biết trước tại một mặt cắt của dòng chảy. Do đó ở hai phương trình trên v , p và h_w là ẩn số, và như vậy để xác định được chúng, phải bổ sung thêm phương trình thứ 3 để hệ trở nên xác định. Đương nhiên phương trình này phải độc lập đối với hai phương trình đã có, nhưng phải là một sự mô tả mới của cùng dòng chảy đó, có thể chứng minh bằng lý thuyết hay bằng thực nghiệm, ví dụ như phương trình động lượng :

$$Qpv + \omega p = \text{const}$$

Nếu tổn thất cột áp h_w có thể bỏ qua, không cần phải thêm phương trình thứ 3 ta vẫn có thể biết được đầy đủ các thông số của dòng chảy.

Khi chất lỏng chảy trong ống, trong kênh, qua van khoá, tiết lưu hoặc các vật cản làm trị số hay hướng của vận tốc thay đổi đột ngột, tổn thất sẽ nảy sinh. Người ta chia tổn thất ra làm 2 loại :

- Tổn thất do ma sát chất lỏng gây nên được gọi là tổn thất ma sát hay tổn thất dọc đường ;
- Tổn thất do trạng thái dòng chảy (áp suất, vận tốc) thay đổi đột ngột là tổn thất cục bộ.

Như vậy : $h_w = h_{ms} + h_c$

Việc xác định tổn thất cột áp (cột chất lỏng / cột nước) của chất lỏng chuyển động là một trong những bài toán quan trọng nhất của bộ môn thủy lực.

1.2. Các biểu thức tổng quát xác định tổn thất cột áp của dòng chảy trong ống

Qua các kết quả thực nghiệm có thể nói tổn thất cột áp do ma sát của chất lỏng trong ống phụ thuộc vào các yếu tố sau :

- Đường kính ống d và chiều dài ống l ;
- Các tính chất vật lý (thuộc tính) của chất lỏng như mật độ ρ độ nhớt μ ;
- Vận tốc trung bình mặt cắt trong ống v ;
- Chiều cao trung bình của mố nhám k của thành ống tiếp xúc với chất lỏng.

Darcy và Weissbach (thế kỷ 19) trên cơ sở các kết quả thực nghiệm đã đề xuất công thức sau :

$$h_{ms} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (5-1)$$

trong đó : λ - hệ số ma sát, lượng không thứ nguyên ;

l - chiều dài ống ;

d - đường kính ống ;

v - vận tốc trung bình mặt cắt ;

g - gia tốc trọng trường.

Từ công thức này suy ra được quy luật phụ thuộc của h_{ms} vào các tham số còn lại (thuận nghịch, tuyến tính, số mũ - phi tuyến, ...). Cũng trong thế kỷ 19 bằng thực nghiệm Weissbach còn tìm ra quy luật phụ thuộc của tổn thất cục bộ :

$$h_c = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (5-2)$$

trong đó : ζ là hệ số tổn thất cục bộ, đại lượng không thứ nguyên. Người ta cũng có thể tìm được hệ số này bằng phương pháp cân bằng thứ nguyên (sẽ khảo sát trong chương X).

1.3. Chảy tầng và chảy rối của chất lỏng

Quan sát thực tế thấy rằng, trong thiên nhiên tồn tại hai trạng thái chuyển động khác nhau của chất lỏng :

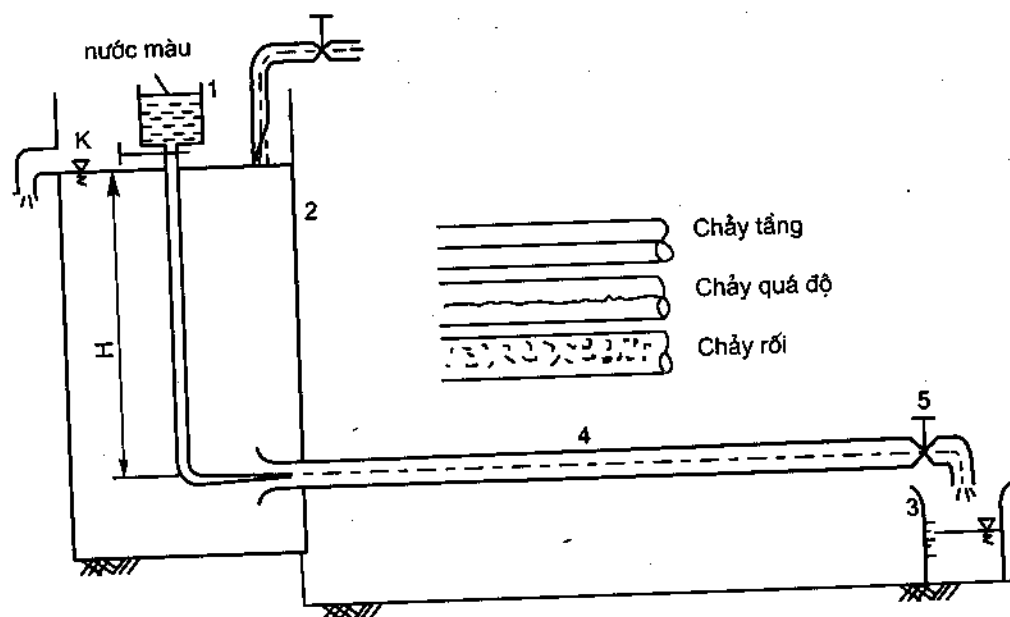
- Chuyển động theo lớp hay chảy tầng khi các lớp chất lỏng trượt trên nhau và không có sự xáo trộn trong khi chảy.

- Chuyển động hỗn loạn, xáo trộn, không trật tự và luôn thay đổi theo thời gian là chảy rối.

Trạng thái chảy tầng thường xảy ra ở ống nhỏ, song chất lỏng có độ nhớt cao vẫn có thể chảy tầng trong ống lớn với vận tốc trung bình đã cho. Nước và không khí, do có độ nhớt bé, đặc biệt là không khí, thường chuyển động trong trạng thái rối. Năm 1883 Reynolds, bác học Anh là người đầu tiên khẳng định điều này.

Thí nghiệm Reynolds (xem hình 5.1) : Một hình trụ 2 là bể chứa, có miệng tràn để giữ cho chiều cao cột nước H không đổi nhằm giữ cho dòng chảy qua vòi ổn định. Đường ống 4 là đường xả làm bằng vật liệu trong suốt với miệng vào (nối với bể) có bán kính lớn đủ lớn để không gây nhiễu động đối với dòng tại cửa vào. Một bình nước màu qua khoá thông với ống tiết diện nhỏ nối liền với kim phun đủ nhỏ để không gây nhiễu khi truyền nước màu đi vào dòng chảy chính (trong ống 4) đến miệng ra chảy vào một bình đóng có chia vạch.

Thao tác thí nghiệm : Mở từ từ khoá 5 để nước từ từ chảy vào ống 4 với vận tốc tăng dần theo mức độ điều tiết của khoá, đồng thời tiết lưu khoá K sao cho vận tốc nước màu ở đầu kim xấp xỉ bằng vận tốc nước tại trục ống của ống 4. Tiến hành đo lưu lượng bằng bình đong và đồng hồ bấm giây. Có thể nhận thấy, thoát đầu khi lưu lượng còn nhỏ, nghĩa là vận tốc trung bình còn nhỏ, dòng nước màu rất mảnh mịn và liên tục chảy qua ống trong suốt (chảy tầng). Sau đó tăng dần lưu lượng và đến một lúc nào đó dòng màu bắt đầu hoá thô, có xu hướng rã ra (chảy quá độ). Tiếp tục mở van 5 (đồng thời với K) dòng màu tan rã và khuếch tán mạnh, dòng chảy chuyển từ chảy tầng sang chảy rối.



Hình 5.1

1.4. Số Reynolds

Số Reynolds (ký hiệu Re) được định nghĩa bằng quan hệ sau :

$$Re = v \frac{d}{\nu} = \rho \frac{vd}{\mu} \quad (5-3)$$

trong đó : ν là độ nhớt động học và μ là độ nhớt động lực học, v là vận tốc trung bình và d là đường kính ống dẫn.

Trong thực tiễn chuyên môn ở (5-3) có thể dùng một đặc trưng chiều dài nào đó của ống dẫn (kênh dẫn), ví dụ như bán kính thủy lực R , chu vi ướt χ , độ nhám k , đường kính hạt trong dòng thấm,... thay cho d nhưng được quy ra tương đương (chẳng hạn trong ống tròn ta thay $d = 4R$ để có $Re = 4vR/\nu$).

Số Reynolds phân giới được coi là chuẩn quan trọng trong việc xem xét chế độ chảy của chuyển động chất lỏng và thường được sử dụng trong tính toán. Nó ứng với trạng thái bất

đầu phân rã của “sợi” nước màu trong thí nghiệm trên. Về trị số phân giới của số Reynolds người ta thường lấy như sau :

$$Re_{pg} = 2000 \quad (5-4)$$

Tuy nhiên, trong các ngành kỹ thuật, cơ khí thường dùng $Re_{pg} = 2300$.

Thực nghiệm cho thấy Re_{pg} (khi gradien vận tốc cùng chiều với dòng chảy) tăng trong ống côn và giảm trong ống loe. Trên thực tế người ta cũng đã đo được trị số Re_{pg} chừng 20000. Đồng thời cũng thấy, Re_{pg} do theo trình tự chuyển từ tầng sang rối không trùng với trị số thu được trong trình tự ngược lại. Tính chất này có nguyên nhân sâu xa là ảnh hưởng của quán tính của nhiều động. Thông thường :

$$Re_{pg(t-r)} > Re_{pg(r-t)}$$

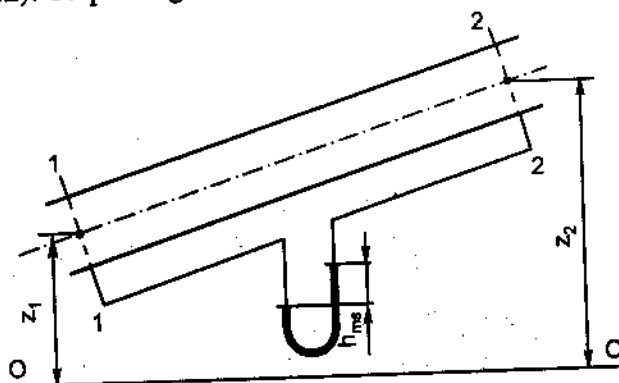
với chỉ số (t-r) chỉ “tầng sang rối” và (r-t) : “rối sang tầng”.

Khi có trị số phân giới của Re, ta xác định được vận tốc phân giới :

$$v_{pg} = \frac{Re_{pg} \nu}{d} \quad (5-5)$$

1.5. Các đặc điểm của dòng chảy tầng và dòng chảy rối trong ống dẫn

Như sẽ thấy, trong dòng chảy tầng **phân bố vận tốc trên mặt cắt** theo quy luật parabol, còn ở dòng rối, ngoài lớp mỏng sát vách ống (lớp biên) phân bố vận tốc đồng đều hơn, theo quy luật parabol bậc cao, phức tạp hơn so với dòng chảy trong lớp biên là chảy tầng. Có hiện tượng như vậy là do có hay không có sự trao đổi động lượng giữa các lớp chất lỏng chuyển động bên nhau. Sát thành rắn cường độ xáo trộn giảm do chất lỏng tương tác với vách cũng thông qua tính nhớt của chất lỏng. Để xác định tổn thất dọc đường ta đo độ chênh áp bằng 2 ống đo áp đặt tại 2 mặt cắt dòng chảy, một ở thượng lưu (mặt 1) và một ở hạ lưu (mặt 2) (hình 5.2). Từ phương trình Bernoulli viết cho dòng có tổn thất :



Hình 5.2

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_{ms}$$

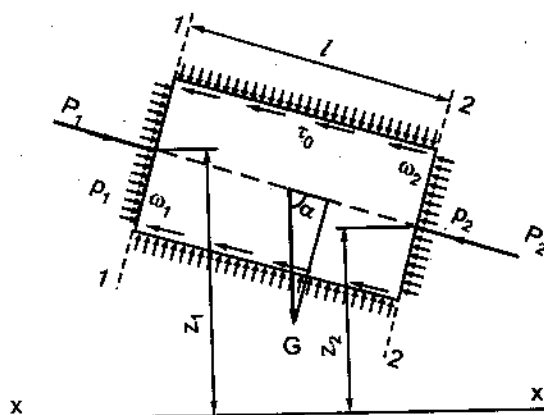
vì đường kính ống d không đổi nên $v_1 = v_2$. Từ đây

$$h_{ms} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = z_1 - z_2 + \frac{1}{\rho g} (p_1 - p_2)$$

Trong thực tế $h_{ms} = f(v)$ và ở nơi có vận tốc thấp quan hệ này là tuyến tính. Khi phát triển lên, vận tốc vượt qua ngưỡng nhất định nào đó, h_{ms} tăng đột biến và lấy dáng điệu của hàm mũ cao hơn. Giới hạn nhất định đó chính là phân giới chuyển từ tầng sang rối.

1.6. Biểu thức tổng quát xác định tổn thất cột áp do ma sát chất lỏng của dòng chảy trong ống

Ta xét dòng chuyển động đều và thẳng, nên hình dạng của mặt cắt ướt không biến đổi trên toàn bộ chiều dài dòng chảy. Trong điều kiện đó tổn thất cột áp chỉ là tổn thất theo chiều dài.



Hình 5.3

Lấy một đoạn dòng chảy có chiều dài là l và viết phương trình Bernoulli cho 2 mặt cắt 1 và 2 (xem hình 5.3)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{ms(1-2)}$$

trong đó : z_1, z_2 là tọa độ trọng tâm mặt cắt 1 và mặt cắt 2 ; p_1, p_2 cũng như v_1, v_2 lần lượt là áp suất và vận tốc dòng chảy ứng với tiết diện 1 và 2, và cuối cùng, $h_{ms(1-2)}$ là tổn thất cột áp trên đoạn l giữa 1 và 2 (thể hiện bằng chiều cao cột chất lỏng). Vì là chuyển động ổn định, đều nên $v_1 = v_2$ và :

$$h_{ms(1-2)} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) \quad (5-6)$$

Để tính được đại lượng này ta cần biết tổng số hình chiếu của các lực tác động lên đoạn l và chúng phải bằng không (0) do yêu cầu cân bằng lực, yếu tố đảm bảo để có quy luật chuyển động đều (ngược lại chuyển động sẽ có gia tốc). Các lực tác động ở đây là :

- 1) Lực trọng trường $G = \rho g \omega l$, trong đó $\omega = \omega_1 = \omega_2$ là diện tích mặt cắt ướt ;
- 2) Áp lực lên các mặt ω_1, ω_2 , và bằng $P_1 = p_1 \omega_1, P_2 = p_2 \omega_2$;
- 3) Lực ma sát $T = \tau_0 \chi l$, với τ_0 là ứng suất tiếp tại vách - ma sát trên một đơn vị diện tích mặt bên tiếp xúc với chất lỏng của lòng dẫn ; và χ là chu vi ướt ;
- 4) Áp lực lên lòng dẫn. Các lực này được bỏ qua vì chúng đối xứng và thẳng góc với chiều dòng chảy (trục ống dẫn) nên hình chiếu lên trục bằng không. Như vậy :

$$G \cos \alpha + P_1 - P_2 - T = 0$$

và theo hình 5.3 : $\cos \alpha = \frac{z_1 - z_2}{l}$

nên :

$$\rho g \omega l \frac{z_1 - z_2}{l} + p_1 \omega - p_2 \omega - \tau_0 \chi l = 0$$

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{\tau_0 \chi l}{\rho g \omega} \quad (5-7a)$$

so sánh (5-6) với (5-7a) ta có : $h_{ms(1-2)} = \frac{\tau_0 \chi l}{\rho g \omega}$ (5-7b)

do đó :

$$\frac{\omega}{\chi} \frac{h_{ms(1-2)}}{l} = \frac{\tau_0}{\rho g}$$

Theo định nghĩa của chu vi ướt : $R = \frac{\omega}{\chi}$ và độ dốc thủy lực $J = \frac{h}{l}$ thì từ (5-7b) có thể viết :

$$\frac{\tau_0}{\rho g} = RJ \quad (5-8a)$$

là phương trình cơ bản của chuyển động đều. Nếu nhân cả 2 vế của (5-8a) với g , được kết quả :

$$\tau_0 / \rho = gRJ \quad (5-8b)$$

Vế phải của phương trình (5-8b) có thứ nguyên là bình phương vận tốc. Đại lượng $(gRJ)^{0.5}$ gọi là vận tốc động lực và được ký hiệu là u_* tức là :

$$u_* = (\tau_0 / \rho)^{0.5} \quad (5-9)$$

2. Chảy tầng đều của chất lỏng trong ống

2.1. Phân bố vận tốc trên mặt cắt của ống tròn

Xét dòng ổn định đều, chảy tầng trong ống tròn khi đã xác lập, tức là tại mặt cắt thượng nguồn (mặt cắt 1) cách miệng vào một đoạn đủ lớn (khoảng 3÷8d) để đảm bảo cho sự phân bố vận tốc trên mặt cắt là ổn định. Ứng với tính chất của dòng chảy tầng, khi các lớp chất lỏng trượt trên nhau, lực ma sát được xác định theo Newton :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

trong đó : u là vận tốc cục bộ (chứ không phải là vận tốc trung bình v).

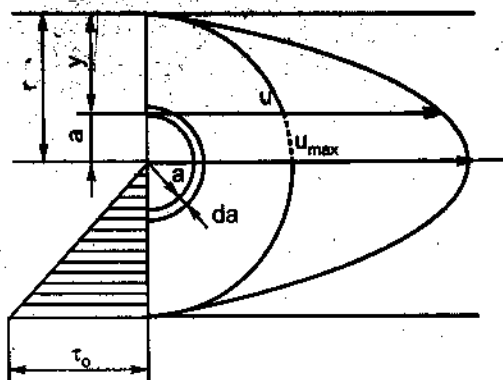
Mặt khác, ta lại có :

$$\tau = \frac{1}{2} \rho g J (r - y).$$

Từ hai biểu thức trên của τ , ta có :

$$du = \frac{\tau}{\mu} dy = \frac{\rho g J (r - y)}{2\mu} dy$$

Tích phân cả hai vế, được :



Hình 5.4

$$u = \frac{\rho g J}{2\mu} \left(ry - \frac{y^2}{2} \right) + C$$

Để dàng nhận thấy, khi $y = 0$, $u = 0$ và khi $y = r$, $u = u_{\max}$, từ đó suy ra $C = 0$ nên :

$$u = \frac{\rho g J}{4\mu} (2ry - y^2)$$

Với $a = r - y$ là khoảng cách từ đường tâm ống đến lớp chất lỏng đang xét thì :

$$u = \frac{\rho g J}{4\mu} (r^2 - a^2) \quad (5-10)$$

Người ta gọi hệ thức này là định luật Stokes, mô tả quy luật biến thiên vận tốc trên mặt cắt ống theo khoảng cách từ điểm đang xét đến trục ống và đây là phân bố parabol (bậc 2).

Tại thành ống ($y = 0$), vận tốc bằng không và tại đường tâm ống ($y = r$) vận tốc đạt giá trị cực đại :

$$u_{\max} = \frac{\rho g J}{4\mu} r^2 \quad (5-11)$$

Tỷ số giữa vận tốc (cục bộ) đang xét và vận tốc cực đại :

$$\frac{u}{u_{\max}} = \frac{\frac{\rho g J}{4\mu} (2ry - y^2)}{\frac{\rho g J}{4\mu} r^2} = \frac{2ry - y^2}{r^2} = \frac{y}{r} \left(2 - \frac{y}{r} \right) \quad (5-12)$$

Đây là dạng không thứ nguyên của quy luật phân bố vận tốc với vế phải chứa biến không thứ nguyên y/r , không phụ thuộc vào lưu lượng, vào loại chất lỏng, vào chất lượng bề mặt của thành ống (độ nhám k).

Để tính vận tốc trung bình trước hết hãy tính lưu lượng ống theo phân bố vận tốc ở trên :

$$Q = \int_0^r u \times 2\pi a da$$

Sử dụng (5-10) vào tích phân trên, được :

$$Q = \frac{\rho g J \pi}{2\mu} \int_0^r (r^2 - a^2) da = \frac{\rho g J \pi}{2\mu} \left[\int_0^r r^2 da - \int_0^r a^3 da \right] = \frac{\rho g J \pi}{2\mu} \left\{ \left[\frac{r^2 a^2}{2} \right]_0^r - \left[\frac{a^4}{4} \right]_0^r \right\} \quad (5-13a)$$

$$Q = \frac{\pi}{8} \rho g \frac{J}{\mu} r^4.$$

Từ đây có vận tốc trung bình

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\pi \rho g J r^4}{8\pi \mu r^2} = \frac{\rho g J}{8\mu} r^2. \quad (5-13b)$$

So sánh với biểu thức $u_{\max}$ ta thấy trường hợp chảy tầng trong ống tròn $v = 0,5 u_{\max}$.

Bây giờ hãy xác định hệ số Coriolis. Theo biểu thức định nghĩa :

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega} \quad (5-14)$$

Theo các ký hiệu ở hình 5.4, $d\omega = 2\pi a da$ nên :

$$\alpha = \frac{\int \left[\frac{\rho g J}{4\mu} (r^2 - a^2) \right]^3 2\pi a da}{\left(\frac{\rho g J r^2}{8\mu} \right)^3 \pi r^2} = \frac{2\pi \left(\frac{\rho g J}{4\mu} \right)^3 \int (r^2 - a^2)^3 a da}{\left(\frac{\rho g J}{2 \times 4\mu} \right)^3 (r^2)^3 \pi r^2} = \frac{2 \int (r^2 - a^2)^3 a da}{\frac{1}{8} r^8}$$

Để gọn, thế $A = (r^2 - a^2)$; $da = -dA/(2a)$

$$\alpha = \frac{-8 \int A^3 dA}{r^8} = \frac{8}{r^8} \left[\frac{A^4}{4} \right]_0^r = -\frac{8}{r^8} \left[0 - \frac{1}{4} (r^2)^4 \right] = 2$$

$$\alpha = 2.$$

Như vậy, *động năng của dòng chảy tầng tính theo vận tốc cục bộ lớn gấp 2 lần tính theo vận tốc trung bình.*

2.2. Tổn thất cột áp do ma sát trong dòng chảy tầng đối với ống tròn

Từ công thức của vận tốc trung bình (5-13b) ta có độ dốc thủy lực :

$$J = \frac{8\mu v}{\rho g r^2} = \frac{32\mu v}{\rho g d^2} \quad (5-15)$$

và tổn thất do ma sát :

$$h_{ms} = J l \Rightarrow h_{ms} = \frac{32\mu v l}{\rho g d^2} = \frac{32\nu v l}{g d^2} \quad (5-16)$$

Ta thấy tổn thất này tỷ lệ thuận tuyến tính với vận tốc trung bình, với độ dài của ống, với độ nhớt động học và tỷ lệ nghịch với bình phương đường kính ống (hay nghịch bậc nhất với tiết diện ống), độc lập đối với độ nhám của thành ống. Có thể giải thích như sau : lớp chảy tầng sát thành ống trùm kín các mố nhám tạo nên một hiệu ứng giống nhau ở các ống có độ nhám khác nhau.

Nếu so sánh biểu thức tổn thất (5-16) với công thức tính của Darcy - Weissbach (5-1) :

$$h_{ms} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{32\nu v l}{g d^2}$$

ta thấy hệ số ma sát của chất lỏng xác định bằng giải tích là :

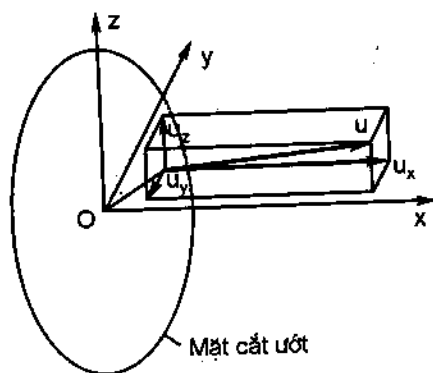
$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (5-17)$$

nó tỷ lệ nghịch bậc nhất với số Reynolds. Công thức (5-16) và (5-17) là cơ sở để xác định độ nhớt của chất lỏng nhờ nhớt kế.

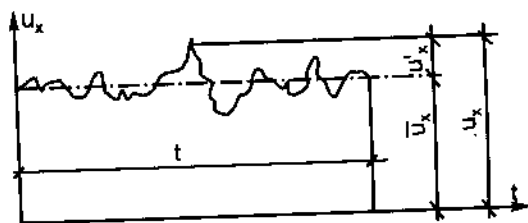
3. Chuyển động rối, đều của chất lỏng

3.1. Khái niệm chung

Chuyển động rối của chất lỏng trong ống dẫn cũng như trong kênh từ lâu đã được nhiều người quan tâm, vì trong thực tiễn chuyển động rối vẫn là chủ đạo. Song, cho đến nay có thể nói, chưa có một lý thuyết chặt chẽ về mặt toán học bao trùm lên toàn bộ vấn đề. Điều đó nói lên tính phức tạp của dòng rối khiến cho không có mô hình chính xác nào.



Vận tốc mạch động thành phần trong dòng rối



Hình 5.5

Như đã biết, về lý thuyết và trong thí nghiệm Reynolds khi vận tốc trung bình mặt cắt vượt qua ngưỡng nào đấy (giá trị phân giới), dòng chảy của chất lỏng ở khu vực sát vách ống phát sinh nhiễu động dưới dạng các xoáy có kích thước và tần số khác nhau. Các xoáy này tách khỏi thành rắn đi sâu vào các lớp bên trong dòng chất lỏng, phá huỷ trật tự của các lớp chất lỏng đang chuyển động hình thành trước đó bằng động năng của mình, gây nên xáo trộn nội bộ chất lỏng. Sau khi truyền động năng cho các phần tử khác nội năng của nó giảm dần...

Trên quan điểm vi mô, rối và xoáy làm cho vận tốc cục bộ thay đổi theo thời gian, cả về phương lẫn trị số tuyệt đối. Vì thế trong dòng rối chuyển động ổn định về thực chất là không tồn tại, ngay cả khi lưu lượng là ổn định. Hiện tượng mạch động liên tiếp xảy ra đối với các phần tử chất lỏng. Hình 5.5 mô tả biến thiên theo thời gian của thành phần mạch động phương x: $u_x = u'_x + \bar{u}_x$ với u'_x là tức thời cục bộ, $\bar{u}_x$ là trung bình thời gian.

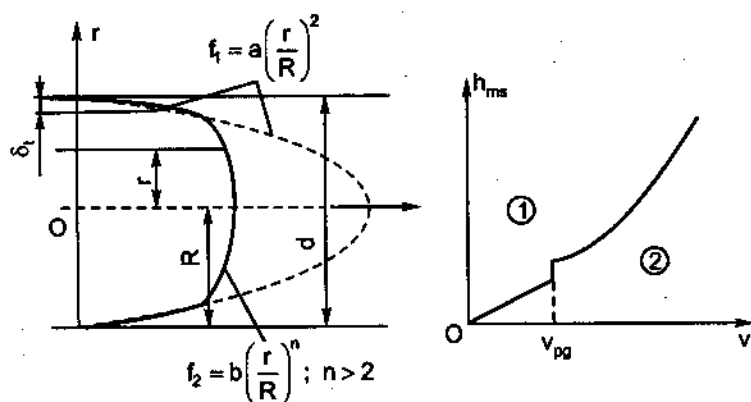
$$\bar{u}_x = \frac{1}{t} \int_0^t u_x dt$$

trong đó: t là thời đoạn dùng để tính giá trị trung bình.

3.2. Khái niệm về lớp biên chảy tầng và lõi rối

Kết quả nghiên cứu lý thuyết cũng như thực nghiệm cho thấy, trong ống dẫn hay kênh dẫn một lớp mỏng chất lỏng có xu thế chảy thành lớp, ranh giới của nó cũng khó xác định

chính xác. Như vậy, trong dòng rối không phải mọi phần tử chất lỏng tham gia chuyển động đều chuyển động rối. Ngoài lớp biên chảy tầng, phần còn lại chảy rối được gọi là lõi rối (hình 5.6).



Hình 5.6

Giả thiết rằng, trong lớp biên chảy tầng phân bố vận tốc là tuyến tính :

$$\frac{u_t}{\delta_t} = \frac{du}{dy} \quad (5-18)$$

trong đó : y là khoảng cách của điểm đang xét đến vách ống (thành kênh),

u_t là vận tốc tại toạ độ $y = \delta_t$.

Từ công thức thể hiện quy luật phân bố ứng suất tiếp và các kết quả thí nghiệm của Nikuradse ta có chiều dày lớp biên :

$$\delta_t = \frac{11,6v}{u_*}$$

trong đó : u_* là vận tốc động lực, tính theo công thức (5-9).

Cũng có thể xác định chiều dày lớp biên từ phương trình cơ bản của dòng chảy đều và công thức Darcy để được :

$$\delta_t = \frac{32,8d}{Re\sqrt{\lambda}} \quad (5-21)$$

Để có thể lường tượng được độ lớn của chiều dày lớp biên, hãy khảo sát trường hợp chảy trong ống có vận tốc trung bình $v = 1\text{m/s}$, hệ số ma sát $\lambda = 0,02$; độ nhớt động học $\nu = 0,0101\text{ cm}^2/\text{s}$; đường kính ống $d = 1\text{cm}$.

Từ các dữ liệu trên :

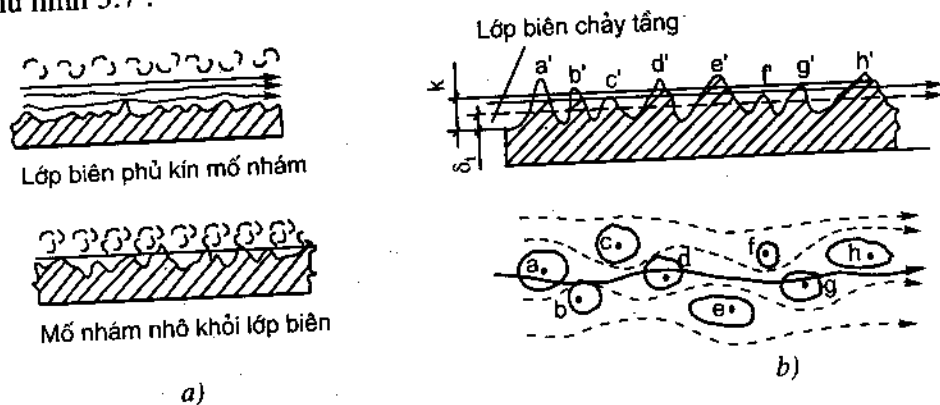
$$Re = \frac{1\text{m/s} \times 0,01\text{m}}{0,0101 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}} \approx 10^4$$

Áp dụng công thức (5-21) :

$$\delta_t = \frac{32,8 \times 0,01}{10^4 \times \sqrt{0,02}} = 10^{-2} \cdot 0,02319 \text{ m} \approx 0,023 \text{ cm} = 0,23 \text{ mm} = 230 \mu\text{m},$$

cỡ 1 phần 40 lần đường kính. Như vậy lớp biên chảy tầng rất mỏng.

Dựa vào các kết quả trên có thể nói, lớp biên càng mỏng/nhỏ, nếu độ rối (tức Re) càng lớn. Vì thế có sự tương quan giữa chiều dày lớp biên chảy tầng với độ nhám tuyệt đối k. Cụ thể như hình 5.7 :



Hình 5.7

a) Khi $\delta_t > k$, lớp biên chảy tầng phủ kín các mấu nhám của thành ống, dòng chảy rối không có tác động qua lại với thành ống (vì không tiếp xúc với thành ống) và dòng chất lỏng chính chảy dọc (trượt) theo lớp biên chảy tầng. Tổn thất cột áp do ma sát không phụ thuộc vào độ nhám của thành ống. Người ta nói thành ống trong trường hợp này là **thành trơn thủy lực** (xem hình 5.7a).

b) Khi $\delta_t < k$, ở sát vách ống chất lỏng của dòng chính phải uốn lượn để tránh các trường ngại là các mấu nhám, làm cho phần tử chất lỏng dễ bị kích động gây ra xoáy. Đây là trường hợp **thành nhám thủy lực** (xem hình 5.7b).

Rõ ràng, tổn thất dọc đường ở dòng rối phụ thuộc vào chất lượng của thành ống. Khái niệm thành trơn hay thành nhám thủy lực là khái niệm tương đối, bởi nó phụ thuộc vào số Reynolds. Vì vậy, cùng một ống dẫn ở điều kiện này là trơn thủy lực, trong điều kiện khác lại trở thành nhám thủy lực.

Người ta gọi ống nhám hoàn toàn khi sức cản chỉ phụ thuộc vào tỷ số k/d .

3.3. Các kết quả thực nghiệm

Đô thị Nikuradse (hình 5.8). Hai vấn đề cơ bản được quan tâm trong khảo sát dòng rối chuyển động trong ống là :

- Tổn thất cột áp,
- Phân bố vận tốc trên mặt cắt ướt.

Kết quả thí nghiệm cũng cho thấy, quy luật phân bố vận tốc, tổn thất cột áp có thể phụ thuộc rất nhiều vào đường kính ống, vào vận tốc chuyển động, vào độ nhớt của chất lỏng cũng như vào độ nhám của thành ống.

Độ nhám của thành ống được xác định bởi nhiều yếu tố : vật liệu thành ống, chất lượng gia công cơ học mặt ướt của vách – tức là chiều cao mố nhám, hình dạng, mật độ và sự phân bố các mố nhám đó trên bề mặt thành ống ; trên bề mặt đó có bị ăn mòn, gỉ sét, đóng bám cặn không, có lớp bảo vệ không, ...

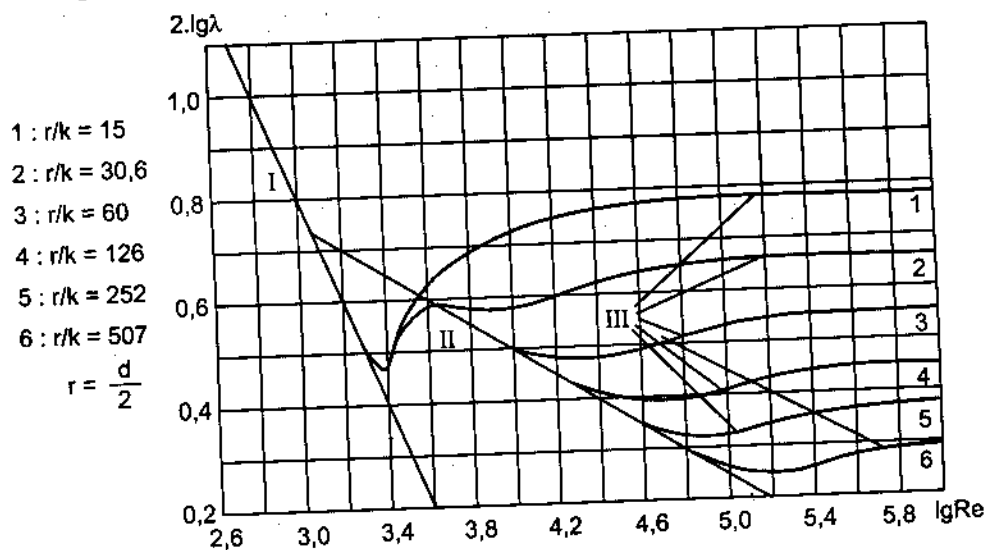
Trong đánh giá gần đúng, người ta dùng khái niệm chiều cao trung bình của các mố nhám. Chiều cao này được đo bằng đơn vị chiều dài và được gọi là **độ nhám tuyệt đối k**.

Kinh nghiệm cũng còn cho thấy, cùng một độ nhám tuyệt đối, tổn thất tăng nếu đường kính ống giảm. Vì vậy, ta sử dụng khái niệm **độ nhám tương đối**, một đại lượng không thứ nguyên k/d.

Hệ số ma sát thủy lực λ trong công thức Darcy-Weissbach phụ thuộc vào 2 thông số không thứ nguyên là số Reynolds và độ nhám tương đối, tức là :

$$\lambda = f(\text{Re}, k/d)$$

Nikuradse là người đầu tiên (năm 1933) đưa ra đồ thị mô tả quan hệ giữa hệ số ma sát và số Reynolds với thông số k/d cho ống tròn bằng đồng thau có độ nhám nhân tạo dùng cát thạch anh. Ông đưa kết quả này lên thang lôga như trên hình 5.8.



Hình 5.8

Phân tích đồ thị này thấy

+ Trong trạng thái chảy tầng ($\text{Re} < 2000$ hay $\lg \text{Re} < 3,3$) tất cả các kết quả thí nghiệm không phụ thuộc vào độ nhám thành ống, đều bám trên đường thẳng I, biểu thị trạng thái chảy tầng, theo quy luật :

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (5-22)$$

+ Trong dòng chảy quá độ từ tầng sang rối ($\text{Re} \geq 2000$, $\lg \text{Re} \geq 3,3$) đến một đoạn nào đó các kết quả bám vào đường II.

+ Khi chảy rối mạnh hệ số ma sát λ ứng với thông số k/d bất kỳ không còn thay đổi nữa, trở thành đường nằm ngang (song song với trục $\lg Re$) nghĩa là không còn phụ thuộc vào số Reynolds nữa.

Ứng với đường I có ống trơn thủy lực. Các đường nằm ngang trong vùng III biểu thị ống nhám thủy lực (hoàn toàn). Vùng này có tên là khu vực bình phương sức cản vì tổn thất cột áp lúc này tỷ lệ với bình phương vận tốc.

Đồ thị Nikuradse cũng khẳng định tính “trơn hay nhám” của một ống dẫn chỉ là tương đối, có điều kiện.

Trên đồ thị này ta còn thấy một vùng quá độ (ứng với vùng giữa I và III). Tại đây hệ số ma sát λ phụ thuộc vào cả Re và k/d với mức độ khác nhau.

Trên cơ sở các kết quả thí nghiệm của Nikuradse nhiều nhà nghiên cứu khác về sức cản thủy lực đường ống đã cho rất nhiều công thức thực nghiệm để xác định hệ số ma sát thủy lực :

- Đối với ống trơn thủy lực công thức Blazius :

$$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} \quad (5-23)$$

được dùng nhiều nhất.

- Đối với ống nhám hoàn toàn có công thức Sifrinson :

$$\lambda = 0,11 \sqrt[4]{k/d} \quad (5-24)$$

Trong thực tiễn kỹ thuật khi dùng đồ thị Nikuradse ta cũng gặp không ít khó khăn do phải dùng các vật liệu khác nhau tạo nên các kiểu mố nhám không giống nhau. Người ta đưa ra khái niệm **độ nhám tương đương hạt đều k_{td}** . Để xác định độ nhám này không thể dùng phương pháp đo kích thước của các hạt mố nhám của các ống có vật liệu khác nhau mà phải trực tiếp bằng thử nghiệm thủy lực.

Về kết quả khảo sát quy luật phân bố vận tốc trong dòng chảy rối, người ta đưa ra một số công thức thực nghiệm. Trong số đó được dùng phổ biến nhất là công thức số mũ :

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r} \right)^n \quad (5-25)$$

trong đó : u là vận tốc tại điểm cách thành ống một khoảng cách y ,

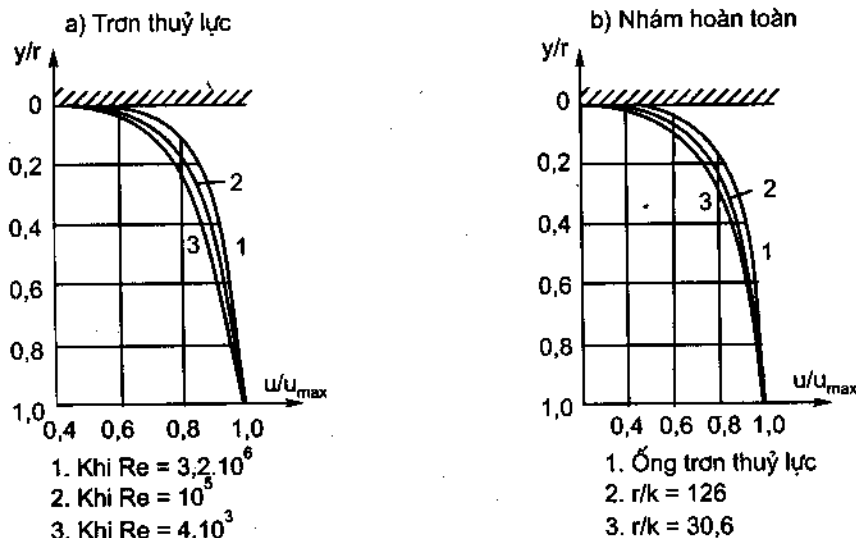
$u_{\max}$ là vận tốc lớn nhất (tại trục ống),

r là bán kính ống dẫn,

n là số mũ lũy thừa phụ thuộc vào Re ở khu vực thành trơn thủy lực và vào độ nhám tương đối k/d ở khu vực thành nhám hoàn toàn.

Hình 5.9 là biểu đồ phân bố vận tốc trong ống tròn.

Biểu đồ phân bố vận tốc trong ống tròn



Hình 5.9

3.4. Ứng suất tiếp trong dòng rối

Như sẽ thấy, cũng chỉ thông qua ứng suất tiếp mới giảm được khó khăn khi nghiên cứu dòng rối, vì những phức tạp về cấu trúc và cơ chế phát sinh nó. Sau đây ta xác định ứng suất tiếp trong dòng rối.

Giả thiết chất lỏng trượt trên nhau với vận tốc u_x , trong đó $u_1 > u_2$ (xem hình 5.10). Hãy ký hiệu u'_y là vận tốc mạch động ngang (tức là trực giao với chiều chảy) của chuyển động tạo nên sự trao đổi khối lượng, nhờ đó : động lượng giữa các lớp chất lỏng. Qua một diện tích $\Delta\omega$ trong một đơn vị thời gian khối lượng chất lỏng di chuyển từ lớp 1 đến lớp 2 là :

$$\rho u'_y \Delta\omega$$

Khối chất lỏng này truyền cho lớp 2 một động lượng :

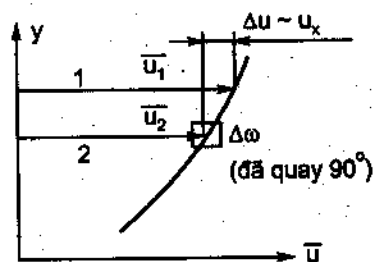
$$\rho u'_y \Delta\omega u'_x$$

Kết quả là lớp 2 được tiếp thêm năng lượng, do đó chuyển động nhanh lên. Điều đó, theo nguyên lý D'Alambert, tương đương với một lực ngược với chiều dòng chảy đó của lớp 1 tác động lên lớp 2 :

$$-\tau'_{yx} \Delta\omega = \rho u'_y \Delta\omega u'_x$$

Như vậy với ứng suất tiếp ta có :

$$\tau'_{yx} = -\rho u'_x u'_y$$



Hình 5.10

Biểu thức này xác định trị số tức thời của ứng suất tiếp tại vị trí xáo trộn rối được tính theo hệ thức của Reynolds đưa ra năm 1883 :

$$\tau_r = \overline{\rho u'_x u'_y} \quad (5-26)$$

đây là thành phần do tính rối gây nên (dấu gạch trên chỉ tính chất trung bình thời gian). Vì vậy, trong ứng suất tiếp tổng τ vẫn còn thành phần do tính nhớt của chất lỏng, cho nên :

$$\tau = \tau_{nh} + \tau_r = \mu \frac{du}{dy} + \overline{\rho u'_x u'_y} \quad (5-27)$$

Xác định cụ thể ứng suất tiếp này không đơn giản, còn do tính ngẫu nhiên của dòng rối. Người ta sử dụng nhiều phương pháp, song phổ biến nhất vẫn là phương pháp vật lý thống kê, rối thống kê. Như vậy, ở đây phương pháp giải tích còn nhiều vấn đề bỏ ngỏ. Kết hợp lý thuyết với thực nghiệm là cách đem lại hiệu quả hơn cả.

3.5. Lý thuyết nửa thực nghiệm về dòng rối

Boussinesq đã đề nghị một cách biểu diễn ứng suất tiếp rối có dạng tương tự như của Newton đề xuất ở dòng chảy tầng :

$$\tau_r = A \frac{du_x}{dy} \quad (5-28)$$

trong đó : A là độ nhớt rối (hệ số trao đổi rối) có thứ nguyên như độ nhớt động lực μ nhưng khác về bản chất vật lý. Nó không phải là thuộc tính riêng của chất lỏng mà phụ thuộc vào cường độ trao đổi rối, "độ nhớt" này thay đổi theo vận tốc và khoảng cách đến vách ống của điểm đang xét. Từ (5-27) và (5-28) có thể viết :

$$\tau = \tau_{nh} + \tau_r = \mu \frac{du_x}{dy} + A \frac{du_x}{dy} = (\mu + A) \frac{du_x}{dy} \quad (5-29)$$

Đến nay có một số lý thuyết nửa thực nghiệm dựa trên các biểu thức khác nhau của đại lượng A . Ở đây ta quan tâm đến lý thuyết của Altsul (1953) như sau :

Chia (5-29) cho mật độ chất lỏng :

$$\frac{\tau}{\rho} = (v + \psi) \frac{du}{dy} \quad (5-30)$$

trong đó : $\psi = A/\rho$ gọi là độ nhớt rối động học,

v là độ nhớt động phân tử, độ nhớt động học.

Tại vùng sát thành ống có thể xem $\tau = \tau_0$. Do đó, theo (5-9), (5-30) được viết thành :

$$u_*^2 = (v + \psi) \frac{du}{dy}$$

Để tiếp tục, phải xác định cho được sự phân bố của độ nhớt rối động học ψ .

Trên cơ sở các kết quả thí nghiệm, để tính gần đúng, tại khu vực gần thành ống (vách kênh) có thể lấy :

$$\psi = \chi u_* y \quad (5-31)$$

với χ là hằng số rối thứ nhất.

Biểu thức (5-31) có thể tìm được bằng phương pháp cân bằng thứ nguyên và lý thuyết truyền động lượng của Prandtl. Sử dụng (5-31) vào (5-30), được :

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu(1 + \chi u_* y / \nu)} \Rightarrow \int du = \int \frac{u_*^2}{\nu(1 + \chi u_* y / \nu)} dy$$

Thay biến $Y = 1 + \chi u_* y / \nu \rightarrow dy = dY \nu / (\chi u_*)$ và tích phân 2 vế, được kết quả :

$$u = \int \frac{u_*}{\chi} \frac{dY}{Y} = \frac{u_*}{\chi} \ln Y + \text{Const}$$

Trở lại với biến cũ được :

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \left(1 + \frac{\chi u_* y}{\nu} \right) + \chi \quad (5-32)$$

Tức là quy luật phân bố vận tốc của dòng rối trong ống là quy luật lôga. Phân tích (5-32) ta thấy khi $\chi u_* y / \nu \gg 1$, hoặc $(\chi u_* y / \nu) / (y/r) \gg 1$ tức là khi số Re lớn và ở cách xa thành rắn ta có :

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{\chi u_* y} = \frac{u_*}{\chi y} \quad (5-33a)$$

(vì đại lượng $u_* r / \nu$ liên quan đến số Reynolds).

Trong trường hợp $\chi u_* y / \nu \ll 1$:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu} \quad (5-33b)$$

tức là đi đến công thức viết cho gradien vận tốc của dòng chảy tầng.

Vận tốc ở vị trí chiều cao trung bình của mỗi nhám k được xác định từ biểu thức

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\chi} \ln \left(\frac{1 + \chi u_* k}{1 + \chi u_* k / \nu} \right) + \beta \quad (5-34)$$

trong đó : β là hằng số thứ 2 của dòng rối. Theo Prandtl, vận tốc cục bộ tại đỉnh mỗi nhám u_k chỉ phụ thuộc vào ứng suất tiếp tại vách τ_0 và được đưa vào biểu thức $u_k / u_* = \beta$. Sau khi thay thế $\chi = 0,4$ và $\beta = 7,8$ từ các kết quả thí nghiệm, công thức (5-34), viết với log cơ số 10, có dạng :

$$\frac{u}{u_*} = 7,8 + 5,75 \lg \left(\frac{1 + 0,4 u_* y / \nu}{1 + 0,4 k / \nu} \right) \quad (5-35)$$

Với Re lớn, $u_* y / \nu \gg 1$ và biểu thức (5-35) được viết gọn dưới dạng :

$$\frac{u}{u_*} = 7,8 - 5,75 \lg \left(\frac{2,5 \nu}{u_* y} + \frac{k}{y} \right) \quad (5-36)$$

Chú ý : Công thức (5-36) đã xét đồng thời ảnh hưởng của độ nhớt và độ nhám đến sự phân bố vận tốc trong dòng rối. Các kết quả thực nghiệm cho thấy công thức (5-36) dùng cho tất cả các khu vực của dòng rối trong ống, tức là cho cả trơn thủy lực hay nhám hoàn toàn cũng như cho khu vực quá độ từ trơn sang nhám.

Từ (5-36) có thể viết được biểu thức cho vận tốc trung bình :

$$\frac{v}{u_*} = 7,8 - 5,75 \lg \left(\frac{2,5v}{u_* y_{tb}} + \frac{k}{y_{tb}} \right) \quad (5-37)$$

trong đó : y_{tb} là toạ độ của điểm có vận tốc cục bộ bằng vận tốc trung bình, nói cách khác, là khoảng cách từ thành ống đến lớp chất lỏng chuyển động với vận tốc trung bình mặt cắt.

Tỷ số giữa y_{tb} và bán kính ống r được xác định bằng lý thuyết và thực nghiệm và cho kết quả sau

$$\frac{y_{tb}}{r} = 0,223 \quad (5-38)$$

Biểu thức (5-38) có thể dùng để xác định lưu lượng chất lỏng trong ống bằng cách đặt dụng cụ đo tại vị trí có vận tốc trung bình để đo vận tốc trung bình rồi đem nhân với mặt cắt ướt của ống, với sai số không quá 2%.

Với vận tốc động lực $u_* = \sqrt{gRJ} = \sqrt{\tau/\rho}$ từ (5-38) và (5-39) có :

$$\frac{u}{u_*} = 2,83 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \lg \frac{r}{4,5y} \right) \quad (5-39)$$

Khi $y = r$ vận tốc đạt giá trị cực đại :

$$\frac{u_{\max}}{u_*} = 2,83 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2 \lg 4,5 \right) \quad (5-40a)$$

Chia (5-39) cho (5-40) có thể tính được $u/u_{\max}$:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{2 \lg(r/y)}{\frac{0,975}{\sqrt{\lambda}} + 1,35} \quad (5-40b)$$

Ta thấy, phân bố vận tốc trong dòng rối hoàn toàn phụ thuộc vào vị trí lớp chất lỏng và vào hệ số ma sát thủy lực của đường ống. Chúng là những đại lượng có thể được xác định từ thí nghiệm hoặc tính toán.

Thế (5-38) vào (5-37) ta có :

$$\frac{v}{u_*} = 7,8 - 5,75 \lg \left(\frac{11,2}{u_* r} + \frac{4,5k}{r} \right) \quad (5-41)$$

với lưu ý : $1/0,223 = 4,4843 \approx 4,5$ và $2,5/0,223 = 11,2$.

Từ công thức lực cản của Dupuit có

$$J = \frac{h_{ms}}{l} = \lambda \frac{v^2}{2gd}$$

Thế giá trị này của J vào công thức của u_* ở biểu thức (5-9), được :

$$u_* = \sqrt{gRJ} = \sqrt{gR\lambda \frac{v^2}{2gd}} = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

với $d = 4R$ ở ống tròn. Sử dụng kết quả này cùng các kết quả thực nghiệm ta xác định được công thức tính hệ số ma sát thủy lực

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{2,8d} \right) \quad (5-42a)$$

Nếu dùng kết quả thử nghiệm về quan hệ giữa độ nhám tuyệt đối k và độ nhám tương đương hạt đều k_{td} : $k = 0,76k_{td}$ từ (5-42a):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,5}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k_{td}}{3,7d} \right) \quad (5-42b)$$

Hệ thức (5-37) xét sức cản dòng chảy do tính nhớt của chất lỏng và độ nhám của thành ống. Bởi vậy nó được dùng để tính cho mọi chế độ chảy. Trong hệ thức tính u/u_* (5-39) và λ , nếu trong ngoặc đơn số hạng thứ nhất lớn hơn hẳn số hạng thứ hai – gấp nhiều lần – có nghĩa là ảnh hưởng của độ nhám không đáng kể thì dùng công thức

$$\begin{cases} \frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{u_* y}{\nu} + 5,5 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 Re \sqrt{\lambda} - 0,8 \end{cases} \quad (5-43)$$

với lưu ý: $5,5 = 7,8 - 5,75 \lg 2,5$ và $0,8 = 2 \lg 2,5$. Chúng là các công thức áp dụng cho ống tròn thủy lực.

Ngược lại, nếu ảnh hưởng của độ nhám vượt trội, số hạng thứ hai gấp nhiều lần số hạng thứ nhất thì:

$$\begin{cases} \frac{u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{k_{td}}{y} + 7,8 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg 3,7 \frac{d}{k_{td}} \end{cases} \quad (5-44)$$

Đây là các công thức áp dụng cho trường hợp ống nhám hoàn toàn.

3.6. Các công thức tính tổn thất và phân bố vận tốc

Các công thức nửa thực nghiệm trên chỉ là sự xấp xỉ, gần đúng, khi dùng phải kiểm tra lại kết quả. Điều bất tiện nhất là phải dùng bảng đồ thị, lúc đó yếu tố chủ quan của người dùng cũng ảnh hưởng đến độ chính xác. Vì thế Altshul đã đề xuất công thức giải tích:

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_{td}}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (5-45)$$

rất thuận tiện cho người dùng, đồng thời cho kết quả sát với thực nghiệm.

Thực vậy, khi $Re \times (k_{td}/d) < 10$, nó cho lại công thức của Blazius dùng cho ống tròn thủy lực ($\lambda = 0,3164/Re^{0,25}$).

Khi $Re \times (k_{td}/d) > 500$ ta lại trở về công thức Sifrinson ($\lambda = 0,11(k_{td}/d)^{0,25}$).

Từ phương trình (5-40a) có thể viết công thức gần đúng cho quy luật phân bố vận tốc như sau :

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r} \right)^{0,9\sqrt{\lambda}} \quad (5-46)$$

Công thức này dùng cho tất cả các khu vực chảy rối.

Còn tỷ số giữa vận tốc cực đại và vận tốc trung bình thì :

$$\frac{u_{\max}}{v} = 1 + 1,3\sqrt{\lambda} \quad (5-47)$$

và hệ số Coriolis :

$$\alpha = 1 + 2,65\lambda \quad (5-48)$$

Như vậy, cả tỷ số vận tốc và hệ số Coriolis chỉ phụ thuộc vào hệ số ma sát thủy lực λ .

3.7. Công thức Chézy cho xác định vận tốc trung bình mặt cắt

Trong dòng chảy đều việc xác định vận tốc trung bình mặt cắt v luôn nảy sinh, thường gặp và quan trọng. Từ công thức Darcy - Weissbach :

$$h_{ms} = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$$

rút ra :

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{R} \sqrt{\frac{h_{ms}}{l}} \quad (5-49)$$

hoặc :

$$v = C\sqrt{RJ} \quad (5-50)$$

với C là hệ số Chézy. So sánh (5-49) với (5-50) ta thấy :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (5-51)$$

Người ta gọi biểu thức (5-51) là công thức tính hệ số Chézy. Công thức này rất quan trọng và được sử dụng rộng rãi trong tính toán thủy lực. Cần lưu ý rằng, hệ số Chézy có thứ nguyên là căn bậc 2 gia tốc $(m/s)^{0,5} (= L^{0,5}T^{-1})$; có thể xác định nó bằng công thức thực nghiệm hoặc bán thực nghiệm dưới đây :

- Công thức Manning (1890), dạng số mũ :

$$C = \frac{1}{n} \sqrt[6]{R} = \frac{R^{1/6}}{n} \quad (5-52)$$

trong đó : n là hệ số nhám với khoảng hiệu lực $n < 0,020$.

R là bán kính thủy lực trong phạm vi độ lớn $R < 0,5m$ (tức $d < 2m$).

Công thức này cho kết quả tốt đối với ống dẫn (kín) và kênh hở. Trong kỹ thuật thường có sẵn các bảng tra cứu (xem phần phụ lục).

- Công thức Forcheimer (1923) cũng có dạng số mũ

$$C = \frac{1}{n} \sqrt[5]{R} = \frac{R^{1/5}}{n} \quad (5-53)$$

thích hợp đối với các kênh đất trong trạng thái tốt (không có cỏ, đá học, bờ không sạt lở) đối với $n > 0,020$.

- Công thức Pavlôpxki (1925) :

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (5-54)$$

trong đó : $y = f(n, R)$ là số mũ phụ thuộc vào hệ số nhám và bán kính thủy lực. Đây là kết quả tổng hợp của các công thức trước. Nó đúng cho cả ống dẫn và kênh hở khi $R < 3 \div 5m$.

Trong tất cả các công thức trên trị số của n có thể tìm thấy trong các bảng tra cứu, phụ thuộc vào trạng thái bề mặt của ống và lòng dẫn. Trong (5-54) số mũ y xác định được nhờ công thức sau :

$$y = 1,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1) \quad (5-55)$$

Trong thực tế Pavlôpxki cho rằng, có thể dùng công thức đơn giản hơn :

$$\begin{aligned} y &= 1,5\sqrt{n}, \text{ khi } R < 1m; \\ y &= 1,3\sqrt{n}, \text{ khi } R > 1m. \end{aligned} \quad (5-56)$$

Các trị số của y thường nằm trong khoảng $1/3 \div 1/7$. Cũng có thể thấy, công thức Manning và công thức Forcheimer là trường hợp riêng của công thức Pavlôpxki.

- Công thức Gangile – Kutter rút gọn :

$$C = \frac{23 + 1/n}{1 + 23n/\sqrt{R}} \quad (5-57)$$

trong đó : hệ số nhám n xác định theo bảng. Công thức này dùng cho sông và kênh đào với $R > 3m$ cho kết quả tốt hơn công thức Pavlôpxki.

- Công thức Agrôtskin (1949) :

$$C = 17,72(k + \lg R) \quad (5-58)$$

trong đó : k là thông số về độ nhám của kênh, có quan hệ với hệ số nhám n như sau :

$$k = \frac{1}{17,72n} = \frac{0,05643}{n} \quad (5-59)$$

Nên nhớ rằng, hệ số C cũng có thể tìm trực tiếp trong các tài liệu tính toán thủy lực.

4. Sức cản thủy lực cục bộ

4.1. Các khái niệm cơ bản

Sức cản cục bộ phát sinh bởi sự hiện diện của các bộ phận, các phụ kiện và các thiết bị lắp đặt trên đường ống, kênh dẫn. Chúng là các vật trở ngại, làm thay đổi trị số và phương vận tốc chuyển động trên từng đoạn của dòng chảy (khi dòng chảy mở rộng hay thu hẹp, khi có sự ngoặt dòng, qua màng chắn, van khoá,...). Các trở ngại này luôn gây nên sức cản

cục bộ, làm tăng thêm tổn thất cột áp của dòng chảy, như là thành phần bổ sung bên cạnh tổn thất do ma sát của chất lỏng.

Tổn thất cột áp do bất kỳ một sức cản cục bộ nào đều được quy thành một phần cột áp vận tốc. Cột áp vận tốc này thường (song không nhất thiết) được tính theo vận tốc tại mặt cắt sát nơi phát sinh như đã từng thể hiện trong công thức Weissbach (5-2).

Các hệ số lực cản, trên thực tế được xác định bằng thực nghiệm (bảng đối số, công thức kinh nghiệm), đều tìm được trong sổ tay chuyên ngành. Tuy nhiên, một số trường hợp cá biệt có thể tính bằng công thức toán được dẫn dắt, chứng minh chặt chẽ.

Trong thực tiễn, để thuận tiện trong tính toán, đôi khi người ta thay thế tổn thất cục bộ bằng một tổn thất dọc đường tương đương của một đoạn ống chiều dài tương đương l_{td} nào đó, nghĩa là :

$$\lambda \frac{l_{td}}{d} \frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (5-60a)$$

do vậy :

$$l_{td} = d \frac{\zeta}{\lambda} \quad (5-60b)$$

Tổn thất cục bộ có thể chia thành các nhóm như sau :

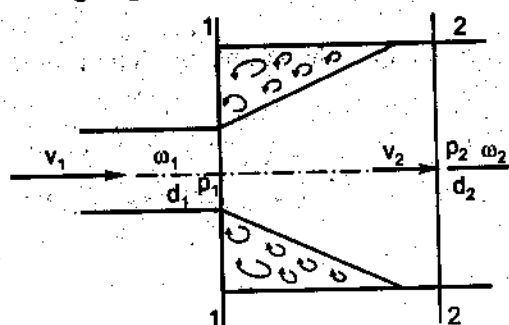
- 1) Tổn thất do mặt cắt ướt của dòng chảy thay đổi đột ngột hay dần dần ;
- 2) Tổn thất do ngoặt dòng (ống nối T, van khuỷu - cút,...) ;
- 3) Tổn thất do sức cản của phụ kiện, chi tiết (tiết lưu, van khoá,...) ;
- 4) Tổn thất do tách, nhập dòng.

Thực ra 3) và 4) về sâu xa cũng bắt nguồn từ 1) và 2).

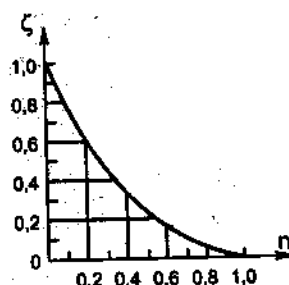
Sau đây hãy làm quen với công thức tính toán của một số trường hợp cơ bản hay gặp nhất.

4.2. Tổn thất do thay đổi mặt cắt

Xét các trường hợp sau :



Hình 5.11



+ **Đột mở.** Định lý Borda – Carnot (hình 5.11). Do tiết diện đột mở tại mặt cắt 1-1 chất lỏng thuận dòng, vì quán tính, chưa kịp điền đầy mặt cắt. Phải sau một quãng nhất định

điều đó mới xảy ra. Như vậy trong đoạn chuyển tiếp này có sự tách dòng khỏi thành rắn, chảy quẩn, xoáy,... gây tổn thất. Sau đây, hãy xác định tổn thất này. Cũng nói ngay rằng đây là trường hợp hần hữu trong việc xác định tổn thất cục bộ bằng con đường giải tích.

Viết phương trình Bernoulli cho hai mặt cắt của dòng chảy có khoảng cách đủ để chất lỏng điền đầy trở lại mặt cắt với giả thiết là $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$:

$$h_{dm} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \quad (A)$$

do $z_1 = z_2$. Mặt khác xét biến thiên động lượng của khối chất lỏng chứa trong diện kiểm tra bao bởi 2 mặt cắt và thành bên thấy :

$$(p_1 - p_2)\omega_2 = \rho Q(v_2 - v_1) \quad (B)$$

với giả thiết khoảng cách giữa 2 mặt cắt đủ nhỏ để có thể bỏ qua tổn thất dọc đường. Điều này luôn được thoả mãn trong thực tiễn.

Chia phương trình (B) cho ρg được :

$$\omega_2 \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2 \omega_2}{g} (v_2 - v_1) \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1 v_2}{g} \quad (5-61)$$

Thế kết quả cuối cùng vào phương trình (A), được :

$$h_{dm} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1 v_2}{g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{2v_1 v_2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

Nghĩa là :

$$h_{dm} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{(\Delta v)^2}{2g} \quad (5-62)$$

Đây là **định lý** do Borda và Carnot chứng minh lần đầu tiên và có thể phát biểu như sau :
Tổn thất cục bộ do đột mở tiết diện ống dẫn bằng cột áp vận tốc của độ sụt vận tốc.

Công thức (5-62) có thể viết dưới dạng :

$$h_{dm} = \frac{(v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2)}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - 2\frac{v_2}{v_1} + \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta \frac{v_1^2}{2g} \quad (5-63)$$

Suy ra trong trường hợp này :

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)^2 = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \quad (5-64)$$

Nếu tổn thất cục bộ được tính với vận tốc “đòng ra”, ở hạ lưu, tức là với vận tốc của đoạn ống lớn thì :

$$h_{dm} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \quad (5-65)$$

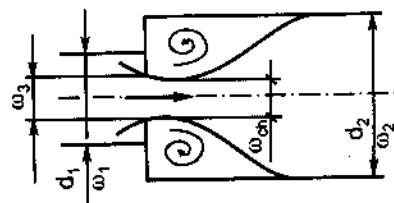
và hệ số tổn thất cục bộ tương ứng với nó :

$$\zeta_2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \quad (5-66)$$

+ **Đột thu** (hình 5.12). Hãy ký hiệu :

$$\varepsilon = \frac{\omega_{dt}}{\omega_3} \quad (5-67)$$

$$h_{dt} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_3 \varepsilon} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} \quad (5-68)$$



Hình 5.12

và :

$$\zeta = \left(\frac{\omega_2}{\omega_3 \varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{\varepsilon m} - 1 \right)^2 \quad (5-69)$$

với $m = \omega_3/\omega_2$

+ **Màng chắn trong ống trụ** (hình 5.13) :

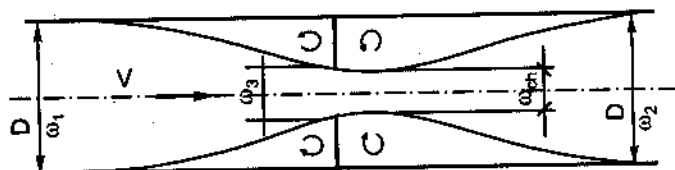
Khi $\omega_1 \neq \omega_2$ hệ số ζ tổn thất cục bộ

$$\text{có dạng : } \zeta = \left(\frac{1}{n\varepsilon} - \frac{1}{m} \right)^2 \quad (5-70)$$

trong đó : $n = \omega_0/\omega_1$; $m = \omega_2/\omega_1$.

Khi $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ thì $m = 1$ và :

$$\zeta = \left(\frac{1}{n\varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0 \varepsilon} - 1 \right)^2 \quad (5-71)$$

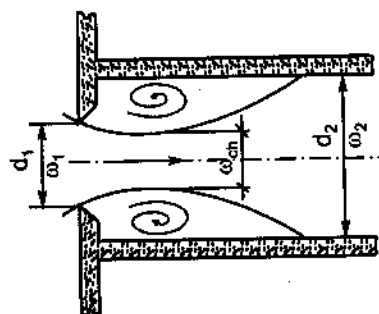


Hình 5.13

+ **Miệng vào ống qua màng chắn** (xem hình 5.14)

với $\omega_3/\omega_1 \approx 0$ và hệ số $\varepsilon = 0,611$, ta có :

$$\zeta = \left(\frac{\omega_2}{0,611\omega_3} - 1 \right)^2 \quad (5-72)$$



Hình 5.14

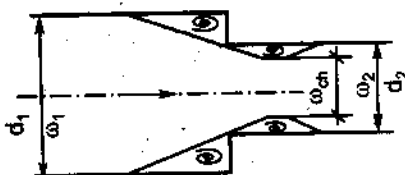
+ **Đường kính ống giảm đột ngột** (xem hình 5.15)

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 \quad (5-73)$$

trong đó : ε có thể xác định theo :

$$\varepsilon = \frac{\omega_{ch}}{\omega_2}$$

+ **Vào ống từ bình chứa** (xem hình 5.16), ($\omega_2/\omega_1 \approx 0$ và $\omega_2 = \omega_3$) vận dụng các trị số này vào công thức (5-72) - như là một dạng suy biến :

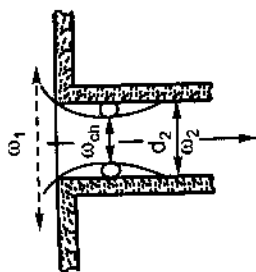


Hình 5.15

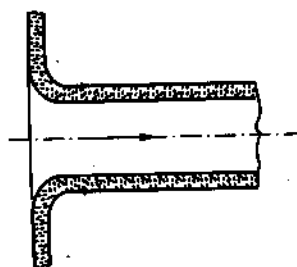
$$\zeta = \left(\frac{1}{0,611} - 1 \right)^2 = 0,405337497 \approx 0,41 \quad (5-74)$$

+ **Miếng vào sườn dòng do góc lượn** (xem hình 5.17)

$$\zeta \approx 0,2$$



Hình 5.16



Hình 5.17

+ **Ống loe dần** (khuếch tán - dipphuzo), xem hình 5.18. Từ công thức Borda – Carnot :

$$h_{loe} = K_{md} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \quad (5-75)$$

hệ số sức cản của ống loe là :

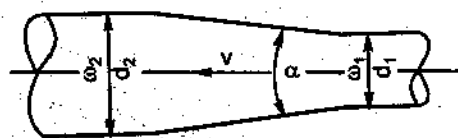
$$\zeta_{loe} = \frac{\lambda}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + K_{md} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \quad (5-76)$$

trong đó : $n = \frac{\omega_2}{\omega_1} < 1$

$$K_{md} \approx \sin \alpha \text{ (khi } \alpha < 20^\circ)$$

+ **Ống côn**, thu hẹp dần (cônphuzo), xem hình 5.19.

$$h_c = \frac{\lambda}{8 \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (5-77)$$



Hình 5.18

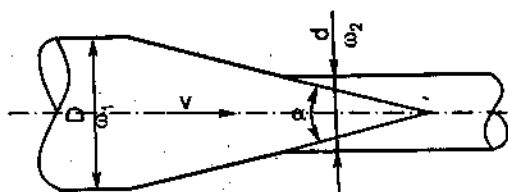
trong đó : $n = \frac{\omega_1}{\omega_2} > 1$

là độ thu hẹp. Hoặc có thể viết :

$$h_c = \zeta_c \frac{v^2}{2g} \quad (5-78)$$

trong đó :

$$\zeta_c = K_{td} \zeta_{dt} \quad (5-79)$$



Hình 5.19

với ζ_{dt} là trị số lấy cho trường hợp đột thu của Borda - Carnot và $K_{td} \leq 1$ là hệ số giảm nhẹ phụ thuộc vào góc α .

4.3. Tổn thất cột áp do dòng đổi hướng (hình 5.20)

Do tác động của quán tính và quãng đường đi của từng phần tử chất lỏng không như nhau (gần hay xa tâm bán kính lượn) có hiện tượng xáo trộn, phát sinh dòng thứ cấp, tách dòng, chèn dòng nên ở các ống khuỷu tổn thất là khá lớn. Trường hợp ngoặt đột ngột có thể dùng công thức Borda - Carnot để đánh giá sơ bộ :

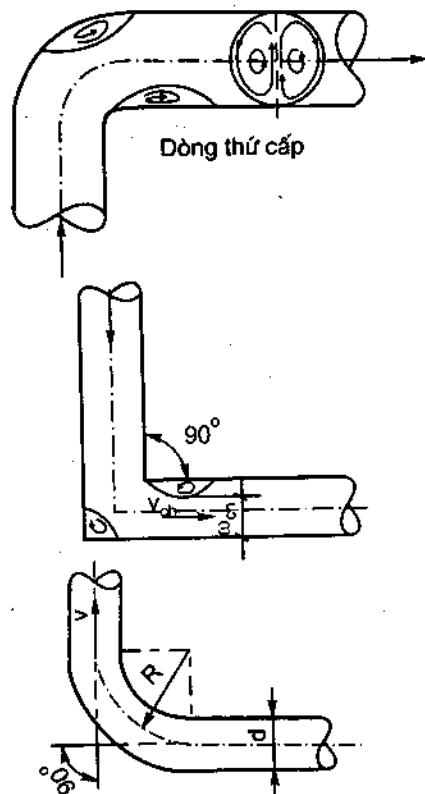
$$h = \frac{(v_{th} - v)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{v}{\epsilon} - v\right)^2}{2g} = \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g} \quad (5-80)$$

và từ đây hệ số sức cản cục bộ của khuỷu bằng :

$$\zeta_{kh} = \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)^2 \quad (5-81)$$

Hệ số thu hẹp dòng ϵ phụ thuộc vào góc ngoặt α . Khi $\alpha = 0$ thì $\epsilon = 1$, và khi $\alpha = 90^\circ$ thì $\epsilon \approx 0,5$; lúc đó :

$$\zeta_{kh(90^\circ)} = \left(\frac{1}{0,5} - 1\right)^2 = 1 \quad (5-82)$$



Hình 5.20

Khi ống khuỷu ngoặt dần (êm) có bán kính lượn R lớn, cường độ hình thành xoáy và co thắt dòng giảm đi, nhờ vậy tổn thất cột áp cũng giảm theo. Hệ số sức cản phụ thuộc vào góc ngoặt và tỷ số bán kính lượn R và đường kính ống d : R/d và hệ số ma sát thủy lực, nghĩa là :

$$\zeta_{ng.e} = f\left(\alpha, \frac{R}{d}, \lambda\right)$$

Khi góc ngoặt bằng 90° :

$$\zeta_{ng.e(90^\circ)} = \left[0,2 + 0,001(100\lambda)^8\right] \frac{d}{R} \quad (5-83)$$

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG V

Bài 1. Một bộ trao đổi nhiệt gồm 8000 ống dẫn nước lạnh đường kính $d = 25\text{mm}$. Lưu lượng nước bơm qua thiết bị $Q = 13600\text{m}^3/\text{giờ}$. Biết rằng hệ số truyền nhiệt phụ thuộc

rất nhiều vào chế độ chảy của nước trong ống, vì vậy cần được kiểm tra. Nhà chế tạo đã đảm bảo để lưu lượng của các ống như nhau. Hãy tiến hành việc kiểm tra nói trên. Độ nhớt động học của nước làm mát là :

$$\nu = 1,23 \cdot 10^{-2} \text{St} (= 1,23 \cdot 10^{-2} \text{cm}^2/\text{s} = 1,23 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s})$$

Giải :

Ta tính vận tốc trung bình trong ống sau đó dùng công thức (5-3) tính số Reynolds rồi so sánh với trị số phân giới (2000 - 2300).

Lưu lượng tính theo giây của thiết bị

$$Q \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] = \frac{Q \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]}{3600} = 3,78 \text{m}^3/\text{s}$$

Lưu lượng của mỗi ống :

$$q = \frac{Q}{n} = \frac{3,78}{8000} = 4,725 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}$$

Diện tích mặt cắt ướt của ống :

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 0,025^2}{4} = 4,91 \cdot 10^{-4} \text{m}^2$$

Như vậy vận tốc trung bình trong ống là :

$$v = \frac{q}{\omega} = \frac{4,725 \cdot 10^{-4} \text{m}^3/\text{s}}{4,91 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 0,962 \text{m/s}$$

và số Reynolds :

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,962 \text{m/s} \times 2,5 \cdot 10^{-2} \text{m}}{1,23 \cdot 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}} = 1,9553 \cdot 10^4 = 19553.$$

$$Re = 19553 > 2000.$$

Ta kết luận chế độ chảy trong ống là chảy rối và có thể kỳ vọng một hệ số truyền nhiệt lớn hơn, hiệu quả trao đổi nhiệt tốt hơn.

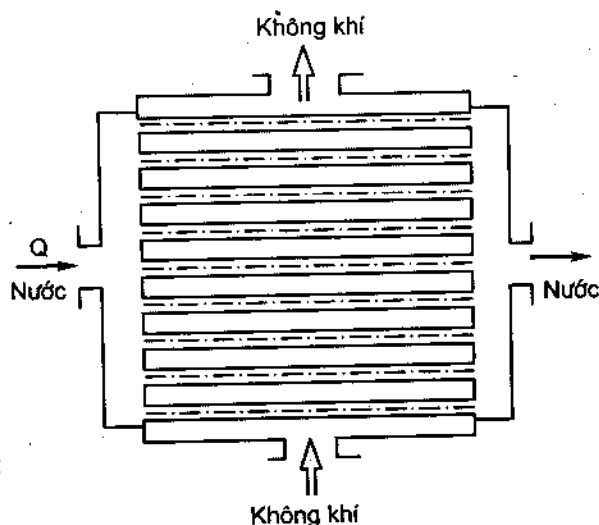
Bài 2. Đường ống dẫn nước nhiệt độ 20°C , đường kính 16 mm, chiều dài $l = 10\text{m}$ với tổn thất dọc đường cho trước là 100Pa. Hãy :

- Xác định lưu lượng của đường ống, cho biết vận tốc cực đại trong ống (tròn) ;
- So sánh với lưu lượng của ống tiết diện chữ nhật có cạnh a gấp 4 cạnh b và của ống tiết diện vuông, với điều kiện tổn thất dọc đường là như nhau.

Tra bảng được : độ nhớt động học $\nu = 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$;

Hệ số A trong công thức tính hệ số λ :

- Của ống chữ nhật cho trên : $A = 73$
- Của ống tiết diện vuông : $A = 57$.



Hình 5.21

Giải :

Xác định lưu lượng của đường ống tròn.

Xuất phát từ công thức (5-1) ta có :

$$\Delta p = \rho g h_{ms} = \rho g \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \rho \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} \quad (a)$$

Ở đây giả thiết dòng chảy là chảy tầng (sau khi có kết quả ta có thể kiểm tra), lúc đó với ống tròn chảy tầng có :

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{\frac{vd}{\nu}} \quad (b)$$

Thế (b) vào (a), được :

$$\Delta p = \rho \times \frac{64}{\frac{vd}{\nu}} \times \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} = \rho \times \frac{64\nu}{vd} \times \frac{lv^2}{2d} = \frac{64\rho\nu l v}{2d^2};$$

với lưu ý $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$, suy ra :

$$v = \frac{\Delta p}{32\rho\nu} \frac{d^2}{l} = \frac{100\text{Pa}}{32 \times 1000\text{kg/m}^3 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} \times \frac{(0,016\text{m})^2}{10\text{m}} = \frac{2,56}{32} \text{m/s}$$
$$v = 0,08 \text{ m/s}$$

Kiểm tra số Reynolds (trường hợp ống tròn) :

$$Re_{tr} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,08\text{m/s} \times 0,016\text{m}}{10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = \frac{8 \cdot 10^{-2} \times 1,6 \cdot 10^{-2}}{10^{-6}}$$
$$Re = 1280 < 2000$$

Quả thực chế độ chảy trong ống là chảy tầng, phù hợp với giả thiết khi tính hệ số ma sát. ~~7.~~ Và như vậy ta có thể bắt đầu tính lưu lượng của ống tròn :

$$Q_{tr} = v\omega = v \frac{\pi d^2}{4} = 0,08\text{m/s} \frac{\pi(0,016\text{m})^2}{4}$$
$$Q_{tr} = 1,608 \cdot 10^{-5} \text{m}^3/\text{s}$$

Về vận tốc cực đại của ống tròn trong trường hợp chảy tầng ta có :

$$u_{\max} = 2v = 0,16\text{m/s}.$$

Tính lưu lượng cho các ống khác (để so sánh).

Ta cần tính đường kính tương đương thủy lực của các ống tiết diện khác theo công thức :

$$d_{td} = 4R$$

trong đó : R là bán kính thủy lực (xuất phát từ ống tiết diện tròn để ở đây phải có

$$(d = d_{td}).$$

Thực vậy, ở ống tròn :

$$d_{td} = 4R = 4 \frac{\omega}{\chi} = 4 \frac{4}{\pi d} = d.$$

Cho nên đối với ống tiết diện vuông cạnh a :

$$d_{td} = 4 \frac{a^2}{4a} = a \quad (c)$$

và đối với tiết diện chữ nhật :

$$d_{td} = 4 \frac{ab}{2(a+b)} = 2 \frac{b \times \epsilon b}{b + \epsilon b} = 2 \frac{\epsilon b^2}{b(1+\epsilon)} = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} b \quad (d)$$

Thoả mãn điều kiện các tiết diện cùng bằng nhau

- Trường hợp vuông :

$$d_{td-v} = a = \sqrt{\omega} = \sqrt{2.10^{-4} \text{ m}^2} = 1,414.10^{-2} \text{ m}$$

- Trường hợp chữ nhật (theo đề bài $\epsilon = a/b = 4$) :

$$\omega = ab = \epsilon b^2 \rightarrow b = \sqrt{\frac{\omega}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2.10^{-4} \text{ m}^2}{4}} = 0,7071.10^{-2} \text{ m}$$

và theo (d) :

$$d_{td-cn} = \frac{2\epsilon}{1+\epsilon} b = \frac{2 \times 4}{1+4} 0,7071.10^{-2} \text{ m} = 1,6 \times 0,7071.10^{-2} \text{ m} = 1,13.10^{-2} \text{ m}.$$

Các trị số vận tốc, số Reynolds và lưu lượng tương ứng :

Ở tiết diện vuông :

$$v = \frac{2\Delta p d_{td}^2}{\rho A \omega} = \frac{2 \times 10^2 \text{ N/m}^2 \times (1,414.10^{-2} \text{ m})^2}{1000 \text{ kg/m}^3 \times 57 \times 10 \text{ m} \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = \frac{2.10^2 \times 1,414.10^{-4}}{10^3 \times 57 \times 10 \times 10^{-6}}$$

$$v = 0,0496 \text{ m/s}$$

$$\text{nên : } Re_v = \frac{v d_{td-v}}{\nu} = \frac{4,96.10^{-2} \text{ m/s} \times 1,414.10^{-2} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 702 < 2000$$

$$\text{và : } Q_v = v\omega = 0,0496 \text{ m/s} \times 2.10^{-4} \text{ m}^2 = 9,92.10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Ở tiết diện chữ nhật :

$$v = \frac{2\Delta p d_{td}^2}{\rho A \omega} = \frac{2 \times 10^2 \text{ N/m}^2 \times (1,13.10^{-2} \text{ m})^2}{1000 \text{ kg/m}^3 \times 73 \times 10 \text{ m} \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = \frac{2.10^2 \times 1,2769.10^{-4}}{10^3 \times 73 \times 10 \times 10^{-6}} \text{ m/s}$$

$$v = 0,035 \text{ m/s}$$

$$\text{nên : } Re_{cn} = \frac{v d_{td-cn}}{\nu} = \frac{3,5.10^{-2} \text{ m/s} \times 1,13 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 350 < 2000$$

$$\text{và : } Q_{cn} = v\omega = 3,5.10^{-2} \text{ m/s} \times 2.10^{-4} \text{ m}^2 = 7.10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Như vậy chế độ chảy ở cả 3 trường hợp đều là chảy tầng, mặt cắt ướt càng đối xứng, càng có lợi về mặt thủy lực, cho lưu lượng càng lớn hơn.

Bài 3. Ống dẫn nước gồm : đoạn 1 đường kính $d_1 = 20\text{mm}$, dài $l_1 = 30\text{m}$; đoạn 2 đường kính $d_2 = 200\text{mm}$, dài $l_2 = 20\text{m}$; đoạn 3 đường kính $d_3 = 15\text{mm}$, dài $l_3 = 100\text{m}$: kết thúc bởi khoá mở cho xả ra không khí. Biết rằng lưu lượng $Q = 0,5 \text{ l/s}$. Tính tổng tổn thất của đường ống ΔH , biết rằng độ nhám tương đương hạt đều của các ống là $k_{td} = 0,1\text{mm}$ và độ nhớt động học của nước $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$.

Giải :

Tổng tổn thất của đường ống này gồm : tổn thất dọc đường của 3 đoạn ống l_1, l_2 và l_3 ; tổn thất cục bộ đột mở giữa đoạn 1 và đoạn 2, tổn thất cục bộ đột thu giữa đoạn 2 và đoạn 3, tổn thất cột áp của vòi và tổn thất động lượng tại miệng xả. Dưới đây là sự cụ thể hoá các tính toán tổn thất này.

Tính tổn thất dọc đường

Trước hết tính lưu lượng trung bình mặt cắt và số Reynolds của các đoạn là :

$$\text{- Đoạn 1 : } v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (20 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 4 \cdot 10^{-4}} \text{ m/s} = 0,16 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 1,6 \text{ m/s},$$

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{1,6 \text{ m/s} \times 0,02 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 3,2 \cdot 10^4$$

$$Re_1 = 32000 > 2000$$

$$\text{- Đoạn 2 : } v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (200 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 10^{-2}} \text{ m/s} = 0,016 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0,016 \text{ m/s} ;$$

$$Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu} = \frac{0,016 \text{ m/s} \times 0,1 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1600$$

$$Re_2 = 1600 < 2000$$

$$\text{- Đoạn 3 : } v_3 = \frac{4Q}{\pi d_3^2} = \frac{4 \times 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (15 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \times 2,25 \cdot 10^{-4}} \text{ m/s} = 2,83 \text{ m/s}$$

$$v_3 = 2,83 \text{ m/s}$$

$$Re_3 = \frac{v_3 d_3}{\nu} = \frac{2,83 \text{ m/s} \times 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 4,245 \cdot 10^4$$

$$Re_3 = 42450 > 2000$$

Như vậy chế độ chảy ở đoạn 1 và đoạn 3 là chảy rối, ở đoạn 2 là chảy tầng. Trên cơ sở đó ta tính ra hệ số ma sát λ

Cho đoạn 2 chảy tầng

$$\lambda_2 = \frac{64}{Re_2} = \frac{64}{1600} = 4 \cdot 10^{-2} = 0,04$$

Cho đoạn 1 và đoạn 3 chảy rối :

$$\lambda_1 = 0,11 \left(\frac{k_{td}}{d_1} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} = 0,11 \times \left(\frac{0,1\text{mm}}{20\text{mm}} + \frac{68}{32000} \right)^{0,25} =$$

$$= 0,11 \times (0,5 \cdot 10^{-2} + 2,125 \cdot 10^{-3})^{0,25}$$

$$\lambda_1 = 0,11 \times (50 \cdot 10^{-4} + 21,25 \cdot 10^{-4})^{0,25} = 0,11 \times (71,25)^{0,25} \cdot 10^{-1}$$

$$\lambda_1 = 0,032 ;$$

$$\lambda_3 = 0,11 \left(\frac{k_{td}}{d_3} + \frac{68}{Re_3} \right)^{0,25} = 0,11 \times \left(\frac{0,1\text{mm}}{15\text{mm}} + \frac{68}{42450} \right)^{0,25} =$$

$$= 0,11 \times (0,667 \cdot 10^{-2} + 1,6 \cdot 10^{-3})^{0,25}$$

$$\lambda_3 = 0,11 \times (66,7 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 10^{-4})^{0,25} = 0,11 \times (82,7)^{0,25} \cdot 10^{-1}$$

$$\lambda_3 = 0,033.$$

Như vậy tổn thất dọc đường của 3 đoạn ống là :

$$h_{ms} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} = 0,032 \times \frac{30}{0,02} \times \frac{1,6^2}{2 \times 10} + 0,04 \times \frac{20}{0,1} \times \frac{0,016^2}{2 \times 10} + 0,033 \times \frac{100}{0,015} \times \frac{2,83^2}{2 \times 10}$$

$$h_{ms} = 6,144 + 10,24 \cdot 10^{-5} + 88,0044 = 94,15 \text{ m}$$

Tính tổn thất cục bộ

Công thức chung tính tổn thất cục bộ (xem (5-2))

$$h_c = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

+ Tổn thất do đột mở giữa đoạn 1 và đoạn 2 (tổn thất Borda-Carnot) :

$$h_{cdm} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{d_1^2}{d_2^2} \right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{(0,02\text{m})^2}{(0,1\text{m})^2} \right)^2 \frac{(1,6\text{m/s})^2}{2 \times 10\text{m/s}^2} = 0,118\text{m}$$

+ Tổn thất do đột thu giữa đoạn 2 và đoạn 3 :

$$h_{dt} = \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2 \frac{v_3^2}{2g}$$

Dùng công thức Altshul xác định ϵ :

$$\epsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - n} \text{ với } n = \frac{\omega_3}{\omega_2} = \left(\frac{d_3}{d_2} \right)^2 = \left(\frac{0,015\text{m}}{0,1\text{m}} \right)^2 = 0,0225$$

$$\epsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - 0,0225} = 0,61$$

$$h_{\text{cdt}} = \left(\frac{1}{0,61} - 1 \right)^2 \frac{(2,83\text{m/s})^2}{2 \times 10\text{m/s}^2} = 0,164\text{m}$$

+ Tổn thất tại khoá đầu cuối. Với khoá tay vận thẳng khi mở hoàn toàn và nếu không có lưu ý gì đặc biệt, có thể lấy $\zeta_c = 3 \div 5,5$, nên ở đây ta lấy giá trị lớn nhất :

$$h_{\text{ckh}} = 5,5 \frac{v_3^2}{2g} = 5,5 \frac{(2,83\text{m/s})^2}{2 \times 10\text{m/s}^2} = 2,202\text{m}$$

+ Tổn thất động năng tại miệng xả :

$$h_{\text{cx}} = \frac{v_3^2}{2g} = \frac{(2,83\text{m/s})^2}{2 \times 10\text{m/s}^2} = 0,4\text{m}$$

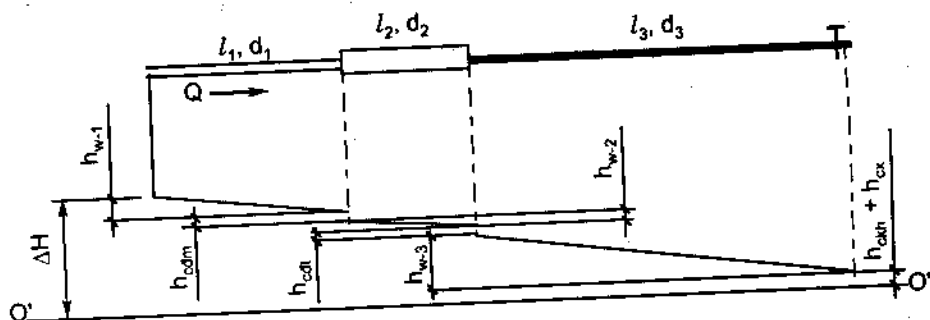
Như vậy tổng tổn thất cục bộ là :

$$h_{\text{c}\Sigma} = h_{\text{cdm}} + h_{\text{cdt}} + h_{\text{ckh}} + h_{\text{cx}} = 0,118\text{m} + 0,164\text{m} + 2,202\text{m} + 0,4\text{m} = 2,884\text{m}$$

Cuối cùng, toàn bộ tổn thất của đường ống :

$$\Delta H = h_{\text{ms}} + h_{\text{c}} = 94,15\text{m} + 2,884\text{m} = 96,034\text{m} \approx 97\text{m}$$

$$\Delta H = 97 \text{ m (cột nước).}$$



Hình 5.22

TỔNG KẾT CHƯƠNG V

Chương này trình bày những khái niệm chung về sức cản thuỷ lực, nói rõ nguyên nhân cũng như cơ chế gây ra sức cản này,... Phân biệt các dạng sức cản (dọc đường, cục bộ) và những đặc điểm của chúng. Nêu bật được hệ số ma sát, hệ số lực cản phụ thuộc rất nhiều vào chế độ chảy (tầng hay rối) mà để phân biệt chúng phải dùng đến số Reynolds với giá trị phân giới là 2000 (hoặc 2300).

Một trong những đặc điểm cần quan tâm đối với các chế độ chảy là sự phân bố vận tốc trên mặt cắt và quan hệ của nó với vận tốc trung bình mặt cắt, đại lượng thường dùng trong thực tiễn tính toán. Thực tế đó dẫn tới các yêu cầu phải chỉnh lý khi dùng vận tốc trung bình để tính toán năng lượng, động lượng,....

Đồ thị Nikuradse có vai trò hết sức quan trọng trong tính toán thuỷ lực đường ống không chỉ vì nó là kết quả của khoa học nửa thực nghiệm, trực tiếp phục vụ cho hoạt động kỹ thuật mà còn vì nó lý giải được nhiều vấn đề lý thuyết mà thuần tuý lý thuyết (bằng giải tích) gặp khó khăn. Nhờ đây ta hiểu được vấn đề / khái niệm thành trơn, thành nhám thuỷ lực của cùng một ống dẫn, kênh dẫn.

Về cơ bản, Chương giải quyết toàn bộ các vấn đề (công thức) nền tảng cho tính toán thuỷ lực đối với phần lớn các vấn đề thường gặp bằng việc cung cấp các công thức tính toán, trong đó phần lớn là các công thức thực nghiệm, để tính tổn thất cục bộ và tổn thất dọc đường, một nội dung không thể thiếu được cho tính toán thuỷ lực đường ống, kênh dẫn sau này.

Ví dụ minh hoạ giới thiệu sơ bộ cách sử dụng một số công thức, biểu bảng và qua đó hiểu thêm phần lý thuyết.

Chương VI

TÍNH TOÁN THỦY LỰC ĐƯỜNG ỐNG

1. Phân loại đường ống

Trong tính toán thủy lực ở đây, đường ống được chia ra làm 2 loại :

- Đường ống đơn giản,
- Đường ống phức tạp.

Đường ống đơn giản là đường ống chỉ có một tuyến có lưu lượng không đổi trên cả chiều dài và có nhiệm vụ dẫn chất lỏng từ bể chứa xả vào không khí hay vào một bể chứa khác.

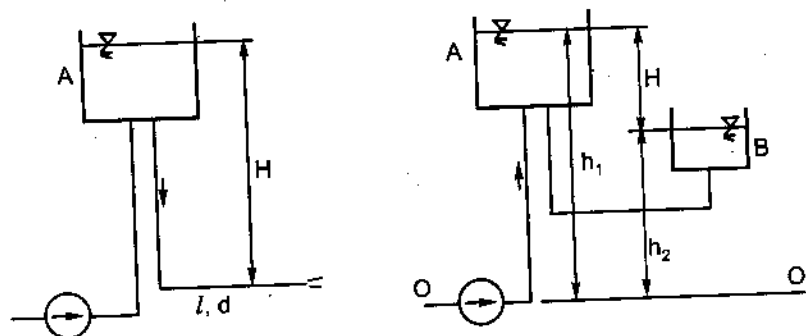
Đường ống phức tạp bao gồm một hệ (một mạng lưới) ống có nhiệm vụ cùng một lúc dẫn chất lỏng đến nhiều điểm ; mạng lưới có thể là hở (kết thúc trong khí quyển) hoặc là khép kín (vòng) và có nhiệm vụ chuyển tải chất lỏng đi cung cấp đến các điểm (các hộ tiêu thụ).

2. Tính toán thủy lực đường ống đơn giản

Đường ống đơn giản bước đầu đề cập ở đây là **Đường ống có đường kính không đổi** (hình 6.1). Khi đường ống dẫn chất lỏng xả vào khí quyển, mặc dù có sự chênh lệch cao độ giữa mặt thoáng bể chứa và miệng xả của ống, vẫn có thể coi áp suất khí quyển bao quanh ở hai nơi không khác nhau là bao để có thể coi chúng bằng nhau và lúc đó phương trình Bernoulli viết cho 2 mặt cắt (mặt thoáng bể chứa và miệng ống xả) có dạng :

$$z_A + \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z + \frac{p_0}{\rho g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g}$$

trong đó : chỉ số A ứng với mặt thoáng bể chứa, p_0 là áp suất khí quyển và không có chỉ số thì ứng với miệng xả hoặc trong ống.



Hình 6.1

Thông thường diện tích mặt thoáng bể chứa là rất lớn và gấp nhiều lần mặt cắt (đầu cuối) ống nên trong phương trình trên có thể bỏ qua số hạng thứ 3 ở vế trái là $v_A^2/2g$, đồng thời gọi $H = z_A - z$, ta có phương trình Bernoulli dưới dạng :

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i \right) \quad (6-1)$$

Khi chảy dưới mực nước (chảy ngập) để vào bể chứa thứ 2 (bể B trên hình 6.1) có mặt thoáng cũng lớn hơn rất nhiều so với miệng xả, ta có :

$$z_A + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_0}{\rho g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v^2}{2g} + \frac{(v - v_B)^2}{2g}$$

Bỏ qua v_A và v_B vì lý do đã nói ở trên, được :

$$z_A - z_B = H = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta_i + 1 \right) \quad (6-2)$$

Hai công thức (6-1) và (6-2) có dạng giống nhau nên tính toán thủy lực của 2 sơ đồ cũng giống nhau. Tuy nhiên, ở sơ đồ 2 cần lưu ý đến sự khác biệt do tổn thất của ống nối vào bể chứa B.

Trường hợp xả vào khí quyển cột nước H gồm 2 phần :

- Tổn thất động năng ở miệng xả $\frac{v^2}{2g}$,
- Tổng tổn thất của đường ống nối 2 bể $\sum h_w$ (tổn thất dọc đường lẫn cục bộ).

Tính toán thủy lực đường ống đơn giản dẫn đến việc giải 3 bài toán cơ bản sau đây với điều kiện đã biết sơ đồ đường ống, chiều dài và đường kính ống :

a) **Bài toán thứ nhất.** Yêu cầu xác định cột nước H để có thể cung cấp một lưu lượng Q với đường ống có chiều dài l và đường kính ống d.

Cách giải : Dùng trực tiếp công thức (6-1) với điểm xuất phát là tính vận tốc trung bình mặt cắt của đường ống :

$$v = 4Q/(\pi d^2)$$

Khi đó cột nước H cần tìm :

$$H = \frac{\left(\frac{4Q}{\pi d^2} \right)^2}{2g} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right)$$

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \zeta \right) \quad (6-3)$$

trong đó : việc xác định λ và ζ không khó vì số Reynolds đã biết do v và d cũng như độ nhớt đã biết.

b) **Bài toán thứ 2.** Xác định lưu lượng đường ống Q nếu đã biết cột nước H, chiều dài l và đường kính ống d.

Cách giải : Ta vận dụng công thức (6-3) để suy ra hệ thức :

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda l/d + \sum \zeta}} \quad (6-4)$$

Vì các hệ số λ và ζ phụ thuộc vào Re, Re lại là hàm của vận tốc trung bình v mà v thì chưa biết do Q chưa biết, đang cần tìm. Bởi vậy phải giải bằng cách thử với giả thiết ban đầu là đường ống làm việc trong *khu vực bình phương sức cản*, nhờ vậy mà loại bỏ được sự phụ thuộc của λ và ζ vào số Reynolds (xem lại đồ thị Nikuradse) để với độ nhám đã cho của đường ống từ d tra ra $\lambda, \dots$

Tiếp đó là bước kiểm tra xem giả thiết về chế độ chảy rối có đúng vững không thông qua số Reynolds sau khi được Q tính thử bước đầu. Nếu giả thiết không đúng vững, trong ống chảy tầng, phải chỉnh lý với các giá trị mới của λ và dùng phép lặp tính lại kết quả cho đến khi bỏ qua được sự sai khác giữa 2 bước lặp kế tiếp nhau. Trong phần *tính toán thủy lực đường ống ngoài khu vực bình phương sức cản* của chương này ta sẽ tiếp cận một phương pháp chỉnh lý rất hiệu quả nhờ các kết quả thực nghiệm và nửa kinh nghiệm.

Trong thực tiễn đối với các đường ống dẫn nước chỉ cần tính một lần vì thường chúng làm việc "sâu" trong khu vực bình phương sức cản, nghĩa là chế độ chảy ở đây có $Re \gg 2000$.

c) **Bài toán thứ 3.** Yêu cầu xác định (chọn) đường kính ống d khi Q, H và l đã biết.

Cách giải : Trường hợp này sử dụng công thức (6-4), nhưng có khó khăn ở chỗ không chỉ Re chưa biết mà phương trình tìm đường kính d là phương trình bậc cao (phi tuyến), thậm chí, nếu dùng công thức Colebrook – White ta còn gặp phải hàm siêu việt.

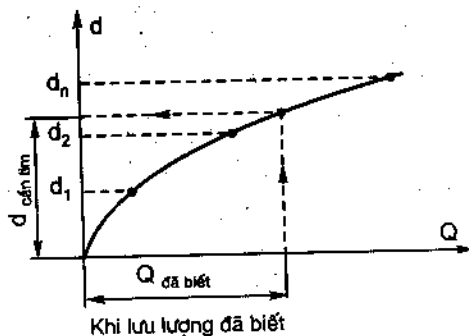
Do vậy, ở đây cũng phải dùng phép lặp với bước thử ban đầu trên cơ sở giả thiết đường ống làm việc trong khu vực bình phương sức cản và như vậy quy bài toán trở về việc xây dựng quan hệ phụ thuộc chỉ thông qua đường kính ống mà thôi.

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gH}{1 + f_1(d) \frac{l}{d} + \sum \zeta}} = F(d)$$

trong đó :

$$f_1(d) = \lambda.$$

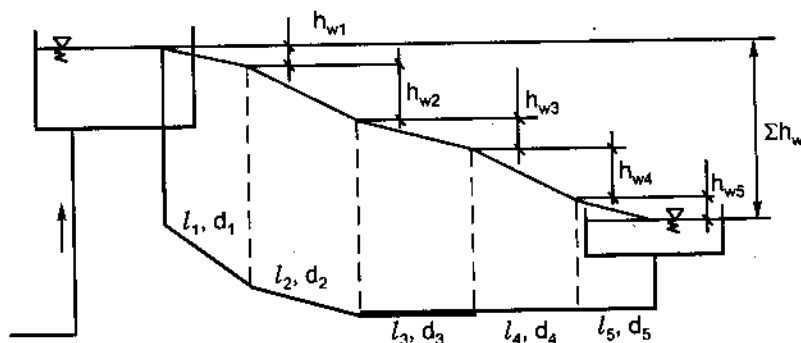
Tiếp đó ta cho d lấy một số giá trị khác nhau : $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ để xây dựng quan hệ hàm $Q = F(d)$ (tham biến d) thể hiện trên đồ thị (hình 6.2). Dóng giá trị Q đã biết, ta tìm được d, nếu dùng phép đồ giải. Còn nếu có sự trợ giúp của máy vi tính với một công thức chỉnh lý (corrector) phù hợp trong một thuật toán không phức tạp, có thể nhanh chóng thu được kết quả chính xác. Vấn đề ở đây là nắm được bản chất bài toán thì mới có được thuật toán tốt.



Hình 6.2

Xét thêm trường hợp đường ống nối tiếp bằng các đoạn ống có đường kính khác nhau (xem hình 6.3). Lúc này phương trình Bernoulli có dạng :

$$z_A - z_B = H = h_{w1} + h_{w2} + \dots + h_{wn}$$



Hình 6.3

trong đó : $h_{w1}, h_{w2}, \dots, h_{wn}$ là tổn thất của đoạn 1, đoạn 2, ..., đoạn n tương ứng. Như vậy, tổn thất cột nước tại đoạn ống thứ nhất có đường kính d_1 :

$$h_{w1} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \sum \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \lambda_1 \frac{16l_1 Q^2}{2g\pi^2 d_1^5} + \sum \zeta_1 \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d_1^4} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1^5} + \sum \frac{\zeta_1}{d_1^4} \right)$$

rút gọn để được :

$$h_{w1} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \frac{1}{d_1^4} \left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right)$$

Tương tự với các đoạn tiếp theo :

$$h_{w2} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \frac{1}{d_2^4} \left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right)$$

và ở đoạn cuối cùng

$$h_{wn} = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \frac{1}{d_n^4} \left(\frac{\lambda_n l_n}{d_n} + \sum \zeta_n + 1 \right) \quad (A)$$

Ở (A) trong ngoặc đơn có thêm số 1 bởi có thêm tổn thất động năng tại miệng xả. Do đó phương trình tính toán có dạng :

$$H = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \frac{1}{d_n^4} \left[\left(\frac{d_n}{d_1} \right)^4 \left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1} + \sum \zeta_1 \right) + \left(\frac{d_n}{d_2} \right)^4 \left(\frac{\lambda_2 l_2}{d_2} + \sum \zeta_2 \right) + \dots + \left(\frac{\lambda_n l_n}{d_n} + \sum \zeta_n + 1 \right) \right] \quad (6-5)$$

Đến đây ta có nhận xét : Cách giải bài toán thứ nhất và thứ 2 đều giống như trường hợp đường kính không đổi. Còn ở bài toán thứ 3 nếu đường ống là nhiều đoạn ống (ví dụ n đoạn) có đường kính khác nhau cần xác định thì bài toán trở nên không xác định vì phương trình (6-5) có n ẩn số. Như vậy để giải được, cần biết đường kính của n-1 đoạn để tính đường kính duy nhất của đoạn còn lại hoặc cho quy luật biến thiên đường kính giữa các đoạn, ví dụ như đường kính trong của đoạn kế tiếp bằng đường kính ngoài của đoạn liền kề trước nó,...

3. Tính toán đường ống dài có chế độ chảy ở khu vực bình phương sức cản

Tuỳ theo tỷ lệ giữa tổn thất cục bộ và tổn thất dọc đường của một đường ống mà người ta xếp nó vào loại đường ống ngắn hay đường ống dài. Trong đường ống dài tổn thất dọc đường nhiều lần lớn hơn tổn thất cục bộ ($\lambda \frac{l}{d} \gg \sum \zeta$) và cột nước vận tốc tại miệng xả ($\lambda \frac{l}{d} \gg 1$).

Thí dụ về đường ống dài có thể là các đường ống dẫn chính như đường ống dẫn nước ngọt từ Bà Rịa đi Vũng Tàu hay nhiều đoạn trong hệ thống ống dẫn xăng dầu từ Quảng Ninh đến một số tỉnh đồng bằng Bắc Bộ. Trong đường ống dài tổn thất cục bộ chỉ bằng 2% ÷ 3% tổn thất dọc đường. Chính vì vậy, để đơn giản việc tính toán với độ chính xác chấp nhận được, ta có thể bỏ qua tổn thất cục bộ.

Trường hợp đường ống ngắn (như ống hút của máy bơm, ống xiphông, cống luồn, v.v...) tổn thất cục bộ không thua kém tổn thất dọc đường, thậm chí còn lớn hơn nhiều lần (lưới chắn rác, lưới lọc, các bộ lọc siêu tinh,...). Như vậy đối với đường ống dài phương trình (6-1) và (6-2) có dạng :

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = h_w \quad (6-6)$$

Vậy là ở đường ống dài, toàn bộ tổn thất cột nước dùng để thắng lại sức cản do ma sát gây nên. Vì thế phương trình (6-3) được đưa về dạng :

$$H = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} Q^2 l \quad (6-7)$$

và với $A = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5}$ là sức cản đơn vị của đường ống ; $S = A l$ là sức cản đường ống :

$$H = A Q^2 l = S Q^2 \quad (6-8)$$

còn phương trình (6-4) có dạng :

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gHd}{\lambda l}} \quad (6-9)$$

hoặc :

$$Q = \sqrt{\frac{H}{A l}} = \sqrt{\frac{H}{S}} \quad (6-10)$$

Nếu ký hiệu :

$$K^2 = \frac{g\pi^2 d}{8\lambda} S = \frac{1}{A} \quad (6-11)$$

thì (6-8) có dạng :

$$H = \frac{Q^2 l}{K^2} \quad (6-12)$$

Thông số K có thứ nguyên là lưu lượng, được gọi là môđun lưu lượng hay đặc trưng lưu lượng của đường ống.

Các đại lượng A , S , K là các thông số thủy lực tổng hợp của đường ống, được sử dụng để đơn giản hoá, giảm thiểu nhầm lẫn trong tính toán. Để làm rõ điều này hãy sử dụng chúng vào việc tính toán trong khu vực bình phương sức cản.

Ở khu vực bình phương sức cản (sau đây ta dùng chỉ số $(_{bp})$ để phân biệt : A_{bp} và K_{bp}) A và K chỉ phụ thuộc vào đường kính và độ nhám của ống dẫn ; còn thông số S thì phụ thuộc vào cả chiều dài nữa. Vì vậy, ngay từ khởi đầu tính toán các đại lượng này đều có thể xác định được nhờ các bảng tra cứu do các phòng thí nghiệm hoặc nhà sản xuất ống cung cấp (xem phụ lục ở cuối sách).

Với các thông số này 3 bài toán cơ bản (xác định H , xác định Q , xác định d) ở trên sẽ dùng các công thức giải sau đây :

Trường hợp đường ống nối tiếp, trong $H = \sum_1^n h_{wi}$ thay từng số hạng dạng biểu thức (6-8) :

$$H = S_{bp1} Q^2 + S_{bp2} Q^2 + \dots + S_{bpn} Q^2 = Q^2 \sum_1^n S_{bpi} = Q^2 S_{bp0} \quad (6-13)$$

trong đó :

$$S_{bp0} = \sum_1^n S_{bpi} \quad (6-14)$$

Từ (6-13) :

$$Q = \sqrt{\frac{H}{S_{bp0}}} = \sqrt{\frac{H}{\sum_1^n S_{bpi}}} \quad (6-15)$$

4. Tính toán thủy lực đường ống ngoài khu vực bình phương sức cản

Đối với một số chất lỏng có độ nhớt cao (dầu thủy lực, dầu bôi trơn,...) các thông số A hoặc K không những phụ thuộc vào đường kính ống, độ nhám mà còn phụ thuộc vào vận tốc trung bình trong ống (tức là chế độ chảy). Do đó việc tính toán sẽ phức tạp hơn nhiều.

Công thức (6-8) có thể viết dưới dạng :

$$H = \frac{8\lambda Q^2 l}{\pi^2 g d^5} = \frac{\lambda}{\lambda_{bp}} \frac{8\lambda_{bp}}{\pi^2 g d^5} Q^2 l = \psi_{\lambda} A_{bp} Q^2 l \quad (6-16)$$

Ký hiệu : $\psi_{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{bp}}$ (6-17)

trong (6-16) là thừa số hiệu chỉnh do trên thực tế đường ống không làm việc ở khu vực bình phương sức cản, nhưng lại dùng A_{bp} để tính toán. Lúc đó (6-16) có dạng :

$$H = \psi_{\lambda} A_{bp} Q^2 l = \psi_{\lambda} S_{bp} Q^2 \quad (6-18)$$

Nếu xác định λ bằng công thức Altsul : $\lambda_{bp} = 0,11(k_{td}/d)^{0,25}$ thì hệ số hiệu chỉnh có dạng :

$$\psi_{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{bp}} = \left(1 + \frac{68 v}{v k_{td}}\right)^{0,25} \quad (6-19)$$

Thực vậy, từ hệ thức :

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{k_{td}}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} = 0,11 \left[\frac{k_{td}}{d} \left(1 + \frac{68/Re}{k_{td}/d} \right) \right]$$

thế biểu thức số Reynolds vào đây, được :

$$\lambda = 0,11 \left[\frac{k_{td}}{d} \left(1 + \frac{68}{v d / v} \frac{v}{k_{td} / d} \right) \right]^{0,25} = 0,11 \left(\frac{k_{td}}{d} \right)^{0,25} \times \left(1 + \frac{68 v}{v k_{td}} \right)^{0,25}$$

$$\psi_{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{td}} = \frac{0,11 \left(\frac{k_{td}}{d} \right)^{0,25} \left(1 + \frac{68 v}{v k_{td}} \right)^{0,25}}{0,11 \left(\frac{k_{td}}{d} \right)^{0,25}} = \left(1 + \frac{68 v}{v k_{td}} \right)^{0,25}$$

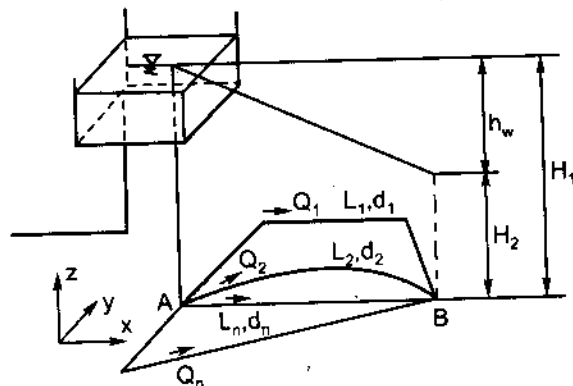
Trị số của ψ_{λ} có thể tra cứu từ bảng có dạng dưới đây (trong sổ tay tra cứu thủy lực)

Vận tốc v m/s	Trị số ψ_{λ} khi k_{td} tính bằng mm		
	$k_{td} = 0,1$	$k_{td} = 0,5$	$k_{td} = 1,0$
0,01	2,8	1,953	1,67
0,1	1,67	1,239	1,14
0,2	1,45	1,138	1,08
0,3	1,35	1,098	1,05
0,4	1,28	1,076	1,04
0,5	1,24	1,062	1,03
1,0	1,14	1,032	1,015
2,0	1,08	1,016	1,00
3,0	1,05	1,011	1,00
4,0	1,04	1,008	1,00
5,0	1,03	1,006	1,00

5. Tính toán thủy lực đường ống phức tạp

Tính toán thủy lực đường ống/mạng lưới phức tạp có xét đến sự thay đổi lưu lượng theo thời gian ứng với nhu cầu sử dụng của các hộ tiêu thụ là một bài toán rất phức tạp. Bài toán của trường hợp này là đối tượng của môn học chuyên ngành (cấp thoát nước,...). Ở đây ta chỉ nghiên cứu các sơ đồ cơ bản nhất của chúng mà thôi như : các đường ống ghép song song, phân phối đều dọc đường, mạng hở, mạng khép kín. Trong tất cả các trường hợp đề cập dưới đây đều giả thiết là đường ống có chiều dài lớn, đều làm việc ở khu vực bình phương sức cản.

5.1. Đường ống nối song song (liên hệ với mạng điện). Trên hình 6.4 tại điểm A mạng ống chia thành nhiều nhánh để rồi nhập lại tại B ; lưu lượng trong ống chính Q trước khi chia nhánh và sau khi hợp lại là như nhau, không đổi. Yêu cầu của bài toán ở đây là : xác định lưu lượng nhánh Q_i trong từng nhánh.



Hình 6.4

Lưu lượng Q, đường kính ống ($d_1, d_2, \dots, d_n$) và chiều dài của các nhánh ($l_1, l_2, \dots, l_n$) là các đại lượng biết trước.

Cách giải : Theo ý nghĩa vật lý A, B là các đầu mút chung, vì vậy tổn thất ở các nhánh này phải bằng nhau, tức là :

$$h_w = H_1 - H_2 = h_{w1} = h_{w2} = h_{w3} = \dots = h_{wn} \quad (6-20)$$

Đối với nhánh thứ nhất có thể viết : $h_w = S_1 Q_1^2$

và tương tự : $h_w = S_i Q_i^2 ; (i = \overline{1, n}) \quad (6-21)$

hoặc : $Q_i = \sqrt{\frac{h_w}{S_i}} ; (i = \overline{1, n}) \quad (6-22)$

Ta đã biết (như một điều kiện cho trước) :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \sum_1^n Q_i \quad (6-23)$$

nên nếu sử dụng (6-22) ta có :

$$Q = \sqrt{h_w} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{S_n}} \right) = \sqrt{h_w} \sum_1^n \frac{1}{\sqrt{S_i}} \quad (6-24)$$

Nếu dùng khái niệm độ thoát của đường ống $T = \frac{1}{\sqrt{S}}$ và dùng ký hiệu $T_0 = \sum T_i$ thì :

$$Q = T_0 \sqrt{h_w} \quad (6-25)$$

Như vậy, trong hệ đường ống mắc song song độ thoát của hệ bằng tổng độ thoát của các nhánh (tương tự như điện trở của mạng nối song song trong điện học).

Tiếp sau đây ta tính h_w để rồi từ đó tính được các Q_i , ($i = \overline{1, n}$):

$$\text{Từ (6-25) có: } h_w = (Q/T_0)^2 \quad (6-26)$$

và theo (6-22) ta suy ra lưu lượng Q_i của từng nhánh:

$$Q_i = \sqrt{\frac{h_w}{S_i}} = T_i \sqrt{h_w} = \frac{T_i}{T_0} Q; i = \overline{1, n}. \quad (6-27a)$$

Nếu mở rộng ra ngoài khu vực bình phương sức cản thì ta cũng phải dùng hệ số hiệu chỉnh cho phù hợp với chế độ chảy và đối với nhánh i nào đó ta có:

$$S_i = \frac{8}{\pi^2 g} \psi_{\lambda i} \frac{\lambda_{bpi} l_i}{d_i^5} = \psi_{\lambda i} A_{bpi} l_i \quad (6-27b)$$

trong đó: $\psi_{\lambda i}$ là hệ số điều chỉnh đối với nhánh i , tính theo (6-19) hoặc tra bảng,

A_{bpi} là sức cản đơn vị của nhánh i , nếu làm việc trong khu vực bình phương sức cản.

Sau khi biết được hệ số hiệu chỉnh của những nhánh cần điều chỉnh và nếu coi l là trị số của hệ số điều chỉnh ở các nhánh không cần điều chỉnh thì lưu lượng thực của nhánh k (Q'_k) nào đó sẽ là:

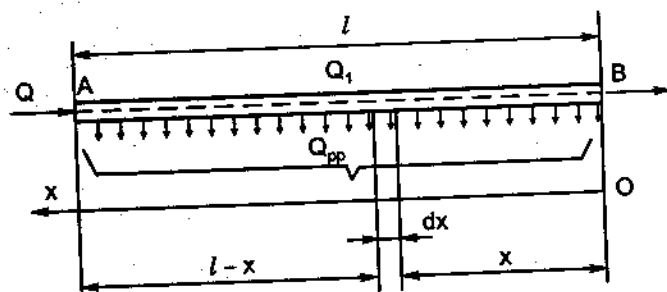
$$Q'_k = \frac{Q}{1 + \sum_{i=1, i \neq k}^n \left(\frac{S_k \psi_{\lambda i}}{S_i \psi_{\lambda k}} \right)^{1/2}} \quad (6-27c)$$

Còn tổn thất cột áp của nhánh bất kỳ k hay của cả hệ được xác định theo công thức:

$$h_w = S_k \psi_{\lambda k} Q_k^2; (k \in n)$$

5.2. Lưu lượng phân phối đều, liên tục dọc tuyến dẫn

Dạng này thường gặp trong sản xuất như trường hợp các ống nước làm mát ở mái một số loại kho chứa, trong nông nghiệp.... Nhiệm vụ của bài toán là tính tổn thất cột áp do ma sát gây nên.



Hình 6.5

Do các điểm trích nước nằm đều, rất sát nhau nên trong mô hình tính toán coi như phân phối liên tục / dần đều, vì vậy lưu lượng trong ống liên tục giảm đều dọc theo chiều chảy. Tóm lại:

$$Q = v \times \Omega \neq \text{const.}$$

Giả sử trên toàn chiều dài phân phối l lượng chất lỏng được phân phối là Q_{pp} thì cứ mỗi một đơn vị chiều dài dòng chất lỏng cấp đi một lượng là Q_{pp}/l . Nếu gọi Q_1 là lưu lượng còn lại sau khi kết thúc đoạn phân phối đều (l) thì :

$$Q = Q_{pp} + Q_1 \quad (6-28)$$

Bây giờ hãy xác định tổn thất cột áp cho đoạn nằm giữa hai điểm A, B. Theo giả thiết ở trên, với nguyên tố sức cản chiều dài $dS = A dx$, có :

$$dh_{ms} = A Q_1^2 dx \quad (6-29)$$

mà ở đây Q_1 là lưu lượng qua mặt cắt 1-1 trên hình 6.5. Theo ý nghĩa của (6-28) :

$$Q_1 = Q_1 + \frac{Q_{pp}}{l} x \quad (6-30)$$

Sử dụng (6-30) vào (6-29) được :

$$dh_{ms} = A \left(Q_1 + \frac{Q_{pp}}{l} x \right)^2 dx = A \left(Q_1^2 + Q_{pp}^2 \frac{x^2}{l^2} + 2Q_1 Q_{pp} \frac{x}{l} \right) dx \quad (6-31)$$

Thực hiện phép tích phân xác định cận dưới 0, cận trên l :

$$h_{ms} = \int_0^l A \left(Q_1^2 + Q_{pp}^2 \frac{x^2}{l^2} + 2Q_1 Q_{pp} \frac{x}{l} \right) dx$$

lấy $A = A_{bp}$ và coi như nó không đổi trên suốt chiều dài l , ta dễ dàng thực hiện phép tích phân để được kết quả :

$$h_{ms} = A_{bp} Q_1^2 l + A_{bp} Q_{pp}^2 \frac{l^3}{3l^2} + 2A_{bp} Q_1 Q_{pp} \frac{l^2}{2l} = A_{bp} l \left(Q_1^2 + \frac{1}{3} Q_{pp}^2 + Q_1 Q_{pp} \right) \quad (6-32)$$

Trong trường hợp phân phối hết, tương đương với việc bịt kín đầu B, $Q_1 = 0$ và từ công thức (6-32) có :

$$h_{ms} = \frac{1}{3} A_{bp} Q_{pp}^2 l \quad (6-33)$$

Từ kết quả này có thể rút ra kết luận : *Tổn thất cột áp của đường ống phân phối đều dọc tuyến ống 3 lần nhỏ hơn tổn thất cột áp khi toàn bộ lưu lượng đi qua mà không phân phối đều dọc tuyến* (bởi $A_{bp} Q_{pp}^2 l$ chính là tổn thất của đoạn ống bình thường chiều dài l). Đương nhiên so sánh này cũng không thật chính xác vì rất có thể ở phần cuối ống chế độ chảy đã có sự thay đổi về chất (chuyển sang chảy tầng, ngoài khu vực bình phương sức cản), lúc này $\lambda = f(Re)$ hoặc $\lambda = f(v)$, A , S đều thay đổi, làm cho kết quả lệch đi, không hoàn toàn như (6-33) mà từ (6-32) chỉnh lý thành :

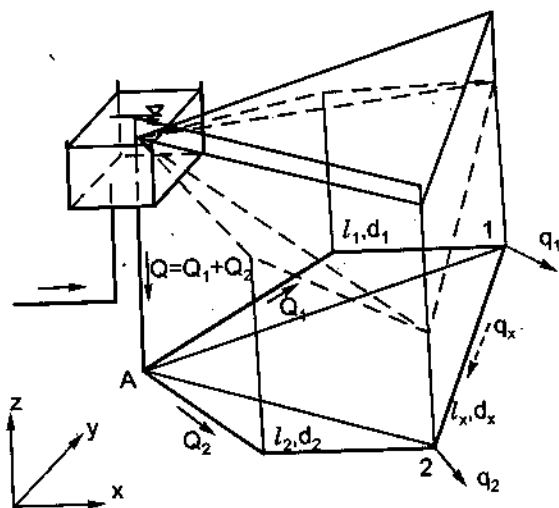
$$h_{ms} = A_{bp} \psi_\lambda B \left(Q_1^2 + \frac{1}{3} Q_{pp}^2 + Q_1 Q_{pp} \right) \quad (6-34)$$

trong đó : B là hệ số hiệu chỉnh trị số λ do sự thay đổi vận tốc trung bình của dòng chất lỏng theo chiều dòng chảy.

Hệ số B có trị số thay đổi từ 1 (cho ống nhám hoàn toàn) đến 1,1 (cho ống trơn thủy lực).

5.3. Mạng đường ống khép kín

Nội dung cơ bản của bài toán ở đây là xác định cột áp H trong điều kiện cho trước các trị số lưu lượng tại các điểm có các hộ tiêu thụ (gọi là các lưu lượng nút) $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, sơ đồ bố trí đường ống, chiều dài các đoạn ống và đường kính của chúng (xem hình 6.6).



Hình 6.6

Ở đây ta chỉ nghiên cứu trường hợp đơn giản nhất khi mạng có 2 lưu lượng nút Q_1 (tại điểm 1) và Q_2 (tại điểm 2).

Xác định cột áp tại mặt cắt đầu là rất khó vì khởi thủy ta chưa biết cả lưu lượng, cả hướng chảy của chất lỏng trong mạng giữa nút 1 và nút 2 cũng như lưu lượng của các đoạn khác trong hệ đường ống này.

Nếu chất lỏng chảy từ nút 1 đến nút 2, lưu lượng của đường ống trên đoạn A - 1 (nhánh đi từ A đến nút 1) sẽ là :

$$Q_1 = q_1 + q_x \text{ và } Q_2 = q_2 - q_x$$

Còn nếu chất lỏng chảy từ nút 2 đến nút 1, lưu lượng trên đoạn A - 1 sẽ là :

$$Q_1 = q_1 - q_x \text{ và } Q_2 = q_2 + q_x$$

Vì vậy, trước hết cần phải biết hướng của dòng chảy trong mạng lưới. Ta gọi điểm gặp nhau, điểm hợp (điểm hội) là điểm có dòng chảy đi từ 2 phía đến. Vị trí của điểm hợp trên mạng lưới xác định hướng chảy của toàn mạng lưới. Tổn thất từ điểm chia nhánh ở đường ống chính (trên hình vẽ là điểm A) đến điểm hợp tính theo bất kỳ nhánh nào đều như nhau. Ví dụ, nếu nút 2 là điểm hợp của mạng này thì :

$$\sum_{A-2} h_w = \sum_{A-1} h_w + \sum_{1-2} h_w \quad (6-35)$$

Trong trường hợp này nếu bỏ qua tổn thất cục bộ do coi đây là đường ống dài, đồng thời nếu bỏ qua số hạng thứ 2 trong vế phải của (6-35), có thể viết bất đẳng thức :

$$\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{(q_2 - q_x)^2}{2g\Omega_2^2} > \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{(q_1 + q_x)^2}{2g\Omega_1^2}$$

và nếu bỏ q_x trong bất phương trình này thì vế phải lại càng nhỏ hơn so với vế trái vì động tác này tương đương với việc thêm vào đại lượng trong ngoặc của vế trái một lượng q_x và bớt đi của đại lượng trong ngoặc của vế phải một lượng q_x khiến cho vế trái càng lớn hơn và dấu bất đẳng thức vẫn giữ nguyên :

$$\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{q_2^2}{2g\Omega_2^2} > \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{q_1^2}{2g\Omega_1^2}$$

hoặc viết dưới dạng khác : $A_2 q_2^2 l_2 > A_1 q_1^2 l_1$

Nếu bất đẳng thức này không xác lập, thì sự thật sẽ phải là ngược lại :

$$A_2 q_2^2 l_2 < A_1 q_1^2 l_1$$

và lúc đó điểm hợp sẽ là nút 1. Vị trí của điểm gặp nhau, điểm hội được xác định bằng tổn thất cột áp từ nút A của đường ống chính đến nút 1 và 2.

Cũng giống như khi tính toán trên mạng điện phức tạp, người ta cũng cứ vẽ sơ đồ dòng rồi ghi lên đó các hướng đi của dòng trên các đoạn điện trở cho trước. Nếu giá trị của cường độ I tính ra là một số âm thì có nghĩa chiều chảy phải là ngược lại.

Sau khi giải quyết xong vấn đề của điểm hợp, cột nước ban đầu cần biết được xác định theo một nhánh tùy chọn, theo một hướng tùy ý, tính từ mặt cắt ban đầu đến điểm hợp. Ví dụ, nếu trong bài toán có sơ đồ đề cập ở trên, điểm nút 2 là điểm hợp thì z_2 là cao độ của điểm nút 2 so với mặt chuẩn thống nhất.

$$H = z_2 + \sum_{0-A-2} h_w$$

5.4. Mạng lưới đường ống hở (đơn giản)

Các bài toán cơ bản ở đây tập trung vào 2 vấn đề sau :

- + Xác định các lưu lượng đầu cuối Q_1 và Q_2 dưới cột nước cho trước tại mặt cắt đầu,
- + Xác định cột áp H khi cho trước lưu lượng đầu cuối Q_1 và Q_2 .

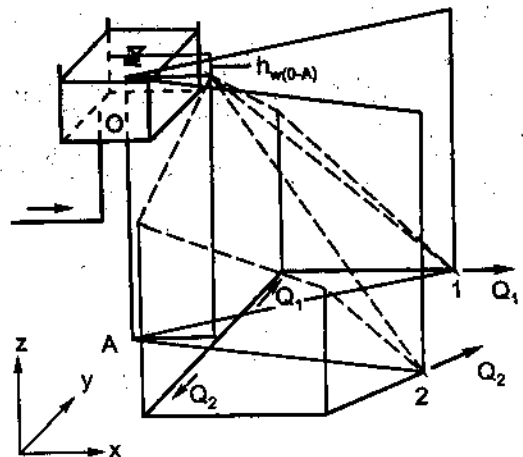
Bây giờ hãy đề cập đến bài toán thứ 1 : Để xác định Q_1 và Q_2 hãy viết phương trình Bernoulli cho dòng chảy theo tuyến từ mặt cắt đầu của đường ống chính đến mặt cắt ra của nhánh thứ nhất, (đọc theo đường O-A-1), rồi sau đó theo nhánh thứ 2 :

$$H_0 = z_1 + h_{w(O-A)} + h_{w(A-1)} \quad (6-36)$$

$$\text{sau đó :} \quad H_0 = z_2 + h_{w(O-A)} + h_{w(A-2)} \quad (6-37)$$

trong đó : $h_{w(O-A)}$ tổn thất cột nước trên đoạn đường ống chính O-A, $h_{w(A-1)}$ và $h_{w(A-2)}$ là tổn thất cột nước trên nhánh 1 và 2.

Nếu Q_1 là lưu lượng của nhánh 1 và Q_2 là lưu lượng của nhánh 2 thì lưu lượng trên đường ống chính là $Q = Q_1 + Q_2$, trên cơ sở đó ta có thể viết (6-36) và (6-37) dưới dạng khác (bỏ qua cột nước vận tốc tại miệng ra đầu cuối) với D là L là đường kính và chiều dài của đường ống chính :



Hình 6.7

$$h_{w(O-A)} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum \zeta \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right)$$

$$= \frac{8(Q_1 + Q_2)^2}{\pi^2 g D^4} \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right)$$

Nếu ký hiệu :

$$B = \frac{8}{g \pi^2 D^4} \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right)$$

ta có :

$$h_w = B(Q_1 + Q_2)^2$$

Tương tự như vậy, ở các nhánh :

$$h_{w(A-1)} = \frac{8Q_1^2}{g \pi^2 d_1^4} \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \sum \zeta \right) = B_1 Q_1^2$$

$$h_{w(A-2)} = \frac{8Q_2^2}{g \pi^2 d_2^4} \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \sum \zeta \right) = B_2 Q_2^2$$

Các đại lượng B, B₁ và B₂ là các đại lượng liên quan đến sức cản của đường ống tương ứng. Thực vậy :

$$B = \frac{8}{g \pi^2 D^4} \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum \zeta \right) = \frac{8\lambda}{g \pi^2 D^5} L + \frac{8}{g \pi^2 D^4} \sum \zeta$$

nhưng :

$$8\lambda / (g \pi^2 D^5) = A.$$

Vì vậy :

$$B = AL + \frac{8}{\pi^2 D^4} \sum \zeta$$

Và tương ứng :

$$B_1 = Al_1 + \frac{8}{\pi^2 d_1^4} \sum \zeta$$

$$B_2 = Al_2 + \frac{8}{\pi^2 d_2^4} \sum \zeta$$

Khi có thể bỏ qua sức cản cục bộ, nghĩa là tổn thất dọc đường có trị số lớn gấp nhiều lần thì như ở đường ống dài :

$$B = AL = S ; B_1 = Al_1 = S_1 ; B_2 = Al_2 = S_2$$

Trong trường hợp các điều kiện đảm bảo hệ đường ống làm việc ở khu vực bình phương sức cản, các hệ số λ , ζ và do đó B, B₁ và B₂ đều xem như đã biết. Trên cơ sở đó :

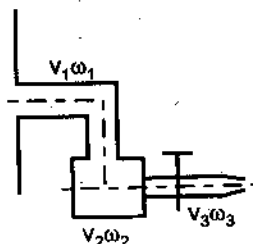
$$H_0 = Z_1 + B(Q_1 + Q_2)^2 + B_1 Q_1^2 \quad (6-38)$$

$$H_0 = Z_2 + B(Q_1 + Q_2)^2 + B_2 Q_2^2 \quad (6-39)$$

Giải hệ phương trình trên ta có được Q₁ và Q₂. Đây là phương trình phi tuyến đối với Q₁ và Q₂. Do vậy tốt nhất ta giải bằng phép lặp để nếu cần thì kết hợp với việc sử dụng hệ số hiệu chỉnh ψ_λ , nếu chế độ chảy nằm ngoài khu vực bình phương sức cản. Với máy tính việc giải không khó.

6. Các đặc điểm trong tính toán thủy lực đường ống ngắn

Đặc điểm của đường ống ngắn là tổng tổn thất cục bộ trong nó tương đương với tổn thất dọc đường (hoặc có khi là thành phần chủ yếu của tổn thất đường ống). Vì vậy trong tính toán đường ống loại này, không thể bỏ qua tổn thất cục bộ như trường hợp hình 6.8.



Hình 6.8

6.1. Bài toán cơ bản ở đây là xác định lưu lượng Q của đường ống

Để có được công thức xác định Q trong trường hợp này, có thể xuất phát từ phương trình (6-5) đưa về dạng :

$$Q = \mu_c \omega \sqrt{2gh} \quad (6-40)$$

trong đó : ω là diện tích miệng ra của ống đổ vào khí quyển,
 μ_c là hệ số lưu lượng hệ thống được tính từ biểu thức dưới đây

$$\mu_c = \left[1 + \sum \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{\omega^2}{\omega_i^2} + \sum \zeta_i \frac{\omega^2}{\omega_i^2} \right]^{-0,5} \quad (6-41)$$

trong đó : $\lambda_i, l_i, d_i, \omega_i$ lần lượt là hệ số ma sát thủy lực, chiều dài, đường kính, diện tích mặt cắt ướt của các đoạn ống ngắn, còn ζ_i là các hệ số sức cản cục bộ sinh ra trên các đoạn ống ngắn (đồng nhất trên 1 ống) nói trên (tính với vận tốc trung bình).

- Vận tốc tại miệng ra vào khí quyển được xác định theo công thức :

$$v = Q/\omega = \mu_c \sqrt{2gh} \quad (6-42)$$

- Đối với đường ống có đường kính cố định suốt chiều dài và trên đường ống ấy có tổn thất cục bộ thì công thức (6-41) có dạng :

$$\mu_c = \left(1 + \sum \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \sum \zeta_i \right)^{-0,5} \quad (6-41a)$$

Khi tổn thất dọc đường của đường ống quá lớn, là chủ đạo thì (6-41a) có dạng :

$$\mu_c = 1/\sqrt{\lambda l/d} = \left(\frac{\lambda l}{d} \right)^{-0,5}$$

Thế trị số μ_c vào (6-40) và sau khi biến đổi, rút gọn ta có :

$$H = \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 d^5} = A/Q^2 = SQ^2$$

Vậy là ta đã trở về với công thức quen biết trong tính toán thủy lực đường ống.

Nếu trong (6-42), tổn thất cục bộ là vượt trội :

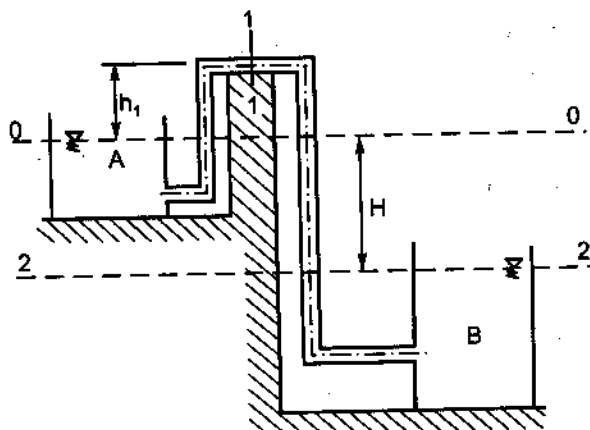
$$\mu_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \zeta_i}} = \left(1 + \sum \zeta_i \right)^{-0,5}$$

Trong tính toán ống ngắn (theo công thức (6-40) và (6-41) ta đã không xét đến tương tác giữa các sức cản cục bộ) các trị số của các hệ số ζ và λ đều được lấy ứng với chế độ chảy bình phương sức cản.

Cần chú ý trong tính toán thủy lực của một số loại đường ống có những đặc điểm riêng mà ta sẽ khảo sát dưới đây.

6.2. Tính toán ống xiphông

Ta nghiên cứu một dạng đường ống làm việc dưới tác dụng của chân không, đó là ống xiphông. Ống xiphông là đường ống nối liền 2 bể chứa có một đoạn đặt cao hơn mực nước cao nhất của bể chứa trên (hình 6.9).



Hình 6.9

Chuyển động của chất lỏng trong ống xiphông xảy ra dưới tác dụng của độ chênh mực nước giữa 2 bể chứa H . Để xiphông đi vào hoạt động được, trước hết phải đuổi hết không khí ở phần nằm cao nhất bằng bơm hút chân không. Lúc này nhờ trong ống có chân không - do có độ chênh áp suất ở mặt thoáng của bình / bể chứa trên (A) là áp suất khí quyển, còn ở trong ống là áp suất chân không nên nước bắt đầu dâng lên và chảy vào đoạn nhô cao, rồi xuống phần hút của ống đi xuống bình chứa dưới (B) qua phần còn lại của ống gọi là đoạn hút của xiphông (còn gọi là nhánh xả của ống).

Ống xiphông được sử dụng rộng rãi trong đời sống với tính chất là một ống xả trong công trình thủy, là thiết bị hút nước các bể chứa, hồ chứa, ... Tính toán ống xiphông dựa vào công thức (6-40). Trong tính toán ta buộc phải xác định chiều cao nước dâng của xiphông là h_1 (trong hình vẽ). Để xác định chiều cao đó hãy viết phương trình Bernoulli cho 2 mặt cắt 0-0 và 1-1 với mặt chuẩn là 0-0 :

$$\frac{P_a}{\rho g} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + h_{w(0-1)}$$

$$\text{Do đó : } h_1 = \frac{P_a - P_1}{\rho g} - \frac{v_1^2}{2g} - h_{w(0-1)} \quad (6-43)$$

Với trị số chân không lớn nhất (trong thực tế chỉ đạt được trị số lớn nhất là 0,07MPa), để tăng được trị số chiều cao dâng nước của xiphông h_1 phải bằng mọi cách giảm các số hạng 2 và 3 trong vế phải của (6-43), tức là giảm vận tốc và tổn thất trong nhánh hút của xiphông.

$$\text{Từ (6-42) ta có : } \frac{v_1^2}{2g} = \mu_c H$$

Khi cột nước H cho trước, để giảm cột áp vận tốc trong (6-43), ta phải giảm v_1 , tức là giảm μ_c hoặc nói cách khác, phải tăng tổn thất cột nước $h_{w(0-2)}$. Việc tăng chiều cao dâng nước h_1 của xiphông chỉ thực hiện được bằng cách tăng tổn thất $h_{w(0-2)}$ (ví dụ lắp 1 khoá trên nhánh xả). Tuy nhiên việc tăng chiều cao giới hạn dâng nước của xiphông sẽ làm giảm khả năng thoát (tức là lưu lượng) của xiphông : Q .

Đối với một ống xiphông đã cho, có thể lập quan hệ $h_1 = f(Q)$ là đặc trưng của xiphông. Đường biểu diễn quan hệ hàm này (với các thông số khác nhau) gọi là đường đặc tính của xiphông.

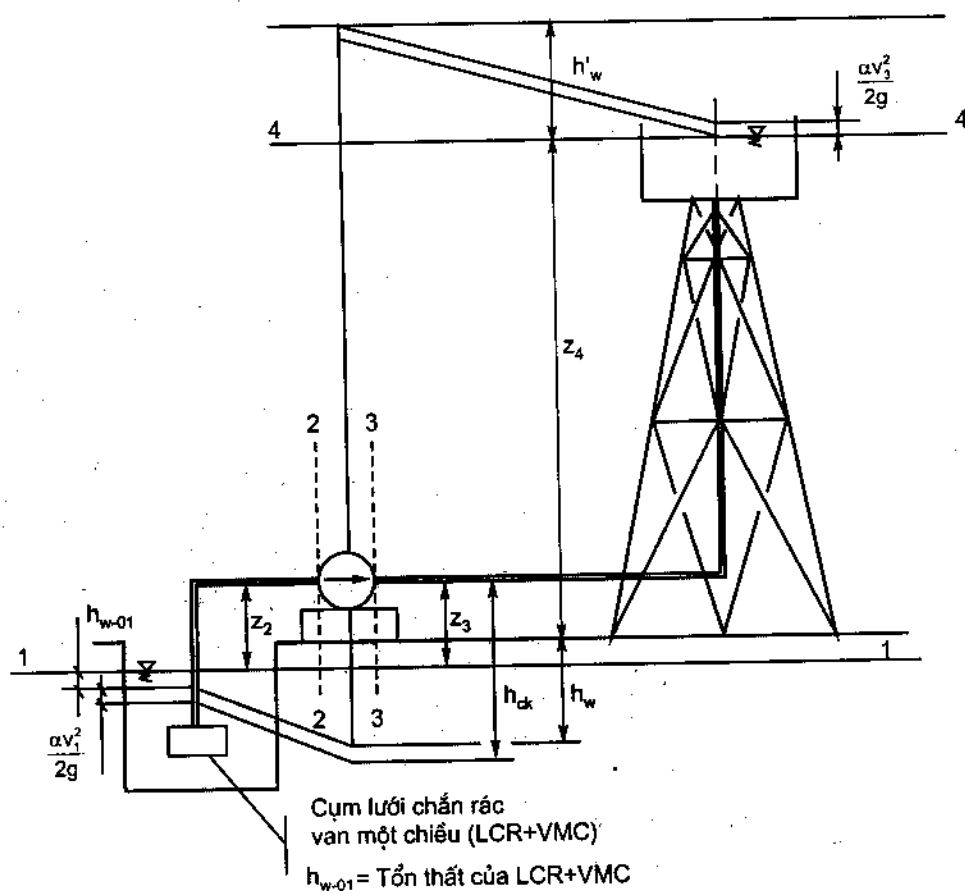
7. Tính toán thuỷ lực đường ống cho máy bơm li tâm

Trong tính toán thuỷ lực đường ống cho máy bơm li tâm người ta chia làm 2 phần

- Phần đường hút : đường ống từ bể chứa đến máy bơm.
- Phần đường ống đẩy : đường ống nối bơm với tháp chứa.

7.1. Tính toán đường ống hút

Đường ống hút có những đặc điểm sau :



Hình 6.10

Trong đường ống hút, trừ một đoạn ống hút đặt ngập dưới mặt nước ở một độ sâu nhất định, khi máy bơm làm việc áp suất trong ống nhỏ hơn áp suất khí quyển; tại cao độ nơi ống hút lắp vào máy bơm (mặt cắt 2-2 trên hình 6.10) áp suất chân không đạt cực đại (đây là loại bơm đặt ở độ cao trên mặt thoáng bể chứa bơm hút nước đi). Chính vì lý do đó nếu bơm không có bộ phận tạo chân không ban đầu, lúc khởi động người ta phải mở để điền đầy nước trong bơm và toàn đường ống hút (vì ở đầu hút trong bộ phận hút có đặt một van một chiều – thiếu nó rất khó hoặc không thể mở được). đương nhiên áp suất chân không đó phải có trị số nhỏ hơn áp suất hơi bão hoà vì nếu ngược lại, nước trong ống sẽ sôi ở nhiệt độ bình thường và trong không gian của ống hút có các bọt hơi, là chất lỏng chịu nén, bơm không thể khởi động được. Vì vậy, cần hạn chế độ lớn v_1 để cùng với áp suất chân không nước vẫn không sôi. Thường người ta khống chế vận tốc trong ống hút dao động từ $0,8 \div 1,25 \text{ m/s}$; trị số chân không cho phép của tùy từng loại bơm, nói chung là khác nhau song thường lấy $h_{ck} < 4,0 \div 6,5 \text{ m}$ cột nước. Ở một loại máy bơm đã cho h_{ck} phụ thuộc vào nhiệt độ của chất lỏng và môi trường xung quanh với quy luật: nhiệt độ tăng, h_{ck} giảm.

Thường ống hút của bơm không dài lại do có các thiết bị lắp trên nó (van 1 chiều và lưới chắn rác) nên tổn thất cục bộ trội hẳn và vì vậy, ống hút thuộc loại đường ống ngắn.

Sau đây ta bắt tay vào công việc tính toán. Viết phương trình Bernoulli cho 2 mặt cắt 1-1 và 2-2:

$$0 + \frac{P_a}{\rho g} + 0 = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (6-44)$$

trong đó:

$$h_w = \left(\zeta_{van, van} + \zeta_{uon} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v_2^2}{2g} = \sum \zeta_i \frac{v_2^2}{2g}$$

gọi độ cao chân không là: $h_{ck} = \frac{P_a - P_2}{\rho g}$

Phương trình (6-44) có thể viết dưới dạng:

$$h_{ck} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} \sum \zeta_i$$

hoặc:

$$z_2 = h_{ck} - \left(1 + \sum \zeta_i \right) \frac{v_2^2}{2g} \quad (6-45)$$

là phương trình cơ bản để tính ống hút. Qua đây thấy độ cao đặt máy bơm (z_2) cũng bị độ chân không hạn chế. Ở một máy bơm cụ thể khi trị số chân không cho phép $h_{ck} = (h_{ck})_{cp}$ đã biết ta xác định được độ cao cho phép (tối đa):

$$(z_2)_{cp} = (h_{ck})_{cp} - \left(1 + \sum \zeta_i \right) \frac{v_2^2}{2g} \quad (6-46)$$

7.2. Tính toán thủy lực đường ống đẩy

Nhờ cơ năng do (các lá cánh) bơm truyền cho chất lỏng ứng với cột áp H_b là năng lượng tăng thêm cho một đơn vị trọng lượng chất lỏng, ta viết phương trình Bernoulli cho 2 mặt cắt 2-2 và 3-3:

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + H_b = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} \quad (6-47)$$

Thông thường người ta lấy $z_3 = z_2$; $v_3 = v_2$ (đường kính của ống đẩy và ống hút bằng nhau), khi đó (với $\alpha_2 = \alpha_3$) ta có :

$$\frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + H_b \quad (6-48)$$

Lại viết phương trình Bernoulli cho 2 mặt cắt 3-3 và 4-4 :

$$z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} = z_4 + 0 + h'_w \quad (6-49)$$

trong đó : h'_w là tổn thất cột nước của đoạn ống đẩy từ máy bơm lên tháp nước.

Khi tính toán đường ống đẩy, tùy theo từng trường hợp cụ thể có thể tính theo đường ống ngắn hay đường ống dài.

$$\text{Gọi :} \quad h'_w = \sum \zeta_i \frac{v_3^2}{2g} \quad (6-50)$$

và giải kết hợp 3 phương trình (6-47), (6-48) và (6-49) ta được :

$$H_b = z_4 + h_w + h'_w$$

$$\text{hoặc :} \quad H_b = z_4 + \sum \zeta_i \frac{v_2^2}{2g} + \sum \zeta_i \frac{v_3^2}{2g} \quad (6-51)$$

Từ phương trình này thấy bơm phải cung cấp một năng lượng sao cho

- Đưa được nước lên độ cao z_4 để vào được bể ;
- Thắng được lực cản của đường ống đẩy và ống hút.

8. Bài toán đầu tư bơm

Mua, lắp đặt và vận hành thiết bị là bài toán kinh tế phụ thuộc vào nhiều yếu tố. Ta cần phải dung hoà để có được phương án tối ưu theo yêu cầu, nhiều khi kinh phí đầu tư mua thiết bị và lắp đặt chưa phải là tất cả.

8.1. Xác định công suất máy bơm

Là bài toán thường gặp trong kỹ thuật, đối với các kỹ sư ngành xây dựng cũng là vấn đề cần quan tâm. Vì vậy, ở đây ta xét một cách đại cương nhất với tư cách là người mua thiết bị, lắp đặt, vận hành.

Nếu biểu thị lưu lượng của máy bơm bằng m^3 trong một giây (m^3/s), tổ máy bơm (bơm và động cơ) cung cấp một năng lượng đặc trưng là H_b khi biết hiệu suất của máy bơm $\eta_{\text{bơm}}$ và hiệu suất của động cơ $\eta_{\text{động cơ}}$ thì công suất cần phải cung cấp cho tổ bơm là :

$$N = \frac{\gamma Q H_b}{\eta_{\text{bơm}} \eta_{\text{động cơ}}} \text{ W (Watt)} \quad (6-52)$$

$$N = \frac{\gamma Q H_b}{1000 \eta_{\text{bơm}} \eta_{\text{động cơ}}} \cdot \text{kW} \quad (6-53)$$

trong đó : Q là lưu lượng của máy bơm tính ra m^3/s ; γ là trọng lượng thể tích (trọng lượng riêng) của chất lỏng tính bằng N/m^3 .

8.2. Phân bổ công suất

Trong công suất phát ra từ máy bơm người ta chia nó làm 2 phần để làm rõ ý nghĩa vai trò của các yếu tố chi phối việc đầu tư vận hành và duy tu trong suốt quá trình tồn tại của tổ máy :

- **Phần giành cho việc đưa lượng nước lên độ cao hình học (cao trình) z_4 :**

$$N_1 = \frac{\gamma Q z_4}{1000 \eta_{\text{bơm}} \eta_{\text{động cơ}}} ; \text{kW} \quad (6-54)$$

công suất này không phụ thuộc đường kính ống.

- **Phần giành cho việc thắng được toàn bộ lực cản trên đường ống hút và đường ống đẩy :**

$$N_2 = \frac{\gamma Q (h_w + h'_w)}{1000 \eta_{\text{bơm}} \eta_{\text{động cơ}}} ; \text{kW} \quad (6-55)$$

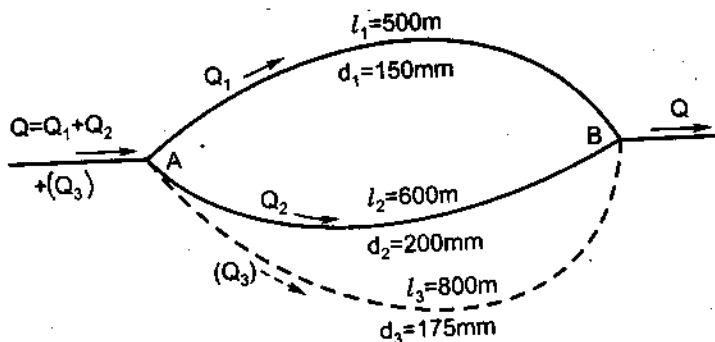
Phần công suất này phụ thuộc vào đường kính ống và sơ đồ của hệ thống ống đẩy và hút.

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG VI

Bài 1. Mạng ống cấp nước sinh hoạt gồm 2 ống mắc song song từ điểm A đến điểm B cho lưu lượng $Q = 120 \text{ l/s}$. Sau nhiều năm sử dụng ống đã trở nên cẩu thả làm cho lưu lượng nước bị giảm, trong khi đó nhu cầu nước lại tăng. Nhằm cải thiện tình hình, người ta lên kế hoạch mắc thêm một đường ống song song thứ 3, cũng từ A đến B. Biết rằng áp lực nguồn (đến đầu A) như cũ, không có gì thay đổi. Kích thước của các đường ống ghi trên sơ đồ mạng ở hình 6.11.

Hỏi :

- + Lưu lượng của ống 1 (Q_1) và ống 2 (Q_2) lúc còn mới là bao nhiêu ?
 - + Lưu lượng của hệ (hai ống) khi đã xuống cấp còn lại là bao nhiêu, so với lúc mới giảm đi (coi như bị tổn thất) bao nhiêu % ?
 - + Sau cải tạo, nhờ có ống thứ 3 lưu lượng của hệ (3 ống) tăng lên bao nhiêu % so với trước lúc cải tạo và so với hệ 2 ống lúc mới ?
- Độ nhớt động học trong điều kiện vận hành hệ thống $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.



Hình 6.11

Giải :

Tính lưu lượng Q_1 và Q_2

Ta vận dụng công thức (6-7) hay (6-12) với môđun lưu lượng K (còn gọi là đặc trưng lưu lượng) và giả thiết rằng các ống dẫn làm việc trong khu vực bình phương sức cản ; dùng bảng đối số của Pavlôpxki hay Manning (bảng 5-1 và bảng 5-2 trang 241 sách đã dẫn [2]).

Hai ống đầu tiên tra bảng được :

- Lúc mới xây dựng : $K_1 = 180,2 \text{ l/s}$; $K_2 = 388,0 \text{ l/s}$

- Lúc đã cũ : $K'_1 = 138,6 \text{ l/s}$; $K'_2 = 298,5 \text{ l/s}$.

Theo sơ đồ song song thì : $H = H_1 = H_2$

nên :
$$H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 \rightarrow Q_2 = Q_1 \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = Q_1 \frac{388 \text{ l/s}}{180,2 \text{ l/s}} \sqrt{\frac{500 \text{ m}}{600 \text{ m}}} = 1,9655 Q_1$$

và từ :
$$Q = Q_1 + Q_2$$

có :
$$Q = Q_1 + 1,9655 Q_1 = 2,9655 Q_1 = 120 \text{ l/s}.$$

Suy ra :
$$Q_1 = 40,47 \text{ l/s},$$

$$Q_2 = 79,53 \text{ l/s}.$$

Tổn thất cột nước của hệ 2 ống :
$$H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 = \frac{(40,47 \text{ l/s})^2}{(180,2 \text{ l/s})^2} \times 500 = 25,2 \text{ m}.$$

Đến đây cần kiểm tra lại giả thiết về chảy rối. Trước hết xác định vận tốc trung bình trong các ống

$$v_1 = \frac{Q_1}{\omega_1} = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 40,47 \text{ l/s}}{\pi \times (0,015 \text{ m})^2} = \frac{4 \times 40,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times 0,00225 \text{ m}^2} = 22,90 \text{ m/s} ;$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{\omega_2} = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 79,53 \text{ l/s}}{\pi \times (0,02 \text{ m})^2} = \frac{4 \times 79,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (0,02 \text{ m})^2} = 25,31 \text{ m/s}.$$

Số Reynolds ứng với ống 1 :
$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{22,9 \text{ m/s} \times 0,015 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 343500 \gg 2000.$$

$$\text{Số Reynolds ứng với ống 2 : } Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu} = \frac{25,31 \text{ m/s} \times 0,02 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 506200 \gg 2000.$$

Như vậy giả thiết chảy rối ban đầu để tra môđun lưu lượng là đúng, ta không cần điều chỉnh lại kết quả tính toán.

Lưu lượng của hệ khi đã xuống cấp.

Với cột nước này lúc 2 ống đã cũ lưu lượng đã giảm xuống chỉ còn :

$$Q'_1 = K'_1 \sqrt{\frac{H}{l_1}} = 138,6 \text{ l/s} \times \sqrt{\frac{25,2 \text{ m}}{500 \text{ m}}} = 31,11 \text{ l/s}$$

$$Q'_2 = K'_2 \sqrt{\frac{H}{l_2}} = 298,5 \text{ l/s} \times \sqrt{\frac{25,2 \text{ m}}{600}} = 61,17 \text{ l/s}$$

Lưu lượng của hệ chỉ còn :

$$Q' = Q'_1 + Q'_2 = 92,28 \text{ l/s}$$

Tức là chỉ còn :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{92,28 \text{ l/s}}{120 \text{ l/s}} = 0,769 = 77\%.$$

Tình hình sau cải tạo (sau khi lắp thêm ống thứ 3).

Ống thứ 3 là ống mới, tra bảng thấy $K_3 = 271,8 \text{ l/s}$, nên có lưu lượng

$$Q_3 = K_3 \sqrt{\frac{H}{l_3}} = 271,8 \text{ m/s} \times \sqrt{\frac{25,2 \text{ m}}{800 \text{ m}}} = 48,24 \text{ l/s}.$$

Như vậy, lưu lượng của hệ thống sau khi cải tạo :

$$Q^* = Q'_1 + Q'_2 + Q_3 = Q' + Q_3 = 92,28 \text{ l/s} + 48,24 \text{ l/s} = 140,52 \text{ l/s}.$$

và so với trước lúc cải tạo :

$$\frac{Q^*}{Q'} = \frac{140,52 \text{ l/s}}{92,28 \text{ l/s}} = 1,523 = 152,3\%,$$

tức là tăng lên 52,3%. So với thời hệ 2 ống còn mới :

$$\frac{Q^*}{Q} = \frac{140,52 \text{ l/s}}{120 \text{ l/s}} = 1,171 = 117,1\%,$$

tức là tăng 17,1%.

Bài 2. Một đường ống có sơ đồ như hình 6.12. Biết rằng : $l_1 = 500 \text{ m}$, $d_1 = 2000 \text{ mm}$; $l_2 = 200 \text{ m}$, $d_2 = 150 \text{ mm}$; $l_3 = 620 \text{ m}$, $d_3 = 100 \text{ mm}$; $l_4 = 800 \text{ m}$, $d_4 = 75 \text{ mm}$; đầu cuối của đoạn 3 và 4 thông với ngoài trời với $Q_3 = 5 \text{ l/s}$ và $Q_4 = 10 \text{ l/s}$. Các đoạn 1, 2 và 3 nằm trên cùng cao độ ; riêng đoạn 4 nằm cao hơn và đoạn 2 có chức năng phân phối đều với $q = 0,25 \text{ l/s/m}$.

Hỏi

+ Chênh lệch độ cao của đoạn 4 là bao nhiêu ?

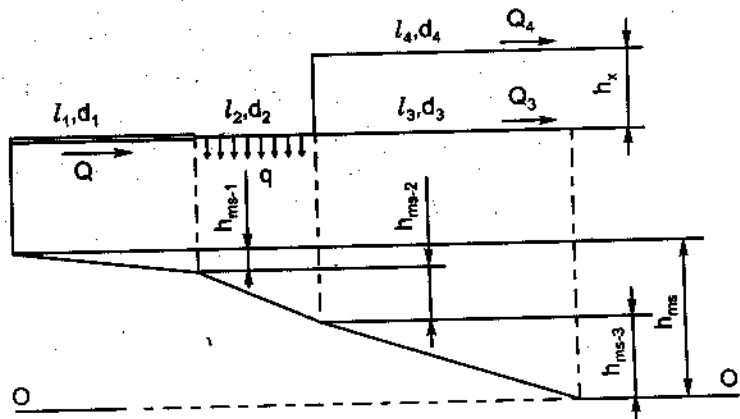
+ Tổn thất cột nước của toàn bộ đường ống là bao nhiêu ? Cho biết độ lớn tối thiểu của cột nước nguồn (H).

Giải :

Tính chênh lệch độ cao.

Đầu tiên tra bảng ta có :

$$K_1 = 388 \text{ l/s} ; K_2 = 180,2 \text{ l/s} ; \\ K_3 = 61,11 \text{ l/s} ; K_4 = 28,37 \text{ l/s}.$$



Hình 6.12

Căn cứ vào đặc điểm của đoạn 3 và 4 là đầu cuối thông với khí trời, đồng thời giả thiết rằng chênh lệch độ cao này không lớn, ta có thể coi áp suất đầu cuối của chúng như nhau. Vì vậy có thể viết :

$$h_{ms-3} = h_{ms-4} \rightarrow \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 = \frac{Q_4^2}{K_4^2} l_4 \quad (a)$$

như ở hệ mắc song song nếu không có sự chênh độ cao giữa chúng. Do vậy phải chỉnh lý (a) như sau :

$$h_{ms-3} = h_{ms-4} + h_x \rightarrow \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 = \frac{Q_4^2}{K_4^2} l_{td} \quad (b)$$

trong đó : l_{td} là độ dài tương đương bằng chiều dài l_4 nối tưởng tượng thêm một đoạn gây nên tổn thất bằng đúng chiều cao h_x . Từ (b) ta có :

$$l_{td} = \frac{(Q_3/Q_4)^2}{(K_3/K_4)^2} l_3 = \frac{\left(\frac{50 \text{ l/s}}{20 \text{ l/s}}\right)^2}{\left(\frac{61,11 \text{ l/s}}{28,37 \text{ l/s}}\right)^2} 620\text{m} = 835\text{m}$$

Như vậy trị số của chênh lệch độ cao bằng đúng chênh lệch cột nước tổn thất của đoạn ống cùng đường kính, cùng chất lượng với ống 4 có chênh lệch chiều dài bằng hiệu số của chiều dài tương đương và chiều dài đoạn 4 (l_4) :

$$X = h_x = \frac{Q_4^2}{K_4^2} (l_{td} - l_4) = \frac{(20 \text{ l/s})^2}{(28,37 \text{ l/s})^2} (835\text{m} - 800\text{m}) = 17,4\text{m}$$

Tổn thất cột nước của đoạn 3 :

$$h_{ms-3} = \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 = \frac{(50 \text{ l/s})^2}{(61,11 \text{ l/s})^2} 620\text{m} = 415\text{m}$$

Tính tổn thất h_{ms-2} của đoạn 2 :

Đây là đoạn phân phối liên tục. Vì, theo đầu bài, lưu lượng chảy qua mặt cắt tại B, theo hệ thức (6-28), là : $Q = Q_{pp} + Q_1$

trong đó : $Q_{pp} = l_2 \times q = 200m \times 0,5l/s/m = 100l/s$
 và : $Q_t = Q_3 + Q_4 = 50l/s + 20l/s = 70l/s$
 nên : $Q = 100l/s + 70l/s = 170l/s$
 Theo (6-32) và với $A = 1/K^2$ ta có :

$$h_{ms-2} = \frac{l_2}{K_2^2} (Q_t^2 + \frac{Q_{pp}^2}{3} + Q_t Q_{pp}) =$$

$$= \frac{200m}{(180,2l/s)^2} \left[(70l/s)^2 + \frac{(100l/s)^2}{3} + (70l/s) \times (100l/s) \right]$$

$$h_{ms-2} = 281,5 \text{ m.}$$

Tổn thất h_{ms-1} trên đoạn 1 :

$$h_{ms-1} = \frac{Q^2}{K_1^2} l_1 = \frac{(170l/s)^2}{(388l/s)^2} 500m = 126,5m$$

Như vậy tổng tổn thất của hệ đường ống (bỏ qua tổn thất cục bộ) :

$$h_{ms} = h_{ms-1} + h_{ms-2} + h_{ms-3} = 126,5m + 281,5m + 415m = 823m$$

$$h_{ms} = 823m$$

và phải đảm bảo cột nước đầu nguồn tối thiểu tại điểm A là :

$$H_A \geq h_{ms} = 823m.$$

Bài 3. Một hệ thống nước khép kín nối với nguồn cung cấp nước tại điểm A như trên hình 6.13, cấp cho 2 hộ đầu mối tiêu thụ tại B và C với mức tiêu thụ tương ứng $q_1 = 200l/s$, $q_2 = 150l/s$. Nếu gọi đoạn ống từ A đến B là đoạn 1, đoạn giữa A và C là đoạn 2, đoạn giữa B và C là đoạn 3 thì :

$$l_1 = 150m ; l_2 = 120m ; l_3 = 80m$$

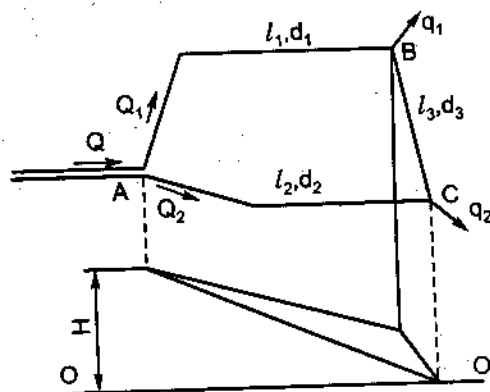
$$d_1 = 150mm ; d_2 = 125mm ; d_3 = 100mm.$$

Để cung cấp cho các hộ tiêu thụ như yêu cầu ở trên, phải tạo cột nước đầu nguồn tại A là bao nhiêu nếu bỏ qua tổn thất cục bộ ? Biết rằng chất lượng ống dẫn được đánh giá vào loại bình thường.

Giải :

Theo đầu bài do chất lượng ống bình thường, ta có các môđun lưu lượng tương ứng $K_1 = 158,4l/s$; $K_2 = 97,4m/s$; $K_3 = 53,72m/s$

$$Q = Q_1 + Q_2$$



Hình 6.13

Từ các giá trị môđun lưu lượng ta có :

$$A_1 = \frac{1}{K_1^2} = \frac{1}{(158,4l/s)^2} = \frac{1}{(0,158m^3/s)^2} = 39,856s^2/m^6$$

$$A_2 = \frac{1}{K_2^2} = \frac{1}{(97,4l/s)^2} = \frac{1}{(0,0974m^3/s)^2} = 105,410s^2/m^6$$

$$A_3 = \frac{1}{K_3^2} = \frac{1}{(53,72l/s)^2} = \frac{1}{(0,05372m^3/s)^2} = 346,519s^2/m^6.$$

Để tìm được điểm hợp của sơ đồ này trước hết ta giả thiết nó là điểm C, nơi có hệ tiêu thụ với $q_2 = 150l/s$. Nếu quả thực như vậy, theo (6-35c), bất đẳng thức sau đây phải đúng :

$$A_2 q_2^2 l_2 > A_1 q_1^2 \rightarrow 105,4s^2/m^6 \times (0,150m^3/s)^2 \times 120m > 39,856s^2/m^6 \times (0,2m^3/s)^2 \times 150m \rightarrow 284,6m > 239,1m$$

Như vậy C đúng là điểm hội nên :

$$Q_1 = q_1 + Q_3 \quad (c)$$

$$Q_2 = q_2 - Q_3 \quad (d)$$

$$\frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_3 \quad (e)$$

và

Trong 3 phương trình (c), (d), (e), Q_1, Q_2, Q_3 là ẩn số. Vì vậy nếu thế các dữ liệu đã cho ở trên, được :

$$Q_1 - Q_3 = q_A \quad (f)$$

$$Q_2 + Q_3 = q_B$$

$$S_1 Q_1^2 + S_3 Q_3^2 - S_2 Q_2^2 = 0$$

trong đó :

$$S_1 = A_1 l_1 = 39,856s^2/m^6 \times 150m = 5,9784.10^3 s^2/m^5$$

$$S_2 = A_2 l_2 = 105,41s^2/m^6 \times 120m = 12,6492.10^3 s^2/m^5$$

$$S_3 = A_3 l_3 = 346,519s^2/m^6 \times 80m = 27,722.10^3 s^2/m^5.$$

Rút Q_1 và Q_2 từ 2 phương trình đầu của (f) thế vào phương trình thứ 3 của nó :

$$S_1 (q_1 + Q_3)^2 + S_3 Q_3^2 - S_2 (q_2 - Q_3)^2 = 0$$

$$S_1 (q_1^2 + 2q_1 Q_3 + Q_3^2) + S_3 Q_3^2 - S_2 (q_2^2 - 2q_2 Q_3 + Q_3^2) = 0$$

$$(S_1 - S_2 + S_3) Q_3^2 + 2(S_1 q_1 + S_2 q_2) Q_3 + S_1 q_1^2 - S_2 q_2^2 = 0$$

Với các ký hiệu :

$$a = S_1 - S_2 + S_3 = (5,97834 - 12,6492 + 27,721576).10^3 s^2/m^5 = 21,050716.10^3 s^2/m^5$$

$$b = 2(S_1 q_1 + S_2 q_2) = 2 \times (5,97834.10^3 s^2/m^5 \times 0,2m^3/s + 12,6492s^2/m^5 \times 0,15m^3/s) = 6186,096s/m^2$$

$$c = S_1 q_1^2 - S_2 q_2^2 = 5,97834 \cdot 10^3 \text{ s}^2 / \text{m}^5 \times (0,2 \text{ m}^3 / \text{s})^2 - 12,6492 \cdot 10^3 \text{ s}^2 / \text{m}^5 \times (0,15 \text{ m}^3 / \text{s})^2 = -45,4734 \text{ m}$$

được phương trình (sau khi xét tính đồng nhất đơn vị đo lường) :

$$2105,716 Q_3^2 + 6186,096 Q_3 - 45,4734 = 0 \quad (g)$$

Giải phương trình được nghiệm (có nghĩa) :

$$Q_3 = \frac{-3093,048 + \sqrt{3093,048^2 + 21050,716 \times 45,4734}}{21050,716} = \frac{151,0533484}{21050,716} = 0,0071757 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Từ đây có :

$$Q_1 = Q_3 + q_1 = 7,1757 \text{ l/s} + 200 \text{ l/s} = 207,1757 \text{ l/s}$$

$$Q_2 = q_2 - Q_3 = 150 \text{ l/s} - 7,1757 \text{ l/s} = 142,8243 \text{ l/s}$$

Tổn thất cột nước của hệ thống :

$$H = \frac{Q_2^2}{K_2^2} l_2 = \frac{(142,8243 \text{ l/s})^2}{(97,4 \text{ l/s})^2} \times 120 \text{ m} = 257,94 \text{ m} \approx 258 \text{ m}$$

Đồng thời để kiểm tra độ chính xác ta tính tổn thất của hệ thống theo nhánh kia, nghĩa là :

$$H = \frac{Q_1^2}{K_1^2} l_1 + \frac{Q_3^2}{K_3^2} l_3 = \frac{(207,1757 \text{ l/s})^2}{(158,4 \text{ l/s})^2} \times 150 \text{ m} + \frac{(7,1757 \text{ l/s})^2}{(53,72 \text{ l/s})^2} \times 80 \text{ m} = 256,6011 \text{ l/s} + 1,4274 \text{ l/s} = 258,03 \text{ m}$$

$$H = 258 \text{ m.}$$

Ta thấy kết quả khá chính xác. Song, để có thể đạt được độ chính xác đó, đòi hỏi các tính toán trung gian phải có độ chính xác cao, tránh lấy tròn, dù chỉ là hơi thô. Nguyên nhân do tính phi tuyến của bài toán thể hiện trong các biểu thức của lưu lượng và môđun lưu lượng.

Cuối cùng, để chặt chẽ, ta còn phải kiểm tra chế độ chảy trong ống xem có cần phải chỉnh lý, nếu không phải là chảy rối.

$$v_1 = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 0,2071757 \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi \times (0,15 \text{ m})^2} = 11,726 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{11,6 \text{ m/s} \times 0,15 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}} = 1,74 \cdot 10^6$$

$$v_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \times 0,1428243 \text{ m}^3 / \text{s}}{\pi (0,125 \text{ m})^2} = 2,482 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow Re_2 = \frac{v_2 d_2}{\nu} = \frac{2,842 \text{ m/s} \times 0,125 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}} = 355250$$

$$v_3 = \frac{4Q_3}{\pi d_3^2} = \frac{4 \times 0,0071757 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi (0,1 \text{ m})^2} = 0,914 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow Re_3 = \frac{v_3 d_3}{\nu} = \frac{0,914 \text{ m/s} \times 0,1 \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 9,14 \cdot 10^4$$

Ta thấy, chế độ chảy ở cả 3 ống đều rối, không cần chỉnh lý kết quả.

Ở đây cần nói thêm, các phương trình dù có cấu trúc như thế nào thì thứ nguyên (số đo) kết quả cũng vẫn đúng với mong đợi. Thực vậy, trong phương trình (g) có :

$$[a] = [S] = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5}$$

$$[b] = [S] \times [q] = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \times \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$$

$$[c] = [S] \times [q^2] = \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \times \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2} = \text{m}$$

Kiểm tra trên phương trình bậc 2 (g) :

$$[Q_3] = \left[\frac{-b' + \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} \right] = \frac{\frac{\text{s}}{\text{m}^2} \oplus \sqrt{\left(\frac{\text{s}}{\text{m}^2} \right)^2 \oplus \frac{\text{s}^2}{\text{m}^5} \times \text{m}}}{\frac{\text{s}^2}{\text{m}^5}} = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

với ký hiệu $\oplus$ là phép cộng chỉ thực hiện với các đại lượng đồng nhất đơn vị đo lường/thứ nguyên và như thế kết quả đúng là số đo lưu lượng !

TỔNG KẾT CHƯƠNG VI

Tính toán thủy lực đường ống là kiến thức cực kỳ quan trọng đối với nhiều ngành kỹ thuật, đặc biệt là đối với lĩnh vực xây dựng công nghiệp, công nghệ xử lý môi trường, thủy lợi,... Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản nhất, lấy đó làm cơ sở xuất phát mở rộng để giải quyết những vấn đề phức tạp hơn.

Các công thức tính toán – như đã thấy qua quá trình dẫn dắt, chứng minh – đều xuất phát từ phương trình Bernoulli cho dòng chất lỏng thực viết cho 2 mặt cắt thượng và hạ lưu phù hợp. Việc phân loại đường (hệ thống) ống đơn giản và phức tạp làm cho cách tiếp cận đi từ thấp đến cao, từ đơn giản đến phức tạp là hợp lý cốt để dễ tiếp thu một cách có hệ thống.

Đối với hệ đường ống đơn giản cần nắm chắc 3 bài toán cơ bản của nó ; ở đây phải phân biệt rõ ngoài bài toán xác định cột nước H ra, khi đã biết các dữ kiện khác, 2 bài toán còn lại phải giải gián tiếp với giả thiết rằng, trong hệ thống / trong ống chế độ chảy là rối

(trong khu vực bình phương sức cản) để có thể khởi động tính toán, tìm ra kết quả trung gian hoặc cuối cùng tùy thuộc vào chế độ chảy trong ống xem có cần chỉnh lý kết quả hay không vì trái với giả thiết ban đầu (trong khu vực bình phương sức cản). Người ta thường dùng phương pháp lặp hoặc đồ giải để giải 2 bài toán sau. Khâu chỉnh lý là rất quan trọng, trước hết trong định hướng. Vấn đề trở nên thuận lợi nếu có máy tính trợ giúp.

Trong tính toán thường hay gặp các công thức kinh nghiệm, nửa kinh nghiệm đồng thời đòi hỏi phải thuần thục trong tra cứu các bảng đối số và kết quả của thực nghiệm.

Trong phần đường ống phức tạp, khi xử lý cần bóc tách (phân rã) các kết cấu phức tạp thành các phần đơn giản, tương đương, cơ bản nhất để sử dụng các quy luật ghép song song, xả ra ngoài trời, các điểm có cùng áp suất, điểm hội,...

Cần luôn nhớ rằng, dù hệ đường ống phức tạp đến đâu người ta vẫn có thể thấy nó là sự tích hợp của các cấu trúc cực kỳ đơn giản mà việc tính toán chúng không có gì khó khăn và theo phương châm lần "từ ngọn tới gốc", "hoặc từ gốc tới ngọn" các kiến thức của chương đủ cho ta giải quyết các vấn đề gặp phải.

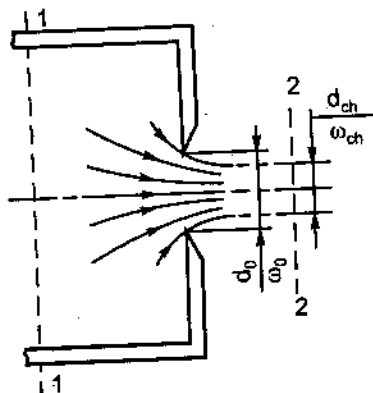
Chương VII

CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG QUA LỖ, VỎI

1. Chuyển động của chất lỏng qua lỗ thành mỏng

Dòng chảy qua lỗ, vòi là vấn đề thường gặp trong kỹ thuật thủy lực. Việc nghiên cứu xây dựng các lý thuyết để tìm hiểu các quy luật xung quanh hiện tượng này có ý nghĩa thực tiễn cao, áp dụng cho nhiều lĩnh vực (thiết bị màng đo lưu lượng, kỹ thuật dòng tia, thiết kế vòi phun tia,... tháo nhanh chất lỏng để giải phóng một bể chứa...).

Ở đây cũng cần xác định mối quan hệ giữa áp suất/cột chất lỏng của bể chứa với lưu lượng hay vận tốc thoát qua lỗ. Quan sát dòng chảy qua lỗ thành mỏng ta thấy rằng có hiện tượng co thắt dòng khi chảy ra bên ngoài (ở đây ví dụ vào không khí). Tìm hiểu sâu và căn cứ vào các định luật cơ học biết được hiện tượng đó do quán tính của chất lỏng gây nên bởi trước khi đi qua mặt cắt của lỗ vòi, trường vận tốc không phải là song song với chiều dòng chảy của vòi mà có những thành phần trực giao với nó.



Hình 7.1

1.1. Hiện tượng co hẹp dòng (thắt dòng)

Trong kỹ thuật thành được coi là mỏng nếu chiều dày của nó $\delta < 0,2d_0$ với d_0 là đường kính của lỗ trên thành bể chứa. Giả thiết áp suất trong bể chứa là không đổi nên dòng chảy là ổn định. Dòng chảy xả vào không khí áp suất p_a nên là dòng tự do qua lỗ đường kính d_0 diện tích ω_0 . Diện tích mặt cắt ngang của bình chứa là ω_1 . Ta định nghĩa hệ số co hẹp dòng là :

$$\varepsilon = \omega_{ch} / \omega_0 \quad (7-1)$$

$$\text{nó phụ thuộc vào tỉ số : } n = \omega_0 / \omega_1 \quad (7-2)$$

$$\text{được gọi là độ co thắt/co hẹp dòng : } \varepsilon = f(n) \quad (7-3)$$

Hàm này được xác định bằng các công thức trong chương V trước đây. Tỷ số đó phản ánh mức độ ảnh hưởng của thành phần vận tốc trực giao. Nếu n là rất nhỏ, nghĩa là so với kích thước của bình (mặt cắt 1) diện tích lỗ là rất nhỏ, lúc đó ε có trị số :

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0,611 \quad (7-4)$$

Người ta nói hiện tượng co hẹp là hoàn thiện khi $n < 0,1$.

Ở trường hợp bình lớn có lỗ nhỏ, thực nghiệm cho thấy hệ số co hẹp dao động trong phạm vi :

$$\varepsilon = 0,61 \div 0,63 \quad (7-5)$$

tức là gần với giá trị của (7-4).

1.2. Vận tốc dòng chảy

Nếu gọi mặt cắt 2-2 là mặt cắt ở chỗ co hẹp nhất của dòng thoát ra thì phương trình Bernoulli viết cho 2 mặt cắt 1-1 và 2-2 là :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \quad (7-6)$$

Dòng ở ngoài bình chứa là dòng tự do, có thể coi áp suất tại mặt cắt 2-2 bằng áp suất khí quyển p_a . Dùng công thức Weissbach xác định cột nước tổn thất h_w :

$$h_w = \zeta_0 \frac{v_2^2}{2g} \quad (7-7)$$

trong đó : ζ_0 là hệ số sức cản của lỗ.

Lấy $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$ (ta có được trên cơ sở thí nghiệm) phương trình (7-6) sẽ có dạng :

$$\frac{v_2^2}{2g}(1 + \zeta_0) = \frac{p_1 - p_a}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$$

Như vậy :
$$v_2 = v = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0} \left(2g \frac{p_1 - p_a}{\rho g} + v_1^2 \right)} \quad (7-8)$$

Chia 2 vế của phương trình (7-8) cho v (cũng là v_2) để có dạng :

$$1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \zeta_0}} \sqrt{\frac{2g}{v^2} \left(\frac{p_1 - p_a}{\rho g} \right) + \frac{\omega_{ch}^2}{\omega_1^2}}$$

do :

$$\frac{v_1^2}{v^2} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\omega_{ch}^2}{\omega_1^2}$$

Bình phương cả 2 vế của (7-9) với lưu ý rằng :

$$\frac{\omega_{ch}^2}{\omega_1^2} = \frac{\omega_{ch}^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} = \varepsilon^2 n^2 \quad (7-10)$$

và sử dụng (7-10) được :
$$1 = \frac{1}{1 + \zeta_0} \left[\frac{2}{v^2} \frac{p_1 - p_a}{\rho} + \varepsilon^2 n^2 \right]$$

Từ đây ta có :
$$v = v_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_a}{\rho} \cdot \frac{1}{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}} \quad (7-11)$$

Người ta đặt :
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}} \quad (7-12)$$

là hệ số vận tốc. Và công thức vận tốc (7-11) có dạng :

$$v = \varphi \sqrt{2(p_1 - p_a) / \rho} \quad (7-13)$$

Khi lỗ quá nhỏ $n \rightarrow 0$:
$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2 \frac{p_1 - p_a}{\rho}} \quad (7-14)$$

Trường hợp có thể bỏ qua ảnh hưởng của độ nhớt (có thể coi chất lỏng là không nhớt, $\zeta_0 = 0$; $\varphi = 1$) ta thay (7-14) bằng :
$$v = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_a}{\rho}} \quad (7-15)$$

tức là ta có công thức Torricelli tìm ra năm 1643 trên cơ sở quan sát vận tốc chảy qua lỗ dưới các trị số cột nước khác nhau. Khi dòng nước lạnh chảy qua lỗ, ta có : $\varphi = 0,97 \div 0,98$; $\zeta_0 = 0,06$, tức là chỉ cần 2 ÷ 3% áp năng để thắng được sức cản.

1.3. Lưu lượng chất lỏng

Lưu lượng thoát ra khỏi lỗ được xác định bằng công thức :

$$Q = \omega_{ch} v$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}} \varepsilon \omega_0 \sqrt{2 \frac{p_1 - p_a}{\rho}} \quad (7-16)$$

Dùng ký hiệu hệ số lưu lượng của lỗ :

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \zeta_0 - \varepsilon^2 n^2}} = \varphi \cdot \varepsilon \quad (7-17)$$

ta có :

$$Q = \mu_0 \omega_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_a)}{\rho}} \quad (7-18)$$

Tương ứng với công thức (7-17) hệ số lưu lượng của lỗ μ_0 là tích số của hệ số co hẹp ε và hệ số vận tốc φ . Lưu ý đến quan hệ giữa ε và n có thể tìm được quan hệ $\mu_0 = f(n, \zeta_0)$. Mỗi quan hệ này được thể hiện trên bảng tra cứu $\mu_0(n)$ với ζ_0 là thông số (hình 7.2).

Các giá trị của μ_0 với các độ co hẹp ε khác nhau (khi $Re \rightarrow \infty$), trong dòng chảy qua lỗ nhỏ, từ (7-17) ta có ($n \rightarrow 0$) :

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \quad (7-19)$$

Khi xét biểu thức (7-5) và (7-6) đối với trường hợp nói trên, hệ số lưu lượng :

$$\mu_0 \approx 0,6.$$

Trong trường hợp chảy vào không khí, phương trình lưu lượng (7-18) được viết dưới dạng :

n	μ_0	n	μ_0
0,0	0,611	0,5	0,678
0,1	0,614	0,6	0,724
0,2	0,622	0,7	0,787
0,3	0,634	0,8	0,888
0,4	0,650	0,9	1,090

$$Q = \mu_0 \omega_0 \sqrt{2gH} \quad (7-20)$$

trong đó : $H = (p_1 - p_2) / (\rho g)$ - là chiều cao chất lỏng trong bình chứa tính từ tâm lỗ (khi đường kính lỗ $d \ll H$).

1.4. Chảy dưới mực nước mặt thoáng - chảy ngập (hình 7.3)

Chảy ngập là chảy vào không gian cũng điền đầy nước/chất lỏng (dưới mặt thoáng). Trong trường hợp này, dòng chất lỏng thoát khỏi lỗ qua bề bên tại mặt cắt có áp suất khác với áp suất khí quyển. Công thức tính lưu lượng có dạng :

$$Q = \mu_{ng} \omega_0 \sqrt{2(p_1 - p_2) / \rho} = \mu_{ng} \omega_0 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu_{ng} \omega_0 \sqrt{2gH} \quad (7-21)$$

trong đó :

$$H_1 = p_1 / (\rho g) \text{ và } H_2 = p_2 / (\rho g)$$

p_1 : áp suất trong bình chứa thứ nhất tại tâm của lỗ thoát (tại chiều sâu H_1) ;

p_2 : áp suất trong bình chứa thứ 2 tính từ tâm lỗ đến mặt thoáng (áp suất p_a), (tại chiều sâu H_2) ;

H : độ chênh lệch mặt thoáng ở 2 bình/bể :
 $H = H_1 - H_2$;

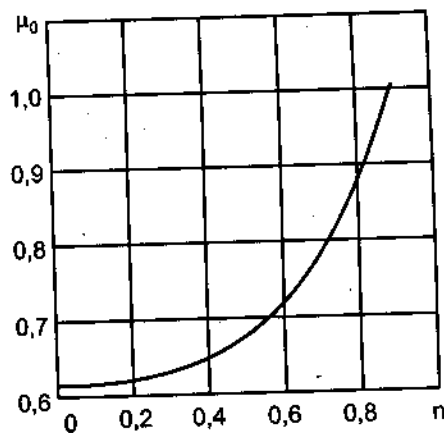
μ_{ng} : hệ số lưu lượng khi chảy ngập có thể xác định theo Altsul :

$$\mu_{ng} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon^2 m^2 - \varepsilon^2 n^2 + \zeta_0 + 1 - 2\varepsilon m}} \quad (7-22)$$

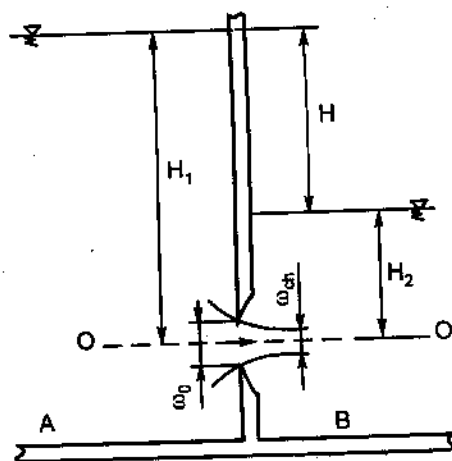
trong đó : $m = \omega_0 / \omega_2$ là tỷ số giữa tiết diện lỗ và tiết diện bình chứa thứ 2 (bình B).

Trên thực tế hệ số co hẹp dòng trong trường hợp chảy ngập chẳng khác gì so với chảy tự do (chảy vào không khí), vì bản thân dòng chảy ngập ngoài bình chứa (bình A) cũng là tự do trong môi trường bao quanh là nước nằm yên (trong bình B).

Khi lỗ có kích thước nhỏ hơn rất nhiều so với kích thước của bình chứa $n \rightarrow 0$ và $m \rightarrow 0$, lưu lượng của chảy ngập không khác lưu lượng chảy tự do.



Hình 7.2



Hình 7.3

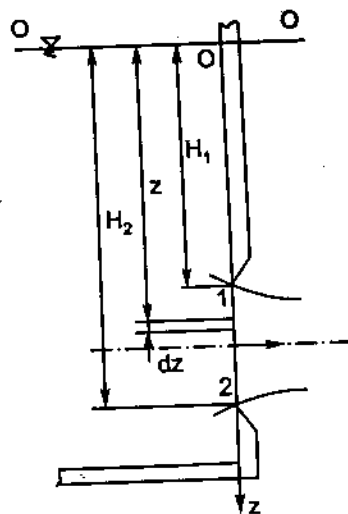
1.5. Dòng chảy qua lỗ lớn (hình 7.4)

Khi kích thước của lỗ lớn, lúc đó áp suất phân bố trên bề mặt cắt của lỗ (đi từ phía bình) không thể coi là không đổi, nghĩa là áp suất mép trên có sự khác biệt đáng kể so với mép dưới. Lúc này phải tính toán trên các nguyên tố mặt cắt để được nguyên tố lưu lượng rồi tích hợp lại :

$$dQ = \mu b dz \sqrt{2gH}, \quad (H = z) \quad (7-23)$$

trong đó : z là khoảng cách từ nguyên tố mặt cắt của lỗ đến mặt thoáng của bể chứa. Như vậy, lưu lượng qua lỗ sẽ là :

$$\begin{aligned} Q &= \int_{H_1}^{H_d} dQ = \mu b \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_d} \sqrt{z} dz = \\ &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_d^{3/2} - H_1^{3/2}) \end{aligned} \quad (7-24)$$



Hình 7.4

Về nguyên tắc, bằng cách tích hợp như trên ta có thể tính lưu lượng cho các lỗ thoát có tiết diện là hình tròn, hay một số loại dạng khác (đương nhiên càng khác xa các hình đối xứng tâm, sai số càng lớn). Đây là nói về các lỗ có kích thước lớn.

Cần lưu ý rằng, công thức (7-20) có thể vận dụng cho những trường hợp $d_0 \ll 0,2H$. Ở đây cũng sẽ có sự co hẹp hoàn thiện (vì $\omega_0 \ll \omega_1$).

2. Chuyển động của chất lỏng qua vòi

Nếu lỗ thoát ở trên thành bình có vách dày đáng kể so với kích thước của lỗ, thì đặc trưng của dòng chảy sẽ thay đổi về cơ bản bởi thành bình có ảnh hưởng đến hướng của dòng chảy. Hiện tượng như vậy cũng sẽ xảy ra nếu ta gắn lên thành bình mỏng một ống ngắn có cùng đường kính với đường kính của lỗ. Đoạn ống như vậy được xem là vòi, hoặc vòi phun mà chiều dài của đoạn ống có độ lớn gấp $2,5 \div 3$ lần đường kính lỗ. Tùy theo hình dạng của mặt cắt dọc của vòi và cách nối vào bình chứa mà lưu lượng có thể rất khác nhau khi cùng một đường kính lỗ (trụ trong, trụ ngoài, nón côn, nón loe, nón cong có góc lượn tại chỗ nối với bình chứa cho suôn dòng). Sau đây ta xét một số trường hợp.

2.1. Vòi hình trụ ngoài - hệ số lưu lượng, hệ số vận tốc

Mặc dù ở chỗ sát thành bình/bể chứa chất lỏng trong ống vòi có xoáy, dòng chất lỏng không bị nhiễu vẫn thất lại, nhưng khi thoát ra ngoài bình chứa chất lỏng chảy bình thường và diện tích mặt cắt cuối nên hệ số co hẹp của dòng $\epsilon = 1$; còn hệ số lưu lượng $\mu = \epsilon \varphi = \varphi$, tức là đối với vòi hệ số lưu lượng và hệ số vận tốc có cùng trị số.

Bây giờ ta viết phương trình Bernoulli cho mặt cắt 1-1 và 2-2 :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_{w(1-2)}$$

Cũng như dòng chảy qua lỗ ta lấy : $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ và có thể cho :

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + h_{w(1-2)} \quad (7-25)$$

Tổn thất cột nước trong vòi gồm tổn thất tại miệng vào vòi và tổn thất do mở rộng dòng ở đoạn trong ống của vòi :

$$h_{w(1-2)} = \frac{\zeta_0 v_{ch}^2}{2g} + \frac{(v_{ch} - v_2)^2}{2g} \quad (7-26)$$

Theo phương trình liên tục ta có :

$$v_{ch} = v_2 \frac{\omega_2}{\omega_{ch}} = \frac{v_2}{\varepsilon} \quad (7-27)$$

Nên sau khi đưa quan hệ này vào (7-26) ta được :

$$h_{w(1-2)} = \frac{\zeta_0 v_2^2}{2g\varepsilon^2} + \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \Rightarrow h_{w(1-2)} = \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{\zeta_0}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} + 1\right) = \zeta_c \frac{v_2^2}{2g} \quad (7-28)$$

Với kết quả này hệ thức (7-25) có dạng :

$$H = \frac{v_2^2}{2g} (1 + \zeta_c)$$

Vận tốc chảy từ vòi ra ngoài sẽ là :

$$v_2 = \varphi_v \sqrt{2gH} \quad (7-29)$$

trong đó

$$\varphi_v = \frac{1}{1 + \zeta_c} \quad (7-30)$$

Đồng thời lưu lượng của vòi :

$$Q = v_2 \omega_2 = \omega_2 \varphi_v \sqrt{2gH} \quad (7-31a)$$

Nếu đem so kết quả này với công thức tính lưu lượng có dạng tổng quát :

$$Q = \mu_v \omega_2 \sqrt{2gH} \quad (7-31b)$$

có thể đi đến kết luận : $\mu_v = \varphi_v$.

Nghĩa là hệ số vận tốc và hệ số lưu lượng của vòi bằng nhau. Ta thấy, các công thức tính hệ số vận tốc và hệ số lưu lượng của vòi có cùng một dạng như của lỗ thành mỏng, nhưng về trị số giữa chúng (lỗ thành mỏng và vòi) có sự khác nhau :

$$\mu_v = \varphi_v = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}} \approx 0,845 \quad (7-32)$$

Trong các điều kiện bình thường thí nghiệm cho trị số :

$$\mu_v = \varphi_v \approx 0,82 \quad (7-33)$$

tức là ứng với $\zeta_0 = 0,06$.

So sánh các hệ số lưu lượng và vận tốc của vòi với các hệ số tương ứng của lỗ trên thành mỏng ta thấy vòi tăng được hệ lưu lượng nhưng giảm hệ số vận tốc. Thực vậy, khi số Reynolds lớn, tỉ số $\mu_v/\mu_0 = 0,845/0,611 = 1,38$ tức lớn hơn 1 và $\varphi_v/\varphi_0 = 0,845/1 = 0,845$, nhỏ hơn 1, nghĩa là lưu lượng qua vòi tăng lên 35% so với lưu lượng qua lỗ; còn vận tốc tại chỗ ra của vòi giảm chừng 15% so với vận tốc chảy qua lỗ thành mỏng.

2.2. Hiện tượng chân không trong vòi

Áp suất tại mặt cắt co hẹp của dòng trong vòi nhỏ hơn áp suất khí quyển. Thực vậy :

$$\frac{v_{ch}}{v_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{ch}} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\pi + 2}{\pi} \approx 1,64$$

tức là vận tốc trong mặt cắt co hẹp của vòi lớn hơn vận tốc chảy từ miệng vòi ra (khí quyển) là 64%. Điều đó có nghĩa là áp suất bên trong vòi nhỏ hơn áp suất tại miệng ra của nó (theo ý nghĩa năng lượng của phương trình Bernoulli), vì ở miệng ra lấy giá trị áp suất khí quyển. Như vậy, áp suất trong vòi phải là áp suất chân không. Sau đây ta xác định áp suất chân không trong vòi tại mặt cắt co hẹp. Viết phương trình Bernoulli :

$$\frac{p_{ch}}{\rho g} + \frac{v_{ch}^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{(v_{ch} - v_2)^2}{2g}$$

trong đó : $(v_{ch} - v_2)^2 / 2g$ là tổn thất cột nước do đột mở dòng.

Thực hiện phép bình phương và sử dụng định nghĩa chân không :

$$\begin{aligned} \frac{p_{ck}}{\rho g} &= \frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_{ch}}{\rho g} = \frac{2v_{ch}v_2}{2g} - \frac{2v_2^2}{2g} \\ \frac{p_{ch}}{\rho g} &= 2 \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{v_{ch}}{v_2} - 1 \right) = 2 \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \end{aligned}$$

Lấy $\varepsilon = \pi/(\pi + 2)$, ta có :

$$\frac{p_{ck}}{\rho g} = 2 \frac{v_2^2}{2g} \left(\frac{\pi + 2}{\pi} - 1 \right) = \frac{4}{\pi} \frac{v_2^2}{2g}$$

Nhưng từ (7-29) có $v_2^2 / 2g = \varphi_v^2 H$, nếu rút φ_v từ đây rồi sử dụng (7-32) ta có :

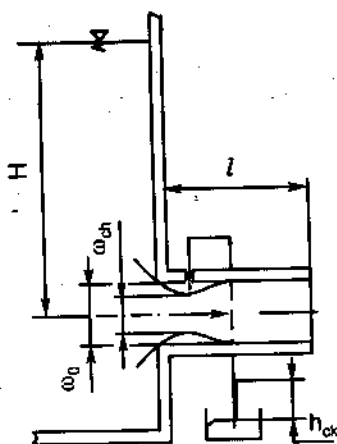
$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4} H \quad (7-34)$$

Dùng kí hiệu $h_{ck} = p_{ck}/(\rho g)$, lúc đó :

$$h_{ck} = 4\pi H/(\pi^2 + 4) = 0,9H \quad (7-35a)$$

Đây là kết quả lý thuyết. Trong thực tế người ta thường dùng trị số nhỏ hơn.

Đối với nước, để đảm bảo an toàn người ta thường lấy $h_{ck} \approx 0,75H$.



Hình 7.5

Theo (7-35a) thì mức độ chân không phụ thuộc vào cột nước H ; khi H tăng thì h_{ck} cũng tăng. Song đây chỉ phản ánh quan hệ toán học, còn thực tế vật lý lại có giới hạn (do nước bị sôi tại nơi xuất hiện chân không) nên độ chân không lớn nhất ở nước chỉ có thể là :

$$H_{ck \max} = 10,33m \quad (7-35b)$$

(tương đương với 760 mm thủy ngân là áp suất khí quyển).

Trị số chân không giới hạn sẽ đạt được dưới một trị số cột nước giới hạn H_{gh} nào đó. Trị số đó có thể tìm được đối với số Re lớn từ phương trình (7-35) khi ta thay bằng trị số lớn nhất của h_{ck} vào (tức là chân không tuyệt đối $p_0 = 0$) :

$$H_{gh} = \frac{\pi^2 + 4}{4\pi} 10,33 \approx 11,5 \quad (7-36)$$

Tăng cột nước vượt lên trên H_{gh} sẽ dẫn đến hiện tượng tách dòng, lúc đó chân không biến mất bởi trong vòi có vùng liên thông với khí trời và vòi sẽ làm việc như một lỗ thành mỏng.

2.3. Chiều dài tương đối của vòi

Sau tất cả những điều đề cập ở trên, đối với vòi hình trụ ở ngoài sẽ là phù hợp nếu :

$$\frac{l}{d} \geq 2 + 3 \quad (7-37)$$

trong đó : l là chiều dài của vòi. Nếu ngắn hơn, khu xoáy sẽ thông với khí quyển, tức là ở mặt cắt cuối vòi, dòng chảy chưa điền đầy tiết diện, vùng chân không trong vòi bị phá hoại (dòng chảy bị tách khỏi thành rắn) và dòng chảy như chảy qua lỗ thành mỏng, do đó không làm tăng được lưu lượng. Vì vậy, (7-37) là biểu thức điều kiện quyết định đặc tính của dòng chảy khỏi bình chứa là chảy qua vòi hay qua lỗ thành mỏng và trên cơ sở đó ta chọn các hệ số vận tốc và lưu lượng cho phù hợp với yêu cầu.

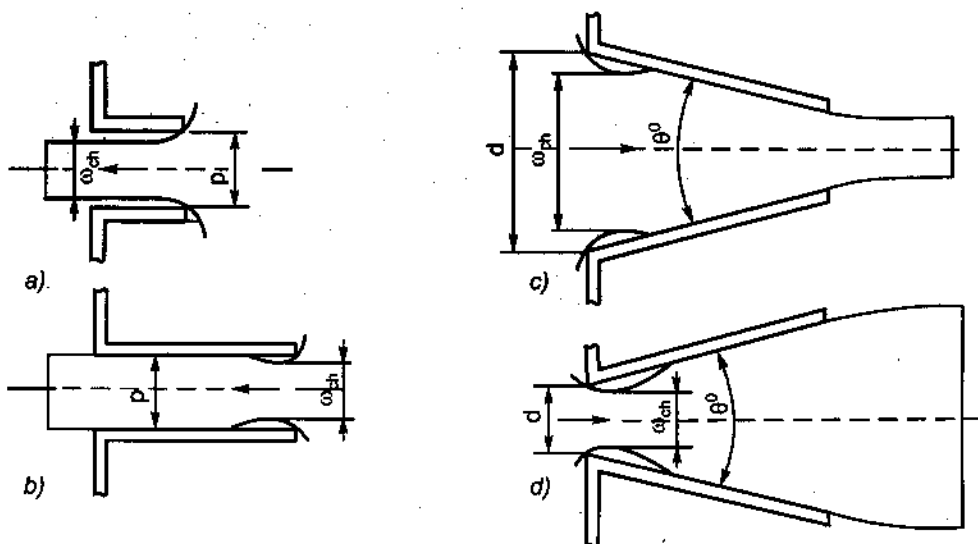
Mặt khác, nếu tăng chiều dài của vòi, tổn thất do ma sát (dọc đường) bắt đầu gây tác dụng bất lợi làm hệ số lưu lượng của vòi giảm vì thế lưu lượng vòi giảm dần theo độ tăng tỉ số l/d .

Khi $l/d > 60$ có thể lưu lượng của vòi nhỏ hơn cả lưu lượng qua lỗ thành mỏng.

l/d	μ	l/d	μ
1,66(10/6,0)	0,809	10,00(10/1,00)	0,778
3,33(10/3,0)	0,814	13,33(10/0,75)	0,761
5,00(10/2,0)	0,799	16,66(10/0,60)	0,743
6,66(10/1,5)	0,796	20,00(10/0,50)	0,725
8,33(10/1,2)	0,789	25,00(10/0,40)	0,698

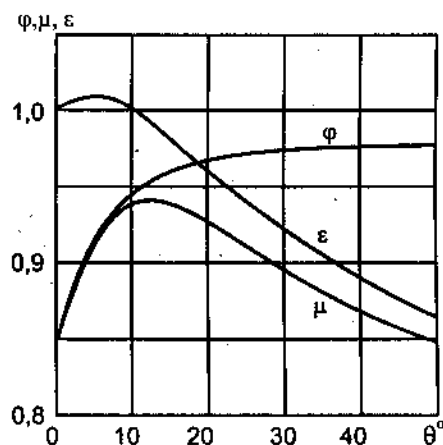
3. Các loại vòi khác

Trong thực tế kỹ thuật người ta còn thấy loại vòi hình trụ gắn trong (hình 7.6a,b), vòi hình côn thu hẹp (cônphuzo) (hình 7.6c) hay hình côn mở dần (ống loe – dipphuzo)



Hình 7.6

hình 7.6d). Vòi hình trụ nổi trong dòng chảy bị co hẹp nhiều hơn so với nổi ngoài (vòi Borda), vì thế hệ số lưu lượng ở đây nhỏ hơn và lúc này vòi nổi trong có trị số $\varphi = \mu = 0,71$. Khi chiều dài của vòi hình trụ trong không lớn ($l < 1,5d$) dòng chảy ra không chạm vào thành vòi. Trường hợp này ta thu được kết quả $\varphi \approx 0,98$; $\mu \approx 0,49$; $\varepsilon \approx 0,5$. Do vậy khi thiết kế vòi cần đặc biệt chú ý đến việc chọn chiều dài của nó để có được những đặc tính cần thiết. Ở vòi hình côn thu hẹp còn gọi là cônphuzo, sự co hẹp dòng tại miệng ra của bình nhỏ hơn so với vòi hình



Hình 7.7

trụ ngoài. Đồng thời theo chiều chảy, mặt cắt ướt của vòi lại nhỏ dần, làm cho dòng chảy nhanh chóng sắp xếp lại trật tự và ổn định theo hướng song song với thành nên tổn thất cột nước trong vòi nhỏ hơn (so với hình trụ ngoài). Các hệ số μ , φ , ε của vòi phụ thuộc vào độ lớn của góc thu θ của nón, hệ số lưu lượng μ lúc đầu tăng đến trị số lớn nhất ($\approx 0,945$) khi $\theta \approx 13^\circ$. Nếu tiếp tục tăng, hiện tượng chảy quẩn, tách dòng xuất hiện, khiến cho hệ số lưu lượng giảm. Ở đây, các giá trị trên lấy theo mặt cắt ra của vòi. Còn nếu lấy cho mặt cắt lỗ trên thành bình thì trị số nhỏ hơn do:

$$\mu_0 = \mu_{ra} \frac{\omega_{ra}}{\omega_0} \quad (7-38)$$

ω_0 : độ lớn của lỗ trên thành bình.

Loại vòi này được sử dụng khi cần tăng vận tốc ra với cột nước bình chứa cho trước (H cho trước) tạo đà vươn xa và lực va đập lớn của tia chất lỏng.

Đối với trường hợp vòi là ống loe, sự co hẹp dòng chảy ở phần sát bình lớn hơn so với hình trụ và hình nón, do vậy tổn thất lớn. Song với góc mở nhỏ và chiều dài vòi đủ lớn, tại miệng ra của vòi dòng chảy diễn đầy mặt cắt tức là $\varepsilon = 1$. Có thể lấy :

$$\text{Khi } \theta < 8^\circ \rightarrow \varphi_{ra} = \mu_{ra} = 0,45$$

$$\text{Khi } \theta = 12^\circ \rightarrow \varphi_{ra} = \mu_{ra} = 0,26$$

Nếu tính theo mặt cắt lỗ ở thành bình các trị số này cao hơn.

Cần lưu ý rằng mặc dù trị số φ và μ ở đây giảm khi tính cho mặt cắt ướt tại miệng ra, song không vì thế mà lưu lượng Q giảm, trái lại vẫn có thể tăng vì tỷ số ω_{ra} / ω_0 tăng nhanh hơn. Quy luật này đã được nông dân Ai cập phát hiện ra rất sớm, trước công nguyên (mua nước của chủ định giá theo đường kính lỗ ống dẫn và họ đã nối tiếp bằng 1 ống loe để tăng lưu lượng nhờ hiệu quả hút của đoạn ống loe).

Ta còn thấy loại vòi hình nón cong (đường sinh cong) lượn theo dòng chảy. Loại vòi này có φ và μ lớn có thể đạt tới $0,97 \div 0,995$. Trước đây người ta ít dùng do có khó khăn trong chế tạo. Nay nhờ công nghệ gia công tiên tiến tình hình đã khác rồi.

4. Khảo sát một số vấn đề đặc thù

4.1. Dòng chảy qua lỗ/vòi khi mực nước thay đổi

Thường gặp khi tháo cạn hoặc làm đầy bình; bể, hồ chứa cần tính toán thời gian cần thiết cho việc hoàn thành. Ở đây ta nghiên cứu trường hợp lỗ ở đáy bình hình lăng trụ (cho đơn giản) diện tích Ω và lỗ tiết diện ω (hình 7.8).

Một mặt, do cột nước thay đổi theo thời gian nên lưu lượng cũng thay đổi theo. Với cột nước ở thời điểm bất kỳ là h, thì trong thời đoạn dt thể tích nước chảy qua lỗ là :

$$dW = \mu \omega \sqrt{2gh} dt \quad (7-39)$$

Mặt khác, ta cũng lại có một lượng nước được tháo ra khỏi bình làm giảm mực nước h một lượng dh nên :

$$dW = -\Omega dh \quad (7-40)$$

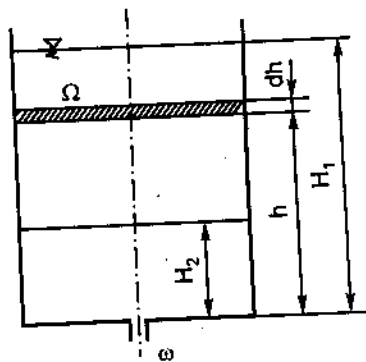
Cân bằng (7-39) với (7-40) ta có :

$$\mu \omega \sqrt{2gh} dt = -\Omega dh$$

Nghĩa là :

$$dt = -\frac{\Omega}{\mu \omega \sqrt{2gh}} dh$$

+ Nếu tháo cạn bình từ H_1 xuống H_2 , thời gian cần thiết



Hình 7.8

$$t = -\frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} [\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}] \quad (7-41)$$

+ Nếu tháo kiệt ($H_2 = 0$) thì

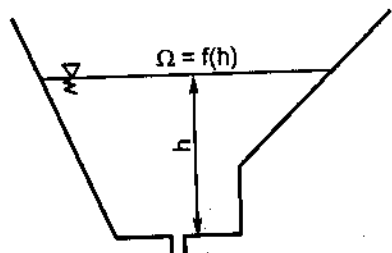
$$t = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}} = \frac{2\Omega H_1}{Q} = 2t_1 \quad (7-42)$$

trong đó : t_1 là thời gian để tháo cùng một lượng nước (dung tích của bình) nếu cột nước luôn được duy trì ở trị số ban đầu. Nếu mặt cắt ngang của bình thay đổi theo chiều cao (hình 7.9), nghĩa là :

$$\Omega = f(h)$$

thì :

$$t = \int_{H_2}^{H_1} \frac{f(h)}{\mu\omega\sqrt{2gh}} dh \quad (7-43)$$



Hình 7.9

4.2. Quan hệ giữa các hệ số dòng chảy và số Reynolds

Trị số của các hệ số của lỗ và vòi tính ở trên chỉ đúng trong điều kiện khi số Re không ảnh hưởng lớn đến dòng chảy. Nếu :

$$10^5 < Re_0 = \sqrt{2 \frac{\Delta p d^2}{\rho v^2}} = \sqrt{\frac{2gHd^2}{\rho \mu^2}} \quad (7-44)$$

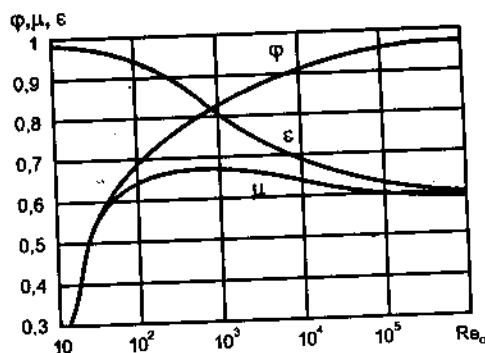
thì có thể không cần xét đến tính nhớt.

Khi chất lỏng có độ nhớt cao (dầu Diesel qua lỗ vòi phun) số $Re_0 < 10^5$. Vì vậy hình 7.10 cho thấy quy luật biến đổi các hệ số μ , φ , ε , ζ tùy thuộc vào sự thay đổi của Re.

Đối với Re tương đối lớn ($Re_0 > 10^4$) người ta dùng công thức thực nghiệm :

$$\mu = 0,592 + 5,5/\sqrt{Re_0} \quad (7-45)$$

Khi xét dòng chảy ngập hệ số lưu lượng μ được giả thiết là không đổi.



Hình 7.10

Giả thiết này chỉ đúng với Re lớn, không phù hợp với Re nhỏ. Lúc đó $\mu = f(Re_0)$ và do đó $\mu = f_1(H)$. Vì vậy người ta thường dùng 1 công thức thực nghiệm có độ phù hợp và chính xác cao khi Re_0 nhỏ ($Re_0 < 10$) để tính thời gian tháo cạn bình :

$$t = \frac{29\Omega v}{g\omega d} \lg \frac{H_1}{H_2} \quad (7-46)$$

mà không dùng (7-41). Kết quả này thực tế cho độ chính xác cao.

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG VII

Bài 1. Nguồn cấp một lưu lượng $Q = 40 \text{ l/s}$ đổ vào ngăn A của một bể chứa 2 ngăn với vách ngăn mỏng có lỗ thông đường kính $d_t = 100\text{mm}$; đáy ngăn A có lỗ thoát đường kính $d_A = 80\text{mm}$ và sườn ngăn B có vòi hình trụ gắn ngoài đường kính $d_B = 80\text{mm}$ ở vị trí cách đáy một độ cao $h = 0,25\text{m}$ (hình 7.11). Coi co hẹp dòng ở đáy là hoàn thiện.

Hãy :

- Tính chiều cao mực nước của hai ngăn và lưu lượng lỗ (Q_l) và vòi (Q_v) trong trạng thái cân bằng động ;

- Nếu trong trạng thái cân bằng động ta đột ngột đóng vòi, bịt lỗ xả đáy, ngưng cấp nước thì mất bao thời gian để có sự cân bằng mực nước ở 2 ngăn nếu bỏ qua dao động nhỏ của cột nước do quán tính ? Hãy tính cho trường hợp diện tích mặt cắt ngang ngăn A gấp đôi ngăn B và bằng 20 m^2 .

Giải :

Tính chiều cao và lưu lượng cột nước

Theo đề bài, ở trạng thái cân bằng động ta có :

$$Q = Q_l + Q_v \quad (a)$$

$$\text{Theo tính liên tục : } Q_v = Q_l \quad (b)$$

Biết rằng lưu lượng của lỗ đáy bể :

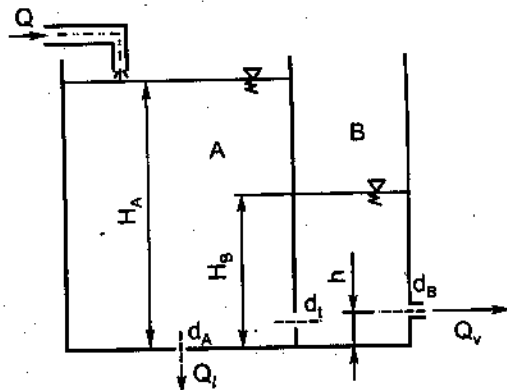
$$Q_l = \mu_l \omega_l \sqrt{2gH_A} \quad (c)$$

Lưu lượng qua vách ngăn :

$$Q_t = \mu_t \omega_t \sqrt{2g(H_A - H_B)} \quad (d)$$

do chảy ngập và cuối cùng lưu lượng của vòi :

$$Q_v = \varphi_v \omega_v \sqrt{2g(H_B - h)} \quad (e)$$



Hình 7.11

Ta có 5 phương trình, 5 ẩn số là Q_l , Q_v , Q_t , H_1 , H_2 với các thông số là các hệ số lưu lượng có thể tra bảng ứng với các kết cấu. Cụ thể là với lỗ thành mỏng $\mu = 0,61$, còn vòi trụ gắn ngoài $\varphi = 0,82$. Cùng với các dữ liệu đã cho từ hệ phương trình trên ta có :

$$Q_l + Q_v = 40 \text{ l/s} = 0,040 \text{ m}^3/\text{s} = 40 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_v = Q_l$$

$$Q_l = 0,61 \frac{\pi d_l^2}{4} \sqrt{2 \times 10 \text{ m/s}^2 \times H_A} = 0,61 \frac{\pi \times (0,08 \text{ m})^2}{4} \sqrt{20 H_A} = 13,71 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_A} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_t = 0,61 \frac{\pi d_t^2}{4} \sqrt{2 \times 10 \text{ m/s}^2 \times (H_A - H_B)} = 0,61 \frac{\pi \times (0,1 \text{ m})^2}{4} \sqrt{20 \times (H_A - H_B)} =$$

$$= 21,422 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_A - H_B} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_v = 0,82 \frac{\pi d_v^2}{4} \sqrt{2 \times 10 \text{ m/s}^2 \times (H_B - h)} = 0,82 \frac{\pi \times (0,08 \text{ m})^2}{4} \sqrt{20 \times (H_B - 0,25)} =$$

$$= 18,43 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_B - 0,25} \text{ m}^3/\text{s}$$

Theo (b) có :

$$21,422 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_A - H_B} = 18,43 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_B - 0,25}$$

Sau khi đồng nhất đơn vị đo lường ta bình phương cả 2 vế, được

$$21,422^2 (H_A - H_B) = 18,43^2 (H_B - 0,25) \rightarrow H_A - H_B = \frac{18,43^2}{21,422^2} (H_B - 0,25)$$

Từ đây có kết quả :

$$H_A = 1,74 H_B - 0,185 \quad (f)$$

Thế kết quả này vào (a), được :

$$13,71 \cdot 10^{-3} \sqrt{1,74 H_B - 0,185} + 18,43 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_B - 0,25} = 40 \cdot 10^{-3}$$

Giản ước với 10^{-3} rồi khử dấu căn :

$$13,71^2 (1,74 H_B - 0,185) + 2 \times 13,71 \times 18,43 \sqrt{1,74 H_B - 0,185} \sqrt{H_B - 0,25}$$

$$+ 18,43^2 (H_B - 0,25) = 40^2$$

$$1,319326491 H_B - 3,402963408 = \sqrt{1,74 H_B - 0,185} \sqrt{H_B - 0,25} \quad (g)$$

Để giảm sai số các phép tính trung gian hãy ký hiệu :

$$a = 1,319326491 ; b = 3,402963408 ; c = 1,740168571 ;$$

$$d = 0,185042142 ; e = 0,25$$

và :

$$X = H_B$$

phương trình (g) có dạng :

$$aX - b = \sqrt{cX - d} \sqrt{X - e}$$

Bình phương cả 2 vế để khử dấu căn :

$$a^2 X^2 - 2abX + b^2 = cX^2 - ceX - dX + de$$

$$(a^2 - c)X^2 + (ce + d - 2ab)X + b^2 + de = 0 \quad (h)$$

Đặt :

$$A = a^2 - c = 1,319326491^2 - 1,740168571 = 4,53810 \cdot 10^{-4}$$

$$A = 4,53810 \cdot 10^{-4}$$

$$-2 \times B = e + d - 2ab = 1,7040168571 \times 0,25 + 0,185042142 - 1,319326491 \times 3,402963408$$

$$2B = 8,35915526;$$

$$C = b^2 - de = 3,402963408^2 - 0,185042142 \times 0,25 = 11,53390996$$

$$C = 11,53390996.$$

Cuối cùng (h) có dạng :

$$AX^2 - 2BX + C = 0$$

giải ra ta được :

$$X = \frac{4,17957763 \pm \sqrt{4,17957763^2 - 4,5381 \cdot 10^{-4} \times 11,53390996}}{4,5381 \cdot 10^{-4}}$$

$$X_1 = \frac{4,17957763 - 4,17895142}{4,5381 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,00062521 \cdot 10^4}{4,5381} = 1,37989467 \approx 1,38m$$

$$X_2 = \frac{4,17957763 + 4,17895142}{4,5381 \cdot 10^{-4}} = \frac{8,35852905 \cdot 10^4}{4,5381} = 10^4 \cdot 1,841856515 = 18418,6m$$

Ta chỉ có thể chấp nhận X_1 vì có tính hiện thực, mà không thể chấp nhận X_2 có trị số quá lớn, siêu thực trong thế giới vật lý ; vả lại nó không thoả mãn yêu cầu của đề bài ở trên, được coi là nghiệm ngoại lai. Thực vậy, kiểm tra kết quả dưới đây sẽ rõ.

Như vậy, cuối cùng : $H_B = 1,38m$

Theo (f) ta có :

$$H_A = 1,7401685H_B - 0,185042142 =$$

$$= 1,7401685 \times 1,37989467 - 0,185042142 = 2,216207096$$

$$H_A = 2,2162m.$$

và :

$$Q_I = 13,71 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_A} = 13,71 \cdot 10^{-3} \sqrt{2,216207096} = 20,40902853 \cdot 10^{-3} m^3/s$$

$$Q_I = 20,409 l/s$$

$$Q_v = 18,43 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_B - h} = 18,43 \cdot 10^{-3} \sqrt{1,37989467 - 0,25} = 19,59135873 \cdot 10^{-3} m^3/s$$

$$Q_v = 19,591 l/s$$

Và như vậy :

$$Q = Q_I + Q_v = 20,40902853 + 19,59135873 = 40,00038726 l/s.$$

$$Q = 20,409 + 19,591 = 40 l/s$$

Kết quả này thoả mãn đề bài (phương trình (a)) :

Đồng thời thông qua xác định Q_I để kiểm tra độ chính xác của tính toán :

$$Q_I = 21,422 \cdot 10^{-3} \sqrt{H_A - H_B} = 21,422 \cdot 10^{-3} \sqrt{2,216207096 - 1,37989467} =$$

$$= 19,59044449 \cdot 10^{-3} m/s$$

$$Q_I = 19,590 l/s.$$

Có thể thấy, trị số này gần trùng khít với trị số trên của Q_v . Khớp đến số thứ 2 sau dấu phẩy (đến 1% l/s).

Tóm lại trị số của $X_1 = H_B = 1,379894467$ m cho các kết quả đúng và rất chính xác.

Tính thời gian cân bằng cột nước giữa 2 ngăn.

Căn cứ vào sơ đồ ở hình 7.12 ta có :

$$\mu_t \omega_t \sqrt{2g(h_A - h_B)} dt = dW_A = -\Omega_A dh_A \quad (i)$$

$$\mu_t \omega_t \sqrt{2g(h_A - h_B)} dt = dW_B = \Omega_B dh_B$$

Do tính liên tục và bảo toàn thể tích ta có cân bằng lượng chảy ra khỏi ngăn A vào ngăn B :

$$dW_A = dW_B$$

(hoặc trừ 2 phương trình cho nhau) ta có :

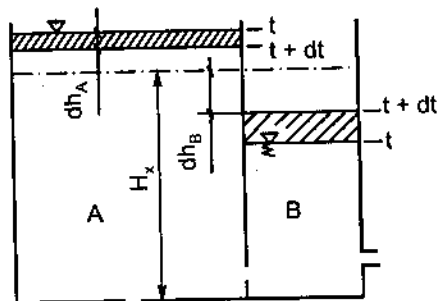
$$\Omega_A dh_A = -\Omega_B dh_B \quad (j)$$

trong đó : $h_A = h_A(t)$: cột nước tức thời tại ngăn A

$h_B = h_B(t)$: cột nước tức thời tại ngăn B

Ω_A ; Ω_B : tiết diện ngang các ngăn A và B

dW_A ; dW_B : biến thiên thể tích các ngăn.



Hình 7.12

Tích phân hai vế của (j) với điều kiện $t = 0, \text{const} = 0$, ta được :

$$h_B(t) = -\frac{\Omega_A}{\Omega_B} h_A(t)$$

Thế trở lại kết quả này vào phương trình thứ nhất của (i), được :

$$\mu_t \omega_t \sqrt{2g[h_A - (-\frac{\Omega_A}{\Omega_B} h_A)]} dt = -\Omega_A dh_A$$

Với ký hiệu :

$$\alpha = \frac{\Omega_A}{\Omega_B}$$

$$\mu_t \omega_t \sqrt{2g(1 + \alpha)h_A} dt = -\Omega_A dh_A \rightarrow dt = -\frac{\Omega_A}{\mu_t \omega_t \sqrt{2g(1 + \alpha)}} \frac{dh_A}{\sqrt{h_A}} \quad (k)$$

Nếu gọi chiều cao mực nước cân bằng là H_x , thì hiển nhiên :

$$(H_A - H_x)\Omega_A = (H_x - H_B)\Omega_B \quad (l)$$

Từ đây có :

$$H_x = \frac{H_A \Omega_A + H_B \Omega_B}{\Omega_A + \Omega_B} = \frac{\alpha H_A + H_B}{\alpha + 1} \quad (m)$$

$$H_x = \frac{2 \times 2,2162 + 1,3799}{2 + 1} = 1,937433333 \text{ m}$$

$$H_x = 1,937 \text{ m}$$

Tích phân phương trình (k) với cận dưới là H_A và cận trên là H_x , được thời gian cần thiết T để có được sự cân bằng :

$$T = \frac{-2\Omega_A}{\mu_t \omega_t \sqrt{2g(\alpha+1)}} \left[\sqrt{h_A} \right]_{H_A}^{H_x} = \frac{2\Omega_A}{\mu_t \omega_t \sqrt{2g(\alpha+1)}} (\sqrt{H_A} - \sqrt{H_x})$$

Sử dụng quan hệ (m) ta được :

$$\begin{aligned} T &= \frac{8\Omega_A}{\mu_t d_t^2 \sqrt{2g(\alpha+1)}} \left(\sqrt{H_A} - \sqrt{\frac{\alpha H_A + H_B}{\alpha+1}} \right) = \\ &= \frac{8 \times 20}{0,61 \times \pi \times 0,1^2 \sqrt{2 \times 10 \times (2+1)}} \left(\sqrt{2,2162} - \sqrt{\frac{2 \times 2,2162 + 1,3799}{2+1}} \right) = \\ &= \frac{160 \times 0,096773557}{0,148413496} = 104,33s \end{aligned}$$

$$T = 104,33 \text{ s} = 1' 44,33'' \text{ (1 phút 44,33 giây).}$$

Nhận xét. Nếu xả ra ngoài trời đến mực nước H_x , thời gian cần thiết là :

$$T_{xa} = \frac{8\Omega_A}{\mu_t d_t^2 \sqrt{2g}} (\sqrt{H_A} - \sqrt{H_x}) = \frac{160}{0,61 \times 0,1^2 \sqrt{20}} (\sqrt{2,2162} - \sqrt{1,943}) = 58,65s (< 1 \text{ phút}).$$

Tức là $T > T_{xa}$, đúng với mong đợi vì khi xả ra ngoài trời không có đối áp chất lỏng nên thời gian xả ngắn hơn.

Nếu không đóng lỗ xả đáy hoặc không đóng vòi bài toán tính thời điểm cân bằng và thời gian xả trở thành bài toán phức tạp hơn.

Bài 2. Cho một thùng chứa hình trụ tròn đáy là $\Omega = 3m^2$ và cột nước $H_0 = 4m$ (hình 7.13). Thùng có 2 lỗ tháo nước : một ở đáy và một giữa (chiều cao) thành bể. Diện tích 2 lỗ bằng nhau với hệ số lưu lượng $\mu = 0,6$. Tính diện tích lỗ để tháo cạn thùng trong thời gian 5 phút.

Giải :

Theo đề bài dựa vào (7-40), ta có thể thiết lập các quan hệ sau :

$$dW = dW_1 + dW_2 = -\Omega dh \quad (n)$$

do biến thiên của thể tích trong bể chịu ảnh hưởng bởi lưu lượng của 2 lỗ xả.

$h = h(t)$ là chiều cao tức thời của cột nước trong thùng.

$$dW_1 = \mu \omega \sqrt{2gh} dt$$

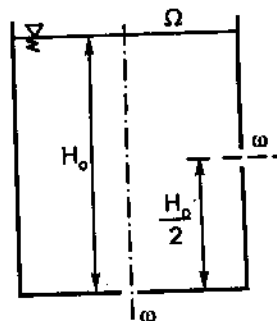
$$dW_2 = \mu \omega \sqrt{2g(h - H_0/2)} dt$$

nên với ký hiệu :

$$a = H_0/2 ; c = \mu \sqrt{2g}$$

và trên cơ sở của (n) có :

$$-\Omega dh = \omega c \sqrt{h} dt + \omega c \sqrt{h-a} dt = \omega c (\sqrt{h} + \sqrt{h-a}) dt$$



Hình 7.13

$$\frac{\Omega}{\omega c} \frac{dh}{\sqrt{h} + \sqrt{h-a}} = dt \rightarrow -\frac{\Omega}{\omega c} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{h-a}}{(\sqrt{h} + \sqrt{h-a}) \times (\sqrt{h} - \sqrt{h-a})} = dt$$

$$\rightarrow -\frac{\Omega}{a\omega c} (\sqrt{h} - \sqrt{h-a}) dh = dt$$

Tích phân 2 vế với cận dưới $t = 0$ ứng với cột nước H_0 và cận trên $t = T_1$ thời điểm ngăn nước đã thấp hơn vị trí lỗ trên sườn bể chứa là lúc nước bắt đầu không xả qua lỗ này, chỉ còn một mình lỗ xả đáy làm việc :

$$[t]_0^{T_1} = -\frac{\Omega}{a\omega c} \frac{2}{3} \left[h\sqrt{h} - (h-a)\sqrt{h-a} \right]_{H_0}^{\frac{1}{2}H_0} \rightarrow T_1 = \frac{2\Omega}{3a\omega c} \left[h\sqrt{h} - (h-a)\sqrt{h-a} \right]_{\frac{1}{2}H_0}^{H_0}$$

$$T_1 = \frac{2\Omega}{3a\omega c} \left\{ \left[H_0\sqrt{H_0} - \frac{H_0}{2}\sqrt{\frac{H_0}{2}} \right] - \left[\frac{H_0}{2}\sqrt{\frac{H_0}{2}} - 0 \right] \right\} = \frac{2\Omega H_0}{3a\omega c} \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{\frac{H_0}{2}} \right)$$

Dùng công thức (7-41) để tính thời gian tháo nốt khi chỉ còn lỗ xả đáy làm việc :

$$T_2 = \frac{2\Omega}{\omega \mu \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1}) = \frac{2\Omega}{\omega c} \sqrt{\frac{H_0}{2}}$$

Và thời gian cần thiết để tháo cạn nước trong thùng chứa :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{4\Omega}{3\omega c} \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{\frac{H_0}{2}} \right) + \frac{2\Omega}{\omega c} \sqrt{\frac{H_0}{2}} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{4\Omega}{3c} \left(\sqrt{H_0} - \sqrt{\frac{H_0}{2}} \right) + \frac{2\Omega}{c} \sqrt{\frac{H_0}{2}} \right]$$

Từ đây tiết diện lỗ xả phải có độ lớn là :

$$\omega = \frac{1}{T} \left[\frac{4 \times 3}{3 \times 0,6 \times \sqrt{2 \times 10}} (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + \frac{2 \times 3}{0,6 \times \sqrt{2 \times 10}} \sqrt{2} \right]$$

$$= \frac{1}{5 \times 60} \left[\frac{4}{2,68} (2 - 1,414213562) + \frac{6}{2,68} 1,414213562 \right]$$

$$= \frac{1}{300} (1,492537313 \times 0,585786438 + 3,166149767) = \frac{4,040457883}{300}$$

Kết quả, diện tích lỗ xả $\omega = 0,013468191 \text{ m}^2$

hay

$$\omega = 134,7 \text{ cm}^2 \approx 135 \text{ cm}^2$$

TỔNG KẾT CHƯƠNG VII

Chảy qua lỗ và vòi là vấn đề thường gặp trong hoạt động của kỹ sư ở hầu hết các ngành kinh tế quốc dân. Chương này đã đề cập đến những vấn đề cơ bản nhất trong các vấn đề

liên quan. Nắm được những kiến thức này ta có thể hiểu và giải được các bài toán tính lưu lượng, cột nước cân bằng động, thời gian cần thiết để tháo cạn hay đổ đầy một bể/hồ chứa với một số ràng buộc khác nhau.

Mỗi loại lỗ, vòi có những đặc trưng riêng, trong đó quan trọng nhất là hệ số lưu lượng và hệ số vận tốc là 2 đại lượng có quan hệ trực tiếp hay gián tiếp đến lưu lượng, song không phải lúc nào chúng cũng đồng nhất với nhau. Chúng ta cũng đề cập đến sự hình thành cấu trúc của dòng chảy trong chúng và qua chúng để giải thích được những ảnh hưởng tác động đến hệ số lưu lượng và hệ số vận tốc cũng như hệ số tổn thất do chúng gây ra. Liên quan đến cấu trúc dòng chảy ở đây có lẽ quan trọng hơn cả là hiện tượng co thất dòng ở lỗ và vòi ; hiện tượng chân không (gây tác dụng hút do chân không) trong một số loại vòi giúp giải thích cơ chế ảnh hưởng tích cực/tiêu cực tới lưu lượng, vận tốc...

Đối với các lỗ và vòi có tiết diện lớn trên cùng một mặt cắt sát bình/bể các yếu tố thủy lực không hoàn toàn như nhau, vì vậy phải dùng đến kiến thức vi phân và tích phân để giải quyết khâu tích hợp cho từng trường hợp.

Chương VIII

CHUYỂN ĐỘNG ĐỀU KHÔNG ÁP CỦA CHẤT LỎNG

1. Các khái niệm cơ bản

Ta xét chuyển động đều của chất lỏng trong kênh dẫn hở. Vì trong chuyển động đều tất cả các mặt cắt ướt của dòng chảy đều giống nhau. Bởi vậy chiều sâu h tại các điểm tương ứng dọc theo dòng chảy cũng như nhau, độ dốc mặt thoáng J_m của dòng chảy cũng bằng độ dốc đáy i .

Trong chuyển động đều vận tốc trung bình v tại tất cả các mặt cắt ướt đều như nhau, do đó tỉ động năng của dòng chảy $v^2/2g$ cũng bằng nhau và vì vậy đường năng là đường song song với mặt thoáng, nghĩa là độ dốc thủy lực J phải bằng độ dốc J_m . Như vậy trong chuyển động đều, không áp của chất lỏng :

$$J = J_m = i \quad (8-1)$$

và chỉ cần cho độ dốc đáy kênh i thì J và J_m đều đã xác định.

Tóm lại, muốn có chuyển động đều, phải thoả mãn đồng thời các điều kiện sau đây :

- 1, Lưu lượng không đổi dọc dòng chảy và theo thời gian, $Q = \text{const}$;
- 2, Mặt cắt ngang của kênh không thay đổi hình dạng và diện tích $\omega = \text{const}$;
- 3, Độ sâu h không đổi dọc dòng chảy và theo thời gian : $h = \text{const}$;
- 4, Độ dốc đáy i không đổi dọc chiều dài kênh : $i = \text{const}$;
- 5, Độ nhám n không đổi dọc chiều dài kênh : $n = \text{const}$.

Thường chỉ các kênh dẫn nhân tạo, một số đoạn sông tự nhiên cùng một lúc thoả mãn được các điều kiện trên.

2. Công thức tính toán

Trong tính toán thủy lực của chuyển động đều không áp người ta thường dùng công thức Chézy :

$$v = C\sqrt{R.i} \quad (8-2)$$

$$\text{hay : } v = W\sqrt{i} \quad (8-3)$$

trong đó :

v - vận tốc trung bình (mặt cắt) của dòng chảy ;

c - hệ số Chézy ;

R - bán kính thủy lực ;

i - độ dốc đáy kênh (cũng là J_m và J) ;

W - đặc trưng vận tốc.

Nếu dùng đặc trưng lưu lượng K như đối với chuyển động có áp trong ống

$$K = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R} \quad (8-4a)$$

thì : $Q = K \cdot \sqrt{i} \quad (8-4b)$

Bốn công thức cuối (8-2 ÷ 8-4) là những công thức cơ bản của dòng chảy đều trong kênh dẫn hở (không áp). Mọi tính toán đều phải sử dụng chúng hoặc các biến thể của chúng. Trong tính toán cụ thể vấn đề xác định cho được hệ số Chézy là mấu chốt. Thường dùng công thức :

$$C = 20 \lg \frac{R}{\varepsilon + \frac{0,385v}{\sqrt{g \cdot R \cdot i}}} \quad (8-5a)$$

trong đó : C - là hệ số Chézy,
 R - bán kính thủy lực của mặt cắt ướt,
 i - độ dốc đáy kênh,
 v - độ nhớt động học của chất lỏng,
 ε - độ nhám dẫn xuất tuyến tính (tìm trong bảng tra cứu tính toán thủy lực).

Đối với nước lạnh ($5 \div 15^\circ\text{C}$) trên cơ sở trị số của v :

$$C = 20 \lg \frac{R}{\varepsilon + \frac{0,04}{\sqrt{R \cdot i}}} \quad (8-5b)$$

Trường hợp chảy rối : $\varepsilon \sqrt{R \cdot i} \geq 0,04 \Rightarrow C = 20 \lg \frac{R}{\varepsilon}, \quad (8-5c)$

Chú ý khi tính toán R và ε tính bằng milimét (mm).

3. Mặt cắt kênh

3.1. Mặt cắt thường dùng

Trong thực tế mặt cắt kênh rất đa dạng, đặc biệt các kênh nhân tạo được xây dựng bằng nhiều loại vật liệu khác nhau (kim loại, gỗ, đá, bê tông, chất dẻo,...) có các hình thù bất kỳ, tùy thuộc vào mục đích sử dụng (chữ nhật, tam giác, hình thang, vòng tròn, elip, ...). Trong quá trình sử dụng chất lượng bề mặt thay đổi (gỉ sắt, rong rêu, cặn bẩn, ...).

Đối với vật liệu rời chỉ nên dùng mặt cắt kênh hình thang để có taluy (mái dốc) ứng với góc trượt của vật liệu nhằm chống xạt lở để ổn định mái.

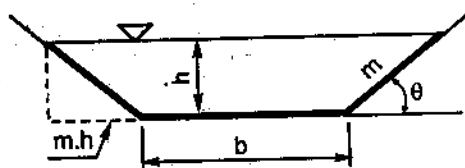
Trường hợp hình thang (hình 8.1) ta có các yếu tố mặt cắt dưới đây :

- Diện tích mặt cắt ướt :

$$\omega = (b + mh)h \quad (8-6)$$

- Chu vi ướt

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2} \quad (8-7)$$



Hình 8.1

trong đó :

b - chiều rộng đáy kênh ;

h - chiều sâu mực nước trong kênh,

m = ctg θ - hệ số mái dốc.

3.2. Mặt cắt có lợi nhất về thủy lực

Là mặt cắt mà qua đó với trị số mặt cắt ướt, độ nhám và độ dốc đáy kênh đã định có thể thoát được một lưu lượng lớn nhất. Đây là một bài toán tối ưu trên quan điểm thủy lực, cụ thể là nó sẽ cho lưu lượng lớn nhất. Vì thế phải xác lập được quan hệ lưu lượng với các đặc trưng của mặt cắt. Ở đây dùng công thức Chézy với hệ số C xác định theo Pavlốpski :

$$Q = \omega \cdot C \sqrt{R \cdot i} = \omega \frac{1}{n} R^y \sqrt{R \cdot i} = \frac{\omega}{n} R^{0.5+y} \sqrt{i} \quad (8-8)$$

Từ đây ta thấy Q cực đại khi R cực đại. Lại biết rằng, $R = \frac{\omega}{\chi}$ nên với các dữ liệu

(đặc trưng) đã cho R cực đại nếu χ cực tiểu.

Ta đã biết trong các mặt cắt có diện tích như nhau thì hình tròn có chu vi nhỏ nhất.

Đối với mặt cắt hình thang, là loại thông dụng, ta cần xác định tỉ số giữa các cạnh, cụ thể là tỉ số giữa đáy b và chiều sâu h. Theo (8-6) ta có :

$$b = \frac{\omega}{h} - mh \quad (8-9)$$

còn chu vi ướt theo (8-6) thì :

$$\chi = \left(\frac{\omega}{h} - mh \right) + 2h\sqrt{1+m^2}$$

ở đây h là biến số.

Vậy χ sẽ cực tiểu, khi $\frac{d\chi}{dh} = 0$, lúc này có :

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{\omega}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0$$

Sử dụng quan hệ (8-6) ta được :

$$\frac{b}{h} = 2(\sqrt{1+m^2} - m) \quad (8-10)$$

Nếu kí hiệu $\beta_{\text{in}} = \left(\frac{b}{h} \right)_{\text{in}}$ là tỉ số có lợi nhất thì theo (8-10) nó là hàm của hệ số mái dốc

$$\beta_{\text{in}} = f(m) \quad (8-11)$$

$$\text{cụ thể là :} \quad \beta_{\text{in}} = 2(\sqrt{1+m^2} - m) \quad (8-12)$$

được thể hiện trên bảng đối số sau :

m	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
β_{ln}	2,00	1,562	1,236	1,000	0,828	0,702	0,606	0,532	0,424

Đưa β_{ln} vào công thức tính bán kính thủy lực R, ta sẽ tìm được bán kính thủy lực của mặt cắt hình thang có lợi nhất về mặt thủy lực.

Như vậy :
$$R_{ln} = \frac{h}{2} \quad (8-13a)$$

Nếu mặt là hình chữ nhật (một dạng suy biến của hình thang khi $\theta = 90^\circ$) theo (8-10) thì :

$$b_{ln} = 2h_{ln} \quad (8-13b)$$

Trong thực tế kỹ thuật tối ưu thủy lực thường không hẳn là tối ưu kinh tế. Như vậy, để tối ưu cho cả thủy lực lẫn kinh tế cần đưa thêm vào các yếu tố kinh tế, như công đào đắp,... Nhiều khi vấn đề sức bền cũng không cho phép chọn tối ưu thủy lực - kinh tế.

4. Những bài toán cơ bản về dòng chảy đều trong kênh dẫn hở tiết diện hình thang

Trường hợp này phương trình cơ bản (xuất phát từ bản chất) luôn là công thức Chézy :

$$Q = \omega \cdot C \sqrt{R \cdot i}$$

Xét một cách tổng quát, lưu lượng là hàm của b, h, m, n, i :

$$Q = f(b, h, m, n, i) \quad (8-14)$$

Người ta thường phải giải quyết 2 vấn đề sau đây :

a/ Tính toán kiểm tra : kênh đã biết, thường là phải giải phương trình (8-14) để tìm một ẩn nào đó (biết 5 trong 6 hay 5 biến và 1 hàm).

b/ Thiết kế mới : Các yếu tố trắc địa và địa chất công trình đã biết, vật liệu, lưu lượng đã cho cần xác định mặt cắt (kích thước) kênh.

4.1. Giải bài toán kiểm tra (a)

Trường hợp này có 3 bài toán sau đây :

+ **Xác định lưu lượng Q** khi đã biết b, h, m, n, i. Ở đây phải tính ω , R, C rồi thay vào (8-4) để tính Q (bằng phép lập).

+ **Xác định độ dốc đáy kênh i** khi đã biết Q, h, b, m, n.

Tính ra các trị số ω , R, C rồi thay vào (8-4) để được :

$$i = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}$$

+ **Xác định h**, khi biết Q, b, m, n, i

Trực tiếp rút h từ (8-4) là việc làm phức tạp. Vì vậy, sẽ tiện hơn nếu dùng phép lặp : Lấy "hú hoạ" (có định hướng) h để tính ra ω , C, R tương ứng rồi thế vào (8-4) để tìm các trị số K tương ứng. Mặt khác, bằng công thức tính K xem nó có gần trị số đã cho K_0 không để quyết định độ "gia giảm" của h :

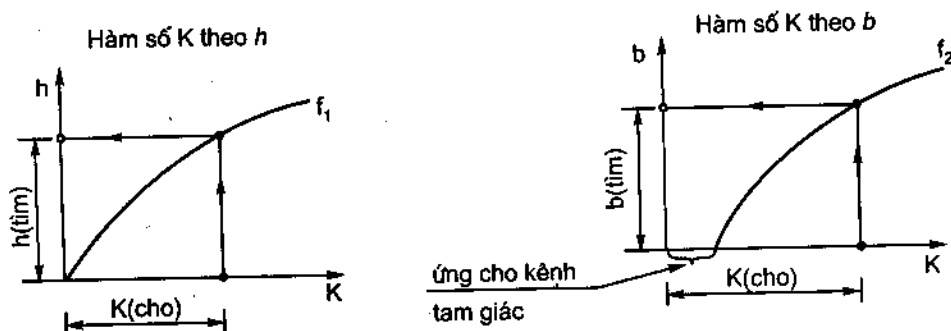
$$K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}}$$

Bài toán tìm b (chiều rộng đáy kênh) cũng thuộc bài toán này vì các đại lượng ω , C và R đều có thể biểu thị qua b :

$$K = \omega.C.\sqrt{R} = f(b)$$

giải bài toán này cũng phải dùng phép lặp.

Người ta cũng có thể dùng phép đồ giải thay cho phép lặp. Trường hợp này phải vẽ đường biểu diễn của các hàm : $K = f_1(h)$ và $K = f_2(b)$ sau đó đóng giá trị K_0 đã biết để kiểm giá trị cần tìm (xem hình 8.2).



Hình 8.2

Trong bài toán tìm b cần lưu ý, ở mặt cắt hình thang khi $b \rightarrow 0$, mặt cắt là tam giác. Vì thế dù $b = 0$, vẫn có $K \neq 0$.

4.2. Thiết kế kênh mới

Ở đây thông thường phải xác định tuyến kênh và độ dốc đáy i trên bản đồ trắc địa (mặt bằng với trắc dọc sao cho phù hợp nhất với các yêu cầu thủy lực và kinh tế). Ta phải căn cứ vào địa chất công trình hay vật liệu làm kênh mà xác định góc nghiêng taluy (mái dốc) m , đồng thời xác định hệ số nhám n của lòng dẫn. Với lưu lượng Q cho trước cần xác định b và h của mặt cắt ngang. Do vậy từ (8-14) có phương trình 2 ẩn số (b và h). Như vậy, còn thiếu 1 phương trình quy định mối quan hệ giữa b và h .

Có 2 trường hợp xảy ra trong lúc này :

+ Cho biết tỉ số $b/h = \beta$. Ta thế giá trị $b = \beta h$ để loại ẩn số b khỏi phương trình để chỉ còn lại một ẩn số h . Xác định h rồi tính ra b . Nên lấy tỉ số $\beta = \beta_{\min}$ nếu không có ràng buộc gì đặc biệt và cùng với (8-14) phương trình thứ 2 sẽ là (8-12).

+ Cho trước bán kính thủy lực R hoặc vận tốc v .

Giả thiết cho trước R , từ (8-5) hoặc (8-4) tính ra :

$$\omega = \frac{Q}{C\sqrt{R} \cdot i}$$

và theo định nghĩa ta lại có $\chi = \frac{\omega}{R}$ nên dẫn đến 2 phương trình 2 ẩn số sau :

$$(b + m \cdot h)h = \omega$$

$$b + 2h\sqrt{1 + m^2} = \frac{\omega}{R} \quad (A)$$

giải hệ (A) ta được b và h .

Giả thiết cho biết v , từ công thức Chézy :

$$v = C\sqrt{R} \cdot i$$

Theo Pavlôpxki $C = \frac{1}{n} R^y$

nên ta viết được : $C\sqrt{R} = \frac{1}{n} R^y \sqrt{R} = \frac{1}{n} R^{y+0,5} = \frac{v}{\sqrt{i}} \quad (8-15a)$

và lấy gần đúng : $y = 1,5\sqrt{n}$ nếu $R < 1m$

$y = 1,3\sqrt{n}$ nếu $R > 1m \quad (8-15b)$

Biết $\frac{v}{\sqrt{i}}$ và n ta xác định được y để rồi giải ra ta được R . Đường như ta đã luẩn quẩn trong việc xác định số mũ y khi chọn công thức tính, song không phải vậy, thoát đầu lấy hứ họa hoặc theo kinh nghiệm rồi kiểm tra lại sau khi biết R . Biết R rồi thì ta lại quay trở về giải hệ phương trình (A).

Biết rằng ở mặt cắt có lợi nhất về thủy lực trị số R và v lớn nhất và χ nhỏ nhất. Như vậy bài toán chỉ có lời giải khi những trị số cho trước là R và v phải nhỏ hơn R_{lm} và v_{lm}

5. Tính toán kênh có điều kiện thủy lực phức tạp

5.1. Mặt cắt đơn giản nhưng trên chu vi ướt có độ nhám khác nhau (xem hình 8.3)

Đây là vấn đề thường gặp trong thực tế (Taluy xây dựng, đáy tự nhiên ; hay một bờ là vách đá tự nhiên, bên kia là xây, đổ bê tông). Cần phải tìm 1 độ nhám trung bình :

+ Trên một mặt cắt gọi χ_i là phần chu vi ướt có độ nhám n_i và ω_i là phần mặt cắt tương ứng với phần chu vi ướt χ_i , có thể tính độ nhám trung bình theo :

$$n_{tb} = \frac{n_1 \cdot \chi_1 + n_2 \cdot \chi_2 + \dots + n_n \cdot \chi_n}{\chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n} \quad (8-16)$$

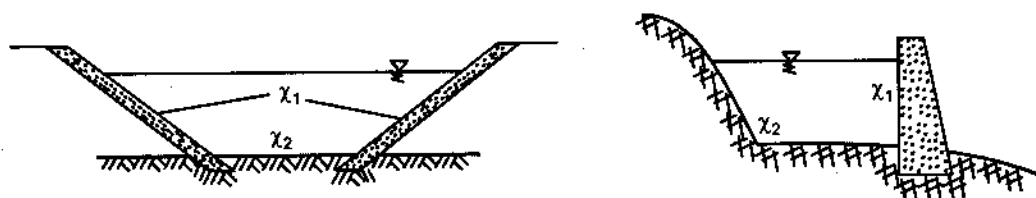
+ Pavlôpxki đưa vào giả thuyết là mỗi phần chu vi ướt có ảnh hưởng đến một phần diện tích tỉ lệ với nó tức là :

$$\frac{\chi_1}{\omega_1} = \frac{\chi_2}{\omega_2} = \dots = \frac{\chi_n}{\omega_n} = \frac{\chi}{\omega}$$

và đã chứng minh được rằng có thể xác định “hệ số trung bình” bằng công thức :

$$n_{tb} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n n_i^2 \cdot \chi_i}{\sum_{i=1}^n \chi_i}}$$

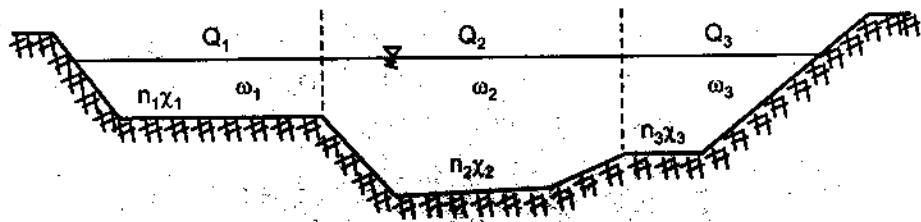
Khi đó trị số n trong công thức tính hệ Chézy lấy bằng n_{tb}



Hình 8.3

5.2. Kênh có mặt cắt phức tạp (hình 8.4)

Nếu kênh có mặt cắt phức tạp mà ảnh hưởng do các thành phần của chu vi ướt lên các phần diện tích tương ứng không thể coi là tỉ lệ với nhau thì dù chu vi ướt gồm nhiều phần có độ nhám khác nhau hoặc chỉ có một độ nhám ta vẫn chia mặt cắt ướt ω thành nhiều phần bằng những đường/mặt phẳng thẳng đứng và tính vận tốc trung bình cho từng phần. Do đó cần tính riêng diện tích ω_i , chu vi ướt χ_i , bán kính thủy lực R_i , hệ số nhám n_i và lưu lượng Q_i cho từng phần với giả thiết là độ dốc thủy lực J giống nhau.



Hình 8.4

Vậy :

$$Q_1 = K_1 \sqrt{J} = \omega_1 C_1 \sqrt{R_1 i}$$

$$Q_2 = K_2 \sqrt{J} = \omega_2 C_2 \sqrt{R_2 i}$$

...

...

...

$$Q_n = K_n \sqrt{J} = \omega_n C_n \sqrt{R_n i}$$

$$Q = \sum Q_i = (\sum K_i) \sqrt{J} = K \sqrt{J}$$

(8-17)

Cần lưu ý rằng, khi tính chu vi ướt cho các mặt cắt ω , không được tính các phần tiếp giáp giữa chất lỏng với chất lỏng hoặc giữa chất lỏng với không khí.

6. Tính toán thủy lực cho dòng chảy đều, không áp trong ống

Ta cũng biết, chảy không áp không chỉ là trường hợp chất lỏng chảy trong kênh hở mà còn chảy trong ống kín (đương nhiên không điền đầy mặt cắt) ví như dòng chảy trong cống ngầm, có lúc chảy trong đường ống thiếu nước.

Nếu dùng trực tiếp các phương trình cơ bản (8-2) ÷ (8-5) để tính toán cho trường hợp này thì khá là phiền phức, vì diện tích ω và chu vi ướt χ là những hàm số phức tạp của độ sâu h . Cho nên trong thực tiễn người ta dùng các đồ thị hay bảng đối số lập cho các tỉ số đó, với chỉ số : ng = ngập, như có thể thấy trong phụ lục P.8.1 :

$$\frac{K_{ng}}{K} ; \frac{W_{ng}}{W} ; \frac{\omega_{ng}}{\omega} ; \frac{R_{ng}}{R}$$

theo các độ ngập trong kênh $\frac{h_{ng}}{H_i} = a$ khác nhau, (hàm của $\frac{h_{ng}}{H_i}$). Ở đây K_{ng} là đặc trưng lưu lượng ứng với độ sâu h_{ng} nào đó, tức là lúc chỉ ngập một phần, còn K thì ứng với độ sâu $h = H$ là lúc đầy nhất khi kênh làm việc với toàn tiết diện (đầy).

$$\frac{K_{ng}}{K} = f_1\left(\frac{h_{ng}}{H}\right) = f_1(a)$$

$$\frac{W_{ng}}{W} = f_2\left(\frac{h_{ng}}{H}\right) = f_2(a)$$

Người ta gọi a là độ ngập của kênh/ ống.

Khi các kênh có mặt cắt ngang tương tự về mặt hình học (đồng dạng) với nhau thì các hệ thức sẽ như nhau. Nguyên nhân sâu xa là do các hàm này đều là hàm không thứ nguyên. Do vậy khi tính các trị số của đặc trưng ta có :

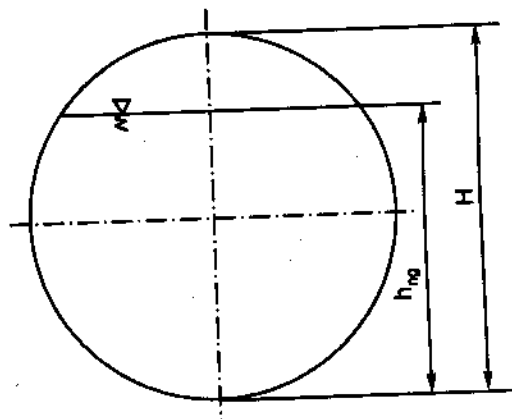
$$K_{ng} = K f_1\left(\frac{h_{ng}}{H}\right) \quad (8-18)$$

$$W_{ng} = W f_2\left(\frac{h_{ng}}{H}\right) \quad (8-19)$$

Bài toán ngược cũng giải tương tự :

$$K = \frac{K_{ng}}{f_1\left(\frac{h_{ng}}{H}\right)} \text{ và } W = \frac{W_{ng}}{f_2\left(\frac{h_{ng}}{H}\right)} \quad (8-20)$$

Các hàm f_1 và f_2 tìm trong phụ lục nói trên.



Hình 8.5

7. Vận tốc cho phép để không xói và không bồi lắng của lòng dẫn hở

Xói mòn và bồi lắng là 2 vấn đề trái ngược nhau của thủy lực, nếu không biết chế ngự, chúng sẽ có những tác động phá hoại, gây hậu quả nghiêm trọng cho môi trường, sinh thái. Ngược lại, nếu biết chế ngự nó thì có thể lợi dụng khai thác mặt tích cực của hiện tượng này để phục vụ lợi ích con người. Ở đây vận tốc dòng chảy đóng vai trò trung tâm : độ lớn của nó quyết định có xói lở hay bồi lắng không. Trong tính toán người ta phải xét đến điều kiện địa hình, địa chất, hiệu quả sử dụng của kênh, chế độ phù sa và dòng chảy. Tại các công trình kỹ thuật ; công trình thủy điện hoặc thủy lợi khác, phục vụ tổng hợp phải thỏa mãn một yêu cầu chung nhất là : trong điều kiện sử dụng bình thường lưu lượng và mực nước trong kênh (theo năm tháng) phải duy trì được ở mức thiết kế. Muốn vậy, phải đảm bảo sao cho có được tính ổn định hình học của các mặt cắt, ngang và dọc về phương diện xói - bồi.

Để khỏi bị xói lở, vận tốc trung bình tính toán hay vận tốc thực tế trong kênh không được vượt quá, hoặc phải nhỏ hơn vận tốc không xói cho phép nào đấy.

(8-21)

$$v < v_{kx}$$

trong đó : v_{kx} là vận tốc cho phép không xói của dòng chảy.

Định nghĩa : Vận tốc không xói cho phép của dòng chảy là vận tốc lớn nhất khi mà dòng chảy đạt tới trị số ấy, không gây ra xói lở (phá hoại) lòng kênh, trở ngại cho việc sử dụng bình thường.

Vận tốc v_{kx} phụ thuộc vào nhiều yếu tố như vật liệu tạo thành lòng kênh, chiều sâu, mực nước, độ nhám lòng dẫn và cả các chất lơ lửng (phù sa,...) mà dòng chảy mang theo. Để tính toán sơ bộ, trong trường hợp không xét đến bùn cát lơ lửng và một số yếu tố khác, có thể sử dụng v_{kx} khác nhau cho từng loại đất, dính và không dính.

Khác với đất không dính, ở các loại đất dính thường đường kính hạt không ảnh hưởng trực tiếp đến lưu lượng, vận tốc không xói, bởi lẽ khi dòng chảy bắt đầu gây xói thì từng cụm đất bị phá vỡ. Theo số liệu thực đo, rất nhiều trường hợp các cụm đất bị tách ra có đường kính trung bình $d_0 = 4\text{mm}$. Trên cơ sở kết quả đo lường này cũng như sự phân tích trên, v_{kx} chỉ phụ thuộc vào lực kết dính và chiều sâu cột nước.

Cần biết rằng khi (8-21) được thỏa mãn, đối với đất dính hay không dính, về nguyên tắc, kênh không bị xói. Nhưng ngược lại, khi $v > v_{kx}$ thì chưa nên vội kết luận dứt khoát rằng kênh bị xói. Phải tùy thuộc vào tình hình cụ thể mà xuất phát từ phương trình cân bằng trong động lực học lòng dẫn để có cơ sở chắc chắn cho mọi kết luận cuối cùng.

Đối với những dòng chất lỏng có mang theo những chất lơ lửng (phù sa,...) thì bên cạnh việc phải bảo đảm cho kênh không bị xói, ta còn phải chống bồi lắng, một quá trình làm cho lòng kênh ngày càng hẹp đi, thậm chí bị lấp.

Định nghĩa : Ta gọi vận tốc mà với nó dòng chảy đủ sức tải toàn bộ các chất lơ lửng mà nó mang theo là vận tốc giới hạn không lắng, kí hiệu là v_{kl} . Và như vậy muốn cho lòng kênh không bị bồi lấp cần thỏa mãn :

(8-22)

$$v > v_{kl}$$

Người ta, trên cơ sở kinh nghiệm và đo đạc, cụ thể là Kenedy, Laxay và một số khác, đã đề xuất công thức xác định vận tốc không lắng :

$$v_{kl} = e\sqrt{R} \quad (8-23)$$

trong đó : e là hệ số kinh nghiệm. Song theo sự phát triển của bộ môn thủy lực công thức này chỉ mang tính lịch sử vì nó không hề phản ánh một yếu tố rất quan trọng là số lượng (nồng độ) chất lơ lửng, trong đó có cả thành phần hạt của chất đó ví dụ ở dòng 2 pha.

Để khắc phục thiếu sót này, phải dùng đến khái niệm "độ thô thủy lực" w là vận tốc lắng chìm của hạt có tỉ trọng lớn hơn nước. Vậy muốn cho hạt không bị lắng xuống đáy dòng chảy cần phải duy trì hay đảm bảo

$$u_y \geq w \quad (8-24)$$

trong đó : - u_y là vận tốc mạch động theo hướng thẳng đứng của hạt lơ lửng lơ. Trị số gần đúng của nó tỉ lệ thuận với vận tốc trung bình :

$$u_y = \alpha v \quad (8-25)$$

α là hệ số thực nghiệm. Như vậy từ (8-24) và (8-25) đối với kích thước của hạt lớn nhất :

$$\frac{w_{\max}}{\alpha_{\max} \cdot v} \leq 1 \quad (8-26)$$

Theo Hatsatrian, có thể lấy $\alpha_{\max} = 0,065i^{0,25}$. Từ đây có thể rút ra biểu thức của vận tốc không lắng dưới đây :

$$v_{kl} = \frac{w_{kl}}{0,065 \cdot \sqrt[4]{i}} \quad (8-27)$$

Như vậy điều kiện để không lắng là :

$$v > \frac{w_{kl}}{0,065 \cdot \sqrt[4]{i}} \quad (8-28)$$

Có thể suy ra, các hạt có kích thước nhỏ hơn, với $w_{\max}$ cũng vẫn tồn tại trạng thái lơ lửng. Trên thực tế các hạt rắn có thể lắng xuống không phải vì chúng có kích thước quá lớn mà còn do chúng hiện diện với số lượng quá nhiều trong nước/chất lỏng ("nồng độ" quá cao). Do đó ngoài việc phải thoả mãn (8-22) và (8-26), chúng ta cần kiểm tra bổ sung thêm điều kiện :

$$\rho_0 < \rho_{pg}$$

trong đó : ρ_0 là số lượng chất lơ lửng trong một đơn vị thể tích của dòng chảy, còn gọi là độ đục ;

ρ_{pg} là độ đục phân giới của dòng chảy.

Trị số của chúng phụ thuộc vào các yếu tố thủy lực và các yếu tố đặc trưng cho thành phần bùn cát mà nội dung nghiên cứu của nó là cả một chuyên đề lớn, vượt quá khuôn khổ giáo trình này.

Khi cần bảo đảm đồng thời không xói và không bồi (8-21) và (8-22) ta phải có :

$$v_{kl} < v < v_{kx} \quad (8-30)$$

Khi “nồng độ” chất lơ lửng (và các yếu tố khác) cao, như phù sa sông Hồng, hay sông Hoàng Hà (Trung Quốc) có thể xảy ra :

$$v_{kl} > v_{kx}$$

và do vậy cùng lúc xảy ra cả hai hiện tượng xói và bồi ; nơi thì xói nơi thì bồi.

Lúc này để thiết kế kênh ta phải dùng phương pháp cân bằng xói - bồi của bùn cát (chẳng hạn, phương pháp của Trung Quốc).

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG VIII

Bài 1. Kênh thủy lợi tiết diện chữ nhật, chiều rộng $b = 3\text{m}$, độ dốc đáy kênh 5 phần vạn ($i = 0,0005$). Người ta đo được chiều sâu $H = 2,5\text{ m}$. Hỏi lúc đó lưu lượng của kênh là bao nhiêu ? Biết rằng bề mặt lòng kênh thuộc loại trát vữa xi măng.

Giải :

Để giải bài này ta vận dụng các công thức (8-3) và (8-4) trong đó xác định môđun lưu lượng K là quan trọng hàng đầu. Theo (8-4) để có K ta phải biết hệ số Chézy C , phải tính mặt cắt ướt ω và bán kính thủy lực R . Dưới đây ta lần lượt xác định chúng.

Tính ω , χ và R :

$$\omega = bh = 3 \times 2,5 = 7,5\text{m}^2;$$

$$\chi = b + 2h = 3 + (2 \times 2,5) = 8\text{m}$$

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{7,5}{8} = 0,9375\text{m}$$

Xác định C :

Ta vận dụng công thức Altsul (8-5b) (cho trường hợp nước lạnh $\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$) và ứng với chất lượng lòng kênh cho trên độ nhám dẫn suất tuyến tính tra bảng lấy $\epsilon = 0,04$:

$$C = 20 \lg \frac{R}{\epsilon + \frac{0,04}{\sqrt{iR}}} = 20 \lg \frac{937,5}{0,04 + \frac{0,04}{\sqrt{0,0005 \times 937,5}}} = 79,5\text{m}^{0,5}/\text{s}$$

Như vậy theo (8-3) :

$$K = \omega C \sqrt{R} = 7,5 \times 79,5 \sqrt{0,9375} = 577,32\text{m}^3/\text{s}$$

và theo (8-4) ta có lưu lượng :

$$Q = K \sqrt{i} = 577,32 \sqrt{0,0005} = 12,9\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q = 12,9\text{ m}^3/\text{s}.$$

Bài 2. Xác định kích thước tối ưu thủy lực của kênh đá xây khan, mặt cắt hình thang với hệ số mái dốc $m = 2$, có độ dốc đáy $i = 0,001$ và lưu lượng $Q = 4\text{ m}^3/\text{s}$.

Giải :

Đây là bài toán phải giải bằng phương pháp thử dần, tức là dùng phép lặp. Trước hết cần xác định môđun lưu lượng K xuất phát từ các công thức như trong ví dụ 1 :

$$K = \omega C \sqrt{R} = \frac{Q}{\sqrt{i}}$$

Đề bài đã cho lưu lượng $Q = 4 \text{ m}^3/\text{s}$ và độ dốc đáy kênh $i = 0,001$. Như vậy dù cho các thông số của mặt cắt kênh có trị số như thế nào thì vẫn phải đảm bảo môđun lưu lượng của đáp số thoả mãn các dữ liệu đã cho, nghĩa là :

$$K_0 = K = \frac{4}{\sqrt{0,001}} = 126,491 \text{ m}^3/\text{s} \approx 126,5 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Do vậy, đây sẽ là chuẩn so sánh để quyết định khi nào cần dừng quá trình tính toán, hoặc nếu dùng thuật đồ giải với đường biểu diễn $K = f(h)$, đóng trị số K_0 lên biểu đồ để được trị số h cần tìm. Sau đây ta xây dựng đồ thị $K(h)$ với các trị số chiều sâu h khác nhau (một cách có định hướng).

Thử lần thứ nhất : lấy $h_{(1)} = 1 \text{ m}$.

Dùng tỉ số "h trên b" tối ưu (có lợi nhất) về mặt thuỷ lực β_{ln} , công thức (8-12)

$$\beta_{ln} = 2(\sqrt{1+m^2} - m)$$

ta có :
$$b = h\beta_{ln} = 1 \times 2(\sqrt{1+2^2} - 2) = 2 \times 0,236 = 0,472 \text{ m}$$

$$\omega = (b + mh)h = (0,472 + 2 \times 1) \times 1 = 2,472 \text{ m}^2$$

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2} = 0,472 + 2 \times 1\sqrt{1+2^2} = 4,94 \text{ m}$$

$$R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{2,742}{4,94} = 0,5 \text{ m}$$

Với kênh đá xây khan $\varepsilon = 10 \text{ mm}$ nên chuẩn :

$$\varepsilon \sqrt{iR} = 10\sqrt{0,001 \times 500} = 7,07 > 0,4$$

cho phép ta dùng công thức (8-5c) để tính C , rồi tính K :

$$C = 20 \lg \frac{R}{\varepsilon} = 20 \lg \frac{500}{10} = 33,979 \approx 34 \text{ m}^{0,5}/\text{s}.$$

$$K_{(1)} = \omega C \sqrt{R} = 2,72 \times 34 \sqrt{0,5} = 59,4 \text{ m}^3/\text{s} < K_0$$

$$K_{(1)} < K_0 = 126,5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Như vậy bước tiếp theo phải lấy h lớn hơn để tăng môđun lưu lượng !

Thử lần thứ 2 : lấy $h_{(2)} = 1,5 \text{ m}$. Lặp lại các bước tính trên :

$$b = 1,5 \times 2(\sqrt{1+2^2} - 2) = 3 \times 0,236 = 0,708 \text{ m}$$

$$\omega = (0,708 + 2 \times 1,5)1,5 = 3,708 \times 1,5 = 5,562 \text{ m}^2$$

$$\chi = 0,708 + 2 \times 1,5\sqrt{1+2^2} = 0,708 + 3 \times 2,236 = 7,416 \text{ m}$$

$$R = \frac{5,562}{7,416} = 0,75\text{m}$$

$$\varepsilon\sqrt{iR} = 10\sqrt{0,001 \times 750} = 8,66 > 0,04$$

$$\rightarrow C = 20 \lg \frac{750}{10} = 20 \lg 75 = 37,5\text{m}^{0,5} / \text{s}$$

$$K_{(2)} = 5,562 \times 37,5\sqrt{0,75} = 180,6\text{m}^3 / \text{s}$$

$$K_{(2)} > K_0$$

Ta thấy môđun lưu lượng đã lớn hơn trị số chuẩn (cần thiết) do ta đã lấy độ sâu quá lớn. Vì vậy bước thứ 3 phải giảm h để được giá trị cần tìm nằm đâu đó trong khoảng giữa $h_{(1)}$ và $h_{(2)}$.

Thử lần thứ 3 : lấy $h_{(3)} = 1,25\text{m}$, ta có :

$$b = 1,25 \times 2(\sqrt{1 + 2^2} - 2) = 2,5 \times 0,236 = 0,59\text{m}$$

$$\omega = (0,59 + 2 \times 1,25) \times 1,25 = 3,8625\text{m}^2$$

$$\chi = 0,59 + 2 \times 1,25\sqrt{1 + 2^2} = 6,180\text{m}$$

$$R = \frac{3,8625}{6,180} = 0,62498\text{m} \approx 0,625\text{m}$$

$$\varepsilon\sqrt{iR} = 10\sqrt{0,001 \times 625} = 7,9 > 0,04$$

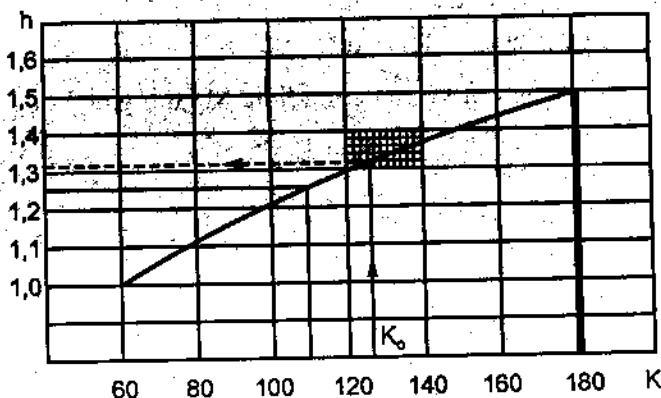
$$\rightarrow C = 20 \lg \frac{625}{10} = 35,92\text{m}^{0,5} / \text{s}$$

$$K_{(3)} = 3,8625 \times 35,92\sqrt{0,625} = 109,68439 \approx 109,7\text{m}^3 / \text{s}$$

$$K_{(3)} < K_0$$

Nghĩa là : $h_{(3)} = 1,25\text{m} < h_{\text{opt}} < 1,5\text{m} = h_{(1)}$

Bước tiếp theo : qua 3 tọa độ $(h_{(1)}, K_{(1)})$, $(h_{(2)}, K_{(2)})$ và $(h_{(3)}, K_{(3)})$ trên giấy ô kẻ ly một đường cong suôn, không gãy khúc đi qua 3 điểm này và coi đó là đồ thị $K = f(h)$. Dóng giá trị $K_0 = 126,5\text{m}^3/\text{s}$ lên đường cong rồi dóng xuống trục h (xem hình 8.6) ta được $h_{\text{opt}} = 1,32\text{m}$. Có thể coi đây là đáp số.



Hình 8.6

Ta kiểm tra lại :

$$b = 2 \times 1,32(\sqrt{1 + 2^2} - 2) = 0,6232\text{m}$$

$$\omega = (0,6232 + 2 \times 1,32) \times 1,32 = 4,3074\text{m}^2$$

$$\chi = 0,6232 + 2 \times 1,32\sqrt{1 + 2^2} = 6,5264\text{m}$$

$$R = \frac{4,3074}{6,5264} = 0,659996 \approx 0,66\text{m}$$

$$\epsilon\sqrt{iR} = 10\sqrt{0,001 \times 660} = 8,124 > 0,04$$

$$\rightarrow C = 201g \frac{660}{10} = 36,3908\text{m}^{0,5}/\text{s}$$

$$K = 4,3074 \times 36,3908 \times \sqrt{0,66} =$$

$$127,3\text{m}^3/\text{s} \approx 126,5\text{m}^3/\text{s} = K_0$$

Sai số khoảng : $0,63\% < 1\%$.

Tóm lại :

Với $m = 2$
 $h = 1,32\text{ m}$
 $b = 0,6232\text{ m}$

Mái (taluy) rộng : $h\sqrt{1 + m^2} = 2,95\text{m}$.

Bài 3. Người ta xây dựng một đường ống thoát nước dùng ống nhựa PVC đường kính $d = 300\text{ mm}$ để xả một lưu lượng tối đa là $Q = 20\text{ l/s}$. Hỏi phải đặt ống dốc bao nhiêu ($i = ?$) để mực nước trong máng dẫn không vượt quá 60% đường kính ?

Giải :

Ta dùng công thức (8-18a) và (8-18b) và đồ thị quan hệ $K_{ng}/K = f_1(h/d)$ của ống tròn trong bảng tra cứu thủy lực. Đồng thời tính cho trường hợp chiều sâu tối đa $h = 0,6d$ và lấy độ nhám của ống nhựa tương đương với ống thép.

Tra bảng đối số của công thức Manning cho ống tròn ở điều kiện bình thường, ta được :

$$K = 1,006\text{ m}^3/\text{s}.$$

Với $h/d = 0,6$ ta có $f_1 = 0,62$, như vậy :

$$K_{ng} = 0,62K = 0,62 \times 1,006 = 0,62372\text{ m}^3/\text{s}$$

Từ (8-18b) có : $i = (Q/K_{ng})^2 = (0,020/0,62372)^2 = 1,028 \cdot 10^{-3} \approx 0,001$

$$i = 0,001.$$

TỔNG KẾT CHƯƠNG VIII

Chảy không áp, chảy trong kênh hở là vấn đề thường gặp trong xây dựng và thủy lợi. Dòng chảy không áp cũng có thể là ổn định hay không ổn định. Chương này chỉ đề cập đến dòng ổn định. Ở đây độ dốc thủy lực, độ dốc mặt thoáng và độ dốc đáy kênh là như nhau. Nói cách khác, dựa vào 3 yếu tố này có thể biết được dòng ổn định hay không ổn định.

Tính toán thủy lực đối với trường hợp này, tương tự như chảy có áp, khá phức tạp, song cũng chỉ tập trung vào việc xác định môđun lưu lượng hoặc xác định hệ số Chézy. Trong thực tiễn kĩ thuật sử dụng các bảng tra cứu thủy lực là rất quan trọng, vì ngoài các kết quả giải tích còn có những kết quả thực nghiệm là chỗ dựa không thể thiếu được, giúp nhanh chóng tìm ra các lời giải với độ chính xác chấp nhận được. Có thể thấy, các phương pháp lập, phương pháp đồ giải được sử dụng ở khá nhiều trường hợp và đem lại hiệu quả rõ rệt.

Cần nhớ rằng, trong vấn đề chảy không áp dòng chảy có thể tồn tại trong kênh hở như mương máng thủy lợi, song cũng có thể xảy ra trong các kênh dẫn tiết diện khép kín như ở các công trình thoát nước xây dựng ngầm trong thành phố hay dưới nền của các công trình xây dựng. Việc tính toán ở đây thường dựa vào phương pháp so sánh, được các chuyên gia thủy lực thể hiện trên đồ thị so sánh theo phần trăm (%) với một chuẩn nào đó, chẳng hạn như trị số tối đa mà ta đã thấy khi tính môđun lưu lượng K_{ng} hay đặc trưng vận tốc W_{ng} của dòng chảy mà chất lỏng không điền đầy mặt cắt (mặt cắt ướt chỉ là một phần của tiết diện kênh, lòng dẫn).

Chương cũng đã đề cập đến vấn đề xói mòn và bồi lắng của các kênh, các dòng sông vì chất lỏng ở đây là nước có sức phá hoại và có chứa phù sa. Tuy nhiên, tất cả chỉ dừng lại ở khái niệm với mục đích để ta thấy được sự tồn tại của một vấn đề mà việc tìm hiểu để giải nó đòi hỏi phải có các kiến thức hết sức chuyên sâu.

Chương IX

CHUYỂN ĐỘNG ỔN ĐỊNH KHÔNG ĐỀU TRONG KÊNH HỒ

1. Khái niệm chung

Định nghĩa : Chuyển động ổn định không đều là chuyển động mà vận tốc tại các điểm tương ứng cả hai mặt cắt cạnh nhau không bằng nhau, nhưng trên một mặt cắt lại không đổi theo thời gian.

Dòng chảy loại này thường gặp trong thực tế do dọc chiều dòng chảy trong lòng kênh dẫn có những chướng ngại hoặc biến động khác làm cho nước dâng lên hay tụt xuống.

Nghiên cứu dòng chảy không đều, điều quan trọng nhất là cần biết quy luật thay đổi chiều sâu h dọc theo dòng chảy (hình 9.1) :

$$h = h(s)$$

và từ đó có thể suy ra chiều sâu h dọc theo đường chảy cùng các yếu tố thủy lực khác như diện tích mặt cắt ướt, chu vi ướt, vận tốc...

Trong trường hợp tổng quát các đại lượng nói trên thay đổi dọc theo tuyến *dòng chảy*, tức là :

$$\frac{\partial v}{\partial s} \neq 0 ; \quad \frac{\partial h}{\partial s} \neq 0 ; \quad \frac{\partial J}{\partial s} \neq 0 .$$

Song, vì dòng chảy là ổn định nên $\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$, nghĩa là lưu lượng qua các mặt cắt đều như nhau, cho dù phân bố vận tốc của chúng có khác nhau.

Từ đó suy ra : trong chuyển động ổn định không đều độ dốc thủy lực, độ dốc của đường mặt (thoáng) nước và đáy kênh không bằng nhau.

$$J_u = \frac{dh_w}{ds} = -\frac{dE}{ds}$$

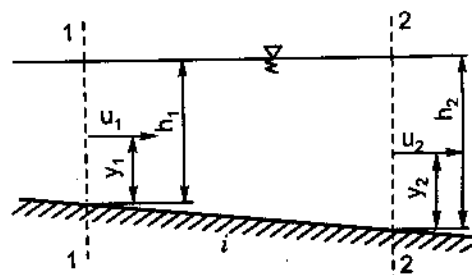
$$J_p = -\frac{dH}{ds}$$

$$i = -\frac{dz}{ds}$$

trong đó : $H = z + h$; h = chiều sâu nước trong lòng dẫn ; z : cao độ đáy kênh.

Trong kênh lắng trụ tùy thuộc vào sự biến động của chiều sâu h dọc theo dòng chảy người ta phân biệt 2 trường hợp :

- Chiều sâu h giảm dần ($dh/ds < 0$), ta có đường nước hạ và vận tốc trung bình v tăng ($dv/ds > 0$), là chuyển động nhanh dần.



Hình 9.1

- Chiều sâu h tăng dần ($dh/ds > 0$), ta có đường nước dâng, vận tốc trung bình v giảm dần ($dv/ds < 0$), là chuyển động chậm dần.

Người ta gọi chuyển động loại này là chuyển động thay đổi dần.

2. Các phương trình cơ bản của chuyển động đều thay đổi dần

2.1. Phương trình thứ nhất

Xuất phát từ phương trình Bernoulli viết cho mặt cắt 0 - 0 và mặt cắt n - n :

$$z_0 + h_0 + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = z + h + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w = \text{const}$$

Kí hiệu :

$$H = h + z$$

và lấy vi phân (đạo hàm) vế phải

$$dH + d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + dh_w = 0 \quad (9-1)$$

Chia các số hạng cho ds, được :

$$\frac{dH}{ds} + \frac{d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{ds} + \frac{dh_w}{ds} = 0 \quad (9-2)$$

hoặc :

$$-\frac{dH}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{dh_w}{ds}$$

Nhưng ta lại có : $-\frac{dH}{ds} = J_p$

là độ dốc của mặt thoáng và :

$$\frac{dh_w}{ds} = J_{tl}$$

là độ dốc thủy lực. Tại mặt cắt $n - n_{II}$ có thể xác định theo công thức Chézy :

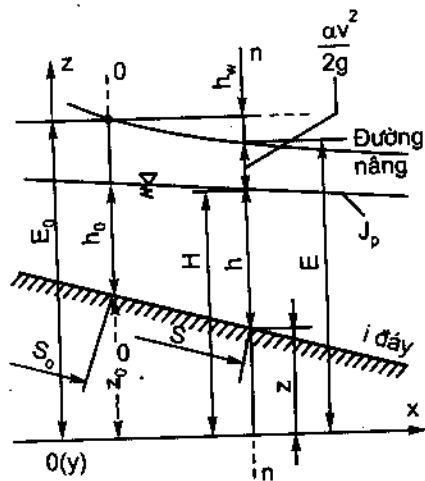
$$J_u = \frac{\alpha v^2}{C^2 R}$$

với giả thiết là tại một mặt cắt đã định tổn thất thủy lực của dòng không đều bằng của dòng chảy đều.

Thay giá trị J_{11} này vào (9-2) ta được :

$$J_p = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) + \frac{\alpha v^2}{C^2 R} \quad (9-3)$$

Đây là dạng thứ nhất của phương trình cơ bản mô tả chuyển động không đều.

**Hình 9.2**

2.2. Phương trình thứ 2

Biến đổi về phải của phương trình (9-3). Theo hình 9.3 :

$$H = z + h$$

Lấy đạo hàm theo s :

$$dH = dz + dh$$

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dz}{ds} + \frac{dh}{ds}$$

Như đã biết : $-\frac{dH}{ds} = J_p$; $-\frac{dz}{ds} = i$

$$J_p = i - \frac{dh}{ds} = J \quad (9-4)$$

(Tức là xem độ dốc mặt thoáng bằng độ dốc thủy lực J)

Bây giờ ta hãy biến đổi về phải của (9-3) :

Số hạng thứ nhất :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^2} \right)$$

Ở kênh dẫn cứng, không biến dạng, mặt cắt ướt kênh dẫn là hàm của độ sâu h và vị trí s :

$$\omega = f(h, s)$$

Vì vậy vi phân toàn phần của mặt cắt ω sẽ là :

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial h} dh + \frac{\partial f}{\partial s} ds$$

mà :

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -\frac{2}{\omega^3} \rightarrow d \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -\frac{2}{\omega^3} d\omega$$

và :

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{d\omega} \times \frac{d\omega}{ds}$$

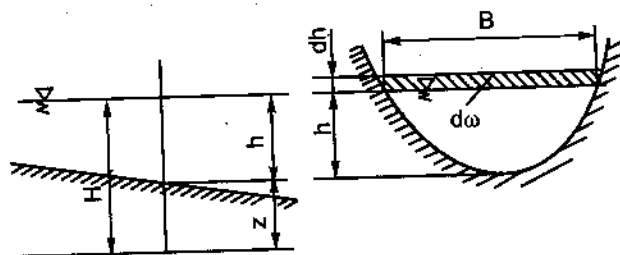
Đó đó :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -\frac{2}{\omega^3} \left(\frac{\partial f}{\partial h} dh + \frac{\partial f}{\partial s} ds \right) \frac{1}{ds} \text{ vì } d \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -\frac{2}{\omega^3} d\omega$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -\frac{2}{\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial h} \times \frac{dh}{ds} + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\omega^2} \right) = -\frac{2}{\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial h} \times \frac{dh}{ds} + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right)$$

Theo hình vẽ : $d\omega = Bdh \rightarrow \frac{d\omega}{dh} = \frac{\partial \omega}{\partial h} = B$



Hình 9.3

Vì vậy :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) = - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right) \quad (9-5)$$

Số hạng còn lại :

$$\frac{\alpha v^2}{C^2 R} = \frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R} \quad (9-6)$$

Thay các giá trị tương ứng vào (9-3) :

$$i - \frac{dh}{ds} = - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B \frac{dh}{ds} \right) + \frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R}$$

Giải cho $\frac{dh}{ds}$:

ta có :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i + \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B} \quad (9-7)$$

Đây là dạng thứ 2 của phương trình cơ bản mô tả chuyển động của dòng chảy không đều.

Đối với kênh dẫn lăng trụ ω không phụ thuộc vào s do vậy $\partial \omega / \partial s = 0$. Vì thế (9-7) có dạng :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B} \quad (9-8)$$

Nếu đáy kênh nằm ngang $i = 0$, ta có :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B - 1} \quad (9-9)$$

Khi $i < 0$ ta dùng kí hiệu độ dốc âm, tức là $i = -i'$; ($i' > 0$) ta có

$$\frac{dh}{ds} = \frac{-i' + \frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B - 1} \quad (9-10)$$

3. Tỷ năng dòng chảy, tỷ năng mặt cắt, chiều sâu phân giới

3.1. Tỷ năng dòng chảy

Tỷ năng dòng chảy là tỷ năng toàn phần, xác định theo phương trình Bernoulli đối với mặt chuẩn chung bất kì cho mọi mặt cắt.

Với mặt cắt 1-1 và 2-2 ta có :

$$E_1 = E_2 + h_w \quad (9-11)$$

Đại lượng :

$$E = z + h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (9-12)$$

được gọi là tỉ năng của dòng chảy.

Đại lượng này luôn giảm dần dọc theo dòng chảy $E_2 < E_1$.

3.2. Tỉ năng mặt cắt

Tỉ năng mặt cắt là tỉ năng cũng xác định từ phương trình Bernoulli nhưng với mặt chuẩn luôn thay đổi, không thống nhất đối với tất cả các mặt cắt của dòng chảy mà đi qua điểm thấp nhất của mặt cắt đang xem xét, được xác định như sau :

$$\vartheta = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \quad (9-13)$$

$$E = z + \vartheta$$

Chính vì vậy có thể xảy ra $\vartheta_2 > \vartheta_1$, nghĩa là tỉ năng mặt cắt có thể giảm và có thể tăng theo chiều dòng chảy.

Trong chuyển động đều, tỉ năng mặt cắt không thay đổi vì :

$$h_1 = h_2$$

và

$$v_1 = v_2$$

Với Q cho trước, đại lượng ϑ là hàm số của chiều sâu h, nghĩa là :

$$\vartheta = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} = f(h) \quad (9-14)$$

Hàm số này luôn dương : $\vartheta > 0$. Vì vậy $\vartheta \rightarrow \infty$.

Bây giờ ta khảo sát hàm số $\vartheta = f(h)$:

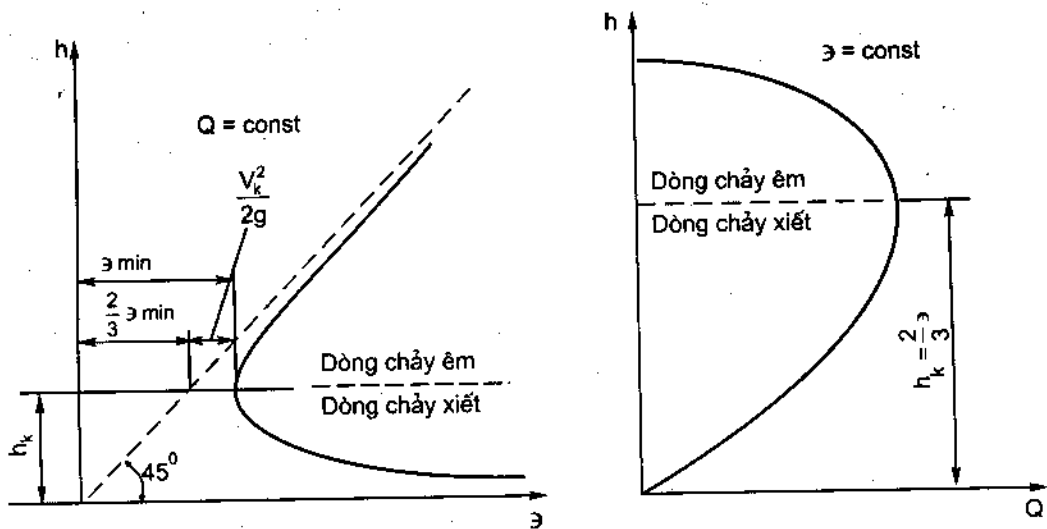
- Khi $h \rightarrow 0$ thì $\alpha Q^2 / 2g\omega^2 \rightarrow \infty$ vì lúc đó Q không đổi (theo tính chất của dòng chảy) mà ω lại tiến tới 0, $\omega^2 \rightarrow 0$ (với tốc độ cao hơn 1 cấp) do đó số hạng thứ 2 (có chứa ω) tiến tới ∞ . Vì vậy $\vartheta \rightarrow \infty$.

- Nếu $h \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow \infty$ và $(\alpha Q^2 / 2g\omega^2) \rightarrow 0$

do vậy đại lượng : $I = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \rightarrow \infty$

Lúc đó $\vartheta = h$ nên $\vartheta = f(h)$ tiệm cận đường phân giác góc $hO\vartheta$

Đồ thị biểu diễn hàm $\vartheta = f(h)$ được vẽ trên hình 9.4.



Hình 9.4

Ta thấy khi h biến thiên từ 0 đến $+\infty$, ε giảm từ $+\infty$ đến một giá trị cực tiểu rồi lại tăng lên $+\infty$. Cặp giá trị $\varepsilon_{\min}$, h_k xác định từ phương trình :

$$\frac{d\varepsilon}{dh} = 0$$

Nghĩa là :

$$\frac{d\varepsilon}{dh} = \frac{d}{dh} \left(h + h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \right) = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{d\omega}{dh} = 0 \quad (9-15)$$

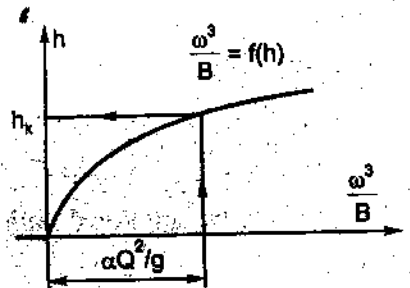
Song, như đã biết $d\omega/dh = B$, vì thế :

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B = 0$$

hay

$$\frac{\omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (9-16)$$

Người ta thường dùng phương pháp đồ thị để giải phương trình (9-16). Để giải cách này có thể xác định $f(h) = \omega^3/B$.



Hình 9.5

Đo giá trị $\alpha Q^2/g$ rồi đóng lên đồ thị $f(h)$ từ điểm giao x đóng ngang ta được h_k (xem hình 9.5).

Đối với kênh có tiết diện chữ nhật, khi mà $\omega = bh_k$ ta có :

$$\frac{b^3 h_k^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} \quad (9-17)$$

Từ đây xác định được h_k với lưu ý ở hình chữ nhật $b = B$:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gB^2}} \quad \text{hoặc} \quad h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} \quad (9-18)$$

với $q = Q/B$ là tỉ lưu lượng.

3.3. Chiều sâu phân giới và trạng thái chảy

Chiều sâu phân giới là chiều sâu ứng với nó đạt giá trị cực tiểu. Nghĩa là khi chiều sâu thoả mãn (9-16) ở trường hợp tổng quát và thoả mãn (9-17) trong trường hợp tiết diện kênh là hình chữ nhật.

Chiều sâu phân giới có ý nghĩa quan trọng, quyết định chế độ chảy và dạng hình học của mặt thoáng dòng chảy.

3.4. Hai trạng thái chảy

Chiều sâu phân giới chia dòng chảy ra làm 2 miền (2 trường hợp) :

a) Nếu dòng chảy có chiều sâu lớn hơn chiều sâu phân giới h_k ($h > h_k$), thế năng h sẽ lớn và động năng $\alpha v^2/2g$ nhỏ, dòng chảy sẽ được gọi là dòng chảy êm.

b) Nếu dòng chảy có chiều sâu nhỏ hơn chiều sâu phân giới h_k ($h < h_k$) thì thế năng h sẽ nhỏ và động năng $\alpha v^2/2g$ lớn, dòng chảy sẽ được gọi là dòng chảy xiết.

3.5. Số Froude

Để thuận lợi, trong tính toán thực tế người ta dùng một đại lượng so sánh không thứ nguyên gọi là số Froude như sau :

$$Fr = \frac{\alpha v^2}{gh}$$

có ý nghĩa vật lí là tỉ số năng lượng giữa động năng và thế năng.

Biết rằng ở trường hợp $h = h_k$, trường hợp phân giới theo (9-16) :

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B = 0 \rightarrow \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B = 1$$

và chỉ có trong trường hợp đó mà thôi. Với $h \neq h_k$ thì có thể :

$$\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B > 1 \quad \text{hay} \quad \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B < 1.$$

Hãy viết :

$$\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B - Fr = 1 - Fr$$

$$\left[\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} B \right]_k - \frac{\alpha v^2}{gh_k} = 1 - \frac{\alpha v^2}{gh_k} = 1 - Fr = 0 \quad (9-19)$$

Về bản chất là ta dùng số Froude để làm chuẩn so sánh. Trong trường hợp (giới hạn) phân giới :

$$\left. \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B \right|_{h=h_k} = 1$$

và nếu $Fr = \frac{\alpha v^2}{gh_x}$ lấy giá trị là 1 thì chắc chắn phương trình (9-16) được thoả mãn. Như vậy

có thể kết luận nếu $Fr = 1$, $h = h_k$. Và suy ra từ định nghĩa của Fr :

Khi $Fr < 1$, ta có dòng chảy êm, vì **động năng** < **thế năng**, h tăng dần theo dòng chảy (v giảm) làm cho mặt nước dâng lên vì $Q = \text{const}$;

Khi $Fr > 1$, ta có dòng chảy xiết, vì **động năng** > **thế năng**, h giảm theo dòng chảy (v tăng) làm cho mặt nước hạ xuống vì $Q = \text{const}$.

3.6. Tiêu chuẩn phân biệt 2 trạng thái chảy

Tổng hợp lại, dùng số Froude và h_k ta phân biệt 2 trạng thái chảy:

1) Dòng chảy êm khi $h > h_k$ và $Fr < 1$

2) Dòng chảy xiết khi $h < h_k$ và $Fr > 1$

3.7. Độ dốc phân giới

Độ dốc phân giới là độ dốc mà với lưu lượng đã cho nó tạo nên một chuyển động đều có độ sâu phân giới, kí hiệu là i_k .

Tương ứng với i_k ta có ω_k , C_k và R_k . Từ phương trình Chézy xác định được i_k :

$$i_k = \frac{\alpha Q^2}{\omega_k^2 C_k^2 R_k^2} \quad (9-20)$$

Cũng có thể viết biểu thức với h_k khi sử dụng (9-16):

$$\frac{\omega_k^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\alpha \omega_k^2 C_k^2 R_k i_k}{g}$$

$$\text{Do đó ta có: } i_k = \frac{\omega_k g}{\alpha C_k^2 R_k B} = \frac{g \chi}{\alpha C_k^2 B} = \frac{g}{\alpha C_k^2 B} \chi \quad (9-21)$$

Trong trường hợp kênh rất rộng có thể lấy $\chi/B = 1$, tức là $\chi = B$

$$i_k = \frac{g}{\alpha C_k^2} \quad (9-22)$$

3.8. Phân loại kênh dẫn

Có hai chuẩn để phân loại kênh dẫn: một là theo độ dốc đáy kênh i (mặt cắt dọc); hai là theo hình dạng mặt cắt ngang.

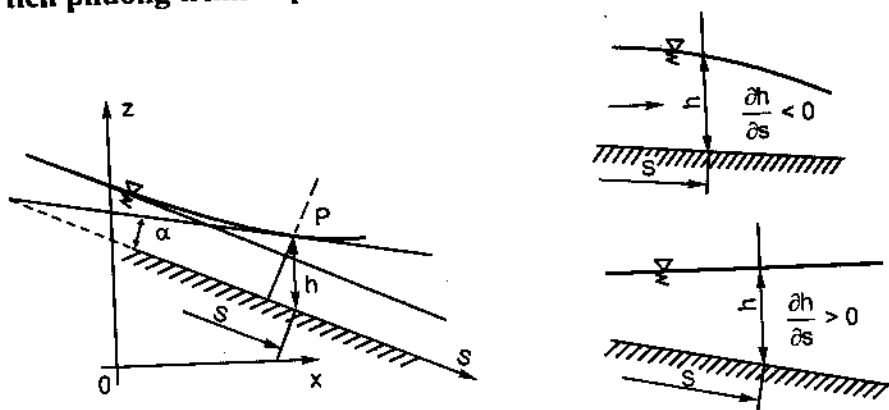
1/ Theo trị số độ dốc đáy i , có thể coi khi dùng các quan hệ $i > 0$ và $i < 0$ là ta đang khảo sát theo mặt cắt dọc.

2/ Theo hình dạng mặt cắt ngang

a) Kênh dẫn lằng trệ: khi hình dạng mặt cắt ngang không đổi trên cả chiều dài kênh dẫn. Lúc đó $\omega = f(h)$;

b) Kênh dẫn phi lăng trụ : khi hình dạng mặt cắt ngang thay đổi dọc dòng chảy, lúc đó $\omega = f(h,s)$. Hàm $h = f(s)$ phụ thuộc nhiều vào độ dốc và vào tính chất thay đổi của kênh dẫn. Ở sông ngòi tự nhiên $f(h,s)$ cực kì phức tạp.

4. Phân tích phương trình vi phân cơ bản của chuyển động ổn định không đều



Hình 9.6

4.1. Biến đổi phương trình

Chúng ta chỉ xét dòng không đều trong lòng dẫn/kênh dẫn lăng trụ. Đối với dòng chảy không đều thay đổi dần phương trình vi phân có dạng :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{\alpha Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B} \quad (9-23)$$

biểu diễn sự thay đổi chiều sâu h dọc theo dòng chảy.

Việc khảo sát, phân tích phương trình này nhằm đạt mục đích biết được dạng hình học của đường mặt nước/mặt thoáng trong các điều kiện chuyển động không đều.

Theo hình 9.6, ở đây $\partial h / \partial s$ là tg của góc α giữa đường tiếp tuyến của điểm P đang xét và đường đáy kênh (trên mặt cắt dọc).

- Nếu $\frac{\partial h}{\partial s} > 0$, h tăng dọc dòng chảy ;
- Nếu $\frac{\partial h}{\partial s} < 0$, h giảm dần dọc dòng chảy.

Như vậy phân tích (9-23) chủ yếu tập trung vào việc xác định dấu đại số của nó trong từng trường hợp, tức là chỉ cần xác định định tính của nó.

Để tiến hành phân tích (9-23) hãy biến đổi nó về dạng phù hợp, lần lượt từ thức và mẫu thức của nó :

- Biến đổi tử thức :

Biết rằng lưu lượng Q bao giờ cũng có thể biểu diễn dưới dạng :

$$Q = \omega C \sqrt{R_i}$$

Với độ dốc đáy kênh đã cho i ta cũng có thể tạo ra một dòng chảy có độ sâu h_0 và các đại lượng tương ứng ω_0, C_0, R_0 để có thể có được biểu thức :

$$Q = \omega_0 C_0 \sqrt{R_0 i}$$

và tử thức của (9-23) :
$$i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} = i \left(1 - \frac{\omega_0^2 C_0^2 R_0}{\omega^2 C^2 R} \right)$$

Kí hiệu : $C \sqrt{R} = K$, trong đó : K là đặc trưng lưu lượng, nên tử thức của (9-23) có dạng :

$$i \left(1 - \frac{K_0^2}{K^2} \right)$$

Mẫu thức của (9-23) : theo (9-19) chính là $1 - Fr$.

Vì vậy :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2}{1 - Fr} \quad (9-24)$$

Cũng có thể biến đổi (9-23) theo cách khác, nếu chấp nhận đề nghị của Jurin thì hãy kí hiệu :

$$\frac{\alpha Q^2}{g \omega^3} B = \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{1}{\frac{\omega^3}{B}} = \frac{N_k}{N}$$

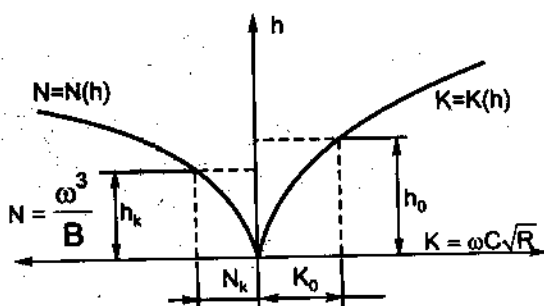
và gọi $N = \frac{\omega^3}{B}$ là số kiểm tra và $N_k = \frac{\alpha Q^2}{g}$ là trị số phân giới của số kiểm tra thì, lưu ý

đến (9-24), (9-23) có dạng :

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2}{1 - \frac{N_k}{N}} \quad (9-25)$$

rất tiện lợi cho tính toán. Để dễ hình dung mối quan hệ giữa 2 hàm $N = N(h)$ và $K = K(h)$, hãy vẽ đồ thị của chúng theo biến h .

Trên cơ sở phương trình (9-25) ta có thể xác định được các dạng có thể có của đường mặt nước (mặt thoáng) như trên hình 9.7.



Hình 9.7

4.2. Phân tích các dạng của đường mặt nước

Có 3 trường hợp $i < i_k, i > i_k, i = i_k$.

4.2.1. Khi $i < i_k$, chiều sâu h_0 sẽ lớn hơn h_k ($h_0 > h_k$) lúc này đường $n - n$ (ứng với h_0) và đường $k - k$ (ứng với h_k) chia mặt cắt dọc của kênh dẫn ra làm 3 miền (khu vực) a, b, c (hình 9.8).

- Miền a :

Ta có $h > h_0$, từ đó $K > K_0$ và $N > N_k$ (xem đường a_1) và trong tử thức của (9-25) $K_0/K < 1 \Rightarrow 1 - (K_0/K)^2 > 0$.

Còn với mẫu thức : $N_k/N < 1 \Rightarrow 1 - N_k/N > 0$

Do đó :

$$\frac{dh}{ds} = i + \frac{+}{+} > 0$$

Suy ra, nếu $ds > 0$ thì buộc $dh > 0$. Nghĩa là h tăng dần dọc theo chiều dòng chảy và đường mặt nước có dạng a_1 là đường nước dâng. Xét điều kiện giới hạn khi $h \rightarrow \infty$ tức là $K \rightarrow \infty$ và $N \rightarrow \infty$ theo chiều dòng chảy :

$$K = C\sqrt{R} \text{ nên khi } h \rightarrow \infty \Rightarrow R \rightarrow \infty \Rightarrow K \rightarrow \infty,$$

$$\text{và : } N = \frac{\omega^3}{B} \text{ nên khi } h \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\omega^3}{B} \rightarrow \infty$$

do vậy tỉ số $K_0/K \rightarrow 0$ và $N_k/N \rightarrow 0$, nên ở trường hợp giới hạn này :

$$\frac{dh}{ds} = i \rightarrow dh = ids$$

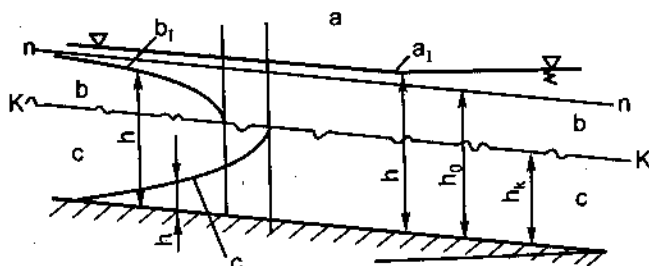
Theo định nghĩa : $i = \frac{dh}{ds}$

Biểu thức này chứng tỏ rằng đường mặt nước tiến đến đường nằm ngang (có độ dốc bằng 0 so với đường chân trời) vì khi chiều sâu tăng một lượng là dh , thì đáy kênh lại hạ thấp một lượng (chiều cao) là $dz = ids$, hai đại lượng này bù trừ cho nhau nên bằng 0.

Ngược chiều dòng chảy lên thượng nguồn, chiều sâu h giảm dần, tuy vẫn ở miền a và tiệm cận đến giá trị h_0 . Nhưng quá trình biến động của K và N , so với xét xuôi theo dòng chảy, $K \rightarrow K_0$ còn $N \rightarrow N_k$. Song, vì :

$$\lim_{h \rightarrow h_0} \left[1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 \right] \text{ do số mũ 2 nên đại lượng này có tốc độ tiệm cận nhanh hơn}$$

$$\lim_{h \rightarrow h_0} \left[1 - \frac{N_k}{N} \right] \text{ (liên hệ với phương pháp Lôpitan), nên :}$$



Hình 9.8

$$\lim_{h \rightarrow h_0} i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \frac{N_k}{N}} = i \frac{0}{+} = 0$$

và, nếu $dh/ds \rightarrow 0$ thì $ds \gg dh$, tức ds lớn hơn dh nhiều cấp mà ta đã biết $dh/ds = 0$ là đặc trưng cho dòng chuyển động đều với $h = \text{const}$. Xem đường a_1 trên hình 9.8.

- **Miền b** : ta có $h < h_0$ nhưng h vẫn lớn hơn h_k nên $K < K_0$; $N_k < N < N_0$, vì thế :

$$1 - \frac{K_0}{K} < 0 ; \quad 1 - \frac{N_k}{N} > 0 \quad 1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2 \rightarrow -0^2 ; \quad 1 - \frac{N_k}{N} \rightarrow +0$$

$$\frac{K_0}{K} > 1 \text{ và } \frac{N_k}{N} < 1$$

Ta thấy :

$$\lim \frac{dh}{ds} = \frac{dh}{ds} = i \frac{-}{+} < 0$$

Như vậy ở miền b, h giảm dần theo chiều dòng chảy (xuôi về phía hạ lưu) và tăng dần ngược theo chiều dòng chảy (ngược về phía thượng lưu). Đường b_1 chính là đường biểu diễn dáng điệu này (của đường nước hạ).

Dọc dòng chảy khi chiều sâu h lớn hơn h_k giảm dần đến h_k thì K tăng dần đến K_0 và N giảm dần đến N_k :

$$K \rightarrow K_k < K_0 \text{ và } \frac{K_0}{K} \rightarrow \frac{K_0}{K_k} > 1 \rightarrow \frac{-K_0}{K_k} < 1$$

vì :

$$N \rightarrow N_k \text{ và } \frac{N_k}{N} \rightarrow 1$$

Do đó :

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \frac{N_k}{N}} = i \frac{-}{+} \rightarrow \infty$$

(cũng do tốc độ tiệm cận của tử cao hơn mẫu bởi số mũ).

Nghĩa là cứ một sự thay đổi nhỏ của ds ta có độ giảm dh rất lớn ($tg\alpha \rightarrow \infty$) đường tiếp tuyến của mặt nước là đường thẳng đứng (xem đường b_1 trên hình 9.8).

Ngược về thượng lưu chiều sâu tăng và tiến đến h_0 , lúc đó $K \rightarrow K_0$, $N \rightarrow N_0 > N_k$ vì thế quá trình xảy ra ngược lại so với trường hợp xuôi dòng, nghĩa là :

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K}\right)^2}{1 - \frac{N_k}{N}} = i \frac{0}{+} \rightarrow 0$$

Xét giới hạn của trường hợp này ta thấy :

$$K_0/K > 1 \rightarrow 1 - (K_0/K)^2 < 0$$

$$N_k/N < 1 \rightarrow 1 - (N_k/N) > 0$$

và đường nước hạ dần tiệm cận với mặt nước có chiều sâu của sự chảy đều (h không đổi theo s hay độc lập với s).

- **Miền c** : Trong khu vực này ta có $h < h_k$ nên $K < K_k < K_0$ và $N < N_k$

Tương ứng ta có :

Do :
$$\frac{K_0}{K} > 1 \rightarrow \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 > 1 \rightarrow 1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2 < 0$$

và :
$$\frac{N_k}{N} > 1 \rightarrow 1 - \frac{N_k}{N} < 0$$

nên :
$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \left(\frac{K_0}{K} \right)^2}{1 - \frac{N_k}{N}} = i \frac{-}{-} > 0$$

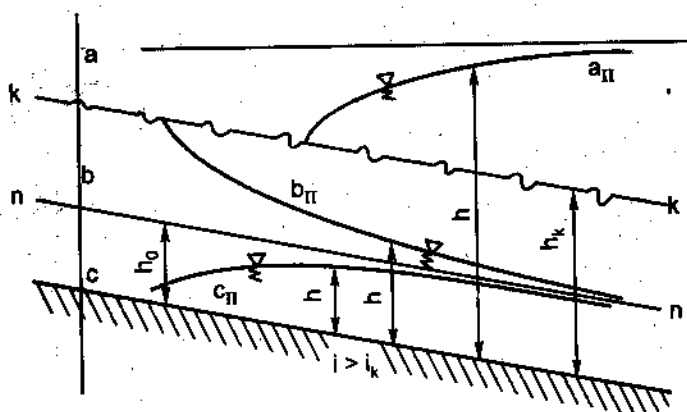
Tức là xuôi về hạ lưu chiều sâu tăng, nên đường mặt nước có dạng đường nước dâng (đường c_1).

Xuôi xuống nữa :

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{-}{-0} = +\infty$$

(do $|\Delta \text{ (từ)}| \gg |\Delta \text{ (mẫu)}|$ và đều mang dấu âm, nên $-/- = +$). Nghĩa là đường mặt nước tại một toạ độ s nào đó có tiếp tuyến trực giao với đáy của kênh dẫn (xem đường c_1).

Ngược dòng theo hướng $h \rightarrow 0$ (trên phương diện toán học nhưng không có ý nghĩa vật lí vì lúc đó $Q = 0$), tức là không có dòng chảy.



Hình 9.9

Tóm lại : khi kênh dẫn có đáy ứng với $i < i_k$ có thể có 3 dạng đường mặt nước a_I, b_I, c_I như trên hình 9.8.

Trong thực tế :

a_I ứng với dòng chảy gặp tường chắn

b_I ứng với dòng chảy xuống bậc đột ngột

c_I ứng với dòng chảy qua mở đáy cánh cống

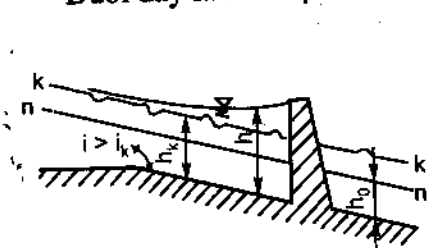
4.2.2. Khi $i > i_k$, chiều sâu h_0 sẽ nhỏ hơn chiều sâu h_k . Theo phương pháp khảo sát tương tự như trên ta sẽ có kết quả như hình 9.9, cho 3 miền a, b và c (do đường n-n và đường k-k cũng vẫn chia không gian khảo sát làm 3 miền khác nhau). Kết quả là :

+ Khu vực a có đường nước dâng a_{II} ;

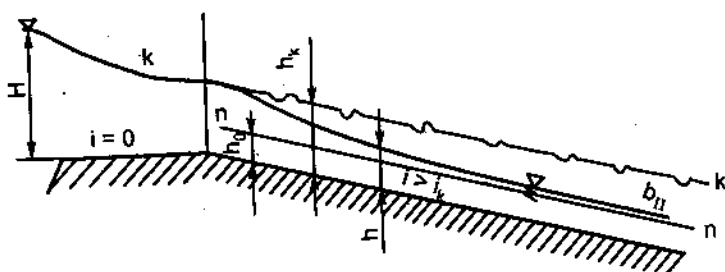
+ Khu vực b có đường nước hạ b_{II} ;

+ Khu vực c có đường nước dâng c_{II} .

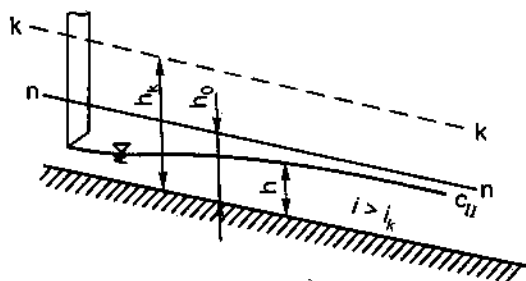
Dưới đây là 3 ví dụ minh hoạ cho 3 trường hợp (xem hình 9.10, 9.11, 9.12) :



Hình 9.10. Thân dốc có đập chắn



Hình 9.11. Chảy tự do

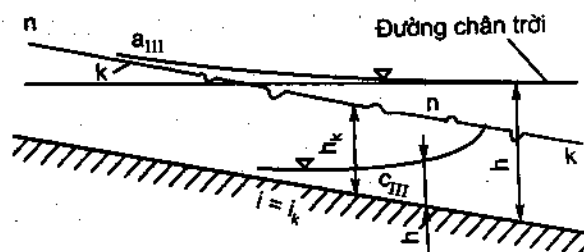


Hình 9.12. Cống xả đáy

4.2.3. Khi $i = i_k$, chiều sâu $h_0 = h_k$ lúc này đường n-n trùng với đường k-k, vì vậy ta chỉ có 2 miền a và c.

Miền a : đường nước dâng a_{III}

Miền c : đường nước dâng c_{III}

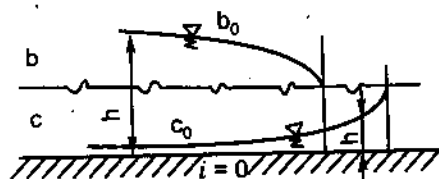


Hình 9.13

4.3. Trường hợp kênh dẫn có $i = 0$

Khi đáy kênh là đường nằm ngang ($i = 0$), chuyển động đều không xảy ra. Do ta đã biết độ dốc càng nhỏ thì xuôi theo chiều dòng chảy độ sâu h càng lớn. Vì thế nếu $i = 0$ thì $h_0 = \infty$. Và do vậy ở trường hợp này ta chỉ có 2 miền b và c :

- + Tại miền b, ta có đường nước hạ b_0 ;
- + Tại miền c, ta có đường nước dâng c_0 .

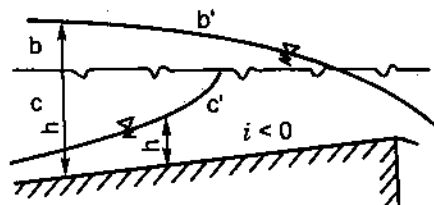


Hình 9.14

4.4. Kênh dẫn có độ dốc đáy âm ($i < 0$)

Trường hợp này cũng không có chuyển động đều. Do vậy ta cũng chỉ có 2 miền b và c.

- + Tại miền b có đường nước hạ b' ;
- + Tại miền c có đường nước dâng c' .



Hình 9.15

BÀI TẬP MINH HOẠ CHƯƠNG IX

Bài 1. Xác định độ sâu phân giới của một kênh dẫn tiết diện hình chữ nhật có chiều rộng $b = 8\text{m}$, lưu lượng $Q = 30\text{ m}^3/\text{s}$. Có thể lấy hệ số động năng $\alpha \approx 1$.

Giải :

Theo (9-14), (9-15) và (9-16) bài này có thể giải bằng phương pháp giải tích để có ngay độ sâu phân giới h_k , nếu biểu thức toán học của tiết diện tương đối đơn giản. Như sẽ thấy, trường hợp cho ở đề này thuộc loại đó.

Biết rằng tỉ năng mặt cắt của dòng chảy là :

$$\Xi = f(h) = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{1}{(bh)^2} = h + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2} \frac{1}{h^2} \quad (a)$$

và chiều sâu phân giới h_k là chiều sâu ứng với tỉ năng mặt cắt tối thiểu, nên từ biểu thức (9-15) ta có :

$$\frac{d\Xi}{dh} = 0 \rightarrow \frac{d}{dh} \left(h + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2} \frac{1}{h^2} \right) = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2} \frac{-2}{h^3} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gb^2} \frac{1}{h^3} \quad (b)$$

Suy ra :

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1 \times 30^2}{9,81 \times 8^2}} = 1,127537971\text{m} \approx 1,12\text{m}$$

$$h_k = 1,12 \text{ m}$$

$$\omega = bh = 8 \times 1,12 = 8,96 \text{ m}^2.$$

Bài 2. Kênh có tiết diện hình thang đáy $b = 6\text{m}$, taluy $m = 1$ cũng có lưu lượng $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$ thì độ sâu phân giới là bao nhiêu ?

Giải :

Trường hợp này đã phức tạp hơn. Để đơn giản, dễ theo dõi và tránh nhầm lẫn ta giải bằng đồ thị. Xuất phát từ (9-16) ta có :

$$\frac{\omega^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g} \rightarrow \frac{30^2}{9,81} = 91,7141$$

trong đó : $B = \frac{d\omega}{dh}$, đồng thời cũng chính là chiều rộng của kênh ở độ sâu h . Như đã biết ở

Chương VIII, công thức (8-6) :

$$\omega = (b + mh)h \text{ và } B = b + 2mh$$

$h \text{ (m)}$	$\omega \text{ (m}^2\text{)}$	$\omega^3 \text{ (m}^6\text{)}$	$B \text{ (m)}$	$\omega^3/B \text{ (m}^5\text{)}$
1,00	7,0000	343,0000	8,0000	42,8750
1,10	7,8100	476,3795	8,2000	58,0950
1,20	8,6400	644,9725	8,4000	76,7824
1,26	9,1476	765,4582	8,5200	89,8425
1,268	9,2158	782,7129	8,5360	90,6337
1,269	9,2243	784,8901	8,5380	91,9290
1,27	9,2329	787,0718	8,5400	92,1600
1,28	9,3184	809,1407	8,5600	94,5258
1,29	9,4041	831,6713	8,5800	96,9314

Như vậy độ sâu phân giới :

$$h_k = 1,269 \text{ m} \approx 1,27 \text{ m}$$

Nhận xét. So sánh kết quả của hai bài toán trên ta thấy, mặc dù tiết diện mặt cắt kênh ứng với chiều sâu phân giới của hình thang có phần lớn hơn song chiều cao phân giới vẫn lớn hơn so với tiết diện chữ nhật có đáy xấp xỉ. Điều đó chứng tỏ rằng cùng lưu lượng, cùng cỡ tiết diện, cùng độ dốc đáy kênh tiết diện chữ nhật để có khả năng tạo dòng chảy êm vì :

$$h - h_{k-cn} > h - h_{k-thang}$$

nếu h là độ sâu của nước. Biết rằng :

$h > h_k$ dòng chảy êm bởi thế năng lớn hơn động năng ;

$h < h_k$ dòng chảy xiết bởi động năng lớn hơn thế năng.

Chuyển động ổn định không đều là một loại hình của dòng chảy trong kênh hở. Ở đây điều kiện $J = J_m = i$ không còn nữa. Phương trình cơ bản của dòng chảy này vẫn xuất phát từ phương trình Bernoulli và được xây dựng thành hai dạng :

- Dạng thứ nhất biểu thị mối quan hệ giữa biến thiên độ dốc của mặt thoáng và tổn thất thủy lực cùng với động năng của dòng chảy dọc theo dòng chảy ;

- Dạng thứ hai biểu thị sự biến thiên của độ sâu theo độ dốc của đáy kênh, biến thiên của mặt cắt ướt cũng như bề rộng của mặt thoáng bên cạnh lưu lượng đã cho.

Để phân loại các trạng thái của dòng chảy (êm hay xiết) người ta dựa vào chiều sâu phân giới của dòng chảy mà ứng với nó tỉ năng mặt cắt lấy giá trị nhỏ nhất. Do quy mô của môn học có số học trình không nhiều, chương chỉ dừng lại ở mức giới thiệu những khái niệm cơ bản nhất, sơ đẳng nhất, đủ để giải thích được một số hiện tượng trong thực tiễn như sự hình thành các dạng hình học của mặt thoáng của dòng chảy trong các kênh dẫn của trường hợp chuyển động ổn định nhưng không đều, hiện tượng nước dâng, nước hạ, nước nhảy, ... thông qua khảo sát biến thiên của hàm số độ sâu $h(s)$ cho các trường hợp độ dốc đáy có giá trị lớn hơn, bằng và nhỏ hơn độ dốc phân giới mà với nó chuyển động của dòng sẽ là đều có độ sâu phân giới ứng với lưu lượng đã cho. Chương cũng sơ bộ khảo sát trường hợp độ dốc đáy âm.

Chương X

LÍ THUYẾT THỨ NGUYÊN VÀ TƯƠNG TỰ / ĐỒNG DẠNG

1. Khái niệm chung

1.1. Về lý thuyết thứ nguyên

Trong quá trình nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên người ta không dừng lại ở việc mô tả định tính hiện tượng mà còn cố gắng xác định các (biểu thức toán học mô tả) quan hệ giữa các đại lượng đo (lượng) được và các đại lượng dẫn xuất của chúng bằng phương pháp toán học. Như đã biết, các kết quả đo lường không thể tách rời đơn vị đo lường – thứ nguyên của chúng... Nghĩa là không thể đặt dấu bằng giữa 2 số đo có cùng trị số nhưng khác đơn vị đo lường, khác thứ nguyên. Rõ ràng là các phương trình biểu thị các quy luật vật lý cần thoả mãn điều kiện thuần nhất của chúng về mặt thứ nguyên. Điều đó có nghĩa, mọi số hạng của phương trình này phải thuần nhất, phải đồng nhất thứ nguyên. Song, điều đó không kéo theo việc trong từng số hạng không được phép có mặt các đại lượng không thuần nhất (các đại lượng khác loại) mà chỉ cần bảo đảm điều kiện là đối với đại lượng khác loại chỉ có thể dùng các dấu phép toán sao cho sau khi thực hiện phép toán thứ nguyên – được biểu diễn bằng tích các số mũ (lũy thừa) – của các kí hiệu đơn vị đo lường ở tất cả các số hạng phải đồng nhất.

Như đã biết, để kí hiệu thứ nguyên của các đại lượng hình học chỉ cần dùng duy nhất một kí hiệu đơn vị đo thuộc tính L , gọi là đại lượng cơ bản (gốc) để đo chiều dài; ở các đại lượng động học ta phải dùng đến 2 kí hiệu đơn vị cơ bản – để đo độ dài là L và đo thời gian là T ; còn ở các đại lượng động lực học, ngoài L và T , ta phải thêm một đơn vị đo lường cơ bản nữa, ví dụ như đơn vị đo khối lượng là M hoặc đơn vị đo lường cơ bản đo lực (K), tùy thuộc vào việc ta muốn dùng hệ đo lường vật lý hay hệ đo lường kĩ thuật để biểu thị các đại lượng. Cũng có thể hình dung tới các hiện tượng cân số lượng kí hiệu (đơn vị đo lường cơ bản) nhiều hơn. Vì vậy, sau này – để đảm bảo tính tổng quát – ta kí hiệu số lượng các đơn vị đo lường cơ bản (số các thứ nguyên) là m và như thế ở các hiện tượng trong cơ chất lỏng, suy từ trên, $m = 3$.

Trong thực tế người ta dùng nhiều hệ đo lường khác nhau để đo một thuộc tính, ví dụ chỉ đối với đo chiều dài không thôi mà có thể dùng các đơn vị đo như met, kilômet, centimet, bộ, đốt (inch); với thời gian thì dùng giờ, phút, giây, v.v... khối lượng và trọng lượng thì có kilogam, gam, cân Anh (font), đồng cân.

Sau này chúng ta sẽ thấy, nếu phương trình là thuần nhất, ta có thể dùng cho bất kỳ hệ đo lường nào. Cũng có nghĩa là nếu phương trình không thuần nhất, không thể dùng tùy ý các hệ đo lường khác nhau mà không phải thực hiện các phép chuyển đổi cho phù hợp, đồng nhất nhau.

Lí thuyết thứ nguyên cũng còn là phương pháp để suy ra một cách định tính quy luật chi phối các hiện tượng tự nhiên như : nếu bỏ qua các hệ số là hằng số cụ thể, người ta có thể lập được hệ thức toán học mô tả bản chất vật lí của một hiện tượng hoặc có những kết luận về một bản chất của nó, cơ chế sinh ra nó mà chẳng cần đi sâu vào chi tiết. Ví dụ như ở bài toán nước nhảy quen thuộc trong ngành thủy lực. Ở kênh dẫn tiết diện hình chữ nhật cấp độ sâu liên hiệp ở 2 mặt cắt h_1 và h_2 có quan hệ với nhau như sau :

$$h_2 = \frac{-h_1 + \sqrt{h_1^2 + \frac{8v_1^2 h_1}{g}}}{2}$$

Nếu đem chia cả 2 vế cho h_1 , có thể nhận ra biểu thức $\frac{v_1^2}{gh_1}$ chính là số Froude liên quan

đến trạng thái ban đầu. Thực vậy :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8v_1^2}{gh_1}} \right) = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8Fr})$$

là phương trình dạng không thứ nguyên dẫn chúng ta đến một kết quả bất ngờ để có thể kết luận là :

Nếu dòng chảy với trạng thái ban đầu có số Froude không lớn hơn 1, thì nó không sinh ra nước nhảy, vì $h_2 = h_1$. Thực vậy, nếu $Fr = 1$ ta có :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8.1}) = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{9}) = \frac{1}{2} (-1 + 3) = 1$$

Khi độ sâu ở hạ lưu h_2 không lớn hơn độ sâu ở thượng lưu h_1 thì không thể có nước nhảy. Như vậy, mặc dầu ta chẳng biết gì nhiều về các dữ liệu khác của dòng chảy ngoài số Froude mà đã có thể rút ra một kết luận quan trọng cho hiện tượng này.

1.2. Về tương tự - đồng dạng

Trong thực tế có một nhu cầu nảy sinh là sự quan sát, nghiên cứu một đối tượng nhiều khi không thể tiến hành trực tiếp trên đối tượng đó, vật thật nguyên mẫu, bởi nhiều nguyên nhân khác nhau : do quy mô kích thước (quá bé hoặc quá lớn) ; vật đó chưa hiện hữu (còn chờ chế tạo hay nhập về) ; an toàn kinh tế - kĩ thuật (độ rủi ro lớn, tốn kém...) như có một thời chúng ta đã nghe đến khái niệm nhà máy lọc dầu mini, thực chất nó là mô hình của một nhà máy lọc dầu cỡ nhiều triệu tấn dầu thô/năm giúp chính định nhanh các thông số kĩ thuật cho vận hành tối ưu của nhà máy "nguyên mẫu", bởi có những ví dụ cho thấy có trường hợp phải mất nhiều tháng, nếu không phải là năm, để làm việc này... Cũng có khi cần một số dữ kiện cơ bản để việc ra quyết định đầu tư công trình lớn thêm chắc chắn.

Liệu có thể dùng một phương pháp gián tiếp để đáp ứng yêu cầu trên hay không ? Tồn tại hay không tồn tại một "vật" tương đồng, một sự tương tự giúp ta giải quyết vấn đề trên dễ dàng hơn, đỡ tốn kém hơn ? Và nếu có, thì quan hệ giữa chúng phải ra sao, phải tuân

theo quy luật / luật nào để bảo đảm sự chính xác tối đa ? Câu trả lời ở đây là có, “vật” đó chính là **mô hình** của vật thật nguyên mẫu mà ta đang quan tâm.

Trong thuỷ lực các loại chuyển động của chất lỏng – giống như các hiện tượng cơ học khác – xảy ra trong không gian (hình học) và thời gian. Đồng thời với tư cách là một hệ vật chất nó chịu tác động của các lực. Do vậy, thực tế này buộc chúng ta phải mở rộng khái niệm đồng dạng hình học ra khái niệm đồng dạng rộng hơn để có thể bao quát được cả những đặc trưng *phi hình học* (thời gian, lực) đang thoả mãn yêu cầu trên.

Tương ứng với sự mở rộng đó, khái niệm tương tự (tương đồng) sẽ có chỗ, có lúc được thay cho khái niệm **đồng dạng** vốn gắn với các phạm trù hình học bằng **tương tự thời gian, tương tự lực** (quán tính).

Đến đây có thể nói, bản chất của việc khảo sát một đối tượng qua mô hình là vấn đề của lí thuyết tương tự/đồng dạng trong cơ học. Tương tự cơ học là sự kết hợp đồng thời 3 khái niệm tương tự, đồng dạng :

- Hình học
- Động học
- Động lực học

mà ta sẽ nghiên cứu chi tiết dưới đây.

2. Lí thuyết thứ nguyên (phân tích đại lượng đo cơ bản/đại lượng gốc)

2.1. Cơ sở toán học

Một điều cơ bản khác của phân tích thứ nguyên là có thể đưa vào sử dụng các nhóm không thứ nguyên để cố gắng giảm thiểu lượng biến số độc lập trong các phương trình mô tả hiện tượng. Thông thường, động tác giảm số lượng biến số chính là việc, bằng dạng luỹ thừa của các thứ nguyên cơ bản ta biểu đạt được thứ nguyên của các biến số còn lại.

Như vậy, nếu n là số lượng các đại lượng $A_1, A_2, \dots, A_n$ đặc trưng cho hiện tượng nào đó, m là số lượng các đơn vị đo cơ bản thì giữa các đại lượng đặc trưng tồn tại một quan hệ thuần nhất :

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0, \quad n > m \quad (10-1)$$

thì quan hệ này có thể thay thế bằng một quan hệ khác, có giá trị tương đương :

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (10-2)$$

có các biến phi thứ nguyên (không thứ nguyên) π với số lượng biến độc lập là :
 $n - m$.

Các biến π này có thể xác định như sau : ta chọn trong n đại lượng A nói trên m đại lượng, ví dụ chúng là $A_1, A_2, \dots, A_m$ và trong $n - m$ đại lượng còn lại lấy thêm từng A_j một ; đại lượng π_j ứng với A_j có thể biểu thị dưới dạng như sau :

$$\pi_j = A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_m^{x_m} A_j^{-1} \quad (10-3)$$

Các số mũ luỹ thừa $x_1, x_2, \dots, x_m$ có thể xác định bằng phân tích thứ nguyên với điều kiện π_j là không thứ nguyên : một hằng số, nói cách khác, nó là đại lượng có số mũ 0.

Để tiếp tục, ta biểu diễn các đại lượng $A_1, A_2, \dots, A_m$ và A_j như là tích của các đơn vị đo cơ bản $E_1, E_2, \dots, E_m$ (ví dụ M, T, L,...) dạng có số mũ :

$$\begin{cases} A_1 = E_1^{a_{11}} \cdot E_2^{a_{12}} \dots E_m^{a_{1m}} \\ A_2 = E_1^{a_{21}} \cdot E_2^{a_{22}} \dots E_m^{a_{2m}} \\ \vdots \\ A_m = E_1^{a_{m1}} \cdot E_2^{a_{m2}} \dots E_m^{a_{mm}} \\ A_j = E_1^{a_{j1}} \cdot E_2^{a_{j2}} \dots E_m^{a_{jm}} \end{cases} \quad (10-4)$$

và :

Thế các biểu thức của $A_1, A_2, \dots, A_m$ và A_j vào các biểu thức của π_j (10-3) được :

$$\pi_j = (E_1^{a_{11}} \cdot E_2^{a_{12}} \dots E_m^{a_{1m}})^{x_1} \cdot (E_1^{a_{21}} \cdot E_2^{a_{22}} \dots E_m^{a_{2m}})^{x_2} \dots (E_1^{a_{m1}} \cdot E_2^{a_{m2}} \dots E_m^{a_{mm}})^{x_m} (E_1^{a_{j1}} \cdot E_2^{a_{j2}} \dots E_m^{a_{jm}})^{-1}$$

Ta triển khai các đại lượng dạng lũy thừa có cùng cơ số $E_1, E_2, \dots, E_m$ để có dạng :

$$\pi_j = (E_1^{a_{11}x_1} \cdot E_1^{a_{21}x_2} \dots E_1^{a_{m1}x_m} \cdot E_1^{-a_{j1}}) \cdot (E_2^{a_{12}x_1} \cdot E_2^{a_{22}x_2} \dots E_2^{a_{m2}x_m} \cdot E_2^{-a_{j2}}) \dots (E_m^{a_{1m}x_1} \cdot E_m^{a_{2m}x_2} \dots E_m^{a_{mm}x_m} \cdot E_m^{-a_{jm}})$$

Rút gọn lại :

$$\pi_j = E_1^{a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - a_{j1}} \cdot E_2^{a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m - a_{j2}} \dots E_m^{a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{mm}x_m - a_{jm}}$$

Để thoả mãn điều kiện π_j là đại lượng không thứ nguyên, toàn bộ các số mũ của $E_1, E_2, \dots, E_m$ phải bằng không (0). Do đó có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m - a_{j1} = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m - a_{j2} = 0 \\ \vdots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{mm}x_m - a_{jm} = 0 \end{cases} \quad (10-5)$$

đối với các ẩn số x_i ($i = 1, m$). Nghiệm của phương trình này cho phép ta xác định được các số mũ trong biểu thức của π_j .

Việc giải phương trình này cũng làm nảy sinh một số khía cạnh toán học mà ta đã gặp trong lĩnh vực đại số tuyến tính, cụ thể là giải các hệ phương trình đại tuyến (đại số tuyến tính). Song, chốt lại vẫn là việc xác định số lượng các biến không thứ nguyên độc lập nhau.

Giả thiết rằng, để xác định các biến π ta không dùng cách chọn như trên, các A_j với $j = \overline{m+1, n}$ ($m+1 \leq j \leq n$) mà dùng tất cả các đại lượng $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, A_n$ sao cho trong biểu thức của biến π có mặt các số k dưới dạng :

$$\pi = A_1^{k_1} \cdot A_2^{k_2} \dots A_m^{k_m} \dots A_n^{k_n} \quad (10-6)$$

Bằng cách lập luận như đã dùng ở trên bây giờ hãy xác định n ẩn số (là số mũ $k_{(\dots)}$) từ m phương trình n ẩn số sau :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n = 0 \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1m}k_1 + a_{2m}k_2 + \dots + a_{nm}k_n = 0 \end{array} \right. \quad (10-7)$$

Vì $n > m$ nên hệ phương trình này bất định. Để giải (10-7) hãy xét ma trận hệ số của hệ phương trình :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{array} \right. \quad (10-8)$$

Ta cần khảo sát xem trong số các định thức vuông tương ứng bậc cao nhất (ở đây là m) tách từ định thức/ma trận (10-8) (bằng cách xoá đi $n - m$ cột) xem có hay không một định thức khác không (0), không triệt tiêu ? Nếu có, thì bậc của ma trận là m . Nếu tất cả các định thức bậc m này đều bằng 0, thì theo lí thuyết về các phương trình đại số tuyến tính, các hàng của định thức (cũng có nghĩa là các phương trình) không độc lập đối với nhau mà phụ thuộc nhau và do đó có ít nhất 1 hàng (1 phương trình) có thể suy ra từ tổ hợp tuyến tính của các hàng (các phương trình) khác. Như vậy, số phương trình có thể giảm đi 1 bằng cách : xoá đi phương trình tương ứng để còn lại $m - 1$ phương trình, $m - 1$ ẩn số. Việc khảo nghiệm như thế này tiến hành cho đến khi trong số định thức bậc r có một định thức khác 0. Điều đó có nghĩa là các phương trình/hàng đã độc lập nhau và số phương trình này là r với số ẩn số là r . Vì thế, hệ r phương trình đã trở nên xác định và tìm được các ẩn số.

Như vậy, ở hệ phương trình ban đầu, trong số n ẩn số ta được phép chọn tuỳ ý $n - r$ ẩn số (nghĩa là gán cho nó một giá trị tuỳ ý) còn r ẩn số còn lại có thể suy ra từ r phương trình có r ẩn số. Vì cho phép tuỳ chọn nên, về nguyên tắc, ta sẽ có vô cùng nhiều nhóm (bộ) lời giải (nghiệm) dẫn đến vô cùng nhiều biến không thứ nguyên π . Để hiểu, sự tuỳ chọn cho phép có vô số các tổ hợp thông qua các phép toán đại số. Đồng thời từ các biến không thứ nguyên π đã có ta cũng có thể dùng các phép toán như trên để tạo ra các biến số không thứ nguyên mới. Song, cần nhớ rằng, do cơ chế tạo ra chúng như vậy, các đại lượng này không độc lập nhau.

Tuy nhiên, nói như vậy không có nghĩa là mọi đại lượng π đều phụ thuộc vào nhau. Trong vô số các tổ hợp vẫn có một lượng $n - r$ biến số không thứ nguyên π hoàn toàn độc lập nhau. Những biến số này xác định được từ hệ (10-7) bằng cách trong số $n - r$ ẩn số chọn (lần lượt) một ẩn số thứ k_i gán cho nó giá trị -1 (âm 1), $n - r - 1$ ẩn số còn lại lấy giá trị 0 và hệ r phương trình lúc này trở nên xác định; nhờ đó tìm được 1 bộ nghiệm của hệ phương trình.

Thuật toán này lặp lại $n - r$ lần (vì $i = \overline{n - r + 1, n}$) để xác định bộ nghiệm đối với các k_i khác (với giá trị i mới) được gán giá trị -1 , số k_i còn lại lấy giá trị 0.

Tóm lại có thể phát biểu như sau :

Hàm thuần nhất của n biến số có thứ nguyên $A_1, A_2, \dots, A_n$ luôn có thể thay thế bằng một hàm $n - r$ biến số không thứ nguyên, trong đó r là bậc của ma trận các đại lượng có thứ nguyên mà thông thường (nhưng không bắt buộc) bằng m các đại lượng đo cơ bản.

Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_7$ là các đại lượng đặc trưng cho một hiện tượng tự nhiên mà ta kỳ vọng có thể xây dựng được một mối quan hệ bằng một phương trình thuần nhất. Các đại lượng này có mối quan hệ với các đại lượng đo cơ bản theo một ma trận thứ nguyên như sau :

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
E_1	1	0	1	1	1	0	2
E_2	-1	1	-3	-2	-4	-1	-3
E_3	-2	-1	0	-1	1	1	-3
E_4	1	2	0	1	0	2	0

Có thể thử nghiệm để thấy rằng toàn bộ số ma trận bậc 4 rút từ ma trận trên đây đều có định thức bằng 0. Như vậy giữa các hàng của ma trận có sự phụ thuộc nhau (có quan hệ với nhau), do đó cần xoá đi 1 hàng. Ví dụ : nếu bỏ hàng thứ tư, ta cũng thấy các định thức bậc 3 đều bằng 0, có nghĩa là không phải hàng này có quan hệ với các hàng khác, phải giữ lại. Nếu ta bỏ hàng thứ 3 còn lại 3 phương trình ứng với E_1, E_2 và E_4 , thì trong số các định thức bậc 3 có định thức khác 0. Như vậy có nghĩa là $r = 3$ và ta có thể xoá đi hàng thứ 3. Từ đó suy ra số biến số độc lập là $n - r = 7 - 3 = 4$. Và ma trận rút gọn sẽ là :

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
E_1	1	0	1	1	1	0	2
E_2	-1	1	-3	-2	-4	-1	-3
E_4	1	2	0	1	0	2	0

Từ đây có thể viết được các đại lượng không thứ nguyên $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ có các số mũ xác định từ phương trình sau :

$$k_1 + 0k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 0k_6 + 2k_7 = 0$$

$$-k_1 + k_2 - 3k_3 - 2k_4 - 4k_5 - k_6 - 3k_7 = 0$$

$$k_1 + 2k_2 + 0k_3 + k_4 + 0k_5 + 2k_6 + 0k_7 = 0$$

Đây là hệ phương trình 4 lần bất định, nghĩa là có thể tự do chọn giá trị của 4 ẩn số k nào đó. Ở đây ta giải phương trình để các đại lượng A_5 , A_6 và A_7 có mặt trong biến độc lập không thứ nguyên π (song cũng có thể để các đại lượng khác). Như vậy ta triển khai k_5 , k_6 và k_7 là hàm của các đại lượng còn lại (là k_1 , k_2 , k_3 và k_4) trong hệ phương trình (mà k_5 , k_6 và k_7 là ẩn số; đồng thời là hàm của k_1 , k_2 , k_3 và k_4). Giải ra được kết quả:

$$k_5 = 0,4k_1 + 0,8k_2 - 0,6k_3$$

$$k_6 = -0,5k_1 - k_2 - 0,5k_4$$

$$k_7 = -0,7k_1 - 0,4k_2 - 0,2k_3 - 0,5k_4$$

Ta chọn tùy ý các giá trị số mũ trong một nhóm (ở đây là nhóm 4 phần tử từ 1 đến 4) sao cho trong nhóm đó có 1 số mũ lấy giá trị 1, số còn lại lấy giá trị 0. Thế giá trị của từng nhóm như thế này vào các phương trình trên để có được các giá trị tương ứng, ta có kết quả:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
π_1	1	0	0	0	0,4	-0,5	-0,7
π_2	0	1	0	0	0,8	-1	-0,4
π_3	0	0	1	0	-0,6	0	-0,2
π_4	0	0	0	1	0	-0,5	-0,5

Tương ứng với bảng này ta có:

$$\pi_1 = A_1 A_5^{0,4} A_6^{-0,5} A_7^{-0,7}$$

$$\pi_2 = A_2 A_5^{0,8} A_6^{-1} A_7^{-0,4}$$

$$\pi_3 = A_3 A_5^{-0,6} A_7^{-0,2}$$

$$\pi_4 = A_4 A_6^{-0,5} A_7^{-0,5}$$

2.2. Áp dụng giải tích thứ nguyên vào cơ chất lỏng

Trước hết hãy xét các đại lượng tham gia vào các quá trình chuyển động của chất lỏng. Do ở hệ cơ học các đại lượng đo cơ bản là M , L , T (đo khối lượng, độ dài hình học, thời gian) nên $m = 3$. Và:

+ Các đại lượng hình học

Các đại lượng	Kí hiệu	Thứ nguyên
Chiều dài	a_1	L
Chiều rộng	a_2	L
Chiều cao	a_3	L
Độ nhám, độ lớn hạt phù sa hoặc độ dài tỉ lệ khác	a_4	L

Các đại lượng hình học khác (diện tích, thể tích, mômen tĩnh,...) là hàm của các đại lượng hình học trên.

+ Các đặc trưng động học :

Vận tốc	v	LT^{-1}
Lưu lượng	Q	L^3T^{-1}
Gia tốc	a	LT^{-2}
Tốc độ truyền sóng	c	LT^{-1}

+ Các đặc trưng động lực học :

Mật độ	ρ	ML^{-3}
Trọng lượng riêng	γ	$ML^{-2}T^{-2}$
Độ nhớt động lực học	η	$ML^{-1}T^{-1}$
Ứng suất căng mặt ngoài	H	MT^{-2}
Môđun đàn hồi (thể tích)	E_0	$ML^{-1}T^{-2}$
Lực	P	MLT^{-2}
Áp suất, biến đổi áp suất (Δp)	Δp	$ML^{-1}T^{-2}$
Ứng suất trượt (ứng suất cắt/ứng suất tiếp)	τ	$ML^{-1}T^{-2}$

Cần nhớ rằng, trong số các đại lượng kể trên thì mật độ, trọng lượng riêng, độ nhớt, ứng suất căng mặt ngoài, môđun đàn hồi thể tích và tốc độ lan truyền sóng là những thuộc tính riêng của vật chất, nghĩa là khi có mặt vật chất chất lỏng, thuộc tính này lập tức xuất hiện như là dấu hiệu về sự hiện hữu của nó. Các đại lượng hình học là đặc trưng (của) môi trường – không gian bao quanh, những đại lượng còn lại là dẫn xuất của sự tương tác giữa chất lỏng và môi trường.

Các đại lượng kể trên không phải tất cả đều độc lập, như lưu lượng là tích của vận tốc với diện tích mặt cắt ; ứng suất trượt là tích của 3 thừa số : độ nhớt, diện tích ma sát và gradien vận tốc ; lực có thể tính từ độ chênh áp và bề mặt bị nén ; gia tốc thì là thương của lực với tích của mật độ và thể tích ($a = \frac{P}{\rho V}$).

Môđun đàn hồi cũng có cùng thứ nguyên với áp suất ; thứ nguyên của tốc độ sóng giống như của vận tốc dòng chảy. Song với tư cách là thuộc tính của vật chất của chất lỏng nó độc lập đối với các đại lượng khác.

Với tất cả các khía cạnh cần lưu ý trên, bỏ qua các hiện tượng nhiệt học đi kèm, trong phương trình thuần nhất tổng quát nhất có thể hình dung của cơ học chất lỏng.

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4, v, \rho, \gamma, \eta, H, E_0, c, \Delta p) = 0 \quad (10-9)$$

có mặt 12 đại lượng có thứ nguyên ($n = 12$) với 3 thứ nguyên ($m = 3$) liên quan đến 3 đại lượng đo cơ bản, số lượng các đại lượng không thứ nguyên sẽ là :

$$n - m = 12 - 3 = 9$$

bởi vì trong ma trận lập từ chúng :

	a_1	a_2	a_3	a_4	v	ρ	γ	η	H	E_0	c	Δp
M	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
L	1	1	1	1	1	-3	-2	-1	0	-1	1	-1
T	0	0	0	0	-1	0	-2	-1	-2	-2	-1	-2

có nhiều định thức bậc 3 khác 0 như nhóm cột a_4 , v , ρ hoặc nhóm cột v , ρ , γ .

Đương nhiên không phải ở tất cả các bài toán chúng ta phải quan tâm đến toàn bộ các đại lượng này, và như vậy, bằng việc bớt đi một số đặc trưng thì số lượng các biến độc lập không thứ nguyên cũng sẽ giảm đi. Song, thường có thể nói rằng, ở các quá trình chuyển động bao giờ cũng có mật độ dài cho đặc trưng hình học (ví dụ $a_1 = l$); vận tốc (v) đặc trưng cho động học; mật độ (ρ) đặc trưng động lực học. Số mũ lũy thừa (x, y, z) của các đại lượng này cần phải xác định từ 3 phương trình liên quan (như viết ở phần trước) với điều kiện là trong số các đại lượng còn lại mà ta sẽ quan tâm, chọn bất kì một đại lượng có số mũ là -1, các đại lượng khác có số mũ bằng 0 (dấu âm ở đây chỉ có nghĩa, để với nó ta tránh được kết quả có 1 dạng nghịch đảo nào đó).

Như đã biết khi phân tích trường hợp tổng quát ở đây các biến không thứ nguyên π cũng phải có dạng :

$$\pi_i = l^{x_j} v^{y_j} \rho^{z_j} A^{-1} \quad (10-10a)$$

Còn xét dưới góc độ thứ nguyên có thể viết :

$$[\pi_i] = [l^{x_j} v^{y_j} \rho^{z_j} A^{-1}] = L^{x_j} (LT^{-1})^{y_j} (ML^{-3})^{z_j} A^{-1} = 1$$

$$A^{-1} = (L^{\xi_j} T^{\eta_j} M^{\zeta_j})^{-1} \quad (10-10b)$$

Như vậy, sẽ trở nên vô nghĩa nếu giải phương trình tổng quát nhất gồm 12 đại lượng ở trên, mà để đơn giản ta xuất phát từ (10-10a) và (10-10b). Triển khai ra :

$$L^{x_j} L^{y_j} T^{-y_j} M^{z_j} L^{-3z_j} L^{-\xi_j} T^{-\eta_j} M^{-\zeta_j} = 1 \quad (10-11)$$

$$L^{x_j+y_j-3z_j-\xi_j} T^{-y_j-\eta_j} M^{-z_j-\zeta_j} = 1$$

Như vậy để π không thứ nguyên (và bằng hằng số : 1) tất yếu phải :

$$x_j + y_j - 3z_j - \xi_j = 0$$

$$-y_j - \eta_j = 0$$

$$z_j - \zeta_j = 0 \quad (10-12)$$

Từ hệ phương trình này ta có thể giải tất cả các biến không thứ nguyên. Thế vào A_j lần lượt các đại lượng :

$$a_2, a_3, a_4, \gamma, \eta, H, E_0, c, \Delta p \quad (10-13)$$

Ví dụ : với $j = 4$ thì theo thứ tự xếp trong (10-13) $A_j = \gamma$, thay vào (10-10a) ta có :

$$\pi_4 = l^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \gamma^{-1} \quad (10-14)$$

Biết rằng :

$$\gamma = g\rho \rightarrow [\gamma] = [g][\rho] \quad (10-15)$$

$$[\gamma] = LT^{-2}ML^{-3} = L^{-2}T^{-2}M^1$$

Nên từ (10-15) đọc được (bằng cách xem tương quan $L^{-2}T^{-2}M^1 \sim L^j T^{\xi_{\eta j}} M^{\zeta_j}$) :

$$\xi_4 = -2$$

$$\eta_4 = -2$$

$$\zeta_4 = 1$$

nên trong trường hợp cụ thể này phương trình (10-12) có dạng :

$$\begin{cases} x_4 + y_4 - 3z_4 + 2 = 0 \\ -y_4 + 2 = 0 \\ z_4 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &y_4 = 2 ; z_4 = 1 \\ &x_4 + 2 - 3(1) + 2 = 0 \\ &x_4 + 2 - 3 + 2 = 0 \\ &x_4 = -1 \end{aligned}$$

Ta được bộ đáp số :

$$(x_4, y_4, z_4) = (-1, 2, 1)$$

Theo (10-14) :

$$\pi_4 = l^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \gamma^{-1} = l^{-1} v^2 \rho \gamma^{-1} = \frac{v^2 \rho}{l \gamma} = \frac{v^2}{lg}$$

Đây chính là số Froude : $Fr = \frac{v^2}{lg}$.

Tiếp tục giải cho :

a_2	(j = 1)	được π_1
a_3	(j = 2)	π_2
.	.	.
.	.	.
Δp	(j = 9)	π_9

Với phương pháp tương tự như trên :

$$\pi_1 = \frac{a_1}{a_2} ; \quad \text{số tỉ lệ hình học}$$

$$\pi_2 = \frac{a_1}{a_3} ; \quad \text{số tỉ lệ hình học}$$

$$\pi_3 = \frac{a_1}{a_4} ; \quad \text{số tỉ lệ hình học}$$

$$\pi_4 = \frac{v^2}{lg} = Fr ; \quad \text{bất biến Froude (số Froude)}$$

$$\pi_5 = \frac{vl}{\nu} = \text{Re} : \quad \text{bất biến Reynolds (số Reynolds)}$$

$$\pi_6 = \frac{\rho v^2 l}{H} = \text{We} : \quad \text{bất biến Weber (số Weber)}$$

$$\pi_7 = \frac{\rho v^2}{E_0} = \text{Ca} : \quad \text{bất biến Cauchy-Rayleigh (số Cauchy-Rayleigh)}$$

$$\pi_8 = \frac{v}{c} = \text{M} : \quad \text{bất biến Mach (số Mach - Mác'kh)}$$

$$\pi_9 = \frac{\rho v^2}{\Delta p} = P : \quad \text{bất biến áp suất.}$$

Trở lại phương trình nước nhảy :

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8\text{Fr}}) = h_1 \phi(\text{Fr})$$

với $\phi(-)$ là kí hiệu hàm số. Nghĩa là : trong trường hợp trọng lực chi phối dòng như hoàn toàn (và như vậy chỉ cần lưu ý đến nó), độ cao của nước nhảy là hàm của độ dài đặc trưng và số Froude.

Tương tự như vậy khi chỉ cần lưu ý đến ma sát chất lỏng :

$$v = v_{tb} \phi(\text{Re}) \quad (10-16)$$

Đối với trường hợp tổng quát nhất (gồm 12 đại lượng) như ở phương trình tương ứng ta có với 9 biến độc lập phi thứ nguyên :

$$\Phi\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_1}{a_4}, \text{Fr}, \text{Re}, \text{We}, \text{Ca}, \text{M}, \text{P}\right) = 0 \quad (10-17)$$

Từ đây có thể viết :

$$P = \frac{v^2 \rho}{\Delta p} = C \phi\left(\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_1}{a_4}, \text{Fr}, \text{Re}, \text{We}, \text{Ca}, \text{M}\right) \quad (10-18)$$

trong đó : C là một hằng số phi thứ nguyên, vạn năng, không thay đổi theo việc sử dụng đơn vị đo lường (= bất biến theo đơn vị đo lường).

Bằng phân tích thứ nguyên chúng ta có thể dễ dàng dẫn đến công thức cấu trúc mô tả quy luật của những hiện tượng phức tạp, duy chỉ thiếu một hằng số cụ thể, như ta đã thấy, là hằng số vạn năng C nói trên.

Đôi khi, thậm chí chẳng cần dẫn dắt ra công thức cấu trúc, người ta vẫn có thể rút ra các kết luận nhờ phân tích thứ nguyên và nhờ tương tự/đồng dạng cơ học. Dưới đây là một ví dụ cụ thể :

Nổ ngầm dưới nước (thường được áp dụng trong gia công cơ khí. Khi nổ áp suất phát sinh ban đầu p_0 tùy thuộc vào khối lượng và chủng loại thuốc nổ, nó tạo ra sóng xung kích. Nếu khối lượng thuốc nổ m nổ trong chất lỏng mật độ ρ có mô đun đàn hồi thể tích E_0 thì

áp suất p ở mặt sóng xung kích bán kính R (trong môi trường đồng nhất là mặt cầu) là hàm có dạng :

$$p = f(p_0, R, \rho, E_0, m) ; \quad (10-19)$$

trong đó : p_0 là áp suất nổ ban đầu (khởi thủy) ; R là bán kính mặt sóng (hình cầu), là khoảng cách của mặt sóng xung kích đến tâm nổ ; ρ là mật độ, E_0 là môđun đàn hồi thể tích của nước ; m khối lượng của khối nước.

Hàm được viết dưới dạng không thứ nguyên :

$$p = p_0 \phi\left(\frac{p_0}{E_0}, \frac{m}{\rho R^3}\right) \quad (10-20)$$

Trên cơ sở này, trong trường hợp đồng dạng cơ học, có thể suy ra các đại lượng ở tử số và mẫu số của các đại lượng không thứ nguyên phải đảm bảo có tỉ lệ giống nhau :

$$\lambda_{p_0} = \lambda_p = \lambda_{E_0} \text{ và } \lambda_m = \lambda_\rho \lambda_R^3 = \lambda_p \lambda_R^3$$

Trường hợp nổ trong chất lỏng không chịu nén vụ nổ không làm cho mật độ, hệ số/môđun đàn hồi thay đổi, như vậy trạng thái chuyển động xác lập trong các thời điểm khác nhau là đồng dạng cơ học với các số tỉ lệ sau :

$$\lambda_{E_0} = \lambda_p = 1$$

$$\lambda_p = \lambda_{p_0} = 1$$

$$\lambda_m = \lambda_R^3$$

Sử dụng các kết quả này như ở ví dụ sau : 1 kG chất nổ TNT gây ra áp suất nổ ban đầu $p_0 = 310000 \text{ kG/cm}^2$. Cách trung tâm nổ 1m áp suất cực đại đạt 4200 kG/cm^2 . Hỏi phải dùng bao nhiêu kG thuốc nổ TNT để cho cách trung tâm nổ 10m, nó cũng tạo ra một áp suất cực đại như trên (tức là 4200 kG/cm^2) ?

Vì tỉ lệ khối lượng λ_m bằng lập phương tỉ lệ khoảng cách λ bán kính mặt sóng) nên khoảng cách tăng 10 lần thì khối lượng phải tăng $10^3 = 1000$ lần, nghĩa là cần 1 tấn thuốc nổ TNT.

Do tốc độ sóng xung kích không phụ thuộc vào biên độ vì thế $\lambda_v = \lambda_c = 1$. Trên cơ sở thứ nguyên của tốc độ, điều đó có nghĩa là $\tau = \lambda_R$. Suy ra trường hợp khoảng cách 10m ở trên phải mất khoảng thời gian gấp 10 lần sóng xung kích mới lan truyền tới khoảng cách 10m với áp suất 4200 kG/cm^2 .

Để minh họa cho rõ các bước vận dụng của lí thuyết thứ nguyên hãy nghiên cứu bài toán sức cản lên vật hình cầu chuyển động đều trong chất lỏng nhớt, bỏ qua các quá trình nhiệt (thay đổi nhiệt độ).

Quy luật chuyển động ở đây được xác định bằng : các tính chất vật lí của chất lỏng ; kích thước của hình cầu ; vận tốc chuyển động của nó và lực cản chính diện nó.

Về dạng của quy luật ta có :

$$F(\rho, \mu, v, d, P) = 0 \quad (10-21)$$

trong đó : ρ là mật độ, μ là độ nhớt động lực của chất lỏng, v là vận tốc chuyển động đều, d là đường kính của khối cầu, P là lực cản của môi trường đối với khối cầu.

Sắp xếp lại hàm F (theo thứ tự thứ nguyên/đại lượng đo lường cơ bản : LTM) :

$$F(d, v, \rho, \mu, P) = 0 \quad (10-22)$$

$$\text{Biết rằng : } [d] = L[v] = LT^{-1}, [\rho] = ML^{-3}, [\mu] = ML^{-1}T^{-1}, [P] = MLT^{-2}$$

Đây là bài toán của một hệ cơ nên các đại lượng đo lường cơ bản là M, L, T ; do vậy đối chiếu với các dữ liệu đã cho số thứ nguyên (đại lượng đo lường cơ bản) là $m = 3$, số biến số độc lập có thứ nguyên trong (10-22) là $n = 5$. Ta lập bảng để tính π_i mà ở đây $j_{\max} = 2$ (vì $j_{\max} = n - m = 5 - 3 = 2$) :

	d	v	ρ	μ	P
M	0	0	1	1	1
L	1	1	3	-1	1
T	0	-1	0	-1	-2

Ta thấy trong ma trận này có các định thức bậc 3 với $\text{Det} \neq 0$. Hệ phương trình này bất định bậc 2 (2 lần bất định).

$$\text{Nếu lấy : } \pi_i = d^{x_i} v^{y_i} \rho^{z_i} A^{-1} \text{ và } A = L^{\zeta_i} T^{\eta_i} M^{\varsigma_i}$$

$$1 = [\pi_i] = [d^{x_i} v^{y_i} \rho^{z_i} A^{-1}] = L^{x_i} (LT^{-1})^{y_i} (ML^{-3})^{z_i} (L^{\zeta_i} T^{\eta_i} M^{\varsigma_i})^{-1} L^{x_j+y_j-3z_j-\zeta_j} T^{-y_j-\eta_j}$$

$$M^{z_j-\varsigma_j} = M^0 L^0 T^0 = 1$$

$$\begin{cases} x_j + y_j - 3z_j - \zeta_j = 0 \\ -y_j - \eta_j = 0 \\ z_j - \varsigma_j = 0 \end{cases} \quad (10-23)$$

$$\pi_4 = d^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4} \eta^{-1}, \quad [\eta] = M^1 L^{-1} T^{-1}$$

$$\text{Từ đây có : } \xi_4 = -1$$

$$\eta_4 = -1$$

$$\zeta_4 = 1$$

Thay vào hệ phương trình (10-23) :

$$\begin{cases} x_4 + y_4 - 3z_4 + 1 = 0 \\ -y_4 + 1 = 0 \\ z_4 - 1 = 0 \end{cases} \quad (10-24)$$

Giải phương trình này ta thu được bộ nghiệm :

$$(x_4, y_4, z_4) = (1, 1, 1)$$

$$\pi_4 = \frac{dv\rho}{\eta} = \frac{dv}{\eta/\rho} = \frac{dv}{v} = \text{Re}$$

Tương tự, giải cho P : $\pi_5 = d^{x_5} \cdot v^{y_5} \cdot \rho^{z_5} P^{-1}$

$$[P] = [L^{\zeta_5} T^{\eta_5} M^{\varsigma_5}]$$

$$= L^1 T^{-2} M^1 = 1$$

$$\xi_5 = 1$$

$$\eta_5 = -2$$

$$\varsigma_5 = 1$$

$$\begin{cases} x_5 + y_5 - 3z_5 - 1 = 0 \\ -y_5 + 2 = 0 \\ z_5 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 2 \\ y_5 = 2 \\ z_5 = 1 \end{cases} \quad (10-25)$$

$$x_5 + 2 - 3(1) - 1 = 0$$

$$x_5 - 2 = 0$$

$$x_5 = 2$$

$$\pi_5 = d^2 v^2 \rho P^{-1} = \frac{d^2 v^2 \rho}{P}$$

Từ đây có :

$$\phi(\pi_4, \pi_5) = \phi(\text{Re}; \frac{d^2 v^2 \rho}{P})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v^2 \rho}{P} = \phi'(\text{Re}) \Rightarrow P = \frac{d^2 v^2 \rho}{\phi'(\text{Re})} \quad (10-26)$$

Nếu căn cứ vào lời giải của Stokes (đã biết trong vật lý) :

$$P = 3\pi\mu dv$$

Ta có :

$$\frac{d^2 v^2 \rho}{\phi'(\text{Re})} = 3\pi\eta dv \Rightarrow \phi'(\text{Re}) = \frac{dv\rho}{3\pi\rho}$$

$$\phi'(\text{Re}) = \frac{dv}{3\pi v} = \frac{\text{Re}}{3\pi}$$

Thế trở lại vào biểu thức P :

$$P = \frac{d^2 v^2 \rho}{\frac{\text{Re}}{3\pi}} = 3\pi \frac{d^2 v^2 \rho}{\text{Re}} \Rightarrow P = \frac{24}{\text{Re}} \frac{\pi d^2}{4} \rho \frac{v^2}{2} \quad (10-27)$$

Như vậy P tăng khi tổ hợp có thứ nguyên $d^2 v^2 \rho$ tăng và Re giảm.

Chú thích : Có thể tìm được phương trình Darcy - Weissbach dùng trong tính toán lực cản đường ống bằng giải tích thứ nguyên. Lúc đó có dạng hàm :

$$F(d, v, \rho, \mu, \Delta p, l, k_w) = 0.$$

Trường hợp này $m = 3$ do là hệ cơ học, $n = 7$.

3. Lí thuyết tương tự/đồng dạng

3.1. Một số khái niệm

Sau đây cần nắm được một số định nghĩa về tương tự, đồng dạng :

Tương tự cơ học là mối quan hệ tương đồng giữa 2 hệ thống cơ học bảo đảm đồng thời 3 tiêu chuẩn đồng dạng : hình học, động học và động lực học.

Chuyển động của khối chất lỏng là một hệ cơ học, vì vậy nó cũng phải tuân thủ luật đồng dạng trên.

3.2. Tương tự hình học/ đồng dạng hình học

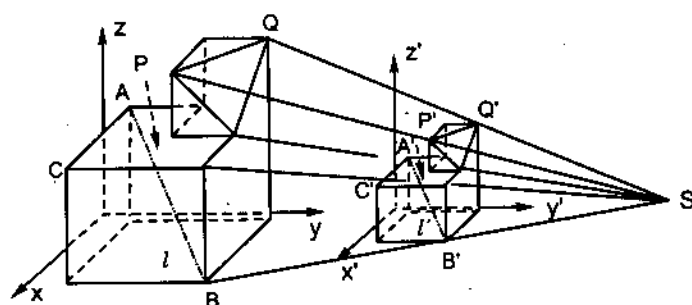
Hai kiến tạo hình học, hoặc tổng quát hơn, hai hệ điểm được xem là tương tự/đồng dạng hình học, nếu chúng thoả mãn các điều kiện sau :

- Có sự tương ứng một - một lẫn nhau, nghĩa là, một điểm, một đường thẳng (hoặc một kiến tạo hình học bất kì nào khác) của hệ này tương ứng với một và chỉ một điểm hoặc đường thẳng ... của hệ kia.

Các cặp điểm, đường thẳng, v.v... như thế là các điểm tương tự/đồng dạng, các đường thẳng tương tự/đồng dạng và tổng quát ra, các kiến tạo hình học tương tự/đồng dạng.

Ví dụ (hình 10.1) : điểm A' tương tự/đồng dạng với điểm A , đoạn thẳng $\overline{A'B'}$ tương tự với đoạn thẳng $\overline{AB}$; diện F' tương tự với diện F ; thể tích V' tương tự với thể tích V , ...

- Tỷ lệ của các đoạn thẳng tương tự phải bằng nhau :



Hình 10.1

nếu : $\overline{AB} = l_1$ và $\overline{A'B'} = l'_1$; $\overline{AC} = l_2$ và $\overline{A'C'} = l'_2$,

thì : $\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \lambda = \text{const}$ (10-28)

Suy ra : $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l'_1}{l'_2}$ (10-29)

- Tỷ lệ diện tích tương tự :

$$\lambda_{\omega} = \frac{S}{S'} = \lambda^2 \quad (10-30)$$

- Tỷ lệ thể tích tương tự :

$$\lambda_v = \frac{V}{V'} = \lambda^3 \quad (10-31)$$

- Tỷ lệ mô men quán tính :

$$\lambda_I = \frac{I}{I'} = \lambda^4 \quad (10-32)$$

3.3. Tương tự động học

Tương tự động học có nghĩa là sự tương tự/dồng dạng của các chuyển động. Để có sự tương tự này, ngoài việc phải đảm bảo sự đồng dạng/ tương tự của không gian đứng yên (tức là đồng dạng hình học) còn phải đảm bảo thêm sự tương tự/dồng dạng (có sự tương ứng một- một) của các điểm chuyển động. Nói một cách chính xác là : "Các hạt tương tự chuyển động xuất phát từ trạng thái nghỉ, đi hết quỹ đạo tương tự trong khoảng thời gian tương tự".

Tuy nhiên sự đồng nhất trong trạng thái nghỉ nhiều khi không thực hiện được trong thực tiễn do khó khăn về quy mô,... Còn khái niệm tương tự thời gian có thể dễ hiểu nếu mở rộng khái niệm tương tự hình học và như vậy tỷ lệ của các thời gian tương tự cũng sẽ là không đổi ; thời điểm gốc thì tùy chọn (như chọn gốc tọa độ của không gian hình học). Bằng cách này, khoảng thời gian bắt đầu từ t_0 kết thúc tại t là $\Delta t = t - t_0$ ở vật thật và khoảng thời gian bắt đầu từ t'_0 kết thúc tại t' là $\Delta t' = t' - t'_0$ ở mô hình sẽ tương tự khi và chỉ khi :

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{t - t_0}{t' - t'_0} = \tau = \text{const} \quad (10-33)$$

Đồng thời giữa các thời điểm tương đồng t và t' có quan hệ suy từ (10-33) :

$$t = t_0 + (t' - t'_0)\tau$$

Ví dụ :

$$t_0 = 6h00' \quad t = 6h30' \quad \Rightarrow \Delta t = 30'$$

$$t'_0 = 6h00' \quad t' = 6h15' \quad \Rightarrow \Delta t' = 15'$$

nên có :

$$\tau = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{30'}{15'} = 2 \text{ (so với đồng hồ cho nguyên mẫu).}$$

Ở vật thật/nguyên mẫu chất điểm đi hết đoạn $\overline{AB}$ mất 30' thì ở mô hình một chất điểm đi hết đoạn $\overline{A'B'}$ hết 15'.

Nếu : $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{3}{2}$ thì : $\lambda_v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4}$

Tỷ lệ vận tốc :

$$\lambda_v = \frac{v}{v'} = \frac{\overline{AB}/30}{\overline{A'B'}/15} = \frac{\overline{AB}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t'}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \frac{1}{\frac{\Delta t}{\Delta t'}} = \frac{\lambda}{\tau}$$

Vậy tỷ lệ vận tốc : $\lambda_v = \lambda \tau^{-1} \quad (10-34)$

Cũng như vậy, tỷ lệ gia tốc : $\lambda_a = \lambda \tau^{-2} \quad (10-35)$

(cụ thể, trong ví dụ bằng con số ở trên $\lambda_a = \frac{3/2}{2^2} = \frac{3}{8}$)

Tỉ lệ lưu lượng :

$$\lambda_Q = \frac{Q}{Q'} = \frac{v \cdot \omega}{v' \cdot \omega'} = \lambda_v \lambda^2 = \lambda \tau^{-1} \lambda^2$$

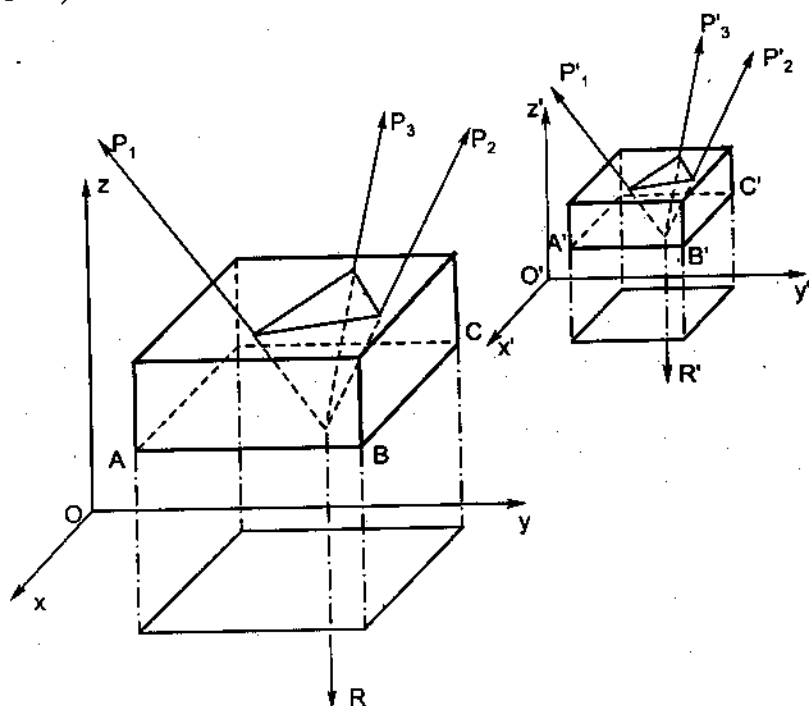
$$\lambda_Q = \lambda^3 \tau^{-1}.$$
(10-36)

ví dụ bằng các số như trên : $\lambda_Q = \frac{2^3}{2} = 4.$

3.4. Đồng dạng/tương tự động lực học

Ở đây ngoài sự chuyển động, còn phải quan tâm thêm nguyên nhân gây ra nó, đó là lực/mômen và khối lượng mà ta phải gán vào đối tượng khảo sát. Như đã biết, khối lượng là đặc trưng của một vật thể, trước hết là số đo quán tính của vật đó, xuất hiện trong hệ lực cân bằng đối với vật để duy trì trạng thái chuyển động của vật. Một lực khác 0 hoặc một mômen khác 0 trong tổng hợp lực hoặc tổng mômen đều làm cho vật thể chuyển động nhanh dần (vì có gia tốc) hay quay với tốc độ góc nhanh dần từ giá trị cố định nào đó. Như vậy, trong trạng thái cân bằng lực quán tính có chức năng duy trì (giữ nguyên) trạng thái chuyển động (ví dụ, sự bay của các vệ tinh trên quỹ đạo). Từ trên ta có :

Định nghĩa : Hai hiện tượng là tương tự động lực học nếu tỉ lệ của các lực tương tự tác động lên các điểm tương tự là không đổi tại bất kì vị trí nào, ở bất kì thời điểm nào (xem hình 10.2).



Hình 10.2

Như vậy, nếu P là lực tác động lên vật thật, P' là lực tương đồng tác động lên mô hình và π biểu thị tỉ lệ giữa chúng thì trong trường hợp tương tự động lực học.

$$\pi = \frac{P}{P'} = \text{const} \quad (10-37)$$

Về nguyên tắc, có thể hoàn toàn tùy chọn π . Song, cũng dễ thấy ngay, giữa các số tỉ lệ chiều dài, tỉ lệ thời gian và các tỉ lệ của các lực và tỉ lệ mật độ (ρ/ρ') có các mối quan hệ mà từ đó có thể dẫn xuất ra số tỉ lệ của các lực.

Bây giờ hãy khảo sát 2 hiện tượng vận động (chuyển động) của vật thật và mô hình của nó với khối lượng riêng ρ và ρ' tương ứng, thể tích V và V' có gia tốc a và a' . Viết biểu thức lực quán tính trên cơ sở định luật Newton cho 2 khối chất lỏng này với lưu ý là :

$$m = \rho V \text{ và } m' = \rho' V'$$

$$\begin{aligned} \text{lực quán tính của vật (đối tượng) thật : } & P_{qt} = ma = \rho Va \\ \text{lực quán tính của vật mô hình : } & P'_{qt} = m'a' = \rho' V'a' \end{aligned}$$

Từ đây có tỉ lệ của các lực quán tính :

$$\begin{cases} \pi = \frac{P_{qt}}{P'_{qt}} = \frac{\rho Va}{\rho' V'a'} = \lambda_p \lambda_v \lambda_a \\ \pi = \alpha \lambda^3 \lambda \tau^{-2} = \alpha \lambda^4 \tau^{-2} \end{cases} \quad (10-38)$$

với kí hiệu

$$\lambda_p = \alpha.$$

Hệ thức này thực chất là dạng không thứ nguyên của tiên đề thứ 2 của Newton. Theo đây, ở trường hợp đồng dạng cơ học, trong các số tỉ lệ λ , τ , π , α về nguyên tắc, ta có thể tự do chọn 3, còn số tỉ lệ thứ tư có thể xác định từ (10-38) như một đại lượng dẫn xuất.

Hãy thế vào (10-38) các biểu thức định nghĩa của các số tỉ lệ và sắp xếp các thừa số sao cho các tỉ lệ mật độ, độ dài, vận tốc xuất hiện trong biểu thức :

$$\begin{cases} \frac{P}{P'} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{l^4}{l'^4} \frac{t^{-2}}{t'^{-2}} = \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{l^2 t^{-2}}{l'^2 t'^{-2}} \cdot \frac{l^2}{l'^2} = \frac{\rho}{\rho'} \frac{v^2}{v'^2} \frac{l^2}{l'^2} \\ \frac{P}{\rho v^2 l^2} = \frac{P'}{\rho' v'^2 l'^2} = \text{const} \end{cases} \quad (10-39)$$

Dễ dàng chỉ ra rằng, các phân thức này có cùng cấu trúc đều là các đại lượng không có thứ nguyên được người ta gọi là **bất biến Newton**, kí hiệu là N . *Tinh thần của bất biến này là ở các hiện tượng tương tự đồng dạng cơ học giá trị của bất biến Newton $N = P/(\rho v^2 l^2)$ xây dựng từ các đại lượng tương tự là đồng nhất thứ nguyên, nó không thay đổi khi chuyển từ hệ này sang hệ kia và có trị số như nhau.*

Biết rằng lực quán tính luôn xuất hiện mỗi khi có sự thay đổi trạng thái chuyển động. Do vậy biểu thức (10-39) chính là điều kiện cần của đồng dạng cơ học, song không thể coi đây đồng thời là điều kiện đủ vì khi dẫn dắt công thức ta đã không quan tâm đến các đặc

thù của các lực tăng tốc (tích cực – thụ động, tác động – phản tác động) gây ra lực quán tính là lực gì, có bản chất là gì. Cho nên người ta gọi hệ thức (10-39), bất biến Newton là *luật đồng dạng tổng quát hay luật mô hình tổng quát của đồng dạng cơ học*.

Trong chuyển động của chất lỏng các lực gây nên gia tốc (giảm tốc) tác động lên hệ thống có thể gồm các loại sau :

- Lực trọng trường, các lực khối khác ;
- Lực ma sát trong nội bộ chất lỏng và lực ma sát trên các mặt biên ;
- Lực mao dẫn ;
- Các lực nén.

3.5. Các tiêu chuẩn tương tự đồng dạng riêng – các luật mô hình riêng (từng phần)

Thường thì cả 4 loại lực trên có mặt trong hệ lực tác động lên hệ thống, nhưng nhiều khi chỉ có 1 hay vài loại trong đó là chủ đạo, chi phối, có ảnh hưởng quyết định đến hiện tượng đang khảo sát. Số còn lại có ảnh hưởng không đáng kể, có thể bỏ qua. Từng loại lực kể trên đều có mối quan hệ nhất định với một đặc tính nào đấy của vật chất chất lỏng. Ví dụ, lực trọng trường liên quan đến trọng lượng riêng γ , lực ma sát liên quan đến tính nhớt μ , lực mao dẫn liên quan đến ứng suất căng mặt ngoài H , còn lực nén thì liên quan đến mô đun đàn hồi thể tích của chất lỏng E_0 .

Như vậy, các lực gia tốc có thể biểu thị bằng một tính chất nào đó, và từng lực một có thể biểu thị trong một quan hệ nhất định tương tự như biểu thức (10-38), để từ toàn bộ các biểu thức quan hệ đó có thể xây dựng một tiêu chuẩn đồng dạng mới. Các quan hệ này, do không mang tính tổng quát, chỉ có hiệu lực đối với một lực chủ đạo nhất định của hiện tượng đang khảo sát nên được gọi là *tiêu chuẩn tương tự đồng dạng riêng – luật mô hình riêng* và được mang tên các nhà bác học phát hiện ra chúng.

Các hiện tượng chủ yếu chịu tác động của lực trọng trường (như ở đập tràn, cửa xả đáy công trình thuỷ lợi, nước nhảy, tính chống sóng của tàu thuỷ) có tiêu chuẩn đồng dạng riêng/ tương tự riêng là *luật mô hình Froude*.

Các hiện tượng chủ yếu chịu sự tác dụng của lực ma sát (chảy trong ống, trong kênh, sức cản vật thể chuyển động trong chất lỏng) dùng *luật mô hình Reynolds*.

Đối với các hiện tượng chịu sự tác động chủ yếu của lực mao dẫn (chảy thấm, thấm lậu) có *luật mô hình Weber*.

Đối với các hiện tượng chịu tác động chủ yếu của lực nén đàn hồi (hiện tượng nước va, bơm nước va – sóng xung kích trong chất lỏng) có *luật mô hình Cauchy - Rayleigh*.

Sau đây sẽ khảo sát cụ thể một số trường hợp :

+ **Luật mô hình Froude** : Lực chủ đạo ở đây là lực trọng trường, tính chất riêng của chất lỏng cần cho trường hợp này là trọng lượng riêng của chất lỏng :

$$P = G = mg = \rho Vg$$

và :

$$P' = G' = m'g' = \rho' V'g'$$

trong đó : $P, P'; G, G'; m, m'; g, g'; \rho, \rho'; V, V'$ là các cặp tương tự về lực ; trọng lượng, khối lượng, gia tốc, mật độ, thể tích của chất lỏng cho vật thật và cho mô hình.

$$\pi = \frac{P}{P'} = \frac{G}{G'} = \frac{\rho V g}{\rho' V' g'} = \alpha \lambda^3 \frac{g}{g'}$$

So sánh kết quả này với (10-38) ta có :

$$\alpha \lambda^4 \tau^{-2} = \alpha \lambda^3 \frac{g}{g'} \quad (10-40)$$

Giản ước với $\alpha \lambda^2$ và làm bậc bình phương của tỉ số vận tốc :

$$\lambda^2 \tau^{-2} = \lambda \frac{g}{g'}$$

Thế giá trị có thứ nguyên ban đầu của các tỉ số vào biểu thức này, được :

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{l}{l'} \frac{g}{g'}$$

Sắp xếp cho các đại lượng về hệ thống của mình :

$$\frac{v^2}{lg} = \frac{v'^2}{l'g'} = \text{const} \quad (10-41)$$

Có thể phát biểu :

Điều kiện cần và đủ để tồn tại sự tương tự đồng dạng giữa các quá trình chuyển động chỉ (hoặc chủ yếu) do lực trọng trường gây nên là số Froude :

$$Fr = \frac{v^2}{gl} \quad (10-42)$$

tính được từ giá trị của các dữ liệu tương tự đối với từng hệ phải đồng nhất như nhau, nghĩa là không được thay đổi khi chuyển từ hệ này sang hệ khác.

Cần lưu ý rằng, khi tính số Froude ta có thể dùng bất kì cặp tương tự nào, ví dụ đối với ống dẫn có thể dùng cặp đường kính (d, d') hay cặp bán kính (r, r'), thậm chí cặp bán kính thủy lực (R, R') hay cặp chu vi ướt (χ, χ').

+ **Luật mô hình Reynolds** : ở đây lực chủ yếu là lực ma sát. Theo thuyết ma sát của Newton

$$\tau_x = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Trên các mặt tương tự (ω, ω') có các lực ma sát tương tự (B, B') có thể viết như sau :

$$\frac{P}{P'} = \frac{B}{B'} = \frac{\omega}{\omega'} \cdot \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{dv_x}{dv'_x} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dy'}}$$

do : dy và dy' đều là độ dài nên tỉ lệ của chúng cũng phải là λ . Ta kí hiệu $\mu/\mu' = \beta_2$ thì kết quả có dạng :

$$\frac{P}{P'} = \beta_2 \lambda^2 \tau^{-1}$$

Liên hệ kết quả này với (10-38) là dạng tổng quát cho ta điều kiện cần :

$$\alpha \lambda^4 \tau^{-2} = \beta_2 \lambda^2 \tau^{-1}$$

Từ đây :
$$\frac{\beta_2}{\alpha} = \lambda^2 \tau^{-1} = \lambda_v \lambda$$

Ta thấy :
$$\frac{\beta_2}{\alpha} = \frac{\mu/\mu'}{\rho/\rho'} = \frac{v}{v'}$$

Nên :
$$\frac{v}{v'} = \lambda_v \lambda$$

Thay các đại lượng có thứ nguyên từ định nghĩa :

$$\frac{v}{v'} = \frac{v}{v'} \cdot \frac{l}{l'} \rightarrow \frac{vl}{v} = \frac{v'l'}{v'} = Re = \text{const} \quad (10-43)$$

Dưới ảnh hưởng của lực ma sát điều kiện cần và đủ để hai quá trình chuyển động của chất lỏng là đồng dạng nếu trị số Reynolds tính từ các dữ liệu tương tự phải như nhau. Nói cách khác khi chuyển từ hệ này sang hệ kia số Reynolds không đổi.

Dẫn dắt tương tự như trên ở :

+ **Luật mô hình Weber** : Hệ chịu tác dụng chủ yếu của lực mao dẫn $K = H/l$ (H là ứng suất căng mặt ngoài) có :

$$We = \frac{v^2 l \rho}{H} \quad (10-44)$$

+ **Luật mô hình Cauchy Rayleigh** : Hệ chịu lực do đàn hồi của chất lỏng

$$\Delta_p = -E_0 \frac{\Delta V}{V}, \text{ ta có } Ca = \frac{\rho v^2}{E_0} \quad (10-45)$$

Các luật mô hình riêng có một vai trò cực kì quan trọng vì nhờ nó ta có thể thử nghiệm trên mô hình để có kết quả chuyển sang vật thật (nguyên mẫu). Khi vận dụng vào thực tiễn có 2 vấn đề được đặt ra :

Thứ nhất : Liên quan đến độ tự do lựa chọn trong các đại lượng λ , τ , π và α . Về mặt này tình hình lại khác khi lực chủ yếu độc lập, không phụ thuộc vào vật chất của chất lỏng, và cũng khác khi nó phụ thuộc một tính chất nào đó của chất lỏng (như đã biết ở phần trên). Chẳng hạn như liên quan đến (10-38) nếu chất lỏng tương tự lại như nhau thì trong các đại lượng π , α , λ , τ chỉ được tự do chọn 2. Ngược lại, nếu ta chọn tự do λ , τ và π lúc đó dùng (10-38) để tính và điều này không tồn tại vì chất lỏng hoặc không phải cùng loại với loại ở nguyên mẫu hoặc chỉ là giả tưởng, không có loại chất lỏng nào đáp ứng được tỉ số α đó.

Tình hình cũng tương tự như đối với các hệ thức đồng dạng khác (Re , We , Ca).

Nếu lại phải cùng lúc thoả mãn ví dụ thêm 1 tiêu chuẩn đồng dạng nữa, (tức là thêm một bất biến nữa) độ tự do này lại bị giảm đi...

Rất may là ý nghĩa thực tế của 1 mô hình tổng hợp như thế này hầu như không có là bao, rất ít khi gặp phải.

Thứ hai : Một vấn đề có tính thực tiễn là, khi biết lực chủ yếu ta phải xác định thế nào để được các số tỉ lệ cơ bản gốc hoặc các số tỉ lệ dẫn xuất (quy dẫn) khác.

Qua ví dụ sau đây có thể thấy rõ hơn. Lực chủ yếu ở đây là trọng lực (lực trọng trường). Ta tự do chọn tỉ lệ độ dài ($\lambda = 16$). Để tổng quát, ta chọn các chất lỏng khác nhau (tỉ lệ mật độ α , tỉ lệ trọng lượng riêng β_1). Ở đây liên quan đến số Froude. Như vậy giữa các đại lượng tương đồng phải có :

$$\frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'}$$

và có thể viết :

$$\left(\frac{v}{v'}\right)^2 = \frac{gl}{g'l'}$$

Biết rằng, số tỉ lệ vận tốc là : $\lambda\tau^{-1}$, mà tỉ lệ gia tốc (theo Fr) :

$$\frac{g}{g'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\beta_1}{\alpha}$$

Từ các kết quả trên suy ra : $(\lambda\tau^{-1})^2 = \frac{\beta_1}{\alpha}\lambda$

và :

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta_1}}\sqrt{\lambda}$$

Biết λ và τ , tỉ lệ của các đại lượng dẫn xuất có thể xác định được :

Tỉ lệ vận tốc : $\lambda_v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta_1}}\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha}}\sqrt{\lambda}$

Tỉ lệ lưu lượng : $\lambda_Q = \lambda_v\lambda_w = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha}}\sqrt{\lambda}\lambda^2 = \sqrt{\frac{\beta_1}{\alpha}}\lambda^{5/2}$

Tỉ lệ gia tốc : $\lambda_a = \lambda\tau^{-2} = \frac{\beta_1}{\alpha}$

Tỉ lệ lực có thể xác định từ (10-38), nhưng cũng có thể sử dụng tỉ lệ trọng lượng riêng để suy ra :

$$\pi = \beta_1\lambda^3 \quad (10-46)$$

Theo phương trình (10-46) cùng một địa điểm, hay tổng quát hơn, nếu tại nơi vật thật và mô hình, độ lớn của gia tốc như nhau thì giá trị của $\beta_1/\alpha = 1$, nghĩa là nó vắng mặt trong các công thức nêu trên. Trường hợp tương tự, nếu ở các địa điểm khác nhau chất lỏng nguyên mẫu và chất lỏng dùng cho mô hình lại là một, lúc đó α cũng như β_1 đều bằng 1. Trừ trường hợp ở các địa điểm khác nhau, chất lỏng khác nhau, còn ở tất cả những trường

hợp khác các (số) tỉ lệ có thể tính từ các biểu thức đơn giản hơn nhiều (do cùng 1 gia tốc như nhau) :

$$\tau = \sqrt{\lambda} \quad \lambda_v = \sqrt{\lambda} \quad \lambda_Q = \lambda^{5/2} \quad \lambda_a = 1 \quad (10-47)$$

Các số tỉ lệ α và β_1 đặc trưng cho vật chất không thể vắng mặt trong biểu thức tỉ lệ của các lực.

Minh họa cụ thể cho cách sử dụng (10-47) : Ta lấy $\lambda = 16$, lúc đó :

$$\text{Tỉ lệ thời gian : } \tau = \sqrt{\lambda} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Tỉ lệ vận tốc : } \lambda_v = \sqrt{\lambda} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{Tỉ lệ lưu lượng : } \lambda_Q = \lambda^{5/2} = \sqrt{\lambda^5} = 1024$$

$$\text{Tỉ lệ gia tốc : } \lambda_a = 1.$$

Để tính toán tỉ lệ lực, giả thiết rằng ở nguyên mẫu là nước, còn ở mô hình là không khí ở nhiệt độ 25°C có trọng lượng riêng là 1,225 kG/m³. Cho nên tỉ lệ trọng lượng riêng là :

$$\beta_1 = 1000/1,225 = 817$$

Nghĩa là tỉ lệ lực theo (10-46) sẽ có trị số :

$$\pi = \beta_1 \lambda^3 = 817 \times 16^3 = 3346432 \approx 3,35.10^6$$

Nếu một cống thoát lũ có đường kính 4m, một lưu lượng 37,680m³/s thoát qua ứng với vận tốc 3,00 m/s, ta lập mô hình có đường kính thoát qua là 4m/16 = 0,25m với vận tốc là 0,75m/s. Mỗi tấn (nước) nguyên mẫu tương tự (tương ứng) với $\approx 0,3$ g không khí ở mô hình. Nếu thay vì không khí ta cho nước chảy qua ở mô hình, thì các đại lượng động học của mô hình tuy vẫn không thay đổi, nhưng tương ứng với 1 tấn nước ở nguyên mẫu bây giờ phải là 817 lần lớn hơn trọng lượng trước đây (0,3g của không khí) là khoảng 0,25kG (nước) :

BÀI TẬP MINH HỌA CHƯƠNG X

Bài 1. Để hỗ trợ cho các tính toán sau này hãy xác định phương trình thể hiện mối quan hệ phụ thuộc (quan hệ hàm) của quãng đường đạt được của vật rơi tự do vào trọng lượng, gia tốc trọng trường, và vào thời gian dưới dạng

$$l = f(G, g, t)$$

Giải :

Vì cấu trúc của biểu thức không phức tạp nên ta giải trực tiếp bằng thứ nguyên. Với dạng yêu cầu

$$l = f(G, g, t)$$

hãy viết

$$l = K \times G^x \times g^y \times t^z \quad (a)$$

trong đó K là hệ số không thứ nguyên có thể xác định bằng giải tích hoặc bằng thực nghiệm. Trọng lượng cũng là lực nên thứ nguyên của chúng như nhau : $[G] = [P]$ và $[g] = [m/s^2] = L^1 T^{-2}$. Với các đại lượng cơ bản có thể viết

$$L = P^0 \times L^1 \times T^0 = P^x \times (L^1 T^{-2})^y \times T^z = P^x L^y T^{-2y+z} = P^x L^y T^{-2y+z}$$

Cân bằng thứ nguyên 2 vế bằng cách so sánh đồng nhất số mũ, được

$$x = 0$$

$$y = 1$$

$$-2y + z = 0 \rightarrow z = 2y = 2$$

và (a) có dạng

$$l = KG^0 g^1 t^2 = Kgt^2$$

Ta có nhận xét là quãng đường đạt được không phụ thuộc vào trọng lượng hay khối lượng. Như vậy kết quả trên hoàn toàn phù hợp với điều đã học trong vật lí bậc trung học phổ thông với công thức tính quãng đường

$$l = \frac{1}{2}gt^2 \text{ suy ra } K = \frac{1}{2}$$

Bài 2. Hãy biểu thị quan hệ hàm giữa chất lỏng lí tưởng chảy qua lỗ thành mỏng theo mật độ, đường kính lỗ và độ chênh cột áp.

Giải :

Đối với chúng ta lưu lượng chảy qua lỗ thành mỏng đã được đề cập trong Chương VII. Tuy nhiên ở đây, bằng ví dụ cụ thể, một lần nữa muốn chỉ ra rằng, với cách tiếp cận bằng phân tích thứ nguyên ta cũng có thể biết được quy luật của vấn đề này.

Theo đề bài ta phải xác lập quan hệ

$$Q = f(\rho, \Delta p, d)$$

$$\text{hay} \quad Q = K\rho^x (\Delta p)^y d^z \quad (b)$$

Như vậy có thể viết phương trình thứ nguyên

$$[Q] = [m^3/s] = L^3 T^{-1} = (ML^{-3})^x (ML^{-1}T^{-2})^y (L)^z = M^{x+y} L^{-3x-y+z} T^{-2y}$$

Đồng nhất số mũ ở 2 vế, được

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - y + z = 3 \\ -2y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ y = 0,5 \\ z = 2 \end{cases}$$

Như vậy (b) có dạng :

$$Q = K\rho^{-0,5} (\Delta p)^{0,5} d^2 = Kd^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

Hằng số K (không phải là môđun lưu lượng) xác định được bằng phương pháp giải tích hay thực nghiệm. Như đã biết theo công thức (7-20) thì

$$K = \frac{\pi}{4} \mu_0 \sqrt{2g} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2g}$$

bởi giả thiết chất lỏng lí tưởng $\mu_0 = 1$.

Bài 3. Hãy lập biểu thức công suất tiêu thụ cho một cánh quạt khi coi nó là hàm của mật độ không khí ρ , của đường kính d của luồng gió vận tốc v do cánh quạt tạo ra, của vận tốc góc của cánh quạt ω , của độ nhớt động lực học μ và của vận tốc âm thanh (vận tốc lan truyền tiếng động) trong không khí c .

Trước khi giải bài này cần có sự giải thích thêm về bản chất vật lí của vấn đề : Khi cánh quạt làm việc nó tạo ra một luồng khí/không khí – trên lí thuyết – dạng tròn xoay đường kính d , vận tốc v . Qua mặt phẳng (đặt) cánh quạt (trục giao với trục quay của nó) vận tốc luồng đột ngột thay đổi nên không khí, chất lỏng nén được, bị thay đổi mật độ trong chừng mực nhất định - dù cho nó là luồng ngáp, luồng tự do - mức độ tùy thuộc vào tỉ số $M = v/c$, trong kĩ thuật gọi là số Mach. Khi $M \geq 0,7$ tính nén được của không khí/khí không thể bỏ qua !

Giải :

Như vậy, ta phải tìm quan hệ hàm của công suất với các đại lượng đã cho ở trên :

$$N = f(\rho, d, \omega, v, \mu, c) = K \rho^x d^y \omega^z v^{x_1} \mu^{y_1} c^{z_1} \quad (c)$$

với K là hằng số. Căn cứ vào (c) ta có phương trình thứ nguyên :

$$\begin{aligned} [N] &= (ML^3)^x (L)^y (T^{-1})^z (LT^{-1})^{x_1} (ML^{-1}T^{-1})^{y_1} (LT^{-1})^{z_1} = \\ &= M^{x+y_1} L^{-3x+y+x_1-y_1+z_1} T^{-z-x_1-y_1-z_1} \end{aligned} \quad (d)$$

Dựa vào đơn vị đo lường của công suất là Nm/s hay kGm/s ta có :

$$[N] = [Pl/s] = [mal/s] = [ma] LT^{-1} = (M \times LT^{-2}) LT^{-1} = ML^2 T^{-3}$$

trong đó : m là khối lượng, a là gia tốc. Từ (d) và (e) có :

$$[N] = ML^2 T^{-3} = M^{x+y_1} L^{-3x+y+x_1-y_1+z_1} T^{-z-x_1-y_1-z_1}$$

và hệ phương trình :

$$\begin{aligned} x + y_1 &= 1 \\ -3x + y + x_1 - y_1 + z_1 &= 2 \\ z + x_1 + y_1 + z_1 &= 3 \end{aligned}$$

Như vậy chúng ta có 3 phương trình, nhưng lại có 6 ẩn số. Để có thể giải được, ta coi x , y , z là các đại lượng phụ thuộc vào x_1 , y_1 , z_1 để sắp xếp lại và có :

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z &= 1 - y_1 = A \\ -3x + y &= 2 - x_1 + y_1 - z_1 = B \\ 0x + 0y + z &= 3 - x_1 - y_1 - z_1 = C \end{aligned}$$

Viết dưới dạng ma trận :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \text{DetD} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\text{DetD}} = \frac{A}{1} = 1 - y_1, \quad x = 1 - y_1$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & A & 0 \\ -3 & B & 0 \\ 0 & C & 1 \end{vmatrix} = B - A \times \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = B - 3A = (2 - x_1 + y_1 - z_1) + 3(1 - y_1)$$

$$y = 5 - x_1 - 2y_1 - z_1$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & A \\ -3 & 1 & B \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = C = 3 - x_1 - y_1 - z_1$$

$$z = 3 - x_1 - y_1 - z_1$$

Thế các kết quả này vào (c), được :

$$f(\rho, d, \omega, v, \mu, c) = K \rho^{1-y_1} d^{5-x_1-2y_1-z_1} \omega^{3-x_1-y_1-z_1} v^{x_1} \mu^{y_1} c^{z_1}$$

Nhóm lại các đại lượng có cùng số mũ :

$$f(\rho, d, \omega, v, \mu, c) = K \left(\frac{v}{d\omega} \right)^{x_1} \left(\frac{\mu}{\rho d^2 \omega} \right)^{y_1} \left(\frac{c}{d\omega} \right)^{z_1} \rho d^5 \omega^3$$

Ta thấy các đại lượng trong ngoặc đều không có thứ nguyên với thừa số (trong ngoặc) thứ nhất liên quan đến góc đặt cánh của cánh quạt thể hiện gián tiếp qua tỉ số giữa vận tốc luồng và vận tốc chu vi ; thừa số thứ hai liên quan đến số Reynolds tính theo vận tốc chu vi - ở đây là nghịch đảo ($1/Re$) ; còn thừa số thứ ba liên quan đến số Mach của vận tốc chu vi thể hiện mối quan hệ với tính chịu nén của không khí. Các đại lượng trong ngoặc này có thể xác định trước trong từng trường hợp cụ thể.

Tóm lại biểu thức công suất của cánh quạt có dạng :

$$N = K^* \rho \omega^3 d^5$$

trong đó : K^* (tích của K và 3 thừa số trong ngoặc) là đại lượng không thứ nguyên.

Bài 4. Xây dựng biểu thức ứng suất tiếp của dòng chảy trong ống dưới dạng hàm của vận tốc trung bình v , đường kính ống d , mật độ chất lỏng ρ , độ nhớt động lực học μ và độ nhám tuyệt đối k .

Giải :

Từ các dữ liệu của đầu bài, ta có :

$$\tau = f(v, d, \rho, \mu, k) = C v^x d^y \rho^z \mu^a k^b \quad (f)$$

với C là đại lượng không thứ nguyên. Từ đây có phương trình thứ nguyên trên cơ sở đã biết thứ nguyên của ứng suất trượt τ :

$$[\tau] = M L^{-1} T^{-2} = (L T^{-1})^x (L)^y (M L^{-3})^z (M L^{-1} T^{-1})^a (L)^b = M^{z+a} L^{x+y-3z-a+b} T^{-x-a}$$

$$z + a = 1$$

$$x = 2 - a$$

và suy ra :

$$x + y - 3z - a + b = -1$$

$$\rightarrow y = -a - b$$

$$x + a = 2$$

$$z = 1 - a$$

Thế các kết quả này vào (f), được :

$$\tau = C v^{2-a} d^{-a-b} \rho^{1-a} \mu^a k^b = C v^2 v^{-a} d^{-a} d^{-b} \rho^1 \rho^{-a} \mu^a k^b$$

$$\tau = C \left(\frac{\mu}{v d \rho} \right)^a \left(\frac{k}{d} \right)^b \rho v^2 = C \left(\frac{1}{Re} \right)^a \left(\frac{k}{d} \right)^b \rho v^2$$

Như vậy ứng suất tiếp của chất lỏng chảy trong ống tỉ lệ thuận với mật độ, với bình phương vận tốc trung bình mật cắt, với độ nhám tương đối k/d và tỉ lệ nghịch với số Reynolds. Điều này hoàn toàn phù hợp với kết quả thu được trong Chương V (Sức cản thủy lực) khi ta xác định tổn thất dọc đường và hệ số ma sát λ của dòng chảy trong ống bằng phương pháp giải tích (xem công thức tính h_{ms} và λ).

Bài 5. Dầu có độ nhớt động học $\nu = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ được sử dụng cho một thiết bị chế thử hoạt động trong điều kiện trọng lực và lực cản do độ nhớt của chất lỏng có ảnh hưởng chủ yếu và ngang nhau. Người ta muốn xây dựng một mô hình có kích thước tỉ lệ 1/5. Vậy độ nhớt động học của chất lỏng dùng cho mô hình phải là bao nhiêu để số Froude và số Reynolds bằng nhau cả trong nguyên mẫu lẫn trong mô hình

Giải :

Số Froude và số Reynolds :

$$Fr = \frac{v^2}{l g} \rightarrow v = \sqrt{Fr} \times \sqrt{l g} \rightarrow \lambda_v = \lambda^{0,5} \lambda_g^{0,5} = \left(\frac{l'}{l} \times \frac{g'}{g} \right)^{0,5} = \lambda^{0,5} \frac{g'}{g}$$

$$\text{và : } Re = \frac{v d}{\nu} \rightarrow v = Re \times \frac{\nu}{d} \rightarrow \lambda_v = \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{\frac{\nu'}{l'}}{\frac{\nu}{l}} = \frac{\nu'}{\nu} \lambda^{-1}$$

Do ở mô hình và vật thật gia tốc trọng trường coi như nhau nên $\lambda_g = 1$ từ kết quả trên ta có :

$$\lambda_v = \lambda^{0,5} = \frac{\nu'}{\nu} \lambda^{-1} \rightarrow \nu' = \nu \lambda^{1,5}$$

Biết trị số của độ nhớt của chất lỏng cho vật thật (nguyên mẫu) và tỉ lệ thu nhỏ của mô hình ta tính được độ nhớt cần biết cho mô hình :

$$v' = 4,7 \cdot 10^{-5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1,5} \text{ m}^2/\text{s} = 0,42038 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$v' = 0,42038 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Bài 6. Một bơm li tâm vận hành ở số vòng quay 1200 v/phút, làm nhiệm vụ bơm dầu tuần hoàn trong một hệ thống bôi trơn. Người ta thí nghiệm trên mô hình của nó với không khí ở nhiệt độ 20°C. Nếu đường kính bánh công tác của mô hình lớn gấp 3 lần vật nguyên mẫu thì số vòng quay dùng để tiến hành thí nghiệm phải là bao nhiêu? Biết rằng (tra bảng) độ nhớt động học của dầu bôi trơn là $v_d = 17,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ và của không khí, ở nhiệt độ 20°C, $v_{kk} = 1,49 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

Giải :

Trước hết ta thấy rằng kích thước của mô hình không nhất thiết phải nhỏ hơn kích thước nguyên mẫu. Bằng cách đó có thể có nhiều thuận lợi cho công việc đo lường trong thí nghiệm.

Đối với hoạt động của bơm, lực ma sát nhớt là chủ đạo. Do đó, để tương tự động lực học, số Reynolds của mô hình và của nguyên mẫu phải bằng nhau và ta phải dựa vào số Reynolds để lập mối quan hệ giữa mô hình và vật thật sao cho trong biểu thức xuất hiện số vòng quay hay vận tốc góc.

$$Re = \frac{vd}{\nu} \rightarrow \frac{(d/2)\omega \times d}{\nu} = \frac{(d'/2)\omega' \times d'}{\nu'}$$

$$\omega' = \omega \times \frac{d^2}{d'^2} \cdot \frac{\nu}{\nu'} \rightarrow n' = n \times \frac{(d/d')^2}{\nu/\nu'} = n \times \frac{\lambda^2}{\nu/\nu'}$$

$$= 1200 \frac{(1/3)^2}{17,5 \cdot 10^{-5} / 1,49 \cdot 10^{-5}} = \frac{1200}{105,7047} \text{ v/phút}$$

$$\omega = 11,35 \text{ v/phút}$$

Nghĩa là số vòng quay của mô hình khá nhỏ, rất thuận lợi cho thí nghiệm (dễ lắp đặt thiết bị đo lường và thực hiện các việc theo dõi khác).

Bài 7. Người ta xây dựng mô hình của một đập tràn thu nhỏ tỉ lệ 1/25 trên một máng rộng 60 cm. Nguyên mẫu cao 12,5 m, và dự trữ đầu nước dâng tối đa cao 1,5m. Hỏi :

- Phải dùng chiều cao mô hình là bao nhiêu?
- Nếu trên mô hình một đầu nước 6 cm cho một lưu lượng là 20 l/s thì suất lưu lượng trên mét ở nguyên mẫu là bao nhiêu?
- Đầu cột nước (cột áp) ở mô hình là bao nhiêu?
- Nếu hệ thống mô hình tiêu tốn một công suất 0,15 mã lực từ lưới thì tiêu tốn năng lượng của hệ thật (nguyên mẫu) là bao nhiêu?

Giải :

a) Do đã biết tỉ lệ kích thước $\lambda = 25$ nên trên mô hình có :

- Chiều cao của công trình hiển nhiên phải là :

$$H'_{ct} = \frac{1}{\lambda} H_{ct} = \frac{1}{25} \times 12,5m = 0,5m$$

- Chiều cao đầu nước :

$$h' = \frac{1}{\lambda} h = \frac{1}{25} \times 1,5m = 0,06m = 6cm.$$

b) Như đã biết, hiện tượng chảy trong kênh hở chủ yếu chịu sự tác động của trọng lực nên ở đây phải sử dụng tiêu chuẩn Froude để chuyển đổi tương đương các quan hệ mà trong trường hợp này là giữa độ dài và thời gian. Biết rằng ở hiện tượng khi quán tính và gia tốc trọng trường cùng có tác động như nhau thì :

$$\lambda_Q = \frac{Q}{Q'} = \frac{\lambda^3}{\lambda_T} \quad (g)$$

$$\text{Từ trọng lượng có : } \frac{G}{G'} = \frac{\gamma \times V}{\gamma' \times V'} = \lambda_\gamma \lambda^3 \quad (h)$$

$$\text{Từ lực quán tính có : } \frac{ma}{m'a'} = \left(\frac{\rho \times V}{\rho' \times V'} \right) \times \frac{a}{a'} = \lambda_\rho \lambda^3 \lambda_a = \lambda_\rho \lambda^3 \lambda / \lambda_T^2 \quad (i)$$

cho hai biểu thức (h) và (i) bằng nhau :

$$\lambda_\rho \lambda^3 = \lambda_\rho \lambda^3 \lambda / \lambda_T^2$$

$$\text{Do đó : } \lambda_T^2 = \lambda \rightarrow \lambda_T = \lambda^{0,5}$$

Thế kết quả này vào (g), được :

$$\lambda_Q = \frac{\lambda^3}{\lambda^{0,5}} = \lambda^{2,5}$$

Như vậy lưu lượng của nguyên mẫu :

$$Q = \lambda^{2,5} Q' = (25)^{5/2} \times 20.10^{-3} = 3125 \times 20.10^{-3} m^3/s = 62,500 m^3/s$$

Lưu lượng này đạt trên độ dài thực (tương ứng với 60cm trên mô hình là bề rộng của máng) :

$$L = \lambda L' = 25 \times 0,6 m = 15 m$$

Vì vậy suất lưu lượng trên mét chiều rộng :

$$q_L = \frac{Q}{L} = \frac{62,5}{15} = 4,167 m^3/s.m$$

c) Từ tỉ lệ đồng dạng hình học λ ta tính được độ cao đầu cột nước :

$$h = h' \lambda = 2,5 \times 25 = 62,5cm$$

d) Tỉ lệ công suất :

$$\lambda_N = \lambda_\rho \lambda_Q = \lambda_\rho \times \lambda^3 \tau^{-1}$$

song, lại từ quan hệ giữa quãng đường, gia tốc và thời gian ($L = 0,5 \text{ g}^2\text{t}$) có thể viết :

$$\frac{t}{t'} = \tau = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_a}} = \frac{\lambda^{0,5}}{\lambda_a^{0,5}}$$

Do có thể coi cả mô hình và nguyên mẫu đều chịu cùng một gia tốc trọng trường ; đồng thời cùng vận hành trong môi trường nước, nên :

$$\lambda_a = 1 \text{ và } \lambda_p = 1,$$

$$\lambda_N = 1 \times \lambda^3 \times \frac{\lambda^{-0,5}}{1^{-0,5}} = \lambda^{3,5} \rightarrow N = \lambda_N N'$$

Từ đây có : $N = 25^{3,5} \times 0,15 = 11718 \text{ mã lực} = 8788,5 \text{ kW}.$

TỔNG KẾT CHƯƠNG X

Chương đã đề cập tới một lĩnh vực quan trọng gắn liền với hoạt động thực tiễn của người kĩ sư trong lĩnh vực nghiên cứu khoa học, hoạt động sáng tạo và nghề nghiệp chuyên môn. Đồng thời qua đó giúp hiểu sâu thêm bản chất của những điều đã học, đã làm. Cũng qua chương này ta có thêm một phương pháp luận cho việc kiểm tra các kết quả thu được trong tính toán, nghiên cứu. Đó là vấn đề phân tích thứ nguyên và lí thuyết tương tự/mô hình hoá các hệ động học và động lực học gặp phải trong quá trình tác nghiệp.

Phân tích thứ nguyên xuất phát từ một thực tiễn là trong vật lí cũng như trong cơ học chúng ta không thể dừng lại ở sự cân bằng trị số của hai vế trong một phương trình toán học mà còn phải đồng nhất chúng về mặt cấu trúc thông qua đơn vị đo lường của nó. Sau mỗi đại lượng vật lí ngoài trị số còn phải có thuộc tính của nó như độ dài, thời gian, khối lượng hoặc các thuộc tính khác,... Như vậy, dấu bằng (=) trong một phương trình vật lí, cơ học còn nói lên sự đồng nhất về mặt cấu trúc. Và, chính cái đó cho ta thuật toán để có thể tìm hiểu cấu trúc của hiện tượng vật lí, cơ học với các đại lượng cơ bản mà ta dùng làm thước đo đại lượng đang xét. Các đại lượng cơ bản là các đại lượng không thể dẫn xuất từ các đại lượng cơ bản khác, như độ dài, thời gian, khối lượng, ..., được gọi là **thứ nguyên**. Tuy nhiên nó có thể biểu thị tương đương thông qua một quy luật hay điều kiện cụ thể nào đó, ví dụ : xe chạy với tốc độ 60km/giờ thì 1km tương đương 60s và như vậy có thể dùng độ dài để gián tiếp đo thời gian theo một nghĩa tương đối nào đó ; hoặc nói thị trấn A cách thành phố B một giờ xe ôtô cũng đại loại như vậy, tùy thuộc vào chúng ở châu Âu hay Mĩ. Nói đến đại lượng cơ bản cũng có nghĩa là còn tồn tại các đại lượng không cơ bản, các đại lượng dẫn xuất, chúng được suy ra từ các đại lượng cơ bản theo một quan hệ nào đấy của những quy luật vật lí khác nhau. Tóm lại, dấu bằng ở đây còn đảm bảo một sự giống nhau về mặt thứ nguyên. Sự cân bằng ở đây được thực hiện trên cơ sở đồng nhất số mũ với quan niệm mọi đại lượng (vật lí) dẫn xuất đều có thể biểu diễn dưới dạng tích của các đại lượng

có thứ nguyên. Mọi hệ cơ học đều có 3 đại lượng cơ bản, hoặc là khối lượng M , chiều dài L và thời gian T ; hoặc là lực P (trọng lượng G), chiều dài L và thời gian T . Như vậy, nếu bằng cách nào đó, biết được về bên này, lập tức suy ra về bên kia và ngược lại. Điều này được làm sáng tỏ qua các ví dụ minh hoạ ở cuối chương. Phần đi sâu, thuần tuý lí thuyết toán học của chương nhằm trang bị công cụ đủ mạnh để giải quyết những cấu trúc phức tạp nhất.

Lí thuyết tương tự sử dụng rất nhiều kết quả của phân tích thứ nguyên, trở thành nền tảng lí thuyết cho công nghệ mô hình hoá các hiện tượng vật lí, kết cấu cơ học trong công tác thiết kế, thử nghiệm, thể nghiệm và nghiên cứu khoa học, giúp tránh được rủi ro, đem lại hiệu quả kinh tế. Là hiện tượng vật lí/cơ học nên những đối tượng xem xét ở đây phải tuân thủ đầy đủ các ràng buộc, các quy luật của một hệ động lực học là sự thoả mãn 3 tiêu chuẩn tương tự: tương tự hình học (sự đồng dạng), tương tự động học và tương tự động lực học để mô hình có thể phản ánh trung thành những gì xảy ra ở vật thật/nguyên mẫu.

Trong thực tiễn với các hệ phức tạp nhiều khi không hoặc rất khó tạo được một mô hình theo yêu cầu trên. Vì vậy người ta thường bỏ bớt các ảnh hưởng (tác động) thứ yếu để thay vì phải tìm một mô hình tổng quát, quá phức tạp, chấp nhận một mô hình chỉ phản ánh tương đối chính xác hiện tượng đó. Việc này dẫn tới sự phân biệt tiêu chuẩn/luật tương tự tổng quát và tiêu chuẩn/luật tương tự riêng (từng phần) như số Reynolds cho các hệ chịu ảnh hưởng chủ yếu bởi lực nhớt (ma sát của chất lỏng); như số Froude cho hệ chịu ảnh hưởng chủ yếu của trọng trường, ...

Qua các ví dụ cụ thể có thể thấy được các bước cần tiến hành để có được mô hình mong muốn và sự gắn kết hữu cơ giữa lí thuyết thứ nguyên và lí thuyết tương tự, mô hình hoá. Chúng hỗ trợ lẫn nhau và không tách rời nhau.

PHỤ LỤC

Bảng 1. Hệ số nhớt μ (tính bằng poadoi) và ν (tính bằng stốc) của một số chất lỏng

Loại chất lỏng	t°C	$10^4 \mu$	$10^4 \nu$
Nước	0	0,01792	0,01792
	10	0,01306	0,01306
	20	0,01004	0,01006
	30	0,00802	0,00805
	40	0,00654	0,00659
	50	0,00549	0,00556
Xăng	15	0,0065	0,0093
Rượu Êtilic (C_2H_5OH)	20	0,0119	0,0154
Thuỷ ngân	15	0,0154	0,0011
Spikido	16	0,0160	0,0183
Dầu hoả	15	0,0217	0,0276
Dung dịch nước+glicerin (nồng độ 50%)	15	0,0603	0,0598
Dầu biến thế	20	0,275	0,310
Dầu tướcbin	20	0,860	0,960
Glixerin (86% dung dịch nước)	20	1,297	1,059
Mỡ vadolin	20	1,38	1,57
Glixerin (không nước)	20	14,99	11,89
Mỡ máy C	50	47,0	52,2

Chú thích :

$$1 \text{ poadoi} = 1 \frac{\text{din. sec}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm. sec}} ;$$

$$1 \text{ stốc} = 1 \frac{\text{poadoi}}{\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$

Bảng 2. Độ nhám tương đương k_{td} của ống và kênh

STT	Đặc tính bề mặt, vách trong ống và kênh	k_{td} (mm)
	I. Ống nguyên khối	
1	Ống bằng đồng thau, đồng, kẽm	0,00150 – 0,010
2	Ống thép mới	0,020 – 0,100
3	Ống thép đang sử dụng	1,2 – 1,5
	II. Ống thép hàn nguyên khối	
4	Ống mới hoặc cũ nhưng còn tốt	0,04 – 0,10
5	Ống tráng bitum	0,05
6	Ống sử dụng rồi, có chỗ bị gỉ	0,10
7	Ống sử dụng rồi, bị gỉ đều	0,15
8	Ống ở tình trạng xấu, các chỗ nối không phù đều	$\geq 5,0$
	III. Ống gang	
9	Ống mới	0,25 – 1,0
10	Ống mới tráng bitum	0,10 – 0,15
11	Ống tráng atspan	0,12 – 0,30
12	Ống đã dùng	1,4
13	Ống đã dùng bị gỉ	1,0 – 1,5
	IV. Ống bê tông và xi măng	
14	Ống bê tông có bề mặt tốt	0,3 – 0,8
15	Ống bê tông trong điều kiện trung bình	2,5
16	Ống bê tông có bề mặt nhám	3,0 – 4,0
17	Ống xi măng mới chịu nóng	0,05 – 0,10
18	Ống xi măng chịu nóng đã sử dụng	0,60
	V. Ống gỗ và thủy tinh	
19	Ống gỗ bào kỹ	0,15 ước
20	Ống gỗ bào tốt	0,30 lượng
21	Ống gỗ chưa bào nhưng ghép tốt	0,70
22	Ống bằng thủy tinh sạch	0,0015 – 0,0100
	VI. Kênh phủ	
23	Kênh trát tốt bằng xi măng thuần túy	0,05 – 0,22
24	Kênh trát bằng dung dịch xi măng	0,5
25	Kênh trát theo lưới kim loại	10 – 15
26	Tấm bằng bê tông xỉ	1,5

Bảng 3. Tổn thất cột áp các phụ kiện
(Chỉ số 1: cho thượng nguồn; chỉ số 2: cho hạ nguồn)

1. Từ bình chứa vào ống dẫn - nối trong (tổn thất cửa vào)	$0,50 \frac{V_2^2}{2g}$
- đầu vào ống	$1,00 \frac{V_2^2}{2g}$
- đầu nối vê tròn	$0,05 \frac{V_2^2}{2g}$
2. Từ ống dẫn vào bể chứa (tổn thất đầu ra)	$1,00 \frac{V_1^2}{2g}$
3. Đột mở	$\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
4. Mở (lọc) từ từ. (ống lọc)	$K \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$
5. Ống văngturi, ống và lỗ	$\left(\frac{1}{c_v^2} - 1 \right) \frac{V_2^2}{2g}$
6. Đột thu (xem bảng 6)	$K_c \frac{V_2^2}{2g}$
7. Cút, ống nối, van Một số giá trị, trị số K : Cút 45° 0,35 ÷ 0,45 Cút 90° 0,50 ÷ 0,75 Ống chữ T 0,50 ÷ 0,75 Van đóng mở khoảng 0,5 Van tiết lưu khoảng 3,0	$K \frac{V_2^2}{2g}$

**Bảng 4. Giá trị đặc trưng của lưu lượng K_{bpsc} của ống mặt cắt tròn
được tính theo Pavlópki**

Đường kính $d(mm)$	Diện tích mặt cắt ngang $\omega^2(m^2)$	$K_{bpsc}(cm^3/s)$ với các trị số hệ số nhân khác nhau			
		$n = 0,011$	$n = 0,020$	$n = 0,030$	$n = 0,040$
1,00	10,7854	29,806	14,07	8,934	6,185
1,50	1,7672	86,664	44,307	27,638	19,716
2,00	3,1416	184,573	96,618	61,747	44,644
2,50	4,9087	328,123	174,196	112,663	82,338
3,00	7,069	535,70	288,90	188,636	140,02
3,50	9,621	801,70	436,92	288,762	215,18
4,00	12,566	1140,00	628,32	418,67	314,16
5,00	19,653	2049,87	1142,71	707,21	582,86
6,00	28,274	3311,98	1865,37	1270,11	969,02
7,00	38,484	4961,79	2813,88	1926,76	1479,33
8,00	50,266	7052,81	4025,73	2766,80	2133,78
9,00	63,617	9609,39	5501,31	3795,18	2935,30
10,00	78,540	12702,26	7302,86	5051,05	3918,91
12,00	113,097	20427,94	11798,90	8198,57	6359,27
14,00	153,938	30628,30	17703,39	12320,40	9585,74
16,00	201,062	43469,17	25132,50	17532,43	13632,00

**Bảng 5. Các giá trị của đặc trưng lưu lượng K_{bpsc} của ống dẫn nước
được tính theo công thức Manning**

Đường kính $d(mm)$	$\omega(m^2)$	$K_{bpsc}(l/s)$		
		Ống sạch ($n = 0,011$)	Các điều kiện tính toán bình thường ($n = 0,0125$)	Ống bẩn ($n = 0,0143$)
50	0,00196	9,624	8,460	7,403
75	0,00442	28,37	24,94	21,83
100	0,00785	61,11	53,72	47,01
125	0,01227	110,80	97,40	85,23
150	0,01767	180,20	158,40	138,60
175	0,02405	271,80	238,90	209,00
200	0,03142	388,00	341,00	298,50
225	0,03976	531,20	467,00	408,60
250	0,04909	703,50	618,50	541,20
300	0,07068	1,114.10 ³	1,006.10 ³	880,00
350	0,09621	1,726.10 ³	1,517.10 ³	1,327.10 ³
400	0,12566	2,464.10 ³	2,166.10 ³	1,895.10 ³
450	0,15904	3,373.10 ³	2,965.10 ³	2,594.10 ³
500	0,19635	4,467.10 ³	2,927.10 ³	3,436.10 ³
600	0,28274	7,274.10 ³	6,386.10 ³	5,587.10 ³

Bảng 6. Trị số của K cho trường hợp thu và mở

Đột thu		Mở từ từ theo góc còn						
d_1/d_2	K_c	4°	10°	15°	20°	30°	50°	60°
1,2	0,08	0,02	0,04	0,09	0,16	0,25	0,35	0,37
1,4	0,17	0,03	0,06	0,12	0,23	0,36	0,50	0,53
1,6	0,26	0,03	0,07	0,14	0,26	0,42	0,57	0,61
1,8	0,34	0,04	0,07	0,15	0,28	0,44	0,61	0,65
2,0	0,37	0,04	0,07	0,16	0,29	0,46	0,63	0,68
2,5	0,41	0,04	0,08	0,16	0,30	0,48	0,65	0,70
3,0	0,43	0,04	0,08	0,16	0,31	0,48	0,66	0,71
4,0	0,45	0,04	0,08	0,16	0,31	0,49	0,67	0,72
5,0	0,46	0,04	0,08	0,16	0,31	0,50	0,67	0,72

Bảng 7. Một số giá trị C_1 trong công thức Hazen - Williams

Ống thẳng và rất trơn nhẵn	140
Ống gang nhẵn và mới	130
Ống gang đã qua sử dụng và ống thép gò mới	110
Ống cũ	140
Ống gang sau 1 năm sử dụng	100
Ống gang ở trạng thái xấu	80

Bảng 8. Hệ số lưu lượng của lỗ thành mỏng

Cột áp đầu nguồn (mét)	Đường kính lỗ đo bằng xentimet (cm)					
	0,625	1,250	1,875	2,500	5,00	10,00
0,24	0,647	0,627	0,616	0,609	0,603	0,601
0,42	0,635	0,619	0,610	0,605	0,601	0,600
0,60	0,629	0,615	0,607	0,603	0,600	0,599
1,20	0,621	0,609	0,603	0,600	0,598	0,597
1,80	0,617	0,607	0,601	0,599	0,597	0,596
2,40	0,614	0,605	0,600	0,598	0,596	0,595
3,00	0,613	0,604	0,600	0,597	0,596	0,595
3,60	0,612	0,603	0,599	0,597	0,595	0,595
4,20	0,611	0,603	0,598	0,596	0,595	0,594
4,80	0,610	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
6,00	0,609	0,602	0,598	0,596	0,595	0,594
7,50	0,608	0,601	0,597	0,596	0,594	0,594
9,00	0,607	0,600	0,597	0,595	0,594	0,594
12,00	0,606	0,600	0,596	0,595	0,594	0,593
15,00	0,605	0,599	0,596	0,595	0,594	0,593
18,00	0,605	0,599	0,596	0,594	0,593	0,593

Bảng 9. Một số trị số trung bình của n trong công thức Manning và Kutter và của m trong công thức bazin

	n	m
Xi măng láng nhẵn, gỗ gia công tốt	0,010	0,11
Gỗ gia công, máng gỗ	0,012	0,20
Ống cũ lát gạch nhẵn, ống bê tông chất lượng trung bình, gỗ	0,013	0,29
Ống gốm và ống gang, xi măng bình thường	0,015	0,40
Kênh đất phẳng trong trạng thái tốt	0,023	1,54
Kênh đất trong trạng thái trung bình	0,027	2,36
Kênh có đá sỏi	0,040	3,50
Lòng sông trạng thái tốt	0,030	3,00

- Công thức Manning :

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

Công thức Kutter :
(chưa rút gọn)

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R}} \left(23 + \frac{0,0155}{i} \right)}$$

Công thức Bazin :

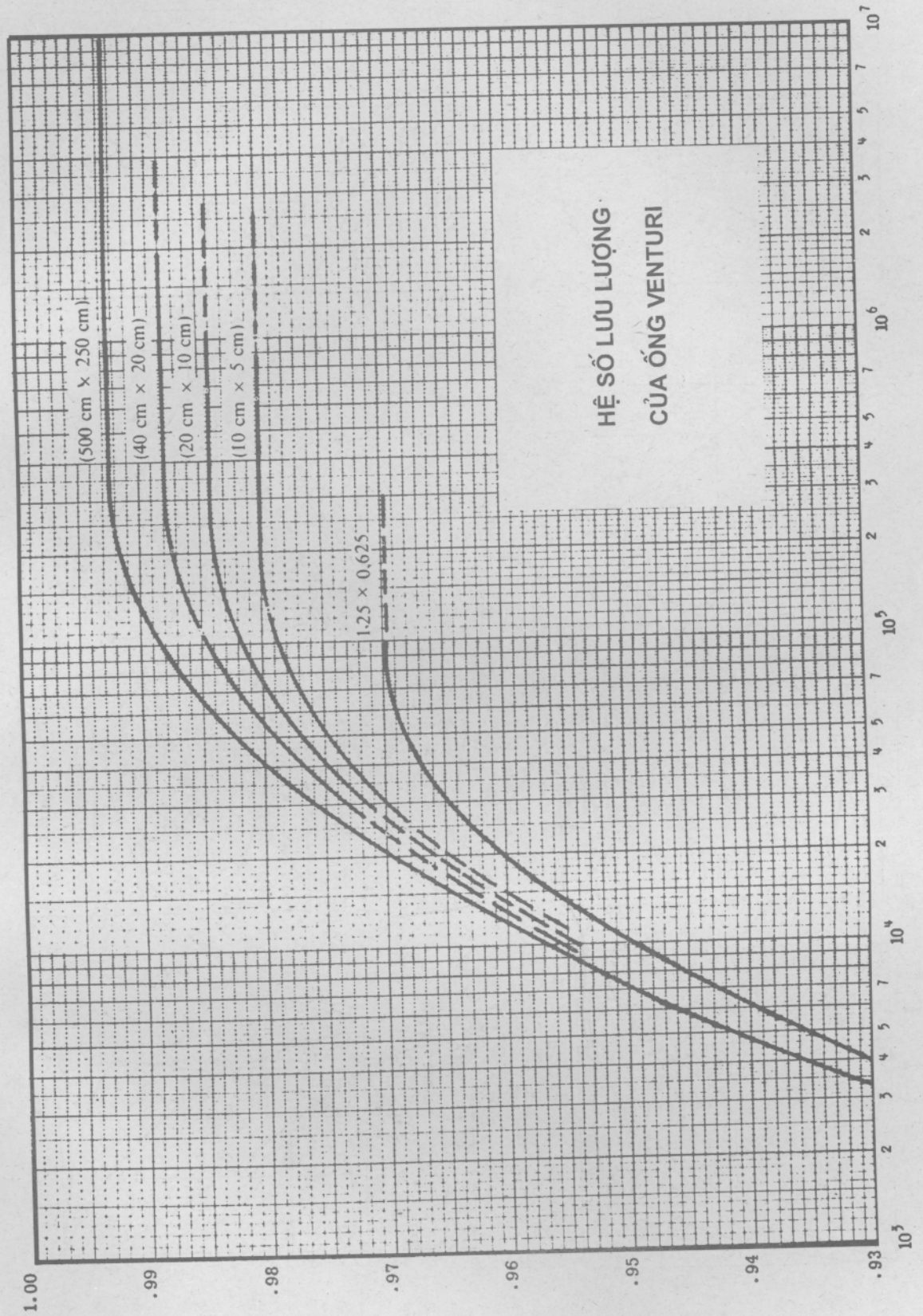
$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R}}}$$

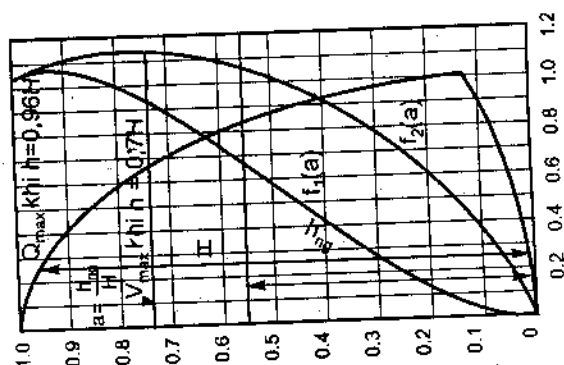
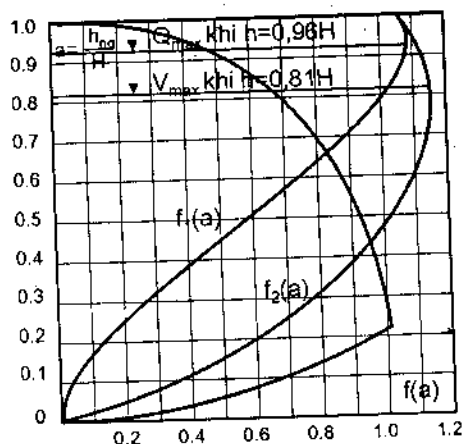
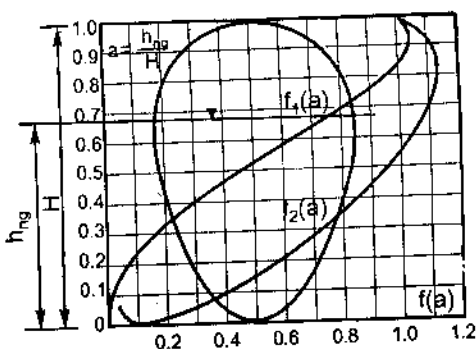
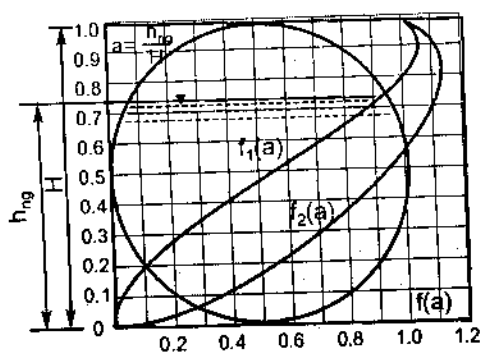
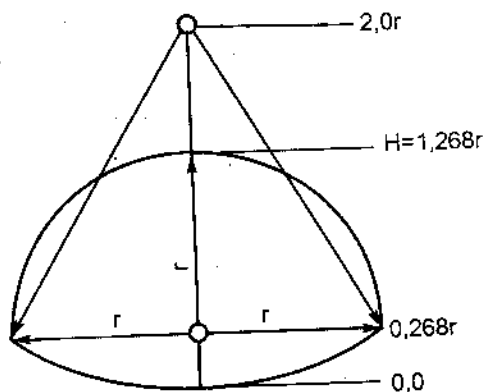
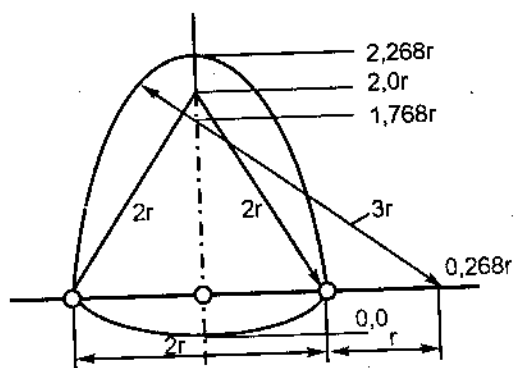
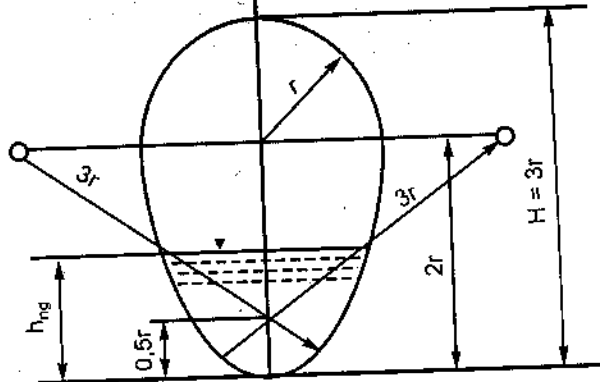
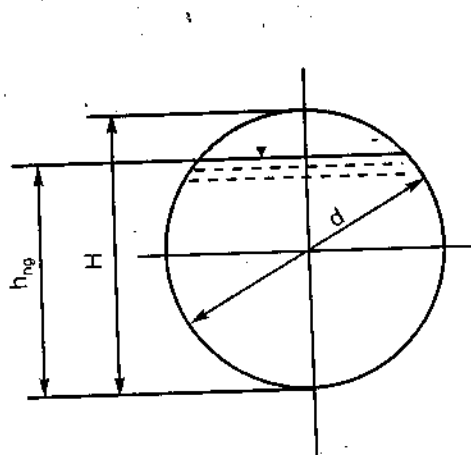
Bảng 10. Vận tốc cho phép không xói của dòng chảy đối với đất không dính

Đường kính trung bình hạt d, mm	Vận tốc trung bình (m/s) với các độ sâu khác nhau (m)				
	0,5	1,0	3,0	5,0	10,0
0,05	0,52	0,55	0,60	0,62	0,66
0,15	0,36	0,38	0,42	0,44	0,46
0,25	0,37	0,39	0,41	0,45	0,48
0,37	0,38	0,41	0,46	0,48	0,51
0,50	0,41	0,44	0,50	0,52	0,55
0,75	0,47	0,51	0,57	0,59	0,63
1,00	0,51	0,55	0,62	0,65	0,69
2,00	0,64	0,70	0,79	0,83	0,89
2,50	0,69	0,75	0,86	0,90	0,97
3,00	0,73	0,80	0,91	0,96	1,03
5,00	0,87	0,96	1,10	1,17	1,25
10,00	1,10	1,23	1,42	1,51	1,64
15,00	1,26	1,42	1,65	1,76	1,92
20,00	1,37	1,55	1,84	1,96	2,14
25,00	1,48	1,65	1,98	2,12	2,32
30,00	1,56	1,76	2,10	2,26	2,48
40,00	1,68	1,93	2,32	2,50	2,75
75,00	2,01	2,35	2,89	3,14	3,48
100,00	2,15	2,54	3,14	3,46	3,85
150,00	2,35	2,84	3,62	3,96	4,46
200,00	2,47	3,03	3,92	4,31	4,87
300,00	2,90	3,32	4,40	4,94	5,58

Bảng 11. Vận tốc cho phép không xói của dòng chảy đối với các loại đất dính

Lực dính kết tính toán C_1 (10^5N/m^2)	Vận tốc cho phép (m/s) khi độ sâu bằng (m)				
	0,5	1	3	5	10
0,005	0,39	0,43	0,49	0,52	0,56
0,010	0,44	0,48	0,55	0,58	0,63
0,020	0,52	0,57	0,65	0,69	0,74
0,030	0,59	0,64	0,74	0,78	0,84
0,040	0,65	0,71	0,81	0,86	0,92
0,050	0,71	0,77	0,89	0,98	1,01
0,075	0,83	0,91	1,04	1,10	1,19
0,100	0,96	1,04	1,20	1,27	1,37
0,125	1,03	1,13	1,30	1,37	1,47
0,150	1,13	1,23	1,41	1,49	1,61
0,175	1,21	1,33	1,52	1,60	1,72
0,200	1,28	1,40	1,60	1,69	1,82
0,225	1,36	1,48	1,70	1,80	1,93
0,250	1,42	1,55	1,78	1,88	2,02
0,300	1,54	1,69	1,94	2,04	2,20
0,350	1,67	1,83	2,09	2,21	2,38
0,400	1,79	1,96	2,25	2,38	2,56
0,450	1,88	2,06	2,35	2,49	2,64
0,500	1,99	2,17	2,50	2,63	2,84
0,600	2,16	2,38	2,72	2,88	3,10





Bảng tra cứu thủy lực các tiết diện kênh hở

Tài liệu tham khảo

- [1] GS.TSKH Nguyễn Tài : THỦY LỰC tập I, NXB Xây dựng, Hà Nội 1998.
- [2] GS.TS Nguyễn Tài - TS. Lê Bá Sơn : THỦY LỰC tập II, NXB Xây dựng, Hà Nội 1999.
- [3] GS.TS Nguyễn Tài - Tạ Ngọc Cầu : THỦY LỰC ĐẠI CƯƠNG, NXB Xây dựng, Hà Nội 1999.
- [4] Nguyễn Phước Hoàng - Phạm Đức Nhuận - Nguyễn Thạc Tân : THỦY LỰC VÀ MÁY THỦY LỰC tập I - THỦY LỰC ĐẠI CƯƠNG, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1979.
- [5] Dr Németh Endre : HIDROMECHANIKA, NXB Tankonyvkiadó, Budapest 1963
- [6] Ranald V. Gile : Mécanique des fluides et Hydroligue – Cours et problèmes (Dịch giả : Michel Lobenberg). Bản gốc tiếng Anh : Fluid Mecanics and Hydrolics, NXB Mc Graw - Hill, Paris, New York, London,... 1962.

MỤC LỤC

Trang

<i>Lời giới thiệu</i>	3
<i>Lời nói đầu</i>	4
Chương I : Nhập môn	
1. Khái niệm chung	5
2. Lược sử phát triển	5
3. Các tính chất chủ yếu của chất lỏng	7
4. Trạng thái ứng suất của chất lỏng	17
Bài tập minh họa Chương I	23
Tổng kết Chương I	26
Chương II : Thủy tĩnh học	
1. Hai tính chất cơ bản của áp suất thủy tĩnh	27
2. Phương trình vi phân cân bằng của chất lỏng thủy tĩnh – Phương trình Euler	28
3. Sự cân bằng của chất lỏng thủy tĩnh trong trường trọng lực	31
4. Áp lực của chất lỏng thủy tĩnh lên mặt phẳng	36
5. Áp lực của chất lỏng thủy tĩnh lên mặt cong	38
6. Định luật Archimedes và áp dụng của nó vào khảo sát vật nổi	41
Bài tập minh họa Chương II	42
Tổng kết Chương II	48
Chương III : Cơ sở động học và động lực học của chất lỏng chuyển động	
1. Các phương pháp toán học dùng cho việc khảo sát	49
2. Các dạng chuyển động. Các kiến tạo hình học trong dòng chảy	52
3. Một số khái niệm thủy lực liên quan đến dòng chảy	54
4. Phương trình liên tục	55
5. Phân tích hành vi của một phần tử chất lỏng. Chuyển động thế và chuyển động xoáy	57
6. Phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng – phương trình Euler	62
7. Tích phân phương trình Euler – Tích phân Lagrange, tích phân Bernoulli	65
8. Phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng nhớt – Phương trình Navier-Stokes	70
9. Phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng nhớt	75
10. Phương trình Bernoulli cho toàn dòng chất lỏng nhớt	77
11. Nguyên lý đo áp suất, vận tốc và lưu lượng của các dụng cụ đo.	78
12. Biến thiên (biến đổi) động lượng của chất lỏng chuyển động – Phương trình biến thiên động lượng	81
Bài tập minh họa Chương III	82
Tổng kết Chương III	89

Chương IV: Chuyển động thể và chuyển động xoáy của chất lỏng. Dòng song phẳng	
1. Cơ sở lí thuyết	90
2. Vận dụng lí thuyết để khảo sát một số dòng chảy	97
3. Dòng xoáy và các định luật cơ bản	114
Bài tập minh họa Chương IV	119
Tổng kết Chương IV	122

Chương V: Sức cản thủy lực

1. Những khái niệm chung về sức cản thủy lực	124
2. Chảy tầng đều của chất lỏng trong ống	129
3. Chuyển động rối, đều của chất lỏng	132
4. Sức cản thủy lực cục bộ	143
Bài tập minh họa Chương V	148
Tổng kết Chương V	154

Chương VI : Tính toán thủy lực đường ống

1. Phân loại đường ống	156
2. Tính toán thủy lực đường ống đơn giản	156
3. Tính toán đường ống dài có chế độ chảy ở khu vực bình phương sức cản	160
4. Tính toán thủy lực đường ống ngoài khu vực bình phương sức cản	161
5. Tính toán thủy lực đường ống phức tạp	163
6. Các đặc điểm trong tính toán thủy lực đường ống ngắn	169
7. Tính toán thủy lực đường ống cho máy bơm ly tâm	171
8. Bài toán đầu tư bơm	173
Bài tập minh họa Chương VI	174
Tổng kết Chương VI	181

Chương VII : Chuyển động của chất lỏng qua lỗ, vòi

1. Chuyển động của chất lỏng qua lỗ thành mỏng	183
2. Chuyển động của chất lỏng qua vòi	187
3. Các loại vòi khác	190
4. Khảo sát một số vấn đề đặc thù	192
Bài tập minh họa Chương VII	194
Tổng kết Chương VII	199

Chương VIII : Chuyển động đều không áp của chất lỏng

1. Các khái niệm cơ bản	201
2. Công thức tính toán	201
3. Mặt cắt kênh	202
4. Những bài toán cơ bản về dòng chảy đều trong kênh hở tiết diện hình thang	204
5. Tính toán kênh có điều kiện thủy lực phức tạp	206
6. Tính toán thủy lực cho dòng chảy đều, không áp trong ống	208

7. Vận tốc cho phép để không xói và không bồi lắng của lòng dẫn hở	209
Bài tập minh họa Chương VIII	211
Tổng kết Chương VIII	215

Chương IX : Chuyển động ổn định không đều trong kênh hở	216
1. Khái niệm chung	217
2. Các phương trình cơ bản của chuyển động đều thay đổi dần	219
3. Tỷ năng dòng chảy, tỷ năng mặt cắt, chiều sâu phân giới	224
4. Phân tích phương trình vi phân cơ bản của chuyển động ổn định không đều	230
Bài tập minh họa Chương IX	232
Tổng kết Chương IX	

Chương X : Lí thuyết thứ nguyên và tương tự/dồng dạng	233
1. Khái niệm chung	235
2. Lí thuyết thứ nguyên (phân tích đại lượng đo cơ bản/...)	247
3. Lí thuyết tương tự/dồng dạng	255
Bài tập minh họa Chương X	262
Tổng kết Chương X	264
Phụ lục	275
Tài liệu tham khảo	

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung :

TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa :

MẠNH DỨA

Sửa bản in :

PHÒNG SỬA BẢN IN (NXB GIÁO DỤC)

Chế bản :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

THUYẾT LỰC ĐẠI CƯƠNG

Mã số : 7K596M4

In 1000 cuốn, khổ 19 x 27 cm, tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội

Số xuất bản: 276/23 - 04 CXB.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2004.

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

- | | |
|--|---|
| 1. Cơ học - Tập một (Tĩnh học và động học) | Đỗ Sanh - Nguyễn Văn Đình
Nguyễn Văn Khang |
| 2. Cơ học - Tập hai (Động lực học) | Đỗ Sanh |
| 3. Bài tập cơ học - Tập một (Tĩnh học và động học) | Đỗ Sanh (chủ biên) |
| 4. Bài tập cơ học - Tập hai (Động lực học) | Đỗ Sanh (chủ biên) |
| 5. Cơ học ứng dụng | Đỗ Sanh - Nguyễn Văn Vượng |
| 6. Bài tập cơ học ứng dụng | Nguyễn Nhật Lễ
Nguyễn Văn Vượng |
| 7. Cơ học công trình - Tập một | Lê Văn Hồ |
| 8. Cơ học công trình - Tập hai | Lê Văn Hồ |
| 9. Vật liệu xây dựng | Phùng Văn Lự (chủ biên) |
| 10. Bài tập vật liệu xây dựng | Phùng Văn Lự (chủ biên) |
| 11. Giáo trình công nghệ bê tông xi măng | Nguyễn Tấn Quý |
| 12. Giáo trình kỹ thuật môi trường | Tăng Văn Đoàn |

Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ty Sách - thiết bị trường học ở địa phương
hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

25 Hàn Thuyên, 81 Trần Hưng Đạo hoặc 187 Giảng Võ - Hà Nội

15 Nguyễn Chí Thanh - TP. Đà Nẵng

104 Mai Thị Lựu - Quận 1 - TP. Hồ Chí Minh



Giá : 34.500 đ