TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH I

Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến

DÙNG CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT, CAO ĐẲNG, ĐẠI HỌC, SAU ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN
KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRẦN BÌNH

GIẢI TÍCH I

PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

DÙNG CHO SINH VIÊN KỸ THUẬT,
CAO ĐẲNG, ĐẠI HỌC, SAU ĐẠI HỌC

In lần thứ 9, có sửa chữa và bổ sung

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI - 2009

Lời giới thiệu

Trong những năm gần đây yêu cầu về giảng dạy và học tập môn toán cao cấp trong các Trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học) ngày càng cấp bách về số lượng và chất lượng. Các sinh viên kỹ thuật cần nhiều giáo trình toán cao cấp theo hướng hiện đại về lý thuyết cũng như bài tập. Các thầy giáo cũng cần nhiều bộ giáo trình như thế để tham khảo, chuẩn bị bài giảng và chọn cho mình một chiến lược giảng dạy thích hợp. Trong lúc đó số lượng các giáo trình về toán cao cấp dành cho các trường kỹ thuật chỉ đếm được trên đầu ngón tay. Nhiều bộ giáo trình về toán cao cấp đã được xuất bản hiện nay chưa đạt trình độ cao, sâu sắc, đáp ứng được yêu cầu học toán và dạy toán cho các kỹ sư trong thời đại khoa học kỹ thuật và thông tin phát triển bùng nổ như hiện nay.

Giáo trình này của tác giả ra đời đáp ứng được nhiều nhu cầu hết sức cấp bách hiện nay về mặt giáo trình toán cao cấp cho sinh viên các Trường Đại học kỹ thuật (Cao đẳng, Đại học và sau Đại học). Về toàn cục nội dung của giáo trình này bao gồm các vấn đề cơ bản và quan trọng nhất của toán học cao cấp cần thiết cho một kỹ sư : đó là những cơ sở quan trọng của phép tính vi phân của hàm một biến và hàm nhiều biến, các định lý và phương pháp cơ bản của phép tính tích phân của hàm một biến và nhiều biến, cơ sở của giải tích vecteur, hình học vi phân, lý thuyết cơ bản về phương trình vi phân, chuỗi hàm, chuỗi Fourier và tích phân Fourier. Các thông tin đề cập đến các vấn đề trên của cuốn sách là cơ bản, đảm bảo tính chính xác về nội dung toán học. Các chứng minh đưa ra đều ngắn gọn, chặt chẽ.

Đặc biệt phần lý thuyết về hàm nhiều biến là một vấn đề rất tinh tế trong giải tích toán học, vì ở đây nhiều tình huống xảy ra phức tạp hơn nhiều ở trong Topo nhiều chiều so với Topo một chiều. Do nắm vững các kiến thức cơ bản của giải tích toán học dựa trên kinh nghiệm giảng dạy toán học cho các Trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, tác giả đã trình bày toàn bộ giáo trình và nói riêng nội dung của phần này rất đầy đủ và hiện đại (ví dụ phần đề cập đến cực trị của hàm nhiều biến, tác giả đã sử dụng nhuần nhuyễn các định lý về dạng toàn phương để chứng minh các điều kiện đủ của cực trị).

Giáo trình được viết một cách sáng sủa và chặt chẽ theo một dây chuyền tư duy logigue, đó là hai yếu tố rất khó trong khi đề cập đến một vấn đề về toán học. Thông thường để vấn đề đặt ra đảm bảo tính chặt chẽ và chính xác của toán học thì người đọc sẽ rất khó hiểu hoặc phải có một khả năng tư duy tốt, nói cách khác là một thói quen tư duy toán học. Ở đây tác giả đã kết hợp được hai điều nói trên : vẫn không mất tính chính xác mà vẫn đảm bảo tính dễ hiểu cho sinh viên (ví dụ phần xây dựng hệ tiên đề về số thực, phần tích phân phụ thuộc tham số, tích phân suy rộng ...).

Giáo trình cũng đề cập đến một số vấn đề khá hiện đại của toán học mà trước đây trong các giáo trình về toán cao cấp ít đề cập tới như khái niệm không gian métrique, hội tụ đều, chuỗi Fourier tổng quát v.v... Ngoài ra tác giả còn đưa vào các phần bổ xung rất cần thiết cho người kỹ sư như các phần : toán tử Laplace giải phương trình vi phân, các bài toán cơ bản của vật lý toán học (truyền nhiệt, truyền sóng v.v...), phần phụ lục các công thức cơ bản của giải tích toán học. Việc mạnh dạn đưa vào giáo trình các vấn đề cơ bản nhất của toán học như thế này là một việc làm rất cần thiết để nâng cao chất lượng đào tạo người kỹ sư, vì ngày nay người kỹ sư cần toán học ở mức độ sâu sắc và hiện đại trong quá trình học tập để tiếp cận với công nghệ và tin học hiện đại.

Hà nội, ngày 30 tháng 4 năm 1997

GS. TSKH. Lê Hùng Sơn

Lời nói đầu

Trong những năm vừa qua, Khoa Toán trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã nghiên cứu đề tài: "**Xây dựng nội dung chương trình toán cao cấp cho các ngành kỹ thuật trên cơ sở ở trung học, học sinh đã học toán theo chương trình mới (12 năm)**" và đã đề ra được một chương trình toán cao cấp theo yêu cầu đó.

Qua giảng dạy môn giải tích ở các Trường Đại học kỹ thuật trong và ngoài nước trong nhiều năm qua, và dựa theo chương trình mà Khoa Toán đã đề ra, tôi đã viết giáo trình này, nhằm mục đích giúp các sinh viên kỹ thuật có tài liệu tham khảo, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo, để trình độ toán của người kỹ sư nước ta hoà nhập được vào khu vực và Quốc tế.

Trong phần đầu của giáo trình, vì sinh viên đã được học một số nội dung ở trung học, nên mục đích là hệ thống hoá và nâng lên một mức độ tương đối hiện đại (Phương pháp tiên đề về số thực) nhằm giúp sinh viên có một tư duy logique chặt chẽ trong việc học toán và các ngành khác.

Trong các phần sau của giáo trình, dựa trên cơ sở phần đầu đã trình bày, giáo trình sẽ cung cấp những kiến thức cơ bản của giải tích từ thấp lên cao phù hợp với yêu cầu của người kỹ sư trong hiện tại và tương lai.

Giáo trình này có thể dùng làm tài liệu tham khảo cho các sinh viên kỹ thuật ở cả ba đối tượng : Cao đẳng, Đại học và sau Đại học.

Giáo trình được chia thành [illegible]

Tập I : Phép tính vi phân và tích phân của hàm một biến (Giải tích I)

Tập II : Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến

Phương trình vi phân và lý thuyết về chuỗi (Giải tích II + III)

Các phần nâng cao và các bài tập khó có đánh dấu *.

Tôi rất cám ơn Hội đồng khoa học Khoa Toán Trường Đại học Bách khoa Hà nội và các bạn đồng nghiệp trong khoa đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi viết giáo trình này, nhất là các GS, PGS Trần Xuân Hiển, Đặng Khải, Lê Hùng Sơn, Dương Quốc Việt đã đọc rất kỹ bản thảo và cho nhiều ý kiến quí báu.

Giáo trình đã in đến lần thứ 8 vẫn không tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc cho nhiều ý kiến.

Tác giả

MỤC LỤC

Chương 3

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Chương 4

CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ÁP DỤNG

Chương 5

TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Chương 6

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Chương 7

HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

Chương 1

TẬP HỢP CÁC SỐ THỰC

§1. HỆ TIÊN ĐỀ CỦA R

1.1. Đặt vấn đề

Do nhu cầu thực tiễn, đầu tiên loài người có tập hợp các số tự nhiên, rồi có tập hợp các số nguyên, các số hữu tỉ, v.v....

Ở trung học ta đã định nghĩa: số hữu tỉ là số có dạng p/q, trong đó p, q là các số nguyên, $q \neq 0$. Sau khi có tập hợp các số hữu tỉ, một bài toán lớn đã đặt ra: Cho a là 1 số hữu tỉ dương ($a > 0$), n là một số tự nhiên thì có tồn tại số hữu tỉ x sao cho $x^n = a$ (1).

Rõ ràng, nói chung thì có thể không tồn tại số hữu tỉ x thoả mãn (1).

Chẳng hạn khi $a = 2$, $n = 2$ thì không tồn tại số hữu tỉ x để $x^2 = 2$. Thực vậy, giả sử ngược lại có số hữu tỉ $x = p/q$ (p/q là 1 phân số tối giản) để $x^2 = 2$ hay $p^2/q^2 = 2$ hay $p^2 = 2q^2$, nghĩa là p^2 là một số chẵn, suy ra p là một số chẵn, mặt khác p/q là tối giản, nên q là một số lẻ, vì p là chẵn: $p = 2m$ ta có $4m^2 = 2q^2$: chứng tỏ q^2 lại là một số chẵn và q là một số chẵn. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều khẳng định trên là đúng. Do đó, người ta đã mở rộng tập hợp số hữu tỉ thành một tập hợp số gọi là tập hợp các số thực, trong tập hợp các số thực, ngoài các số hữu tỉ, còn có những số không phải hữu tỉ chẳng hạn: số x mà $x^2 = 2$ hay số π xuất hiện khi đo độ dài đường tròn... Để có một khái niệm hiện đại về tập hợp các số thực, sau đây ta sẽ định nghĩa tập hợp đó theo phương pháp tiên đề.

1.2. Hệ tiên đề của tập hợp các số thực *R*

Tập hợp các số thực, ký hiệu là R là tập hợp có các phần tử gọi là các số thực, thoả mãn các tiên đề sau:

I. Trong R có xác định hai phép toán gọi là phép cộng (+) và phép nhân (.) sao cho:

$\forall a, b \in R$: $a + b \in R$, $ab \in R$, $a + b$, ab là duy nhất, gọi $a + b$ là tổng, ab là tích của a và b. $\forall a, b \in R$: $a + b = b + a$, $ab = ba$

$\forall a, b, c \in R$: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a.b).c = a(bc)$,

$a(b + c) = ab + ac$

II. $\forall$ ***a,b*** $\in$ ***R có một phần tử duy nhất x*** $\in$ ***R sao cho: a + x = b***

x gọi là hiệu của b và a, ký hiệu $x = b - a$ (đọc là b trừ a). Đặc biệt khi $b = a$ thì x gọi là số không, ký hiệu $x = 0$.

Như vậy $\forall a \in R : a + 0 = a$, nếu $a + b = 0$ thì b gọi là phần tử đối của a, ký hiệu $b = - a$ như vậy $\forall a \in R, a + (-a) = 0$.

III. $\forall$ ***a,b*** $\in$ ***R (a*** $\neq$ ***0;***$\neq$***: khác) có một phần tử duy nhất x*** $\in$ ***R sao cho a. x = b, x gọi là thương của b và a, ký hiệu x = b/a.***

Đặc biệt khi $b = a$ thì x gọi là đơn vị hay số một

ký hiệu: 1, như vậy, $\forall a \in R : a.1 = a$.

Nếu $ab = 1$ ($a \neq 0$) thì b gọi là số nghịch đảo của a

Ký hiệu $b = a^{-1}$ như vậy:

$\forall a \in R \quad a \neq 0 : a.a^{-1} = 1$

IV. Trong R có xác định một quan hệ gọi là quan hệ thứ tự:

nhỏ hơn hoặc bằng (≤) hay lớn hơn hoặc bằng (≥) sao cho:

$\forall a,b \in R$ thì hoặc $a \leq b$, hoặc $a \geq b$

$\forall a,b \in R : a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

$\forall a,b,c \in R : a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

$\forall a,b,c \in R : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

$\forall a,b \in R : a \geq 0, b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Khi $a \leq b$, $a \neq b$ thì viết $a < b$ hoặc $b > a$

(đọc là a nhỏ hơn b, hoặc b lớn hơn a)

Số $a > 0$ gọi là số dương, $a < 0$ gọi là số âm.

Đặt $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$

$|a|$ gọi là trị số tuyệt đối của a

Rõ ràng: $\forall a \in R$

$-|a| \leq a \leq |a|$ (1)

$|a| \leq M \ (M > 0) \Leftrightarrow -M \leq a \leq M$ (2)

$\forall a,b \in R : \quad |a + b| \leq |a| + |b|$ (3)

$|a - b| \geq |a| - |b|$ (4)

$$|ab| = |a| \cdot |b| ; \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (5)$$

Thực vậy, chẳng hạn:

- Xét (2), nếu $a \geq 0$ thì $|a| \leq M$ suy ra $a \leq M$, nếu $a < 0$ thì suy ra $-a \leq M$ hay $a \geq -M$. Vậy $-M \leq a \leq M$, ngược lại từ $-M \leq a \leq M$ suy ra $a \leq M$ và $-a \leq M$ hay $|a| \leq M$

Xét (3). Theo (1) $-|a| \leq a \leq |a|$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

Cộng vế với vế: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

Vậy: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Tập hợp các phần tử của R:

$N = \{1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1...\}$

gọi là tập hợp các số tự nhiên hay tập hợp các số nguyên dương.

Tập hợp $\{-1, -2, -3...\}$ gọi là tập hợp các số nguyên âm.

Tập hợp $Z = \{... -3, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ gọi là tập hợp các số nguyên.

Tập hợp $Q = \{x = \frac{p}{q} ; \forall p, q \in Z, q \neq 0\}$ gọi là tập hợp các số hữu tỉ.

Rõ ràng: $N \subset Z \subset Q \subset R$

Tập hợp các số hữu tỉ Q có một tính chất quan trọng sau đây, mà tập hợp các số nguyên Z không có gọi là tính chất trù mật của Q:

$\forall a, b \in Q ; a < b \Rightarrow \exists r \in Q : a < r < b$

Thực vậy, chẳng hạn có thể lấy $r = \frac{a+b}{2}$ thì $a < r < b$

V. Tiên đề Supremum:

Cho $A \subset R$, tập hợp A gọi là bị chặn trên (dưới) nếu:

$\exists c \in R, \forall x \in A : x \leq c \ (\geq c)$

Số c gọi là cận trên (dưới) của A

Tập hợp A gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên,vừa bị chặn dưới, nghĩa là

$\exists a, b \in R ; \forall x \in A : a \leq x \leq b$

hay $\exists c \in R, c > 0 ; \forall x \in A : |x| \leq c$

Theo định nghĩa thì cận trên (dưới) của A có thể thuộc A hoặc không, nếu $c \in A$ thì c gọi là phần tử lớn (nhỏ) nhất của A.

Rõ ràng một tập hợp A bị chặn trên (dưới) có thể có nhiều cận trên (dưới) vì nếu c là một cận trên (dưới) của A thì $c' > c$, ($c' < c$) cũng là một cận trên(dưới) của nó.

Cận trên (dưới) nhỏ (lớn) nhất của A (nếu có) gọi là cận trên (dưới) đúng hay Sumpremum (infimum) của A.

Ký hiệu: Sup A (inf A)

Rõ ràng M = Sup A (m = inf A) khi và chỉ khi:

1°. $\forall x \in A, x < M$ ($\geq m$)

2°. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon$ ($< m + \varepsilon$)

Vì nếu không thì $\exists \varepsilon > 0 ... \forall x \in A, x \leq M - \varepsilon$ ($\geq m + \varepsilon$)

Khi đó M (m) không phải lớn (nhỏ) nhất, vì M (m) cũng là một cận trên (dưới) của A nên nếu M $(m) \in A$ thì nó là phần tử lớn (nhỏ) nhất của A.

Rõ ràng $M(m)$ là duy nhất, vì nếu có $M' \neq M$, M' = Sup A thì hoặc $M' < M$ khi đó M không phải nhỏ nhất, hoặc $M' > M$ khi đó M' cũng không phải nhỏ nhất (tương tự đối với m).

Một vấn đề lớn đặt ra: khi nào một tập hợp có Sup (inf)?

Đối với tập hợp các số hữu tỉ Q có những bộ phận có thể không có Sup (inf) thuộc Q.

Chẳng hạn: xét các tập hợp số hữu tỉ

$$A = \{x : x \in Q, x > 0 : x^2 < 2\}$$

$$B = \{x : x \in Q, x > 0 : x^2 > 2\}$$

Rõ ràng: $\forall x \in Q$ $(x > 0)$ thì hoặc $x \in A$ hoặc $x \in B$

Vì như đã biết không có $x \in Q : x^2 = 2$

$\forall x \in A, \forall x' \in B$ thì $x < x'$, vì từ $x^2 < 2 < x'^2$ và $x, x' > 0$ suy ra $x < x'$.

Do đó, A (B) là tập hợp bị chặn trên (dưới) chẳng hạn bởi một phần tử bất kỳ $x' \in B$ $(x \in A)$.

Có thể chứng minh A (B) không có Sup (inf) $\in Q$

* Thực vậy, giả sử ngược lại có M = Sup A, m = inf $A \in Q$ thì có thể chứng minh $m = M$ và $M^2 = 2$, nhưng không có $M \in Q$, $M^2 = 2$ nên A (B) không có Sup (inf) $\in Q$.

Để chứng minh $m = M$, ta giả sử ngược lại $m \neq M$ khi đó hoặc $M < m$ hoặc $M > m$. Xét $M < m$, theo tính chất trù mật của Q thì $\exists r \in Q : M < r < m$ nhưng theo trên: hoặc $r \in A$ hoặc $r \in B$, nếu $r \in A$ thì $M \neq$ sup A, nếu $r \in B$ thì m $\neq$ inf B, điều này mâu thuẫn với giả thiết, xét $M > m$ ta cũng đi đến mâu thuẫn. Thực vậy, theo tính chất 2° của Sup (inf) thì

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > M - \varepsilon$

$\exists x' \in B, x' < m + \varepsilon$

suy ra: $x' - x < m - M + 2\varepsilon$ lấy $\varepsilon = \dfrac{M - m}{2}$ thì

$x' - x < 0$ hay $x' < x$; vô lý

Để chứng minh $M^2 = 2$, ta cũng giả sử ngược lại $M^2 \neq 2$ khi đó hoặc $M^2 < 2$ hoặc $M^2 > 2$; xét $M^2 < 2$ theo tính chất 1^o của Sup (inf) thì $\forall x \in A, \forall x' \in B$:

$x \leq M < x'$ hay $x^2 \leq M^2 \leq x'^2$ mặt khác theo giả thiết:

$x^2 < 2 < x'^2$

do đó: $x'^2 - x^2 \geq 2 - M^2$ hay $x' - x \geq \dfrac{2 - M^2}{x + x'} > 0$ (1)

Nhưng theo tính chất 2^o của Sup (inf) thì $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists x' \in B$:

$M - \varepsilon/2 < x < x' < M + \varepsilon/2$

hay $x' - x < (M + \varepsilon/2) - (M - \varepsilon/2) = \varepsilon$

Lấy $\varepsilon = \dfrac{2 - M^2}{x + x'}$ thì $x' - x < \dfrac{2 - M^2}{x' + x}$

Điều này mâu thuẫn với (1), tương tự, nếu $M^2 > 2$ ta cũng đi đến mâu thuẫn. Vậy $M^2 = 2$.

Bây giờ ta xét $A, B \subset R$ và công nhận rằng: $M = \text{Sup}\, A = \inf B \in R$ thì ta suy ra được: có 1 số duy nhất $M \in R, M \notin Q, M^2 = 2$, nghĩa là ta đã mở rộng tập hợp các số hữu tỉ thành tập hợp số thực R, trong đó có một số thực duy nhất M không phải hữu tỉ: $M^2 = 2$, M gọi là căn bậc 2 của 2 ký hiệu $M = \sqrt{2}$. Nhưng chỉ mở rộng tập hợp các số hữu tỉ như vậy thì vẫn chưa đáp ứng được nhiều yêu cầu trong thực tiễn, vì có những số có thực trong thực tiễn nhưng không phải là số hữu tỉ và số $\sqrt{2}$. Chẳng hạn số π xuất hiện khi đo độ dài đường tròn.

Do đó để tập hợp R đáp ứng được đòi hỏi trên người ta đã công nhận tiên đề sau đây (bao hàm đều công nhận A, B có Sup (inf) $\in R$)gọi là tiên đề Supremum.

Mọi tập hợp A ⊂ R, A ≠ ∅ (tập hợp trống) ***bị chặn trên đều có Supremum ∈ R***

xét $A' = \{x' : -x' = x \in A\}$ thì $\inf A = -\text{Sup}\, A'$

Do đó tiên đề trên tương đương với mệnh đề:

Mọi tập hợp A ⊂ R, A ≠ ∅ bị chặn dưới đều có infimum ∈ R

Theo trên và từ tiên đề này suy ra:

Tồn tại một số duy nhất $x \in R, x > 0, x \notin Q, x^2 = 2$

Tổng quát: có thể chứng minh (tương tự như trên) cho $a \in R$, $a > 0$, $n \in N$ thì tồn tại một số thực duy nhất $x \in R$, $x > 0$: $x^n = a$. x có thể là số hữu tỉ hoặc không, gọi là căn bậc n của a, ký hiệu $x = \sqrt[n]{a}$

Người ta cũng chứng minh được tồn tại những số thực không phải hữu tỉ khác, như số π...

Một số thực không phải là số hữu tỉ, gọi là số vô tỉ, như vậy các số $\sqrt{2}$, π, ... là các số vô tỷ, nếu gọi I là tập hợp các số vô tỷ thì : $R = Q \cup I$.

Như trên đã thấy: tập hợp các số hữu tỷ Q cũng thoả mãn các tiên đề từ I đến IV, nhưng không thoả mãn tiên đề V, nghĩa là giữa các phần tử của Q còn những chỗ "trống". Tiên đề V đã cho phép lấp những chỗ "trống" đó bằng các số vô tỷ để Q trở thành R. Điều này biểu thị một tính chất gọi là tính chất liên tục của R, vì từ tiên đề V suy ra tính chất này nên V cũng gọi là tiên đề liên tục của R.

Vì tập hợp các số thực R có tính chất liên tục nên tập hợp đó cũng gọi là đường thẳng hay trục số thực R. Mỗi số thực gọi là 1 điểm trên đường thẳng đó. Do đó nói số x hay điểm x là như nhau. Nếu $a < b$ thì ta nói a ở bên trái b hay b ở bên phải a nếu:

$a < c < b$ hay $b < c < a$ thì c gọi là ở khoảng giữa a, b.

Các bộ phận của R:

$\{x: a \le x \le b\}$, $\{x: a < x < b\}$

$\{x: a \le x < b\}$; $\{x: a < x \le b\}$

gọi lần lượt là đoạn hay khoảng đóng, khoảng hay khoảng mở, nửa đoạn hay nửa khoảng nửa đóng nửa mở và ký hiệu lần lượt là:

$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ $(a, b]$

Hiệu $b - a$ gọi là độ dài của đoạn hay khoảng a, b; cho $x_0 \in R$, ta gọi lân cận của x_0 là một khoảng (khoảng mở) bất kỳ chứa x_0 , người ta thường xét các lân cận $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$ của điểm x_0.

Từ hệ tiên đề của R có thể suy ra mọi tính chất của nó đã biết ở trường phổ thông, ở đây ta xét thêm hai tính chất quan trọng.

1°. Tính chất Archimède:

$\forall a,b \in R, a > 0 \Rightarrow \exists n \in N: na > b$

* Thực vậy, vì nếu không thì $\forall n \in N: na \le b$

Khi đó tập hợp $A = \{x = na: \forall n \in N\}$ là bị chặn trên bởi b, theo tiên đề V thì có $M = \text{Sup } A$, theo tính chất 2° của Sup thì $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in N, ma \in A$.

$M - \varepsilon < ma$ vì $a > 0$ nên $M > 0$, do đó lấy $\varepsilon = M/2$ thì $M - \dfrac{M}{2} < ma$, hay

$M < 2ma$, nhưng $2m \in N$, $2ma \in A$, điều này chứng tỏ M không phải là Sup A, vô lý.

2°. Tính chất trù mật của Q trong R

$\forall\, a,b \in R,\ a < b \Rightarrow \exists\, r \in Q: a < r < b$

* Thực vậy, theo 1° $\exists\, n \in N$; $n.1 > 1/b-a$

hay $1/n < b - a$ lại theo 1°, $\exists\, p \in N$: $p.1 > nb$

Gọi p' là số bé nhất sao cho p' ≥ nb thì $\dfrac{np'}{n} \geq b$

và $p' - 1 <$ nb hay $\dfrac{p'-1}{n} < b$, mặt khác, theo trên

$$\frac{p'-1}{n} = \frac{p'}{n} - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a, \text{ vậy } \exists\, r = \frac{p'-1}{n} \in Q: a < r < b$$

Chú ý: $\forall a,\ b \in R$, $a < b \Rightarrow \exists\, c \in R$: $a < c < b$ [chẳng hạn $c = (a+b)/2$] - tính trù mật của R.

§2. DÃY SỐ THỰC - GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

2.1. Định nghĩa

Một ánh xạ f từ tập hợp N vào tập hợp R gọi là một dãy số thực, ảnh $f(n)$: $\forall\, n \in N$, gọi là số hạng thứ n hay số hạng tổng quát của dãy.

Ký hiệu: $x_n = f(n)$

(x_n) hay $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ hay x_n

Thí dụ: $(x_n) = (1/n)$, $(y_n) = ((-1)^n)$ là các dãy số thực có số hạng tổng quát là $x_n = 1/n$, $(y_n) = (-1)^n$

Cho hai dãy số thực (x_n), (y_n) ta gọi tổng tích thương của chúng là các dãy số thực.

$(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$; (x_n/y_n)

Ký hiệu $(x_n) \pm (y_n)$; $(x_n).(y_n)$; $(x_n)/(y_n)$

Thí dụ: $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$; $(y_n) = (1+n)/n$

thì $(x_n) + (y_n) = (1 + 2/n)$, $(x_n).(y_n) = \left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$, $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

Dãy (x_n) gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn) nếu tập hợp $\{x_n : \forall n \in N\}$ là bị chặn trên (dưới, bị chặn) nghĩa là:

$\exists\, C \in R, \forall n \in N : x_n \leq C\ (\geq C,\ C > 0)$

Thí dụ:

1) Xét $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

vì $\forall\, n \in N$, $n < n + 1$ nên $\forall\, n \in N$ $x_n < 1$ vậy (x_n) bị chặn trên

2) Xét $(x_n) = ((-1)^n)$

vì $\forall\, n \in N$: $|x_n| = 1 < 2$ nên (x_n) bị chặn

Xét dãy $(x_n) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

ta có $x_1 = 2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 4/3$, $x_5 = 5/4$...

Ta thấy n càng lớn thì (x_n) càng gần 1 hay hiệu $x_n - 1$ càng gần 0, như vậy, có thể tìm được n để $|x_n - 1|$ nhỏ tuỳ ý, chẳng hạn ta muốn:

$|x_n - 1| < \dfrac{1}{100}$ thì từ $|x_n - 1| = \dfrac{n+1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$

Ta suy ra $n > 100$, nghĩa là tìm được n từ 101 trở đi thì

$|x_n - 1| < \dfrac{1}{100}$

Tương tự, $|x_n - 1| < \dfrac{1}{1000}$ khi $n > 1000$...

Dãy (x_n) có tính chất trên gọi là dãy có giới hạn, và 1 gọi là giới hạn của nó, tổng quát ta có:

Định nghĩa: số $a \in R$ gọi là giới hạn của dãy x_n hay x_n dần tới a nếu:

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_o \in N, \forall\, n > n_o \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

Ký hiệu $\lim x_n = a$ hay $x_n \to a$

vì $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

nên định nghĩa trên có thể phát biểu: $x_n \to a$ nếu cho trước một lân cận $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ của điểm a thì sẽ có $n_o \in N$, để $\forall\, n > n_o$ ta có x_n thuộc lân cận đó.

Một dãy có giới hạn cũng gọi là dãy *hội tụ*, một dãy không hội tụ gọi là dãy *phân kỳ*, nghĩa là (x_n) là dãy phân kỳ nếu:

$\forall\, a \in R, \exists\, \varepsilon > 0, \forall n_o \in N, \exists\, n > n_o \Rightarrow |x_n - a| \geq \varepsilon$

Thí dụ:

1) Chứng minh: $\lim c/n = 0$, $c \in R$

Theo tính chất: Archimède

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in N: n_0 \varepsilon > |c|$ hay $\dfrac{|c|}{n_0} < \varepsilon$

do đó: $\forall\ n > n_0$: $\dfrac{|c|}{n} < \varepsilon$ hay $\left|\dfrac{c}{n} - 0\right| < \varepsilon$

Nghĩa là $\lim \dfrac{c}{n} = 0$

2) Chứng minh: $\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0,\quad k \in N$

Theo tính chất Archimède thì $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in N$

$n_0 \varepsilon^k > 1$ hay $1/n_0 < \varepsilon^k$, do đó $\forall\ n > n_0$: $\dfrac{1}{n} < \varepsilon^k$

hay $\dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} < \varepsilon$ suy ra : $\left|\dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} - 0\right| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$.

2.2. Các tính chất và phép toán của dãy hội tụ

1^0. $x_n \to a, x_n \to a' \Rightarrow a' = a$ (tính chất duy nhất)

Thực vậy, giả sử ngược lại $a' \neq a$,

xét $|a - a'| = |a - x_n + x_n - a'| \leq |a - x_n| + |x_n - a'|$

Theo giả thiết:

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in N, \forall\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$|x_n - a'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

do đó $|a - a'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ lấy $\varepsilon = \dfrac{|a - a'|}{2}$ thì

$|a - a'| < \dfrac{|a - a'|}{2}$ điều này mâu thuẫn, chứng tỏ: $a' = a$

2^0. $x_n \to a \iff (x_n - a) \to 0$

Thực vậy, vì $|x_n - a| = |(x_n - a) - 0|$

Thí dụ: Chứng minh $\lim \frac{n+1}{n} = 1$

vì $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \to 0$ nên $\lim \frac{n+1}{n} = 1$

3°. $\forall n$: $x_n = c \Rightarrow x_n \to c$ **(**c **= const)**

Thực vậy, vì $\forall \varepsilon > 0$, $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

Thí dụ $x_n = (-1)^n$ phân kì vì $x_{2m} = 1 \to 1$, $x_{2m+1} = -1 \to -1$

4°. $x_n \to a$, $z_n \to a$, $x_n \le y_n \Rightarrow (y_n \to a)$

Thực vậy: theo giả thiết: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \, \forall n > n_0$

$|x_n - a| < \varepsilon$, $|z_n - a| < \varepsilon$ hay $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$,

$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$

Cũng theo giả thiết: $x_n \le y_n \le z_n$ do đó:

$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$ hay $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

Vậy $y_n \to a$

Thí dụ: 1) Chứng minh $\lim \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 1$

Ta có: $1 < \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

Vì $1 \to 1$, $\frac{n+1}{n} \to 1$ nên $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$

2) Chứng minh $\lim \sin \frac{1}{n} \to 0$

Xét $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ vì $0 \to 0$,

$\frac{1}{n} \to 0$ nên $\sin \frac{1}{n} \to 0$

3) Chứng minh: $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$, $a > 0$

Ta có:

$$0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 = \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}} + \cdots + 1} < \frac{a-1}{n}$$

(thay các số hạng ở mẫu số bằng 1).

nhưng $0 \to 0$, $\frac{a-1}{n} \to 0$ nên $a^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0$ hay $a^{\frac{1}{n}} \to 1$

5°. $x_n \to a \Rightarrow \exists c > 0, \forall n : |x_n| \le c$

Thực vậy vì $x_n \to a$, lấy $\varepsilon = 1$ thì $\exists n_0, \forall n > n_0$:

$|x_n - a| < 1$ mặt khác $x_n = a + (x_n - a)$ nên :

$\forall n > n_0 : |x_n| \le |a| + |x_n - a| < |a| + 1$

do đó lấy $c = \max \{ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |a| + 1 \}$

thì $\forall n$: $|x_n| \le c$

Chú ý: Tính chất này chỉ là điều kiện cần của sự hội tụ vì có những dãy bị chặn, nhưng không hội tụ, chẳng hạn dãy: $x_n = (-1)^n$

6°. $x_n \to a, a > p\ (<q) \Rightarrow \exists n_0, \forall n > n_0 : x_n > p\ (<q)$

Thực vậy, vì $x_n \to a$, $a > p$ hay $a - p > 0$ nên lấy $\varepsilon = a - p$ thì

$\exists n_0, \forall n > n_0$: $|x_n - a| < a - p$ hay $-a + p < x_n - a$

suy ra $x_n > p$; (trường hợp $a < q$ lý luận tương tự)

Hệ quả:

$x_n \to a$, $\exists n_0, \forall n > n_0$: $x_n \le p\ (\ge q) \Rightarrow a \le p\ (\ge q)$

vì nếu không thì sẽ mâu thuẫn với tính chất trên

7°. $x_n \to a$, $y_n \to b \Rightarrow x_n \pm y_n \to a \pm b$

Thực vậy theo giả thiết:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0, \forall n > n'_0$, $|x_n - a| < \varepsilon/2$

$\exists n''_0$, $|y_n - b| < \varepsilon/2$, đặt $n_0 = \max (n'_0, n''_0)$ thì $\forall n > n_0$,

$|x_n - a| < \varepsilon / 2$; $|y_n - b| < \varepsilon / 2$

do đó $\forall n > n_0$; $|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|$

$= |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Vậy $(x_n \pm y_n) \to (a \pm b)$

8°. $x_n \to a, y_n \to b \Rightarrow x_n.y_n \to a.b$

Thực vậy, trước hết xét: $x_n \to a$, $y_n \to 0$

Theo 5°, $\forall c > 0, \forall n$: $|x_n| \le c$, vì $y_n \to 0$

nên $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_o$, $\forall\, n > n_o$, $|y_n| < \varepsilon/c$

Do đó: $\forall\, n > n_o$: $|x_n y_n| < c.\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ nghĩa là $x_n y_n \to 0$

Bây giờ xét $x_n \to a$, $y_n \to b$

Ta viết: $x_n y_n - ab = x_n\ (y_n - b) + b\ (x_n - a)$

Theo trên và 7° ta có $x_n y_n - ab \to a.0 + b.0 = 0$ hay $x_n y_n \to ab$.

9°. $x_n \to a$, $y_n \to b$, $b \neq 0$, $x_n/y_n \to a/b$

Trước hết ta chứng minh: $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{b}$ vì $y_n \to b$, $b \neq 0$

nên lấy $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ thì $\exists\, n_o$, $\forall\, n > n_o$, $|y_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$

Mặt khác:

$y_n = b - (b - y_n)$,

nên $|y_n| \geq |b| - |b - y_n| > |b| - \dfrac{|b|}{2} = \dfrac{|b|}{2}$, $\forall\, n > n_o$,

Do đó $\forall\, n > n_o$

$$0 < \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - y_n|}{|b||y_n|} < \frac{2|b - y_n|}{b^2}$$ theo 4° thì

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \to 0 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{y_n} \to \frac{1}{b}$$

Bây giờ xét $x_n \to a$, $y_n \to b$ theo 8° thì:

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n.\frac{1}{y_n} \to a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Thí dụ: Tìm lim $a^{\frac{1}{n}}$ $0 < a < 1$

Đặt $a' = \dfrac{1}{a}$ thì $a' > 1$ vì $a = \dfrac{1}{a'}$

nên $a^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{(a')^{\frac{1}{n}}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

2.3. Giới hạn vô hạn và các dạng vô định

a) Giới hạn vô hạn

Ta đã xét các dãy hội tụ, nghĩa là các dãy có giới hạn $a \in R$, bây giờ ta xét một loại dãy phân kỳ đặc biệt: từ n nào đó, x_n luôn luôn có một dấu nhất định và $|x_n|$ lớn hơn một số dương bất kỳ cho trước.

Định nghĩa: Dãy (x_n) gọi là có giới hạn bằng dương vô cùng (âm vô cùng) nếu:

$\forall M > 0, \exists n_o, \forall n > n_o \Rightarrow x_n > M \ (<-M)$

Ký hiệu: $\lim x_n = +\infty \ (-\infty)$ hay $x_n \to +\infty \ (-\infty)$

Thí dụ : 1) $(x_n) = (n)$, rõ ràng $x_n \to +\infty$

vì $\forall M > 0$, theo tính chất Archimède : $\exists n_0 \in N$

$n_0.1 > M$, do đó $\forall n > n_0 : n > M$, nghĩa là $n \to +\infty$

Chú ý : Trong định nghĩa : $\lim x_n$ thì $n \to +\infty$, do đó, ta cũng viết $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

2) $(x_n) = \left(\sqrt[k]{n}\right)$, rõ ràng $x_n \to +\infty$ vì $\forall M > 0$

Theo tính chất Archimède : $\exists n_0 \in N$, $n_0.1 > M^k$ hay

$\sqrt[k]{n_0} > M$, do đó $\forall n > n_0$, $\sqrt[k]{n} > M$, nghĩa là $\sqrt[k]{n} \to +\infty$

3) $(x_n) = [(-1)^n.n]$ $\forall n$, x_n không có 1 dấu nhất định, do đó x_n không dẫn tới $+\infty$, $(-\infty)$

b. Tính chất : Từ định nghĩa dễ dàng suy ra :

1^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $\forall n$; $y_n \geq x_n \ (\leq x_n) \Rightarrow y_n \to +\infty \ (-\infty)$

2^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $\forall n$: $|y_n| \leq c \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty \ (-\infty)$

3^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $y_n \to +\infty \ (-\infty) \Rightarrow x_n + y_n \to +\infty \ (-\infty)$

4^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $y_n \to a > 0 \ (a < 0)$ $x_n y_n \to +\infty \ (-\infty) \ [-\infty \ (+\infty)]$

5^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty)$, $y_n \to +\infty \ (-\infty) \ [-\infty \ (+\infty)] \Rightarrow x_n y_n \to +\infty \ (-\infty)$

6^0. $x_n \to +\infty \ (-\infty) \Rightarrow 1/x_n \to 0$; $x_n \to 0$

$x_n > 0 \ (<0) \Rightarrow 1/x_n \to +\infty \ (-\infty)$

Thực vậy, chẳng hạn xét 2^0 $x_n \to +\infty$, $\forall n$: $|y_n| \leq c$

vì $x_n \to +\infty$ nên $\forall M > 0$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$, $x_n > M + c$

do đó $|x_n + y_n| \geq |x_n| - |y_n| > M + c - c = M$,

nghĩa là : $x_n + y_n \to +\infty$

Thí dụ :

1) Chứng minh $\lim a^n = +\infty \qquad (a > 1)$

Đặt $a = 1 + \lambda > 0$ thì $\lambda = a - 1 > 0$

Ta có : $a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + ... + \lambda^n > 1 + n\lambda$

hay $a^n > 1 + n(a-1)$

Theo 2° và 4° thì $1 + n(a-1) \to +\infty$

Theo 1°: $a^n \to +\infty$

2) Tìm $\lim a^n$, $|a| < 1$

Xét $a > 0$, đặt $a = 1/a'$, $a' > 1$, khi đó $a^n = 1/a'^n \to 0$

$a < 0$ đặt $a = -a'$, $a' > 0$ thì $a^n = (-1)^n \cdot a'^n \to 0$

c) Các dạng vô định

- Xét các dạng

1°. $\frac{x_n}{y_n}$; $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ hoặc $x_n \to +\infty\ (-\infty)$ $y_n \to +\infty\ (-\infty)$

2°. $x_n . y_n$, $x_n \to 0$, $y_n \to +\infty\ (-\infty)$

3°. $x_n - y_n$, $x_n \to +\infty\ (-\infty)$, $y_n \to +\infty\ (-\infty)$

Các dạng này có khi có giới hạn, có khi không, người ta gọi chúng là các dạng vô định, ký hiệu là:

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0.\infty\ ;\ \infty - \infty$$

Khi tìm giới hạn, gặp các dạng này ta phải biến đổi để khử chúng đi, sau đó áp dụng các tính chất của dãy hội tụ ta sẽ tìm được giới hạn cụ thể.

Thí dụ:

$$1)\ \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{n+1}{n^2} = \lim\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \lim \frac{1}{n} + \lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$2)\ \lim \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2 + 1} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

3) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}(n^2+1) = \lim(n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$

4) $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

2.4. Tập hợp các số thực mở rộng

Tập hợp các số thực R thêm vào hai phần tử $+\infty$, $-\infty$ gọi là tập hợp các số thực mở rộng.

Ký hiệu: $\widetilde{R} = R \cup (+\infty) \cup (-\infty)$

$+\infty$ $(-\infty)$, gọi là dương (âm) vô cực hay vô cùng, gọi chung là các số vô hạn và ký hiệu chung là ∞ còn các số $\in R$ cũng gọi là các số hữu hạn. Dựa vào định nghĩa và tính chất của các dãy có giới hạn, ta xác định quan hệ thứ tự của các phép toán đại số trong $\widetilde{R}$ như sau:

$\forall x \in R$: $-\infty < x < +\infty$

$\forall a \in R$: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = (\pm\infty)$

$a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty$ nếu $a > 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \mp\infty$ nếu $a < 0$

$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$; $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \qquad \frac{a}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$$

$\infty^r = \infty$, $r \in Q$, $r > 0$

Ta đã định nghĩa các đoạn, khoảng trong R, cũng gọi là đoạn, khoảng hữu hạn. Trong $\widetilde{R}$ ta cũng định nghĩa:

Tập hợp:

$\{x: -\infty < x < +\infty\}$ gọi là khoảng vô hạn.

Ký hiệu: $(-\infty, +\infty)$

$\{x: -\infty < x < a\}$ gọi là nửa khoảng vô hạn $(-\infty, a)$

$\{x: a \le x < +\infty\}$ gọi là nửa khoảng vô hạn $[a, +\infty)$

Ta cũng gọi lân cận của điểm $+\infty$ $(-\infty)$ là khoảng

$(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$, $\forall a \in R$

$\forall A \subset R$ không bị chặn trên (dưới) ta quy ước

$\operatorname{Sup} A = +\infty$ $(\inf A = -\infty)$

§ 3. CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA TẬP HỢP *R*

Từ hệ tiên đề của *R* và khái niệm giới hạn của dãy trong *R*, ta sẽ suy ra các tính chất quan trọng sau đây gọi là các nguyên lý cơ bản của *R*.

1°. Nguyên lý Weierstrass

Dãy (x_n) gọi là dãy đơn điệu không giảm (không tăng) nếu

$\forall$ n: $x_n \le x_{n+1}$ ($\ge x_{n+1}$) nếu không có dấu bằng thì (x_n) gọi là dãy đơn điệu tăng (giảm). Các dãy trên gọi chung là dãy đơn điệu.

Thí dụ:

Xét $x_n = \dfrac{n}{n+1}$

Ta có: $\forall\ n\ x_n / x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$ hay $x_n < x_{n+1}$, vậy x_n là dãy đơn điệu tăng. Ta thấy x_n cũng bị chặn trên ($\forall\ n : x_n < 1$) và $\lim x_n = 1$

Tổng quát ta có:

Nguyên lý Weierstrass: ***Mọi dãy (x_n) đơn điệu không giảm (không tăng) và bị chặn trên (dưới) đều hội tụ và $x_n \le \lim x_n$ ($\ge \lim x_n$)***

Chứng minh - Xét trường hợp (x_n) đơn điệu không giảm và bị chặn trên.

Theo giả thiết (x_n) bị chặn trên, xét tập hợp $A = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ thì theo tiên đề Supremum có $c = \text{Sup}\, A$.

Theo tính chất 2° của Sup thì $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_o$: $x_{n_0} > c - \varepsilon$

hay $c - x_{n_0} < \varepsilon$. Lại theo giả thiết (x_n) đơn điệu không giảm nên

$\forall\ n > n_0: x_n \ge x_{n_0}$.

Do đó $c - x_n < \varepsilon$ theo tính chất 1° của Sup: $\forall\ n: x_n \le c$,

Do đó $|c - x_n| = c - x_n < \varepsilon$, nghĩa là $c = \lim x_n$ và $x_n \le \lim x_n$.

Trường hợp (x_n) đơn điệu không tăng và bị chặn dưới thì đặt $x_n = - x'_n$ sẽ đưa được về trường hợp trên.

Thí dụ:

Xét $x_n = (1 + 1/n)^n$

Theo công thức nhị thức Newton:

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}$$

$$.....+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.\frac{1}{n^k}+...+\frac{n(n-1)...1}{n!}.\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Từ khai triển này ta suy ra khai triển của x_{n+1} bằng cách thay các thừa số

$1 - \frac{i}{n}$ $(i = 1, 2, ..., n - 1)$

bằng các thừa số: $1 - \frac{i}{n+1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$

và thêm 1 số hạng dương nữa.

Vì $1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}$ nên $\forall$ n: $x_n < x_{n+1}$

nghĩa là dãy x_n là dãy đơn điệu tăng.

Mặt khác: $1 - \frac{i}{n} < 1$ và $n! \geq 2^{n-1}$ với $n \geq 2$, nên $\forall$ n:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 2 + \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3$$

Vậy (x_n) là dãy bị chặn trên, theo nguyên lý trên, (x_n) có một giới hạn nào đó, gọi giới hạn đó là số e ; $e = \lim (1 + 1/n)^n$ có thể chứng minh e là số vô tỷ và trị số gần đúng của nó là : $e = 2,718281828459...$

2^o. Nguyên lý Cantor:

Dãy đoạn $[a_n, b_n]$ gọi là một dãy đoạn thắt nếu:

$\forall n$: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim (b_n - a_n) = 0$,

đối với dãy đoạn thắt ta có:

Nguyên lý Cantor:

Tồn tại 1 điểm c duy nhất sao cho: $\forall n: c \in [a_n, b_n]$.

* Chứng minh: theo giả thiết thì:

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \ldots \le \ldots b_n \ldots \le b_2 \le b_1$

Do đó (a_n) là dãy đơn điệu không giảm và bị chặn trên (bởi b_1 chẳng hạn), theo nguyên lý Weierstrass có:

$c = \lim a_n$ và $\forall n: a_n \le c$, mặt khác:

$\forall n: a_n < b_n$ nên theo tính chất của giới hạn (hệ quả của 6° thì $c \le b_n$,

vậy $a_n \le c \le b_n$ hay $c \in [a_n, b_n]$ rõ ràng c là duy nhất, vì nếu có $c' : c \ne c'$,

$c' \in [a_n, b_n]$ thì $0 < |c' - c| < b_n - a_n$.

Nhưng theo giả thiết $\lim (b_n - a_n) = 0$, do đó $c' - c \to 0$, hay $c' = c$.

Rõ ràng $c = \lim b_n$ vì $|c - b_n| < b_n - a_n$.

3°. Nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Cho dãy (x_n) dãy (x'_k) gọi là một dãy con của nó nếu $x'_k = x_n$ với $n = g(k)$, g là 1 ánh xạ từ N vào chính nó.

Thí dụ:

- Xét $x_n = (-1)^n$ và g xác định bởi $n = 2k$ và $n = 2k+1$ thì có hai dãy con của x_n là:

$x'_k = (-1)^{2k}$ và $x''_k = (-1)^{2k+1}$ người ta thường ký hiệu một dãy con của dãy (x_n) là x_{n_k} chẳng hạn dãy $x_n = (-1)^n$ có 1 dãy con là:

$x_{n_k} = (-1)^{2k}$ rõ ràng nếu $x_n \to a$ thì mọi dãy con của nó:

$x_{n_k} \to a$ vì $x_n \to a$ nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, đặc biệt $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$

Một vấn đề đặt ra: nếu (x_n) không hội tụ thì có dãy con nào của nó hội tụ? Ta thấy $x_n = (-1)^n$ không hội tụ nhưng nó vẫn có hai dãy con $x_{n_k} = (-1)^{2k} = 1$, $x_{n_k} = (-1)^{2k+1} = -1$ hội tụ. Ta cũng biết x_n là 1 dãy bị chặn, tổng quát ta có:

Nguyên lý Bolzano-Weierstrass

Mọi dãy vô hạn (x_n) bị chặn đều có một dãy con hội tụ

* Chứng minh: Theo giả thiết $\exists c > 0, \forall n: |x_n| \le c$

hay $-c \le x_n \le c$ chia $[-c, c]$ ra làm hai phần bằng nhau thì phải có một phần chứa vô số các số hạng của (x_n) vì nếu không, nghĩa là cả 2 phần đều chứa một số hữu hạn các số hạng của (x_n) thì (x_n) sẽ là một dãy chỉ có 1 số hữu hạn số hạng, trái với giả thiết, gọi phần chứa vô số các số hạng của (x_n) là đoạn $[a_1, b_1]$, lại chia $[a_1, b_1]$ ra làm hai phần bằng nhau và lý luận tương tự ta được đoạn $[a_2, b_2]$ chứa vô số các số hạng của (x_n), rõ ràng $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ và $b_2 - a_2 = c/2$.

Quá trình tiếp tục, ta được một dãy đoạn $([a_n, b_n])$ mỗi đoạn đều chứa vô số các số hạng của (x_n) rõ ràng:

$$\forall n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] , \; b_n - a_n = \frac{c}{2^{n-1}} \to 0$$

Vậy $([a_n , b_n])$ là một dãy đoạn thắt, theo nguyên lý Cantor, có 1 điểm duy nhất $\overline{c}$; $\forall n: \overline{c} \in [a_n , b_n]$ vì mỗi đoạn $[a_n , b_n]$ chứa vô số các số hạng của (x_n) nên lấy được $x_{n_1} \in [a_1 , b_1]$, sau đó lấy

$x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ $n_2 \neq n_1$...

$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, khi đó $\left|x_{n_k} - \overline{c}\right| < b_k - a_k$

nhưng $b_k - a_k \to 0$ nên $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o, \forall k > n_o$

$b_k - a_k < \varepsilon$ suy ra $x_{n_k} - \overline{c} < \varepsilon$, nghĩa là $\lim x_{n_k} = \overline{c}$

4°. Nguyên lý Cauchy

Dãy x_n gọi là 1 dãy cơ bản nếu: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o , \forall n > n_o$

$\forall m > n_o \Rightarrow \left|x_n - x_m\right| < \varepsilon$

Nguyên lý Cauchy:

Dãy $(x_n) \subset R$ hội tụ (trong R) khi và chỉ khi nó là một dãy cơ bản.

* ***Chứng minh***: Giả sử $x_n \to x_o \in R$, khi đó $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o, \forall n, m > n_o$:

$$\left|x_n - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2} \; , \; \left|x_m - x_0\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Do đó $\left|x_m - x_n\right| = \left|x_m - x_0 + x_0 - x_n\right| \le \left|x_m - x_0\right| + \left|x_n - x_0\right| < \varepsilon$

nghĩa là (x_n) là một dãy cơ bản.

Ngược lại, giả sử $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon . \forall m,n > \overline{n}_0$. Cố định m thì tập hợp (x_n) là bị chặn, theo nguyên lý Bolzano - Weierstrass dãy (x_n) có dãy con x_{n_k} hội tụ, nghĩa là $\forall \varepsilon > 0, \exists n'_o, \forall n_k > n'_o$:

$\left|x_{n_k} - x_0\right| < \varepsilon$ với $x_o = \lim x_{n_k}$. Mặt khác, theo giả thiết:

$\left|x_{n_k} - x_n\right| < \varepsilon$, $\forall n_k , n > n''_o$. Chọn $n_o = \max (n'_o , n''_o)$ thì

$\left|x_n - x_0\right| \le \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - x_0\right| < 2\,\varepsilon$. Vậy $\lim x_n = x_o$

Thí dụ: Chứng minh dãy:

$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ hội tụ

Theo nguyên lý Cauchy, $\forall \varepsilon > 0$, xét :

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} + ... + \frac{1}{(n+p-1)} - \frac{1}{(n+p)} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \ , \ \ \forall p \in N$$

Vậy dãy x_n hội tụ.

§ 4. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP SỐ THỰC

4.1. Các tập hợp tương đương

Định nghĩa: Hai tập hợp A, B gọi là tương đương (về số lượng) nếu tồn tại một song ánh từ tập hợp này vào tập hợp kia, kí hiệu: $A \sim B$.

Thí dụ:

1) Hai tập hợp hữu hạn cùng có số lượng phần tử là tương đương:

2) $N = \{1, 2, 3, ... n ...\}$ $A = \{2, 4 ... 2n ...\}$, vì tồn tại song ánh $f(n) = 2n$ từ N vào A nên $N \sim A$

3) $A = \{x : x \in (0,1)\}$ $B = \{x : x \in (a,b)\}$ rõ ràng $A \sim B$ vì tồn tại song ánh $f = a + x\,(b - a)$ từ A vào B

4) $A = \{x : x \in (0,1)\} \sim R$

vì tồn tại song ánh $f = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}$ từ R vào A

Từ định nghĩa suy ra:

1^o. $A \sim A$; 2^o. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ do đó, từ các thí dụ 3, 4 suy ra: Tập hợp các điểm trong một khoảng bất kỳ là tương đương với tập hợp các điểm trên toàn đường thẳng số thực. Các tập hợp tương đương được gọi là các tập hợp có cùng lực lượng.

4.2. Tập hợp đếm được

Định nghĩa: Lực lượng của tập hợp $N = \{1, 2, \dots n \dots\}$ gọi là lực lượng đếm được và mọi tập hợp tương đương với N gọi là tập hợp đếm được. Nói cách khác: Một tập hợp là đếm được nếu có thể đánh số được các phần tử của nó thành dãy vô hạn, $a_1, a_2 \dots a_n \dots$

Thí dụ:

1) $A = \{2, 4, 6 \dots 2n \dots\}$ là đếm được

2) $Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ là đếm được

Vì có thể đánh số được các phần tử của nó theo thứ tự:

$0, -1, 1, -2, 2 \dots, -n, n \dots$

3) $Q^+ = \{x : p/q, p, q \in N\}$ là đếm được.

Thực vậy: có thể viết các phần tử của Q^+ theo bảng:

p/q	1	2	3	4	...
1	1	2	3	4	...
2	$\frac{1}{2}$	(1)	$\frac{3}{2}$	(2)	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	(1)	$\frac{4}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{4}$	(1)	...
. . .	...	...	...	...	...

Ta có thể đánh số được các phần tử của Q^+ theo thứ tự sau: 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5 ... (bỏ các phần tử trong ngoặc vì lặp lại)

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý: Hợp của 1 số hữu hạn hay đếm được các tập hợp đếm được là đếm được. Thực vậy, ta có thể viết các phần tử của mỗi tập hợp trên 1 dòng theo bảng dưới đây:

$$\begin{array}{llllll}
A_1 & : & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
A_2 & : & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
A_3 & : & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
A_4 & : & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots
\end{array}$$

....

Ta thấy rằng trên mỗi đường chéo của bảng chỉ có 1 số hữu hạn phần tử.

Vậy ta có thể đánh số các phần tử của hợp $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ theo các đường chéo đó:

$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13} \ldots$

Thí dụ: Ta biết tập hợp các số hữu tỷ dương Q^+ là đếm được. Rõ ràng tập hợp các số hữu tỷ âm Q^- cũng đếm được. Vậy theo định lý trên, tập hợp các số hữu tỷ $Q = Q^- \cup 0 \cup Q^+$ cũng là đếm được.

3.4. Tập hợp không đếm được

Định nghĩa: Tập hợp A gọi là không đếm được nếu nó là một tập hợp vô hạn và không phải là 1 tập hợp đếm được. Lực lượng của các tập hợp không đếm được gọi là lực lượng Continum hay lực lượng C.

Định lý: Tập hợp các số thực R là không đếm được

* Chứng minh: Rõ ràng tập hợp các điểm trong khoảng (0,1) là tương đương với tập hợp các điểm trong đoạn [0,1], vì $[0,1] = (0,1) \cup 0 \cup 1$ ...

Trong (0,1) ta có thể lấy một phần tử a_1 rồi lấy phần tử $a_2 \in (0,1) \setminus a_1$

Đặt $M' = (0,1)\setminus\{a_1, a_2\}$

Suy ra: $(0,1) = M' \cup \{a_1, a_2\}$ (1)

$[0,1] = M' \cup \{a_1, a_2\} \cup \{0,1\}$ (2)

Rõ ràng có một song ánh giữa các tập $\{a_1, a_2\}$ và $\{a_1, a_2, 0, 1\}$

$(a_1 \to \{a_1, a_2\}, a_2 \to \{0,1\})$ và một song ánh giữa M' và M'. Vậy tồn tại một song ánh giữa khoảng (0,1) và đoạn [0,1], nghĩa là $(0,1) \sim [0,1]$.

Theo trên $(0,1) \sim R$, vậy $[0,1] \sim R$

Do đó để chứng minh R là không đếm được ta chỉ cần chứng minh [0,1] là không đếm được. Ta sẽ chứng minh bằng phép phản chứng. Giả sử đoạn [0,1] là đếm được, nghĩa là; $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots x_n \ldots\}$ chia đoạn [0,1] ra thành ba đoạn bằng nhau, trong ba đoạn đó phải có 1 đoạn không chứa x_1, gọi đoạn đó là Δ_1, lại chia Δ_1 thành ba đoạn bằng nhau, và trong ba đoạn đó lại có một đoạn không chứa x_2...

Quá trình tiếp tục ta sẽ được một dãy đoạn thắt vì $\Delta_1 \subset \Delta_2 \dots \subset \Delta_n \dots$ và $|\Delta_n| = 1/3^n \to 0$ với $x_n \notin \Delta_n$, $n = 1,2 \dots$

Theo nguyên lý Cantor, tồn tại một điểm c duy nhất sao cho, $c \in \Delta_n$.

$n = 1, 2 \dots$ Rõ ràng, $c \in [0,1]$, vậy c phải trùng với một x_{n_0} nào đó, nhưng $c \in \Delta_n$, $n = 1, 2 \dots$ Vậy $x_{n_0} \in \Delta_{n_0}$ điều này mâu thuẫn với cách xây dựng các đoạn Δ_n, vậy tập hợp $[0,1]$ đếm được là vô lý.

Thí dụ: 1) Ta biết $R = Q \cup I$

Rõ ràng tập hợp số vô tỷ I là không đếm được vì nếu I đếm được thì $Q \cup I$ là đếm được (theo định lý ở 2°). Vậy R là đếm được, vô lý.

2) Ta gọi số đại số là nghiệm của một đa thức.

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$.

Với $a_i \in Q$, $i = 0, 1, 2 \dots, n$

Có thể chứng minh (phần bài tập) tập hợp các số đại số là đếm được. Ta gọi số siêu việt là số không phải là đại số (π, e, $2^{\sqrt{2}}$, ...) rõ ràng tập hợp các số siêu việt cũng không đếm được (lý luận như thí dụ 1).

3) Theo trên thì các đoạn $[a,b]$ hay khoảng (a,b) bất kỳ là các tập hợp không đếm được và có lực lượng c.

Chú ý: Theo đại số học, thì tập hợp các số thực R là một trường (vì R thỏa mãn các tiên đề I, II, III)

R thỏa mãn tiên đề IV, người ta gọi R là một trường được sắp thứ tự.

R thỏa mãn nguyên lý Cauchy (suy từ tiên đề V), người ta gọi R là một trường đầy đủ.

Tóm lại: Tập hợp các số thực R là một trường được sắp thứ tự, đầy đủ và có lực lượng Continum.

BÀI TẬP

1. Từ hệ tiên đề của R chứng minh

1) $-(ab) = (-a)\,b = a\,(-b)$

2) $a \geq 0\ (\leq 0) \Rightarrow -a \leq 0\ (\geq 0)$

3) $a > 0,\ b \leq 0 \Rightarrow a.b \leq 0$

4) $a \le 0,\ b \le 0 \Rightarrow a.b \ge 0$

5) $a \ge b \Rightarrow a - b \ge 0$

6) $\forall\ a \in R,\ a^2 \ge 0$

7) $a \ge b,\ c \ge 0 \Rightarrow a.c \ge b.c$

8) $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < 1/b < 1/a$

2. Chứng minh:

1) $|a|^2 = a^2,\ \sqrt{a^2} = |a|$

2) $|a| - |b| \le |a - b|$

3) $||a| - |b|| \le |a - b| \le |a| + |b|$

3. Giải bất phương trình:

1) $|2x + 1| < 1$

2) $|x + 1| < 2$

3) $|x - 1| < |x + 1|$

4) $|x| < x + 1$

5) $|\sin x| = \sin x + 2$

4. Cho $x \in Q,\ x > 0$, chứng minh $\exists\ n \in N$

$\dfrac{1}{10^n} < x$, suy ra $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n \in N:\ \dfrac{1}{10^n} < \varepsilon$

5. Chứng minh:

1) $x \in Q,\ y \in I \Rightarrow x + y \in I$

2) $x \in Q,\ x \neq 0,\ y \in I \Rightarrow x.y \in I$

3) $x \in I,\ y \in I \Rightarrow x + y,\ x.y \in I$ hay $\in Q$?

6. Chứng minh, nếu $a, b, c, d \in Q,\ \lambda \in I$

và $a + \lambda b = c + \lambda d \Rightarrow a = c,\ b = d$

Ứng dụng: Viết $\sqrt{192 + 96\sqrt{3}}$ dưới dạng $x + y\sqrt{3}$ $\quad x, y \in Q$

*7. Cho $A = \{x : x = \dfrac{n-1}{n+1},\ n \in N\}$

Chứng minh A bị chặn, tìm Sup$A$, inf$A$ và các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của A.

*8. Cho $A = \{x : x \in Q,\ x > 0,\ x^2 < 2\}$

$B = \{x : x \in Q,\ x > 0,\ x^2 > 2\}$

Chứng minh A (B) không có phần tử lớn (nhỏ) nhất, suy ra A (B) không có Sup (inf) trong Q.

***9**. Chứng minh rằng phương trình $x^n - a = 0$, $a > 0$ luôn luôn có nghiệm trong R.

***10.** Chứng minh rằng mọi khoảng (a,b) đều chứa một số vô hạn các số hữu tỉ và 1 số vô hạn các số vô tỉ.

11. Chứng minh

1) $\lim\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 0$

2) $\lim\dfrac{2n+1}{n+2} = 2$

3) $\lim\dfrac{2+(-1)^n}{n} = 0$

4) $\lim\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4} = \dfrac{1}{3}$

5) Chứng minh nếu $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

12. Áp dụng tính chất 4° chứng minh

1) $\lim(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}) = 0$

2) $\lim\sqrt[n]{n} = 1$

3) $\lim\sqrt[n]{1+2+..+n} = 1$

13. Chứng minh: $\forall\, n : x_n \le y_n,\ x_n \to a,\ y_n \to b \ \Rightarrow a \le b$

14. Cho

1) (x_n) hội tụ, (y_n) phân kỳ

2) (x_n) phân kỳ, (y_n) phân kỳ

thì $(x_n + y_n)$, $(x_n.y_n)$ là hội tụ hay phân kỳ ?

15. 1) Cho $x_n.y_n \to 0$ thì có thể kết luận $x_n \to 0$ hay $y_n \to 0$ không ?

2) Cho $x_n \to 0$, y_n tùy ý thì có thể kết luận $x_n.y_n \to 0$ không ?

16. Chứng minh: 1) $x_n \to +\infty\ (-\infty) \Rightarrow x_n$ phân kỳ

2) $\lim a^n/n^k = +\infty$ $(a > 1)$, $(k > 0)$

17. Tìm

1) $\lim \frac{2n^2+1}{n^2+3n+1}$; 2) $\lim \frac{n^2+3n}{n^3+2n+1}$

3) $\lim \frac{n^2+3}{2n-1}$; 4) $\lim \frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}$ $|b| < 1$, $|a| < 1$

5) $\lim \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$; 6) $\lim \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

7) $\lim \frac{1^2+2^2+\ldots(n-1)^2}{n^3}$; 8) $\lim \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n+1)^2}{n^3}$

9) $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

10) $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{n^3+n}-n}$

11) $\lim(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1})$

18. Chứng minh các tính chất:

1^o, 3^o, 4^o, 5^o, 6^o, của dãy có giới hạn vô hạn.

19. Dùng nguyên lý Weierstrass chứng minh các dãy sau hội tụ:

1) $(x_n) = (\frac{[illegible]}{n!})$ ($a > 0$ tìm $\lim x_n$).

2) $(x_n) = \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right)$

$0 \le a_i \le 9$ ($i = 1, 2 \ldots n$)

3) $(x_n) = ((1 - 1/2)(1 - 1/4) \ldots (1 - 1/2^n))$

4) $(x_n) = ((1 + 1/2)(1 + 1/4) \ldots (1 + 1/2^n))$

5) $(x_n) = \underbrace{(\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}})}_{n \text{ lần}}$

***20**. Chứng minh: (x_n) tăng (y_n) giảm và $\lim(x_n - y_n) = 0$ thì (x_n), (y_n) hội tụ và $\lim x_n = \lim y_n$; áp dụng: chứng minh

$\lim x_n = \lim y_n$ nếu :

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n!n}$$

Suy ra $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}$ $\quad 0 < \theta < 1$

Từ đó chứng minh $e \notin Q$ và suy ra cách tính gần đúng số e.

21. Chứng minh (x_n) tăng, (y_n) giảm

$\forall$ n: $x_n \leq y_n$ thì (x_n), (y_n) hội tụ và $\lim x_n \leq \lim y_n$

22. Chứng minh (x_n) tăng (giảm) không bị chặn trên (dưới) thì

$x_n \to +\infty\ (-\infty)$

23. Chứng minh (x_n) không bị chặn trên (dưới), thì $\exists\, x_{n_k}$,

$x_{n_k} \to +\infty\ (-\infty)$

***24**. Chứng minh $\forall\, \alpha \in R \Rightarrow \exists\, (x_n)$; $x_n \in Q$, $x_n \to \alpha$

25. Chứng minh các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn của chúng:

1) $x_n = (1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2) \ldots (1 - 1/n^2)$

2) $x_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$

***26**. Chứng minh rằng: nếu $x_n \to a$ thì:

1) $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \to a$

2) $\sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} \to a$, $\quad x_i > 0, i = 1, 2, \ldots n$

Áp dụng tìm:

$$\lim \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}, \quad \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

***27**. Chứng minh rằng nếu:

$$\forall\, n : x_n > 0 \text{ và } \frac{x_{n+1}}{x_n} \to a \quad \text{thì } \sqrt[n]{x_n} \to a$$

Áp dụng tìm : $\lim a^{\frac{1}{n}}$, $\lim \sqrt[n]{n}$

28. Dùng nguyên lý Cauchy, chứng minh các dãy sau hội tụ:

1) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + ... + \frac{\sin n}{2^n}$

2) $x_n = \frac{\cos 1!}{1.2} + \frac{\cos 2!}{2.3} + ... + \frac{\cos n!}{n(n+1)}$

29. Dùng nguyên lý Cauchy, chứng minh các dãy sau phân kỳ

1) $x_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$

2) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n}$ $(x = e^y \; ; \; y = \log_e x = \ln x)$

***30**. Chứng minh tập hợp các số đại số là đếm được.

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) Xét $a(b + (-b)) = 0$

2. 3) Xét $a = b + (a - b)$, $b = a + (b - a)$

3. 1) $-1 < x < 0$; 2) $-3 < x < 1$

3) $x > 0$; 4) $x > -1/2$; 5) $x = -\pi/2 + 2k\pi$; $x = \pi/2 + (2k + 1)\pi$

4. Đặt $x = p/q$ lấy $m \in N$ sao cho $mp > q$ suy ra

$\frac{1}{m} < \frac{p}{q}$ lấy n lớn hơn số các chữ số của m thì $10^n > m$, vậy $1/10^n < p/q$

lấy $0 < p/q < \varepsilon$ (Q trù mật trong R)

5. 1) $x + y \in I$ vì $x + y \in Q \Rightarrow x + y - x = y \in Q$ vô lý

3) Lấy $\sqrt{2}$ và $1 - \sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ và $\sqrt{8}$

6. $a - c = \lambda(d - b)$, $d - b \neq 0 \Rightarrow \lambda \in Q$ vô lý

$(x + y\sqrt{3})^2 = 192 + 96\sqrt{3} \Rightarrow 2xy = 96, \; x^2 + 3y^2 = 192$

$x = 12 \; y = 4$

7. A bị chặn dưới bởi 0, bị chặn trên bởi 1, $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, vì $0 \in A$, nên 0 là phần tử nhỏ nhất của A

8. Chứng minh : $x^2 < 2 \Rightarrow \exists\, n \in N$, $(x + 1/n)^2 < 2$

9. Chứng minh tương tự như chứng minh: tồn tại 1 số duy nhất $\alpha \in R$

$\alpha = \sqrt{2}$ (trong bài giảng) bằng cách xét các tập hợp

$A = \{x: x \in Q, x > 0, x^n < a\}$

$B = \{x: x \in Q, x > 0, x^n > a\}$

10. Giả sử ngược lại (a,b) chỉ chứa số hữu hạn các số hữu tỉ $a_1 ... a_n$ cho $c \in (a,b)$ thì $|c-a_1|, |c-a_2| ... |c-a_n|$ có 1 số bé nhất, gọi số đó là $|c-a_i|$ thì khoảng

$$\left(c-\frac{|a_i-c|}{2}, c+\frac{|c-a_i|}{2}\right) \cap (a,b)$$

không có một số hữu tỉ nào, mâu thuẫn với tính trù mật của Q trong R

11. 4) $\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

5) Dùng: $||x|-|a|| \le |x-a|$

12. 1) Nhân với lượng liên hiệp

2) Xét $n > 2$: $(1+\lambda)^n > \frac{n^2}{2}\lambda^2$ và đặt $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1$

13. Chứng minh phản chứng, giả sử $a > b \Rightarrow \exists\, r \in Q: a > r > b$

14. 1) Tổng phân kỳ, tích không thể kết luận dứt khoát

15. 1) Không thể kết luận $x_n \to 0$ hoặc $y_n \to 0$

Thí dụ : $x_n = 1 + (-1)^n$, $y_n = 1 - (-1)^n$

2) Không thể kết luận $x_n y_n \to 0$

Thí dụ: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $y_n = n$

16. 1) Xét $|x_n - a| \ge |x_n| - |a|$, $\forall\, a \in R$

2) $a^n > n^2/4 \,.\, (a-1)^2$ $(n > 2)$

$a^n/n > n/4 \,.\, (a-1)^2$

Viết $\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]^k$

17. 1) 2 ; 2) 0 ; 3) $+\infty$

4) $\dfrac{1-b}{1-a}$; 5) 1/3; 6) 1/2

7) 1/3 ; 8) 4/3 ; 9) 1 ; 10) 0 ; 11) 2/3

19. 1) $x_{n+1} = x_n \dfrac{a}{n+1}$ chứng minh (x_n) giảm bị chặn dưới,

$\lim x_n = 0$

2) Chứng minh (x_n) tăng bị chặn trên

3) Chứng minh (x_n) giảm bị chặn dưới

4) Chứng minh (x_n) tăng bị chặn trên

Bằng cách áp dụng $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ $(x_i \ge 0)$

5) Chứng minh (x_n) tăng và bị chặn trên : $x_n < \sqrt{c} + 1$ (bằng quy nạp), $\lim x_n = 2$

20. Đặt $z_n = y_n - x_n$ (z_n) giảm $z_n \to 0$, $x_n \le y_n$ và

$\lim x_n = \lim y_n = c$ (nguyên lý Cantor) áp dụng đặt $t_n = (1 + 1/n)^n$

$$t_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \ (k<n) \Rightarrow e > 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} = x_k \quad (\forall k \in N)$$

Mặt khác: $t_n < x_n \le e \Rightarrow x_n \to e$

$y_n = x_n + \dfrac{1}{n.n!} \Rightarrow e, x_n < e < y_n \Rightarrow e - x_n = \dfrac{\theta}{n.n!}$, $(0 < \theta < 1)$

và $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\theta}{n.n!}$

Chứng minh $e \notin Q$ bằng phản chứng

$e = 2,71828$ với độ chính xác 10^{-5}.

21. Dùng nguyên lý Weierstrass chứng minh lim x_n, lim y_n tồn tại rồi áp dụng kết quả bài 13

22. $\forall c, \exists n_0 : x_{n_0} > c$, $\forall n > n_0, x_n > x_{n_0} > c$

$\Rightarrow \forall c > 0, \forall n > n_0 : x_n > c$

23. $\exists n_1, n_2, \ldots n_k : x_{n_1} > 1$; $x_{n_2} > 1$; ...; $x_{n_k} > k$

24. $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in Q : \alpha - \varepsilon < r < \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_n \in Q : \alpha - \varepsilon < x_n < \alpha + \varepsilon$

$\Rightarrow \exists x_n \in Q ; \forall n : |x_n - \alpha| < \varepsilon$

25. 1) Viết: $1 - \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n+1}{n}$; $\lim x_n = \dfrac{1}{2}$

2) Viết : $1 - \dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}} = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$; $\lim x_n = \dfrac{1}{3}$

26. 1) Viết $a - y_n = \dfrac{aN}{n} - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{n} + \dfrac{(a - x_{N+1}) + \ldots + (a - x_n)}{n}$

2) Viết $\ln z_n = \dfrac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}$

(Với $x = e^y \Rightarrow y = \log_e x = \ln x$)

27. Viết: $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dfrac{x_2}{x_1} \cdot \dfrac{x_3}{x_2} \cdots \dfrac{x_n}{x_{n-1}}}$

Áp dụng : 1 ; 1

28. 1) Xét:

$$|x_{n+p} - x_n| \le \left|\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}}\right| < \varepsilon \quad (\forall p \in N)$$

2)

$$|x_{n+p} - x_n| \le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

29. 1) $\left|x_{n+p} - x_n\right| > \dfrac{p}{n+p}$: khi $p = n$: $\left|x_{n+p} - x_n\right| > \dfrac{1}{2} > \varepsilon$

2) $\left|x_{n+p} - x_n\right| > \dfrac{p}{\ln(n+p)} > \dfrac{p}{n+p} = \dfrac{1}{2}$ khi $p = n$

30. Đầu tiên chứng minh: Tập hợp các dãy hữu hạn lập được từ các phần tử của một tập hợp đếm được là đếm được. Sau đó suy ra tập hợp các đa thức bậc n với hệ số hữu tỉ là đếm được và suy ra tập hợp các số đại số là đếm được.

Chương 2

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

§ 1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

Cho các tập hợp $X, Y \subset R$, $X, Y \neq \emptyset$, một ánh xạ f từ X vào Y, $f: X \to Y$ gọi là một hàm số thực của một đối số thực, ảnh $y = f(x)$ với $x \in X$ gọi là giá trị của f tại x, X gọi là miền xác định, tập hợp các giá trị của f, $\forall x \in X$, nghĩa là tập hợp $\{f(x)\}$, gọi là miền giá trị của hàm số ký hiệu $f(X)$, nói chung: $f(X) \subset Y$. Ta cũng gọi: f là một hàm xác định trong tập hợp X và lấy giá trị trong tập hợp Y. Theo định nghĩa, ta cần phân biệt hàm f và giá trị của nó tại $x \in X$: $y = f(x)$, nhưng để đơn giản ta cũng nói: hàm $y = f(x)$: nhưng phải hiểu đó là một hàm f mà giá trị của nó tại $x \in X$ là $y = f(x)$. Nếu x chỉ một số bất kỳ thuộc X, thì x gọi là biến số độc lập, y gọi là biến số phụ thuộc hay theo cách nói đơn giản trên, y cũng gọi là một hàm số của biến số độc lập x.

Một hàm số $y = f(x)$ có thể cho bằng các phương pháp khác nhau, tùy theo f chỉ cách tương ứng giữa $x \in X$ và $y \in Y$.

Nếu f chỉ các quy tắc tính nhất định để ứng với mỗi x ta có một giá trị $f(x)$ thì f gọi là được cho bằng một công thức hay một biểu thức giải tích, khi đó miền xác định X của f sẽ được chỉ ra theo ý nghĩa của các quy tắc tính.

Thí dụ:

Các hàm số sau đây là các hàm được cho bằng công thức:

1) $y = f(n)$ có miền xác định là $X = N$, đó là một dãy số.

2) $y = x^2$ có miền xác định $X = R$.

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, y có ý nghĩa khi $1 - x^2 \geq 0$ hay

$-1 \leq x \leq 1$ vậy hàm số có miền xác định là đoạn $[-1;1]$.

4) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$. y có nghĩa khi:

$-x \geq 0$ và $2 + x > 0$ hay $x \leq 0$ và $x > -2$. Vậy hàm số có miền xác định

$X = (-\infty; 0] \cap (-2, +\infty) = (-2; 0]$.

5) $y = \sqrt{\sin x}$, có ý nghĩa khi $\sin x \geq 0$ hay $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, $k \in Z$, nghĩa là miền xác định của hàm số là tập hợp các đoạn $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $(k \in Z)$.

6) $y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in Q \\ 0 & \text{nếu } x \in I \end{cases}$

Gọi là hàm Đirichlet, có miền xác định $X = R$.

Nếu hàm $y = f(x)$ được cho bằng một công thức nhưng không giải ra đối với y: $F(x,y) = 0$, $\forall x \in X$.

$F[x, f(x)] \equiv 0$ thì y gọi là hàm ẩn của x. Trường hợp y cho bởi một công thức đã được giải ra đối với y cũng gọi là hàm số hiển.

Ngoài phương pháp cho bằng một công thức thường dùng trong giải tích, một hàm số có thể cho bằng những phương pháp khác nhau, chẳng hạn cho bằng một bảng tương ứng giữa $x \in X$, $y \in Y$ như các bảng số thường dùng.

1.2. Đồ thị của hàm số

Xét hàm số $f: X \to Y$, ta gọi đồ thị của hàm số là tập hợp con của tích $X.Y$, nghĩa là tập hợp các cặp số thực (có thứ tự): (x, y) với $x \in X$, $y \in Y$, $(y = f(x))$, trong mặt phẳng, xét hệ trục toạ độ vuông góc xoy và xét cặp (x, y) như là một điểm $M(x,y)$ trong mặt phẳng đó thì đồ thị của hàm số đối với hệ trục tọa độ đó, là một tập hợp điểm trong mặt phẳng, đồ thị đó thường là một đường.

Thí dụ:

1) $y = ax + b$: đồ thị là một đường thẳng.

2) $y = x^2$ đồ thị là một đường parabole.

3) $y = \dfrac{a}{x}$ đồ thị là một đường hyperbole.

4) $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$ đồ thị gồm 2 điểm (-1,0) và (1,0)

5) $y = |x-2| + |x-1|$ có đồ thị ở Hình 1.

vì :

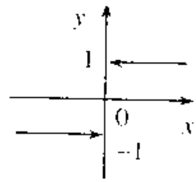
$$y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x < 1 \\ 1 & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

6) $y = E(x)$

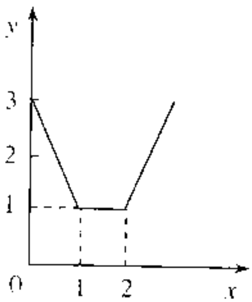
$E(x)$ chỉ phần nguyên của x: $E(x) \leq x$, có đồ thị ở Hình 2 ($x \geq 0$)

7) $y = x - E(x)$ có đồ thị ở Hình 3 ($x \geq 0$)

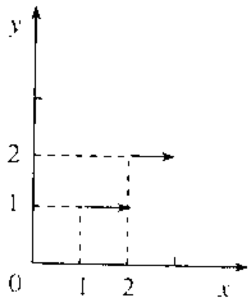
8) $y = \text{sign}x = \begin{cases} +1 : x > 0 \\ 0 \ : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$ (Hình 3a)



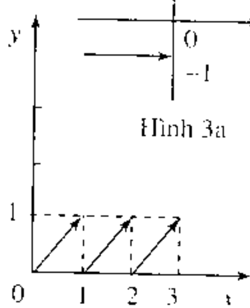
Hình 3a



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Chú ý: Một hàm số cũng có thể được cho bằng đồ thị của nó, khi đó mỗi điểm của đồ thị sẽ cho cách tương ứng giữa $x \subset X$ và $y \in Y$.

1.3. Hàm số ngược

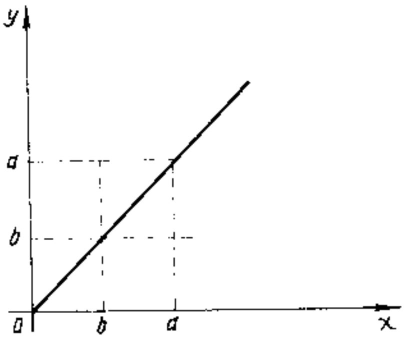
Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X và miền giá trị là Y, theo định nghĩa thì f là một ánh xạ từ X lên Y, nếu f tồn tại ánh xạ ngược f^{-1}, $x = f^{-1}(y)$ thì f^{-1} gọi là hàm số ngược của f. Khi đó hàm số ngược f^{-1} sẽ miền xác định là Y và miền giá trị là X.

Nếu vẽ đồ thị của $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ trong cùng một hệ trục toạ độ xoy thì đồ thị của chúng như nhau vì cùng xác định bằng một cách tương ứng.

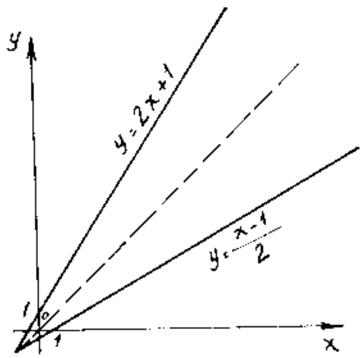
Nhưng cần phân biệt: giá trị của $y = f(x)$ được biểu diễn trên trục oy và giá trị của $x = f^{-1}(y)$ được biểu diễn trên trục ox.

Trong thực tế, người ta thường biểu diễn giá trị của f và f^{-1} trên cùng một trục oy, khi đó hàm ngược phải đổi ký hiệu lại là $y = f^{-1}(x)$ và đồ thị của $y = f^{-1}(x)$ sẽ đối xứng với đồ thị của $y = f(x)$ qua đường phân giác của góc toạ độ thứ nhất, vì xét một điểm bất kỳ $M(a,b)$ trên đồ thị của $y = f(x)$ thì $b = f(a)$, suy ra $a = f^{-1}(b)$ nghĩa là điểm $M'(b,a)$ trên đồ thị của $y = f^{-1}(x)$ rõ ràng M và M' đối xứng nhau qua đường phân giác của góc toạ độ thứ nhất (Hình 4).

(Lấy đơn vị trên các trục như nhau)



Hình 4



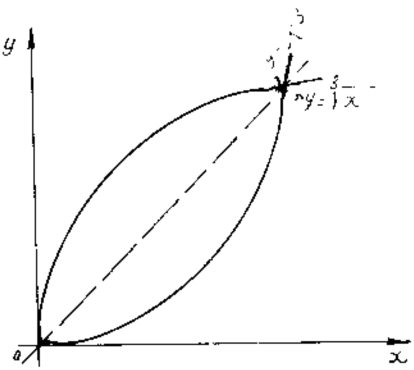
Hình5

Thí dụ:

1) $y = 2x + 1$ có hàm số ngược là

$x = \dfrac{y-1}{2}$ đổi lại ký hiệu ta có $y = \dfrac{x-1}{2}$ (Hình 5)

2) $y = x^3$ có hàm ngược là $x = \sqrt[3]{y}$ đổi lại ký hiệu $y = \sqrt[3]{x}$ (Hình 6, với $x \geq 0$).



Hình 6

1.4. Hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X, miền giá trị là Y và hàm $g(y)$ có miền xác định là Y, miền giá trị là Z, ta gọi ánh xạ hợp của f và g: (gof), $(gof)(x) = g[f(x)]$ là một hàm hợp của các hàm f, g hay là hàm kép của biến độc lập x qua biến trung gian y.

Rõ ràng hàm hợp $z = (gof)(x)$ có miền xác định là X và miền giá trị là Z.

Thí dụ: $y = 2x + 1$ có $X = R$, $Y = R$

$z = \sin y$ có $Y = R$, $Z = [-1,1]$

Vậy hàm hợp $z = \sin(2x+1)$ có $X = R$, $Z = [-1,1]$

Chú ý:

1) Nếu cho miền giá trị của f là Y và miền xác định của g là Y_1 thì $Y \subset Y_1$ mới lập được hàm số hợp (gof).

Thí dụ: $y = x^2$, $z = \sqrt{-\frac{1}{y}}$; ta có $Y = [0, +\infty]$

$Y_1 = (-\infty, 0)$, do đó không lập được hàm hợp, điều này cũng rõ khi thay $y = x^2$ ta có:

$Z = \sqrt{-\frac{1}{x^2}}$ không có nghĩa.

2) Có thể lập hàm hợp của nhiều hàm số.

§ 2. CÁC LOẠI HÀM ĐẶC BIỆT

2.1. Hàm bị chặn - Sup (inf) - Cực trị - giá trị lớn (bé) nhất

Cho hàm $y = f(x)$ có miền xác định là X, miền giá trị là Y, $f(x)$ gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn) trong X nếu miền giá trị Y của nó là một tập hợp bị chặn trên (dưới, bị chặn) nghĩa là:

$\exists c \in R\ \forall x \in X, f(x) \leq c$, $(f(x) \geq c$, $|f(x)| \leq c$, $c > 0)$

Khi đó Sup (inf Y) gọi là Sup (inf) của $f(x)$ trong X. Ký hiệu M_x hay Sup $f(x)$ (m_x hay inf $f(x)$)

Hiệu: h = Sup $f(x)$ - inf $f(x)$ gọi là giao độ của f trong X rõ ràng $h \geq 0$

vì Sup $f(x) \geq$ inf $f(x)$.

Nếu Sup $f(x)$ (inf $f(x)$) $\in Y$, nghĩa là:

$\exists x_o \in X, f(x_o)$ = Sup $f(x)$ = (inf $f(x)$) thì $f(x_o)$ là phần tử lớn (bé) nhất của Y, cũng gọi là giá trị lớn (bé) nhất của f trong X. Vậy $M(m)$ là giá trị lớn (bé) nhất của f trong X nếu:

$\exists x_o \in X$: $f(x_o) = M(m)$, $\forall x \in X$; $f(x) \leq M$ $(\geq m)$.

Ta cũng nói f đạt giá trị lớn (bé) nhất trong X tại x_o. Nếu tồn tại một lân cận Δ của x_o, $\Delta \subset X$ mà f đạt giá trị lớn (bé) nhất trong Δ tại x_o thì $f(x_o)$ gọi là giá trị cực đại (tiểu) của f tại $x_o \in X$, gọi chung là cực trị. Ký hiệu y_{max} $(y_{min}) = f(x_o)$.

Thí dụ:

1) $f(x) = \sin x$ trong $X = [0, 2\pi]$ $f(x)$ là bị chặn trong X, $(|\sin x| \leq 1)$,

sup $\sin x = 1 = \sin \dfrac{\pi}{2}$, inf $\sin x = \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$

1(-1) đồng thời là cực đại (tiểu) và là giá trị lớn (bé) nhất của f trong X.

2) $f(x) = x - E(x)$ trong $X = [0,1]$, f là bị chặn trong X, Sup $f(x) = 1 \notin Y$, inf $f(x) = 0 \in Y$.

2.2. Hàm đơn điệu :

Cho hàm $y = f(x)$ trong miền X, $f(x)$ gọi là đơn điệu không giảm (không tăng) trong X nếu

$\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$

Trường hợp không có dấu =, $f(x)$ gọi là đơn điệu tăng (giảm) trong X. Các hàm trên gọi là các hàm đơn điệu.

Thí dụ:

1) $Y = x^2$ là đơn điệu giảm trong $(-\infty, 0)$ và đơn điệu tăng trong $(0, +\infty)$

2) $y = E(x)$ là đơn điệu không giảm trong $(-\infty, +\infty)$

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý:

Nếu $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong miền X, và có miền giá trị Y, thì f tồn tại hàm ngược f^{-1} đơn điệu tăng (giảm) trong Y.

Thực vậy xét $f(x)$ đơn điệu tăng (đơn điệu giảm lý luận tương tự)

Theo định nghĩa $\forall x_1, x_2$, $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1), f(x_2) \in Y$ do đó $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ nghĩa là $f(x)$ là một ánh xạ 1-1 từ X lên Y, do đó tồn tại ánh xạ ngược f^{-1} của f từ Y lên X nghĩa là tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ có miền xác định Y và miền giá trị X. Rõ ràng $f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng. Thực vậy, giả sử $y_1 < y_2$ và $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Theo định nghĩa thì $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ nếu $x_1 \geq x_2$ thì vì $f(x)$ là đơn điệu tăng nên $f(x_1) > f(x_2)$ tức là $y_1 \geq y_2$, trái với giả thiết. Vậy $x_1 < x_2$ nghĩa là

$x = f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng trong Y.

2.3. Hàm số chẵn, lẻ

Cho hàm f xác định trong miền X đối xứng đối với gốc O

$f(x)$ gọi là chẵn (lẻ) trong X nếu

$\forall x \in X$, $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$

Rõ ràng đồ thị của hàm số chẵn (lẻ) đối xứng qua trục oy (gốc tọa độ)

Thí dụ:

1) $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$ là các hàm chẵn.

2) $f(x) = x$, $f(x) = \sin x$ là các hàm lẻ.

- Rõ ràng mọi hàm $f(x)$,xác định trong miền X có thể viết thành tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ, thực vậy có thể viết:

$f(x) = F(x) + G(x)$

$$F(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2},\ G(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Rõ ràng $F(x)$ là hàm chẵn và $G(x)$ là hàm lẻ.

2.4. Hàm tuần hoàn

Cho hàm $f(x)$ xác định trên miền X. $f(x)$ gọi là hàm tuần hoàn nếu $\exists\ a \in R$, $a \neq 0$ (a = const)

$\forall\ x \in X : f(x) = f(x+a)$

Suy ra: $f(x+2a) = f(x+a) = f(x)$

Tổng quát:

$f(x+ka) = f(x) \qquad k \in Z$

Số dương $T > 0$ (nhỏ nhất) sao cho $f(x+T) = f(x)$

gọi là chu kỳ (nhỏ nhất) của $f(x)$

Theo định nghĩa muốn xét sự tuần hoàn của $f(x)$ ta giải phương trình $f(x+a) = f(x)$, nếu tìm được $a \neq 0$ không phụ thuộc x thì $f(x)$ là tuần hoàn, và chu kỳ T của $f(x)$ được xác định bởi hệ thức $a = kT$, $k \in Z$.

Thí dụ:

1) Xét $f(x) = \sin \alpha x$

Giải: $\sin \alpha(x+a) = \sin \alpha x$. Ta có $\alpha(x+a) = \alpha x + 2k\pi$, $a = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$,

vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{|\alpha|}$

2) Xét $f(x) = x - E(x)$

Giải : $x - E(x) = (x+a) - E(x+a)$ ta có:

$a = E(x+a) - E(x) = k, \quad k \in Z$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = 1$.

3) Xét $f(x) = x^2$

Giải: $(x+a)^2 = x^2$ ta có $a = 0$ và $a = -2x$.

Vậy không có $a \neq 0$, không phụ thuộc x nên hàm không tuần hoàn.

§ 3. CÁC HÀM LŨY THỪA, MŨ, LƯỢNG GIÁC, HYPERBOLE

3.1. Lũy thừa với số mũ thực

Trong tập hợp các số thực R ta biết:

$\forall a \in R, a > 0, \forall n \in N$ đều tồn tại một số duy nhất $x \in R, x > 0: x^n = a$

x gọi là căn bậc n của a : $x = \sqrt[n]{a}$

Dựa vào định nghĩa của $\sqrt[n]{a}$; ta định nghĩa lũy thừa của a với số mũ hữu tỷ bất kỳ :

$$r = \frac{m}{n} \quad : \quad a^r = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \ , (m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$$

Có thể chứng minh dễ dàng, luỹ thừa với số mũ hữu tỉ cũng có mọi tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên. Bây giờ dựa vào định nghĩa lũy thừa với số mũ hữu tỷ. Ta sẽ định nghĩa lũy thừa với số mũ thực bất kỳ.

Định lý: Cho $a \in R, a > 0, a \neq 1, b \in R$.

$\forall r, r' \in Q: r < b < r'$ thì tồn tại duy nhất một số $\alpha \in R$ ở khoảng giữa các số $a^r, a^{r'}$: $a^r < \alpha < a^{r'}$, người ta gọi số đó là lũy thừa của a với số mũ b,

Ký hiệu $\alpha = a^b$.

Có thể chứng minh: lũy thừa với số mũ thực cũng có mọi tính chất như lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

* Để chứng minh sự tồn tại duy nhất của α trước hết ta chứng minh:

$\forall r, r' \in Q, b \in R: r < b < r' \Rightarrow$

a) $\exists (r_k) \subset Q$, đơn điệu tăng, $r < r_k < b, r_k \to b$

b) $\exists (r'_k) \subset Q$, đơn điệu giảm, $b < r'_k < r', r'_k \to b$

Thực vậy xét a), (b): chứng minh tương tự)

Chia đoạn $[r,b]$ làm hai phần bằng nhau bởi b_1 theo tính chất trù mật của Q trong R thì $\forall r_1 \in Q: b_1 < r_1 < b$, rõ ràng

$|r_1 - b| < \dfrac{b-r}{2}$; lại chia đoạn $[r_1, b]$ làm hai phần bằng nhau bởi b_2

thì $\exists r_2 \in Q$

$$b_2 < r_2 < b; \ |r_2 - b| < \frac{b-r}{2^2}$$

Quá trình tiếp tục ta có:

$r_k \in Q: b_k < r_k < b; \left|r_k - b\right| < \dfrac{b-r}{2^k}$

Rõ ràng dãy (r_k) đơn điệu tăng $r < r_k < b$

vì: $\dfrac{b-r}{2^k} \to 0 \Rightarrow (r_k \to b)$

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại duy nhất của số α

Xét $a > 1$, ($a < 1$, chứng minh tương tự, hoặc đặt $a = \dfrac{1}{a'}$; $a' > 1$ thì đưa được về trường hợp này).

Theo chứng minh trên thì có: $r_k \to b$, $r'_k \to b$

$r < r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots < r'_k < \ldots < r'_2 < r'_1 < r'$

Vì $a > 1$ nên:

$a^r < a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_k} < \ldots < a^{r'_k} < \ldots < a^{r'_2} < a^{r'_1} < a^{r'}$

Rõ ràng

$a^{r'_k} - a^{r_k} = a^{r_k}(a^{r'_k - r_k} - 1) \to 0$

Vì đặt: $x_k = r'_k - r_k$ thì $x_k \to 0$, xét $x_k < 1$ thì $\dfrac{1}{x_k} > 1$

Đặt $n_k = E\left(\dfrac{1}{x_k}\right)$ thì $n_k \le \dfrac{1}{x_k} < n_k + 1$ hay

$\dfrac{1}{n_k + 1} < x_k < \dfrac{1}{n_k}$; suy ra $a^{\frac{1}{n_k+1}} < a^{x_k} \le a^{\frac{1}{n_k}}$

Nhưng: $a^{1/n_k} \to 1$ nên $a^{x_k} \to 1$

Vậy dãy đoạn $\left(\left[a^{r_k}, a^{r'_k}\right]\right)$ là dãy đoạn thắt theo nguyên lý Cantor, có một số duy nhất α.

$\forall k : \alpha \in \left[a^{r_k}, a^{r'_k}\right]$ theo trên thì $a^r < \alpha < a^{r'}$

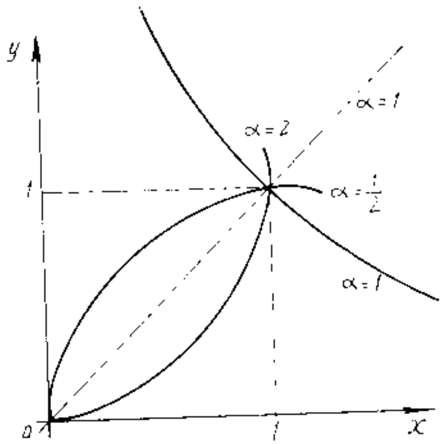
Dựa vào sự tồn tại của α ta sẽ định nghĩa các hàm lũy thừa và hàm mũ.

3.2. Hàm lũy thừa

Hàm lũy thừa là hàm có dạng $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

Miền xác định của y phụ thuộc α, chẳng hạn $\alpha = n \in N$ hoặc $\alpha = \dfrac{1}{n}$, n lẻ thì y xác định $\forall\ \alpha \in R$ nhưng $\alpha = \frac{1}{n}$, n chẵn thì chỉ xác định $\forall\ x \geq 0$, $x < 0$ thì y không xác định.

Rõ ràng $\forall \alpha \in R$, y xác định trong $(0, +\infty)$, nếu $\alpha > 0$ (<0) thì đồ thị của y gọi là 1 parabole (hyperbole) bậc α (Hình 7).



Hình 7

3.3. Hàm mũ

Hàm mũ là hàm có dạng $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Hàm mũ xác định $\forall\ x \in R$ và luôn luôn dương, nếu $a > 1$ thì a^x đơn điệu tăng, $a < 1$ thì a^x đơn điệu giảm.

Đồ thị của a^x ở phía trên trục hoành (Hình 8)

3.4. Hàm lượng giác

Đó là các hàm số đã định nghĩa trong lượng giác học

$y = \sin x$, $y = \cos x$,

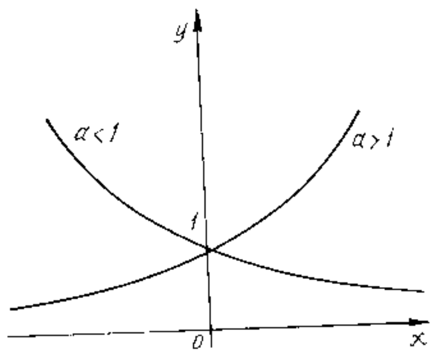
$y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{cotg}x$.

Các hàm $\sin x$, $\cos x$, xác định $\forall\ x \in R$ và là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

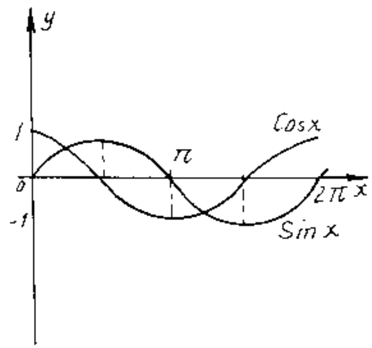
(x đo bằng radian) (Hình 9)

Hàm $y = \mathrm{tg}x$ ($\mathrm{cotg}x$) xác định $\forall\ x \in R$ trừ

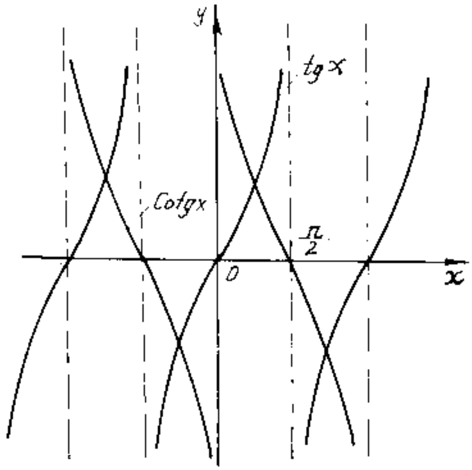
$x = (2k+1)\ \pi/2$ ($k\ \pi$) và là hàm tuần hoàn chu kỳ π (Hình 10)



Hình 8



Hình 9



Hình 10

3.5. Hàm hyperbole

Dựa vào định nghĩa hàm số mũ ta sẽ định nghĩa một loại hàm khác gọi là các hàm hyperbole. Chúng có các tính chất tương tự như hàm lượng giác. Hàm hyperbole là các hàm được ký hiệu và xác định như sau:

$$y = \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; y = \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y = \mathrm{th}x = \frac{shx}{chx} \; ; \; y = \text{côth} = \frac{1}{thx}$$

Trong đó: $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Đọc lần lượt là S-h-x, c-h-x, t-h-x, cô-t-h-x và gọi là Sin-hyperbole;

cosin-hyperbole; tg-hyperbole; cotg-hyperbole.

Các hàm này xác định $\forall\ x \in R$ trừ y = cothx không xác định khi $x = 0$ (Hình 11,12)

Từ định nghĩa suy ra:

$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$; $\dfrac{1}{ch^2x} = 1 - \mathrm{th}^2x$; $\dfrac{1}{sh^2x} = \mathrm{coth}^2x - 1$

$\mathrm{ch}\,(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$, $\mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2x + \mathrm{sh}^2x$

$\mathrm{sh}\,(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$, $\mathrm{sh}2x = 2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x$.

Thực vậy, chẳng hạn: Xét $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$

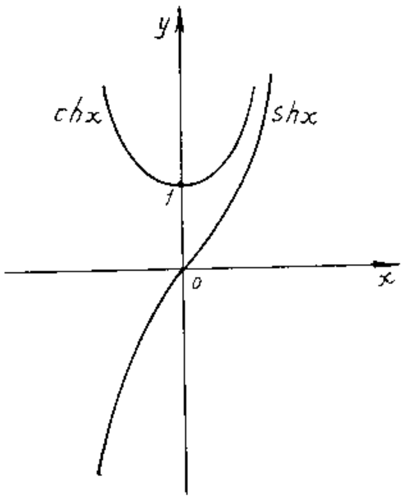
Ta có $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = (\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x)(\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x) = e^x.e^{-x} = 1$

Vì định nghĩa $\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$ và tương tự:

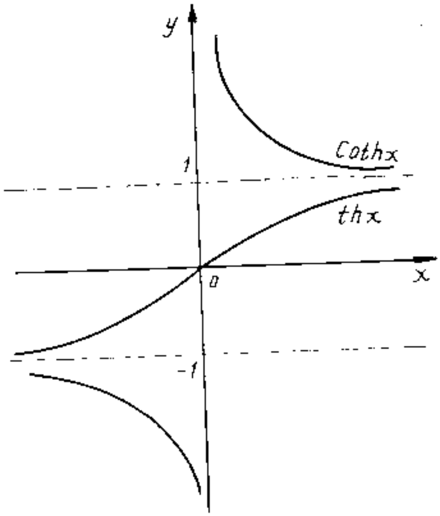
$\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x}$

Xét $\mathrm{ch}(x+y) = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \dfrac{1}{2}\left[e^x.e^y + e^{-x}.e^{-y}\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[(\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x)(\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y) + (\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x)(\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}y)\right] = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y + \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y.$



Hình 11



Hình 12

§ 4. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

4.1. Điểm tụ của một tập hợp

Xét tập hợp $X \subset \widetilde{R}$, $x_o \in \widetilde{R}$ (hữu hạn hoặc vô hạn) gọi là điểm tụ của X nếu trong mọi lân cận của x_o đều $\exists\, x \in X, x \neq x_o$. Theo định nghĩa thì x_o có thể thuộc X hoặc không; chẳng hạn $X = [a,b)$ thì a, b đều là điểm tụ của X nhưng $a \in X$ còn $b \notin X$.

Rõ ràng nếu $x_o \in R$ là điểm tụ của X thì $\exists\, (x_n) \subset X$

$x_n \neq x_o, x_n \to x_o$

Thực vậy: xét $x_o \in R$ ($x_o = +\infty$ ($-\infty$) xét tương tự) và xét các lân cận của x_o. $\Delta_n = (x_o - \varepsilon_n, x_o + \varepsilon_n)$, $\forall \varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Lấy $x_1 \in \Delta_1, x_1 \neq x_o$; $x_2 \in \Delta_2, x_2 \neq x_o$, $x_1, \ldots, x_n \in \Delta_n, x_n \neq x_o \ldots$ thì $\forall\, n$: $|x_n - x_0| < \varepsilon_n$ nghĩa là $x_n \to x_o$.

4.2. Định nghĩa giới hạn của hàm số

Định nghĩa 1: cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong miền X và $x_o \in \widetilde{R}$ là một điểm tụ của X, số $a \in \widetilde{R}$ gọi là giới hạn của $f(x)$ tại x_o hay $f(x)$ dần tới a khi x dần tới x_0 nếu:

$\forall (x_n) \subset X, x_n \neq x_o, x_n \to x_o \Rightarrow (f(x_n) \to a)$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ hay $f(x) \to a$ ($x \to x_o$)

Bây giờ xét x_o, $a \in R$, từ định nghĩa trên ta sẽ suy ra một định nghĩa khác tương đương với nó:

Định nghĩa 2 : Số $a \in R$ gọi là giới hạn của $f(x)$ tại x_o nếu:

$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Định nghĩa này gọi là định nghĩa theo ngôn ngữ "ε, δ " còn định nghĩa 1 cũng được gọi là định nghĩa theo ngôn ngữ "dãy"

Thực vậy: từ định nghĩa 1 ta suy ra định nghĩa 2, vì nếu không nghĩa là:

$\forall\, \delta > 0, \exists\, \varepsilon > 0, \exists x\,, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| \geq \varepsilon$

vì $\forall (x_n), x_n \neq x_o, x_n \to x_o$

nên với δ đã chọn thì $\exists\, n_o$: $\forall\, n > n_o$: $0 < |x_n - x_0| < \delta$ khi đó $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon$

Chứng tỏ $f(x_n) \not\to a$.

Điều này mâu thuẫn với định nghĩa 1, ngược lại, từ định nghĩa 2:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta\ > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ lấy dãy bất kỳ (x_n).
$x_n \neq x_0, x_n \to x_0$, với δ đã chọn thì $\exists\ n_0, \forall\ n > n_0, 0 < |x_n - x_0| < \delta$.

Khi đó $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Chứng tỏ $f(x_n) \to a$ nghĩa là có định nghĩa 1.

Vì $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 \vee x_0 < x < x_0 + \delta$; $|f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$f(x) \in E, E = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$;

Do đó $x \in \Delta \backslash x_0 \Rightarrow f(x) \in E \Leftrightarrow f(\Delta \backslash x_0) \subset E$

$\Delta = (x_0 - \delta\ , x_0 + \delta\ )$

Nên định nghĩa 2 còn được phát biểu dưới dạng sau:

Số $a \in R$ gọi là giới hạn của $f(x)$ tại $x_0 \in R$ nếu cho trước một lân cận E của điểm a thì sẽ có 1 lân cận Δ của điểm x_0 để $f(\Delta \backslash x_0) \subset E$. Trong các định nghĩa trên, ta xét $x \to x_0$ một cách bất kỳ. Nếu $x \to x_0$, $x < x_0 < (x > x_0)$ mà $f(x) \to a$ thì a gọi là giới hạn bên trái (phải) của $f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a)$

Rõ ràng: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$$

Thực vậy: giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ theo định nghĩa 2

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta\ > 0, x_0 - \delta\ < x < x_0 \vee x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Vậy: $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta\ > 0, x_0 - \delta\ < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$ hoặc:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta\ > 0, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$

Ngược lại, giả sử: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$

Theo định nghĩa 2:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0, x_0 - \delta'\ < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$\exists\ \delta'' > 0, x_0 < x < x_0 + \delta'' \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

chọn $\delta\ = \min(\delta', \delta'')$ thì

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x_0 - \delta < x < x_0 \vee x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Nghĩa là: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Chú ý: Ta cũng ký hiệu $x_0 - 0$ $(x_0 + 0) = x_0^-$ (x_0^+)

Thí dụ:

1) Chứng minh: $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$. Xét một dãy bất kỳ x_n, $x_n \neq 1$, $x_n \to 1$

khi đó $2x_n + 1 \to 3$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$

2) Chứng minh: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Xét một dãy bất kỳ $x_n \to +\infty$ thì $\dfrac{1}{x_n} \to 0$, do đó:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Tương tự: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\qquad \lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{x} = -\infty$

3) Chứng minh: $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ $(a > 1)$

Xét $x \to +0$; Lấy một dãy bất kỳ x_k, $0 < x_k < 1$ $x_k \to 0$. Khi đó $\dfrac{1}{x_k} > 1$

Đặt $n_k = E\left(\dfrac{1}{x_k}\right)$ thì $n_k \leq \dfrac{1}{x_k} < n_k + 1$ hay $\dfrac{1}{n_k + 1} < x_k \leq \dfrac{1}{n_k}$

Vì a > 1 nên $a^{\frac{1}{n_k+1}} < a^{x_k} \leq a^{\frac{1}{n_k}}$.

Như đã biết các dãy $a^{\frac{1}{n_k+1}}, a^{\frac{1}{n_k}}$ đều dần tới 1 (chương 2) theo tính chất giới hạn của dãy thì $a^{x_k} \to 1$, theo định nghĩa $\lim\limits_{x \to +0} a^x = 1$

Xét $x \to -0$, lấy một dãy bất kỳ $x_k \to -0$. Đặt $x_k = -x'_k$ thì $x'_k \to +0$,

Theo chứng minh trên $a^{x_k} = a^{-x'_k} = \dfrac{1}{a^{x'_k}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ $(a > 1)$

Tương tự: $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ $(0 < a < 1)$

4) Chứng minh : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \ (a>1)$

Xét một dãy bất kỳ (x_k), $x_k \to +\infty$ đặt $n_k = E(x_k)$ thì $x_k \geq n_k$ và $a^{x_k} \geq a^{n_k}$ $(a>1)$, $(x_k > 1)$

Nhưng $a^{n_k} \to +\infty$ (chương 2); do đó $a^{x_k} \to +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \ (a>1)$

Từ kết quả này suy ra :

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \ (a>1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \ (0<a<1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \ (0<a<1)$

5) Chứng minh : $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại

Theo định nghĩa, chỉ cần chỉ ra một dãy (x_n), $x_n \to 0$ mà $\sin\dfrac{1}{x_n}$ không tồn tại

Xét dãy $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$ thì $x_n \to 0$

và $\sin\dfrac{1}{x_n} = \sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$ không tồn tại, vì khi $n = 2m$ thì

$\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2} = \sin(4m-1)\dfrac{\pi}{2} = -1 \to -1$, $n = 2m+1$ thì

$\sin(2n-1)\dfrac{\pi}{2} = \sin(4m+1)\dfrac{\pi}{2} = 1 \to 1$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ không tồn tại

Chú ý : Định nghĩa trên không đòi hỏi $f(x)$ phải xác định tại x_o vì x_o là một điểm tụ của X, thì x_o có thể thuộc X hoặc không, do đó có trường hợp $f(x)$ không xác định tại x_o, nhưng vẫn có giới hạn tại đó.

Chẳng hạn xét : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ không xác định tại x_o=1 nhưng $x_n \neq 1 \to x_n \to 1$ thì

$\dfrac{x_n^2-1}{x_n-1} = \dfrac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1} = x_n + 1 \to 1 + 1 = 2$, nghĩa là $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

4.3. Tính chất và phép toán

Xét $x_0 \in \widetilde{R}, a \in R$

Từ định nghĩa giới hạn hàm số và các tính chất của dãy hội tụ, suy ra:

1°. $f(x) \to a_1, f(x) \to a_2\ (x \to x_0) \Rightarrow a_1 = a_2$

(tính chất duy nhất của giới hạn)

2°. $f(x) \to a(x \to x_0) \Leftrightarrow (f(x) - a) \to 0\ (x \to x_0)$

3°. $f(x) = C,\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \to C\ (x \to x_0)$

4°. $f(x) \to a,\ g(x) \to a\ (x \to x_0)$

$\exists \delta > 0, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0, f(x) \le h(x) \le g(x) \Rightarrow h(x) \to a(x \to x_0).$

5°. $f(x) \to a(x \to x_0) \Rightarrow \exists C > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0, |f(x)| \le C$

6°. $f(x) \to a(x \to x_0), a > p\ (< q) \Rightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0,$

$f(x) > p\ (< q)$

Hệ quả:

$f(x) \to a(x \to x_0), \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash x_0, f(x) \le p\ (\ge q) \Rightarrow a \le p\ (\le q)$

7°. $f(x) \to a(x \to x_0),\ g(y) \to b(y \to a) \Rightarrow g[f(x)] \to b(x \to x_0)$

8°. $f(x) \to a,\ g(y) \to b, (x \to x_0) \Rightarrow f(x) \pm g(x) \to a \pm b\ (x \to x_0)$

$f(x) \cdot g(x) \to a \cdot b\ (x \to x_0)$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ (b ≠ 0) $(x \to x_0)$

Thực vậy chẳng hạn xét phần đầu của 8:

Xét dãy bất kỳ $(x_n), x_n \ne x_0, x_n \to x_0$

thì $f(x_n) \to a, g(x_n) \to b$, theo tính chất của dãy hội tụ

thì $f(x_n) + g(x_n) \to a + b(x \to x_0)$. vậy $f(x_n) + g(x_n) \to a + b(x \to x_0)$

Thí dụ: Chứng minh

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

Xét $x \to +0$ và $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < x$, nhưng $0 \to 0, x \to 0$ nên theo 4°

$\sin x \to 0$

Xét $x \to -0$, đặt $x = -x'$ thì $x' \to +0$ và $-\sin x = \sin(-x') = -\sin x' \to 0$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

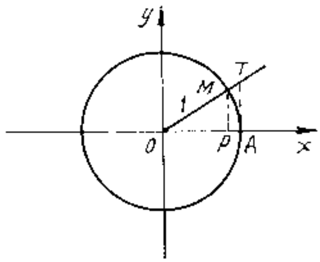
Ta biết $\cos x = 1 - 2\sin^2 x/2$,

Theo thí dụ trên và theo 8^o

Thì $\cos x \to 1 - 0 = 1 (x \to 0)$

hay $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



Hình 13

Xét $x \to +0$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Theo Hình 13:

$\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{1}{2} x < \dfrac{1}{2} tgx$ hay $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

Nhưng $\cos x \to 1$ $(x \to 0)$, $1 \to 1$. Theo 4^o. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Xét $x \to -0$, đặt $x = -x'$ thì khi đó

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x' \to +0} \frac{\sin(-x')}{-x'} = \lim_{x' \to +0} \frac{\sin x'}{x'} = 1$$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Xét $x > 1$, $x \to +\infty$, lấy 1 dãy bất kỳ (x_k), $x_k > 1$, $x_k \to +\infty$ đặt $n_k = E(x_k)$ thì $n_k \le x_k < n_k + 1$ hay $\dfrac{1}{n_k + 1} < \dfrac{1}{x_k} \le \dfrac{1}{n_k}$

Suy ra : $\left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k} \le \left(1 + \dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}$

Nhưng $\left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \left(1 + \dfrac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{n_k + 1}} \to e.1 = e$

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) \to e.1 = e$$

Theo 4^o. $\left(1 + \dfrac{1}{x_k}\right)^{x_k} \to e$ Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Xét $x \to -\infty$, đặt $x = -x' - 1$ thì $x' \to +\infty$. Khi đó

$$\left(1+\frac{1}{-x'-1}\right)^{-x'-1} = \left(\frac{-x'}{-x'-1}\right)^{-x'-1} = \left(\frac{x'+1}{x'}\right)^{x'+1} = \left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}.\left(1+\frac{1}{x'}\right) \to e.1 = e$$

(theo trên) Vậy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Đặt $x = \frac{1}{\alpha}$, $x \to \pm\infty$ thì $\alpha \to 0$ khi đó $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

Chú ý : Giới hạn trên có dạng 1^{∞}, sau này sẽ thấy đây cũng là 1 dạng vô định.

4.4. Khử dạng vô định

Tương tự như đối với dãy số khi tìm giới hạn của hàm số ta cũng gặp các dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞} và còn gặp các dạng vô định khác.

Ta sẽ dùng biến đổi đại số và dùng các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

để khử các dạng vô định đó

1°. Dạng $\frac{0}{0}$

Thí dụ :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x}-3}{\sqrt{4x}-2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+8x}-3)(\sqrt{1+8x}+3)(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{4x}-2)(\sqrt{4x}+2)(\sqrt{1+8x}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{8(x-1)(\sqrt{4x}+2)}{4(x-1)(\sqrt{1+8x}+3)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{4x}+2)}{\sqrt{1+8x}+3} = \frac{4}{3}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a\sin ax}{ax} = a\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = a$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.1=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$

2°. Dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Thí dụ :

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^3+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1}=-1$

3°. Dạng 0. ∞

Thí dụ :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x.\cot gx=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{y\to 0}y\,tg\frac{\pi}{2}(1-y)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{tg\frac{\pi}{2}y}=\frac{2}{\pi}$

(Đặt $1-x=y\Rightarrow x\to 1\Rightarrow y\to 0$)

4°. Dạng ∞ - ∞

Thí dụ :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

5^0. Dạng 1^∞

Thí dụ : Tìm

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, $\left(\alpha=\frac{k}{x}, k\in Z, k\neq 0\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{k}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\underbrace{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}....(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}_{k\text{ lần}}=e^k \quad \left(\alpha=\frac{k}{x}\right)$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\frac{-3}{x+2}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{-6}{\alpha}-3}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-3}(1+\alpha)^{\frac{-6}{\alpha}}=1.e^{-6}=e^{-6}\quad\left(\alpha=\frac{-3}{x+2}, x\to\infty, \alpha\to 0\right)$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{-2}{\alpha}}=e^{-2}, \left(\alpha=-2\sin^2 x\right)$$

§ 5. VÔ CÙNG BÉ VÀ VÔ CÙNG LỚN

5.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong miền X và $x_0\in\widetilde{R}$ là 1 điểm tụ của X, hàm $f(x)$ gọi là một vô cùng bé (vô cùng lớn) khi $x\to x_0$ nếu :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\ \left(\lim_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty\right)$$

Ký hiệu $f(x)$: VCB (VCL) $(x\to x_0)$

Thí dụ :

1) $y=\sin x$: VCB $(x\to 0)$ vì $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

2) $y = x^n$: VCL $(x\to\infty)$ vì $\lim\limits_{x\to\infty}|x^n|=+\infty$

Rõ ràng: nếu $f(x)\to\infty$ $(x\to x_0)$ thì $f(x)$: VCL $(x\to x_0)$

Nhưng ngược lại, nói chúng không đúng, chẳng hạn :

$x_n = (-1)^n n$: VCL ($n \to +\infty$) vì $|x_n| \to +\infty$, nhưng x_n không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

5.2. Các phép toán:

Từ định nghĩa và các phép toán giới hạn ta suy ra ngay các phép toán về VCB (VCL) như sau :

1°. $f(x)$, $g(x)$: VCB ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$: VCB ($x \to x_0$).

2°. $f(x)$: VCB, $g(x)$ bị chặn, đặc biệt $g(x)$: VCB ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x).g(x)$: VCB ($x \to x_0$).

3°. $f(x)$: VCL, $g(x)$: bị chặn ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x) \pm g(x)$: VCL ($x \to x_0$).

4°. $f(x)$, $g(x)$: VCL ($x \to x_0$) $\Rightarrow f(x).g(x)$: VCL ($x \to x_0$).

5°. $f(x)$: VCB $\neq 0$ ($x \to x_0$) $\Rightarrow 1/f(x)$: VCL ($x \to x_0$) $f(x)$: VCL ($x \to x_0$) $1/f(x)$: VCB ($x \to x_0$).

6°. $f(x) \to a$ ($x \to x_0$) $\Leftrightarrow f(x) - a$: VCB ($x \to x_0$), ($a \in R$).

5.3. So sánh

a) ***Định nghĩa***: cho $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) ($x \to x_0$), $f(x)$ gọi là có bậc k ($k > 0$) so với $g(x)$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^k} = C, C \neq 0 \ (C \in R)$$

$g(x)$: gọi là VCB (VCL) cơ sở

Đặc biệt: $k = 1$ thì $f(x)$, $g(x)$ gọi là các VCB (VCL) đồng bậc khi $x \to x_0$

$k > 1$ thì $f(x)$, gọi là có bậc cao hơn bậc của $g(x)$ hay $g(x)$ gọi là bậc thấp hơn bậc của $f(x)$ khi $x \to x_0$.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý: - cho $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) $x \to x_0$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 : & \text{nếu } f(x) \text{ có bậc cao (thấp) hơn của bậc } g(x) \\ \infty : & \text{nếu } f(x) \text{ có bậc thấp (cao) hơn của bậc } g(x) \end{cases}$$

Thực vậy: xét trường hợp $f(x)$, $g(x)$, VCB ($x \to x_0$) và $f(x)$ có bậc cao hơn bậc của $g(x)$ (các trường hợp khác tương tự).

Theo định nghĩa thì: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{[g(x)]^k} = C \neq 0, k > 1$

Suy ra: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)[g(x)]^{k-1}}{[g(x)]^k} = C.0 = 0$

5.4. Vô cùng bé (vô cùng lớn) tương đương

Định nghĩa cho $f(x)$, $g(x)$: VCB, (VCL) $(x \to x_0)$ $f(x).g(x)$ gọi là các vô cùng bé (VCL) tương đương khi $x \to x_0$ nếu:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ký hiệu $f(x) \sim g(x)$, như vậy $f(x)$ có bậc $k \geq 1$ so với $g(x)$ thì:

$f(x) \sim C\,[g(x)]^k$

$C\,[g(x)]^k$ gọi là phần chính của VCB (VCL) khi $x \to x_0$

Thí dụ: Theo các ví dụ và bài tập đã có, khi $x \to 0$, $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$,

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\operatorname{tg} x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$, $(1 - x)^r - 1 \sim rx$, $r \in Q$, $r > 0$.

Khi $x \to \infty$: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \sim a_0x^n$.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý 1: Nếu $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) $(x \to x_0)$ $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ thì:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Thực vậy: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{f_1(x)} \cdot \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \dfrac{g_1(x)}{g(x)} =$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x)}{g(x)} = 1 \right) \text{ do } f_1 \sim f,\ g_1 \sim g$$

Định lý 2: cho $f(x)$, $g(x)$: VCB (VCL) $(x \to x_0)$ nếu $g(x)$ có bậc cao (thấp) hơn bậc của $f(x)$ thì:

$$f(x) + g(x) \sim f(x)$$

Thực vậy, xét trường hợp VCB (VCL): tương tự)

Ta có :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=1$$

$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ vì $g(x)$ có bậc cao hơn của $f(x)$, do đó theo định nghĩa

$$f(x)+g(x)\sim f(x)$$

Chú ý: Nếu $f\sim f_1$, $g\sim g_1$ thì $fg\sim f_1g_1$

Nhưng chưa chắc $f\pm g\sim f_1\pm g_1$

Chẳng hạn $\sin x\sim x$, $\text{tg}x\sim x$ khi $x\to 0$

Nhưng $\text{tg}x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$ khi $x\to 0$

Áp dụng các định lý trên, ta có thể tìm giới hạn của các hàm là thương của các VCB (VCL).

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x.2x}{\frac{1}{2}x^2}=4$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{tgx-\sin x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{3}x}=3$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+2}{3x^3+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$

§ 6. ĐỊNH NGHĨA SỰ LIÊN TỤC VÀ GIÁN ĐOẠN CỦA HÀM SỐ

6.1. Định nghĩa 1

Hàm $y=f(x)$ xác định tại lân cận điểm $x_o\in X$, gọi là liên tục tại x_o nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_o)$ nghĩa là $\forall(x_n)$, $x_n\to x_o\Rightarrow(f(x_n)\to f(x_o))$ hay $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$,

$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x)|<\varepsilon$

Hoặc cho trước một lân cận $E = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ của điểm $f(x_0)$ thì sẽ tồn tại một lân cận $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ của điểm x_0 sao cho $f(\Delta) \subset E$, x_0 gọi là điểm liên tục của $f(x)$.

Đặt $\Delta x = x - x_0$

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Δx, Δy gọi là số gia của đối số và hàm số tại x_0, thì định nghĩa trên có thể phát biểu cách khác như sau:

Hàm $y = f(x)$ xác định tại lân cận x_0, gọi là liên tục tại x_0 nếu: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Một hàm số gọi là liên tục trong tập hợp $X \subset R$ nếu nó liên tục tại $\forall x \in X$, khi đó X gọi là miền liên tục của hàm số.

Thí dụ:

1) Xét hàm $y = x$

$\forall x \in R$ ta có $\Delta y = \Delta x$, suy ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Vậy $y = x$ liên tục $\forall x \in R$.

2) Xét hàm $y = a^x$ tại $x_0 \in R$, $\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right)$

Như đã biết $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, do đó:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = a^{x_0} \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(a^{\Delta x} - 1\right) = 0$

Vậy $y = a^x$ liên tục tại $x_0 \in R$, vì x_0 là bất kỳ nên hàm số liên tục $\forall x \in R$

3) Xét hàm $y = \sin x$ tại $x_0 \in R$

vì $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$

Nên $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Vậy $y = \sin x$ liên tục tại $x_0 \in R$, vì x_0 là bất kỳ nên hàm số liên tục $\forall x \in R$.

Tương tự: $y = \cos x$ cũng liên tục tại $\forall x \in R$

Ta đã định nghĩa hàm $y = f(x)$ liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Nếu chỉ có: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)\right)$ thì $f(x)$ gọi là liên tục bên trái (bên phải) điểm x_0

Thí dụ:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}; x \neq 0 \\ 0; x = 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, do đó $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(0) = 0$

Vậy $f(x)$ liên tục bên trái điểm $x = 0$

Từ định nghĩa giới hạn suy ra: ***f(x) là liên tục tại x_o khi và chỉ khi nó liên tục bên trái và bên phải điểm x_o***, nghĩa là:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Từ đó suy ra: đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trong miền X là 1 đường liền vì nếu không thì không thể có đẳng thức này.

6.2. Định nghĩa 2: (điểm gián đoạn)

Hàm $y = f(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0(có thể trừ ra tại x_0) gọi là gián đoạn tại x_o, nếu nó không liên tục tại đó, nghĩa là không tồn tại đẳng thức: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. x_o gọi là điểm gián đoạn của hàm số. Như vậy $f(x)$ là gián đoạn tại x_0 nếu:

1°. $f(x)$ không xác định tại x_0 (không có $f(x_o)$) hoặc

2°. $f(x)$ không có giới hạn ($\in R$) tại x_o hoặc

3°. $f(x)$ có giới hạn ($\in R$) tại x_0 nhưng giới hạn đó không bằng $f(x_0)$.

Nếu x_o là điểm gián đoạn của $f(x)$ với điều kiện $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ tồn tại ($\in R$) thì x_o gọi là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$.

Hiệu: $h = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$

gọi là bước nhảy của $f(x)$ tại x_o, nếu $h = 0$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại thì có thể lập lại sự liên tục của $f(x)$ tại x_0 bằng cách đặt $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, khi đó x_o gọi là điểm gián đoạn bỏ được của $f(x)$, nếu x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ nhưng không phải là điểm gián đoạn loại 1 của nó thì x_o gọi là điểm gián đoạn loại 2 của $f(x)$.

Thí dụ:

1) Xét $f(x) = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ 1 - x; x > 0 \end{cases}$

Ta có

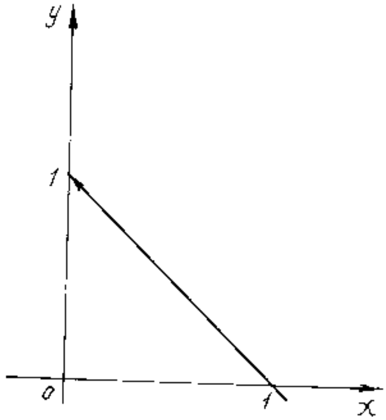
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0,\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$ với bước nhảy $h = 1 - 0 = 1$.

2) Xét:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$ với bước nhảy $h = 0$. Do đó có thể lập sự liên tục của $f(x)$ tại $x = 0$ bằng cách đặt $f(0) = 1$.



Hình 14

3) Xét $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tại $x = 0$, $f(x)$ không xác định, do đó $x = 0$ là điểm gián đoạn của $f(x)$ vì

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ nên $x = 0$ là điểm gián đoạn 2 của $f(x)$

4) Xét $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} : x \neq 0 \\ 0 : x = 0 \end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ không tồn tại nên $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2 của $f(x)$

5) Xét $f(x) = \begin{cases} 1 : x \in Q \\ 0 : x \in I \end{cases}$ (gọi là hàm Dirichlet)

Rõ ràng $\forall x \in R$ đều là điểm gián đoạn loại 2 của $f(x)$.

6.3. Các phép toán về hàm liên tục

Từ các phép toán về giới hạn suy ra:

Định lý 1: Nếu $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại x_o thì $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $f(x)/g(x)$

$(g(x_0) \neq 0)$ cũng liên tục tại x_0.

Thí dụ:

1) Ta biết $y = x$ liên tục $\forall x \in R$, do đó $y = x^n$

$(n \in N)$ là liên tục $\forall x \in R$

2) Ta biết $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục $\forall x \in R$ do đó $y = \mathrm{tg}x = \sin x/\cos x$ là liên tục $\forall x \in R$, trừ $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ tại đó $\cos x = 0$

$y = \mathrm{cotg}x$ liên tục $\forall x \in R$ trừ $x = k\pi$.

Định lý 2: Cho hàm hợp $y = g[f(x)]$ với $y = g(u)$; $u = f(x)$, nếu $f(x)$ liên tục tại x_0, $g(u)$ liên tục tại $u_0 = f(x_0)$ thì $g[f(x)]$ liên tục tại x_0.

Thí dụ:

- Xét $y = e^{-x}$ đặt $u = -x$ thì u liên tục $\forall x \in R$, e^u liên tục $\forall u \in R$,

vậy $y = e^{-x}$ liên tục $\forall x \in R$.

Suy ra: $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $thx = \dfrac{shx}{chx}$ liên tục $\forall x \in R$,

$\coth x = \dfrac{1}{thx}$ liên tục $\forall x \in R$, trừ $x = 0$.

§ 7. CÁC TÍNH CHẤT CỦA HÀM LIÊN TỤC TRONG MỘT ĐOẠN

$y = f(x)$ gọi là liên tục trong đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục $\forall x \in (a, b)$, liên tục bên phải điểm a và bên trái điểm b.

7.1. Định lý Weierstrass I : - Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn trong đoạn đó, nghĩa là $\exists C > 0\ \forall x \in [a, b]$: $|f(x)| \leq c$

Chứng minh: - Giả sử ngược lại $f(x)$ không bị chặn trong $[a, b]$ nghĩa là

$\forall C > 0$, $\exists x \in [a, b]$ $|f(x)| > c$, do đó $\forall n \in N$, $\exists x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$ (1)

Rõ ràng dãy x_n là bị chặn theo nguyên lý Bolzano-Weierstrass thì dãy đó có một dãy con (x_{n_k}) hội tụ, giả sử $x_{n_k} \to x_0$.

Rõ ràng $x_0 \in [a, b]$ vì $\forall n$: $a \leq x_n \leq b$.

Theo tính chất của giới hạn thì $a \leq x_0 \leq b$, theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong

$[a, b]$ nên $f\left(x_{n_k}\right) \to f\left(x_0\right)$ suy ra $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \to \left|f\left(x_0\right)\right|$, mặt khác theo (1) thì $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| \geq n_k \to +\infty$ mâu thuẫn này chứng tỏ sự đúng đắn của định lý.

7.2. Định lý Weierstrass II : - Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì nó đạt một giá trị lớn nhất và một giá trị bé nhất trong đoạn đó.

* Chứng minh: Theo định lý trước thì $f(x)$ bị chặn trong $[a, b]$ do đó theo tiêu đề Sup thì tồn tại $M = \operatorname{Sup} f(x)$, $m = \inf f(x)$ ta sẽ chứng minh $M(m)$ là giá trị lớn (bé) nhất của $f(x)$ trong $[a, b]$, nghĩa là chứng minh $\exists c \in [a, b]$: $f(c) = M(m)$.

Thực vậy xét trường hợp giá trị lớn nhất (trường hợp giá trị bé nhất chứng minh tương tự)

Theo tính chất 2 của Sup thì:

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in [a, b]: f(x) > M - \varepsilon$

Do đó $\forall n \in N, \exists x_n \in [a, b]: f(x_n) > M - \dfrac{1}{n}$ (1)

Rõ ràng x_n là 1 dãy bị chặn, theo nguyên lý Bolzano weierstrass, dãy đó có một dãy con $\left(x_{n_k}\right)$ hội tụ, giả sử $x_{n_k} \to c$, rõ ràng $c \in [a, b]$. Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong $[a, b]$ nên $f\left(x_{n_k}\right) \to f(c)$.

Mặt khác theo (1) $f\left(x_{n_k}\right) > M - \dfrac{1}{n_k}$, do đó : $f(c) \geq M$ (2).

Nhưng $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq M$, suy ra $f(c) \leq M$ (3). So sánh (2) và (3) ta có $f(c) = M$.

7.3. Định lý Bolzano-Cauchy

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ và γ là một số cho trước ở khoảng giữa $f(a), f(b)$

$f(a) \neq f(b)$ thì có 1 số $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = \gamma$.

* Chứng Minh: Giả sử $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$ chứng minh tương tự) khi đó $f(a) < \gamma < f(b)$ chia đoạn $[a, b]$ ra làm 2 phần bằng nhau bởi điểm $\overline{c}$,

Nếu $f(\overline{c}) = \gamma$ thì định lý được chứng minh. Giả sử $f(\overline{c}) \neq \gamma$

Nghĩa là $f(\overline{c}) < \gamma$ hoặc $f(\overline{c}) > \gamma$ nếu $f(\overline{c}) < \gamma$ thì đặt $a_1 = \overline{c}$, $b_1 = b$,

Khi đó : $f(a_1) < \gamma < f(b_1)$.

Nếu $f(\overline{c}) > \gamma$ thì đặt $a_1 = a$, $b_1 = \overline{c}$ ta vẫn có bất đẳng thức trên.

Rõ ràng $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Lại chia đoạn $[a, b]$ làm 2 phần bằng nhau và lý luận tương tự, ta được đoạn $[a_2, b_2]$:

$f(a_2) < \gamma < f(b_2)$, $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$

Quá trình lý luận tiếp tục, ta được 1 dãy đoạn

$([a_n, b_n])$ $\forall_n : f(a_n) < \gamma < f(b_n)$ (1).

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Rõ ràng đó là 1 dãy đoạn thắt vì,

$\forall n : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $b_n - a_n \to 0$.

Theo nguyên lý Cantor thì có 1 điểm c duy nhất,

$\forall n : c \in [a_n, b_n]$, $a_n \to c$, $b_n \to c$.

Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ nên $f(a_n) \to f(c)$, $f(b_n) \to f(c)$.

Theo (1) và tính chất của giới hạn thì $f(c) \leq \gamma$ và $f(c) \geq \gamma$.

Vậy $f(c) = \gamma$. Rõ ràng $c \in (a,b)$ vì nếu chẳng hạn $c = a$ thì $f(c) = \gamma = f(a)$.

Vì γ là 1 số bất kỳ ở khoảng giữa $f(a)$; $f(b)$ nên suy ra:

Hệ quả 1:

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì $f(x)$ lấy mọi giá trị trung gian gồm giữa $f(a)$, $f(b)$. Do đó, định lý trên cũng gọi là định lý lấy giá trị trung gian của hàm liên tục.

Theo định lý trước thì $f(x)$ đạt được một giá trị nhỏ nhất m và 1 giá trị lớn nhất M, do đó $f(x)$ lấy mọi giá trị trung gian ở giữa m, M nghĩa là miền giá trị của $f(x)$ là đoạn $[m, M]$ và hình học thì đường thẳng $y = \gamma : m < \gamma < M$ thế nào cũng cắt đồ thị của $f(x)$ tại ít nhất 1 điểm.

Từ định lý trên còn suy ra 1 hệ quả nữa rất quan trọng sau:

Hệ quả 2:

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì $\forall c \in (a,b) : f(c) = 0$.

Thực vậy vì $f(a).f(b) < 0$ nên $\gamma = 0$ ở giữa $f(a)$, $f(b)$

Do đó theo định lý trên thì: $\forall c \in (a,b) : f(c) = \gamma = 0$.

Ý nghĩa của hệ quả này rất lớn: đó chính là điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trong đoạn $[a,b]$ và từ đó có thể suy ra cách giải gần đúng phương trình này.

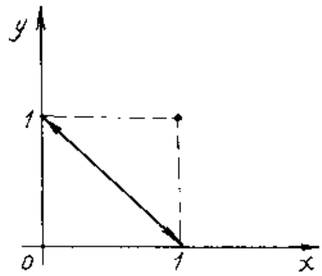
Chú ý: 1) Ba định lý trên có thể phát biểu thành 1 định lý như sau:

Nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ thì nó bị chặn, đạt 1 giá trị lớn nhất, 1 giá trị bé nhất và lấy mọi giá trị trung gian ở giữa các giá trị bé, lớn nhất đó.

2) Điều kiện liên tục trong định lý này chỉ là điều kiện đủ để có các kết luận. Thực vậy xét hàm :

$$f(x)=\begin{cases}1-x:\ 0<x<1\\ 0:\ x=0\\ 1:\ x=1\end{cases}$$

Rõ ràng $f(x)$ không liên tục trong đoạn $[0,1]$ nhưng nó bị chặn vì $\forall x\in[0,1]: f(x)\le 1$... Nó vẫn đạt một giá trị lớn, bé nhất $M = 1$ và $m = 0$ và vẫn lấy mọi giá trị trung gian giữa 0 và 1 (Hình 15).



Hình 15

§ 8. SỰ TỒN TẠI GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM ĐƠN ĐIỆU

Định lý 1:

Nếu $f(x)$ đơn điệu không giảm trong (a, b) $a, b\subset\widetilde{R}$ và bị chặn trên (dưới) trong khoảng đó thì $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right)$ tồn tại, nếu $f(x)$ không bị chặn trên (dưới) thì $f(x)\to +\infty$ $(x\to b-0)$, $(f(x)\to -\infty$ $(x\to a+0))$.

Định lý cũng được phát biểu tương tự đối với $f(x)$ đơn điệu không tăng.

Định lý này là sự mở rộng sự tồn tại giới hạn của dãy đơn điệu (nguyên lý Weierstrass) cho trường hợp hàm đơn điệu: Dựa vào nguyên lý đó và định nghĩa giới hạn của hàm số có thể chứng minh dễ dàng định lý này.

Thực vậy, lấy 1 dãy bất kỳ $(x_n)\subset(a,b)$, $x_n<b$, $x_n\to b$. Khi đó dãy $(f(x_n))$ là đơn điệu không giảm, vì $f(x)$ là đơn điệu không giảm trong (a,b), cũng theo giả thiết $(f(x_n))$ là bị chặn trên, do đó theo nguyên lý Weierstrass thì $\lim f(x_n)$ tồn tại. Suy ra $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ tồn tại, lý luận tương tự $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ cũng tồn tại.

Rõ ràng $\forall x\in(a,b)$:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\le f(x)\le \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ nếu $f(x)$ không bị chặn trên (dưới), thì rõ ràng

$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$

Định lý 2: Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu trong (a,b) thì mọi điểm gián đoạn của nó trong (a,b) đều là điểm gián đoạn loại 1.

* Chứng minh : Xét $f(x)$ đơn điệu không giảm, ($f(x)$ đơn điệu không tăng xét tương tự).

Giả sử $x_o \in (a, b)$ là một điểm gián đoạn của $f(x)$, $\forall\ x < x_o$ thì $f(x) \le f(x_o)$

Do đó $f(x)$ bị chặn trên (bởi $f(x_o)$ trong (a, x_o)

Theo định lý 1: $\lim\limits_{x \to x_o - 0} f(x)$ tồn tại, tương tự $\lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x)$ tồn tại, các giới hạn này không bằng $f(x_o)$ vì x_o là điểm gián đoạn của $f(x)$ .Vậy x_o là điểm gián đoạn loại 1 của $f(x)$.

Ta biết nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì miền giá trị của nó là đoạn $[m,M]$ trong đó $m(M)$ là giá trị bé (lớn) nhất của $f(x)$ trong $[a,b]$. Đặc biệt: nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu và liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì $m = f(a)$, $M = f(b)$ hoặc $m = f(b)$, $M = f(a)$ khi đó miền giá trị của $f(x)$ là đoạn $[f(a),f(b)]$ hoặc $[f(b),f(a)]$.

Nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng (a,b) thì miền giá trị của nó không nhất thiết là 1 khoảng, chẳng hạn hàm $f(x) = x^2$ liên tục trong khoảng $(-1,1)$ nhưng miền giá trị của nó là $[0,1)$. Đặc biệt đối với hàm đơn điệu tăng (giảm) ta có:

Định lý 3: Nếu $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong khoảng (a,b), $a,b \in \widetilde{R}$ thì miền giá trị của nó là khoảng (α, β) với

$$\alpha = \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \beta = \lim_{x \to b-0} f(x) \qquad \alpha\ ,\ \beta,\ \in \widetilde{R}$$

* Chứng minh: - Xét $f(x)$ đơn điệu tăng (giảm chứng minh tương tự) theo định lý 1 thì α, β tồn tại và $\forall x \in (a,b)$: $\alpha \le f(x) \le \beta$ (1), $\alpha, \beta \in \widetilde{R}$. Nhưng không thể có dấu bằng, vì chẳng hạn có $x_o \in (a,b)$: $f(x_o) = \alpha$.

Khi đó lấy: $x_1 \in (a, b)$, $x_1 < x_o$ thì theo giả thiết $f(x)$ đơn điệu tăng nên:

$f(x_1) < f(x_o)$ hay $f(x_1) < \alpha$ mâu thuẫn với (1).

Như vậy $\forall x \in (a, b)$: $\alpha < f(x) < \beta$, bây giờ cho số γ bất kỳ: $\alpha < \gamma < \beta$ (2)

thì $\exists\ x_1,\ x_2 \in (a,b)$: $\alpha < f(x_1) < \gamma < f(x_2) < \beta$

Vì nếu không, chẳng hạn $\forall x \in (a,b)$: $f(x) > \gamma$

thì vì $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ nên theo tính chất của giới hạn: $\alpha \ge \gamma$, mâu thuẫn với (2). Theo giả thiết thì $f(x)$ liên tục trong $[x_1,x_2]$

Do đó theo định lý lấy giá trị trung gian của hàm liên tục thì $\forall c \in (x_1, x_2)$: $f(c) = \gamma$ vì γ là bất kỳ nên $f(x)$ lấy mọi giá trị ở giữa α, β, nghĩa là miền giá trị của $f(x)$ là khoảng (α, β).

Ta biết nếu hàm $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) trong miền X và có miền giá trị là Y thì nó có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong miền Y và có miền giá trị là X.

Một vấn đề được đặt ra là: khi nào thì f^{-1} là liên tục trong Y?

Để trả lời ta có:

Định lý 4: Nếu hàm $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong miền X thì nó có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) và liên tục trong miền Y là miền giá trị của $f(x)$.

Chứng minh: Như đã biết (2.2) thì $f(x)$ có hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) trong Y. Ta sẽ chứng minh $f^{-1}(y)$ là liên tục trong Y.

Thực vậy, xét $X = (a,b)$ và $f(x)$ là đơn điệu tăng (các trường hợp khác tương tự).

Theo định lý 3 thì $Y = (\alpha, \beta)$, $\alpha = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\beta = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$, ($Y$: miền giá trị của $f(x)$).

Xét $y_0 \in (\alpha,\beta)$. Theo định lý 1 thì có các giới hạn:

$x_1 = \lim\limits_{y \to y_0 - 0} f^{-1}(y) \le x_0, x_2 = \lim\limits_{y \to y_0 + 0} f^{-1}(y) \ge x_0$

Với $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a,b)$, vì $\forall y \in (\alpha,\beta)$ thì $a < f^{-1}(y) < b$ nên $x_1, x_2 \in (a,b)$. Rõ ràng $x_1 = x_2 = x_0 = f^{-1}(y_0)$ vì nếu không chẳng hạn $x_1 \ne x_0$.

Theo trên thì $x_1 < x_0$, khi đó $\forall y < y_0$,

ta có $f^{-1}(y) \le x_1 < x_0$. Do đó giữa x_1, x_0, $f^{-1}(y)$ không lấy giá trị nào mâu thuẫn với điều: (a,b) là miền giá trị của $f^{-1}(y)$.

Vậy $f^{-1}(y)$ liên tục tại $y_0 \in (\alpha,\beta)$ vì y_0 là bất kỳ nên $f^{-1}(y)$ là liên tục trong (α,β).

§ 9. HÀM LOGARITHME VÀ HÀM LƯỢNG GIÁC NGƯỢC

9.1. Hàm logarithme

Xét hàm số $x = a^y$ (1) ($a > 0$, $a \ne 1$). Ta biết hàm này là đơn điệu tăng khi $a > 1$, đơn điệu giảm khi $a < 1$ và liên tục trong $(-\infty, +\infty)$.

$$\lim_{y \to +\infty} a^y = \begin{cases} +\infty : a > 1 \\ 0 : a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{y \to -\infty} a^y = \begin{cases} 0 : a > 1 \\ +\infty : a < 1 \end{cases}$$

Nên miền giá trị của (1) là $f[(-\infty, +\infty)] = (0, +\infty)$. Vậy hàm (1) tồn tại hàm ngược $y = f^{-1}(x)$ đơn điệu tăng khi $a > 1$, giảm khi $a < 1$ liên tục trong $(0, +\infty)$ và có miền giá trị là $f^{-1}[(0, +\infty)] = (-\infty, +\infty)$.

Hàm ngược đó gọi là hàm logarithme cơ số a của x.

Ký hiệu: $y = \log_a x$ (2)

Như vậy :

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x \begin{cases} +\infty : a > 1 \\ -\infty : a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +0} \log_a x = \begin{cases} 0 : a > 1 \\ +\infty : a < 1 \end{cases}$$

Đồ thị của hàm $y = \log_a x$ đối xứng với đồ thị của hàm $y = a^x$ qua đường phân giác thứ nhất (Hình 16).

Lấy logarithme cơ số b ($b > 0, \neq 1$)

2 vế của (1) ta có

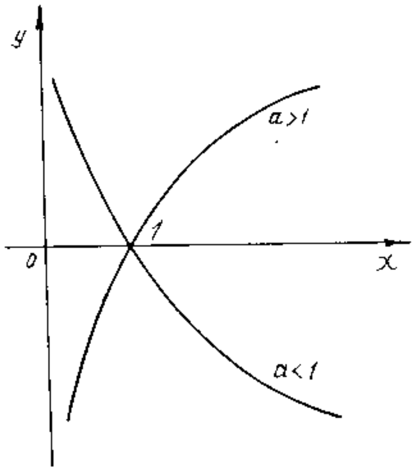
$\log_b x = y\log_b a$ theo (2):

$\log_b x = \log_b a.\log_a x$ (3).

Đây là công thức liên hệ giữa 2 hệ logarithme cơ số a và b cho $x = b$ trong (3) ta được.

$1 = \log_b a \,.\, \log_a b$ hay

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (4)$$



Hình 16

Khi $a = 10$ thì $\log_{10} x$ gọi là logarithme thập phân

Ký hiệu $\lg x$

Trong giải tích và nhiều khoa học khác, người ta còn dùng 1 hệ logarithme khác rất quan trọng, đó là logarithme cơ số $a = e$ $\left(e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$ gọi là logarithme tự nhiên hay logarithme Neper, ký hiệu $\ln x = \log_e x$ hay $Lx = \log_e x$.

Thay $b = e$ trong (3) và (4) ta có công thức liên hệ giữa logarithme tự nhiên và logarithme cơ số a bất kỳ.

$$\ln x = \ln a.\lg_a x, \ \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Đặc biệt $a = 10$ ta có:

$$\ln x = \ln 10.\lg x, \ \lg e = \frac{1}{\ln 10}$$

Đặt $M = \frac{1}{\lg e} = \frac{1}{0{,}43429} = 2.302$ thì $\ln x = M\lg x$

Chú ý: thay (2) vào (1) ta có $x = a^{\log_a x}$ $\forall x \in (0,+\infty)$

Suy ra $x^{\alpha} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x}$

Nghĩa là hàm lũy thừa viết dưới dạng hàm hợp của hàm mũ và hàm logarithme. Các hàm mũ và logarithme là các hàm liên tục do đó hàm lũy thừa $y = x^{\alpha}$ liên tục $\forall x \in (0, +\infty)$

9.2. Hàm lượng giác ngược

Xét hàm $x = \sin y$ với $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ ta biết hàm này liên tục và đơn điệu tăng trong $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$ và $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

Do đó miền giá trị của nó là $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1,1]$

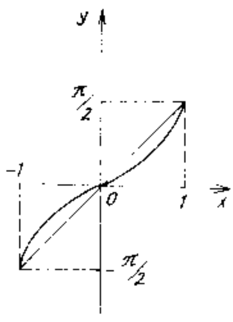
Vậy hàm $x = \sin y$, tồn tại hàm ngược $y = f^{-1}(x)$ cũng đơn điệu tăng và liên tục trong $[-1,1]$ và có miền giá trị là $f^{-1}([-1,1]) = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

Ký hiệu $y = \arcsin x$ (1)

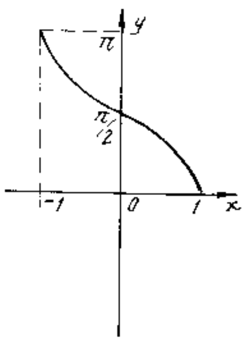
Tương tự $x = \cos y$, $0 \le y \le \pi$, $f([0, \pi]) = [-1,1]$ có hàm ngược $y = \arccos x$ đơn điệu giảm và liên tục trong $[-1,1]$.

$f^{-1}([-1,1]) = [0, \pi]$; $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, $f\left[\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right] = (-\infty, +\infty)$

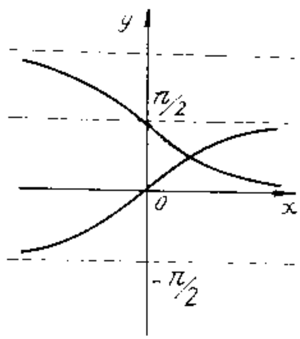
có hàm ngược.



Hình 17



Hình 18



Hình 19

$y = \text{arctg}x$ (3) đơn điệu tăng và liên tục trong $(-\infty, +\infty)$

Và $f^{-1}[(-\infty, +\infty)] = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Hàm $x = \text{cotg}y$, $0 < y < \pi$, $f[(0, \pi)] = (-\infty, +\infty)$ có hàm ngược $y = \text{arccotg}x$ (4) đơn điệu giảm và liên tục trong $(-\infty, +\infty)$ và $f^{-1}[(-\infty, +\infty)] = (0, \pi)$.

Đồ thị của (1), (2), (3), (4) đối xứng với đồ thị của $\sin x$, $\cos x$, $\text{tg}x$, $\text{cotg}x$ qua đường phân giác thứ nhất.

Từ định nghĩa suy ra:

$\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$, $-1 \le x \le 1$.

$\arcsin(\sin x) = x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

$\arccos(\cos x) = x$, $0 \le x \le \pi$

$\text{tg}(\text{arctg}x) = x$, $\text{cotg}(\text{arccotg}x) = x$, $-\infty < x < +\infty$

$\text{arctg}(\text{tg}x) = x$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

$\text{arccotg}(\text{cotg}x) = x$, $0 < x < \pi$

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, $\text{arctg}x + \text{arccotg}x = \dfrac{\pi}{2}$

$\text{arctg}x + \text{arctg}y = \text{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ $(x.y < 1)$

$\text{arctg}x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

Các công thức trên là hiển nhiên theo định nghĩa:

Ta chứng minh hệ thức: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Ta có $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin x + \arccos x \le \dfrac{3\pi}{2}$ (a)

$\sin(\arcsin x + \arccos x) = x^2 + \sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-x^2} = 1$

$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Theo (a) thì $k = 0$. Vậy ta có hệ thức phải chứng minh.

§ 10. HÀM SƠ CẤP - SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM SƠ CẤP - ÁP DỤNG TÌM GIỚI HẠN

10.1. Hàm sơ cấp

Các hàm: lũy thừa, mũ, logarithme, lượng giác, lượng giác ngược, hyperbole đã định nghĩa gọi là các hàm sơ cấp cơ bản. Ta cũng đã thấy các hàm đó liên tục trong các khoảng xác định của chúng.

Từ các hàm sơ cấp cơ bản, người ta lập các hàm số khác. Một hàm được xác định bằng 1 công thức duy nhất liên hệ giữa các hàm số sơ cấp cơ bản bằng một số hữu hạn các phép tính đại số và các phép lập hàm số hợp gọi là một hàm số sơ cấp.

Thí dụ:

1) $y = \sqrt{\log_a\left(1 + x^2\right)}$

$$y = \frac{x + arctg\sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}$$

là các hàm sơ cấp

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỷ} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỷ} \end{cases}$ (hàm Dirichlet)

$f(n) = n!$

Không phải là các hàm sơ cấp vì hàm thứ nhất không xác định bằng 1 công thức, hàm thứ hai: số phép tính nhân tăng lên khi n tăng, nghĩa là số phép tính không hữu hạn. Từ sự liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản và các phép tính về hàm liên tục suy ra:

Định lý: Mọi hàm sơ cấp đều liên tục trong miền xác định của nó

Vậy nếu $f(x)$ là hàm sơ cấp có miền xác định X thì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \; x_0 \in X$$

Suy ra: muốn tìm giới hạn của $f(x)$ tại $x_0 \in X$ ta chỉ cần tính giá trị của $f(x)$ tại x_0. Chẳng hạn

$$\lim_{x \to 2}\left(\text{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2+5}}{3}\right) = \text{arctg}\,\frac{2}{2} + \frac{\sqrt{2^2+5}}{3} = \frac{\pi}{4} + 1$$

10.2. Áp dụng tìm giới hạn:

Ta biết: nếu $f(x)$ liên tục tại x_0 thì

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nhưng $x_0 = \lim_{x\to x_0} x$ do đó $\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$

Dùng công thức này có thể tìm giới hạn của các hàm hợp lập từ các hàm liên tục. Sau đây ta sẽ đưa ra vài giới hạn quan trọng suy ra từ công thức đó:

1°. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Thực vậy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

$$\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\right)$$

2°. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

(Đặt $a^x - 1 = y \Rightarrow x = \log_a(1+y)$, $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$)

3°. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

Thực vậy đặt $(1+x)^\alpha - 1 = y$ thì $x\to 0 \Leftrightarrow y\to 0$

$(1+x)^\alpha = 1 + y \Rightarrow \alpha\ln(1+x) = \ln(1+y)$

Khi đó $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}.\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha$

Từ các giới hạn đó suy ra khi $x\to 0$

$\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Dùng các giới hạn trên hoặc các công thức tương đương này, có thể khử được dạng vô định để tìm giới hạn.

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1 \qquad (\alpha = x-1)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-1}{x}+\dfrac{1-e^{bx}}{x}\right)$

$= a\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}-b\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{e^{\beta}-1}{\beta}=a-b$

$(\alpha = ax,\ \beta = bx)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{6}$

Áp dụng sự liên tục của hàm số ta còn suy ra một giới hạn quan trọng nữa sau đây.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=a^b,\ a,\ b\in R$ với

$a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0\ ,\ b=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

Thực vậy $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Áp dụng tính chất liên tục của hàm logarithme ta có:

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x).\ln f(x)=b\ln a$

Áp dụng tính liên tục của hàm mũ ta có

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}=e^{b\ln a}=a^b$

Bây giờ xét một số trường hợp vô định của giới hạn này.

Khi $a=1,\ b=\infty$ thì giới hạn có dạng 1^{∞} khi đó có thể viết $f(x)=1+f_1(x)$ với $f_1(x)\to 0,\ (x\to x_0)$

Và

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}[1+f_1(x)]^{g(x)}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left\{[1+f_1(x)]^{\frac{1}{f_1(x)}}\right\}^{g(x)f_1(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)f_1(x)}$

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{2x+3} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x+3)}{x-2}} = e^6$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{5}{x}} = +\infty$

Qua các ví dụ này ta thấy là 1^{∞} là dạng vô định

Khi $a = 0$, $b = 0$, $a = +\infty$, $b = 0$,

Ta có các dạng 0^0, ∞^0, qua các thí dụ có thể thấy đây cũng là các dạng vô định, dùng các giới hạn đã biết có thể khử và tìm được giới hạn.

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}\left(0^0\right) = e^{\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x} = e^0 = 1$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}\left(\infty^0\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(\ln x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}\right)} = e^0 = 1$

§ 11. HÀM LIÊN TỤC ĐỀU

Cho hàm $f(x)$ liên tục trong miền X, theo định nghĩa:

$\forall x_0 \in X \quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

hay $\forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Nói chung: δ không những phụ thuộc ε mà còn phụ thuộc vào mỗi $x_0 \in X$ chẳng hạn: xét $f(x) = 1/x$ trong $(0,1]$

$$\varepsilon > 0, \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon \quad \text{hay} \quad \frac{|x - x_0|}{xx_0} < \varepsilon \qquad (1)$$

Xét $|x - x_0| < \dfrac{x_0}{2}$ thì $x < \dfrac{3x_0}{2}$ và $x.x_0 < \dfrac{3x_0^{\,2}}{2}$

Khi đó (1) viết được : $|x - x_0| < \varepsilon.\dfrac{3x_0^2}{2}$

Lấy $\delta = \min\left(\dfrac{x_0}{2}, \varepsilon\dfrac{3x_0^2}{2}\right)$ thì $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$

Vậy $f(x)$ là liên tục trong $(0,1]$ ta thấy δ phụ thuộc cả vào ε và x_0.

Nếu δ chỉ phụ thuộc vào ε không phụ thuộc mỗi $x_0 \in X$ thì $f(x)$ gọi là liên tục đều trong miền X, một cách chính xác ta có:

Định nghĩa: - Hàm $f(x)$ liên tục trong miền X, gọi là liên tục đều trong miền đó, nếu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \forall x' \in X, |x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

Thí dụ:

$f(x) = ax + b$ là liên tục trong R, xét $\forall \varepsilon > 0$

$$|f(x') - f(x)| = |(ax' + b) - (ax + b)| < \varepsilon$$

Suy ra $|x' - x| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$

Lấy

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|} \text{ thì } |x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

Ở đây δ không phụ thuộc vào $x \in R$. Vậy hàm $f(x) = ax + b$ là liên tục đều trong R.

Đối với các hàm liên tục trong một đoạn ta có:

Định lý Cantor *nếu hàm $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì nó liên tục đều trong đoạn đó.*

* Thực vậy giả thiết ngược lại:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \exists x \in [a, b] \exists x' \in [a, b], |x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| \geq \varepsilon$$

Lấy $\delta = \delta_n \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$ khi đó có $x'_n, x_n \in [a, b]$, $|x'_n - x_n| < \delta_n \Rightarrow |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$ vì $x'_n \in [a, b]$ nên dãy (x'_n) bị chặn, theo nguyên lý Bolzano-Weierstrass dãy đó chứa 1 dãy con x'_{n_k} hội tụ đến $x_0 \in [a, b]$ vì $|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \delta_{n_k}$, $\delta_n \to 0$ nên $x_n \to x_0$

Theo giả thiết $f(x)$ liên tục tại x_0 nên:

$$f(x'_{n_k}) \to f(x_0), f(x_n) \to f(x_0)$$

Suy ra: $f(x'_{n_k}) - f(x_n) \to 0$

Mâu thuẫn với giả thiết phản chứng:

$\forall n \ |f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Vậy định lý là đúng.

BÀI TẬP

1. Tìm miền xác định của hàm số

1) $y = \sqrt{3x - x^2}$

2) $y = \sqrt{\sin x} + \dfrac{1}{x}$ 3) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

4) $y = \sqrt{\cos x^2}$ 5) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ 6) $y = (2x)!$

7) $y = (-1)^x$ 8) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}} + \sqrt{x^3 - x}$

2. Tính :

1) $f(0), f(-x), f(x+1), f(x) + 1,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x)}$ nếu $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$

2) Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ nếu

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & : \ -\infty < x \le 0 \\ 2^x & : \ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

3. Tính $f[f(x)], g[g(x)], f[g(x)], g[f(x)]$ nếu

1) $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$

2) $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \le 0 \\ x & : x > 0 \end{cases}$ 3) $g(x) = \begin{cases} 0 & : x \le 0 \\ -x^2 & : x > 0 \end{cases}$

4. Tính $f(x)$ nếu

1) $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

2) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}, x > 0$

5. Cho $f(x) = a^x$, $a > 0$, và $x_1, \ldots, x_n$ tạo thành một cấp số cộng. Chứng minh $f(x_1) \ldots f(x_n)$ tạo thành 1 cấp số nhân.

6. Cho $f(x) = 1/2\ (a^x + a^{-x})$, $g(x) = 1/2\ (a^x - a^{-x})$

Chứng minh: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y)$

$g(x+y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$

7. Các hàm số sau đây có bằng nhau không ?

1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2}$ $\quad g(x) = 1/x$

2) $f(x) = x$ $\qquad g(x) = \sqrt{x^2}$

8. Viết dưới dạng tường $y = f(x)$, các hàm số ẩn cho bởi các phương trình:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $x + |y| = 2y$

3) $x^4 - 2y^2 + x^2 - x = 0$,

và tìm miền xác định của chúng.

9. Tìm hàm hợp $y = f(x)$ và miền xác định của nó nếu:

1) $y = u^2$, $u = \sin x$

2) $y = \begin{cases} 2u & : \ u \le 0 \\ 0 & : \ u > 0 \end{cases} \qquad u = x^2 - 1$

3) $y = z^2, z = \sqrt[3]{t+1}$, $t = a^x$

10. Phân tích xem các hàm số sau đây là các hàm hợp của những hàm nào.

1) $y = \sin^3(2x + 1)$; $\qquad$ 2) $y = 5^{(2x+1)^2}$

3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

11. Chứng minh các hàm sau đây là bị chặn trong các miền đã cho tương ứng, tìm Sup, inf và giao độ của $f(x)$:

1) $f(x) = x^2$, [-2, 5]; 2) $f(x) = 1/(1+x^2)$, $(-\infty; +\infty)$;

3) $f(x) = 2x/(1+x)$ $(0, +\infty)$; 4) $f(x) = \sin x + \cos x$, $[0, 2\pi]$.

12. Xét sự đơn điệu của các hàm số sau, trong các miền đã cho tương ứng

1) $f(x) = x^3$, $(-\infty, +\infty)$

2) $f(x) = \sin x$, $[-\pi/2, \pi/2]$

3) $f(x) = \mathrm{tg}x$ $(-\pi/2, \pi/2)$

4) $f(x) = a^x$, $(a > 0)$ $(-\infty, +\infty)$

5) $f(x) = 2x + \sin x$, $(-\infty, +\infty)$

6) $f(x) = \cos x$, $[0, \pi]$

7) $f(x) = \mathrm{cotg}x$, $(0, \pi)$

8) $f(x) = E(x)$, $[0, \infty)$

13. Chứng minh rằng: nếu $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ là các hàm đơn điệu tăng và

$f(x) \le g(x) \le h(x)$ thì

$f[f(x)] \le g[g(x)] \le h[h(x)]$

14. Tìm hàm số ngược của các hàm số sau đây trong các miền tương ứng.

1) $y = 2x + 3$ $(-\infty, +\infty)$

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ $[-1, 0]$, $[0, 1]$

3) $y = \begin{cases} x & : \ -\infty < x < 1 \\ x^2 & : \ 1 \le x < +\infty \end{cases}$

15. Xét sự chẵn lẻ của các hàm số sau:

1) $f(x) = 3x - x^3$

2) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

3) $f(x) = 1/2(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$

4) $f(x) = \sin x + \cos x$

5) $f(x) = C$ $(C = \text{const})$

16. Chứng minh rằng: nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm tuần hoàn và xác định trong cùng một miền và có chu kỳ thông ước với nhau (tỷ số chu kỳ của chúng là 1 số hữu tỉ) thì $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ cũng là các hàm tuần hoàn.

17. Xét sự tuần hoàn và chu kỳ của các hàm số:

1) $f(x) = A\cos \lambda x + B\sin \lambda x$

2) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

3) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$

4) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

5) $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$

6) $f(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$

7) $f(x) = \sin^n x$; $\quad f(x) = \cos^n x$

8) $f(x) = \begin{cases} 1 : & x \text{ hữu tỷ} \\ 0 : & x \text{ vô tỷ} \end{cases}$

9) $f(x) = C$ (C = const)

18. Biết đồ thị của $y = f(x)$, dựng đồ thị của

1) $y_1 = -f(x)$; $y_4 = b + f(x)$

2) $y_2 = f(-x)$; $y_5 = \frac{1}{2}\left[\left|f(x)\right| + f(x)\right]$

3) $y_3 = f(x-a)$; $y_6 = \frac{1}{2}\left[\left|f(x)\right| - f(x)\right]$

19. Dựng đồ thị của các hàm số sau:

1) $y = x^2 - 2x + 2$

2) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$

3) $y = |x|$

4) $|x^2 - 1|$

5) $y = -x.|x|$

6) $y = |x+1| + |x-1|$

7) $y = 1 - 3^{x-3}$

8) $y = |\sin x| + \sin x$

9) $y = \sin nx$ ($n = 2, 3$)

10) $y = 2\cos\dfrac{x-\pi}{3}$

11) $y = \sin^2 x$

12) $y = x + \sin x$.

20. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} P_n(x) = P_n(x_0)$, $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$, $\quad Q_m(x_0) \neq 0$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1)$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \ (a < 1)$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \ (a < 1)$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty \ (a > 1)$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^k} = +\infty \ (a > 1), (k>0)$.

21. Chứng minh rằng: khi $x \to x_0$ ($x_0 \in \widetilde{R}$)

1) $f(x) \to +\infty\ (-\infty)$; $g(x)$ bị chặn $\Rightarrow f(x) + g(x) \to +\infty\ (-\infty)$

2) $f(x) \to +\infty\ (-\infty)$; $g(x) \to +\infty\ (-\infty)$ $f(x) \Rightarrow f(x) + g(x) \to +\infty\ (-\infty)$

3) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty \Rightarrow g(x).f(x) \to \infty$

4) $f(x) \to \infty \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to 0$; $f(x) \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to \infty$; $f(x) \neq 0$.

22. Áp dụng tính chất giới hạn chứng minh

1) $\lim\limits_{x \to x_0} x^r = x_0^r \ (r \in Q)\ (r > 0)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{tg}x = \mathrm{tg}x_0, \quad x_0 \neq \dfrac{2k+1}{2}\pi$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \ r > 0, r \in Q$

7) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}x = \pm\infty$

8) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \mathrm{cotg}x = 0$

9) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \infty; n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0}; m = n; \\ 0; m < n \end{cases}$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

23. Tìm:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$

2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x^m - 1}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{p/q} - 1}{x^{r/s} - 1}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{a+x} - \sqrt[n]{a-x}}{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - \sin x}{\sin^3 x}$

10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2\sin x} - \cos x}{\sin \dfrac{x}{2}}$

24. Tìm

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-2}\right)^{3x+2}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)^{2x}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}$

9) $\lim\limits_{x\to0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{cotg}x}$ 10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ 12) $\lim\limits_{x\to\pm0}\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$

*13) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2^2}...\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq0)$

25. Áp dụng VCB (VCL) tìm:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{tg}^2x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\mathrm{tg}^2x}-\sqrt[3]{1-\mathrm{tg}^2x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x\sin5x}{\left(x-x^3\right)^2}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[3]{x}}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+a^x}{x^2+x}$ $(a>1)$

26. Nếu $f(x)$, $g(x)$ là các VCB (VCL) khi $x\to x_0$ ($x_0\in\widetilde{R}$) thì tổng tích thương của chúng là gì ?

27. Cho $f(x)=x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ là một VCB ($x\to0$) có thể nói nó là VCB bậc 2 không ?

Cho $f(x)=a^x$ ($a>1$) là 1 VCL khi $x\to+\infty$ có thể nói đến bậc của VCL này không ?

28. Chứng minh:

1) $f(x) = \cos x$ liên tục $\forall x \in R$

2) $f(x) = |x|$ liên tục $\forall x \in R$

3) $f(x) = x^n$ liên tục $\forall x \in R$ ($n \in N$)

4) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ liên tục $\forall x > 0$

29. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại $x_0 \in R$ thì $f(x) \pm g(x)$, $g(x).f(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$); $f[g(x)]$; $|f(x)|$ cũng liên tục tại x_0

Nếu : 1) $f(x)$ liên tục, $g(x)$ gián đoạn tại x_0

2) $f(x)$, $g(x)$ cùng gián đoạn tại x_0 thì tổng, tích, thương của chúng liên tục hay gián đoạn tại x_0.

30. Xét sự liên tục và gián đoạn của:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & : x \neq 2 \\ 0 & : x = 2 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & : x \neq 0 \\ 1 & : x = 0 \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$

6) $f(x) = \sqrt{x} - E\left(\sqrt{x}\right)$

7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$

8) $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9) $f(x) = \begin{cases} x^2 & : 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & : 1 < x \le 2 \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & : |x| \le 1 \\ x - 1 & : |x| > 1 \end{cases}$

31. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) và $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ thì giữa chúng có 1 số c để $f(c) = 1/n\,[f(x)_1 + f(x)_2 + \ldots + f(x)_n]$

32. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ và đạt cực đại tại điểm $x_1, x_2 \in [a,b]$ $x_2 > x_1$ thì $f(x)$ đạt 1 cực tiểu tại $x_3 \in (x_1, x_2)$

***33**. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trong $[a, +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

$\forall\, \gamma$ gồm giữa $f(a)$ và L sẽ có 1 số $c > a$ sao cho $f(c) = \gamma$

*34. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là liên tục trong $[a,b]$ và có hàm ngược thì $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong $[a,b]$.

35. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x - 1 = 0$ có 1 nghiệm trong (1, 2), giải gần đúng, tìm nghiệm đó với độ chính xác 0,01.

36. Chứng minh rằng đa thức $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ với n lẻ, có ít nhất 1 nghiệm thực.

37. Tìm miền xác định của:

1) $y = \log_2(x^2 - 6x + 5)$

2) $y = \lg(x + 2) + \log_2(x - 2)$

3) $y = \lg[1 - \lg(x^2 - 5x)]$

4) $y = \arcsin 2x/1+x$

5) $y = \arccos(2\sin x)$

6) $y = \lg[\cos(\lg x)]$

7) $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$

8) $y = \sqrt[3]{\lg(\operatorname{tg} x)}$

9) $y = \lg(1 - 2\cos x)$

10) $y = \arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$

38. Vẽ đồ thị của hàm số

1) $y = 1 + \lg(x + 2)$; $y = \arcsin(\sin x)$

2) $y = \log_2(1 - x)$; $y = x - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

3) $y = \log_x 2$; $y = \arccos\dfrac{1}{x}$

4) $y = a^{\log_a x}$ $(a > 0, \neq 1)$

39. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0$ $(a > 1, k > 0)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (x^k . \log_a x) = 0$ $(a > 1, k > 0)$

40. Tìm

1) $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)x$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\lg(1+10x)}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{chx - 1}{x^2}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ $(\alpha \neq \beta)$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(2 + e^{x}\right)}{x}$

8) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right)^{x-2}$

9) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

10) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\cos \dfrac{x}{n} \right)^{n}$

11) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$

12) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+4}}$

13) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - 2}{2x + 1} \right)^{x^2}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}$

15) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)^{\frac{1}{1-x}}$

16) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + tgx}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

17) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

18) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

19) $\lim\limits_{x \to 0} x^{x}$

20) $\lim\limits_{x \to \infty} |\sin(\ln(x+1)) - \sin(\ln x)|$

21) $\lim\limits_{x \to \infty} \arccos\left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$

***41**. Chứng minh rằng: nếu $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in R$ và $f(x_0) > 0$ (<0) thì

$\exists\, \delta > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) > 0$ (<0)

***42**. Xét sự liên tục đều của

a) $f(x) = \dfrac{x}{3 - x^2}$ trong $[-1,1]$

b) $f(x) = \log_a x$ $(a > 1)$ trong $(0,1)$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) $[0,3]$; 2) $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, $x \neq 0$

3) $[4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$, $k = 0, 1, \ldots$

4) $\sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \le |x| < \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$

5) $x > 0$, $x \neq k$, $k = 1, 2, \ldots$

6) $x = \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$

7) $x = \frac{p}{2q+1}$, $p, q \in Z$;

8) $[-1,0] \cup [1,2)$

2. 1) $1, \frac{1+x}{1-x}, -\frac{x}{x+2}, \frac{2}{1+x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{1+x}{1-x}$

2) -1, 0, 1, 2, 4

3. 1) x^4, 2^{2^x}, 2^{2x}, 2^{x^2}

2) $\begin{cases} 0 : x \le 0 \\ x : x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 \ : x \le 0 \\ -x^4 \ : x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 \ : x \le 0 \\ -x^2 : x > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 0 \ : x < 0 \\ -x^2 : x > 0 \end{cases}$

4. 1) $x^2 - 5x + 6$; 2) $x^2 - 2$; 3) $\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}$

7. Bằng nhau 1) $x \neq 0$, 2) $x > 0$

8. 1) $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ $-a < x \le a$

2) $y = \begin{cases} \frac{x}{3} & , -\infty < x < 0 \\ x & , 0 \le x < +\infty \end{cases}$

3) $y = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{-x^2 + x + 1}}$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \le x \le 0$; $1 \le x \le \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9. 1) $y = \sin^2 x$; $-\infty < x < +\infty$

2) $y = 2(x^2 - 1)$; $-1 \le x \le 1$; $y = 0$; $x < -1$; $x > 1$

3) $y = \sqrt[3]{(a^x+1)^2}$ $-\infty < x < +\infty$

10. 1) $y = u^3$; $u = \sin v$; $v = 2x + 1$

2) $y = 5^u$, $u = v^2$, $v = 2x + 1$

3) $y = \sqrt{u}$, $u = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$

11. 1) $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = 25$; $w = 25$

2) $\sup f(x) = 1$; 3) $\inf f(x) = 2$

4) $\inf f(x) = -\sqrt{2}$, $\sup f(x) = \sqrt{2}$, $w = 2\sqrt{2}$

12. 1) Tăng ; 2) Tăng ; 3) Tăng ; 4) a < 1 giảm, a > 1 tăng ;

5) Tăng ; 6) Giảm ; 7) Giảm; 8) Không giảm.

14. 1) $x = \dfrac{y-3}{2}$; $(-\infty, +\infty)$

2) $x = -\sqrt{1-y^2}$; $[-1,0]$; $x = \sqrt{1-y^2}$; $[0,1]$

3) $x = y$; $(-\infty, 1)$, $x = \sqrt{y}$; $[1, +\infty]$

15. 1) Lẻ, 2) Chẵn, 3) Chẵn, 4) Không chẵn, không lẻ, 5) Chẵn

16. Đặt $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q}$, T_1, T_2 là chu kỳ của $f(x)$, $g(x)$

17. 1) $\dfrac{2\pi}{\lambda}$, 2) 2 π, 3) 6 π, 4) π, 5) Không tuần hoàn,

6) Không tuần hoàn; 7) π, n : Chẵn, 2 π : n lẻ

8) $r \in Q$; 9) $T \in R$; $T > 0$

20. 1) Lấy 1 dãy bất kỳ x_n các giá trị của x, $x_n \to x_0$ rồi dùng các tính chất về giới hạn của dãy, các bài khác chứng minh tương tự.

7) Chứng minh $\dfrac{a^n}{n+1} \to +\infty$, lấy $x_k \to +\infty$

Đặt $n_k = E(x_k)$

21. Lấy 1 dãy bất kỳ (x_n) các giá trị của x, $x_n \to x_0$ dùng các tính chất của giới hạn vô hạn của dãy.

22. 1) Dùng bất đẳng thức $1-|\lambda| \le \sqrt[n]{1+\lambda} \le 1+|\lambda|, |\lambda| < 1$

Chứng minh : $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[n]{x} = 1$

Sau đó chứng minh : $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$

rồi chứng minh : $\lim\limits_{x \to x_0} x^{m/n} = x_0^{m/n}$

6) Xét $r = n \in N$, khai triển nhị thức Newton.

Chứng minh $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$, xét $r = 1/m$,

Đặt $\sqrt[m]{(1+x)} - 1 = y$ cuối cùng xét $r = m/n$

23. 1) -3/2 ; 2) 2 ; 3) m/n ; 4) sp/rp ; 5) 1 ; 6) $\dfrac{2}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$; 7) 2/3 ; 8) 0 ;

9) 1/2 ; 10) 2cos$a$; 11) 2.

24. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 2) 1; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{1}{2}$; 5) $\dfrac{2}{\pi}$; 6) e^6;

7) 0; $x \to +\infty$, $+\infty$; $x \to -\infty$; 8) $1/e^2$; 9) e; 10) -1;

12) 1; $x \to -0$; 0, $x \to +0$

13) $\sin x/x$ dùng $\sin x = 2\cos x/2 \sin x/2 = 2^2 \cos x/2 \cos x/4$.

$\sin x/4 = ... = 2^n \cos x/2.\cos x/2^2 ... \cos x/2^n \sin x/2^n$.

25. 1) 1/2; 2) 3; 3) 0; 4) 15; 5) $+\infty$; 6) $+\infty$

26. VCB: Tổng tích là vô cùng bé, thương tích không thể kết luận

VCL : Tích VCL, tổng, tích, thương không kết luận.

27. Không thể nói $x^2(1 + \sin 1/x)$ có bậc 2 vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \sin 1/x$

Không thể nói đến bậc của a^x vì :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \ \forall k \in N.$$

29. 1) Tổng gián đoạn, tích, thương không thể kết luận

Thí dụ tích $f(x) = x$; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tại $x = 1$

$f(x) = x$; $g(x) = \begin{cases} -1 \ ; x < 0 \\ 1 \quad ; x \geq 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Thương $f(x) = x$; $g(x) = 1/x$; $f(x) = x$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, tại $x = 1$

2) Tổng, tích, thương đều không thể kết luận

Thí dụ :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ -1 & , x \geq 0 \end{cases}$$ tại $x = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ tại $x = 1$

Tích : $g(x) = f(x) = \begin{cases} -1 : x & \text{vô tỷ} \\ 1 : x & \text{hữu tỷ} \end{cases}$, tại $x = 0$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, tại $x = 0$

Thương $f(x) = \begin{cases} -1 : x < 0 \\ 0 : x = 0 \\ 1 : x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1/x : x \neq 0 \\ 1 : x = 0 \end{cases}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$, tại $x = 0$

30. 1) $x = 2$ gián đoạn loại 1: $h = 0$

2) Liên tục $\forall x \in R$

3) $x = 0$ gián đoạn loại 1, $h = 2$ liên tục bên phải

4) Liên tục $\forall x \in R$

5) $x = 1$, gián đoạn loại 1. $h = 1$

6) $x = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$ gián đoạn loại 1.

7) Gián đoạn loại *2 tại $x = \pm 2$, liên tục khi $-2 < x < 2$*

8) $x = 0$: gián đoạn loại 2

9) Liên tục $\forall x \in R$

10) $x = -1$ gián đoạn loại 1. $h = -2$

31. Gọi $f(x_k) = \min\{f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)\}$

$f(x_l) = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$

Thì $f(x_k) \leq \dfrac{1}{n}\{f(x_1) + \ldots + f(x_n)\} \leq f(x_l)$

32. Chứng minh giá trị bé nhất m của $f(x)$ trong $[x_1, x_2]$ không thể đạt tại x_1, x_2 nên có $c \in (x_1, x_2)$; $f(c) = m$

33. Chứng minh : $\exists\, b \in (a, +\infty)\ f(b) > \gamma$

34. Xét $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) \neq f(x_2)$ giả sử $x_1 < x_2$. Chứng minh tồn tại x_3:

$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$.

35. Nghiệm trong (1,22; 1,23) với độ chính xác 10^{-1}

36. Xét $|x|$ khá lớn thì $P_n(x)$ cùng dấu với $a_0 x^n$

37. 1) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; 2) $(2, +\infty)$; 3) $\left(\dfrac{5-\sqrt{65}}{2}, 0\right) \cup \left(5, \dfrac{5+\sqrt{65}}{2}\right)$

4) $[-1/3, 1]$; 5) $[k\pi - \pi/6;\ k\pi + \pi/6]$

6) $\left(10^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}, 10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

7) $(1,2]$; 8) $[k\pi + \pi/4, k\pi + \pi/2)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

9) $(2k\pi + \pi/3, 2k\pi + 5\pi/3)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

10) $[1, 100]$

39. 1) Đặt $y = \log_a x$ Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_a x}{x} = 0$

Và viết $\dfrac{\log_a x}{x^k} = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{\log_a x^k}{x^k}$

2) Đặt $x = \dfrac{1}{y}$

40. 1) $\dfrac{1}{2}$ dùng công thức $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \dfrac{a-b}{1+ab}$

2) 1 dùng công thức $\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} x$

3) $10\lg e$; 4) $-\dfrac{1}{2}$

5) $\dfrac{1}{2}$; 6) $\alpha - \beta$; 7) $0, x \to -\infty$, ; $1, x \to +\infty$; 8) e ; 9) 1;

10) 1 ; 11) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 12) 0 ; 13) $+\infty$; 14) $\dfrac{3}{2}$; 15) e^2; 16) 1 ; 17) $\dfrac{1}{e}$

18) 1 ; 19) 1 ; 20) 0 ; 21) $\dfrac{\pi}{3}$

41. Áp dụng tính chất 6° của giới hạn hàm số.

42. a) Hàm liên tục đều theo định lý Cantor (**§**11)

b) Hàm không liên tục đều vì lấy $x_n = a^{-n}$, $x'_n = a^{-n-1}$

Thì $|x_n - x'_n| = \dfrac{a-1}{a^{n+1}} \to 0$ $(n \to +\infty)$

Nhưng $|f(x_n) - f(x'_n)| = |-n + n + 1| = 1 > \varepsilon$, $\forall \varepsilon < 1$.

Chương 3

ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1.1. Định nghĩa đạo hàm:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0, xét x thuộc lân cận đó, đặt $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, Δx, Δy là số gia của đối số và hàm số tại x_0.

Nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ tồn tại thì giới hạn này gọi là đạo hàm

của hàm số $y = f(x)$ tại x_0. Ký hiệu : y', y'_x ; $f'(x_0)$, $\dfrac{dy}{dx}$

Thí dụ:

1) Xét $y = f(x) = c = \text{const}$

$\forall x$, ta có : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$

Do đó: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

2) Xét $y = x^n$, $n \in N$

$\forall x$, ta có $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}.\Delta x + \ldots + \Delta x^n$

Do đó $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$

3) Xét $y = a^x$

$\forall x$, ta có : $\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$

Do đó $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^x\left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = a^x.\ln a$

$\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a\right)$

Đặc biệt $y = e^x$ thì $y' = e^x$

4) Xét $y = \sin x$

$\forall x$, ta có $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

Do đó: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$

Tương tự, $y = \cos x$ thì $y' = -\sin x$

Chú ý: 1) Theo định nghĩa thì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Nếu $\Delta x \to +0$ (-0) mà $\lim\limits_{\Delta x \to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta x \to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ tồn tại thì giới hạn này gọi là đạo hàm bên phải (bên trái) của $f(x)$ tại x_0.

Kí hiệu: $f'(x_0 + 0)$, $[f'(x_0 - 0)]$

Rõ ràng điều kiện cần và đủ để $f'(x_0)$ tồn tại là $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$ tồn tại và bằng nhau.

Thí dụ: 1) Xét $f(x) = |x|$ tại $x = 0$

Ta có $f(0 + 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

$f'(0 - 0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0}-\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1$. Vậy tại $x = 0$ $f(x)$ không tồn tại.

2) Cũng theo định nghĩa:

$f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \in R$, nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$

($+\infty$ hoặc $-\infty$) thì ta cũng mở rộng gọi giới hạn đó là đạo hàm vô hạn của $f(x)$ tại x_0.

1.2. Định nghĩa vi phân:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định tại lân cận điểm x_0, nếu trong lân cận đó số gia của hàm số viết được dưới dạng: $\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$ (1)

Trong đó, A là một hằng số nào đó (không phụ thuộc Δx chỉ phụ thuộc x_0), $0(\Delta x)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của Δ x, thì biểu thức $A\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số đó tại x_0 và hàm số $y = f(x)$ gọi là khả vi tại x_0.

Kí hiệu:

$dy = A.\Delta x$ hay $df(x_0) = A.\Delta x$

Từ định nghĩa ta sẽ suy ra công thức tính vi phân, chia hai vế của (1) cho $\Delta x \neq 0$ ta có : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \dfrac{0(\Delta x)}{\Delta x}$

Cho $\Delta x \to 0$ thì theo định nghĩa $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$

Vì $0(\Delta x)$ bậc cao hơn Δx; do đó $A = y'$

Xét $y = f(x) = x$ thì $dy = x' \Delta x = 1. \Delta x = \Delta x$

Nhưng $y = x$ nên $dy = dx$, do đó $\Delta x = dx$

Vậy ta cũng có công thức tính vi phân $dy = y'dx$

Thí dụ: Theo các thí dụ ở 1.1 thì:

1) $dc = 0$

2) $da^x = a^x \ln a dx$

3) $d\sin x = \cos x dx$

4) $d\cos x = -\sin x dx$.

Chú ý: Từ công thức tính vi phân ta có: $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Mặt khác ta ký hiệu đạo hàm là $\dfrac{dy}{dx}$. Vậy kí hiệu này cũng có nghĩa là thương của vi phân của hàm số và vi phân của đối số.

1.3. Tính chất:

1°. $f(x)$ khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ có đạo hàm tại x_0.

Thực vậy, theo 1.2 từ $f(x)$ khả vi tại x_0 ta đã suy ra $f'(x_0) = A$ nghĩa là $f(x)$ có đạo hàm tại x_0. Ngược lại giả sử $f(x)$ có đạo hàm tại x_0, nghĩa là :

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ hay $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha$

α là 1 vô cùng bé khi $\Delta x \to 0$ do đó:

$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x$.

Theo định nghĩa, $f(x)$ là khả vi tại x_0, (vì $\alpha.\Delta x$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của Δx).

2°. $f(x)$ khả vi tại $x_0 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0.

Thực vậy, theo định nghĩa, $f(x)$ khả vi tại x_0 nghĩa là:

$\Delta y = A\,\Delta x + 0(\Delta x)$, suy ra $\Delta x \to 0$ thì $\Delta y \to 0$. Vậy $f(x)$ là liên tục tại x_0.

Điều ngược lại nói chung không đúng, chẳng hạn xét $f(x) = |x|$ hàm số này liên tục tại $x = 0$, nhưng theo thí dụ ở 1.1, nó không có đạo hàm tại $x = 0$, nghĩa là không khả vi tại đó.

3°. $f(x)$ khả vi tại x_0 đạt cực trị tại $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Thực vậy, giả sử ngược lại $f(x_0) \neq 0$, chẳng hạn $f'(x_0) > 0$

Vì $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x - f(x_0))}{\Delta x}$ nên $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$, suy ra:

Khi $\Delta x > 0$ thì $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$

$\Delta x < 0$ thì $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$

Do đó, theo định nghĩa cực trị thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_0, mâu thuẫn với giả thiết.

Tính chất này chỉ là điều kiện cần để $f(x)$ đạt cực trị tại x_0, nó không là điều kiện đủ vì có những hàm số, đạo hàm bằng không tại x_0, nhưng không đạt cực trị tại đó.

Chẳng hạn, xét: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$

Nhưng $f(x)$ không đạt cực trị tại $x = 0$

1.4. ý nghĩa hình học:

Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi tại x_0 và $\mathscr{C}$ là đồ thị của nó:

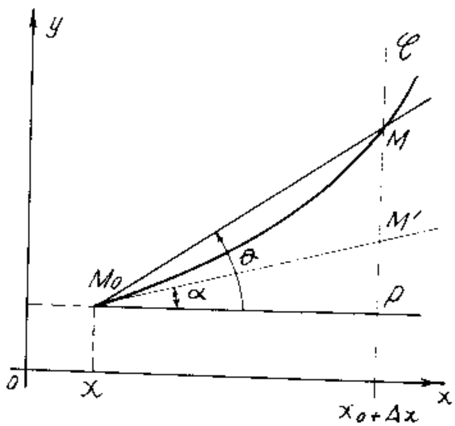
Xét $M_o, M \in \mathscr{C}$, $M_o(x_0, f(x_0))$, $M(x_o + \Delta x, f(x_o + \Delta x))$

Gọi θ là góc giữa đường thẳng M_oM và trục Ox, tg θ là hệ số góc của nó:

thì

$$\text{tg}\,\theta = \frac{PM}{M_oP} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Xét M dần tới M_0 theo $\mathscr{C}$, nghĩa là $\Delta x \to 0$. Khi đó đường thẳng M_0M sẽ dần tới vị trí giới hạn là đường thẳng M_0M' gọi là tiếp tuyến với $\mathscr{C}$ tại M_0, gọi α là góc giữa tiếp tuyến đó với trục 0x thì : $\text{tg}\theta \to \text{tg}\alpha$ vì $\text{tg}\,x$ là 1 hàm



Hình 20

liên tục: Do đó, ta có tg$\alpha = f'(x_0)$. Vậy về hình học: đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 bằng hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x_0.

Biết hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M_o ta có thể viết phương trình của tiếp tuyến tại đó là: $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ và phương trình của pháp tuyến tại đó là:

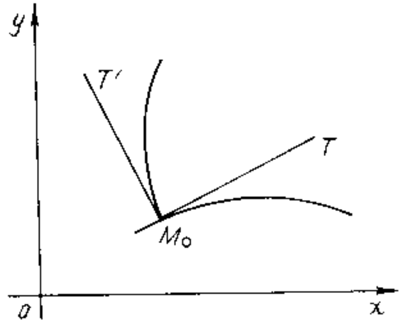
$$Y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Theo Hình 20 : $\overline{PM'} = \text{tg}\alpha \cdot \Delta x = dy$

Chú ý:

1) Nếu $f'(x_0)$ không tồn tại nhưng $f'(x_0 + 0)$, $f'(x_0 - 0)$ tồn tại thì đồ thị của $f(x)$ có 2 tiếp tuyến bên phải và trái điểm x_0 (Hình 21).

2) Nếu $f'(x_0) = \infty$ thì đồ thị của $f(x)$ có một tiếp tuyến tại M_o song song với trục Oy. (Hình 22).



Hình 21

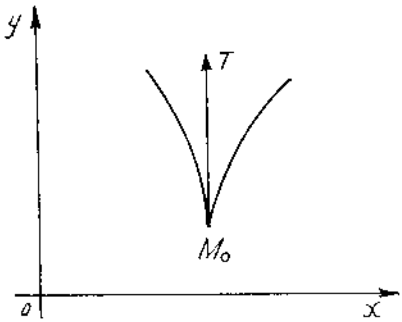
1.5. Ý nghĩa cơ học:

Xét một điểm M chuyển động thẳng không đều tính từ một điểm 0 nào đó, giả sử khoảng cách $\overline{OM}$ phụ thuộc thời gian t : $\overline{OM} = f(t)$

Người ta gọi tốc độ của M tại thời điểm t là:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Theo định nghĩa đạo hàm thì $V = f'(t)$. Vậy: Đạo hàm của khoảng cách $\overline{OM}$ tại thời điểm t bằng tốc độ của chuyển động tại thời điểm đó. Người ta cũng mở rộng khái niệm tốc độ xét một hàm số $f(x)$ bất kỳ và gọi tốc độ của $f(x)$ tại x là :



Hình 22

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

§ 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

Định lý 1: Nếu các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ khả vi tại x thì các hàm số:

$u \pm v$, $u.v$, $\dfrac{u}{v}$ $(v \neq 0)$ cũng khả vi tại x

Và $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $d(u \pm v) = du + dv$

$(uv)' = u'v + uv'$, $\quad d(uv) = vdu + udv$

$(Cu)' = Cu'$, $\quad d(Cu) = Cdu$ (C = const)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2} \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \; v \neq 0$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \qquad d\left(\frac{C}{v}\right) = \frac{-Cdv}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Chứng minh : Ta chỉ chứng minh trường hợp thương, các trường hợp khác, tương tự.

Xét $y = \dfrac{1}{v}$ $(v(x) \neq 0)$ ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{1}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{-1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

Cho $\Delta x \to 0$ ta có : $y' = \dfrac{-v'}{v^2}$

Bây giờ xét $\dfrac{u}{v} = u.\dfrac{1}{v}$

Theo quy tắc tính đạo hàm của tích ta có:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\frac{1}{v} + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{v'u}{v^2} = \frac{vu' - v'u}{v^2}$$

Theo công thức tính vi phân thì:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{vu' - v'u}{v^2} dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Thí dụ: 1) Xét $y = \text{tg}x$

Ta biết: $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$

Do đó: $y' = \text{tg}x = \dfrac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$

2) Xét $y = \text{cotg}x$

Ta biết $\text{cotg}x = \dfrac{1}{\text{tg}x}$

Do đó $y' = \left(\dfrac{1}{\text{tg}x}\right)' = -\dfrac{(\text{tg}x)'}{\text{tg}^2 x} = -\dfrac{1}{\cos^2 x.\text{tg}^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)$

Định lý 2: Nếu hàm số $u = f(x)$ khả vi tại x và hàm số $y = g(u)$ khả vi tại $u = f(x)$ thì hàm hợp $y = g[f(x)]$ khả vi tại x và:

$y'_x = y'_u.u'_x$

Chứng minh: Cho x số gia Δx thì u có số gia Δu và y có số gia Δy.

Giả sử $\Delta u \neq 0$

Theo giả thiết hàm số $y = g(u)$ khả vi tại u nên:

$\Delta y = g'(u)\,\Delta u + \alpha\,\Delta u$, $\alpha \to 0$ khi $\Delta u \to 0$

Giai tich I

Chia hai vế cho Δx ta có:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(u).\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Cho $\Delta x \to 0$ thì $\Delta u \to 0$ và khi đó $\alpha \to 0$.

Do đó theo định nghĩa và giả thiết u khả vi tại x, ta có: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Chú ý: Định lý trên có thể mở rộng cho trường hợp hàm hợp của một số hữu hạn hàm số:

Chẳng hạn: $y = g(u)$, $u = f(v)$, $v = \varphi(x)$ thì $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$

Thí dụ:

1) Xét $y = e^{-x}$

Đặt $u = -x$ thì $y = e^u$, $y'_u = e^u$, $u'_x = -1$

Do đó $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u(-1) = -e^{-x}$

Suy ra $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ thì $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}x$

Tương tự: $y = \text{sh}x$ thì $y' = \text{ch}x$

$y = \text{th}x$ thì $y' = \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - \text{th}^2 x$

$y = \coth x$ thì $y' = -\dfrac{1}{sh^2x} = 1 - \coth^2 x$

2) Xét $y = \sin^2 3x$; đặt $u = \sin 3x$, $v = 3x$ thì $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x$

$y'_u = 2u$, $u'_v = \cos v$, $v'_x = 3$

$y'_x = 2u\cos v \cdot 3 = 6\sin 3x\cos 3x = 3\sin 6x$

Định lý 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu tăng (giảm) và khả vi trong miền X với $f'(x) \neq 0$ trong X thì hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ của $f(x)$ sẽ khả vi trong miền giá trị Y của $f(x)$ và :

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Chứng minh : Xét $y \in Y$, cho y số gia Δy thì $x = f^{-1}(y)$ có số gia $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) = f^{-1}(y)$ ta biết : $f^{-1}(y)$ cũng đơn điệu tăng (giảm) nên $\Delta y \neq 0$ thì $\Delta x \neq 0$ do đó khi $\Delta y \neq 0$ ta viết được:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Mặt khác ta biết $f^{-1}(y)$ cũng liên tục tại y nên $\Delta y \to 0$ thì $\Delta x \to 0$, do đó theo định nghĩa và giả thiết ta có:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Thí dụ: 1) Xét $y = \log_a x$

Từ $x = a^y$ suy ra $x'_y = a^y \ln a$

Do đó $y' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{x\ln a}$

Đặc biệt $y = \ln x$ thì $y' = \dfrac{1}{x}$

2) Xét $y = \arcsin x$, từ $x = \sin y$ ta có

$x'_y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ $\left(\text{do } -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$

Do đó $y' = y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Tương tự: $y = \arccos x$ thì $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$y = \text{arctg}x$ thì $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y = \text{arccotg}x$ thì $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Xét $y = x^{\alpha}$ ($x > 0$, $\alpha \in R$)

Vì $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ nên $y = e^{\alpha \ln x}$

Đặt $u = \alpha \ln x$ thì $y = e^u$, $y'_u = e^u$, $u'_x = \dfrac{\alpha}{x}$

Do đó $y' = y'_x = e^u \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\alpha x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

Đặc biệt $\alpha = \dfrac{1}{2}$ thì $y = \sqrt{x}$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Bảng đạo hàm vi phân cơ bản: Qua các thí dụ trên ta đã tính được đạo hàm hay vi phân của các hàm số sơ cấp cơ bản, bây giờ ta viết chúng vào một bảng gọi là bảng đạo hàm hay vi phân cơ bản (ở đây ta viết dưới dạng vi phân).

1° $dc = 0$, $c = \text{const}$

2° $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}dx$

3° $d\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

4° $d(a^x) = a^x \ln a dx$

5° $d(e^x) = e^x dx$

6° $d(\log_a |x|) = \dfrac{dx}{x \ln a}$

7° $d(\ln|x|) = \dfrac{dx}{x}$

8° $d(\sin x) = \cos x dx$

9° $d(\cos x) = -\sin x dx$

10° $d(\text{tg}x) = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \text{tg}^2 x)dx$

11° $d(\text{cotg}x) = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = -(1 + \text{cotg}^2 x)dx$

12° $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13° $d(\arccos x) = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

14° $d(\text{arctg}x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$

15° $d(\text{arccotg}x) = \dfrac{-dx}{1+x^2}$

16° $d(\text{sh}x) = \text{ch}x dx$

17° $d(\text{ch}x) = \text{sh}x dx$

18° $d(\text{th}x) = \dfrac{dx}{ch^2 x} = (1 - \text{th}^2 x)dx$

19^0 $d(\coth x) = -\dfrac{dx}{sh^2 x} = (1-\coth^2 x)dx$

Dùng bảng này và các quy tắc tính đạo hàm ta có thể tính đạo hàm hay vi phân của 1 hàm số sơ cấp bất kỳ.

Thí dụ: Tính y' nếu:

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \text{arctg}\,\frac{x}{2}\ln\sin x$$

$$y' = 2\frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' + \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\ln\sin x + \frac{\cos x}{\sin x}\text{arctg}\,\frac{x}{2}$$

$$= -4\frac{x+1}{(x-1)^3} + \frac{2\ln\sin x}{x^2+4} + \cot gx.\text{arctg}\,\frac{x}{2}$$

Chú ý: Nếu y là hàm số ẩn của x xác định từ phương trình $f(x,y) = 0$ thì vì $f(x,y(x)) \equiv 0$ trong miền xác định của y nên muốn tính đạo hàm của y theo x, ta tính đạo hàm 2 vế của đồng nhất thức này theo x, sau đó giải y' ra đối với x.

Thí dụ:

1) Cho $y = y(x)$ xác định từ $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Lấy đạo hàm hai vế phương trình này theo x.

$2x + 2yy' = 0$ do đó $y' = -\dfrac{x}{y}$

2) Cho $y = y(x)$ xác định từ $y = 1 + xe^y$

Ta có: $y' = 1e^y + xe^y y'$

Do đó: $y' = \dfrac{e^y}{1-xe^y}$

3) Nếu hàm số $y = f(x)$ được cho bởi 1 tích số phức tạp hay 1 biểu thức luỹ thừa mũ thì ta có thể tính đạo hàm của y theo x bằng quy tắc sau đây gọi là cách tính đạo hàm bằng logarithme

Thí dụ:

1) Tính y' nếu $y = \dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x+3}}$

lấy logarithme neper hai vế ta có

$$\ln|y| = 2\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{5}\ln|x+3|$$

Tính đạo hàm hai vế theo x ta có

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{3(x+2)}-\frac{1}{5(x+3)}$$

Do đó $y'=\dfrac{(x-1)^2\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[5]{x+3}}\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{3(x+2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}\right)$

2) Tính y' nếu $y=x^x$

Ta có: $\ln y = x\ln x$

$$\frac{y'}{y}=x.\frac{1}{x}+\ln x,\ y'=x^x(1+\ln x)$$

§ 3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

3.1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ khả vi trong miền X, rõ ràng đạo hàm $y'=f'(x)$ hay vi phân $dy=f'(x)dx$ cũng là một hàm số của x trong miền X. Giả sử hàm số này cũng khả vi trong X, khi đó đạo hàm hay vi phân của nó gọi là đạo hàm hay vi phân cấp hai của $f(x)$ ký hiệu:

$$y'',\ y''_{x^2},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$d^2y,\ d^2f(x)=d(df(x))$$

còn đạo hàm $f'(x)$ hay vi phân $dy=f'(x)dx$ cũng gọi là đạo hàm hay vi phân cấp 1 của $f(x)$.

Tổng quát: Ta gọi đạo hàm hay vi phân cấp n của $f(x)$ tại x là đạo hàm hay vi phân của đạo hàm hay vi phân cấp $n-1$ của $f(x)$ tại x.

Ký hiệu $y^{(n)},\ y^{(n)}_{x^n},\ \dfrac{d^ny}{dx^n}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

$$d^ny,\ d^nf(x)=d(d^{n-1}f(x))$$

Từ định nghĩa suy ra: nếu x là biến số độc lập thì : $d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$

Thực vậy: $d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)$

$$=dxdf'(x)=dxf''(x)dx=f''(x)dx^2\ldots$$

$$\ldots d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$$

Do đó ký hiệu đạo hàm $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ cũng có ý nghĩa là thương của hai vi phân

Thí dụ:

1) Xét $y = x^\alpha$

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, ..., $y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$

2) Xét $y = a^x$, $y' = a^x\ln a$

$y'' = a^x(\ln a)^2$... $y^{(n)} = a^x(\ln a)^n$, $d^ny = a^x(\ln a)^n dx^n$

Đặc biệt nếu $y = e^x$ thì $y^{(n)} = e^x$, $d^ny = e^x dx^n$

3) Xét $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) ...$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad d^n y = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)dx^n$$

Tương tự : $y = \cos x$ thì $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4) Xét $y = \log_a x$, $y' = \frac{1}{x\ln a}$

$$y^{(n)} = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{\ln a}\left(x^{-1}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{\ln a}(-1)(-2)...(-n+1)x^{-n}$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln a}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}$$

$y = \ln x$ thì $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Chú ý : Xét $y = f(u)$, $u = u(x)$ $dy = f'_u u'_x dx = f'(u)du$.

Suy ra: vi phân cấp 1 có tính chất bất biến về dạng mặc dù x là biến số độc lập hay phụ thuộc.

Dễ dàng thấy vi phân cấp hai trở lên không có tính chất này.

Thực vậy: $d^2y = d(dy) = d(f'(u)du) = dud(f'(u)) + f'(u)d(du)$

$= duf''(u)du + f'(u)d^2u = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u$

3.2. Quy tắc tính

Ta có 2 quy tắc tính đạo hàm và vi phân cấp n của tổng và tích như sau:

1°. $(u \pm v)^{(n)} = u^n \pm v^n$, $d^n(u \pm v) = d^nu \pm d^nv$

2^o. $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}$, $d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} c_n^i d^{n-i}u\, d^i v$ $(u^{(0)}=u,\ v^{(0)}=v)$

Quy tắc 1^o chứng minh dễ dàng, ở đây ta chỉ chứng minh quy tắc 2^o

Ta sẽ chứng minh 2^o bằng quy nạp.

$n = 1$, $(uv)' = c_1^0 u'v + c_1^1 uv' = u'v + uv'$ đúng

Giả sử 2^o đúng với đạo hàm cấp $n - 1$

$(uv)^{(n-1)} = c_{n-1}^0 u^{(n-1)}v + c_{n-1}^1 u^{(n-2)}v' + \ldots + c_{n-1}^i u^{(n-i-1)}v^{(i)} + \ldots + c_{n-1}^{n-1} uv^{(n-1)}$

Đạo hàm hai vế ta có

$(uv)^{(n)} = c_{n-1}^0 u^{(n)}v + \left(c_{n-1}^0 + c_{n-1}^1\right)u^{(n-1)}v' + \ldots$

$+ \left(c_{n-1}^i + c_{n-1}^{i-1}\right)u^{(n-i)}v^{(i)} + \ldots + c_{n-1}^{n-1}uv^{(n)}$

Nhưng $c_{n-1}^0 = c_n^0$ $(=1)$ $\quad c_{n-1}^{n-1} = c_n^n$ $(=1)$ $\quad c_n^i = c_{n-1}^i + c_{n-1}^{i-1}$

Vậy : $(uv)^{(n)} = c_n^0 u^{(n)}v + c_n^1 u^{(n-1)}v' + \ldots + c_n^i u^{(n-i)}v^{(i)} + \ldots + c_n^n uv^{(n)}$

Nghĩa là 2^o đúng với đạo hàm cấp n

Thí dụ:

1) Cho $y = \sin^2 \frac{x}{2}$, tính $y^{(7)}$

Vì $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ nên:

$$y^{(7)} = \frac{(1-\cos x)^{(7)}}{2} = 0 - \frac{1}{2}(\cos x)^{(7)} = -\frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{7}{2}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sin x$$

2) Cho $y = x^3\sin x$; tính $y^{(3)}$

Đặt $u = x^3$, $v = \sin x$ thì $u' = 3x^2$, $u'' = 6x$

$u''' = 6$, $v' = \cos x$, $v'' = -\sin x$, $v''' = -\cos x$

$$y^{(3)} = c_3^0\left(x^3\right)^{(3)}\sin x + c_3^1\left(x^3\right)''\left(\sin x\right)' + c_3^2\left(x^3\right)'\left(\sin x\right)'' + c_3^3 x^3\left(\sin x\right)^{(3)}$$

$$= 6\sin x + 18x\cos x - 9x^2\sin x - x^3\cos x$$

BÀI TẬP

1. Tính trực tiếp đạo hàm của các hàm số:

1) $y = x^n$ $\quad$ 4) $y = \mathrm{tg}x$ $\quad$ 7) $y = \arcsin x$ $\quad$ 10) $y = \log_a x$

2) $y = \sqrt[n]{x}$ $\quad$ 5) $y = \mathrm{cotg}x$ $\quad$ 8) $\mathrm{arccotg}x$

3) $y = \cos x$ $\quad$ 6) $y = \mathrm{arctg}x$ $\quad$ 9) $y = \arccos x$

2. Chứng minh rằng các hàm số sau không có đạo hàm tại các điểm tương ứng.

1) $y = \sqrt[3]{x^2}$ tại $x = 0$

2) $y = |\cos x|$ tại $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

3) $f = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$ tại $x = 0$

4) $y = |1 - x^2|$ tại $x = \pm 1$

3. Tính đạo hàm của:

1) $y = 2 + x - x^2$, tại $x = 0, \dfrac{1}{2}, 1$

2) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$, tìm x để $y' = 0; -2; 10$

3) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$

4) $y = (5 + 2x)^{10}(3 - 4x)^{20}$

5) $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

6) $y = \dfrac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$

7) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

8) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

9) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

10) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$

11) $y = (1 + x).\sqrt{2 + x^2}.\sqrt[3]{3 + x^3}$

4. Tính đạo hàm của;

1) $y = \cos 2x - 2\sin x$

2) $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$

3) $y = \sin^n x\cos x$

4) $y = \sin(\sin(\sin x))$

5) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$

6) $y = \operatorname{tg}x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

7) $y = 4\sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}^8 x}$

8) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

9) $y = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$

10) $y = \sin^3 5x\cos\dfrac{2x}{3}$

11) $y = \mathrm{tg}^2 5x$

5. Tính đạo hàm của

1) $y = e^{-x}$

2) $y = 2^{|x|}$

3) $y = e^{ax}\left(\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

4) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b,\ a, b > 0$

5) $y = x^a + a^x + a^{a^x}$

6) $y = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2(1+x)}$

7) $y = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

8) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

9) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

10) $y = \ln(\ln(\ln x))$

11) $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$

12) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

13) $y = \ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2} - \cos x\ln(\mathrm{tg}x)$

14) $y = \log_x e$

6. Tính đạo hàm của:

1) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2}{a}$

2) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$

3) $y = \arccos\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$

4) $y = \sqrt{x} - \mathrm{arctg}\sqrt{x}$

5) $y = \arcsin(\sin x)$

6) $y = \arccos(\cos^2 x)$

7) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$

8) $y = \mathrm{arctg}x + \dfrac{1}{3}\mathrm{arctg}x^3$

9) $y = \ln\left(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

10) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$

11) $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}^2 x)$

7. Tính đạo hàm của:

1) $y = \sqrt[x]{x}$

2) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

3) $y = x.\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

4) $y = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$

5) $y = \dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$

6) $y = \left(x + \sqrt{\left(1+x^2\right)}\right)^n$

8. Tính đạo hàm của các hàm ẩn $y = f(x)$ cho theo các phương trình:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

2) $y^2 = 2px$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

5) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

6) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

9. Tìm y'_x nếu:

1) $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$

2) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$

3) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

4) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

10. Tính y'_x

1) $y = \ln(\operatorname{ch}x) + \dfrac{1}{2ch^2 x}$

2) $y = \dfrac{chx}{sh^2 x} - \ln\left(\coth\dfrac{x}{2}\right)$

3) $y = \arccos\left(\dfrac{1}{chx}\right)$

4) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$

11. Các đường sau đây cắt nhau dưới góc bao nhiêu?

1) $y = x^2$, $x = y^2$

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$

3) $x^2 - y^2 = a$, $xy = b$

***12**. Tính tổng:

1) $P(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$

2) $Q(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$

3) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$

4) $\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx$

5) $\operatorname{ch}x + 2\operatorname{ch}2x + \ldots + n\operatorname{ch}nx$

13.

1) Tính $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ nếu : $f(x) = |x - a|\ \varphi(x)$

với $\varphi(x)$ liên tục và $\varphi(a) \neq 0$

2) Tính $f'(0 - 0)$, $f'(0 + 0)$ nếu $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$

14. Chứng minh rằng:

1) Đạo hàm của hàm số chẵn là lẻ

2) Đạo hàm của hàm số lẻ là chẵn

3) Đạo hàm của hàm tuần hoàn là tuần hoàn cùng chu kỳ.

15. Cho

1) $f(x)$ có đạo hàm tại x_0, $g(x)$ không có đạo hàm tại x_0

2) $f(x)$; $g(x)$ không có đạo hàm tại x_0 thì $f(x) + g(x)$; $f(x)$. $g(x)$ có đạo hàm tại x_0 không?

Xét thí dụ:

$f(x) = x$, $g(x) = |x|$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = |x|$ tại $x_0 = 0$

16. $F(x) = f[g(x)]$ có đạo hàm tại x_0 không nếu:

1) $f(x)$ có đạo hàm tại $x = g(x_0)$, $g(x)$ có đạo hàm tại x_0

2) $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = g(x_0)$; $g(x)$ không có đạo hàm tại x_0

Thí dụ:

1) $f = x^2$, $g = |x|$

2) $f = |x|$, $g = x^2$

3) $f = 2x + |x|$, $g = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}|x|$; $x_0 = 0$

***17.**

1) Nếu $f(x)$ có đạo hàm và bị chặn trong (a,b) và $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$

thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$?

Thí dụ: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \to 0$

2) Nếu: $f(x)$ có đạo hàm trong $(x_0, +\infty)$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

thì $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = ?$

Thí dụ $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$

3) Nếu $f(x)$ bị chặn có đạo hàm trong $(x_0, +\infty)$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

thì có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?

Thí dụ: $f(x) = \cos(\ln x)$

18. Tính:

1) $d\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right)$ 2) $d\left(\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right)$

3) $d\left(\frac{1}{2a}\ln\frac{|x-a|}{|x+a|}\right)$

4) $d(x.e^x)$

5) $d(x\cos x)$

6) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$

7) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

8) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$

9) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$

10) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$

11) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

12) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

19. Tính gần đúng

1) $\sqrt[3]{1,02}$

2) $\sin 29^0$

3) arctg1,05

20. Chứng minh

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad a>0,\quad |x|<a$$

(HD: Xét $f(x)=\sqrt[n]{x}$

$$f(x_0+\Delta x)=\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$ thay $x_0=a^n$, $\Delta x=x$)

Áp dụng tính:

1) $\sqrt{5}$

2) $\sqrt{34}$

3) $\sqrt{120}$

4) $\sqrt[3]{9}$

5) $\sqrt[4]{80}$

6) $\sqrt[7]{100}$

7) $\sqrt[10]{1000}$

21. Chứng minh:

1) $y=xe^{-x}$ nghiệm đúng hệ thức $xy'=(1-x)y$

2) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ nghiệm đúng hệ thức $xy'=(1-x^2)y$

3) $y=\frac{1}{1+x+\ln x}$ nghiệm đúng hệ thức $xy'=-(x+1)y^2$

22. Hai đầu của 1 thanh $AB=5$m trượt theo các trục toạ độ Ox, Oy. Tốc độ trượt của đầu A là 2m/s. Tìm tốc độ của đầu B lúc A cách O 3m.

23. Một điểm chuyển động theo hyperbole $y = \dfrac{10}{x}$ sao cho hoành độ x tăng đều với tốc độ 1m/s. Tìm tốc độ biến thiên của y tại điểm (5,2).

24. Tính đạo hàm và vi phân cấp 2 của:

1) $y = x\sqrt{1+x^2}$

2) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y = e^{x^2}$

4) $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

5) $y = (1 + x^2)\text{arccotg}x$

6) $y = (1 + x^2)\text{arctg}x$

7) $y = (\arcsin x)^2$

8) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

9) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$

25. Cho

1) $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$

2) $y = e^x\cos x$, Tính $y^{(4)}$

3) $y = \dfrac{e^x}{x}$, Tính $y^{(10)}$

4) $y = x\cos 2x$, Tính $d^{10}y$

5) $y = \cos x.\text{ch}x$, Tính d^6y

26. Chứng minh

1) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$ nghiệm đúng phương trình
$y'' + y = 0$

2) $y = C_1\text{ch}x + C_2\text{sh}x$ nghiệm đúng phương trình
$y'' - y = 0$

3) $y = x^n[(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)]$ nghiệm đúng phương trình
$x^2y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y = 0$

4) $y = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_2\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_3\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_4\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

nghiệm đúng phương trình $y^{(4)} + y = 0$

27. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

1) $y = \dfrac{1}{a+bx}$

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$

3) $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$

4) $y = e^{ax}\sin bx$

*5) $y = \arcsin x$, tính $f^{(n)}(0)$

6) $y = \sin^2 x$

7) $y = \cos^2 x$

8) $y = \sin ax\cos bx$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

3.

1) 1, 0, -1
2) -2, 1; -1, 0; -4, 3
3) $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$
4) $-20(17+12x)(5+2x)^9(3-4x)^{19}$

5) $\dfrac{2(1-2x)}{\left(1-x+x^2\right)^2}$

6) $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$

7) $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $(x>0)$

8) $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $(x>0)$

9) $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, $(x>0)$

10) $\dfrac{1}{27}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$ $\quad x \neq 0, -1, -8$

11) $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}.\sqrt[3]{\left(3+x^3\right)^2}}$ $\quad x \neq \sqrt[3]{-3}$

4.

1) $-2\cos x\,(1+2\sin x)$
2) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$
3) $-n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$
4) $\cos x\cos(\sin x)\cos[(\sin(\sin x))]$

5) $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$

6) $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2x+\mathrm{tg}^4x}{\cos^2 x}$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \ldots$

7) $\dfrac{-8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}}$, $x \neq k\pi$

8) $\dfrac{2\sin x\left(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2\right)}{\left(\sin x^2\right)^2}$

9) $-3\mathrm{tg}^2x\sec^2x\sin(2\mathrm{tg}^3x)\cos[\cos^2(\mathrm{tg}^3x)]$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$

10) $15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sin^3 5x\sin\frac{2x}{3}$

11) $10\operatorname{tg}5x\sec^2 5x$

5.

1) $-2xe^{-x^2}$

2) $-\frac{1}{x^2}2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}.\sec^2\frac{1}{x}.\ln 2.$ $\left(\sec x = \frac{1}{\cos x}\right)$

3) $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$

4) $y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$ $(x > 0)$

5) $ax^{a-1} + a^x\ln a + a^{a^x}.a^x(\ln a)^2$

6) $\frac{-x^2}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $x > -1$

7) $\frac{x}{x^4-1}$, $|x| > 1$

8) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

9) $\sqrt{x^2+a^2}$

10) $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$, $(x > e)$

11) $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$, $(x > e)$

12) $\frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

13) $\sin x\ln\operatorname{tg}x$ $0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

14) $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $x > 0, x \neq 1$

6.

1) $\frac{2ax}{x^4+a^2}$

2) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, $|x| < 2$

3) $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$, $|x-1| < \sqrt{2}$

4) $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$, $x \geq 0$

5) sign(cos$x$) $(x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in Z,$ $\operatorname{sign}x = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < 0 \\ 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

6) $\dfrac{2\operatorname{sign}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $x \neq k\pi,\ k \in Z$

7) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\quad 0 < x - k\pi < \dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$

8) $\dfrac{1+x^4}{1+x^6}$

9) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)}$, $x > 1$

10) $\sqrt{a^2 - x^2}$

11) $\dfrac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$, $x \neq (2k-1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$

7.

1) $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ $x > 0$

2) $(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{cotg}^2 x - \ln x \sin x) - (\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x)$

$0 < x - 2k\pi < \dfrac{\pi}{2}$

3) $\dfrac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}y$

4) $y\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-a_i}$

5) $\dfrac{54-36x+x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}y$, $x \neq 0;\ 1\ ;\ \pm 3$

6) $\dfrac{n}{\sqrt{1+x^2}}y$

8.

1) $y' = \dfrac{1-x-y}{x-y}$

2) $y' = \dfrac{p}{y}$

3) $y' = \dfrac{-b^2 x}{a^2 y}$

4) $y' = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

5) $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$

6) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

9.

1) -1, $0 < x < 1$

2) $\frac{-b}{a}\operatorname{cotg} t \quad 0 < |t| < \pi$

3) $-\operatorname{tg} t$, $t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

4) $\operatorname{cotg}\frac{t}{2}$, $t \neq 2k\pi$, $k \in Z$

10.

1) $\operatorname{th}^3 x$;

2) $\frac{-2}{sh^3 x}$, $x > 0$

3) $\frac{\operatorname{sign}(shx)}{chx}$, $x \neq 0$

4) $\frac{1}{ch2x}$

11.

1) $\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$

2) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2} \approx -70°30'$

3) $\frac{\pi}{2}$

12.

1) $\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

2) $\frac{1+x-(n+1)^2 x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}$, $Q(x) = [xP(x)]'$

3) $\frac{\sin\frac{nx}{2}.\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

4) $\frac{n\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$

5) $\frac{nsh\frac{x}{2}.sh\left(n+\frac{1}{2}\right)x - sh^2\frac{nx}{2}}{2sh^2\frac{x}{2}}$

13.

1) $f(a-0) = -\varphi(a)$, $f(a+0) = \varphi(a)$

2) $f'(0 - 0) = -1; f'(0 + 0) = 1$

15.

1) Không có, không thể khẳng định

2) Không thể khẳng định

16. Có thể có, cũng có thể không

17.

1) Không thể

2) Không thể

3) Không thể

18.

1) $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

2) $\dfrac{dx}{a^2 + x^2}$

3) $\dfrac{dx}{x^2 - a^2}$

4) $(1 + x)e^x dx$

5) $(\cos x - x\sin x)dx$

6) $\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

7) $\dfrac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $|x| < 1$

8) $\dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.dx \quad x > 0$

9) $-\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad |x| > 1$

10) $1 - 4x^3 - 3x^6$

11) $\dfrac{1}{2x^2}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right)$

12) $-\cot g x \quad x \neq k\pi, k \in Z$

19. HD: Dùng công thức $f(x + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$, Δx khá bé

1) 1,007 (bảng : 1, 0066)

2) 0,4849 (bảng : 0,4848)

3) 0,8104 ≈ 46°26' (bảng : 46°24')

20.

1) 2,25 (bảng : 2,24)

2) 5,833 (bảng ; 5,831)

3) 10,9546 (bảng : 10,9545)

4) 2,083 (bảng : 2,080)

5) 1,9907 (bảng : 2,9907)

6) 1,938 (bảng : 1,937)

7) 1,9554 (bảng : 1,9553)

22. Đặt $\overline{OA} = x = 2t$, $\overline{OB} = y = \sqrt{5^2 - 4t^2}$

$y'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

23. Đặt $x = t$, $y = \frac{10}{t}$; $y'_t = \frac{-10}{t^2}$

$t = 5$, $y'(5) = -0{,}4\text{m/s}$

24.

1) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

2) $-\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, $|x| < 1$

3) $2e^{x^2}(2x^2 - 1)$

4) $\frac{-2}{x}\sin(\ln x)$, $x > 0$

5) $\frac{-2x}{1+x^2} + 2\mathrm{arctg}x$

6) $2\mathrm{arctg}x + \frac{2x}{1+x^2}$

7) $\frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

8) $-\frac{1}{4a\sin^4\left(\frac{t}{2}\right)}$, $t \neq 2k\pi$, $k \in Z$

9) $\frac{e^{t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$

25.

1) $y^{(5)} = -\frac{6}{x^4}$

2) $y^{(4)} = -4e^x\cos x$

3) $y^{(10)} = e^x\sum_{n=0}^{10}(-1)^n C_{10}^n \frac{n!}{x^{n+1}}$

4) $d^{10}y = -1024\,(x\cos 2x + 5\sin 2x)dx^{10}$

5) $d^6y = 8\sin x.\,\mathrm{sh}x\,.\,dx^6$

27.

1) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$

2) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)! b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}$

3) $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$

4) $y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx + n\varphi)$

$\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5) $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = [(2k-1)!!]^2$; $k = 0, 1, 2 \ldots$

6) $-2^{n-1}\cos(2x + \dfrac{n\pi}{2})$ 7) $2^{n-1}\cos(2x + \dfrac{n\pi}{2})$

8) $\dfrac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x + \dfrac{n\pi}{2}\right] + \dfrac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x + \dfrac{n\pi}{2}\right]$

Chương 4

CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ÁP DỤNG

§1. CÁC ĐỊNH LÝ TRUNG BÌNH

1.1. Định lý Rolle

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ khả vi trong khoảng (a,b) và $f(a) = f(b)$ thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Về hình học: Định lý này xác nhận với những giả thiết đã nêu thì có ít nhất một điểm thuộc đồ thị của hàm số sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại đó song song với trục hoành.

Chứng minh: Theo giả thiết $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ nên theo định lý Weierstracss $f(x)$ đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M, có thể xảy ra 2 trường hợp.

a) $m = M$ khi đó vì $m \le f(x) \le M$ nên $f(x) = M = m$ nghĩa là $f(x)$ không đổi trong $[a,b]$ do đó $\forall x \in (a,b)$ ta có $f'(x) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$ định lý được chứng minh.

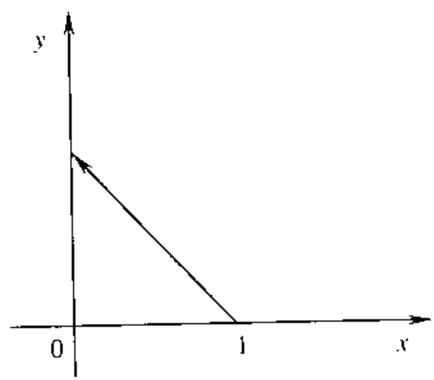
b) $m \neq M$, giả sử $f(c) = M$, $f(c') = m$ rõ ràng ít nhất một trong các điểm c, c' không thể trùng với a hoặc b, vì nếu chẳng hạn $c = a$, $c' = b$ thì vì $f(a) = f(b)$, theo giả thiết, suy ra $M = m$, ta lại trở về trường hợp trên.

Giả sử $c \neq a,b$ nghĩa là $c \in (a,b)$ vì M cũng là một cực đại của $f(x)$ trong (a,b) và theo giả thiết $f(x)$ khả vi trong (a,b) nên theo tính chất của hàm khả vi.

Ta có $f'(x) = 0$.

Chú ý: Các giả thiết trên rất cần thiết để định lý đúng, chẳng hạn xét:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 - x : x \neq 0 \end{cases}$

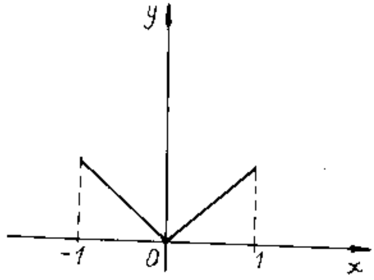


Hình 23

Hàm số này liên tục ∀ x trừ $x = 0$ rõ ràng không có $c \in (0,1)$ để $f'(c) = 0$ (Hình 23)

b) $f(x) = |x|$

Hàm số này khả vi ∀ x trừ $x = 0$ rõ ràng cũng không có $c \in (-1,1)$ để $f'(c) = 0$ (Hình 24)



Hình 24

1.2. Định nghĩa Lagrange:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong $[a,b]$ khả vi trong (a,b) thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (L)$$

Về hình học: Định lý này xác nhận với những giả thiết đã nêu thì có ít nhất 1 điểm thuộc đồ thị của hàm số tại đó tiếp tuyến với đồ thị song song với đoạn thẳng nối điểm đầu và cuối của đồ thị (Hình 25)

Chứng minh: Rõ ràng định lý Rolle là một trường hợp đặc biệt của định lý này, ta sẽ đưa định lý này về trường hợp định lý Rolle.

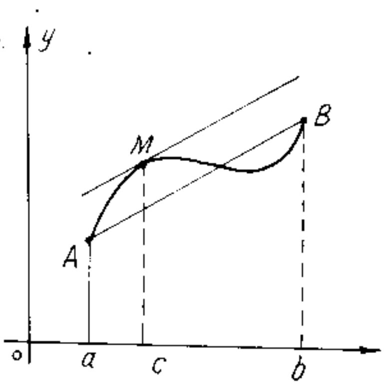
Xét $g(x)$ là hàm số có đồ thị là đường thẳng nối các điểm

$A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ thì tại a hoặc b, $f(x)$ và $g(x)$ có giá trị bằng nhau, do đó hàm số:

$F(x) = f(x) - g(x)$ tại a và b sẽ có giá trị bằng không.

Vì :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



Hình 25

(phương trình của đường thẳng qua A,B) nên $F(x)$ cũng liên tục trong $[a, b]$ và khả vi trong (a,b) như $f(x)$. Vậy $F(x)$ có đầy đủ các giả thiết của định lý Rolle nên: $\exists c \in (a,b)$ sao cho $F'(c) = 0$

Nhưng $F'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Suy ra: $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

Hay: $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$

Bây giờ ta viết công thức (L) dưới một dạng khác gọi là công thức số gia hữu hạn.

Đặt $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x = x$

Vì $c \subset (a, b)$ nên đặt được: $c = x_0 + \theta\, \Delta x$, $0 < \theta < 1$

Khi đó (L) viết được: $f(x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta\, \Delta x)$ $\quad (L')$

Cho $\theta = 1/2$ trong (L') ta có công thức tính gần đúng

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0 + \Delta x/2)$

Thí dụ: Tính gần đúng arctg1,1

Đặt $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$. Ta có

$\text{arctg}1{,}1 \approx \text{arctg}1 + \frac{0{,}1}{1+(1{,}05)^2} = 0{,}8685$

1.3. Định lý Cauchy:

Nếu $f(x)$, $g(x)$ liên tục trong $[a, b]$ khả vi trong (a,b) và $g'(x) \neq 0$ trong (a,b) thì $\exists c \in (a,b)$

sao cho: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ $\quad (c)$

Rõ ràng định lý Lagrange là một trường hợp đặc biệt của định lý này khi

$g(x) = x$

Chứng minh: Ta cũng chứng minh định lý này bằng cách đưa về trường hợp định lý Rolle.

Xét hàm số $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ trong đó λ là một số nào đó.

Rõ ràng $F(x)$ liên tục trong $[a,b]$ và khả vi trong (a,b) ta sẽ xác định λ để

$F(a) = F(b)$: $F(a) = f(a) + \lambda g(a)$, $F(b) = f(b) + \lambda g(b)$,

$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b) \Rightarrow [g(b) - g(a)]\, \lambda = -[f(b) - f(a)]$.

Rõ ràng $g(a) \neq g(b)$ vì nếu $g(a) = g(b)$ thì theo định lý Rolle.

$\exists c \in (a,b)$ sao cho $g'(c) = 0$

Trái với giả thiết: $g'(x) \neq 0$ trong (a,b)

Do đó: $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Vậy $F(x)$ xác định như trên có đầy đủ các giả thiết của định lý Rolle

Do đó $\exists c \in (a,b)$ sao cho $F'(c) = 0$ hay $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

1.4. Áp dụng:

a) Điều kiện đơn điệu của hàm số:

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi trong miền X

1^o. Nếu $f'(x) = 0$ $\forall x \in X$ thì $f(x)$ là không đổi trong X

2^o. Nếu $f(x)$ là đơn điệu không giảm (tăng) trong X thì $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) trong X.

3^o. Nếu $f(x) > 0$ (<0), $\forall x \in X$ thì $f(x)$ là đơn điệu tăng (giảm) trong X.

Định lý được chứng minh dễ dàng, chẳng hạn 1^o $\forall x_1, x_2 \in X$, áp dụng công thức Lagrange vào đoạn $[x_1, x_2]$ đối với $f(x)$:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in (x_1, x_2)$

Theo giả thiết: $f'(x) = 0$, $\forall x \in X$, suy ra $f'(c) = 0$ và $f(x_2) - f(x_1) = 0$

hay $f(x_1) = f(x)$, $\forall x_1, x_2 \in X$ nghĩa là $f(x)$ không đổi trong X

Thí dụ:

Xét $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $x > 0$

$f'(x) = 4x - 1/x = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$

Vì $x > 0$ nên $f'(x) < 0$ khi $0 < x < 1/2$ và

$f'(x) > 0$ khi $1/2 < x < +\infty$

Vậy $f(x)$ đơn điệu giảm trong $(0,1/2)$ và tăng trong $(1/2, +\infty)$

b) Quy tắc thứ nhất tìm cực trị.

Định lý: giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trong miền X và khả vi tại lân cận điểm $x_o \in X$ có thể trừ ra tại x_o và nếu trong lân cận đó:

khi $x < x_o$, $f'(x) > 0$ (<0)

$x > x_o$, $f'(x) < 0$ (> 0)

thì $f(x)$ đạt cực đại (tiểu) tại x_o.

Chứng minh : Xét trường hợp cực đại (cực tiểu xét tương tự) và x thuộc lân cận của x_o, $x \neq x_o$, áp dụng công thức (L) vào hiệu $f(x) - f(x_o)$ ta có:

$f(x) - f(x_o) = (x - x_o) f'(c)$; c gồm giữa x_o và x

Nếu $x < x_o$ thì $x - x_o < 0$ và $x < c < x_o$, theo giả thiết $f'(c) > 0$

Suy ra $f(x) - f(x_o) < 0$ hay $f(x) < f(x_o)$.

Nếu $x > x_o$ thì $x - x_o > 0$ và $x_o < c < x$, Theo giả thiết $f'(c) < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_o) < 0$ vậy trong lân cận của x_o: $f(x) < f(x_o)$

Theo định nghĩa $f(x)$ đạt cực đại tại x_o:

$y_{max} = f(x_o)$

Thí dụ: Xét $y = (x - 5)\sqrt[3]{x^2}$

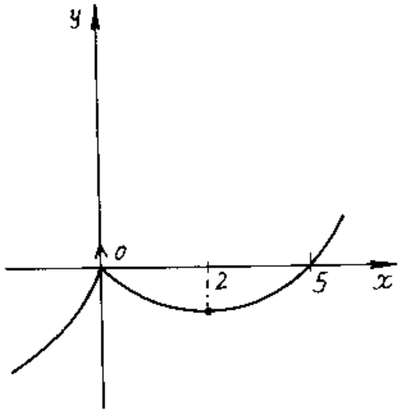
Ta có :

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$y' = 0$ khi $x = 2$, $y' = \infty$ khi $x = 0$

Xét dấu của y' theo bảng:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	‖	-	0	+	
y		↗	0	↘	$-3\sqrt[3]{4}$	↗	



Hình 26

Ta thấy : $x = 0$ là điểm cực đại của y: $y_{max} = y(0) = 0$

$x = 2$ là điểm cực tiểu của y:

$y_{min} = y(2) = -3\sqrt[3]{4}$

Chú ý: Qua các thí dụ đã xét ta thấy, $f(x)$ có thể đạt cực trị tại những điểm $f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ hoặc $f'(x)$ không tồn tại, những điểm như vậy gọi là những điểm bất thường của $f(x)$ đặc biệt, điểm x mà $f'(x) = 0$ gọi là điểm dừng của $f(x)$.

c) Quy tắc L'Hôspital (khử dạng vô định $\frac{0}{0}$, (∞/∞)

Định lý: Nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Cauchy trong lân cận của điểm x_o ($x_o \in \widetilde{R}$) trừ tại

x_o, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad (\infty)$

và $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a$ ($a \in \widetilde{R}$) thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = a$

Chứng minh: Ta chỉ xét trường hợp x_o, $a \in R$ (Các trường hợp khác chứng minh tương tự)

Xét hàm $F(x) = \begin{cases} f(x) & : x \neq x_0 \\ 0 & : x = x_0 \end{cases}$

Và $\quad G(x) = \begin{cases} g(x) & : x \neq x_0 \\ 0 & : x = x_0 \end{cases}$

Rõ ràng $F(x)$, $G(x)$ thoả mãn các điều kiện của định lý Cauchy trong lân cận của x_o, do đó x thuộc lân cận đó ta có:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \quad c \text{ gồm giữa } x \text{ và } x_o$$

hay $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ với $x \neq x_o$

Cho $x \to x_o$ thì $c \to x_o$ theo giả thiết:

$\lim\limits_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = a$ do đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$

Thí dụ:

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5\cos 5x}{3\cos 3x} = \frac{5}{3}$$

2) Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}x - \sin x}{x - \sin x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 3$$

3) Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x}$ $(a > 1)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = +\infty$$

Chú ý 1. Có thể áp dụng quy tắc L'Hôspital nhiều lần nếu $f'(x)$, $g'(x)$ lại thỏa mãn các điều kiện của quy tắc.

Thí dụ: Tìm

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

2) Có thể áp dụng quy tắc L'Hôspital để khử các dạng vô định $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0; bằng cách đưa các dạng này về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$

Thí dụ: 1) tìm $\lim\limits_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x$ $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha} = 0$$

2) Tìm $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{x-1}}$

Đặt $y = x^{\frac{1}{x-1}}$ thì $\ln y = \frac{\ln x}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\ln y = \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \quad \text{suy ra} \quad \lim_{x\to1} y = e$$

3) Khi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại thì không áp dụng được quy tắc L'Hôspital phải làm theo phương pháp khác.

Thí dụ: Xét $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ không tồn tại nên không áp dụng được quy tắc L'Hôspital. Bằng cách khác ta có:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

§ 2. CÔNG THỨC TAYLOR

2.1. Công thức Taylor và Maclaurin

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có các đạo hàm $f'(x), f''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ liên tục tại điểm x_0 và có đạo hàm $f^{(n+1)}(x)$ trong lân cận của x_0 thì tại lân cận đó ta có công thức:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \text{(T)}$$

(c ở giữa x_o và x, $c = x_o + \theta\,(x - x_o)$, $0 < \theta < 1$

Công thức này gọi là công thức Taylor cấp n, số hạng cuối cùng gọi là số hạng dư của nó, hàm $f(x)$ gọi là viết được hay khai triển được theo công thức Taylor. Đặc biệt $x_o = 0$ thì công thức Taylor trở thành công thức :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(M) $(0 < \theta < 1)$

gọi là công thức Maclaurin cấp n

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh công thức (T) bằng phương pháp quy nạp.

Cho: $n = 0$ ta có: $f(x) = f(x_o) + f'(c)(x - x_o)$

Đây chính là công thức (L) đã chứng minh. Vậy (T) đúng với $n = 0$.

Bây giờ giả sử công thức (T) cấp $n - 1$ đúng:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_o)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (1)$$

Ta sẽ chứng minh công thức (T) cấp n là đúng, theo giả thiết $f^{(n)}(x)$ liên tục tại x_o nên:

$$\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_o) \ (x \to x_o \text{ thì } c \to x_o)$$

Suy ra: $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_o) + \alpha \qquad (2)$

α là một vô cùng bé khi $x \to x_o$

Thay (1) vào (2) và chuyển vế ta được:

$$F(x) = f(x) - f(x_o) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

trong đó $F(x) = \dfrac{\alpha(x - x_0)^n}{n!} \qquad (3)$

Từ (3) suy ra

$F(x_o) = 0,\ F'(x_o) = 0,\ \dots\ F^{(n)}(x_o) = 0$

$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \qquad (4)$

Mặt khác ta xét hàm số:

$G(x) = (x - x_o)^{n+1}$

$G(x_o) = 0, G'(x_o) = 0, G^{(n)}(x_o) = 0, G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ (5)

Áp dụng công thức Cauchy vào các hàm số: $F(x)$, $G(x)$ trong (x_o, x) ta được:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}, \qquad x_o < c_1 < x$$

Lại áp dụng định lý Cauchy vào các hàm số $F'(x)$, $G'(x)$ trong (x_0, c_1) ta có :

$$\frac{F'(c_1)-F'(x_0)}{G'(c_1)-G'(x_0)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)} \qquad x_0 < c_2 < c_1$$

Tiếp tục quá trình, ta đi đến:

$$\frac{F^{(n)}(c_n)-F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(c_n)-G^{(n)}(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}, \qquad x_o < c < c_n$$

Do đó theo (4) và (5) thì

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \text{ hay } F(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Thay $F(x)$ và (3) và chuyển vế ta được công thức (T)

Chú ý: Số hạng dư trong các công thức (T) và (M) ở trên cũng gọi là số hạng dư dạng Lagrange. Ta có thể viết:

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0((x - x_o)^n)$, (vô cùng bé bậc cao hơn $(x - x_o)^n$ khi $x \to x_o$ gọi là số hạng dư dạng Peano.

2.2. Các khai triển quan trọng:

Ta sẽ khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản quan trọng theo công thức Maclaurin, có rất nhiều ứng dụng trong thực tế.

1°. Hàm số $f(x) = e^x$

Ta có: $f^{(n)}(x) = e^x$, do đó $f^{(n)}(0) = 1$, $n = 1, 2, ...$

Vậy $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + .. + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$

2°. Hàm số $f(x) = \sin x$

Ta biết: $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$

Do đó: $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \ : \ n = 2m, m = 1,2... \\ (-1)^{m-1} \ \ n = 2m-1, m = 1,2... \end{cases}$

Vậy:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots$$
$$+ \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \sin\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3°. Hàm số $f(x) = \cos x$

Tương tự ta có:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots$$
$$+ \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!} + \cos\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4°. Hàm số $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$

Ta có: $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$

Do đó: $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$

Vậy:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)x^n}{n!} + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)}{(n+1)!}(1 + \theta x)^{\alpha - n - 1}x^{n+1}$$

2.3. Áp dụng

a) Quy tắc thứ hai tìm cực trị

Định lý: Giả sử $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n tại điểm x_o và:

$f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0, f^{(n)}(x_o) \neq 0$

Nếu n chẵn và $f^{(n)}(x_o) < 0$ (> 0) thì $f(x)$ đạt cực đại (tiểu) tại x_o.

Nếu n lẻ thì $f(x)$ không đạt cực trị tại x_o.

Chứng minh: Ta viết công thức (T) của $f(x)$ tại lân cận x_o (cấp n - 1)

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

Theo giả thiết: $f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0$

Suy ra: $f(x) - f(x_o) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$ (1)

Cũng theo giả thiết $f^{(n)}(x)$ liên tục tại x_o nên:

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(c) = \lim_{c\to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0)$$

Do đó theo tính chất của giới hạn nếu:

$f^{(n)}(x_o) < 0$ (> 0) thì trong lân cận của x_o:

$f^{(n)}(c) < 0$ (> 0). Do đó, nếu n chẵn thì từ (1) suy ra: $f(x) - f(x_o) < 0$ (> 0) nghĩa là $f(x)$ đạt cực đại (tiểu) tại x_o

Nếu n lẻ thì $f(x) - f(x_o)$ không giữ nguyên một dấu nhất định, chẳng hạn nếu $f^{(n)}(x_o) < 0$ thì $f(x) - f(x_o) > 0$ khi $x < x_o$ và $f(x) - f(x_o) < 0$ khi $x > x_o$ nghĩa là $f(x)$ không đạt cực trị tại x_o.

Thí dụ: 1) Xét hàm số $y = \cos 2x$

Hàm số này có chu kỳ là π nên chỉ xét $0 \le x \le \pi$ $y' = -2\sin 2x$, $y' = 0$

khi $\sin 2x = 0$ hay $x = k\dfrac{\pi}{2}$, trong $[0, \pi]$ thì $y' = 0$ khi $x = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$, π

Tính $y'' = -4\cos 2x$ và xét dấu của y''.

$y''(0) = -4 < 0$, do đó y đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{max} = 1$

$y''(\dfrac{\pi}{2}) = 4 > 0$, do đó y đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{\pi}{2}$; $y_{min} = -1$

$y''(\pi) = -4 < 0$, do đó y đạt cực đại tại $x = \pi$; $y_{max} = 1$

2) Xét hàm số; $y = x^4$ tại $x = 0$

Ta có: $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, $y^{(4)} = 24$

Do đó tại $x = 0$ thì : $y' = y'' = y''' = 0$; $y^{(4)} > 0$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{min} = 0$

3) Xét hàm số $y = x^3$ tại $x = 0$ thì:

$y' = y'' = 0$, $y''' = 6 \neq 0$. Vậy y không đạt cực trị tại $x = 0$

Bài toán tìm giá trị lớn nhất và bé nhất:

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trong đoạn $[a, b]$ theo định lý Weierstrass: $f(x)$ sẽ đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M trong đoạn đó, rõ ràng m, M của $f(x)$ chỉ có thể đạt tại các điểm cực trị của $f(x)$ hoặc tại a hoặc b, nhưng cực trị của $f(x)$ chỉ có thể đạt tại các điểm bất thường của $f(x)$($f'(x) = 0$, ∞ hoặc không tồn tại). Do đó muốn tìm m, M của $f(x)$, ta tìm các điểm bất thường của $f(x)$ rồi tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm đó và tại a, b rồi so sánh ta sẽ có m, M.

Rõ ràng nếu trong $[a, b]$, $f(x)$ biến thiên đơn điệu thì m, M sẽ đặt tại a hoặc b.

Nếu trong $[a, b]$, $f(x)$ chỉ có một cực đại hoặc một cực tiểu thì cực đại cực tiểu đó sẽ là giá trị lớn nhất hoặc bé nhất của $f(x)$.

Thí dụ:

1) Tìm m, M của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trong đoạn $[-3, 2]$

Tính $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0$ khi $x = \pm 1$

Tính $y(-3) = -17$, $y(-1) = 3$, $y(1) = -1$

$y(2) = 3$ vậy $m = -17$, $M = 3$

2) Một viên đạn bắn lên từ điểm O với vận tốc v_o và nghiêng với mặt phẳng nằm ngang 1 góc α. Xác định góc α để viên đạn rơi xuống mặt phẳng nằm ngang ở điểm A thì khoảng cách OA = R là lớn nhất.

Trong cơ học ta viết phương trình chuyển động của viên đạn là:

$x = v_o\cos\alpha.t$

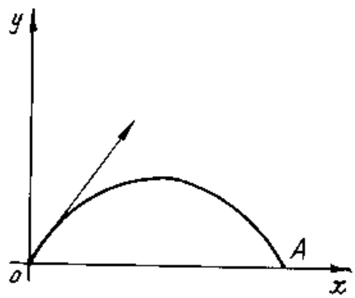
$$y = v_o\sin\alpha.t - \frac{gt^2}{2}$$

Trong đó t là thời gian, g là gia tốc trọng trường, khử t ta có phương trình quỹ đạo của viên đạn:

$$y = x\text{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Tìm tọa độ của A, cho $y = 0$ ta có:

$$R = \text{OA} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$ với điều kiện $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$



Hình 27

Tính $R' = \frac{2v_0^2\cos 2\alpha}{g} = 0$ khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$R'' = \frac{-4v_0^2\sin 2\alpha}{g}, \quad R''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4v_0^2}{g} < 0$$

Vậy R đạt cực đại tại $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Đó cũng là giá trị lớn nhất của R. Do đó góc α cần xác định là $\frac{\pi}{4}$

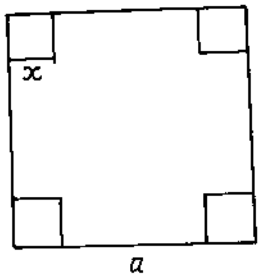
3) Cho một miếng tôn hình vuông cạnh a hỏi phải cắt đi ở 4 góc, 4 hình vuông bằng nhau là bao nhiêu để gò thành một thùng hình hộp có thể tích V lớn nhất (Hình 28)

Ta có $V = (a - 2x)^2 . x$

Với điều kiện $0 \le x \le \dfrac{a}{2}$

$V' = (a - 2x)(a - 6x)$, $V' = 0$ khi $x = \dfrac{a}{2}$ và $x = \dfrac{a}{6}$

$$V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0, V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$$



Hình 28

Vậy $V_{max} = \dfrac{2a^3}{27}$ và phải cắt đi một diện tích là

$$4\frac{a^2}{36} = \frac{a^2}{9}$$

b) Bề lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị hàm số:

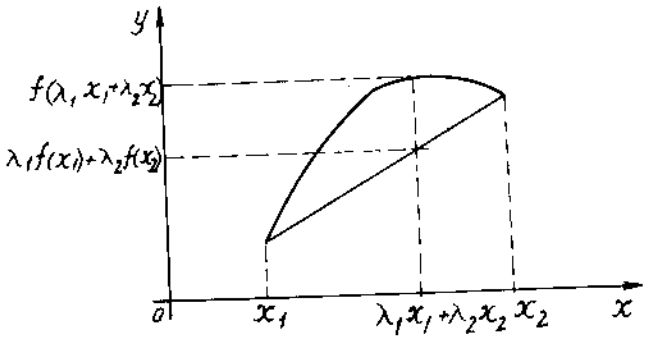
Định nghĩa 1: Hàm $y = f(x)$ hay đồ thị của nó gọi là lồi về phía trên hay lồi trong khoảng (a,b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ và $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

thì

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad (1)$$

Nếu dấu bất đẳng thức là $\le$ thì $f(x)$ hay đồ thị của nó gọi là lõm về phía trên hay lõm.

Ý nghĩa của (1) là các điểm trên cung đồ thị ở phía trên các điểm trên dây cung cùng hoành độ (hình 29).



Hình 29

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trong khoảng (a,b) là lồi (lõm) trong khoảng đó là $f''(x) \leq 0$ (≥ 0)

*Chứng minh:

Điều kiện cần: Xét trường hợp lồi, giả sử trong (a,b), $f(x)$ là lồi, nghĩa là:

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ (1)

$x_1, x_2 \in (a,b)$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Chọn $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ và đặt $t = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $h = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$ thì (1) viết được

$$f(t) \geq \frac{f(t+h) + f(t-h)}{2} \text{ hay } f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) \leq 0 \qquad (2)$$

Theo công thức Lagrange:

$f(t+h) + f(t-h) - 2f(t) = [f(t+h) - f(t)] - [f(t) - f(t-h)] =$

$= f'(t + \theta_1 h).h - f'(t - \theta_2 h).h = h[f'(t + \theta_1 h) - f'(t - \theta_2 h)$

$= h[f'(t + \theta_1 h) - f'(t)] + h[f'(t) - f'(t - \theta_2 h)]$

$$0 < \theta_1, \theta_2 < 1$$

Chia 2 vế đẳng thức này cho h^2:

$$\frac{f(t+h) + f(t-h) - 2f(t)}{h^2} = \frac{f'(t+\theta_1 h) - f'(t)}{h} + \frac{f'(t) - f'(t-\theta_2 h)}{h}$$

Khi $h \to 0$ các số hạng ở vế phải dần tới $f''(t)$ từ (2) suy ra $f''(t) \leq 0$.

Điều kiện đủ: Giả sử $f''(x) \leq 0$ trong (a,b) xét $x_1, x_2 \in (a,b)$,

đặt $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, rõ ràng $a \leq X \leq b$ ta viết khai triển của $f(x_1)$, $f(x_2)$ theo công thức Taylor cấp 1 tại lân cận của điểm X:

$$f(x_1) = f(X) + (x_1 - X)f'(X) + \frac{1}{2}(x_1 - X)^2 f''(c_1) \qquad (3)$$

$$f(x_2) = f(X) + (x_2 - X)f'(X) + \frac{1}{2}(x_2 - X)^2 f''(c_2) \qquad (4)$$

c_1 ở giữa x_1, X; c_2 ở giữa x_2, X

Nhân (3) với λ_1, (4) với λ_2 rồi cộng vế với vế và chú ý : $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ và

$[\lambda_1(x_1 - X) + \lambda_2(x_2 - X)]f'(X) = f'(X)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - X) = 0$

Ta có

$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) +$

$\dfrac{1}{2}[(x_1 - X)^2 \lambda_1 f''(c_1) + (x_2 - X)^2 \lambda_2 f''(c_2)]$

Theo giả thiết $f''(x) \leq 0$ nên

$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \le f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$ nghĩa là $f(x)$ là lồi trong (a,b)

Thí dụ:

1) Hàm $y = x^4$, có $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2 \ge 0\ \forall\ x$, vậy hàm số là lõm $\forall$ x

2) $y = \ln x$, $x > 0$, $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0\ \forall x > 0$ vậy hàm số là lồi $\forall x > 0$

Định nghĩa 2: Cho hàm $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_o liên tục tại x_o, có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn tại x_o

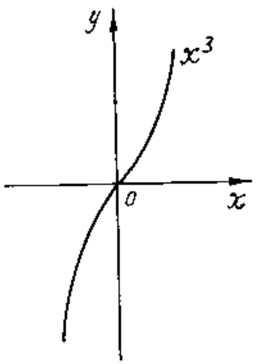
($f'(x_o) \in \widetilde{R}$) và $f(x)$ là lồi (lõm) trong $(x_o - \delta, x_o)$, là lõm (lồi) trong

$(x_o, x_o + \delta)$, $\delta > 0$ thì x_o gọi là điểm uốn của hàm số $f(x)$, điểm $(x_o, f(x_o))$ gọi là điểm uốn của đồ thị hàm số

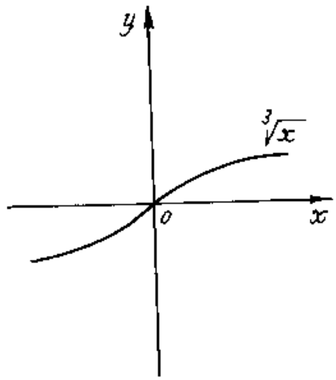
Thí dụ: 1) Điểm (0, 0) là điểm uốn của đồ thị các hàm số:

$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ (Hình 30, 31)

2) Hàm $y = \begin{cases} \sin x & : x \ge 0 \\ x^2 & : x < 0 \end{cases}$



Hình 30



Hình 31

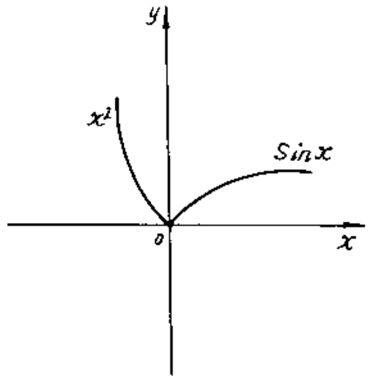
Điểm $x = 0$ không là điểm uốn của hàm số, vì hàm số không có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn tại $x = 0$ (điểm $x = 0$ gọi là điểm góc của đồ thị) (Hình 32)

Từ định nghĩa, dễ dàng suy ra:

Định lý 2:

1°. Nếu hàm $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 tại x_o và x_o là điểm uốn của hàm số thì: $f''(x_o) = 0$ (điều kiện cần để có điểm uốn)

2°. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_o có đạo hàm $f'(x)$ hữu hạn hoặc vô hạn tại x_o, có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ tại lân cận điểm x_o(có thể trừ tại x_o) và trong các khoảng $(x_o - \delta, x_o)$, $(x_o, x_o + \delta)$ $(\delta > 0)$, $f''(x)$ có dấu khác nhau thì x_o là điểm uốn của hàm số (điều kiện đủ để có điểm uốn).



Hình 32

Thí dụ:

1) Xét $y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$

$y' = 4x^3 - 12x - 6$, $y'' = 12x^2 - 12 = 0$ khi $x = \pm 1$

Xét dấu theo bảng

x		-1	0		1	
y'		2			-14	
y''	+	0	-	-	0	+
y	lõm	2	lồi		-10	lõm

Vậy $x = \pm 1$ là điểm uốn của hàm số

Các điểm (-1,2), (1, -10) là điểm uốn của đồ thị hàm số

2) $y = e^{-x^2}$, $y' = -2x e^{-x^2}$, $y'' = 4(x^2 - \frac{1}{2}) e^{-x^2}$

$y'' = 0$ khi $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Qua xét dấu của y'' ta thấy hàm số là lõm trong

$(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ và lồi trong $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$; các điểm $x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ là điểm uốn.

3) $y = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$ xác định trong $(0, +\infty)$

y có đạo hàm tại $\forall x \in (0, +\infty)$ trừ tại $x = 1$

$$y'' = \begin{cases} \dfrac{3}{4}.\dfrac{5-x}{x^3\sqrt{x}} & \text{với } 0 < x < 1 \\ \dfrac{3(x-5)}{4x^3\sqrt{x}} & \text{với } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

$y'' = 0$ tại $x = 5$ và không tồn tại khi $x = 1$

$y'' > 0$ khi $0 < x < 1$ và $5 < x < +\infty$; y là lõm

$y'' < 0$ khi $1 < x < 5$: y là lồi

Qua $x = 1$ và $x = 5$ y'' đổi dấu nhưng tại $x = 1$ hàm số không có đạo hàm hữu hạn hoặc vô hạn, còn tại $x = 5$, $f(x)$ có đạo hàm hữu hạn. Do đó chỉ có điểm $x = 5$ là điểm uốn của hàm số.

Tương tự như đối với trường hợp của cực trị, ta có:

Định lý 3: Nếu hàm $y = f(x)$, có đạo hàm đến cấp n tại x_o và

$f''(x_o) = f'''(x_o)... = f^{(n-1)}(x_o) = 0$, $f^{(n)}(x_o) \neq 0$, n lẻ thì x_o là điểm uốn của hàm số, n chẵn thì x_o không là điểm uốn.

Thí dụ: $y = \dfrac{x^3}{2} - \text{tg}x + \sin x$

Tính toán ta có : $y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)}(0) \neq 0$. $n = 5$: lẻ, vậy $x = 0$ là điểm uốn của hàm số.

Chú ý:

1) Dùng tính lồi lõm của hàm số, có thể chứng minh các bất đẳng thức.

Chẳng hạn: chứng minh $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \dfrac{e^x + e^y}{2}$; $x, y \in R$

Thực vậy: xét hàm $f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$

Vậy $f(x)$ là lõm $\forall x \in R$ nghĩa là

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $x_1, x_2 \in R$

hay $e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \le \lambda_1 e^{x_1} + \lambda_2 e^{x_2}$

Đặt $x_1 = x, x_2 = y, \lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{1}{2}$ ta có bất đẳng thức phải chứng minh

2) Người ta cũng thường xét một định nghĩa khác về tính lồi lõm của đồ thị hàm số.

Định nghĩa 1': Đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là lồi (lõm) trong (a,b) nếu nó không ở trên (dưới) tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của đồ thị trong (a,b)

Đối với lớp hàm số có đạo hàm cấp 2 liên tục thì dễ dàng chứng minh được định nghĩa này là tương đương với định nghĩa 1.

Thực vậy, xét $x_o \in (a,b)$, viết công thức Taylor cấp 1 của $f(x)$ tại lân cận x_o.

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \qquad (1)$$

và phương trình của tiếp tuyến với đồ thị tại x_o:

$$Y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) \qquad (2)$$

trừ (1) cho (2) ta có:

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 \qquad (3)\ c \text{ ở giữa } x_o, x$$

Bây giờ giả sử hàm số là lồi theo định nghĩa 1, theo định lý 1, $f''(x) \le 0$ từ (3) suy ra:

$y - Y \le 0$ nghĩa là đồ thị không ở trên tiếp tuyến. Ngược lại, giả sử $f(x)$ là lồi theo định nghĩa 1' ta sẽ chứng minh $f''(x) \le 0$, theo định lý 1, $f(x)$ sẽ là lồi theo định nghĩa 1.

Giả sử ngược lại có $c_o \in (a,b)$, $f''(c_o) > 0$ vì $f''(x)$ là liên tục, nên tồn tại một lân cận $(c_o - \delta, c_o + \delta)$, $\delta > 0$ để $f''(x) > 0$

Xét 2 điểm tùy ý : x_o, x trong lân cận này từ (3) ta có:

$$y - Y = f''(c)\,\frac{(x - x_0)^2}{2}, \ c \text{ ở giữa } x_o, x$$

Vì $f''(c) > 0$ nên $y - Y > 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f(x)$ là lồi theo định nghĩa 1' : $y - Y \le 0$

§ 3. KHẢO SÁT HÀM SỐ $Y = F(X)$

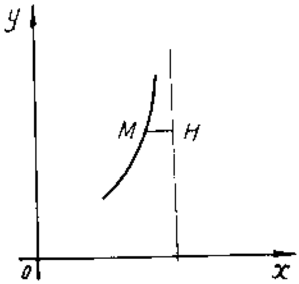
3.1. Tiệm cận của đồ thị hàm số:

Xét hàm số $y = f(x)$ có miền xác định X. Điểm $M(x,y)$ với $y = f(x)$ gọi là vẽ nhánh vô hạn của đồ thị hàm số nếu ít nhất một trong các toạ độ của M là không bị chặn.

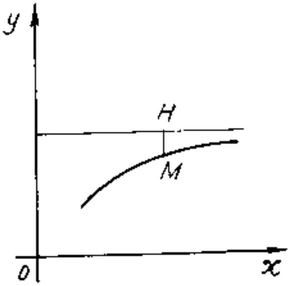
Một đường thẳng D gọi là tiệm cận của đồ thị hàm số nếu khoảng cách MH từ 1 điểm M trên đồ thị hàm số đến D dần tới 0 khi M vẽ nhánh vô hạn của đồ thị ấy.

Theo định nghĩa thì $M(x,y)$ với $y = f(x)$ vẽ nhánh vô hạn của đồ thị hàm số nếu một trong ba trường hợp sau đây xảy ra:

$x \to x_o, y \to \infty$; $x \to \infty$, $y \to y_o$; $x \to \infty$, $y \to \infty$



Hình 33



Hình 34

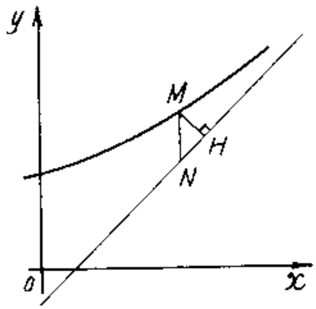
Do đó, ta suy ra ba trường hợp tìm tiệm cận theo quy tắc sau:

***Định lý* 1°**: Nếu $x \to x_o, y \to \infty$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ thì đường thẳng.

$x = x_o$ là tiệm cận của đồ thị hàm số, gọi là tiệm cận đứng.

2°. Nếu $x \to \infty$, $y \to y_o$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_o$ thì đường thẳng $y = y_o$

là tiệm cận của đồ thị hàm số, gọi là tiệm cận ngang.



Hình 35

3°. Nếu $x \to \infty$, $y \to \infty$ nghĩa là $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ và nếu tồn tại các giới hạn:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax]$$

thì đường thẳng $Y = ax + b$ là tiệm cận của đồ thị hàm số, gọi là tiệm cận xiên.

Chứng minh 1°. Theo giả thiết $x \to x_o$, $y \to \infty$ do đó: MH = $|x - x_0| \to 0$.

Vậy đường thẳng $x = x_o$ là tiệm cận đứng.

2°. Theo giả thiết $x \to \infty$, $y \to y_o$ do đó MH = $|y - y_0| \to 0$.

Vậy đường thẳng $y = y_o$ là tiệm cận ngang.

3°. Ta có MH = MN cos(MN, MH), MN = $y - Y = f(x) - ax - b \to 0$,

khi $x \to \infty$, vì $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\quad b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax]$ và MH $\to 0$.

Vậy đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên.

Thí dụ: Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số:

$y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ ta có khi $x \to -1$ thì $y \to \infty$, vậy đồ thị có tiệm cận đứng: $x = -1$

Khi $x \to \infty$ thì $y \to \infty$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x\right] = \lim_{x\to\infty} -\frac{5x^2}{x^2} = -5$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên $Y = x - 5$

Chú ý: nếu $y = f(x)$ là hàm số hữu tỷ : $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $(n \geq m)$. Trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là những đa thức bậc n, m thì có thể tìm tiệm cận bằng cách chia tử số cho mẫu số.

Thí dụ: Xét lại thí dụ trên, chia tử số cho mẫu số ta có:

$$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} = x - 5 + \frac{4(3x+1)}{(x+1)^2}$$

Khi $x \to -1$ thì $y \to \infty$. Vậy đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng

Khi $x \to \infty$ thì $y \sim Y = x - 5$, vậy đường thẳng $Y = x - 5$ là tiệm cận xiên.

3.2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Nói chung cần tiến hành các bước sau:

1° - Tìm miền xác định, khoảng đối xứng, chu kỳ nếu có.

2° - Tìm miền đơn điệu, cực trị.

3° - Tìm bề lồi, lõm, điểm uốn.

4° - Tìm tiệm cận.

5° - Tìm thêm các điểm đặc biệt (giao điểm với các trục toạ độ) lập bảng biến thiên.

6° - Vẽ đồ thị.

Thí dụ: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

1° - Hàm số này xác định $\forall x \in R$, trừ tại $x = -1$ nó gián đoạn vô hạn.

2° - $y' = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$, $y' = 0$ khi $x = 1$ và $x = -5$, $y' = \infty$ khi $x = -1$

Bảng sau: cho miền đơn điệu và cực trị của hàm số:

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	||	+	0	+	
y	$-\infty$	↗	-13,5	↘ $-\infty$	||	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$

Dấu của y' là dấu của tích : $(x + 1)(x + 5)$

3° $y'' = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$, $y'' = 0$ khi $x = 1$

Bảng sau cho bề lồi, lõm, điểm uốn.

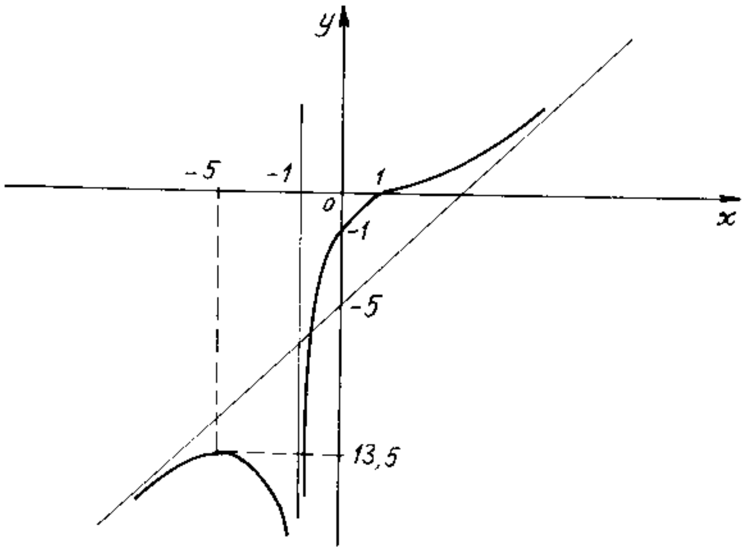
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		-	0	+	
y	lồi		điểm uốn		lõm

4° - Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = x - 5$ (Hình 36)

5° - Bảng tóm tắt

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-13{,}5$	$\searrow$	$-\infty \; \Vert \; -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6° - Vẽ đồ thị (Hình 36)



Hình 36

§ 4. HÀM SỐ CHO THEO THAM SỐ

4.1. Phương trình tham số của đường cong

Cho hai hàm số của cùng một đối số t:

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ hay $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$

Giả sử tồn tại hàm ngược: $t = \varphi^{-1}(x)$ và từ các hàm số ψ, φ^{-1} ta lập được hàm hợp.

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

thì ta được hàm số y của đối số x : $y = f(x)$; như vậy hàm số $y = f(x)$ có thể cho theo hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1) \qquad \alpha \le t \le \beta$$

Khi đó ta gọi y là hàm số của x cho theo tham số t và hệ (1) cũng gọi là phương trình tham số của đường là đồ thị của hàm số đó.

Đặc biệt $y = f(x)$ cũng có thể viết dưới dạng phương trình tham số x:

$$x = x,\ y = f(x).$$

Rõ ràng, từ phương trình tham số của đường có thể đưa về phương trình dạng:

$$F(x,y) = 0 \qquad (2)$$

của đường đó và ngược lại

Thực vậy: theo trên, hệ (1) có thể đưa về phương trình $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$

Hay $F(x, y) = 0$.

Ngược lại, từ (2) đặt $x = x(t)$ và giải y theo t ta có: $y = y(t)$, nghĩa là (2) đưa được về (1).

Thí dụ:

1) Ta biết phương trình chính tắc của ellipse là:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Đặt $x = a\cos t$ với $0 \le t \le 2\pi$, thay vào (1) và giải ra đối với y ta có:

$$y = b\sin t$$

Vậy $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ là phương trình tham số của ellipse

Đặc biệt nếu $a = b = R$ thì

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t$$

là phương trình tham số của đường tròn tâm O bán kính R

2) Lập phương trình quỹ đạo của 1 điểm M gắn chặt trên một đường tròn, đường tròn lại lăn không trượt trên một đường thẳng.

Ta lấy đường thẳng làm trục Ox còn gốc O lấy là điểm đồng thời M ở trên đường thẳng và đường tròn.

Đặt góc (CH.CM) = t , bán kính đường tròn là R, tâm là C.

Theo hình vẽ ta có (Hình 37)

$x = \overline{OP} = \overline{OH} - \overline{PH}$,

nhưng $\overline{OH} = \overset{\frown}{HM} = Rt$

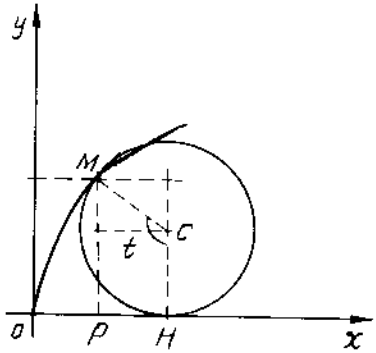
$\overline{PH} = R\sin t$

Do đó $x = R(t - \sin t)$.

Tương tự $y = R(1 - \cos t)$

Vậy phương trình tham số của quỹ đạo là:

$$x = R(t - \sin t)$$
$$y = R(1 - \cos t)$$



Hình 37

Quỹ đạo gọi là đường Cycloide.

4.2. Khảo sát và vẽ đồ thị:

Khảo sát tương tự như hàm $y = f(x)$, chỉ khác là ở đây khảo sát gián tiếp y theo x qua biến trung gian t.

Thí dụ: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

1°- Các hàm số x, y xác định $\forall t \in R$, do đó y xác định $\forall x \in R$.

Chu kỳ của y đối với t là 2π, suy ra: chu kỳ của y đối với x là $2\pi R$. Vậy chỉ xét: $0 \le t \le 2\pi$.

2°- Xét: $x' = R(1 - \cos t)$, $y' = R\sin t$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'dt}{x'dt} = \frac{R\sin t}{R(1-\cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}.\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \cot g\frac{t}{2} \quad \text{trong } [0, 2\pi],$$

$y'_x = 0$ khi $t = \pi$

$y'_x = \infty$ khi $t = 0$ và $t = 2\pi$

$y'_x > 0$ khi $0 < t < \pi$, $y'_x < 0$ khi $\pi < t < 2\pi$

Khi $t = \pi$ thì $x = R\pi$, vậy y đạt cực đại khi $x = R\pi$

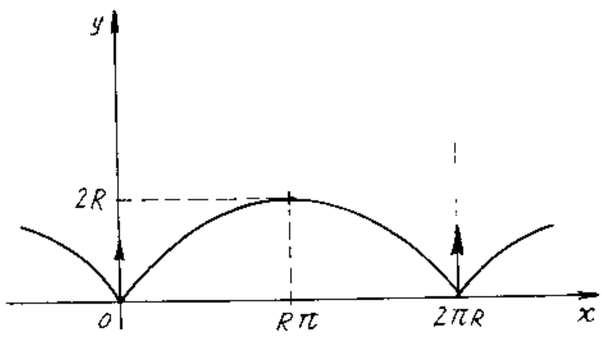
$$y_{max} = 2R$$

3° $y''_{x^2} = (y'_x)'_t t'_x = \left(\cot g\frac{t}{2}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}R(1-\cos t)}$

Khi $0 \le t \le 2\pi$ thì $y''_{x^2} < 0$, vậy đồ thị của hàm số là lồi khi $0 \le x \le 2R\pi$

4°. Bảng biến thiên và đồ thị (Hình 38)

t	0		π		2π
x	0	$\nearrow$	$R\pi$	$\nearrow$	$2R\pi$
y'_x	∞	+	0	−	∞
y''_{x^2}		−		−	
y	0	$\nearrow$	$2R$	$\searrow$	0



Hình 38

§ 5. HÀM SỐ CHO THEO TỌA ĐỘ ĐỘC CỰC

5.1. Phương trình của đường cong trong hệ tọa độ độc cực

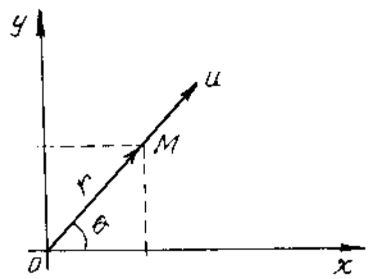
Trong mặt phẳng cho nửa đường thẳng Ox và trên đó chọn một chiều dương từ trái sang phải (Hình 39)

Xét điểm M trong mặt phẳng

Đặt $r = |\overrightarrow{OM}|$

$\varphi = (Ox, \overrightarrow{OM})$

Rõ ràng vị trí của M được xác định bởi r, φ các số r, φ gọi là toạ độ độc cực của điểm M, ký hiệu $M(r, \varphi)$, r gọi là bán kính cực, φ gọi là góc cực. hệ gồm điểm O và trục Ox gọi là hệ tọa độ độc cực, Ox gọi là trục cực.



Hình 39

Theo định nghĩa thì $0 \le r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Nếu chỉ xét $0 \le \varphi \le 2\pi$, thì ứng với 1 điểm M chỉ có một cặp số duy nhất (r, φ) nghĩa là toạ độ độc cực cũng có sự tương ứng 1 - 1 như toạ độ Descartes, (trừ điểm O).

Người ta cũng mở rộng xét $-\infty < r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$ bằng cách xác định điểm $M(r, \varphi)$ như sau:

Vẽ trục Ou làm với Ox 1 góc φ, trên trục Ou lấy điểm M sao cho $r = \overline{OM}$

Khi đó r, φ gọi là toạ độ độc cực mở rộng của điểm M. Ta thấy mỗi cặp (r, φ) xác định một điểm M. Nhưng ngược lại thì một điểm M ứng với vô số cặp $(r, \varphi + 2k\pi)(-r, \varphi+\pi +2k\pi)$, nghĩa là tọa độ độc cực mở rộng không có sự tương ứng 1 - 1.

Bây giờ xét hệ toạ độ Descartes vuông góc Oxy trong đó Ox xét là trục cực.

Giả sử x,y là toạ độ Descartes của M và r, φ là toạ độ độc cực của nó, ta có các công thức liên hệ.

$$x = r\cos\varphi,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi,\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Trong hệ tọa độ độc cực, xét hàm số $r = f(\varphi)^{(1)}$ giả sử đồ thị của nó là đường C, người ta cũng gọi (1) là phương trình độc cực của C.

Theo các công thức liên hệ trên, từ phương trình độc cực của C có thể đưa về phương trình dạng $F(x,y) = 0$ của nó và ngược lại.

Thí dụ:

1) Xét đường trong: $x^2 + y^2 = R^2$

Thay $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ta có:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi = R^2$$

hay $r = R$, đó là phương trình độc cực của đường tròn đó:

2) Xét hàm số $r = 2R\cos\varphi$ $(R > 0)$

Thay $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ta có : $\sqrt{x^2 + y^2} = 2R\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

hay $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, đây là phương trình đường tròn tâm (R, O) bán kính R. Vậy $r = 2R\cos\varphi$ có là phương trình độc cực của đường tròn đó.

5.2. Khảo sát và vẽ đồ thị:

Để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $r = f(\varphi)$ ta có thể đưa về hàm số dạng $y = y(x)$ hoặc đưa về hàm số cho theo tham số với tham số φ.

$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$

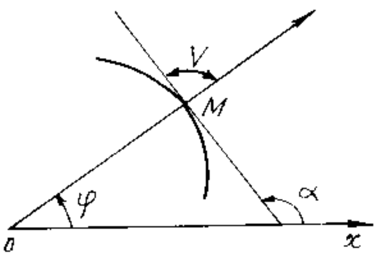
$y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$

Trong thực tế một số đường đặc biệt, có thể xét trực tiếp từng điểm đặc biệt và tiếp tuyến với đường tại điểm đó. Để dựng tiếp tuyến với đường tại điểm M ta sẽ tính góc V giữa bán kính vecteur OM và tiếp tuyến đó.

Theo hình vẽ (Hình 40) ta có $\alpha = \varphi + v$

Do đó:

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}(\varphi + v) = \frac{\mathrm{tg}\varphi + \mathrm{tg}v}{(1 - \mathrm{tg}\varphi\mathrm{tg}v)} \qquad (1)$$



Hình 40

Mặt khác: $\mathrm{tg}\alpha = y'_x = \dfrac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \dfrac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$

hay: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{tg\varphi + \dfrac{r}{r'}}{1 - \dfrac{r}{r'}tg\varphi}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có : $\operatorname{tg}v = \dfrac{r}{r'}$

Thí dụ: 1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số:

$$r = 2a\,(1 + \cos\varphi) \qquad (a > 0)$$

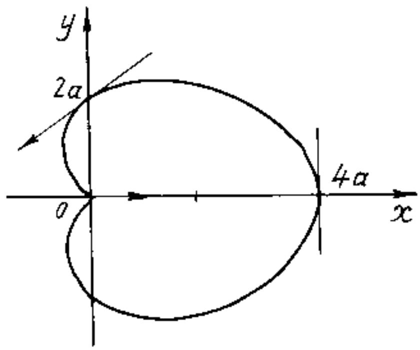
Chu kỳ của r đối với φ là 2π nên chỉ xét $-\pi \le \varphi \le \pi$. Mặt khác thay φ bởi -φ thì r không đổi do đó đồ thị đối xứng qua Ox, nên lại chỉ xét $0 \le \varphi \le \pi$

$$\operatorname{tg}v = \frac{r}{r'} = \frac{2a(1+\cos\varphi)}{-2a\sin\varphi} = \frac{-2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}} = -\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

Suy ra : $v = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\varphi}{2}$

Ta lập bảng sau:

φ	0	π/2	π
r	4a ↘	2a ↘	0
v	π/2	3π/4	π



Hình 41

Căn cứ vào bảng này ta vẽ được đồ thị của hàm số như hình vẽ (Hình 41)

Đồ thị gọi là đường Cardioide

2) Xét $r = a\varphi$ $(a > 0)$

Thay φ bởi -φ thì r thành $-r$, do đó đồ thị của hàm số đối xứng qua Oy, ta chỉ xét $0 \le \varphi \le +\infty$

φ	0	π/2	π	3π/2	2π ...
r	0 ↗	$a\pi/2$ ↗	$a\pi$ ↗	$a3\pi/2$ ↗	$a2\pi$ ...

Đồ thị gọi là đường xoắn ốc Archimede (Hình 42)

3) Xét $r = ae^{b\varphi}$ $(a, b > 0)$

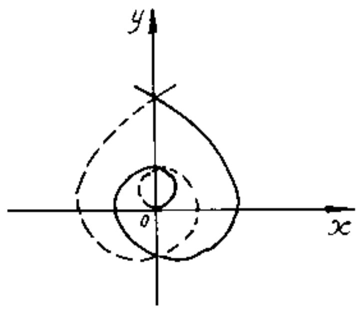
r xác định với mọi φ

Ta lập bảng:

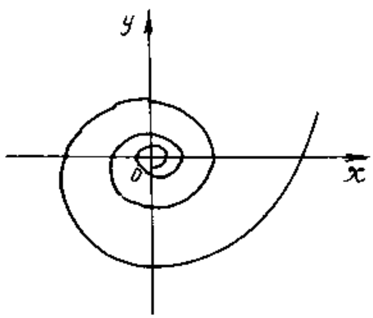
φ	$-\infty$		0		$+\infty$
r	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

$$\operatorname{tg}v = \frac{r}{r'} = \frac{ae^{b\varphi}}{abe^{b\varphi}} = \frac{1}{b}$$

Đồ thị gọi là đường xoắn ốc logarithme (Hình 43)



Hình 42



Hình 43

4) Xét $r = \frac{a}{\varphi}$ $(a > 0)$ r xác định với mọi φ, trừ $\varphi = 0$ thay φ bởi $-\varphi$ thì r thành $-r$, do đó đồ thị của hàm số đối xứng qua Oy nên ta chỉ xét $0 < \varphi < +\infty$, khi $\varphi \to 0$ thì $r \to +\infty$. Do đó đồ thị có thể có tiệm cận.

Rõ ràng tiệm cận nếu có thì nó phải song song với Ox và nó phải cách trục Ox một đoạn.

$d = \lim\limits_{\varphi \to 0} \overline{OH}$ (Hình 44)

nhưng $\overline{OH} = r\sin\varphi = \frac{a}{\varphi}\sin\varphi$

Do đó

$$d = \lim_{\varphi \to 0} \overline{OH} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{a.\sin\varphi}{\varphi} = a$$

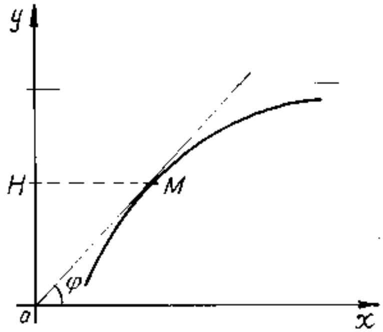
Vậy đồ thị có tiệm cận cách trục Ox một đoạn $d = a$

Lập bảng

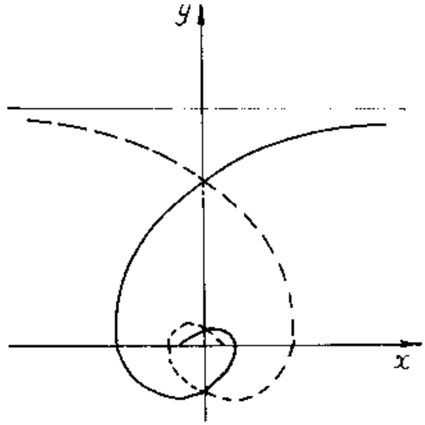
φ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	∞ ↘	$2a/\pi$ ↘	a/π ↘	$2a/3\pi$ ↘	$a/2\pi$

Đồ thị của hàm số gọi là đường xoắn ốc hyperbole (Hình 45)

Chú ý: Chiều biến thiên trong bảng ở các thí dụ trên là theo dấu của đạo hàm r'_{φ}



Hình 44



Hình 45

BÀI TẬP

1. Nghiệm lại định lý Rolle, đối với các hàm số:

1) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ trong $[1,3]$ tìm c

2) $f(x) = x^2$ trong $[-1,1]$ tìm c

3) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ trong $[-1,1]$

2. Giả sử $f(x)$ có $f'(x)$ hữu hạn trong (a,b) và

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b+0} f(x) = A$$

Chứng minh $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$

3. Giả sử:

1) $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp n - 1 trong $[(x_o, x_n)]$

2) $f(x)$ có đạo hàm cấp n trong (x_o, x_n)

3) $f(x_o) = f(x_1) = ... = f(x_n)$, $(x_o < x_1 < ... < x_n)$

Chứng minh $\exists c \in (x_o, x_n) : f^{(n)}(c) = 0$

***4**. Chứng minh đa thức Lagrange:

$P_n(x) = \dfrac{1.d^n}{2^n n! dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ có mọi nghiệm đều thực và bao gồm trong (-1, 1).

5. Nghiệm lại định lý Lagrange đối với các hàm số

1) $f(x) = x(x - 1)$ trong $[0, 1]$

2) $f(x) = x(x - 1)$ trong $[1, 2]$

3) $f(x) = \sin x + 2x$ trong $[0, \pi]$

Chứng minh rằng chỉ tồn tại 1 điểm c trong mọi trường hợp.

6. Chứng minh:

1) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

2) $|\text{arctg}a - \text{arctg}b| \leq |a - b|$

3) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ $\qquad 0 < b < a$

7. Nghiệm lại định lý Cauchy đối với các hàm số:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ trong $[-1, 1]$

8. Hàm số $f(x)$ khả vi trong (x_1, x_2); $x_1, x_2 > 0$

Chứng minh:

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c) \qquad x_1 < c < x_2$$

9. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

1) $y = 3x^2 - x^3$ $\qquad$ 2) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

3) $y = x^2 - \ln x^2$ $\qquad$ 4) $y = x + \sin x$

5) $y = 2\sin x + \cos 2x$, $\qquad 0 \leq x \leq 2\pi$

6) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $\qquad$ 7) $y = x.e^{-x}$

10. Đạo hàm của một hàm số đơn điệu có là 1 hàm số đơn điệu không?

Xét thí dụ $f(x) = x + \sin x$

11. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ tăng (giảm) trong $[a,b]$ thì $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) khi $a < x < b$.

12. Chứng minh:

1) $e^x > 1 + x,\ x \neq 0$

2) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x\ ;\ x > 0$

3) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x\ ,\ x > 0$

4) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

5) $\frac{2}{\pi} < \sin x < x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

6) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\ ,\ x > 0$

13. Chứng minh: Nếu $f(x)$, $g(x)$ có $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a,b)$

thì $f(x) = g(x) + c,\ \forall x \in (a,b)$

14. Tìm cực trị của hàm số:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

2) $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$

3) $y = \dfrac{-x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

4) $y = \sqrt{2x - x^2}$

5) $y = x\sqrt[3]{x - 1}$

6) $y = xe^{-x}$

7) $y = \sqrt{x}\ \ln x$

8) $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$

9) $y = |x|e^{-|x-1|}$

15. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\operatorname{tg}^4 x - 12\operatorname{tg} x}{\sin 4x - 12\sin x}$

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 1)}{\ln x}$

7) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$

8) $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

9) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$

10) $\lim\limits_{x \to +0} \left(\ln \dfrac{1}{x} \right)^{x}$

11) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1} \right)$

12) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(chx)}{\sqrt[m]{chx} - \sqrt[n]{chx}}$

14) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

15) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x) e^{\sin x}}$

16. Viết công thức Maclaurin của các hàm số:

1) $f(x) = e^{\sin x}$ đến x^3

2) $f(x) = e^{tgx}$ đến x^3

3) $f(x) = \ln(\cos x)$ đến x^6

4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}\,)$ đến x^5

5) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x} \right)$ đến x^6

17. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}$

18. Tìm cực trị của các hàm số:

1) $y = \sqrt{(x^2 - 1)^2}$

2) $y = 2\cos \dfrac{x}{2} + 3\cos \dfrac{x}{3}$

3) $y = x\ln x$

4) $y = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sqrt{2} + \sin \dfrac{1}{x} \right)$ khi $x \neq 0$ và $y(0) = 0$

19. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của các hàm số:

1) $y = |x^2 - 3x + 2|$ trong [-10, 10]

2) $y = x + \frac{1}{x}$ trong [0,01:100]

3) $y = \sqrt{5 - 4x}$ trong [-1, 1]

20. Tìm giá trị lớn nhất của tích các lũy thừa bậc m và n của 2 số dương nếu tổng số của 2 số đó bằng a.

21. Tìm một hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong 1 hình cầu bán kính R.

22. Tìm chiều cao ngắn nhất của 1 cửa tháp ABCD: h = OH sao cho qua cửa ấy có thể đưa vào 1 thanh cứng MN = l, biết bề rộng của tháp là $d < l$.

23. Một liên lạc viên cần đi từ điểm A bên này sông sang điểm B bên kia sông, biết tốc độ đi trên bờ gấp K lần tốc độ đi dưới sông. Liên lạc viên cần băng qua sông dưới một góc bao nhiêu để đến B nhanh nhất. Biết chiều rộng của sông là h và khoảng cách giữa các điểm A, B (dọc theo bờ sông) là d.

24. Tìm các khoảng lồi, lõm, điểm uốn của đồ thị các hàm số

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = \sqrt{1 + x^2}$

3) $y = x + \sin x$

4) $y = \ln(1 + x^2)$

5) $y = x\sin(\ln x) \quad x > 0$

6) $y = x^x, \quad x > 0$

25. Tiệm cận của đồ thị các hàm số:

1) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

2) $y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$

3) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

4) $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

5) $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

6) $y = \frac{1}{1 - e^x}$

7) $x = t$, $y = t + 2\text{arctg}t$

8) $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $\quad (a > 0)$

26. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

1) $y = (x + 1)(x - 2)^2$

2) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$

3) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

4) $y = 2x - \text{tg}x$

5) $y = x\text{arctg}x$

6) $y = \ln\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

27. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số cho theo tham số:

1) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$

2) $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}$

3) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

28. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số cho theo toạ độ độc cực.

1) $r = a\sin 3\varphi$ 2) $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

4. Đặt $f(x) = (x^2 - 1)^n = (x - 1)^n(x + 1)^n$

rồi áp dụng định lý Rolle

6. Áp dụng định lý Lagrange để chứng minh.

9. 1) $(-\infty, 0)$; $(2, +\infty)$: Giảm; $(0, 2)$: Tăng

2) $(-\infty, -1)$; $(1, +\infty)$: Giảm; $(-1, 1)$: Tăng

3) $(-\infty, -1)$; $(0, 1)$: Giảm; $(-1, 0)(1, +\infty)$: Tăng

4) $(-\infty, +\infty)$: Tăng

5) $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right); \left(\dfrac{\pi}{2}, 5\dfrac{\pi}{6}\right); \left(3\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right)$: Tăng

$\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right); \left(5\dfrac{\pi}{6}, 3\dfrac{\pi}{2}\right)$: Giảm

6) $(-\infty, +\infty)$: Tăng

7) $(-\infty, 1)$: Tăng, $(1, +\infty)$: Giảm

12. Áp dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh

14. 1) $y_{max} = y(1) = 0$; $y_{min} = y(3) = -4$

2) $y_{min} = y\left(\dfrac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) = y(0,23) = -0,76$

$y_{min} = y\left(\dfrac{5 + \sqrt{13}}{6}\right) = y(1,43) = -0,05$

$y_{max} = y(1) = 0$

3) $y_{min} = y(7) = -\frac{17}{16}$

4) $y_{min} = y(0) = y(2) = 0$; $y_{max} = y(1) = 1$

5) $y_{min} = y(3/4) = -0,46$; $x = 1$ không có cực trị

6) $y_{max} = y(1) = e^{-1} = 0,368$

7) $y_{max} = y(0) = 0$; $y_{min} = y(e^{-2}) = y(0,135) = 0,726$

8) $y_{max} = y(k\pi) = (-1)^k + 1/2$

$y_{min} = y(\pm 2\pi/3 + 2\pi k) = -3/4$

9) $y_{max} = y(-1) = e^{-2}$

$y_{min} = y(0) = 0$

$y_{max} = y(1) = 1$

15. 1) 2; 2) 3/2; 3) 1/3; 4) 1; 5) 1; 6) 1;

7) $a^a(\ln a - 1)$; 8) $e^{\frac{2}{\pi}}$; 9) $\frac{1}{e}$; 10) 1 ; 11) $\frac{1}{2}$; 12) $e^{\frac{1}{6}}$; 13) $\frac{m.n}{n-m}$

16. 1) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + R_3(x)$

2) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + R_3(x)$

3) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + R_6(x)$

4) $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + R_5(x)$

5) $-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + 0(x^6)$

17. 1) $-\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$

18. 1) $y_{min} = y(-1) = y(1) = 0$

$y_{max} = y(0) = 1$

2) $y_{max} = y(12k\pi) = 5$

$y_{max} = y\left[12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi\right] = 5\cos\frac{2\pi}{5}$

$y_{min} = y|6(2k + 1)\pi| = 1$

$$y_{min} = y\left[12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi\right] = -5\cos\frac{\pi}{5}$$

3) $y_{max} = y(+0) = 0$

$$y_{min} = y(e^{-1}) = -\frac{1}{e}$$

4) $y_{min} = y(0) = 0$

19. 1) 132 , 0

2) 2 ; 100, 01

3) 1 ; 3

20. $\dfrac{a^{n+m}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$

21. $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$

22. $h = \left(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

23. $\alpha = \max\left(\arccos\left(\frac{1}{k}\right), arctg\left(\frac{h}{a}\right)\right)$

24. 1) $(-\infty, 1)$; lõm; $(1, +\infty)$; lồi, $x = 1$ điểm uốn

2) lõm

3) $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$; lồi; $[(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi$; lõm

$x = k\pi$: điểm uốn

4) $|x| < 1$; lõm; $|x| > 1$; lồi; $x = \pm 1$; điểm uốn

5) $\left(e^{2k\pi - 3\frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}\right)$; lõm

$\left(e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}, e^{2k\pi + 5\frac{\pi}{4}}\right)$; lồi

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$; điểm uốn

6) $(0, +\infty)$; lõm

25. 1) $x = 2, y = 0$

2) $x = 1, x = 3, y = 0$

3) $x = \pm 2, y = 1$

4) $y = x$

5) $x = \pm 1$, $y = \pm x$

6) $x = 0$, $y = 1$, $y = 0$

7) $y = x \pm \pi$

8) $y = -x - a$

26. 1) Đối xứng đối với A(1,2) cắt Ox tại $x = -1$ và $x = 2$,

$y_{min} = y(2) = 0$

$y_{max} = y(0) = 4$; điểm uốn (1,2)

2) $x = 2$ và $x = 3$; điểm gián đoạn cắt Ox tại $x = \pm 1$

$$y_{min} = \left(\frac{7-\sqrt{24}}{5}\right) = -(10 - \sqrt{96}) \text{ hay}$$

$y_{min} = y(0,42) = -0,20$

$$y_{max} = y\left(\frac{7+\sqrt{24}}{5}\right) = -(10 + \sqrt{96}) \text{ hay}$$

$y_{max} = y(2,38) = -19,80$

Điểm uốn (-0,58; -0,07); tiệm cận: $x = 2$; $x = 3$; $y = 1$

3) Tuần hoàn, chu kỳ 2π, đồ thị đối xứng qua gốc 0, $y(0) = y(\pi) = 0$,

Trên $[0, \pi)$: $y_{max} = y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{(3+4\sqrt{2})}{6}$

$$y_{max} = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$y_{min} = y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Điểm uốn: $x = 0$, $x = \pi$, $x = \arcsin\dfrac{\sqrt{7}-1}{6}$, $x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{7}-1}{6}$

4) Tâm đối xứng: $(k\pi, 2k\pi)$ cắt Ox: $x = 0$, $x = 0,37\pi$...

$$y_{max} = y\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$$

$$y_{min} = y\left[\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right] = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right)$$

Điểm uốn $(k\pi, 2k\pi)$ tiệm cận $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi$

5) Đối xứng qua Oy, cắt Ox: $x = 0$

$y_{min} = y(0) = 0$

Tiệm cận: $y = \pm\dfrac{\pi}{2}x - 1$

6) Miền xác định $x < 1$ và $x > 2$, cắt Oy: (0, ln2), Ox: $\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$

$$y_{max} = \left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right) = y(-0,72) = 1,12$$

Tiệm cận $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

27. 1) Cắt các trục toạ độ: (0,0) khi $t = 0$;

$(\pm 2\sqrt{3} - 3, 0)$ khi $t = \pm\sqrt{3}$

$(0, -2)$ khi $t = 2$, $x_{max} = x(1) = 1$; $y_{max} = y(1) = 2$

$y_{min} = y(-1) = -2$, lõm khi $t < 1$ và lồi khi $t > 1$

2) Đường cong khép dạng hình tim, đối xứng với trục Ox (đường Cardioide).

3) Đường cong khép đối xứng đối với các trục toạ độ (đường Astroide).

28. 1) Đường cong khép, đối xứng đối với Ox (đường hoa hồng ba cánh)

2) Đường cong khép, đối xứng đối với Ox (đường Lemniscate, hình số 8 nằm ngang).

Chương 5

TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

§1. KHÁI NIỆM VỀ NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Ta đã xét bài toán quan trọng: Cho trước một hàm số tìm đạo hàm của nó, trong chương đạo hàm. Trong chương này ta xét bài toán ngược lại có tầm quan trọng rất lớn trong thực tiễn là: Cho trước một hàm số, tìm một hàm số khác có đạo hàm là hàm số ấy.

Thí dụ: Do thí nghiệm ta biết được gia tốc a của một chuyển động thẳng không đều là một hàm số của thời gian t: $a = a(t)$, cần tìm tốc độ $V = V(t)$ và qui luật chuyển động $S = S(t)$.

Do ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta phải tìm $V(t)$ và sau đó tìm $S(t)$ sao cho $V'(t) = a(t)$ và $S'(t) = V(t)$.

Hàm số $V(t)$ phải tìm như thế gọi là một nguyên hàm của $a(t)$ và $S(t)$ gọi là một nguyên hàm của $V(t)$. Cách giải bài toán này gọi là phép tìm nguyên hàm hay phép tính tích phân bất định.

Một cách tổng quát ta đi đến:

1.1. Định nghĩa:

1°-Nguyên hàm: Cho hàm số $y = f(x)$ trong một miền X nào đó, nếu có một hàm số khác $F(x)$ sao cho.

$F'(x) = f(x)$ hay $dF(x) = f(x)d(x)$ $\forall x \in X$ thì $F(x)$ gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trong miền đó.

Thí dụ :

1) Nguyên hàm của $f(x) = x$ là $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ vì $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = x$

2) Nguyên hàm của $f(x) = \cos x$ là $F(x) = \sin x$ vì $(\sin x)' = \cos x$. Từ định nghĩa ta thấy một hàm số có rất nhiều nguyên hàm chẳng hạn $\dfrac{x^2}{2}$; $\dfrac{x^2}{2}+3$; $\dfrac{x^2}{2}+5$,

tổng quát $\frac{x^2}{2} + c$, c là một hằng số tuỳ ý cũng đều là nguyên hàm của x vì đạo hàm của chúng đều bằng x.

Cũng thế: $\sin x$, $\sin x + 1$, $\sin x + \sqrt{2}$ tổng quát $\sin x + c$, c là một hằng số tuỳ ý cũng đều là nguyên hàm của $\cos x$.

Ta thấy các nguyên hàm của x hay $\cos x$ chỉ khác nhau một hằng số cộng, tổng quát ta có:

Định lý:- Nếu trong một miền nào đó hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, thì mọi nguyên hàm khác của $f(x)$ trong miền đó đều có dạng $F(x) + c$, c là một hằng số tuỳ ý.

Thực vậy, theo giả thiết $F'(x) = f(x)$, bây giờ xét một nguyên hàm tuỳ ý khác $\Phi(x)$ của $f(x)$, theo định nghĩa $\Phi'(x) = f(x)$

Do đó $[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Suy ra: $\Phi(x) - F(x) = c$, c là 1 hằng số tuỳ ý.

Vậy $\Phi(x) = F(x) + c$. Vì $\Phi(x)$ là một nguyên hàm tuỳ ý của $f(x)$ nên mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + c$.

Như vậy, một hàm số có vô số nguyên hàm, đều ở trong biểu thức $F(x) + c$, với $F(x)$ là một nguyên hàm nào đó của $f(x)$. Để nghiên cứu mọi nguyên hàm của $f(x)$ ta đưa ra định nghĩa:

2^o- Tích phân bất định:

Nếu trong một miền nào đó hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì biểu thức $F(x) + c$, c là một hằng số tuỳ ý gọi là tích phân bất định của hàm số $f(x)$ trong miền đó.

Ký hiệu $I = \int f(x)dx = F(x) + c$

(đọc là tích phân của $f(x).dx$).

$\int$ gọi là dấu tích phân, $f(x)$ gọi là hàm số dưới dấu tích phân, $f(x).dx$ gọi là biểu thức dưới dấu tích phân, và x gọi là biến số hay đối số lấy tích phân.

Theo định nghĩa, muốn tìm tích phân của một hàm số chỉ cần tìm một nguyên hàm của nó rồi cộng với một hằng số tuỳ ý. Do đó phép tìm nguyên hàm của một hàm số cũng gọi là phép tính hay lấy tích phân của hàm số ấy, một phép tính ngược với phép tính vi phân.

Một vấn đề lớn đặt ra: Khi nào một hàm số có nguyên hàm (vấn đề tồn tại của nguyên hàm). Ta sẽ chứng minh rằng mọi hàm số liên tục trong một miền nào đó đều có nguyên hàm trong miền đó, trong chương sau.

1.2. Bảng tích phân cơ bản:

Theo định nghĩa, phép tính tích phân là phép tính ngược của phép tính vi phân nên từ bảng vi phân cơ bản ta có bảng tích phân gọi là bảng tích phân cơ bản sau:

1°- $\int 0dx = c$

2°- $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$

3°- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$

4°- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

5°- $\int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

6°- $\int e^x dx = e^x + c$

7°- $\int \cos x dx = \sin x + c$

8°- $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

9°- $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$

10°- $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$

11°- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

12°- $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$

13°- $\int chxdx = shx + c$

14°- $\int shxdx = chx + c$

15°- $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

16^o- $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\coth x + c$

Ta có thể thử lại bảng này một cách dễ dàng, chẳng hạn công thức

$$\int \frac{dx}{x} = ln\ |x| + c \text{ với } x \neq 0.$$

Khi $x > 0$ thì $|x| = x$ nên ($ln\ |x| = + c$)' = $(ln(x) + c)' = \frac{1}{x}$

Khi $x < 0$ thì $|x| = -x$ nên ($ln\ |x| + c$)' = $(ln(-x) + c)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Vậy công thức này là đúng.

1.3. Tính chất của tích phân bất định.

1^o- $(\int f(x)dx)' = f(x)$ hay $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

(Đạo hàm của tích phân bất định bằng hàm số dưới dấu tích phân hay vi phân của tích phân bất định bằng biểu thức dưới dấu tích phân).

Thực vậy, theo định nghĩa $\int f(x)dx = F(x) + c$ với $F'(x) = f(x)$

Do đó $(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)' = f(x)$.

hay $d\int f(x)dx = d(F(x) + c) = dF(x) = f(x)dx$

2^o- $\int F'(x)dx = F(x) + c$ hay $\int dF(x) = F(x) + c$

Thực vậy, theo (1^o)- $(\int F'(x)dx)' = F'(x)$, mặt khác $(F(x) + c)' = F'(x)$

Do đó công thức đầu là đúng, công thức hai tương tự.

3^o- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, c là hằng số

(hằng số có thể cho ra ngoài dấu tích phân).

Thực vậy theo (1^o. $(\int cf(x)dx)' = cf(x)$ mặt khác $(c\int f(x)dx)' = cf(x)$.

4^o. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$

(Tích phân của tổng bằng tổng tích phân, cũng đúng cho một tổng hữu hạn).

Thực vậy, theo 1^o $(\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx)' = f(x) \pm \varphi(x)$

Mặt khác :

$(\int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int \varphi(x)dx)' = f(x) \pm \varphi(x).$

5°. Nếu $\int f(x)dx = F(x) + c$ thì $\int f(u)du = F(u) + c$ với $u = u(x)$ bất kỳ.

(Tính bất biến về dạng của tích phân đối với đối số lấy tích phân).

Thực vậy, từ $\int f(x)dx = F(x) + c$ ta có $dF(x) = f(x)dx$ theo tính bất biến về dạng của vi phân cấp 1 ta có:

$$dF(u) = f(u)du \text{ với } u = \varphi(x) \text{ bất kỳ.}$$

Do đó và theo 2° $\int f(u)du = \int dF(u) = F(u) + c$

Từ tính chất này suy ra: Có thể thay đối số lấy tích phân x trong bảng tích phân cơ bản bởi đối số u bất kỳ.

Chẳng hạn
$$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \sin u du = -\cos u + c$$

1.4. Thí dụ: Bây giờ ta đưa ra một số thí dụ áp dụng bảng tích phân cơ bản và các tính chất của tích phân.

1) $\int (6x^2 - 3x + 5)dx = \int 6x^2dx - \int 3xdx + \int 5dx =$

$= 6\int x^2dx - 3\int xdx + 5\int dx =$

$= 6.\dfrac{x^3}{3} - 3.\dfrac{x^2}{2} + 5x + c = 2x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 5x + c$

2) $\int \sqrt[3]{(2x-1)^2}dx = \dfrac{1}{2}\int (2x-1)^{2/3} d(2x-1)$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{(2x-1)^{5/3}}{\frac{5}{3}} + c = \dfrac{3}{10}\sqrt[3]{(2x-1)^5} + c$

3) $\int \cos(3x+2)dx = \dfrac{1}{3}\int \cos(3x+2)d(3x+2) = \dfrac{1}{3}\sin(3x+2) + c$

4) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \dfrac{1}{a}\text{arctg}\dfrac{x}{a} + c, \; a \neq 0.$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

6) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}.dx =$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{d(x-a)}{(x-a)} - \int \frac{d(x+a)}{(x+a)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\ln|x-a| - \ln|x+a|\right] + c = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

7) $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Tương tự $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

8) $\int \sin 3x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int[\cos 5x - \cos x]dx = -\frac{1}{2}\frac{\sin 5x}{5} + \frac{1}{2}\sin x + c$

9) $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \mathrm{tg}^2 x d\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}x + \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + c$$

10) $\int thx dx = \int \frac{shx dx}{chx} = \int \frac{d(chx)}{chx} = \ln(chx) + c$

§2. HAI PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

2.1. Phương pháp tích phân từng phần (hay phân đoạn)

Để tính tích phân $I = \int f(x)\, dx$ nhiều khi không áp dụng bảng tích phân cơ bản trực tiếp được, mà phải biến đổi rồi mới áp dụng được.

Phương pháp sau đây cho cách tính tích phân đó bằng cách đưa về một tích phân khác mà ta cố gắng biến đổi để tính toán đơn giản hơn gọi là phương pháp tích phân từng phần. Nội dung của phương pháp là: Nếu có các hàm số khả vi $u = u(x)$, $v = v(x)$: $f(x)dx = udv$ thì ta có công thức:

$$\int f(x)dx = \int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

gọi là công thức tích phân từng phần.

Thực vậy, vì $d(uv) = udv + vdu$ hay $udv = d(uv) - vdu$

Do đó $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$ hay $\int udv = uv - \int vdu$.

Để áp dụng công thức (1), tính được $\int f(x)dx$, ta phải chọn u, v sao cho $\int vdu$ tính dễ dàng hơn $\int udv$. Mặt khác ta cũng có thể áp dụng công thức (1) nhiều lần để tính $\int f(x)dx$.

Thí dụ:

1) $\int xe^x dx$:

Đặt $u = x$, $dv = e^x dx$, suy ra $du = dx$, $v = e^x$

Do đó $\int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = e^x(x - 1) + c$.

Tương tự cho dạng $\int x^k e^{ax} dx$, đặt $u = x^k$, $dv = e^{ax} dx$

2) $\int x\ln x dx$ đặt $u = \ln x$, $dv = xdx$ suy ra

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \frac{x^2}{2}.$$

Do đó: $\int x\ln x dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

Tương tự cho dạng $\int x^k \ln x dx$, đặt $u = \ln x$, $dv = x^k dx$

Đặc biệt $k = 0$, lúc đó $\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c$

3) $\int x \operatorname{arctg} x dx$, đặt $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = xdx$

thì

$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Do đó $\int x\,\text{arctg}x dx = \dfrac{x^2}{2}\text{arctg}x - \int \dfrac{x^2}{2(1+x^2)}dx$

Ta tính $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}dx = \int \dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \int dx - \int \dfrac{dx}{1+x^2} = x - \text{arctg}x + c$

Vậy $\int x\,\text{arctg}x dx = \dfrac{x^2}{2}\text{arctg}x - \dfrac{1}{2}(x - \text{arctg}x) + c_1 \qquad \left(c_1 = -\dfrac{c}{2}\right)$

Tương tự cho dạng $\int x^k\text{arctg}x dx$, đặt $u = \text{arctg}x$, $dv = x^k dx$.

4) $I = \int x^2\sin x dx$, đặt $u = x^2$, $dv = \sin x dx$

thì $du = 2x dx$, $v = -\cos x$ lúc đó $I = -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx$

Tính $I_1 = \int x\cos x dx$, đặt $u = x$, $dv = \cos x dx$

thì $du = dx$, $v = \sin x$, và $I_1 = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$

Vậy $I = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + c_1 (c_1 = 2c)$

Tương tự cho dạng $\int x^k\sin ax dx$ hay $\int x^k\cos ax dx$.

5) $I_1 = \int e^{ax}\cos bx dx$, đặt $u = \cos bx$, $dv = e^{ax}dx$

Suy ra $du = -b\sin bx dx$, $v = \dfrac{e^{ax}}{a}$ và $I_1 = \dfrac{e^{ax}}{a}\cos bx + \dfrac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx \qquad (1)$

Tính $I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx$, đặt $u = \sin bx$, $dv = e^{ax}dx$

thì $du = b\cos bx dx$, $v = \dfrac{e^{ax}}{a}$ và $I_2 = \dfrac{e^{ax}}{a}\sin bx - \dfrac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$

hay $I_2 = \dfrac{e^{ax}}{a}\sin bx - \dfrac{b}{a}I_1 \qquad (2)$

Thay lại (1) ta có:

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}I_1\right)$$

hay:

$$I_1\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = e^{ax}\left(\frac{\cos bx}{a} + \frac{b}{a^2}\sin bx\right)$$

Do đó $$I_1 = e^{ax}.\left(\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\right) + c,\ (a^2+b^2 \neq 0).$$

Tương tự $$I_2 = \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c$$

Chú ý rằng từ (1) và (2) ta có:

$$I_1 = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}I_2; \qquad I_2 = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}I_1$$

Do đó có thể tìm I_1, I_2 từ hệ này.

6) Tính $$I_n = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, \qquad n \in N,\ (a \neq 0)$$

Đặt $$u = \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}; \qquad dv = dx$$

Suy ra $$du = \frac{-2nxdx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}; \qquad v = x$$

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \int\frac{2nx^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

$$I_n = \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

Vậy $$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}.I_n \qquad (1)$$

Ta biết $$I_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + c$$

Do đó $$I_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\text{arctg}\frac{x}{a} + c$$

Có I_2, ta tính được I_3 ...

(1) gọi là công thức truy hồi, biết I_n, ta sẽ tính được I_{n+1}

2.2. Phương pháp biến đổi số

Cũng để tính tích phân: $I = \int f(x)dx$, không áp dụng được bảng trực tiếp, người ta đưa vào biến số mới t và $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ là một hàm của t thì lại có thể đưa về áp dụng bảng được. Phương pháp này gọi là phương pháp đổi biến số, nội dung như sau:

Cho tích phân $\int f(x)dx$ nếu đặt $x = \varphi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục $\varphi'(t) \neq 0$ thì ta có công thức:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt.$$

Gọi là công thức đổi biến số.

Thực vậy, $(\int f(x)dx)'_x = f(x)$

Mặt khác :

$$\left\{\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt\right\}'_x = \left\{\int f[\varphi(t)\varphi'(t)dt\right\}'_t.t'_x$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{x'_t} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Vì $\qquad t'_x = \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$

Do đó công thức trên là đúng. Sau khi tính tích phân đối với t ta phải trở lại biến số cũ x.

Thí dụ: 1) $I = \displaystyle\int\frac{dx}{2(1+\sqrt{x})}$ đặt $x = t^2$ $(t > 0)$ thì $dx = 2tdt$

Lúc đó $I = \displaystyle\int\frac{2tdt}{2(1+t)} = \int\frac{1+t-1}{1+t}dt = \int dt - \int\frac{dt}{t+1} = t - \ln|t+1| + c$

Trở lại biến số cũ $t = \sqrt{x}$ thì $I = \sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1) + c$

2) $I = \displaystyle\int\sqrt{a^2 - x^2}dx$ $a > 0$ đặt $x = a\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, thì $dx = a\cos tdt$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$$

Lúc đó $\qquad I = \displaystyle\int a\cos t.a\cos tdt = a^2\int\cos^2 tdt = a^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + c$

(Theo thí dụ 7 ở §1).

Trở lại biến số cũ, từ $x = a\sin t$, suy ra $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$$

Vậy
$$I = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}.\sqrt{a^2-x^2} + c$$

Chú ý rằng có khi không đặt $x = \varphi(t)$ mà đặt $t = \varphi(x)$ thì tiện lợi hơn, nó đặc biệt tiện lợi khi I có dạng:

$$I = \int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)dx$$

3) $I = \displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx$ đặt $t = \sin x$ thì $\cos x dx = dt$

và $I = \displaystyle\int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg}(\sin x) + c$

4) $I = \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ đặt $t = \sqrt{x^2 \pm a^2}$ thì $dt = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

hay $\dfrac{xdx}{t} = dt$

Suy ra $\dfrac{dx}{t} = \dfrac{dt}{x} = \dfrac{dx+dt}{x+t} \Rightarrow \displaystyle\int\frac{dx}{t} = \int\frac{d(x+t)}{x+t} = \ln|x+t| + c$

Trở lại biến số cũ ta có: $I = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

5) $I = \displaystyle\int\sqrt{x^2 \pm a^2}dx$, đặt $u = \sqrt{x^2 \pm a^2}$ $dv = dx$

$$du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},\ v = x$$

Lúc đó
$$I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

nhưng

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int\frac{x^2 \pm a^2 \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int\sqrt{x^2 \pm a^2}.dx \mp a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

Theo trên $\displaystyle\int\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = I$ và theo thí dụ trước:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

Do đó: $I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \pm a^2 . \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

hay $I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c_1 \quad \left(c_1 = \frac{c}{2}\right)$

Bây giờ ta viết lại một số công thức tích phân điển hình ở các thí dụ đã xét trong § này, bổ xung vào bảng tích phân cơ bản:

1° $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$

2° $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

3° $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

4° $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$

5° $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

6° $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

§3. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ HỮU TỈ

3.1. Tích phân các hàm số hữu tỉ đơn giản

Hàm hữu tỉ đơn giản hay phân số hữu tỉ đơn giản là các hàm hữu tỉ có một trong bốn dạng sau:

I : $\frac{A}{x-a}$; II : $\frac{A}{(x-a)^k}$; III : $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV: $\frac{Mx+N}{(x^2+px+a)^k}$

Trong đó $p^2 - 4q < 0$, k nguyên dương ≥ 2

Bây giờ lần lượt ta tính tích phân của các hàm hữu tỉ đơn giản này.

Đối với I, II, ta có: I : $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c$

II : $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + c$

Đối với III, IV đầu tiên ta phân tích:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

Theo giả thiết $q - \frac{p^2}{4} > 0$ nên đặt được $q - \frac{p^2}{4} = a^2$

Bây giờ đổi biến số, đặt $x + \frac{p}{2} = t$ thì $dx = dt$

Khi đó:

$$\text{III}: \quad \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}dt$$

$$= M\int \frac{tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2 + a^2\right) + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{t}{a} + c$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2 + px + q\right) + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{4q - p^2}}\text{arctg}\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c$$

$$\text{IV}: \quad \int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^k}dx = \int M\frac{tdt}{\left(t^2 + a^2\right)^k} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^k}$$

$$= \frac{M}{2}\frac{1}{1-k}\frac{1}{\left(t^2 - a^2\right)^{k-1}} + \left(N - M\frac{p}{2}\right)I_k$$

Với $I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}$ đã biết cách tính trong tích phân từng phần sau đó trở lại biến số cũ ta sẽ có kết quả.

3.2. Tích phân các hàm hữu tỉ bất kỳ

Ta biết dạng tổng quát của một hàm hữu tỉ là : $y = f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là những đa thức bậc n, m và không có nghiệm chung.

Nếu $n < m$ thì hàm hữu tỉ gọi là hàm hữu tỉ thực sự.

Nếu $n \geq m$ thì hàm hữu tỉ gọi là hàm hữu tỉ không thực sự.

Một hàm hữu tỉ không thực sự có thể phân tích thành tổng của một đa thức và một hàm hữu tỉ thực sự bằng cách chia tử số cho mẫu số.

Chẳng hạn $y = \dfrac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$ chia tử số cho mẫu số ta có:

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ \underline{-\ x^5 - 4x^3} & \overline{x^2 + x + 4} \\ 0 + x^4 + 4x^3 - 8 & \\ \underline{-\ x^4 - 4x^2} & \\ 0 + 4x^3 + 4x^2 - 8 & \\ \underline{-\ 4x^3 - 16x} & \\ 0 + 4x^2 + 16x - 8 & \end{array}$$

Vậy $y = \dfrac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \dfrac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$

Ta chỉ xét các hàm hữu tỉ thực sự: $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (1) với $n < m$

Trong đại số cao cấp người ta chứng minh rằng một phương trình đại số bậc m: $Q_m(x) = 0$ có đúng m nghiệm (thực hoặc phức) kể cả số bội và lúc đó $Q_m(x)$ có thể phân tích thành tích của những thừa số bậc nhất và bậc hai:

$$Q_m(x) = A\,(x - a)^\alpha \ldots (x^2 + px + q)^\beta \qquad (2)$$

Trong đó α là số bội của nghiệm thực $x = a$; β là số bội của các nghiệm phức liên hợp của phương trình $x^2 + px + q = 0$

$$(p^2 - 4q < 0)$$

Thí dụ: $Q_3(x) = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$

$Q_3(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1)(x + 2)^2$

$Q_5(x) = x^5 - 2x^3 + x = x(x^2 + 1)^2$

Trong đại số cao cấp người ta cũng chứng minh được rằng: một hàm hữu tỉ thực sự dạng (1), với mẫu số có dạng (2) thì phân tích được thành tổng của những hàm hữu tỉ đơn giản dạng I, II, III, IV đã xét ở trên như sau:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2 + px + q)^\beta} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_\beta x + C_\beta}{x^2 + px + q}$$

Trong đó $A_1, A_2 \dots B_1, B_2 \dots C_1, C_2 \dots$ là các hằng số gọi là các hệ số bất định được xác định như sau:

Quy đồng mẫu số 2 vế, rồi bỏ mẫu số đi, ta được 2 đa thức ở 2 vế đồng nhất nhau.

Đồng nhất hệ số của cùng luỹ thừa của x ở 2 vế ta được 1 hệ phương trình để xác định $A_1, B_1, C_1 \dots$

Thí dụ:

1) $y = \dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ vì $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$

Nên $y = \dfrac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+2}$

Đồng mẫu số và bỏ mẫu số ta có:

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x-2)(x+2) + B(x+2)x + C(x-2)x$$

Hay $4x^2 + 16x - 8 = (A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A$

Đồng nhất các hệ số của cùng luỹ thừa của x ở 2 vế ta có:

$$A + B + C = 4 \;,\; 2(B-C) = 16 \;,\; 4A = 8.$$

Suy ra $\quad A = 2 \;,\; B = 5 \;,\; C = -3$

Vậy $$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$$

2) $y = \dfrac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}$ vì $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$

nên $y = \dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{x+2}$

Tương tự như thí dụ trước ta có:

$$x^2 = (A+C)x^2 + (4A+B+3C)x + 4A + B + 2C$$

Suy ra $\quad A + C = 1 \;,\; 4A + B + 3C = 0 \;,\; 4A + B + 2C = 0$

Giải hệ này ta có:

$$A = 1 \;,\; B = -4 \;,\; C = 0$$

Do đó $$\frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2}$$

3) $y = \dfrac{x^2+8}{x^3+4x}$ vì $x^3 + 4x = x(x^2+4)$

nên $$y = \frac{x^2+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

hay $x^2 + 8 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$.

Suy ra: $A + B = 1$, $C = 0$, $4A = 8$ hay $A = 2$; $B = -1$; $C = 0$

Do đó: $$\frac{x^2+8}{x^3+4x} = \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+4}$$

4) $y = \dfrac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x}$ vì $x^5 + 2x^3 + x = x(x^2+1)^2$

nên $$y = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

hay $3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1 = (A + D)x^4 + Ex^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$

Suy ra $A + D = 3$; $E = 1$, $2A + B + D = 4$, $C + E = 0$, $A = 1$

hay $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 2$, $E = 1$.

Do đó: $$\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

Bây giờ ta chuyển sang tính tích phân của các hàm hữu tỉ bất kỳ, theo trên một hàm hữu tỉ bất kỳ phân tích được thành tổng của một đa thức và 1 hàm hữu tỉ thực sự; một hàm hữu tỉ thực sự lại phân tích được thành tổng của các hàm hữu tỉ đơn giản, mà đa thức và các hàm hữu tỉ đơn giản đã biết cách tính tích phân, do đó việc tính tích phân của hàm hữu tỉ bất kỳ được hoàn toàn giải quyết. Ta sẽ đưa ra các thí dụ trong các trường hợp có thể xảy ra sau đây:

1) Trường hợp các nghiệm của mẫu số đều thực và khác nhau, thí dụ:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$$

Theo thí dụ đưa về hàm hữu tỉ thực sự và thí dụ 1 ở trên ta có:

$$I = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C$$

2) Trường hợp các nghiệm của mẫu số đều thực và có nghiệm bội

Thí dụ: $$I = \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

Theo thí dụ 2 ở trên ta có :

$$I = \int\frac{dx}{x+1} - 4\int\frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x+1| + \frac{4}{x+2} + C$$

3) Trường hợp các nghiệm ở mẫu số có cả nghiệm phức đơn

Thí dụ : $I = \int\frac{x^2+8}{x^3+4x}dx$

Theo thí dụ 3 ở trên ta có :

$$I = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} =$$

$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c \quad \text{hay} \quad I = \ln\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} + c$$

4) Trường hợp mẫu số có cả nghiệm phức bội

Thí dụ: $$I = \int\frac{3x^4+x^3+4x^2+1}{x^5+2x^3+x}$$

Theo thí dụ 4 ở trên ta có:

$$I = \int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{2x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= \int\frac{dx}{x} + \int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int\frac{dx}{x^2+1}dx - I_2$$

với $$I_2 = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Ta biết trong phần tích phân từng phần:

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + c$$

Do đó:

$$I = \ln\left|x(x^2+1)\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2(x^2+1)} + c$$

§4. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ VÔ TỈ

Ta sẽ xét vài loại hàm số vô tỉ mà việc tính tích phân của chúng bằng cách đổi biến số thích hợp có thể đưa được về việc tính tích phân các hàm hữu tỉ.

4.1. Tích phân dạng

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n]{x^m}, \dots, \sqrt[s]{x^r}\right)dx \qquad (1)$$

trong đó R là hàm hữu tỉ của x, $\sqrt[n]{x^m},\dots\sqrt[s]{x^r}$

Thí dụ:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x}}dx\quad,\quad I=\int\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x^3}+x}{x+\sqrt[4]{x}+2}dx$$ là có dạng (1)

còn $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx\quad,\quad I=\int\frac{\sin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$ không phải dạng (1)

Để đưa (1) về hữu tỉ ta đặt $x=t^k$, trong đó k là bội số chung nhỏ nhất của mẫu số các phân số $\frac{m}{n},\dots\frac{r}{s}$, lúc đó

$$dx=kt^{k-1}dt\quad,\quad \sqrt[n]{x^m}=x^{m/n}=(t^k)^{m/n}=t^{k_1},\dots$$

$$\sqrt[s]{x^r}=x^{r/s}=(t^k)^{r/s}=t^{k_2}$$

trong đó $k_1=k\frac{m}{n}$, $k_2=\frac{kr}{s}$ là nguyên vì k chia đúng cho n và s

Do đó $I=\int R(t^k,t^{k_1},\dots,t^{k_2})kt^{k-1}dt$ là tích phân của một hàm hữu tỉ

Thí dụ: $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\int\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}+1}dx$

Bội số chung nhỏ nhất của 2 và 3 là 6, do đó đặt $x=t^6$

Lúc đó $dx=6t^5dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$

$$I=\int\frac{t^3.6t^5.dx}{t^2+1}=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=6\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right]+c$$

hay $I=6\left[\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right]+c$

Bây giờ ta xét tích phân có dạng tổng quát hơn:

$$K=\int R\left[x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\dots\dots\dots\sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r}\right]dx\qquad(2)$$

Tương tự như dạng (1), đặt $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, trong đó k là bội số chung nhỏ nhất của $n, \ldots, s$ thì sẽ đưa được (2) về tích phân của hàm hữu tỉ của t.

Thí dụ:

$$I = \int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}, \qquad \text{đặt } \frac{1-x}{1+x} = t^2, \quad (t > 0)$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{hay} \quad x = \frac{2}{1+t^2} - 1 \quad , \quad dx = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$$

Do đó:

$$I = \int t.\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{-4tdt}{(1+t^2)^2} = -4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$= -2\int\left(\frac{1}{1-t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = -2\left(\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \text{arctg}t\right) + c$$

hay $$I = 2\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + \text{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c$$

4.2. Tích phân các vi phân nhị thức

Xét tích phân $I = \int x^m(a + bx^n)^p.dx$ (1)

với a, b, m, n, p = const, $a \neq 0, b \neq 0,\ n, m, p \in Q$

Biểu thức dưới dấu tích phân (1) gọi là một vi phân nhị thức.

Có thể chứng minh rằng nếu:

1°. $p \in Z$ (nguyên)

hoặc 2°. $\frac{m+1}{n} \in Z$ hoặc 3°. $\frac{m+1}{n} + p \in Z$

thì tích phân (1) đưa được về tích phân các hàm hữu tỉ và do đó biểu thị được qua các hàm sơ cấp.

П.Л. Цебыщев đã chứng minh rằng, ngoài ba trường hợp trên tích phân (1) không biểu thị được qua các hàm sơ cấp.

Thực vậy, đặt : $x^n = z$ thì $x = z^{1/n}$, $dx = \frac{1}{n}z^{1/n-1}dz$

và (1) viết được:

$$I = \int z^{m/n}(a+bz)^p\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1-n}{n}}(a+bz)^p dz$$

Đặt $$\frac{m+1-n}{n} = \frac{m+1}{n} - 1 = q$$

thì:

$$I = \frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz \qquad (2)$$

Xét các trường hợp:

1°. $p \in Z$, $q = \frac{r}{s} \in Q$, (hữu tỉ): đặt $z^{\frac{1}{s}} = u$

(2) viết được $I = \frac{s}{n}\int u^{r+s-1}(a+bu^s)^p du$

Đó là tích phân của một hàm hữu tỉ của u.

2°. $q \in Z$, $p = \frac{r}{s} \in Q$ $\left(q \in Z \Leftrightarrow \frac{m+1}{n} \in Z\right)$

Đặt $(a+bz)^{1/s} = u$ thì $a + bz = u^s$, $z = \frac{u^s - a}{b}$

$dz = su^{s-1}\frac{du}{b}$ và (2) đưa được về tích phân của một hàm hữu tỉ:

$$I = \frac{s}{nb}\int\left(\frac{u^s - a}{b}\right)^q u^{s+r-1}du$$

3°. $p + q \in Z \Leftrightarrow \frac{m+1}{n} + p \in Z$

thì $$z^q(a+bz)^p = z^{p+q}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p$$

Đặt $p + q = t$, $p = \frac{r}{s}$ thì $I = \frac{1}{n}\int z^t\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{r/s} dz$

lại đặt $\frac{a+bz}{z} = u^s$ thì tích phân này được đưa về tích phân của một hàm hữu tỉ.

Thí dụ:

1) Tính $$I = \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

Ta thấy $$I = \int x^{-2/3}(1 + x^{2/3})^{-1}dx$$

có dạng (1) với $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = -1$

Đặt $x = z^{3/2}$ thì

$$I = \frac{3}{2}\int z^{-1/2}(1+z)^{-1}.dz$$

Ở đây $p = -1 \in Z$, $q = -\frac{1}{2} \in Q$.

Ta có :

trường hợp 1°. Đặt $z = t^2$

ta có $$I = 3\int\frac{dt}{1+t^2} = 3\text{arctg}t + c$$

hay $$I = 3\text{arctg}\sqrt[3]{x} + C$$

2) Tính $$I = \int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

Ta có $$I = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}.dx$$

Đặt $\sqrt[4]{x} = z$ thì $$I = \int 4z(1+z)^{1/3}dz.$$

Ở đây $p = \frac{1}{3}$, $q = 1 \in Z$ ta có trường hợp 2°.

Đặt $1 + z = u^3$ ta có:

$$I = \int 4(u^3-1)u.3u^2du = \frac{12}{7}u^7 - 3u^4 + c$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + c$$

3) Tính: $$I = \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}.dx = \int x^{-2}(1+x^2)^{1/2}dx$$

Đặt $x^2 = z$ thì $$I = \frac{1}{2}\int\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1+z}{z}}dz = \frac{1}{2}\int z^{-3/2}(1+z)^{1/2}.dz$$

Ở đây $p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{3}{2}$, $p + q = -1 \in Z$, ta có trường hợp 3°

Đặt

$$\frac{1+z}{z} = u^2 \quad , \quad z = \frac{1}{u^2-1} \quad , \quad dz = -\frac{-2u}{(u^2-1)^2}du$$

$$I = \frac{1}{2}\int (u^2-1)u.\frac{-2udu}{(u^2-1)^2} = -\int \frac{u^2du}{u^2-1} = -\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$= -u - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + c = -\sqrt{\frac{1+z}{z}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{z}-\sqrt{z+1}}{\sqrt{z}+\sqrt{z+1}}\right| + c$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right| + c \qquad (x > 0)$$

4) Tính: $\quad I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}} \quad$ đặt $x^2 = z$

thì $\quad I = \frac{1}{2}\int z^{-1/2}(1+z)^{1/4}dz$

Ở đây $p = -\frac{1}{4}$, $q = -\frac{1}{2}$, $p + q = -\frac{3}{4}$ không rơi vào 1 trong 3 trường hợp trên, vậy tích phân này không biểu thị được qua các hàm sơ cấp, ta biết tích phân này vẫn tồn tại do hàm dưới dấu tích phân là liên tục ($\forall x \in R$)

Chú ý:

Có thể tóm tắt cách tính tích phân (1) như sau:

1^o. $p \in Z$, đặt $x = u^s$, s là mẫu số chung của m, n

2^o. $\frac{m+1}{n} \in Z$, đặt $a + bx^n = u^s$, s là mẫu số của p.

3^o. $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, đặt $ax^{-n} + b = u^s$, s là mẫu số của p.

4.3. Tích phân dạng

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (1)$$

trong đó R là hàm hữu tỉ của x và $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$

a) Các trường hợp đặc biệt

1^o. $I = \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,.dx$ để tính I, ta biến đổi:

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a^2}$ rồi đặt $x + \dfrac{b}{2a} = t$ thì $dx = dt$ và

$$I = \int\sqrt{at^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}}\,dt$$

Lúc đó tuỳ theo dấu của a và $c - \dfrac{b^2}{4a^2}$ mà I có dạng $\int\sqrt{m^2 - u^2}\,du$ hoặc $\int\sqrt{u^2 \pm m^2}\,du$

Áp dụng công thức tích phân bổ xung ta sẽ có kết quả

Thí dụ:

$I = \int\sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$ vì $3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2$

nên đặt $x + 1 = t$ thì $I = \int\sqrt{4 - t^2}\,.\,dt$

Áp dụng công thức tích phân bổ xung ta có:

$I = \dfrac{t}{2}\int\sqrt{4 - t^2} + \dfrac{4}{2}\arcsin\dfrac{t}{2} + c$ với $t = x + 1$

(Nếu không áp dụng công thức tích phân bổ xung thì đặt $t = 2\sin u$ ta cũng đi đến kết quả).

2°. $I = \int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ tương tự như 1° tích phân này sẽ đưa được về 1 trong các dạng:

$$\int\frac{du}{\sqrt{m^2 - u^2}} \qquad \int\frac{du}{\sqrt{u^2 \pm m^2}}$$

Áp dụng công thức tích phân bổ xung ta sẽ có kết quả:

Thí dụ:

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \int\frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + c = \arcsin\frac{x+1}{2} + c$$

(xem thí dụ trên)

3°. $I = \int\dfrac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$.

Biến đổi tử số thành đạo hàm của mẫu số thì I có dạng:

$\int\dfrac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx + \lambda\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ λ là 1 hằng số nào đó

Các tích phân này đã biết cách tính.

Thí dụ:

$$I = \int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

Biến đổi $2x+3 = 2x-2+5$, $x^2-2x+2 = (x-1)^2+1$.

Lúc đó:

$$I = \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}}dx$$

Tích phân đầu có dạng $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$, tích phân sau thuộc loại tích phân bổ xung.

Do đó:

$$I = 2\sqrt{x^2-2x+2} + 5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right| + c$$

4°. $I = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ đặt $x - \alpha = \frac{1}{t}$ thì I sẽ có dạng đã xét ở 3°.

Thí dụ:

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}} \qquad \text{đặt } x = \frac{1}{t}, \quad \text{thì } dx = \frac{-dt}{t^2}$$

Lúc đó

$$I = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}\cdot\frac{-dt}{t^2} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+1}} \qquad (t>0)$$

Áp dụng công thức tích phân bổ xung ta có:

$$I = -\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+2}\right| + c$$

hay trở lại biến số cũ:

$$I = -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}\right| + c$$

5°. $I = \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $P_n(x)$ là 1 đa thức bậc n của x, người ta đã chứng minh được rằng:

$$I = \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Trong đó $Q_{n-1}(x)$ là một đa thức bậc n - 1 của x với hệ số chưa xác định và λ là một số nào đó. Các hệ số của $Q_{n-1}(x)$ và λ sẽ được xác định bằng cách đạo hàm đẳng thức trên ta được hai đẳng thức đồng nhất nhau...

Thí dụ:

Tính $$I = \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx$$

Ta có:

$$I = \int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

lấy đạo hàm đẳng thức này, và bỏ mẫu số:

$$x^3 - x + 1 = (2ax + b)(x^2 + 2x + 2) + (ax^2 + bx + c)(x + 1) + \lambda$$

đồng nhất hệ số của cùng luỹ thừa của x ở 2 vế:

$$3a = 1,\ 5a + 2b = 0,\ 4a + 3b + c = -1,\ 2b + c + \lambda = 1$$

Từ đó: $$a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{5}{6},\ c = \frac{1}{6},\ \lambda = \frac{5}{2}$$

Tính toán cuối cùng ta được:

$$I = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2}\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + c$$

b) Trường hợp tổng quát - phép thế Euler

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \qquad (1)$$

Các phép thế Euler sau đây sẽ đưa tích phân này về tích phân các hàm hữu tỉ, do đó biểu thị được qua các hàm sơ cấp.

1°. Nếu $a > 0$, đặt $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}.x$ (hoặc $t + \sqrt{a}.x$)

Từ đó: $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}.tx$, và

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}.t + b}, \qquad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}.t + b}$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{a}.t^2 + bt + c.\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}.t + b)^2}.dt$$

Thay vào (1), ta sẽ có I là tích phân của 1 hàm hữu tỉ của t.

2°. Nếu $c > 0$, đặt: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ (hoặc $xt - \sqrt{c}$)

khi đó: $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}\,t$ và:

$$x = \frac{2\sqrt{c}.t - b}{a - t^2} \quad , \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}}{a - t^2}$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{c}.t^2 - bt + \sqrt{c}}{(a - t^2)^2}.dt$$

thay vào (1) ta sẽ được I là tích phân của 1 hàm hữu tỉ của t.

3°. Nếu tam thức $ax^2 + bx + c$ có các nghiệm thực khác nhau λ, μ

Khi đó $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$

Đặt: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda)$ thì $a(x - \mu) = t^2(x - \lambda)$ và

$$x = \frac{a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a} \quad , \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}$$

$$dx = \frac{2a(\lambda - \mu)t}{(t^2 - a^2)^2}\,dt$$

Thay vào (1) ta được tích phân của một hàm hữu tỉ của t.

Thí dụ:

1) Tính $\qquad I = \int\frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$ $\qquad$ ở đây $a = 1 > 0$

Áp dụng 1° ta đặt: $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$.

thì

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1} \quad , \quad dx = 2\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}dt$$

$$I = \int\frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2}dt = \int\left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2}\right].dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{2t - 1} + 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t - 1| + c$$

trở lại biến số cũ: $t = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$. ta được

$$I = -\frac{3}{2}\frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1} - \frac{3}{2}\ln\left|2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\right| + \qquad (a)$$

$$+ 2\ln\left|x\sqrt{x^2 - x + 1} - 1\right| + c$$

2) Với thí dụ trên, ở đây ta cũng có $c > 0$

Áp dụng 2° ta đặt: $\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1$ thì:

$$x = \frac{2t-1}{t^2-1} \quad , \quad dx = -2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}dt \quad , \quad \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-t+1}{t^2-1}$$

$$I = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt = \int\left[\frac{2}{t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right]dt =$$

$$\frac{3}{t+1} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{3}{2}\ln(t+1) + c'$$

Trở lại biến số cũ: $t = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$ ta có:

$$I = \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} + 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1\right| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x+1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right| + c' \qquad (b)$$

Nếu biến đổi, sẽ thấy *(a)* *(b)* là như nhau với $c' = c + \dfrac{3}{2}$

3) Tính $I = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$

vì $7x - 10 - x^2 = (x-2)(5-x)$ nên dùng phép thế 3°

Đặt $\sqrt{7x-10-x^2} = t(x-2)$ ta sẽ có:

$$x = \frac{5+2t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = -\frac{6t\,dt}{(1+t^2)^2} \quad , \quad \sqrt{7x-10-x^2} = \frac{3t}{1+t^2}$$

và $\quad I = \dfrac{2}{9}\displaystyle\int\left(\frac{5}{t^2}+2\right)dt = \frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+c$

Trở lại biến số cũ: $t = \dfrac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$ ta được:

$$I = \frac{2}{9}\left[\frac{5(x-2)}{\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{2\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}\right] + c = \frac{2}{9}\frac{7x-20}{\sqrt{7x-10-x^2}} + c$$

Chú ý:

1) Phép thế 1° và 2° có thể đưa được về nhau bằng cách đặt $x = \dfrac{1}{z}$

2) Rõ ràng với phép thế 1° và 3° trong mọi trường hợp có thể đưa tích phân (1) về tích phân của các hàm hữu tỉ. Thực vậy, nếu tam thức $ax^2 + bx + c$ có

nghiệm thực thì như đã thấy, ta dùng 3°. Nếu tam thức không có nghiệm thực nghĩa là: $b^2 - 4ac < 0$ thì

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(ax+b)^2 + (4ac - b^2)\right].$$

luôn luôn có dấu của a, nếu $a < 0$ thì $\sqrt{ax^2+bx+c}$ vô nghĩa (trong tập hợp các số thực R)

Vậy chỉ xét $a > 0$ và ta dùng phép thế 1°.

§ 5. TÍCH PHÂN CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

5.1. Tích phân dạng

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx \qquad (1)$$

Trong đó R là một hàm hữu tỉ của $\cos x$ và $\sin x$.

Thí dụ:

$$y = \frac{1}{1+\sin x + \cos x}, \qquad y = \frac{\sin^3 x}{2+\sin x}$$

$$y = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\sin^2 x}$$

là các hàm số hữu tỉ của $\cos x$ và $\sin x$ (vì $\text{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$)

Còn $y = \dfrac{\sqrt{\sin x} + \cos x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ không phải là hàm hữu tỉ của $\cos x$, $\sin x$

a) Trường hợp chung: Để tính $y = \int R(\sin x, \cos x)dx$ trong trường hợp chung, ta đặt $\text{tg}\dfrac{x}{2} = t$ thì đưa về được tích phân của hàm hữu tỉ đối với t.

Thực vậy từ $\text{tg}\dfrac{x}{2} = t$ suy ra : $x = 2\text{arctg}t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Mặt khác theo lượng giác học:

$$\sin x = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Do đó $$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

Đây chính là tích phân của một biểu thức hữu tỉ của t.

Thí dụ:

1) $$I = \int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{1+t}$$

Do đó: $$I = \ln|1+t|+c \quad \text{hay} \quad I = \ln\left|1+\text{tg}\frac{x}{2}\right|+c$$

2) $$I = \int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{2dt}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1+t^2\right)} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+c$$

hay $$I = \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right|+c$$

3) $$I = \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{dx}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)} = \int\frac{d\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)} = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$$

b) Các trường hợp đặc biệt:

1^o. $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x) = R_o(\sin^2 x, \cos x)\sin x$.

R_o là hàm hữu tỉ của $\sin^2 x$, $\cos x$:

$$R_o(\sin^2 x, \cos x) = R_o[(\sin x)^2, \cos x)]$$

Đặt $t = \cos x$, ta có $\sin x dx = -dt$.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \text{ và:}$$

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx = -\int R_o(1 - t^2, t)dt.$$

Đây là tích phân của hàm hữu tỉ của t

2^o. $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$.

Tương tự ta có:

$$R(\sin x, \cos x)dx = R_0(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx.$$

Đặt $t = \sin x$, ta sẽ có I là tích phân của một hàm hữu tỉ của t.

3°. $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$

Khi đó: $$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x}.\cos x, \cos x\right)$$

$$= R_0(\operatorname{tg} x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, \cos^2 x).$$

R_0, R_1 là các hàm hữu tỉ của các đối số, đặt

$$t = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \text{ thì:}$$

$$x = \operatorname{arctg} t \quad , \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

Và $I = \int R_1\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}$ là tích phân của 1 hàm hữu tỉ của t.

Thí dụ:

1) Tính $$I = \int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^4 x}$$

Ta có $$\frac{(-\sin x)^5}{\cos^4 x} = \frac{-\sin^5 x}{\cos^4 x}$$

Vậy đặt $\cos x = t$

$$I = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + c$$

2) Tính $I = \int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x} dx$. Ta có $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$

Vậy đặt $t = \sin x$

Ta có

$$I = \int \frac{(1-t^2)dt}{2+t} = \int\left(2 - t - \frac{3}{2+t}\right)dt = 2t - \frac{t^2}{2} - 3\ln|t+2| + c =$$

$$= 2\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x - 3\ln|\sin x + 2| + c$$

3) Tính $$I = \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

Rõ ràng $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$. Đặt $t = \operatorname{tg} x$.

Ta có

$$I = \int \frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2} = \int\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} + c = \frac{1}{4}\ln|\sin x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\sin x + \cos x) + c$$

5.2. Tích phân dạng

$$I = \int \sin^{\nu}x\cos^{\mu}x dx \qquad (1)$$

Trong đó ν, $\mu \in Q$ (hữu tỉ) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Đặt $z = \sin^2 x$, $dz = 2\sin x\cos x dx$

ta được:

$$I = \frac{1}{2}\int (1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}} dz \qquad (2)$$

(2) chính là tích phân của vi phân nhị thức. Ta biết nó chỉ có thể biểu thị được qua các hàm sơ cấp trong các trường hợp:

1°. $p = \dfrac{\mu-1}{2}$ là 1 số nguyên hay μ là 1 số nguyên lẻ.

2°. $q = \dfrac{\nu-1}{2}$ là nguyên hay ν là 1 số nguyên lẻ.

3°. $p + q = \dfrac{\mu+\nu}{2}$ là một số nguyên hay $\mu + \nu$ là một số nguyên chẵn.

Đặc biệt: 1) Nếu μ, ν đều là các số nguyên thì biểu thức $\sin^{\nu}x.\cos^{\mu}x$ là một hàm hữu tỉ của $\sin x$, $\cos x$ mà ta đã xét ở 1.

2) Nếu μ, ν cả 2 đều là các số nguyên dương chẵn thì dùng các công thức:

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

ta sẽ hạ được bậc của biểu thức đó.

Thí dụ:

1) Tính $I = \int \sin^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx$, ở đây $\nu = 5$ lẻ, đặt $t = \cos x$, Ta có:

$$I = -\int (1-t^2)^2\sqrt[3]{t}dt = -\int\left(t^{1/3} - 2t^{7/3} + t^{13/3}\right)dt$$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x} + c$$

2) Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$ ở đây $\nu = -\frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{5}{2}$, $\nu + \mu = -4$ chẵn.

Ta có

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x\sqrt{\text{tg}^3 x}} = \int \frac{1+\text{tg}^2 x}{\sqrt{\text{tg}^3 x}} d(\text{tg}x)$$

$$= -2\sqrt{\cot gx} + \frac{2}{3}\sqrt{\text{tg}^3 x} + c \quad , \quad k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

3) Tính $I = \int \sqrt{\sin x}\sqrt[5]{\cos x}dx$

Ở đây $\nu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{5}$, $\nu + \mu = \frac{7}{10}$ không là số nguyên chẵn.

Vậy I không biểu thị được qua các hàm số sơ cấp.

5.3. Tích phân dạng

$I = \int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$. $a, b \in R$.

Dùng các công thức biến đổi:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

Dễ dàng tính được các tích phân này.

Thí dụ:

1) Tính $I = \int \sin 3x \cos 4x dx$.

Ta có: $I = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos x + c$

2) Tính: $I = \int \cos\frac{5}{3}x \cos 8x dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{29}{3}x + \cos\frac{19}{3}x\right)dx = \frac{3}{58}\sin\frac{29}{3}x + \frac{3}{38}\sin\frac{19}{3}x + c$$

Chú ý: Tích phân hàm vô tỉ dạng:

$I = \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ đã xét ở § trước

có thể dùng phép thế lượng giác đưa về tích phân của một hàm hữu tỉ của cos và sin mà ta đã xét trong § này.

Thí dụ: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(5 + 2x + x^2)^3}}$

Ta có: $I = \int \frac{dt}{\left(\sqrt{4 + z^2}\right)^3}$ $z = x + 1$, lại đặt $z = 2\text{tg}t$

ta có

$$I = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + c = \frac{1}{4}\frac{\text{tg}t}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 t}} + c$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\frac{z}{2}}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{4}}} + c = \frac{x + 1}{4\sqrt{5 + 2x + x^2}} + c$$

§6. TÍCH PHÂN DẠNG $\int R(e^x)dx$, $\int R(\text{sh}x, \text{ch}x)dx$

6.1. Dạng $I = \int R(e^x)dx$.

Đặt $e^x = t$ thì $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$

Lúc đó $I = \int R(t)\frac{dt}{t}$ là tích phân của hàm hữu tỉ của t.

Thí dụ:

$$I = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}dx = \int \frac{t}{t^2 + 1}.\frac{dt}{t} = \text{arctg}t + c = \text{arctg}e^x + c$$

6.2. Dạng $I = \int R(\text{sh}x, \text{ch}x)dx$

Thay $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

thì I có dạng ở 6.1 vừa tính. Cũng có thể tính I trực tiếp tương tự như đối với tích phân các biểu thức hữu tỉ của $\cos x$, $\sin x$.

Thí dụ:

$$1)\ I = \int \frac{dx}{chx} = \int \frac{dx}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t + \frac{1}{t}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2\text{arctg}\,t + c = 2\text{arctg}\,e^x + c$$

$$2)\ I = \int sh^3 x\, chx\, dx = \int sh^3 x\, d(shx) = \frac{sh^4 x}{4} + c$$

Chú ý chung: Ta sẽ biết trong chương sau mọi hàm số liên tục đều có nguyên hàm tức là có tích phân bất định, tuy nhiên tích phân bất định của hàm số liên tục không phải bao giờ cũng biểu diễn qua được các hàm số sơ cấp như các trường hợp đã xét ở chương này. Người ta đã chứng minh rằng các tích phân sau đây không biểu diễn được qua các hàm số sơ cấp:

$$\int e^{-x^2} dx\ ,\quad \int \frac{\sin x}{x} dx\ ,\quad \int \frac{\cos x}{x} dx\ ,\quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,.dx \qquad k \neq 1$$

Tuy rằng các hàm số dưới dấu tích phân là liên tục trong miền xác định của chúng.

Sau này, ta sẽ có cách tính gần đúng các tích phân này.

BÀI TẬP

1. Tích các tích phân

1) $\int \frac{\left(x^m - x^n\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

2) $\int \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{ax}} dx$

3) $\int \frac{\left(\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^4}} dx$

4) $\int \frac{dx}{2 - 3x^2}$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$

6) $\int \frac{xdx}{4 + x^4}$

7) $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$

8) $\frac{dx}{\sin \frac{x}{a}}$

9) $\int \frac{dx}{\cos x}$

10) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$

11) $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$

12) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x-1} dx$

13) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$

14) $\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$

15) $\int e^{-(x^2+1)} x dx$

16) $\int (\cos ax + \sin ax)^2 dx$

17) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx$

18) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx$

2. Áp dụng phương pháp tích phân từng phần, tính:

1) $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$

2) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

3) $\int \ln^2 x dx$

4) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

5) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$

6) $\int \sin(\ln x) dx$

7) $\int (\arcsin x)^2 dx$

8) $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$

9) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

10) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

3. Dùng phương pháp biến đổi số, tính các tích phân.

1) $\int x(2x+5)^{10} dx$

2) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

4) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}$

5) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

7) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$

8) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

10) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

4. Tính các tích phân:

1) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

2) $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$

3) $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$

4) $\int\frac{\sin^2 x}{e^x}dx$

5) $\int\cos^2(\ln x)dx$

6) $\int x\sin\sqrt{x}dx$

5. Chứng minh các công thức: (n, $m \in N$)

1) $\int\sin^n xdx = \frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}xdx$

2) $\int\cos^n xdx = \frac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}xdx$

3) $\int\frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x}$

4) $\int\frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}$

*5) $\int\cos^m x\sin^n xdx = \frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int\cos^{m-2}x\sin^n xdx$ $(m<n)$

*6) $\int\cos^m x\sin^n xdx = \frac{-\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int\cos^m x\sin^{n-2}xdx$ $(m>n)$

*7) $\int e^{ax}\cos^n xdx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}xdx$

*8) $\int x^m\ln^n xdx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m\ln^{n-1}xdx$

6. Tính tích phân các hàm hữu tỉ:

1) $\int\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

2) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

3) $\int\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

4) $\int\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^3}dx$

5) $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx$

6) $\int\frac{x^3+x+1}{x^3+x}dx$

7) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ 8) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

9) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ 10) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$

7. Dùng phương pháp Ostrogradski:

Nếu $Q(x)$ có các nghiệm bội thì:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

Trong đó $Q_1(x)$ là ước số chung lớn nhất của $Q(x)$ và đạo hàm của nó $Q'(x)$,

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x).$$

$X(x)$, $Y(x)$ là các đa thức với hệ số bất định, bậc của chúng kém hơn bậc của $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ tương ứng một đơn vị.

Các hệ số của $X(x)$, $Y(x)$ được tính bằng cách đạo hàm (1)

Thí dụ: $I = \int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

Ở đây : $Q = (x^3 - 1)^2$, $Q' = 6x^2(x^3 - 1)$, $Q_1 = x^3 - 1$

$Q_2 = Q : Q_1 = x^3 - 1$

Vậy $$I = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx$$

Đạo hàm 2 vế : $1 = (2Ax+B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C) + (Dx^2 + Ex + F)(x^3 - 1)$

Suy ra: $A = 0$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F = -\frac{2}{3}$

Và

$$I = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{-x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Tính các tích phân:

1) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$ 2) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$ 4) $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$

5) $\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 - x + 1)^2} dx$

6) $\int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$

***8**. Dùng các phương pháp khác nhau, tính các tích phân.

1) $\int \frac{x^5}{(x^3 + 1)(x^3 + 8)} dx$

2) $\int \frac{x^7 + x^3}{x^{12} - 2x^4 + 1} dx$

3) $\int \frac{dx}{x(x^5 + 1)^2}$

4) $\int \frac{dx}{x(x^7 + 1)}$

5) $\int \frac{xdx}{x^8 - 1}$

6) $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2}$

7) $\int \frac{(x^4 - 1)dx}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)}$

8) $\int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx$

9) $\int \frac{P_n(x)dx}{(x - a)^{n+1}}$

10) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx$

Với $P_n(x)$ là 1 đa thức bậc n của x

9. Tính các tích phân của hàm vô tỉ

1) $\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$

2) $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$

3) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

4) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x}}{x(\sqrt[4]{x} + 1)} dx$

5) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$

6) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} dx$

***10**. Tính tích phân các vi phân nhị thức:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx$

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$

3) $\int x^3 (1 + 2x^2)^{3/2} dx$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$

5) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}}$

11. Tính tích phân các hàm vô tỉ:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2-x^2}}$

3) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

4) $\int \frac{(3x-6)dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

6) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$

7) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$

8) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

10) $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$

12. Dùng phép thế Euler tính tích phân các hàm vô tỉ:

1) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

3) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

4) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

5) $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}dx$

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$

13. Tính tích phân của các hàm lượng giác.

1) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

2) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$

3) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$

4) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

5) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x\pm 5\cos^2 x}$

6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$

8) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

9) $\int \frac{dx}{\sin x\sin 2x}$

10) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx$

11) $\int \frac{\sin x dx}{a\cos x+b\sin x}$

12) $\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$

14) $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$

15) $\int \frac{1+\sqrt{\cot gx}}{\sin^2 x} dx$

16) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}} dx$

17) $\int \sin\frac{x}{3}.\cos\frac{2x}{3} dx$

18) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x.dx$

19) $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}} dx$

20) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x\sqrt{\text{tg}x}}$

14. Dùng phép thế lượng giác, tính các tích phân :

1) $\int (x^2+x+1)^{3/2} dx$

2) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$

3) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

4) $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$

15. Tính tích phân các hàm mũ và hyperbole

1) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$

2) $\int \frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$

4) $\int \text{ch}^4 x dx$

5) $\int \text{sh}x\text{sh}2x\text{sh}3x dx$

6) $\int \frac{\text{sh}x dx}{\sqrt{\text{ch}2x}}$

***16**. Tính các tích phân

1) $\int |x| dx$

2) $\int [|x+1|-|x-1|] dx$

3) $\int e^{|x|} dx$

4) $\int \max(1, x^2) dx$

5) $\int E(x)|\sin \pi x| dx$ ($E(x)$: phần nguyên của x)

6) $\int f(x)dx$; nếu $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{khi} \quad |x|\le 1 \\ 1-|x| & \text{khi} \quad |x|>1 \end{cases}$

***17**. Tìm $f(x)$ nếu:

1) $f'(x^2)=\frac{1}{x}$

2) $f'(\ln x)=\begin{cases} 1 & : \quad 0<x\le 1 \\ x & : \quad x>1 \end{cases}$

***18**. Với điều kiện nào thì $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}dx$

Với $$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$$

$a_i = \text{const}$

$i = 0, \ldots n$

là hàm sơ cấp.

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1.

1) $\dfrac{2\sqrt{x}x^{2m}}{4m+1} - \dfrac{4\sqrt{x}x^{m+n}}{2m+2n+1} + \dfrac{2\sqrt{x}x^{2n}}{4n+1} + c$

2) $2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \dfrac{2x^3}{5\sqrt{ax}} + c$

3) $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2+2}) + c$

4) $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{\sqrt{2}-\sqrt{3}x}\right| + c \qquad x \neq \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}x\right) + c \qquad \left|x < \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right|$

6) $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2} + c$

7) $-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) + c \qquad x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

8) $a\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2a}\right| + c$

9) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

10) $\ln|\ln(\ln x)| + c$

11) $x + \ln|2x+1| + c$

12) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+2x+3\ln|x-1|+C$

13) $\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+c$

14) $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)-\frac{1}{3}\sqrt{(\mathrm{arctg}2x)^3}+c$

15) $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}+c$

16) $x-\frac{1}{2a}\cos 2ax+c$

17) $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+c$

18) $e^{\mathrm{arctg}x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\mathrm{arctg}x+c$

2.

1) $\frac{2x^2+10x+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x+c$

2) $-3e^{-x/3}(x^3+9x^2+54x+162)+c$

3) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$

4) $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+c$

5) $\frac{-x}{\sin x}+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+c$

6) $\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+c$

7) $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+c$

8) $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+c$

9) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$ $(a\neq 0)$

10) $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\mathrm{arctg}x}+c$

3.

1) $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]+c$

2) $2\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})\right]+c$

3) $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+c$

4) $\ln x+\ln 2\ln|\ln x+\ln 4|+c$

5) $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}+c$

6) $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+c$

7) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3-2\sqrt{2-x^2}+c$

8) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+c$

9) $2\arcsin\sqrt{x}+c$

10) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c$

4.

1) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$

2) $\frac{x^2-1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-x+c$

3) $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+c$

4) $\frac{e^x}{2}\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right)+c$

5) $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}+c$

6) $2\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x}+6(x-2)\sin\sqrt{x}+c \qquad (x>0)$

6.

1) $5x+\ln\left|\frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|+c$

2) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|+c$

3) $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+c$

4) $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}+c$

5) $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+c$

6) $x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|+c$

7) $\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$

8) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+c$

9) $\ln|x+1|+\frac{x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+c$

10) $-\frac{1}{99(x-1)^{99}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{97(x-1)^{97}}-\frac{1}{96(x-1)^{96}}+c$

7.

1) $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+c$

2) $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$

3) $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+c$

4) $x-\frac{x-3}{x^2-2x+2}+2\ln(x^2-2x+2)+\operatorname{arctg}(x-1)+c$

5) $\frac{-x}{x^5+x+1}+c$

6) $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+c$

8.

1) $\frac{1}{21}\left(8\ln\left|x^3+8\right|-\ln\left|x^3+1\right|\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|x^4-1\right|-\frac{1}{4}\ln\left|x^8+x^4-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right|+c$

3) $\ln|x|-\frac{1}{5}\ln\left|x^5+1\right|+\frac{1}{5(x^5+1)}+c$

4) $\ln|x|-\frac{1}{7}\ln\left|x^7+1\right|+c$

5) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^2+c \qquad (x\neq\pm1)$

6) $-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)+c \qquad \left(x\neq\pm(10)^{\frac{1}{10}}\right)$

7) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|+c$

8) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}\right|+c$

9) $-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a|+c \qquad (x\neq a)$

10) $\frac{1}{n}\left(x^n-\ln\left|x^n+1\right|\right)+c$

$-\infty<x<+\infty$ khi n chẵn, $x\neq -1$ khi n lẻ.

9.

1) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}-3\ln\left|1+\sqrt[3]{x}\right|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c$

2) $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+c$

3) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

4) $4\ln(\sqrt[4]{x}+1)-8\operatorname{arctg}\sqrt[8]{x}+c$

5) $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2z+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2z}{z^3-1}+c$ với $z=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

6) $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^2}+c$

10.

1) $\dfrac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\dfrac{3t}{1+t^2}-21\operatorname{arctg}t+c$, $t=x^{\frac{1}{6}}$

2) $\dfrac{3}{5}t^5-2t^3+3t+c$, $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$

3) $\dfrac{1}{2}\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}+c$

4) $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}+c$

5) $\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+c$

6) $\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{(z-1)^2}{z^2+z+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{2z+1}{\sqrt{3}}+c$; $z=\sqrt[3]{1+x^5}$

11.

1) $\ln\left|\dfrac{c}{1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$

2) $-\sqrt{3x-2-x^2}-3\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3x-2-x^2}}{x-1}+c$

3) $\sqrt{x^2+2x+2}+2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+c$

4) $3\sqrt{x^2-4x+5}+c$

5) $-\arcsin\dfrac{2-x}{x\sqrt{5}}+c$

6) $\dfrac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{x+1}+c$

7) $\dfrac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-\dfrac{1}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})+c$

8) $\dfrac{-8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$

9) $-\dfrac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+c$

10) $\sqrt{x^2-x+1}+\ln|x|+\dfrac{3}{2}\ln\left(x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)-\ln\left(1-\dfrac{x}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)+c$

12.

1) $\dfrac{3}{2(1+2z)}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z^4}{|1+2z|^3}+c \qquad z=x+\sqrt{x^2+x+1}\ ,\ x\neq -1$

2) $\ln\left|\dfrac{t-1}{t}\right|-2\text{arctg}t+c\ ; \qquad t=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$

3) $-\dfrac{1}{6(t+1)^2}-\dfrac{5}{18(t+1)}-\dfrac{17}{108}\ln|t+1|+\dfrac{3}{4}\ln|t-1|-\dfrac{16}{27}\ln|t-2|+c$

$$t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$$

4) $\dfrac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\text{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\text{arctg}(t\sqrt{2}-1\right]+c\ ; \quad t=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

5) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+c$

6) $\text{sign}x.\ln\left|\dfrac{x^2-1+\sqrt{x^4+x^2+2}}{x}\right|+c \quad ; \quad x\neq 0$

$$\text{sign}x=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$

13.

1) $\ln\left|\dfrac{\text{tg}\dfrac{x}{2}-5}{\text{tg}\dfrac{x}{2}-3}\right|+c$

2) $\text{arctg}\left(1+tg\dfrac{x}{2}\right)+c$

3) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|+c$

4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)+c$

5) $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}\right)+c$

6) $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|+c$

7) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|+c$

8) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+c$

9) $-\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$

10) $\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$

11) $\frac{1}{a^2+b^2}\left[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|\right]+c$

12) $\frac{1}{10}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2\right|+\frac{2\sin x-\cos x}{(\sin x-2\cos x)^2}\right]+c \quad ,x\neq k\pi-\operatorname{arctg}2$

13) $-2\sqrt{\operatorname{cotg}x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+c \quad ; \quad k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k=0,\pm 1\ldots$

14) $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t+1)}{(t^2-t+1)(1-t)^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}t}{1-t^2}+c$

$$\begin{cases} t=\sqrt[3]{\sin x} \\ x\neq \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

15) $-\operatorname{cotg}x-\frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{cotg}x)^3}+c$

16) $\frac{5}{12}(\cos^2 x-6)\sqrt[3]{\cos^2 x}+c$

17) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+c$

18) $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+c$

19) Không biểu thị qua hàm sơ cấp

20) $2\sqrt{\mathrm{tg}x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x-1}{\sqrt{2}\mathrm{tg}x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}x+\sqrt{2\mathrm{tg}x}+1}{\mathrm{tg}x-\sqrt{2\mathrm{tg}x}+1}\right|+c$

14.

1) $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})+c$

2) $-\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}+c$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+c$

4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+c$

15.

1) $e^x-\ln(1+e^x)+c$

2) $x-3\ln\left[(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}\right]-3\mathrm{arctg}e^{x/6}+c$

3) $\frac{1}{2}\left[\frac{-\sqrt{1+e^x}}{e^x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{+\sqrt{1-e^x}}{e^x}-+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^x}-1}{\sqrt{1-\varepsilon^x}+1}\right)\right]+c$

4) $-\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+sh2x+\frac{1}{8}sh4x\right)+c$

5) $\frac{ch6x}{24}-\frac{ch4x}{16}-\frac{ch2x}{8}+c$

6) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}chx+\sqrt{ch2x})+c$

16.

1) $\frac{x|x|}{2}+c$

2) $\frac{1}{2}\left[(1+x)|1+x|+(1-x)|1-x|\right]+c$

3) $2-e^{-x}+c \quad : \quad x \geq 0 \quad , \quad e^{x}+c \quad : \quad x<0$

4) $x+c \quad : \quad |x| \leq 1 \quad , \quad \frac{x^{3}}{3}-\frac{2}{3}\operatorname{sign}x+c \quad : \quad |x|>1$

5) $\frac{E(x)}{\pi}\left[E(x)-(-1)^{E(x)}\cos \pi x\right]+c$

($E(x)$: phần nguyên của x).

6) $x-\frac{x^{3}}{3}+c \quad : \quad |x| \leq 1 \quad , \quad x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\operatorname{sign}x+c \quad : \quad 1<|x|<+\infty$

17.

1) $f(x)=2\sqrt{x}+c$

2) $f(x)=x \quad : \quad x \leq 0 \quad , \quad e^{x}-1 \quad : \quad x>0$

18. $a_{1}+\frac{a_{2}}{1!}+\frac{a_{3}}{2!}+\ldots+\frac{a_{n}}{(n-1)!}=0$

Chương 6

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

§1. KHÁI NIỆM TỔNG QUÁT

1.1. Bài toán dẫn đến khái niệm tích phân xác định

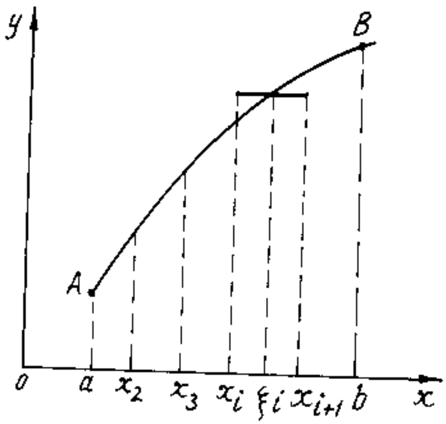
a) Bài toán tính diện tích hình thang cong

Ở trung học, ta đã biết tính diện tích của các hình đa giác, hình tròn. Bây giờ ta đặt vấn đề tính diện tích của một hình giới hạn bởi một đường bất kỳ.

Xét hình giới hạn bởi đường $y = f(x)$ với $f(x) > 0$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, ta gọi hình như thế là một hình thang cong (Hình 46). Chú ý rằng một hình giới hạn bởi một đường bất kỳ có thể chia thành những hình thang cong.

Do đó ta chỉ tính diện tích hình thang cong

Đầu tiên ta tính gần đúng. Chia $[a,b]$ ra làm n phần bất kỳ bởi các điểm:



Hình 46

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < \ldots < x_{n+1} = b$$

và đặt:

$$x_2 - x_1 = \Delta x_1 \ldots, x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \ldots x_{n+1} - x_n = \Delta x_n$$

Từ các điểm $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ ta dựng các đường thẳng song song với trục Oy.

Chúng chia hình thang cong AabB ra thành n hình thang cong nhỏ có đáy là $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$.

Trong mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 1, 2 \dots n$) lấy 1 điểm ξ_i tùy ý. Ta sẽ thay mỗi hình thang cong con đáy Δx_i ($i = 1, 2, \dots n$) gần đúng là hình chữ nhật cũng có đáy Δx_i và chiều cao là $f(\xi_i)$

Như vậy, diện tích S của hình thang cong AabB sẽ được thay gần đúng bằng tổng diện tích S_n của các hình chữ nhật đó, nghĩa là:

$S \approx S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$ hay kí hiệu gọn hơn:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \text{(dấu } \sum \text{ : chỉ tổng).}$$

Ta thấy diện tích gần đúng S_n càng gần S nếu n càng lớn sao cho mọi độ dài Δx_i càng nhỏ. Ta qui ước khi $n \to \infty$ thì mọi $\Delta x_i \to 0$, hay cũng thế, nếu đặt $\lambda = \max \Delta x_i$ thì $\lambda \to 0$, một cách lý tưởng ta định nghĩa diện tích S của hình thang cong là:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

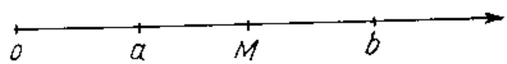
b) Bài toán tính công của một lực biến thiên

Xét một vật chuyển động thẳng từ a đến b dưới tác dụng của một lực có phương là phương của chuyển động, và độ lớn F của lực phụ thuộc vào khoảng cách s của vật tính từ một điểm O nào đó: $F = F(s)$ (Hình 47)

Ta sẽ tính công của lực biến thiên đó.

Đầu tiên ta tính gần đúng.

Chia đoạn $[a,b]$ ra làm n phần bất kỳ bởi các điểm:



Hình 47

$$a = s_1 < s_2 < \dots < s_i < s_{i+1} < \dots < s_n < s_{n+1} = b$$

và đặt $s_{i+1} - s_i = \Delta s_i (i = 1, 2, \dots, n)$.

Trong đoạn thứ i $[s_i, s_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) lấy một điểm bất kỳ ξ_i và trong đoạn đó coi lực là không đổi và bằng $F(\xi_i)$, lúc đó công của lực là $F(\xi_i).\Delta s_i$.

Công A của lực trong toàn đoạn $[a,b]$ được coi gần đúng bằng tổng công A_n của lực trong các đoạn $[s_i, s_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \dots n$)

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$$

Tương tự như bài toán tính diện tích hình thang cong, ta định nghĩa:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$$

trong đó $\lambda = \max \Delta s_i$

Qua hai bài toán trên và rất nhiều bài toán cùng loại khác mà ta không đưa ra ở đây, ta thấy chúng có nội dung thực tế khác nhau, nhưng phương tiện toán học để giải các bài toán là như nhau, phương tiện toán học đó ta sẽ nghiên cứu trong chương này gọi là phép tính tích phân xác định.

1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và bị chặn trong đoạn $[a, b]$, chia $[a, b]$ ra làm n phần bất kỳ bởi các điểm:

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

và đặt $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ $(i = 1, 2, \dots n)$.

Trong mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ lấy một điểm ξ_i tùy ý.

Lập tổng $\quad I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Quy ước nếu $n \to \infty$ thì mọi $\Delta x_i \to 0$ hay $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$

Nếu I_n dần tới một giới hạn I xác định khi $\lambda \to 0$, không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a,b]$ và cách chọn các điểm ξ_i thì ta gọi I là tích phân xác định hay tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

Ký hiệu $I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ a,b gọi là các cận lấy tích phân, a là cận dưới và b là cận trên, $\int$ gọi là dấu tích phân; $f(x)$ và $f(x).dx$ gọi là hàm số và biểu thức dưới dấu tích phân; x là đối số hay biến số lấy tích phân; còn I_n gọi là tổng tích phân thứ n; nếu $f(x)$ có tích phân trên $[a,b]$ thì $f(x)$ gọi là khả tích trên $[a,b]$. Bây giờ theo định nghĩa tích phân xác định và trở lại các bài toán mở đầu ta thấy:

Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường $y = f(x)$, $f(x) > 0$, trục Ox và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Đó là ý nghĩa hình học của tích phân xác định.

Công A của lực biến thiên $F(s)$ làm một vật chuyển động thẳng từ $s = a$ đến $s = b$ là tích phân xác định của hàm $F(s)$ trên $[a,b]$:

$$A = \int_a^b F(x)ds \cdot$$

Đó là một ý nghĩa cơ học của tích phân xác định.

Chú ý: Từ định nghĩa suy ra:

1) Tích phân xác định là một con số, nó không phụ thuộc vào đối số lấy tích phân nghĩa là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

2) Nếu $f(x) = 1$ thì:

$$\int_a^b 1.dx = \int_a^b dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a.$$

3) Ta đã định nghĩa $\int_a^b f(x)\,dx$ với $a < b$

Nếu $a > b$ thì ta định nghĩa $\int_a^b f(x)\,dx = - \int_b^a f(x)\,dx$

Nếu $b = a$ ta định nghĩa: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

1.3. Điều kiện khả tích

Tích phân vừa định nghĩa ở 1.2 cũng gọi là tích phân Riemann. Vậy với điều kiện nào $f(x)$ là khả tích Riemann trên đoạn $[a,b]$?

Để trả lời trước hết ta xét:

a) Tổng Darboux : Xét hàm $y = f(x)$ xác định và bị chặn trên $[a, b]$, giả sử T là một cách chia $[a,b]$ và tổng tích phân thứ n ứng với T là:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Vì $f(x)$ bị chặn trên $[a,b]$ nên nó cũng bị chặn trên các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, ..., n$, theo nguyên lý Supremum thì tồn tại.

$$M_i = \underset{[x_i, x_{i+1}]}{Sup} f(x)\ , \quad m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

$$i = 1, 2, ..., n$$

Các tổng $S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ gọi là các tổng Darboux của hàm $f(x)$ ứng với cách chia T trên $[a,b]$.

$S(s)$ gọi là tổng Darboux trên (dưới)

Rõ ràng $$s \le I_n \le S$$

* Từ định nghĩa ta suy ra các tính chất:

I. Nếu s, S ứng với phép chia T,

s', S' ứng với phép chia T',

T' là phép chia có được bằng cách thêm vào phép chia T các điểm chia mới thì :

$$S' \le S \text{ và } s \le s'.$$

Thực vậy, chẳng hạn thêm vào giữa hai điểm x_k, x_{k+1} điểm c và xét trường hợp các tổng S, S'.

Các tổng S, S' chỉ khác nhau ở các số hạng.

$M_k(x_{k+1} - x_k)$, $\overline{M_k}\,(c - x_k) + \overline{\overline{M_k}}\,(x_{k+1} - c)$

Trong đó : $M_k = \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$, $\overline{M_k} = \sup\limits_{[x_k, c]} f(x)$, $\overline{\overline{M_k}} = \sup\limits_{[c, x_{k+1}]} f(x)$

Rõ ràng : $$\overline{M_k} \le M_k \ , \ \overline{\overline{M_k}} \le M_k$$

Do đó : $$\overline{M_k}\,(c - x_k) \le M_k(c - x_k)$$

$$\overline{\overline{M_k}}\,(x_{k+1} - c) \le M_k(x_{k+1} - c)$$

và $$\overline{M_k}\,(c - x_k) + \overline{\overline{M_k}}\,(x_{k+1} - c) \le M_k\,(x_{k+1} - x_k)$$

Vậy $$S' \le S .$$

Trường hợp $s \le s'$ chứng minh tương tự

II. Nếu s, S ứng với cách chia bất kỳ : T

s', S' ứng với cách chia bất kỳ khác : T' thì $s \le S'$ và $S \ge s'$

Thực vậy xét phép chia T'' gồm các điểm chia của T và T' có s'', S'' tương ứng.

Theo I : $s \le s''$, $S'' \le S'$ mặt khác $s'' \le S''$.

Do đó $s \le S'$, trường hợp $S \ge s'$ chứng minh tương tự.

b. Điều kiện khả tích :

Định lý Riemann : điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ là :

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$$

hay $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \quad \lambda < \delta \to S - s < \varepsilon$

Trong đó $S(s)$ là tổng Darboux trên (dưới) ứng với mọi phép chia $[a, b]$, $\lambda = \max \Delta x_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

* ***Chứng minh . Điều kiện cần*** : Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ nghĩa là $\lim\limits_{\lambda \to 0} I_n = I$

Mặt khác với phép chia đã cho : $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$

theo định nghĩa của sup, $\forall \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$ có thể chọn được $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ để

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{hay} \quad M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Do đó : $$S - I_n = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i - f(\xi_i)\right]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon(b-a)}{a-b} = \varepsilon$$

Vậy $\lim\limits_{\lambda \to 0} S = \lim\limits_{\lambda \to 0} I_n$, theo giả thiết thì $\lim\limits_{\lambda \to 0} S = I$.

Tương tự $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = I$ nghĩa là $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$

Điều kiện đủ : Theo II thì tập hợp các tổng Darboux dưới $\{s\}$ là bị chặn trên (bởi S, chẳng hạn). Do đó, theo nguyên lý Supremum : Tồn tại $I_1 = \sup\{s\}$ và $I_1 \le S$

Tương tự : Tồn tại $I_2 = \inf\{S\}$ và $I_2 \ge s$, $\forall s \in \{s\}$ (1)

Rõ ràng $I_1 \le I_2$, vì nếu không, $I_1 > I_2$ hay $I_1 - I_2 > 0$ thì do $I_1 = \sup\{s\}$ theo định nghĩa $\forall \varepsilon > 0$, $\exists s_0 \in \{s\} : s_0 > I_1 - \varepsilon$, lấy $\varepsilon = I_1 - I_2 > 0$ thì : $s_0 > I_1 - (I_1 - I_2) = I_2$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Vậy $s \le I_1 \le I_2 \le S$

Theo giả thiết $\lim\limits_{\lambda \to 0} (S - s) = 0$, suy ra $I_1 = I_2$

Đặt $I_1 = I_2 = I$ thì $s \le I \le S$, mặt khác $s \le I_n \le S$

Từ đó suy ra : $\lim\limits_{\lambda \to 0} I_n = I$ nghĩa là $f(x)$ là khả tích trên $[a, b]$.

Từ ' định lý Riemann ta suy ra một số hệ quả quan trọng sau :

1^0 Mọi hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ đều khả tích trên $[a, b]$.

2^0 Mọi hàm $f(x)$ bị chặn và có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a, b]$ đều khả tích trên $[a, b]$.

3^0 Mọi hàm $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a, b]$ đều khả tích trên $[a, b]$.

Thực vậy, chẳng hạn xét 1^0.

Vì f(x) liên tục trên [a,b], theo định lý Can tor, f(x) là liên tục đều trên [a,b]. Mặt khác theo tính chất của hàm liên tục, trên mỗi đoạn $[x_1, x_{i+1}]$, f(x) đạt một giá trị lớn nhất $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ và một giá trị nhỏ nhất $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$

Từ định nghĩa của hàm liên tục đều suy ra :

$$\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0 \text{ , } \exists\, \delta > 0 \text{ , } \lambda < \delta \Rightarrow M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Vậy $\quad S - s = \sum\limits_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$ và $\lim\limits_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$

nghĩa là $f(x)$ là khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Các hệ quả 2^0, 3^0 cũng được chứng minh tương tự.

Chú ý : Ta đã xét điều kiện khả tích Riemann và từ đó biết được một số lớp hàm khả tích quan trọng (các hệ quả). Vậy còn những lớp hàm nào nữa khả tích Riemann ? để giả quyết vấn đề này, Lebesgue đã đưa ra định lý sau đây : Điều kiện cần và đủ để hàm bị chặn $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ là tập hợp các điểm gián đoạn của nó có độ đo không.

Một tập hợp điểm $A \subset R$ gọi là có độ đo không nếu tìm được một dãy đoạn mà tổng độ dài của chúng có thể làm nhỏ tuỳ ý ($< \varepsilon$), sao cho mỗi điểm của A có thể đặt vào một đoạn của dãy.

Một hàm bị chặn mà tập hợp các điểm gián đoạn của nó có độ đo không cũng gọi là một hàm liên tục "hầu khắp nơi" (h.k.n).

Như vậy theo định lý này, $f(x)$ là khả tích Riemann, nếu $f(x)$ liên tục h.k.n tức là $f(x)$ "khá liên tục". Đối với các lớp hàm khác, không thể khả tích Riemann.

Chẳng hạn hàm Dirichlet :

$$f(x)=\begin{cases} 1 \ : \ x \in Q & (Q \text{ : tập hợp số hữu tỉ}) \\ 0 \ : \ x \in I & (I \text{ : tập hợp số vô tỉ}) \end{cases}$$

Xét tổng tích phân I_n của hàm trên $[a, b]$

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Nếu $\xi_i \in Q$ thì $f(\xi_i) = 1$ và $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a \to b - a$

Nếu $\xi_i \in I$ thì $f(\xi_i) = 0$ và $I_n = 0 \to 0$.

Vậy $f(x)$ không khả tích Riemann.

Ta biết hàm này, là gián đoạn $\forall\, x \in R$. Trong thực tế cần nghiên cứu tích phân của các hàm "khá gián đoạn" để đáp ứng yêu cầu này. Lebesgue đã đưa ra một khái niệm tích phân mới gọi là tích phân Lebesgue mà ta không đề cập ở đây vì nội dung của nó vượt ra ngoài phạm vi giáo trình này.

1.4. Thí dụ tính trực tiếp :

Ta sẽ đưa vài thí dụ tính tích phân xác định trực tiếp từ định nghĩa :

Thí dụ 1 :

$$\text{Tính } I = \int_a^b e^x dx$$

Ở đây $f(x) = e^x$ liên tục với mọi x, nên nó khả tích trong mọi đoạn $[a, b]$.

Do đó ta muốn chia $[a, b]$ theo cách nào và chọn các điểm ξ_i thế nào, kết quả ta cũng có một I xác định. Để tính toán được đơn giản ta chia $[a, b]$ ra n phần bằng nhau bởi các điểm x_i $i = 1, 2, \ldots, n+1$ và chọn các điểm ξ_i chính là các điểm x_i.

Vì chia bằng nhau nên $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, đặt $\Delta x = \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$

Lúc đó :

$x_1 = a$, $x_2 = a + \Delta x$, $x_3 = a + 2\Delta x$, ...

$x_i = a + (i-1)\Delta x \ldots$ $x_{n+1} = a + n\Delta x$

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)\Delta x}\Delta x = e^a \Delta x\,(1 + e^{\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x})$$

Ta thấy, trong dấu ngoặc là tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân, số hạng đầu là 1 và công bội là $e^{\Delta x}$.

Do đó : $$I_n = e^a \Delta x . \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}$$

Theo trên $n\,\Delta x = \dfrac{n(b-a)}{n}$, nên $e^{n\Delta x} = e^{b-a}$ mặt khác khi $n \to \infty$ thì $\Delta x \to 0$

Theo chương giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1$$

Vậy $$I = \lim_{\Delta x \to 0} I_n = e^a(e^{b-a} - 1) = e^b - e^a$$

Về hình học I là diện tích hình thang cong AabB trên hình vẽ. (Hình 48)

Thí dụ 2 :

Tính $$I = \int_0^1 x^2 dx$$

Làm tương tự như thí dụ trước, ở đây ta có :

$x_1 = 0$, $x_2 = \Delta x$, $x_3 = 2\,\Delta x$, ..., $x_{n+1} = n\,\Delta x$, $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ lấy $\xi_i = x_{i+1}$

Do đó :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}^2\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (i\,\Delta x)^2\,\Delta x = \Delta x\,(\Delta x^2 + (2\,\Delta x)^2 + ... + (n\Delta x)^2 =$$

$$= \Delta x^3\,(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = \frac{1}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + ... + n^2)$$

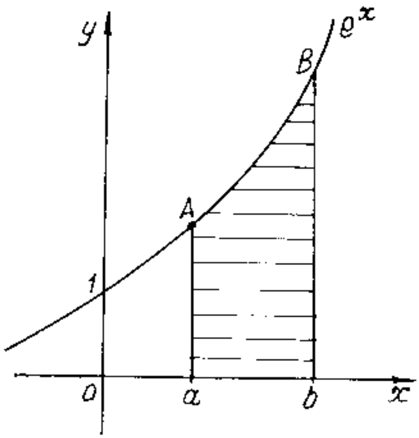
Ta biết : $\quad 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Nên $\quad I_n = \dfrac{1}{n^3}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$

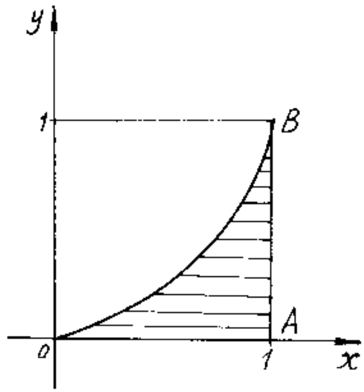
Vì $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ nên $n \to \infty$ thì $\Delta x \to 0$

Vậy $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{3}$

Về hình học I là diện tích hình thang cong OAB trên hình (Hình 49), diện tích đó bằng $\dfrac{1}{3}$ diện tích hình vuông OABC.



Hình 48



Hình 49

§2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1^0 Nếu các hàm số $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì tổng $f(x) \pm g(x)$ cũng khả tích trên đoạn đó và

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Chứng minh : Theo định nghĩa :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2^0 Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì $Kf(x)$ (K=const) cũng khả tích trên đoạn đó và :

$$\int_a^b K f(x)dx = K \int_a^b f(x)dx,$$ chứng minh tương tự với 1^0.

3^0 Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn lớn nhất trong các đoạn : $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ thì $f(x)$ khả tích trên hai đoạn còn lại và :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Chứng minh : Đầu tiên ta xét $a < c < b$. Xét một cách chia đoạn $[a, b]$ ứng với tổng tích phân

$$I_n^{[a,b]} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Xét c là một điểm chia thì :

$$I_n^{[a,b]} = I_{n_1}^{[a,c]} + I_{n_2}^{[c,b]} \quad , n_1 + n_2 = n$$

Cho $\lambda \to 0$, ta có đẳng thức phải chứng minh . Bây giờ xét $a < b < c$

Theo trên :

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

hay :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Các trường hợp khác cũng được chứng minh tương tự

4^0 Nếu $f(x)$ khả tích và $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$, $(a < b)$ thì $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Thực vậy xét $\qquad I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ vì $f(\xi_i) \geq 0$

nên $\qquad I_n \geq 0$, $I_n \to I \Rightarrow I \geq 0$.

5^0 Nếu $f(x)$, $g(x)$ khả tích và $f(x) \geq g(x)$ trong $[a, b]$ $(a < b)$ thì :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Thực vậy, xét $F(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ và áp dụng 4^0- ta sẽ có bất đẳng thức phải chứng minh

6^0 Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ $(a < b)$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên $[a, b]$ và :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Thực vậy, để chứng minh $|f(x)|$ khả tích trên $[a, b]$ ta áp dụng bất đẳng thức $|a| - |b| \leq |a - b|$ vào các tổng Darboux S, s-của $f(x)$ và S', s' của $|f(x)|$.

Ta có : $\qquad S' - s' \leq S - s$

Từ đây suy ra sự khả tích của $|f(x)|$, vì $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ nên theo 5^0 :

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Vậy $\qquad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

7^0 Ước lượng tích phân :

Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ $(a < b)$ thì :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Trong đó : $m = \inf_{a\le x\le b} f(x)$ $M = \operatorname{Sup}_{a\le x\le b} f(x)$

Thực vậy, theo giả thiết : $m \le f(x) \le M$. Do đó từ 5^0 dễ dàng suy ra tích chất này.

Chú ý : Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì m, M là các giá trị bé nhất, lớn nhất của $f(x)$ trên $[a, b]$.

Tính chất này cho phép ước lượng các tích phân.

Thí dụ : ước lượng tích phân

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

Hàm $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ là liên tục trong $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0, \quad \text{trong } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$f(x)$ là đơn điệu giảm trên đó.

Do đó : $m = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$, $M = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

và $$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \le I \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

hay $0{,}5 \le I \le 0{,}71$

Vậy lấy $I = 0{,}6$ thì sai số mắc phải là 0,1.

8^0 ***Định lý giá trị trung bình*** :

Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $\exists\ \mu : m \le \mu \le M$ với

$$m = \inf_{a\le x\le b} f(x) \qquad M = \operatorname{Sup}_{a\le x\le b} f(x)$$

sao cho : $$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$$

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

gọi là giá trị trung bình của $f(x)$ trên $[a, b]$

Đặc biệt : Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $\exists\ \xi \in [a, b]$ để $f(\xi) = \mu$

nghĩa là : $$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Chứng minh : Theo 7^0 ta có :

$$m\ (b - a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b - a) \quad (a < b)$$

hay $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq M$

Đặt $$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \text{ thì } m \leq \mu \leq M$$

Nếu $a > b$ thì xét $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ định lý vẫn đúng và ta có đẳng thức phải chứng minh. Đặc biệt nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, thì theo định lý Bolzano Cauchy :

$\exists\ \xi \in [a, b]$ để $f(\xi) = \mu$

nghĩa là $$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{hay} \quad \int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$

Về hình học điều này xác định rằng :

Với $f(x) > 0$: Diện tích hình thang cong aABb bằng diện tích hình chữ nhật cùng đáy chiều cao là tung độ $f(\xi)$ tại một điểm "trung bình"

$\xi \in [a, b]$ (Hình 50)

Thí dụ :

1) Ước lượng tích phân

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \frac{1}{2}\cos x}$$

Theo định lý trung bình :

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\frac{1}{2}\cos x}=\pi f(\xi)=\frac{\pi}{1+\frac{1}{2}\cos\xi}$$

$$0<\xi<\pi$$

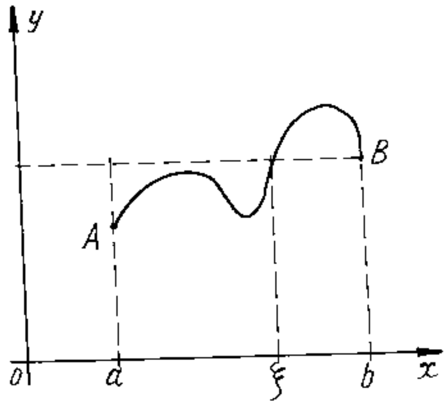
$\xi = 0$ ta có $f(0)=\dfrac{2}{3}$, $\xi=\pi$,

ta có $f(\xi)=2$

Vậy $\dfrac{2\pi}{3}<I<2\pi$

2) Tìm $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\varepsilon x^3+1}$

Theo định lý trung bình :



Hình 50

$$\int_0^1\frac{dx}{\varepsilon x^3+1}=(1-0)\frac{1}{\varepsilon\xi^3+1}\quad,\quad 0<\xi<1$$

Vậy $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1\frac{dx}{\varepsilon x^3+1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon\xi^3+1}=1$$

Chú ý :

Người ta đã chứng minh được định lý sau đây gọi là định lý trung bình tổng quát :

Nếu $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$, $g(x)\geq 0$ (≤ 0)

$\forall x\in[a,b]$ thì $\exists\,\mu : m\leq\mu\leq M$ với

$$m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\qquad M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$$

sao cho $$\int_a^b f(x)\,g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$$

Đặc biệt $g(x)=1$, thì ta có định lý trung bình 8^0- hơn nữa, người ta cũng đã chứng minh được một định lý khác gọi là định lý trung bình thứ hai hay định lý Bonnet :

Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ ($a<b$), $g(x)$ là đơn điệu không tăng trên $[a, b]$ thì $\exists\,\xi\in[a,b]$ sao cho :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

Đặc biệt nếu $g(x)$ là đơn điệu không tăng và không âm thì $\exists\ \xi \in [a, b]$ sao cho :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

§3. LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN VÀ NGUYÊN HÀM CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNIZ

3.1. Đạo hàm của tích phân theo cận trên

Xét tích phân

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Nếu cố định a, b và $f(x)$ thì tích phân này là một con số. Nếu chỉ cố định $f(x)$ thì tích phân này là một hàm số của các cận a, b.

Bây giờ xét a cố định, b thay đổi, đặt $b = x$

thì $$I = I(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt$$

(Tích phân không phụ thuộc đối số lấy tích phân). Ta có :

Định lý 1 :

Nếu $f(x)$ là khả tích trên $[a, b]$ thì $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ là một hàm số liên tục trên $[a, b]$

Chứng minh :

Cho x số gia Δx, $x + \Delta x \in [a, b]$

Ta có :

$$\Delta I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Theo định lý trung bình 8^0 $\exists\ \mu : m' \leq \mu \leq M'$

với $$m' = \inf_{x\in[x,x+\Delta x]} f(x) \quad , \quad M' = \sup_{x\in[x,x+\Delta x]} f(x)$$

sao cho $\Delta I(x) = \mu\,\Delta x$. Rõ ràng : $m \le \mu \le M$, trong đó

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

(Vì $m \le m' \le M' \le M$) ; cho $\Delta x \to 0$ thì $\Delta I(x) \to 0$

nghĩa là $I(x)$ liên tục $\forall x \in [a, b]$

Định lý 2 :

Nếu *f(t)* khả tích trên $[a, b]$ và liên tục tại $t = x \in [a, b]$ thì $I'(x) = f(x)$

Chứng minh :

Theo trên $\Delta I(x) = \mu.\,\Delta x$, $m' \le \mu \le M'$

Theo giả thiết $f(t)$ liên tục tại $t = x$ thì $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\exists\ \delta > 0\ ,\ |\Delta x| < \delta\ \Rightarrow\ f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon,\ \ \forall t \in [x, x + \Delta x]$$

Mặt khác : $f(x) - \varepsilon < m' \le \mu \le M' < f(x) + \varepsilon$

Do đó $|\mu - f(x)| < \varepsilon$

và $$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mu = f(x)$$

Từ định lý này suy ra :

Định lý 3 (Sự tồn tại của nguyên hàm).

Mọi hàm số liên tục trên $[a, b]$ đều tồn tại nguyên hàm trên đoạn đó. Vì theo định nghĩa $I'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$ nên $I(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$.

Chú ý :

Ta đã xét đạo hàm của $I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Nếu $I(x) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$, thì theo công thức tính đạo hàm hợp, với $u(x)$ khả vi trên $[a, b]$:

Ta có $I'_x = I'_u\,.\,u'_x = f[u(x)]\,u'_x$

Hơn nữa nếu $I(x) = \displaystyle\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(t)dt$ với $u_1(x)$, $u_2(x)$ khả vi trên $[a, b]$

thì $$I(x) = \int_{u_1(x)}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{u_2(x)} f(t)dt = \int_{a}^{u_2(x)} f(t)dt - \int_{a}^{u_1(x)} f(t)dt$$

và $I'(x) = f[u_2(x)]u'_2(x) - f[u_1(x)]u'_1(x)$

Thí dụ :

$$I = \int_{\sin x}^{\cos x} t dt$$

$$I'_x = \cos x\,(-\sin x) - \sin x \cos x = -\sin 2x$$

3.2. Công thức Newton - Leibniz

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì ta có công thức :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$.

Thực vậy, theo (3.1) thì $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$, do đó :

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$$

Cho $x = a$ Ta có $I(a) = 0 = F(a) + c$

Vậy $c = -F(a)$ và $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

Cho $x = b$ Ta có $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Ta thường ký hiệu $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Vậy $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Công thức (1) cho sự liên hệ giữa tích phân và nguyên hàm, nó cho phép tính một tích phân xác định một cách đơn giản nếu biết một nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân. Ta biết trong chương trước, một số lớp hàm liên tục có nguyên hàm biểu thị được qua các hàm sơ cấp. Do đó, có thể áp dụng công thức này để tính tích phân của chúng một cách dễ ràng.

Thí dụ : Tính :

$$1)\int_a^b x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\quad,\quad \alpha \neq -1 \qquad 0<a<b$$

$$2)\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a$$

$$3)\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a,b>0)$$

$$4)\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b$$

$$5)\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Big|_{-a}^{a} = \frac{\pi a^2}{2}$$

với $a>0$

(Tích phân này biểu thị diện tích của nửa hình tròn bán kính a)

**** Chú ý :***

1) Ta có công thức Newton-Leibniz để tính tích phân $I = \int_a^b f(x)\,dx$ khi $f(x)$ là liên tục trên $[a, b]$. Ta sẽ chứng minh công thức đó vẫn đúng trong trường hợp $f(x)$ có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại một trên $[a, b]$. Thực vậy, chẳng hạn xét $f(x)$ liên tục $\forall x \in [a, b]$ trừ tại $x = c \in [a, b]$ $f(x)$ có gián đoạn loại 1.

$\forall\varepsilon > 0$, $c - \varepsilon > a$, $c + \varepsilon < b$, xét :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Trên các đoạn $[a, c-\varepsilon]$, $[c+\varepsilon, b]$ $f(x)$ là liên tục nên theo công thức Newton-Leibniz :

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a)$$

$$\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(c+\varepsilon)$$

Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Theo giả thiết thì $f(x)$ là bị chặn trên $[a, b]$.

nên $$\left|\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx\right| \le \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} Mdx = 2\varepsilon M$$

với $$M = \sup_{a\le x\le b} f(x)$$

Do đó $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)dx = 0 \qquad (2)$$

Theo trên (1) có thể viết :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(c-\varepsilon) - F(a) + F(b) - F(c+\varepsilon) + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\,dx$$

Cho $\varepsilon \to 0$ vì $F(x)$ là một hàm liên tục (định lý 1) nên

$$\lim F(c-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(c+\varepsilon) = F(c)$$

Do đó và theo (2) $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2) Ta định nghĩa nguyên hàm của một hàm số trong một miền (trong chương tích phân bất định). Theo định lý 3 thì mọi hàm liên tục trong một đoạn đều tồn tại nguyên hàm trong đoạn đó. Vậy một hàm không liên tục thì thế nào ? Để trả lời, người ta đưa ra định nghĩa bổ xung sau : Nếu $f(x)$ là liên tục trên $[a, b]$, trừ tại một số hữu hạn điểm, tại đó $f(x)$ có gián đoạn loại 1, ta gọi nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$ là mọi hàm số $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$: mà tại mỗi điểm liên tục của $f(x)$ thì $F'(x) = f(x)$ còn tại mỗi điểm gián đoạn x_0 của $f(x)$ thì :

$$F'(x_0 - 0) = f(x_0 - 0)$$
$$F'(x_0 + 0) = f(x_0 + 0)$$

Thí dụ :

Cho $$f(x) = \begin{cases} 0 & : \ -1 \le x \le 0 \\ 1 & : \ 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & : \ x \le 0 \\ x & : \ x > 0 \end{cases}$$

Rõ ràng $F(x)$ là một hàm liên tục trên $[-1,1]$

Tại các điểm liên tục của $f(x)$: $F'(x) = f(x)$

Tại điểm gián đoạn $x = 0$

$$F'(-0) = 0 \quad , \quad F'(+0) = 1$$

Vậy $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[-1, 1]$.

§4. HAI PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

4.1. Phương pháp tích phân từng phần (hay phân đoạn)

Tương tự như tích phân bất định ta có phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân xác định theo công thức :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (1)$$

Trong đó $u = u(x)$

$v = v(x)$

là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$

$$uv\Big|_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a).$$

Thực vậy theo công thức tích phân từng phần của tích phân bất định :

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

thì

$$\int_a^b u\,dv = \left(\int u\,dv\right)\Big|_a^b = \left(uv - \int v\,du\right)\Big|_a^b = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Thí dụ :

1) Tính $I = \int_0^\pi x\cos x\,dx$, đặt $u = x$, $dv = \cos x\,dx$ thì $v = \sin x$

Theo (1) ta có :

$$I = \int_0^\pi x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = 0 - (-\cos x)\Big|_0^\pi = -2$$

2) Tính $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, n là số nguyên dương

Đặt $u = \sin^{n-1}x$, $dv = \sin x\,dx$, $du = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx$

$$v = -\cos x$$

Theo (1) ta có :

$$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n} x dx$$

hay $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.

Do đó : $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Công thức này cho cách tính I_n bằng cách truy hồi như sau:

Nếu n chẵn thì :

$$I_2 = \frac{2-1}{2} I_0 = \frac{1}{2} I_0$$

Nhưng : $$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

Do đó : $$I_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$I_4 = \frac{4-1}{4} I_2 = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

....

$$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}\ldots\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

Xét n lẻ :

$$I_3 = \frac{3-1}{3} I_1 = \frac{2}{3} I_1$$

nhưng $$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$$

Do đó :

$$I_3 = \frac{2}{3}.1 \quad , \quad I_5 = \frac{5-1}{5} I_3 = \frac{4}{5}.\frac{2}{3} \quad . . .$$

$$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2} . . . \frac{4}{5}.\frac{2}{3}$$

Ký hiệu : $1.3.5 ... (2k-1) = (2k-1)!!$

$2.4.6 ...(2k) = (2k)!!$

gọi là các giai thừa cách thì

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \times \begin{cases} \pi/2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

4.2. Phương pháp đổi biến số

Tương tự như đối với tích phân bất định, ta có phương pháp đổi biên số để tính tích phân xác định.

$I = \int_a^b f(x)\, dx$, với $f(x)$ là liên tục trên $[a, b]$ theo qui tắc sau :

Đặt $x = \varphi(t)$, nếu $\varphi(t)$ thoả mãn các điều kiện :

1^0 $\varphi(t)$ có đạo hàm $\varphi'(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$

2^0 Khi $t \in [\alpha, \beta]$ thì $x \in [a, b]$

3^0 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

thì ta có công thức :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\, \varphi'(t) dt \qquad (1)$$

Thực vậy, giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì vế trái của (1) viết được:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

và vế phải của (1) viết được :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\,d\varphi(t) =$$

$$= F([\varphi(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

Vậy công thức (1) là đúng

Thí dụ : Tính

1) $I = \int_{0}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx$ $\qquad (R > 0)$

Đặt $x = R\sin t$ thì $dx = R\cos t dt$, các cận mới α, β sẽ xác định được từ

$$R\sin\alpha = 0,\ R\sin\beta = R$$

Suy ra $\alpha = 0$

$\beta = \dfrac{\pi}{2}$ khi $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ thì $0 \le x \le R$ và $\cos t \ge 0$ nên :

$$\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R(1 - \sin^2 t)} = R\cos t$$

Do đó theo (1) :

$$I = \int_{0}^{\pi/2} R\cos t\, R\cos t dt = R^2\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= R^2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1 + \cos 2t}{2}dt = R^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Big|_{0}^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}$$

Về hình học I chính là diện tích $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính R. Do đó bằng tích phân xác định, ta tính được diện tích hình tròn bán kính R là : πR^2 mà ta đã biết

2) $\quad J_n = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x dx$

Đặt $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ thì $J_n = -\int_{\pi/2}^{0}\cos^n\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)dt = \int_{0}^{\pi/2}\sin^n t dt = I_n$ đã tính ở 4.1, chẳng hạn

$$I_4 = \int_{0}^{\pi/2}\cos^4 x dx = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

Chú ý :

1) Có trường hợp các phương trình $\varphi(\alpha) = a$ $\varphi(\beta) = b$ có nhiều nghiệm nghĩa là ta có nhiều α, β.

Theo qui tắc ta phải chọn một cặp α, β sao cho $\alpha \le t \le \beta$ thì $a \le x \le b$, nếu không có điều kiện này thì kết quả sẽ không đúng.

Chẳng hạn, ở thí dụ 1 , ta có $\alpha = 0, \pi, 2\pi, ..., \beta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}...$ nếu lấy cặp $\alpha = 0$, $\beta = \frac{5\pi}{2}$ thì kết quả $I = \frac{5\pi^2 R^2}{4}$ kết quả này sai vì khi $0 \le t \le \frac{5\pi}{2}$ thì $-R \le x \le R$ không đúng qui tắc.

2) Nếu tích phân có dạng $\int_a^b f[\psi(x)]\,\psi'(x)dx$ thì có thể đặt $t = \psi(x)$ nhưng $\psi(x)$ phải liên tục, đơn điệu và có $\psi'(x) \neq 0$ và liên tục trên $[a, b]$ thì mới đúng qui tắc, vì lúc đó hàm số ngược $x = \varphi(t)$ là liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Thí dụ :

Tính $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ đặt $\cos x = t$ thì $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

3) Bằng phép đổi biến số có thể chứng minh :

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx & \text{nếu } f(x) \text{ không chẵn, lẻ} \\ 0 & \text{nếu } f(x) \text{ là lẻ} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{nếu } f(x) \text{ là chẵn} \end{cases}$$

Thực vậy

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a \text{f(-t)dt} + \int_0^a f(x)dx$$

($x = -t$ trong tích phân thứ nhất)

hay $$I = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx \text{ , nếu } f(x) \text{ không chẵn, lẻ}$$

Nếu $f(x)$ lẻ thì $f(x) = -f(-x)$, lúc đó $I = 0$

Nếu $f(x)$ chẵn thì $f(-x) = f(x)$, lúc đó $I = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Thí dụ :

1) $\int_{-a}^{a} x^3 e^{x^2}\,dx = 0$

2) $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} = 2.\frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$

§5. PHƯƠNG PHÁP TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN

Ta biết công thức Newton - Leibniz chỉ sử dụng được để tính tích phân đối với các hàm số có nguyên hàm là các hàm số sơ cấp. Nếu hàm số không có nguyên hàm dưới dạng hàm sơ cấp thì chỉ có cách tính gần đúng tích phân của nó. Hơn nữa, nhiều khi hàm số có nguyên hàm là hàm sơ cấp nhưng tích phân cũng chỉ có thể tính gần đúng, chẳng hạn :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

$\frac{\pi}{4}$ và ln2 chỉ có thể tính gần đúng.

Do đó phương pháp tính gần đúng tích phân có tầm quan trọng rất lớn trong thực tiễn.

Sau đây ta sẽ trình bày hai phương pháp tính gần đúng tích phân, đều dựa vào ý nghĩa hình học của nó.

5.1. Phương pháp hình thang

Xét $I = \int_a^b f(x)\,dx$; $f(x) \geq 0$ và liên tục trên $[a, b]$.

Ta biết về hình học I là diện tích hình thang cong aABb (Hình 51). Do đó ta sẽ tính gần đúng I bằng cách tính gần đúng diện tích hình thang cong này như sau :

Chia đoạn $[a, b]$ ra n phần bằng nhau bởi các điểm

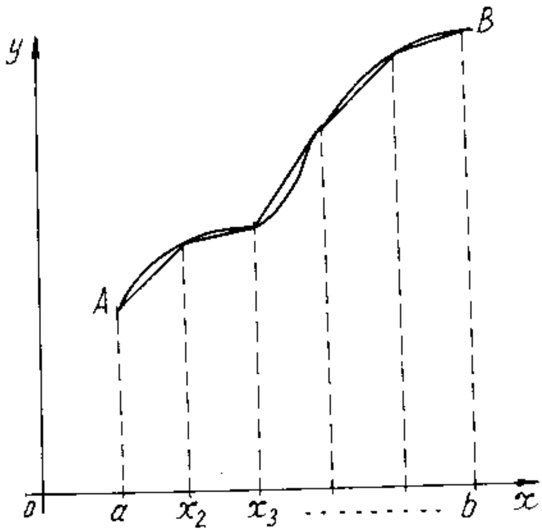
$a = x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n < x_{n+1} = b$

Lúc đó

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Đặt $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $y_1 = f(x_1) = f(a)$, $y_2 = f(x_2)$ ...

$$y_n = f(x_n) \;,\; y_{n+1} = f(x_{n+1}) = f(b)$$



Hình 51

Mỗi hình thang cong đáy $[x_i, x_{i+1}]$ được thay gần đúng bằng hình thang nội tiếp hay ngoại tiếp với nó nghĩa là hình thang có đáy y_i, y_{i+1} và chiều cao là $\Delta x_i = \Delta x$

Như vậy ta có công thức tính gần đúng

$$I \approx \Delta x.\frac{y_1 + y_2}{2} + \Delta x.\frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \Delta x.\frac{y_n + y_{n+1}}{2}$$

hay $I \approx \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{y_1 + y_{n+1}}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_n\right)$

gọi là công thức hình thang để tính gần đúng tích phân. Người ta chứng minh rằng sai số mắc phải khi tính gần đúng theo công thức này là : (nếu $f(x)$ có

$f''(x)$ bị chặn trên $[a, b]$)

$$R_n = \frac{-(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \;\;,\; a < c < b$$

nghĩa là sai số không quá $\delta_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}.M_2$ trong đó $M_2 = \sup |f''(x)|$, và khi $f(x) < 0$, công thức vẫn đúng

Thí dụ :

Tính gần đúng $I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$

Ở đây $f(x) = \frac{1}{x}$ nên $f''(x) = \frac{2}{x^3} \leq 2$ khi $1 \leq x \leq 2$ nghĩa là $M_2 = 2$

Do đó lấy $n = 10$ thì sai số mắc phải là :

$$R_{10} \leq \frac{1^3.2}{12.10^2} = \frac{1}{600} < 10^{-3}$$

Tính toán và theo công thức hình thang, ta có :

$x_2 = 1,1$	$y_2 = 0,9091$	$x_1 = 1,0$	$y_1 = 1.0000$
$x_3 = 1,2$	$y_3 = 0,8333$		
$x_4 = 1,3$	$y_4 = 0,7692$	$x_{11} = 2,0$	$y_{11} = 0,5000$
$x_5 = 1,4$	$y_5 = 0,7143$		Tổng = 1,5000
$x_6 = 1,5$	$y_6 = 0,6666$	Do đó theo công thức hình thang	
$x_7 = 1,6$	$y_7 = 0,6250$		
$x_8 = 1,7$	$y_8 = 0,5882$	$I \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1,5}{2} + 6,1877\right) = 0,6937$	
$x_9 = 1,8$	$y_9 = 0,5556$		
$x_{10} = 1,9$	$y_{10} = 0,5263$		
Tổng =	6,1877		

Vì $R_n < 0$ nên có thể lấy giá trị gần đúng thiếu và thừa của $I = \ln 2$ là 0,692 và 0,694

hay $I = \ln 2 = 0,693$ với độ chính xác là 10^{-3}.

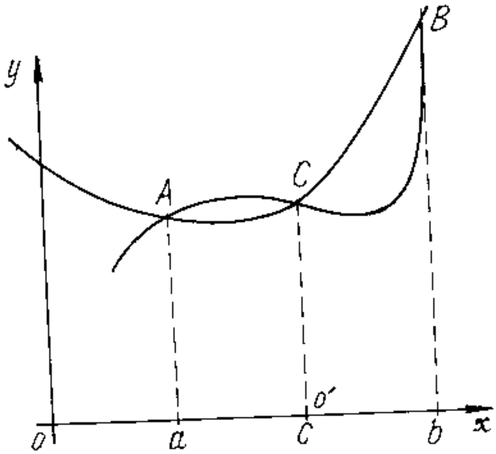
5.2. Phương pháp parabole hay phương pháp Simpson

Xét

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \;\; f(x) \geq 0 \text{ và liên tục trên } [a, b]$$

Đầu tiên xét đoạn $[a, b]$ khá nhỏ và chia đoạn đó ra 2 phần bằng nhau bởi điểm c, dựng đường $x = c$ cắt đường $y = f(x)$ ở điểm C.

Nội dung của phương pháp parabole là thay gần đúng I, là diện tích hình thang cong aACBb bằng diện tích S của hình thang cong cũng có đáy là $[a, b]$ nhưng cạnh cong là parabole có trục song song với Oy và qua 3 điểm A, C, B (Hình 52). Để tính toán được đơn giản, ta tịnh tiến gốc O đến O' trùng với điểm c, lúc đó đối với hệ mới c = 0, đặt $l = \frac{b-a}{2}$ thì $a = -l$ và $b = l$. Vì parabole có trục song song với Oy nên có dạng $y = px^2 + qx + r$



Hình 52

Ta biết diện tích hình thang cong parabole này là :

$$S = \int_{-l}^{l}(px^2 + qx + r)dx = \left(p\frac{x^3}{3} + q\frac{x^2}{2} + rx\right)\Big|_{-l}^{l} = \frac{1}{3}(2pl^2 + 6r) \qquad (1)$$

Mặt khác, đặt $y_a = f(a)$, $y_c = f(c)$, $y_b = f(b)$

thì khi $a = -l$, ta có $y_a = pl^2 - ql + r$

$c = 0$, $y_c = r$

$b = l$, $y_b = pl^2 + ql + r$

Suy ra $y_a + 4y_c + y_b = 2pl^2 + 6r$

Do đó (1) viết được : $S = \frac{1}{3}(y_a + 4y_c + y_b)$ và ta có công thức gần đúng

$$I \approx \frac{1}{3}(y_a + 4y_c + y_b) \qquad (2)$$

Bây giờ ta xét đoạn $[a, b]$ bất kỳ, ta chia $[a, b]$ ra một số n chẵn phần bằng nhau bởi các điểm

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$$

Đặt $\Delta x = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

Ta biết :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)\,dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$$

Thay gần đúng mỗi tích phân ở vế phải theo công thức (2) ta có :

$$I \approx \frac{\Delta x}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) + \frac{\Delta x}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5) + ... + \frac{\Delta x}{3}(y_{n-1} + 4y_n + y_{n+1})$$

hay :

$$I \approx \frac{b-a}{3n}\left[(y_1 + y_{n+1}) + 4(y_2 + y_4 + ... + y_n) + 2(y_3 + y_5 + ... + y_{n-1})\right]$$

Công thức này gọi là công thức Simpson.

Người ta chứng minh rằng sai số mắc phải khi tính gần đúng theo công thức này là : (nếu $f(x)$ có $f^{(4)}(x)$ bị chặn trên $[a, b]$)

$$R_n = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \qquad\qquad a < c < b$$

nghĩa là sai số không vượt quá :

$$\delta_n = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4 \quad , \quad M_4 = \sup_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

Thí dụ :

Tính $\qquad I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$

Ở đây $\qquad f^{(4)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(4)} = \frac{24}{x^5} \quad , \quad M_4 = \max\left|f^{(4)}(x)\right| = 24$

Do đó nếu lấy $n = 10$ thì sai số mắc phải là :

$$R_{10} \leq \frac{24}{180(10)^4} < 2.10^{-5}$$

(So sánh với thí dụ trước : tính theo công thức hình thang thì ở đây chính xác hơn nhiều).

Thực hiện tính toán theo công thức Simpson (lấy 5 số lẻ)

Ta có :

$$I \approx \frac{1}{30}(1{,}5 + 5{,}45636 + 13{,}8320) = 0{,}693152$$

Vậy $\qquad \ln 2 = 0{,}69314 \pm 0{,}00001$

§6. ÁP DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

6.1. Sơ đồ chung .

Giả sử cần tìm một đại lượng A (hình học, vật lý ...) tương ứng với đoạn $[a, b]$, ký hiệu $A\,[a, b]$, biết rằng A có hai tích chất :

1^0 Nếu chia $[a, b]$ thành n phần :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_i \dots < x_{n+1} = b$$

thì $$A[a,b] = \sum_{i=1}^{n} A[x_i, x_{i+1}] \text{ (tính cộng được)}$$

2^0 Nếu xét $[x, x + \Delta x] \subset [a, b]$, với Δx khá bé, thì có thể coi

$A[x, x+ \Delta x] \approx K\,\Delta x$ (giá trị gần đúng của A trên đoạn $[x, x+ \Delta x]$ tỉ lệ với Δx)

Đẳng thức gần đúng này được hiểu theo nghĩa $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{A[x, x+\Delta x]}{\Delta x} = K$. Hệ số tỉ lệ K nói chung phụ thuộc vào x, do đó nếu tìm được hàm $f(x)$ để $f(x) = K$ thì

$$A[x, x+ \Delta x] \approx f(x)\;\Delta x$$

Với giả thiết trên, ta giải bài toán này như sau :

Theo 1^0 và 2^0 thì :

$$A[a, b] \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\;\Delta x_i\;,\; \Delta x_i = x_{i+1} - x_i\;,\; \lambda = \max_i \Delta x_i$$

Ta định nghĩa : $A[a, b] = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\;\Delta x_i$

Theo định nghĩa tích phân xác định thì $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Phương pháp tìm A như trên gọi là phương pháp dùng sơ đồ "tổng tích phân".

Chú ý là biểu thức dưới dấu tích phân $f(x)dx$ theo trên chính là giá trị gần đúng của A trên đoạn $[x, x \in dx]$, ký hiệu $dA = f(x)dx$ gọi là một yếu tố của A.

Vậy nếu biết được dA của A trên $[x, x + dx]$ thì có thể tính A theo công thức:

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Phương pháp này gọi là phương pháp dùng sơ đồ "vi phân", rất hay dùng trong vật lý, kỹ thuật.

6.2 . Áp dụng hình học

1. Tính diện tích phẳng :

a) Tọa độ Descartes :

Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường $y = f(x)$ với $f(x) > 0$, trục Ox và 2 đường $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

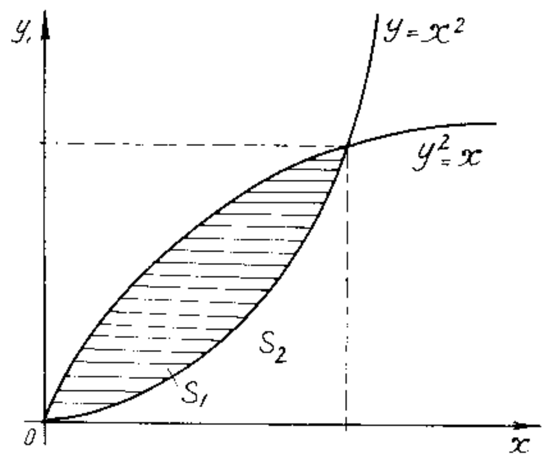
nếu tích phân tồn tại

Nếu $f(x) < 0$ thì để tính diện tích hình học ta phải lấy

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Vì lúc đó $$\int_a^b f(x)\,dx < 0$$

Tóm lại $$S = \int_a^b |f(x)|\,dx$$



Hình 53

Thí dụ :

1) Tính diện tích S giới hạn bởi 2 paraboles

$$y^2 = x \quad \text{và} \quad y = x^2$$

Ta thấy 2 parabole này cắt nhau tại (0, 0) và (1, 1).

Theo hình ta có :

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx$$

hay

$$S = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Như vậy diện tích này bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình vuông cạnh bằng 1. (Hình 53).

2) Tính diện tích S giới hạn bởi đường $y = 6x - 3x^2$, trục Ox và đường $x = 3$.

Theo hình ta có : $S = S_1 + S_2$ (Hình 54)

$$= \int_0^2 (6x - 3x^2)\,dx - \int_2^3 (6x - 3x^2)dx$$

hay $S = (3x^2 - x^3)\Big|_0^2 - (3x^2 - x^3)\Big|_2^3 = 4 - (-4) = 8$

Nếu đường cong cho theo phương trình tham số

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

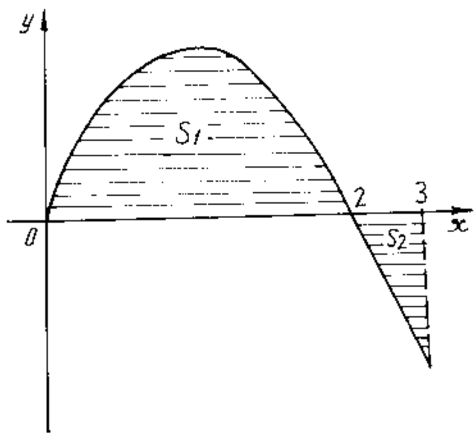
Trong đó $\alpha \le t \le \beta$ ứng với $a \le x \le b$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đường cong, trục Ox và 2 đường

$x = a$, $x = b$

theo công thức đổi biến số sẽ là :

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_\alpha^\beta |\psi(t)\varphi'(t)|dt$$

nếu tích phân tồn tại.



Hình 54

Thí dụ :

1) Tính diện tích S giới hạn bởi đường ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(Hình 55)

Đưa về tham số ta có :

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

khi $-a \le x \le a$ thì $\pi \ge t \ge 0$

Do đó và theo tính chất đối xứng ta có :

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt$$

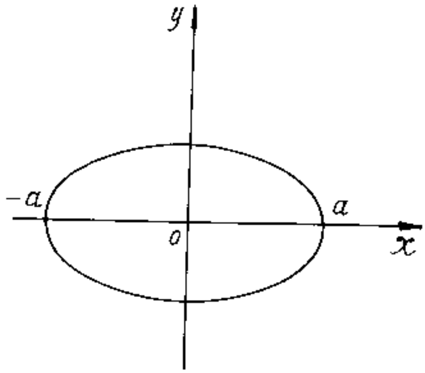
$$=2ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t dt$$

$$=2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

hay

$$S = 2a\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi} = \pi ab$$

Nếu $a = b$ thì ellipse trở thành hình tròn và ta lại tìm lại được diện tích hình tròn là πa^2.



Hình 55

2) Tính diện tích S giới hạn bởi trục Ox và cung thứ nhất của Cycloide

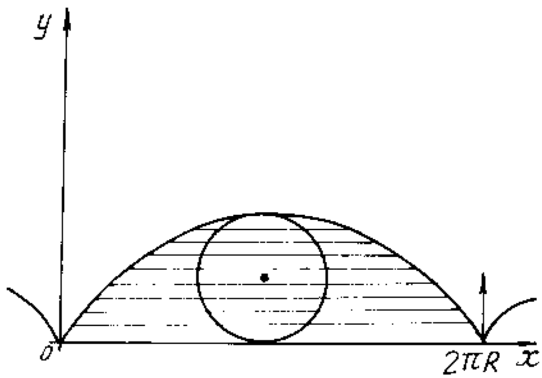
$$x = R(t - \sin t)$$
$$y = R(1 - \cos t)$$

(Hình 56)

Ta thấy khi $0 \le t \le 2\pi$ thì

$$0 \le x \le 2R\pi$$

Do đó :



Hình 56

$$S = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t).R(1-\cos t)\, dt$$

hay

$$S = R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

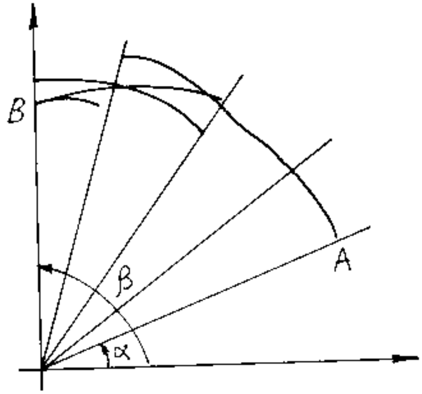
$$= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= R^2 \left(\frac{3}{2} t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= R^2 . \frac{3}{2} . 2\pi = 3\pi R^2$$

Vậy diện tích này gấp ba diện tích hình tròn lăn



Hình 57

b) Tọa độ độc cực :

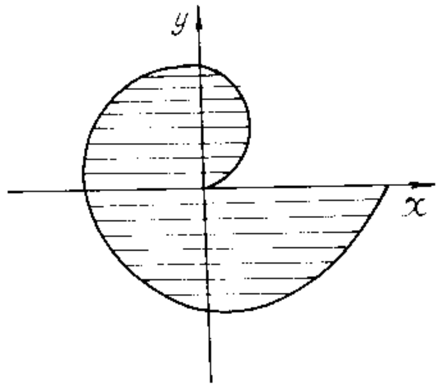
Giả sử cần tính diện tích S giới hạn bởi đường $r = f(\varphi)$ và các tia $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ trong đó $f(\varphi)$ là một hàm liên tục và dương trong $[\alpha, \beta]$ (Hình 57) chia hình cần tính diện tích ra làm n phần bất kỳ bởi các tia

$\alpha = \varphi_1 < \varphi_2 < ... < \varphi_i < \varphi_{i+1} < ... < \varphi_{n+1} = \beta$

Đặt $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$
$(i = 1, 2, ...n)$

Gọi m_i và M_i là giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm $f(\varphi)$ trong $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$
$(i = 1, 2, ...n)$

thì

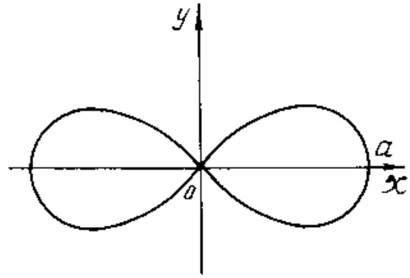


Hình 58

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \Delta\varphi_i \leq S \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Mi^2 \Delta\varphi i$$

Vì $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ và $\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$ là diện tích của các hình quạt tròn bán kính m_i, M_i với góc ở tâm là $\Delta\varphi_i$ nội tiếp và ngoại tiếp với cung đường cong ứng với $\Delta\varphi_i$.

Các tổng trên chính là các tổng Daxboux của hàm $\frac{1}{2} f^2(\varphi)$ trên



Hình 59

đoạn $[\alpha, \beta]$. Vậy theo điều kiện khả tích, $f(\varphi)$ là liên tục trong $[\alpha, \beta]$ ta có :

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

Thí dụ :

1) Tính diện tích S giới hạn bởi nửa dương của trục Ox và vòng thứ nhất của đường xoắn ốc Archimede $r = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (Hình 58)

Theo trên ta có :

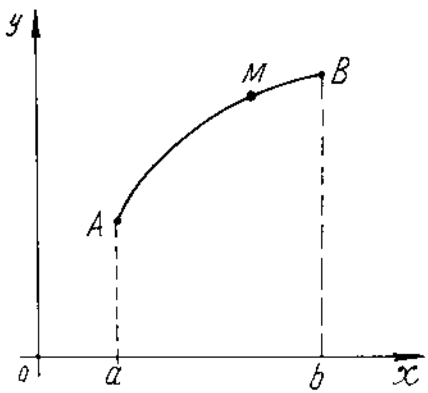
$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a\varphi)^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3$$

2) Tính diện tích S giới hạn bởi đường Lemniscate

$r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (Hình 59)

Do đối xứng ta có :



Hình 60

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi\right) = a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = a^2$$

2. Tính độ dài cung đường cong

a) Tọa độ Descartes :

Giả sử cần tính độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường $y = f(x)$ với

$a \leq x \leq b$ (Hình 66)

Ta biết công thức tính vi phân cung của đường là

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Do đó $s'_x = \sqrt{1 + y'^2}$

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ thì s'_x là một hàm liên tục của x

Theo công thức Newton - Leibniz thì :

$$s(x) - s(a) = \int_a^x s'(x)dx \qquad M(x, y) \in \overset{\frown}{AB}$$

$s(x) - s(a)$ là độ dài của cung $\overset{\frown}{AM}$. Vậy độ dài s của cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường cong là :

$$s = \int_a^b s'_x\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Thí dụ :

Tính độ dài của đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$.

Vì lý do đối xứng nên :

$$s = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Ở đây

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad , \qquad y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Do đó

$$s = 2R\int_{R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 2\pi R$$

Kết quả này ta đã biết.

Nếu đường cong cho theo phương trình tham số

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ với $\alpha \le t \le \beta$ và $x(t)$, $y(t)$ có $x'(t)$, $y'(t)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$

thì $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)dt$, lúc đó :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

và độ dài cung s của đường cong tương ứng với $\alpha \le t \le \beta$ là

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

Thí dụ : Tính độ dài của đường astroide $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a > 0)$

Vì đối xứng nên độ dài s của đường đó bằng 4 lần độ dài cung ứng với

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ (Hình 61)

$$S = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\,dt = 12a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 6a$$

b) Tọa độ độc cực :

Xét cung đường cong trong tọa độ độc cực :

$r = f(\varphi)$ với $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Để tính độ dài s của cung này, ta đưa phương trình của nó về dạng tham số φ, $\alpha \le \varphi \le \beta$:

$x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$

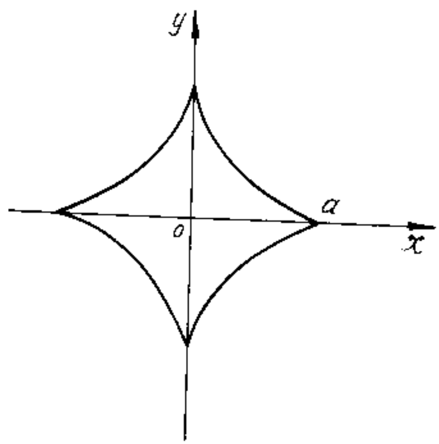
$y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$

Lúc đó :

$dx = [f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi]d\varphi$

$dy = [f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi]d\varphi$

Suy ra



Hình 61

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + [f(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

hay $ds = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi$

và $s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi$

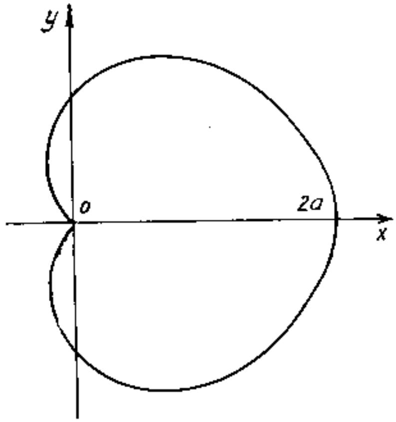
với $r = f(\varphi)$ có $r' = f'(\varphi)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$.

Thí du :

Tính độ dài của đường cardiode

$r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0)$ (Hình 62)

Vì đối xứng nên độ dài s của đường này bằng 2 lần độ dài cung ứng với $0 \le \varphi \le \pi$



Hình 62

$$s = 2\int_0^{\pi} \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\varphi = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\, d\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = 4a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a \sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

3. Tính thể tích

a) Thể tích các vật thể theo các thiết diện song song

Cho vật thể T gồm giữa 2 mặt phẳng

$x = a$ và $x = b$ (Hình 63).

Giả sử cắt T bởi một mặt phẳng song song với các mặt phẳng trên ta được một thiết diện có diện tích là một hàm liên tục của x :

$$S = S(x).$$

Để tính thể tích V của T, ta chia T thành n phần bất kỳ bởi các mặt phẳng :

$$a = x_1 < x_2 < \dots x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = b$$

Đặt $\quad x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$

$\lambda = \max \Delta x_i$

$i = 1, 2, \dots, n$

Lấy $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $(i = 1, 2, \ldots n)$

Coi gần đúng thể tích của phần được chia thứ i là thể tích hình trụ đáy có diện tích $S(\xi_i)$ và chiều cao Δx_i :

$S(\xi_i)\,\Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$

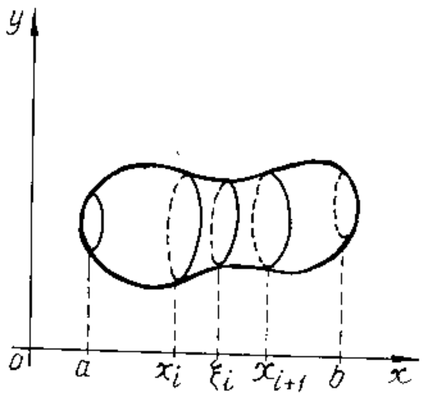
và thể tích của T được coi gần đúng là :

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Ta gọi thể tích V của T là $V = \lim_{\lambda \to 0} V_n$

Theo định nghĩa tích phân xác định thì :

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



Hình 63

Thí dụ :

1) Tính thể tích vật thể T giới hạn bởi mặt ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{(Hình 64)}$$

Đầu tiên ta tính diện tích S của thiết diện bất kỳ thẳng góc với Ox.

Cắt ellipsoide bởi mặt phẳng $X = x$ thì ta được một ellipse trong mặt phẳng đó, nó có phương trình là

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

(coi x như hằng số).

hay

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

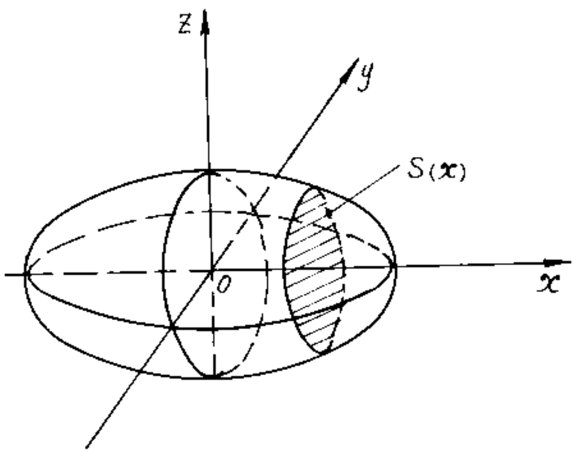
Ta biết diện tích giới hạn bởi ellipse có bán kính trục a, b là πab. Do đó diện tích thiết diện giới hạn bởi ellipse trên là :

$$S = \pi bc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = S(x)$$

Vậy thể tích :

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc$$

Đặc biệt $a = b = c = R$ thì ellipsoide trở thành mặt cầu bán kính R, và ta tìm lại được thể tích hình cầu là $\frac{4}{3}\pi R^3$ đã biết.



Hình 64

2) Tính thể tích V giới hạn bởi mặt trụ tròn xoay bán kính R, đáy của nó và một mặt phẳng qua đường kính đáy (Hình 65). Theo hình, ta đặt AB = h và xét thiết diện O'A'B' ⊥ Ox, diện tích S của nó là :

$$S = \frac{1}{2} O'A'.A'B'$$

Nhưng $O'A' = \sqrt{R^2 - x^2}$,   mặt khác $\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'A'}{OA}$

Suy ra :

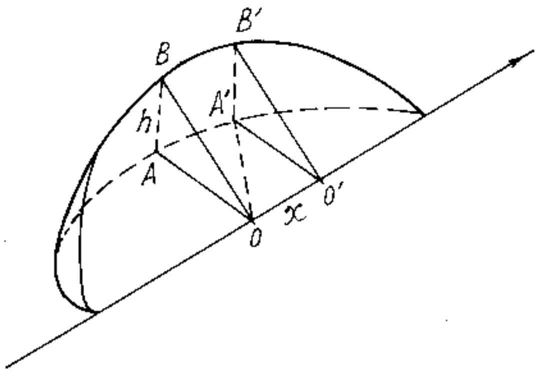
$$A'B' = \frac{AB.O'A'}{OA} = \frac{h}{R}\sqrt{R^2 - x^2}$$

Do đó

$$S = \frac{1}{2}.\frac{h}{R}\left(R^2 - x^2\right) = S(x)$$

Vậy :

$$V = \int_{R}^{R} \frac{h}{2R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{h}{R}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^2 h$$



Hình 65

b) Thể tích vật tròn xoay :

Xét vật tròn xoay do hình giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ quay xung quanh trục Ox tạo nên. (Hình 66), với $f(x)$ là liên tục trên $[a, b]$. Ta thấy thiết diện của vật thẳng góc với trục Ox tại điểm x là hình tròn bán kính

$$|y| = |f(x)|.$$

Do đó diện tích của thiết diện đó là :

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$$

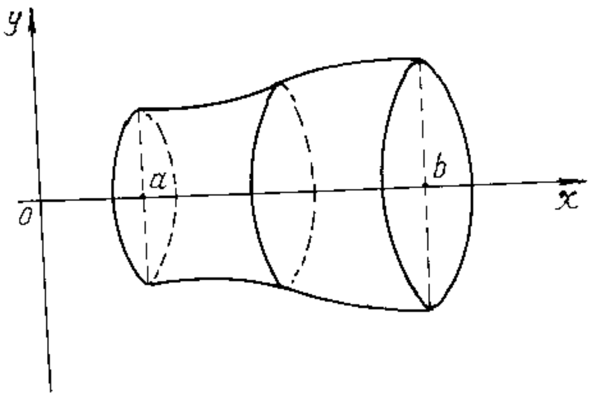
Theo a) thể tích của vật tròn xoay phải tìm là :

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Suy ra, nếu vật xoay tròn do hình giới hạn bởi $y = c$, $y = d$, $x = 0$, $x = \varphi(y)$ quay chung quanh Oy tạo nên thì thể tích của nó là :

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

Với $\varphi(y)$ là hàm liên tục trên $[c, d]$



Hình 66

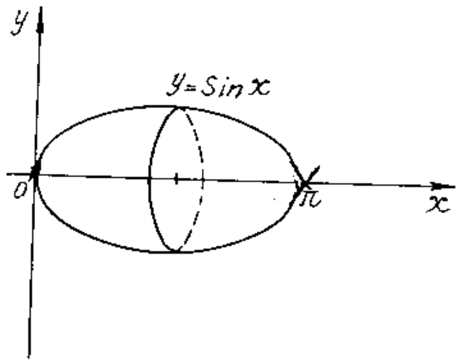
Thí dụ :

1) Tính thể tích V của vật tròn xoay do hình giới hạn bởi $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \sin x$ quay quanh Ox tạo nên (Hình 67). Ta có :

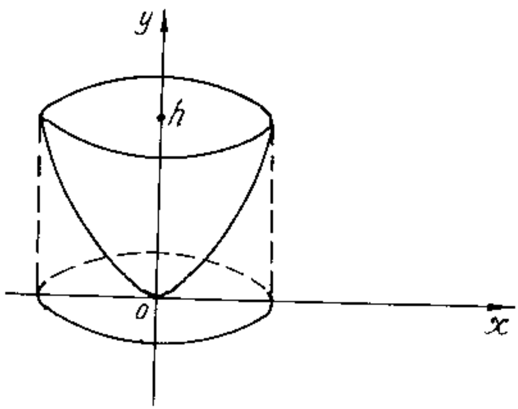
$$V = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx$$

$$V = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

2) Tính thể tích vật do hình $y = 0$, $y = h$, $x = 0$, $y = ax^2$ quay quanh Oy tạo nên (Hình 68)



Hình 67



Hình 68

Ta có :

$$V = \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h \frac{y}{a} dy = \frac{\pi h^2}{2a}$$

Giả sử R là bán kính của thiết diện $y = h$ thì từ $y = ax^2$. Ta có : $h = aR^2$

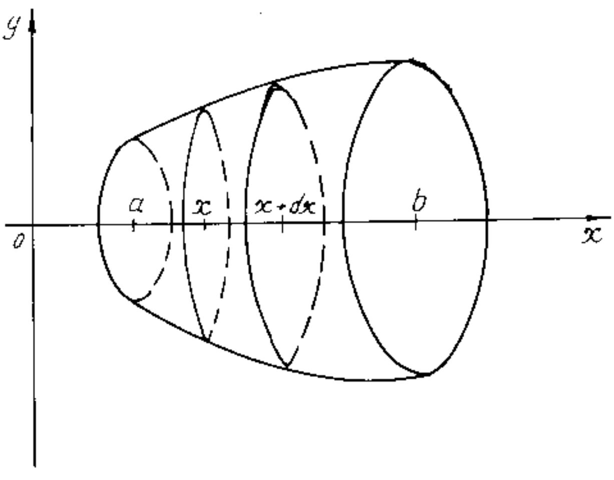
Suy ra : $$R^2 = \frac{h}{a}$$

Lúc đó : $$V = \frac{1}{2}\pi \frac{h}{a} h = \frac{1}{2}\pi R^2 h$$

nghĩa là : Thể tích vật trên bằng nửa thể tích hình trụ cùng đáy và cùng chiều (Định lý Archimede).

4. Tính diện tích mặt tròn xoay

Xét mặt tròn xoay do cung đường cong $y = f(x)$ với $a \le x \le b$ quay quanh Ox tạo nên (Hình 69).



Hình 69

Để tính diện tích ρ của mặt tròn xoay đó, ta xét một yếu tố Δρ của mặt gồm giữa 2 thiết diện thẳng góc với trục Ox : $S(x)$ và $S(x + dx)$; giả sử : $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$.

Các thiết diện này là những hình tròn có bán kính tương ứng là y và $y + dy$. Một cách gần đúng ta coi Δρ như diện tích xung quanh của hình nón cụt, các đáy có bán kính là y và $y + dy$, đường sinh là vi phân cung ds của đường cong:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

nghĩa là :

$$\Delta\rho \approx \pi[y + (y + dy)]ds$$

(Theo công thức diện tích xung quanh của hình nón cụt $S = \pi(r + R)l$ trong đó r, R là các bán kính đáy, l là đường sinh).

Vì $$dy = y'dx$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

nên công thức gần đúng trên viết được:

$$\Delta\rho \approx \pi\left[2y + y'dx\right]\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

hay

$$\Delta\rho \approx 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,dx + \pi\sqrt{1 + y'^2}\,y'\,dx^2$$

Nhưng dx^2 là vô cùng bé bậc cao hơn dx, nên bỏ qua số hạng thứ hai, ta có :

$$\Delta\rho \approx 2\,\pi y\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Suy ra $$d\rho = 2\,\pi\,y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

và $$\rho = 2\,\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\,\pi\int_a^b f(x)\,\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

với $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

Trường hợp đường cong cho theo phương trình tham số :

$$x = x(t),\ y = y(t)\ (\geq 0),\quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Theo công thức liên hệ $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, ta có :

$$\rho = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

với $x(t)$, $y(t)$ có $x'(t)$, $y'(t)$ liên tục $[\alpha, \beta]$

Thí dụ :

1) Tính diện tích ρ của mặt tròn xoay do cung $y = x^3$, $0 \le x \le 1$ quay quanh Ox tạo nên (Hình 70)

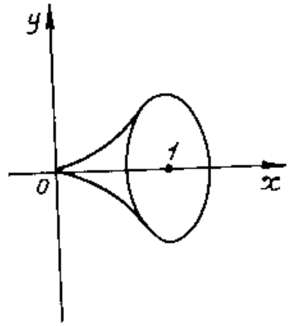
Ta có :

$$\rho = 2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{36}\int_0^1 (1+9x^4)^{1/2}d(1+9x^4)$$

$$= \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$$



Hình 70

2) Tính diện tích ρ của mặt tròn xoay do cung cycloide : $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$ với $0 \le t \le 2\pi$ quay quanh trục Ox tạo nên.

Ta có

$$x' = R(1 - \cos t) \ , \ y' = R\sin t$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2(1-\cos t)^2 + R^2\sin^2 t = 4R^2\sin^2\frac{t}{2} \ ; \ (1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2})$$

Do đó

$$\rho = 2\pi\int_0^{2\pi} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} R(1-\cos t)2R\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 8\pi R^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

Đặt $\frac{t}{2} = u$

Ta có :

$$\rho = 16\pi R^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du = -16\pi R^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)d(\cos u)$$

$$= -16\pi R^2\left[\cos u - \frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi R^2$$

Chú ý : Nếu $f(x) < 0$ thì ta định nghĩa

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

6.3. Áp dụng cơ học - vật lý

1. Moment tĩnh, tọa độ trọng tâm :

Trong cơ học người ta gọi :

Moment tĩnh M_0, hoặc M_x hoặc M_{xy} của chất điểm M đối với điểm O, hoặc trục Ox hoặc mặt phẳng xOy là tích của khối lượng m của chất điểm M và khoảng cách d từ M đến điểm O hoặc trục Ox hoặc mặt phẳng xOy.

$$M_o = md \qquad M_x = md \qquad M_{xy} = md$$

Moment tĩnh của một hệ gồm n chất điểm $M_1, M_2, \ldots, M_n$ có khối lượng tương ứng $m_1, m_2, \ldots m_n$ là tổng các moment tĩnh của các chất điểm đó.

$$M_o = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i \qquad M_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$$

với d_i là khoảng cách từ điểm M_i đến điểm O, hoặc trục Ox hoặc mặt phẳng xOy.

Tọa độ trọng tâm x_0, y_0 của hệ trong mặt phẳng xOy thì được định nghĩa bởi các công thức

$$x_0 = \frac{M_y}{m} \quad , \quad y_0 = \frac{M_x}{m}$$

Trong đó M_x, M_y là moment tĩnh của hệ đối với các trục Ox, Oy còn $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ là khối lượng của hệ.

Tọa độ trọng tâm x_0, y_0, z_0 của hệ trong không gian Oxyz thì được định nghĩa bởi các công thức :

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m} \quad , \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m} \quad , \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$$

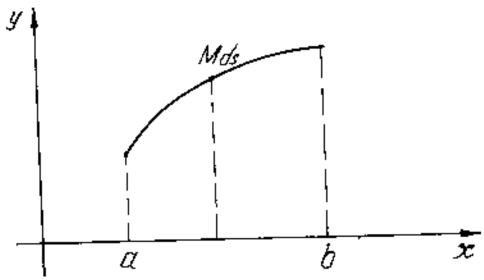
Trong đó M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} là moment tĩnh của hệ đối với các mặt phẳng yOz, zOx, xOy.

Bây giờ vào định nghĩa này và áp dụng tích phân ta sẽ tìm moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của một số hình đồng chất có mật độ khối lượng $\rho = 1$

a) Đường cong phẳng :

Xét cung đường cong $y = f(x)$, với $f(x) \geq 0$ và có $f'(x)$ liên tục

$a \leq x \leq b$ (Hình 71)



Hình 71

Xét một yếu tố Δs của cung và lấy 1 điểm $M(x, y)$ trên yếu tố đó. Theo giả thiết khối lượng của Δs là $\Delta s.1$. Coi khối lượng đó tập trung tại điểm M thì các moment tĩnh ΔM_0, ΔM_x, ΔM_y của yếu tố Δs được định nghĩa là :

$$\Delta M_0 = \Delta s\sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \Delta M_x = \Delta s.y \quad ; \quad \Delta M_y = \Delta s x$$

Ta biết

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Suy ra

$$dM_0 = \sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad ; \qquad dM_x = y\ \sqrt{1 + y'^2}dx$$

$$dM_y = x\sqrt{1 + y'^2}dx$$

Vậy

$$M_0 = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2}\ \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad ; \qquad M_x = \int_a^b y\ \sqrt{1 + y'^2}dx$$

$$M_y = \int_a^b x\ \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Theo giả thiết thì khối lượng của cung đường cong $m = s.1$, s là độ dài cung, ta biết :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx \qquad \text{nên} \qquad m = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Người ta định nghĩa tọa độ trọng tâm của cung đường cong là :

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx} \quad , \quad y_0 = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

Thí dụ :

Tìm M_x, M_y, x_0, y_0 của nửa đường tròn đồng chất

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$

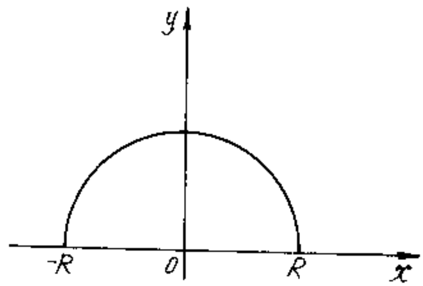
(Hình 72)

Vì nửa đường tròn đồng chất nên theo tính đối xứng suy ra trọng tâm (x_0, y_0) của nó phải ở trên trục Oy, nghĩa là $x_0 = 0$

nhưng $x_0 = \frac{M_y}{m}$ nên $M_y = 0$

Ta chỉ còn tìm M_x, y_0.

Theo trên



Hình 72

$$M_x = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx$$

$$= R\int_{-R}^{R} dx = 2R^2$$

$$y_0 = \frac{M_x}{m} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

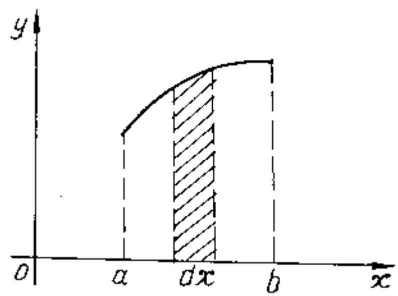
Vì $\qquad m = s = \pi R$

b) Hình phẳng :

Xét hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x) \ge 0$ và liên tục, trục Ox, $x = a$, $x = b$

(Hình 73).

Xét một yếu tố ΔS của hình coi gần đúng là hình chữ nhật đáy dx; chiều cao y , lúc đó khối



Hình 73

lượng của ΔS là $y.dx.1$. Bây giờ coi khối lượng này tập trung tại tâm hình chữ nhật thì moment tĩnh ΔM_x của ΔS: được định nghĩa là :

$$\Delta M_x \approx y.dx.\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y^2dx$$

Suy ra :

$$dM_x = \frac{1}{2}y^2dx \qquad \text{và} \qquad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2dx$$

Tương tự ta có thể tính M_0, M_y, x_0, y_0.

Thí dụ :

Tìm M_x của nửa hình tròn $\qquad y = \sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ \ y \geq 0$

Ta có :

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \int_0^R (R^2 - x^2)dx = \left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3$$

c) Vật thể : Ta chỉ tính moment tĩnh và tọa độ trọng tâm của các vật thể đặc biệt qua các ví dụ sau :

Thí dụ :

1) Tìm moment tĩnh của hình nón tròn xoay bán kính R, chiều cao h đối với đáy của nó và xác định tọa độ trọng tâm của hình nón đó (Hình 74).

Giả sử trục của hình nón trùng với trục Oz và đáy của hình nón ở trên mặt phẳng xOy. Xét một yếu tố ΔV của hình nón gồm giữa hai mặt phẳng $Z = z$ và $Z = z + dz$. Coi ΔV như một hình trụ bán kính r, chiều cao dz thì khối lượng của nó là $\pi r^2dz.1$ và moment tĩnh của nó đối với đáy là :

$$\Delta M_{xy} \approx \pi r^2dz.z$$

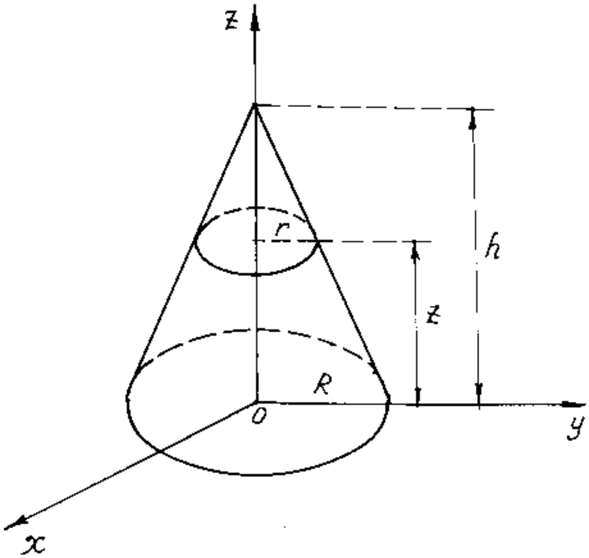
Theo hình $\qquad \dfrac{r}{R} = \dfrac{h-z}{h}$

Suy ra $\qquad r = \dfrac{(h-z)R}{h}$

Do đó $\qquad \Delta M_{xy} \approx \pi\dfrac{R^2}{h^2}.(h-z)^2zdz$

Suy ra $\qquad dM_{xy} = \pi\dfrac{R^2}{h^2}(h-z)^2zdz$

và $\qquad M_{xy} = \pi\dfrac{R^2}{h^2}\displaystyle\int_0^h(h-z)^2zdz = \frac{1}{12}\pi R^2h^2$



Hình 74

Vì hình nón đồng chất nên do tính đối xứng, trọng tâm (x_0, y_0, z_0) của nó phải ở trên trục Oz, suy ra $x_0 = y_0 = 0$, ta chỉ còn tính z_0.

Theo trên

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{12}\pi R^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{1}{4}h$$

2) Tìm moment tĩnh của hình bán cầu bán kính R đối với đáy của nó và xác định trọng tâm của bán cầu đó (Hình 75).

Giả sử bán cầu có tâm tại gốc O và đáy của bán cầu trên mặt phẳng xOy.

Xét một yếu tố ΔV của bán cầu gồm giữa 2 mặt phẳng $Z = z$ và $Z = z + dz$.

Coi ΔV như một hình trụ, chiều cao dz bán kính r thì khối lượng của ΔV là : $\pi r^2 dz.1$ và moment tĩnh của ΔV đối với đáy là $\Delta M_{xy} = \pi r^2 dz.z$

Theo hình $\quad r^2 = R^2 - z^2$

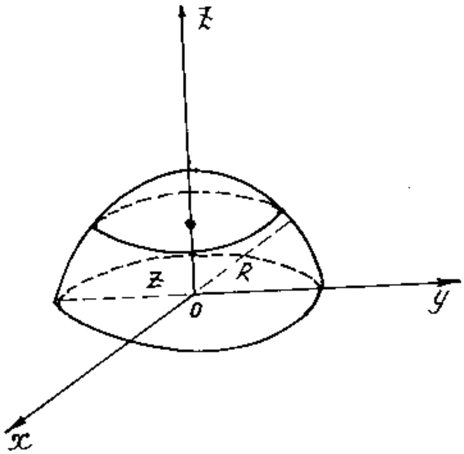
Do đó $\quad \Delta M_{xy} \approx \pi R(R^2 - z^2)zdz$

Suy ra : $\quad dM_{xy} = \pi(R^2 - z^2)zdz$

và $$M_{xy} = \pi\int_0^R (R^2 - z^2)z.dz = \frac{1}{4}\pi R^4$$

Trọng tâm của bán cầu phải ở trên trục Oz và có cao độ là :

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R$$



Hình 75

2. *Moment quán tính :*

Trong cơ học, người ta gọi :

Moment quán tính I_0 hoặc I_x hoặc I_{xy} của chất điểm M có khối lượng m đối với điểm O, hoặc trục Ox hoặc mặt phẳng xOy là tích của khối lượng m và bình phương khoảng cách d từ điểm M đến điểm O, hoặc trục Ox hoặc mặt phẳng xOy:

$$I_0 = md^2 \qquad I_x = md^2 \qquad I_{xy} = md^2$$

Moment quán tính của một hệ gồm n chất điểm M_1, M_2, ... M_n có khối lượng tương ứng là m_1, m_2, ... m_n bằng tổng các moment quán tính của các chất điểm của hệ :

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \quad , \qquad I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 \qquad , \qquad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

d_i là khoảng cách từ điểm M_i đến điểm O, hoặc trục Ox, hoặc mặt phẳng xOy.

Dựa vào định nghĩa này và áp dụng tích phân ta sẽ tìm moment quán tính của một số hình đồng chất.

giả sử có mật độ khối lượng $\rho = 1$ qua các thí dụ :

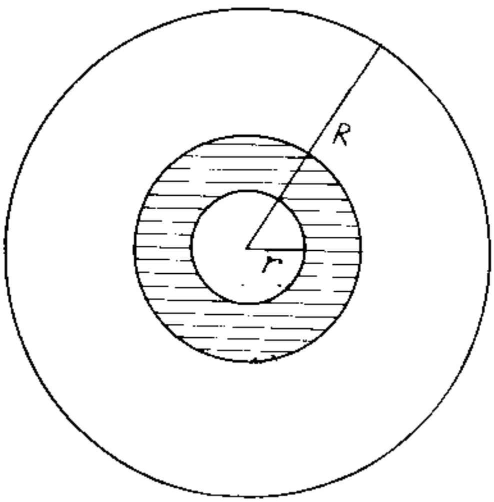
Thí dụ :

1) Tìm moment quán tính I_0 của hình tròn bán kính R đối với tâm O của nó.

Xét một yếu tố ΔS của hình tròn gồm giữa hai đường tròn bán kính là r và $r + dr$ cùng tâm O (Hình 76). Diện tích của ΔS là $\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr$

Suy ra $dI_0 = 2\pi r . r^2 dr$ (vì cùng cách O một khoảng r), và

$$I_0 = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$



Hình 76

2) Tìm moment quán tính của hình nón ở thí dụ 1) mục 1c

a) Đối với dáy

b) Đối với trục của nó (Hình 77)

a) Theo thí dụ đó và lý luận tương tự ta di đến :

$$I_{xy} = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (h-z)^2 z^2 dz = \frac{1}{30} \pi R^2 h^3$$

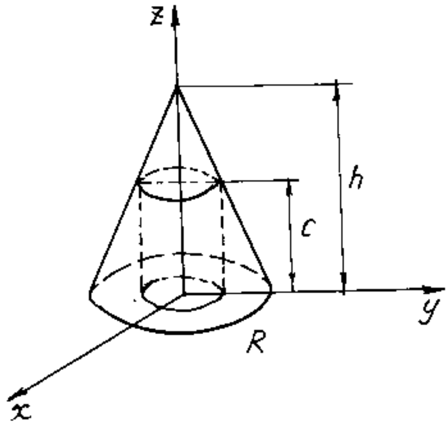
b) Để tính I_z, ta xét một yếu tố ΔV của hình nón gồm giữa hai mặt trụ bán kính r và $r + dr$ cùng tâm O, và các mặt phẳng $z = 0$, $z = c$ thể tích yếu tố này là $2\pi r dr . c$

Theo hình $\frac{c}{h} = \frac{R-r}{R}$

(Hình 77)

Suy ra : $c = \frac{h}{R}(R-r)$

Do đó, khối lượng của yếu tố ΔV là :



Hình 77

$$2\pi r dr . \frac{h}{R}(R-r).1 = \frac{2h\pi}{R}(R-r)r dr$$

và moment quán tính của nó đối với trục Oz là :

$$dI_z = \frac{2h\pi}{R}(R-r).r.r^2 dr$$

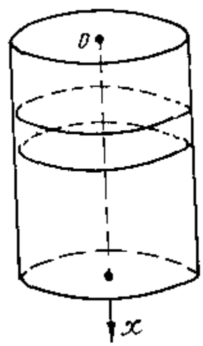
Vậy : $$I_z = \frac{2h\pi}{R} \int_0^R (R-r) r^3 dr = \frac{1}{10} \pi R^4 h$$

3. Tính công của lực :

Xét bài toán đơn giản

Tính công cần thiết để mang hết nước từ một ống hình trụ bán kính R, chiều cao h ra khỏi ống đó (từ miệng ống ra ngoài) (Hình 78).

Lấy trục Ox là trục của hình trụ, điểm O ở dáy trên của hình trụ và



Hình 78

Ox hướng xuống dưới.

Xét một yếu tố ΔV của nước gồm giữa hai mặt phẳng

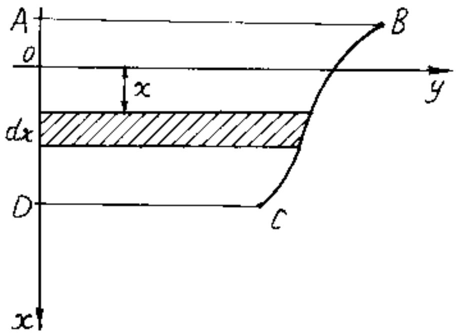
$X = x, X = x + dx$

Trọng lượng của yếu tố này là: $\pi R^2.dx.1$

và công cần thiết để mang yếu tố này ra khỏi ống hình trụ là : $\pi R^2 dx.x$

Do đó, công cần thiết để mang hết nước ra khỏi ống là :

$$A = \pi R^2 \int_0^h x dx = \frac{\pi R^2 h^2}{2}$$



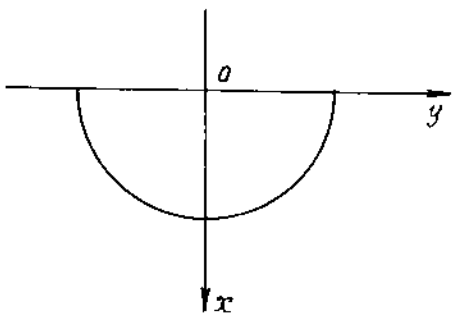
Hình 79

4. *Tính áp lực của chất lỏng :*

Xét bài toán đơn giản :

Tính áp lực của nước lên một đập ABCD như hình vẽ với đường cong BC có phương trình là $y = f(x)$ (Hình 79).

Lấy trục Oy trên mặt thoáng của nước, trục Ox là đường thẳng AD hướng xuống dưới. Xét một lớp mỏng dx của nước, cách trục Oy một đoạn x.



Hình 80

Theo định luật Pascal : Áp suất ở độ sâu x là $\omega.x$, ω là trọng lượng của một đơn vị thể tích nước. Một cách gần đúng ta coi lớp mỏng trên có diện tích là $y.dx$ thì áp lực của lớp đó lên đập là : $\omega xydx$. Do đó áp lực của nước trên đập là :

$$P = \omega \int_0^h xydx$$

h là độ sâu của nước.

Thí dụ :

Xét đập có hình bán nguyệt : $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (Hình 80), $x \geq 0$, thì do tính đối xứng ta có :

$$P = 2\omega \int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -(R^2 - x^2)^{3/2}\Big|_0^R = \frac{2\omega}{3}R^3$$

§7. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

7.1. Tích phân có cận vô hạn

a) Định nghĩa :

Giả sử $f(x)$ xác định trong khoảng nửa vô hạn $[a, +\infty)$ và khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$

Ta gọi $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng của $f(x)$ trên $[a, +\infty]$.

Kí hiệu
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Nếu giới hạn (1) tồn tại (hữu hạn) thì tích phân gọi là hội tụ, ngược lại nghĩa là giới hạn (1) không tồn tại hoặc bằng vô cùng thì tích phân gọi là phân kỳ.

Tương tự ta định nghĩa :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

và
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad c \in R \qquad (3)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ nếu hai tích phân ở vế phải hội tụ. Về hình học, trong trường hợp hội tụ, các tích phân suy rộng (1) (2) (3) biểu thị diện tích hình thang cong đáy vô hạn ($f(x) \geq 0$). Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trong khoảng được xét, ta cũng ký hiệu:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

nhưng chú ý là $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$

Thí dụ:

1) $$\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-ax}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{-e^{-ax}}{a}\Bigg|_0^b \quad a \neq 0$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\left[1 - e^{-ab}\right] = \begin{cases}\dfrac{1}{a} & : \ a > 0\\ +\infty & : \ a < 0\end{cases}, \ a = 0; \ \int_0^{+\infty} e^{0x}dx = +\infty$$

Vậy tích phân hội tụ khi $a > 0$, phân kỳ khi $a \leq 0$

2) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_0^{+\infty} = \text{arctg}(+\infty) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0} = \text{arctg}0 - \text{arctg}(-\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

và $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Vậy các tích phân đã xét là hội tụ

Về hình học: Diện tích hình thang cong đáy vô hạn bằng π (Hình 81)

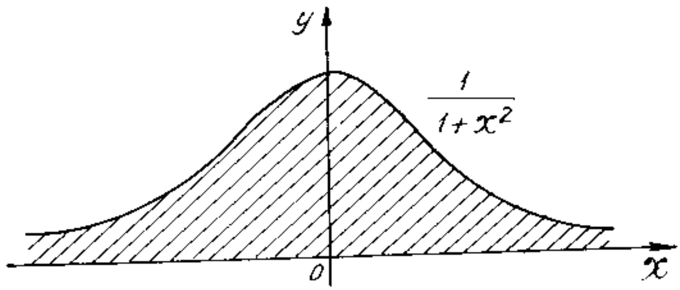
3) $$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \quad a > 0, \ \alpha > 0 \quad \alpha \neq 1$$

($\alpha \leq 0$, đặt $\alpha = \alpha'$, $d' \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} x^{\alpha'}dx = +\infty \Rightarrow$ tích phân phân kỳ).

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{a^{\alpha-1}} & \text{nếu } \alpha > 1\\ \infty & \text{nếu } \alpha < 1\end{cases}$$

$$\alpha = 1 \quad : \quad \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = +\infty$$

Vậy $\alpha > 1$ tích phân hội tụ, $0 < \alpha \le 1$ tích phân kỳ.



Hình 81

b) Tiêu chuẩn hội tụ :

1^0 $f(x)$ giữ nguyên một dấu : $f(x) \ge 0$ (≤ 0)

Nếu $f(x)$ giữ nguyên một dấu, chẳng hạn $f(x) \ge 0$ thì

$$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$$

là một hàm đơn điệu không giảm, theo tiêu chuẩn tồn tại giới hạn của hàm số ta suy ra :

Định lý : $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ với $f(x) \ge 0$ là tồn tại khi và chỉ khi $F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$ là bị chặn trên khi $\eta \to +\infty$

Từ định lý này ta suy ra dễ dàng hệ quả sau gọi là tiêu chuẩn so sánh.

Tiêu chuẩn so sánh :

Nếu :

1) $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ $\forall b \in R$ và $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \ge a$.

2) $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ ($\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ) thì $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ ($\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ)

Thực vậy, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{\eta} g(x)dx$ bị chặn trên nghĩa là $\exists M > 0\ \forall\ \eta$

$$\int_a^{\eta} g(x)dx \le M$$

Suy ra
$$\int_a^{\eta} f(x)dx \le M$$

Theo định lý trên $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ là hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ, thì $F(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx \to +\infty$ khi $\eta \to +\infty$ vì hàm $F(\eta)$ là đơn điệu không giảm.

Do đó :
$$\int_a^{\eta} g(x)dx \to +\infty \text{ khi } \eta \to +\infty$$

Vậy
$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \text{ là phân kỳ.}$$

Từ tiêu chuẩn so sánh này, ta suy ra tiêu chuẩn sau, so sánh với hàm $\frac{M}{x^{\alpha}}$, $(\alpha>0)$

Tiêu chuẩn Cauchy :

Nếu tồn tại các số $c > 0$, $M > 0$, $\alpha > 1$ sao cho $f(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}$ với $c \le x < +\infty$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ.

Còn nếu $\alpha \le 1$ sao cho $f(x) > \frac{M}{x^{\alpha}}$ với $c \le x < +\infty$ thì tích phân phân kỳ.

Thực vậy, áp dụng tiêu chuẩn so sánh trên với $g(x) = M/x^{\alpha}$ ta có tiêu chuẩn Cauchy.

Từ tiêu chuẩn Cauchy suy ra:

Hệ quả 1:

Nếu với $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x^{\alpha}$ tồn tại (hữu hạn) thì $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\alpha \le 1$ và tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x^{\alpha} > 0$ thì $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Hệ quả 2:

Nếu khi $x \to +\infty$, $f(x)$ là vô cùng bé bậc $\alpha > 0$ so với $1/x$ thì tích phân $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$.

hay: $f(x) \sim \dfrac{M}{x^{\alpha}}$, $(x \to +\infty)$, $M > 0$, $\alpha > 1$ $(\le 1) \Rightarrow \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (phân kỳ).

Thí dụ:

1) Xét $\qquad I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ vì e^{-x^2} là hàm chẵn.

$$I_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_{0}^{1} e^{-x^2} dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Tích phân thứ nhất ở vế phải tồn tại do hàm e^{-x^2} là liên tục trong [0; 1].

Xét tích phân thứ hai $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ với $x \ge 1$ thì $e^{-x^2} \le e^{-x}$

Theo thí dụ ở (7.1) thì $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x} dx$ hội tụ.

Vậy theo tiêu chuẩn so sánh $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ hội tụ.

Từ đó suy ra $\quad I_1 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ là hội tụ.

Vậy $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \text{ hội tụ.}$$

2) Xét : $$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$$

Ta có $$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \quad \text{với } x \geq 2$$

$$\frac{1}{x} \text{ có dạng } \frac{M}{x^\alpha} \text{ với } M = 1, \alpha = 1$$

Vậy tích phân phân kỳ.

3) $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}$ hội tụ, vì khi $x \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}} < \frac{1}{x^{1/2}x^{2/3}} = \frac{1}{x^{7/6}} \quad \left(\alpha = \frac{7}{6} > 1\right)$$

4) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2}dx$, $\frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$ khi x → ∞

Vậy tích phân phân kỳ.

2^0 $f(x)$ có dấu tuỳ ý :

Để xét sự hội tụ của $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ với $f(x)$ có dấu tuỳ ý, ta có :

Định lý 1 : nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ

Chứng minh :

Xét $$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad , \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

thì $$0 \leq f_1(x) \leq |f(x)| \quad , \quad 0 \leq f_2(x) \leq |f(x)|$$

Theo giả thiết $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

Theo tiêu chuẩn so sánh thì :

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx\ ,\ \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx \quad \text{hội tụ.}$$

Mặt khác $\qquad f(x) = f_1(x) - f_2(x).$

Vậy $\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ.

Từ định lý này ta đưa ra

Định nghĩa :

Nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ ($\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ) thì ta gọi $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ là hội tụ tuyệt đối.

Nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ phân kỳ mà $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ hội tụ thì ta gọi $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ là hội tụ không tuyệt đối hay bán hội tụ hay hội tụ có điều kiện.

Thí dụ :

1) Các tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$ là hội tụ tuyệt đối

vì $\qquad \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$, $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$

Ta đã biết $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}$ là hội tụ (7.1)

2) Xét tích phân $\int_0^{+\infty} f(x)\cos x\,dx$, $\int_0^{+\infty} f(x)\sin x\,dx$, rõ ràng các tích phân này hội tụ tuyệt đối nếu $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ hội tụ.

(Vì $|f(x)\cos x| \le |f(x)|$, $|f(x)\sin x| \le |f(x)|$).

Định lý 2 (Dirichlet) :

Nếu $\varphi(x)$ là một hàm sao cho hàm $F(x) = \int_a^{x}\varphi(x)dx$ là bị chặn khi $x \to +\infty$ thì

$\int_a^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx$ là hội tụ $\forall\ \alpha > 0$ ($a > 0$).

Chứng minh :

Tích phân từng phần ta có :

$$\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx = \left[F(x)\frac{1}{x^\alpha}\right]_a^b + \alpha\int_a^b\frac{F(x)}{x^{\alpha-1}} = \frac{F(b)}{b^\alpha} - \frac{F(a)}{a^\alpha} + \alpha\int_a^b\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}dx$$

Nhưng $\int_a^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}dx$ là hội tụ tuyệt đối, vì theo giả thiết $F(x)$ là bị chặn nghĩa là $\quad |F(x)| \le M\ ,\ \ \alpha > 0$

Suy ra $\left|\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\right| \le \frac{M}{x^{\alpha+1}}$ mà $\int_a^{+\infty}\frac{M}{x^{\alpha+1}}dx$ là hội tụ do $\alpha + 1 > 1$ $(\alpha > 0)$,

theo tiêu chuẩn so sánh thì $\int_a^{+\infty}\left|\frac{F(x)}{x^{\alpha-1}}\right|dx$ là hội tụ.

Mặt khác $\quad \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{F(b)}{b^\alpha} = 0$ cũng theo giả thiết ấy.

Do đó $\quad \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx = \frac{-F(a)}{a^\alpha} + \alpha\int_a^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}dx$ tồn tại

nghĩa là $\quad \int_a^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^\alpha}dx$ là hội tụ $\forall\ \alpha > 0$ $(a > 0)$

Thí dụ :

1) Xét các tích phân $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ $\quad (a\ ,\ \alpha > 0)$

Đặt $\varphi(x) = \sin x$ trong tích phân thứ nhất thì :

$$|F(x)| = \left|\int_a^x\varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^x\sin x dx\right| = |\cos a - \cos x| \le 2$$

Vậy giả thiết của định lý 2 là thoả mãn và tích phân $\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $(a, \alpha > 0)$ là hội tụ, tương tự $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ $(a, \alpha > 0)$ cũng hội tụ.

Đặc biệt : α = 1

Ta có $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ là hội tụ.

Vì $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, nên có thể lấy $a = 0$

ta có $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ là hội tụ (tích phân Dirichlet).

Xét $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$, rõ ràng tích phân này phân kỳ, vì nếu ngược lại thì theo tiêu chuẩn so sánh.

$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ ($a > 0$) là hội tụ (vì $\sin^2 x \le |\sin x|$) hay $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx$ là hội tụ.

Mặt khác $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ là hội tụ (theo trên).

Vậy $\frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx + \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$

là hội tụ, điều vô lý, vì như đã biết ở (7.1) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ là phân kỳ.

Vậy tích phân Dirichlet là bán hội tụ.

2) Xét $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$, theo thí dụ trên, ở đây $\alpha = \frac{1}{2} > 0$.

Vậy tích phân là hội tụ.

Xét các tích phân $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$, $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ (Tích phân Fresnel)

Đặt $x^2 = t$ thì :

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

Vậy tích phân là hội tụ (theo trên).

Tương tự $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ là hội tụ.

Chú ý :

Ta đã xét các tiêu chuẩn hội tụ đối với tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Dễ dàng thiết lập được các tiêu chuẩn hội tụ đối với tích phân $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

7.2. Tích phân của hàm không bị chặn

a) Định nghĩa :

Giả sử hàm $f(x)$ bị chặn và khả tích trên đoạn $[a, b - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < b - a$ và không bị chặn trên $[b - \varepsilon, b]$. Khi đó b gọi là điểm bất thường của $f(x)$ và $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (1) gọi là tích phân suy rộng của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$.

Kí hiệu : $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Nếu giới hạn (1) tồn tại (hữu hạn), thì tích phân suy rộng gọi là hội tụ, nếu ngược lại (1) bằng vô cùng hoặc không tồn tại thì tích phân gọi là phân kỳ.

Tương tự, ta định nghĩa các tích phân suy rộng :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

nếu $f(x)$ không bị chặn tại lân cận phải của điểm a, tức là a là điểm bất thường.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \right]$$

nếu c là điểm bất thường $a < c < b$, tích phân hội tụ nếu các giới hạn ở vế phải tồn tại, về hình học tích phân suy rộng của hàm không bị chặn biểu thị diện tích hình thang cong có tung độ vô hạn ($f(x) \geq 0$). Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b - \varepsilon]$ thì ta cũng viết :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = F(b-0) - F(a)$$

với $\qquad F(b-0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(b-\varepsilon)$

Thí dụ: 1) Xét $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$

Tương tự $\qquad I_2 = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

và $\qquad \mathrm{I} = \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = I_1 + I_2 = \pi$

2) Xét $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$ $\qquad$ ($\alpha < 0$: $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ là tích phân thường)

b là điểm bất thường

Theo định nghĩa:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1}{1-\alpha}(b-x)^{-\alpha+1}\Big|_a^{b-\varepsilon}$$

$$\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{nếu } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{nếu } \alpha > 1 \end{cases}$$

Với $\alpha = 1$: $\int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \ln(b-a) - \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon = \infty$

Vậy $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $0 < \alpha < 1$, phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

Tương tự. $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ hội tụ nếu $0 < \alpha < 1$, phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

3) Xét $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, điểm bất thường $x = 1$.

$$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}$$

Vậy tích phân hội tụ.

4) Xét $\int_0^1 \ln x dx$, điểm bất thường $x = 0$

$\int_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1$: Tích phân hội tụ.

5) Xét $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_1^2 = \infty$: Tích phân phân kỳ

b) Tiêu chuẩn hội tụ : Tương tự như đối với tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, ta có thể lập các tiêu chuẩn hội tụ tương ứng đối với tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với a hoặc b hoặc c : $a < c < b$ là điểm bất thường của $f(x)$. Chẳng hạn đối với tích phân $\int_a^b f(x)dx$ với b là điểm bất thường của $f(x)$, ta có tiêu chuẩn Cauchy :

Nếu tồn tại các số $c < b$, $M > 0$, $\alpha < 1$ sao cho $0 \le f(x) \le \frac{M}{(b-x)^\alpha}$

với $c \le x < b$ thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

còn nếu $\alpha \ge 1$ sao cho $f(x) > \frac{M}{(b-x)^\alpha}$ với $c \le x < b$ thì tích phân phân kỳ.

Hệ quả 1 :

Nếu $\alpha < 1$ và $\lim\limits_{x\to b} f(x)\,(b-x)^\alpha$ tồn tại (hữu hạn) thì $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\alpha \ge 1$ và tồn tại : $\lim\limits_{x\to b} f(x)\,(b-x)^\alpha > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Ta cũng có hệ quả 2 :

Nếu khi $x \to b$, $f(x)$ là một vô cùng lớn bậc α so với $\frac{1}{b-x}$ thì tích phân

$\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi $0 < \alpha < 1$ và phân kỳ khi $\alpha \geq 1$, hay $f(x) \sim \dfrac{M}{(b-x)^\alpha}$.

Khi $x \to b^-$, $M > 0$, $0 < \alpha < 1$ $(\alpha \geq 1) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ hội tụ (phân kỳ).

Thí dụ:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $x = 1$ là điểm bất thường.

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}$ khi $x \to 1$

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ là vô cùng lớn bậc $\dfrac{1}{4} < 1$, so với $\dfrac{1}{1-x}$ khi $x \to 1$.

Vậy tích phân là hội tụ.

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \sin x.dx$, $x = 0$ là điểm bất thường.

Với $0 < \alpha < 1$ thì $\ln\sin x.x^\alpha = \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^\alpha \sin^\alpha x.\ln\sin x \to 0$ khi $x \to 0$.

Vậy tích phân hội tụ.

3) Xét $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$, $x = 1$ là điểm bất thường

Ở đây $\dfrac{\ln x}{x-1} \to 1$ khi $x \to 1$

Vậy tích phân phân kỳ.

Chú ý:

Ta đã xét tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)dx\right)$

Ta cũng gọi $+\infty$ $(-\infty)$ là điểm bất thường của tích phân này. Bây giờ xét tích phân đó, nhưng ngoài điểm bất thường $+\infty$ $(-\infty)$ còn có những điểm bất thường khác $c_i : a \leq c_i < +\infty$, $i = 1, 2, ..., n$ (tại lân cận c_i hàm $f(x)$ không bị chặn). Để xét sự hội tụ của tích phân, ta phải phân tích tích phân thành tổng của hai loại tích phân suy rộng đã xét (tích phân của các hàm không bị chặn và tích phân có cận vô hạn).

Thí dụ :

Xét sự hội tụ của:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$: điểm bất thường là $+\infty$ và điểm $x = 0$ khi $\alpha < 1$.

Ta có $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

Tích phân thứ nhất hội tụ khi $1 - \alpha < 1$ hay $\alpha > 0$ (vô cùng lớn bậc $1 - \alpha$ so với $\frac{1}{x}$).

Tích phân thứ hai hội tụ khi $2 - \alpha > 1$ hay $\alpha < 1$ (vô cùng bé bậc $1 - \alpha$ so với $\frac{1}{x}$).

Vậy tích phân đã cho hội tụ khi $0 < \alpha < 1$.

2) $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \Gamma(p)$ gọi là tích phân Euler loại hai hay hàm Gama

Điểm bất thường ∞ và 0 khi $p < 1$.

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Tích phân thứ nhất hội tụ khi $p > 0$ (vô cùng lớn bậc $1 - p < 1$ so với $\frac{1}{x}$).

Tích phân thứ hai tồn tại với mọi $p > 0$ vì khi $\alpha > 1$.

$$\frac{x^{p-1} e^{-x}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \frac{x^{\alpha+p-1}}{e^{x}} \to 0 \quad \text{khi } x \to +\infty$$

Vậy tích phân hội tụ khi $p > 0$.

BÀI TẬP

***1**. Tính trực tiếp (từ định nghĩa) các tích phân:

1) $\int_a^b x^\alpha dx$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $0<a<b$) 2) $\int_0^1 a^x dx$ $(a>0)$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ 4) $\int_0^x \cos t dt$

* **2**. Chứng minh rằng nếu $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì các hàm sau đây cũng khả tích trên $[a, b]$:

1) $\dfrac{1}{f(x)}$, ($\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $\neq 0$ và cùng dấu)

2) $\sqrt{f(x)}$, $f(x)>0$, $\forall x \in [a,b]$

3) $f(x) \cdot g(x)$

* **3**. Chứng minh rằng nếu:

1) $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì $f(x)$ khả tích trên một đoạn bất kỳ $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$

2) $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \ \forall x\in[a,b]$$

3) $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $f(x)>0$ $\forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$

***4.**

1) $|f(x)|$ khả tích trên $[a,b]$ thì $f(x)$ có khả tích trên $[a,b]$ không ?

2) Hàm Riemann $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in I \quad \text{vô tỷ} \\ \dfrac{1}{n} & : x = \dfrac{m}{n} \end{cases}$

$m, n > 1$ nguyên tố cùng nhau,

có khả tích trên $[0,1]$ không ?

3) $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$ và $A \leq f(x) \leq B$, $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(y)$ khả tích trên $[A, B]$ thì hàm hợp $\varphi[f(x)]$ có khả tích trên $[a,b]$ không ?

5. Xác định dấu của các tích phân:

1) $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$ 2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

3) $\int\limits_{1/2}^{1} x^2 \ln x dx$

6. So sánh các tích phân:

1) $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

2) $I_1 = \int\limits_0^{1} e^{-x} dx$ $I_2 = \int\limits_0^{1} e^{-x^2} dx$

3) $I_1 = \int\limits_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ $I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$

7. Ước lượng các tích phân:

1) $\int\limits_0^{1} \sqrt{4+x^2} dx$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\mathrm{tg}x} dx$ 4) $\int\limits_0^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x} dx$

8. Tìm giá trị trung bình của:

1) $f(x) = x^2$ trên $[0,1]$

2) $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[0,100]$

3) $f(x) = \sin^4 x$ trên $[0, \pi]$

9. Chứng minh:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{1} \frac{x^n}{1+x} dx = 0$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$

* **10.** Chứng minh rằng: nếu $f(x)$, $g(x)$ khả tích trên $[a,b]$ thì:

1) $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2}\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{1/2}$

(Bất đẳng thức Schwarz (Cauchy - Буняковский)

2) $\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \le \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{1/2}$

(Bất đẳng thức tam giác)

11. Tính đạo hàm của các hàm số:

1) $I(x)=\int_1^x \ln t\,dt$ $(x>0)$

2) $I(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$

3) $\int_1^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$ $(x>0)$

4) $I(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 dt$

12. Tìm các giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_0^x (\text{arctg}\,t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\text{tg}\,t}\,dt}{\int_0^{\text{tg}\,x}\sqrt{\sin t}\,dt}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$

*** 13.**

1) Cho $f(x)$ liên tục $\forall x>0$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A$

Chứng minh $\lim\limits_{n\to \infty}\int_0^1 f(nx)dx = A$

2) Cho $f(x)>0$ và liên tục $\forall x\ge 0$

Chứng minh $\varphi(x)=\dfrac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt}$ là đơn điệu tăng $\forall x \geq 0$

14. Dùng công thức Newton - Leibniz tính các tích phân

1) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$ 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha d\alpha$

4) $\int\limits_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ 5) $\int\limits_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+1}}$ 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi d\varphi$

7) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ 8) $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{cotg}^4\varphi d\varphi$ 10) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{ch^2 x}$ 11) $\int\limits_0^2 |1-x|dx$

*12) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1}$ $0<\alpha<\pi$

*13) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ *14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab\neq 0)$

15. Có thể áp dụng công thức Newton - Leibniz để tính các tích phân sau không?

1) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ 2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}dx$ 3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)dx$

4) $\int\limits_0^2 x\sqrt{1-x^2}dx$ 5) $\int\limits_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right)dx$

16. Nhờ tích phân xác định, tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nếu:

1) $S_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}$

2) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$

3) $S_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$

4) $S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}$

5) $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \frac{\sin 2\pi}{n} + \ldots + \frac{\sin(n-1)\pi}{n}\right)$

*6) $S_n = \sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$

17. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính.

1) $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

3) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ 4) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$

* **18**. Chứng minh các công thức : $(n\,,\,k\,,\,m \in N)$

1) $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^{2n} x dx = (-1)^n\left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$

2) $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right)$

3) $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$

4) $H_{k,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x dx = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}$

5) $B_{m,n} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

(Hàm Beta hay tích phân Euler loại 1)

6) $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \dfrac{(2m)!(2n)!\pi}{2^{2m+2n+1}.m!n!(m+n)!}$

19. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến.

1) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ 2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$ 4) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ 6) $\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \quad (n \in N)$

7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n \in N)$ *8) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

*9) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ *10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

***20.** Chứng minh các công thức:

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f\left[a+(b-a)x\right]dx, \quad (f(x) \text{ liên tục trên } [a,b])$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx, \quad (f(x) \text{ liên tục trên } [0,1])$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \quad (f(x) \text{ liên tục trên } [0,1])$

4) $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

($f(x)$ tuần hoàn, liên tục $\forall x \in R$, chu kỳ T, $a \in R$)

*** 21**. Chứng minh:

1) $\left[\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \left[\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \dfrac{1}{2n}$

2) $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2.2.4.4...2n.2n}{1.3.3.5...(2n-1)(2n+1)}$

(công thức Wallis)

3) $\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & : n = m \end{cases}$

Với $P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right] \qquad n = 0, 1, 2 ...$

(Đa thức Legendre)

*** 22.** Tính các tích phân:

1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$

2) $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + 1/x} dx$

3) $I = \int_0^3 \text{sign}\left(x - x^3\right) dx$

4) $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$

5) $I = \int_0^6 E(x) \sin \frac{\pi x}{6} dx$

6) $I = \int_0^{\pi} x \,\text{sign}(\cos x) dx$

23. Tính gần đúng các tích phân sau bằng phương pháp Simpson:

1) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ với độ chính xác 10^{-4}

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\ dx$ với độ chính xác 10^{-3}

24. Tính diện tích các hình giới hạn bởi các đường:

1) $x + y = 0$, $y = 2x - x^2$

2) $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ $y = 2x$

3) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. $x = 2a$

5) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$

6) $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0{,}1$, $x = 10$

7) $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$. $y = 0$, $0 \le y \le 1$

*8) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ $x = 2a$

9) $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8$

10) $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 = 12\,(y-1)$

11) $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$

12) $x = a\,(2\cos t - \cos 2t)$

$y = a(2\sin t - \sin 2t)$

13) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ (lá Descartes)

14) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$

$0 \le t \le 2\pi$, $x = a$, $y \le 0$

15) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (cardioide)

16) $r = a\cos 2\varphi$

17) $r = a\sin 3\varphi$

18) $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

19) $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$ $0 < \varepsilon < 1$

20) $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$ ($M\left(\dfrac{a}{2}, 0\right) \in$ hình)

21) $r = 2a\cos 3\varphi$ $r = a$(ngoài đường tròn)

*22) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$

25. Tính độ dài các đường:

1) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

2) $y^2 = x^3$ với $0 \le x \le 4$

3) $y = a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ với $0 \le x \le b$

4) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$ với $1 \le y \le e$

5) $y = \ln\cos x$ với $0 \le x \le a \le \dfrac{\pi}{2}$

*6) $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ với $0 \le x \le \dfrac{5}{3}a$

7) $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2 = a^2 - b^2$

8) $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

9) $x = \mathrm{ch}^3 t$, $y = \mathrm{sh}^3 t$, $0 \le t \le T$

10) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

11) $r = ae^{b\varphi}$, $b > 0$, $0 < r < a$

12) $r = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$ $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

13) $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$

*14) $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right)$ $1 \le r \le 3$

*15) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

26. Tính thể tích các vật giới hạn bởi các mặt:

1) $\dfrac{y^2}{2p} + \dfrac{z^2}{2q} = x$ $x = a$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $z = \dfrac{c}{a}x$, $z = 0$

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $z = 0$, $z = h$

4) $x^2 + y^2 = R^2$ $\quad$ $x^2 + z^2 = R^2$

*5) $x^2 + y^2 = r^2$ $\quad$ $y^2 + z^2 = R^2$ $(r < R)$

6) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $\quad$ $x^2 + y^2 = ax$

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ $\quad$ $z = h_1$, $\quad z = h_2$ $\quad (0 < h_1 < h_2)$

8) $z = 4 - y^2$, $\quad$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\quad x = a$

27. Tính thể tích các vật tròn xoay tạo bởi hình giới hạn bởi các đường:

1) $y = ax - x^2$ $(a > 0)$, $y = 0$ quay quanh Ox

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox

3) $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$, $\quad y = 0$ $\quad x = \pm a$ quay quanh Ox

4) $y^2 = 4ax$, $\quad$ $x = a$ quay quanh Oy

5) $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$ $\quad$ quay quanh đường thẳng $y = -p$

6) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $\quad$ $0 < a \le b$ - quay quanh Ox

7) $x = a\sin^3 t$, $\quad y = b\cos^3 t$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$, $\quad$ quay quanh: a) Ox ; b) Oy

8) $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$ quay quanh Oy $(0 \le t \le 2)$

9) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $\quad (0 \le t \le 2\pi)$, $\quad y = 0$

quay quanh : a) Ox, b) Oy, c) $y = 2a$

***28**. Chứng minh rằng thể tích vật thể được tạo nên khi quay quanh:

1) Oy hình phẳng $\quad a \le x \le b$, $\quad 0 \le y \le y(x)$

là $V = 2\pi\displaystyle\int_a^b xy(x)dx$, $\quad$ ($y(x)$ liên tục trên $[a, b]$)

2) Trục độc cực Ox, hình phẳng $r = r(\varphi)$

$$0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$$

là $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$ $\quad$ ($r(\varphi)$ liên tục trên $[\alpha, \beta]$)

29. Tính thể vật tròn xoay tạo bởi hình giới hạn bởi các đường:

1) $r = a(1 + \cos\varphi)$ $\quad$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$

quay quanh: $\quad$ a) trục cực; $\quad$ b) đường thẳng $r\cos\varphi = \dfrac{-a}{4}$

2) $r = a\cos^2\varphi$ quay quanh trục cực

*3) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ quay quanh:

a) Ox ; b) Oy ; c) $y = x$

30. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau:

1) $9y^2 = x(3-x)^2$, $0 \le x \le 3$ quay quanh Ox

2) $y = \operatorname{tg}x$ $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$ quay quanh Ox

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ quay quanh Oy

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh:

a) Ox ; b) Oy ($a > b$)

5) $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($a < b$) quay quanh Ox

6) $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ $0 \le t \le 2\pi$

quay quanh : a) Oy; b) $y = 2a$

7) $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ quay quanh Ox

*8) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ quay quanh đường thẳng $y = x$

9) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ quay quanh trục cực

10) $r = a$ ($1 + \cos\varphi$) quay quanh trục cực

31. Tìm moment tĩnh đối với các trục Ox, Oy và toạ độ trọng tâm của các hình đồng chất: ($\rho = 1$) - giới hạn bởi các đường:

1) $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$

2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (cung : $x \ge 0$, $y \ge 0$)

3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, ($0 \le t \le 2\pi$); $y = 0$

4) $x = a\cos t$; $y = b\sin t$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

32. Tìm momemt quán tính của hình giới hạn bởi:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ đối với các trục Ox, Oy

2) $ay = 2ax - x^2$ ($a > 0$), $y = 0$ đối với các trục Ox, Oy

33.

1) Tính công để nâng một vật có khối lượng m từ mặt quả đất có bán kính R lên độ cao h.

2) Tính áp lực của nước lên một thành đập thẳng đứng có dạng hình thang, biết rằng đáy trên của đập là a = 70m, đáy dưới là b = 50m và chiều cao là h = 20m.

3) Tính khối lượng của một hình cầu bán kính R, biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm của nó tỉ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến tâm.

34. Tính các tích phân suy rộng:

1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x\,dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

5) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

6) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx \quad (n\in N)$

7) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$

8) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

9) $\int_0^1 \frac{\ln^3 x}{x}dx$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$

*11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\text{tg}x}dx$

*12) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$

35. Xét sự hội tụ của các tích phân:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctg}x}{x^n}dx$

3) $\int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$

4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx \quad (n\ge 0)$

5) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m\text{arctg}x}{2+x^n}dx \quad (n\ge 0)$

7) $\int_0^{+\infty} x^{\mu}e^{-ax}dx \quad (\mu, a>0)$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{k^2+x^2}dx \quad (k,a>0)$

9) $\int_0^{+\infty} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}dx \quad (\lambda>0)$

10) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$

11) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$

13) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x.\cos^q x}$

14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)dx$

15) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$

*16) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{tg}x)^p dx$

*17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

*18) $\displaystyle B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \qquad x, p, q > 0$

*19) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$

*20) $\displaystyle K = \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)x} L_n(x) dx$

với $p > 0$ và $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$) (đa thức Laguerre)

HƯỚNG DẪN VÀ TRẢ LỜI BÀI TẬP

1. 1) $\dfrac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$; $\quad \alpha \neq -1$, $\ln b - \ln a$; $\quad \alpha = -1$

2) $\dfrac{a-1}{\ln a}$

3) 1. Dùng $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$

4) $\sin x$. Dùng $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos ix = \frac{\cos\frac{n+1}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$

2.

3) Dùng đẳng thức:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = \left[f(x'') - f(x')\right].g(x'') + \left[g(x'') - g(x')\right]f(x')$$

3.

2); 3) Chứng minh phản chứng.

4.

1) Không nhất thiết, xét $f(x) = \begin{cases} 1 & : x \in Q \\ -1 : x \in I \end{cases}$

2) Có

3) Không nhất thiết: xét:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0 : y = 0 \\ 1 : y \neq 0 \end{cases} \quad f(x) \text{ là hàm Riemann ở 2)}$$

5.

1) < 0; 2) > 0 3) < 0

6.

1) $I_1 < I_2$ 2) $I_1 < I_2$ 3) $I_1 > I_2$

7.

1) $2 < I < \sqrt{5}$; 2) $\dfrac{2}{9} < I < \dfrac{2}{7}$

3) $0 < I < \dfrac{\pi^2}{16}$; 4) $\dfrac{1}{10\sqrt{2}} < I < \dfrac{1}{10}$

5) $\dfrac{\pi}{2} < I < \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ($1{,}57 < I < 1{,}91$)

8. 1) $\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{20}{3}$; 3) $\dfrac{3}{8}$

9. Dùng định lý trung bình.

10.

a) Xét $\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx$; $\lambda \in R$

b) Xét $\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx$

11.

1) $\ln x$; 2) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$; 3) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$

4) $(\sin x - \cos x).\cos(\pi \sin^2 x)$

12.

1) 1; 2) $\frac{\pi^2}{4}$ 3) 1; 4) 1

13.

1) Đặt $nx = t$; 2) Xét $\varphi'(x)$

14.

1) $\ln\frac{9}{8}$ 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$; 3) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\pi}{6}$

5) $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; 6) $\frac{2}{3}$ 7) ln2 8) 1- cos1

9) $\frac{8}{9\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6}$; 10) $\text{th}(\ln 3)-\text{th}(\ln 2)=\frac{1}{5}$

11) 1; 12) $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$; 13) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$; 14) $\frac{\pi}{2|ab|}$

15.

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ không khả tích Riemann trên [-1,1]

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$ có gián đoạn loại một tại $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

3) $\text{arctg}\frac{1}{x}$ có gián đoạn loại 1 tại $x=0$

4) Hàm dưới dấu tích phân chỉ xác định trên đoạn [-1, 1]

5) $\frac{1}{1+2^{1/x}}$ có gián đoạn loại 1 tại $x=0$

Vậy trong các trường hợp trên không thể áp dụng công thức Newton - Leibniz.

16.

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\ln 2$ 3) $\frac{1}{p+1}$; 4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\frac{2}{\pi}$; 6) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ viết $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}+0\left(\frac{1}{n^3}\right)$

17.

1) $\frac{e^2+3}{8}$; 2) $\frac{\pi}{2}-1$ 3) $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$ 4) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

18.

1) Viết $\operatorname{tg}^{2n}xdx = \operatorname{tg}^{2n-2}xd(\operatorname{tg}x) - \operatorname{tg}^{2n-2}xdx$

2) Đặt $u = \cos^n x$, $dv = \sin nxdx$

6) Đặt $u = \sin^{2m}x\cos^{2n-1}x$, $dv = \cos xdx$

19.

1) $1-\frac{\pi}{4}$; 2) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$; 3) $4-\pi$ 4) $\frac{1}{5}\ln 112$

5) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 7) $\frac{(n-1)!!}{n!!}$ x $\begin{cases} \frac{\pi}{2} & : n \quad \text{chẵn} \\ 1 & : n \quad \text{lẻ} \end{cases}$

8) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; đặt $x-\frac{1}{x}=t$

9) $\frac{\pi^2}{4}$; đặt $x = \pi - t$

10) $\frac{\pi}{8}\ln 2$ đặt $x = \operatorname{tg}\varphi$

20.

1) Đặt $t=\frac{x-a}{b-a}$

2) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, đặt $\frac{\pi}{2}-x=t$

3) $\sin x = \sin(\pi - x)$ đặt $\pi - x = t$

4) Viết $\int_a^{a+T} = \int_a^T + \int_T^{a+T}$

21.

1) Dùng $\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$

3) Xét $\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n.x^m dx$, tích phân từng phần m lần ($m \neq n$)

22.

1) Dùng $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$I_n = (-1)^n\left[-\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\right]$$

2) $\dfrac{3}{2}e^{5/2}$, đặt $x + \dfrac{1}{x} = t$

3) -1; 4) $2(1 - \dfrac{1}{e})$; 5) $\dfrac{30}{\pi}$; 6) $-\dfrac{\pi^2}{4}$

23.

1) 0,7468, $n = 5$ $|R_5| < 0{,}7.10^{-5}$

2) 1,351, $n = 3$ $|R_3| < 0{,}00052$

24.

1) $4\dfrac{1}{2}$ 2) 4 ; 3) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$

4) $ab\left[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\right]$; 5) $2 - \dfrac{1}{\ln 2}$

6) 9,9 - 8,1. lge; 7) $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{1}{3}$ 8) $3\pi a^2$ (Đường cissoide)

9) $2\pi + \dfrac{4}{3}$, $6\pi - \dfrac{4}{3}$; 10) $\dfrac{16}{3}\pi - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{32}{3}\pi + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

11) $\dfrac{3}{8}\pi ab$ 12) $6\pi a^2$ 13) $\dfrac{3}{2}a^2$

14) $\dfrac{a^2}{3}\left(4\pi^3 + 3\pi\right)$; 15) $\dfrac{3}{2}\pi a^2$; 16) $\dfrac{\pi a^2}{2}$

17) $\dfrac{\pi a^2}{4}$; 18) $\dfrac{p^2}{6}.(4\sqrt{2}+3)$; 19) $\dfrac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$

20) $\dfrac{a^2}{4}(\pi-1)$; 21) $a^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 22) $\pi\sqrt{2}$

25.

1) $6a$; 2) $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$; 3) $\sqrt{h^2-a^2}$, $h = a ch\dfrac{b}{a}$

4) $\dfrac{1}{4}(e^2+1)$; 5) $\ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

6) $4a\left(1+\sqrt{3}\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)$; 7) $\dfrac{4}{ab}(b^3-a^3)$ 8) $2\pi^2 a$

9) $\dfrac{1}{2}(\mathrm{ch}^{3/2}2T-1)$ 10) $16a$ 11) $\dfrac{a\sqrt{1+b^2}}{b}$

12) $2a\left[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right]$; 13) $\dfrac{3\pi a}{2}$; 14) $2+\dfrac{1}{2}\ln 3$

15) $s = a\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$, $k^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$.

$k < 1$ tâm sai của ellipse

26.

1) $\pi a^2\sqrt{pq}$; 2) $\dfrac{2}{3}abc$; 3) $\pi abh\left(1+\dfrac{h^2}{3c^2}\right)$

4) $\dfrac{16}{3}R^3$; 5) $V = \dfrac{8R^3}{3}\left[(1+k^2)E(k).(1-k^2)K(k)\right]$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$ (Tích phân elliptiques loại hai)

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\qquad k = \frac{r}{R}$$ (Tích phân elliptiques loại một)

6) $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$; 7) $\frac{\pi h}{6}\left[b_1(a_2+2a_1)+b_2(a_1+2a_2)\right]$

$h=h_2-h_1$; $a_1=\frac{ah_1}{c}$; $b_1=\frac{bh_1}{c}$; $a_2=\frac{ah_2}{c}$; $b_2=\frac{bh_2}{c}$

8) $\frac{16}{3}a$

27

1) $\frac{\pi a^5}{30}$; 2) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 3) $\frac{a^3\pi}{4}\left[e^2+4-e^{-2}\right]$

4) $\frac{16\pi a^3}{5}$; 5) $\frac{4}{3}\pi p^3$; 6) $2\pi^2a^2b$

7) $\frac{32\pi ab^2}{105}$, $\frac{32\pi a^2b}{105}$; 8) $\frac{64}{105}\pi$

9) $5\pi^2a^3$; $6\pi^3a^3$; $7\pi^2a^3$

29.

1) a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; b) $\frac{13}{4}\pi^2a^3$

2) $\frac{4}{21}\pi a^3$;

3) a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{2}{3}\right]$ b) $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$; c) $\frac{\pi^2a^3}{4}$

30.

1) 3π; 2) $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\pi\ln\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}+1}$

3) $\frac{12}{5}\pi a^2$;

4) a) $2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e$ b) $2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$, $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

5) $4\pi^2ab$; 6) a) $16\pi^2a^2$; b) $\frac{32}{3}\pi a^2$

7) $\frac{128}{5}\pi a^2$; 8) $\frac{3\pi a^2}{5}\left(4\sqrt{2}-1\right)$; 9) $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$

10) $\frac{32}{5}\pi a^2$

31.

1) $M_x = M_y = \frac{a^3}{6}$; $\quad x_0 = y_0 = \frac{a}{3}$

2) $M_x = M_y = \frac{3}{5}a^2$; $\quad x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a$

3) $x_0 = \pi a$, $\quad y_0 = \frac{4}{5}a$

4) $x_0 = \frac{4a}{3\pi}$; $\quad y_0 = \frac{4b}{3\pi}$

32.

1) $I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$; $\quad I_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$

2) $I_x = \frac{32a^4}{105}$; $\quad I_y = \frac{8}{5}a^4$

33.

1) $\frac{mgRh}{R+h}$

2) $\frac{(a+2b)h^2}{6} \approx 11{,}3.10^3\,T$

3) $K\pi R^4 \quad (K = \text{const})$

34.

1) $\frac{2}{3}\ln 2$; $\quad$ 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; $\quad$ 3) $\frac{b}{a^2+b^2}$; $\quad$ 4) 0

5) $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $\quad$ 6) $n!$; $\quad$ 7) phân kỳ

8) $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ 9) phân kỳ $\quad$ 10) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; $\quad$ 11) $\frac{\pi}{2}\ln 2$

12) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\left(\text{viết} \quad \int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}\right)$

35.

1) Hội tụ; 2) hội tụ khi : $1 < \alpha < 2$; 3) hội tụ

4) Hội tụ khi : $m > -1$; $n - m > 1$

5) Hội tụ khi : $1 < \alpha < 2$

6) $m > -2$, $n - m > 1$ hội tụ

7) Hội tụ

8) Hội tụ

9) Hội tụ

10) Hội tụ khi $p > 1$; $q < 1$

11) Hội tụ

12) Hội tụ

13) Hội tụ khi $p < 1$; $q < 1$

14) Hội tụ tuyệt đối

15) Hội tụ

16) Hội tụ khi $|p| < 1$; phân kỳ khi $|p| \geq 1$

17) Hội tụ

18) Hội tụ

19) Hội tụ

20) Hội tụ : $K = \dfrac{p^n}{(p+1)^{n+1}}.n!$

Chương 7

HÀM NHIỀU BIẾN SỐ

§1. KHÔNG GIAN n CHIỀU R^n

1.1. Định nghĩa: ***Tập hợp các bộ n số thực có thứ tự $(x_1,x_2,...,x_n)$ gọi là một không gian n chiều R^n, mỗi phần tử $(x_1,x_2,...,x_n) \subset R^n$ gọi là một điểm của không gian đó, ký hiệu $M(x_1,x_2,...,x_n)$ hoặc $M = (x_1,x_2,...,x_n)$, $x_1,x_2,...,x_n$ gọi là các toạ độ của M. Điểm $O(0,0,...,0)$ gọi là điểm gốc toạ độ của R^n, x_1, $x_2,...,x_n$ cũng gọi là toạ độ của vecteur n chiều $\overrightarrow{OM}$ và R^n cũng gọi là một không gian vecteur n chiều***

Trong R^n ta định nghĩa các phép toán:

$(x_1, x_2,..., x_n) + (y_1, y_2,..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,..., x_n + y_n)$: phép cộng

$\alpha(x_1, x_2,..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2,..., \alpha x_n)$ $\alpha \in R$: phép nhân với số

và khoảng cách giữa hai điểm $M = (x_1,x_2,...,x_n)$, $N = (y_1,y_2,...,y_n)$:

$$\rho(M,N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Rõ ràng:

1) $\rho(M,N) > 0$ nếu $M \neq N$.

$\rho(M,N) = 0$ nếu $M = N$.

2) $\rho(M,N) = \rho(N,M)$ (tính đối xứng).

3) $\rho(M,N) \leq \rho(M,P) + \rho(P,N)$ (bất đẳng thức tam giác).

Chú ý:

R^1 chính là đường thẳng số thực.

R^2 là mặt phẳng Oxy.

R^3 là không gian ba chiều thông thường $Oxyz$ mà ta đã nghiên cứu.

1.2. Giới hạn trong R^n

Định nghĩa: ***Trong R^n, điểm A gọi là giới hạn của dãy điểm M_1, M_2,.., M_k... hay dãy $\{M_k\}$ hội tụ tới A nếu***

$$\lim_{k\to\infty} \rho(M_k, A) = 0$$

Ký hiệu $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = A$ hay $M_k \to A$.

Điểm A cũng gọi là điểm giới hạn của dãy.

Rõ ràng nếu $M_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$, $A = (x_1, x_2, ..., x_n)$ thì

$$M_k \to A \Leftrightarrow x_i^{(k)} \to x_i, \ i = 1, 2, ... n.$$

Do đó sự hội tụ trong R^n cũng gọi là sự hội tụ theo toạ độ và giới hạn của dãy điểm trong R^n cũng có các tính chất tương tự như của giới hạn của dãy số trong $\boldsymbol{R}$.

1.3. Tập hợp mở và đóng trong R^n

Định nghĩa: ***Tập hợp***

$$S(A, r) = \{M : \rho(M, A) < r, r \in R \quad r > 0\} \qquad \textbf{(1)}$$

gọi là một hình cầu trong R^n, (1) cũng gọi là một r lân cận của điểm A.

Xét điểm $A \in R^n$ và một tập hợp $\mathscr{A} \subset R^n$ (H.1). Có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:

1) Có một lân cận của A: $S(A,r) \subset \mathscr{A}$. Khi đó A gọi là một điểm trong của $\mathscr{A}$ rõ ràng $A \in \mathscr{A}$.

2) Có một lân cận của A nằm ngoài $\mathscr{A}$, rõ ràng $A \notin \mathscr{A}$, nghĩa là A là điểm trong của phần bù $\mathscr{A}^c$ của $\mathscr{A}$ Khi đó A là một điểm ngoài của $\mathscr{A}$.

3) Với mọi lân cận của A đều chứa cả những điểm thuộc $\mathscr{A}$ và những điểm không thuộc $\mathscr{A}$. Khi đó A gọi là một điểm biên của $\mathscr{A}$. Rõ ràng điểm biên của $\mathscr{A}$ có thể thuộc $\mathscr{A}$ hoặc không.

Tập hợp $\mathscr{A}$ gọi là một tập mở nếu nó không chứa điểm biên nào của nó, và là đóng nếu $\mathscr{A}$ chứa mọi điểm biên của nó.

Thí dụ: Hình cầu (1) rõ ràng là một tập mở cũng gọi là một hình cầu mở. Tập

$\overline{S}(A,r) = \{M : \rho(M,A) \le r\}$ là một tập hợp đóng, gọi là hình cầu đóng.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý:

1) Giao của một số hữu hạn hay hợp của một số bất kỳ tập hợp mở là một tập hợp mở.

2) Hợp của một số hữu hạn hay giao của một số bất kỳ tập hợp đóng là một tập hợp đóng.

Thực vậy, chẳng hạn xét 1), cho n tập hợp mở $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, ..., \mathscr{A}_n$, $\mathscr{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i$.

Xét $A \in \mathscr{A}$ thì $A \in \mathscr{A}_i$,

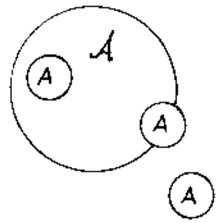
$i = 1,2,..,n$ vì $\mathscr{A}_i$ mở nên A là một điểm trong của $\mathscr{A}_i$, do đó có một lân cận S_i của A.

$$S_i \subset \mathscr{A}_i \text{ và } S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset \mathscr{A} \text{ vậy } \mathscr{A} \text{ mở.}$$

Các phần khác chứng minh tương tự.

1.4. Điểm tụ

Định nghĩa: ***Điểm A gọi là một điểm tụ của tập hợp $\mathscr{A}$ nếu trong mọi lân cận của A đều chứa ít nhất một điểm $M \subset \mathscr{A}$, $M \neq A$.***



H. 82

Rõ ràng A có thể thuộc $\mathscr{A}$ hoặc không.

Từ định nghĩa suy ra:

Định lý 1: ***A là điểm tụ của tập hợp $\mathscr{A}$ khi và chỉ khi có một dãy***

$\{M_k\} \subset \mathscr{A}$ $M_i \neq M_j$ $(i \neq j)$ hội tụ tới A.

*Thực vậy, giả sử A là điểm tụ của $\mathscr{A}$, xét S_1 là một lân cận bất kỳ của A, thì có $M_1 \in \mathscr{A}$, $M_1 \neq A$ lại chọn một lân cận S_2 của A, chọn S_2 đủ nhỏ để S_2 không chứa M_1, trong S_2 có $M_2 \in \mathscr{A}$, $M_2 \neq M_1 \neq A$. Vậy cho trước $\varepsilon > 0$, $\exists k \subset N : M_k \in S_k$, $M_k \in \mathscr{A}$, $M_k \neq A$, $M_k \neq M_{k-1} \Rightarrow \rho(M_k, A) < \varepsilon$, hay $M_k \to A$, ngược lại có dãy $\{M_k\} \subset \mathscr{A}$, $M_i \neq M_j$ $(i \neq j)$ và $M_k \to A$ thì với mọi lân cận r của A, $\exists k_0$, $\forall k > k_0$: $\rho(M_k, A) < r$, suy ra $M_k \in \mathscr{A}$, $M_k \neq A$. Vậy A là điểm tụ của $\mathscr{A}$.

Định lý 2: ***Mọi tập hợp $\mathscr{A}$ là đóng khi và chỉ khi mọi điểm tụ của $\mathscr{A}$ đều thuộc $\mathscr{A}$ hay mọi dãy hội tụ $\{M_k\} \in \mathscr{A}$ đều hội tụ đến $A \in \mathscr{A}$.***

Thực vậy, theo định nghĩa, nếu A là điểm tụ của $\mathscr{A}$ thì nó phải là điểm trong hay điểm biên của $\mathscr{A}$.

Nếu A là điểm trong của $\mathscr{A}$ thì dĩ nhiên $A \in \mathscr{A}$. Nếu A là điểm biên của $\mathscr{A}$ thì vì $\mathscr{A}$ là đóng nên nó chứa mọi điểm biên của nó, nghĩa là $A \in \mathscr{A}$.

Ngược lại, giả sử $\mathscr{A}$ chứa mọi điểm tụ của nó và $A \notin \mathscr{A}$, thì A không phải là điểm tụ của $\mathscr{A}$, nghĩa là có một lân cận của A không chứa điểm nào thuộc $\mathscr{A}$. Vậy A không là điểm biên nào của $\mathscr{A}$, chứng tỏ $\mathscr{A}$ chứa mọi điểm biên của nó nên $\mathscr{A}$ là đóng.

Chú ý: trong R^n, tập hợp trống $\varnothing$ và R^n đều là các tập hợp vừa là đóng vừa là mở.

1.5. Nguyên lý Cauchy: ***Ta biết trong R ta có nguyên lý Cauchy: Mọi dãy cơ bản đều hội tụ trong R và ngược lại, nó biểu thị tính đầy đủ của R. Một dãy $\{M_k\} \subset R^n$ gọi là một dãy cơ bản nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$, $\forall k > k_0$, $\forall m > k_0 \Rightarrow \rho(M_k, M_m) < \varepsilon$. Ta cũng có nguyên lý Cauchy tương tự:***

Mọi dãy $\{M_k\} \subset R^n$ là hội tụ (trong R^n) khi và chỉ khi nó là một dãy cơ bản.

*Thực vậy, giả sử $M_k \to A$ khi đó

$\rho(M_k, M_m) \le \rho(M_k, A) + \rho(A, M_m) \to 0$ (bất đẳng thức tam giác) nghĩa là $\{M_k\}$ là một dãy cơ bản.

Ngược lại, giả sử $M_k = \left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right\}$ là một dãy cơ bản trong R^n thì với mọi i, $i = 1,2,\ldots,n$ ta có:

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}\right|^2} = \rho(M_k, M_m) \to 0$$

nghĩa là dãy số $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ là một dãy cơ bản trong R nên nó có một giới hạn x_i nào đó, $i=1,2,\ldots,n$. Đặt $A=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thì $A \subset R^n$ và $M_k \to A$. Vậy nguyên lý Cauchy cũng biểu thị tính đầy đủ của R^n.

1.6. Nguyên lý Bolzano - Weierstrass

Định nghĩa: ***Ta gọi tập hợp $\mathcal{A} \subset R^n$ là bị chặn (hay giới nội) nếu $\exists A \in \mathcal{A}$ $\exists c > 0$, $\forall M \in \mathcal{A}$ $\rho(M, A) \le c$, nghĩa là $\mathcal{A}$ nằm trọn trong hình cầu đóng tâm A bán kính c.***

Tương tự như đối với R, trong R^n ta cũng có nguyên lý Bolzano_ Weierstrass đặc trưng cho các tập hợp bị chặn:

Mọi dãy vô hạn của một tập bị chặn $\mathcal{A} \subset R^n$ đều chứa một dãy con hội tụ trong R^n.

1.7. Không gian Métrique

a) Định nghĩa: ***Xét một tập hợp X mà các phần tử của nó là các đối tượng bất kỳ, X gọi là một không gian métrique thực nếu có một ánh xạ ρ mà ảnh của mỗi cặp phần tử $(x,y) \in X^2$ là một số thực, ký hiệu: $\rho(x,y)$, $\rho(x,y)$ phải thoả mãn các tiên đề:***

1) $\rho(x,y) > 0$: $x \neq y$; $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (đối xứng).

3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ bất đẳng thức tam giác.

$\rho(x,y)$ gọi là khoảng cách giữa hai phần tử x, y hay métrique của không gian X (X^2 là tích Descartes của X và X). Các phần tử của X dù là đối tượng gì cũng gọi là các điểm của không gian.

Trong không gian métrique X một tập hợp $\mathscr{A}$ gọi là bị chặn hay giới nội nếu:

$$\exists r > 0,\ \exists a \subset X,\ \forall x \in \mathscr{A} : \rho(x, a) \leq r.$$

Thí dụ:

1) R^n : rõ ràng là một không gian métrique.

2) Cho tập hợp các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ ký hiệu $C_{[a,b]}$, khoảng cách giữa hai hàm $x(t), y(t) \in C_{[a,b]}$ được xác định bởi đẳng thức:

$$\rho(x,y) = \max |x(t) - y(t)|\ a \leq t \leq b.$$

Rõ ràng $C_{[a,b]}$ là một không gian métrique vì các tiên đề 1, 2 hiển nhiên thoả mãn, còn tiên đề 3 cũng thoả mãn vì xét

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq$$

$$\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| =$$

$$= \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

suy ra $\quad \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$

Ta có thể mở rộng khái niệm hội tụ, tập hợp đóng mở,... đã xây dựng đối với R^n cho không gian métrique bất kỳ.

b) Không gian đủ

Định nghĩa: ***Trong không gian métrique X nếu mọi dãy cơ bản đều hội tụ thì X gọi là một không gian métrique đầy đủ hay không gian đủ.***

Thí dụ:

1) Như đã biết thì R^n là đủ.

2) Không gian $C_{[a,b]}$ cũng đủ.

*Thực vậy, giả sử $x_n(t)$ là một dãy cơ bản của nó nghĩa là

$\max\limits_{a\le t\le b}|x_n(t)-x_m(t)|\to 0$ $(n, m\to\infty)$, xét t = const, thì dãy số $x_n(t)$ là một dãy cơ bản trong R, nên nó hội tụ đến $x(t)$ nào đó với $a\le t\le b$. Ta sẽ chứng minh $x(t)$ là liên tục trên $[a,b]$, tức là $x(t)\in C_{[a,b]}$.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)=x(t)$ $\forall t\in[a,b]$ nên

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\ \ \forall n>n_0\Rightarrow |x_n(t)-x(t)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad (1)\quad \forall t\in[a,b]$$

Xét $t_0\in[a,b]$, cho t_0 số gia Δt sao cho $t_0+\Delta t\in[a,b]$

$$|\Delta x(t_0)|=|x(t_0+\Delta t)-x(t_0)|\le$$

$$\le|x(t_0+\Delta t)-x_n(t_0+\Delta t)|+|x_n(t_0+\Delta t)-x_n(t_0)|+|x_n(t_0)-x(t_0)|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

(Theo (1) và vì $x_n(t)$ liên tục nên $|x_n(t_0+\Delta t)-x_n(t_0)|\le\dfrac{\varepsilon}{3}$ khi $|\Delta t|\le\delta$).

Vậy $x(t)$ là hàm số liên tục trên $[a,b]$.

3) Xét khoảng $X=(0,1)$ với métrique $d(x,y)=|x-y|$ $x, y\in(0,1)$.

Rõ ràng X là một không gian métrique (thử dễ dàng thấy nó thoả màn 3 tiên đề).

Xét dãy $x_n = \frac{1}{n}$, x_n là một dãy cơ bản $\subset (0,1)$, nhưng dãy hội tụ đến $0 \notin (0,1)$. Vậy X là một không gian métrique không đủ.

c. Tập hợp Compact

Định nghĩa: ***Cho $\mathscr{A}$ là một tập hợp thuộc không gian métrique X, $\mathscr{A}$ gọi là một tập hợp compact nếu mọi dãy $x_n \in \mathscr{A}$ đều chứa một dãy con x_{n_k} hội tụ tới $x \in \mathscr{A}$. Một không gian métrique X gọi là không gian compact nếu nó là một tập hợp compact.***

Từ định nghĩa suy ra

Định lý 1: ***$\mathscr{A}$ compact thì $\mathscr{A}$ đóng.***

Thực vậy, nếu $\{x_n\} \subset \mathscr{A}$ và $x_n \to x$ thì theo giả thiết *compact*, $\{x_n\}$ chứa $x_{n_k} \to a \in \mathscr{A}$ nhưng $\lim x_n = \lim x_{n_k}$ do đó $x = a \in \mathscr{A}$. Vậy $\mathscr{A}$ là đóng.

Thí dụ:

1) Trong R^n mọi tập hợp đóng và bị chặn đều là tập hợp *compact*. Điều này là hiển nhiên do định nghĩa và nguyên lý Bolzano- Weierstrass trong R^n.

2) Đặc biệt trong $\boldsymbol{R}$, mọi đoạn $[a, b]$ đều *compact*.

3) Khoảng $(0,1) \subset \boldsymbol{R}$ là không *compact* vì dãy

$$\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} \in (0,1), x_n \to 0 \notin (0,1)$$

4) Đường thẳng thực $\boldsymbol{R}$ là không *compact* vì dãy

$$\{x_n\} = \{n\} \in \boldsymbol{R}, n \to \infty \notin \boldsymbol{R}.$$

1.8. Miền trong R^n

Ta chỉ xét trong R^2 tức trong mặt phẳng, các khái niệm có thể suy rộng thích hợp cho trong R^n, $n \geq 3$.

a) Đường

Cho các hàm $x = x(t)$, $y = y(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$. Ánh xạ làm tương ứng

$\forall t \in [\alpha,\beta]$ với một vecteur

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \in R^2 \qquad (1)$$

gọi là một đường trong R^2 và (1) gọi là phương trình vecteur của đường đó.

Hệ
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

gọi là phương trình tham số của đường.

Xét đường C có phương trình (1). C gọi là một đường **liên tục**, nếu các hàm $x = x(t)$, $y = y(t)$ là liên tục $\forall t \in [\alpha,\beta]$. C gọi là một **đường trơn** (hay đều) trong $[\alpha,\beta]$ nếu các hàm $x = x(t)$, $y = y(t)$ có các đạo hàm liên tục và $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$ trong $[\alpha,\beta]$. Nói cách khác C là một đường trơn nếu nó là một đường liên tục và có tiếp tuyến biến thiên liên tục.

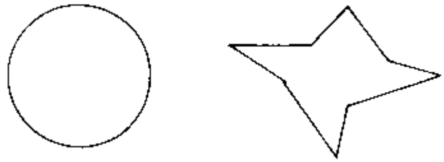
C gọi là một đường **trơn từng phần** (hay từng đoạn) trên $[\alpha,\beta]$ nếu nó là một đường liên tục và nếu có một cách chia đoạn $[\alpha,\beta]$ thành một số hữu hạn phần sao cho trên mỗi phần được chia C là một đường trơn. C gọi là một đường khép kín nếu $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$. Nếu $\exists t, t' \in (\alpha,\beta)$, $t \neq t'$: $\vec{r}(t') = \vec{r}(t)$ thì C gọi là có **điểm kép hay điểm bội**. Một đường không có điểm bội gọi là một đường đơn.

Chú ý:

1) Nếu đồ thị của hàm $y = f(x)$ $a \leq x \leq b$ trơn từng phần trên $[a,b]$ thì hàm $f(x)$ cũng gọi là một hàm trơn từng phần trên $[a,b]$.

2) Như đã biết một đường có thể cho theo phương trình không giải $F(x,y) = 0$ hoặc $F(r,\varphi) = 0$ (trong toạ độ độc cực), các phương trình này có thể đưa về phương trình tham số và ngược lại.

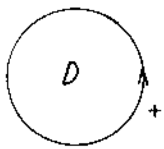
b) Miền: Cho tập $D \subset \boldsymbol{R}^2$. D gọi là một tập hợp **liên thông** nếu nó chứa hai điểm M_1, M_2 thì nó chứa mọi điểm của một đường liên tục nối M_1, M_2. D gọi là một tập hợp **lồi** nếu nó chứa hai điểm M_1, M_2 thì nó chứa mọi điểm của đoạn thẳng nối M_1, M_2. Rõ ràng một tập lồi thì liên thông, ngược lại nói chung không đúng (H.83 cả hai đều liên thông, nhưng chỉ hình thứ nhất lồi).



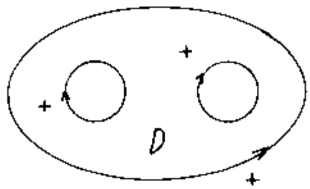
H.83

Tập hợp $D \subset \boldsymbol{R}^2$ gọi là một **miền** trong $\boldsymbol{R}^2$ nếu nó là một tập mở và liên thông.

Nếu xét tập hợp C các điểm biên của D cũng thuộc D, thì D là một tập hợp **đóng**, gọi là **miền đóng** và C gọi là ***biên giới*** của nó, ký hiệu $\overline{D}$ hoặc $D + C$.



H.84



H.85

Sau này ta thường xét những miền mà biên giới của nó là một hoặc một số hữu hạn đường liên tục và khép kín.

Nếu biên giới của D là một đường (liên tục và khép kín) thì D gọi là một **miền đơn liên** (H.84). Nếu biên của D gồm p đường (liên tục và khép kín) thì D

gọi là **miền đa liên** ($p > 2$) (H.85). Ta quy ước: **hướng dương** trên biên C của D là hướng đi trên C của một quan sát viên sao cho phần D kề bên quan sát viên ở bên trái quan sát viên.

Hướng âm là hướng ngược lại (H.84, H.85)

Chú ý:

1) Giao của hai miền đơn liên có thể là một miền không liên thông.

2) Một miền là một tập hợp compact cũng gọi là một miền compact, như vậy cho một miền compact tương đương với việc cho một tập hợp liên thông, đóng và bị chặn. Trong giáo trình này khi xét các **miền** tức là các tập hợp liên thông, các khái niệm và kết quả có thể suy rộng thích hợp cho các tập không liên thông.

§2. ĐỊNH NGHĨA GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

2.1. Định nghĩa: ***Một ánh xạ f từ tập $D \subset R^n$ vào tập hợp các số thực R gọi là một hàm số thực của n biến số hay đối số thực. Ký hiệu $u = f(x_1, x_2,..., x_n)$ hay $u = f(M)$, với $M = (x_1, x_2, ..., x_n) \subset D$, $f(M)$ cũng gọi là giá trị của hàm số tại điểm M.***

Tập hợp D gọi là miền xác định hay miền tồn tại của hàm số và tập hợp D' các giá trị của hàm số $\forall M \in D$ gọi là miền giá trị của hàm số.

$f(M)$ gọi là bị chặn trong D nếu D' bị chặn.

Thí dụ:

1) $z = x^2 + y^2$ là một hàm hai biến xác định $\forall M = (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ là một hàm hai biến xác định $\forall M(x, y) \in$ hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$.

3) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \dfrac{1}{\sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2}}$ là một hàm ba biến xác định $\forall M = (x, y, z) \subset \boldsymbol{R}^3$ sao cho $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ và $x^2 + y^2 + z^2 < 2$, hay $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2$, nghĩa là miền xác định D của hàm số là một hình vành cầu mở.

Đồ thị: Cho hàm $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ có miền xác định là $D \subset R^n$. Tập hợp $G = \{(x_1, x_2, ..., x_n, u) \subset R^{n+1}, u = f(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ gọi là đồ thị của hàm số,

Nếu $D \subset \boldsymbol{R}^2$ thì đồ thị của hàm số là một mặt trong $\boldsymbol{R}^3$.

Thí dụ:

1) $z = x^2 + y^2$ đồ thị là mặt paraboloide tròn xoay trong không gian ba chiều thông thường.

2) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, đồ thị là nửa trên của mặt cầu $(z \geq 0)$

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ trong $\boldsymbol{R}^3$.

Nếu $D \subset R^n$, $n \geq 3$ thì đồ thị của hàm số không có hình ảnh hình học cụ thể, người ta gọi là một siêu mặt trong không gian $n + 1$ chiều.

Chú ý:

**1) Nếu f là một ánh xạ từ $D \subset R^n$ vào $E \subset R^p$ thì ta có hàm $N = f(M)$ với $M \in D$ và $N \subset E$, hàm này được xác định bởi p hệ thức:*

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_p = f_p(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}$$

Như vậy hàm f tương đương với p hàm n biến.

Thí dụ:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

Có miền tồn tại là mặt phẳng R^2 trừ điểm gốc toạ độ. Miền giá trị của hàm cũng là mặt phẳng R^2 trừ gốc toạ độ.

2) Để đơn giản cách viết và lý luận, ta sẽ nghiên cứu chủ yếu là hàm 2 biến, sau đó sẽ suy rộng các khái niệm và kết quả cho hàm n biến bất kỳ.

2.2. Giới hạn và liên tục

Định nghĩa: ***Cho $z = f(x, y)$, xác định trong miền D có điểm tụ là $M_0(x_0, y_0)$. Ta gọi số a là giới hạn của hàm $f(M) = f(x, y)$ tại M_0 hay khi M dần tới M_0 nếu:***

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - a| < \varepsilon.$$

hay

$$\forall M_n(x_n, y_n), M_n \neq M_0, M_n \to M_0 \Rightarrow f(M_n) \to a$$

Ký hiệu:

$$a = \lim_{M \to M_o} f(M) \quad hay \quad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x, y) = a$$

Tương tự như hàm một biến ta cũng có các định nghĩa giới hạn khi $M \to \infty$ (x hoặc $y \to \infty$) và giới hạn vô hạn.

Thí dụ:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin xy}{xy} y$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} \lim\limits_{y \to a} y = a$ (đặt $xy = t$, $x \to 0$, và $y \to a \Rightarrow t \to 0$)

2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, xét $x, y > 0$ ta có $0 < \dfrac{x+y}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

Nhưng $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) = 0$ vậy $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} = 0$

Chú ý:

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$, $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$, *gọi là các giới hạn lặp, còn* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ *cũng gọi là giới hạn kép.*

Các giới hạn lặp có thể tồn tại, nhưng giới hạn kép không tồn tại và ngược lại.

Thí dụ:

Xét $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-y}{x+y}) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{-y}{y} = -1$

Nhưng $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$ không tồn tại vì xét hai dãy $(x_n, y_n) = (\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n})$ và $(x_n', y_n') = (\dfrac{2}{n}, \dfrac{1}{n})$ đều dần tới (0, 0) khi $n \to \infty$

Khi đó

$$f(x_n, y_n) = 0 \to 0,\ f(x_n', y_n') = \left(\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right) \to \dfrac{1}{3}$$

Định nghĩa: *Hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ gọi là liên tục tại M_0 nếu*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

Điểm M_0 gọi là điểm liên tục của hàm số. Điểm mà (1) không thoả mãn gọi là điểm gián đoạn của hàm số. Hàm $f(x, y)$ gọi là liên tục trong một miền nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc miền đó.

Hàm $z = f(x, y)$ gọi là liên tục đều trong miền D nếu

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall M, M' \subset D,\ \rho(M, M') < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M')| < \varepsilon.$$

Tương tự như hàm một biến ta có:

Định lý: *Nếu $f(x, y)$ liên tục trong miền compact D thì*

1) $f(x, y)$ là bị chặn trong D.

2) $f(x, y)$ đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M trong D.

3) Với γ: $m < \gamma < M$ sẽ tồn tại ít nhất một điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ sao cho $f(M_0) = \gamma$.

4) $f(x, y)$ là liên tục đều trong D.

Thí dụ:

1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ là liên tục

$\forall (x, y): \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ x, y \ne 0 \end{cases}$, nghĩa là liên tục trong hình tròn đóng $x^2 + y^2 \le 1$ trừ tại tâm O(0, 0), z có gián đoạn vô hạn (loại 2).

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 & \text{nếu } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Hàm này liên tục $\forall(x, y) \subset R^2$ và gián đoạn trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ vì $f(x, y)$ bị chặn $(f(x, y) \leq 1)$ nên các điểm trên đường tròn đó là các điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

Trường hợp hàm *n* biến:

Ta có thể suy rộng định nghĩa giới hạn và liên tục của hàm hai biến cho hàm n biến bất kỳ.

Cho $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trong miền D có điểm tụ M_0.

$$a = \lim_{M \to M_0} f(M) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - a| < \varepsilon.$$

$f(M)$ là liên tục tại M_0 nếu $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, và ta cũng có các tính chất của hàm liên tục n biến như của hàm 2 biến.

§3. ĐẠO HÀM RIÊNG – VI PHÂN

3.1. Định nghĩa: ***Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D. Xét (x, y) và $(x + \Delta x, y) \in D$ với $y = const$. Đặt $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ gọi là số gia riêng phần của z đối với x, nếu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn) thì giới hạn đó gọi là đạo hàm riêng của z đối với x tại điểm (x, y), ký hiệu:***

$$z'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng của f đối với y tại (x, y):

$$z'_y, \quad f'_y(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Tổng quát: Cho $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trong miền $D \subset R^n$. Xét $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $M' = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \subset D$. Nếu

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta x_k^u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(M') - F(M)}{\Delta x_k}$$

tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn) thì giới hạn này gọi là đạo hàm riêng của f tại M đối với x_k. Ký hiệu: $u'_{x_k}, f'_{x_k}(M), \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial F(M)}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta x_k^u}{\Delta x_k}$.

Theo định nghĩa: Để tính đạo hàm riêng của hàm nhiều biến đối với một biến nào đó thì coi các biến kia là không đổi và tính đạo hàm của hàm số theo biến đó như đạo hàm của hàm một biến.

Thí dụ: Tính đạo hàm riêng của :

1) $z = \ln(x^2 + y)$, xác định khi $y > -x^2$.

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + y}, \qquad z'_y = \frac{1}{x^2 + y}.$$

2) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$ xác định khi: $2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k + 1)\pi$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}} \cdot \cos(x^2 + y^2) 2x = \frac{x\cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}}$$

3) Tính u'_x, u'_y, u'_z tại (1, 1, 1)

nếu $u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5$.

$u'_x = 3x^2y^2z + 2$, $u'_x(1, 1, 1) = 5$.

$u'_y = 2x^3yz - 3$, $u'_y(1, 1, 1) = -1$.

$u'_z = x^3y^2 + 1$, $u'_z(1, 1, 1) = 2$.

3.2. Sự khả vi – vi phân

a) Định nghĩa: ***Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong miền D. Xét $M(x, y)$ và $M'(x + \Delta x, y + \Delta y) \subset D$. Nếu số gia của hàm số viết được dưới dạng:***

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = a.\Delta x + b.\Delta y + 0(\rho) \qquad (1)$$

Trong đó a, b = const, không phụ thuộc Δx, Δy, chỉ phụ thuộc vào điểm (x, y), $0(\rho)$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của ρ, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, thì hàm số f gọi là khả vi tại điểm M, và biểu thức $a.\Delta x + b.\Delta y$ gọi là vi phân toàn phần của hàm số tại M, kí hiệu $dz = a.\Delta x + b.\Delta y$.

Nếu ít nhất một trong các số a, b khác 0 thì vi phân dz là phần chính bậc nhất đối với các số gia Δx, Δy của hàm khả vi, có thể xảy ra trường hợp a, b = 0 đối với một hàm khả vi; Δz xác định bởi (1) gọi là số gia toàn phần của hàm số tại (x, y).

Rõ ràng: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Hàm f gọi là khả vi trong một miền nếu nó khả vi tại mọi điểm thuộc miền đó.

Từ định nghĩa ta suy ra:

b) Tính chất:

1° Nếu hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (x, y) thì nó liên tục và có các đạo hàm riêng tại điểm đó: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = b$.

Chứng minh: Theo giả thiết và theo định nghĩa hàm khả vi tại (x,y), ta có:

$$\Delta z = a.\Delta x + b.\Delta y + 0(\rho) \qquad (1)$$

suy ra khi Δx, $\Delta y \to 0$ thì $\Delta z \to 0$ (Δx, $\Delta y \to 0$ thì $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, $0(\rho) \to 0$). Vậy hàm số là liên tục tại (x, y). Cũng theo giả thiết ta có (1), xét $y = \text{const}$ thì $\Delta y = 0$ và $\Delta z = \Delta_x z = a\Delta x + 0(\Delta x)$. Do đó:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x + 0(\Delta x)}{\Delta x} = a.$$

Tương tự: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = b$.

Từ định lý ta có công thức tính vi phân tại M.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

(tương tự như hàm một biến: x, y là các biến độc lập thì $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$).

Ta có thể viết $dz = d_x z + d_y z$ với $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}.dx$, $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}.dy$, gọi là các vi phân riêng của z đối với x, y tại điểm (x, y).

Thí dụ:

1) $$d(arctg\frac{y}{x}) = \frac{-y}{x^2[1 + \frac{y^2}{x^2}]}dx + \frac{1}{x[1 + \frac{y^2}{x^2}]}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

2) $$d(\ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{1}{2} d\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

2^0. ***Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại lân cận điểm $M(x, y)$ và các đạo hàm riêng đó liên tục tại $M(x, y)$ thì hàm số khả vi tại $M(x, y)$.***

Chứng minh: Xét $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Ta viết:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Áp dụng công thức Lagrange vào các hiệu trên ta có :

$$\Delta z = f'_x(c_1, y + \Delta y).\Delta x + f'_y(x, c_2).\Delta y \text{ với } c_1 \in (x, x + \Delta x);\ c_2 \in (y, y + \Delta y).$$

Theo giả thiết: f'_x, f'_y liên tục tại (x, y) nên:

$f'_x(c_1, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha$, $f'_y(x, c_2) = f'_y(x, y) + \beta$, $\alpha, \beta \to 0$ khi $\Delta x, \Delta y \to 0$.

Do đó $\Delta z = f'_x(x, y).\Delta x + f'_y(x, y).\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$.

Rõ ràng $\alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$ là một vô cùng bé bậc cao hơn bậc của $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

vì

$$0 < \frac{|\alpha\Delta x + \beta\Delta y|}{\rho} = \left|\frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \le |\alpha| + |\beta| \to 0.$$

khi $\Delta x, \Delta y \to 0$. Vậy theo định nghĩa hàm $z = f(x, y)$ là khả vi tại (x, y).

Đối với hàm n biến $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ta có định nghĩa tương tự như đối với hàm 2 biến:

Hàm f gọi là khả vi tại M nếu: $\Delta u = a_1.\Delta x_1 + a_2.\Delta x_2 + ... + a_n.\Delta x_n + 0(\rho)$, $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + ... + \Delta x_n^2}$, a_i không phụ thuộc Δx_i, $i = 1, 2, ..., n$, $du = a_1.\Delta x_1 + a_2.\Delta x_2 + ... + a_n.\Delta x_n$ gọi là vi phân toàn phần của f tại M.

Ta cũng có các kết quả:

Nếu f khả vi tại M thì f liên tục tại M và tại đó có $\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i$, ***(i = 1, 2, ..., n) và khi đó:***

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}.dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}.dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}.dx_n.$$

nếu f có các đạo hàm riêng liên tục tại M thì f khả vi tại M.

Chú ý: Ta thấy có điểm khác nhau cơ bản giữa hàm 1 biến và hàm nhiều biến:

- Đối với hàm 1 biến: f có đạo hàm tại 1 điểm tương đương với f khả vi tại điểm đó.

- Đối với hàm nhiều biến ta không có điều tương đương ấy.

Thí dụ: Xét sự khả vi của các hàm:

1) $z = x^3 + y^3 - 3axy$, xác định và liên tục $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$ là liên tục và $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vậy hàm số là khả vi $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và $dz = 3[(x^2 - ay)dx + (y^2 - ax)dy]$.

$$2)\ f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & \text{khi } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{khi } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Rõ ràng f là liên tục $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ta có:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} e^{\frac{-1}{\Delta x^2}} = 0,\ f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} e^{\frac{-1}{\Delta y^2}} = 0,$$

Với $x^2 + y^2 > 0$ ta có:

$$f'_x = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}; \quad f'_y = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}$$

Rõ ràng $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ là liên tục $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ trừ tại $(0, 0)$. Mặt khác:

$$\left| \frac{x}{(x^2+y^2)^2} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} \right|$$

$$\le \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{e^t} \to 0 \text{ khi } t \to \infty,$$

$$t = \frac{1}{(x^2 + y^2)}, x, y \to 0 \Rightarrow t \to \infty$$

Do đó:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f'_x(x, y) = 0 = f'_x(0,0)$$

Tương tự:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f'_y(x, y) = 0 = f'_y(0,0)$$

nghĩa là $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ liên tục tại (0, 0). Vậy f có các đạo hàm riêng liên tục $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Theo định nghĩa f khả vi $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Ta có thể xét sự khả vi của f tại (0, 0) như sau:

Ta có $\quad \Delta f(0, 0) = f'_x(0, 0).\Delta x + f'_y(0, 0).\Delta y + 0(\rho)$ theo trên :

$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, do đó:

$$0(\rho) = e^{\frac{-1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad \frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho^2}} \to 0 \text{ khi } \rho \to 0.$$

Vậy f khả vi tại (0, 0).

3) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ tại (0, 0). Ta có:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}}{\Delta x} = 1, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta y^3}}{\Delta y} = 1$$

Xét $\Delta f(0, 0) = \Delta x + \Delta y + 0(\rho)$, suy ra

$0(\rho) = \Delta f(0, 0) - \Delta x - \Delta y$ cho $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{n}$, $\Delta x, \Delta y \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$

Khi đó:

$$\frac{0(\rho)}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}}$$

Vậy $0(\rho)$ không phải là vô cùng bé bậc cao hơn ρ. Theo định nghĩa f không khả vi tại (0, 0) (tuy nó có các đạo hàm riêng tại (0, 0)).

c) Áp dụng vi phân vào tính gần đúng

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $(x, y) \subset D$. Ta có:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$= f'_x(x, y) . \Delta x + f'_y(x, y) . \Delta y + 0(\rho).$$

Khi Δx, Δy khá bé ta có thể bỏ qua $0(\rho)$ và có công thức gần đúng:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y) . \Delta x + f'_y(x, y) . \Delta y$$

Thí dụ: Tính gần đúng $T = (1.04)^{2,02}$. Ta có $T = (1 + 0,04)^{2 + 0,02}$. Đặt $x = 1$, $\Delta x = 0,04$, $y = 2$, $\Delta y = 0,02$ thì $T = (x + \Delta x)^{y + \Delta y} = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ với:

$$f(x, y) = x^y;\ f'_x(x, y) = yx^{y-1};\ f'_y(x, y) = x^y \ln x.$$

Theo công thức tính gần đúng trên thì:

$T = f(1, 2) + f'_x(1,2).\Delta x + f'_y(1,2).\Delta y$ hay $T \approx 1 + 2.(0,04) = 1,08$.

Chú ý: Người ta thường dùng biểu thức:

$$\frac{dz}{z} = d \ln z = \frac{\partial \ln z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \ln z}{\partial y} \Delta y$$

để đánh giá sai số tương đối khi tính gần đúng.

§4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP VÀ HÀM ẨN

4.1. Hàm hợp

a) Hàm hai biến

Định nghĩa: ***Cho hàm $z = f(u, v)$ trong miền D, trong đó u, v là các hàm số của x, y trong miền D_1: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ và khi điểm (x, y) biến thiên trong D_1 thì điểm (u, v) không vượt ra ngoài miền D. Khi đó hàm $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ gọi là hàm hợp (hay hàm kép) của các biến độc lập x, y trên miền D_1 qua hai biến trung gian u, v. Để tính đạo hàm của z tại (x, y) ta có:***

Định lý: ***Nếu các hàm $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại (x, y) và hàm $z = f(u, v)$ khả vi tại điểm (u, v) tương ứng ($u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$) thì z có các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ tại điểm (x, y) được xác định bởi các công thức:***

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2)$$

Chứng minh:

Cho x số gia Δx, y = const thì u, v, z sẽ có các số gia tương ứng $\Delta_x u$, $\Delta_x v$, $\Delta_x z$. Theo giả thiết thì $f(u, v)$ là khả vi tại (u, v) do đó:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v,\ \alpha, \beta \to 0 \text{ khi } \Delta_x u, \Delta_x v \to 0.$$

(Theo chứng minh tính chất 2 ở §3): $0(\rho) = \alpha\Delta x + \beta\Delta y$).

Chia hai vế cho $\Delta x \neq 0$ ta có:

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}$$

cho $\Delta x \to 0$, theo giả thiết và định nghĩa đạo hàm riêng, ta được:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tương tự, ta có công thức (2)

Đặc biệt nếu $u = u(x)$, $v = v(x)$ khi đó $z = f[u(x), v(x)]$ là hàm một biến và

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

Thí dụ:

1) Cho $z = \ln\sqrt{(u^2 + 2v)}$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$. Tính $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{u}{u^2 + 2v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + 2v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

Theo các công thức (1), (2) ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{u^2 + 2v}(ue^{x+y^2} + 2x), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u^2 + 2v}(2uye^{x+y^2} + 1)$$

2) Cho $z = \sqrt{u} + \sin^2 v$, $u = (x + 1)^3$, $v = 3x$. Ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}3(x+1)^2 + 6\sin v\cos v = \frac{3}{2}\sqrt{x+1} + 3\sin 6x.$$

b) Trường hợp tổng quát

Cho hàm $w = f(u_1, u_2, ..., u_m)$ trong miền $D \subset R^m$, trong đó $u_i = u_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ trong $D_1 \subset R^n$ và khi điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$

biến thiên trong D_1 thì điểm $(u_1, u_2, ..., u_m)$ không vượt ra ngoài miền D, khi đó hàm

$$w = f[u_1(x_1, x_2, ..., x_n), u_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., u_m(x_1, x_2, ..., x_n)].$$

gọi là hàm hợp của n biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$ qua m biến trung gian $u_1, u_2, ..., u_m$.

Ta cũng có quy tắc tính đạo hàm của w đối với các biến độc lập tương tự như trường hợp hai biến (với giả thiết tương ứng).

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial w}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Đặc biệt $u_1 = x$, $u_i = u_i(x)$, $i = 2, 3, ..., m$ thì $w = f[x, u_2(x), u_3(x), ..., u_m(x)]$ là hàm một biến, khi đó:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + ... + \frac{\partial w}{\partial u_m}\frac{du_m}{dx}$$

$\frac{dw}{dx}$ xác định theo công thức này gọi là đạo hàm toàn phần của w đối x.

Thí dụ:

1) Cho $w = f(u, v)$ với $u = x + at$, $v = y + bt$.

Chứng minh

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} \quad (1)$$

Ta có:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial u}.a + \frac{\partial w}{\partial v}.b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}.1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v}.1$$

Từ đó suy ra (1).

2) Cho $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, tính $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

Đặt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \neq 0$ thì:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{d(\frac{1}{r})}{dr} = -\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

Tương tự:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

vậy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2}{r^6} + \frac{y^2}{r^6} + \frac{z^2}{r^6} = \frac{r^2}{r^6} = \frac{1}{r^4}.$$

Chú ý: Vi phân của hàm nhiều biến cũng có tính chất bất biến về dạng dù các đối số là độc lập hay là hàm số của các biến độc lập khác, như hàm một biến, chẳng hạn xét:

$$z = f(x, y),\ x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \text{ (theo a)}$$

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Biểu thức này cũng là vi phân của hàm $z = f(x, y)$ với x, y là các biến độc lập.

4.2. Hàm ẩn

Định nghĩa: ***Hàm $y = f(x)$ được xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$ (1), nói chung không giải ra đối với y trong đó $F(x, y)$ là một hàm xác định trên tích Descartes XY (tập hợp các cặp có thứ tự (x, y) với $x \subset X$, $y \in Y$) gọi là một hàm ẩn trên tập hợp $E \subset X$, nếu $\forall x \in E$ cố định thì (1) có một nghiệm duy nhất $y = f(x)$. Do định nghĩa ta có $F[x, f(x)] \equiv 0$, $\forall x \subset E$, nghĩa là ta có một đồng nhất thức. Trường hợp $x \in E$ cố định, phương trình (1) có nhiều nghiệm thì ta nói phương trình đó xác định một hàm đa trị. Trường hợp trên hàm ẩn gọi là hàm ẩn đơn trị.***

Tương tự, từ hệ phương trình:

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (2)$$

ta có thể xác định các hàm ẩn:

$$u_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n). \ (j = 1, 2, \ldots, m)$$

để

$$F_i[x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \equiv 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m, \ \forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subset R^n$$

Chú ý: Hàm $u = f(M)$ đã định nghĩa ở §2 cũng gọi là hàm hiển.

Thí dụ:

1) Phương trình $x^3 + y^3 = a^3$ xác định được hàm ẩn

$$y = \sqrt[3]{a^3 - x^3} \ \text{ vì } \ x^3 + \left(\sqrt{a^3 - x^3}\right)^3 = a^3, \ \forall x \in \mathbf{R}$$

2) Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

xác định được hai hàm ẩn $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \forall x \in [-a, a]$.

3) Phương trình $y - x - \varepsilon \sin y = 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Xác định một hàm ẩn $y = y(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Thực vậy vì xét $x = y - \varepsilon \sin y$, $\forall y \in \mathbf{R}$.

Rõ ràng hàm x là đơn điệu tăng vì xét $y_2 > y_1$ ta có $x_2 - x_1 = (y_2 - y_1) - \varepsilon(\sin y_2 - \sin y_1)$ nhưng $|\sin y_2 - \sin y_1| \leq y_2 - y_1$ do đó $x_2 - x_1 > 0$ và $x_2 > x_1$. Theo định lý tồn tại hàm ngược, giá trị của y được xác định duy nhất theo x. Vậy phương trình đã cho xác định một hàm ẩn $y = y(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, nhưng không giải ra đối với y.

4) Phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

xác định hai hàm ẩn 2 biến x, y: $z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ vì thay lại ta có một đồng nhất thức.

5) Hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

xác định hai hàm ẩn $y = y(x)$, $z = z(x)$, $-1 \leq x \leq 1$. Vì giải hệ: y, z theo x và thay lại hệ ta có các đồng nhất thức.

Theo định nghĩa thì phương trình (1) hoặc hệ (2) có thể xác định các hàm ẩn cũng có thể không. Chẳng hạn, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ không xác định hàm ẩn nào. Vậy với những điều kiện nào thì tồn tại các hàm ẩn xác định từ (1) hoặc (2) và đạo hàm của chúng.

Định lý 1 *(Tồn tại hàm ẩn một biến)*

Giả thiết

1) $F(x, y)$ là liên tục trong lân cận của $(x_0, y_0) \in R^2$.

2) $F(x_0, y_0) = 0$.

3) F(x, y) có đạo hàm riêng $\frac{\partial F}{\partial y}$ liên tục trong lân cận đó và $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$ thì:

1) Phương trình (1) xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ xác định trong một lân cận ε của x_0.

2) Khi $x = x_0$ thì $y(x_0) = y_0$.

3) Hàm $y = y(x)$ liên tục trong lân cận ε.

Ta thừa nhận định lý này (độc giả có thể xem trong các giáo trình giải tích cho sinh viên chuyên toán).

Định lý 2: ***Với các giả thiết của định lý 1 và thêm giả thiết: F có F'_x liên tục trong lân cận của (x_0, y_0) thì hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình (1) có đạo hàm liên tục trong lân cận của x_0 và:***

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}} \qquad (a)$$

Chứng minh: Ta có $F[x, y(x)] \equiv 0$, $\forall x \in \varepsilon$. Cho x số gia Δx, sao cho $x + \Delta x \in \varepsilon$ khi đó y có số gia $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ và $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$. Do đó:

$$\Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$$

Theo giả thiết $F(x, y)$ là khả vi nên:

$$0 = \Delta F(x, y) = F'_x(x, y).\Delta x + F'_y(x, y).\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y;$$

$$\alpha, \beta \to 0, \Delta x, \Delta y \to 0.$$

Do đó: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}$$

Cho $\Delta x \to 0$ thì $\alpha, \beta \to 0$ và $\Delta y \to 0$ do $y = y(x)$ liên tục trong ε, theo định lý 1, khi đó

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \qquad \text{và} \qquad \frac{dy(x_o)}{dx} = -\frac{F'_x(x_o, y_o)}{F'_y(x_o, y_o)}$$

Theo giả thiết F'_x, F'_y là liên tục tại x_0, $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$ nên $\frac{dy}{dx}$ là liên tục tại x_0. Trường hợp tổng quát, với các hàm ẩn xác định từ hệ (2) ta có.

Định lý 3. Giả thiết:

1) Các hàm F_i, $i = 1, 2, ..., m$ liên tục trong lân cận r của điểm

$$M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0) \in R^{m+n}$$

2) $F_i(M_0) = 0$.

3) F_i có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận r và

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_{12}}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{m1}}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ tại } M_0.$$

Định thức $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$ gọi là định thức hàm Jacobie của các hàm F_i đối với các biến u_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ thì:

1) Phương trình (2) xác định một hệ hàm ẩn

$u_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ trong lân cận r_1 của điểm $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in R^n$.

2) $f_i(P_0) = u_i^o$, $(i = 1, 2, ..., m)$.

3) f_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ là liên tục trong r_1.

4) f_i, $(i = 1, 2, ..., m)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong r_i và được xác định từ hệ.

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial x_k}=0 \quad \textbf{(b)}\ (i = 1, 2, ..., m),\ (k = 1, 2, ..., n).$$

Đặc biệt: Hàm ẩn 2 biến $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình $F(x, y, z) = 0$ thì:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F'_x}{F'_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F'_y}{F'_z}\quad (F'_z \neq 0)$$

Thí dụ: Xét các giả thiết và điều kiện tồn tại các hàm ẩn và đạo hàm của chúng đã được thoả mãn, tính đạo hàm của các hàm ẩn xác định từ các phương trình:

1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ với $y = y(x)$. Ta có

$F'_x = 3(x^2 - ay)$, $F'_y = 3(y^2 - ax)$. Vậy theo công thức (a)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$$

2) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\frac{y}{x}$ với $y = y(x)$ có thể tính $\frac{dy}{dx}$ bằng cách đạo hàm 2 vế phương trình này:

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}\ \text{hay } x + yy' = xy' - y.$$

Giải ra ta có:

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ với $z = z(x, y)$. Khi đó:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{-\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}$$

4) $\begin{cases} x+y+u+v=a \\ x^2+y^2+u^2+v^2=b^2 \end{cases}$

với $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Đạo hàm 2 vế các phương trình theo x rồi theo y:

$$1 + u'_x + v'_x = 0$$

$$1 + u'_y + v'_y = 0$$

$$2x + 2u\,u'_x + 2vv'_x = 0\ ;$$

$$2y + 2u\,u'_y + 2vv'_y = 0$$

Giải hệ này ta có:

$$u'_x = \frac{x-v}{v-u} \qquad v'_x = \frac{u-x}{v-u}$$

$$u'_y = \frac{y-v}{v-u} \qquad v'_y = \frac{u-y}{v-u}$$

với $u - v \neq 0$.

§5. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

5.1. Đạo hàm cấp cao

Định nghĩa: ***Cho hàm số z = f(x, y) có đạo hàm riêng*** $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ ***trong một miền D nào đó, các đạo hàm này lại là các hàm số của x, y trong D, giả sử các hàm số này lại có đạo hàm riêng theo các đối số tại một điểm (x, y) ∈ D, thì các đạo hàm riêng này gọi là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số z = f(x, y) tại (x, y) ∈ D. Ký hiệu:***

$$f''_{xx}(x,y) = (f'_x(x,y))'_x \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yx}(x,y) = (f'_y(x,y))'_x \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yy}(x,y) = (f'_y(x,y))'_y \quad \text{hay} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Còn $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ cũng gọi là các đạo hàm riêng cấp một của f tại (x, y). Các đạo hàm f''_{xx}, f''_{yy} gọi là các đạo hàm vuông, thường ký hiệu $f''_{xx} = f''_{x^2}$, $f''_{yy} = f''_{y^2}$. Các đạo hàm f''_{xy}, f''_{yx} gọi là các đạo hàm chữ nhật hay đạo hàm hỗn hợp.

Tương tự, xuất phát từ đạo hàm riêng cấp hai, ta định nghĩa các đạo hàm riêng cấp ba, ..., cấp n, ký hiệu:

$$f^{(n)}_{x^i y^j}(x,y) \text{ hay } \frac{\partial^n z}{\partial x^i \partial y^j},\ i + j = n$$

Đối với hàm n biến: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ta cũng định nghĩa các đạo hàm riêng cấp hai, ..., cấp m một cách tương tự, ký hiệu:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^i \partial x_2^j \ldots \partial x_n^k},\quad i + j + \ldots + k = m.$$

Thí dụ:

1) Cho $z = x^3 + y^3 - 3xy$. Ta có:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

2) Cho

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ chứng minh } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Ta có:

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}, \ \frac{\partial u}{\partial x} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Ta thấy trong ví dụ 1, các đạo hàm riêng hỗn hợp của z bằng nhau *(= -3)*. Tổng quát ta có:

Định lý Schwarz

Giả thiết:

1) Hàm f(x, y) xác định trong miền $D \subset R^2$.

2) Tồn tại các đạo hàm riêng cấp một $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ ***và các đạo hàm riêng hỗn hợp*** $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ ***trong miền D.***

3) Các đạo hàm riêng hỗn hợp là liên tục tại (x, y) $\in$ ***D. Thì*** $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$

Chứng minh: Xét biểu thức

$$T = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

và hàm phụ $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Thì $T = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Theo 2): $\varphi'(x) = f'_x(x, y + \Delta y) - f'_x(x, y)$. Vậy có thể áp dụng định lý Lagrange đối với $\varphi(x)$ trên đoạn $[x, x + \Delta x]$:

$T = \Delta x \varphi'(c_1) = \Delta x[f_x'(c_1, y + \Delta y) - f_x'(c_1, y)] \quad c_1 \in (x, x + \Delta x).$

Cũng theo 2) thì $f_x(x, y)$ là khả vi trên đoạn $[y, y + \Delta y]$ nên lại áp dụng định lý Lagrange đối với y ta được:

$$T = \Delta x.\Delta y.f''_{xy}(c_1, c_2) \qquad (1)$$

$$c_2 \in (y, y + \Delta y)$$

Bây giờ viết T dưới dạng

$$T = [f(x + \Delta x, \ y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]$$

và hàm phụ $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Lý luận tương tự như trên ta đi đến:

$$T = \Delta y.\Delta x.f''_{yx}(\overline{c_1}, \overline{c_2}) \qquad (2)$$

$$\overline{c_1} \in (x, x + \Delta x), \ \overline{c_2} \in (y, y + \Delta y).$$

Theo 3) $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ là liên tục tại (x, y) nên:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(c_1, c_2) = f''_{xy}(x,y); \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(\overline{c_1}, \overline{c_2}) = f''_{yx}(x,y)$$

Do đó và theo (1), (2) ta có: $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Định lý trên có thể mở rộng cho trường hợp đạo hàm riêng hỗn hợp cấp m $(m > 2)$ và cho hàm n $(n > 2)$ biến, nghĩa là:

$$\frac{\partial^m u(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1^{k_1}, \partial x_2^{k_2}, ..., \partial x_n^{k_n}}, \qquad k_1 + k_2 + ... + k_n = m$$

không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm.

Thí dụ: $u = e^{xy}\sin z$, tính toán ta có:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy}(1 + xy)\cos z$$

5.2. Vi phân cấp cao

Định nghĩa: ***Cho hàm $z = f(x, y)$ trong miền D. Nếu hàm f khả vi tại $\forall(x, y) \in D$ thì vi phân toàn phần của nó là***

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Rõ ràng vi phân dz lại là một hàm của x, y trong D. Nếu hàm này lại khả vi tại $(x, y) \in D$ thì vi phân của nó gọi là vi phân cấp 2 của f tại (x, y), ký hiệu:

$$d^2z = d(dz) \quad hay\ d^2f(x, y) = d(df(x, y)).$$

và ta cũng nói hàm f khả vi 2 lần tại (x, y), còn dz cũng gọi là vi phân cấp một của f tại (x, y).

Tổng quát, ta định nghĩa vi phân cấp n của $z = f(x, y)$ tại (x, y): $d^nz = d(d^{n-1}z)$ và của hàm n biến $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $d^2u = d(du), ..., d^nu = d(d^{n-1}u)$. Nếu một hàm số có vi phân cấp n tại một điểm thì hàm đó gọi là khả vi n lần tại điểm đó.

Công thức tính: Cho $z = f(x, y)$ khả vi n lần tại $(x, y) \in D$, xét x, y là các biến độc lập thì:

$$d^2z = d(dz) = d(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy) =$$

$$= d(\frac{\partial z}{\partial x}dx) + d(\frac{\partial z}{\partial y}dy) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Ta có thể dùng ký hiệu hình thức:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

trong đó:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

chỉ các phép lấy đạo hàm cấp hai của z đối với x, y; dx^2, dy^2, $dxdy$ chỉ các bình phương và tích thực sự. Tương tự ta có d^3z,...

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx, + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Đối với hàm n biến $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ta có:

$$d^m u = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^m . u.$$

Nếu các đối số là các biến phụ thuộc hay các hàm số của các đối số khác thì như đã biết vi phân cấp 1 của hàm số có tính bất biến về dạng, còn vi phân cấp $n (n \geq 2)$ không có tính chất ấy, chẳng hạn xét hàm hai biến $z = f(x, y)$, $x = x(t, s)$, $y = y(t, s)$ lúc đó dx, dy là hàm số của t, s; $d^2x \neq 0$, $d^2y \neq 0$; d^2z, ..., d^nz sẽ không còn có dạng như trường hợp x, y là các biến độc lập.

§6. CÔNG THỨC TAYLOR

Ta đã biết đối với hàm một biến $F(t)$ khả vi $n+1$ lần tại lân cận điểm t_0, thì trong lân cận này ta có công thức Taylor cấp n của $F(t)$:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))(t - t_0)^{n+1}$$

$0 < \theta < 1$. Đặt $t - t_0 = \Delta t = dt$ thì công thức này được viết dưới dạng:

$$F(t) = F(t_0) + dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0 + \theta\Delta t). \quad 0 < \theta < 1.$$

Ta sẽ mở rộng công thức này cho hàm nhiều biến.

6.1. Hàm hai biến

Trước hết xét hàm hai biến ta có:

Định lý: ***Nếu hàm $z = f(x, y)$ khả vi $n + 1$ lần trong lân cận của điểm (x_0, y_0) thì trong lân cận này ta có công thức:***

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) \qquad (T) \qquad 0 < \theta < 1.$$

Trong đó $x - x_0 = \Delta x = dx$, $y - y_0 = \Delta y = dy$, gọi là công thức Taylor cấp n của $f(x, y)$.

***Chứng minh:** Đặt $x = x_0 + t.\Delta x$, $y = y_0 + t.\Delta y$, $0 \le t \le 1$ khi đó

$$f(x, y) = f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y) = F(t) \qquad (1)$$

là hàm 1 biến t, rõ ràng:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) \qquad (2).$$

Theo giả thiết $f(x, y)$ khả vi $n + 1$ lần tại lân cận (x_0, y_0) suy ra $F(t)$ khả vi $n + 1$ lần tại lân cận $t = 0$.

Do đó ta có công thức Taylor của $F(t)$ tại lân cận điểm $t = 0$ (công thức MacLaurin)

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0) = dF(0) + \frac{1}{2!}d^2F(0) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}(\theta). \qquad 0 < \theta < 1. \qquad (3)$$

với $\quad dt = \Delta t = 1 - 0 = 1.$

Theo (1) thì:

$$dF(t) = df(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y) = df(x, y)$$

với: $\quad x = x_0 + t.\Delta x,\ y = y_0 + t.\Delta y.$

do đó:

$$dF(t) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy.$$

Tại $t = 0$ thì $x = x_0$, $y = y_0$ nên:

$$dF(0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy = df(x_0, y_0).$$

Tương tự

$$d^2F(0) = d^2f(x_0, y_0), \ldots, d^nF(0) = d^nf((x_0, y_0);$$

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Thay các biểu thức này vào (3) và theo (2) suy ra công thức *(T)* phải chứng minh.

Công thức *(T)* có thể viết dưới dạng (hàm điểm):

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \ldots +$$

$$+\frac{1}{n!}d^nf(M_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(M_c) \qquad (T')$$

Trong đó $M(x, y)$, $M(x_0, y_0)$, $M_c(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)$, $0 < \theta < 1$.

6.2. Hàm n biến

Tương tự như đối với hàm hai biến ta có công thức Taylor cấp m đối với hàm n biến $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m + 1$ lần khả vi trong lân cận của điểm $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$\boldsymbol{f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2f(M_0) + \ldots +}$$

$$\boldsymbol{+\frac{1}{m!}d^mf(M_0) + \frac{1}{(m+1)!}d^{(m+1)}f(M_c) \qquad (T'').}$$

với $M_c = \left(x_1^o + \theta\Delta x_1, x_2^o + \theta\Delta x_2, \ldots x_n^o + \theta\Delta x_n\right)$, $\quad 0 < \theta < 1.$

Thí dụ: Viết công thức Taylor của hàm: $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ tại lân cận điểm (1, -2). Rõ ràng hàm $f(x, y)$ khả vi n (bất kỳ) lần tại lân cận điểm (1, -2) vì các đạo hàm riêng cấp cao hơn 2 của f đều bằng không, nên số hạng dư R_n $(n \geq 2)$ bằng 0, do đó công thức Taylor của f tại lân cận điểm (1, -2) là:

$$f(x, y) = f(1, -2) + df(1, -2) + \frac{1}{2!}d^2f(1, -2).$$

$$f(1,-2) = 5,\ f'_x = 4x - y - 6,\ f'_x(1,-2) = 0,\ f'_y = -x - 2y - 3,\ f'_y(1,-2) = 0$$

$$f''_{x^2} = 4,\ f''_{x^2}(1,-2) = 4,\ f''_{xy} = -1,\ f''_{xy}(1,-2) = -1,\ f''_{y^2} = -2,\ f''_{y^2}(1,-2) = -2,$$

do đó: $f(x, y) = 5 + \frac{1}{2!}[4dx^2 - 2dxdy - 2dy^2].$

Nhưng $dx = \Delta x = (x - 1),\ dy = \Delta y = y + 2.$

Vậy $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2.$

Chú ý: Số hạng cuối cùng của các công thức Taylor (T), (T') hay (T'') gọi là số hạng dư dạng Lagrange:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(M_c).$$

có thể viết: $R_n = 0(\rho^n)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (vô cùng bé bậc cao hơn bậc của ρ^n) $R_n = 0(\rho^n)$ gọi là số dư của công thức Taylor dạng Peano.

§7. CỰC TRỊ

7.1. Định nghĩa - Điều kiện cần

a). Định nghĩa: *Hàm $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ xác định tại lân cận S của điểm $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ gọi là đạt cực đại (tiểu) tại M_0 nếu $\forall M = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ ta có: $f(M) \leq f(M_0)$ $(f(M) \geq f(M_0))$. M_0 gọi là điểm **cực đại (tiểu)** của f tại M_0.*

Cực đại hay cực tiểu gọi chung là cực trị. Cực trị theo định nghĩa này cũng gọi là cực trị "địa phương".

b) Điều kiện cần

Nếu hàm $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ đạt cực trị tại $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ và có các đạo hàm riêng tại M_0 thì $f'_{x_i}(M_0) = 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Thật vậy, cho $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0, ..., x_n = x_n^0$ thì theo điều kiện cần của cực trị hàm một biến thì $f'_{x_1}(M_0) = 0$, tương tự $f'_{x_2}(M_0) = 0$, ..., $f'_{x_n}(M_o) = 0$. Tương tự như đối với hàm một biến, cực trị của hàm nhiều biến có thể đạt tại điểm M_0 mà $f'_{x_i}(M_o) = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, M_0 cũng được gọi là điểm dừng của hàm số. Ngoài ra cực trị đó cũng có thể đạt tại điểm mà các đạo hàm riêng bằng ∞ hay không tồn tại, gọi chung là các điểm bất thường hay tới hạn của hàm số.

Chú ý: Nếu thay điều kiện "có đạo hàm" bằng điều kiện "khả vi" thì điều kiện cần trên có thể viết là:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = 0 \text{ tại } M_0.$$

7.2. Điều kiện đủ

a) Hàm hai biến

Định lý: *Giả thiết*

1) $f(x, y)$ xác định và liên tục trong lân cận S của điểm (x_0, y_0).

2) $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một và hai liên tục trong S.

3) $M_0(x_0, y_0)$ là điểm dừng của hàm số.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

4) $d^2f(M_0) \neq 0, \forall dx, dy : dx^2 + dy^2 \neq 0$.

Thì:

$$f_{max} = f(x_0, y_0) \text{ khi } d^2f(M_0) < 0 \text{ trong } S.$$

$$f_{min} = f(x_0, y_0) \text{ khi } d^2f(M_0) > 0 \text{ trong } S.$$

3) $f(x, y)$ không đạt cực trị tại M_0 khi $d^2f(M_0)$ thay đổi dấu trong S.

Chứng minh: Viết công thức Taylor cấp một của f trong lân cận S của (x_0, y_0):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(M_c)$$

$$M_c(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Từ giả thiết 3) suy ra: $df(M_0) = 0$ và (1) viết được:

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2}d^2f(M_c) \qquad (2).$$

Từ giả thiết 2) suy ra: $d^2f(M)$ là một hàm liên tục tại M_0.

$$\lim_{M \to M_0} d^2f(M) = d^2f(M_0)$$

Nếu $d^2f(M_0) < 0$ (> 0) trong S thì từ tính chất của giới hạn suy ra $d^2f(M) < 0$ (>0) trong S, vì $M_c \in S$ nên $d^2f(M_c) < 0$ (>0). Do đó (2) viết được:

$$f(M) - f(M_0) < 0 \ (> 0) \text{ hay } f(M) < f(M_0) \ (> f(M_0)).$$

Theo định nghĩa thì $f(M)$ đạt cực đại (tiểu) tại M_0:

$$f_{max} = f(M_0) \quad (f_{min} = f(M_0)).$$

Rõ ràng $d^2f(M_0)$ thay đổi dấu trong S thì $f(M)$ không đạt cực trị tại M_0.

Đặt $\qquad A = f''_{x^2}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{y^2}(M_0).$

thì $\qquad d^2f(M_0) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = g(dx, dy).$

là một dạng toàn phương của 2 biến dx, dy. Theo tiêu chuẩn Sylvester trong đại số.

Điều kiện cần và đủ để $g(\Delta x, \Delta y)$ là xác định dương (âm) nghĩa là $g(\Delta x, \Delta y) > 0$ (< 0) với mọi Δx, Δy là $(\Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0)$:

$$A > 0, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \quad \left(A < 0, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \right)$$

hay $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, $(A < 0$, $AC - B^2 > 0)$. Do đó kết luận của định lý trên có thể viết dưới dạng:

Nếu tại M_0:

1) $A > 0$, $AC - B^2 > 0$ thì $f_{min} = f(M_0)$.

2) $A < 0$, $AC - B^2 > 0$ thì $f_{max} = f(M_0)$.

3) $AC - B^2 < 0$ thì không có cực trị tại M_0.

Chú ý: Nếu $AC - B^2 = 0$ tại M_0 thì f có thể đạt cực trị cũng có thể không đạt cực trị tại M_0. Chẳng hạn $f(x, y) = x^2y^2$, dễ dàng thấy $AC - B^2 = 0$ tại $(0, 0)$. Nhưng $f(x, y) - f(0, 0) = x^2y^2 \geq 0$, $\forall M(x, y)$ trong lân cận của $(0, 0)$ vậy $f_{min} = f(0, 0) = 0$. Đối với $f(x, y) = x^3y^3$ ta cũng có $AC - B^2 = 0$ tại nhưng $f(x, y) - f(0, 0) = x^3y^3$ thay đổi dấu trong lân cận của $(0, 0)$. Vậy f không đạt cực trị tại $(0, 0)$.

b) Hàm n biến

Tương tự như đối với hàm hai biến, ta có thể chứng minh điều kiện đủ tổng quát sau đây đối với hàm n biến bất kỳ.

Định lý: ***Nếu tại lân cận điểm $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:***

1) Hàm $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ khả vi m lần và mọi đạo hàm riêng cấp m đều liên tục tại M_0.

2) $df(M_0) = 0$, $d^2f(M_0) = 0$, ...,

$$d^{m-1}f(M_0) = 0,\ \ d^m f(M_0) > 0 \text{ hoặc } d^m f(M_0) < 0.$$

Thì:

1) f(M) đạt cực trị tại M_0 khi m chẵn $f_{min} = f(M_0)$ nếu $d^m f(M_0) > 0$; $f_{max} = f(M_0)$ nếu $d^m f(M_0) < 0$.

2) f(M) không đạt cực trị tại M_0 nếu m lẻ.

Thí dụ: Tìm cực trị của các hàm

1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

$z'_x = 3x^2 - 3y = 0,\ \ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ y_1 = 0$ và $x_2 = 1,\ y_2 = 1.$

ta có 2 điểm dừng $M_1(0,\ 0)$, $M_2(1,\ 1)$.

Tính:

$$z''_{x^2} = 6x\ ,\ \ z''_{xy} = -3\ ,\ \ z''_{y^2} = 6y\ .$$

Tại $M_1(0,\ 0)$: $A = z''_{x^2}(0,0) = 0$, $B = z''_{xy}(0,0) = -3$, $C = z''_{y^2}(0,0) = 0$.

$$\Rightarrow AC - B^2 = -9 < 0. \text{ Vậy } z \text{ không đạt cực trị tại } M_1.$$

Tại $M_2(1,\ 1)$:

$$A = z''_{x^2}(1,1) = 6\ ,\ \ B = z''_{xy}(1,1) = -3\ ,\ \ C = z''_{y^2}(1,1) = 6\ .$$

$$\Rightarrow AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0,\ A = 6 > 0.$$

Vậy z đạt cực tiểu tại M_2, $z_{min} = z(1,\ 1) = -1$.

2) $$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y,\ \ z'_y = 4y^3 - 2y - 2x\ .$$

$z'_x = 0,\ \ z'_y = 0$ cho các điểm dừng: $M_1(0,\ 0)$, $M_2(-1,\ -1)$, $M_3(1,1)$.

$$z''_{x^2} = 12x^2 - 2,\ \ z''_{xy} = -2,\ \ z''_{y^2} = 12y^2 - 2,$$

Tại $M_1(0,\ 0)$: $AC - B^2 = 0$, do đó cần xét theo định nghĩa ta có

$$\Delta z(0,0) = z(0+\Delta x, 0+\Delta y) - z(0,0)$$

hay $$\Delta z(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - \Delta x^2 - 2\Delta x\Delta y - \Delta y^2.$$

Xét $\Delta x = \Delta y$ thì $\Delta z(0,0) = 2\Delta x^2(\Delta x^2 - 2) < 0$ khi $0 < \Delta x < \sqrt{2}$. Nếu $\Delta y = -\Delta x$ thì $\Delta z(0,0) = 2\Delta x^4 > 0$. Vậy $\Delta z(0, 0)$ nhận các giá trị có dấu khác nhau tại lân cận điểm $M_1(0, 0)$. Theo định nghĩa M_1 không phải là điểm cực trị của z.

Tại $M_2(-1, -1)$, $M_3(1,1)$: $AC - B^2 = 96 > 0$ và $A = 10 > 0$ nên z đạt cực tiểu tại các điểm đó: $z_{min} = -2$.

3) $$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

$$u'_x = 2x + 2; \; u'_y = 2y + 4; \; u'_z = 2z - 6.$$

Điểm dừng: $M(-1, -2, 3)$.

$$u''_{x^2} = 2; \; u''_{y^2} = 2; \; u''_{z^2} = 2; \; u''_{xy} = u''_{yz} = u''_{zx} = 0.$$

Tại M:

$$d^2u = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz)^2 u = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0.$$

Vậy tại M_1, u đạt cực tiểu $u_{min} = u(-1, -2, 3) = -14$.

7.3. Cực trị của hàm ẩn

Từ các kết quả đã biết đối với hàm hiển $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ta có thể suy ra:

Định lý: Giả thiết

1) Hàm ẩn $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $M \subset D \subset R^n$ xác định từ phương trình

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0 \tag{1}$$

với $F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0$ $\forall M \in D$.

2) u khả vi liên tục hai lần trong D (các đạo hàm riêng cấp hai đều liên tục).

3) $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$ là điểm dừng của $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ thì:

1) M_0 thoả mãn hệ:

$$F'_{x_1}(M_o) = 0,\ F'_{x_2}(M_o) = 0,\ F'_{x_n}(M_o) = 0,\ F(M_o) = 0.$$

2) f đạt cực tiểu (đại) tại M_0 khi $d^2u > 0$ (< 0). Theo công thức tính đạo hàm hàm ẩn và vi phân cấp hai của hàm n biến ta có:

$$d^2u = -\frac{1}{F'_u}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i x_j\ ,\ \left(F'_u \neq 0\right).$$

Thí dụ: Tìm cực trị của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

Để tìm điểmdừng ta lập hệ:

$$\begin{cases} F'_x = 2x - 2 = 0 \\ F'_y = 2y + 2 = 0 \\ F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được các điểm dừng: $M_1(1,-1)$ với $z = -2$, $M_2(1,-1)$ với $z = 6$ ứng với 2 hàm ẩn z_1, z_2 xác định từ phương trình trên $F'_z = 2z - 4$, $F''_{x^2} = 2$, $F''_{y^2} = 2$, $F''_{xy} = 0$.

Do đó và theo công thức trên:

$$d^2z_1(M_1) = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) > 0,\ d^2z_2(M_2) = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) < 0$$

Vậy z_1 đạt cực tiểu tại M_1: $(z_1)_{min} = -2$ và z_2 đạt cực đại tại M_2: $(z_2)_{max} = 6$.

7.4. Cực trị có điều kiện

a) Định nghĩa: ***Cho hàm $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (1) xác định trong miền $D \subset R^n$ với các điều kiện (ràng buộc):***

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ (i = 1, 2, ..., m) \qquad (2).$$

Điểm $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$ gọi là điểm cực tiểu (đại) của hàm (1) với điều kiện (2) nếu $f(M) \geq f(M_0)$ ($\leq f(M_0)$) $\forall M$ trong lân cận của M_0 thoả mãn (2). Hàm $f(M)$ gọi là đạt cực tiểu (đại) có điều kiện tại M_0 gọi chung là cực trị có điều kiện.

Thí dụ: Tìm các kích thước của một hình hộp có thể tích lớn nhất, nếu diện tích toàn phần bằng $2a$. Rõ ràng bài toán đưa về tìm cực đại có điều kiện của hàm $V = xyz$ với điều kiện $2xy + 2yz + 2zx = 2a$.

b) Cách tìm cực trị có điều kiện

1) Hàm hai biến: Giả sử tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ (1) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ (2). Nếu từ (2), ta giải được $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ thì $z = f[x, y(x)]$ là hàm một biến, ta đã biết cách tìm cực trị của nó. Nếu phương trình (2) xác định y là hàm ẩn của x, nói chung không giải ra đối với y khi đó ta có phương pháp sau đây để tìm điểm dừng của hàm số.

Phương pháp Lagrange

Giả thiết

1) $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm (1) với điều kiện (2).

2) Trong lân cận của M_0, các hàm f và φ có các đạo hàm riêng liên tục và $\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 \neq 0$ tại M_0 thì tồn tại $\lambda \in R$ sao cho:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(L)}$$

Số λ được gọi là một nhân tử Lagrange.

Chứng minh: Giả sử $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Theo giả thiết thì (2) xác định y là hàm ẩn của x trong lân cận của S của x_0. Ta có $\varphi(x, y(x)) = 0$, $\forall x \in S$. Do đó $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ hay $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$ tại M_0 (3). Mặt khác $z = f(x, y)$ với $y = y(x)$, theo giả thiết:

$\frac{dz}{dx} = f'_x + f'_y . y' = 0$ tại M_0 (4), hay $f'_x dx + f'_y dy = 0$ tại M_0. Nhân (3) với λ và cộng với (4) ta có:

$(f'_x + \lambda\varphi'_x)dx + (f'_y + \lambda\varphi'_y)dy = 0$, $\forall \lambda \in R$. Chọn $\lambda = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{\varphi'_y(x_0, y_0)}$

thì λ, x_0, y_0 là nghiệm của hệ (L). ***Theo phương pháp này việc tìm cực trị có điều kiện của (1), (2) đưa về việc tìm cực trị thông thường của hàm.***

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

gọi là hàm Lagrange.

Điểm dừng của hàm Φ được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 0 \\ \Phi'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

và xét $d^2\Phi$ (như cực trị thông thường). Nếu $d^2\Phi > 0$ (< 0) tại $M_0(x_0, y_0)$ thì điểm M_0 là điểm cực tiểu (đại) có điều kiện của hàm f, với điều kiện dx, dy thoả mãn: $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$.

Thí dụ: Tìm cực trị của hàm $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Lập $\Phi(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Điểm dừng của z xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Giải ta có:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2},\ x_1 = \frac{4}{5},\ y_1 = \frac{3}{5},\ M_1 = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$$

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2},\ x_2 = -\frac{4}{5},\ y_2 = -\frac{3}{5},\ M_2 = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0$$

$$d^2\Phi(M_1) = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2) = 5(dx^2 + dy^2) > 0.$$

Vậy M_1 là điểm cực tiểu có điều kiện của z: $z_{\min} = z(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 1$.

$$d^2\Phi(M_2) = 2\lambda_2(dx^2 + dy^2) = -5(dx^2 + dy^2) < 0.$$

Vậy M_2 là điểm cực đại có điều kiện của z: : $z_{\max} = z(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 11$.

2) Hàm nhiều biến: Dễ dàng có thể mở rộng các kết quả ở 1) cho trường hợp hàm n biến như sau: ***việc tìm cực trị của hàm*** $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***với các điều kiện*** $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***= 0 (i = 1, 2, ..., m, m < n) đưa đến việc tìm cực trị thông thường của hàm:***

$$\Phi(M) = f(M) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(M).$$

Φ gọi là hàm Lagrange, λ_i (i = 1, 2, ..., m) gọi là các nhân tử Lagrange, với các giả thiết tương ứng với 1) ta có:

Nếu tại điểm dừng $M_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ của f: $d^2\Phi > 0$ (<0) thì f đạt cực tiểu (đại) có điều kiện tại M_0 với điều kiện là các biến $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ thoả mãn hệ:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} dx_k = 0 \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Thí dụ:

1) Trở lại thí dụ ở a): Tìm cực trị của hàm $v = xyz$ (1) với điều kiện $xy + yz + zx = a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $a > 0$ (2). Rõ ràng các điểm cực trị của hàm v và hàm $u = \ln v$ là trùng nhau, nên bài toán trên tương đương với:

Tìm cực trị của hàm: $u = \ln x + \ln y + \ln z$ (1') với điều kiện

$$xy + yz + zx = a, \ (x, y, z, a > 0) \tag{2'}$$

Ta lập hàm $\Phi = \ln x + \ln y + \ln z + \lambda(xy + yz + zx - a) = 0$. Điểm dừng của u được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = \dfrac{1}{x} + \lambda(y+z) = 0 \\ \Phi'_y = \dfrac{1}{y} + \lambda(z+x) = 0 \\ \Phi'_z = \dfrac{1}{z} + \lambda(x+y) = 0 \\ xy + yz + zx = a \end{cases}$$

Giải λ theo x, y, z từ 3 phương trình đầu và cho bằng nhau ta được $x = y = z$. Thay vào phương trình thứ 4 ta được: $x = y = z = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$. Vậy ta có điểm dừng $M_0\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}, \sqrt{\dfrac{a}{3}}, \sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)$ với $\lambda = -\dfrac{3}{2a}$. Tính

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\lambda,\ \ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}=\lambda,\ \ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}=\lambda$$

Tại M_0 và với $\lambda = -\frac{3}{2a}$, ta có:

$$d^2\Phi = -\frac{3}{a}(dx^2+dy^2+dz^2)-\frac{3}{a}(dxdy+dydz+dzdx)=$$

$$=-\frac{3}{a}(dx^2+dy^2+dz^2+dxdy+dydz+dzdx) \qquad (3)$$

Từ (2') $(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=0$.

Tại M_0: $2.\sqrt{\frac{a}{3}}\,(dx+dy+dz)=0$. Do đó $dz=-(dx+dy)$, thay vào (3) ta được:

$$d^2\Phi=-\frac{3}{a}(dx^2+dy^2+dxdy)<0$$

Vậy M_0 là điểm cực đại có điều kiện của u, nó cũng là điểm cực đại có điều kiện của v, và các kích thước phải tìm của hình hộp là:

$$x=y=z=\sqrt{\frac{a}{3}}\text{. Khi đó } V_{max}=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

2) Chứng minh bất đẳng thức Cauchy

$$\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}\le\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n},\ x_i>0\ (i=1,2,...,n).$$

Để giải bài toán, ta sẽ tìm cực đại của hàm:

$$V=\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}\ \text{ với điều kiện }\ x_1+x_2+...+x_n=a\quad(a>0).$$

trong miền $x_i>0$ ($i=1,2,...,n$). Rõ ràng các điểm cực trị của hàm v và $u=\ln v$ là trùng nhau, do đó bài toán trên đưa về:

Tìm cực đại của hàm: $u=\ln v=\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+...+\ln x_n)$ với điều kiện $x_1+x_2+...+x_n=a$.

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi = \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n) + \lambda(a - x_1 - x_2 ... - x_n).$$

$$\begin{cases} \Phi'_{x_1} = \dfrac{1}{nx_1} - \lambda = 0; \quad \Phi'_{x2} = \dfrac{1}{nx_2} - \lambda = 0; ... \quad \Phi'_{x_n} = \dfrac{1}{nx_n} - \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = a \end{cases}$$

hệ này cho nghiệm duy nhất $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{a}{n}$. Vậy ta có điểm dừng duy nhất $M_0(\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, ..., \frac{a}{n})$ với

$$\lambda = \frac{1}{n.\dfrac{a}{n}} = \frac{1}{a}.$$

Tính:

$$\Phi''_{x_1^2} = -\frac{1}{nx_1^2}, \quad \Phi''_{x_2^2} = -\frac{1}{nx_2^2}, ..., \quad \Phi''_{x_n^2} = -\frac{1}{nx_n^2}$$

$$\Phi''_{x_1, x_2} = 0, \quad \Phi''_{x_1, x_3} = 0, ..., \quad \Phi''_{x_{n-1}, x_n} = 0$$

Ta có $d^2\Phi(M_0) = -\frac{n}{a^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2) < 0$. vậy u đạt cực đại tại M_0, và do đó: v đạt cực đại tại M_0: $v_{\max} = \frac{a}{n}$, nhưng $a = x_1 + x_2 + ... + x_n$ vậy:

$$\sqrt[n]{x_1 . x_2 .... x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

7.5. Giá trị bé nhất và lớn nhất (cực trị tuyệt đối)

Cho hàm $f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ liên tục trong miền compact $D \subset R^n$, thì theo định lý Weierstrass: f đạt một giá trị bé nhất m và một giá trị lớn nhất M trên D. Rõ ràng m, M của f chỉ có thể đạt tại các điểm tới hạn trong D và trên biên của D. Do đó để tính m, M:

- Tìm các điểm tới hạn của f trong D.

- Tìm điểm tới hạn của f trên biên của D.

Tính giá trị của f tại các điểm tới hạn vừa tìm được và so sánh chúng với nhau, ta được m, M.

Thí dụ: Tìm giá trị bé nhất m và giá trị lớn nhất M của

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \text{ trong miền } D\text{: } x^2 + y^2 + z^2 \leq 100.$$

- Tìm điểm dừng trong $D(x^2 + y^2 + z^2 < 100)$ từ hệ $u'_x = 2x = 0;\quad u'_y = 4y = 0;\quad u'_z = 6z = 0$. Vậy ta có một điểm dừng $M_1(0, 0, 0)$.

- Tìm điểm dừng trên biên của $D(x^2 + y^2 + z^2 = 100)$, tức là tìm điểm dừng của cực trị có điều kiện của hàm u với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

Lập hàm Lagrange:

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(100 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Điểm dừng được xác định từ hệ:

$$\begin{cases} \Phi'_x = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \Phi'_y = 4y - 2\lambda y = 0 \\ \Phi'_z = 6z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được các điểm dừng:;

$M_2(\pm 10, 0, 0)$ với $\lambda = 1$.

$M_3(0, \pm 10, 0)$ với $\lambda = 2$.

$M_4(0, 0, \pm 10)$ với $\lambda = 3$.

- Tính $u(M_1) = 0$, $u(M_2) = 100$, $u(M_3) = 200$, $u(M_4) = 300$. Vậy $m = 0$, $M = 300$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng nếu dãy $M_k \subset R^n$, $M_i \neq M_j$ $(i \neq j)$ hội tụ tới $M_0 \in R^n$ thì M_0 là điểm tụ của dãy này.

2. Chứng minh rằng khoảng cách $\rho(M, N)$ trong R^n là một hàm liên tục theo các biến trong R^n.

3. Chứng minh rằng trong R^n:

Mọi hình cầu mở là một tập hợp mở.

Mọi hình cầu đóng là một tập hợp đóng.

4. Trong tập hợp các số hữu tỷ Q, khoảng cách giữa $r_1, r_2 \in Q$ được xác định bởi $\rho(r_1, r_2) = | r_1 - r_2 |$. Chứng minh Q là một không gian metrique, Q có phải là không gian đủ không?

5. 1) Tìm $f(x)$ nếu $f(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ $(x, y > 0)$

2) Tìm $f(x, y)$ nếu $f(x + y, x - y) = xy + y^2$.

3) Tìm f và z nếu $z = xf(\frac{y}{x})$ và $z = \sqrt{1 + y^2}$ khi $x = 1$.

6. Tìm miền xác định của các hàm số:

1) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$.

2) $z = \ln(x + y)$.

3) $z = \arcsin\frac{y}{x}$.

4) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.

5) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$ $\quad a > 0$.

6) $z = \sqrt{y \sin x}$.

7) $z = arctg\, \dfrac{x - y}{1 + x^2 y^2}$.

8) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$

9) $\sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$

10) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

11) $u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$.

12) $u = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}} + \ln(xyz)$.

7. Tìm giới hạn:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{xy}$.

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to a}} (1 + \dfrac{y}{x})^x$.

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$.

5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x + y) \sin \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{y}$.

6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

7) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2 + y^2) e^{(x+y)}$

8) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

8. Tìm $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))$ và $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$: nếu

1) $f(x,y)=\dfrac{x^y}{1+x^y}$, $a=+\infty$, $b=+0$.

2) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$.

3) $f(x,y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

9. Xét sự liên tục và gián đoạn của các hàm số:

1) $z=\ln(x^2+y^2)$.

2) $z=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

3) $z=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & \text{khi } x^2+y^2=0.\end{cases}$

10. Xét sự liên tục đều của các hàm số:

1) $f(x,y)=2x-3y+5$ trong R^2.

2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ trong R^2.

11. Tính đạo hàm riêng của các hàm số:

1) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$.

2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

4) $z = arctg\dfrac{y}{x}$.

5) $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$.

6) $z = x^{y^x}$.

7) $u = (xy)^z$.

8) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$.

9) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$.

10) $T = \dfrac{pV}{R}$. Chứng minh $\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p} = -1$.

***12.** Chứng minh rằng nếu trong một miền D, $f(x, y)$ liên tục theo x và liên tục đều theo y đối với x thì hàm số liên tục trong D.

***13.** Hàm $u = f(x, y, z)$ gọi là hàm đẳng cấp bậc n nếu $\forall\lambda \in R$, ta có: $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$. Chứng minh rằng nếu hàm $f(x, y, z)$ đẳng cấp bậc n thì:

$xf'_x(x,y,z) + yf'_y(x,y,z) + zf'_z(x,y,z) = nf(x,y,z)$, nếu tồn tại các đạo hàm riêng tại $M(x, y, z) \in D$ điều ngược lại có đúng không ? (Định lý Euler).

***14.** Chứng minh rằng nếu $f(x, y, z)$ là hàm khả vi đẳng cấp bậc n thì các đạo hàm riêng của nó là những hàm đẳng cấp bậc $n - 1$. Nghiệm lại đối với các hàm:

1) $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$.

2) $f(x,y,z) = \dfrac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

3) $f(x, y) = \ln \dfrac{y}{x}$

15. Tính vi phân toàn phần của các hàm số

1) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

2) $z = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$

3) $z = \sin^2 x + \cos^2 y$

4) $z = arctg\,\dfrac{y}{x} + arctg\,\dfrac{x}{y}$

5) $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^2$

6) $u = arctg\,\dfrac{xy}{z^2}$

7) $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, tính $df(3, 4, 5)$

16. Xét sự liên tục và khả vi của các hàm số

1) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$

2) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

3) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{nếu} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

4) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{nếu} \quad x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

17. Tính gần đúng

1) $(1{,}02)^3 . (0{,}97)^2$

2) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$

3) $\sin 32^0 \cos 59^0$

18. Tính đạo hàm riêng của các hàm số

1) $z = f(u,v), \quad u = x^2 - y^2, \quad v = e^{xy}$

2) $z = arctg\,\dfrac{x}{y}, \quad x = u\sin v, \quad y = u\cos v$

3) $z = u^v, \quad u = \sin x, \quad v = \cos x$

4) $u = xyz, \quad x = t^2 + 1, \quad y = \ln t, \quad z = tgt$

19. Chứng minh các hàm sau thoả mãn các phương trình tương ứng:

1) $z = y\varphi(x^2 - y^2); \quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$

2) $z = xy + x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right); \quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

3) $z = e^{y}\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right); \quad \left(x^2 - y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$

4) $f(x,y,z) = F(u,v,w); \quad x^2 = vw; \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$

$$xf'_x + uf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w$$

20. Tính:

1) $d^2z(1,2),\ z = x^2 + xy + y^2 \quad 4\ln x \quad 10\ln y$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z = arctg\,\dfrac{x+1}{1-xy}$

3) $d^2f(0, 0)$, $f(x, y) = (1 + x)^m(1 + y)^n$

4) $f''xy(0,0)$, $f''yx(0,0)$, $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

5) d^2z, $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

6) $d^2f(0,0,0)$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz$

21. Chứng minh rằng các hàm số sau thoả mãn các phương trình tương ứng:

1) $u = arctg\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (phương trình Laplace 2 chiều).

2) $u = \ln\dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (x-b)^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

3) $u = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin\lambda x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{a^2\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

4) $u(x,y,z,t) = \dfrac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$

(x_0, y_0, z_0, a = const), $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ (phương trình truyền nhiệt),

5) $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{a^2\partial^2 u}{\partial x^2}$

(φ,ψ là hàm tuỳ ý của đối số) (phương trình sóng).

6) $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

7) $u = \dfrac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \text{ (phương trình Laplace 3 chiều).}$$

***22.** Chứng minh rằng nếu:

1) $u = f(x, y, z)$, hai lần khả vi đẳng cấp bậc n thì:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u$$

2) $P_n(x, y, z)$ là đa thức đẳng thức bậc n thì:

$$d^n P_n(x, y, z) = n!\ P_n(dx, dy, dz)$$

3) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, $\begin{cases} \xi = a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ \eta = b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ \zeta = c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{cases}$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial}{\partial \eta}d\eta + \frac{\partial}{\partial \zeta}d\zeta\right)^n u$$

23. Tìm đạo hàm cấp một và các đạo hàm cấp hai của các hàm ẩn xác định từ các phương trình tương ứng

1) $y = x + \ln y$.

2) $x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ tại $x = 1$.

3) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = a.arctg\,\dfrac{y}{x}$ $\quad (a \neq 0)$

4) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$

24. Chứng minh rằng các hàm ẩn xác định từ các phương trình sau thoả mãn các phương trình tương ứng:

1) $F(x, y, z) = 0$ $\dfrac{\partial x}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial z}.\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, $(cy - bz)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\dfrac{\partial z}{\partial y} = bx - ay$

3) $F(x - az, y - bz) = 0$, $a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

4) $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$

5) $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$, $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} + \dfrac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = 0$ $(x, y \geq 0)$

***25.** Tính:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ nếu $F(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$

2) d^2z nếu $F(x + z,\ y + z) = 0$

3) $\dfrac{dx}{dz}, \dfrac{dy}{dz}$ nếu $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0$

4) du, dv, d^2u, d^2v nếu $u + v = x + y$; $y\sin u - x\sin v = 0$

5) $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2z}{dx^2}$ nếu $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$, $z = t^3 + \dfrac{1}{t^3}$

26. Biến đổi các phương trình sau bằng cách thay đổi biến số:

1) $(x + 1)^2y'' - 2(x + 1)y' + 2y = 0$, $x + 1 = e^t$

2) $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$, $x = \cos t$

3) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $u = x, v = x^2 + y^2$

4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a \neq 0$, $\xi = x - at$, $\eta = x + at$

*6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$

27. Khai triển các hàm sau đây theo công thức Taylor tại lân cận điểm tương ứng:

1) $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $(-2, 1)$

2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ $(1, 1, 1)$

3) $f(x, y) = e^x \sin y$, $(0, 0)$, cấp ba

4) $f(x, y) = \cos x \cos y$, $(0, 0)$ cấp bốn

5) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(0, 0)$ cấp bốn

6) $f(x, y) = (1 + x)^m (1 + y)^n$, $(0, 0)$

28. Tìm cực trị của các hàm:

1) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

2) $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$ $x > 0, y > 0$

3) $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$

4) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$

5) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

6) $z = x + y + 4\sin x \sin y$

7) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$

8) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$

*9) $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$; $0 \le x, y, z \le \pi$

29. Tìm cực trị của hàm ẩn $z = z(x, y)$ xác định từ các phương trình:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

2) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

*3) $x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ $(a > 0)$

30. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm:

1) $z = x + y$, $x^2 + y^2 = 5$

2) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, $y - x = \dfrac{\pi}{4}$

3) $u = x^2 + y^2 + z^2$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a, b, c > 0)$

4) $u = xyz$, $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$

5) $u = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m$; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = na$ $(a > 0)$

6) $u = x^m y^n z^p$, $x + y + z = a$; $x, y, z, m, n, a > 0$

7) $u = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}$ $(x, y, z > 0)$

8) $u = \dfrac{x^n + y^n}{2}$, $x + y = s$, $n > 1$, $x, y > 0$ suy ra:

$$\frac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\frac{x^n + y^n}{2}\right)^n$$

31. Tìm giá trị bé nhất (m) và lớn nhất (M) của các hàm trong miền tương ứng:

1) $z = 1 + x + 2y$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$

2) $z = x^2y;\ x^2 + y^2 \le 1$

3) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y);\ 0 \le x, y \le \dfrac{\pi}{2}$

4*) $u = x + y + z,\ x^2 + y^2 \le z \le 1$

32. 1) Trong tất cả các tam giác có chu vi $2p$. Tìm một tam giác có diện tích lớn nhất.

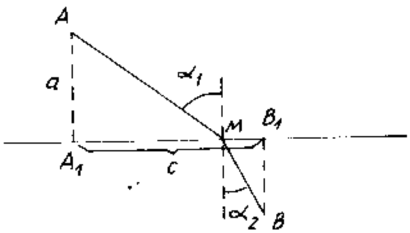
2) Tìm một hình hộp chữ nhật nội tiếp trong một ellipsoide có thể tích lớn nhất.

*3) Trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tìm một điểm mà tổng bình phương các khoảng cách từ điểm đó đến n điểm cho trước $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ là bé nhất.

4) Tìm khoảng cách ngắn nhất từ điểm $M(1, 2, 3)$ đến đường thẳng $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{2}$

5*) Tìm các bán trục của ellipsoide $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$

6*) Cho A, B là các điểm trong hai môi trường quang học khác nhau bị ngăn cách bởi một mặt phẳng, tốc độ truyền ánh sáng trong môi trường thứ nhất là v_1 trong môi trường thứ hai là v_2 áp dụng nguyên lý Fermat: ánh sáng xuất phát từ điểm A và truyền đến điểm B theo đường AMB (H86) sao cho thời gian đi theo đường ấy là ngắn nhất, hãy tìm quy luật khúc xạ ánh sáng.



H.86

TRẢ LỜI BÀI TẬP

4. Không

5. 1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$ viết $f(\dfrac{y}{x}) = \pm\sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 1}$

2) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - xy}{2}$ (Đặt $x + y = u$; $x - y = v$)

$$\Rightarrow f(u,v) = \frac{u+v}{2}.\frac{u-v}{2} + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \frac{u^2 - uv}{2}$$

3) $f(y) = \sqrt{1+y^2}$, $z = \dfrac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$

(khi $x = 1$: $\sqrt{1+y^2} = 1$, $f\left(\dfrac{y}{1}\right) \Rightarrow f(y) = \sqrt{1+y^2}$ ....)

6. 1) $y = x$

2) $x + y > 0$

3) $-x \le y \le x$, $x > 0$; $x \le y \le -x$, $x < 0$

4) $x \ge 2$, $-2 \le y \le 2$; $x \le -2$, $-2 \le y \le 2$

5) Hình xuyến: $a^2 \le x^2 + y^2 \le 2a^2$

6) $2k\pi \le x \le (2k+1)\pi$, $y \ge 0$; $(2k+1)\pi \le x \le (2k+2)\pi$, ...

7) Toàn mặt phẳng R^2

8) $x \ge 0$, $y > \sqrt{x}$

9) $2k\pi \le x^2 + y^2 \le (2k+1)\pi$

10) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$

11) $-1 \le x, y, z \le 1$ (hình lập phương)

12) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$; $x, y, z > 0$

7. 1) 0

2) Không tồn tại

3) e^a

4) Không tồn tại

5) 0

6) Không tồn tại

7) 0

8) 1

8. 1) $\dfrac{1}{2}$; 1

2) 0; 1

3) 1; không tồn tại

9. 1) Liên tục $\forall(x, y) \in R^2$, trừ (0, 0): hàm gián đoạn vô hạn.

2) Liên tục $\forall(x, y) \in R^2$, trừ trên $x^3 + y^3 = 0$ các điểm gián đoạn bỏ được trên đường thẳng $y = -x$, $(x \neq 0)$ điểm (0, 0): gián đoạn vô hạn.

3) Liên tục $\forall(x, y) \in \in R^2$ trừ (0, 0)

10. 1) Liên tục đều $\forall(x, y) \in R^2$

2) Liên tục đều $\forall(x, y) \in R^2$

11. 1) $z'_x = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$, $z'_y = \dfrac{-2x}{(x+y)^2}$

2) $z'_x = \dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, $z'_y = \dfrac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

3) $z'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$

4) $z'_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

5) $z'_x = \dfrac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $z'_y = \dfrac{-yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$

6) $z'_x = yx^{x^y}x^{y-1}(y\ln x+1)$, $z'_y = x^y x^{x^y}\ln^2 x$

7) $u'_x = yz(xy)^{z-1}$, $u'_y = xz(xy)^{z-1}$, $u'_z = (xy)^z \ln xy$

8) $u'_x = \dfrac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $u'_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $u'_z = \dfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

9) $u'_x = \dfrac{x-y\cos z}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos z}} = \dfrac{x-y\cos z}{u}$,

$u'_y = \dfrac{y-x\cos z}{u}$, $u'_z = \dfrac{xy\sin z}{u}$

13. Điều ngược lại vẫn đúng, xét hàm:

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n}, \qquad t > 0\ (tx_0, ty_0, tz_0) \subset D$$

Lấy đạo hàm $F'(t)$

15. 1) $dz = \dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(ydx - xdy)$

2) $dz = \dfrac{1}{x+y}(dx - \dfrac{x}{y})dy$

3) dz = sin2$x$dx – sin2$y$dy

4) dz = 0

5) $du = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\left[\left(y + \dfrac{1}{y}\right)zdx + \left(1 - \dfrac{1}{y^2}\right)xzdx + \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)\ln\left(xy + \dfrac{x}{y}\right)dz\right]$

6) $du = \dfrac{z^2}{x^2y^2 + x^4}\left(ydx + xdy - \dfrac{2xy}{z}dz\right)$

7) $df(3,4,5) = \dfrac{1}{25}(5dz - 3dx - 4dy)$

16. 1) Liên tục có $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, nhưng không khả vi tại (0, 0)

2) Liên tục tại (0, 0) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, hàm không khả vi tại (0, 0)

3) Gián đoạn tại (0, 0) nhưng tồn tại

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

4) Tồn tại $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, $f'_x(x,y) = f'_y(x,y)$ gián đoạn tại (0, 0) nhưng $f(x, y)$ vẫn khả vi tại (0, 0)

17. 1) 1,00

2) 4,998

3) 0,273

18. 1) $z'_x = 2xf'_u + ye^{xy}f'_v$; $z'_x = -2yf'_u + xe^{xy}f'_v$

2) $z'_u = 0'$; $z'_v = 1'$

3) $\dfrac{dz}{dx} = (\sin x)^{\cos x}(\cos x \cot gx - \sin x \ln \sin x)$

4) $\dfrac{du}{dt} = 2t \ln t.tgt + \dfrac{(t^2+1)tgt}{t} + \dfrac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$

20. 1) $d^2z(1, 2) = 6dx^2 + 2dxdy + 4.5\ dy^2$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

3) $d^2 f(0, 0) = m(m - 1)dx^2 + 2mndxdy + n(n - 1)dy^2$

4) $f''_{xy}(0,0) = -1, \quad f''_{yx}(0,0) = 1$

5) $d^2 f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy + 8dxdz + 4dydz$

23. 1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y-1}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y}{(1-y)^3}$

2) $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 3$ hoặc $-1, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=1} = 8$ hoặc -8

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+ay}{ax-y}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{x}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2y}{x^3}$

25.

1) $$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y} = \frac{-4(z-x)(z-y)}{(F_1' + 2zF_2')^3}(F_1'^2 F_{22}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_2'^2 F_{11}'') -$$

$$- \frac{2(F_1' + 2xF_1')(F_2 + 2yF_2')}{(F_1' + 2zF_2')^3} F_2' \qquad (F_1' + 2zF_2' \neq 0)$$

$$(F_1' = F_u', \quad u = x + y + z, \quad F_2' = F_v', \quad v = x^2 + y^2 + z^2)$$

2) $$d^2 z = -(F_1' + F_2')^{-3}(F_2'^2 F_{11}'' - 2F_1'F_2'F_{12}'' + F_1'^2 F_{22}'')(dx - dy)^2$$

$$(F_1' = F_u', \quad u = x + z, \quad F_2' = F_v', \quad v = y + z)$$

3) $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{y-z}{x-y}, \quad \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{z-x}{x-y} \quad (x \neq y)$

4) $$du = \frac{(x\cos v + \sin v)dx + (x\cos v - \sin u)dy}{x\cos v + y\cos u}$$

$$dv = \frac{(y\cos u - \sin v)dx + (y\cos u + \sin u)dy}{x\cos v + y\cos u}$$

$$d^2u = -d^2v = \frac{(2\cos v dx - x\sin v dv)dv + (y\sin du - 2\cos u dy)du}{x\cos v + y\cos u}$$

5) $\dfrac{dy}{dx}=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$ $(t\neq\pm1)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2$ $(t\neq\pm1)$

$$\frac{dz}{dx}=3(t^2+\frac{1}{t^2}+1)\quad(t\neq\pm1)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=6(t+\frac{1}{t})\quad(t\neq\pm1)$$

26.

1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=0$

2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$

4) $\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}=0$

5) $\dfrac{\partial u^2}{\partial\xi\partial\eta}=0$

6) $\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial}(\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial\rho})+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right)=0$

27.

1) $f(x,y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$

2) $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+2(x-1)(y-1)$
$\qquad -(y-1)(z-1)$

3) $f(x,y)=y+xy+\dfrac{3x^2y-y^3}{3!}$

4) $f(x,y)=1-\dfrac{x^2+y^2}{2!}+\dfrac{x^4+6x^2y^2+y^4}{4!}$

5) $f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2$

6) $f(x,y) = 1 + mx + ny + \frac{1}{2}[m(m-1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2] + \ldots$

28.

1) $z_{\min} = z(1,0) = -1$

2) $z_{\max} = z(3,2) = 108$

3) $z_{\max} = z(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{b}{\sqrt{3}}) = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$, $z_{\min} = z(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \mp\frac{b}{\sqrt{3}}) = \frac{-ab}{3\sqrt{3}}$

4) $z_{\max} = z(0,0) = 1$

5) $z_{\min} = z(0,0) = 0$, $z_{\max} = \frac{1}{e}$ tại $x^2 + y^2 = 1$

6) $z_{\min} = 2k\pi - 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ $(k \in Z)$

(Điểm dừng $x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + (m+n)\frac{\pi}{2}$

$y = (-1)^{m-1}\frac{\pi}{12} + (m-n)\frac{\pi}{2}$ $(m, n \in \mathbf{Z})$

7) $u_{\min} = u(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = -\frac{4}{3}$

8) $u_{\min} = u(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$

9) $u_{\max} = u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 4$

$z_{\min} = u(0,0,0) = u(\pi, \pi, \pi) = 0$.

29.

1) $z_{1\max} = z(1,-2) = 8$; $z_{2\min} = z(1,-2) = -2$, tại các điểm của đường tròn $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$. z_1, z_2 có một cực trị trên biên bằng 3.

2) $z_{1\max} = z(-1, 2) = -2$; $z_{2\min} = z(-1, 2) = 1$, z_1, z_2 có cực trị trên biên, tại những điểm của đường cong $4x^3 - 4y^2 - 12x + 16y - 33 = 0$.

3) $z_{\min} = a\sqrt{2}$ tại (0, 0).

$z_{\max} = -a\sqrt{2}$ tại (0, 0).

$z_{\max} = a\sqrt{1+\sqrt{3}}$ tại $(\pm a, \pm a)$

$z_{\min} = -a\sqrt{1+\sqrt{3}}$ tại $(\pm a, \pm a)$

30.

1) $z_{max} = z(1,2) = 5$

$z_{min} = z(-1,-2) = -5$

2) $z_{\max} = z(\frac{7\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$z_{\min} = z(\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

3) $u_{\max} = u(\pm a, 0, 0) = a^2$

$u_{\min} = u(0, 0 \pm c) = c^2$ $(a > b > c > 0)$

4) $u_{\max} == 4\frac{4}{27}$ tại $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

$u_{\min} = 4$ tại (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2).

5) $u_{\min} = u(a, a, \ldots, a) = na^n$

6) $u_{\max} = (mt, nt, pt) = \frac{m^m n^n p^p a^{m+n+p}}{(m+n+p)^{m+n+p}}$

7) $u_{\max} = u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}$

8) $u_{\min} = \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^n$

31.

1) $M = 3$ tại $(0, 1)$

2) $M = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ *tại* $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$

$m = \dfrac{-2}{3\sqrt{3}}$ *tại* $\left(\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}, -\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$

3) $M = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ *tại* $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $m = 0$ *tại* $(0,0)$

4) $M = 1 + \sqrt{2}$, $m = -\dfrac{1}{2}$

32.

1) Tam giác đều.

2) Hình hộp có kích thước $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}, \dfrac{2b}{\sqrt{3}}, \dfrac{2c}{\sqrt{3}}$ a, b, c, là các bán kính trục của ellipsoide

3) Điểm $x = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $y = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, $z = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$

$$N = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}$$

$$d_{\min} = n - 2N + \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right)$$

4) $\dfrac{1}{14}\sqrt{2730}$

5) $2a = 6$, $2b = 2$ (tìm cực trị của $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$)

6) $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$

(tìm cực trị của hàm $f(\alpha_1, \alpha_2) = \dfrac{a}{v_1\cos\alpha_1} + \dfrac{b}{v_2\cos\alpha_2}$ với điều kiện $a\,\mathrm{tg}\alpha_1 + b\,\mathrm{tg}\alpha_2 = c$).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Ia.S.Bugrov, S.M.Nikolski, Matemática para Engenharia.

[2]. Raymond Couty, Analyse.

[3]. T.Bass, Cours de Mathematiques.

[4]. M.Nicocescu, Analiza mamematica.

[5]. Sze Tenshu, Elements of real analysis.

[6]. G.Lefor, Toán cao cấp dùng cho sinh học.

[7]. Lesieur, Toán cao cấp dùng cho đại học kỹ thuật.

[8]. Trần Bình, Bài giảng toán cao cấp.

[9]. Nguyễn Đình Trí, Toán cao cấp.

[10]. Hoàng Tụy, Giải tích hiện đại.

[11]. B.Demidovitch, Problemas e exercicios de Análize Matemática.

[12]. V.Smirnov, Cours de mathématiques Supérieures.

[13]. Г.М.Фихмензолы, Курс дифференциального и интегрального исчисления.

[14]. В.Немышкий, Курс Математического Анализа.

[15]. А.И.Маркушебич, Теория Аналитических Функций.

[16]. И.И. Пяшко, Математический Анализ (В примерах и задачах).

[17]. Ю.С.Очан, Математический Анализ.

[18]. Пицкунов, Курс дифференциального и интегрального исчисления.

[19]. П.Т.Курош, Курс вышей алгебры.

[20]. Н.М.Матвеев, Сборник Задач и упрахнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

GIẢI TÍCH I

(In lần thứ 9 có sửa chữa và bổ sung)

Tác giả: TRẦN BÌNH

Chịu trách nhiệm xuất bản: TS. PHẠM VĂN DIỄN
Biên tập: NGỌC KHUÊ
Vẽ bìa: ĐẶNG NGỌC QUANG

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
70 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

In 800 cuốn, khổ 14,5 × 20,5 cm tại Xưởng in NXB Văn hoá Dân tộc
Số đăng ký KHXB: 209–2009/CXB/3.1–10/KHKT cấp ngày 18/3/2009
Quyết định xuất bản số: 229/QĐXB–NXBKHKT cấp ngày 30/7/2009
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2009

209213 M09

Giải tích 1

1610090000005

57,000

Giá: 57.000đ