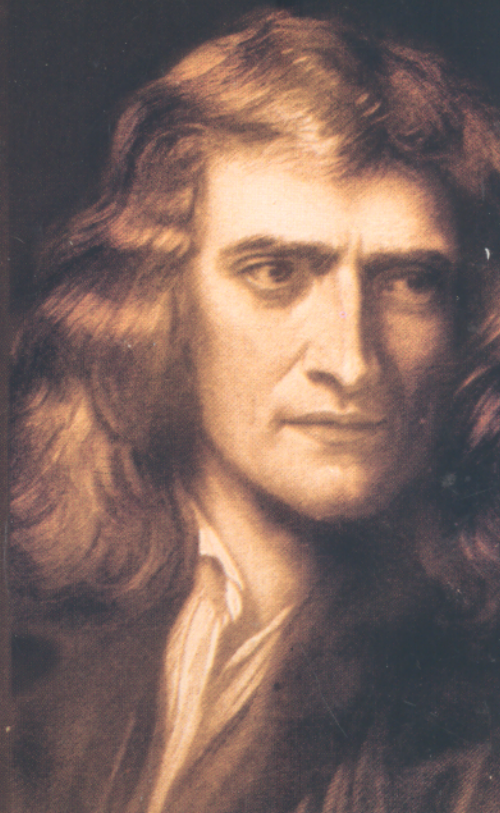


HOÀNG NAM NHẬT

CƠ HỌC ĐẠI CƯƠNG

TỪ **ARISTOTLE** ĐẾN **NEWTON**

DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHỐI TỰ NHIÊN



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

HOÀNG NAM NHẬT

CƠ HỌC ĐẠI CƯƠNG

Từ Aristotle đến Newton

Giáo trình này tiếp cận cơ học đại cương từ khía cạnh lịch sử, với nhiều dẫn chứng từ các công trình gốc của Galileo và Newton, đồng thời phát triển nâng cao bằng đại số vectơ nhằm trang bị một vốn kiến thức vững vàng cho các chuyên ngành vật lý khác nhau

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

INTRODUCTION TO MECHANICS

From Aristotle to Newton

Copyright © 2002–2006 by Hoàng Nam Nhật

Contact address:

Hoàng Nam Nhật

Khoa Vật lý, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

334 Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội

E-Mail: namnhat@hn.vnn.vn

No part of this book may be reproduced by any mechanical, photographic, or electronic process, or in the form of a phonographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted, or otherwise copied for public or private use, without written permission from author.

Printed in VietNam

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Lời nói đầu.....	9

Chương 1

HỆ MẶT TRỜI

1.1. Các giả thuyết về vũ trụ trong thời cổ đại	13
1.2. Học thuyết của Copernicus.....	16
1.3. Niên biểu các phát hiện trong hệ mặt trời.....	21
1.4. Tính chất vật lý của một số hành tinh.....	25
1.5. Một số vấn đề trong hệ mặt trời.....	27

Chương 2

CƠ HỌC CỦA NGƯỜI HY LẠP

2.1. Lược sử cơ học.....	33
2.2. Nền khoa học Hy Lạp	37
2.3. Aristotle và các quan niệm về cơ học	41
2.4. Một số phép đo trong lịch sử Hy Lạp	44

Chương 3

ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

3.1. Các đại lượng vật lý của chuyển động.....	49
3.2. Cơ học của Galileo	55
3.3. Nguyên lý tương đương	58
3.4. Nguyên lý quán tính và hệ quy chiếu quán tính	62
3.5. Chuyển động trong trọng trường không đổi.....	67
3.6. Chuyển động tròn đều	72
3.7. Sự ra đời các định luật Kepler.....	82
3.8. Các định luật Kepler	87

Chương 4

ĐỘNG LỰC HỌC NEWTON

4.1. Các vấn đề trước khi lý thuyết Newton ra đời	95
4.2. Mở đầu đại số vectơ	101
4.3. Sự ra đời của "Principia"	114
4.4. Các định luật của Newton	117
4.5. Môment động lượng và lực hướng tâm	124
4.6. Trường lực hướng tâm không đổi	130
4.7. Trường lực hướng tâm $F \propto r$	132
4.8. Dao động tuần hoàn	141
4.9. Chuyển động quay của vật rắn	146

Chương 5

TRƯỜNG HẤP DẪN CỔ ĐIỂN

5.1. Lược sử thuyết hấp dẫn	151
5.2. Định luật hấp dẫn Newton	157
5.3. Công, thế năng và năng lượng toàn phần	164
5.4. Tương tác 2 - chất điểm	173
5.5. Đối xứng và các đại lượng bảo toàn	180

Chương 6

LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP

6.1. Thí nghiệm Michelson-Morley	191
6.2. Hệ quả của vận tốc giới hạn	196
6.3. Lý thuyết tương đối Einstein	201
6.4. Động lực học tương đối	212
Tài liệu tham khảo	225

Danh mục các hình vẽ

Trang

Hình 1.1	Mô hình vũ trụ hình trụ của Anaximander.....	14
Hình 1.2	Mô hình vũ trụ của Aristotle bao gồm 55 bán cầu thủy tinh: 1. Sao Thủy, 2. Sao Kim, 3. Mặt Trời, Vòng thứ 55. Các vì sao cố định	14
Hình 1.3	Mô hình Aristarchus	15
Hình 1.4	Mô hình các vòng đồng luân của Hipparchus.....	15
Hình 1.5	Đường cycloid đơn giản: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, a là bán kính vòng tròn, t là độ lớn góc quay.....	16
Hình 1.6	Mô hình hệ mặt trời nguyên bản của Copernicus. Chỉ có Trái Đất mới có Mặt Trăng.	18
Hình 1.7	Bức họa sao Thổ dưới ống kính của Lassell vào ngày 10-11/9/1851.	24
Hình 1.8	Mặt Trăng quay đồng bộ: nó luôn hướng một mặt về phía Trái Đất.	28
Hình 1.9	Quan sát chuyển động vệ tinh sao Mộc của Roemer.....	30
Hình 1.10	Một mẫu khoáng vật được tìm thấy.....	32
Hình 2.1	Sự tồn tại của các số vô tỉ phá vỡ định lý tỷ lệ.....	39
Hình 2.2	Phép chứng minh định lý Pythagoras của các môn đồ Pythagoras	39
Hình 2.3	Các hình khối Plato, trong ngoặc là số đỉnh, cạnh, mặt. Công thức Euler xác định: $s = \text{đỉnh} + \text{mặt} - \text{cạnh} = 2$	40
Hình 2.4	Phép đo chu vi Trái Đất của Eratosthenes (276-194 tr. CN) ..	45
Hình 2.5	Phép đo khoảng cách Trái Đất - Mặt Trăng của Aristarchus (310-230 tr.CN).....	46
Hình 2.6	Phép đo khoảng cách Trái Đất - Mặt Trời của người Hy Lạp....	46
Hình 2.7	Đo khoảng cách xa dựa trên bán kính quỹ đạo trái đất.....	47
Hình 3.1	Tờ bìa cuốn "Bàn về hai ngành khoa học mới" của Galileo.....	57
Hình 3.2	Hình vẽ của Galileo để chứng minh Định lý 1, sách đã dẫn.....	69
Hình 3.3	Hình vẽ của Galileo chứng minh Định lý 6,7, sách đã dẫn.....	70
Hình 3.4	Hình vẽ parabol của Galileo	72
Hình 3.5	Liên hệ giữa vận tốc góc và vận tốc dài trong chuyển động tròn đều	75

Hình 3.6	Phép chứng minh định lý $a_n = v^2/r$	76
Hình 3.7	Bụi tàn dư của siêu sao SN 1572.	83
Hình 3.8	Hình vẽ ngôi sao mới (số 1) giữa chòm sao Cassiopeia của Tycho Brahe (Stella Nova).....	84
Hình 3.9	Một kính quan sát bằng gỗ của Tycho Brahe với bán kính 5,79m và phân vạch $0,16^\circ$	84
Hình 3.10	Mô hình hệ mặt trời của Kepler	86
Hình 3.11	Bảo toàn môment động lượng đối với chuyển động thẳng đều, chuyển động tròn đều và liên hệ của nó với phép nhân có hướng giữa hai vectơ	88
Hình 3.12	Các tham số của elips trong hệ tọa độ cực và hệ tọa độ vuông góc	91
Hình 3.13	Xác định các vị trí có vận tốc cực đại và cực tiểu theo định luật 2 Kepler	92
Hình 4.1	"A body by two forces conjoined will describe the diagonal of a parallelo-gram, in the same time that it would describe the sides, by those forces apart." [Corollary I, Axioms, Principia].....	98
Hình 4.2	Liên hệ giữa công của lực và phép nhân vô hướng giữa hai vectơ.....	101
Hình 4.3	Phép hoán vị các chỉ số trong tích có hướng giữa hai vectơ ..	104
Hình 4.4	Phương của vectơ $\vec{\theta}$ trên trục θ	109
Hình 4.5	Chiều của ba vectơ: $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$	109
Hình 4.6	Liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ vuông góc.....	112
Hình 4.7	Quỹ đạo một chuyển động đồng thời tuân theo định luật quán tính và định luật 2 Newton phải có quỹ đạo nằm trong một mặt phẳng	119
Hình 4.8	Hình vẽ Trái Đất bị cắt làm ba phần trong " <i>Principia</i> " để minh họa định luật 3.....	121
Hình 4.9	Vật đứng yên mặc dù có lực tác dụng	123
Hình 4.10	Hình vẽ minh họa của Newton trong " <i>Principia</i> "	125
Hình 4.11	Mô tả phân tích chuyển động của Newton bằng các vectơ $\vec{r}$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ và $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$	127
Hình 4.12	Phân tích lực trên quỹ đạo parabol trong trường lực không đổi	130

Hình 4.13	Phép chứng minh Bổ đề XIII, Phần III của Newton: lực tỷ lệ với nghịch đảo bình phương khoảng cách.....	131
Hình 4.14	Hình vẽ của Newton chứng minh Bổ đề XL, Phần VIII.....	132
Hình 4.15	Bổ đề X, Bài toán V, Phần II: "Nếu một vật chuyển động trên quỹ đạo elips thì hãy xác định quy luật phụ thuộc khoảng cách của lực hướng tâm phát ra từ tâm elips đó".....	133
Hình 4.16	Vẽ lại theo bản XVIII, hình 4, tr.198, " <i>Principia</i> "	135
Hình 4.17	Định dạng elips với các tham số khác nhau	137
Hình 4.18	Biểu diễn elip theo tham số.....	137
Hình 4.19	Biểu diễn đường tròn theo tham số.....	141
Hình 4.20	Con lắc lò xo $\vec{F} = -k\vec{x}$	141
Hình 4.21	Phân tích lực trong con lắc thông thường	144
Hình 4.22	Các dạng con lắc tròn và con lắc hình thoi	144
Hình 4.23	Hình vẽ con lắc trong Bổ đề LIII, Phần X, " <i>Principia</i> "	145
Hình 4.24	Định nghĩa khối tâm của vật rắn.....	146
Hình 4.25	Môment quán tính của thanh kim loại.....	147
Hình 4.26	Trục quay nằm ngoài vật rắn.....	148
Hình 5.1	Bổ đề LXX, Định lý XXX, Phần XII: Lực hấp dẫn không thể tồn tại bên trong mặt cầu.....	158
Hình 5.2	Bổ đề LXXIII, Phần XII: Lực hấp dẫn chỉ phụ thuộc vào khối lượng vật chất bên trong lớp vỏ cầu	159
Hình 5.3	Bổ đề LXXXVIII, Định lý XLV, Phần XIII cho phép tối giản mọi vật thể thành một chất điểm nằm tại trọng tâm của vật đối với trường lực $F \propto r$	160
Hình 5.4	Thí nghiệm của Cavendish.....	164
Hình 5.5	Công trên đường khép kín luôn luôn bằng không trong trường lực thế.....	167
Hình 5.6	Thế năng hiệu dụng U_{eff} có cực tiểu tại r_c và cắt trục hoành tại $r_c/2$	171
Hình 5.7	Hệ tọa độ cực với gốc tại tâm của m_2	173
Hình 5.8	Hệ tọa độ cực với gốc tại trọng tâm cơ hệ.....	174
Hình 5.9	Bổ đề XI, Bài toán VI, Phần III: Nếu chất điểm chuyển động trên quỹ đạo elips thì lực hướng tâm phát ra từ tiêu cự của elips sẽ tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách	174
Hình 5.10	Liên hệ giữa các tọa độ trong phép quay trục tọa độ	188

Hình 6.1	Hệ quy chiếu gắn liền với một vật đang rơi tự do chỉ là một hệ quy chiếu quán tính trong phạm vi hẹp khi các lực tác dụng theo hai chiều ngang và dọc có thể bỏ qua được.....	192
Hình 6.2	Sơ đồ thí nghiệm của Michelson và Morley năm 1887.....	193
Hình 6.3	Hiện tượng quang sai.....	196
Hình 6.4	Với nguyên lý tương đối Galileo cả hai người quan sát đều ghi nhận là hai quả bóng sẽ tới đích cùng một lúc.....	197
Hình 6.5	Người quan sát trên mặt đất nhận thấy hai tia sáng đến trung điểm tại hai thời điểm khác nhau.....	198
Hình 6.6	Không thể đo độ dài đoàn tàu khi nó đang đi vào một đường hầm.....	200
Hình 6.7	Phân tích nghịch lý đoàn tàu – nhà ga.....	205
Hình 6.8	Người trên tàu đo được một độ cao h như người đứng dưới đất nhưng đồng hồ của anh ta chạy chậm hơn.....	207
Hình 6.9	Cả hai người quan sát đều thấy các tia chớp của người kia phát ra chậm nhịp hơn so với của bản thân họ bởi một hệ số là γ . Các tia chớp ở đây đánh dấu các mốc thời gian trong từng hệ quy chiếu, chúng chính là các tích-tắc "thời gian riêng" của từng người nhìn dưới góc độ của người kia.....	208
Hình 6.10	Người quan sát trên mặt đất nhận thấy rằng khoảng thời gian giữa hai lần phát sáng thay đổi tùy thuộc vào vận tốc chuyển động tương đối của nguồn sáng.....	210
Hình 6.11	Liên hệ các tọa độ của chất điểm trong hai hệ quy chiếu dịch chuyển đều so với nhau với vận tốc V theo phương x	212
Hình 6.12	Liên hệ thời gian trong hai hệ quy chiếu dịch chuyển đều so với nhau với vận tốc V	212
Hình 6.13	Hai đầu của một đoạn AB đứng yên vẽ nên các đường song song với trục tung, vận tốc của chúng $V=dx/dt=0$. Các đường song song với trục hoành mô tả các sự kiện đồng thời.....	214
Hình 6.14	Đường đồng thời nhìn trong hệ đứng yên sẽ là một đường có độ dốc β	215
Hình 6.15	Hệ quy chiếu chuyển động như thế đang bị dẹt đi dưới góc nhìn của hệ đứng yên.....	215

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này giới thiệu một cách trình tự các khái niệm cơ bản của cơ học Newton, thông qua việc khảo luận các công trình nguyên bản của Galileo và Newton, kèm theo các trích dẫn từ lịch sử môn học. Nó cũng có thể được dùng như một tài liệu tham khảo về lịch sử cơ học. Sách được viết dựa trên các bài giảng của tác giả trong vài năm gần đây tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội. Chúng tôi đã chủ động bỏ qua những chi tiết mà bạn đọc có thể tìm thấy ở các giáo trình khác, trong khi mạnh dạn đưa thêm dữ kiện lịch sử, đi xa hơn trong việc ứng dụng phép tính vectơ và giới thiệu cặn kẽ hơn về lý thuyết tương đối hẹp. Thực tế giảng dạy cho thấy sinh viên tỏ ra có hứng thú với môn học và tiếp thu được nội dung giáo trình.

Môn cơ học Newton, hay còn gọi là cơ học cổ điển, có một vị trí đặc biệt trong toàn bộ ngành Vật lý. Là lý thuyết hoàn thiện đầu tiên, nó có ảnh hưởng sâu sắc đến nhiều lĩnh vực khác. Cho đến ngày nay, ít nhất có bốn giai đoạn chính mà cơ học đã trải qua. Giai đoạn thứ nhất bắt đầu từ thời văn minh Hy Lạp cho đến thời Copernicus (thế kỷ thứ 16) khi chỉ có các mô hình định tính về sự vận động của vũ trụ. Tư tưởng thịnh hành thời bấy giờ chủ yếu dựa trên các định đề về vũ trụ của nhà triết học cổ đại Hy Lạp Aristotle. Giai đoạn thứ hai tiếp tục từ thời kỳ của Copernicus, Tycho de Brahe và Johannes Kepler, với bước ngoặt lịch sử vào năm 1638, khi Galileo xuất bản cuốn "Bàn về hai ngành khoa học mới"[1], đánh dấu sự chuyển biến lớn trong toàn bộ ngành Vật lý: quá trình đi từ những nguyên lý triết học đến việc thiết lập những mối quan hệ toán học cụ thể. Đỉnh cao của giai đoạn này là những năm 1686-1726, khi Newton cho in và lần lượt tái bản ba lần cuốn "Các nguyên lý toán học của khoa học tự nhiên" (Principia)[2]. Lý thuyết định lượng về sự vận động cơ học của vật chất xuất hiện, đi kèm theo đó là phép tính vi phân như một công cụ toán học mới (trước đó, công cụ chủ yếu là hình học Euclid). Khoảng thời gian từ sau Newton đến đầu thế kỷ 20, với những đóng góp đáng kể của Laplace, Lagrange, Hamilton,

Poisson và nhiều học giả khác có thể được coi là giai đoạn phát triển của ngành cơ học giải tích với công cụ chủ yếu là phép tính biến phân. Giai đoạn gần đây nhất, mà không muốn gọi là giai đoạn cuối cùng, bắt đầu từ những cống hiến của nhà toán học người Pháp Henri Poincaré vào cuối thế kỷ 19, đầu thế kỷ 20 và tiếp theo là Kolmogorov và cộng sự, khoảng những năm 1950, với sự ra đời của ngành cơ học vi phân dựa trên các đa tạp khả vi[3]. Trong phạm vi giáo trình này, chúng tôi không đưa độc giả đi quá giới hạn hai giai đoạn đầu tiên của cơ học. Cuốn sách được xác định là một giáo trình nhập môn, có tính cơ sở và không đòi hỏi ở người đọc sự chuẩn bị nhiều hơn là một vốn kiến thức Trung học phổ thông.

Cuốn sách được chia làm sáu chương. Chương đầu giới thiệu đối tượng nghiên cứu chung của cơ học và thiên văn học, đó là hệ mặt trời. Nó giúp cho độc giả có hình dung tốt hơn về các hiện tượng được nói đến sau này như các định luật Kepler, bảo toàn động lượng, quỹ đạo và cả vấn đề phức tạp như bài toán hai chất điểm. Trong chương 2, chúng tôi trình bày cơ học trong kỷ nguyên của nền văn minh Hy Lạp cổ, đặc biệt chú trọng đến các định đề của Aristotle và đến hai phép đo khoảng cách nổi tiếng thời bấy giờ về bán kính Trái Đất và khoảng cách Trái Đất – Mặt Trăng. Chương 3 được dành trọn vẹn giới thiệu lý thuyết động học của Galileo, Huygens và các định luật Kepler – tức là các quy luật cơ học khi không có sự hiện diện của lực tác dụng. Chương 4 đề cập tới lý thuyết động lực học của Newton, các mệnh đề và cách tiếp cận nguyên thủy bài toán trường lực $F \propto r$ của ông nhưng không bỏ qua cách giải quyết bài toán này bằng phương pháp vi phân hiện đại. Trong chương 5, chúng tôi trình bày lý thuyết hấp dẫn cổ điển và giải quyết bài toán tương tác hai chất điểm. Việc đưa bài toán hai chất điểm vào trong giáo trình có thể làm cho một số bạn đọc cảm thấy nặng nề nhưng nhận thấy tầm quan trọng của nó đối với môn cơ học cổ điển, chúng tôi mạnh dạn đưa nó vào, một phần cũng mong bù đắp cho sự thiếu hụt tài liệu về vấn đề cơ bản này. Chương cuối, theo thông lệ của một giáo trình cơ học cấp cơ sở, bàn về lý thuyết tương đối hẹp; nội dung của chương này được trình bày chi tiết hơn so với các giáo trình đang thịnh hành.

Trong trào lưu chung về đổi mới phương pháp giảng dạy, trên thế giới cũng như ở nước ta, đã xuất hiện nhiều giáo trình hiện đại với các cách tiếp cận vấn đề khác nhau; mục đích đều nhằm đạt được chất lượng truyền thụ tốt hơn trong khuôn khổ một thời lượng không mấy thay đổi.

Chúng tôi nhận thấy cách tiếp cận vật lý từ khía cạnh lịch sử có nhiều ưu điểm đối với một giáo trình cơ sở. Một mặt nó giúp cho người đọc có sự hình dung đầy đủ hơn về sự hình thành từng bước của các khái niệm vật lý cơ bản. Mặt khác nó cũng bổ khuyết khá nhiều cho vốn kiến thức lịch sử vật lý vốn đã bị thiếu hụt trầm trọng do không được giảng dạy thường xuyên và chu đáo. Có hai ký hiệu đặc biệt được sử dụng trong cuốn sách: dấu ■ chỉ hết chương và dấu $\propto$ chỉ quan hệ tỷ lệ, ví dụ $F \propto r$ có nghĩa là F tỷ lệ thuận với r .

Trong quá trình biên soạn cuốn sách này, tác giả đã nhận được sự động viên của gia đình, sự cổ vũ và giúp đỡ của bạn bè, đồng nghiệp. Đặc biệt tác giả xin chân thành cảm ơn PGS.TS. Nguyễn Thế Hiện và TS. Nguyễn Mậu Chung, hai đồng nghiệp đã bỏ nhiều công sức để đọc và chỉnh sửa văn phạm của cuốn sách, cũng như đã đóng góp nhiều ý kiến chuyên môn quý báu để hoàn chỉnh nó. Tác giả cũng chân thành cảm ơn PGS.TS. Tạ Đình Cảnh, ThS. Phùng Quốc Thanh, PGS. TS. Bạch Thành Công, GS. TS. Nguyễn Quang Báu và nhiều đồng nghiệp khác đã ủng hộ và góp nhiều ý kiến chuyên môn xác đáng để cuốn sách được hoàn thiện hơn.

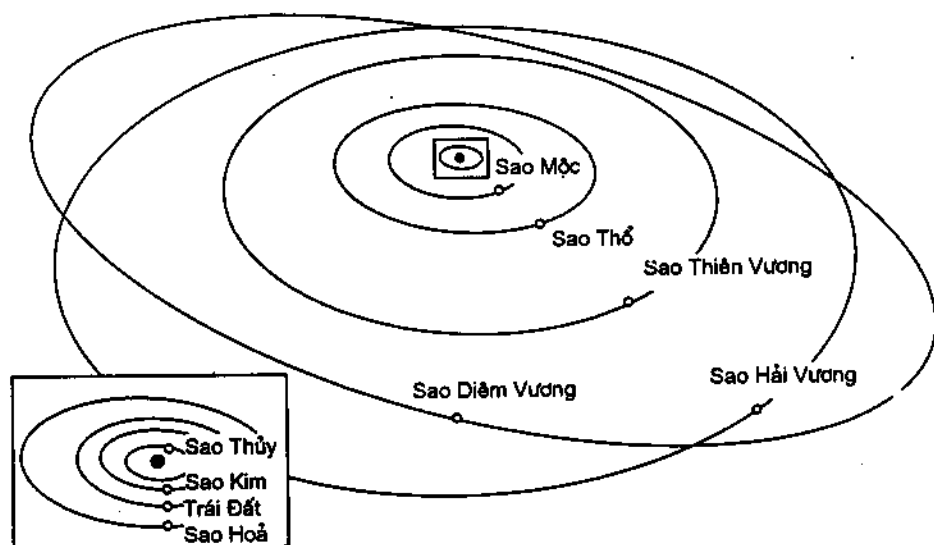
Cuối cùng, cuốn sách này không thể coi là đầy đủ và khó tránh khỏi thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được sự đóng góp chân thành của độc giả cũng như của đồng nghiệp.

Hà Nội – 2006

Tác giả

Hệ mặt trời

Hành tinh	Quỹ đạo	Bán kính quỹ đạo [km]	Ghi chú
Sao Thủy (Mercury)	1	57.910.000	Các hành tinh đất với bề mặt đá đá cứng, có tỉ trọng lớn.
Sao Kim (Venus)	2	108.200.000	
Trái Đất (Earth)	3	149.600.000	
Sao Hỏa (Mars)	4	227.940.000	
Sao Mộc (Jupiter)	5	778.330.000	Các hành tinh khí có bán kính lớn nhưng tỉ trọng nhỏ.
Sao Thổ (Saturn)	6	1.429.400.000	
Sao Thiên Vương (Uranus, 1781)	7	2.870.990.000	
Sao Hải Vương (Neptune, 1846)	8	4.504.300.000	
Sao Diêm Vương (Pluto, 1930)	9	5.913.520.000	Bề mặt nước đá cứng.



Hệ mặt trời bao gồm Mặt Trời và 9 hành tinh, hơn 100 vệ tinh và rất nhiều các thiên thể nhỏ. Nhóm hành tinh bên trong gồm sao Thủy, sao Kim, Trái Đất và sao Hỏa. Nhóm bên ngoài gồm sao Mộc, sao Thổ, sao Thiên Vương, sao Hải Vương và sao Diêm Vương. Trừ sao Thủy và sao Diêm Vương có quỹ đạo elips rõ rệt, các hành tinh khác đều có quỹ đạo gần như tròn và cùng nằm trên một mặt phẳng quỹ đạo Trái Đất (đường hoàng đạo – ecliptic). Quỹ đạo của sao Diêm Vương nghiêng 17 độ so với đường hoàng đạo. Bản thân đường hoàng đạo nghiêng 7 độ so với đường xích đạo của Mặt Trời. Trừ sao Kim, sao Thiên Vương và sao Diêm Vương quay ngược chiều, các hành tinh còn lại đều quay cùng chiều với Trái Đất.

Chương 1

HỆ MẶT TRỜI

Hệ mặt trời là một đối tượng của cơ học đã được quan tâm từ rất sớm. Chương này giới thiệu những nét cơ bản của các giả thuyết về hệ mặt trời có từ thời cổ đại, niên biểu các phát hiện chính trong hệ mặt trời và lịch sử các phép đo đạc hệ mặt trời. Người Hy Lạp cổ đại đã giả thiết rằng Trái Đất hình cầu và Mặt Trời là tâm của vũ trụ, từ thế kỷ 17 đã có học giả đưa ra ước đoán vận tốc ánh sáng là xấp xỉ 400.000km/s. Mục đích của chương này là làm sáng tỏ giai đoạn ban đầu của cơ học, để thấy được sự hình thành của các quan niệm về tính quy luật của chuyển động.

1.1. CÁC GIẢ THUYẾT VỀ VŨ TRỤ TRONG THỜI CỔ ĐẠI

Từ thời cổ đại, thời đại của các quan niệm "trời tròn - đất vuông", con người đã dựng lên khá nhiều giả thuyết về Vũ Trụ, một số còn được lưu truyền cho đến nay thông qua các bản dịch tiếng Ả Rập từ các trước tác của người Hy Lạp cổ. Ý nghĩa của các mô hình vũ trụ được trình bày dưới đây cần được nhìn nhận từ hai khía cạnh chính: *một*, đó là các mô hình cơ học nhằm lý giải các hiện tượng cơ học quan sát thấy của các thiên thể; *hai*, đó là các giả thiết mà sự ra đời của chúng phản ánh phương pháp tiếp cận vấn đề thông qua các giả thiết và sự khảo cứu hệ thống tính đúng đắn của các giả thiết bằng quan sát và thực nghiệm. Có thể nói, ngay từ thừa ban đầu trong cơ học người ta đã sử dụng một cách tiếp cận rất hệ thống.

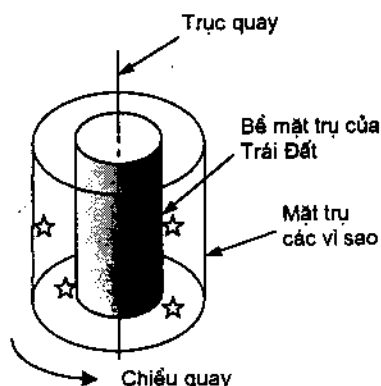
1. Thuyết vũ trụ hình trụ của Anaximander

Có lẽ giả thuyết cơ học đầu tiên là của Anaximander, một học giả Hy Lạp sống vào khoảng năm 550 tr.CN, ông này cho rằng Trái Đất

hình trụ và các hành tinh quay quanh Trái Đất trên các mặt trụ đồng tâm (hình 1.1).

2. Quan niệm về vũ trụ của Plato

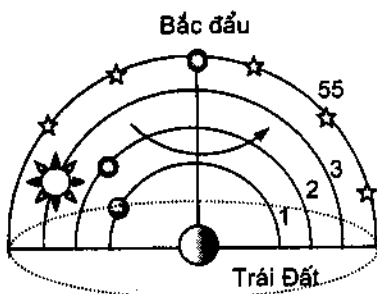
Plato (428–349 tr.CN), nhà triết học nổi tiếng thời cổ Hy Lạp, cho rằng các vì sao được cấu tạo bằng một chất rất nhẹ được gọi là *ether* và chúng chuyển động theo các quỹ đạo tròn trừ một vài ngoại lệ như Mặt Trời, Mặt Trăng và một số hành tinh khác. Plato đã nêu vấn đề này cho các đồng nghiệp suy nghĩ. Vào thời điểm đó, người ta đã nhận ra rằng, tất cả các vì sao đều quay tròn quanh sao Bắc Đẩu⁽¹⁾. Plato tin rằng các vì sao có "thần" biết phải quay như thế nào cho "đúng"!



Hình 1.1. Mô hình vũ trụ hình trụ của Anaximander

3. Thuyết các bán cầu thủy tinh của Eudoxus

Eudoxus (khoảng 370 tr. CN), một học giả của trường phái Plato, cho rằng các vì sao được gắn trên một bán cầu thủy tinh rất lớn trong suốt và tâm là Trái Đất. Bán cầu các vì sao này quay một vòng mất 24 giờ. Sao Bắc Đẩu nằm trên trục quay. Mặt Trời và các hành tinh có quỹ đạo không phải là đường tròn thì nằm trên các bán cầu thủy tinh khác lồng đồng tâm bên trong bán cầu ngoài và cũng quay 24 giờ một vòng nhưng đồng thời chúng quay chậm một vòng một năm quanh một trục gắn với vòng bán cầu bên ngoài. Theo mô hình này thì Mặt Trời chiếu lên bán cầu các vì sao bên ngoài một quỹ đạo elips nghiêng 23,5 độ so với xích đạo của bán cầu đó (hình 1.2).



Hình 1.2. Mô hình vũ trụ của Aristotle bao gồm 55 bán cầu thủy tinh:
1. Sao Thủy; 2. Sao Kim; 3. Mặt Trời; Vòng 55. Các vì sao cố định

Sau này, Aristotle (384–322 tr. CN) đã bàn về vấn đề này và mô hình các bán cầu thủy tinh đã phát triển đến 55 bán cầu lồng vào nhau. Để diễn tả hết

(1) Tiếng Anh: *Polaris* hay *North star*

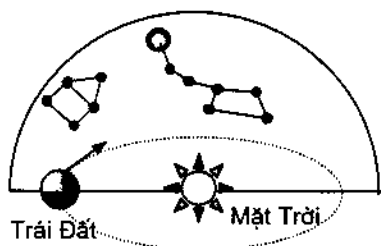
các quỹ đạo của các hành tinh và các vì sao quan sát được các bán cầu phải quay với những tốc độ khác nhau. Cần nói thêm rằng, thời bấy giờ người ta không biết các vì sao có kích thước lớn hơn Trái Đất rất nhiều và cũng ở rất xa. Họ cho rằng chúng ở cố định trên cao vì chúng rất nhẹ.

4. Thuyết nhật tâm của Aristarchus

Aristarchus (310–230 tr. CN), một học giả từ Samos, đưa ra một giả thiết khác được Archimedes (286–212 tr. CN) nhắc đến (hình 1.3).

"Aristarchus từ Samos đã viết một cuốn sách chứa một giả thiết cho rằng Vũ Trụ rộng lớn hơn người ta tưởng rất nhiều" – Archimedes thuật lại, "Ông giả thiết rằng các vì sao và Mặt Trời đứng yên. Trái Đất quay quanh Mặt Trời, Mặt Trời nằm ở tâm quỹ đạo tròn và các vì sao gắn trên một bán cầu đồng tâm với quỹ đạo trái đất nhưng lớn đến mức quỹ đạo trái đất chỉ là một điểm nhỏ".

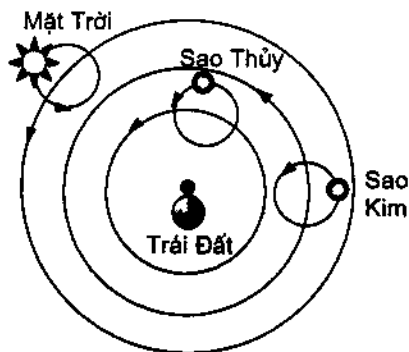
Như vậy, quỹ đạo quá nhỏ của Trái Đất giải thích tại sao các vì sao không quay quanh nhau khi Trái Đất chuyển động trên quỹ đạo mà dường như chúng đứng yên một chỗ. Đáng tiếc là giả thiết đúng đắn này đã không được chấp nhận. Aristarchus là học trò của triết gia nổi tiếng Strato (khoảng 200–268 tr.CN). Ông cũng cho rằng Trái Đất quay quanh trục quay riêng. Quan điểm của Aristarchus quả là chính xác và vượt xa các mô hình khác trong một thời gian rất dài sau này.



Hình 1.3. Mô hình Aristarchus

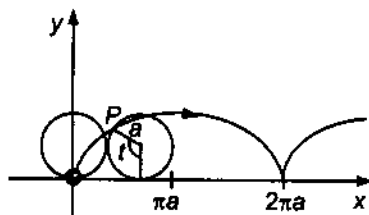
5. Thuyết các vòng đồng luân của Hipparchus

Một học giả khác tên là Hipparchus (khoảng 140 tr. CN) cho rằng quỹ đạo mặt trời không thể là đường tròn và Trái Đất nằm tại tâm đường tròn đó, vì các mùa có độ dài khác nhau. Để quỹ đạo có thể là đường tròn thì Trái Đất phải nằm *sai tâm* (eccentric) vòng tròn quỹ đạo mặt trời. Hipparchus còn đưa ra lý thuyết



Hình 1.4. Mô hình các vòng đồng luân của Hipparchus

chuyển động của Mặt Trăng dựa trên các vòng đồng luân gọi là các *epicycle* (hình 1.4). Theo đó, các hành tinh vừa chuyển động tịnh tiến vừa "lăn" tròn trên quỹ đạo tựa như một điểm trên vành bánh xe di chuyển tạo nên một đường gọi là cycloid (hình 1.5).



Hình 1.5. Đường cycloid đơn giản: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; a là bán kính vòng tròn; t là độ lớn góc quay

6. Almagest của Ptolemy

Claudius Ptolemy (85–165), được coi là nhà thiên văn lớn nhất thời cổ Hy Lạp, đã viết một cuốn sách có tên là "*Mathematical Syntax*" (thường được gọi là *Almagest* – *The Greatest*). Trong một thời gian dài, cuốn sách này được coi như sách thánh của thiên văn học vì nó chứa một số bảng thiên văn khổng lồ cho phép tính được vị trí của các vì sao sau nhiều trăm năm. Ptolemy đã phát triển mô hình các vòng đồng luân của Hipparchus thành một hệ thống bao gồm ít nhất 80 vòng để lý giải chuyển động của tất cả các thiên thể được biết đến lúc bấy giờ. Tuy nhiên, ông không cho rằng Trái Đất quay quanh trục quay riêng, vì theo quan điểm thịnh hành thời đó thì chỉ có chất nhẹ như ether mới có thể di chuyển nhanh, còn Trái Đất thì nặng nên nó phải đứng yên. Nếu Trái Đất quay thì tại sao một chất nhẹ, ví dụ không khí, lại đứng yên, và còn các vật rơi trong không khí thì sao? Nếu chúng không bị "buộc" vào không khí thì sẽ chuyển động ra sao? Vì thế Ptolemy không tin rằng Trái Đất quay quanh trục riêng của nó, tuy nhiên ông đã biết rằng Trái Đất hình cầu. Quan điểm vũ trụ của Ptolemy tồn tại suốt 14 thế kỷ cho đến thời Copernicus mới bị phê phán.

1.2. HỌC THUYẾT CỦA COPERNICUS

1. Copernicus (1473–1543) và thuyết nhật tâm [4–5]

Copernicus là nhà thiên văn học người Ba Lan, tên gốc là Nikolaj Kopernik⁽¹⁾. Khoảng năm 1514 ông cho ra đời một cuốn sách nhỏ, được

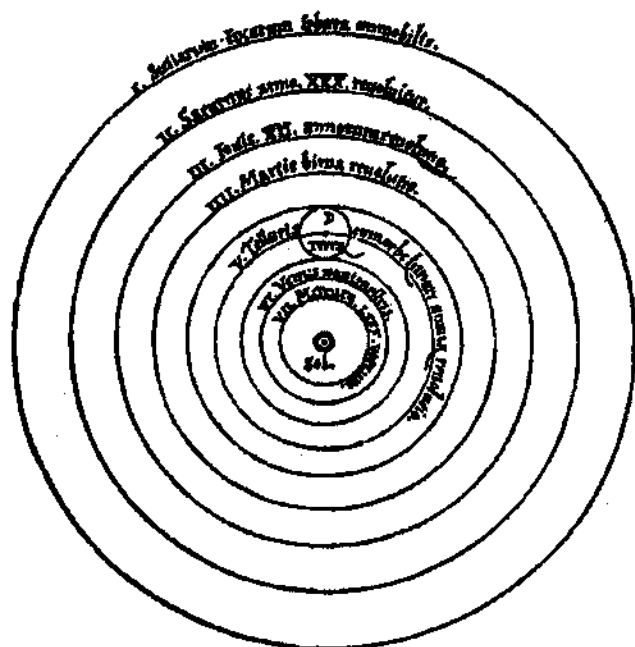
(1) Mẹ Copernicus là người Đức còn cha là người Ba Lan, đến khi ông lên 10 tuổi thì cha mất. Ngôi nhà mà ông sinh ra vẫn còn tồn tại tới tận ngày nay. Người ta vẫn còn giữ được ba cuốn sách giáo khoa mà Copernicus đã mua tại Krakow: cuốn "*Elements of*

quen gọi là "*Little Commentary*" (Tiểu luận), không ký tên tác giả và chỉ được viết tay và phân phát cho bạn bè. Trong đó ông nêu 7 định đề của một hệ thống thiên văn mới:

- (1) Không chỉ có một tâm của Vũ Trụ.
- (2) Trái Đất không phải là tâm của Vũ Trụ.
- (3) (Một tâm nào đó) của Vũ Trụ gần với Mặt Trời.
- (4) Khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là rất nhỏ so với khoảng cách từ Trái Đất đến các vì sao.
- (5) Chuyển động quay (quanh trục riêng) của Trái Đất là nguyên nhân gây ra chuyển động quay hằng ngày của các vì sao (quanh sao Bắc Đẩu).
- (6) Chu kỳ hằng năm trong chuyển động của Mặt Trời là do chuyển động quay của Trái Đất xung quanh nó gây ra.
- (7) Chuyển động lùi của (một số) vì sao là do chuyển động quay của Trái Đất quanh Mặt Trời gây ra khi ta quan sát.

Hiểu theo nghĩa "định đề" kiểu toán học thì hệ thống này không được chắc chắn, vì ít nhất có thể suy ngay ra định đề 2 từ định đề 3 và định đề 6. Hơn nữa, cả các định đề khác như 4, 5 và 7 cũng có thể được suy ra từ định đề 3 và 6. Tuy nhiên các định đề thừa này lại thể hiện rất rõ những kết quả quan trọng nhất của Copernicus. Không ai trước ông đã lý giải đầy đủ, logic và đơn giản sự di chuyển lùi của một số

Geometry" (tạm dịch là Cơ sở Hình học) của Euclid (xuất bản năm 1482), cuốn "*Alfonsine Tables*" (nói về hệ hành tinh, xuất bản năm 1492), và cuốn "*Tables of Directions*" (về thiên văn cầu, xuất bản năm 1490) của Regiomontanus. Các cuốn sách này đều có chữ ký của Copernicus. Năm 1497, khi còn học toán, thiên văn và khoa học Hy Lạp tại Bologna (Ý), ông đã nhận được quyết định trở thành tu sĩ. Năm 1500, ông thăm thành Rome và quan sát nguyệt thực xảy ra ngày 6/11/1500. Trong thời kỳ lưu học tại Ý, ông còn nhận được bằng bác sĩ và khi trở về nước ông đã làm bác sĩ riêng cho chú ruột là giám mục tại địa phận Ermland. Sau khi ông chú mất năm 1512, Copernicus quay về với công việc của một tu sĩ và có nhiều thời gian hơn để nghiên cứu thiên văn. Đài quan sát của ông đặt ngay trong nhà. Copernicus là một con người điềm đạm, ưa sống một cuộc đời bình thản. Ông là một nhà thiên văn nổi tiếng thời bấy giờ, cụ thể năm 1514 khi tái bản lịch mới Giáo Hoàng đã mời một số nhà thiên văn tham gia trong đó có Copernicus. Suốt đời ông từ chối trở thành linh mục mặc dù đã bị giám mục địa phận dọa cắt lương năm 1531.



Hình 1.6. Mô hình hệ mặt trời nguyên bản của Copernicus.
Chỉ có Trái Đất mới có Mặt Trăng

hành tinh. Cuốn *Tiểu luận* đã có tác động lớn, Giáo Hoàng Clement VII đã thông qua bản tóm lược cuốn sách vào năm 1530 và yêu cầu bản sao công trình mới khi nó được in⁽¹⁾. Sau *Tiểu luận*, Copernicus quyết định viết một cuốn sách lớn hơn:

"... để cho ngắn gọn tôi đã không trình bày (trong *Tiểu luận*), các chứng minh toán học sẽ xuất hiện trong một công trình lớn hơn" – ông viết.

Cuốn "*De revolutionibus orbium coelestium*" (Bàn về sự vận động của các quỹ đạo trong hệ mặt trời), dày khoảng 200 trang, in bằng tiếng La Tinh được xuất bản năm 1543 tại Nuremberg. Copernicus nhận được bản sao trên giường bệnh. Trong tác phẩm lớn này, Copernicus giải thích niềm tin của ông về trung tâm của Vũ Trụ là Mặt Trời như sau:

"... Có chỗ nào ngoài vầng sáng này là chỗ tốt hơn để làm trung tâm khi nó có thể chiếu sáng mọi thứ cùng một lúc? Vì thế không nên gọi

(1) Sự phản kháng quyết liệt sau này của Toà Thánh đối với công trình của Copernicus có lẽ là do gia tăng xung đột tôn giáo giữa đạo Tin Lành và đạo Cơ đốc.

Mặt Trời một cách không đúng như một vài người thường gọi là ngọn đèn của Vũ Trụ, là tinh thần, là kẻ trị vì Vũ Trụ".

Copernicus chết năm 1543 vì xuất huyết não. Sau này (1600), toà án dị giáo đã thiêu sống Giordano Bruno, một người theo học thuyết của Copernicus, nhưng còn đi xa hơn và cho rằng các vì sao lan tỏa trong một không gian vô tận có nhiều nền văn minh khác ngoài loài người chúng ta.

2. Quan niệm của Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546–1601)⁽¹⁾, nhà thiên văn học có cá tính người Đan Mạch này cho rằng Trái Đất là trung tâm và Mặt Trời quay quanh Trái Đất, nhưng lại cũng cho rằng các vì sao và hành tinh khác quay quanh Mặt Trời. Quan niệm của Tycho Brahe nằm giữa quan niệm của Ptolemy và Copernicus. Vào thời của Tycho Brahe, người ta vẫn chưa có kính viễn vọng nên mọi quan sát chỉ được thực hiện bằng mắt thường. Tuy nhiên các phép đo vị trí các vì sao của ông đã chính xác đến 0,16 độ, do ông đã sử dụng các thước đo lớn có tay đòn dài (quadrant, sextant). Tuy không tin lắm vào học thuyết của Copernicus nhưng Tycho Brahe đã tỏ ra thần phục qua những lời sau:

"... với sự nhạy bén trí thức đáng kinh ngạc, ông (Copernicus) đã thiết lập các giả thiết khác (so với của Ptolemy). Ông đã xây dựng lại ngành khoa học về chuyển động của các thiên thể, không ai trước ông có được hiểu biết chính xác hơn về chuyển động của các thiên thể".

3. "Thông điệp từ các vì sao" của Galileo

Galileo Galilei (1564–1642)⁽²⁾, nhà toán học người Ý được coi là cha đẻ của ngành Vật lý hiện đại, đã chế tạo được kính viễn vọng, tuy với độ phóng đại không lớn (chỉ tương đương với các ống nhòm thông dụng hiện nay) nhưng việc đó đã giúp ông có những phát hiện quan trọng⁽³⁾. Galileo

(1) Xem tiểu sử trong mục §3.7.1, tr.83.

(2) Xem tiểu sử trong mục §3.2.1, tr.55.

(3) Người đầu tiên được biết đến đã sử dụng kính lúp (kính dạng lỗ) để đọc sách có lẽ là học giả người Anh Robert Bacon (1214–1294) ở Oxford năm 1200. Một thế kỷ sau các kính lúp đọc sách cho người già đã được sản xuất tại Ý. Người đầu tiên đã ghép hai thấu kính lồi và lõm lại với nhau để hoàn thiện một ống nhòm với mục đích xem hát có lẽ là

đã thuật lại những phát hiện đó trong cuốn "*Siderus Nuncius*" (Thông điệp từ các vì sao [6]), trong đó có việc phát hiện ra sự tồn tại của núi trên Mặt Trăng, việc đoán nhận độ cao của chúng bằng cách quan sát các vết tối, sáng và việc phát hiện ra một số vệ tinh của sao Mộc (1610). Trước Galileo, người ta chỉ biết Trái Đất mới có Mặt Trăng và phát hiện của Galileo rằng, sao Mộc có vệ tinh, hơn nữa lại có nhiều vệ tinh, đã gây xôn xao dư luận (sao Mộc nặng hơn Trái Đất 318 lần và nặng gấp đôi tất cả các hành tinh khác cộng lại). Bằng cách tiếp cận trực quan, ông đã chứng tỏ sự đúng đắn của học thuyết Copernicus. Các bằng chứng mà Galileo đưa ra xác thực đến nỗi các giáo sĩ khi xét xử Galileo đã không dám bàn đến nội dung tuyên bố của ông mà chỉ xem xét ông có tuân thủ lệnh cấm truyền bá học thuyết Copernicus hay không mà thôi.

4. Penzias, Wilson và sóng tàn dư

Khởi thủy của Vũ Trụ là gì? Quan điểm thịnh hành ngày nay cho rằng, nó bắt nguồn từ một vụ nổ lớn (Big Bang) khi mà toàn bộ vật chất trong vũ trụ quy tụ tại một điểm có mật độ cực lớn. Sau vụ nổ đám bụi vật chất tản ra xa, ngưng tụ lại thành các thiên hà và các vì sao. Mặt Trời của chúng ta chỉ là một vì sao cỡ vừa. Lý thuyết Big-Bang bắt nguồn từ George Henri Lemaitre (1894–1966), một linh mục cơ đốc người Bỉ, đồng thời là giáo sư thiên văn tại ĐH Catholic de Louvain. Năm 1927, ông chứng minh trên lý thuyết rằng mô hình vũ trụ tĩnh không thích hợp bằng mô hình vũ trụ đang giãn nở. Năm 1929, Edwin Hubble (1889–1953), một nhà thiên văn học người Mỹ, lần đầu tiên đã đưa ra các bằng chứng, dựa trên sự chuyển dịch của các vạch phổ về phía màu đỏ, cho thấy các thiên hà đang tản xa ra, tức là khoảng cách giữa chúng đang tăng lên. Lemaitre đi xa hơn và cho rằng nguyên nhân sự giãn ra đó là một vụ nổ lớn từ khi vũ trụ khai sinh, gọi là Big Bang.

Phát hiện của Penzias (*Arno Penzias*, 1933–) và Wilson (*Robert Wilson*, 1936–) về bức xạ tàn dư trong vũ trụ tồn tại từ thừa Big Bang là

một người Hà Lan tên là Lipperhey vào năm 1608. Một năm sau, 1609, Galileo được biết về phát minh đó và tìm cách cải tiến. Ông là một nhà thực nghiệm tài ba và đã tự tìm ra công nghệ riêng để mài thấu kính. Tháng 8 năm đó, Galileo chế tạo thành công một ống nhòm có độ phóng đại 9 lần – lớn nhất thời bấy giờ và biểu diễn nó tại Nghị viện Cộng hòa Venice. Những năm sau, ống nhòm của Galileo đã đạt độ phóng đại 20 lần và Galileo đã được tặng lương ngay lập tức.

một phát hiện lớn trong thế kỷ 20 và hoàn toàn ngẫu nhiên. Năm 1965, khi điều chỉnh một anten loại nhỏ nhưng rất nhạy để làm thí nghiệm về thiên văn vô tuyến Penzias và Wilson đã phát hiện ra một loại nhiễu nhỏ làm tổn hại tín hiệu. Lúc đầu, họ nghĩ có phân chim trên anten nhưng sau khi lau sạch, nhiễu vẫn không bớt đi. Loại bỏ mọi yếu tố hỏng hóc khác trên thiết bị, nhiễu được ghi nhận từ mọi phía không phụ thuộc vào định hướng của anten. Penzias và Wilson không hề tìm kiếm bằng chứng cho thuyết Big Bang và cả hai đều không hay là họ đã tìm thấy bức xạ tàn dư của vụ nổ lớn này. Nhiệt độ tương ứng của bức xạ này vào khoảng 2,7K. Đây là một trong những bằng chứng thực nghiệm quan trọng nhất xác định tính đồng nhất của không gian và thời gian, gọi chung như một tổng thể duy nhất là *không-thời gian*.

1.3. NIÊN BIỂU CÁC PHÁT HIỆN TRONG HỆ MẶT TRỜI

1. Trước thế kỷ 17

Cho đến thế kỷ 17 người ta chỉ mới biết đến 8 thiên thể trong hệ mặt trời là Trái Đất, Mặt Trăng, Mặt Trời, sao Thủy (Mercury), sao Kim (Venus), sao Hỏa (Mars), sao Mộc (Jupiter) và sao Thổ (Saturn).

2. Các phát hiện trong thế kỷ 17

Galileo, Huygens⁽¹⁾ và Cassini (1625–1712)⁽²⁾ đã phát hiện tổng cộng 9 vệ tinh của hai hành tinh sao Mộc và sao Thổ. Bắt đầu từ 1610,

(1) Xem tiểu sử mục (§3.6.1) tr.72.

(2) Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712), một người Pháp gốc Ý. Ông là giám đốc đầu tiên của đài thiên văn Paris (1669). Ba hậu duệ của ông, Cassini II, Cassini III và Cassini IV cũng lần lượt thay nhau làm giám đốc Đài Thiên văn Paris. Chu kỳ quay chính xác của sao Mộc (9h56') và sao Hỏa (24h40') đã được ông phát hiện năm 1665 bằng cách quan sát các vết đỏ trên bề mặt sao Mộc (được phát hiện trước đó bởi Robert Hooke năm 1664) và sự dịch chuyển của các đường viền trên bề mặt sao Hỏa mà Huygens đã quan sát thấy năm 1659. Ông cũng phát hiện sự dẹt elips của sao Mộc. Cassini còn phát hiện nhiều sao chổi vào các năm 1672, 1677, 1698, 1699; hai ngôi vào năm 1702, và các năm 1706, 1707. Năm 1675, Cassini chỉ ra rằng vành sao Thổ có hai phần cách biệt nhau một khoảng, ngày nay gọi là các vành Cassini (Cassini division). Trong hình học giải tích còn có một đường cong gọi là đường Cassini (tích các khoảng cách từ mọi điểm trên đường đó đến hai điểm cho trước luôn không đổi).

Bảng 1.1. CÁC HÀNH TINH VÀ VỆ TINH ĐƯỢC PHÁT HIỆN SAU THẾ KỶ 16

Năm phát hiện, tên vệ tinh (người quan sát)	Quỹ đạo, tên hành tinh (tên tiếng Anh)
1610, Callisto (Galileo)	4, Mộc (Jupiter)
1610, Europa (Galileo)	2, Mộc (Jupiter)
1610, Ganymede (Galileo)	3, Mộc (Jupiter)
1610, Io (Galileo)	1, Mộc (Jupiter)
1655, Titan (Huygens)	6, Thổ (Saturn)
1671, Iapetus (Cassini)	8, Thổ (Saturn)
1672, Rhea (Cassini)	5, Thổ (Saturn)
1684, Dione (Cassini)	4, Thổ (Saturn)
1684, Tethys (Cassini)	3, Thổ (Saturn)
1781, Uranus (Herschel)	7, Mặt Trời (Sun)
1787, Oberon (Herschel)	4, Thiên Vương (Uranus)
1787, Titania (Herschel)	3, Thiên Vương (Uranus)
1789, Enceladus (Herschel)	2, Thổ (Saturn)
1789, Mimas (Herschel)	1, Thổ (Saturn)
1846, Neptune (LeVerrier)	8, Mặt Trời (Sun)
1846, Triton (Lassell)	1, Hải Vương (Neptune)
1848, Hyperion (Bond)	7, Thổ (Saturn)
1851, Ariel (Lassell)	1, Thiên Vương (Uranus)
1851, Umbriel (Lassell)	2, Thiên Vương (Uranus)
1877, Phobos (Hall)	1, Hỏa (Mars)
1877, Deimos (Hall)	2, Hỏa (Mars)
1892, Amalthea (Barnard)	5, Mộc (Jupiter)
1898, Phoebe (Pickering)	9, Thổ (Saturn)
1930, Pluto (Tombaugh)	9, Mặt Trời (Sun)

Galileo dùng kính viễn vọng tự tạo đã phát hiện ra bốn vệ tinh của sao Mộc là Callisto, Europa, Ganymede và Io. Năm 1655 Huygens với kính viễn vọng mới đã phát hiện ra vệ tinh Titan của sao Thổ. Tiếp đó năm Cassini phát hiện liên tiếp bốn vệ tinh khác là Iapetus (1671), Rhea (1672), Dione (1684), Tethys (1684) (xem bảng liệt kê).

3. Các phát hiện trong thế kỷ 18

William Herschel (1738–1822)⁽¹⁾ đã phát hiện ra sao Thiên Vương (Uranus) năm 1781 và liên tiếp bốn vệ tinh khác trong hai năm 1787, 1789: Oberon (1787) và Titania (1787) của sao Thiên vương, Enceladus (1789) và Mimas (1789) của sao Thổ.

4. Các phát hiện trong thế kỷ 19

Nếu chỉ kể các hành tinh và vệ tinh thì đã có 9 vật thể được phát hiện: sao Hải Vương (Neptune, 1846, Adams và Le Verrier⁽²⁾), Triton (vệ tinh sao Hải Vương, 1846, Lassell⁽³⁾), Hyperion (vệ tinh sao Thổ, 1848, Bond⁽⁴⁾), Ariel (vệ tinh sao Thiên Vương, 1851, Lassell), Umbriel (vệ tinh sao Thiên Vương, 1851, Lassell), Phobos (vệ tinh sao Hỏa, 1877, Hall⁽⁵⁾),

(1) William Herschel (1738–1822) sinh tại Hanover, Đức. Năm 1752 ông chuyển về Anh sống tại Bath, làm nghề nhạc công và thầy giáo dạy nhạc. Ông đã hoàn thành 24 bản giao hưởng, 7 côngxétô cho đàn violin và 2 cho đàn oóc. Lúc đầu khi quan sát sao Thiên Vương (Uranus) ông đã cho rằng nó là sao chổi. Ông cũng đã phát hiện ra 2500 tinh vân. Ông được vua George II nước Anh phong tước hầu (Sir).

(2) Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811–1877). Người Pháp, ông là giám đốc đài thiên văn Paris năm 1854. Ông đã nghiên cứu chuyển động của sao Thủy (Mercury) và sao Thiên Vương (Uranus) và nhận thấy cả hai có những chuyển động bất thường. Ông cho rằng có một hành tinh nào đó ở gần đã làm nhiễu loạn chuyển động của hai hành tinh trên. Nhà thiên văn Johann Gottfried Galle đã quan sát thấy Neptune ở vị trí mà Le Verrier tiên đoán ngày 23/9/1846. Tại Anh, John Couch Adams cũng đã tính được vị trí của Neptune vài tháng trước Le Verrier nhưng không ai tin ông cả. Richard Feynman trong "*Các bài giảng về vật lý của Feynman*"[8] có nói một câu đầy ý nghĩa khi bình luận về việc này là "lời bạn có trọng lượng hay không phụ thuộc rất nhiều vào việc bạn làm việc với ai!"

(3) William Lassell (1799–1880) là một nhà doanh nghiệp chuyên vẽ bia ở thành phố Liverpool. Ông đã chế tạo được những kính viễn vọng phản xạ lớn, 9 inch, 24 inch có ống ngắm dài, ví dụ 36m. Ngay sau khi Neptune được phát hiện tại Berlin ngày 23/9/1846, Lassell đã nhận ra, với các ống ngắm lớn của mình, rằng sao Hải Vương cũng có vành như sao Thổ và vào ngày 10/10 Lassell đã phát hiện một vệ tinh của sao Hải Vương là Triton.

(4) William Cranch Bond (1789 – 1859). Nhà thiên văn học người Mỹ. Ông vốn là một kỹ sư chế tạo đồng hồ. Từ năm 1812 bắt đầu quan sát thiên văn và trở thành giám đốc đầu tiên của đài thiên văn Harvard năm 1839 (đến năm 1847 đài này có một kính viễn vọng 15 inch, tức 37.5cm). Với kính này ông đã cùng con trai phát hiện ra vệ tinh Hyperion.

(5) Asaph Hall (1829–1907) là một giáo sư thiên văn người Mỹ. Ban đầu ông làm nghề

Deimos (vệ tinh sao Hỏa, 1877, Hall), Amalthea (vệ tinh sao Mộc, 1892, Barnard⁽¹⁾), Phoebe (vệ tinh sao Thổ, 1898, Pickering⁽²⁾). Hàng trăm mảnh vụn thiên thể (asteroid) đã được phát hiện.

5. Thế kỷ 20

Sao Diêm Vương (Pluto, 1930, Tombaugh⁽³⁾) và thêm 40 thiên thể nhỏ, hàng nghìn mảnh vụn thiên thể (asteroid) và nhiều sao chổi đã được phát hiện. Ví dụ, tàu vũ trụ Voyager 2 đã phát hiện 5 vệ tinh mới của sao Hải Vương, 10 của sao Thiên Vương. Hiện nay chúng ta đã biết sao Mộc có 16 vệ tinh (12 phát hiện trong thế kỷ 20), sao Thổ có 18 vệ tinh (9 phát hiện trong thế kỷ 20), sao Hỏa có hai vệ tinh, sao Thiên Vương có 21 vệ tinh (17 phát hiện trong thế kỷ 20), sao Hải Vương có 8 vệ tinh (7 phát hiện trong thế kỷ 20). Sao Diêm Vương có 1 vệ tinh là Charon (Christy, 1978). Sao Thủy (Mercury) và sao Kim (Venus) không có vệ tinh nào. Trái Đất có một, đó là Mặt Trăng.



Hình 1.7. Bức họa sao Thổ dưới ống kính của Lassell vào ngày 10-11/9/1851

thợ mộc và chỉ bắt đầu đi học từ năm 1853. Phobos và Deimos (có nghĩa là Sợ hãi và Bạo lực, theo một đoạn trong trường ca Iliad của Homer) được phát hiện ngày 11/8/1877.

(1) Edward Emerson Barnard (1857 - 1923) là nhà thiên văn học người Mỹ, thời thơ ấu rất nghèo khổ. Hứng thú thiên văn đã khiến ông dành 2/3 thu nhập một năm để mua một kính viễn vọng phản xạ 5 inch (15.2 cm) với giá 400 đôla (1876). Ông phát hiện ra 3 sao chổi trong hai năm 1881-82, năm 1892 vệ tinh sao Mộc Amalthea và năm 1916 sao Barnard trong chùm sao Ophiuchus. Ngôi sao này (ký hiệu thiên văn là Munich 15040 hay LFT 1385) có chuyển động riêng nhanh nhất được biết từ trước cho đến bây giờ.

(2) William Henry Pickering (1858-1938) là nhà thiên văn học người Mỹ, sinh tại Boston, tốt nghiệp Massachusetts Institute of Technology (B.S., 1879). Ông đã từng lãnh đạo 5 đoàn thám hiểm quan sát nhật thực. Năm 1899, ông đã phát hiện ra vệ tinh thứ 9 của sao Thổ là Phoebe. Ông cũng công bố năm 1905 là đã tìm ra vệ tinh thứ 10 nhưng điều này không được xác nhận cho đến năm 1967. Năm 1919, ông tiên đoán sự tồn tại và vị trí của sao Diêm vương được phát hiện sau này (1930, Tombaugh).

(3) Clyde W. Tombaugh (1906-1997) là nhà thiên văn học người Mỹ. Năm 1929 ông tự chế một kính thiên văn 9 inch (27.4 cm) từ phụ tùng ô tô và máy kéo cũ. Năm 1930, ông tìm thấy sao Diêm Vương. Tombaugh là người sáng lập ra Bộ môn Thiên văn tại Trường Đại học Bang New Mexico (New Mexico State University). Ông nghỉ hưu năm 1973.

1.4. TÍNH CHẤT VẬT LÝ CỦA MỘT SỐ HÀNH TINH

1. Độ nghiêng mặt phẳng quỹ đạo

Phần lớn các thiên thể lớn trong hệ mặt trời đều có độ nghiêng quỹ đạo so với quỹ đạo trái đất (đường Hoàng đạo – ecliptic) gần 0° trừ một vài trường hợp cá thể như sao Diêm Vương (Pluto) $17,15^\circ$, các vệ tinh Iapetus $14,72^\circ$, Phoebe $175,30^\circ$ và Mặt Trăng $5,14^\circ$.

2. Độ lệch tâm quỹ đạo

Độ lệch tâm elips của quỹ đạo (eccentricity) của các thiên thể, cả lớn lẫn nhỏ đều rất nhỏ, không vượt quá 0,75. Như vậy các quỹ đạo hầu như tròn. Độ lệch tâm của sao Diêm Vương là 0,25, của sao Thủy là 0,21, còn lại các hành tinh đều nhỏ hơn 0,1. Theo định nghĩa, độ lệch tâm là:

$$\varepsilon = (a^2 - b^2)^{1/2} / a \quad (1.4.1)$$

với $a = 1/2$ độ dài trục chính và $b = 1/2$ độ dài trục phụ của quỹ đạo elips. Đối với quỹ đạo tròn thì $a = b$ nên $\varepsilon = 0$ và đối với quỹ đạo elips rất dẹt thì $\varepsilon \approx 1$ (vì $b \ll a$). Có thể biểu diễn b/a theo ε :

$$b/a = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \quad (1.4.2)$$

Với $\varepsilon = 0,25$ (sao Diêm vương) thì $b/a = 0,97$; $\varepsilon = 0,75$ (vệ tinh Nereid của sao Hải Vương) thì $b/a = 0,66$.

3. Độ dài một năm

Trên Trái Đất, một năm dài 365,26 ngày; trên sao Thủy là 87,97 ngày; trên sao Kim là 224,7 ngày; trên sao Hỏa là 686,98 ngày; trên sao Mộc là 4.332,71 ngày (11,86 năm Trái Đất), trên sao Thổ là 10.759,5 ngày (29,5 năm Trái Đất), trên sao Thiên Vương là 30.685,00 ngày (84 năm Trái Đất), trên sao Hải Vương là 60.190,00 ngày (164,8 năm Trái Đất), trên sao Diêm Vương là 90.800 ngày (248,6 năm Trái Đất).

4. Vận tốc chuyển động

Càng ở xa, các hành tinh quay càng chậm và vận tốc dài v của chúng càng nhỏ. Thời gian quay được một vòng (chu kỳ T) lớn dần. Vận tốc dài (km/s) của sao Thủy là: 47,87; sao Kim: 35,02; Trái Đất: 29,79; sao Hỏa: 24,13; sao Mộc: 13,06; sao Thổ: 9,66; sao Thiên Vương: 6,80;

sao Hải Vương: 5,44 và sao Diêm Vương: 4,74. Vận tốc dài giảm 10 lần từ 47,87 *km/s* (sao Thủy) đến 4,74 *km/s* (sao Diêm Vương) trong khi bán kính quỹ đạo tăng rất nhanh từ 57,9 triệu *km* đến 5.913,52 triệu *km*. Mối tương quan này giữa bán kính quỹ đạo và vận tốc dài có thể cung cấp dữ liệu cho một suy đoán ban đầu về sự phụ thuộc của lực hấp dẫn vào khoảng cách (xem bài tập áp dụng phần sau).

5. Bán kính quỹ đạo

Tính trong đơn vị "triệu *km*" thì bán kính quỹ đạo của sao Thủy là 57,9; sao Kim: 108,2; Trái Đất: 149,6; sao Hỏa: 227,94; sao Mộc: 778,33; sao Thổ: 1.429,4; sao Thiên Vương: 2.870,99; sao Hải Vương: 4.504,3; sao Diêm Vương: 5.913,52. Như vậy thì bán kính quỹ đạo tăng 100 lần!

Bảng 1.2. ĐẶC TÍNH QUỸ ĐẠO MẶT TRĂNG VÀ CÁC HÀNH TINH TRONG HỆ MẶT TRỜI

Hành tinh	R quỹ đạo (triệu <i>km</i>)	Vận tốc dài (<i>km/s</i>)	Chu kỳ (ngày)
Mặt Trăng	0,384	1,023	27,31
Sao Thủy	57,9	47,87	87,97
Sao Kim	108,2	35,02	224,7
Trái Đất	149,6	29,79	365,26
Sao Hỏa	227,94	24,13	686,98
Sao Mộc	778,33	13,06	4.332,71
Sao Thổ	1.429,4	9,66	10.759,5
Thiên Vương	2.870,99	6,80	30.685
Hải Vương	4.504,3	5,44	60.190
Diêm Vương	5.913,52	4,74	90.800

Bài tập áp dụng

Hãy dẫn giải sự phụ thuộc của lực hấp dẫn F vào $1/r^2$ qua hai loại dữ liệu dẫn trong các phần §1.4.4 và §1.4.5.

Giải:

Biết rằng lực $F=ma$, và $a=v^2/r$ nên nếu r tăng 100 lần và v giảm 10 lần thì a giảm 10 000 lần, kéo theo F cũng phải suy giảm 10.000 lần, tức là F tỷ lệ nghịch với r^2 , $F \propto 1/r^2$.

6. Bảng dữ liệu tính chất vật lý của các hành tinh

Bảng 1.3. TÍNH CHẤT VẬT LÝ CỦA MẶT TRỜI, MẶT TRĂNG VÀ CÁC HÀNH TINH TRONG HỆ MẶT TRỜI

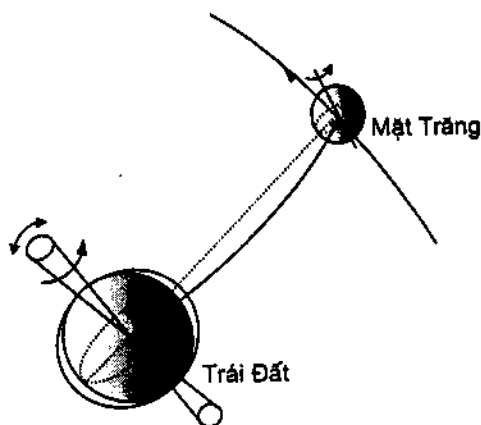
Hành tinh	Bán kính (km)	Khối lượng (kg)	Tỉ khối (g/cm^3)	Gia tốc g/g_{TD}	v thoát (km/s)	Độ dẹt (oblate)	$T(K)$ bề mặt	Độ dài 1 ngày	Áp suất (at) khí quyển
Mặt Trời	695.000	$1,99 \times 10^{30}$	1,41				6500	24,6	
Mặt Trăng	1.738	$7,35 \times 10^{22}$	3,34	0,165	2,4	0,0	400/100	27,31	0
Sao Thủy	2.440	$3,30 \times 10^{23}$	5,43	0,378	4,44	0,0	440	58,6	0
Sao Kim	6.052	$4,87 \times 10^{24}$	5,24	0,907	10,36	0,0	730	-243	93 (CO_2 , N_2)
Trái Đất	6.378	$5,97 \times 10^{24}$	5,52	1,000	11,19	0,00335	287	1	1 (O_2 , N_2 , Ar)
Sao Hỏa	3.397	$6,42 \times 10^{23}$	3,93	0,377	5,03	0,00519	218	1,03	0,007 (CO_2 , N_2 , Ar)
Sao Mộc	71.492	$1,90 \times 10^{27}$	1,33	2,364	59,5	0,06481	120	0,41	H_2 , He
Sao Thổ	60.268	$5,68 \times 10^{26}$	0,69	0,916	35,5	0,1076	88	0,45	H_2 , He
Thiên Vương	25.559	$8,68 \times 10^{25}$	1,32	0,889	21,3	0,030	59	-0,72	H_2 , He, CH_4
Hải Vương	24.766	$1,02 \times 10^{26}$	1,64	1,125	23,5	0,026	48	0,67	H_2 , He, CH_4
Diêm Vương	1.137	$1,27 \times 10^{22}$	2,06	0,067	1,3	0,0	37	-6,39	10^{-5} (N_2 , CH_4 , CO)

1.5. MỘT SỐ HIỆN TƯỢNG TRONG HỆ MẶT TRỜI

1. Mặt Trăng quay chậm lại và xa dần

Khoảng cách trung bình giữa Mặt Trăng và Trái Đất là 384.401 km, vào khoảng 60 lần bán kính Trái Đất (6.378 km). Điểm xa nhất trên quỹ đạo là 405.505 km và điểm gần nhất là 363.297 km. Nó quay hết một vòng mất 27 ngày 7^h43'12" ($\approx 27,31$ ngày) với độ nghiêng quỹ đạo 5°8'43". Trục quay cũng hơi lệch 6°41' khỏi phương vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo. Mặt Trăng có bán kính 3.476 km (0,273 R Trái Đất), trọng lượng $7,35 \times 10^{22}$ kg, mật độ khối 3,34 g/cm³. Vận tốc thoát trên Mặt Trăng chỉ có 2,4 km/s. Nhiệt độ bề mặt vào ban ngày là 400K ($\approx 130^\circ\text{C}$) và vào ban đêm là 100K ($\approx -170^\circ\text{C}$). Mặt Trăng là vệ tinh duy nhất trong hệ mặt trời được biết đến trong thời kỳ trước Galileo và cũng là nơi duy nhất mà con người từng đặt chân tới. Tuy bằng mắt thường cũng có thể quan sát thấy núi trên Mặt Trăng nhưng phải đến thời Galileo thì điều đó mới được chứng thực.

Lực hấp dẫn giữa Trái Đất và Mặt Trăng có một vài tác dụng phụ, có thể chúng xuất hiện bởi dạng dẹt elipsoid của quả đất, bởi hiện tượng cộ xát thủy triều làm suy giảm năng lượng tương tác và bởi tốc độ truyền tương tác giới hạn của lực hấp dẫn. Sự mất mát năng lượng tương tác làm cả hai quay chậm lại và xa dần nhau ra. Bán kính quỹ đạo của Mặt Trăng đang dài ra ước chừng $3,8\text{cm/năm}$, tức là trước đây 1 tỉ



Hình 1.8. Mặt Trăng quay đồng bộ: nó luôn hướng một mặt về phía Trái Đất

năm bán kính quỹ đạo của nó là 346.000 km – gần hơn 38.000 km (khoảng 10%) so với khoảng cách 384.000 km hiện nay. Trước đây, có lẽ Mặt Trăng cũng đã quay quanh trục quay riêng của nó với chu kỳ riêng nhưng ngày nay nó đã bị "khóa" đồng bộ trên quỹ đạo. Vì thế Mặt Trăng luôn hướng một mặt về phía Trái Đất (hiện tượng này được gọi là hiện tượng quay đồng bộ). Hai vệ tinh khác là Phobos (sao Hỏa) và Triton (sao Hải Vương) cũng có hiện tượng như vậy (hình 1.8).

Còn có một hiện tượng lạ gắn liền với Mặt Trăng được quen gọi là *ảo giác mặt trăng*. Khi ở vị trí thấp người ta có cảm giác nó to hơn và khi lên cao, nó có vẻ nhỏ đi. Có rất nhiều lý giải về hiện tượng này, một số dựa trên các đặc tính quang học của bầu khí quyển. Tuy nhiên cho đến nay không có lý giải nào hoàn toàn thỏa đáng.

2. Ngày của chúng ta đang dài ra

Như đã nói ở trên, có thể do lực hấp dẫn của Mặt Trăng kéo thủy triều lên xuống gây ra hiện tượng cộ xát thủy triều làm chậm tốc độ quay của Trái Đất. Ngày của chúng ta đang dài ra khoảng $0,0015\text{--}0,002$ giây/100 năm. Như vậy trước đây 900 triệu năm, một năm dài 481 ngày 18 giờ. Sự quay của Trái Đất cũng không đều mà thay đổi chút ít. Sự thay đổi này cũng không có chu kỳ. Vì thế mà độ dài của một ngày có khác nhau, nhưng xê dịch là rất nhỏ, chỉ vào khoảng $0,002$ giây. Hiện tượng tốc độ quay không đều có thể do các tác động vật lý bên trong

Trái Đất và hiện nay vấn đề này vẫn còn nhiều bí ẩn. Trục quay của Trái Đất có hiện tượng xô dịch tuế sai, gây ra sự dịch chuyển quan sát được của Cực Bắc. Sự dịch chuyển bao gồm hai thành phần chính: một là chuyển động elip hàng năm và hai là chuyển động tròn, được gọi là chuyển động Chandler, có chu kỳ là 435 ngày. Hai chuyển động này mô tả phần lớn sự xô dịch xoáy ốc của Cực Bắc như đã được nhìn thấy.

Độ dẹt elipsoid của Quả Đất. Vào thế kỷ 17, Cassini cho rằng Trái Đất hình quả trứng dựng đứng (!). Ông đã phán đoán như vậy, dựa trên các kết quả đo địa lý không chính xác (1712). Newton và Huygens đưa ra phỏng đoán lý thuyết rằng Trái Đất có dạng hình khối elipsoid. Năm 1735, Viện Hàn lâm Khoa học Pháp đã cử một đoàn thám hiểm sang Peru và Lapland kiểm tra lại (Maupertius, 1736) và cuối cùng đã công nhận dự đoán của Newton và Huygens.

Bảng 1.4. BÁN KÍNH TRÁI ĐẤT R , ĐỘ DỆT $f^{(1)}$ VÀ CÁC HỆ ĐO LƯỜNG QUỐC TẾ

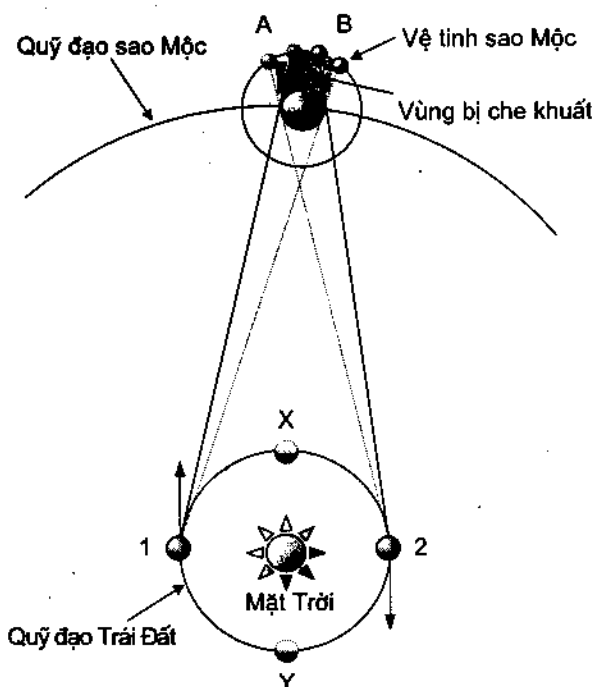
Hệ quốc tế	R (m)	Độ dẹt f	Nơi dùng
WGS 66 (1966)	6.378,145	1/298,25	USA
GRS 67 (1967)	6.378,160	1/298,25	Australla
WGS 72 (1972)	6.378,195	1/298,26	USA
GRS 80 (1979)	6.378,137	1/298,26	

3. Vệ tinh sao Mộc chạy không đúng lịch trình

Hiện tượng các vệ tinh sao Mộc đôi khi xuất hiện sớm hay muộn hơn lịch trình được một nhà thiên văn người Đan Mạch là Roemer (Olaf Roemer, 1644–1710)[7] quan sát thấy từ thế kỷ thứ 17 (1676).

Trong thời gian 6 tháng, khi Trái Đất đi được 1/2 vòng thì sao Mộc chỉ dịch chuyển được một đoạn ngắn trên quỹ đạo. Trên hình 1.9, người quan sát ở mặt đất sẽ nhìn thấy được vệ tinh của sao Mộc trừ những lúc nó đi vào vùng tối AB. Roemer nhận ra rằng khoảng thời gian giữa hai lần che khuất (không phải khoảng thời gian bị che khuất) là 42,5 giờ

(1) Độ dẹt elipsoid f (flattening, oblate) được định nghĩa bằng tỷ lệ giữa hiệu 1/2 độ dài hai trục $a-b$ chia cho 1/2 độ dài trục chính a : $f = (a-b) / a$. Độ dẹt f của Trái Đất xấp xỉ 1/300.



Hình 1.9. Quan sát chuyển động vệ tinh sao Mộc của Roemer

nếu quan sát từ hai vị trí X và Y (Trái Đất không di chuyển về phía sao Mộc hay đi ngược lại) trong khi khoảng thời gian đó ngắn hơn 14 giây nếu quan sát từ vị trí 1 và dài hơn 14 giây nếu quan sát từ vị trí 2. Roemer suy luận rằng, vận tốc ánh sáng là giới hạn và 14 giây đó là thời gian nó bắt gặp sớm hơn hoặc muộn hơn do đã đi đón đầu hay đuổi theo Trái Đất đang dịch chuyển. Ông đã đưa ra ước đoán đầu tiên về vận tốc ánh sáng dựa trên các đo đạc từ nhiều điểm khác nhau trên quỹ đạo trái đất. Các tính toán chi tiết dẫn đến kết luận rằng, ánh sáng phải mất 12,5 phút để vượt khoảng cách bằng đường kính quỹ đạo trái đất (299,2 triệu km), tương ứng với vận tốc 400.000 km/s .

Số liệu chính xác là 16,6 phút. Thời đó nhiều người không tin vào kết quả của ông. Năm 1846 Foucault đã đo vận tốc ánh sáng bằng các gương quay phản chiếu đặt cách nhau vài dặm. Ngày nay, các nhà du hành vũ trụ đã đặt một gương phản xạ trên Mặt Trăng, bằng một nguồn laser người ta có thể đo được thời gian ánh sáng hành trình qua lại từ Trái Đất đến Mặt Trăng (2,56 s).

4. Quỹ đạo sao Thủy và thuyết tương đối rộng Einstein

Sao Thủy là hành tinh gần Mặt Trời nhất, quỹ đạo số 1. Nó có bán kính chỉ 2.440 km, nhỏ hơn cả vệ tinh Ganymede (2.634 km) của sao Mộc và Titan (2.575 km) của sao Thổ. Khối lượng riêng của sao Thủy lớn sau Trái Đất (của Trái Đất là lớn nhất, bằng $5,52 \text{ g/cm}^3$) và bằng $5,43 \text{ g/cm}^3$. Sao Thủy không có khí quyển, nhiệt độ bề mặt là 440K ($\approx 170^\circ\text{C}$). Gia tốc trọng trường bằng 0,378 lần gia tốc trọng trường trái đất, tức là $\approx 3,7 \text{ m/s}^2$. Vận tốc thoát (vũ trụ cấp 1) là 4,44 km/s. Sao Thủy có quỹ đạo elips rõ rệt, chỗ gần Mặt Trời nhất (perihelion) là 46 triệu km, chỗ xa nhất (aphelia) là 70 triệu km và cả quỹ đạo xoay chậm. Vào thời của Le Verrier (1859) người ta đo được tốc độ xoay là $38''/100$ năm và đến năm 1913 thì Freudlich xác định lại là $43''$. Suốt thế kỷ 19 có những dự đoán sai lệch về quỹ đạo của sao Thủy dựa trên học thuyết Newton, người ta cho rằng, có một hành tinh nào gần đó đã làm cho quỹ đạo của sao Thủy thay đổi đi. Tuy nhiên, các tiên đoán này đều không được xác minh. Phải đến đầu thế kỷ 20, Einstein mới đưa ra được lời giải thích hợp lý hơn dựa trên lý thuyết tương đối rộng của ông. Einstein cho rằng, do sao Thủy gần Mặt Trời nên *không-thời gian* ở đó bị biến dạng do trường hấp dẫn của Mặt Trời, vì thế chúng ta không có quy luật phụ thuộc $F \propto 1/r^2$ như theo thuyết Newton. Ông sửa lại thành $F \propto 1/r^{2+\delta}$ với δ là một hằng số nhỏ thể hiện sự biến dạng hình học của không - thời gian và dựa vào đó đã tiên đoán được chính xác độ xoay của quỹ đạo sao Thủy là $43''/100$ năm⁽¹⁾. Đến tận năm 1962, người ta còn cho rằng 1 ngày trên sao Thủy dài bằng 1 năm của nó. Tuy nhiên, vào năm 1965, bằng sử dụng các radar Doppler, người ta đã thấy nó quay 3 lần trong 2 năm. Sao Thủy có lõi sắt ước chừng 1.800 - 1.900 km và vỏ ngoài cấu tạo chủ yếu bằng silicate khoảng 600 km. Bề mặt gồm những vách đá dựng đứng và diện tích thực của bề mặt lớn hơn lý thuyết $\approx 0,1\%$.

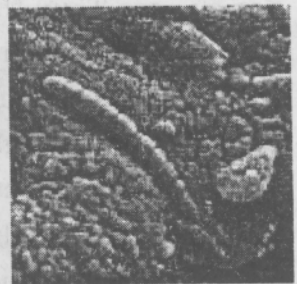
(1) Theo các nhà nghiên cứu lịch sử, Einstein đã giải được bài toán này dựa trên phương trình trường không hoàn toàn chính xác; sai lầm trong phương trình trường của ông chỉ được khắc phục một tuần sau đó trong công trình đề ngày 25/11/1915 "*The field equation of gravitation*" (Phương trình trường hấp dẫn).

5. Sao Kim luôn hướng về Trái Đất

Galileo đã quan sát thấy sao Kim có kỳ tròn kỳ khuyết tựa như Mặt Trăng. Quỹ đạo sao Kim gần như tròn, độ dẹt của quỹ đạo nhỏ hơn 1%. Sao Kim có kích thước gần như Trái Đất nhưng có khối lượng riêng nhẹ hơn, gia tốc trọng trường $g \approx 0,907$ lần gia tốc trọng trường trên Trái Đất ($g \approx 8,85 \text{ m/s}^2$), vận tốc thoát $10,6 \text{ km/s}$. Bầu khí quyển chủ yếu bao gồm CO_2 và N_2 với áp suất 93 atm và nhiệt độ bề mặt 730K . Nhìn trên bầu trời, đây là ngôi sao màu xanh và sáng nhất (còn quen thuộc với các tên gọi sao Hôm và sao Mai). Sao Kim quay rất chậm, 243 ngày trên Trái Đất mới dài bằng 1 ngày trên sao Kim. Vì một lý do chưa được biết sao Kim luôn quay một mặt về phía Trái Đất khi hai hành tinh tiến lại gần nhau – như trường hợp của Mặt Trăng. Có thể trên sao Kim đã có nước nhưng bây giờ thì không. Sao Kim không có từ trường và không có một vệ tinh nào.

6. Sao Hỏa là hành tinh giống Trái Đất nhất

Sao Hỏa tương đối nhỏ, bán kính chỉ có 3.398km , gia tốc trọng trường $g \approx 0,377$ lần gia tốc trọng trường của Trái Đất ($g \approx 3,7 \text{ m/s}^2$). Vận tốc thoát chỉ có 5 km/s . Sao Hỏa dẹt nhiều hơn Trái Đất một chút ($f = 0,00519$), nhiệt độ bề mặt 218K (-55°C), mùa hè lên tới 25°C . Bầu khí quyển bao gồm chủ yếu là CO_2 , N_2 , Ar , có một chút O_2 (0,15%) và H_2O (0,03%). Áp suất khí quyển rất nhỏ: $0,007 \text{ atm}$. Lõi hành tinh này vào khoảng 1.700km . Sao Hỏa có từ trường yếu và có hai vệ tinh là Phobos (bán kính 11 km) và Deimos (bán kính 6 km). Người ta cũng đã tìm thấy vết tích chất hữu cơ trong một số mẫu đá sao Hỏa. Đây có thể là bằng chứng tồn tại của vi sinh vật cổ đại.



Hình 1.10. Một mẫu khoáng vật được tìm thấy

Chương 2

CƠ HỌC CỦA NGƯỜI HY LẠP

Trong lịch sử văn minh của loài người, nền khoa học Hy Lạp có một vị trí đặc biệt; có thể coi đó là khởi thủy của nền văn minh kỹ thuật hiện đại. Trong chương này, chúng ta điểm qua một số thành tựu khoa học chính mà người Hy Lạp đã để lại: họ đã phát triển được một hệ thống khoa học toàn diện mà trong đó cơ học chỉ là một lĩnh vực. Nhiều quan điểm về vật lý và cơ học của họ đã tồn tại hàng thế kỷ và chi phối sự phát triển tư tưởng của nhiều thế hệ sau này⁽¹⁾.

2.1. LƯỢC SỬ CƠ HỌC

1. Các nền văn minh (3100– tr. CN)

Điểm lại lịch sử loài người, những gì còn ghi nhận được và được coi là những nền văn minh có lẽ bắt đầu từ khoảng những năm 3100 trước CN. Đó là các kỷ nguyên: Babylon ở Trung Đông, tôn giáo ở Ấn Độ, Phục Hy và Thần Nông ở Trung Quốc. Những dữ liệu khảo cổ cho thấy người Babylon đã có một kiến thức toán học đáng kể, tuy ở vào thời kỳ đó chữ viết vẫn chưa hình thành rõ rệt. Nhiều nhận định cho rằng kiến thức toán học của người Babylon vượt trội so với người Ai Cập, xuất hiện hơn 1000 năm sau, vào quãng thế kỷ thứ 18 trước CN (thời gian này rơi vào thời đại Nghiêu – Thuấn ở Trung Quốc, còn tương truyền với những công trình thủy lợi nông nghiệp đầu tiên).

(1) Tài liệu tham khảo rất tốt cho phần này là một số chương trong cuốn *"Introduction to the History of Mathematics"* của Eves Howard đã được dịch ra tiếng Việt *"Giới thiệu lịch sử toán học"*, NXB KHKH 1993 [14]. Một tài liệu tiếng Anh rất tốt khác của Michel Fowler *"From Galileo to Einstein: Using history to teach physics for non-specialists"*, University of Virginia, 2000.

Đến khoảng năm 500 trước CN, sự phát triển tập trung ở nền văn minh Hy Lạp với một nét tiêu biểu là sự ra đời của nền khoa học Hy Lạp. Phải gọi đây là một nền "Khoa học" với đầy đủ ý nghĩa của nó, vì bên cạnh một triết học phong phú về các vấn đề nhà nước, tôn giáo và luân lý, người ta còn thấy sự hình thành và phát triển rõ ràng của các ngành khoa học tự nhiên như *hình học*, *vật lý*, *sinh học*. Nền khoa học Hy Lạp đánh dấu một bước tiến dài, một bước ngoặt lịch sử trong sự phát triển tri thức. Có thể nói nền văn minh Phương Tây ngày nay là một sự kế thừa của nền văn minh Hy Lạp xưa kia, người ta có thể tìm thấy rất nhiều nét đặc trưng văn hoá Phương Tây khi nghiên cứu nền văn minh Hy Lạp. Một sự phát triển khá đặc sắc khác trong giai đoạn này cũng xảy ra ở Trung Quốc. Đó là thời kỳ chiến tranh kéo dài được gọi là Xuân Thu Chiến Quốc với sự ra đời của rất nhiều trường phái tư tưởng khác nhau.

Vào những năm từ 200 đến 400 sau CN, khi ở Trung Quốc, *Nho giáo* đang thịnh hành, thì ở Phương Tây nền văn minh Hy Lạp sụp đổ, kéo theo các cuộc chiến tranh tôn giáo liên miên đẩy Phương Tây vào một kỷ nguyên đen tối cho đến cuối thế kỷ 14. Có một sự kiện đáng chú ý xảy ra ở Phương Đông trong thời kỳ quanh những năm 1000 bên cạnh cuộc cải cách Nho giáo của Vương An Thạch vào đời Tống là việc Tống sử còn chép lại vụ nổ của siêu sao trong tinh vân Con Cua (supernova Crab Nebula) năm 1054. Sự kiện này ít nhiều nói lên sự phát triển của ngành *thiên văn học* ở Phương Đông và tính nghiêm túc của các nhà thiên văn Phương Đông lúc đó. Sử sách Phương Đông còn ghi nhận một siêu sao khác, xuất hiện vào khoảng ngày 30 tháng 4 năm 1006 bên cạnh sao Beta Lupi, bên rìa chòm sao Nhân Mã (Centaurus), và chiếu sáng màu vàng suốt một năm trên bầu trời. Những hiện tượng thiên văn bất thường này xảy ra đồng thời với những biến cố xã hội sâu sắc đời Tống, được các nhà chiêm tinh học tô dệt thành những chuyện huyền bí.

Vào khoảng những năm 900-1000 sau CN, lịch sử còn đánh dấu sự hình thành và phát triển của một nền văn minh khác gọi là nền văn minh Ả Rập. Người Ả Rập có công lao rất lớn trong việc lưu giữ cho đến

ngày nay vốn tri thức Hy Lạp. Phần lớn các trước tác Hy Lạp đều không còn tồn tại nguyên bản mà chỉ còn thấy được qua các bản dịch tiếng Ả Rập. Ngày nay, chúng ta đang đọc lại các bản dịch từ các bản dịch tiếng Ả Rập (nhiều thuật ngữ Hy Lạp nguyên thủy vì thế được thêm giới từ "Al-" từ tiếng Ả Rập sau đó được dịch ngược trở lại thành ra từ mới, chẳng hạn như Algebra, Alchemie...).

Thời kỳ từ năm 1200 đến 1500 sau CN có lẽ là thời kỳ có nhiều biến động xã hội hơn là biến động tri thức. Ở Phương Tây có thể tìm thấy một vài nhà toán học như Fibonnaci (1170–1250), Nicole Oresme (1323–1382), Michael Stifel (1487–1567)...., còn ở Phương Đông thì thấy xuất hiện các nhà khoa học thần bí, chiêm tinh và bói toán. Nhìn chung, tôn giáo thống trị nhiều hơn là Khoa học. Một nền khoa học tự nhiên thực sự, được coi là bắt đầu từ thế kỷ 17, với cột mốc lịch sử chính là Galileo Galilei (1564–1642).

2. Một vài học thuyết vật lý và cơ học trong quá khứ

Cơ học luôn đi đôi với Toán học và người ta luôn có xu hướng ghép hai lĩnh vực này trong cùng một ngành. Xét trên cơ sở đối tượng nghiên cứu là các hiện tượng cơ học trong trường hấp dẫn, chúng ta có thể chia cơ học làm hai phần: cơ học cổ điển (Newton) và cơ học tương đối (Einstein). Cơ học lượng tử là một bộ phận khác của vật lý nghiên cứu các hiện tượng vi mô.

(1) Trong phạm vi cơ học cổ điển, lý thuyết vũ trụ cổ xưa nhất có lẽ phát sinh từ Anaximander (555 tr. CN), xem §1.1, tr.13. Ông ta cho rằng Vũ Trụ có hình trụ, Trái Đất nằm trên trục quay của hình trụ và các vì sao quay đồng trục trên mặt trụ. Các học giả khác như Plato, Euxodus, Aristotle, Aristarchus, Hipparchus cũng đều đưa ra các học thuyết vũ trụ của mình. Tuy nhiên học thuyết được công nhận rộng rãi hơn cả trong suốt nhiều thập kỷ sau này là mô hình vũ trụ của Ptolemy (85–165), đó là thuyết *địa tâm* lấy Trái Đất làm trung tâm vũ trụ và Mặt Trời, Mặt Trăng cũng như mọi hành tinh và các vì sao khác đều quay xung quanh Trái Đất. Thuyết *địa tâm* đã bị Copernicus (1473–1543) (xem §1.2, tr.16) phê phán và sửa lại thành mô hình lấy Mặt Trời làm trung tâm như chúng ta có ngày nay. Tuy nhiên, vào thời bấy giờ chỉ có Trái Đất mới được biết đến là có Mặt Trăng. Quan niệm cổ

xưa cho rằng Trái Đất nặng, nên khó có thể chuyển động nhanh, hoặc quay quanh trục quay riêng của mình. Chỉ những gì nhẹ như *ether* thì mới ở trên cao và chuyển động nhanh được. Mặt Trời và các hành tinh ở trên cao, hiển nhiên phải nhẹ hơn Trái Đất. Vì thế, nếu theo thuyết nhật tâm của Copernicus thì Mặt Trời phải nặng hơn Trái Đất rất nhiều. Điều này rất khó chấp nhận vào thời bấy giờ.

(2) Ngoài các học thuyết cơ học về Vũ Trụ, chúng ta còn thấy một vài học thuyết vật lý và cơ học khác thịnh hành trong thời kỳ nền văn minh Hy Lạp. Đó là thuyết cấu tạo *đơn chất* (nhất nguyên) của Thales (585 tr. CN), ông cho rằng vạn vật đều từ *nước* sinh ra. Thales là một học giả của trường phái Miletus. Ông còn đưa ra thuyết đầu tiên giải thích hiện tượng *động đất*. Ông nói rằng động đất xảy ra là do chuyển động trôi nổi của mặt đất trên biển nước mênh mông nằm dưới. Vào thời bấy giờ người ta quan niệm rằng các hiện tượng tự nhiên cơ bản như mưa, gió, ánh sáng, chớp, động đất, núi lửa... đều do các vị thần đảm nhiệm. Vì vậy học thuyết của Thales là một bước đột phá.

(3) Anaximander, học giả được nhắc đến ở trên với thuyết vũ trụ hình trụ, còn đưa ra một thuyết nữa giải thích *ánh sáng*. Ông cho rằng ánh sáng xuất hiện do mây chuyển động và bị vén ra. Có thể bây giờ giả thiết này thật ngây thơ nhưng ai dám khẳng định là ông ta sai?

(4) Anaximanes (535 tr. CN), một học giả khác, đưa ra *thuyết ba nguyên tố*. Theo ông, vạn vật được cấu tạo từ *không khí, nước và đất*. Đến thời Empedocle (450 tr. CN), thuyết ba nguyên tố phát triển thành thuyết bốn nguyên tố bao gồm cả *lửa*.

(5) Vào thời Plato (428-349 tr. CN), với sự ra đời của học viện Academus (và tác phẩm kinh điển "*Republic*" – Nền Cộng hoà, đánh dấu bước tiến lớn trong quan niệm xã hội), các học thuyết vũ trụ được xem xét lại và, như đã dẫn ở trên, các học giả (Eudoxus, Aristotle, Aristarchus ...) nối tiếp nhau đưa ra những mô hình cơ học ngày càng gần với thực tế quan sát hơn.

(6) Vào những năm sau đó, có hai phép đo vật lý quan trọng cần được nhắc tới đó là phép đo *khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trăng* do Aristarchus (310-230 tr. CN) thực hiện và phép đo *chu vi Trái Đất* do Eratosthenes (276-194 tr. CN) thực hiện. Cả hai phép đo, nhất là của Eratosthenes có độ chính xác đáng kinh ngạc.

(7) Archimedes (287–212 tr.CN), người đã quên cả mặc quần áo mà chạy ra đường khi ông phát hiện ra một quy luật cơ bản của thủy tĩnh học, cũng có những đóng góp quan trọng hay được nhắc đến sau này. Trong số mười công trình của ông còn lưu giữ được đến nay, có hai bản bàn về vật lý là "*Về các vật thể nổi*" liên quan đến thủy tĩnh học, và "*Về các cân bằng phẳng*" liên quan đến vấn đề xác định trọng tâm của một số hệ cơ học. Tương truyền, ông còn có một tác phẩm nhan đề "*Về đòn bẩy*" đã bị thất lạc. Theon, một học giả sau này ở Alexandria (Ai Cập) cũng có nhắc đến một công trình đã thất lạc khác về *các gương phản chiếu*. Năm 1906, người ta còn phát hiện được một bức thư Archimedes gửi cho Eratosthenes bàn về phương pháp nghiên cứu của ông liên quan đến phép tính tích phân. Archimedes là một nhà toán học đại tài⁽¹⁾.

(8) Cho đến nay, tác phẩm kinh điển nhất của nền khoa học Hy Lạp có lẽ là bộ "*Elements of Geometry*" (*Cơ sở hình học*) của Euclid (khoảng 350 tr.CN). Nó được xuất bản hơn 1000 lần, kể từ lần đầu năm 1482 (xem Howard Eves [14], tr. 134) và trên hai nghìn năm nó được coi là Kinh Thánh của khoa học. Euclid sống vào khoảng những năm 320 tr.CN cùng thời với Ptolemy, vị vua cai trị Ai Cập sau khi đế chế của Alexander Đại đế chia làm ba khi ông qua đời năm 323 tr.CN. Chúng ta biết rất ít về Euclid ngoài việc ông dạy học ở Alexandria, ngay cả ngày tháng nơi sinh của ông cũng chỉ được phán đoán mà thôi. Bản gốc cuốn *Cơ sở Hình học* cũng không còn nữa, bản gần nhất là do Theon của Alexandria biên tập gần 700 năm sau khi nguyên tác được viết.

2.2. NỀN KHOA HỌC HY LẠP

Không còn tài liệu trực tiếp nào về nền văn minh của người Hy Lạp. Những gì chúng ta biết đều dựa trên những ghi chép của người đời sau, chủ yếu là bản "*Tóm lược Eudemus*" do Proclus viết vào thế kỷ thứ V. Tuy nhiên các tài liệu khác nhau đều tường thuật khá chính xác nên có cơ sở để tin rằng các thông tin là xác thực.

(1) Các tài liệu nghiên cứu lịch sử toán học Phương Tây đều phân biệt Toán học với Hình học; Archimedes được coi là nhà toán học trong khi Euclid là nhà hình học.

1. Trường phái Miletus (585 tr.CN)

Thành phố Miletus nằm gần Thổ Nhĩ Kỳ. Thông tin còn lại là những lời truyền khẩu về ba nhân vật chính: Thales (585 tr.CN), Anaximander (555 tr.CN) và Anaximanes (535 tr.CN).

Ý tưởng chủ yếu của Thales⁽¹⁾ cho rằng *tự nhiên có quy luật* chứ không phải là sự vô ý thức của thần thánh. Ông đã lý giải sự *động đất* bằng mô hình Trái Đất phẳng bơi nổi trên đại dương mênh mông và thỉnh thoảng các cơn sóng vỗ lại gây ra chấn động trên bề mặt. Vào thời đó người ta còn cho rằng có động đất là do thần Poseidon và có ánh sáng do thần Zeus. Anaximander đưa ra lý thuyết nói rằng *ánh sáng* là do các đám mây bị vén ra do có gió to thổi.

Về mặt phương pháp, trường phái Miletus cho rằng các lý thuyết phải được đưa ra bàn cãi và thảo luận rộng rãi, và họ đã tạo ra được một bầu không khí làm việc khoa học còn giữ lại cho đến nay. Các lý thuyết của trường phái Miletus có hai loại: một là các lý thuyết cụ thể về những hiện tượng cụ thể như vừa nêu và hai là các lý thuyết về các quy luật cơ bản về Vũ Trụ. Anaximander nêu ra mô hình *Trái Đất hình trụ*, đây có lẽ là mô hình hình học đầu tiên của Vũ Trụ được biết đến. Thales đưa ra *thuyết đơn chất*, ông cho rằng ban đầu chỉ có nước. Anaximander lại cho rằng ban đầu không có gì và mọi thứ mọc lên như mầm cây, còn Anaximenes thì nói ban đầu là không khí sau đó ngưng tụ lại thành nước và các vật rắn.

2. Trường phái Pythagoras (570 tr.CN)

Chỉ còn được biết qua truyền khẩu rằng Pythagoras sống vào khoảng năm 570 tr.CN và được sinh ra trên đảo Samos, nằm cách thành phố Miletus 100 dặm. Sau khi bạo chúa Polycrates chiếm Samos, Pythagoras chạy về Croton, miền nam nước Ý vào năm 530 tr.CN. Trường phái Pythagoras đã cho rằng *Trái Đất hình cầu*. Công lao lớn nhất còn ghi nhận được của trường phái này là việc phát minh ra số

(1) Người Hy Lạp có thể đã học được môn hình học từ các cuộc đụng độ với người Ai Cập. Có người cho rằng Thales đã mang nó về từ Ai Cập. Sau này chính Aristotle cũng đã nói người Ai Cập phát hiện ra hình học. Có lẽ thời đó người ta không biết gì về người Babylon.

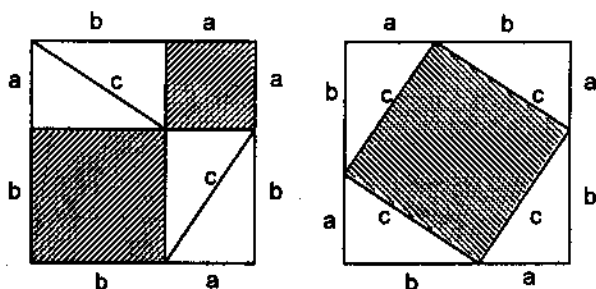
vô tỷ. Tuy nhiên họ đã che dấu phát minh của mình trong một thời gian dài vì sự tồn tại của số vô tỉ phá vỡ niềm tin của họ vào các định lý về tỷ lệ.

Trên hình 2.1, theo định lý tỷ lệ:

$$AB/AC = AD/AE$$

Nếu AB, AC, AD, AE là các số nguyên thì các tỷ lệ này biểu thị các số hữu tỉ (dạng n/m). Tuy nhiên các môn đệ của Pythagoras đã biết rằng nếu một tam giác vuông có hai cạnh là 1 thì đường chéo của tam giác đó không thể biểu hiện bằng bất cứ tỷ lệ nào. Ngày nay chúng ta biết cạnh đó có độ dài bằng $\sqrt{2}$ – một số vô tỉ không thể biểu diễn bằng tỷ lệ của hai số nguyên.

Sau đây là cách chứng minh định lý Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b là hai cạnh vuông góc và c là cạnh huyền của tam giác vuông) của các môn đồ Pythagoras (hình 2.2). Vẽ hai hình và bỏ đi các phần bằng nhau, sau khi sắp xếp lại thì cả hai cách đều cho các diện



Hình 2.2. Phép chứng minh định lý Pythagoras của các môn đồ Pythagoras

tích bằng nhau nhưng được chia khác nhau, hoặc bằng 4 tam giác vuông cộng với 2 hình vuông, hoặc bằng 4 tam giác đó cộng với 1 hình vuông. Như vậy rõ ràng diện tích 2 hình vuông nhỏ cộng lại phải bằng diện tích 1 hình vuông lớn. Chứng minh tương tự của người Trung Quốc (bằng cách chia nhỏ hình vuông lớn thành $7 \times 7 = 49$ phần nhỏ, sau đó tìm diện tích bằng cách đếm các hình vuông nhỏ) không được tổng quát như cách này của Pythagoras. Ngày nay có khoảng 370 cách chứng minh định lý này⁽¹⁾.

(1) Theo E.S.Loomis, "Mệnh đề Pythagoras", đã có 370 cách chứng minh khác nhau được phân loại.

3. Thời đại Plato (428 tr.CN)

Tác phẩm nổi tiếng nhất của Plato bàn về thể chế nhà nước của các thành phố là cuốn "*Republic*" (Nền cộng hoà). Lần đầu tiên ông mở trường dạy học và lấy tên chủ đất - "Academus", đặt tên cho trường. Academus có cơ như một bộ môn hiện nay và không cần phải thi đấu vào. Tuy nhiên hình như một vài kiến thức toán học là cần thiết. Tên tuổi Plato còn được gắn với các hình khối Plato.



Tứ diện Lục diện Bát diện 12 mặt 20 mặt
(4,6,4) (8,12,6) (6,12,8) (20,30,12) (12,30,20)

Hình 2.3. Các hình khối Plato, trong ngoặc là số
(đỉnh, cạnh, mặt). Công thức Euler⁽¹⁾ xác định:
 $s = \text{đỉnh} + \text{mặt} - \text{cạnh} = 2$

Euclid trong quyển III cuốn "*Cơ sở Hình học*" có viết: "... gọi là các hình khối Plato là không đúng vì ba trong các khối đó: khối tứ diện, khối lập phương và khối 12 mặt là thuộc về các môn sinh của Pythagoras; còn các khối 8 và 20 mặt là thuộc về Theaetetus" (Theaetetus ở Athens, 417-369 tr.CN).

Plato đã chỉ ra cách dựng các hình khối này trong cuốn sách "Timaneus" của mình bằng cách ghép các tam giác, các hình vuông và các hình ngũ giác để tạo ra các mặt. Timaneus, tên học giả trong sách, đã liên hệ năm khối đó với bốn yếu tố của Empedocle là: lửa với khối 4 mặt, không khí với khối 8 mặt, nước với khối 20 mặt và đất với khối 6 mặt. Khối 12 mặt được gắn với Vũ Trụ.

(1) Theo nhiều tác giả, đây có lẽ là công trình đầu tiên trong lĩnh vực *hình học tôpô*. Euler công bố nó năm 1752, trước đó Descartes đã đề cập tới năm 1635 và có lẽ nó được phát hiện bởi Archimedes (khoảng năm 225 tr.CN). Leonhard Euler (1707-1783) sinh tại Basel, Thụy Sĩ, từng giảng dạy đại học 14 năm tại St. Peterburg, 25 năm tại Berlin, cuối đời trở về St. Peterburg và mất tại đó. Ông còn tìm ra một công thức nổi tiếng $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, và một số công thức kỳ lạ khác như $e^{i\pi} + 1 = 0$ (thay $x = \pi$ vào công thức trước; công thức này liên hệ 5 con số quan trọng nhất trong toán học) và $e^{-\pi/2} = i^i$ (thay $x = \pi/2$ vào công thức trước, sau đó lấy lũy thừa theo đơn vị ảo: $(e^{i\pi/2})^i = (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)^i = i^i$).

Johannes Kepler (1571–1630), xem tiểu sử §3.7.3, tr.85, đã đưa ra cách giải thích sau về các mối liên quan của Timaneus. Ông cho rằng khối 4 mặt bao quanh một thể tích nhỏ nhất, còn khối 20 mặt lại bao quanh một thể tích lớn nhất. Lửa khô nên gắn với khối 4 mặt, nước ướt nên gắn với khối 20 mặt. Khối 6 mặt được gắn với đất vì nó vững vàng nhất, khối 8 mặt không vững nên gắn với không khí, còn khối 12 mặt thì gắn với Vũ Trụ vì đường hoàng đạo có 12 kỳ. Các khối 4 mặt, 6 mặt và 8 mặt có tồn tại trong các tinh thể chất rắn, còn các khối 12 mặt và 20 mặt thì không tồn tại.

Trong thời kỳ này còn có ba nhân vật nổi tiếng khác. Một là triết gia Socrates (470 tr.CN), ông này chính là thầy học của Plato; hai là học giả *Empedocles* (450 tr.CN), người đã đưa ra thuyết bốn nguyên tố bao gồm đất, nước, không khí và lửa và sau cùng là vị thầy thuốc nổi tiếng *Hippocrates* (400 tr.CN), sinh sống tại đảo Cos nằm cách Miletus vài dặm.

2.3. ARISTOTLE VÀ CÁC QUAN ĐIỂM VỀ CƠ HỌC

1. Aristotle (384–322 tr. CN)

Aristotle sinh năm 384 trước CN tại Stagira, Thrace gần Macedonia. Cha ông là bác sĩ của vua Philip xứ Macedonia. Năm 18 tuổi ông đến Athens là trung tâm khoa học thời bấy giờ để tham gia học viện của Plato (Academy) và đã ở lại đó 20 năm cho đến khi Plato qua đời năm 348 trước CN. Năm năm sau khi Plato qua đời, Aristotle trở thành thầy dạy riêng cho thái tử 13 tuổi Alexander con vua Philip. Năm 336 trước CN, vua Philip chết và thái tử Alexander lên ngôi. Đó chính là Alexander Đại đế (356–232 tr. CN). Trong 13 năm sau, Alexander chinh phục Hy Lạp, biến nó thành liên hiệp các quốc gia đô thị và xây dựng rất nhiều thành phố kiểu Hy Lạp, trong đó có Alexandria tại Ai Cập, nơi sau này trở thành trung tâm khoa học của thế giới Hy Lạp trong nhiều thế kỷ. Alexander chết năm 32 tuổi tại Babylon sau một cơn sốt cao. Năm 335 tr.CN, Aristotle trở lại Athens và mở trường riêng của mình gọi là *Lyceum*, cái tên ngày nay vẫn còn thịnh hành ở Pháp, Đức và một số nước Trung Âu để chỉ các trường trung học (cấp 3). "Lyceum" là tên ngôi đền thờ thánh Apollo. So với Academy của Plato, được coi như một khoa toán, thì Lyceum của Aristotle phải được coi như một trường bao

gồm đủ mọi lĩnh vực của khoa học, rất mạnh về sinh học và triết học. Gần 2000 năm sau đó, không có một cơ sở khoa học nào có thể so sánh với Lyceum. Aristotle lãnh đạo Lyceum 12 năm. Các học thuyết của Aristotle được Nhà thờ Thiên chúa giáo công nhận như Kinh Thánh. Trong thời trung cổ, mọi ý kiến phản đối quan điểm của Aristotle đều bị đưa ra xét xử.

2. Quan điểm của Aristotle về chuyển động

Aristotle cho rằng:

(2.3.1) Định đề: *Vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ, càng nặng rơi càng nhanh.*

(2.3.2) Định đề: *Tốc độ rơi phụ thuộc vào mật độ môi trường nơi nó rơi qua, mật độ càng nhỏ tốc độ rơi càng lớn.*

Các quan điểm này của Aristotle đã tồn tại suốt 20 thế kỷ cho đến thời Galileo mà không gặp phải sự phản kháng đáng kể nào. Sau này Galileo đã phê phán rằng có lẽ Aristotle chỉ phán đoán thôi chứ nếu ông đã làm thí nghiệm với các vật thể rơi cụ thể thì phải nhận ra rằng chúng đều rơi với cùng một tốc độ. Từ quan điểm thứ hai, Aristotle suy luận rằng trạng thái chân không (vacuum) không thể tồn tại, vì nếu mật độ bằng 0 thì tốc độ trở nên vô hạn. Phải nói, nếu chúng ta quan sát một viên đá rơi trong môi trường lỏng như nước hoặc dầu thì quả thật khi chất lỏng càng loãng vật rơi càng nhanh. Dĩ nhiên nếu viên đá rơi trong không khí thì nó sẽ rơi nhanh nhất. Aristotle vốn là một nhà sinh học nên việc các quan điểm vật lý của ông chỉ dựa trên khả năng trực quan là dễ hiểu.

Aristotle còn cho rằng:

(2.3.3) Định đề: *Nếu có lực tác dụng thì tốc độ chuyển động tỷ lệ thuận với lực tác dụng.*

Theo định đề này thì Aristotle chưa quan niệm được chính xác thế nào là gia tốc. Đối với ông, ngay cả vận tốc cũng mang tính cảm tính nhanh chậm của tốc độ chứ chưa được định nghĩa rõ ràng như một tỷ lệ giữa quãng đường và thời gian. Ngày nay chúng ta biết rằng, độ lớn của lực tác dụng tỷ lệ thuận với gia tốc chứ không phải với vận tốc. Đại lượng tỷ lệ thuận với vận tốc là động lượng chứ không phải lực. Một học giả khác là Strato (mất vào khoảng năm 268 tr.CN), người kế nhiệm thứ

ba của Lyceum sau Aristotle và Theophrastus, đã phê phán các quan điểm này của Aristotle. Ông cho rằng, các vật khi rơi thường có sự gia tăng của tốc độ. Quan niệm về gia tốc như vậy đã xuất hiện từ thời cổ Hy Lạp. Theo Aristotle thì các vật thường nhận được một tốc độ tối hạn trong một thời gian ngắn và rồi sau đó chỉ rơi với tốc độ đó (hiện tượng rơi trong chất lỏng có thể là như vậy). Còn Strato thì phân tích rằng, ở độ cao càng lớn vật tiếp đất càng mạnh và với tốc độ càng lớn.

3. Quan điểm của Aristotle về nguyên nhân chuyển động

Aristotle nhìn nhận nguyên nhân chuyển động rất tổng quát, ông gắn chuyển động với *ý thức* và cho rằng chuyển động có thể có ý thức hoặc không có ý thức. Như vậy chuyển động trong quan niệm của Aristotle không phải hoàn toàn là *chuyển động vật lý*. Ở đây, có lẽ phải dùng từ *di chuyển* thì thích hợp hơn. Aristotle cho rằng, nguyên nhân sâu xa của mọi di chuyển là do *lẽ tự nhiên* (natural will) của đối tượng di chuyển. Con mèo đuổi con chuột là vì lẽ tự nhiên đi kiếm mồi của con mèo, còn con chuột chạy là vì lẽ tự nhiên cần bảo toàn tính mạng của con chuột. Như vậy lẽ tự nhiên của hòn đá khi nó ở trên cao là phải rơi xuống, còn lẽ tự nhiên của thực vật là đứng một chỗ và của động vật là di chuyển.

(2.3.4) Định đề: Mọi chuyển động có ý thức, hay vô ý thức của động vật hay các vật đều tuân theo "*lẽ tự nhiên*" (natural will) của chúng.

Thuần túy triết học mà nói thì Aristotle khó có thể sai.

4. Quan điểm của Aristotle về thiên văn

Aristotle theo quan điểm bốn nguyên tố: đất, nước, khí, lửa của Empedocle nhưng cho rằng các thiên thể được cấu tạo từ *ether* vì chúng nhẹ nhất. Ông còn cho rằng các thiên thể chuyển động theo *đường tròn*. Điều này một lần nữa có thể có nguyên nhân trực quan từ việc quan sát hầu hết các vì sao đều quay tròn quanh sao Bắc Đẩu.

5. Đóng góp cho sinh học

Aristotle quan tâm đặc biệt đến sinh học, có thể vì cha của ông là một bác sĩ. Ông đã liệt kê được khoảng 500 loài động vật, 120 loài cá và 60 loài côn trùng. Aristotle mô tả chính xác một loài cá chó (dog fish).

Loại cá này quan sát không thấy cho đến tận thế kỷ 19. Người ta đã không tin vào Aristotle trong nhiều thế kỷ trước đó.

6. Phương pháp của Aristotle

Aristotle nêu ra hai loại luận chứng chủ yếu:

(1) *Biện chứng (dialectics) dựa trên các lập luận logic (logical deduction), và*

(2) *Kinh nghiệm (empirical) dựa trên các nhận thức thực tiễn có tính kinh nghiệm*

Thông thường, để bác bỏ một giả thiết nào đó, ông lập luận theo kiểu phản chứng (reductio ad absurdum) bằng cách chỉ ra sự phi lý không thể xảy ra nếu chấp nhận giả thiết ban đầu hoặc lập luận theo kiểu nghịch lý (dilemma) bằng cách chỉ ra hai kết quả bất buộc đồng thời xảy ra mà lại hoàn toàn trái ngược nhau nếu chấp nhận giả thiết ban đầu.

Aristotle nêu ra khung làm việc cơ bản đối với một công trình khoa học như sau:

(1) *Định nghĩa đối tượng nghiên cứu*

(2) *Nêu các khó khăn và tóm lược các nghiên cứu trước đây*

(3) *Trình bày giải pháp của mình.*

Phải nói đây vẫn là phương pháp bố cục chuẩn ngày nay của các công trình khoa học, tuy về hình thức có thể hơi khác một chút. Ở Phương Đông, chúng ta không thấy có một sự chuẩn hoá nào tương tự như vậy. Không thấy gì ngạc nhiên khi các cống hiến của trường phái Aristotle và bản thân ông đạt trình độ rất cao và được chấp nhận rộng rãi sau này.

2.4. MỘT SỐ PHÉP ĐO TRONG LỊCH SỬ HY LẠP

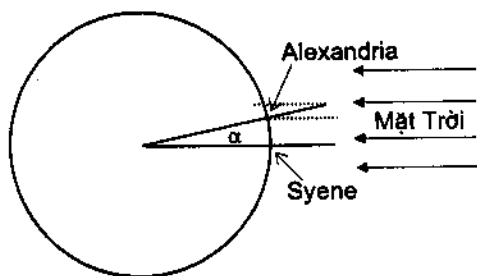
Có hai phép đo vật lý nổi tiếng trong lịch sử Hy Lạp cổ, một của Eratosthenes – đo chu vi Trái Đất và hai là của Aristarchus từ Samos – đo khoảng cách từ Trái Đất tới Mặt Trăng. Cả hai phép đo này đều cho kết quả khá chính xác. Người Hy Lạp còn đưa ra một ước đoán, nhưng không được chính xác lắm, về khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời.

Thời đó người ta sử dụng đơn vị độ dài là một "stade": 1 stade tương ứng với 184 m; nếu lấy 1 foot là 0,3048 m thì 1 stade bằng 603 feet, tuy nhiên các tài liệu còn giữ được lại nói 1 stade chỉ bằng 500 feet (154 m) hoặc cũng lắm 520 feet (158,5 m). Khoảng cách giữa hai thành phố Hy Lạp là Alexandria và Syene (Aswan ngày nay) đo được là 5000 stade (770 km nếu tính 1 stade=500 feet). Hai thành phố này nằm gần như trên cùng một kinh tuyến, thẳng góc từ trên xuống.

1. Eratosthenes đo chu vi Trái Đất

Là người sống ở Alexandria, ông biết rằng bóng một cái que cắm xuống mặt đất không bao giờ biến mất, nó luôn có một độ dài xác định và độ dài đó ngắn nhất vào giữa trưa ngày 21 tháng 6 hằng năm. Ông xác định⁽¹⁾ được góc nghiêng của cái que là khoảng $7,2^\circ$. Eratosthenes cũng biết rằng ở Syene có một cái giếng rất sâu mà đáy của nó chỉ được nhìn thấy vào trưa ngày 21/6 khi ánh nắng mặt trời rơi sâu xuống tận đáy, tức là nếu cắm một cái que thì bóng của nó sẽ biến mất. Mặt Trời khi đó ở ngay chính giữa đỉnh đầu.

Với giả định rằng Trái Đất hình cầu và ánh sáng mặt trời chiếu song song xuống Trái Đất, Eratosthenes làm một phép tính như vẽ trong hình 2.4. Dựa vào góc $\alpha \approx 7,2^\circ$ (tức $1/50$ vòng tròn, $360^\circ/7,2^\circ = 50$) và khoảng cách 5000 stade giữa Alexandria và Syene, ông tính được chu vi trái đất bằng $50 \times 5000 = 250.000$ stade. Theo đơn vị ngày nay, $50 \times 770(\text{km}) = 38.500 (\text{km})$, từ đó bán kính R của Trái Đất là 6.128 km. Sử dụng số liệu về R dẫn ở bảng 1.3, tr.27 ta thấy Eratosthenes đã chính xác tới $6.128/6.378 = 96\%$. Tuy nhiên nếu lấy 1 stade = 603 feet thì ông sai khá nhiều vì $R \approx 7.313 \text{ km}$, sai số $\approx 15\%$.

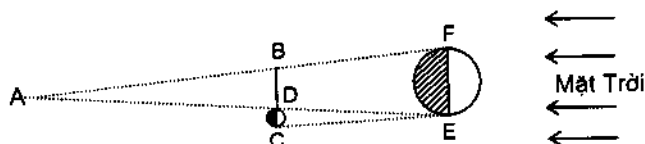


Hình 2.4. Phép đo chu vi Trái Đất của Eratosthenes (276–194 tr. CN)

(1) Vì mặt đất nhìn chung gồ ghề nên có lẽ ông đã phải đo đi đo lại nhiều lần, ở nhiều nơi khác nhau và lấy trung bình. Tuy nhiên, nếu giả định ông đã làm như vậy thì kiến thức về thuật lấy trung bình để xác định chính xác giá trị đo đã phải được biết đến từ rất sớm.

2. Aristarchus và phép đo khoảng cách Trái Đất-Mặt Trăng

Aristarchus từ Samos (310–230 tr.CN) là người sống trước Eratosthenes (276–194 tr. CN), như vậy phép đo của ông được thực hiện trước Eratosthenes. Điểm đặc biệt là trong phép đo này ông lại cần đến số liệu về bán kính trái đất. Các tài liệu nói rằng, ở vào thời điểm đó (40 năm trước Eratosthenes) người Hy Lạp đã biết giá trị gần đúng của R là 6.500 km (4.000 dặm). Nguyên lý đo khoảng cách Trái Đất – Mặt Trăng dựa vào một quan sát thực tế. Người ta nhận thấy rằng khi cầm một đồng xu có đường kính một đốt ngón tay để che Mặt Trời thì ở khoảng cách 108 đốt nó sẽ che khuất vừa vặn, còn ở khoảng cách gần hơn nó sẽ che hoàn toàn và ở khoảng cách xa hơn nó sẽ che không hết. Điều đó có nghĩa là vùng tối bị che khuất có dạng hình nón với cạnh xấp xỉ 108 lần đường kính của đồng xu. Người Hy Lạp cũng biết dựa vào

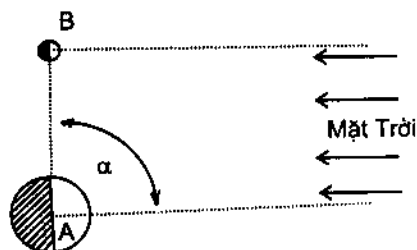


Hình 2.5. Phép đo khoảng cách Trái Đất – Mặt Trăng của Aristarchus (310–230 tr.CN)

nguyệt thực để ước đoán rằng, đường kính Trái Đất gấp 2,5 lần đường kính Mặt Trăng. Nhìn trên hình 2.5, nếu $BD = 2,5 \times DC$ thì với giả thiết $CE \parallel AF$ có thể suy ra rằng $AD = 2,5 \times DE$, từ đó $AE = 3,5 \times DE$. Vì $AE = 108 \times 2R \approx 1.404.000 \text{ km}$ nên $DE \approx 401.000 \text{ km}$. Dữ liệu trong bảng 1.2, tr.26 cho thấy $DE = 384.000 \text{ km}$, như vậy $\Delta DE/DE = 4\%$.

3. Phép đo khoảng cách Trái Đất – Mặt Trời

Bằng cách làm tương tự, nếu người Hy Lạp quan sát được nhật thực, họ có thể ước đoán được khoảng cách Trái Đất – Mặt Trời. Tuy nhiên, phương pháp tính toán của họ cho trường hợp này lại có vẻ không được thỏa đáng lắm. Phép đo dựa trên việc xác định góc α giữa



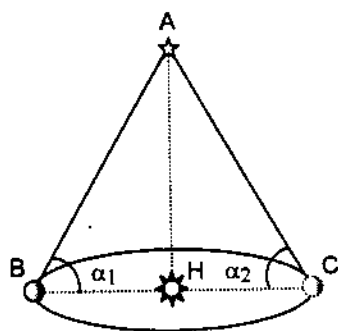
Hình 2.6. Phép đo khoảng cách Trái Đất – Mặt Trời của người Hy Lạp

Mặt Trăng – Trái Đất – Mặt Trời vào giữa tuần trăng (hình 2.6). Khi đó góc giữa Mặt Trời – Mặt Trăng – Trái Đất bằng 90° . Nếu biết α thì có thể tính được khoảng cách Trái Đất – Mặt Trời dựa trên khoảng cách Trái Đất – Mặt Trăng. Aristarchus đưa ra ước đoán góc $\alpha \approx 87^\circ$. Trên thực tế góc này chỉ vào khoảng $90^\circ - 1/6^\circ$. Giá trị tốt nhất của người Hy Lạp chỉ bằng 50% giá trị thực là 149,6 triệu *km* (xem bảng 1.2). Tuy nhiên, ngay cả 50% giá trị này cũng đã quá lớn so với khoảng cách Trái Đất – Mặt Trăng, và nếu như trên bầu trời Mặt Trời còn to hơn cả Mặt Trăng thì nó phải rất to trong thực tế. Điều này đủ để thuyết phục Aristarchus tin rằng chính Mặt Trời chứ không phải Trái Đất là trung tâm của Vũ Trụ.

4. Nguyên lý chung đo khoảng cách xa

Nhìn chung, từ trong lịch sử người ta đã đo các khoảng cách xa dựa trên các khoảng cách của quỹ đạo Trái Đất. Giả sử muốn xác định khoảng cách từ Mặt Trời đến vì sao A, người ta đo hai góc α_1 và α_2 tại hai thời điểm xuân phân và thu phân khi Trái Đất ở hai điểm đối lập nhau trên quỹ đạo và khoảng cách này được xác định hoàn toàn (hình 2.7). Sau đó dựa vào các hệ thức trong tam giác ABC mà xác định khoảng cách AH (xem Feymann[8]).

■



Hình 2.7. Đo khoảng cách xa dựa trên bán kính quỹ đạo Trái Đất

Lời thề của Galileo

Sau khi cuốn "Đối thoại về hai hệ thống thế giới" của Galileo ra đời, toà án dị giáo đã phạt Galileo phải ký lời tuyên thệ từ bỏ học thuyết Copernicus và ông bị quản thúc vô thời hạn. Dưới đây là bản dịch lời tuyên thệ chiếu theo cuốn "Tội lỗi của Galileo" [9] của Giorgio de Santillana, Chicago, 1954.

Con, Galileo, con của Vincenzo Galilei, người Florentine, 70 tuổi, bị buộc tội trước toà xin quỳ dưới chân Ngài, Đức Cha đáng kính Hồng y Giáo chủ Chủ tọa Toà án Dị giáo chống lại sự tiếm nhiệm đối bại của dị giáo trong toàn bộ Giáo hội Cơ đốc, nhìn thấy trước mắt mình và đặt tay lên Kinh Thánh, xin thề rằng con đã tin tưởng, luôn tin tưởng và nhờ ơn Chúa sẽ tin vào tất cả những gì đã được gìn giữ và thuyết giáo bởi Toà Thánh.

Tuy nhiên theo lời phán quyết của toà, con phải từ bỏ giả thuyết sai lầm rằng Mặt Trời là tâm của Vũ Trụ và bất động, còn Trái Đất không phải là tâm của Vũ Trụ và chuyển động; và không được lưu giữ, bảo vệ hoặc tuyên truyền dưới bất kỳ hình thức nào – nói hoặc viết ra thành văn những luận điểm sai lầm sau khi đã được thông báo là các luận điểm đó trái ngược với Thánh Kinh. Con đã viết và cho in một cuốn sách trong đó bàn về luận điểm đã bị nghiêm cấm này và đã đưa ra những lý lẽ mạnh dạn để biện minh cho nó mà không chỉ ra được bất kỳ một giải pháp nào, con đã bị kết tội do có nghi ngờ dị giáo trầm trọng, có nghĩa là đã lưu giữ và tin vào việc Mặt Trời là tâm của Vũ Trụ và bất động, còn Trái Đất thì không phải là tâm và chuyển động. Bởi vậy, với hy vọng xoá bỏ khỏi ý nghĩ của Đức Giáo chủ và của tất cả giáo dân ngoan đạo, sự ngờ vực vừa dấy lên chống lại con, với trái tim chân thực và lòng thành, con xin từ bỏ, nguyên rủa và ghê tởm những lỗi lầm trên, những điều dị giáo và nói chung tất cả những sai lầm khác, những dị giáo và giáo phái đối lập với Toà Thánh, con xin thề rằng trong tương lai sẽ không bao giờ nói hay khẳng định bất kỳ điều gì có thể tạo nên sự ngờ vực tương tự; nếu biết bất kỳ kẻ dị giáo nào hoặc nghi ngờ ai đó là dị giáo thì sẽ tố giác lên Toà án Dị giáo, hoặc Giáo hội địa phương nơi cư trú. Tiếp nữa con xin thề và xin hứa sẽ chấp thuận và tôn trọng mọi hành tội sám hối mà Toà này đã và sẽ tuyên phạt con. Nếu con không tuân thủ những lời hứa trên – điều mà Chúa đã nghiêm cấm, con xin chịu mọi hình phạt bắt buộc đã được phổ biến trong các quy định của giáo hội và các quy định khác đối với tội trên. Xin Chúa ban phúc với cuốn Kinh Thánh mà con đang đặt tay lên.

Con, Galileo Galilei, xin tuyên bố, thề nguyện, hứa và tự huấn thị bản thân mình như đã nói ở trên, với chứng thực là đã tự tay ký vào bản tuyên thệ này, được đọc đúng từng từ một tại tu viện Minerva, thành Rome ngày 21 tháng 6, 1633. Con, Galileo Galilei, tuyên thệ từ bỏ như trên với chính bản tay mình.

Chương 3

ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

Động học, hay bằng tiếng Anh *kinematics* là từ dùng để chỉ lĩnh vực cơ học nghiên cứu các quy luật chuyển động mà không đề cập tới nguyên nhân gây nên chuyển động là các lực. Cần phân biệt động học với động lực học (*dynamics*). Khác với động lực học, động học không đề cập tới các đại lượng như khối lượng, động lượng hay năng lượng. Tuy nhiên động học chất điểm của Galileo đã đề cập tới những vấn đề rất căn bản của cơ học. Ngoài việc phân biệt được *gia tốc* và chỉ ra sự phụ thuộc định lượng giữa *quãng đường* và *thời gian* trong chuyển động có gia tốc, nó đã bàn tới *nguyên lý quán tính* và *nguyên lý tương đương* giữa hai loại khối lượng hấp dẫn và khối lượng quán tính. Trong phần này chúng tôi cũng trình bày luôn các định luật Kepler như một trường hợp riêng của động học chất điểm.

3.1. CÁC ĐẠI LƯỢNG VẬT LÝ CỦA CHUYỂN ĐỘNG

1. Ba đại lượng của chuyển động

Có ba đại lượng vật lý chính gắn liền với chuyển động, đó là *thời gian* – thường được ký hiệu là $t^{(1)}$; *không gian* – thường được ký hiệu là s hay x và *khối lượng* thường ký hiệu bằng chữ m . Chuyển động biểu thị mối quan hệ tương quan giữa các đại lượng này. Vấn đề các mối quan hệ đó có những đặc điểm gì đã được nhiều học giả đưa ra trong những thời kỳ lịch sử khác nhau. Aristotile cho rằng "*vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ*" còn Galileo lại phản đối quan điểm này và cho rằng "*mọi vật đều rơi nhanh như nhau*". Điều đáng chú ý là quan điểm của Aristotile đã

(1) Chú ý: Trong vật lý chữ T hoa thường chỉ nhiệt độ hoặc chu kỳ, còn chữ t nhỏ thường chỉ thời gian.

tồn tại suốt gần 20 thế kỷ mà không có một ai phản đối nó⁽¹⁾. Người ta cũng đã chấp nhận quan điểm *không gian và thời gian tuyệt đối* của Newton một thời gian dài cho đến tận cuối thế kỷ 19 khi xuất hiện các bằng chứng thực nghiệm chỉ ra sự bất hợp lý của nó.

Bảng 3.1. NIÊN BIỂU THỜI GIAN

t (s)	Chú giải
10^{18}	Tuổi phỏng đoán của vũ trụ
10^{15}	Tuổi con người
10^5	1 ngày
0.5×10^3	Ánh sáng đi từ Mặt Trời đến Trái Đất
1	1 nhịp tim
10^{-3}	Sóng âm
$10^{-6} - 10^{-8}$	Sóng radio, FM, TV
10^{-9}	Ánh sáng đi được 25 cm
10^{-18}	Ánh sáng đi qua nguyên tử
10^{-24}	Ánh sáng đi qua proton

Ba đại lượng khối lượng, không gian và thời gian là các đại lượng thông dụng trong cuộc sống hằng ngày và chúng được "cân, đong, đo, đếm" bằng nhiều phương pháp khác nhau. Các đơn vị thông dụng ngày nay là *1kg*, *1m* và *1h*. Trước đây, ở Việt Nam đã sử dụng đơn vị *1 cân ta* (*0,605 kg*), *1 thước* (*0,42 m*) và *1 giờ* (*2h*). Tại sao các đơn vị này lại được chọn như thế có lẽ phát sinh từ thói quen và tập quán sinh hoạt. Nhìn chung 1 giây tương đương với 1 nhịp tim, *1kg* với một khối lượng được coi là "vừa tay", *1m* tương ứng với một sải tay hay một vài bước chân. Có một vài điều lý thú khi quan sát sự tương quan của các đơn vị đo này. Chẳng hạn tốc độ chạy 100 mét của con người xấp xỉ 10s, gia tốc trọng trường cũng $\approx 10m/s^2$. Tốc độ đi bộ trung bình khoảng $3 - 4km/h \approx 1m/s$, tương đương với việc bước được 2 - 3 bước trong một giây.

Đồng hồ là dụng cụ đo được sản xuất nhiều nhất và đây có lẽ cũng là dụng cụ đo duy nhất được dùng làm đồ trang sức. Tất cả các hiện tượng tự nhiên có tính tuần hoàn đều có thể dùng để đo thời gian, ví dụ ngày, tháng, năm. Hiện tượng bóng của một cái que cắm ở một chỗ cố định trên mặt đất chuyển động tuần hoàn trong một ngày đã được dùng như đồng hồ mặt trời. Thậm chí tập quán sinh hoạt của một số loài vật như gà (về chuồng khi chập tối), ngựa (vào chuồng lúc giữa trưa), chuột (rúc rích lúc nửa đêm)... cũng được dùng ở Việt Nam và một số nước

(1) Phải nói quan điểm của Aristotle có tính *cảm giác* rất cao. Trong thực tế giảng dạy, chúng tôi gặp nhiều trường hợp mà sinh viên vẫn suy xét theo cảm giác "nặng nhanh nhẹ chậm", mặc dù đã được khuyến cáo rằng mọi vật đều rơi với cùng một gia tốc như nhau.

châu Á để chỉ các mốc thời gian (giờ dậy, giờ tí, giờ Ngọ...). Người ta có thể dùng 1 canh giờ, 1 tuần trà hay 1 chớp mắt để mô tả khoảng thời gian trôi qua. Galileo đã từng đo thời gian bằng nhịp tim. Vào thời Huygens người ta đã chế tạo được các loại đồng hồ cơ học có con lắc lò xo. Ngày nay chúng ta có đồng hồ điện tử, đồng hồ quartz v. v...

Thuốc cũng là một dụng cụ đo phổ biến, yêu cầu chính là ít bị biến dạng bởi môi trường bên ngoài. So với đồng hồ, thuốc có vẻ quá đơn giản và không ai dùng nó để làm đồ trang sức cả. Các đặc tính kích thước cơ thể con người như 1 gang tay, bề dày ngón tay cái (1 inch), 1 bước (1 bộ), 1 sải tay... cũng đều được dùng để đo khoảng cách. Về nguyên tắc, mọi đơn vị đo thời gian, nếu được gắn với một chuyển động cụ thể đều có thể dùng để đo khoảng cách. Ví dụ, khoảng cách từ địa điểm A đến địa điểm B là 1 ngày đường, từ vì sao A đến vì sao B là 100 năm ánh sáng.

Các thuốc kẻ ngày nay được sản xuất chủ yếu với hai loại đơn vị là *mét* và *inch*. Các nước Anh, Mỹ vẫn duy trì đơn vị *inch* đối với độ dài (2,54cm), *pound* đối với khối lượng (0,454kg, 1 pound = 16 ounce, 1 ounce = 28,35g). Đi cùng với các đơn vị đo độ dài là các đơn vị đo diện tích như *acre*, *ha*, *sào*, *mẫu*... Trong hệ SI người ta dùng đơn vị mét vuông (m^2).

Cân là thứ không thể thiếu. Cân lò xo rất phổ biến ngày nay.

Bảng 3.2. NIÊN BIỂU KHOẢNG CÁCH

s (m)	Chú giải
10^{27} (10^9 n.a.s*)	Độ lớn vũ trụ
10^8 n.a.s.	Thiên hà gần nhất
10^3 n.a.s.	Tâm dải Thiên hà
1 n.a.s.	Chòm sao gần nhất
1	Vài bước chân
$4 \cdot 10^8$	Mặt Trăng
$5 \cdot 10^5$	Độ cao vệ tinh
10^{-3}	Kích thước tinh thể
10^{-9}	1 Nanomét (nm)
10^{-10}	1 Ångström (Å)
10^{-12}	Bán kính nguyên tử
10^{-15} - $6 \cdot 10^{-15}$	Bán kính hạt nhân

(*) n.a.s. là năm ánh sáng

Bảng 3.3. KHỐI LƯỢNG MỘT SỐ VẬT THỂ

m (kg)	Vật thể
$\approx 10^{40}$	Thiên hà
10^{24}	Trái Đất
10^6	Tàu thủy
10^3	Ô tô
10^2	Động vật
1	Bưu kiện
10^{-3}	Côn trùng
10^{-15}	Virút
10^{-28}	Phân tử H_2O
10^{-32}	Electron

Nó đơn giản, rõ tiền tuy không chính xác lắm. Loại cân này hoạt động dựa trên sự co giãn tuyến tính của lò xo dưới sức kéo hoặc sức nén của các trọng lượng khác nhau. Trong quá khứ loại cân đối trọng hoạt động dựa trên cân bằng trọng lực của vật được cân với các khối lượng chuẩn cho trước có lẽ được sản xuất đầu tiên. Nó đơn giản và có độ chính xác cao. Loại cân tiểu li thông dụng trong các phòng thí nghiệm vẫn được chế tạo dựa trên nguyên tắc này. Có lẽ ít ai để ý rằng cân cũng chính là dụng cụ hay được dùng để đo gia tốc trọng trường $g = F/m$. Vì các khắc đo x thường được chuẩn tỷ lệ thuận với lực tác dụng F ($F = -kx$) nên nếu lực này thay đổi do gia tốc trọng trường ở vị trí đo thay đổi thì cân sẽ chỉ các trọng lực khác nhau. Trong ngành địa chất người ta vẫn phải thường xuyên xác định bản đồ phân bố gia tốc trọng trường trên bề mặt trái đất vì nó có ý nghĩa lớn đối với các khảo sát chuyên ngành. Tuy nhiên, trong cuộc sống hằng ngày thì có thể bỏ qua sự thay đổi nhỏ này.

2. Hai loại khối lượng

Khối lượng m là đại lượng khá đặc biệt trong bộ ba đơn vị không gian, thời gian và khối lượng. Trong khi lý thuyết tương đối chỉ ra rằng không gian và thời gian chỉ là hai mặt của một cấu trúc không - thời gian duy nhất thì khối lượng xem ra không phải chỉ có một. Ít ra cũng phải phân biệt *hai loại khối lượng khác nhau* được nhắc đến từ thời Newton nhưng lại bằng nhau tuyệt đối!

Loại thứ nhất gắn liền với tương tác hấp dẫn giữa hai vật thể nên được gọi là *khối lượng hấp dẫn* m_G . Hai vật có khối lượng hấp dẫn càng lớn thì chúng hút nhau càng mạnh. Khi một vật chuyển động trong một trường hấp dẫn của một

Bảng 3.4. CÁCH GỌI TÊN CẤP SỐ NHÂN CỦA CÁC ĐƠN VỊ NGÀY NAY

Cơ số nhân	Cách gọi	Ký hiệu
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hekto	h
10	deka	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	mikro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

vật thể cho trước M_G thì nó bị hút càng mạnh nếu khối lượng hấp dẫn m_G của nó càng lớn ($F_G = GM_G m_G / r^2$).

Loại thứ hai gắn với chuyển động của bản thân vật và biểu hiện sức ì của vật đối với lực tác dụng gọi là *khối lượng quán tính* m_a , được cho bằng tỷ lệ F/a giữa lực tác dụng và gia tốc vật nhận được. Vật sẽ có sức ì lớn nếu khối lượng quán tính của nó lớn và ngược lại.

Khi một vật chuyển động trong trường hấp dẫn M_G thì nó bị tác dụng một lực hấp dẫn F_G tỷ lệ thuận với khối lượng hấp dẫn m_G của vật; lực này cho vật một gia tốc a tùy theo khối lượng quán tính m_a của nó:

$$m_a a = F_G = GM_G m_G / r^2 \quad (3.1.1)$$

Từ đó suy ra gia tốc a có giá trị:

$$a = (GM_G / r^2) (m_G / m_a) = g (m_G / m_a) \quad (3.1.2)$$

Các số liệu thực nghiệm cho đến nay đều chứng tỏ tỷ lệ $m_G / m_a = 1$ và sự tương đương này đã được Newton nhắc đến ngay khi mở đầu luận văn "*Principia*"⁽¹⁾ năm 1687 của ông, Newton coi đó như một hòn đá tảng đối với lý thuyết hấp dẫn.

Phương pháp kiểm chứng đơn giản nhất là đo xem hai vật có khối lượng và thành phần cấu tạo khác nhau có rơi tự do với các gia tốc như nhau trong trường hấp dẫn bên ngoài hay không. Galileo cũng đã từng khẳng định rằng chúng đều rơi như nhau và bản thân Newton cũng đã từng kiểm chứng lại bằng cách đo chu kỳ dao động của các con lắc có độ dài dây treo như nhau nhưng được treo những vật nặng nhẹ có thành phần khác nhau. Ông kết luận rằng tỷ lệ này (m_G / m_a) không đổi đối với mọi loại vật chất. Bessel (1784 – 1846) kiểm chứng lại còn chính xác hơn và năm 1889 Eötvös xác định tỷ lệ này với độ chính xác 10^9 . Năm 1964 Roll, Krotov và Dicke xác định lại tới độ chính xác lên tới 10^{11} .

Dễ thấy rằng nếu tỷ lệ m_G / m_a thay đổi, chẳng hạn theo m_G^2 thì chúng ta có ngay quy luật của Aristotle "vật nặng rơi nhanh hơn

(1) Tên La Tinh nguyên bản là "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*", Cambridge, 1686, 1713, 1726; bản dịch tiếng Anh "The Mathematical Principles of Natural Philosophy" của Andrew Motte, 1729; thường được gọi tắt là "*Principia*". Dịch nghĩa tên sách ra tiếng Việt là "Các nguyên lý toán học của khoa học tự nhiên", trong giáo trình này chúng tôi để nguyên tên gọi thông dụng của cuốn sách là "*Principia*".

vật nhẹ". Giả sử chúng ta đứng trong một thang máy đang rơi tự do, nếu Aristotle đứng thì bằng cách quan sát chuyển động rơi của các vật nặng, nhẹ khác nhau chúng ta có thể phát hiện ra rằng chúng ta đang rơi. Tuy nhiên, nếu mọi vật đều rơi như nhau thì chúng ta không có khả năng phân biệt được chúng ta có rơi trong trường hấp dẫn bên ngoài hay không. Dĩ nhiên trường hấp dẫn này phải đồng nhất. Galileo đã đưa ra một lý lẽ thuyết phục lý giải tại sao các vật đều rơi như nhau (xem §3.3, tr.58).

Sự tương đương giữa hai loại khối lượng này có thể là ngẫu nhiên đối với Galileo hay Newton, nhưng Einstein là người đã chỉ ra mối liên hệ sâu xa của nó với sự biến dạng hình học của không - thời gian trong trường hấp dẫn. Nếu coi sự tương đương này có giá trị *nguyên lý* thì có thể đưa ra giả thuyết thuyết phục về sự tương đương giữa biến dạng không - thời gian và trường hấp dẫn. Einstein nói rằng đó là "*ý tưởng hạnh phúc nhất trong đời ông*". Khối lượng theo Einstein chính là nguyên nhân làm không - thời gian bao quanh vật chất bị biến dạng (*xác định bằng phương trình trường*) và ngược lại ở đâu có biến dạng không - thời gian thì ở đó chắc có tồn tại một trường hấp dẫn (*xác định bằng nguyên lý tương đương*). Trong một khoảng không - thời gian đủ nhỏ, trường đó là đồng nhất và mọi vật đều rơi như nhau. Tại đây không - thời gian là phẳng và các quy luật vật lý thỏa mãn lý thuyết tương đối hẹp.

3. Đại lượng chưa được nhắc đến

Trong bộ ba (s , t , m) còn thiếu một đại lượng cơ bản đặc trưng cho chuyển động mà chúng ta sẽ không thấy thiếu nó nếu chỉ quan tâm đến *động học* mà không xét đến *động lực học* của chuyển động, đó là động lượng p . Bằng cảm nhận tự nhiên cũng có thể thấy rằng khi vật nặng chuyển động nó tạo ra sức va chạm lớn hơn so với vật nhẹ. Sức va chạm vật mang theo đó tỷ lệ thuận với khối lượng và vận tốc của nó. *Động lượng* là tích của khối lượng và vận tốc $p = mv$. Khái niệm động lượng như một "lượng chuyển động" (quantity of motion) hình thành khá sớm và hầu như gắn liền với vấn đề bảo toàn động lượng trong một số chuyển động.

3.2. CƠ HỌC CỦA GALILEO

1. Galileo Galilei (1564 – 1642)

Galileo sinh năm 1564 tại Pisa, Tuscany, Ý. Ngôi nhà nơi ông sinh ra vẫn còn. Bố ông là một nhạc công, ông Vincenzo Galilei (1520 – 1591)⁽¹⁾. Galileo là người rất nổi tiếng ngay từ khi còn sống. Tu sĩ Sarpi, nhà thần học chính thức tại Cộng hoà Venice đã nói về ông: "... để đem đến cho chúng ta ngành khoa học về chuyển động, Chúa và Tự nhiên đã chung tay để tạo nên thiên tài của Galileo". Năm 17 tuổi ông học ngành Y khoa tại Đại học Pisa theo lời khuyên của gia đình nhưng về sau chuyển sang học Toán. Từ năm 25 tuổi Galileo đã đảm nhiệm chức vụ "Matematico Primario" (tạm dịch là Trưởng Bộ môn Toán) tại Đại học Pisa. Năm 28 tuổi Galileo chuyển về Đại học Padua thuộc Cộng hoà Venice và ở lại đó cho đến năm ông 46 tuổi⁽²⁾. Galileo kết hôn năm 1599 khi 35 tuổi với bà Maria Gambe, 21 tuổi (trẻ hơn ông 14 tuổi). Hai người có với nhau ba người con. Năm 46 tuổi (1610), Galileo chế ra kính viễn vọng có độ phóng đại 21 lần, nó đã giúp Galileo khám phá ra nhiều điều lý thú về Mặt Trăng, sao Mộc và sao chổi được ghi chép lại trong tác phẩm *Siderus Nuncius*⁽³⁾. Năm 1611, Galileo đi Rome để gặp gỡ các giáo sĩ và với chiếc ống nhòm ông đã thuyết phục họ đến mức Bellarmine, một giáo sĩ cao cấp thời đó, đã phải thối lui như sau:

"... nếu có một minh chứng Mặt Trời là tâm điểm của Vũ Trụ chứ không phải Trái Đất, rằng Trái Đất quay quanh Mặt Trời chứ không phải ngược lại, thì cần phải rất thận trọng khi lý giải các điểm mâu thuẫn với Thánh Kinh và tốt hơn hết là nói *chúng ta chưa hiểu* chứ không nên vội khẳng định rằng điều minh chứng đó là giả dối. Tôi đã không tin vào một minh chứng như vậy cho đến khi được nhìn thấy nó..."

(1) Ông này có viết một cuốn sách về lý thuyết âm nhạc được lưu truyền rộng ở châu Âu thời đó. Kepler đã nhắc đến cuốn sách này nhiều lần trong *Harmonices mundi libri V* (Linz, 1619) (tác phẩm có chứa định luật 3 Kepler $T^2 \propto r^3$).

(2) Cộng hoà Venice chỉ có 150.000 dân nhưng sản xuất 40 triệu lít rượu vang một năm. Đây là nơi có nhiều quyền lợi được bảo hộ và một bầu không khí chính trị khá tự do.

(3) Ngày nay một ống nhòm thông thường của Trung Quốc có độ phóng đại 20–30 lần được bán với giá khá rẻ.

Năm 1616, học thuyết Copernicus bị cấm và Galileo đã thuyết phục Bellarmine cho ông một "quyết định" được phép "*nghiên cứu tiếp*" và chỉ nghiêm cấm không được "*cất giữ*" và "*bảo vệ*" học thuyết này mà thôi. Tờ quyết định quý giá đó đã cứu ông thoát tội trong bản án năm 1632 về "các nghi ngờ có tính dị giáo" liên quan đến cuốn "*Bàn về hai hệ thống vũ trụ của Ptolemy và Copernicus*" xuất bản năm 1632 tại Florence. Thực ra, trong phiên toà người ta còn đưa ra một quyết định khác nghiêm cấm ông "*cất giữ, bảo vệ và truyền bá*" học thuyết Copernicus, nhưng nó lại không có chữ ký nên Galileo mới thoát tội. Galileo cho xuất bản một cuốn sách như vậy sau khi học thuyết Copernicus đã bị cấm từ năm 1616 có lẽ là do ông tin tưởng vào sự bảo vệ của người bạn thân của mình là Giáo hoàng Urban VIII, lên ngôi năm 1623. Tuy nhiên, ngay trong tháng 8 năm 1632 sách của Galileo đã bị thu hồi và ông bị đưa ra toà. Người ta không xét đến nội dung cuốn sách mà chỉ xem Galileo có vi phạm lệnh cấm "*cất giữ, bảo vệ và truyền bá*" học thuyết Copernicus hay không mà thôi. Kết quả có lẽ là một sự thoả hiệp, Galileo không bị vào tù nhưng bị quản thúc cho đến chết tại nhà riêng ở Siene. Đó là những năm ông nghiên ngẫm để viết ra cuốn "*Bàn về hai ngành khoa học mới*".

Phản ứng của Galileo đối với quyết định của Giáo hội một phần được thấy qua bản tuyên thệ cay đắng mà ông đã đọc trước phiên toà (xem "*Lời thề của Galileo*", tr.48). Galileo luôn thể hiện sự chán nản khi người ta không biết chấp thuận lẽ phải. Năm 1623, ông viết (trong *The Assayer*):

"... tôi nhận ra rằng trong nghiên cứu người ta luôn luôn phải tự củng cố mình dựa trên quan điểm của một vài tác giả đã thành danh, như thể tâm trí của chúng ta hoàn toàn trống rỗng và cần cõ nếu không biết trung thành với cách lập luận của kẻ khác...".

2. "*Bàn về hai ngành khoa học mới*" của Galileo

Cuốn "*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, interno a due nuoue Scienze Attenendi alla Mecanica & i Movementi Locali*" quen gọi là "*Bàn về hai ngành khoa học mới*" (Two New Sciences), được lược dịch ra tiếng Anh trong khoảng 25 năm sau khi Galileo mất. Theo giáo sư Alfonso de Salvio, các bản này do Thomas Salibury dịch và toàn bộ 200 bản in đã cháy sạch trong vụ hoả hoạn năm 1666 tại London. Các bản còn lại không chắc là bản dịch gốc, ngay cả bản trong Bảo tàng Anh (British

Museum) cũng không chắc là bản dịch gốc. Năm 1730 có xuất hiện một bản dịch sang tiếng Anh khác của Thomas Weston nhưng ngôn ngữ rất khó đọc.

Bản dịch được lưu hành rộng rãi hiện nay là của Giáo sư Alfonso de Salvio in tại New York năm 1914 do NXB Macmillan ấn hành. Nó được dịch theo bản gốc của NXB Elzevirs⁽¹⁾ từ năm 1638, bản này được in lại trong "*National edition of the works of Galileo*" (Tuyển tập Quốc gia các công trình của Galileo, trọn bộ 20 tập) do giáo sư Antonio Favaro, Đại học Padua biên tập. Chúng tôi dùng bản dịch này để tham khảo trong các phần sau. Ngay trong lời giới thiệu năm 1914, giáo sư Alfonso de Salvio viết:

"... hàng thế kỷ nay (do thiếu bản dịch) chúng ta bị đặt vào tình thế bất thường vì không có cơ hội để đọc được những gì mà chính Galileo đã viết... mặc dù được biết tới ông như người sáng lập ra nền vật lý mới"⁽²⁾.

Đánh giá về cuốn sách này, trong một bức thư gửi người bạn tên là Elia Diodoti, Galileo nói "... là quan trọng nhất trong tất cả những gì tôi đã đề cập tới". Ông đã làm việc 18 năm liền để hoàn thiện nó và nhiều kết quả đã được ông giảng dạy cho sinh viên từ trước. Việc xuất bản cuốn sách cũng gặp không ít khó khăn vì ông đã bị cấm tuyên truyền mọi thứ có liên quan đến Copernicus. Nhưng cuối cùng thì Louis Elzevirs – một nhà xuất bản người Hà Lan cũng đã cho in cuốn sách năm 1638, bốn năm trước khi Galileo qua đời.

Cuốn sách được viết theo lối đối thoại giữa ba nhân vật là Sagredo, Simplicio và Salvati, gồm 4 chương gọi lần lượt là "Ngày 1", "Ngày 2", "Ngày 3" và "Ngày 4". Nghe nói Galileo đã gần hoàn thành cả "Ngày 5"

(1) Ngày nay là NXB Elseviers, Hà Lan.

(2) Người Pháp đã dịch cuốn sách này ngay từ khi Galileo còn sống, người dịch là Mersenne – một nhà vật lý nổi tiếng.



Hình 3.1. Tờ bìa cuốn "Bàn về hai ngành khoa học mới" của Galileo

bàn về các *lực va đập và dây xích* nhưng không kịp xuất bản. Sagredo là tên một quý tộc Venice, bạn thân của Galileo. Salvati (nhà khoa học) và Simplicio (người đối thoại) là hai nhân vật giả tưởng. Cuốn sách dày khoảng 300 trang, tùy theo khổ in, bao gồm nhiều hình vẽ – một số hình vẽ rất đẹp và không có lấy một công thức. Vào thời bấy giờ người ta đã biết đến các phương trình đại số nhưng họ lại cho rằng mọi chứng minh phải được thiết lập trên cơ sở hình học Euclid mới được coi là chặt chẽ. Phong cách trình bày này phổ biến từ thời Euclid và tiếp diễn cho đến thời Newton, nó lặp lại cả trong cuốn "*Principia*" nổi tiếng của ông.

3.3. NGUYÊN LÝ TƯƠNG ĐƯƠNG

Chuyển động rơi tự do của các vật có khối lượng khác nhau được bàn đến trong phần 1 ("Ngày 1") của cuốn sách. Phần hai ("Ngày 2") bàn về các vấn đề như độ bền của các hệ cơ học có kích thước khác nhau, độ chịu lực của các cánh tay đòn có bề dày và thể tích khác nhau, chẳng hạn một định lý nêu :

"Trong các lăng trụ và các hình trụ tròn có chiều dài như nhau nhưng bề dày khác nhau, độ chịu lực bề tăng lên theo lũy thừa bậc 3 của độ dày" (lời của Salvati).

Dựa vào các lập luận của mình, Galileo đã đưa ra một khẳng định lý thú rằng người khổng lồ khó có thể tồn tại vì sức chịu lực của bộ xương không tăng tỷ lệ với kích thước của nó. Chúng ta sẽ không nhắc chi tiết hơn đến phần này. Các trích dẫn sau đều được lấy từ phần 1.

1. Mọi vật đều rơi như nhau

Galileo đã có một phân tích đầy thuyết phục, đáng để dẫn ra ở đây, về sự rơi đồng đều của các vật có khối lượng và thành phần khác nhau. Luận điểm của Aristotle bị phê phán kịch liệt.

Simplicio nói: "Aristotle phản đối quan điểm cho rằng, chân không là điều kiện tiên quyết của chuyển động... Theo ông, tốc độ của vật tỷ lệ nghịch với mật độ môi trường... vì mật độ chân không nhỏ hơn bất cứ môi trường nào nên mọi vật chuyển động trong chân không phải chuyển động tức thì, nhưng chuyển động tức thì không tồn tại vì thế không thể có chân không".

Salvati nói: "... đầu tiên tôi thật sự nghi ngờ rằng Aristotle chưa bao giờ kiểm tra bằng thực nghiệm xem có đúng hay không trường hợp hai hòn đá, một có khối lượng gấp 10 lần hòn kia, nếu rơi từ cùng độ cao, giả sử 100 thước⁽¹⁾, sẽ có tốc độ khác nhau tới mức là khi hòn nặng hơn chạm đất thì hòn thứ hai mới chỉ rơi được 10 thước".

Simplicio: "Theo lời Aristotle thì ông ta đã làm thí nghiệm, ông đã nói: 'chúng ta thấy vật nặng...', từ 'thấy' chỉ rõ ông đã làm thí nghiệm".

Sagredo: "Nhưng tôi, người đã làm thí nghiệm có thể khẳng định rằng một quả đạn pháo nặng một hoặc hai trăm cân, hay hơn thế sẽ không chạm đất sớm hơn một gang tay so với viên đạn súng trường nặng một nửa cân, nếu cùng rơi từ độ cao 200 thước".

Salvati: "... Nếu chúng ta buộc hai vật rơi với tốc độ khác nhau lại với nhau thì rõ ràng vật nặng sẽ bị chậm đi trong khi vật nhẹ sẽ rơi nhanh lên. Bạn có đồng ý với ý kiến của tôi không?".

Simplicio: "Dĩ nhiên điều đó hoàn toàn đúng".

Salvati: "Nhưng nếu tôi đúng và nếu hòn đá nặng rơi với tốc độ, giả sử là 8 và hòn đá nhẹ rơi với tốc độ là 4 thì sau khi buộc chúng lại, hệ sẽ rơi với tốc độ nhỏ hơn 8; thế nhưng sau khi buộc lại thì chúng trở thành hòn đá to hơn cả hòn đá lớn đang rơi với tốc độ 8. Thế là một hòn đá to lại rơi với tốc độ nhỏ hơn hòn đá nhỏ, ngược hẳn với giả thiết của bạn...".

2. Tốc độ rơi và mật độ môi trường

Tiếp đó, Galileo đi xa hơn và phủ nhận quan điểm của Aristotle cho rằng tốc độ rơi của vật tỷ lệ nghịch với mật độ môi trường, nghĩa là vật rơi nhanh hơn trong môi trường loãng và chậm hơn trong môi trường đặc.

Salvati: "... Tôi ngạc nhiên vì bạn không nhận ra sự sai lầm (của quan điểm này) vì nếu nó đúng ... thì chẳng nhẽ mọi vật rơi trong không khí đều rơi trong nước. Kết luận này quả là sai vì nhiều vật rơi trong không khí nhưng có rơi trong nước đâu, thậm chí chúng còn nổi".

Simplicio: "Tôi không thấy sự cần thiết của kết luận này; Tôi nói thêm rằng Aristotle chỉ nói về những gì rơi được trong cả hai môi trường

(1) Đơn vị đo trong nguyên bản là "cubit", tạm dịch là "thước", 1 cubit = 45,72 cm.

chứ không phải những cái rơi trong không khí nhưng lại nổi bông bênh trong nước".

Salvati: "Lẽ ra các nhà triết học phải biết tránh các lập luận tương tự như lập luận mà bạn vừa nêu để không mắc phải sai lầm. Hãy cho tôi một tỷ lệ nhất định giữa mật độ của môi trường làm chậm tốc độ rơi như của nước hay của bất kỳ môi trường nào bạn muốn với mật độ của không khí. Hãy ấn định một con số tùy ý".

Simplicio: "Tỷ lệ này có tồn tại đấy; giả sử là 10, tức là khi vật rơi trong nước nó sẽ bị chậm lại 10 lần".

Salvati: "Bây giờ tôi lấy một vật rơi trong không khí nhưng không rơi trong nước, ví dụ một quả bóng bằng gỗ, bạn hãy gán cho nó một tốc độ rơi trong không khí tùy ý".

Simplicio: "Cứ giả sử nó rơi với tốc độ 20".

Salvati: "Tốt. Nếu cứ theo Aristotle thì quả bóng này sẽ rơi trong nước với tốc độ 2... Thế nhưng vì nó lại nổi trên mặt nước nên tôi nghĩ bạn sẽ đồng ý với tôi rằng cần tìm một quả bóng bằng vật liệu khác sao cho nó rơi trong nước với tốc độ 2".

Simplicio: "Dĩ nhiên chúng ta có thể, vật liệu đó phải nặng hơn gỗ".

Salvati: "Chính xác. Nếu quả bóng mới này rơi với tốc độ 2 trong nước thì nó sẽ rơi với tốc độ bao nhiêu trong không khí? Nếu tuân theo Aristotle thì bạn phải trả lời rằng đó là 20. Nhưng 20 lại là tốc độ mà bạn ấn định cho quả bóng bằng gỗ; vậy thì vật nhẹ hơn này và quả bóng mới nặng hơn kia lại rơi với cùng một tốc độ. Bây giờ các nhà triết học phải làm sao đây để có thể hoà hợp kết quả này với khẳng định trước rằng vật nặng rơi nhanh hơn vật nhẹ? Không cần đi sâu thêm vào vấn đề, (tôi không hiểu) tại sao những đặc tính hiển nhiên này lại có thể thoát khỏi sự chú ý của bạn? Bạn không hề thấy rằng một vật có thể rơi trong nước nhanh hơn vật thứ hai hàng trăm lần nhưng trong không khí thì chúng hầu như rơi đồng đều, khác nhau không quá một phần trăm. Một quả trứng bằng đá rơi trong nước nhanh hơn quả trứng gà một trăm lần nhưng trong không khí chúng rơi cách nhau không quá bốn đốt ngón tay. Bạn thấy đấy, không có chỗ cho sự phản đối hay sự lựa chọn khác. Vì thế chúng ta kết luận rằng lập luận này không chống lại sự tồn tại của chân không..."

3. Chu kỳ con lắc

Ở trang 139 cuốn "*Bàn về hai ngành khoa học mới*", chúng ta thấy Galileo ý thức thế nào về chuyển động của con lắc. Công thức:

$$a = (2\pi/T)^2 r \quad (3.3.1)$$

hay tương đương,

$$T = 2\pi(r/a)^{1/2} \quad (3.3.2)$$

hầu như đã được thiết lập.

Salvati: "... để trả lời câu hỏi có phải một con lắc luôn hoàn thành một chu kỳ dao động, lớn, vừa hay nhỏ, trong một khoảng thời gian bằng nhau, tôi sẽ trả lời dựa trên những gì tôi nghe được từ ngài giáo sư⁽¹⁾. Ông đã chỉ ra rằng, thời gian một chu kỳ (T) bằng nhau đối với tất cả các dây cung (r) không phụ thuộc góc dao động, kể cả góc 180° cũng như 100° , 60° , 10° , 2° , $1/2^\circ$ hay $4'$... Các thí nghiệm chỉ ra rằng, thời gian chu kỳ luôn bằng nhau và tăng lên theo độ dài dây cung (r) chứ không phải theo góc, một hiệu ứng đáng chú ý vì thoạt đầu ai cũng cho rằng ngược lại mới là đúng... Thời gian mà các vật treo trên các sợi dây có độ dài (r) khác nhau tỷ lệ với nhau như căn bậc hai của độ dài dây ($r^{1/2}$), hay ngược lại, các độ dài tỷ lệ với nhau như các bình phương của thời gian (T^2), có nghĩa là nếu muốn tăng chu kỳ của con lắc gấp đôi thì phải dùng sợi dây dài gấp 4 lần..."

Sagredo: "Nếu tôi hiểu đúng thì tôi có thể đo độ dài của sợi dây mà một đầu được gắn ở độ cao bất kỳ, ngay cả khi không còn nhìn thấy nữa. Tôi sẽ treo một vật nặng vào cuối sợi dây và cho nó đong đưa và tôi nhờ bạn tôi đo số dao động của nó, còn tôi thì đếm số dao động của một con lắc khác có độ dài 1 thước trong cùng một khoảng thời gian, sau đó trên cơ sở số dao động mỗi con lắc làm được trong cùng khoảng thời gian đó có thể xác định được độ dài sợi dây. Giả sử bạn tôi đếm 20 dao động còn tôi đếm được 240 trong cùng một thời gian thì bình phương hai số này là 400 và 57600, tôi có thể nói sợi dây có 57600 đơn vị còn con lắc 1 thước của tôi có 400 đơn vị, vì thế độ dài sợi dây là $57600 : 400 = 144$ thước."

Salvati: "Bạn không thể sai nhiều hơn một gang tay nếu đếm một số lượng lớn dao động... mỗi con lắc có một chu kỳ dao động riêng rõ

(1) Chỉ Galileo.

ràng và xác định, không thể bắt nó phải dao động với chu kỳ khác với chu kỳ mà tự nhiên đã sắp đặt cho nó".

Phải nhắc lại là Newton đã kiểm chứng nguyên lý tương đương giữa hai loại khối lượng hấp dẫn và quán tính bằng cách đo chu kỳ dao động của con lắc với những khối lượng treo khác nhau. Để tóm lược lại chúng ta có thể phát biểu nguyên lý tương đương dưới dạng một định đề như sau:

(3.3.1) Định đề: *Khối lượng hấp dẫn và khối lượng quán tính bằng nhau.*

3.4. NGUYÊN LÝ QUÁN TÍNH VÀ HỆ QUY CHIẾU QUÁN TÍNH

Hai phần sau của cuốn sách ("Ngày 3" và "Ngày 4") bàn về chuyển động đều (uniform motion), chuyển động có gia tốc không đổi (uniformly accelerated motion) và chuyển động có quỹ đạo được tạo nên bởi hai chuyển động đó. Galileo gọi đó là các chuyển động địa phương.

"Mục đích của tôi" – Galileo viết, "là trình bày một ngành khoa học mới về một vấn đề rất cũ. Không có gì trong tự nhiên lại tồn tại lâu hơn là chuyển động..."

1. Định luật quán tính

Chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang, được gọi là chuyển động *thẳng đều tự nhiên* (naturally uniform motion), nếu các ngoại lực chống lại chuyển động như lực ma sát, lực cản của môi trường và dĩ nhiên cả lực đẩy đều bị loại trừ. Khi không có ngoại lực tác dụng, vật sẽ chuyển động đều với tốc độ không đổi theo một đường thẳng. Galileo đã phải loại bỏ tất cả các lực để có được mô hình chuyển động "tự nhiên" này – một thứ chuyển động mà chúng ta biết rằng không tồn tại trong *tự nhiên*.

Quán tính hay *sức ì* như một đặc tính tự nhiên của mọi vật cản trở sự thay đổi trạng thái chuyển động của bản thân nó được phát biểu một cách rành mạch trong định nghĩa thứ ba, phần đầu cuốn "*Principia*" của Newton:

(3.4.1) Định nghĩa: "*Quán tính (vis insita), hay lực bẩm sinh của vật chất, là sức ì (power of resisting) mà với nó mọi vật cố gắng giữ yên*

trạng thái hiện tại, bất kể đó là trạng thái dừng, hay chuyển động đều theo đường thẳng".

Và trong Định luật 1, được quen gọi là *Định luật quán tính*, Newton phát biểu:

(3.4.2) Định luật: "*Mọi vật giữ nguyên trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều nếu không bị ngoại lực tác dụng buộc chúng phải thay đổi trạng thái đó*".

Ông nhắc lại những lời của Galileo từng chữ một:

(3.4.3) Bổ đề: "*Vật được ném đi sẽ giữ nguyên trạng thái chuyển động (nằm ngang) nếu không bị hãm lại bởi sức cản không khí hay bị kéo xuống bởi trọng lực*".

Hơn hai nghìn năm trước, khi bàn về chuyển động, Aristotle đã viết trong cuốn "*Cơ học*" của mình:

"Vật đang chuyển động sẽ dừng lại nếu lực đẩy nó đi không còn tác dụng nữa".

Di nhiên là không bao giờ chúng ta có thể loại trừ hết lực cản, thế nhưng khi đã loại bỏ cả lực cản thì theo Galileo, "nếu không còn lực nào tác dụng vật sẽ giữ nguyên trạng thái chuyển động *thẳng và đều*". Đó chính là sự tinh tế của Galileo. Giá trị toán học trực tiếp của quan điểm này sẽ được thấy rõ trong §4.5, tr.124.

2. Định luật quán tính và nguyên lý tương đương

Định luật quán tính là một trong những nguyên lý cơ bản nhất trong cơ học. Không chỉ Newton mà cả Einstein sau này đã phân tích nó rất tỉ mỉ. Quán tính luôn gắn với lực cưỡng lại chuyển động, và được thể hiện bằng *khối lượng quán tính* của vật. Trong "*Physik als Abenteuer der Erkenntnis*"[10] (Vật lý – Cuộc phiêu lưu của tri thức), Einstein viết:

"... khả năng hưởng ứng của vật đối với tác dụng của ngoại lực phụ thuộc vào khối lượng quán tính của nó. Nếu Trái Đất hút mọi vật với các lực như nhau thì vật có khối lượng quán tính lớn sẽ phải rơi chậm. Nhưng vì các vật đều rơi như nhau nên Trái Đất phải hút các vật với những lực hút khác nhau. Các lực hút này lại phụ thuộc vào khối lượng hấp dẫn của vật nên khi phản ứng của các vật (đối với các lực hút khác nhau) đều như nhau thì hai loại khối lượng, hấp dẫn và quán tính, phải bằng nhau".

3. Định luật quán tính và các hệ quy chiếu quán tính

Định luật quán tính dẫn đến sự tồn tại một loạt các hệ tọa độ quan sát luôn cho các kết quả tương đương, gọi là các *hệ quy chiếu quán tính*. Các hệ này chỉ khác nhau ở tốc độ dịch chuyển thẳng và đều tương đối giữa chúng. Vì khi không có ngoại lực tác dụng, trạng thái đứng yên không phân biệt được với trạng thái chuyển động thẳng đều nên các hiện tượng cơ học xảy ra trong hai hệ chuyển động thẳng đều tương đối với nhau phải tương đương nhau.

Trong "*Bàn về hai hệ thống vũ trụ của Ptolemy và Copernicus*" (1632) Galileo đã viết về vấn đề này như sau:

"Bạn hãy đi trên boong một con tàu với các con bướm nhỏ và một vài loài có cánh khác. Hãy mang theo một bình nước với những con cá... Khi con tàu đứng yên, hãy nhìn các con vật nhỏ bay qua bay lại với vận tốc như nhau theo mọi hướng và các con cá cũng bơi như thế... Khi ném một vật gì đó cho bạn của mình, bạn sẽ không cần dùng sức mạnh hơn theo một vài hướng; nếu bạn nhảy lên nhảy xuống thì đều nhảy được những khoảng cách như nhau, hướng nào cũng thế. Bây giờ, cho con tàu chuyển động với vận tốc thẳng đều bất kỳ và bạn sẽ không hề quan sát thấy một thay đổi nào dù rất nhỏ trong tất cả các hiện tượng vừa được nêu, ngay cả việc khẳng định con tàu đang chuyển động hay đứng yên cũng là không thể được".

Sự không phân biệt này giữa trạng thái chuyển động thẳng đều và trạng thái đứng yên được quen gọi là *nguyên lý tương đối Galileo* và được phát biểu như một định đề:

(3.4.5) Định đề: *Các quy luật của cơ học thoả mãn đối với mọi hệ quy chiếu quán tính.*

Hãy lấy một vài ví dụ. Giả sử có một người đứng trên một toa tàu đang chuyển động thẳng đều với vận tốc v và quan sát một quả táo rơi xuống từ trên cây bên lề đường. Các kết luận của anh ta phải phù hợp với quan sát của người đứng trên mặt đất, mặc dù anh ta nhìn thấy quả táo không rơi thẳng đứng từ trên xuống mà còn chuyển động ngang với vận tốc v . Nếu người trên mặt đất đo thời gian quả táo rơi là 1 giây thì người trên tàu cũng phải đo được 1 giây. Nếu người trên mặt đất kết luận cây táo cao 5 mét thì người trên tàu cũng phải đo được như vậy.

Không gian không biến dạng và thời gian trôi đều như nhau trong tất cả các hệ quy chiếu quán tính. Hơn nữa, cả hai đều phải kết luận rằng chỉ có một lực duy nhất tác dụng lên quả táo theo phương thẳng đứng và gia tốc rơi đo được là như nhau. Người trên tàu có thể nói thêm: quả táo còn chuyển động thẳng đều với vận tốc v theo phương nằm ngang, nhưng không có lực tác dụng nào theo phương này cả. Điều đó có nghĩa là cả *lực lẫn khối lượng và gia tốc* đều bảo toàn trong hai hệ.

Một ví dụ khác. Giả sử có một người đứng trong thang máy được kéo lên với tốc độ đều và anh ta thả một quả táo. Hệ quy chiếu của người này và của người đứng dưới mặt đất là tương đương, vì một thì đứng yên và một thì chuyển động thẳng đều so với hệ kia. Nếu người trong thang máy cân quả táo, cái cân của anh ta sẽ chỉ đúng giá trị khối lượng như dưới mặt đất. Chỉ khi thang máy tăng tốc thì nó mới chỉ nhiều hơn và khi thang máy chậm lại thì nó chỉ ít đi. Đối với người trong thang máy, chỉ có một lực duy nhất tác dụng làm quả táo rơi và nó rơi theo quy luật $s = gt^2/2$. Giả sử độ cao $s = 1,25m$ thì $t = 0,5$ giây (lấy $g \approx 10m/s^2$). Còn người trên mặt đất thấy chuyển động của quả táo có hai thành phần, một là rơi tự do $s = gt^2/2$ và hai là chuyển động đều theo phương thẳng đứng $s = vt$. Sau 0,5 giây nó rơi được 1,25m nhưng lại tiến lên trên được 0,5v và nếu chọn vận tốc thang máy $v = 10m/s$ thì được 5m, tức là đi thẳng lên trên được 3,75m. Tuy nhiên sàn thang máy cũng tịnh tiến lên trên được 5m nên kết quả là quả táo phải chạm sàn sau 0,5 giây. Như vậy cả hai người đều phải kết luận rằng, vì chuyển động theo phương thẳng đứng là chuyển động đều, nên chỉ có một lực tác dụng duy nhất là trọng lực và mặc dù sau khi quả táo chạm sàn, người trong thang máy thấy nó dừng lại và người dưới đất thấy nó vẫn chuyển động đều lên trên, nhưng quãng đường s và thời gian t cả hai đo được khi quả táo chuyển động rơi tự do (có lực tác dụng) đều như nhau. *Lực, thời gian và quãng đường* là không đổi đối với cả hai người quan sát.

Einstein viết [10]: "... nếu các định luật cơ học thoả mãn trong một hệ quy chiếu nào đó, thì nó sẽ thoả mãn đối với các hệ quy chiếu chuyển động thẳng đều so với hệ ban đầu. Hệ quy chiếu thoả mãn các định luật cơ học được gọi là hệ quy chiếu quán tính. Chỉ có điều chúng ta *không biết một hệ quy chiếu như thế có tồn tại hay không*. Từ một hệ quy chiếu có thể biến đổi vị trí (r) và vận tốc (dr/dt) của chất điểm sang các hệ khác một cách tương đương. *Khoảng cách* giữa hai điểm không thay đổi

và không phụ thuộc hệ quy chiếu. Một đại lượng bất biến khác là *gia tốc*, hay *lực*. Định luật Newton $F = ma$ thoả mãn trong mọi hệ".

Nói tóm lại chúng ta có khẳng định sau:

(3.4.6) Định đề: *Thời gian và không gian là không đổi trong mọi hệ quy chiếu quán tính.*

(3.4.7) Bổ đề: *Lực, gia tốc, khoảng cách, khối lượng và định luật II Newton $F=ma$ thoả mãn trong mọi hệ quy chiếu quán tính.*

(3.4.8) Hệ quả: *Không có cách nào để tìm thấy một hệ quy chiếu quán tính (trong phạm vi quan sát được của chúng ta).*

Tuy "không có cách nào để tìm ra một hệ quy chiếu quán tính" nhưng Einstein cũng đưa ra một ví dụ về một hệ mà theo ông "chỉ khác với hệ quy chiếu quán tính ở một điểm duy nhất là bị giới hạn trong phạm vi một không - thời gian nhất định". Ông nói:

"Hãy để một thang máy rơi. Trong thang máy đó mọi vật đều chuyển động như mong đợi từ định luật quán tính... Đây là một hệ quy chiếu quán tính bỏ túi. Tính chất địa phương của nó rất cơ bản"⁽¹⁾.

4. Tốc độ ánh sáng và thí nghiệm của Galileo

Galileo có một đánh giá thận trọng đối với vấn đề tốc độ ánh sáng có phải là vô hạn hay không, ông đề ra một phép đo, và theo lời đối thoại của các nhân vật thì ông đã thực hiện nó. Về mặt kỹ thuật, phép đo của Galileo có vẻ quá đơn giản tuy rằng về mặt nguyên lý thì không có gì để phản đối. Ông cho hai người đứng đối diện nhau và cầm hai chiếc đèn, họ đều phải dùng tay để che ánh sáng của đèn đi. Nếu một người chột nhác tay lên để ánh sáng rọi đi và người đầu kia sau khi nhìn thấy ánh

(1) Trong ví dụ này Einstein đã chỉ ra sự tương đương (tuy chỉ có tính địa phương) giữa một trường hấp dẫn và một chuyển động có gia tốc. Có thể loại bỏ trường hấp dẫn bằng một chuyển động rơi tự do: "thế hệ các nhà vật lý lớn lên trong thang máy sẽ cho rằng hệ quy chiếu của họ là quán tính và thang máy đứng yên", nói cách khác họ không cần biết đến trường hấp dẫn bên ngoài đang tác dụng lên họ để có thể thiết lập được các quy luật vật lý thoả đáng. Nếu thang máy rơi chậm lại hay tăng tốc (tức là không rơi tự do nữa) thì các nhà vật lý trong thang máy sẽ cho rằng họ đang tồn tại trong một trường hấp dẫn và không cần lý giải các hiện tượng dựa trên việc họ đang bị gia tốc. Như vậy bản thân trường hấp dẫn không còn quan trọng, nó xuất hiện hay biến mất phụ thuộc vào hệ quy chiếu được lựa chọn. Bàn tiếp về vấn đề này không thuộc phạm vi chương trình nên chúng ta dừng lại ở đây.

sáng đó phát ra phải nhấc tay ngay lập tức, không che đèn của mình nữa để ánh sáng rơi trở lại về phía người đối diện. Khoảng thời gian từ lúc người đầu tiên nhấc tay lên đến khi anh ta nhìn thấy ánh sáng phản hồi chính là khoảng thời gian mà ánh sáng đã hành trình giữa hai người. Galileo đã thực hiện phép đo này trong khoảng cách 1 dặm và như ông thuật lại "không thấy có thay đổi gì", ông nói thêm "vấn đề này (xác định tốc độ ánh sáng) nằm quá xa tầm với của chúng ta"⁽¹⁾.

3.5. CHUYỂN ĐỘNG TRONG TRỌNG TRƯỜNG KHÔNG ĐỔI

Trong chương "*De Motu Locali*" (Về các chuyển động địa phương) ("Ngày 3" và "Ngày 4") Galileo thảo luận rất kỹ về ba vấn đề, thứ nhất là quan hệ $v = s/t$ trong chuyển động đều; thứ hai là quan hệ $s = at^2/2$ trong chuyển động rơi tự do; và thứ ba là quỹ đạo parabol của chuyển động phức hợp của hai loại chuyển động kia, xảy ra khi một vật được ném đi trong trọng trường. Phần đầu ($v = s/t$) có vẻ đơn giản nhưng hai phần sau có chứa nhiều bài toán lý thú. Lưu ý là trong thời đó Galileo đã giải tất cả các bài toán bằng phương pháp hình học.

1. Chuyển động đều

Cụ thể hơn Aristotle, Galileo đã phân loại hai chuyển động chính là *chuyển động đều* và *chuyển động có gia tốc*. Ông cũng đã nghiên cứu *chuyển động phức hợp* được tạo nên đồng thời bởi hai thành phần chuyển động này.

(3.5.1) Định nghĩa: "*Chuyển động đều là chuyển động mà trong đó các khoảng cách vật đi được trong mọi khoảng thời gian bằng nhau là như nhau*".

Galileo nhấn mạnh từ "mọi" để loại trừ các trường hợp mà khoảng cách và thời gian tổng thể là như nhau nhưng khoảng cách và thời gian trong các khoảng chia nhỏ hơn lại không bằng nhau. Thực tế Galileo đã định nghĩa vận tốc như một tỷ lệ giữa khoảng cách và thời gian $v = \Delta s / \Delta t$.

(1) Thí nghiệm của Galileo là một ví dụ điển hình về việc ứng dụng của ánh sáng trong lĩnh vực thông tin. Khi ánh sáng bị che đi, chúng ta có "bit 0" và khi ánh sáng được chiếu chúng ta có "bit 1". Ngày nay người ta sử dụng ánh sáng laser với các màn chắn quang-điện có tần số che chắn lớn hơn 10GHz.

Đối với Galileo, vận tốc có một ý nghĩa toán học cụ thể và được gắn với một loại chuyển động cụ thể là chuyển động đều. Như vậy, vận tốc được phân biệt với ý niệm "tốc độ" có từ thời Aristotle⁽¹⁾. Tuy nhiên, định nghĩa này chưa đề cập tới hướng của chuyển động nên cả *chuyển động thẳng đều* lẫn *chuyển động tròn đều* cùng có thể được hiểu là chuyển động đều. Vận tốc như một đại lượng có hướng được chỉ ra sau đó đối với các chuyển động phức hợp (chuyển động có hai thành phần)⁽²⁾.

2. Chuyển động có gia tốc

Các chuyển động rơi tự do được Galileo hiểu như những "chuyển động được gia tốc tự nhiên" (naturally accelerated motion):

(3.5.2) Định nghĩa: "... chuyển động được gia tốc tự nhiên là chuyển động mà trong mỗi khoảng thời gian bằng nhau, tốc độ đều tăng lên một giá trị như nhau".

Như vậy, ông đã định nghĩa $a = \Delta v / \Delta t$. Ở trang 205 cuốn "*Bàn về hai ngành khoa học mới*", Galileo viết thêm:

"Chuyển động được gia tốc đều là chuyển động của vật, ban đầu đứng yên, *động lượng*⁽³⁾ của nó tăng đều trong các khoảng thời gian như nhau".

(1) Bản dịch năm 1914 cuốn "*Bàn về hai ngành khoa học mới*" vẫn dùng từ "speed" tức "tốc độ" để chỉ vận tốc của Galileo, nhưng chú thích nguyên bản là "velocità" – từ mà ngày nay được dịch là "vận tốc". Tốc độ chỉ độ lớn của vectơ vận tốc (xem "Cơ sở Vật lý" của D. Haliday, R. Resnick và J. Walker (NXB GD, Tái bản lần thứ 4, 2002). Cuốn "Vật lý Đại cương – Tập I: Cơ Nhiệt" (Lương Duyên Bình chủ biên, NXB GD, Tái bản lần thứ 5, 1997) bỏ từ "tốc độ" mà chỉ dùng từ "vận tốc".

(2) Quá trình hình thành ban đầu của khái niệm vận tốc còn lưu lại một nghịch lý thú vị, được gọi là "Nghịch lý Zeno", mang tên một triết gia Hy Lạp sống vào khoảng năm 450 tr. CN. Giả sử Rùa và Thỏ chạy thi, Thỏ chạy nhanh gấp 10 lần Rùa nhưng Rùa được đứng trước Thỏ 100m. Theo Zeno, Thỏ không bao giờ đuổi kịp Rùa vì sau khi Thỏ chạy được 100m thì Rùa đã di chuyển về phía trước được 10m. Như vậy Thỏ lại phải chạy một đoạn 10m nữa mới tới được chỗ Rùa đang đứng. Nhưng sau khi Thỏ tới đó thì Rùa đã lại đi được 1m nữa nên rút cuộc Thỏ chẳng bao giờ đuổi kịp Rùa. Nó chỉ có thể đến gần hơn mà thôi.

(3) "Động lượng" trong tiếng Anh là "momentum". Bản dịch năm 1914 cuốn "*Bàn về hai ngành khoa học mới*" dịch "momentum" từ nguyên bản La Tinh "celeritatis momenta" (động lượng tức thì).

Galileo cho rằng chuyển động rơi tự do là "tự nhiên", nó khác với các chuyển động xoắn ốc, vòng cung... Trong chuyển động này chúng ta không cần xét đến hướng chuyển động. Cũng vì thế mà định nghĩa gia tốc của Galileo có giới hạn hẹp trong phạm vi một loại chuyển động cụ thể là chuyển động rơi tự do được gia tốc đều. Định nghĩa gia tốc như đạo hàm của vectơ quãng đường xuất hiện sau này.

Quan điểm vận tốc tăng dần có vẻ không có tính "cảm giác" cao lắm khi ông nói (qua lời của Sagredo):

"... cảm nhận cho chúng ta thấy rằng một vật nặng khi rơi đạt tốc độ tức thì".

Sự sai lệch này của cảm giác được chỉ ra ngay sau đó (Salvati):

"... các thí nghiệm (với ván nghiêng) đã chứng tỏ rõ ràng là một vật, bất kể nặng nhẹ thế nào, khi bắt đầu rơi đều chuyển động rất nhẹ nhàng và chậm rãi".

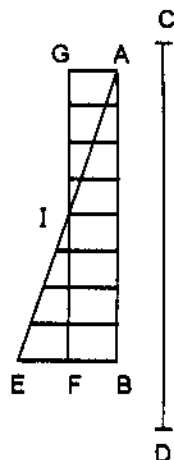
Một nhận xét quan trọng được Galileo đưa ra:

(3.5.3) Bổ đề: "... mọi vật chuyển động trên các ván nghiêng đều đạt tốc độ như nhau (khi chạm đất) bất kể các ván đó nghiêng bao nhiêu độ miễn là chúng có độ cao xác định (đầu trên được gác ở cùng một độ cao)".

Dựa vào các phát biểu trên, Galileo lần lượt chứng minh các khía cạnh của quy luật $s = v_0 t + at^2/2$. Trong "Định lý 1", sách đã dẫn, ông khẳng định:

(3.5.4) Bổ đề: "Thời gian vật chuyển động có gia tốc đi được quãng đường s bằng thời gian vật chuyển động thẳng đều đi trên quãng đường đó nếu tốc độ của nó bằng giá trị trung bình của tốc độ ban đầu và tốc độ cực đại" (tức là bằng $(v_0 + v_{max})/2$).

Chứng minh của ông rất đơn giản (xem hình 3.2). Chia thời gian AB thành n đoạn bằng nhau và dựng tam giác vuông AEB. Cạnh EB và các đường song song với nó sẽ miêu tả tốc độ vì chúng đều tăng lên cùng một khoảng (v_{max}/n) sau các thời gian t/n bằng nhau. Quãng đường vật đi được trên từng đoạn sẽ tỷ lệ với tích:



Hình 3.2. Hình vẽ của Galileo để chứng minh Định lý 1, sách đã dẫn.

$$x = \frac{v_{\max}}{n} \times \frac{t}{n} \quad (3.5.1)$$

Tổng các quãng nhỏ này sẽ là:

$$s = x + 2x + 3x + \dots + nx = (1 + 2 + \dots + n)x = \frac{n(n+1)}{2} x = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{v_{\max} t}{2} \quad (3.5.2)$$

Khi $n \rightarrow \infty$ thì $s = v_{\max} t / 2$. Đây chính là diện tích tam giác AEB nếu coi đây là $EB = v_{\max}$ và chiều cao là $AB = t$; hay cũng có thể coi s là diện tích hình chữ nhật GABF có một cạnh là $BF = v_{\max} / 2$ và cạnh kia là $AB = t$. Định lý được chứng minh. Đối với $v_0 > 0$ làm tương tự.

Một bài toán khác được Galileo nghiên cứu kỹ là về thời gian vật rơi trên các mặt nghiêng là cạnh của tam giác vuông dựng đứng nội tiếp vòng tròn. Trong "Định lý 6", sách đã dẫn, ông khẳng định:

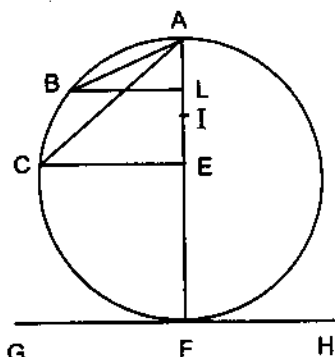
(3.5.5) Bổ đề: "Nếu từ đỉnh cao nhất ta vẽ các mặt nghiêng cắt đường tròn, thì thời gian vật trượt trên các đường đó luôn bằng nhau".

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề này, ở đây chúng ta chỉ ra cách chứng minh "Định lý 7":

(3.5.6) Bổ đề: "Nếu tỷ lệ chiều cao của hai mặt phẳng nghiêng (h_1 / h_2) bằng tỷ lệ bình phương độ dài của chúng (l_1^2 / l_2^2) thì thời gian vật trượt trên các mặt đó là như nhau ($t_1 = t_2$)".

Khi quan sát hình 3.3, cần tưởng tượng thêm các cạnh BF và CF của hai tam giác vuông ABF và ACF. Vì các tam giác vuông ABL và ABF đồng dạng, nên:

$$\frac{AL}{AB} = \frac{AB}{AF} \rightarrow AL \times AF = AB^2 \quad (3.5.3)$$



Hình 3.3. Hình vẽ của Galileo chứng minh Định lý 6, 7, sách đã dẫn.

Tương tự, vì các tam giác ACE và ACF đồng dạng, nên:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AF} \rightarrow AE \times AF = AC^2 \quad (3.5.4)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AL}{AB^2} = \frac{AE}{AC^2} \rightarrow \frac{AL}{AE} = \frac{AB^2}{AC^2}, \text{ tức là } \frac{h_1}{h_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \quad (3.5.5)$$

Theo định lý 6 thì thời gian vật trượt trên AB hay AC đều như nhau, nên ta có $t_1 = t_2$. Galileo đã sử dụng một cách khác, hơi rắc rối hơn một chút, để chứng minh định lý 7 này.

Trong phần "Ngày 3" thảo luận về chuyển động trên các mặt phẳng nghiêng (về hệ thức $s = (v_0 + at^2/2)$), Galileo đưa ra tất cả 22 định lý và 16 vấn đề. Ngày nay các bài toán này có thể được giải chính xác và dễ dàng hơn bằng phương pháp đại số.

3. Chuyển động phức hợp với quỹ đạo parabol

"Ngày 4" của Galileo thảo luận các chuyển động phức hợp từ hai thành phần, một là chuyển động rơi tự do và hai là chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang. Kết quả của sự phối hợp này là một chuyển động có quỹ đạo parabol. Chú ý rằng cả hai chuyển động thành phần này đều là các chuyển động theo đường thẳng. Chúng ta đọc được trong "Định lý 1" và "Định lý 2", sách đã dẫn:

(3.5.7) Bổ đề: "Quỹ đạo được vẽ nên bởi một chuyển động thẳng đều theo phương nằm ngang và một chuyển động được gia tốc tự nhiên theo phương thẳng đứng là một cung parabol"

(3.5.8) Bổ đề: "Bình phương của động lượng toàn phần bằng tổng bình phương hai động lượng thành phần".

Hiểu theo ngôn ngữ ngày nay: $(mv)^2 = (mv_x)^2 + (mv_y)^2$, hay là $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Vận tốc tổng hợp trở thành một đại lượng vectơ có hai thành phần. Định lý này được chứng minh dựa trên định lý Pythagoras và nó cho thấy Galileo đã biết vận dụng phép cộng hai vectơ.

Ngày nay chúng ta có thể hình dung định lý 1 khá dễ dàng, vì trên trục x , $x = v_x t$, còn trên trục y , $y = at^2/2$ nên $y = (a/2v_x^2)x^2$, là một parabol. Tuy nhiên, thời đó người ta chưa quen các công cụ đại số nên sự phụ thuộc $y \propto x^2$ không thể dễ chỉ ra như vậy.

Để chứng minh nhiều tính chất của các hình elips, parabol, hyperbol, người ta sử dụng một công cụ đặc lực là các tiết diện hình nón mà ngày nay chúng ta rất ít khi gặp. Hãy quan sát hình 3.4 và hình dung đáy tròn $ibkc$ của hình nón. Cho mặt phẳng song song với cạnh lk cắt hình nón thì sẽ được parabol $bacd$. Hiển nhiên là $ad \parallel lk$. Bây giờ vẽ $gh \parallel ik$ cắt ad tại e , vẽ $fe \parallel bd$. Cần chỉ ra rằng:

$$\frac{ae}{fe^2} = \frac{ad}{bd^2} \quad (3.5.6)$$

Muốn thế cần để ý rằng trong tam giác vuông ibk (góc $ibk = 90^\circ$) ta có:

$$bd^2 = id \times dk \quad (3.5.7)^{(1)}$$

Tương tự như vậy, trong tam giác vuông gfh (góc $gfh = 90^\circ$) chúng ta cũng có:

$$fe^2 = ge \times eh \quad (3.5.8)$$

Tuy nhiên, vì $ad \parallel lk$ nên $eh = dk$, từ đó:

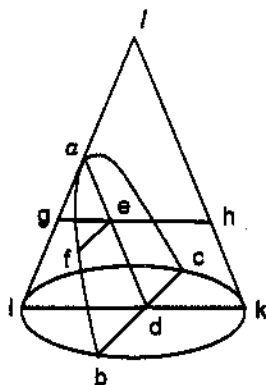
$$\frac{bd^2}{fe^2} = \frac{id \times dk}{ge \times eh} = \frac{id}{ge} \quad (3.5.9)$$

Bây giờ để ý tam giác aie , vì $ge \parallel id$ nên:

$$\frac{id}{ge} = \frac{ad}{ae} \rightarrow \frac{bd^2}{fe^2} = \frac{ad}{ae}, \text{ hay là } \frac{ae}{fe^2} = \frac{ad}{bd^2} \quad (3.5.10)$$

Như thế, tỷ lệ giữa trục tung và trục hoành được chứng minh.

Trong "Ngày 4" Galileo đã nghiên cứu hơn một chục trường hợp và đã dẫn ra một kết quả do thực nghiệm các quỹ đạo parabol để so sánh. Phần lớn các bài toán đề cập đến quỹ đạo parabol ngày nay được giải bằng phương pháp phân tích lực tác dụng thành hai thành phần. Tuy nhiên, để nắm được vấn đề tốt hơn chúng ta nên cố gắng giải chúng bằng phương pháp hình học như Galileo đã làm mà không nên vội xét đến lực và các vectơ lực.



Hình 3.4. Hình vẽ parabol của Galileo

3.6. CHUYỂN ĐỘNG TRÒN ĐỀU

1. Christian Huygens (1629 – 1695) [11]

Theo W.W Rouse Ball viết trong "A short account of the history of Mathematics" (tạm dịch là "Lược sử Toán học") thì Huygens hay ký tên mình là Hugens, nhưng cách đọc thông thường là Huygens⁽²⁾. Ông sinh

(1) Vì bd là chiều cao vẽ từ đỉnh góc vuông nên hai tam giác vuông idb và bdk là đồng dạng; dễ thấy điều này vì trong tam giác vuông ibk tổng hai góc ikb và bik là 90° , trong khi đó trong tam giác vuông idb thì tổng hai góc bid và ibd cũng là 90° , từ đó suy ra góc $ikb = ibd$, hay $dkb = ibd$; áp dụng định lý tỷ lệ ta có: $bd/dk = id/bd \rightarrow bd^2 = id \times dk$.

(2) Tên đầy đủ của Huygens viết theo tiếng Hà Lan là Christiaan Huijgens (PGS. TS. Nguyễn Thế Hiện bổ sung).

ra tại Hague, Hà Lan ngày 11/4/1629 và mất cũng tại Hague, ngày 8/7/1695. Ông có một cuộc đời riêng tư phẳng lặng, là một con người toàn diện – nhà toán học kiêm nhà vật lý và kỹ sư. Tác phẩm nổi tiếng nhất của ông có lẽ là "*Horologium oscillatorium*"⁽¹⁾ bàn về các dao động điều hoà. Uy tín Huygens cao đến nỗi năm 1665 (khi ông 36 tuổi) vua Louis XIV đã tặng ông một biệt thự riêng tại Paris. Năm 1675 Huygens chế ra con lắc lò xo bổ chính đồng hồ cơ học và đã biếu chiếc đồng hồ đầu tiên có con lắc bổ chính này cho vua Louis XIV. Trước năm 1687, các đồng hồ thường chỉ có 1 kim giờ và rất cồng kềnh tuy đã được sản xuất làm hàng tiêu dùng. Có lẽ vì chuyện này mà Huygens đã bị Robert Hooke (40 năm giữ chức giáo sư hình học tại Gresham College) khiêu nại rằng ông đã đánh cắp ý tưởng của Hooke. Trong thời kỳ ở Paris, chính Huygens là vị gia sư đã dạy toán cho Leibnitz (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646 – 1716) khi Leibnitz làm công tác ngoại giao tại đây. Huygens đã biết về phép tính vi phân của Leibnitz và Newton, thậm chí đã có viết một vài luận văn về phép tính vi phân nhưng thực tế không bao giờ dùng nó trong các công trình của mình. Ông đánh giá cao cuốn "*Principia*" của Newton (xuất bản năm 1687) nhưng lại cho rằng nó không được đầy đủ và không diễn tả được lực hấp dẫn một cách cơ học. Vấn đề này sẽ được bàn kỹ trong *Chương 5*. Hiện nay các kính viễn vọng cỡ lớn, có cái dài tới 64 mét (290 feet) do ông chế tạo vẫn còn được lưu giữ tại Viện Hàn lâm Hoàng gia London (Royal Society London).

Huygens có ba đóng góp quan trọng nhất cho cơ học. Một là luận văn được Huygens gửi đến Viện Hàn lâm Hoàng gia London năm 1668 (lúc 39 tuổi) trả lời bài toán được Viện đặt ra về vấn đề bảo toàn động lượng mà Descartes cho rằng không thoả mãn. Có hai người nữa cũng đi đến kết luận như Huygens là Wallis và Wren – hai nhà toán học Anh. Huygens nói rằng động lượng là một đại lượng có hướng. Đây có lẽ cũng là lúc *ý niệm đầu tiên về vectơ* xuất hiện trong cơ học.

Đóng góp thứ hai là tác phẩm "*Horologium Oscillatorium*", được xuất bản tại Paris năm 1673, lúc này Huygens 44 tuổi. Trong

(1) Tên La Tinh đầy đủ là: "*Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*" (Paris 1673). Bản dịch tiếng Anh trong J. Yoder, "Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature", Cambridge, 1984.

"*Principia*", Newton có nhắc đến cuốn sách này và gọi nó là "một cuốn sách tuyệt vời" (excellent book). Tác phẩm này thể hiện kiến thức toán học uyên bác của tác giả và chứa đựng nhiều định lý sau này được nhắc lại trong cuốn "*Principia*". Đây là tác phẩm nghiên cứu chủ yếu về dao động điều hoà, trong đó ông đã bàn về hệ thức $a_n = v^2/r$, liên hệ giữa gia tốc góc a_n , vận tốc dài v và bán kính quỹ đạo r .

Đóng góp thứ ba là *thuyết sóng ánh sáng* công bố năm 1690 (*Traité de la lumière*, khi đó Huygens 61 tuổi); phần lớn công trình được viết trước đó từ 1678. Nhiều người cho rằng cuốn sách này vượt xa cuốn "*Opticks*" – một tác phẩm quan trọng của Newton, và có chứa đựng một số chứng minh hình học đáng kính nể. Quan niệm cho rằng ánh sáng có tính chất sóng cũng đã từng được Robert Hooke nêu ra nhưng ông này không làm gì để chứng tỏ điều đó cả. Nhìn chung có ba cách để giải thích ánh sáng:

(1) Người Hy Lạp cho rằng con mắt phát ra tín hiệu cảm nhận thấy sự vật (lý thuyết nói rằng ánh sáng xuất hiện do mắt bị vén ra là một ngoại lệ);

(2) Các vật thể phát ra một tín hiệu gì đó gây cảm giác cho mắt (đây là thuyết hạt của Newton);

(3) Các vật thể tác dụng lên môi trường và tạo ra sự thay đổi trạng thái tác động lên con mắt.

Theo học thuyết thứ ba thì môi trường đó là *ether* và ánh sáng là chùm sóng nối tiếp nhau lưu truyền trong *ether*. Huygens đã dựa vào thuyết sóng để giải thích các hiện tượng phản xạ, khúc xạ, giao thoa và phân cực ánh sáng. Thuyết ánh sáng vào thời kỳ Huygens không được chấp nhận do uy tín cá nhân quá lớn của Newton, tuy rằng bản thân Newton cũng có phần nghiêng về thuyết sóng nhưng những khó khăn gặp phải khi áp dụng thuyết này đã đẩy ông đến với thuyết hạt.

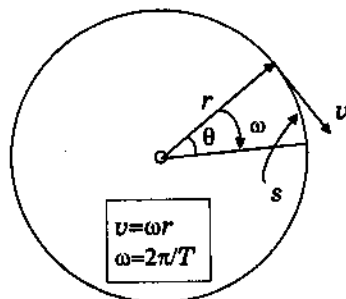
Huygens là người đã phát hiện ra vệ tinh Titan của sao Thổ. Với công nghệ mài và đánh bóng lăng kính riêng, năm 1654 (khi 25 tuổi) ông đã chế tạo mới các kính viễn vọng và tiến hành các quan sát thiên văn. Năm sau (1655) ông đã phát hiện ra vệ tinh Titan của sao Thổ. Hiện nay chúng ta biết Titan bay quanh sao Thổ ở khoảng cách 1.221.830 km, nó có đường kính 5.150 km, nặng $1,35 \times 10^{23}$ kg và là vệ

lớn nhất của sao Thổ. Titan là vệ tinh duy nhất trong hệ mặt trời có bầu khí quyển, với áp suất bề mặt 1,5 at.

2. Các đại lượng đặc trưng của chuyển động tròn đều

Xét một chất điểm chuyển động theo đường tròn có bán kính r với vận tốc đều trên quỹ đạo là v (hình 3.5). Thông thường người ta gọi vận tốc này là *vận tốc dài* để phân biệt nó với *vận tốc góc* ω , nếu có ai đó muốn biểu hiện sự chuyển động theo góc mà chất điểm di chuyển được trên một đơn vị thời gian.

Vào thời của Huygens, khái niệm *gia tốc hướng tâm* đã hình thành. Trong chuyển động đều trên các quỹ đạo tròn, gia tốc hướng tâm làm lệch hướng của chuyển động nhưng không làm thay đổi vận tốc chuyển động. Như vậy, gia tốc có thể làm thay đổi cả vận tốc lẫn hướng chuyển động. Khác với các trường hợp Galileo nghiên cứu, trong chuyển động tròn đều, cả vận tốc lẫn gia tốc đều phải được xem xét như những đại lượng có hướng. Hơn nữa, hướng của chúng lại không trùng nhau: vận tốc luôn vuông góc với gia tốc. Trong khi vectơ gia tốc hướng tâm hướng về tâm quỹ đạo tròn thì vectơ vận tốc dài lại chỉ theo phương tiếp tuyến với quỹ đạo. Vì lẽ đó mà trong các phần sau chúng ta sẽ dùng từ "vận tốc" thay "tốc độ", mặc dù trong các công thức vẫn chỉ có độ lớn chứ chưa có hướng.



Hình 3.5. Liên hệ giữa vận tốc góc và vận tốc dài trong chuyển động tròn đều

Vì quỹ đạo là tròn nên độ dài một cung tròn có góc bằng θ sẽ là θr (dĩ nhiên độ dài cả vòng tròn là $2\pi r$). Trong một đơn vị thời gian t , chất điểm di chuyển được một đoạn $s = vt$ tương ứng với một góc $\theta = \omega t$. Hiển nhiên đoạn s này có giá trị bằng độ dài cung tròn θ : $s = vt = \theta r = \omega t r$. Vì thế ta có liên hệ giữa hai loại vận tốc dài và vận tốc góc là:

$$v = \omega r \quad (3.6.1)$$

Một hệ thức đơn giản khác giữa *thời gian chất điểm di chuyển được một vòng* – giữa chu kỳ T với vận tốc dài v có thể suy ra rất đơn giản. Chu vi vòng tròn, tức là quãng đường chất điểm đi được sau thời gian T là $2\pi r$ nên (quãng đường / thời gian = vận tốc):

$$v=2\pi r/T \quad (3.6.2)$$

Vì tính quan trọng của hệ thức này mà chúng ta phát biểu nó dưới dạng một định lý.

(3.6.1) Định lý: *Gia tốc hướng tâm trong chuyển động tròn đều tỷ lệ thuận với bình phương của vận tốc dài và tỷ lệ nghịch với bán kính của quỹ đạo.*

Trong "*Principia*", Newton cũng chỉ ra định lý này trong "Định lý IV, Phần II" của ông. Cần lưu ý rằng việc $a_n = v^2/r$ không xác định sự phụ thuộc của lực vào khoảng cách theo quy luật $F \propto 1/r$ vì nhìn chung vận tốc dài là đại lượng cũng phụ thuộc vào r . Vấn đề này sẽ được bàn kỹ hơn trong chương sau. Cũng có thể sử dụng phương pháp trên để tìm một tỷ lệ khác⁽¹⁾:

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{2r - x} \quad (3.6.7)$$

Với x đủ nhỏ ta có:

$$\frac{x}{h} = \frac{h}{2r} \rightarrow h^2 = 2rx \rightarrow h = \sqrt{2rx} \quad (3.6.8)$$

Bằng cách tính như vậy có thể chỉ ra rằng trên mặt đất nếu vật rơi từ một độ cao nào đó xuống được một khoảng $x = 5m$ trong 1 giây đầu tiên ($g \approx 10m/s^2$) thì nó phải đi theo chiều ngang được một khoảng $h = 7,9km$ trong 1 giây đó, nếu không nó sẽ rơi trở lại mặt đất. Bạn đọc kiểm nghiệm xem có thể tính được độ rơi của Mặt Trăng trong giây đầu tiên bằng phương pháp này hay không?

4. Tốc độ vũ trụ cấp 1

Tốc độ vũ trụ cấp 1 là tốc độ tối thiểu mà một vệ tinh cần có để nó có thể bay quanh Trái Đất (hay một thiên thể nào đó) trên quỹ đạo tròn ở độ cao tối thiểu là $0m$ trên bề mặt. Còn tốc độ vũ trụ cấp 2 là tốc độ tối thiểu mà vệ tinh đó cần có để nó có thể thoát ra khỏi lực hút của Trái Đất và đi vào Vũ Trụ (quỹ đạo mở).

Từ hệ thức $a_n = v^2/r$ có thể suy ra một mối liên hệ đặc biệt, nếu chúng ta viết v theo hai đại lượng còn lại:

$$v = (a_n r)^{1/2} \quad (3.6.9)$$

(1) Xem Feynman [8].

Hay nếu thay a_n bằng g_h và r bằng $r_h = R_{\text{Trái Đất}} + h_{\text{độ cao}}$ thì:

$$v = (g_h r_h)^{1/2} \quad (3.6.10)$$

Theo đó một vệ tinh chuyển động tròn quanh Trái Đất ở độ cao h thì vận tốc bay v của nó bằng căn bậc hai của tích gia tốc tại độ cao đó g_h với khoảng cách từ vệ tinh đến tâm Trái Đất $r_h = R + h$. Nếu $h = 0$ thì vận tốc v chính là tốc độ vũ trụ cấp 1.

Trong các giáo trình cấp Trung học phổ thông, bạn đọc còn nhớ thế năng trong trường hấp dẫn trên bề mặt trái đất là $U = mgh$, với $mg = \text{const}$, áp dụng đối với các độ cao h nhỏ. Lúc này trường hấp dẫn có thể coi như một trường lực không đổi (mặt vật chất vô hạn). Tuy nhiên vì g nhìn chung phụ thuộc độ cao $g_h = GM/r_h^2$ và thế năng hấp dẫn là thế năng âm nên:

$$U_h = -m g_h r_h \quad (= -GM/r_h) \quad (3.6.11)$$

So sánh biểu thức này với (3.6.10) có thể thấy:

$$v = (-U_h/m)^{1/2} \quad (3.6.12)$$

5. Tốc độ vũ trụ cấp 2

Bình phương của vectơ vận tốc (v^2) là một trong những đại lượng bất biến cơ bản của các hệ động lực, và tích mv^2 chính là hai lần động lượng: $2T = mv^2$. Nếu nhân hai vế của $a_n = v^2/r$ với m ta được:

$$2T = m a_n r \quad (3.6.13)$$

Với trường hấp dẫn $a_h = g_h = GM/r_h^2$ thì vế phải $m a_n r$ chính là $-U$, nên khi chất điểm chuyển động trong trường hấp dẫn trên quỹ đạo tròn (quỹ đạo đẳng thế!) thế năng của nó có trị giá gấp đôi động năng.

Một vệ tinh bay tròn quanh Trái Đất tại độ cao h cũng vậy, động năng T chỉ bằng 1/2 thế năng U . Muốn cho vệ tinh thoát ra khỏi sức hút của Trái Đất và đi vào vũ trụ thì ít ra động năng cũng phải bằng thế năng, tức là gấp đôi. Vì $T = mv^2/2$ nên T lớn gấp đôi có nghĩa là v lớn gấp $\sqrt{2}$ lần. Chúng ta tìm được công thức tính tốc độ vũ trụ cấp 2:

$$v_2 = v_1 \sqrt{2} \quad (3.6.14)$$

Vận tốc này đảm bảo cho vệ tinh, được phóng từ bề mặt Trái Đất, sẽ bay thoát ra khỏi sức hút của Trái Đất để đi vào Vũ Trụ. Nó cũng có thể

áp dụng được để tính vận tốc thoát cho các vệ tinh được phóng từ một độ cao nhất định (từ trên quỹ đạo), khi đó giá trị cần đạt được của v_2 sẽ nhỏ hơn. Chú ý rằng trên quỹ đạo elips tổng quát thì tổng năng lượng E không được phân phối thành T và U theo tỷ lệ $(2+1)$ như trong (3.6.13).

6. Nguyên lý tương đương và gia tốc hướng tâm

Sự vắng mặt của khối lượng m trong công thức $a_n = v^2/r$ là một điều thoát qua rất khó hiểu, vì thông thường người ta cho rằng gia tốc a_n phải có liên quan đến khối lượng m . Ít ra cũng $a_n \propto (m_G/m_A)v^2/r$. Rõ ràng khi chúng ta cầm một sợi dây, đầu treo một vật có khối lượng m và quay tròn thì khi m tăng chúng ta sẽ phải giữ chặt hơn, mạnh hơn, thậm chí nếu vật to quá chúng ta còn không thể nhấc lên được nữa. Tuy nhiên các hình dung trực quan thường không chính xác, có thể đưa ra một hình dung khác đối lập với trường hợp vừa rồi, chẳng hạn khi một phi công vũ trụ thả một vật nhỏ thì như chúng ta thường thấy trên phim ảnh các vật thể sẽ bỗng bồng bềnh bên cạnh anh ta. Rõ ràng là khối lượng của người phi công và của một dụng cụ như cái cờ lê có khác nhau, vậy tại sao chúng vẫn bay bên nhau?

Tất cả những vướng mắc này đều có thể giải quyết được nếu chúng ta thấu hiểu được những gì Galileo đã nói về nguyên lý tương đương. Tại sao khi thả hai vật có khối lượng khác nhau chúng lại tiếp đất cùng một lúc? Bởi vì *lực hấp dẫn* kéo nó về tâm, *bất nó phải rơi*, và *lực quán tính* duy trì trạng thái đứng yên ban đầu của nó, *kìm hãm sự rơi* của nó, bằng nhau. Nghĩa là khối lượng hấp dẫn và khối lượng quán tính của mọi vật đều như nhau. Chính nhờ có nguyên lý tương đương mà khi Kepler tìm kiếm quy luật chuyển động của các hành tinh ông đã không cần để ý đến khối lượng khác nhau của chúng, thời đó người ta cũng không biết về các khối lượng này. Bất kể chúng có khối lượng như thế nào, chúng cũng đều quay trên quỹ đạo với vận tốc và chu kỳ xác định. Nếu có hạt bụi nào bay quanh Mặt Trời với chu kỳ của sao Kim thì nó sẽ bay với vận tốc của sao Kim và ở khoảng cách quỹ đạo của sao Kim.

Khi chuyển động trên quỹ đạo tròn mọi vật đều có thể được coi như đang *rơi tự do về phía tâm điểm* nơi phát sinh lực hút gây ra gia tốc a_n và chính vì *mọi vật đều rơi như nhau* nên khối lượng của chúng không thể ảnh hưởng đến chu kỳ và vận tốc rơi của chúng. Nguyên lý tương đương làm sự kiện trở nên đơn giản!

Để hình dung điều gì sẽ xảy ra nếu nguyên lý này không thoả mãn. Trong trường hợp $m_G/m_a > 1$ thì mọi vật đều phải rơi trở về tâm hấp dẫn; trong trường hợp $m_G/m_a = 1$ thì chúng quay tròn trên quỹ đạo và nếu $m_G/m_a < 1$ thì chúng tản ra xa. Sự việc sẽ ra sao nếu $m_G/m_a \approx 1$? Có lẽ không đơn giản chút nào. Cho đến nay các nhà khoa học vẫn còn đang liên tục kiểm chứng xem hai loại khối lượng này có bằng nhau thực sự hay không.

7. Chuyển động tuyệt đối và gia tốc hướng tâm

Sự tồn tại của lực hướng tâm trong chuyển động tròn đều là chìa khoá để phân biệt một chuyển động tương đối, gây ra bởi trạng thái vận động của người quan sát, và một *chuyển động đích thực*, gây ra bởi lực tác dụng. Khái niệm chuyển động đích thực và đi kèm theo nó, *chuyển động tuyệt đối*, xuất hiện sau này trong phạm vi lý thuyết Newton và là hệ quả tất yếu của quan niệm không gian và thời gian tuyệt đối. Một không gian như thế cho phép chọn lựa một điểm mốc duy nhất để làm gốc tọa độ đo đạc mọi chuyển động.

Nếu trong vũ trụ có tồn tại một tâm điểm mà mọi thứ đều xoay quanh nó thì bằng cách thay đổi trạng thái chuyển động của các vật thể xung quanh chúng ta, có thể nhận biết được sự tồn tại của lực hướng tâm đang tác dụng về phía tâm điểm. Một chuyển động xoay như vậy là một chuyển động đích thực khác với chuyển động quay tương đối như của các vì sao quanh sao Bắc Đẩu mà chúng ta nhìn thấy hằng ngày. Vấn đề chuyển động tuyệt đối sẽ được bàn kỹ hơn trong *Chương 5*.

8. Chuyển động quay của các vật thể lớn

Vào cuối thế kỷ 19, sau khi phát hiện ra vận tốc ánh sáng c là lớn nhất, người ta mới để ý rằng một vật thể có kích thước lớn không thể quay nhanh. Vận tốc quay của nó bị giới hạn bởi vận tốc dài trên vành quay không thể lớn hơn c . Một vật muốn đảm bảo kết cấu bền vững không thể quay nhanh hơn một vận tốc góc tới hạn nào đó.

Có thể ước đoán chi tiết hơn, giả sử vận tốc góc là ω thì vận tốc dài v sẽ là $\omega r < c$, suy ra $r < c/\omega$. Nếu $\omega = (10^n \times 2\pi)/s$ thì $r < 47.746/10^n$ (km). Với $n = 1$ ($\omega = 10$ vòng/giây, $\approx$ tốc độ cánh quạt điện) thì $r < 4.775$ (km). Một đĩa tròn bán kính 4.775 km không thể quay nhanh hơn 10 vòng/giây. Trái Đất của chúng ta chỉ quay 1 vòng/24 giờ $\approx 1,16 \times 10^{-5}$ vòng/giây

(vận tốc dài tương ứng là $\approx 0,5km/s$). Một vì sao với trường điện từ mạnh muốn phát tín hiệu do chuyển động tự quay rất nhanh của nó thì phải có bán kính rất bé. Ví dụ nếu nó phát tín hiệu trong dải tần số 10kHz ($n = 4$) thì $r < 4,77 km$.

Einstein đã đưa ra một phân tích về vấn đề này trong "*Vật lý - Cuộc phiêu lưu của tri thức*"[10]. Hãy vẽ hai vòng tròn, một to một nhỏ trên cùng một đĩa tròn đang quay, tốc độ quay nhanh chậm không quan trọng. Nếu vòng tròn bên trong đủ bé thì người quan sát nằm trên vòng tròn đó sẽ không thấy có thay đổi gì khi anh ta đo chu vi của vòng tròn, vì vận tốc dài của anh ta nhỏ nên chu vi đo được sẽ tương ứng với $2\pi r$. Thế nhưng, người quan sát ở vòng tròn bên ngoài sẽ phát hiện ra rằng chu vi của anh ta nhỏ hơn $2\pi r$ nếu vòng đó có bán kính r lớn (vận tốc dài cũng sẽ lớn). Thậm chí nếu vòng tròn ngoài quá lớn thì chu vi đo được có thể bằng 0.

Einstein dẫn ra ví dụ này không để minh họa cho sự co ngắn khoảng cách trong lý thuyết tương đối hẹp, mà ông muốn chỉ ra mối liên hệ giữa sự biến đổi hình học ở vòng tròn bên ngoài và sự xuất hiện đồng thời một lực hướng tâm rất mạnh tại đó. Einstein cho rằng lực này là tác nhân gây nên biến dạng hình học của không-thời gian và có thể coi nó như một trường hấp dẫn. Người quan sát ở vòng ngoài vì thế có thể tuyên bố rằng anh ta đang tồn tại trong một trường hấp dẫn mạnh làm biến đổi không-thời gian mà không cần xét đến việc anh ta có đang thực tế tồn tại trên đĩa quay hay không. Mọi quy luật vật lý mà anh ta thiết lập đều cho các kết quả như của chúng ta, mặc dù anh ta đang dựa trên một cơ chế vật lý hoàn toàn khác để lý giải các hiện tượng quan sát được. Lập luận này chỉ có nghĩa, như Einstein đã nói, khi nguyên lý tương đương thỏa mãn.

9. Chuyển động tròn có gia tốc

Dùng ký hiệu θ là góc quay được trong thời gian t , hiển nhiên đối với chuyển động tròn đều $\theta = \omega t$. Để tìm quy luật cho chuyển động tròn có gia tốc, chúng ta áp dụng quy luật Galileo $s = v_0 t + at^2/2$ cho chất điểm, giả sử nó chuyển động trên quỹ đạo tròn theo phương tiếp tuyến, với gia tốc a , và để ý rằng độ dài cung tròn s chính là θr . Sau khi chia hai vế của ($s = v_0 t + at^2/2$) cho r ta được:

$$\frac{s}{r} = \left(\frac{v_0}{r}\right)t + \left(\frac{a}{r}\right)\frac{t^2}{2}, \quad (3.6.15)$$

hay là:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} \quad (3.6.16)$$

Ở đây $\theta = \frac{s}{r}$, $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$ và $\beta = \frac{a}{r}$. Ý nghĩa của ω_0 đã rõ ràng, nó biểu hiện vận tốc góc ban đầu tương ứng với vận tốc dài ban đầu v_0 , còn đại lượng $\beta = \frac{a}{r}$ là một hằng số đối với chuyển động quay của chất điểm và được gọi là *gia tốc góc*. Cũng như gia tốc a , nó biểu hiện sự tăng trưởng của vận tốc góc ω trong một đơn vị thời gian t :

$$\omega = \omega_0 + \beta t \quad (3.6.17)$$

Góc quay được θ là tích phân:

$$\theta = \int (\omega_0 + \beta t) dt = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2} + \theta_0 \quad (3.6.18)$$

Hằng số tích phân θ_0 thể hiện góc quay ban đầu. Công thức $s = v_0 t + at^2/2$ của Galileo như vậy áp dụng được cả cho chuyển động tròn có gia tốc góc.

3.7. SỰ RA ĐỜI CÁC ĐỊNH LUẬT KEPLER

Vào thời Kepler chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời được ghi nhận và lý giải dựa trên mô hình vũ trụ đã cải biên của Copernicus, theo đó các quỹ đạo là tròn. Vốn là người nghi ngờ các quỹ đạo tròn là xác thực, Kepler đã tính toán lại các quỹ đạo dựa trên kết quả đo đạc của Tycho Brahe và lần đầu tiên đã đưa ra những *định luật toán học mang tính định lượng* rõ ràng về chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời. Mặc dù là người cùng thời nhưng Galileo đã không hề biết gì về các định luật này, ít ra cũng không thấy có tài liệu nào mà trong đó ông có nhắc đến các định luật của Kepler. Sau 1800 năm kể từ khi người Hy Lạp nghiên cứu các tiết diện hình nón như các elips, hyperbol và parabol để tìm thể tích của một số vật thể, các kiến thức này mới chứng tỏ ý nghĩa cơ học của chúng.

1. Tycho Brahe (1546–1601) [12–13]

Ông là con trưởng trong một gia đình quý tộc Đan Mạch và được nuôi dưỡng từ bé bởi người chú ruột tên là Joergen, vốn là một lãnh chúa đã có công cứu mạng nhà vua. Năm 16 tuổi ông được gửi đi học luật tại Leipzig, Đức. Thừa hưởng tính nóng của cha, ông thường xuyên cãi lộn với bạn bè và trong một cuộc ẩu đả do tranh cãi ai là người học toán giỏi hơn, ông bị sút một mẩu mũi. Cả đời ông sau này phải mang trên mũi một mẩu hợp kim vàng – bạc đắp lại phần sút.

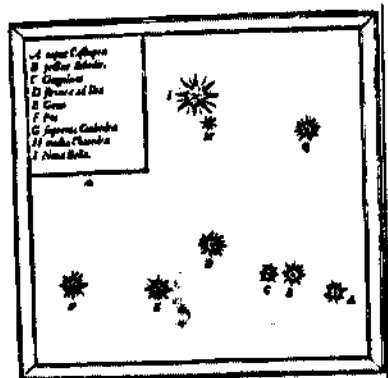
Năm 1570 Tycho trở về Đan Mạch và vào ngày 11/11/1572 ông quan sát được trên bầu trời một hiện tượng sau này gắn liền với tên tuổi của ông – sự xuất hiện của một vì sao sáng hơn cả sao Kim trong chòm sao Thiên Hậu (Cassiopeia). Mấy ngày đầu nó sáng bằng sao Mộc, sau đó sáng rõ như sao Kim, hai tuần sau nó chiếu sáng giữa ban ngày và cuối tháng 11 nó chuyển sang màu vàng, da cam rồi mờ dần thành màu đỏ. Suốt 16 tháng liền sau đó người ta có thể nhìn thấy ngôi sao mới bằng mắt thường. Nó biến mất vào tháng 3 năm 1574. Đó là vụ nổ của siêu sao SN 1572 hay còn gọi là Tycho Supernova (hình 3.7). Trong cuốn hồi ký "*Stella Nova*" (Ngôi sao mới), Tycho viết:



Hình 3.7. Bụi tàn dư của siêu sao SN 1572 (ảnh chụp từ tàu vũ trụ ROSAT, 23/6/96)

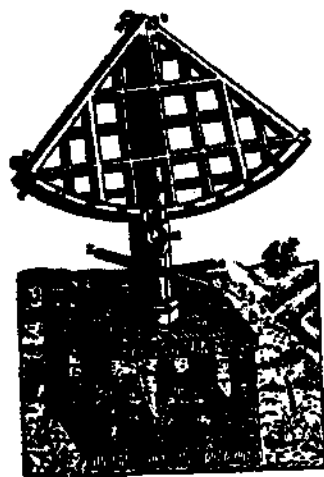
"Vào buổi chiều ngày 11 tháng 11 sau khi Mặt Trời lặn, tôi đứng ngắm bầu trời và nhìn thấy một vì sao lạ, nó sáng hơn các vì sao khác và chiếu rọi ngay trên đỉnh đầu. Vì tôi nhớ vị trí tất cả các vì sao ngay từ thời thơ ấu nên tôi nhận ra ngay rằng ở chỗ đó chưa bao giờ có vì sao nào lộ lộ đập vào mắt ngay lập tức như vậy, ngay cả vì sao nhỏ nhất. Tôi rất ngạc nhiên vì ánh sáng đó và dù hồ thẹn nhưng vẫn phải nghi ngờ đôi mắt của mình. Tuy nhiên, sau khi tôi nhận ra rằng những người khác cũng nhìn thấy vì sao đó khi tôi chỉ cho họ, tôi đã không còn nghi ngờ gì nữa. Thật là một điều kỳ diệu chưa bao giờ được trông thấy trước đây, chưa bao giờ từ khi thế giới khai sinh" (hình 3.8).

Tycho đã thiết kế một kính lục phân (sextant) lớn có tay đòn dài 19 feet (1 foot = 0,3048m) và độ chính xác chuẩn đến từng độ ($^{\circ}$) (hình 3.9). Vào thời đó người ta chưa có kính viễn vọng nên mọi quan sát đều dựa trên mắt thường. Năm sau ông công bố các kết quả chứng tỏ vì sao mới không chuyển động so với các vì sao cố định trên mặt cầu bên ngoài. Số liệu đo của ông chính xác hơn các số liệu đương thời tới 10 lần. Một vài người cho rằng Tycho không phải là người đầu tiên ghi nhận vì sao mới, nó có thể đã được một nhà thiên văn học khác là W. Schuler nhìn thấy vào ngày 6/11 năm đó. Ngày nay đám bụi tàn dư của vụ nổ vẫn còn có thể quan sát được. Đám khí này chuyển động với vận tốc 900 km/s (ít hơn một chút so với 1000 km/s ở siêu sao trong tinh vân Con Cua) và lan tỏa ra vùng rộng khoảng 3.7 $arc\ phút$.



Hình 3.8. Hình vẽ ngôi sao mới (số I) giữa chòm sao Cassiopeia của Tycho Brahe (*Stella Nova*)

Tycho trở nên nổi tiếng năm 1575 và được nhà vua ban tặng cho một hòn đảo riêng - đảo Hveen, chiều rộng tới 3 dặm với một kinh phí ước đoán bằng 10% ngân khố quốc gia để xây dựng một đài thiên văn. Vào thời đó, các nhà thiên văn học thường cũng là các nhà chiêm tinh học nên họ rất được trọng dụng. Tuy là một nhà thiên văn tài ba nhưng Tycho lại là một là nhà quý tộc độc tài và nghiện rượu. Trên đảo Hveen ông bóc lột, đàn áp và giam giữ những người làm thuê thậm tệ, xích họ như nô lệ. Ông đã bị kiện và vua Christian IV đã cắt bỏ phần lớn kinh phí cho đài thiên văn. Chán nản trước quyết định của nhà vua, năm 1597 Tycho cùng gia đình chuyển đài thiên văn khỏi Đan Mạch và bắt đầu đi khắp Châu Âu. Năm 1599, ông đến Praha phục vụ dưới triều của Hoàng Đế Rudolph II, xứ Bohemia. Tycho Brahe ở lại Praha



Hình 3.9. Một kính quan sát bằng gỗ của Tycho Brahe với bán kính 5,79m và phân vạch $0,16^{\circ}$

cho đến khi mất vào năm 1601. Tuy chỉ ở Praha có hai năm nhưng lịch sử lại sắp xếp để Johannes Kepler gặp được Tycho ở đây và Kepler đã tìm thấy trong hàng núi dữ liệu mà Tycho để lại, những quy luật rất cơ bản của chuyển động của các thiên thể trong hệ mặt trời.

2. Số liệu đo trong hệ mặt trời

Bảng dữ kiện dưới đây liệt kê các số liệu chính đo được trong hệ mặt trời vào thời của Tycho Brahe. Đơn vị độ dài được sử dụng là *đơn vị thiên văn*, 1 *đvtv* bằng 1/2 trục chính quỹ đạo trái đất, tức là vào cỡ 23.280 bán kính quỹ đạo trái đất. Đơn vị thời gian là 1 năm trái đất. Kepler đã tìm được quy luật $T^2 \propto a^3$ bằng cách tính trực tiếp từ các dữ liệu loại này. Bảng dữ liệu được dẫn theo Howard Eves [14].

Bảng 3.5. SỐ LIỆU CHU KỲ VÀ ĐỘ DÀI TRỤC CHÍNH ĐO TRONG HỆ MẶT TRỜI

<i>Hành tinh</i>	<i>Chu kỳ T (năm trái đất)</i>	<i>1/2 trục chính (đvtv)</i>
Sao Thủy	0,241	0,387
Sao Kim	0,615	0,723
Trái Đất	1,000	1,000
Sao Hỏa	1,811	1,524
Sao Mộc	11,862	5,202
Sao Thổ	29,457	9,539

3. Johannes Kepler (1571–1630) [14]

Kepler sinh gần Stuttgart. Bố ông vốn là một lính đánh thuê xa nhà từ khi Kepler lên 5 tuổi. Mẹ ông là con gái một chủ quán trọ. Khi còn nhỏ, Kepler sống với mẹ và thường xuyên phụ việc bán hàng. Cậu bé Kepler đã nhiều lần làm khách hàng điên người vì khả năng tính toán siêu phàm của mình.

Kepler là người rất sùng đạo và đã từng theo học chủng viện mục sư Tin lành tại Tübingen, nhưng sau lại chuyển sang nghiên cứu chiêm tinh và thiên văn học. Ông được đào tạo về hình học và có nhiều đóng góp trong lĩnh vực này. Có lẽ tác phẩm nổi tiếng nhất của ông là "*Stereometria doliorum vinorum*" (Hình học không gian các thùng rượu vang) in tại Linz năm 1615. Trong tác phẩm mang cái tên gây cười này,

Kepler đã sử dụng một thuật toán có thể coi là một dạng sơ khai của phép tính tích phân.

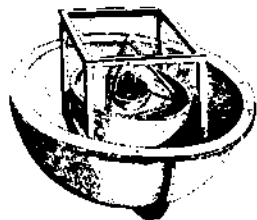
Năm 1600 ông gặp Tycho Brahe tại Praha và đã thừa hưởng số dữ liệu đo đạc khổng lồ một năm sau khi Brahe qua đời. Kepler phải bỏ ra 9 năm ròng để nghiên cứu núi dữ liệu này. Năm 1609, ông phát hiện ra rằng các quỹ đạo tròn là sai lầm, trên thực tế chúng là các hình elips hơi dẹt. Cũng năm đó, ông chỉ ra rằng khi sao Hỏa và các hành tinh khác chuyển động trên quỹ đạo quanh Mặt Trời, cánh tay đòn nối Mặt Trời với hành tinh quét những diện tích như nhau trong những khoảng thời gian như nhau. Hai phát hiện này được công bố trong tập san "*Astronomia nova*", in tại Heidelberg năm 1609. Các tính toán đối với sao Hỏa được thực hiện trên hàng nghìn trang giấy, Kepler nói đó là "cuộc chiến với Sao Hỏa" của ông. Các quỹ đạo được Kepler tính chính xác tới mức phải 100 năm mới cần điều chỉnh một lần.

Mười năm sau, năm 1619, định luật thứ 3 mới được công bố trong "*Harmonices mundi libri V*", Linz, 1619. Các sử gia thuật lại rằng Kepler thêm nó vào trong bản in thứ lần cuối. Định luật này nói rằng bình phương của chu kỳ chuyển động T^2 tỷ lệ với lập phương của nửa trục chính của quỹ đạo elips a^3 ($T^2 \propto a^3$).

Ngoài ra, Kepler còn có đóng góp lớn cho quang học ("*Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*", Frankfurt, 1604). Ông là người đã đưa ra mô hình toán học đầu tiên của máy ảnh và đã giải thích hoạt động của mắt người. Ông còn là người ghi nhận vụ nổ của siêu sao 1604, ngày nay mang tên ông – siêu sao Kepler.

Kepler là người đầu tiên phát biểu rằng, nguyên nhân gây ra chuyển động của các hành tinh quanh Mặt Trời là do sự tồn tại của *một lực nào đó* phát sinh từ Mặt Trời. Nhưng ông hình dung các lực này như những chiếc nan hoa xe đạp đẩy các hành tinh quay quanh Mặt Trời. Kepler đã phỏng đoán chính xác nguyên nhân thủy triều là do *lực tác động* từ Mặt Trăng. Đáng tiếc rằng Galileo đã chế nhạo ông về phỏng đoán này.

Kepler là người tin vào mô hình vũ trụ của Copernicus. Trong "*Mysterium cosmo graphicum*", in tại Tübingen năm 1596, ông đưa ra một mô hình



Hình 3.10. Mô hình hệ mặt trời của Kepler

hình học giải thích kích thước của các hành tinh khá chính xác (sai số $<10\%$), nhưng có vẻ rất kỳ cục. Trước tiên vẽ hình cầu trên quỹ đạo sao Thổ, sau vẽ hình lập phương nội tiếp, sau lại vẽ hình cầu nội tiếp. Đường xích đạo của hình cầu này là quỹ đạo sao Mộc. Sau đó vẽ khối tứ diện và hình cầu nội tiếp bên trong khối đó, xích đạo của hình cầu này là quỹ đạo sao Hỏa. Cứ thế tiếp tục vẽ các quỹ đạo khác (hình 3.10).

Cuộc đời riêng của Kepler rất bất hạnh. Con trai 7 tuổi của ông chết vì đậu mùa (1611), vợ (bà Barbora) phát điên rồi sau cũng chết, còn mẹ ông thì bị quy là phù thủy. Trong lần hôn nhân thứ hai ông đã cân nhắc rất kỹ để chọn vợ (bà Susanna) trong số 11 cô gái, nhưng không hiểu tại sao, người ta đồn rằng cuộc hôn nhân này còn kinh khủng hơn cả lần trước. Bản thân Kepler thì luôn bị coi là phần tử theo đạo không chính thống nên trợ cấp chẳng được là bao. Về già, Kepler hành nghề bói toán, nghe đâu ông chết trên đường đi linh thù lao cho các bảng thiên văn nổi tiếng chính xác của ông, "*Rudolphine Tables*" (Ulm, 1628). Trong các bảng thiên văn này có các bảng logarit được tính chính xác tới 8 chữ số.

3.8. CÁC ĐỊNH LUẬT KEPLER

1. Ba định luật về chuyển động của các hành tinh

Kepler đã đưa ra 3 định luật với các nội dung mà ý nghĩa vật lý và toán học của chúng được Newton chỉ ra sau đó ba phần tư thế kỷ.

(3.8.1) Định luật 1: *Các hành tinh chuyển động quanh Mặt Trời trên các quỹ đạo elips và Mặt Trời nằm ở một tiêu cự.*

Phải nói Kepler đã phát hiện ra sự sai lệch rất nhỏ của các quỹ đạo mà cho tới tận thời kỳ của ông người ta đã coi là tròn. Như đã nói trong §1.4.2, tr.25, độ lệch tâm elips của các hành tinh là rất nhỏ, hầu hết nhỏ hơn 0,1 và các quỹ đạo đều rất gần với đường tròn. Kepler là một nhà tính toán điêu luyện đã được thừa hưởng một kho dữ liệu đo đạc chính xác nhất thời bấy giờ từ Tycho Brahe.

Đối với động lực học Newton, định luật này có hai ý nghĩa toán học chính như sau:

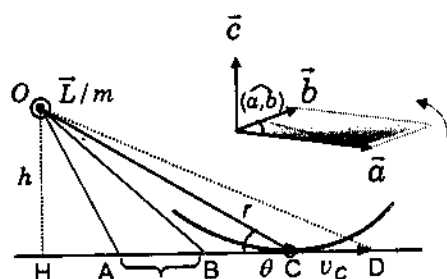
(3.8.2) Hệ quả: *Quỹ đạo chuyển động dưới tác dụng của lực hướng tâm nằm trên mặt phẳng đi qua tâm của nguồn lực.*

(3.8.3) Hệ quả: Phương trình đại số của elips, lấy gốc tại một tiêu cự, là nghiệm của phương trình vi phân mô tả động lực của hệ cơ học bao gồm Mặt Trời và hành tinh (tức là phương trình $F=ma$).

(3.8.4) Định luật 2: Đối với mọi hành tinh, diện tích S quét bởi cánh tay đòn nối hành tinh và Mặt Trời trong mọi khoảng thời gian t như nhau đều bằng nhau:

$$S_1/t_1 = S_2/t_2 \quad (3.8.1)$$

Có thể dễ dàng thấy rằng, tỷ lệ diện tích/thời gian này luôn không đổi đối với chuyển động tròn đều, hơn nữa nó thỏa mãn cả đối với chuyển động thẳng đều (hình 3.11). Nếu nối các vị trí của chất điểm sau những khoảng thời gian bằng nhau với mọi tâm điểm O cho trước ta đều được diện tích quét bởi cánh tay đòn là như nhau. Bằng một chút kiến thức hình học, ta thấy diện tích các tam giác OAB , OBC , OCD ,... là bằng nhau vì chúng đều bằng $1/2$ chiều cao OH nhân với đáy AB , BC , CD ,... Nhưng các đáy này lại bằng nhau do vật chuyển động đều nên hiển nhiên ta có hệ thức (3.8.1). Newton tính ý hơn và còn chỉ ra rằng tại bất kỳ điểm nào trên quỹ đạo thỏa mãn (3.8.1) (ví dụ điểm C trên quỹ đạo cong), vận tốc v tại đó phải tỷ lệ nghịch với khoảng cách h từ tâm O đến tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm đó, đơn giản vì tích vh tỷ lệ với một diện tích không đổi. OH chính là biểu hiện hình học của vận tốc tại C . Các hệ quả này có thể được tổng kết lại như sau:



Hình 3.11. Bảo toàn mômen động lượng đối với chuyển động thẳng đều, chuyển động tròn đều và liên hệ của nó với phép nhân có hướng giữa hai vectơ

(3.8.5) Hệ quả: Trong chuyển động tròn đều, nếu tâm nguồn lực nằm tại tâm quỹ đạo thì tỷ lệ diện tích/thời gian luôn không đổi.

(3.8.6) Hệ quả: Trong chuyển động thẳng đều tỷ lệ diện tích/thời gian luôn bảo toàn đối với mọi vị trí của gốc tọa độ.

(3.8.7) Hệ quả: Nếu chuyển động có quỹ đạo nằm trong một mặt phẳng và bảo toàn tỷ lệ diện tích/thời gian đối với nguồn lực nằm trong mặt phẳng đó thì vận tốc chuyển động tại một điểm bất kỳ trên quỹ đạo

tỷ lệ nghịch với khoảng cách từ nguồn lực đến tiếp tuyến quỹ đạo tại điểm đó.

Ngày nay trong ngôn ngữ vectơ, diện tích vh chính là độ lớn của tích có hướng giữa hai vectơ $\vec{r} \times \vec{v} = \overline{OC} \times \overline{CD}$. Theo định nghĩa thì $|\vec{r} \times \vec{v}| = rv \sin \theta$, với θ là góc giữa $\vec{r}$ và $\vec{v}$ (góc OCB), vì $r \sin \theta = h$ nên $|\vec{r} \times \vec{v}|$ chính là vh . Trong hình vẽ, vectơ $\vec{L}/m = \vec{r} \times \vec{v}$ luôn luôn vuông góc với mặt phẳng quỹ đạo và hướng từ phía trong ra nên nó không đổi trên toàn quỹ đạo. Nói cách khác, đại lượng $\vec{L}$ là môment động lượng được bảo toàn. Do đó:

(3.8.8) Bổ đề: Quỹ đạo bảo toàn tỷ lệ diện tích / thời gian là quỹ đạo bảo toàn môment động lượng⁽¹⁾.

(3.8.9) Định luật 3: Bình phương của chu kỳ chuyển động T tỷ lệ thuận với lập phương của nửa trục chính quỹ đạo r :

$$T^2 \propto r^3 \quad (3.8.2)$$

Có thể kiểm tra lại định luật này từ các dữ liệu đo đạc được dẫn trong bảng 3.5, tr.85. So sánh biểu thức này với $T^2 = (4\pi^2/a_n)r$ của Galileo (3.6.4), ta thấy có sự khác biệt. Vì các quỹ đạo rất gần với đường tròn (coi gia tốc rơi a_n là không đổi) nên có thể nói cả hai biểu thức trên đều phải đúng. Do đó gia tốc rơi a_n phải phụ thuộc vào bán kính quỹ đạo r theo một tỷ lệ nhất định, cụ thể là $a_n \propto r^{-2}$. Như vậy định luật này của

(1) Một trong những luận điểm căn bản của Newton là chứng minh của ông cho rằng định luật 2 Kepler phải thỏa mãn đối với mọi quỹ đạo chuyển động dưới tác dụng của lực hướng tâm (Định lý I, Phần I, *Principia*). Thuật ngữ "lực hướng tâm" (centripetal force) được hiểu theo nghĩa rộng là "cái buộc vật phải hướng về một tiêu điểm" (Định nghĩa V, Phần Định đề, *Principia*), theo đó thì trên thực tế lực hướng tâm có thể là mọi lực bất kỳ miễn là nó phát sinh từ một nguồn đứng yên (hoặc chuyển động thẳng đều); hiển nhiên chúng ta giả thiết lực này biến thiên liên tục theo khoảng cách. Khẳng định của Newton rằng, nếu một vật rơi vào trường lực đó thì nó sẽ chuyển động trên quỹ đạo bảo toàn môment động lượng, thoát đầu có vẻ khó hiểu, vì nếu thế thì có thể suy ra rằng nếu nguồn lực là bất động, quy luật $F=ma$ sẽ trở nên hoàn toàn tương đương với định luật bảo toàn môment động lượng. Hãy cho một vật m và một lực tác dụng F phát sinh từ một nguồn bất động. Newton nói vật m sẽ di chuyển với gia tốc a theo phương của F , và còn hơn thế, quỹ đạo của nó bảo toàn môment động lượng về từ vị trí của nguồn! Chúng ta sẽ trở lại với luận điểm quan trọng này của Newton trong một chương sau, ở đây chỉ nói thêm rằng Newton đã chứng minh nó một cách hết sức thuyết phục và chỉ dựa vào một vài giả thiết cơ bản ban đầu.

Kepler liên hệ trực tiếp tới định luật hấp dẫn do Robert Hooke và Newton tìm thấy sau này.

(3.8.10) Hệ quả: *Lực hấp dẫn từ Mặt Trời đến các hành tinh tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng.*

Các nhà nghiên cứu lịch sử cho rằng có ít nhất là bốn người, Hooke, Wren, Huygens và Newton đã nhìn thấy được hệ quả này của định luật 3 Kepler đối với lực hấp dẫn, có lẽ họ đã làm như sau:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (3.8.3)$$

Nếu $T^2 \propto r^3$ như Kepler nói thì sau khi thay vào biểu thức trên chúng ta được:

$$a_n \propto \frac{4\pi^2 r}{r^3} = \frac{4\pi^2}{r^2} \quad (3.8.4)$$

Dĩ nhiên là lực hấp dẫn F từ Mặt Trời tỷ lệ thuận với gia tốc rơi a_n của hành tinh ($F=ma_n$) nên nó sẽ tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ hành tinh đến Mặt Trời $F \propto r^{-2}$. Trước khi học thuyết Newton ra đời người ta đã đoán nhận được sự phụ thuộc này.

Học thuyết của Newton sau này chỉ ra rằng $a_n = GM/r^2$, với M là khối lượng Mặt Trời và G là hằng số hấp dẫn, nên chính xác ra định luật 3 Kepler phải được viết là:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (3.8.5)$$

2. Ôn tập về các tiết diện hình nón (conic sections)

Khi cắt một hình nón bằng một mặt phẳng thì có 4 đường có thể được tạo nên: đường tròn, đường elips, đường parabol và đường hyperbol.

Định nghĩa elips theo hình học:

(3.8.11) Định nghĩa: *Elips là quỹ tích của các điểm mà tổng hai khoảng cách vẽ từ mọi điểm X trên đường đó tới hai điểm O_1 và O_2 cho trước là không đổi: $XO_1 + XO_2 = 2a$.*

Hai điểm O_1 và O_2 được gọi là tiêu điểm của elips. Khoảng cách O_1O_2 thường được ký hiệu là $2e$; a và b được gọi là bán trục chính và bán trục phụ của elips.

Định nghĩa elips theo đại số:

(3.8.12) Định nghĩa: Đường elips là đường bao gồm các điểm X thoả mãn phương trình sau trong hệ tọa độ cực⁽¹⁾:

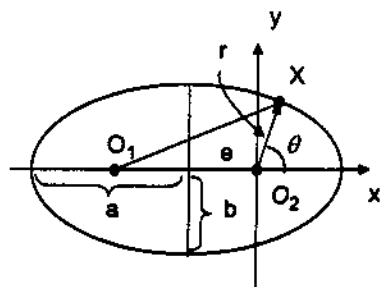
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (3.8.6)$$

với p và ε là hai thông số: $p = b^2/a$, $\varepsilon = e/a$ và $e^2 = a^2 - b^2$. Đối với elips thì $\varepsilon < 1$, với parabol, $\varepsilon = 1$ và với hyperbol, $\varepsilon > 1$.

Mối liên hệ giữa tọa độ cực và một hệ tọa độ vuông góc xy như trong hình vẽ (trục y đi qua O_2) là:

$$y^2 = (\varepsilon^2 - 1)x^2 + 2pex + p^2 \quad (3.8.7)$$

Cả hai phương trình (3.8.6) và (3.8.7) đều thoả mãn đối với đường parabol ($\varepsilon=1$), đường hyperbol ($\varepsilon > 1$) và đường tròn ($\varepsilon=0$).



Hình 3.12. Các tham số của elips trong hệ tọa độ cực và hệ tọa độ vuông góc

Bài tập áp dụng

Áp dụng định luật Kepler thứ 2 để chỉ ra ở vị trí nào trên quỹ đạo thì vận tốc của hành tinh lớn nhất.

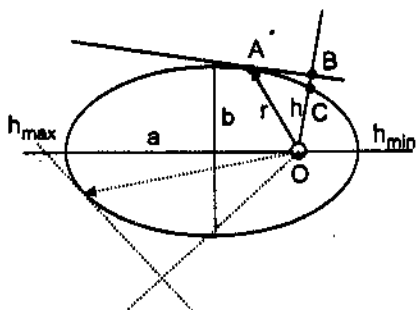
Giải:

Xem hình 3.13, theo (3.8.6) và vì $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, nên cánh tay đòn r nối hành tinh với Mặt Trời nằm trong khoảng:

$$\left[\frac{p}{1 + \varepsilon} \right]_{\theta=0} < r < \left[\frac{p}{1 - \varepsilon} \right]_{\theta=\pi}, \quad (3.8.8)$$

(1) Hệ tọa độ cực được tạo nên bởi một trục cho trước (như trục x trong hình vẽ) và một điểm nằm trên trục đó làm gốc (như O_2). Vị trí của điểm X trong mặt phẳng chứa trục x được xác định bởi hai tọa độ là r (độ dài O_2X) và θ (góc XO_2x).

tức là r lớn nhất ở đỉnh xa và nhỏ nhất ở đỉnh gần. Hơn nữa, theo phân lý giải định luật 2 thì vận tốc v tại một điểm A trên quỹ đạo tỷ lệ nghịch với khoảng cách h từ Mặt Trời đến đường tiếp tuyến với elips vẽ từ điểm đó, nên hiển nhiên v nhỏ nhất khi h lớn nhất và ngược lại. Vì $h = OB < OA = r$, nên h đạt cực đại khi $h = r_{\max} = p/(1 - \epsilon)$ tại đỉnh xa, suy ra v nhỏ nhất tại đó.



Hình 3.13. Xác định các vị trí có vận tốc cực đại và cực tiểu theo định luật 2 Kepler

Muốn chứng minh h nhỏ nhất tại đỉnh gần thì chúng ta cần sử dụng định lý nói rằng đường vuông góc vẽ từ Mặt Trời tới mọi tiếp tuyến đều cắt các tiếp tuyến đó tại những điểm nằm ngoài elips, như điểm B. Do đó, với mọi điểm C trên quỹ đạo, chúng ta đều có $OC < OB = h$, suy ra h đạt cực tiểu khi $h = r_{\min} = p/(1 + \epsilon)$ tại đỉnh gần.

■

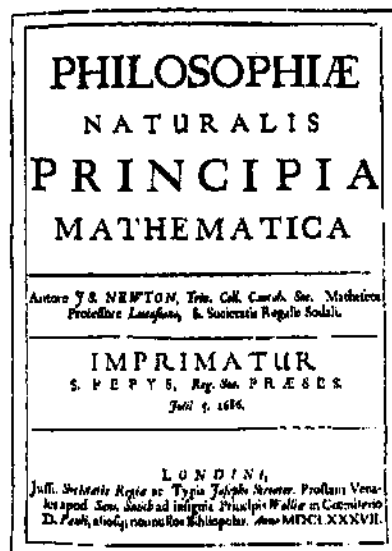
Principia

Lời nói đầu của Newton trong lần xuất bản đầu tiên cuốn *Principia* (dịch toàn văn, chỉ bỏ qua một vài câu nườm rà từ bản tiếng Anh):

"Từ khi người cổ đại (như chúng ta đã nghe được từ Pappas) đã nỗ lực vận dụng ngành khoa học về cơ học trong nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên; và người hiện đại, bỏ qua một bên các bản thể huyền bí, cố gắng đưa các hiện tượng tự nhiên vào trong quy luật toán học, tôi đã phát triển toán học trong luận văn này đến mức mà khoa học tự nhiên cần. Người cổ đại nhìn nhận cơ học từ hai khía cạnh: lý thuyết – được chứng minh chặt chẽ, và thực hành. Cơ học thừa hưởng cái tên của mình từ lĩnh vực thực hành, nơi mà mọi thao tác thủ công đều cần thiết. Nhưng vì người thợ không thể làm việc một cách chính xác tuyệt đối, nên cơ học trở nên khác biệt so với hình học, cái gì chính xác tuyệt đối thì được gọi là hình học còn cái gì kém chính xác hơn thì được gọi là cơ học.

(...) Hình học không dạy chúng ta cách vẽ những đường (tròn và những đường thẳng) mà đòi hỏi chúng phải được vẽ ra từ trước; người học phải được dạy cách trình bày chúng cho chính xác trước khi bước vào hình học; và nó sẽ chỉ ra sau đó rằng các vấn đề sẽ được giải quyết như thế nào bằng các hình này. Sự thể hiện các đường thẳng và đường tròn là một vấn đề, nhưng không phải là một vấn đề hình học. Lời giải của các vấn đề này nằm trong cơ học; và giá trị sử dụng của chúng, sau khi đã được lý giải, hiện ra bằng hình học; vinh quang của hình học là ở chỗ chỉ từ một vài nguyên lý ban đầu nó có thể chỉ ra vô số hệ quả. Vì thế mà hình học có nền tảng trong thực tế cơ học và chẳng phải là cái gì khác ngoài một phần của lĩnh vực cơ học tổng quát, nơi phát sinh và phổ biến các đo đạc thủ công. Thế nhưng vì nghệ thuật thủ công liên quan chủ yếu tới chuyển động của vật thể, nên hình học thường được gắn với kích thước và cơ học gắn với chuyển động của chúng. Hiểu như vậy, môn cơ học lý luận là ngành khoa học về các chuyển động gây ra bởi các lực nào đó và các lực này là cần thiết để tạo ra các chuyển động như ý muốn.

(... Trong sách này) chúng tôi quan tâm chủ yếu tới những gì liên quan đến lực hấp dẫn, lực nâng, lực đàn hồi, sức cản của chất lỏng, và các lực tương tự, bất kể là lực hút hay lực đẩy và trình bày trong công trình này các nguyên lý toán học của khoa học tự nhiên; hình như tất cả các khó khăn trong khoa học đều bắt nguồn từ đây – từ các hiện tượng chuyển động cần nghiên cứu các lực trong tự nhiên, và sau đó từ các lực này lý giải các hiện tượng khác; các định đề trong phần I và phần II của cuốn sách đều hướng tới mục đích này. Trong phần III, chúng tôi đưa ra các ví dụ thông qua việc phát triển một lý thuyết về Hệ thống Vũ Trụ; bằng các nguyên lý toán học được trình bày trong hai phần trước, chúng tôi dẫn giải lực hấp dẫn buộc các thiên thể chuyển động quanh Mặt Trời và quanh một số hành tinh khác. Sau đó từ các lực này và cũng thông qua các định đề toán học khác lý giải chuyển động của



Tờ bìa cuốn "*Philosophiæ naturalis principia mathematica*" xuất bản năm 1687

các hành tinh, các sao chổi, Mặt Trăng và thủy triều. Tôi hy vọng có thể lý giải các hiện tượng tự nhiên còn lại bằng phương pháp luận cơ học tương tự; bởi lẽ tôi có nhiều cơ sở để cảm nhận rằng chúng đều phụ thuộc vào các lực nào đó, vì những lý do chưa được biết, đẩy các phần tử lại gần nhau và dính chặt vào nhau trong cùng một hình thái, hoặc ép chúng tách nhau và lùi ra xa; những lực này chưa được biết và các nhà khoa học đã tìm kiếm trong tự nhiên cho đến nay nhưng chưa thấy; tuy nhiên tôi tin rằng những nguyên lý được trình bày ở đây sẽ đem lại một chút ánh sáng cho phương pháp luận này hoặc những phương pháp khác đúng đắn hơn.

Trong ấn phẩm này, một người nhạy bén và có kiến thức toàn diện nhất, ông Edmund Halley đã không chỉ giúp đỡ tôi bằng nỗ lực kiểm tra lại bản in và đốc thúc kế hoạch in mà còn chính bằng sự nài ép của ông mà ấn phẩm này được in ra; từ khi ông nhận được các chứng minh của tôi về các quỹ đạo của các thiên thể, ông đã không ngừng thúc dục tôi phải gửi chúng tới Hội Hoàng gia (Royal Society), nơi sau đó đã ủng hộ và yêu cầu tôi xuất bản chúng. Tuy nhiên, việc xuất bản đã bị trì hoãn cho đến khi tôi sửa lại sự thay đổi trong chuyển động của Mặt Trăng, và xem xét lại một vài vấn đề khác liên quan tới các định luật hấp dẫn và các số liệu, các quỹ đạo mà các thiên thể vẽ ra theo các định luật được đưa ra, chuyển động của một vài vật thể quanh các vật thể khác, chuyển động của các vật trong môi trường có sức cản, các lực, các tỷ trọng và các chuyển động, các quỹ đạo của các sao chổi và những vấn đề tương tự. Những điều liên quan tới chuyển động của Mặt Trăng (không được chính xác lắm) tôi đã sửa lại trong các hệ quả của định lý 66, để tránh phải đưa ra và chứng minh một số vấn đề rườm rà không cần thiết đối với vấn đề đang bàn. Một số vấn đề khác, xuất hiện trong các phần còn lại, tôi chọn thả đưa chúng vào chỗ ít thích hợp còn hơn là đánh số lại các định lý và các chú dẫn. Tôi chân thành cầu mong rằng những gì đã được viết ra ở đây sẽ được đọc với sự vô tư và rằng các lỗi mắc phải trong một vấn đề phức tạp như thế này sẽ không bị phê phán mà trái lại được nghiên cứu và thảo luận bằng các nỗ lực của các bạn đọc của tôi.

ISAAC NEWTON.

Cambridge, Trinity College, Ngày 8 Tháng 5 Năm 1686

Chương 4

ĐỘNG LỰC HỌC NEWTON

Động lực học, trong tiếng Anh *dynamics*, là từ dùng để chỉ lĩnh vực cơ học nghiên cứu chuyển động của vật chất có xét đến nguyên nhân gây ra chuyển động là các lực; nói rõ hơn, đối tượng của động lực học Newton là chuyển động của vật thể trong trường lực hướng tâm; nó chỉ ra sự phụ thuộc *địa phương* giữa gia tốc của chuyển động và lực gây ra chuyển động; và từ *quy luật phân bố lực* trong không gian chỉ ra tính đặc thù của quỹ đạo. Điểm đặc trưng của lý thuyết động lực học này là nó đòi hỏi phải có một không - thời gian bất biến không phụ thuộc vào độ lớn của lực tồn tại trong không - thời gian đó. Hơn nữa, trong lý thuyết này tốc độ truyền tương tác được coi là vô hạn.

4.1. CÁC VẤN ĐỀ TRƯỚC KHI LÝ THUYẾT NEWTON RA ĐỜI

1. Descartes và sự phát triển vượt bậc của hình học

René Descartes⁽¹⁾ (1596–1650), người đã có ảnh hưởng sâu sắc đến cả hai lĩnh vực triết học và toán học, sinh tại thành phố Tour nước Pháp. Ông kém Galileo 32 tuổi. Sử sách ghi lại rằng cuộc đời Descartes không được suôn sẻ lắm. Suốt đời ông bị coi là một kẻ vô thần và bị chỉ trích nặng nề từ mọi phía do đã có những tư tưởng cấp tiến nghi ngờ sự tồn tại của Đức Chúa Trời⁽²⁾. Descartes đã buộc phải định cư tại Hà Lan trong 20 năm liền. Trong thời đại của ông những xung đột chính kiến và tôn giáo xảy ra rất dữ dội. Tương truyền Descartes đã chết vì sự chăm

(1) Tên của ông viết chính xác là Des Cartes, tuy nhiên ngày nay người ta thường viết liền thành Descartes.

(2) Theo Descartes tâm hồn (*soul*) đồng nhất với ý niệm (*thought*). Câu nói nổi tiếng nhất của ông là: "Tôi tư duy vậy thì tôi tồn tại" (*Cogito ergo sum*) - thể hiện một luận điểm trọng tâm của trường phái triết học thực chứng (*positive philosophy*).

sóc kém cỏi dưới tay một vị bác sỹ thủ cựu đã từng coi ông như kẻ thù. Về đời tư, ông có một cô con gái với bà chủ nơi ông thuê nhà nhưng lại chết yểu từ khi còn nhỏ. Descartes rất nổi tiếng với thói quen ngủ muộn; có một vài chuyện ngụ ngôn kể rằng ông đã phát hiện ra môn hình học của mình khi quan sát những con ruồi bò trên trần nhà. Lý thuyết hình học của Descartes xuất hiện năm 1637 trong phụ bản "*La Geometrie*" (Hình học), trong cuốn "*Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans le sciences*" (Bàn về phương pháp tìm kiếm lẽ phải và chân lý trong khoa học). Phụ bản này đã đề cập tới một phương pháp cách mạng trong hình học, kể từ thời Euclid cho đến thời kỳ đó, chưa có đóng góp nào vượt bậc hơn là đóng góp này của Descartes. Nó dày khoảng 150 trang, chủ yếu nói về cơ sở đại số của hình học. Năm 1649 xuất hiện một bản dịch sang tiếng La tinh của Frans van Schooten Jr. (1615–1660, đã từng là thầy dạy của Huygens), bản dịch này được chú giải và đã lưu hành rộng rãi trong các năm từ 1659 đến 1661. Ngôn ngữ của Descartes rất mập mờ và khó hiểu, phải mất 100 năm sau môn hình học của ông mới được hoàn tất dưới dạng quen thuộc như ngày nay. Vào thời của Descartes, theo Voltaire (1694–1778) dẫn trong "*Lettres Philosophiques*" (1778),[15], thì chỉ có một vài người như Schooten ở Hà Lan và Fermat (1601–1665) ở Pháp là hiểu được công trình này của ông. Bản thân Newton cũng đã từng thổ lộ là ông cảm thấy rất mừng lung khi đọc Descartes⁽¹⁾.

2. Định luật bảo toàn động lượng

Descartes đã thảo luận về động lượng khi xem xét một bài toán như sau:

"Một quả cầu nặng 5 kg được ném đi với tốc độ 5 m/s theo phương nằm ngang; giả sử có một người nặng 45 kg đứng trên bàn trượt phẳng bắt được quả cầu đó, hỏi người đó sẽ bị đẩy lùi với vận tốc bằng bao nhiêu?"

Descartes cho rằng quả cầu có một "lượng chuyển động" (quantity of movement, động lượng) là $5 \times 5 = 25$ (kg m/s). Nếu người đó bắt được quả

(1) Một đường Descartes đưa ra, được quen gọi là "lá Descartes" có phương trình $x^3 + y^3 = 3axy$, đường này có tiệm cận là đường thẳng $x + y + a = 0$. Bạn đọc có thể vẽ đồ thị và khảo sát hàm số này như một bài tập.

cầu, thì anh ta sẽ bị đẩy về phía sau với tốc độ sao cho "lượng chuyển động" bảo toàn, có nghĩa là $(45 + 5) \times (\text{vận tốc}) = 25 \text{ (kg m/s)}$, suy ra vận tốc $= 0,5 \text{ m/s}$. Tất nhiên là vào thời đó chưa có các đơn vị SI như *kg*, *m*, *s* nên Descartes không đưa ra các khối lượng cụ thể như trên mà chỉ suy đoán trên cơ sở các tỷ lệ khối lượng: quả cầu nặng bằng 0,9 khối lượng của người phải bay với tốc độ gấp 10 lần tốc độ người. Tuy nhiên sau khi đặt ngược lại vấn đề rằng nếu người đó nặng 50 *kg*, anh ta lại không đứng yên mà chuyển động ngược chiều với vận tốc bằng 0,5 *m/s* thì sau khi va chạm với quả cầu cả hai sẽ phải đứng yên nên ông đi đến kết luận rằng "lượng chuyển động" bằng 0 và như vậy *không thể bảo toàn*. Phân tích của Descartes ít nhiều phản ánh lịch sử hình thành ban đầu của khái niệm *động lượng* và định luật *bảo toàn động lượng* – vào thời đó người ta vẫn cho rằng động lượng là đại lượng vô hướng, một thứ "sức mạnh va chạm" đơn thuần.

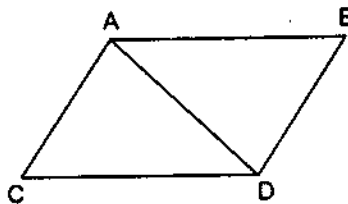
Huygens sau này đưa vào giả thiết rằng nếu vận tốc có thể coi là có chiều, tức là có thể dương hay âm tùy thuộc vào chiều được quy định thì động lượng trong ví dụ trên của Descartes vẫn bảo toàn vì động lượng ban đầu bằng không khi cả quả cầu và người chuyển động ngược chiều nhau. Động lượng là một đại lượng vectơ: $\vec{p} = m\vec{v}$. Điều đáng ngạc nhiên là chính Descartes là người đã đưa ra hệ tọa độ và đã nghiên cứu các mặt phẳng 2 chiều và không gian 3 chiều rất kỹ (tức là các không gian vectơ 2 và 3 chiều).

3. Phép cộng vectơ từ Galileo đến Newton

Vectơ là đại lượng có hướng – hiểu một cách vật lý, là một mũi tên có chiều và độ lớn. Muốn vẽ được mũi tên thì ít nhất phải có mặt phẳng, nói cách khác ít nhất phải có hai trục tọa độ. Nếu chỉ có một đường thẳng thì hai chiều âm dương của nó cũng đủ để xác định phương hướng, bởi vậy muốn biểu hiện vectơ, người ta cần nhiều hơn là một con số. Trong ngôn ngữ toán học vectơ đơn thuần là một *nhóm các con số* ($x, y, z, \dots$). Nhìn chung số lượng các con số được gọi là *số chiều* của vectơ. Đó là số "hướng" mà vectơ có thể chỉ.

Có nhiều đại lượng quan trọng trong vật lý chỉ là một con số, ví dụ như công *A*, năng lượng *E*, khối lượng *m*, nhiệt độ *T*, điện áp *U*, độ dài *s*, tỉ trọng ρ , hằng số Planck $\hbar$... nhưng cũng có nhiều đại lượng không thể

biểu thị chỉ bằng một con số, chẳng hạn tọa độ $\vec{r}$, lực $\vec{F}$, vận tốc $\vec{v}$, động lượng $\vec{p}$, môment động lượng $\vec{L}$, cường độ điện trường $\vec{E}$, cảm ứng từ $\vec{B}$, dòng điện $\vec{j}$... Một số đại lượng còn không thể biểu diễn bằng vectơ mà phải bằng ma trận hoặc tenxơ (như áp lực, độ đàn hồi...) và điều này đã gây ra không ít khó khăn vì ban đầu các phép tính với các nhóm con số chưa hình thành⁽¹⁾. Đối với vectơ có một



Hình 4.1. "A body by two forces conjoined will describe the diagonal of a parallelogram, in the same time that it would describe the sides, by those forces apart." [Corollary I, Axioms, Principia].

phép cộng và hai phép nhân, được thiết lập về mặt toán học sau này, nhưng ý nghĩa vật lý và sử dụng chúng thì đã được thấy từ trước. Về phép cộng hai vectơ, Galileo đã đưa ra quy luật tính độ lớn của vectơ tổng thể $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ khi nghiên cứu các chuyển động có quỹ đạo parabol. Theo ông chuyển động này bao gồm hai thành phần rơi tự do và chuyển động thẳng đều (theo phương nằm ngang) nên tổng hợp vận tốc tuân theo định luật Pythagoras. Có thể sử dụng quy tắc trên để phân tích một vectơ thành hai thành phần vuông góc với nhau và hiển nhiên đó cũng là cách tính độ lớn (độ dài) của một vectơ trong hệ tọa độ vuông góc (x, y) . Đến Newton thì phép cộng vectơ mới được hiểu như ngày nay. Trong Bổ đề I, phần Các định đề, sách "*Principia*" Newton viết:

(4.1.1) Bổ đề: "*Vật bị hai lực kết hợp tác dụng sẽ đi theo đường chéo của hình bình hành mà hai lực kia như thể đang đồng thời tác dụng theo hai cạnh*" (hình 4.1).

Tuy vào thời đó từ "vectơ" vẫn chưa tồn tại, nhưng Newton thực chất đã không chỉ ý thức được phép cộng hai vectơ mà còn sử dụng *phép nhân một vectơ với một số thực*. Trong Định nghĩa II, phần Các định đề, sách đã dẫn, chúng ta còn đọc được:

(1) Có chuyện kể rằng mỗi buổi sáng khi Hamilton thức dậy, con gái ông lại hỏi "Bố đã tìm ra cách nhân 3 con số chưa?". Cô bé đã phải hỏi bố mình ít nhất là 10 năm, vì Hamilton đã mất một thời gian dài nghiên ngẫm mới tìm ra phép nhân các *quaternion*, để rồi sau này lại bị lãng quên và bị thay thế bởi phép nhân vectơ đơn giản và uyển chuyển hơn. Việc phát hiện các *quaternion* được Hamilton đánh giá ngang hàng với phát hiện phép tính vi phân của Newton, điều này tỏ ra h i quá đáng nhưng cũng phản ánh uy tín rất lớn của Hamilton trong thời đại của ông.

(4.1.2) Định nghĩa. "Một lượng chuyển động [động lượng] là một định lượng kết hợp từ vận tốc và lượng vật chất [khối lượng]".

Và ông giải thích thêm:

"[Lượng] chuyển động của cả vật là tổng các [lượng] chuyển động của tất cả thành phần; và vì thế mà khi vật tăng gấp đôi khối lượng trong khi giữ nguyên vận tốc thì [lượng] chuyển động tăng gấp đôi; khi cả vận tốc cũng tăng gấp đôi thì nó tăng gấp bốn".

Biểu diễn dưới dạng công thức như ngày nay, chúng ta có:
$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$
. Hướng của véctơ không đổi khi nhân nó với một số thực dương và đổi chiều khi nhân nó với một số thực âm.

4. Phép tính vi phân của Newton và Leibnitz

Sự hình thành của lý thuyết vi phân là biến cố toán học lớn nhất trong thế kỷ 17, nếu không nói là từ thời Euclid cho đến nay. Có hai cái tên gắn liền với hiện tượng đó là Isaac Newton và Gottfried Leibnitz (1646–1716)⁽¹⁾. Những cuộc tranh cãi về việc ai là người đầu tiên phát hiện ra lý thuyết vi phân đã kéo dài trong nhiều năm, ngay từ khi hai ông còn sống. Các tài liệu còn lưu trữ được cho thấy Leibnitz đề cập tới vấn đề này từ năm 1675 nhưng các công trình thì xuất hiện sau này trong các năm 1682–1692, nhiều công trình được in trong một tạp chí có tên là "*Acta Eruditorum*", do Leibnitz và Otto Mencke sáng lập ra (1682) và được lưu hành rộng rãi ở châu Âu lục địa thời bấy giờ. Còn Newton thì đã nói về phương pháp *chảy* (fluxion) của mình từ năm 1666 trong các bản chép tay còn lưu giữ được, nhưng phải đến năm 1693 nó mới xuất hiện trong một bản in chính thức⁽²⁾. Câu hỏi chủ yếu được quan

(1) Leibnitz cả đời làm công tác ngoại giao và chính trị cho một số công quốc thuộc nước Đức ngày nay. Ông là một người có kiến thức toàn diện và những đóng góp trong lĩnh vực triết học của ông có ảnh hưởng rất lớn, tác phẩm hay được nhắc đến là *The monadology*. Leibnitz am hiểu nhiều ngôn ngữ và là một chuyên gia tiếng Phạn được công nhận (G.W. Leibniz, "*Philosophical Papers and Letters*", Leroy E. Loemker, Chicago, 1956).

(2) Bản chép tay để ngày 28/5/1665 là dấu ấn đầu tiên về các fluxion (năm đó Newton cũng nhận học vị BA). Phép tính fluxion hầu như hoàn thiện trong bản chép tay để ngày 13/11/1665, Newton đã áp dụng nó để tính độ dốc tiếp tuyến và các bán kính cong. Trong năm sau đó ông đã áp dụng fluxion trong lý thuyết phương trình.

tâm sau này là liệu Leibnitz có nhìn thấy bản chép tay năm 1666 của Newton hay không? Bản thân Leibnitz cũng không phủ nhận là đã nhận được một bản chép tay của Newton nhưng ông nói nó vô ích vì không chứa đựng một thông tin nào đáng kể. Người ta cũng có tìm được một ghi chép riêng của Leibnitz về công trình của Newton nhưng không rõ từ thời gian nào, nó có thể được Leibnitz chép lại từ bản in năm 1704. Những cuộc "bút chiến" gay gắt xảy ra trong quá khứ đã gây không ít chia rẽ giữa giới khoa học Anh và châu Âu lục địa. Vào thời đó việc vận dụng hay phát triển một ý tưởng của người khác là một vấn đề hết sức nhạy cảm. Ngày nay chúng ta ghi nhận sự đóng góp của cả hai người, tuy rằng Leibnitz không phải là một nhà toán học uyên bác như Newton nhưng các nhà nghiên cứu đều khẳng định rằng ông có một cảm nhận toán học tuyệt vời về các dạng ký hiệu. Các ký hiệu vi phân df , dx và tích phân $\int y dx$ được dùng hiện nay phát sinh từ Leibnitz, còn các ký hiệu $\dot{x}$, $\dot{y}$ hay x' , y' , vẫn hay được dùng trong các giáo trình vật lý là của Newton.

Lý thuyết vi phân của Newton xuất hiện trong cuốn *Methods of Fluxions*, viết năm 1671 nhưng phải hơn nửa thế kỷ sau, vào năm 1736 mới được in. Trong cuốn sách này Newton đã đề cập tới các *phương trình vi phân* và một phương pháp gần đúng để tìm nghiệm thực của các phương trình đại số, ngày nay mang tên ông gọi là phương pháp Newton. Một lưu ý khác rất quan trọng và hay được sử dụng trong vật lý là ý kiến của Newton cho rằng, trong mọi triển khai đại số đều có thể loại bỏ các số hạng chứa lũy thừa bậc hai hay cao hơn của các vi phân của biến số, ví dụ trong biểu thức $[xdt + x(dt)^2 + y(dt)^3]$ ta có thể loại bỏ thành phần $[x(dt)^2 + y(dt)^3]$. Newton đã kiểm tra lại ý kiến này bằng các phép tính về giới hạn.

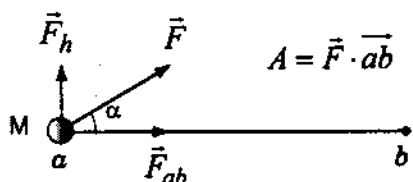
Đối với người đọc ngày nay thì ngôn ngữ Newton sử dụng trong *Methods of Fluxions* rất xa lạ, chẳng hạn ông gọi các *hàm số* là các đại lượng *chảy* (flux), *đạo hàm* là *sự chảy* (fluxion), vi phân của biến số là *moment*. Ông coi mọi đường đều sinh ra bởi chuyển động đều của một điểm và đưa yếu tố thời gian vào trong hình học. Ông không viết xdt mà viết xo , không viết dy/dt mà viết $\dot{y}$. Hệ thống ký hiệu của Newton tỏ ra phức tạp hơn so với hệ thống ngày nay vốn phát sinh từ Leibnitz. Một định lý về cách lấy đạo hàm của đa thức dạng $A^m B^n$ được thấy trong

Quyển II, "*Principia*". Theo định lý này (*Lemma II*), nếu coi đạo hàm của A là a , của B là b thì đạo hàm của $A^m B^n$ là $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$, m và n có thể là số nguyên hay phân số, âm hay dương. Định lý này được phát biểu bằng một thứ ngôn ngữ không dễ gì hiểu được⁽¹⁾.

4.2. MỞ ĐẦU ĐẠI SỐ VÉCTƠ

1. Hai loại phép nhân véctơ

Vì véctơ là một nhóm các con số nên chỉ có thể *nhân*, *chia* nó với một con số ($\vec{a} = k\vec{b}; \vec{a} = \vec{b}/k$) chứ không thể *cộng*, *trừ* nó với một con số ($k + \vec{b} = ?; \vec{b} - k = ?$); hơn nữa chỉ có thể nhân hai véctơ với nhau nhưng không chia cho nhau được, cũng không thể chia một con số cho véctơ, tức là lấy nghịch đảo của véctơ⁽²⁾. Khác với các con số, có hai cách để nhân các véctơ với nhau. Cả hai loại tích này đều có ý nghĩa thực tiễn bắt nguồn từ các đại lượng vật lý, có thể nói các hiện tượng vật lý đã trực tiếp gợi ý định nghĩa của chúng. Một ví dụ về tích vô hướng là đại lượng gọi là *công* của lực để chuyển dịch một vật trên đoạn đường nhất định (vật M trên hình 4.2). Vì chỉ có thành phần lực song song với phương chuyển động ($\vec{F}_{ab}$) mới có tác dụng dịch chuyển vật, còn thành phần vuông góc ($\vec{F}_h$) thì có tác dụng nâng vật lên chứ không kéo nó đi nên công thực hiện không phải là do toàn bộ lực $\vec{F}$ mà chỉ do thành phần $\vec{F}_{ab}$, vì thế:



Hình 4.2. Liên hệ giữa công của lực và phép nhân vô hướng giữa hai véctơ

$$[\text{công} = \text{lực} \times \text{quãng đường}] \rightarrow A = |\vec{F}_{ab}| |ab| = \{|\vec{F}| \cos(\alpha)\} |ab| = \vec{F} \cdot \vec{ab}$$

(1) "The moment of any Genitum is equal to the moments of each of the generating sides drawn into the indices of the powers of those sides, and into their coefficients continually".

(2) Tuy nhiên có thể thấy rằng các biểu thức tương tự như $k/\vec{b}$ xuất hiện khá phổ biến trong các tài liệu hiện hành, chẳng hạn $\partial U / \partial \vec{F}$. Tương tự cũng không thể tùy tiện viết $\vec{b}^2$ vì chúng ta không có định nghĩa cụ thể lũy thừa của một véctơ là gì. Các cách viết này có thể gây khá nhiều nhầm lẫn nếu không được định nghĩa rõ ràng.

Và chúng ta có định nghĩa tích vô hướng như sau:

(4.2.1) Định nghĩa: Với $\vec{a}$, $\vec{b}$ là hai vectơ bất kỳ và α là góc giữa chúng, tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được hiểu là một con số có giá trị bằng:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha \quad (4.2.1)$$

Giá trị này chính là diện tích hình chữ nhật với một cạnh dài bằng vectơ thứ nhất (a) và cạnh kia dài bằng hình chiếu của vectơ thứ hai lên vectơ thứ nhất ($b \cos \alpha$). Nó lớn nhất khi hai vectơ song song với nhau và bằng 0 khi chúng vuông góc.

Thể hiện phép nhân vô hướng dùng hệ tọa độ rất đơn giản. Cho hệ tọa độ n - chiều $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tổng quát, tích vô hướng của hai vectơ bất kỳ $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ bằng tổng của tích từng thành phần:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (4.2.2)$$

Thông thường người ta ký hiệu tích vô hướng bằng dấu chấm ($\cdot$), hoặc không viết gì cả, trong giáo trình này chúng ta sẽ dùng dấu chấm. Từ (4.2.1) và (4.2.2) có thể thấy các tính chất sau là hiển nhiên (k là một số thực).

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad (4.2.3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (4.2.4)$$

$$k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot k\vec{b} \quad (4.2.5)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (4.2.6)$$

Còn các biểu thức như $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$; $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ là vô nghĩa vì tích $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là một con số và con số đó không thể nhân vô hướng với vectơ $\vec{c}$ (tuy nhiên cần lưu ý rằng biểu thức $\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ là có nghĩa!).

Phải đến năm 1844, định nghĩa đầu tiên về tích vô hướng mới xuất hiện trong cuốn "*Die Ausdehnungslehre*" (được quen gọi là *Lý thuyết mở rộng*) của Hermann Grassmann - một cuốn sách không có nhiều ảnh hưởng thời đó của một nhà toán học người Đức đã cả đời chỉ là một giáo viên trung học⁽¹⁾.

(1) Hermann Gunther Grassmann (1808-1877) sinh tại Stettin nước Phổ, nay là Szczecin, Ba Lan trong một gia đình có 12 người con; bản thân ông cũng sinh được 11

Ví dụ vật lý sinh động nhất về tích có hướng có lẽ là định luật 2 của Kepler ($S_1/t_1 = S_2/t_2$), được bàn tới trong các phần trước. Quỹ đạo Kepler bảo toàn môment động lượng $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (xem lại hình 3.11 tr.88). Tích có hướng thường được ký hiệu bằng dấu ($\times$) hay ($\wedge$). Định nghĩa của tích có hướng như sau:

(4.2.2) Định nghĩa: Tích có hướng của hai vectơ bất kỳ $\vec{b}, \vec{c}$ hợp với nhau một góc α là một vectơ $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ vuông góc với cả hai vectơ đó, có độ lớn bằng:

$$a = bc \sin(\alpha) \quad (4.2.7)$$

và có hướng được xác định sao cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ hợp thành một hệ quay thuận chiều.

Quy tắc đơn giản để xác định chiều là quy tắc vặn nút chai: xoay cái vặn nút chai từ $\vec{b}$ đến $\vec{c}$ sao cho chiều xoay là chiều kim đồng hồ thì chiều tiến lên là chiều của $\vec{a}$. Một quy tắc quen thuộc khác là quy tắc bàn tay phải: hãy để cho ngón tay cái hướng về phía bên phải bạn theo $\vec{b}$ và ngón tay trở hướng về phía trước mặt bạn theo $\vec{c}$ thì các ngón tay còn lại chỉ lên trên theo hướng của $\vec{a}$. Dễ dàng thấy độ lớn của $\vec{a}$ chính là diện tích của hình bình hành có hai cạnh là b và c và có góc là α . Diện tích này lớn nhất khi hai vectơ vuông góc với nhau và triệt tiêu khi chúng song song nhau.

Biểu diễn theo hệ tọa độ của tích có hướng phức tạp hơn nhiều so với tích vô hướng. Đối với trường hợp 3 chiều, tích có hướng của hai vectơ $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ và $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ là một vectơ có ba thành phần sau:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \{a_y b_z - b_y a_z, a_z b_x - b_z a_x, a_x b_y - b_x a_y\} \quad (4.2.8)$$

người con mặc dù đã lấy vợ khá muộn, năm 40 tuổi. Ông có bằng tiến sĩ danh dự về triết học, đã từng biên soạn từ điển tiếng Phạn và dịch kinh Veda. Ngày nay đại số Grassmann đang được nhiều người quan tâm, bạn đọc có thể tham khảo một trong các tài liệu sau: (1) D.F.Sander, "Hermann Grassmann and the Prehistory of Universal Algebra", Am. Math. Monthly 89 (1982), 161-166; (2) Henry George Forder, "The Calculus of Extension", Cambridge, 1941; (3) Hermann Grassmann, "Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke", 3 volumes in 6 parts, Leipzig, 1894-1911.

(chú ý rằng thành phần $(\vec{a} \times \vec{b})_y = (a_z b_x - b_z a_x)$ chứ không phải $(a_x b_z - b_x a_z)$). Mỗi thành phần của vectơ mới phụ thuộc vào hai thành phần khác từ hai vectơ cũ (hình 4.3). Từ (4.2.7) và (4.2.8) có thể suy ra các tính chất cơ bản sau (k là một số thực) :

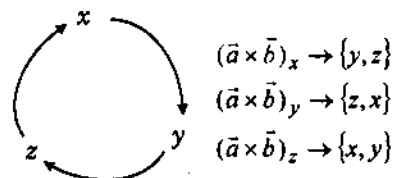
$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \quad (4.2.9)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (4.2.10)$$

$$k\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{b} \quad (4.2.11)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (4.2.12)$$

Khác với trường hợp tích vô hướng, biểu thức dạng $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} \dots \times \vec{x}$ là có nghĩa vì kết quả của tích có hướng là vectơ, do đó các vectơ có thể nhân liên tiếp với nhau. Kết hợp hai loại tích vô hướng và có hướng tạo nên *tích hỗn hợp*. Loại tích này có nhiều tính chất lý thú, ví dụ bạn đọc có thể kiểm chứng rằng tích hỗn hợp



Hình 4.3. Phép hoán vị các chỉ số trong tích có hướng giữa hai vectơ

$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ chính là thể tích hình hộp có đáy bằng tích có hướng $(\vec{a} \times \vec{b})$ và chiều cao h bằng hình chiếu của $\vec{c}$ lên $(\vec{a} \times \vec{b})$ ($h = |\vec{c}| \cos \gamma$, với γ là góc giữa $\vec{c}$ và $\vec{a} \times \vec{b}$). Trong các tính chất của tích hỗn hợp, chúng ta sẽ sử dụng các hệ thức thông dụng nhất sau đây, phần chứng minh dành cho độc giả):

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad (4.2.13)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (4.2.14)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (4.2.15)$$

Môn giải tích vectơ thông dụng trong vật lý ngày nay là do Gibbs (Josiah Willard Gibbs, 1839–1903), một nhà vật lý học người Mỹ phát triển, còn các khái niệm tổng quát như không gian vectơ, tô pô... thuộc về các nhà toán học.

2. Vectơ đơn vị và hệ tọa độ

Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị, chúng ta ký hiệu nó là $\vec{e}$. Một vectơ bất kỳ $\vec{a}$ sẽ có độ lớn a và hướng $\vec{e}_a$, có thể biểu diễn $\vec{a}$ như sau:

$$\vec{a} = a\vec{e}_a \quad (4.2.16)$$

Vì a là một con số nên $a\vec{e}_a$ đơn thuần là tích giữa một con số với một vectơ (không phải tích vô hướng). Hiển nhiên $a > 0$ và đôi khi nó cũng được gọi là tọa độ của $\vec{a}$ trên $\vec{e}_a$. Từ (4.2.16) chúng ta có biểu diễn của $\vec{e}_a$ theo $\vec{a}$:

$$\vec{e}_a = \vec{a}/a \quad (4.2.17)$$

Hệ thức này *thỏa mãn trong mọi hệ tọa độ*, nó đúng ngay cả khi hệ tọa độ chưa được định nghĩa. Việc biểu diễn một vectơ thông qua hệ thống các tọa độ có một đặc điểm là trong các hệ tọa độ khác nhau, vectơ có các tọa độ khác nhau. Ấn định một hệ tọa độ cũng là ấn định *hệ thống các vectơ đơn vị cơ sở* ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \dots$) để có thể dựa vào đó mà phân tích mọi vectơ khác thành các thành phần. Trong hệ tọa độ 3 chiều vuông góc (x, y, z), các vectơ đơn vị luôn thỏa mãn các tính chất sau:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \quad (4.2.18)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad (4.2.19)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad (4.2.20)$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (4.2.21)$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad (4.2.22)$$

Trong hệ tọa độ này mọi vectơ $\vec{a}(x, y, z)$ đều có thể được biểu diễn bằng một tổ hợp tuyến tính của ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$):

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (4.2.23)$$

với a_x, a_y, a_z là các hệ số thực được gọi là các *thành phần* hay *tọa độ* của $\vec{a}(x, y, z)$ trong hệ (xyz). Hiển nhiên vectơ đơn vị $\vec{e}_a$ của $\vec{a}$ sẽ có các thành phần:

$$\vec{e}_a = e_{ax} \vec{i} + e_{ay} \vec{j} + e_{az} \vec{k} \quad (4.2.24)$$

Vì $\vec{e}_a$ có độ dài bằng 1 nên các thành phần này phải thỏa mãn:

$$|\vec{e}_a|^2 = e_{ax}^2 + e_{ay}^2 + e_{az}^2 = 1 \quad (4.2.25)$$

Bất kỳ một nhóm 3 vectơ đơn vị nào vuông góc với nhau cũng đều lập thành một hệ tọa độ 3 chiều vuông góc. Nói tổng quát thì một hệ n vectơ vuông góc lập thành một hệ tọa độ n chiều vuông góc (orthogonal system) và một hệ n vectơ *đơn vị* vuông góc lập thành một hệ tọa độ n -chiều vuông góc *chuẩn* (orthonormal system). Trong hệ chuẩn các tọa độ của $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad (4.2.26)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0) \quad (4.2.27)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1) \quad (4.2.28)$$

Một vectơ có thể được biểu diễn theo các vectơ đơn vị cơ sở $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ hoặc theo vectơ đơn vị riêng của nó $\vec{a} = a \vec{e}_a$ nhưng vì $\vec{e}_a = e_{ax} \vec{i} + e_{ay} \vec{j} + e_{az} \vec{k}$ nên ta có:

$$a_x = a e_{ax} \quad (4.2.29)$$

$$a_y = a e_{ay} \quad (4.2.30)$$

$$a_z = a e_{az} \quad (4.2.31)$$

Do tính vuông góc của hệ chuẩn nên chúng ta có bổ đề:

(4.2.3) Bổ đề: *Tọa độ của một vectơ bất kỳ trên một trục bằng tích vô hướng của chính vectơ đó với vectơ đơn vị của trục đó (α, β và γ là các góc mà vectơ đó hợp với từng trục tọa độ x, y, z):*

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} = a \cos \alpha \quad (4.2.32)$$

$$a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} = a \cos \beta \quad (4.2.33)$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = a \cos \gamma \quad (4.2.34)$$

Hiển nhiên trong hệ chuẩn $e_{ax} = \cos \alpha$, $e_{ay} = \cos \beta$ và $e_{az} = \cos \gamma$. Các cosin này được gọi là các cosin góc hướng. Vào thời Newton, các vectơ không được trình bày theo phương pháp tổng quát như trên mà các đặc tính về hướng và độ lớn được nêu ra riêng biệt. Lấy ví dụ định luật hấp dẫn, về phần độ lớn nó được thể hiện trong công thức $F = GMm/r^2$ (chữ r chỉ *khoảng cách* chứ không phải tọa độ); còn về hướng thì đây là *lực hút* tác dụng theo phương của cánh tay đòn r . Sử dụng ngôn ngữ vectơ, định luật hấp dẫn có thể được viết dưới dạng tổng quát hơn. Muốn thế, hãy nhân hai vế của $F = GMm/r^2$ với vectơ đơn vị của lực $\vec{e}_F$ và chú ý rằng,

vì $\vec{F}$ là lực hút nên $\vec{e}_F$ luôn luôn *ngược chiều* với vectơ $\vec{r}$ nối Mặt Trời và hành tinh ($\vec{r}$ hướng từ Mặt Trời tới hành tinh, còn $\vec{F}$ hướng từ hành tinh tới Mặt Trời), tức là $\vec{e}_F = -\vec{e}_r$ (hai vectơ đơn vị đều có độ dài bằng 1):

$$\vec{F} = F\vec{e}_F = \frac{GMm}{r^2}\vec{e}_F = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r \quad (4.2.35)$$

Sử dụng $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ ta được:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \quad (4.2.36)$$

Phương trình vectơ này *thoả mãn đối với mọi hệ tọa độ*, thực tế trong khi dẫn giải nó chúng ta đã không cần đến hệ tọa độ. Nếu muốn phân tích nó thành các tọa độ thì trước hết phải định nghĩa hệ tọa độ. Có một hệ tọa độ khá phức tạp nhưng lại rất quen thuộc đối với chúng ta là hệ tọa độ dịch chuyển đều theo đường tròn và đồng thời quay đều với vận tốc góc không đổi. Đó chính là *hệ quy chiếu* gắn liền với *Trái Đất*. Bầu trời nhìn từ hệ này xoay tròn quanh sao Bắc Đẩu và các hành tinh kể cả Mặt Trăng và Mặt Trời đều quét những quỹ đạo phức tạp. Hiển nhiên là một hệ quy chiếu không thích hợp để dẫn đến những kết quả sai lầm và điều này đã xảy ra không ít lần trong quá khứ. Nhìn chung đối với bài toán tương tác 2-chất điểm thì có hai hệ tọa độ cơ bản, một là hệ tọa độ descartes vuông góc (x, y, z) và hai là hệ tọa độ cực (r, θ) .

Trong hệ (x, y, z) với Mặt Trời nằm tại gốc tọa độ và mặt phẳng xy trùng với mặt phẳng quỹ đạo của hành tinh thì các thành phần của $\vec{F}$ không phải là $\{F_x = GMm/x^2, F_y = GMm/y^2, F_z = 0\}$ như hay nhầm tưởng mà là như sau:

$$\vec{F} = \left\{ -\frac{GMm}{r^3}x, -\frac{GMm}{r^3}y, 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_x = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2)^{3/2}}x \\ F_y = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2)^{3/2}}y \\ F_z = 0 \end{array} \right\} \quad (4.2.37)$$

Có thể kiểm tra xem cách biểu diễn trên có đúng hay không bằng cách tính $|\vec{F}|$ (đặt $GMm=1$ cho đơn giản):

$$- \text{theo định luật hấp dẫn: } |\vec{F}|^2 = F^2 = \frac{1}{r^4}$$

$$- \text{theo vectơ: } |\vec{F}|^2 = F_x^2 + F_y^2 = \frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} = \frac{x^2 + y^2}{r^6} = \frac{r^2}{r^6} = \frac{1}{r^4}$$

Năm 1844 Cayley đưa ra khái niệm ma trận (matrix)⁽¹⁾. Trong ngôn ngữ ma trận, phép nhân hai vectơ trở thành phép nhân hai ma trận:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x a_y a_z) \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \quad (4.2.38)$$

Hay một phép tính định thức bậc 3:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (4.2.39)$$

Các phát triển sau này của khái niệm vectơ thuộc về Giuseppe Peano (1858 – 1932), Stefan Banach (1892 – 1945), David Hilbert (1862 – 1943) và một số nhà toán học khác⁽²⁾.

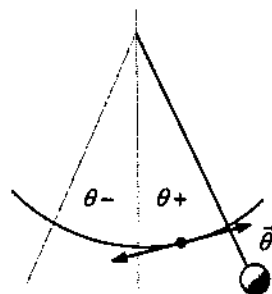
3. Các vectơ trong chuyển động quay

Hình dung vật lý của vectơ như mũi tên có lợi thế tường minh nhưng cũng có một số bất lợi đi kèm, bởi vì vectơ, hiểu một cách tổng quát như một nhóm các con số, không nhất thiết phải có thể hiện trực quan tương đương. Đối với chuyển động quay chẳng hạn, đại lượng có giá trị thông

(1) Arthur Cayley (1821–1895), nhà toán học người Anh, ông nguyên là một luật sư chuyển nhượng tài sản, ông và Cauchy là hai nhà toán học đã có số lượng công trình khổng lồ. Trong 14 năm làm luật sư, Cayley viết khoảng 250 bài báo, điều mà ngay cả các nhà khoa học chuyên nghiệp cũng ít khi làm nổi.

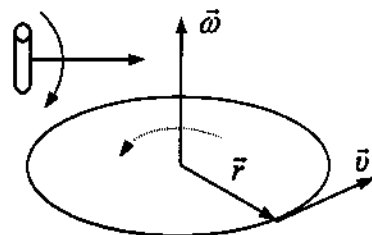
(2) Một vectơ có thể được ký hiệu theo nhiều cách khác nhau, ví dụ: a , b , c , A , B , C ... (chữ nghiêng–đậm không có mũi tên bên trên); hoặc $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$... (dùng trong sách này); hoặc $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a=(a_x, a_y)$ (hay tìm thấy trong các giáo trình toán); hoặc $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ (mượn cách viết của ma trận); hoặc $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$; $\vec{a}=(a_x, a_y)$ (dùng trong sách này).

tin trực tiếp là góc quay được theo thời gian tính từ một vị trí ban đầu, nó có giá trị của một tọa độ. Vì vậy hệ tọa độ đơn giản nhất đối với chuyển động quay chỉ cần có một thành phần là góc θ . Nó cũng có hai chiều âm và dương chỉ hai chiều quay *xuôi* và *ngược*. Tuy nhiên không thể biểu diễn chiều quay, tức vectơ góc $\vec{\theta}$, bằng một mũi tên thẳng chỉ về một phương nhất định bởi vì *xuôi* và *ngược* không phải là các hướng cụ thể. Để giữ được tính trực quan người ta hay dùng một mũi tên cong; sự "cong" có nghĩa là tại mỗi điểm trên vành tròn thì chiều quay là vectơ "thẳng" tiếp tuyến với vành tròn đó. Vectơ góc quay $\vec{\theta}$ là một vectơ đặc biệt! Nó không gắn với một phương *không gian vật lý* nào cụ thể (hình 4.4).



Hình 4.4. Phương của vectơ $\vec{\theta}$ trên trục θ

Nhìn chung các vectơ chỉ có định hướng trong "không gian" riêng của nó tùy theo cách chúng ta hiểu và định nghĩa chúng. Ví dụ một số phức $z=a+ib$ có thể được hiểu là một vectơ $\vec{z} = (a,b)$ hay $\vec{z} = (a,ib)$. Trong trường hợp thứ nhất $|\vec{z}|^2 = a^2 + b^2$ và trong trường hợp thứ hai $|\vec{z}| = a^2 - b^2$ (vì $i^2=-1$). Cách thứ nhất thường được áp dụng để biểu diễn số phức dưới dạng Euler $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{(1)}$ và cách thứ hai thường dùng để biểu diễn độ lớn của vectơ không-thời gian bốn chiều quen thuộc trong thuyết tương đối: $r=x-ict$, với x là khoảng cách (đơn vị là *mét*) và t là thời gian (đơn vị là *giây*). Để cộng trừ mét và giây người ta đã sử dụng vận tốc ánh sáng c làm thang quy đổi, theo đó khoảng cách *mét* của 1 giây là $c(m/s) \times 1(s) = c(m)$ ($|\vec{r}| = x^2 - (ct)^2$).



Hình 4.5. Chiều của ba vectơ: $\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}$

Trở lại với chuyển động quay, biến thiên của θ theo thời gian $d\theta/dt$ là vận tốc góc ω và đây cũng là một vectơ $\vec{\omega}$ nhưng nó không

(1) Ở đây một lần nữa có thể hiểu số phức là một vectơ theo hai cách $\vec{z} = (|z|, \varphi)$ hoặc là $\vec{z} = (|z|\cos \varphi, |z|\sin \varphi)$.

cùng chiều với $\vec{\theta}$: $\vec{\omega}$ luôn luôn vuông góc với mặt phẳng quay và phối hợp với các vectơ $\vec{r}$ và $\vec{v}$ thành một hệ quay thuận chiều (hình 4.5).

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v} \quad (4.2.40)$$

Nếu xoay theo chiều từ $\vec{r}$ đến $\vec{v}$ thì hướng tiến lên là của $\vec{\omega}$:

$$\left(\vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{m} \right) // \vec{\omega} \quad (4.2.41)$$

Còn nếu xoay theo chiều từ $\vec{v}$ đến $\vec{\omega}$ thì kết quả là một vectơ song song với $\vec{r}$ ($\vec{v} \times \vec{\omega} // \vec{r}$). Nhìn chung ba vectơ này chỉ vuông góc đối với nhau trong chuyển động tròn, còn trên quỹ đạo elips thì chỉ có $\vec{\omega}$ là vuông góc với cả hai $\vec{v}$ và $\vec{r}$, chứ $\vec{r}$ không nhất thiết phải vuông góc với $\vec{v}$, tức là chỉ có (4.2.41) là thỏa mãn còn (4.2.40) thì không. Đạo hàm theo thời gian của $\vec{\omega}$ là gia tốc góc $\vec{\beta} = d\vec{\omega}/dt$, nó cũng thiết lập với gia tốc dài $\vec{a}$ và $\vec{r}$ một bộ ba tuân theo quy luật của tích có hướng:

$$\vec{\beta} \times \vec{r} = \vec{a} \quad (4.2.42)$$

Tuy nhiên hệ thức này cũng chỉ thỏa mãn đối với chuyển động trên quỹ đạo tròn.

4. Đạo hàm của vectơ

Các quy tắc lấy đạo hàm của vectơ có thể suy ra từ phép lấy vi phân thông thường áp dụng đối với triển khai vectơ theo các tọa độ. Với vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, đạo hàm của nó là:

$$\frac{d}{dt} \vec{a} = \left(\frac{da_1}{dt}, \frac{da_2}{dt}, \frac{da_3}{dt}, \dots, \frac{da_n}{dt} \right) = (a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n) = \vec{a}' \quad (4.2.43)$$

Vectơ và đạo hàm của nó là hai vectơ khác nhau, chúng không nhất thiết phải cùng chiều. Do phép lấy vi phân và tích vô hướng giao hoán với nhau nên đạo hàm của tích vô hướng sẽ là:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \frac{d}{dt} \vec{b} + \vec{b} \cdot \frac{d}{dt} \vec{a} \quad (4.2.44)$$

Một hệ quả tức thời của biểu thức này nếu $\vec{a} = \vec{b}$ là:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{a}) = 2\vec{a} \cdot \frac{d}{dt} \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{a}' \quad (4.2.45)$$

Trong một số tài liệu người ta có thể viết biểu thức trên dưới dạng:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}^2) = 2\vec{a} \cdot \vec{a}' \quad (4.2.46)$$

với mặc định $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ và quy tắc (4.2.45). Một trường hợp đặc biệt của (4.2.45) là $\vec{a} = \vec{r}'$, khi đó $\vec{a}' = \vec{r}''$, hãy nhân hai vế với $(m/2)$, biểu thức (4.2.45) trở thành:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \right] = \frac{dT}{dt} = m (\vec{r}' \cdot \vec{r}'') = \vec{r}' \cdot \vec{F} \quad (4.2.47)$$

Đại lượng $\frac{1}{2} m (\vec{r}' \cdot \vec{r}')$ chính là động năng T của chất điểm biểu diễn bằng các véctơ và biến thiên của nó theo thời gian chính là công suất (vì $\vec{r}' \cdot \vec{F} = (\vec{F} \cdot d\vec{r})/dt = dA/dt$). Đây là nội dung của một định lý quen thuộc (xem §5.3.2, tr.167).

Tương tự như (4.2.44), tích có hướng cũng giao hoán với phép lấy vi phân nên chúng ta có quy tắc:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d}{dt} \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d}{dt} \vec{b} \quad (4.2.48)$$

Các hệ thức trên thỏa mãn không chỉ đối với biến t mà còn đối với các biến bất kỳ có thể lấy vi phân được.

Bài tập áp dụng

Hãy chỉ ra sai lầm trong cách lập luận sau. Thay $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ vào vế trái của (4.2.45) ta được:

$$\frac{da^2}{dt} = 2aa' \quad (4.2.49)$$

So sánh biểu thức này với vế phải của (4.2.45) thì rõ ràng:

$$aa' = \vec{a} \cdot \vec{a}' \quad (4.2.50)$$

Từ đó suy ra $\vec{a} // \vec{a}'$ vì:

$$\vec{a} \cdot \vec{a}' = aa' \cos \alpha \text{ nên khi } \cos \alpha = 1 \text{ thì } \alpha = 0 \quad (4.2.51)$$

α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{a}'$, với một vectơ $\vec{a}$ bất kỳ thì điều khẳng định này là vô lý.

Giải:

Ở đây chúng ta có một lầm lẫn rất hay gặp phải do sử dụng ký hiệu viết tắt. Chú ý rằng tuy a là độ lớn của vectơ $\vec{a}$: $a = |\vec{a}|$, nhưng không phải sau khi lấy đạo hàm hai vế thì a' cũng sẽ là độ lớn $|\vec{a}'|$ của vectơ $\vec{a}'$. Có thể thấy điều này rất rõ:

$$a' = \frac{d}{dt} a = \frac{d}{dt} |\vec{a}| \neq \left| \frac{d}{dt} \vec{a} \right| = |\vec{a}'| \quad (4.2.52)$$

Đạo hàm độ lớn của một vectơ không nghiệm nhiên trở thành độ lớn của đạo hàm vectơ đó, sai lầm xuất hiện trong (4.2.51) khi chúng ta coi a' là độ lớn của $\vec{a}'$! Biểu thức (4.2.50) là một biểu thức đúng nhưng không được hiểu $a' = |\vec{a}'|$, bạn đọc hãy chỉ ra rằng $a' = |\vec{a}'| \cos \alpha$.

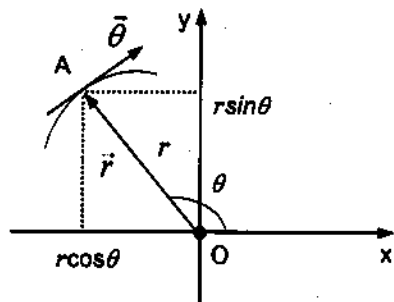
5. Hệ tọa độ cực

Chúng ta hãy biểu diễn một vectơ trong hệ tọa độ cực và tìm các vectơ đơn vị cũng như đạo hàm bậc nhất của chúng.

Hệ tọa độ cực được xác định bởi một đường thẳng cố định x và một điểm O cho trước trên đường đó. Vị trí của bất kỳ điểm A nào trong mặt phẳng (xy) được cho bởi góc θ giữa đoạn thẳng OA với đường thẳng x và độ dài r của đoạn OA đó (hình 4.6). Như vậy một vectơ trong hệ tọa độ cực là $\vec{R} = \{r, \theta\}$:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta \quad (4.2.53)$$

Thành phần $\vec{r} = r\vec{e}_r$ có thể được hiểu như một vectơ trong hệ tọa độ vuông góc (x, y)⁽¹⁾, $\vec{r}$ có tọa độ:



Hình 4.6. Liên hệ giữa tọa độ cực và tọa độ vuông góc

(1) Nếu biết (x, y) thì có thể tính được $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ và $\theta = \text{arctg}(y/x)$.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = (r \cos \theta) \vec{e}_x + (r \sin \theta) \vec{e}_y \quad (4.2.54)$$

Véc tơ đơn vị $\vec{e}_r$ có thể dễ dàng biểu diễn được thông qua $\vec{e}_x$ và $\vec{e}_y$, hãy chia vế phải của (4.2.54) cho r :

$$\vec{e}_r = \vec{r} / r = (\cos \theta) \vec{e}_x + (\sin \theta) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.2.55)$$

Theo tính chất tích vô hướng thì khi $\vec{e}_r \perp \vec{e}_\theta$ tích vô hướng $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$, suy ra $\vec{e}_\theta$:

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = (-\sin \theta) \vec{e}_x + (\cos \theta) \vec{e}_y \quad (4.2.56)$$

Đạo hàm trực tiếp (4.2.55) và (4.2.56) ta có:

$$\vec{e}_r' = \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \theta' \vec{e}_\theta \quad (4.2.57)$$

$$\vec{e}_\theta' = -\theta' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -\theta' \vec{e}_r \quad (4.2.58)$$

Biến thiên các thành phần của $\vec{r}$ theo thời gian là:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} -r\theta' \sin \theta + r' \cos \theta \\ r\theta' \cos \theta + r' \sin \theta \end{pmatrix} = r\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} + r' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = r\theta' \vec{e}_\theta + r' \vec{e}_r \quad (4.2.59)$$

Lấy đạo hàm một lần nữa theo t của (4.2.59) ta được:

$$\begin{aligned} \vec{r}'' &= (r'\theta' \vec{e}_\theta + r\theta'' \vec{e}_\theta - r(\theta')^2 \vec{e}_r) + (r'' \vec{e}_r + r'\theta' \vec{e}_\theta) = \\ &= (2r'\theta' + r\theta'') \vec{e}_\theta + (r'' - r(\theta')^2) \vec{e}_r \end{aligned} \quad (4.2.60)$$

Nếu bạn đọc để ý rằng đạo hàm bậc hai này chính là biểu diễn tương đương của gia tốc, và tiếp theo đó là của lực thì sẽ nhận thấy biểu thức (4.2.60) đang thể hiện các thành phần véc tơ của lực trong hệ tọa độ cực. Các hệ thức này sẽ có ích trong giải bài toán tương tác 2 – chất điểm sẽ được nói đến ở Chương 5.

4.3. SỰ RA ĐỜI CỦA "PRINCIPIA"

1. Giải thưởng của Hội Hoàng gia

Các tài liệu còn giữ được cho biết rằng năm 1684, ba thành viên của Hội Hoàng gia (Royal Society) là Christopher Wren⁽¹⁾, Robert Hooke (Học viện Gresham) và Edmund Halley⁽²⁾ đặt vấn đề rằng liệu có thể suy ra các quỹ đạo elips từ lực hấp dẫn từ Mặt Trời nếu lực đó phụ thuộc vào khoảng cách theo quy luật $1/r^2$. Wren treo giải là một cuốn sách với giá 40 schilling (3,3 bảng Anh) cho ai chứng minh được điều này trong vòng 2 tháng⁽³⁾. Tháng 8 năm 1684 Halley đến Cambridge gặp Newton và thông báo với ông rằng các nghiên cứu đều dừng lại vì không thể tìm ra quỹ đạo từ quy luật $F \propto 1/r^2$. Newton trả lời ngay là đã giải quyết được vấn đề này từ trước đó rồi (1679) và các quỹ đạo là elips, nhưng không thể tìm thấy kết quả, ông hứa sẽ viết lại chứng minh của mình. Ba tháng sau Halley nhận được chứng minh của Newton trong lá thư dày 9 trang viết bằng tiếng La tinh "*De Motu Corporum*" hay là "Về chuyển động của các vật thể trên quỹ đạo" và theo lời đề nghị của Halley, Newton đã dành hơn một năm sau đó để viết ba tập cuốn "*Principia*". Ngày nay chúng ta biết rằng trước tháng 8 năm 1684 Newton đã có hầu hết các kết quả chứa trong các định lý 1-19, 21, 30, 32-35 quyển I, cuốn "*Principia*", chúng cũng đã được Newton giảng cho sinh viên.

Cuốn "*Principia*" được in năm 1687 bằng tiền riêng của Edmund Halley, do Hội Hoàng gia năm trước đã dùng hết kinh phí để in một cuốn sách nói về lịch sử các loài cá (*De Historia Piscium*). Có thể nói cuốn sách đầu tay này đã đem lại cho Newton vinh quang tột đỉnh vào

(1) Nhà toán học Anh, ông này nổi tiếng hơn như một kiến trúc sư vì sau vụ hỏa hoạn ở London năm 1666, ông đã đóng góp xây lại khoảng 50 nhà thờ và khu chung cư trong đó có nhà thờ Thánh Paul.

(2) Nhà thiên văn học nổi tiếng, người đã kế tục John Wallis, 1616-1703, làm giáo sư Savile tại Đại học Oxford.

(3) Tương truyền, Robert Hooke tuyên bố sau đó rằng ông ta đã có được kết quả nhưng phải "dấu đi một thời gian để cho những ai đã không thể chứng minh nó biết cách, nó đã được nghĩ ra như thế nào (khi ông ta công bố)". Câu nói này có thể ngụ ý nhằm vào Newton vì hai người vốn kinh địch nhau.

tuổi 45⁽¹⁾. Nó đã được công nhận rộng rãi ở Anh trong vòng 10 năm sau đó và ở châu Âu lục địa trong vòng 20–30 năm sau. Cuốn sách, nguyên bản tiếng La tinh, được tái bản lần đầu năm 1713 và lần thứ hai năm 1726. Nó được Andrew Motte dịch ra tiếng Anh năm 1729, hai năm sau khi Newton qua đời. Ngày nay cuốn "*Principia*" vẫn được xuất bản, chủ yếu là bản dịch của Andrew Motte năm 1729. Rất tiếc đây là bản dịch không có chú giải.

Lý thuyết vi phân có lẽ được Newton phát triển trong khoảng thời gian hai năm (1665–1666) khi trường Cambridge bị đóng cửa vì bệnh đậu mùa và ông phải trở về nghỉ tại quê nhà. Các nguyên lý cơ học của ông có lẽ cũng đã được tìm thấy bằng phương pháp vi phân, tuy nhiên chúng lại được chứng minh trong "*Principia*" hoàn toàn "kinh điển" bằng hình học.

2. Isaac Newton (25/12/1642–20/3/1727)

Ông sinh năm 1642, vào đúng ngày Giáng sinh⁽²⁾, bố ông là một nông dân; thừa nhỏ Newton tỏ ra khéo léo. Trong thời kỳ theo học tại Cambridge, Newton bộc lộ năng khiếu toán học rất sớm và không bao giờ thất bại trước các bài toán đố. Được biết Newton là người hay tự ái và rất nhạy cảm với sự phê phán của người khác, điều này bạn đọc còn cảm thấy được khi xem lại đoạn cuối lời nói đầu của Newton trong lần xuất bản đầu tiên của cuốn "*Principia*".

Từ trước khi "*Principia*" được xuất bản, Newton đã là người có danh vọng lớn trong giới khoa học Anh. Là một nhà toán học, ông được các nhà sử học đời sau đánh giá như là một trong những nhân vật vĩ đại nhất của mọi thời đại [14]. Gottfried Leibnitz (1646–1716) đã từng phát biểu về ông: "Xét về toán học từ buổi sơ khai đến thời Newton thì ông đã làm được một nửa mà là một nửa tốt hơn nhiều". Điều thú vị là Newton đã nghỉ hưu khi đúng 60 tuổi. Nền văn minh công sở nước Anh có truyền thống về nhiều mặt thật đáng khâm phục!

(1) Vài năm sau đó (1692) Newton mắc một chứng bệnh thần kinh lạ lùng làm ông mất ngủ và mất cảm. Ông đã phải nghỉ chữa bệnh hai năm liền và sức sáng tạo của ông không bao giờ bình phục trở lại hoàn toàn. Cuối đời ông tỏ vẻ quan tâm nhiều hơn đến hoá học, thuật giả kim và thần học.

(2) Cũng năm đó Galileo qua đời!

Ông có hai cuộc tranh cãi lớn trong đời, một là với Hooke về công lao tìm ra định luật hấp dẫn và hai là với Leibnitz về việc ai đã tìm ra phép tính vi phân trước. Newton cũng không phải thành công trong mọi lĩnh vực, các nhà sử học đều nói rằng trong cuộc đời mình Newton đã dành rất nhiều thời gian, ít nhất cũng nhiều như cho toán học và vật lý học để nghiên cứu hoá học và thần học, thế nhưng trong hai lĩnh vực này ông không có một kết quả nào đáng kể. Theo một số tác giả [16] thì Newton có thời kỳ làm Giám đốc sở đúc tiền và ông đã không ngần ngại đưa một số kẻ làm tiền giả lên giá treo cổ. Newton cũng chủ trì một Ủy ban của Hội Hoàng gia phân xử vụ kiện với Leibnitz và dĩ nhiên là ông thắng. Newton thuộc tầng lớp các nhà khoa học quá nổi tiếng nên công luận bắt đầu để ý và xét nét đến khía cạnh cá nhân. Người sau này cũng rơi vào tình cảnh tương tự như vậy là Albert Einstein, và ông này xem ra đã thành công hơn Newton trong việc chiếm được tình cảm của dư luận mặc dù hoàn cảnh xã hội của ông còn phức tạp hơn nhiều⁽¹⁾.

Các mốc thời gian chính trong cuộc đời Newton:

- 1669: Barrow (George Barrow, 1630-1677), người đầu tiên được phong hàm giáo sư Lucas, ĐH Cambridge đã trao lại học vị này cho Newton;
- 1687: "*Principia*" - cuốn sách đầu tay và được đánh giá cao nhất trong các công trình của Newton được xuất bản, sau một thời gian dài ông không cho in một công trình nào;
- 1689: Newton trở thành nghị sĩ đại diện cho Trường Đại học Cambridge tại Nghị viện Anh;
- 1703: Được bầu làm Chủ tịch Hội Hoàng gia;
- 1705: Phong tước Hầu (Sir); (sau này Hamilton cũng được phong hầu).

Trình tự xuất bản các công trình của Newton, theo Howard Eves [14]: *Principia* 1687; *Opticks* 1704; *Arithmetica Universalis* 1707; *Analysis per Series, Methodus Differentialis* 1711; *Lectiones Opticae* 1729;

(1) Thân phận Albert Einstein gắn liền với sự thăng trầm vừa qua của dân tộc Do Thái nên những đánh giá đương thời về ông đều khó tránh khỏi ảnh hưởng của các khuynh hướng khác nhau.

The Method of Fluxions and Infinite Series 1736. Các nguồn tư liệu về Isaac Newton hiện có rất nhiều trên mạng Internet nơi độc giả nào muốn tham khảo thêm có thể dễ dàng tiếp cận và tra cứu⁽¹⁾.

4.4. CÁC ĐỊNH LUẬT CỦA NEWTON

"*Principia*" của Newton là một công trình đồ sộ được viết bằng ngôn ngữ của hình học Euclid. Bằng một cách trình bày khéo léo ông đã chứng minh thuyết phục nhiều vấn đề nan giải. Tuy nhiên vì cho đến nay chủ yếu vẫn thịnh hành bản dịch không có chú giải của Andrew Motte (1729) nên nó rất khó đọc. Một số tác giả có danh tiếng cùng thời với Newton như Huygens đã có những phê bình đối với công trình này; chúng ta sẽ nhắc tới ý kiến của Huygens trong một phần sau. Vào thời Newton có lẽ chỉ có một vài học giả đủ trình độ toán học như Huygens, Leibnitz, Cotes, de Moivre có thể hiểu thấu đáo nó về mặt kỹ thuật [17]. Newton xây dựng lý thuyết của mình dựa trên hệ thống các định đề và định lý sau.

1. Hệ thống các định nghĩa chính

Có 8 định nghĩa và 1 chú giải được đưa ra trong phần đầu cuốn sách ("*Definitions*"). Một số nhằm vào các thuật ngữ được dùng, chủ yếu là làm sáng tỏ *lực hướng tâm*, còn định nghĩa đầu tiên (số I) nói về khối lượng là tích của tỷ trọng và thể tích $m = \rho V$. Chủ yếu tác giả muốn xác định rõ ràng đại lượng được gọi là khối lượng m . "*Đây là cái mà tôi gọi là vật hay khối lượng hay trọng lượng*"⁽²⁾. Định nghĩa tiếp theo (số II) là về động lượng (đã được nói đến trong §4.1.3, tr.99) và định nghĩa III là về lực quán tính (đã được nói đến trong §3.4, tr.62). Chúng tôi nhắc lại ở đây cho bạn đọc tiện theo dõi.

(1) *Định nghĩa II* (Definition II): "Một lượng chuyển động (động lượng) là một định lượng kết hợp từ vận tốc và lượng vật chất (khối lượng)".

(1) Hệ thống dữ liệu trên mạng Internet tuy rất cập nhật và đa dạng nhưng do có những nguồn gốc khác nhau nên độ tin cậy nhìn chung thay đổi. Bạn đọc tìm hiểu thông tin trên mạng cần biết lựa chọn và cân nhắc.

(2) "It is this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of body or mass. And the same is known by the weight of each body."

Viết dưới dạng công thức (vô hướng) thì $p=mv$, dưới dạng véctơ thì $\vec{p} = m\vec{v}$. Hai véctơ động lượng và vận tốc luôn cùng chiều.

(2) **Định nghĩa III** (Definition III): "Quán tính (*vis insita*), hay lực bẩm sinh của vật chất, là sức ì (*power of resisting*) mà với nó mọi vật cố gắng giữ yên trạng thái hiện tại, bất kể đó là trạng thái dừng, hay chuyển động đều theo đường thẳng".

Newton chú trọng đặc biệt trong định nghĩa lực hướng tâm.

(4.4.1) Định nghĩa: (Definition V): "*Lực hướng tâm (centripetal force) là lực kéo buộc vật phải hướng về một tâm điểm*" và có ba tính chất chính:

(a) có độ lớn tổng thể phụ thuộc vào độ lớn của nguồn phát sinh lực (ở đây là khối lượng của vật thể trung tâm như Mặt Trời hay Trái Đất);

(b) gây ra một gia tốc rơi nhất định tại mỗi độ cao xác định;

(c) gây ra một trọng lượng nhất định tại mỗi độ cao xác định cho mọi vật thể tồn tại trong trường lực đó.

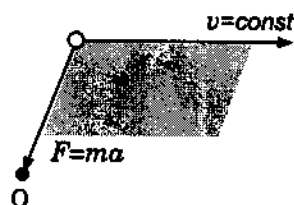
Trong sách giải thích: "Loại lực này là lực hấp dẫn, với nó mọi vật đều rơi về tâm Trái Đất, ... hoặc là lực kéo các hành tinh khỏi chuyển động theo đường thẳng và buộc chúng phải chuyển động theo đường cong". Một lực nói chung có thể làm vận tốc của vật thay đổi mà không làm thay đổi hướng (trong các chuyển động rơi hoặc ném thẳng đứng), hoặc làm thay đổi hướng mà không thay đổi vận tốc (trong chuyển động tròn đều) hoặc làm thay đổi cả độ lớn lẫn hướng (chuyển động của các hành tinh trên quỹ đạo). Có thể thấy phân tích của Newton thực tế là phân tích đối với trường lực hấp dẫn, nói cách khác, lý thuyết cơ học của ông là lý thuyết đối với trường lực có các tính chất nêu trên. Các mối quan hệ cụ thể giữa lực và chuyển động do nó gây ra được trình bày trong ba định luật kinh điển của Newton.

2. Các định luật chuyển động

Newton đã đưa ra 3 định luật xác định mối quan hệ địa phương giữa lực và chuyển động. Trong phần "*Axioms or law of motion*" (Các định đề hay các định luật chuyển động) còn có 6 bổ đề và 1 chú giải; chúng ta đọc được:

(4.4.2) Định luật 1: (Law I) "Mọi vật giữ nguyên trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều nếu không bị ngoại lực tác dụng buộc chúng phải thay đổi trạng thái đó".

Ở đây chủ yếu Newton nhắc lại định luật quán tính được Galileo phát biểu từ trước, thậm chí trong phần chú giải định luật này Newton đã không ngần ngại nhắc lại lời Galileo (xem lại §3.4, tr.63). Định luật này thường được coi là nguyên lý và có tính chất cơ bản đối với cơ học. Về mặt hình học nó *tương đương với định nghĩa của đường thẳng*: nếu không có lực tác dụng thì quỹ đạo của vật sẽ là một đường gọi là đường thẳng.



Hình 4.7. Quỹ đạo một chuyển động đồng thời tuân theo định luật quán tính và định luật 2 Newton phải nằm trong một mặt phẳng

Newton đã vận dụng tính chất này rất khéo léo để chứng minh rằng nếu vật chịu hai lực tác dụng đồng thời, một là lực quán tính và một là lực hướng về một tâm điểm cố định trong không gian (tức là lực hướng tâm) thì quỹ đạo của nó phải nằm trên mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng là quỹ đạo thẳng của lực quán tính và cánh tay đòn của lực hướng tâm (hình 4.7).

(4.4.3) Định luật 2: (Law II): "Sự thay đổi chuyển động luôn luôn tỷ lệ với lực tác dụng; và diễn ra theo phương thẳng hàng với lực tác dụng".

Lưu ý từ "*chuyển động* (motion) được sử dụng với ý nghĩa "*động lượng*". Đây là phần chính của động lực học Newton và trên thực tế Galileo cũng đã nhắc tới $F \propto a$ khi ông phê phán học thuyết cơ học của Aristotle. Tuy nhiên Newton không dừng lại ở $F \propto a$ mà bạn đọc nên chú ý rằng Newton đã đưa ra định luật này dựa vào động lượng chứ không phải gia tốc. Ngày nay người ta thường viết $F=ma$, tuy nhiên nguyên văn của Newton là $\dot{p} = F$ hay $dp/dt = F$. Về mặt hình thức, phương pháp của Newton có vẻ chỉ là một sửa đổi nhỏ, nhưng về nội dung lại là cả một cuộc cách mạng về tư duy và phương pháp không chỉ trong vật lý học mà còn trong toán học. Trước Newton người ta đã không xây dựng được lý thuyết động lực học nào đáng kể. Trong phần chú giải chúng ta đọc được: "... một lực gấp đôi sẽ gây ra chuyển động gấp đôi,

một lực gấp ba sẽ gây ra chuyển động gấp ba... và chuyển động mới này (luôn diễn ra theo phương của lực gây ra nó), nếu vật đang chuyển động, sẽ được cộng thêm vào hoặc trừ bớt đi từ chuyển động ban đầu...".

Đối với hiện tượng rơi tự do thì trọng lực của vật tác dụng liên tục làm vận tốc rơi của nó tăng đều, tức là gây ra một chuyển động có gia tốc, và chuyển động rơi luôn diễn ra theo phương lực tác dụng về phía tâm Trái Đất. Còn trong chuyển động ném thẳng đứng thì trọng lực có tác dụng làm giảm bớt vận tốc ban đầu một cách liên tục (với tốc độ làm chậm bằng gia tốc rơi tự do) và gây ra một chuyển động chậm dần đều. Hiển nhiên vật đạt độ cao cực đại khi vận tốc của nó giảm tới 0. Trong trường hợp vật nằm trên mặt đất thì trọng lực của nó được cân bằng với sức cản của mặt đất (xem định luật III) nên không có lực nào đẩy nó đi và vật nằm yên. Nếu vật chuyển động tròn đều thì lực hướng tâm luôn buộc nó phải thay đổi hướng chuyển động tuy rằng độ lớn của vectơ vận tốc là không đổi. Trên một quỹ đạo cong tổng quát, *lực hướng tâm có thể làm thay đổi cả hướng lẫn độ lớn* của chuyển động. Newton đã có một phân tích cẩn thận về ảnh hưởng của lực hướng tâm lên chuyển động trong Định lý I, Phần II, Quyển I, sách "*Principia*". Chúng ta sẽ nhắc đến định lý kỹ hơn trong phần sau. Nó xác định quan hệ tương đương giữa định luật 2 và sự bảo toàn môment động lượng trên các quỹ đạo chuyển động do lực hướng tâm gây ra.

(4.4.4) Định luật 3: (Law III): "*Đối với mọi lực tác dụng đều tồn tại lực phản tác dụng; hay là lực tương tác trao đổi giữa hai vật thể luôn luôn bằng nhau và ngược chiều nhau*".

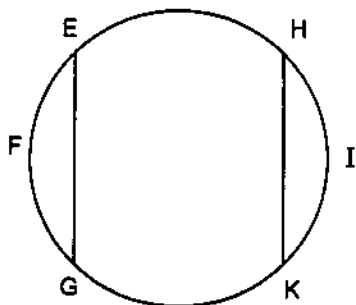
Định luật thường được gọi là định luật về *lực và phản lực*, nó thực chất là định luật *bảo toàn động lượng* đối với hệ quy chiếu có gốc nằm tại trọng tâm của cơ hệ. Vì $F = \sum F_i = 0$ nên hiển nhiên $dP/dt = \sum(dp_i/dt) = 0 \rightarrow P = \text{const}$. Luận điểm này là một trọng điểm của Newton. Các bổ đề tiếp sau đều thể hiện giá trị trực tiếp của nó.

"Vật nào tác động vào vật khác cũng chịu một phản lực như thế" - Newton viết, "Nếu bạn ấn ngón tay vào hòn đá thì ngón tay cũng bị hòn đá ấn vào... Nếu một vật thể tác động vào vật thể khác và với lực tác động đó làm thay đổi chuyển động của vật đó thì cũng sẽ chịu một thay đổi như thế trong chuyển động của riêng nó. Những sự thay đổi này là như nhau, tuy nhiên không phải vận tốc thay đổi như nhau mà *chuyển*

động (tức là động lượng) thay đổi như nhau... (và) những sự thay đổi của vận tốc theo hai hướng ngược nhau tỷ lệ nghịch với khối lượng của hai vật".

Bạn đọc có thể thấy Newton đã giải quyết vấn đề bảo toàn động lượng của Descartes như thế nào. Ông còn đi xa hơn, và trong một tình huống hay làm người ta nhầm lẫn, ông khẳng định rằng nếu cắt Trái Đất làm hai phần không bằng nhau thì hai phần đó luôn hút nhau bằng các lực

như nhau! Hiển nhiên nếu một người tác động lên Trái Đất bằng trọng lượng của anh ta thì Trái Đất cũng tác động một lực ngược chiều bằng trọng lượng của người đó; cũng như vậy Mặt Trăng và Trái Đất luôn tác dụng lên nhau với hai lực bằng nhau (hình 4.8).



Hình 4.8. Hình vẽ Trái Đất bị cắt làm ba phần trong "Principia" để minh họa định luật 3

Cả ba định luật trên, tuy rằng chúng nói về những vấn đề vật lý, nhưng đều mang màu sắc toán học sâu sắc, ý nghĩa của định luật 2 là rõ ràng, nó là một *phương trình vi phân* đầu tiên được viết ra bằng lời. Còn ý nghĩa toán học của các định luật 1 và 3 sẽ được thấy rõ qua các phân tích dưới đây.

3. Các bổ đề

Bổ đề I của Newton, đã được nhắc đến trong §4.1.3, tr.98, là hệ quả của định luật 1 và 2. Nếu có hai lực đồng thời tác động lên một vật theo hai phương khác nhau thì chúng tác động *độc lập đối với nhau* và vật cũng sẽ chuyển động theo hai phương tác động *hoàn toàn độc lập*. Kết quả sẽ là một chuyển động theo phương hợp thành từ hai phương riêng rẽ kia như thể đường chéo hình bình hành được tạo ra bởi hai cạnh. Newton nói rằng đường chéo đó mô tả một *tổng lực* bằng hai lực riêng rẽ kia cộng lại và vật chuyển động như thể chỉ có một lực duy nhất là tổng lực đó tác động. Vô hình chung Newton đã định nghĩa *phép cộng hai vectơ*, tuy nhiên chứng minh của ông còn có phần tổng quát hơn là một định nghĩa đơn thuần vì nếu xét ngược lại thì rõ ràng là *mọi vectơ đều có thể phân tích thành hai thành phần bất kỳ* miễn là chúng tạo nên một hình bình hành mà đường chéo là lực ban đầu.

Chúng ta có thể suy diễn tiếp và nhận thấy rằng bản thân hai thành phần lực mới cũng có thể được phân tích thành hai thành phần nhỏ hơn và cứ như thế sẽ đi đến kết luận là *mọi véctơ đều có thể phân tích thành một tổng hữu hạn các véctơ khác*; tổng đó có thể chứa một số lượng véctơ nhiều bao nhiêu cũng được miễn đó là một số lượng có hạn⁽¹⁾. Đặc tính rất đặc biệt này của các véctơ (trong một không gian vật lý) thường được gọi là *tính tuyến tính* của chúng.

Trong các bổ đề sau Newton chỉ ra một đặc tính khác của các véctơ lực, nói trong ngôn ngữ toán học ngày nay thì hệ thống các véctơ này với phép cộng vừa được định nghĩa tạo thành một tập hợp (cụ thể hơn một nhóm) có *phần tử 0*. Mọi véctơ cộng với 0 đều cho bản thân nó, tức là cả $0+0=0$, và hai véctơ ngược nhau cộng lại phải bằng 0. Ngược lại thì phần tử 0 có thể được phân tích thành một hệ thống hữu hạn các phần tử sao cho tổng của chúng bằng 0. Sự tồn tại của trạng thái này có nghĩa là:

(a) Một vật đứng yên không phải vì không có lực tác dụng mà vì các *lực tác dụng cân bằng nhau*; từ đó suy ra rằng tại điểm trọng tâm của hệ các vật rắn thì lực tương tác giữa các phần là cân bằng (và như vậy toàn bộ hệ đứng yên trong khi các phần vẫn chuyển động, xem hình 4.9). Newton viết:

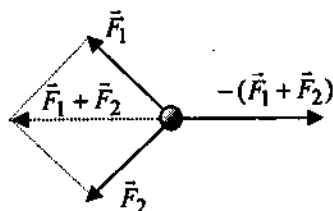
(4.4.5) Bổ đề: (Bổ đề IV, Quyển I) "*Trọng tâm của hệ bao gồm hai hay nhiều vật thể không thể thay đổi trạng thái chuyển động hay đứng yên của nó bởi các lực tương tác qua lại giữa các vật thể; vì thế trọng tâm của hệ các vật thể tương tác với nhau sẽ hoặc là đứng yên hoặc là chuyển động thẳng đều*".

Bổ đề này thực chất thể hiện rằng $0 = \sum \vec{v}_i$, ở đây $\vec{v}_i$ là vận tốc của phần tử i , giả thiết hệ có một số hữu hạn các phần tử (nhưng nhiều

(1) Cần lưu ý khái niệm "có hạn nhưng lớn bao nhiêu cũng được" khác với khái niệm "vô hạn". Trong đại số thì $1/0$ được coi là ∞ nhưng $1/0$ không phải là một con số nào cụ thể cho nên nó không phải là một số "hữu hạn lớn bao nhiêu cũng được". Người ta có thể mở rộng khái niệm "có hạn nhưng nhiều bao nhiêu cũng được" thành khái niệm "đếm được"; trong trường hợp này số lượng các phần tử có thể là vô hạn nhưng có thể được đếm tuần tự, nói cách khác có thể thiết lập được quan hệ 1-1 giữa tập hợp các phần tử đó với tập hợp các số tự nhiên $0, 1, 2, \dots$ dùng để đếm chúng. Một tập hợp như các số hữu tỷ là đếm được nhưng các số vô tỷ là không đếm được.

bao nhiêu cũng được) ⁽¹⁾.

(b) Nếu mọi vật thể trong hệ đều bị các lực như nhau tác động theo cùng một phương thì có thể coi như toàn bộ hệ bị một lực tác động lên trọng tâm và hệ sẽ chuyển động có gia tốc theo phương đó nhưng các phần tử của hệ thì vẫn chuyển động so với nhau như thể không có lực nào tác động cả. Newton viết:



Hình 4.9. Vật đứng yên mặc dù có lực tác dụng

(4.4.6) **Bổ đề:** (Bổ đề VI, Quyển I) "*Nếu các vật thể, bất kể chuyển động như thế nào đối với nhau, bị đẩy theo các phương song song bằng những lực gia tốc như nhau, thì chúng sẽ tiếp tục chuyển động đối với nhau như cũ, tựa như không có lực nào tác động cả*".

Bổ đề này thực chất thể hiện rằng $\vec{v} + 0 = \vec{v}$, ở đây $\vec{v}$ là vận tốc của toàn bộ hệ và phần tử 0 là tổng của một số hữu hạn các vectơ vận tốc ngược chiều nhau của các phần tử của hệ.

(c) Nếu tách rời khoảng không gian bao quanh hệ thì chuyển động của hệ trong khoảng không gian đó không phụ thuộc vào việc khoảng không gian giới hạn này đứng yên hay chuyển động thẳng đều. Trong Bổ đề V nói về vấn đề này Newton thực tế đã nhắc lại *nguyên lý tương đối của Galileo* và thí nghiệm với con thuyền của ông (bạn đọc xem lại phần §3.4.3, tr.64). Bổ đề này cũng phản ánh quan niệm *không-thời gian tuyệt đối* trong cơ học cổ điển Newton.

Hệ thống các định luật chỉ là phần mở đầu cho "*Principia*", trong các phần sau của Quyển I, "*Về chuyển động của các vật thể*" (Book I, "Of the motion of bodies") Newton lần lượt chứng minh các đặc tính của quỹ đạo chuyển động dựa trên các định luật này. Điểm đáng lưu ý là ông đã chứng minh điều đó đối với các lực tổng quát chứ không phải chỉ riêng đối với lực hấp dẫn có sự phụ thuộc $F \propto 1/r^2$. Ông đã thành công trong việc chỉ ra rằng với $F \propto 1/r^2$ các quỹ đạo quan sát được hoàn toàn phù hợp với các quỹ đạo lý thuyết.

(1) Thực tế trong nhiều bài toán của Newton ông thường chỉ xét trường hợp các tập hợp vô hạn có thể được hiểu như các tập hợp có số phần tử hữu hạn nhưng nhiều bao nhiêu cũng được, tức là các tập hợp này có thể *hữu hạn hoá được*. Nói theo ngôn ngữ tôpô học ngày nay, chúng là các *tập hợp compact*: "compact" là hữu hạn hoá được.

4.5. MÔMENT ĐỘNG LƯỢNG VÀ LỰC HƯỚNG TÂM

1. Bảo toàn môment động lượng

Luận điểm căn bản được Newton đưa ra trong Định lý I và II, Phần II, ngay sau phần giới thiệu các định đề⁽¹⁾. Newton đã chỉ ra rằng, mọi lực có nguồn đứng yên đều gây ra những chuyển động có quỹ đạo bảo toàn môment động lượng và điều này hoàn toàn không phụ thuộc vào việc lực có nguồn gốc như thế nào và biến thiên theo khoảng cách ra sao. Định luật $F=ma$ dưới con mắt của Newton có giá trị ấn định quỹ đạo chuyển động và ngược lại, các quỹ đạo chuyển động chính là biểu hiện của thực trạng phân bố lực. Newton viết:

"*Định lý I.* Các diện tích quét được bởi cánh tay đòn nối vật thể chuyển động với tâm nguồn lực đứng yên nằm trong một mặt phẳng và tỷ lệ thuận với thời gian chuyển động".

Và ngược lại:

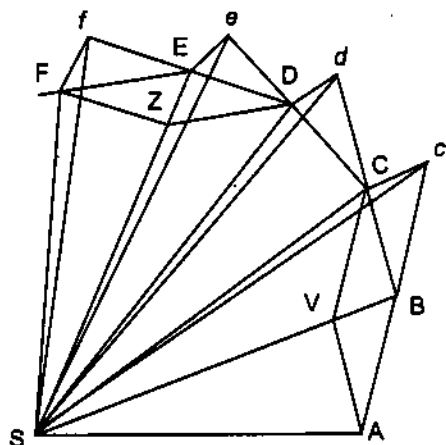
"*Định lý II.* Mọi vật thể chuyển động theo bất kỳ đường cong nào nằm trong một mặt phẳng và quét những diện tích tỷ lệ thuận với thời gian chuyển động bởi cánh tay đòn nối vật với một tâm, bất động hay dịch chuyển thẳng đều, đều được đẩy bởi lực hướng tâm phát ra từ nguồn đó".

Có thể phát biểu gộp cả hai định lý này bằng ngôn ngữ ngày nay như sau:

(4.5.1) Định lý: Mọi quỹ đạo chuyển động do lực hướng tâm gây ra đều nằm trong một mặt phẳng và bảo toàn môment động lượng. Ngược lại mọi quỹ đạo bảo toàn môment động lượng đều phải nằm trong một mặt phẳng và do nguồn lực hướng tâm trong mặt phẳng đó gây ra.

(1) Cho đến nay phần lớn các giới thiệu về cơ học Newton chủ yếu tập trung vào khai thác định luật $F=ma$ từ khía cạnh kỹ thuật mà bỏ qua mối liên hệ vật lý sâu sắc của nó với định luật 2 Kepler về bảo toàn môment động lượng trên các quỹ đạo chuyển động khi chỉ có một lực tác động duy nhất là lực hướng tâm, phát sinh từ một nguồn bất động hoặc dịch chuyển thẳng đều. Nói rõ hơn người ta chỉ dừng lại ở giải thích định luật $F=ma$ như sau: "một vật khi bị một lực tác động sẽ chuyển động theo phương lực đó và với một gia tốc tỷ lệ thuận với lực đó". Sự giải thích kiểu này bắt nguồn từ một nhận thức rất sơ đẳng và trực quan về các quy luật chuyển động có từ thời Galileo.

Newton đã đưa ra chứng minh như sau (xem hình 4.10) in lại theo bản gốc. Giả sử vật đi từ điểm A theo đường thẳng tới B, tại đây nếu không có lực tác dụng nó sẽ tuân theo nguyên lý quán tính và chuyển động thẳng đều tới c. Bây giờ giả sử lực hướng tâm tác động một xung tức thì tại B, nó sẽ tác động theo phương song song với SB (vì là lực hướng tâm), và kéo vật trở lại C. Độ lớn của xung lực này dĩ nhiên tỷ lệ với khoảng cách trượt cC; diện tích hai tam giác SAB và



Hình 4.10. Hình vẽ minh họa của Newton trong "Principia"

SbC là bằng nhau, do có cùng độ cao hạ từ đỉnh S đến đáy ABc; hơn nữa chúng cùng nằm trên một mặt phẳng SAC. Do giả thiết xung lực là hướng tâm nên cC//SB, suy ra hai tam giác SBC và SBc phải có diện tích bằng nhau vì cùng một độ cao hạ từ Cc tới đáy SB, hơn nữa chúng lại phải cùng nằm trong một mặt phẳng. Từ đó, diện tích hai tam giác SAB và SBC là bằng nhau và cả hai cùng nằm trên một mặt phẳng. Mở rộng ra cho các điểm DEF ta thấy quỹ đạo là một mặt phẳng và thỏa mãn định luật 2 Kepler. Phân tích trên sẽ càng đúng nếu các khoảng AB, BC trở nên càng nhỏ.

Có thể thấy Newton đã không sử dụng một giả thiết nào khác ngoài ba giả thiết sau:

(1) Định luật quán tính: giả thiết rằng nếu tại B không có lực tác động thì vật sẽ chuyển động thẳng đều tới c, với $Bc = AB$;

(2) Định luật $F = ma$, theo đó vật sẽ dịch chuyển theo phương lực hướng tâm tác động tại B, tức là song song với SB một khoảng là $cC = BV$;

(3) Tính tuyến tính của các vectơ chuyển động: $BC = Bc + BV$.

Do tính tổng quát của chứng minh này mà trên thực tế nó hoàn toàn xác định quan hệ tương đương giữa $F=ma$ và hiện tượng bảo toàn môment động lượng trên các quỹ đạo do lực hướng tâm gây ra. Hơn nữa, do định nghĩa tổng quát của lực hướng tâm (lực bất kỳ phát sinh từ

nguồn cố định) mà kết luận này thỏa mãn đối với *mọi loại lực* có những tính chất tương tự như lực hấp dẫn, bất kể nó phụ thuộc như thế nào vào khoảng cách.

Khi bạn ném một hòn đá, nó sẽ chỉ có thể chuyển động theo đường parabol, đơn giản vì nguồn lực nằm cố định tại tâm trái đất cho nên trong quá trình chuyển động sẽ không có lực nào ngoài lực hấp dẫn tác động lên hòn đá, do đó quỹ đạo của nó phải bảo toàn môment động lượng và hoàn toàn xác định. Trong trường hợp này, do lực không đổi và nguồn lực có thể coi là nằm tại vô cực, nên quỹ đạo sẽ là một elips với nguồn lực nằm tại tâm elips (Bổ đề X, Phần II); và một elips có tâm nằm tại vô cực chính là một parabol. Ngược lại khi một vật chuyển động trên quỹ đạo parabol thì lực hướng tâm phải tỷ lệ nghịch với r^2 - nếu nguồn lực phát ra từ tiêu cự của parabol (Bổ đề XIII, Phần III, sách đã dẫn), hoặc là không đổi nếu nguồn lực nằm tại vô cực (hệ quả của Bổ đề X, Phần II). Không thể cho đồng thời một quỹ đạo với một quy luật chuyển động không phụ thuộc vào quỹ đạo đó. Mọi sai lệch khỏi quan hệ tương đương này đều có thể coi là bằng chứng cho sự tồn tại của một ngoại lực không hướng tâm nào đó đã tác động lên vật trong quá trình chuyển động, hoặc nguồn lực đã bị gia tốc. Newton đã phát triển quan điểm này trong các phần sau và ông đã thành công trong việc chỉ ra nhiều sự phụ thuộc hai chiều lý thú giữa $F(r)$ và quỹ đạo.

Ngày nay bằng phương pháp vi phân, mối quan hệ giữa tác dụng của lực hướng tâm và hiện tượng bảo toàn môment động lượng trên quỹ đạo có thể được giải thích đơn giản như sau. Lấy đạo hàm của môment động lượng $\vec{L}$, ta được:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{p} + \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.5.1)$$

Thành phần thứ nhất $\vec{v} \times (m\vec{v}) = 0$ vì $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ (tích có hướng của hai vectơ song song bằng 0), còn thành phần thứ hai $\vec{r} \times \vec{F}$ chính là đại lượng được gọi là môment lực $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ nên ta có:

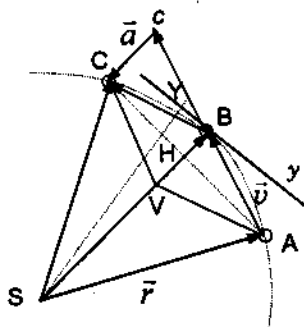
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (4.5.2)$$

Theo quy tắc nhân có hướng, nếu $\vec{r} \parallel \vec{F}$ thì $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ nên trong trường hợp chuyển động dưới tác dụng của lực hướng tâm ta sẽ luôn luôn có $d\vec{L}/dt = 0$, tức là môment động lượng phải bảo toàn, $\vec{L} = \text{const}$!

2. Liên hệ hình học giữa lực, quãng đường và thời gian

(Bổ đề VI, Phần II, Hệ quả 1-5, sách đã dẫn). Trong hình vẽ nguyên bản của Newton, lực hấp dẫn đẩy vật trượt trên cung ABC tỷ lệ thuận với khoảng VB, trên cung DEF với khoảng EZ, và trên cung bất kỳ với đường chéo hình bình hành nội tiếp trong cung đó. Cần lưu ý rằng tỷ lệ giữa lực hướng tâm tại B và tại E bằng BV/EZ và tỷ lệ này tiến tới giá trị đúng khi độ dài các cung ABC, DEF tiến tới 0. VB và EZ có ý nghĩa của $2x$ trong hệ thức Galileo $a=2x/t^2$.

Hình 4.11 giải thích ý nghĩa hình học của các đại lượng r , $v=d\vec{r}/dt$ và $a=d^2\vec{r}/dt^2$. Lực, theo phân tích của Newton, tỷ lệ với gia tốc, nhưng gia tốc lại chính là biến thiên của biến thiên của quãng đường, nên lực phải tỷ lệ thuận với đạo hàm bậc hai của quãng đường $F \propto d^2r/dt^2$. Như ta thấy, biến thiên của vectơ vị trí $\vec{r}$ từ $\overline{SA}$ đến $\overline{SB}$ chính là vectơ $\overline{AB}$, còn biến thiên của vectơ vận tốc $\vec{v}$ từ $\overline{AB}$ đến $\overline{BC}$ chính là vectơ $\overline{cC}$. Như vậy độ dài của $\overline{AB}$ chính là độ lớn của $d\vec{r}/dt$ tại điểm A và độ dài của $\overline{cC}$ chính là độ lớn của $d^2\vec{r}/dt^2$ tại B. Để xác định được quy luật $F = F(r)$ thì phải tìm ra sự phụ thuộc của cC vào SB (tức là của $|\vec{a}|$ vào $|\vec{r}|$). Muốn thế, phải tìm cách thể hiện hệ thức Galileo $a = 2x/t^2$ bằng hình học! Trong lập luận của Newton:



Hình 4.11. Mô tả phân tích chuyển động của Newton bằng các vectơ $\vec{r}, \vec{v} = d\vec{r}/dt$ và $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$

(1) BH chính là độ lớn quãng đường x mà chất điểm rơi trở lại tâm (dưới tác dụng của lực hướng tâm) trong khoảng thời gian t khi mà nó di chuyển trên cung ABC. Vì thế $BV = 2BH = 2x$.

(2) Bắt nguồn từ định luật 2 Kepler $S_1/t_1 = S_2/t_2$, thì diện tích quét được SABC trong khoảng thời gian t tỷ lệ với chính thời gian t nên $t \propto SB \times HC$.

(3) Cũng theo phân tích định luật này ở tr.88, ta còn thấy một tương đương hình học của vận tốc $v \propto 1/SY$, vì SY chính là đường vuông góc hạ từ tâm hấp dẫn đến tiếp tuyến quỹ đạo tại B. Tích $v \times SY = \text{const}$ nên $v \propto 1/SY$.

Do đó lực hướng tâm F chính là:

$$F \propto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2x}{t^2} = \lim_{AC \rightarrow 0} \left(\frac{BV}{SB^2 \times HC^2} \right) \quad (4.5.3)$$

. Hoặc nếu quỹ đạo tại B có bán kính cong hữu hạn bằng bán kính cong r của một đường tròn tiếp tuyến nào đó thì (do $2x/t^2 = v^2/r$, xem mục §3.6.3, tr.76):

$$F \propto \frac{v^2}{r} = \lim_{AC \rightarrow 0} \left(\frac{1}{SY^2 \times SB} \right) \quad (4.5.4)$$

Có thể thấy rằng diện tích tam giác $SBC = (SB \times HC)/2$ cũng bằng $(SY \times BC)/2$, hơn nữa do trên quỹ đạo tròn ta có hai tam giác đồng dạng SBC và BCV nên $SB = BC^2/BV$, từ đó có thể biến đổi (4.5.3) từ $BV/(SB^2 \times HC^2)$ thành $BV/(SY^2 \times SB \times BV) = 1/(SY^2 \times SB)$. Đây chính là (4.5.4).

Như vậy để biểu diễn thời gian bằng hình học Newton sử dụng định luật 2 Kepler $S \propto t$. Đối với hai hệ thức được biết đến từ trước Newton là $a = 2x/t^2$ (Galileo) và $a = v^2/r$ (Huygens), thể hiện sự phụ thuộc của lực vào các đại lượng khác, Newton cũng đã chứng minh lại hoàn toàn bằng phương pháp vi phân. Những luận điểm vừa được nêu thể hiện tầm quan trọng của quan hệ $a = d^2r/dt^2$ - nó xác định mối liên hệ "phương trình" giữa lực và quỹ đạo. Bằng phép tính vi phân, Newton đã biến $F = ma$ thành $F = m(d^2r/dt^2)$ và quy vấn đề cơ học về việc giải một phương trình vi phân! Muốn đánh giá được đúng các đóng góp của Newton cần nhận thấy giá trị to lớn của việc ông đã sáng tạo ra phương pháp vi phân và đã chỉ ra cách vận dụng nó⁽¹⁾. Ngày nay người ta giải các phương trình $F(r) = m(d^2r/dt^2)$ bằng phương pháp đại số, nhưng Newton đã giải chúng bằng phương pháp hình học, dựa trên hai hệ thức (4.5.3) và (4.5.4). Cách tiếp cận này của ông không còn được dùng nữa, tuy nhiên phải nói rằng trong nhiều trường hợp nó dễ hiểu và trực quan hơn.

(1) Vào thời điểm của ông, phép tính vi phân còn là một cái gì đó xa lạ, có lẽ vì thế mà ngay cả bản thân Newton cũng không sử dụng nó để thuyết trình lý thuyết của mình. *Methods of Fluxions* của ông chỉ được xuất bản 50 năm sau khi nó ra đời. Có thể thấy Newton đã thận trọng như thế nào khi sử dụng một phương pháp mới, mặc dù chính nó đã giúp ông tìm ra lời giải cho nhiều bài toán khó mà các phương pháp thông thường phải bó tay.

3. Lực hướng tâm trong chuyển động tròn

Lực hướng tâm tác dụng lên chất điểm di chuyển trên quỹ đạo tròn được xét đến trong Bổ đề IV, Phần II. Giải được bài toán này là điểm mấu chốt cho các thuyết minh sau. Căn cứ vào $a = v^2/r = \omega^2 r$ không thể tuyên bố rằng lực hướng tâm $F \propto 1/r$ hay $F \propto r$ vì nhìn chung vận tốc v phụ thuộc vào r . Muốn giải quyết thỏa đáng bài toán trên cần đổi v theo chu kỳ T , $v = 2\pi r/T$, và dựa vào sự phụ thuộc $T = T(r)$ mà phán đoán mối liên hệ $F(r)$ (tuy nhiên thủ thuật này chỉ có thể áp dụng được với các quỹ đạo khép kín).

Như đã làm trong mục §3.8.1, tr.90, sau khi thay $v = 2\pi r/T$ vào $a = v^2/r$ ta được hệ thức (3.8.3) $a = 4\pi^2 r/T^2$. Mặt khác, áp dụng $F \propto 2x/t^2$ vào chuyển động tròn, ta thấy sau thời gian 1 chu kỳ T , chất điểm "rơi" được trên quỹ đạo một khoảng $2r$, do đó:

$$F \propto 4r/T^2 \quad (4.5.5)$$

Biểu thức này chỉ khác (3.8.3) một hằng số là π^2 . Quan điểm của Newton cho rằng $F \propto 2x/t^2$ thỏa mãn trên mọi loại quỹ đạo là chính xác. Nhìn chung $T = T(r)$ nên quy luật lực thay đổi theo đặc tính quỹ đạo. Quỹ đạo tròn là quỹ đạo mà rất nhiều loại lực khác nhau có thể gây ra. Hãy xét một vài trường hợp.

(1) Nếu T không đổi, thì hiển nhiên $F \propto r$; chuyển động này tương ứng với chuyển động của một dao động tuần hoàn, sẽ được nói đến trong phần sau. Đặc điểm của loại chuyển động này là chúng có chu kỳ dao động riêng ($T = \text{const}$) không phụ thuộc vào biên độ dao động (độ lớn của r).

(2) Nếu $T \propto r^{1/2}$, hay $T^2 \propto r$ (chu kỳ con lắc Galileo) thì F không đổi và $v \propto r^{1/2}$. Đây là các chuyển động xảy ra ngay trên bề mặt trái đất trong trường lực không đổi ($g = \text{const}$).

(3) Nếu $T \propto r$, thì $F \propto 1/r$, và vận tốc $v = 2\pi r/T = 2\pi$. Một lực hướng tâm $F \propto 1/r$ sẽ gây ra chuyển động có vận tốc dài không phụ thuộc vào khoảng cách r ; nghĩa là động năng $mv^2/2$ trên quỹ đạo không đổi và không phụ thuộc thế năng $U = -\int Fdr = \ln r + C$. Đây là trường hợp lực hút của dây vật chất dài vô hạn.

(4) Nếu $T \propto r^{3/2}$, thì $F \propto 1/r^2$ và $v \propto r^{-0,5}$. Chuyển động này là chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời dưới tác dụng của lực hấp dẫn từ Mặt Trời. Xem lại phần §3.6.4 về tốc độ vũ trụ cấp 1, $v = (g_h r_h)^{1/2}$ tr.77, vì $g_h \propto 1/r_h^2$ nên $v \propto (r_h)^{-1/2}$

(5) Tổng quát, nếu $T \propto r^n$, thì $F \propto 1/r^{2n-1}$, và vận tốc $v \propto r^{1-n}$

4.6. TRƯỜNG LỰC HƯỚNG TÂM KHÔNG ĐỔI

Trường lực hướng tâm không đổi $F = \text{const}$ là trường hợp tiệm cận của nhiều trường lực khác nhau. Ví dụ, trường lực hấp dẫn ngay trên bề mặt trái đất có $g = \text{const}$ (đây là trường lực tương tự như của trường lực của mặt phẳng vật chất vô hạn); hoặc trường lực đàn hồi $F \propto r$ (sẽ xét trong bài sau) với nguồn lực nằm xa vô cực.

1. Chuyển động phức hợp của Galileo

Bài toán trường lực không đổi có thể giải được đơn giản bằng phương pháp vi phân. Phương trình vi phân có dạng:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = a \quad (4.6.1)$$

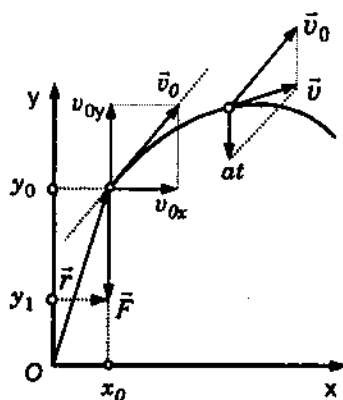
Biến đổi thành $d(dr/dt) = a dt$ và lấy tích phân hai lần ta được:

$$r = at^2/2 + C_1 t + C_2 \quad (4.6.2)$$

với a là gia tốc, C_1 và C_2 là các hằng số tích phân với các ý nghĩa sau: C_1 là vận tốc ban đầu (v_0), C_2 là quãng đường ban đầu r_0 . Có thể chọn hệ tọa độ sao cho $r_0 = 0$, khi đó ta được hệ thức của Galileo:

$$r = at^2/2 + v_0 t \quad (4.6.3)$$

Tuy nhiên hệ thức này chưa xác định một quỹ đạo parabol, vì r ở đây chỉ là một phương chuyển động (song song với phương của lực). Quỹ đạo parabol ($y \propto x^2$) chỉ hiện ra khi vật còn chuyển động theo một phương khác với một vận tốc $\vec{v}_0$ nhất



Hình 4.12. Phân tích lực trên quỹ đạo parabol trong trường lực không đổi

định, nghĩa là chúng ta phải xét trường hợp $\vec{r}$ là một vectơ có hai thành phần (xem hình 4.12):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 - at^2/2 + v_{0y}t \end{pmatrix} \quad (4.6.4)$$

Vectơ vận tốc tương ứng là:

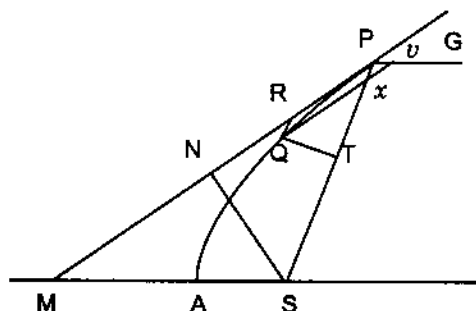
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ -at + v_{0y} \end{pmatrix} \quad (4.6.5)$$

Hãy xét môment động lượng, coi nguồn lực nằm tại gốc tọa độ (thành phần z của cả hai vectơ $\vec{r}$ và $\vec{v}$ đều bằng 0). Để đơn giản, cho $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} L/m &= r_x v_y - v_x r_y = v_{0x}t(-at + v_{0y}) - v_{0x}(y_0 - at^2/2 + v_{0y}t) = \\ &= -(y_0 + at^2/2)v_{0x} \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

Có thể thấy, nếu y_0 là hữu hạn, tức là khi nguồn lực không đổi nằm gần thì môment động lượng không bảo toàn trên quỹ đạo parabol; còn với nguồn lực nằm xa, $y_0 \gg at^2/2$, thì $L/m \propto -y_0 v_{0x}$ bảo toàn và tỷ lệ thuận với v_{0x} , trong khi thành phần v_{0y} không ảnh hưởng đến nó (vì v_{0y} hướng thẳng về phía nguồn lực).

Một câu hỏi đặt ra đối với các quỹ đạo parabol là nếu nguồn lực nằm tại *tiêu cự* thì nó phải có quy luật như thế nào để môment động lượng bảo toàn? Câu trả lời của Newton nằm trong **Bổ đề XIII, Phần III**. Chứng minh này đòi hỏi một số kiến thức về các tiết diện hình nón nên chúng ta bỏ



Hình 4.13. Chứng minh Bổ đề XIII, Phần III của Newton rằng, lực tỷ lệ với nghịch đảo bình phương khoảng cách $F \propto 1/(SP^2 \times 4SA)$

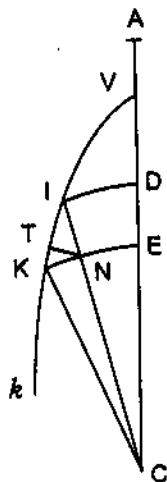
qua mà chỉ dẫn ra hình vẽ của Newton (hình 4.13), ông đã chỉ ra rằng: $F \propto QR/(SP^2 \times QT^2) \propto 1/(SP^2 \times 4SA)$, nghĩa là lực tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách (SA là độ dài cho trước).

2. Bài toán của Newton về chuyển động phức hợp

Trong "*Principia*" Newton còn xét bài toán Galileo dưới một dạng tổng quát hơn như sau: cho một lực hướng tâm *bất kỳ*, một vật rơi thẳng

đúng về tâm và một vật khác được ném nghiêng theo phương nào đó, giả sử vận tốc của chúng bằng nhau tại một thời điểm mà cả hai vật đều ở cách tâm một khoảng như nhau, hãy xác định các thời điểm để hai vật đều có một vận tốc như nhau.

Trong Bổ đề XL, Phần VIII, Newton khẳng định: "vận tốc của cả hai vật đều như nhau tại mọi khoảng cách bằng nhau tính từ tâm", nếu điều kiện nêu trên để bài thỏa mãn. Phép chứng minh này khá đơn giản. Trên hình vẽ (hình 4.14) vật A rơi tự do từ A về C, vật V được ném đi từ V, di chuyển theo quỹ đạo VIKk. Giả sử lực phát sinh từ C, hãy vẽ từ C hai cung tròn bán kính CE và CD cắt quỹ đạo Vk tại K và I. Nối CI cắt cung KE tại



Hình 4.14. Hình vẽ của Newton chứng minh Bổ đề XL, Phần VIII

N, sau đó hạ $NT \perp IK$. Nếu vận tốc của hai vật tại D và I, v_D và v_I , là như nhau, thì suy ra thời gian vật A đi được từ D đến E, t_{DE} , sẽ tỷ lệ thuận với quãng đường DE, và tương tự thời gian vật V đi được từ I đến K, t_{IK} , tỷ lệ thuận với quãng đường IK ($s = vt$). Bây giờ giả sử lực trên DE có giá trị bằng DE, vậy lực trên IK sẽ chỉ có giá trị bằng IT (lực IN phân tích thành TN và IT), do đó gia tốc $a_{DE} = DE$ và $a_{IK} = IT$. Áp dụng $v_K = v_I + a_{IK}t_{IK}$ và $v_E = v_D + a_{DE}t_{DE}$, ta được:

$$v_K = v_I + IT \times IK$$

$$v_E = v_D + DE \times DE$$

Từ hai tam giác vuông đồng dạng ITN, INK suy ra:

$$\frac{IT}{IN} = \frac{IN}{IK} \rightarrow IT \times IK = IN^2 = DE^2$$

Từ đó $v_K = v_E$ nếu $v_I = v_D$. Bằng cách dựng hình tương tự, có thể tìm thấy mọi khoảng cách tương ứng nhau sao cho vận tốc hai vật là như nhau. Về đề tài này cũng còn có một số bài toán khác nhưng chúng phức tạp hơn, ví dụ Bổ đề XLI, XLII, Phần VIII. Chúng ta tạm dừng lại ở đây.

4.7. TRƯỜNG LỰC HƯỚNG TÂM $F \propto r$

Trường lực $F \propto r$ xuất hiện trong vô số các hiện tượng tự nhiên và có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, nó đã được nghiên cứu từ rất sớm bởi

nhiều tác giả, Huygens và Hooke là những người tiên phong trong lĩnh vực này. Đặc điểm nổi bật của các chuyển động trong trường lực này là chúng có chu kỳ dao động riêng không phụ thuộc vào biên độ (độ lớn) của dao động, do đó mà từ lâu người ta đã ứng dụng chúng trong các thiết bị đo thời gian. Các phần sau trình bày cách tiếp cận các hiện tượng này bằng phương pháp động lực học của Newton, chúng ta sẽ thấy các kết quả đạt được tường minh, chặt chẽ và thấu đáo hơn nhiều so với cách tiếp cận động học thuần túy của Galileo và Huygens như đã thấy trong các phần trước.

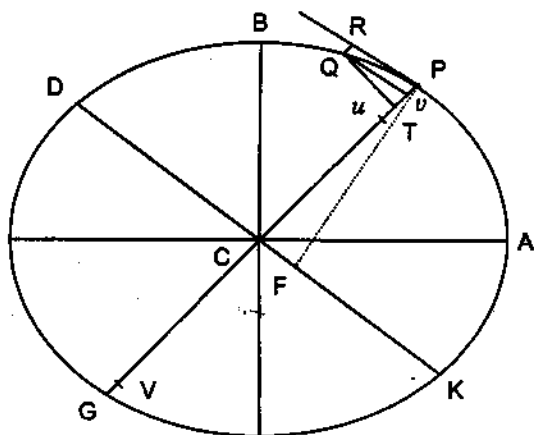
1. Bổ đề X, Phần II: chuyển động elips đều

Chúng ta hãy xét trường hợp một chuyển động trên quỹ đạo elips có tâm lực trùng với tâm của elips. Newton khẳng định (Bổ đề X, Phần II):

(4.7.1) Bổ đề: *Nếu một vật chuyển động trên quỹ đạo elips có tâm nguồn lực trùng với tâm elips thì lực hướng tâm tỷ lệ thuận với khoảng cách giữa vật và nguồn lực.*

Xem hình 4.15 in theo nguyên bản của Newton, BC, CA là hai trục của elips và PG, DK là các đường kính liên hợp (nghĩa là $DK \parallel PR$, PR là tiếp tuyến với elips tại P; đặc điểm của các đường kính liên hợp là diện tích tam giác DCP không đổi, hiển nhiên bằng $DC \times PF = BC \times CA$).

Giả sử nếu không có lực tác dụng thì vật di chuyển theo tiếp tuyến PR, nhưng vì có lực F kéo về tâm nên vật rơi trở lại một đoạn QR//PC về hướng tâm C. Độ lớn QR tỷ lệ với quãng đường rơi được trên quỹ đạo. Vẽ tiếp $Qu \parallel PR$ để có hình bình hành $QuPR$. Từ Q hạ $QT \perp PC$ và từ P hạ $PF \perp DK$. So sánh với công thức (4.5.3) thì QR tương ứng với BV, PC với SB và QT với HC, cho nên tỷ lệ phải tìm chính là $F \propto QR/(QT^2 \times PC^2)$.



Hình 4.15. Bổ đề X, Bài toán V, Phần II: "Nếu một vật chuyển động trên quỹ đạo elips thì hãy xác định quy luật phụ thuộc khoảng cách của lực hướng tâm phát ra từ tâm elips đó"

Trong chứng minh của mình Newton đã sử dụng hai định lý về các tiết diện hình nón (tiết diện conic), một là:

$$\frac{Pv \times vG}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \quad (4.7.1)$$

đối với mọi hình bình hành $QvPR$ được vẽ như trong hình và hai là:

$$BC \times CA = CD \times PF \quad (4.7.2)$$

đối với mọi hình bình hành vẽ trên các đường kính liên hợp (hai trục của elips cũng là một cặp đường kính liên hợp).

Chúng ta tóm tắt phép chứng minh này như sau. Từ hai tam giác vuông đồng dạng QvT và PCF (góc $TQv = CPF$ do có hai cạnh vuông góc với nhau) ta có:

$$\frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{PC^2}{PF^2} \rightarrow Qv^2 = \frac{QT^2 \times PC^2}{PF^2} \quad (4.7.3)$$

Thay Qv^2 vào (4.7.1) ta được:

$$\frac{Pv \times vG}{QT^2} = \frac{PC^2}{CD^2} \times \frac{PC^2}{PF^2} \quad (4.7.4)$$

Chú ý rằng $Pv = QR$ và khi Q tiến đến P thì $vG = 2PC$, nên:

$$\frac{QR \times 2PC}{QT^2 \times PC^2} = \frac{PC^2}{CD^2 \times PF^2} \quad (4.7.5)$$

Sau khi giản ước PC và sử dụng (4.7.2) ta có kết quả:

$$F \propto \frac{QR}{QT^2 \times PC^2} = \frac{PC}{2BC^2 \times CA^2} \quad (4.7.6)$$

Vì BC và CA là hai trục cho trước của elips nên suy ra $F \propto PC = r$.

Từ phân tích công thức (4.5.4) trong mục §4.5.2 cũng có thể chỉ ra rằng $F \propto PC = r$ dựa trên $F \propto 1/(PF^2 \times PC)$. Hãy hình dung đoạn PQ đủ nhỏ để có một đường tròn tâm tại C đi qua P, Q ; tam giác QvP sẽ đồng dạng với CPQ , do đó:

$$PC = \frac{Qv^2}{Pv} = \frac{Qv^2}{QR} \rightarrow PF^2 \times PC = \frac{PF^2 \times Qv^2}{QR} \quad (4.7.7)$$

Rút Qv^2 từ (4.7.1) và thay vào, ta được:

$$PF^2 \times PC = \frac{PF^2}{QR} \times \frac{Pv \times vG \times CD^2}{PC^2} \quad (4.7.8)$$

Giản ước Pv cho QR , $vG=2PC$ cho PC^2 , ta có kết quả:

$$\frac{1}{F} \propto PF^2 \times PC = \frac{2(PF^2 \times CD^2)}{PC} = \frac{2(BC^2 \times CA^2)}{PC} \propto \frac{1}{PC} \quad (4.7.9)$$

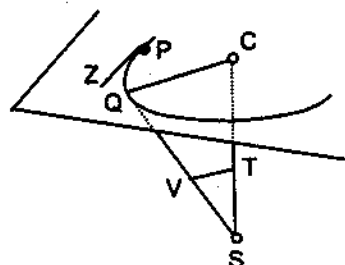
Đặc tính của hệ chuyển động này là chu kỳ T không đổi, nghĩa là chuyển động trên mọi elips đồng dạng đều hoàn tất một vòng quay trong cùng một thời gian. Newton viết trong *Bổ đề XLVII, Phần X*, khi ông áp dụng kết quả trên đối với các con lắc:

(4.7.2) Bổ đề: "Giả sử lực hướng tâm tỷ lệ thuận với khoảng cách từ vật đến tâm điểm; (thì) tất cả mọi vật thể chuyển động trên các mặt phẳng đều vẽ nên các elips và hoàn tất một vòng chuyển động trong một khoảng thời gian như nhau; và những vật thể chuyển động trên các đường thẳng thì sẽ chạy đi, chạy lại và cũng sẽ hoàn tất một số chu kỳ như nhau trong những khoảng thời gian như nhau" (*Bổ đề XLVII, Phần X, sách đã dẫn*).

Theo Newton, con lắc lý tưởng dao động một chiều chỉ là trường hợp riêng của chuyển động hai chiều theo quy luật $F \propto r$. Liên quan đến chuyển động $F \propto r$ Newton còn đưa ra một bài toán trong *Bổ đề XLVI, Phần X*; bài toán này yêu cầu xác định quỹ đạo trên một mặt phẳng khi mà nguồn lực không nằm trên mặt phẳng đó (bài toán chuyển động có điều kiện ràng buộc). Hình 4.16 mô tả phân tích của Newton. Điểm C trên mặt phẳng CPQ là điểm gần nhất tới S , tức là $SC \perp$ mặt phẳng CPQ . Ông cho rằng:

"... lực SV sẽ bị phân tích thành hai lực ST và TV ; lực ST , kéo vật theo phương

vuông góc với mặt phẳng (CPQ), không làm thay đổi chuyển động của vật trên mặt phẳng đó. Nhưng lực TV , nằm trong mặt phẳng chuyển động, hút vật về phía tâm C và gây ra chuyển động trong mặt phẳng đó, như thể lực ST không tồn tại và vật di chuyển tự do trong không gian chỉ có một lực TV phát ra từ tâm C tác động".



Hình 4.16. Vẽ lại theo bản XVIII, hình 4, tr.198, "Principia"

Newton còn chỉ ra, theo như cách vẽ của ông, $SV/SQ = TV/QC = ST/SC$, nên nếu lực SV tỷ lệ thuận với khoảng cách SQ , ví dụ $SV = kSQ$, thì hiển nhiên $TV = kQC$, và $ST = kSC = \text{const}$ (vì SC không đổi). Trong trường hợp này, quỹ đạo của vật được ném ra từ điểm P và di chuyển theo hướng Z trên đường vòng cung PQ sẽ khép kín thành một elips.

Một hệ quả trực tiếp của bài toán chuyển động trên quỹ đạo elips dưới tác dụng của lực $F \propto r$ là phân tích trong phần giải thích Bổ đề X, Phần II cho rằng khi tâm elips chuyển ra xa vô tận để elips biến thành parabol thì lực $F \propto r$ (phát ra từ tâm elips) trở thành $F = \text{const}$. Trường lực không đổi trở thành một trường hợp tiệm cận của trường lực $F \propto r$.

2. Nghiệm giải tích của $\vec{F} = -k\vec{r}$

Bây giờ bằng phương pháp vi phân chúng ta chỉ ra ngược lại rằng, với một lực $F \propto r$ tác động thì quỹ đạo của chất điểm phải là một elips và nguồn lực nằm tại tâm elips đó. Phương trình vi phân của chuyển động là (đặt $m=1$, sau này chỉ cần thay $k \rightarrow k/m$ là các kết quả bảo toàn):

$$\vec{r}'' = -k\vec{r} \rightarrow \begin{cases} x'' = -kx \\ y'' = -ky \end{cases} \quad (4.7.10)$$

Vì hai phương trình này tương tự như nhau nên chúng ta giải mẫu phương trình thứ 2. Nhân hai vế với $2y'$ ta được:

$$2y'y'' = -k2yy' \rightarrow [(y')^2]' = -k(y^2)' \quad (4.7.11)$$

Lấy tích phân hai vế (theo t):

$$(y')^2 = -ky^2 + C_w \rightarrow y' = (C_w - ky^2)^{1/2} \quad (4.7.12)$$

với C_w là hằng số tích phân. Vì điều kiện $C_w - ky^2 \geq 0 \rightarrow |y| \leq (C_w/k)^{1/2}$ nên có thể đặt:

$$y = (C_w/k)^{1/2} \sin \xi \rightarrow dy = (C_w/k)^{1/2} \cos \xi d\xi \quad (4.7.13)$$

Thế y và dy này vào (4.7.12), suy ra:

$$(C_w/k)^{1/2} \cos \xi d\xi = [C_w - C_w(\sin \xi)^2]^{1/2} dt = (C_w)^{1/2} \cos \xi dt \rightarrow d\xi = (k^{1/2}) dt \quad (4.7.14)$$

Sau khi lấy tích phân (4.7.14), ta được:

$$\xi = (k^{1/2})t + C_\Delta \quad (4.7.15)$$

với C_{Δ} là hằng số tích phân thứ hai. Thay (4.7.15) vào biểu thức của y trong (4.7.13) chúng ta suy ra kết quả cuối cùng:

$$y = (C_w/k)^{1/2} \sin[(k^{1/2})t + C_{\Delta}] \quad (4.7.16)$$

Cũng làm như thế với thành phần x , và chú ý rằng các hằng số tích phân là khác nhau, chúng ta được lời giải vectơ sau:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} (C_{\omega x}/k)^{1/2} \sin[k^{1/2}t + C_{\Delta x}] \\ (C_{\omega y}/k)^{1/2} \sin[k^{1/2}t + C_{\Delta y}] \end{pmatrix} \quad (4.7.17)$$

Để thấy rõ ý nghĩa của các hằng số tích phân này, hãy đặt:

$$C_{\omega x} = ka^{1/2}, C_{\omega y} = kb^{1/2}, \omega = k^{1/2}, C_{\Delta y} = \Delta, C_{\Delta x} = \Delta + \pi/2 + \delta \quad (4.7.18)$$

Vectơ $\vec{r}$ trở thành:

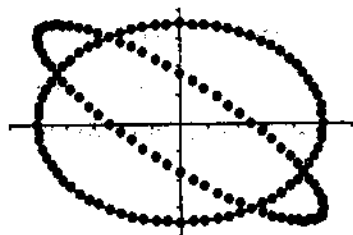
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \Delta + \delta) \\ b \sin(\omega t + \Delta) \end{pmatrix} \quad (4.7.19)$$

Đây chính là biểu thức vectơ của elips bị quay đi một góc nhất định. Hình 4.17 cho thấy hai elips với các tham số $a=10, b=7, \omega=5^\circ/s, \Delta=30^\circ, \delta=60^\circ$ (elips xoay nghiêng) và $\delta=0^\circ$ (elips nằm ngang).

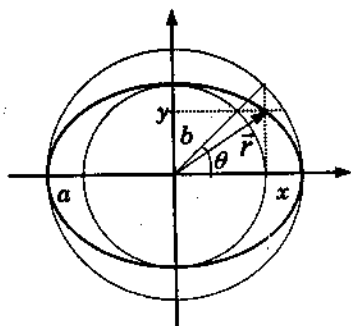
Để giải thích rõ hơn, hãy chọn hệ tọa độ (x, y) đi qua tâm một elips với a là trục lớn và b là trục nhỏ. Vẽ hai vòng tròn với bán kính a và b ngoại tiếp và nội tiếp elips (hình 4.18). Với $\forall \theta \in <0, 2\pi>$, các thành phần vectơ x, y của $\vec{r}$ là:

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.7.20)$$

Cần lưu ý rằng cánh tay đòn của góc θ không trùng với $\vec{r}$, nhìn chung $\vec{r}$ không thay đổi đồng bộ với θ . So sánh hai biểu thức (4.7.19) và (4.7.20) ta thấy chúng hoàn toàn giống như nhau nếu $\theta = \omega t + \Delta$ (và $\delta = 0$), tức là nếu góc đi được biến thiên đều, hay nói cách khác, chất điểm



Hình 4.17. Định dạng elips với các tham số khác nhau



Hình 4.18. Biểu diễn elip theo tham số

di chuyển với vận tốc góc đều w trên quỹ đạo elips. Có thể kiểm tra lại điều này bằng cách lấy đạo hàm hai lần của $\vec{r}$ theo (4.7.20), ta được:

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -a(\theta')^2 \cos \theta - a\theta'' \sin \theta \\ -b(\theta')^2 \sin \theta - b\theta'' \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\theta')^2 x - \theta''(a/b)y \\ -(\theta')^2 y - \theta''(b/a)x \end{pmatrix} \quad (4.7.21)$$

Vì giả thiết lực (hút) tỷ lệ thuận với r nên ta phải có $\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} = \begin{pmatrix} -kx \\ -ky \end{pmatrix}$. Để thấy điều này chỉ xảy ra khi $\theta'' = 0$ và $\theta' = k^{1/2}$.

Từ $\theta' = k^{1/2} = \omega$, suy ra:

$$d\theta/dt = \omega \rightarrow \theta = \omega t + \Delta \quad (4.7.22)$$

Vì thế θ biến thiên đều, và ω có ý nghĩa của vận tốc góc, hằng số tích phân Δ tương ứng với độ lệch pha ban đầu. Chính vì $\omega = \text{const}$ và được cho trước bởi các đặc tính vật lý của cơ hệ (k, m) nên chúng ta hiểu tại sao Newton lại khẳng định chuyển động trên mọi elips tương tự nhau đều có cùng một chu kỳ. Cũng có thể thấy từ (4.7.19), vì các tham số của elips được xác định từ các hằng số tích phân nên hệ thức (4.7.19) không xác định một elips nào cụ thể.

3. Năng lượng và môment động lượng

Tuy ω không đổi nhưng biến thiên của vận tốc dài trên quỹ đạo elips là không đều, lấy vi phân của (4.7.19) (với $\delta=0$):

$$v_x = dx/dt = -a\omega \sin(\omega t + \Delta) \quad (4.7.23)$$

$$v_y = dy/dt = b\omega \cos(\omega t + \Delta) \quad (4.7.24)$$

Từ đó suy ra:

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = \omega^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 \right] \quad (4.7.25)$$

Động năng tương ứng hiển nhiên là:

$$T = m|\vec{v}|^2/2 \quad (4.7.26)$$

Thế năng trong trường lực $\vec{F} = -k\vec{r}$ là:

$$\begin{aligned} U &= -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int (-k\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int kx dx + \int ky dy \rightarrow \\ U &= \frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} + C = \frac{kr^2}{2} + C \end{aligned} \quad (4.7.27)$$

Chọn gốc tọa độ sao cho $C=0$ ta được năng lượng tổng thể:

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} \quad (4.7.28)$$

Đây là một biểu thức có tính đối xứng hình thức rất dễ nhớ. Nó đồng thời là một elips trong *không gian pha* (r, v) với các trục:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad \text{và} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (4.7.29)$$

Xác định được dạng của elips này cũng chính là đã giải được bài toán chuyển động.

(4.7.3) Bổ đề: *Đối với chất điểm chuyển động trên quỹ đạo elips trong trường lực tỷ lệ thuận với khoảng cách thì tích $(mv^2 + kr^2)$ là một hằng số và có giá trị bằng hai lần năng lượng tổng thể của chất điểm.*

Bây giờ chú ý rằng chúng ta có điều kiện ban đầu $m=1$ (hay k tương ứng với k/m) nên sau khi áp dụng $k^{1/2} \rightarrow (k/m)^{1/2}$ vào (4.7.28) sẽ được E dưới dạng:

$$E = T + U = \frac{m\omega^2}{2} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^2 y^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 x^2 \right] + \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (4.7.30)$$

Ghép các thành phần x, y lại với nhau và ký hiệu $A^2 = a^2 + b^2$, ta có:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\omega^2}{2} (a^2 + b^2) \left[\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \right] = \frac{m\omega^2}{2} (a^2 + b^2) [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] = \\ &= \frac{m\omega^2}{2} (a^2 + b^2) = \frac{m\omega^2}{2} A^2 \end{aligned} \quad (4.7.31)$$

(4.7.4) Bổ đề: *Đối với chất điểm chuyển động trên quỹ đạo elips có hai trục là a và b trong trường lực tỷ lệ thuận với khoảng cách thì tích $m\omega^2 (a^2 + b^2)$ là một hằng số và có giá trị bằng hai lần năng lượng tổng thể của chất điểm.*

Năng lượng chuyển động bảo toàn và nhìn chung phụ thuộc vào độ lớn của elips (biên độ chuyển động), nghĩa là phụ thuộc vào các hằng số tích phân C_{wx} và C_{wy} trong (4.7.17). Như vậy ý nghĩa của các hằng số này chính là năng lượng.

Có một hiện tượng đặc biệt là những quỹ đạo có (a^2+b^2) bằng nhau sẽ đều có năng lượng như nhau, mặc dù chúng có môment động lượng khác nhau! Đây là một điểm rất đặc biệt của trường lực $\vec{F} = -k\vec{r}$.

Theo quy tắc nhân có hướng, dẫn trong §4.2, tr.101, chúng ta hãy xác định môment động lượng $\vec{L}/m = \vec{r} \times \vec{v}$, chú ý $r_z = v_z = 0$:

$$\begin{aligned}\vec{L}/m &= \vec{r} \times \vec{v} = \{r_y v_z - v_y r_z, r_z v_x - v_z r_x, r_x v_y - v_x r_y\} = \\ &= \{0, 0, r_x v_y - v_x r_y\}\end{aligned}\quad (4.7.32)$$

Sau khi thay các thành phần vectơ của $\vec{r}$ từ (4.7.19) (cho $\delta=0$) và của $\vec{v}$ từ (4.7.23), (4.7.24) vào chúng ta thấy môment động lượng bảo toàn:

$$\vec{L}/m = ab\omega \cos(\omega t + \Delta)^2 + ab\omega \sin(\omega t + \Delta)^2 = ab\omega \quad (4.7.33)$$

(4.7.5) Bổ đề: Môment động lượng của chất điểm chuyển động trên quỹ đạo elips có hai trục là a và b trong trường lực tỷ lệ thuận với khoảng cách là một hằng số có giá trị bằng $mab\omega$.

Hệ quả sau là hiển nhiên.

(4.7.6) Hệ quả: Mọi quỹ đạo elips có tích hai trục $ab = \text{const}$ đều có môment động lượng như nhau và mọi quỹ đạo có tổng $a^2 + b^2 = \text{const}$ đều có năng lượng như nhau.

Bạn đọc tự chứng minh rằng không có hai quỹ đạo elips khác nhau lại có cùng năng lượng và môment động lượng.

4. Chuyển động tròn đều

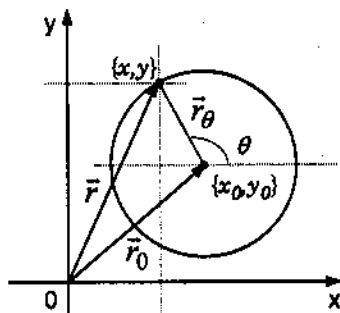
Vì các elips cũng là các đường tròn (khi hai trục của chúng bằng nhau $a=b=r$) nên các kết quả trên đây cũng thỏa mãn đối với trường hợp chất điểm di chuyển trên quỹ đạo tròn với bán kính r . Trong hệ tọa độ Descartes vuông góc, đường tròn $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ (tâm tại (x_0, y_0) và bán kính r) có dạng vectơ tương ứng là (hình 4.19):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_0 + r \cos \theta \\ y_0 + r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (4.7.34)$$

thể hiện $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\theta$. Trong trường hợp đơn giản (x_0, y_0) trùng với gốc tọa độ và $\theta = \omega t + \Delta$ ta được:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \Delta) \\ r \sin(\omega t + \Delta) \end{pmatrix} \quad (4.7.35)$$

Đây là dạng đơn giản của (4.7.19) và hiển nhiên chúng cũng là lời giải của phương trình vi phân (4.7.10), xác định trường lực hướng tâm tỷ lệ thuận với khoảng cách r . Áp dụng (4.7.33), môment động lượng trong trường hợp này bằng $L/m = r^2 \omega = rv$, hay $L = mr^2 \omega = I\omega$. Đại lượng $I = mr^2$ thường được gọi là *môment quán tính*. Viết dưới dạng vectơ $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Môment quán tính phụ thuộc vào kết cấu hình học của từng cơ hệ, nó rất đặc trưng cho chuyển động quay nhưng không phụ thuộc vào việc hệ có đang quay hay không; một vật đứng yên cũng có môment quán tính. Vấn đề này sẽ được nhắc tới trong một bài sau.



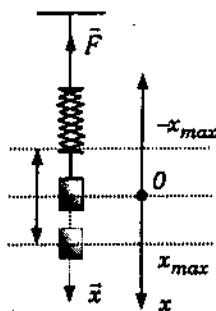
Hình 4.19. Biểu diễn đường tròn theo tham số

4.8. DAO ĐỘNG TUẦN HOÀN

Dao động tuần hoàn của con lắc lý tưởng, không có lực cưỡng bức và lực ma sát, là trường hợp riêng của trường lực $F \propto r$. Đây là bài toán một chiều mà lời giải là (4.7.16). Tuy nhiên các dao động phức tạp hơn (có lực ma sát hay cưỡng bức⁽¹⁾, dao động phi tuyến tính của con lắc thông thường) không thể quy về bài toán trường lực $F \propto r$.

1. Con lắc lý tưởng

Hãy xét một dụng cụ đơn giản chỉ bao gồm một vật nặng khối lượng m treo thẳng đứng bằng một sợi dây lò xo có hệ số đàn hồi (độ cứng) là k (hình 4.20).



Hình 4.20. Con lắc lò xo
 $\vec{F} = -k\vec{x}$

(1) Các lực ma sát thường phụ thuộc vào khối lượng và vận tốc chuyển động, nhìn chung có dạng $F = m\gamma(dx/dt)$, với γ là hệ số ma sát (của môi trường, vật liệu); còn các lực cưỡng bức thường có dạng $F = F_0 e^{i\omega t}$, với ω là tần số góc của lực cưỡng bức, i là đơn vị ảo, F_0 là biên độ lực. Trong cả hai trường hợp thì lực tác dụng tổng hợp không tuân theo quy luật $F \propto kx$.

Dưới tác dụng của trọng lực, lò xo bị kéo giãn đến một vị trí cân bằng 0 và sau đó nếu ta nâng vật m lên rồi thả nó ra thì vật sẽ di chuyển tuần hoàn lên xuống theo phương thẳng đứng với một biên độ A nhất định xung quanh vị trí cân bằng 0. Vì lực căng F của lò xo tỷ lệ thuận với độ kéo giãn x nên ta có phương trình chuyển động đơn giản là (định luật Hooke):

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad (4.8.1)$$

Dấu trừ biểu hiện rằng hai vectơ $\vec{F}$ và $\vec{x}$ ngược chiều nhau. Sử dụng $F = ma = m(d^2x/dt^2)$ ta có phương trình vi phân của con lắc:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (4.8.2)$$

Hiển nhiên bằng cách đặt $\omega^2 = k/m$ ta có ngay lời giải của phương trình này dưới dạng (4.7.16) và có thể viết gọn lại thành:

$$x = A\cos(\omega t + \Delta) \text{ hoặc } x = A\sin(\omega t + \Delta) \quad (4.8.3)$$

Nhìn chung lời giải của (4.8.2) có thể có các dạng sau:

$$a\cos x, b\sin x, a\cos x + b\sin x$$

hoặc tổng quát hơn:

$$ae^{ix} = a(\cos x + i\sin x), \text{ với } i \text{ là đơn vị ảo.}$$

Điều đáng chú ý ở đây là ω được xác định hoàn toàn bởi các đặc tính vật lý của con lắc là *hệ số đàn hồi* k và khối lượng vật treo m . Các đại lượng này ấn định một tần số dao động riêng đặc trưng cho mỗi con lắc, người ta thường ký hiệu giá trị đặc trưng $(k/m)^{1/2}$ là ω_0 để phân biệt với các giá trị ω khác.

Khi lò xo cứng (k lớn) thì ω_0 cũng lớn, tức là các lò xo cứng có tần số dao động riêng lớn hơn các lò xo yếu (vì thế các dây đàn càng được kéo căng thì âm tần phát ra càng cao); ω_0 cũng tăng lên khi khối lượng m của vật treo nhỏ đi và ngược lại (vì thế các dây bass thường to hơn dây thanh). Có thể thấy biên độ dao động A không ảnh hưởng đến ω_0 . Mỗi con lắc lý tưởng có chu kỳ dao động riêng không phụ thuộc vào góc xuất phát Δ và biên độ dao động A cũng như vận tốc của nó (Galileo cũng đã khẳng định như vậy).

Về thuật ngữ, người ta thường dùng:

- tần số góc riêng để chỉ ω_0
- chu kỳ dao động riêng $T=2\pi/\omega_0$ để chỉ thời gian quay được một vòng;
- tần số dao động riêng $\tau_0=1/T=\omega_0/2\pi$ để chỉ số chu kỳ trong một giây;
- đại lượng Δ được gọi là độ lệch pha, và
- đại lượng $(\omega_0 t + \Delta)$ được gọi là pha;
- hằng số A là biên độ dao động.

Sau đây chúng ta sẽ chỉ ra mối liên hệ giữa biên độ dao động A và năng lượng của con lắc.

2. Năng lượng của con lắc lý tưởng

Đặc tính có tần số dao động riêng xác định phản ánh một bản chất vật lý sâu xa hơn của hệ cơ học, đó là sự bảo toàn năng lượng. Như đã thấy trong §4.7 (công thức (4.7.28)) năng lượng trong trường hợp một chiều này sẽ là:

$$E = T + U = mv^2/2 + kx^2/2 \quad (4.8.4)$$

Nếu sử dụng nghiệm $x=A\cos(\omega_0 t + \Delta)$ thì $v=dx/dt=-A\omega_0\sin(\omega_0 t + \Delta)$ và hai thành phần động năng và thế năng sẽ có dạng:

$$T=m(A\omega_0)^2[\sin(\omega_0 t + \Delta)]^2/2 \quad (4.8.5)$$

$$U=kA^2[\cos(\omega_0 t + \Delta)]^2/2 \quad (4.8.6)$$

Vì $k=m\omega_0^2$ nên ta được kết quả:

$$\begin{aligned} E &= m(A\omega_0)^2 \{ [\sin(\omega_0 t + \Delta)]^2/2 + [\cos(\omega_0 t + \Delta)]^2/2 \} \\ &= A^2(m\omega_0^2/2) \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

Đây là hệ quả của (4.7.31). Năng lượng tỷ lệ thuận với bình phương của biên độ. Khi con lắc lý tưởng dao động thế năng của nó chuyển thành động năng và ngược lại nhưng tổng thế năng lượng thì bảo toàn. Trong môi trường thực con lắc thường mất dần năng lượng do ma sát nên sau một thời gian nó sẽ dừng lại, tuy nhiên có thể thấy khi dây đàn ngừng lại thì chỉ có biên độ nhỏ đi chứ âm tần thì không đổi.

3. Con lắc thông thường

Con lắc thông thường (*pendulum*) có nhiều hình dạng khác nhau nhưng về bản chất là hệ thống bao gồm một vật nặng được thả đung đưa

trong trọng trường bằng dây treo có độ dài xác định. Đặc tính $T^2 \propto r$ của con lắc này đã được biết từ thời Galileo nhưng cho đến nay nghiệm giải tích của quỹ đạo vẫn còn là điều bí ẩn. Đây là con lắc *phi tuyến*.

Thiết lập phương trình chuyển động như sau. Lực làm con lắc này dao động là thành phần $\vec{P}_1$ của trọng lượng $\vec{P}$ của vật m (hình 4.21). Độ lớn của lực này phụ thuộc vào góc θ của dao động. Theo hình vẽ ta có:

$$P_1 = mg \sin \theta \quad (4.8.8)$$

Phương trình chuyển động dạng vectơ là:

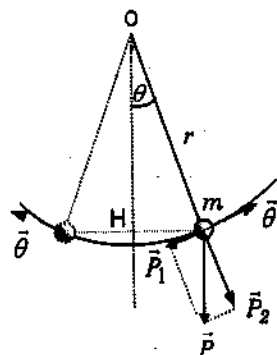
$$-m \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} = \vec{P}_1 \quad (4.8.9)$$

$\vec{s}$ là vectơ quãng đường vòng cung mà con lắc di chuyển được.

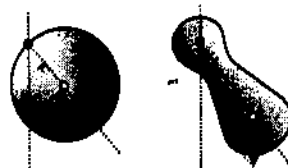
Bây giờ tùy thuộc vào cách chọn hệ tọa độ mà phương trình vectơ này sẽ có các thành phần vectơ khác nhau⁽¹⁾. Để đơn giản chúng ta hãy chọn hệ tọa độ cực (xem §4.2.5, tr.112). Vì biến thiên duy nhất ở đây là góc θ (r là độ dài xác định) nên sau khi thay $\vec{s} = r\vec{\theta}$ vào (4.8.9) và chú ý $\vec{\theta}$ và $\vec{P}_1$ ngược chiều nhau, ta có phương trình chuyển động:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{r} \sin \theta \quad (4.8.10)^{(2)}$$

Phương trình này tuy có vẻ đơn giản nhưng không dễ giải vì nó là một phương trình *không tuyến tính* (do có thành phần $\sin \theta$). Để giải được bài toán này người ta thường chia nó làm ba trường hợp: góc θ rất nhỏ, góc θ nhỏ vừa và góc θ bất kỳ. Đối với θ rất nhỏ, thì $\sin \theta \sim \theta$ nên



Hình 4.21. Phân tích lực trong con lắc thông thường



Hình 4.22. Các dạng con lắc tròn và con lắc hình thoi

(1) Ví dụ, trong hệ tọa độ Descartes vuông góc, các thành phần sẽ có dạng (với $k = g/r^2$): $d^2 x / dt^2 = -k y x$; $d^2 y / dt^2 = k x^2$.

(2) Vì $\vec{s}$ và $\vec{\theta}$ chỉ sai khác một hằng số $\vec{s} = r\vec{\theta}$, nên phương trình này cũng có thể viết thành $d^2 s / dt^2 = -g \sin(s/r)$, nếu muốn sử dụng biến số là quãng đường vòng cung s .

(4.8.10) trở thành phương trình tuyến tính:

$$d^2\theta/dt^2 = -(g/r)\theta \quad (4.8.11)$$

Phương trình này hoàn toàn tương tự như $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$ nên hiển nhiên cũng có lời giải tương tự:

$$\theta = A\cos(\omega_0 t + \Delta), \text{ với } \omega_0 = \sqrt{g/r} \quad (4.8.12)^{(1)}$$

A có ý nghĩa của biên độ cực đại, ω_0 là tần số góc riêng của con lắc.

Áp dụng $T = 2\pi/\omega_0$, ta tìm lại công thức Galileo đối với chu kỳ T:

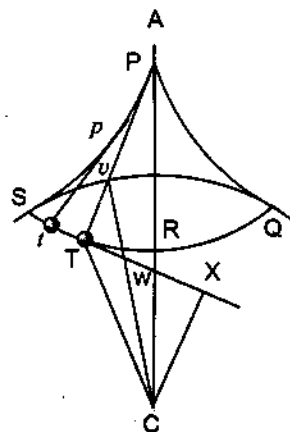
$$T = 2\pi\sqrt{r/g} \quad (4.8.13)$$

Một điều có thể thấy trong các phương trình vi phân trên là không thấy xuất hiện khối lượng m của con lắc, tức là các đại lượng đặc trưng như T , ω ... sẽ không phụ thuộc vào khối lượng treo của nó. Galileo cũng đã từng phát hiện ra và nhắc tới điều này.

Với θ nhỏ vừa thì người ta có thể thay thế ($\sin\theta \approx \theta - \theta^3/6$) và tìm được lời giải chính xác, tuy nhiên với θ bất kỳ thì chỉ có lời giải gián tiếp là một tích phân không có nghiệm giải tích⁽²⁾.

4. Phân tích của Newton về con lắc

Phân tích của Newton về con lắc được nói đến trong các Bổ đề LI-LIII, Phần X. Kết quả chủ yếu là chỉ ra sự tồn tại của chu kỳ không đổi đối với mọi biên độ nếu lực hướng tâm tỷ lệ thuận với khoảng cách. Phân tích về tác dụng lực trong con lắc của Newton (Bổ đề LIII) cũng tương tự như ngày nay, tuy nhiên



Hình 4.23. Hình vẽ con lắc
Bổ đề LIII, Phần X, "Principia"

(1) Lưu ý rằng ω_0 không phải là "vận tốc góc" của θ (tức là $\dot{\theta}$) như trong các phần trước, khi mà θ được coi là tuyến tính với ω_0 , $\theta = \omega_0 t + \Delta$ và $x = A\cos(\omega_0 t + \Delta)$.

(2) Lời giải dĩ nhiên phải tồn tại vì chúng ta nhìn thấy quỹ đạo chuyển động của con lắc, vấn đề chỉ ở chỗ liệu quỹ đạo có thể biểu diễn được dưới dạng giải tích hay không mà thôi.

các chứng minh của ông lại dựa trên mô hình con lắc hơi khác một chút. Theo hình 4.23, lực hướng tâm phát ra từ C, không nhất thiết song song với trục dao động AC, hơn nữa ở hai bên thành con lắc còn có hai cung giới hạn AS, AQ để khi dây treo AT áp vào thì con lắc sẽ bị nhấc lên một chút, quỹ đạo SRQ vì thế không phải là một cung tròn. Hình 4.23 cũng cho thấy lực CT được phân tích làm hai: lực CX//AT làm kéo căng sợi dây treo và lực TX tiếp tuyến với cung TR làm gia tốc vật treo. Nếu lực CT có thể coi là tỷ lệ thuận với độ dài CT thì lực TX cũng tỷ lệ thuận với độ dài TX. Từ các tỷ lệ đồng dạng do CX//AT có thể dễ dàng đi đến phương trình vi phân:

$$\text{Gia tốc} \propto TX = AC \times (Tw/Aw) = AC \times \sin(TAR)$$

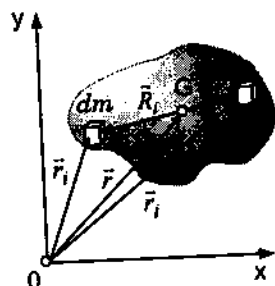
Chú ý AC là độ dài cho trước. Đây chính là phương trình $d^2\theta/dt^2 = -(g/r)\sin\theta$ được thể hiện bằng lời.

4.9. CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN

Chuyển động quay của vật rắn là trường hợp đặc biệt của chuyển động của hệ chất điểm (có liên kết) trên các quỹ đạo tròn, khi đó vận tốc góc của mọi chất điểm là như nhau. Các chất điểm có thể bị gia tốc đều hoặc không bị gia tốc (quay theo quán tính), trong cả hai trường hợp hệ đều có một môment động lượng tổng thể xác định $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

1. Khối tâm của vật rắn

Vật rắn là một hệ chất điểm có liên kết được phân bố liên tục và cũng như trong trường hợp hệ chất điểm rời rạc, vật rắn có *khối tâm* G được định nghĩa dựa trên sự cân bằng của các môment lực với cánh tay đòn $\vec{R}_i$ vẽ từ khối tâm đó đến các vi phần m_i (hình 4.24).



Hình 4.24. Định nghĩa khối tâm của vật rắn

$$\sum \vec{R}_i \times m_i \vec{g} = 0 \rightarrow (\sum m_i \vec{R}_i) \times \vec{g} = 0 \rightarrow \sum m_i \vec{R}_i = 0 \quad (4.9.1)$$

Giả sử trong hệ tọa độ bên ngoài, vectơ vị trí của khối tâm là $\vec{r}$ thì vectơ vị trí của các vi phần sẽ là $\vec{r}_i = \vec{r} + \vec{R}_i$, hay $\vec{R}_i = \vec{r}_i - \vec{r}$. Nhân hai

về với m_i và cộng lại sẽ được:

$$\sum m_i \vec{R}_i = 0 = \sum m_i \vec{r}_i - (\sum m_i) \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \sum m_i \vec{r}_i / \sum m_i \quad (4.9.2)$$

Hệ thức này cho phép xác định vị trí khối tâm nếu biết vị trí các phần. Khối tâm của hệ là nơi duy nhất mà mọi tác dụng lực tương tác bên trong hệ đều triệt tiêu, có nghĩa là với hệ quy chiếu gắn liền với khối tâm thì *động lượng* của hệ luôn bảo toàn. Do đó nó đại diện cho toàn bộ hệ như một chất điểm đối với phương trình chuyển động $F=ma$. Thật vậy, nếu mỗi thành phần m_i của hệ chịu tác động của một lực $\vec{F}_i$ thì toàn bộ hệ sẽ chịu một lực $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$. Do đó hệ sẽ nhận một gia tốc $(\sum F_i)/M = (\sum m_i d^2 \vec{r}_i / dt^2) / \sum m_i$. Nhưng theo (4.9.2) thì đây chính là $d^2 \vec{r} / dt^2$, tức là gia tốc của khối tâm.

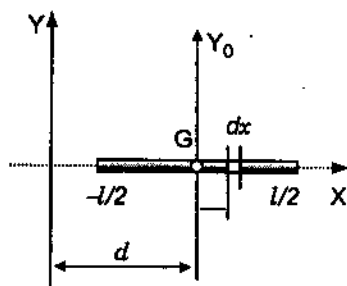
2. Chuyển động quay của vật rắn

Tuy nhiên khối tâm không thể đại diện cho hệ trong chuyển động quay. Đối với vật rắn quay tròn đều quanh một trục nhất định thì môment quán tính của nó phụ thuộc vào hình dạng của vật, nên nhìn chung vật không thể suy biến thành một chất điểm. Khi vật rắn quay tròn (trục quay có thể đi qua hoặc không đi qua vật), mọi điểm của nó đều di chuyển theo những quỹ đạo tròn, và như đã thấy $\vec{L}_i = I_i \vec{\omega}$. Vì vectơ $\vec{\omega}$ là không đổi, nên $\vec{L}_i$ của mọi chất điểm đều song song và cùng chiều với $\vec{\omega}$. Hiển nhiên chúng cộng lại với nhau thành một đại lượng có độ lớn xác định, được coi là môment động lượng toàn phần của vật rắn:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} = \sum I_i \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad (4.9.3)$$

(4.9.1) Định nghĩa: Đại lượng vô hướng $I = \sum m_i r_i^2$, không phụ thuộc vào chuyển động quay của hệ, là một đại lượng đặc trưng cho cấu trúc của từng hệ và được gọi là môment quán tính của hệ. Trong môi trường phân bố vật chất liên tục, I trở thành tích phân:

$$I = \int r^2 dm \quad (4.9.4)$$



Hình 4.25. Môment quán tính của thanh kim loại

Hãy xét mối quan hệ giữa môment quán tính tổng thể $I = \sum m_i r_i^2$ và môment quán tính của chất điểm = khối tâm G (với toàn bộ khối lượng M của vật) $I_G = Mr^2$. Để đơn giản chúng ta chọn trường hợp một chiều của một thanh kim loại có độ dài l , đặt vuông góc với trục quay và cách trục một đoạn d . Cho thanh này quay quanh trục Y nhưng không quay quanh trục Y_0 . Theo hình 4.25 khối lượng của đoạn dx là $dm = (M/l)dx$, do đó I theo (4.9.4) sẽ là:

$$I = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} (x+d)^2 dx = \frac{M}{l} \left[\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx + d^2 \int_{-l/2}^{l/2} dx + 2d \int_{-l/2}^{l/2} x dx \right] \quad (4.9.5)$$

Kết quả của tích phân thứ nhất trong (4.9.5) là:

$$I_0 = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{3l} \left[\left(\frac{l}{2} \right)^3 - \left(-\frac{l}{2} \right)^3 \right] = \frac{Ml^2}{12} \quad (4.9.6)$$

Đây chính là môment quán tính I_0 của thanh kim loại đối với trục quay riêng Y_0 đi qua khối tâm G. Cần nhận thấy rằng thành phần I_0 này tồn tại ngay cả khi vật không hề quay quanh trục riêng của nó.

Kết quả của tích phân thứ hai trong (4.9.5) là:

$$I_G = \frac{Md^2}{l} \int_{-l/2}^{l/2} dx = \frac{Md^2}{l} \left[\frac{l}{2} - \left(-\frac{l}{2} \right) \right] = Md^2 \quad (4.9.7)$$

Đây là môment quán tính *riêng* của khối tâm G, như một chất điểm với toàn bộ khối lượng M , đối với trục quay Y.

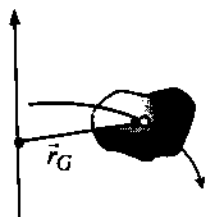
Còn tích phân thứ ba thì bằng 0 vì:

$$2d \int_{-l/2}^{l/2} x dx = d \left[\left(\frac{l}{2} \right)^2 - \left(-\frac{l}{2} \right)^2 \right] = 0 \quad (4.9.8)$$

Như vậy:

$$I = I_0 + I_G \quad (4.9.9)$$

Khi khoảng cách d lớn hơn kích thước của vật rắn rất nhiều, thì nhìn chung $I_0 \ll I_G$, ví dụ từ I_0/I_G của Mặt Trăng (khối cầu có $I_0 = 2MR^2/5$) $\approx 0,0000082$. Do $I_0 = \text{const}$ nên khi vật rắn chuyển động trên



Hình 4.26. Trục quay nằm ngoài vật rắn

quỹ đạo dưới tác dụng của lực hướng tâm thì I_0 không làm ảnh hưởng đến bảo toàn môment động lượng (hình 4.26).

(4.9.2) Định lý: *Môment quán tính của một vật rắn đối với một trục quay Y cho trước có giá trị bằng môment quán tính của khối tâm đối với trục quay đó cộng với môment quán tính của vật đối với trục quay riêng song song với trục Y và đi qua khối tâm.*

Trong một số giáo trình, định lý này được nhắc đến với tên gọi là định lý Steiner-Huygens. Áp dụng phương pháp tính tích phân tương tự người ta có thể tìm thấy môment quán tính riêng I_0 cho vật rắn với nhiều hình dạng khác nhau, cụ thể:

$$\text{– hình vành khăn tròn : } I_0 = MR^2 \quad (4.9.10)$$

$$\text{– hình trụ tròn : } I_0 = MR^2 / 2 \quad (4.9.11)$$

$$\text{– hình khối cầu : } I_0 = 2MR^2 / 5 \quad (4.9.12)$$

3. Phương trình chuyển động

Hãy tìm phương trình cơ bản của chuyển động quay của một vật rắn dưới tác dụng của ngoại lực tác dụng vuông góc với các vectơ bán kính $\vec{r}_i$ của các chất điểm trên vật rắn (tức là song song với phương tiếp tuyến của các đường tròn quỹ đạo). Lấy ví phân hai vế của (4.9.3) ta được:

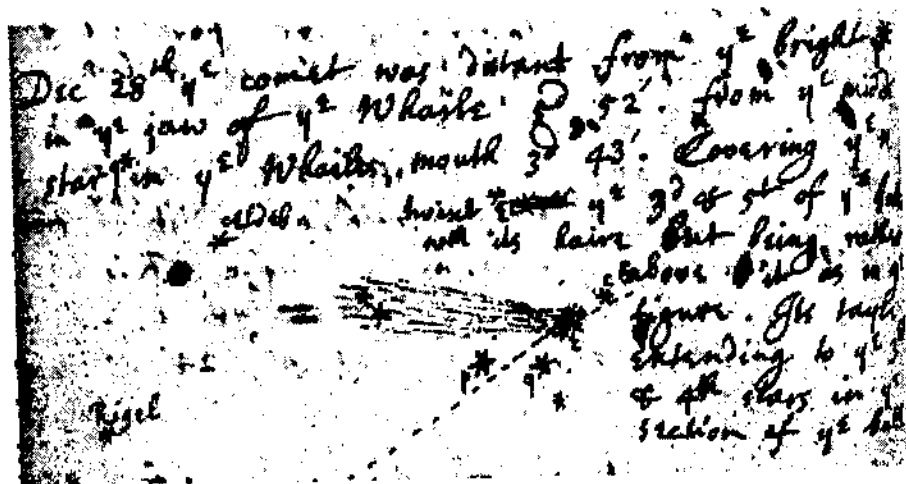
$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\beta} \quad (4.9.13)$$

Ở đây $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ là *môment lực*. Mặt khác chúng ta có thể sử dụng quy tắc (4.2.15) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ để triển khai $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ và chú ý $\vec{r}_i \cdot \vec{\beta} = 0$ do $\vec{r}_i \perp \vec{\beta}$, chúng ta sẽ được:

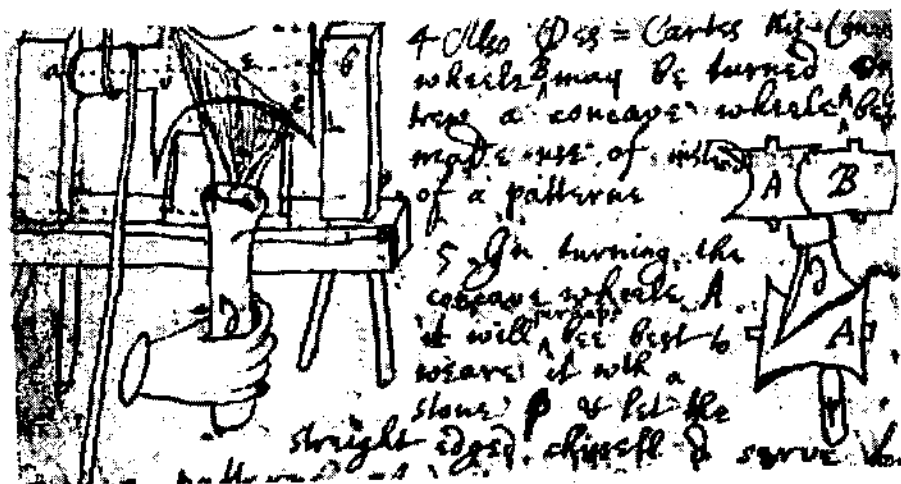
$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{a}_i) = \sum m_i [\vec{r}_i \times (\vec{\beta} \times \vec{r}_i)] = \\ &= \sum m_i [\vec{\beta}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\beta})] = \sum m_i r_i^2 \vec{\beta} = (\sum I_i) \vec{\beta} = I \vec{\beta} \end{aligned} \quad (4.9.14)$$

Đây là phương trình tương tự như $\vec{F} = m\vec{a}$, nó xác định môment lực $\vec{M}$ tỷ lệ thuận với gia tốc góc $\vec{\beta}$ với hệ số tỷ lệ là môment quán tính I . Khi không có lực tác dụng và vật quay theo quán tính thì $\vec{\beta} = 0$ và $\vec{M} = 0$, có nghĩa là môment động lượng bảo toàn, $\vec{L} = \text{const}$.

■



Bức họa sao chổi và bút tích của Newton trong một cuốn vở còn lưu giữ được của ông khi còn là sinh viên tại Cambridge. Tờ bìa cuốn vở có đề "Isaac Newton/Trin: Coll Cant/1661". Đây không phải là cuốn vở sớm nhất của Newton và có lẽ được ông mua vào năm 1660 trên đường đến Cambridge. Sao chổi Newton mô tả xuất hiện vào cuối tháng 12/1664 và đầu tháng 1/1665.



Một bút tích khác từ cuốn vở sinh viên được dùng từ các năm 1663-1664 cho thấy cách chế tạo máy mài thấu kính. Cuốn vở này có ghi chép các bài đọc về toán và hình học của Newton, chủ yếu trích từ cuốn "Exercitationum mathematicarum" của van Schooten (Leiden, 1657) và "Arithmetica infinitorum" của John Wallis (Oxford, 1656-7). Vào thời Newton việc học tại Cambridge thường bao gồm các bài tự đọc và nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của thầy giáo.

Chương 5

TRƯỜNG HẤP DẪN CỔ ĐIỂN

Trường hấp dẫn cổ điển là trường lực thế, hướng tâm, có nguồn, liên tục và tuyến tính. Nó tồn tại tự nhiên, truyền tải trong chân không mà không cần môi trường vật chất. Nó không có cơ chế tương tác cơ học, tác động tức thì với tầm tương tác không giới hạn lên mọi vật chất có khối lượng. Nó tồn tại song song và không phụ thuộc vào các tương tác khác. Nó độc lập trong khuôn khổ một không – thời gian tuyệt đối, bất biến và tuân thủ theo nguyên lý tương đối Galileo.

5.1. LƯỢC SỬ THUYẾT HẤP DẪN

Ý kiến cho rằng có tồn tại một lực tương tác nào đó giữa Mặt Trời và các hành tinh bay quanh nó đã được Kepler nhắc đến. Ông có đưa ra một phỏng đoán cho rằng, thủy triều chính là hệ quả của lực tương tác kiểu này giữa Trái Đất và Mặt Trăng, tuy nhiên phán đoán chính xác của ông đã không được chấp nhận. Galileo thậm chí còn nhạo báng ông. Trong hình dung của Kepler, lực hấp dẫn hoạt động như những chiếc nan hoa xe đạp giữ vành xe với trục quay.

1. Mô hình cơ học về lực hấp dẫn của Descartes

Mặc dù Voltaire⁽¹⁾ đã viết trong *"Letter XIV: On Descartes And Sir Isaac Newton"* (Lettres Philosophiques, 1778) [18] rằng "... ở Anh chỉ có một vài người nghiên cứu Descartes, người mà các công trình (về cơ học) của ông ngày nay chẳng còn giá trị gì" chúng ta cũng điếm qua lý thuyết hấp dẫn của Descartes vì nó đã có ảnh hưởng lớn trong một thời gian dài, ở Pháp nó đã ngự trị ngót một thế kỷ.

(1) Voltaire (1694–1778) được coi nhà triết học Pháp chịu ảnh hưởng nhiều nhất của chủ nghĩa kinh nghiệm Anh (British Empiricism).

Lý thuyết hấp dẫn được Descartes đưa ra trong "*Principia Philosophiae*" (Các nguyên lý triết học) của ông in tại Amsterdam năm 1644 [19]. Bắt nguồn từ niềm tin cơ học rằng mọi chuyển động đều có nguồn gốc từ những *va chạm vật lý cụ thể*, Descartes cho rằng chuyển động của các hành tinh quanh Mặt Trời và quanh các trục quay riêng được gây ra bởi những cơn lốc xoáy của biến vật chất không nhìn thấy trong khoảng không gian vũ trụ. Vũ trụ, theo Descartes, bị lấp đầy bởi loại vật chất không nhìn thấy này, và các hành tinh cũng như Mặt Trời bị nhúng vào trong biến vật chất đó; và như vậy chuyển động của các thiên thể là kết quả tương tác giữa dòng vật chất và các thiên thể. Có hai loại lốc xoáy, các xoáy lớn (great vortex) và các xoáy nhỏ (little vortex). Các xoáy lớn xoay quanh Mặt Trời theo hướng từ *tây sang đông*, đẩy các hành tinh quay quanh Mặt Trời theo chiều từ tây sang đông. Các xoáy nhỏ, hình thành bên trong các xoáy lớn, thì xoay quanh các hành tinh và buộc chúng phải quay quanh các trục quay riêng. Các xoáy nhỏ này phải chuyển động nhanh hơn các hành tinh khoảng 17 lần, chúng gây ra một lực ly tâm lớn và kết quả là chúng đẩy mọi vật thể phải áp sát vào hành tinh – hiệu ứng này được cho là nguyên nhân trực tiếp của *lực hấp dẫn*.

Có thể thấy rằng lý luận của Descartes khá tường minh và lý giải lực hấp dẫn một cách rất cơ học, nó giải thích tận gốc "cơ chế" sinh ra lực. Trong thời kỳ đầu lý thuyết Descartes đã được chấp nhận và rất thịnh hành. Sau đó vào thời Newton, người ta đã nhận thấy rằng cơ chế này dẫn tới nhiều điều phi lý, ví dụ các hạt vật chất sẽ không chỉ có tác dụng đẩy mà còn có tác dụng hãm chuyển động, hơn nữa không thể nào chỉ ra các định luật Kepler từ cơ chế này. Các thiên thể thì không chỉ quay theo chiều từ tây sang đông mà đôi khi còn từ đông sang tây, như vậy sẽ phải kết hợp nhiều loại lốc xoáy mới có cơ hội lý giải được hiện tượng. Thế nhưng càng có nhiều loại xoáy, vấn đề càng trở nên phức tạp vì tương tác giữa chúng không thể xác định được.

Có rất nhiều học giả, kể cả Huygens đã từng là môn đệ của học thuyết Descartes và phải nói, ý nghĩa thuyết phục của mô hình này có lẽ là ở chỗ nó đã xây dựng được cơ chế tương tác vi mô của lực hấp dẫn. Cho đến ngày nay, niềm tin cho rằng chuyển động được gây ra bởi tương tác vẫn còn là tư tưởng chủ đạo. Chúng ta biết rằng tương tác điện từ là do trao đổi photon, tương tác hạt nhân là do trao đổi gluon, vì vậy có

nhiều lý do để tin rằng tương tác hấp dẫn cũng được thực hiện bởi các hạt vật chất nào đó. Cụ thể các nhà vật lý vẫn chưa từ bỏ ý định tìm kiếm các hạt graviton, được tin rằng có tác dụng truyền tải tương tác hấp dẫn.

2. Quan điểm trường hấp dẫn của Newton

Niềm tin của Newton vào bản chất *lực* trong các tương tác cơ học được ông thể hiện rất rõ trong lời nói đầu cuốn "*Principia*": "... có nhiều cơ sở để cảm nhận rằng (các hiện tượng cơ học) đều phụ thuộc vào các lực nào đó, vì những lý do chưa được biết, đẩy các phần tử lại gần nhau và dính chặt vào nhau ... hoặc ép chúng tách nhau và lùi ra xa".

Quan điểm của Newton về lực hấp dẫn gắn gũi với một *trường lực* hơn là với một mô hình cơ học về lực. Trường lực là một quan niệm trừu tượng, thuần túy toán học, nó có thể tồn tại mà không đòi hỏi cơ chế vật lý cụ thể. Trong lý thuyết của ông, Newton đã không đưa ra bất kỳ một lời giải thích nào về cơ chế của lực. Theo ông thì lực hấp dẫn truyền được trong *chân không* (vacuum), nó tác dụng "từ xa" mà không cần đến một môi trường vật chất nào. Sau 2000 năm, kể từ khi Aristotle loại bỏ *chân không* ra khỏi thế giới vật lý, thì giờ đây Newton lại mang nó trở lại. Quan điểm mới này khó chấp nhận đến mức bản thân Newton cũng phải thốt lên:

"... (ý kiến) cho rằng lực hấp dẫn là lực bẩm sinh, vốn có, thuộc về bản chất của vật chất, làm cho một vật có thể tác động lên vật khác từ xa, qua cả chân không mà không cần có bất kỳ thứ gì dẫn truyền lực, đối với tôi quá phi lý đến mức tôi tin rằng bất cứ ai được đào tạo tại học đường cũng không thể nghĩ tới khi bàn về các vấn đề khoa học".

Nhận biết được sự khác biệt căn bản của quan điểm trường lực so với các quan điểm cơ học thịnh hành, Newton đã thận trọng khi mở đầu cuốn "*Principia*": "... những nguyên lý (toán học) được trình bày sẽ đem lại một chút ánh sáng cho phương pháp luận này (của Newton) hoặc những phương pháp khác đúng đắn hơn"; và trong đoạn kết Phần III ông thẳng thắn nhìn nhận: "Chúng ta đã giải thích các hiện tượng thiên văn và thủy triều thông qua lực hấp dẫn nhưng đã không chỉ ra nguyên nhân của nó ... Tôi đã không thể tìm thấy nguyên nhân của lực hấp dẫn...".

Theo ông cơ chế truyền dẫn lực có lẽ là một cơ chế phi vật chất, phi vật thể. Niềm tin của Newton về sự tồn tại của một thứ "ether" lạ lùng có khả năng truyền tải lực hấp dẫn không phải là duy nhất. Vào thế kỷ thứ 19, quan niệm ether trở nên thịnh hành tới mức các nhà khoa học như Cauchy, Stokes, Planck, Thomson đã giả định những loại ether khác nhau đối với từng loại tương tác như ánh sáng, nhiệt, điện và từ. Trong bản in năm 1878 của cuốn "*Encyclopaedia Britannica*" (Từ điển Bách khoa Anh) Maxwell (James Clerk Maxwell, 1831–1879) có viết một bài, trong đó ông giả định chỉ có một loại ether duy nhất và đã thử đo hiệu ứng ether này bị cuốn theo chuyển động của Trái Đất nhưng đã thất bại. Maxwell cũng là người đã nêu lên câu hỏi về ảnh hưởng truyền dẫn lực của môi trường. Làm sao một vật có thể biết rằng một vật khác ở gần đấy để mà tác động? Trong công trình "*A dynamical theory of the electromagnetic field*" (Lý thuyết động lực trường điện từ) in năm 1864 ông viết: "... sau khi theo dõi ảnh hưởng của môi trường lên lực hút và lực đẩy, điện cũng như từ, và thấy rằng chúng phụ thuộc vào bình phương nghịch đảo của khoảng cách, chúng ta phải hỏi rằng liệu lực hút hấp dẫn, điều tuân theo quy luật tương tự, có thể hiểu được bằng các tương tác của môi trường hay không?". Tiếp tục nghiên cứu và Maxwell nhận ra một nghịch lý rằng năng lượng của môi trường phải suy giảm bởi sự có mặt của các vật chất đồng tính và hút nhau – và ông thú nhận "... Tôi không thể hiểu tại sao môi trường lại có đặc tính như thế, tôi không thể đi tiếp theo hướng này để tìm kiếm nguyên nhân của lực hấp dẫn". Ý kiến của Maxwell không bị lãng quên và năm 1900, Lorentz (Hendrik Antoon Lorentz, 1853–1928, Hà Lan) đưa ra giả thiết tương tác hấp dẫn chỉ truyền với vận tốc ánh sáng. Năm năm sau, 1905, Poincaré, trong một công trình gửi in chỉ vài ngày trước khi Einstein gửi đăng lý thuyết tương đối hẹp của mình, đã chỉ ra rằng nếu lực tuân theo quy luật chuyển đổi Lorentz thì các định luật Newton không thể thỏa mãn và ông đã giả thiết một loại sóng hấp dẫn truyền với vận tốc ánh sáng. Cho đến nay, việc tìm thấy sóng hấp dẫn vẫn còn chưa có kết quả. Nhắc lại rằng sự tồn tại của sóng hấp dẫn là một hệ quả quan trọng của lý thuyết tương đối rộng của Einstein. Trong lý thuyết này, một lý thuyết giải quyết thoả đáng căn nguyên lực hấp dẫn, Einstein đã đưa ra một quan điểm cách mạng rằng lực hấp dẫn là hệ quả sự uốn cong của không – thời gian.

3. Quan điểm của Huygens về lý thuyết Newton

"*Principia*" của Newton không tránh khỏi sự phê phán ngay từ khi nó ra đời⁽¹⁾. Nếu bỏ qua lời chỉ trích của Robert Hooke⁽²⁾ rằng ông ta là người đầu tiên đưa ra định luật hấp dẫn thì ý kiến đóng góp quan trọng nhất là từ Huygens.

Phê phán của Huygens chủ yếu nhằm vào khía cạnh phương pháp trong công trình của Newton. Tuy theo học thuyết Descartes nhưng Huygens không phải là nhân vật bảo thủ. Ông công nhận những lý giải định lượng trong công trình của Newton, nhưng lại cho rằng việc tổng quát hoá vội vàng một số quy luật quan sát được về sự tồn tại của lực hấp dẫn thành một quy luật chung áp đặt đối với mọi loại vật chất là điều mạo hiểm, không chắc chắn và không có nền móng vững vàng. Huygens không tin vào việc lực có thể truyền được qua chân không mà không cần tương tác cơ học trung gian. Vì thế ông cho rằng lý thuyết Newton không giải thích được hiện tượng hấp dẫn một cách cơ học, theo ông Newton đã xây lâu đài trên cát.

Để chống lại những phê phán trên, trong lần xuất bản thứ hai, cuốn "*Principia*" Newton đã bổ sung hai "nguyên tắc" mới (3 và 4) ngay trong phần đầu Tập II, Quyển III, để xác định nền móng lý luận cho lý thuyết của mình. Theo ông, *thứ nhất*, chúng ta không cần tìm kiếm nguyên nhân sâu xa hơn nếu như những điều đã giả thiết đủ để lý giải các hiện tượng quan sát được (*Rule I*); *thứ hai*, trong phạm vi các hiện tượng

(1) Ngày nay, khi nghiên cứu lại các cơ sở vật lý của tác phẩm này một số học giả thậm chí còn không ngần ngại cho rằng nó đã được viết bởi "... một nhà toán học chưa hoàn toàn chắc chắn với các vấn đề vật lý mà ông ta đang nghiên cứu", và "... vẫn chưa thoát khỏi các quan niệm ngây thơ" (xem E. Kappos, "*Lectures Notes on Analytical Mechanics*", School of Mathematics and Statistics, Sheffield, UK, 2002).

(2) Còn biết năm 1679 Hooke có viết một bức thư cho Newton trong đó nói đến quan điểm của ông về lực hấp dẫn. Ông cho rằng chuyển động của các hành tinh là do lực hướng tâm làm lệch chuyển động thẳng của chúng một cách liên tục. Newton trong thư trả lời chỉ bàn về chuyển động rơi của một vật thả từ đỉnh một tháp cao, ông cho rằng quỹ đạo của nó sẽ theo hình xoắn ốc vì Trái Đất quay quanh trục riêng. Hooke trả lời rằng theo lý thuyết của ông thì quỹ đạo các hành tinh phải là elips. Newton công nhận mô hình trước của mình là sai nhưng lại cho rằng lực hấp dẫn là không đổi. Hooke đáp lại rằng ông ta đã sử dụng quy luật $F \propto r^{-2}$ để đi tới các elips. Nhiều năm sau Hooke đã dùng lá thư này làm bằng chứng cho việc ông đã là người đầu tiên thiết lập định luật hấp dẫn (Theo J.J.O'Connor và E.F.Robertson).

quan sát được thì cần giả định rằng chúng là đầy đủ cho đến khi chưa phát hiện ra điều gì sai lệch (*Rule II-IV*). Newton viết:

"Đến chừng nào còn có thể thì phải coi các hiện tượng tự nhiên giống nhau là bắt nguồn từ cùng một nguyên nhân" (*Rule II*).

Và ông giải thích rõ hơn:

"Các đặc tính của vật chất, được thấy qua thực nghiệm là thuộc tính của mọi đối tượng quan sát, cần phải được giả định là các đặc tính tổng quát của mọi loại vật chất bất kỳ" (*Rule III*).

Trong phần chú giải Newton nói: "Vì các quan sát thiên văn và thực nghiệm đều công nhận rằng mọi vật đều bị hút về phía Trái Đất với các lực tỷ lệ với khối lượng của chúng, ... chúng ta có thể cho rằng đó là đặc tính tổng quát của mọi loại vật chất. Nhưng tôi không khẳng định lực hấp dẫn (gravity) là bản chất của vật, với *vis insita* (lực bẩm sinh) tôi không nghĩ gì hơn ngoài *vis inertiae* (lực quán tính)".

Quan điểm rằng các chân lý khoa học chỉ có tính giả thuyết được Newton nêu rõ trong "*Rule III*":

"Trong khoa học thực nghiệm chúng ta phải tìm kiếm các chân lý bằng phương pháp quy nạp (induction) từ các hiện tượng, chính xác và gần với sự thật, nhưng không loại trừ những giả thuyết trái ngược khác, cho đến khi nào các hiện tượng mới xuất hiện để có thể khẳng định hoặc loại trừ chúng".

Những lời biện minh này thể hiện một quan điểm triết học mới phù hợp với nền tư tưởng thực chứng vốn phát sinh từ Descartes. Nhắc lại nền tư tưởng này chỉ công nhận sự thật gắn liền với chủ thể, tức là chỉ những gì được con người đo đạc, cảm nhận được mới được coi là có thực. Do Newton chỉ lý giải một cách tiếp cận mới chứ không đưa ra cơ sở lý luận để phủ nhận các quan điểm cũ, hơn nữa ông lại nhấn mạnh vào ý nghĩa giả thuyết của cách tiếp cận mới, mà lời biện minh của ông có vẻ chưa thoả đáng. Vào thời đó người ta quan niệm mục đích của khoa học tự nhiên là phải chỉ ra sự thật toàn diện và khách quan. Newton dường như đang chơi đùa với các giả thuyết và dễ dàng ngộ nhận giá trị thực của các giả thuyết đó. Lo lắng của Huygens có căn cứ sâu xa. Nếu như Newton không sinh ra tại Anh, nơi mà tư duy thực dụng được sự ủng hộ tích cực của nền kinh tế tư bản đang trỗi dậy thì có lẽ lý thuyết của ông cũng không thể được chấp nhận một cách mau chóng như vậy.

5.2. ĐỊNH LUẬT HẤP DẪN NEWTON

1. Định luật hấp dẫn

Mặc dù đã có những tranh chấp với Hooke nhưng định luật hấp dẫn ngày nay được coi như phát sinh từ Newton. Tuy nhiên người đầu tiên đã hoàn chỉnh định luật hấp dẫn dưới dạng $F = GMm/r^2$, với G là hằng số hấp dẫn ($G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2$), là Euler. Trước đó trong "Principia" chỉ có $F \propto Mm/r^2$, ý nghĩa hoàn chỉnh của G vẫn chưa lộ rõ. Người đầu tiên đã đo G là Henry Cavendish (1731–1810). Tuy rằng Newton chưa dám thừa nhận lực hấp dẫn là lực bẩm sinh vốn có của vật nhưng trong phạm vi lý thuyết của ông chúng ta có thể khẳng định nó như sau:

(5.2.1) Định nghĩa: *Lực hấp dẫn thuộc về bản chất của vật chất, làm cho một vật có thể tác động lên vật khác từ xa, qua cả chân không mà không cần có bất kỳ thứ gì dẫn truyền; nó phụ thuộc vào khối lượng của các vật và vào nghịch đảo bình phương khoảng cách giữa chúng theo quy luật:*

– dưới dạng vô hướng:

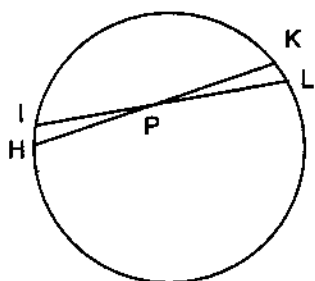
$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (5.2.1)$$

– dưới dạng vectơ:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (5.2.2)$$

chú ý rằng dấu (-) thể hiện hai vectơ $\vec{F}$ và $\vec{r}$ là song song nhưng ngược chiều nhau. Tỷ lệ $\vec{r}/r$ chính là vectơ đơn vị $\vec{e}_r$ của $\vec{r}$. Biểu thức (5.2.2) thể hiện trường lực gây ra bởi một vật, được coi là một chất điểm, có khối lượng M lên một vật khác, cũng được coi là một chất điểm, có khối lượng m nằm cách vật M một khoảng r . Theo Newton, lực này có ba đặc tính (xem lại §4.4.1, tr.118): (1) có độ lớn tổng thể phụ thuộc vào khối lượng của vật; (2) gây ra một gia tốc rơi nhất định tại một độ cao nhất định; và (3) gây ra một trọng lượng nhất định tại một độ cao nhất định cho mọi vật thể tồn tại trong trường lực đó. Lực hấp dẫn tác động liên tục trong không gian, không suy biến theo thời gian, không phụ thuộc vào bất kỳ yếu tố lý hoá nào của vật chất như mật độ, nhiệt độ, từ trường...

"Lực hấp dẫn khác với lực từ vì lực từ không phải do khối lượng tạo nên" – Newton viết (Hệ quả 5, Bổ đề VI, Quyển III). "Các vật bị nam châm hút mạnh nhẹ khác nhau, có vật hoàn toàn không. Lực từ trong một vật có thể tăng lên hay giảm đi, và đôi khi mạnh hơn lực hấp dẫn rất nhiều; và giảm dần theo lập phương của khoảng cách, như tôi có thể nhận thấy từ những quan sát sơ qua".



Hình 5.1. Bổ đề LXX, Định lý XXX, Phần XII: Lực hấp dẫn không thể tồn tại bên trong mặt cầu

Trong Hệ quả 1, Bổ đề VII, Quyển III ông viết tiếp: "Lực hấp dẫn (của Mặt Trời) đối với toàn bộ hành tinh hợp thành từ các lực hấp dẫn đối với từng thành phần. Lực từ và lực điện⁽¹⁾ cho ta một minh chứng về điều này, rằng lực hút toàn phần là tổ hợp từ các lực hút đối với các thành phần. Điều tương tự trong trường hợp lực hấp dẫn là dễ hiểu. Nếu có ai đó phản đối rằng, theo quy luật này mọi vật sẽ phải hút nhau nhưng không thấy hiện tượng nào như thế xảy ra cả, thì tôi sẽ trả lời rằng lực hút giữa các vật so với lực hút của Trái Đất và các vật là quá nhỏ và chúng ta không cảm nhận được".

Liên quan đến lực hấp dẫn trong hệ mặt trời Newton đã giải quyết một số bài toán thú vị. Ví dụ ông tính được áp suất khí quyển ở độ cao 200 dặm, giá trị Newton đưa ra là $\approx 1,33 \times 10^{-14} \text{ atm}$ (Bổ đề XXII, Quyển II và Bổ đề X, Quyển III, sách đã dẫn). Một khẳng định quan trọng được thấy trong Bổ đề LXX, Định lý XXX, Phần XII "Về lực hút của các vật thể hình cầu", Quyển I. Newton viết:

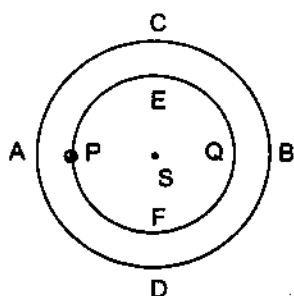
(5.2.2) Bổ đề: "Nếu lực hấp dẫn tác dụng lên mọi điểm bên trong một mặt cầu (rỗng) đều tuân theo quy luật nghịch đảo bình phương của khoảng cách, thì tôi khẳng định rằng một hạt được đặt bên trong mặt cầu đó sẽ không bị một lực nào tác dụng cả".

Trong hình vẽ nguyên bản của Newton (hình 5.1), từ vị trí của hạt P vẽ hai đường thẳng HK và IL cắt mặt cầu tại các điểm IH và KL. Giả

(1) Nguyên văn "Magnetic and electric attractions..." trong bản dịch năm 1729 của Adrew Motte. Vào thời đó người ta đã biết đến lực điện và lực từ.

sử IH và KL là các khoảng cách rất nhỏ, thì các tam giác IPH và KPL là đồng dạng do đó $KL/PL = IH/PH$, nói cách khác độ lớn cung KL và IH tỷ lệ thuận với độ dài tay đòn PL và PH. Bây giờ giả sử có hai tiết diện tròn được vẽ trên mặt cầu có đường kính lần lượt là KL và IH, ta sẽ có diện tích của chúng tỷ lệ thuận với KL^2 và IH^2 , tức là tỷ lệ thuận với PL^2 và PH^2 . Lực hấp dẫn mà hai tiết diện này hút vật đặt tại P hiển nhiên sẽ tỷ lệ thuận với khối lượng hai tiết diện, suy ra sẽ tỷ lệ thuận với PL^2 và PH^2 . Tuy nhiên vì lực này cũng tỷ lệ nghịch với khoảng cách PL^2 và PH^2 nên $PL^2/PL^2 = 1$ (và $PH^2/PH^2 = 1$), tức là không thay đổi. Mở rộng tiết diện IH và KL ra toàn bộ mặt cầu, chúng ta có kết quả cần tìm. Newton đã lấy tích phân mặt bằng phương pháp hình học⁽¹⁾.

Một hệ quả trực tiếp của định lý này là khẳng định của Newton trong Bổ đề LXXIII rằng bên trong một quả cầu đặc thì lực hấp dẫn do quả cầu gây nên một chất điểm (điểm P trong hình) chỉ phụ thuộc vào khối lượng vật chất nằm giữa chất điểm và tâm quả cầu (bên trong mặt cầu PFQE) chứ lượng vật chất nằm ngoài hoàn toàn không có tác dụng lực lên chất điểm (hình 5.2).



Hình 5.2. Bổ đề LXXIII, Phần XII:
Lực hấp dẫn chỉ phụ thuộc vào khối lượng vật chất bên trong lớp vỏ cầu

Mở rộng khẳng định này cho các vật thể hình cầu, mặt cầu hay khối cầu, chúng ta thấy rằng lực hấp dẫn đối với một vật nằm bên ngoài mặt giao diện của vật chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ vật đó đến tâm của hình cầu mà thôi (Bổ đề LXXI, LXXIV). Tương tự, nếu hai khối cầu hút nhau thì lực hút giữa chúng cũng sẽ chỉ phụ thuộc vào khoảng cách giữa

(1) Feymann [8] (Richard Philips Feymann, 1918–1988) còn áp dụng cách chứng minh này đối với điện trường (xem §5.8 giáo trình của ông) để chỉ ra rằng điện trường bên trong một quả cầu tính điện cũng bằng không. Điện trường và trường hấp dẫn là hai trường vectơ tương đương nhau. Theo Feymann thì người đầu tiên nhận thấy điện trường bên trong quả cầu bằng không là nhà vật lý học người Mỹ Benjamin Franklin (1706–1790); sau đó Priestley (Joseph Priestley, 1733–1804, người phát hiện ra khí oxy) đã dựa trên điều này để phán đoán rằng điện trường cũng tuân theo quy luật $F \propto 1/r^2$, điều mà 18 năm sau Coulomb (Charles Augustin de Coulomb, 1736–1806) mới thiết lập được trên thực nghiệm.

hai tâm các khối cầu (Bổ đề LXXV). Điều này cho phép tối giản mọi vật thể hình cầu thành một điểm duy nhất với toàn bộ khối lượng của vật.

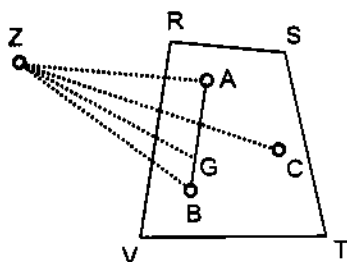
(5.2.3) Bổ đề: *Lực hấp dẫn của mọi vật thể hình cầu đặc đều tương đương với lực hấp dẫn phát ra từ một chất điểm nằm tại tâm của vật thể cầu và có toàn bộ khối lượng của vật thể cầu đó. Lực hấp dẫn của các vật thể hình mặt cầu rỗng chỉ tương đương với lực hấp dẫn phát ra từ một chất điểm nằm tại tâm của nó đối với các khoảng cách lớn hơn bán kính mặt cầu.*

Newton đi xa hơn, ông phân tích trường hợp lực $F \propto r$ và trong Bổ đề LXXXVIII, Định lý XLV, Phần XIII "Về lực hút của các vật thể không có hình cầu", Quyển I, ông viết:

(5.2.4) Bổ đề: *"Nếu lực hút từ các phần tử đồng nhất của một vật thể bất kỳ tỷ lệ với khoảng cách giữa chúng thì lực hấp dẫn của toàn bộ vật sẽ hướng về trọng tâm của nó; và sẽ hoàn toàn tương tự như lực hút của một quả cầu được tạo ra bởi các phần tử đó và có tâm tại trọng tâm của vật".*

Định lý này cho phép tối giản mọi vật thể với hình dạng bất kỳ thành một điểm duy nhất trong không gian, có vị trí tại trọng tâm và có khối lượng của toàn bộ vật thể đó, nếu lực tương tác hấp dẫn của nó tuân theo quy luật $F \propto r$. Với trường lực này thì một mặt cầu khép kín sẽ có tác dụng lực lên một chất điểm nằm bên trong nó – điều không xảy ra đối với trường lực $F \propto 1/r^2$.

Chứng minh định lý này của Newton khá đơn giản, xem hình 5.3. Lực hút của phần tử A đối với điểm Z có thể được phân tích thành hai thành phần, AG và GZ, ở đây điểm G là trọng tâm của hai phần tử A và B. Tương tự lực hút của phần tử B là BG và GZ. Trong khi hai thành phần GZ cộng lại với nhau thì hai thành phần AG và BG triệt tiêu do ngược hướng, vì vậy tổng lực hút của hai phần tử A và B lên Z bằng lực hút của điểm G nếu khối lượng của G bằng tổng khối lượng hai phần tử A và B. Mở rộng cách phân tích này đối với phần tử C thứ



Hình 5.3. Bổ đề LXXXVIII, Định lý XLV, Phần XIII cho phép tối giản mọi vật thể thành một chất điểm nằm tại trọng tâm của vật đối với trường lực $F \propto r$

ba chúng ta được lực hút tổng thể của cả ba sẽ bằng lực hút phát ra từ trọng tâm của chúng nếu điểm trọng tâm này có khối lượng bằng cả ba cộng lại. Hiển nhiên cách lý giải này của Newton là một thuyết trình về phương pháp lấy tổng vectơ khi số lượng các phần tử là giới hạn và về phép lấy tích phân nếu số lượng các phần tử là vô hạn.

Liên quan đến lực hút (đẩy) của các vật thể không có dạng cầu Newton đã xem xét một số bài toán lý thú, ví dụ bài toán lực tương tác của vòng dây tròn có bán kính giới hạn (hoặc vô hạn) lên một chất điểm nằm trên đường thẳng đứng vuông góc với mặt vòng tròn và đi qua tâm của nó; hoặc bài toán tương tác của các mặt phẳng, hữu hạn và vô hạn, lên chất điểm nằm cách nó một khoảng nhất định... Điều đáng chú ý là Newton đã xem xét các dạng lực tổng quát và hơn nữa cũng đề cập đến cả lực đẩy chứ không giới hạn ở lực hút. Ngày nay các bài toán này có thể giải được dễ dàng bằng cách sử dụng *định luật Gauss*⁽¹⁾, ví dụ lực hút của mặt vật chất vô hạn bằng một phần hai mật độ mặt của nó ($\rho/2$), lực hút của dây vật chất vô hạn bằng $\lambda/2\pi r$, với λ là mật độ dài và r là khoảng cách.

2. Các loại lực trong tự nhiên

Lực hấp dẫn rất bé so với các loại lực tương tác khác được biết đến ngày nay. Nếu lực *tương tác mạnh* (trong hạt nhân nguyên tử) là 1 đơn vị thì *tương tác điện từ* bằng 10^{-2} đơn vị, *tương tác yếu* (trong phản ứng phân rã hạt nhân) bằng 10^{-5} đơn vị và tương tác hấp dẫn chỉ vền vền có 10^{-42} đơn vị. Con số 10^{-42} là một con số rất nhỏ, trong tự nhiên chỉ có một đại lượng duy nhất tương tự là tỷ lệ thời gian ánh sáng đi qua proton (10^{-24} s) và tuổi phỏng đoán của vũ trụ (10^{18} s). Có những lý thuyết (xem *Dirac, 1977* [20]) cho rằng lực hấp dẫn có liên quan tới tuổi của vũ trụ và giảm dần theo thời gian (hằng số hấp dẫn không còn là hằng số mà suy giảm dần). Tuy nhiên một số tính toán liên quan tới quá trình tiến hoá trên Trái Đất đã chỉ ra những hệ quả phi lý của giả thuyết này.

(1) Định luật Gauss trong Điện học nói rằng số đường sức đếm được trên một mặt khép kín bao quanh một diện tích có giá trị bằng lượng điện tích bên trong mặt đó. Định luật này cũng thỏa mãn đối với trường hấp dẫn nếu chúng ta thay "lượng điện tích" bằng "lượng vật chất".

Vì sao lực hấp dẫn lại yếu đến thế là điều khó hiểu và cho đến nay vẫn chưa có một lý giải nào thoả đáng. Điều có thể nhận thấy, từ sự chênh lệch quá lớn giữa tương tác hấp dẫn và điện từ, là thế giới của chúng ta phải được cân bằng điện tích thật tuyệt vời mới đảm bảo được một sự tồn tại như hiện hành. Chỉ cần mỗi người có dư 1% điện tích âm thì lực đẩy giữa hai người đã có thể nhắc bổng cả Trái Đất. Các tương tác hấp dẫn và tương tác điện từ (cùng tuân theo quy luật $F \propto 1/r^2$) tác dụng ở khoảng cách xa, còn các tương tác mạnh trong hạt nhân nguyên tử chỉ duy trì trong khoảng dưới $10^{-15}m$. Có một vài hệ thức gần đúng nhưng chúng rất kém chính xác, ví dụ $F \propto (1/r^2)e^{-(r/r_0)}$, $r_0 = 10^{-15}m$ (xem Feymann [8]).

Bảng 5.1. ĐỘ LỚN CÁC LOẠI LỰC TƯƠNG TÁC

Lực tương tác	Độ lớn
Tương tác mạnh	≈ 1
Tương tác điện từ	$\approx 10^{-2}$
Tương tác yếu	$\approx 10^{-5}$
Tương tác hấp dẫn	$\approx 10^{-42}$

Có một số lực phát sinh do tương tác điện từ mang tính tập thể như *lực ma sát* giữa mặt tiếp xúc của hai lớp vật chất bất kỳ, hay lực hút và đẩy giữa các nguyên tử. Lực ma sát thường tỷ lệ với lực nén vuông góc N , với vận tốc chuyển động $v = dx/dt$ và có một hệ số tỷ lệ k , thay đổi tùy theo từng trường hợp. Nếu xét vận tốc nhỏ, chúng ta có công thức đơn giản quen thuộc $F = kN$. Newton đã dành phần lớn Quyển II trong "Principia" để bàn về chuyển động trong môi trường có sức cản. Liên quan đến bài toán áp suất khí quyển ở độ cao 200 dặm được nhắc đến trong phần trước, Newton khẳng định rằng sao Mộc (Jupiter) chuyển động trong môi trường loãng tương ứng với ($\approx 7,5 \times 10^{-13} atm$) sẽ không thể mất nhiều hơn là 1 phần triệu động lượng trong 1 triệu năm. Nhìn chung, bản chất của quá trình cản trở chuyển động rất phức tạp và phụ thuộc vào nhiều yếu tố khác nhau như các tính chất lý hoá của môi trường, độ nhớt của nó, độ phẳng của mặt tiếp xúc, hình dáng cụ thể của vật trôi nổi... nên trong lĩnh vực nghiên cứu các quá trình này người ta chủ yếu dựa vào thực nghiệm.

Lực tương tác giữa hai nguyên tử thường có dạng $F \propto 1/r^7$ và có cực tiểu tại một khoảng cách nhất định r_0 , được gọi là khoảng cách hay độ dài liên kết giữa chúng. Chẳng hạn độ dài liên kết Co-O₆ thường nằm trong khoảng 1,9–2,2Å; Cu-O₆ trong khoảng 1,8–2,6Å (1Å = $10^{-10}m$). Ngoài ra còn có *giả lực* (pseudo-force) xuất hiện do chuyển động có gia

tốc của người quan sát. Einstein đã đề xuất rằng lực hấp dẫn có thể coi là một loại giả lực và coi nguyên nhân của loại lực này là do biến dạng của không-thời gian mà thành.

3. Các kiểm chứng định luật hấp dẫn

Kiểm chứng ban đầu được Newton tiến hành chủ yếu dựa trên việc tính độ rơi của Mặt Trăng trên quỹ đạo trong một khoảng thời gian nhất định, ví dụ trong 1 giây. Phương pháp mà ông sử dụng được nói đến trong §3.6.3, tr.76. Biết chu kỳ mặt trăng là 27,31 ngày và khoảng cách Mặt Trăng-Trái Đất xấp xỉ $60R$ Trái Đất (384.401 km), có thể tính được độ rơi về tâm Trái Đất của Mặt Trăng là $\approx 1,35 \text{ mm/s}$. So với độ rơi về tâm của các vật trên bề mặt trái đất $\approx 4,9 \text{ m}$ trong giây đầu tiên thì tỷ lệ ($1,35\text{mm}/4,9\text{m}$) là 0,000276.

Bây giờ nếu lực hấp dẫn phụ thuộc vào r^{-2} thì tỷ lệ giữa gia tốc trên quỹ đạo mặt trăng a_m với gia tốc trên bề mặt trái đất a_0 phải là:

$$\frac{a_m}{a_0} = \frac{R^2}{(60R)^2} = \frac{1}{3600} \approx 0,000277 \quad (5.2.3)$$

Giá trị chính xác dựa trên số liệu ngày nay là 0,0002753 (hãy kiểm tra từ số liệu §1.4.4, tr.26). Sự trùng hợp giữa 0,000276 và $1/3600$ là minh chứng thực nghiệm đầu tiên về sự phụ thuộc $F \propto 1/r^2$. Ban đầu Newton đã tính toán dựa trên các dữ liệu về bán kính trái đất và khoảng cách Trái Đất - Mặt Trăng không chính xác nên các kết quả thu được không thuyết phục. Sau này chính Robert Hooke là người đã thông báo cho Newton về các kết quả đo R mới và dựa vào đó ông đã có bằng chứng thực nghiệm về quy luật $F \propto 1/r^2$.

Henry Cavendish (1731-1810) là người đầu tiên đã đo hằng số hấp dẫn G vào năm 1798. Giá trị tỷ khối trái đất được xác định là $5,48 \text{ g/cm}^3$, so với giá trị ngày nay $5,52 \text{ g/cm}^3$, xem §1.4.4, tr.26, thì quả là không tồi. Giá trị chính xác của G là:

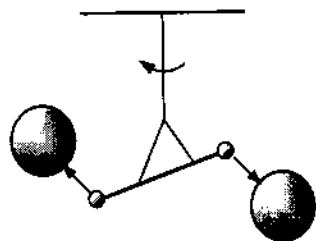
$$G = (6,674 \pm 0,004) \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g s}^2 \quad (5.2.4)$$

Hoặc nếu dùng đơn vị khác thì ($N = \text{kg m/s}^2$):

$$G = (6,674 \pm 0,004) \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \quad (5.2.5)$$

Trong thí nghiệm của mình Cavendish đã sử dụng một dụng cụ như trong hình 5.4. Trên một sợi dây xoắn có treo một thanh ngang, hai đầu

của nó gắn hai quả nặng nhỏ được hút về hai phía bởi hai quả nặng lớn hơn nhiều lần. Sức hút này gây ra một lực xoắn do được trên sợi dây treo. Cavendish nói rằng, ông cân Trái Đất nhưng thực ra ông đo hằng số hấp dẫn G . Trong lý thuyết hấp dẫn của Newton cũng như của Einstein sau này, G được coi là một hằng số, nhưng cũng có những lý thuyết hấp dẫn khác (các thuyết metric) cho rằng G thay đổi và phụ thuộc vào từng vị trí không-thời gian cụ thể, tuy nhiên điều này chưa được thực nghiệm xác nhận.



Hình 5.4. Thí nghiệm của Cavendish

Thắng lợi rất lớn của thuyết hấp dẫn Newton trong những thế kỷ sau có lẽ là việc phát hiện ra sao Hải Vương năm 1846 dựa trên các tính toán chính xác của Le Verrier (xem §1.3.4, tr.23). Tuy nhiên, ngay từ thời kỳ đầu, không phải lý thuyết này đã giải quyết được tất cả các vấn đề cơ học mà người ta biết đến. Hiện tượng các vệ tinh sao Mộc chạy trước lịch trình, được Roemer đề cập tới năm 1676 (xem §1.5.3, tr.29) là một vấn đề hóc búa đối với lý thuyết của Newton. Câu trả lời chỉ có được khi chấp nhận vận tốc ánh sáng là có giới hạn – vấn đề đã dẫn đến cuộc khủng hoảng của vật lý cuối thế kỷ 19 đầu thế kỷ 20, và sự ra đời của lý thuyết tương đối hẹp. Một vấn đề khác là chuyển động của trục chính (*perihelion*, cánh tay đòn nối Mặt Trời với điểm cực cận) quỹ đạo sao Thủy. Chuyển động này có độ lớn $43''/100$ năm và đã là điều bí ẩn cho đến khi Einstein lý giải dựa trên cơ sở lý thuyết tương đối rộng năm 1915 (xem §1.5.4, tr.31). Định luật hấp dẫn đặt lại vấn đề hai loại khối lượng và nguyên lý tương đương. Bạn đọc xem lại các bài §3.3 tr.58, §3.4 tr.62, và §3.6.6, §3.6.7 tr.79 để hiểu rõ về tầm quan trọng của nguyên lý tương đương đối với lý thuyết hấp dẫn.

5.3. CÔNG, THẾ NĂNG VÀ NĂNG LƯỢNG TOÀN PHẦN

1. Lực trong hệ tọa độ cực

Hệ tọa độ cực (được nói đến trong §4.2.5, tr.112) thường được sử dụng trong bài toán 2-chất điểm, nó thể hiện môment động lượng rất tự nhiên và đơn giản. Giả sử chất điểm có khối lượng m chuyển động với cánh tay đòn $\vec{r}$ từ tâm nguồn lực thì môment động lượng $\vec{L}$ của nó là:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times (m\vec{r}') = m\vec{r}_r \times (r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta) = \\ &= (m\vec{r}_r \times r'\vec{e}_r) + (m\vec{r}_r \times r\theta'\vec{e}_\theta)\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

Ở đây chúng ta đã sử dụng hệ thức (4.2.59) $\vec{r}' = r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta$. Thành phần thứ nhất $m\vec{r}_r \times r'\vec{e}_r$ hiển nhiên bằng 0 vì tích có hướng $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0$, còn thành phần thứ hai $m\vec{r}_r \times r\theta'\vec{e}_\theta = mr^2\theta'(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)$ là một vectơ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ và có độ lớn $mr^2\theta'$. Người ta thường ký hiệu vectơ này là $\vec{e}_\phi = \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$; vectơ $\vec{e}_\phi$ hướng theo trục z vuông góc với mặt xy của $\vec{r}$ và $\vec{\theta}$, do đó:

$$\vec{L} = mr^2\theta'\vec{e}_\phi \quad (5.3.2)$$

Viết dạng vô hướng $L = mr^2\theta'$, biểu thức này thường được dùng để thể hiện vận tốc góc θ' theo L :

$$\theta' = \frac{L}{mr^2} \quad (5.3.3)$$

Theo (5.3.2) $\vec{L}$ sẽ chỉ bảo toàn trên toàn quỹ đạo nếu $r^2\theta' = \text{const}$. Điều đó có nghĩa là:

$$\frac{d(r^2\theta')}{dt} = 2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0 \rightarrow 2r'\theta' + r\theta'' = 0 \quad (5.3.4)$$

Để hiểu được ý nghĩa của biểu thức này hãy so sánh nó với phần thứ nhất trong triển khai của $\vec{r}''$ theo công thức (4.2.60) §4.2.5, tr.112, chúng ta chép lại công thức này ở đây:

$$\vec{r}'' = (2r'\theta' + r\theta'')\vec{e}_\theta + (r'' - r(\theta')^2)\vec{e}_r \quad (5.3.5)$$

Rõ ràng (5.3.4) chính là độ lớn của thành phần $\vec{e}_\theta$ của $\vec{r}''$. Vì $\vec{r}'' = \vec{F}/m$ nên lực $\vec{F}$ sẽ chỉ có thành phần $\vec{e}_r$ mà không có thành phần $\vec{e}_\theta$ nếu $2r'\theta' + r\theta'' = 0$. Như vậy lực $\vec{F}$ sẽ chỉ tác động theo phương của $\vec{e}_r$ và hiển nhiên lực này là lực hướng tâm.

$$\vec{F} = (mr'' - mr(\theta')^2)\vec{e}_r \quad (5.3.6)$$

Cũng có thể suy diễn ngược lại rằng nếu lực $\vec{F} = m\vec{r}''$ là hướng tâm thì thành phần $2r'\theta' + r\theta'' = 0$, suy ra $d(r^2\theta')/dt = 0$ và $\vec{L}$ bảo toàn. Biểu thức (5.3.6) cho thấy $\vec{F}$ có hai thành phần, thay (5.3.3) vào

ta được:

$$\vec{F} = \left(mr'' - \frac{L^2}{mr^3} \right) \vec{e}_r \quad (5.3.7)$$

Thành phần mr'' chỉ xuất hiện khi có thay đổi khoảng cách, khi $r = \text{const}$ thì nó bằng 0; trái lại, thành phần L^2/mr^3 tác dụng ngay cả khi r có độ dài không đổi và chỉ có hướng của nó thay đổi. Để hiểu rõ hơn tác dụng của từng thành phần hãy bỏ dấu vectơ và viết lại (5.3.7) như sau:

$$mr'' = F + \frac{L^2}{mr^3} \quad (5.3.8)$$

Về trái, mr'' , có đơn vị của lực và thường được gọi là *lực hiệu dụng* (gắn với nó là khái niệm *thế năng hiệu dụng* sẽ được bàn tới trong phần sau); nó có tác dụng làm thay đổi khoảng cách giữa vật với tâm nguồn lực⁽¹⁾. Sự thay đổi này là hút hay đẩy phụ thuộc vào quan hệ tương hỗ giữa F và L^2/mr^3 , trong đó F đóng vai trò lực hướng tâm và L^2/mr^3 lực li tâm.

(5.3.1) Bổ đề: *Lực hiệu dụng làm thay đổi khoảng cách giữa chất điểm và nguồn lực bao gồm hai thành phần, một là lực hướng tâm do nguồn lực gây ra và một là lực ly tâm do chuyển động của chất điểm trên quỹ đạo gây ra, thành phần này tỷ lệ nghịch với lập phương khoảng cách.*

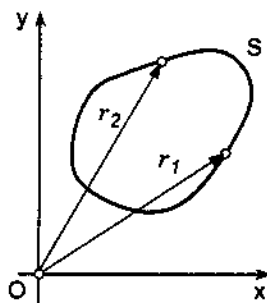
Bạn đọc có thể nhận thấy rằng thành phần L^2/mr^3 chính là $m(v^2/r)$ do $L = rmv$. Với chuyển động trên các quỹ đạo tròn, r không thay đổi nên $r'' = 0$ và $F + m(v^2/r) = 0$. Nếu F có dạng lực đàn hồi $F = -kr$, thì từ $m(v^2/r) - kr = 0$ chúng ta được lại công thức tính tần số góc riêng $\omega = (k/m)^{1/2}$. Còn với F có dạng lực hấp dẫn $-GMm/r^2$ thì chúng ta lại có biểu thức quen thuộc $GMm/r = mv^2$ thể hiện về mặt giá trị rằng thế năng gấp đôi động năng trên các quỹ đạo tròn. Các công thức (5.3.7) và

(1) Cần lưu ý phân biệt r' và $\vec{r}''$: r'' không phải là $|\vec{r}''|$; theo (5.3.5) độ lớn này là $r'' - r(\theta')^2$. Gia tốc mà lực $\vec{F}$ gây ra theo định luật 2 Newton là đại lượng vectơ $\vec{r}''$ chứ không phải r' ! Ở đây r'' chỉ có ý nghĩa của *gia tốc hiệu dụng* gắn với sự thay đổi khoảng cách r .

(5.3.8) thoả mãn đối với mọi loại lực hướng tâm, không chỉ đối với lực hấp dẫn.

2. Công trên đường khép kín và thế năng hấp dẫn

Khi một hành tinh chuyển động trên quỹ đạo, năng lượng của nó không đổi, và vì nó không nhận năng lượng từ bên ngoài nên công mà hành tinh thực hiện phải bằng 0. Trường hấp dẫn có một đặc điểm là công thực hiện trên mọi đường khép kín đều bằng 0 và đây là điều mà không phải trường lực nào cũng có, ví dụ công của từ trường (trường lực không có nguồn) trên một vòng dây khép kín có giá trị bằng dòng điện được tạo ra trên vòng dây đó. Có thể thấy điều này một cách tổng quát như sau. Giả sử chất điểm khối lượng m chuyển động từ điểm r_1 đến r_2 trong trường lực hướng tâm $\vec{F}$ (hình 5.5). Theo định nghĩa công A là đại lượng:



Hình 5.5. Công trên đường khép kín luôn luôn bằng 0 trong trường lực thế

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.3.9)$$

Dấu $(\cdot)$ thể hiện tích vô hướng của hai vectơ. Áp dụng định luật $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ ta có:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_{v_1}^{v_2} m(d\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (5.3.10)$$

Chú ý rằng $d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2d\vec{v} \cdot \vec{v}$, nên biểu thức trên cho kết quả:

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{2} m d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \int_{v_1}^{v_2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = T_2 - T_1 \quad (5.3.11)$$

(5.3.2) Định lý: Công mà ngoại lực thực hiện lên chất điểm khi dịch chuyển từ r_1 đến r_2 chính là hiệu hai động năng của chất điểm.

Bây giờ nếu chất điểm chuyển động ngược trở lại (không nhất thiết theo quỹ đạo cũ) thì công thực hiện được sẽ là $A = T_1 - T_2$, từ đó công toàn phần trên đường khép kín bằng:

$$A_S = A_{1-2} + A_{2-1} = (T_2 - T_1) + (T_1 - T_2) = 0 \quad (5.3.12)$$

Viết dưới dạng tổng quát:

$$A = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.3.13)$$

(5.3.3) Bổ đề: Công di chuyển một chất điểm trên một đường khép kín trong mọi trường lực hướng tâm đều bằng 0.

Đây là một đặc tính cơ bản của các trường lực hướng tâm, nó thỏa mãn đối với mọi loại trường hướng tâm bất kể lực phụ thuộc vào khoảng cách như thế nào, nó giúp chúng ta định nghĩa một đại lượng gọi là *thế năng* U mà theo đó các trường này cũng thường được gọi là các *trường lực thế*:

$$U = E - T \quad (5.3.14)$$

Từ đó có thể biến đổi (5.3.11) thành:

$$A_{1-2} = (E - U_2) - (E - U_1) = -(U_2 - U_1) \quad (5.3.15)$$

Hiển nhiên công trên đường S khép kín là $A_S = -(U_2 - U_1) - (U_1 - U_2) = 0$.

Từ (5.3.9) và (5.3.15) chúng ta có thể viết:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.3.16)$$

Đây là định nghĩa thế năng dưới dạng toán học. Nó chính là công để chuyển dịch chất điểm chống lại tác dụng của trường lực nên lấy dấu (-). Cũng có thể lấy vi phân hai vế để đi đến biểu thức vi phân tương đương:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (5.3.17)$$

Thế năng là một vi phân toàn phần. Để viết được biểu thức này dưới một dạng tường minh hơn, người ta định nghĩa một đại lượng vectơ gọi là *gradient* của U với ba thành phần như sau:

$$\text{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (5.3.18)$$

Tuy đây là một vectơ nhưng nó thường được ký hiệu không có mũi tên bên trên. Một ký hiệu rất thông dụng khác của gradient, bắt nguồn từ Hamilton, là ∇ - đọc là *nabla*. Gradient chỉ có thể áp dụng được đối với các đại lượng vô hướng như thế năng, nhiệt độ, mật độ... Gradient của vectơ là vô nghĩa. Hãy nhân hai vế của (5.3.18) với $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ theo các tọa độ, ta được:

$$\nabla U \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = dU \quad (5.3.19)$$

So sánh (5.3.19) và (5.3.17) rõ ràng ta thấy:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (5.3.20)$$

và đây chính là biểu thức vi phân tương đương với (5.3.16) mà chúng ta cần tìm. Bạn đọc có thể thấy ∇U chính là cách thể hiện của $\frac{dU}{d\vec{r}}$, một biểu thức chứa nghịch đảo véctơ mà chúng ta đã nói trong bài §4.2 rằng nó thiếu chính xác và hay gây nhầm lẫn.

Thế năng là một đại lượng rất đặc trưng của các trường lực hướng tâm, bao gồm cả trường hấp dẫn. Thông thường các trường lực có thể năng được gọi là các trường lực thế. Trong một trường lực thế, công để dịch chuyển chất điểm bằng hiệu thế năng giữa hai điểm đầu và cuối, và công trên mọi đường khép kín đều bằng 0, không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo.

Thay lực $\vec{F}$ từ (4.2.36) vào (5.3.16) và chú ý đẳng thức sau (chính là (4.2.50) áp dụng đối với $\vec{r}$):

$$2rdr = d(r^2) = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot d\vec{r} = 2\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

Chúng ta có thể tính được thế năng trường hấp dẫn:

$$U = -\int \left(-\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \right) \cdot d\vec{r} = GMm \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r} + U_0 \quad (5.3.21)$$

Thế năng không được xác định tuyệt đối mà sai khác một hằng số. Nhìn chung thế năng trường hấp dẫn có giá trị âm, thể hiện trường lực hút và người ta thường quy ước cho tiện rằng $U_0 = 0$. Với quy ước này thì thế năng hấp dẫn tại hai điểm 0 và ∞ sẽ là:

$$U(r=0) = -\infty \quad (5.3.22)$$

$$U(r=\infty) = 0 \quad (5.3.23)$$

Một vật muốn thoát khỏi một trường hấp dẫn cho trước thì động năng của nó phải dương và về giá trị tuyệt đối, lớn hơn hoặc ít nhất bằng thế năng, tức là năng lượng toàn phần của nó phải luôn lớn hơn hoặc bằng 0 tại mọi điểm trong trường đó. Từ các phân tích trên chúng ta có thể tóm gọn lại định nghĩa thế năng như sau:

(5.3.4) Định nghĩa: Thế năng của một chất điểm tại một vị trí nào đó trong trường lực cho trước là công cần thiết chống lại trường lực để có thể dịch chuyển chất điểm từ vị trí có thế năng thấp nhất đến vị trí cho trước đó. Biểu diễn toán học của thế năng là (5.3.16).

Các hệ quả sau là hiển nhiên.

(5.3.5) Hệ quả: Công để dịch chuyển một điểm giữa hai điểm cho trước trong trường lực thế có giá trị bằng hiệu thế năng giữa hai điểm đó.

(5.3.6) Hệ quả: Công để dịch chuyển một chất điểm giữa hai điểm cho trước trong trường lực thế chỉ phụ thuộc vào vị trí hai điểm đó mà không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo.

2. Thế năng hiệu dụng của chất điểm trong trường hấp dẫn

Hãy dựa vào định nghĩa (5.3.16) để xác định thế năng của lực hiệu dụng (5.3.8). Thế năng này được gọi là *thế năng hiệu dụng* (effective potential) của chất điểm:

$$\begin{aligned} U_{eff} &= - \int \left(F + \frac{L^2}{mr^3} \right) dr = - \int F dr + \frac{L^2}{2mr^2} + U_0 = \\ &= U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} + U_0 \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Với quy ước $U_0=0$, thế năng hiệu dụng U_{eff} là thế năng trường lực hướng tâm $U(r)$ cộng với một lượng $L^2/2mr^2$. Hãy xét xem thành phần này phát sinh từ đâu. Với $\vec{r}$ là một vectơ trong hệ tọa độ vuông góc (x,y) , năng lượng toàn phần của chất điểm là:

$$E = \frac{1}{2} m (\vec{r}' \cdot \vec{r}') + U(\vec{r}) \quad (5.3.25)$$

Theo (4.2.59) $\vec{r}' = r\vec{e}_r + r\theta\vec{e}_\theta$, hãy lấy tích vô hướng của nó với chính nó (có thể gọi tắt là lấy bình phương) và chú ý rằng $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = 1$, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0$ ta có:

$$E = \frac{1}{2} m [(r')^2 + (r\theta')^2] + U(r) \quad (5.3.26)$$

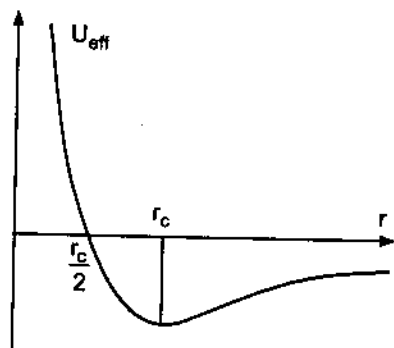
Sử dụng (5.3.3), chúng ta thu được:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + U_{\text{eff}} \quad (5.3.27)$$

So sánh (5.3.24) và (5.3.27) chúng ta thấy $L^2/2mr^2$ chính là một phần của động năng.

Với thế năng trường hấp dẫn (5.3.21) của vật thể có khối lượng M thì $U_{\text{eff}}(r)$ trở thành (để cho gọn đặt $k=GMm$):

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad (5.3.28)$$



Hình 5.6. Thế năng hiệu dụng U_{eff} có cực tiểu tại r_c và cắt trục hoành tại $r_c/2$

Hình 5.6 cho thấy biến thiên của (5.3.28). $U_{\text{eff}}(r) = 0$ tại $r = \frac{L^2}{2mk}$ và có cực tiểu $-\frac{k^2m}{2L^2}$ tại $r_c = \frac{L^2}{mk}$ (1). Khi $r \rightarrow \infty$ thì $U_{\text{eff}}(r) \rightarrow 0$ và khi $r \rightarrow 0$ thì $U_{\text{eff}}(r) \rightarrow \infty$.

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng, chúng ta có thể biểu diễn r theo E từ (5.3.27) như sau (2):

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{eff}}(r)]} \quad (5.3.29)$$

Hai công thức (5.3.28) và (5.3.29) cho phép giải quyết được bài toán tương tác 2-chất điểm như sẽ thấy trong bài sau. Phương pháp thế năng hiệu dụng có thể áp dụng được với nhiều loại thế năng tương tác khác nhau.

(1) Điểm cực trị r_c thỏa mãn điều kiện lực hiệu dụng $m\ddot{r} = 0$, lúc đó lực hút và lực đẩy cân bằng nhau, $-k/r_c^2 + L^2/mr_c^3 = 0 \rightarrow r_c = L^2/km$. Độ dài r_c này chính là tham số p của quỹ đạo theo (5.4.17).

(2) Nên tránh nhầm lẫn r với vận tốc vì nó chỉ là thành phần $\vec{e}_r$ của vận tốc tổng thể $\sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$.

3. Năng lượng toàn phần và quỹ đạo chuyển động

Hãy xét xem khi nào thì biểu thức dưới dấu căn trong (5.3.29) là có nghĩa. Sau khi triển khai $U_{\text{eff}}(r)$ từ (5.3.28) và quy đồng mẫu số, chúng ta được điều kiện:

$$Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} \geq 0 \quad (5.3.30)$$

Định thức của phương trình bậc hai này là:

$$D = k^2 + 4lE, \text{ với } l = L^2/2m \quad (5.3.31)$$

Có ba trường hợp xảy ra.

(1) Nếu $E > 0$ thì đương nhiên $D > 0$ và (5.3.30) có nghiệm nên chỉ những r lớn hơn nghiệm dương mới thỏa mãn $Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} \geq 0$; tức là $r_{\min} < r < \infty$. Quỹ đạo là mở với $r_{\min}$ là điểm gần nguồn lực nhất:

$$r_{\min} = \frac{-k + \sqrt{D}}{2E} \quad (5.3.32)$$

(2) Nếu $E = 0$ thì $Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} = kr - \frac{L^2}{2m}$. Từ $kr - \frac{L^2}{2m} \geq 0$ suy ra $\frac{L^2}{2mk} \leq r \leq \infty$. Quỹ đạo vẫn là mở và điểm gần nguồn lực nhất trong trường hợp này, $r_{\min}$, hiển nhiên là:

$$r_{\min} = \frac{L^2}{2mk} = \frac{r_c}{2} \quad (5.3.33)$$

(3) Với $U_{\text{eff}}(r) < E < 0$ thì $D > 0$ và (5.3.30) có hai nghiệm dương. Quỹ đạo trong trường hợp này bị giới hạn trong khoảng r nằm giữa hai nghiệm $r_{\min}$ và $r_{\max}$. Chỉ những giá trị r trong khoảng này mới đảm bảo cho $Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} \geq 0$.

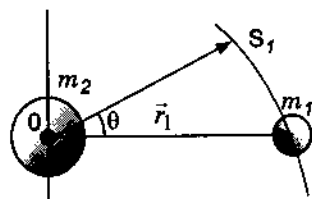
$$0 < \frac{-k + \sqrt{D}}{2E} < r < \frac{-k - \sqrt{D}}{2E} \quad (5.3.34)$$

Quỹ đạo như vậy là khép kín khác với hai trường hợp trước.

5.4. TƯƠNG TÁC 2-CHẤT ĐIỂM

Phương trình (5.2.2), hay dưới dạng tọa độ (4.2.37), có thể được giải dễ dàng bằng phương pháp gần đúng nếu biết vận tốc tại một tọa độ ban đầu nào đó. Ví dụ biết (v_{0x}, v_{0y}) tại cặp tọa độ (x_0, y_0) . Hãy coi $k = GMm = 1$ để cho tiện, chúng ta sẽ tính được 3 đại lượng tiếp theo là $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$; $a_{0x} = -x_0/r_0^3$; $a_{0y} = -y_0/r_0^3$. Từ các đại lượng này lại thu được 4 đại lượng khác là $v_{1x} = v_{0x} + a_{0x}t_0$; $v_{1y} = v_{0y} + a_{0y}t_0$; $x_1 = x_0 + v_{1x}t_0$; $y_1 = y_0 + v_{1y}t_0$. Sau khi đã có 2 bộ mới (v_{1x}, v_{1y}) và (x_1, y_1) thì lập lại quy trình tính $t_1 \rightarrow t_0 + \Delta t$ cho đến khi t đạt giá trị của chu kỳ T . Phương pháp này được giải thích kỹ trong Feymann [8]. Bạn đọc có thể tự kiểm tra lại với các dữ liệu sau: $y_0 = 0$, $x_0 = 0,5$; $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 1,63$. Bước của $\Delta t = 0,05$, $t_0 = 0$.

Phương pháp giải gần đúng có một nhược điểm cơ bản là hệ tọa độ gần liên với (5.2.2) lấy gốc tại vị trí của Mặt Trời nên động lượng của cơ hệ không bảo toàn (động lượng mặt trời bằng 0 trong khi động lượng của hành tinh thay đổi tùy theo vận tốc trên quỹ đạo) nên lời giải không có tính tổng quát mà chỉ có nghĩa đối với



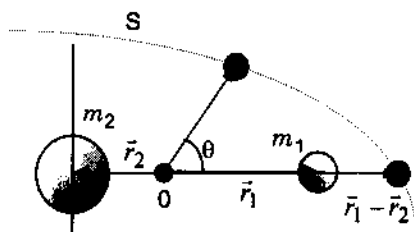
Hình 5.7. Hệ tọa độ cực với gốc tại tâm của m_2

từng trường hợp cụ thể (hình 5.7). Cần chú ý rằng khi Mặt Trời tác động lên hành tinh một lực F thì hành tinh cũng tác động ngược trở lại một lực $-F$ cho nên trong quá trình trao đổi tương tác bản thân Mặt Trời cũng phải chuyển động theo quỹ đạo elips! Để khắc phục nhược điểm này người ta chọn *hệ quy chiếu lấy gốc tại trọng tâm của cơ hệ và coi trọng tâm như một chất điểm với toàn bộ khối lượng $M = (m_1 + m_2)$* . Thay vì xét riêng rẽ trường hấp dẫn của Mặt Trời và hành tinh, chúng ta xét chuyển động tiêu biểu của một chất điểm giả định có khối lượng $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ trong trường hấp dẫn tổng M và như vậy

quy bài toán 2 - chất điểm về bài toán chỉ có 1 - chất điểm duy nhất. Trong hình 5.8, chất điểm giả định nằm tại $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, độ dài của vectơ này chính là khoảng cách giữa m_1 và m_2 . Phương trình chuyển động của nó là:

$$-\frac{GMm}{r^3} \vec{r} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (5.4.1)$$

Sau đây chúng ta sẽ nói chi tiết về chứng minh sự phụ thuộc $F \propto 1/r^2$ dựa trên quỹ đạo elips của Newton, trong chứng minh này vấn đề chọn hệ tọa độ không quan trọng. Bài toán 2 – chất điểm được ông giải quyết trong các Bổ đề LVII–LXIX, Phần XI; thay vì nhắc lại các chứng minh này, chúng ta sẽ đề cập tới cách tiếp cận bài toán bằng phương pháp vi phân, nhằm làm sáng tỏ phương pháp toán học mới.



Hình 5.8. Hệ tọa độ cực với gốc tại trọng tâm cơ hệ

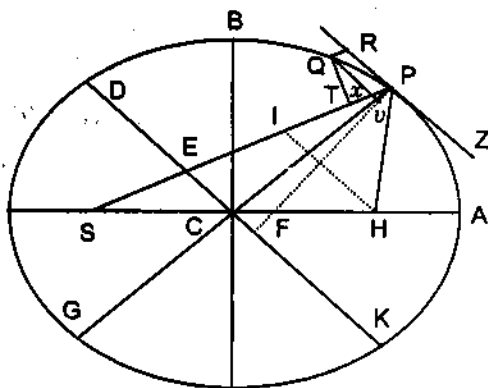
1. Bổ đề XI, Bài toán VI, Phần III

Bài toán được Newton nêu ra như sau: "Nếu một vật chuyển động trên quỹ đạo elips, thì cần tìm sự phụ thuộc vào khoảng cách của lực hướng tâm hướng về phía một tiêu cự của elips".

Chứng minh của Newton rằng $F \propto 1/r^2$ cũng sử dụng 2 định lý biết trước về các tiết diện hình nón (4.7.1) và (4.7.2), như đã dẫn trong §4.7.1, tr.133 (bàn về Bổ đề X, Phần II).

Nhắc lại, định lý thứ nhất (4.7.1) là $CD \times PF = BC \times AC$ đối với hai đường kính liên hợp GP và DK; và định lý thứ hai (4.7.2) là $Gv \times Pv/Qv^2 = PC^2/CD^2$ đối với hình bình hành QxPR được dựng như trong hình 5.9. Chú ý điểm v nằm trên GP và x nằm trên SP. Bạn đọc cũng nên xem lại phần §4.5.2, tr.127 về định nghĩa hình học của lực, quãng đường và thời gian (công thức (4.5.3), (4.5.4)).

Trên hình 5.9, S là tiêu cự của elips, DK và GP là hai đường kính liên hợp (tức là DK song song với tiếp tuyến RPZ). Biểu diễn hình học của lực F là



Hình 5.9. Bổ đề XI, Bài toán VI, Phần III: Nếu chất điểm chuyển động trên quỹ đạo elips thì lực hướng tâm phát ra từ tiêu cự của elips sẽ tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách

$QR/(QT^2 \times SP^2)$. Điều cần tìm là sự phụ thuộc của tỷ lệ này vào SP . Bây giờ hãy chú ý hai tam giác đồng dạng Pvx và PCE , hai tam giác này đều có chung cạnh PC , PE , do đó:

$$\frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC}, \quad \text{và bởi } Px = QR \rightarrow \frac{QR}{Pv} = \frac{PE}{PC} \quad (5.4.2)$$

Newton lưu ý rằng $PE = AC$. Muốn thấy điều này hãy hạ từ tiêu cự thứ hai là H một đường $HI//DK$ cắt SP tại I . Hiển nhiên, do $EC//HI$ và $SC=CH$ (H là tiêu cự!) nên $SE=EI$. Nối HP để thấy $HP=PI$ do PF chia đôi góc IPH . Từ đó suy ra:

$$SP+PH = SE+EI+PI+PH = 2(EI+PI) = 2PE \quad (5.4.3)$$

Nhưng vì $SP+PH = 2AC$ nên ta có $PE = AC$. Do đó:

$$\frac{QR}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC} \quad (5.4.4)$$

Mặt khác lại có QTx và PFE là hai tam giác vuông đồng dạng, hai tam giác này có $QT \perp PE$ và $Qx \perp PF$, nên:

$$\frac{Qx}{QT} = \frac{PE}{PF}, \quad \text{vì khi } Q \rightarrow P \text{ thì } Qx \rightarrow Qv \text{ nên}$$

$$\frac{Qv}{QT} = \frac{PE}{PF} = \frac{AC}{PF} \quad (5.4.5)$$

Áp dụng (4.7.1) từ $CD \times PF = BC \times AC$ suy ra $AC/PF = CD/BC$, thay vào (5.4.5) ta thu được:

$$\frac{Qv}{QT} = \frac{CD}{BC} \quad (5.4.6)$$

Nhân vế với vế của (5.4.4) với bình phương của (5.4.6) ta có:

$$\frac{QR}{Pv} \times \frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{AC}{PC} \times \frac{CD^2}{BC^2} \rightarrow \frac{QR}{QT^2} = \frac{Pv}{Qv^2} \times \frac{AC}{PC} \times \frac{CD^2}{BC^2} \quad (5.4.7)$$

Áp dụng (4.7.2) ($Gv \times Pv/Qv^2 = PC^2/CD^2$) để biến đổi tỷ lệ Pv/Qv^2 thành $PC^2/(CD^2 \times Gv)$ và chú ý rằng khi $Q \rightarrow P$ thì $Gv \rightarrow 2PC$, ta sẽ được kết quả:

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{PC^2}{CD^2 \times 2PC} \times \frac{AC}{PC} \times \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{AC}{2BC^2} \quad (5.4.8)$$

Nghịch đảo của tỷ lệ $AC/2BC^2$ thường được ký hiệu là $L = 2BC^2/AC$ và được gọi là *latus rectum*, là một đặc trưng của elips. Chia hai vế của (5.4.8) cho SP^2 và sử dụng ký hiệu L ta được kết quả cuối cùng:

$$\frac{QR}{QT^2 \times SP^2} = \frac{1}{L \times SP^2} \quad (5.4.9)$$

Vì L là một hằng số nên lực hướng tâm tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ vật đến tiêu cự (tới nguồn lực) của elips.

(5.4.1) Bổ đề: *Lực hướng tâm đẩy chất điểm chuyển động trên quỹ đạo elips phụ thuộc vào nghịch đảo bình phương của khoảng cách từ chất điểm đến nguồn lực nằm tại một tiêu cự của quỹ đạo elips đó.*

Bây giờ bằng phương pháp vi phân chúng ta giải bài toán ngược của bổ đề này, tức là biết dạng của lực và cần tìm quỹ đạo.

2. Dạng giải tích của quỹ đạo

Bạn đọc xem lại phần §3.8.2, tr.90 về định nghĩa của các elips. Mục đích của chúng ta là tìm ra dạng quỹ đạo (3.8.6) thể hiện elips trong hệ tọa độ cực. Phương pháp được sử dụng ở đây bắt nguồn từ biểu diễn lực trong hệ tọa độ cực (5.3.8), dựa vào đó để xác định thế năng hiệu dụng (5.3.24) và căn cứ vào thế năng trường hấp dẫn (5.3.21) mà thể hiện thành phần thẳng $\vec{e}_r$ của vận tốc (5.3.29) của chất điểm trong không gian pha. Trong cách vận dụng này chúng ta sẽ sử dụng đồng thời:

(1) định luật bảo toàn động lượng (thông qua chọn gốc tọa độ tại trọng tâm cơ hệ) để quy bài toán 2-chất điểm về bài toán 1-chất điểm, nói cách khác tìm cả hai quỹ đạo chuyển động cùng một lúc;

(2) định luật bảo toàn môment động lượng (thông qua việc khử θ bằng hệ thức (5.3.3)) để đưa bài toán 2 chiều về bài toán 1 chiều, và

(3) định luật bảo toàn năng lượng (thông qua thế năng hiệu dụng (5.3.24)) để hạ bậc phương trình vi phân bậc 2 xuống thành bậc 1.

Thực ra thì trong bài toán 2-chất điểm còn có một đại lượng bảo toàn nữa là vectơ Runge-Lenz, vectơ này sẽ được nói đến trong phần bài tập áp dụng. Với (5.3.3) và (5.3.29) hiển nhiên ta có:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\theta'}{r'} = \frac{L/mr^2}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{eff}(r)]}} \quad (5.4.10)$$

hay là:

$$\theta = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{2m[E - U_{\text{eff}}(r)]}} dr \quad (5.4.11)$$

Áp dụng thế năng hiệu dụng (5.3.28), tích phân phải tìm là:

$$\theta = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{2mE - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2km}{r}}} dr \quad (5.4.12)$$

Hãy biến đổi biểu thức này một chút thành:

$$\theta = - \int \frac{-(L/r^2)dr}{\sqrt{2mE + \left(\frac{km}{L}\right)^2 - \left(\frac{L}{r} - \frac{km}{L}\right)^2}} \quad (5.4.13)$$

Đặt $a = \sqrt{2mE + \left(\frac{km}{L}\right)^2}$ và biến mới $u = \frac{L}{r} - \frac{km}{L}$, ta có $du = -\frac{L}{r^2}dr$.

Tích phân (5.4.13) rút gọn lại về dạng chuẩn có kết quả là:

$$\theta = \int \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arccos\left(\frac{u}{a}\right) + \theta_0 \quad (5.4.14)$$

với θ_0 là hằng số tích phân; nó có ý nghĩa của góc xuất phát ban đầu. Thay u và a vào ta được:

$$\frac{L}{r} - \frac{km}{L} = \sqrt{2mE + \left(\frac{km}{L}\right)^2} \cos(\theta - \theta_0) \quad (5.4.15)$$

Rút $\left(\frac{km}{L}\right)$ ra khỏi căn, sau đó chia hai vế cho nó:

$$\frac{L^2}{rkm} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0) \quad (5.4.16)$$

Đặt $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$; $p = \frac{L^2}{km}$, ta có kết quả cuối cùng:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (5.4.17)$$

Đây chính là (3.8.6) thể hiện tiết diện hình nón (conic) trong hệ tọa độ cực. Nó có thể là một elips, đường tròn, hyperbol hay parabol tùy theo ϵ . Hai thông số p và ϵ liên quan đến các trục của elips như sau: $p=b^2/a$; $\epsilon=e/a$, $e^2=a^2-b^2$. Khi $\epsilon < 1$ thì (5.4.17) thể hiện một elips và $\epsilon = 0$ xác định một đường tròn (các quỹ đạo khép kín). Còn khi $\epsilon = 1$ thì đó là parabol và với $\epsilon > 1$ ta có đường hyperbol (các quỹ đạo hở). Đại lượng ϵ được gọi là độ lệch tâm – eccentricity của quỹ đạo, nó chính là độ lớn của vectơ Runge–Lenz trong phần bài tập áp dụng.

(5.4.2) Bổ đề: *Quỹ đạo chuyển động của chất điểm trong trường lực hấp dẫn là các đường tiết diện hình nón như đường tròn, đường parabol, đường hyperbol và đường elips.*

Bài tập áp dụng

Viết lại phương trình quỹ đạo (5.4.17) thành:

$$p = r + \epsilon r \cos(\theta - \theta_0) \quad (5.4.18)$$

hãy tìm cách thể hiện đại lượng ϵ dưới dạng một vectơ.

Giải:

Thành phần $\epsilon r \cos(\theta - \theta_0)$ có thể coi là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{\epsilon}$ và $\vec{r}$ nếu đặt góc ban đầu $\theta_0 = 0$:

$$p = r + \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} \rightarrow \vec{\epsilon} \cdot \vec{r} = p - r \quad (5.4.19)$$

Nhiệm vụ của chúng ta là thể hiện vectơ $\vec{\epsilon}$ từ hệ thức trên, muốn thế phải tìm cách viết vế phải ($p - r$) thành dạng $\vec{A} \cdot \vec{r}$, hiển nhiên sau đó $\vec{\epsilon} = \vec{A}$. Đối với thành phần r trong ($p - r$) thì từ định nghĩa vectơ đơn vị $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ ta có ngay:

$$\vec{r} \cdot \vec{e}_r = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{r^2}{r} = r \quad (5.4.20)$$

Còn đối với thành phần p trong ($p - r$) thì có thể biến đổi từ định nghĩa $p=L^2/km$ để được:

$$p = \frac{L^2}{km} = \frac{\vec{L} \cdot \vec{L}}{km} = \frac{(\vec{r} \times m\vec{r}') \cdot \vec{L}}{km} = \frac{(\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{L}}{k} \quad (5.4.21)$$

Áp dụng quy tắc $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ đối với $(\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{L}$, p trở thành:

$$p = \frac{(\vec{r} \times \vec{r}') \cdot \vec{L}}{k} = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r}' \times \vec{L})}{k} \quad (5.4.22)$$

Kết hợp (5.4.20), (5.4.22) vào (5.4.19) và khử $\vec{r}'$ ở hai vế ta được biểu diễn véctơ của $\vec{\epsilon}$:

$$\vec{\epsilon} = \frac{\vec{r}' \times \vec{L}}{k} - \vec{e}_r \quad (5.4.23)$$

Đây chính là véctơ cần tìm, nó có độ lớn bằng độ lệch tâm quỹ đạo e và chiều của nó nhìn chung thay đổi nhưng với trường lực $F \propto 1/r^2$ thì véctơ này luôn luôn chỉ vào điểm gần nhất trên quỹ đạo (ứng với điều kiện ban đầu $\theta_0 = 0$ trong (5.4.19)) nên nó là một đại lượng bất biến dư ra ngoài các đại lượng bất biến đã được nói đến là động lượng, môment động lượng và năng lượng. Bạn đọc hãy chỉ ra điều này như một bài tập. Gợi ý, $\vec{\epsilon} = \text{const}$ tức là $\vec{\epsilon}' = 0$ nên hãy tìm cách đưa $\vec{\epsilon}'$ về dạng:

$$k\vec{\epsilon}' = \theta'(mr^2\vec{r}'' + k\vec{e}_r) \times \vec{e}_\phi \quad (5.4.24)$$

Sau đó dựa vào trường lực hấp dẫn $m\vec{r}'' = -k\vec{e}_r/r^2$ mà suy ra $k\vec{\epsilon}' = 0$. Người ta cũng chỉ ra rằng với các trường lực hấp dẫn bị biến dạng bởi một nhiễu loạn nhỏ $B(r)$:

$$m\vec{r}'' = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r + B(r)\vec{e}_r \quad (5.4.25)$$

thì nhìn chung (5.4.24) trở thành:

$$k\vec{\epsilon}' = \theta'r^2B(r)\vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = -\frac{L}{m}B(r)\vec{e}_\theta \quad (5.4.26)$$

Như vậy $\vec{\epsilon}$ xoay theo chiều của góc θ , tốc độ xoay phụ thuộc vào $B(r)$. Cần nói rằng vấn đề một lực hướng tâm bị nhiễu loạn cũng đã được Newton xét đến. Trong ví dụ thứ 2 của Bổ đề XLV ("Tìm độ xoay đối với các quỹ đạo gần tròn"), Phần IX, ông đưa ra lực dạng $F \propto -r^x/r^3$ với $x > 0$. Kết quả chính của Newton (sau 11 trang chứng minh) là độ xoay sau một vòng quay $\approx 2\pi(1 - 1/\sqrt{x})$. Nếu $x = 1,001$ thì độ xoay $\approx 0,18^\circ/\text{vòng}$. Cũng có thể lập luận theo §4.5.3, phần (5) tr.130 rằng nếu chu kỳ chuyển động tròn là $T \propto r^n$, thì lực hướng tâm là $F \propto 1/r^{2n-1}$ nên ngược lại

khi $2n - 1 = 2,001$ thì $n = 1,5005$, suy ra $T \propto r^{1,5005}$. Từ đó độ sai lệch chu kỳ so với chuyển động thuần tròn ($T \propto r^{3/2}$) là $\Delta T \approx T(1 - r^{0,0005})$.

Ý nghĩa của việc vectơ $\vec{e}$ bảo toàn được thấy rõ từ sự tồn tại của các trạng thái chuyển động với *môment động lượng khác nhau nhưng lại có cùng một mức năng lượng*. Điều này không xảy ra với electron khi mà các trạng thái lượng tử (s, p, d, f) với môment động lượng khác nhau có năng lượng khác nhau. Đường như trường lực hấp dẫn $F \propto 1/r^2$ có thừa một số yếu tố đối xứng hơn là các trường lực khác. W. Pauli đã sử dụng $\vec{e}$ để lý giải phổ của nguyên tử hydro năm 1926 [21] và gọi nó là vectơ Lenz, ngày nay người ta quen gọi nó là vectơ Runge-Lenz. Nó đã được biết đến từ thời Laplace. Bạn đọc có thể tham khảo thêm các tài liệu của Leach và Flessas [22] và Goldstein [23] về lịch sử hình thành của khái niệm này.

5.5. ĐỐI XỨNG VÀ CÁC ĐẠI LƯỢNG BẢO TOÀN

Các yếu tố đối xứng của cơ hệ liên quan đến các đại lượng bảo toàn của nó. Cụ thể:

(1) bảo toàn năng lượng liên quan đến *tính đồng nhất của thời gian*, tức là *chuyển động không có thời điểm ưu tiên*, thời gian trôi đi trong quá khứ, hiện thực, và tương lai luôn như nhau; nói cách khác kết quả thực nghiệm không thể phụ thuộc vào thời điểm tiến hành, ở các thời điểm khác nhau, các kết quả thu được phải như nhau;

(2) bảo toàn môment động lượng liên quan đến *tính đẳng hướng của không gian*, tức là *chuyển động không có hướng ưu tiên*, mọi hướng đều như nhau; có nghĩa là các kết quả thực nghiệm không thể phụ thuộc vào định hướng của thiết bị thực nghiệm;

(3) bảo toàn động lượng liên quan đến *tính đồng nhất của không gian*, tức là *chuyển động không có vị trí ưu tiên*, nói cách khác trong không gian không thể có các điểm đặc biệt mà các quy luật chuyển động ở đó trở nên khác biệt; điều này có nghĩa là các kết quả thực nghiệm không thể phụ thuộc vào vị trí địa lý của nơi tiến hành thí nghiệm, nó phải đúng tại mọi địa điểm.

Các khẳng định này có thể được coi là *hệ tiên đề định nghĩa chuyển động*, áp dụng chúng để xem xét các hệ quy chiếu, chúng ta được các khẳng định cụ thể hơn:

- (a) phép tịnh tiến theo trục thời gian không làm thay đổi năng lượng,
- (b) phép quay hệ tọa độ không gian không làm thay đổi môment động lượng, và
- (c) phép tịnh tiến hệ tọa độ không gian không ảnh hưởng đến động lượng của cơ hệ.

Mỗi phép biến đổi hệ tọa độ liên quan đến một đại lượng bảo toàn – đây là nội dung của *Định lý Noether*, một định lý được gọi theo tên của nhà nữ toán học người Đức gốc Do thái, Emmy Noether (1885–1932)⁽¹⁾, một học trò của Paul Gordan và từng trợ giảng cho David Hilbert. Mối liên hệ giữa đối xứng của cơ hệ và các đại lượng bảo toàn được Hilbert nhắc đến trong một báo cáo nhưng lại không chứng minh. Sau đó Noether đã chứng minh định lý này dựa trên Lagrange của cơ hệ năm 1915. Tuy nó được đưa ra cho cơ học cổ điển nhưng cũng thỏa mãn đối với cơ học lượng tử. Bạn đọc phần lớn bắt gặp định lý này trong chương trình nâng cao, vì chứng minh của nó dựa vào biến đổi hàm Lagrange nên chúng ta không đề cập thêm.

Cả ba đại lượng bảo toàn này đều liên quan đến các đặc tính của không–thời gian nên trước hết chúng ta hãy xem xét quan điểm *không gian và thời gian tuyệt đối* của Newton.

1. Không gian và thời gian tuyệt đối

Newton đề cập đến không gian và thời gian tuyệt đối trong phần giải thích các định đề ngay đầu cuốn "*Principia*". Ông viết:

"Thời gian tuyệt đối, đích thực, và một cách toán học là thời gian tự bản thân nó, với đặc tính tự nhiên của nó, *trôi đi không đổi mà không*

(1) Cha bà cũng là một nhà toán học nổi tiếng, ông Max Noether. Bà có đóng góp lớn cho ngành đại số. Vào đầu thế kỷ 20 phụ nữ ở Đức chỉ được học đại học không chính thức và sau khi tốt nghiệp bà cũng được bổ nhiệm giảng dạy rất muộn, sau khi đã thành danh và sau nhiều can thiệp cá nhân của Hilbert. Được biết có thời gian Hilbert đã phải dùng tên thay để bà có thể giảng dạy. Emmy Noether cũng công bố nhiều công trình dưới tên của công sự và học trò, tuy nhiên định lý Noether được ký bằng tên riêng. Năm 1933 bà bị chính quyền Quốc xã xa thải và phải lưu vong tại Mỹ cho đến lúc chết năm 1935.

cần so sánh với bất cứ thứ gì ngoại vi, và thường được gọi là *Khoảng*⁽¹⁾. Thời gian tương đối, bề ngoài, thông dụng là các loại thước đo (dù có chính xác hay không) của Khoảng, dựa trên các chuyển động và được dùng thay thế cho thời gian đích thực, như giờ, ngày, tháng, năm".

Quan điểm này rất mạnh vì xem ra thời gian tuyệt đối của Newton có thể tồn tại ngay cả khi không gian tương ứng không tồn tại. Tuy nhiên tính chất này không phải chỉ là của thời gian tuyệt đối, về không gian tuyệt đối, Newton viết:

"Không gian tuyệt đối, tự bản thân nó, không cần so sánh với bất kỳ thứ gì ngoại vi, *luôn tồn tại không đổi và bất dịch*. Không gian tương đối là một sự hình dung, một thước đo cụ thể của không gian tuyệt đối mà tri thức của chúng ta xác định được dựa trên vị trí của nó đối với các vật thể, và được coi một cách thô thiển là không gian bất dịch".

"Đó là không gian của một khoảng không tưởng tượng, một khoảng không vũ trụ" – Newton viết tiếp, "được xác định bằng vị trí của nó đối với Trái Đất. Không gian tuyệt đối và tương đối có hình thù và độ lớn như nhau nhưng không phải bao giờ cũng bằng nhau. Trái Đất, chẳng hạn, chuyển động và không gian của bầu khí quyển bao quanh là không đổi đối với Trái Đất, nhưng lúc thì nó là thành phần này, khi khác là thành phần khác của khoảng không gian tuyệt đối bao quanh, do đó luôn thay đổi".

Một trong những đặc tính của không gian tuyệt đối là nó *bị các vật chiếm chỗ* nhưng lại *luôn không đổi khi bị chiếm chỗ*, do đó khoảng không bị chiếm của toàn bộ vật chính là tổng các khoảng không bị chiếm của các phần. Nói theo ngôn ngữ toán học ngày nay thì không gian là *tuyến tính*, là *cộng được*. Thời gian tuyệt đối cũng có đặc tính này, nó có thể bị chia nhỏ tùy ý, lấy tổng bất kỳ, nói tóm lại có *tính liên tục*. Ngày nay dựa trên nguyên lý bất định Heisenberg chúng ta biết rằng không-thời gian vật lý không hoàn toàn liên tục mà chỉ được xác định với một độ chính xác hữu hạn tỷ lệ với hằng số Planck $\hbar$ ⁽²⁾.

(1) Nguyên văn "duration", tạm dịch là "khoảng".

(2) Người ta tin rằng dưới mức độ dài Planck $L = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.616 \times 10^{-33}$ cm không-thời gian rơi vào trạng thái hỗn độn hình học (geometry fluctuation).

Quan niệm không gian và thời gian tuyệt đối gắn liền với nguyên lý tương đối Galileo, tức là với sự tương đương của các hệ quy chiếu chuyển động với các vận tốc không đổi so với nhau. Các vận tốc tương đối này có thể lớn bao nhiêu cũng được. Như vậy đi song song với tính liên tục là tính vô hạn của không gian và thời gian cũng như của vận tốc chuyển động và truyền tương tác trong môi trường đó. Như đã biết quan niệm vận tốc vô hạn đã bị phê phán mạnh mẽ vào cuối thế kỷ 19 và người ta đã chỉ ra được bằng thực nghiệm rằng, vận tốc lớn nhất chỉ có thể bằng vận tốc ánh sáng.

2. Chuyển động tuyệt đối

Sự tồn tại của không gian và thời gian tuyệt đối dẫn đến một hệ quả quan trọng là sự tồn tại của *chuyển động tuyệt đối*, tức là sự tồn tại của một *hệ quy chiếu tuyệt đối* có gốc tọa độ cố định trong toàn bộ khoảng không gian vũ trụ. Các chuyển động nhìn trong hệ quy chiếu này được gọi là các chuyển động tuyệt đối vì chúng có các vị trí và vận tốc được xác định một cách tuyệt đối *trong phạm vi toàn vũ trụ* chứ không phải dựa trên một mốc tọa độ đang di chuyển nào đó. Newton viết:

"Chuyển động tuyệt đối là sự chuyển dịch của vật thể từ một vị trí tuyệt đối này đến một vị trí tuyệt đối khác; và chuyển động tương đối là sự chuyển dịch từ một vị trí tương đối đến vị trí tương đối khác".

"Vì thế trên một con thuyền đang bơi thì vị trí tương đối của vật thể là phần không gian của con tàu mà vật thể chiếm chỗ và di chuyển cùng với con tàu. Trạng thái đứng yên tương đối là sự tồn tại tiếp diễn của vật thể trong một phần duy nhất trong khoang thuyền, nhưng sự đứng yên đích thực, đứng yên tuyệt đối, là sự tồn tại tiếp diễn của vật thể trong một phần duy nhất của không gian bất định mà trong đó, con thuyền cũng như các phần của nó đang chuyển động".

Nếu chúng ta biết một vị trí xác định nào đó trong vũ trụ là bất biến, chẳng hạn tâm của giải Thiên Hà, thì có thể xác định vị trí tuyệt đối của hệ mặt trời đối với điểm đó. Vị trí này sẽ có tọa độ tuyệt đối trong vũ trụ và như vậy cũng có thể xác định vị trí tuyệt đối của Trái Đất và của từng người cụ thể. Từ các vị trí tuyệt đối chúng ta có thể xác định vận tốc tuyệt đối và như vậy xác định được cả giá trị năng lượng tuyệt đối của từng vật thể. Hiển nhiên là điều này có ảnh hưởng lớn đến sự hình thành của các quan niệm triết học công nhận vai trò tiên quyết

của tạo hoá và định mệnh. Bản thân Newton cũng nhận thấy tầm quan trọng của chuyển động tuyệt đối nên ông đã phân tích nó rất tỉ mỉ.

"Vì các phần của không gian không nhìn thấy được và cũng không thể phân biệt được với các phần khác nên chúng ta phải sử dụng các thước đo hợp lý đối với chúng. Từ vị trí và khoảng cách của các vật tới bất kỳ một vật nào khác được coi là cố định, chúng ta định nghĩa các địa điểm: và sau đó bằng các địa điểm này mà ước đoán các chuyển động, coi các vật thể như được chuyển từ địa điểm này đến địa điểm khác. Thay vì chuyển động tuyệt đối và vị trí tuyệt đối, chúng ta sử dụng chuyển động tương đối; và điều này không làm phức tạp thêm vấn đề, tuy nhiên trong tư duy khoa học, cần phải loại bỏ cảm giác và xem xét bản thân các vật thể, tách biệt đối với các thước đo của chúng".

"Có thể không tồn tại một vật thể nào đứng yên để làm mốc cho vị trí và chuyển động của các vật thể khác, nhưng chúng ta có thể phân biệt các trạng thái giữa đứng yên và chuyển động, giữa tuyệt đối và tương đối thông qua các đặc tính, nguyên nhân và hiệu ứng của chúng".

Đối với các đặc tính của chuyển động tuyệt đối, Newton cho rằng:

"Đặc tính của chuyển động là các phần cũng tham gia chuyển động chung của tổng thể mặc dù chúng đứng yên so với nhau trong tổng thể đó. Tất cả các phần đều bị đẩy lùi như nhau khỏi trục quay và động lượng tổng thể là tổng động lượng của từng phần".

Về nguyên nhân, ông nói:

"Các nguyên nhân để phân biệt chuyển động đích thực và chuyển động tương đối là các lực tác dụng gây nên chuyển động. Chuyển động tuyệt đối không thể được tạo ra hay thay đổi đi nếu không có lực tác dụng trực tiếp lên vật làm nó chuyển động; nhưng ngược lại chuyển động tương đối lại có thể được tạo ra hay làm thay đổi đi mà không cần một lực nào tác động lên vật cả. Vì rằng chỉ cần một lực tác động lên vật làm mốc so sánh là đủ để làm thay đổi chuyển động tương đối của vật đang xét. Trong khi lực tác động luôn luôn làm thay đổi chuyển động tuyệt đối thì nó lại không nhất thiết làm thay đổi chuyển động tương đối. Nếu các lực tác động lên các vật thể so sánh lại bảo toàn vị trí tương đối của chúng thì chuyển động tương đối đang xét cũng sẽ bảo toàn".

Về hiệu ứng, Newton chỉ ra yếu tố quan trọng để có thể dựa vào đấy mà tìm thấy điểm bất định tuyệt đối, hay chuyển động tuyệt đối trong

vũ trụ. Ông cho rằng:

"Các hiệu ứng để phân biệt chuyển động tuyệt đối và tương đối là các lực đẩy lùi khỏi trục trong chuyển động quay. Sẽ không có một lực nào như thế trong các chuyển động quay tương đối, nhưng trong các chuyển động quay tuyệt đối thì lực đó lớn hay nhỏ phụ thuộc vào động lượng".

Có thể nói rõ hơn về luận điểm này. Đối với chuyển động tuyệt đối, vì nó được so sánh với một điểm mốc cụ thể cố định nên nếu vật quay quanh điểm mốc đó thì nó sẽ bị một lực đẩy lùi ra xa khỏi phía trục quay và độ lớn của lực này phụ thuộc vào tốc độ quay của vật. Đứng trong hệ quy chiếu tuyệt đối thì sự tồn tại của trạng thái bị đẩy lùi xác định rõ ràng vật có quay hay không, vì nếu nó chuyển động thẳng thì sẽ không có lực nào đẩy lùi nó cả. Trong hệ quy chiếu này sự khác biệt giữa chuyển động quay và thẳng là không loại bỏ được. Tình trạng này không như vậy đối với các hệ quy chiếu tương đối. Vì có sự chuyển động của các điểm làm mốc mà việc một vật có quay hay không hoàn toàn phụ thuộc sự quay tương đối của nó đối với điểm làm mốc chứ không phụ thuộc vào việc nó có thật sự quay hay không trong không gian tuyệt đối. Do đó mà lực đẩy lùi vật khỏi trục quay không nhất thiết xuất hiện trong các hệ quy chiếu tương đối. Nếu một người quan sát ngồi trong một căn phòng đang quay thì anh ta sẽ nhìn thấy mọi vật bên ngoài đều quay quanh anh ta và sẽ cho rằng chúng bị một lực đẩy lùi ra xa anh ta, tuy nhiên một người quan sát bên ngoài lại thấy rằng anh ta không bị một lực nào đẩy lùi cả và chính người ngồi trong căn phòng đang quay mới bị một lực như vậy tác động. Khẳng định của cả hai người đều có lý, bản thân Trái Đất của chúng ta cũng là một ví dụ như vậy. Bây giờ chúng ta xét ví dụ của Newton:

"Nếu một thùng nước, buộc trên một sợi dây dài, bị xoay tròn sao cho sợi dây xoắn lại, sau đó được thả ra tức thì, nó sẽ quay ngược trở lại, và khi sợi dây bung ra thì thùng nước tiếp tục quay một thời gian; mặt nước trong thùng lúc đầu phẳng, nhưng khi vỏ thùng trao đổi dần dần chuyển động với nước thì nó sẽ làm mặt nước quay theo và bị đẩy lùi từng tí một ra khỏi phía giữa thùng và trào lên hai bên thành thùng, tạo ra một mặt cong (như tôi đã quan sát thấy), chuyển động quay của mặt nước càng nhanh thì mực dâng trào hai bên thành càng cao cho đến khi

mặt nước đạt tốc độ của vỏ thùng thì nó phẳng lặng trở lại. Sự trào dâng này của mặt nước chỉ ra lực đẩy nó ra phía ngoài, và cho thấy trực tiếp sự tương phản giữa chuyển động quay đích thực, tuyệt đối với chuyển động tương đối của nó ... Lúc đầu khi chuyển động tương đối giữa mặt nước và vỏ thùng là lớn nhất thì không thấy có lực nào tác động đẩy lùi nó ra hai bên: mặt nước không hề dâng cao, nó phẳng và vì thế chuyển động quay tuyệt đối của nó chưa hề bắt đầu. Nhưng sau đó, khi chuyển động tương đối giữa mặt nước và vỏ thùng giảm đi thì độ dâng cao của mặt nước ở hai bên chứng tỏ có lực đẩy nó ra phía ngoài, và nỗ lực trào dâng ra phía ngoài này cho thấy chuyển động quay đích thực đang gia tăng của mặt nước cho đến khi nó đạt giá trị cực đại và trở nên đứng yên tương đối so với vỏ thùng".

Phải nói rằng cuộc tìm kiếm chuyển động tuyệt đối đã diễn ra gay gắt trong quá khứ, vào thời của Einstein người ta cho rằng *ether* đứng yên nhưng không có cách nào để kiểm chứng điều này cả. Vấn đề trở nên phức tạp hơn khi vận tốc ánh sáng được khẳng định là không đổi trong mọi hệ quy chiếu, bất kể chúng chuyển động tương đối như thế nào so với nhau. Cơ học Newton đã bắt gặp một vấn đề không thể vượt qua và điều này đã dẫn đến việc người ta buộc phải từ bỏ quan niệm chuyển động tuyệt đối và chấp nhận lý thuyết tương đối hẹp vào năm 1905.

Năm 1687 Newton viết:

"... Quả thật phát hiện ra và phân biệt được một cách hiệu quả chuyển động tuyệt đối với các chuyển động hiện hành là một vấn đề quá khó khăn, vì khoảng không gian vũ trụ mà các chuyển động này xảy ra không thể nằm trong tầm nhận thức của chúng ta".

3. Các phép biến đổi hệ tọa độ

Nhắc lại năng lượng toàn phần là tổng động năng và thế năng:

$$E = \frac{1}{2} m(\vec{r}' \cdot \vec{r}') + U(\vec{r}) \quad (5.5.1)$$

Năng lượng không phụ thuộc trực tiếp vào thời gian t nhưng phụ thuộc gián tiếp vào nó thông qua các biến số $\vec{r}$ và $\vec{r}'$. Hãy tìm đạo hàm toàn phần của E theo thời gian t , hiển nhiên đạo hàm này có hai thành phần, theo (4.2.47) thì:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \right] = \vec{r}' \cdot \vec{F} \quad (5.5.2)$$

và theo (5.3.20) thì $\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{d\vec{r}}$ nên:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{r}' \quad (5.5.3)$$

Chú ý rằng biểu thức $\left(\frac{dU}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$ chỉ là một cách viết rút gọn của triển khai theo các thành phần chứ không có nghĩa của một phép chia đại số khi mà hai vectơ $d\vec{r}$ có thể giản ước được cho nhau:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = -\vec{F} \cdot \vec{r}' \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Kết hợp (5.5.2) và (5.5.3) chúng ta được đạo hàm toàn phần của năng lượng theo thời gian luôn bằng 0 và năng lượng là bảo toàn:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \rightarrow E = \text{const} \quad (5.5.5)$$

Bây giờ xét trường hợp gốc tọa độ của chúng ta bị dịch chuyển đi một khoảng vectơ $\vec{r}_0$ so với gốc tọa độ cũ và như vậy mọi vectơ trong hệ tọa độ mới đều bằng tổng của các vectơ cũ với $\vec{r}_0$:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r}_0 \quad (5.5.6)$$

Do cả hai hệ tọa độ đều đứng yên so với nhau, nghĩa là $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = 0$, nên hiển nhiên động lượng đo được trong cả hai hệ phải như nhau:

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{R}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} + m \frac{d\vec{r}_0}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p} \quad (5.5.7)$$

Điều này có nghĩa là nếu động lượng bảo toàn trong một hệ thì nó sẽ bảo toàn trong hệ thứ hai, phép tịnh tiến trục tọa độ không thể làm ảnh hưởng đến động lượng của cơ hệ.

Trong ba phép biến đổi hệ tọa độ, tịnh tiến thời gian, tịnh tiến không gian và quay hệ tọa độ, thì phép quay hệ tọa độ đi một góc nhất

định là phức tạp hơn cả. Nhìn chung nó thường được biểu diễn bằng một ma trận, ở đây chúng ta chỉ xét trường hợp hai chiều. Hãy giả sử trục z là cố định và mặt phẳng xy bị xoay đi một góc α (hình 5.10). Các tọa độ mới của điểm P sẽ là:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ Y &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ Z &= z \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

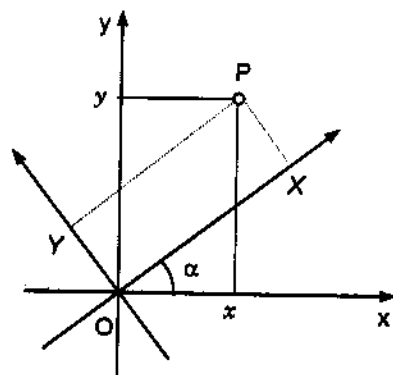
Viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.5.9)$$

Như vậy một vectơ $\vec{r}$ bất kỳ sẽ chuyển thành $\vec{R}$ theo quy tắc chuyển đổi trên. Hãy ký hiệu ma trận chuyển đổi này bằng $\hat{T}$, chúng ta có thể viết (5.5.9) dưới một dạng ngắn gọn hơn:

$$\vec{R} = \hat{T} \vec{r} \quad (5.5.10)$$

Phép quay hệ tọa độ không làm thay đổi độ dài của $\vec{r}$, bạn đọc có thể kiểm tra điều này bằng cách tính trực tiếp r^2 . Một hệ quả tất yếu của điều này là tích có hướng giữa hai vectơ luôn bảo toàn. Thật vậy, một tam giác ABC được xác định bằng 3 vectơ có độ dài không đổi sẽ có diện tích không đổi do đó độ lớn của tích có hướng giữa cặp 2 vectơ cùng gốc là không đổi. Có thể chỉ ra điều này rõ ràng hơn bằng cách tính trực tiếp, hãy xét tích $\vec{R}_1 \times \vec{R}_2$ với các vectơ $\vec{R}_1 = \hat{T} \vec{r}_1$, $\vec{R}_2 = \hat{T} \vec{r}_2$ cùng nằm trên mặt phẳng XY ($Z_1 = Z_2 = z_1 = z_2 = 0$). Theo định nghĩa tích có hướng (4.2.8) và triển khai (4.2.39) ta có:



Hình 5.10. Liên hệ giữa các tọa độ trong phép quay trục tọa độ

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \begin{pmatrix} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \quad (5.5.11)$$

Các thành phần vectơ được tính theo (5.5.8), bạn đọc kiểm tra lại hệ thức trên bằng triển khai cụ thể. Vì môment động lượng cũng được định nghĩa như một tích có hướng nên hiển nhiên nó luôn bảo toàn đối với phép quay hệ tọa độ.

Bài tập áp dụng

1. Tìm ma trận nghịch đảo của (5.5.9).

Giải:

Thay $-\alpha$ vào ma trận (5.5.9) chúng ta được phép quay ngược chiều so với $\hat{T}$, như vậy ma trận ngược $\hat{T}^{-1}$ sẽ là:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5.5.12)$$

Bằng phép nhân hai ma trận thông thường có thể chỉ ra rằng $\hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{I}$, với $\hat{I}$ là ma trận đơn vị có dạng:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.13)$$

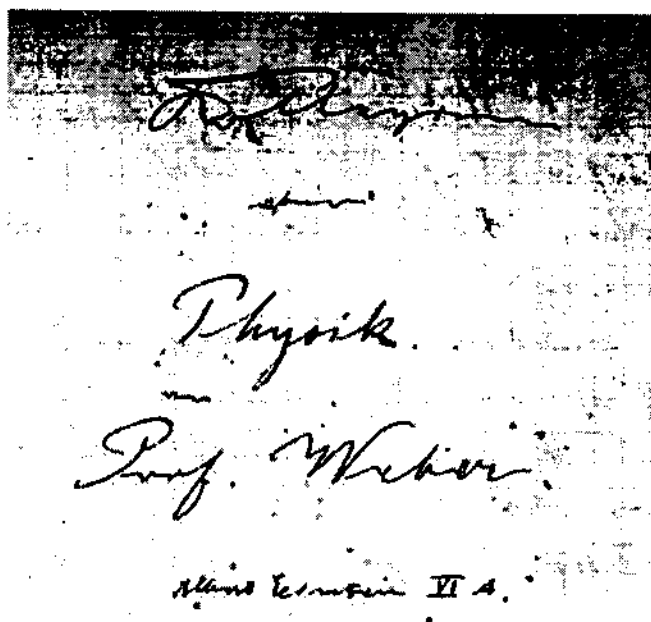
2. Chỉ ra rằng tích vô hướng cũng bảo toàn đối với phép quay.

Giải:

Bằng cách tính trực tiếp với các thành phần vectơ X, Y theo (5.5.8) chúng ta được:

$$\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad (5.5.14)$$

■



Trang đầu cuốn vở sinh viên môn vật lý năm 1896 của Einstein (do Weber giảng). Còn thấy chữ ký Albert Einstein, VI A.

9. XI fiel aus wegen Revolution.
 16. XI. } Lorentz-Transformation
 23. XI. }
 30. XI über Körper und Massen
 2. XII. Additionstheorem
 der Geschwindigkeiten
 nach Lorentz's Interpretation
 der Lorentz-Transformation.
 14 XII Relativitätstheorie und
 Lorentz-Transformation
 als Hilfsmittel der Theorie.
 Theorie der Tensoren.

Bút tích một bài giảng về lý thuyết tương đối hẹp của Einstein tại Đại học Berlin và Đại học Zurich vào học kỳ 2 năm học 1918-1919. Trang này đề ngày 9/11/1918 và Einstein có ghi chú: "Bài giảng hoàn lại do cách mạng". Cùng ngày đó nhà vua Đức Kaiser Wilhelm đã phải từ chức.

Chương 6

LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI HẸP

Lý thuyết tương đối hẹp ra đời vào đầu thế kỷ 20 nhờ những nỗ lực của Einstein và nhiều học giả khác như Lorentz, Poincaré, Minkowski ... Nó nói về cấu trúc phẳng của không gian và thời gian được thống nhất trong một thực thể duy nhất gọi là không-thời gian (space-time). Trong phần đầu chương chúng ta sẽ tập trung vào sự biến dạng của không - thời gian dưới góc độ quan sát từ các hệ quy chiếu quán tính chuyển động với vận tốc lớn gần vận tốc ánh sáng và trong phần cuối sẽ khảo sát ảnh hưởng của sự biến dạng đó lên các định luật của động lực học Newton⁽¹⁾.

6.1. THÍ NGHIỆM MICHELSON-MORLEY

1. Các phép biến đổi Galileo

Trước thời kỳ của Einstein, ý thức về sự tương đối của các hiện tượng cơ học dưới các góc độ quan sát khác nhau xuất hiện và tập trung chủ yếu trong nguyên lý quán tính Galileo. Nguyên lý này thể hiện sự không phân biệt được của người quan sát đối với hai trạng thái đứng yên và chuyển động thẳng đều khi lực tác dụng bị loại trừ. Ngày nay chúng ta biết rằng, hệ quy chiếu thực nghiệm mà Galileo đã dựa vào để xây dựng nguyên lý quán tính (con thuyền bơi trên dòng sông và các ván trượt không ma sát) chỉ gần đúng với hệ quy chiếu quán tính thực thụ vì lực hấp dẫn không bị loại trừ hoàn toàn. Hệ quy chiếu gần đúng nhất

(1) Theo Wheeler nói trong "Gravitation, Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John A. Wheeler, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973", thì năm 1897 khi Einstein còn là sinh viên tại Zurich, hầu như một nửa trường đại học ở châu Âu đã không dạy môn Điện động lực học của Maxwell được thiết lập từ 1864! Lý thuyết tương đối hẹp của Einstein đã có được một sự chấp thuận nhanh chóng hơn nhiều. Các tài liệu tham khảo rất tốt cho phần này là Bickerstaff [25], Bohm [27] và Einstein [10].

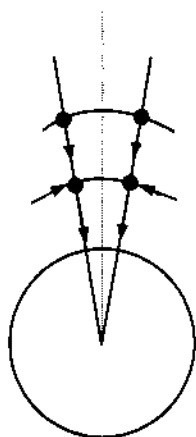
với hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu của các vật thể rơi tự do trong trọng trường, ví dụ con tàu vũ trụ trên quỹ đạo. Chúng ta đã khá quen với hình ảnh một phi công vũ trụ đang lơ lửng trong khoang tàu với các vật thể trôi nổi bên trong. Các vật thể này cho một hình dung về trạng thái chuyển động khi không có lực tác dụng, tức là theo quán tính. Tuy nhiên, ngay cả trong các trường hợp này, hệ quy chiếu của chúng ta cũng không phải đã loại bỏ được hoàn toàn các lực tác dụng. Bởi vì lực hấp dẫn là hướng tâm nên càng về gần tâm hơn thì hai quỹ đạo rơi riêng biệt lại càng bị áp sát lại gần nhau hơn, như thể chúng đang bị kéo lại bởi một lực theo

phương nằm ngang. Hơn nữa vì gia tốc trọng trường thay đổi theo độ cao nên hai đầu của một vật thể dài sẽ bị kéo bởi những lực khác nhau gây ra một áp lực theo phương thẳng đứng (hình 6.1). Vì thế chúng ta khó tin rằng một hệ quy chiếu quán tính thực thụ có thể tồn tại, hay ít ra chúng ta cũng không biết cách nào để tìm thấy một hệ quy chiếu như vậy. Có thể trong không gian xa xôi giữa các vì sao có một nơi không có lực tác dụng (Newton cũng đã cho rằng chuyển động tuyệt đối của ông có thể tìm thấy ở đâu đó trong khoảng không vũ trụ!).

Quan niệm về tính tương đối của Galileo có thể được gói gọn trong các *phép biến đổi Galileo*, mô tả mối liên hệ giữa các tọa độ trong hai hệ quy chiếu quán tính $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{t})$, (x, y, z, t) chuyển động thẳng đều so với nhau với vận tốc v theo một phương xác định (phương x chẳng hạn):

$$\left(\begin{array}{l} \hat{x} = x \pm v \\ \hat{y} = y \\ \hat{z} = z \\ \hat{t} = t \end{array} \right) \quad (6.1.1)$$

Trong phép biến đổi này vận tốc v có thể lớn bao nhiêu cũng được và thời gian t là không đổi đối với cả hai hệ quy chiếu. Thời gian được xác định duy nhất cho mọi vị trí không gian và hai sự kiện được coi là đồng



Hình 6.1. Hệ quy chiếu gắn liền với một vật đang rơi tự do chỉ là một hệ quy chiếu quán tính trong phạm vi hẹp khi các lực tác dụng theo hai chiều ngang và dọc có thể bỏ qua được

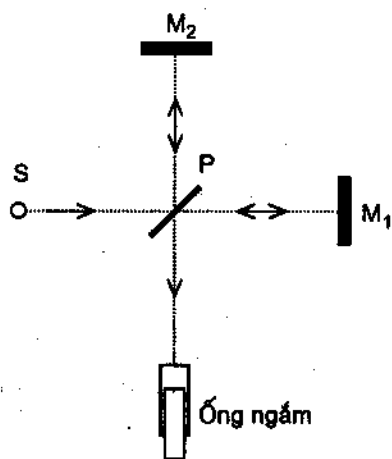
thời nếu chúng cùng xảy ra trong một thời điểm. Các quan điểm này, cộng với phép biến đổi (6.1.1), được gọi chung dưới một cái tên là *nguyên lý tương đối Galileo*.

2. Thí nghiệm Michelson–Morley

Vào cuối thế kỷ 19, nguyên lý tương đối của Galileo đã trải qua một cuộc kiểm tra khó khăn nhất trong lịch sử tồn tại của nó. Điều này gắn với việc người ta phát hiện ra rằng vận tốc truyền ánh sáng là không đổi theo mọi hướng – một kết quả mâu thuẫn trực tiếp với hệ thức (6.1.1). Thí nghiệm đo vận tốc ánh sáng được Albert Michelson⁽¹⁾ thực hiện lần đầu năm 1881 nhưng sai số của phép đo này tương đương với hiệu ứng cần tìm nên phải mất 6 năm sau, năm 1887, ông mới lặp lại được thí nghiệm thành công với Morley [24–25]. Thiết bị mà Michelson sử dụng là một giao thoa kế (*interferometer*) được minh họa như hình 6.2.

Ánh sáng đi ra từ nguồn S dọc vào gương phẳng P đặt nghiêng 45° , gương này chỉ phủ một lớp phản xạ mỏng đủ để vừa phản xạ vừa cho ánh sáng đi xuyên qua. Phần ánh sáng đi qua P sẽ rơi vào gương phẳng M_1 và phản xạ hoàn toàn trở lại để rồi lại bị phản xạ trên P để về đến ống ngắm; phần ánh sáng phản xạ trên P sẽ đi đến gương M_2 và phản xạ hoàn toàn trở lại để đi xuyên qua P tới ống ngắm. Hai chùm tia phản xạ này giao thoa với nhau và tạo nên những vân giao thoa có thể nhìn thấy bằng ống ngắm. Độ lệch pha của hai chùm tia xác định độ xê dịch giữa các khoảng vân. Ký hiệu thời gian ánh sáng đi từ gương P đến M_1 và trở lại là t_1^0 và từ gương P đến M_2 và trở lại là t_2^0 chúng ta có:

$$t_1^0 = \frac{2l_1}{c_1} \quad (6.1.2)$$



Hình 6.2. Sơ đồ thí nghiệm của Michelson và Morley năm 1887

(1) Michelson là nhà vật lý học người Mỹ đầu tiên đoạt giải Nobel năm 1907. Thí nghiệm của ông được đánh giá là một trong những thí nghiệm quan trọng nhất trong toàn bộ lịch sử vật lý.

$$t_2^0 = \frac{2l_2}{c_2} \quad (6.1.3)$$

với c_1 và c_2 là các vận tốc ánh sáng và l_1 và l_2 là các khoảng cách giữa các gương trên hai phương tương ứng. Khoảng thời gian chênh lệch là $\Delta t^0 = t_1^0 - t_2^0$. Bây giờ nếu quay toàn bộ hệ 90° thì các thời gian sẽ là:

$$t_1^{90} = \frac{2l_1}{c_2} \quad (6.1.4)$$

$$t_2^{90} = \frac{2l_2}{c_1} \quad (6.1.5)$$

Và khoảng thời gian chênh lệch bây giờ là $\Delta t^{90} = t_1^{90} - t_2^{90}$. Hai khoảng chênh lệch khác nhau này, Δt^0 và Δt^{90} sẽ gây nên một sự xô dịch toàn bộ hệ thống các vạch vân khi quay thiết bị:

$$\Delta t = \Delta t^0 - \Delta t^{90} = 2(l_1 + l_2) \left(\frac{c_2 - c_1}{c_2 c_1} \right) \quad (6.1.6)$$

Với giả thiết các vận tốc c_1 và c_2 có giá trị rất gần với vận tốc ánh sáng trong chân không tuyệt đối c , $\Delta c = c_2 - c_1 \ll c \approx c_1 \approx c_2$, chúng ta có thể giản ước (6.1.6) thành:

$$\Delta t = 2(l_1 + l_2) \left(\frac{\Delta c}{c^2} \right) \quad (6.1.7)$$

Khoảng Δt này ứng với độ lệch quãng đường $\Delta d = c\Delta t$ và số lượng các vân xô dịch sẽ bằng tỷ lệ giữa Δd và bước sóng λ :

$$\delta = \frac{c\Delta t}{\lambda} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \left(\frac{\Delta c}{c} \right) \quad (6.1.8)$$

Để đảm bảo thí nghiệm được chính xác, Michelson và Morley đã gắn toàn bộ thiết bị trên một tấm đá cẩm thạch đặt nổi trong hầm đựng thủy ngân và chỉ tiến hành các phép đo vào sáng sớm. Họ hy vọng loại trừ được mọi yếu tố rung động do các xe ngựa kéo trên phố gây ra. Trong thí nghiệm này hai ông đã dùng các cánh tay đòn có độ dài như nhau $l_1 = l_2 = 11m$ và ánh sáng đơn sắc của đèn Na có bước sóng $\lambda = 589nm$. Kết quả cuối cùng khẳng định rằng sự dịch chuyển của hệ vân là nhỏ hơn 0,01 vân và như vậy thì sự chênh lệch nếu có của vận tốc ánh sáng trên hai phương vuông góc Δc phải nhỏ hơn $4cm/s$.

Thí nghiệm của Michelson và Morley được G. Joos lặp lại năm 1930 với độ chính xác hơn 1 cấp. Năm 1932 Kennedy và Thorndike cũng lặp lại thí nghiệm này nhưng thay vì quay thiết bị 90° họ đã đo trong các thời điểm khác nhau trong năm để sử dụng sự quay tự nhiên của Trái Đất để thay đổi phương truyền ánh sáng. Các phép đo hiện đại sử dụng kỹ thuật laser (Jasej và cộng sự, 1964; Brillet & Hall, 1979) đã xác định được $\Delta c < 0,5 \times 10^{-6} m/s$. Ngày nay người ta cho rằng sai số của Michelson là do sự chênh lệch nhiệt độ $1^\circ C$ trong phòng đo của ông gây ra.

Các thực nghiệm hiện đại cũng đã đo vận tốc ánh sáng từ các nguồn sáng chuyển động với vận tốc rất cao, ví dụ đo tốc độ ánh sáng phát ra từ các hạt pion trung hoà π^0 chuyển động với $v \approx 0,99775c$ [26], các hạt này có thời gian sống rất ngắn $\approx 8 \times 10^{-17} s$ và phân rã thành các photon gamma $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Các kết quả đo khẳng định vận tốc của các photon này bằng $2,9977 \pm 0,0004 \times 10^8 m/s$. Giá trị này không khác vận tốc ánh sáng phát ra từ các nguồn bất động.

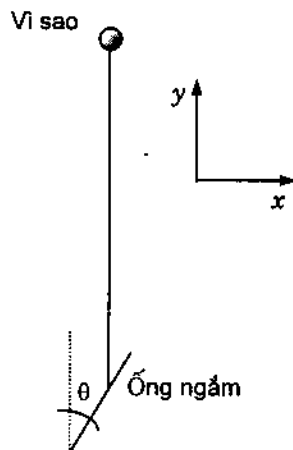
3. Vận tốc giới hạn và giả thiết *ether*

Giả thiết có tồn tại một môi trường đặc biệt truyền tải sóng điện từ gọi là *ether* được Maxwell đưa ra năm 1878 trong một lần tái bản cuốn "*Encyclopaedia Britannica*" (Từ điển Bách khoa Anh). Với *ether* các nhà vật lý thế kỷ 19 có một cách lý giải vận tốc giới hạn của ánh sáng rất đặc biệt. Họ cho rằng *ether* bao quanh Trái Đất và khi Trái Đất chuyển động thì nó bị kéo theo như một tầng đệm. Có thể hình dung một khoang tàu trên đoàn tàu chuyển động, khoang tàu này kéo lớp không khí bên trong theo và âm thanh phát ra trong khoang sẽ truyền đi với vận tốc như nhau theo mọi hướng không phụ thuộc vào chuyển động của đoàn tàu. Nếu một lớp màn *ether* nào đó bị kéo theo chuyển động của Trái Đất thì ánh sáng lan truyền trong lớp *ether* đó hiển nhiên sẽ có vận tốc không đổi theo mọi hướng. Như vậy kết quả thí nghiệm của Michelson và Morley được lý giải.

Tuy nhiên bản thân Maxwell và những người sau ông cũng không ai đo được hiệu ứng *ether* bị kéo theo chuyển động của Trái Đất. Oliver Lodge đã thực hiện một thí nghiệm là chiếu chùm sáng đi rất gần vành của một đĩa quay nhanh, nếu đĩa này kéo *ether* theo thì các hiệu ứng đối với chùm sáng có thể quan sát được. Thí nghiệm này đã thất bại, nhưng một số học giả cho rằng một đĩa quay dù lớn thế nào cũng khó có thể kéo

một lớp *ether* đủ lớn để gây ra các hiệu ứng quan sát được, do đó một thí nghiệm dựa vào hiện tượng quang sai (light aberration) đã được đưa ra (hình 6.3).

Nguyên lý của nó như sau: giả sử người ta quan sát một vì sao ở xa trên phương y trong khi Trái Đất thì chuyển động theo phương x . Vì Trái Đất chuyển động nên ống kính thiên văn phải bị đặt lệch đi một góc θ tương ứng với tỷ lệ V/c , với V là vận tốc chuyển động của Trái Đất. Do vận tốc của Trái Đất thay đổi theo hai mùa đông và hè nên vị trí góc của vì sao sẽ bị xô dịch



Hình 6.3. Hiện tượng quang sai

khoảng $2 \times 10^{-4} \text{ rad}$ giữa hai thời điểm đó. Sự xô dịch này đã được quan sát thấy. Bây giờ nếu *ether* bị kéo theo Trái Đất thì không thể có hiện tượng quang sai vì ánh sáng truyền theo phương y vuông góc với phương chuyển động x của lớp *ether* nên vận tốc khác nhau của lớp này giữa hai mùa đông và hè không thể ảnh hưởng đến phương truyền sáng và do đó không thể có hiện tượng quang sai. Các kết quả của Michelson và Morley còn cho thấy nếu vận tốc chuyển động của *ether* là v thì giá trị Δc trong (6.1.8) phải là:

$$\Delta c = v^2/2c \quad (6.1.9)$$

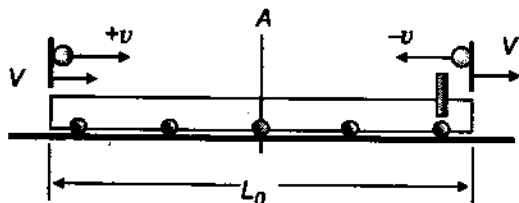
Với $\Delta c < 4 \text{ cm/s}$ thì $v \approx 5 \text{ km/s}$ và *ether* không thể đứng yên. Năm 1881 Michelson viết "Giả thiết *ether* đứng yên là không chính xác, cần kết luận rằng nó là sai". Sự thất bại của Oliver Lodge và việc quan sát được hiện tượng quang sai đã đẩy giả thiết Trái Đất kéo theo *ether* vào chỗ bế tắc. Các nhà vật lý đã nhận thấy rằng không thể tiếp tục bảo tồn các quan niệm và nguyên lý cổ điển của cơ học Newton [27].

6.2. HỆ QUẢ CỦA VẬN TỐC GIỚI HẠN

1. Tính đồng thời của các sự kiện

Sự kiện ánh sáng truyền theo mọi phương với vận tốc không đổi có hệ quả áp đặt trực tiếp đối với tính đồng thời của các sự kiện. Chúng ta hãy xem xét tình huống sau, được quen gọi là *ngịch lý đoàn tàu của*

Einstein. Giả sử có một đoàn tàu có độ dài là L_0 và chạy với vận tốc V theo phương nằm ngang (hình 6.4). Một người đứng tại điểm A giữa đoàn tàu quan sát hai quả bóng được ném về phía anh ta từ đầu và đuôi tàu. Coi hai quả bóng là chuyển động thẳng đều với vận tốc v và bỏ qua mọi ảnh hưởng của không khí. Giả sử đối với người này hai sự kiện ném bóng là *đồng thời*, và do anh ta đứng giữa đoàn tàu nên sẽ nhìn thấy chúng xảy ra *cùng một lúc*. Khoảng thời gian trôi qua Δt_0 tính từ lúc ném cho tới khi hai quả bóng tới nơi hiển nhiên là $L_0/2v$.

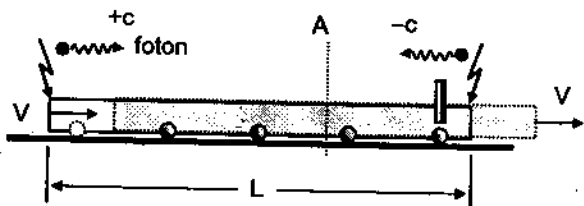


Hình 6.4. Với nguyên lý tương đối Galileo cả hai người quan sát đều ghi nhận là hai quả bóng sẽ tới đích cùng một lúc

Đối với người quan sát trên mặt đất, anh ta sẽ nhận định rằng quả bóng ném từ đuôi tàu có vận tốc $(V+v)$ và quả bóng ném từ đầu tàu có vận tốc $(V-v)$. Nếu đồng hồ của anh ta chỉ khoảng thời gian Δt khi quả bóng thứ nhất tới đích thì quãng đường nó đi được là $(V+v)\Delta t$, trong khi trung điểm của đoàn tàu đã dời được một đoạn $V\Delta t$, nên quãng đường thực không có va chạm là $(V+v)\Delta t - V\Delta t = v\Delta t = L_0/2$. Trong khoảng thời gian Δt đó quả bóng thứ hai đi ngược được đoạn $(V-v)\Delta t$, nhưng vì trung điểm cũng tiến lên một khoảng $V\Delta t$, nên quãng đường thực là $V\Delta t - (V-v)\Delta t = v\Delta t = L_0/2$. Người quan sát trên mặt đất, căn cứ vào phép chuyển đổi Galileo, phải kết luận rằng sau khoảng thời gian Δt cả hai quả bóng đều tới trung điểm. Như vậy sự kiện "*hai quả bóng cùng tới trung điểm tại một thời điểm*" được cả hai người quan sát *thống nhất là đúng*. Nguyên lý tương đối của Galileo tỏ ra hữu hiệu và sẽ không có trở ngại gì nếu các vận tốc V và v lớn vô hạn. Nếu $v = 2c$ thì hai người vẫn kết luận $\Delta t = L_0/2(2c) = L_0/4c$.

Tuy nhiên phát hiện rằng vận tốc ánh sáng là giới hạn và ánh sáng luôn truyền theo mọi phương như nhau đã đặt ra vấn đề nan giải đối với tính hướng trên. Giả sử thay vì những quả bóng có hai tia chớp đánh xuống đầu và đuôi tàu (hình 6.5). Cho rằng hai sự kiện này là *đồng thời* đối với người trên tàu. Trong hệ quy chiếu của mình anh ta không hề chuyển động nên nếu ánh sáng truyền theo mọi hướng đều như nhau thì hiển nhiên anh ta phải nhìn thấy hai tia chớp trong cùng một thời điểm

vì anh ta đứng giữa đoàn tàu. Để kiểm tra điều này anh ta chỉ cần dùng một đồng hồ duy nhất đặt tại một vị trí duy nhất là vị trí



A giữa tàu. Đồng hồ này có thể tự động kích hoạt lúc

Hình 6.5. Người quan sát trên mặt đất nhận thấy hai tia sáng đến trung điểm tại hai thời điểm khác nhau

tia sáng thứ nhất rơi tới và tự động dừng khi tia sáng thứ hai rơi tới. Khoảng thời gian Δt nó chỉ sẽ là chênh lệch thời gian hành trình của hai tia sáng, hiển nhiên $\Delta t = 0$. Người quan sát trên mặt đất thì khác, anh ta không nhìn nhận độ dài đoàn tàu là L_0 (điều sẽ rõ trong phần sau), giả sử độ dài anh ta đo được là L . Người này thấy trung điểm A của đoàn tàu chạy ra xa nguồn sáng từ đuôi tàu và tiến lại gần nguồn sáng từ đầu tàu nên tia sáng từ đuôi tàu sẽ tới trung điểm muộn hơn là tia sáng từ đầu tàu. Cụ thể, đối với đuôi tàu giả sử sau khoảng thời gian Δt_2 thì tia sáng đến đích, ta có một nửa độ dài đoàn tàu:

$$L/2 = c\Delta t_2 - V\Delta t_2 \quad (6.2.1)$$

Do ánh sáng truyền theo mọi phương đều như nhau nên quãng đường tia sáng từ đầu tàu đi ngược chiều trong khoảng thời gian Δt_2 cũng phải là $c\Delta t_2$. Theo (6.2.1) thì khoảng cách $c\Delta t_2 > L/2$ một lượng là $V\Delta t_2$ nên ngay cả khi trung điểm đứng yên thì tia sáng từ đầu tàu cũng đã vượt qua điểm đó sau thời gian Δt_2 . Bởi vậy người quan sát dưới mặt đất sẽ phải ghi nhận khoảng thời gian Δt_1 tia sáng từ đầu tàu tới trung điểm nhỏ hơn là Δt_2 . Chúng ta có thể tính được khoảng chênh lệch thời gian $\Delta t_2 - \Delta t_1$ này. Chú ý rằng một nửa độ dài đoàn tàu nếu biểu diễn trên cơ sở quãng đường tia sáng từ đầu tàu truyền ngược và quãng đường trung điểm tịnh tiến sẽ là:

$$L/2 = c\Delta t_1 + V\Delta t_1 \quad (6.2.2)$$

Cộng và trừ hai vế của (6.2.2) cho (6.2.1) chúng ta có:

$$\begin{cases} V(\Delta t_1 - \Delta t_2) + c(\Delta t_1 + \Delta t_2) = L \\ V(\Delta t_1 + \Delta t_2) + c(\Delta t_1 - \Delta t_2) = 0 \end{cases} \quad (6.2.3)$$

Sau khi rút $(\Delta t_2 - \Delta t_1)$ từ phương trình thứ nhất và thế vào phương trình thứ hai, rút gọn lại chúng ta được kết quả:

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{V}{c^2 - V^2} L \quad (6.2.4)$$

Bạn đọc cũng có thể chỉ ra dễ dàng rằng:

$$\Delta t_2 + \Delta t_1 = \frac{c}{c^2 - V^2} L \quad (6.2.5)$$

Biểu thức (6.2.4) cho thấy rằng, với những vận tốc V thường gặp của các phương tiện giao thông thì sự chênh lệch $\Delta t_2 - \Delta t_1$ là quá nhỏ. Ví dụ, tàu lửa tốc hành TGV ở Pháp chạy với vận tốc $V = 300 \text{ km/h}$ cho $\Delta t_2 - \Delta t_1 \approx 9 \times 10^{-13}$ giây trên một mét độ dài con tàu. Tuy nhiên với các vận tốc lớn hơn sự chênh lệch trở nên đáng kể.

Tính không đồng thời của các sự kiện quan sát được trong những hệ quy chiếu khác nhau có ảnh hưởng sâu sắc đến lĩnh vực triết học và nó thường là nguồn gốc của nhiều nghịch lý tưởng chừng khó giải đáp. Một vài nghịch lý gần gũi với ví dụ trên có thể dẫn ra như sau: một bà mẹ sinh hai đứa con lần lượt mỗi khi ánh sáng tới trung điểm đoàn tàu, đối với người trên tàu hai đứa trẻ là anh em sinh đôi, tuy nhiên người quan sát trên mặt đất lại không khẳng định như vậy⁽¹⁾. Hoặc giả sử đoàn tàu nổ tung khi tia sáng nào tới trung điểm trước, như vậy làm sao người quan sát trên mặt đất còn nhìn thấy được sự kiện tia sáng kia tới đích?⁽²⁾ Thông thường người ta hay lầm tưởng rằng tính không đồng thời dẫn tới sự mâu thuẫn với *tính nhân quả* của các sự kiện nhưng thực ra nó không hề mâu thuẫn, vì ở đây sự kế tiếp của các sự kiện không hề bị vi phạm.

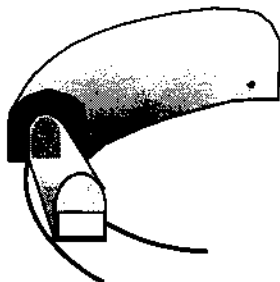
2. Thước kẻ và đồng hồ thay đổi

Sự không đồng thời của các sự kiện xuất hiện trên phương chuyển động ảnh hưởng trực tiếp đến quá trình đo đạc khoảng cách trên phương đó. Muốn có kết quả đo chính xác người ta phải "chụp" được hai điểm đầu và cuối của một vật thể tại cùng một thời điểm, hai sự kiện đó phải

(1) Đối với người trên tàu sự kiện bà mẹ sinh con chỉ diễn ra tại một địa điểm duy nhất trong khi đối với người trên mặt đất, do trung điểm chuyển động, nên sự kiện sinh con (các tia sáng tới đích) lại diễn ra tại hai địa điểm khác nhau, cho nên hai sự kiện là tách biệt.

(2) Đối với người quan sát trên tàu sự kiện đoàn tàu nổ tung diễn ra cùng một lúc trên toàn bộ con tàu, còn người trên mặt đất sẽ thấy nó kéo dài giữa hai khoảng thời gian các tia sáng tới được trung điểm.

diễn ra đồng thời trong hệ quy chiếu của người quan sát. Không thể đo độ dài của một đoàn tàu khi nó đang đi vào hoặc đi ra khỏi đường hầm (hình 6.6).



Hình 6.6. Không thể đo độ dài đoàn tàu khi nó đang đi vào một đường hầm

Trong ví dụ đoàn tàu ở phần trên, nếu chúng ta cho phép ánh sáng được hành trình thêm một đoạn nữa thì có thể có được hai sự kiện đồng bộ đối với cả hai người quan sát. Hãy "thiết kế" lại các sự kiện như sau. Giả sử người trên tàu đứng tại trung điểm đoàn tàu và bật đèn. Do ánh sáng truyền theo mọi phương nên sẽ có tia truyền về phía trước và có tia truyền về phía sau. Hãy đặt hai gương phản xạ tại đầu tàu và đuôi tàu, các gương này sẽ hắt ánh sáng trở lại phía người quan sát tại trung điểm. Khoảng thời gian các tia sáng đi được một vòng như vậy đối với người trên tàu sẽ là $\Delta\tau = L_0/c$. Anh này sẽ nhìn thấy hai sự kiện đồng bộ và không có lý do gì để chiếc đồng hồ duy nhất của anh ta đặt tại vị trí trung điểm lại chỉ $\Delta\tau(\text{rơi về phía trước}) - \Delta\tau(\text{rơi về phía sau}) \neq 0$.

Với người đứng trên mặt đất, anh ta thấy rằng, khi tia sáng truyền ngược về phía đuôi tàu nó sẽ đi mất khoảng thời gian Δt_1 nhỏ hơn khoảng thời gian Δt_2 mà nó cần để đuổi kịp đầu tàu. Ngược lại, sau khi bị phản xạ thì từ đuôi tàu tia sáng sẽ mất khoảng thời gian Δt_2 để đuổi tới trung điểm trong khi chỉ mất $\Delta t_1 < \Delta t_2$ để trở về đón đầu trung điểm. Tổng cộng lại cả hai tia sáng sẽ mất khoảng thời gian $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ như nhau để đi được một vòng, từ trung điểm tới trung điểm. Như vậy hai sự kiện cũng là đồng bộ. Tuy nhiên, khoảng thời gian Δt này không có giới hạn, với vận tốc đoàn tàu V càng lớn thì nó càng dài. Như vậy hai sự kiện cũng là đồng bộ đối với người quan sát trên mặt đất. Người trên mặt đất cần *hai đồng hồ đồng bộ đặt tại hai vị trí khác nhau*, một tại điểm đèn bật sáng và một tại điểm hai tia phản xạ gặp nhau. Theo (6.2.5):

$$\Delta t = \Delta t_2 + \Delta t_1 = \frac{c}{c^2 - V^2} L \quad (6.2.6)$$

Sau khi biến đổi một chút sẽ được:

$$L = c\Delta t \left[1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \right] \quad (6.2.7)$$

Đặt $\beta = V/c$ và chú ý rằng $c = L_0/\Delta\tau$ (từ quan sát trong hệ tọa độ đứng yên của người trên tàu) biểu thức này trở thành:

$$\frac{L}{\Delta t} = \frac{L_0}{\Delta\tau} (1 - \beta^2) \quad (6.2.8)$$

Do lý do lịch sử người ta thường đặt $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ và (6.2.8) có dạng:

$$\frac{L}{\Delta t} = \frac{L_0/\gamma}{\gamma\Delta\tau} \quad (6.2.9)$$

Vì $\gamma \geq 1$ nên người trên mặt đất sẽ cho rằng độ dài đoàn tàu L của anh ta ngắn hơn độ dài L_0 của người trên tàu nhưng khoảng thời gian Δt anh ta đo được lại dài hơn khoảng thời gian $\Delta\tau$ của người trên tàu bởi một hệ số là γ . Đường như thước kẻ của anh ta ngắn lại còn đồng hồ thì chạy nhanh hơn. Trong thực tế sinh hoạt hằng ngày, các vận tốc chuyển động là rất nhỏ so với vận tốc ánh sáng nên hệ số γ rất gần 1, nó chỉ đạt giá trị lớn với những vận tốc xấp xỉ c . Bảng 6.1 cho thấy các giá trị của γ đối với một số chuyển động quan sát được trong tự nhiên.

Bảng 6.1. CÁC HỆ SỐ γ VÀ β ĐỐI VỚI MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG

V [km/s]	Chuyển động	β	γ
1	Tên lửa	1/300,000	1,000000000006
30	Trái Đất	1/10,000	1,000000005
1.000	Các vì sao	1/300	1,000006
50.000	Tia sét	1/6	1,01
262.300	Thế giới của các hạt cơ bản	7/8 (0,875)	2,06
293.890		50/51 (0,980)	5,07
299.470		1000/1001 (0,999)	22,4

6.3. LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐỐI EINSTEIN

1. Các tiên đề và định nghĩa cơ bản

Các hệ thức tương tự (6.2.9) nói về sự co giãn của không gian và thời gian như hệ quả tất yếu của vận tốc giới hạn được đưa ra từ trước khi Lorentz công bố công trình về các phép biến đổi Lorentz, năm 1899. Người ta cho rằng có ít nhất hai người là Fitz-Gerald (1889) và Larmor (1898) đã từng đề cập tới. Sự linh hoạt toán học đã đi trước sự hiểu biết vật lý chỉ xuất hiện sau đó vào năm 1905 trong một công trình của

Einstein đề ngày 30/6/1905. Ông chỉ dựa vào hai tiên đề sau để chứng minh các phép biến đổi Lorentz:

(6.3.1) Định đề: *Các quy luật vật lý thoả mãn trong mọi hệ quy chiếu quán tính.*

(6.3.2) Định đề: *Vận tốc ánh sáng là không đổi trong mọi hệ quy chiếu quán tính bất kể nó được phát ra từ nguồn đứng yên hay chuyển động.*

(6.3.3) Định nghĩa: *Hệ quy chiếu quán tính được hiểu là hệ quy chiếu mà trong đó mọi vật đứng yên đối với nhau sẽ giữ nguyên trạng thái đứng yên đó nếu không bị ngoại lực tác dụng.*

Thực tế rất khó xác định được một vị trí nào trong không gian hoàn toàn không bị ngoại lực tác dụng, tuy nhiên người ta có thể phân biệt phản ứng của vật đối với chuyển động không đều của hệ quy chiếu và đối với tác dụng lực của các vật xung quanh bằng cách xem xét sự tương quan khoảng cách giữa chúng. Nếu không có sự thay đổi khoảng cách nào thì vật có thể coi là không bị ngoại lực tác dụng. Sự chuyển động của ánh sáng trong khoảng chân không của một hệ quy chiếu quán tính có thể được dùng để định nghĩa đoạn thẳng như sau:

(6.3.4) Định nghĩa: *Đoạn thẳng trong không gian là đoạn đường mà ánh sáng đi được trong chân không trong một hệ quy chiếu quán tính.*

Như vậy, đoạn đường mà ánh sáng tự do hành trình không bị bất kỳ ngoại lực nào tác dụng được coi là đoạn thẳng. Hiển nhiên độ dài của đoạn thẳng đó có thể được coi là thời gian ánh sáng đi hết quãng đường nhân với một hệ số là vận tốc ánh sáng.

(6.3.5) Định nghĩa: *Độ dài L của một vật là độ dài đoạn thẳng nối hai điểm đầu và cuối, được đo bằng một nửa khoảng thời gian Δt ánh sáng đi một vòng giữa hai điểm đó nhân với vận tốc ánh sáng trong chân không:*

$$L = c\Delta t/2 \quad (6.3.1)$$

Năm 1984 Ủy ban đo lường quốc tế đã định nghĩa $c=299.792.458m/s$, đồng thời $1m$ cũng được hiểu là quãng đường ánh sáng đi được trong chân không trong $1/299,792,458$ giây.

Lý thuyết tương đối của Einstein phân biệt rất rõ các sự kiện bởi thời điểm và vị trí tương đối của chúng. Vì các thước đo thời gian và vị trí phụ thuộc vào hệ quy chiếu nên cần tách các giá trị đo được trong hệ

quy chiếu đứng yên khỏi các giá trị đo được trong mọi hệ quy chiếu chuyển động. Khoảng thời gian Δt dùng trong (6.3.1) chỉ được đo bằng một đồng hồ đứng yên tại một vị trí duy nhất được gọi là *thời gian riêng*.

(6.3.6) Định nghĩa: Một đồng hồ đứng yên trong một hệ quy chiếu quán tính chỉ thời gian được gọi là *thời gian riêng trong hệ đó*.

Người ta thường kí hiệu *thời gian riêng* (proper time) bằng chữ cái Hy Lạp τ và *khoảng thời gian riêng* là $\Delta\tau$, còn chữ t dùng để chỉ thời gian đo trong các hệ quy chiếu chuyển động, được gọi là *thời gian tọa độ* (coordinate time). Khoảng thời gian tọa độ sẽ là Δt . Muốn đo thời gian riêng chỉ cần một đồng hồ, trong khi đó để đo thời gian tọa độ cần ít nhất hai đồng hồ đồng bộ đặt tại các vị trí khác nhau. Ý tưởng rằng mỗi hệ quy chiếu quán tính có thời gian riêng của nó được Poincaré chỉ ra lần đầu năm 1904.

Tương tự, độ dài của một vật mà một người đo được khi anh ta và vật đó đứng yên so với nhau được gọi là *độ dài riêng* (proper length), để phân biệt với các *độ dài thông thường* (ordinary length) đo khi vật chuyển động.

(6.3.7) Định nghĩa: Một thước kẻ đứng yên trong một hệ quy chiếu quán tính chỉ độ dài riêng giữa hai điểm đầu và cuối của nó trong hệ đó.

Thông thường độ dài riêng được kí hiệu bằng cách thêm chỉ số 0, ví dụ L_0 . Dễ dàng thấy rằng, độ dài L được định nghĩa trong Định nghĩa (6.3.5) không phải là độ dài riêng, tuy nhiên độ dài 1m chuẩn của thanh Platinum đặt tại Bảo tàng Paris là độ dài riêng. Để hiểu rõ điều này chúng ta hãy xét ví dụ sau:

Một người ngồi trên tàu và bấm đồng hồ đo khoảng thời gian đi và đến giữa hai thành phố sẽ đo được khoảng thời gian riêng $\Delta\tau$ vì đối với anh ta đoàn tàu không chuyển động mà chỉ có đường ray chạy ngang qua trước mặt. Anh ta đã đo khoảng thời gian giữa hai sự kiện "nhà ga đi" xuất phát và "nhà ga đến" dừng lại tại một địa điểm duy nhất là vị trí chỗ ngồi của anh ta. Tuy nhiên, nếu anh ta đo khoảng cách hai nhà ga thì khoảng cách đo được lại không phải là độ dài riêng vì anh ta đã đo độ dài của một đường ray chuyển động. Vận tốc trung bình mà người này tính được là vận tốc của đường ray:

$$v_D = L/\Delta\tau \quad (6.3.2)$$

Ngược lại người trên mặt đất đo được độ dài riêng của đường ray L_0 nhưng lại không đo được thời gian riêng của cuộc hành trình vì anh ta cần những hai đồng hồ đồng bộ đặt tại hai nơi để ghi thời điểm đi và đến. Do đó vận tốc trung bình mà anh ta ghi lại là vận tốc của đoàn tàu:

$$v_T = L_0/\Delta t \quad (6.3.3)$$

Cần nói thêm một chút về sự đồng bộ của các đồng hồ. Chúng ta biết rằng các đồng hồ chuyển động chạy khác nhau, thậm chí tại các vị trí khác nhau chúng cũng chạy khác nhau. Một cặp đồng hồ được coi là đồng bộ nếu tại các vị trí khác nhau chúng vẫn chạy như nhau.

(6.3.8) Định nghĩa: Một cặp đồng hồ được đặt tại hai vị trí khác nhau trong một hệ quy chiếu quán tính được gọi là đồng bộ nếu sau khi đem chúng hết sức từ từ lại gần nhau thì chúng vẫn chỉ cùng một thời gian.

Muốn đồng bộ hoá hai đồng hồ người ta có thể làm bằng cách như trong định nghĩa, tức là đem chúng lại gần nhau, chỉnh cho chạy đều sau đó di chuyển từ từ ra xa. Hoặc có thể đồng bộ hoá theo quy trình do Einstein đề xuất như sau. Chiếu một tia sáng từ đồng hồ thứ nhất đến đồng hồ thứ hai và ghi lại thời gian xuất phát trên đồng hồ thứ nhất t_1 (đi), thời gian đến đích trên đồng hồ thứ hai t_2 (đến) và thời gian trở về trên đồng hồ thứ nhất t_1 (về). Nếu:

$$t_2(\text{đến}) - t_1(\text{đi}) = t_1(\text{về}) - t_2(\text{đến}) \quad (6.3.4)$$

thì hai đồng hồ được coi là đồng bộ (synchronized). Một chút sửa đổi của biểu thức này thường được gọi là *quy tắc radar*:

$$t_2(\text{đến}) = [t_1(\text{về}) + t_1(\text{đi})]/2 \quad (6.3.5)$$

Trong lý thuyết tương đối, do có nhiều thước đo thời gian và không gian khác nhau, nên các sự kiện cần được phân biệt rõ ràng hơn. Trong cơ học Newton, ý nghĩa của thuật ngữ "sự kiện" chưa rõ ràng và nó cũng không được dùng. Sự kiện đơn giản nhất là sự kiện ánh sáng truyền qua một điểm tại một thời điểm nhất định. Hãy ký hiệu nó là P , các hệ quy chiếu mà chúng ta quan sát nó lần lượt là $\hat{x}(P)$ và $x(P)$. Mỗi hệ quy chiếu có 4 tọa độ là (x, y, z, t) và có thể được viết dưới dạng $\hat{x} = (\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Hãy để chữ L chỉ phép biến đổi Lorentz (sẽ nói đến trong phần sau).

(6.3.9) Hệ quả: Mỗi sự kiện P được biểu diễn trong một hệ quy chiếu quán tính x bằng 4 tọa độ không-thời gian $x(P) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Hai biểu diễn khác nhau liên hệ bởi phép biến đổi Lorentz L :

$$\hat{x} = L(x) \quad (6.3.6)$$

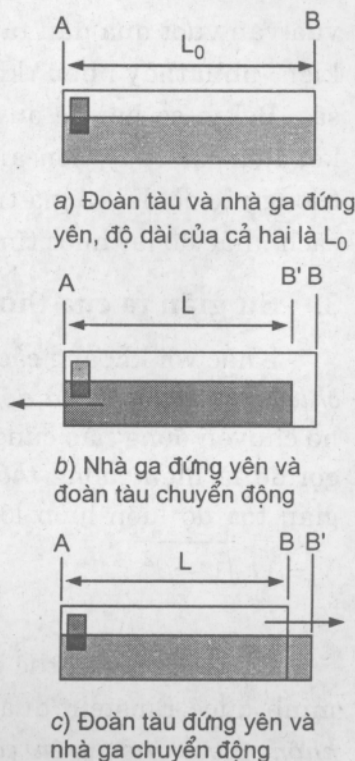
Từ trước khi lý thuyết Einstein ra đời người ta đã biết rằng các tọa độ trong hai hệ quy chiếu có thể chuyển đổi được cho nhau thông qua các phép biến đổi Lorentz.

2. Sự co ngắn Lorentz

Hiện tượng các độ dài đo được trên phương chuyển động trong một hệ quy chiếu mà vật cần đo chuyển động so với người đo khác với độ dài đo được khi người và vật đứng yên so với nhau được gọi là *sự co ngắn Lorentz* của độ dài:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (6.3.7)$$

Sự co ngắn này được gọi theo tên của Lorentz vì trước đó năm 1892 Lorentz (và Fitz-Gerald độc lập với ông năm 1889) đã đưa ra một giả thiết về sự co ngắn của độ dài trên phương chuyển động để lý giải kết quả thí nghiệm của Michelson và Morley (1887)⁽¹⁾. Thực ra các độ dài co ngắn không phải vì bản thân vật co rút lại như Lorentz và Fitz-Gerald đã nghĩ mà là do người ta quan sát được như vậy. Việc các hệ quy chiếu khác nhau cho các kết quả đo độ dài khác nhau đã làm nảy sinh ra một số nghịch lý, ví dụ nghịch lý *đoàn tàu – nhà ga* như sau (xem hình 6.7).



Hình 6.7. Phân tích nghịch lý đoàn tàu – nhà ga

(1) Được biết rằng năm 1886 Lorentz có viết một báo cáo phê phán sự thiếu chính xác trong thí nghiệm năm 1881 của Michelson mà không hề dả động đến các hệ quả nó mang lại nếu các kết quả của nó là đúng. Đánh giá của Lorentz về vấn đề này thay đổi dần trong những năm sau đó.

Giả sử người ta xây một nhà ga có độ dài L_0 đúng bằng độ dài đoàn tàu đỗ trong nhà ga đó. Bây giờ cho đoàn tàu chạy về phía nhà ga với tốc độ lớn, người quan sát trên sân ga sẽ cho rằng, do đoàn tàu chuyển động nên độ dài L của nó sẽ ngắn hơn L_0 và nó có thể đỗ gọn được vào trong nhà ga. Còn người trên tàu thì lại thấy nhà ga đang chuyển động nên anh ta cho rằng độ dài L của nhà ga ngắn hơn L_0 và đoàn tàu sẽ không thể đỗ được trong nhà ga. Nếu có một người quan sát đứng ở đầu sân ga (B) và một người đứng ở cuối đoàn tàu (B') thì người đứng ở B sẽ phải nhìn thấy B' đi qua trước mặt khi đầu tàu (A) vừa vận tới cuối nhà ga (hình 6.7b). Trong khi đó B' sẽ không thể nhìn thấy B khi cuối nhà ga vừa vận vượt qua đầu tàu (A) vì đoàn tàu dài hơn sân ga (hình 6.7c). Sự kiện "nhìn thấy nhau" không xảy ra cùng một lúc đối với hai người quan sát. Bởi vì cả hai hệ quy chiếu đều có giá trị như nhau nên không thể kết luận ai có lý hơn ai. Chúng ta bị buộc phải chấp nhận rằng hiện tượng các độ dài có giá trị khác nhau là hệ quả của vận tốc giới hạn, nói cách khác đó là thuộc tính của các hệ quy chiếu được sử dụng.

3. Sự giãn ra của thời gian

Khác với khoảng cách, thời gian luôn trôi đi chậm nhất trong hệ quy chiếu mà người đo và đồng hồ của anh ta là đứng yên. Bất kỳ một đồng hồ chuyển động nào cũng chỉ giá trị lớn hơn đồng hồ đứng yên. Người ta gọi đó là hiện tượng *thời gian giãn ra*, nói cách khác các khoảng thời gian tọa độ luôn luôn lớn hơn khoảng thời gian riêng bởi một hệ số là $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau \quad (6.3.8)$$

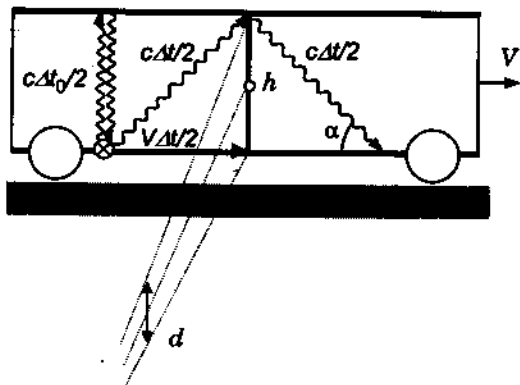
Hệ thức này có thể được dẫn giải bằng nhiều cách, một ví dụ tường minh được Einstein đưa ra dựa trên quan sát rằng, *sự không đồng bộ không xuất hiện trên các phương vuông góc* với chuyển động⁽¹⁾. Hai người quan sát có thể dễ dàng thống nhất kết quả đo trên các phương này. Giả sử trong đoàn tàu nọ người ngồi trên tàu đo chiều cao đoàn tàu bằng cách theo dõi khoảng thời gian $\Delta \tau$ ánh sáng phản xạ trở lại khi anh ta rọi một tia sáng thẳng đứng lên trần tàu từ vị trí ngồi (hình 6.8). Hiển nhiên vì đoàn tàu là đứng yên so với anh ta nên tia sáng chỉ có thể

(1) Ví dụ của Einstein được đưa ra trong "Vật lý - Cuộc phiêu lưu của tri thức" [10]

phản xạ trở lại vị trí cũ và khoảng thời gian $\Delta\tau$ là khoảng thời gian riêng mà anh ta đo được. Độ cao đoàn tàu sẽ là:

$$h = c\Delta\tau/2 \quad (6.3.9)$$

Bây giờ giả sử có một người trên mặt đất đứng cách đường ray một khoảng là d và quan sát đoàn tàu chạy ngang trước mặt với vận tốc V . Người này sẽ nhìn thấy ánh sáng đi theo một đường gấp khúc tam giác như trong hình vẽ. Trong khoảng thời gian Δt , đo theo đồng hồ trên mặt đất, khi nguồn sáng di chuyển được một đoạn là $V\Delta t$ thì tia sáng đi được một đoạn là $c\Delta t$ và các khoảng cách phải tuân theo quy luật:



Hình 6.8. Người trên tàu đo được một độ cao h như người đứng dưới đất nhưng đồng hồ của anh ta chạy chậm hơn

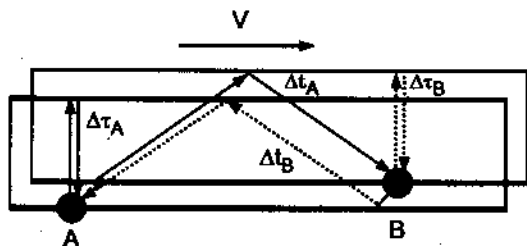
$$h^2 = (c\Delta t/2)^2 - (V\Delta t/2)^2 \quad (6.3.10)$$

Từ hai hệ thức (6.3.9) và (6.3.10) dễ dàng suy ra rằng:

$$\Delta t = \Delta\tau / \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma\Delta\tau \quad (6.3.11)$$

Do vậy khoảng thời gian riêng $\Delta\tau$ đo trên tàu luôn nhỏ hơn Δt . Cho rằng vận tốc đoàn tàu là $V=0,86c$, giữa một cặp hai sự kiện là ánh sáng phát ra và phản xạ trở về nếu đồng hồ của người đứng trên mặt đất chạy được 10 phút thì đồng hồ của người trên tàu chỉ chạy được 5 phút. Số lượng các tiếng "tích - tắc" mà người trên mặt đất đếm được là $10 \times 60 = 600$ gấp đôi số lượng người trên tàu đếm được $5 \times 60 = 300$! Có thể hình dung ra rằng, nếu vận tốc đoàn tàu tăng lên nữa thì số lượng các tiếng tích tắc mà người trên mặt đất đếm được sẽ tăng đến mức mà anh ta sẽ không bao giờ nhìn thấy sự kiện ánh sáng phản xạ trở lại trong suốt cuộc đời mình. Nếu giả sử khoảng thời gian $\Delta\tau$ chỉ đủ để người trên tàu chớp mắt thì thật là vô lý cho người đứng trên mặt đất khi anh ta đã sống trọn một đời! Anh này thậm chí có thể lập luận rằng, chính người trên tàu mới đang chuyển động với vận tốc lớn và do đó khi anh ta chớp mắt thì người trên tàu phải sống trọn đời. Chúng ta sẽ phải giải quyết "nghịch lý" này như thế nào đây?

Hãy giả thiết rằng cả hai người quan sát A và B đều là các phi công vũ trụ và họ chuyển động thẳng đều về phía nhau với vận tốc V xác định (hình 6.9). Giả sử họ đều phát ra tín hiệu ánh sáng nhưng khác màu, xanh (gạch liền) và đỏ (gạch đứt). A bấm đồng hồ và ghi nhận khoảng thời gian riêng tia sáng xanh



Hình 6.9. Cả hai người quan sát đều thấy các tia chớp của người kia phát ra chậm nhịp hơn so với của bản thân họ bởi một hệ số là γ . Các tia chớp ở đây đánh dấu các mốc thời gian trong từng hệ quy chiếu, chứng minh là các tích-tắc "thời gian riêng" của từng người nhìn dưới góc độ của người kia

phản xạ trở lại từ một trần nhà giả định là $\Delta\tau_A$, tương tự B cũng sẽ ghi nhận khoảng thời gian riêng của tia sáng đỏ là $\Delta\tau_B$. Chọn phương vuông góc có độ cao như nhau để $\Delta\tau_A = \Delta\tau_B$. Nếu A theo dõi tia sáng đỏ thì sẽ ghi nhận khoảng thời gian nó tới vị trí A là $\Delta t_B = \gamma \Delta\tau_B = \gamma \Delta\tau_A$. B cũng vậy, anh ta sẽ ghi nhận khoảng thời gian tia sáng xanh tới B là $\Delta t_A = \gamma \Delta\tau_A = \gamma \Delta\tau_B$. Nếu $\gamma = 2$ ($V = 0,87c$) thì cả hai đều sẽ nhìn thấy tia sáng của mình phản xạ hai lần trong khi tia sáng kia chỉ phản xạ một lần. *Đồng hồ riêng của từng người khi dùng để đo các mốc thời gian của người khác sẽ chỉ giá trị lớn hơn!* Khoảng khắc hai người đi ngang qua mặt nhau là lúc A cho rằng B trẻ hơn trong khi B lại cho rằng A trẻ hơn. Đây là điều tương tự như trong nghịch lý đoàn tàu và nhà ga, đoàn tàu dài hơn hay ngắn hơn nhà ga phụ thuộc vào từng người quan sát. Đây cũng là một trường hợp điển hình của sự phá vỡ tính đồng thời. Khi thời gian chỉ được xác định bởi các mốc sự kiện mà mỗi người quan sát lại cảm nhận các mốc đó khác nhau thì chúng ta buộc phải chấp nhận rằng sự đồng thời về tuổi tác hoàn toàn phụ thuộc vào hệ quy chiếu. Và vì tất cả các hệ quy chiếu quán tính đều tốt như nhau nên không thể khẳng định kết luận của người này hợp lý hơn của người kia.

Tuy nhiên điều gì sẽ xảy ra nếu khi đi qua A, B chợt dừng lại đột ngột và hai người gặp nhau. Bây giờ ai sẽ già hơn ai?

4. Nghịch lý anh em sinh đôi

Nghịch lý "anh em sinh đôi" có ý nghĩa rất lớn đối với lý thuyết tương đối, nó cũng là một câu chuyện được truyền tụng rộng rãi từ buổi đầu của lý thuyết này. Giả sử có hai anh em sinh đôi, A và T. T được đưa

lên tàu vũ trụ và chuyển động với vận tốc $0,87c$ ($\gamma=2$) còn A ở lại trên Trái Đất, sau 20 năm xa cách T quay trở lại gặp A. Đối với A, anh ta cho rằng thời gian tọa độ của mình nhanh hơn thời gian riêng của T nên sẽ kết luận tuổi của T chỉ có $20/\gamma=20/2=10$. Như vậy T trẻ hơn A 10 tuổi. Tuy nhiên trong con mắt của T thì anh này thấy Trái Đất đang chuyển động với vận tốc $0,87c$ mà anh ta lại đứng yên nên thời gian riêng của A phải nhỏ hơn thời gian tọa độ của T. Nếu T 10 tuổi thì tuổi của A sẽ là $10/\gamma=10/2=5$. Nếu hai người gặp nhau thì làm sao A lại vừa 20 tuổi vừa 5 tuổi được?

Bạn đọc có thể nhận thấy nếu cả hai chỉ chuyển động thẳng đều so với nhau và họ chẳng bao giờ gặp nhau thì tình trạng nhận thức về tuổi tác của mỗi người hoàn toàn là việc riêng và không giống nhau. Điều cốt yếu là tuổi thọ trung bình của từng người, đo bằng khoảng thời gian riêng là số lượng nhịp tim đập trong suốt cuộc đời, là như nhau và xấp xỉ $2,2 \times 10^9$ lần, tức 70 năm trái đất. Nếu T có thể uống xong tách trà trong vòng 300 nhịp tim thì không có lý do gì mà A lại không làm được như vậy. Vấn đề chỉ xuất hiện khi hai người gặp nhau. Muốn vậy thì một người phải đột ngột dừng lại, nếu cho rằng đó là T thì quãng đường của anh ta không thể là một đường thẳng mà phải là một đường gấp khúc hay một đường cong. Trong cả hai trường hợp chuyển động của T không phải là chuyển động quán tính và hệ quy chiếu của anh ta không phải là hệ quy chiếu quán tính. Rõ ràng T phải cảm nhận một lực nào đó tác dụng, hoặc trong suốt quãng đường nếu anh ta đi theo đường cong, hoặc chỉ lúc anh ta quay ngoắt lại 180° để trở về và hiển nhiên cả lúc anh ta dừng lại. Các tính toán của T về tuổi của A không đúng nữa.

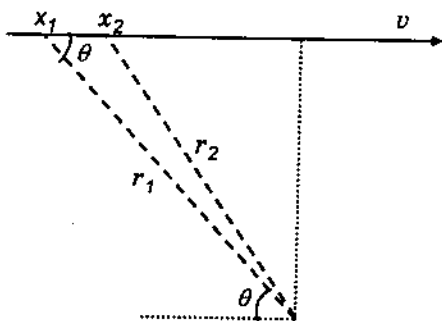
Hãy cho rằng T đi theo đường thẳng 10 năm và đột ngột quay lại trở về theo đường thẳng 10 năm nữa và cuối cùng dừng lại tức thì trên mặt đất. Chúng ta hãy xem A tính tuổi của T như thế nào. Hệ quy chiếu của A là hệ quy chiếu quán tính. Trong 10 năm đầu khi T ra đi, A tính tuổi của T là 5 và trong 10 năm T quay trở lại A sẽ tính tuổi của T là cộng thêm 5. Tuy rằng hệ quy chiếu của T có hiện tượng đối chiếu nhưng nếu điều đó xảy ra tức thời thì không có lý do gì để A phải tính khác đi. Ngay cả khi T đáp xuống mặt đất, A cũng sẽ nhìn nhận tuổi của T là 10 và kết luận của anh ta là đúng.

Einstein có nhắc đến nghịch lý anh em sinh đôi trong công trình năm 1905 và ông kết luận rằng không có gì mâu thuẫn khi T trẻ hơn A

vì anh ta là người cảm nhận đã bị gia tốc. T có thể trẻ hơn A nếu anh ta hành trình với vận tốc đủ lớn và đây chính là cách để T đi đến tương lai của A. Trong kho tàng truyền thuyết của nước ta cũng có truyện Từ Thức lấy tiên kể rằng một ngày trên trời dài bằng cả năm ở dưới đất. Tuy vậy T không thể đi về quá khứ, thời gian chỉ trôi một chiều và điều này lý thuyết tương đối cũng không làm thay đổi được.

5. Hiệu ứng Doppler

Hiệu ứng Doppler là hiện tượng ánh sáng đổi màu khi nguồn sáng chuyển động so với người quan sát. Các nguồn sáng đang đi ra xa sẽ tỏ ra đỏ hơn, còn các nguồn sáng đang tiến lại gần sẽ tỏ ra xanh hơn. Để tìm hiểu hiện tượng này hãy giả sử một nguồn sáng đang chuyển động theo phương v và phát ra hai tia sáng tại hai vị trí x_1 và x_2 cách người quan sát trên mặt đất các khoảng là r_1 và r_2 (hình 6.10). Cho rằng trong hệ quy chiếu của nguồn sáng thì khoảng thời gian riêng giữa hai lần tia sáng phát ra là $\Delta\tau$. Khoảng thời gian tọa độ trên mặt đất sẽ là:



Hình 6.10. Người quan sát trên mặt đất nhận thấy rằng khoảng thời gian giữa hai lần phát sáng thay đổi tùy thuộc vào vận tốc chuyển động tương đối của nguồn sáng

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \Delta \tau \quad (6.3.12)$$

Khoảng Δt này không phải là khoảng thời gian giữa hai lần người quan sát trên mặt đất nhìn thấy các tia sáng. Vì sau khi phát ra, các tia sáng phải vượt các khoảng cách r_1 và r_2 để tới được mắt người quan sát cho nên khoảng thời gian giữa chúng sẽ là:

$$\Delta T = (t_2 + r_2/c) - (t_1 + r_1/c) = \Delta t - (r_1 - r_2)/c \quad (6.3.13)$$

Trong các trường hợp thực tế thì nguồn sáng thường ở rất xa nên có thể nói $r_1 \approx r_2 \gg (x_1 - x_2) = \Delta x$, vì vậy có thể coi:

$$r_1 - r_2 = \Delta x \cos \theta \quad (6.3.14)$$

Sau khi thay $\Delta x = v \Delta t = \beta c \Delta t$, (6.3.13) trở thành:

$$\Delta T = \Delta t - \Delta x \cos \theta / c = \Delta t (1 - \beta \cos \theta) = \gamma (1 - \beta \cos \theta) \Delta \tau \quad (6.3.15)$$

Nếu nguồn sáng phát ra ánh sáng liên tục thì tần số ánh sáng quan sát được trên mặt đất sẽ là:

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta) \Delta \tau} = \frac{f_s}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)} \quad (6.3.16)$$

Ở đây chúng ta đã ký hiệu $f_s = 1/\Delta \tau$, ứng với tần số riêng trong hệ quy chiếu của nguồn sáng. Có ba trường hợp đặc biệt của (6.3.16), một là nguồn sáng ở rất xa đang tiến lại gần, khi đó $\theta = 0^\circ$; hai là nguồn sáng ở rất xa đang đi ra xa, khi đó $\theta = 180^\circ$; và ba là nguồn sáng đi ngang qua trước mặt người quan sát, khi đó $\theta = 90^\circ$.

Trong trường hợp thứ nhất, $\theta = 0^\circ$ ta có:

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \frac{f_s}{\gamma(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f_s \quad (6.3.17)$$

Như vậy các nguồn sáng đang tiến lại gần sẽ có màu xanh hơn, hiện tượng này được gọi là dịch chuyển xanh (blue-shifted). Còn trong trường hợp thứ hai khi $\theta = 180^\circ$ ta có:

$$f = \frac{1}{\Delta T} = \frac{f_s}{\gamma(1 + \beta)} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} f_s \quad (6.3.18)$$

Các nguồn sáng đang chạy ra xa sẽ có màu đỏ hơn, hiện tượng này được gọi là dịch chuyển đỏ (red-shifted). Cho đến nay trong phạm vi quan sát được người ta đều thấy các vì sao có dịch chuyển đỏ nên nhiều học giả cho rằng giả thuyết vũ trụ đang giãn ra là có lý. Trường hợp cuối cùng có vẻ lý thú hơn cả vì khi $\theta = 90^\circ$ thì hiệu ứng thay đổi tần số chỉ phụ thuộc vào vận tốc chuyển động tương đối, tức là vào γ :

$$f = \gamma f_s \quad (6.3.19)$$

Tuy nhiên hiệu ứng này rất khó xác định vì chỉ một sai lệch nhỏ đã đủ để làm sai kết quả. Năm 1938 Ives và Stilwell đã xác định hiệu ứng này bằng cách đo gián tiếp cả hai trường hợp $\theta = 0^\circ$ và $\theta = 180^\circ$ vì:

$$f_{TB} = \frac{f_0 + f_{180}}{2} = \frac{\gamma(1 + \beta)f_s + \gamma(1 - \beta)f_s}{2} = \gamma f_s \quad (6.3.20)$$

Thí nghiệm này cho kết quả phù hợp với hệ số γ với độ chính xác 3% và có ý nghĩa quan trọng như một bằng chứng xác nhận giả thuyết thời gian giãn ra. Có thể thấy theo (6.3.20) thì giá trị trung bình đo được f_{TB} thay đổi theo γ , tức là theo bậc 2 của β , vì $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \beta^2/2 + \dots$. Còn theo (6.3.17) thì giá trị đo được f chỉ thay đổi theo bậc 1 của β vì $\gamma(1-\beta)^{-1} \approx 1 + \beta + \dots$. Cũng vì thế người ta thường gọi hiệu ứng Doppler trên phương vuông góc (transverse dopler effect), hay thí nghiệm của Ives và Stilwell, là *hiệu ứng Doppler bậc 2* [25].

6.4. ĐỘNG LỰC HỌC TƯƠNG ĐỐI

1. Phép chuyển đổi Lorentz

Trong phần này chúng ta sẽ tìm sự liên hệ giữa các tọa độ trong hai hệ quy chiếu quán tính (x, y, t) và $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ chuyển động tương đối so với nhau theo phương x với vận tốc V (hình 6.11). Giả sử có một điểm $P(\hat{x}, \hat{y})$ trong hệ tọa độ $(\hat{x}, \hat{y})$ đang chuyển động. Gọi các tọa độ tương ứng của điểm này trong hệ (x, y) là $P(x, y)$. Hiển nhiên, trên

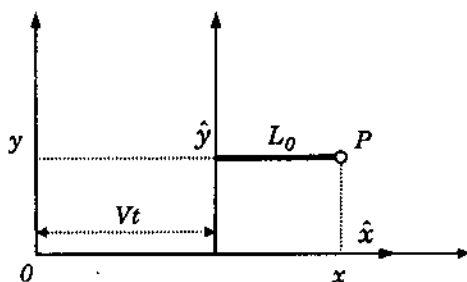
phương vuông góc $\hat{y} = y$. Muốn tìm liên hệ giữa $\hat{x}$ và x hãy chú ý rằng, tọa độ $\hat{x}$ của P chính là độ dài riêng L_0 của đoạn thẳng nối P với điểm $(0, \hat{y})$. Độ dài của đoạn thẳng này nếu đo trong hệ quy chiếu (x, y) sẽ là $L = x - Vt$ (t là thời điểm lựa chọn tùy ý trong hệ (x, y)). Trong các phần trước chúng ta biết rằng độ dài L này ngắn hơn L_0 bởi một hệ số là γ lần, do đó:

$$\hat{x} = \gamma(x - Vt) \quad (6.4.1)$$

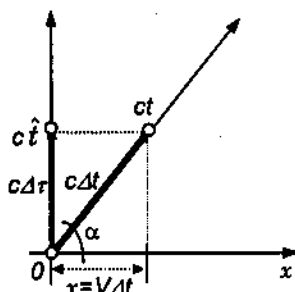
Đây là biểu thức cần tìm thể hiện sự chuyển đổi tọa độ giữa hai hệ quy chiếu trên phương chuyển động. Vì $\beta = V/c$ nên nó cũng thường được viết lại dưới dạng:

$$\hat{x} = \gamma(x - \beta ct) \quad (6.4.2)$$

Muốn tìm liên hệ giữa thời gian trong hai hệ tọa độ chúng ta có thể phân



Hình 6.11. Liên hệ các tọa độ của chất điểm trong hai hệ quy chiếu dịch chuyển đều so với nhau với vận tốc V theo phương x



Hình 6.12 Liên hệ thời gian trong hai hệ quy chiếu dịch chuyển đều so với nhau với vận tốc V

tích tương tự. Giả sử một sự kiện P xảy ra tại vị trí $\hat{x}=0$ và tại thời điểm $\hat{t}$ trong hệ $(\hat{x}, \hat{y})$ (hình 6.12). Thời điểm $\hat{t}$ này chính là khoảng thời gian riêng $\Delta\tau$ giữa sự kiện P và sự kiện $\hat{t}=0$. Hãy tìm giá trị của nó trong hệ (x, y) . Giả sử P được ghi nhận tại thời điểm t và lúc đó hệ $(\hat{x}, \hat{y})$ di chuyển được một khoảng cách x so với gốc $x=0$ của hệ (x, y) . Theo (6.3.11) chúng ta có:

$$t = \Delta t = \gamma \Delta \tau = \gamma \hat{t} \rightarrow c\hat{t} = ct / \gamma = \gamma ct / \gamma^2 = \gamma ct (1 - \beta^2) \quad (6.4.3)$$

Triển khai thừa số trong dấu ngoặc và chú ý rằng $\gamma ct \beta^2 = \gamma ct (V/c) \beta = \gamma V t \beta = \gamma \beta x$ chúng ta được:

$$c\hat{t} = \gamma(ct - \beta x) \quad (6.4.4)$$

Biểu thức này và (6.4.2) cho thấy một sự đối xứng hoàn toàn giữa hai đại lượng x và ct . Cả hai đại lượng này đều là các khoảng cách và có đơn vị chuẩn trong hệ SI là mét (m). Còn trên phương vuông góc, các khoảng cách là không đổi và có thể mở rộng cả cho trục z trong trường hợp không gian ba chiều:

$$\hat{y} = y \quad (6.4.5)$$

$$\hat{z} = z \quad (6.4.6)$$

Các biểu thức (6.4.2), (6.4.4) - (6.4.6) lập thành một phép chuyển đổi được gọi là các *phép chuyển đổi Lorentz*. Người ta thường viết gộp chúng lại với nhau thành một nhóm:

$$\left(\begin{array}{l} c\hat{t} = \gamma(ct + \beta x) \\ \hat{x} = \gamma(x + \beta ct) \\ \hat{y} = y \\ \hat{z} = z \end{array} \right) \quad (6.4.7)$$

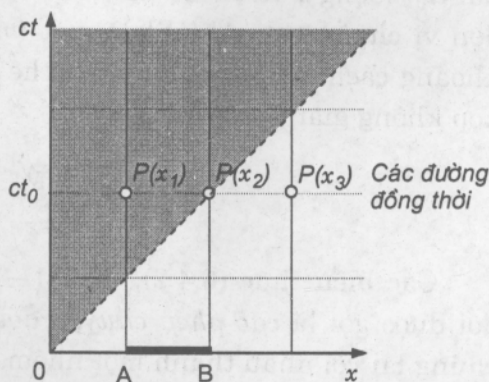
Các phép chuyển đổi này hoàn toàn trộn lẫn các thành phần không gian và thời gian, chúng không còn tồn tại tách biệt mà ảnh hưởng lẫn nhau trong một thực thể duy nhất là *không - thời gian*. Các *phép chuyển đổi Lorentz ngược* có thể thu được bằng cách đổi dấu của vận tốc V thành $-V$ vì đối với hệ $(\hat{x}, \hat{y})$ thì hệ (x, y) chuyển động ngược với vận tốc là $-V$.

$$\left(\begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right) \quad (6.4.8)$$

2. Các giản đồ không – thời gian

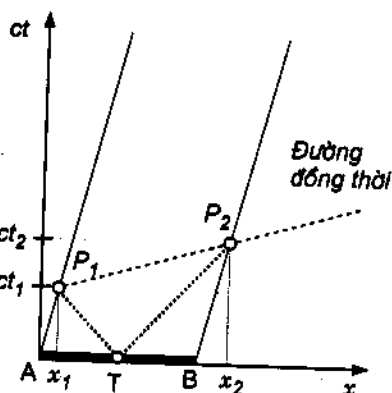
Các phép chuyển đổi Lorentz cũng có thể được suy ra dựa vào các giản đồ không – thời gian. Đó là các giản đồ mà trục tung biểu diễn khoảng cách ánh sáng đi được trong một đơn vị thời gian ct và trục hoành biểu diễn phương chuyển động (khoảng cách chất điểm đi được), thông thường được chọn là x . Giả sử có một đoạn thẳng AB có độ dài L_0 nằm ngang theo phương x . Nếu nó không chuyển động thì hai điểm đầu và cuối A và B của nó sẽ vẽ nên hai đường thẳng song song với trục tung ct và cách nhau một đoạn L_0 khi thời gian trôi đi. Các đường này được gọi là các *đường thế giới* của các điểm đầu và cuối (world-line). Bất kỳ một đường thẳng song song nào với trục hoành và cắt trục tung tại ct_0 cũng thể hiện sự "đồng thời" t_0 của các sự kiện $P(x, t_0)$ xảy ra trên mọi điểm trên phương của đường thẳng đó. Các đường này được gọi là các đường đồng thời – line of simultaneity.

Bây giờ cho một tia sáng phát ra từ gốc tọa độ 0, nó sẽ truyền theo đường thẳng có độ dốc $dt/dx=1/c$ hay là $d(ct)/dx=1$. Trên hình 6.13 đây là đường gạch chéo giữa hai trục. Vì tốc độ ánh sáng là tốc độ giới hạn nên trên giản đồ không – thời gian các đường thẳng có độ dốc nhỏ hơn 1 (thể hiện các chuyển động với vận tốc lớn hơn c) đều không có ý nghĩa. Phần trắng trên hình vẽ không sử dụng được. Còn phần của đường gạch chéo là phần không – thời gian của ánh sáng. Phần xám bên trong là của các chuyển động với vận tốc nhỏ hơn c .



Hình 6.13. Hai đầu của một đoạn AB đứng yên vẽ nên các đường song song với trục tung, vận tốc của chúng $V=dx/dt=0$. Các đường song song với trục hoành mô tả đường của các sự kiện đồng thời

Nếu đoạn AB chuyển động với vận tốc V thì độ dốc các đường thế giới (world-line) sẽ là $d(ct)/dx = c/(dx/dt) = c/V = 1/\beta$. Với $V=0$, độ dốc là vô tận và các đường là song song với trục tung. Các đường với $V \ll c$ cũng gần như song song với trục tung. Hãy tìm độ dốc của các đường đồng thời, hãy cho hai tia sáng phát ra từ trung điểm T của đoạn AB (trên hình 6.14 là các gạch chấm với độ dốc bằng 1) chiếu về hai phía đầu và cuối của đoạn AB. Trong hệ đứng yên chúng sẽ tới đích



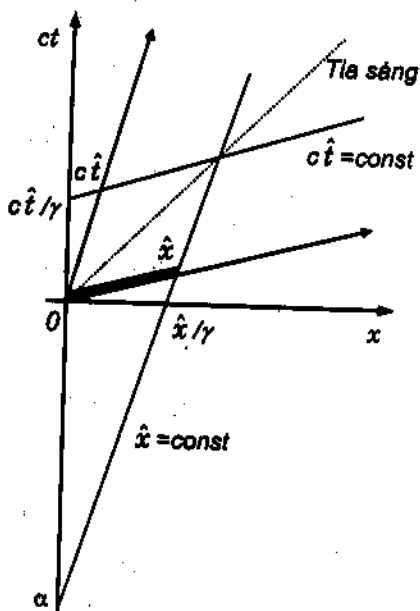
Hình 6.14. Đường đồng thời nhìn từ hệ đứng yên sẽ là một đường có độ dốc β

tại hai thời điểm khác nhau ct_1 và ct_2 nhưng trong hệ quy chiếu gắn với đoạn AB thì hai sự kiện này là đồng thời. Do đó các đường đồng thời nhìn từ góc độ của hệ quy chiếu đứng yên sẽ là các đường có độ dốc $c(t_2 - t_1)/(x_2 - x_1) = V/c = \beta$. Có thể thấy được điều này như sau. Do độ dốc của đường truyền sáng nghiêng 45°

nên độ dài đoạn $Tx_2 = P_2x_2 = ct_2$ suy ra $x_2 = ct_2 + L/2$ và tương tự $x_1 = L/2 - ct_1$. Từ đó $x_2 - x_1 = c(t_1 + t_2)$. Thay biểu thức này vào $c(t_2 - t_1)/(x_2 - x_1)$ ta được $(t_2 - t_1)/(t_2 + t_1)$. Áp dụng các công thức (6.2.4) và (6.2.5) ta có kết quả

$$(t_2 - t_1)/(t_2 + t_1) = \frac{VL/(c^2 - V^2)}{cL/(c^2 - V^2)} = V/c = \beta.$$

Cũng có thể lập luận như sau: vì đường P_1P_2 là đường đồng thời trong hệ quy chiếu của đoạn AB và đoạn AP_1 là trục thời gian trong hệ đó nên đường P_1P_2 phải có độ dốc sao cho phương truyền sáng (đoạn TP_2) chia đôi góc giữa hai đường BP_2 và P_1P_2 . Từ đó suy ra độ dốc của P_1P_2 là β .



Hình 6.15. Hệ quy chiếu chuyển động như thế đang bị dẹt đi dưới góc nhìn của hệ đứng yên

Từ các phân tích trên chúng ta thấy các trục tọa độ của hệ quy chiếu chuyển động (AP_1 và P_1P_2) bị méo đều và từ các liên hệ hình học giữa các trục tọa độ trong hai hệ quy chiếu có thể dễ dàng suy ra phép chuyển đổi giữa chúng (xem hình 6.15). Một đoạn thẳng đứng yên trong hệ ($\hat{x}, \hat{y}$) và có tọa độ điểm cuối là $\hat{x}$ sẽ vẽ nên theo thời gian một đường thẳng $\hat{x} = \text{const}$ cắt trục x tại điểm có tọa độ $\hat{x}/\gamma$ vì đó chính là độ dài $\hat{x}$ đo trong hệ (x, y) . Giả sử đường này cắt trục tung tại α . Vì độ dốc của đường $\hat{x} = \text{const}$ là $1/\beta$ nên $\alpha/(\hat{x}/\gamma) = 1/\beta$ suy ra $\alpha = \hat{x}/\beta\gamma$, từ đó phương trình của đường $\hat{x} = \text{const}$ là:

$$ct = \frac{1}{\beta}x - \frac{1}{\beta\gamma}\hat{x} \quad (6.4.9)$$

Tương tự một đồng hồ chỉ giá trị thời gian $\hat{ct}$ trong hệ ($\hat{x}, \hat{y}$) sẽ chỉ thời gian ct/γ trong hệ (x, y) . Biết độ dốc của đường $\hat{ct} = \text{const}$ là β chúng ta suy ra phương trình của nó là:

$$ct = \beta x + \frac{1}{\gamma}\hat{ct} \quad (6.4.10)$$

Với một chút biến đổi chúng ta sẽ được lại các phương trình của Lorentz (6.4.2), (6.4.4). Bằng cách cộng và trừ hai vế của (6.4.2) và (6.4.4) sau đó nhân hai vế của các phương trình thu được đó với nhau có thể dễ dàng suy ra rằng:

$$(\hat{ct})^2 - (\hat{x})^2 = (ct)^2 - x^2 \quad (6.4.11)$$

Đại lượng bất biến $(\hat{ct})^2 - (\hat{x})^2 = (ct)^2 - x^2$ được gọi là *bất biến Lorentz* và nó tương ứng với độ lớn r^2 của vectơ khoảng cách trong không-thời gian nếu vectơ này được hiểu là:

$$\vec{r} = (ix, iy, iz, ct) \text{ hay } \vec{r} = (x, y, z, ict) \quad (6.4.12)$$

với i là đơn vị ảo. Một vectơ có trục không gian hoặc thời gian là trục ảo sẽ có độ dài bất biến dưới mọi phép biến đổi Lorentz.

3. Phép cộng vận tốc

Do các tọa độ chuyển đổi theo phép biến đổi Lorentz nên khoảng vi phân của các tọa độ cũng tuân theo phép biến đổi này:

$$d\hat{x} = \gamma(dx - \beta cdt) \quad (6.4.13)$$

$$d\hat{y} = dy \quad (6.4.14)$$

$$d\hat{z} = dz \quad (6.4.15)$$

$$cd\hat{t} = \gamma(cdt - \beta dx) \quad (6.4.16)$$

Các vectơ vận tốc chuyển đổi sẽ thu được bằng cách chia hai vế của các phương trình (6.4.13), (6.4.14) và (6.4.15) cho (6.4.16).

$$\hat{u}_x = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{\gamma(dx - \beta cdt)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - V}{1 - \frac{Vu_x}{c^2}} \quad (6.4.17)$$

Tương tự:

$$\hat{u}_y = \frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} u_x\right)} \quad (6.4.18)$$

$$\hat{u}_z = \frac{d\hat{z}}{d\hat{t}} = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} u_x\right)} \quad (6.4.19)$$

Các trường hợp biên

(1) Vận tốc giữa các hệ quy chiếu V là rất nhỏ (giới hạn Galileo): lúc này $u_x \ll c$, $V \ll c$ và $\gamma \approx 1$, $1 - Vu_x/c^2 \approx 1$, do đó:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x = u_x - V \\ \hat{u}_y = u_y \\ \hat{u}_z = u_z \end{pmatrix} \quad (6.4.20)$$

Đây chính là các phép biến đổi Galileo thông thường.

(2) Vận tốc giữa các hệ quy chiếu V là rất lớn (giới hạn tương đối): lúc này $u_x \rightarrow c$ và chúng ta thấy rằng:

$$\hat{u}_x \rightarrow \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} = c \quad (6.4.21)$$

Vận tốc chuyển đổi hầu như không phụ thuộc vào vận tốc giữa các hệ quy chiếu V . Bạn đọc cũng có thể dễ dàng chỉ ra rằng:

$$\hat{u}_y \rightarrow u_y \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (6.4.22)$$

4. Vectơ 4-vận tốc và 4-động lượng

Có thể thấy các công thức chuyển đổi vận tốc rất phức tạp. Để tiện lợi hơn người ta định nghĩa một loại vận tốc dựa trên đạo hàm của quãng đường theo thời gian riêng τ , được gọi là vectơ 4-vận tốc u^μ . Thời gian riêng τ – mặc dù chỉ đo được trong một hệ quy chiếu gắn với chuyển động của bản thân vật, nhưng nó là thời gian mà mọi người quan sát đều có thể tính được và đồng ý với nhau.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (6.4.23)$$

Chỉ số $\mu = 0$ chỉ đạo hàm của ct :

$$u^0 = dx^0/d\tau = d(ct)/d\tau \quad (6.4.24)$$

Chỉ số $\mu = 1, 2, 3$ chỉ lần lượt đạo hàm của x, y, z :

$$u^1 = dx^1/d\tau = dx/d\tau \quad (6.4.25)$$

$$u^2 = dx^2/d\tau = dy/d\tau \quad (6.4.26)$$

$$u^3 = dx^3/d\tau = dz/d\tau \quad (6.4.27)$$

Như vậy vectơ 4-vận tốc được hiểu là đạo hàm theo thời gian riêng τ của vectơ 4-tọa độ $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$. Các vận tốc chuyển đổi giữa hai hệ quy chiếu (chuyển động theo phương x so với nhau với vận tốc V) sẽ là:

$$\hat{u}_x = \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \frac{\gamma(dx - \beta cdt)}{d\tau} = \gamma \left(\frac{dx}{d\tau} - \beta c \frac{dt}{d\tau} \right) = \gamma(u_x - \beta u^0) \quad (6.4.28)$$

$$\hat{u}_y = \frac{d\hat{y}}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = u_y \quad (6.4.29)$$

$$\hat{u}_z = \frac{d\hat{z}}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} = u_z \quad (6.4.30)$$

$$\hat{u}^0 = \frac{d\hat{x}^0}{d\tau} = \frac{\gamma(cdt - \beta dx)}{d\tau} = \gamma \left(\frac{cdt}{d\tau} - \beta c \frac{dx}{d\tau} \right) = \gamma(u^0 - \beta u_x) \quad (6.4.31)$$

Các thành phần của vectơ 4-vận tốc chuyển đổi hoàn toàn giống như các thành phần của vectơ tọa độ. Dùng kí hiệu $\gamma_u = dt/d\tau$ chúng ta có thể viết thành phần 0 (thời gian) thành:

$$u^0 = \frac{d(ct)}{d\tau} = \gamma_u c \quad (6.4.32)$$

Ở đây chúng ta sử dụng kí hiệu γ_u để chỉ chuyển động của bản thân vật và để phân biệt với γ của chuyển động giữa các hệ quy chiếu (với vận tốc V). Bạn đọc có thể dễ dàng chỉ ra:

$$(u^0, \vec{u}) = \gamma_u(c, \vec{v}) \quad (6.4.33)$$

Cần chú ý là theo định nghĩa thì vectơ vận tốc $\vec{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ trong khi $\vec{u} = (dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau)$. Trong phạm vi một hệ quy chiếu chúng ta có thể bỏ chỉ số u và viết hệ thức trên đơn giản thành $(u^0, \vec{u}) = \gamma(c, \vec{v})$. Độ dài của vectơ 4-vận tốc u^μ được hiểu như sau:

$$|u^\mu|^2 = (u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \quad (6.4.34)$$

Bước tiếp theo tất yếu của định nghĩa 4-vận tốc (6.4.23) là định nghĩa vectơ 4-động lượng:

$$p^\mu = mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.4.35)$$

Mối liên hệ với vectơ động lượng thông thường có thể biểu diễn thông qua (6.4.33):

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = m\gamma(c, \vec{v}) \quad (6.4.36)$$

Trong đó thành phần $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ chính là vectơ động lượng thông thường, còn ý nghĩa của thành phần $p^0 = \gamma mc$ sẽ được thấy rõ trong phần sáu. Từ (6.4.34) chúng ta có độ dài của vectơ 4-động lượng p^μ là:

$$|p^\mu|^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2 \quad (6.4.37)$$

Sự chuyển đổi giữa hai hệ quy chiếu của các vectơ 4-động lượng cũng tương tự như của các vectơ 4-vận tốc. Giả sử hai hệ quy chiếu $(ct, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ và (ct, x, y, z) chuyển động tương đối với vận tốc V theo phương x , chúng ta có:

$$\hat{p}^0 = \gamma(p^0 - \beta p^x) \quad (6.4.38)$$

$$\hat{p}^x = \gamma(p^x - \beta p^0) \quad (6.4.39)$$

$$\hat{p}^y = p^y \quad (6.4.40)$$

$$\hat{p}^z = p^z \quad (6.4.41)$$

Véc tơ 4-động lượng bảo toàn trong mọi hệ quy chiếu nếu nó bảo toàn trong một hệ quy chiếu.

5. Sự tương đương giữa năng lượng và khối lượng

Để hiểu được ý nghĩa của thành phần p^0 trong (6.4.36) chúng ta hãy xem xét trường hợp biên khi vận tốc chuyển động của vật v nhỏ hơn vận tốc ánh sáng c rất nhiều. Phân tích hệ số γ theo lũy thừa chúng ta được:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots\right) \quad (6.4.42)$$

Với những $v \ll c$ thì $\gamma \approx 1$ và thành phần $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ trở thành động lượng thông thường $\vec{p} = m \vec{v}$. Còn lại thành phần p^0 có thể được diễn giải như sau:

$$p^0 = \gamma mc \approx mc + \frac{1}{2}mv^2 \frac{1}{c} + \dots \quad (6.4.43)$$

Sau khi nhân hai vế của phương trình này với c chúng ta được:

$$p^0 c \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.4.44)$$

Thành phần $\frac{1}{2}mv^2$ chính là động năng của vật, còn mc^2 cũng có đơn vị của năng lượng, do đó $p^0 c$ có giá trị của năng lượng. Năng lượng trong quan niệm tương đối được định nghĩa bằng tích $p^0 c$:

$$E = p^0 c = \gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (6.4.45)$$

Hiển nhiên khi vật đứng yên ($\gamma=1$) thì:

$$E = E_0 = mc^2 \quad (6.4.46)$$

Giá trị năng lượng E_0 này được gọi là *năng lượng dừng* của vật và nó biểu hiện sự tương đương giữa khối lượng và năng lượng tàng trữ trong vật. Biểu thức này được Einstein đưa ra tháng 9 năm 1905 trong một bài báo ngắn. Lúc đó ông vẫn còn là nhân viên hạng 3 tại Sở đăng ký bản quyền, Thành phố Bern, Thụy Sĩ.

Thành phần $\frac{1}{2}mv^2$ trong (6.4.45) được hiểu là *động năng* tương đối:

$$T = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (6.4.47)$$

Bài tập áp dụng

1. Chỉ ra rằng phương trình sau thoả mãn đối với mọi hạt tự do:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 c^2 = m^2 c^4 = E_0^2 \quad (6.4.48)$$

Giải:

Thế $p^0 = E/c$ vào (6.4.37) sẽ được (6.4.48). Đây là một biểu thức thông dụng và rất quan trọng thể hiện mối liên hệ giữa động lượng thông thường của một hạt với năng lượng của nó khi không có ngoại lực tác dụng.

2. Chỉ ra rằng động năng tương đối (6.4.47) liên hệ với động lượng thông thường $|\vec{p}|$ của một hạt theo hệ thức:

$$T = \frac{|\vec{p}|^2}{(\gamma + 1)m} \quad (6.4.49)$$

Giải:

Từ (6.4.48) suy ra:

$$|\vec{p}|^2 c^2 = E^2 - E_0^2 = (E - E_0)(E + E_0) = T(\gamma + 1)mc^2 \quad (6.4.50)$$

Biểu thức này tương đương với (6.4.49). Với các vận tốc thấp thì $\gamma \approx 1$ nên $T \approx p^2/m$, như trong cơ học Newton.

6. Lực và véctơ 4-lực

Theo lý thuyết Newton, lực là biến thiên của động lượng theo thời gian. Dưới ngôn ngữ của cơ học tương đối, cần nói rõ hơn rằng thời gian ở đây là thời gian tọa độ t đo trong một hệ quy chiếu cho trước nào đó. Hãy thế $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ từ (6.4.36) vào định nghĩa lực chúng ta được:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} + m\vec{v} \frac{d\gamma}{dt} \quad (6.4.51)$$

Hãy triển khai $\frac{d\gamma}{dt}$ theo v :

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2c^2} \frac{dv^2}{dt} = \left(\frac{\gamma^3}{2c^2} \right) \frac{dv^2}{dt} \quad (6.4.52)$$

Áp dụng biểu thức véctơ (4.2.45) đối với dv^2 sẽ có kết quả:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \quad (6.4.53)$$

Kết hợp biểu thức này với (6.4.51) chúng ta có kết quả cuối cùng:

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} + m \vec{v} \frac{\gamma^3}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \quad (6.4.54)$$

Lực theo phân tích này chỉ song song với gia tốc trong hai trường hợp duy nhất khi $\vec{v} \perp \vec{a}$ và khi $\vec{v} // \vec{a}$. Hãy xét lần lượt từng trường hợp.

Nếu $\vec{v} // \vec{a}$ chuyển động là theo đường thẳng, nhanh dần hoặc chậm dần, chẳng hạn chuyển động rơi tự do, khi đó:

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} + \gamma^3 m \frac{v^2}{c^2} \vec{a} = \gamma^3 m \vec{a} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma^3 m \vec{a} \quad (6.4.55)$$

Nếu $\vec{v} \perp \vec{a}$ thì $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ và lực có dạng:

$$\vec{F} = \gamma m \vec{a} \quad (6.4.56)$$

Quỹ đạo chuyển động trong trường hợp này là một đường tròn và gia tốc hướng tâm được xác định là $a = v^2/r$, do đó:

$$\vec{F} = \gamma m \frac{v^2}{r} \vec{e}_a, \text{ hay } F = \gamma m \frac{v^2}{r} \quad (6.4.57)$$

Công thức chuyển đổi lực giữa hai hệ quy chiếu $(ct, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ và (ct, x, y, z) là khá phức tạp nhưng lại có thể được dẫn giải tương đối dễ dàng dựa vào chuyển đổi Lorentz của thời gian (6.4.4) và của véctơ 4-động lượng (6.4.39) – (6.4.41). Bạn đọc có thể tự xác lập các hệ thức chuyển đổi này bằng cách thay thế bốn biểu thức trên vào biểu thức sau:

$$\vec{\tilde{F}} = \frac{d\vec{\tilde{p}}}{d\tilde{t}} = \frac{d\vec{\tilde{p}}/dt}{d\tilde{t}/dt} = \left(\frac{\frac{d}{dt} \hat{p}_x}{\frac{d}{dt} \hat{t}}, \frac{\frac{d}{dt} \hat{p}_y}{\frac{d}{dt} \hat{t}}, \frac{\frac{d}{dt} \hat{p}_z}{\frac{d}{dt} \hat{t}} \right) \quad (6.4.58)$$

Để cho gọn chúng ta chỉ chép lại kết quả ở đây:

$$\hat{F}_x = \frac{F_x - \beta P/c}{1 - \beta u_x/c}, \quad \hat{F}_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta u_x/c)}, \quad \hat{F}_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - \beta u_x/c)} \quad (6.4.59)$$

Trong các công thức này thì P chỉ sự thay đổi của năng lượng theo thời gian, tức là công suất $P = dE/dt$. Tương tự như đối với động lượng, chúng ta cũng có thể định nghĩa 4 đại lượng véctơ theo thời gian riêng, được gọi là véctơ 4-lực:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \quad (6.4.60)$$

Để thấy véctơ 4-lực thỏa mãn hệ thức sau:

$$F^\mu = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{d(E/c)}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \gamma \left(\frac{P}{c}, \vec{F} \right) \quad (6.4.61)$$

Hiển nhiên chúng ta cũng có véctơ 4-gia tốc:

$$F^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} = ma^\mu \rightarrow a^\mu = \frac{F^\mu}{m} = \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (6.4.62)$$

Bài tập áp dụng

1. Sử dụng phép tính véctơ để chỉ ra rằng:

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = d(v^2)/2 \quad (6.4.63)$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{r} = v^2 dt \quad (6.4.64)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = mc^2 d\gamma \quad (6.4.65)$$

2. Sử dụng các kết quả trên để chứng minh rằng công thực hiện được của chất điểm bằng độ suy giảm động năng của nó (định lý công-năng lượng):

$$A = \gamma mc^2 - mc^2 = E - E_0 = T \quad (6.4.66)$$

Giải:

Để ý rằng $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, cho nên:

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot d\vec{r} = d\vec{v} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = d\vec{v} \cdot \vec{v} \quad (6.4.67)$$

Áp dụng (4.2.45) chúng ta có ngay kết quả (6.4.63). Còn biểu thức (6.4.64) thì bắt nguồn hiển nhiên từ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ nên $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$.

Để chứng minh biểu thức thứ ba hãy thế lực từ (6.4.54) vào (6.4.65) và sử dụng hai kết quả trước:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \gamma m (\vec{a} \cdot d\vec{r}) + m (\vec{v} \cdot d\vec{r}) \frac{d\gamma}{dt} = \gamma m \frac{d(v^2)}{2} + mv^2 d\gamma \quad (6.4.68)$$

Theo (6.4.52) thì thành phần $d(v^2)$ chính là $\frac{2c^2}{\gamma^3} d\gamma$ nên:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \gamma m \frac{c^2}{\gamma^3} d\gamma + mv^2 d\gamma = mc^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) d\gamma = mc^2 d\gamma \quad (6.4.69)$$

Theo định nghĩa, công là tích phân:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} mc^2 d\gamma = mc^2 (\gamma_2 - \gamma_1) = \gamma_2 mc^2 - \gamma_1 mc^2 \quad (6.4.70)$$

Cho điểm xuất phát ban đầu có vận tốc bằng 0, ta được điều cần chứng minh:

$$A = \gamma mc^2 - mc^2 = E - E_0 = T \quad (6.4.71)$$

Áp dụng đối với trường lực hấp dẫn Newton, biểu thức này cho phép xác định biến thiên của γ theo độ cao. Giả sử một vật rơi từ độ cao ∞ tới độ cao r (hãy coi vận tốc tại ∞ bằng 0, tức là $\gamma=1$), theo (6.4.71) chúng ta có động năng bằng thế năng tại r :

$$(\gamma - 1)mc^2 = -U(r) = \frac{GMm}{r} \rightarrow \gamma = 1 + \frac{GM}{rc^2} \quad (6.4.72)$$

Sự phụ thuộc này của γ vào r cho thấy sự trôi đi không đồng đều của thời gian tại các độ cao khác nhau trong trường hấp dẫn, một hiệu ứng được quen gọi là *sự giãn ra của thời gian trong trường hấp dẫn*. Do $t=\gamma\tau$ nên các đồng hồ đặt ở các độ cao thấp sẽ chạy chậm hơn các đồng hồ đặt tại các độ cao lớn hơn. Hệ thức (6.4.72) đã được kiểm chứng nhiều lần, trong thí nghiệm của Vessot và cộng sự [28] năm 1980 người ta đã đạt độ tin cậy khá cao ($2/10^4$).

■

- [1] Galileo Galilei Linceo (1564–1642), "*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, intorno à due nuoue Scienze*", Grand Duca di Tofcani, Appreffo gli Elfevirii 1638. Bản dịch tiếng Anh "*Dialogue Concerning Two New Sciences*" của Henry Crew và Alfonso de Salvio, Macmillan 1914. Bản dịch này có chú giải của người dịch.
- [2] Isaac Newton (1642–1727), "*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*", Cambridge, Trinity College 1686, 1713, 1726. Bản dịch tiếng Anh "*The Mathematical Principles of Natural Philosophy*" của Andrew Motte, 1729. Đây là bản dịch không chú giải.
- [3] R. Abraham, "*Foundation of Mechanics*", W.A. Benjamin, Inc., New York, NY, 1967.
- [4] N. M. Swerdlow and O. Neugebauer, "*Mathematical astronomy in Copernicus's De revolutionibus Part 1, 2*", Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 10, New York–Berlin, 1984.
- [5] J. Rudnicki, "*Nicholas Copernicus (Nikolaj Kopernik) 1473–1543*", London, 1943.
- [6] Galileo Galilei, "*Siderus Nuncius*". *The Starry Messenger*, Trans. by Albert Van Helder, Chicago 1989. Hồi ký của Galileo về các phát minh liên quan đến kính viễn vọng như núi trên Mặt Trăng, các mặt trăng sao Mộc, các chu kỳ bán nguyệt của sao Thủy v.v...
- [7] Holton & Roller, "*Foundations of Modern Physical Science*", Addison–Wesley Publishing Company, pages 551–552 (1958).
- [8] R. P. Feymann, R.B. Leighton, M. Sands: "*The Feymann lectures on physics*", Addison–Wesley Publishing Co., 1966. Slovenský predklad: "Feymanove prednášky z fyziky I–V", Alfa Bratislava, 1980.
- [9] Giorgio de Santillana, "*The Crime of Galileo*", University of Chicago Press, Chicago, 1955 pp.310
- [10] Albert Einstein, Leopold Infeld, "*Physik als Abenteuer der Erkenntnis*" (Vật lý – Cuộc phiêu lưu của tri thức), A.W. Sijhoffs Uitgeversmaatschappij N.V., Leidene 1938. Slovenský predklad: "Fyzika ako Dobrodružstvo", Českoslov. spol. pre šírenie pol. a ved. pozn., Osveta Martin 1958.

- [11] W.W Rouse Ball, "*A short account of the history of Mathematics*", MacMillan, London 1988, Reprint Dover, New York, NY, 1960.
- [12] J.L.E. Dreyer, "*Tycho Brahe*", Edinburgh 1890.
- [13] Arthur Koestler, "*The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*", Reprint Penguins Book, 1990.
- [14] Howard Eves, "*An Introduction to the History of Mathematics*", 3rd Ed., Holt, Rinehart & Winston, 1969. Bản dịch tiếng Việt: "Giới thiệu lịch sử toán học" do Trần Tất Thắng dịch, NXB KH KT TPHCM, 1993.
- [15] P.F. Collier, "*French and English philosophers : Descartes, Rousseau, Voltaire, Hobbes : with introductions and notes*", New York, c1910. Series: The Harvard classics v. 34.
- [16] S. Hawkins, "*A brief history of time*", Bantam Press, 1985. Bản dịch tiếng Việt "Lược sử thời gian", NXB KHKH Hà Nội, 1995.
- [17] Martins, Roberto de Andrade, "*Huygens' reaction to Newton's gravitational theory*", in trong J.V.Field & Frank A.J.L. James (eds.) "*Renaissance and revolution: Humanists, scholars, craftsmen and natural philosophers in early modern Europe*", Cambridge Univ. Press, 1993, pp. 203-13
- [18] P.F. Collier, "*French and English philosophers : Descartes, Rousseau, Voltaire, Hobbes : with introductions and notes*", New York, c1910. Series: The Harvard classics v. 34.
- [19] Eric J. Aiton, "*The vortex theory of planetary motion*", London, 1974.
- [20] P.A.M. Dirac, "*Directions in Physics*", ed. by H. Hora and J.R. Shepanski, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [21] W. Pauli, Jr. "*Über das Wasserstoffspektrum von Standpunkt der neuen Quantenmechanik*", Z. Phys. 36, 336 (1926); bản dịch tiếng Anh "*On the Hydrogen Spectrum from the Standpoint of the New Quantum Mechanics*", Sources of Quantum Mechanics, ed. by B.L. van der Waerden, Dover Publications (New York, 1967).
- [22] P.G.L. Leach and G.P. Flessas, "*Generalisations of the Laplace-Runge-Lenz Vector*", J. of Nonlinear Math. Physics, Vol.10, No.3 (2003), 340-423
- [23] Herbert Goldstein, "*Prehistory of the Runge-Lenz vector*", Am. J. Phys. 43, 735 (1975)

- [24] A. Michelson, Morley, "*The Americal Journal of Science*", No.3, Vol.34, p. 333.
- [25] R. Paul Bickerstaff, "*Claustrophobic Physics: An introduction to the theory of relativity and Poincaré symmetry*", Univ. of Idaho, Moscow USA, 1996-1999.
- [26] T. Alvager, F.J.M.Farley, J.Kjellman và I.Wallin, "*Test of the Second Postulate of Relativity in the GeV Region*", Phys.Lett., 12, 260-262 (1964)
- [27] David Bohm, "*The Special Theory of Relativity*", W.A.Benjamin, Inc., New York, NY, 1965.
- [28] R.F.C. Vessot, M.W. Levine, E.M. Mattison et al., "*Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser*", Phys.Rev. Lett. 45, 2081-2084 (1980).

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP sách ĐH-DN TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :

TRẦN NGỌC KHÁNH

Trình bày bìa :

BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :

TRẦN THU HƯƠNG

CƠ HỌC ĐẠI CƯƠNG

từ Aristotle đến Newton

Mã số : 7K653M6

In 1.000 quyển, khổ 16 x 24cm tại Xí nghiệp In ACS Việt Nam.

Số 10 Phạm Văn Đồng - Kiến Thụy - Hải Phòng.

Số in : 134. Số XB : 54-2006/CXB/12-32/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2006.



CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN - HÀ NỘI

**TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC,
TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP - DẠY NGHỀ
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

1	Vô tuyến điện tử	Ngọc Văn An
2	Giáo trình Cơ học	Bạch Thành Công
3	Tuyển tập các bài tập Vật lý đại cương (Tập 1, 2)	Nguyễn Quang Hậu Ngô Quốc Quýnh
4	Vật lý kỹ thuật	Đặng Hùng
5	Vật lý siêu dẫn và ứng dụng	Nguyễn Huy Sinh
6	Đo lường điện và cảm biến đo lường	Nguyễn Văn Hoà
7	Tuyển tập các đề thi Tuyển sinh chuyên PTTH môn Vật lý	Lê Thanh Hoạch Phạm Văn Bền Đặng Đình Tới
8	Tuyển tập đề thi Olympic Vật lý các nước Tập 1	Vũ Thanh Khiết

Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục.

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên, 187B Giảng Võ, 23 Tràng Tiền
Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh
Tại Tp. Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng - Quận 5



Giá : 23.000đ